

J. NEUMANN, K. SCHWEIZERHOF

Adaptive FE Diskretisierung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen von Flächentragwerken

Die Eigenwerte der Bewegungsgleichung in der Strukturmechanik werden numerisch bestimmt. Der Diskretisierungsfehler wird a-posteriori abgeschätzt. Dieser bildet die Grundlage einer adaptiven Netzverfeinerung. Das Vorgehen wird an einem Beispiel erläutert.

1. Problemstellung

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist die Bewegungsgleichung der Strukturmechanik in ihrer homogenen Form,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \lambda \rho \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega + \text{homogene Randbedingungen} \quad (1)$$

Diese elliptische DGL liefert Lösungspaare $\{\mathbf{u}_i, \lambda_i\}$, $i = 1, \infty$. \mathbf{u}_i ist die i -te Eigenform, λ_i charakterisiert den i -ten Eigenwert, d.h. die Eigenkreisfrequenz ist $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$. Viskose Dämpfung wird nicht berücksichtigt, damit sind komplexe Lösungen ausgeschlossen. Zur Lösung wird das Bubnov-Galerkin Verfahren benutzt, und damit die Gleichung (1) in eine äquivalente Variationsgleichung überführt,

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \lambda \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \, dx = 0, \quad \rightarrow \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \subset H_0^1. \quad (2)$$

Zur numerischen Umsetzung werden endlich dimensionale Funktionenräume benutzt, die letztendlich auf die FE-Form der Variationsgleichung führen,

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) - \lambda_h \rho \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{u}_h) \, dx = 0, \quad \rightarrow \quad a(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h) - \lambda_h(\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}. \quad (3)$$

In den numerischen Experimenten werden bilineare Polynome verwendet, die C_0 stetig sind: $\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{d}$. Die zugehörige Matrixformulierung lautet: $(\mathbf{K} - \lambda_h \mathbf{M}) \mathbf{d} = \mathbf{0}$.

2. Fehlerabschätzung

Um das Konvergenzverhalten einer FE-Implementierung zu beurteilen, sind entsprechende a-priori Fehlerabschätzungen notwendig. Abweichungen davon indizieren z.B. mögliche Versteifungseffekte, die ausgiebig für elastische und plastisches Materialverhalten diskutiert wurden oder instabile Diskretisierungen. Weiterhin sind a-priori Fehlerschätzungen auch im Hinblick auf a-posteriori Fehlerabschätzungen wesentlich, um die korrekte Asymptotik zu kontrollieren. Für konvexe Gebiete ($\mathbf{u} \in H^2$) liegen z.B. von Nystedt [2] a-priori Fehlerabschätzungen vor,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_a \leq C_a \frac{(\lambda + 2d)}{d} \|hD^2 \mathbf{u}\|_2, \quad \lambda_h - \lambda \leq C_\lambda \frac{(\lambda + 2d)}{d} \|hD^2 \mathbf{u}\|_2^2. \quad (4)$$

Dabei zeigt sich eine große Ähnlichkeit zu den Fehlerabschätzungen in der Elastostatik. C_a , C_0 und C_λ sind Konstanten, die von der Geometrie des betrachteten Gebietes und der Uniformität der gewählten Diskretisierung abhängen. Die Konstante d beschreibt den Abstand vom betrachteten Eigenwert λ zum nächsten Eigenwert λ_i . Man erkennt, daß insbesondere Eigenwerte mit einer (algebraischen) Vielfachheit $\kappa > 1$ eine gesonderte Behandlung erfahren müssen, Heuveline [1]. Im vorliegenden Beitrag werden nur einfache Eigenwerte λ und deren zugehörige Eigenformen \mathbf{u} betrachtet. Im Zuge einer adaptiven Netzverfeinerungsstrategie benötigt man einen a-posteriori Fehlerschätzer. Residuelle Fehlerschätzer wurden schon von Nystedt [2] und Heuveline [1] vorgeschlagen. Wiberg et.al. [3] benutzen das sogenannte 'Superconvergent Patch Recovery' (SPR) Konzept und generieren auf einem Elementpatch ein quadratisches Verschiebungsfeld. Diese Strategie weist jedoch einige Nachteile auf.

Deshalb wird hier auf den bekannten Fehlerschätzer von Zienkiewicz/Zhu zurückgegriffen, um den Fehler der Eigenform $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ in der Energienorm $\|e\|_a$ abschätzen zu können. Dazu wird das bekannte SPR-Konzept nochmals kurz dargestellt. Der Fehler in der Energienorm ist definiert als,

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_a = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \mathbb{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) \, dx \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Die unbekanntenen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ werden durch $\boldsymbol{\sigma}^*$ approximiert. $\boldsymbol{\sigma}^*$ ist global stetig und wird innerhalb des Elementpatches als ein lineares Polynom gewählt $\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{P} \mathbf{a}$ mit $\mathbf{P} = [1xy]$. Mittels der superkonvergenten Spannungspunkte

$E = 1.0e + 5$, $\nu = 0$,
 $\rho = 2500$, $t = 0.3$
 $\mathbf{u}(\cdot, y = 1) = \mathbf{0}$,
 sonst: $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega$

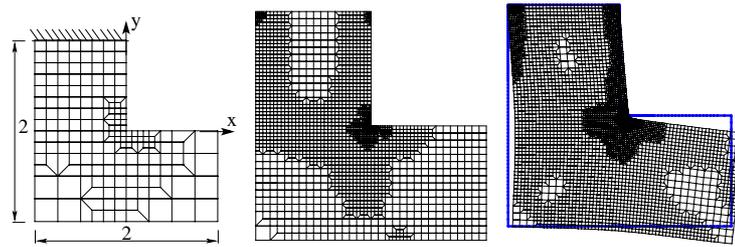
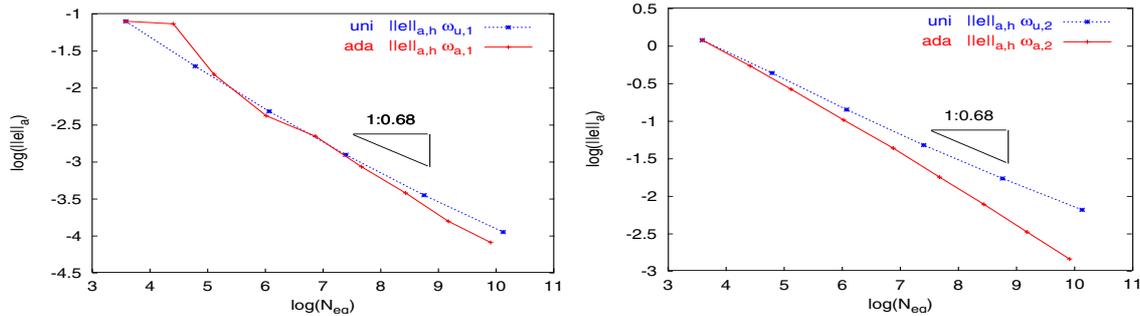


Abbildung 1: L-Gebiet – Daten, Adaptierte FE-Netze für 2. Eigenform



(a) 1.Eigenform

(b) 2.Eigenform

Abbildung 2: Adaption der 2. Eigenform mit SPR; geschätzter Fehler $\|e\|_{a,h}$ für 1. und 2. Eigenform, Vergleich der gleichförmigen Verfeinerung (uni) mit adaptiver Verfeinerung (ada)

x_k und eines diskreten Quadratmittelpunktes wird \mathbf{a} bestimmt,

$$\sum_{k=1}^4 (\sigma_h(x_k) - \mathbf{P}(x_k) \mathbf{a})^2 \Rightarrow \min. \quad (6)$$

Daraus können verbesserte Spannungen im Mittelpunkt x_i des Elementpatches bestimmt werden $\sigma^*(x_i) = \mathbf{P}(x_i) \mathbf{a}$. Damit liegt ein Fehlerschätzer vor, der auf Grund seiner Verwandtschaft mit residuellen Fehlerschätzern ebenfalls eine obere und untere Schranke besitzt. \mathbb{C} charakterisiert dabei die Materialmatrix,

$$\|e\|_{a,h} = \left(\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) \mathbb{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) dx \right)^{1/2}. \quad (7)$$

3. Numerisches Experiment

Am Standardbeispiel – *L* – Gebiet – soll der beschriebene Fehlerschätzer getestet werden. Alle Parameter sind in Abb. 1 angegeben. Die *L*–Form wird zunächst mit Q1 Elementen gleichförmig diskretisiert. Anschließend soll mit Hilfe des SPR-Fehlerschätzer eine adaptive Netzsequenz generiert werden. Die dazu benötigte Netzverfeinerungssteuerung wird hier nicht diskutiert. Dabei soll der Fehler der 2. Eigenform in der Energienorm minimiert werden. Die Ergebnisse der gleichförmigen und adaptiven Diskretisierung sind in Abb. 2(a,b) für die ersten beiden Eigenformen wiedergegeben. Einerseits wird deutlich, daß $\|e\|_{a,h}$ bei gleichförmiger Verfeinerung mit einer konstanten Rate (0.68) reduziert wird. Diese Konvergenzrate stimmt näherungsweise mit dem kleinsten Eigenwert $\alpha = 0.61$ des singulären Lösungsanteiles der Gesamtlösung überein. Infolge der einspringenden Ecke gilt dann $\|e\|_a \leq ch^\alpha \|\mathbf{u}\|_{\alpha+1}$. Bei adaptiver Netzverfeinerung bzgl. der 2. Eigenform ergibt sich eine deutlich bessere Konvergenz gegen die exakte Lösung.

4. Zusammenfassung

Entsprechend der vorliegenden a-priori Fehlerabschätzung zeigt sich bei dem numerischen Beispiel ein ähnlich konvergentes Lösungsverhalten wie bei linearen elastostatischen Problemstellungen. Bei adaptiver Netzverfeinerung führt die Nutzung des SPR-Fehlerschätzers zur erwarteten besseren Konvergenzrate.

5. Literatur

- [1] HEUVELINE, V., RANNACHER, R.: A posteriori control for finite element approximations of elliptic eigenvalue problems. *Advances in Computation of Mathematics*. **15** (2001), 107-138.
- [2] NYSTEDT, CH.: A priori and a posteriori error estimates and adaptive finite element methods for a model eigenvalue problem. Technical Report **95-05** (1995). Dep. of Mathematics, Chalmers University of Technology.
- [3] WIBERG, N.E., BAUSYS, R., HAGER, P.: Improved eigenfrequencies and eigenmodes in free vibration analysis. *Computers and Structures*. **73** (1999), 79-89.