

Dissertationsreihe am Institut für Hydromechanik
der Universität Karlsruhe (TH)
Heft 2004/2

Dreidimensionale und tiefengemittelte
Large-Eddy-Simulation
von Flachwasserströmungen

Christof Hinterberger



Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Fakultät für Bauingenieur-, Geo- und
Umweltwissenschaften, 2004

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe

www.uvka.de

© Universitätsverlag Karlsruhe 2004
Print on Demand

ISSN 1439-4111
ISBN 3-937300-18-X

Dreidimensionale und tiefengemittelte Large-Eddy-Simulation von Flachwasserströmungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Christof Hinterberger

aus Linz

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juli 2004

Hauptreferent: Prof. Dr. W. Rodi

Korreferent: Prof. Dr. ir. W. S. J. Uijttewaal

Karlsruhe 2004

FÜR REBECCA UND ULRIKE.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe. Ganz herzlich bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Wolfgang Rodi für die Ermöglichung der Arbeit, die stetige wissenschaftliche und fachkundige Betreuung und das entgegengebrachte Vertrauen. Herrn Prof. Dr. ir. Wim S. J. Uijtewaal danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Meiner Frau Ulrike Meißner, M. A., danke ich für die moralische Unterstützung und ihre unendliche Geduld. Mein Dank gilt auch allen Kollegen und Mitarbeitern des Instituts für Hydromechanik für die stets gute und konstruktive Zusammenarbeit. Stellvertretend für alle gilt mein Dank besonders Herrn Dr. Jochen Fröhlich, der das Projekt fachlich begleitete und stets für anregende Diskussionen zur Verfügung stand. Herrn Dr. Volker Weitbrecht und Herrn Dipl.-Ing. Carl von Carmer danke ich für die Bereitstellung ihrer experimentellen Daten zur Zylinder- und Buhnenströmung und Herrn Dipl.-Ing. Manuel García-Villalba für die Mitarbeit bei den Simulationen zum Ahmed-Körper. Ganz besonders bedanke ich mich bei Herrn Dr. Christopher Mellen, der bei der Entwicklung des blockstrukturierten LES-Programms $\mathcal{LES}OCC_2$ mit größtem Engagement von Anfang an mit dabei war und der einen äußerst wichtigen Beitrag bei der Umsetzung vieler sehr arbeitsintensiver Programmierarbeiten geleistet hat. Er hat auch noch nach Beendigung seines Aufenthalts in Karlsruhe von Australien aus lange Zeit uneigennützig weiter an der Entwicklung von $\mathcal{LES}OCC_2$ mitgearbeitet. Aufgrund der Zeitverschiebung war so eine Programmentwicklung rund um die Uhr möglich.

Das Projekt wurde durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (Projektnummer DFG Ro558/18) finanziert.

Karlsruhe, den 17. September 2004

Kurzfassung

Flachwasserströmungen kommen in der Natur sehr häufig vor. Für den Wasserbau und die Umwelttechnik relevante Beispiele sind breite Flüsse, Seen und küstennahe Gewässer. Die geringe Tiefe des Wasserkörpers beschränkt die Größe der dreidimensionalen turbulenten Wirbel, jedoch ist Raum für großräumige kohärente zweidimensionale Strukturen, deren Längenskalen ein Vielfaches der Wassertiefe betragen können. Für die Simulation praxisrelevanter geophysikalischer Strömungen sind dreidimensionale Simulationen meist viel zu aufwendig. Deshalb werden häufig tiefengemittelte Berechnungsverfahren eingesetzt, um den Simulationsaufwand zu reduzieren. Wenn großräumige Wirbel den horizontalen Impulsaustausch dominieren, ist es sehr schwierig, diese komplexen Strömungsstrukturen mit statistischen Turbulenzmodellen korrekt zu erfassen. Hier bietet sich der Einsatz der Large-Eddy-Simulation (LES) an, bei der die größeren Strukturen aufgelöst werden und nur noch die kleinen Skalen modelliert werden müssen.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Entwicklung tiefengemittelter LES-Verfahren für Flachwasserströmungen. Bei der tiefengemittelten LES sind diverse Terme zu modellieren. Diese Terme werden in der Arbeit analysiert und entsprechende Modelle vorgeschlagen. Den Ausgangspunkt bilden die exakten tiefengemittelten und räumlich gefilterten Strömungsgleichungen. Die räumliche Filterung führt zu Feinstrukturspannungen. Bei der Verwendung feiner Gitter spielen die Feinstrukturspannungen eine untergeordnete Rolle und es müssen nur die Sohlschubspannung und Dispersionsspannungen modelliert werden, die sich aus der Tiefenmittelung ergeben. Für die Sohlschubspannung eignet sich der übliche quadratische Ansatz. Die Dispersionsspannungen können in einen dispersen und einen turbulenten Anteil aufgespalten werden. Während der disperse Anteil für den Impulstransport von geringer Bedeutung ist, ist die Modellierung des turbulenten Anteils um so wichtiger. Dieser lässt sich in vielen Fällen schon mit einem einfachen auf dem Elder-Ansatz basierenden Wirbelviskositätsmodell zufriedenstellend modellieren. In manchen Strömungssituationen spielt jedoch auch der inverse Energietransfer von der nicht aufgelösten kleinskaligen Turbulenzbewegung zu den aufgelösten zweidimensionalen Strömungsstrukturen eine entscheidende Rolle. Beispielsweise in einer Mischungsschicht. Hier können aufgrund der Kelvin-Helmholtz-Scherinstabilität

kleinste Schwankungen der Grundströmung zur Ausbildung großskaliger Wirbel führen. Zur Modellierung des inversen Energietransfers wird in dieser Arbeit ein neues stochastisches Back-Scatter-Modell für Flachwasserströmungen eingeführt. Die Modellkalibrierung orientiert sich an der kinetischen Energie der tiefengemittelten Schwankungsbewegung in einer ungescherten Gerinneströmung. Die entsprechenden Daten ergeben sich aus hochaufgelösten dreidimensionalen LES-Rechnungen periodischer Gerinneströmungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden.

Zur Validierung des tiefengemittelten LES-Verfahrens werden einige ausgewählte Flachwasserströmungen, nämlich eine Mischungsschicht, eine Zylinderumströmung und ein Bühnenfeld, jeweils mittels dreidimensionaler und tiefengemittelter LES berechnet. Die umfangreichen, anhand experimenteller Daten validierten, dreidimensionalen Simulationen dienen als Referenzdaten zur Beurteilung des tiefengemittelten LES-Verfahrens und liefern Detailinformationen über die in den tiefengemittelten Simulationen zu modellierenden Spannungen. Die Ergebnisse der durchgeführten tiefengemittelten Rechnungen sind vielversprechend und bestätigen die grundsätzliche Eignung tiefengemittelter LES-Verfahren zur Berechnung von Flachwasserströmungen. Dennoch bedarf es noch weiterer Forschungsarbeit, bis ein universelles tiefengemittelttes LES-Verfahren zur Verfügung steht.

Three-dimensional and depth-average Large Eddy Simulation of Shallow Water Flows

Abstract

Shallow flows are very common in nature. Examples of hydraulic or environmental engineering interest are wide rivers, lakes and coastal regions. The shallowness limits the size of the three-dimensional turbulent eddies, but there is room for coherent two-dimensional structures with length-scales orders of magnitude greater than the depth. For practical geophysical flows three-dimensional simulations are mostly too expensive. Therefore depth-integrated models are introduced to obtain more cost-efficient simulations. When large horizontal eddies dominate the momentum exchange, it is very difficult to handle these complex flow structures with statistical turbulence models adequately. Using large eddy simulation (LES) makes it possible to resolve these, leaving only the small scales to be modelled.

The present study aims to improve the depth-average LES method for shallow water flows. In the depth averaged equations different terms require closure. Starting from the exact depth-averaged equations these terms are analysed and corresponding models are proposed. Spatial filtering leads to subgrid scale stresses. On fine grids the subgrid scale stresses are of minor importance and can be neglected. Then only the bottom shear stress and the dispersive stresses caused by the depth integration need modelling. For the bottom shear stress a quadratic friction law can be applied. The dispersive stresses have dispersive and turbulent contributions. While the dispersive part has an minor, in fact negligible, effect on the momentum exchange this does not hold for the turbulent part which requires proper modelling. Fortunately already a simple eddy viscosity model based on the Elder ansatz leads to good results in many cases. But in some situations the inverse transfer of energy from the unresolved small scale turbulence to the resolved two-dimensional motions plays an important role. For instance in an mixing layer, where small scale fluctuations of the base flow can lead to dominant large scale eddies due to the Kelvin-Helmholtz instability. To account

for the inverse transfer of energy a new stochastic backscatter model is introduced. The method is calibrated by means of highly resolved three-dimensional large eddy simulations of flow in straight open channels performed as part of this work.

To validate the depth-average LES method several selected shallow flows – a shallow mixing layer, the shallow flow around a cylinder and the flow in a groyne field – are computed by means of three-dimensional and depth-average LES. The results of the three-dimensional large eddy simulations are compared to experimental data and are used as reference for the depth-average simulations. Additionally the three-dimensional large eddy simulations provide information about the stresses which have to be modelled in a depth-average LES.

The results of the performed depth-average simulations are promising and confirm that it is possible to predict shallow flows with depth-average LES successfully. But there is still further research necessary to obtain a universal depth-average LES model for shallow flows.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Doppelstruktur der Turbulenz in Flachwasserströmungen	2
1.2	Problemstellung	6
1.2.1	Stand der Forschung	6
1.3	Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	10
2	Grundlagen	13
2.1	Hydrodynamische Grundgleichungen	13
2.2	Die Flachwassergleichungen	14
2.3	Dimensionslose Form der Impulsgleichung	15
2.4	Spektrale Bandbreite turbulenter Strömungen	16
2.5	Simulationsverfahren	18
2.5.1	3D-Verfahren	18
2.5.2	Tiefengemittelte Verfahren	19
2.6	Mittlung der Grundgleichungen	20
2.6.1	Zeitliche Mittelung	23
2.6.2	Räumliche Filterung	24
2.6.3	Tiefenmittelung	27
2.6.3.1	Tiefenintegration der Kontinuitätsgleichung	29
2.6.3.2	Tiefenintegration der Impulsgleichung	31
2.6.3.3	Tiefenintegration der Skalartransportgleichung	35
2.6.4	Kombination von Mittelungsoperationen	37
2.6.5	Kombination von zeitlicher Mittelung und Tiefenmittelung	39
2.6.6	Kombination von räumlicher Filterung und Tiefenmittelung	42
2.7	Zusammenfassung der beschriebenen 3D- und 2D-Methoden	45
2.8	Turbulenz und kohärente Strukturen in Flachwasserströmungen	50
2.8.1	Definition von 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz in Flachwasserströmungen	51
2.8.2	Wechselwirkung zwischen 2D- und 3D-Turbulenz	54
2.9	Analyse der Dispersionsspannungen	56
2.9.1	Analyse der instationären Dispersionsspannungen	57
2.9.2	Reynolds-gemittelte Dispersionsspannungen	60
2.9.3	Konsequenzen für die Modellierung	61

3	Modellierung	65
3.1	Geometrische Vereinfachungen bei Gerinneströmung	65
3.2	Anfangsbedingungen	66
3.3	Randbedingungen	66
3.3.1	Modellierung der Wasseroberfläche bei der Gerinneströmung	66
3.3.2	Periodische Randbedingungen	67
3.3.2.1	Volumenkraft in Strömungsrichtung	67
3.3.3	Einströmrandbedingungen	68
3.3.4	Ausströmrandbedingungen	69
3.3.4.1	Korrektur der globalen Massenstrombilanz	69
3.3.4.2	Dämpfungsgebiet vor dem Ausströmrand	70
3.3.5	Wandmodellierung	71
3.3.5.1	3D-Verfahren	71
3.3.5.2	Tiefengemittelte Verfahren	75
3.4	Modellierung der Scheinspannungen und -flüsse	79
3.4.1	3D-Verfahren	81
3.4.1.1	DNS	81
3.4.1.2	LES	81
3.4.1.3	RANS	84
3.4.2	Tiefengemittelte Verfahren	86
3.4.2.1	DA-RANS	86
3.4.2.2	DA-NS	88
3.4.2.3	DA-LES	97
4	Numerisches Lösungsverfahren – LES-Programm $LESOC_2$	103
4.1	Weiterentwicklung des $LESOC$ -Codes zum Multiblock-Code $LESOC_2$	104
4.1.1	Parallelisierung	107
4.2	Testrechnungen zur Verifizierung des LES-Programms	110
4.2.1	Laminare Rohrströmung (Poiseuille-Strömung)	110
4.2.2	Turbulente Strömung um einen Körper mit komplexer Geometrie	112
4.2.3	Kanal- und Gerinneströmung	123
4.2.3.1	Kanalströmung	123
4.2.3.2	Gerinneströmung	125
4.2.3.3	Gegliedertes Rechteckgerinne	132
5	LES ausgewählter Flachwasserströmungen	139
5.1	Gerinneströmung	139
5.1.1	Periodisches Gerinne	139
5.1.1.1	Sohlrreibungsbeiwert, Schubspannungsgeschwindigkeit	142
5.1.1.2	Geschwindigkeitsprofile, Reynoldsspannungen	142
5.1.1.3	Tiefengemittelte Strömung	148
5.1.1.4	Dispersionsspannungen und Reynoldsspannungen von 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz	152

5.1.1.5	Tiefengemittelte Turbulenzenergie	156
5.1.1.6	Räumliche Spektren und Korrelationen	157
5.1.1.7	Stofftransport	182
5.1.2	Rechteckgerinne	186
5.1.2.1	Strömungsfeld	186
5.1.2.2	Reynoldsspannungen	186
5.1.2.3	Tiefengemittelte Strömung	187
5.1.2.4	Gesamt, 3D- und 2D-Turbulenz	188
5.1.2.5	Verlauf der Schubspannungsgeschwindigkeit über die Gerinnebreite	189
5.1.3	Informationen für tiefengemittelte Simulationen	190
5.2	Mischungsschicht	198
5.2.1	Dreidimensionale Simulation	199
5.2.2	Tiefengemittelte Simulationen	200
5.3	Zylinderumströmung	205
5.3.1	Dreidimensionale Simulation	207
5.3.1.1	Dispersionsspannungen	209
5.3.2	Tiefengemittelte Simulation	210
5.3.2.1	Variation der Konstante c_h für die Wirbelviskosität	211
5.3.2.2	Turbulente Diffusion des Tracers	212
5.3.2.3	Einfluss des BSM	213
5.4	Buhnenfeld	215
5.4.1	Dreidimensionale Simulation	218
5.4.2	Tiefengemittelte Simulation	222
6	Zusammenfassung und Ausblick	225
A	Anhang	229
A.1	Zur Koordinatentransformation der Transportgleichungen bei krummlinigen Gittern	229
A.1.1	Koordinatentransformation der Impulsgleichung	230
A.1.2	Koordinatentransformation der Skalartransportgleichung	231
A.2	Verwendung anisotroper Diffusion für den Skalartransport	231
A.3	Zum LES-Programm \mathcal{LESOCC}_2	234
A.3.1	Quellcode der Wandfunktion	234
A.3.2	Dynamische Speicherverwaltung in \mathcal{LESOCC}_2	241
A.3.3	Hilfsprogramme für \mathcal{LESOCC}_2	245
A.4	Ansätze zur Modellierung der kleinskaligen 3D-Turbulenz mit Transportgleichungen	247
A.4.1	1-Gleichungsmodell	247
A.4.2	2-Gleichungsmodell	248
A.5	Anmerkungen zum <i>Back-Scatter</i> -Modell (BSM)	250
A.5.1	Modellierung des inversen Energietransfers nach Leith	250

A.5.2	Turbulenzproduktion durch eine mittelwertsfreie Zufallskraft	251
A.5.3	Einfluss der Divergenz eines Kraftfeldes auf eine inkompressible Strömung	252
A.5.4	Generierung eines divergenzfreien Vektorfeldes	254
A.5.4.1	Projektionsmethode	254
A.5.4.2	Vektorpotential	254
A.5.4.3	Stromfunktion	255
A.5.5	Spektrale Eigenschaften eines mittels Stromfunktion generierten Vektorfeldes	256
A.5.6	Anmerkungen zur programmtechnischen Umsetzung der Zufallszahlengenerierung	257
	Literaturverzeichnis	259
	Abbildungsverzeichnis	268

Nomenklatur

Lateinische Zeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheit
A	Fläche	$[m^2]$
c	Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen	$[m/s]$
$c_{...}, C_{...}$	Modellkonstanten	$[1]$
D	Strömungsgebiet $D \in \mathbb{R}^3$	
\mathbf{D}, D_{ij}	Dispersionsspannungen	$[m^2/s^2]$
\mathbf{f}, f_i	Volumenkräfte	$[m/s^2]$
\mathbf{F}, F_i	Kraftfeld beim <i>Back-scatter</i> -Modell	$[m/s^2]$
f	Frequenz	$[1/s]$
f	Van-Driest-Dämpfungsfunktion	$[1]$
g	Erdbeschleunigung $g = 9.81m/s^2$	$[m/s^2]$
\mathbf{g}, g_i	Erdbeschleunigungsvektor $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$	$[m/s^2]$
G	Filterkern	
h	Wassertiefe	$[m]$
k	turbulente kinetische Energie	$[m^2/s^2]$
k	Wellenzahl	$[1/m]$
\mathbf{k}, k_i	Wellenzahlvektor	$[1/m]$
l	Länge	$[m]$
L	charakteristische Länge	$[m]$
p	Druck	$[Pa]$
p_a	Umgebungsdruck	$[Pa]$
Pr	Prandtl-Zahl	$[1]$
r	Radius	$[m]$
r_{hyd}	hydraulischer Radius	$[m]$
R	Rohrradius	$[m]$
\mathbf{R}, R_{ij}	Reynoldsche Scheinspannungen	$[m^2/s^2]$
Re	Reynoldszahl $Re = UL/\nu$	$[1]$

Zeichen	Bedeutung	Einheit
q, q_i	Fluss, Flussvektor	$[\varphi \text{ m/s}]$
s_φ	Quellterm für allgemeine Skalartransportgleichung	$[\varphi/\text{s}]$
S_{ij}	Deformationsgeschwindigkeitstensor (<i>strain-rate tensor</i>)	$[1/\text{s}]$
Sc	Schmidt-Zahl	[1]
t	Zeit	$[\text{s}]$
T	charakteristische Zeit	$[\text{s}]$
$\mathbf{T}^{[A,B]}$	Scheinspannungen von Filterung mit Filter A und B	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
\mathbf{u}, u_i	Geschwindigkeitsvektor	$[\text{m}/\text{s}]$
U	charakteristische Geschwindigkeit	$[\text{m}/\text{s}]$
u	Geschwindigkeit in x-Richtung	$[\text{m}/\text{s}]$
v	Geschwindigkeit in y-Richtung	$[\text{m}/\text{s}]$
w	Geschwindigkeit in z-Richtung (vertikale Richtung)	$[\text{m}/\text{s}]$
x, y, z	Länge in x-, y-, z-Richtung im karthesischen Koordinatensystem (auch als Vektor \mathbf{x} bzw. x_i)	$[\text{m}]$
y^+	dimensionsloser Wandabstand	[1]
y_P	Wandabstand des Zellzentrums einer wandangrenzenden Gitterzelle	$[\text{m}]$
\mathbf{Z}, Z_i	Vektorfeld von Zufallszahlen	[1]

Griechische Zeichen

Zeichen	Bedeutung	Einheit
α	Sohlneigungswinkel	$[\text{rad}]$
α_k	Kolmogorv-Konstante	[1]
ϵ	Dissipationsrate	$[\text{m}^2/\text{s}^3]$
Γ	Diffusionskoeffizient	$[\text{m}^2/\text{s}]$
Γ_{ij}	Diffusionstensor	$[\text{m}^2/\text{s}]$
κ	Von Kármán Konstante	[1]
φ	allgemeine Transportgröße	$[\varphi]$
σ_t	turbulente Prandtl-/Schmidt-Zahl	[1]
τ_{ij}	Feinstrukturspannungen	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
τ_b	Sohleibung	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
ζ	Wasserspiegellage	$[\text{m}]$
Ψ	Stromfunktion	$[\text{m}^2/\text{s}^2]$
Φ_i	Vektorpotential	

Tiefgestellte Indices

Symbol	Bezeichnung
b	auf die Sohle bezogen
i, j, \dots	Nummerierung der Koordinatenachsen
h	auf die Wassertiefe bezogen
n	normal
rms	Standardabweichung (<i>root-mean square</i>) $\varphi_{rms} = \sqrt{\langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle \varphi'^2 \rangle}$
SGS	auf die turbulente Feinstruktur bezogen (<i>subgrid scale</i>)
t	tangential
t	turbulent
w	an der Wand
τ	auf die Wandschubspannung bezogen
ζ	auf die Wasseroberfläche bezogen
0	Referenzgröße

Operatoren

Symbol	Bezeichnung	Definition
$\langle \rangle$	zeitliche Mittelung	$\langle \varphi \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T \varphi(t) dt$
	ensemble Mittelung	$\langle \varphi \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_n$
\sim	Tiefenmittelung	$\tilde{\varphi} = \frac{1}{h} \int_h \varphi dz$
$\overline{\quad}$	LES-Filter	$\overline{\varphi(\mathbf{x}, t)} = \int_D \varphi(\mathbf{x}', t) G(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}'$
$\overline{\quad}^A$	allgemeiner Filter A	$\overline{\varphi(\mathbf{x}, t)}^A = \int_T \int_D \varphi(\mathbf{x}', t') G_A(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t, t') d\mathbf{x}' dt'$
$\hat{\quad}$	Fouriertransformation	$\hat{\varphi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^3} \int \varphi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$
∇	Nabla-Operator	$\nabla = e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
Δ	Laplace-Operator	$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$
D	totales Differenzial	$\frac{D}{Dt}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial t}(\varphi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i \varphi)$
∂	partielles Differenzial	$\partial_x \varphi = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$
$ \quad $	Betrag eines Vektors	$ \mathbf{a} = \sqrt{a_i a_i}$
$\ \quad\ $	Norm eines Tensors	$\ \mathbf{A}\ = \sqrt{2A_{ij}A_{ij}}$

Summenkonvention

In dieser Arbeit wird die Einsteinsche Summenkonvention angewandt. Tritt ein Index in einem Term doppelt auf, so ist über alle Werte des Indices zu summieren.

Beispiele:

$$\bullet T_{ii} = \sum_{i=1}^3 T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

$$\bullet \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \left[= \partial_{x_i} u_i = \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} u_i = \partial_x u + \partial_y v + \partial_z w \right]$$

Abkürzungen

1D, 2D, 3D	ein-, zwei-, dreidimensional
BSM	<i>Back-Scatter-Modell</i> für inversen Energietransfer
CFD	numerische Strömungssimulation (<i>computational fluid dynamics</i>)
CDS2	Zentrale Differenzen 2. Ordnung (<i>central differencing scheme</i>)
DFT	diskrete Fouriertransformation
DA	tiefengemittelt (<i>depth-averaged</i>)
DA-LES	tiefengemittelte LES
DA-NS	tiefengemittelte Navier-Stokes
DA-RANS	tiefengemittelte RANS
DNS	direkte numerische Simulation
LES	Grobstruktursimulation, Large-Eddy-Simulation
<i>LESOCC</i>	Large-Eddy-Simulation on Curvilinear Coordinates
NSG	Navier-Stokes-Gleichungen
PIV	<i>particle image velocimetry</i>
POD	<i>proper orthogonal decomposition</i>
RANS	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes
SGS	Feinstrukturspannungen (<i>subgrid scale</i>)
URANS	instationäre RANS (<i>unsteady RANS</i>)

1 Einleitung



Abb. 1.1: Die Erde vom Weltraum gesehen (Quelle: NASA).

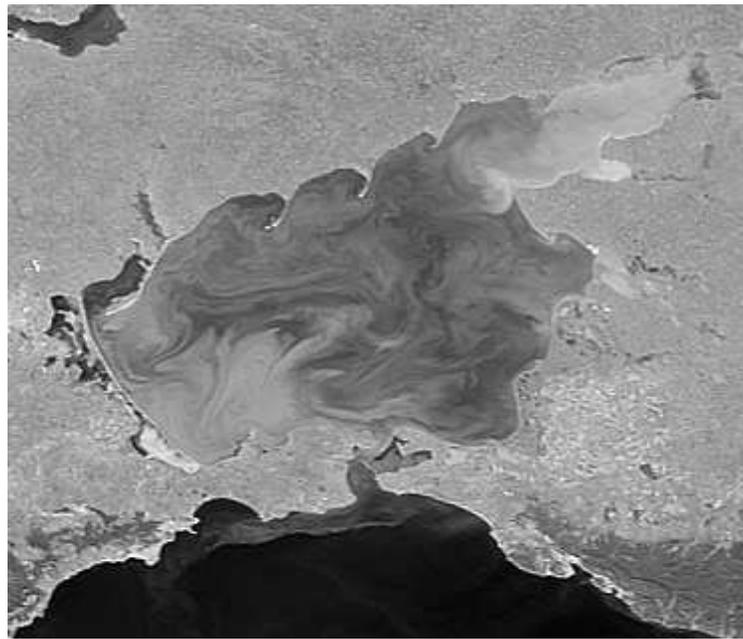
In der Natur findet man viele Strömungen, bei denen die vertikale Ausdehnung des Strömungskörpers deutlich geringer ist als die horizontale Ausdehnung. Ein sehr anschauliches Beispiel ist die Strömung in der Erdatmosphäre (Abb. 1.1), welche, wie der Blick vom Weltraum offenbart, eine äußerst dünne Hülle um unseren Planeten bildet. Auch in den Ozeanen und in vielen Binnengewässern ist die Tiefe gering im Verhältnis zur lateralen Ausdehnung. Man spricht von sog. Flachwasserströmungen, wobei der Begriff insofern etwas irreführend ist, als er auch Strömungen von anderen Fluiden als Wasser umfasst.

Eine wichtige Untergruppe der Flachwasserströmungen bilden flache Fließgewässer. Dort ist die Strömung immer hochturbulent. Dazu gehören primär Flüsse – der Rhein bei Karlsruhe beispielsweise ist etwa 300 m breit und nur 2 m tief – aber auch durchströmte Seen und Strömungen in Küstennähe oder in Mündungsgebieten. Charakteristisch für sie ist das große Breiten- zu Tiefenverhältnis des Strömungskörpers, der durch die Gewässersohle und eine freie Wasseroberfläche begrenzt wird.

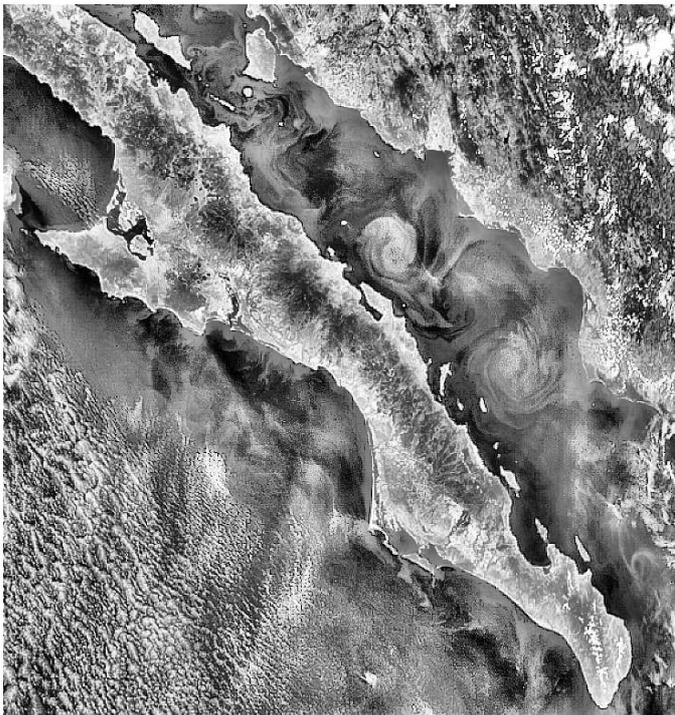
1.1 Doppelstruktur der Turbulenz in Flachwasserströmungen

Die geringe vertikale Ausdehnung des Strömungskörpers schränkt in Flachwasserströmungen die Bewegungsfreiheit der Strömung stark ein und limitiert so das Längenmaß der dreidimensionalen Turbulenzbewegung. Die große laterale Ausdehnung ermöglicht jedoch die Ausbildung großräumiger horizontaler quasi-zweidimensionaler Wirbelstrukturen. Diese für Flachwasserströmungen charakteristischen großskaligen Wirbelstrukturen sind im Infrarotbild oder aufgrund unterschiedlicher Gewässertrübung in Luftbild- und Satellitenaufnahmen gut erkennbar, wie zum Beispiel in Abbildung 1.2a – einer Satellitenaufnahme des Asowschen Meers mit einem Teil des Schwarzen Meeres im Süden. Durch die starke Trübung der Gewässer sind die großräumigen Wirbelstrukturen deutlich zu sehen. Ein anderes Beispiel sind in Abbildung 1.2b große windgetriebene Wirbel im Golf von Kalifornien, welche aufgrund der hohen Planktonkonzentration sichtbar wurden. Auch in Binnengewässern finden sich große Wirbelstrukturen, wie die Aufnahme des Michigan-Sees während einer starken Algenblüte in Abbildung 1.2 zeigt.

Als Folge der im Vergleich zur vertikalen Ausdehnung wesentlich größeren horizontalen Ausdehnung kann sich in Flachwasserströmungen eine Doppelstruktur der Turbulenz ausbilden: Statt eines kontinuierlichen Spektrums der turbulenten Schwankungsbewegung wie bei den meisten Strömungen der Technik (vgl. Abb. 1.3a) ergeben sich zwei weitgehend getrennte Bereiche im Turbulenzspektrum, wobei die kleinskaligen 3D-Turbulenzwirbel primär bei den hohen Wellenzahlen k und die großskalige 2D-Bewegung bei den niedrigeren Wellenzahlen auftreten. In Abbildung 1.3b ist ein entsprechendes Turbulenz-



(a) Asowsches Meer, Schwarzes Meer im Süden



(b) Golf von Kalifornien



(c) Michigansee

Abb. 1.2: Großräumige zweidimensionale Wirbelstrukturen in Meeren und Binnengewässern; der Kontrast in den Bildern wurde zur Visualisierung der Wirbel lokal verstärkt (Quellen: Abb. a und b: <http://visibleearth.nasa.gov>, Abb. c: <http://seawifs.gsfc.nasa.gov>).

spektrum mit einer ausgeprägten Doppelstruktur skizziert. Wie in der schematischen Abbildung angedeutet, findet für die kleinskalige 3D-Turbulenz ein Energiefluss von den größeren zu den kleineren Wirbeln statt, und die kinetische Energie wird schließlich bei den kleinsten Wirbeln dissipiert. Das Energiespektrum hat hier im Trägheitsbereich zwischen den Wellenzahlen mit Energieeintrag und dem dissipativen Bereich eine Verteilung mit $k^{-5/3}$. Bei den großskaligen 2D-Turbulenzwirbeln tritt allerdings durch das Zusammenwachsen von kleineren zu größeren Wirbeln ein Energietransfer hin zu größeren Strukturen auf. Auch in diesem Bereich mit einer negativen Energiekaskade hat das Spektrum eine Verteilung mit $k^{-5/3}$ (Lesieur 1990).

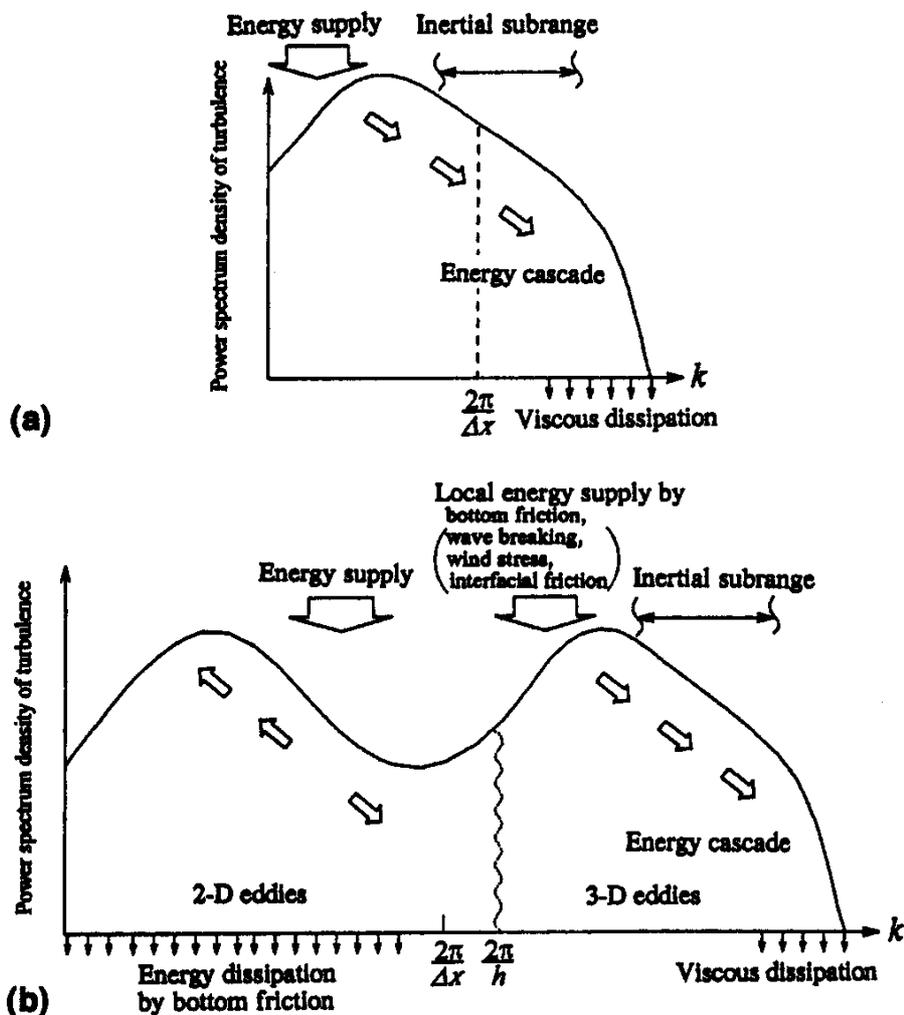


Abb. 1.3: Schematische Darstellung des turbulenten Energiespektrums: (a) in einer gewöhnlichen turbulenten Strömung; (b) in Flachwasserströmungen (von Nadaoka und Yagi 1998).

Die Doppelstruktur der Turbulenz und die großräumigen Wirbelstrukturen in Flachwasserströmungen wurden vielfach in der Natur beobachtet. So beispielsweise in Nachlaufströmungen um Inseln, Inselgruppen und um Halbinseln (Wolanski et al. 1984, Pattiaratchi et al. 1986, Ingram und Chu 1987, Cramp et al. 1991, Ferrier et al. 1996). Ein eindrucksvolles Beispiel für die großräumigen Wirbelstrukturen ist die etwa 300 km lange Wirbelstraße in einem Stratocumulus Wolkenband in Abbildung 1.4. Das Hindernis, das zur Ausbildung der Wirbelstraße führte, ist ein rund 2200 m hoher Vulkan auf der norwegischen Insel *Jan Mayen*.

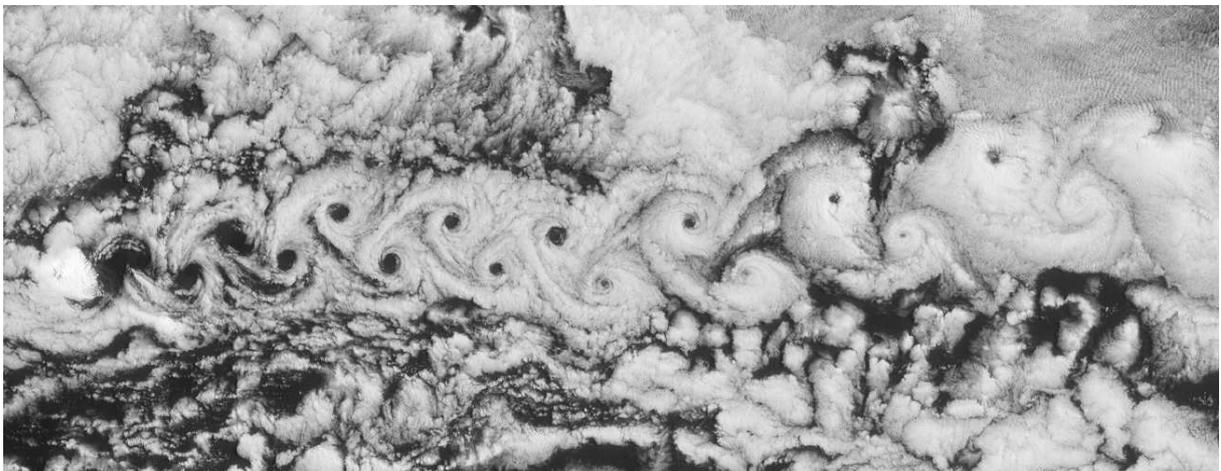


Abb. 1.4: Von Kármánsche Wirbelstraße bei der Vulkaninsel *Jan Mayen* im Nordatlantik;
Quelle: <http://www.jpl.nasa.gov>.

Die Dynamik der großräumigen quasi-zweidimensionalen Wirbelstrukturen in Flachwasserströmungen wurde in zahlreichen Laborexperimenten studiert. Beispiele sind die Untersuchungen von Sellin (1964), Alavian und Chu (1985), Tamai et al. (1986) in Gerinnen mit gegliedertem Querschnitt, von Tsujimoto und Kitamura (1992), Ikeda et al. (1994) in Gerinnen mit teilweisem Bewuchs (im Modell simuliert durch Stäbe) sowie von freien Scherschichten wie Mischungsschichten (Chu und Babarutsi 1988, Uijttewaal und Booij 2000), Strahlen (Dracos et al. 1992) und Nachlaufströmungen (Chen und Jirka 1997).

1.2 Problemstellung

Bei vielen Fragestellungen, z. B. bei der Bewertung von wasserbaulichen Maßnahmen, aber auch beim Umweltmanagement und manchmal notgedrungen im Falle von Umweltkatastrophen wie Schiffshavarien und Chemieunfällen ist die Analyse von Ausbreitungs- und Strömungsvorgängen in Flachwasserströmungen wichtig. Dazu werden zunehmend numerische Berechnungsverfahren eingesetzt und es besteht ein großer Bedarf an verlässlichen Methoden zur Simulation dieser Klasse von turbulenten Strömungen. Bedingt durch die große horizontale Ausdehnung praxisrelevanter Flachwasserströmungen sind dreidimensionale numerische Simulationen dieser Strömungen äußerst aufwendig und nur auf Hochleistungsrechnern durchführbar. Charakteristisch für praxisrelevante Flachwasserströmungen ist der große Längenskalenbereich, der von den zumeist sehr großen lateralen Abmessungen der Strömungsgeometrie bis hin zur den kleinsten turbulenten Wirbelstrukturen reicht. Eine sog. direkte numerische Simulation (DNS), die all diese Skalen dreidimensional durch das numerische Gitter auflöst, ist aufgrund des damit verbundenen Ressourcenbedarfs selbst auf Höchstleistungsrechnern nicht machbar. Doch für die meisten praktischen Problemstellungen müssen nicht alle diese Skalen numerisch aufgelöst werden (Ferziger et al. 2002). Ist man an den großskaligen Prozessen in Flachwasserströmungen interessiert, ist die Verwendung tiefengemittelter Verfahren naheliegend. Der große Aufwand, der für dreidimensionale Rechnungen erforderlich ist, zeigt die Bedeutung zuverlässiger zweidimensionaler tiefengemittelter Berechnungsverfahren für die Praxis, denn durch den Einsatz tiefengemittelter Verfahren lässt sich der numerische Aufwand so stark verringern, dass Simulationen praxisrelevanter Flachwasserströmungen auch auf gewöhnlichen Arbeitsplatzrechnern (PCs, Workstations) möglich sind.

1.2.1 Stand der Forschung

Seit geraumer Zeit werden tiefengemittelte Verfahren eingesetzt, bei denen die Turbulenzbewegung völlig herausgemittelt wird und nur gemittelte Größen berechnet werden. Der Einfluss der Turbulenz wird hierbei mit einem statistischen Turbulenzmodell beschrieben (z. B. Rastogi und Rodi 1978, Mc Guirk und Rodi 1978, Booij 1989). Die großräumigen zweidimensionalen Wirbel in

Flachwasserströmungen haben einen bedeutenden Einfluss auf die Strömungsbildung sowie auf den turbulenten Impuls- und Stofftransport und müssen bei Strömungsberechnungen entsprechend berücksichtigt werden. Da sich diese großskaligen Wirbelstrukturen kaum durch ein Turbulenzmodell richtig erfassen lassen, ist hier die Verwendung Reynolds-gemittelter Verfahren (RANS) problematisch. Vielversprechender ist hier die Large-Eddy-Simulation (LES), bei der diese Wirbel räumlich und zeitlich aufgelöst werden und nur der Effekt der kleinskaligen Turbulenz modelliert werden muss. Während bei einer dreidimensionalen LES nur die nicht aufgelöste kleinskalige und annähernd isotrope dreidimensionale Turbulenzbewegung schon mit einfacheren Modellen erfolgreich modelliert werden kann, verlangt eine tiefengemittelte LES (DA-LES) jedoch die Modellierung des Einflusses der gesamten nicht aufgelösten zwei- und dreidimensionalen Turbulenzbewegung (vgl. Abb. 1.5). Die zu lösenden Gleichungen erhält man durch Integration der dreidimensionalen instationären Gleichungen über die Tiefe. Dabei wird ein Bodenreibungsglied eingeführt, aber es treten auch effektive Spannungen auf, die an vertikalen Flächen angreifen und einen Effekt der kleinskaligen nicht aufgelösten Turbulenz auf die aufgelöste Bewegung darstellen.

Tiefengemittelte Rechnungen dieser Art wurden schon seit längerer Zeit durchgeführt (z. B. [Leendertse 1967](#), [Kuipers und Vreugdenhil 1973](#)), jedoch noch nicht als Large-Eddy-Simulation bezeichnet. Obwohl nur die Sohlreibung modelliert wurde und keine effektiven Spannungen an vertikalen Flächen (horizontaler Impulsaustausch) berücksichtigt wurden, entstanden realistische großräumige Wirbel. In verschiedenen Arbeiten ([Flokstra 1976](#), [Abbott et al. 1985](#), [Abbott und Larsen 1985](#)) wurde diskutiert, ob in einem solchen Modell überhaupt Wirbel entstehen können. Dabei wurde gezeigt, dass zur Entstehung von Wirbelstärke effektive horizontale Spannungen aufgrund horizontaler Scherung notwendig sind, die auch durch die Numerik verursacht sein können.

In neuerer Zeit wurden auch als 2D-Large-Eddy-Simulation bezeichnete Rechnungen bekannt, wobei verschiedene Modellvarianten vorgestellt wurden. So haben [Madsen et al. \(1988\)](#) die durch die kleinskalige Bewegung verursachten horizontalen Spannungen mit dem Smagorinsky-Feinstrukturmodell simuliert. Dabei wird das Längenmaß der kleinskaligen Bewegung proportional der horizontalen Gittermaschenweite angenommen. Da die kleinskalige Turbulenz jedoch mit der Wassertiefe skaliert, scheint dieser Ansatz nicht besonders gut

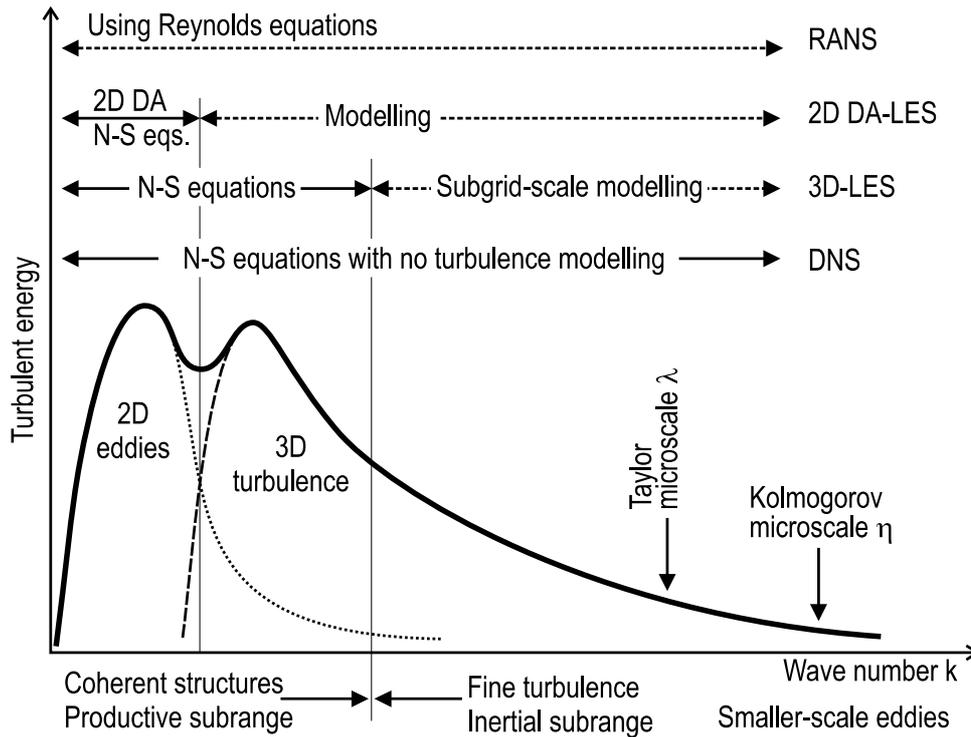


Abb. 1.5: Verschiedene Möglichkeiten der Simulation von Flachwasserströmungen in Bezug zum Turbulenzspektrum (nach Nezu und Nakagawa 1993).

geeignet. Es wurde nur eine nicht detailliert beschriebene Anwendung auf die Strömung um Haraldsund (Faroer Inseln) kurz vorgestellt, bei der nicht klar ist, ob die Bodenreibung mitsimuliert wurde. Nadaoka und Yagi (1998) haben die Wirkung der kleinskaligen Turbulenz auf die aufgelöste instationäre 2D-Horizontalbewegung über eine Wirbelviskosität simuliert, wobei diese proportional $\sqrt{k}L$ genommen wurde. Hierbei ist k die kinetische Energie der kleinskaligen Turbulenzbewegung und L das Längenmaß dieser Turbulenz, welches proportional der Tiefe angenommen wurde. Dies scheint ein vernünftiger Ansatz zu sein, der weiter Beachtung finden sollte. Getestet wurde das Rechenmodell in einem Kanal mit teilweisem Bewuchs, welcher in den korrespondierenden Experimenten durch zylindrische Stäbe idealisiert wurde. Im numerischen Modell ging der Bewuchs über einen erhöhten Sohlrauigkeitsbeiwert in den üblichen quadratische Ansatz für die Bodenreibung ein. In der Scherschicht am Übergang zwischen dem Gerinneteil mit Bewuchs und dem ohne Bewuchs entstehen großskalige horizontale Wirbel, welche durch das Modell realistisch wiedergegeben werden. Kimura und Hosada (1997) haben ein einfaches Modell für die Wirbelviskosität der kleinskaligen Turbulenzbewegung angewandt,

in dem sie diese Wirbelviskosität einfach proportional der Sohlschubspannung und der Wassertiefe setzten. Die Bodenreibung modellierten sie mit dem üblichen quadratischen Ansatz. Sie haben damit die instationäre Strömung im Bereich einer Totwasserzone in einer Bucht mit Außenströmung berechnet und eine gute Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen erzielt.

In jüngerer Zeit wurde von [Uittenbogaard](#) ein Feinstrukturmodell für tiefengemittelte LES entworfen ([van Vossen 2000](#), [Uittenbogaard 2001](#), [Uittenbogaard und van Vossen 2004](#)). Die Modellierung basiert auf einem Wirbelviskositätsansatz, wobei sich die effektive Wirbelviskosität aus einem Anteil der kleinskaligen 3D-Turbulenz $\nu_{3D} \sim u_\tau h$ und einer Wirbelviskosität $\nu_{2D_{SGS}}$ für die nicht aufgelösten 2D-Wirbel zusammensetzt. Die Modellierung der Bodenreibung erfolgt über den üblichen quadratischen Ansatz für die Sohlschubspannung. In die Modellierung für $\nu_{2D_{SGS}}$ gehen unter anderem die Wassertiefe h , die horizontale Gitterauflösung (über die Grenzwellenzahl k_S) und ein Bodenreibungsparameter $B = \frac{3}{4}c_f\bar{u}/h$ ein. Das Modell wurde unter anderem an einer Mischungsschicht, einem Bühnenfeld sowie einer Hafenmündung getestet ([van Vossen 2000](#), [Surajate Boonya-aroonnet und Yasuyuki Shimizu 2004](#), [van Schijndel und Jagers 2004](#)). Auch hier wurde eine viel versprechende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gefunden. Diese Rechnungen wurden als horizontale Large-Eddy-Simulation (HLES) bezeichnet.

Aus den bisherigen Arbeiten ist nicht klar geworden, wie wichtig die Modellierung der effektiven horizontalen Spannungen einer tiefengemittelten LES-Rechnung ist und welches Modell hierfür am besten geeignet ist. In diesem Zusammenhang erscheint auch das fundamentale Gerüst der tiefengemittelten Large-Eddy-Simulation noch stark ausbaufähig. Dies gilt insbesondere für die mathematischen und physikalischen Aspekte, die sich aus der Tiefenmittelung in Verbindung mit der räumlichen LES-Filterung ergeben. Es besteht deshalb noch großer Forschungsbedarf auf diesem Gebiet, um ein für die Ingenieurspraxis abgesichertes Modell zur Verfügung zu stellen.

1.3 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Gegenstand der hier vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines tiefengemittelten Large-Eddy-Simulationsverfahrens für Flachwasserströmungen. Ausgangspunkt für die Modellierung sind die exakten tiefengemittelten Strömungsgleichungen. Umfangreiche dreidimensionale LES-Rechnungen, die einen wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit darstellen, liefern Informationen über die in den tiefengemittelten Gleichungen zu modellierenden Terme. Hauptaugenmerk gilt dabei der bei einem tiefengemittelten Berechnungsverfahren nicht auflösbaren 3D-Turbulenzbewegung. Die Modellierung beschränkt sich auf den Fall hochturbulenter Fließgewässer, in denen keine ausgeprägten Sekundärströmungen und Auftriebskräfte durch Dichtegradienten zu berücksichtigen sind. Dadurch werden primär breite Flüsse, aber auch seichte durchströmte Seen und Strömungen in Küstennähe oder in Mündungsgebieten abgedeckt. In diesen Maßstäben spielt der Einfluss der Erdrotation keine Rolle. Bei den im Rahmen der Modellentwicklung durchgeführten Simulationen werden idealisierte voll entwickelte Gerinneströmungen unter Normalabfluss mit konstanter Wassertiefe betrachtet.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

In Kapitel 2 werden die physikalischen und mathematischen Grundlagen zur Berechnung von Flachwasserströmungen mit dreidimensionalen und tiefengemittelten Methoden behandelt. Dabei wird die Tiefenmittelung der Strömungsgleichungen detailliert vorgeführt, um so eine solide Grundlage für die notwendigen Modellierungen und Vereinfachungen zu schaffen. Insbesondere werden in dieser Arbeit die bei der Tiefenmittelung auftretenden Dispersionsspannungen näher analysiert und so Ansätze zu deren Modellierung abgeleitet. Durch die Tiefenmittelung ist eine Aufspaltung des dreidimensionalen Strömungsfeldes einer turbulenten Flachwasserströmung in einen 3D- und einen 2D-Anteil möglich. Darauf basiert die in Abschnitt 2.8.1 angegebene Definition von 3D- und 2D-Turbulenz in Flachwasserströmungen, auf welche später im Rahmen der Modellierung und der Auswertung der Simulationsergebnisse häufig zurückgegriffen wird.

Auf die numerische Modellierung von Flachwasserströmungen wird in Kapitel 3 eingegangen. Zunächst werden hierbei die für die durchgeführten Simulationen verwendeten Randbedingungen, wie z. B. an der Wasseroberfläche, der

Sohle und den Seitenwänden, beschrieben. Danach folgt eine Auswahl einfacher gängiger Modellierungskonzepte für die in den gemittelten Gleichungen auftretenden Scheinspannungen.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurden mit dem LES-Code $\mathcal{LES}OCC_2$ – einer Weiterentwicklung des von [Breuer und Rodi \(1996\)](#) entwickelten LES-Codes $\mathcal{LES}OCC$ (Large-Eddy Simulation on Curvi-linear Coordinates, siehe auch [Breuer 2002](#)) – durchgeführt. Das numerische Lösungsverfahren basiert auf der Finite-Volumen-Methode des ursprünglichen $\mathcal{LES}OCC$ -Codes und wird in Kapitel 4 kurz beschrieben.

Zur Simulation komplexerer Strömungskonfigurationen, wie beispielsweise einem Kreiszyylinder in einem Rechteckgerinne, wurde $\mathcal{LES}OCC$ im Rahmen dieser Arbeit überarbeitet und so erweitert, dass nun Simulationen auf komplexen blockstrukturierten Gittern möglich sind. Dabei entstand der nun auf FORTRAN 90 basierende äußerst flexible LES-Code $\mathcal{LES}OCC_2$, der in Abschnitt 4.1 beschrieben wird. Anschließend werden einige zur Validierung des neuen $\mathcal{LES}OCC_2$ -Codes durchgeführte Testrechnungen vorgestellt. Da das numerische Verfahren weitestgehend unverändert vom $\mathcal{LES}OCC$ -Code übernommen wurde, stand bei der Validierung die Überprüfung der Implementierung der Blockstruktur anhand komplexer Strömungsgeometrien im Vordergrund. Dazu werden hier exemplarisch eine laminare Rohrströmung sowie die Strömung um einen abgerundeten stumpfen Körper mit einer wesentlich komplexeren Geometrie betrachtet. Zusätzlich werden zahlreiche Testrechnungen für den geschlossenen Kanal und die Gerinneströmung durchgeführt. Dabei interessierte besonders der Einfluss der räumlichen Auflösung des numerischen Gitters auf die Qualität der Ergebnisse.

Einen wesentlichen Bestandteil der vorliegenden Arbeit bilden die in Kapitel 5 beschriebenen Large-Eddy-Simulationen ausgewählter Flachwasserströmungen. Ausgehend vom im Bezug auf die Geometrie relativ einfachen Fall der periodischen Gerinneströmung werden zunehmend komplexere Strömungskonfigurationen, nämlich eine Mischungsschicht, die Umströmung eines Kreiszyinders und die Strömung in einem Bühnenfeld, untersucht.

Eine Zusammenfassung mit Ausblick auf weiterführende Ansätze zur Verfeinerung der Modellierung (Kap. 6) schließen die Arbeit ab.

2 Grundlagen

2.1 Hydrodynamische Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der Strömungsmechanik lassen sich aus den elementaren Erhaltungssätzen für Masse und Impuls ableiten. Für die hier betrachteten einphasigen, inkompressiblen Newtonschen Fluide mit konstanten Stoffwerten lauten diese in kartesischen Koordinaten¹ ($i = 1, 2, 3$):

- Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

- Impulsgleichung (Navier-Stokes-Gleichungen):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + f_i \quad (2.2)$$

Dabei bezeichnet u_i die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} , p den Druck, ρ die Dichte, ν die Viskosität, \mathbf{f} die Beschleunigungen aufgrund von Volumenkräften (z. B. für Gravitation $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g} = (0, 0, -g)$) und S_{ij} den Deformationsgeschwindigkeitstensor:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.3)$$

Der Transport passiver skalarer Größen φ , wie z. B. von Wärme oder Stoffkonzentrationen, wird durch Skalartransportgleichungen beschrieben. Im allgemeinen Fall gilt mit der molekularen Diffusivität Γ und s_φ als Quellterm:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + s_\varphi \quad (2.4)$$

¹ Für krummlinige Koordinaten siehe Anhang A.1.

2.2 Die Flachwassergleichungen

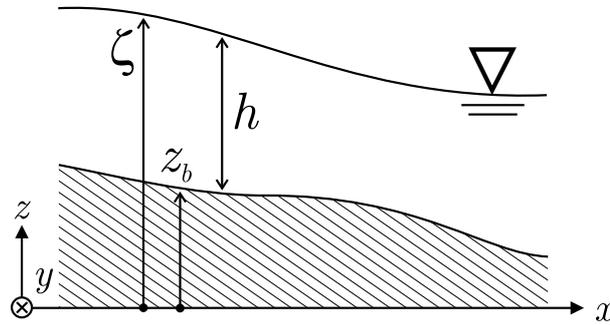


Abb. 2.1: Schematische Darstellung der Beziehung zwischen Wasserspiegellage ζ , Sohlage z_b und Wassertiefe $h = \zeta - z_b$.

Für Flachwasserströmungen lassen sich die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG) mit der sog. Flachwasserapproximation wesentlich vereinfachen:

In der vertikalen Impulsbilanz (Gl. 2.2, $i = 3$, $f_3 = -g$) dominieren die Gravitationsbeschleunigung und der vertikale Druckgradient gegenüber den anderen Beschleunigungen. Vernachlässigt man daher in der vertikalen Impulsgleichung die Fluidbeschleunigung (Dw/Dt) und die viskosen Terme, so folgt für den vertikalen Druckgradienten:

$$\partial p / \partial z \approx -\rho g \quad (2.5)$$

Mit dem Umgebungsdruck p_a an der Wasseroberfläche und unter Annahme einer über die Wassertiefe konstanten Dichte ρ erhält man durch Integration in Tiefenrichtung unter Berücksichtigung des in Abbildung 2.1 definierten Koordinatensystems die hydrostatische Druckverteilung:

$$p(z) = \rho g (\zeta - z) + p_a \quad \text{für } z_b \leq z \leq \zeta \quad (2.6)$$

Daraus folgt (bei konstanter Dichte ρ) für den horizontalen Druckgradienten:

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} + \frac{\partial p_a}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2) \quad (2.7)$$

Mit dieser Näherung für den horizontalen Druckgradienten vereinfachen sich schließlich die NSG für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten (Gl. 2.2, $i = 1, 2$ und $j = 1, 2, 3$) zu den Flachwassergleichungen.

In der „dreidimensionalen“ Form lauten die Flachwassergleichungen für die horizontalen Geschwindigkeitskomponenten $(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z))$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial z} (u_i w) &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + \frac{\partial}{\partial z} (\nu 2S_{i3}) \\ &(i, j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Durch Tiefenintegration lassen sich daraus die zweidimensionalen Flachwassergleichungen herleiten (siehe Abschnitt 2.6.3.2). Diese werden auch Saint-Venant-Gleichungen genannt.

2.3 Dimensionslose Form der Impulsgleichung

Es ist nützlich, Strömungsprobleme mit den charakteristischen Größen dimensionslos zu machen. Bildet man dazu mit der charakteristischen Länge L und der charakteristischen Geschwindigkeit U die dimensionslosen Größen

$$x^* = x/L, \quad u^* = u/U, \quad t^* = t/(L/U), \quad p^* = p/(\rho U^2) \quad (2.9)$$

erhält man aus Gleichung 2.2 die dimensionslosen NSG:

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j^*} (u_i^* u_j^*)}_{\text{Konvektion}} = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \underbrace{\frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j^*} (2S_{ij}^*)}_{\text{Diffusion}} + f_i^* \quad (2.10)$$

In den dimensionslosen NSG tritt als charakteristische Kennzahl die Reynoldszahl $Re = \frac{UL}{\nu}$ auf. Die Größe der Reynoldszahl hat entscheidenden Einfluss auf das Strömungsverhalten: Bei kleinen Reynoldszahlen stabilisiert die dämpfende Wirkung des Diffusionsterms die Strömung und es herrscht eine lamina-re Strömung vor. Mit zunehmender Reynoldszahl verringert sich der Einfluss des diffusiven Reibungsterms und Trägheitskräfte gewinnen an Bedeutung, bis schließlich ab einer sog. kritischen Reynoldszahl Störungen nicht mehr ausreichend gedämpft werden und die Nichtlinearität des Konvektionsterms zur Ausbildung einer turbulenten Strömung führt.

Anmerkung:

Bei numerischen Berechnungen ist die Verwendung von dimensionslosen Größen von Vorteil, da sich dann die Wertebereiche der Strömungsvariablen auch für verschiedene Problemstellungen immer innerhalb der gleichen Größenordnung bewegen und gewisse Programmkonstanten (z. B. numerische Toleranzen, Konstanten für extrem kleine und große Werte, Residuen usw.) nicht an die je nach Problemgröße oft sehr unterschiedlichen Wertebereiche angepasst werden müssen.

2.4 Spektrale Bandbreite turbulenter Strömungen

In turbulenten Strömungen finden sich dreidimensionale Wirbelstrukturen (Eddies) mit den unterschiedlichsten Längen- und Zeitskalen. Der abgedeckte Skalenbereich hängt, wie nachfolgende Betrachtung zeigt, von der Reynoldszahl ab. Für die größten Wirbelstrukturen sind die Strömungsgeometrie (Längenmaß L) und die Hauptströmung (charakteristische Geschwindigkeit U) maßgebend. Die großen Wirbel beziehen ihre Energie aus der Hauptströmung. Die dabei der Hauptströmung pro Zeiteinheit entzogene Energie entspricht (bei globaler Betrachtung) in einer statistisch stationären Strömung der durch Reibung in Wärme umgewandelten Energie, nämlich der Dissipationsrate ϵ . Über die Energie und das Zeitmaß der größten Wirbelstrukturen (Energie $\sim U^2$, Zeitmaß $T = U/L$) lässt sich die Dissipationsrate grob abschätzen:

$$\epsilon \sim U^2/T = U^3/L \quad (2.11)$$

Durch nichtlineare Wechselwirkungen und Wirbelstreckung gehen aus den größeren Wirbeln kleinere Wirbel hervor. Ein Kaskadenprozess führt zum Entstehen immer kleinerer Wirbel. Auf den größeren Skalen spielen die viskosen Reibungskräfte keine Rolle und die Energie wird vollständig an die kleineren Wirbel weitergegeben. Kolmogorov (1941a,b) erkannte, dass im sog. Inertialbereich das Energiespektrum nur von der Dissipationsrate und der Wellenzahl abhängt, und fand durch einfache Dimensionsbetrachtung ($[E(k)/dk] = m^2/s^2$, $[\epsilon] = m^2/s^3$, $[k] = m^{-1}$) das durch zahlreiche Experimente bestätigte $k^{-5/3}$

Gesetz (siehe Abbildung 2.2):

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

Da der Einfluss der viskosen Reibungskräfte mit der Wellenzahl quadratisch zunimmt und folglich immer mehr Energie in Reibungswärme umgewandelt wird, kommt der Kaskadenprozess irgendwann zum Erliegen und es können keine noch kleineren Wirbel mehr entstehen. Die Größe der kleinsten Wirbel hängt von der Viskosität ν und der Dissipationsrate ab. Die damit gebildeten Kolmogorov-Mikromaße sind charakteristisch für die kleinsten Wirbel:

$$l_k = (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad (2.12a)$$

$$t_k = (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad (2.12b)$$

Zusammen mit Gleichung 2.11 lässt sich damit das Verhältnis zwischen den großen und den kleinsten Skalen turbulenter Strömungen abschätzen:

$$L/l_k \sim (UL/\nu)^{3/4} = Re^{3/4} \quad (2.13a)$$

$$T/t_k \sim (UL/\nu)^{1/2} = Re^{1/2} \quad (2.13b)$$

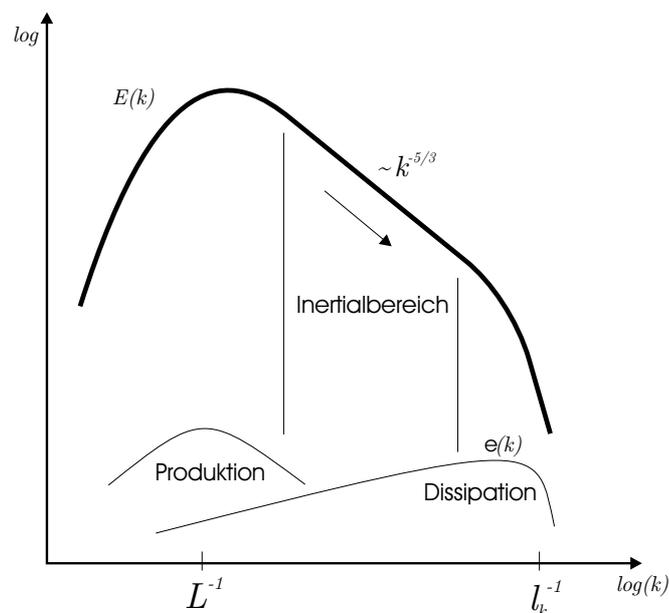


Abb. 2.2: Schematische Darstellung des turbulenten Energiespektrums $E(k)$.

2.5 Simulationsverfahren

2.5.1 3D-Verfahren

Die Turbulenzbewegung wird durch die Navier-Stokes-Gleichungen exakt beschrieben. Bei einer direkten numerischen Simulation (DNS) werden diese ohne jegliche Modellierung gelöst. Dabei müssen jedoch alle relevanten turbulenten Längen- und Zeitskalen numerisch aufgelöst werden. So muss einerseits das Rechengebiet die großen geometriebedingten Skalen der Länge L abdecken und andererseits das Rechengitter fein genug sein, um auch die kleinen Skalen der Länge l_k zu erfassen. Gleiches gilt für die Zeitskalen. Hier bestimmen die Zeitskalen der Hauptströmung $T = U/L$ die zu berechnende Strömungszeit und die kleinsten turbulenten Zeitskalen t_k die Zeitschrittweite. Somit lässt sich für eine DNS der Ressourcenbedarf folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \text{Ressourcenbedarf} &\sim \text{Speicher} \cdot \text{Rechenzeit} \\ &\sim \text{Gitterpunkte} \cdot \text{Zeitschritte} \\ &\sim (L/l_k)^3 \cdot (T/t_k) \sim Re^{9/4} \cdot Re^{1/2} = Re^{11/4} \end{aligned}$$

Da der Simulationsaufwand mit der Reynoldszahl extrem zunimmt (beinahe mit Re^3), übersteigt dieser schon bei relativ kleinen Reynoldszahlen die vorhandenen Rechnerkapazitäten. Daher ist eine DNS nur bei kleinen Reynoldszahlen möglich. Diese liegen heutzutage bei etwa $O(10^4)$ und damit weit unter denen der meisten praxisrelevanten Strömungen. Der Ausweg aus diesem Dilemma ist die Berechnung eines gemittelten Strömungsfeldes. Durch eine räumliche und/oder zeitliche Mittelung, man spricht auch von Filterung, des Strömungsfeldes fallen Längen- und Zeitskalen weg, und der numerische Simulationsaufwand reduziert sich wesentlich. Die Transportgleichungen für die gemittelte Strömung ergeben sich durch entsprechende Mittelung der NSG. Dabei führt jedoch die Wechselwirkung zwischen den aufgelösten und den weggefallenen Skalen zu Scheinspannungen, die nicht mehr durch das Gleichungssystem bestimmt sind. Folglich muss der gesamte Einfluss der nicht mehr aufgelösten Skalen auf die gemittelte Strömung modelliert werden. Die Verfahren zur Simulation turbulenter Strömungen lassen sich anhand der gewählten Mittelungsoperation klassifizieren. So wird bei den Reynolds-gemittelten Verfahren (RANS)

die zeitlich gemittelte Strömung berechnet. Dabei wird die gesamte turbulente Bewegung durch das Turbulenzmodell beschrieben. Bei der viel aufwendigeren Large-Eddy-Simulation (LES) werden zumindest die größeren turbulenten Strukturen räumlich und zeitlich aufgelöst und nur die kleineren durch eine räumliche Filterung beseitigt. Deshalb ist hier ein viel geringerer Anteil der turbulenten Bewegung zu modellieren als beim RANS-Verfahren. Während eine dreidimensionale RANS von Flachwasserströmungen relativ grobmaschige Rechengitter in horizontaler Richtung erlaubt, stellt eine dreidimensionale LES höhere Anforderungen an die Gitterauflösung, da hier zumindest die größeren Skalen der turbulenten Schwankungsbewegung sowohl in horizontaler als auch in vertikaler Richtung durch das Gitter aufzulösen sind.

2.5.2 Tiefengemittelte Verfahren

Wegen der großen horizontalen Ausdehnung ist für Flachwasserströmungen die numerische Berechnung der dreidimensionalen Strömung per RANS oder LES mit heutigen Rechnern meist noch viel zu aufwendig. Oft sind auch die sich aus einer 3D-Rechnung ergebenden Detailinformationen nicht von großem Interesse. Hier bietet sich die Untersuchung der tiefengemittelten Strömung an. Die Transportgleichungen für die tiefengemittelte Strömung ergeben sich aus den Navier-Stokes-Gleichungen durch Integration in Tiefenrichtung unter der Annahme einer hydrostatischen Druckverteilung (Flachwasserapproximation). Je nach Simulationsverfahren sind dazu die NSG vor der Tiefenintegration zu mitteln. Entsprechend der Mittelung lassen sich die Verfahren in tiefengemitteltes Navier-Stokes-Verfahren (DA-NS), tiefengemitteltes Reynolds-gemitteltes Navier-Stokes-Verfahren (DA-RANS) und tiefengemittelte Large-Eddy-Simulation (DA-LES) einteilen: Beim DA-RANS- und DA-LES-Verfahren werden die NSG vor der Tiefenmittelung Reynolds-gemittelt bzw. räumlich gefiltert. Durch die Mittelung verringert sich der numerische Aufwand deutlich, jedoch sind die nicht mehr aufgelösten Skalen in geeigneter Weise zu modellieren. Dem DA-NS-Verfahren liegen die exakten tiefengemittelten NSG zugrunde. Es sind hierbei alle zweidimensionalen Skalen numerisch aufzulösen. Die nicht aufgelöste dreidimensionale Bewegung muss jedoch vollständig modelliert werden. Um die wesentlichen Unterschiede, aber auch die Gemeinsamkeiten der verschiedenen Verfahren deutlich zu machen, werden in den folgenden Ab-

schnitten die Mittelungsoperationen, die den Berechnungsverfahren zugrunde liegen, sowie die daraus resultierenden Transportgleichungen inklusive der zu modellierenden Scheinspannungen angegeben.

Für DA-RANS gibt es zahlreiche Referenzen für die entsprechenden Transportgleichungen mit Angabe der exakten zu modellierenden Scheinspannungen (z. B. [Rodi 1993](#), [Bui Minh Duc 1998](#)). Anders ist die Situation bei der DA-LES, bei der viele Autoren die Scheinspannungen nur in einer vereinfachten Form betrachten (z. B. [van Vossen 2000](#)). Eine exakte Formulierung dieser Scheinspannungen erleichtert jedoch das Verständnis der physikalischen und mathematischen Hintergründe dieser Spannungen. Um eine solide Ausgangsbasis für die Modellierung bereitzustellen, wird in diesem Kapitel die Herleitung der tiefengemittelten Transportgleichungen und der darin vorkommenden Scheinspannungen in detaillierter Form beschrieben. Bei der Herleitung, die sich an den Arbeiten von [Rutherford \(1994\)](#), [van Vossen \(2000\)](#) und [Bousmar \(2002\)](#) orientiert, wurde Wert darauf gelegt, nicht schon durch Vereinfachungen an den Randbedingungen und den Diffusionstermen die Ergebnisse der Tiefenmittelung vorwegzunehmen.

2.6 Mittelung der Grundgleichungen

Durch Mittelung der Kontinuitätsgleichung und der NSG ergeben sich Gleichungen für die gemittelte Strömung. In diesen treten jedoch, wie bereits erwähnt, zusätzliche Terme auf, die nicht mehr durch das Gleichungssystem bestimmt sind und deshalb modelliert werden müssen. Um im weiteren Vorgehen die Unterscheidung verschiedener Mittelungs- und Filteroperationen sowie der durch sie hervorgerufenen Scheinspannungen zu erleichtern, wird hier eine einfache allgemeine Notation eingeführt:

Für eine mit dem Filter A gefilterte Strömungsgröße φ gilt:

$$\overline{\varphi(\mathbf{x}, t)}^{[A]} = \int_T \int_D \varphi(\mathbf{x}', t') G_{[A]}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') d\mathbf{x}' dt' \quad (2.14)$$

Dabei ist D das Strömungsgebiet und T die Zeitspanne, über die gefiltert wird, und $G_{[A]}$ der Filterkern von Filter A . Für die als Faltung definierte Filterung gilt

im Spektralbereich (mit Wellenzahlvektor \mathbf{k} und Frequenz f)²:

$$\overline{\hat{\varphi}(\mathbf{k}, f)}^{[A]} = \hat{\varphi}(\mathbf{k}, f) \cdot \hat{G}_{[A]}(\mathbf{k}, f) \quad (2.15)$$

Die Differenz der gefilterten Größe zu φ wird mit $\varphi'^{[A]}$ bezeichnet. Es gilt:

$$\varphi = \overline{\varphi}^{[A]} + \varphi'^{[A]} \quad (2.16)$$

Die explizite Kennzeichnung des Filters durch den hochgestellten Index (hier ^[A]) dient zur Unterscheidung verschiedener Filter. Die eckigen Klammern erleichtern die Unterscheidung der hochgestellten Indices von einem Exponenten oder von einem Tensorindex. In eindeutigen Fällen werden für eine bessere Lesbarkeit die eckigen Klammern oder auch die gesamte hochgestellte Filterkennzeichnung weggelassen. So werden hier beispielsweise für $\overline{\varphi}^{[A]}$ auch die vereinfachten Notationen $\overline{\varphi}^A$ und $\overline{\varphi}$ verwendet.

Die Filterung der Gleichungen 2.1 und 2.2 mit dem Filter A ergibt (mit $\overline{\varphi} \equiv \overline{\varphi}^{[A]}$):

- die gefilterte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.17)$$

- die gefilterte Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 \overline{S}_{ij}) + \overline{f}_i \quad (2.18)$$

Durch die Filterung des Konvektionsterms erhält man die zusätzlichen Unbekannten $\overline{u}_i \overline{u}_j$. Es hat sich bewährt, diese mit der Identität $\overline{u}_i \overline{u}_j = \overline{u}_i \overline{u}_j + (\overline{u}_i \overline{u}_j - \overline{u}_i \overline{u}_j)$ in die Summe aus einem Produkt der gefilterten Geschwindigkeiten ($\overline{u}_i \overline{u}_j$) und einem Spannungstensor $T_{ij}^{[A]} = (\overline{u}_i \overline{u}_j - \overline{u}_i \overline{u}_j)$ aufzuspalten. Um die Dimension einer tatsächlichen Spannung zu erhalten, müsste der Tensor mit der Dichte ρ multipliziert werden. Dies wird hier, wie von vielen anderen Autoren auch, zwecks besserer Übersichtlichkeit weggelassen, und der Tensor dennoch als Spannungstensor bezeichnet. Mit $T_{ij}^{[A]}$ auf der rechten Seite lautet

² Der Sachverhalt wird auf Seite 25 und in Abb. 2.3 am Beispiel einer räumlichen Filterung verdeutlicht.

die gemittelte Impulsgleichung:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i} \overline{u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu 2 \overline{S_{ij}} - T_{ij}^{[A]} \right) + \overline{f_i} \quad (2.19)$$

Eine Mittelung der Impulsgleichung mit dem Filter A führt demnach zu den Spannungen $T_{ij}^{[A]}$. Diese werden im Folgenden der Filterbezeichnung entsprechend auch als A_{ij} bezeichnet. Zusätzlich wird für das weitere Vorgehen der Operator

$$A(a, b) = \overline{ab}^A - \overline{a}^A \overline{b}^A \quad (2.20)$$

und dessen Kurzschreibweise $A(a) \equiv A(a, a)$ eingeführt. Somit ergeben sich für die Scheinspannungen folgende Schreibweisen:

$$T_{ij}^{[A]} = T_{ij}^{[A]}(\mathbf{u}) = A_{ij} = A(\mathbf{u}) = \overline{u_i u_j}^A - \overline{u_i}^A \overline{u_j}^A \quad (2.21)$$

Analoges Vorgehen führt bei Filterung der Skalartransportgleichung (Gl. 2.4) zu den Flüssen:

$$T_i^{[A]} = T_i^{[A]}(\mathbf{u}, \varphi) = A_i = A(\mathbf{u}, \varphi) = \overline{u_i \varphi}^A - \overline{u_i}^A \overline{\varphi}^A \quad (2.22)$$

Damit lautet die gefilterte Skalartransportgleichung:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{u_i} \overline{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x_i} - T_i^{[A]} \right) + \overline{s_\varphi} \quad (2.23)$$

Die hier eingeführte allgemeine Schreibweise für Mittelungsoperationen erleichtert, wie eingangs erwähnt, die Unterscheidung von verschiedenen Filterungen hinsichtlich der auftretenden Scheinspannungen und der Fluktuationen. Für die Kennzeichnung gemittelter Größen werden jedoch die in der Literatur üblichen Operatoren verwendet. Die Tabelle 2.1 gibt einen Überblick über die verwendeten Mittelungsoperationen. In den folgenden Abschnitten wird auf die einzelnen Mittelungsoperationen näher eingegangen.

Operator	Bezeichnung der Mittelungs- bzw. Filteroperation	Beziehung zw. Mittelwert und Fluktuation	In der gemittelten Impulsgl. auftretende Scheinspannung T_{ij}
$\langle \rangle$	Reynolds-Mittelung	$\varphi = \langle \varphi \rangle + \varphi'^{[R]}$	$R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle$
—	LES-Filter	$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'^{[\tau]}$	$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$
~	Tiefenmittelung	$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'^{[D]}$	$D_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$

Tabelle 2.1: Verwendete Mittelungsoperatoren und resultierende Scheinspannungen.

2.6.1 Zeitliche Mittelung

Für viele strömungstechnische Fragestellungen reicht die Kenntnis der zeitlich gemittelten Strömung verbunden mit statistischen Aussagen über die turbulenten Schwankungen aus. In diesen Fällen werden meist Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Verfahren (RANS) eingesetzt. Diese basieren auf der Zerlegung einer Strömungsgröße φ in einen zeitlichen Mittelwert $\langle \varphi \rangle$ und in einen turbulenten Schwankungswert $\varphi'(t)$. Es gilt $\varphi = \langle \varphi \rangle + \varphi'(t)$ mit:

$$\langle \varphi \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T \varphi(t) dt \quad (2.24)$$

Bei instationären RANS-Verfahren (URANS) wird nicht über die gesamte Zeit gemittelt, sondern nur über das Zeitmaß der turbulenten Schwankungen. Damit können auch instationäre Vorgänge betrachtet werden, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass deren Zeitmaß viel größer ist als das der Turbulenzbewegung. Die Reynoldsmittelung kann dann (bei entsprechend gewähltem Filterkern G_R) als zeitliche Tiefpassfilterung interpretiert werden:

$$\langle \varphi \rangle(t) = \int_T \varphi(t') G_{[R]}(t' - t) dt' \quad (2.25)$$

Durch zeitliche Tiefpassfilterung der NSG folgt die instationäre Reynolds-gemittelte Impulsgleichung (vgl. Abschnitt 2.6):

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 \langle S_{ij} \rangle - R_{ij}) + \langle f_i \rangle \quad (2.26)$$

Die Reynoldschen Scheinspannungen $R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle$ beinhalten die Wechselwirkung der Turbulenz mit der zeitlich gemittelten Strömung. Diese Spannungen müssen durch ein Turbulenzmodell in das Gleichungssystem eingebracht werden.

Für das weitere Vorgehen sei hier auf die in Abschnitt 2.6 eingeführte Schreibweise für Mittelungsoperationen hingewiesen. Dabei wird die Reynolds-Mittelung in nicht eindeutigen Fällen durch den Index $[R]$ gekennzeichnet. Für die Schwankungen gilt somit: $\varphi' \equiv \varphi'^{[R]}$.

2.6.2 Räumliche Filterung

Bei der Large-Eddy-Simulation werden nur die größeren Wirbel räumlich und zeitlich aufgelöst. Man spricht auch von Grobstruktursimulation. Die Grobstruktur $\overline{\varphi}$ einer Strömungsgröße φ ergibt sich durch räumliche Tiefpassfilterung:

$$\overline{\varphi(\mathbf{x}, t)} = \int_D \varphi(\mathbf{x}', t) G_{[\tau]}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) d\mathbf{x}' \quad (2.27)$$

Nach der in Abschnitt 2.6 eingeführten Schreibweise wird hier die Grobstruktur-Filterung durch $[\tau]$ gekennzeichnet. Zwischen den ungefilterten und den gefilterten Größen gilt die Beziehung:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \varphi'^{[\tau]} \quad (2.28)$$

Dabei bezeichnet $\varphi'^{[\tau]}$ die sog. Feinstruktur (auf Englisch: *subgrid scale*), also die weggefilterten kleinskaligen Strukturen.

Das Verhalten der Grobstruktur des Strömungsfeldes $\overline{\mathbf{u}}$ wird durch die räumlich gefilterten NSG beschrieben:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u}_i \overline{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 \overline{S}_{ij} - \tau_{ij}) + \overline{f}_i \quad (2.29)$$

Darin treten die sog. Feinstrukturspannungen $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j$ auf, welche die Wechselwirkung zwischen aufgelöster Grobstruktur und der nicht aufgelösten Feinstruktur beinhalten. Sie müssen mit einem Feinstrukturmodell modelliert werden.

Bei der praktischen Durchführung einer LES wird das das Strömungsfeld nicht explizit räumlich gefiltert. Vielmehr erfolgt die Filterung indirekt durch das Rechengitter. Diese Filterung entspricht näherungsweise der Filterung des Strömungsfeldes mit einem Rechteckfilter.

Beispiel: räumlicher Rechteckfilter

Abbildung 2.3 verdeutlicht die Filterung einer Strömungsgröße φ am Beispiel eines einfachen eindimensionalen Rechteckfilters (*top hat filter*). Für einen räumlichen Rechteckfilter mit der Filterweite Δ lautet der Filterkern (Abb. 2.3a)

$$G(x) = \begin{cases} 1/\Delta & \text{für } |x| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{für } |x| > \Delta/2 \end{cases} \quad (2.30)$$

und dessen Fouriertransformierte \hat{G} (Abb. 2.3b)

$$\hat{G}(k) = \frac{\sin(k\Delta)}{k\Delta} \quad (2.31)$$

In Abbildung 2.3c ist ein räumliches Testsignal $\varphi(x)$ mit dem Energiespektrum $E(k) = |\hat{\varphi}(k)|^2/2 = k^{-5/3}$ dargestellt. Durch die räumliche Tiefpassfilterung mit dem Rechteckfilter ergibt sich das ebenfalls in der Abbildung eingezeichnete, wesentlich glattere Signal $\bar{\varphi}(x)$. Abbildung 2.3d zeigt das Amplitudenspektrum des Ausgangssignals $|\hat{\varphi}(k)|$ und das Amplitudenspektrum des gefilterten Signals $|\hat{\bar{\varphi}}(k)| = |\hat{\varphi}(k) \cdot \hat{G}(k)|$. Im Spektrum des tiefpassgefilterten Signals sind die hohen Wellenzahlen deutlich gedämpft. Jedoch nimmt die Dämpfung nicht monoton mit der Wellenzahl zu, sondern es ergeben sich, wie schon aus der Fouriertransformierten \hat{G} ersichtlich ist, lokale Maxima oberhalb der Grenzwellenzahl des Filters von π/Δ . Diese Nebenmaxima spielen jedoch auf einem realen Rechengitter (mit der Gitterweite Δ) keine Rolle, da dieses nur Wellenzahlen bis zur Nyquist-Wellenzahl $k_{max} = \pi/\Delta$ auflöst.

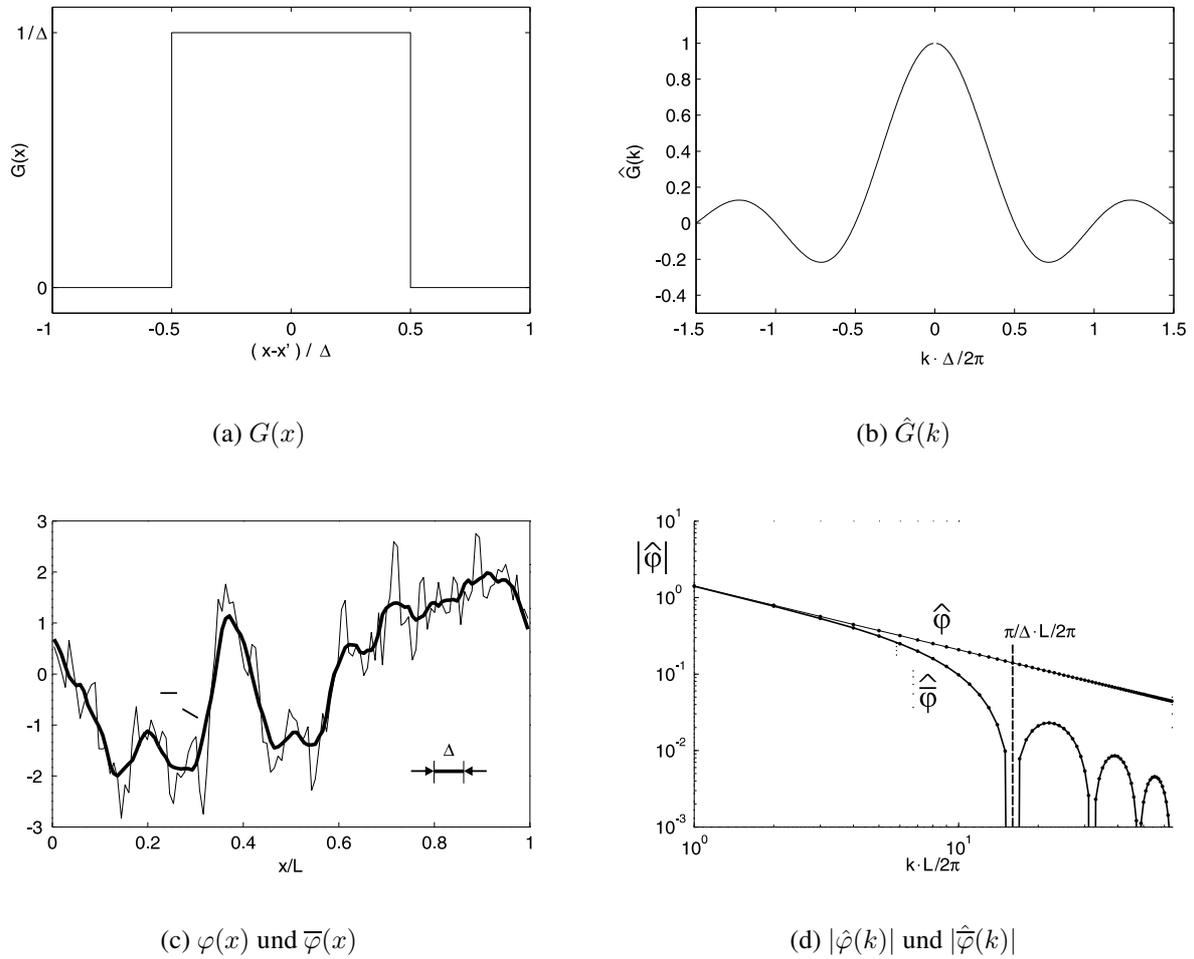


Abb. 2.3: Schematische Darstellung der Filterung einer Strömungsgröße φ am Beispiel eines eindimensionalen räumlichen Rechteckfilters mit der Filterweite Δ :

- (a) Filterkern G des Rechteckfilters,
- (b) Fouriertransformierte \hat{G} des Filterkerns,
- (c) Testsignal φ (Periodenlänge L) und gefiltertes Signal $\bar{\varphi}$,
- (d) Amplitudenspektrum von φ und $\bar{\varphi}$.

2.6.3 Tiefenmittelung

Durch die Betrachtung tiefengemittelter Größen lässt sich ein ursprünglich dreidimensionales Strömungsproblem auf ein zweidimensionales reduzieren. Mit den in Abbildung 2.1 dargestellten Beziehungen zwischen Wasserspiegellage ζ , Sohlage z_b und Wassertiefe h gilt für einen tiefengemittelten Wert $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} \varphi(x, y, z) dz \quad (2.32)$$

Zwischen tiefengemittelter und ungemittelter Größe gilt der Zusammenhang:

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'^{[D]} \quad (2.33)$$

Die Abweichung des lokalen Wertes φ zum tiefengemittelten Wert $\tilde{\varphi}$ wird als $\varphi'^{[D]}$ bezeichnet. Abbildung 2.4 verdeutlicht dies anhand der u -Geschwindigkeitskomponente. Wegen $\tilde{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}$ folgt aus Gl. 2.33 für den Tiefenmittelwert der Fluktuationen:

$$\widetilde{\varphi'^{[D]}} = 0 \quad (2.34)$$

Für die tiefengemittelten Größen ergeben sich die Transportgleichungen durch Tiefenintegration der dreidimensionalen Transportgleichungen. Wegen der variablen Wasseroberfläche und Sohle sind bei der Tiefenintegration Zusatz-

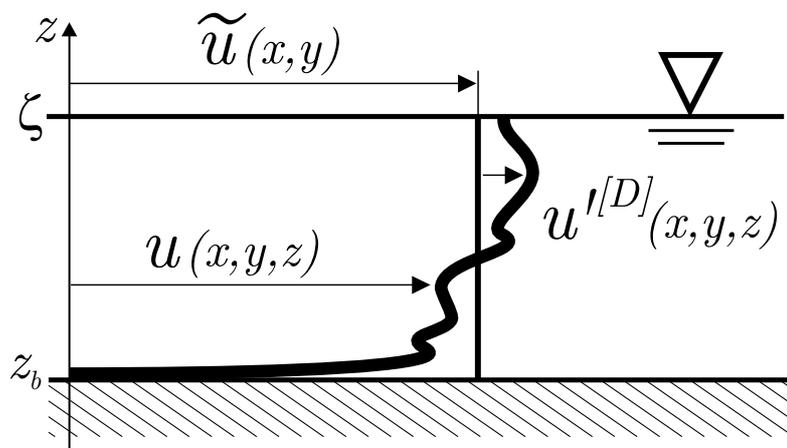


Abb. 2.4: Schematische Darstellung der Beziehung zwischen tiefengemittelter Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung \tilde{u} , lokaler Geschwindigkeit u und der Abweichung $u'^{[D]}$.

terme zu berücksichtigen. Diese ergeben sich aufgrund der variablen Integrationsgrenzen beim Vertauschen der Reihenfolge von Ableitung und Integration entsprechend der Leibnizschen Regel:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, z) dz + f(x, a(x)) \frac{\partial a(x)}{\partial x} - f(x, b(x)) \frac{\partial b(x)}{\partial x} \quad (2.35)$$

Für die Tiefenintegration folgt daraus unter Verwendung der vereinfachten Schreibweise $f \equiv f(x, y, z)$, $[f]_{\zeta} \equiv f(x, y, \zeta)$, $[f]_b \equiv f(x, y, z_b)$:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x_i} dz = \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{\zeta} f dz + [f]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_i} - [f]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \quad (2.36)$$

Für Größen, die über die Tiefe konstant sind (also $f \equiv f(x, y)$), folgt:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x_i} dz = h \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (2.37)$$

Anmerkung:

Die Tiefenmittelung entspricht einer Filterung. Sie kann mit dem Filterkern $G_{[D]}(\mathbf{x}) = \delta(x) \delta(y) / h$ als dreidimensionale räumliche Filterung gemäß Gleichung 2.14 geschrieben werden. Hierbei bezeichnet δ die Diracsche δ -Funktion:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$$

Für die Faltung einer Funktion $f(x)$ mit der Diracschen δ -Funktion gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \quad (2.38)$$

2.6.3.1 Tiefenintegration der Kontinuitätsgleichung

Das Integral der Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.1) über die Tiefe lautet:

$$\int_{z_b(x,y)}^{\zeta(x,y)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (2.39)$$

Daraus folgt unter Beachtung der Leibnizschen Regel (Gl. 2.36):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\zeta} u dz + [u]_b \frac{\partial z_b}{\partial x} - [u]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{\zeta} v dz + [v]_b \frac{\partial z_b}{\partial y} - [v]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \\ & + [w]_{\zeta} - [w]_b = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Sohle und die Wasseroberfläche werden als undurchlässige, aber zeitlich variable Grenzflächen betrachtet. Dort ist die Normalkomponente der zu den beweglichen Grenzflächen relativen Strömungsgeschwindigkeit gleich null. Folglich gilt $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_{rel} = 0$. Mit dem Normalvektor $\mathbf{n} = (-\partial\zeta/\partial x, -\partial\zeta/\partial y, 1)$ und der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{u}_{rel} = ([u]_{\zeta}, [v]_{\zeta}, [w]_{\zeta} - \partial\zeta/\partial t)$ an der Wasseroberfläche (bzw. Entsprechendem an der Sohle) ergeben sich folgende kinematische Randbedingungen:

- Wasseroberfläche:

$$[w]_{\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + [u]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + [v]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (2.41a)$$

- Sohle³:

$$[w]_b = \frac{\partial z_b}{\partial t} + [u]_b \frac{\partial z_b}{\partial x} + [v]_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (2.41b)$$

³ An einer festen Sohle gilt außerdem $\frac{\partial z_b}{\partial t} = 0$ sowie die Haftbedingung $[u]_b = [v]_b = [w]_b = 0$.

Einsetzen dieser kinematischen Randbedingungen in Gleichung 2.40 ergibt:

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial z_b}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{\zeta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{\zeta} v dz = 0 \quad (2.42)$$

Mit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{\zeta} u_i dz = h \tilde{u}_i \quad (2.43)$$

und

$$h = \zeta - z_b \quad (2.44)$$

folgt aus Gleichung 2.42 die tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i) = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (2.45)$$

2.6.3.2 Tiefenintegration der Impulsgleichung

Die zweidimensionalen Flachwassergleichungen für die tiefengemittelten Geschwindigkeiten \tilde{u}_i ergeben sich durch Integration der Flachwassergleichungen (Gl. 2.8) über die Tiefe. Das führt auf folgendes Integral:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial z} (u_i w) \right) dz = \int_{z_b}^{\zeta} \left(-g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + \frac{\partial}{\partial z} (\nu 2S_{i3}) \right) dz \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.46)$$

Die Integration erfolgt wiederum unter Beachtung der Leibnitzschen Regel:

1. Integration der Terme auf der linken Seite von Gl. 2.46:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial u_i}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{\zeta} u_i dz + [u_i]_b \frac{\partial z_b}{\partial t} - [u_i]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2.47a)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) dz &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} u_i u_j dz + \\ &+ [u_i]_b [u_j]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_j} - [u_i]_{\zeta} [u_j]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.47b)$$

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (u_i w) dz = [u_i]_{\zeta} [w]_{\zeta} - [u_i]_b [w]_b \quad (2.47c)$$

Mit den kinematischen Randbedingungen (Gl. 2.41a, 2.41b) folgt für den 3. Term (Gl. 2.47c):

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (u_i w) dz &= [u_i]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + [u_i]_{\zeta} [u_j]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} + \\ &- [u_i]_b \frac{\partial z_b}{\partial t} - [u_i]_b [u_j]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.47d)$$

Zusammenfassen der Terme ergibt für die linke Seite von Gleichung 2.46:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial z} (u_i w) \right) dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{\zeta} u_i dz + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} u_i u_j dz \quad (2.48)$$

2. Integration der Terme auf der rechten Seite von Gl. 2.46:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \left(-g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} \right) dz = -hg \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} \quad (2.49a)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) dz &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} (\nu 2S_{ij}) dz + \\ &+ [\nu 2S_{ij}]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_j} - [\nu 2S_{ij}]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.49b)$$

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (\nu 2S_{i3}) dz = [\nu 2S_{i3}]_{\zeta} - [\nu 2S_{i3}]_b \quad (2.49c)$$

Mit den zur Wasseroberfläche und zur Sohle tangentialen Schubspannungen

$$\tau_{\zeta_i} = [\nu 2S_{i3}]_{\zeta} - [\nu 2S_{ij}]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \quad (2.50a)$$

$$\tau_{b_i} = [\nu 2S_{i3}]_b - [\nu 2S_{ij}]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_j} \quad (2.50b)$$

lassen sich die Terme 2.49b und 2.49c zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + \frac{\partial}{\partial z} (\nu 2S_{i3}) \right) dz &= \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} (\nu 2S_{ij}) dz + \frac{1}{\rho} (\tau_{\zeta_i} - \tau_{b_i}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

3. Zusammenfassen aller Terme ergibt als Zwischenergebnis:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{\zeta} u_i dz + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} u_i u_j dz &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} (\nu 2S_{ij}) dz \\
 &+ \frac{1}{\rho} (\tau_{\zeta_i} - \tau_{b_i}) \quad (2.52)
 \end{aligned}$$

Zur Aufspaltung des nichtlinearen Konvektionsterms (vgl. Abschnitt 2.6) werden die Dispersionsspannungen D_{ij} eingeführt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} u_i u_j dz &= \frac{\partial}{\partial x_j} (h \widetilde{u_i u_j}) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} (h (\widetilde{u_i u_j} + (\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i u_j}))) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_j} (h (\widetilde{u_i u_j} + D_{ij})) \quad (2.53)
 \end{aligned}$$

Die Dispersionsspannungen $D_{ij}(x, y, t)$ sind horizontale Spannungen ($i, j = 1, 2$), die vom Verlauf des momentanen, turbulenten Geschwindigkeitsprofils über die Tiefe abhängen. Für die Dispersionsspannungen gilt:

$$D_{ij} = D(u_i, u_j) = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i - \widetilde{u_i})(u_j - \widetilde{u_j}) dz \quad (2.54)$$

Mit den Dispersionsspannungen D_{ij} erhält man aus Gleichung 2.52 unter Annahme einer über die Tiefe konstanten molekularen Viskosität ν die zweidimensionalen ($i, j = 1, 2$) Flachwassergleichungen (Saint-Venant-Gleichungen):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (h \widetilde{u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \widetilde{u_i u_j}) &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\
 &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \left(\nu 2 \widetilde{S_{ij}} - D_{ij} \right) \right) + \\
 &+ \frac{1}{\rho} (\tau_{\zeta_i} - \tau_{b_i}) \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

Die tiefenintegrierten Flachwassergleichungen (Gl. 2.55) bilden in Verbindung mit der tiefenintegrierten Kontinuitätsgleichung (Gl. 2.45) ein Gleichungssystem für die tiefengemittelten Geschwindigkeiten und die Wasserspiegellage. Die ausschließlich über die Tiefe gemittelten Geschwindigkeiten beinhalten noch alle zweidimensionalen Längen und Zeitskalen, also auch zweidimensionale Strukturen mit einer Ausdehnung kleiner als die Wassertiefe. Zur Lösung des Gleichungssystems müssen die Dispersionsspannungen und die Schubspannungen tangential zur Wasseroberfläche τ_ζ (z. B. Windkräfte) und tangential zur Sohle τ_b (Sohlrreibung) modelliert werden.

Anmerkung:

In Flachwasserströmungen ergibt sich bei der Tiefenmittelung aufgrund von Sohlneigung, Sekundärströmungen und der kleinskaligen Turbulenz auch eine tiefengemittelte Vertikalgeschwindigkeit (vgl. Abschnitt 5.1.1.3). Es ist möglich, auch dafür eine Transportgleichung herzuleiten. Die tiefengemittelte Vertikalgeschwindigkeit ist jedoch gegenüber den tiefengemittelten Horizontalgeschwindigkeiten in der Regel vernachlässigbar. Außerdem wurde sie bei der Herleitung der Transportgleichungen für die tiefengemittelten Horizontalgeschwindigkeiten voll berücksichtigt. Sie tritt in diesen jedoch nach der Tiefenintegration als Folge der hydrostatischen Druckannahme nicht mehr auf. Somit hat die tiefengemittelte Vertikalgeschwindigkeit in Verbindung mit der Flachwasserapproximation keinen Einfluss auf die tiefengemittelten Horizontalgeschwindigkeiten und ist daher nicht weiter zu berücksichtigen.

2.6.3.3 Tiefenintegration der Skalartransportgleichung

Die Vorgangsweise zur Tiefenintegration der Skalartransportgleichung ist ähnlich der Impulsgleichung im vorhergehenden Abschnitt. Ausgangspunkt ist das Tiefenintegral der Skalartransportgleichung (Gl. 2.4):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (w \varphi) \right) dz &= \\ &= \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + s_\varphi \right) dz \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Integration der linken Seite liefert:

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z_b}^{\zeta} \varphi dz + [\varphi]_b \frac{\partial z_b}{\partial t} - [\varphi]_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (2.57a)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i \varphi) dz &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{z_b}^{\zeta} u_i \varphi dz + \\ &+ [u_i]_b [\varphi]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_j} - [u_i]_\zeta [\varphi]_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (2.57b)$$

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} (w \varphi) dz &= [w]_\zeta [\varphi]_\zeta - [w]_b [\varphi]_b = \\ &\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} [\varphi]_\zeta + [u_j]_\zeta [\varphi]_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_j} \right) + \\ &- \left(\frac{\partial z_b}{\partial t} [\varphi]_b + [u_j]_b [\varphi]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (2.57c)$$

Auf der rechten Seite erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{z_b}^{\zeta} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dz + \\ &+ \left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_i} - \left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]_\zeta \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.57d)$$

$$\int_{z_b}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz = \left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{\zeta} - \left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_b \quad (2.57e)$$

$$\int_{z_b}^{\zeta} s_{\varphi} dz = h \tilde{s}_{\varphi} \quad (2.57f)$$

Für die Flüsse (positiv in z-Richtung) durch die Wasseroberfläche bzw. Sohle gilt:

$$q_{\zeta} = - \left(\left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{\zeta} - \left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right) \quad (2.58a)$$

$$q_b = - \left(\left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_b - \left[\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right]_b \frac{\partial z_b}{\partial x_i} \right) \quad (2.58b)$$

Für die Aufspaltung des tiefenintegrierten Konvektionsterms werden die Dispersionsflüsse eingeführt:

$$D_i = D(u_i, \varphi) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i - \tilde{u}_i) (\varphi - \tilde{\varphi}) dz = \widetilde{u_i \varphi} - \tilde{u}_i \tilde{\varphi} \quad (2.59)$$

Zusammenfassen aller Terme ergibt für die tiefenintegrierte Skalartransportgleichung ($i = 1, 2$):

$$\frac{\partial}{\partial t} (h \tilde{\varphi}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i \tilde{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \left(\Gamma \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x_i} - D_i \right) \right) + (q_b - q_{\zeta}) + h \tilde{s}_{\varphi} \quad (2.60)$$

2.6.4 Kombination von Mittelungsoperationen

Bei der DA-RANS und DA-LES werden Mittelungsoperationen miteinander kombiniert. Bei den DA-RANS-Methoden wird die zeitliche Mittelung mit der Tiefenmittelung verknüpft. Bei der DA-LES wird die Grobstrukturfilterung mit der Tiefenmittelung verknüpft. Zur Analyse der resultierenden Scheinspannungen ist die nachfolgend abgeleitete Rechenregel äußerst nützlich:

Wie bereits erläutert, führt die Filterung der NSG mit einem Filter A zu den Scheinspannungen $A(\mathbf{u}) = \overline{u_i u_j}^A - \overline{u_i}^A \overline{u_j}^A$. Analoges gilt für die Filterung mit einem Filter B. Werden die NSG zunächst mit dem Filter A und anschließend mit dem Filter B gefiltert, so ergeben sich die Scheinspannungen

$$T_{ij}^{[A,B]}(\mathbf{u}) = \overline{\overline{u_i u_j}^A}^B - \overline{\overline{u_i}^A}^B \overline{\overline{u_j}^A}^B \quad (2.61)$$

Diese lassen sich in Anteile, die für die einzelnen Filterungen charakteristisch sind, aufspalten. So folgt durch Subtraktion und Addition des Terms $\overline{\overline{u_i}^A \overline{u_j}^A}^B$:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{[A,B]}(\mathbf{u}) &= \overline{\overline{u_i u_j}^A}^B - \overline{\overline{u_i}^A}^B \overline{\overline{u_j}^A}^B \\ &= \overline{\overline{u_i u_j}^A}^B - \overline{\overline{u_i}^A \overline{u_j}^A}^B + \overline{\overline{u_i}^A \overline{u_j}^A}^B - \overline{\overline{u_i}^A}^B \overline{\overline{u_j}^A}^B \\ &= \underbrace{\overline{\overline{u_i u_j}^A}^B - \overline{\overline{u_i}^A \overline{u_j}^A}^B}_{A(\overline{u_i, u_j})^B} + \underbrace{\overline{\overline{u_i}^A \overline{u_j}^A}^B - \overline{\overline{u_i}^A}^B \overline{\overline{u_j}^A}^B}_{B(\overline{u_i}^A, \overline{u_j}^A)} \\ &= A(\mathbf{u})^B + B(\overline{\mathbf{u}}^A) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Somit setzen sich die Scheinspannungen $T_{ij}^{[A,B]}(\mathbf{u})$ aus den

- mit Filter B gefilterten, für den Filter A charakteristischen Scheinspannungen $A(\mathbf{u})^B$
- und den für Filter B charakteristischen Scheinspannungen $B(\overline{\mathbf{u}}^A)$, welche jedoch auf den mit Filter A gefilterten Geschwindigkeiten $\overline{\mathbf{u}}^A$ basieren,

zusammen.

Ist die Reihenfolge der Filterung beliebig⁴, d. h. $\overline{\varphi}^{AB} = \overline{\varphi}^{BA}$, so folgt aus Gleichung 2.62:

$$\begin{aligned} T^{[A,B]}(\mathbf{u}) &= \overline{A(\mathbf{u})}^B + B(\overline{\mathbf{u}}^A) \\ &= \overline{B(\mathbf{u})}^A + A(\overline{\mathbf{u}}^B) = T^{[B,A]}(\mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Entsprechendes gilt auch für die Flüsse $T^{[A,B]}(\mathbf{u}, \varphi)$, die sich bei der Filterung der Skalartransportgleichung ergeben:

$$\begin{aligned} T^{[A,B]}(\mathbf{u}, \varphi) &= \overline{A(\mathbf{u}, \varphi)}^B + B(\overline{\mathbf{u}}^A, \overline{\varphi}^A) \\ &= \overline{B(\mathbf{u}, \varphi)}^A + A(\overline{\mathbf{u}}^B, \overline{\varphi}^B) = T^{[B,A]}(\mathbf{u}, \varphi) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Mit dieser Rechenregel lassen sich, die Scheinspannungen und Flüsse, die bei der Kombination einer zeitlichen oder räumlichen Mittelung mit einer Tiefenmittelung zu modellieren sind, aufspalten. Die Vertauschbarkeit von Tiefenmittelung und zeitlicher bzw. räumlicher Mittelung gilt in Flachwasserströmungen mit variabler Wasseroberfläche und Sohlgeometrie jedoch nur näherungsweise, da hier Zusatzterme (an den Integrationsgrenzen) auftreten, die jedoch für hinreichend kleine Variationen von Wasseroberfläche und Sohlgeometrie vernachlässigt werden können.

⁴ Für Filter, die als Faltung definiert sind (Gleichung 2.14), gilt:
 $\overline{\varphi}^{AB} = \hat{\varphi} \hat{G}_A \hat{G}_B = \hat{\varphi} \hat{G}_B \hat{G}_A = \overline{\varphi}^{BA}$ und somit $\overline{\varphi}^{AB} = \overline{\varphi}^{BA}$.

2.6.5 Kombination von zeitlicher Mittelung und Tiefenmittelung

Durch Tiefenintegration der dreidimensionalen Reynolds-gemittelten Transportgleichungen erhält man die Transportgleichungen für die DA-RANS-Methoden. Die in Abschnitt 2.6.3 beschriebene Vorgehensweise führt auf folgende Transportgleichungen (mit i und $j = 1, 2$) für die tiefengemittelten Reynolds-gemittelten Größen $\langle \varphi \rangle$:

- Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \langle \widetilde{u_i} \rangle \right) = 0 \quad (2.65)$$

- Impulsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \langle \widetilde{u_i} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \langle \widetilde{u_i} \rangle \langle \widetilde{u_j} \rangle \right) &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \left(\nu 2 \langle \widetilde{S_{ij}} \rangle - T_{ij}^{[R,D]} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\langle \tau_{\zeta_i} \rangle - \langle \tau_{b_i} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Durch die Kombination von Reynolds-Mittelung und Tiefenmittelung resultieren die Scheinspannungen

$$T_{ij}^{[R,D]}(\mathbf{u}) = \widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u}) + D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) \quad (2.67)$$

Diese setzen sich aus

- den tiefengemittelten Reynoldsspannungen (3D- und 2D-Schwankungen)

$$\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u}) = \langle \widetilde{u'_i u'_j} \rangle = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} \langle u'_i u'_j \rangle dz \quad (2.68)$$

- und den Dispersionsspannungen der Reynolds-gemittelten Strömung

$$D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} \left(\langle u_i \rangle - \langle \widetilde{u_i} \rangle \right) \left(\langle u_j \rangle - \langle \widetilde{u_j} \rangle \right) dz \quad (2.69)$$

zusammen. Nach Gleichung 2.62 gilt für die Gesamtspannungen:

$$T_{ij}^{[R,D]} = \widetilde{\langle u_i u_j \rangle} - \widetilde{\langle u_i \rangle} \widetilde{\langle u_j \rangle} \quad (2.70)$$

Wenn die zeitlichen Variationen der Wasseroberfläche und der Sohlgeometrie ($\langle \widetilde{\varphi} \rangle \approx \widetilde{\langle \varphi \rangle}$) gegenüber der Reynolds-Mittelung vernachlässigbar sind, gilt außerdem nach Gleichung 2.63 die wichtige Beziehung

$$T_{ij}^{[R,D]}(\mathbf{u}) = \widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} + D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) \approx R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) + \langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle \quad (2.71)$$

mit

- den durch 2D-Schwankungen verursachten Reynoldsspannungen

$$R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) = \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle \quad (2.72)$$

- und den zeitlich gemittelten Dispersionsspannungen

$$\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle = \left\langle \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dz \right\rangle \quad (2.73)$$

Gleichung 2.71 beschreibt den Zusammenhang zwischen den Reynoldsspannungen und den Dispersionsspannungen. Daraus lassen sich für die Modellierung wichtige Rückschlüsse über die Eigenschaften der Dispersionsterme ziehen (vgl. Abschnitt 3.4.2.2).

Anmerkung:

Um zusätzliche unbekannte Wechselwirkungsterme zu vermeiden, wurden vor der Tiefenintegration die Integrationsgrenzen – die Wasserspiegellage und die Sohllage – nicht explizit zeitlich gefiltert. Die durch das zeitlich gefilterte Gleichungssystem festgelegte Wasserspiegellage ist daher nicht identisch mit der zeitlich gefilterten Wasserspiegellage der (ungefilterten) Ausgangsgleichungen. Eine exakte Lösung der instationären Gleichungen 2.65 und 2.66 kann barotrope Wasserwellen mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von $c \approx \sqrt{gh}$ enthalten. Dadurch ergeben sich je nach numerischen Lösungsverfahren Einschränkungen bezüglich des zulässigen Zeitschrittes. Eine nachträgliche zeitliche Filterung der Gleichungen würde zwar diese Wellen eliminieren, es sind dann aber zusätzliche Wechselwirkungsterme zu modellieren. Ähnliche Terme treten auch auf, wenn zur Herleitung der DA-RANS-Gleichungen die zuvor tiefengemittelten Gleichungen (Gl. 2.45, 2.55) anschließend erst Reynolds-gemittelt werden, was auf folgende Gleichungen führt:

- Reynolds-gemittelte tiefengemittelte Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \langle h \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle h \tilde{u}_i \rangle) = 0 \quad (2.74)$$

- Reynolds-gemittelte tiefengemittelte Impulsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle h \tilde{u}_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle h \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle) &= -g \left\langle h \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \left\langle h \frac{\partial p_a}{\partial x_i} \right\rangle + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left\langle h \left(\nu 2 \widetilde{S}_{ij} - D_{ij} \right) \right\rangle - \underbrace{(\langle h \tilde{u}_i \tilde{u}_j \rangle - \langle h \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle)}_{R(h \tilde{u}_i, \tilde{u}_j)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} (\langle \tau_{\zeta_i} \rangle - \langle \tau_{b_i} \rangle) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Da in diesen Gleichungen zusätzliche unbekannte Korrelationen auftreten, wie z. B. $\langle h \partial \zeta / \partial x_i \rangle = \langle h \rangle \partial_{x_i} \langle \zeta \rangle + R(h, \partial_{x_i} \langle \zeta \rangle)$, empfiehlt es sich für DA-RANS-Verfahren, die Gleichungen 2.65 und 2.66, welche Wellen zeitlich auflösen, zu verwenden.

2.6.6 Kombination von räumlicher Filterung und Tiefenmittelung

Durch die Kombination von Tiefenmittelung und einer räumlichen Filterung ergeben sich die Transportgleichungen für die tiefengemittelten LES-Verfahren (DA-LES). Um wiederum möglichst einfache Transportgleichungen zu erhalten, empfiehlt es sich, die Ausgangsgleichungen zuerst räumlich zu filtern und dann erst über die Tiefe zu mitteln. Dies führt auf folgende Transportgleichungen:

- die Kontinuitätsgleichung für die tiefengemittelten Grobstruktur-Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \widetilde{u}_i \right) = 0 \quad (2.76)$$

- die Impulsgleichung für die tiefengemittelten Grobstruktur-Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j \right) &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \left(\nu 2 \widetilde{S}_{ij} - T_{ij}^{[\tau, D]} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\overline{\tau_{\zeta_i}} - \overline{\tau_{b_i}} \right) \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die Kombination von Grobstrukturfilterung und Tiefenmittelung führt auf folgende zu modellierende Scheinspannungen

$$T_{ij}^{[\tau, D]}(\mathbf{u}) = \widetilde{\tau_{ij}(\mathbf{u})} + D_{ij}(\overline{\mathbf{u}}) \quad (2.78)$$

mit

- den tiefengemittelten Feinstrukturspannungen

$$\widetilde{\tau_{ij}(\mathbf{u})} = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) dz \quad (2.79)$$

- und den durch die 3D-Grobstruktur $\bar{\mathbf{u}}$ hervorgerufenen momentanen Dispersionsspannungen

$$D_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (\bar{u}_i - \tilde{u}_i) (\bar{u}_j - \tilde{u}_j) dz \quad (2.80)$$

Die Aufspaltung der Scheinspannungen nach Gleichung 2.78 ist jedoch für eine Modellierung nicht besonders geeignet, da sich für die einzelnen Terme, nicht zuletzt wegen ihrer starken Abhängigkeit von der Filterweite, keine besonders griffige physikalische Deutung finden lässt. Nach Abschnitt 2.6.4 lassen sich die Gesamtspannungen jedoch umformen. So gilt für die zu modellierenden Gesamtspannungen:

$$T_{ij}^{[\tau, D]}(\mathbf{u}) = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (2.81)$$

und bei gegenüber der räumlichen Filterung vernachlässigbaren Gradienten der Wasseroberfläche und der Sohlgeometrie nach Gleichung 2.63 die Beziehung

$$T_{ij}^{[\tau, D]}(\mathbf{u}) = \widetilde{\tau_{ij}(\mathbf{u})} + D_{ij}(\bar{\mathbf{u}}) \approx \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) + \overline{D_{ij}(\mathbf{u})} \quad (2.82)$$

mit

- den Feinstrukturspannungen durch nicht aufgelöste 2D-Bewegung

$$\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad (2.83)$$

- und den räumlich gefilterten Dispersionsspannungen

$$\overline{D_{ij}(\mathbf{u})} = \overline{\frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i - \tilde{u}_i) (u_j - \tilde{u}_j) dz} \quad (2.84)$$

Demnach lassen sich die Scheinspannungen auch in die Feinstrukturspannungen aufgrund der nicht aufgelösten 2D-Bewegung $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ und die gefilterten Dispersionsspannungen $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$ aufspalten. In dieser, meiner Meinung nach, viel anschaulicheren Zerlegung sind die Scheinspannungen deutlicher in Anteile aus der Grobstrukturfilterung ($\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$) und der Tiefenmittelung ($\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$) getrennt und dadurch einer Modellierung (siehe Abschnitt 3.4.2.2) leichter zugänglich.

Anmerkung:

Zur Herleitung der DA-LES-Transportgleichungen ist, wie schon bei den DA-RANS-Methoden erwähnt, eine Vertauschung der Mittelungsreihenfolge denkbar. Die räumliche Filterung der zuvor tiefengemittelten Flachwassergleichungen (Gl. 2.45 und 2.55) liefert:

- die Kontinuitätsgleichung für die Grobstruktur der tiefengemittelten Geschwindigkeiten

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{h \tilde{u}_i} \right) = 0 \quad (2.85)$$

- die Impulsgleichung für die Grobstruktur der tiefengemittelten Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{h \tilde{u}_i}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{h \tilde{u}_i \tilde{u}_j} \right) &= -gh \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x_i} - \frac{\bar{h}}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\nu h 2 \tilde{S}_{ij}} - \overline{h D_{ij}} - \underbrace{\left(\overline{h \tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \overline{h \tilde{u}_i} \overline{\tilde{u}_j} \right)}_{\tau(h \tilde{u}_i, \tilde{u}_j)} \right) + \\ &+ \frac{1}{\rho} (\bar{\tau}_{\zeta i} - \bar{\tau}_{b i}) \end{aligned} \quad (2.86)$$

In dieser Formulierung werden die Sohlgeometrie und Oberflächenwellen nach der Tiefenmittelung räumlich gefiltert. Dadurch treten zusätzliche Wechselwirkungsterme auf, welche die gefilterte Wassertiefe enthalten (z. B. $\overline{h \partial_{x_i} \zeta} = \bar{h} \partial_{x_i} \bar{\zeta} + \tau(h, \partial_{x_i} \zeta)$). Unter der Annahme einer hinreichend glatten Wasseroberfläche und Sohle (denn dann gilt $h \approx \bar{h}$, $\zeta \approx \bar{\zeta}$, $z_b \approx \bar{z}_b$ und $\tilde{\varphi} \approx \bar{\varphi}$) und der Voraussetzung eines glatten Verlaufs der Anfangs- und Randbedingungen ($p_a \approx \bar{p}_a$, $\bar{\tau}_b \approx \tau_b$, $\bar{\tau}_{\zeta} \approx \tau_{\zeta}$) können diese vernachlässigt werden. Dann sind die beiden Formulierungen für die tiefengemittelten Gleichungen (Gl. 2.76, 2.77 und 2.85, 2.86) äquivalent.

Analogie zwischen DA-LES und 3D-LES:

Der Vollständigkeit halber sei hier noch auf eine offensichtliche direkte Analogie zwischen DA-LES und 3D-LES hingewiesen. Eine DA-LES kann als eine 3D-LES mit einem speziell gewählten räumlichen Filter gesehen werden. Mit einem gitterbasierenden Rechtecks-Filter, der sich über die gesamte Tiefe erstreckt, gilt: $\overline{\varphi} = \overline{\overline{\varphi}}$. Die resultierenden Transportgleichungen entsprechen dann, abgesehen von der Flachwasserapproximation, denen einer 3D-LES (siehe Abschnitt 2.6.2). Diese Analogie ist jedoch wenig hilfreich, weil sie keine Rückschlüsse auf die Eigenschaften der zu modellierenden Scheinspannungen erlaubt. Darüber hinaus ist eine Modellierung dieser Scheinspannungen mit den üblichen 3D-LES-Modellen nicht sinnvoll, da diese Modelle weder für 2D-Simulationen ausgelegt sind, noch die Eigenschaften von Gerinneströmungen berücksichtigen.

2.7 Zusammenfassung der beschriebenen 3D- und 2D-Methoden

In Tabelle 2.2 sind die auf verschiedenen Mittelungen der Grundgleichungen basierenden Berechnungsverfahren zusammengefasst:

Mittlung / Filterung der Grundgleichungen	Simulationsverfahren	
	3D	2D-tiefengemittelt
keine Filterung	DNS	DA-NS
Grobstrukturfilterung	LES	DA-LES
Reynolds-Mittlung	RANS	DA-RANS

Tabelle 2.2: Klassifizierung der Simulationsverfahren.

Aus jedem 3D-Verfahren ergibt sich durch Tiefenmittelung der entsprechenden Transportgleichungen ein tiefengemittelttes Verfahren. Eine Vorgangsweise, bei der die Grundgleichungen zuerst tiefengemittelt und dann gefiltert werden, führt wegen der variablen Wasseroberfläche und Sohle zu komplexen unbekanntem Zusatztermen, welche modelliert oder vernachlässigt werden müssten. Daher wird dieser Ansatz hier nicht weiter verfolgt. Für die DA-LES je-

doch lassen sich die Scheinspannungen nur dann einigermaßen anschaulich beschreiben und modellieren, wenn man sich die zuerst tiefengemittelten Transportgleichungen erst anschließend räumlich gefiltert vorstellt. Dies entspricht der Anwendung der Identität nach Gleichung 2.63, welche jedoch nur für eine horizontale Wasseroberfläche und Sohle exakt ist. Dann setzen sich die Scheinspannungen aus den (räumlich gefilterten) Dispersionsspannungen $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$ aufgrund der Tiefenmittelung der dreidimensionalen Turbulenzbewegung und den 2D-Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ aufgrund der horizontalen räumlichen Filterung der 2D-Bewegung zusammen. Beim DA-RANS-Verfahren bringt die Anwendung der Identität nach Gleichung 2.63 keine Vorteile. Hier sind die tiefengemittelten Reynoldsspannungen $\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})}$ und die Dispersionsspannungen $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, die sich aus der Reynolds-gemittelten Strömung ergeben, zu modellieren. Nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick über die zu modellierenden Scheinspannungen und -flüsse:

Verfahren		Scheinspannungen T_{ij}	Scheinflüsse T_i
3D	DNS	—	—
	LES	Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\mathbf{u})$	$\tau_i(\mathbf{u}, \varphi)$
	RANS	Reynoldsspannungen $R_{ij}(\mathbf{u})$	$R_i(\mathbf{u}, \varphi)$
2D	DA-NS	Dispersionsspannungen $D_{ij}(\mathbf{u})$	$D_i(\mathbf{u}, \varphi)$
	DA-LES	$\overline{D_{ij}(\mathbf{u})} + \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$	$\overline{D_i(\mathbf{u}, \varphi)} + \tau_i(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi})$
	DA-RANS	$\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} + D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$	$\widetilde{R_i(\mathbf{u}, \varphi)} + D_i(\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \varphi \rangle)$

Tabelle 2.3: Scheinspannungen und -flüsse bei den verschiedenen Berechnungsmethoden.

In den Tabellen 2.4 und 2.5 sind die in den vorhergehenden Abschnitten abgeleiteten Transportgleichungen für die auf verschiedenen Mittelungen basierenden 2D- und 3D-Verfahren noch einmal zusammengefasst.

DNS

Konti-Gleichung: $\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i) = 0$

Impulsgleichung: $\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 S_{ij}) + f_i$

Skalartransportgleichung: $\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + s_\varphi$

LES

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'^{[\tau]}$$

Konti-Gleichung: $\frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i) = 0$

Impulsgleichung: $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 \bar{S}_{ij} - \tau_{ij}) + \bar{f}_i$

Skalartransportgleichung: $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} - \tau_i \right) + \bar{s}_\varphi$

Feinstrukturspannungen: $\tau_{ij} = \tau (u_i, u_j) = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$

Feinstrukturflüsse: $\tau_i = \tau (u_i, \varphi) = \overline{u_i \varphi} - \bar{u}_i \bar{\varphi}$

RANS

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + \varphi'^{[R]}$$

Konti-Gleichung: $\frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle) = 0$

Impulsgleichung: $\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 \langle S_{ij} \rangle - R_{ij}) + \langle f_i \rangle$

Skalartransportgleichung: $\frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle u_i \rangle \langle \varphi \rangle) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \langle \varphi \rangle}{\partial x_i} - R_i \right) + \langle s_\varphi \rangle$

Reynoldsspannungen: $R_{ij} = R (u_i, u_j) = \langle u_i u_j \rangle - \langle u_i \rangle \langle u_j \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle$

Reynoldssche Flüsse: $R_i = R (u_i, \varphi) = \langle u_i \varphi \rangle - \langle u_i \rangle \langle \varphi \rangle = \langle u'_i \varphi' \rangle$

Tabelle 2.4: Klassifizierung der 3D-Methoden ($i, j = 1, 2, 3$).

DA-NS

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'^{[D]}$$

$$\text{Konti-Gleichung: } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsgleichung: } \frac{\partial h \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \left(\nu 2 \tilde{S}_{ij} - D_{ij} \right) \right) + \frac{1}{\rho} (\tau_{\zeta_i} - \tau_{b_i}) \end{aligned}$$

$$\text{Skalartransport: } \frac{\partial h \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i \tilde{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\varphi} - D_i \right) \right) + (q_b - q_\zeta) + h \tilde{s}_\varphi$$

$$\text{Dispersionsspannungen: } D_{ij} = D(u_i, u_j) = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \widetilde{u_i'^{[D]} u_j'^{[D]}}$$

$$\text{Dispensionsflüsse: } D_i = D(u_i, \varphi) = \widetilde{u_i \varphi} - \tilde{u}_i \tilde{\varphi} = \widetilde{u_i'^{[D]} \varphi_j'^{[D]}}$$

DA-LES

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'^{[\tau, D]}$$

$$\text{Konti-Gleichung: } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsgleichung: } \frac{\partial h \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \left(\nu 2 \tilde{S}_{ij} - T_{ij}^{[\tau, D]} \right) \right) + \frac{1}{\rho} (\overline{\tau}_{\zeta_i} - \overline{\tau}_{b_i}) \end{aligned}$$

$$\text{Skalartransport: } \frac{\partial h \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \tilde{u}_i \tilde{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\varphi} - T_i^{[\tau, D]} \right) \right) + (\overline{q}_b - \overline{q}_\zeta) + h \tilde{s}_\varphi$$

$$T_{ij}^{[\tau, D]} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \tau(\widetilde{u_i, u_j}) + D(\overline{u_i}, \overline{u_j}) \approx \tau(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) + \overline{D(u_i, u_j)}$$

$$T_i^{[\tau, D]} = \widetilde{u_i \varphi} - \tilde{u}_i \tilde{\varphi} = \tau(\widetilde{u_i, \varphi}) + D(\overline{u_i}, \overline{\varphi}) \approx \tau(\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}) + \overline{D(u_i, \varphi)}$$

DA-RANS

$$\varphi = \langle \tilde{\varphi} \rangle + \varphi'^{[R, D]}$$

$$\text{Konti-Gleichung: } \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \langle \tilde{u}_i \rangle) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsgleichung: } \frac{\partial h \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (h \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle) &= -gh \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{h}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(h \left(\nu 2 \langle \tilde{S}_{ij} \rangle - T_{ij}^{[R, D]} \right) \right) + \frac{1}{\rho} (\langle \tau_{\zeta_i} \rangle - \langle \tau_{b_i} \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Skalartransport: } \frac{\partial h \langle \tilde{\varphi} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{\varphi} \rangle) &= \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \tilde{\varphi} \rangle - T_i^{[R, D]} \right) \right) + (\langle q_b \rangle - \langle q_\zeta \rangle) + h \langle s_\varphi \rangle \end{aligned}$$

$$T_{ij}^{[R, D]} = \widetilde{\langle u_i u_j \rangle} - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle = R(\widetilde{\langle u_i, u_j \rangle}) + D(\langle \tilde{u}_i \rangle, \langle \tilde{u}_j \rangle) \approx R(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) + \langle D(u_i, u_j) \rangle$$

$$T_i^{[R, D]} = \widetilde{\langle u_i \varphi \rangle} - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{\varphi} \rangle = R(\widetilde{\langle u_i, \varphi \rangle}) + D(\langle \tilde{u}_i \rangle, \langle \tilde{\varphi} \rangle) \approx R(\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}) + \langle D(u_i, \varphi) \rangle$$

Tabelle 2.5: Klassifizierung der tiefengemittelten 2D-Methoden ($i, j = 1, 2$), Transportgleichungen für variable Wasseroberfläche und variable Sohlgeometrie.

DA-NS

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'^{[D]}$$

$$\text{Konti-Gleichung: } \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}_i = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsgleichung: } \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu 2 \tilde{S}_{ij} - D_{ij} \right) + \frac{1}{\rho h} (\tau_{\zeta i} - \tau_{b i}) \end{aligned}$$

$$\text{Skalartransport: } \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{u}_i \tilde{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\varphi} - D_i \right) + \frac{1}{h} (q_b - q_{\zeta}) + \tilde{s}_{\varphi}$$

$$\text{Dispersionsspannungen: } D_{ij} = D(u_i, u_j) = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \widetilde{u_i'^{[D]} u_j'^{[D]}}$$

$$\text{Dispensionsflüsse: } D_i = D(u_i, \varphi) = \widetilde{u_i \varphi} - \tilde{u}_i \tilde{\varphi} = \widetilde{u_i'^{[D]} \varphi_j'^{[D]}}$$

DA-LES

$$\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi'^{[\tau, D]}$$

$$\text{Konti-Gleichung: } \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{u}_i = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsgleichung: } \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tilde{u}_i \tilde{u}_j) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu 2 \tilde{S}_{ij} - T_{ij}^{[\tau, D]} \right) + \frac{1}{\rho h} (\overline{\tau}_{\zeta i} - \overline{\tau}_{b i}) \end{aligned}$$

$$\text{Skalartransport: } \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tilde{u}_i \tilde{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\varphi} - T_i^{[\tau, D]} \right) + \frac{1}{h} (\overline{q}_b - \overline{q}_{\zeta}) + \tilde{s}_{\varphi}$$

$$T_{ij}^{[\tau, D]} = \widetilde{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \tau(\widetilde{u_i, u_j}) + D(\overline{u_i}, \overline{u_j}) = \tau(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) + \overline{D(u_i, u_j)}$$

$$T_i^{[\tau, D]} = \widetilde{u_i \varphi} - \tilde{u}_i \tilde{\varphi} = \tau(\widetilde{u_i, \varphi}) + D(\overline{u_i}, \overline{\varphi}) = \tau(\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}) + \overline{D(u_i, \varphi)}$$

DA-RANS

$$\varphi = \langle \tilde{\varphi} \rangle + \varphi'^{[R, D]}$$

$$\text{Konti-Gleichung: } \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \tilde{u}_i \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Impulsgleichung: } \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu 2 \langle \tilde{S}_{ij} \rangle - T_{ij}^{[R, D]} \right) + \frac{1}{\rho h} (\langle \tau_{\zeta i} \rangle - \langle \tau_{b i} \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Skalartransport: } \frac{\partial \langle \tilde{\varphi} \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{\varphi} \rangle) &= \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \tilde{\varphi} \rangle - T_i^{[R, D]} \right) + \frac{1}{h} (\langle q_b \rangle - \langle q_{\zeta} \rangle) + \langle \tilde{s}_{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

$$T_{ij}^{[R, D]} = \widetilde{\langle u_i u_j \rangle} - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{u}_j \rangle = R(\widetilde{\langle u_i, u_j \rangle}) + D(\langle \tilde{u}_i \rangle, \langle \tilde{u}_j \rangle) = R(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) + \langle D(u_i, u_j) \rangle$$

$$T_i^{[R, D]} = \widetilde{\langle u_i \varphi \rangle} - \langle \tilde{u}_i \rangle \langle \tilde{\varphi} \rangle = R(\widetilde{\langle u_i, \varphi \rangle}) + D(\langle \tilde{u}_i \rangle, \langle \tilde{\varphi} \rangle) = R(\tilde{u}_i, \tilde{\varphi}) + \langle D(u_i, \varphi) \rangle$$

Tabelle 2.6: Transportgleichungen der tiefengemittelten 2D-Methoden ($i, j = 1, 2$) vereinfacht für konstante Wassertiefe und horizontale Wasseroberfläche und Sohle.

2.8 Turbulenz und kohärente Strukturen in Flachwasserströmungen

In Fließgewässern wie Flüssen ist die Strömung immer hochturbulent und es gibt eine Vielfalt von Turbulenzphänomenen. Eine gute Übersicht und Detailinformationen zu den wichtigsten Phänomenen zu den Strömungen in Flüssen und offenen Gerinnen gibt das Buch von [Nezu und Nakagawa \(1993\)](#).

Durch die Sohlreibung kommt es zur Ausbildung einer turbulenten Grenzschicht mit einem typischerweise logarithmischen Geschwindigkeitsprofil. An der Wasseroberfläche werden die vertikalen Schwankungen der dreidimensionalen Turbulenzbewegung gedämpft. Außerdem ist das Längenmaß der vertikalen Schwankungen geometriebedingt durch die Wassertiefe beschränkt und nimmt zur Sohle und zur Wasseroberfläche hin ab. Für horizontale Schwankungen besteht diese Einschränkung nicht⁵. Bei horizontaler Scherung⁶, beispielsweise durch topographische Gegebenheiten, wie bei der Umströmung von Hindernissen (Inseln, Brückenpfeiler, Buhnen etc.) oder durch die Variationen der Gewässertiefe (z. B. beim Übergang von einem Hauptgerinne zur Vorlandströmung), aber auch durch Unterschiede in der Sohlrauigkeit (z. B. durch Bewuchs), können sich großräumige zweidimensionale Wirbelstrukturen (Drehung um die vertikale Achse) ausbilden. Die durch horizontale Scherung hervorgerufenen großräumigen horizontalen Wirbel haben Ausmaße typischerweise von der Breite der Scherschicht. Außerdem ist deren Größe durch die Geometrie der Gewässerberandung begrenzt. Somit sind in Flachwasserströmungen zwei Klassen von turbulenter Bewegung zu unterscheiden:

- 3D-Turbulenz, deren Längenmaß durch die Wassertiefe beschränkt ist,
- großräumige, kohärente zweidimensionale Wirbelstrukturen (2D-Turbulenz).

Diese Klassifizierung bildet die Grundlage für die im Folgenden vorgenommene mathematische Definition von 2D- und 3D-Turbulenz in Flachwasserströmungen.

⁵ Aufgrund der Haftbedingung an der Sohle nimmt jedoch auch das Längenmaß der horizontalen Schwankungen zur Sohle hin ab.

⁶ Horizontale Scherung bedeutet hier eine Scherung in der horizontalen Ebene, also z. B. ein Geschwindigkeitsgradient in Querrichtung du/dy .

2.8.1 Definition von 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz in Flachwasserströmungen

Bei allen tiefengemittelten Berechnungsverfahren ist der Einfluss der 3D-Schwankungsbewegung (3D-Turbulenz) zu modellieren. Außerdem sind bei der DA-LES die 2D-Feinstruktur und bei der DA-RANS die komplette 2D-Schwankungsbewegung (2D-Turbulenz) zu modellieren. Für das weitere Vorgehen ist eine mathematische Definition der 2D- und 3D-Turbulenz hilfreich. Dazu ist folgender Ansatz naheliegend:

$$\text{Gesamt-Turbulenz} = \text{2D-Turbulenz} + \text{3D-Turbulenz}$$

Gesamt-Turbulenz:

Das Strömungsfeld $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ ist in Flachwasserströmungen immer dreidimensional. Die lokalen turbulenten Schwankungen

$$\mathbf{u}'(x, y, z, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t) - \langle \mathbf{u}(x, y, z, t) \rangle \quad (2.87)$$

sind der Gesamt-Turbulenz zuzuordnen. Die kinetische Energie der über \mathbf{u}' definierten (lokalen) Gesamt-Turbulenz ist:

$$k = \frac{1}{2} R_{ii}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.88)$$

Für die tiefengemittelten Betrachtungen ist die tiefengemittelte kinetische Energie der Gesamt-Turbulenz relevant:

$$\tilde{k} = \frac{1}{2} \widetilde{R_{ii}(\mathbf{u})} = \frac{1}{2} \widetilde{\langle u'_i u'_i \rangle} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.89)$$

2D-Turbulenz:

Für die 2D-Turbulenz sind die kohärenten 2D-Wirbelbewegungen maßgebend. Am einfachsten ist die Definition der kohärenten 2D-Strukturen über den Tiefenmittelwert $\tilde{\mathbf{u}}$ der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten. Die tiefengemittelten 2D-Schwankungen

$$\tilde{\mathbf{u}}'(x, y, t) = \tilde{\mathbf{u}}(x, y, t) - \langle \tilde{\mathbf{u}}(x, y, t) \rangle \quad (2.90)$$

sind dann der 2D-Turbulenz⁷ zuzuordnen. Ein wichtiges Maß für die Stärke der 2D-Turbulenz ist die kinetische Energie der 2D-Schwankungsbewegung:

$$k_{2D} = \frac{1}{2} R_{ii}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_i' \rangle \quad i = 1, 2 \quad (2.91)$$

Anders als bei der 3D-Turbulenz ist die Stärke der 2D-Turbulenz über die Wassertiefe konstant und es gilt $k_{2D} = \widetilde{k_{2D}}$.

Anmerkung: Aufgrund der turbulenten Schwankungen, der Sohlneigung und von Sekundärströmungen ergeben sich bei der Tiefenmittelung auch tiefengemittelte Vertikalgeschwindigkeiten \tilde{u}_3 . Diese sind, abgesehen von der Sohlneigungskomponente, nicht Teil der 2D-Bewegung. Um nachfolgende Betrachtungen nicht unnötig zu verkomplizieren, wird hier die Sohlneigung in Bezug auf die tiefengemittelten Geschwindigkeitskomponenten vernachlässigt und der Turbulenz- und Sekundärströmungsanteil von \tilde{u}_3 der 3D-Bewegung zugerechnet. Dazu wird hier $\tilde{u}_3 \equiv 0$ definiert, woraus $u_3'^{[D]} = u_3$ folgt. Damit ist in Gleichung 2.91 auch eine Summation über $i = 1, 2, 3$ möglich.

3D-Turbulenz:

Entsprechend der Definition nach Gleichung 2.33 gilt für den 3D-Anteil der Strömung (vgl. Abb. 2.4 auf S. 27):

$$\underbrace{\mathbf{u}'^{[D]}(x, y, z, t)}_{\text{3D-Anteil}} = \underbrace{\mathbf{u}(x, y, z, t)}_{\text{3D-Strömungsfeld}} - \underbrace{\tilde{\mathbf{u}}(x, y, t)}_{\text{2D-Anteil}} \quad (2.92)$$

Die Schwankung des 3D-Anteils $(\mathbf{u}'^{[D]})'$ wird der 3D-Turbulenz zugeordnet. Für die lokalen Reynoldsspannungen aufgrund der 3D-Turbulenz gilt:

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{u}'^{[D]}) &= \left\langle (\mathbf{u}'^{[D]})' (\mathbf{u}'^{[D]})' \right\rangle = R_{ij}(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \\ &= \langle (u_i - \tilde{u}_i)' (u_j - \tilde{u}_j)' \rangle = \langle (u_i' - \tilde{u}_i') (u_j' - \tilde{u}_j') \rangle \\ &= \langle u_i' u_j' \rangle - \langle \tilde{u}_i' u_j' \rangle - \langle u_i' \tilde{u}_j' \rangle + \langle \tilde{u}_i' \tilde{u}_j' \rangle \end{aligned} \quad (2.93)$$

⁷ Der Begriff 2D-Turbulenz wird hierbei mit Vorbehalt verwendet, da es Diskussionen darüber gibt, ob der Begriff „Turbulenz“ für 2D-Strukturen überhaupt zutreffend ist, da es im Zweidimensionalen keine Wirbelfadenstreckung gibt (Tennekes und Lumley 1972). Auch periodische Strukturen, wie sie beispielsweise in der Wirbelstraße eines Kreiszyinders aufgrund der Von Kármán-Instabilität auftreten, sind nicht chaotisch und somit keine Turbulenz.

Daraus folgt für die tiefengemittelten Reynoldsspannungen der 3D-Turbulenz (mit $\langle \widetilde{u'_i u'_j} \rangle = \langle \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j} \rangle$):

$$\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u}'^{[D]})} = \langle \widetilde{u'_i u'_j} \rangle - \langle \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j} \rangle = \widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} - R_{ij}(\widetilde{\mathbf{u}}) \quad (2.94)$$

und damit für die tiefengemittelte kinetische Energie der 3D-Turbulenz:

$$\widetilde{k_{3D}} = \frac{1}{2} \widetilde{R_{ii}(\mathbf{u}'^{[D]})} = \frac{1}{2} (\widetilde{R_{ii}(\mathbf{u})} - R_{ii}(\widetilde{\mathbf{u}})) = \widetilde{k} - k_{2D} \quad (2.95)$$

Anmerkung: Für den bezogen auf die Tiefe lokalen 3D-Anteil $\mathbf{u}'^{[D]}$ der Strömung, bzw. für die über dessen Schwankung definierte 3D-Turbulenz, lässt sich keine anschauliche physikalische Interpretation finden. So ist z. B. der 3D-Anteil $\mathbf{u}'^{[D]}$ und dessen Schwankung an der Sohle trotz Haftbedingung nicht null⁸. Schon aus der Definition von $\mathbf{u}'^{[D]}$ in Verbindung mit der tiefengemittelten Geschwindigkeit wird deutlich, dass die hier definierte 3D-Turbulenz immer in Verbindung mit der Tiefenmittelung zu sehen ist.

Zusammenhang zwischen 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz

Entsprechend den Gleichungen 2.94 und 2.95 gilt folgender einfacher, aber wichtiger Zusammenhang zwischen 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz:

- Tiefengemittelte Reynoldsspannungen

$$\underbrace{\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})}}_{\text{Gesamt-Turbulenz}} = \underbrace{\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u}'^{[D]})}}_{\text{3D-Turbulenz}} + \underbrace{R_{ij}(\widetilde{\mathbf{u}})}_{\text{2D-Turbulenz}} \quad (2.96)$$

- Tiefengemittelte kinetische Turbulenzenergie

$$\underbrace{\widetilde{k}}_{\text{Gesamt-Turbulenz}} = \underbrace{\widetilde{k_{3D}}}_{\text{3D-Turbulenz}} + \underbrace{k_{2D}}_{\text{2D-Turbulenz}} \quad (2.97)$$

⁸ An der Sohle gilt $[\mathbf{u}]_b = 0$ und somit wegen Gleichung 2.33 für den 3D-Anteil $[\mathbf{u}'^{[D]}]_b = -[\widetilde{\mathbf{u}}]_b$ bzw. für dessen Schwankung $[(\mathbf{u}'^{[D]})']_b = -[\widetilde{\mathbf{u}}']_b$.

2.8.2 Wechselwirkung zwischen 2D- und 3D-Turbulenz

Zwischen der 3D-Turbulenz und den 2D-Strukturen gibt es komplexe Wechselwirkungen. So werden beispielsweise großräumige 2D-Bewegungen durch die Bodenreibung gebremst und die dabei der 2D-Bewegung entzogene Energie der 3D-Turbulenz durch sohlreibungsverursachte Turbulenzproduktion zugeführt. Aber sogar ein direkter Energieaustausch zwischen kleinskaliger 3D-Turbulenz und 2D-Bewegung ist möglich. Nachfolgende Aufstellung gibt einen Überblick über die wesentlichen Mechanismen, die zur Produktion und Dissipation von 2D- und 3D-Turbulenzenergie führen (vgl. auch Abb. 1.3b auf S. 4):

- 3D-Turbulenz ($\widetilde{k_{3D}}$)
 - Produktion
 - ▷ Primäre Produktion aufgrund der durch Sohlreibung verursachten Scherung in Tiefenrichtung.
 - ▷ Zerfall von 2D-Strukturen durch vertikale Scherung und Umwandlung in 3D-Fluktuationen.
 - ▷ Produktion in Zonen mit sehr starker horizontaler Scherung, wie sie z. B. in der Nähe von Seitenwänden auftritt.
 - ▷ Beispiele für sonstige Produktionsmechanismen:
 - Instabile Dichteschichtungen,
 - Windkräfte,
 - Brechung von Wellen an der Wasseroberfläche.
 - Vernichtung
 - ▷ Energie-Dissipation (Umwandlung in Wärmeenergie) auf den kleinsten turbulenten Skalen aufgrund der viskosen Reibungskräfte.
 - ▷ Energietransfer in 2D-Bewegung.
 - ▷ Beispiele für sonstige Mechanismen:
 - Energietransfer in Oberflächenwellen,
 - Dämpfung durch stabile Dichteschichtungen ($\partial\rho/\partial z < 0$).
- 2D-Turbulenz (k_{2D})
 - Produktion
 - ▷ Primäre Produktion durch horizontale Scherung.
 - ▷ Direkter Energietransfer aus 3D-Turbulenz (durch Bildung zweidimensionaler kohärenter Strukturen).

- ▷ Beispiele für sonstige Mechanismen: Windkräfte.
- Vernichtung
 - ▷ Abbremsung großräumiger Strukturen durch Sohlreibung (oder durch zur Strömung entgegengesetzte Windkräfte) und damit verbundene Produktion von 3D-Turbulenz.
 - ▷ Scherung von 2D-Strukturen durch vertikale Scherung und Umwandlung in 3D-Fluktuationen.
 - ▷ Dissipation von 2D-Turbulenzenergie auf den kleinen Skalen der 2D-Bewegung durch viskose Kräfte
 - ▷ Zerfall kleiner 2D-Wirbel in 3D-Turbulenz.

Bei einer tiefengemittelten Simulation müssen die Produktions- und Dissipationsmechanismen für die 2D-Turbulenz und deren Wechselwirkung mit der 3D-Turbulenz berücksichtigt werden. Zur Erfassung der nicht aufgelösten 3D-Turbulenz ist unter Umständen die Lösung einer zusätzlichen Transportgleichung für die tiefengemittelte 3D-Turbulenzenergie $\widetilde{k_{3D}}$ hilfreich. Da der Hauptanteil der 3D-Turbulenz an der Sohle produziert wird, kann diese in vielen Fällen mit einem einfachen Wirbelviskositätsansatz der Form $\nu_t \sim hu_\tau$ erfolgreich modelliert werden. Dabei wird ein lokales Gleichgewicht von Produktion und Dissipation angenommen und die Konvektion und Diffusion der 3D-Turbulenz vernachlässigt. Mit einem solchen einfachen Modell kann jedoch nicht die Anregung kohärenter 2D-Strukturen aus der 3D-Turbulenz modelliert werden. Dies ist beispielsweise in einer voll ausgebildeten periodischen Gerinneströmung zu beobachten, wo 2D-Strukturen gänzlich ohne horizontale Scherung der mittleren Strömung produziert werden (vgl. Abschnitt 5.1). Diese 2D-Strukturen bilden den kohärenten zweidimensionalen Anteil der turbulenten Gesamtschwankungen. Die Modellierung der Bildung dieser kohärenten 2D-Strukturen aus der 3D-Turbulenz ist besonders schwierig, denn durch ein Wirbelviskositätsmodell kann der hierfür zu modellierende „inverse“ Energietransfer nicht erfasst werden. In Strömungen mit dominanter geometriebedingter horizontaler Scherung spielt dies keine große Rolle. In Situationen jedoch, in denen aufgrund von horizontalen Scherinstabilitäten großräumige 2D-Strukturen durch das Anwachsen kleiner Störungen entstehen, wie z. B. in der Mischungsschicht (vgl. Abschnitt 5.2), müssen die relativ schwachen zweidimensionalen Anfangsschwankungen in der Grundströmung simuliert werden. Hier werden Turbulenzmodelle benötigt, die einen negativen Energietransfer, sog. *back scat-*

ter, erlauben und in der Lage sind, auch in Gebieten ohne horizontale Scherung 2D-Strukturen zu generieren. Eine Möglichkeit dazu bieten stochastische Modelle, welche die Strömung durch eine zufallsgenerierte Kraft anregen. In den Abschnitten 3.4.2.2 und 3.4.2.3 wird ein derartiges Modell für die DA-NS und DA-LES von Flachwasserströmungen vorgeschlagen.

Die Wechselwirkungen zwischen 3D- und 2D-Turbulenz sind in den tiefengemittelten Gleichungen über die Dispersionsspannungen zu modellieren. Diese werden deshalb im nächsten Abschnitt näher analysiert.

2.9 Analyse der Dispersionsspannungen

Bei der Tiefenmittelung geht Information über die dreidimensionale Bewegung verloren. Deshalb ergeben sich Scheinspannungen, die als Dispersionsspannungen bezeichnet werden. Diese entstehen aus der Abweichung der tiefengemittelten Geschwindigkeit von der lokalen Geschwindigkeit. Für die instationären ungefilterten Dispersionsspannungen gilt nach Gleichung 2.54:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i - \tilde{u}_i)(u_j - \tilde{u}_j) dz = \widetilde{u_i^{[D]} u_j^{[D]}} \quad (2.98)$$

Bei den tiefengemittelten Verfahren muss die Wechselwirkung der nicht mehr aufgelösten dreidimensionalen Bewegung mit der nun tiefengemittelten Strömung über diese Dispersionsspannungen modelliert werden. Je nach Verfahren sind dabei die ungefilterten (DA-NS), gefilterten (DA-LES) oder Reynolds-gemittelten (DA-RANS) Dispersionsspannungen zu berücksichtigen:

Verfahren	Scheinspannungen	Modellierung von
DA-NS	$D_{ij}(\mathbf{u})$	3D-Bewegung
DA-LES	$\overline{D_{ij}(\mathbf{u})} + \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$	3D-Bewegung + 2D-Feinstruktur
DA-RANS	$\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle + R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$	3D-Bewegung + 2D-Schwankungen

Tabelle 2.7: Dispersionsspannungen bei den tiefengemittelten Berechnungsverfahren.

Um in dieser Tabelle den Zusammenhang zwischen den Dispersionsspannungen und der 3D-Bewegung zu unterstreichen, wurde hier beim DA-RANS-Verfahren für die Scheinspannungen die Form angegeben, welche sich mit der

Identität nach Gleichung 2.63 ergibt (vgl. Gl. 2.71). Es ist jedoch beim DA-RANS-Verfahren üblich, die Scheinspannungen in der ursprünglichen Form zu modellieren. In diesem Fall setzen sich diese aus den Dispersionsspannungen $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, die sich aus der zeitlich gemittelten Strömung ergeben, und den tiefengemittelten Reynoldsspannungen (3D-Turbulenz und 2D-Schwankungen) $\overline{R_{ij}(\mathbf{u})}$ zusammen. Die Dispersionsspannungen $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ beim DA-RANS-Verfahren lassen sich dann einfach durch die Annahme eines mittleren Geschwindigkeitsprofils – z. B. über ein Potenzgesetz – bestimmen (vgl. Modellierung der DA-RANS-Scheinspannungen in Abschnitt 3.4.2.1). Schwieriger ist die Situation beim DA-NS- und DA-LES-Ansatz, wo die instationären Dispersionsspannungen $D_{ij}(\mathbf{u})$ bzw. $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$ modelliert werden müssen.

2.9.1 Analyse der instationären Dispersionsspannungen

Um etwas mehr über die für DA-NS und DA-LES zu modellierenden instationären Dispersionsspannungen aussagen zu können, wird in dieser Arbeit eine hypothetische Zerlegung des momentanen lokalen Geschwindigkeitsprofils in Tiefenrichtung $\mathbf{u}(z, t)$ in einen „quasi mittleren“ Anteil mit einem standardisierten Tiefenprofil \mathbf{u}^* und einen turbulenten Anteil \mathbf{u}'' entsprechend Abbildung 2.5 vorgenommen:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}^*(x, y, z, t) + \mathbf{u}''(x, y, z, t) \quad (2.99)$$

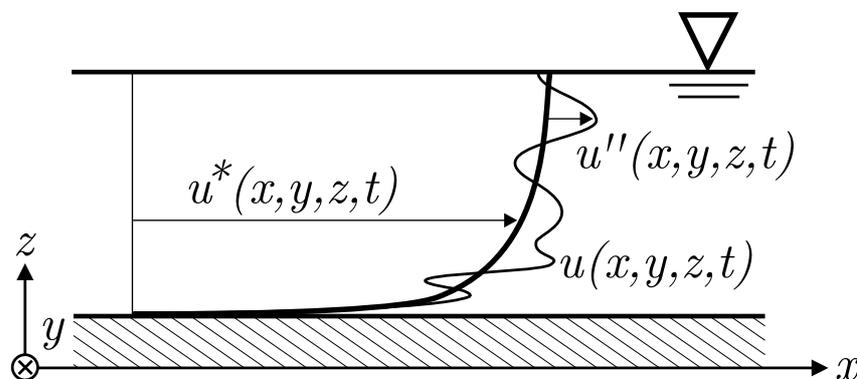


Abb. 2.5: Schematische Darstellung der Aufspaltung des lokalen momentanen Geschwindigkeitsprofils $\mathbf{u}(z, t)$ in ein mittleres Profil $\mathbf{u}^*(z, t)$ und in Fluktuationen $\mathbf{u}''(z, t)$.

Das standardisierte Tiefenprofil

$$u_i^*(z, t) = \widetilde{u_i}(t) \cdot f_i^*(z) \quad (\text{hier keine Summation über } i) \quad (2.100)$$

wird über eine Funktion $f^*(z)$, die das Geschwindigkeitsprofil beschreibt, definiert. In einer voll ausgebildeten turbulenten Strömung kann für $f_i^*(z)$ bei vernachlässigbaren Sekundärströmungen näherungsweise ein logarithmisches Geschwindigkeitsprofil oder ein Potenzgesetz angenommen werden. Der Haftbedingung an der Sohle wird durch die Forderung $[f^*]_b = 0$ Rechnung getragen. Außerdem wird $\widetilde{f_i^*}(z) = 1$ gefordert. Damit entspricht der Tiefenmittelwert des Profils $\mathbf{u}^*(x, y, z, t)$ dem lokalen Tiefenmittelwert $\widetilde{\mathbf{u}}(x, y, t)$ der Strömung, also:

$$\widetilde{\mathbf{u}^*}(x, y, z, t) = \widetilde{\mathbf{u}}(x, y, t) \quad (2.101)$$

In \mathbf{u}^* geht die 2D-Bewegung (über $\widetilde{\mathbf{u}}$) vollständig ein, was für \mathbf{u}'' die Interpretation als turbulente „3D-Fluktuation“ nahe legt. Durch Tiefenmittelung von Gleichung 2.99 folgt für den Tiefenmittelwert der 3D-Fluktuationen:

$$\widetilde{\mathbf{u}''} = 0 \quad (2.102)$$

(Die 3D-Fluktuationen \mathbf{u}'' erfüllen die Haftbedingung an der Sohle. Somit ist für eine 3D-Turbulenzbewegung, die über diese 3D-Fluktuationen definiert ist, im Gegensatz zu der in Abschnitt 2.8.1 definierten 3D-Turbulenz eine lokale Interpretation möglich.)

Mit der Aufspaltung der Geschwindigkeiten nach Gleichung 2.99 ergibt sich nun durch Einsetzen in Gleichung 2.98 für die instationären Dispersionsspannungen folgende Zerlegung:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \underbrace{\widetilde{u_i^* u_j^*} - \widetilde{u_i^*} \widetilde{u_j^*}}_{D_{ij}(\mathbf{u}^*)} + \underbrace{\widetilde{u_i'' u_j^*} + \widetilde{u_i^* u_j''}}_{C_{ij}^*} + \underbrace{\widetilde{u_i'' u_j''} - \widetilde{u_i''} \widetilde{u_j''}}_{D_{ij}(\mathbf{u}'')} \quad (2.103)$$

Nach dieser Zerlegung setzen sich die momentanen Dispersionsspannungen aus einem Anteil $D_{ij}(\mathbf{u}^*)$, der durch das mittlere Strömungsprofil bestimmt ist, und einem Anteil $D_{ij}(\mathbf{u}'')$, der von den Fluktuationen stammt, zusammen. Außerdem besteht eine Wechselwirkung zwischen den Fluktuationen und dem

mittleren Profil, die durch den Wechselwirkungsterm C_{ij}^* (*Crossterm*) erfasst wird. Wenn das mittlere Geschwindigkeitsprofil durch $\mathbf{u}^*(z)$ gut wiedergegeben wird, dann sind die Wechselwirkungsterme C_{ij}^* relativ klein, denn das momentane Geschwindigkeitsfeld schwankt dann um \mathbf{u}^* , und wegen $\widetilde{\mathbf{u}''} = 0$ ist dann $\widetilde{u''_i u''_j}$ und $\widetilde{u''_j u''_i}$ klein. Bei Vernachlässigung dieser Wechselwirkungsterme ergibt sich für die instationären Dispersionsspannungen folgende Abschätzung:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) \approx \underbrace{D_{ij}(\mathbf{u}^*)}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{D_{ij}(\mathbf{u}'')}_{\text{3D-Fluktuationen}} \quad (2.104)$$

Für die Dispersionsspannungen der Fluktuationen $D_{ij}(\mathbf{u}'')$ gilt wegen $\widetilde{\mathbf{u}''} = 0$:

$$D_{ij}(\mathbf{u}'') = \widetilde{u''_i u''_j} - \widetilde{u''_j u''_i} = \widetilde{u''_i u''_j} \quad (2.105)$$

Demnach haben die Dispersionsspannungen $D_{ij}(\mathbf{u}'')$ nicht den Charakter von Dispersionsspannungen, sondern sind vielmehr tiefengemittelte momentane Scheinspannungen der kleinskaligen turbulenten 3D-Fluktuationen. Da die 2D-Schwankungen schon in das mittlere Profil eingehen (vgl. Gleichung 2.100) können diese Fluktuationen quasi als 3D-Turbulenz gedeutet werden. Somit lassen sich die instationären Dispersionsspannungen in einen Anteil, der durch das Geschwindigkeitsprofil einer quasi mittleren – in Bezug auf die 2D-Bewegung jedoch instationären – Strömung verursacht wird, und einen durch die kleinskalige 3D-Turbulenz verursachten Anteil zerlegen:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) \approx \underbrace{D_{ij}(\mathbf{u}^*)}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{\widetilde{u''_i u''_j}}_{\text{3D-Turbulenz}} \quad (2.106)$$

Diese Aufspaltung gibt Hinweise zur Modellierung der Dispersionsspannungen. Um diese Aufspaltung der instationären Dispersionsspannungen zu untermauern, lohnt sich der Blick auf die Reynolds-gemittelten Dispersionsspannungen $\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle$. Dort nämlich ergibt sich diese Aufspaltung auch ohne die hier im instationären Fall mit der Aufspaltung des Geschwindigkeitsprofils und der Vernachlässigung der Wechselwirkungsterme C_{ij}^* gemachten Annahmen. Dies wird im nächsten Abschnitt demonstriert.

2.9.2 Reynolds-gemittelte Dispersionsspannungen

Durch Aufspalten der momentanen Geschwindigkeit in eine Reynolds-gemittelte Geschwindigkeit und einen fluktuierenden Anteil ($\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$) erhält man für die Dispersionsspannungen die Zerlegung:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \underbrace{\langle \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \rangle - \widetilde{\langle u_i \rangle \langle u_j \rangle}}_{D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)} + \underbrace{\widetilde{u'_i} \langle u_j \rangle - \widetilde{u'_i} \langle u_j \rangle + \langle u_i \rangle \widetilde{u'_j} - \langle u_i \rangle \widetilde{u'_j}}_{C_{ij}} + \underbrace{\widetilde{u'_i u'_j} - \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j}}_{D_{ij}(\mathbf{u}')}$$
(2.107)

Bei Reynolds-Mittelung von Gleichung 2.107 fallen wegen $\langle \widetilde{u'_i} \rangle \approx \langle \widetilde{u'_i} \rangle = 0$ die Wechselwirkungsterme C_{ij} weg und es folgt für die Reynolds-gemittelten Dispersionsspannungen⁹:

$$\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle \approx D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) + \langle D_{ij}(\mathbf{u}') \rangle$$
(2.108)

Demnach setzen sich die Reynolds-gemittelten Dispersionsspannungen aus $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, den Dispersionsspannungen der Reynolds-gemittelten Geschwindigkeiten, und $\langle D_{ij}(\mathbf{u}') \rangle$, den Reynolds-gemittelten Dispersionsspannungen der Fluktuationen, zusammen. Für $\langle D_{ij}(\mathbf{u}') \rangle$ gilt wiederum:

$$\begin{aligned} \langle D_{ij}(\mathbf{u}') \rangle &= \langle \widetilde{u'_i u'_j} - \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j} \rangle \\ &= \langle \widetilde{u'_i u'_j} \rangle - \langle \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j} \rangle \\ &\approx \langle \widetilde{u'_i u'_j} \rangle - \langle \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j} \rangle \\ &= \underbrace{\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})}}_{\text{Gesamtturbulenz}} - \underbrace{R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})}_{\text{2D-Turbulenz}} = \underbrace{\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u}'^{[D]})}}_{\text{3D-Turbulenz}} \end{aligned}$$
(2.109)

Die tiefengemittelten Reynoldsspannungen $\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})}$ in Gleichung 2.109 beinhalten die turbulenten Schwankungen aller Skalen – die nicht aufgelösten 3D-Fluktuationen und die aufgelösten 2D-Fluktuationen – während die Reynoldsspannungen $R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ ausschließlich die 2D-Fluktuationen enthalten. Folglich

⁹ Für eine fixe Wasseroberfläche und Sohlgeometrie gilt $\langle \widetilde{u'_i} \rangle = \langle \widetilde{u'_i} \rangle = 0$.
Dann sind die Gleichungen 2.108 bis 2.110 exakt (vgl. Abschnitt 2.6.4).

entspricht $\langle D_{ij}(\mathbf{u}') \rangle$ den tiefengemittelten Scheinspannungen, die ausschließlich durch die turbulenten 3D-Fluktuationen verursacht sind. Daraus folgt, dass die 2D-Turbulenz auf die Dispersionsspannungen keinen unmittelbaren Einfluss hat. Somit muss die 2D-Turbulenz bei der Modellierung der Dispersionsspannungen nicht berücksichtigt werden.

Zusammenfassend gilt für die Reynolds-gemittelten Dispersionsspannungen:

$$\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle \approx \underbrace{D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} - R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})}_{\text{3D-Turbulenz}} \quad (2.110)$$

Diese Beziehung zwischen den Dispersionsspannungen und den Reynoldsspannungen ist äquivalent zu der schon mit Gleichung 2.71 gefundenen Zerlegung für die DA-RANS-Scheinspannungen.

2.9.3 Konsequenzen für die Modellierung

Die vorangegangene Analyse der Dispersionsspannungen liefert einen wesentlichen Ansatzpunkt für deren Modellierung. Darauf wird hier – als kleiner Vorgriff zum eigentlichen Modellierungskapitel – nun näher eingegangen:

Da sich die Dispersionsspannungen in einen Anteil, der durch das Geschwindigkeitsprofil verursacht ist, und einen turbulenten Anteil aufspalten lassen, ist die Approximation der instationären Dispersionsspannungen durch Gleichung 2.104 ein vielversprechender Ausgangspunkt für die weitere Modellierung:

$$D_{ij}^{mod}(\mathbf{u}) = \underbrace{D_{ij}(\mathbf{u}^*)}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{\widetilde{u''_i u''_j}}_{\text{3D-Fluktuationen}}^{mod} \quad (2.111)$$

Diese beiden Terme lassen sich nun wie folgt modellieren:

1. Die durch das mittlere Geschwindigkeitsprofil verursachten Spannungen $D_{ij}(\mathbf{u}^*)$ können analytisch berechnet werden, wenn das Geschwindigkeitsprofil bekannt ist. Unter der Annahme, dass eine Funktion $f^*(z)$ das Geschwindigkeitsprofil entsprechend Gleichung 2.100 beschreibt, erhält

man für die Spannungen $D_{ij}(\mathbf{u}^*)$:

$$\begin{aligned}
 D_{ij}(\mathbf{u}^*) &= \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i^* - \tilde{u}_i) (u_j^* - \tilde{u}_j) dz \\
 &= \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (\tilde{u}_i \cdot f_i^*(z) - \tilde{u}_i) (\tilde{u}_j \cdot f_j^*(z) - \tilde{u}_j) dz \\
 &= \tilde{u}_i \tilde{u}_j \cdot \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (f_i^*(z) - 1) (f_j^*(z) - 1) dz \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

2. Für den turbulenten Anteil $D_{ij}(\mathbf{u}'') = \widetilde{u_i'' u_j''}$ wurde gezeigt, dass dieser nur durch die kleinskaligen nicht aufgelösten 3D-Fluktuationen hervorgerufen wird und die 2D-Bewegung keinen direkten Einfluss auf die turbulenten Dispersionsspannungen hat. Diese turbulenten Dispersionsspannungen haben den Charakter tiefengemittelter turbulenter Scheinspannungen (vgl. Gl. 2.105). Die turbulenten Scheinspannungen führen zu einem verstärkten Impulsaustausch, welcher über eine Wirbelviskosität modelliert werden kann. Die turbulenten 3D-Fluktuationen sorgen jedoch nicht nur für eine turbulente Durchmischung, sondern können ihrerseits auch 2D-Fluktuationen anregen. Dies kann mit einem Wirbelviskositätsmodell nicht gut modelliert werden. Hierfür ist ein stochastisches Modell, das für den inversen Energietransfer (*back scatter*) von der nicht aufgelösten 3D- zur 2D-Turbulenz sorgt, viel besser geeignet. Deshalb wird hier folgende Kombination eines Wirbelviskositätsmodells mit einem (hier noch nicht näher spezifizierten) stochastischen *Back scatter*-Modell (BSM) vorgeschlagen:

$$\widetilde{u_i'' u_j''}^{mod} = \underbrace{D_{ij}^{\nu}}_{\text{Wirbelviskositätsmodell}} + \underbrace{D_{ij}^F}_{\text{Back scatter-Modell}} \quad (2.113)$$

Für das weitere Vorgehen werden die durch das mittlere Geschwindigkeitsprofil verursachten Spannungen $D_{ij}(\mathbf{u}^*)$ als D_{ij}^P abgekürzt. Damit ergibt sich nach-

folgender Ansatz für die Modellierung der Dispersionsspannungen:

$$D_{ij}^{mod}(\mathbf{u}) = \underbrace{D_{ij}^P}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{D_{ij}^\nu + D_{ij}^F}_{\text{3D-Fluktuationen}} \quad (2.114)$$

Auf diesen Ansatz wird im nun folgenden Kapitel bei der Modellierung der instationären Dispersionsspannungen für DA-NS und DA-LES zurückgegriffen.

3 Modellierung

Im vorhergehenden Kapitel wurden die Transportgleichungen für die 3D-Berechnungsverfahren (DNS/LES/RANS) und die tiefengemittelten Berechnungsverfahren (DA-NS/DA-LES/DA-RANS) aufgeführt. Zur Lösung dieser partiellen Differentialgleichungen sind diverse Modellannahmen zu treffen. So sind die Strömungsgeometrie sowie Anfangs- und Randbedingungen vorzugeben, außerdem sind die durch die Gleichungssysteme nicht bestimmten Scheinspannungen und -flüsse zu modellieren. Die im Rahmen dieser Arbeit relevanten Modellannahmen werden in diesem Kapitel näher erläutert.

3.1 Geometrische Vereinfachungen bei Gerinneströmung

In dieser Arbeit werden alle Simulationen von Gerinneströmungen mit einer horizontalen Wasseroberfläche und Sohle durchgeführt. Dadurch ergibt sich eine wesentliche Vereinfachung der Strömungsgeometrie. Anstelle der Schwerkraft \mathbf{g} und der geneigten Sohle (Sohlneigungswinkel α) tritt nun eine Volumenkraft $\mathbf{f} = (f_x, 0, 0)$ in Strömungsrichtung mit $\langle f_x \rangle = g \sin(\alpha)$, welche die Strömung antreibt. Die Erdbeschleunigungskomponente in Tiefenrichtung $g \cos(\alpha)$ wird nicht aufgeprägt, da diese ausschließlich zum hydrostatischen Druck beiträgt und die Strömung nicht beeinflusst. In der Impulsgleichung ersetzt die Volumenkraft \mathbf{f} zusammen mit dem Pseudodruck p die Gradienten der Wasseroberfläche und des Umgebungsdrucks p_a . Somit gilt:

$$-g \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_a}{\partial x_i} \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (i = 1, 2) \quad (3.1)$$

Unter der Voraussetzung einer räumlich konstanten Wassertiefe ergeben sich damit die in Tabelle 2.6 auf Seite 49 aufgeführten vereinfachten Transportgleichungen.

3.2 Anfangsbedingungen

Die Anfangsbedingungen legen das Ausgangströmungsfeld zum Startzeitpunkt t_0 der Simulation fest. Im Laufe der Simulation stellt sich nach einiger Zeit eine statistisch ausgebildete turbulente Strömung ein, die bei den hier betrachteten Strömungen unabhängig von der Anfangsbedingung ist. Da die Anfangsbedingung keinen Einfluss auf die statistische Lösung haben, ist die Wahl der Anfangsbedingungen relativ unproblematisch. Um nach möglichst wenigen Zeitschritten eine ausgebildete Strömung zu erhalten, sollte die Anfangsbedingung der ausgebildeten Strömung relativ nahe kommen. Meist ist jedoch schon eine einfache Initialisierung des Strömungsfeldes mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, also $\mathbf{u}(t_0, x, y, z) = \mathbf{u}_b$, ausreichend. Bei niedrigen Reynoldszahlen kann es in manchen Fällen aus numerischen Gründen erforderlich sein, der Strömung eine anfängliche Störung \mathbf{u}' aufzuprägen, da sich ansonsten eine laminare Strömung ausbildet. Hierfür hat sich bei Gerinneströmungen ein weißes Rauschen mit der Standardabweichung $u_{i\,rms} \approx u_\tau$ bewährt.

3.3 Randbedingungen

3.3.1 Modellierung der Wasseroberfläche bei der Gerinneströmung

In realen Gerinneströmungen ist die Wasseroberfläche aufgrund von Wellen, Variationen des Durchflusses, aber auch aufgrund der oberflächennahen Turbulenzbewegung ständigen Schwankungen unterworfen. Bei allen im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten LES-Rechnungen werden jedoch nur Strömungen betrachtet, bei denen die Variation der Wasseroberfläche gegenüber der Wassertiefe vernachlässigbar ist. [Komori et al. \(1993\)](#) haben DNS-Rechnungen für eine Gerinneströmung durchgeführt und dabei an der Wasseroberfläche die Gleichungen für die Phasengrenze zwischen Flüssigkeit und Gas gelöst. Sie fanden bei ihren Rechnungen nur Deformationen mit einer Amplitude vom 10^{-5} -fachen der Wassertiefe und keine signifikanten Unterschiede zu Rechnungen mit Rigid-Lid-Vereinfachung, also einer Approximation der Wasseroberfläche durch eine reibungsfreie starre Oberfläche. Diese Randbedingung beschreibt somit die untersuchten physikalischen Vorgänge mit einer hohen Ge-

nauigkeit. Deshalb wird auch hier die Wasseroberfläche mit einer Rigid-Lid-Randbedingung modelliert. Bei dieser Randbedingung sind die Geschwindigkeit normal zur Wasseroberfläche und die Gradienten der Tangentialgeschwindigkeiten an der Wasseroberfläche null. Programmtechnisch entspricht dies einer Symmetrierandbedingung. Für eine horizontale Wasseroberfläche gilt:

$$[w]_{\zeta} \equiv 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]_{\zeta} \equiv 0, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right]_{\zeta} \equiv 0 \quad (3.2)$$

Durch die Rigid-Lid-Vereinfachung werden Oberflächenwellen vernachlässigt. Die damit berechnete Strömung entspricht einer Strömung mit einer Froudezahl $Fr = u/\sqrt{gh} \rightarrow 0$. Windkräfte lassen sich durch Schubspannungen τ_{ζ} tangential zur Wasseroberfläche modellieren.

3.3.2 Periodische Randbedingungen

Bei Strömungen in sehr einfachen Geometrien, wie z. B. bei einer voll entwickelten Rohr-, Kanal- oder Gerinneströmung, können in den homogenen Richtungen periodische Randbedingungen vorgegeben werden. So wird beispielsweise bei der numerischen Simulation einer Kanalströmung kein extrem langer und breiter Kanal simuliert, sondern nur ein kleiner Ausschnitt, der sich periodisch in Spannweiten und Strömungsrichtung wiederholt. Die Periodenlänge muss jedoch ausreichen, um auch die großen turbulenten Strukturen zu erfassen. Durch periodische Randbedingungen in Strömungs- und Spannweitenrichtung entfällt die schwierige Formulierung von zeitabhängigen Einström- und Ausströmrandbedingungen.

3.3.2.1 Volumenkraft in Strömungsrichtung

Um periodische Randbedingungen für den Druck zu ermöglichen, wird der Druck in einen periodischen und einen nichtperiodischen Anteil aufgespalten und der nichtperiodische Druckanteil p_b durch die Volumenkraft $f_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_b}{\partial x}$ in Strömungsrichtung ersetzt. Diese Volumenkraft treibt die Strömung an. Sie entspricht dem mittleren Druckgradienten bei einer geschlossenen Kanalströmung bzw., wie in Abschnitt 3.1 schon erwähnt, der Schwerkraft aufgrund des Sohlgefälles bei der Gerinneströmung. In einer Gerinneströmung gibt es turbulenz-

bedingte lokale Schwankungen der Sohlschubspannung. Dies führt bei einer konstanten Kraft f_x in einem durch periodische Randbedingungen begrenzten Gerinne zu Schwankungen des Massenstroms bzw. der Bulkgeschwindigkeit. Um den Massenstrom dennoch konstant zu halten, wird in den hier durchgeführten Simulationen die Volumenkraft in jedem Zeitschritt durch einen Regler angepasst.

Anmerkung: Aus dem zeitlichen Mittelwert der Volumenkraft f_x kann bei einer ausgebildeten periodischen Gerinneströmung die mittlere Sohlschubspannungsgeschwindigkeit einfach anhand der Beziehung

$$\langle u_\tau \rangle = \sqrt{h \langle f_x \rangle} \quad (3.3)$$

bestimmt werden.

3.3.3 Einströmrandbedingungen

Für eine erfolgreiche Simulation ist die Vorgabe korrekter Einströmrandbedingungen von entscheidender Bedeutung, da dadurch die weitere Strömungsentwicklung maßgeblich bestimmt wird. Während die Formulierung von Einströmrandbedingungen bei RANS-Verfahren noch mit relativ geringem Aufwand durch Vorgabe der statistischen Strömungsgrößen möglich ist, ist dies bei einer DNS und LES ein größeres Problem. Denn hier muss, bei einer turbulenten Zuströmung, ein möglichst realistisches instationäres turbulentes Strömungsfeld am Einströmrand vorgegeben werden. Für den Fall, dass am Einströmrand eine voll ausgebildete turbulente Kanal- oder Gerinneströmung vorherrscht, können die Einströmdaten aus einer Simulation einer entsprechenden periodischen Kanal- oder Gerinneströmung übernommen werden. Diese Simulation kann vor der eigentlichen Rechnung durchgeführt werden, wobei dann die Geschwindigkeitsfelder in einem Querschnitt aufgezeichnet werden, die später als Daten für die Einströmrandbedingung verwendet werden können. Dieses Vorgehen hat jedoch den Nachteil, dass die aufgezeichneten Daten zeitlich beschränkt sind und nur für den einen gewählten Parametersatz wie z. B. Reynoldszahl, Gitterauflösung, Zeitschrittweite gelten. Außerdem fallen bei der Aufzeichnung sehr große Datenmengen an. Diese Beschränkungen gelten nicht, wenn die turbulenten Einströmdaten durch eine parallel zur eigentlichen Simulation durchgeführte Simulation einer periodischen Kanal- oder Gerinneströ-

mung gewonnen werden. Dieser Ansatz wird bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen, nämlich bei der Mischungsschicht und der Zylinderumströmung, verwendet. Dabei werden die turbulenten Einströmdaten aus periodischen Rechengebieten, die vor dem jeweiligen Einströmrand angeordnet sind, gewonnen (vgl. Abb. 5.44 und Abb. 5.38).

3.3.4 Ausströmrandbedingungen

Am Ausströmrand ist es bei einer DNS und LES wichtig, die turbulente Strömung möglichst wenig zu stören und am Ausströmrand ankommende turbulente Schwankungen nicht wieder zurück ins Strömungsfeld zu reflektieren. Dies lässt sich weder mit Dirichlet- noch Neumann-Randbedingungen erreichen. Hier hat sich die sog. konvektive Auströmrandbedingung bewährt, bei der eine Transportgröße φ mit einer vorgegebenen Konvektionsgeschwindigkeit U über den Auströmrand hinweg transportiert wird:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U_i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0 \quad (3.4)$$

Für die Geschwindigkeiten lautet die konvektive Ausströmrandbedingung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + U_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3.5)$$

Die Konvektionsgeschwindigkeit wird üblicherweise gleich der über den Ausströmquerschnitt gemittelten Ausströmgeschwindigkeit gesetzt. Es ist äußerst wichtig, den Ausströmrand außerhalb von Rezirkulationszonen zu legen, da die Randbedingung die Werte der Transportgröße φ für eine Rückströmung in das Rechengebiet nicht in physikalisch sinnvoller Weise festlegt.

3.3.4.1 Korrektur der globalen Massenstrombilanz

In einer inkompressiblen, quellenfreien Strömung ist der einströmende Massenstrom gleich dem ausströmenden Massenstrom. Die nach Gleichung 3.5 für die Geschwindigkeiten spezifizierte Randbedingung erfüllt diese globale Massenstrombilanz jedoch nur näherungsweise. Die exakte Einhaltung dieser globalen Massenstrombilanz ist aber eine wesentliche Voraussetzung für die Konvergenz

der Druckkorrektur. Darum müssen zur Einhaltung der globalen Massenstrombilanz am Ausströmrand die Strömungsgeschwindigkeiten nach jeder Anwendung der Randbedingung mit einem Korrekturfaktor (≈ 1) multipliziert werden, der den Massenstrom am Ausströmrand an den einströmenden Massenstrom anpasst.

3.3.4.2 Dämpfungsgebiet vor dem Ausströmrand

Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen mit Ausströmrand (Ahmed-Modell, Mischungsschicht und Zylinderumströmung) wird stromauf vor dem Ausströmrand ein Dämpfungsgebiet angeordnet. In diesem Dämpfungsgebiet werden durch eine erhöhte Viskosität ($\nu_{eff} = 10\nu$) die turbulenten Bewegungen gedämpft, bevor sie den Ausströmrand erreichen. Dadurch konnte eine leichte Verbesserung der Konvergenzrate der Druckkorrektur erreicht werden. Bei Testrechnungen, bei denen das Feinstrukturmodell zwecks Einflussanalyse deaktiviert war, erwies sich ein solches Dämpfungsgebiet am Ausströmrand sogar als unabdingbar für die numerische Stabilität und die Durchführbarkeit der Simulation. Eine Rückwirkung des Dämpfungsgebiets auf die vorgelagerte Strömung wurde nicht beobachtet.

3.3.5 Wandmodellierung

3.3.5.1 3D-Verfahren

Modellierung glatter Wände

Wird die Wandgrenzschicht durch das numerische Gitter aufgelöst, ergibt sich der Betrag der Wandschubspannung

$$\tau_w = \rho\nu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_w \quad (3.6)$$

direkt aus der diskretisierten Lösung. Dies gilt für die DNS, aber auch für in Wandnähe hochaufgelöste LES und RANS-Rechnungen. Bei Verwendung größerer Gitter muss an der Wand die Wandschubspannung über eine Wandfunktion bestimmt werden. Dazu wird unter Annahme einer universellen Geschwindigkeitsverteilung in der Wandzelle ein Wandgesetz der Form $u^+ = f(y^+)$ mit den Beziehungen

$$y^+ = yu_\tau/\nu \quad (3.7)$$

$$u^+ = u/u_\tau \quad (3.8)$$

nach der Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ gelöst. Der Betrag der Wandschubspannung ergibt sich dann über die Definition von u_τ

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad \text{bzw.} \quad \tau_w = \rho u_\tau^2 \quad (3.9)$$

Beim Ansatz von [Schumann \(1975\)](#) wird aus der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit $\langle u \rangle$ eine mittlere Wandschubspannung $\langle \tau_w \rangle$ bestimmt. Das dazu verwendete Wandgesetz setzt sich aus drei Abschnitten zusammen:

Viskose Unterschicht	$y^+ < 5$	$u^+(y^+) = y^+$
Übergangsbereich	$5 \leq y^+ < 30$	$u^+(y^+) = 5.0 \ln(y^+) - 3.05$
Logarithmischer Bereich	$y^+ > 30$	$u^+(y^+) = 2.5 \ln(y^+) + 5.2$

Die momentane Wandschubspannung ergibt sich aus der Momentangeschwindigkeit zu

$$\tau_w = \rho \langle u \rangle \langle \tau_w \rangle / \langle u \rangle \quad (3.10)$$

Bei der Wandmodellierung nach [Werner und Wengle \(1991, 1993\)](#) wird die Wandschubspannung mit dem $1/7$ -Potenzgesetz aus den Momentangeschwindigkeiten berechnet. [Abbildung 3.1](#) zeigt einen Vergleich verschiedener Wandgesetze der Form $u^+ = A + 1/\kappa \ln(y^+)$ mit dem $1/7$ -Potenzgesetz und einer aus DNS-Daten gewonnenen Kurve. Für Gerinneströmungen haben [Nezu und Rodi \(1986\)](#) $u^+ = 5.29 + 1/0.412 \ln(y^+)$ gefunden. Die bisher eingesetzte Wandmodellierung nach Schumann sowie das $1/7$ -Potenzgesetz nach Werner und Wengle geben die universelle Geschwindigkeitsverteilung nur näherungsweise wieder. Durch diese Näherungen ergeben sich kleine systematische Abweichungen in den berechneten mittleren Wandschubspannungen. Bei der Kanalströmung führt dies zu merkbaren Abweichungen in den mit der Schubspannungsgeschwindigkeit normierten dimensionslosen Geschwindigkeitsprofilen. Der Einfluss einer Abweichung von 6 % bei u_τ auf das normierte Geschwindigkeitsprofil ist in [Abbildung 4.22](#) zu sehen. Um diese Fehler bei den LES-Rechnungen zu minimieren, wurde eine genauere Approximation der universel-

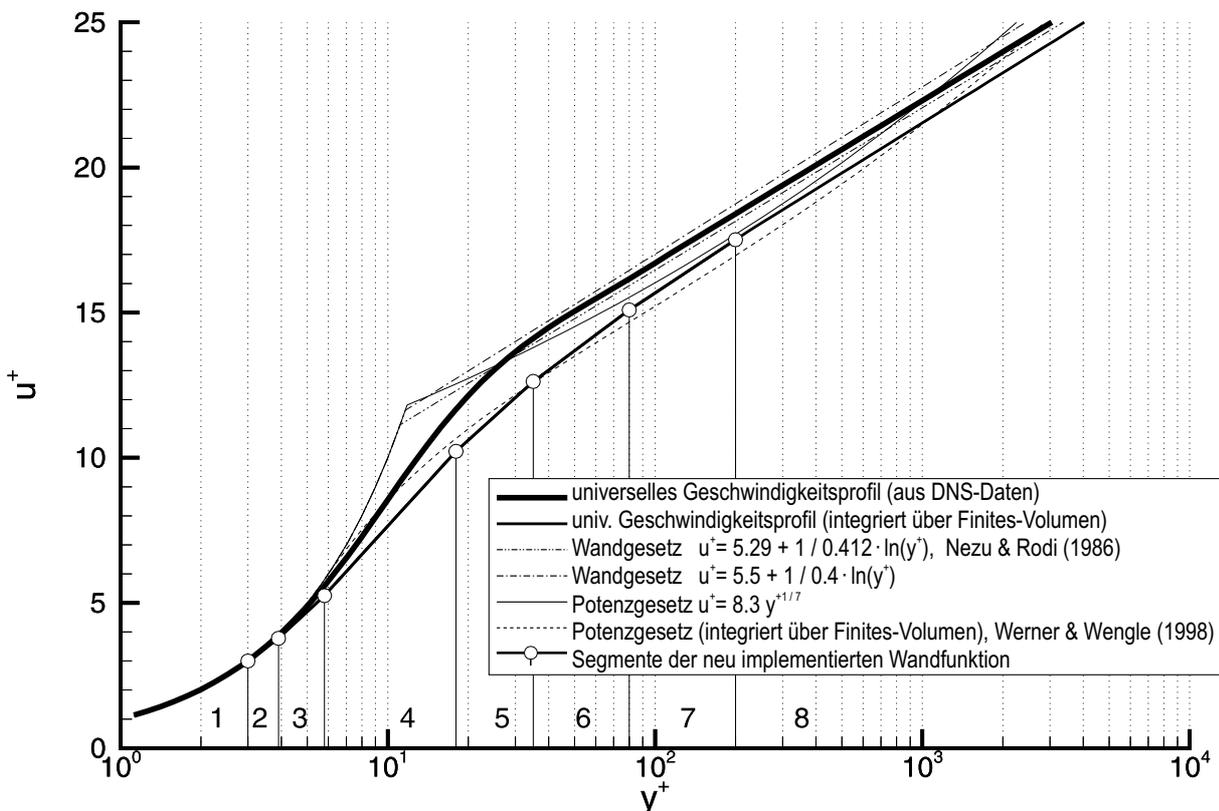


Abb. 3.1: Neu implementierte Wandfunktion, Vergleich mit verschiedenen Wandgesetzen in der normalen Form und in der für die verwendete Finite-Volumen-Methode über eine Wandzelle nach Gleichung 3.11 integrierten Form.

len Geschwindigkeitsverteilung implementiert. Dazu wurde ein aus DNS-Daten gewonnenes Geschwindigkeitsprofil durch mehrere kurze Segmente der Form $u^+(y^+) = A + B \ln(y^+)$ angenähert (Abb. 3.1). Eine Ausnahme bildet das erste Segment mit $y^+ < 3$, hier wird $u^+(y^+) = y^+$ gesetzt. Bei der eingesetzten Finite-Volumen-Methode ist die im Zellmittelpunkt gespeicherte Geschwindigkeit u_{FV} als eine über das Zellvolumen gemittelte Geschwindigkeit zu sehen. Dies wird durch Integration des Wandgesetzes über die Höhe der Wandzelle mit Zellzentrum bei y_P berücksichtigt (vgl. Abb. 3.2), und es ergibt sich für das integrierte Wandgesetz:

$$u_{FV}^+(y_P^+) = \frac{1}{2y_P^+} \int_0^{2y_P^+} u^+(y^+) dy^+ \quad (3.11)$$

Im Gegensatz zum Potenzgesetz ergibt sich hier eine Gleichung, welche sich nicht explizit nach der Wandschubspannung auflösen lässt. Durch die Koordinatentransformation $\ln(y^+) \rightarrow Y$ und Verwendung des Newton-Raphson-Iterationsverfahrens ergibt sich jedoch ein sehr effektiver Algorithmus zur Berechnung der Wandschubspannung (siehe Anhang A.3.1). Wie bei der Wandmodellierung nach Werner und Wengle werden dabei die momentanen Strömungsgeschwindigkeiten verwendet. Da sich die Wandschubspannung pro Zeitschritt wenig ändert, wird die Wandschubspannung des letzten Zeitschrittes als Start-

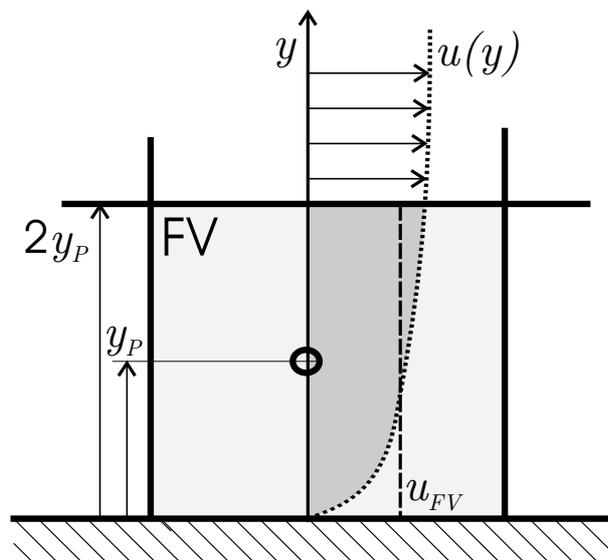


Abb. 3.2: Integration der Wandfunktion $u(y)$ über das wandnahe Finite-Volumen nach Gleichung 3.11.

wert für das Iterationsverfahren verwendet. Damit sind zumeist nur ein bis drei Iterationsschritte nötig, um die Gleichung bis auf die Rechengenauigkeit iterativ zu lösen. Die so zur Bestimmung der Wandschubspannung notwendige Rechenzeit hat dieselbe Größenordnung wie bei der expliziten Berechnung über das Potenzgesetz und kann gegenüber der Gesamtrechendauer vernachlässigt werden.

Modellierung von Sohlrauigkeit

Für Gerinneströmungen mit rauer Sohle geben [Naot, Nezu und Nakagawa \(1993\)](#) die Beziehung

$$u^+ = \frac{1}{0.4} \ln(E' y^+) \quad (3.12)$$

an. Dabei hängt der Parameter E' von der Sohlrauigkeitshöhe k_S^+ folgendermaßen ab:

$$E'(k_S^+) = \begin{cases} 9 & \text{für } k_S^+ \leq 5 \\ 9 / (1 + 0.3 k_S^+ / (1 + 20/k_S^+)) & \text{für } 5 < k_S^+ \leq 70 \\ \exp(0.4B) / k_S^+ & \text{für } k_S^+ > 70 \end{cases} \quad (3.13)$$

mit $B = 8.5$. Der Rauigkeitsparameter E' kann als Verschiebung eines Wandgesetzes für glatte Wände $u^+ = f(y^+)$ um

$$\Delta u^+(k_S^+) = \frac{1}{0.4} \ln(E'(k_S^+) / 9) \quad (3.14)$$

gedeutet werden. Damit ergibt sich eine Näherung für eine Wandfunktion für Gerinneströmungen mit rauer Sohle:

$$u^+(y^+, k_S^+) = f(y^+) + \Delta u^+(k_S^+) \quad (3.15)$$

Dabei gilt es zu beachten, dass bei dieser Form der Rauigkeitsmodellierung die maximale sinnvolle Rauigkeitshöhe durch die Höhe der wandnächsten Finite-Volumen-Zelle beschränkt ist.

3.3.5.2 Tiefengemittelte Verfahren

Berechnung der Sohlschubspannung

Für Gerinneströmungen lässt sich die mittlere Sohlschubspannung $\langle \tau_b \rangle$ mittels eines quadratischen Ansatzes der Form

$$\langle \tau_{b_i} \rangle = \rho c_f \langle \tilde{u}_i \rangle |\langle \tilde{\mathbf{u}} \rangle| = \rho c_f \langle \tilde{u}_i \rangle \sqrt{\langle \tilde{u}_k \rangle \langle \tilde{u}_k \rangle} \quad (3.16)$$

berechnen¹. Hierbei bezeichnet c_f den Sohlreibungsbeiwert². Der quadratische Ansatz zur Berechnung der mittleren Bodenreibung wird hier auch für die instationären Berechnungsverfahren übernommen. Anstelle der gemittelten Geschwindigkeiten treten dann jedoch die momentanen Geschwindigkeiten. Damit berechnet sich die Sohlschubspannung bei den tiefengemittelten Verfahren wie in Tabelle 3.1 angegeben:

Verfahren	Modellierung der Bodenreibung
DA-RANS	$\langle \tau_{b_i} \rangle = \rho c_f \langle \tilde{u}_i \rangle \sqrt{\langle \tilde{u}_k \rangle \langle \tilde{u}_k \rangle}$
DA-NS	$\tau_{b_i} = \rho c_f \tilde{u}_i \sqrt{\tilde{u}_k \tilde{u}_k}$
DA-LES	$\overline{\tau_{b_i}} = \rho c_f \overline{\tilde{u}_i} \sqrt{\overline{\tilde{u}_k \tilde{u}_k}}$

Tabelle 3.1: Modellierung der Bodenreibung bei den tiefengemittelten Verfahren.

Zur Berechnung des Sohlreibungsbeiwerts sind zahlreiche empirische Beziehungen für glatte und raue Sohlen verfügbar. So fand beispielsweise [Schlichting \(1965\)](#) für glatte Sohlen $c_f = 0.027 Re_h^{-1/4}$. Hierbei ist $Re_h = |\mathbf{u}| h / \nu$ die lokale auf die Wassertiefe bezogene Reynoldszahl. Für raue Sohlen kann die Gauckler-Manning-Strickler-Beziehung $c_f = g / (k_{st}^2 r_{hyd})$ verwendet werden, wobei für den hydraulischen Radius r_{hyd} in Flachwasserströmungen die Wassertiefe eingesetzt werden kann. Für k_{st} , den Rauigkeitsbeiwert nach Strickler, sind umfangreiche Tabellenwerke z. B. bei [Chow \(1959\)](#), [Preißler und Bollrich \(1985\)](#) oder [Henderson \(1966\)](#) zu finden. Diese empirischen Beziehungen haben eine ausreichende Genauigkeit für den praktischen Einsatz von tiefengemittelten

¹ In vielen Arbeiten wird auch $\tau_{\zeta_i} = c_f^* (\rho/2) \tilde{u}_i |\tilde{\mathbf{u}}|$ verwendet. Die angegebenen Widerstandsbeiwerte unterscheiden sich dann um den Faktor 2 ($c_f^* = 2c_f$).

² Zusammen mit der Definition für die Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = \sqrt{\tau_b / \rho}$ folgt aus Gleichung 3.16 die nützliche Beziehung zwischen Schubspannungsgeschwindigkeit und tiefengemittelter Geschwindigkeit: $u_\tau = |\tilde{\mathbf{u}}| \sqrt{c_f}$.

Berechnungsverfahren. Als Anhaltswert für Reynoldszahlen um 10 000 findet man für glatte Sohlen $c_f \approx 0.003$. Da die in dieser Arbeit durchgeführten tiefengemittelten Simulationen auch der Modellkalibrierung dienen, wird hierfür ein Ansatz verwendet, der eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS- und LES-Daten (vgl. Abschnitt 5.1.1.1 Abb. 5.1) aufweist. Dieser basiert auf der Annahme eines logarithmischen Geschwindigkeitsprofils

$$\langle u \rangle^+ = A + 1/\kappa \ln(z^+) + w(z/h) \quad (3.17)$$

mit der Nachlauf-Funktion nach Coles (1956)

$$w(z/h) = \frac{2\Pi}{\kappa} \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot z/h\right) \quad (3.18)$$

Durch Integration folgt daraus die von Nezu und Nakagawa (1993) angegebene Beziehung (mit $Re_h = |\tilde{\mathbf{u}}| h/\nu$):

$$1/\sqrt{c_f} \approx \frac{1}{\kappa} \ln(Re_h \sqrt{c_f}) + \left(A - \frac{1}{\kappa}\right) + \frac{\Pi}{\kappa} \quad (3.19)$$

Von Nezu und Rodi (1986) wurden für Gerinneströmungen die Werte $\kappa = 0.41$ und $A = 5.29$ bestimmt. Nach ihren Daten nimmt der Wert für den Nachlaufparameter Π mit der Reynoldszahl zu, wobei die Werte von $\Pi = 0$ (für kleine Reynoldszahlen) bis etwa $\Pi = 0.2$ (für Reynoldszahlen größer 100 000) reichen. Die damit nach Gleichung 3.19 berechneten Widerstandsbeiwerte sind in Abbildung 3.3 als Funktion der Reynoldszahl dargestellt. Mit $\kappa = 0.4$, $A = 5$ und $\Pi = 0$ folgt aus Gleichung 3.19 die von Uijtewaal und Booij (2000) angegebene Näherung:

$$1/\sqrt{c_f} \approx 1/0.4 [\ln(Re_h \sqrt{c_f}) + 1] \quad (3.20)$$

Diese Beziehung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den beiden zuvor diskutierten Kurven innerhalb deren jeweiligen Gültigkeitsbereichs (Abb. 3.3). Die implizite Formel 3.20 hat jedoch den Nachteil, dass damit zur Berechnung des Widerstandsbeiwertes iteriert werden muss. Weil dies numerisch relativ auf-

wendig ist, wurde hierfür die explizite Beziehung

$$c_f = \begin{cases} 0.0385 \cdot Re_h^{-0.3} + 6 \cdot 10^{-4} & \text{für } Re_h \geq 2000 \\ 0.00454 & \text{für } Re_h < 2000 \end{cases} \quad (3.21)$$

entwickelt. Wie Abbildung 3.3 zeigt, gibt diese Beziehung Gleichung 3.20 im Intervall $2\,000 \leq Re_h \leq 10^7$ sehr gut wieder. Zusätzlich sind in Abbildung 3.3 die aus den DNS-Rechnungen von Moser, Kim und Mansour 1999 für eine Kanalströmung (Strömung zwischen zwei Platten) bestimmten Widerstandsbeiwerte dargestellt. Dabei weisen die Beziehung 3.20 sowie die Näherung 3.21 eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten auf. Zum Vergleich ist außerdem noch die von Schlichting angegebene Beziehung $c_f = 0.027 (\tilde{u}h/\nu)^{-1/4}$ eingezeichnet. Diese liefert niedrigere Widerstandsbeiwerte als die zuvor aufgeführten Beziehungen, wobei insbesondere bei hohen Reynoldszahlen größere prozentuale Abweichungen auftreten.

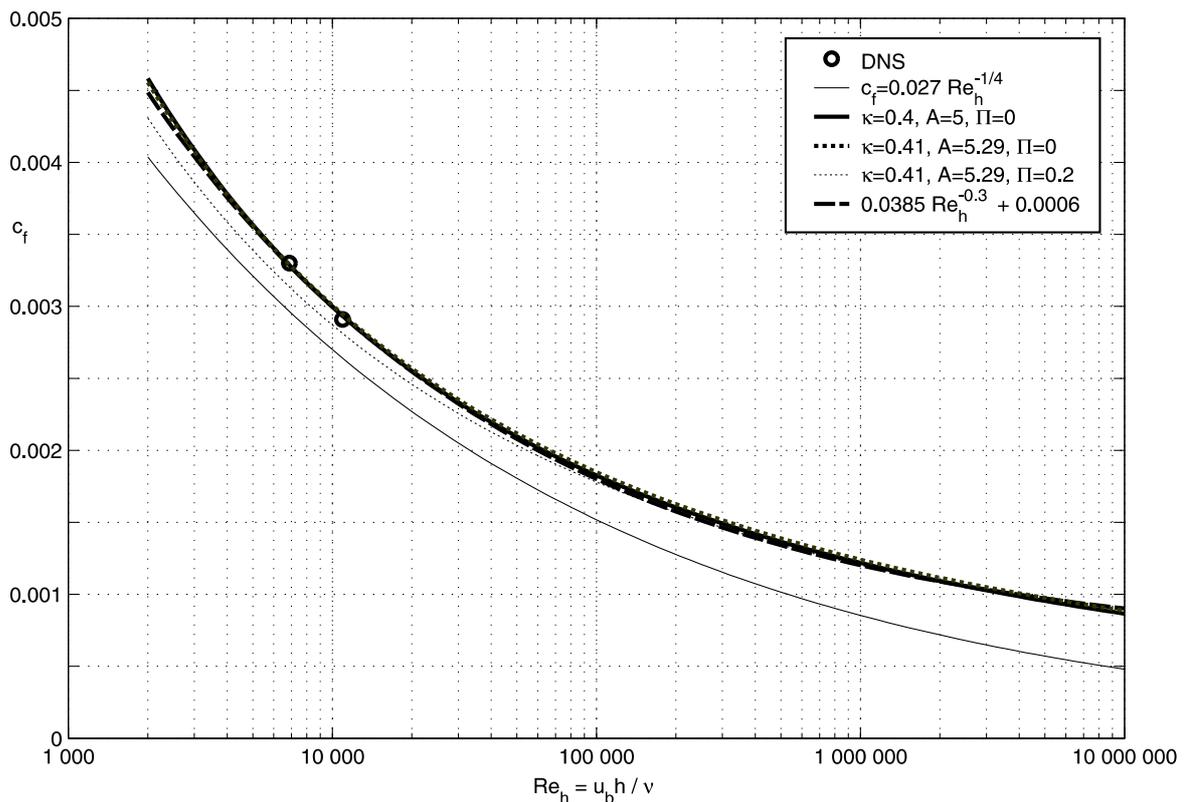


Abb. 3.3: Widerstandsbeiwert in Gerinneströmung mit glatter Sohle in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. — implizite Beziehung für den Sohlreibungsbeiwert $1/\sqrt{c_f} = 1/0.4 [\ln(Re_h \sqrt{c_f}) + 1]$, --- explizite Näherung $c_f = 0.0385 \cdot Re_h^{-0.3} + 6 \cdot 10^{-4}$, — Sohlreibungsbeiwert nach Schlichting (1965).

Da der Widerstandsbeiwert relativ stark von der Reynoldszahl abhängt, empfiehlt es sich besonders für Strömungssituationen mit stark unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten, wie z. B. in einer Mischungsschicht, den Widerstandsbeiwert anhand der lokalen Strömungsgeschwindigkeit zu berechnen. Deshalb wird in allen hier durchgeführten tiefengemittelten Simulationen ein momentaner lokaler Widerstandsbeiwert mit Gleichung 3.21 berechnet. Hierzu wird $Re_h = |\tilde{\mathbf{u}}| h / \nu$ mit der momentanen lokalen Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{u}}$ gebildet.

Berechnung der Wandschubspannung an den Seitenwänden

Bei den zweidimensionalen tiefengemittelten Verfahren können turbulente Wandgrenzschichten, wegen der dort vorherrschenden kleinskaligen 3D-Turbulenz, nicht aufgelöst werden. Deshalb müssen die Grenzschichten an den Seitenwänden bei den tiefengemittelten Verfahren immer mit Wandgesetzen überbrückt werden. In dieser Arbeit werden in Gerinneströmungen an Seitenwänden die gleichen Wandfunktionen wie bei einer 3D-Simulation verwendet, wobei jedoch anstelle der lokalen wandnahen Geschwindigkeit die tiefengemittelte Geschwindigkeit verwendet wird. Hierbei wird vorausgesetzt, dass an den Seitenwänden das logarithmische Wandgesetz auch mit der tiefengemittelten Geschwindigkeit näherungsweise anwendbar ist.

Verfahren	Modellierung der Wandreibung
DA-RANS	$\langle \tau_w \rangle = f(\langle \widetilde{u_P} \rangle, y_P, \nu)$
DA-NS	$\tau_w = f(\widetilde{u_P}, y_P, \nu)$
DA-LES	$\overline{\tau_w} = f(\overline{\widetilde{u_P}}, y_P, \nu)$

Tabelle 3.2: Modellierung der Seitenwandreibung bei den tiefengemittelten Verfahren (y_P horizontaler Abstand des Zellzentrums der Seitenwandzelle von der Seitenwand).

3.4 Modellierung der Scheinspannungen und -flüsse

Wie bereits in Kapitel 2 erläutert, treten bei den verschiedenen Berechnungsverfahren (mit Ausnahme der DNS) aufgrund der Mittelung der Transportgleichungen Scheinspannungen T_{ij} und -flüsse T_i auf, die zu modellieren sind. Diese sind in Tabelle 2.3 auf Seite 46 zusammengefasst. Für die einzelnen Komponenten der Scheinspannungen und -flüsse lassen sich exakte Transportgleichungen ableiten. Aber aufgrund des Schließungsproblems beinhalten diese Transportgleichungen wiederum neue unbekannte Korrelationen höherer Ordnung, die auch modelliert werden müssen. Im Rahmen von sog. Spannungs- und Flussmodellen werden aus den exakten Transportgleichungen durch Modellannahmen stark vereinfachte jedoch lösbare Gleichungen abgeleitet. Dabei ist sowohl der Modellierungs- als auch der numerische Aufwand – aufgrund der vielen zu lösenden gekoppelten Transportgleichungen – beträchtlich. Deshalb sollen diese Modelle hier nicht weiter verfolgt werden. Viel einfacher sind sog. Wirbelviskositätsmodelle: Sie basieren auf dem Ansatz von Boussinesq (1877) – der Annahme einer Proportionalität zwischen den turbulenten Scheinspannungen und der Scherung $\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$ des aufgelösten Geschwindigkeitsfeldes (hier mit allgemeinem Filteroperator $\overline{\varphi} \equiv \overline{\varphi}^{[A]}$):

$$T_{ij}^{mod} = -\nu_t 2\overline{S_{ij}} + \delta_{ij} T_{kk}/3 \quad (3.22)$$

Der isotrope Anteil des Spannungstensors ($T_{kk}/3$) wird dabei wegen $S_{ii} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ (in inkompressiblen Strömungen) nicht modelliert, sondern dem modifizierten Druck

$$P = \overline{p} + T_{kk}/3 \quad (3.23)$$

zugerechnet. Der Proportionalitätsfaktor in Gleichung 3.22, die Wirbelviskosität ν_t , kann als das Produkt eines für die nicht aufgelöste Turbulenz charakteristischen Längen- und Geschwindigkeitsmaßes angesehen werden:

$$\nu_t = l_t \cdot u_t \quad (3.24)$$

Das Modellierungsproblem besteht nunmehr in der Bestimmung des Längen- und Geschwindigkeitsmaßes. Anhand der Zahl der für die Modellierung von ν_t

benötigten zusätzlichen Transportgleichungen werden 0-, 1- und 2-Gleichungsmodelle unterschieden. Bei den 0-Gleichungsmodellen wird das Längen- und das Geschwindigkeitsmaß durch eine empirische Beziehung vorgegeben oder aus den berechneten Strömungsgrößen abgeleitet, während bei den aufwendigeren Modellen dafür Transportgleichungen gelöst werden.

Die in den Skalartransportgleichungen auftretenden Flüsse T_i werden üblicherweise mittels Gradientendiffusionshypothese modelliert:

$$T_i^{mod} = -\Gamma_t \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \quad (3.25)$$

Die turbulente Diffusivität Γ_t wird üblicherweise aus der turbulenten Viskosität berechnet:

$$\Gamma_t = \nu_t / \sigma_t \quad (3.26)$$

Hierbei ist $\sigma_t \approx 0.7$ die turbulente Prandtl-Zahl beim Wärmetransport bzw. die turbulente Schmidt-Zahl beim Stofftransport.

Resultierende Transportgleichungen

Aus den exakten gemittelten Transportgleichungen (Gl. 2.19 und 2.23) resultieren durch Einsetzen von T_{ij}^{mod} und P bzw. T_i^{mod} folgende Modellgleichungen:

- Impulsgleichung

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} ((\nu + \nu_t) 2\bar{S}_{ij}) + \bar{f}_i \quad (3.27)$$

- Skalartransportgleichung

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{u}_i \bar{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left((\Gamma + \Gamma_t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_i} \right) + \bar{s}_\varphi \quad (3.28)$$

3.4.1 3D-Verfahren

3.4.1.1 DNS

Bei einer DNS sind keine Scheinspannungen zu modellieren. Das Rechengitter muss jedoch ausreichend fein sein und die Zeitschrittweite so klein gewählt werden, dass die gesamte turbulente Schwankungsbewegung räumlich und zeitlich vollständig aufgelöst wird.

3.4.1.2 LES

Bei der LES treten aufgrund der Wechselwirkung zwischen den numerisch aufgelösten turbulenten Skalen und den kleineren durch das Gitter nicht mehr auflösbaren Skalen (Feinstruktur) die sog. Feinstrukturspannungen $\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ auf. Zu deren Modellierung wird ein sog. Feinstrukturmodell (*subgrid scale model*) benötigt. Dazu gibt es die verschiedensten Modellierungsansätze. In dieser Arbeit wird ausschließlich das Smagorinsky-Modell verwendet. Eine umfassende und detaillierte Übersicht zur Feinstrukturmodellierung gibt beispielsweise [Sagaut \(2001\)](#).

Den wesentlichen Ansatzpunkt zur Feinstrukturmodellierung liefert der Energiekaskadenprozess. Dabei wird Energie von den großen zu den kleinen Skalen transferiert und dort dissipiert. Es gibt aber auch einen rückwärtigen, inversen Energietransfer (*back scatter*) von den kleinen zu den großen Skalen. In Summe ergibt sich jedoch normalerweise ein „positiver“ Energiefluss hin zu den kleinen Skalen. Eine wesentliche Aufgabe eines LES-Feinstrukturmodells ist es, die durch diesen Energietransfer den kleinen Skalen zugeführte Energie zu dissipieren, damit sie sich nicht an den kleineren noch aufgelösten Skalen in unphysikalischer Weise akkumuliert, was dann zu einer unphysikalischen Beeinflussung der größeren Skalen führen kann. Wirbelviskositätsmodelle sind geeignet, der Strömung die Energie auf den kleineren Skalen zu entziehen. Entsprechend Gleichung 3.22 gilt hierbei für die Feinstrukturspannungen:

$$\tau_{ij}^{mod} = -\nu_t 2\overline{S_{ij}} + \delta_{ij} \tau_{kk}/3 \quad (3.29)$$

Ein dominierender inverser Energietransfer, bei dem der aufgelösten Strömung Energie aus den nicht aufgelösten Skalen zugeführt wird, lässt sich mit Wir-

belviskositätsmodellen nicht modellieren. Diese sind nämlich unter der Voraussetzung einer positiven Wirbelviskosität immer dissipativ. Durch eine negative Wirbelviskosität würde sich zwar ein inverser Energietransfer ergeben, jedoch führt dies zu Instabilitäten in der Simulation. Zur Modellierung des inversen Energietransfers sind stochastische Modelle, die mittels einer Zufallskraft die Strömung anregen, besser geeignet. Eine detaillierte Übersicht über die diversen Ansätze in der Literatur findet sich bei [Sagaut \(2001\)](#).

Smagorinsky-Modell

Obwohl bereits 1963 veröffentlicht ([Smagorinsky 1963](#)), ist das Smagorinsky-Modell auch heute noch eines der gebräuchlichsten Modelle beim LES-Verfahren. Dieses robuste und relativ einfache Wirbelviskositätsmodell basiert auf der Annahme eines lokalen Gleichgewichts zwischen Produktion und viskoser Dissipation der Feinstruktur-Turbulenzenergie. Mit dem charakteristischen Längenmaß l_{SGS} der Feinstrukturbewegung und dem Geschwindigkeitsmaß u_{SGS} gilt für die Wirbelviskosität

$$\nu_t = l_{SGS} \cdot u_{SGS} \quad (3.30)$$

Das Längenmaß l_{SGS} wird gleich der Filterweite Δ bzw. der Maschenweite der räumlichen Diskretisierung gesetzt. Für Gitter mit einer unterschiedlichen Maschenweite in verschiedenen Raumrichtungen wurde von [Deardorff \(1970\)](#) vorgeschlagen, für Δ den geometrischen Mittelwert der Maschenweiten (Δx , Δy und Δz) zu verwenden. Dieser Ansatz hat sich bewährt und wird auch hier verwendet, da sich damit Δ einfach aus dem Zellvolumen V berechnen lässt:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z} = \sqrt[3]{V} \quad (3.31)$$

Um in Wandnähe die Abnahme des turbulenten Geschwindigkeits- und Längenmaßes zu berücksichtigen, wird in Wandnähe das Längenmaß durch eine Dämpfungsfunktion f nach [van Driest \(1956\)](#) reduziert ([Piomelli et al. 1991](#)):

$$f(y^+) = \left(1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right)^3 \right)^{1/2} \quad \text{mit } A^+ = 25 \quad (3.32)$$

Damit gilt für das Längenmaß

$$l_{SGS} = C_S \Delta \cdot f(y^+) \quad (3.33)$$

Hierbei ist C_S eine nach Smagorinsky benannte Modellkonstante. Das Geschwindigkeitsmaß ergibt sich aus der Scherrate:

$$u_{SGS} = l_{SGS} \|\overline{S_{ij}}\| \quad \text{mit} \quad \|\overline{S_{ij}}\| = \sqrt{2\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \quad (3.34)$$

Damit folgt aus Gleichung 3.30 schließlich für die Wirbelviskosität beim Smagorinsky-Modell

$$\nu_t = (C_S \Delta \cdot f(y^+))^2 \sqrt{2\overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \quad (3.35)$$

Die Smagorinsky-Konstante C_S muss an das jeweilige Strömungsproblem angepasst werden. Für isotrope Turbulenz hat Lilly (1967) aufgrund theoretischer Überlegungen unter Annahme eines Kolmogorov-Spektrums (mit der Kolmogorov-Konstante $\alpha_k \approx 1.6$) und eines idealen Tiefpassfilters

$$C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3\alpha_k} \right)^{3/4} \approx 0.165 \quad (3.36)$$

gefunden. Dieser theoretische Wert hat sich jedoch in der Praxis als zu groß erwiesen und es wird üblicherweise der von Deardorff (1970) vorgeschlagene Wert $C_S = 0.1$ gewählt. Für Kanal- und Gerinneströmungen hat sich $C_S = 0.065$ bewährt.

Die Dämpfungsfunktion 3.32 hat nur in Wandnähe einen Einfluss auf das Längenmaß und ist daher nur bei Simulationen notwendig, bei denen die Wandgrenzschicht nicht mit einer Wandfunktion überbrückt, sondern durch das Gitter aufgelöst wird.

Dynamisches Smagorinsky-Modell

Die Wahl einer geeigneten Smagorinsky-Konstante C_S ist vor allem bei komplexeren Strömungen nicht immer ganz unproblematisch. Hier setzt das dynamische LES-Feinstrukturmodell nach Germano (1992) an, welches die automatische Bestimmung einer lokalen Modellkonstante ermöglicht, wobei anders als

beim Standard-Smagorinsky-Modell auch keine Dämpfungsfunktion in Wandnähe benötigt wird. Das dynamische Modell hat jedoch nicht nur Vorteile: Zur dynamischen Bestimmung der Modellkonstante ist eine explizite Filterung des aufgelösten Geschwindigkeitsfeldes mit einem sog. Testfilter notwendig. Aufgrund der zusätzlichen Filteroperationen ist dieses Modell numerisch aufwendiger als das Standard-Smagorinsky-Modell. Außerdem schwankt die dynamisch bestimmte Modellkonstante in vielen Fällen so stark, dass kurzfristig lokal sogar negative Werte auftreten können. Da dies zu numerischen Instabilitäten führt, ist eine (räumliche und/oder zeitliche) Mittelung sowie eine Beschränkung der berechneten Modellkonstante auf positive Werte erforderlich. Da sich für Gerinne- und Kanalströmungen bereits das einfache Smagorinsky-Modell sehr gut bewährt hat und durch eine dynamische Bestimmung der Modellkonstante trotz des numerischen Mehraufwandes keine signifikanten Verbesserungen der Simulationsergebnisse zu erwarten sind, wird hier ausschließlich mit dem Standard-Smagorinsky-Modell gerechnet.

3.4.1.3 RANS

Bei den RANS-Verfahren sind die Reynoldsspannungen $R_{ij}(\mathbf{u}) = \langle u'_i u'_j \rangle$, welche die Wechselwirkung der Turbulenz mit der Reynolds-gemittelten Strömung $\langle \mathbf{u} \rangle$ beinhalten, mit einem Turbulenzmodell zu modellieren. Einblick in die zahlreichen Modellierungsansätze geben beispielsweise [Rodi \(1993\)](#), [Pope \(2000\)](#) oder [Durbin und Petterson Reif \(2001\)](#). Eines der am häufigsten eingesetzten Turbulenzmodelle ist das k - ϵ -Modell. Es basiert auf dem Wirbelviskositätsansatz (Gl. 3.22):

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{u})^{mod} &= -\nu_t 2 \langle S_{ij} \rangle + \delta_{ij} R_{kk}(\mathbf{u}) / 3 \\ &= -\nu_t 2 \langle S_{ij} \rangle + \delta_{ij} 2k / 3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

Die turbulente Viskosität wird beim k - ϵ -Modell aus der turbulenten kinetischen Energie $k = \langle u'_i u'_i \rangle / 2$ und der Dissipationsrate $\epsilon = \nu \langle \partial_{x_k} u'_i \partial_{x_k} u'_i \rangle$ wie folgt berechnet:

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.38)$$

Für k und ϵ werden halbempirische Transportgleichungen gelöst:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + P_k - \epsilon \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} P_k - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.40)$$

Diese beinhalten den von der Scherrate abhängigen Produktionsterm³:

$$P_k = \nu_t 2 \langle S_{ij} \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \quad (3.41)$$

Für dieses als Standard- k - ϵ bekannte Modell (in der Form nach [Jones und Lauder 1972](#)) werden üblicherweise für die empirischen Konstanten die in [Tabelle 3.3](#) angegebenen Werte nach [Lauder und Sharma \(1974\)](#) verwendet. Das Standard- k - ϵ -Modell gilt nur im vollturbulenten Bereich und wird deshalb auch als High-Re- k - ϵ -Modell klassifiziert. Es beinhaltet im Gegensatz zu den Low-Re- k - ϵ -Modellen (s. dazu z. B. [Rodi 1991](#)) keine Dämpfungsfunktionen, die ein korrektes Verhalten in Wandnähe gewährleisten. Deshalb sind Wandfunktionen zur Überbrückung der Wandgrenzschicht notwendig:

$$\left[\frac{\partial k}{\partial y} \right]_P = 0, \quad \epsilon_P = \frac{c_\mu^{3/4} k_P^{3/2}}{\kappa y_P} \quad (3.42)$$

Diese Wandfunktionen werden für die wandnächste Gitterzelle (Index P) vorgeschrieben. Dabei sollte der Wandabstand y_P des Zellzentrums der wandnächste Gitterzelle außerhalb $y_P^+ \approx 40$ und innerhalb 20 % der Grenzschichtdicke δ_{99} liegen. Weitergehende Hinweise und Richtlinien zum korrekten Einsatz von RANS-Modellen finden sich in den *Best Practice Guidelines for Industrial CFD* ([Casey und Wintergerste 2000](#)).

c_μ	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

Tabelle 3.3: Standard-Werte der empirischen Konstanten beim k - ϵ -Modell.

³ Äquivalente Formulierungen: $P_k = \nu_t 2 \langle S_{ij} \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \nu_t \| \langle S_{ij} \rangle \|^2$.

3.4.2 Tiefengemittelte Verfahren

3.4.2.1 DA-RANS

Nach Gleichung 2.67 gilt für die bei den DA-RANS-Methoden zu modellierenden Gesamtspannungen:

$$T_{ij}^{[R,D]}(\mathbf{u}) = \widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u}) + D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) \quad (3.43)$$

Die Modellierung der beiden Scheinstresskomponenten $\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u})$ und $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ wird im Folgenden beschrieben:

Tiefengemittelte Reynoldsspannungen $\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u})$

Die tiefengemittelten Reynoldsspannungen $\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u})$ beinhalten den Einfluss der tiefengemittelten Gesamt-Turbulenz auf die mittlere Strömung $\langle \widetilde{\mathbf{u}} \rangle$. Eine Modellierung dieser Spannungen hat sowohl die kleinskalige 3D-Turbulenz als auch die 2D-Turbulenz zu berücksichtigen. Hier hat sich das tiefengemittelte k - ϵ -Modell von [Rastogi und Rodi \(1978\)](#) bewährt. Es basiert auf dem Standard- k - ϵ -Modell, verwendet jedoch tiefengemittelte Größen und Produktionsterme welche die Turbulenzproduktion an der Sohle (3D-Turbulenz) und durch horizontale Scherung (primär 2D-Turbulenz) berücksichtigen. Hierbei gilt für die modellierten tiefengemittelten Reynoldsspannungen:

$$\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u})^{mod} = -\nu_t 2 \langle \widetilde{S_{ij}} \rangle + \delta_{ij} 2\widetilde{k}/3 \quad (3.44)$$

Die Wirbelviskosität $\nu_t = c_\mu \widetilde{k}^2 / \widetilde{\epsilon}$ wird aus der tiefengemittelten Turbulenzenergie \widetilde{k} und der tiefengemittelten Dissipationsrate $\widetilde{\epsilon}$ berechnet, für die nachfolgende tiefengemittelte halbempirische Transportgleichungen zu lösen sind:

$$\frac{\partial \widetilde{k}}{\partial t} + \widetilde{u}_i \frac{\partial \widetilde{k}}{\partial x_i} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \widetilde{k}}{\partial x_i} \right) + P_{kh} + P_{kv} - \widetilde{\epsilon} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \widetilde{\epsilon}}{\partial t} + \widetilde{u}_i \frac{\partial \widetilde{\epsilon}}{\partial x_i} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \widetilde{\epsilon}}{\partial x_i} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\widetilde{\epsilon}}{\widetilde{k}} P_{kh} + P_{\epsilon v} - c_{\epsilon 2} \frac{\widetilde{\epsilon}^2}{\widetilde{k}} \quad (3.46)$$

Diese enthalten einen Produktionsterm aufgrund horizontaler Scherung

$$P_{kh} = \nu_t 2 \widetilde{S}_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.47)$$

und Produktionsterme, welche die vertikale Scherung durch Sohlreibung berücksichtigen

$$P_{kv} = c_k \frac{u_\tau^3}{h} \text{ und } P_{ev} = c_\epsilon \frac{u_\tau^4}{h^2} \quad (3.48)$$

Die Konstanten lauten: $c_k = 1/\sqrt{c_f}$, $c_\epsilon = c_{\epsilon\Gamma} c_{\epsilon 2} c_f^{-3/4} \sqrt{c_\mu}$, $c_{\epsilon\Gamma} \approx 3.6$. Die restlichen Konstanten entsprechen denen des Standard- k - ϵ -Modells (Tabelle 3.3).

Dispersionsspannungen $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$

Neben den Reynoldsspannungen sind beim DA-RANS-Verfahren die Dispersionsspannungen $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ zu modellieren. Diese können aus dem mittleren Geschwindigkeitsprofil in Tiefenrichtung $\langle \mathbf{u}(z) \rangle$ analytisch berechnet werden. Mit dem Ansatz $\langle u_i \rangle = \langle \widetilde{u}_i \rangle f_i^*(z)$, wobei $f_i^*(z)$ ein normiertes Geschwindigkeitsprofil ($\int_{z_b}^z f_i^*(z) dz = 1$) beschreibt, gilt:

$$\begin{aligned} D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) &= \frac{1}{h} \int_{z_b}^\zeta (\langle u_i^* \rangle - \langle \widetilde{u}_i \rangle) (\langle u_j^* \rangle - \langle \widetilde{u}_j \rangle) dz \\ &= \langle \widetilde{u}_i \rangle \langle \widetilde{u}_j \rangle \cdot \frac{1}{h} \int_{z_b}^\zeta (f_i^*(z) - 1) (f_j^*(z) - 1) dz \end{aligned} \quad (3.49)$$

Mit dem Potenzgesetz

$$f_i^*(z)^{mod} = \frac{m+1}{m} \left(\frac{z - z_b}{h} \right)^{1/m} \quad \text{mit} \quad m = \frac{\kappa |\langle \widetilde{\mathbf{u}} \rangle|}{u_\tau} = \frac{\kappa}{\sqrt{c_f}} \quad (3.50)$$

ergibt sich für die Dispersionsspannungen $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ die analytische Lösung

$$D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)^{mod} = c_P \langle \widetilde{u}_i \rangle \langle \widetilde{u}_j \rangle \quad \text{mit} \quad c_P = \frac{(m+1)^2}{(m+2)m} \quad (3.51)$$

Für eine glatte Sohle mit $c_f \approx 0.003$ ist $m \approx 7$ und $c_P \approx 0.02$. Dies gilt jedoch nur für Gerinneströmungen ohne ausgeprägte Sekundärströmungen. Ansätze zur Berechnung der Dispersionsspannungen in Strömungen mit Sekundärströmungen wurden beispielsweise von [Flokstra \(1977\)](#), [Jin und Steffler \(1993\)](#) oder [Blanckaert et al. \(2004\)](#) entwickelt. [Puri und Kuo \(1995\)](#) berichten über ihre Erfahrungen mit verschiedenen Ansätzen zur Erfassung der Dispersionsterme. Sie untersuchten ein Gerinne mit einer 180°-Krümmung ([Rozovskii 1957](#)) und fanden mit einem Ansatz entsprechend Gleichung 3.51 bessere Ergebnisse als mit einer komplexeren von [Flokstra \(1977\)](#) vorgeschlagenen Beziehung, welche Sekundärströmungen berücksichtigt. [Bui Minh Duc \(1998\)](#) hat Simulationen mit und ohne Berücksichtigung der Dispersionsspannungen durchgeführt. Er kam dabei zu dem Schluss, dass diese in den von ihm untersuchten Fällen keinen wesentlichen Einfluss auf die berechnete Strömung haben und vernachlässigt werden können. Anders ist jedoch die Situation beim Stoff- oder Wärmetransport. Hier verursachen die dispersiven Flüsse $D_i(\langle \mathbf{u} \rangle, \langle \varphi \rangle)$ einen deutlich erhöhten Austausch in Strömungsrichtung. Dies kann mit einem größeren Diffusionskoeffizienten in Strömungsrichtung berücksichtigt werden.

3.4.2.2 DA-NS

Bei der DA-NS sind die turbulenten instationären Dispersionsspannungen $D_{ij}(\mathbf{u}) = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u}_i \widetilde{u}_j$ zu modellieren. Diese sind, wie in Abschnitt 2.6.3.2 demonstriert wurde, eine direkte Folge der Tiefenmittelung.

Dispersionsspannungen $D_{ij}(\mathbf{u})$

Die Analyse der Dispersionsspannungen in Abschnitt 2.9 zeigt, dass sie sich in einen Anteil, hervorgerufen durch die kleinskalige 3D-Turbulenz, und einen Anteil, verursacht durch das mittlere Geschwindigkeitsprofil, aufspalten lassen. Daraus wurde in Abschnitt 2.9.3 mit Gleichung 2.114 ein Ansatz zur Modellierung der Dispersionsspannungen abgeleitet. Dieser Ansatz wird nun weiter verfolgt, er lautet:

$$D_{ij}^{mod}(\mathbf{u}) = \underbrace{D_{ij}^P}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{D_{ij}^\nu + D_{ij}^F}_{\text{3D-Fluktuationen}} \quad (3.52)$$

Für die durch das Geschwindigkeitsprofil bedingten Dispersionsspannungen D_{ij}^P bietet sich eine Modellierung analog zur DA-RANS-Methode an (Gl. 3.51). Anstelle der Reynolds-gemittelten Geschwindigkeiten treten jedoch die momentanen tiefengemittelten Geschwindigkeiten auf:

$$D_{ij}^P = c_P \tilde{u}_i \tilde{u}_j \quad \text{mit } c_P \approx 0.02 \quad (3.53)$$

Dem erhöhten Impulsaustausch aufgrund der kleinskaligen 3D-Turbulenz wird mit einem Wirbelviskositätsansatz Rechnung getragen:

$$D_{ij}^\nu = -\nu_{3D} 2\tilde{S}_{ij} \quad (3.54)$$

Da die kleinskalige 3D-Turbulenz nicht nur zu einer turbulenten Durchmischung (modelliert durch Gl. 3.54) beiträgt, sondern auch größere 2D-Wirbelstrukturen durch inversen Energietransfer (*back scatter*) anregt, wurde im Ansatz 3.52 die stochastische Komponente D_{ij}^F vorgesehen. In dieser Arbeit wird ein *Back-scatter*-Modell (BSM) vorgeschlagen, welches die Spannungen D_{ij}^F über eine zweidimensionale Zufallskraft F_i modelliert (s. Abschnitt 3.4.2.2). Dabei besteht zwischen den Spannungen und der Kraft der Zusammenhang:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ij}^F) = -F_i \quad (3.55)$$

Zusammenfassend ergibt sich als Modell für die Dispersionsspannungen bei der DA-NS:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ij}^{mod}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (D_{ij}^P + D_{ij}^\nu + D_{ij}^F) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} (c_P \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \nu_{3D} 2\tilde{S}_{ij}) - F_i \end{aligned} \quad (3.56)$$

Auf die Berechnung der Zufallskraft und Wirbelviskosität wird in den nächsten Abschnitten näher eingegangen. Je nach Problemstellung sind die einzelnen Modellterme in Gleichung 3.56 unterschiedlich wichtig. So zeigten Testrechnungen, dass der Term D_{ij}^P einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Simulationsergebnisse hat. Dies liegt daran, dass dessen räumliche Ableitung klein

ist. Auch spielt in vielen Strömungssituationen, z. B. bei starker horizontaler Scherung der Grundströmung, der negative Energietransfer von der nicht aufgelösten kleinskaligen 3D-Turbulenz auf die 2D-Bewegung eine untergeordnete Rolle. Dann kann auch auf den Term D_{ij}^F bzw. auf die Zufallskraft F_i verzichtet werden und man erhält für die Dispersionsspannungen das einfache Wirbelviskositätsmodell:

$$D_{ij}^{mod} = -\nu_{3D} 2\widetilde{S}_{ij} \quad (3.57)$$

Berechnung der Wirbelviskosität ν_{3D}

Mit der Wirbelviskosität ν_{3D} in Gleichung 3.56 bzw. 3.57 wird dem erhöhten horizontalen Impulsaustausch aufgrund der nicht aufgelösten 3D-Turbulenz Rechnung getragen. Folglich hängt ν_{3D} von der Intensität der 3D-Turbulenz \widetilde{k}_{3D} ab. Basierend auf dem Ansatz $\nu_{3D} \sim u \cdot l$ (mit dem Geschwindigkeitsmaß u und dem Längenmaß l) sind Modelle unterschiedlicher Komplexität für die Berechnung von ν_{3D} denkbar, die sich durch die Anzahl der Transportgleichungen unterscheiden. Gebräuchliche Modellierungsansätze sind in Tabelle 3.4 angegeben:

Transportgleichungen		Wirbelviskosität $\nu_{3D} \sim u \cdot l$	
Anzahl	Variablen	Geschwindigkeitsmaß u	Längenmaß l
0	—	u_τ	h
1	\widetilde{k}_{3D}	$\sqrt{\widetilde{k}_{3D}}$	h
2	$\widetilde{k}_{3D}, \widetilde{\epsilon}$	$\sqrt{\widetilde{k}_{3D}}$	$\widetilde{k}_{3D}^{3/2} / \widetilde{\epsilon}$

Tabelle 3.4: Modellansätze für Wirbelviskositätsmodelle.

0-Gleichungsmodell

Entsprechend der Aufstellung in Abschnitt 2.8.2 führen mehrere Mechanismen zur Produktion der kleinskaligen 3D-Turbulenz. Jedoch wird sie primär durch die vertikale Scherung an der Sohle produziert. Bei einem Gleichgewicht aus Produktion und Dissipation, hängt ihre Stärke allein von u_τ ab. Dann ist folgender Ansatz nahe liegend:

$$\nu_{3D} = c_h h u_\tau = c_h \sqrt{c_f} h \widetilde{u} \quad (3.58)$$

Dabei bezeichnet c_h eine Modellkonstante für den horizontalen Impulsaustausch aufgrund der tiefengemittelten 3D-Turbulenz. Unter der Annahme, dass die kleinskalige 3D-Turbulenz annähernd isotrop ist, ergibt sich für c_h ein Anhaltswert aus dem vertikalen Impulsaustausch in einer Gerinneströmung. Hierfür kann eine mittlere effektive Wirbelviskosität über die vertikale Kräftebilanz bestimmt werden (Elder 1959): In einer Gerinneströmung gilt das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz $\langle u^+ \rangle = \frac{1}{\kappa} \ln(E' \cdot z^+)$ mit dem Sohlrauigkeitsparameter E' . Die Schubspannung verläuft linear von $\tau_{13}(0) = \rho u_\tau^2$ an der Sohle bis $\tau_{13}(h) = 0$ an der Wasseroberfläche. Daraus folgt über

$$\begin{aligned} \tau_{13}(z) / \rho = u_\tau^2 (1 - z/h) &= \nu \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - \langle uw \rangle(z) = (\nu + \nu_t(z)) \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \\ &= \nu_{eff}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_\tau}{\kappa} \ln \left(E' \cdot \frac{z u_\tau}{\nu} \right) \right) \\ &= \nu_{eff}(z) \cdot \frac{u_\tau}{\kappa \cdot z} \end{aligned} \quad (3.59)$$

die parabolische Verteilung für die effektive Viskosität

$$\nu_{eff}(z) = \kappa u_\tau z (1 - z/h) \quad (3.60)$$

Aus dem Tiefenmittelwert

$$\widetilde{\nu_{eff}} = \frac{1}{h} \int_0^h \nu_{eff}(z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \kappa u_\tau z (1 - z/h) dz = \frac{\kappa}{6} h u_\tau \quad (3.61)$$

folgt für die Konstante c_h in Gleichung 3.58 der Anhaltswert

$$c_h \approx \kappa/6 \approx 0.07 \quad (3.62)$$

Dieser gilt auch für raue Sohlen, da der Sohlrauigkeitsparameter E' nicht in die Beziehung 3.60 eingeht. Die Abschätzung basiert auf der Reynolds-gemittelten Strömung und beinhaltet auch den von den 2D-Strukturen, welche auch in einer Gerinneströmung ohne horizontale Scherung vorhanden sind, verursachten Impulsaustausch. Sie entspricht daher eher einem DA-RANS-Modell. Da jedoch in einer Gerinneströmung ohne horizontale Scherung der Anteil der 2D-Turbulenz an der Gesamt-Turbulenz mit etwa 15 % sehr gering ist, wie die in Abschnitt 5.1.1.5 beschriebenen 3D-LES-Rechnungen ergaben, ist die Abschät-

zung 3.62 auch für DA-NS bzw. DA-LES geeignet.

In der vorliegenden Arbeit wird für die tiefengemittelten Simulationen ausschließlich das einfache 0-Gleichungsmodell nach Gleichung 3.58, welches ein Gleichgewicht von Turbulenzproduktion und Dissipation voraussetzt, zur Berechnung von ν_{3D} verwendet. Unter der Annahme, dass sich die kleinskalige 3D-Turbulenz nahe dem Gleichgewichtszustand befindet, lässt sich das Modell auch für komplexe Strömungssituationen einsetzen.

1- und 2-Gleichungsmodelle

In komplexeren Strömungen kann es notwendig sein, die Produktions- und Dissipationsmechanismen von kleinskaliger 3D-Turbulenz (z. B. an Seitenwänden) sowie deren Konvektion und Diffusion durch die Lösung von Transportgleichungen für die Energie der 3D-Turbulenz $\widetilde{k_{3D}}$ (1-Gleichungsmodell) – wahlweise in Verbindung mit einer Transportgleichung für die Dissipationsrate $\widetilde{\epsilon}$ (2-Gleichungsmodell) – zu berücksichtigen. Mögliche Ansätze für ein 1- und ein 2-Gleichungsmodell sind im Anhang A.4 als Anregung für zukünftige Weiterentwicklungen aufgeführt. Da die Implementierung der Modelle und deren Kalibrierung (aufgrund der dazu notwendigen instationären LES-Rechnungen) aufwendig ist, konnten diese Ansätze jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt werden. Trotzdem ist der Einsatz von Transportgleichungen für die nicht aufgelöste 3D-Turbulenz ein viel versprechender Ansatz, der in weiterführenden Untersuchungen Beachtung finden sollte. So haben [Nadaoka und Yagi \(1998\)](#), wie bereits in der Einleitung erwähnt, in einer tiefengemittelten LES mit einem 1-Gleichungs-Modell der Form $\nu_D \sim h\sqrt{k_D}$ – die von ihnen mit dem Index D gekennzeichnete *sub depth scale turbulence* entspricht etwa der 3D-Turbulenz – realistische 2D-Wirbel in einem Rechteckgerinne mit teilweisem Bewuchs erhalten. Die damit erzielten Ergebnisse waren deutlich besser als die einer zum Vergleich durchgeführten DA-RANS-Simulation, bei der sie das tiefengemittelte k - ϵ -Modell von [Rastogi und Rodi \(1978\)](#) verwendeten. Ob jedoch das 1-Gleichungsmodell einem einfachen 0-Gleichungsmodell (Gl. 3.58) überlegen ist, geht aus ihren Untersuchungen nicht hervor. Daher gilt es in weiterführenden Untersuchungen zu klären, ob sich der mit einem 1- oder 2-Gleichungsmodell verbundene Mehraufwand für eine DA-LES auch wirklich lohnt.

Berechnung der Zufallskraft F für das *Back-Scatter-Modell*

Zur Modellierung des inversen Energietransfers bei 3D-LES findet man in der Literatur diverse Ansätze. Eine Übersicht gibt [Sagaut \(2001\)](#). Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde für tiefengemittelte Simulationen ein stochastisches *Back-Scatter-Modell* (BSM) entwickelt, welches mittels eines zufallsgenerierten Kraftfeldes 2D-Schwankungen anregt. Dabei diente das im Anhang [A.5.1](#) beschriebene Verfahren zur stochastischen Feinstrukturmodellierung des inversen Energietransfers nach [Leith \(1990\)](#) als Ausgangspunkt für die Modellentwicklung. Anders als bei Leith, der die Stärke des Kraftfeldes von der lokalen Scherung S abhängig macht, regt das hier vorgestellte BSM Fluktuationen auch in Strömungen ohne anfängliche Scherung der Grundströmung an.

Skalierung der Zufallskraft F

In einer Gerinneströmung ohne horizontale Scherung wird die 2D-Turbulenz ausschließlich über die soherzeugte 3D-Turbulenz generiert. In tiefengemittelten Rechnungen muss dieser Produktionsmechanismus durch das BSM modelliert werden. Da die kleinskalige 3D-Turbulenz mit zunehmender Reynoldszahl über die Tiefe immer weniger korreliert ist, wird für die Produktionsrate der 2D-Turbulenz folgende Annahme getroffen:

$$P_{2D} \sim \frac{P_{3D}}{Re_\tau} = \frac{|\tilde{\mathbf{u}}| \cdot u_\tau^2}{h \cdot Re_\tau} = \frac{|\tilde{\mathbf{u}}|^2 \nu \sqrt{c_f}}{h^2} \quad (3.63)$$

Diese Produktionsrate wird im BSM durch die 2D-Kraft F realisiert, die aus einem zufälligen mittelwertsfreien Vektorfeld Z berechnet wird:

$$F_i = F_{rms} \cdot Z_i / Z_{rms} \quad (3.64)$$

Hierbei ist F_{rms} ein Faktor, der den RMS-Wert

$$F_{rms} \equiv \sqrt{F_{1rms}^2 + F_{2rms}^2} \quad (3.65)$$

der 2D-Kraft auf einen vorgegeben Wert festlegt. Die Kraft wird in jedem Zeitschritt aktualisiert und führt, wie im Anhang [A.5.2](#) gezeigt wird, zu einer 2D-

Turbulenzenergie-Produktionsrate von

$$P_{2D} \sim F_{rms}^2 \cdot \Delta t \quad (3.66)$$

wobei Δt die Größe des Zeitschritts bezeichnet (Alvelius 1999). Durch Kombination der Gleichungen 3.63 und 3.66 erhält man:

$$F_{rms} = c_B \cdot \sqrt{\frac{P_{2D}}{\Delta t}} = c_B \cdot \frac{|\tilde{\mathbf{u}}|}{h} \sqrt{\frac{\nu \sqrt{c_f}}{\Delta t}} \quad (3.67)$$

Kalibrierung der Modellkonstante c_B

Die Modellkonstante c_B bestimmt die Stärke der durch das BSM angeregten turbulenten kinetischen Energie. Für eine ungescherte Gerinneströmung wurde aus 3D-LES-Rechnungen $k_{2D\,soll} \approx 0.25u_\tau^2$ bestimmt (s. Abschnitt 5.1.1.5 Gl. 5.7). Testrechnungen zeigten, dass die durch das Modell angeregte Stärke der 2D-Turbulenz $k_{2D\,ist} \sim F_{rms}^2$ ist. Somit lässt sich die Konstante durch eine Kalibrationsrechnung über die Beziehung $c_{B\,neu} = c_B \cdot \sqrt{k_{2D\,soll}/k_{2D\,ist}}$ bestimmen.

Berechnung des zufälligen Vektorfeldes \mathbf{Z}

Abgesehen vom Skalierungsfaktor c_B muss das Zufallsvektorfeld \mathbf{Z} vorgegeben werden. Hierbei sind die spektralen Eigenschaften des Feldes entscheidend für die Performance des BSM. Aus numerischen und physikalischen Gründen ist die Aufprägung eines divergenzfreien Kraftfeldes wünschenswert. So kann beispielsweise ein divergentes Feld zu unphysikalischen Oszillationen des Wasserspiegels bei Simulationen mit freier Oberfläche führen. Im Anhang A.5.4 werden deshalb Methoden zur Generierung eines divergenzfreien Feldes beschrieben. Darunter eine von Schumann (1995) eingesetzte Projektionsmethode.

In der vorliegenden Arbeit wird die Wasseroberfläche bei den Simulationen durch eine starre reibungsfreie Fläche approximiert. Damit entfällt die Notwendigkeit des divergenzfreien Feldes, da eine Divergenz des Kraftfeldes, wie im Anhang A.5.3 gezeigt wird, durch ein modifiziertes Druckfeld $P = p + p^*$ (mit $\nabla^2 p^*/\rho = \nabla \cdot \mathbf{F}$) kompensiert wird. Somit erfolgt der Projektionsschritt, der das Kraftfeld divergenzfrei macht, indirekt über den Drucklöser. Dies verursacht zwar einen Mehraufwand bei der Druckkorrektur, erlaubt aber den Einsatz

eines divergenzbehafteten Feldes.

In Testrechnungen zeigte sich, dass das Herausfiltern der sehr hohen und niedrigen räumlichen und zeitlichen Frequenzen des Kraftfeldes viel wichtiger für die numerische Stabilität und die Qualität der Ergebnisse ist, als die Divergenzfreiheit des Kraftfeldes. Deshalb werden die spektralen Eigenschaften von \mathbf{F} (\mathbf{F} ist proportional \mathbf{Z}) durch räumliche und zeitliche Filterung eines aus standardnormalverteiltem weißen Rauschen generierten Vektorfeldes $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$ wie folgt angepasst:

$$\mathbf{Z} = \overline{\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)}^{BSM} \quad (3.68)$$

Der Filteroperator $\overline{\quad}^{BSM}$ unterscheidet sich vom LES-Filter. Dieser Filter wird hier für ein strukturiertes Gitter mit den räumlichen Indices I, J und dem zeitlichen Index N folgendermaßen implementiert:

$$(Z_i)_{I,J}^N = \sum_{q=-n}^n \sum_{r=-n}^n \sum_{s=-n}^n a_q b_r c_s \cdot (r_i)_{I-r, J-s}^{N-q} \quad (i = 1, 2) \quad (3.69)$$

Hierbei bezeichnen a_q , b_r und c_s die Filterkoeffizienten des Filters der Ordnung $2n$. Die Filtereigenschaften des auf dem Gitter basierenden Filters hängen vom Zeitschritt und der Gitterauflösung ab. Falls das Spektrum der Zufallszahlen r einem weißen Rauschen entspricht, ist das Spektrum der Kraft $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, f)$ proportional der Transferfunktion $\hat{G}(\mathbf{k}, f)$ des Filters. Für diese gilt auf einem kartesischen Gitter:

$$\hat{G}(\mathbf{k}, f) = \sum_{q=-n}^n \sum_{r=-n}^n \sum_{s=-n}^n \left(a_q b_r c_s \cdot e^{-i(q 2\pi f \Delta t + r k_1 \Delta x + s k_2 \Delta y)} \right) \quad (3.70)$$

Die Norm des Filters bestimmt den Skalierungsfaktor:

$$(Z_i)_{rms} = \sqrt{\sum_{q=-n}^n a_q^2 \cdot \sum_{r=-n}^n b_r^2 \cdot \sum_{s=-n}^n c_s^2} \quad (3.71)$$

Zeitlicher und räumlicher Bandpassfilter zweiter Ordnung

Durch geeignete Wahl der Filterkoeffizienten lässt sich bei entsprechend hoher Ordnung der Filterung ein Kraftfeld mit einem beliebigen Amplitudenspektrum $|\hat{\mathbf{F}}(f, \mathbf{k})|$ generieren. Numerisch besonders interessant sind Filter mit einer möglichst niedrigen Ordnung. Ein realistisches Modellverhalten erhält man bereits mit einem einfachen zeitlichen und räumlichen Bandpassfilter zweiter Ordnung ($n = 1$), welcher sich mit $a_1 = -1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ergibt. Die Transferfunktion des Filters und somit das Spektrum $\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{k}, f)$ ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Hohe und niedrige Frequenzen werden wie beabsichtigt gedämpft. Der Filter hat die zeitliche Grenzfrequenz $f_{max} = 1/(2\Delta t)$ und die räumlichen Grenzwavenzahlen $k_{1max} = \pi/\Delta x$ und $k_{2max} = \pi/\Delta y$. Die doppel-logarithmische Darstellung zeigt, dass die Anregung durch das BSM primär bei höheren (bezogen auf die effektive spektrale Auflösung des numerischen Verfahrens) Frequenzen und Wavenzahlen erfolgt. Die Stärke der Anregung ist bei niedrigen Wavenzahlen proportional k und für niedrige Frequenzen proportional f und hat ein Maximum bei $f = 1/(4\Delta t)$ und $k = \pi/(2\Delta x)$, das entspricht einer Wellenlänge von $\lambda = 4\Delta x$.

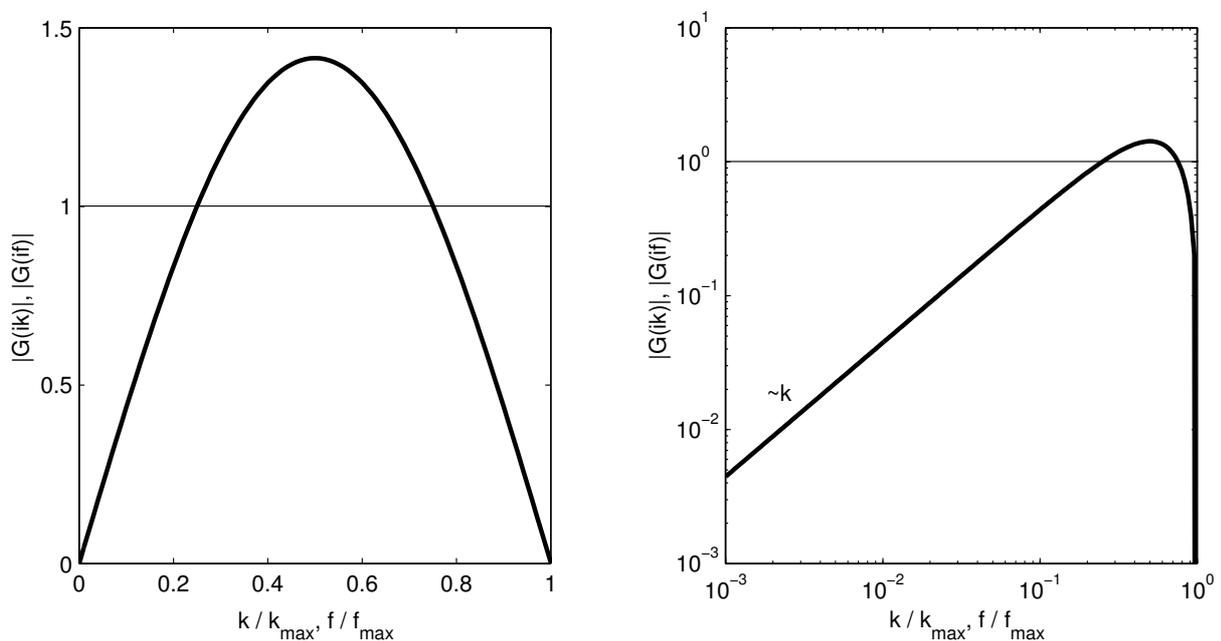


Abb. 3.4: Übertragungsfunktion des Bandpassfilters ($n = 1$, $a_1 = -1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$) in linearer und doppel-logarithmischer Darstellung.

Anmerkung

Im Anhang A.5.6 finden sich programmtechnische Hinweise zur Generierung der standard-normalverteilten Zufallszahlen r . Durch Einsetzen der Filterkoeffizienten des zuvor beschriebenen Bandpassfilters in Gleichung 3.69 erhält man für die Berechnung des diskreten Vektorfeldes Z_i ($i = 1, 2$) aus den standard-normalverteilten Zufallszahlen die einfache Berechnungsvorschrift:

$$\begin{aligned} (Z_i)_{I,J}^N &= (r_i)_{I+1,J+1}^{N+1} + (r_i)_{I-1,J-1}^{N+1} - (r_i)_{I+1,J-1}^{N+1} - (r_i)_{I-1,J+1}^{N+1} \\ &\quad - (r_i)_{I+1,J+1}^{N-1} - (r_i)_{I-1,J-1}^{N-1} + (r_i)_{I+1,J-1}^{N-1} + (r_i)_{I-1,J+1}^{N-1} \end{aligned} \quad (3.72)$$

sowie

$$\begin{aligned} Z_{rms} &\equiv \sqrt{Z_{1rms}^2 + Z_{2rms}^2} \\ &= \sqrt{2 \cdot \left(\sum_{q=-n}^n a_q^2 \cdot \sum_{r=-n}^n b_r^2 \cdot \sum_{s=-n}^n c_s^2 \right)} \\ &= 4 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Für das diskrete Kraftfeld gilt:

$$(F_i)_{I,J}^N = c_B \cdot \frac{|\tilde{\mathbf{u}}|}{h} \sqrt{\frac{\nu \sqrt{c_f}}{\Delta t}} \cdot \frac{(Z_i)_{I,J}^N}{Z_{rms}} \quad (3.74)$$

3.4.2.3 DA-LES

Die DA-LES unterscheidet sich von der DA-NS durch die zusätzliche räumliche Filterung der Strömungsgleichungen. Als Folge der räumlichen Filterung sind die räumlich gefilterten Dispersionsspannungen $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$ und die 2D-Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ zu modellieren. Dabei ist die Abhängigkeit der Spannungen von der Filterweite Δ zu berücksichtigen. Nach Gleichung 2.82 gilt für die bei der DA-LES-Methode zu modellierenden Gesamtspannungen:

$$T_{ij}^{[\tau,D]}(\mathbf{u}) \approx \overline{D_{ij}(\mathbf{u})} + \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (3.75)$$

Gefilterte Dispersionsspannungen $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$

Die Modellierung für die gefilterten Dispersionsspannungen $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})}$ lässt sich aus dem in Abschnitt 3.4.2.2 angegebenen Modell für die ungefilterten Dispersionsspannungen ableiten. Durch Filterung des Ansatzes 3.52 zur Modellierung der instationären Dispersionsspannungen erhält man:

$$\overline{D_{ij}^{mod}} = \underbrace{\overline{D_{ij}^P}}_{\text{Geschwindigkeitsprofil}} + \underbrace{\overline{D_{ij}^\nu} + \overline{D_{ij}^F}}_{\text{3D-Fluktuationen}} \quad (3.76)$$

Die Filterung der in Abschnitt 3.4.2.2 definierten Modellterme ergibt:

$$\overline{D_{ij}^P} = c_P \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} = c_P \overline{\tilde{u}_i} \overline{\tilde{u}_j} + c_P \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \approx c_P \overline{\tilde{u}_i} \overline{\tilde{u}_j} \quad (3.77)$$

$$\overline{D_{ij}^\nu} = -\overline{\nu_{3D} 2\tilde{S}_{ij}} \approx -\nu_{3D} \overline{2\tilde{S}_{ij}} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{D_{ij}^F} \right) = -\overline{F_i} \quad (3.79)$$

Die durch das mittlere Geschwindigkeitsprofil hervorgerufenen Dispersionsspannungen D_{ij}^P sind auf den kleineren Skalen relativ homogen und weitestgehend unabhängig von der Gitterfilterweite Δ . Bei der räumlichen Filterung konnte deshalb der Term $c_P \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$, der wegen $c_P \approx 0.02 \ll 1$ sehr klein im Verhältnis zu den 2D-Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ ist, vernachlässigt werden. (Er könnte aber problemlos bei der Modellierung der Gesamtspannungen $T_{ij}^{[\tau,D]} \approx \overline{D_{ij}} + \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$, die bei DA-LES auftreten, berücksichtigt werden, was dann zu $T_{ij}^{[\tau,D]mod} = c_P \overline{\tilde{u}_i} \overline{\tilde{u}_j} + \overline{D_{ij}^\nu} + \overline{D_{ij}^F} + (1 + c_P)\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ führen würde.)

Bei der Filterung der Dispersionsspannungen D_{ij}^ν , welche den durch die kleinskalige 3D-Turbulenz verursachten Impulsaustausch beschreiben, wurde berücksichtigt, dass die Wirbelviskosität ν_{3D} – bestimmt durch die Stärke der kleinskaligen 3D-Turbulenz – auf kleinen Skalen relativ homogen ist, was die Annahme $\overline{\nu_{3D}} = \nu_{3D}$ rechtfertigt.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Modell für die gefilterten Dispersionsspannungen bei der DA-LES:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{D_{ij}^{mod}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{D_{ij}^P} + \overline{D_{ij}^\nu} + \overline{D_{ij}^F} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_P \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} - \nu_{3D} 2\widetilde{S_{ij}} \right) - \overline{F_i} \end{aligned} \quad (3.80)$$

Vergleicht man die einzelnen Komponenten des Modells für die gefilterten Dispersionsspannungen mit dem Modell für die ungefilterten Dispersionsspannungen, lässt sich feststellen, dass sich die Spannungen $\overline{D_{ij}^P}$ und $\overline{D_{ij}^\nu}$, wie bei der DA-NS modellieren lassen (s. 3.4.2.2), wobei die ungefilterten Geschwindigkeiten durch die gefilterten zu ersetzen sind. Während die modellierten Spannungen $\overline{D_{ij}^P}$ und $\overline{D_{ij}^\nu}$ somit unabhängig von der Filterweite Δ bzw. der Maschenweite sind, hängt der Term $\overline{D_{ij}^F}$ zur Modellierung des inversen Energietransfers ganz offensichtlich von Δ und dem Spektrum der Zufallskraft F ab.

Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$

Im Rahmen dieser Arbeit wurden vorrangig tiefengemittelte Rechnungen mit einer hohen horizontalen Gitterauflösung ($\Delta \lesssim h/5$) durchgeführt. In diesen Fällen spielen die Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ eine untergeordnete Rolle. Bezüglich der Modellierung der Feinstrukturspannungen $\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ besteht noch großer Forschungsbedarf, um hier allgemeingültige praxistaugliche Ansätze zu finden. Erfolgversprechende Ansätze sind:

Wirbelviskositätsmodelle

Nahe liegend ist ein einfacher Wirbelviskositätsansatz

$$\tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})^{mod} = -\nu_{2D_{SGS}} 2\widetilde{S_{ij}} \quad (3.81)$$

Hierbei wird der erhöhte Impulsaustausch, welcher durch die nicht aufgelösten 2D-Wirbel hervorgerufen wird, durch die Wirbelviskosität $\nu_{2D_{SGS}}$ berücksichtigt.

Tiefengemitteltes Smagorinsky-Modell

Für die Berechnung der Wirbelviskosität könnte ein Smagorinsky-Ansatz erfolgversprechend sein:

$$\nu_{2D_{SGS}} = (C_{S_{2D}} \Delta)^2 \sqrt{2 \overline{\overline{S_{ij}}} \overline{\overline{S_{ij}}}} \quad (3.82)$$

mit $\Delta = \sqrt{\Delta x \Delta y}$. Es ist jedoch fraglich, ob sich ein universeller Wert für die auftretende Konstante $C_{S_{2D}}$ finden lässt.

Feinstrukturmodell von Uittenbogaard

Von [Uittenbogaard](#) wurde unlängst ein neues Feinstrukturmodell für tiefenge-mittelte LES vorgestellt ([van Vossen 2000](#), [Uittenbogaard 2001](#), [Uittenbogaard und van Vossen 2004](#)). Das Modell basiert auf der Energiebilanz für die 2D-Feinstruktur-turbulenzenergie. Dabei wird folgende einfache Gleichgewichtsannahme getroffen: Die Produktionsrate der 2D-Feinstruktur-turbulenzenergie ist gleich deren Dissipation durch die Bodenreibung. Mit einer Annahme für die Steigung α des Energiespektrums im Bereich der nicht aufgelösten Feinstruktur leitet er für die Wirbelviskosität nachfolgende Beziehung ab:

$$\nu_{2D_{SGS}} \sim \frac{1}{k_S^2} \left(\sqrt{(\gamma \sigma_t)^2 \cdot \overline{\overline{S_{ij}^* S_{ij}^*}} + B^2} - B \right) \quad (3.83)$$

mit der von der Gitterauflösung abhängigen Grenzwellenzahl (*cut off wave number*) $k_S \sim \Delta^{-1}$, dem Bodenreibungsparameter $B = \frac{3}{4} c_f \overline{u} / h$, sowie $\gamma = \frac{1}{2} I_\infty \sqrt{1 - \alpha^{-2}}$, $I_\infty \approx 0.844$ und der turbulenten Prandtl-Zahl $\sigma_t \approx 0.5 \dots 1.0$. Die Deformationsrate $\overline{\overline{S^*}} = \frac{1}{2} (\partial_{x_j} \overline{u_i^*} + \partial_{x_i} \overline{u_j^*})$ bezeichnet die mit einer zeitlich hochpassgefilterten Geschwindigkeit $\overline{u^*}$ berechnete Deformationsrate. Für grobe Gitter ($\Delta x / h \gg 1$) oder kleine Werte von B ähnelt das Modell dem Smagorinsky-Feinstrukturmodell, wobei der Spannungstensor jedoch mit einem zeitlich hochpassgefilterten Geschwindigkeitsfeld berechnet wird. Dadurch trägt die mittlere Scherrate nicht zur Wirbelviskosität bei. Für große Werte von B sowie für feine Gitter ($\Delta x / h \ll 1$) strebt die Wirbelviskosität gegen null.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, verwendet [Uittenbogaard](#) das 2D-Feinstrukturmodell in Verbindung mit dem Elder-Ansatz $\nu_{3D} = \kappa / 6 \cdot u_\tau h$ zur Modellierung der 3D-Turbulenz, wobei er die effektive Wirbelviskosität über

$\nu_{eff} = \nu_{2D_{SGS}} + \nu_{3D}$ berechnet. Die Modellierung der Bodenreibung erfolgt über den üblichen quadratischen Ansatz für die Sohlschubspannung. Das Modell wurde unter anderem an einer Mischungsschicht, einem Bühnenfeld sowie einer Hafeneinfahrt getestet (Surajate Boonya-aroonnet und Yasuyuki Shimizu 2004, van Schijndel und Jagers 2004, van Vossen 2000). In diesen als horizontale Large-Eddy-Simulation (HLES) bezeichneten Rechnungen wurde eine viel versprechende Übereinstimmung mit den experimentellen Daten gefunden.

Back-scatter-Modell

Ein Wirbelviskositätsansatz ist rein dissipativ und wird daher der inversen Energiekaskade, welche typisch für die 2D-Turbulenz ist, nicht gerecht. Somit können keine 2D-Wirbel aus der Feinstruktur angeregt werden. Wie bei der Modellierung der Dissipationsspannungen ist daher auch für die Feinstrukturspannungen eine Kombination aus Wirbelviskositätsmodell (τ_{ij}^ν) und *Back-scatter*-Modell (Spannung τ_{ij}^F bzw. Kraft F_i^τ) ein viel versprechender Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^{mod}) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij}^\nu + \tau_{ij}^F) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\nu_{2D_{SGS}} \widetilde{2S_{ij}} \right) - F_i^\tau \end{aligned} \quad (3.84)$$

Gesamtspannungen $\overline{D_{ij}(\mathbf{u})} + \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$

Die Modellierung der Gesamtspannungen $T_{ij}^{[\tau,D]} \approx \overline{D_{ij}} + \tau_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ bei einer DALES erfolgt durch Zusammenfassen der Modellierungsterme für die Dispersionspannungen und die Feinstrukturspannungen:

$$T_{ij}^{[\tau,D]mod} = \overline{D_{ij}^P} + \overline{D_{ij}^\nu} + \overline{D_{ij}^F} + \tau_{ij}^\nu + \tau_{ij}^F \quad (3.85)$$

Damit folgt für die modellierten Gesamtspannungen durch Einsetzen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(T_{ij}^{[\tau,D]mod} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_P \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} - (\nu_{3D} + \nu_{2D_{SGS}}) \widetilde{2S_{ij}} \right) - \overline{F_i} - F_i^\tau \quad (3.86)$$

Wie auch schon beim DA-NS-Verfahren sind die einzelnen Modellterme in Gleichung 3.86 unterschiedlich wichtig. Vernachlässigt man deshalb die Dispersionspannungen aufgrund des mittleren Geschwindigkeitsprofils $\overline{D_{ij}^P}$ und

fasst die Viskositäten und Kräfte zu $\nu_{eff} = \nu_{3D} + \nu_{2D_{SGS}}$ und $F_i^* = \overline{F}_i + F_i^T$ zusammen, so vereinfacht sich die Formel zur Berechnung der Gesamtspannungen zu:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(T_{ij}^{[\tau, D]mod} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\nu_{eff} 2\widetilde{S}_{ij} \right) - F_i^* \quad (3.87)$$

Für die Berechnung der Kraft F_i^* bietet es sich an, die Vorgehensweise vom DA-NS-Verfahren (Abschnitt 3.4.2.2) zu übernehmen und die Modellkonstante c_B an das Strömungsproblem und die Gitterauflösung so durch eine Kalibrationsrechnung anzupassen, dass sich die korrekte kinetische Energie der aufgelösten 2D-Schwankungen einstellt.

Modellvereinfachungen

Wiederum spielt in vielen Strömungssituationen, z. B. bei starker horizontaler Scherung der Grundströmung, der negative Energietransfer von der nicht aufgelösten kleinskaligen 3D-Turbulenz und der 2D-Feinstruktur auf die 2D-Bewegung eine untergeordnete Rolle. In diesem Fall kann auf das BSM verzichtet werden. Bei Verwendung relativ feiner Gitter (etwa mit $\Delta < h$) verursacht die kleinskalige 3D-Turbulenz den Hauptanteil am Impulsaustausch. Dann kann auch das 2D-Feinstrukturmodell vernachlässigt werden. Damit erhält man für die Gesamtspannungen das einfache Wirbelviskositätsmodell:

$$T_{ij}^{[\tau, D]mod} = -\nu_{3D} 2\widetilde{S}_{ij} \quad (3.88)$$

Somit ist das für feine Gitter vereinfachte DA-LES-Modell unabhängig von der Gitterweite und identisch mit der vereinfachten DA-NS-Modellierung nach Gleichung 3.57.

4 Numerisches Lösungsverfahren – LES-Programm \mathcal{LESOCC}_2

In diesem Kapitel wird das für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten LES-Rechnungen verwendete numerische Berechnungsverfahren beschrieben. Für die Simulationen kommt der am Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe entwickelte Programmcode \mathcal{LESOCC}_2 (Large-Eddy-Simulation on Curvilinear Coordinates) – eine Weiterentwicklung des von [Breuer und Rodi \(1996\)](#) entwickelten LES-Codes \mathcal{LESOCC} (siehe auch [Breuer 2002](#)) – zum Einsatz. Der Hauptunterschied zwischen den Programmversionen ist die Unterstützung von blockstrukturierten Gittern mit einer unstrukturierten Blockanordnung in \mathcal{LESOCC}_2 , wodurch die Berechnung von Strömungen in komplexen Geometrien möglich wird. Beide Programmversionen basieren auf demselben numerischen Verfahren – einer Finite-Volumen-Methode mit zellzentrierter nichtversetzter Gitteranordnung, d. h. alle abhängigen Variablen werden im Zentrum der Kontrollvolumina gespeichert. Es werden zentrale Differenzen für die räumliche Diskretisierung verwendet. Die zeitliche Integration erfolgt mit einem 3-Schritt-Runge-Kutta-Verfahren. Bei der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung ergibt sich ein Abbruchfehler zweiter Ordnung $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

Die Druckberechnung basiert auf dem als SIMPLE-Verfahren ([Patankar und Spalding 1972](#)) bekannten Druckkorrektur-Algorithmus. Die Poisson-Gleichung für die Druckkorrektur wird mit einem SIP-Solver nach [Stone \(1968\)](#) gelöst. Unphysikalische Oszillationen durch Druck-Geschwindigkeits-Entkopplung werden durch die Impulsinterpolation nach [Rhie und Chow \(1983\)](#) vermieden.

Als Feinstrukturmodelle sind das Smagorinsky-Modell ([1963](#)) und das von [Germano et al. \(1991\)](#) vorgeschlagene dynamische Modell verfügbar. Für Rechnungen, bei denen die Wandgrenzschicht nicht durch das Gitter aufgelöst wird, stehen verschiedene Wandmodelle zur Überbrückung der viskosen Unterschicht zur Verfügung.

4.1 Weiterentwicklung des \mathcal{LESOCC} -Codes zum Multiblock-Code \mathcal{LESOCC}_2

Mit blockstrukturierten Gittern ist es möglich, beinahe beliebig komplexe Strömungskonfigurationen zu vernetzen. Beispiele dafür sind die Umströmung eines Kreiszyinders in einem Rechteckgerinne (Abschnitt 5.3) und ein Bühnenfeld mit abgerundeten Bühnenköpfen (Abschnitt 5.4). Da \mathcal{LESOCC} jedoch nur relativ einfache orthogonale Blockstrukturen unterstützt (Abb. 4.1), wurde \mathcal{LESOCC} im Rahmen der vorliegenden Arbeit überarbeitet und dahingehend erweitert, dass nun Simulationen auf allgemeinen blockstrukturierten Gittern – und somit sehr komplexer Strömungsgeometrien – möglich sind. Dabei entstand der nun auf FORTRAN 90 basierende äußerst flexible LES-Code \mathcal{LESOCC}_2 , welcher inzwischen etwa 35 000 Programmzeilen umfasst. Neuerungen zu \mathcal{LESOCC} sind in der aktuellen Programmversion von \mathcal{LESOCC}_2 unter anderem

- die Verwaltung einer beliebigen Anzahl an Skalartransportgleichungen,
- diverse RANS-Modelle (k - ϵ , k - ω , Spalart-Allmaras),
- implizite Zeitintegrationsverfahren (1. und 2. Ordnung)
- sowie die Unterstützung für H-Gitterverfeinerung an den Blockgrenzen.

Für eine effiziente Programmentwicklung ist aufgrund der Komplexität des Programmcodes eine professionelle Programm-Entwicklungsumgebung mit integriertem Debugger unabdingbar. Hierzu wird die kommerzielle Entwicklungsumgebung *HP-Visual-Fortran* verwendet. Die Versionsverwaltung der einzelnen Programmdateien erfolgt mit dem frei verfügbaren Open-Source Versionsverwaltungssystem *CVS*.

Bei der Entwicklung von \mathcal{LESOCC}_2 wurde sowohl auf numerische Effizienz als auch auf Anwendungs- und Wartungsfreundlichkeit geachtet. Für die numerische Effizienz sind vor allem rechenzeitintensive Programmschleifen (z. B. Schleifen über alle Gitterzellen) zu optimieren. Dazu ist es wichtig, innerhalb der Schleifen sog. bedingte Verzweigungen¹ und Unterprogrammaufrufe zu ver-

¹ IF [Bedingung] THEN [Anweisungen] ENDIF.

meiden. Für den Einsatz des Codes auf Vektorrechnern galt es außerdem, mehrfach geschachtelte Schleifen zu vermeiden und darauf zu achten, dass die Rechenergebnisse innerhalb einer Schleife unabhängig voneinander sind, da ansonsten keine vollständige Vektorisierung der Schleifen erfolgt. Der Zielsetzung, einen wartungsfreundlichen Programmcode zu entwickeln, wurde durch den Einsatz von objektorientierten Datenstrukturen, der Vermeidung von globalen Variablen sowie durch Verwendung von aussagekräftigen Variablennamen und Unterprogrammsbezeichnungen Rechnung getragen.

In \mathcal{LESOCC}_2 werden das Simulationsmodell, die Randbedingungen sowie alle Strömungsparameter über Eingabedateien zur Programmlaufzeit eingelesen. Dies trägt entscheidend zur Anwendungsfreundlichkeit des Programms bei, da der Programmcode nicht an jede Strömungskonfiguration neu angepasst werden muss. Da die Problemgröße, also die Zahl der Gitterzellen und der Blöcke, innerhalb weiter Bereiche variieren kann, werden die Strömungsdaten nicht in statischen, sondern in dynamischen Feldern, deren Feldgröße zur Programmlaufzeit festgelegt wird, gespeichert. Details zur dynamischen Speicherverwaltung und zur internen Verwaltung der blockstrukturierten Strömungsdaten finden sich im Anhang [A.3.2](#).

Abbildung [4.2](#) zeigt schematisch den Ablauf einer Strömungssimulation mit \mathcal{LESOCC}_2 . Sowohl für die Gittergenerierung als auch für die Auswertung der Simulationsergebnisse werden kommerzielle Programmpakete verwendet. Als Datenformat für die Rechengitter wird von \mathcal{LESOCC}_2 das sog. *Multiblock-Info-Format* des kommerziellen Gittergenerators *ICEM-CFD* unterstützt. In diesem Format werden die Informationen über die Blockgrößen, deren Verknüpfung

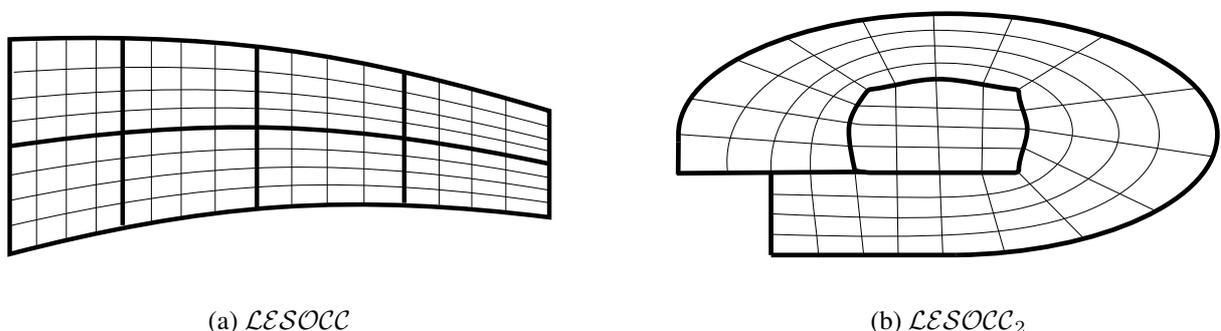


Abb. 4.1: Beispiele für von \mathcal{LESOCC} und \mathcal{LESOCC}_2 unterstützte Blockstrukturen;
 — Blockgrenzen, — Gitternetz.

gen und die Randbedingungen über eine einfach aufgebaute Textdatei (ASCII-File), das sog. Topologie-File (*info.topo*), bereitgestellt. Für einfache Gitter, wie beispielsweise bei einer periodischen Gerinneströmung, wurde ein eigener einfacher Gittergenerator namens *makegrid* entwickelt. Die Generierung von komplexeren blockstrukturierten Gitter erfolgt mit dem Gittergenerator *ICEM-HEXA*. Für die Datenauswertung stehen Schnittstellen zu den kommerziellen Visualisierungsprogrammen *Ensign* und *Tecplot* zur Verfügung.

Neben Tools für Gittergenerierung und Postprocessing wurden auch neue Routinen für die Aufzeichnung von Zeitsignalen und von Daten für Strömungsanimationen programmiert. Die für jeden Prozessor einzeln aufgezeichneten Daten werden vor der Auswertung wieder miteinander verknüpft. Der Einsatz von Animationen zur Ergebnisvisualisierung erwies sich als äußerst hilfreich bei der Beurteilung der Strömungsverhältnisse und der Strömungsentwicklung. Eine Übersicht über die wichtigsten Hilfsprogramme und deren Funktion findet sich im Anhang [A.3.3](#).

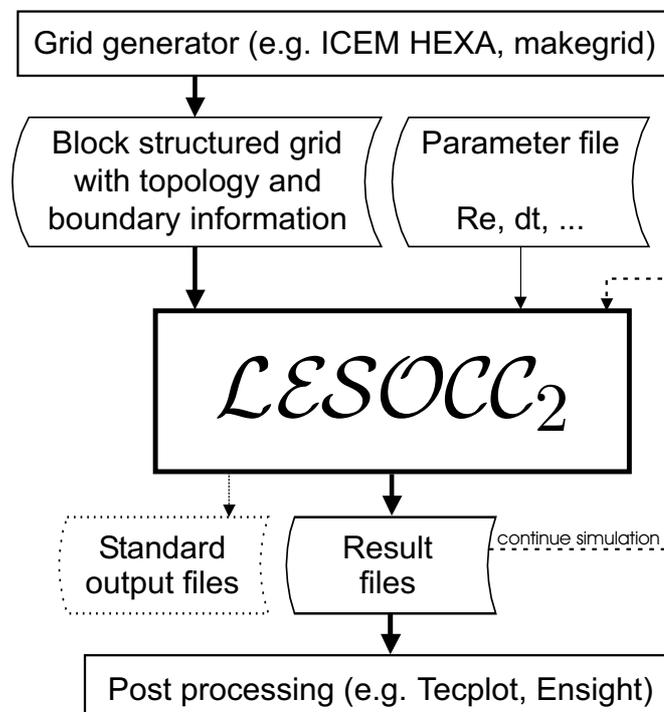


Abb. 4.2: Schematischer Ablauf einer Simulation mit \mathcal{LESOCC}_2 .

4.1.1 Parallelisierung

Sowohl $\mathcal{LES}OCC$ als auch $\mathcal{LES}OCC_2$ sind parallelisiert und vektorisiert. Die Parallelisierung basiert in beiden Programmversionen auf dem Verfahren der Gebietszerlegung, wobei die einzelnen Prozessoren über MPI (*Message Passing Interface*) miteinander kommunizieren. Die Kopplung der einzelnen Blöcke erfolgt über sich überlappende Schnittstellenzellen an den Blockgrenzen, welche die Strömungsvariablen von den angrenzenden Blöcken beinhalten. Nach jeder Änderung der Strömungsvariablen werden die Schnittstellenzellen durch eine Austauschroutine aktualisiert. Um in $\mathcal{LES}OCC_2$ auch allgemeine komplexe Blocktopologien verarbeiten zu können, musste das Parallelisierungskonzept komplett überarbeitet werden. Dazu gab die Arbeit von [Buchal \(1999\)](#) über parallelisierte Berechnungsverfahren für komplexe turbulente Strömungen wertvolle Anregungen.

Wie in [Abbildung 4.3](#) für einen Block skizziert, sind in $\mathcal{LES}OCC_2$ die eigentlichen Fluidzellen mit mehreren Lagen von Hilfszellen umgeben. Diese Zellen dienen als Schnittstellenzellen zum Datenaustausch mit den Nachbarblöcken, aber auch zur Spezifikation der Randbedingungen. Die Schnittstellenzellen überlappen sich mit den Fluidzellen der Nachbarblöcke und erhalten ihr Gitter zu Beginn einer Rechnung durch Austausch der Gitterkoordinaten von den Nachbarblöcken. Über einen Parameter (NPLANES) lässt sich die Anzahl der Lagen beliebig wählen. Dadurch können bei Bedarf auch Konvektionsschemata höherer Ordnung sehr einfach implementiert werden. Für das CDS2-Verfahren reicht eine Lage von Schnittstellenzellen aus. In $\mathcal{LES}OCC_2$ werden jedoch standardmäßig zwei Lagen von Schnittstellenzellen verwendet, da diese für die Impulsinterpolation nach [Rhie und Chow \(1983\)](#) benötigt werden.

Der Austausch von Daten zwischen den Blöcken ist in [Abbildung 4.4](#) schematisiert: Zunächst wird ein sog. Sendepuffer mit den Daten, die zum Nachbarblock gesendet werden sollen, gefüllt. Dabei erfolgt eine Koordinatentransformation vom Blockkoordinatensystem (Koordinaten I,J,K) in das Koordinatensystem des Puffers (Koordinaten 1,2,3) mithilfe von Index-Feldern (*mapping arrays*), welche die zu versendenden Fluidzellen des Blocks auf den Sendepuffer abbilden. Im nächsten Schritt wird der Inhalt des Sendepuffers in den Empfangspuffer des benachbarten Blocks transferiert. Hierbei erfolgt keine Koordinatentransformation, da das Koordinatensystem des Empfangspuffers per Definition

gleich dem des Sendepuffers ist. Liegen beide Blöcke auf dem selben Prozessor (Fall A), sind dafür keinerlei Rechenoperationen notwendig, da für diesen Fall schon beim Programmstart die Sendepuffer benachbarter Blöcke identisch mit den jeweiligen Empfangspuffern der Nachbarblöcke gesetzt werden². Befinden sich die Blöcke auf unterschiedlichen Prozessoren, erfolgt der Datentransfer vom Sendepuffers in den Empfangspuffer des benachbarten Blocks über einen asynchronen MPI-Datenaustausch (Fall B). Im letzten Schritt werden Daten des Empfangspuffers wiederum mithilfe von Index-Feldern in die Schnittstellenzellen des die Daten empfangenden Blocks kopiert. Um eine effektive Vektorisierung zu ermöglichen, werden die Sende- und Empfangspuffer sowie die Index-Felder (*mapping arrays*) in 1D-Feldern (Vektoren) gespeichert. Da die *Mapping*-Felder auch zur Vektorisierung der Schleifen, welche die Daten in und aus den Puffern kopieren, benötigt werden, erfolgt die Koordinatentransformation zwischen den Blöcken ohne numerischen Mehraufwand.

Die Simulationen für diese Arbeit wurden anfänglich auf der im Karlsruher Rechenzentrum installierten IBM-SP/2 mit 256 Prozessoren durchgeführt. Davon stehen 160 Prozessoren für parallele Kettenjobs zur Verfügung. Die Wartezeit richtet sich nach der Zahl der angeforderten Prozessoren. Ein Optimum zwischen Wartezeit und erhaltener Rechenleistung ergab sich nach eigenen Erfahrungen mit etwa 50 Prozessoren. Im Sommer 2001 wurde die SP/2 des Karlsruher Rechenzentrums von einer IBM-SP/SMP mit PowerIII Architektur und 128 Prozessoren abgelöst.

Die ursprüngliche parallele Programmversion war für einen Vektorrechner vom Typ SNI VPP 300 mit einer geringen Anzahl von Vektorprozessoren ausgelegt. Für die IBM-SP/2 mussten Anpassungen des Codes bezüglich Ein-/Ausgaberroutinen vorgenommen werden. Zusätzlich wurden neue Steuerungsskripte für die Kettenjobverwaltung implementiert. Durch Modifikation des vektorisierten SIP-Gleichungslösers auf eine unvektorierte Variante konnte ein deutlicher Performancegewinn erzielt werden, da sich die inneren Programmschleifen vereinfachen. Testrechnungen auf der IBM-SP/2 haben gezeigt, dass der Code sehr gut mit der Zahl der verwendeten Prozessoren skaliert.

² Dies geschieht programmintern mit Zeigern (*POINTER*), die auf die selben Datenfelder zeigen.

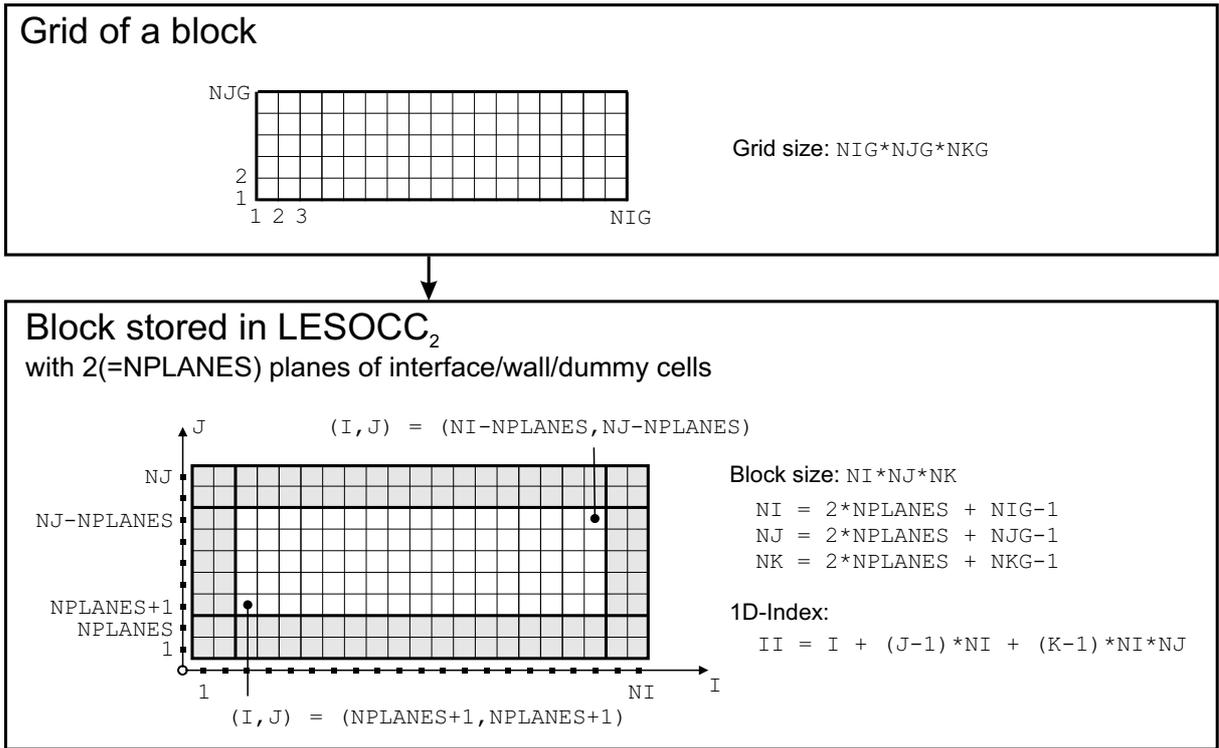


Abb. 4.3: Gitter eines Blocks und entsprechender in $\mathcal{LESOC}C_2$ gespeicherter Block mit N Lagen von Schnittstellenzellen.

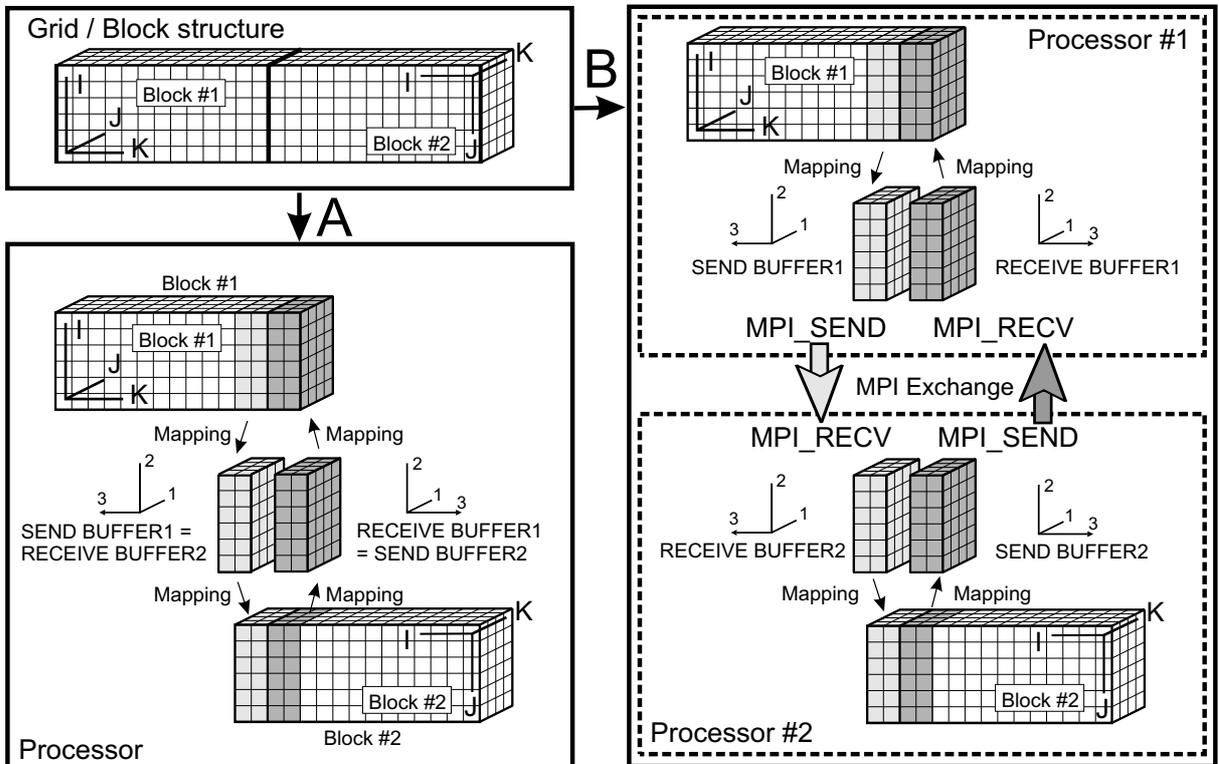


Abb. 4.4: Datentransfer zwischen zwei Blöcken; Fall A: Beide Blöcke sind auf dem selben Prozessor, Fall B: Blöcke befinden sich auf unterschiedlichen Prozessoren.

4.2 Testrechnungen zur Verifizierung des LES-Programms

Da das numerische Verfahren weitgehend unverändert vom \mathcal{LESOC} -Code übernommen wurde, stand bei der Validierung die Überprüfung der Implementierung der Blockstruktur anhand komplexer Strömungsgeometrien im Vordergrund. Dazu werden hier exemplarisch eine laminare Rohrströmung sowie die Strömung um einen abgerundeten stumpfen Körper mit einer wesentlich komplexeren Geometrie betrachtet. Zusätzlich wurden zahlreiche Testrechnungen für den geschlossenen Kanal und die Gerinneströmung durchgeführt.

4.2.1 Laminare Rohrströmung (Poiseuille-Strömung)

Bei Verfahren mit blockstrukturierten Hexaeder-Gittern werden in der Regel O-Blockstrukturen verwendet, um komplexe Geometrien mit gekrümmten Flächen zu vernetzen. So lässt sich beispielsweise eine Rohrgeometrie durch vier o-förmig angeordnete Blöcke und einen Block in der Mitte vernetzen. Um den LES-Code für diese Art der Blockanordnung zu testen, wird der sehr einfache Fall einer laminaren Rohrströmung betrachtet. In [Abbildung 4.5](#) ist die Blockstruktur und das Gitter für diese Testrechnung dargestellt. Die innere Orientierung der Blöcke (I-, J-, K-Richtung) wurde für jeden Block unterschiedlich gewählt. So lassen sich die für den Austausch an den Interface-Zellen notwendigen Transformationen überprüfen. An der Rohrwand wird die Haftbedingung als Randbedingung vorgegeben und in der periodischen axialen Richtung wird eine Volumenkraft aufgeprägt, deren Stärke automatisch durch einen Regler so angepasst wird, dass sich der gewünschte Massenstrom einstellt.

Für die laminare Rohrströmung lautet die exakte Lösung für die Axialgeschwindigkeit $u(r)/u_b = 2(R^2 - r^2)$. Dabei bezeichnet u_b die über den Rohrquerschnitt gemittelte Geschwindigkeit und R den Rohrradius. Für den Druckverlust gilt $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{8}{Re} \frac{u_b^2}{R}$. Die Rechnung wurde mit $Re = 1$ und $R = 1$ und $u_b = 1$ durchgeführt.

[Abbildung 4.6a](#) zeigt die berechnete Axialgeschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt. Trotz grober Gitterauflösung und verzerrter Zellen infolge der O-Blockstruktur sind in den Isokonturlinien der Geschwindigkeit keine Abweichungen von der Kreisform sichtbar. In [Abbildung 4.6b](#) werden die berechne-

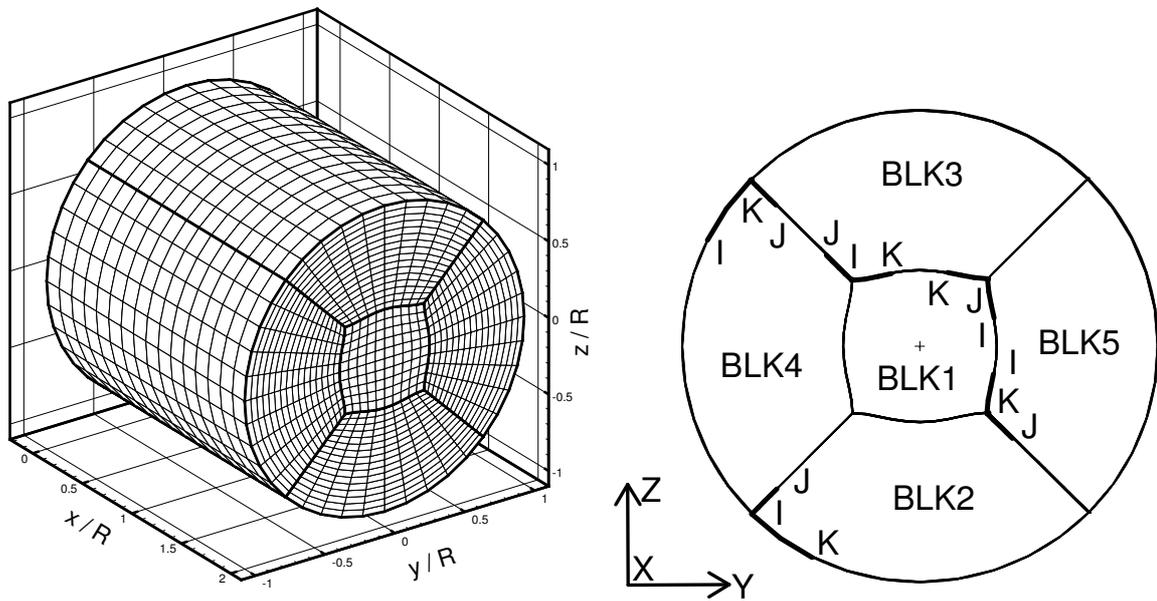
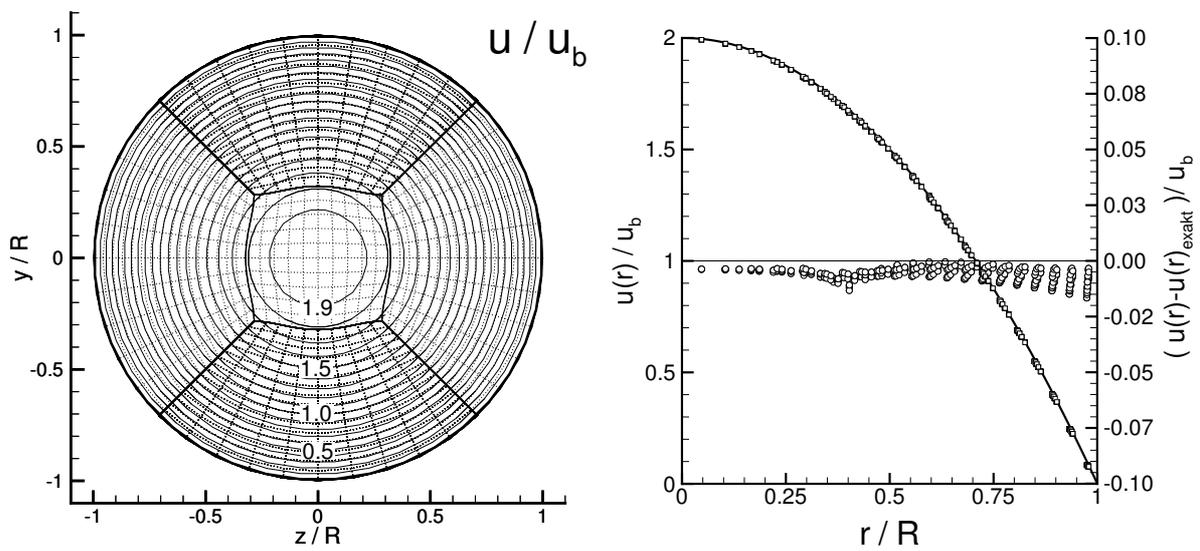


Abb. 4.5: Blockstrukturiertes Rechengitter für laminare Rohrströmung.



(a) Konturplot der berechneten Axialgeschwindigkeitsverteilung, Rechengitter und Blockstruktur hinterlegt.

(b) — : exakte Lösung, \square : berechnete Werte (Zellzentren, alle internen Fluidzellen); \circ : Abweichung von der exakten Lösung.

Abb. 4.6: Laminare Rohrströmung, Axialgeschwindigkeit $u(r)$.

ten Axialgeschwindigkeiten von allen internen Fluidzellen mit der exakten Lösung verglichen. Auch im Bereich der besonders stark verzerrten Zellen an den Blockgrenzen bei $r/R \approx 0.4$ zeigen sich keine übermäßig großen Abweichungen von der exakten Lösung. Die maximalen Abweichungen von der exakten Lösung betragen weniger als 2 % der mittleren Geschwindigkeit. Der berechnete Druckverlust lag 0.5 % über dem exakten Wert. Diese kleinen Differenzen im Geschwindigkeitsprofil und im Druckverlust sind durch die relativ grobe Gitterauflösung und die damit verbundenen Diskretisierungsfehler zu erklären: Schon allein die Approximation des kreisförmigen Rohrquerschnittes durch ein eingeschriebenes regelmäßiges 40-Eck führt zu einer um 0.5 % zu kleinen Rohrquerschnittsfläche und damit zu einem um etwa 0.3 % erhöhten Druckverlust.

4.2.2 Turbulente Strömung um einen Körper mit komplexer Geometrie

Da sich mit Testrechnungen auf so einfachen Geometrien wie bei der zuvor beschriebenen Rohrströmung die korrekte Implementierung der Multi-blockstruktur in \mathcal{LESOC}_2 nur eingeschränkt überprüfen lässt, wurden im Rahmen der Programmentwicklung zahlreiche Testrechnungen bei niedrigen Reynoldszahlen auf komplexeren Geometrien (z. B. um einen Zylinderstumpf) durchgeführt. Diese Rechnungen dienten primär der Verifikation des Datenaustausches zwischen den Blöcken. Zur weiteren Validierung des LES-Programms galt es, eine gut vermessene turbulente Strömung mit komplexer Geometrie zu berechnen:

Als Testkörper mit ausreichender Komplexität bot sich ein von [Ahmed et al. \(1984\)](#) definiertes – als Ahmed-Modell bekanntes – vereinfachtes Automobilmodell an (Abb. 4.7). Da die Berechnung der Strömung um diesen Körper zum Zeitpunkt der Programmentwicklung ein Testfall bei dem ERCOFTAC *Workshops on Refined Turbulence Modelling* 2001 und 2002 war, konnten die im Rahmen dieser Testrechnungen gewonnenen LES-Ergebnisse eingereicht ([Hinterberger und Rodi 2001](#), [Hinterberger et al. 2002](#)) und den RANS-Ergebnissen anderer Workshopteilnehmer gegenübergestellt werden. Charakteristisch für das auf einer Bodenplatte montierte Ahmed-Modell sind die abgerundete Frontpartie und das Heck mit variablem Heckwinkel φ . Die experimentellen Untersuchungen von [Ahmed et al. \(1984\)](#) zeigten eine starke Abhängigkeit des Wider-

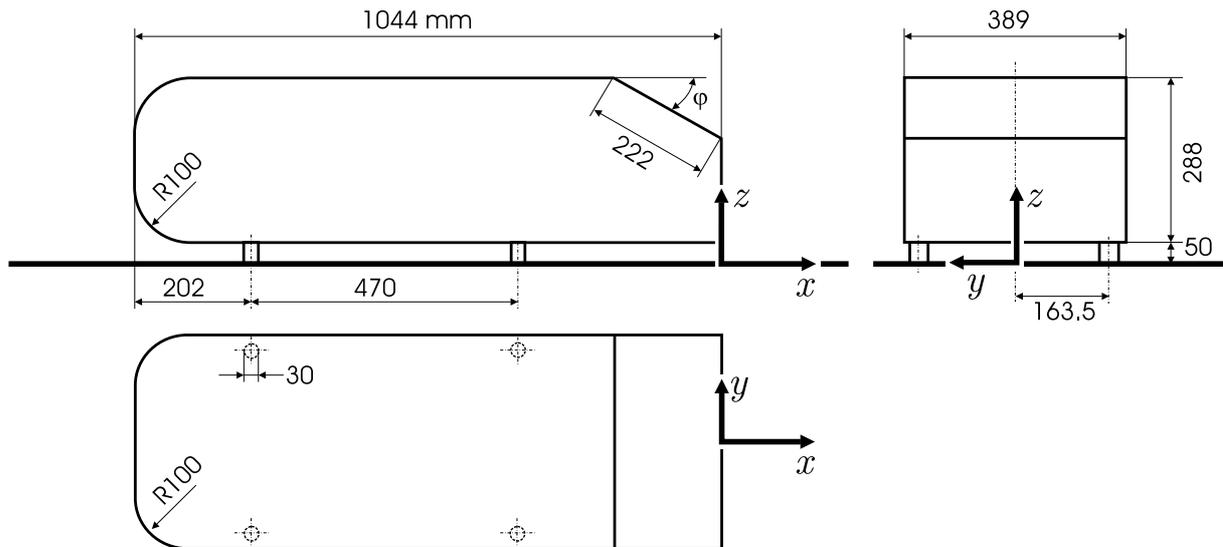


Abb. 4.7: Testkörper (nach Ahmed et al. 1984).

standsbeiwerts vom Heckwinkel. Dabei macht der primär durch den Unterdruck im Heckbereich verursachte Druckwiderstand den Hauptanteil am Strömungswiderstand aus. Im Heckbereich ist die Strömung sehr komplex, mit einer Ablöseblase und zwei gegenläufig rotierenden Wirbeln, die an den Seitenkanten des Hecks entstehen und deren Stärke vom Heckwinkel abhängt. Der maximale Widerstandsbeiwert tritt bei einem Heckwinkel von $\varphi = 30^\circ$ auf. Oberhalb dieses kritischen Heckwinkels löst die Strömung am Heck vollständig ab. Dabei ändert sich die Wirbelstruktur im Nachlauf signifikant und der Widerstandsbeiwert fällt auf einen fast 50 % niedrigeren Wert ab. Unterhalb des kritischen Winkels löst die Strömung bei größeren Heckwinkeln an der Oberkante des Hecks ab, legt sich jedoch stromab wieder an der geneigten Heckfläche an.

Die Testrechnungen umfassten die beiden von Lienhard et al. (2000) detailliert im Windkanal vermessenen Konfigurationen mit Heckwinkeln von $\varphi = 25^\circ$ und $\varphi = 35^\circ$ (s. a. Lienhard und Becker 2003). In diesen Experimenten betrug die Anströmgeschwindigkeit $U = 40 \text{ m/s}$ und die auf die Körperlänge $L = 1.044 \text{ m}$ bezogene Reynoldszahl $Re_L = 2.8 \cdot 10^6$. Die Größe des Rechengebiets wurde entsprechend den Vorgaben des Workshops gewählt: Die Breite bzw. Höhe des Rechengebiets ist mit 1.87 m (fünf Körperbreiten) bzw. 1.4 m (fünf Körperhöhen) gleich den Abmessungen des Windkanals bei den Experimenten. Die in den Experimenten seitlich und oben offene Teststrecke wurde mit reibungsfreien Wänden (Symmetrie-Randbedingung) modelliert.

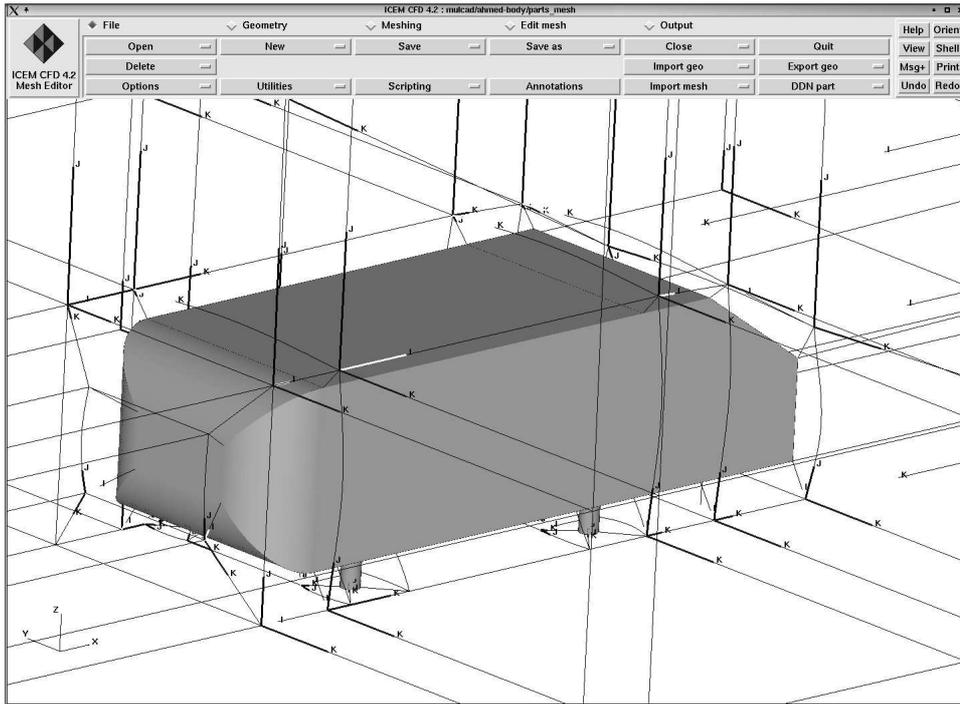


Abb. 4.8: Ausschnitt der Blockstruktur für Gitter 1 um den komplexen Testkörper; Visualisierung und Gittergenerierung mit der kommerziellen Gittergenerierungssoftware ICEM-CFD.

Am 1.3 Körperlängen vor dem Körper angeordneten Einströmrand wurde eine über den Einströmquerschnitt konstante mittlere Strömungsgeschwindigkeit von $\langle u \rangle = 40 \text{ [m/s]}$ mit überlagerten Fluktuationen (normalverteiltes weißes Rauschen mit $u'_{rms} = 0.36 \text{ [m/s]}$, $v'_{rms} = 0.2 \text{ [m/s]}$, $w'_{rms} = 0.2 \text{ [m/s]}$) vorgegeben. Fünf Körperlängen hinter dem Körper befand sich eine konvektive Ausströmrandbedingung. Wegen der hohen Reynoldszahl war es bei der LES nicht möglich, die Wandgrenzschichten durch das Gitter aufzulösen, da diese dann auch entsprechend in Spannweiten- als auch in Strömungsrichtung aufzulösen gewesen wären. Daher wurde an der Bodenplatte sowie der Oberfläche des Testkörpers die in Abschnitt 3.3.5.1 beschriebene Wandfunktion verwendet. Zur Feinstrukturmodellierung diente das Smagorinsky-Modell mit $C_S = 0.13$. Die Zeitschrittweite wurde automatisch an eine maximale CFL-Zahl von 0.66 angepasst.

Die Gittergenerierung erfolgte mit dem kommerziellen Gittergenerator ICEM-Hexa (Abb. 4.8). Die Rechnungen wurden zunächst auf dem gröberen Gitter 1 mit $8.8 \cdot 10^6$ Gitterzellen durchgeführt (Abb. 4.9 links). Hierbei wurde das Strömungsgebiet in 93 Blöcke aufgeteilt. In späteren Rechnungen wurde das feine-

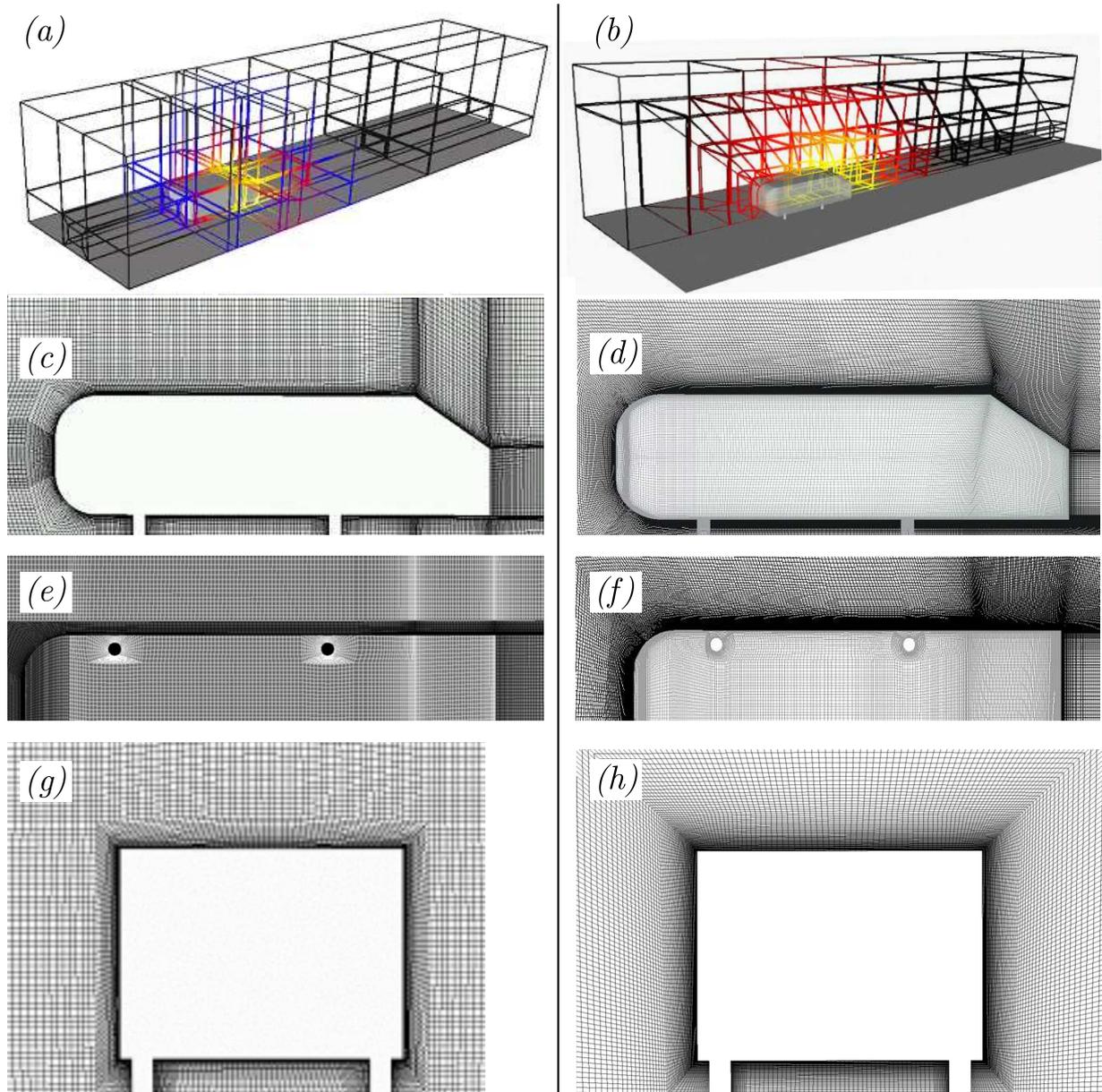


Abb. 4.9: Typische für die LES verwendete blockstrukturierte Rechengitter: (a, c, e, g) Gitter 1 mit 93 Blöcken und $8.8 \cdot 10^6$ Gitterzellen, (b, d, f, h) Gitter 2 mit 214 Blöcken und $18.5 \cdot 10^6$ Gitterzellen. (a, b) Darstellung der Blockstruktur. (c-h) Darstellung des Gitters in Körpennähe in verschiedenen Schnittebenen. (c, d) xz -Ebene. (e, f) xy -Ebene (g, h) yz -Ebene.

re Gitter 2 mit $18.5 \cdot 10^6$ Gitterpunkten und 214 Blöcken verwendet, wobei die Gitterauflösung in Körpennähe durch die modifizierte Blockstruktur zusätzlich erhöht werden konnte (Abb. 4.9 rechts). Bei den sehr aufwendigen Rechnungen mit Gitter 2 wurden keine Geschwindigkeitsfluktuationen am Einströmrand vorgegeben, da diese die Konvergenzrate des Drucklösers reduzieren und nur

einen geringen Einfluss auf die Strömung haben. Die Simulationen mit Gitter 1 wurden auf je 30 Prozessoren der IBM SP-SMP des Karlsruher Universitäts-Rechenzentrums durchgeführt. Bei der Aufteilung der Blöcke mit unterschiedlicher Anzahl von Gitterzellen auf die einzelnen Prozessoren galt es, die Last möglich gleichmäßig aufzuteilen. Abbildung 4.10 zeigt die für diese Simulationen verwendete Zuordnung der unterschiedlich großen Blöcke auf die 30 eingesetzten Prozessoren. Mit einem einfachen Sortier- und Verteilungsalgorithmus konnte eine zufrieden stellende Lastverteilung erzielt werden. Um jedoch noch bessere Lastverteilungen zu erreichen, wurde für die später durchgeführte aufwendigere Simulation mit Gitter 2 das Hilfsprogramm *make_decomposition* entwickelt, das mithilfe eines iterativen stochastischen Verfahrens in der Lage ist, eine fast optimale Verteilung zu finden. Dabei wird aus einer anfänglich schlechten ungleichmäßigen Blockaufteilung durch eine zufällige Neuordnung mehrerer Blöcke auf andere Prozessoren eine neue Blockaufteilung erzeugt. Weist diese neue Aufteilung eine geringere Abweichung von der optimalen Gleichverteilung auf, dann wird die alte Verteilung durch die neue ersetzt. Danach wird der Vorgang so lange wiederholt, bis sich eine ausreichend gleichmäßige Blockverteilung eingestellt hat. Um die Konvergenzrate des Verfahrens zu vergrößern, werden für die zufälligen Vertauschungen vorzugsweise die Blöcke von Prozessoren mit der größten Abweichung von der mittleren Belastung herangezogen. Die mit diesem Verfahren erzielte Lastverteilung ist in Abbildung 4.11 für Gitter 2 dargestellt. Eine weitere Optimierung könnte erzielt werden, wenn räumlich aneinander grenzende Blöcke vorzugsweise demselben Prozessor zugeordnet würden. Damit kann der während der Strömungssimulation notwendige Austausch von Daten zwischen den Blöcken lokal erfolgen, was den Kommunikationsaufwand zwischen den einzelnen Prozessoren verringert. Dazu ist jedoch zum einen die Topologieinformation über die Verbindungen zwischen den Blöcken zu berücksichtigen und zum anderen ein Bewertungskriterium vorzugeben, welches eine Gewichtung einer Blocknachbarschaft gegenüber einer Abweichung von der Gleichverteilung von Gitterzellen erlaubt. Wegen des hohen algorithmischen Aufwands und der Abhängigkeit des Bewertungskriteriums von der für die Simulation verwendeten Rechnerarchitektur wurde dies jedoch nicht implementiert.

Damit sich die Strömung möglichst schnell entwickelt, wurden die Rechnungen zunächst auf groben Gittern durchgeführt und die damit gewonnenen Ergebnis-

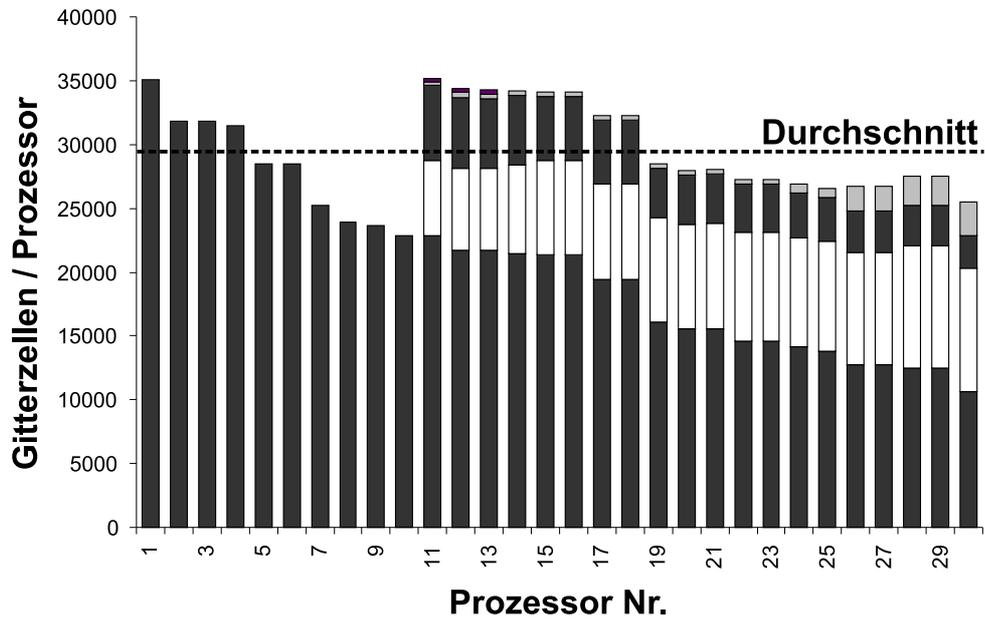


Abb. 4.10: Zuordnung der 93 Blöcke von Gitter 1 mit $8.8 \cdot 10^6$ Gitterzellen auf 30 Prozessoren; Aufteilung erfolgte durch einen einfachen Sortier- und Verteilungsalgorithmus.

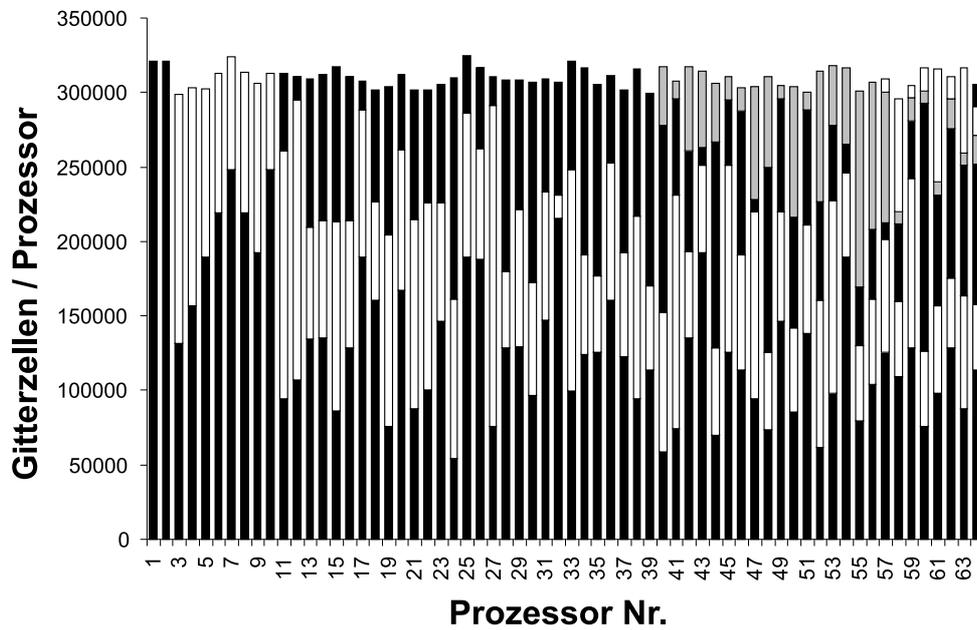


Abb. 4.11: Mit einem stochastischen, iterativen Selektions-Algorithmus erzielte sehr gleichmäßige Verteilung der 214 Blöcke von Gitter 2 ($18.5 \cdot 10^6$ Gitterzellen) auf 64 Prozessoren.

se auf zunehmend feinere Gitter interpoliert. Nachdem sich die Strömung entwickelt hatte, wurde bei der Rechnung mit Gitter 1 über 18 000 Zeitschritte zur Berechnung der Strömungsstatistiken gemittelt. Dafür wurden etwa 5 000 CPU-Stunden an Rechenzeit benötigt. Die Mittelungszeit betrug $T = 8.5 [L/U]$. Die Rechnungen mit Gitter 2 waren aufgrund der höheren Gitterauflösung deutlich aufwendiger. Sie wurden auf 64 Prozessoren der IBM SP-SMP durchgeführt und benötigten etwa 30 000 CPU-Stunden. Hier waren 35 000 Zeitschritte für eine Mittelungszeit von $T = 4.5 [L/U]$ erforderlich.

Die Simulationsergebnisse zeigen beim 25° -Fall für beide Gitter eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten von [Lienhard et al. \(2000\)](#) im vorderen Bereich des Testkörpers, wie [Abbildung 4.12](#) für die u -Geschwindigkeitsprofile erkennen lässt. In diesem Bereich ist die Turbulenzintensität sehr gering und die Strömung gleicht einer Potentialströmung. Die Strömung im Heckbereich ist für den 25° -Fall in den [Abbildungen 4.13a](#) und [4.13b](#) dargestellt. Die Abbildungen zeigen die mittlere u -Geschwindigkeit und deren turbulente Schwankungen in der Symmetrieebene. Obwohl beide Gitter die Grenzschicht nur ansatzweise auflösen, ist die Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den experimentellen Daten gut. Der größte Unterschied zu den experimentellen Daten ist die Position der kleinen Ablöseblase im Heckbereich, wobei die Simulation mit dem feineren Gitter 2 eine etwas bessere

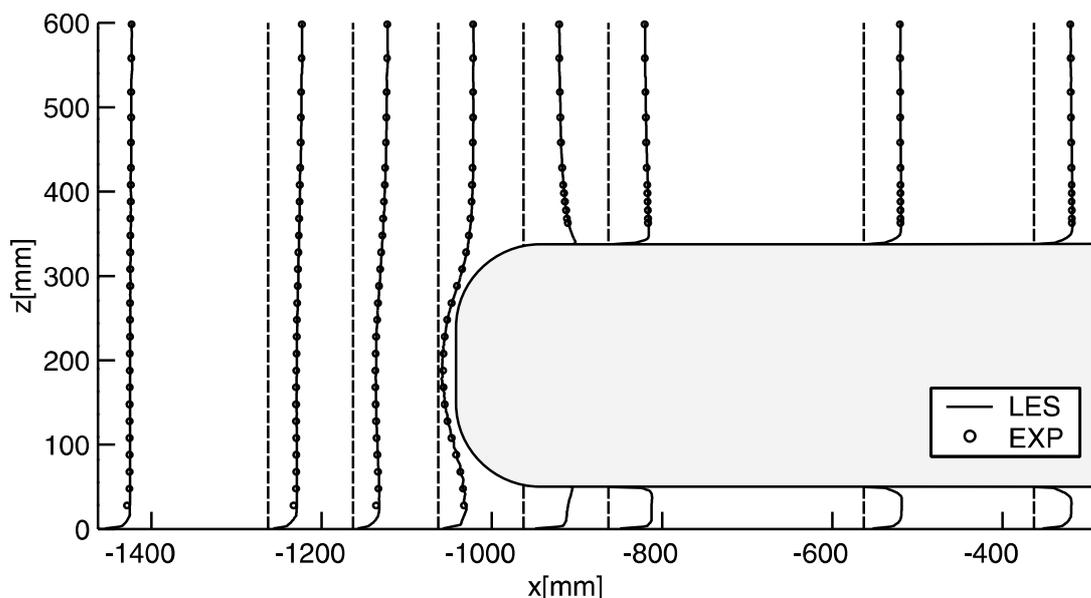
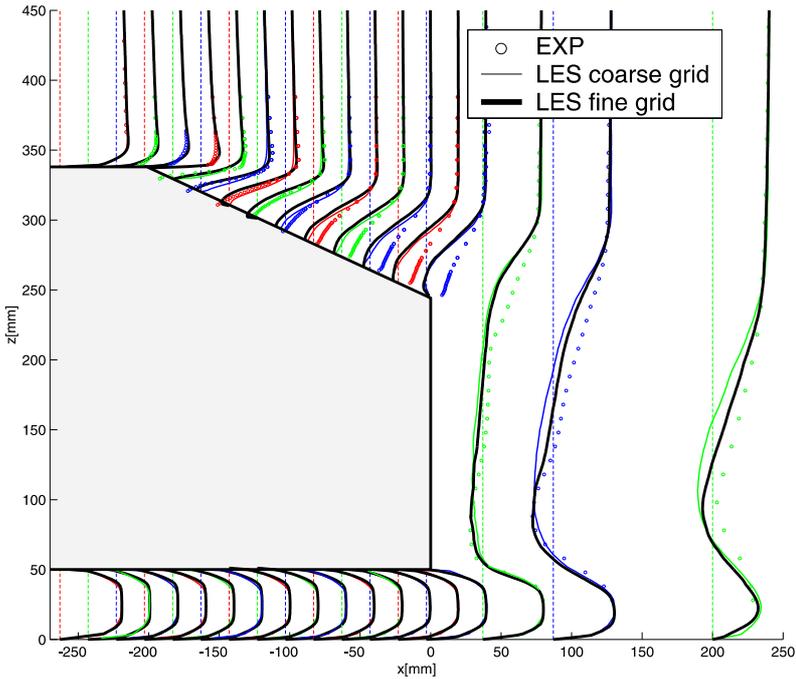
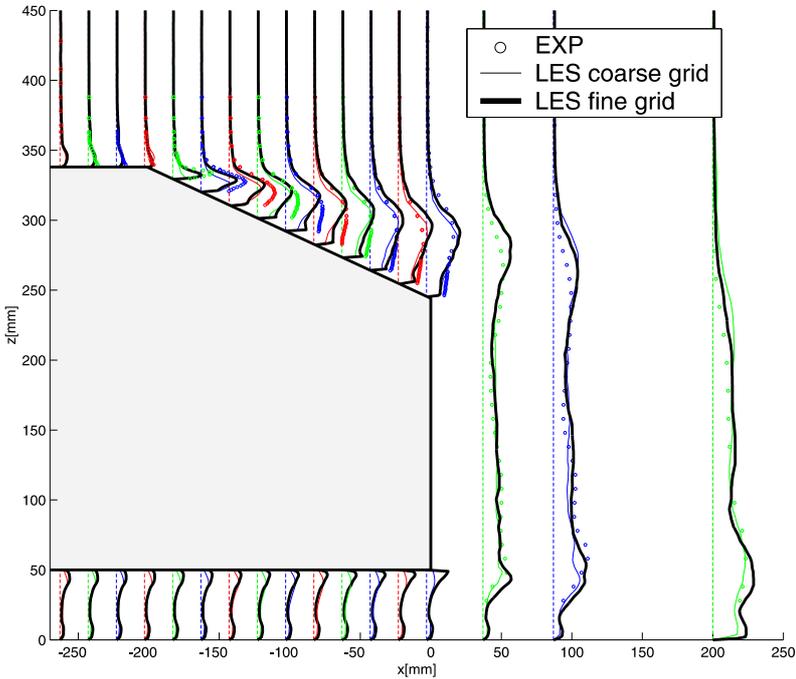


Abb. 4.12: Mittlere u -Geschwindigkeit (bei 25° Heckneigung) im Frontbereich des Testkörpers in der Symmetrieebene.



(a) u -Geschwindigkeit



(b) Geschwindigkeitsfluktuationen u'_{rms}

Abb. 4.13: u -Geschwindigkeit und Schwankungsbewegung bei 25° Heckneigung im Bereich des Hecks und des Nachlaufes innerhalb der Symmetrieebene.

Übereinstimmung aufweist. Auch die Stärke der Schwankungsbewegung in der Scherschicht nahe der Ablösekannte wird auf dem feineren Gitter besser wiedergegeben. Abbildung 4.14 zeigt anhand mehrerer Schnittebenen im Nachlauf die gute Übereinstimmung der berechneten Strömungsfelder mit dem Experiment. Die LES-Ergebnisse zeigen komplexe instationäre Strukturen im Nachlauf (Abb. 4.15). Signifikant sind die zwei großen gegensinnig rotierenden Nachlaufwirbel, welche in Abbildung 4.17 durch eine Isofläche im momentanen Druckfeld sichtbar gemacht wurden. In den Isoflächen der Druckfluktuationen (Abb. 4.16) lassen sich Wirbel ausmachen, welche sich, während sie stromab transportiert werden, um die Nachlaufwirbel wickeln und so spiralförmige Strukturen ausbilden. Außerdem werden an der Vorderkante der geneigten Heckfläche große Wirbel in Spannweitenrichtung generiert, die über die Heckfläche abrollen.

Die Berechnung der Strömung um den Testkörper mit $\varphi = 35^\circ$ erwies sich als deutlich schwieriger. Hier gelang es mit der LES nicht, eine völlig abgelöste Strömung im Heckbereich zu erhalten. Hauptgrund für die zu geringe Ablösung ist die durch das Gitter schlecht aufgelöste Grenzschicht. Als Folge ergeben sich große Abweichungen im Strömungsfeld im Nachlauf (hier nicht dargestellt), die sich auch auf den berechneten Widerstandsbeiwert auswirken. Die durchgeführten Simulationen demonstrieren dennoch die Flexibilität des LES-Verfahrens. Die LES der Strömung um den komplexen Testkörper bei einer hohen Reynoldszahl und einer entsprechend hohen Gitterauflösung beweist die Leistungsfähigkeit des weiterentwickelten LES-Programms. Die Behandlung solcher Problemgrößen – $O(2 \cdot 10^7)$ Gitterpunkte – ist zur Zeit nur auf Parallelrechnern mit hochoptimierten Kommunikationsalgorithmen möglich und stellt auch ohne die komplexe Geometrie und die daraus resultierende komplexe Blockstruktur eine technische Herausforderung dar.

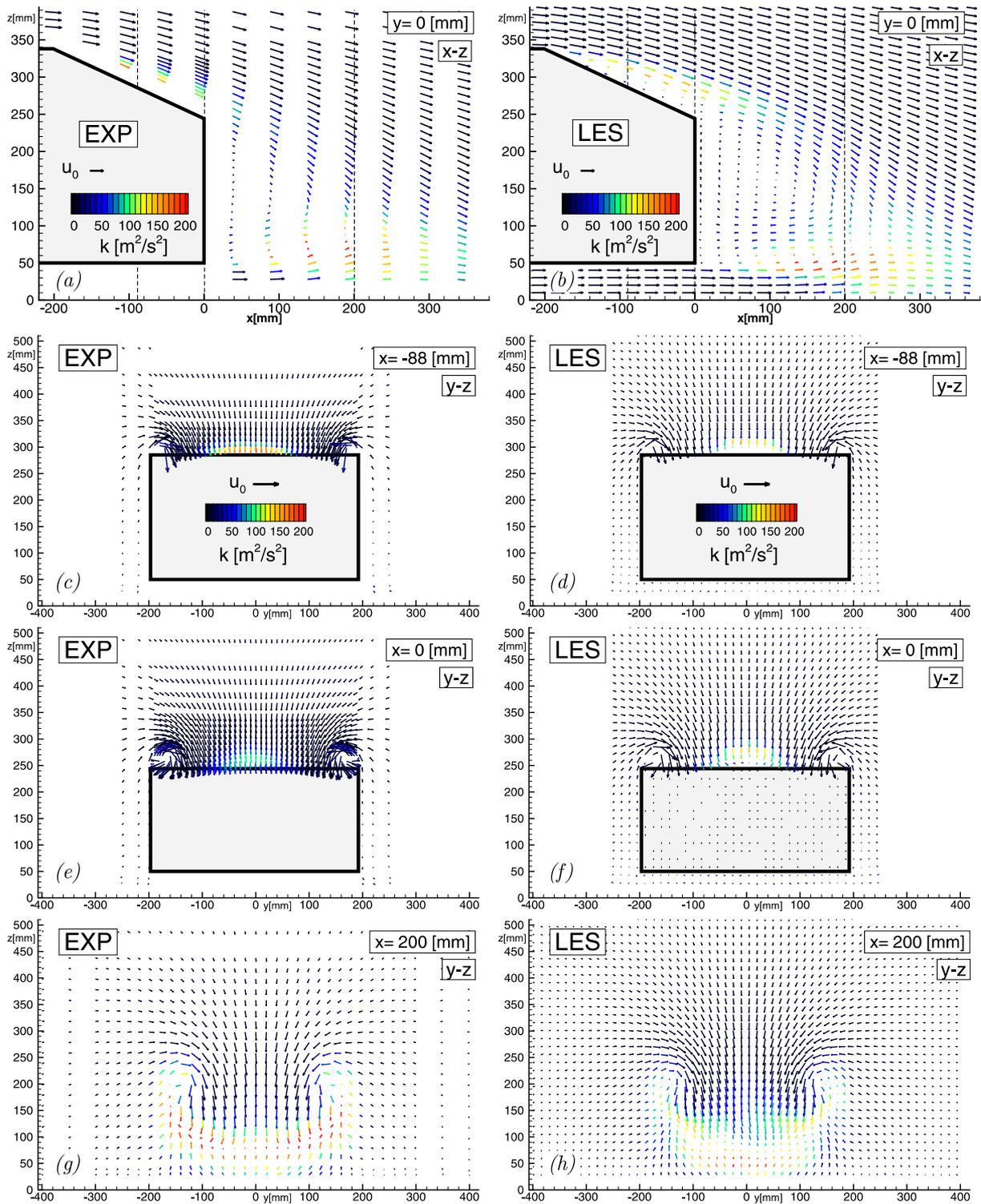


Abb. 4.14: Mittleres Strömungsfeld eingefärbt mit der Stärke der turbulenten kinetischen Energie: (a, b) Symmetrieebene $y = 0$ mm, (c, d) nahe der Mitte der geneigten Heckfläche $x = -88$ mm, (e, f) Ende des Körpers $x = 0$ mm, (g, h) Nachlauf in Körperrnähe $x = 200$ mm. (a, c, e, g) Experiment, (b, d, f, h) LES mit Gitter 2.

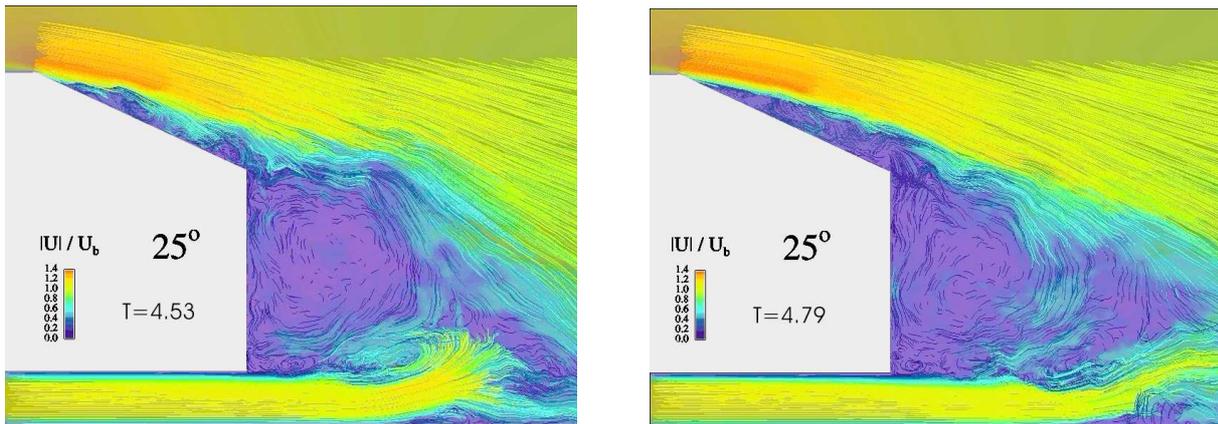


Abb. 4.15: Momentanes Strömungsfeld in der Symmetrieebene an zwei Zeitpunkten.

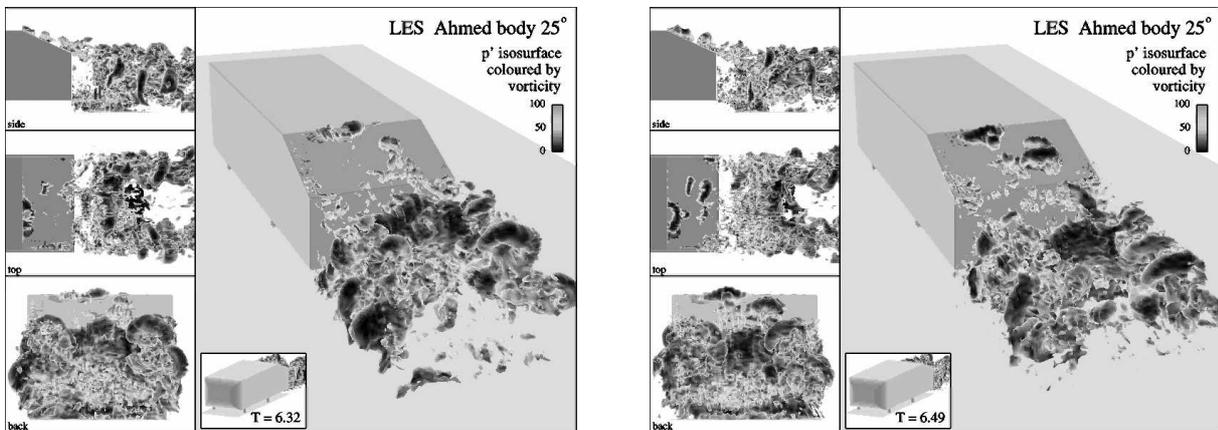


Abb. 4.16: Isofläche der Druckfluktuationen $p' = p - \langle p \rangle$ an zwei Zeitpunkten.

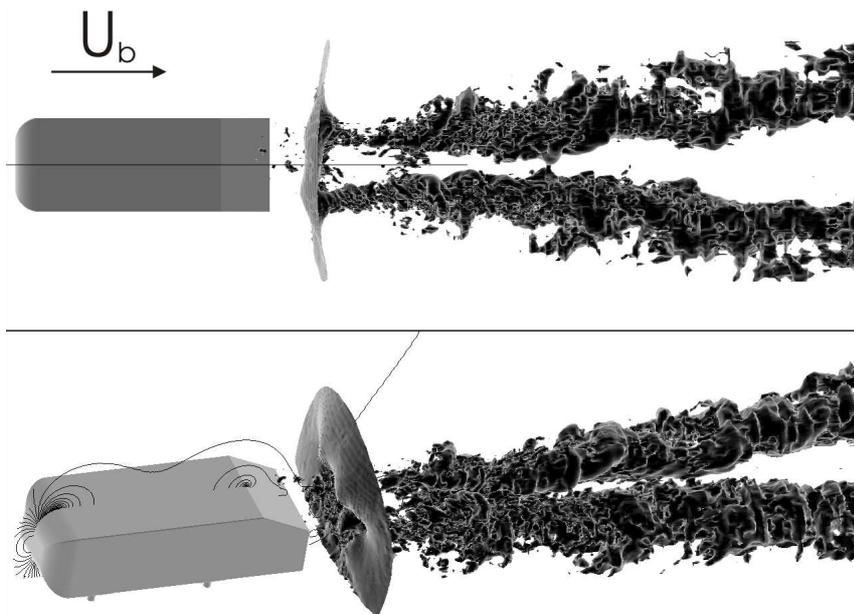


Abb. 4.17: Isofläche (Ausschnitt) des momentanen Druckfeldes p .
Oben: Draufsicht; unten: Ansicht von schräg oben vorne.

4.2.3 Kanal- und Gerinneströmung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden zahlreiche LES-Rechnungen für den geschlossenen Kanal und die Gerinneströmung durchgeführt. Diese Rechnungen dienen zur Weiterentwicklung und Verifikation des eingesetzten 3D-LES-Verfahrens. Dabei interessiert besonders der Einfluss der räumlichen Auflösung des numerischen Gitters auf die Ergebnisgenauigkeit.

Ein weiterer wesentlicher Punkt war auch die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen tiefengemittelter Geschwindigkeit und Sohlreibung. Dabei zeigte sich die Bedeutung einer möglichst genauen Wandmodellierung.

4.2.3.1 Kanalströmung

Die voll ausgebildete turbulente Strömung zwischen zwei Platten, oft auch als ebene Kanalströmung bezeichnet, ist ein vielfach untersuchter einfacher Standard-Testfall für Strömungssimulationen. Für diese Strömung sind umfangreiche experimentelle Daten und DNS-Ergebnisse verfügbar. Im Folgenden wird durch Vergleich mit DNS-Daten (Moser, Kim und Mansour 1999) überprüft, ob das LES-Verfahren die Kanalströmung für den Fall $Re_\tau = 590$ richtig wiedergibt. Dabei bezeichnet $Re_\tau = \langle u_\tau \rangle \delta / \nu$ die mit der Schubspannungsgeschwindigkeit und der halben Kanalhöhe δ gebildete Reynoldszahl. Dies entspricht einer Reynoldszahl $Re_b = U_b \delta / \nu$ von 10 935, die mit der über den Kanalquerschnitt gemittelten Strömungsgeschwindigkeit U_b gebildet wird. Die Größe des Rechengebietes entsprach der DNS mit einer Länge des periodischen Rechengebietes von $2\pi\delta$ und einer Breite von $\pi\delta$ bezogen auf die halbe Kanalhöhe δ . Tabelle 4.1 gibt eine Übersicht über die verwendeten Rechengitter. Das zuerst verwendete Gitter 1 hatte 120 Zellen in Strömungsrichtung ($x^+ \approx 30.8$) und 80 Zellen in Spannweitenrichtung ($z^+ \approx 23.2$). In Wandnormalenrichtung (y -Richtung) wurden über die Kanalhälfte 80 Zellen verteilt und an der Wand kon-

3D-LES Gitter	Rechengebiet			Gitterzellen (u. Streckung)			Auflösung ($Re_\tau = 590$)		
	L/δ	H/δ	B/δ	N_x	N_y	N_z	Δx^+	Δy^+	Δz^+
Gitter 1	2π	2	π	120	160 (3-5 %)	80	30.8	0.5 – 15	23.2
Gitter 2	2π	2	π	128	128 (3 %)	128	29.0	3.1 – 20	14.5

Tabelle 4.1: Rechengitter für Kanalströmung.

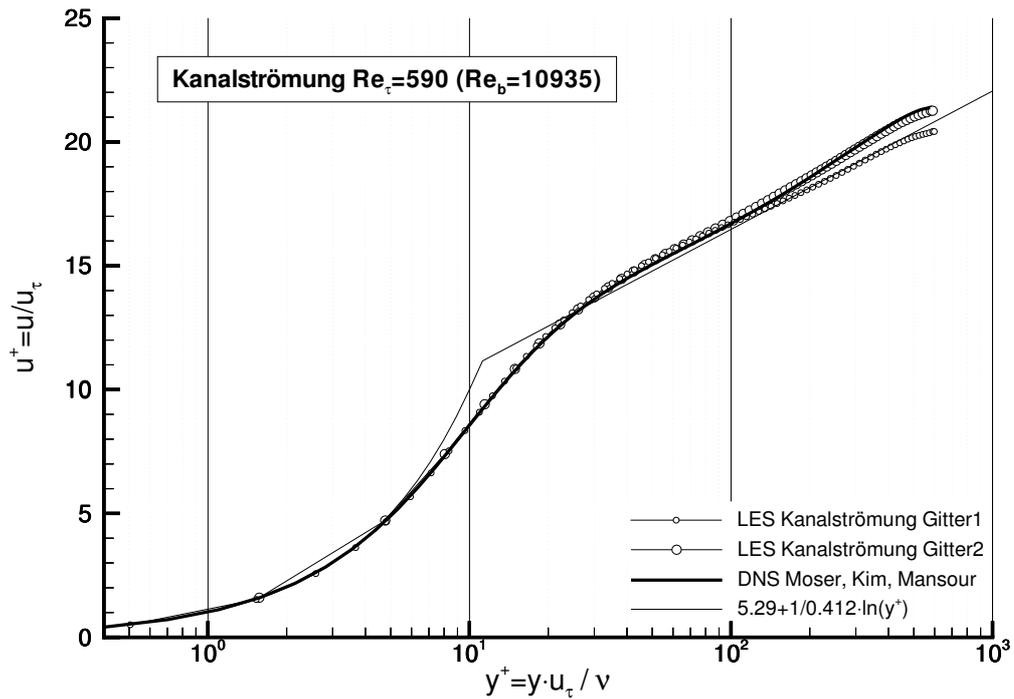


Abb. 4.18: Dimensionslose mittlere Geschwindigkeitsprofile bei periodischer Kanalströmung, halb-logarithmische Darstellung, $Re_b = U_b \delta / \nu = 10\,935$, ($Re_\tau = 590$); Vergleich mit DNS (Moser et al. 1999).

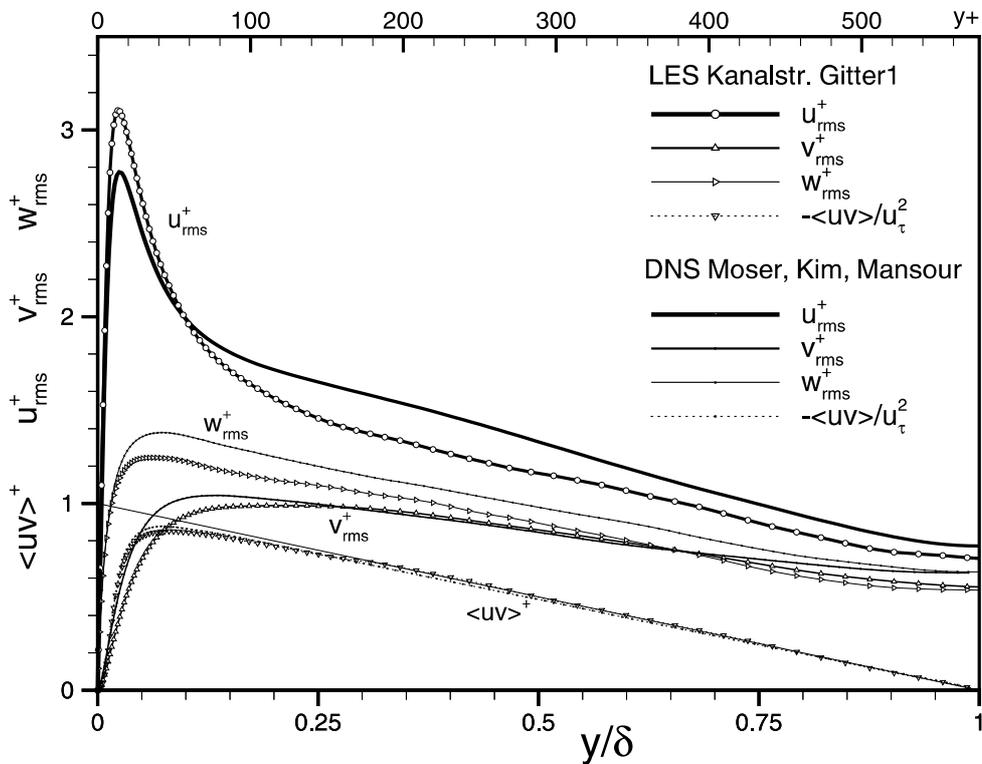


Abb. 4.19: RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und die Schubspannungsverteilung bei periodischer Kanalströmung, $Re_b = 10\,935$ auf Gitter 1.

zentriert. Die Gitterstreckung betrug nahe der Wand 3 %, ansonsten 5 %. Als besonders wichtig erwies sich die Auflösung in Spannweitenrichtung. Dies wurde bei Gitter 2 mit 128 Zellen in Spannweitenrichtung ($z^+ \approx 14.5$) und 128 Zellen ($x^+ \approx 29.0$) in Strömungsrichtung berücksichtigt. In Wandnormalenrichtung wurden 64 Zellen bis zur Kanalmitte mit einer Streckung von 3 % verteilt.

Abbildung 4.18 zeigt die mit dem Smagorinsky-Modell, mit $C_S = 0.065$, und Van Driest-Dämpfung in Wandnähe berechneten dimensionslosen mittleren Geschwindigkeitsprofile im Vergleich mit den DNS-Ergebnissen. Die Übereinstimmung mit der DNS ist bei Gitter 2 sehr gut. Die mit Gitter 1 berechneten RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und die Schubspannungsverteilung werden in Abbildung 4.19 gezeigt. Die Unterschiede zu den hier nicht abgebildeten, mit Gitter 2 berechneten Statistiken sind marginal. Ein Vergleich der LES-Ergebnisse mit der DNS zeigt eine gute Übereinstimmung bei den Schubspannungen $\langle uv \rangle^+$. Bei den Normalspannungen liegt der Peak der u -Schwankungen nahe der Wand etwa 10 % über den DNS-Ergebnissen und im Strömungsinnen (ab einem Wandabstand von etwa 0.1δ) liegen die u - und w -Schwankungen bis zu 15 % unterhalb der DNS, außerdem sind in Wandnähe die wandnormalen v -Schwankungen etwas zu gering. Die Ursachen für diese Abweichungen sind vielfältig und primär in der Kombination aus beschränkter Gitterauflösung, dem einfachen Feinstrukturmodell, dem hier bei der Auswertung nicht berücksichtigten Feinstruktur-Anteil der turbulenten Schwankungsbewegung sowie im numerischen Dispersionsfehler der verwendeten zentralen Differenzen 2. Ordnung zu suchen. Insgesamt lässt sich jedoch feststellen, dass die beiden LES-Rechnungen, insbesondere die mit Gitter 2, die DNS-Ergebnisse gut wiedergeben.

4.2.3.2 Gerinneströmung

Eine Gerinneströmung hat Gemeinsamkeiten mit einer geschlossenen Kanalströmung, denn die Geometrie einer Gerinneströmung entspricht einer in der Symmetrieebene halbierten Kanalgeometrie (Abb. 4.20). Anstelle der Symmetrieebene tritt nun eine freie Oberfläche, die hier jedoch mit der Rigid-Lid-Vereinfachung (vgl. Abschnitt 3.3.1) gleich einer Symmetrierandbedingung behandelt wird.

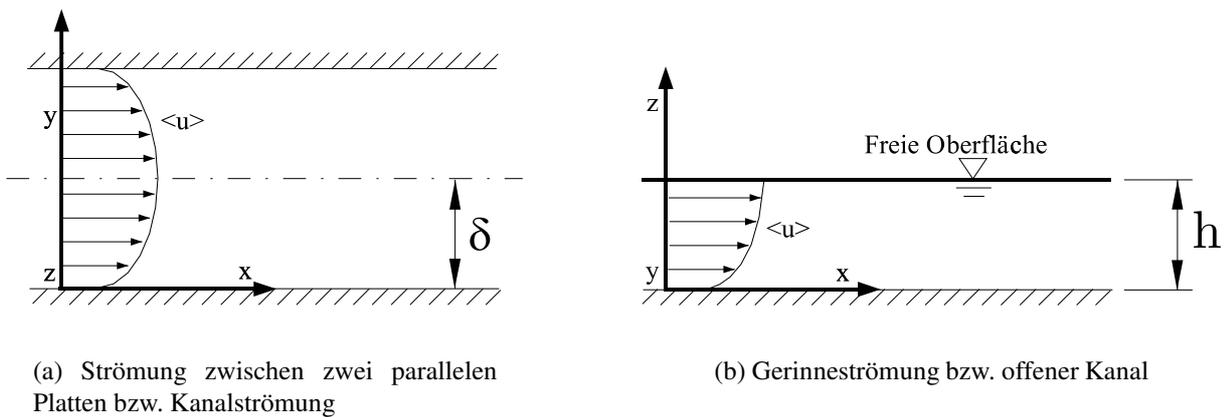


Abb. 4.20: Schematische Darstellung von Kanal- und Gerinneströmung.

In dieser Arbeit wird für Gerinneströmungen ein Koordinatensystem verwendet, dessen x -Achse in Hauptströmungsrichtung, y -Achse in Querrichtung und z -Achse in vertikaler Richtung – entgegengesetzt zur Tiefenrichtung – verläuft. Für die hier beschriebenen Testrechnungen wird jedoch ausnahmsweise das Koordinatensystem der Kanalströmung für die Gerinneströmung übernommen, um den direkten Vergleich der Simulationsergebnisse der Gerinneströmung mit der Kanalströmung zu erleichtern.

Zunächst wurde die Gerinneströmung mit Gitter 2 (siehe Tabelle 4.2) berechnet, welches von der Auflösung dem (an der Symmetrieebene halbierten) Gitter 2 bei der Kanalströmung entspricht. Das damit für die Gerinneströmung berechnete mittlere Geschwindigkeitsprofil ließ keinen Unterschied zur Kanalströmung erkennen (bezogen auf eine Hälfte bis zur Symmetrieebene). Die für die Gerinneströmung berechneten mittleren Geschwindigkeitsprofile entsprechen somit den für die Kanalströmung in Abbildung 4.18 dargestellten Profilen. Anders ist die Situation bei den turbulenten Schwankungen. Abbildung 4.21 zeigt die turbulenten Schwankungsgrößen für den geschlossenen Kanal und die Gerinneströmung. Hier ist zu sehen, wie in der Gerinneströmung die vertikalen Schwankungen an der Wasseroberfläche gedämpft werden und sich deren Energie auf die horizontalen Schwankungen verlagert. Der Einfluss der Wasseroberfläche auf die Schwankungsgrößen erstreckt sich in diesem Fall bis in eine Tiefe von etwa 25 % der Wassertiefe h .

Die Berechnung von Gerinneströmungen mit einer großen horizontalen Ausdehnung zwingt zu Abstrichen bei der Gitterauflösung. Daher wurde zunächst versucht, mit möglichst wenig Zellen in Tiefenrichtung die Grenzschicht auf-

zulösen. Dazu wurde das grobe Gitter 3 entworfen, welches in Tiefenrichtung 26 Gitterzellen mit stark variabler Gitterstreckung so verteilt, dass einerseits die viskose Unterschicht und der Übergangsbereich gut aufgelöst werden und sich andererseits eine Gitterweite mit $\Delta y \approx 0.05h$ für Bereiche mit $y/h > 0.1$ ergibt. Zur Auflösung der Wandgrenzschicht in Strömungs- und Spannweitenrichtung wurde eine dem Gitter 2 entsprechende Auflösung beibehalten. Mit dem groben Gitter 3 wird jedoch nun die Wandschubspannung nicht mehr korrekt berechnet und liegt etwa 6 % unter dem Wert der DNS. Dies führt zu deutlichen Abweichungen in den mit der Schubspannungsgeschwindigkeit normierten Geschwindigkeitsprofilen. Dies ist in Abbildung 4.22 zu sehen, wo die mittleren Geschwindigkeitsprofile bei grobem und feinem Gitter gegenübergestellt werden. Werden die Ergebnisse auf dem groben Gitter mit der nominalen Wandschubspannung aus der DNS skaliert, sind die Unterschiede in den Ergebnissen zwischen grobem und feinem Gitter gering. Auch die turbulenten Schwankungsgrößen, wie in Abbildung 4.23 (normiert mit u_τ aus LES) dargestellt, werden auf dem groben Gitter noch gut wiedergegeben.

Bei der Berechnung von Gerinnen mit großer horizontaler Ausdehnung ist aber die hohe Gitterauflösung in Spannweitenrichtung wie bei Gitter 3 nicht realisierbar. Mit einer geringeren Spannweitenauflösung kann die sohlnahe Grenz-

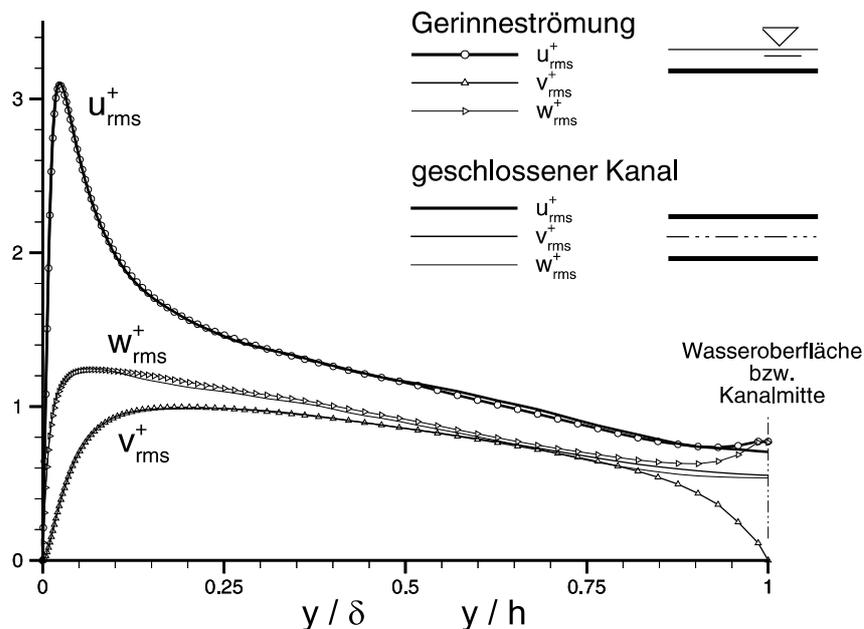


Abb. 4.21: Vergleich turbulenter Schwankungsgrößen von geschlossenem Kanal und Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$ auf Gitter 2.

schicht nicht mehr richtig aufgelöst werden. Dies betrifft vor allem die als *Streaks* bezeichneten, länglichen Wirbelstrukturen, die wesentlich zum turbulenten Impulsaustausch in der Grenzschicht beitragen. Als Lösung bietet sich die Verwendung von Wandgesetzen an. Für Gerinneströmungen haben sich dabei uniforme Gitter mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ gut bewährt. Mit Gitter 4, einem Gitter mit nur 10 uniformen Gitterzellen in Tiefenrichtung ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1h$), wurde versucht eine Gerinneströmung mit einer möglichst niedrigen Gitterauflösung zu simulieren. Abbildung 4.24 zeigt den Vergleich der damit berechneten Geschwindigkeitsprofile mit der DNS und dem logarithmischen Wandgesetz. Zusätzlich ist der Verlauf der über die wandnächste Zelle nach Gleichung 3.11 integrierten Wandfunktion eingezeichnet. Deutlich ist zu erkennen, dass die berechnete mittlere Geschwindigkeit im wandnächsten Kontrollvolumen auf der Kurve der integrierten Wandfunktion liegt, während die Geschwindigkeiten in den anderen Kontrollvolumen nahe dem logarithmischen Gesetz liegen. Abbildung 4.25 zeigt die berechneten Reynoldsspannungen im Vergleich mit den Ergebnissen auf dem hochaufgelösten Gitter 3. Da Gitter 4 verglichen mit Gitter 3 nur 4 % der Gitterpunkte pro Flächeneinheit ($\sim h^2$) benötigt und dennoch relativ gute Ergebnisse für die Reynoldsspannungen liefert, wird es damit möglich, auch größere Strömungsgebiete mit einer 3D-LES abzudecken.

3D-LES	Rechengebiet			Gitterzellen (u. Streckung)			Auflösung ($Re_\tau = 590$)		
	Rechnung	L/h	H/h	B/h	N_x	N_y	N_z	Δx^+	Δy^+
Gitter 2	2π	1	π	128	64 (3%)	128	29.0	3.1 – 20.2	14.5
Gitter 3	2π	1	π	128	26 (0 – 50%)	128	29.0	3.1 – 30	14.5
Gitter 4	10	1	5	100	10 (uniform)	50	59.0	59	59

Tabelle 4.2: Rechengitter für Gerinneströmung.

Als nächsten Schritt galt es, die Modellierung rauer Wände zu verifizieren. Mit der hier verwendeten Modellierung rauer Wände ist die maximal sinnvolle Rauigkeitshöhe durch die Höhe der Wandzellen beschränkt. In Abbildung 4.26 werden die berechneten mittleren Geschwindigkeitsprofile bei glatter und rauer Sohle ($k_s^+ = 80$) gegenübergestellt. Abbildung 4.27 zeigt die berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei rauer Sohle im Vergleich mit Experimenten von Nezu und Nakagawa (1993). Die berechneten Werte stimmen mit den experimentellen Ergebnissen gut überein.

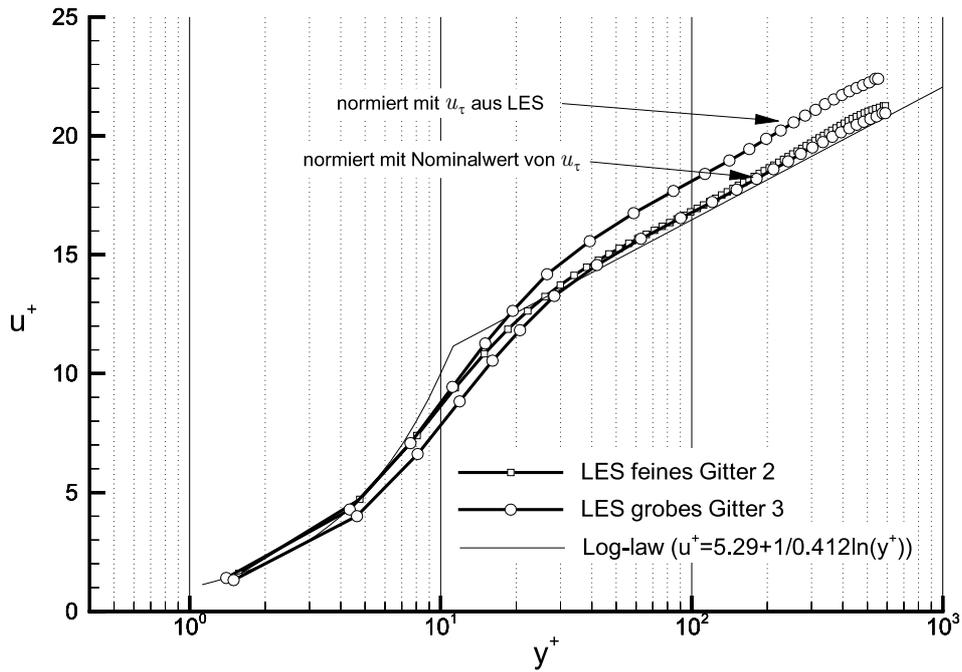


Abb. 4.22: Vergleich der mittleren Geschwindigkeitsprofile bei unterschiedlicher Gitterauflösung (Gitter 2 und 3), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$.

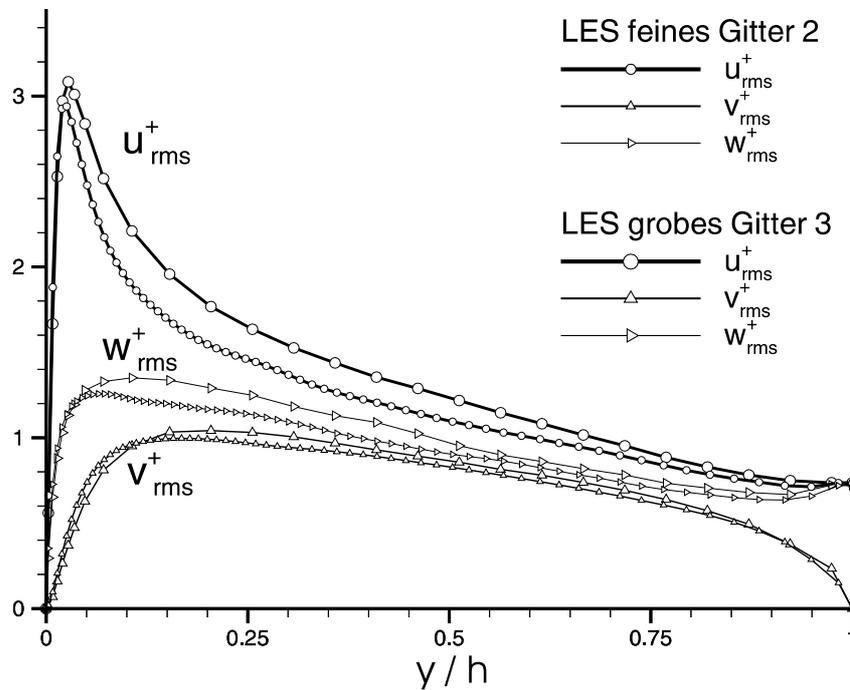


Abb. 4.23: Vergleich der berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei unterschiedlicher Gitterauflösung (Gitter 2 und 3), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$.

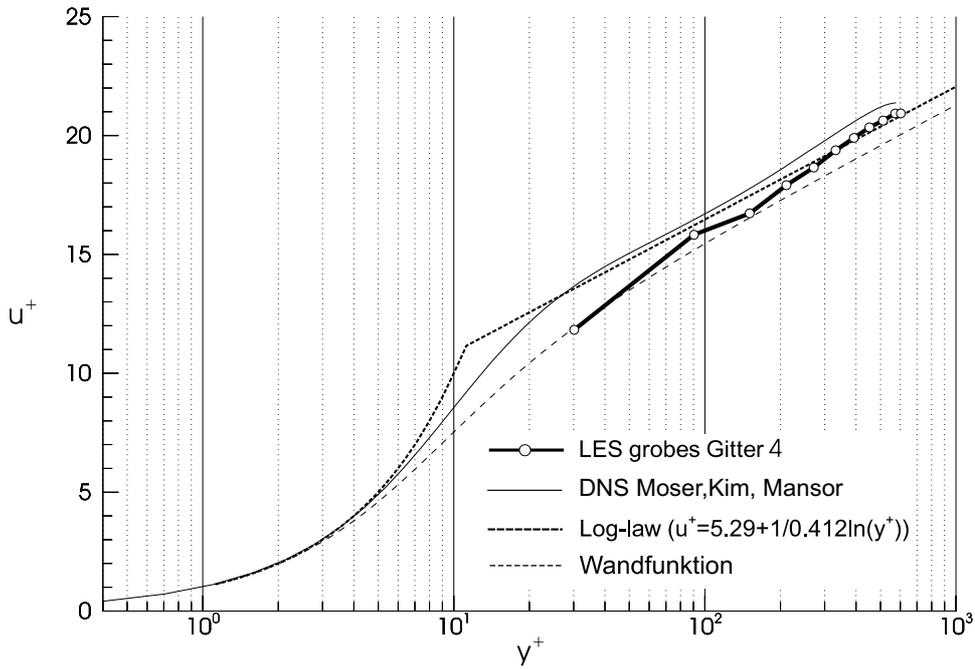


Abb. 4.24: Mittleres Geschwindigkeitsprofil mit grobem Gitter 4 ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1h$), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$.

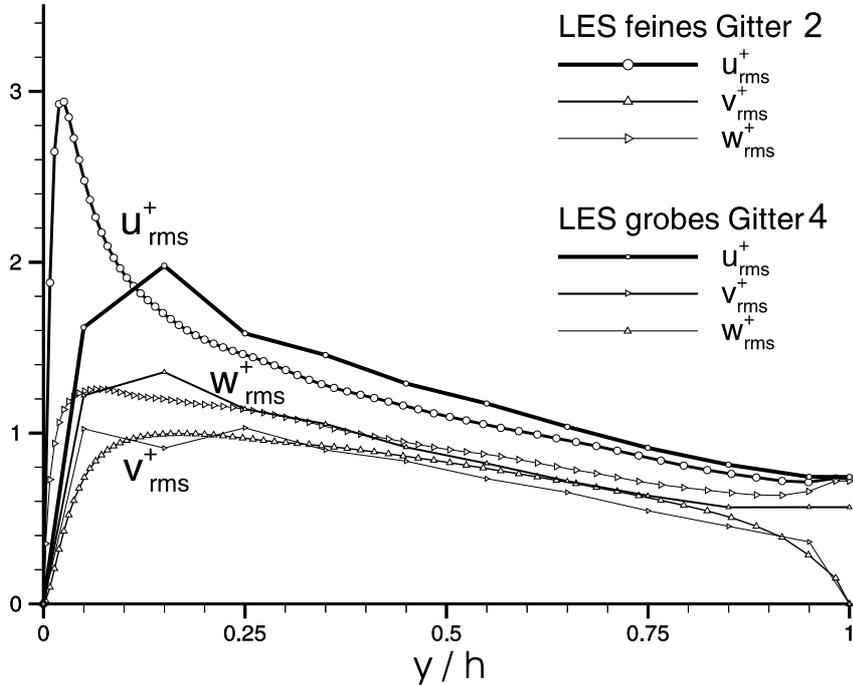


Abb. 4.25: Vergleich der berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei unterschiedlicher Gitterauflösung (Gitter 2 und 4), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$.

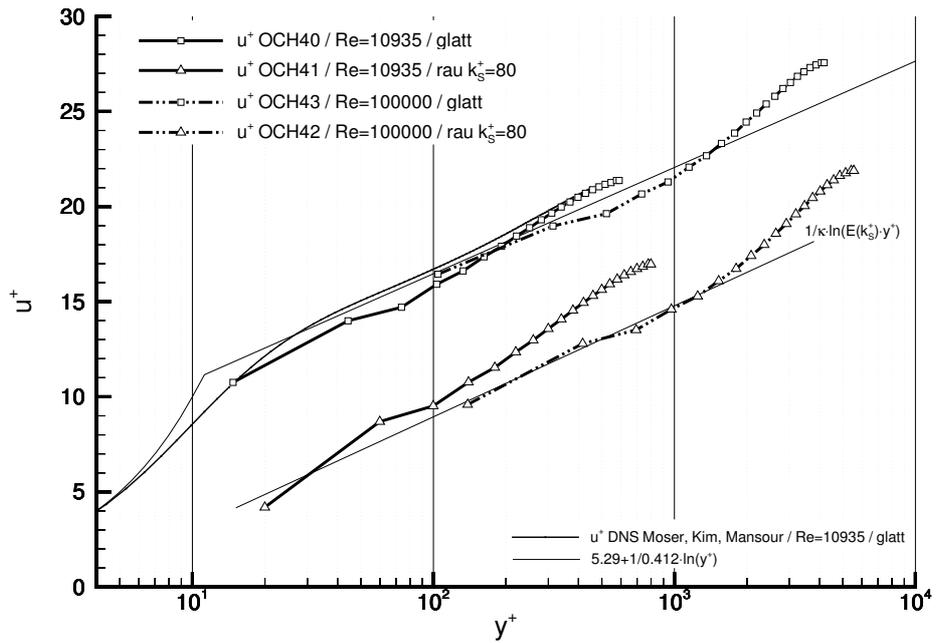


Abb. 4.26: Vergleich der mittleren Geschwindigkeitsprofile bei glatter und rauher Sohle, Gerinneströmung $Re_b = 10\,935$ bzw. $Re_b = 100\,000$, Rauigkeitshöhe $k_s^+ = 0$ bzw. $k_s^+ = 80$.

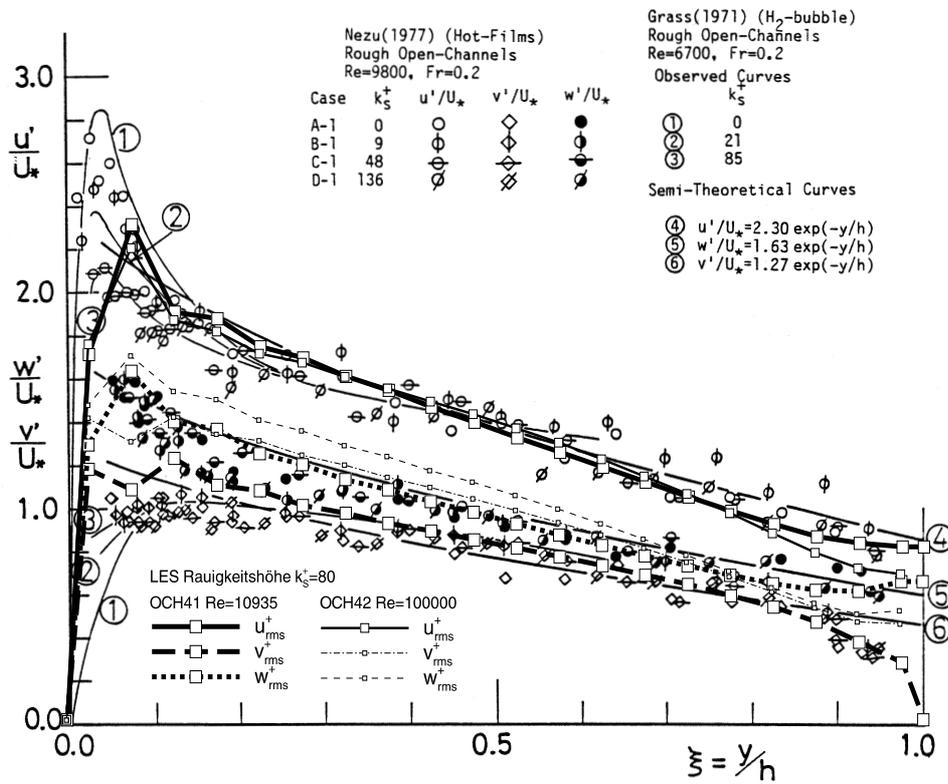


Abb. 4.27: Vergleich der berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei rauher Sohle mit Experimenten von Nezu und Nakagawa (1993).

4.2.3.3 Gegliedertes Rechteckgerinne

Im gegliederten Rechteckgerinne ändert sich die Wassertiefe sprunghaft zwischen dem tiefen Hauptgerinne mit Tiefe H und dem flachen Vorlandgerinne mit Tiefe h . Dadurch ändert sich entsprechend der Strömungswiderstand, so dass die Fließgeschwindigkeit im Hauptgerinne größer als im Vorlandgerinne ist. Durch die Scherung entstehen an der Stelle des Übergangs horizontale Wirbel. Diese horizontalen Strukturen sind in Abbildung 4.31 gut zu sehen. Sie wurden von Alavian und Chu (1985) im Experiment durch Farbstoffzugabe sichtbar gemacht.

Zunächst wurde ein schmales Gerinne mit der Breite $B = 5H$ und dem Tiefenverhältnis $h/H = 1/2$ berechnet. Die Länge des in Strömungsrichtung periodischen Rechengebiets betrug $20H$. Das Rechengitter hat in x -Richtung 200 Zellen, in Tiefenrichtung 30 Zellen auf der tiefen und 15 Zellen auf der flachen Seite sowie 150 Zellen in Spannweitenrichtung. Die Modellierung der Wasseroberfläche erfolgt als reibungsfreie starre Wasseroberfläche. Die Sohle und die Seitenwände werden als hydraulisch glatte Wände mit der in Abschnitt 3.3.5.1 beschriebenen Wandfunktion behandelt. Als Feinstrukturmodell wird das Smagorinsky-Modell, mit $C_S = 0.065$, verwendet.

Zur Visualisierung der Wirbelstrukturen wurde im Rahmen dieser Arbeit das λ_2 -Kriterium nach Jeong und Hussain (1995) implementiert. Dabei bezeichnet λ_2 den zweitgrößten Eigenwert des aus dem symmetrischen und antisymmetrischen Teil des Deformationsgeschwindigkeitstensors $\nabla \mathbf{u}$ gebildeten symmetrischen Tensors $\mathbf{S}^2 + \mathbf{\Omega}^2$. Innerhalb eines Wirbels gilt $\lambda_2 < 0$. Abbildung 4.28 zeigt die berechneten Wirbelstrukturen bei der relativ kleinen Reynoldszahl von $Re_H = U_b H / \nu = 3\,000$. Leider wird λ_2 primär durch die kleinen Strukturen bestimmt, so dass bei hohen Reynoldszahlen mit relativ grobem Rechengitter keine Wirbelstrukturen mehr erkennbar sind. Auch eine Tiefpassfilterung des Geschwindigkeitsfeldes vor Berechnung von λ_2 brachte bei den untersuchten Strömungssituationen keine signifikante Verbesserung.

In Abbildung 4.29 ist die Geschwindigkeitsverteilung U/U_{max} über den Gerinnequerschnitt bei einer Reynoldszahl von $Re_H = 100\,000$ den Messungen von Tominaga und Nezu (1989) gegenübergestellt. Da die Reynoldszahl im Experiment deutlich geringer ist, ist hier nur ein qualitativer Vergleich möglich. Dasselbe gilt für die in Abbildung 4.30 dargestellten Sekundärströmungen, die

eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten aufweisen.

Beim schmalen Gerinne war die Möglichkeit der Ausbildung von großen zweidimensionalen Wirbeln durch die geringe laterale Ausdehnung von nur fünf Wassertiefen stark begrenzt. Ganz anders ist die Situation im daraufhin untersuchten Fall mit einer Gerinnebreite von $30H$, einer Länge von $60H$ und dem Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$. Wegen der Größe des Rechengebietes ist hier der Rechenaufwand um ein Vielfaches höher als bei den zuvor untersuchten Fällen. Um den Rechenaufwand dennoch in Grenzen zu halten, wurde zuerst mit einem relativ groben Gitter mit 10^6 Zellen gerechnet. Anschließend wurde die Gitterauflösung in Spannweitenrichtung verdoppelt und in Strömungsrichtung verdreifacht. Das feine Gitter mit $6 \cdot 10^6$ Zellen hat in x -Richtung 600 Zellen ($\Delta x^+ \approx 60$), in Tiefenrichtung 40 Zellen ($\Delta y^+ \approx 15$) auf der tiefen und 10 Zellen auf der flachen Gerinnenhälfte sowie 400 Zellen in Spannweitenrichtung ($\Delta z^+ \approx 40$).

Abbildung 4.32 zeigt die turbulenten Schwankungsbewegungen an der Wasseroberfläche, Abbildung 4.33 die Wirbelstärke. Deutlich sind großskalige zweidimensionale Wirbel zu erkennen. So entspricht der Durchmesser der größten erkennbaren Strukturen mit $30H$ der Breite des Gerinnes. Aber auch kleinere Wirbel mit etwa $10H$ Durchmesser sind zu sehen. In den erstellten Strömungsanimationen sieht man, wie sich die kleinen Wirbel sprunghaft zu größeren Wirbeln vereinigen. Dieser Prozess wird als inverse Energiekaskade oder Vortex-Pairing bezeichnet. Die inverse Energiekaskade der 2D-Turbulenz hat wie die normale Energiekaskade ein Spektrum mit einer Steigung von $k^{-5/3}$ (Lesieur 1990). In Regionen, in denen den zweidimensionalen Wirbeln keine Energie durch Scherung zugeführt wird, verlieren diese an Energie und es ergibt sich ein für abklingende 2D-Turbulenz typisches Batchelor-Spektrum mit k^{-3} .

Einen Eindruck der Änderung der Energiespektren über die Wassertiefe gibt Abbildung 4.34. Die Spektren wurden aus den Geschwindigkeiten entlang von Geraden in Strömungsrichtung in der Mitte ($z/H = -7.5$) des tiefen Hauptgerinnes berechnet. Nahe der Wasseroberfläche (Position 10) ist die Energie der Schwankungen in Tiefenrichtung um mehrere Größenordnungen kleiner als die der horizontalen Schwankungen. Mit zunehmender Wassertiefe nimmt die Gesamtenergie $\langle u_i'^2 \rangle / 2$ der Schwankungen zu, besonders die kleineren Skalen werden energiereicher. Die Energiespektren an verschiedenen Positionen in Spannweitenrichtung nahe der Wasseroberfläche zeigt Abbildung 4.35. An der

Stelle des Übergangs vom seichten ins tiefe Gewässer (zwischen Pos. 2 und 9) bewirkt die laterale Scherung das Entstehen horizontaler Wirbel. Durch Vortex-Pairing verlagert sich die Energie dieser Wirbel zu den größeren Skalen hin. Das Spektrum hat eine Steigung von $k^{-5/3}$. Auf der seichten Seite werden die Wirbel durch die Sohlreibung stark gedämpft (Pos. 5 und 6). Es ergibt sich dort ungefähr eine k^{-3} Verteilung im Spektrum.

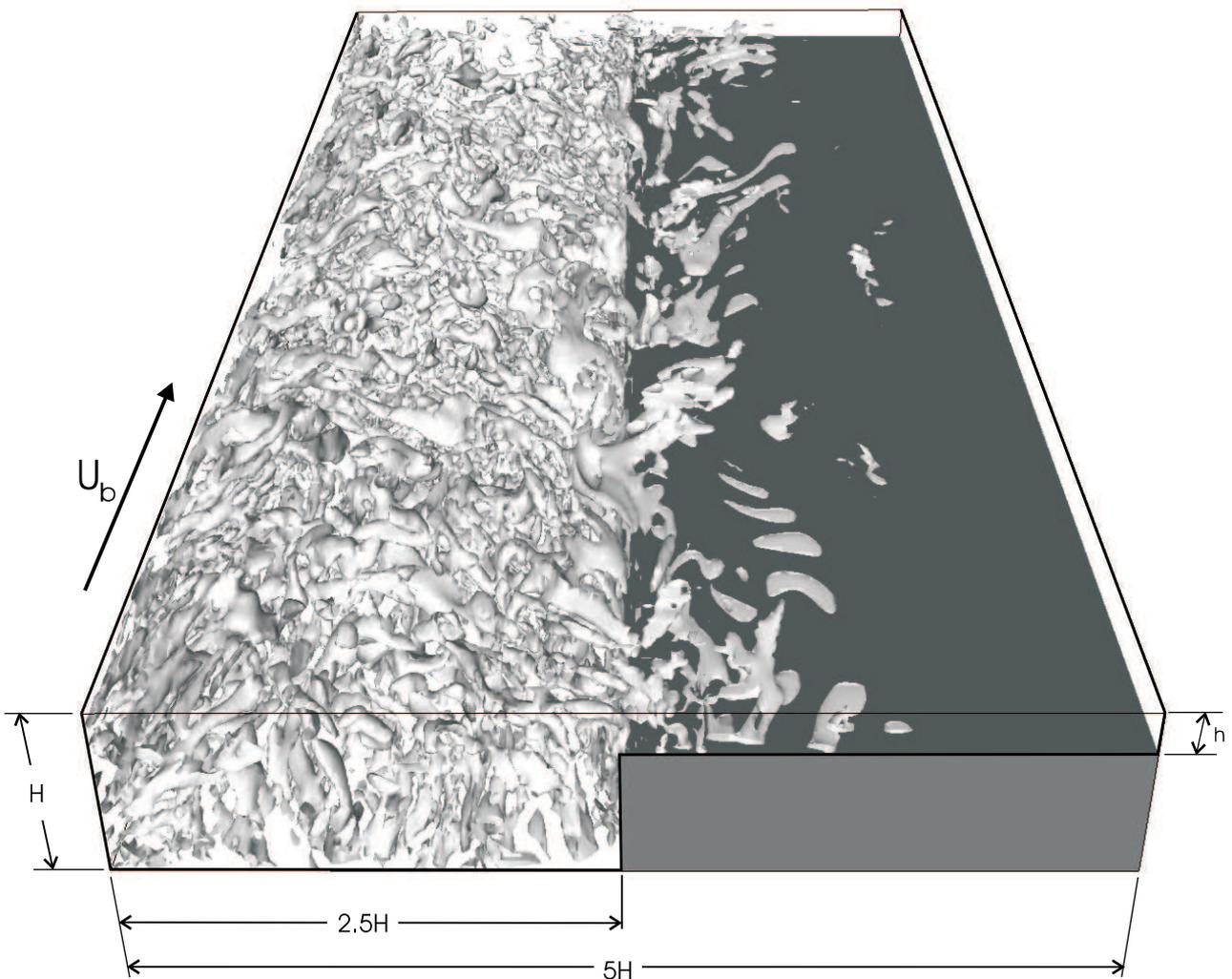


Abb. 4.28: Darstellung der Wirbelstrukturen im gegliederten Rechteckgerinne mit dem λ_2 -Kriterium nach Jeong und Hussain (1995), Isofläche $\lambda_2 = -0.02$, Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$, $Re_H = 3000$.

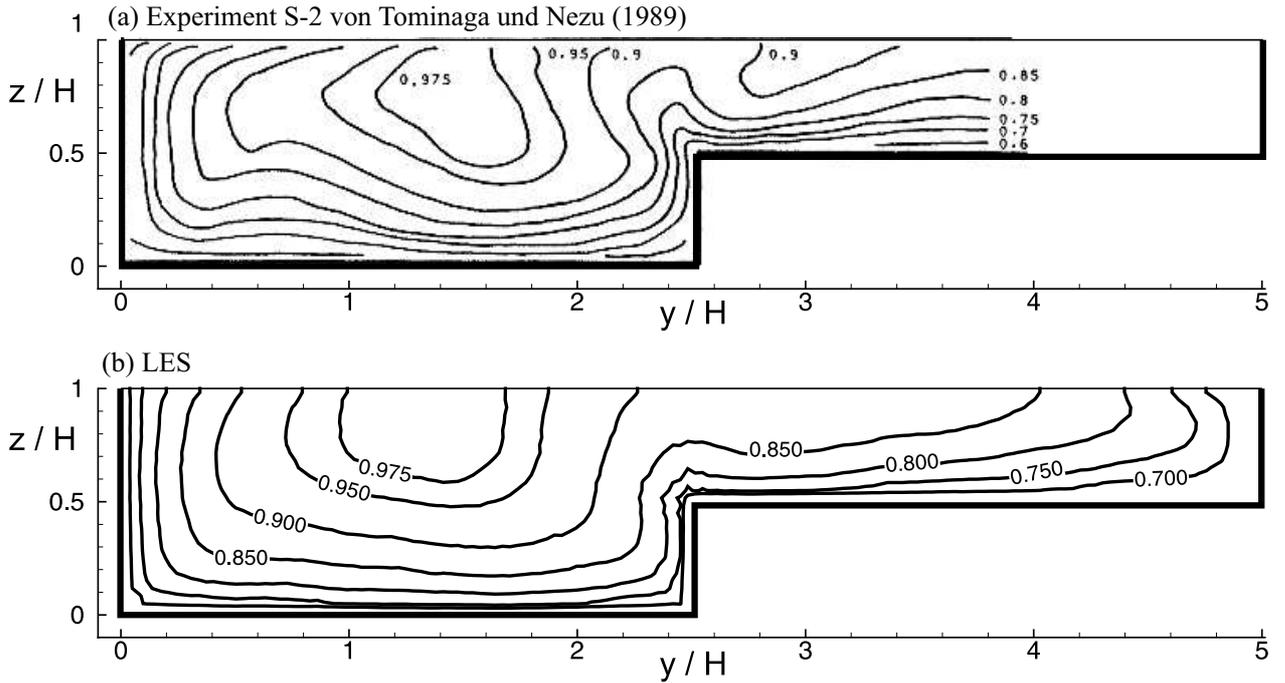


Abb. 4.29: Mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\langle u \rangle / \langle u_{max} \rangle$ in Hauptströmungsrichtung im gegliederten Rechteckgerinne, Tiefenverhältnis $h/H = 1/2$, Vergleich von Messungen mit $Re = 4u_b r_{hyd} / \nu = 54\,500$ (Tominaga und Nezu 1989) mit LES: $Re_H = u_b H / \nu = 10^5$, $\langle u_{max} \rangle = 1.31u_b$.

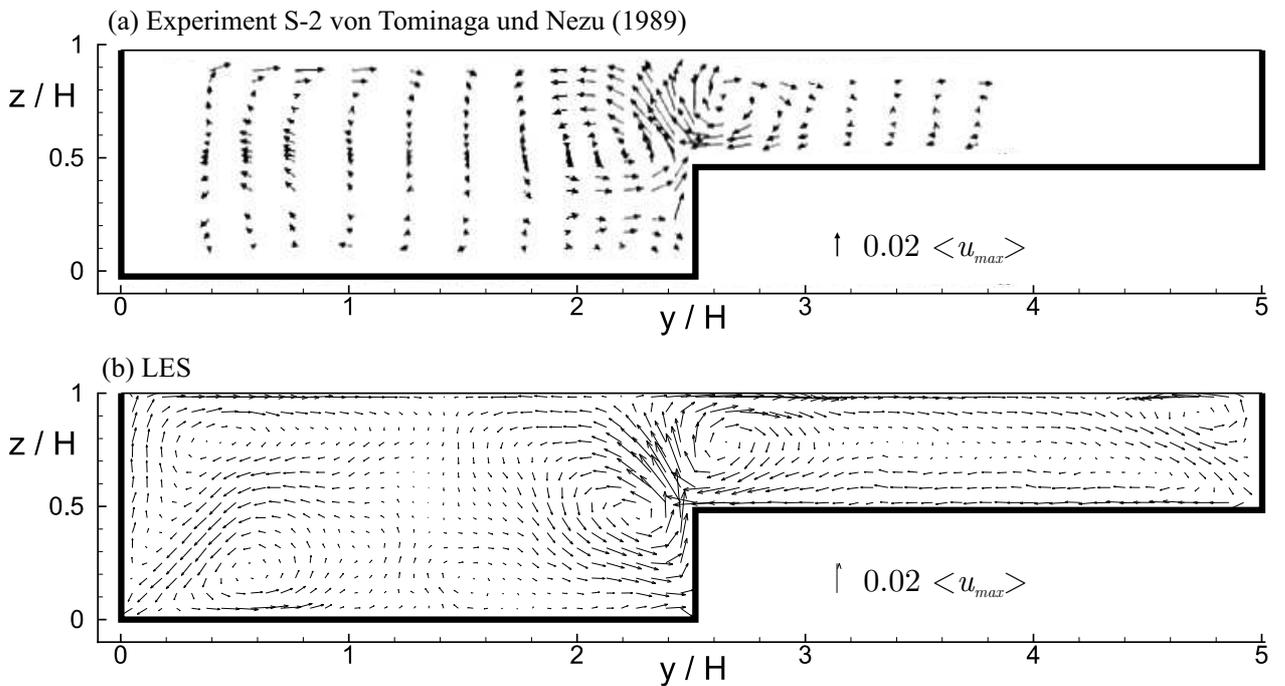


Abb. 4.30: Sekundärströmung im gegliederten Rechteckgerinne $h/H = 1/2$, Vergleich mit Messungen von Tominaga und Nezu (1989).



Abb. 4.31: Fotografie des Stoffaustausches im gegliederten Rechteckgerinne, Farbstoff wurde auf der seichten Seite (untere Bildhälfte) zugegeben, Exp. 32, $U_1/U_2 = 1.76$, $H = 2.8[cm]$, $h = 0.9[cm]$ von Alavian und Chu (1985).

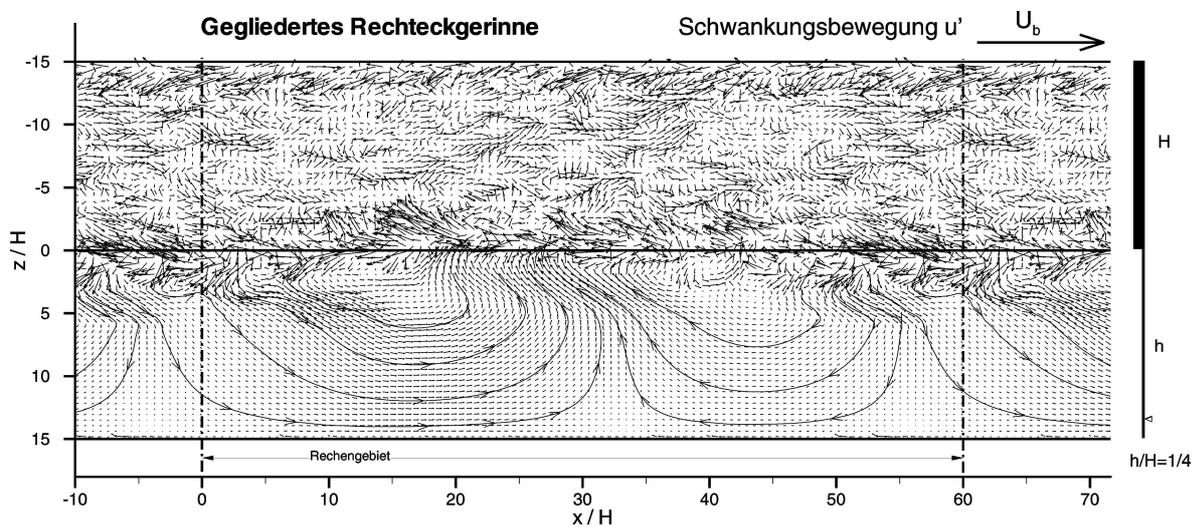


Abb. 4.32: Darstellung der turbulenten Schwankungsbewegung an der Wasseroberfläche des gegliederten Rechteckgerinnes, Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$, $Re_H = 10\,000$.

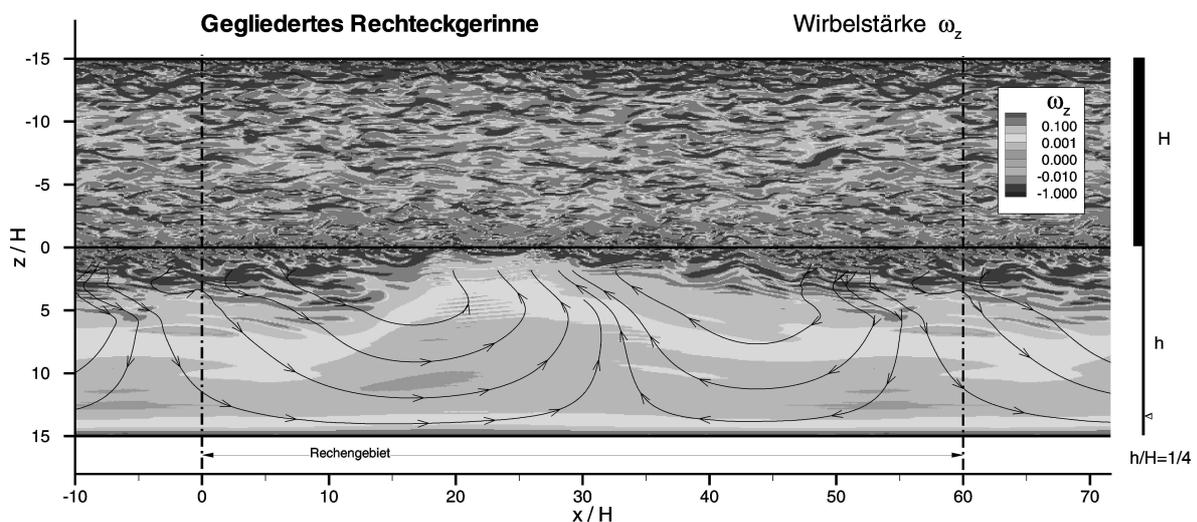


Abb. 4.33: Darstellung der Wirbelstärke an der Wasseroberfläche des gegliederten Rechteckgerinnes, Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$, $Re_H = 10\,000$.

4.2. Testrechnungen zur Verifizierung des LES-Programms

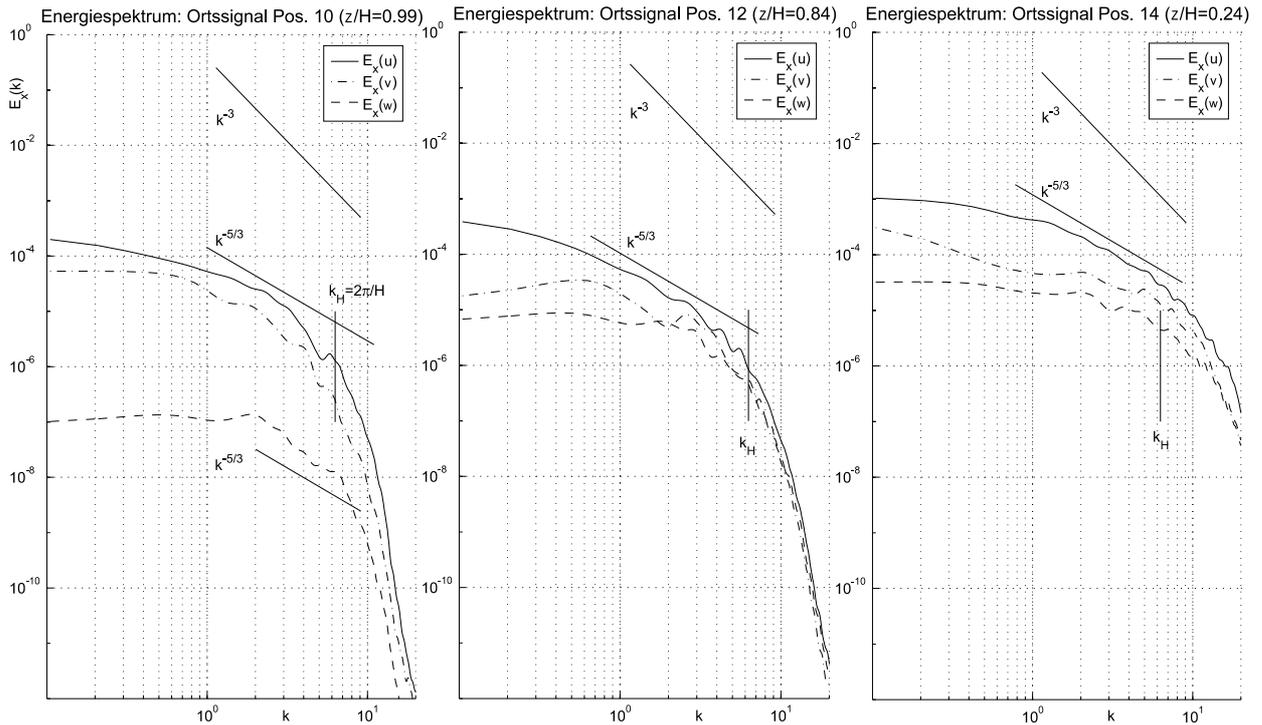


Abb. 4.34: Energiespektren im gegliederten Rechteckgerinne in verschiedenen Tiefen y/H . Berechnet aus den Geschwindigkeiten entlang einer Geraden in x -Richtung. Position in Spannweitenrichtung in der Mitte der tiefen Gerinneseite ($z/H = -7.5$).

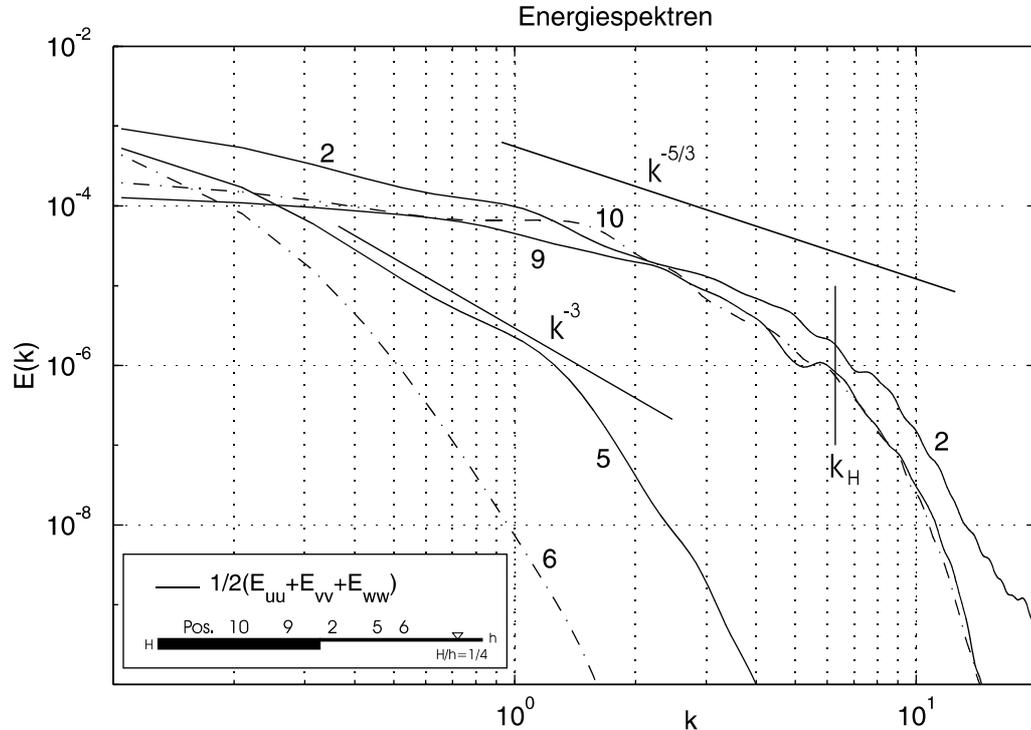


Abb. 4.35: Energiespektren im gegliederten Rechteckgerinne nahe der Wasseroberfläche. Berechnet aus Ortssignalen entlang einer Geraden in x -Richtung. Positionen in Spannweitenrichtung: $z/H = -7.5$ (Pos. 10), $z/H = -3$ (Pos. 9), $z/H = 1$ (Pos. 2), $z/H = 5$ (Pos. 5), $z/H = 7.5$ (Pos. 6).

5 LES ausgewählter Flachwasserströmungen

5.1 Gerinneströmung

In tiefengemittelten Simulationen ist der Einfluss der kleinskaligen 3D-Turbulenz zu modellieren. Diese wird, abgesehen von Seitenwänden, primär an der Sohle produziert. Die kleinskalige 3D-Turbulenz lässt sich in einer homogenen Gerinneströmung besonders gut untersuchen, denn hier wird die gesamte Turbulenzbewegung allein durch die Sohlreibung verursacht. Es werden keine großräumigen 2D-Wirbel aufgrund geometriebedingter horizontaler Scherung der Grundströmung produziert, welche mit der kleinskaligen Turbulenz wechselwirken könnten.

Die aus einer homogenen Gerinneströmung gewonnenen Daten über die kleinskalige 3D-Turbulenz sind auch für komplexe Strömungen mit horizontaler Scherung und großräumigen Wirbelstrukturen interessant. Denn aufgrund der unterschiedlichen Zeitskalen der großräumigen 2D-Strukturen und der 3D-Turbulenz ist die Annahme berechtigt, dass sich die sohlerzeugte kleinskalige Turbulenz weitestgehend im Gleichgewicht befindet, wie es sich in einer ausgebildeten Gerinneströmung einstellt. Mit dieser Annahme lässt sich die 3D-Turbulenz auch in komplexen Strömungen anhand der Daten, die von ausgebildeten homogenen Gerinneströmungen gewonnen wurden, modellieren.

5.1.1 Periodisches Gerinne

Die nachfolgend beschriebenen hochaufgelösten 3D-LES-Rechnungen von Gerinneströmungen wurden durchgeführt, um detaillierte Informationen über die sohlerzeugte Turbulenz und insbesondere über die dadurch hervorgerufenen turbulenten Dispersionsspannungen zu gewinnen.

In den Testrechnungen für die Gerinneströmung (Abschnitt [4.2.3.1](#)) zeigte sich, dass im Strömungsfeld neben der sohlerzeugten 3D-Turbulenz auch großräumige 2D-Strukturen auszumachen waren, deren Größe durch das ursprünglich

verwendete relativ kleine Rechengebiet mit $L \times B \times H = 2\pi h \times \pi h \times h$ beschränkt war. Experimentellen Daten zufolge beträgt die Länge der großen turbulenten Strukturen in Strömungsrichtung etwa $5h - 15h$ (Kim und Adrian 1999, Jiménez 1998, Hites 1997). Um nun auch die größeren Strukturen erfassen zu können, wurde für die folgenden Simulationen mit $L = 8\pi h$ ein viermal so langes und mit $B = 2\pi h$ ein doppelt so breites Rechengebiet als bei den Testrechnungen verwendet. Die Gitterauflösung wurde gleich dem in Abschnitt 4.2.3.1 beschriebenen Gitter 2 gewählt, weil damit in den Testrechnungen die Resultate mit der besten Übereinstimmung zu den DNS-Daten erzielt wurden. Das resultierende Rechengitter hat 512 Zellen in Strömungsrichtung, 256 in Querrichtung und 64 Zellen in Tiefenrichtung. Die Gitterweite weist in Tiefenrichtung von der Sohle zur freien Oberfläche hin eine Streckung von 3 % auf. Durch das vergrößerte Rechengebiet ergibt sich nun ein Gitter mit $8.4 \cdot 10^6$ Zellen. Die Randbedingungen sind dieselben wie bei den Testrechnungen, nämlich periodische Randbedingungen in Strömungs- und Spannweitenrichtung, die Rigid-Lid-Vereinfachung an der Wasseroberfläche und die Haftbedingung an der Sohle. Anders als bei den Testrechnungen, bei denen der Vergleich mit der Kanalströmung im Vordergrund stand, wird nun ein Koordinatensystem verwendet, bei dem die x -Achse in Strömungsrichtung, die y -Achse in Querrichtung und die z -Achse entgegengesetzt zur Tiefenrichtung verlaufen. Dieses Koordinatensystem ist für Gerinneströmungen gebräuchlich und unterscheidet sich von dem der Kanalströmung durch vertauschte y - und z -Koordinaten. Es werden hier zwei Rechnungen mit unterschiedlichen Reynoldszahlen präsentiert: Bei der Rechnung mit der Kurzbezeichnung OCHB¹ beträgt die mit der über den Gerinnequerschnitt gemittelten Strömungsgeschwindigkeit u_b (*bulk velocity*) und der Wassertiefe h gebildete Reynoldszahl $Re_h = u_b h / \nu = 10\,935$. Dies entspricht einer mit der Schubspannungsgeschwindigkeit gebildeten Reynoldszahl $Re_\tau = \langle u_\tau \rangle h / \nu$ von etwa 590. Die zweite Simulation (OCHC) hat eine geringere Reynoldszahl von $Re_h = 6\,875$ bzw. $Re_\tau = 395$. Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die Parameter der beiden Simulationen. Die Rechnungen wurden dimensionslos mit U_b , h und ρ jeweils gleich 1 durchgeführt. Als Feinstrukturmodell wurde das Smagorinsky-Modell mit $C_S = 0.065$ verwendet. In Wandnähe wurde das Längenmaß der Feinstrukturmodell mittels Van Driest-Dämpfungsfunktion reduziert (vgl. Abschnitt 3.4.1.2). Bei der Interpretation der

¹ OCH — *open channel*.

Ergebnisse der Rechnung mit $Re_h = 6\,875$ sind Effekte, die durch die relativ niedrige Reynoldszahl bedingt sind, in Betracht zu ziehen (Moser et al. 1999). Für Schlussfolgerungen für den allgemeinen Fall sind daher die aus der Rechnung mit $Re_h = 10\,935$ gewonnenen Daten besser geeignet.

Um mit dem relativ großen Rechengelände nach möglichst wenigen Zeitschritten eine voll entwickelte Strömung zu erhalten, wurde zunächst nur in einem kleinen Teilgebiet ($2\pi h \times \pi h \times h$ mit periodischen Randbedingungen in x - und y -Richtung) die voll ausgebildete turbulente Strömung berechnet. Anschließend wurden die (in x - und y -Richtung periodischen) Strömungsdaten des Teilgebietes als Anfangsbedingung auf das gesamte Rechengelände ($8\pi h \times 2\pi h \times h$) gepflastert. Damit sich die Periodizität aufgrund der Pflasterung auflöst und sich auch die größten Strukturen in der Strömung voll ausbilden können, wurden zunächst mehr als 20 Durchlaufzeiten simuliert ($T_{Zyklus} = L/u_b = 8\pi [h/u_b]$). Die anschließende Mittelung und Berechnung der Statistiken erfolgte über weitere 20 Zyklen: $T_{Mittelung} = 20 T_{Zyklus} \approx 503 [h/u_b]$. In der Anfangsphase, in der die Strömung noch nicht voll ausgebildet war, wurde mit einem variablen Zeitschritt gerechnet. Dieser wird während der Rechnung automatisch so angepasst, dass die maximal auftretende Zell-Courantzahl $CF L_{max} = (u_i \Delta t / \Delta x_i)_{max}$ einen Wert von 0.7 nicht überschreitet. Damit bleibt die Stabilität des numerischen Verfahrens gewährleistet. Bei der anschließenden Mittelung wurde mit einem konstanten Zeitschritt gerechnet, da dies die Auswertung der Daten, welche während der Rechnung aufgezeichnet wurden, erleichtert ($\Delta t = 0.009 [h/u_b]$, $CF L_{max} \approx 0.65$). Die Rechnungen wurden auf der IBM RS6000 SP-SMP (mit Power3-II Prozessoren) des Karlsruher Universitäts-Rechenzentrums durchgeführt. Für die Mittelung über 20 Zyklen waren knapp 56 000 Zeitschritte notwendig. Mit 32 Prozessoren wurden dazu etwa 5500 CPU-Stunden benötigt. Dies entspricht einer Rechenzeit von etwa 7 Tagen. Der tatsächliche Zeitbedarf für die Rechnung war jedoch etwa um den

3D-LES Rechnung	Reynoldszahl		Rechengelände			Gitterzellen			Auflösung		
	Re_b	Re_τ	L/h	B/h	H/h	N_x	N_y	N_z	Δx^+	Δy^+	Δz^+
OCHB	10935	590	8π	2π	1	512	256	64	29.0	14.5	3.1 – 20.2
OCHC	6875	395	8π	2π	1	512	256	64	19.4	9.7	2.1 – 13.5

Tabelle 5.1: Reynoldszahlen und Rechengitter für die 3D-LES der Gerinneströmung.

Faktor 5 höher, da die Rechnerressourcen auf alle Benutzer aufgeteilt werden und die Prozessoren dem einzelnen Anwender nicht rund um die Uhr zur Verfügung stehen.

5.1.1.1 Sohlreibungsbeiwert, Schubspannungsgeschwindigkeit

Die Genauigkeit der berechneten Sohlschubspannung ist ein wichtiger Indikator für die Güte einer Gerinneströmungssimulation. In Gerinnen mit glatter Sohle nimmt der Sohlreibungsbeiwert bei turbulenter Strömung mit zunehmender Reynoldszahl ab. Dieses Verhalten zeigen auch die LES-Rechnungen. Abbildung 5.1 zeigt einen Vergleich der in der LES berechneten Widerstandsbeiwerte mit der empirischen Beziehung 3.20 und den Werten aus den DNS-Rechnungen von Moser et al. (1999) für die Kanalströmung. Eine Gerinneströmung und eine Hälfte einer Kanalströmung sind aus physikalischen Gründen vergleichbar, da sie sich nur durch die Symmetrieebene bzw. die freie Oberfläche unterscheiden. Bemerkenswert ist die gute Übereinstimmung der Daten für die beiden betrachteten Reynoldszahlen. Einen Überblick über die nominalen und die berechneten Werte von DNS und LES gibt Tabelle 5.2.

DNS (Kanalströmung)				LES (Gerinneströmung)				
Re_τ	Re_h	$\sqrt{c_f}$	c_f bzw. u_τ	Rechnung	Re_h	Re_τ	$\sqrt{c_f}$	c_f bzw. u_τ
<u>395</u>	6875	0.0575	0.00330	OCH C	<u>6875</u>	392.6	0.0571	0.00326
<u>590</u>	10935	0.0540	0.00291	OCH B	<u>10935</u>	587.6	0.0537	0.00289

Tabelle 5.2: Reynoldszahlen und Sohlreibungsbeiwert bei DNS und LES; Vergleich der nominalen Werte (unterstrichen) mit den bei den Simulationen berechneten Werten.

5.1.1.2 Geschwindigkeitsprofile, Reynoldsspannungen

Die Abbildungen 5.2 und 5.3 zeigen die für $Re_h = 10\,935$ und $Re_h = 6\,875$ berechneten dimensionslosen mittleren Geschwindigkeitsprofile $\langle u \rangle^+$ in halb-logarithmischer Darstellung. (Zur Berechnung von $\langle u \rangle^+$ und z^+ wurden jeweils die in den LES-Simulationen berechneten mittleren Schubspannungsgeschwindigkeiten verwendet (rechte Spalte von Tabelle 5.2). Bei dieser Skalierung führen schon kleine Abweichungen in der berechneten Schubspannungsgeschwindigkeit zu großen Abweichungen in den dimensionslosen Pro-

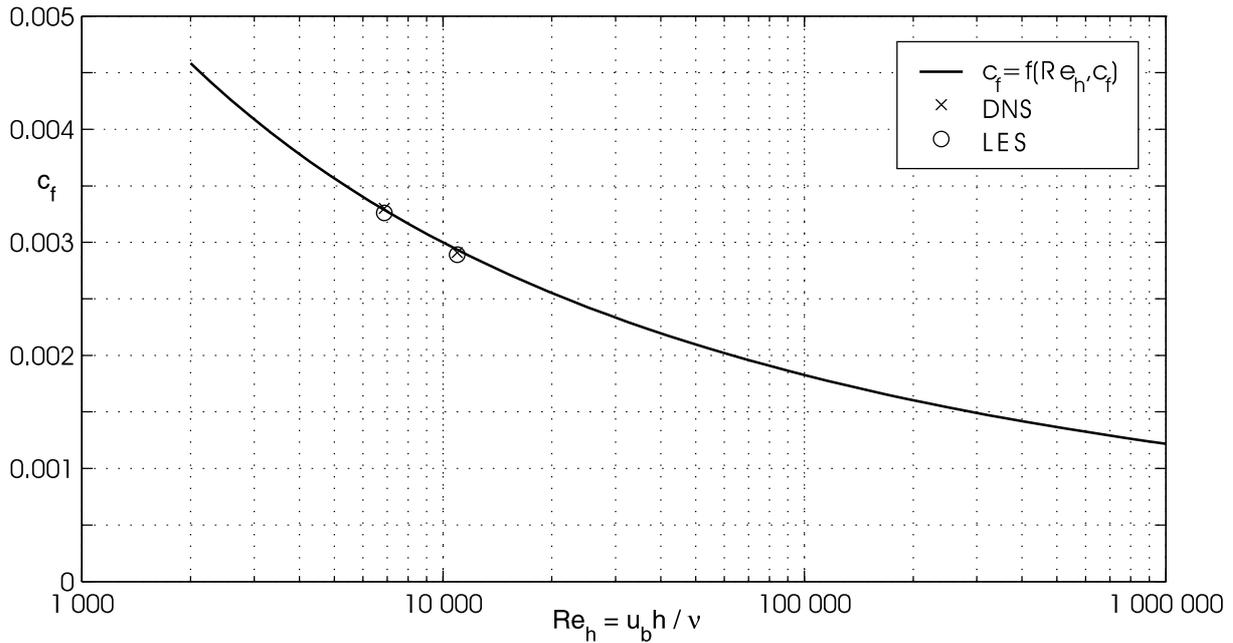


Abb. 5.1: Widerstandsbeiwert in Gerinneströmung; —: empirische Beziehung $1/\sqrt{c_f} = 1/0.4 [\ln(Re_h \sqrt{c_f}) + 1]$, ×: DNS (Kanalströmung), ○: LES.

filen (vgl. Abb. 4.22), weshalb häufig auch eine Skalierung mit den nominalen Werten vorgenommen wird. Jedoch hat hier die Wahl der Skalierung keinen merklichen Einfluss auf den Kurvenverlauf, da die berechneten Sohl Schubspannungen um weniger als 1 % von den nominalen Werten abweichen.) Zum Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsprofile ist das für Gerinneströmungen von Nezu und Rodi (1986) experimentell bestimmte logarithmische Geschwindigkeitsprofil $\langle u \rangle^+ = 5.29 + 1/0.412 \ln(z^+)$ eingezeichnet. Für den Fall mit $Re_h = 10\,935$ ist außerdem die Nachlauf-Funktion (Gl. 3.18) eingezeichnet. Hierbei wurde für den Nachlauf-Parameter $\Pi = 0.11$ – der Wert, den Nezu und Rodi für Gerinneströmungen bei $Re_h = 12\,000$ (Case P-8 mit $Re = 4u_b h / \nu = 48\,000$) gefunden haben – eingesetzt. (Für den Fall mit $Re_h = 6\,875$ wurde die Nachlauf-Funktion nicht eingezeichnet, da hier der Nachlauf-Parameter einen Wert nahe null hat. Nezu und Rodi fanden für $Re_h = 5\,750$ (Case P-1) den Wert $\Pi = 0.000$. Einen genaueren Wert von Π für die untersuchten Reynoldszahlen kann man aus den Angaben von Nezu und Rodi nicht ableiten, da sie im betrachteten Reynoldszahlenbereich nur Messungen bei $Re_h = 5\,750$ und $12\,000$ durchführten und eine lineare Interpolation zwischen diesen Reynoldszahlen mit einem Nullwert für Π bei $Re_h = 5\,750$ nicht sinnvoll scheint.) Die berechneten Geschwindigkeitsprofile zeigen für bei-

de LES-Rechnungen eine sehr gute Übereinstimmung mit den empirischen Beziehungen von [Nezu und Rodi](#) und der DNS von [Moser et al. \(1999\)](#) für eine Hälfte des geschlossenen Kanals.

Abbildung 5.4 zeigt die RMS-Werte der aufgelösten turbulenten Schwankungsbewegung und die Schubspannungen für den Fall mit $Re_h = 10\,935$. Zum Vergleich sind die von [Nezu und Nakagawa \(1993\)](#) für Gerinneströmungen angegebenen empirischen Beziehungen für die Stärke der Schwankungsbewegung eingezeichnet. Zusätzlich sind die DNS-Daten von [Moser, Kim und Mansour](#) für eine Hälfte einer Kanalströmung abgebildet. Beim Vergleich der Ergebnisse von Kanal- und Gerinneströmung ist zu berücksichtigen, dass in einer Gerinneströmung an der freien Oberfläche die Fluktuationen normal zur freien Oberfläche (w'_{rms}) gedämpft werden und deren Energie auf die Schwankungen in Strömungsrichtung (u'_{rms}) und Spannweitenrichtung (v'_{rms}) umverteilt wird. Neben diesen Unterschieden an der freien Oberfläche treten die gleichen Abweichungen in der Amplitude der Schwankungsbewegung auf, wie sie schon bei den Testrechnungen in Abschnitt 4.2.3.1 beobachtet wurden. Insgesamt ist jedoch die Übereinstimmung zwischen LES, DNS und den empirischen Beziehungen durchaus zufriedenstellend.

Die Reynoldszahlen der beiden Simulationen unterscheiden sich um den Faktor 1.5. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsprofile von der Reynoldszahl ist in Abbildung 5.5 zu sehen. Die entsprechenden turbulenten Schwankungsgrößen und die Schubspannung sind in Abbildung 5.6 dargestellt. In dieser Art der Darstellung sind die Unterschiede zwischen den beiden Reynoldszahlen klein. Dennoch sieht man, dass die Maxima der Reynoldsspannungen bei der höheren Reynoldszahl näher zur Wand hin rücken, weil die Dicke der viskosen Unterschicht an der Wand proportional Re^{-1} ist. Ebenso verändert sich das Geschwindigkeitsprofil mit der Reynoldszahl: Hier wird mit zunehmender Reynoldszahl die Krümmung des Profils in Wandnähe stärker und das Profil verläuft etwas näher an der mittleren Geschwindigkeit $\langle \tilde{u} \rangle$.

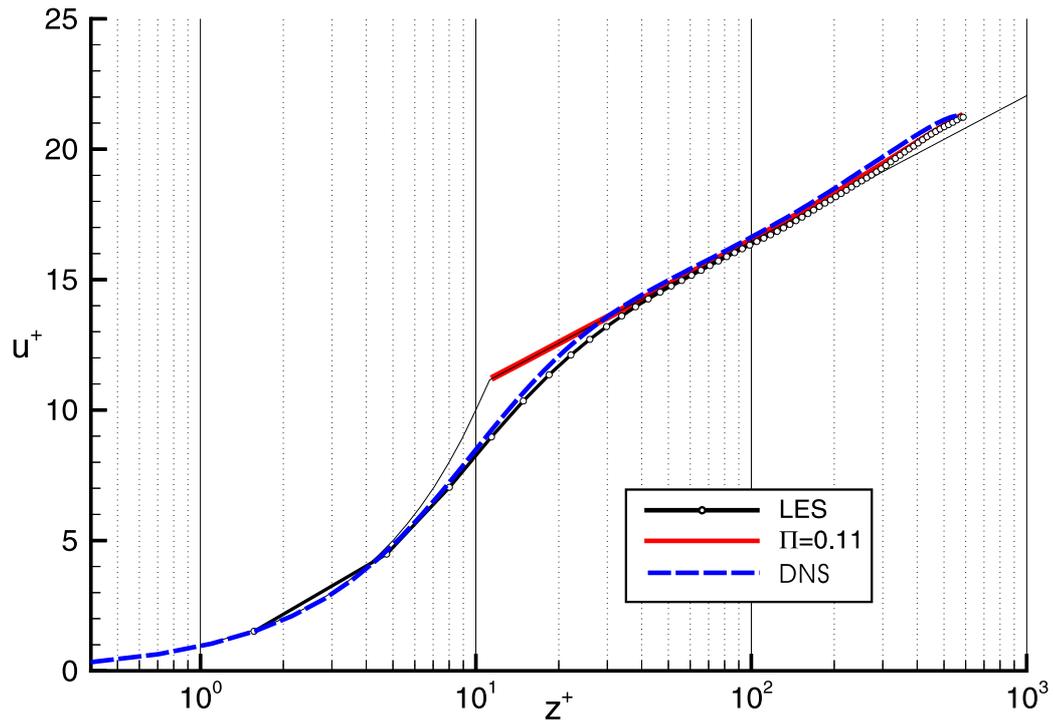


Abb. 5.2: Dimensionslose mittlere Geschwindigkeit bei periodischer Gerinneströmung; $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Vergleich mit der DNS einer Kanalströmung (Moser et al. 1999) und der experimentellen Beziehung $u^+ = 5.29 + 1/0.412 \ln(z^+)$ mit Nachlauf-Parameter $\Pi = 0.11$ (Nezu und Rodi 1986).

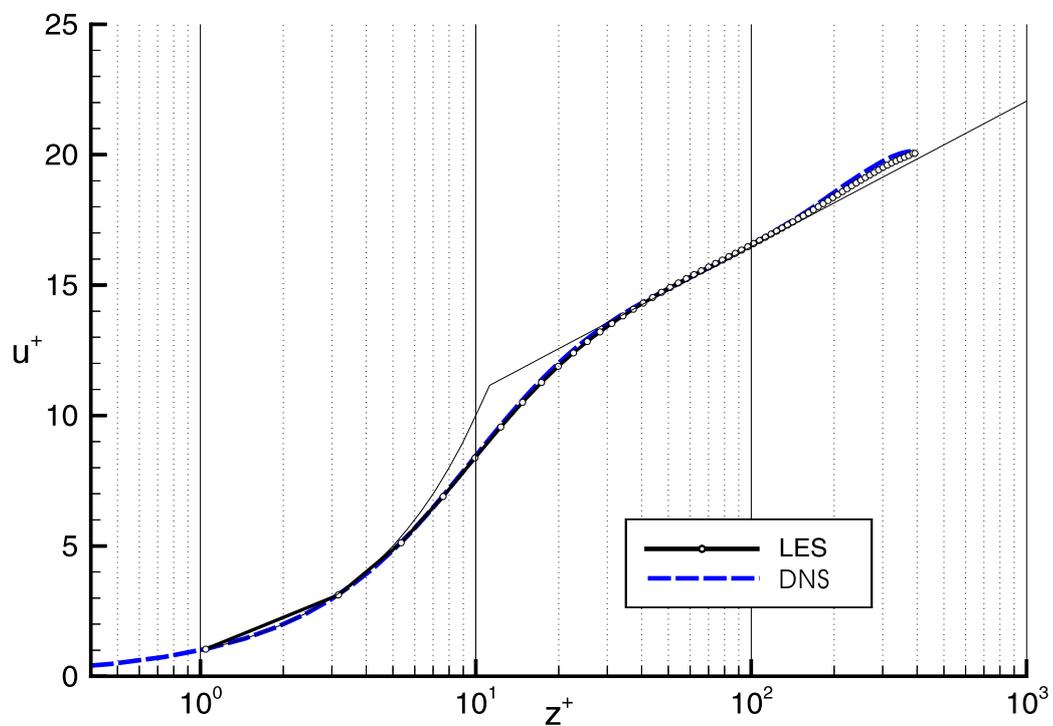


Abb. 5.3: Dimensionslose mittlere Geschwindigkeit bei periodischer Gerinneströmung; $Re_h = 6\,875$ ($Re_\tau = 395$); Vergleich mit der DNS einer Kanalströmung (Moser et al. 1999) und der experimentellen Beziehung $u^+ = 5.29 + 1/0.412 \ln(z^+)$ (Nezu und Rodi 1986).

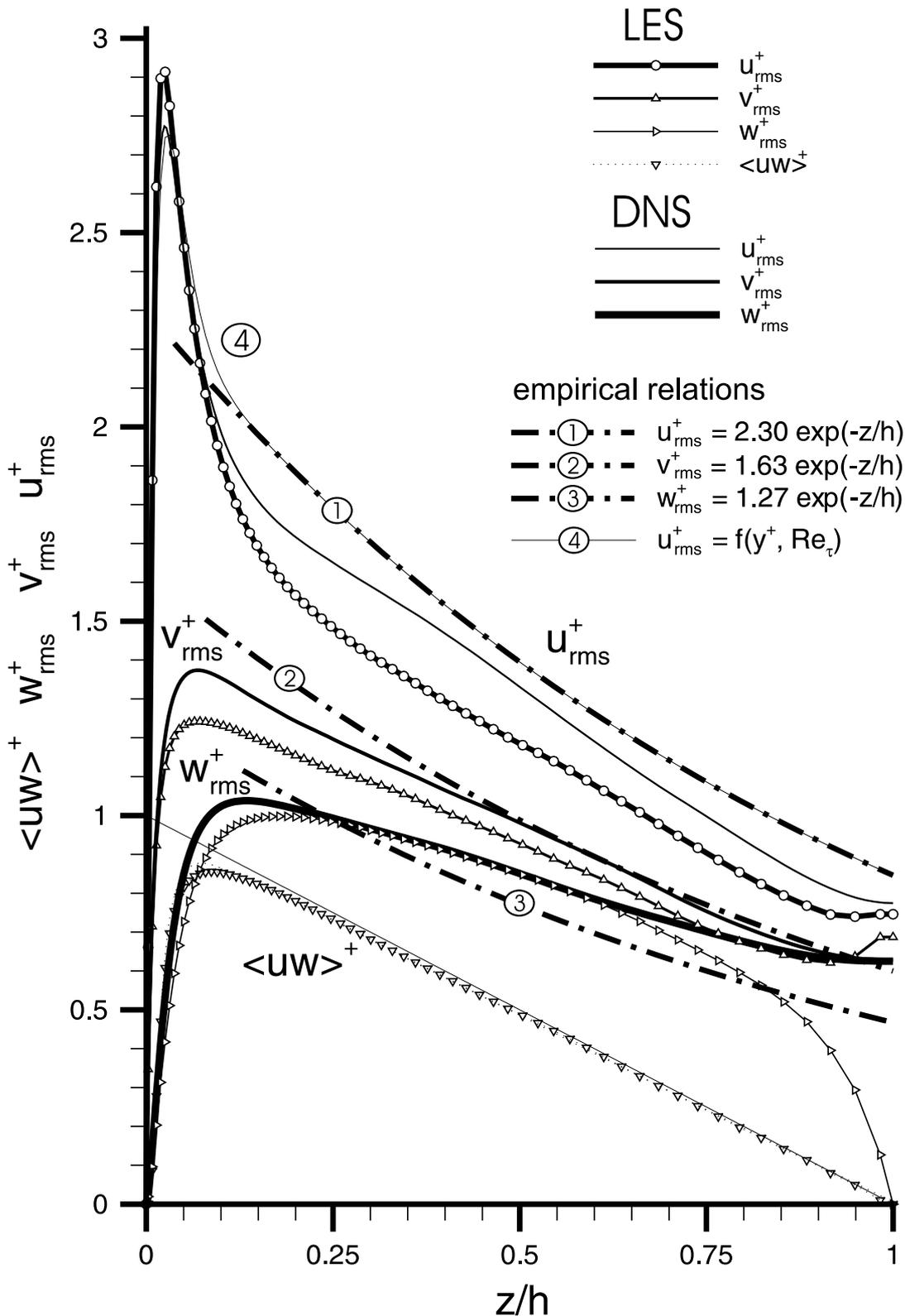


Abb. 5.4: RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und Schubspannungsverteilung bei Gerinneströmung, $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Vergleich mit empirischen Beziehungen (Nezu und Nakagawa 1993) und DNS-Kanalströmung (Moser et al. 1999).

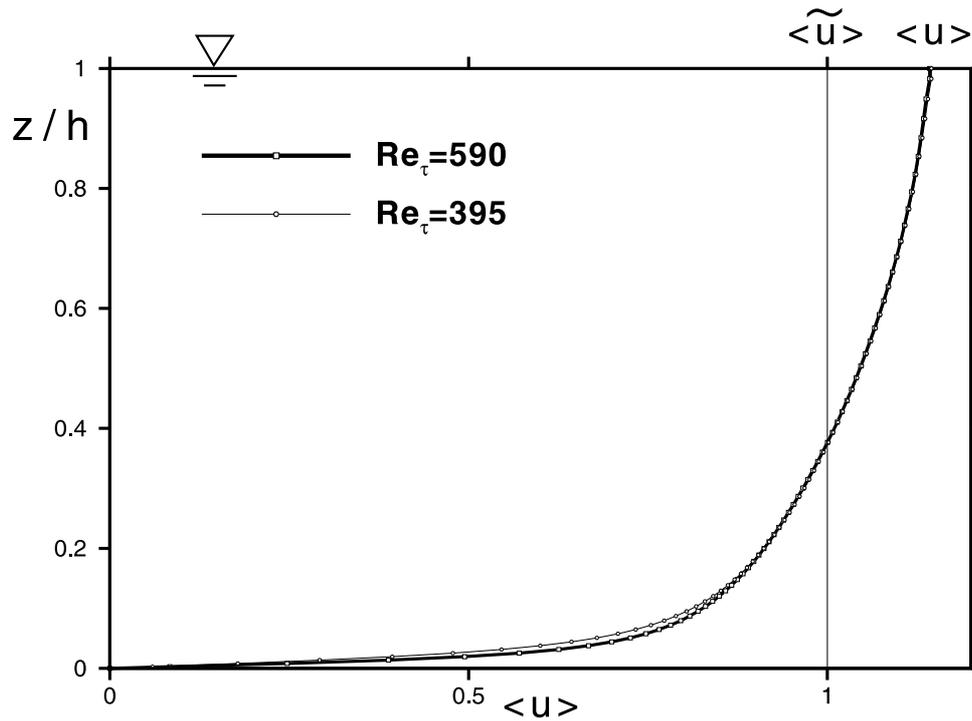


Abb. 5.5: Mittlere Geschwindigkeit bei periodischer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$) und $Re_h = 6\,875$ ($Re_\tau = 395$).

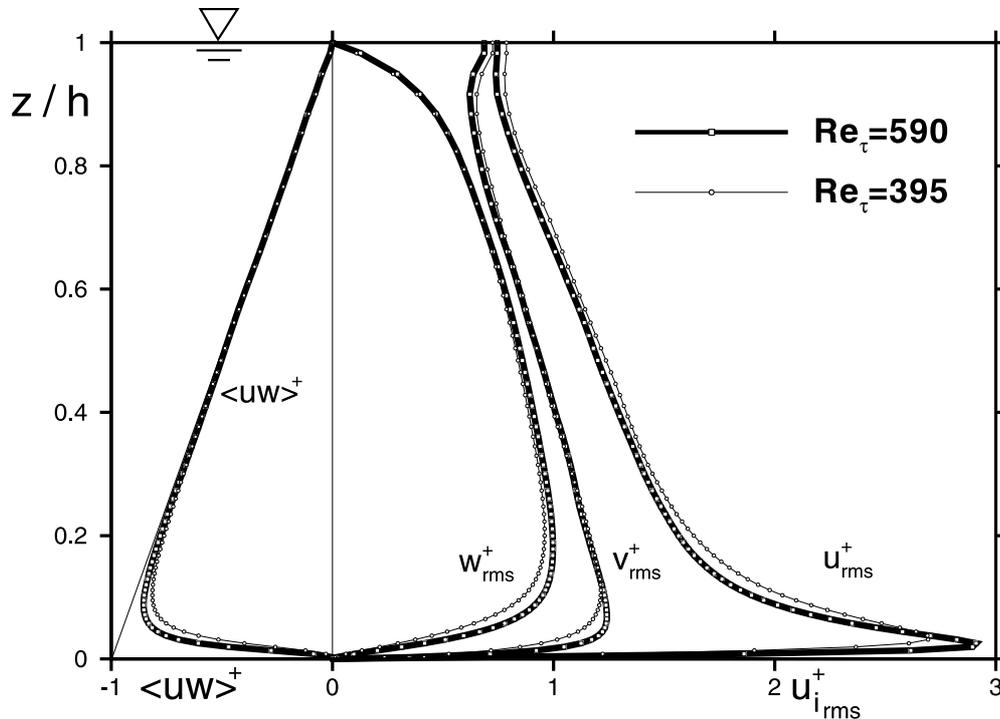


Abb. 5.6: RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und Schubspannungsverteilung bei Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$) und $Re_h = 6\,875$ ($Re_\tau = 395$).

5.1.1.3 Tiefengemittelte Strömung

Der Zusammenhang zwischen den lokalen Geschwindigkeitsfluktuationen und der tiefengemittelten Geschwindigkeit ist in den Abbildungen 5.7 und 5.8 erkennbar. Hier sind für eine Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ (Rechnung OCHB) die an einem Zeitpunkt in verschiedenen Tiefen auftretenden momentanen Geschwindigkeitsfluktuationen zu sehen. Ihre Darstellung erfolgt entlang Linien in x -Richtung, welche alle die gleiche Position in Spannweitenrichtung haben. Dabei sind die Schwankungen in Strömungsrichtung u' in Abbildung 5.7 und die vertikalen Schwankungen w' in Abbildung 5.8 dargestellt. (Die Schwankungen in Spannweitenrichtung v' sind hier nicht abgebildet, da sie den Schwankungen in Strömungsrichtung sehr ähnlich sind.) Die zugehörige tiefengemittelte Schwankungsbewegung \tilde{u}' bzw. \tilde{w}' ist in den Abbildungen an der Sohle bei $z/h = 0$ aufgetragen. Deutlich ist zu erkennen, dass bei der Tiefenmittelung der 3D-Fluktuationen eine Schwankungsbewegung der tiefengemittelten Geschwindigkeiten resultiert. Dabei beträgt die turbulente kinetische Energie der tiefengemittelten horizontalen 2D-Schwankungsbewegung etwa 15 % der tiefengemittelten kinetischen Energie. Auf diesen Sachverhalt wird in Abschnitt 5.1.1.5 näher eingegangen.

Abbildung 5.8 zeigte, dass in einer Gerinneströmung auch tiefengemittelte vertikale Schwankungsbewegungen \tilde{w}' auftreten, die aus der Tiefenmittelung der 3D-Turbulenz resultieren. In tiefengemittelten Betrachtungen wird zwischen 2D- und 3D-Turbulenz unterschieden. Dabei ist es sinnvoll, wie schon in Abschnitt 2.8.1 erwähnt, die tiefengemittelte vertikale Schwankungsbewegung \tilde{w}' auch der 3D-Turbulenz zuzuordnen und $\tilde{w} \equiv 0$ bzw. $w'^{[D]} \equiv w$ zu definieren. Mit dieser Definition sind die tiefengemittelten Vertikalfluktuationen in der tiefengemittelten kinetischen Energie der 3D-Turbulenz enthalten.

In der tiefengemittelten Schwankungsbewegung sind großräumige Strukturen vorhanden, wie in Abbildung 5.9 deutlich erkennbar ist. Hierin sind für ein momentanes Strömungsfeld jeweils ein Konturplot der \tilde{u} - und \tilde{v} -Komponente und für die Relativgeschwindigkeit $\tilde{u}_{rel} = \tilde{u} - u_b$, welche ein mit u_b bewegter Beobachter wahrnimmt, das Vektorfeld und das Strömungspotential samt Stromlinien dargestellt. In der periodischen Gerinneströmung entspricht die Relativgeschwindigkeit $\tilde{u}_{rel} = \tilde{u} - u_b$ der Schwankungsbewegung $\tilde{u}' = \tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle$, weshalb in diesem Fall die Darstellung der Stromlinien der Schwankungsbewe-

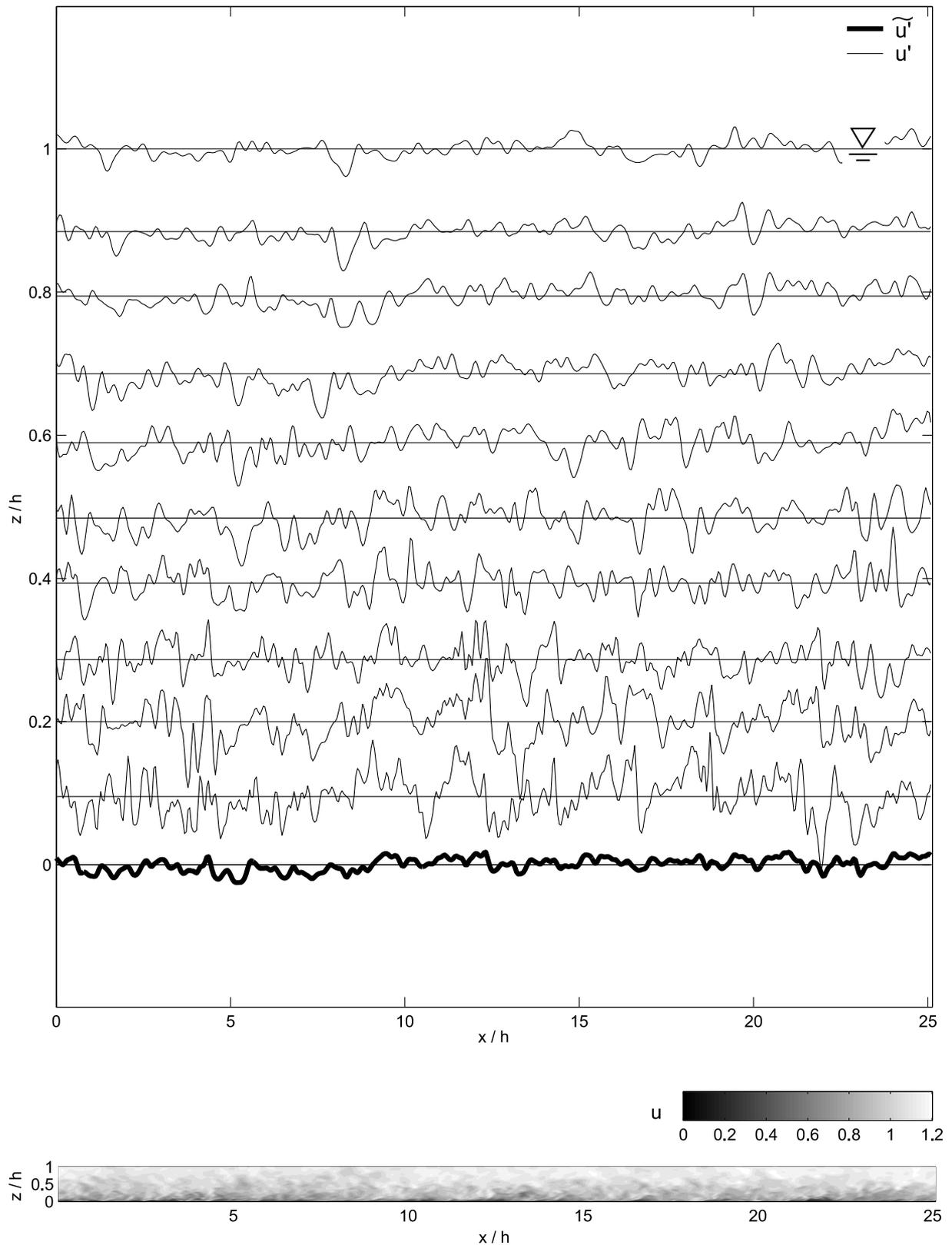


Abb. 5.7: Oben: Fluktuationen der lokalen u -Geschwindigkeit in verschiedenen Wassertiefen und die daraus resultierenden Fluktuationen der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u}' (hier an der Sohle bei $z/h = 0$ dargestellt) in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).
Unten: Zugehöriges u -Geschwindigkeitsfeld.

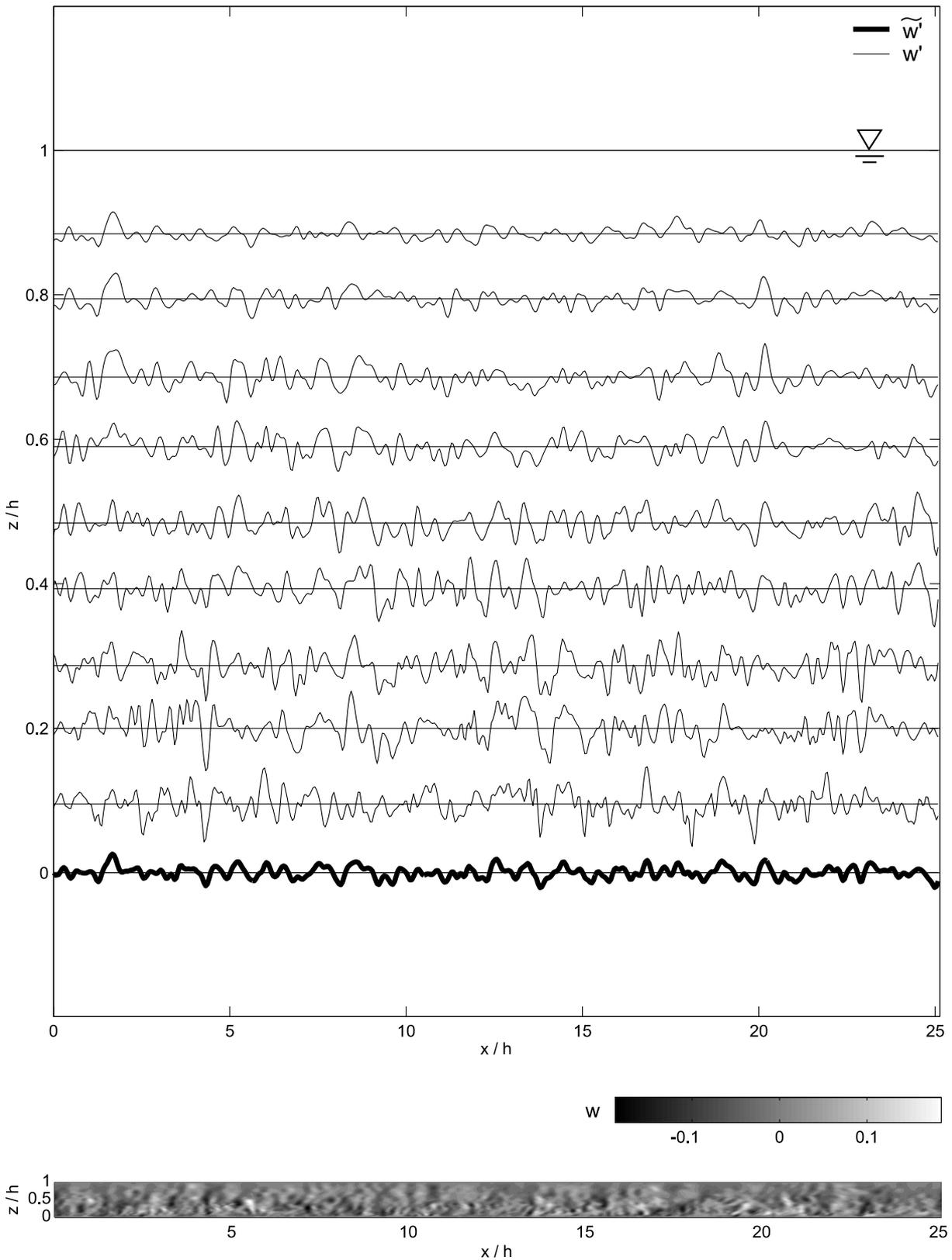
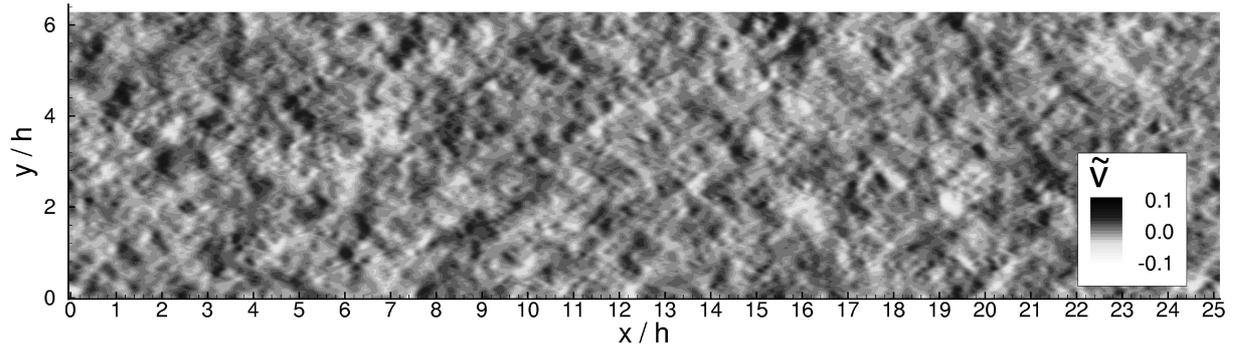
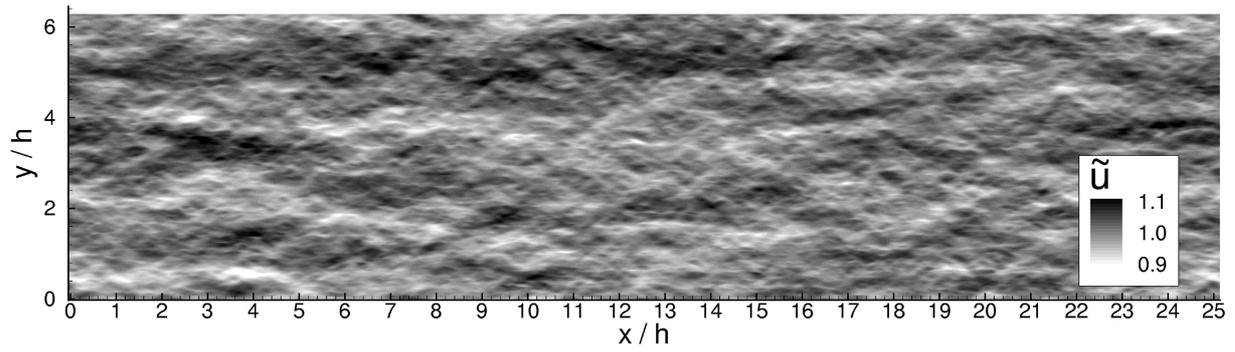
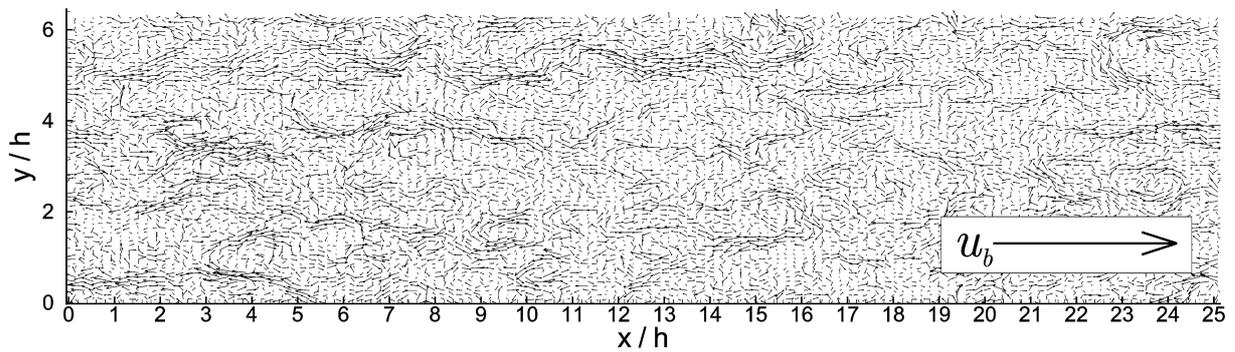
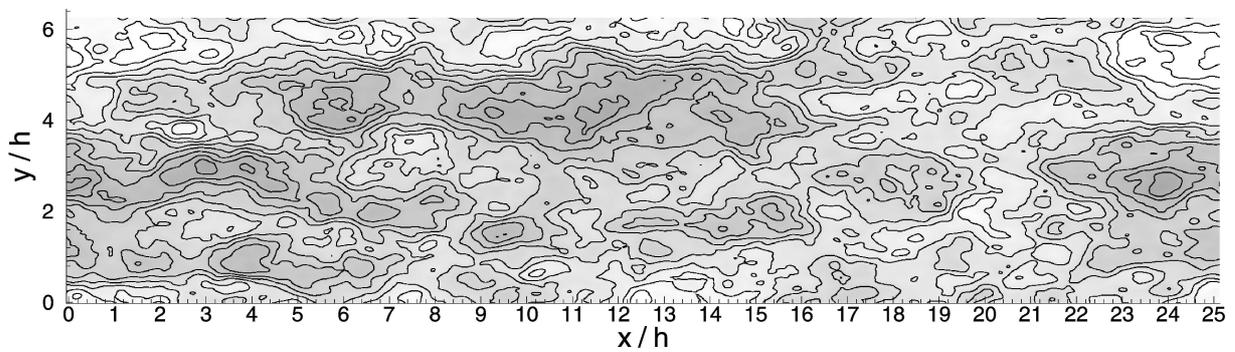


Abb. 5.8: Oben: Fluktuationen der lokalen vertikalen Geschwindigkeit w in verschiedenen Wassertiefen und die daraus resultierenden Fluktuationen der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{w}' (hier an der Sohle bei $z/h = 0$ dargestellt) in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$). Unten: Zugehöriges w -Geschwindigkeitsfeld.



(a) Komponenten der tiefengemittelten Geschwindigkeit

(b) Vektorfeld der Relativgeschwindigkeit ($\tilde{u}_{rel} = \tilde{u} - u_b$)(c) Stromlinien und Stromfunktion der Relativgeschwindigkeit ($\tilde{u}_{rel} = \tilde{u} - u_b$)Abb. 5.9: Momentanes tiefengemitteltes Geschwindigkeitsfeld in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

gung sehr gut geeignet ist, um die großräumigen 2D-Strömungsstrukturen sichtbar zu machen. Die Größe der 2D-Strukturen lässt sich in der Darstellung des Strömungspotentials gut erkennen. Die Strukturen haben typischerweise eine Ausdehnung in Strömungsrichtung von mehr als 10 Wassertiefen. Die Ausdehnung in Spannweitenrichtung erscheint etwas kleiner. Bei näherer Betrachtung wird offensichtlich, dass die Ausdehnung der Strukturen in Strömungsrichtung durch die Abmaße des Rechengebietes beschränkt ist, was sich auch in den Autokorrelationen des tiefengemittelten Geschwindigkeitsfeldes widerspiegelt, die in Abschnitt 5.1.1.6 analysiert werden. Zur selben Erkenntnis kamen [del Álamo und Jiménez \(2003\)](#) die eine sehr aufwendige DNS einer Kanalströmung mit $Re_\tau = 550$, in einem gleich langen und sogar doppelt so breiten Rechengebiet ($8\pi h \times 2\pi h \times 2h$) durchgeführt haben.

5.1.1.4 Dispersionsspannungen und Reynoldsspannungen von 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz

In tiefengemittelten Simulationen ist der Einfluss der nicht aufgelösten Turbulenz zum Teil über die Dispersionsspannungen zu modellieren. Aus der periodischen Gerinneströmung lassen sich viele für die Modellierung interessante Informationen über diese Dispersionsspannungen gewinnen, die sich dann auch auf komplexere Strömungssituationen übertragen lassen, weil die 2D-Turbulenz, welche primär in Strömungen mit ausgeprägter horizontaler Scherung auftritt, nicht direkt in die Dispersionsspannungen eingeht, sondern diese, wie die Analyse der Dispersionsspannungen in Abschnitt 2.9.1 ergab, nur durch die 3D-Turbulenz und das mittlere Geschwindigkeitsprofil hervorgerufen werden. Für die Dispersionsspannungen gilt nach Gleichung 2.54:

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \frac{1}{h} \int_{z_b}^{\zeta} (u_i - \tilde{u}_i) (u_j - \tilde{u}_j) dz \quad (5.1)$$

In die Transportgleichungen für die tiefengemittelten horizontalen Geschwindigkeitskomponenten \tilde{u} und \tilde{v} gehen nur die horizontalen Dispersionsspannungen D_{ij} ($i = 1, 2$ und $j = 1, 2$) ein. Aus den LES-Rechnungen lassen sich diese Komponenten der Dispersionsspannungen leicht bestimmen. In den hochaufgelösten LES-Rechnungen gilt $D(\mathbf{u}) \approx D(\bar{\mathbf{u}})$. Eine experimentelle Bestimmung ist im Gegensatz dazu sehr aufwendig, da hierfür momentane Geschwindigkeitsprofile über die Tiefe zu bestimmen sind.

Abbildung 5.10 zeigt die momentanen Dispersionsspannungen, die bei der LES-Simulation OCHB für eine periodische Gerinneströmung mit $Re_\tau = 590$ berechnet wurden. Dabei sind schmale längliche Strukturen im D_{11} Feld zu erkennen, die mit der \tilde{u} -Geschwindigkeitskomponente korrelieren. Diese Strukturen haben eine typische Länge von mehr als 10 Wassertiefen. In den D_{22} und D_{12} Komponenten fehlen diese länglichen Strukturen, dafür sind korrelierte Bereiche (hellere und dunklere Flecken in der Abbildung) mit einem Durchmesser von etwa 2 Wassertiefen auszumachen.

Die Analyse der Dispersionsspannungen (Abschnitt 2.9.1) legt die Modellierung der Dispersionsspannungen durch ein Wirbelviskositätsmodell für die 3D-Turbulenz nahe. Vergleicht man jedoch die Strukturen von D_{ij} (Abb. 5.10) mit den für denselben Zeitpunkt berechneten Komponenten des tiefengemittelten Spannungstensors \widetilde{S}_{ij} (Abb. 5.11) fällt die relativ geringe Korrelation zwischen D_{ij} und \widetilde{S}_{ij} auf. Somit werden mit einem auf dem Wirbelviskositätsansatz basierenden Modell die Strukturen in den Scheinspannungen D_{ij} nicht wiedergegeben. Trotzdem ist ein Wirbelviskositätsmodell gut geeignet, um den statistischen Effekt der Dispersionsspannungen auf die tiefengemittelte Strömung, nämlich die turbulente Durchmischung und die mittlere Energiedissipation, zu modellieren. Es ist jedoch nicht möglich, damit die Anregung von 2D-Turbulenz aufgrund rückwärtigen Energietransfers aus kleinskaliger 3D-Turbulenz zu modellieren. Hierzu wird ein *Back-scatter*-Modell benötigt.

Für die Modellierung von D_{ij} ist die Kenntnis der zeitlich gemittelten Dispersionsspannungen $\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle$ nützlich. Diese stehen nach Gleichung 2.110 in folgender Beziehung mit den tiefengemittelten Reynoldsspannungen der Gesamtturbulenz $\widetilde{R}_{ij}(\mathbf{u})$ und der 2D-Turbulenz $R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$:

$$\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle = D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) + \widetilde{R}_{ij}(\mathbf{u}) - R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (5.2)$$

Die einzelnen Komponenten dieser Beziehung können aus den LES-Rechnungen für die periodische Gerinneströmung bestimmt werden. Wegen der Homogenität der Strömung in x - und y -Richtung sind diese Spannungen im gesamten Strömungsgebiet gleich.

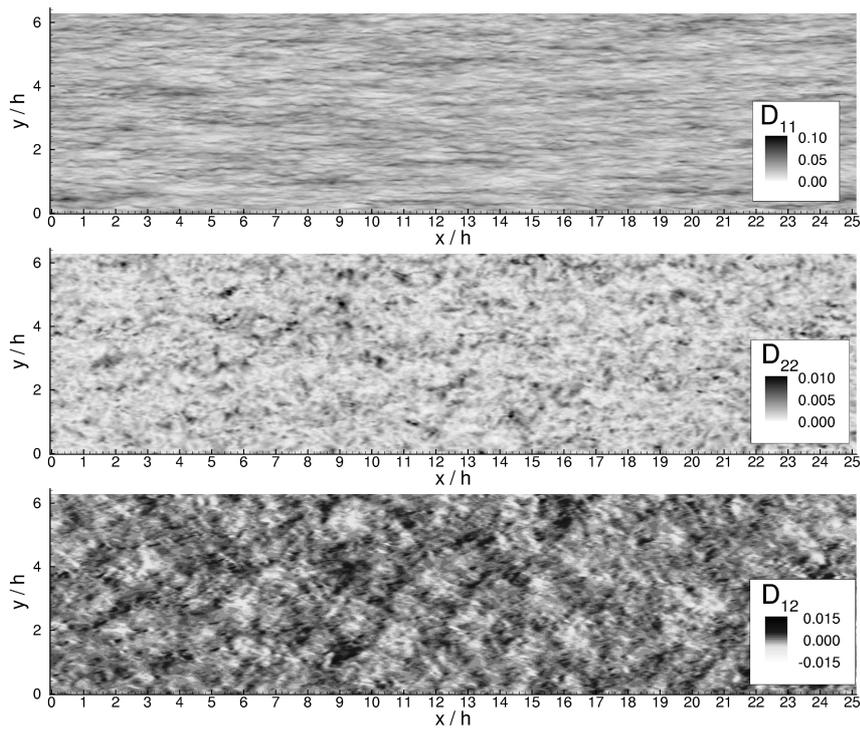


Abb. 5.10: Komponenten des Dispersionsspannungstensors $D_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}$ in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

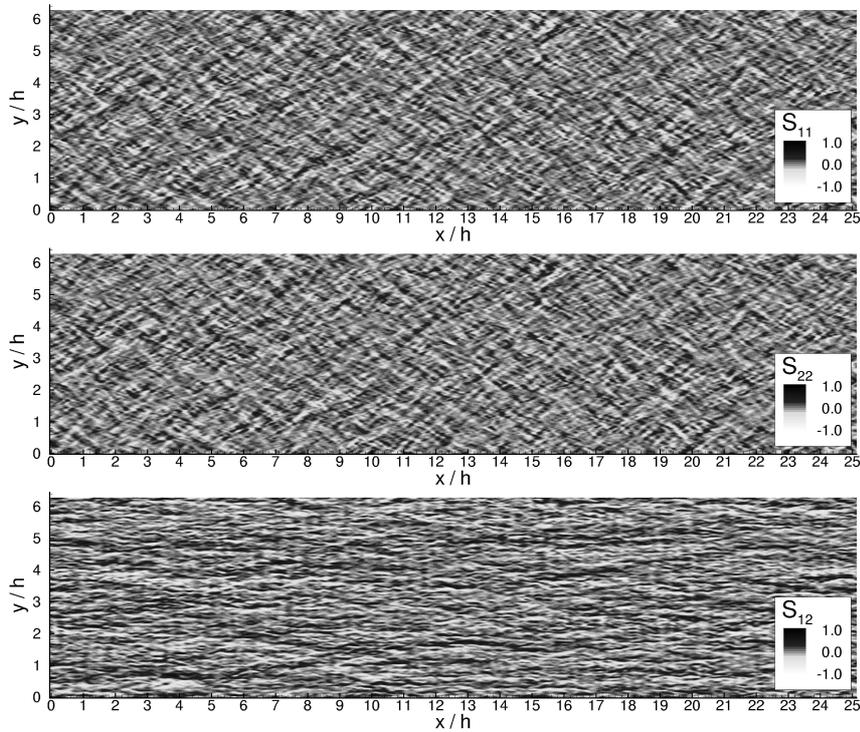


Abb. 5.11: Komponenten des tiefengemittelten Spannungstensors $\widetilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_{x_j} \widetilde{u_i} + \partial_{x_i} \widetilde{u_j})$ in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

Die Komponenten der Aufspaltung der Dispersionsspannungen lassen sich für die beiden LES-Rechnungen mit der Matrixschreibweise

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

übersichtlich darstellen. Die beiden LES-Rechnungen liefern:

- Rechnung OCH B ($Re_b = 10935, h = 1, u_b = 1$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.0291 & 0 \\ 0 & 0.00227 \end{bmatrix}}_{\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0250 & 0 \\ 0 & 0.0 \end{bmatrix}}_{D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0053 & 0 \\ 0 & 0.00255 \end{bmatrix}}_{\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0012 & 0 \\ 0 & 0.00028 \end{bmatrix}}_{R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})}$$

- Rechnung OCH C ($Re_b = 6875, h = 1, u_b = 1$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.0343 & 0 \\ 0 & 0.00251 \end{bmatrix}}_{\langle D_{ij}(\mathbf{u}) \rangle} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0298 & 0 \\ 0 & 0.0 \end{bmatrix}}_{D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0062 & 0 \\ 0 & 0.00287 \end{bmatrix}}_{\widetilde{R_{ij}}(\mathbf{u})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0.0017 & 0 \\ 0 & 0.00036 \end{bmatrix}}_{R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})}$$

Normiert man die Spannungen mit der Schubspannungsgeschwindigkeit ($T_{ij}^+ = T_{ij}/u_\tau^2$) ergeben sich folgende Statistiken:

- Rechnung OCH B ($Re_\tau = 590$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10.1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\langle D_{ij}^+(\mathbf{u}) \rangle} = \underbrace{\begin{bmatrix} 8.7 & 0 \\ 0 & 0.0 \end{bmatrix}}_{D_{ij}^+(\langle \mathbf{u} \rangle)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.8 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}}_{\widetilde{R_{ij}^+}(\mathbf{u})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}}_{R_{ij}^+(\tilde{\mathbf{u}})} \quad (5.4)$$

- Rechnung OCH C ($Re_\tau = 395$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10.5 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\langle D_{ij}^+(\mathbf{u}) \rangle} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9.1 & 0 \\ 0 & 0.0 \end{bmatrix}}_{D_{ij}^+(\langle \mathbf{u} \rangle)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}}_{\widetilde{R_{ij}^+}(\mathbf{u})} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}}_{R_{ij}^+(\tilde{\mathbf{u}})} \quad (5.5)$$

Ein Vergleich der Rechenergebnisse zeigt eine relativ geringe Abhängigkeit der normierten Dispersionsspannungen von der Reynoldszahl. Auffallend ist die starke Anisotropie der zeitlich gemittelten Dispersionsspannungen. So ist $\langle D_{11}(\mathbf{u}) \rangle \approx 13 \cdot \langle D_{22}(\mathbf{u}) \rangle$. Bei der $\langle D_{11}(\mathbf{u}) \rangle$ Komponente stammen jedoch fast 90 % von dem Spannungsanteil $D_{11}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, der durch das mittlere Geschwindigkeitsprofil in Strömungsrichtung bestimmt ist. Für die Querkomponente $\langle D_{22}(\mathbf{u}) \rangle$ ist der Anteil des mittleren Strömungsprofils ($D_{22}(\langle \mathbf{u} \rangle)$) null, da die mittlere Quergeschwindigkeit $\langle u_2 \rangle$ null ist. Auch bei den Reynoldsspannungen der 2D-Bewegung $R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$ ist eine deutliche Anisotropie zu erkennen. Hier ergibt sich $\langle \tilde{u}' \tilde{u}' \rangle \approx 4 \cdot \langle \tilde{v}' \tilde{v}' \rangle$. Bei den tiefengemittelten Reynoldsspannungen der Gesamt-Turbulenz $\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})}$ ist die Anisotropie geringer. Hier ist $\langle \widetilde{u' u'} \rangle \approx 2 \cdot \langle \widetilde{v' v'} \rangle$. Die geringste Anisotropie findet man bei den Reynoldsspannungen der 3D-Turbulenz ($\widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} - R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}})$) mit $(\langle \widetilde{u' u'} \rangle - \langle \tilde{u}' \tilde{u}' \rangle) \approx 1.75 \cdot (\langle \widetilde{v' v'} \rangle - \langle \tilde{v}' \tilde{v}' \rangle)$. Beim Vergleich der Ergebnisse der beiden Rechnungen zeigt sich, dass die Anisotropie der 2D- und Gesamt-Turbulenz mit zunehmender Reynoldszahl leicht abnimmt. Dies lässt sich durch eine mit der Reynoldszahl stärker werdende Durchmischung durch kleinskalige Wirbel erklären. Außerdem nähert sich der Verlauf des mittleren Geschwindigkeitsprofils mit zunehmender Reynoldszahl immer mehr an die mittlere tiefengemittelte Geschwindigkeit $\langle \tilde{u} \rangle$ an (vgl. Abb. 5.5), wodurch die anisotropen Spannungen $D_{11}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ geringer werden.

5.1.1.5 Tiefengemittelte Turbulenzenergie

Zur Modellierung der 3D-Turbulenz ist eine Abschätzung der kinetischen Energie der 3D-Turbulenz hilfreich. Damit lässt sich z. B. über $\nu_{3D} \sim h \sqrt{k_{3D}}$ die Größe der Wirbelviskosität abschätzen. Diese Daten können aber auch zur Kalibrierung von Transportgleichungen für $\widetilde{k_{3D}}$ verwendet werden. Wichtig ist auch die Kenntnis der Stärke der 2D-Turbulenz k_{2D} in einer ungescherten Gerinne-strömung, da damit das *Back-scatter*-Modell kalibriert werden kann (vgl. Abschnitt 3.4.2.2).

Aus den LES-Rechnungen lässt sich die in Abschnitt 2.8.1 definierte kinetische Energie von Gesamt-, 2D- und 3D-Turbulenz bestimmen. Trotz der in den LES-Rechnungen gefundenen leichten Reynoldszahlabhängigkeit erlaubt ein einfacher Ansatz der Form $\tilde{k} = C \cdot u_\tau^2$ eine einigermaßen von der Reynoldszahl und Sohlrauigkeit unabhängige Abschätzung für die tiefengemittelten kinetischen

Energien in Gerinneströmungen ohne horizontale Scherung, da die mit u_τ normierten Reynoldsspannungen abgesehen von der unmittelbaren Wandnähe relativ unabhängig von der Reynoldszahl und Sohlrauigkeit sind (vgl. Abb. 4.27). Für die Gerinneströmung ohne horizontale Scherung ergibt sich aus den LES-Daten:

- Gesamt-Turbulenz:

$$\widetilde{k} \approx c_{\widetilde{k}} \cdot u_\tau^2 = 1.8 \cdot u_\tau^2 \quad (5.6)$$

- 2D-Turbulenz:

$$k_{2D} \approx c_{k_{2D}} \cdot u_\tau^2 = 0.25 \cdot u_\tau^2 \quad (5.7)$$

- 3D-Turbulenz:

$$\widetilde{k}_{3D} = \widetilde{k} - k_{2D} \approx c_{\widetilde{k}_{3D}} \cdot u_\tau^2 = (c_{\widetilde{k}} - c_{k_{2D}}) \cdot u_\tau^2 = 1.55 \cdot u_\tau^2 \quad (5.8)$$

Somit sind in einer ungescherten Gerinneströmung etwa 85 % von der Gesamt-Turbulenzenergie der kleinskaligen 3D-Turbulenz und 15 % der 2D-Turbulenz zuzurechnen.

5.1.1.6 Räumliche Spektren und Korrelationen

Anhand räumlicher Spektren lässt sich ablesen, wie die Energie der in der Gerinneströmung vorhandenen turbulenten Strukturen auf unterschiedlich große Skalen verteilt ist. Die räumlichen Spektren können aus den räumlichen Korrelationen der Geschwindigkeitsfluktuationen berechnet werden. So besteht zwischen den Geschwindigkeitsfluktuationen u'_i und u'_j in der homogenen x -Richtung die räumliche Korrelation

$$R_{u_i u_j}^x(r_x) = \langle u'_i(x) u'_j(x + r_x) \rangle \quad (5.9)$$

Hierbei markiert der hochgestellte Index von R die x -Richtung und die tiefgestellten Indices die Korrelation zwischen u_i und u_j . Der Korrelationsabstand in x -Richtung wird mit r_x bezeichnet. Für die y -Richtung gilt Analoges. Durch

die Fouriercosinustransformation

$$E_{u_i u_j}^x(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R_{u_i u_j}^x(r_x) \cos(k \cdot r_x) dr \quad (5.10)$$

erhält man aus der räumlichen Korrelation ein eindimensionales, einseitiges (d. h. $k \geq 0$) Spektrum (siehe z. B. Pope 2000, S. 225). Die Rücktransformation lautet:

$$R_{u_i u_j}^x(r_x) = \int_0^\infty E_{u_i u_j}^x(k) \cos(k \cdot r_x) dk \quad (5.11)$$

Die aufintegrierte Gesamtenergie der über Gleichung 5.9 und 5.10 definierten einseitigen Spektren entspricht den Reynoldsspannungen:

$$\langle u_i' u_j' \rangle = \int_0^\infty E_{u_i u_j}^x(k) dk = \int_0^\infty E_{u_i u_j}^y(k) dk \quad (5.12)$$

Somit lässt sich aus den räumlichen Spektren der Anteil turbulenter Strukturen unterschiedlicher Längenskalen an den Reynoldsspannungen ablesen. Die Größe der Strukturen ist dabei proportional der Wellenzahl k^{-1} , denn ein Mode mit der Wellenzahl k hat die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$. Bei der Interpretation der eindimensionalen Spektren sind Aliasing-Effekte zu beachten, die dazu führen, dass Wellen, die schräg zur untersuchten Raumrichtung verlaufen, im Spektrum mit einer niedrigeren Wellenzahl abgebildet werden. Details dazu finden sich beispielsweise bei Tennekes und Lumley (1972).

Turbulenz-Spektren und Korrelationen in verschiedenen Wassertiefen

Die Abbildungen 5.12 und 5.13 zeigen die berechneten eindimensionalen räumlichen Energiespektren in x - bzw. y -Richtung in verschiedenen Wassertiefen für die periodische Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ für alle Geschwindigkeitskomponenten. Bedingt durch die Größe des Rechengebiets und die Gitterauflösung können nur bestimmte Moden aufgelöst werden. Aufgrund der Periodizität ergibt sich ein diskretes Spektrum, da nur Schwingungen mit Wellenlängen, die ein ganzzahliger Teil der Periodenlänge sind, die Periodizitätsbedingung erfüllen können. Die Größe des periodischen Rechengebiets legt somit die minimale Wellenzahl k_{min} fest, welche gleichzeitig der spektralen

Auflösung $\delta k = k_{min} = 2\pi/L$ entspricht. Für die diskreten Spektren $E^*(k^*)$ (mit $k^* = \delta k, 2\delta k, \dots, k_{max}$) gilt $\langle u'_i u'_j \rangle = \sum_{k^*} \langle E_{u_i u_j}^*(k^*) \rangle$, während für ein kontinuierliches Spektrum Gleichung 5.12 gilt. Damit sich die abgebildeten Spektren mit kontinuierlichen Spektren vergleichen lassen, wurden die diskreten Spektren mit der spektralen Auflösung δk skaliert. In den Abbildungen ist somit $E^*/\delta k$ dargestellt. Die Gitterauflösung bestimmt die maximale Wellenzahl $k_{max} = 2\pi/(2\Delta x)$. Damit ergibt sich für die LES-Rechnungen folgende spektrale Bandbreite:

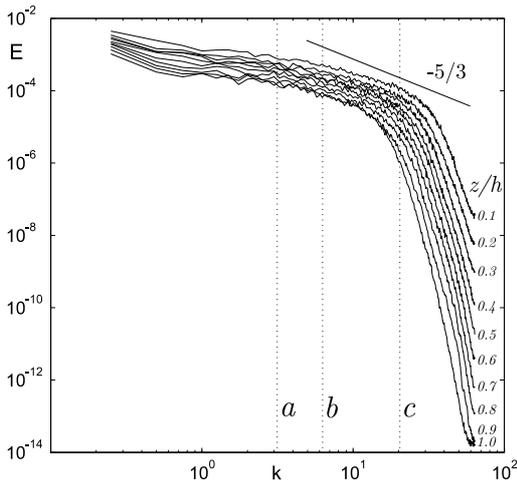
Wellenzahl	Strömungsrichtung	Spannweitenrichtung
k_{min}	$0.25/h$	$1/h$
k_{max}	$64/h$	$128/h$

Tabelle 5.3: Spektrale Bandbreite bei den LES-Rechnungen OCH B und OCH D.

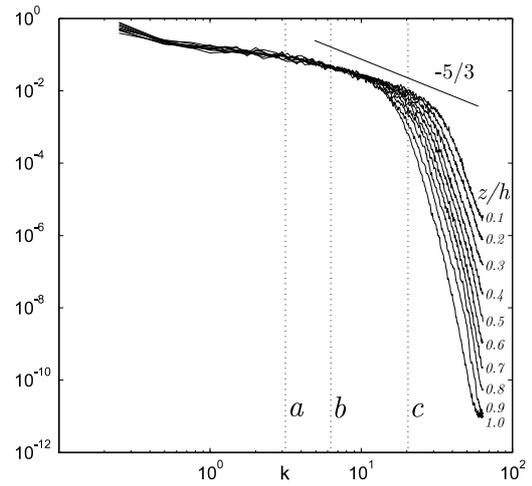
Bei der Interpretation der Spektren ist der numerische Dispersionsfehler des hier verwendeten CDS2-Konvektionsschemas zu beachten, der dazu führt, dass Moden mit hoher Wellenzahlen zu langsam transportiert werden (dazu s. z. B. Werner 1991). Aufgrund der im Strömungsfeld vorherrschenden mittleren Geschwindigkeit u_b ist davon primär der konvektive Transport in x -Richtung betroffen. Daher sollten alle Moden, die über der maximalen effektiven Wellenzahl $k^* = k_{max}/\pi = 1/\Delta x$ des Verfahrens liegen, in den Spektren nur mit größtem Vorbehalt bewertet werden. Bis zu einer Wellenzahl von $k_{max}/4$ kann der numerische Dispersionsfehler jedoch weitestgehend vernachlässigt werden. Zur Orientierung wurden in den Abbildungen drei signifikante Wellenzahlen bzw. Wellenlängen ($\lambda = 2\pi/k$) mit Buchstaben markiert:

- (a) Größter Mode in Tiefenrichtung mit $\lambda_a = 2h, k_a = \pi/h$
(möglich wegen Symmetrie an der Wasseroberfläche)
- (b) Wellenlänge gleich der Wassertiefe $\lambda_b = h, k_b = 2\pi/h$
- (c) Maximale effektive Wellenzahl beim CDS2-Verfahren:
 $k_c = k_{max}/\pi = 1/\Delta x$ bzw. $\lambda_c = 2\pi\Delta x$

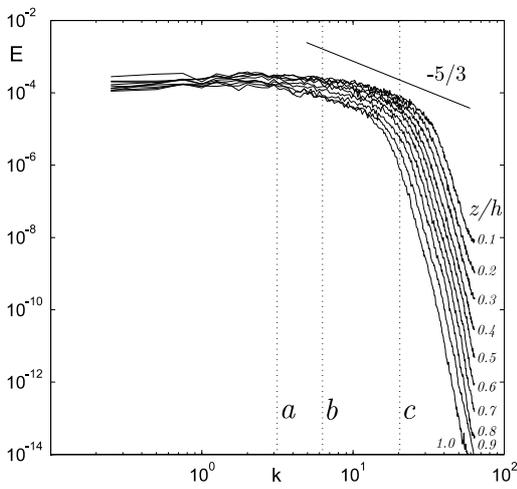
In den Abbildungen 5.12 und 5.13 sind links die Spektren der drei Geschwindigkeitskomponenten und rechts die entsprechenden mit den Reynoldsspannungen normierten Spektren abgebildet. An den normierten Spektren sieht man, wie der Anteil verschiedener Skalen an den Reynoldsspannungen mit der Wassertiefe



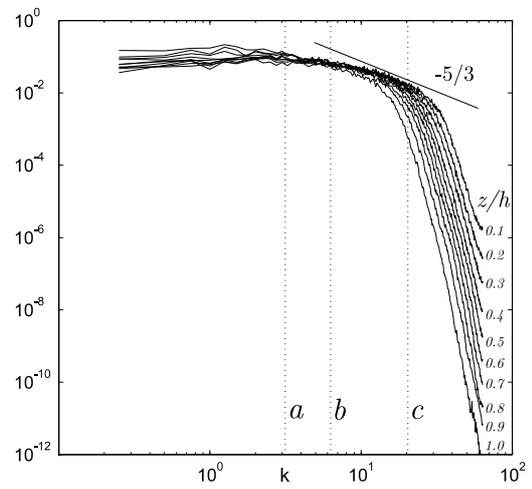
(a) E_{uu}^x



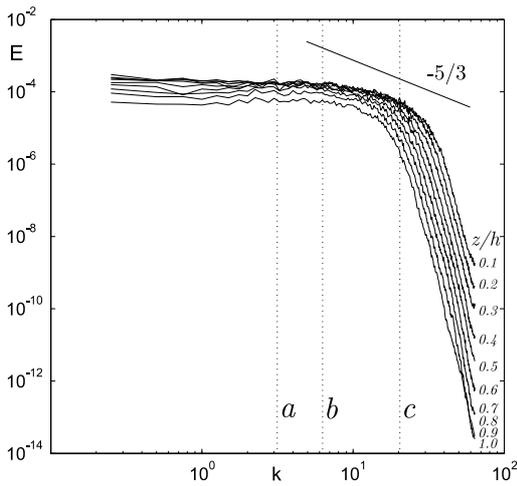
(b) $E_{uu}^x / \langle u'^2 \rangle$



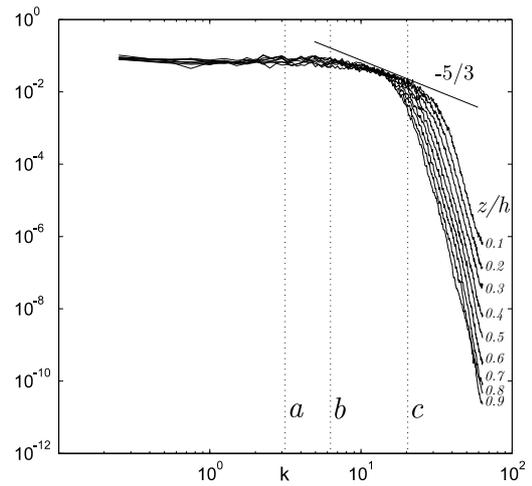
(c) E_{vv}^x



(d) $E_{vv}^x / \langle v'^2 \rangle$

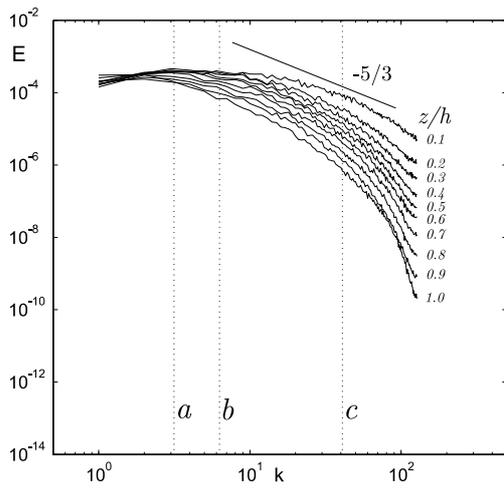


(e) E_{ww}^x

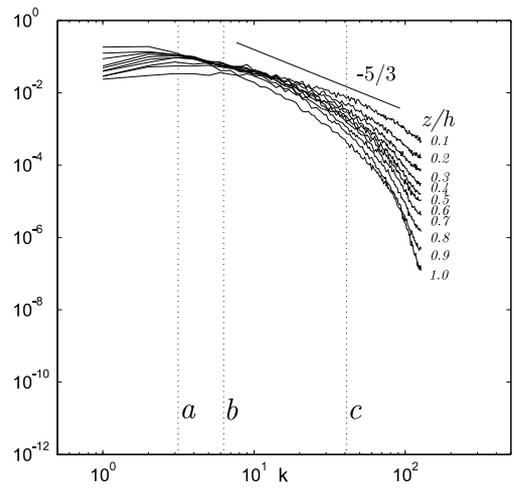


(f) $E_{ww}^x / \langle w'^2 \rangle$

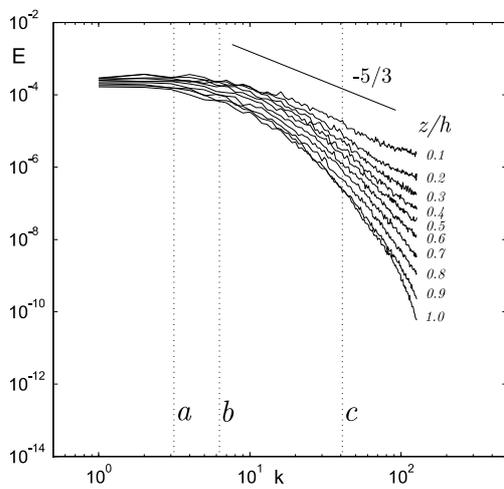
Abb. 5.12: Eindimensionale Energiespektren in x -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$.



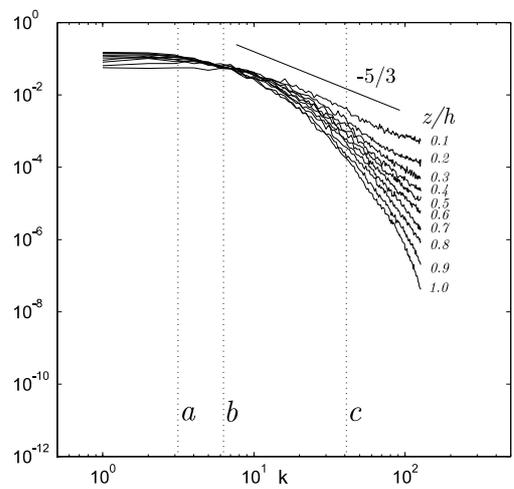
(a) E_{uu}^y



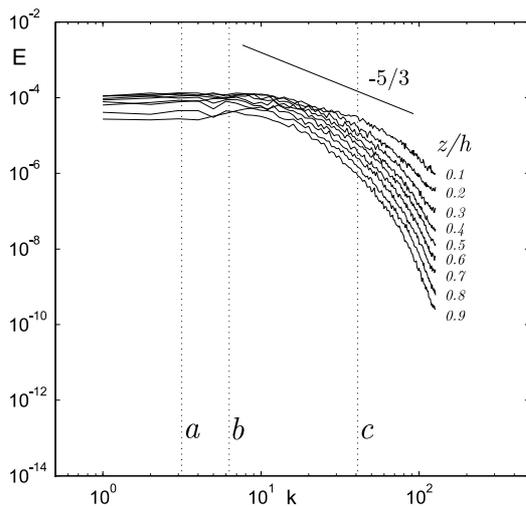
(b) $E_{uu}^y / \langle u'^2 \rangle$



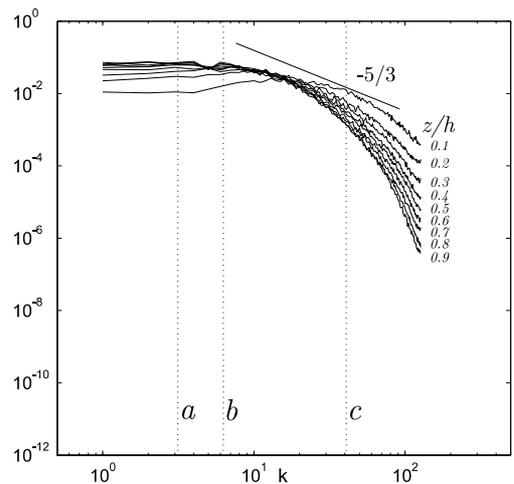
(c) E_{vv}^y



(d) $E_{vv}^y / \langle v'^2 \rangle$



(e) E_{ww}^y



(f) $E_{ww}^y / \langle w'^2 \rangle$

Abb. 5.13: Eindimensionale Energiespektren in y -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$.

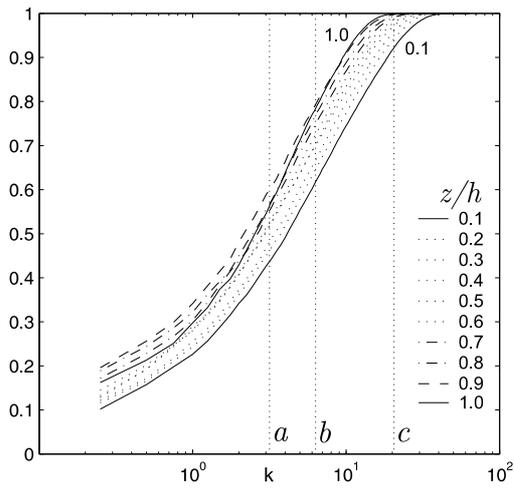
variiert. Deutlich ist zu erkennen, dass mit zunehmender Tiefe (d. h. kleineres z/h) die Rolle der kleinskaligen Strukturen zunimmt. Dabei ist bei Wellenzahlen, die knapp unterhalb der maximalen effektiven Wellenzahl des numerischen Verfahrens liegen, ein für die kleinskalige Turbulenz typischer $k^{-5/3}$ Verlauf erkennbar.

Die im Spektrum bis zu einer Wellenzahl k enthaltene Energie ist:

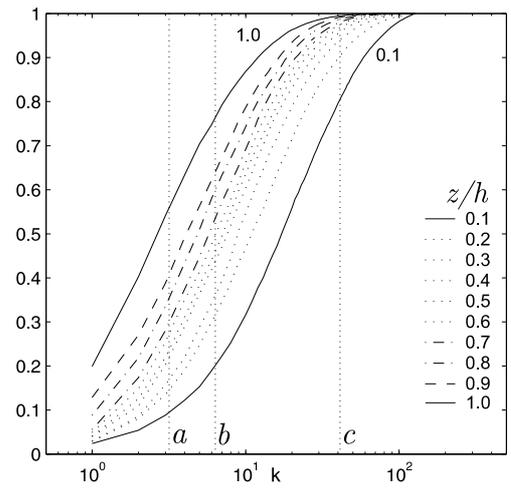
$$E_{u_i u_i}^{<k}(k) = \int_0^k E_{u_i u_i}(k') dk' \quad (5.13)$$

Der Anteil an der Gesamtenergie, den Moden mit Wellenzahlen kleiner als k haben, ist $E_{u_i u_i}^{<k}(k) / \langle u_i'^2 \rangle$. Abbildung 5.14 zeigt dies für die Spektren in x - und y -Richtung. Hier lässt sich ablesen, wie viel Energie in einem Skalenbereich steckt. So lässt sich beispielsweise aus den Teilabbildungen 5.14a und 5.14b erkennen, dass an der Wasseroberfläche etwa 80 % der Energie der u -Schwankungen in Skalen mit Wellenlängen, die größer als die Wassertiefe sind (Markierung b), enthalten ist. Dies deckt sich mit den Ergebnissen von Liu, Adrian und Hanratty (2001), die für einen Rechteckkanal mittels einer POD-Methode (*Proper Orthogonal Decomposition*) fanden, dass die großskaligen Strömungsstrukturen den Hauptanteil an den Reynoldsspannungen haben. Die Abbildungen zeigen außerdem, dass mit zunehmender Wassertiefe immer mehr Energie in den kleineren Skalen zu finden ist. Während die Verteilung der Schwankungsenergie der Querfluktuationen (v') über die Tiefe nahezu unabhängig von der Raumrichtung ist (Abb. 5.14c zeigt die entsprechenden Energiespektren in x -Richtung und Abb. 5.14d die Energiespektren in y -Richtung), zeigt sich bei den u - und w -Fluktuationen eine deutliche Abhängigkeit von der Richtung. Bei den u - und w -Fluktuationen ist insbesondere in der Querrichtung die Energie in Bodennähe fast ausschließlich in den kleinskaligen Fluktuationen zu finden (Teilabbildungen 5.14b und 5.14f).

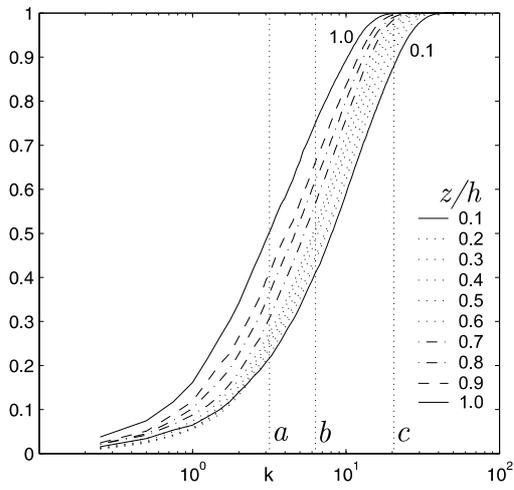
Die Abbildungen 5.15 und 5.16 zeigen die Autokorrelationen entlang der x - bzw. y -Richtung in verschiedenen Wassertiefen, die aus den Energiespektren für die Gerinneströmung mit $Re_\tau = 590$ berechnet wurden. Das periodische Rechengebiet ermöglicht die Bestimmung von Autokorrelationen mit einem Korrelationsabstand bis zur halben Ausdehnung des periodischen Rechengebiets. Bei den Korrelationen der u -Geschwindigkeiten in Strömungsrichtung R_{uu}^x ist



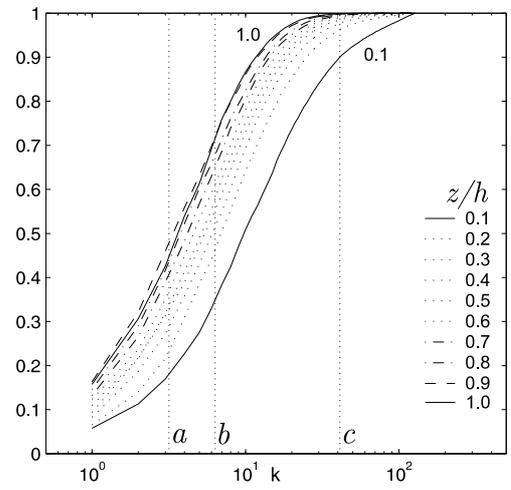
(a) $E_{uu}^x <k / \langle u'^2 \rangle$



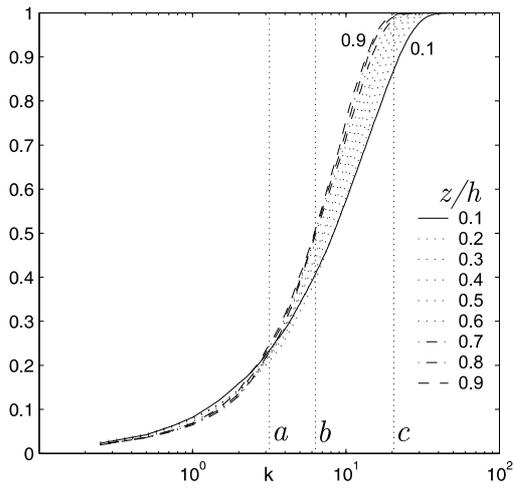
(b) $E_{uu}^y <k / \langle u'^2 \rangle$



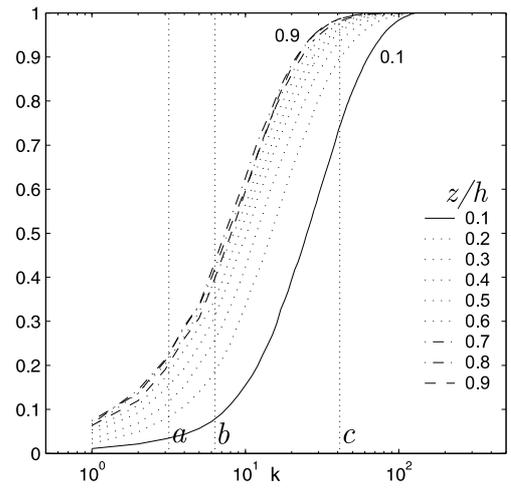
(c) $E_{vv}^x <k / \langle v'^2 \rangle$



(d) $E_{vv}^y <k / \langle v'^2 \rangle$

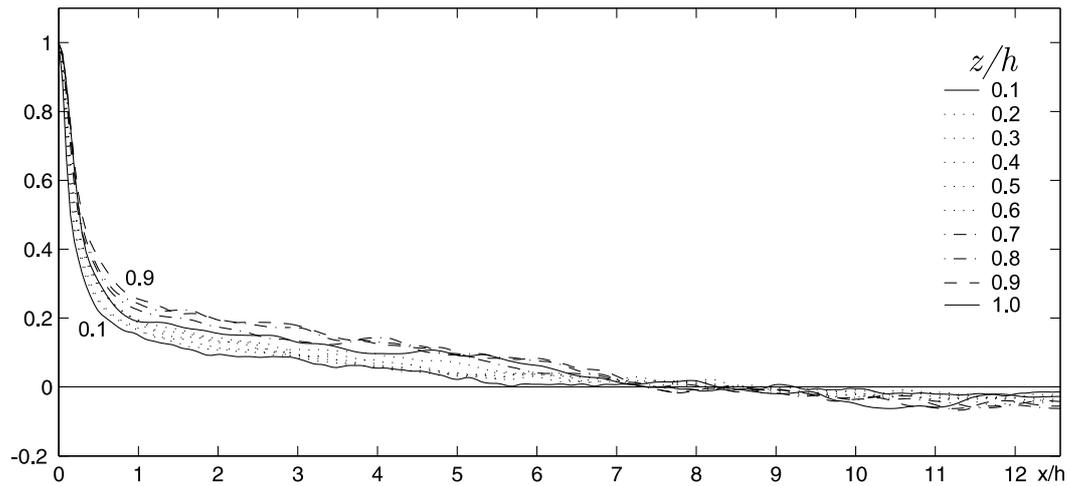


(e) $E_{ww}^x <k / \langle w'^2 \rangle$

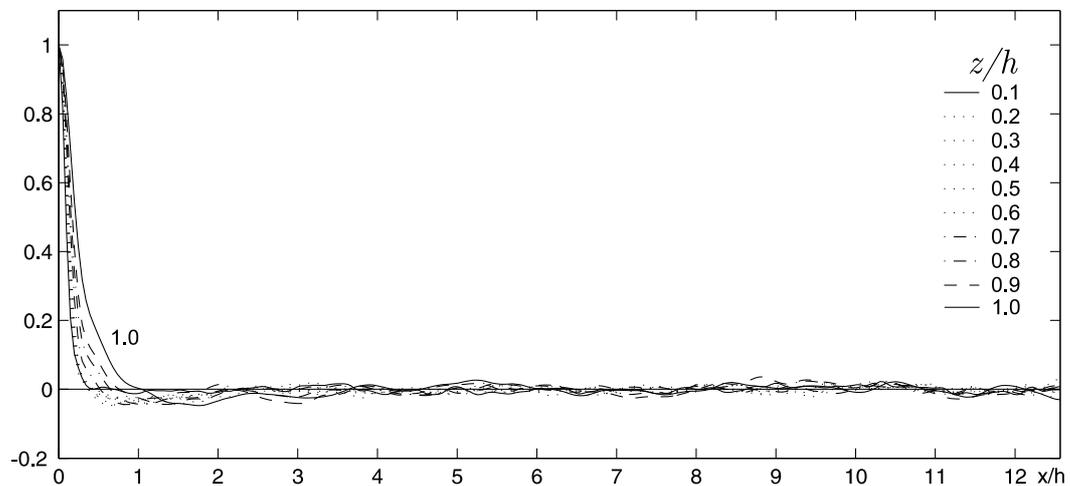


(f) $E_{ww}^y <k / \langle w'^2 \rangle$

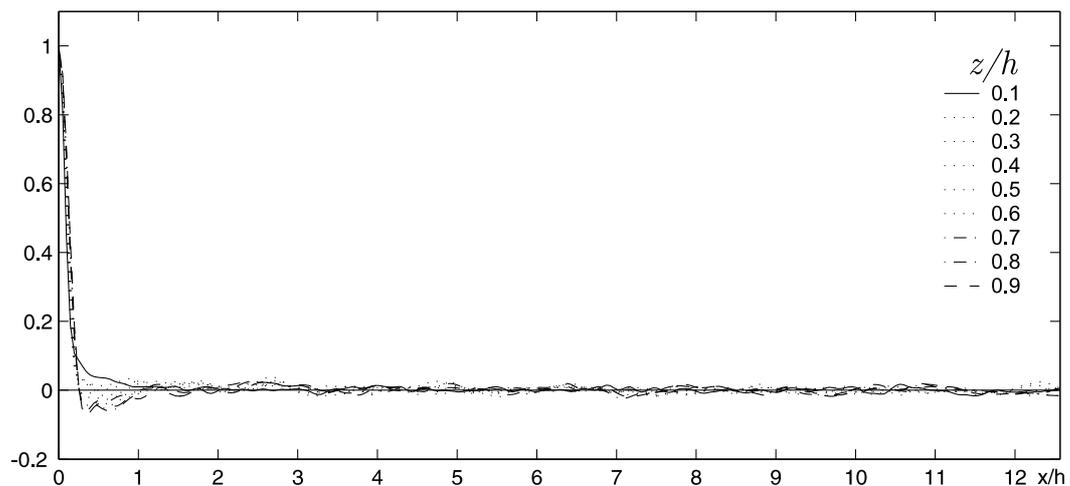
Abb. 5.14: Energieanteil von Wellenzahlen $<k$ an der Gesamtenergie der Energiespektren in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$.



(a) $R_{uu}^x / \langle u'^2 \rangle$



(b) $R_{vv}^x / \langle v'^2 \rangle$



(c) $R_{ww}^x / \langle w'^2 \rangle$

Abb. 5.15: Autokorrelationen in x -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_b = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

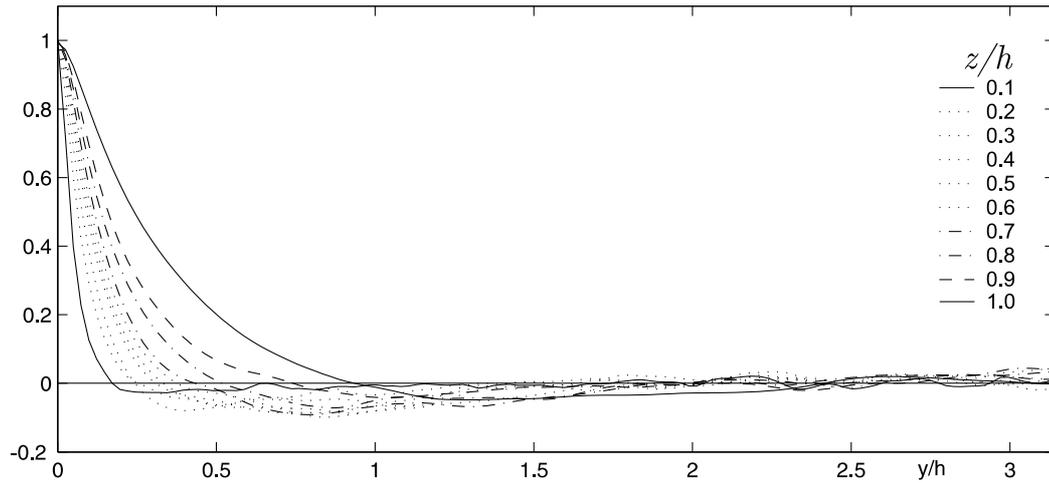
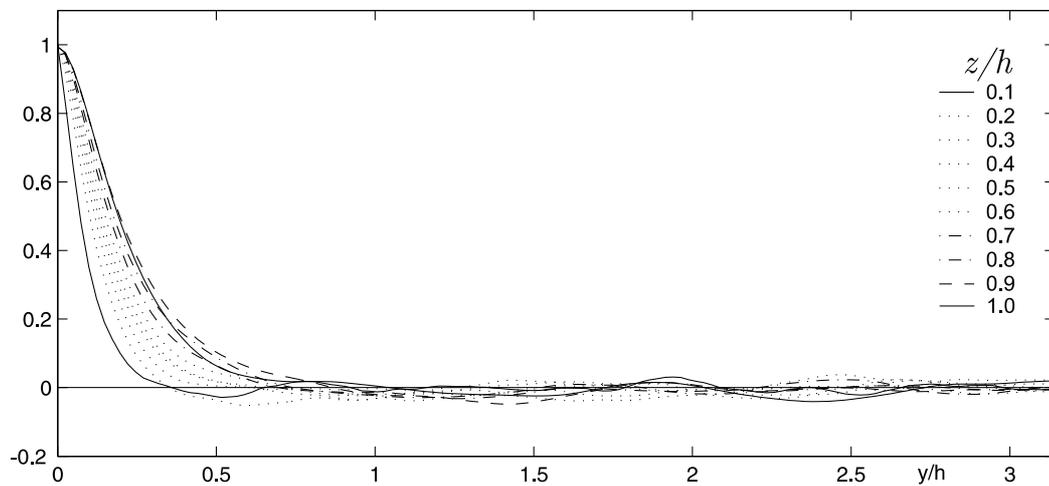
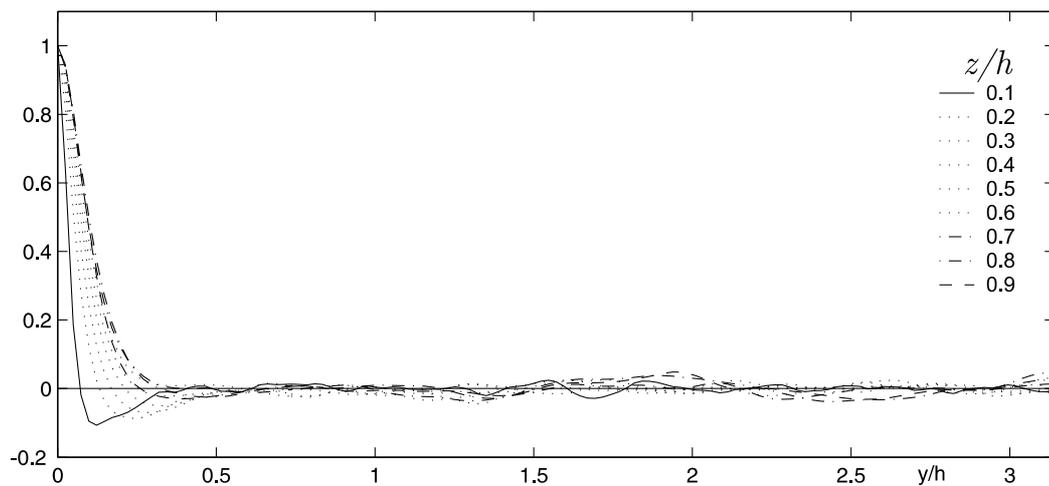
(a) $R_{uu}^y / \langle u'^2 \rangle$ (b) $R_{vv}^y / \langle v'^2 \rangle$ (c) $R_{ww}^y / \langle w'^2 \rangle$

Abb. 5.16: Autokorrelationen in y -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_b = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

eine Korrelation bis zum maximalen Korrelationsabstand vorhanden. Dies ist ein klarer Hinweis dafür, dass das Rechengebiet in x -Richtung zu kurz ist, um die größten Strukturen in unkorrelierter Weise erfassen zu können. Dennoch ist davon auszugehen, dass das hier verwendete Rechengebiet mit einer Länge von über 25 Wassertiefen zur Bestimmung der meisten relevanten Größen ausreichend groß gewählt wurde.

Die Korrelationen der u -Geschwindigkeiten in Querrichtung R_{uu}^y klingen deutlich schneller ab als in Längsrichtung und erreichen spätestens bei $r_y = h$ ein konstantes Niveau. Bei R_{uu}^y zeigt sich auch deutlich der Einfluss der Wassertiefe: Mit zunehmender Wassertiefe nimmt die Korrelationslänge ab. Dies ist ein klarer Hinweis dafür, dass in Sohlhöhe die kleinskalige Turbulenz dominiert, während in geringen Wassertiefen großskalige Strukturen auftreten. Interessant ist in diesem Zusammenhang auch die Korrelation R_{uu}^x an der Wasseroberfläche ($z/h = 1$), die eine deutlich geringere Korrelationslänge aufweist als die Korrelationen knapp unterhalb der Wasseroberfläche (z. B. bei $z/h = 0.9$). Dies kann durch vertikale Strömungen, die an der Wasseroberfläche abgelenkt werden (sog. *boils*) und dabei die langen korrelierten Strukturen in x -Richtung stören, erklärt werden.

Bei der Quergeschwindigkeit sind die Korrelationslängen deutlich geringer als bei der u -Geschwindigkeit. Dies ist durch die länglichen Strukturen in Strömungsrichtung bedingt. So klingen die Korrelationen R_{vv}^x in x -Richtung schon nach etwa einer Wassertiefe und R_{vv}^y in y -Richtung nach etwa einer halben Wassertiefe auf null ab. Noch schneller klingen die Korrelationen R_{ww}^x und R_{ww}^y der Vertikalgeschwindigkeit ab. Dies ist zu erwarten, da das turbulente Längenmaß der vertikalen Fluktuationen durch die Wassertiefe beschränkt ist. Die Korrelationslängen der Autokorrelationen lassen sich anhand integraler Längenskalen quantifizieren. Für die integralen Längenskalen L_x und L_y in x - bzw. y -Richtung gilt (Pope 2000):

$$L_x = \int_0^\infty R_{uu}^x(r_x) dr_x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{uu}^x(0)}{\langle u'^2 \rangle} \quad (5.14)$$

$$L_y = \int_0^\infty R_{vv}^y(r_y) dr_y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{vv}^y(0)}{\langle v'^2 \rangle} \quad (5.15)$$

In Abbildung 5.17 ist der Verlauf der für $Re_b = 10\,935$ berechneten Makrolängen L_x und L_y über die Tiefe dargestellt. Zur Berechnung der Makrolängen wurde der Limes für $E(0) = \lim_{k \rightarrow 0} (E(k)) \approx E^*(k_{min})/\delta k$ verwendet. Somit ist die berechnete Makrolänge proportional der Energie der Skalen mit der niedrigsten Wellenzahl. Um diese korrekt zu berechnen, ist jedoch eine sehr lange Mittelungszeit t_{avg} notwendig. Diese betrug hier $t_{avg} \approx 450h/u_b \approx 18T_{Zyklus}$, was im Bezug auf die sehr langen Skalen als relativ kurz zu bewerten ist und somit zu Unsicherheiten bei den berechneten Makrolängen führt. Außerdem ist wegen des relativ kurzen Rechengebietes die maximale Größe der langwelligen Strukturen in Strömungsrichtung beschränkt, was weitere Ungenauigkeiten bei den langwelligen Strukturen verursacht. Die berechneten Makrolängen erlauben trotz aller Unsicherheiten jedoch qualitative Aussagen wie z. B. über das Verhältnis der Längenskalen in x - und y -Richtung. Hier bestätigt sich, dass die Längenskalen in Strömungsrichtung deutlich größer als in Querrichtung sind. Außerdem nimmt die Makrolänge über die Wassertiefe zur Sohle hin ab, was auf kleiner werdende turbulente Strukturen hinweist. Für die Makrolängen in Strömungsrichtung L_x ist zum Vergleich eine von Nezu und Nakagawa (1993, S. 71) angegebene empirische Beziehung eingezeichnet, die aus experi-

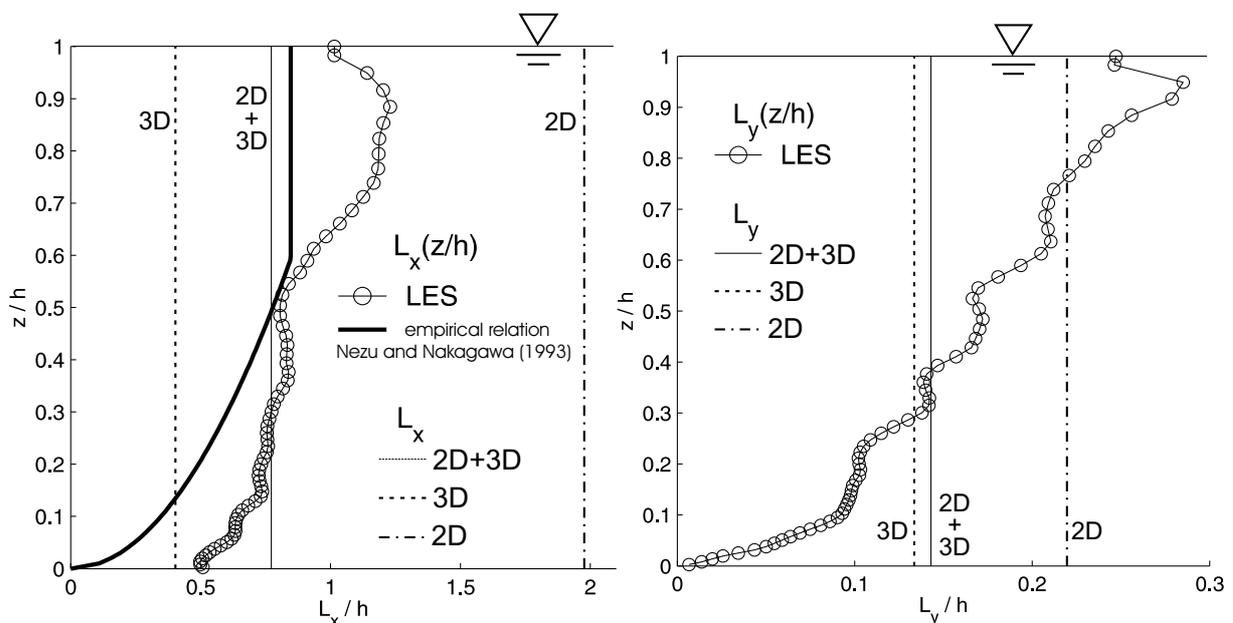


Abb. 5.17: Makrolängen in Strömungsrichtung L_x und in Spannweitenrichtung L_y berechnet aus den entsprechenden eindimensionalen Energiespektren; Gerinneströmung mit $Re_h = 10935$ ($Re_\tau = 590$).

mentellen Daten durch Anwendung der Taylor-Hypothese ($\partial_t u = -\langle u \rangle \partial_x u$) aus Frequenzspektren gewonnen wurde. Die Taylor-Hypothese ist jedoch nur beschränkt gültig [Piomelli et al. 1989](#). Dies gilt besonders in Sohlnähe, was die Abweichung zu den experimentellen Ergebnissen erklärt, denn anders als die experimentell bestimmten gehen die hier berechneten Makrolängen in Strömungsrichtung an der Sohle nicht gegen null, sondern streben in der viskosen Unterschicht gegen einen konstanten Wert². Dies ist ein Indiz, dass auch an der Sohle korrelierte Fluktuationen in Strömungsrichtung auftreten. Dies können dann zwar keine Geschwindigkeitsfluktuationen u' sein, denn diese sind aufgrund der Haftbedingung null, aber es können korrelierte Fluktuationen in der Bodenreibung $\tau'_b = \rho\nu \left[\frac{\partial u}{\partial z}\right]'_b$ auftreten. Mit dem Sohlabstand nimmt L_x zu. Direkt an der Wasseroberfläche ist ein leichter Rückgang zu beobachten, was auf den bereits erwähnten Zerfall von großskaligen Strukturen an der Wasseroberfläche durch *boils* hinweist.

Die Makrolängen in Spannweitenrichtung L_y betragen nur etwa ein Fünftel von L_x . Dies gibt Aufschluss über das Breiten- zu Längenverhältnis der turbulenten Strukturen. Betrachtet man den Verlauf von $L_y(z/h)$ über die Tiefe, so ist $L_y(0)$ an der Sohle annähernd null und nimmt wie L_x mit dem Sohlabstand zu. Wiederum ist direkt an der Wasseroberfläche ein leichter Rückgang zu beobachten. Für die Makrolängen L_y in Spannweitenrichtung sind leider keine experimentellen Vergleichsdaten verfügbar, da die Taylor-Hypothese quer zur Hauptströmungsrichtung nicht anwendbar ist und die räumlichen Spektren somit messtechnisch schwer zu bestimmen sind.

² Dies ist möglich, da an der Sohle (bei $z = z_b$) der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_b} [E_{uu}(0)]_z / [\langle u'^2 \rangle]_z$ existiert, obwohl $[E_{uu}(k)]_{z_b} = 0$ und $[\langle u'^2 \rangle]_{z_b} = 0$.

Spektren und Korrelationen der 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz

In Verbindung mit der Tiefenmittelung sind die Spektren der 2D- und der 3D-Turbulenz von besonderem Interesse. In Abschnitt 2.8.1 wurde eine Definition von 2D- und 3D-Turbulenz gegeben, wobei die 3D-Turbulenz nur in Verbindung mit der Tiefenmittelung anschaulich ist (z. B. tiefengemittelte kinetische turbulente Energie der 3D-Turbulenz $\widetilde{k_{3D}}$). Das Gleiche gilt für die entsprechenden Spektren. Aus der Definition für 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz ergeben sich folgende Spektren:

- Tiefengemitteltes Spektrum der Gesamt-Turbulenz:

$$\widetilde{E} \equiv \widetilde{E_{u_i u_j}}(k) \quad (5.16)$$

- Spektrum der 2D-Turbulenz (hier gilt $\widetilde{E_{2D}} = E_{2D}$):

$$E_{2D} \equiv E_{\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j}(k) \quad (5.17)$$

- Tiefengemitteltes Spektrum der 3D-Turbulenz:

$$\widetilde{E_{3D}} \equiv \widetilde{E_{u_i^{[D]} u_j^{[D]}}}(k) \quad (5.18)$$

Zwischen den Spektren der Gesamt-, 2D- und 3D-Turbulenz besteht folgender Zusammenhang:

$$\widetilde{E}(k) = E_{2D}(k) + \widetilde{E_{3D}}(k) \quad (5.19)$$

Das 2D-Turbulenzspektrum $E_{2D}(k)$ ist das Spektrum der tiefengemittelten Geschwindigkeiten. Das 3D-Spektrum $\widetilde{E_{3D}}$ ergibt sich durch Tiefenmittelung der in Bezug auf die Tiefe z lokalen Spektren der 3D-Schwankungen $E_{u_i^{[D]} u_j^{[D]}}(z)$. Das tiefengemittelte Spektrum der Gesamt-Turbulenz $\widetilde{E}(k)$ erhält man durch Tiefenmittelung der lokalen Spektren $E_{u_i u_j}(z)$.

Die Gesamtenergie der Spektren entspricht wiederum den entsprechenden tiefengemittelten Reynoldsspannungen:

- Gesamt-Turbulenz:

$$\langle \widetilde{u'_i u'_j} \rangle = \widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} = \int_0^\infty \widetilde{E_{u_i u_j}}(k) dk \quad (5.20)$$

- 2D-Turbulenz:

$$\langle \widetilde{\tilde{u}'_i \tilde{u}'_j} \rangle = R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_0^\infty E_{\tilde{u}_i \tilde{u}_j}(k) dk \quad (5.21)$$

- 3D-Turbulenz:

$$\langle \widetilde{u_i'^{[D]'} u_j'^{[D]'}} \rangle = \widetilde{R_{ij}(\mathbf{u})} - R_{ij}(\tilde{\mathbf{u}}) = \int_0^\infty \widetilde{E_{u_i'^{[D]'} u_j'^{[D]'}}}(k) dk \quad (5.22)$$

Die tiefengemittelten Spektren von Gesamt-, 2D- und 3D-Turbulenz in der Gerinneströmung bei $Re_h = 10\,935$ (Rechnung OCHB) sind in Abbildung 5.18 für die x -Richtung und in Abbildung 5.19 für die y -Richtung dargestellt. In den Abbildungen werden jeweils in Teilabbildung (a) die u -Geschwindigkeitskomponenten und in Teilabbildung (b) die v -Geschwindigkeitskomponenten betrachtet. Unterhalb der Spektren ist das Verhältnis $E_{2D}(k)/\widetilde{E}(k)$, also der Anteil der 2D-Schwankungen an den Gesamtschwankungen, dargestellt. Hier zeigt sich, dass der Anteil der Energie der 2D-Schwankungen $E_{2D}(k)$ an der Energie der Gesamtschwankungsbewegung $\widetilde{E}(k)$ mit der Wellenzahl abnimmt. Demnach tragen die kleinen Skalen der Turbulenzbewegung wenig zur 2D-Bewegung bei, da die kleineren Wirbel nicht über die gesamte Tiefe korreliert sind. Die Energie der kleinen Skalen ist somit zum größten Teil der 3D-Turbulenz zuzuordnen. Dies zeigt sich auch in den integrierten Spektren, welche in Abbildung 5.20 dargestellt sind. Diese Spektren wurden entsprechend Gleichung 5.13 bis zur Wellenzahl k integriert und mit der jeweiligen Gesamtenergie normiert. Somit lässt sich ablesen, wie viel der Gesamtenergie im Spektrum bis zur Wellenzahl k enthalten ist. Hier ist zu erkennen, dass die Energie der 2D-Turbulenz bei den größeren Skalen zu finden ist, während die Energie der 3D-Turbulenz bei den kleineren Skalen angesiedelt ist. Die Gesamt-Turbulenz liegt

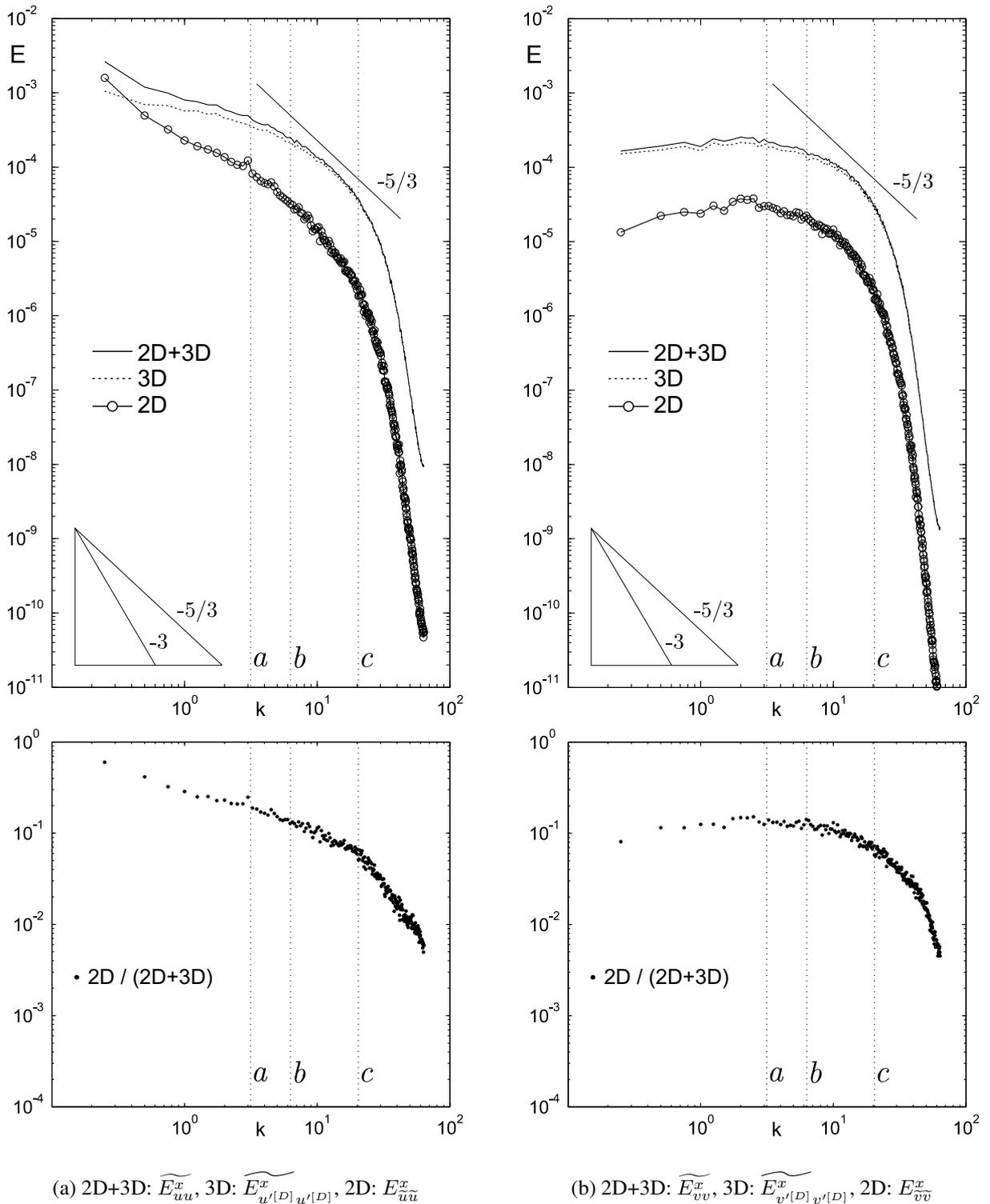


Abb. 5.18: Verhältnis zwischen 2D- und 3D-Turbulenz in der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Energiespektren in x -Richtung; eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$.

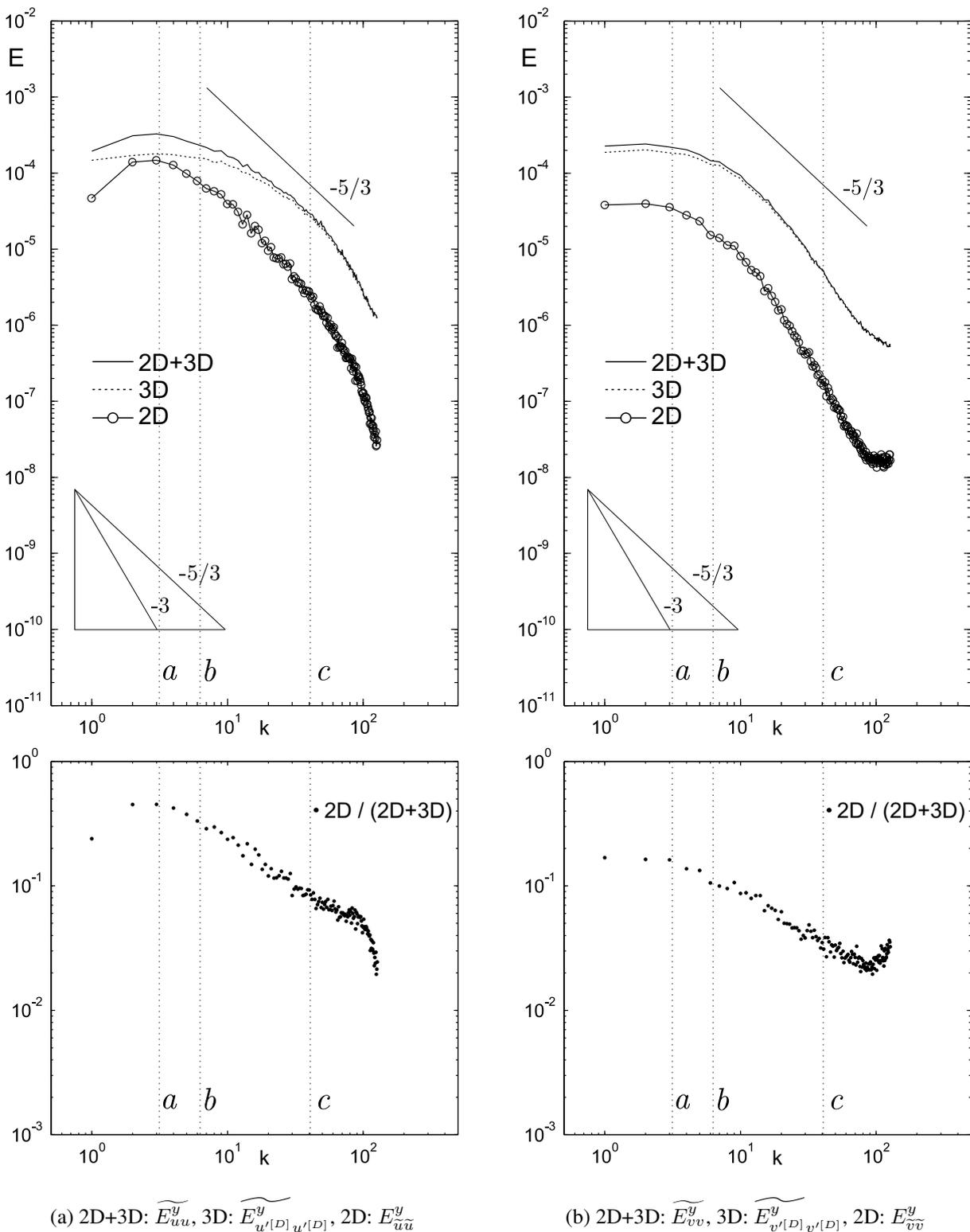


Abb. 5.19: Verhältnis zwischen 2D- und 3D-Turbulenz in der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Energiespektren in y -Richtung; eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$.

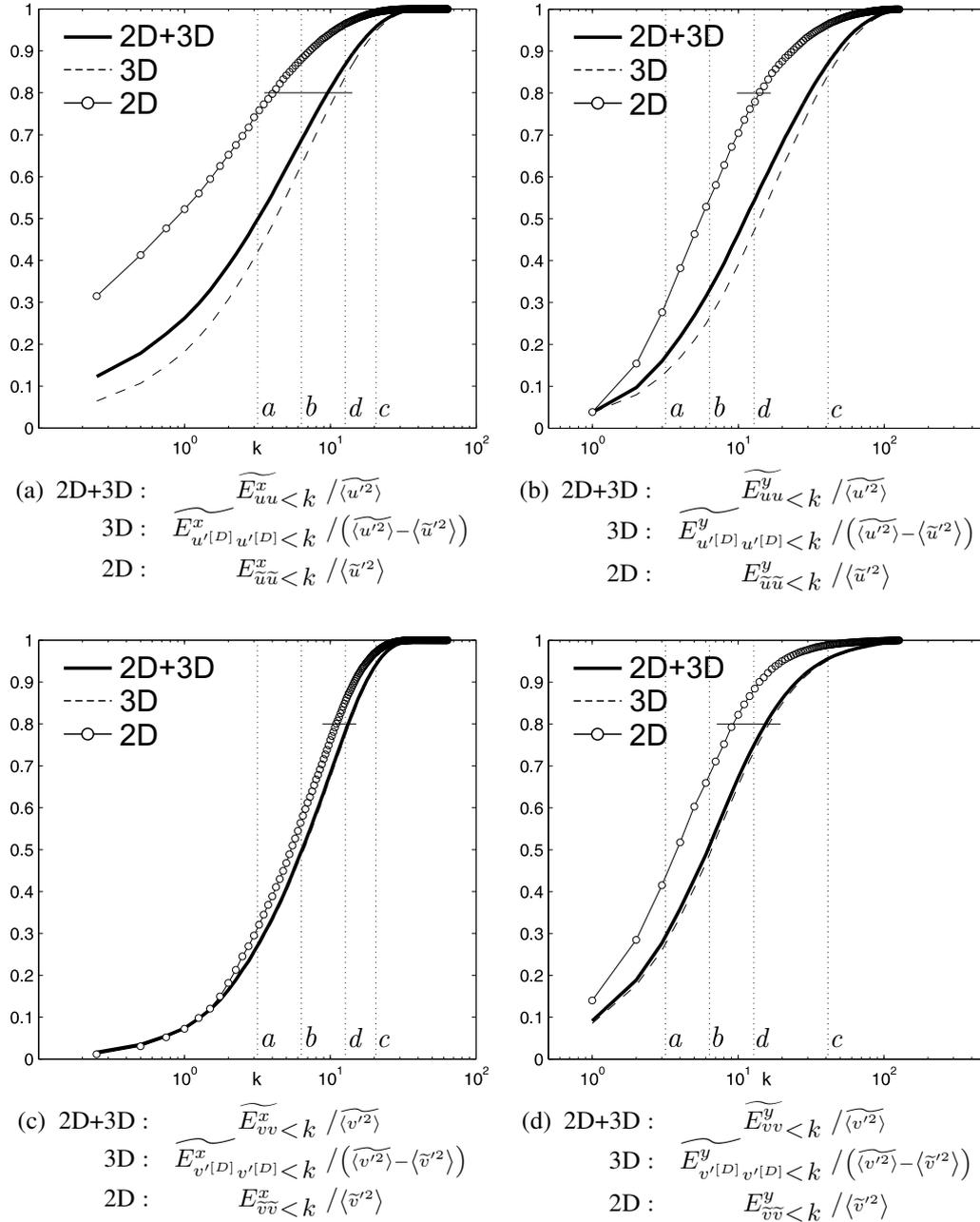
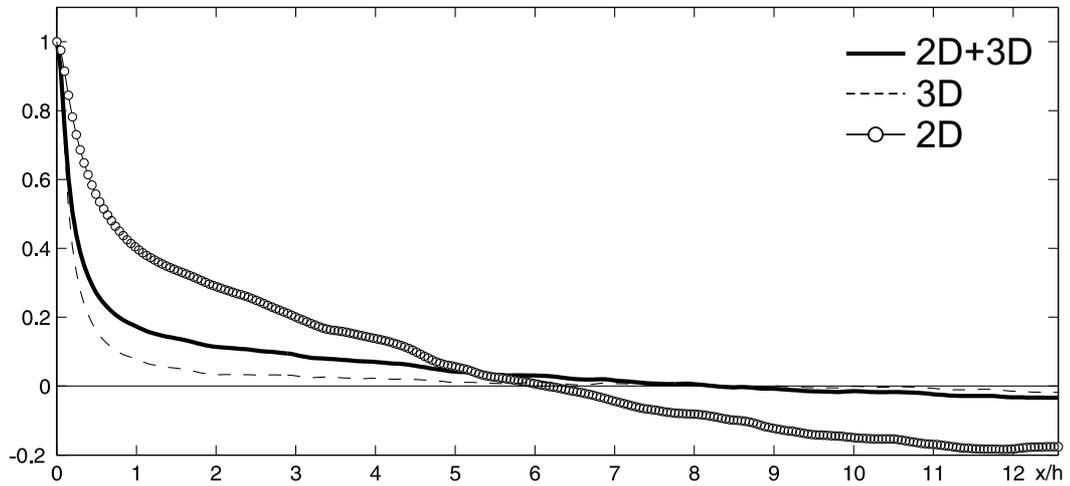


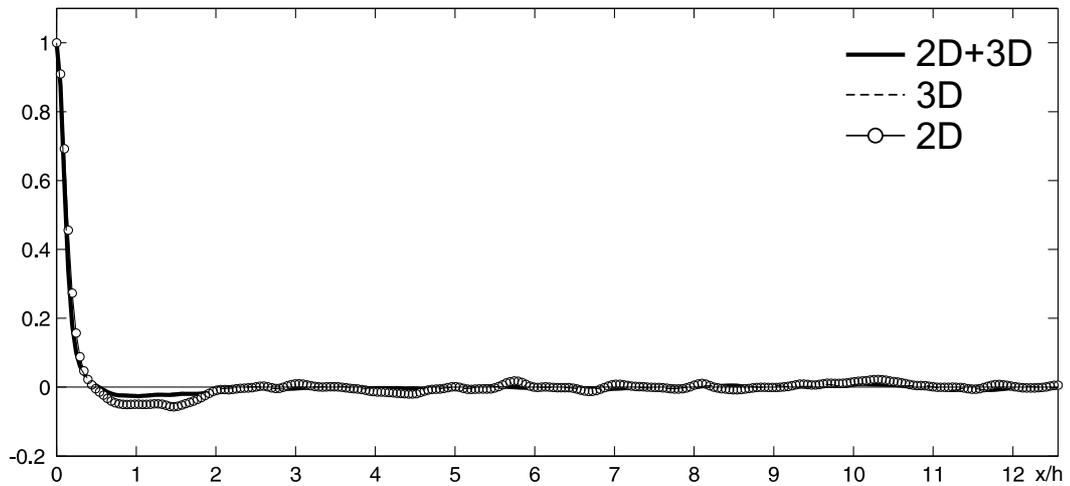
Abb. 5.20: Energieanteil von Wellenzahlen $< k$ an der Gesamtenergie der Energiespektren der Gesamt-, 2D- und 3D-Turbulenz bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$, $\lambda_d = h/2$.

im Mittelfeld dazwischen. Aus den integrierten Spektren lassen sich Anhaltspunkte für die Wahl der Gitterauflösung bei einer DA-LES gewinnen: Möchte man beispielsweise 80 % der Energie der 2D-Bewegung auflösen (horiz. Markierung in der Abb.), so reicht es, wenn Skalen bis zu einer Wellenlänge von etwa $\lambda_{min} \geq h/2$ durch das Gitter aufgelöst werden (die entsprechende Wellenzahl ist in der Abbildung mit „d“ markiert). Die dann dazu notwendige Gitterauflösung ist: $\Delta x, \Delta y \leq \lambda_{min}/2 = h/4$.

Aufschluss über die Korrelationslängen bzw. die räumliche Ausdehnung der turbulenten Strukturen der 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz geben die Autokorrelationen, welche sich aus den Spektren der 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz berechnen lassen. Diese sind in den Abbildungen 5.21 und 5.22 dargestellt. Deutlich sind die unterschiedlichen Korrelationslängen von 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz zu sehen. Die kleinskalige 3D-Turbulenz hat die kürzesten und die großräumige 2D-Turbulenz die längsten Korrelationslängen. Die Strukturen der kleinskaligen 3D-Turbulenz sind durch die Wassertiefe begrenzt und so sind die Korrelationen der 3D-Turbulenz schon nach etwa $0.5h$ fast vollständig abgeklungen. Jedoch sind hier bei den u -Fluktuationen in Strömungsrichtung schwache Korrelationen mit $r_x > h$ zu beobachten. Dies ist durchaus möglich, denn die Größe der 3D-Strukturen wird zwar durch die Wassertiefe beschränkt, dies gilt jedoch nur in vertikaler Richtung, in horizontaler Richtung gibt es keine Beschränkung. Während das Rechengebiet offensichtlich groß genug ist, um die kleinskalige 3D-Turbulenz vollständig zu erfassen, zeigen die Autokorrelationen, dass die 2D-Turbulenz über die gesamte Länge des Rechengebietes korreliert ist. In Spannweitenrichtung geht die Korrelation nach einer Länge von etwa $2h$ gegen null. Somit ist die Breite des Rechengebietes ausreichend, dessen Länge aber zu kurz, um die größten auftretenden 2D-Strukturen in unkorrelierter Weise erfassen zu können.

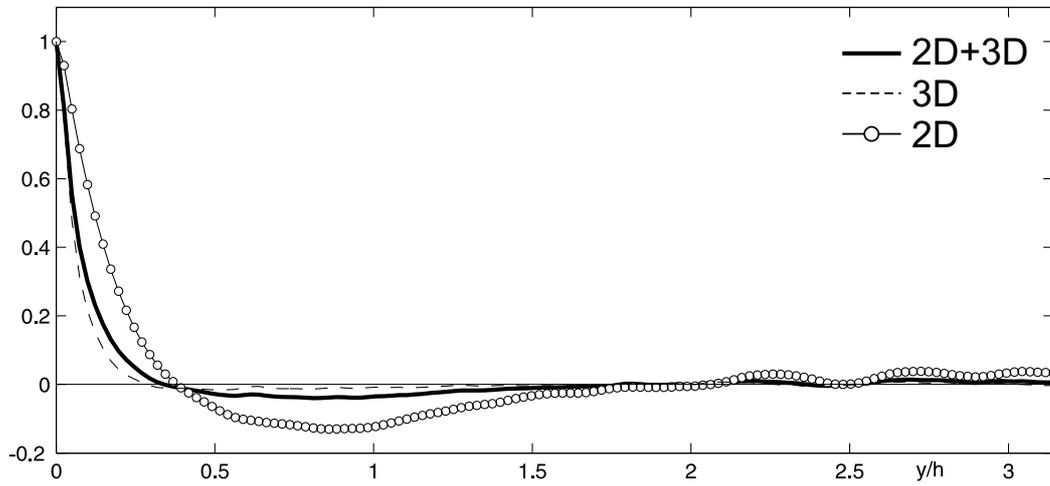


(a) 2D+3D: $\widetilde{R}_{uu}^x / \langle \widetilde{u'^2} \rangle$, 3D: $\widetilde{R}_{u'[D]u'[D]}^x / (\langle \widetilde{u'^2} \rangle - \langle \widetilde{u'^2} \rangle)$, 2D: $R_{\widetilde{u}\widetilde{u}}^x / \langle \widetilde{u'^2} \rangle$

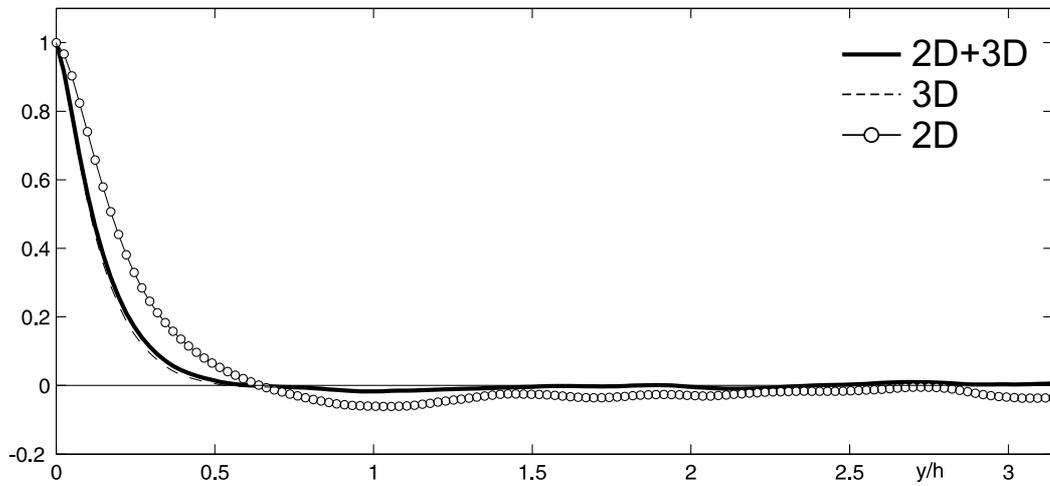


(b) 2D+3D: $\widetilde{R}_{vv}^x / \langle \widetilde{v'^2} \rangle$, 3D: $\widetilde{R}_{v'[D]v'[D]}^x / (\langle \widetilde{v'^2} \rangle - \langle \widetilde{v'^2} \rangle)$, 2D: $R_{\widetilde{v}\widetilde{v}}^x / \langle \widetilde{v'^2} \rangle$

Abb. 5.21: Autokorrelationen in x -Richtung der Gesamt-, 3D- und 2D-Turbulenz bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).



(a) 2D+3D: $\widetilde{R_{uu}^y} / \langle \widetilde{u'^2} \rangle$, 3D: $\widetilde{R_{u'[D]u'[D]}^y} / (\langle \widetilde{u'^2} \rangle - \langle \widetilde{u'^2} \rangle)$, 2D: $R_{\widetilde{u\widetilde{u}}}^y / \langle \widetilde{u'^2} \rangle$



(b) 2D+3D: $\widetilde{R_{vv}^y} / \langle \widetilde{v'^2} \rangle$, 3D: $\widetilde{R_{v'[D]v'[D]}^y} / (\langle \widetilde{v'^2} \rangle - \langle \widetilde{v'^2} \rangle)$, 2D: $R_{\widetilde{v\widetilde{v}}}^y / \langle \widetilde{v'^2} \rangle$

Abb. 5.22: Autokorrelationen in y -Richtung der Gesamt-, 3D- und 2D-Turbulenz bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

Quantitative Aussagen bezüglich der Korrelationslängen der 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz sind mithilfe der integralen Längenskalen möglich. Diese lassen sich analog zur Berechnung der Längenskalen der lokalen Turbulenz nach Gleichung 5.14 und 5.15 aus den jeweiligen Spektren bzw. Autokorrelationen bestimmen:

- Integrale Längenskalen der Gesamt-Turbulenz:

$$L_x^{2D+3D} = \int_0^\infty \widetilde{R}_{uu}^x(r_x) dr_x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\widetilde{E}_{uu}^x(0)}{\langle u'^2 \rangle} \quad (5.23)$$

$$L_y^{2D+3D} = \int_0^\infty \widetilde{R}_{vv}^y(r_y) dr_y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\widetilde{E}_{vv}^y(0)}{\langle v'^2 \rangle} \quad (5.24)$$

- Integrale Längenskalen der 2D-Turbulenz:

$$L_x^{2D} = \int_0^\infty \widetilde{R}_{\widetilde{u}\widetilde{u}}^x(r_x) dr_x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{\widetilde{u}\widetilde{u}}^x(0)}{\langle \widetilde{u}'^2 \rangle} \quad (5.25)$$

$$L_y^{2D} = \int_0^\infty \widetilde{R}_{\widetilde{v}\widetilde{v}}^y(r_y) dr_y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{\widetilde{v}\widetilde{v}}^y(0)}{\langle \widetilde{v}'^2 \rangle} \quad (5.26)$$

- Integrale Längenskalen der 3D-Turbulenz:

$$L_x^{3D} = \int_0^\infty \widetilde{R}_{u'[D]u'[D]}^x(r_x) dr_x = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{u'[D]u'[D]}^x(0)}{\langle u'[D]'^2 \rangle} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\widetilde{E}_{uu}^x(0) - E_{\widetilde{u}\widetilde{u}}^x(0)}{\langle u'^2 \rangle - \langle \widetilde{u}'^2 \rangle} \quad (5.27)$$

$$L_y^{3D} = \int_0^\infty \widetilde{R}_{v'[D]v'[D]}^y(r_y) dr_y = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{E_{v'[D]v'[D]}^y(0)}{\langle v'[D]'^2 \rangle} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\widetilde{E}_{vv}^y(0) - E_{\widetilde{v}\widetilde{v}}^y(0)}{\langle v'^2 \rangle - \langle \widetilde{v}'^2 \rangle} \quad (5.28)$$

Die berechneten integralen Längenskalen in x - und y -Richtung sind in Tabelle 5.4 aufgeführt und zum Vergleich mit den lokalen Längenskalen auch in Abbildung 5.17 eingezeichnet. Das in der Tabelle mit aufgeführte Verhältnis der

integralen Längenskalen L_x/L_y gibt Aufschluss über das Längen- zu Breitenverhältnis der mit der 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz verbundenen turbulenten Strukturen. Hier findet man das größte Längen- zu Breitenverhältnis bei den 2D-Strukturen und das kleinste bei den 3D-Strukturen. Die Unterschiede spiegeln sich auch in der Anisotropie der tiefengemittelten Reynoldsspannungen von 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz wider (s. Gl. 5.4, 5.5).

Längenskale	L_x	L_y	L_x/L_y
Gesamt-Turbulenz	$0.77 h$	$0.14 h$	5.5
2D-Turbulenz	$1.98 h$	$0.22 h$	9.0
3D-Turbulenz	$0.40 h$	$0.13 h$	3.1

Tabelle 5.4: Makrolängen der tiefengemittelten 2D-, 3D- und Gesamt-Turbulenz in der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

Korrelation zwischen 3D- und 2D-Schwankungen

Die Spektren von 2D- und 3D- und Gesamt-Turbulenz zeigten, dass die kleinen Skalen kaum zur 2D-Turbulenz beitragen. Die kleinen turbulenten Skalen findet man vorrangig in Sohlnähe, weshalb in diesem Zusammenhang die Korrelation $\langle u'_i(z/h) \tilde{u}'_i \rangle$ interessant ist, die ausdrückt, wie die 2D-Schwankungen \tilde{u}'_i mit den turbulenten Fluktuationen u'_i über die Wassertiefe korreliert sind. Der Tiefenmittelwert dieser Korrelation entspricht den Reynoldsspannungen der 2D-Bewegung $\langle \tilde{u}'_i \tilde{u}'_i \rangle$. Die Korrelation $\langle u'_i(z/h) \tilde{u}'_i \rangle$ in der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ist in Abbildung 5.23 dargestellt. Mit zunehmender Wassertiefe nimmt die Korrelation $\langle u' \tilde{u}' \rangle$ zwischen den Fluktuationen u' und den 2D-Schwankungen \tilde{u}' zu und hat ein Maximum im Übergangsbereich zwischen viskoser Unterschicht und dem turbulenten logarithmischen Bereich. Demnach stammt der Hauptanteil der \tilde{u} -Schwankungen von den sohlnahen Regionen, wo die kleinskalige Turbulenz dominiert und die stärksten u -Schwankungen auftreten. Die Korrelation $\langle v' \tilde{v}' \rangle$ der Schwankungen in Spannweitenrichtung verhält sich etwas anders als $\langle u' \tilde{u}' \rangle$. Hier findet man kein Maximum im Übergangsbereich, sondern eine Nullstelle und die Korrelation wird in der viskosen Unterschicht negativ. Demnach sind dort v' -Fluktuationen häufig entgegengesetzt zu

Schwankungen der tiefengemittelten Bewegung \tilde{v}' . Dies lässt sich durch sohl-nahe Wirbelstrukturen in Strömungsrichtung (sog. *Streaks*) erklären. In diesen ist die sohl-nahe Strömung in Spannweitenrichtung unterhalb des Wirbelkerns entgegengesetzt zur Strömungsrichtung oberhalb des Wirbelkerns.

Die Stärke der Fluktuationen u'_i variiert über die Tiefe und die Fluktuationen sind nur teilweise mit den \tilde{u}_i -Schwankungen korreliert. Wie stark einzelne lokale u_i -Fluktuationen mit \tilde{u}_i korrelieren, sieht man in Abbildung 5.23b, wo $\langle u'_i \tilde{u}_i' \rangle$ mit der Stärke der lokalen Fluktuationen $u'_{i,rms}$ normiert wurde. Hierbei erfolgte die Normierung aus Dimensionsgründen mit $\sqrt{\langle u_i'^2 \rangle \langle \tilde{u}_i'^2 \rangle}$, was proportional $u'_{i,rms}$ ist, da $\langle \tilde{u}_i'^2 \rangle$ konstant über die Tiefe ist. Der Korrelationskoeffizient $\langle u'_i \tilde{u}_i' \rangle / \sqrt{\langle u_i'^2 \rangle \langle \tilde{u}_i'^2 \rangle}$ zeigt, dass die turbulenten u'_i -Schwankungen mit der tiefengemittelten Schwankungsbewegung \tilde{u}'_i am stärksten nahe der Gerinnemitte in einer Region etwa um $0.3 < z/h < 0.7$ korreliert sind und die Korrelation zur Wasseroberfläche und zur Sohle hin abnimmt. Der Rückgang der Korrelationen nahe der Wasseroberfläche ist auf die schon erwähnten *boils* zurückzuführen. Diese verursachen vertikale Fluktuationen, welche an der Wasseroberfläche in horizontale Schwankungen umgewandelt werden und dabei die großskaligen horizontalen Strukturen stören. Nahe der Sohle ist der Rückgang der Korrelationen auf die Haftbedingung und auf die kleinskalige Turbulenz zurückzuführen, welche, wie schon die Energiespektren erkennen ließen, kaum mit der tiefengemittelten Geschwindigkeit korreliert. Wie auch schon bei den Makrolängen L_x an der Sohle zu beobachten war, strebt der Korrelationskoeffizient $\langle u' \tilde{u}' \rangle / \sqrt{\langle u'^2 \rangle \langle \tilde{u}'^2 \rangle}$ wiederum an der Sohle nicht gegen null. Hier korrelieren die u -Schwankungen in der viskosen Unterschicht mit der mittleren Strömung \tilde{u} . Weil wiederum die u -Schwankungen in der viskosen Unterschicht mit den Schwankungen der Sohlreibung korrelieren³, bedeutet dies, dass die Sohlreibung in x -Richtung mit \tilde{u} gut korreliert, was eine wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit des quadratischen Ansatzes 3.16 für die Sohlreibung bei den tiefengemittelten Verfahren ist. Dies gilt jedoch nicht für die Querschwankungen, denn hier zeigt der Korrelationskoeffizient $\langle v' \tilde{v}' \rangle / \sqrt{\langle v'^2 \rangle \langle \tilde{v}'^2 \rangle}$, dass die tiefengemittelten Querschwankungen kaum mit der Sohlreibung in Querrichtung korrelieren.

³ Aus $u \sim z$ folgt $u' \sim z$ und $\tau'_{b1} = \rho\nu \left[\frac{\partial u}{\partial z} \right]'_b = \rho\nu \left[\frac{\partial u'}{\partial z} \right]_b$.

Die Korrelation zwischen der Sohlschubspannung τ_{b1} in x -Richtung und der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u} ist in Abbildung 5.24 zu sehen. Die hier dargestellte normierte Kreuzkorrelation

$$R_{\tau_{b1}\tilde{u}}^t(\Delta t)_{norm} = \langle \tau'_{b1}(t) \tilde{u}'(t + \Delta t) \rangle / \sqrt{\langle \tau'^2_{b1} \rangle \langle \tilde{u}'^2 \rangle} \quad (5.29)$$

lässt erkennen, wie schnell sich Schwankungen in der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u} auf die Sohlschubspannung τ_{b1} auswirken. Zwischen \tilde{u} und τ_{b1} tritt die höchste Korrelation mit einer zeitlichen Verzögerung von $\Delta t \approx 0.5h/u_b$ auf. Dieser zeitlichen Verzögerung in der Korrelation zwischen \tilde{u} und τ_{b1} könnte in den tiefengemittelten Verfahren bei der Berechnung der Bodenreibung Rechnung getragen werden, wenn man anstelle der momentanen Geschwindigkeiten zeitlich tiefpassgefilterte Geschwindigkeiten in den quadratischen Ansatz 3.16 einsetzt. Durch diese Tiefpassfilterungen würden dann auch kurzfristige Schwankungen quer zur Hauptströmungsrichtung durch die Sohlreibung weniger gedämpft. Da eine zeitliche Tiefpassfilterung einen zusätzlichen Modellierungsaufwand bedeutet und Testrechnungen bei der Zylinderumströmung keinen signifikanten Einfluss auf das Strömungsfeld zeigten, erfolgt in dieser Arbeit die Berechnung der Bodenreibung mit den momentanen Geschwindigkeiten – also ohne zeitliche Tiefpassfilterung. In weiter gehenden Untersuchungen sollte jedoch der zeitlichen Tiefpassfilterung bei der Berechnung des Bodenreibungsterms Beachtung geschenkt werden.

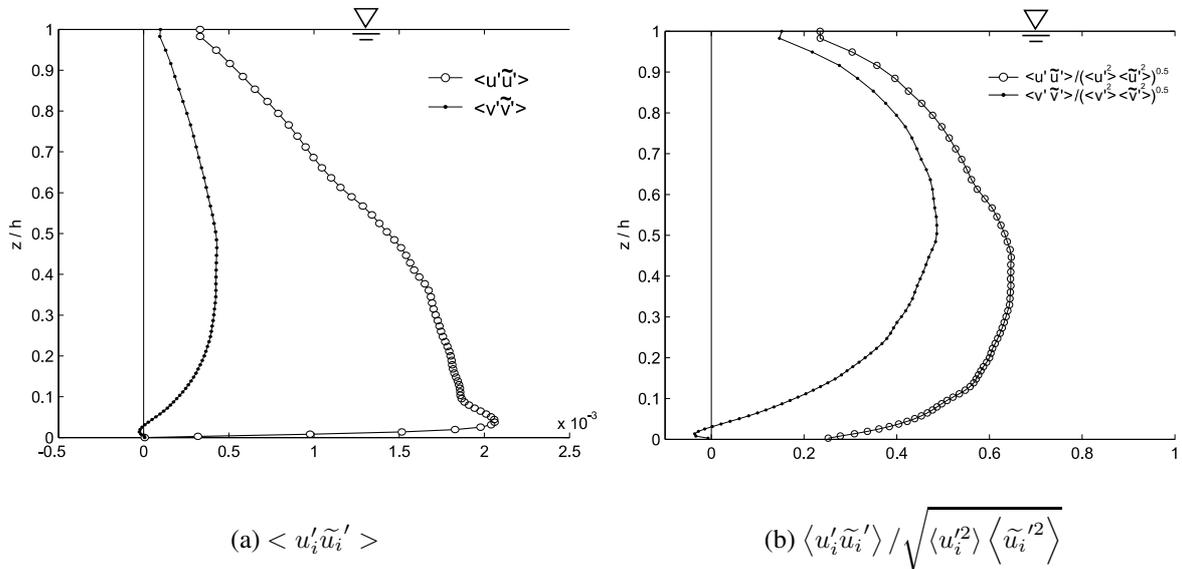


Abb. 5.23: Verlauf der Korrelationen zwischen lokaler und tiefengemittelter Schwankungsbewegung über die Tiefe. Gerinneströmung $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

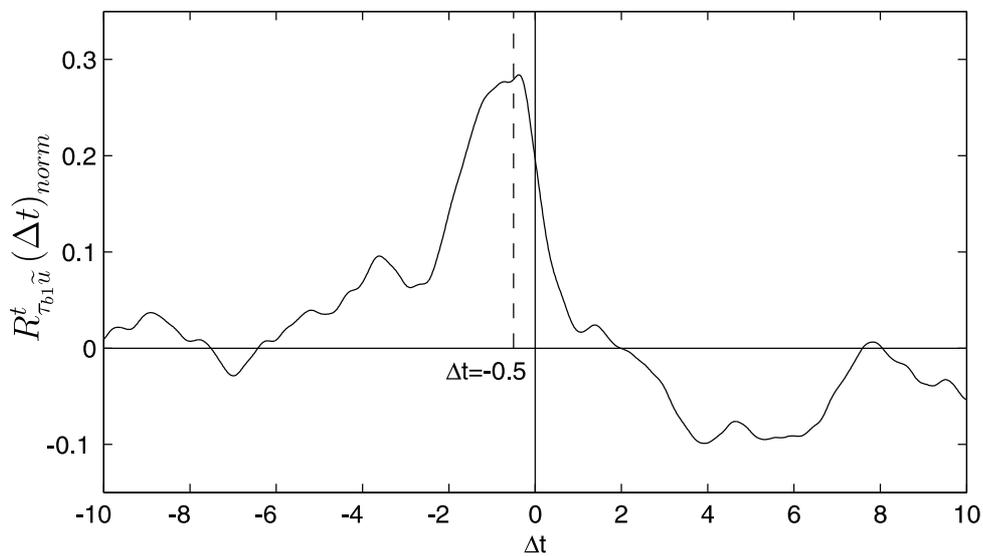


Abb. 5.24: Normierte Kreuzkorrelation $R_{\tau_{b1} \tilde{u}}^t(\Delta t)_{norm} = \langle \tau_{b1}^t(t) \tilde{u}'(t+\Delta t) \rangle / \sqrt{\langle \tau_{b1}^t{}^2 \rangle \langle \tilde{u}'^2 \rangle}$ zwischen der Sohlschubspannung τ_{b1} in x -Richtung und der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u} in der Gerinneströmung mit $Re_b = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).

5.1.1.7 Stofftransport

Die Berechnung von Ausbreitungs- und Transportvorgängen ist eine wichtige Anwendung für die Simulation von Flachwasserströmungen. Für tiefengemittelte Rechnungen ist dazu die Kenntnis der turbulenten Austauschkoefizienten wichtig. Aufgrund der Dispersionseffekte ist der Austauschkoefizient in Strömungsrichtung um ein Vielfaches höher als in der Querrichtung (Fischer et al. 1979). Diese Abhängigkeit des Austauschkoefizienten von der Raumrichtung kann in tiefengemittelten Rechnungen mit einem Diffusionstensor Γ_{ij} beschrieben werden (s. Anhang A.2).

Zur Visualisierung von Strömungsstrukturen und zur rechnerischen Bestimmung des transversalen Austauschkoefizienten in einer Gerinneströmung wurde im Rahmen der Simulation OCHB der Transport eines Farbstoffes mitberechnet. Dieser wird entlang einer vertikalen Linie über die gesamte Tiefe in die Strömung eingebracht. Dazu wurde eine Transportgleichung für den Skalar φ mit folgenden Randbedingungen gelöst: An der Position $x_0 = 0$ und $y_0 = \pi h$ (Gerinnemitte) wird über die gesamte Tiefe (und über den Querschnitt $\Delta x \times \Delta y$ einer Gitterzelle) eine konstante Skalkonzentration $\varphi_0 = 1$ vorgegeben. Die Anströmung erfolgt mit $\varphi_\infty = 0$. Am Ausströmrand bei $x = 8\pi h$ wird eine konvektive Ausströmbedingung und an der Sohle und der Wasseroberfläche eine Symmetrierandbedingung vorgegeben. In Spannweitenrichtung wird mit periodischen Randbedingungen gerechnet. Als Konvektionsschema für den Skalar wird das von Zhu (1991) entwickelte HLP-Verfahren verwendet. Dieses Schema beschränkt die Werte für den Skalar (hier $\varphi_\infty \leq \varphi \leq \varphi_0$) und zeichnet sich durch eine sehr geringe numerische Diffusion aus. Mit der hier gewählten Schmidt-Zahl von $Sc = 1000$ ist die molekulare Diffusion $\Gamma \sim 1/(Sc \cdot Re)$ des Skalars (bzw. des Farbstoffes) gegenüber dem turbulenten Transport vernachlässigbar.

Abbildung 5.25 zeigt anhand mehrerer horizontaler Schnittebenen für einen Zeitpunkt die typische Verteilung der berechneten Stoffkonzentration in unterschiedlichen Wassertiefen. Die tiefengemittelte Stoffkonzentration zum selben Zeitpunkt ist in Abbildung 5.26a und der zeitliche Mittelwert $\langle \tilde{\varphi} \rangle$ in 5.26b dargestellt. Die in den Farbstoffkonzentrationen erkennbaren Strukturen zeigen sehr anschaulich, wie sich die turbulenten Längenskalen über die Wassertiefe ändern. Deutlich erkennt man den Unterschied zwischen der kleinskaligen Turbu-

lenz in Sohlnähe und den größeren Strukturen in geringerer Tiefe. Dies bestätigt das schon aus den lokalen Turbulenzspektren und Makrolängen gewonnene Bild.

Der Austauschkoeffizient in Spannweitenrichtung Γ_y kann über die transversale Ausbreitungsrate von $\langle \tilde{\varphi}(x, y) \rangle$ recht einfach bestimmt werden. Für Gerinne mit glatter Sohle wurde $\Gamma_y/u_\tau h \approx 0.1 \dots 0.2$ anhand zahlreicher Experimente bestimmt (Fischer et al. 1979). Abbildung 5.26c zeigt die longitudinale Entwicklung der Fahnenbreite $b_{4\sigma}$ im Vergleich mit der analytischen Lösung:

$$b_{4\sigma}(x) = 4\sqrt{2\Gamma_y x/u_b} \quad (5.30)$$

Die Fahnenbreite ist definiert als der beidseitige Abstand von der Maximalkonzentration $\varphi_{max}(x)$ an der Mittellinie bis zu einer (der doppelten Standardabweichung entsprechenden) Konzentration von $\varphi_{2\sigma}(x) = \exp(-2)\varphi_{max} \approx 0.135\varphi_{max}(x)$. Aus der Abbildung lässt sich im Fernfeld ($x/h > 10$) für die LES-Daten $\Gamma_y \approx 0.1u_\tau h$ ablesen. Dieser Wert liegt an der unteren Grenze der experimentellen Daten und wurde auch von Li und Wang (2002) gefunden, die eine ähnliche LES bei der etwas höheren Reynoldszahl $Re_h = 2 \cdot 10^5$ durchgeführt haben. Jedoch haben sie entlang der vertikalen Linienquelle eine konstante Quellenstärke vorgegeben, während hier die Skalkonzentration entlang der Linie fixiert wurde. Da der so bestimmte Austauschkoeffizient auch den Stoffaustausch durch die 2D-Turbulenz beinhaltet, kann $\Gamma_y \approx 0.1u_\tau h$ als oberer Grenzwert für DA-NS- und DA-LES-Rechnungen angesehen werden. Damit erhält man mit dem Wirbelviskositätsansatz $\nu_t \approx 0.07u_\tau h$ (vgl. Gl. 3.58 und Gl. 3.62) eine turbulente Prandtl-/Schmidt-Zahl von $\sigma_t \approx 0.7$.

Der longitudinale Austauschkoeffizient Γ_x kann im vorliegenden Fall nicht aus den LES-Daten bestimmt werden, da die Diffusion in Längsrichtung einen zu geringen Einfluss auf die stationäre Lösung hat. Durch analytische Lösung des Taylor-Integrals (Taylor 1953) hat Elder (1959) in der Gerinneströmung unter Annahme eines logarithmischen Geschwindigkeitsprofils und einer parabolischen Verteilung der turbulenten Diffusivität $\Gamma_x \approx 5.86 u_\tau h$ gefunden. Dieser Wert gilt nur für die horizontal ungescherte Gerinneströmung und ist nicht auf Strömungen mit einem durch 2D-Strukturen dominierten Stoffaustausch übertragbar.

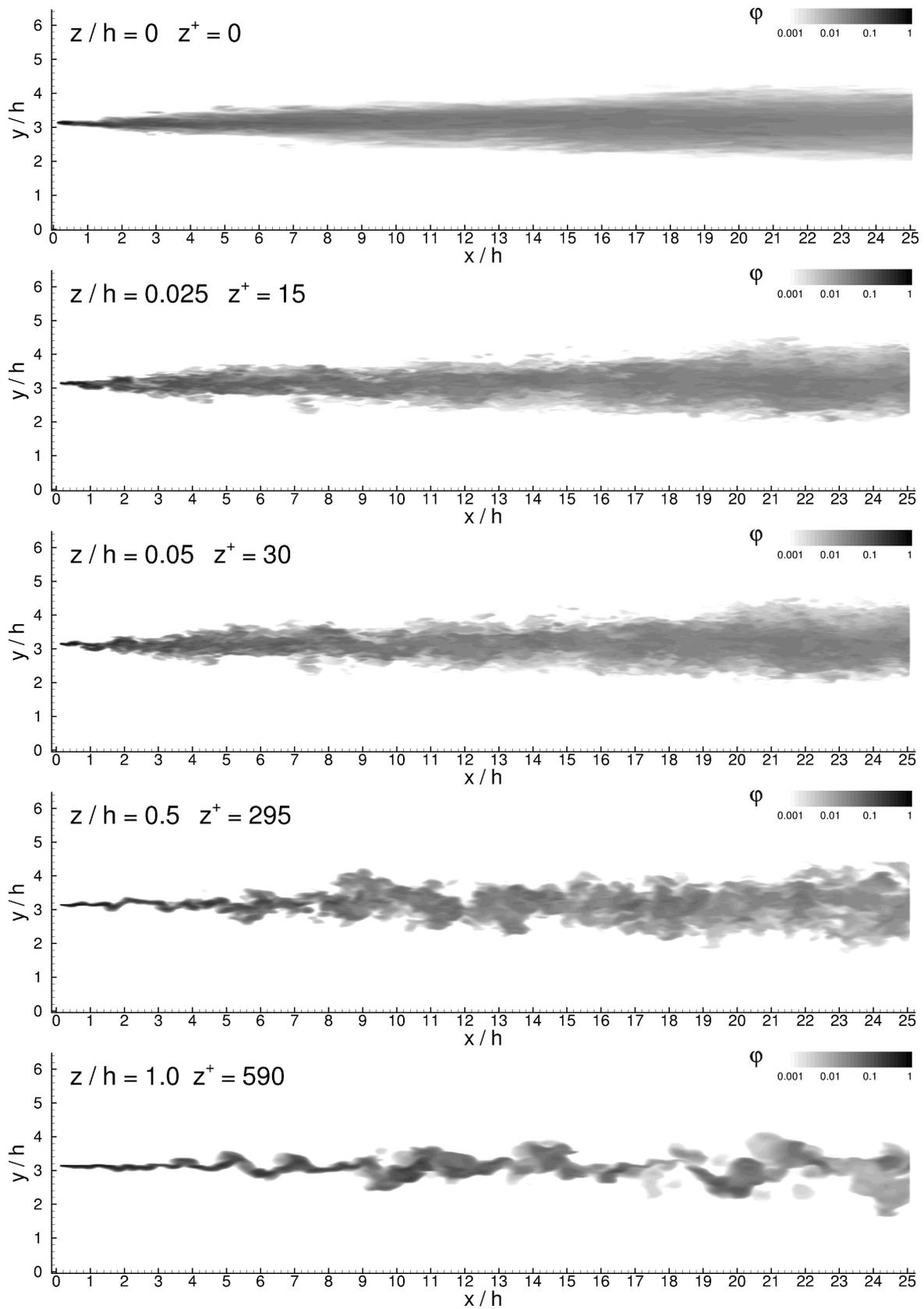


Abb. 5.25: Transport eines passiven Tracers in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Tracerkonzentration in horizontalen Schnittebenen zum gleichen Zeitpunkt in verschiedenen Wassertiefen.

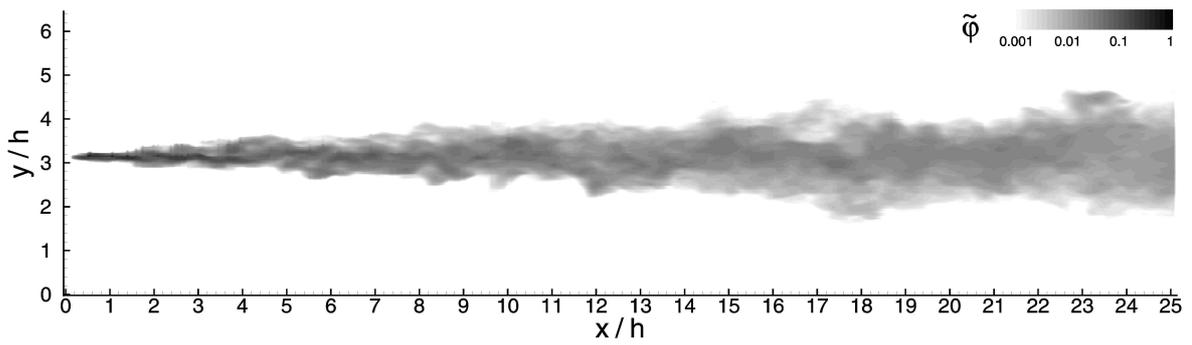
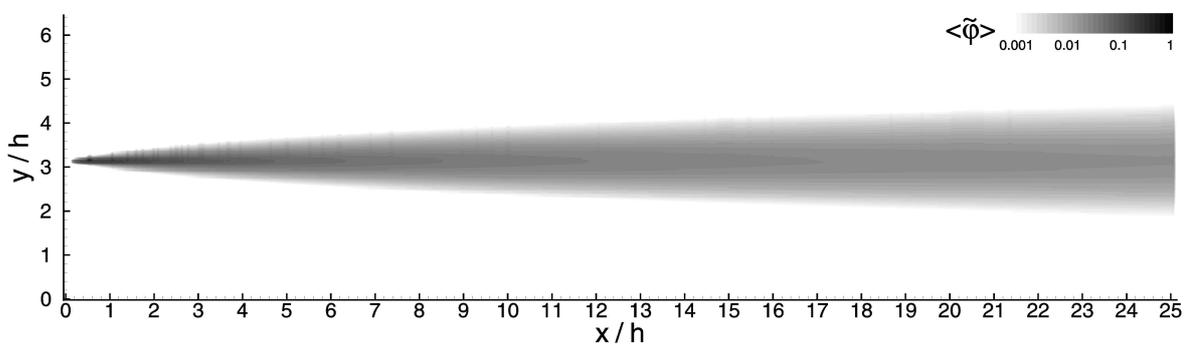
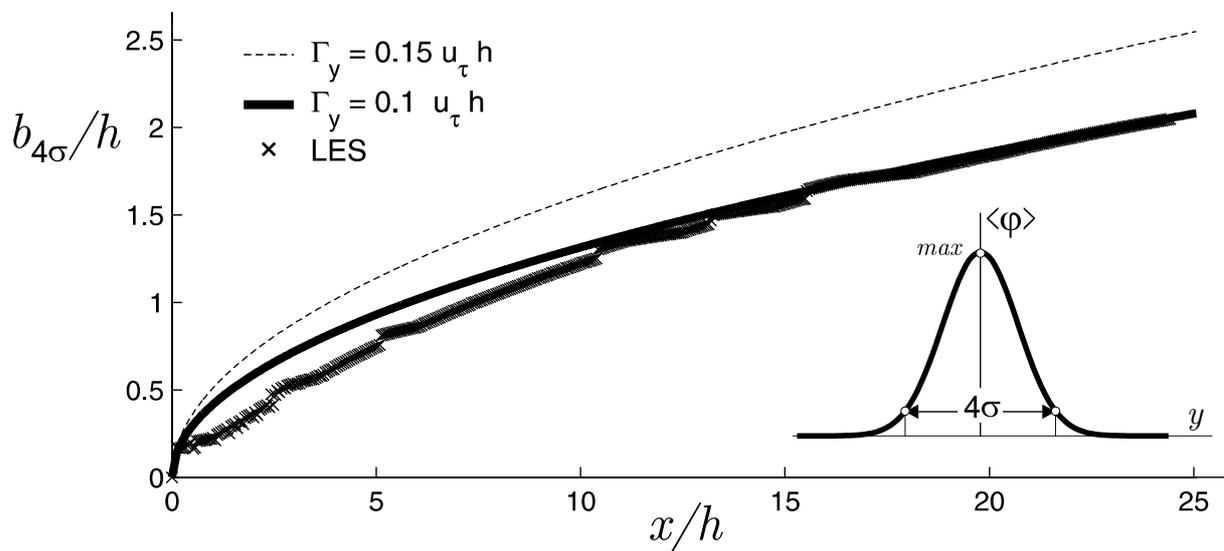
(a) Momentane tiefengemittelte Konzentration $\tilde{\varphi}$ (b) Mittlere tiefengemittelte Konzentration $\langle \tilde{\varphi} \rangle$ (c) Longitudinale Entwicklung der Fahnenbreite $b_{4\sigma}$

Abb. 5.26: Transport eines passiven Tracers in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10935$ ($Re_\tau = 590$); Vergleich der longitudinalen Entwicklung der Fahnenbreite von LES mit der analytischen Beziehung 5.30.

5.1.2 Rechteckgerinne

Großskalige 2D-Wirbel können durch horizontale Scherung an Seitenwänden entstehen. Um den Einfluss von Seitenwänden auf die tiefengemittelte Strömung zu untersuchen, wurde für ein Rechteckgerinne mit einem Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ eine hochaufgelöste LES durchgeführt (Rechnung OCHD). Die Reynoldszahl $Re_b = u_b h / \nu = 10\,935$ und das Rechengitter wurden gleich der Rechnung OCHB (periodische Gerinneströmung) gewählt. In Spannweitenrichtung erfolgte keine Gitterverfeinerung zu den Seitenwänden hin, da sich dort die turbulente Grenzschicht aufgrund der Gitterstreckung in Tiefenrichtung nicht ausreichend auflösen lässt (bezogen auf die Auflösung in vertikaler Richtung). Mit der in Abschnitt 3.3.5.1 beschriebenen Wandfunktion wird die Wandgrenzschicht an den Seitenwänden überbrückt.

5.1.2.1 Strömungsfeld

Abbildung 5.27 zeigt das berechnete mittlere Strömungsfeld in Hauptströmungsrichtung und die Sekundärströmung. Zum Vergleich mit experimentellen Daten und RANS-Ergebnissen sind in Abbildung 5.28 diese Größen für ein Gerinne mit einem Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 6$ und einer Reynoldszahl von $Re = 4RU_{mc}/\nu = 13\,700$ abgebildet. Dabei bezeichnet R den hydraulischen Radius (hier $R = 0.75h$) und U_{mc} die tiefengemittelte Strömungsgeschwindigkeit in der Gerinnemitte. Die Abbildung (a) zeigt Messergebnisse von Nezu und Rodi (1985) und die Abbildung (b) Ergebnisse einer RANS-Rechnung von Naot und Rodi (1982). Die Sekundärströmung führt im Rechteckgerinne dazu, dass die u -Geschwindigkeit teilweise unterhalb der Wasseroberfläche höher ist als direkt an der Wasseroberfläche. Die Position der maximalen u -Geschwindigkeit ist in den Abbildungen durch eine Linie markiert. Die LES Ergebnisse und die Vergleichsdaten zeigen trotz unterschiedlicher Reynoldszahl ($Re_{LES} = 4RU_{mc}/\nu \approx 38\,200$) eine gute Übereinstimmung sowohl für die Hauptströmung als auch für die turbulenzgetriebene Sekundärströmung.

5.1.2.2 Reynoldsspannungen

Die Verteilung der berechneten Reynoldsspannungen über den Gerinnequerschnitt ist in Abbildung 5.29 zu sehen. An den Wänden wird kleinskalige 3D-

Turbulenz produziert. Deutlich erkennt man starke u -Fluktuationen in Sohl- und Seitenwandnähe. Die horizontalen v -Fluktuationen werden an der Seitenwand gedämpft und gehen hier auf null zurück. Gleiches gilt für die vertikalen w -Fluktuationen an der Sohle und der Wasseroberfläche. Eine anschauliche Interpretation der Schubspannungen ist schwierig. Sie stehen jedoch mit der Wandreibung in Beziehung – die „horizontalen“ Schubspannungen $\langle u'v' \rangle$ mit der Seitenwandreibung, die „vertikalen“ Schubspannungen $\langle u'w' \rangle$ mit der Bodenreibung und die Schubspannungen $\langle v'w' \rangle$ mit der Reibung in Umfangsrichtung durch die Sekundärströmung.

5.1.2.3 Tiefengemittelte Strömung

Die tiefengemittelte Strömung im Rechteckgerinne ist in Abbildung 5.30 zu sehen, welche für ein momentanes Strömungsfeld jeweils einem Konturplot der \tilde{u} - und \tilde{v} -Komponente und die Wirbelstärke $\tilde{\omega}_z = \partial_x \tilde{v} - \partial_y \tilde{u}$ zeigt. Wie schon in der periodischen Gerinneströmung lassen sich großräumige Strukturen ausmachen, deren Größe jedoch zu den Seitenwänden hin abnimmt. In der periodischen Gerinneströmung konnten die momentanen großräumigen 2D-Wirbelstrukturen recht einfach durch Stromlinien der Schwankungsbewegung dargestellt werden: Die Grundlage dazu bildete die Betrachtung der Strömung aus einem mit u_b bewegten Bezugssystem – das beobachtete Strömungsfeld entspricht dann der Schwankungsbewegung ($\tilde{u}' = \tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle = \tilde{u} - u_b = \tilde{u}_{rel}$). Da in einem Rechteckgerinne $\langle \tilde{u} \rangle$ über die Gerinnebreite variiert, lässt sich hier kein vergleichbares Bezugssystem finden ($\tilde{u}' \neq \tilde{u}_{rel}$). Dennoch gibt auch hier die Schwankungsbewegung ein ungefähres Bild über die auftretenden 2D-Strukturen, wie Abbildung 5.31 zeigt. Hierin sind für ein momentanes Feld der Schwankungsbewegung $\tilde{u}' = \tilde{u} - \langle \tilde{u} \rangle$ das Vektorfeld und das Strömungspotential samt Stromlinien dargestellt. Vergleicht man die Stärke der auftretenden 2D-Strukturen mit denen der periodischen Gerinneströmung, so findet man im hier untersuchten Rechteckgerinne keine dominanten 2D-Strukturen, die durch die Seitenwandreibung hervorgerufen werden.

Der Verlauf der mittleren tiefengemittelten Geschwindigkeit $\langle \tilde{u} \rangle$ über die Gerinnebreite ist in Abbildung 5.32 zu sehen. Die tiefengemittelte Geschwindigkeit nimmt bis zur Gerinnemitte stetig zu, was darauf hindeutet, dass bei dem vorliegenden Breiten- zu Tiefenverhältnis von $B/h = 2\pi$ auch in der Gerinnemitte noch Seitenwandeffekte eine Rolle spielen.

5.1.2.4 Gesamt, 3D- und 2D-Turbulenz

Abbildung 5.32 zeigt den Verlauf der tiefengemittelten Reynoldsspannungen von Gesamt-, 3D- und 2D- Turbulenz über die Gerinnebreite. (Die tiefengemittelten Reynoldsspannungen der Gesamt-Turbulenz $\langle \widetilde{u'_i u'_i} \rangle$ sind in der Abbildung mit „2D+3D“ gekennzeichnet. Die tiefengemittelten Reynoldsspannungen der 3D-Turbulenz ergeben sich aus der Differenz von Gesamt- und 2D-Turbulenz $\langle \widetilde{u'_i u'_i} \rangle - \langle \widetilde{u'_i u'_i} \rangle = \langle u_i^{[D]} u_i^{[D]} \rangle$. Hierbei ist zu beachten, dass die tiefengemittelten Vertikalgeschwindigkeiten entsprechend der Definition in Abschnitt 2.8.1 komplett der 3D-Turbulenz zugeordnet werden – d.h. $w^{[D]} \equiv w'$ und $\widetilde{w}' \equiv 0$. Somit gilt: $\langle \widetilde{w' w'} \rangle - \langle \widetilde{w' w'} \rangle = \langle \widetilde{w' w'} \rangle$). Die entsprechenden tiefengemittelten turbulenten kinetischen Energien (\widetilde{k} , \widetilde{k}_{3D} , k_{2D}) sind in Abbildung 5.33a dargestellt.

Obwohl die Geschwindigkeit $\langle \widetilde{u} \rangle$ zur Gerinnemitte stetig zunimmt, nimmt die Stärke der tiefengemittelten Reynoldsspannungen bzw. der Turbulenzenergien zur Gerinnemitte hin nur wenig zu. Dies lässt sich durch turbulente Diffusion der Turbulenzenergie in Spannweitenrichtung erklären.

An den Seitenwänden wird kleinskalige 3D-Turbulenz produziert, was sich in den wandnahen Verläufen von \widetilde{k}_{3D} und \widetilde{k} niederschlägt. Erstaunlicherweise wird an den Seitenwänden kaum 2D-Turbulenz produziert. Hier ist nur eine sehr kleine Zunahme von k_{2D} in Wandnähe zu beobachten, die allein von den \widetilde{u} -Schwankungen, also von $\langle \widetilde{u' u'} \rangle$, verursacht wird, da die Schwankungen in Querrichtung $\langle \widetilde{v' v'} \rangle$ an den Seitenwänden offensichtlich gedämpft werden.

Mit einer Transportgleichung für \widetilde{k}_{3D} könnte bei den tiefengemittelten Verfahren die Produktion der 3D-Turbulenz in Seitenwandnahe und die Diffusion, die für einen relativ konstanten Verlauf von \widetilde{k}_{3D} im Gerinneinneren sorgt, modelliert werden. Der Impulsaustausch durch die 3D-Turbulenz lässt sich dann über eine Wirbelviskosität

$$\nu_{3D} \sim h \sqrt{\widetilde{k}_{3D}} \quad (5.31)$$

modellieren. In der vorliegenden Arbeit wird jedoch keine Transportgleichung für \widetilde{k}_{3D} gelöst, sondern nur das einfache 0-Gleichungs-Modell $\nu_{3D} \sim h u_\tau$ verwendet. Dieses Modell lässt sich auch aus Gleichung 5.31 ableiten, wenn man die Stärke der 3D-Turbulenz über die empirische Beziehung $\widetilde{k}_{3D} \sim u_\tau^2$ analog zu

Gleichung 5.8 abschätzt. Somit besteht ein Zusammenhang zwischen der Güte des 0-Gleichungs-Modells und der empirischen Beziehung 5.8. Für die periodische Gerinnströmung wurde mit Gleichung 5.8 eine Abschätzungen für die Stärke der 3D-Turbulenz in einer ungescherten Strömung gefunden. Inwieweit sich diese empirische Abschätzung auch auf das Rechteckgerinne übertragen lässt zeigt der Vergleich mit den LES-Daten in Abbildung 5.33a. Hierbei zeigt sich eine relativ gute Übereinstimmung in der Größenordnung, jedoch wird mit der empirischen Beziehung die Stärke der 3D-Turbulenz in der Kanalmitte etwa 20 % überschätzt und in Seitenwandnähe deutlich zu gering berechnet. Die Folge ist ein zugeringer Impulsaustausch in Seitenwandnähe bei tiefengemittelten Rechnungen mit dem einfachen 0-Gleichungs-Modell. Abhilfe könnte hier die Skalierung des 0-Gleichungs-Modells mit dem Wandabstand bringen. Der allgemeinere – jedoch auch deutlich aufwendigere – Ansatz ist jedoch die Lösung einer Transportgleichung für $\widetilde{k_{3D}}$ und die Berechnung der Wirbelviskosität nach Gleichung 5.31.

In Abbildung 5.33a ist auch die Abschätzung für die 2D-Turbulenz in einer ungescherten Strömung nach Gleichung 5.7 eingezeichnet. Hier findet man eine überraschend gute Übereinstimmung mit den LES-Ergebnissen im Rechteckgerinne. Dies ist ein deutliches Indiz dafür, dass in dem hier untersuchten Rechteckgerinne die Scherung an den Seitenwänden nicht zur Ausbildung starker 2D-Wirbel führt.

5.1.2.5 Verlauf der Schubspannungsgeschwindigkeit über die Gerinnebreite

Für tiefengemittelte Rechnungen ist eine gute Abschätzung der Sohlschubspannung aus der tiefengemittelten Geschwindigkeit wichtig. In Abbildung 5.33b ist für das Rechteckgerinne der Verlauf der mittleren Schubspannungsgeschwindigkeit $\langle u_\tau \rangle$ an der Sohle über die Gerinnebreite dargestellt. Durch den Vergleich der LES-Daten ($u_{\tau LES} = \sqrt{\tau_w/\rho}$) mit der Beziehung $u_\tau = \tilde{u}\sqrt{c_f}$ lässt sich überprüfen, wie allgemeingültig der übliche quadratische Ansatz $\tau_b = c_f \rho \tilde{u}^2$ zur Berechnung der Sohlschubspannung aus der tiefengemittelten Geschwindigkeit ist. Dabei zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung der LES-Daten mit dem quadratischen Ansatz. Nur im Bereich, der weniger als eine halbe Wassertiefe von der Seitenwand entfernt ist, kommt es zu großen Abwei-

chungen (bis etwa 20 %). Zur Untersuchung des Einflusses, den die Wahl von c_f hat, wurden in Abbildung 5.33b drei verschiedene Ansätze für c_f gewählt: Neben $c_f = 0.00289$ (aus der LES für periodische Gerinne bei $Re_h = 10\,935$) und $c_f = 0.003$ (Anhaltswert für Gerinne mit glatter Sohle) wurde die Beziehung 3.21 verwendet, bei der c_f von der lokalen tiefengemittelten Geschwindigkeit abhängt, welche über die Gerinnebreite relativ stark variiert (Abb. 5.32). Dabei zeigt die Beziehung 3.21, welche in dieser Arbeit für tiefengemittelte Rechnungen mit glatter Sohle verwendet wird, die beste Übereinstimmung mit den LES-Daten.

5.1.3 Informationen für tiefengemittelte Simulationen

In Gerinneströmungen führt die sohlerzeugte 3D-Turbulenz zu Schwankungen der tiefengemittelten Geschwindigkeiten. In einer ausgebildeten Strömung ohne horizontale Scherung trägt dabei die kinetische Energie der 2D-Schwankungen k_{2D} etwa 15 % der tiefengemittelten Turbulenzenergie \tilde{k} (Abschnitt 5.1.1.5). Entsprechend Gleichung 5.7 lässt sich die Stärke der durch sohlerzeugte 3D-Turbulenz verursachten 2D-Schwankungen wie folgt abschätzen:

$$k_{2D} = \frac{1}{2} (\langle \tilde{u}'\tilde{u}' \rangle + \langle \tilde{v}'\tilde{v}' \rangle) \approx c_{k_{2D}} u_\tau^2 \quad \text{mit} \quad c_{k_{2D}} \approx 0.25 \quad (5.32)$$

Diese 2D-Schwankungen stellen eine Art 2D-Hintergrundschwankungsbewegung dar, die nicht durch horizontale Scherung verursacht wird. Selbst für den Fall des in Abschnitt 5.1.2 betrachteten Rechteckgerinnes scheint der Großteil der 2D-Schwankungen von der sohlerzeugten 3D-Turbulenz herzurühren, da auch hier Gleichung 5.7 die Stärke der 2D-Schwankungsbewegung gut beschreibt (vgl. Abb. 5.33b). In Strömungssituationen, in denen horizontale Scherinstabilitäten zum Entstehen großer horizontaler Wirbel führen, wie zum Beispiel in einer Mischungsschicht (siehe Abschnitt 5.2), können kleinste Schwankungen im Zufluss – also auch die 2D-Hintergrundschwankungsbewegung – aufgrund des exponentiellen Wachstums instabiler Moden einen entscheidenden Einfluss auf die Entstehung der großen 2D-Wirbelstrukturen haben (van Prooijen und Uijtewaal 2002a,b, van Prooijen 2004). So lieferten tiefengemittelte Rechnungen für eine Mischungsschicht (Abschnitt 5.2) bei fehlenden 2D-

Schwankungen im Zufluss eine viel zu geringe Ausbreitungsrate. Daher ist es bei tiefengemittelten Simulationen in solchen Fällen wichtig, dass die aufgelösten 2D-Schwankungen im Zufluss weitestgehend den tatsächlichen Werten der realen 3D-Strömung entsprechen. Um diese 2D-Schwankungen jedoch in einer tiefengemittelten Rechnung anzuregen, ist ein *Back-Scatter*-Modell (BSM) für den inversen Energietransfer von 3D- zur 2D-Turbulenz notwendig. Ohne BSM konvergiert eine tiefengemittelte Simulation einer periodischen Gerinneströmung beispielsweise unabhängig von den Anfangsbedingungen gegen ein konstantes Geschwindigkeitsfeld mit $\tilde{\mathbf{u}}(x, y, t) = \mathbf{u}_b$ und $k_{2D} = 0$, da die 2D-Schwankungen durch die Bodenreibung und die Viskosität gedämpft werden und aufgrund der fehlenden horizontalen Scherung der Grundströmung keine 2D-Turbulenz produziert wird. Auch für den Fall des im Abschnitt 5.1.2 untersuchten Rechteckgerinnes ($Re_b = 10\,935$, $B/h = 2\pi$) ergaben Testrechnungen, dass die horizontale Scherung aufgrund der Seitenwandreibung allein nicht ausreicht, um eine 2D-Schwankungsbewegung aufrecht zu erhalten. Um bei diesen Testrechnungen den Einfluss der Diskretisierung zu minimieren, wurde hierbei ein sehr feines Gitter verwendet (Rechengebiet: $L \times B \times h = 2\pi \times 2\pi \times 1$, Gitter: $512 \times 512 \times 1$, Auflösung: $\Delta x = \Delta y \approx 0.01h$, Ortsdiskretisierung mit CDS2). Sogar bei Rechnungen ohne turbulente Viskosität ($\nu_t = 0$) und nur mit Bodenreibung ($c_f = 0.003$ bzw. alternativ c_f nach Gl. 3.21) wurde eine starke Störung (normalverteiltes Rauschen mit $u'_{i\,rms} = u_b$), die der Strömung bei der Initialisierung aufgeprägt wurde, mit der Zeit vollständig weggedämpft. Zu denselben Ergebnissen kam auch van Prooijen (2000), der die gleiche Konfiguration mit einem anderen LES-Code untersuchte. Aus den Ergebnissen dieser Testrechnungen lässt sich die Bedeutung eines Modells, das in der Lage ist, die 2D-Hintergrundschwankungsbewegung zu generieren, ableiten.

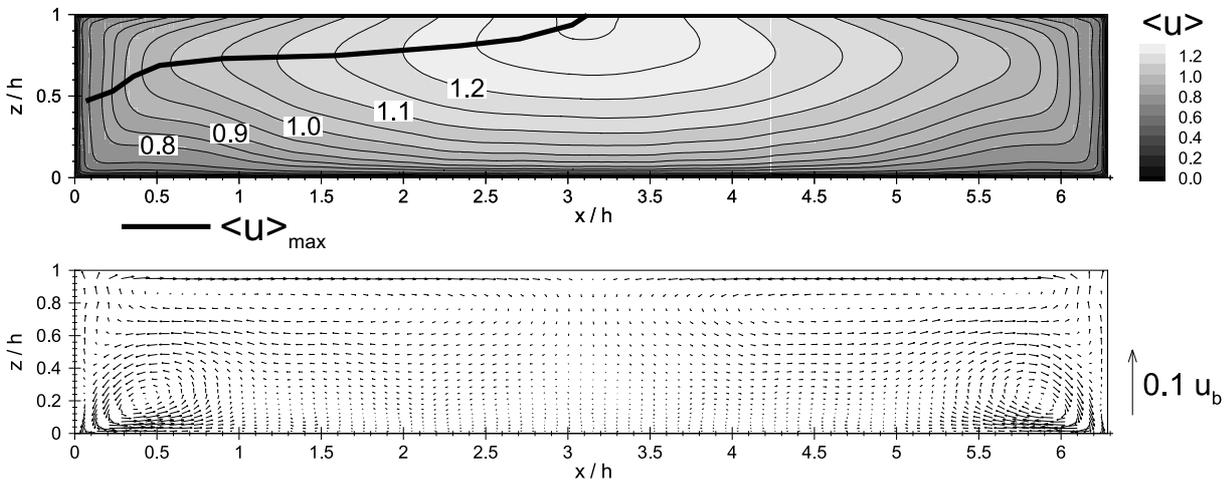
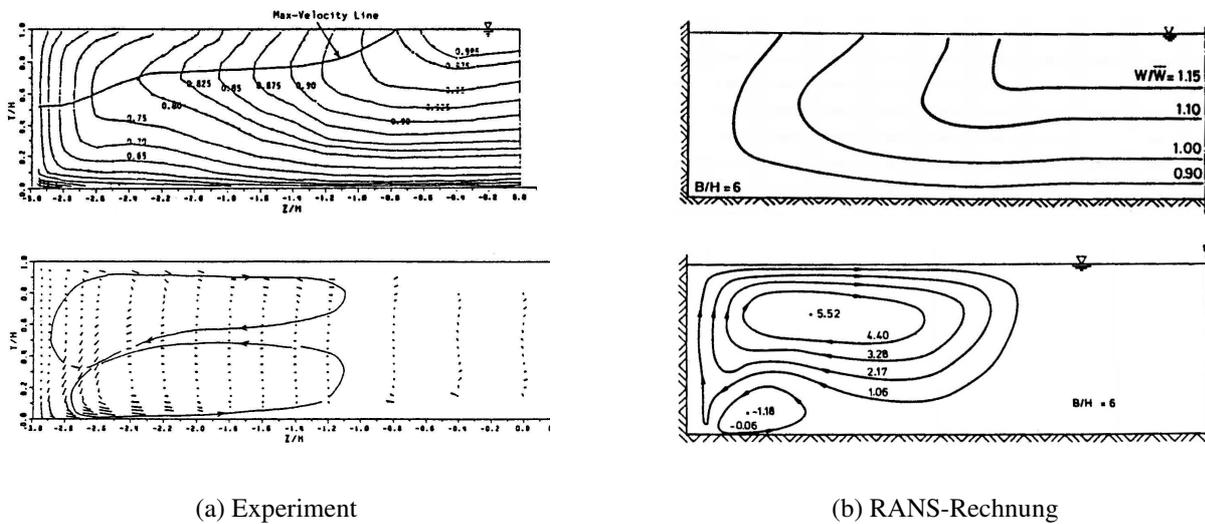


Abb. 5.27: Mittleres Strömungsfeld in Hauptströmungsrichtung und Sekundärströmung in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = u_b h / \nu = 10\,935$.



(a) Experiment

(b) RANS-Rechnung

Abb. 5.28: Mittleres Strömungsfeld in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 6$ und $Re = 4RU_{mc}/\nu = 13\,700$; oben: Strömungsfeld in Hauptströmungsrichtung, unten: Sekundärströmung; (a) Messungen von Nezu und Rodi (1985), (b) Rechnung von Naot und Rodi (1982).

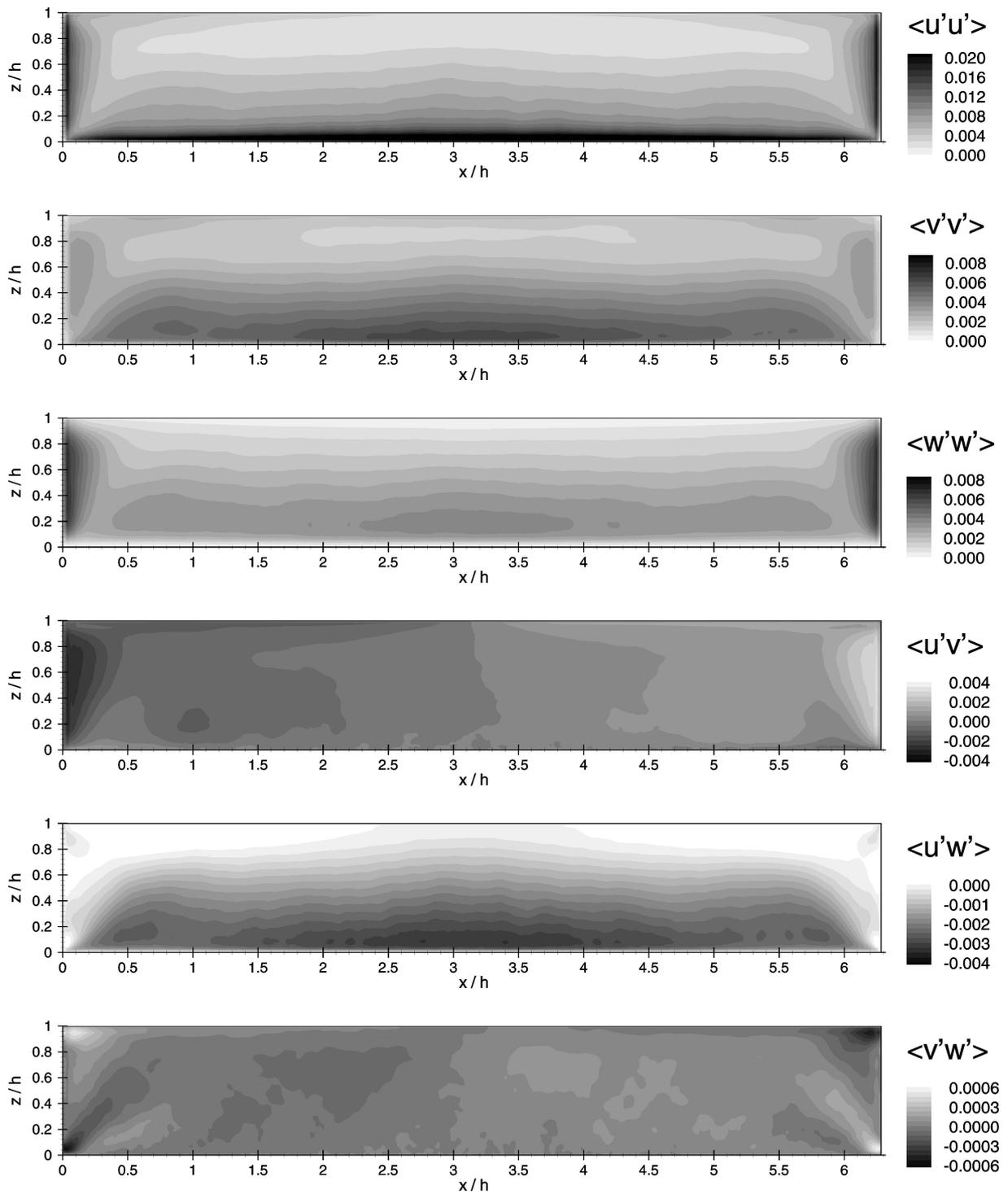
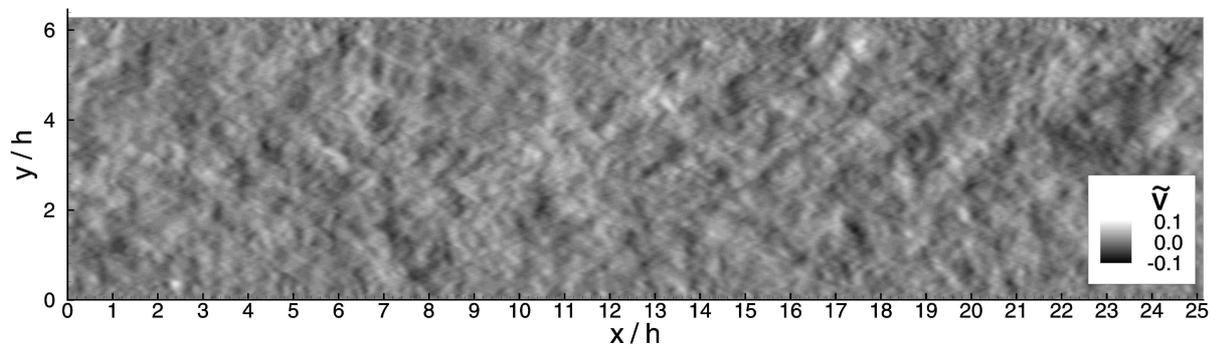
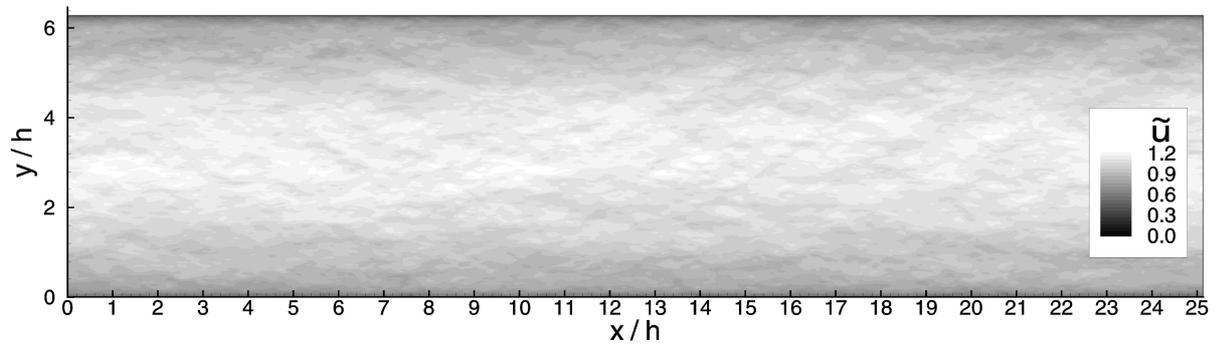
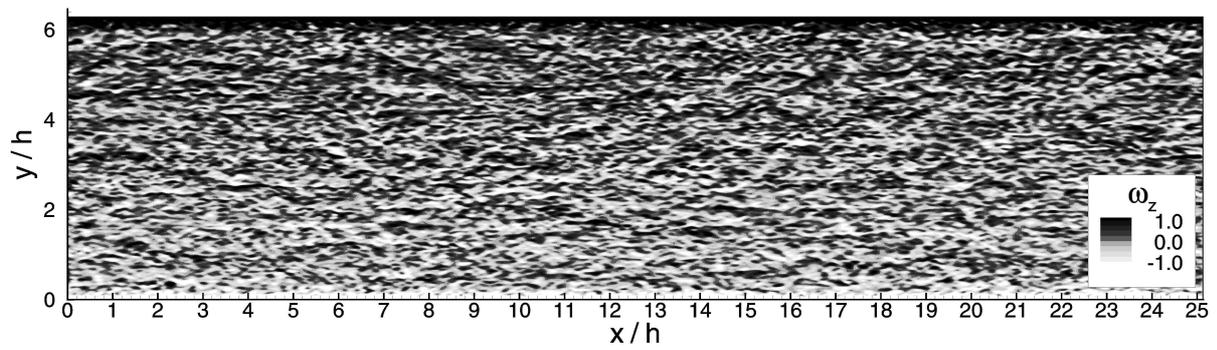


Abb. 5.29: Reynoldsspannungen in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$.



(a) Komponenten der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u}



(b) Wirbelstärke der tiefengemittelten Geschwindigkeit ($\tilde{\omega}_z = \partial_x \tilde{v} - \partial_y \tilde{u}$)

Abb. 5.30: Tiefengemitteltes Geschwindigkeitsfeld in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10935$.

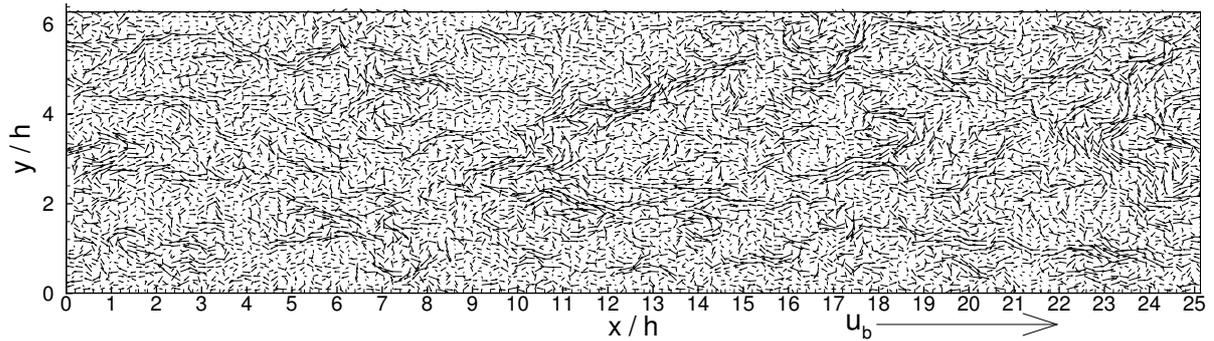
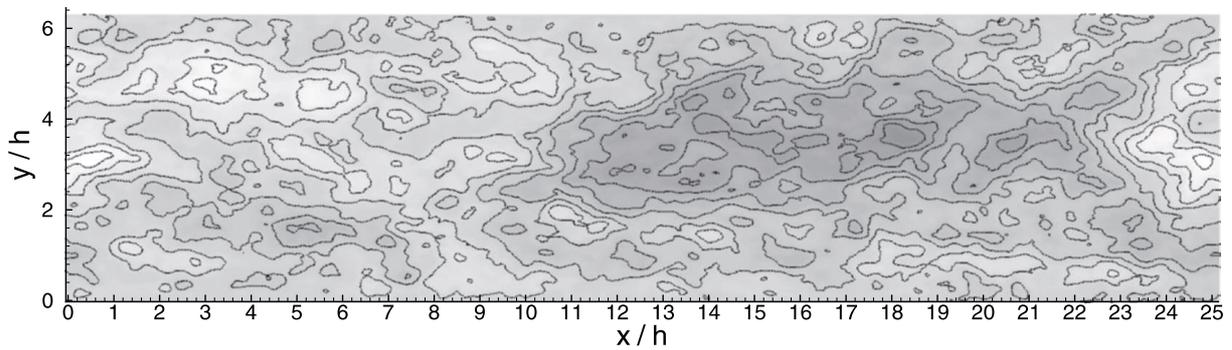
(a) Vektorfeld der Schwankungsbewegung $\tilde{\mathbf{u}}$ (b) Stromlinien und Stromfunktion der Schwankungsbewegung $\tilde{\mathbf{u}}$

Abb. 5.31: Schwankungsbewegung des tiefengemittelten Geschwindigkeitsfeldes in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$.

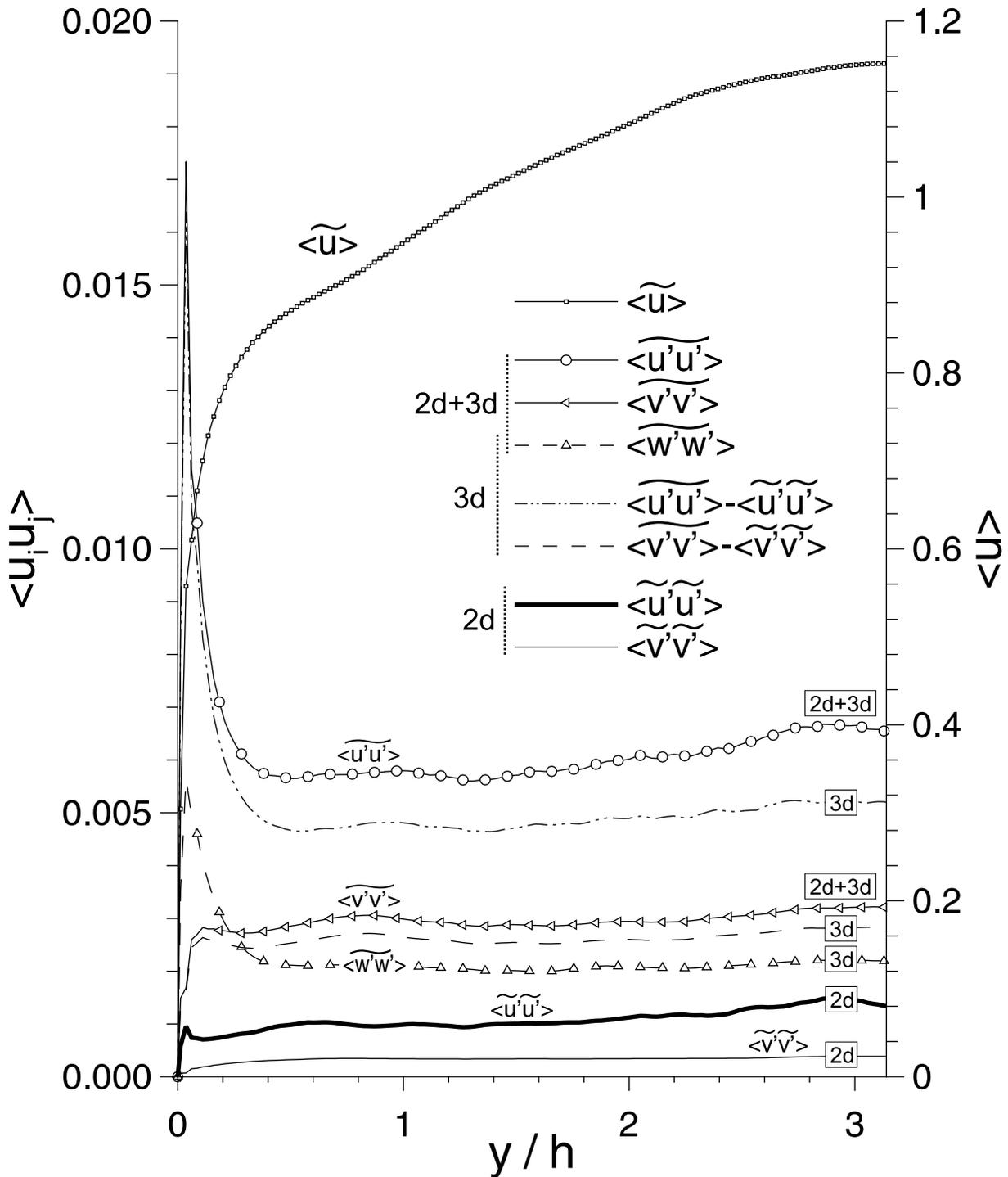


Abb. 5.32: Mittlere tiefengemittelte Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen von Gesamt-, 3D- und 2D- Turbulenz in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$.

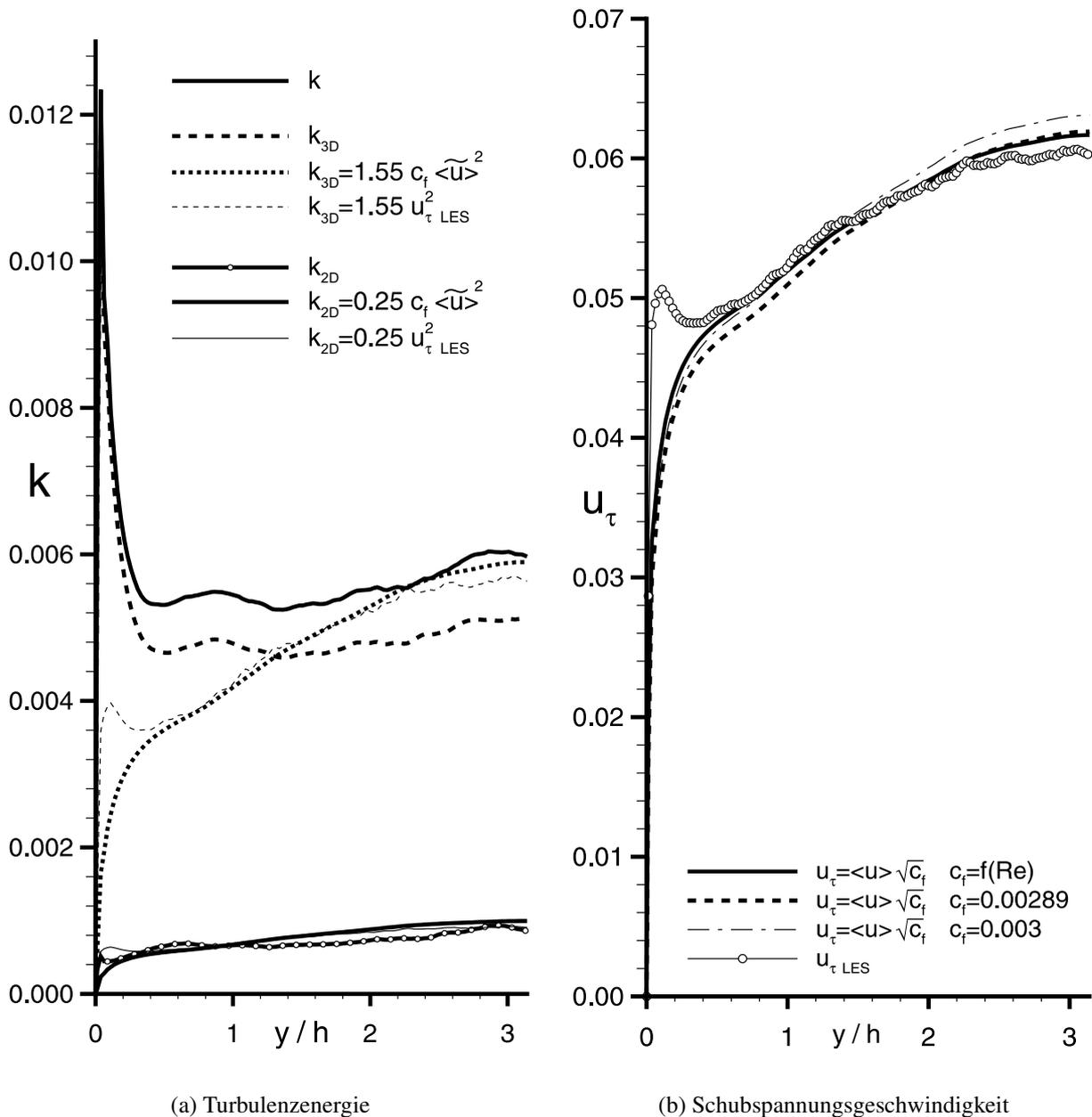


Abb. 5.33: Verlauf von k und u_τ in Spannweitenrichtung (nur eine Gerinnehälfte dargestellt) in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$;
 (a) Turbulenzenergie von Gesamt-, 3D- und 2D-Turbulenz; Vergleich mit $k_{3D} = c_{f_{k3D}} \tilde{u}_\tau^2$ und $k_{2D} = c_{k2D} u_\tau^2$, jeweils mit u_τ von LES bzw. mit $u_\tau = \tilde{u} \sqrt{c_f}$ (c_f nach Gl. 3.21)
 (b) Schubspannungsgeschwindigkeit an der Sohle; Vergleich der LES-Daten mit der Beziehung $u_\tau = \tilde{u} \sqrt{c_f}$ (mit $c_f = 0.00289$, $c_f = 0.003$ und c_f nach Gl. 3.21).

5.2 Mischungsschicht

In einem Gerinne treffen stromab einer vertikalen Trennplatte zwei Strömungen mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander. Es entsteht eine horizontale Scherschicht in der sich die beiden Strömungen durchmischen. Dabei können großräumige horizontale Wirbel aufgrund der Kelvin-Helmholtz-Scherinstabilität entstehen.

Hier wird eine Konfiguration mit 3D- und DA-LES simuliert, die dem Experiment Nr. 4 von [Chu und Babarutsi \(1988\)](#) entspricht. Das Laborgerinne hat eine Breite von 61 cm und die Wassertiefe ist 2.96 cm . Die Einströmgeschwindigkeiten sind $U_1 = 26.4\text{ cm/s}$ und $U_2 = 11.1\text{ cm/s}$. Die auf die mittlere Geschwindigkeit $U = (U_1 + U_2)/2 = 18.75\text{ cm/s}$ und die Wassertiefe bezogene Reynoldszahl ist $Re_h = 5\,550$. Abbildung 5.34 zeigt das Rechengebiet und die Randbedingungen. Die Simulationen werden in dimensionsloser Form durchgeführt, wobei die Längen mit der Wassertiefe und die Geschwindigkeiten mit der mittleren Geschwindigkeit U normiert sind. In den zwei periodischen Gebieten (P1 und P2) mit einer Länge von jeweils 10 Wassertiefen wird eine voll ausgebildete periodische Gerinneströmung mit Seitenwänden berechnet. Diese periodischen Zonen liefern Daten für die Einströmrandbedingungen, die sich 10 Wassertiefen oberstrom dem Ende der Trennplatte befinden. Am unterstromigen Ende des Rechengebiets bei $x \approx 155h$ ist eine konvektive Ausströmrandbedingung. Davor ist eine Dämpfungszone angeordnet, in der die Viskosität um den Faktor 10 erhöht ist. Dies steigert die numerische Stabilität und die Konvergenz des Druckkorrekturverfahrens. Die Modellierung der Wasseroberfläche erfolgt als reibungsfreie starre Wasseroberfläche. Der Sohle und die Seitenwände (inklusive der Trennplatte) werden als hydraulisch glatte Wände behandelt. Das

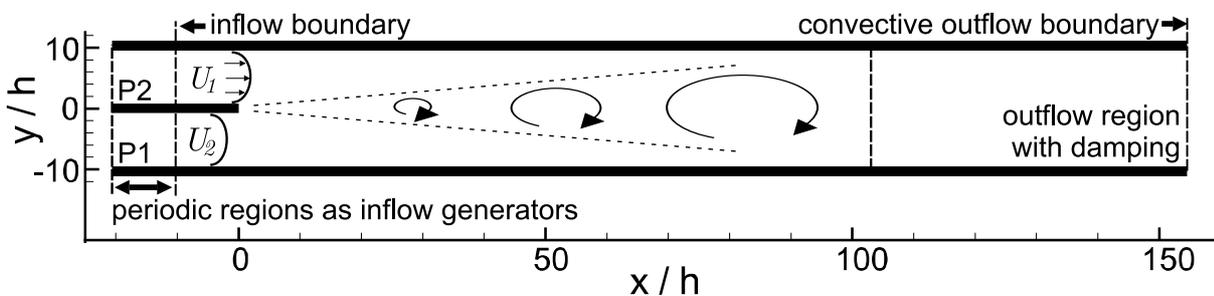


Abb. 5.34: Mischungsschicht: Rechengebiet und Randbedingungen.

Rechengitter besteht aus 16 Blöcken, die bei den Rechnungen auf bis zu 16 Prozessoren verteilt werden können.

5.2.1 Dreidimensionale Simulation

Aufgrund beschränkter Computerressourcen und der großen horizontalen Ausdehnung der Mischungsschicht ist es nicht möglich, die Wandgrenzschichten durch ein feines Rechengitter aufzulösen. Deshalb wird die in Abschnitt 3.3.5.1 beschriebene Wandfunktion an den Seitenwänden und der Sohle verwendet. Um den Rechenzeitbedarf zu beschränken wurde ein Gitter mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1h$ gewählt. Eine entsprechende Gitterauflösung wurde schon im Rahmen der Testrechnungen für eine periodische Gerinneströmung (bei einer etwas höheren Reynoldszahl von $Re_h = 10935$) getestet. Damit ergibt sich für den Zellmittelpunkt der wandnahen Zellen im Mittel etwa $\Delta z_P^+ \approx 15$. Das resultierende Rechengitter für die 3D-LES hat $2.6 \cdot 10^6$ Fluidzellen.

Abbildung 5.35 zeigt einen Vergleich der mit 3D-LES berechneten zeitlich gemittelten Strömungsgeschwindigkeit in halber Wassertiefe sowie die Stärke der Geschwindigkeitsfluktuationen in Strömungsrichtung mit den experimentellen Daten von [Chu und Babarutsi \(1988\)](#). Die Ausbreitungsrate ist im Experiment größer als die von der LES berechnete. Das ist auf Unterschiede in den Einlaufbedingungen zurückzuführen. Das Experiment hat im Gegensatz zur LES eine relativ kurze Einlaufstrecke, in der sich keine voll ausgebildete turbulente Strömung entwickelt. Dies zeigt sich klar an den u'_{rms} Fluktuationen bei $x = 0.3h$. Hier weist die LES Werte für die Fluktuationen auf, die typisch für eine voll entwickelte Gerinneströmung sind, während das Experiment niedrigere Werte aufweist. Im Experiment führt die niedrige Turbulenz in der Anströmung zu einer höheren Ausbreitungsrate, weil die kleinskalige sohlerzeugte Turbulenz auf die Ausbildung von großskaligen 2D-Strukturen dämpfend wirkt. [Uijttewaal und Booij \(2000\)](#) stellten bei ähnlichen Experimenten ebenfalls viel kleinere Ausbreitungsraten als Chu und Babarutsi fest und folgerten, dass Unterschiede in den Strömungsbedingungen am Ende der Trennplatte einen starken Einfluss auf die weitere Entwicklung der Mischungsschicht haben ([Bell und Mehta 1990](#)).

Zur Visualisierung der Wirbelstrukturen wurde der langsamere Zustrom der Mischungsschicht in der Simulation mit einem passiven Tracer eingefärbt. Dafür wurde eine zusätzliche Skalartransportgleichung gelöst, wobei der Wert für den

Skalar φ im periodischen Gebiet P1 gleich 1 und im Gebiet P2 gleich 0 gesetzt wurde. An den Seitenwänden und der Wasseroberfläche wurden Neumann-Randbedingungen und am Ausströmrand eine konvektive Ausströmrandbedingung vorgegeben. Als Konvektionsschema wurde für den Skalar das von [Zhu \(1991\)](#) entwickelte HLP-Schema verwendet, das sich durch eine sehr geringe numerische Diffusion auszeichnet und – anders als zentrale Differenzen – eine Beschränkung der Werte für den Skalar im vorliegenden Fall auf Werte zwischen 0 und 1 gewährleistet.

Abbildung [5.36](#) zeigt die Durchmischung des Tracers für verschiedene Konfigurationen. Für die 3D-LES ist die Tracerkonzentration in drei unterschiedlichen Tiefen dargestellt, nämlich $z/h = 0.05, 0.55$ und 1.0 (Abb. [5.36a](#)). Die großen Wirbelstrukturen, die die horizontale Mischung dominieren, sind deutlich erkennbar. Die 2D-Strukturen sind nahe der Wasseroberfläche groß und werden zur Sohle hin immer kleinskaliger. Die Strukturen zeigen aufgrund der unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten in den verschiedenen Wassertiefen einen leichten Versatz über die Tiefe. Dieser Versatz und die kleinskaligeren Strukturen in Sohlhöhe ergeben ein verschwommenes Bild in der tiefengemittelten Tracerkonzentration (Abb. [5.36b](#)).

5.2.2 Tiefengemittelte Simulationen

Für die DA-LES wurde ein Gitter mit einer gröberen horizontalen Auflösung mit $\Delta x = \Delta y = 0.2h$ gewählt, was ein Gitter mit 66 000 Fluidzellen ergibt. Für die Seitenwände wurde bei der DA-LES dieselbe Wandfunktion wie bei der 3D-LES verwendet. Die Modellierung der Bodenreibung erfolgt mit c_f nach Gleichung [3.21](#).

Die Modellkonstanten, $c_h = 0.08$ (in Gl. [3.58](#)) und $c_B = 55$ (in Gl. [3.67](#)), wurden so angepasst, dass die Dynamik der großen Skalen adäquat wiedergegeben wird und k_{2D} in der Einströmebene den Werten der 3D-LES entspricht (Abb. [5.37](#) unten). Die in Abbildung [5.36b](#) dargestellte tiefengemittelte Tracerkonzentrationsverteilung der 3D-Rechnung kann als Sollwert für eine DA-LES angesehen werden. Ähnliche 2D Strukturen findet man in der DA-LES mit *Back-scatter*-Modell (Abb. [5.36c](#)). Ohne BSM ($c_B = 0$) ist die DA-LES nicht in der Lage, turbulente 2D-Bewegungen vorherzusagen; stattdessen wird eine stationäre Strömung berechnet. Die horizontale Scherung ist dann zu schwach, um

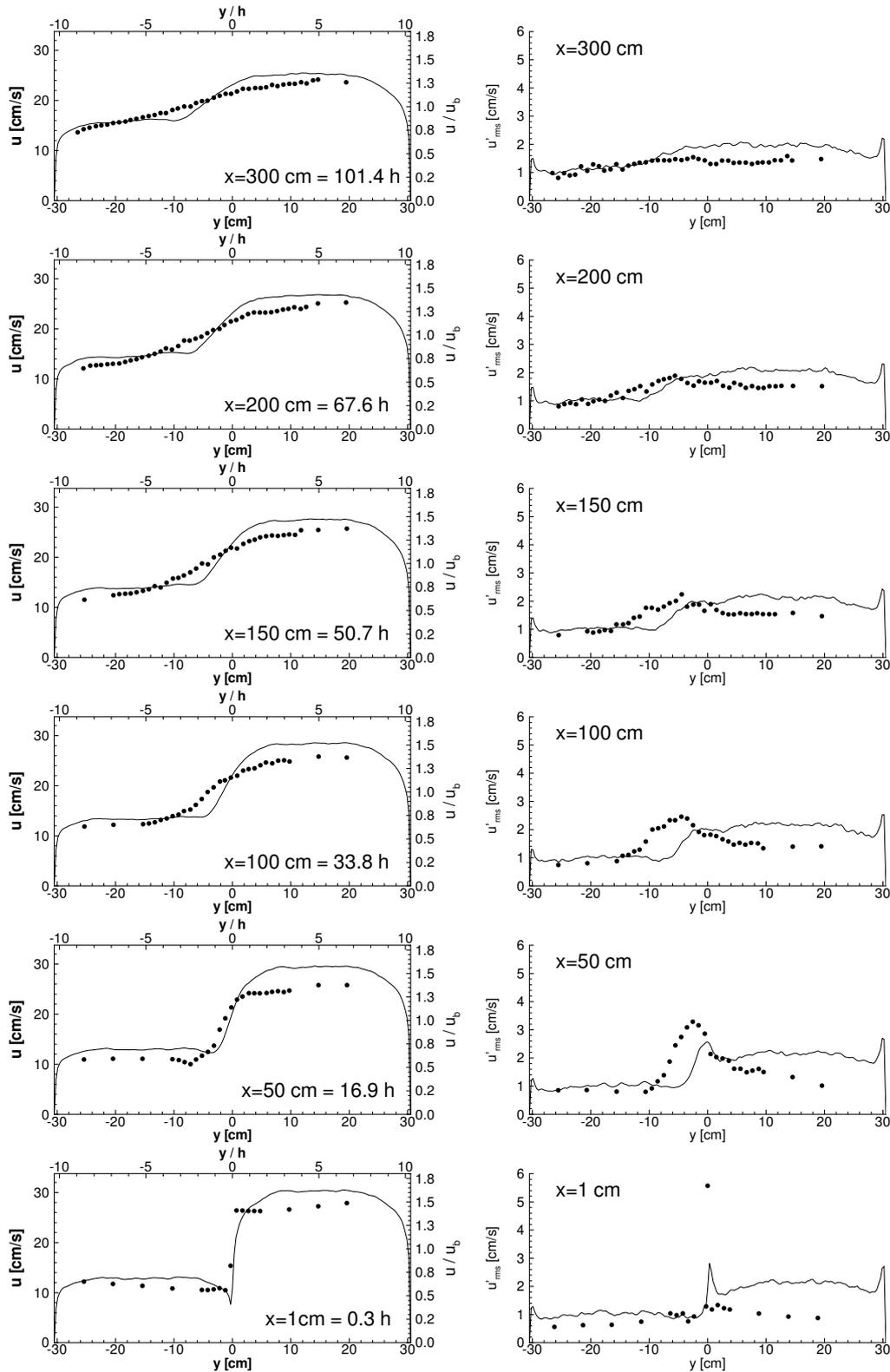


Abb. 5.35: Mittlere Geschwindigkeit und RMS-Werte der Geschwindigkeitsschwankungen in Strömungsrichtung an verschiedenen Positionen stromab der Trennplatte in halber Wassertiefe; —: LES, •: Messungen (Messwerte gescannt aus Babarutsi und Chu 1998).

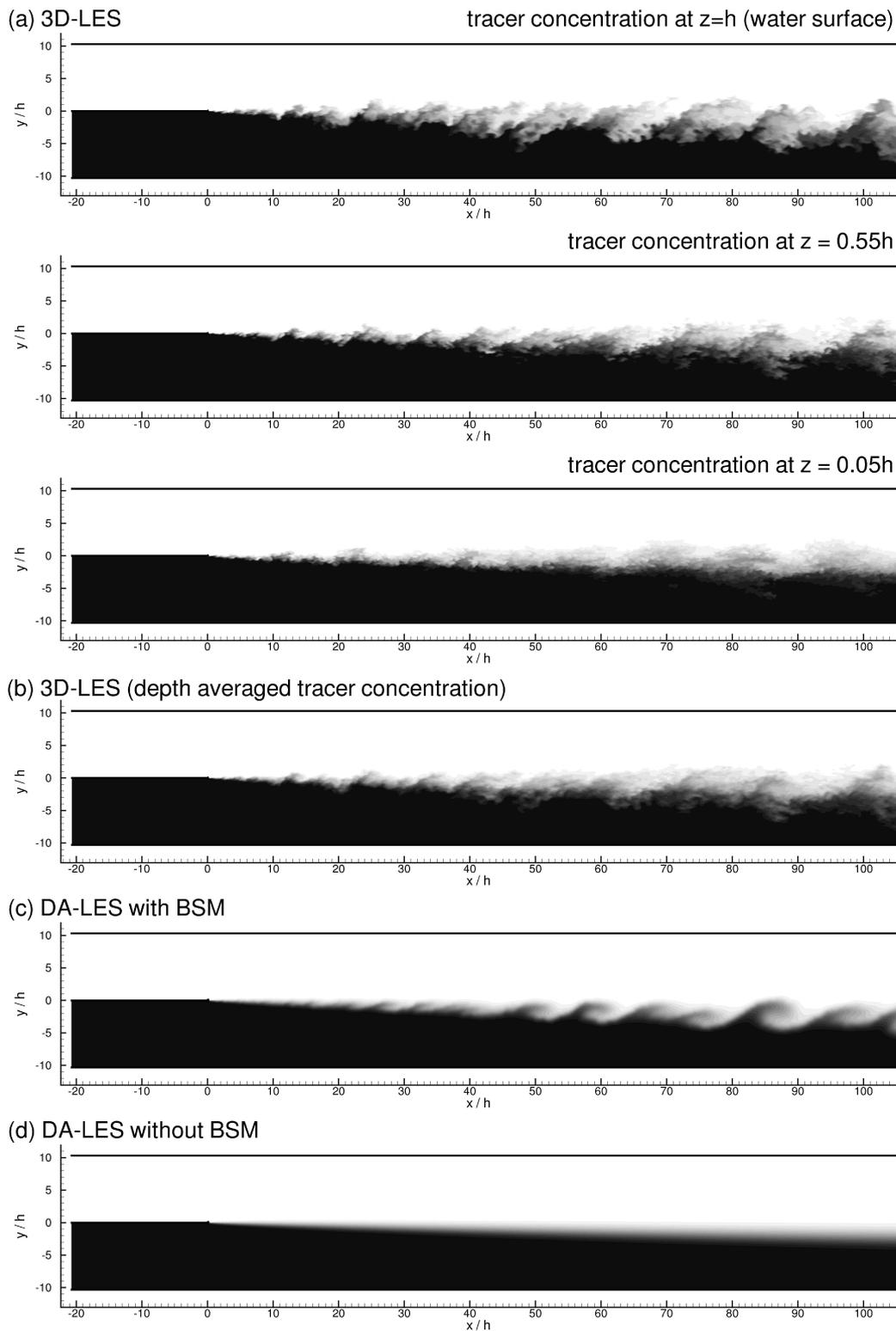


Abb. 5.36: Mischungsschicht berechnet mit 3D-LES und DA-LES. Durchmischung eines Farbstoffes, der im langsameren Zustrom kontinuierlich zugeführt wird;
 (a) 3D-LES: Farbstoffkonzentration in verschiedenen Wassertiefen;
 (b) 3D-LES: tiefengemittelte Farbstoffkonzentration;
 (c) DA-LES mit *Back-scatter*-Modell ($c_h = 0.08$, $c_B = 55$);
 (d) DA-LES ohne *Back-scatter*-Modell ($c_h = 0.08$, $c_B = 0$).

2D-Fluktuationen und 2D-Wirbel zu erzeugen (Abb. 5.36 d). Als Folge wird eine zu geringe Ausbreitungsrate berechnet. Dies wird in den berechneten tiefengemittelten mittleren u -Geschwindigkeitsprofilen deutlich, die gemeinsam mit der turbulenten kinetischen Energie der 2D-Turbulenz k_{2D} in Abbildung 5.37 an verschiedenen Positionen stromab dargestellt sind ($k_{2D} = \frac{1}{2}(\tilde{u}'\tilde{u}' + \tilde{v}'\tilde{v}')$ entsprechend der Definition durch Gleichung 2.91). Von den Experimenten sind dazu keine tiefengemittelten Daten verfügbar, jedoch sind die entsprechenden tiefengemittelten Daten der 3D-LES zum Vergleich dargestellt. Während die DA-LES ohne BSM keine 2D-Schwankungsenergie liefert, zeigt die DA-LES mit BSM eine sehr gute Übereinstimmung mit den entsprechenden 3D-LES-Daten (k_{2D}) im gesamten Strömungsfeld. Abweichungen sind jedoch in den mittleren Geschwindigkeiten und in der Ausbreitungsrate festzustellen.

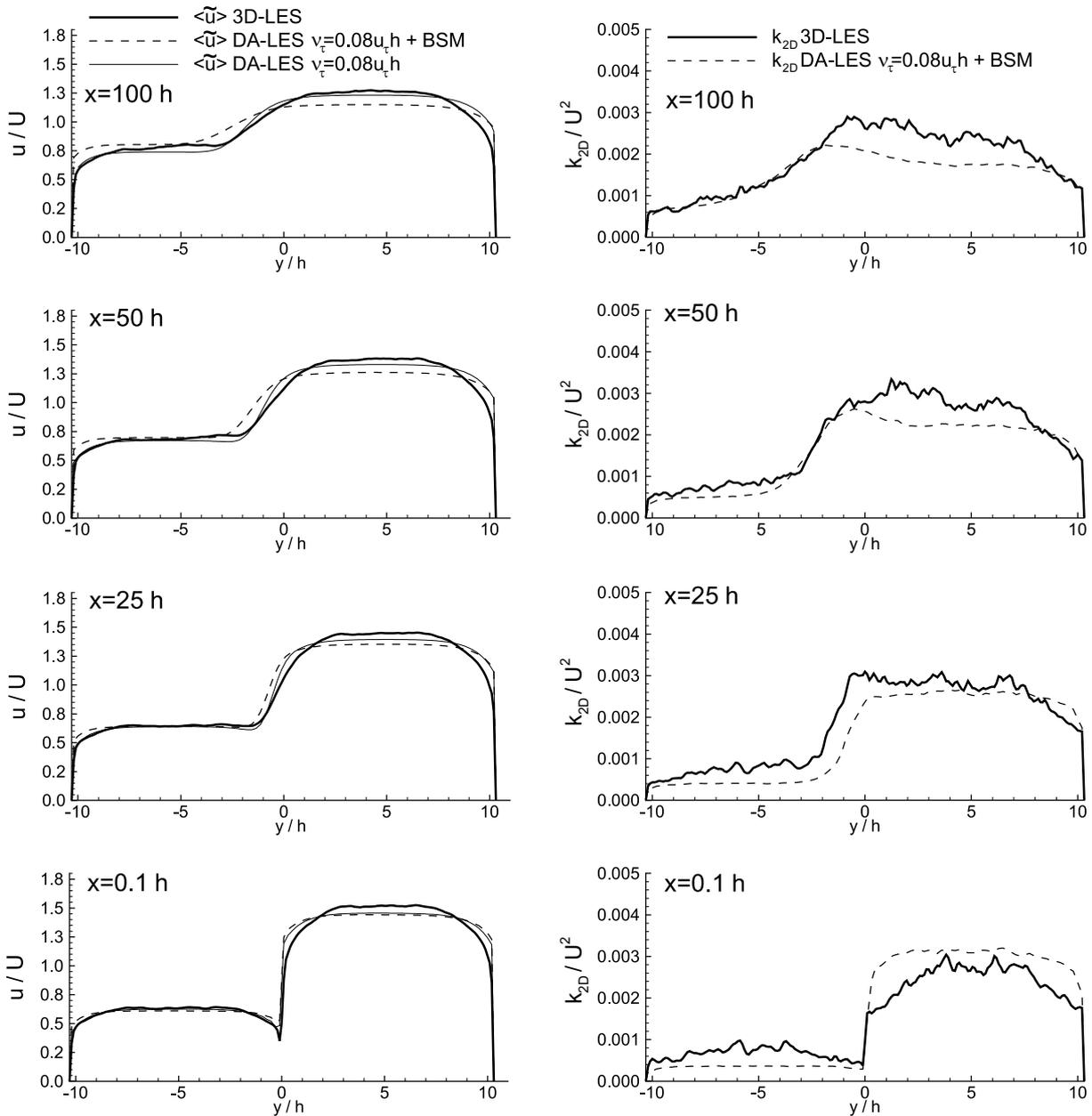


Abb. 5.37: Ergebnis der 3D-LES (—) im Vergleich mit der DA-LES mit BSM (- - -) und DA-LES ohne BSM (—) an verschiedenen Positionen stromab der Trennplatte; links: tiefengemittelte Geschwindigkeit $\langle \tilde{u} \rangle$; rechts: kinetische Energie der 2D-Turbulenz $k_{2D} = \frac{1}{2} (\tilde{u}'\tilde{u}' + \tilde{v}'\tilde{v}')$ (k_{2D} der DA-LES ohne BSM ist null).

5.3 Zylinderumströmung

Im Rahmen der Modellentwicklung für DA-NS- und DA-LES-Verfahren wurden auch LES-Rechnungen einer Flachwasser-Zylinderumströmung durchgeführt. Dabei interessierten besonders die einzelnen Anteile der Dispersionsspannungen. Typisch für eine Zylinderumströmung ist die Ausbildung einer Von Kármánschen Wirbelstraße im Nachlauf. In Flachwasserströmungen lässt sich eine stabile Wirbelstraße auch noch bei sehr hohen Reynoldszahlen beobachten (vgl. Abb. 1.4).

Die Strömungsparameter der untersuchten Konfiguration entsprechen einem Experiment von [von Carmer und Jirka \(2001\)](#) mit einem Verhältnis von Zylinderdurchmesser zu Wassertiefe von $D/h = 1.66$ und einer auf die Wassertiefe bezogenen Reynoldszahl von $Re_h = 5440$. Das relativ kleine D/h -Verhältnis wurde gewählt, um die Größe des Rechengebietes und somit den Ressourcenbedarf bei der 3D-LES möglichst gering zu halten. Für die DA-LES ist der hier untersuchte Strömungsfall wegen des geringen D/h -Verhältnisses sicherlich ein schwieriger Grenzfall, da in unmittelbarer Zylindernähe keine Flachwasserverhältnisse mehr vorherrschen. Es ist jedoch davon auszugehen, dass, wenn dieser Strömungsfall mit DA-LES erfolgreich berechnet werden kann, dies auch für Fälle mit größerem D/h -Verhältnis gilt, da dies die Verwendung eines tiefengemittelten Verfahrens eher rechtfertigt.

Die Simulationen werden in dimensionsloser Form durchgeführt, wobei die Längen mit der Wassertiefe (im Experiment $h = 3.8 \text{ cm}$) und die Geschwindigkeiten mit der querschnittsgemittelten Geschwindigkeit (im Experiment $U = 14.3 \text{ cm/s}$) normiert sind. [Abbildung 5.38](#) zeigt das Rechengebiet, die Blockstruktur und die Randbedingungen. Das Rechengebiet ist in Spannweitenrichtung durch Symmetrierandbedingungen begrenzt. Um eine voll ausgebildete turbulente Strömung am Einströmrand (bei $x/h = -5$) zu erhalten, ist dem eigentlichen Rechengebiet ein periodisches Gebiet (mit der Länge πh) vorgelagert, in dem eine voll ausgebildete periodische Gerinneströmung berechnet wird. Am Ausströmrand bei $x = 25h$ wird die konvektive Ausströmrandbedingung mit vorgelagerter Dämpfungszone verwendet (vgl. [Abschnitt 3.3.4.2](#)). Die Modellierung der Wasseroberfläche erfolgt mittels Rigid-Lid-Vereinfachung (vgl. [Abschnitt 3.3.1](#)). Die Sohle und die Zylinderseitenwand werden als hydraulisch glatte Wände modelliert. Das Rechengebiet wurde in 21 Blöcke mit

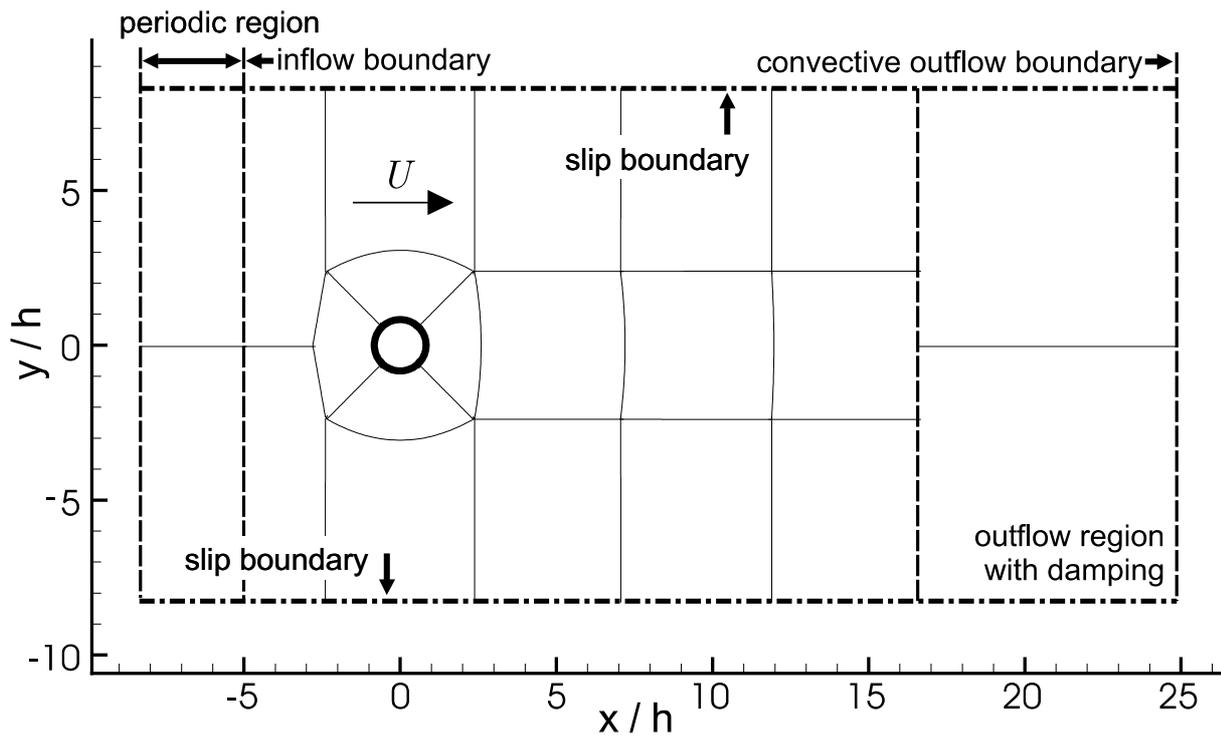


Abb. 5.38: Zylinderumströmung: Rechengebiet, Blockstruktur und Randbedingungen.

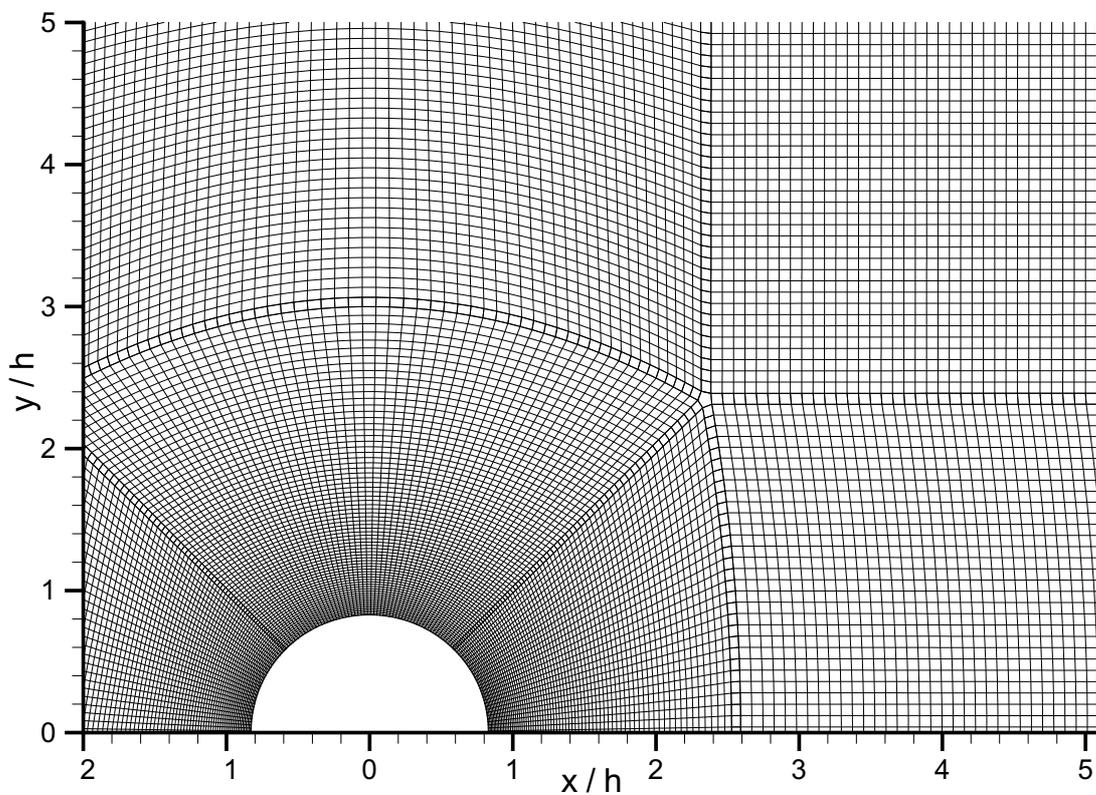


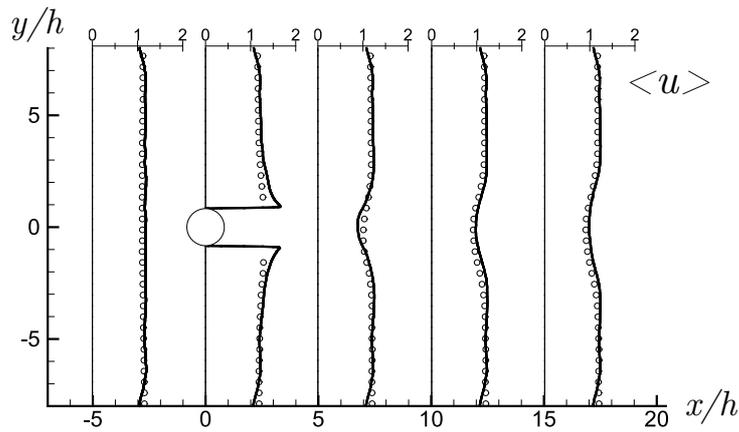
Abb. 5.39: Ausschnitt des Rechengitters in Zylindernähe (hier dargestellt mittels Linien durch Zellmittelpunkte).

etwa gleich vielen Gitterpunkten unterteilt. Die horizontale Gitterauflösung beträgt $\Delta x \approx \Delta y \approx h/15$. In Zylindernähe wurde das Rechengitter bis auf $\Delta x \approx \Delta y \approx h/100$ verfeinert, um auch die Ablösung sehr kleiner Wirbel von den Zylinderwänden erfassen zu können. Abbildung 5.39 zeigt einen Ausschnitt des Rechengitters in Zylindernähe.

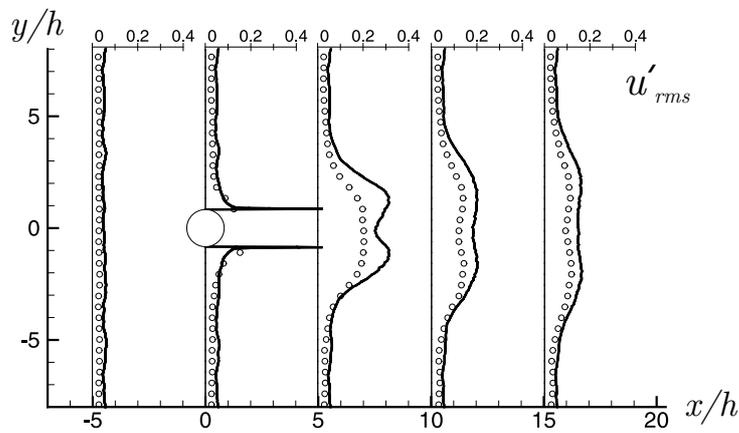
5.3.1 Dreidimensionale Simulation

Bei der dreidimensionalen Simulation betrug die Gitterauflösung in Tiefenrichtung $\Delta z = h/15$. Daraus resultiert ein Rechengitter mit $1.3 \cdot 10^6$ Fluidzellen. Die Grenzschicht an der Sohle wird mit der in Abschnitt 3.3.5.1 beschriebenen Wandfunktion überbrückt. Hierbei haben die sohlennahen Zellen eine mittlere Höhe von $\Delta z^+ \approx 20$. Das Zellzentrum der wandnächsten Zellen liegt somit mit $z_p^+ \approx 10$ genau im Übergangsbereich zwischen viskoser Unterschicht und logarithmischem Bereich. Dies führt jedoch, wie Testrechnungen für die periodische Gerinneströmung gezeigt haben, bei der verwendeten Wandfunktion in Verbindung mit der gewählten Gitterauflösung zu keiner signifikanten Genauigkeitseinbuße. Auch für die Zylinderseitenwand wird diese Wandfunktion verwendet, wobei hier aufgrund der Gitterverfeinerung das Zellzentrum der wandnächsten Zellen mit $n_1^+ \approx 3$ innerhalb der viskosen Unterschicht liegt.

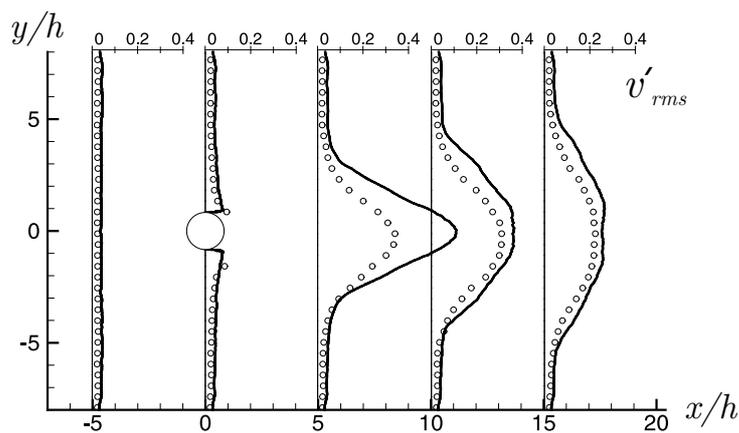
Abbildung 5.40 zeigt einen Vergleich der Simulationsergebnisse mit den PIV-Messungen von von Carmer und Jirka (2001). Dargestellt sind die mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\langle u \rangle$ in Hauptströmungsrichtung und die RMS-Werte der Schwankungsbewegung in Hauptströmungs- und Querrichtung jeweils an der Wasseroberfläche. Während die $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeitsprofile eine gute Übereinstimmung zeigen, sind die Schwankungswerte beim Experiment besonders im zylindernahen Bereich des Nachlaufs geringer als bei der LES. Auch in der ungestörten Außenströmung liegen die gemessenen Schwankungen etwa 30 % unterhalb der berechneten Werte. Da beim Experiment die turbulente Anströmung voll entwickelt war, sind diese Abweichungen größtenteils durch das PIV-Messverfahren bedingt, welches bei der Wassertiefe von 38 mm mit einer Partikelgröße 3 mm und einer Messfrequenz von 7 Hz die kleinskaligen turbulenten Fluktuationen nicht vollständig erfassen konnte. Im Fernfeld wird die Übereinstimmung besser, da hier die kleinskalige Turbulenz weitgehend abgeklungen ist und die großskaligen 2D-Strukturen den Hauptanteil an der 2D-Schwankungsbewegung ausmachen.



(a) $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeit



(b) Schwankungsbewegung u'_{rms}



(c) Schwankungsbewegung in Querrichtung v'_{rms}

Abb. 5.40: Zylinderumströmung mit $Re_h = 5440$ und $D/h = 1.66$. Mittlere Strömungsgeschwindigkeit und Schwankungsbewegung an der Wasseroberfläche. (—) 3D-LES, (o) PIV-Messungen von [von Carmer und Jirka \(2001\)](#).

5.3.1.1 Dispersionsspannungen

Die 3D-LES liefert detaillierte Informationen über die Dispersionsspannungen, die bei einer DA-LES zu modellieren sind. So lassen sich aus der aufgelösten Bewegung der 3D-LES die verschiedenen Komponenten des Dispersionstensors berechnen. Abbildung 5.41 zeigt zu einem Zeitpunkt die Größe der einzelnen Komponenten des Dispersionstensors D_{22} , nach einer Aufspaltung entsprechend Beziehung 2.107 in

$$D_{ij}(\mathbf{u}) = D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle) + C_{ij} + D_{ij}(\mathbf{u}') \quad (5.33)$$

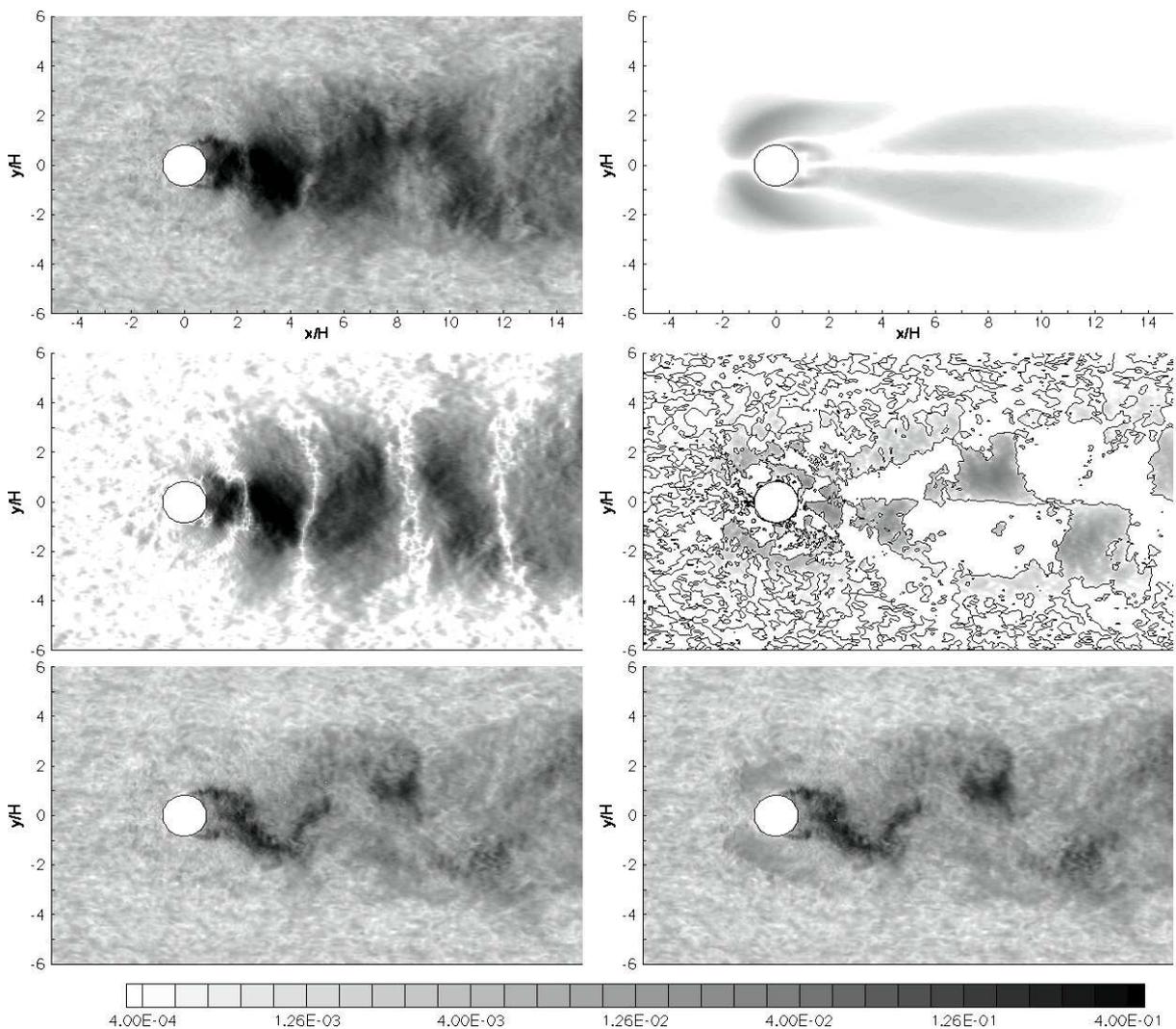


Abb. 5.41: Zylinderumströmung mit $Re_h = 5440$ und $D/h = 1.66$. Mit der 3D-LES berechnete Komponenten der momentanen Dispersionsspannungen $D_{22}(\mathbf{u})$ nach Gleichung 5.33. Links von oben: $\widetilde{u'_2 u'_2}$, $\widetilde{u'_2 u'_2}$, $D_{22}(\mathbf{u}) = \widetilde{u'_2 u'_2} - \widetilde{u'_2 u'_2}$, rechts: $D_{22}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, C_{22} (negative Werte ausgeblendet), $D_{22}(\mathbf{u})$.

Der Hauptanteil der Spannungen D_{22} (Abb. 5.41 rechts unten) stammt von den turbulenten 3D-Fluktuationen $D_{22}(\mathbf{u}') = \widetilde{u'_i u'_j} - \widetilde{u'_i} \widetilde{u'_j}$ (Abb. 5.41 links unten). Aufgrund der niedrigen Quergeschwindigkeit – abgesehen vom zylindernahen Bereich – sind die Spannungskomponente $D_{22}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, verursacht durch die mittlere Geschwindigkeit, und die Kreuzterme C_{22} sehr gering. Die $D_{ij}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ und C_{ij} Komponenten der (hier nicht gezeigten) Dispersionsspannungen D_{11} und D_{22} werden durch die $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung beeinflusst. Insbesondere $D_{11}(\langle \mathbf{u} \rangle)$ ist groß.

Da die turbulenten 3D-Fluktuationen offensichtlich einen wesentlichen Anteil an den Dispersionsspannungen haben, rechtfertigt dies die Modellierung der Dispersionsspannungen mit einem Wirbelviskositätsmodell für die 3D-Turbulenz. Jedoch lässt die räumliche Verteilung der 3D-Fluktuationen die Lösung einer Transportgleichung für $\widetilde{k_{3d}}$ sinnvoll erscheinen. Damit könnte der Produktion der 3D-Turbulenz an den Zylinderwänden und deren Konvektion und Dissipation im Zylindernachlauf Rechnung getragen werden.

5.3.2 Tiefengemittelte Simulation

Für die tiefengemittelten Simulationen wurde ein Gitter mit der gleichen horizontalen Auflösung wie bei der 3D-LES verwendet. Das resultierende Rechengitter hat somit 87 000 Fluidzellen. Die Simulationen wurden mit verschiedenen Werten für die Modellkonstante c_h (s. Gl. 3.58) im Wirbelviskositätsmodell durchgeführt. Zunächst wurde ohne BSM, also mit $c_b = 0$ (s. Gl. 3.67), gerechnet. Die Wahl der Modellparameter beeinflusst insbesondere die Struktur der Wirbelstraße in der Zylindernachlaufströmung. Diese lässt sich durch Tracer sehr einfach visualisieren (Abb. 5.42). Die Strömungsvisualisierungen ermöglichen hier eine einfache qualitative Beurteilung der Simulationsergebnisse bei den tiefengemittelten Rechnungen. Dies ist mit Strömungsstatistiken (mittlere Geschwindigkeiten, Reynoldsspannungen) schwieriger, da diese die Struktur der Zylindernachlaufströmung nur indirekt widerspiegeln. Deshalb wurde zur Strömungsvisualisierung der Transport zweier an der Zylindervorderseite zugesetzten Farbstoffe bei den Simulationen mitberechnet. Dafür werden zwei zusätzliche Skalartransportgleichungen mit dem HLP-Schema gelöst. An der Zylindervorderseite wird der Wert für die Skalare φ_1 bzw. φ_2 an der linken bzw. rechten Zylinderseite auf 1 fixiert. Die Zuströmung erfolgt mit $\varphi_\infty = 0$.

Um ein Überströmen des Tracers an der Zylindervorderseite von einer auf die andere Seite zu verhindern wird dort in der Symmetrieebene der Tracer auf $\varphi = 0$ fixiert. In Abbildung 5.42 ist die mit Farbstoffen visualisierte Wirbelstraße zu sehen. Dargestellt ist das Experiment von von Carmer und Jirka (2001) (Abb. 5.42a), die 3D-LES (Abb. 5.42b) und die Ergebnisse der DA-LES für verschiedene Modellparameter (Abb. 5.42c-f). Bei der 3D-LES ist die Farbstoffkonzentration an der Wasseroberfläche dargestellt. Das Experiment und die DA-LES zeigen tiefengemittelte Größen. Zwischen dem Experiment und der 3D-LES findet man eine sehr gute Übereinstimmung. Bei den DA-LES Ergebnissen liegen die Wirbelzentren im Nachlauf näher an der Symmetrieachse (x -Achse) als beim Experiment und der 3D-LES.

5.3.2.1 Variation der Konstante c_h für die Wirbelviskosität

Durch die Variation der Konstante c_h für die Wirbelviskosität ($\nu_t = \nu_{3D} = c_h h u_\tau$) im Bereich von 0.01 bis 0.15 wurde versucht, eine bessere Übereinstimmung in der Nachlaufstruktur zu erzielen. Dabei ergaben sich keine besonders signifikanten Veränderungen im Strömungsfeld. Tendenziell führte jedoch ein niedriger Wert der Wirbelviskosität zu einer Destabilisierung des Nachlaufs, was sich in leichten Unregelmäßigkeiten in Form von kleineren Abweichungen in der Position der Wirbelzentren bemerkbar macht (s. Abb. 5.42e mit $c_h = 0.01$). Wird das Wirbelviskositätsmodell jedoch mit $c_h = 0$ gänzlich abgeschaltet, ist die Nachlaufströmung nicht mehr stabil (hier nicht abgebildet). Vielmehr bildeten sich im Zylindernachlauf dann „freie“ Wirbelpaare, die sich (konvektiert von der Hauptströmung) quer durch das Strömungsfeld fortbewegen. Dies zeigt, dass der dämpfende Einfluss des Bodenreibungsgliedes allein nicht ausreicht, um eine stabile Nachlaufströmung zu erhalten. Folglich kann auf das Wirbelviskositätsmodell für die 3D-Turbulenz, das auf die 2D-Strukturen stabilisierend wirkt, nicht verzichtet werden. Aufgrund der Erfahrungen mit der Mischungsschicht und der Zylinderumströmung wird in der vorliegenden Arbeit für DA-LES-Rechnungen $c_h \approx \kappa/6 \approx 0.07$, entsprechend dem Elder-Modell (vgl. Gl. 3.61), empfohlen (s. Abb. 5.42e mit $c_h = 0.07$).

5.3.2.2 Turbulente Diffusion des Tracers

Da die turbulente Diffusionskonstante $\Gamma_t = \nu_t/\sigma_t = c_h h u_\tau/\sigma_t$ (hier mit $\sigma_t = 0.7$) proportional der Wirbelviskosität ist, wurde bei der Variation von c_h ein mehr oder weniger diffuses Konzentrationsfeld im Nachlauf beobachtet (vgl. Abb. 5.42c und e). Dabei ergab sich für Werte $c_h \geq 0.1$ ein zu diffuses Konzentrationsfeld (nicht abgebildet). Für Werte $c_h < 0.05$ ist die turbulente Diffusion – insbesondere in Strömungsrichtung, wo Dispersionseffekte zu berücksichtigen sind – zu gering, und es kommt zu einer Konzentration des Tracers in den Wirbelzentren (vgl. Abb. 5.42e). Für $c_h = 0.07$ bzw. $\Gamma_n = 0.1u_t$ erhält man eine relativ gute qualitative Übereinstimmung mit dem Experiment bzw. der 3D-LES (Abb. 5.42c). Jedoch sind bei der DA-LES zwischen den Wirbelkernen, die durch Filamente verbunden sind, kleinere Zwischenräume auszumachen, in denen die Tracerkonzentration null ist. Dies ist beim Experiment bzw. der 3D-LES nicht der Fall. Hier führt die Dispersion zu einer verstärkten Durchmischung in Strömungsrichtung. Diesem Effekt kann mit einer erhöhten Diffusion in Strömungsrichtung Rechnung getragen werden. Definiert man dazu eine Diffusionskonstante Γ_s für die turbulente Diffusion in Strömungsrichtung und eine Diffusionskonstante Γ_n für die turbulente Diffusion normal dazu in der horizontalen Ebene, dann lässt sich die turbulente Diffusion, wie in Anhang A.2 gezeigt wird, durch den Diffusionstensor

$$\Gamma_{ij} = \frac{u_i u_j}{u_m u_m} (\Gamma_s - \Gamma_n) + \delta_{ij} \Gamma_n \quad (i, j, m = 1, 2) \quad (5.34)$$

beschreiben. Damit lautet die Skalartransportgleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + s_\varphi \quad (5.35)$$

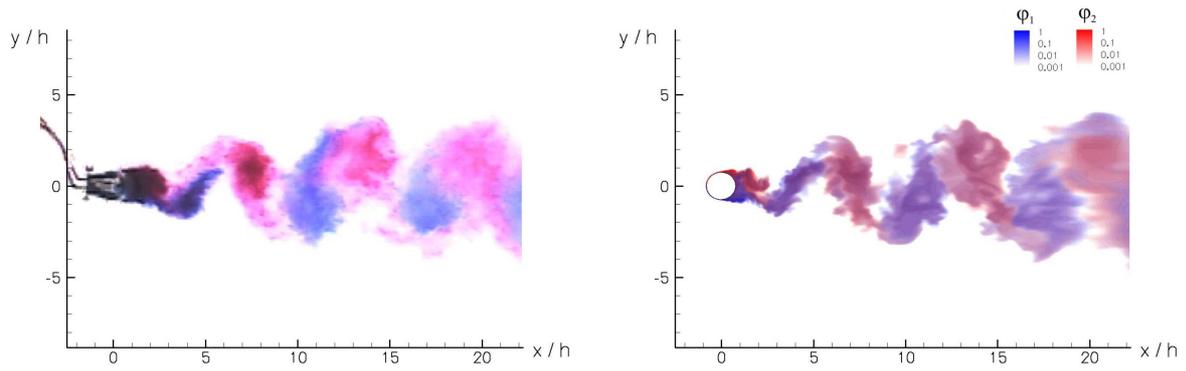
Die Abbildungen 5.42d und 5.42f zeigen das Konzentrationsfeld im Nachlauf mit anisotroper turbulenter Diffusion. Die Diffusionskonstante quer zur Strömungsrichtung wurde hierbei gleich der turbulenten Diffusionskonstante bei isotroper Diffusion, also $\Gamma_n = \Gamma_t = \nu_t/\sigma_t$ gesetzt. Für $c_h = 0.07$ erhält man mit einer vierfach höheren Diffusion in Strömungsrichtung ($\Gamma_s = 4\Gamma_n = 0.4u_\tau h$) ein realistisches Konzentrationsfeld im Nachlauf (Abb. 5.42d). Bei der Rechnung mit $c_h = 0.01$ ist eine etwa 20- bis 30-fach höhere Diffusion in Strömungs-

richtung notwendig, um eine ausreichend diffuse Konzentrationsverteilung im Nachlauf zu erhalten (s. Abb. 5.42e mit $\Gamma_s = 30\Gamma_n \approx 0.4u_\tau h$).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass mit den hier empfohlenen Werten $c_h = 0.07$ und $\sigma_t = 0.7$ ($\nu_t = 0.07u_\tau h$, $\Gamma_t = 0.1u_\tau h$) die turbulente Dispersion des Tracers in Strömungsrichtung zwar nicht zwingend berücksichtigt werden muss, jedoch eine qualitative Verbesserung mit $\Gamma_s = 4\Gamma_n = 0.4u_\tau h$ zu beobachten ist. Dies könnte von Bedeutung sein, wenn mit dem DA-LES-Verfahren beispielsweise empfindliche ökologische Prozesse simuliert werden sollen, die eine möglichst exakte Vorhersage von Konzentrationsverteilungen voraussetzen. Hierzu bedarf es jedoch noch umfangreicher quantitativer Analysen und weiteren quantitativen Kalibrationsrechnungen, um mit dem DA-LES-Verfahren eine hohe Genauigkeit erzielen zu können.

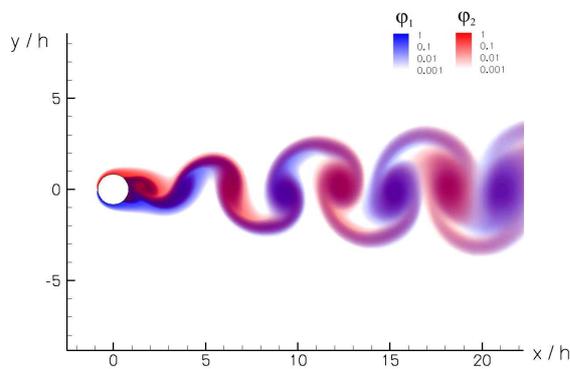
5.3.2.3 Einfluss des BSM

Anders als bei der Mischungsschicht ist bei der Zylinderumströmung kein BSM erforderlich, um realistische 2D-Wirbelstrukturen im Zylindernachlauf zu erhalten. Dennoch wurden Rechnungen mit BSM durchgeführt. Zunächst wurde für die Modellkonstante $c_b = 55$ (wie bei der Mischungsschicht) gewählt. Dabei ergaben sich keine signifikanten Änderungen im Nachlauf. Jedoch entsprach die damit generierte Energie der 2D-Schwankungen im Zulauf nur 10 % der in einer ungescherten Gerinneströmung beobachteten Werte. Deshalb wurde der Wert der Modellkonstante auf $c_b = 200$ erhöht. Damit wurden zwar 2D-Schwankungen ausreichender kinetischer Energie erzeugt, jedoch führten die 2D-Schwankungen zu einer Stabilisierung der Wirbelablösung am Zylinder und zur Abschwächung der Wirbelstraße. Diese Stabilisierung ist vermutlich darauf zurückzuführen, dass die durch das BSM angeregten 2D-Schwankungen bedingt durch die Bandpassfilterung relativ kleinskalig sind (Die stärkste Anregung erfolgt bei Wellenzahlen von $k = 0.5k_{max}$ bzw. Wellenlängen von $\lambda = 4\Delta x$). Hier könnte unter Umständen eine Anpassung der Filterkoeffizienten beim BSM Abhilfe schaffen.

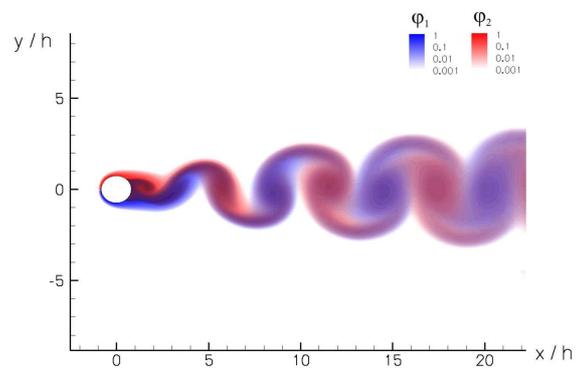


(a) Experiment

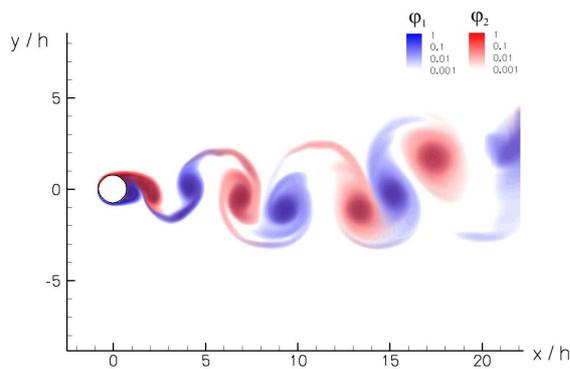
(b) 3D-LES



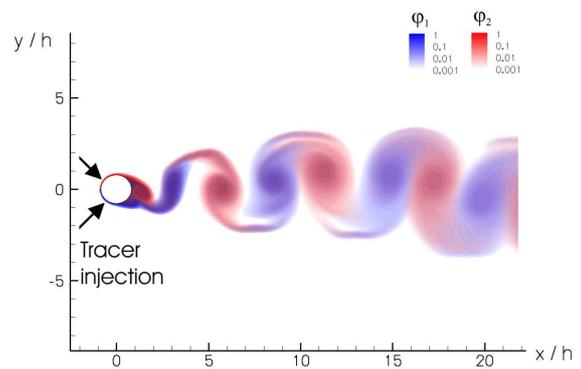
(c) DA-LES, $c_h = 0.07$, isotrope turb. Diffusion



(d) DA-LES, $c_h = 0.07$, $\Gamma_s = 4\Gamma_n$



(e) DA-LES, $c_h = 0.01$, isotrope turb. Diffusion



(f) DA-LES, $c_h = 0.01$, $\Gamma_s = 20\Gamma_n$

Abb. 5.42: Zylinderumströmung mit $Re_h = 5440$ und $D/h = 1.66$. Transport zweier Farbstoffe, die an der Zylindervorderseite zugesetzt werden: (a) Experiment von [von Carmer und Jirka \(2001\)](#); (b) 3D-LES (Farbstoffkonzentration an der Wasseroberfläche); (c-f) DA-LES: (c, e) mit isotroper turbulenter Diffusion, (d, f) mit anisotroper turbulenter Diffusion.

5.4 Bühnenfeld

In diesem Abschnitt wird eine sehr praxisnahe Anwendung des 3D- und DALES-Verfahrens vorgestellt: Nach dem Sandoz-Unfall 1986 wurde für den Rhein ein Alarmmodell entwickelt, das mithilfe einfacher eindimensionaler Näherungslösungen Transportzeiten sowie Maximalkonzentrationen von Schadstoffen vorhersagen kann (Spreafico und van Mazijk 1993). Zur Entwicklung des Modells waren zahlreiche kostenintensive Tracerversuche notwendig, anhand derer die Modellparameter kalibriert wurden. Solange kein eindeutiger Zusammenhang zwischen den komplizierten morphologischen Verhältnissen einer Flussstrecke und dem dispersiven Transport gelöster Stoffe bekannt ist, sind Tracerversuche die einzige Möglichkeit, ein solches Modell auf andere Flüsse oder veränderte hydraulische Bedingungen anzupassen. Westrich (1977) und Valentine und Wood (1977) zeigten, dass insbesondere Totzonen, wie sie beispielsweise in Bühnenfeldern auftreten, einen großen Einfluss auf den Stofftransport haben. Um den Einfluss von Totzonen auf den dispersiven Transport in Flüssen besser vorhersagen zu können, wurden am Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe von Weitbrecht et al. (2002) Laborexperimente mit Bühnenfeldern durchgeführt. In diesen Experimenten wurde das Strömungsfeld an der Wasseroberfläche mittels PIV vermessen. Außerdem wurden Konzentrationsmessungen durchgeführt. Die Messergebnisse erlauben eine Bestimmung der für eindimensionale Modelle benötigten Austauschkoefizienten, für den Stoffaustausch zwischen den Bühnen und dem Hauptstrom. Die Methode zur Bestimmung der Austauschkoefizienten ist in der Dissertation von Weitbrecht (2004) detailliert beschreiben. Die prinzipielle Vorgangsweise ist folgendermaßen: Zu einem Zeitpunkt t_0 wird ein einzelnes Bühnenfeld gleichmäßig mit einem Farbstoff eingefärbt (Anfangskonzentration φ_0). Durch Vermischung mit dem ungefärbten Hauptstrom nimmt die mittlere Farbstoffkonzentration im Bühnenfeld mit der Zeit ab. Der zeitliche Konzentrationsverlauf kann durch den exponentiellen Abfall

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_D}\right) \quad \text{für } t \geq t_0 \quad (5.36)$$

approximiert werden. Hierin bezeichnet T_D eine charakteristische Zeit, die als mittlere Aufenthaltsdauer eines Stoffes im Bühnenfeld interpretiert werden kann.

Durch Bestimmung von T_D aus dem gemessenen Konzentrationsverlauf erhält man den dimensionslosen Austauschkoeffizienten k :

$$k = \frac{W}{T_D U} \quad (5.37)$$

Hierbei bezeichnet W die Buhnenbreite W und U die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im Hauptstrom (vgl. Abb. 5.43). Diese Austauschkoeffizienten können auch aus den LES-Rechnungen gewonnen werden. Anhand der berechneten Austauschkoeffizienten lässt sich einerseits die Eignung des Verfahrens zur Vorhersage praxisrelevanter Größen verifizieren. Andererseits eignen sich die Austauschkoeffizienten als integrale Werte auch zur weiteren Kalibrierung des DA-LES-Verfahrens.

Von den zahlreichen von Weitbrecht untersuchten Konfigurationen wurde der Fall eines Buhnenfeldes mit einem Verhältnis von Buhnenbreite zu Buhnenabstand von $W/L = 0.4$ und einer Reynoldszahl von $Re_h = Uh/\nu = 7340$ mit 3D-LES und DA-LES berechnet (Abb. 5.43). Die Reynoldszahl ist auf die Wassertiefe von $h = 46.5 \text{ [mm]}$ und auf die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit im Hauptstrom von $U = 0.16 \text{ [m/s]}$ bezogen. An der Wasseroberfläche wurde dabei im Hauptstrom eine mittlere Geschwindigkeit von $U_\zeta \approx 0.195 \text{ [m/s]}$ gemessen. Da für den betrachteten Fall detaillierte Messdaten vorhanden sind,

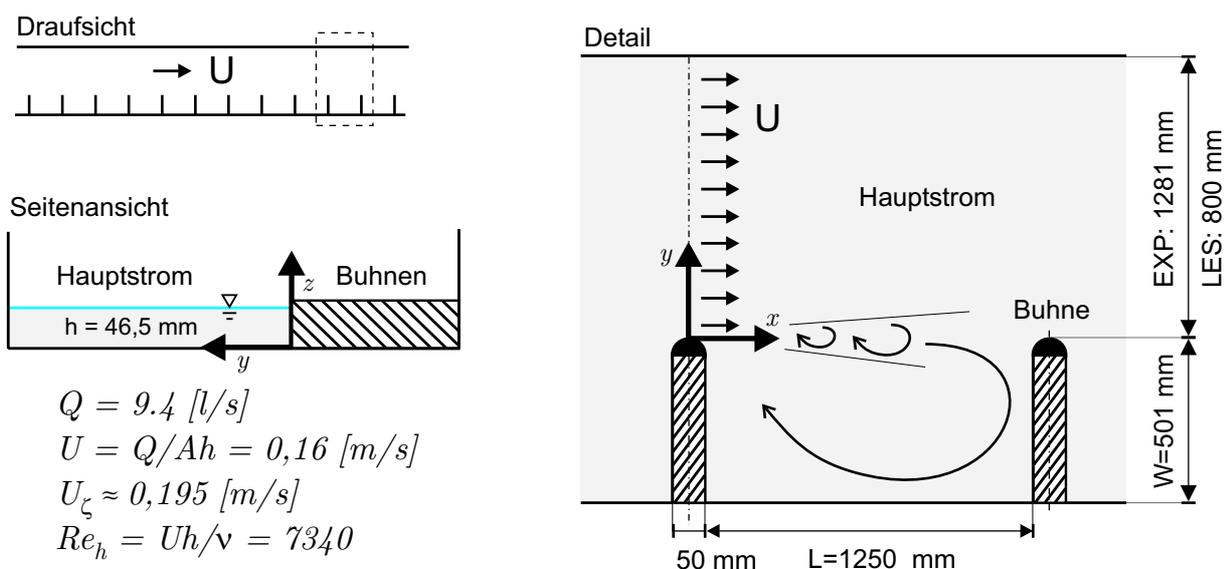


Abb. 5.43: Geometrie des Buhnenfeldes und Strömungskonfiguration beim Experiment von Weitbrecht et al. (2002) mit $W/L = 0.4$.

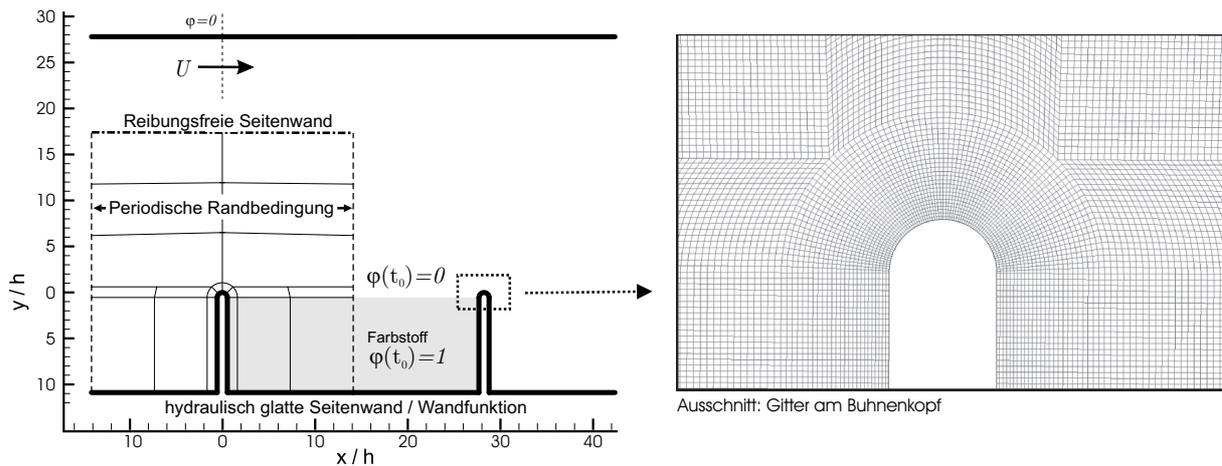


Abb. 5.44: Rechengebiet, Blockstruktur, Randbedingungen und Gitter im Bereich des Bühnenkopfes bei der LES.

leisteten diese Simulationen einen weiteren wichtigen Beitrag zur Validierung des LES-Verfahrens auf komplexen Geometrien. Außerdem ergänzen die Simulationsergebnisse die PIV-Messungen an der Oberfläche durch Informationen über das dreidimensionale Strömungsfeld. Erste Ergebnisse der nachfolgend beschriebenen Simulationen wurden schon im Rahmen eines Workshops vorgestellt ([Weitbrecht und Hinterberger 2002](#)).

Um bei der LES den Aufwand an Rechenzeit und Speicherressourcen zu minimieren, umfasst das in Strömungsrichtung periodische Rechengebiet nur eine einzelne Bühne des Bühnenfeldes. Außerdem wird nicht die volle Breite des Versuchserinnes betrachtet, sondern dieses bei etwa zwei Drittel der Breite mit einer reibungsfreien Randbedingung (Symmetrie) abgeschnitten. Abbildung 5.44 zeigt das Rechengebiet im Verhältnis zur Versuchsrinne sowie die Blockstruktur und die Randbedingungen. Die Wasseroberfläche wird als reibungsfreie starre horizontale Oberfläche modelliert. Die Seitenwände und die Sohle werden als hydraulisch glatte Wände modelliert. Dabei wird die Wandgrenschicht mittels Wandfunktion überbrückt. Das Rechengebiet wurde in 20 Blöcke unterteilt. Die horizontale Gitterauflösung beträgt $\Delta x \approx \Delta y \approx h/15$ ($\Delta x^+ \approx \Delta y^+ \approx 30$). In Bühnennähe wurde das Rechengitter bis auf $\Delta x \approx \Delta y \approx h/60$ ($\Delta x^+ \approx \Delta y^+ \approx 10$) verfeinert, um auch die Ablösung sehr kleiner Wirbel von den Bühnenkopf erfassen zu können. Abbildung 5.44 zeigt einen Ausschnitt des Rechengitters am Bühnenkopf.

Bei den Simulationen wird zur Berechnung des Austauschkoeffizienten eine Skalartransportgleichung gelöst. Die Diskretisierung der konvektiven Flüsse erfolgt mittels HPLA-Schema. Für die turbulente Prandtl-/Schmidt-Zahl wird $\sigma_t = 0.7$ verwendet. Nachdem sich die Strömung voll entwickelt hat, wird wie im Experiment in die voll entwickelte Strömung zum Zeitpunkt t_0 eine Anfangskonzentration von $\varphi(t_0) = 1$ im Bühnenfeld und die Umgebungskonzentration $\varphi(t_0) = 0$ im Hauptstrom vorgegeben. Damit in den Simulationen die Anströmung des Bühnenfeldes trotz der periodischen Randbedingungen immer mit der Umgebungskonzentration erfolgt, wird im Hauptstrom zwischen den Bühnenfeldern (bei $x = 0$) die Skalkonzentration auf $\varphi = 0$ fixiert.

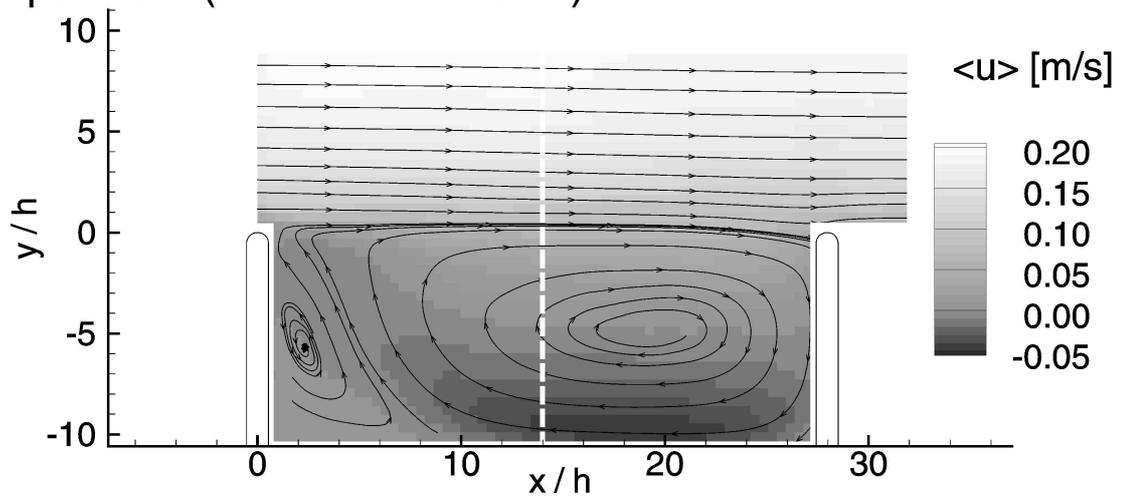
5.4.1 Dreidimensionale Simulation

Bei der dreidimensionalen Simulation betrug die Gitterauflösung in Tiefenrichtung $\Delta z = h/15$ ($\Delta z^+ \approx 30$). Das resultierende Rechengitter hat $3 \cdot 10^6$ Zellen. Als Feinstrukturmodell wurde für die 3D-LES das Smagorinsky-Modell mit $C_S = 0.065$ verwendet.

Das mit der 3D-LES berechnete mittlere Strömungsfeld ist in Abbildung 5.45 dargestellt. Hier zeigt sich im Vergleich mit den (in der Abbildung oben abgebildeten) PIV-Messergebnissen von Weitbrecht et al. (2002), dass die 3D-LES das mittlere Strömungsfeld und den großen Bühnenfeldwirbel gut wiedergibt. Dies gilt jedoch nicht für den kleineren Sekundärwirbel hinter der Bühne, der bei 3D-LES nicht klar erkennbar ist. Die Stromlinien der 3D-LES weisen eine Divergenz im Nachlauf des Bühnenkopfes auf, was auf eine vertikale Aufwärtsströmung, verursacht durch einen Bühnenkopfwirbel, hindeutet. Diese Divergenz im mittleren Strömungsfeld ist in den experimentellen Daten jedoch nicht zu beobachten. Dies liegt möglicherweise am PIV-Messverfahren, welches auf der optischen Verfolgung von schwimmenden Partikeln beruht. Da in einem divergenten Strömungsfeld an der Oberfläche die Partikelanzahl abnimmt, werden Strömungsereignisse mit starker Divergenz unter Umständen seltener erfasst als konvergente oder divergenzfreie Strömungen, was sich schließlich auf die Ensemblemittelwerte der Messung niederschlägt.

Die Abbildungen 5.46 und 5.47 zeigen die RMS-Werte der u - und v -Schwankungsbewegung. Die berechnete Schwankungsbewegung stimmt sehr gut mit den Messdaten überein. In der Scherschicht zwischen Hauptstrom und Bühnen-

Experiment (PIV measurements)



3D LES

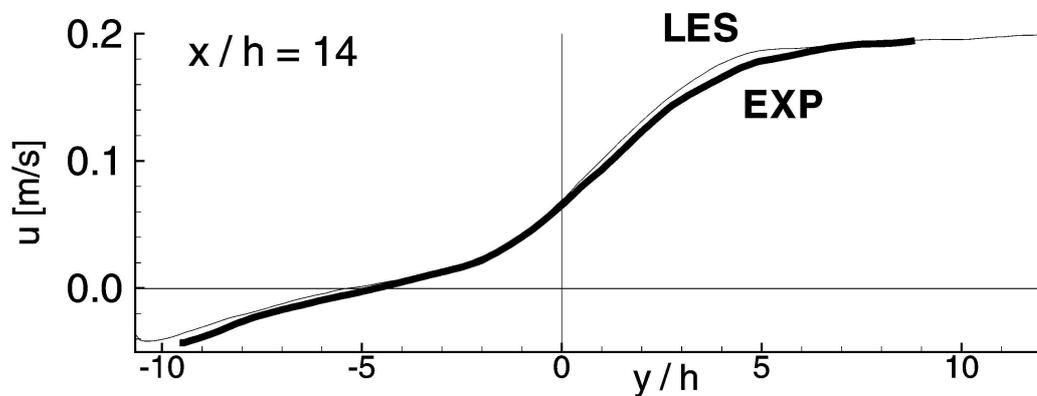
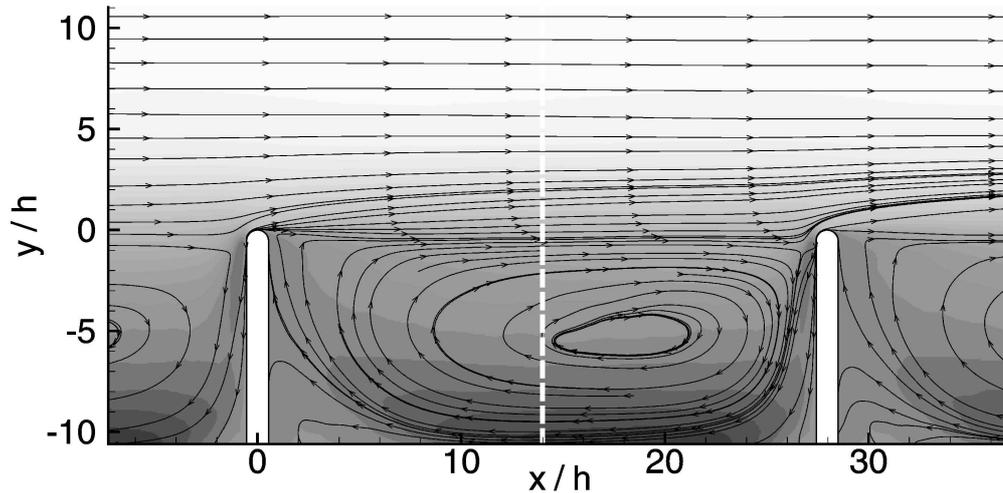


Abb. 5.45: Bühnenfeld: $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeiten und Strömungsfeld an der Wasseroberfläche; oben: PIV-Messungen von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#); Mitte: 3D-LES; unten: Geschwindigkeitsprofil zwischen den Bühnen.

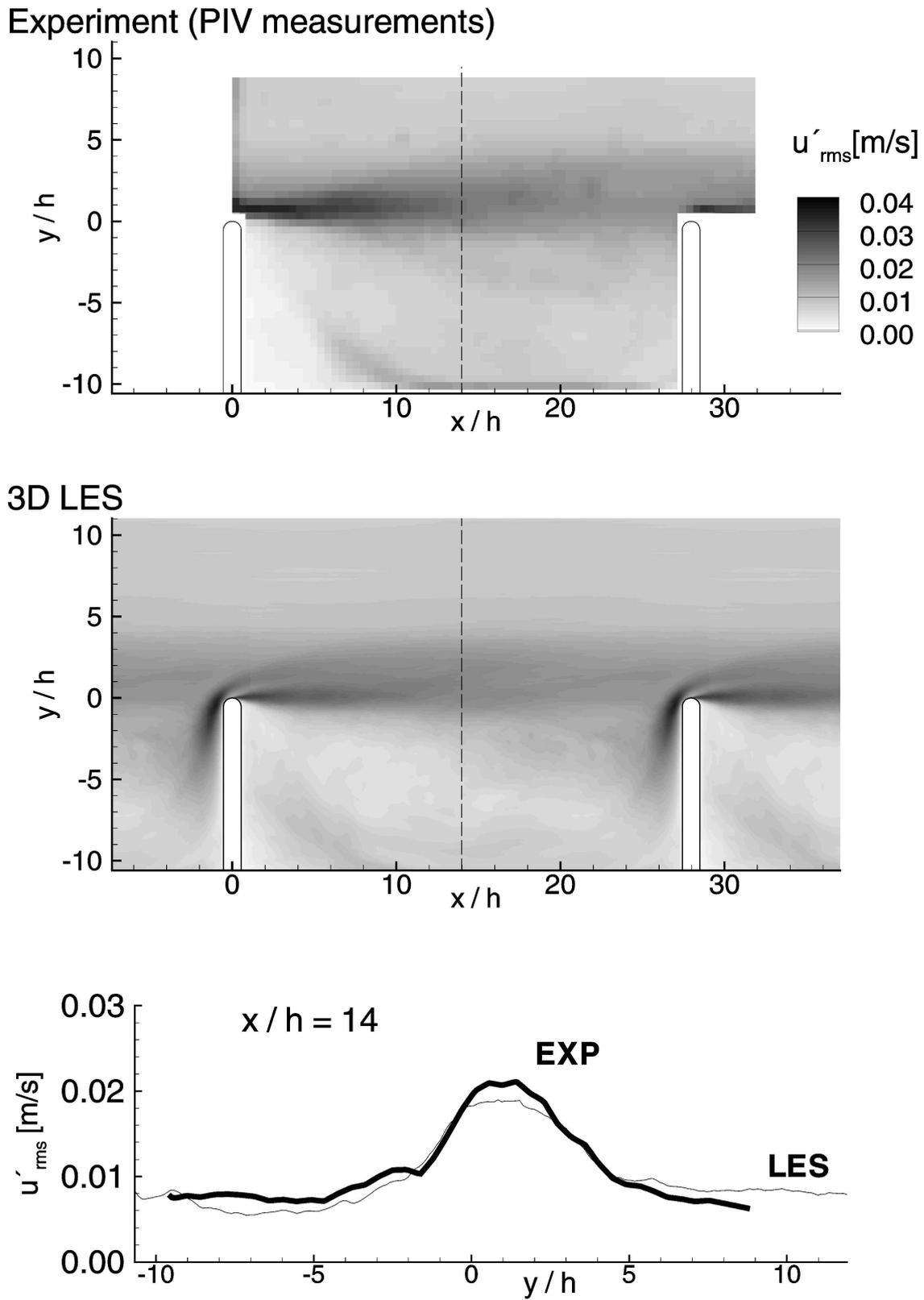
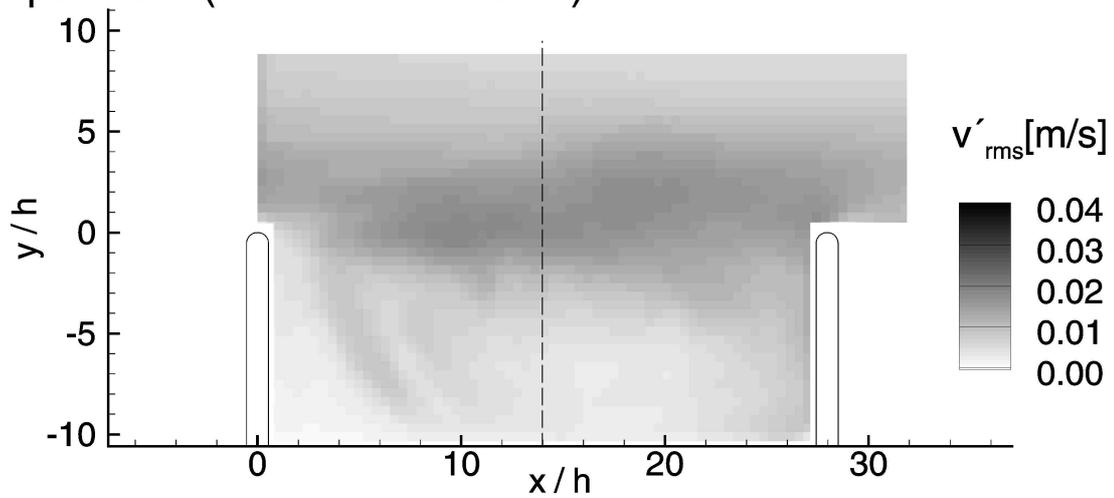


Abb. 5.46: Bühnenfeld: RMS-Werte der u -Schwankungen an der Wasseroberfläche; oben: PIV-Messungen von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#); Mitte: 3D-LES; unten: Verlauf der RMS-Werte zwischen den Bühnen.

Experiment (PIV measurements)



3D LES

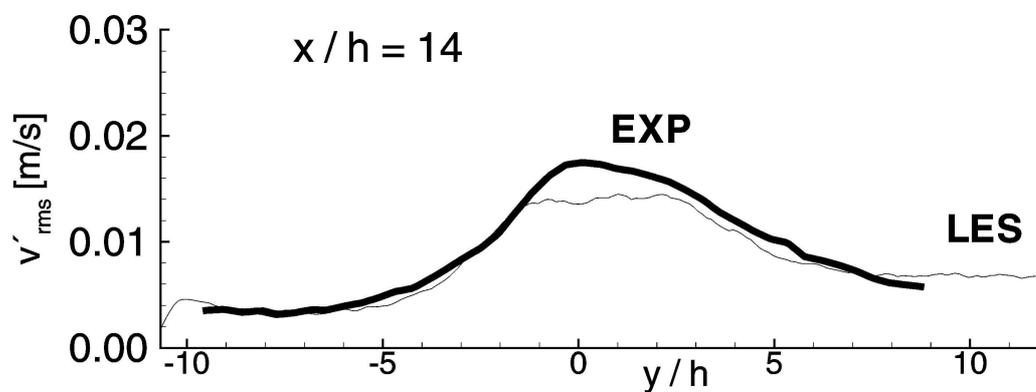
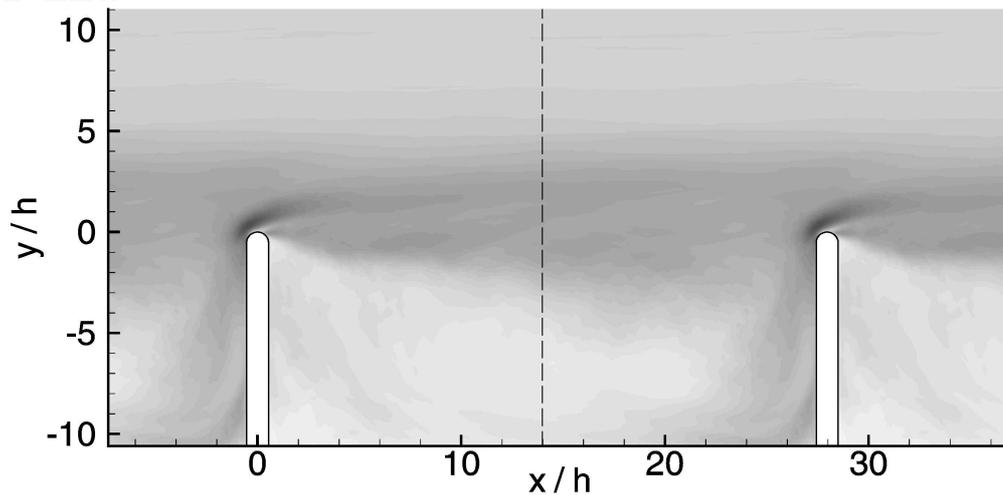


Abb. 5.47: Bühnenfeld: RMS-Werte der v -Schwankungen an der Wasseroberfläche; oben: PIV-Messungen von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#); Mitte: 3D-LES; unten: Verlauf der RMS-Werte zwischen den Bühnen.

feld ist die gemessene Schwankungsbewegung etwas höher. Möglicherweise sind hierfür großskalige niederfrequente Austauschprozesse zwischen den Bühnen verantwortlich, die zwar in Experimenten beobachtet wurden, jedoch durch das beschränkte und nur ein Bühnenfeld umfassende Rechengebiet nicht erfasst werden können. Trotz dieser Einschränkungen ist insgesamt die Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit dem Experiment durchaus zufrieden stellend.

5.4.2 Tiefengemittelte Simulation

Für die tiefengemittelten Simulationen wurde ein Gitter mit der gleichen horizontalen Auflösung wie bei der 3D-LES verwendet. Das resultierende Rechengitter hat 194 000 Fluidzellen. Die Simulationen wurden ohne BSM ($c_b = 0$) und mit $c_h = 0.07$ für die Modellkonstante im Wirbelviskositätsmodell durchgeführt.

Ein Vergleich des mit DA-LES berechneten Strömungsfeldes (Abbildung 5.48) mit den PIV-Messergebnissen von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#) (Abbildung 5.45 oben) zeigt, dass die DA-LES das mittlere Strömungsfeld gut wiedergibt. Insbesondere der kleinere Sekundärwirbel hinter der Bühne ist im Gegensatz zur 3D-LES sehr deutlich ausgeprägt.

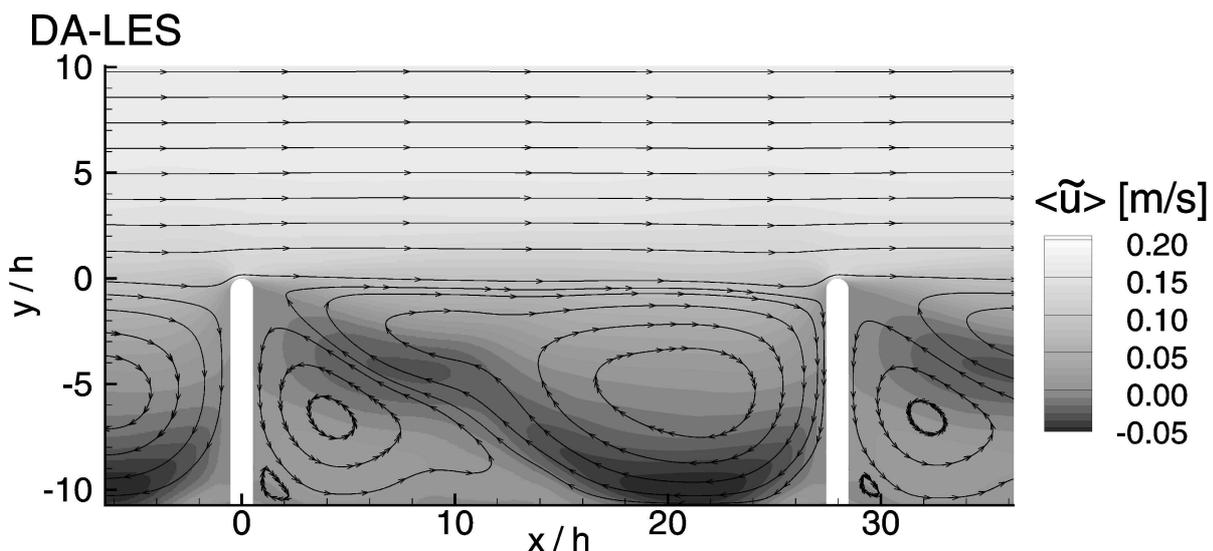


Abb. 5.48: DA-LES Buhnenfeld: $\langle \tilde{u} \rangle$ -Geschwindigkeiten und Strömungsfeld.

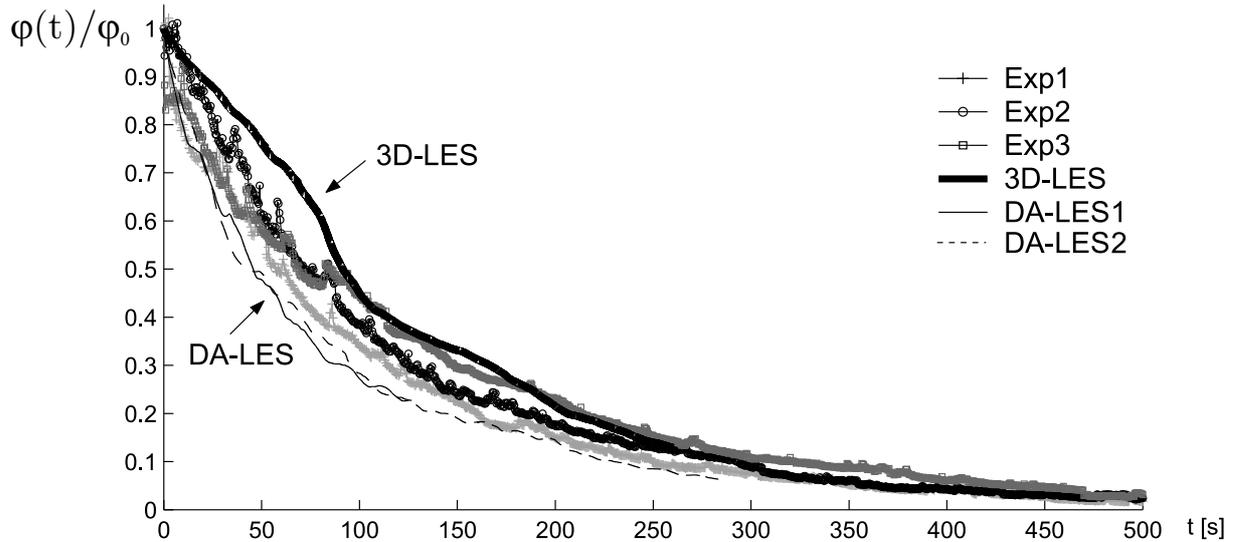


Abb. 5.49: Zeitlicher Verlauf der Tracerkonzentration im Bühnenfeld; Vergleich von 3D-LES und DA-LES mit Messungen von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#); (die drei experimentellen Kurven bzw. die zwei DA-LES-Rechnungen wurden jeweils für die gleiche Strömungskonfiguration bestimmt).

Abbildung 5.49 zeigt den Verlauf der mittleren Tracerkonzentration im Bühnenfeld. Die mit 3D-LES und der DA-LES berechneten Verläufe werden Messergebnissen (drei Messreihen mit gleicher Konfiguration) von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#) gegenübergestellt. Der bei der 3D-LES berechnete Konzentrationsverlauf liegt etwas oberhalb und jener der DA-LES unterhalb der gemessenen Verläufe. Dies spiegelt sich in den berechneten Austauschkoefizienten k wider, die bei der 2D-LES größer und bei der 3D-LES kleiner als im Experiment sind (s. Tabelle 5.5):

Stoffaustausch im Bühnenfeld $W/L = 0.4$	T_D [s]	k
Experiment 1	97	0.029
Experiment 2	114	0.028
Experiment 3	125	0.022
Mittelwert der Experimente	118	0.027
3D-LES	137	0.023
2D-LES mit $c_h = 0.07$, ohne BSM (d. h. $c_B = 0$)	75	0.042

Tabelle 5.5: Stoffaustausch im Bühnenfeld: Mittlere Verweilzeit T_D und Austauschkoefizient k im Experiment von [Weitbrecht et al. \(2002\)](#) sowie in der 3D- und DA-LES.

Aus der Bandbreite der gemessenen Konzentrationsverläufe wird deutlich, dass mehrere Experimente bzw. Simulationen notwendig sind, um den mittleren Austauschkoeffizienten genau bestimmen zu können. Deshalb sind die aus den LES-Rechnungen bestimmten Austauschkoeffizienten mit gewissen Unsicherheiten behaftet, denn die aufwendige 3D-LES wurde nur einmal und die DA-LES nur zweimal durchgeführt. Angesichts der experimentellen Bandbreite ist die Übereinstimmung der 3D-LES als auch der 2D-LES mit den Versuchsergebnissen durchaus zufriedenstellend.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die Weiterentwicklung von LES-Berechnungsverfahren für Flachwasserströmungen. Hierbei ist zwischen dem dreidimensionalen Large-Eddy-Simulationsverfahren (3D-LES) und dem tiefengemittelten Large-Eddy-Simulationsverfahren (DA-LES) zu unterscheiden. Das 3D-LES-Verfahren liefert detaillierte Informationen über die instationären turbulenten Strömungsvorgänge. Aus den bei der 3D-LES berechneten instationären Strömungsfeldern lassen sich statistische Daten, wie beispielsweise die Reynoldsspannungen, bestimmen, welche dann auch als Referenzdaten zur Turbulenzmodellierung herangezogen werden können. Jedoch sind hochaufgelöste 3D-LES-Rechnungen, bei denen die turbulente Grenzschicht durch das Gitter aufgelöst wird, derzeit selbst auf Hochleistungsparallelrechnern nur bei relativ geringen Reynoldszahlen (etwa bis $Re_h \sim 20\,000$) für relativ kleine Rechengebiete (horizontale Ausdehnung etwa 20 Wassertiefen) möglich, da der numerische Aufwand aufgrund der hohen Anforderungen an die Gitterauflösung ($\Delta x^+ \approx 30$, $\Delta z^+ \approx 15$, $\Delta y_1^+ \approx 1$ bei einer vertikalen Gitterstreckung $\leq 3\%$) beträchtlich ist. Rechenzeiten von mehreren Wochen sind hier nicht selten. Durch den Einsatz von Wandfunktionen lässt sich die turbulente Wandgrenzschicht überbrücken, so dass mit verhältnismäßig groben Rechengittern auch bei hohen Reynoldszahlen gerechnet werden kann. In dieser Arbeit konnten mit uniformen Gittern mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z \leq h/10$ noch gute Ergebnisse erzielt werden. Mit dieser Auflösung lassen sich auf Parallelrechnern Rechengebiete mit einer horizontalen Ausdehnung von mehr als 100 Wassertiefen – was ausreicht, um kleinere Laborexperimente per 3D-LES nachzurechnen – in annehmbarer Zeit bewältigen. Die Berechnung praxisrelevanter Flachwasserströmungen, wie beispielsweise eines Flusses oder eines küstennahen Gewässers, ist damit nicht möglich. Hierzu werden die detaillierten dreidimensionalen Strömungsdaten, die sich aus einer 3D-LES ergeben, jedoch zumeist auch nicht benötigt, man ist vielmehr an gemittelten Größen interessiert. Daher bietet sich der Einsatz tiefengemittelter 2D-LES-Verfahren an. Allein durch

den Wegfall der vertikalen Gitterebenen sinkt der Rechenaufwand gegenüber dem 3D-LES-Verfahren schon um eine Größenordnung. Da auch die Anforderungen für die horizontale Gitterauflösung geringer sind, sind weitere Einsparungen um ein bei zwei Größenordnungen möglich. Damit ist die Simulation von Flachwasserströmungen schließlich selbst auf einem PC machbar. Aufgrund dieses enormen Einsparungspotentials stand die Entwicklung eines für die Praxis geeigneten tiefengemittelten LES-Verfahrens (DA-LES) im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit. Bei diesem Verfahren sind die räumlich gefilterten Flachwassergleichungen zu lösen. In diesen Gleichungen treten neben der Sohlschubspannung Dispersions- und Feinstrukturspannungen auf, die modelliert werden müssen. Durch die Analyse der tiefengemittelten Gleichungen wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass neben der Bodenreibung primär der Einfluss der nicht aufgelösten kleinskaligen 3D-Turbulenz zu modellieren ist. Die 2D-Feinstrukturspannungen können vernachlässigt werden, wenn in Bezug auf die Wassertiefe feine Gitter verwendet werden. Die 3D-Turbulenz wird vorwiegend an der Sohle durch die Bodenreibung erzeugt. Schon mit einem einfachen 0-Gleichungs-Wirbelviskositätsmodell, basierend auf dem Elder-Ansatz (1959), lässt sich die 3D-Turbulenz zufrieden stellend modellieren. Die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten tiefengemittelten LES-Simulationen einer Zylindernachlaufströmung und eines Bühnenfeldes belegen, dass sich damit Strömungen mit ausgeprägter topographischer Scherung erfolgreich berechnen lassen. In weiterführenden Untersuchungen sollte jedoch durch eine Transportgleichung für die kinetische Energie der nicht aufgelösten 3D-Turbulenz den vielfältigen Produktions- und Dissipationsvorgängen (z. B. Produktion von 3D-Turbulenz an Seitenwänden) sowie der Konvektion und Diffusion der 3D-Turbulenz Rechnung getragen werden. In Strömungen, in denen kleinste Hintergrundschwankungen aufgrund von Scherinstabilitäten zur Ausbildung großskaliger Wirbel führen können, wie dies beispielsweise in der Mischungsschicht der Fall ist, zeigt sich die Bedeutung eines *Back-Scatter*-Modells, welches für die Anregung von 2D-Wirbeln aus der nicht aufgelösten kleinskaligen Turbulenz sorgt. In der vorliegenden Arbeit wurde ein neuartiges *Back-Scatter*-Modell vorgestellt, das in einer tiefengemittelten Simulation einer Mischungsschicht realistische 2D-Wirbel erzeugt. Hier besteht noch weiterer Forschungsbedarf, um ein gut abgesichertes, robustes und allgemein gültiges Modell zu erhalten, das sich für den Einsatz in der Ingenieurspraxis eignet. Um auch Simula-

tionen auf gröberen Gittern zu ermöglichen, sollte in weiterführenden Untersuchungen der 2D-Feinstrukturmodellierung große Beachtung geschenkt werden. Dabei liegt die Schwierigkeit und Herausforderung in der Modellierung der für 2D-Turbulenz charakteristischen inversen Energiekaskade.

A Anhang

A.1 Zur Koordinatentransformation der Transportgleichungen bei krummlinigen Gittern

Bei strukturierten krummlinigen Finite-Volumen-Gittern bilden die Gitterlinien ein lokales gekrümmtes Koordinatensystem (ξ_i -System):

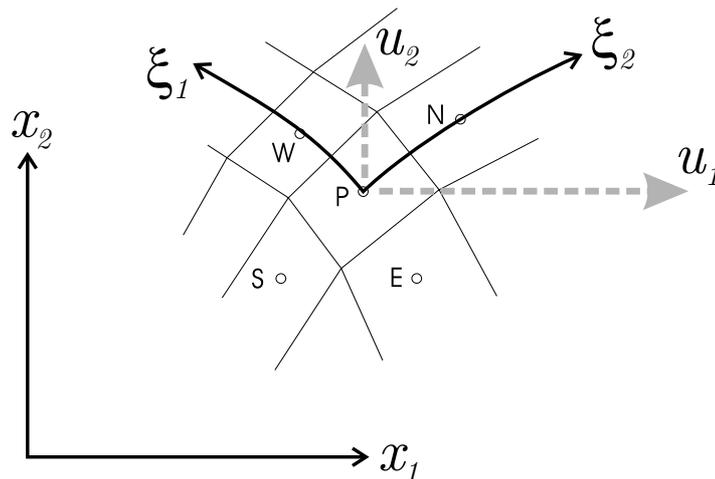


Abb. A.1: Schematische Darstellung des globalen x_i - und lokalen ξ_i -Koordinatensystems

Zur Diskretisierung der im globalen x_i -Koordinatensystem formulierten Transportgleichungen sind Ableitungen von Strömungsgrößen entlang der x_i -Achsen zu berechnen. Die Ableitungen lassen sich aber nur in den durch das Gitter vorgegebenen Raumrichtungen direkt berechnen (z. B. in W-E-Richtung mit zentralen Differenzen $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}|_P = \frac{\varphi_E - \varphi_W}{WE}$). Jedoch gilt zwischen Ableitungen entlang lokaler und globaler Koordinatenachsen der Zusammenhang:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\beta_i^j}{J} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} \quad (\text{A.1})$$

Dabei bezeichnet J die Jakobi-Determinante

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} \quad (\text{A.2})$$

der Koordinatentransformation zwischen dem lokalen ξ_i -Koordinatensystem und dem globalen x_i -Koordinatensystem. β_i^j ist der Kofaktor von $\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}$ in J . Dies entspricht der Unterdeterminante in der Jakobi-Matrix, z. B.:

$$\beta_3^2 = - \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \right) \quad (\text{A.3})$$

Mit der Beziehung A.1 folgt nun beispielsweise für die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes in den krummlinigen ξ_i -Koordinaten:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\beta_i^j}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \quad (\text{A.4})$$

Somit lautet die Kontinuitätsgleichung in den krummlinigen ξ_i -Koordinaten:

$$\frac{\beta_i^j}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = 0 \quad (\text{A.5})$$

A.1.1 Koordinatentransformation der Impulsgleichung

Die Impulsgleichung lautet im globalen x_i -Koordinatensystem:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + f_i \quad (\text{A.6})$$

Die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors u_i sind auf das kartesische globale Koordinatensystem bezogen. Mit Gradienten, die im lokalen ξ_i -Koordinatensystem berechnet werden, hat die Impulsgleichung die Form:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\beta_j^k}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (u_i u_j) = -\frac{\beta_i^k}{J} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi_k} + \frac{\beta_j^k}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\nu 2S_{ij}) + f_i \quad (\text{A.7})$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^m}{J} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_m} + \frac{\beta_i^m}{J} \frac{\partial u_j}{\partial \xi_m} \right) \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Koordinatentransformation der Skalartransportgleichung

Im globalen x_i -Koordinatensystem lautet die Skalartransportgleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + s_\varphi \quad (\text{A.9})$$

und mit Gradienten im lokalen ξ_i -Koordinatensystem gilt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\beta_i^k}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} (u_i \varphi) = \frac{\beta_i^k}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\beta_i^m}{J} \Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_m} \right) + s_\varphi \quad (\text{A.10})$$

Für den Fall eines richtungsabhängigen Diffusionskoeffizienten Γ_{ij} (vgl. Gl. A.22 im Anhang A.2) gilt für die Divergenz der diffusiven Flüsse:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\beta_i^k}{J} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{\beta_j^m}{J} \Gamma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_m} \right) \quad (\text{A.11})$$

A.2 Verwendung anisotroper Diffusion für den Skalartransport

In Flachwasserströmungen führt die Dispersion aufgrund des vertikalen Geschwindigkeitsprofils in der horizontalen Ebene zu einem höheren Stoffaustausch in Strömungsrichtung als quer dazu. Dies kann durch richtungsabhängige Diffusionskoeffizienten modelliert werden. Normalerweise ist der Diffusionskoeffizient Γ nicht richtungsabhängig und daher ein Skalar (Tensor 0. Stufe). Dann gilt für die diffusiven Flüsse q_i :

$$q_i = -\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (\text{A.12})$$

Mit einem symmetrischen Diffusionstensor Γ_{ij} (Tensor 2. Stufe) kann die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von zwei zueinander orthogonalen Raum-

richtungen beschrieben werden. Für die diffusiven Flüsse gilt dann:

$$q_i = -\Gamma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \quad (\text{A.13})$$

Die in der horizontalen Ebene liegenden Hauptachsen des Diffusionstensors sind durch die Strömungsrichtung (\mathbf{u} -Vektor bzw. ζ_1 -Achse) und die dazu normale Querrichtung (ζ_2 -Achse) festgelegt (siehe Abbildung A.2):

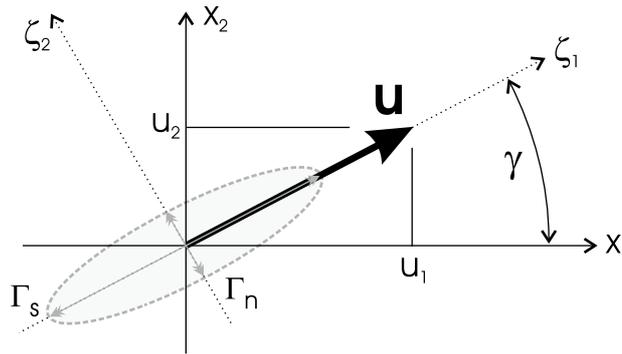


Abb. A.2: Schematische Darstellung des richtungsabhängigen Diffusionskoeffizienten und des durch die Strömungsrichtung festgelegten ζ_i -Hauptachsensystems

Mit dem als Γ_s bezeichneten Diffusionskoeffizienten in Strömungsrichtung und dem Diffusionskoeffizienten Γ_n normal dazu gilt für den Diffusionstensor Γ_{ij}^* im Hauptachsensystem (ζ_i -System):

$$\Gamma_{ij}^* = \begin{bmatrix} \Gamma_n & 0 \\ 0 & \Gamma_s \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Zur Berechnung des Flussvektors q_i nach Gleichung A.13 ist jedoch der Diffusionstensor Γ_{ij} im Referenzkoordinatensystem (x_i -System) anzugeben. Mit der Transformationsmatrix a_{ij}

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & \sin(\gamma) \\ -\sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

lautet die Koordinatentransformation vom Hauptachsensystem ins x_i -System:

$$\Gamma_{ij} = a_{ik} a_{jl} \Gamma_{kl}^* \quad (\text{A.16})$$

Da von Γ_{kl}^* nur die Hauptdiagonale besetzt ist ($l = k$) vereinfacht sich Gleichung A.16 zu:

$$\Gamma_{ij} = a_{ik}a_{jk}\Gamma_{kk}^* \quad (\text{A.17})$$

Wegen $\cos(\gamma) = u_1/|\mathbf{u}|$ und $\sin(\gamma) = u_2/|\mathbf{u}|$ (vgl. Abbildung) gilt für die Transformationsmatrix (Gl. A.15)¹:

$$a_{ij} = \frac{1}{|\mathbf{u}|} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{u_m u_m}} (u_1 \delta_{ij} + u_2 (\delta_{i2} \delta_{j1} - \delta_{i1} \delta_{j2})) \quad (\text{A.18})$$

Durch Einsetzen der Transformationsmatrix (Gl. A.18) in Gleichung A.17 folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{u_m u_m}} (u_1 \delta_{ik} + u_2 (\delta_{i2} \delta_{k1} - \delta_{i1} \delta_{k2})) \\ &\cdot \frac{1}{\sqrt{u_m u_m}} (u_1 \delta_{jk} + u_2 (\delta_{j2} \delta_{k1} - \delta_{j1} \delta_{k2})) \cdot \Gamma_{kk}^* \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Nach Einsetzen der Komponenten des Diffusionstensors Γ_{ij}^* erhält man:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} &= \frac{1}{u_m u_m} [(u_1 \delta_{i1} + u_2 (\delta_{i2} \delta_{11} - \delta_{i1} \delta_{12})) \\ &\quad \cdot (u_1 \delta_{j1} + u_2 (\delta_{j2} \delta_{11} - \delta_{j1} \delta_{12})) \cdot \Gamma_n + \\ &\quad + (u_1 \delta_{i2} + u_2 (\delta_{i2} \delta_{21} - \delta_{i1} \delta_{22})) \\ &\quad \cdot (u_1 \delta_{j2} + u_2 (\delta_{j2} \delta_{21} - \delta_{j1} \delta_{22})) \cdot \Gamma_s] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Durch Zusammenfassen der Terme folgt nach einfacher, aber etwas längerer Rechnung für den Diffusionstensor im Referenzkoordinatensystem:

$$\Gamma_{ij} = \frac{u_i u_j}{u_m u_m} (\Gamma_s - \Gamma_n) + \delta_{ij} \Gamma_n \quad (\text{A.21})$$

Damit lautet die Skalartransportgleichung mit anisotroper Diffusion:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + s_\varphi \quad (\text{A.22})$$

¹ KRONECKER-Symbol $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$.

A.3 Zum LES-Programm \mathcal{LESOC}_2

A.3.1 Quellcode der Wandfunktion

Nachfolgend ist der FORTRAN-Quellcode der Wandfunktion, die in der vorliegenden Arbeit verwendet wurde, abgedruckt. Dazu gehören drei Funktionen, deren Funktionsweise zunächst erläutert wird:

Funktion	Beschreibung
TAUW_SEGMENTS	Die eigentliche Wandfunktion
Y_PLUS_LN	Hilfsfunktion für TAUW_SEGMENTS
TAUW_LOGLAW	Anwendungsbeispiel für Y_PLUS_LN

Funktion TAUW_SEGMENTS()

Die Funktion $\text{TAUW_SEGMENTS}(u_p, y_p, \nu, \Delta u^+, \tau_{w0})$ berechnet die Wandschubspannung τ_w . Die Funktionsparameter sind:

- Die im Zellzentrum der Wandzelle gespeicherte Tangentialgeschwindigkeit u_p ,
- der Wandabstand y_p des Zellzentrums der Wandzelle,
- die Viskosität ν ,
- eine Verschiebung des Wandgesetzes um Δu^+ für den Fall rauer Wände (s. Abschnitt 3.3.5.1) und
- ein Startwert τ_{w0} für die iterative Berechnung der Wandschubspannung.

Die Wandfunktion verwendet ein aus DNS-Daten gewonnenes Wandgesetz (s. Abschnitt 3.3.5.1). Die Implementierung setzt eine Finite-Volumen-Methode voraus, denn das Wandgesetz wurde entsprechend Gleichung 3.11 über die Höhe der Zelle integriert (also: $u_p \equiv \frac{1}{2y_p} \int_0^{2y_p} u(y) dy$). Anschließend wurde das integrierte Wandgesetz durch sieben Segmente der Form $u_p^+ = A + B \cdot \ln(y_p^+)$ und für $y_p^+ < 3$ mit $u_p^+ = y_p^+$ approximiert (vgl. Abb. 3.1). Dabei wurde darauf geachtet, dass der Approximationsfehler stets kleiner als 0.5 % bleibt.

Funktion $Y_PLUS_LN()$

Die Hilfsfunktion $\ln(y^+) = Y_PLUS_LN(u, y, \nu, A, B, y_0^+)$ wird von der Wandfunktion $TAUW_SEGMENTS$ benötigt. Sie liefert für eine vorgegebene wandnahe Tangentialgeschwindigkeit u im Wandabstand y bei einer Viskosität ν für eine logarithmische Wandfunktion der Form

$$u^+ = A + B \cdot \ln(y^+) \quad (\text{A.23})$$

den Wert von $\ln(y^+)$. Die Funktion verwendet ein Newton-Raphson-Iterationsverfahren mit y_0^+ als Startwert. Der mathematische Hintergrund für das implementierte Iterationsverfahren ist folgender:

Aus der Definition für $u^+ = u/u_\tau$ und $y^+ = yu_\tau/\nu$ folgt

$$u^+ = \left(\frac{uy}{\nu}\right) / y^+ \quad (\text{A.24})$$

Dies ist eine Hyperbel im $u^+ - y^+$ -Diagramm (Abb. A.3). Gesucht ist der Schnittpunkt mit der Wandfunktion A.23.

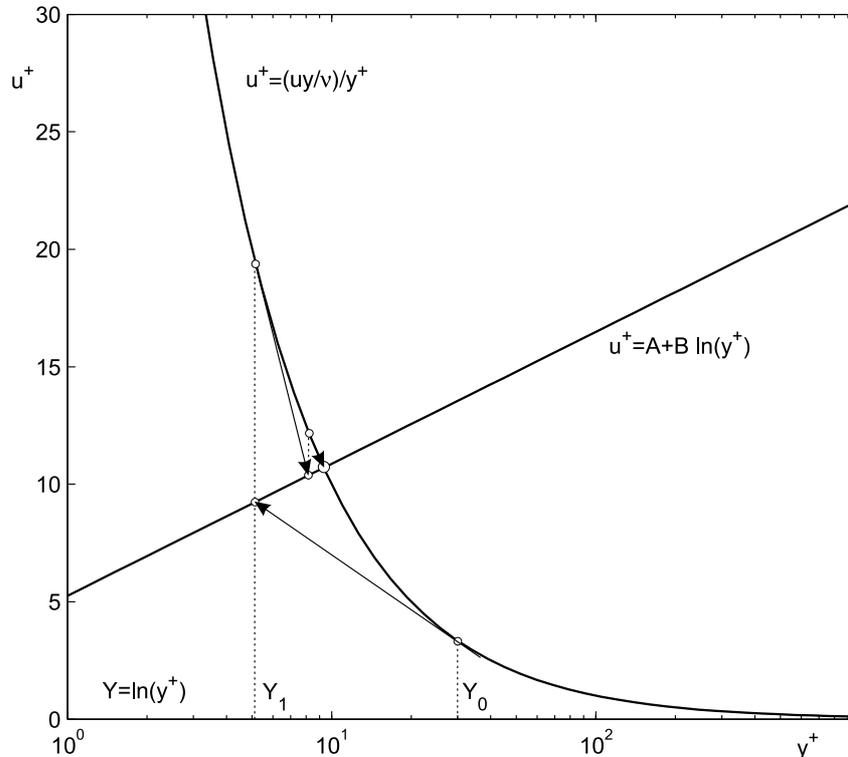


Abb. A.3: Schematische Darstellung des Iterationsverfahrens für die Wandfunktion

Diesen erhält man durch Gleichsetzen der Gleichungen A.24 und A.23

$$\left(\frac{uy}{\nu}\right) / y^+ = A + B \cdot \ln(y^+) \quad (\text{A.25})$$

Mit der Substitution $c = \frac{uy}{\nu}$ und $Y = \ln(y^+)$ folgt

$$c \cdot \exp(-Y) = A + B \cdot Y \quad (\text{A.26})$$

Ausgehend von dem Startwert $Y_0 = \ln(y_0^+)$ erhält man mit dem in Abbildung A.3 skizzierten Newton-Raphson-Iterationsverfahren für Y eine genauere Lösung Y_1 . Hierbei gilt:

$$c \cdot \exp(-Y_0) + \left[\frac{\partial}{\partial Y} (c \cdot \exp(-Y)) \right]_{Y_0} (Y_1 - Y_0) = A + B \cdot Y_1 \quad (\text{A.27})$$

Mit $d = c \cdot \exp(-Y_0)$ folgt

$$d - d (Y_1 - Y_0) = A + B \cdot Y_1 \quad (\text{A.28})$$

und somit für die neue Lösung Y_1 :

$$Y_1 = (d + dY_0 - A) / (d + B) \quad (\text{A.29})$$

Mit Y_1 als neuen Anfangswert wird die Iteration so lange fortgesetzt bis

$$|Y_n - Y_{n-1}| < \epsilon \quad (\text{A.30})$$

Aus dem so berechneten Wert für Y lässt sich $y^+ = \exp(Y)$ und somit $u_\tau = y^+ \nu / y$ bzw. die Wandschubspannung $\tau_w = \rho u_\tau^2$ berechnen. Das Iterationsverfahren konvergiert für alle Wandfunktionen mit $B > 0$.

Funktion TAUW_LOGLAW()

Die FORTRAN-Routine TAUW_LOGLAW ($u, y, \nu, \Delta u^+, \tau_{w0}$) demonstriert die Anwendung der Funktion Y_PLUS_LN. Sie berechnet die Wandschubspannung für das Wandgesetz $u^+ = 5.29 + 1/0.41 \cdot \ln(y^+) + \Delta u^+$. Hierbei bezeichnet Δu^+ eine Verschiebung des Wandgesetzes für raue Wände (s. Abschnitt 3.3.5.1).

Quellcode der Funktion TAUW_SEGMENTS()

```

real function tauw_segments(up,yp,nu,delta_upl,tauw_0)

!   Calculate wall shear stress
!   using segments of  $u^+ = A + B \cdot \ln(y^+) + \text{Delta}_u^+$ 

!   Delta_u+ shift of wall law due to roughness

!   (c) IFH University Karlsruhe

implicit none

integer, parameter          :: nr_segments = 8
real, parameter           :: small = 1.e-5
real                       :: up,yp,nu,delta_upl,tauw_0
real                       :: yplus,utau,utau0,y_plus_ln
real, dimension(nr_segments) :: yp_low,yp_min,yp_max,a,b
integer                    :: i_seg

data yp_min
> /0.0, 2.9, 3.8, 5.8, 15., 27., 58., 190./
data yp_low
> /0.0, 3.0, 3.9, 6.0, 16., 28., 60., 200./
!   data yp_high
!   > /3.0, 3.9, 6.0, 16., 28., 60., 200., 2000./
data yp_max
> /3.1, 4.0, 6.2, 17., 29., 62., 210., 10000./
!
!    $u^+(y^+)_{int} = 1/(2y^+) * [int(u^+ dy)]_{0 \sim 2y^+} = a + b \cdot \ln(y^+)$ 
!
data a
> /0.000000000, -.332778925, -1.450481378, -2.483029717,
>  -.919081170, 1.29485878, 3.13792952, 4.22206795 /
data b
> /0.000000000, 2.963857904, 3.760006654, 4.343796540,
>  3.781074923, 3.118259478, 2.669068102, 2.467903958 /

! ..... get startvalue for y+ from tauw_0
utau0 = SQRT(MAX(small,tauw_0))
yplus = utau0*yp/nu
i_seg = nr_segments

! ..... find segment of wallfunction
1 if ( yplus .lt. yp_low(i_seg) ) then
    i_seg = i_seg - 1
    if ( i_seg .gt. 1 ) goto 1

```

```
endif

!..... calculate new y+
  if (i_seg .eq. 1) then !viscous sublayer [  $u^+ = y^+ + \delta_{u^+}$  ]
    if (delta_upl .eq. 0.0) then
      yplus = SQRT(MAX(yp*up/nu, small))
    else
      yplus = SQRT(MAX((delta_upl/2.0)**2.0+yp*up/nu, small))
    >
    endif
  else !turbulent region [  $u^+ = a + b \ln(y^+) + \delta_{u^+}$  ]
    yplus = y_plus_ln(up,yp,nu,a(i_seg)+delta_upl,b(i_seg),yplus)
  endif

!..... is new y+ between the limits of segment [y+_min,y+_max] ?
  if ( yplus .lt. yp_min(i_seg) ) then
    i_seg = i_seg - 1
    goto 1
  else
    if ( yplus .gt. yp_max(i_seg) ) then
      i_seg = i_seg + 1
      if (i_seg.le.nr_segments) goto 1
    endif
  endif

!..... calculate tau_wall
  utau = yplus * nu / yp
  tauw_segments = utau * utau

end
```

Quellcode der Funktion Y_PLUS_LN()

```

      real function y_plus_ln (up, yp, nu, a, b, y_plus0)
!
!   up : velocity at center of finite volume cell close to the wall
!   yp : distance of the centerpoint from wall
!
!   a, b : constants for segment of wall function   $u+(y+)=a+b*\ln(y+)$ 
!   y_plus0 : startvalue for iteration
!
!   function y_plus_ln solves  $up+ = u+(yp+)$  for  $yp+$  with:
!        $up+ = up/utau$ 
!        $yp+ = yp*utau/nu$ 
!
!   iteration procedure with Newton method
!   uses transformation  $\ln(y+)\rightarrow Y$ 
!    $\rightarrow u+(Y)=a+b*Y$ 
!        $up+(Y)=up*yp/nu*\exp(-Y)=c*\exp(-Y)$ 
!    $\rightarrow$  solving for  $c*\exp(-Y)=a+b*Y$ 
!   always convergent for  $b>0$ 

      implicit none
      real , parameter      :: epsilon = 1.e-6
      integer , parameter  :: maxit = 20
      real                  :: up, yp, nu, a, b, y_plus0
      real                  :: Y_old, Y_new
      real                  :: c, d, deltaY
      integer               :: i

! ..... startvalue for iteration
      Y_old = LOG(y_plus0)
      c     = up * yp / nu

      do i=1, maxit

! .....  $d+d(Y-Y_{old}) = a + b Y$ 
      d     = c*EXP(-Y_old)
      Y_new = (d+d*Y_old-a)/(d+b)

      deltaY = ABS(Y_old-Y_new)
      Y_old  = Y_new

! ..... check for convergence
      if (deltaY.lt.epsilon) goto 1

      enddo

```

```
1  continue

   y_plus_ln = EXP(Y_new)

end
```

Quellcode der Funktion TAUW_LOGLAW()

```
real function tauw_loglaw(up,yp,nu,delta_upl,tauw_0)

implicit none
real up,yp,nu,delta_upl,tauw_0
real y_plus_ln
real a,b
parameter(a=5.29,b=1/0.41)

!  $u+(y+) = a+b*\ln(y+) + \text{delta\_upl}$ 

real utau,utau0
real uplus,yplus,y_plus0

utau0   = SQRT(tauw_0)
y_plus0 = utau0 * yp / nu

yplus   = y_plus_ln(up,yp,nu,a+delta_upl,b,y_plus0)
utau    = yplus * nu / yp

tauw_loglaw = utau * utau

end
```

A.3.2 Dynamische Speicherverwaltung in \mathcal{LESOC}_2

Der ältere, noch auf FORTRAN 77 basierende \mathcal{LESOC} -Code arbeitet ausschließlich mit statischen Feldern. Dabei ist die Feldgröße ein im Programmcode fix vorgegebener Parameter. Als anschauliches Beispiel sei hier die Deklaration eines statischen Feldes für eine Strömungsvariable PHI für Gitter mit 10 000 Gitterpunkten in FORTRAN 77 aufgeführt:

```
real PHI(10 000)
```

In FORTRAN 90 ist folgende gleichwertige Deklaration vorgesehen:

```
real, dimension (10 000) :: PHI
```

Ändert sich nun die Problemgröße, muss der Programmcode angepasst werden. Dies ist nicht anwenderfreundlich und stellt überdies eine potentielle Fehlerquelle dar, wenn nicht alle Feldgrößen korrekt angepasst werden. In \mathcal{LESOC}_2 werden deshalb dynamische Felder verwendet, deren Größe erst zur Programmaufzeit festgelegt wird. Dabei wird auch der für die Felder benötigte Arbeitsspeicher reserviert. Hierzu bietet der FORTRAN 90-Standard zwei Möglichkeiten: Die Variablenattribute *ALLOCATEABLE* oder *POINTER*. In \mathcal{LESOC}_2 werden für die dynamischen Felder Zeiger (*POINTER*) verwendet, da diese vielseitiger sind und in Vergleichstests (auf der IBM-SP/2) etwa 30 % schnellere Programme ermöglichen. Damit lautet die FORTRAN 90-Deklaration für das Feld zur Speicherung einer Strömungsvariable PHI:

```
real, pointer, dimension(:) :: PHI
```

Während der Programmaufzeit erfolgt dann die Speicherplatzreservierung für einen Block des blockstrukturierten Gitters durch die Anweisung

```
allocate (PHI(NIJK))
```

nachdem die Blockgröße $NIJK=NI*NJ*NK$ aus dem Topologie-File eingelesen wurde. Dadurch wird jeweils nur so viel Arbeitsspeicher verwendet, wie für die

Lösung des jeweiligen Strömungsproblems erforderlich ist, ohne dass der Programmcode für jede Konfiguration geändert werden muss. Aus Performancegründen werden die Strömungsgrößen in $\mathcal{LESOC}C$ und $\mathcal{LESOC}C_2$ nicht in einem dreidimensionalen Feld $\text{PHI}(\text{NI},\text{NJ},\text{NK})$, sondern in einem eindimensionalen Vektor $\text{PHI}(\text{NIJK})$ gespeichert. Dadurch vereinfachen sich Programmschleifen über alle Gitterzellen. Anstelle dreier geschachtelter Schleifen reicht dann eine Schleife mit einem Index von 1 bis NIJK . Dem Zugriff über $\text{PHI}(\text{I},\text{J},\text{K})$ auf eine Strömungsvariable an der Gitterposition $\text{I},\text{J},\text{K}$ im dreidimensionalen Feld entspricht dann $\text{PHI}(\text{I} + \text{NI}*(\text{J}-1) + (\text{K}-1)*\text{NI}*\text{NJ})$ im eindimensionalen Feld.

Datenstruktur für die einzelnen Blöcke

Alle Strömungsvariablen und Daten eines Blocks werden in $\mathcal{LESOC}C_2$ in einer eigenen Datenstruktur gespeichert. Dazu wurde der Datentyp `T_BLOCK` definiert. Auf das Wesentliche reduziert lautet dessen Definition folgendermaßen:

```
type T_BLOCK
  ! Blockgröße
  integer :: NI,NJ,NK
  ! Gitter
  real, pointer, dimension(:) :: x,y,z
  ! Strömungsvariablen
  real, pointer, dimension(:) :: U,V,W,P,PHI
end type T_BLOCK
```

Durch diese Datenstrukturen werden die Strömungsvariablen eines Blocks gekapselt, was es ermöglicht, beliebig viele unterschiedlich große Blöcke auf einem Prozessor zu speichern. Dies ist in $\mathcal{LESOC}C$ nicht möglich, denn hier werden die Strömungsvariablen als globale Felder gespeichert.

Datenstruktur zur Verwaltung der Blöcke

Die Verwaltung der Blöcke erfolgt in $\mathcal{LESOC}C_2$ durch dynamische, verkettete Listen – sog. Blocklisten (im Programmcode: `BL ... block list`). Jedes Element dieser Liste (`BLI ... block list item`) entspricht einem Block. Es enthält Zeiger auf das nächste und das vorhergehende Element in der Liste (`BLI%next_item`

und $\text{BLI}\%prev_item$) sowie einen Zeiger auf die Daten des dem Listenelement zugeordneten Blocks ($\text{BLI}\%block$):

```

type T_BLOCKLIST
  ! Zeiger auf Block
  type (T_BLOCK), pointer :: block
  ! Zeiger auf vorhergehendes und nachfolgendes Listenelement
  type (T_BLOCKLIST), pointer :: prev_item, next_item
end type T_BLOCKLIST

```

Abbildung A.4 verdeutlicht die Struktur der daraus resultierenden Liste. Mit solchen Listen ist die Zahl der Blöcke variabel und es können beliebig viele Blöcke auf einem Prozessor bearbeitet werden. Auch die Speicherung der Randbedingungen und der Block-Topologie erfolgt über solche verketteten Listen.

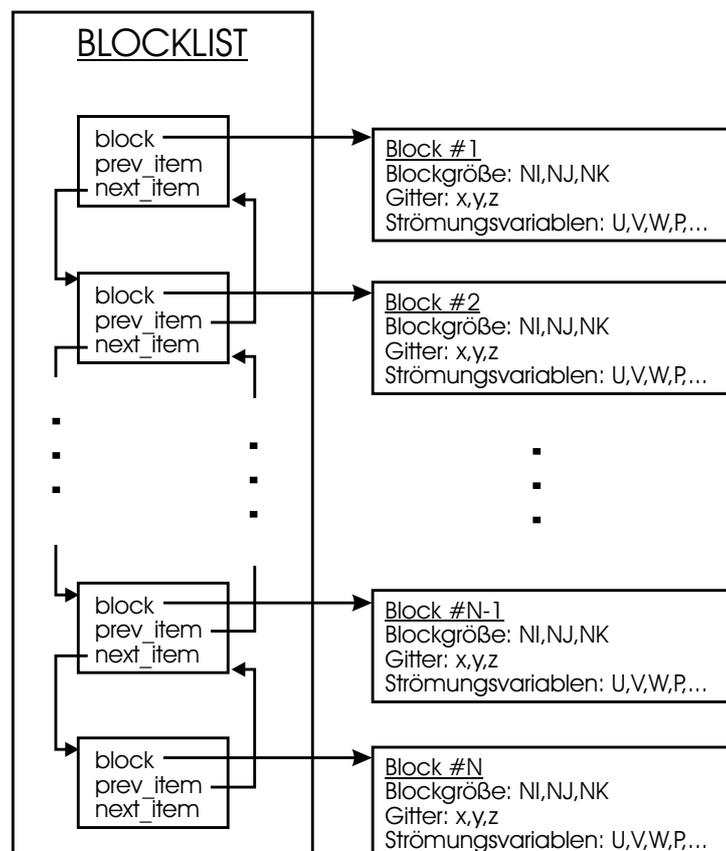


Abb. A.4: Struktur der Blockliste in \mathcal{LESOC}_2

Nur durch die Verwendung indirekter Adressierung und verketteter Listen war es möglich, mit $\mathcal{LES OCC}_2$ einen hochflexiblen und trotzdem einfach zu wartenden CFD-Code mit vertretbarem Entwicklungsaufwand zu schaffen.

Die Kapselung der Daten in $\mathcal{LES OCC}_2$ hat den Nachteil, dass der Zugriff auf die Strömungsvariablen über mehrere Instanzen erfolgen muss. So kann beispielsweise via `BLI%block%PHI(ii)` auf die Variable PHI einer Zelle mit Index ii, die zu dem Block gehört, der dem Blocklistenelement BLI zugeordnet ist, zugegriffen werden. Dieser mehrfach indirekte Zugriff würde die Programmausführung stark verlangsamen. Um dies zu vermeiden, werden in $\mathcal{LES OCC}_2$ (globale) Zeiger auf die jeweiligen Strömungsvariablen definiert (im vorliegenden Beispiel: `real, pointer, dimension(:) :: PHI`), welche jedes Mal vor Bearbeitung eines neuen Blocks so gesetzt werden, dass sie auf dessen Datenfelder zeigen (`PHI=>BLI%block%PHI`). Mit diesen Zeigern kann dann direkt auf die Variablen des aktuellen Blocks zugegriffen werden – im vorliegenden Beispiel über `PHI(ii)` anstelle von `BLI%block%PHI(ii)`. Trotz dieser Optimierung des Zugriffs auf Strömungsvariablen ergibt sich in $\mathcal{LES OCC}_2$ aufgrund der indirekten Adressierung über Zeiger ein Performanceverlust von knapp 5 % gegenüber dem $\mathcal{LES OCC}$ -Code, welcher ausschließlich mit statischen Feldern arbeitet. Die Vorteile bezüglich der Flexibilität und Erweiterbarkeit des Programmcodes, die sich durch die indirekte Adressierung ergeben, wiegen diesen kleinen Performanceverlust jedoch bei weitem auf.

A.3.3 Hilfsprogramme für \mathcal{LESOC}_2

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Hilfsprogramme für \mathcal{LESOC}_2 entwickelt, welche unter anderem der Gittergenerierung und der weiteren Datenaufbereitung dienen. Nachfolgende Übersicht stellt die wichtigsten davon vor:

make_grid Dies ist ein Gittergenerator für \mathcal{LESOC}_2 , womit sich Gitter mit einfacher orthogonaler Blockstruktur und Gebietszerlegung, z. B. für Gerinne- oder Kanalströmung, erstellen lassen.

make_decomposition Die Zuordnung der Blöcke auf die einzelnen Prozessoren im Rahmen der Gebietszerlegung wird anhand einer Datei (*Decomposition-File*), welche bei Programmstart eingelesen wird, vorgegeben. Bei der Gebietszerlegung ist darauf zu achten, dass die einzelnen Prozessoren gleichmäßig ausgelastet werden, da ansonsten die Parallele-Effizienz der Simulation abnimmt. Um dies auch für komplexe blockstrukturierte Gitter mit stark unterschiedlichen Blockgrößen zu gewährleisten, wurde das Hilfsprogramm *make_decomposition* entwickelt, welches mithilfe eines stochastischen Optimierungsalgorithmus ein *Decomposition-File* erzeugt, welches jedem Prozessor etwa gleich viele Gitterzellen zuordnet.

interpol Da eine 3D-LES mit hoher Gitterauflösung sehr rechenzeitintensiv ist und sehr viele Zeitschritte benötigt werden, bis die Strömung voll entwickelt ist, ist es oft vorteilhaft, Simulationen zuerst auf einem gröberen Gitter zu starten und die damit erzielte Lösung anschließend als Anfangsbedingung auf dem feinen Gitter zu verwenden. Dazu muss die Lösung vom groben auf das feine Gitter interpoliert werden. Auf komplexen blockstrukturierten Gittern ist es dazu notwendig, für jede Zelle des feinen Gitters diejenige Zelle im groben Gitter zu suchen, die der Zelle des feinen Gitters räumlich am nächsten liegt. Dies ist auf komplexen blockstrukturierten Gittern nicht unproblematisch, denn ein einfacher Suchalgorithmus, der dazu für jede Gitterzelle des feinen Gitters (N Gitterpunkte) alle Gitterzellen des groben Gitters (M Gitterpunkte)

durchsucht, würde dazu $O(M \cdot N)$ Rechenoperationen benötigen. Dies würde bei einem Rechengitter mit mehr als 10 Millionen Zellen etwa $O(10^{14})$ Rechenoperationen bedeuten. Dies ist selbst auf Höchstleistungsrechnern kaum zu bewältigen. Durch Verwendung eines BSP-Baums (*binary space partitioning tree*, hierzu s. z. B. [Abrash 1995](#)), in dem die Gitterpunkte des groben Gitters räumlich geordnet in einer Baumstruktur abgelegt werden, lässt sich ein Algorithmus entwerfen, der nur mehr etwa $O(N \cdot \log(M))$ Rechenoperationen benötigt. Dies sind dann im vorliegenden Beispiel $O(7 \cdot 10^7)$ Rechenoperationen, was auch von einem PC in kurzer Zeit zu bewältigen ist. Ein solcher Algorithmus wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit im Hilfsprogramm *interpol* realisiert. Damit ist eine schnelle Interpolation von \mathcal{LESOC}_2 -Ergebnisdaten von einem Gitter auf ein anderes mit unterschiedlicher Auflösung und Blockstruktur möglich.

Anmerkung: Ein BSP-Baum wird in \mathcal{LESOC}_2 auch verwendet, um den minimalen Wandabstand von Fluidzellen zu berechnen. Dies ist ein ähnliches Problem: Denn hier gilt es, für N Fluidzellen aus M Wandzellen die Wandzelle zu bestimmen, die der jeweiligen Fluidzelle am nächsten ist.

prepost Dieses Tool wandelt die von \mathcal{LESOC}_2 erzeugten Ergebnisdateien in die Datenformate um, die von den kommerziellen Auswertungs- und Visualisierungsprogrammen *Tecplot* und *Ensign* eingelesen werden können. Dabei können Teilgebiete des Rechengebiets sowie einzelne Strömungsvariablen angegeben werden, für die die Formatumwandlung erfolgen soll. Außerdem ist es möglich, einfache Mittelungsoperationen (z. B. Mittelung in der I-K-Ebene eines Blocks) durchzuführen.

ensight_film Dieses Hilfsprogramm wird zur Erstellung von Filmen benötigt. Es wandelt Strömungsfelder, die während der Simulation fortwährend aufgezeichnet worden sind, in ein von *Ensign* lesbares Datenformat um. Damit können sehr einfach ansprechende Animationen erstellt werden.

A.4 Ansätze zur Modellierung der kleinskaligen 3D-Turbulenz mit Transportgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit erfolgte die Modellierung der kleinskaligen 3D-Turbulenz ausschließlich mit einem einfachen 0-Gleichungsmodell. Als Anregung für eine Weiterentwicklung der Modellierung der kleinskaligen 3D-Turbulenz werden hier im Anhang Vorschläge zur Modellierung der 3D-Turbulenz mittels Transportgleichungen angeführt.

A.4.1 1-Gleichungsmodell

In komplexeren Strömungen kann die Produktion von kleinskaliger 3D-Turbulenz an Seitenwänden sowie deren Konvektion und Diffusion eine Rolle spielen. Durch Lösung einer Transportgleichung für die Energie der 3D-Turbulenz $\widetilde{k_{3D}}$ können diese Effekte berücksichtigt werden:

$$\frac{\partial \widetilde{k_{3D}}}{\partial t} + \widetilde{u}_i \frac{\partial \widetilde{k_{3D}}}{\partial x_i} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \widetilde{k_{3D}}}{\partial x_i} \right) + P_{k_{3D}h} + P_{k_{3D}v} - \widetilde{\epsilon} \quad (\text{A.31})$$

mit

- Produktion von $\widetilde{k_{3D}}$ durch horizontale Scherung:

$$P_{k_{3D}h} = c_{k_{3D}h} \nu_{3D} 2 \widetilde{S}_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.32})$$

- Produktion von $\widetilde{k_{3D}}$ an der Sohle:

$$P_{k_{3D}v} = \frac{u_\tau^3}{h \sqrt{c_f}} \quad (\text{A.33})$$

- Dissipationsrate:

$$\widetilde{\epsilon} = c_d \frac{\widetilde{k_{3D}}^{3/2}}{l_d} \quad (\text{A.34})$$

Mit der Konstante $c_{k_{3D}h}$ ($0 \leq c_{k_{3D}h} \leq 1$) kann dem Umstand Rechnung getragen werden, dass durch horizontale Scherung primär 2D-Turbulenz produziert wird. In ausgebildeter homogener Strömung ist die Turbulenzproduktion gleich der Dissipation: $P_{k_{3D}v} = \tilde{\epsilon}$. Mit dem empirischen Ansatz $\widetilde{k_{3D}^*} = c_{k_{3D}} u_\tau^2$ nach Gleichung 5.8 für die kinetische Energie der 3D-Turbulenz in einer ausgebildeten Strömung folgt mit $\nu_t = c'_d l_d \sqrt{\widetilde{k_{3D}}}$ ($c_\mu = c'_d c_d = 0.09$, $c_d = 0.17$) für das Längenmaß $l_d = c_d c_{k_{3D}}^3 h \sqrt{c_f}$ und damit für die Wirbelviskosität:

$$\nu_{3D} = c_\mu c_{k_{3D}}^3 h \sqrt{c_f} \sqrt{\widetilde{k_{3D}}} \quad (\text{A.35})$$

A.4.2 2-Gleichungsmodell

Im tiefengemittelten k- ϵ -Modell von Rastogi und Rodi (1978) gilt für die Wirbelviskosität $\nu_t = c_\mu \widetilde{k^2} / \tilde{\epsilon}$. In diesem DA-RANS-Modell wird eine Transportgleichung für die kin. Energie der Gesamt-Turbulenz \widetilde{k} gelöst. Ein ähnlicher Ansatz

$$\nu_{3D} = c_\mu \frac{\widetilde{k_{3D}^2}}{\tilde{\epsilon}} \quad (\text{A.36})$$

der anstelle von \widetilde{k} nur die kinetische Energie der kleinskaligen 3D-Turbulenz $\widetilde{k_{3D}}$ berücksichtigt, könnte geeignet sein, um die 3D-Turbulenz bei der DA-NS und DA-LES zu modellieren. Dazu sind wiederum halbempirische Transportgleichungen für $\widetilde{k_{3D}}$ und $\tilde{\epsilon}$ zu lösen:

$$\frac{\partial \widetilde{k_{3D}}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \widetilde{k_{3D}}}{\partial x_i} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \widetilde{k_{3D}}}{\partial x_i} \right) + P_{kh} + P_{kv} - \tilde{\epsilon} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_i} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial x_i} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\tilde{\epsilon}}{\widetilde{k_{3D}}} P_{kh} + P_{\epsilon v} - c_{\epsilon 2} \frac{\tilde{\epsilon}^2}{\widetilde{k_{3D}}} \quad (\text{A.38})$$

Für die Produktionsrate von $\widetilde{k_{3D}}$ durch horizontale Scherung bietet sich folgender Ansatz an:

$$P_{k_{3D}h} = c_{k_{3D}h} \nu_{3D} 2 \widetilde{S}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.39})$$

Mit der Konstante $c_{k_{3D}h}$ ($0 \leq c_{k_{3D}h} \leq 1$) kann dem Umstand Rechnung getragen werden, dass durch horizontale Scherung primär 2D-Turbulenz produziert wird. Die Produktionsterme aufgrund vertikaler Scherung lassen sich anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung von Produktion und Dissipation in einer voll ausgebildeten homogenen stationären Strömung abschätzen. Die tiefengemittelte Dissipationsrate $\tilde{\epsilon}^*$ ist dann gleich der von der Sohlschubspannung geleisteten Arbeit:

$$\tilde{\epsilon}^* = \frac{\tau_b}{\rho h} \tilde{u} = \frac{c_f \tilde{u}^3}{h} = \frac{u_\tau^3}{h \sqrt{c_f}} \quad (\text{A.40})$$

Mit dem empirischen Ansatz $\widetilde{k_{3D}^*} = c_{k_{3D}} u_\tau^2$ für die 3D-Turbulenzenergie in einer entwickelten Gerinneströmung und dem Gleichgewicht von Produktion und Dissipation in der k -Gleichung $P_{k\nu} = \tilde{\epsilon}^*$ bzw. $P_{\epsilon\nu} = c_{\epsilon 2} \tilde{\epsilon}^{*2} / \widetilde{k_{3D}^*}$ in der ϵ -Gleichung folgt für die Produktionsterme aufgrund vertikaler Scherung:

$$P_{k\nu} = \frac{u_\tau^3}{h \sqrt{c_f}} \quad (\text{A.41})$$

$$P_{\epsilon\nu} = c_{\epsilon 2} \left(\frac{u_\tau^3}{h \sqrt{c_f}} \right)^2 / (c_{k_{3D}} u_\tau^2) = \frac{c_{\epsilon 2}}{c_{k_{3D}}} \frac{u_\tau^4}{h^2 c_f} \quad (\text{A.42})$$

A.5 Anmerkungen zum *Back-Scatter-Modell* (BSM)

A.5.1 Modellierung des inversen Energietransfers nach Leith

Leith realisiert den inversen Energietransfer über ein der Strömung aufgeprägtes instationäres zufälliges Kraftfeld F_i , welches Fluktuationen anregt. Die Stärke des Kraftfelds macht er von der lokalen Scherung $S = \sqrt{S_{ij}\partial u_i/\partial x_j}$, der Gitterweite Δx und der Zeitschrittweite Δt abhängig. Das Kraftfeld leitet er aus einem zufälligen Vektorpotential Φ_i ab:

$$F_i(x, y, z, t) = \nabla \times \overline{\Phi}_i \quad \left[\frac{m}{s^2} \right] \quad (\text{A.43})$$

Durch Verwendung des Vektorpotentials erhält er ein divergenzfreies Beschleunigungsfeld (s. Anhang A.5.4). Dies ist numerisch äußerst vorteilhaft, da, wie in Anhang A.5.3 gezeigt wird, ein divergenter Anteil des Beschleunigungsfeldes keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung hat, aber einen Mehraufwand bei Verwendung eines iterativen Verfahrens zur Druckberechnung verursacht. Durch dimensionsanalytische Betrachtungen findet Leith für die Stärke des Vektorpotentials Φ_i :

$$\Phi_i(x, y, z, t) = c_b |S \Delta t|^{3/2} (\Delta x / \Delta t)^2 g \quad \left[\frac{m^2}{s^2} \right] \quad (\text{A.44})$$

Dabei bezeichnet g eine standardnormalverteilte Zufallszahl ($\mu_g=0$, $\sigma_g=1$). Für die Konstante verwendet Leith den Wert $c_b = 0.4$. Um ein glatteres Beschleunigungsfeld zu erhalten, glättet er das Vektorpotential mit einem räumlichen Tiefpassfilter (— in Gl. A.43) mit der Filterweite $2\Delta x$.

Das *Back-Scatter-Modell* von Leith modelliert den inversen Energietransfer aus der 3D-Feinstruktur turbulenz. Naheliegenderweise kann es daher nicht direkt für tiefengemittelte Simulationen verwendet werden (auch wenn Leith die Modellanwendung am Beispiel einer 2D-LES einer Mischungsschicht demonstriert).

A.5.2 Turbulenzproduktion durch eine mittelwertsfreie Zufallskraft

Die Turbulenzproduktionsrate P eines *Back-Scatter-Modells*, welches durch ein Kraftfeld \mathbf{F} turbulente Fluktuationen anregt, lässt sich durch Betrachtung eines Fluidelements, auf das die Kraft einwirkt, folgendermaßen abschätzen:

Bei einer zeitlich konstanten Kraft gilt für den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{F} dt = \mathbf{u}_0 + \mathbf{F} t \quad (\text{A.45})$$

und somit für die momentane Energie

$$e(t) = e_0 + \mathbf{F} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}(t) dt = e_0 + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0 t + \frac{|\mathbf{F}|^2 t^2}{2} \quad (\text{A.46})$$

Die diskrete Zufallskraft \mathbf{F} ist während eines Zeitschrittes mit der Schrittweite Δt konstant. Die Energieänderung pro Zeitschritt ist

$$\frac{\Delta e}{\Delta t} = \frac{e(t_1) - e(t_0)}{t_1 - t_0} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0 + |\mathbf{F}|^2 \Delta t / 2 \quad (\text{A.47})$$

Wird das Kraftfeld jeweils nach n Zeitschritten aktualisiert, gilt für die mittlere zeitliche Energieänderung:

$$P = \left\langle \frac{\Delta e}{n \Delta t} \right\rangle = \langle \mathbf{F} \rangle \cdot \mathbf{u}_0 + \langle |\mathbf{F}|^2 \rangle n \Delta t / 2 \quad (\text{A.48})$$

Mit der Definition für die Standardabweichung des Kraftfeldes

$$F_{rms} \equiv |\mathbf{F}|_{rms} = |\mathbf{F}_{rms}| = \sqrt{F_{1rms}^2 + F_{2rms}^2} \quad (\text{A.49})$$

gilt in einem mittelwertsfreien Beschleunigungsfeld $\langle \mathbf{F} \rangle = \mathbf{0}$ und $\langle |\mathbf{F}|^2 \rangle = F_{rms}^2$. Damit folgt aus Gleichung A.48 für die Produktionsrate:

$$P = F_{rms}^2 \cdot n \Delta t / 2 \quad (\text{A.50})$$

Wird das Zufallsfeld nach jedem Zeitschritt aktualisiert, gilt für die Produktionsrate:

$$P = F_{rms}^2 \cdot \Delta t / 2 \quad (\text{A.51})$$

Dies hat auch [Alvelius \(1999\)](#) durch eine vergleichbare Argumentation gefunden.

A.5.3 Einfluss der Divergenz eines Kraftfeldes auf eine inkompressible Strömung

Ein auf eine Strömung einwirkendes divergenzbehaftetes Kraftfeld $\mathbf{F}(x, y, t)$ kann in einen divergenten (\mathbf{F}_{div}) und einen divergenzfreien Anteil ($\nabla \cdot \mathbf{F}_{Rest} = 0$) zerlegt werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{div} + \mathbf{F}_{Rest}$$

Der Einfluss des divergenzbehafteten Anteils auf die Strömung wird durch Betrachtung der Poissongleichung für den Druck deutlich. Diese ergibt sich aus der NSG (Gl. 2.2) durch Bildung der Divergenz:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 S_{ij}) + F_i \right) \quad (\text{A.52})$$

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\mathbf{F}_{div} + \mathbf{F}_{Rest}) = \nabla \cdot \mathbf{F}_{div}$ findet man in der Poissongleichung für den Druck nur den divergenten Kraftanteil als Quellterm. Mit der Separierung des durch das divergente Kraftfeld verursachten Druckanteils p^F vom Gesamtdruck $p = p^* + p^F$ folgt:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^F}{\partial x_i} \right) = \nabla \cdot \left(-\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2 S_{ij}) + F_{i_{div}} \right) \quad (\text{A.53})$$

Aufgrund der Definition für p^* und p^f gilt:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} \right) = \nabla \cdot \left(-\partial_t u_i - \partial_{x_j} (u_i u_j) + \partial_{x_j} (\nu 2 S_{ij}) \right) \quad (\text{A.54})$$

sowie

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^F}{\partial x_i} \right) = \nabla \cdot (F_{i_{div}}) \quad (\text{A.55})$$

Mit dem Druck $p = p^* + p^F$ gilt für die Impulsgleichung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^F}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + F_{i_{div}} + F_{i_{Rest}} \quad (\text{A.56})$$

Entsprechend der Definition für p^F folgt aus Gleichung [A.55](#):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^F}{\partial x_i} = F_{i_{div}} \quad (\text{A.57})$$

Damit kompensiert das durch den divergenten Kraftanteil modifizierte Druckfeld die Wirkung der divergenten Kraft in der Impulsgleichung und man erhält aus Gleichung [A.56](#):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\nu 2S_{ij}) + F_{i_{Rest}} \quad (\text{A.58})$$

Demnach hat der divergente Anteil des Kraftfeldes keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung. Das Druckfeld wird aber beeinflusst. Deshalb macht sich in Verbindung mit sich ständig zeitlich ändernden aufgeprägten Kräften ein divergenter Kraftanteil bei Verwendung eines iterativen Verfahrens zur Druckberechnung negativ bemerkbar, da dann das Druckfeld zur Kompensation des divergenten Kraftanteils ständig neu angepasst werden muss. Bei Testrechnungen hat es sich für das Konvergenzverhalten des iterativen Drucklösers als vorteilhaft erwiesen, ein divergenzfreies Kraftfeld zu verwenden. Auch für Rechnungen mit einer freien Oberfläche ist die Verwendung einer divergenzfreien Kraft wichtig. Denn hier würde eine divergenzbehaftete Kraft nicht das Druckfeld, sondern die Wasserspiegellage beeinflussen, und so unerwünschte unphysikalische Wellen generieren.

A.5.4 Generierung eines divergenzfreien Vektorfeldes

Eine von [Schumann \(1995\)](#) beschriebene Methode, um ein divergenzfreies Feld zu generieren, ist die Durchführung eines Projektionsschrittes. Dazu ist eine Poissongleichung zu lösen. Dies ist jedoch numerisch aufwendig. Eine andere, von [Leith \(1990\)](#) und [Mason und Thomson \(1992\)](#) eingesetzte Methode ist weniger aufwendig. Sie verwenden ein (zufallsgeneriertes) Vektorpotential Φ zur Generierung eines divergenzfreien dreidimensionalen Vektorfeldes $\mathbf{F} = \nabla \times \Phi$. Im 2D Fall entspricht dies, der Verwendung einer Stromfunktion Ψ . Diese Methoden werden im Folgenden erläutert:

A.5.4.1 Projektionsmethode

Bei der von [Schumann \(1995\)](#) beschriebenen Projektionsmethode ergibt sich ein divergenzfreies Feld \mathbf{F} aus dem divergenzbehafteten Feld \mathbf{F}^{div} über den Projektionsschritt

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{div} - \nabla\varphi \quad (\text{A.59})$$

Hierbei bezeichnet \mathbf{F}^{div} ein beliebiges Vektorfeld und φ die Lösung der Poissongleichung

$$\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \mathbf{F}^{div} \quad (\text{A.60})$$

Die Divergenzfreiheit von \mathbf{F} lässt sich einfach durch Bildung der Divergenz von Gleichung [A.59](#) zeigen. Man erhält $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}^{div} - \nabla^2\varphi$. Mit Gleichung [A.60](#) folgt $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

A.5.4.2 Vektorpotential

Im dreidimensionalen Raum ($i = 1, 2, 3$) lassen sich divergenzfreie Vektorfelder F_i durch ein Vektorpotentialfeld Φ_i beschreiben. Es gilt $F_i = \nabla \times \Phi_i$ und

für die einzelnen Vektorkomponenten:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \partial_y \Phi_3 - \partial_z \Phi_2 \\
F_2 &= \partial_z \Phi_1 - \partial_x \Phi_3 \\
F_3 &= \partial_x \Phi_2 - \partial_y \Phi_1
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Durch Berechnung der Divergenz des so definierten Vektorfeldes folgt unmittelbar die Divergenzfreiheit:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_{x_i} F_i &= \partial_x (\partial_y \Phi_3 - \partial_z \Phi_2) \\
&+ \partial_y (\partial_z \Phi_1 - \partial_x \Phi_3) \\
&+ \partial_z (\partial_x \Phi_2 - \partial_y \Phi_1) = 0
\end{aligned} \tag{A.62}$$

Damit hierin die partiellen Ableitungen existieren und vertauschbar sind (z. B. $\partial_x \partial_y \Phi_3 = \partial_y \partial_x \Phi_3$), muss das Vektorpotential im Raum hinreichend glatt sein².

A.5.4.3 Stromfunktion

Im 2D-Fall reicht eine Stromfunktion Ψ um ein divergenzfreies 2D-Vektorfeld zu erhalten, denn bei einem 2D-Vektorfeld innerhalb der horizontalen Ebene ist $F_3 = 0$ und aus Gleichung A.61 folgt $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$. Definiert man die Stromfunktion $\Psi \equiv \Phi_3$, erhält man das zweidimensionale divergenzfreie Vektorfeld:

$$\begin{aligned}
F_1 &= \partial_y \Psi \\
F_2 &= -\partial_x \Psi
\end{aligned} \tag{A.63}$$

Anmerkung

Zur Erzeugung einer zufälligen Stromfunktion ist ein konsistentes Zufallszahlenfeld zu generieren. Bei einem blockstrukturierten CFD-Programm ist bei der Generierung der zufälligen Stromfunktion große Sorgfalt angebracht. Wenn das Strömungsgebiet in mehrere Blöcke zerlegt wird, ist ein Austausch der Zufallszahlen zwischen den Blöcken erforderlich, um für benachbarte Blöcke gleiche Werte an den Schnittstellenzellen zu gewährleisten. Ansonsten kommt es zu Diskontinuitäten in der Stromfunktion, was zu Unstetigkeiten in den Simulationsergebnissen an den Blockgrenzen führt.

² $\Phi \in \mathcal{C}^2$, d. h. Φ ist zweimal stetig partiell differenzierbar.

A.5.5 Spektrale Eigenschaften eines mittels Stromfunktion generierten Vektorfeldes

Die spektralen Eigenschaften des Kraftfeldes F_i haben einen wesentlichen Einfluss auf die generierte 2D-Schwankungsbewegung. Das Spektrum eines aus einer Stromfunktion mit dem Spektrum $\hat{\Psi}$ nach Gleichung A.63 generierten Kraftfeldes lautet:

$$\begin{aligned}\hat{F}_1(\mathbf{k}, f) &= -\imath k_2 \cdot \hat{\Psi}(\mathbf{k}, f) \\ \hat{F}_2(\mathbf{k}, f) &= -\imath k_1 \cdot \hat{\Psi}(\mathbf{k}, f)\end{aligned}\tag{A.64}$$

Demnach ist das Frequenzspektrum der aus der zufallsgenerierten Stromfunktion abgeleiteten Kräfte F_i proportional dem Frequenzspektrum der Stromfunktion. Das räumliche Spektrum jedoch wird durch die räumliche Ableitung der Stromfunktion verändert. Die kleinen Skalen werden in Abhängigkeit von der Raumrichtung verstärkt: So ist beispielsweise das Spektrum der F_1 -Komponente in k_1 -Richtung proportional $\hat{\Psi}$ und in k_2 -Richtung proportional $k_2 \hat{\Psi}$.

Auch der numerische Diskretisierungsfehler hat einen Einfluss auf die Spektren. Werden die räumlichen Ableitungen mit zentralen Differenzen 2. Ordnung diskretisiert, erhält man auf einem orthogonalen Gitter (mit der Maschenweite Δx und Δy) ein Kraftfeld mit den Spektren

$$\begin{aligned}\hat{F}_1(\mathbf{k}, f) &= -\imath \frac{\sin(k_2 \Delta x)}{\Delta x} \cdot \hat{\Psi}(\mathbf{k}, f) \\ \hat{F}_2(\mathbf{k}, f) &= -\imath \frac{\sin(k_1 \Delta y)}{\Delta y} \cdot \hat{\Psi}(\mathbf{k}, f)\end{aligned}\tag{A.65}$$

In diesen Spektren sind in Richtung quer zur jeweiligen Kraftkomponente die mittleren Wellenzahlen verstärkt und die kurzwelligen Anteile gedämpft. Da die resultierenden Spektren äußerst anisotrop sind und von der Gitterauflösung stark beeinflusst werden, wurde im Verlauf der Entwicklung des BSM von der Verwendung einer Stromfunktion zur Generierung eines divergenzfreien Kraftfeldes Abstand genommen. Dies nicht zuletzt deswegen, weil die über eine zufällige Stromfunktion generierten Kraftfelder in Testrechnungen zur Ausbildung von unphysikalisch „schachbrettartig“ auf dem Rechengitter angeordneten kleinskaligen Wirbel der Größe $2\Delta x$ führten.

A.5.6 Anmerkungen zur programmtechnischen Umsetzung der Zufallszahlengenerierung

Das Energiespektrum des Zufallszahlenfeldes r , aus welchem beim BSM das Kraftfeld generiert wird (vgl. Gl. 3.68), soll per Definition eine einem weißen Rauschen entsprechende, gleichmäßige spektrale Verteilung aufweisen. Abbildung A.5 zeigt, dass die Energiespektren von Pseudozufallszahlenfolgen, die mit einem üblichen numerischen Zufallszahlengenerator (z. B. FORTRAN-Funktion `RANDOM_NUMBER`) erzeugt wurden, dieser Anforderung genügen.

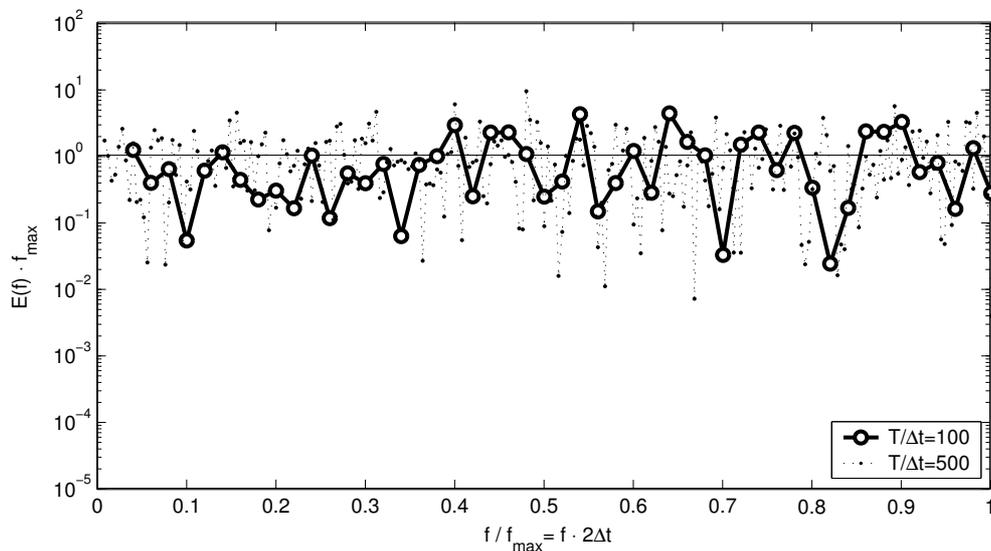


Abb. A.5: Typische Energiespektren von numerisch erzeugten Pseudozufallszahlenfolgen $Z(t_i)$ mit $t_i = i \cdot \Delta t$ und $i = 1, 2, \dots, T/\Delta t$

Die programmtechnische Erzeugung von normalverteilten Zufallszahlen ist nicht ganz einfach: Der FORTRAN 90-Standard sieht zur Erzeugung von Zufallszahlen nur die Funktion `RANDOM_NUMBER` vor. Diese erzeugt gleichverteilte Pseudozufallszahlen im Intervall $[0, 1]$. Diese Zufallszahlen haben den Mittelwert $\mu = 0.5$ und eine Standardabweichung von $\sigma = \sqrt{1/12}$. Zur Berechnung normalverteilter Zufallszahlen existieren zwar maschinen- und compilerspezifische Bibliotheken (z. B. NAG-Bibliothek), jedoch wurde zur Wahrung der Portierbarkeit des LES-Codes für die Berechnung normalverteilter Zufallszahlen ein von [Marsaglia und Bray \(1964\)](#) entwickeltes Verfahren in den `LESOC2`-Code übernommen, das auf Basis gleichverteilter Zufallszahlen normalverteilte Zufallszahlen generiert.

Anmerkung

Bei parallelisierten Rechnungen ist unbedingt auf eine korrekte Initialisierung des Zufallsgenerators zu achten. Unter FORTRAN 90 wird der Zufallsgenerator durch Aufruf der Funktion `RANDOM_SEED` initialisiert. Standardmäßig erfolgt dabei die Initialisierung des Zufallsgenerators mit einem Zufallswert, der aus der momentanen Systemzeit gebildet wird. Damit wird jedoch unter Umständen bei exakt gleicher Systemzeit auf verschiedenen Prozessoren, wie dies z. B. auf SMP-Knoten der Fall ist, der Zufallsgenerator gleich initialisiert. Dies hat Regelmäßigkeiten im „zufälligen“ Beschleunigungsfeld zur Folge, welche sich im berechneten Strömungsfeld niederschlagen. Abhilfe schafft hier die Initialisierung des Zufallsgenerators mit einem Zufallswert, der neben der momentanen Systemzeit auch die für jeden Prozessor unterschiedliche Nummer des MPI-Prozesses berücksichtigt. Damit erhält man schließlich auf jedem Prozessor andere Zufallszahlen.

Literaturverzeichnis

- M. B. Abbott und J. Larsen. Modelling circulations in depth-integrated flows, part 2. *J. Hydraulic Research*, 23(5):397–420, 1985.
- M. B. Abbott, J. Larsen und Jianhua Tao. Modelling circulations in depth-integrated flows, part 1: The accumulation of the evidence. *J. Hydraulic Research*, 23(4):309–326, 1985.
- M. Abrash. BSP Trees. *Dr. Dobbs Journal*, ISSN 1044-789X, 20(14):49–52, 1995.
- S. Ahmed, G. Ramm und G. Faltin. Some salient features of the time-averaged ground vehicle wake. *Society of Automotive Engineers, SAE Paper 840300*, 1984.
- V. Alavian und V. H. Chu. Turbulent exchange flow in shallow compound channel. In *Proc. 21rd IAHR Congress*, Vol. 3, S. 446–451, Melbourne, 1985.
- K. Alvelius. Random forcing of three-dimensional homogeneous turbulence. *Physics of Fluids*, 11(7):1880–1889, 1999.
- S. Babarutsi und V. H. Chu. Modelling transverse mixing layer in shallow open-channel flows. *J. Hydr. Engrg.*, 124 (7):718–726, 1998.
- J. H. Bell und R. D. Mehta. Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers. *AIAA J.*, (2034), 1990.
- K. Blanckaert, L. Glasson, H. R. A. Jagers und C. J. Sloff. Quasi-3D simulation of flow in sharp open-channel bends with horizontal and developed bed topography. In G. H. Jirka und W. S. J. Uijtewaal (Hrsg.), *Shallow Flows*, S. 307–315. A.A. Balkema Publishers, 2004. ISBN 90-5809-700-5.
- R. Booij. Depth averaged k- ϵ model for depth-averaged flow calculation. In *Proc. 23rd IAHR Cong.*, Vol. A, S. 199–206, Delft, 1989.
- D. Bousmar. *Flow modelling in compound channels*. Diss., Université catholique de Louvain, Faculté des Sciences Appliquées, Feb. 2002.
- J. Boussinesq. Théorie de l'écoulement tourbillant. *Mém. Acad. Sci. Paris*, 23:46–50, 1877.
- M. Breuer. *Direkte Numerische Simulation und Large-Eddy-Simulation turbulenter Strömungen auf Hochleistungsrechnern*. Shaker Verlag, Aachen, 2002. ISBN 3-8265-9958-6.

- M. Breuer und W. Rodi. Large eddy simulation of complex turbulent flows of practical interest. In E. H. Hirschel (Hrsg.), *Flow simulation with high performance computers II*, Vol. 52 of *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, S. 258–274. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- T. Buchal. *Parallelisierte Berechnungsverfahren für komplexe turbulente Strömungen*. Diss., Dissertationsreihe am Institut für Hydromechanik der Universität Karlsruhe, April 1999.
- Bui Minh Duc. *Berechnung der Strömung und des Sedimenttransports in Flüssen mit einem tiefengemittelten numerischen Verfahren*. Diss., Universität Karlsruhe, 1998.
- M. V. Casey und T. Wintergerste (Hrsg.). *Best Practice Guidelines for industrial CFD*. ERCOFTAC Publication, 2000.
- D. Chen und G. H. Jirka. Absolute and convective instabilities of plane turbulent wakes in a shallow water layer. *J. Fluid Mech.*, 338:157–172, 1997.
- V. T. Chow. *Open-Channel Hydraulics*. McGraw Hill, 1959.
- V. H. Chu und S. Babarutsi. Confinement and bed–friction effects in shallow turbulent mixing layers. *J. Hydr. Engrg.*, 114 (10):1257–1274, 1988.
- D. Coles. The law of the wake in the turbulent boundary layer. *J. Fluid. Mech.*, S. 1:191–226, 1956.
- A. Cramp, M. Coulson, A. James und J. Berry. A note on the observed and predicted flow patterns around islands – Flat Holm, the Bristol Channel. *Int. J. Remote Sensing*, 12(5): 1111–1118, 1991.
- J. W. Deardorff. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):453–480, 1970.
- J. C. del Álamo und J. Jiménez. Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels. *Physic of Fluids*, 15(6):L41–L44, Juni 2003.
- T. Dracos, M. Giger und G. H. Jirka. Plane Turbulent Jets in a Bounded Fluid Layer. *J. Fluid Mechanics*, 214:587–614, 1992.
- P. A. Durbin und B. A. Petterson Reif. *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*. John Wiley & Sons Ltd, England, 2001.
- J. W. Elder. The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow. *J. Fluid. Mech.*, 5:544–460, 1959.
- G. Ferrier, P. A. Davies und J. M. Anderson. Remote sensing observations of a vortex street downstream of an obstacle in an estuarine flow. *Int. J. Remote Sensing*, 17(1):1–8, 1996.

- J. Ferziger, J. R. Koseff und S. G. Monismith. Numerical simulation of geophysical turbulence. *Computers & Fluids*, 31:557–568, 2002.
- H. B. Fischer, E. J. List, R. C. Y. Koh, J. Imberger und N. H. Brooks. *Mixing in Inland and Coastal Waters*. Academic Press, New York, NY, 1979.
- C. Flokstra. Generation of two-dimensional horizontal secondary currents. Delft Hydraulics Laboratory, Report S163-II, Juli 1976.
- C. Flokstra. The Closure Problem for Depth-Average Two Dimensional Flow. 1977. Waterloopkundig Laboratorium, Delft Hydraulics Laboratory, Publication No. 190.
- M. Germano. Turbulence: the filtering approach. *J. Fluid Mech.*, 238:325–336, 1992.
- M. Germano, U. Piomelli, P. Moin und W. H. Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physic of Fluids A.*, 3 (7):1760–1765, 1991.
- F. M. Henderson. *Open Channel Flow*. Macmillian Publishing Co., New York, 1966.
- C. Hinterberger, M. García-Villalba und W. Rodi. Flow around a simplified car body (LES with wall functions). In R. Manceau und J.P. Bonnet (Hrsg.), *Proceedings of 10th joint ERCOFTAC (SIG-15)/IAHR/QNET-CFD workshop on refined turbulence modelling, case 9.4: flow around a simplified car*. Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, Université de Poitiers, France, Oct. 2002.
- C. Hinterberger und W. Rodi. Flow around a simplified car body (LES with wall functions). In S. Jarkirlic, R. Jester-Zürker und C. Tropea (Hrsg.), *Proceedings of 9th ERCOFTAC/IAHR/COST workshop on refined turbulence modelling, case 9.4: flow around a simplified car*. Darmstadt University of Technology, Okt. 2001.
- M. Hites. *Scaling of high-Reynolds number turbulent boundary layers in the National Diagnostic Facility*. Diss., Illinois Institute of Technology, 1997.
- S. Ikeda, K. Ohta und H. Hasegawa. Instability-induced horizontal vortices in shallow open channel flow with an inflection point in skewed velocity profile. *J. Hydroscience and Hydraulic Engineering Tech., JSCE*, 12(2):69–84, 1994.
- R. G. Ingram und V. H. Chu. Flow around islands in Rupert Bay: An investigation of the bottom friction effect. *J. Geophys. Res.*, 92(C13):14521–14533, 1987.
- J. Jeong und F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.*, 285:69–94, 1995.
- J. Jiménez. The largest structures in turbulent wall flows. CTR annual research briefs, Stanford University, Juni 1998.

- Y. C. Jin und P. M. Steffler. Predicting Flow in Curved Open Channels by Depth-Averaged Method. *Journal of Hydraulic Engineering*, 119(1), 1993.
- W. Jones und B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.
- K. Kim und R. Adrian. Very large-scale motion in the outer layer. *Physic of Fluids*, 11(2): 417–422, 1999.
- I. Kimura und T. Hosada. Fundamental properties of flows in open channels with dead zone. *J. Hydr. Engrg.*, 123:98–107, 1997.
- A. N. Kolmogorov. Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence. *Comptes Rendus (Doklady) de l' Académie des Sciences de l' URSS*, XXXII(1):16–18, 1941a.
- A. N. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluids for Very Large Reynolds Numbers. *Comptes Rendus (Doklady) de l' Académie des Sciences de l' URSS*, XXX(4), 1941b.
- S. Komori, R. Nagaosa, Y. Murakami, S. Chiba, K. Ishii und K. Kuwahara. Direct numerical simulation of three-dimensional open channel flow with zero-shear gas-liquid interface. *Physic of Fluids A.*, 5:115–125, 1993.
- J. Kuipers und C. W. Vreugdenhil. Calculations of two-dimensional horizontal flow. Delft Hydraulics Laboratory, Report S 163-I, Okt. 1973.
- B. E. Launder und B. Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disk. *Letters in Heat and Mass Transfer*, 1:131–138, 1974.
- J. J. Leendertse. Aspects of a computational model for long-period water-way propagation. Rand Corporation Mem, RM-5294-PR, Santa Monica, 1967.
- C. E. Leith. Stochastic backscatter in a subgrid-scale model: Plane shear mixing layer. *Phys. Fluids A* 2, S. 297–299, 3 1990.
- M. Lesieur. *Turbulence in Fluids, Stochastic and Numerical Modelling*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- C. W. Li und J. H. Wang. Large eddy simulation of dispersion in free surface shear flow. *Journal of Hydraulic Research*, 40(3):351–358, 2002.
- H. Lienhard und S. Becker. Flow and Turbulence Structure in the Wake of a Simplified Car Model. *SAE 2003 World Congress, SAE Paper 2003-01-0656, Detroit, Michigan, USA*, 2003.

- H. Lienhard, S. Becker und C. Stoots. Flow and Turbulent Structures in the Wake of a Simplified Car Model (Ahmed Model). *DLGR Fach Symp. der AG STAB, Stuttgart University*, Nov. 2000.
- D. K Lilly. The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. In *IBM Scientific Computing Symposium on Environmental Sciences*, White Plains, S. 195–210, N. Y., 1967. IBM.
- Z. Liu, R. J. Adrian und T. J. Hanratty. Large-scale modes of turbulent channel flow: transport and structure. *J. Fluid Mech.*, 448:53–80, 2001.
- P. Madsen, M. Rugbjerg und I. R. Warren. Subgrid modelling in depth-integrated flows. In *Proc. 21st Int. Conf. on Coastal Eng.*, S. 505–511. ASCE, 1988.
- G. Marsaglia und T. A. Bray. A convenient method for generating normal variables. *Siam Rev.*, vol. 6(3):260–264, 1964.
- P. J. Mason und D. J. Thomson. Stochastic backscatter in large-eddy simulations of boundary layers. *J. Fluid. Mech.*, vol. 242:51–78, 1992.
- J. Mc Guirk und W. Rodi. A depth-averaged mathematical model for the near field of side discharges into open channel flows. *J. Fluid Mech.*, 86(part 4):762–781, 1978.
- R. D. Moser, J. Kim und N. N. Mansour. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Physic of Fluids*, 11 (4):943–945, 1999.
- K. Nadaoka und H. Yagi. Shallow-water turbulence modelling and horizontal large-eddy computation of river flow. *J. Hydr. Engr.*, S. 493–500, 1998.
- D. Naot, I. Nezu und H. Nakagawa. Hydrodynamic behaviour of compound rectangular open channels. *J. Hydr. Engr.*, 119:390–408, 1993.
- D. Naot und W. Rodi. Calculation of secondary currents in channel flow. *J. Hydraulics Div., ASCE*, (108):948–968, 1982.
- I. Nezu und H. Nakagawa. *Turbulence in Open-Channel Flows*. A. A. Balkema, 1993.
- I. Nezu und W. Rodi. Experimental study on secondary currents in open channel flow. In *Proceedings of 21st IAHR congress*, Melbourne, Australia, Aug. 1985.
- I. Nezu und W. Rodi. Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer. *J. Hydraulic Eng., ASCE*, 112:335–355, 1986.
- S. V. Patankar und D. B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15:1778–1806, 1972.

- C. Pattiaratchi, A. James und M. Collins. Island wakes and headland eddies: A comparison between remotely sensed data and laboratory experiments. *J. Geophys. Res.*, 92(C1):783, 1986.
- U. Piomelli, J. Balint und J.M. Wallace. On the validity of Taylor's hypothesis for wall-bounded flows. *Phys. Fluids A 1 (3)*, März 1989.
- U. Piomelli, P. Moin und J. H. Ferziger. Models for Large Eddy Simulations of Turbulent Channel Flows including Transpiration. *AIAA J. Thermophys. Heat Transf.*, 5:124–128, 1991.
- S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- G. Preißler und G. Bollrich. *Technische Hydromechanik I*. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1985.
- A. N. Puri und C. Y. Kuo. Numerical modelling of subcritical open channel flow using $k-\epsilon$ turbulence modell and the penalty function finite element technique. *Applied Mathematics Modelling*, 9(3), 1995.
- A. K. Rastogi und W. Rodi. Prediction of Heat and Mass Transfer in Open Channels. *ASCE Journal Hydraulics Division*, 104(3), 1978.
- C. M. Rhie und W. L. Chow. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA J.*, 21:1225–1532, 1983.
- W. Rodi. Experience using two-layer models combining the $k-\epsilon$ model with a one-equation model near the wall. *AIAA paper 91-0609*, 1991.
- W. Rodi. *Turbulence models and their application in hydraulics – a state of the art review*. International Association for Hydraulic Research, Delft, 3rd edition, Balkema, 1993.
- I. L. Rozovskii. *Flows of Water in Bends of open Channels*. Published by the Academy of Science of the Ukrainian SSR, Kiew – Printed in Jerusalem by S. Monson, 1957.
- J. C. Rutherford. *River Mixing*. ISBN 0-471-94282-0, 1994.
- P. Sagaut. *Large eddy simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag, scientific computation series edition, 2001.
- H. Schlichting. *Grenzschicht-Theorie*. Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1965.
- U. Schumann. Subgrid scale model for finite difference simulations of turbulent flows in plane channels and annuli. *J. Comput. Phys.*, 18:376–404, 1975.
- U. Schumann. Stochastic backscatter of turbulence energy and scalar variance by random subgrid-scale fluxes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, (451):293–318, 1995.

- R. H. J. Sellin. A laboratory investigation into the interaction between the flow in the channel of a river and that over its flood plain. *Lahuille Blanche*, 7:793–807, 1964.
- J. S. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, I, the basic experiment. *Mon. Weather Rev.*, 91:99–164, 1963.
- M. Spreafico und A. van Mazijk (Hrsg.). *Alarmmodell Rhein. Ein Modell für die operationelle Vorhersage des Transports von Schadstoffen im Rhein*. Bericht Nr. I-12 der KHR (Int. Kommission für die Hydrologie des Rheingebiets), KHR-Sekretariat, Lelystad, ISBN 90-70980-18-5, 1993.
- H. L. Stone. Iterative solution of implicit approximations of multidimensional partial differential equations. *SIAM J. on Num. Anal.*, 5:530–558, 1968.
- Surajate Boonya-aroonnet und Yasuyuki Shimizu. Numerical simulation with a subgrid model; a case of a meandering channel with river training structures. In G. H. Jirka und W. S. J. Uijtewaal (Hrsg.), *Shallow Flows*, S. 361–367. A.A. Balkema Publishers, 2004. ISBN 90-5809-700-5.
- N. Tamai, T. Asaeda und Y. Ikeda. Study on generation of periodical large surface eddies in a composite channel flow. *Water Resources Research*, 22(7):1129–1138, 1986.
- G. I. Taylor. Dispersion of soluble matter in solvent owing slowly through a tube. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 219:486–233, 1953.
- H. Tennekes und J. L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT Press, Cambridge, M.A., 1972.
- A. Tominaga, I. Nezu und K. Ezaki. Experimental study on secondary currents in compound open channel flows. In *Proc. 23rd IAHR congress*, S. A15–A22, Ottawa, Canada, 1989.
- T. Tsujimoto und T. Kitamura. Experimental study on open channel flow with vegetated zone along side wall. KHL Progressive Report '92, Hydr. Lab., Kanazawa Univ., Japan, 1992.
- W. S. J. Uijtewaal und R. Booij. Effects of shallowness on the development of free-surface mixing layers. *Physics of Fluids*, 12(2):392–402, Feb. 2000.
- R. E. Uittenbogaard. Summary SGS model for HLES. *Note, Delft Hydraulics*, 2001.
- R. E. Uittenbogaard und B. van Vossen. Subgrid-scale model for Quasi-2D turbulence in shallow water. In G. H. Jirka und W. S. J. Uijtewaal (Hrsg.), *Shallow Flows*, S. 575–582. A.A. Balkema Publisher, 2004. ISBN 90-5809-700-5.
- E. M. Valentine und I. R. Wood. Longitudinal dispersion with dead zones. *Proc. ASCE, J. Hydr. Div.*, 105:999–1016, 1977.

- E. R. van Driest. On the Turbulent Flow near a Wall. *J. of Aeronautical Sciences*, 23:1007–1011, 1956.
- B. van Prooijen. Persönliche Kommunikation. 2000.
- B. van Prooijen. *Shallow Mixing Layers*. Diss., 2004. 'Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering' of the Faculty of Civil Engineering and Geosciences, Delft University of Technology, Report No. 04-1, ISSN 0169-6548.
- B. C. van Prooijen und W. S. J. Uijttewaal. A linear approach for the evolution of coherent structures in shallow mixing layers. *Phys. Fluids*, 14(12):4105–4114, 2002a.
- B. C. van Prooijen und W. S. J. Uijttewaal. On the initiation of large scale turbulence structures in the numerical simulation of shallow mixing layers. In D. Bousmar und Y. Zech (Hrsg.), *River Flow 2002 - Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics*. Swets & Zeitlinger, Lisse, The Netherlands, ISBN 90 5809 509 6, 2002b.
- S. A. H. van Schijndel und H. R. A. Jagers. Complex flow around groynes, computations with Delft3D in combination with HLES. In G. H. Jirka und W. S. J. Uijttewaal (Hrsg.), *Shallow Flows*, S. 645–650. A.A. Balkema Publishers, 2004. ISBN 90-5809-700-5.
- B. van Vossen. *Horizontal Large Eddy Simulations; evaluation of flow computations with Delft3D-Flow*. Diss., Delft University of Technology, Aug. 2000.
- C. F. von Carmer und G. H. Jirka. On turbulence and transport in shallow wake flows. In *Proceedings of 29th IAHR congress*, Vol. B, S. 80–86, Beijing, China, 2001.
- V. Weitbrecht. *Influence of Dead-Water Zones on the Dispersive Mass Transport in Rivers*. Diss., Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe, Feb. 2004. ISBN 3-937300-07-4.
- V. Weitbrecht und C. Hinterberger. Ergebnisse von physikalischen und numerischen Experimenten an umströmten Bühnenfeldern. In V. Weitbrecht und A. van Mazijk (Hrsg.), *Neue Erkenntnisse über physikalische und ökologische Prozesse an Bühnenfeldern*, S. 63–77. ISBN 90-9015916-9, 2002.
- V. Weitbrecht, G. Kühn und G. H. Jirka. Large scale PIV-measurements at the surface of shallow water flows. *Flow Measurement and Instrumentation*, 13(5-6):237–245, 2002.
- H. Werner. *Grobstruktursimulation der turbulenten Strömung über eine querliegende Rippe in einem Plattenkanal bei hoher Reynoldszahl*. Diss., Universität München, 1991.
- H. Werner und H. Wengle. Large Eddy Simulation of Turbulent Flow Over and Around a Cube in a Plate Channel. In Schumann et al. (Hrsg.), *8th Symp. on Turb. Shear Flows*. Springer Verlag, Berlin, 1993.

- B. Westrich. Massenaustausch in Strömungen mit Totwasserzonen unter stationären Fließbedingungen. SFB 80, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe, 1977.
- E. Wolanski, J. Imberger und M. L. Heron. Island wakes in shallow coastal waters. *J. Geophys. Res.*, 89(C6):10553–10569, 1984.
- J. Zhu. A low diffusive and oscillation-free convection scheme. *Commun. Appl. Num. Meths*, 7:225–232, 1991.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Die Erde vom Weltraum gesehen (Quelle: NASA).	1
1.2	Großräumige zweidimensionale Wirbelstrukturen in Meeren und Binnengewässern; der Kontrast in den Bildern wurde zur Visualisierung der Wirbel lokal verstärkt (Quellen: Abb. a und b: http://visibleearth.nasa.gov , Abb. c: http://seawifs.gsfc.nasa.gov).	3
1.3	Schematische Darstellung des turbulenten Energiespektrums: (a) in einer gewöhnlichen turbulenten Strömung; (b) in Flachwasserströmungen (von Nadaoka und Yagi 1998).	4
1.4	Von Kármánsche Wirbelstraße bei der Vulkaninsel Jan Mayen im Nordatlantik; Quelle: http://www.jpl.nasa.gov .	5
1.5	Verschiedene Möglichkeiten der Simulation von Flachwasserströmungen in Bezug zum Turbulenzspektrum (nach Nezu und Nakagawa 1993).	8
2.1	Schematische Darstellung der Beziehung zwischen Wasserspiegellage ζ , Sohlage z_b und Wassertiefe $h = \zeta - z_b$.	14
2.2	Schematische Darstellung des turbulenten Energiespektrums $E(k)$.	17
2.3	Schematische Darstellung der Filterung einer Strömungsgröße φ am Beispiel eines eindimensionalen räumlichen Rechteckfilters mit der Filterweite Δ : (a) Filterkern G des Rechteckfilters, (b) Fouriertransformierte \hat{G} des Filterkerns, (c) Testsignal φ (Periodenlänge L) und gefiltertes Signal $\bar{\varphi}$, (d) Amplitudenspektrum von φ und $\bar{\varphi}$.	26
2.4	Schematische Darstellung der Beziehung zwischen tiefengemittelter Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung \tilde{u} , lokaler Geschwindigkeit u und der Abweichung $u'^{[D]}$.	27
2.5	Schematische Darstellung der Aufspaltung des lokalen momentanen Geschwindigkeitsprofils $\mathbf{u}(z, t)$ in ein mittleres Profil $\mathbf{u}^*(z, t)$ und in Fluktuationen $\mathbf{u}''(z, t)$.	57
3.1	Neu implementierte Wandfunktion, Vergleich mit verschiedenen Wandgesetzen in der normalen Form und in der für die verwendete Finite-Volumen-Methode über eine Wandzelle nach Gleichung 3.11 integrierten Form.	72
3.2	Integration der Wandfunktion $u(y)$ über das wandnahe Finite-Volumen nach Gleichung 3.11.	73

3.3	Widerstandsbeiwert in Gerinneströmung mit glatter Sohle in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. — implizite Beziehung für den Sohlreibungsbeiwert $1/\sqrt{c_f} = 1/0.4 [\ln(Re_h\sqrt{c_f}) + 1]$, --- explizite Näherung $c_f = 0.0385 \cdot Re_h^{-0.3} + 6 \cdot 10^{-4}$, — Sohlreibungsbeiwert nach Schlichting (1965).	77
3.4	Übertragungsfunktion des Bandpassfilters ($n = 1, a_1 = -1, a_0 = 0, a_1 = 1$ und $a = b = c$) in linearer und doppel-logarithmischer Darstellung.	96
4.1	Beispiele für von \mathcal{LESOC} und \mathcal{LESOC}_2 unterstützte Blockstrukturen; — Blockgrenzen, — Gitternetz.	105
4.2	Schematischer Ablauf einer Simulation mit \mathcal{LESOC}_2	106
4.3	Gitter eines Blocks und entsprechender in \mathcal{LESOC}_2 gespeicherter Block mit N Lagen von Schnittstellenzellen.	109
4.4	Datentransfer zwischen zwei Blöcken; Fall A: Beide Blöcke sind auf dem selben Prozessor, Fall B: Blöcke befinden sich auf unterschiedlichen Prozessoren.	109
4.5	Blockstrukturiertes Rechengitter für laminare Rohrströmung.	111
4.6	Laminare Rohrströmung, Axialgeschwindigkeit $u(r)$	111
4.7	Testkörper (nach Ahmed et al. 1984).	113
4.8	Ausschnitt der Blockstruktur für Gitter 1 um den komplexen Testkörper; Visualisierung und Gittergenerierung mit der kommerziellen Gittergenerierungssoftware ICEM-CFD.	114
4.9	Typische für die LES verwendete blockstrukturierte Rechengitter: (a, c, e, g) Gitter 1 mit 93 Blöcken und $8.8 \cdot 10^6$ Gitterzellen, (b, d, f, h) Gitter 2 mit 214 Blöcken und $18.5 \cdot 10^6$ Gitterzellen. (a, b) Darstellung der Blockstruktur. (c-h) Darstellung des Gitters in Körfernähe in verschiedenen Schnittebenen. (c, d) xz -Ebene. (e, f) xy -Ebene (g, h) yz -Ebene.	115
4.10	Zuordnung der 93 Blöcke von Gitter 1 mit $8.8 \cdot 10^6$ Gitterzellen auf 30 Prozessoren; Aufteilung erfolgte durch einen einfachen Sortier- und Verteilungsalgorithmus.	117
4.11	Mit einem stochastischen, iterativen Selektions-Algorithmus erzielte sehr gleichmäßige Verteilung der 214 Blöcke von Gitter 2 ($18.5 \cdot 10^6$ Gitterzellen) auf 64 Prozessoren.	117
4.12	Mittlere u -Geschwindigkeit (bei 25° Heckneigung) im Frontbereich des Testkörpers in der Symmetrieebene.	118
4.13	u -Geschwindigkeit und Schwankungsbewegung bei 25° Heckneigung im Bereich des Hecks und des Nachlaufes innerhalb der Symmetrieebene.	119
4.14	Mittleres Strömungsfeld eingefärbt mit der Stärke der turbulenten kinetischen Energie: (a, b) Symmetrieebene $y = 0$ mm, (c, d) nahe der Mitte der geneigten Heckfläche $x = -88$ mm, (e, f) Ende des Körpers $x = 0$ mm, (g, h) Nachlauf in Körfernähe $x = 200$ mm. (a, c, e, g) Experiment, (b, d, f, h) LES mit Gitter 2.	121
4.15	Momentanes Strömungsfeld in der Symmetrieebene an zwei Zeitpunkten.	122
4.16	Isofläche der Druckfluktuationen $p' = p - \langle p \rangle$ an zwei Zeitpunkten.	122
4.17	Isofläche (Ausschnitt) des momentanen Druckfeldes p . Oben: Draufsicht; unten: Ansicht von schräg oben vorne.	122

4.18	Dimensionslose mittlere Geschwindigkeitsprofile bei periodischer Kanalströmung, halb-logarithmische Darstellung, $Re_b = U_b \delta / \nu = 10\,935$, ($Re_\tau = 590$); Vergleich mit DNS (Moser et al. 1999).	124
4.19	RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und die Schubspannungsverteilung bei periodischer Kanalströmung, $Re_b = 10\,935$ auf Gitter 1.	124
4.20	Schematische Darstellung von Kanal- und Gerinneströmung.	126
4.21	Vergleich turbulenter Schwankungsgrößen von geschlossenem Kanal und Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$ auf Gitter 2.	127
4.22	Vergleich der mittleren Geschwindigkeitsprofile bei unterschiedlicher Gitterauflösung (Gitter 2 und 3), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$	129
4.23	Vergleich der berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei unterschiedlicher Gitterauflösung (Gitter 2 und 3), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$	129
4.24	Mittleres Geschwindigkeitsprofil mit grobem Gitter 4 ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1h$), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$	130
4.25	Vergleich der berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei unterschiedlicher Gitterauflösung (Gitter 2 und 4), Gerinneströmung, $Re_b = 10\,935$	130
4.26	Vergleich der mittleren Geschwindigkeitsprofile bei glatter und rauher Sohle, Gerinneströmung $Re_b = 10\,935$ bzw. $Re_b = 100\,000$, Rauigkeitshöhe $k_S^+ = 0$ bzw. $k_S^+ = 80$	131
4.27	Vergleich der berechneten turbulenten Schwankungsgrößen bei rauher Sohle mit Experimenten von Nezu und Nakagawa (1993).	131
4.28	Darstellung der Wirbelstrukturen im gegliederten Rechteckgerinne mit dem λ_2 -Kriterium nach Jeong und Hussain (1995), Isofläche $\lambda_2 = -0.02$, Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$, $Re_H = 3\,000$	134
4.29	Mittlere Strömungsgeschwindigkeit $\langle u \rangle / \langle u_{max} \rangle$ in Hauptströmungsrichtung im gegliederten Rechteckgerinne, Tiefenverhältnis $h/H = 1/2$, Vergleich von Messungen mit $Re = 4u_b r_{hyd} / \nu = 54\,500$ (Tominaga und Nezu 1989) mit LES: $Re_H = u_b H / \nu = 10^5$, $\langle u_{max} \rangle = 1.31u_b$	135
4.30	Sekundärströmung im gegliederten Rechteckgerinne $h/H = 1/2$, Vergleich mit Messungen von Tominaga und Nezu (1989).	135
4.31	Fotografie des Stoffaustausches im gegliederten Rechteckgerinne, Farbstoff wurde auf der seichten Seite (untere Bildhälfte) zugegeben, Exp. 32, $U_1/U_2 = 1.76$, $H = 2.8[cm]$, $h = 0.9[cm]$ von Alavian und Chu (1985).	136
4.32	Darstellung der turbulenten Schwankungsbewegung an der Wasseroberfläche des gegliederten Rechteckgerinnes, Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$, $Re_H = 10\,000$	136
4.33	Darstellung der Wirbelstärke an der Wasseroberfläche des gegliederten Rechteckgerinnes, Tiefenverhältnis $h/H = 1/4$, $Re_H = 10\,000$	136
4.34	Energiespektren im gegliederten Rechteckgerinne in verschiedenen Tiefen y/H . Berechnet aus den Geschwindigkeiten entlang einer Geraden in x -Richtung. Position in Spannweitenrichtung in der Mitte der tiefen Gerinneseite ($z/H = -7.5$).	137

4.35	Energiespektren im gegliederten Rechteckgerinne nahe der Wasseroberfläche. Berechnet aus Ortssignalen entlang einer Geraden in x-Richtung. Positionen in Spannweitenrichtung: $z/H = -7.5$ (Pos. 10), $z/H = -3$ (Pos. 9), $z/H = 1$ (Pos. 2), $z/H = 5$ (Pos. 5), $z/H = 7.5$ (Pos. 6).	137
5.1	Widerstandsbeiwert in Gerinneströmung; —: empirische Beziehung $1/\sqrt{c_f} = 1/0.4 [\ln(Re\sqrt{c_f}) + 1]$, ×: DNS (Kanalströmung), ○: LES.	143
5.2	Dimensionslose mittlere Geschwindigkeit bei periodischer Gerinneströmung; $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Vergleich mit der DNS einer Kanalströmung (Moser et al. 1999) und der experimentellen Beziehung $u^+ = 5.29 + 1/0.412 \ln(z^+)$ mit Nachlauf-Parameter $\Pi = 0.11$ (Nezu und Rodi 1986).	145
5.3	Dimensionslose mittlere Geschwindigkeit bei periodischer Gerinneströmung; $Re_h = 6\,875$ ($Re_\tau = 395$); Vergleich mit der DNS einer Kanalströmung (Moser et al. 1999) und der experimentellen Beziehung $u^+ = 5.29 + 1/0.412 \ln(z^+)$ (Nezu und Rodi 1986).	145
5.4	RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und Schubspannungsverteilung bei Gerinneströmung, $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Vergleich mit empirischen Beziehungen (Nezu und Nakagawa 1993) und DNS-Kanalströmung (Moser et al. 1999).	146
5.5	Mittlere Geschwindigkeit bei periodischer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$) und $Re_h = 6\,875$ ($Re_\tau = 395$).	147
5.6	RMS-Werte der turbulenten Schwankungsgrößen und Schubspannungsverteilung bei Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$) und $Re_h = 6\,875$ ($Re_\tau = 395$).	147
5.7	Oben: Fluktuationen der lokalen u -Geschwindigkeit in verschiedenen Wassertiefen und die daraus resultierenden Fluktuationen der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u}' (hier an der Sohle bei $z/h = 0$ dargestellt) in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$). Unten: Zugehöriges u -Geschwindigkeitsfeld.	149
5.8	Oben: Fluktuationen der lokalen vertikalen Geschwindigkeit w in verschiedenen Wassertiefen und die daraus resultierenden Fluktuationen der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{w}' (hier an der Sohle bei $z/h = 0$ dargestellt) in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$). Unten: Zugehöriges w -Geschwindigkeitsfeld.	150
5.9	Momentanes tiefengemitteltes Geschwindigkeitsfeld in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	151
5.10	Komponenten des Dispersionsspannungstensors $D_{ij} = \overline{u_i u_j} - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$ in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	154
5.11	Komponenten des tiefengemittelten Spannungstensors $\tilde{S}_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_{x_j} \tilde{u}_i + \partial_{x_i} \tilde{u}_j)$ in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	154
5.12	Eindimensionale Energiespektren in x -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$	160

5.13	Eindimensionale Energiespektren in y -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$	161
5.14	Energieanteil von Wellenzahlen $< k$ an der Gesamtenergie der Energiespektren in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$	163
5.15	Autokorrelationen in x -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_b = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	164
5.16	Autokorrelationen in y -Richtung in verschiedenen Wassertiefen bei der Gerinneströmung mit $Re_b = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	165
5.17	Makrolängen in Strömungsrichtung L_x und in Spannweitenrichtung L_y berechnet aus den entsprechenden eindimensionalen Energiespektren; Gerinneströmung mit $Re_h = 10935$ ($Re_\tau = 590$).	167
5.18	Verhältnis zwischen 2D- und 3D-Turbulenz in der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Energiespektren in x -Richtung; eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$	171
5.19	Verhältnis zwischen 2D- und 3D-Turbulenz in der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Energiespektren in y -Richtung; eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$	172
5.20	Energieanteil von Wellenzahlen $< k$ an der Gesamtenergie der Energiespektren der Gesamt-, 2D- und 3D-Turbulenz bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); eingezeichnete Wellenlängen: $\lambda_a = 2h$, $\lambda_b = h$, $\lambda_c = 2\pi\Delta x$, $\lambda_d = h/2$	173
5.21	Autokorrelationen in x -Richtung der Gesamt-, 3D- und 2D-Turbulenz bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	175
5.22	Autokorrelationen in y -Richtung der Gesamt-, 3D- und 2D-Turbulenz bei der Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	176
5.23	Verlauf der Korrelationen zwischen lokaler und tiefengemittelter Schwankungsbewegung über die Tiefe. Gerinneströmung $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	181
5.24	Normierte Kreuzkorrelation $R_{\tau_{b1}\tilde{u}}^t(\Delta t)_{norm} = \langle \tau'_{b1}(t) \tilde{u}'(t+\Delta t) \rangle / \sqrt{\langle \tau'^2_{b1} \rangle \langle \tilde{u}'^2 \rangle}$ zwischen der Sohlschubspannung τ_{b1} in x -Richtung und der tiefengemittelten Geschwindigkeit \tilde{u} in der Gerinneströmung mit $Re_b = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$).	181
5.25	Transport eines passiven Tracers in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Tracerkonzentration in horizontalen Schnittebenen zum gleichen Zeitpunkt in verschiedenen Wassertiefen.	184
5.26	Transport eines passiven Tracers in einer Gerinneströmung mit $Re_h = 10\,935$ ($Re_\tau = 590$); Vergleich der longitudinalen Entwicklung der Fahnenbreite von LES mit der analytischen Beziehung 5.30.	185
5.27	Mittleres Strömungsfeld in Hauptströmungsrichtung und Sekundärströmung in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = u_b h / \nu = 10\,935$	192

5.28	Mittleres Strömungsfeld in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 6$ und $Re = 4RU_{mc}/\nu = 13\,700$; oben: Strömungsfeld in Hauptströmungsrichtung, unten: Sekundärströmung; (a) Messungen von Nezu und Rodi (1985), (b) Rechnung von Naot und Rodi (1982).	192
5.29	Reynoldsspannungen in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$	193
5.30	Tiefengemitteltes Geschwindigkeitsfeld in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$	194
5.31	Schwankungsbewegung des tiefengemittelten Geschwindigkeitsfeldes in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$	195
5.32	Mittlere tiefengemittelte Geschwindigkeit und Reynoldsspannungen von Gesamt-, 3D- und 2D- Turbulenz in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$	196
5.33	Verlauf von k und u_τ in Spannweitenrichtung (nur eine Gerinnehälfte dargestellt) in einem Rechteckgerinne mit Breiten- zu Tiefenverhältnis $B/h = 2\pi$ und $Re_b = 10\,935$; (a) Turbulenzenergie von Gesamt-, 3D- und 2D-Turbulenz; Vergleich mit $k_{3D} = c_{k_{3D}} \widetilde{u_\tau^2}$ und $k_{2D} = c_{k_{2D}} u_\tau^2$, jeweils mit u_τ von LES bzw. mit $u_\tau = \widetilde{u} \sqrt{c_f}$ (c_f nach Gl. 3.21) (b) Schubspannungsgeschwindigkeit an der Sohle; Vergleich der LES-Daten mit der Beziehung $u_\tau = \widetilde{u} \sqrt{c_f}$ (mit $c_f = 0.00289$, $c_f = 0.003$ und c_f nach Gl. 3.21).	197
5.34	Mischungsschicht: Rechengebiet und Randbedingungen.	198
5.35	Mittlere Geschwindigkeit und RMS-Werte der Geschwindigkeitsschwankungen in Strömungsrichtung an verschiedenen Positionen stromab der Trennplatte in halber Wassertiefe; —: LES, •: Messungen (Messwerte gescannt aus Babarutsi und Chu 1998).	201
5.36	Mischungsschicht berechnet mit 3D-LES und DA-LES. Durchmischung eines Farbstoffes, der im langsameren Zustrom kontinuierlich zugeführt wird; (a) 3D-LES: Farbstoffkonzentration in verschiedenen Wassertiefen; (b) 3D-LES: tiefengemittelte Farbstoffkonzentration; (c) DA-LES mit <i>Back-scatter</i> -Modell ($c_h = 0.08$, $c_B = 55$); (d) DA-LES ohne <i>Back-scatter</i> -Modell ($c_h = 0.08$, $c_B = 0$).	202
5.37	Ergebnis der 3D-LES (—) im Vergleich mit der DA-LES mit BSM (- - -) und DA-LES ohne BSM (—) an verschiedenen Positionen stromab der Trennplatte; links: tiefengemittelte Geschwindigkeit $\langle \widetilde{u} \rangle$; rechts: kinetische Energie der 2D-Turbulenz $k_{2D} = \frac{1}{2} (\widetilde{u}'\widetilde{u}' + \widetilde{v}'\widetilde{v}')$ (k_{2D} der DA-LES ohne BSM ist null).	204
5.38	Zylinderumströmung: Rechengebiet, Blockstruktur und Randbedingungen.	206
5.39	Ausschnitt des Rechengitters in Zylindernähe (hier dargestellt mittels Linien durch Zellmittelpunkte).	206

5.40	Zylinderumströmung mit $Re_h = 5440$ und $D/h = 1.66$. Mittlere Strömungsgeschwindigkeit und Schwankungsbewegung an der Wasseroberfläche. (—) 3D-LES, (o) PIV-Messungen von von Carmer und Jirka (2001).	208
5.41	Zylinderumströmung mit $Re_h = 5440$ und $D/h = 1.66$. Mit der 3D-LES berechnete Komponenten der momentanen Dispersionsspannungen $D_{22}(\mathbf{u})$ nach Gleichung 5.33. Links von oben: $\widetilde{u'_2 u'_2}$, $\widetilde{\tilde{u}'_2 \tilde{u}'_2}$, $D_{22}(\mathbf{u}') = \widetilde{u'_2 u'_2} - \widetilde{\tilde{u}'_2 \tilde{u}'_2}$, rechts: $D_{22}(\langle \mathbf{u} \rangle)$, C_{22} (negative Werte ausgeblendet), $D_{22}(\mathbf{u})$	209
5.42	Zylinderumströmung mit $Re_h = 5440$ und $D/h = 1.66$. Transport zweier Farbstoffe, die an der Zylindervorderseite zugesetzt werden: (a) Experiment von von Carmer und Jirka (2001); (b) 3D-LES (Farbstoffkonzentration an der Wasseroberfläche); (c-f) DA-LES: (c, e) mit isotroper turbulenter Diffusion, (d, f) mit anisotroper turbulenter Diffusion.	214
5.43	Geometrie des Bühnenfeldes und Strömungskonfiguration beim Experiment von Weitbrecht et al. (2002) mit $W/L = 0.4$	216
5.44	Rechengebiet, Blockstruktur, Randbedingungen und Gitter im Bereich des Bühnenkopfes bei der LES.	217
5.45	Bühnenfeld: $\langle u \rangle$ -Geschwindigkeiten und Strömungsfeld an der Wasseroberfläche; oben: PIV-Messungen von Weitbrecht et al. (2002); Mitte: 3D-LES; unten: Geschwindigkeitsprofil zwischen den Bühnen.	219
5.46	Bühnenfeld: RMS-Werte der u -Schwankungen an der Wasseroberfläche; oben: PIV-Messungen von Weitbrecht et al. (2002); Mitte: 3D-LES; unten: Verlauf der RMS-Werte zwischen den Bühnen.	220
5.47	Bühnenfeld: RMS-Werte der v -Schwankungen an der Wasseroberfläche; oben: PIV-Messungen von Weitbrecht et al. (2002); Mitte: 3D-LES; unten: Verlauf der RMS-Werte zwischen den Bühnen.	221
5.48	DA-LES Bühnenfeld: $\langle \tilde{u} \rangle$ -Geschwindigkeiten und Strömungsfeld.	222
5.49	Zeitlicher Verlauf der Tracerkonzentration im Bühnenfeld; Vergleich von 3D-LES und DA-LES mit Messungen von Weitbrecht et al. (2002); (die drei experimentellen Kurven bzw. die zwei DA-LES-Rechnungen wurden jeweils für die gleiche Strömungskonfiguration bestimmt).	223
A.1	Schematische Darstellung des globalen x_i - und lokalen ξ_i -Koordinatensystems	229
A.2	Schematische Darstellung des richtungsabhängigen Diffusionskoeffizienten und des durch die Strömungsrichtung festgelegten ζ_i -Hauptachsensystems	232
A.3	Schematische Darstellung des Iterationsverfahrens für die Wandfunktion	235
A.4	Struktur der Blockliste in \mathcal{LESOC}_2	243
A.5	Typische Energiespektren von numerisch erzeugten Pseudozufallszahlenfolgen $Z(t_i)$ mit $t_i = i \cdot \Delta t$ und $i = 1, 2, \dots, T/\Delta t$	257

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Christof Hinterberger
Geboren am: 27. Juli 1971 in Linz
Staatsangehörigkeit: österreichisch
E-Mail-Adresse: hinterberger@ifh.uka.de
Familienstand: verheiratet, eine Tochter

Schule, Ausbildung und Beruf

1981–1989 Gymnasium (Fadingerschule in Linz)
1989–1990 Grundwehrdienst, Unteroffiziersanwärterkurs
1990–1996 Studium des Maschinenwesens an der TU München
Fachrichtung Luft- und Raumfahrttechnik
1993–1996 Studentische Hilfskraft am Lehrstuhl A für Thermodynamik
an der TU München
1996–1998 CFD-Berechnungsingenieur bei TRW Airbag-Systems (ehem.
TEMIC Bayern-Chemie Airbag GmbH)
seit 1998 Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Hydromechanik
an der TU Karlsruhe