



Forschungszentrum Karlsruhe
in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 7021

Kerbspannung und Kerbformoptimierung

M. Scherrer

Institut für Materialforschung

August 2004

Forschungszentrum Karlsruhe

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 7021

Kerbspannung und Kerbformoptimierung

Marcus Scherrer

Institut für Materialforschung

von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe

2004

Impressum der Print-Ausgabe:

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

**Mitglied der Hermann von Helmholtz-Gemeinschaft
Deutscher Forschungszentren (HGF)**

ISSN 0947-8620

urn:nbn:de:0005-070212

Kerbspannung und Kerbformoptimierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.-Ing. Marcus Scherrer

aus Karlsruhe

| | |
|----------------------------|--------------------------|
| Tag der mündlichen Prüfung | 9. Juli 2004 |
| Hauptreferent | Prof. Dr. Claus Mattheck |
| Korreferent | Prof. Dr. Dietrich Munz |

Kerbspannung und Kerbformoptimierung

Die Biomechanik befasst sich mit der Statik und Dynamik von biologischen Lastträgern und der Übertragung biologischer Optimierungsstrategien in die Technik. Aus Beobachtungen am Objekt in der Natur ging als eine grundlegende Designregel *das Axiom der konstanten Spannung* hervor, welches besagt, dass bei einem biologischen Lastträger bei bestimmungsgemäßer Belastung im zeitlichen Mittel weder lokal hohe Spannungen noch unterbelastete Bereiche auftreten. Der biologische Lastträger lagert durch lastgesteuertes Wachstum bevorzugt an jenen Stellen Material an wo die höchste Spannung herrscht. Genauso wächst er in Bereichen geringerer Belastung kaum oder gar nicht. So wird eine Gestaltoptimierung realisiert, die Sollbruchstellen eliminiert. Das lastadaptive Wachstum biologischer Lastträger wird mit der **CAO**-Methode (**C**omputer **A**ided **O**ptimization) unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode simuliert. Mit Hilfe der CAO-Methode wurde eine Parameterstudie zur Optimierung von Wellenschultern angefertigt. Daraus ergab sich eine geometrische Charakterisierung der optimierten Kerbformen auf der Basis dieser Studie, die zum einen Möglichkeiten für alternative Kerbformen in Form von Designregeln findet und zum anderen ein besseres Verständnis für spannungskonzentrationserzeugende Effekte gibt. Durch dieses Verständnis werden neue, effiziente Optimierungsmethoden gewonnen mit denen auf schnelle und einfache Weise nahezu optimale Kerbkonturen erzeugt werden können. Diese neue Optimierungsvorschrift wird analytisch dargestellt und an diversen Beispielen verifiziert.

Notch stress and shape optimization

The scientific field of biomechanics deals with the statics and dynamics of biological load carriers and the transfer of biological optimization strategies to technical applications. By observations of biological load carriers in nature a fundamental design rule could be developed called *the axiom of uniform stress*, which basically says that in temporal average with a certain load there are neither high local stresses nor underloaded areas in a biological load carrier. Through load-controlled growth the load carrier gets material in areas with high stress as in areas with low stress there is no growth and hence no material. From this a shape optimization is obtained which is able to prevent fatigue failure. The adaptive growth of biological load carriers is simulated by the **CAO**-Method (**C**omputer **A**ided **O**ptimization) and the FEM. With the help of the CAO-Method a parameter study for the optimization of shoulder fillets was made from which a geometrical characterisation of the optimized fillet shapes was derived. From that new ways for shape optimization were developed which offer design rules using alternative fillet shapes and a better understanding of the effects caused by stress concentrations was obtained. Due to this knowledge a new and efficient optimization method was developed which offers a fast and simple way to construct optimized fillet shapes. This method can be expressed analytically and was verified with several examples.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| 1. Einleitung | 1 |
| 2. Grundlagen | 5 |
| 2.1. Die Elastizitätstheorie | 5 |
| 2.1.1. Spannungen | 5 |
| 2.1.2. Deformation | 6 |
| 2.1.3. Das Hooksche Gesetz | 7 |
| 2.2. Versagenshypothesen bei isotropen Werkstoffen | 8 |
| 2.2.1. Normalspannungshypothese | 8 |
| 2.2.2. Schubspannungshypothese | 8 |
| 2.2.3. Gestaltänderungsenergiehypothese | 9 |
| 2.3. Spannungskonzentrationen | 9 |
| 2.4. Die Methode der finiten Elemente | 11 |
| 2.5. Strukturoptimierung | 15 |
| 2.6. Bauteiloptimierung nach dem Vorbild der Natur | 16 |
| 2.6.1. Aufbau und Mechanik von Bäumen | 17 |
| 2.6.2. Das Axiom konstanter Spannung | 20 |
| 2.6.3. Computer Aided Optimization (CAO-Methode) | 22 |
| 3. Bauteiloptimierung | 25 |
| 3.1. Wellen- und Balkenschulteroptimierung | 26 |
| 3.2. Geometrische Charakterisierung der CAO-Kerbformen | 29 |
| 3.2.1. Variation des Durchmesserhältnisses | 29 |
| 3.2.2. Variation des Lastfalls | 30 |
| 3.2.3. Variation des Querschnittsprofils | 33 |
| 3.2.4. Bauraumkarten der CAO-Kerbformen | 33 |
| 3.3. Elliptische Kerbformen im CAO-Bauraum | 36 |
| 3.4. Die Kerbe unter zweiachsiger Belastung und ihre Optimierung | 38 |
| 3.4.1. Zug-Druck-Belastung | 39 |
| 3.4.2. Zug-Zug-Belastung | 39 |
| 3.5. Die Kerbe im Gewindegrund einer Schraube und ihre Optimierung | 40 |
| 3.5.1. Zugbelastung | 41 |
| 3.5.2. Biegebelastung | 43 |
| 3.6. Die CAO-Methode in der Strömungsmechanik | 45 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| 3.6.1. | Die Differentialgleichung für den ebenen Spannungszustand | 45 |
| 3.6.2. | Die Differentialgleichung der ebenen Strömung | 46 |
| 3.6.3. | Analogie zwischen einer ebenen Kanalströmung und einem Flachstab unter reiner Biegung | 47 |
| 3.6.4. | Modellierung | 48 |
| 3.6.5. | Ergebnisse | 49 |
| 4. | Die analytische Kerbformoptimierung | 53 |
| 4.1. | Beobachtungen zur Kerbspannung | 53 |
| 4.1.1. | Selbstoptimierung bei großen Dehnungen | 53 |
| 4.1.2. | Separation von Kerbspannungen | 54 |
| 4.1.3. | Die Kerbspannung in Abhängigkeit der Kraftflussumlenkung . . . | 55 |
| 4.1.4. | Kegelförmige Kerbformen | 56 |
| 4.1.5. | Multilinearisierte CAO-Kerbform | 58 |
| 4.2. | Zusammenhang zwischen Kerbspannungen und Biegespannungen | 61 |
| 4.3. | Methodik | 64 |
| 4.4. | Beispiele | 67 |
| 4.4.1. | Wellen unter Zug | 67 |
| 4.4.2. | Wellen unter Biegung | 68 |
| 4.4.3. | Wellen unter Torsion | 70 |
| 4.4.4. | Balken unter Zug | 71 |
| 4.4.5. | Balken unter Biegung | 71 |
| 4.4.6. | Lochplatte und Platte mit Außenkerbe unter Zug | 72 |
| 4.4.7. | Balken unter zweiachsiger Belastung | 74 |
| 4.4.8. | Gewindeoptimierung | 76 |
| 5. | Versuche | 79 |
| 5.1. | Versuchsaufbau | 79 |
| 5.2. | Proben | 79 |
| 5.3. | Kerbformen | 79 |
| 5.4. | Versuchsergebnisse | 81 |
| 6. | Zusammenfassung | 85 |
| | Literaturverzeichnis | 89 |
| A. | Anhang | 95 |
| A.1. | Zugwellen | 96 |
| A.2. | BiegeWellen | 98 |
| A.3. | Torsionswellen | 100 |
| A.4. | Zugbalken | 102 |
| A.5. | Biegebalken | 103 |

Abbildungsverzeichnis

| | |
|---|----|
| 2.1. Schematische Darstellung von Normal-, Schub- und Hauptspannungen an einem Volumenelement | 6 |
| 2.2. Versagenskriterien bei zweiachsiger Beanspruchung für die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 | 9 |
| 2.3. Lochplatte unter Zugbelastung | 10 |
| 2.4. Spannungskonzentrationsfaktoren K_{tb} und K_{tn} | 11 |
| 2.5. Unterteilung einer ebenen Scheibe in finite Elemente | 12 |
| 2.6. Einfaches Dreieckselement | 13 |
| 2.7. Kerbformoptimierung im Bereich der Astanbindung | 16 |
| 2.8. Bogenmodell für den Baum | 19 |
| 2.9. Die Wachstumsregulatoren des Baumes | 19 |
| 2.10. Führungsübernahme eines Seitentriebs | 20 |
| 2.11. Das Axiom konstanter Spannung | 20 |
| 2.12. Rippenbildung vor Radialriss | 21 |
| 2.13. Biegebelastete Wurzel | 21 |
| 2.14. Stammquerschnitt | 22 |
| 2.15. Schematischer Ablauf einer CAO-Optimierung | 24 |
| 2.16. Schrittweise optimierter Kerbbereich | 24 |
| 3.1. Wellenmodell | 26 |
| 3.2. Balkenmodell | 26 |
| 3.3. Koordinatensystem für die Darstellung der Kerbkonturen | 26 |
| 3.4. Welle unter Zugbelastung | 26 |
| 3.5. Welle unter Biegebelastung | 27 |
| 3.6. Welle unter Torsionsbelastung | 27 |
| 3.7. Balken unter Zugbelastung | 27 |
| 3.8. Balken unter Biegebelastung | 27 |
| 3.9. Optimierte Kerbformen bei variierendem Durchmesser Verhältnis D/d mit 1, 2facher Spannungsüberhöhung | 31 |
| 3.10. Optimierte Kerbformen bei variierender Belastungsart mit 1, 2facher Spannungsüberhöhung | 32 |
| 3.11. Optimierte Kerbformen für verschiedene Querschnitte mit 1, 2facher Spannungsüberhöhung | 34 |
| 3.12. Bauräume von CAO-Kerbformen bei Wellen | 35 |
| 3.13. Bauräume von CAO-Kerbformen bei Balken | 36 |

| | |
|--|----|
| 3.14. Untersuchte elliptische Kerbformen | 37 |
| 3.15. Spannungsverläufe elliptischer Kerbformen | 38 |
| 3.16. Spannungsverläufe elliptischer Kerbformen (Detail) | 38 |
| 3.17. Balken unter zweiachsiger Belastung (Zug-Druck und Zug-Zug) | 39 |
| 3.18. CAO-Optimierte Kerbform und Kreisradius bei zweiachsiger Belastung (Zug-Druck) | 40 |
| 3.19. CAO-Optimierte Kerbform und Kreisradius bei zweiachsiger Belastung (Zug-Zug) | 41 |
| 3.20. Schraube unter Zugbelastung | 41 |
| 3.21. Schraube unter Biegebelastung | 41 |
| 3.22. DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am Gewinde- auslauf bei Zugbelastung | 42 |
| 3.23. DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am freien Ge- winde bei Zugbelastung | 43 |
| 3.24. CAO-optimierte Form aus Fall 1 für Fall 2 verwendet | 43 |
| 3.25. DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am Gewinde- auslauf bei Biegebelastung | 44 |
| 3.26. DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am freien Ge- winde bei Biegebelastung | 44 |
| 3.27. Spannungen und Volumenkräfte am ebenen Element | 46 |
| 3.28. Ebene Kanalströmung | 48 |
| 3.29. Durchströmter, divergierender Kanal und Biegebalken mit einem Breiten- verhältnis B/b | 49 |
| 3.30. Konturplot der resultierenden Strömungsgeschwindigkeit im Bereich der Querschnittsverbreiterung | 50 |
| 3.31. Spannungskonzentrationsfaktoren für Biegebalken und Kanalströmung . . | 51 |
| | |
| 4.1. Spannungs- und Verformungsplot bei verschiedenen Längungen | 53 |
| 4.2. Lochplatte mit vorgegebener Längung | 54 |
| 4.3. Spannungsverteilung bei variierender Längung | 54 |
| 4.4. Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit von der Entfernung der beiden Spannungskonzentrationen | 55 |
| 4.5. Welle mit Schulterwinkel | 56 |
| 4.6. Spannungsverteilungen bei verschiedenen Kraftflussumlenkungen | 57 |
| 4.7. Die Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit des Schulterwinkels | 57 |
| 4.8. Welle mit kegelförmiger Kerbe | 58 |
| 4.9. Spannungsverteilung bei verschiedenen Kegelwinkeln | 59 |
| 4.10. Die Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit des Kegelwinkels | 59 |
| 4.11. v.Mises-Spannung und Querkzugspannung an der multilinearisierten Kerb- form | 60 |
| 4.12. Vergleich einer multilinearisierten Kerbform mit einer CAO-Kerbform . . | 60 |
| 4.13. Zug und Biegung im Kerbbereich | 61 |
| 4.14. Balkenschulter mit Unglücksbalken | 62 |
| 4.15. Spannungsanalyse an der Lochplatte | 62 |

| | |
|---|----|
| 4.16. Kegelförmiger Querschnittsübergang | 63 |
| 4.17. Multilinearisierte Kerbform | 64 |
| 4.18. Mäandrierender Zugstab | 64 |
| 4.19. Multilinearisierung der Kerbkontur | 65 |
| 4.20. Tangential- und Querkräfte | 65 |
| 4.21. Welle unter Zugbelastung, kurzes Modell ($D/d = 3,0$) | 68 |
| 4.22. Welle unter Zugbelastung, langes Modell ($D/d = 3,0$) | 69 |
| 4.23. Spannung am Eintritt der Kerbform in die Wellenschulter (Zugwelle $D/d = 3,0$) | 69 |
| 4.24. Welle unter Biegebelastung, langes Modell ($D/d = 3,0$) | 70 |
| 4.25. Welle unter Torsionsbelastung, kurzes Modell ($D/d = 3,0$) | 71 |
| 4.26. Balken unter Zugbelastung ($B/b = 3,0$) | 72 |
| 4.27. Balken unter Biegebelastung ($B/b = 3,0$) | 72 |
| 4.28. Lochplatte und Platte mit Außenkerbe unter Zug | 73 |
| 4.29. Kerbformen für eine Lochplatte und eine Platte mit Außenkerbe unter Zug | 73 |
| 4.30. Spannungsverteilung entlang der Kerbkontur $A' - A$ | 74 |
| 4.31. Schematische Darstellung der analytischen Kerbformgenerierung für zweiachsige Belastungen | 75 |
| 4.32. Analytische Kerbformoptimierung bei zweiachsiger Belastung (Zug-Druck) | 75 |
| 4.33. Analytische Kerbformoptimierung bei zweiachsiger Belastung (Zug-Zug) . | 76 |
| 4.34. Analytische Formoptimierung eines Schraubengewindes unter Zugbelastung | 77 |
| 4.35. Analytische Formoptimierung eines Schraubengewindes unter Biegebelastung | 77 |
| 5.1. Versuchsaufbau mit servohydraulischer Prüfmaschine | 80 |
| 5.2. Proben mit $D/d = 1,4$ und $D/d = 3,0$ | 81 |
| 5.3. Wechselbiegeversuche an Wellenschultern | 82 |
| 5.4. Rissbilder der verschiedenen Kerbkonturen | 83 |
| 5.5. Bruchbilder für verschiedene Kerbkonturen | 83 |

Tabellenverzeichnis

| | |
|--|----|
| 5.1. Rechnerische Spannungsüberhöhungsfaktoren | 80 |
| 5.2. Lastwechsel | 82 |
| 5.3. Mittlere Lastwechsel | 83 |

1. Einleitung

Noch vor wenigen Jahren war eine Vereinigung von Natur und Technik nur schwer vorstellbar. Das vom Mensch Erfundene galt als Maß der Dinge. Nicht zuletzt durch die revolutionären Veränderungen, sowohl in wirtschaftlicher als auch in sozialer Hinsicht, welche die Industrialisierung mit sich brachte. Doch was der Technik fehlte war die Evolution und die dafür benötigte Zeit. Über Millionen von Jahren haben sich in der Natur komplexe Systeme unter ständiger Selektion weiterentwickelt und verbessert. Wer hier nicht optimal ausgerüstet war für den gab es keine zweite Chance. Die Natur ist gnadenlos und gleichzeitig überaus effizient. Mit begrenzten Ressourcen und dem Ziel zu überleben haben sich in allen denkbaren Bereichen Lebewesen auf unserer Erde kontinuierlich optimiert. All diese Lebewesen sind hochgradig integriert aufgebaut und an Effizienz nicht zu schlagen. Der menschliche Arm zum Beispiel ist bis heute in seiner Größe, seinem Gewicht, seiner Funktionalität und seiner Leistung nicht von der Technik reproduzierbar. Allein schon der Knochen in einem Arm ist ein technisches Wunderwerk an Festigkeit und Leichtbau. Es gibt zahllose Beispiele wie diese in der Biologie zu beobachten. Dies brachte Forscher dazu die Natur genauer zu untersuchen und sie, wenn möglich, in der Technik zu kopieren oder ihre Prinzipien in der Technik anzuwenden. Bionik nennt man diesen relativ jungen Wissenschaftszweig in dem **Biologie** und **Technik** zu einem neuen Fachbereich zusammenfließen und neue aufregende Perspektiven eröffnet. Ein Einblick in die Bionik wird in [1] gegeben.

Ein Teilgebiet der Bionik bildet die Biomechanik. Anders als die Bionik, die sich mit allen erdenklichen Strukturen und Funktionen aus der Natur und ihrer Umsetzung in die Technik auseinandersetzt, befasst sich die Biomechanik ausschließlich mit der Statik und Dynamik von biologischen Systemen. Die Statik von biologischen Strukturen wird in der Abteilung für Biomechanik am Institut für Materialforschung II des Forschungszentrums Karlsruhe unter der Leitung von Prof. Dr. C. Mattheck untersucht, insbesondere das Wachstum und die mechanischen Eigenschaften von Bäumen. Hier werden Optimierungsstrategien der Natur umgesetzt und für die Strukturoptimierung von mechanischen Bauteilen nutzbar gemacht. Aus den Forschungsarbeiten dieser Abteilung ging als eine grundlegende Designregel *das Axiom der konstanten Spannung* [2], [3] hervor, welches besagt, dass bei einem biologischen Lastträger bei bestimmungsgemäßer Belastung im zeitlichen Mittel weder lokal hohe Spannungen (Kerbspannungen) noch unterbelastete Bereiche (Materialverschwendung) auftreten. Der biologische Lastträger, z.B. ein Ast von einem Baum, lagert durch lastgesteuertes Wachstum bevorzugt an jenen Stellen Material an wo die höchste Spannung herrscht. Genauso wächst er in Bereichen geringerer Belastung kaum oder gar nicht. So realisiert der Baum eine Gestaltoptimie-

1. Einleitung

rung, die ihn dauerfest macht und Sollbruchstellen eliminiert. Knochen gehen sogar noch einen Schritt weiter. Ihr Gewebe kann nicht nur in hochbelasteten Bereichen wachsen, sondern in minderbelasteten Bereichen sogar schrumpfen, was nicht nur zu einer Dauerfestigkeit des Knochens führt, sondern auch zu einer Gewichtsoptimierung seiner Struktur. Sowohl die Gestaltoptimierung von Bäumen und Knochen hinsichtlich einer Vermeidung von Kerbspannungen, als auch die Gewichtsoptimierung von natürlichen Strukturen wurden mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente in einen Optimierungsalgorithmus eingebunden. Das lastadaptive Wachstum biologischer Lastträger wird in der **CAO**-Methode (**C**omputer **A**ided **O**ptimization) [4], [5] simuliert indem es mechanische Bauteile wachsen lässt wie Bäume. Die **SKO**-Methode (**S**oft **K**ill **O**ption) [6] hingegen realisiert Leichtbau indem sie wie beim Wachstum des Knochens nur in stark belasteten Bereichen Material anlagert und in unbelasteten Bereichen Material abbaut. In der Natur wird aber nicht nur die äußere Gestalt den Bedingungen angepasst, sondern auch die innere Struktur wird optimiert. Bei den Bäumen sind das die Holzfasern, die einen natürlichen Faserverbund darstellen. Aus Beobachtungen dieser Faserverläufe [7], [8], [9] konnte eine weitere Methode abgeleitet werden, die einen optimalen Faserverlauf in künstlichen Faserverbunden erzeugt. Die **CAIO**-Methode (**C**omputer **A**ided **I**nternal **O**ptimization) minimiert Schubspannungen zwischen den Fasern und erreicht somit eine höhere Belastbarkeit bzw. reduziert das Gewicht des Bauteils. Wie Bäume nicht nur ihre äussere Gestalt und inneren Faserverlauf optimieren, sondern auch die Festigkeiten ihres Holzes in bestimmten Bereichen den Gegebenheiten anpassen können, wurde in [10], [11] und [12] gezeigt.

Obwohl sich sowohl CAO als auch SKO bereits in den letzten Jahren in der Industrie als Optimierungssoftware durchgesetzt haben, ist die Verwendung der Methoden für klein- und mittelständische Unternehmen oft zu aufwendig. Es bedarf daher Optimierungsstrategien, die noch einfacher spannungsoptimierte Kerbformen für standardisierte Bauteilgeometrien und Lastfälle erstellen können. Mit diesen Verfahren und den daraus abgeleiteten Designvorschlägen könnten einfache Bauteile noch schneller und wirtschaftlicher verbessert und sogar optimiert werden.

Im Rahmen dieser Arbeit sollte daher eine Studie angefertigt werden, welche die Grundlage für neue und einfachere Optimierungsmethoden bildet. Darüber hinaus folgt eine geometrische Charakterisierung der optimierten Kerbformen auf Basis der Studie, die zum einen Möglichkeiten für alternative Kerbformen in Form von Designregeln finden soll und zum anderen ein besseres Verständnis für spannungskonzentrationserzeugende Effekte, welches der Ansatz für eben genannte einfachere und damit auch effiziente Optimierungsstrategien liefern soll.

Aufbau der Arbeit

Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen auf denen diese Arbeit beruht erläutert. Zunächst werden Elemente der Elastizitätstheorie besprochen, welche die Grundlage für jede Spannungsanalyse bilden. Mit den daraus berechenbaren Spannungen konnten verschiedene Versagenshypothesen entwickelt werden, die danach kurz beschrieben werden. Mit den Versagenshypothesen können sogenannte Vergleichsspannungen berechnet wer-

den, die je nach Bruchverhalten eines Werkstoffs anders formuliert sind. Die Vergleichspannung dient z.B. dazu, ein Bauteil so zu dimensionieren, dass kein Versagen oder plastische Verformung auftritt. Weiterhin werden das Auftreten von Spannungskonzentrationen an Bauteilen und die Definition einer Spannungsüberhöhung am Beispiel einer zugbelasteten Lochplatte beschrieben. Für die Spannungsanalysen in dieser Arbeit wurde die Methode der finiten Elemente (FEM) hinzugezogen, deren grundlegende Prinzipien und Verfahren kurz umrissen werden. Durch die Kenntnis der Spannungsverhältnisse in einem Bauteil durch die FEM war es dann auch möglich Optimierungsmethoden zu entwickeln, die in der Lage waren Spannungen entlang von Kerbkonturen zu minimieren. Die Entwicklung der Strukturoptimierung wird anhand einer Literaturübersicht dargestellt, bevor im Detail auf die Gestaltoptimierung nach dem Vorbild der Natur eingegangen wird. Zum besseren Verständnis der Bauteiloptimierung nach dem Vorbild der Natur wird zunächst auf Beobachtungen aus der Natur und dem Leben der Bäume zurückgegriffen. Des weiteren wird das Axiom der konstanten Spannung erläutert, welches aus den Beobachtungen des Wachstums der Bäume abgeleitet wurde und die Grundlage für die CAO-Methode bildet. Zum Abschluss des zweiten Kapitels wird der Ablauf der CAO-Methode beschrieben, die hauptsächlich dazu dient die Kerbformen mechanischer Bauteile in ihrer Gestalt zu optimieren.

Im dritten Kapitel werden die Ergebnisse einer Parameterstudie vorgestellt, die optimierte Kerbkonturen an Wellenschultern angibt bei denen sowohl Lastfall als auch das Durchmesser Verhältnis der Wellen variiert wurde. Hierbei wurden Wellen unter Zug-, Biege- und Torsionsbelastung untersucht und für jeden Lastfall wurden sechs verschiedene Durchmesser Verhältnisse berechnet. Zudem wurden Balkenschultern unter Zug- und Biegebelastung mit zwei verschiedenen Breitenverhältnissen optimiert. Daraus ergab sich eine geometrische Charakterisierung der CAO-Kerbformen mit der elliptische Kerbformen angepasst und gerechnet werden konnten. Für den Fall einer zweiachsigen Belastung wurden CAO-Kerbformen für eine Balkenschulter gefunden, sowie für den Gewindegrund einer Schraube, die Zug bzw. Biegung belastet wurde. Zuletzt wird ein Beispiel für die Anwendung der CAO-Methode in der Strömungsmechanik gegeben.

Im vierten Kapitel wird zunächst kurz auf die Selbstheilung von Kerben durch lastbedingte Deformation eingegangen, sowie auf Spannungsminderung durch Kerbseparation. Danach werden verschiedene Geometrieparameter in Zusammenhang mit der Kerbspannung gebracht. Der Einfluss der Kraftflussumlenkung auf die Kerbspannung wird untersucht, wie auch Spannungsverteilungen entlang kegelförmiger und multilinearisierter Kerbformen. Danach wird ein Zusammenhang zwischen Kerbspannungen und Biegespannungen hergestellt, der zu einer Formulierung von Bedingungen führt, die für optimale Randkonturen erfüllt sein müssen. Diese Optimierungsvorschrift wird analytisch ausgeführt und an diversen Beispielen verifiziert.

Im fünften Kapitel werden Versuche beschrieben in denen einige der im dritten Kapitel gefundenen CAO-Kerbformen an Wellenschultern im Experiment untersucht wurden. Ebenfalls wurden analytisch erzeugte Kerbformen und elliptische Kerbformen an Wellenschultern getestet und mit entsprechenden CAO-Kerbformen und Viertelkreiskerben verglichen.

1. Einleitung

Im letzten Kapitel werden die Erkenntnisse aus den verschiedenen Optimierungen zusammengefasst und es wird ein Ausblick für zukünftige Arbeiten und Entwicklungen gegeben.

2. Grundlagen

2.1. Die Elastizitätstheorie

Nahezu alle Werkstoffe, die im technischen Bereich verwendet werden, sind bis zu einem gewissen Grad *elastisch*. Dies bedeutet, wenn ein Körper aus einem bestimmten Werkstoff eine bestimmte Deformation, verursacht z.B. durch äußere Kräfte, nicht überschreitet, wird diese Deformation wieder vollkommen verschwinden, wenn die angebrachten äußeren Kräfte nicht mehr auf den Körper wirken. Diese Eigenschaft von Materialien bildet die Grundlage der Elastizitätstheorie auf der alle numerischen Analysen in dieser Arbeit basieren. Weiterhin wird angenommen, dass eine *homogene* Verteilung des Materials über das Volumen existiert. Somit hat ein kleines Volumenelement die gleichen physikalischen Eigenschaften wie der ganze Körper. Ebenfalls wird vorausgesetzt, dass der Körper ein *isotropes* Werkstoffverhalten aufweist, welches dieselben elastischen Eigenschaften in allen Richtungen festlegt.

Die Elastizitätstheorie stellt nun einen linearen Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen her, wobei nur kleine Verformungen betrachtet werden. Die Aufbringung der äußeren Lasten erfolgt quasi-statisch.

Die Spannungen können in einem Spannungstensor σ_{km} zusammengefasst werden, wobei die Indizes k und m Platzhalter für die Richtungen x, y und z im kartesischen Koordinatensystem sind.

Der Index k bezeichnet die Normalenrichtung eines Flächenelements und m die Richtung der Spannungskomponenten (Abb.2.1, A).

2.1.1. Spannungen

Gilt $k = m$ ist die Normalenrichtung gleich der Richtung der Spannungskomponente und man spricht von Normalspannungen $\sigma_{xx} = \sigma_x, \sigma_{yy} = \sigma_y, \sigma_{zz} = \sigma_z$.

Mit $k \neq m$ erhält man die Schubspannungen $\sigma_{xy} = \tau_{xy}, \sigma_{xz} = \tau_{xz}, \sigma_{yx} = \tau_{yx}, \sigma_{yz} = \tau_{yz}, \sigma_{zy} = \tau_{zy}, \sigma_{zx} = \tau_{zx}$.

Wobei aufgrund von Gleichgewichtsbetrachtungen an einem Volumenelement gilt:

$$\sigma_{km} = \sigma_{mk} \quad (2.1)$$

2. Grundlagen

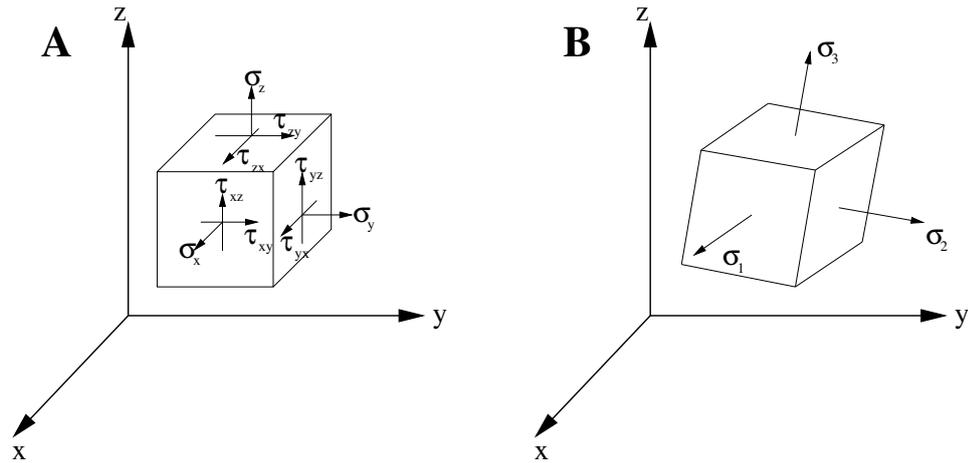


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung von Normal-, Schub- und Hauptspannungen an einem Volumenelement

Der Spannungstensor σ_{km} kann als Matrix dargestellt werden, die aufgrund von Gl. 2.1 symmetrisch zur Hauptdiagonalen ist:

$$\sigma_{km} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \text{sym.} & & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Die Werte von σ_{km} ändern sich je nach Orientierung des Koordinatensystems in dem der Spannungstensor aufgestellt wird. Ein Sonderfall stellt der Hauptspannungszustand dar in dem ein Volumenelement so gedreht wird, dass, im selben Koordinatensystem wie in Abb.2.1A betrachtet, alle Schubspannungen verschwinden. Übrig bleiben die drei Hauptspannungen σ_1, σ_2 und σ_3 , die senkrecht auf den neu orientierten Flächen stehen (Abb.2.1, B).

Die Hauptspannungen werden zur Berechnung von sogenannten Vergleichsspannungen benötigt, die in Kap.2.2 beschrieben werden.

2.1.2. Deformation

Durch den in Kap.2.1.1 beschriebenen Spannungszustand tritt eine Verformung des Volumenelements ein. Die Verschiebungen u, v und w beschreiben hierbei die neue Position des Volumenelements im jeweiligen Koordinatensystem. Die Dehnungen ϵ_x, ϵ_y und ϵ_z geben die Längenänderung der verformten Kanten bezüglich ihrer ursprünglichen Länge an und die Gleitwinkel γ_{xy}, γ_{yz} und γ_{xz} sind ein Maß für die Winkeländerungen im Volumenelement.

Ebenfalls wie der Spannungszustand kann auch der Dehnungszustand über einen Dehnungstensor ϵ_{km} beschrieben werden, der in Matrixschreibweise symmetrisch zur Hauptdiagonalen ist:

$$\epsilon_{km} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

wobei bei $k \neq m$

$$\epsilon_{km} = \epsilon_{mk} = \frac{1}{2}\gamma_{km} \quad (2.3)$$

gilt.

2.1.3. Das Hooksche Gesetz

Der Zusammenhang zwischen den in Kap.2.1.1 und 2.1.2 beschriebenen Größen bildet das Hooksche Gesetz. Dieses Stoffgesetz verknüpft mittels Materialkonstanten Spannungen mit Dehnungen, wobei für die Materialkonstanten folgender Zusammenhang gilt:

$$G = \frac{E}{(1 + \nu) 2} \quad (2.4)$$

wobei E als Elastizitätsmodul, G als Schubmodul und ν als Querkontraktionszahl bezeichnet werden. Betrachtet man nun die Dehnung ϵ_x in Abhängigkeit von der Spannung σ_x ergibt sich:

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.5)$$

Beachtet man noch die durch σ_x erzeugte Querdehnung

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.6)$$

ergibt sich durch Superposition [13] das allgemeine Hooksche Gesetz:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (2.7)$$

2. Grundlagen

Entsprechend erhält man für die Schubverformungen:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G}\tau_{xy} \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2G}\tau_{xz} \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2G}\tau_{yz}\end{aligned}\tag{2.8}$$

2.2. Versagenshypothesen bei isotropen Werkstoffen

Da bei einer beliebigen Belastung eines mechanischen Bauteils in den seltensten Fällen ein reiner einachsiger Spannungszustand herrscht, sondern im allgemeinen Fall ein mehrachsiger Spannungszustand, muss dieser in eine sogenannte Vergleichsspannung σ_v überführt werden. Diese Vergleichsspannung dient als kritischer Wert für plastische Verformung und setzt sich aus den einzelnen Spannungskomponenten aus Kap.2.1.1 zusammen. Um die Funktionalität eines Bauteils durch Vermeidung von plastischer Verformung zu erhalten oder ein Versagen zu verhindern, muss die Vergleichsspannung σ_v mit Festigkeitswerten, die für die entsprechenden Werkstoffe meist in Zug-, Druck- und Schubversuchen ermittelt werden, verglichen werden.

Die verschiedenen Versagenshypothesen passen die Formulierung der jeweiligen Vergleichsspannung dem Bruchverhalten von bestimmten Werkstoffen an. Somit ergibt sich eine Vielzahl von Versagenshypothesen mit denen ein Bauteil ausgelegt werden kann [14]. Die drei wichtigsten werden in den folgenden Abschnitten kurz erläutert.

2.2.1. Normalspannungshypothese

Die Normalspannungshypothese oder Kriterium der maximalen Hauptspannung wird verwendet, wenn ein Werkstoff in der Regel mit einem Trennbruch senkrecht zur Hauptzugspannung versagt, was bei spröden Werkstoffen wie z.B. Grauguss der Fall ist. Mit $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ gilt für die Vergleichsspannung σ_v :

$$\sigma_v = \sigma_1\tag{2.9}$$

Das Kriterium ist für den zweiachsigen Spannungszustand ($\sigma_3 = 0$) in Abb.2.2 dargestellt. Befindet sich der durch die äußere Belastung hervorgerufene Spannungszustand innerhalb der Fläche, die von (1) eingegrenzt wird, ist die Funktionalität des Bauteils gewährleistet. Verlässt der Spannungszustand die Umrandung tritt Versagen ein.

2.2.2. Schubspannungshypothese

Die Schubspannungshypothese oder das Tresca-Kriterium (Kriterium der maximalen Schubspannung) geht davon aus, dass es zu einem Versagen des Werkstoffs führt, wenn

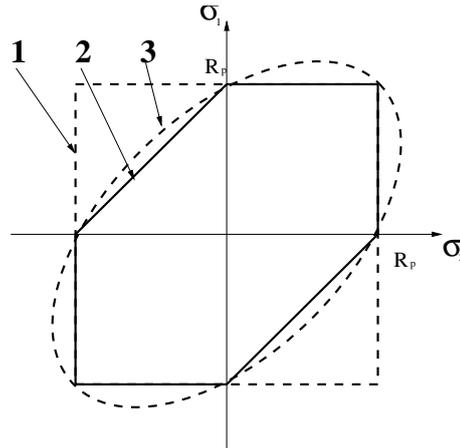


Abbildung 2.2.: Versagenskriterien bei zweiachsiger Beanspruchung für die Hauptspannungen σ_1 und σ_2

die maximale Schubspannung τ_{max} einen kritischen Wert übersteigt. Hier gilt für die Vergleichsspannung

$$\sigma_v = 2\tau_{max} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (2.10)$$

Die Versagensfläche ist mit (2) in Abb.2.2 dargestellt.

2.2.3. Gestaltänderungsenergiehypothese

Die Gestaltänderungsenergiehypothese oder das v.Mises-Kriterium betrachtet die zur Gestaltänderung (Fließen) erforderlichen Arbeiten und leitet daraus eine Vergleichsspannung σ_v ab:

$$\sigma_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.11)$$

Dargestellt ist dieses Kriterium mit (3) in Abb.2.2.

2.3. Spannungskonzentrationen

In der Praxis finden sich sehr oft geometrische Unregelmäßigkeiten (Kerben) wieder. Querschnittsübergänge, Wellenschultern, Rillen und Löcher treten überall bei Maschinenbauteilen auf und haben alle eine lokale Spannungsüberhöhung im Bereich der Kerbe gemeinsam. Die Berechnung dieser Spannungsüberhöhung ist von großer Bedeutung für die Konstruktion, da diese Spannungsspitzen ein erhöhtes Risiko für das Versagen des Bauteils darstellen, falls nicht ausreichend dimensioniert wurde. Die durch die Kerbwirkung erzeugte Spannungskonzentration kann mit einem Faktor K_t benannt werden, der das Verhältnis aus Spannungsüberhöhung und einer gewählten Referenzspannung beschreibt:

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ref}} \quad (2.12)$$

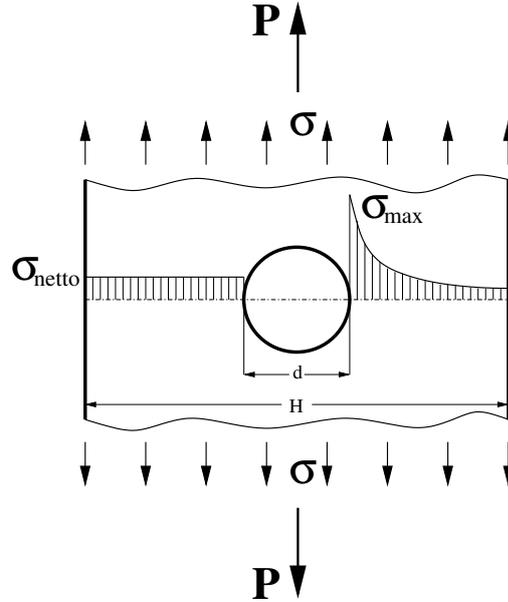


Abbildung 2.3.: Lochplatte unter Zugbelastung

Wobei σ_{max} die maximale Spannung im Bauteil ist und σ_{ref} die Referenzspannung. Bei der Wahl der Referenzspannung gibt es zwei Möglichkeiten [15], die am Beispiel der Lochplatte (Abb. 2.3) kurz erläutert werden sollen. Zum einen kann die Maximalspannung auf die Bruttospannung σ bezogen werden. Dies ist die Spannung, die weit vom Loch entfernt im Bauteil herrscht. Bei einer Plattendicke h , einer Plattenbreite H und einer Zuglast P ergibt sich σ_{ref} zu:

$$\sigma_{ref} = \frac{P}{Hh} = \sigma \quad (2.13)$$

Daraus folgt für die Spannungskonzentration:

$$K_{tb} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ref}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma} = \frac{\sigma_{max}Hh}{P} \quad (2.14)$$

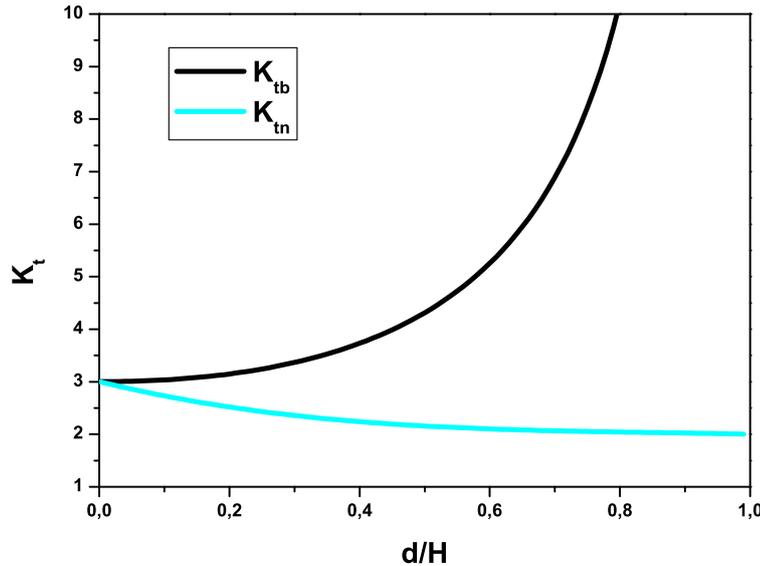
Zum anderen kann auch die Nettospannung σ_n als Referenzspannung gewählt werden. Diese berechnet sich zu:

$$\sigma_{ref} = \frac{P}{(H-d)h} = \sigma_n \quad (2.15)$$

Für die Spannungskonzentration ergibt sich dann:

$$K_{tn} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{ref}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} = \frac{\sigma_{max}(H-d)h}{P} = K_{tb} \frac{H-d}{H} \quad (2.16)$$

K_{tb} und K_{tn} sind verschieden. Für ein Verhältnis $\frac{d}{H}$, das von 0 bis 1 reicht, steigt K_{tb} von 3 bis ∞ an, wohingegen K_{tn} von 3 auf 2 sinkt. Dies ist in Abb. 2.4 dargestellt [16].

Abbildung 2.4.: Spannungskonzentrationsfaktoren K_{tb} und K_{tn}

Für den Sonderfall einer unendlich ausgedehnten Platte mit Loch existiert eine analytische Lösung von *Kirsch* [17] und für eine große Anzahl gekerbter Geometrien sind strenge Lösungen von *Neuber* [18] aufgeführt worden. Eine Sammlung von Spannungskonzentrationsfaktoren für eine Vielzahl an Bauteilgeometrien wird in [15] mitgeteilt. Für die Berechnung von Kerbspannungen bei beliebigen Geometrien wird in der Regel die Methode der finiten Elemente angewandt auf deren Grundlagen in Kap. 2.4 eingegangen wird.

2.4. Die Methode der finiten Elemente

Einige grundlegende Probleme in der Strukturmechanik können berechnet werden, indem man das betreffende Bauteil durch einfache, aus der Theorie bekannte Geometrien ersetzt und somit mit simplen Formen approximiert. Denn die Elastizitätstheorie stellt keine allgemeingültiges Lösungsverfahren bereit und analytisch exakte Lösungen sind deswegen nur für sehr einfache Berandungsgeometrien von mechanischen Bauteilen möglich. Daher wurden numerische Näherungsverfahren entwickelt, um auch komplexere Geometrien berechnen zu können.

Mit der sogenannten Fachwerkanalogie [19], [20] konnten zunächst elastische Scheiben beschrieben werden, indem man die Strukturen durch miteinander verbundene Stabmodelle annäherte. Der Spannungszustand im elastischen Kontinuum wurde durch Kräfte an den Stabenden dargestellt. Je nachdem wie groß die Stäbe und deren Anzahl gewählt wurden, konnten geometrisch komplexe Strukturen nachgebildet werden und somit ebene Spannungsprobleme auf diese Weise gelöst werden.

Um den Spannungszustand in Kontinua jedoch genauer beschreiben zu können, wurden die Strukturen in "finite Elemente" aufgeteilt (Abb. 2.5) [21], [22], wobei jedes Ele-

2. Grundlagen

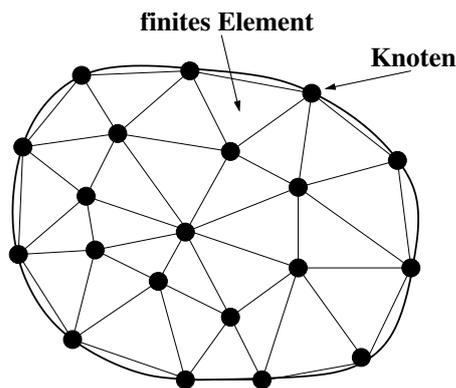


Abbildung 2.5.: Unterteilung einer ebenen Scheibe in finite Elemente

ment aus geradlinig miteinander verbundenen Knoten besteht. Jedes Element besitzt eine Verschiebungsfunktion, die jedem beliebigen Punkt innerhalb eines Elements eine Verschiebung zuordnet, die abhängig von den Verschiebungen der Knotenpunkte des Elements ist. Somit ist eine kontinuierliche Beschreibung der Struktur möglich und es können an jedem beliebigen Ort in der Struktur Aussagen über den Spannungszustand gemacht werden und nicht nur an den Knotenpunkten wie es bei der Fachwerkanalogie der Fall ist. Die Elemente müssen dabei folgende physikalischen Eigenschaften erfüllen [23]:

- statische Verträglichkeit von Kräften und Spannungen (Gleichgewichtsbedingung)
- kinematische Verträglichkeit von Verschiebungen und Verzerrungen (Kompatibilitätsbedingung)
- Spannungs-Dehnungs-Beziehung (Stoffgesetz)

Weiterhin liefert ein Element nur eine Näherungslösung der exakten Werte in einem Bereich einer Struktur. Die Werte (z.B. Spannungen) innerhalb eines Elements werden interpoliert und je nach verwendetem Verschiebungsansatz des Elements können Gradienten nur bedingt oder gar nicht dargestellt werden, da diese innerhalb eines Elements der Verschiebungsfunktion entsprechen würden. Somit ist es für eine möglichst genaue Darstellung eines Spannungsgradienten, wie es z.B. im Bereich von Kerben der Fall ist, notwendig eine feine Diskretisierung durch eine genügend hohe Anzahl von Elementen in diesen Bereichen zu erreichen. In Teilen einer Struktur in denen keine hohen Spannungsgradienten herrschen ist dagegen eine wesentlich gröbere Diskretisierung in den meisten Fällen ausreichend.

Das grundlegende Vorgehen der FEM (Finite Elemente Methode) entspringt der Energiemethode der Elastostatik, die mit Hilfe von Variations- und Extremalprinzipien Lösungen für Elastizitätsprobleme findet. Das bekannteste Verfahren, das für Näherungslösungen solcher Problemstellungen angewendet wird, ist das *Rayleigh-Ritz*-Verfahren [24], [25] und beruht auf dem Prinzip vom Minimum des Gesamtpotentials. Dies besagt, dass sich ein Körper mit linear elastischem Materialverhalten im Gleichgewicht

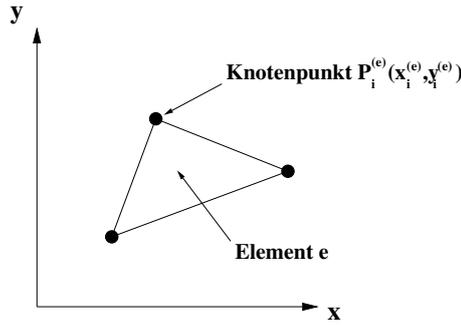


Abbildung 2.6.: Einfaches Dreieckselement

befindet, wenn die gesamte potentielle Energie ein Minimum annimmt [26]. Allerdings wird bei dem ursprünglichen *Rayleigh-Ritz*-Verfahren von einer Verschiebungsfunktion ausgegangen die global für den gesamten Körper gilt. Bei der FEM hat jedes Element einen eigenen Verschiebungsansatz, der eine Linearkombination aus sogenannten Formfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten ist (Abb. 2.6) [27]:

$$\mathbf{f}^{(e)}(x, y) = \sum_{i=1}^k \mathbf{N}_i^{(e)}(x, y) \mathbf{r}_i^{(e)} \quad (2.17)$$

wobei $\mathbf{f}^{(e)}$ der Verschiebungsvektor für das Element e , k die Anzahl der Knoten des Elements, $\mathbf{N}_i^{(e)}$ die Matrix der Formfunktionen für das Element und $\mathbf{r}_i^{(e)}$ der Vektor der Knotenpunktverschiebungen ist.

Mit Gl. 2.17 können Aussagen über Verschiebungen im Innern eines Elements in Abhängigkeit der Knotenpunktverschiebungen getroffen werden. Außerdem muss Gl. 2.17 zusätzliche Interpolationseigenschaften besitzen, die $\mathbf{N}_i^{(e)}$ auf einen Knotenpunkt $P^{(e)}$ des Elements e Eins werden lassen und auf allen Knoten anderer Elemente Null. Daraus folgt die Bedingung:

$$\mathbf{N}_i^{(e)}(x_j^{(e)}, y_j^{(e)}) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.18)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich für Gl. 2.17:

$$\mathbf{f} = \underline{\mathbf{N}} \mathbf{r} \quad (2.19)$$

Daraus ergibt sich die Beziehung für die Verzerrungen zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = \underline{\mathbf{B}} \mathbf{r} \quad (2.20)$$

wobei in $\underline{\mathbf{B}}$ die Ableitungen der Formfunktionen enthalten sind [23]. Das Stoffgesetz wird mit

$$\boldsymbol{\sigma} = \underline{\mathbf{D}} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.21)$$

festgelegt, wobei $\underline{\mathbf{D}}$ die Elastizitätsmatrix darstellt.

2. Grundlagen

Die unbekannt Parameter, hier die Knotenpunktverschiebungen \mathbf{r} , werden nun mit dem *Rayleigh-Ritz*-Verfahren durch Lösung eines Variationsproblems ermittelt. Dazu wird ein Extremwert eines Funktionals gesucht. Dieses Funktional hat in der Mechanik eine physikalische Bedeutung. Im folgenden stellt es die gesamte potentielle Energie der untersuchten Struktur dar. Mit Gl. 2.19, Gl. 2.20, Gl. 2.21 und dem Prinzip der virtuellen Arbeit ergibt sich das Gesamtpotential eines elastischen Körpers zu:

$$\Pi = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{f}^T \mathbf{p} \right) dV - \int_A \mathbf{f}^T \mathbf{s} dA - \mathbf{r}^T \mathbf{R} \quad (2.22)$$

Dabei sind \mathbf{p} bzw. \mathbf{s} die Massen- bzw. Oberflächenkräfte und \mathbf{R} die Einzellasten an den Knotenpunkten.

Mit der Vereinfachung

$$\mathbf{S} = \mathbf{R} + \int_V \underline{\mathbf{N}}^T \mathbf{p} dV + \int_A \underline{\mathbf{N}}^T \mathbf{s} dA \quad (2.23)$$

und der aus Gl. 2.19-2.21 herzuleitenden Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{\mathbf{K}}$ mit

$$\underline{\mathbf{K}} = \int_V \underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{B}} dV \quad (2.24)$$

wird Gl. 2.22 zu:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{r}^T \underline{\mathbf{K}} \mathbf{r} - \mathbf{r}^T \mathbf{S} \quad (2.25)$$

Für ein Minimum der potentiellen Energie (Gleichgewichtslage des Körpers) wird nun

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial r_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial r_m} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

gefordert und es ergibt sich aus Gl. 2.25 folgende Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Knotenverschiebungen \mathbf{r} :

$$\underline{\mathbf{K}} \mathbf{r} - \mathbf{S} = 0 \quad (2.27)$$

Somit können mit einer modifizierten Variante des *Rayleigh-Ritz*-Verfahrens, das eine strukturmechanische Problemstellung in eine finite Anzahl von Variationsproblemen diskretisiert, eine Vielzahl von Fragestellungen der Mechanik beantwortet werden.

Allerdings müssen andere Techniken angewandt werden, sobald nichtlineare Formen der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen oder Dehnungs-Verschiebungs-Beziehungen auftreten. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn nicht mehr von einem ausschließlich elastischen Materialverhalten ausgegangen werden kann. Plastizität oder Kriechen wären Fälle für ein nichtlineares Stoffgesetz. Dies führt zwar nicht zur Notwendigkeit das ganze Pro-

blem für den nichtlinearen Fall umzuformulieren [28], jedoch werden Iterationsverfahren zur Lösung angewandt, die das Stoffgesetz in geeigneter Weise erfüllen.

Geometrische Nichtlinearitäten treten dort auf wo schon relativ kleine Spannungen große Verschiebungen verursachen. Ein typisches Beispiel dafür wäre eine Uhrfeder. Auch hier werden Lösungen mittels geeigneter iterativer Verfahren gesucht. Ein häufig verwendetes Verfahren zur iterativen Lösung solcher Problemstellungen ist das *Newton-Raphson*-Verfahren auf dessen Anwendung in [26] näher eingegangen wird.

Für das bisher beschriebene *Rayleigh-Ritz*-Verfahren wird die Existenz eines Funktionals für das zu behandelnde Problem vorausgesetzt. Es können allerdings Fälle auftreten für die kein Funktional existiert oder bisher noch nicht gefunden wurde. In so einem Fall kann die Methode der gewichteten Residuen, im speziellen das *Galerkin*-Verfahren, angewendet werden. Dabei ist der Grundgedanke die gesuchte Funktion, hier der Verschiebungsvektor $\mathbf{f}(x, y)$, durch eine geeignete Funktion anzunähern, welche die Randbedingungen erfüllt, und diese in die entsprechende Differentialgleichung einzusetzen. Bei der Lösung der Differentialgleichung entsteht erwartungsgemäß ein Fehler den man das Residuum nennt. Die Methode der gewichteten Residuen fordert nun, dass das Residuum in einem gewichteten Mittel verschwindet [26].

2.5. Strukturoptimierung

In der Arbeit von *Baud* [29] wurde zum ersten Mal darauf hingewiesen, dass die an der Oberfläche auftretenden Maximalspannungen durch geeignete geometrische Veränderungen der Oberflächenkontur minimiert werden können, so dass der Spannungsverlauf an der Oberfläche entlang der Kontur konstant ist.

Diese Hypothese wurde von *Neuber* [18] aufgegriffen, um analytische Lösungen für die Kontur des Optimalprofils zu finden. Diese wurden in [30] beschrieben, wobei keine endlich ausgedehnten Zuglaschen berücksichtigt wurden. Dadurch lassen sich die vorgeschlagenen Kerbformen in der Technik nur selten sinnvoll anwenden [31]. Analytische Lösungen für eine optimale Randkontur wurden auch von *Babuska* und *Kautsky* [32] für bestimmte Geometrien und Lastfälle vorgeschlagen. Jedoch führt eine allgemeine analytische Lösung dieses Optimierungsproblems zu Differentialgleichungen, die nur in wenigen Fällen lösbar sind und somit Möglichkeit optimale Randkonturen zu erhalten wenig praktikabel erscheinen. *Lansard* [33], *Thum* und *Bautz* [34] geben Studien für die von *Baud* vorgeschlagene Stromlinienform. Diese Randkonturform wurde selbst im Bauingenieurwesen von *Qi* und *Mimura* [35] für die Verbindung von Trägern vorgeschlagen.

FrancaVilla et al. [36] hingegen verwenden die Methode der finiten Elemente zur Spannungsanalyse des zu optimierenden Bauteils und die Gradientenmethode für den Optimierungsprozess. Mit dieser Methode wird zwar ein echtes Minimum der Spannung im vorgegebenen Designraum angestrebt, dies geht aber auf Kosten der Optimierungsgeschwindigkeit.

Ein iteratives Verfahren zur Optimierung von Kerbformen, das ohne eine Gradientenberechnung auskommt und auf dem Abklingungsgesetz von *Neuber* beruht, wurde von *Schnack* [37], [38] entwickelt. Hierbei werden iterativ geometrische Eigenschaften



Abbildung 2.7.: Kerbformoptimierung im Bereich der Astanbindung

der Randkontur verändert und so ein optimaler Randkonturverlauf mit minimaler Spannung gesucht. Dieser Ansatz wird ebenfalls von *Weck* und *Steinke* aufgenommen und in [39] angewendet. Eine Erweiterung der Methode für Viellastbeanspruchung wurde in [40] vorgestellt.

Ebenfalls keine Gradientenberechnung benötigen die Wachstumsmethoden von *Azegami* [41] und *Mattheck* [42], die an hochbeanspruchten Stellen der zu optimierenden Kontur Materialanlagerungen realisieren und somit biologisches Wachstum simulieren. Aus der Arbeit von *Mattheck* entstand die CAO-Methode (Computer Aided Optimization Method), die bereits große Erfolge in ihrer Anwendung verbuchen kann und viele Lizenznehmer aus der Industrie hat.

Einen Überblick zum Thema Gestaltoptimierung wird in [43], [44] und [45] gegeben.

2.6. Bauteiloptimierung nach dem Vorbild der Natur

Ein optimales mechanisches Design wird in der Technik von Ingenieuren angestrebt, um ein System vor allem hinsichtlich des Gewichtes und der Lebensdauer zu verbessern. Dies wirkt sich dann auch letztendlich auf die Effizienz und somit auf den “Erfolg” eines technischen Produktes aus. Der “Erfolg” in der Natur wird an dem Überleben einer Spezies bemessen was in direktem Zusammenhang mit ihrer Anpassungsfähigkeit steht. Ist die Tigerkralle nicht optimal in ihrem Design, versagt sie womöglich bei der Jagd und der Tiger ist nicht mehr in der Lage Nahrung zu beschaffen. Letztlich wird er sterben wohingegen die Tiger, deren Kralle nicht bricht, weiter jagen und überleben können. Dies ist ein Beispiel wie die Natur ein optimales Design mit Hilfe der Evolution findet. Die geometrische Beschaffenheit der Tigerkralle ist ein den Genen des Tigers

vorgegeben und kann sich in der Lebensspanne des Tigers den Gegebenheiten nicht anpassen. Die “schlechten” Gene, welche die nicht optimale Form der Krallen verursachen, sterben zusammen mit den betroffenen Tigern aus. Somit optimiert sich die Tigerkrallen über Generationen hinweg durch Selektion. Die Tigerkrallen sind jedoch nur ein Beispiel für optimierte Strukturen in der Natur. Das Ziel eines jeden Lebewesens ist das Überleben und somit ist auch ein Großteil der Formen, die wir heute beobachten können, geometrieoptimiert.

Eine andere Art der Gestaltoptimierung, die ebenfalls sehr häufig in der Natur zu beobachten ist, ist die adaptive Formoptimierung. Sie beruht nicht auf Selektion nicht veränderlicher Komponenten, sondern auf dem permanenten Ändern der Gestalt entsprechend der Belastung. Die besten Beispiele hierfür sind der Knochen und der Baum. Sie legen durch lokales Wachstum dort mehr Material an, wo die höchsten Belastungen stattfinden. Das Wachstum wird beim Knochen durch die sogenannten Osteoplasten und beim Baum durch das Kambium bewerkstelligt. Ein Beispiel wie effektiv solch eine Gestaltoptimierung sein kann zeigt Abb. 2.7 sehr anschaulich [46]. Der dickere, untere Ast kann einige Tonnen wiegen und ist im Bereich der Astanbindung mit einer Kerbe versehen. Herkömmliche Konstruktionen, die in der Regel eine kreisförmige Ausbildung der Kerbe vorsehen, würden unter der enormen Last, die durch das Gewicht des Astes erzeugt wird, deutlich früher versagen. Der Baum war allerdings in der Lage den Kerbbereich durch seine Optimierungsstrategie zu optimieren und somit den Ast, den er zum Überleben benötigt, nicht zu verlieren.

Allerdings müssen und können sich Bäume während ihres Lebens nicht bewegen und somit ist hier nur die Vermeidung von Belastungsspitzen notwendig, d.h. ein Baum muss nur wachsen können, um die Spannungskonzentrationen abzubauen. Wird das angelagerte Material aufgrund eines Lastwechsels einmal nicht mehr benötigt, stört ihn das nicht weiter. Er muss sich keine Sorgen um sein Gewicht machen und lässt somit das überschüssige Holz einfach da wo es ist. Dies ist z.B. beim Säugetier nicht der Fall. Es muss für den Beutefang möglichst schnell sein und somit auch möglichst leicht. Daher optimieren sich Knochen nicht nur hinsichtlich der abzubauenen Spannungskonzentrationen, sondern auch hinsichtlich ihres Gewichtes. Dazu wird Material, das ehemals angelegt wurde und nun aufgrund eines Lastwechsels nicht mehr oder an anderer Stelle benötigt wird durch sogenannte Osteoklasten einfach abgebaut. Dies sind spezielle Zellen, die im Knochen für den Materialabbau zuständig sind.

In dieser Arbeit wurde an Optimierungen gearbeitet, die Bauteile hinsichtlich ihrer Dauerfestigkeit verbessern sollen. Leichtbau wurde daher indirekt durch eine Absenkung der Spannungskonzentration, die eine günstigere Dimensionierung des Bauteils erlaubt und somit eine Gewichtsreduzierung zur Folge hat, bewirkt, d.h. Gestaltoptimierung ohne Topologieoptimierung nach dem Vorbild der Bäume. Daher wird in den folgenden Abschnitten speziell auf die Optimierungsstrategien des Baumes eingegangen.

2.6.1. Aufbau und Mechanik von Bäumen

Wie bereits aus Kap. 2.6 erkennbar, ist der Baum nicht einfach nur eine Pflanze, die unsere Parks schöner macht, uns Schatten spendet, der Holzwirtschaft dient und Sauerstoff

2. Grundlagen

produziert. Man kann den Baum auch als Musterbeispiel für Konstrukteure hinsichtlich seiner Mechanik sehen. Wie bereits in Abb. 2.7 zu erkennen war, besitzt der Baum ein effizientes Design bezüglich seiner äußeren Gestalt. Dieses Design ist das Resultat aus einer Reihe von Forderungen, die der Baum zu erfüllen hat, wenn er überleben will. Die Änderung des Designs erfolgt über die gesamte Lebensspanne des Baums aufgrund ihrer "offenen Gestalt" [47], d.h. anders wie bei Tieren sind Pflanzen in der Lage ihre Gestalt ihr ganzes Leben hindurch zu verändern.

Grundsätzlich bestehen Bäume aus drei Grundorganen, die sowohl physiologische als auch mechanische Aufgaben haben: Die Blätter, die Wurzeln und die Sprossachsen (Stamm und Äste).

Die Blätter versorgen durch Photosynthese den Baum mit Energie. Hier wird der Luft Kohlendioxid entnommen und mit Wasser und Sonnenlicht in organische Stoffe (Kohlenhydrate, Fette, Proteine u.a.) und Sauerstoff umgewandelt. Das bedeutet, dass viele Blätter eine große Sonnenkollektorfläche darstellen. Auf der anderen Seite wird durch eine größere Anzahl Blätter der Windwiderstand des Baumes erhöht und somit auch die Biegebelastungen in den Ästen und dem Stamm. Wie groß solche Windlasten sein können, sieht man immer wieder an Windbrüchen, die auch an vollkommen gesunden Bäumen zu beobachten sind. Daher wird vom Baum ein möglichst hoher Nutzen (Energieausbeute, Effizienz) bei gleichzeitigen möglichst geringen Kosten (Windbruch oder -wurf) angestrebt, was im Laufe dieses Abschnitts noch näher erläutert wird.

Die Wurzeln sorgen dafür, dass der Baum Wasser und Nährstoffe aus dem Erdreich aufnehmen kann. Außerdem sind sie für die Verankerung des Baumes im Boden und somit für dessen Standfestigkeit verantwortlich. Was für enorme Kräfte dabei von der Wurzel ins Erdreich übertragen werden müssen, kann man sich mittels des Bogenmodells Abb. 2.8 [48] veranschaulichen. Erfährt der Baum durch eine Windlast ein Moment, dass er über die Wurzelplatte in den Boden einleitet, müsste aufgrund von Gleichgewichtsbetrachtungen bei Fehlen der Wurzelplatte der Baumstamm in den Boden gespiegelt werden, um die enormen Momente aufnehmen zu können. Dies veranschaulicht die Leistung, welche die Wurzeln mit ihrer Verankerung aufbringen. Auch in diesem Bereich wurden Optimierungsstrategien des Baumes untersucht [49], [50].

Entlang des Stammes und der Äste erfolgt der Transport des Wassers von den Wurzeln zu den Blättern und der Transport von Assimilaten (Kohlenhydrate u.a.) von den Blättern in den Baum. Weiterhin sorgen sie dafür, dass möglichst viele Blätter des Baumes möglichst viel Licht bekommen. Daraus lassen sich folgende Wachstumsregulatoren ableiten (Abb. 2.9) [51], [2]:

- Apicaldominanz
- Negativer Geotropismus
- Phototropismus

Die Apicaldominanz sorgt dafür, dass die Seitenäste eines Baumes nicht zu steil und zu hoch hinaus wachsen. Der Wipfeltrieb hat das alleinige Recht in die Höhe zu schießen.

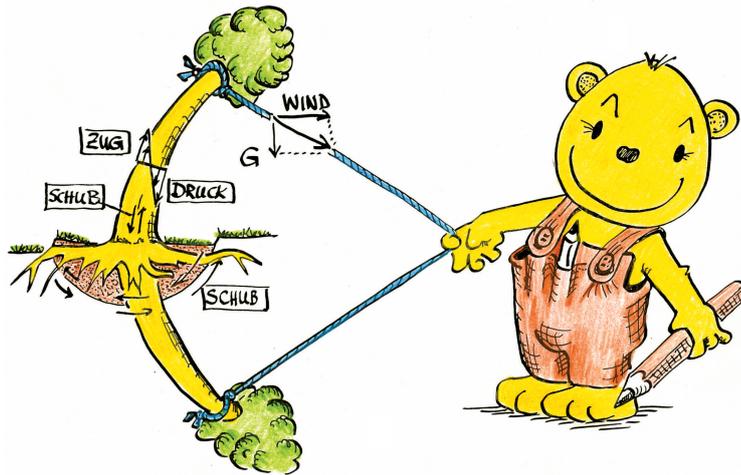


Abbildung 2.8.: Bogenmodell für den Baum

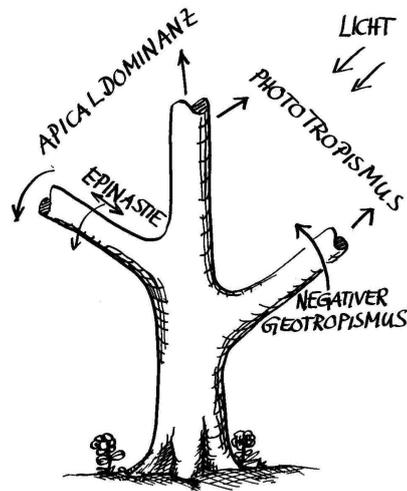


Abbildung 2.9.: Die Wachstumsregulatoren des Baumes

Wäre dies nicht der Fall so könnte es passieren, dass Seitentriebe durch zu steiles Wachsen in die Höhe sich gegenseitig oder sogar den Wipfeltrieb beschatten. Weiterhin ist ein Wachsen der Seitentriebe in die Breite günstiger für die Lichtausbeute. Versagt der Wipfeltrieb aufgrund einer Wind- oder Schneelast wird diese Aufgabe von einem günstig liegendem, starken Seitentrieb übernommen (Abb. 2.10). Aufgrund dieser Wachstumsregel ergibt sich bei vielen Bäumen eine Baumkrone bei der der Wipfeltrieb die Führung übernimmt und für eine maximal Lichtausbeute gesorgt ist.

Der negative Geotropismus lässt die Seitentriebe und den Wipfel entgegen der Schwerkraft in die Höhe der Sonne entgegen wachsen. Somit werden lange Hebelarme der Seitentriebe vermieden und eine günstigere Schwerpunktlage der Baumkrone erreicht. In Extremfällen ist somit ein Ast zu erstaunlichen Verrenkungen in der Lage (Abb. 2.10).

2. Grundlagen



Abbildung 2.10.: Führungsübernahme eines Seitentriebs



Abbildung 2.11.: Das Axiom konstanter Spannung

Die Formen, welche die Äste dabei erzeugen, werden durch Anlagerung von sogenanntem Reaktionsholz realisiert. Muss ein Ast nach oben wachsen so wird bei Laubbäumen oberseitig sich verkürzendes Zugholz angelagert. Somit verkürzt sich der Ast auf der Oberseite und biegt sich nach oben. Bei Nadelbäumen wird auf der Astunterseite Druckholz angelagert, welches die untere Seite des Astes verlängert und ihn somit nach oben drückt.

Der Phototropismus lässt den Baum in Richtung des Lichtes wachsen. Somit werden seine Sonnenkollektoren (Äste mit Blättern) für eine optimale Sonnenlichtausbeute ausgerichtet. Besonders deutlich wird dies bei einseitigem Lichteinfall. Hier ist auch ein einseitiges Wachsen der Pflanze in Richtung Licht zu beobachten.

2.6.2. Das Axiom konstanter Spannung

Ein Zusammenhang zwischen der äußeren Gestalt eines Baumes und seiner Belastung wurde erstmals gegen Ende des 19. Jahrhunderts von *Metzger* [52] und später von *Ylien* [53] hergestellt. Metzger hatte hierbei eine Gesetzmäßigkeit zwischen dem Durchmesser und der Höhe bei Fichtenstämmen gefunden. Diese Gesetzmäßigkeit lässt sich bei einem einseitig eingespannten Träger unter Biegebelastung erkennen, wenn eine konstante Randfaserspannung gefordert wird.

Erst sehr viel später wurde mit Hilfe moderner Berechnungsmethoden (FEM) von *Mattheck* [3], [54], [55] nachgewiesen, dass auch andere Bereiche der Bäume wie Astgabeln oder Wurzelanläufe nach dieser Gesetzmäßigkeit gestaltet sind. Die Form dieser Bereiche werden vom Baum so modifiziert, dass bei der jeweiligen Belastung eine konstante Spannungsverteilung an der Oberfläche erreicht wird. Dieses natürliche Design von biologischen Lastträgern wurde auch an anderer Stelle in der Natur gefunden wie z.B. bei Krallen, Geweihen und Knochen [42]. Hieraus wurde von Mattheck das *Axiom konstanter Spannung* für biologische Lastträger formuliert. Es besagt, dass natürliche Strukturen bei einer typischen Belastung keine Spannungskonzentrationen (Kerbspan-

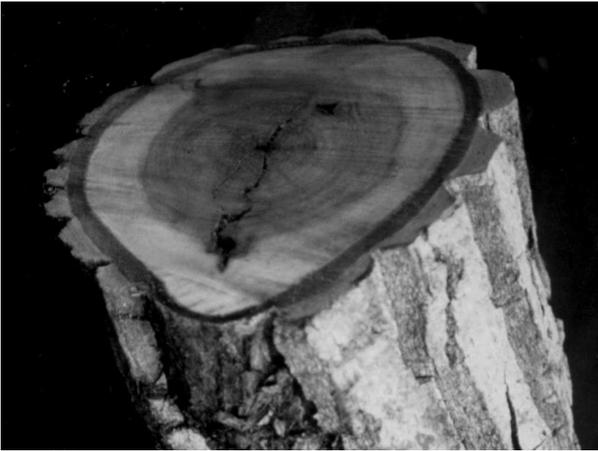


Abbildung 2.12.: Rippenbildung vor Radialriss

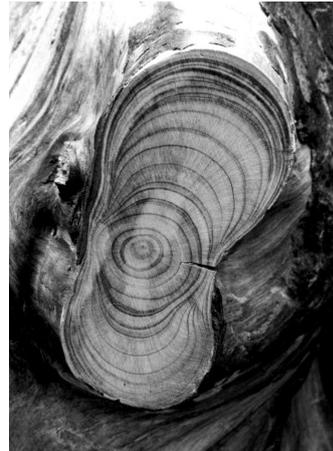


Abbildung 2.13.: Biegebelastete Wurzel

nungen) mehr aufweisen, sondern eine homogene Verteilung der Spannung entlang der Oberflächenkontur. Zudem existieren auch keine unterbelasteten Bereiche (Materialverschwendung) in der Struktur. Durch die Konstanz der Spannung an der Oberfläche existiert an keinem Ort eine erhöhte Wahrscheinlichkeit eines Versagens durch Spannungsüberhöhungen. Diese Gestaltung der Oberflächengeometrie wird vom Baum durch adaptives Wachstum erreicht. Ein gutes Beispiel für lastadaptives Wachstum zeigt Abb. 2.11.

Hier sieht man wie der Stamm unterhalb der Astanbindung stark am Durchmesser zunimmt, da er dort das Gewicht des dicken Astes zu tragen hat. Um hier die Spannungskonstanz über den gesamten Stamm zu erhalten, muss er aufgrund der höheren Last seinen Stammquerschnitt vergrößern. Oberhalb der Astanbindung allerdings wird der Stamm sehr viel dünner, da hier auch keine große, zusätzliche Last, z.B. durch das Gewicht eines Astes, hinzukommt.

Dieses Prinzip kann man auch bei der Reparatur von Wunden an Bäumen beobachten. Ein Riss im Innern eines Stammes erzeugt eine Spannungskonzentration, die durch dickere Jahresringe am Ende des Risses abgebaut wird (Abb. 2.12).

Das lastadaptive Wachstum ist ebenfalls an einer Wurzel, die auf Biegung beansprucht wurde, zu sehen, deren Querschnitt in Abb. 2.13 gezeigt ist. Die größten Zuwächse in Form von dickeren Jahresringen sind im Bereich der Randfaserspannung (Ober- und Unterseite), also der maximalen Spannung, wohingegen die kleinsten Zuwächse in Form von sehr dünnen Jahresringen in der neutralen Faser liegen, dem unbelasteten Bereich eines Biegestabs.

Verantwortlich hierfür ist die Wachstumsschicht des Baumes in der die Holzzellen gebildet werden, das Kambium. Es detektiert den Spannungszustand an den jeweiligen Stellen und bestimmt die Wachstumsintensität der Holzzellen und somit das Dickenwachstum für den kommenden Jahresring. Das Kambium (KA) befindet sich zwischen Bast (BA), der die Assimilate transportiert und dem Splintholz (SpHO) (Abb. 2.14). Im

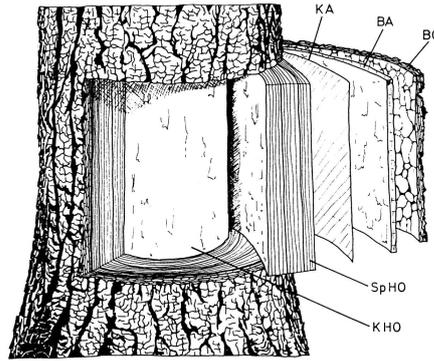


Abbildung 2.14.: Stammquerschnitt

Innern des Stammes findet man das Kernholz (KHO), welches bereits zumeist totes Holz ist und ganz außen die Borke (BO), die dem Bast und dem Kambium Schutz bietet.

2.6.3. Computer Aided Optimization (CAO-Methode)

Die bereits in Kap. 2.6.1 und 2.6.2 erwähnten Prinzipien der Gestaltoptimierung der Natur wurden mit der CAO-Methode in die Technik übertragen. Was die biegebelastete Wurzel aus Abb. 2.13 unternommen hat, um ihre Spannungsüberhöhungen abzubauen, wird mit der CAO-Methode in einer Computersimulation an technischen Bauteilen angewandt. Es wird Material an hochbelasteten Orten der Struktur angelegt und es findet kein Wachstum oder sogar eine Schrumpfung in vergleichsweise gering belasteten Bereichen statt. Das lastadaptive Wachstum an Maschinenbauteilen wird mit einer spannungsgesteuerten thermischen Ausdehnung simuliert. Die Vorgehensweise dieser Methode soll am Beispiel einer abgesetzten Welle (Abb. 2.15) unter Zugbelastung schrittweise erläutert werden.

Zunächst wird eine Finite-Elemente-Struktur der Welle erzeugt mit einem ersten Designvorschlag der zu optimierenden Kerbe. Bei der Erstellung des FE-Netzes sollte man darauf achten, dass es im Bereich des späteren, lastadaptiven Wachstums eine sogenannte Wachstumsschicht besitzt. Dies sollte am besten ein Bereich sein, der gleichmäßig strukturiert vernetzt wurde, um spätere Netzverzerrungen möglichst zu vermeiden. Diese Elementschicht ist das Äquivalent des Kambiums beim Baum.

Danach wird dieses FE-Modell mit den gewünschten Randbedingungen und Lasten versehen und mit einem beliebigen FE-Programm berechnet. Durch die FE-Analyse erhält man die Spannungs- und Dehnungsverteilung im modellierten Bauteil, sowie die Knotenpunktverschiebungen für die Netzknoten. Dadurch ist nun bekannt wo sich im Bauteil die Spannungsmaxima befinden. Weiterhin werden die Ergebnisse, die an sogenannten Integrationspunkten des Elementes berechnet wurden, auf die Elementknoten extrapoliert. Es bekommt somit jeder Knoten die Spannungskomponenten zugeordnet, damit für die Knoten der Wachstumsschicht die Misessche Vergleichspannung berechnet werden kann.

Nun setzt man die Spannungsverteilung gleich einer fiktiven Temperaturverteilung. Die Orte ehemals höchster Spannung haben jetzt die höchsten Temperaturen, sind am heißesten. Die Temperatur für den Knoten i ergibt sich aus der Spannung σ_i an diesem Knoten und einer Referenzspannung σ_{ref} zu:

$$T_i = A(\sigma_i - \sigma_{ref}) \quad (2.28)$$

Mit dem Skalierungsfaktor A und der Referenzspannung σ_{ref} werden die Temperaturen in der Wachstumsschicht und somit auch das spätere Wachstum gesteuert, wobei σ_{ref} die Spannung beschreibt, die später auf der Bauteiloberfläche herrschen soll und A den Betrag des Zuwachses bestimmt. Außerdem wird der E-Modul der Wachstumsschicht auf ungefähr $\frac{1}{400}$ seines ursprünglichen Wertes herabgesetzt. Das Resultat ist eine sehr weiche Wachstumsschicht, die an Orten hoher Belastung sehr warm ist und an weniger belasteten Orten eher kalt ist.

Das eigentliche Wachstum findet in einer rein thermischen FE-Analyse statt. Die mechanischen Belastungen werden nun weggelassen und die erzeugte fiktive Temperaturverteilung wird als thermische Belastung aufgebracht. Die weiche Wachstumsschicht bekommt einen Wärmeausdehnungskoeffizienten $\alpha > 0$, wohingegen der Rest des Bauteils auf $\alpha = 0$ gesetzt wird. Entsprechend der Temperaturverteilung dehnen sich nun in der Wachstumsschicht die warmen Bereiche, also die Orte mit den ehemals größeren Spannungen stärker aus als die kälteren. Somit erzielt man ein Wachstum durch thermische Ausdehnung entsprechend der Temperaturverteilung. Starkes Wachstum an heißen bzw. hochbelasteten Orten, geringes Wachstum an kalten bzw. geringbelasteten Orten. Da die Schicht vorher weich gemacht wurde, treten auch keine gegenseitige Verkantungen oder Verklemmungen der Elemente auf. Die Elemente wachsen somit ohne Verspannungen im Innern ungefähr in senkrechter Richtung zur Oberfläche.

Nach dem Wachstum der weichen, oberen Schicht hat sich die Gestalt des Bauteils entlang der Oberfläche bereits geändert und mit dieser Änderung der Geometrie wird nun das FE-Netz korrigiert. Es werden die thermischen Verschiebungen zu den Knotenkoordinaten addiert und eine neue FE-Struktur wird erstellt. Danach wird eine neue Spannungsanalyse durchgeführt. Diesmal wieder mit der mechanischen Belastung, um die Änderungen der Oberflächenkontur auf die Spannungsverteilung im Bauteil bewerten zu können. Der erste Optimierungszyklus hat in vielen Fällen bereits eine deutliche Reduktion der maximalen Spannungen zur Folge. Mit dieser Reduktion geht auch eine Homogenisierung des Spannungsverlaufs entlang der Oberfläche einher. Soll die Spannung dennoch weiter abgesenkt werden, so setzt man diese neu erhaltene Spannungsverteilung erneut einer Temperaturverteilung gleich und wiederholt die vorangegangenen Optimierungsschritte solange bis das gewünschte Ziel erreicht ist.

Den Fortschritt einer solchen Optimierung sieht man am Beispiel einer abgesetzten Welle (Abb. 2.16). Zunächst existiert eine Spannungskonzentration mit der Kreiskeibe als Querschnittsübergang. Mehr und mehr reduzieren und homogenisieren die Zuwächse die Spannung entlang der Oberflächenkontur bis zum Schluss eine stark reduzierte, konstant verlaufende Spannung an der Oberfläche erreicht ist.

2. Grundlagen

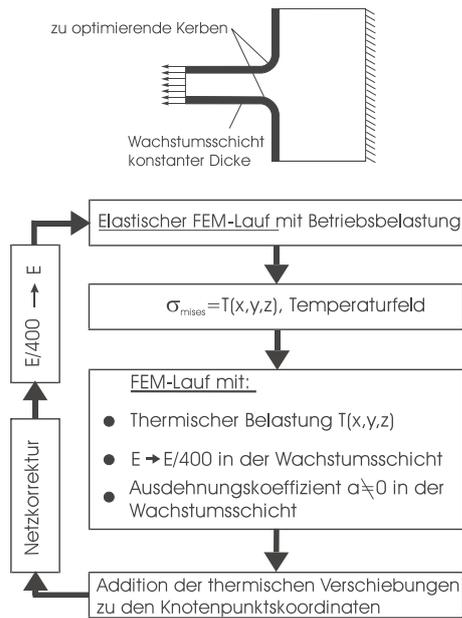


Abbildung 2.15.: Schematischer Ablauf einer CAO-Optimierung

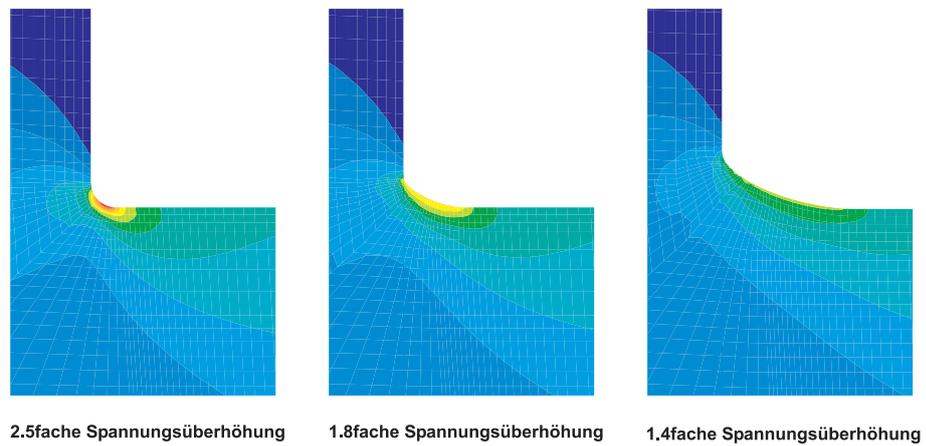


Abbildung 2.16.: Schrittweise optimierter Kerbbereich

3. Bauteiloptimierung

Querschnittsänderungen bei mechanischen Bauteilen sind in der Praxis keine Seltenheit und zudem noch eine Gefahr für das Bauteil auf die besonderes Augenmerk gelegt werden sollte. Sowohl Wellen als auch Balken haben eine Kerbe am Ort an dem sich das Bauteil verbreitert, die dort eine Spannungskonzentration erzeugt. Diese Spannungsüberhöhung am Querschnittsprung (Wellenschulter oder Balkenschulter) muss in die Auslegung des Bauteils einfließen entweder in Form einer Überdimensionierung gegenüber der Nennlast bei gleichbleibender Lebensdauer oder einer verkürzten Lebensdauer bei gleichbleibender Dimensionierung. Ersteres hätte eine wesentliche Zunahme des Materials zur Folge, welche einzig und allein auf die Spannung im Kerbbereich ausgerichtet wäre und in weiten Bereichen des Bauteils gar nicht benötigt werden würde. Eine Optimierung, welche die Kerbspannungen reduziert, hätte eine geringere Dimensionierung des Bauteils und somit eine Gewichtsreduzierung zur Folge bei gleicher Lebensdauer. Wird die Dimensionierung des Bauteils beibehalten, so kann eine Spannungsoptimierung die Lebensdauer erheblich erhöhen. Betrachtet man den qualitativen Verlauf einer charakteristischen Wöhler-Kurve so können gerade im Bereich der Dauerfestigkeit bereits geringe Spannungsreduktionen eine große Änderung der Lebensdauer bewirken.

Mit der CAO-Methode wird ein Werkzeug bereitgestellt, das es erlaubt sehr schnell und effektiv Kerbformen beliebiger Geometrie in ihrer Gestalt so zu optimieren, dass eine Reduktion der Spannungsüberhöhung erzielt werden kann, wie es der Anwender wünscht oder die Geometrierestriktionen der Konstruktion es zulassen. Somit können auf einfache Weise Sollbruchstellen in technischen Bauteilen vermieden und die Lebensdauer derselben gesteigert werden.

Obwohl die Optimierungsmechanismen, welche die CAO-Methode verwendet, bereits sehr einfach sind, ist es wünschenswert geometrische Eigenschaften und eventuelle Gesetzmäßigkeiten bei optimierten Kerbformen zu charakterisieren und diese in Verbindung mit Spannungsanalysen zu noch einfacheren Optimierungsprinzipien weiterzuentwickeln, die eventuell auch ohne FEM auskommen.

Hierfür wurden zunächst Parameterstudien durchgeführt, in denen Kerben an Wellen- und Balkenschultern mit der CAO-Methode optimiert wurden. Variiert wurde das Wellendurchmesser Verhältnis und die Lastart. Um für verschiedene Bauräume Kerbformen zu untersuchen, wurden CAO-optimierte Konturen mit Spannungsüberhöhungen von 1,8/ 1,6/ 1,4 und 1,2 erzeugt.

3. Bauteiloptimierung

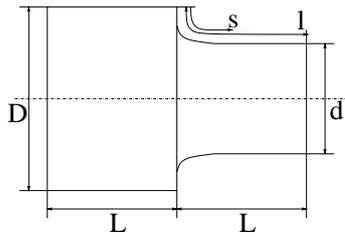


Abbildung 3.1.: Wellenmodell

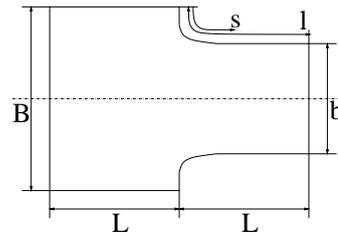


Abbildung 3.2.: Balkenmodell

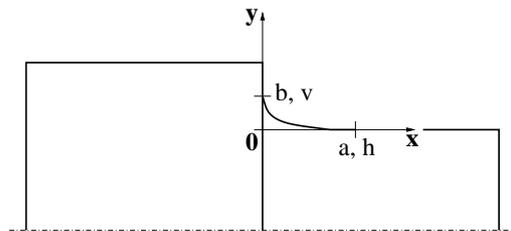


Abbildung 3.3.: Koordinatensystem für die Darstellung der Kerbkonturen

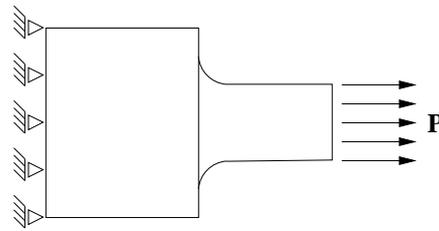


Abbildung 3.4.: Welle unter Zugbelastung

3.1. Wellen- und Balkenschulteroptimierung

Im Anhang A sind Spannungsverläufe und Kerbformen für optimierte Wellen unter Zug-, Biege- und Torsionsbelastung mit Durchmesserverhältnissen zwischen 3,0 und 1,025 und für optimierte Balken unter Zug- und Biegebelastung mit Breitenverhältnissen von 3,0 und 1,1 abgebildet.

Für die Wellen wurden Durchmesserverhältnisse D/d (Abb. 3.1) von 3,0/ 1,63/ 1,4/ 1,2/ 1,1 und 1,025 modelliert. Das Verhältnis d/L beträgt 2. Optimiert wurde mit der v.Mises-Vergleichsspannung als Steuergröße, welche dann auch als Optimierungsergebnis entlang der Laufkoordinate s auf der Kerboberfläche angegeben wird. Die Koordinate s wurde aufgrund von verschiedenen Kerblängen auf die Länge l der Oberfläche normiert. Die Geometriegrößen der Kerbformen wurden alle in dem in Abb. 3.3 gezeigten Koordinatensystem dargestellt und auf den kleinen Durchmesser d bezogen, wobei hier y/d die radiale Ausdehnung der Kerbkontur beschreibt und x/d die axiale Ausdehnung. Im folgenden werden die maximalen Werte, welche die Kerbformen in radialer und axialer Richtung erreichen auch als radialer Bauraum b/d und axialer Bauraum a/d bezeichnet. Bei den Balkenschultern werden die Geometriedaten auf die kleine Breite b des Balkenmodells bezogen. Der Bauraum in x-Richtung wird als horizontaler Bauraum h/b bezeichnet, in y-Richtung als vertikaler Bauraum v/b .

Die Finite-Elemente-Struktur der abgesetzten Welle wurde mit axialsymmetrischen Vier-Knoten-Elementen modelliert, wobei der breitere Teil der Welle in axialer Richtung eingespannt wurde, was einer Welle mit Bund entspricht. Die Last wurde am kleineren Durchmesser in Form einer Einheitszugspannung aufgebracht (Abb. 3.4).

3.1. Wellen- und Balkenschulteroptimierung

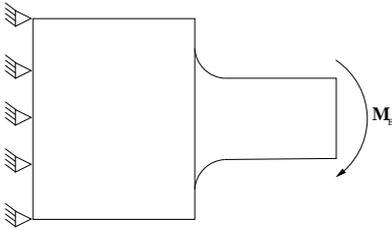


Abbildung 3.5.: Welle unter Biegebelastung

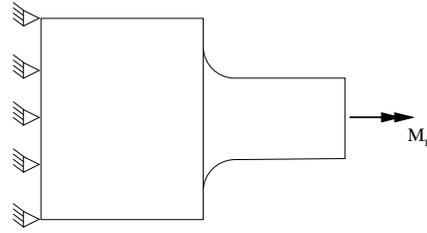


Abbildung 3.6.: Welle unter Torsionsbelastung

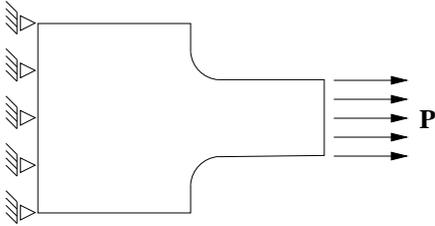


Abbildung 3.7.: Balken unter Zugbelastung

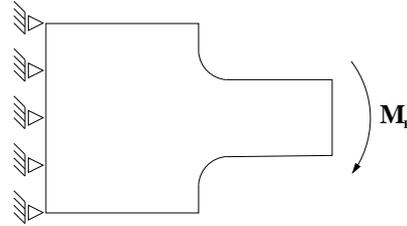


Abbildung 3.8.: Balken unter Biegebelastung

Das erste Diagramm im Anhang A.1 zeigt zunächst die CAO-Kerbformen für eine Welle mit einem D/d von 3,0 unter Zugbelastung [56]. Die Kontur mit der geringsten Spannungsreduktion besitzt einen axialen Bauraum a/d von 0,0689 und eine Spannungsüberhöhung von 1,8. Im Vergleich dazu erreicht eine Kreiskerbe mit einem etwas größeren axialen Bauraum von 0,08 eine Spannungsüberhöhung von 1,97. Hier wird bereits die Überlegenheit einer CAO-Kerbform deutlich. Bei einem etwas kleineren axialen und deutlich kleineren radialen Bauraum wird hier bereits eine Spannungsreduktion von 9 % erreicht mit einer gleichzeitigen Materialreduktion im Kerbbereich. Mit steigender Spannungsreduktion steigt sowohl der axiale Bauraum a/d als auch das Bauraumverhältnis a/b der Kerbkonturen. Die Kerbform mit einer 1,6fachen Spannungsüberhöhung hat bereits ein a/d von 0,1019 und zeigt ein konstantes Wachstum normal zur Oberfläche der Kerbe entlang derselben. Ein axialer Bauraum von 0,1478 ist bereits nötig, um eine Kerbe mit einer 1,4fachen Spannungsüberhöhung in die Wellenschulter einzupassen. Festzustellen ist, dass für dieselbe Spannungsreduktion von 1,6 auf 1,4 größere Zuwächse erforderlich waren als von 1,8 auf 1,6. Dies wird noch deutlicher, betrachtet man die Kerbform für eine 1,2fache Spannungsüberhöhung, die einen axialen Bauraum von 0,2577 einnimmt. Hier ist der Zuwachs deutlich größer bei gleicher Spannungsreduktion bezüglich der vorherigen Kerbform. Bei konstantem Abfall der Spannung liegt demnach ein überproportionales Wachstum der Kerbkontur vor. Weiterhin ist zu bemerken, dass der axiale Bauraum mit abnehmender Spannungsüberhöhung stärker zunimmt als der radiale Bauraum. Die Kerbform nimmt eine schlankere Form an bei großen Spannungsreduktionen, d.h. sie besitzt dann ein größeres Bauraumverhältnis a/b . Die Kerbe mit einer Spannungsüberhöhung von 1,2 besitzt zudem den gleichen radialen Bauraum wie die Kreiskerbe. Spielt der radiale Bauraum gegenüber dem axialen Bauraum in der Kon-

3. Bauteiloptimierung

struktur eine übergeordnete Rolle so kann hier sogar eine 39 %ige Spannungsreduktion der CAO-Kerbform verglichen mit der konventionellen Kreiskerbe beobachtet werden.

Das Schaubild direkt neben dem Kerbformdiagramm zeigt die zugehörigen Spannungsverläufe entlang der CAO-Kerbkonturen. Zunächst fällt hier die vom Kreisradius erzeugte Spannungsspitze auf, die eine Spannungsüberhöhung von 1,97 erreicht. Es fällt auf, dass das Maximum auf einen extrem kleinen Bereich begrenzt ist. Die Spannung steigt sehr steil bis zum Maximum an, um danach genauso schnell wieder abzufallen bis zu einem Grenzwert, der die Nennspannung beschreibt. Anders hingegen bei der CAO-Kerbform mit einer maximalen Spannungsüberhöhung von 1,8. Hier steigt die Kurve zwar ebenfalls steil an, verläuft aber entlang der Kerbe auf einem konstanten Wert von 1,8 und überschreitet diesen nicht. Es wurde ein konstanter Spannungsverlauf erzeugt, dessen maximaler Betrag mit einem Minimum an benötigtem Bauraum auskommt. Die folgenden Kurven erreichen immer niedrigere Maximalwerte und einen länger werdenden Bereich konstanter Spannungsverteilung. Mit sinkender Spannung wird nur der Abfall auf die Nennspannung flacher, der Anstieg bleibt wie beim Radius auch sehr steil.

Bei den folgenden Diagrammen in Anhang A.1 wird das Durchmesser Verhältnis variiert, wobei die Belastungsart beibehalten wird.

In Anhang A.2 wurde als Belastungsart reine Biegung angenommen. Die Finite-Elemente-Struktur für eine Welle unter Biegung wurde mit axialsymmetrischen Vier-Knoten-Elementen für nichtsymmetrische Belastungen modelliert. Es wurden die Durchmesser Verhältnisse entsprechend der Zugwelle auch für die Biegewelle variiert. Die Last wurde am kleineren Durchmesser als lineare Biegespannungsverteilung aufgebracht (Abb. 3.5). Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt in derselben Weise wie bereits oben erläutert.

In Anhang A.3 wurden Wellen mit einer Torsionsbelastung analysiert und optimiert. Für die Modellierung der Welle unter Torsion wurden axialsymmetrische Vier-Knoten-Elemente für Torsionsbelastungen verwendet. Die Last wurde am kleineren Durchmesser als Torsionsmoment aufgebracht (Abb. 3.6).

Für den Balken unter Zug [57] in Anhang A.4 wurden Vier-Knoten-Elemente für den ebenen Spannungszustand in der FE-Struktur verwendet. Es wurden Modelle mit Breitenverhältnissen B/b von 3,0 und 1,1 erstellt und optimiert (Abb. 3.2). Auch hier beträgt das Verhältnis $b/L = 2$. Die Last wurde am Ende des Balkens mit der kleineren Breite als Einheitszugspannung aufgebracht (Abb. 3.7).

Auch bei dem Balken unter Biegebelastung (Anhang A.5) wurden Elemente für den ebenen Spannungszustand verwendet und Breitenverhältnisse von 3,0 und 1,1 modelliert. Die Last wurde als lineare Biegespannungsverteilung aufgebracht (Abb. 3.8).

Auf die einzelnen Unterschiede, die sich aus der Variation des Durchmesser- bzw. Breitenverhältnis, der Lastart und des Querschnittsprofils ergeben, wird in Kapitel 3.2 näher eingegangen.

3.2. Geometrische Charakterisierung der CAO-Kerbformen

In den folgenden Abschnitten werden die Optimierungsergebnisse zusammengefasst und die geometrischen Eigenschaften der einzelnen Kerbkonturen charakterisiert. Es werden exemplarisch CAO-Kerbkonturen mit der maximalen Spannungsreduktion (Spannungsüberhöhung von 1,2) miteinander verglichen.

3.2.1. Variation des Durchmesserhältnisses

In diesem Abschnitt werden Kerbformen mit einer Spannungsüberhöhung von 1,2 bei verschiedenen Durchmesserhältnissen und Lastarten miteinander verglichen.

Abb. 3.9a zeigt CAO-Kerbformen mit einer 1,2fachen Spannungsüberhöhung bei variierenden Durchmesserhältnissen, die an abgesetzten Wellen unter Zugbelastung optimiert wurden. Hier fällt zunächst auf, dass sich die Kerbkonturen ab einem Durchmesserverhältnis von 1,4 bei steigendem Durchmesserverhältnis sehr ähneln. Der axiale Bauraum ist fast identisch, der radiale Bauraum fällt bei einem Durchmesserverhältnis von 1,4 etwas kleiner aus. Die Kurven für die Durchmesserverhältnisse von 1,63 und 3,0 unterscheiden sich nicht mehr. Daraus lässt sich schließen, dass ab einer gewissen Schulterhöhe der Welle zusätzliches Material mechanisch isoliert bleibt und kaum noch Einfluss auf die Geometrie der Kerbkontur hat [58]. Selbiges wird in [15] und [59] für Platten unter Zug mit unterschiedlich langem Bund berichtet und in [60] weiterhin für den Zugfall, in [61] für den Biegefall untersucht.

Mit abnehmendem Durchmesserverhältnis sinken auch die axialen und radialen Bauräume der Kerbkonturen. Jedoch stellt man fest, dass die radialen Bauräume in einem stärkeren Maße abnehmen. Dies hat zur Folge, dass bei kleinen Durchmesserverhältnissen sehr große Bauraumverhältnisse entstehen, d.h. die Kerbformen werden sehr schlank. Auch gibt es eine relativ konstante Materialzunahme zwischen den einzelnen Kurven für Durchmesserverhältnisse von 1,025 bis 1,4, wohingegen wie bereits erwähnt ab einem D/d von 1,4 kaum noch Unterschiede vorhanden sind. Weiterhin treten die Kerbformen bei extrem kleinen Werten von D/d (1,025) mit einem flacheren Winkel in die Wellenschulter ein als bei den restlichen Konturen (siehe dazu auch Abb. 3.9b und 3.9c).

In Abb. 3.9b werden CAO-optimierte Kerbkonturen bei variierenden Durchmesserverhältnissen mit 1,2facher Spannungsüberhöhung an Wellenschultern unter Biegebelastung miteinander verglichen. Auch hier zeigt sich wieder, dass ab einem D/d von 1,4 die Unterschiede zwischen den Konturen geringer werden, wobei im Biegefall sich die beiden Konturen für die Durchmesserverhältnisse 1,63 und 3,0 deutlicher unterscheiden als das bei Zugbelastung der Fall ist. Auch bei Biegung sinken sowohl der axiale wie auch der radiale Bauraum mit abnehmendem Durchmesserverhältnis, wobei hier auch wie bei Zugbelastung das Bauraumverhältnis zunimmt und die Kerbkonturen schlanker werden. Es gibt einen großen Materialzuwachs zwischen den Kerbformen bei einem D/d von 1,025 und 1,1, wobei dieser danach bis zu einem Durchmesserverhältnis von 1,4 wieder konstant zu bleiben scheint. Ebenso treten die Kerbformen unter Biegebelastung

3. Bauteiloptimierung

unter einem leicht steileren Winkel in die Wellenschulter ein als bei Zugbelastung. Dieser Eintrittswinkel ist bei dem kleinsten Durchmesser Verhältnis von 1,025 wieder am kleinsten.

CAO-optimierte Kerbformen an Wellenschultern unter Torsionsbelastung werden in Abb. 3.9c bei variierenden Durchmesser Verhältnissen bei einer Spannungsüberhöhung von 1,2 vorgestellt. Hier wiederholen sich die Eigenschaften der Konturen vom Fall der Biegebelastung. Allein der Eintrittswinkel in die Wellenschulter ist im Torsionsfall noch etwas steiler als im Biegefall.

3.2.2. Variation des Lastfalls

In diesem Abschnitt werden CAO-Kerbformen bei gleichem Durchmesser Verhältnis und gleicher Spannungsüberhöhung, jedoch variierendem Lastfall miteinander verglichen.

Abb. 3.10 zeigt zunächst CAO-Kerbformen bei einer Spannungsüberhöhung von 1,2 und einem Durchmesser Verhältnis von 3,0 unter verschiedenen Lastfällen. Hier fällt zunächst auf, dass die CAO-Kerbform unter Zugbelastung wesentlich größer ist als die CAO-Kerbformen unter Biege- und Torsionsbelastung. Sowohl radialer als auch axialer Bauraum sind wesentlich größer als bei Biegung bzw. Torsion. Die optimierten Kerbformen für Biegung und Torsion hingegen ähneln sich in ihren Abmessungen eher einander, wobei auch Unterschiede zu vermerken sind. Der radiale Bauraum ist für den Biege- und Torsionsfall annähernd gleich groß, der axiale Bauraum hingegen zeigt sich bei Torsionsbelastung als der kleinere Bauraum im Vergleich zur biegebelasteten Kerbe. Dies wirkt sich auch entlang der Kerbe aus, indem die Torsionskerbe immer unterhalb der Biegekerbe verläuft, um erst kurz vor Eintritt in die Wellenschulter zur Biegekerbe aufzuschließen. Weiterhin sind unterschiedliche Eintrittswinkel der Kerbformen in die Wellenschulter für die einzelnen Lastfälle erkennbar. Hierbei hat die Zugform den flachsten und die Torsionsform den steilsten Eintrittswinkel. Diese Tendenz setzt sich mit abnehmenden Durchmesser Verhältnis fort.

Bei einem Durchmesser Verhältnis D/d von 1,63 lassen sich ebenfalls, wie bereits bei einem D/d von 3,0, die Relationen zwischen den Bauräumen und Eintrittswinkeln bei verschiedenen Lastfällen erkennen. Einzig der Unterschied zwischen Biege- und Torsionsfall fällt etwas deutlicher aus. Hier hat die Torsionsform noch etwas weniger Material als die Biegeform.

Bei weiter abnehmendem Durchmesser Verhältnis nähert sich die Kerbform für Zugbelastung immer weiter der Biegeform an, wobei Torsions- und Biegeform sich genauso wie bei größeren Durchmesser Verhältnissen verhalten. Bei einem D/d von 1,1 besitzen alle drei Kerbformen den gleichen radialen Bauraum, während die Zugform die größte axiale Ausdehnung aufweist und die Torsionsform nach wie vor die kleinste Ausdehnung besitzt. Somit fächern sich die Kerbformen, ausgehend vom Eintritt in die Wellenschulter, auf und besitzen nahezu denselben Abstand voneinander entlang ihrer Oberfläche. Bei einem D/d von 1,025 hingegen legt sich die Kerbform für Zugbelastung fast komplett entlang ihrer Oberfläche auf die Kerbform für Biegebelastung. Die Torsionsform hingegen erweitert ihren Abstand zur Biegeform etwas und besitzt nun auch einen etwas größeren radialen Bauraum als die Zug- und Biegeform.

3.2. Geometrische Charakterisierung der CAO-Kerbformen

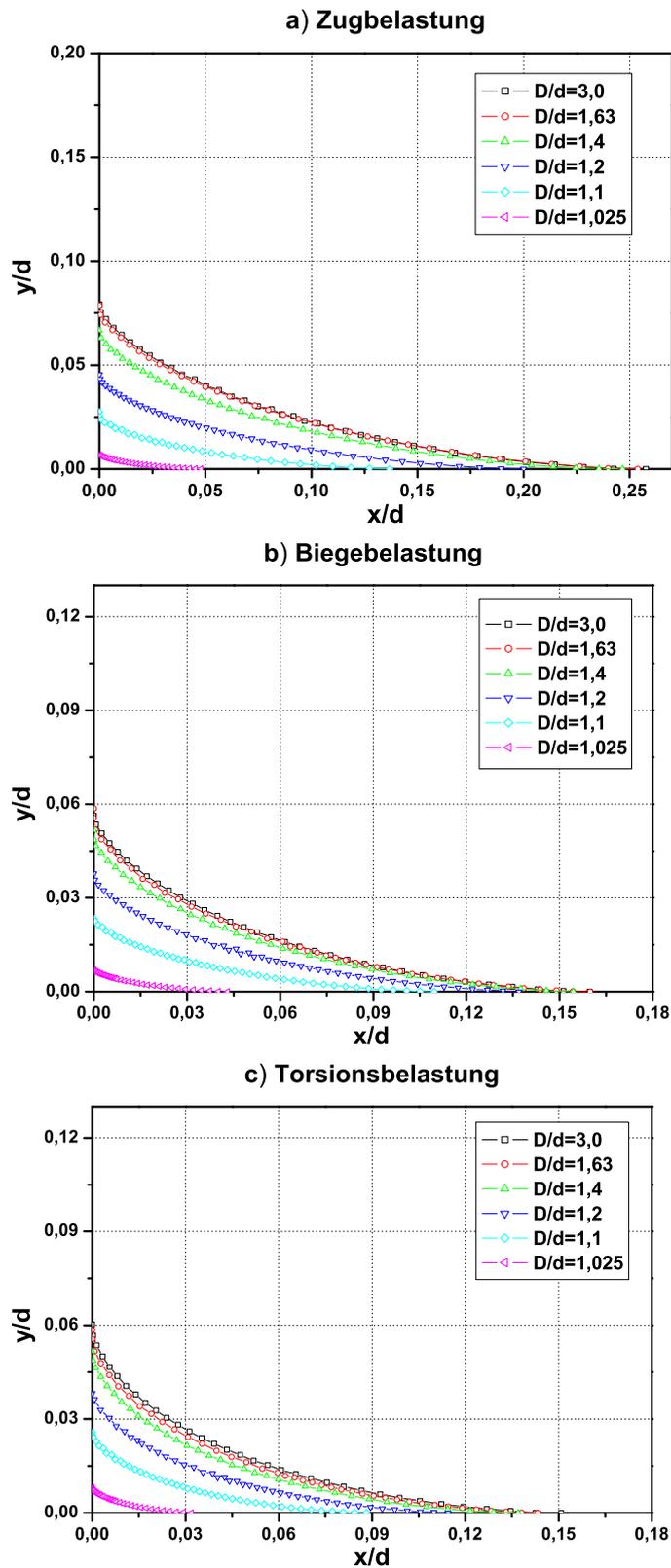


Abbildung 3.9.: Optimierte Kerbformen bei variierendem Durchmesser Verhältnis D/d mit 1,2facher Spannungsüberhöhung

3. Bauteiloptimierung

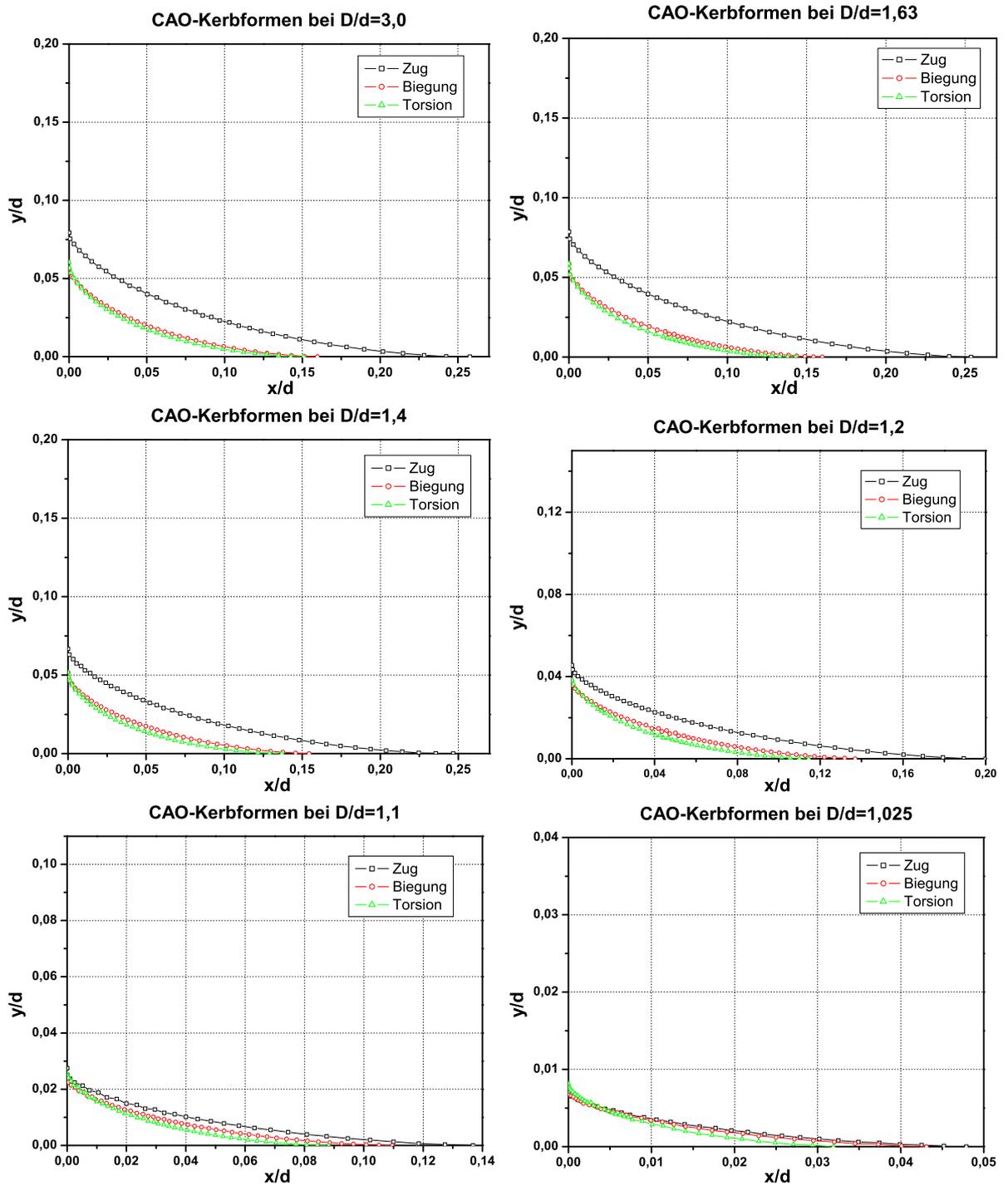


Abbildung 3.10.: Optimierte Kerbformen bei variierender Belastungsart mit 1,2facher Spannungsüberhöhung

3.2.3. Variation des Querschnittsprofils

Im folgenden Abschnitt werden CAO-Kerbformen miteinander verglichen, die jeweils eine 1,2fache Spannungsüberhöhung erreichen bei verschiedenen Durchmesser- bzw. Breitenverhältnissen und bei verschiedenen Querschnittsprofilen unter Zug- bzw. Biegebelastung.

Rechts oben in Abb. 3.11 werden CAO-Kerbkonturen mit einer Spannungsüberhöhung von 1,2 dargestellt bei einem D/d bzw. B/b von 3,0 jeweils für einen Balken und eine Welle. Zunächst fällt auf, dass die Kerbkontur für einen Balken einen wesentlich größeren Bauraum einnimmt als für eine Welle. Weiterhin hat die Kontur für einen Balken ein höheres Bauraumverhältnis und einen geringfügig flacheren Eintrittswinkel in die Schulter.

Links oben in Abb. 3.11 werden ebenfalls CAO-Kerbkonturen mit Spannungsüberhöhungen von 1,2 miteinander verglichen. Hier allerdings mit einem Durchmesser- bzw. Breitenverhältnis von 1,1. Auch hier ist der Bauraum der Kontur bei einem Balken merklich größer als bei einer Welle. Das Bauraumverhältnis der Balkenkontur ist wesentlich größer als das der Wellenkontur, wobei sich die Eintrittswinkel diesmal sehr ähneln.

In Abb. 3.11 unten werden CAO-Kerbformen mit 1,2facher Spannungsüberhöhung für Balken und Wellen verschiedener Breiten- und Durchmesserhältnisse miteinander verglichen. Hier wurden jedoch die Kerbformen unter einer Biegebelastung optimiert. Vergleicht man nun für beide Durchmesser- bzw. Breitenverhältnisse die optimierten Kerbformen miteinander, so stellt man das gleiche Verhalten wie bei den zugoptimierten Formen fest. Unterschiede entstehen nur durch den Lastfall und dies wurde bereits in Kap. 3.2.2 ausführlich beschrieben.

3.2.4. Bauraumkarten der CAO-Kerbformen

Für einen bestimmten Lastfall und einem bestimmten Querschnittsprofil können nun die Bauräume aller optimierten Kerben und Wellen bzw. Balken in Diagrammen dargestellt werden. In einem solchen Bauraumdiagramm wird das Bauraumverhältnis a/b bzw. h/v über dem axialen bzw. horizontalen Bauraum a bzw. h der jeweiligen Kerbe aufgetragen.

Abb. 3.12a zeigt ein solches Diagramm für Wellen unter Zugbelastung. Für jedes Durchmesserverhältnis wurden die Bauräume der CAO-Kerben für die vier erreichten Spannungsüberhöhungen aufgetragen. Auffällig ist hier, dass es einen linearen Zusammenhang zwischen den Bauräumen für die einzelnen Spannungsüberhöhungen einer Welle gibt. Für jedes D/d gibt es einen linearen Zusammenhang der CAO-Bauräume. Man sieht auch, dass sich die Bauräume ab einem D/d von 1,4 aufwärts kaum noch unterscheiden. Die Bauraumverhältnisse dieser Wellen steigen auch relativ flach an mit steigender Spannungsreduktion. Wohingegen mit abnehmendem D/d die Bauraumverhältnisse immer steiler ansteigen. Hier kann man das bereits in Kap. 3.2.1 beschriebene Verhalten der immer schlanker werdenden CAO-Formen für kleine D/d -Werte direkt am Bauraumverhältnis ablesen. Weiterhin existiert ein linearer Zusammenhang bei gleicher Spannungsüberhöhung, aber unterschiedlichen D/d -Werten zwischen den einzelnen Bauräumen.

3. Bauteiloptimierung

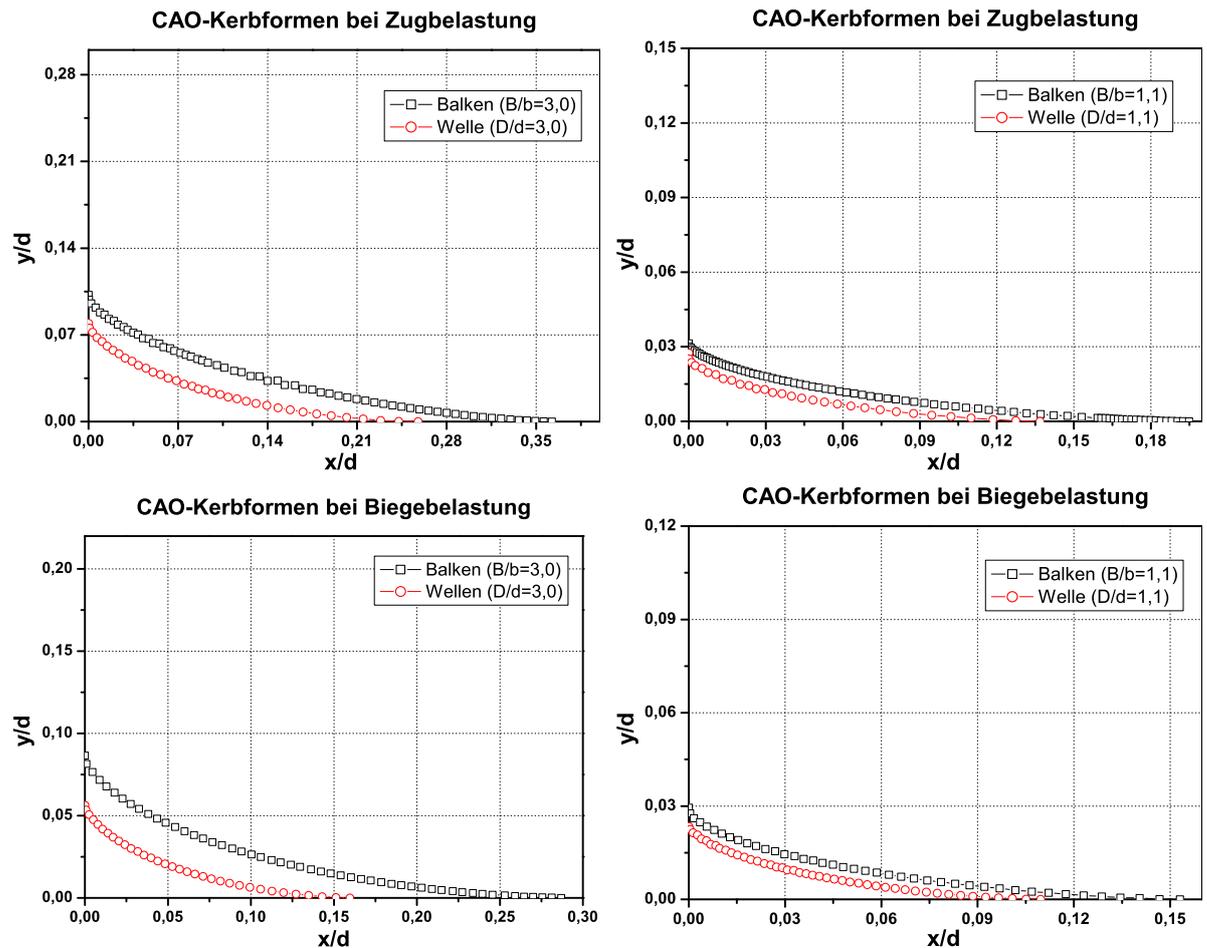


Abbildung 3.11.: Optimierte Kerbformen für verschiedene Querschnitte mit 1,2facher Spannungsüberhöhung

In Abb. 3.12b sind die Bauräume für Wellen unter Biegebelastung zu sehen. Auch ist ein linearer Zusammenhang zwischen den Bauräumen einzelner Spannungsüberhöhungen bei gleichem D/d festzustellen, sowie bei gleicher Spannungsüberhöhung und verschiedenen D/d -Werten. Die Bauräume sowie die Bauraumverhältnisse werden für Biegung im Vergleich zur Zugbelastung kleiner.

Für den Torsionsfall werden die Bauräume in Abb. 3.12c gezeigt. Auch sind wieder die linearen Zusammenhänge entsprechend der vorherigen Diagramme zu sehen. Die Bauräume und die Bauraumverhältnisse nehmen weiterhin ab verglichen mit den Werten für Biegung.

Für Balken unter Zugbelastung zeigt Abb. 3.13a die entsprechenden Bauräume der CAO-Kerbkonturen. Die wesentlichen Unterschiede zu den Wellen wurden bereits in Kap. 3.2.3 diskutiert. Auch hier ist der lineare Zusammenhang zwischen den einzelnen CAO-Bauräumen bei konstantem B/b deutlich zu erkennen

3.2. Geometrische Charakterisierung der CAO-Kerbformen

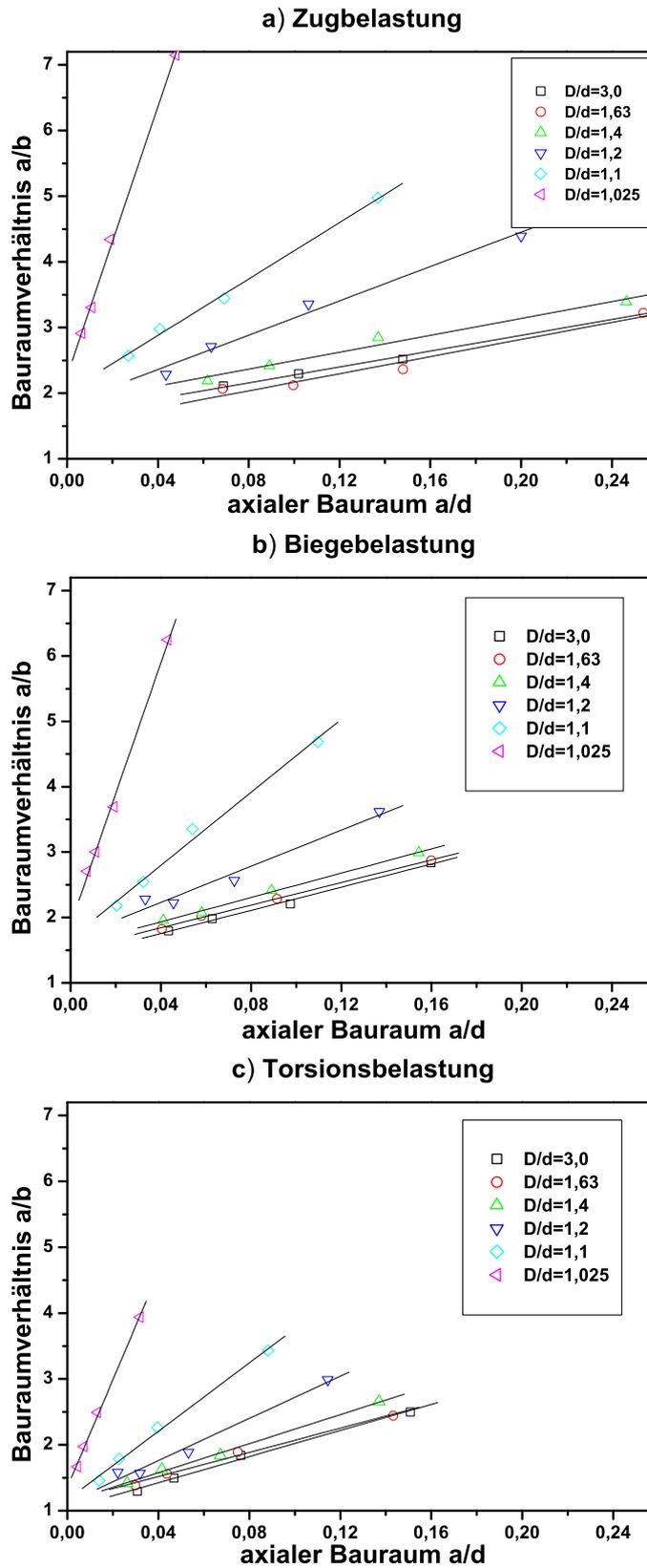


Abbildung 3.12.: Bauräume von CAO-Kerbformen bei Wellen

3. Bauteiloptimierung

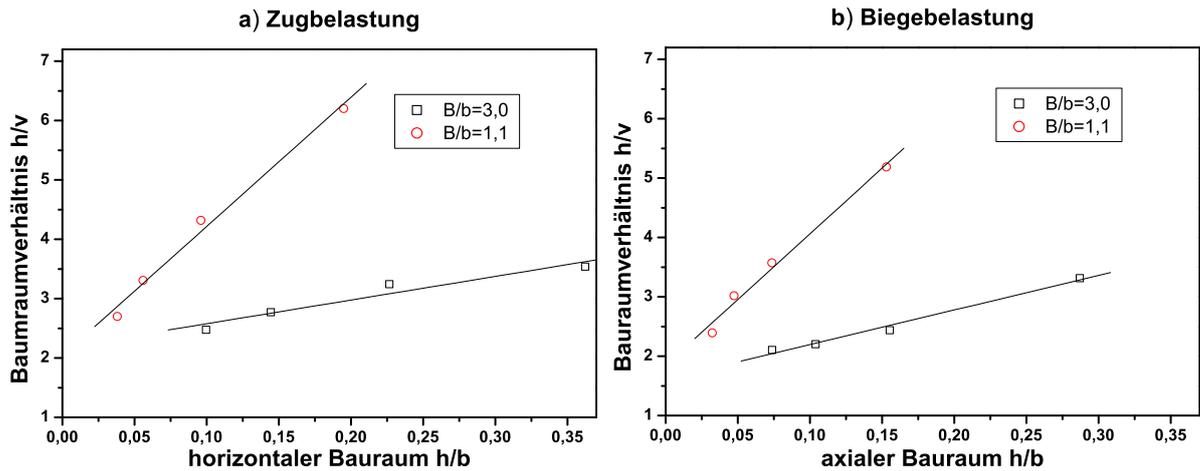


Abbildung 3.13.: Bauräume von CAO-Kerbformen bei Balken

In Abb. 3.13b werden die CAO-Bauräume eines Balken unter Biegebelastung dargestellt. Auch hier sei auf Kap. 3.2.3 verwiesen, dass die Unterschiede zwischen verschiedenen Querschnittsprofilen bespricht, wenn die Bauräume mit denen der Wellen unter Biegebelastung verglichen werden sollen. Der lineare Zusammenhang tritt hier ebenfalls deutlich heraus.

3.3. Elliptische Kerbformen im CAO-Bauraum

Battenbo und *Baines* [62], *Berkey* [63], *Grodzinski* [64] und *Pilkey* [15] untersuchen geometrisch einfacher zu beschreibende, optimale Kerbkonturen. Diese Formen für Kerbgeometrien sollen, wenn auch nicht minimale, aber doch stark reduzierte Spannungen mit einem praktikablen, leicht zu erzeugenden Design verbinden. Die Ellipse scheint eine gute Näherung zur optimalen Kerbform darzustellen und somit prädestiniert zu sein für die Verwendung als spannungsreduzierende Kerbform.

Links in Abb. 3.14 sind die gerechneten elliptischen Kerbformen für verschiedene Durchmesserhältnisse der Wellen aufgelistet. Als kleine Halbachse wurde der maximale radiale Bauraum der CAO-Kerben verwendet. Danach wurden die großen Halbachsen variiert.

Für den minimalen CAO-Bauraum wurden ebenfalls Wellen mit elliptischen Kerbkonturen untersucht (Abb. 3.14, rechts). Hier wurden Wellen mit einem $D/d = 1,025$ und $D/d = 1,63$ modelliert und der minimale radiale Bauraum der entsprechenden CAO-Kerbformen als kleine Halbachse der Ellipsen festgehalten. Es wurde auch hier das Bauraumverhältnis mittels der Variation der großen Halbachse verändert.

In Abb. 3.15 werden die Spannungsverläufe entlang mehrerer elliptischer Kerbkonturen an einer Welle mit einem Durchmesser Verhältnis von 1,63 unter Biegebelastung gezeigt. Die Ellipsen wurden wie oben bereits beschrieben bei gleichbleibender kleiner Halbachse

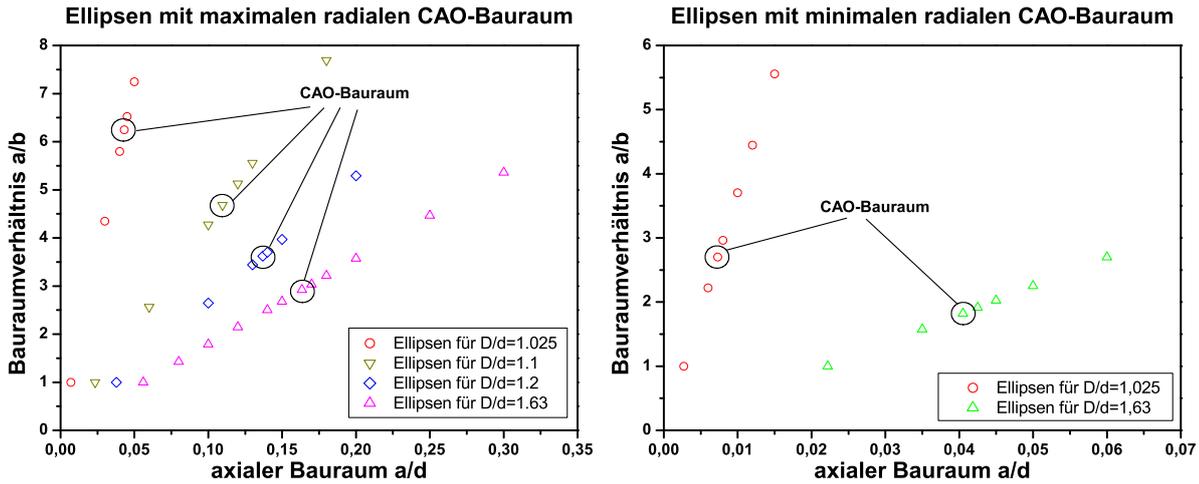


Abbildung 3.14.: Untersuchte elliptische Kerbformen

in ihren großen Halbachsen variiert. Somit werden die Konturen mit ihrem jeweiligen Bauraumverhältnis charakterisiert.

Die erste Ellipse bildet die Kreiskerbe mit einem Halbachsenverhältnis von 1. Danach wurde die lange Halbachse (axialer Bauraum) kontinuierlich vergrößert bis zu einem Halbachsenverhältnis von 5,36.

Die Kreiskerbe erzeugt die höchste Spannungsüberhöhung aller gerechneten Kerbkonturen an dieser Welle. Mit zunehmender großer Halbachse sinkt die Spannungsüberhöhung und verlagert ihren Ort in Richtung Wellenschulter bis sie ein Minimum erreicht. Danach steigt die Spannungsüberhöhung trotz zunehmender großer Halbachse wieder an. Bemerkenswert ist, dass sich alle Spannungsverläufe in einem Punkt kreuzen. Gleichzeitig stellt dieser Punkt das Minimum aller Spannungsüberhöhungen dar, da der Scheitel der Kurve mit der geringsten Spannungsüberhöhung durch diesen Punkt läuft. Die dazugehörige Kerbkontur weist ein Bauraumverhältnis auf, dass ebenfalls dem der CAO-Kerbkontur gleicht (Abb. 3.16). Daraufhin wurde untersucht, ob der CAO-Bauraum ein optimaler Bauraum für elliptische Kerbkonturen ist. Bei Wellen mit Durchmesser-Verhältnissen von 1,2/ 1,1 und 1,025 wurden ebenfalls elliptische Kerbformen in den entsprechenden CAO-Bauraum eingepasst. Danach wurden wieder, bei gleichbleibender, kleiner Halbachse, die langen Halbachsen variiert und es wurde das gleiche Verhalten wie in Abb. 3.16 auch für die anderen Wellen beobachtet. D.h. auch für kleinere Durchmesser-Verhältnisse gilt der CAO-Bauraum als optimaler Parameter für die Wahl der Halbachsen einer elliptischen Kerbform. Für Wellen mit einem Durchmesser-Verhältnis von 1,63 und 1,025 wurden weiterhin elliptische Kerbformen in den kleinsten CAO-Bauraum eingepasst und ihre großen Halbachsen variiert. Die Ellipse mit CAO-Bauraum trifft hier nicht mehr ganz das Minimum, jedoch sind die Unterschiede zu vernachlässigen.

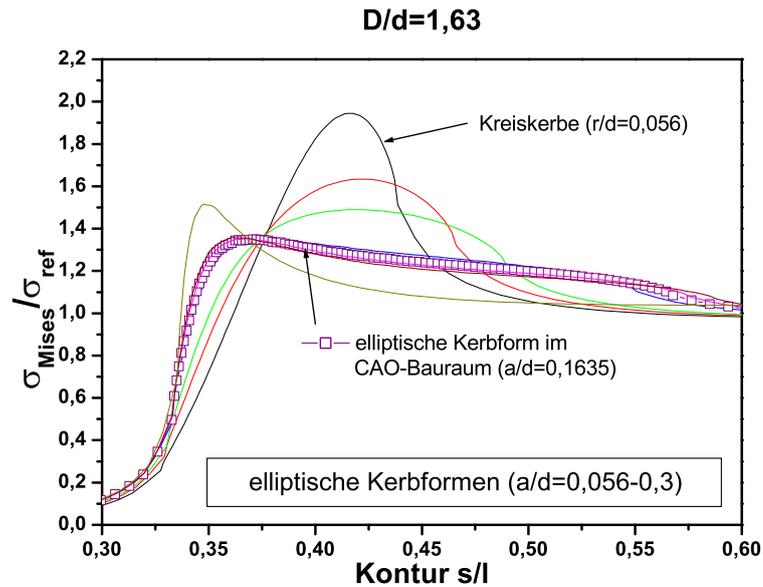


Abbildung 3.15.: Spannungsverläufe elliptischer Kerbformen

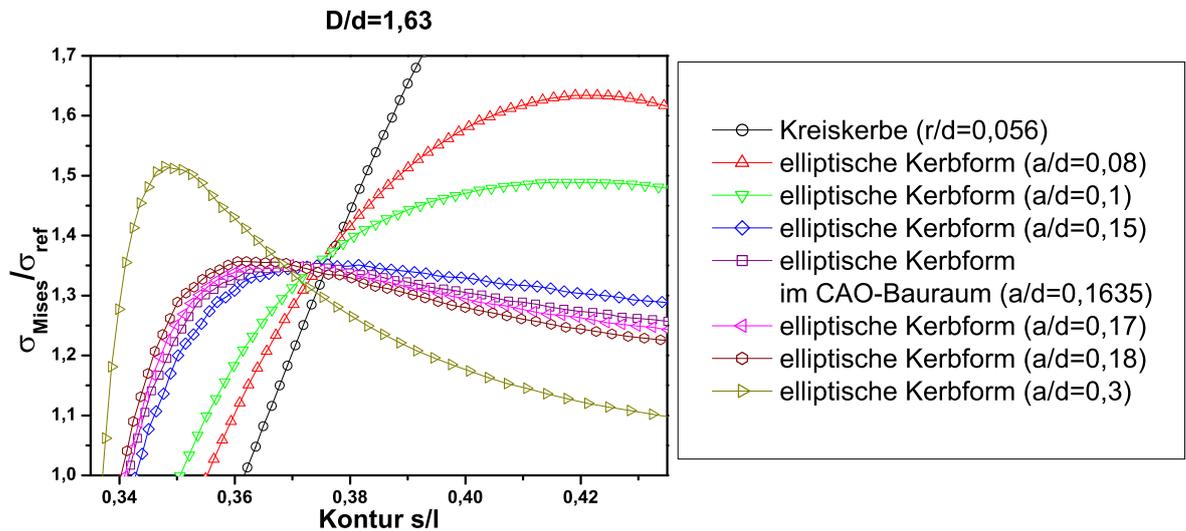


Abbildung 3.16.: Spannungsverläufe elliptischer Kerbformen (Detail)

3.4. Die Kerbe unter zweiachsiger Belastung und ihre Optimierung

Bisher wurden Balken nur unter einachsigen Belastungen untersucht und optimiert. Da jede Optimierung auch eine Spezialisierung ist, werden die vorangegangenen Analysen für zweiachsige Belastungen ihren Anspruch auf das Optimum verlieren. Darum ist es notwendig für zweiachsige Belastungen entsprechende Modelle zu erstellen und zu optimieren. Dazu wurden Balkenschultermodelle mit einem Breitenverhältnis $B/b = 3,0$

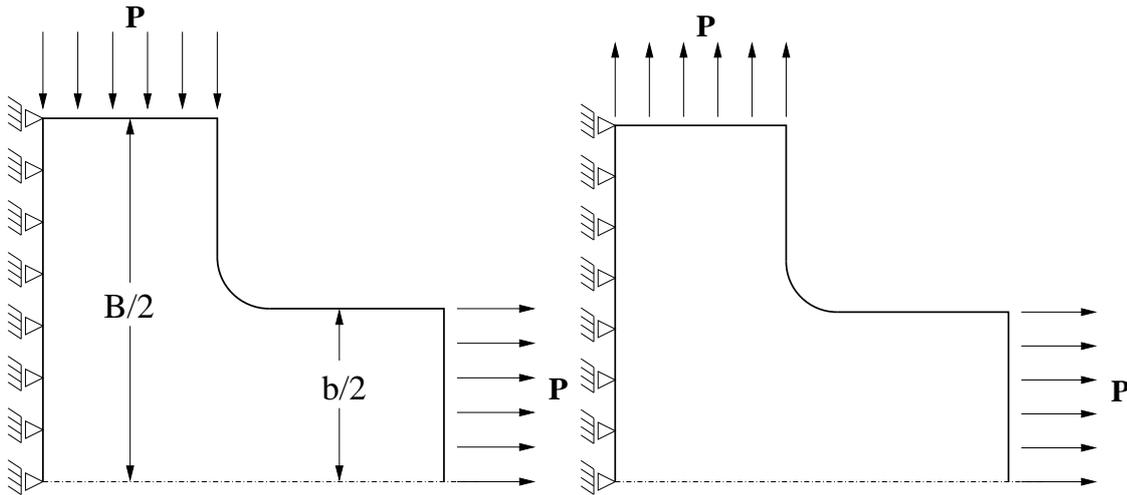


Abbildung 3.17.: Balken unter zweiachsiger Belastung (Zug-Druck und Zug-Zug)

erstellt, die in der Ebene sowohl in x - als auch in y -Richtung belastet wurden [65]. Die Lastkonfigurationen beinhalten eine Zug-Druck-Belastung (Last in positiver x -Richtung und negativer y -Richtung) und eine Zug-Zug-Belastung (Last in positiver x -Richtung und positiver y -Richtung). Das Verhältnis der beiden Lasten beträgt immer 1.

3.4.1. Zug-Druck-Belastung

Im folgenden wurden Kerben an Balkenschultern unter zweiachsigen Belastungen analysiert und optimiert. Rechts in Abb. 3.17 ist eine Balkenschulter mit Einspannung und der aufgetragenen Last dargestellt. Hier wurde eine Zug-Druck-Konfiguration der Last gewählt.

Bei der Spannungsanalyse wurde die CAO-Optimierung mit einem Kreisradius gleichen maximalen Bauraums verglichen. Abb. 3.18 zeigt links die Kerbgeometrien und rechts die zugehörigen Spannungsverläufe entlang der Konturen. Bei den Kerbkonturen fällt besonders auf, dass die Materialeinsparung bei der CAO-Optimierung enorm ist. Der Kreisradius benötigt sehr viel Material in der Mitte der Kontur, welches für eine Spannungsreduzierung nicht notwendig ist wie die Spannungsverläufe rechts in Abb. 3.18 zeigen. Vielmehr ist der seitliche Anlauf zur Konturmitte ausschlaggebend. Dies kann die CAO-Kontur realisieren. Sie reduziert bei gleichem Bauraum die Spannungsüberhöhung erheblich und erreicht eine homogene Spannungsverteilung im Bereich der Spannungsüberhöhung. Auffällig ist hier, dass zwei aufeinander folgende Spannungsüberhöhungen existieren, zwischen denen noch ein Spannungsminimum ist. Die beiden Ausläufer der Spannungsverteilung entlang der Kontur enden mit einer Spannungsüberhöhung von 1.

3.4.2. Zug-Zug-Belastung

Hier wurden Kerben an Balkenschultern unter zweiachsigen Belastungen mit einer Zug-Zug-Konfiguration analysiert und optimiert. Links auf Abb. 3.17 ist eine Balkenschulter

3. Bauteiloptimierung

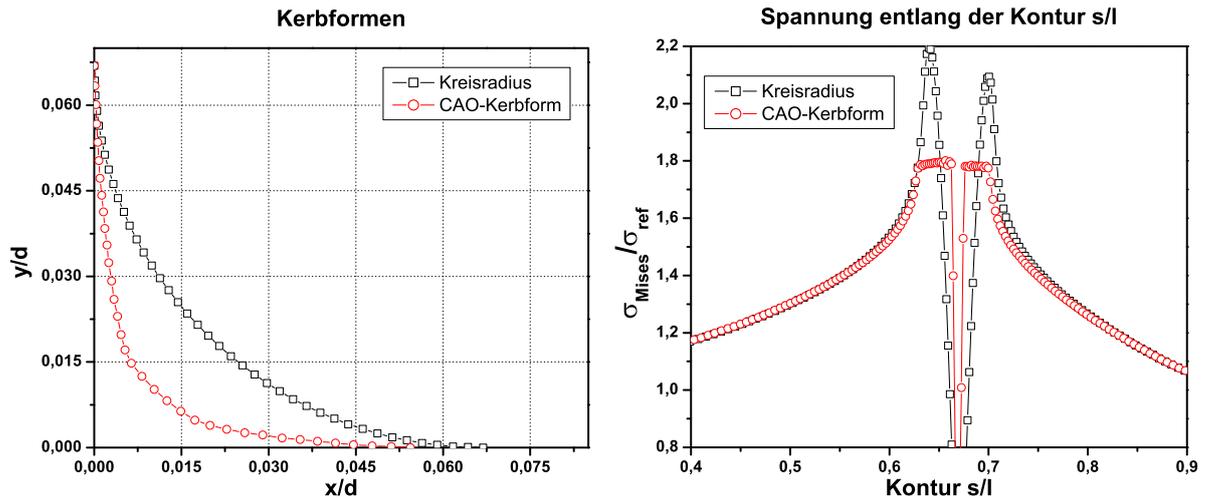


Abbildung 3.18.: CAO-Optimierte Kerbform und Kreisradius bei zweiachsiger Belastung (Zug-Druck)

mit Einspannung und der aufgebracht Last zu sehen. Es wurden beide Enden des Balkens mit einer Zugbelastung beaufschlagt.

Wie bereits in Kap. 3.4.1 wurde auch bei dieser Balkenschulter bei der Spannungsanalyse die CAO-Optimierung mit einem Kreisradius gleichen maximalen Bauraums verglichen. Abb. 3.19 zeigt links die Kerbgeometrien und rechts die zugehörigen Spannungsverläufe entlang der Konturen. Im Gegensatz zu den Konturen aus Abb. 3.18 besitzt hier die CAO-Kerbkontur in ihrer Mitte etwas mehr Material als die Kreiskerbe. Die Bauräume der CAO-Kerbkontur sind mit denen der Kreiskerbe identisch bzw. marginal kleiner. Das Spannungsmaximum befindet sich bei beiden Formen in der Mitte der Kontur, daher spielen hier die Anläufe eine untergeordnete Rolle. Vielmehr ist der Verlauf der Konturmitte von großer Bedeutung.

Die Spannungsüberhöhung der Kreiskerbe befindet sich wie bereits erwähnt in der Konturmitte. Es existiert zwar ein Spannungsmaximum an einem Punkt, jedoch fällt die Spannung seitlich des Maximums wesentlich flacher ab als es bei einachsigen Belastungen der Fall ist.

3.5. Die Kerbe im Gewindegrund einer Schraube und ihre Optimierung

Die Schraube als Verbindungselement ist in allen Bereichen des Maschinenbaus weit verbreitet. Durch die notwendige Massenfertigung dieses Konstruktionselements war sehr bald eine einheitliche Konstruktion von Schrauben notwendig, die 1964 in der weltweiten Normung des metrischen ISO-Gewindes gefunden wurde [66].

Aufgrund der funktionsbedingten Formgebung von Schrauben finden sich Kerbwirkungen an Schraubenkopf und Schraubengewinde wieder. Diese Kerben sind ein Schwach-

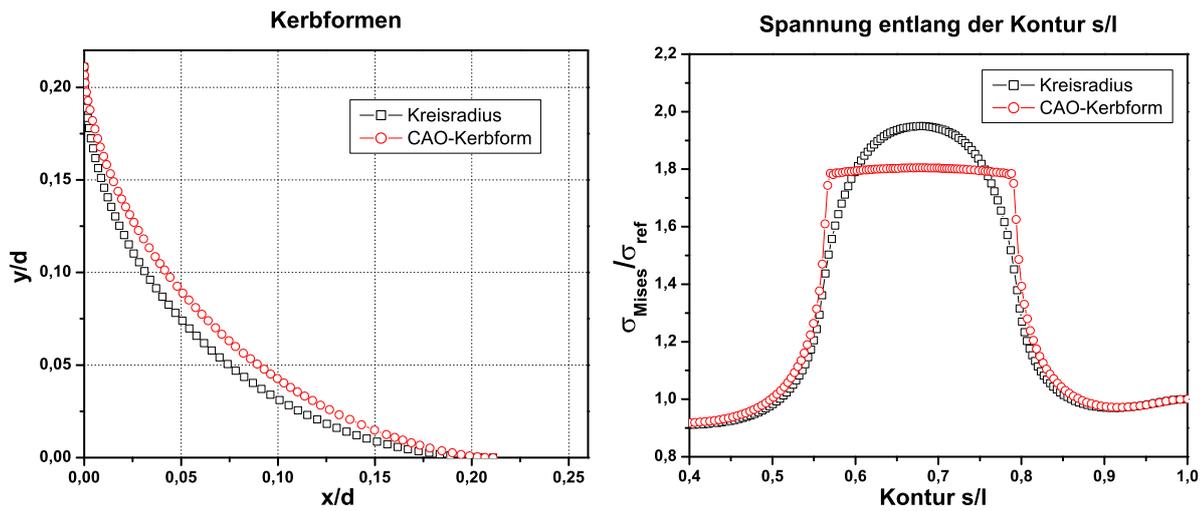


Abbildung 3.19.: CAO-Optimierte Kerbform und Kreisradius bei zweiachsiger Belastung (Zug-Zug)

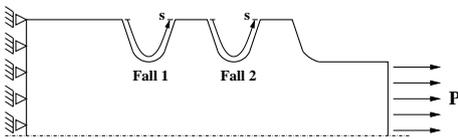


Abbildung 3.20.: Schraube unter Zugbelastung

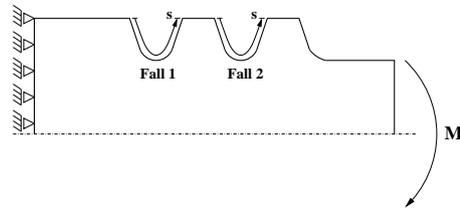


Abbildung 3.21.: Schraube unter Biegebelastung

punkt einer Schraubenverbindung und müssen berücksichtigt werden. Im folgenden werden die Kerben, die im Gewindegrund einer Schraube auftreten, analysiert und optimiert. Untersucht wurde die Gewindeform nach DIN 13-1 eines M10-Gewindes [67]. Hierbei wurde ein Gewindegang am Gewindeauslauf und ein Gewindegang am freien Gewinde modelliert und optimiert. Ein freies Gewinde wird modelliert indem man links und rechts eines Gewindegangs ausschließlich weitere Gewindegänge anschließen lässt. Weiterhin wurde ebenfalls auf die Funktionalität des Gewindes geachtet, d.h. das Wachstum bei der Optimierung unterlag geometrischen Randbedingungen. Die Modelle wurden mit einer Zuglast und einer Biegebelastung beaufschlagt.

3.5.1. Zugbelastung

Abb. 3.20 zeigt ein vereinfachtes, axialsymmetrisches Modell einer Schraube unter Zugbelastung mit zwei Gewindegängen. Zum einen den Gewindegang am Gewindeauslauf (Fall 1) und zum anderen den Gewindegang am freien Gewinde (Fall 2).

In Abb. 3.22 sieht man links die DIN-Kontur des Gewindegrunds im Vergleich mit der CAO-optimierten Kontur am Gewindeauslauf (Fall 1). Deutlich zu erkennen ist die

3. Bauteiloptimierung

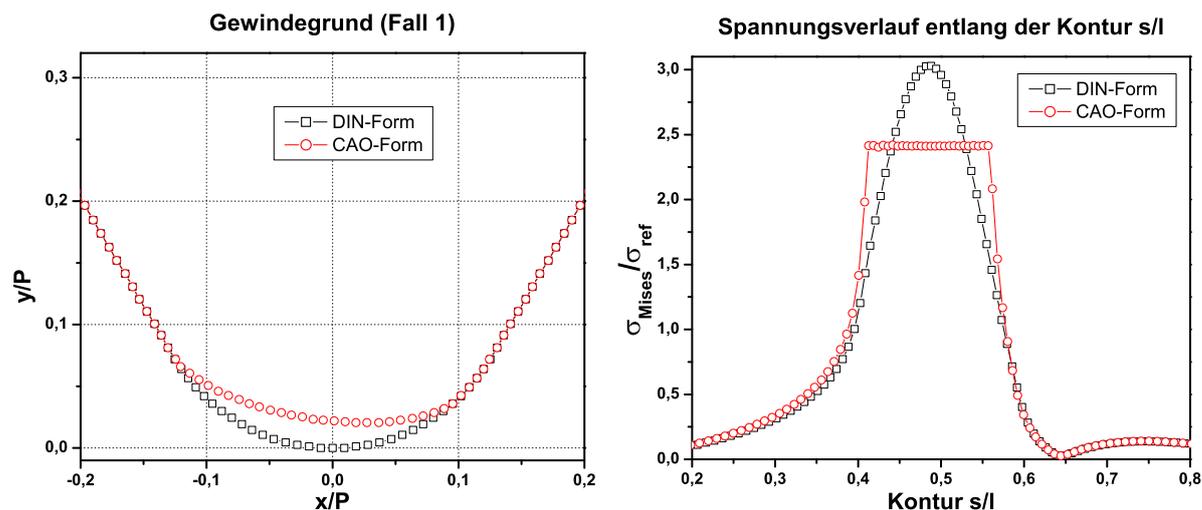


Abbildung 3.22.: DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am Gewindeauslauf bei Zugbelastung

Asymmetrie bei der optimierten Kontur, die darauf zurückzuführen ist, dass links von der Kontur eine stärkere Kraftflussumlenkung herrscht als rechts von der Kontur. Links von der Kerbkontur geht das Modell über in den Schaft (Fall 1), was die komplette Kraftflussumlenkung auf den Schaftdurchmesser zur Folge hat, und rechts von der Kontur kommt gleich der zweite Gewindegang, was in einer geringen Kraftflussumlenkung resultiert, d.h. die linke Hälfte der Kontur benötigt mehr Wachstum für eine weichere Kraftflussumlenkung als die rechte.

Rechts in Abb. 3.22 ist der Spannungsverlauf entlang der Kontur dargestellt wie er in Abb. 3.20 skizziert ist. Es wurde bei Einhaltung der geometrischen Restriktionen eine deutliche Spannungsreduktion gegenüber der DIN-Form erreicht. Im Gewindegrund herrscht eine homogene Spannungsverteilung bei der CAO-Form, die links und rechts an den Flanken stark abfällt. Der Verlauf der Spannung jeweils neben dem Spannungsmaximum unterscheidet sich deutlich, was wiederum an der Lage im Gewindeauslauf liegt.

Abb. 3.23 zeigt die DIN- und CAO-Konturen zusammen mit den zugehörigen Spannungsverläufen eines Gewindegrundes im freien Gewinde (Fall 2). Hierbei ist zu erwähnen, dass die optimierte Kontur symmetrisch ist und auch der Spannungsverlauf fällt symmetrisch zu beiden Seiten ab. Auch hier ist wieder eine deutliche Spannungsreduktion bei dem optimierten Gewindegang zu erkennen.

Aufgrund von fertigungstechnischen Einschränkungen sind unterschiedliche Gewindegrundkonturen für Gewindeauslauf und freiem Gewinde nicht immer realisierbar. Daher wurde die Kontur aus Fall 2 (freies Gewinde) durch die Kontur aus Fall 1 (Gewindeauslauf) ersetzt (Abb. 3.24). Die Maximalspannung steigt zwar etwas an gegenüber der ursprünglichen Kontur, aber sie liegt immer noch unter der Maximalspannung für den Gewindeauslauf.

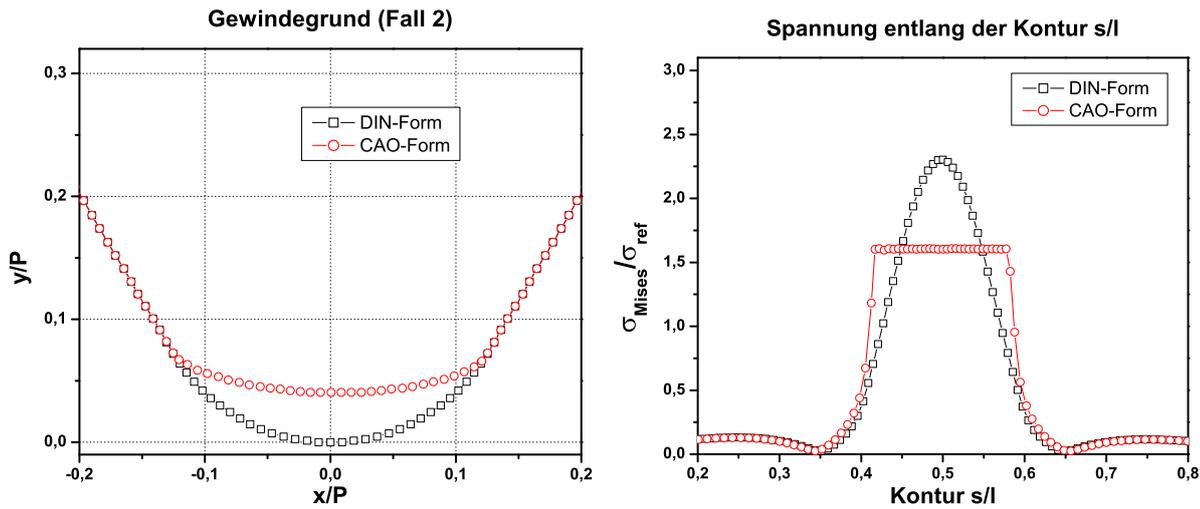


Abbildung 3.23.: DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am freien Gewinde bei Zugbelastung

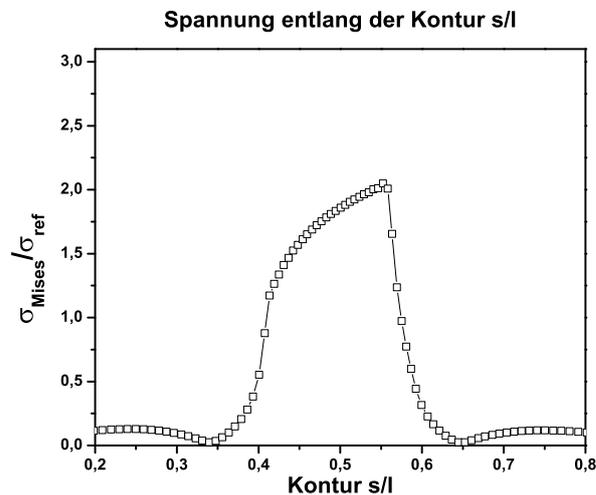


Abbildung 3.24.: CAO-optimierte Form aus Fall 1 für Fall 2 verwendet

3.5.2. Biegebelastung

Wie in Kap. 3.5.1 werden hier beide Varianten eines Gewindeganges (Fall 1 und 2) optimiert mit dem Unterschied, dass die Zuglast durch eine Biegebelastung ersetzt wurde. Das Schraubenmodell wurde ebenfalls axialsymmetrisch erstellt und mit entsprechenden Randbedingungen versehen.

Die beiden optimalen Konturen in Abb. 3.25 und 3.26 unterscheiden sich kaum von denen aus Kap. 3.5.1 aufgrund der geometrischen Restriktionen, die der Optimierung auferlegt waren. Im qualitativen Verlauf gleichen sich die einzelnen Konturen, während es im quantitativen Verlauf leichte Abweichungen im maximalen Wachstum der Kontur gibt.

3. Bauteiloptimierung

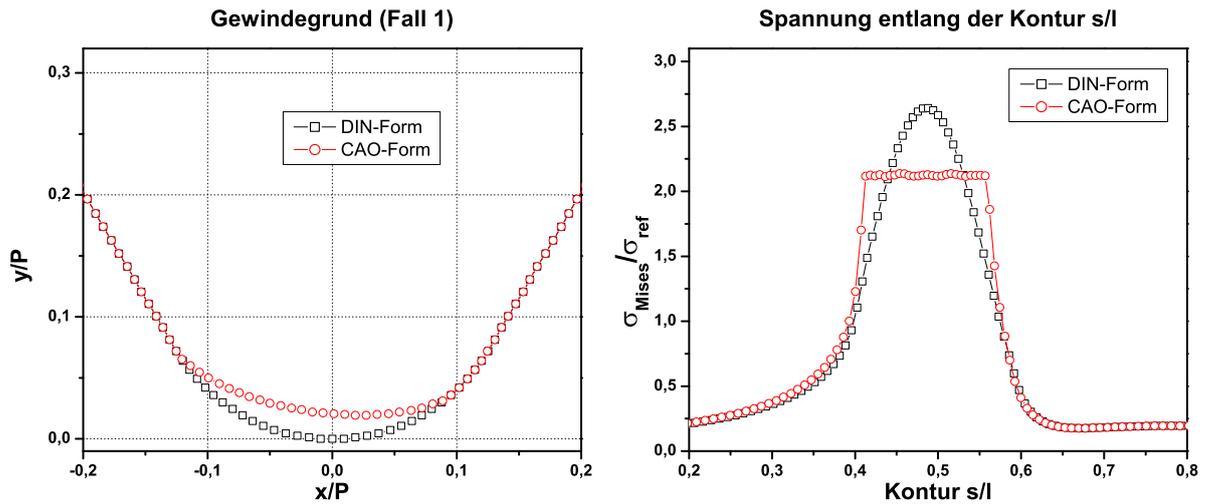


Abbildung 3.25.: DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am Gewindeauslauf bei Biegebelastung

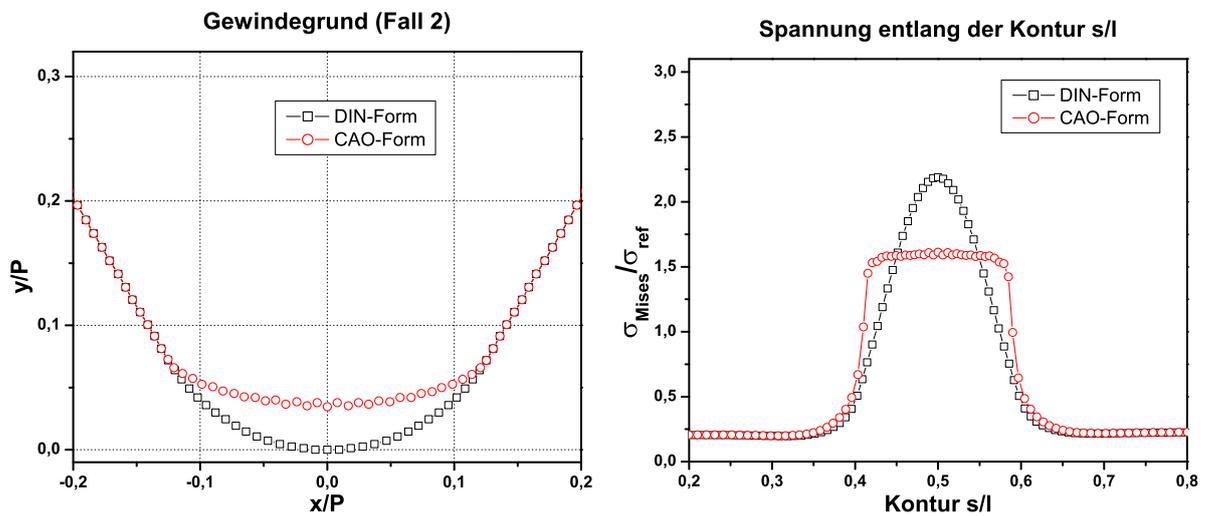


Abbildung 3.26.: DIN-Form und CAO-optimierte Form des Gewindegrunds am freien Gewinde bei Biegebelastung

Auch im Verlauf der Spannungen gibt es kaum Unterschiede zu den Ergebnissen aus Kap. 3.5.1. Die maximalen Spannungen fallen kleiner aus als im Zugfall und der Spannungsabfall seitlich der Spannungsüberhöhung sinkt nicht auf ein solch niedriges Niveau wie bei der Zugschraube.

3.6. Die CAO-Methode in der Strömungsmechanik

Zwischen einem ebenen Spannungszustand und einer ebenen Potentialströmung besteht eine Analogie, die bereits in der Literatur besprochen wurde [68], [69]. Diese Analogie wurde einerseits genutzt, um Strömungsprobleme besser darstellen zu können [70], [71] und andererseits, um neue spannungsoptische Methoden für Spannungsanalysen zu entwickeln [72], [73], [74].

Die Grundlage für diese Analogie bilden die Differentialgleichungen für das Strömungs- und Spannungsproblem. Die allgemeine Navier-Stokes-Gleichung nähert sich für sehr kleine Reynoldszahlen (zähe Strömungen) der Stokes-Gleichung. Zwischen Stokes-Gleichung und der Differentialgleichung für ebene Spannungsprobleme besteht eine Analogie, die es erlaubt für eine Reihe von Problemen die Stromfunktion mit der Airyschen Spannungsfunktion zu vergleichen.

Mit Hilfe von FE-Analysen wurden die Spannungen in einem ebenen Biegebalken mit Querschnittsprung qualitativ mit den Wandschubspannungen in einer ebenen, divergierenden Kanalströmung verglichen. Die Ausführung der Randkontur am Querschnittsprung ist in beiden Fällen von besonderem Interesse und übt einen signifikanten Einfluss auf die Ergebnisse aus. Es wurde sowohl für die Kanalströmung als auch den Biegebalken ein Viertelkreisradius, eine Ellipse und eine mit der CAO-Methode optimierte Kerbform als Querschnittsübergangskontur modelliert [75].

3.6.1. Die Differentialgleichung für den ebenen Spannungszustand

Die Forderung nach Gleichgewicht an einem Element (Abb. 3.27) in x- und y-Richtung führt zu folgenden Gleichungen:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)dy - \sigma_x dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx - \tau_{yx}dx + X_0 dxdy = 0 \quad (3.1)$$

$$\left(\sigma_y + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}\right)dx - \sigma_y dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)dy - \tau_{xy}dy + Y_0 dydx = 0 \quad (3.2)$$

Daraus gehen die Gleichgewichtsbedingungen hervor:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

bei Vernachlässigung der Volumenkräften X_0 und Y_0 . Mit den Gl. 2.7 und 2.8 aus dem Hookschen Gesetz und der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial^2\epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} \quad (3.5)$$

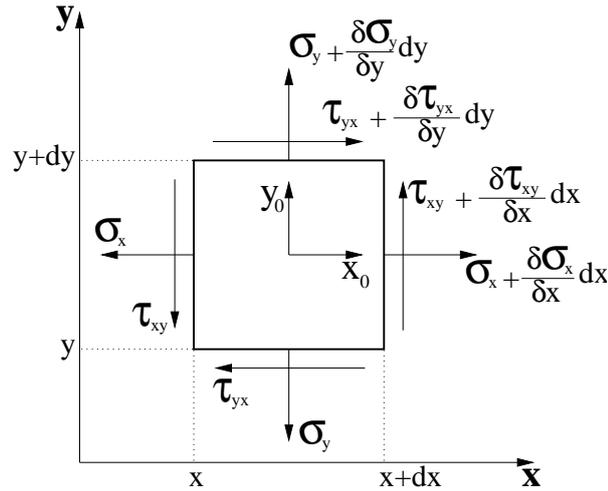


Abbildung 3.27.: Spannungen und Volumenkräfte am ebenen Element

erhält man:

$$\frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{G} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (3.6)$$

Nun wird eine Spannungsfunktion so gewählt, dass sie die Gleichgewichtsbedingungen (Gl. 3.4 und 3.4) befriedigt. Unter einer Spannungsfunktion versteht man eine skalare Funktion, aus der man durch Differentiation Spannungen erhält. Für den ebenen Spannungszustand wird die Airysche Spannungsfunktion wie folgt definiert:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (3.9)$$

Daraus folgt die, mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion geschriebene, Differentialgleichung für ebene Spannungsprobleme mit [76]:

$$\Delta \Delta \phi = 0 \quad (3.10)$$

3.6.2. Die Differentialgleichung der ebenen Strömung

Die allgemeine Navier-Stokes-Gleichung für zweidimensionale, stationäre Strömungen mit der Stromfunktion ψ als Wirbeltransportgleichung geschrieben lautet [77]:

$$\Delta \Delta \psi = Re \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) \quad (3.11)$$

mit der Reynoldszahl Re und der Stromfunktion ψ , die wie folgt definiert ist:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3.12)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.13)$$

Die Strömungsgeschwindigkeiten u und v sind somit durch die partiellen Ableitungen der Stromfunktion ψ gegeben.

Aus Gl. 3.11 ist zu ersehen, dass die Reynoldszahl das Verhältnis aus Zähigkeitskräften und Trägheitskräften darstellt. Für sehr kleine Reynoldszahlen ($Re \rightarrow 0$) überwiegen die Zähigkeitskräfte und Gl. 3.11 geht über in die Stokes-Gleichung

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad (3.14)$$

für zähe, inkompressible Strömungen. Das Streichen der Trägheitsglieder im Grenzfall sehr langsamer Strömungen kann mathematisch als zulässig angesehen werden, da hierbei die Ordnung der Differentialgleichung nicht erniedrigt wird [78].

Für einige Probleme, z.B. ebene Kanalströmung und flacher Biegestab, liegt bezüglich Gl. 3.10 und 3.14 Identität vor [71].

In diesem Fall herrscht zwischen den Spannungen σ_x , σ_y und den Strömungsgeschwindigkeiten u , v folgender Zusammenhang:

$$\sigma_x = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.15)$$

$$\sigma_y = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.16)$$

3.6.3. Analogie zwischen einer ebenen Kanalströmung und einem Flachstab unter reiner Biegung

Für die stationäre, ebene Schichtenströmung in x-Richtung ($v = 0$) in einem Kanal mit einer Breite von $2h$, zwei parallelen Wänden bei $y = \pm h$ (Abb. 3.28) und $Re \rightarrow 0$ vereinfacht sich die Stokes-Gleichung zu

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.17)$$

mit den Randbedingungen (Haftbedingungen)

$$u(y = \pm h) = 0 \quad (3.18)$$

Die Lösung von Gl. 3.17 liefert die parabolische Geschwindigkeitsverteilung [79]

$$u(y) = -\frac{1}{2\eta} (h^2 - y^2) \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.19)$$

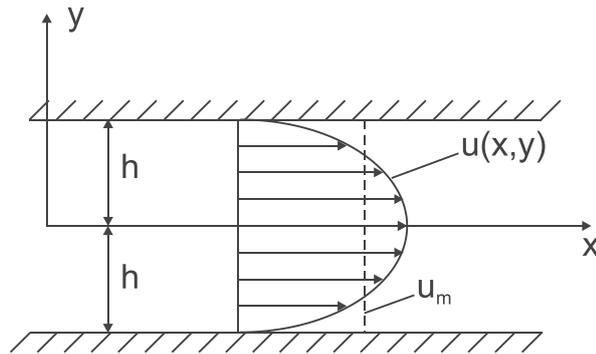


Abbildung 3.28.: Ebene Kanalströmung

Dabei ist der Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ konstant und das Geschwindigkeitsprofil nach Gl. 3.19 in x-Richtung unveränderlich. Aus dem parabolischen Geschwindigkeitsprofil lässt sich eine mittlere Geschwindigkeit u_m nach dem Prinzip des äquivalenten Durchflusses ermitteln:

$$u_m = \frac{h^2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.20)$$

Damit berechnet sich die Wandschubspannung $\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$ mit Hilfe der Gln. 3.19 und 3.20 zu:

$$\tau = \frac{\partial p}{\partial x} y = \frac{3\eta}{h} u_m \quad (3.21)$$

Bei einer sich in y-Richtung verändernden Randkontur, wie es bei einem divergierenden Kanal der Fall ist, kommt eine weitere Geschwindigkeitskomponente hinzu (v -Komponente). Demnach ändert sich auch die Gleichung zur Berechnung der Wandschubspannung zu:

$$\tau = \eta \frac{\partial w}{\partial n} \quad (3.22)$$

wobei w die resultierende Geschwindigkeit mit $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist und $\frac{\partial w}{\partial n}$ der Gradient normal zur Randkontur.

Bei der ebenen Kanalströmung ist eine Strömungsrandbedingung am Kanaleinlass nicht vorgesehen. Wird nun in einer numerischen Simulation am Einlass des Kanals ein nicht-parabolisches Geschwindigkeitsprofil aufgeprägt ($u = const$), so wird bei den getroffenen Annahmen (inkompressibel, stationär, $Re \rightarrow 0$) sich trotzdem stromabwärts stets die Geschwindigkeit nach Gl. 3.19 einstellen. Somit ergibt sich mit Gl. 3.19 und den Beziehungen aus den Gln. 3.16 und 3.16 ein linearer Spannungsverlauf für die aufgebrachte Last am Balken. Eine Analogie zum statischen Strukturproblem lässt sich damit nur herstellen, wenn der Balken unter reiner Biegung betrachtet wird.

3.6.4. Modellierung

Die Lösungen der Stokes-Gleichung stellen sich ein, wenn entsprechende Voraussetzungen eingehalten werden ($Re \rightarrow 0$, inkompressibel, laminar). Skizzen der untersuchten

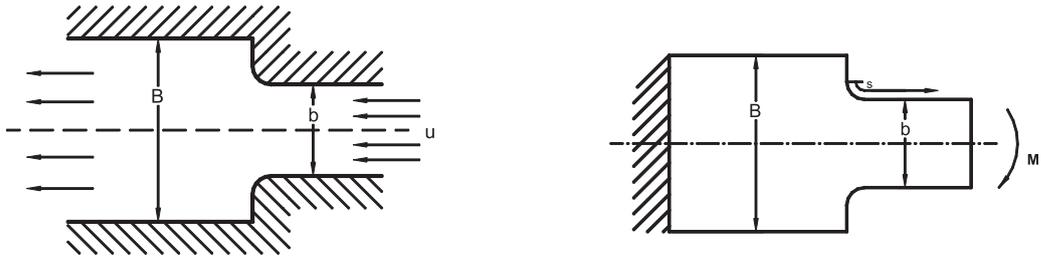


Abbildung 3.29.: Durchströmter, divergierender Kanal und Biegebalken mit einem Breitenverhältnis B/b

Geometrien zeigt Abb. 3.29. Das Breitenverhältnis B/b beträgt 1,63, wobei die kleinere Breite mit $b = 100\text{mm}$ gewählt wurde. Die Kontur am Querschnittsprung ist ein Simulationsparameter und hat wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse. Für die jeweiligen Berechnungen wurden drei verschiedene Konturen modelliert. Eine kreisförmige Kontur mit Radius $r = 5,6\text{mm}$, eine ellipsenförmige Kontur mit einer kurzen Halbachse $b = 5,6\text{mm}$ und einer langen Halbachse $a = 16,35\text{mm}$ und eine CAO-optimierte Form mit $b = 5,6\text{mm}$ und $a = 16,35$.

Die Geschwindigkeit am Kanaleinlass betrug konstant 1mm/s und ist somit unverträglich mit den Randbedingungen aus Gl. 3.18. Die Haftbedingung wurden jedoch erzwungen, so dass im Einlassbereich in Wandnähe ein großer Geschwindigkeitsgradient existiert. Die Ein- und Auslasslängen wurden entsprechend lang dimensioniert, damit sich im Bereich des Querschnittsprungs ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil einstellen konnte.

Die Reynoldszahl wurde entsprechend eines zähflüssigen Mediums mit $Re = 0,1$ gewählt. Hierbei ist die Einlasskanalhöhe $d = 2h = 100\text{mm}$, die Dichte $\rho = 0,001\frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$, die mittlere Anströmgeschwindigkeit $u_m = 1\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ und die dynamische Zähigkeit $\eta = 1\frac{\text{g}}{\text{mms}}$. Vergleichsweise dazu beträgt η für Glycerin ca. 0,015, für Wasser ca. 0,001 und für geschmolzenes Glas bei 800K ca. $10\frac{\text{g}}{\text{mms}}$.

3.6.5. Ergebnisse

Die Konturplots in Abb. 3.30 zeigen die resultierende Geschwindigkeit w im Bereich des Querschnittsprungs. Von links nach rechts werden die Geschwindigkeiten bei einem kreisförmigen Übergang am Querschnittsprung, bei einem ellipsenförmigen Übergang und bei einer mit der CAO-Methode optimierten Randkontur dargestellt. Deutlich zu sehen sind die erhöhten Gradienten der resultierenden Geschwindigkeit normal zur Wandkontur bei den kreis- und ellipsenförmigen Übergängen, wohingegen bei der CAO-Form kaum eine Erhöhung des Gradienten zu bemerken ist. Der Gradient normal zur Wandkontur ist ein Maß für die Wandschubspannung nach Gl. 3.22.

3. Bauteiloptimierung

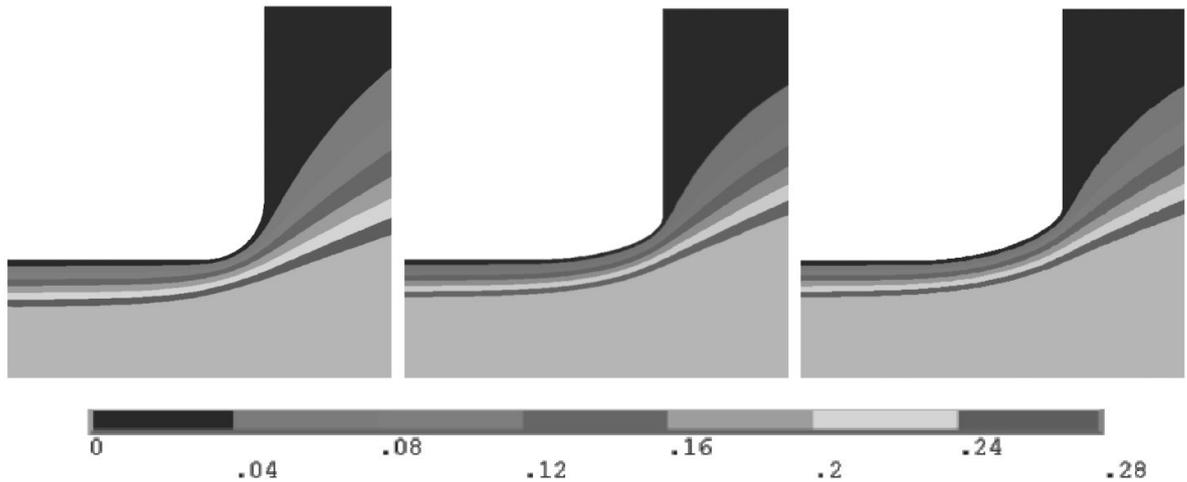


Abbildung 3.30.: Konturplot der resultierenden Strömungsgeschwindigkeit im Bereich der Querschnittsverbreiterung

Daraus wurde analog zum Spannungskonzentrationsfaktor in der Festigkeitslehre ein Faktor k mit

$$k = \frac{\tau_{Wand}}{\tau_{ref}} \quad (3.23)$$

gebildet, wobei $\tau_{ref} = \frac{3\eta}{h}u_m$ ist.

Für den Biegebalken wurde ein Faktor k mit

$$k = \frac{\sigma_{SP1}}{\sigma_{ref}} \quad (3.24)$$

berechnet.

Abb. 3.31 zeigt den Faktor k sowohl für den Biegebalken als auch für die Kanalströmung aufgetragen über einer Laufvariablen s , die entlang der Randkontur definiert ist (Abb. 3.29). Eine deutliche, qualitative Übereinstimmung der einzelnen k -Faktoren ist zu erkennen, wobei die maximalen Werte des Biegebalkens quantitativ höher ausfallen als die der Kanalströmung.

Daraus kann gefolgert werden, dass die CAO-Optimierung der Randkontur nicht nur eine Optimierung des Spannungsverlaufs bei einem Flachstab unter reiner Biegung bewirkt, sondern auch bei der ebenen Kanalströmung eine signifikante Reduktion der Wandschubspannung zu erkennen ist. Somit kann der Spannungsverlauf hinsichtlich der Wandschubspannung bei einer ebenen Kanalströmung ebenfalls mit der CAO-Methode optimiert werden.

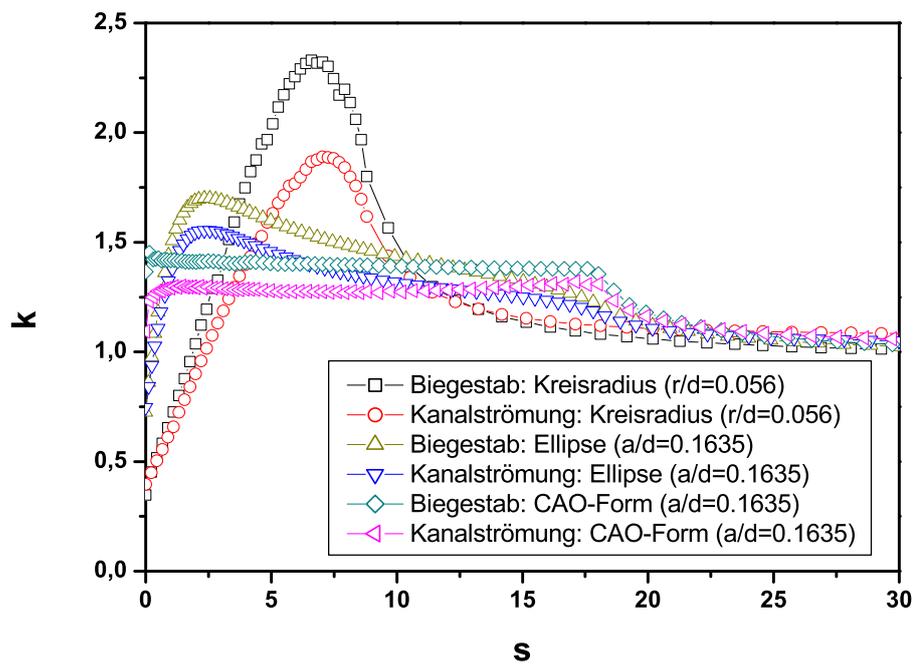


Abbildung 3.31.: Spannungskonzentrationsfaktoren für Biegebalken und Kanalströmung

4. Die analytische Kerbformoptimierung

4.1. Beobachtungen zur Kerbspannung

4.1.1. Selbstoptimierung bei großen Dehnungen

Bei großen Dehnungen bewirkt die Deformation einer Kerbe eine gewisse Selbstoptimierung hinsichtlich der Spannungsüberhöhung und dem Spannungsverlauf entlang der Kerbkontur. Durch die starke Deformation der Kerbe wird diese in Lastrichtung in die Länge gezogen (Abb. 4.1, dunkle Bereiche kennzeichnen hier Bereiche hoher Spannung). Bezieht man die durch die Dehnung erzeugte deformierte Kerbkontur in die Spannungsanalyse durch eine nichtlineare geometrische Analyse mit ein, so sollte eine Absenkung der Spannungsüberhöhung zu beobachten sein [80].

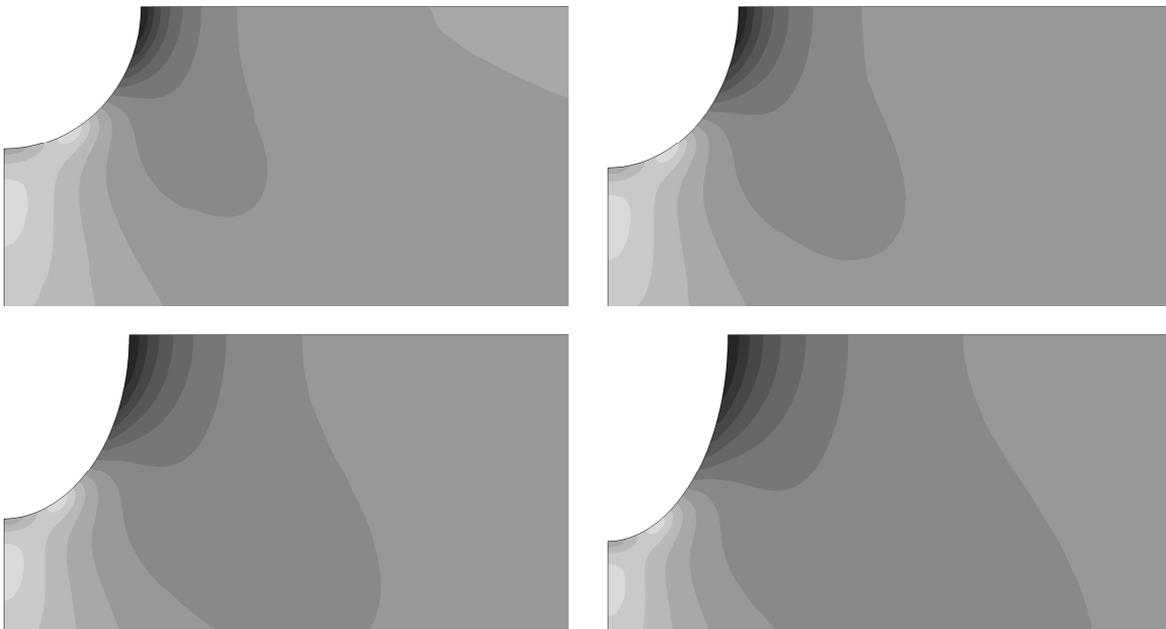


Abbildung 4.1.: Spannungs- und Verformungsplot bei verschiedenen Längen

4. Die analytische Kerbformoptimierung

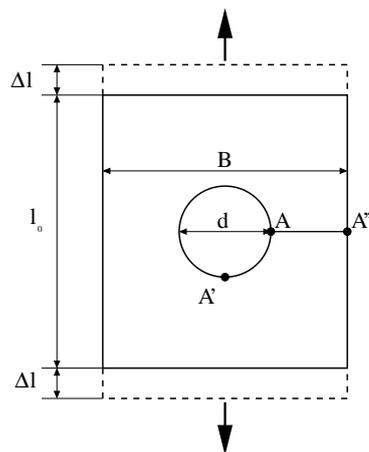


Abbildung 4.2.: Lochplatte mit vorgegebener Längung

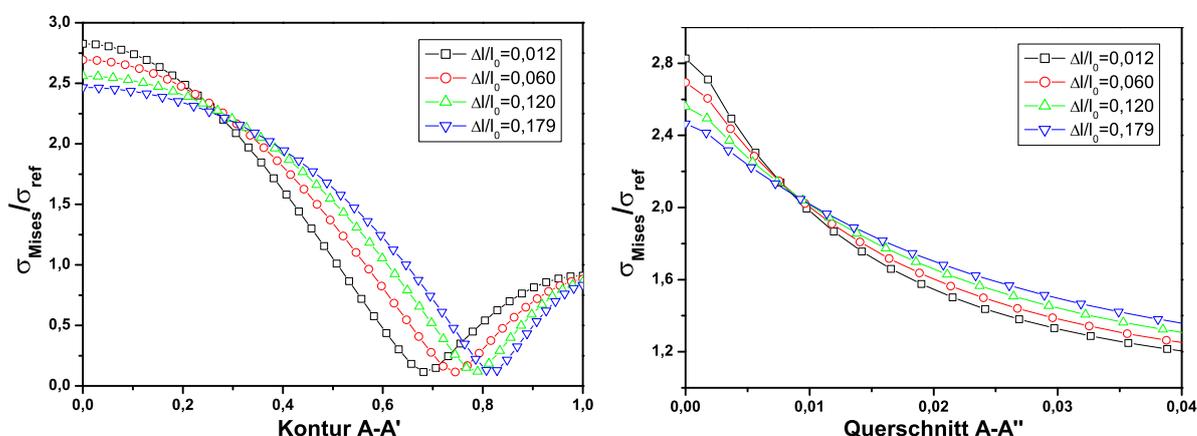


Abbildung 4.3.: Spannungsverteilung bei variierender Längung

Um dies zu zeigen wurde eine Lochplatte unter Zug mit $B/d = 20$ modelliert (Abb. 4.2) und die Spannungsverläufe entlang der in der Skizze gegebenen Wege dargestellt. In Abb. 4.3 sind die Spannungsverläufe entlang der Lochkontur $A - A'$ sowie entlang der Plattenbreite $A - A''$ zu sehen bei denen man durchaus eine Absenkung der Spannungsüberhöhung sowie eine Homogenisierung des Spannungsverlauf mit zunehmender Längung feststellen kann.

4.1.2. Separation von Kerbspannungen

Die räumliche Separation von Kerbspannungen ist zwar keine Optimierung im Sinne einer Gestaltoptimierung. Sie zählt jedoch zu den einfachsten Mitteln Kerbspannungen zu reduzieren [80].

Links in Abb. 4.4 wird eine Platte gezeigt, die mit einem Langloch auf Zug belastet wird. Bei einer kreisförmigen Aussparung in der Platte würden zwei Spannungsüberhöhungen entstehen (Abb. 2.3), die jedoch “auseinandergezogen” werden, wenn aus dem

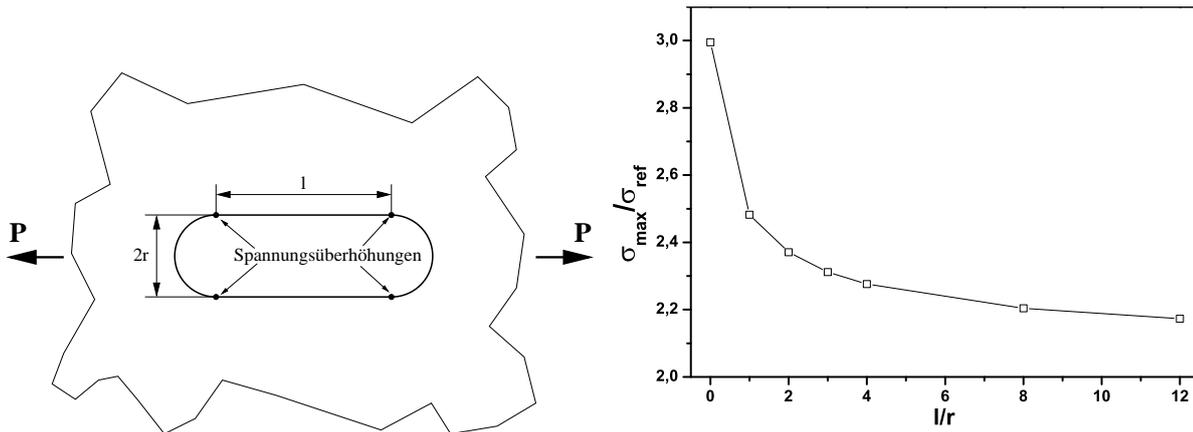


Abbildung 4.4.: Spannungserhöhung in Abhängigkeit von der Entfernung der beiden Spannungskonzentrationen

kreisförmigen Loch ein Langloch wird. Während bei der kreisförmigen Lochkontur noch die maximale Spannungserhöhung herrscht, wird die Spannungserhöhung am Langloch kleiner. Zur Berechnung der Spannungserhöhung wurde als Referenzspannung σ_{ref} die Bruttospannung σ verwendet, wie sie in Kap. 2.3 beschrieben wurde. Die Reduktion der Spannungserhöhung in Abhängigkeit von der Länge des Langlochs wird rechts in Abb. 4.4 dargestellt. Hier ist die rasche Absenkung der Spannungserhöhung schon bei einer relativ kleinen Verlängerung des Kreisloches bemerkenswert, die danach bei immer größeren Längen asymptotisch auf den Wert 2 sinkt. Die Plattenbreite und -länge beträgt $B/r = 200$ und die Länge des Langlochs wird mit Vielfachen des Kreisradius r angegeben, die mit $12r$ ihr Maximum erreicht. Bereits bei einer Länge von einem r wurden 62% der maximalen Reduktion der Spannungserhöhung erreicht.

4.1.3. Die Kerbspannung in Abhängigkeit der Kraftflussumlenkung

Einen großen Einfluss auf die Spannungserhöhung einer Kerbe hat ihr Krümmungsradius. Je kleiner der Krümmungsradius ist, desto größer ist die Spannungserhöhung. Des weiteren spielt aber auch die Kraftflussumlenkung an einer Kerbe eine Rolle bei der Größe des Spannungserhöhungsfaktors. In [18] wird für den ebenen Spannungszustand bei einer scharf gekrümmten, symmetrischen Kerbe unter Schub- und Zugbelastung ein sogenannter Flankenwinkel eingeführt. Ebenso werden Zusammenhänge aufgeführt, die den Einfluss des Flankenwinkels einer Kerbe auf ihre Spannungserhöhung beschreiben.

In diesem Abschnitt wurde speziell für die Wellenschulter ein sogenannter Schulterwinkel eingeführt. Er beschreibt den Winkel den die Schulterebene einer Welle mit deren axialer Ebene eingeht (Abb. 4.5).

Es wurden axialsymmetrische Modelle einer Welle unter Zugbelastung für verschiedene Winkel erstellt und numerisch analysiert. Hierbei wurde die Krümmung der Kerbe

4. Die analytische Kerbformoptimierung

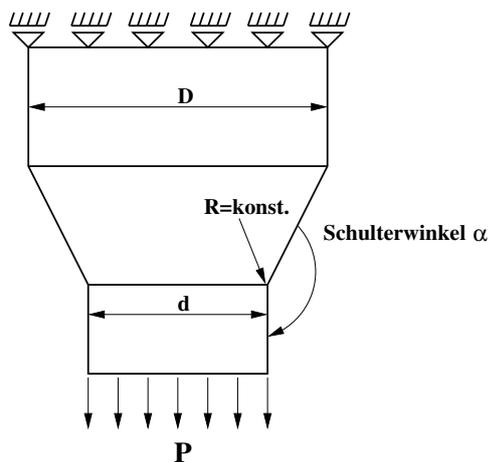


Abbildung 4.5.: Welle mit Schulterwinkel

konstant gehalten ($R/d = 0,02$) und die Winkel von 0° bis 150° variiert. Das Durchmesserverhältnis D/d betrug $1,63$.

In Abb. 4.6 sind die verschiedenen Spannungsverteilungen für die jeweiligen Schulterwinkel zu sehen. Hier sind deutlich die Konturverläufe mit den verschiedenen starken Umlenkungen zu sehen. Mit einem Schulterwinkel von 0° wird die stärkste Kraftflussumlenkung erreicht, gefolgt von einem Schulterwinkel von 45° . Die herkömmliche Wellenschulter weist einen Winkel von 90° auf. Die letzten drei Schulterwinkel folgen dicht aufeinander in 15° -Abständen mit 120° , 135° und 150° .

Abb. 4.7 zeigt die Spannungsüberhöhungen für die jeweiligen Kraftflussumlenkungen. Das erste Diagramm stellt das Verhältnis zwischen σ_{Mises} und σ_{ref} , aufgetragen entlang der Kerbkontur, dar. Das zweite Diagramm zeigt die Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit des Schulterwinkels. Deutlich zu sehen ist die kontinuierliche Abnahme der Spannungsüberhöhung bei Zunahme des Schulterwinkels. Zunächst wird durch Erhöhung des Schulterwinkels nur eine verhältnismäßig kleine Reduktion der Spannungsüberhöhung erreicht, welche aber bei einem Schulterwinkel ab 90° stark zunimmt. Diese Analysen zeigen ausschließlich den Einfluss der Kraftflussumlenkung auf die Spannungsüberhöhung, da die Krümmung im Kerbgrund über die Schulterwinkelvariation konstant gehalten wurde.

4.1.4. Kegelförmige Kerbformen

Aufgrund des Einflusses der Kraftflussumlenkung auf die Spannungsüberhöhung liegt es nahe bei einem Querschnittsprung eines Bauteils keine herkömmliche Kreiskerbe mit einem Schulterwinkel von 90° zu verwenden, sondern einen flacheren Anstieg der Kontur, um die erforderliche Schulterhöhe zu erreichen. Um dabei den Bauraum möglichst klein zu halten, wird eine kegelförmige Kerbe (Abb. 4.8) eingeführt, die anstatt an einem Knick den Kraftfluss an zwei, örtlich voneinander getrennten, Stellen wesentlich sanfter umlenkt.

4.1. Beobachtungen zur Kerbspannung

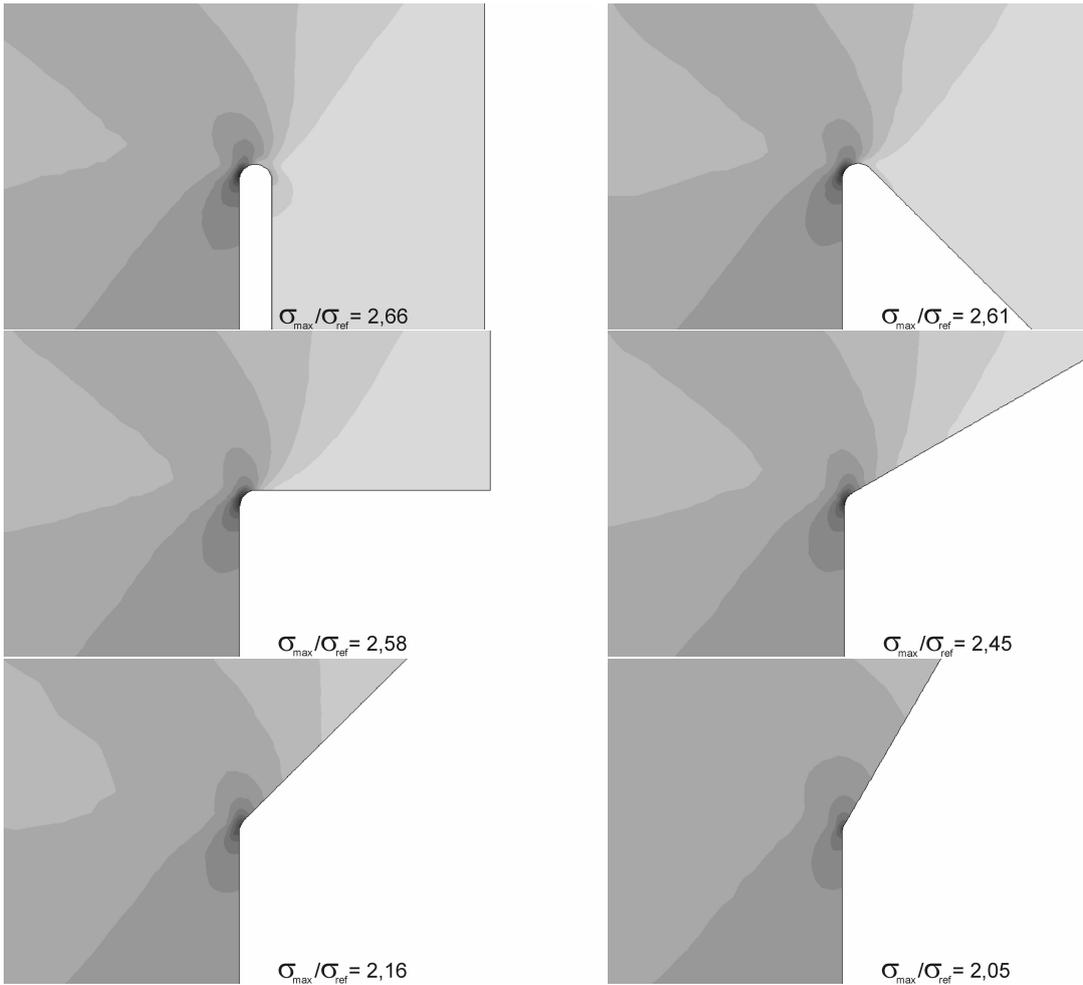


Abbildung 4.6.: Spannungsverteilungen bei verschiedenen Kraftflussumlenkungen

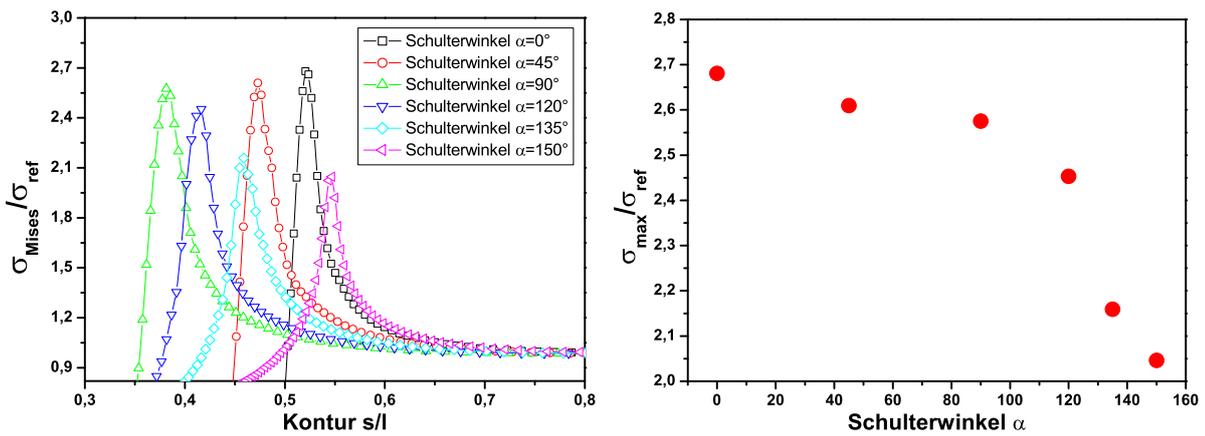


Abbildung 4.7.: Die Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit des Schulterwinkels

4. Die analytische Kerbformoptimierung

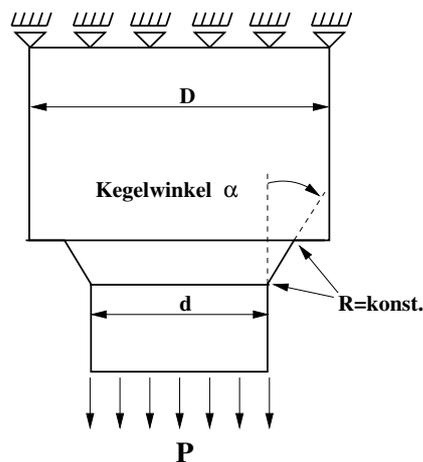


Abbildung 4.8.: Welle mit kegelförmiger Kerbe

Es wurden axialsymmetrische Modelle einer Welle unter Zugbelastung mit verschiedenen Kegelwinkeln erzeugt. Die Wellen hatten alle ein Durchmesser Verhältnis D/d von 1,63, wobei der Kegelwinkel zwischen den einzelnen Wellen verändert wurde. Die beiden Knicke, die durch die Kegelkontur entstehen, wurden mit einem Radius ($R/d = 0,02$) ausgerundet, der für alle untersuchten Modelle konstant blieb.

Abb. 4.9 zeigt die Spannungsverteilung an den kegelförmigen Kerben für verschiedene Kegelwinkel. Die Winkel wurden zwischen $14,6^\circ$ und $59,5^\circ$ variiert. Bei einem Kegelwinkel von $14,6^\circ$ ist der untere Knick sehr schwach ausgeprägt und die Kraftflussumlenkung nur sehr gering. Dadurch tritt dort praktisch keine Spannungsüberhöhung auf. Dafür ist die Umlenkung des Kraftflusses an der Stelle an der der Kegel in die Schulter eintritt umso stärker, was eine deutliche Spannungsüberhöhung zur Folge hat. An dieser kegelförmigen Kerbkontur kann nun durch einen bestimmten Kegelwinkel an beiden Orten der Kraftflussumlenkung eine Spannungsüberhöhung gleicher Höhe erzeugt werden, die verglichen mit den größten Spannungsüberhöhungen für andere Kegelwinkel ein Minimum darstellt. Dies ist mit einem Kegelwinkel von 20° gelungen (Abb. 4.10). Die Kraftflussumlenkungen an beiden Knicken erzeugen die gleichen Spannungsüberhöhungen. Erhöht man nun den Kegelwinkel auf 22° ist die Umlenkung am unteren Knick bereits zu hoch für eine konstante Verteilung der Spannungsüberhöhungen. Mit steigendem Kegelwinkel ($26,6^\circ$, 45° und $59,5^\circ$) steigt auch die Spannungsüberhöhung am unteren Knick bei gleichzeitigem Sinken der Spannungsüberhöhung am oberen Knick.

4.1.5. Multilinearisierte CAO-Kerbform

Aufgrund der Erkenntnisse aus Kap. 4.1.4 liegt es nahe die Anzahl der Knicke zu erhöhen und somit den Betrag der gleichgroßen Spannungsüberhöhungen weiter zu senken. Um die einzelnen Knickwinkel einer multilinearisierten Kerbkontur zu bestimmen, wurden diese aus einer CAO-optimierten Kerbform entnommen. Dabei wurde die CAO-Kontur in gleichgroße Abschnitte aufgeteilt und die Winkel für die einzelnen Segmente der multilinearisierten Kerbform an die Steigungen in den jeweiligen Abschnitten der CAO-Form

4.1. Beobachtungen zur Kerbspannung

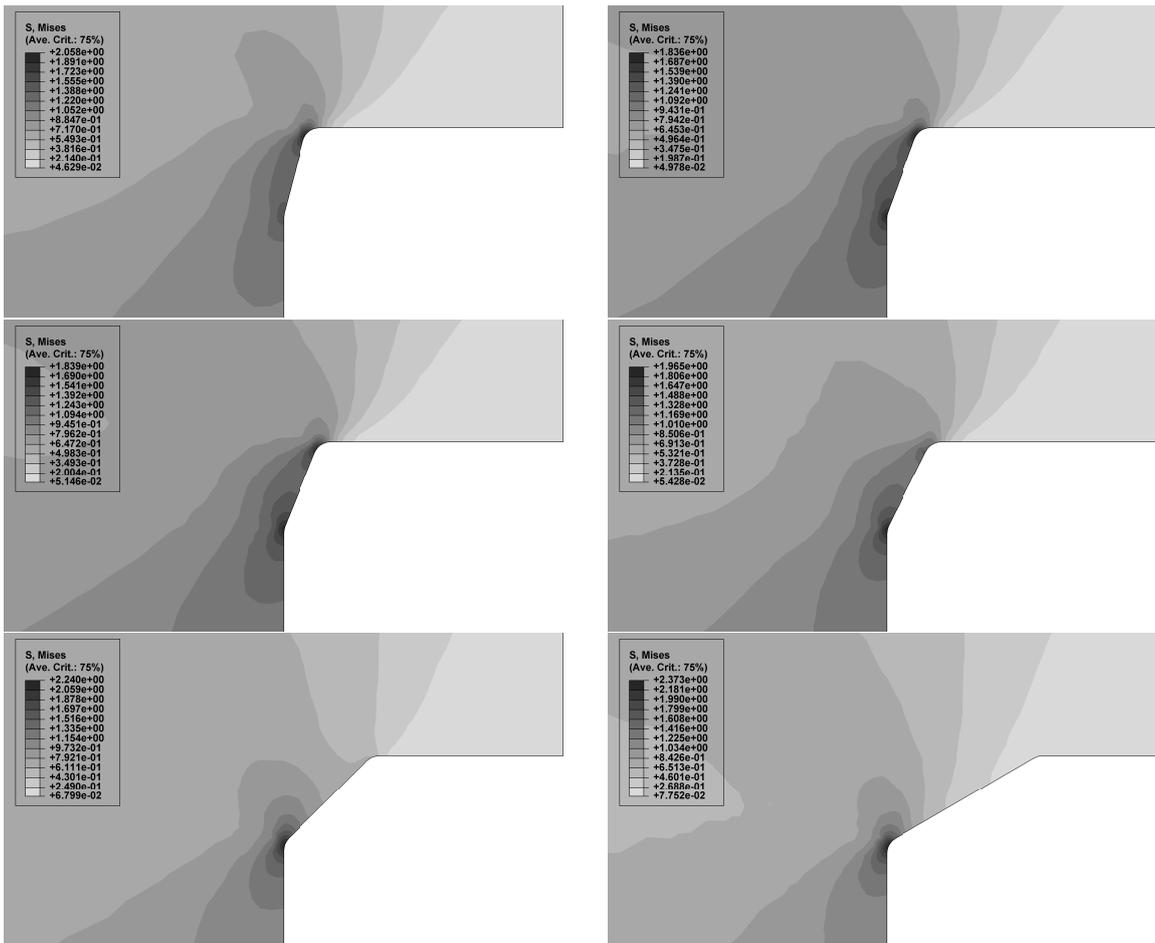


Abbildung 4.9.: Spannungsverteilung bei verschiedenen Kegelwinkeln

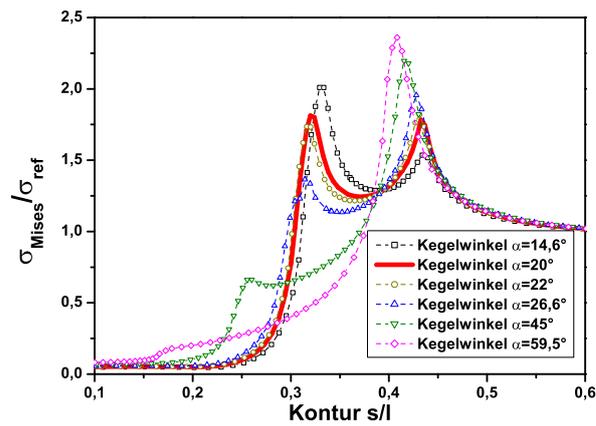


Abbildung 4.10.: Die Spannungsüberhöhung in Abhängigkeit des Kegelwinkels

4. Die analytische Kerbformoptimierung



Abbildung 4.11.: v.Mises-Spannung und Querkzugspannung an der multilinearisierten Kerbform

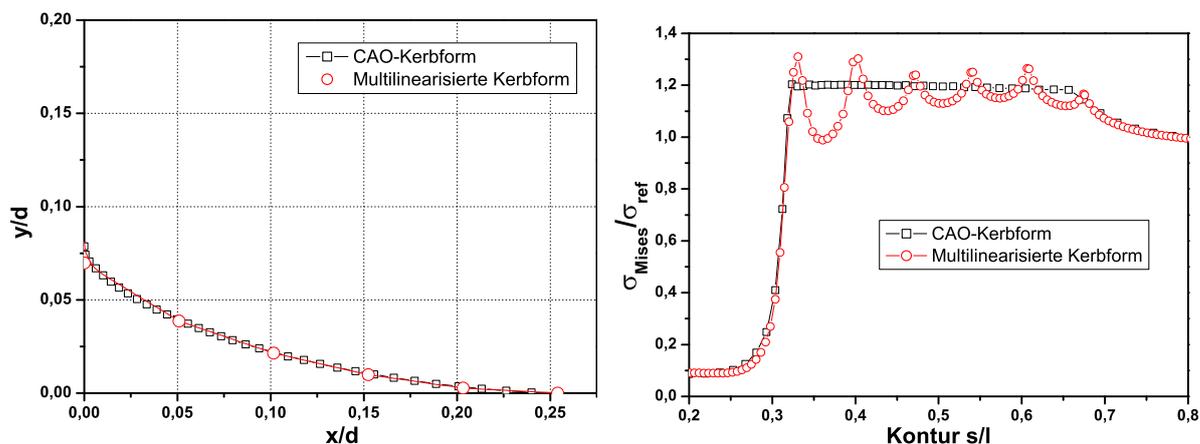


Abbildung 4.12.: Vergleich einer multilinearisierten Kerbform mit einer CAO-Kerbform

angepasst. Die v.Mises-Spannungsverteilung an einer multilinearisierten Kerbform, die an eine CAO-optimierte Kerbform angepasst wurde, zeigt Abb. 4.11(links). Die Querkzugspannung in dieser Struktur wird in Abb. 4.11(rechts) dargestellt. Man erkennt hier deutlich die langsam steigende Verteilung des Querkzugs entlang der Kontur bis auf das Querkzugmaximum am Ende der Kerbkontur. Analog dazu steigt sowohl der Querschnitt als auch die Kraftflussumlenkung.

Abb. 4.12 zeigt links die CAO-Kerbform sowie die multilinearisierte Kerbform. Bei der multilinearisierten Kerbform sind deren Stützpunkte hervorgehoben. Die einzelnen Segmente der Form wurden mit gleichgroßen Radien verbunden, um scharfe Knicke zu vermeiden. Rechts sieht man die Spannungsverteilung entlang der Kontur bei der die Verteilung nahezu gleich großer Spannungsüberhöhungen zu sehen ist.

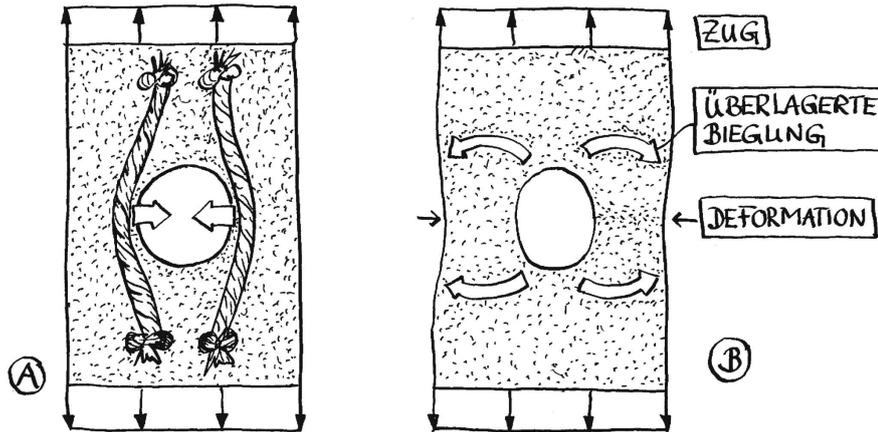


Abbildung 4.13.: Zug und Biegung im Kerbbereich

4.2. Zusammenhang zwischen Kerbspannungen und Biegespannungen

In Kap. 4.1.3 wurde bereits der Zusammenhang zwischen Krümmung, Kraftflussumlenkung und Kerbspannung beschrieben. Erste Ansätze für den Zusammenhang zwischen Kerbspannung und Biegespannung eines gekrümmten Balkens wurden von *Thum et al.* [81] gegeben. Dieser Zusammenhang wurde von *Mattheck* in [82] formuliert und weiterentwickelt. Weiterhin wurde der Unterschied zwischen optimierten und nicht optimierten Kerben aufgezeigt.

Man kann den kernnahen Zugkraftfluss durch zwei Seile in einer zugbelasteten Lochplatte veranschaulichen (Abb. 4.13, A). Bei Zugbelastung neigen diese Seile dazu, sich gerade zu strecken und leiten daher seitlichen horizontalen Zug ein. Schreibt man den Seilen wie einem Balken eine Biegesteifigkeit zu, so werden sie zu stark gekrümmten Biegebalken, die bekanntlich durch eine hyperbolische Spannungsverteilung im Querschnitt gekennzeichnet sind [83]. Diese überlagerte Biegung (Abb. 4.13, B) mit ihrem nichtlinearem Spannungsverlauf macht die Kerbspannung aus.

Die Entstehung der Biegespannungen wird in Abb. 4.14 an einer Balkenschulter verdeutlicht. An der rechten Seite der Schulter ist ein Seil wie in Abb. 4.13 zu sehen und an der linken Seite ein sogenannter Unglücksbalken, der bei Bäumen oft zu Längsspaltungen führt [46], [48]. Stellt man sich nun vor die zwei Gelenke in der Mitte des Unglücksbalkens wären ausgesteift, so wirken dort die überlagerten Biegespannungen.

Wenn also die überlagerten Biegespannungen als Folge einer elastischen Deformation der Kerbe die Kerbspannungen selber darstellen, dann werden die Kerbspannungen verschwinden, wenn die elastische Gestaltänderung der Kerbe unterbunden wird. Dies wurde mittels einer FEM-Analyse an einer Lochplatte unter Zugbelastung durchgeführt bei der der Lochrand als rigide Kontur modelliert wurde. Dies ist gleichwertig mit einer Aussteifung des Lochrandes, welche die Deformation und somit auch die Biegung unterdrückt. In Abb. 4.15 sieht man, dass bei rigider Lochkontur und äußerem Zug keine

4. Die analytische Kerbformoptimierung

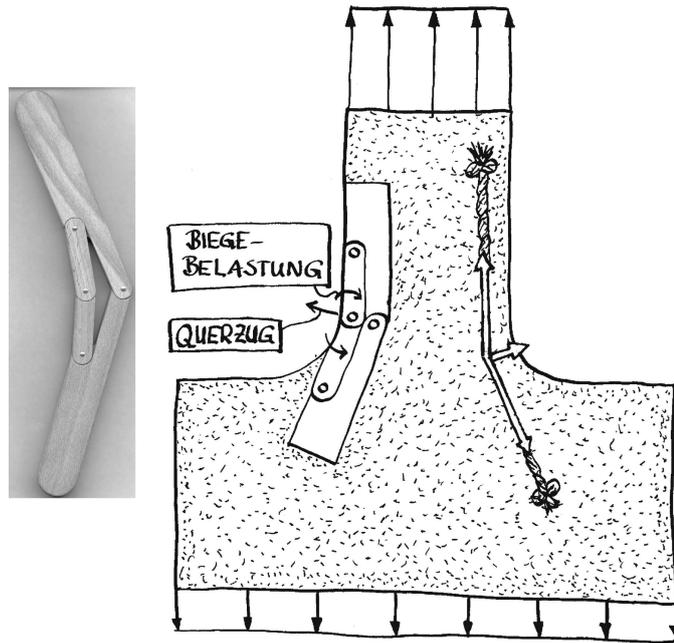


Abbildung 4.14.: Balkenschulter mit Unglücksbalken

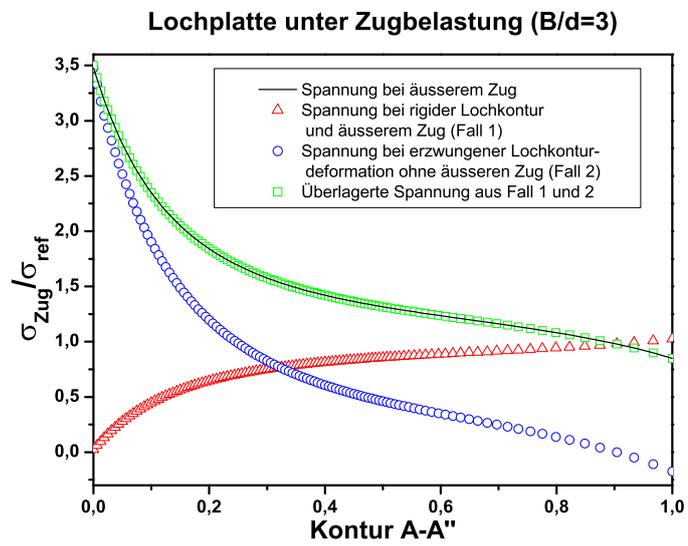


Abbildung 4.15.: Spannungsanalyse an der Lochplatte

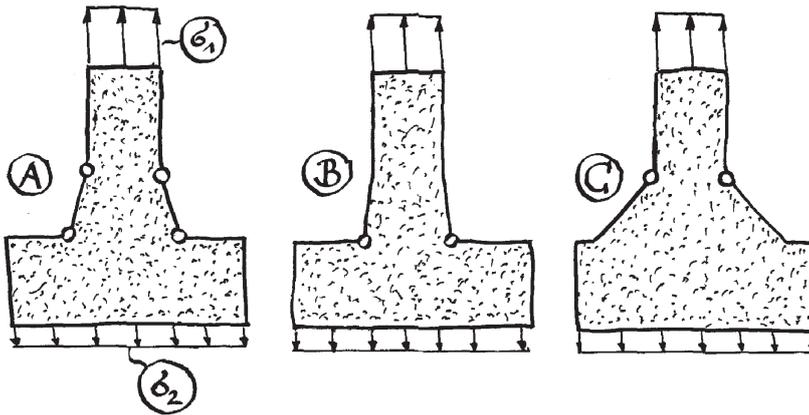


Abbildung 4.16.: Kegelförmiger Querschnittsübergang

Spannungskonzentration mehr am Lochrand auftritt und dass aufgrund der Steifigkeit des Randes die Ligamente links und rechts entlastet werden. Wird die Lochplatte jedoch nicht mit einer Zuglast beaufschlagt und wird der Lochkontur lediglich eine Deformation aufgezwungen, die sich durch eine Belastung unter Zug ergibt, erhält man dieselbe Spannungskonzentration wie bei der Lochplatte unter Zug. Dieses Beispiel soll in erster Linie eine Veranschaulichung für den oben genannten Zusammenhang zwischen Kerbspannungen und Biegespannungen sein.

Nun kann aus den Erkenntnissen von Kap. 4.1.3 und 4.1.4 und den oben genannten Betrachtungen eine Optimierungsvorschrift formuliert werden, die im folgenden erläutert werden soll.

Betrachtet man eine zugbelastete Bauteilschulter (Abb. 4.16), so wirken dort zwei Effekte gegeneinander. Zum einen nehmen die Nennspannungen von oben nach unten infolge der Querschnittsverbreiterung ab und zum anderen bewirken die Kraftflussumlenkungen an der Konturkrümmung die zuvor beschriebenen überlagerten Biegespannungen. Wird nun eine Kerbe derart gestaltet, dass sich diese zwei Effekte gegenseitig aufheben, ist die Spannung entlang der Kerbkontur konstant und die Kerbe ist formoptimiert.

Eine stark vereinfachte, "optimierte" Kerbkontur ist zum Beispiel eine Geometrie, die im wesentlichen aus einer Geraden besteht und die mittels zweier Knicke mit dem Rest des Bauteils verbunden ist (Abb. 4.16). Wählt man nun die Orientierung der Geraden so wie in Abb. 4.16, A erhält man gleiche große Spannungsüberhöhungen an beiden Knicken. Dies wird durch die gegenseitige Kompensation der zwei oben genannten Effekte erreicht. Der obere Knick ist relativ klein (geringe Kraftflussumlenkung), da hier durch die geringe Querschnittsverbreiterung die Spannung noch recht hoch ist. Der untere Knick hingegen kann wesentlich größer ausgeführt werden, da an dieser Stelle bereits eine wesentliche Querschnittsverbreiterung vorhanden ist. In Abb. 4.16, B wurde der obere Winkel zu klein gewählt. Dadurch bleibt die Querschnittsverbreiterung zu klein während gleich-

4. Die analytische Kerbformoptimierung

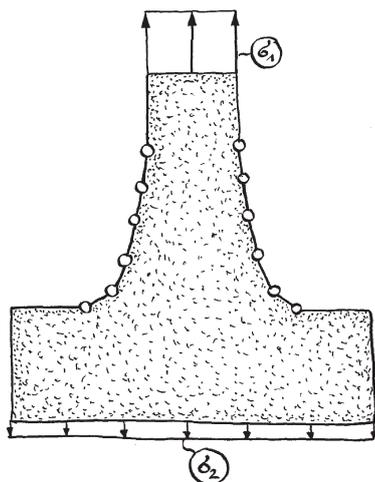


Abbildung 4.17.: Multilinearisierte Kerbform

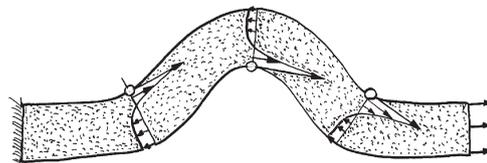


Abbildung 4.18.: Mäandrierender Zugstab

zeitig der untere Knick größer wird, d.h. durch die kleine Querschnittsverbreiterung, die durch den zu kleinen ersten Knick verursacht wird, kann die, durch den größeren Umlenkwinkel am unteren Knick hervorgerufene, größere Spannungskonzentration nicht kompensiert werden. Das Resultat ist eine relativ kleine Spannungskonzentration am oberen Knick und eine wesentlich größere am unteren Knick. In Abb. 4.16, C wurde der obere Knick zu groß gewählt. Hier kann die steigende Querschnittsverbreiterung die Spannungskonzentration, die aufgrund des Umlenkwinkels relativ groß ist, nicht kompensieren (vgl. Kap. 4.1.4).

Erhöht man die Anzahl der diskreten Kraftflussumlenkungen und lässt die Knickwinkel von oben nach unten so zunehmen, dass die knickbedingten, überlagerten Biegespannungen sich mit den Minderungen der Nennspannung aufheben, so hat man eine konstante Verteilung von gleich großen Spannungskonzentrationen an den Knickpunkten (Abb. 4.17 und Kap. 4.1.5).

Wie fließend der Übergang zwischen einem stark gekrümmten Biegebalken und einer Kerbe ist, zeigt ein mäandrierender Zugstab (Abb. 4.18), der an jeder konkaven Stelle seiner Kontur eine Kerbspannung hat oder die nichtlineare Biegespannungsverteilung eines Biegebalkens.

4.3. Methodik

Das Verfahren, welches auf Überlegungen von *C. Mattheck* beruht, wurde erstmalig in [84] beschrieben und wird nun näher ausgeführt. Es handelt sich dabei um ein Verfahren, das formoptimierte Kerbkonturen erzeugt ohne einen iterativen Optimierungsprozess mit Hilfe von FEM-Analysen.

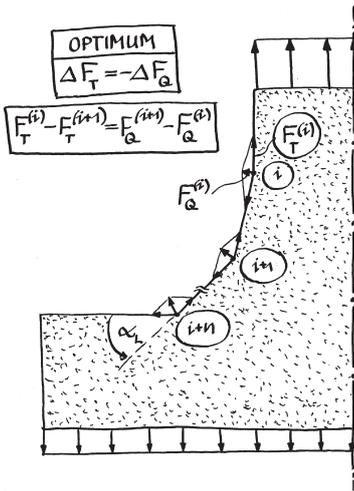


Abbildung 4.19.: Multilinearisierung der Kerbkontur

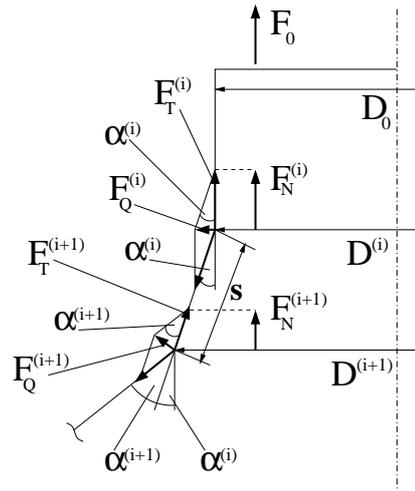


Abbildung 4.20.: Tangential- und Querkräfte

Abb. 4.14 veranschaulicht wie aufgrund von Tangentialkräften F_T (Abb. 4.19 bzw. 4.20) und ihrer Umlenkung Querkräfte F_Q entstehen, die eine Kerbkontur an einer Bauteilschulter aufbiegen und somit Kerbspannungen erzeugen.

Wird nun die Kerbkontur multilinearisiert wie in Abb. 4.19 bzw. 4.20 vereinfacht dargestellt, können F_T und F_Q durch einfache Winkelbeziehungen berechnet werden. F_T^i berechnet sich aus der Projektion der lokalen Nennkraft am Knick i , die sich aus der lokalen Nennspannung multipliziert mit einem Flächenelement ergibt, auf die multilinearisierte Kerbkontur, die oberhalb des Knickes verläuft. F_Q^i berechnet sich aus einer Winkelbeziehung zwischen Knickwinkel α_i und F_T^i .

Es sind die Querkräfte F_Q , welche letztendlich die Kerbspannung durch Aufbiegen der Kerbkontur erzeugen. Jedoch kann die Kerbspannung durch einen Abfall der Nennspannung durch eine entsprechende Querschnittsverbreiterung ausgeglichen werden. Ein Optimum wird erreicht, wenn ein konstanter Verlauf der Spannung entlang der Kerbkontur herrscht. Dies bedeutet wiederum, dass die Querkräfte F_Q so zunehmen wie die Tangentialkräfte F_T abnehmen. Daraus kann folgende Optimierungsvorschrift abgeleitet werden:

$$\Delta F_T = -\Delta F_Q \quad (4.1)$$

oder

$$F_T^i - F_T^{i+1} = F_Q^{i+1} - F_Q^i \quad (4.2)$$

Die Tangentialkraft berechnet sich aus der Projektion der lokalen Nennkraft F_N^i auf die Kerbkontursegmente mit

$$F_N^i = \sigma_N^i \Delta A_e \quad (4.3)$$

wobei ΔA_e eine Einheitsfläche ist und σ_N^i die lokale Nennspannung ist, die sich wie folgt mit

$$\sigma_N^i = \frac{D_0}{D_i} \sigma_0 \quad (4.4)$$

4. Die analytische Kerbformoptimierung

berechnet. Daraus ergibt sich für die Berechnung der Tangentialkraft folgender Zusammenhang:

$$F_T^{i+1} = F_0 \frac{D_0}{D_{i+1}} \cos \left(\sum_{k=0}^i \alpha_k \right) \quad (4.5)$$

$$F_T^i = F_0 \frac{D_0}{D_i} \cos \left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \right) \quad (4.6)$$

mit

$$D_{i+1} = D_i + 2s \sin \left(\sum_{k=0}^i \alpha_k \right) \quad (4.7)$$

oder dem Quotienten $D_r = \frac{D_{i+1}}{D_i}$ mit

$$D_r = 1 + \frac{2 \sin \left(\sum_{k=0}^i \alpha_k \right)}{\frac{D_0}{s} + \sum_{k=0}^{i-1} \sin_n \left(\sum_{m=0}^n \alpha_m \right)} \quad (4.8)$$

mit s als Segmentlänge der multilinearisierten Form.

Für die Querkraft erhält man nach Abb. 4.20:

$$F_Q^{i+1} = 2 \sin \left(\frac{\alpha_{i+1}}{2} \right) F_T^{i+1} \quad (4.9)$$

$$F_Q^i = 2 \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) F_T^i \quad (4.10)$$

Für den ersten Knick mit $i = 1$ gilt $D_0 = D_1$. Man wählt einen empirischen Startwinkel α_1 und einen Hilfswinkel $\alpha_0 = 0^\circ$ und für alle folgenden Winkel kann Gl. 4.11 verwendet werden:

$$\alpha_{i+1} = 2 \arcsin \left(\frac{D_r \cos \left(\sum_{k=0}^{i-1} \alpha_k \right) \left(1 + 2 \sin \left(\frac{\alpha_i}{2} \right) \right) - \cos \left(\sum_{k=0}^i \alpha_k \right)}{2 \cos \left(\sum_{k=0}^i \alpha_k \right)} \right) \quad (4.11)$$

mit $i = 1 \dots l$

Mit diesem Verfahren kann eine gewisse Anzahl an Folgewinkeln erzeugt werden, die dann in die Geometrieerstellung einfließen. Die Wahl des Endwinkels α_L hängt vom Querschnittsprofil und der Belastungsart des Bauteils ab und wird nur durch den Parameter $\frac{D_0}{s}$ bestimmt. Das Resultat ist eine linearisierte Kerbform, die noch durch eine passende Kurve geglättet wird. Als Glättungskurve wurde ein kubischer Spline gewählt, der die analytisch erzeugten Punkte der Kerbform miteinander verbindet. Diese Kerbform nimmt nun aufgrund des variierenden Parameters $\frac{D_0}{s}$ zur Einstellung des Endwinkels einen bestimmten Bauraum ein und kann im Einzelfall zu groß oder zu klein sein. Hierzu wird die Kerbform einfach auf den gewünschten Bauraum skaliert.

4.4. Beispiele

Ein für viele Anwendungsfälle geeigneter Startwinkel hat sich $\alpha_1 = 3^\circ$ herausgestellt. Bei abnehmenden Durchmesser- bzw. Breitenverhältnissen kann α_1 bis auf 2° reduziert werden, um geringfügig bessere Ergebnisse zu erzielen. Aber auch der Lastfall hat einen Einfluss auf α_1 . Bei Biegung werden geringfügig bessere Ergebnisse mit Startwinkeln größer 3° erzielt, wohingegen bei Torsionsbelastung ein größerer Startwinkel von Vorteil ist.

Die Wahl des Endwinkels α_L ist, wie bereits erwähnt, abhängig von Querschnittsprofil und Belastungsart. Jedoch wird versucht den Endwinkel so klein wie möglich zu halten, da somit wertvoller Bauraum eingespart werden kann. Allerdings entsteht an der Anbindung der Kerbkontur an die Bauteilschulter ein Knick, der je nach Endwinkel eine entsprechende Spannungskonzentration erzeugt. Die Spannungsüberhöhung wird allerdings nicht nur durch den Knick in der Kontur beeinflusst, sondern auch vom Endwinkel der Kontur. Je höher nun der Endwinkel ist, desto niedriger ist die Spannungsüberhöhung. Jedoch wirkt sich ein zu großer Endwinkel negativ sowohl auf den Bauraum als auch auf die Spannungsverteilung entlang der Kerbkontur aus. Weiterhin reagiert ein kreisrunder Querschnitt weniger empfindlich auf kleinere Endwinkel als ein rechteckiger Querschnitt, sowie ein zugbelastetes Bauteil kleinere Endwinkel am Konturknick an der Bauteilschulter ertragen kann. D.h. an zugbelasteten Wellen können kleinste Endwinkel verwendet werden, wohingegen man bei biegebelasteten Balken deutlich größere Winkel benötigt.

Im folgenden werden einige Beispiele für die Anwendung analytischer Kerbformen aufgezeigt und die Formen mit CAO-optimierten Kerbformen und Kreisradien gleichen radialen Bauraums hinsichtlich ihrer Geometrie und ihren Spannungsverteilungen verglichen.

4.4.1. Wellen unter Zug

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse zur analytischen Kerbformoptimierung an Wellen unter Zugbelastung betrachtet. Abb. 4.21 zeigt links die Kerbformen (Kreisradius, CAO-Kerbform und analytische Kerbform) an einer Welle mit einem Durchmesser Verhältnis D/d von 3,0, die dem Wellenmodell aus Kap. 3.1 entspricht. Bei einem Startwinkel α_1 von 3° und einem Endwinkel α_L von 45° für die analytische Kerbform ergeben sich nur geringe Unterschiede zur CAO-Kerbform. Die analytische Kerbform ist lediglich etwas kürzer als die CAO-Kerbkontur bei gleichem radialen Bauraum. Das Ergebnis dieser Optimierungen sieht man rechts in Abb. 4.21. Hier sind die Spannungsverläufe entlang der Konturen aufgetragen. Der Radius mit gleichem radialen Bauraum besitzt die maximale Spannungsüberhöhung von ungefähr 2, die CAO-Kerbform erreicht eine Spannungsüberhöhung von 1,2 und die analytische Kerbform eine Spannungsüberhöhung von 1,27. Der Spannungsverlauf der analytischen Kerbform zeichnet sich durch ein leichtes Ansteigen der Spannung entlang der Kerbform aus, dass kurz vor Eintritt der Kerbkontur in die Wellenschulter auf ein sehr kurzes Spannungsplateau von 1 abfällt.

4. Die analytische Kerbformoptimierung

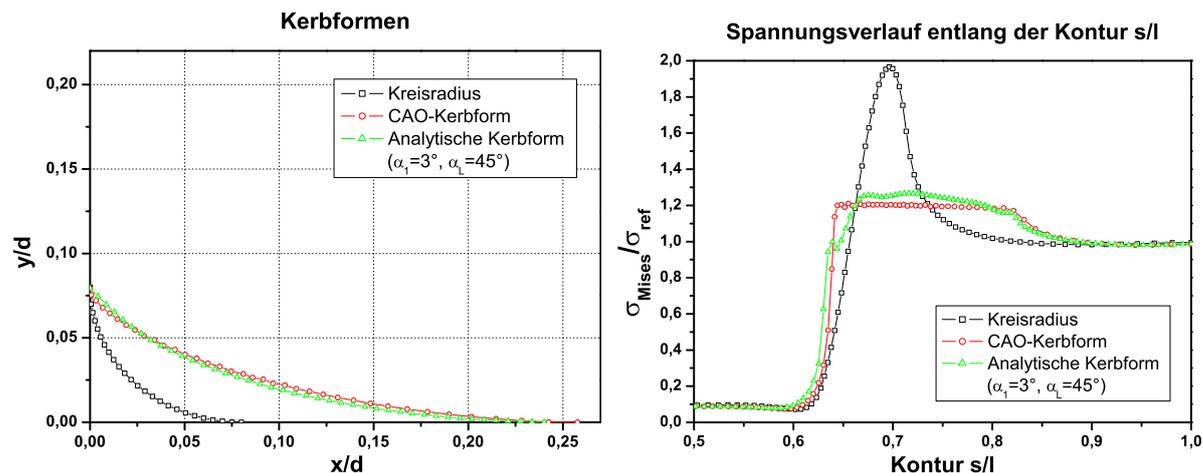


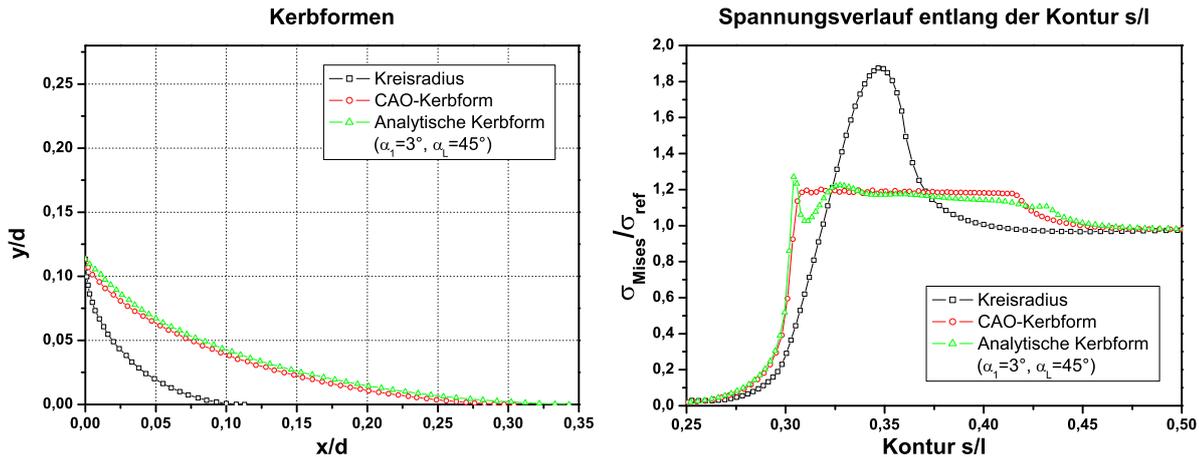
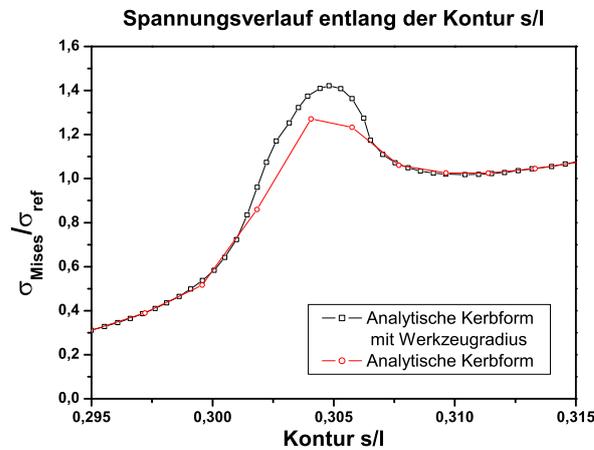
Abbildung 4.21.: Welle unter Zugbelastung, kurzes Modell ($D/d = 3,0$)

Das Wellenmodell, das für die Analysen in Abb. 4.22 verwendet wurde unterscheidet sich nur in seiner Länge von dem vorherigen Modell. Belastung und Durchmesser Verhältnis blieben erhalten. Die Länge des Wellenabschnitts mit dem größeren Durchmesser beträgt hier $4d$, die des Abschnitts mit dem kleineren Durchmesser $2d$. Links in Abb. 4.22 sind die verschiedenen Kerbformen dargestellt. Auch hier erreicht die analytische Kerbform wieder eine sehr gute Annäherung an die CAO-Kerbform, wobei sie bei identischen radialen Bauräumen etwas länger ist. Rechts sind die Spannungsverläufe der verschiedenen Konturen aufgeführt bei denen wiederum die Kreiskerbe die größte Spannungsüberhöhung von 1,88 besitzt. Die Referenz ist die CAO-Kerbe mit einer Spannungsüberhöhung von 1,2, dagegen verläuft die Spannung der analytischen Kerbe in der ersten Hälfte der Kerbkontur unterhalb der Spannung der CAO-Kontur, um dann kurz vor der Wellenschulter auf 1,22 anzusteigen. Danach fällt die Spannung auf ein Minimum entlang der Kerbkontur, um dann sehr steil am Eintritt der Kerbe in die Schulter auf einen Wert von 1,27 zu steigen.

Die Spannung am Eintritt der Kontur in die Schulter ist ein kritischer Wert, da es an dieser Stelle zu numerischen Ungenauigkeiten während der Analyse kommen kann. Daher wurde ein Werkzeugradius in diesen Knick modelliert, um aussagekräftigere Ergebnisse über die Spannungen beim Eintritt der Kontur in die Wellenschulter zu erhalten. In Abb. 4.23 werden die Spannungsverläufe entlang der Kontur einer Zugwelle mit Knick und mit Werkzeugradius dargestellt. Dabei steigt die Spannungsüberhöhung von 1,27 auf einen Wert von 1,42 an, welcher von der Größe des Werkzeugradius abhängt. In diesem Beispiel betrug der Radius $r_W/d = 0,018$. In allen folgenden Beispielen werden die Spannungsverläufe wieder ohne Ausrundung am Knick dargestellt.

4.4.2. Wellen unter Biegung

In diesem Abschnitt wird eine Welle mit einem D/d von 3,0 unter Biegebelastung untersucht. Das Modell hat die gleichen Dimensionen wie die Welle aus Abb. 4.22. In Abb.

Abbildung 4.22.: Welle unter Zugbelastung, langes Modell ($D/d = 3,0$)Abbildung 4.23.: Spannung am Eintritt der Kerbform in die Wellenschulter (Zugwelle $D/d = 3,0$)

4.24 sind links zunächst die verschiedenen Kerbformen dargestellt. Auch hier sind sich die Konturen der CAO-optimierten Kerbe und der analytischen Kerbe sehr ähnlich. Die analytische Kerbform verläuft entlang ihrer kompletten Länge etwas oberhalb der CAO-Form und ist daher auch etwas länger. Auch hier wurde die analytische Kerbform auf den radialen Bauraum der CAO-Kontur skaliert. Rechts in Abb. 4.24 sind die dazugehörigen Spannungsverläufe zu sehen. Die Kreiskerbe hat eine Spannungsüberhöhung von 1,87, während die CAO-Kerbform eine homogene Spannungsverteilung entlang ihrer Kontur mit einer Spannungsüberhöhung von 1,2 erzeugt. Die analytische Kerbform besitzt eine Spannungsverteilung, die sich zunächst unterhalb der Spannung der CAO-Kerbe befindet, um dann auf ein lokales Maximum von 1,23 anzusteigen. Am Eintritt der Kontur in die Wellenschulter erreicht die analytische Kerbform ihr absolutes Maximum von 1,26.

4. Die analytische Kerbformoptimierung

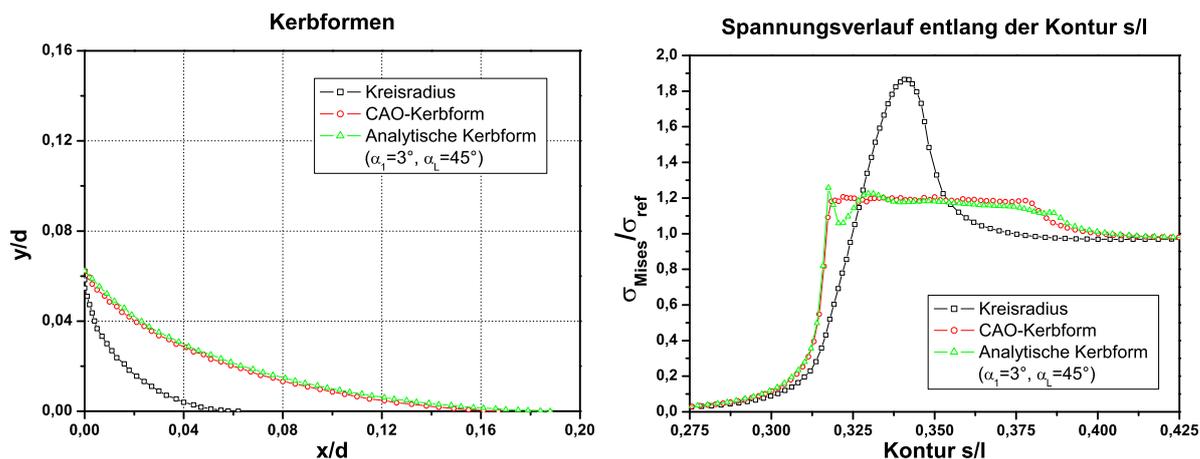


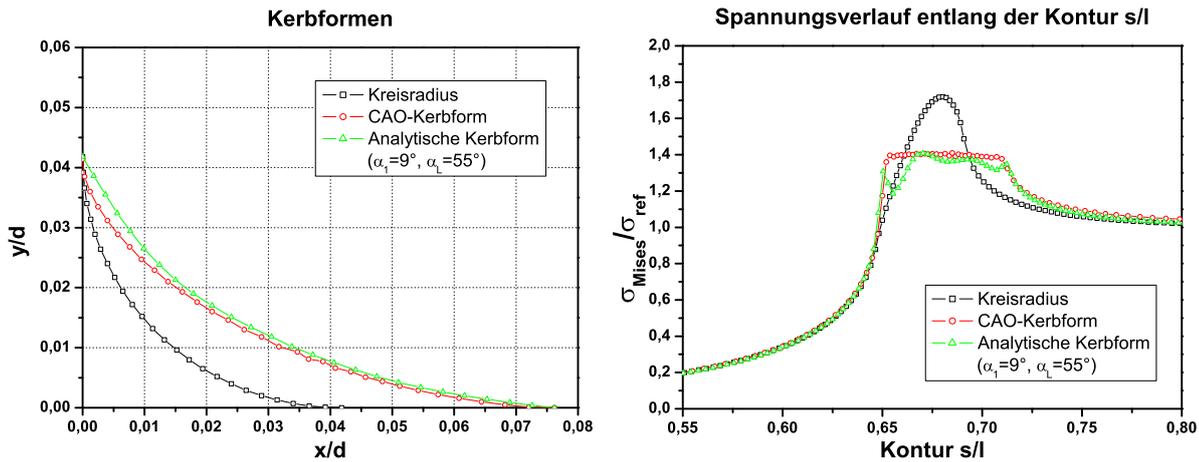
Abbildung 4.24.: Welle unter Biegebelastung, langes Modell ($D/d = 3,0$)

4.4.3. Wellen unter Torsion

Im Gegensatz zu Wellen unter Zug- und Biegebelastung verlaufen die Hauptzugspannungen bei Wellen unter Torsionsbelastung nicht parallel zur Symmetrieachse der Welle, sondern entlang der Oberfläche in einem Winkel von 45° zur Symmetrieachse. Diese Eigenschaft wurde näherungsweise durch eine Projektion der Kerbform auf eine Ebene, die um 45° zur Symmetrieachse gedreht ist, berücksichtigt [85].

Um dem Anwender jedoch eine einfachere Möglichkeit der Kerbformgenerierung ohne Projektion zur Verfügung zu stellen, wurde eine Parameterstudie zur analytischen Kerbformgenerierung bei Wellen unter Torsionsbelastung durchgeführt [85]. Aufgrund der Rahmenbedingungen der Parameterstudie wurde bei folgendem Beispiel (Abb. 4.25) die analytische Kerbform nicht mehr auf den radialen Bauraum der CAO-Kerbform skaliert wie bei der Zug- und Biegewelle, sondern auf den axialen. Weiterhin wurde als Referenzkerbform eine CAO-Kerbform mit einer Spannungsüberhöhung von 1,4 gewählt. Das Wellenmodell entspricht dem aus Kap. 3.1.

Aufgrund der Untersuchungen in Kap. 3.2 mussten kleinere Baumraumverhältnisse der Kerbformen für eine Welle unter Torsionsbelastung realisiert werden. Dies war nur durch Erhöhung des Anfangs- und Endwinkels möglich. Für das Beispiel in Abb. 4.25 wurde ein $\alpha_1 = 9^\circ$ und ein $\alpha_L = 55^\circ$ gewählt. Mit dieser Winkelkonfiguration wurden bisher die besten Ergebnisse für den Belastungsfall Torsion erzielt. Links in Abb. 4.25 sind die Kerbkonturen dargestellt, rechts die zugehörigen Spannungsverläufe entlang der Konturen. Die Kontur der analytischen Kerbe verläuft etwas oberhalb der CAO-Kontur und gewinnt noch etwas Abstand zur CAO-Kontur kurz vor Eintritt in die Wellenschulter, der dadurch leicht über dem der CAO-Kerbe liegt. Die maximale Spannungsüberhöhung besitzt der Kreisradius mit 1,72, die CAO-Kerbform erreicht eine homogene Spannungsverteilung mit einer Spannungsüberhöhung von 1,4. Der Verlauf der Spannung der analytischen Kerbkontur ist nicht ganz so gleichmäßig wie bei den Zug- und Biegewellen, verläuft aber dennoch meist unterhalb der Spannung der CAO-Kerbe, um dann auf ein Maximum von 1,41 anzusteigen. Kurz vor Eintritt in die Wellenschulter

Abbildung 4.25.: Welle unter Torsionsbelastung, kurzes Modell ($D/d = 3, 0$)

fällt die Spannung noch einmal über eine kurze Distanz, um danach auf ein lokales Maximum von 1,31 direkt an der Wellenschulter zu steigen.

4.4.4. Balken unter Zug

Ebenfalls wie bei den Wellen unter Torsion sind die Randbedingungen bei den Balken durch eine Parameterstudie vorgegeben worden [57]. Die analytischen Kerbformen wurden wie bei der Torsionswelle auf den axialen Bauraum der CAO-Formen skaliert, die ebenfalls wieder eine maximale Spannungsüberhöhung von 1,4 aufweisen. Auch die Länge des Modells stimmt mit der des Torsionswellenmodells überein, sowie das Breitenverhältnis B/b von 3,0.

Die analytische Kerbform links in Abb. 4.26 verläuft die ersten zwei Drittel ihrer Länge knapp unterhalb der CAO-Kerbkontur, um diese im letzten Drittel dann zu schneiden und mit einer relativ kleinen Krümmung bis zum Eintritt in die Balkenschulter zu laufen. Die zugehörigen Spannungsverläufe rechts in Abb. 4.26 ähneln qualitativ denen der Zugwelle aus Abb. 4.21 sehr. Der Kreisradius hat hier eine maximale Spannungsüberhöhung von 2,34, die analytische Kerbform 1,5.

4.4.5. Balken unter Biegung

Die analytische Kerbform für einen Biegebalken verläuft entlang ihrer kompletten Länge unterhalb der CAO-Kerbkontur (Abb. 4.27), wobei der Abstand zur CAO-Kontur in der Mitte der Form sich geringfügig vergrößert. Die Spannungen sind rechts in Abb. 4.27 zu sehen, wo der Kreisradius mit einer Spannungsüberhöhung von 2,16 gezeigt wird. Die Spannung für die analytische Kerbform verläuft zunächst unter der Spannung der CAO-Kontur und prägt in ihrem weiteren Verlauf ein Spannungsmaximum von 1,57 aus.

4. Die analytische Kerbformoptimierung

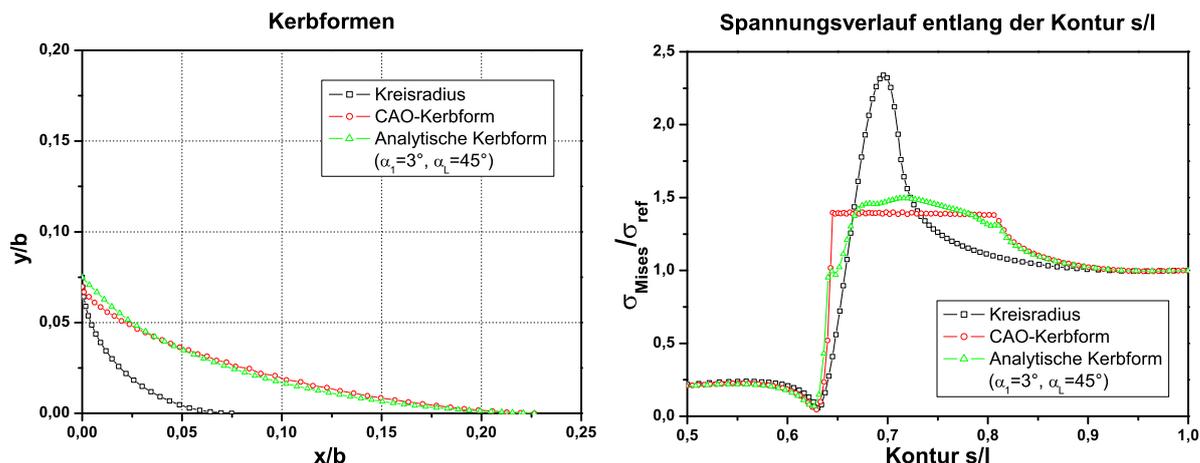


Abbildung 4.26.: Balken unter Zugbelastung ($B/b = 3, 0$)

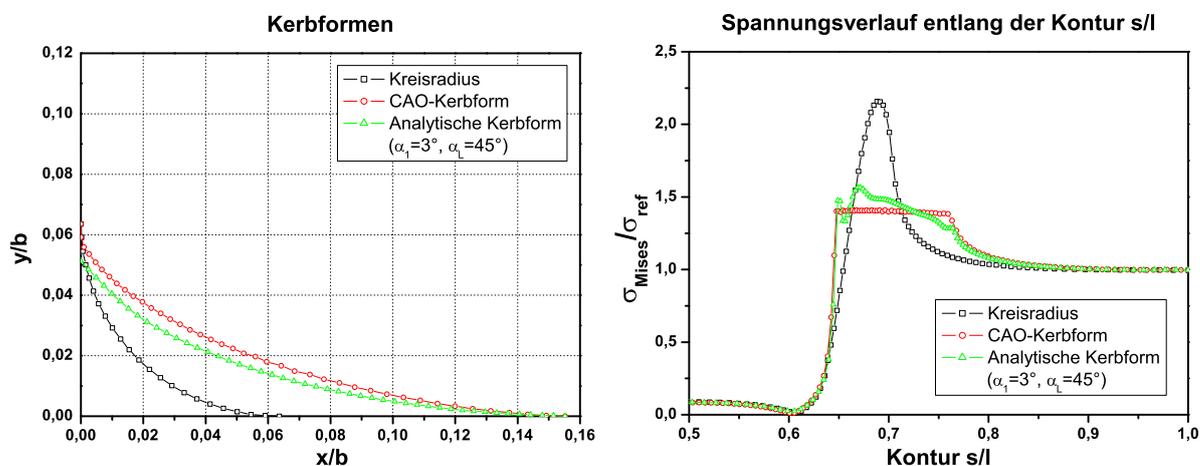


Abbildung 4.27.: Balken unter Biegebelastung ($B/b = 3, 0$)

4.4.6. Lochplatte und Platte mit Außenkerbe unter Zug

Dieser Abschnitt befasst sich mit der Verwendung von analytischen Kerbformen in Lochplatten und Platten mit Außenkerben. Abb. 4.28 zeigt eine Lochplatte und eine Platte mit Außenkerbe unter Zugbelastung. Die Geometrieparameter bilden jeweils die Verhältnisse B/d für die Lochplatte und B/b für die Platte mit Außenkerbe. Die Spannungsverläufe sind entlang der eingezeichneten Kontur $A' - A$ angegeben.

Die verschiedenen Kerbformen sind in Abb. 4.29 dargestellt. Als Referenzkerbform für die Lochplatte diente eine CAO-optimierte Kontur auf die eine analytische Kerbform ($\alpha_1 = 3^\circ, \alpha_L = 45^\circ$) mit derselben Ausdehnung in y -Richtung gelegt wurde. Weiterhin wurden zwei Kreisradien modelliert mit jeweils der maximalen Ausdehnung in x - und y -Richtung der CAO-Kontur als Radien. Dabei sind die Kerben der Lochplatte verhältnismäßig klein im Vergleich zur Plattenbreite, was einem Verhalten einer halbuendlichen Platte nahe kommt.

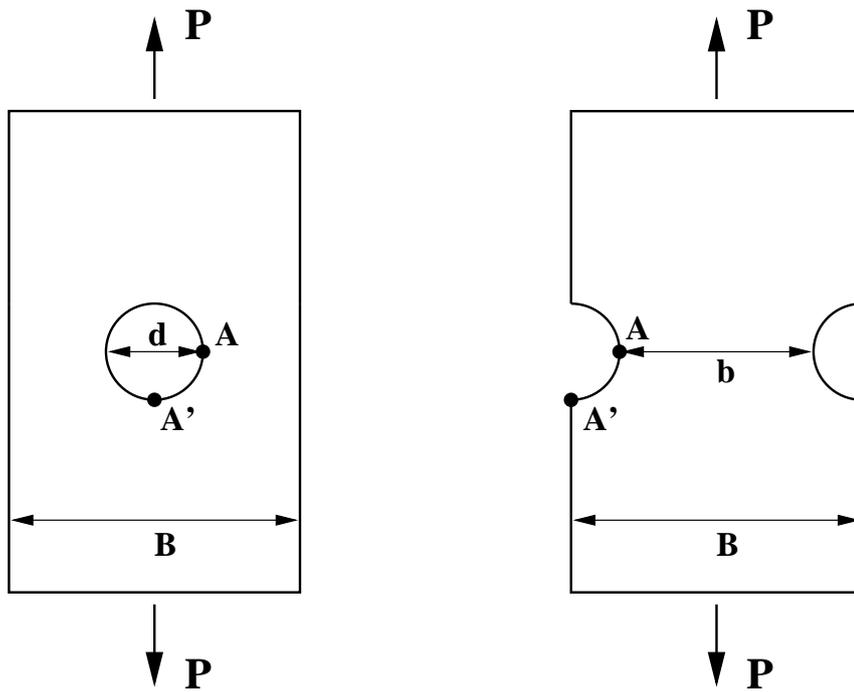


Abbildung 4.28.: Lochplatte und Platte mit Außenkerbe unter Zug

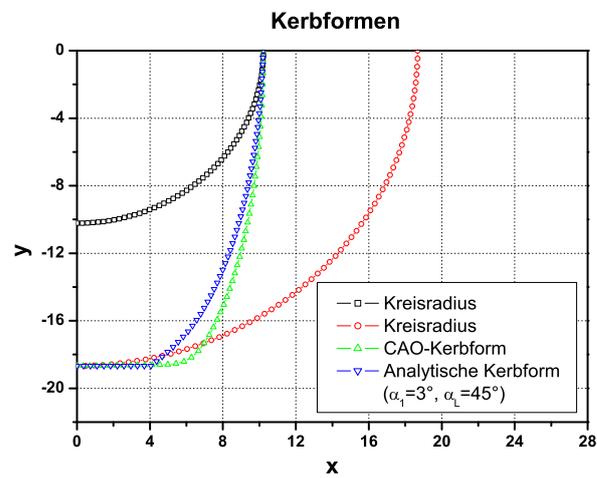


Abbildung 4.29.: Kerbformen für eine Lochplatte und eine Platte mit Außenkerbe unter Zug

4. Die analytische Kerbformoptimierung

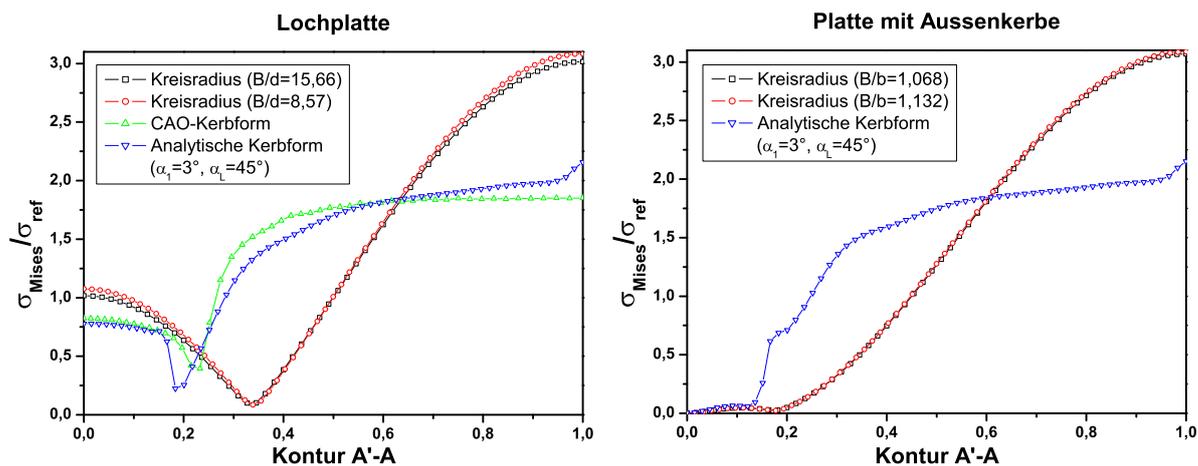


Abbildung 4.30.: Spannungsverteilung entlang der Kerbkontur A' – A

Links in Abb. 4.30 sind die Spannungsverläufe der Kerben in der Lochplatte zu sehen. Wie erwartet besitzen die beiden Kreisradien eine Spannungsüberhöhung von 3, wohingegen es die CAO-Kontur auf eine maximale Spannungsüberhöhung von 1,85 und die analytische Kerbkontur auf eine Spannungsüberhöhung von 2,16 schafft. Der Spannungsverlauf der CAO-Kerbe ist nach durchlaufen des Minimums nahezu homogen, während der Spannungsverlauf der analytischen Kontur einen flachen Anstieg aufweist, der mit einem kleinen Sprung auf den Maximalwert endet.

Rechts in Abb. 4.30 sind die Spannungsverläufe für eine Platte mit Außenkerbe dargestellt. Hier wurde keine CAO-Optimierung durchgeführt, sondern nur die zwei Radien und die dazugehörige analytische Kerbform untersucht. Die Verläufe unterscheiden sich im Startbereich von denen der Lochplatte, welcher von geringem Interesse ist, da sich hier die Spannungsüberhöhung bei einem Wert unter 1 befindet. Der restliche Spannungsverlauf gleicht dem der Lochplatte und endet mit einer Spannungsüberhöhung von 2,15. Eine zunehmende Homogenisierung des Spannungsverlaufs und ein weiterer Abbau der Spannungsspitze am Ende der Kontur kann durch einen kleineren Startwinkel α_1 realisiert werden.

4.4.7. Balken unter zweiachsiger Belastung

Für die Anwendung der analytischen Kerbformoptimierung auf zweiachsige Belastungen an Bauteilen (Abb. 3.17) wurde aufgrund von CAO-Optimierungen [65] ein Ansatz entwickelt, der jeweils zwei analytische Kerbformen für zwei verschiedene einachsige Belastungen zu einer Kerbform kombiniert. Links in Abb. 4.31 wird die Erstellung einer analytischen Kerbform für gleichzeitigen Zug in x-Richtung und Druck in y-Richtung schematisch dargestellt, rechts wird der Fall für Zug sowohl in x- als auch in y-Richtung aufgezeigt. In den folgenden Untersuchungen betrug das Verhältnis der Lastbeträge immer 1.

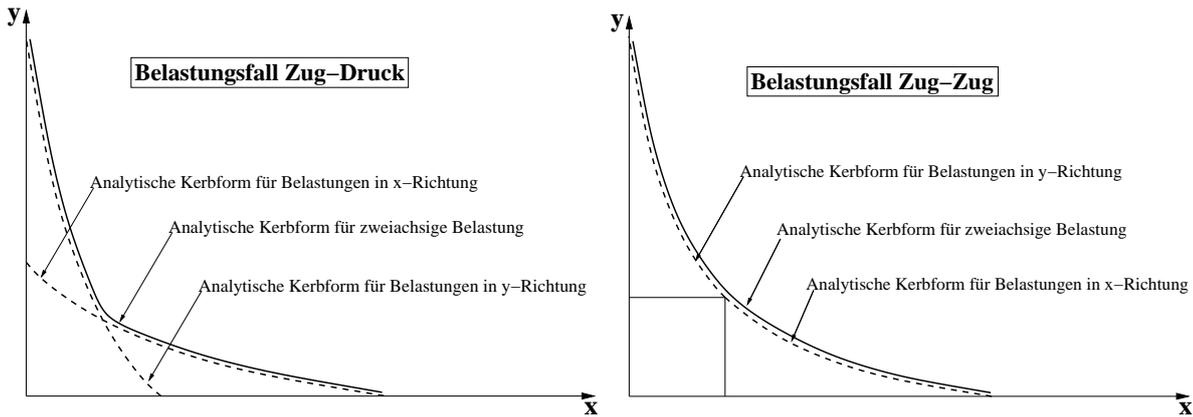


Abbildung 4.31.: Schematische Darstellung der analytischen Kerbformgenerierung für zweiachsige Belastungen

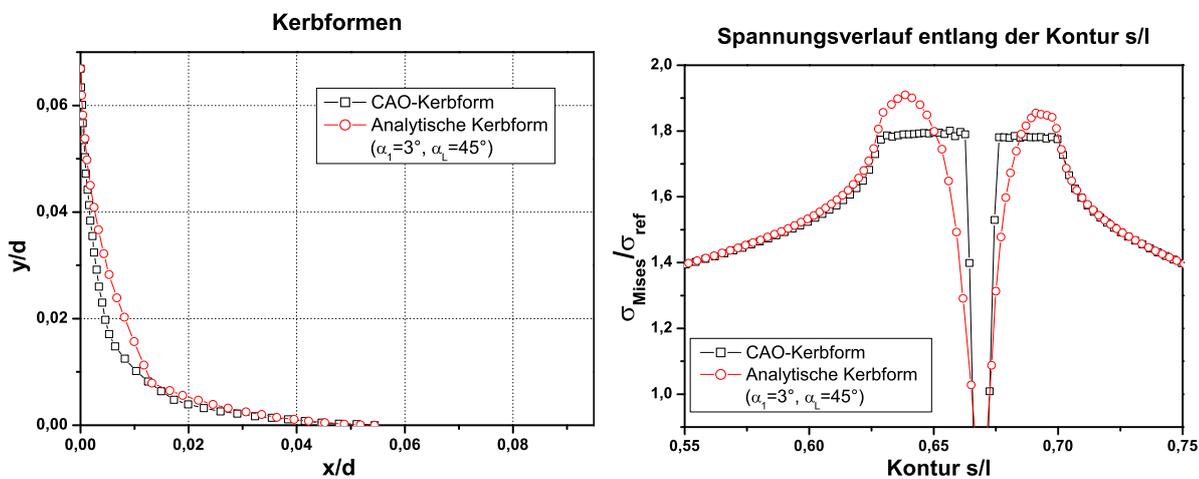


Abbildung 4.32.: Analytische Kerbformoptimierung bei zweiachsiger Belastung (Zug-Druck)

Im Falle einer Zug-Druck-Belastung wie in Kap. 3.4.1 treten jeweils an den Anläufen der Kontur Spannungsüberhöhungen auf, die keine hohen Startwinkel für die analytische Kerbkontur zulassen. Beide Konturteile wurden mit $\alpha_1 = 3^\circ$ und $\alpha_L = 45^\circ$ auf den CAO-Bauraum in x- und y-Richtung skaliert. Trotz der Abweichungen zur CAO-Kontur (Abb. 4.32, links) überzeugt die analytische Kerbform mit ihrem Spannungsverlauf (Abb. 4.32, rechts), der durch besser angepasste Start- und Endwinkelkonfigurationen voraussichtlich weiter verbessert werden kann.

Bei einer Zug-Zug-Belastung tritt das Spannungsmaximum in der Mitte der Kontur auf der Winkelhalbierenden von x- und y-Achse auf (Kap. 3.4.2). Die Anläufe sind lediglich mit der Referenzspannung belastet. Daher können hier weitaus größere Startwinkel Verwendung finden als im vorherigen Fall. Um das notwendige Wachstum am Spannungsmaximum mit der analytischen Kerbkontur zu realisieren, war es notwendig

4. Die analytische Kerbformoptimierung

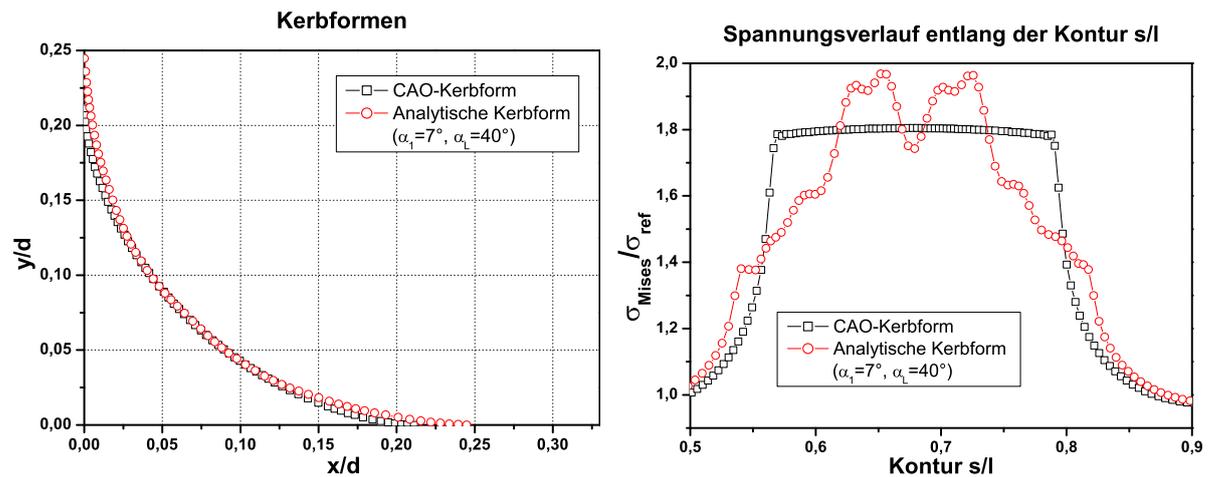


Abbildung 4.33.: Analytische Kerbformoptimierung bei zweiachsiger Belastung (Zug-Zug)

sowohl die Startwinkel deutlich zu erhöhen als auch den Bauraum der CAO-Kontur in x- und y-Richtung zu überschreiten (Abb. 4.33, links). Allerdings ist das Ergebnis im Spannungsverlauf nicht sehr zufriedenstellend. Der Verlauf ist sehr unregelmäßig und das Spannungsmaximum liegt zu weit über dem der CAO-Kerbform (Abb. 4.33, rechts). Dies liegt vor allem daran, dass selbst zwischen CAO-Optimierung und Kreisradius kein großer Unterschied, sowohl in der Geometrie als auch in der Spannung, vorhanden war. Daher wird für die analytische Kerbformoptimierung eine Anpassung der Parameter durch weitere Untersuchungen notwendig, um für diesen Fall einen zufriedenstellenden Konturvorschlag zu liefern.

4.4.8. Gewindeoptimierung

Für die analytische Optimierung von Gewindegrundkonturen wurde beispielhaft der Gewindegang am freien Gewinde (Fall 2) aus Kap. 3.5 ausgewählt [67]. Sowohl der Fall für Zugbelastung als auch Biegebelastung des Gewindes wurden untersucht, wobei für die Konturen dieselben Geometrierestriktionen gelten wie sie in Kap. 3.5 bereits erwähnt wurden.

Schraube unter Zug

Wie in Abb. 4.34 zusehen ist, verläuft die analytische Kontur über ihre komplette Länge leicht unterhalb der CAO-Kontur. Dies wirkt sich auch geringfügig auf die maximale Spannungsüberhöhung von 1,71 dieser Form aus (Abb. 4.34, rechts) im Vergleich zu 1,61 für die CAO-Kontur. Wobei trotzdem eine beachtliche Homogenität des Spannungsverlaufs der analytisch erzeugten Kontur erreicht werden kann.

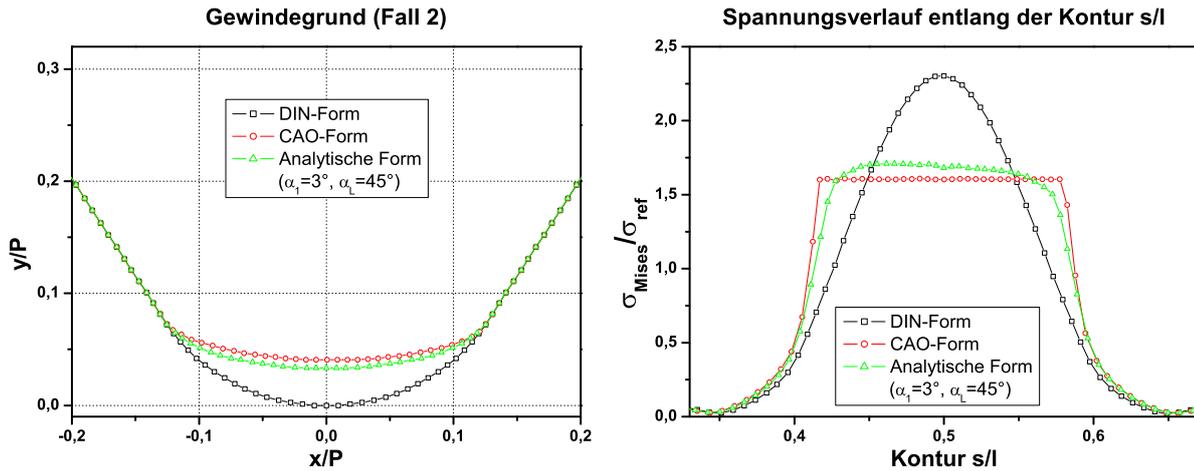


Abbildung 4.34.: Analytische Formoptimierung eines Schraubengewindes unter Zugbelastung

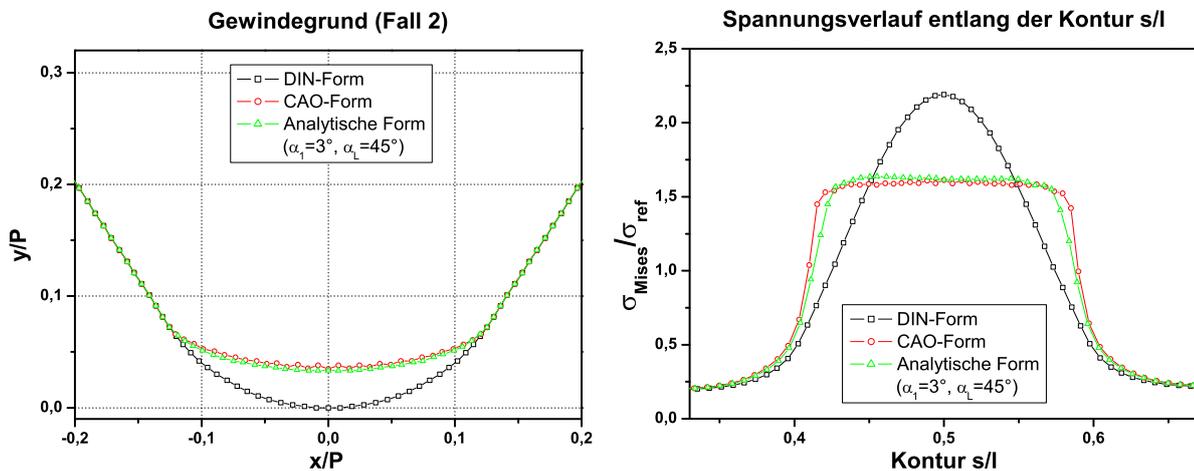


Abbildung 4.35.: Analytische Formoptimierung eines Schraubengewindes unter Biegebelastung

Schraube unter Biegung

Für den Biegefall ist die Übereinstimmung der analytischen Kontur mit der CAO-Kontur sehr gut (Abb. 4.35, links). Die Kontur verläuft wie auch schon im Zugfall unterhalb der CAO-Kerbform, jedoch sind die Abweichungen wesentlich geringer. Dies spiegelt sich auch im Spannungsverlauf rechts in Abb. 4.35 wieder. Hier sind die Unterschiede noch geringer als im Zugfall. Die maximale Spannungsüberhöhung für die analytische Kontur beträgt 1,64, während die CAO-Kerbform mit 1,61 geringfügig darunter liegt. Weiterhin kommt der homogene Verlauf der Spannung entlang der analytischen Kontur sehr nahe an den Spannungsverlauf der CAO-Kerbform heran.

5. Versuche

In einem Dauerschwingversuch wurden Wellen mit verschiedenen Durchmesser- und Wellenschulterverhältnissen und verschiedenen Wellenschulterübergängen (Kerbformen) ermüdet und die Anzahl der Lastwechsel bis zu einem Abbruchkriterium festgehalten. Bei diesen Experimenten sollen die Rechen- und Optimierungsergebnisse der vorangegangenen Kapitel verifiziert werden. Getestet wurden Wellen verschiedener Durchmesser- und Wellenschulterverhältnisse mit CAO-optimierten, elliptischen und analytischen Kerbformen, die verglichen werden mit kreisförmigen Kerbformen gleichen radialen Bauraums wie die optimierten Querschnittsübergänge.

5.1. Versuchsaufbau

Die Versuche wurden an einer Prüfmaschine der Fa. Schenk durchgeführt. Die verwendete Anlage ist eine servohydraulische Materialprüfmaschine der Serie Hydropuls PSA mit einer $10kN$ -Messdose (Abb. 5.1, links). Die Probe wird in den Probenhalter fest eingespannt, der mit einer Kraftmessdose an der fixierten Traverse befestigt wird. Ein Stempel, der auf einem Hydraulikzylinder sitzt, belastet die Probe periodisch mit einer konstanten Lastamplitude (Abb. 5.1, rechts). Die Proben sind über eine Länge von $50mm$ fest eingespannt und werden mit einer konstanten Hebellänge von $80mm$ belastet.

5.2. Proben

Die Proben besitzen eine Länge von $180 - 190mm$, wobei die Länge des eingespannten Wellenteils mit dem großen Durchmesser $80mm$ beträgt. Der große Durchmesser D beträgt $33mm$ woraus sich für die Welle mit einem $D/d = 1,4$ ein kleiner Durchmesser d von $23,57mm$, im folgenden Welle 1 genannt, und für ein $D/d = 3,0$ ein d von $11mm$, im folgenden Welle 2 genannt, ergibt. Die Wellen wurden aus einem 9S20-Stahl auf CNC-Drehbänken mit einem Schneidenradius von $0,2mm$ für Welle 2 gefertigt.

5.3. Kerbformen

Für die erste Versuchsreihe (Welle 1, Abb. 5.2, oben) wurden drei verschiedene Querschnittsübergänge gefertigt. Es wurden Proben mit CAO-optimierten und ellipsenförmigen Kerbkonturen gefertigt, sowie Proben mit einer Kreiskerbe, die denselben radialen

5. Versuche



Abbildung 5.1.: Versuchsaufbau mit servohydraulischer Prüfmaschine

| Welle 1 (D/d=1,4) | | Welle 2 (D/d=3,0) | |
|-------------------|---------------------|-------------------|---------------------|
| Kerbform | Spannungsüberhöhung | Kerbform | Spannungsüberhöhung |
| Kreisradius | 1,93 | Kreisradius | 1,83 |
| Ellipse | 1,34 | Analytisch | 1,27 |
| CAO | 1,2 | CAO | 1,2 |

Tabelle 5.1.: Rechnerische Spannungsüberhöhungsfaktoren

Bauraum besitzt wie die CAO-Kontur. Die Halbachsen der Ellipse für die ellipsenförmige Kerbkontur ergibt sich aus dem radialen und axialen Bauraum der CAO-Kontur. Links in Tab. 5.1 sind die rechnerischen maximalen Spannungsüberhöhungen der einzelnen Kerbformen dargestellt.

Für die zweite Versuchsreihe (Welle 2, Abb. 5.2, unten) wurden drei weitere Querschnittsübergänge auf Proben übertragen. Zum einem ebenfalls CAO-optimierte Kerbformen und Kreiskerben gleichen radialen Bauraums, allerdings anstatt einer ellipsenförmigen Kerbkontur wurde eine analytische Kerbkontur (Startwinkel 3° , Endwinkel 45°) erzeugt. Diese Kontur wurde dann ebenfalls auf den radialen Bauraum der CAO-Kerbform skaliert. Rechts in Tab. 5.1 werden die rechnerischen maximalen Spannungsüberhöhungen dieser Kerbformen aufgezeigt.

Abbildung 5.2.: Proben mit $D/d = 1,4$ und $D/d = 3,0$

5.4. Versuchsergebnisse

Die Proben wurden mit der in Kap. 5.1 beschriebenen Prüfmaschine ermüdet, wobei eine eingestellte Weggrenze als Abbruchkriterium diente. Erreichte die Durchbiegung der Welle während des Versuchs einen definierten Maximalwert, wurde das Experiment beendet und die erreichte Lastwechselzahl dokumentiert. War dieses Kriterium nach $5,0 \cdot 10^6$ Lastwechseln noch nicht erfüllt, wurden die Proben ausgebaut und als Durchläufer gekennzeichnet. Dies war bei insgesamt vier Wellen der Fall.

Die Ergebnisse der ersten Versuchsreihe für Welle 1 werden links in Tab. 5.2 dargestellt. Hier wurde die Probe mit einer Oberlast von $7kN$, einer Mittellast von $3,85kN$ und einer Unterlast von $0,65kN$ bei einer Frequenz von $5Hz$ ermüdet.

Die Ergebnisse der zweiten Versuchsreihe für Welle 2 werden rechts in Tab. 5.2 dargestellt. Die Probe wurde bei diesem Experiment mit einer Oberlast von $725N$, einer Mittellast von $399N$ und einer Unterlast von $75N$ bei einer Frequenz von $10Hz$ ermüdet.

Die Darstellung der Ergebnisse der beiden Versuchsreihen in Abb. 5.3 zeigt die Überlegenheit der CAO-optimierten Kerben gegenüber der Kreiskerbe. Im Durchschnitt erreichte die CAO-Kerbform bei Welle 1 eine Lastwechselzahl von $> 2,68 \cdot 10^6$, während die Kreiskerbe auf eine durchschnittliche Lastwechselzahl von $0,38 \cdot 10^6$ kam. Die elliptische Kerbform setzt sich mit durchschnittlich $> 3,62 \cdot 10^6$ Lastwechsel deutlich von der Kreiskerbe ab. Die im Mittel höhere Lastwechselzahl bei der elliptischen Kerbform im Vergleich zur CAO-Kerbform bewegt sich in einem Größenverhältnis, die zum einen mit der allgemeinen Streuung bei dem Experiment zu erklären ist und zum anderen mit der Anzahl und der festgestellten Lebensdauer der Durchläufer zusammenhängt. Bei Welle 2 erreichte die CAO-Kerbform durchschnittlich $2,29 \cdot 10^6$ Lastwechsel, während die Kreiskerbe im Durchschnitt $0,29 \cdot 10^6$ Lastwechsel ertrug. Die analytische Kerbform

5. Versuche

| Welle 1 | | Welle 2 | |
|-------------|-----------------------|-------------|-----------------------|
| Kerbform | Lastwechsel | Kerbform | Lastwechsel |
| Kreisradius | 177280 | Kreisradius | 251080 |
| Kreisradius | 258510 | Kreisradius | 252860 |
| Kreisradius | 265520 | Kreisradius | 278710 |
| Kreisradius | 443420 | Kreisradius | 298990 |
| Kreisradius | 746646 | Kreisradius | 371930 |
| Ellipse | 1144680 | Analytisch | 1431660 |
| Ellipse | 2739800 | Analytisch | 1570090 |
| Ellipse | 3656350 | Analytisch | 2656130 |
| Ellipse | Durchläufer (5223000) | Analytisch | 3646790 |
| Ellipse | Durchläufer (5316020) | Analytisch | Durchläufer (6900000) |
| CAO | 1122690 | CAO | 1683230 |
| CAO | 1236900 | CAO | 1866150 |
| CAO | 2328053 | CAO | 2648110 |
| CAO | 2384580 | CAO | 2962000 |
| CAO | 4008730 | | |
| CAO | Durchläufer (5002330) | | |

Tabelle 5.2.: Lastwechsel

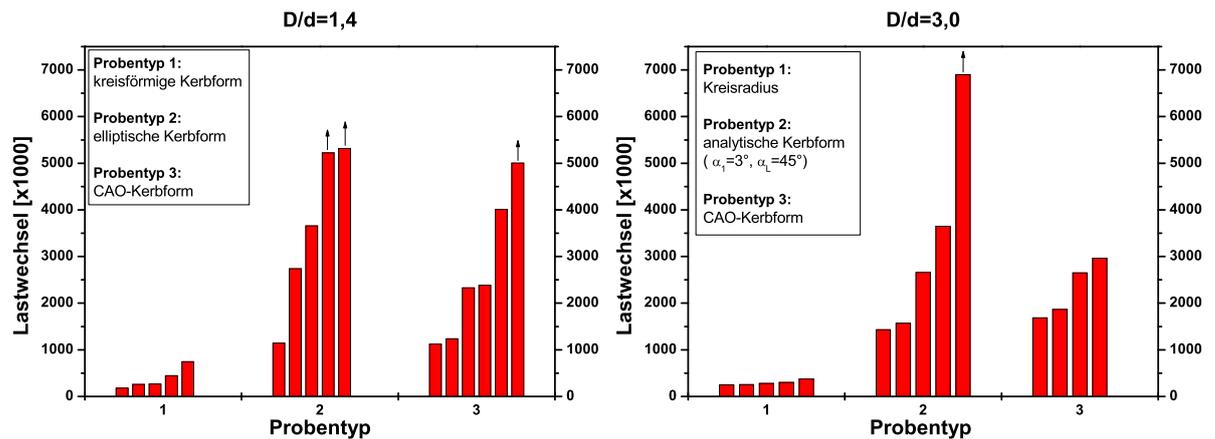


Abbildung 5.3.: Wechselbiegeversuche an Wellenschultern

liegt mit einer durchschnittlichen Lebensdauer von $> 3,24 \cdot 10^6$ Lastwechseln etwas höher als die CAO-Optimierung, was wiederum mit der Streuung und den Durchläufern bei dem Experiment zu erklären ist. Die mittleren Lastwechselzahlen sind nochmals in tabellarischer Form in Tab. 5.3 aufgeführt.

In Abb. 5.4,a-c werden Aufnahmen der Rissverläufe für Welle 2 gezeigt. Abb. 5.4, a zeigt den Riss wie er bei einer Kreiskerbe von der Oberfläche ausgehend in die Probe wandert, Abb. 5.4, b zeigt den Rissverlauf bei einer analytisch erzeugten Kerbform und in Abb. 5.4, c ist schließlich der Riss bei einer CAO-Kerbform zu sehen. Auffällig ist hier

| Welle 1 | | Welle 2 | |
|-------------|----------------------|-------------|----------------------|
| Kerbform | mittlere Lastwechsel | Kerbform | mittlere Lastwechsel |
| Kreisradius | $0,38 \cdot 10^6$ | Kreisradius | $0,29 \cdot 10^6$ |
| Ellipse | $> 3,62 \cdot 10^6$ | Analytisch | $> 3,24 \cdot 10^6$ |
| CAO | $> 2,68 \cdot 10^6$ | CAO | $2,29 \cdot 10^6$ |

Tabelle 5.3.: Mittlere Lastwechsel

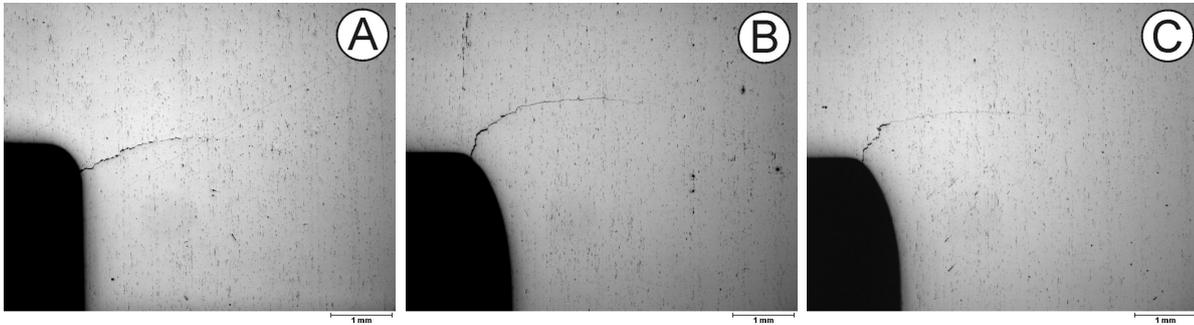


Abbildung 5.4.: Rissbilder der verschiedenen Kerbkonturen

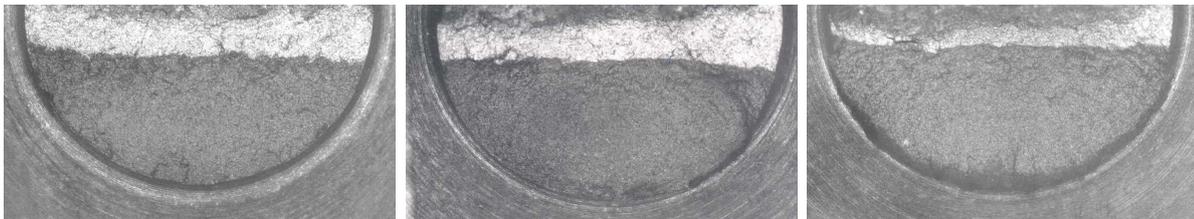


Abbildung 5.5.: Bruchbilder für verschiedene Kerbkonturen

zunächst der Ort des Rissstarts für die einzelnen Kerbformen. Während der Riss bei der Kreiskerbe am Konturanfang am kleinen Durchmesser der Welle startet und fast senkrecht zur Längsachse der Welle in die Probe hineinwächst, starten die Risse der beiden optimierten Kerbformen am Übergang von der Kerbform in die Wellenschulter, wo sie zunächst fast senkrecht zur Oberfläche in die Probe hinein wandern, um dann erst später einem Verlauf senkrecht zur Probenlängsachse zu folgen. Abgesehen vom späteren Rissstart der optimierten Kerbformen aufgrund ihrer geringeren Spannungsüberhöhungen, spielen bei der Anzahl der Lastwechsel noch oben erwähnte Effekte eine Rolle.

In Abb. 5.5 sind von links nach rechts (Kreiskerbe, analytische Kerbform, CAO-Kerbform) die entsprechenden Bruchflächen der Proben zu sehen. Nach Beendigung des Versuches wurden die Proben in einem Ofen angelassen und danach weiter bis zum Bruch ermüdet. Durch das Anlassen wird die Bruchfläche zum Zeitpunkt des Versuchabbruchs gekennzeichnet (heat tinting) und die Rissfront ist deutlich erkennbar.

6. Zusammenfassung

Maschinenbauteile sind häufig konstruktionsbedingt mit Kerben ausgestattet, in deren Bereichen es zu Spannungskonzentrationen und hohen Spannungsüberhöhungen kommt. Diese Spannungsüberhöhungen können entweder zu einer verminderten Belastbarkeit oder zu einem hohem Gewicht, falls die Spannungsüberhöhung in die Dimensionierung des Bauteils einfließt, führen. Eine Gestaltoptimierung einer Kerbe ist nun in der Lage diese Spannungsspitzen abzubauen und einem mechanischen Bauteil somit eine verlängerte Lebensdauer bei nahezu gleichem Gewicht oder ein verringertes Gewicht bei gleicher Lebensdauer zu verleihen. Bisher waren solche Optimierungen immer individuell an das betroffene Bauteil angepasst. Um allgemeinere Aussagen über die geometrischen Eigenschaften solcher optimierten Kerbformen zu treffen, wurden Studien an Standardgeometrien durchgeführt wie z.B. Kerben an Wellenschultern oder Balkenschultern. Die Parameterstudie zur Optimierung von Wellen- und Balkenschultern mit der CAO-Methode führte zu Einsichten über den Einfluss verschiedenster Kerbgeometrien an Querschnittsprüngen hinsichtlich der Spannungsverteilungen in kritischen Bauteilbereichen.

Bei dieser Studie wurden folgende Modellierungsparameter variiert: Das Durchmesser- bzw. Breitenverhältnis der Wellen bzw. Balken und die Belastungsart. Die Durchmesser- bzw. Breitenverhältnisse reichten von recht hohen Werten (3,0) bis hin zu sehr kleinen Werten (1,025), um ein möglichst großes Spektrum abzudecken. Bei den Wellen waren das im einzelnen die Durchmesserverhältnisse D/d 3,0/ 1,63/ 1,4/ 1,2/ 1,1/ 1,025 und bei den Balken die Breitenverhältnisse B/b 3,0 und 1,1. Durch die Variation dieses Parameters konnten bereits deutliche Unterschiede bei den Kerbkonturen beobachtet werden, die für eine spätere Charakterisierung aufgenommen wurden. Des Weiteren wurden für jedes Durchmesserverhältnis drei Lastfälle (Zug, Biegung und Torsion) untersucht, wobei sich die Lastfälle für die Balken auf Zug und Biegung beschränkten. Zudem wurden für jedes Durchmesser- bzw. Breitenverhältnis und jeden Lastfall CAO-Konturen berechnet, die jeweils eine maximale Spannungsüberhöhung von 1,8/ 1,6/ 1,4/ 1,2 hatten.

Aus den Ergebnissen dieser Untersuchungen wurde eine Charakterisierung der optimierten Kerbkonturen in Abhängigkeit der Modellparameter erarbeitet. Hierbei wurde zunächst der Einfluss des Durchmesserverhältnisses auf die CAO-optimierten Kerbformen untersucht. Dabei wurde deutlich, dass zum einen die Konturen mit absteigendem Durchmesserverhältnis immer flacher werden, was auf eine geringere Kraftflussumlenkung bei kleinen Durchmessersprüngen schließen lässt und zum anderen, dass bei steigenden Durchmessersprüngen die Unterschiede in den Geometrien der Konturen immer geringer werden. Das bestätigt die Annahme, dass es eine maximale Kraftflussumlenkung gibt und immer größer werdende Durchmesserverhältnisse immer kleinere Auswirkungen

auf die Konturen haben bis ein bestimmter Durchmessersprung erreicht ist und ein weiteres Steigen keinen Einfluss mehr auf die Kontur hat. Die beschriebenen Beobachtungen finden sich bei allen untersuchten Belastungsfällen wieder.

Danach wurden an allen Durchmesserverhältnissen der Einfluss des Lastfalls bei konstantem Durchmessersprung und konstanter Spannungsüberhöhung untersucht. Hier fällt zunächst auf, dass bei größeren Durchmesserverhältnissen die CAO-Konturen für den Zugfall deutlich größere Bauräume besitzen als die Konturen für Biegung und Torsion. Sowohl der radiale als auch der axiale Bauraum sind größer für den Belastungsfall Zug, wobei sich die Bauräume für Biegung und Torsion untereinander fast nicht unterscheiden. Die Konturen für den Torsionsfall verlaufen bei fast identischen Bauräumen immer unterhalb der Biegekonturen und haben daher etwas höhere Krümmungen während ihres Verlaufs in die Schulter der Welle. Bei sinkendem Durchmesserverhältnis nähern sich die Konturen für alle drei Lastfälle einander an bis sie für ein D/d von 1,025 fast zusammenfallen. Hier sind die radialen Bauräume praktisch gleich, während es bei den axialen Bauräumen noch geringe Unterschiede gibt.

Weiterhin wurden bei gleichem Durchmesser- bzw. Breitenverhältnis und gleicher Spannungsüberhöhung das Querschnittsprofil variiert. Untersucht wurden hierbei ein kreisförmiger Querschnitt (Welle) und ein rechteckiger Querschnitt (Balken). Dabei zeigten die Konturen der Wellen sowohl für Zugbelastung als auch für Biegebelastung ein geringeres Wachstum entlang der kompletten Kontur. Dieser Unterschied wurde etwas geringer bei kleineren Durchmesser- bzw. Breitenverhältnissen.

Um die Bauräume in ihrer Gesamtheit zu erfassen und darzustellen, wurden Bauraumdiagramme für jeden Lastfall erstellt, in denen die Bauraumverhältnisse über den axialen Bauräumen aufgetragen wurden. Für jede Welle (Durchmesserverhältnis) existierten vier Wertepaare entsprechend den vier Spannungsüberhöhungen. Diese zeigten einen linearen Zusammenhang und lassen sehr einfach die Tendenz des "Schlankerwerdens" (hohe Bauraumverhältnisse) ablesen, die sowohl bei steigender Spannungsreduktion als auch bei sinkenden Durchmesserverhältnissen eintritt. Entsprechende Diagramme wurden ebenfalls für die Balkenmodelle erstellt.

In die CAO-Bauräume wurden als Alternative elliptische Kerbformen eingepasst, die bei gleichen Halbachsenverhältnissen den CAO-Kerbformen ähneln. Die elliptischen Formen wurden bei gleichbleibenden radialen Bauräumen, abweichend vom CAO-Bauraum, im axialen Bauraum variiert. Dabei stellte der CAO-Bauraum immer das optimale Halbachsenverhältnis für eine elliptische Kerbform dar. Dies bestätigte sich bei verschiedenen Wellen und Spannungsreduktionen, wobei es bei kleinen Bauräumen (geringe Spannungsreduktion) zu leichten Abweichungen zwischen CAO-Bauraum und optimalem Bauraum der Ellipse kam.

Es wurden ebenfalls Kerbformen unter zweiachsiger Belastung mit der CAO-Methode optimiert. Dazu wurde eine Kreuzplatte einmal an ihren Enden jeweils mit Zug belastet und einmal mit einer Zug-Druck-Kombination. Die Zug-Druck-Kerbe ergab neben einer deutlichen Spannungsreduktion bei gleichem horizontalen und vertikalen Bauraum gegenüber der Kreiskerbe eine deutliche Materialreduktion in der Mitte der Kerbkontur. Die Unterschiede bei der Zug-Zug-Konfiguration zwischen Kreiskerbe und CAO-Kerbe waren nicht so deutlich wie im vorangegangenen Fall, aber dennoch war eine Spannungs-

reduktion von ungefähr 10% erkennbar. Dabei verlief die CAO-Kontur immer etwas oberhalb der Kreiskerbe und benötigte somit etwas mehr Material.

Die Anwendung der CAO-Methode auf ein weiteres, häufig verwendetes Bauteil erfolgte über die Optimierung eines Schraubengewindes. Hierzu wurde der Gewindegrund eines metrischen Schraubengewindes zum einen in der Nähe des Schraubenschafts und zum anderen im freien Gewinde modelliert und für beide Fälle optimiert. Die Gewindeformen wurden zusätzlich sowohl bei Zugbelastung als auch bei Biegebelastung analysiert. Die Randbedingungen für die Optimierung gaben geometrische Parameter der DIN-Norm der metrischen Gewinde vor. Hierbei wurden für beide Lastfälle und Modellierungen für die optimierten Gewindeformen Spannungsreduktionen zwischen 24% und 44% gegenüber den DIN-Formen erzielt.

In dieser Arbeit wurde noch eine weitere Anwendungsmöglichkeit der CAO-Methode aufgezeigt. Aufgrund der Analogie der Differentialgleichungen für den ebenen Spannungszustand und der ebenen Strömung kann ein Zusammenhang zwischen einem Flachstab unter reiner Biegung und einer ebenen Kanalströmung hergestellt werden. Bei der Strömung muss es sich aufgrund der Bedingungen für eine Analogie zum ebenen Spannungszustand um eine langsam fließende, zähe Flüssigkeit handeln, wie dies bei Schmelzen der Fall ist. Es wurden Modelle für den Balken unter Biegung und den Kanal für die Strömung jeweils mit einer Querschnittsverbreiterung erstellt und untersucht. Es wurden Spannungsüberhöhungsfaktoren am Querschnittsprung berechnet, die für den Balken aus dem Verhältnis der Hauptzugspannung und der Referenzspannung zusammengesetzt waren und für die Strömung entsprechend aus dem Verhältnis der Wandschubspannung und der zugehörigen Referenzspannung bestanden. Der Verlauf dieser Faktoren entlang der Kontur am Querschnittsprung zeigte eine große Übereinstimmung im qualitativen Verlauf der Kurven, wenngleich es quantitative Unterschiede gab. Somit wurde gezeigt, dass es auch in der Strömungstechnik (bei zähen Flüssigkeiten) Anwendungen für die CAO-Methode gibt.

Doch das Hauptziel dieser Arbeit ist es, zu verstehen warum eine optimierte Kerbe so eine günstige Spannungsverteilung aufweisen kann, inwiefern die Geometrie Einfluss auf die Spannungsverteilung hat und Gesetzmäßigkeiten herausarbeiten, die es erlauben die Wirkung der Optimierungsparameter auf die Kerbgeometrie zu interpretieren. Daraus lassen sich vereinfachte Optimierungsmethoden ableiten, die in einen analytischen Algorithmus verarbeitet werden können. Zunächst wurde dazu eine stark vereinfachte, multilinearisierte Kerbe mit zwei Orten höchster Spannung (kegelförmige Kerbe) untersucht und festgestellt, dass je nach Kegelwinkel dieser Kerbe sich das Spannungsmaximum abwechselnd an einem der zwei Orte befindet. Jedoch existiert ein bestimmter Kegelwinkel bei dem sich zwei betragsgleiche Spannungsmaxima an beiden Orten ausbilden, die zudem noch ein absolutes Minimum aller Maxima darstellen. Der Grad der Multilinearisierung wurde dann erhöht, um zu prüfen wie sich bei bestimmten Knickwinkeln zwischen den geraden Stücken der Kerbform eine Verteilung konstanter Spannungskonzentrationen ergibt und sich der Betrag der Spannungsüberhöhungen weiter verkleinert. Dazu wurden fünf gerade Segmente über eine CAO-Kurve gelegt und zu einer Kerbe miteinander verbunden, die sich bei ihren Knickwinkeln an eine CAO-Optimierung orientiert. Das Ergebnis war eine Verteilung nahezu konstanter Spannungskonzentrationen

6. Zusammenfassung

mit einer Spannungsreduktion, die sich der einer CAO-Kerbkontur annähert. Aus dieser Erkenntnis entstand der Wunsch diese Knickwinkel bei einer Segmentierung einer Kerbe analytisch erzeugen zu können. Es wurde ein Zusammenhang zwischen Kerbspannungen und Biegespannungen hergestellt, der es erlaubte die nichtlineare Spannungsverteilung in einem gekrümmten Biegebalken als eigentliche Kerbspannungen anzusehen. Daraus ergab sich für eine optimale Kerbkontur die Vorschrift, dass die Kräfte entlang der Kerbkontur (Tangentialkräfte) aufgrund von Querschnittsverbreiterung in demselben Maße abnehmen wie die Kräfte senkrecht zur Kerbkontur (Querkräfte) aufgrund der steigenden Umlenkung des Kraftflusses zunehmen. Es konnte aus dieser Vorschrift eine Gesetzmäßigkeit abgeleitet werden, die es erlaubt geometrische Daten einer Kerbkontur (Knickwinkel) analytisch zu ermitteln. Diese analytisch erzeugten Kerbkonturen wurden rechnerisch an diversen Modellen erfolgreich getestet.

Um die optimierten Kerbkonturen auch experimentell zu verifizieren, wurden Wechselbiegeversuche mit Wellen ($D/d = 1, 4$) durchgeführt, die eine kreisförmige Kerbe, eine elliptische Kerbe und eine CAO-optimierte Kerbe aufweisen. Hier konnten sich die elliptischen und CAO-optimierten Kerbkonturen in ihrer Lebensdauer deutlich von den Kreisradien absetzen. Für Wellen mit einem $D/d = 3, 0$ wurden ebenfalls Wechselbiegeversuche durchgeführt. Es wurden analytisch optimierte und CAO-optimierte Kerbformen mit kreisförmigen Kerben verglichen. Auch hier erreichte sowohl die analytisch optimierte als auch die CAO-optimierte Kerbform gegenüber der kreisförmigen Kerbform deutlich höhere Lastwechselzahlen.

Für zukünftige Arbeiten ist es vorstellbar eine Weiterentwicklung der analytischen Kerbformoptimierung anzugehen, die eine feinere Segmentierung, insbesondere beim Eintritt der Kontur in die Schulter, erlaubt. Die Glättung der erzeugten analytischen Kerbformen durch geeignete Splinekurven kann durch die Variation der Splineparameter untersucht und eventuell noch verbessert werden. Eine Fortsetzung der Parameterstudie für CAO-Optimierungen würde eine Datenbasis schaffen, die es erlaubt die analytischen Kerbformen qualitativ und quantitativ zu bewerten.

Literaturverzeichnis

- [1] W. Nachtigall und K.G. Blüchel, *Das große Buch der Bionik - Neue Technologien nach dem Vorbild der Natur*, Deutsche Verlags-Anstalt DVA, 2000
- [2] C. Mattheck, *Design in der Natur - Der Baum als Lehrmeister*, 3.Auflage, Rombach Verlag, Freiburg, 1997
- [3] C. Mattheck, "Why they grow, how they grow: the mechanics of trees", *Arboricultural Journal*, **14**, S.1-17, 1990
- [4] C. Mattheck, "Engineering components grow like trees", *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, **21**, S.143-168, 1990
- [5] C. Mattheck und S. Burkhardt, "A new method of structural shape optimization based on biological growth", *Int. Journal of Fatigue*, **12**, S.185-190, 1990
- [6] A. Baumgartner, L. Harzheim, C. Mattheck, "SKO: Soft Kill Option - the biological way to find optimum structure topology", *Int. Journal of Fatigue*, **14**, S.387-393, 1992
- [7] R. Kriechbaum, *Ein Verfahren zur Optimierung der Faserverläufe in Verbundwerkstoffen durch Minimierung der Schubspannungen nach Vorbildern der Natur*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1994
- [8] D. Reuschel, *Untersuchung der Faseranordnung natürlicher Faserverbunde und Übertragung der Ergebnisse auf technische Bauteile mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1999
- [9] K. Götz, *Die innere Optimierung der Bäume als Vorbild für technische Faserverbunde - eine lokale Approximation*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 2000
- [10] W. Albrecht, *Untersuchung der Spannungssteuerung radialer Festigkeitsverteilung in Bäumen*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1995
- [11] F. Dietrich, *Wie der grüne Baum tangential Zugspannungen bewältigt*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1995

- [12] A. Zipse, *Untersuchungen zur lastgesteuerten Festigkeitsverteilung in Bäumen*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1997
- [13] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1970
- [14] D. Munz, *Versagensverhalten von Konstruktionswerkstoffen*, Stichworte und Formeln der Vorlesung, Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde im Maschinenbau, Universität Karlsruhe (TH), 2000
- [15] W.D. Pilkey, *Peterson's stress concentration factors*, 2nd Ed., Wiley, 1997
- [16] R.C.J. Howland, "On the stresses in the neighborhood of a circular hole in a strip under tension", *Phil. Trans. Roy. Soc. (London) A*, **229**, S.67, 1929-30
- [17] G. Kirsch, "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", *VDI-Zeitschrift*, **797**, 1898
- [18] H. Neuber, *Kerbspannungslehre*, 4. Auflage, Springer-Verlag, 2001
- [19] A. Hrennikoff, "Solution of problems in elasticity by the framework method", *J. Appl. Mech.*, **8**, S.169-175, 1941
- [20] D. McHenry, "A lattice analogy for solution of plane stress problems", *J. Inst. Civ. Eng.*, **21**, S.59-82, 1943
- [21] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aeron. Sciences*, **23**, S.805-823, 1956
- [22] R.W. Clough, "The finite element method in plane stress analysis", *Proc. 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh*, S.345-378, 1960
- [23] H.G. Hahn, *Methode der finiten Elemente in der Festigkeitslehre*, Akademische Verlagsgesellschaft, Frankfurt am Main, 1975
- [24] J.W. Strutt [Lord Rayleigh], "On the theory of resonance", *Trans. Roy. Soc.*, **161**, S.77-118, 1870
- [25] W. Ritz, "Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik", *J. Reine Angew. Math.*, **135**, S.1-61, 1909
- [26] J. Betten, *Finite Elemente für Ingenieure 2*, Springer-Verlag, 1998
- [27] H.R. Schwarz, *Methode der finiten Elemente*, 2.Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1984
- [28] O.C. Zienkiewicz, *Methode der finiten Elemente*, 1.Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 1975

- [29] R.V. Baud, "Fillet profiles for constant stress", *Product Engineering*, April 1934
- [30] H. Neuber, "Der zugbeanspruchte Flachstab mit optimalem Querschnittsübergang", *Forsch. Ing.-Wesen*, **35**, Nr.1, S.29-30, 1969
- [31] E. Schnack, "Optimierung von Zuglaschen", *Konstruktion*, **30**, Nr.7, S.277-281, 1978
- [32] I. Babuska, J. Kautsky, "Über die Optimierung von Kerbformen", *ZAMM*, **43**, Nr.1/2, S.47-54, 1963
- [33] R. Lansard, "Fillets without stress concentration", *S.E.S.A. Proceedings*, **13**, Nr.1, S.97-104, 1955
- [34] A. Thum, W. Bautz, "Der Entlastungsübergang", *Forsch. Ing.-Wesen*, **6**, Nr.6, S.269-273, 1935
- [35] W. Qi, H. Mimura, "Streamline geometry optimization in beam-column connection", *J. Struct. Eng.*, **128**, Nr.6, S.829-832, 2002
- [36] A. Francavilla, L.V. Ramakrishnan, O.L. Zienkiewicz, "Optimization of shape to minimize stress concentration", *J. Stress Analysis*, **10**, Nr.2, S.63-70, 1975
- [37] E. Schnack, *Ein Iterationsverfahren zur Optimierung von Kerboberflächen*, VDI-Forschungsheft Nr.589, VDI-Verlag, 1978
- [38] E. Schnack, "Ein numerisches Verfahren zur Optimierung von Spannungskonzentrationen", *ZAMM*, **58**, S.122-123, 1978
- [39] M. Weck, P. Stein, "An efficient technique in shape optimization", *J. Struct. Mech.*, **11**, Nr.4, S.433-449, 1983-1984
- [40] E. Schnack, "Optimierung von Spannungskonzentrationen bei Viellastbeanspruchung", *ZAMM*, **60**, S.151-152, 1980
- [41] H. Azegami, "A Proposal of a shape-optimization method using a constitutive equation of growth", *JSME Int. J.*, Ser.1, **33**, Nr.1, S.64-71, 1990
- [42] C. Mattheck, "Design and growth rules for biological structures and their application to engineering", *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, **13**, Nr.5, S.535-550, 1990
- [43] Y. Hsu, "A review of structural shape optimization", *Computers in Industry*, **25**, S.3-13, 1994
- [44] Y. Ding, "Shape optimization of structures: A literature survey", *Computers and Structures*, **24**, Nr.6, S.985-1004, 1986
- [45] R.T. Haftka, R.V. Grandhi, "Structural shape optimization - A survey", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **57**, S.91-106, 1986

- [46] C. Mattheck, *Stupsi erklärt den Baum*, 3.Auflage, Forschungszentrum Karlsruhe, 1999
- [47] W. Troll, *Allgemeine Botanik*, 4.Auflage, Stuttgart, Ferdinand Enke Verlag, 1973
- [48] C. Mattheck, *Mechanik am Baum*, Forschungszentrum Karlsruhe, 2002
- [49] G.R. Bruder, *Finite-Elemente-Simulationen und Festigkeitsanalysen von Wurzelverankerungen*, Dissertation an der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 1998
- [50] C. Kolesinski, *Materialkundliche Untersuchung entlang einer Baumwurzel innerhalb der mechanisch wirksamen Wurzelplatte*, Diplomarbeit, Institut für Materialforschung II, 2002
- [51] E. Strasburger, *Lehrbuch der Botanik für Hochschulen*, 34.Auflage, G. Fischer Verlag, Stuttgart, 1998
- [52] C. Metzger, "Der Wind als maßgeblicher Faktor für das Wachstum der Bäume", *Mündener Forstliche Hefte*, Drittes Heft, Julius Springer-Verlag, Berlin
- [53] A. Ylien, "Über die mechanische Schaftformtheorie der Bäume", *Silva Fennica* 76, Helsinki
- [54] C. Mattheck, *Die Baumgestalt als Autobiographie*, Bernhard Thalacker Verlag, Braunschweig, 1992
- [55] C. Mattheck, H. Kubler, *Wood - The internal optimization of trees*, Springer-Verlag, 1995
- [56] A. Sauer, *Spannungsanalyse und CAO-Optimierung von Kerben an Wellenschultern*, Studienarbeit am Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe (TH), 2002
- [57] J. Sörensen, *Untersuchungen zur Kerbformoptimierung an Balkenschultern*, Diplomarbeit am Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe (TH), 2003
- [58] H. Huber-Betzer, C. Mattheck, D. Erb, "Balken- und Zylinderverjüngungen mit spannungsoptimierten Querschnittsübergang", Primärbericht, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1988
- [59] R.V. Baud, "Study of Stresses by Means of Polarized Light and Transparencies", *Proc. Engrs. Soc. West. Penn.*, **44**, S.199, 1928
- [60] K. Kumagai, H. Shimada, "The Stress Concentration Produced by a Projection under Tensile Load", *Bull. Japan Soc. Mech. Eng.*, **11**, S.739, 1968

- [61] M.M. Leven, J.B. Hartman, "Factors of Stress Concentration for Flat Bars with Centrally Enlarged Section", *Proc. SESA*, **19**, Nr.1, S.53, 1951
- [62] H. Battenbo, B.H. Baines, "Numerical stress concentrations for stepped shafts in torsion with circular and shaped fillets", *J. Strain Analysis*, **9**, Nr.2, S.90-101, 1974
- [63] D.C. Berkey, "Reducing stress concentration with elliptical fillets", *Proc. Soc. Exp. Stress Analysis*, **1**, Nr.2, S.56-60, 1943
- [64] P. Grodzinski, "Investigation on shaft fillets", *Engineering (London)*, S.321-324, 1941
- [65] J. Sommer, *Finite Elemente Analysen und Optimierung von Kerben*, Studienarbeit am Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe (TH), 2004
- [66] H. Wiegand, K.-H. Kloos, W. Thomala, *Schraubenverbindungen*, 4. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1988
- [67] S. Gemhardt, *Optimierung von Schraubengewinden*, Studienarbeit am Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe (TH), 2004
- [68] J.N. Goodier, "An Analogy between the Slow Motions of a Viscous Fluid in Two Dimensions, and Systems of Plane Stress", *Phil. Mag.*, **17**, Nr.7, S.554-576, 1934
- [69] U. Wegner, "Über den Zusammenhang von Strömungs- und Spannungsproblemen", *Ing. Arch.*, **5**, S.449-469, 1934
- [70] J. Barta, "Die Darstellung ebener Potentialströmungen mittels einer elastischen Scheibe", *Ing. Arch.*, **6**, S.396-402, 1935
- [71] J.Z. Johnston, B. Tabarrok, "Stream function - stress function approach to incompressible flows", *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow, Proceedings of the First International Conference at University College Swansea, 17.-21.July, 1978*, Pentech Press, London
- [72] H. Neuber, "Der ebene Stromlinienspannungszustand mit lastfreiem Rand", *Ing. Arch.*, **6**, S.325-334, 1935
- [73] P. Nemenyi, "Stromlinien und Hauptspannungstrajektorien", *ZAMM*, **13**, Nr.5, S.364-366, 1933
- [74] M. Hetenyi, "On Similarities Between Stress and Flow Patterns", *Journal of Applied Physics*, **12**, S.592-595, 1941
- [75] M. Scherrer, C. Mattheck, H. Moldenhauer, "Beitrag zur Analogie zwischen Biegestab und ebener Kanalströmung - Die CAO-Methode in Struktur- und Fluidmechanik", *20th CAD-FEM Users Meeting 2002, October 9-11, 2002, Friedrichshafen, Germany*

- [76] I. Szabo, *Höhere Technische Mechanik*, 5.Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1972
- [77] W. Schneider, *Mathematische Methoden der Strömungsmechanik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1978
- [78] M. Schlichting, *Grenzschicht-Theorie*, 9.Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1997
- [79] E. Truckenbrodt, *Fluidmechanik*, 3.Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1989
- [80] C. Mattheck, *Warum alles kaputt geht - Form und Versagen in Natur und Technik*, Forschungszentrum Karlsruhe, 2003
- [81] A. Thum, C. Petersen, O. Svenson, *Verformung, Spannung und Kerbwirkung*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1960
- [82] C. Mattheck, M. Scherrer, I. Tesari, "Kerbspannungen sind Biegespannungen - was sind gute und böse Kerben?", *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.*, **34**, S.427-429, 2003
- [83] W. Beitz, K.-H. Grote (Hrsg.), *Dubbel - Taschenbuch für den Maschinenbau*, Springer-Verlag, Heidelberg, 20.Auflage, 2001
- [84] C. Mattheck, M. Scherrer, I. Tesari, O. Kraft, "Kerbformoptimierung ohne FEM: Ein einfacher Weg, um Kerbspannungen abzubauen", *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.*, **34**, S.514-515, 2003
- [85] M. Holtzmer, *Untersuchungen von CAO- und analytisch optimierten Kerbformen*, Diplomarbeit am Institut für Zuverlässigkeit von Bauteilen und Systemen, Universität Karlsruhe (TH), 2004

A. Anhang

A.1 Wellen unter Zugbelastung mit Durchmesserhältnissen D/d von 3,0/ 1,63/ 1,4/ 1,2/ 1,1/ 1,025.

CAO-optimierte Kerbformen an der Wellenschulter mit Spannungsüberhöhungen von 1,8/1,6/1,4/1,2.

A.2 Wellen unter Biegebelastung mit Durchmesserhältnissen D/d von 3,0/ 1,63/ 1,4/ 1,2/ 1,1/ 1,025.

CAO-optimierte Kerbformen an der Wellenschulter mit Spannungsüberhöhungen von 1,8/1,6/1,4/1,2.

A.3 Wellen unter Torsionsbelastung mit Durchmesserhältnissen D/d von 3,0/ 1,63/ 1,4/ 1,2/ 1,1/ 1,025.

CAO-optimierte Kerbformen an der Wellenschulter mit Spannungsüberhöhungen von 1,8/1,6/1,4/1,2.

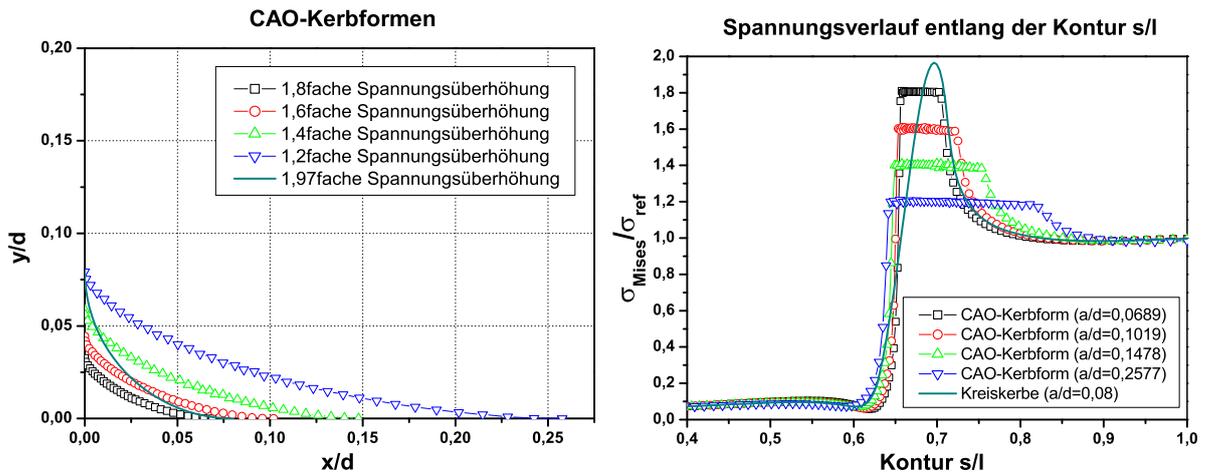
A.4 Balken unter Zugbelastung mit Breitenverhältnissen B/b von 3,0/1,1.

CAO-optimierte Kerbformen an der Balkenschulter mit Spannungsüberhöhungen von 1,8/1,6/1,4/1,2.

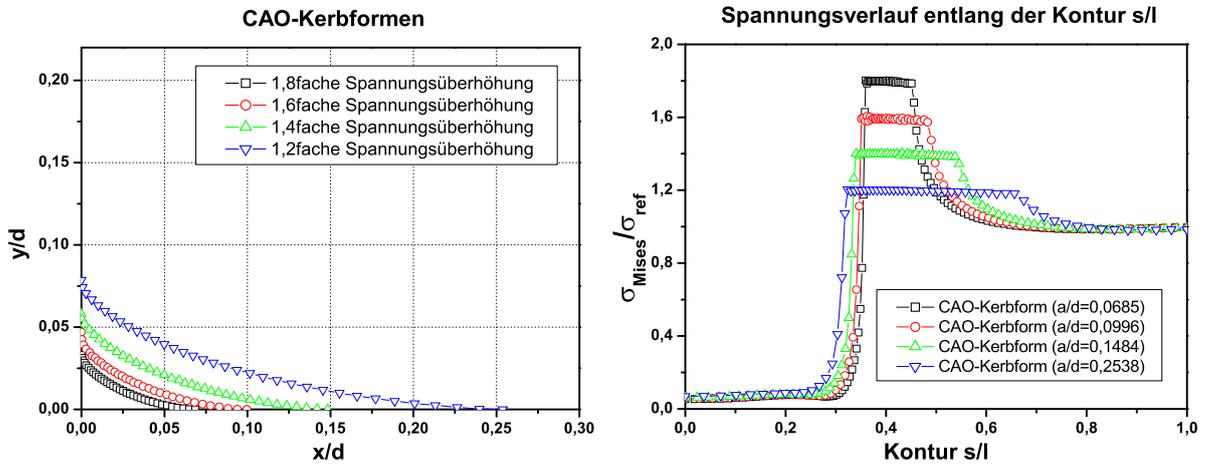
A.5 Balken unter Biegebelastung mit Breitenverhältnissen B/b von 3,0/1,1.

CAO-optimierte Kerbformen an der Balkenschulter mit Spannungsüberhöhungen von 1,8/1,6/1,4/1,2.

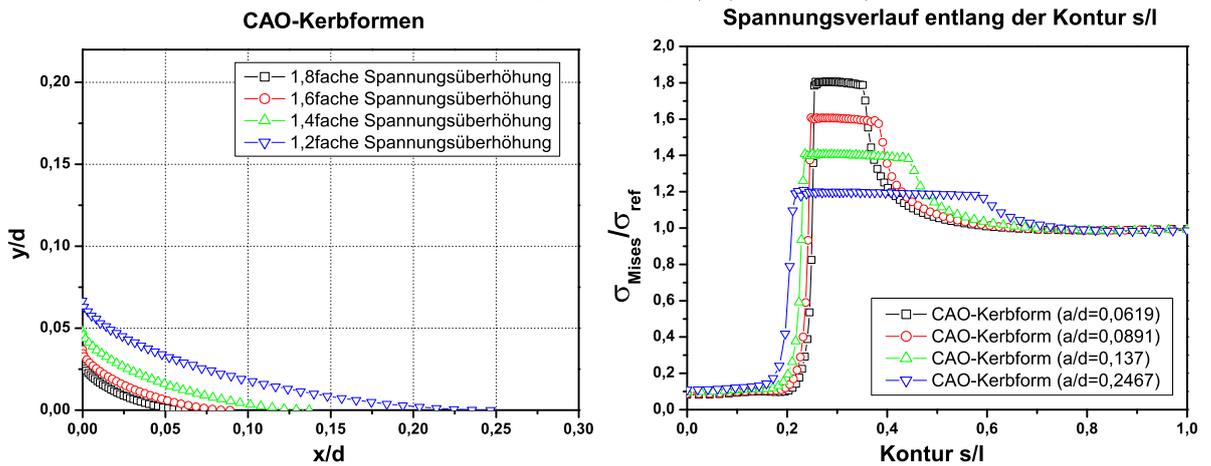
A.1. Zugwellen



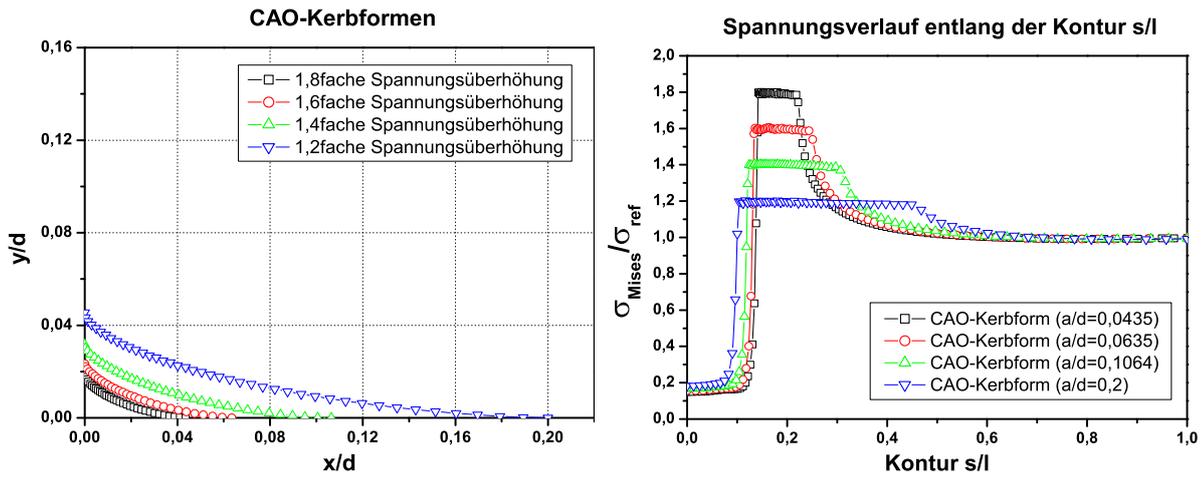
Welle unter Zugbelastung ($D/d = 3,0$)



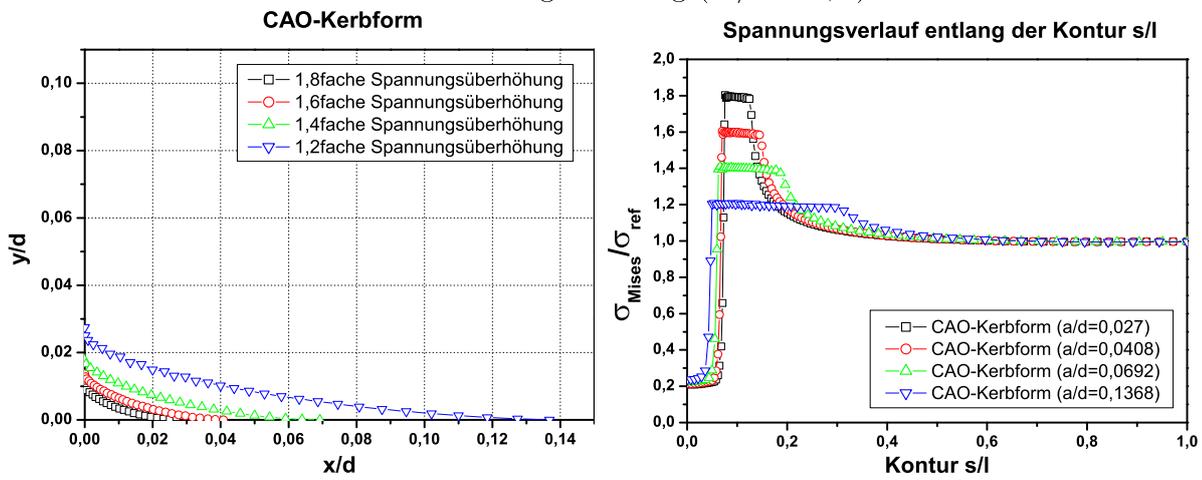
Welle unter Zugbelastung ($D/d = 1,63$)



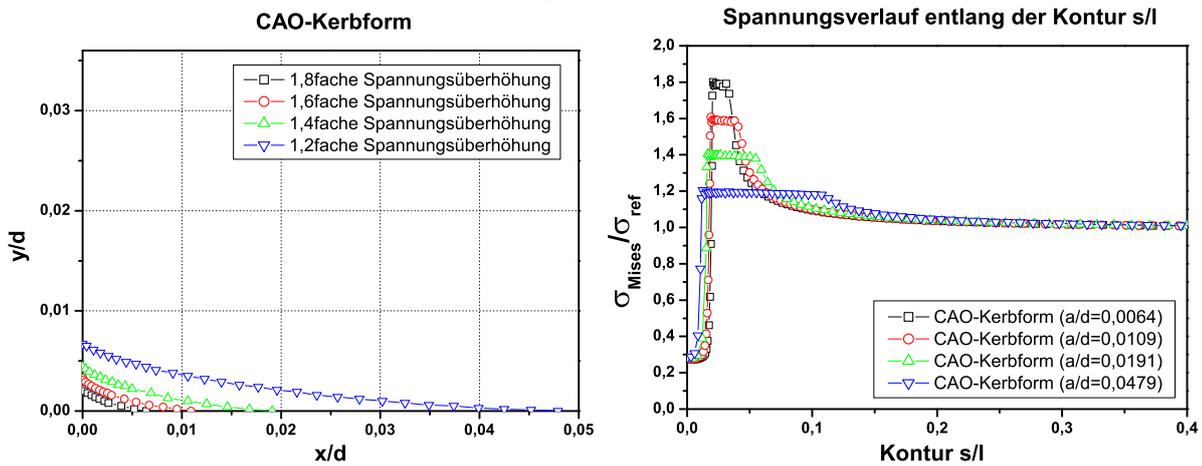
Welle unter Zugbelastung ($D/d = 1,4$)



Welle unter Zugbelastung ($D/d = 1,2$)

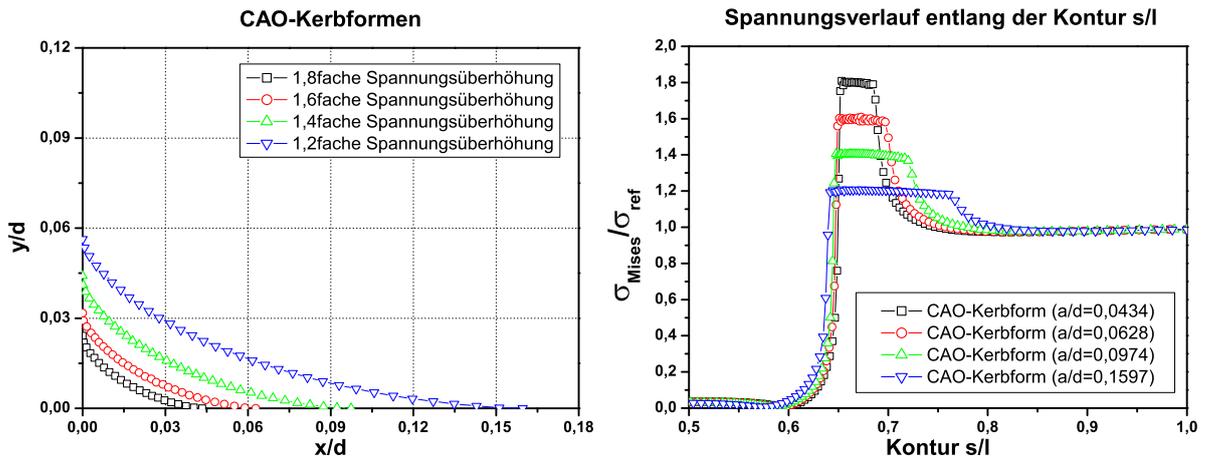


Welle unter Zugbelastung ($D/d = 1,1$)

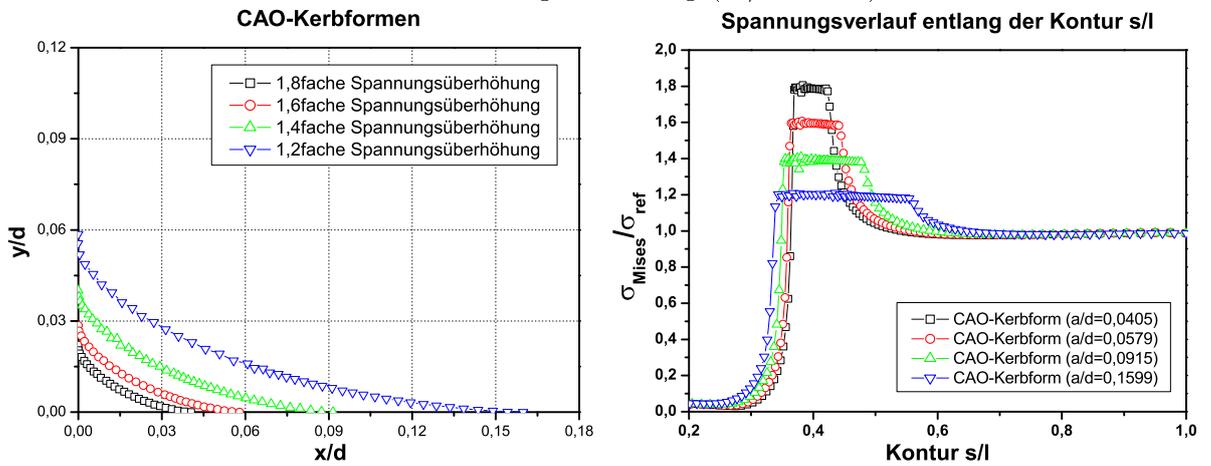


Welle unter Zugbelastung ($D/d = 1,025$)

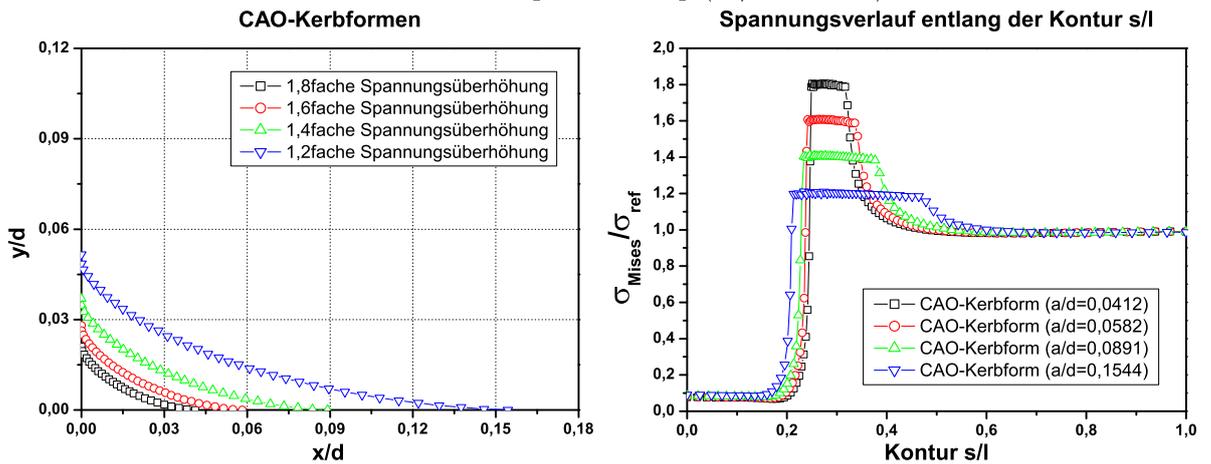
A.2. Biegewellen



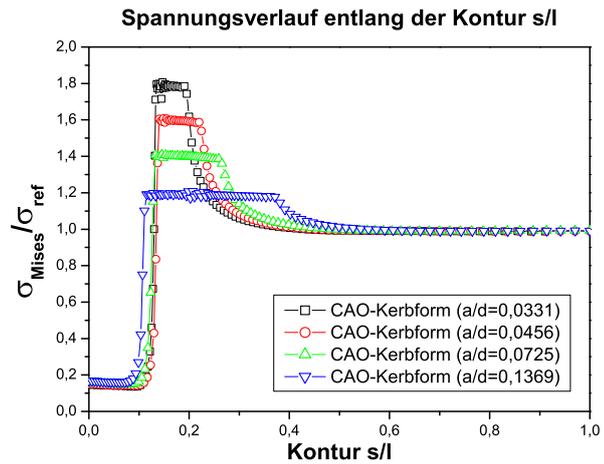
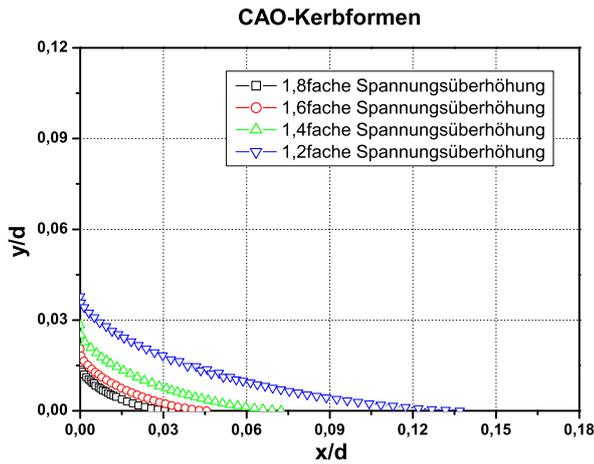
Welle unter Biegebelastung ($D/d = 3,0$)



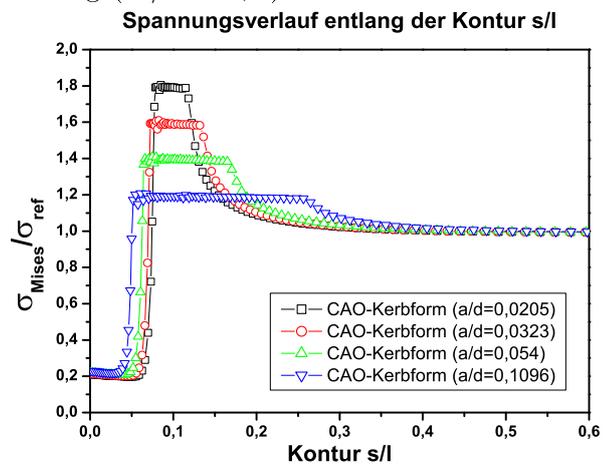
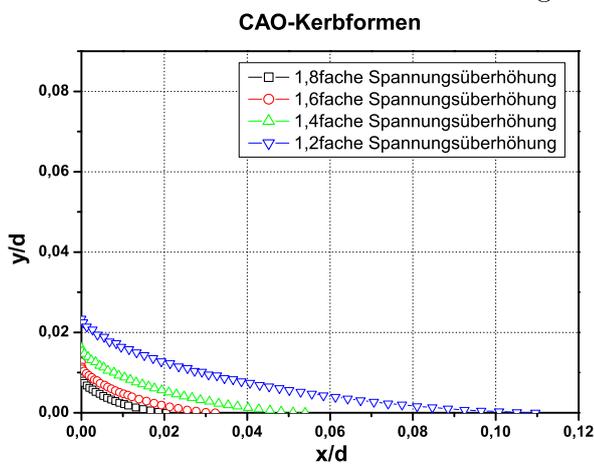
Welle unter Biegebelastung ($D/d = 1,63$)



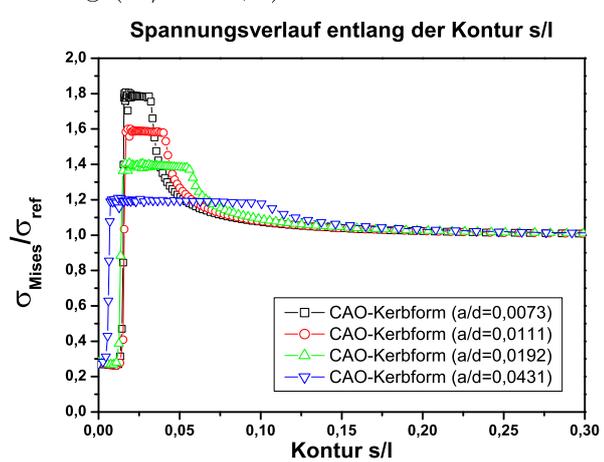
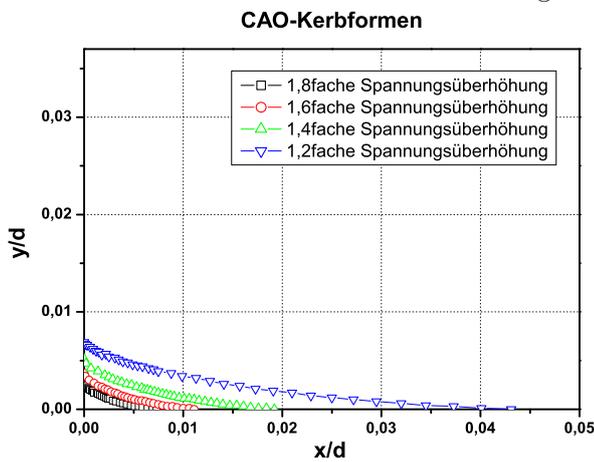
Welle unter Biegebelastung ($D/d = 1,4$)



Welle unter Biegebelastung ($D/d = 1,2$)

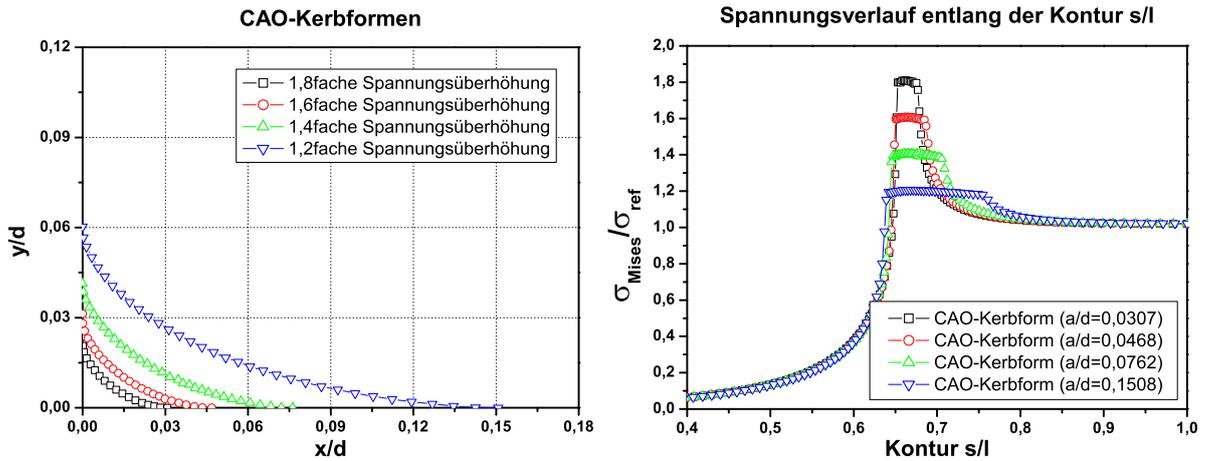


Welle unter Biegebelastung ($D/d = 1,1$)

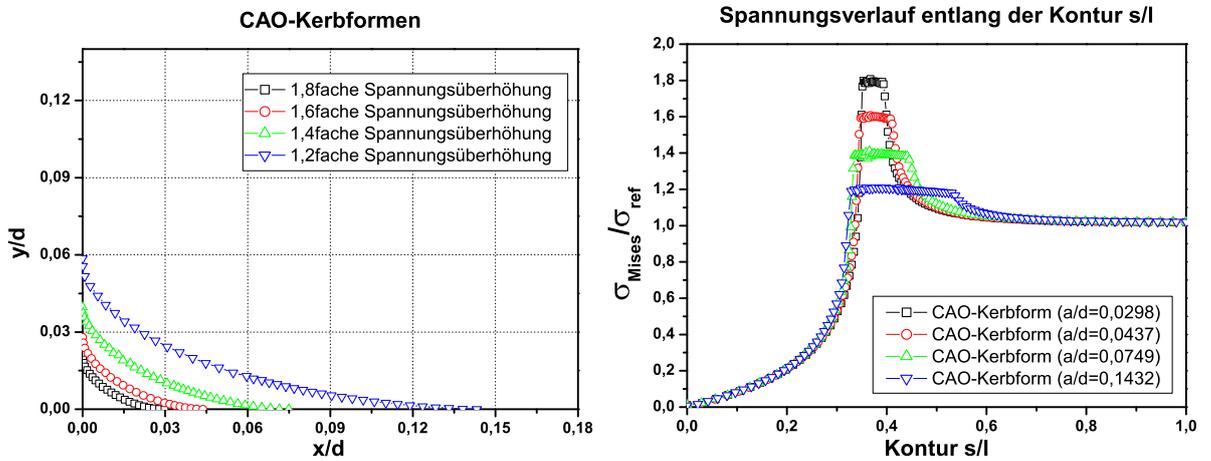


Welle unter Biegebelastung ($D/d = 1,025$)

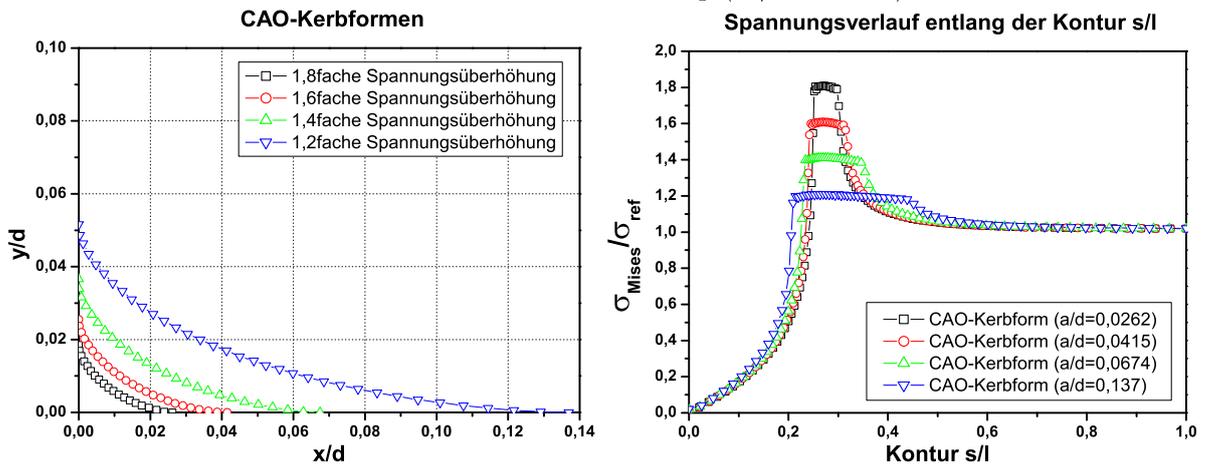
A.3. Torsionswellen



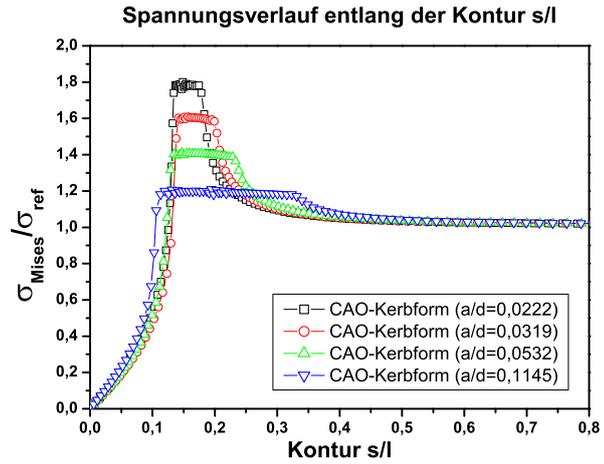
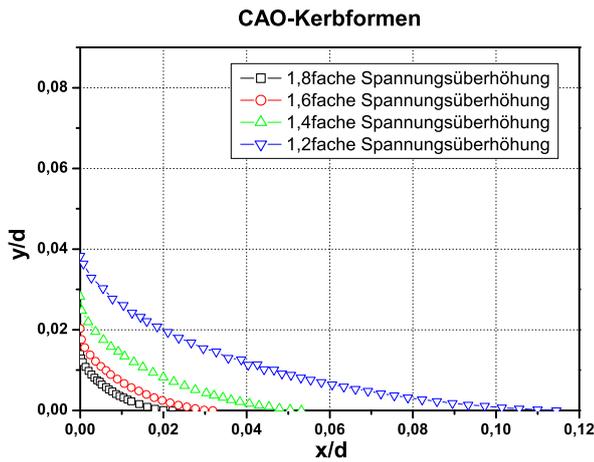
Welle unter Torsionsbelastung ($D/d = 3,0$)



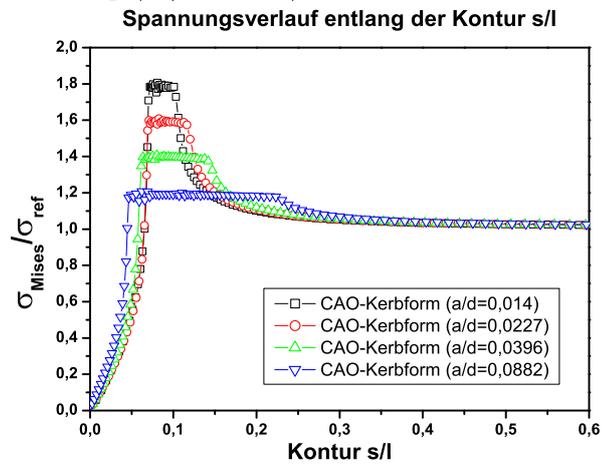
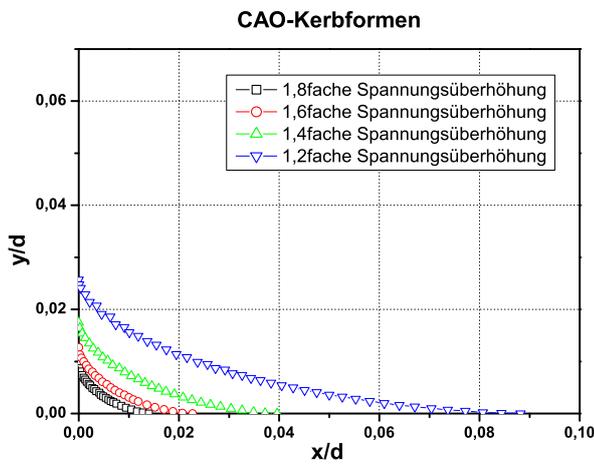
Welle unter Torsionsbelastung ($D/d = 1,63$)



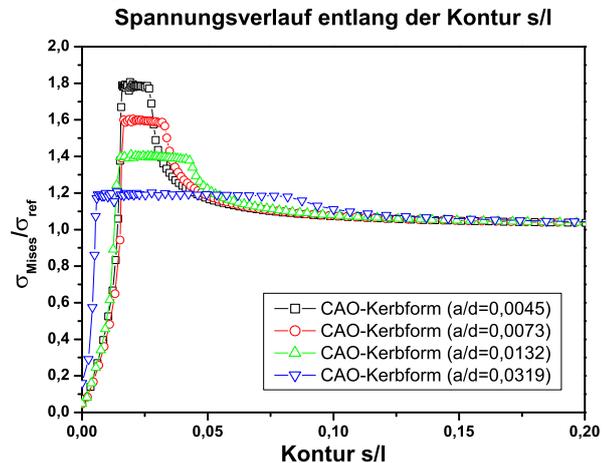
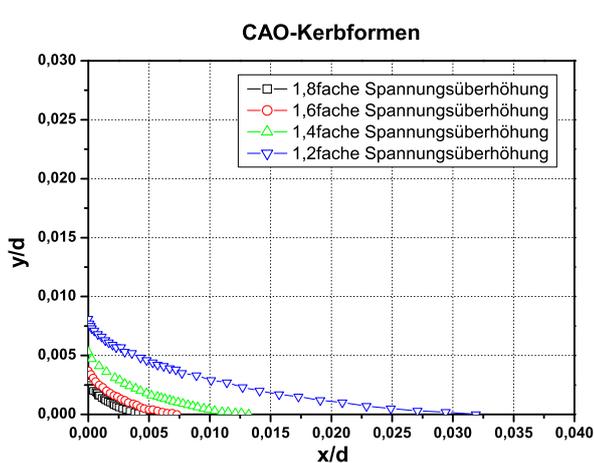
Welle unter Torsionsbelastung ($D/d = 1,4$)



Welle unter Torsionsbelastung ($D/d = 1,2$)

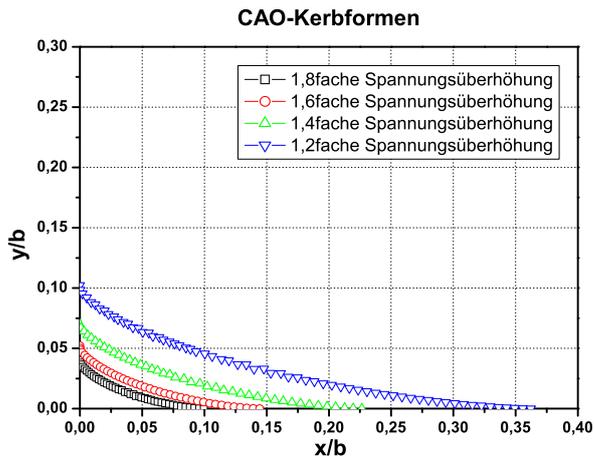


Welle unter Torsionsbelastung ($D/d = 1,1$)

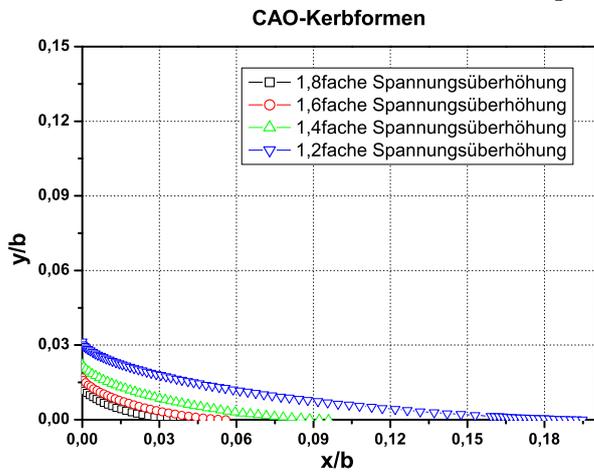


Welle unter Torsionsbelastung ($D/d = 1,025$)

A.4. Zugbalken

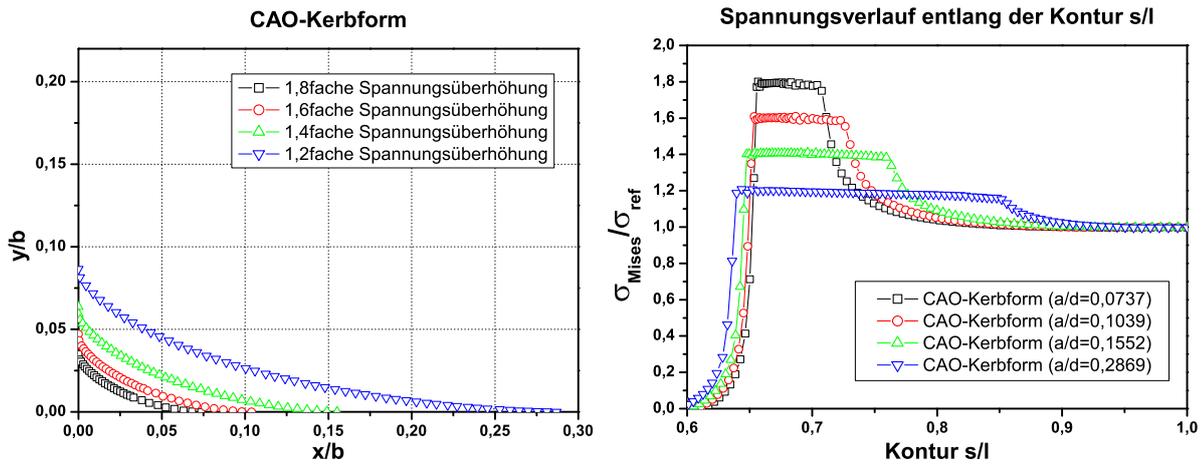


Balken unter Zugbelastung ($B/b = 3,0$)

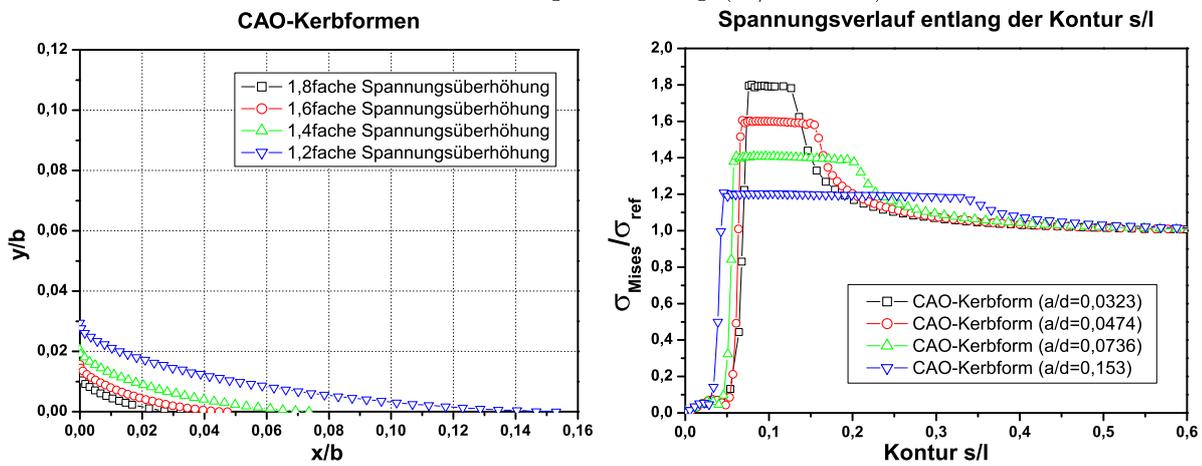


Balken unter Zugbelastung ($B/b = 1,1$)

A.5. Biegebalken



Balken unter Biegebelastung ($B/b = 3,0$)



Balken unter Biegebelastung ($B/b = 1,1$)

