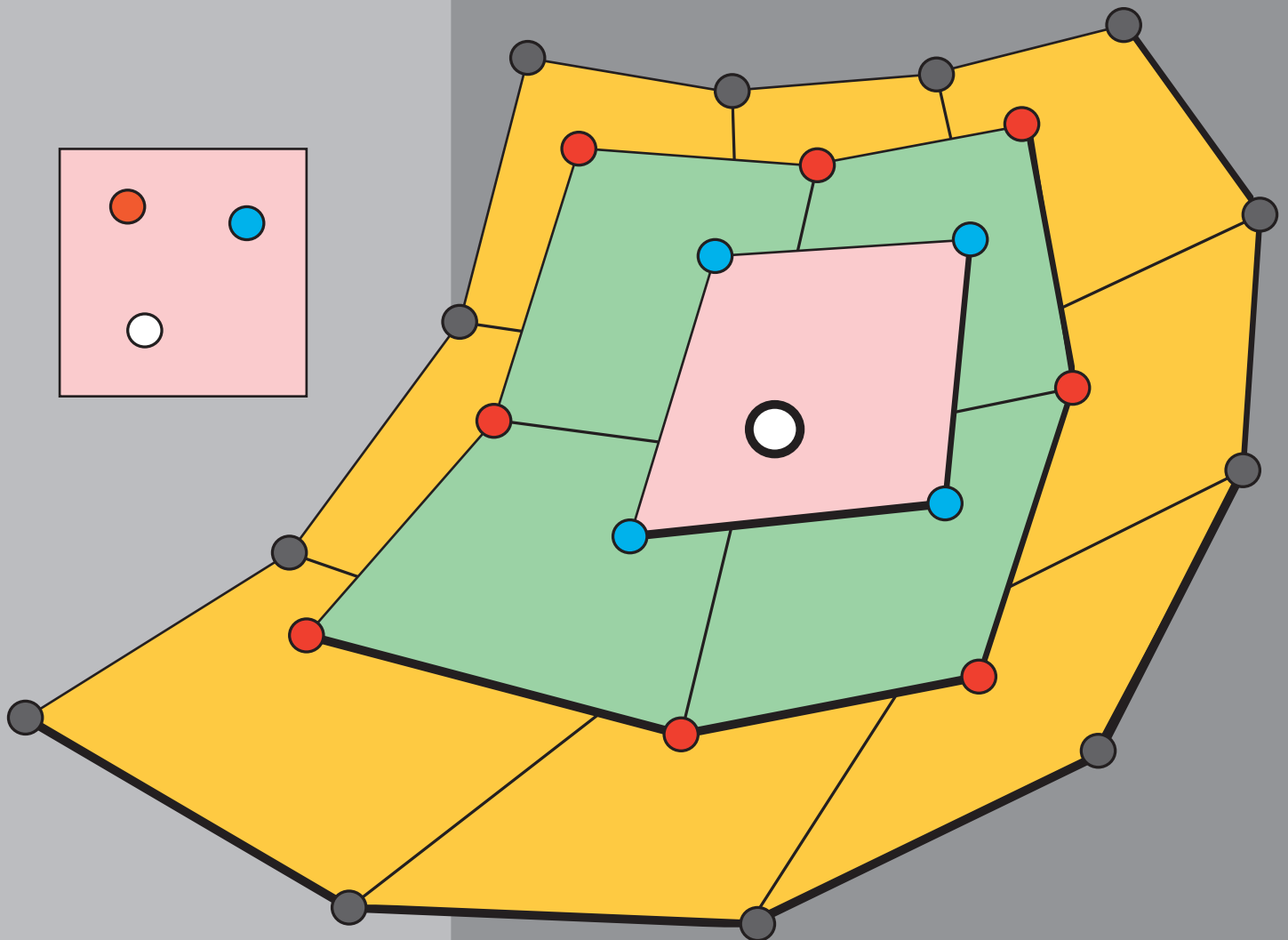
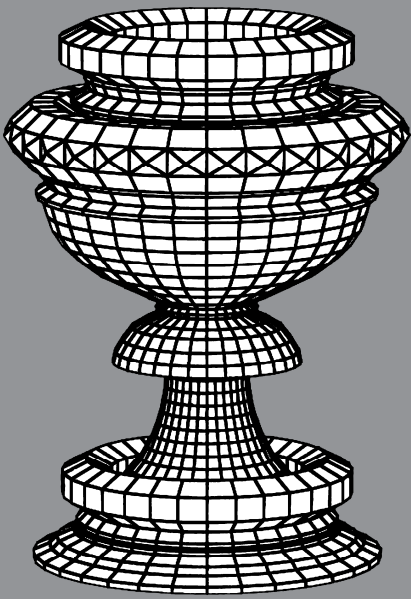


PALUSZNY-PRAUTZSCH-BOEHM

# Métodos de Bézier y B-Splines



Marco Paluszny, Hartmut Prautzsch, Wolfgang Boehm

## **Métodos de Bézier y B-splines**

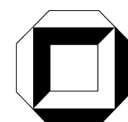


# Métodos de Bézier y B-splines

Marco Paluszny

Hartmut Prautzsch

Wolfgang Boehm





La versión en inglés del libro de texto "Métodos de Bézier y B-splines" fue publicada por la editorial Springer Verlag Berlin Heidelberg 2002.

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

[www.uvka.de](http://www.uvka.de)

© Universitätsverlag Karlsruhe 2005  
Print on Demand

ISBN 3-937300-47-3

# Métodos de Bézier y B-splines

Hartmut Prautzsch  
Wolfgang Boehm  
Marco Paluszny



Dedicado a

Paul de Faget de Casteljou



# Prefacio

Las técnicas de modelación asistidas por computadoras surgen con el advenimiento de las máquinas fresadoras con control numérico en los finales de la década de los cuarenta. A partir de los principios de los años sesenta, las técnicas de Bézier y B-splines ya se perfilan como herramientas de importancia fundamental para el tratamiento de curvas y superficies polinómicas. Su ventaja principal radica en que posibilitan la construcción de algoritmos eficientes numéricamente robustos.

El propósito de este texto es dar una base sólida y unificada para las propiedades más útiles de las representaciones de Bézier y B-splines. El énfasis del libro es sobre las nociones centrales del Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAGD por su nombre en inglés, Computer Aided Geometric Design) y cubre tanto las nociones básicas como también algunas más avanzadas, como por ejemplo: splines multivariados, técnicas de subdivisión y diseño a mano alzada con superficies con alto grado de suavidad.

Con la finalidad de no extender el libro demasiado, hemos excluido algunos temas que podrían considerarse fundamentales en CAGD. En particular, no estudiamos técnicas racionales de Bézier y B-splines.

El libro se fue ensamblando a través del dictado de varios cursos, dictados repetidamente por los autores, en el Rensselaer Polytechnic Institute de Nueva York, las Universidades de Braunschweig y de Karlsruhe en Alemania y en la Universidad Central de Venezuela. Estos cursos forman parte de los currícula de pre y postgrado de las carreras de Matemáticas e Informática y también fueron atendidos por estudiantes de Ingeniería, Geofísica y Arquitectura.

Queremos agradecer la lectura del manuscrito a Stefan Bischoff, Bernhard Garz, Georg Umlauf, Claudia Bangert, Norbert Luscher, Marianela Lentini, Giovanni Figueroa y especialmente a Javier Sánchez-Reyes por su revisión exhaustiva de los primeros diez capítulos del libro.

Queremos también expresar nuestro agradecimiento a Christoph Pennekamp, Natalie Spinner, Dayana Tabare, Elizabeth Miquilena, Gabriel Arcos y Mildred Graterol, por la preparación de los archivos LaTeX.

Caracas,  
Karlsruhe,  
Wolfenbüttel,

Marco Paluszny  
Hartmut Prautzsch  
Wolfgang Boehm



# Contenido

## I Curvas

### 1 Nociones básicas

1.1	Espacios afines	3
1.2	Combinaciones afines	4
1.3	Aplicaciones afines	5
1.4	Curvas y superficies paramétricas	6
1.5	Ejercicios	7

### 2 Representación de Bézier

2.1	Polinomios de Bernstein	9
2.2	Curvas de Bézier	11
2.3	Algoritmo de de Casteljau	13
2.4	Derivadas	15
2.5	Parametrización singular	17
2.6	Un algoritmo tetraédrico	18
2.7	Integración	19
2.8	Conversión a la representación de Bézier	20
2.9	Conversión a la forma monomial	22
2.10	Ejercicios	22

### 3 Técnicas de Bézier

3.1	Polinomios simétricos	25
3.2	El teorema fundamental	27
3.3	Subdivisión	27
3.4	Convergencia con la subdivisión	29
3.5	Generación de curvas por subdivisión	30



3.6	Generación de curvas por diferencias hacia adelante	31
3.7	Intersección	32
3.8	La propiedad de variación decreciente	34
3.9	El polinomio simétrico de la derivada	35
3.10	Conexiones $C^r$ simples	36
3.11	Elevación de grado	38
3.12	Convergencia por elevación de grado	39
3.13	Ejercicios	40
<b>4</b>	<b>Interpolación y aproximación</b>	
4.1	Interpolación	43
4.2	Interpolación de Lagrange	44
4.3	Interpolación de Newton	46
4.4	Interpolación de Hermite	48
4.5	Interpolación de Hermite cúbica por trozos	50
4.6	Aproximación	52
4.7	Ajustes por mínimos cuadrados	53
4.8	Mejoras en el parámetro	55
4.9	Ejercicios	56
<b>5</b>	<b>Representación por B-splines</b>	
5.1	Splines	59
5.2	B-splines	60
5.3	Una definición recursiva de los B-splines	62
5.4	El algoritmo de de Boor	63
5.5	El teorema fundamental	65
5.6	Derivadas y suavidad	67
5.7	Propiedades de los B-splines	68
5.8	Conversión a la representación B-spline	69
5.9	El algoritmo de de Boor extendido	70
5.10	Conversión entre las representaciones de de Boor y de Bézier	72
5.11	B-splines como diferencias divididas	74
5.12	Ejercicios	75

<b>6</b>	<b>Técnicas de B-splines</b>	
6.1	Inserción de nodos	77
6.2	El algoritmo de Oslo	79
6.3	Convergencia por inserción de nodos	80
6.4	Un algoritmo para la elevación de grado	81
6.5	Una fórmula de elevación de grado	82
6.6	Convergencia por elevación de grado	83
6.7	Interpolación	84
6.8	Interpolación con splines cúbicos	86
6.9	Ejercicios	88
<b>7</b>	<b>Curvas suaves</b>	
7.1	Contacto de orden $r$	92
7.2	Parametrización por longitud de arco	94
7.3	Gamma splines	94
7.4	B-splines gamma	96
7.5	Nu-splines	97
7.6	El marco de Frenet	98
7.7	Continuidad de Frenet	99
7.8	Osculantes y polinomios simétricos	101
7.9	Interpretación geométrica del teorema fundamental	102
7.10	Splines con matrices de conexión arbitraria	104
7.11	Inserción de nodos	105
7.12	Bases de splines	106
7.13	Ejercicios	107
<b>8</b>	<b>Subdivisión uniforme</b>	
8.1	B-splines uniformes	109
8.2	Subdivisión uniforme	110
8.3	Subdivisión iterada	112
8.4	La matriz de subdivisión	114
8.5	Derivadas	114
8.6	Subdivisión estacionaria	115
8.7	Teoremas de convergencia	116

8.8	Cálculo del esquema de diferencias	117
8.9	El esquema de los cuatro puntos	118
8.10	Análisis del esquema de los cuatro puntos	119
8.11	Ejercicios	120

## II Superficies

### 9 Superficies producto tensorial

9.1	Productos tensoriales	125
9.2	Superficies producto tensorial de Bézier	127
9.3	Formas polares del producto tensorial	130
9.4	Conversión entre las formas monomial y de Bézier	131
9.5	Algoritmo de de Casteljaou	132
9.6	Derivadas	133
9.7	Conexiones simples $C^r$	135
9.8	Interpolación $C^1$ bicúbica por trozos	136
9.9	Superficies de topología arbitraria	136
9.10	Parametrización singular	137
9.11	Splines bicúbicos $C^1$ de topología arbitraria	138
9.12	Ejercicios	140

### 10 Representaciones de Bézier de parches triangulares

10.1	Polinomios de Bernstein multivariados	141
10.2	Simples de Bézier	143
10.3	Precisión lineal	145
10.4	El algoritmo de de Casteljaou	146
10.5	Derivadas	147
10.6	Convexidad de superficies funcionales	148
10.7	Limitaciones de la convexidad	150
10.8	Ejercicios	152

### 11 Técnicas de Bézier para parches triangulares

11.1	Polinomios simétricos	155
11.2	El teorema fundamental	157

11.3	Subdivisión y reparametrización	157
11.4	Convergencia bajo subdivisión	159
11.5	Generación de superficies	160
11.6	El polinomio simétrico de la derivada	161
11.7	Conexiones $C^r$ simples	162
11.8	Elevación de grado	163
11.9	Convergencia por elevación de grado	164
11.10	Conversión a la representación tensorial de Bézier	166
11.11	Conversión a la representación triangular de Bézier	167
11.12	Ejercicios	168
<b>12 Interpolación</b>		
12.1	Interpolación de Hermite	169
12.2	El interpolador de Clough-Tocher	170
12.3	El interpolador de Powell-Sabin	171
12.4	Superficies de topología arbitraria	172
12.5	Parametrización singular	173
12.6	Splines $C^1$ de grado cinco de topología arbitraria	175
12.7	Ejercicios	175
<b>13 Construcción de superficies suaves</b>		
13.1	La conexión general $C^1$	179
13.2	Conexión de dos parches triangulares cúbicos	181
13.3	Un interpolador triangular $G^1$	183
13.4	El problema del vértice compartido	184
13.5	El problema de la paridad	185
13.6	Ejercicios	187
<b>14 Construcciones - <math>G^k</math></b>		
14.1	La conexión general $C^k$	189
14.2	Conexiones $G^k$ usando curvas transversales	191
14.3	Conexiones $G^k$ usando la regla de la cadena	192
14.4	Superficies $G^k$ de topología arbitraria	193
14.5	Parches suaves de $n$ lados	197

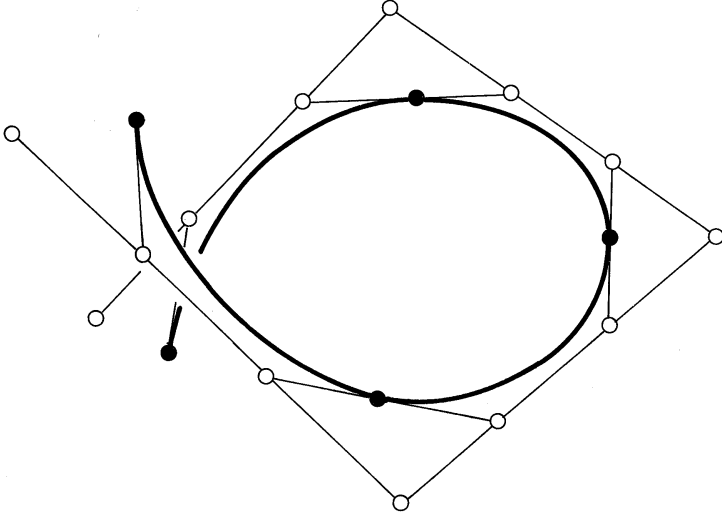
XIV	<i>Contenido</i>
14.6 Parches multilaterales en el plano	200
14.7 Ejercicios	202
<b>15 Subdivisión estacionaria para mallas regulares</b>	
15.1 Esquemas de producto tensorial	205
15.2 Subdivisión estacionaria en general y máscaras	207
15.3 Teoremas de convergencia	209
15.4 Promedios crecientes	211
15.5 Cálculos con esquemas de diferencias	212
15.6 Cálculos con esquemas de promedios	214
15.7 Subdivisión de mallas triangulares	215
15.8 Box splines sobre mallas triangulares	217
15.9 Subdivisión de mallas hexagonales	219
15.10 Half-box splines sobre mallas triangulares	221
15.11 Ejercicios	222
<b>16 Subdivisión estacionaria para mallas arbitrarias</b>	
16.1 El esquema del punto medio	225
16.2 La superficie límite	227
16.3 La parametrización standard	229
16.4 La matriz de subdivisión	230
16.5 Continuidad de superficies obtenidas por subdivisión	231
16.6 La aplicación característica	232
16.7 Suavidad de orden superior	232
16.8 Mallas triangulares y hexagonales	234
16.9 Ejercicios	235
<b>III Splines Multivariados</b>	
<b>17 Box splines</b>	
17.1 Definición de box splines	239
17.2 Box splines como sombras	240
17.3 Propiedades de los box splines	242
17.4 Derivadas de un box spline	243

<i>Contenido</i>	XV
17.5 Propiedades de las superficies box spline	244
17.6 Subdivisión de superficies box spline	246
17.7 Convergencia bajo subdivisión	249
17.8 Half-box splines	251
17.9 Superficies half-box	253
17.10 Ejercicios	255
<b>18 Simplex splines</b>	
18.1 Sombras de simples	259
18.2 Propiedades de los simplex splines	260
18.3 Simplex splines normalizados	262
18.4 Inserción de nodos	263
18.5 Una relación de recurrencia	265
18.6 Derivadas	266
18.7 Ejercicios	268
<b>19 Splines multivariados</b>	
19.1 Generalización del algoritmo de de Casteljaou	269
19.2 B-polinomios y B-parches	271
19.3 Precisión lineal	272
19.4 Derivadas de un B-parche	273
19.5 B-splines multivariados	275
19.6 Combinaciones lineales de B-splines	277
19.7 Una relación de recurrencia	279
19.8 Derivadas de un spline	280
19.9 El teorema fundamental	281
19.10 Ejercicios	282
<b>Bibliografía</b>	285
<b>Índice</b>	295



# Parte I

# Curvas







# 1 Nociones básicas

*1.1 Espacios afines — 1.2 Combinaciones afines — 1.3 Aplicaciones afines — 1.4 Curvas y superficies paramétricas — 1.5 Ejercicios*

El espacio tridimensional se puede ver como un conjunto de puntos; un vector describe la dirección y la longitud del segmento entre dos puntos. La interpretación del espacio tridimensional como un espacio de puntos y no como un espacio vectorial tiene la ventaja de que no es necesario designar un punto especial como origen. Este hecho se refleja en la simetría de las coordenadas baricéntricas.

Como este libro presenta conceptos que ocurren en el espacio tridimensional de puntos, en este primer capítulo presentamos una breve introducción a las propiedades del espacio de puntos, denominado espacio afín.

## 1.1 Espacios afines

Denotamos con  $\mathcal{A}$  al **espacio afín** sobre un espacio vectorial  $\mathbf{V}$ . En este texto consideramos solamente espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbf{R}$ , lo cual significa que tanto los puntos de  $\mathcal{A}$ , como también los vectores de  $\mathbf{V}$ , pueden representarse por elementos de  $\mathbf{R}^n$ . Por lo tanto  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$  representa un punto o un vector dependiendo del contexto.

Dados dos puntos  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ , el vector de  $\mathbf{p}$  a  $\mathbf{q}$  se obtiene como la diferencia de sus coordenadas

$$\mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$$

como se ilustra en la Figura 1.1. Nótese que podemos sumar un vector y un punto, pero la suma de dos puntos no está definida.

Podemos distinguir entre puntos y vectores utilizando **coordenadas extendidas**:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ e \end{bmatrix} \quad \text{representa un} \quad \begin{cases} \text{punto} & \text{si } e = 1 \\ \text{vector} & \text{si } e = 0 \end{cases}$$

La representación anterior de puntos y vectores depende de un sistema de coordenadas: dado un punto  $\mathbf{p}$  de  $\mathcal{A}$  y  $n$  vectores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  que forman una base  $\mathbf{V}$ ; entonces cada punto  $\mathbf{q}$  de  $\mathcal{A}$  tiene una única representación  $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_1 x_1 + \dots + \mathbf{v}_n x_n$ . Esto es, la columna  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^t \in \mathbb{R}^n$  representa al punto  $\mathbf{q}$  con respecto al **sistema de coordenadas afines**  $\mathbf{p}; \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . El punto  $\mathbf{p}$  se denomina **origen**, del sistema de coordenadas. La columna coordenada del origen es  $[0 \dots 0]^t$  y se denota por  $\mathbf{o}$ .

La **dimensión** de  $\mathcal{A}$  se define como la dimensión  $n$  del espacio vectorial subyacente  $\mathbf{V}$ .

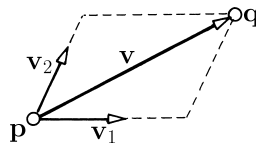


Figura 1.1: Vector entre dos puntos

## 1.2 Combinaciones afines

Los  $m + 1$  puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$  de un espacio afín  $\mathcal{A}$  se llaman **afinmente independientes** si los  $m$  vectores  $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m - \mathbf{p}_0$  son linealmente independientes. Nótese que esta definición no depende de la ordenación de los puntos  $\mathbf{p}_i$ . Véase el Ejercicio 1.

Sea  $n$  la dimensión de  $\mathcal{A}$ , si  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$  son  $n + 1$  puntos afínmente independientes entonces cada  $\mathbf{q}$  en  $\mathcal{A}$  se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{p}_0 + (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)x_1 + \dots + (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0)x_n \\ &= \mathbf{p}_0 x_0 + \dots + \mathbf{p}_n x_n, \end{aligned}$$

donde  $1 = x_0 + \dots + x_n$ . Los coeficientes  $x_i$  son las **coordenadas baricéntricas** de  $\mathbf{q}$  con respecto al marco  $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_n$ .

La secuencia ordenada  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$  se denomina **marco**.

Nótese que  $x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$  son las coordenadas afines de  $\mathbf{q}$  con respecto al origen  $\mathbf{p}_j$  y los  $n$  vectores  $\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j, i \neq j$ .

En particular, si  $n = 1$  el punto  $\mathbf{q} = \mathbf{p}_0(1 - x) + \mathbf{p}_1 x$  traza la **interpolación lineal** de  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_1$ . La razón  $x : 1 - x$  se denomina la **razón simple** de  $\mathbf{q}$  con respecto a  $\mathbf{p}_0$  y  $\mathbf{p}_1$ , ver Figura 1.2. Nótese que en nuestra notación  $1 - x = x_0$  y  $x = x_1$ .

Es más, sean  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  las columnas de coordenadas afines, extendidas o

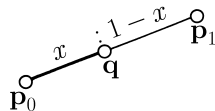


Figura 1.2: Interpolación lineal y razón.

baricéntricas de cualesquiera  $m$  puntos de  $\mathcal{A}$ . Entonces la **suma ponderada**

$$\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i \alpha_i \quad \text{representa un} \quad \begin{cases} \text{punto} & \text{si } \sum \alpha_i = 1 \\ \text{vector} & \text{si } \sum \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Si los pesos  $\alpha_i$  suman 1, entonces  $\mathbf{a} = \sum \mathbf{a}_i \alpha_i$  se denomina una **combinación afín**. Si además, los pesos son no negativos, entonces  $\mathbf{a}$  es una **combinación convexa**. En este caso se tiene que  $\mathbf{a}$  yace en la **cápsula convexa** de los puntos  $\mathbf{a}_i$ , vea el Ejercicio 4.

### 1.3 Aplicaciones afines

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  espacios afines,  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  sus espacios vectoriales subyacentes, de dimensión  $m$  y  $n$ , respectivamente. Una función  $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  se denomina **aplicación afín** si se puede representar, con respecto a alguno de nuestros sistemas de coordenadas, a través de una matriz  $A$ , de dimensión  $n \times m$  tal que

$$\mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + A\mathbf{x},$$

donde  $\mathbf{a}$  es la imagen del origen.

La aplicación lineal  $\varphi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$  dada por

$$\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

se denomina la **aplicación lineal subyacente** de  $\Phi$ . Usando coordenadas extendidas, ambas aplicaciones tienen la misma representación matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{o}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{a} \\ \mathbf{o}^t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{bmatrix},$$

lo cual se puede describir de manera más compacta como:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = A\mathbf{u}.$$

Las siguientes dos propiedades son consecuencia de la representación matricial:

Una aplicación afín  $\Phi$  conmuta con las combinaciones afines, es decir

$$\Phi\left(\sum \mathbf{a}_i \alpha_i\right) = \sum \Phi(\mathbf{a}_i) \alpha_i.$$

Además,

Una aplicación afín está completamente determinada por un marco de dimensión  $\dim \mathcal{A} + 1$   $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_m$  y su marco imagen  $\mathbf{q}_0 \dots \mathbf{q}_m$ .

La primera propiedad también caracteriza las aplicaciones afines, ver el Ejercicio 5. La segunda propiedad se puede expresar esquemáticamente

$$\begin{array}{c} m+1 \\ \boxed{\text{A}} \\ n+1 \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{q}_0 \quad \dots \quad \mathbf{q}_m} \end{array} \begin{array}{c} \boxed{\mathbf{p}_0 \quad \dots \quad \mathbf{p}_m}^{-1} \end{array}.$$

## 1.4 Curvas y superficies paramétricas

Una columna  $\mathbf{x}$  de  $\mathbb{R}^d$  cuyas coordenadas dependen de un parámetro  $t$  recorre una **curva paramétrica**

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{bmatrix}.$$

Usualmente pensamos en  $\mathbf{x}(t)$  como una curva de puntos. En particular si las funciones coordenadas  $x_i(t)$  son polinomios de grado menor o igual que  $n$  entonces  $\mathbf{x}(t)$  es una **curva polinómica** de grado  $n$  en  $t$ .

El **gráfico** de una función  $x(t)$  es una curva que tiene una forma especial.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ x(t) \end{bmatrix}.$$

Las curvas descritas por gráficos de funciones se denominan **curvas funcionales**. La Figura 1.3 presenta dos ejemplos de curvas paramétricas que no son funcionales. En la izquierda está la parábola de Neil  $\mathbf{x} = [t^2 \ t^3]^t$  y, a la derecha, la curva  $\mathbf{x} = [t^2 \ t^3 - t]^t$ .

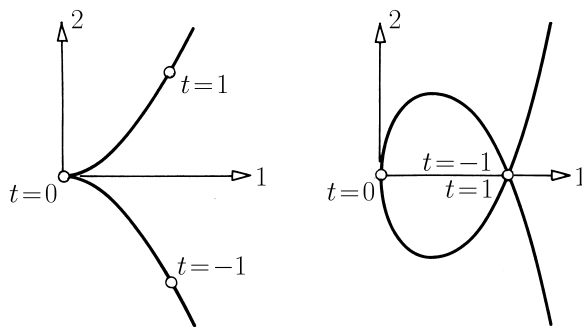


Figura 1.3: Curvas paramétricas con cúspide y lazo.

Análogamente, una columna  $\mathbf{x}$  que depende de dos parámetros,  $s$  y  $t$ , describe una **superficie paramétrica** (note que la superficie podría degenerar a un punto o a una curva).

$$\mathbf{x}(s, t) = \begin{bmatrix} x_1(s, t) \\ \vdots \\ x_d(s, t) \end{bmatrix}.$$

La superficie se denomina **polinómica** de grado total  $n$  si los  $x_i$  son polinomios de grado total menor o igual que  $n$  en  $s$  y  $t$ , y por lo menos uno de los  $x_i$  tiene grado total  $n$ . El gráfico de una función  $x(s, t)$  de dos variables determina una superficie polinómica que tiene una forma especial:

$$\mathbf{x}(s, t) = \begin{bmatrix} s \\ t \\ x(s, t) \end{bmatrix}.$$

Estas superficies se denominan **superficies funcionales**.

## 1.5 Ejercicios

- 1 Demostrar que  $m + 1$  puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$  son independientes si y sólo si sus coordenadas extendidas  $\mathbb{p}_0, \dots, \mathbb{p}_m$  son linealmente independientes.
- 2 Las soluciones de un sistema lineal homogéneo forman un espacio vectorial. Verifique que el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo forma un espacio afín.

3 Considere la combinación afín

$$\mathbf{p} = \mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta + \mathbf{c}\gamma$$

$$1 = \alpha + \beta + \gamma$$

de tres puntos independientes. Muestre que las coordenadas baricéntricas  $\alpha, \beta, \gamma$  determinan las razones ilustradas en la Figura 1.4.

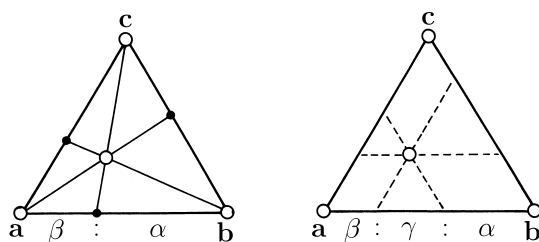


Figura 1.4: Razones en un triángulo.

- 4 La **cápsula convexa** de  $r$  puntos  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$  de un espacio afín  $\mathcal{A}$  es el subconjunto minimal que contiene los puntos  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ , y satisface que para cualesquiera dos puntos contenidos en este subconjunto, el segmento que los une también pertenece al subconjunto. Pruebe que la cápsula convexa consiste en todas las combinaciones convexas de los  $\mathbf{a}_i$ .
- 5 Demuestre que una aplicación entre dos espacios afines que preserve combinaciones afines es una aplicación afín.
- 6 Demuestre que una aplicación entre dos espacios afines que preserve combinaciones afines de dos puntos preserva también combinaciones afines de cualquier número finito de puntos.
- 7 Demuestre que el conjunto de combinaciones afines de  $r + 1$  puntos independientes de un espacio  $\mathcal{A}$  forma un subespacio afín  $r$ -dimensional de  $\mathcal{A}$ .

## 2 Representación de Bézier

[2.1 Polinomios de Bernstein](#) — [2.2 Curvas de Bézier](#) — [2.3 El algoritmo de de Casteljau](#) — [2.4 Derivadas](#) — [2.5 Parametrización singular](#) — [2.6 Un algoritmo tetraédrico](#) — [2.7 Integración](#) — [2.8 Conversión a la representación de Bézier](#) — [2.9 Conversión a la forma monomial](#) — [2.10 Ejercicios](#)

Toda curva polinómica admite una representación mediante su polígono de Bézier. Existe una estrecha relación geométrica cercana entre una curva polinómica y su polígono de Bézier. Ambos tienen los mismos puntos extremos y las tangentes en estos puntos coinciden; la curva yace en la cápsula convexa del polígono. Es más, los algoritmos más rápidos y numéricamente más estables para desplegar gráficamente una curva polinómica se basan en su representación de Bézier.

### 2.1 Polinomios de Bernstein

El cálculo de la expansión binomial

$$1 = (u + (1 - u))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i}$$

nos permite introducir **los polinomios de Bernstein** de grado  $n$ ,

$$B_i^n(u) := \binom{n}{i} u^i (1 - u)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n,$$

representadas en la Figura [2.1](#) para  $n = 4$ .

Las siguientes propiedades de los polinomios de Bernstein de grado  $n$  son importantes para nuestros propósitos:

- **Son linealmente independientes.**

De hecho, dividiendo



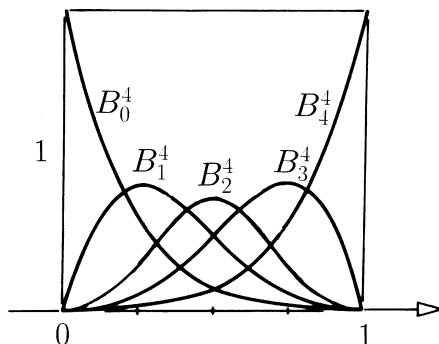


Figura 2.1: Los polinomios de Bernstein para  $n = 4$  sobre  $[0, 1]$ .

$$\sum_{i=0}^n b_i u^i (1-u)^{n-i} = 0 \text{ por } (1-u)^n \text{ y usando } s = u/(1-u)$$

obtenemos

$$\sum_{i=0}^n b_i s^i = 0, \text{ lo cual implica que } b_0 = b_1 = \dots = b_n = 0.$$

- Son **simétricos**,

$$B_i^n(u) = B_{n-i}^n(1-u).$$

- Las **únicas raíces** son 0 y 1,

$$B_i^n(0) = B_{n-i}^n(1) = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 0 \\ 0 & \text{para } i > 0 \end{cases}.$$

- **Forman una partición de la unidad**,

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(u) = 1, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}.$$

- Son **positivos** en  $(0, 1)$ :

$$B_i^n(u) > 0, \text{ para } u \in (0, 1).$$

- **Satisfacen la relación de recurrencia**

$$B_i^{n+1}(u) = u B_{i-1}^n(u) + (1-u) B_i^n(u),$$

donde  $B_{-1}^n \equiv B_{n+1}^n \equiv 0$  y  $B_0^0 \equiv 1$ .

Esta relación de recurrencia se desprende de la identidad

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}.$$

**Observación 1:** El cálculo de los polinomios de Bernstein de grado  $n$  se puede organizar en un esquema triangular tal como se muestra en la recursión dada por la regla de la derecha:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 = & B_0^0 & B_0^1 & B_0^2 & \cdots & B_0^n \\
 & & B_1^1 & B_1^2 & \cdots & B_1^n \\
 & & & B_2^2 & \cdots & B_2^n \\
 & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & B_n^n
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \text{regla} \\
 * \begin{array}{c} \nearrow u \\ \xrightarrow{1-u} \end{array} *
 \end{array}$$

## 2.2 Curvas de Bézier

Los polinomios de Bernstein  $B_i^n$  de grado  $n$  forman una base para el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Por lo tanto toda curva polinómica  $\mathbf{b}(u)$  de grado  $\leq n$  tiene una única **representación de Bézier**

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i B_i^n(u).$$

La transformación afín

$$u = a(1 - t) + bt, \quad a \neq b,$$

deja invariante el grado de  $\mathbf{b}$ , por lo tanto  $\mathbf{b}(u(t))$  también tiene una única representación de grado  $n$ , en términos de los  $B_i^n(t)$

$$\mathbf{b}(u(t)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t).$$

Los coeficientes  $\mathbf{b}_i$  en  $\mathbf{R}^d$  se denominan **puntos de Bézier** y son los vértices del **polígono de Bézier** de  $\mathbf{b}(u)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ . Nos referimos a  $t$  como el **parámetro local** y a  $u$  como el **parámetro global** de  $\mathbf{b}$ , ver la Figura 2.2.

La representación de Bézier de la curva polinómica hereda las propiedades de los polinomios de Bernstein listadas en 2.1

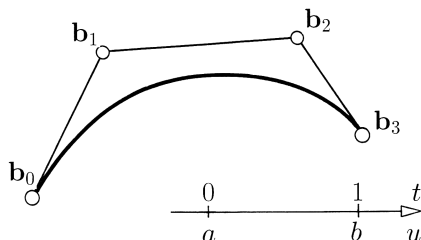


Figura 2.2: Una curva cúbica con su polígono de Bézier sobre  $[a, b]$ .

- La **simetría** de los polinomios de Bernstein implica

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{n-i} B_i^n(s),$$

donde

$$u = a(1-t) + bt = b(1-s) + as$$

Nos referimos a la primera y segunda suma como las **representaciones de Bézier de  $\mathbf{b}$**  sobre  $[a, b]$  y  $[b, a]$ , respectivamente; o sea que usamos intervalos orientados para distinguir las dos curvas polinómicas.

- Los **extremos** del segmento de curva  $\mathbf{b}[a, b]$  son

$$\mathbf{b}(a) = \mathbf{b}_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{b}(b) = \mathbf{b}_n .$$

Como los polinomios de Bernstein suman uno,

- $\mathbf{b}(u)$  es una **combinación afín** de sus puntos de Bézier.

En consecuencia,

- la representación de Bézier es **afinmente invariante**, es decir, dada una aplicación afín  $\Phi$ , la curva imagen  $\Phi(\mathbf{b})$  tiene a los  $\Phi(\mathbf{b}_i)$  como puntos de control, sobre  $[a, b]$ .

Como los polinomios de Bernstein son no negativos en  $[0, 1]$ ,

- se tiene que para todo  $u \in [a, b]$ ,  $\mathbf{b}(u)$  es una **combinación convexa** de los  $\mathbf{b}_i$ . Por lo tanto el segmento de curva  $\mathbf{b}[a, b]$  yace en la cápsula convexa de los  $\mathbf{b}_i$ , tal como se ilustra en la Figura 2.3.

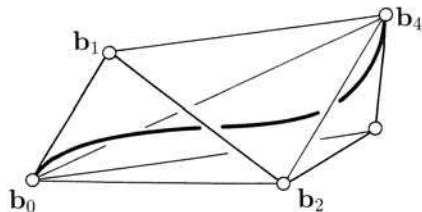


Figura 2.3: La cápsula convexa de un polígono de Bézier.

**Observación 2:** Usando la propiedad de la cápsula convexa, para cada coordenada  $\mathbf{b}(u)$  se obtiene una **caja de acotación** para el segmento de curva  $\mathbf{b}[a, b]$ . Esto es

$$\mathbf{b}[a, b] \subset \left[ \min_{i=0}^n \mathbf{b}_i, \max_{i=0}^n \mathbf{b}_i \right], \quad u \in [a, b],$$

como se ilustra en la Figura 2.4 para una curva plana.

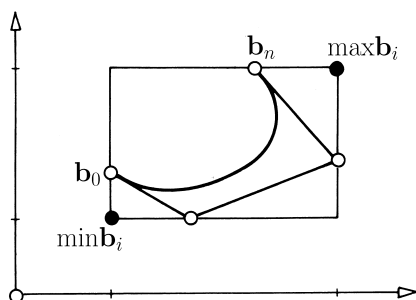


Figura 2.4: Caja de acotación.

## 2.3 Algoritmo de de Casteljaou

Una curva  $\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$  se puede evaluar usando el **algoritmo de de Casteljaou** [Casteljaou '59]. Esto usualmente se hace para  $t \in [0, 1]$ . El proceso es como sigue: usando las relaciones de recurrencia para los polinomios de Bernstein y agrupando términos repetidamente se obtiene

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{b}_i^1 B_i^{n-1}(t) = \dots = \sum_{i=0}^0 \mathbf{b}_i^n B_i^0(t) = \mathbf{b}_0^n,$$

donde

$$\mathbf{b}_i^{k+1} = (1-t)\mathbf{b}_i^k + t\mathbf{b}_{i+1}^k.$$

La Figura 2.5 ilustra dos ejemplos de evaluación de la curva  $\mathbf{b}(u)$ , en los puntos  $t = 0.4$  (izquierda) y  $t = 1.4$  (derecha).

Los puntos intermedios  $\mathbf{b}_i^k$  del algoritmo de de Casteljau pueden organizarse en un esquema triangular, el cual sugiere su generación recursiva:

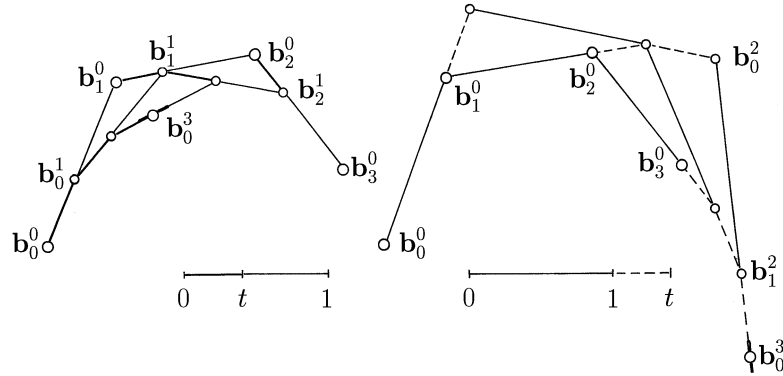
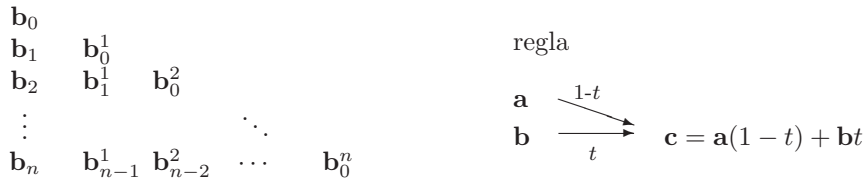


Figura 2.5: La construcción de de Casteljau para puntos dentro y fuera de  $[0, 1]$ .



**Observación 3:** Si  $t$  yace en  $[0, 1]$ , entonces la construcción de de Casteljau involucra solamente combinaciones convexas, lo que garantiza la estabilidad numérica del algoritmo.

**Observación 4:** El **método de Horner** es un algoritmo óptimo, desde el punto de vista del número de operaciones, para evaluar polinomios en forma monomial. Este método también se puede usar para evaluar una curva  $\mathbf{b}(t) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ , en su representación de Bézier. Después de expresar  $\mathbf{b}(t)$  como:

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)^n \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \binom{n}{i} \left( \frac{t}{1-t} \right)^i \right),$$

primero se evalúa la expresión en paréntesis usando el método de Horner para el valor  $t/(1-t)$  y posteriormente se multiplica el resultado por  $(1-t)^n$ . Sin embargo esta técnica falla cuando  $t$  está cerca de 1. En este caso se usa la expresión:

$$\mathbf{b}(t) = t^n \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{n-i} \binom{n}{i} \left( \frac{1-t}{t} \right)^i \right).$$

## 2.4 Derivadas

La derivada de un polinomio de Bernstein de grado  $n$  es fácil de calcular. De la definición de los polinomios de Bernstein se obtiene:

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \quad \text{para } i = 0, \dots, n.$$

Para unificar la notación hemos supuesto, como antes, que  $B_{-1}^{n-1} \equiv B_n^{n-1} \equiv 0$ . Luego dada una curva

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a},$$

obtenemos

$$\frac{d}{du} \mathbf{b}(u) = \frac{n}{b-a} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t),$$

donde  $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$  denota la **primera diferencia hacia adelante**, ver la Figura 2.6.

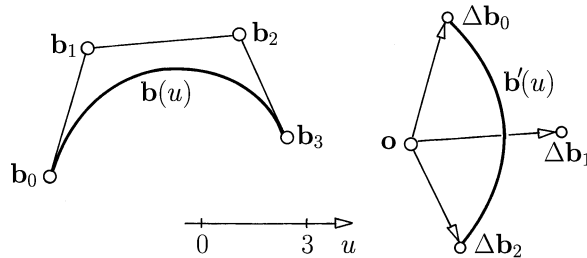


Figura 2.6: Curva de Bézier y su hodógrafo.

Si  $\mathbf{b}(u)$  se considera un punto, entonces  $\mathbf{b}'(u)$  es un vector. Al sumarle un punto a  $\mathbf{b}'(u)$  se obtendrá un punto. En particular  $\mathbf{o} + \mathbf{b}'(u)$  se denomina el **primer hodógrafo** de  $\mathbf{b}$ .

Aplicando repetidamente la fórmula para la derivada, obtenemos la  $r$ -ésima derivada de  $\mathbf{b}$ ,

$$\mathbf{b}^{(r)}(u) = \frac{n!}{(n-r)!(b-a)^r} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r \mathbf{b}_i B_i^{n-r}(t) ,$$

donde  $\Delta^r \mathbf{b}_i = \Delta^{r-1} \mathbf{b}_{i+1} - \Delta^{r-1} \mathbf{b}_i$  es la  $r$ -ésima **diferencia hacia adelante** de  $\mathbf{b}_i$ . De modo análogo se obtiene el segundo hodógrafo y otros de orden superior.

A partir de las fórmulas de las derivadas y de la propiedad de interpolación de los puntos de control en los extremos obtenemos el siguiente resultado observado por Pierre Bézier:

*Las derivadas  $r$ -ésimas hasta orden  $n$ , de  $\mathbf{b}(u)$  en  $t = 0$  ( $t = 1$ ) dependen de los primeros (últimos)  $r + 1$  puntos de Bézier. El recíproco de esta observación también es cierto.*

Geoméricamente, ésto significa que las rectas **tangentes** de  $\mathbf{b}$  en  $t = 0$  y en  $t = 1$  pasan por  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$  y  $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n$ , respectivamente. Los **planos osculadores** de  $\mathbf{b}$  en  $t = 0$  y  $t = 1$  son generados por  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  y  $\mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n$ , respectivamente. La Figura 2.7 ilustra esta propiedad.

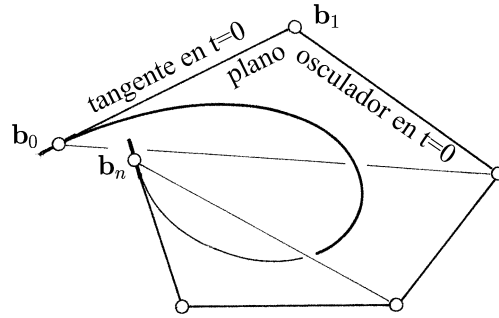


Figura 2.7: Tangentes y planos osculadores en los extremos.

**Observación 5:** Si consideramos el polígono de control de una curva de Bézier  $\mathbf{b}(u) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ , donde  $u = (1-t)a + tb$ , como una función lineal por trozos  $\mathbf{p}(u)$  definida sobre  $[a, b]$ , entonces

*la derivada  $\mathbf{p}'(u)$  del polígono de Bézier son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}'(u)$ .*

Esto se ilustra en la Figura 2.8 para una curva funcional.

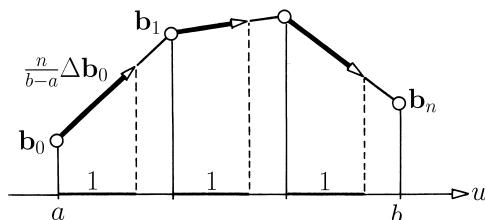


Figura 2.8: Derivadas de un polígono de Bézier.

## 2.5 Parametrización singular

Consideramos la curva polinómica

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) ,$$

y su derivada

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(t) ,$$

donde el punto indica derivación con respecto al parámetro  $t$ .

Si  $\Delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{o}$ , entonces  $\dot{\mathbf{b}}(t)$  es cero en  $t = 0$ .

Sin embargo, en términos de la reparametrización singular  $t = \sqrt{s}$  se obtiene

$$\frac{d}{ds} \mathbf{b}(t(0)) = n \cdot \Delta \mathbf{b}_1$$

Entonces, si  $\Delta \mathbf{b}_0 = \mathbf{o}$  y  $\Delta \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{o}$ , la recta tangente de  $\mathbf{b}(t)$  en  $t = 0$  pasa por  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_2$ , como se ilustra en la Figura 2.9.

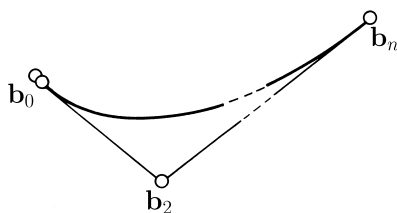


Figura 2.9: Parametrización singular.

**Observación 6:** Si  $\Delta \mathbf{b}_0 = \Delta \mathbf{b}_1 = \mathbf{o}$  y  $\Delta \mathbf{b}_2 \neq \mathbf{o}$  la tangente a  $\mathbf{b}(t)$  en  $t = 0$  pasa por  $\mathbf{b}_3$



## 2.6 Un algoritmo tetraédrico

El cálculo de las diferencias y las combinaciones afines del algoritmo de de Casteljaou se pueden combinar. Concretamente, la  $r$ -ésima derivada de una curva

$$\mathbf{b}(u) = \sum \mathbf{b}_i^0 B_i^n(t), \quad t = \frac{u-a}{b-a},$$

en un punto  $u$  puede ser calculada aplicando el algoritmo de de Casteljaou a múltiplos de las diferencias  $\Delta^k \mathbf{b}_i$ . Como el cálculo de combinaciones afines es conmutativo,

$$\sum \alpha_i \sum \beta_j \mathbf{P}_{ij} = \sum \beta_j \sum \alpha_i \mathbf{P}_{ij},$$

se tiene que el operador  $\Delta$  de diferencias hacia adelante conmuta con los pasos del algoritmo de de Casteljaou.

Por lo tanto, se puede calcular la derivada  $r$ -ésima en  $u$  calculando primero  $n-r$  pasos del algoritmo de de Casteljaou, seguido por  $r$  diferencias y posteriormente multiplicando por el factor  $n \cdots (n-r+1)/(b-a)^r$ . Entonces resulta:

$$\mathbf{b}^{(r)}(u) = \frac{n \cdots (n-r+1)}{(b-a)^r} \Delta^r \mathbf{b}_0^{n-r}.$$

En particular esta fórmula nos dice que la tangente y el plano osculador de  $\mathbf{b}$  en  $u$  están generados por  $\mathbf{b}_0^{n-1}, \mathbf{b}_1^{n-1}$  y  $\mathbf{b}_0^{n-2}, \mathbf{b}_1^{n-2}, \mathbf{b}_2^{n-2}$ , respectivamente, tal como se ilustra en la Figura 2.10 para una cúbica.

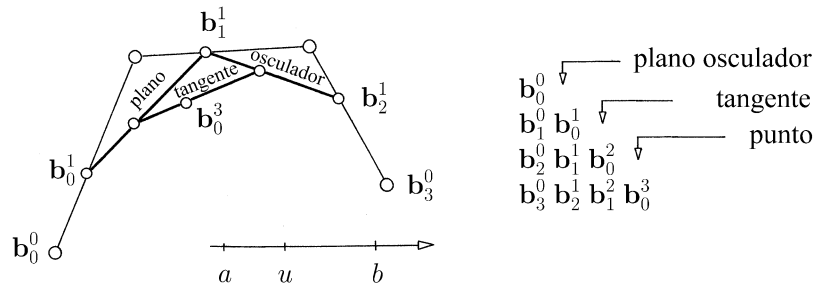


Figura 2.10: Los planos tangente y osculador en el esquema de de Casteljaou.

A lo largo del cálculo de los puntos  $\Delta^r \mathbf{b}_0^{n-k}$  para todo  $k$ , a través de los pasos del algoritmo de de Casteljaou y de las diferencias hacia adelante se generan los puntos intermedios  $\Delta^k \mathbf{b}_j^i, i+j+k \leq n$ . Todos estos puntos se pueden

ubicar espacialmente en un esquema tetraédrico, tal como se ilustra en la Figura 2.11 para  $n = 2$ , en la cual la regla recursiva está dada por:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}(1 - t) + \mathbf{b}t \quad \text{y} \quad \mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} .$$

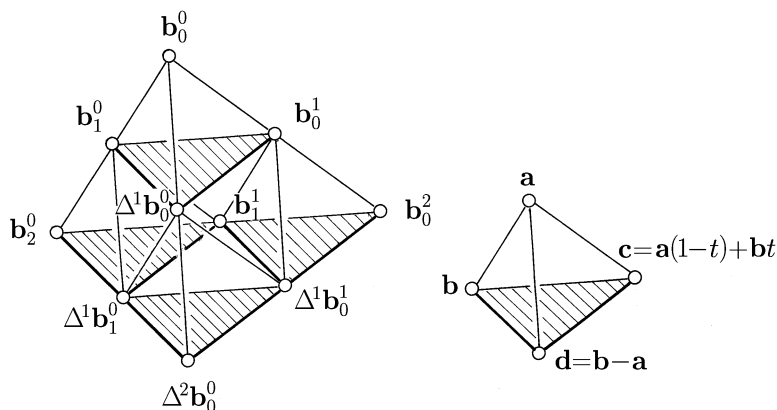


Figura 2.11: El algoritmo tetraédrico.

La recursión anterior no es la única forma para calcular los  $\Delta^k \mathbf{b}_i^j$ . Otras posibilidades se obtienen eliminando  $\mathbf{a}$  o  $\mathbf{b}$ . Esto es:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \mathbf{d}(t - 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{d}t.$$

respectivamente.

Cuando usamos una de estas reglas, en vez del paso correspondiente a la diferencia, entonces es suficiente calcular solamente los puntos de los dos esquemas triangulares dados por los puntos del lado inferior izquierdo (o derecho) del tetraedro.

**Observación 7:** Nótese que tomar diferencias en general no es un proceso numéricamente estable. En consecuencia el cálculo de derivadas tampoco es estable.

## 2.7 Integración

La integral de una curva polinómica en representación de Bézier

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t), \quad t = \frac{u - a}{b - a} ,$$

tiene la representación de Bézier

$$\mathbf{c}(u) = \int \mathbf{b}(u) du = \sum_{i=0}^{n+1} \mathbf{c}_i B_i^{n+1}(t) ,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \mathbf{c}_{i-1} + \frac{b-a}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} \\ &= \mathbf{c}_0 + \frac{b-a}{n+1} (\mathbf{b}_0 + \dots + \mathbf{b}_{i-1}) , \quad i = n+1, \dots, 1 , \end{aligned}$$

y  $\mathbf{c}_0$  es una constante de integración. Esto puede verificarse fácilmente derivando  $\mathbf{c}(u)$ .

A partir de la fórmula anterior y de que  $\mathbf{b}(u)$  interpola los extremos  $\mathbf{b}_0$  y  $\mathbf{b}_n$  se deduce la siguiente igualdad

$$\int_a^b \mathbf{b}(u) du = \frac{b-a}{n+1} (\mathbf{b}_0 + \dots + \mathbf{b}_n)$$

y en particular,

$$\int_0^1 B_i^n(t) dt = \frac{1}{n+1} \quad i = 0, \dots, n \quad .$$

## 2.8 Conversión a la representación de Bézier

Algunos sistemas antiguos de diseño asistido por computadora (computer aided design - CAD) utilizan la base monomial para representar curvas. Por lo tanto es importante disponer de formas eficientes para transformar la representación monomial de una curva a su representación de Bézier. Sea

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \binom{n}{i} t^i$$

una curva en representación monomial. Como

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} t^i (1-t+t)^{n-i} &= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{n-i-k} t^{i+k} (1-t)^{n-i-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i+k}{i} B_{i+k}^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{j}{i} B_j^n , \end{aligned}$$

se obtiene

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) ,$$

donde

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^n \binom{j}{i} \mathbf{a}_i$$

y  $\binom{j}{i} = 0$  para  $j < i$ .

La fórmula para convertir de la representación de Bézier a la monomial se obtiene de manera similar, expandiendo los polinomios de Bernstein, ver Ejercicio 4. En 2.9 presentaremos una deducción diferente de esta fórmula de conversión.

**Observación 8:** Si  $\mathbf{a}_2 = \dots = \mathbf{a}_n = \mathbf{o}$ , pero  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{o}$ ,  $\mathbf{b}(t)$  es un polinomio lineal y sus puntos de Bézier sobre  $[0, 1]$  son

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{a}_0 + j\mathbf{a}_1 .$$

Tal como se ilustra en la Figura 2.12.

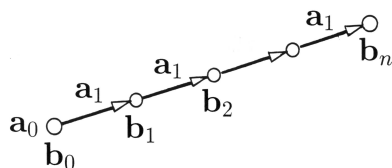


Figura 2.12: Distribución uniforme de puntos de Bézier sobre una recta.

**Observación 9:** Recíprocamente, si los  $n + 1$  puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  están uniformemente distribuidos sobre una recta, entonces  $\mathbf{b}(t)$  es un polinomio lineal y se puede escribir,

$$\mathbf{b}(t) = (1 - t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_n .$$

Esta propiedad se denomina **precisión lineal** de la representación de Bézier.

**Observación 10:** Se desprende de la Observación 8 que la curva de Bézier funcional

$$\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} t \\ b(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \sum b_i B_i^n(t) ,$$

tiene puntos de Bézier  $[i/n \ b_i]^t$  como se ilustra en la Figura 2.13. Los coeficientes  $b_i$  se denominan las **ordenadas de Bézier** de  $\mathbf{b}(t)$  mientras que los puntos  $i/n$ , las **abscisas de Bézier**.

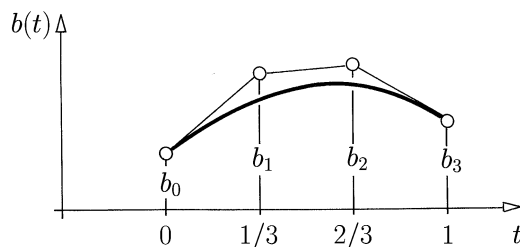


Figura 2.13: Representación de Bézier de una curva funcional.

## 2.9 Conversión a la forma monomial

Dada una curva polinómica en su representación de Bézier se obtiene su forma monomial utilizando la expansión de Taylor,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}(u) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n \left( \frac{u-a}{b-a} \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}^{(i)}(a) \frac{(u-a)^i}{i!} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \Delta^i \mathbf{b}_0 \frac{(u-a)^i}{(b-a)^i} .
 \end{aligned}$$

Como  $\Delta^i \mathbf{b}_0 = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \mathbf{b}_k$ , ver Ejercicio 3,  $\mathbf{b}(a)$  se puede describir como

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} \mathbf{b}_k t^i .$$

**Observación 11:** Usando el algoritmo tetraédrico de 2.6 se puede calcular la expansión de Taylor en  $u$ :

$$\mathbf{b}(u+h) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{(b-a)^i} \Delta^i \mathbf{b}_0^{n-i} \binom{n}{i} h^i .$$

## 2.10 Ejercicios

- 1 Muestre que el polinomio de Bernstein  $B_i^n(t)$  tiene un sólo máximo en  $[0, 1]$ , en concreto en  $t = i/n$ .

- 2** El **operador de Bernstein**  $B$  asocia a una función  $f$  en  $[0, 1]$  el polinomio.

$$B[f] = \sum_{i=0}^n f(i/n) B_i^n(t).$$

Si  $f$  es un polinomio de grado  $m \leq n$ , muestre que  $B[f]$  también lo es. Vea el Ejercicio 2 de 3.13

- 3** Demuestre que

$$\Delta^i \mathbf{b}_0 = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^{i-k} \mathbf{b}_k .$$

- 4** Encuentre la fórmula de conversión de la presentación de Bézier a la monomial por medios algebraicos elementales como en 2.8.
- 5** Verifique la identidad

$$n \dots (n-k) t^{k+1} = \sum_{i=0}^n i \dots (i-k) B_i^n(t).$$

- 6** Verifique que una cúbica plana  $\mathbf{b}(t)$  tiene una **cúspide** en  $t = 0$ , esto es:  $t = 0$  es un punto donde  $\mathbf{b}(t)$  invierte su dirección si  $\dot{\mathbf{b}}(0) = \mathbf{o}$  y ambas coordenadas de  $\ddot{\mathbf{b}}(0)$  son diferentes de cero (los puntos indican derivación respecto a  $t$ ).
- 7** Demuestre que una cúbica plana  $\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{b}_i B_i^3(t)$  tiene una cúspide si  $\mathbf{b}_3$  yace en la parábola

$$\mathbf{p}(t) = (\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) B_0^2(t) + \mathbf{b}_1 B_1^2(t) + \mathbf{b}_2 B_2^2(t)$$

[Pottmann & DeRose '91].

- 8** ¿Para qué escogencia de  $\mathbf{b}_3$ , tiene  $\mathbf{b}(t)$  un lazo?
- 9** Sea  $\sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \binom{n}{i} t^i = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$ . Entonces en notación matricial se tiene

$$[\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_n] = [\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_n] \Delta ,$$

donde  $\Delta = [(-1)^{j-i} \binom{j}{i}]$  y  $\Delta^{-1} = \left[ \binom{i}{j} \right]$ . Nótese que las matrices  $\Delta$  y  $\Delta^{-1}$  son triangulares superiores.



## 3 Técnicas de Bézier

[3.1 Polinomios simétricos](#) — [3.2 El teorema fundamental](#) — [3.3 Subdivisión](#) — [3.4 Convergencia con la subdivisión](#) — [3.5 Generación de curvas por subdivisión](#) — [3.6 Generación de curvas por diferencias hacia adelante](#) — [3.7 Intersección](#) — [3.8 La propiedad de variación decreciente](#) — [3.9 El polinomio simétrico asociado a la derivada](#) — [3.10 Conexiones  \$C^r\$  simples](#) — [3.11 Elevación de grado](#) — [3.12 Convergencia por elevación de grado](#) — [3.13 Ejercicios](#)

Muchos algoritmos para curvas de Bézier pueden ser considerados en el contexto de los polinomios simétricos. En el presente capítulo estudiamos la relación entre un polinomio de una variable y el polinomio simétrico, de varias variables, que se le asocia. Presentamos también los algoritmos básicos del diseño geométrico asistido por computadora (Computer Aided Geometric Design-CAGD) en términos de esta relación. El más importante de estos algoritmos es el de de Casteljau, el cual es muy útil tanto en implementaciones prácticas como en el contexto teórico.

### 3.1 Polinomios simétricos

A cada curva polinómica  $\mathbf{b}(u)$  de grado  $\leq n$  se le puede asociar un único **polinomio simétrico**  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  con las siguientes tres propiedades:

- $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  coincide con  $\mathbf{b}(u)$  sobre la diagonal, esto es

$$\mathbf{b}[u \dots u] = \mathbf{b}(u) .$$

- $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  es **simétrico** lo cual significa que, para cualquier permutación  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $(u_1, \dots, u_n)$

$$\mathbf{b}[v_1 \dots v_n] = \mathbf{b}[u_1 \dots u_n], .$$

- $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  es **afín** en cada variable, esto es:

$$\mathbf{b}[(\alpha u + (1 - \alpha)v) u_2 \dots u_n] = \alpha \mathbf{b}[u u_2 \dots u_n] + (1 - \alpha) \mathbf{b}[v u_2 \dots u_n] .$$



Clásicamente, el polinomio simétrico  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  se denomina **forma polar asociada** a  $\mathbf{b}(u)$ . Más recientemente se ha venido denominando **blossom** de  $\mathbf{b}(u)$  [Ramshaw '87]. Para demostrar que cualquier polinomio de una variable tiene una forma polar es suficiente encontrar las formas polares de los elementos de una base del espacio vectorial de polinomios.

De hecho, dada cualquier combinación lineal

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i C_i(u)$$

donde cada  $C_i(u)$  tiene grado  $n$  y denotando sus formas polares por  $C_i[u_1 \dots u_n]$  se tiene que su forma polar está dada por

$$\mathbf{b}[u_1 \dots u_n] = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i C_i[u_1 \dots u_n] .$$

Nótese que la diagonal  $\mathbf{b}[u \dots u]$  puede tener grado menor que  $n$  a pesar de que  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  depende de  $n$  variables.

En el caso de que los  $C_i$  son los monomios  $A_i^n = \binom{n}{i} u^i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , se obtienen los **polinomios simétricos elementales**

$$A_i^n[u_1 \dots u_n] = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} u_{j_1} \dots u_{j_i}$$

los cuales satisfacen las tres propiedades de arriba. Nótese que la suma en la fórmula anterior se extiende sobre  $\binom{n}{i}$  productos de  $i$  variables.

En el caso de que los  $C_i$  sean los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i}$$

se obtiene:

$$B_i^n[u_1 \dots u_n] = \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_i \\ k_1 < \dots < k_{n-i}}} u_{j_1} \dots u_{j_i} \cdot (1 - u_{k_1}) \dots (1 - u_{k_{n-i}}) ,$$

donde  $(j_1, \dots, j_i, k_1, \dots, k_{n-i})$  es una permutación de  $(1, \dots, n)$ . Como antes, las propiedades anteriores son fáciles de verificar.

**Observación 1:** Los polinomios simétricos  $B_i^n[u_1 \dots u_n]$  satisfacen la relación de recurrencia

$$B_i^{n+1}[u_0 \dots u_n] = u_0 B_{i-1}^n[u_1 \dots u_n] + (1 - u_0) B_i^n[u_1 \dots u_n] .$$

## 3.2 El teorema fundamental

La unicidad del polinomio simétrico y su relación con la representación de Bézier está dada por el siguiente teorema, el cual se generaliza en varias direcciones en este texto:

*Para cada curva polinómica  $\mathbf{b}(u)$  de grado  $\leq n$  existe un único polinomio simétrico de  $n$  variables  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$ , el cual es multiafín y su diagonal satisface  $\mathbf{b}[u \dots u] = \mathbf{b}(u)$ . Es más, los puntos*

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}[a \overset{n-i}{\cdot} a \overset{i}{\cdot} b] , \quad i = 0, \dots, n ,$$

*son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(u)$  sobre  $[a, b]$ .*

**Demostración:** En 3.1 demostramos la existencia de la forma polar  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  para un curva  $\mathbf{b}(u)$ . Por lo tanto podemos considerar los puntos:

$$\mathbf{b}_i^k = \mathbf{b}[a \overset{j}{\cdot} a \overset{k}{\cdot} u_1 \overset{i-k}{\cdot} u_k \overset{i}{\cdot} b] , \quad i + j + k = n .$$

Como  $\mathbf{b}_0^n = \mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  es simétrico y multiafín, puede calcularse a partir de los  $\mathbf{b}_i^0$  por medio de la siguiente relación de recurrencia

$$(1) \quad \mathbf{b}_i^{k+1} = \mathbf{b}_i^k \cdot (1 - t_{k+1}) + \mathbf{b}_{i+1}^k \cdot t_{k+1} ,$$

donde

$$t_k = \frac{u_k - a}{b - a} .$$

La Figura 3.1 ilustra este proceso, los puntos  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  se denotan por sus argumentos  $u_1 \dots u_n$ .

Es más, si todos los  $u_k$  son iguales a  $u$ , entonces la relación de recurrencia (1) se reduce al algoritmo de de Casteljau para la evaluación de  $\mathbf{b}(u)$ . En consecuencia, como la representación de Bézier es única, los puntos  $\mathbf{b}_i$  son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(u)$  sobre  $[a, b]$ . Por lo tanto, dos polinomios simétricos que coinciden sobre la diagonal, coinciden también sobre todos los argumentos  $[a \overset{n-i}{\cdot} a \overset{i}{\cdot} b]$ , y por la relación de recurrencia (1) son idénticos. Por lo tanto  $\mathbf{b}(u)$  tiene una única forma polar.  $\diamond$

## 3.3 Subdivisión

La relación de recurrencia (1) tal como se ilustra en la Figura 3.2 revela una importante propiedad del algoritmo de Casteljau.

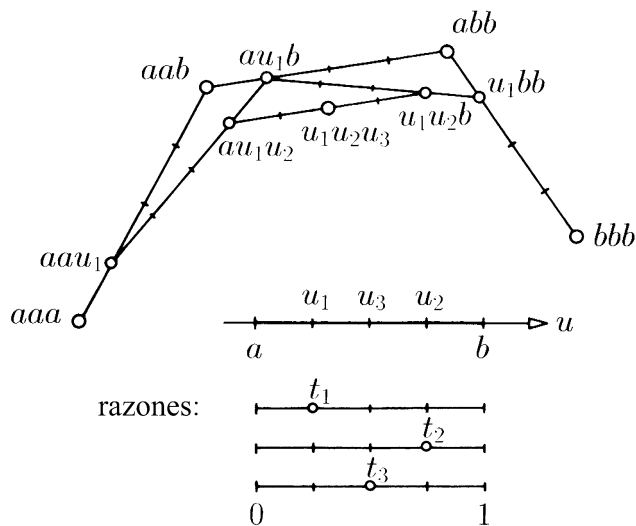


Figura 3.1: Teorema fundamental.

Correctamente en el esquema de de Casteljaou

$$\begin{matrix} \mathbf{b}_0^0 & & & & \\ \mathbf{b}_1^0 & \mathbf{b} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \mathbf{b}_n^0 & \frac{1}{n-1} & \cdots & \mathbf{b}_0^n = \mathbf{b}(c). \end{matrix}$$

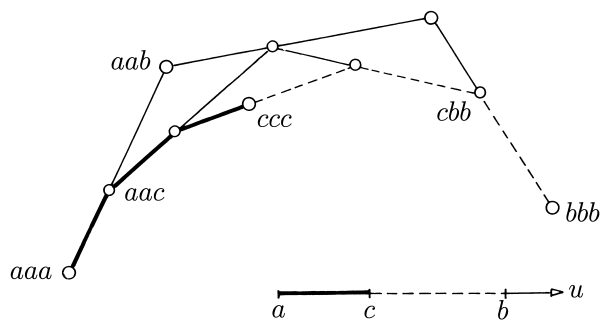


Figura 3.2: Subdivisión.

utilizado para calcular  $\mathbf{b}(c)$ , los puntos de Bézier

$$\mathbf{b}_0^i = \mathbf{b}[a \quad \overset{n-i}{\cdot} \quad a \quad \overset{i}{\cdot} \quad c] \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_i^{n-i} = \mathbf{b}[c \quad \overset{n-i}{\cdot} \quad c \quad \overset{i}{\cdot} \quad b]$$

de la curva sobre  $[a, c]$  y  $[c, b]$  se encuentran en la diagonal superior y la fila inferior respectivamente.

El cálculo de los puntos de Bézier sobre  $[a, c]$  y  $[c, b]$  se denomina **subdivisión**. Al subdividir repetidamente una curva polinómica  $\mathbf{b}(u)$  se genera una partición  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{k-1}, a_k]$  de su dominio. La unión de los polígonos de Bézier sobre los subintervalos se denomina el **polígono de Bézier compuesto** de  $\mathbf{b}$  sobre  $[a_0, a_1, \dots, a_k]$ . En general el polígono compuesto consta de  $kn + 1$  vértices.

### 3.4 Convergencia con la subdivisión

El polígono de Bézier de un segmento “corto” de una curva de Bézier es una buena aproximación a este segmento. En concreto, sean  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  los puntos de Bézier de una curva  $\mathbf{b}(u)$  sobre un subintervalo  $[c, c + nh]$  del intervalo  $[a, b]$  y sean  $c_i = c + ih$  para  $i = 0, \dots, n$ . Entonces

*existe una constante  $M$  que no depende de  $c$  tal que*

$$\max_i \|\mathbf{b}(c_i) - \mathbf{b}_i\| \leq Mh^2 .$$

**Demostración:** Expandimos el polinomio simétrico  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  alrededor de  $[c_i \dots c_i]$  y evaluando en  $[u_1 \dots u_n] = [c \dots c + nh \dots c + nh]$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= \mathbf{b}[c \dots c + nh \dots c + nh] \\ &= \mathbf{b}[c_i \dots c_i] - \sum_{j=1}^{n-i} ih \frac{\partial}{\partial u_j} \mathbf{b}[c_i \dots c_i] + \sum_{j=n-i+1}^n (n-i)h \frac{\partial}{\partial u_j} \mathbf{b}[c_i \dots c_i] \\ &\quad + O(h^2) , \end{aligned}$$

lo cual demuestra nuestra afirmación pues todas las derivadas parciales son iguales.

En las próximas secciones se presentarán aplicaciones de esta propiedad. Una versión más general puede encontrarse en 6.3 para splines.

**Observación 2:** En caso de la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , el mínimo valor posible para la constante  $M$ , para el cual la estimación anterior es válida para cualquier curva, está dada por

$$\max_{i=0, \dots, n-2} \|\Delta^2 \mathbf{b}_i\|_\infty \cdot \lfloor n/2 \rfloor \cdot \lceil n/2 \rceil / 2n .$$

Ver [Nairn et al. '99] y [Reif '00]

**Observación 3:** La convergencia cuadrática no puede ser mejorada, lo que se puede verificar para la parábola  $p(u) = u^2$ , cuyo punto de Bézier intermedio sobre  $[0, 2h]$  es cero y  $p(h) = h^2$ .

### 3.5 Generación de curvas por subdivisión

La técnica de subdivisión provee un método muy rápido para generar una aproximación a una curva de Bézier. De 3.4 se desprende que los polígonos de Bézier sobre

$$\left[0, \frac{1}{2^k}, \frac{2}{2^k}, \dots, 1\right]$$

de una curva

$$\mathbf{b}(t) = \sum b_i B_i^n(t)$$

convergen al segmento de curva  $\mathbf{b}[0, 1]$  con orden  $1/4^h$ . Esto sugiere el siguiente programa de graficación [Lane & Riesenfeld '80]:

```

PLOT BÉZIER ( $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n; k$ )
  if  $k = 1$ 
  then dibujar el polígono  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ 
  else calcular el polígono de Bézier compuesto  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{2n}$ 
        de  $\sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$  sobre  $[0, 0.5, 1]$ .
        Plot Bézier ( $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n, k - 1$ )
        Plot Bézier ( $\mathbf{a}_n, \dots, \mathbf{a}_{2n}, k - 1$ )

```

La Figura 3.3 se obtuvo con el programa anterior aplicado al polígono de control de una cúbica para  $k = 3$ .

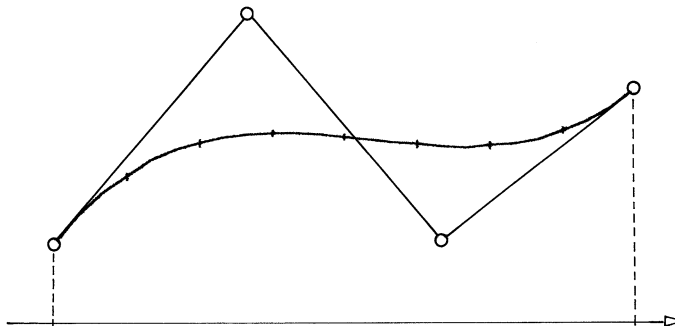


Figura 3.3: Subdivisión de un polígono de Bézier.

Además del número de iteraciones se pueden usar otros criterios de finalización. Por ejemplo, se podría parar cuando el polígono de Bézier es aproximadamente un segmento de recta. Una medida simple de linealidad se basa en segundas diferencias hacia adelante. Así, en el programa anterior se podría

cambiar la primera línea a

$$\text{si } k = 0 \text{ o } \max\{\|\Delta^2 \mathbf{b}_i\| \mid i = 0, \dots, n-2\} < \varepsilon.$$

En vez de dibujar el polígono de Bézier también se podría simplemente dibujar el segmento  $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_n$  si la condición se satisficiera. Una cota para la desviación con respecto a la curva está dada por el siguiente teorema:

Sea  $\mathbf{l}(t) = \mathbf{b}_0(1-t) + \mathbf{b}_n t$  el interpolante lineal de  $\mathbf{b}(t)$  entonces se tiene

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\mathbf{b}(t) - \mathbf{l}(t)\| &\leq \frac{1}{8} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\ddot{\mathbf{b}}(t)\| \\ &\leq \frac{1}{8} n(n-1) \max_{i=0, \dots, n-2} \|\Delta^2 \mathbf{b}_i\|, \end{aligned}$$

donde  $\|\cdot\|$  denota la norma uno, la norma infinito o la norma Euclídea de vectores.

Para la demostración consultar [de Boor '78, pág. 39] y [Filip et al. '86].

**Observación 4:** Si  $\mathbf{b}(u)$  tiene puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  sobre  $[a, b]$  y puntos de Bézier  $\mathbf{c}_i$  sobre un subintervalo  $[c, c+h]$ , entonces las diferencias  $\|\Delta^2 \mathbf{c}_i\|$  están acotadas por  $(h/(b-a))^2 \max \|\Delta^2 \mathbf{b}_i\|$ , vea el Ejercicio 3. Entonces, con respecto a  $h$  la aproximación por el interpolante lineal es cuadrática. El orden de aproximación es cuadrático en general. Entonces por la Observación 3, el polígono de Bézier compuesto sobre  $[0, \frac{1}{2^m}, \dots, 1]$  es una aproximación asintóticamente tan buena como la poligonal resultante de conectar los vértices

$$\mathbf{b}\left(\frac{i}{n2^m}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n2^m$$

**Observación 5:** Desde el punto de vista numérico el programa anterior sólo hace evaluaciones de la forma  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$ . Por lo tanto el proceso se puede acelerar si las divisiones se realizan como desplazamientos de bits. Luego hay aproximadamente  $(n+1)/2$  sumas vectoriales y una división por cada vértice del polígono dibujado por el programa.

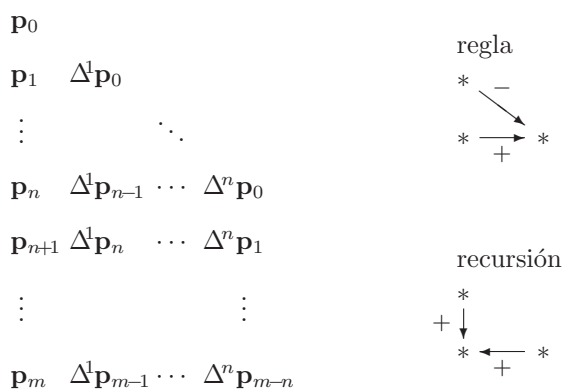
### 3.6 Generación de curvas por diferencias hacia adelante

Otro método rápido para calcular puntos sobre una curva de Bézier está basado en la técnica de diferencias hacia adelante. Sea  $\mathbf{b}(u)$  una curva polinómica y sean

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{b}(a + ih), \quad i = 0, \dots, m,$$

puntos sobre esta curva correspondientes a valores uniformemente distribuidos del parámetro. Si  $\mathbf{b}(u)$  tiene grado  $n$  entonces se tiene que la diferencia hacia adelante  $\Delta^{n+1}\mathbf{p}_i$  es cero y  $\Delta^n\mathbf{p}_i$  es constante (independientemente de  $i$ ). Ver el Ejercicio 1.

Este hecho se puede utilizar para calcular los puntos  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = n + 1, \dots, m$ , a partir de los puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ . En primer lugar se calcula la constante  $\Delta^n\mathbf{p}_0$ , tomando diferencias hacia adelante y luego se determinan los puntos  $\mathbf{p}_i$ ,  $i > n$  por sumas repetidas "hacia atrás". Este cálculo se puede organizar en una forma conveniente por medio del siguiente esquema:



**Observación 6:** Exceptuando el cálculo de los primeros  $n + 1$  puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$  y de las posiciones de la parte triangular del arreglo anterior, se requieren  $n$  sumas vectoriales por cada punto de la curva. Por lo tanto la generación de curvas por subdivisión es casi dos veces más rápida que por diferencias hacia adelante. Además el método de subdivisión es numéricamente más estable, ver la Observación 5.

### 3.7 Intersección

La subdivisión también es útil para el cálculo de las intersecciones de dos curvas de Bézier

$$\mathbf{b}(s) = \sum \mathbf{b}_i B_i^m(s) , \quad s \in [0, 1] ,$$

y

$$\mathbf{c}(t) = \sum \mathbf{c}_i B_i^n(t) , \quad t \in [0, 1] .$$

La idea fundamental para encontrar (o aproximar) la intersección de dos curvas de Bézier consiste en considerar los polígonos de control de las curvas  $\mathbf{b}(s)$  y  $\mathbf{c}(t)$  y sus subdivisiones. Si la intersección de las cápsulas convexas

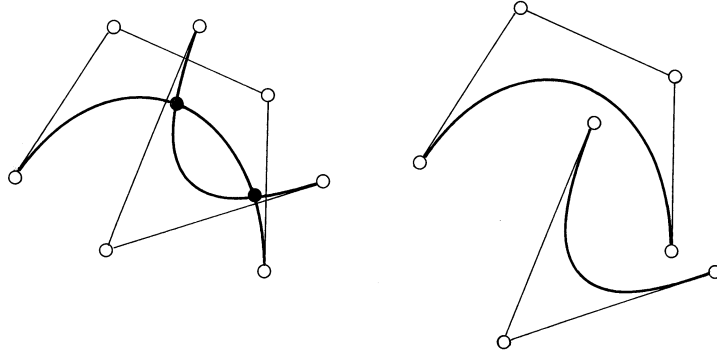


Figura 3.4: Curvas intersecantes y curvas disjuntas.

de los polígonos de control es vacía entonces las curvas no se cortan. Si las cápsulas tienen intersección no vacía entonces éstas podrían cortarse. En este caso subdividimos ambas curvas (por simplicidad) en  $s = 1/2$  y  $t = 1/2$  y verificamos si las cápsulas convexas de cada una de las mitades  $\mathbf{b}[0, 1/2]$  y  $\mathbf{b}[1/2, 1]$  tienen intersección con las cápsulas convexas de  $\mathbf{c}[0, 1/2]$  y  $\mathbf{c}[1/2, 1]$ . Este proceso se repite para todos los pares de segmentos de curvas cuyas cápsulas convexas se intersecan. Si finalmente, las cápsulas convexas se hacen pequeñas y alargadas entonces las curvas se pueden aproximar por segmentos de recta cuyas intersecciones son fáciles de calcular.

En vez de cápsulas convexas, es mucho más fácil usar **cajas de acotación**  $[\min \mathbf{b}_i, \max \mathbf{b}_i]$  y  $[\min \mathbf{c}_i, \max \mathbf{c}_i]$ . Vea la Observación 1 en 2.2. Esta idea sugiere el siguiente programa para calcular la intersección de dos segmentos de Bézier:

```

INTERSECTAR( $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_m; \mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n; \varepsilon$ )
  if  $[\min \mathbf{b}_i, \max \mathbf{b}_i] \cap [\min \mathbf{c}_j, \max \mathbf{c}_j] \neq \emptyset$ 
  then if  $m(m-1) \max \|\Delta^2 \mathbf{b}_i\| > \varepsilon$ 
    then calcular el polígono de Bézier compuesto  $\mathbf{b}'_0, \dots, \mathbf{b}'_{2m}$ 
      de  $\sum \mathbf{b}_i B_i^m(s)$  sobre  $[0, 0.5, 1]$ ,
      INTERSECTAR ( $\mathbf{b}'_0, \dots, \mathbf{b}'_{2m}; \mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n; \varepsilon$ )
      INTERSECTAR( $\mathbf{b}'_m, \dots, \mathbf{b}'_{2m}; \mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n; \varepsilon$ )
    else if  $n(n-1) \max \|\Delta^2 \mathbf{c}_i\| > \varepsilon$ 
      then calcular el polígono de Bézier compuesto  $\mathbf{c}'_0, \dots, \mathbf{c}'_{2n}$ 
        de  $\sum \mathbf{c}_i B_i^n(t)$  sobre  $[0, 0.5, 1]$ ,
        INTERSECTAR ( $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_m; \mathbf{c}'_0, \dots, \mathbf{c}'_{2n}; \varepsilon$ )
        INTERSECTAR ( $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_m; \mathbf{c}'_n, \dots, \mathbf{c}'_{2n}; \varepsilon$ )
      else interseccionar los segmentos de recta  $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_m$  y  $\mathbf{c}_0 \mathbf{c}_n$ 

```



### 3.8 La propiedad de variación decreciente

La subdivisión no es solamente una herramienta de utilidad práctica sino también es importante desde el punto de vista teórico. A continuación vemos como ésta se puede emplear para demostrar la **propiedad de la variación decreciente**:

*El número de veces que un plano arbitrario  $\mathcal{H}$  corta a una curva  $\mathbf{b}(t)$ ;  $t \in [0, 1]$  es menor o igual que el número de veces que  $\mathcal{H}$  corta al polígono de Bézier de  $\mathbf{b}(t)$ .*

La Figura 3.5 muestra un ejemplo.

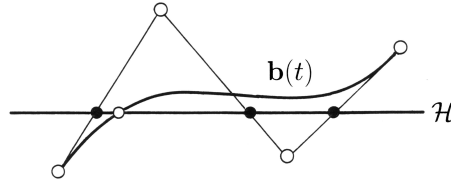


Figura 3.5: Intersección con un hiperplano.

Para demostrarlo primero observamos que el algoritmo de de Casteljau es un proceso repetido de recorte de esquinas para cualquier  $t \in [0, 1]$ . Entendemos por esquina el extremo común de dos segmentos en el espacio. Esto se ilustra en la Figura 3.6 para una esquina.

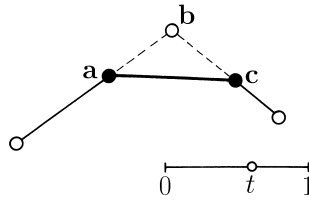


Figura 3.6: Recorte de una esquina.

Si el segmento  $\mathbf{ac}$  corta  $\mathcal{H}$  entonces el polígono  $\mathbf{abc}$  también corta  $\mathcal{H}$ . (Note que el recíproco, sin embargo no es cierto en general.) En consecuencia el polígono de Bézier sobre cualquier subdivisión  $[0, t_1, \dots, t_k, 1]$  de  $[0, 1]$  tiene a lo sumo el mismo número de intersecciones con  $\mathcal{H}$  que el polígono de Bézier sobre  $[0, 1]$ .

En particular, si los  $t_i$  se escogen de manera que  $\mathbf{b}(t_1), \dots, \mathbf{b}(t_k)$  son las intersecciones de  $\mathbf{b}$  con  $\mathcal{H}$ , entonces tenemos que el polígono de Bézier tiene

por lo menos  $k$  intersecciones con  $\mathcal{H}$ .  $\diamond$

**Observación 7:** Si una curva o un polígono en  $\mathbb{R}^d$  corta cualquier plano en a lo sumo dos puntos o yace en ese plano entonces la curva o el polígono es necesariamente plano y se denomina **convexo**. Como consecuencia de la propiedad de la variación decreciente se tiene que toda curva con un polígono de Bézier conexo es a su vez también convexa. Sin embargo, el recíproco de esto no es cierto en general, como se ilustra en la Figura 3.7. Vea también el Ejercicio 11.

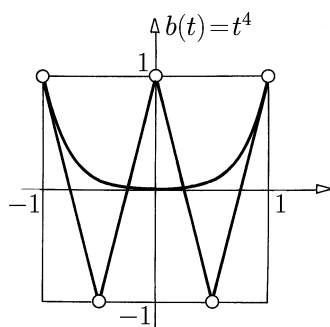


Figura 3.7: Cuártica convexa con un polígono de Bézier no convexo.

**Observación 8:** El gráfico de un polinomio

$$b(t) = \sum b_i B_i^n(t), t \in [0, 1]$$

es convexo o cóncavo si y sólo si  $\ddot{b}(t) \geq 0$  o  $\ddot{b}(t) \leq 0$ . Su polígono de Bézier es convexo o cóncavo si y sólo si todas las diferencias satisfacen  $\Delta^2 b_i \geq 0$  o  $\Delta^2 b_i \leq 0$ .

### 3.9 El polinomio simétrico de la derivada

Las derivadas de una curva polinómica  $\mathbf{b}(u)$  pueden escribirse en términos de su forma polar  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$ . De 2.6 o simplemente derivando el polinomio simétrico se obtiene

$$\mathbf{b}'(u) = \frac{n}{b-a} (\mathbf{b}[b u \dots u] - \mathbf{b}[a u \dots u]) ,$$

y usando la multiafinidad resulta

$$\mathbf{b}'(u) = n(\mathbf{b}[1u \dots u] - \mathbf{b}[0u \dots u]) .$$

Verificando las tres propiedades que caracterizan la forma polar de  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  encontramos que el polinomio multiafín simétrico de  $\mathbf{b}'(u)$  está dado por

$$\mathbf{b}'[u_2 \dots u_n] = n(\mathbf{b}[1 u_2 \dots u_n] - \mathbf{b}[0 u_2 \dots u_n]) .$$

En particular, el polinomio simétrico  $\mathbf{b}[u_1 u_2 \dots u_n]$  de la curva inicial  $\mathbf{b}(u)$  es una aplicación afín en  $u_1$ , si fijamos  $u_2, \dots, u_n$ . Por lo tanto

$$\mathbf{b}[\delta u_2 \dots u_n] = \mathbf{b}[b u_2 \dots u_n] - \mathbf{b}[a u_2 \dots u_n]$$

representa la aplicación lineal subyacente, donde  $\delta = b - a$ . En aras de claridad en la presentación, denotamos las diferencias de parámetros afines, o sea vectores, por medio de letras griegas. En particular usamos la notación  $\varepsilon = 1 - 0$ . Entonces la derivada puede escribirse

$$\mathbf{b}'(u) = n \mathbf{b}[\varepsilon u \dots u] .$$

Iterando el proceso de derivación obtenemos el polinomio simétrico de la  $r$ -ésima derivada de  $\mathbf{b}(u)$

$$\mathbf{b}^{(r)}[u_{r+1} \dots u_n] = \frac{n!}{(n-r)!} \mathbf{b}[\varepsilon \dots \varepsilon u_{r+1} \dots u_n] ,$$

donde

$$\mathbf{b}[\varepsilon \dots \varepsilon u_{r+1} \dots u_n] = \mathbf{b}[\varepsilon \dots \varepsilon 1 u_{r+1} \dots u_n] - \mathbf{b}[\varepsilon \dots \varepsilon 0 u_{r+1} \dots u_n] .$$

**Observación 9:** Como  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  es afín en cada variable, entonces la primera derivada está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{b}[u_1 \dots u_n] &= \mathbf{b}[1 u_2 \dots u_n] - \mathbf{b}[0 u_2 \dots u_n] \\ &= \mathbf{b}[\varepsilon u_2 \dots u_n] \\ &= \frac{1}{n} \mathbf{b}'[u_2 \dots u_n] . \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\frac{\partial^r}{\partial u_1 \dots \partial u_r} \mathbf{b}[u_1 \dots u_n] = \frac{(n-r)!}{n!} \mathbf{b}^{(r)}[u_{r+1} \dots u_n] .$$

### 3.10 Conexiones $C^r$ simples

La subdivisión es también una técnica útil para describir cuando dos curvas  $\mathbf{b}(u)$  y  $\mathbf{c}(u)$  dadas por los polígonos de control  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  sobre  $[a, b]$  y  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n$  sobre  $[b, c]$  se conectan diferenciablemente.

De 2.4 se desprende que las derivadas hasta orden  $r$  en  $u = b$  determinan y son determinadas por los puntos de Bézier  $\mathbf{b}_{n-r}, \dots, \mathbf{b}_n$  sobre  $[a, b]$  y  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_r$  sobre  $[b, c]$ . Entonces obtenemos el **teorema de Stärk** [Stärk '76].

Las derivadas de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  en  $u = b$  son iguales hasta orden  $r$ , si  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_r$  son los primeros  $r + 1$  puntos de Bézier de  $\mathbf{b}$  sobre  $[b, c]$ . Esto significa que

$$\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdot} \overset{i}{\cdot} c] = \mathbf{c}_i \quad \text{para } i = 0, \dots, r .$$

Usando 3.2, el Teorema de Stärk, se puede reescribir

Las derivadas de las curvas  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  son iguales hasta orden  $r$  en  $u = b$  si y sólo si los polinomios  $\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdot} b \overset{r}{\cdot} u]$  y  $\mathbf{c}[b \overset{n-r}{\cdot} b \overset{r}{\cdot} u]$  son iguales.

El polinomio  $\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdot} b \overset{r}{\cdot} u]$  tiene el polígono de Bézier compuesto  $\mathbf{b}_{n-r}, \dots, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_i, \dots, \mathbf{c}_r$ . Los puntos  $\mathbf{c}_i, i \leq r$  se pueden calcular a partir de los  $\mathbf{b}_{n-i}$  aplicando el algoritmo de de Casteljaou.

Las Figuras 3.8 y 3.9 ilustran conexiones  $C^r$  simples obtenidas a través de la construcción de Stärk. El lado izquierdo de la Figura 3.9 representa un **A-marco**.

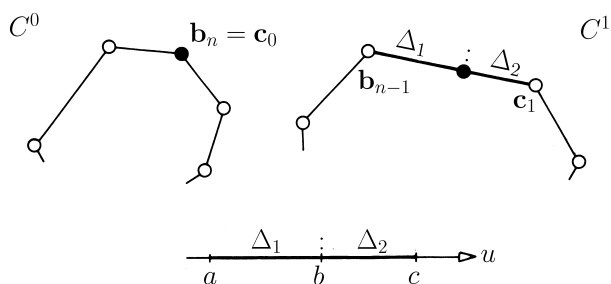


Figura 3.8: Conexiones simples  $C^0$  y  $C^1$ .

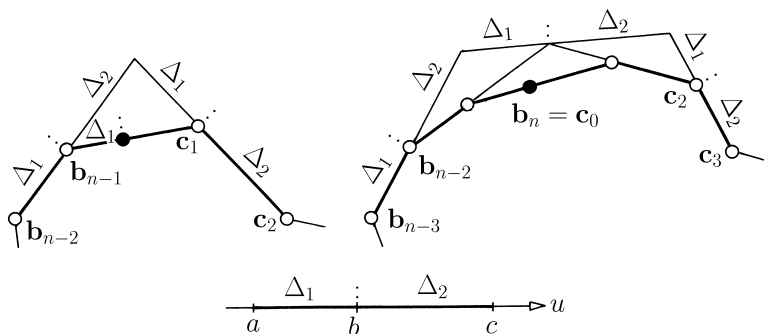


Figura 3.9: Conexiones simples  $C^2$  y  $C^3$ .

**Observación 10:** Como dos polinomios son iguales si y sólo si sus formas polares son iguales, se tiene que las derivadas hasta orden  $r$  de  $\mathbf{b}(u)$  y  $\mathbf{c}(u)$  son iguales en  $u = b$  si y sólo si sus formas polares satisfacen

$$\mathbf{b}[b \overset{n-r}{\cdot} b \ u_1 \dots u_r] = \mathbf{c}[b \overset{n-r}{\cdot} b \ u_1 \dots u_r]$$

para valores arbitrarios de las variables  $u_1, \dots, u_r$ .

### 3.11 Elevación de grado

Para cualquier curva de grado  $n$  y todo  $m \geq n$ , existe una representación de Bézier de grado  $m$  para la curva.

La conversión a una representación de grado mayor se utiliza en ciertas construcciones con superficies y a veces se requiere para el intercambio de datos entre diferentes sistemas de CAD. Esta conversión se denomina **elevación de grado**.

Dada una representación de Bézier de grado  $n$  de una curva,  $\mathbf{b}(u)$

$$\mathbf{b}(u) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(t)$$

mostraremos como elevar el grado de esta presentación en uno. Esto es, escribiremos  $\mathbf{b}(u)$  en términos de polinomios  $B_i^{n+1}(t)$ , para lo que utilizamos el polinomio simétrico  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$  de  $\mathbf{b}(u)$ .

Denotamos con un asterisco la ausencia del término indicado en una secuencia y definimos:

$$(2) \quad \mathbf{c}[u_0 \dots u_n] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mathbf{b}[u_0 \dots u_i^* \dots u_n] .$$

Es fácil verificar que este polinomio en  $n+1$  variables es multiafín, simétrico y que coincide con  $\mathbf{b}(u)$  sobre la diagonal. Entonces por el teorema fundamental en 3.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \mathbf{c}[a \overset{n+1-i}{\cdot} a \ b \ . \overset{i}{\cdot} \ . \ b] \\ &= \frac{i}{n+1} \mathbf{b}[a \overset{n+1-i}{\cdot} a \ b \ . \overset{i-1}{\cdot} \ . \ b] + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}[a \ . \overset{i}{\cdot} \ . \ a \ b \ . \ . \ b] \\ &= \frac{i}{n+1} \mathbf{b}_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} \mathbf{b}_i \end{aligned}$$

son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(u)$  sobre  $[a, b]$  en su representación de grado  $n+1$ . La Figura 3.10 ilustra la construcción para  $n=3$ .

**Observación 11:** La aproximación de un polinomio de grado exactamente  $m$  con un polinomio de grado  $n < m$  se denomina **reducción de grado**, véase por ejemplo [Eck '93, Eck '95, Lutterkort et al '99].

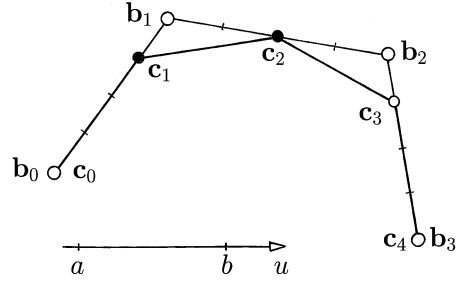


Figura 3.10: Elevación de grado.

### 3.12 Convergencia por elevación de grado

El proceso de elevación de grado se puede repetir hasta obtener una representación de grado tan alto como se quiera

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{k=0}^m \mathbf{d}_k B_k^m(t) , \quad m > n .$$

La expresión simple, dada por Zhou, para los  $\mathbf{d}_k$ ,

$$\mathbf{d}_k = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \beta_{ik} ,$$

donde

$$\beta_{ik} = \binom{n}{i} \binom{m-n}{k-i} / \binom{m}{k}$$

se denomina **distribución polihipergeométrica** en la teoría de probabilidades. La construcción de la representación de grado  $m$  es como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) (1-t+t)^{m-n} \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-n} \mathbf{b}_i \binom{n}{i} \binom{m-n}{j} t^{i+j} (1-t)^{m-i-j} \\ &= \sum_{k=0}^m \left( \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \beta_{ik} \right) B_k^m(t) , \quad \text{donde } k = i + j , \end{aligned}$$

vea [Farin '86, de Boor '87].

Análogamente a la propiedad de convergencia por subdivisión, el polígono de Bézier de la representación de grado  $m$  de  $\mathbf{b}(t)$  converge a  $\mathbf{b}[0, 1]$  , cuando

$m$  tiende a  $\infty$ , vea [Farin '79, Trump & Prautzsch '96]. Rescribiendo  $\beta_{ik}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\beta_{ik} &= \binom{n}{i} \prod_{\alpha=0}^{i-1} \frac{k-\alpha}{m-\alpha} \prod_{\alpha=i}^{n-1} \frac{m-k+i-\alpha}{m-\alpha} \\ &= \binom{n}{i} (k/m)^i (1-k/m)^{n-i} + O(1/m) \\ &= B_i^n(k/m) + O(1/m) .\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de los  $\mathbf{d}_k$  se obtiene

$$\max_{k=0}^m \|\mathbf{d}_k - \mathbf{b}(k/m)\| = O(1/m) ,$$

vea también 11.8

Una prueba diferente, más general, de este hecho se puede encontrar en 6.6 para splines. Vea el Ejercicio 6 de 6.9 para una construcción eficiente de los  $\mathbf{d}_k$ .

### 3.13 Ejercicios

- 1 Considere los desplazamientos uniformes  $\mathbf{p}_i(x) = \mathbf{p}(x - ih)$  de una curva polinómica de grado exactamente  $n$ . Demuestre que la curva  $\Delta^k \mathbf{p}_i(x)$  tiene grado exactamente  $n - k$ .
- 2 Demuestre que el **operador de Bernstein**

$$\mathcal{B}[f](u) = \sum_{i=0}^n f(ih) B_i^n(t) , \quad u = nh \cdot t ,$$

tiene orden de aproximación 2, es decir, si  $f$  es dos veces diferenciable, entonces

$$\max_{u \in [0, nh]} \|\mathcal{B}[f](u) - f(u)\| = O(h^2) .$$

- 3 Sean  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$  los puntos de Bézier sobre el intervalo  $[a, b]$  y sean  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n$  los puntos de Bézier de la misma curva sobre el subintervalo  $[c, c+h]$  de  $[a, b]$ . Demuestre que

$$\max_{i=0, \dots, n-k} \|\Delta^k \mathbf{c}_i\| \leq \left( \frac{h}{b-a} \right)^k \max_{i=0, \dots, n-k} \|\Delta^k \mathbf{b}_i\| ,$$

donde  $\|\cdot\|$  denota el supremo, la norma de la suma o la norma Euclídea.

- 4 Sea  $\mathbf{b}$  una curva polinómica. Pruebe que la longitud de arco de su polígono de Bézier compuesto sobre  $[0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1]$  converge cuadráticamente en  $1/m$  a la longitud de arco  $\int_0^1 \|\dot{\mathbf{b}}(t)\|_2 dt$  de  $\mathbf{b}[0, 1]$ . Vea también [Kobbelt & Prautzsch '95, Gravesen '97].
- 5 Verifique que la longitud de arco de los polígonos de Bézier de las representaciones de grado  $m$ , construidos por elevación de grado de  $\mathbf{b}$ , converge linealmente en  $1/m$  a la longitud de arco de  $\mathbf{b}[0, 1]$ .
- 6 Diseñe un algoritmo que encuentre las autointersecciones de una curva de Bézier plana. Si una curva se interseca a sí misma, ¿qué se puede decir del hodógrafo?
- 7 Encuentre dos cúbicas definidas sobre  $[0, 1]$  tales que las curvas y también sus polígonos de Bézier tengan 9 intersecciones.
- 8 Encuentre dos cúbicas sobre  $[0, 1]$  que tengan extremos comunes y que se intersecten en más puntos que sus polígonos de Bézier.
- 9 Describa un algoritmo que verifique si dos cajas con lados paralelos a los ejes coordenadas se intersecan.
- 10 Considere una curva  $\mathbf{b}$  que interseca o toca cualquier hiperplano en un punto o a lo largo de un segmento. Demuestre que  $\mathbf{b}$  yace en un subespacio  $m$ -dimensional.
- 11 Demuestre que el polígono de Bézier de grado  $m$  de  $b(x) = x^4$  sobre  $[-1, 1]$  es no convexo para todo  $m \geq 4$ .
- 12 Considere la representación de Bézier de grado  $m$  de una curva polinómica de grado  $n$ ,  $\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(t)$ . Demuestre que existe un polinomio  $\mathbf{p}$  de grado  $n$  tal que  $\mathbf{p}(i/m) = \mathbf{b}_i$ .
- 13 Verifique que  $\mathbf{b}(t) = [t^2 \ t]^t$  y  $\mathbf{b}(t^2)$  recorren el mismo segmento de curva sobre  $[0, 1]$  pero tienen diferentes polígonos de Bézier de grado 4.
- 14 Use los polinomios simétricos para probar la fórmula de elevación de grado de 3.12:

$$\mathbf{d}_k = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \beta_{ik} .$$





## 4 Interpolación y aproximación

[4.1 Interpolación](#) — [4.2 Interpolación de Lagrange](#) — [4.3 Interpolación de Newton](#) — [4.4 Interpolación de Hermite](#) — [4.5 Interpolación de Hermite cúbica por trozos](#) — [4.6 Aproximación](#) — [4.7 Ajuste por mínimos cuadrados](#) — [4.8 Mejoras en el parámetro](#) — [4.9 Ejercicios](#)

En modelación geométrica, así como también en otras aplicaciones, con frecuencia hay que encontrar expresiones analíticas, usualmente de curvas de las cuales no se conoce una descripción matemática o ésta es muy complicada. En este caso se mide o se evalúa la curva en un conjunto de puntos y se construye una aproximación o interpolación. Este capítulo describe algunas de las técnicas básicas.

### 4.1 Interpolación

Un conjunto de  $n$  funciones  $C_1(u), \dots, C_n(u)$  se dice linealmente independiente sobre los valores  $u_1, \dots, u_n$  si la matriz

$$C = \begin{bmatrix} C_1(u_1) & \cdots & C_n(u_1) \\ \vdots & & \vdots \\ C_1(u_n) & \cdots & C_n(u_n) \end{bmatrix}$$

es no-singular. En tal caso, para cualesquiera  $n$  puntos  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbb{R}^d$  existe una única curva

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i C_i(u)$$

que interpola los puntos  $\mathbf{p}_i$  en los  $u_i$ , i.e.,

$$\mathbf{p}(u_i) = \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Para verificarlo escribimos las condiciones de interpolación en forma matricial

$$\begin{bmatrix} C_1(u_1) & \dots & C_n(u_1) \\ \vdots & & \vdots \\ C_1(u_n) & \dots & C_n(u_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^t \end{bmatrix}$$

o en forma abreviada

$$CX = P$$

lo que representa  $d$  sistemas de ecuaciones lineales simultáneas para las  $d$  columnas de  $X$ . La existencia de la solución se desprende de la independencia de  $C_1, \dots, C_n$  sobre  $u_1, \dots, u_n$ .  $\diamond$

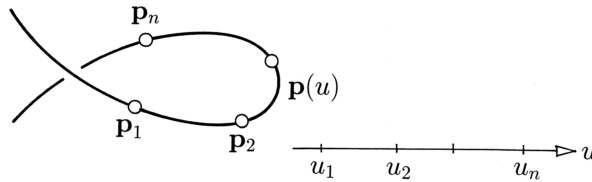


Figura 4.1: Curva interpolante

**Observación 1:** Si los  $C_i$  son polinomios de grado  $n - 1$ , la matriz  $C$  es invertible para cualesquiera  $n$  valores distintos  $u_1, \dots, u_n$ . De hecho, el sistema  $C\mathbf{x} = \mathbf{o}$  (para una sola columna  $\mathbf{x}$ ) tiene solamente la solución trivial  $\mathbf{x} = \mathbf{o}$  pues el polinomio cero es el único polinomio de grado  $n - 1$  con  $n$  raíces.

**Observación 2:** Dos puntos pueden interpolarse con una recta, tres con una parábola, cuatro con una cúbica, etc.

## 4.2 Interpolación de Lagrange

Un método simple para construir una interpolación polinómica fue propuesto por Lagrange. Dados  $n + 1$  puntos  $\mathbf{p}_i$  con sus correspondientes valores paramétricos  $u_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , de acuerdo con la Observación 1 existe una única curva polinómica  $\mathbf{p}$  de grado  $n$  que interpola dichos puntos. Dicha curva puede escribirse como

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i L_i^n(u) ,$$

donde los **polinomios de Lagrange**  $L_i^n(u)$  se definen como

$$L_i^n(u_k) = \begin{cases} 1 & \text{según } k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases} .$$

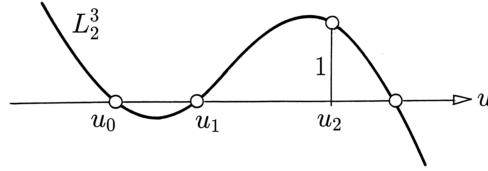


Figura 4.2: Polinomio de Lagrange de grado 3.

La Figura 4.2 muestra un ejemplo.

Claramente, se tiene

$$L_i^n = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (u - u_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (u_i - u_j)} .$$

Existen diferentes maneras para evaluar los polinomios de Lagrange. Una posibilidad consiste en usar la siguiente relación de recurrencia: primero observe que los polinomios de Lagrange suman uno,

$$\sum_{i=0}^n L_i^n(u) \equiv 1 .$$

Entonces por definición

$$(1) \quad L_i^k = \begin{cases} L_i^{k-1} \alpha_{ik} & \text{si } i = 0, \dots, k-1 \\ 1 - \sum_{j=0}^{k-1} L_j^{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} L_j^{k-1} (1 - \alpha_{jk}) & \text{si } i = k , \end{cases}$$

donde  $\alpha_{ik}$  representa el parámetro local en  $[u_k, u_i]$ ,

$$\alpha_{ik} = \frac{u - u_k}{u_i - u_k} .$$

Como en el algoritmo de de Casteljaou en 2.3, mediante esta relación de recurrencia se obtiene un método iterativo para evaluar  $\mathbf{p}(u)$  a partir de los puntos  $\mathbf{p}_i^0 = \mathbf{p}_i$  tomando combinaciones afines.

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(u) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i^0 L_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i^1 L_i^{n-1}(u) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{i=0}^0 \mathbf{p}_i^n L_i^0(u) = \mathbf{p}_0^n , \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \mathbf{p}_i^k \alpha_{i,n-k} + \mathbf{p}_{n-k}^k (1 - \alpha_{i,n-k}) .$$

Esta forma de calcular  $\mathbf{p}(u)$  se denomina el **algoritmo de Aitken**. Nótese que los polinomios  $\mathbf{p}_i^k = \mathbf{p}_i^k(u)$  tienen grado  $k$  e interpolan los puntos  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_n, \dots, \mathbf{p}_{n-k+1}$ .

**Observación 3:** La evaluación de los polinomios de Lagrange, por el método anterior, puede organizarse mediante el siguiente esquema triangular:

$$1 = \begin{array}{cccccc} L_0^0 & L_0^1 & L_0^2 & \cdots & L_0^n \\ & L_1^1 & L_1^2 & \cdots & L_1^n \\ & & L_2^2 & \cdots & L_2^n \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & L_n^n . \end{array}$$

**Observación 4:** Similarmente se puede organizar también el cálculo de los  $\mathbf{p}_i^k$  por medio de un esquema triangular análogo

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{p}_0^0 & & & & & & \\ \mathbf{p}_1^0 & \mathbf{p}_1^1 & & & & & \\ \mathbf{p}_2^0 & \mathbf{p}_1^1 & \mathbf{p}_0^2 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \mathbf{p}_n^0 & \mathbf{p}_{n-1}^1 & \mathbf{p}_{n-2}^2 & \cdots & \mathbf{p}_0^n & & . \end{array}$$

En líneas generales la interpolación de Lagrange tiene interés teórico pues en la práctica muchas veces no produce los resultados que espera el diseñador.

### 4.3 Interpolación de Newton

Otra base del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que  $n$ , útil para la construcción de curvas polinómicas de interpolación en valores prescritos del parámetro  $u_0, u_1, \dots, u_n$ , fué introducida por Newton. Considere los  $n + 1$  polinomios mónicos  $P_i(u)$  donde  $P_i$  tiene grado  $i$  y se anula en las primeras  $i$  abscisas  $u_0, \dots, u_{i-1}$ . Esto es:

$$P_0 = 1 \quad \text{y para } i \geq 1 \quad P_i(u) = (u - u_0) \cdots (u - u_{i-1}) .$$

Si  $[u_0 \dots u_i] \mathbf{q}$  denota al coeficiente dominante, correspondiente al término de mayor grado, del polinomio de grado  $i$  que interpola una curva dada  $\mathbf{q} = \mathbf{q}(u)$  en los puntos  $u_0, \dots, u_i$ , entonces la curva  $\mathbf{p}(u)$  de grado  $\leq n$  que interpola  $\mathbf{q}(u)$  en  $u_0, \dots, u_n$  puede escribirse como

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n [u_0 \dots u_i] \mathbf{q} \cdot P_i(u) .$$

De la definición de los polinomios de Lagrange se desprende que el coeficiente dominante es de la forma

$$[u_0 \dots u_n] \mathbf{q} = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{q}(u_k)}{(u_k - u_0) \cdots (u_k - u_k)^* \cdots (u_k - u_n)} ,$$

donde el asterisco (\*) denota que se omite el término correspondiente. Usando esta representación explícita es fácil de verificar la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} [u_0 \dots u_n] \mathbf{q} &= \frac{[u_1 \dots u_n] \mathbf{q} - [u_0 \dots u_{n-1}] \mathbf{q}}{u_n - u_0} \\ &\vdots \\ [u_i u_j] \mathbf{q} &= \frac{[u_j] \mathbf{q} - [u_i] \mathbf{q}}{u_j - u_i} \\ [u_j] \mathbf{q} &= \mathbf{q}(u_j) . \end{aligned}$$

En vista de esta recursión la expresión  $[u_0 \dots u_i] \mathbf{q}$  se denomina la  $i$ -ésima **diferencia dividida** de  $\mathbf{q}(u)$  en  $u_0, \dots, u_i$ . Nótese que las diferencias divididas son simétricas con respecto a sus nodos  $u_0, \dots, u_n$ .

**Observación 5:** Si  $\mathbf{q}(u)$  es suficientemente diferenciable entonces la diferencia dividida  $[u_0 \dots u_n] \mathbf{q}$  depende continuamente de las abscisas  $u_i$ , véase los Ejercicios 1 y 2. Por lo tanto  $[u_0 \dots u_n] \mathbf{q}$  también está definida cuando uno o varios  $u_i$  coinciden, como función de las derivadas en  $u_i$ .

$$[u_i \text{ } n+1 \text{ } u_i] \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(n)}(u_i)/n! .$$

**Observación 6:** Supongamos que  $u_0 = \dots = u_k$ , entonces se desprende de la Observación 5 que

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{j=0}^n [u_0 \dots u_j] \mathbf{q} \cdot P_j(u)$$

interpola todas las derivadas hasta orden  $k$  de  $q(u)$  en  $u = u_0$ . Como  $p(u)$  no depende del orden de las abscisas  $u_i$ , también interpola las derivadas  $q^r(u_i)$ , donde  $u_i = \dots = u_{i+r}$ .

**Observación 7:** Si los valores  $u_i$  están uniformemente distribuidos,  $u_i = u_0 + ih$ , entonces se tiene

$$[u_0 \dots u_n] \mathbf{q} = \frac{1}{n! h^n} \Delta^n \mathbf{q}(u_0) .$$

La principal ventaja de la representación de Newton es la permanencia de las funciones base obtenidas. A diferencia de la interpolación de Lagrange, si se añaden sucesivos puntos de interpolación, no hay que modificar las anteriores funciones base.

## 4.4 Interpolación de Hermite

De la Observación 6 de 4.3 se desprende que la curva

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^n [u_0 \dots u_i] \mathbf{q} \cdot P_i$$

interpola los puntos  $P_i$  y si las abscisas  $u_i$  coinciden entonces también interpola las derivadas de  $\mathbf{q}$ . Esta construcción se denomina **interpolación de Hermite**. En particular, un caso muy frecuente es la interpolación hasta un cierto orden  $k$  en los extremos de un intervalo  $[a, b]$ . El interpolador de Hermite correspondiente es de grado  $n = 2k + 1$  y se puede escribir como

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^k \mathbf{q}_a^{(i)} H_i^n + \sum_{i=0}^k \mathbf{q}_b^{(i)} H_{n-i}^n,$$

donde  $\mathbf{q}_u^{(i)}$  denota la  $i$ -ésima derivada de  $\mathbf{q}$  en  $u$  y los **polinomios de Hermite**  $H_i^n$  de grado  $n$  están definidos por

$$\frac{d^r}{du^r} H_i^n(a) = \frac{d^r}{du^r} H_{n-i}^n(b) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = r \\ 0 & \text{si } i \neq r \end{cases}, \quad r = 0, \dots, k.$$

La Figura 4.3 muestra el interpolador de Hermite de grado tres y los cuatro polinomios de Hermite correspondientes.

Alternativamente, el interpolador se puede describir en su representación de Bézier. Se desprende de 2.8 que los puntos de control  $\mathbf{b}_j$  sobre  $[a, b]$  están dados por

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{(b-a)^i}{n \cdots (n-i+1)} \mathbf{q}_a^{(i)}$$

y

$$\mathbf{b}_{n-j} = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \frac{(a-b)^i}{n \cdots (n-i+1)} \mathbf{q}_b^{(i)},$$

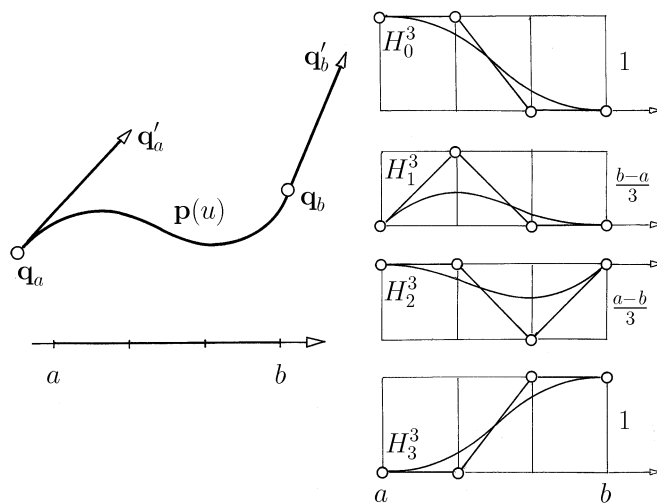


Figura 4.3: Interpolación cúbica de Hermite

es decir, para  $j = 0, \dots, (n - 1)/2$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_0 &= \mathbf{q}_a \\
 \mathbf{b}_1 &= \mathbf{q}_a + \frac{b-a}{n} \mathbf{q}'_a \\
 \mathbf{b}_2 &= \mathbf{q}_a + \frac{b-a}{n} (2\mathbf{q}'_a + \frac{b-a}{n-1} \mathbf{q}''_a) \\
 &\vdots \\
 \mathbf{b}_n &= \mathbf{q}_b .
 \end{aligned}$$

**Observación 8:** En vez de interpolar  $\mathbf{q}'_a$  y  $\mathbf{q}'_b$  se podría interpolar las curvaturas en  $a$  y  $b$ . La **curvatura** en el punto  $a$  está dada por

$$x_a = \frac{n-1}{n} \frac{\| \Delta \mathbf{b}_0 \times \Delta^2 \mathbf{b}_0 \|}{\| \Delta \mathbf{b}_0 \|^3} ,$$

donde  $\times$  denota el producto vectorial.

Si, además de posición y derivadas se interpolan curvaturas en vez de derivadas segundas, aparecen 2 grados extras de libertad en la interpolación de Hermite de grado  $n = 5$ . Los puntos de Bézier  $b_2$  y  $b_3$  se pueden mover paralelamente a las líneas  $b_0b_1$  y  $b_5b_4$ , respectivamente, sin modificar la curvatura de los extremos. Es decir, el interpolador no es único.



## 4.5 Interpolación de Hermite cúbica por trozos

Una función  $f(u)$  se puede aproximar por un polinomio  $p$  de grado  $n$  interpolando  $f$  en  $n + 1$  abscisas  $u_0 < \dots < u_n$ . Un resultado clásico de análisis numérico establece que la diferencia entre  $p$  y  $f$  en  $[u_0, u_n]$  se puede expresar como

$$p(u) - f(u) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!} (u - u_0) \cdots (u - u_n) ,$$

donde  $v = v(u)$  está en  $[u_0, u_n]$ . Por lo tanto usualmente el error se hace pequeño cuando las diferencias entre las abscisas decrecen. Sin embargo un interpolador de grado más alto de la función  $f(u)$  no necesariamente resulta en una mejor aproximación de esta función. Por esta razón es común el uso de funciones polinómicas a trozos de reducido grado.

Por ejemplo, las cúbicas son usadas con mucha frecuencia debido a que tienen grado bajo y a que permiten suficiente flexibilidad para muchas aplicaciones. A continuación describiremos la interpolación de Hermite con polinomios cúbicos a trozos.

Dados  $m$  puntos  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$  y derivadas  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_m$  correspondientes a valores del parámetro  $u_1 < \dots < u_m$ , entonces existe una única cúbica por trozos, continuamente diferenciable  $\mathbf{s}(u)$  sobre  $[u_1, u_m]$  tal que

$$\mathbf{s}(u_i) = \mathbf{p}_i , \quad \text{y} \quad \mathbf{s}'(u_i) = \mathbf{d}_i .$$

Su representación se obtiene de 4.4, y está dada por

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_{3i+j} B_j^3(t_i) , \quad u \in [u_i, u_{i+1}] ,$$

donde  $t_i = (u - u_i)/(u_{i+1} - u_i)$  representa el parámetro local sobre  $[u_i, u_{i+1}]$  para  $i = 1, \dots, m - 1$ , y

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{3i} &= \mathbf{p}_i \\ \mathbf{b}_{3i+1} &= \mathbf{p}_i + \mathbf{d}_i \Delta u_i / 3 \\ \mathbf{b}_{3i+2} &= \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{d}_{i+1} \Delta u_i / 3 . \end{aligned}$$

La Figura 4.4 ilustra esta situación.

Frecuentemente las derivadas  $\mathbf{d}_i$  no están dadas directamente, sino que deben ser estimadas a partir de los datos. Una forma elemental para asignar valores a los  $\mathbf{d}_i$  es calculando las derivadas del interpolador cuadrático determinado por tres puntos consecutivos, como se ilustra en la Figura 4.5.

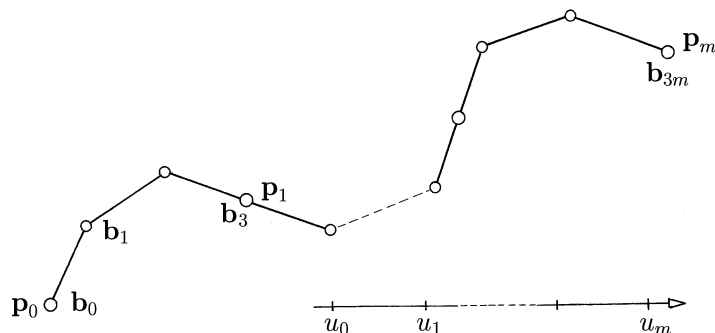


Figura 4.4: Polígono de Bézier compuesto

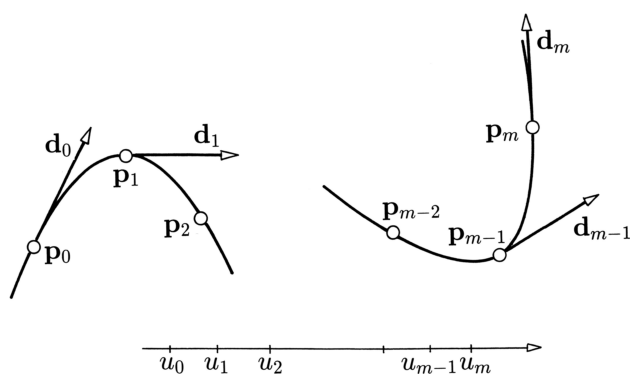


Figura 4.5: Obtención de las derivadas a partir de parábolas.

Esto significa

$$\mathbf{d}_i = (1 - \alpha_i) \frac{\Delta \mathbf{p}_{i-1}}{\Delta u_{i-1}} + \alpha_i \frac{\Delta \mathbf{p}_i}{\Delta u_i}, \quad \text{para } i = 1, \dots, m-1,$$

donde

$$\alpha_i = \frac{\Delta u_{i-1}}{\Delta u_{i-1} + \Delta u_i}.$$

En los puntos extremos estas estimaciones se ajustan a:

$$\mathbf{d}_0 = 2 \frac{\Delta \mathbf{p}_0}{\Delta u_0} - \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{d}_m = 2 \frac{\Delta \mathbf{p}_{m-1}}{\Delta u_{m-1}} - \mathbf{d}_{m-1}.$$

A menudo también se tienen que determinar las abscisas  $u_i$  de la interpolación. Algunas de las posibles opciones son:

la **parametrización equidistante**, donde

$$\Delta u_i = \text{constante},$$

la parametrización según la **longitud de las cuerdas** , donde

$$\Delta u_i = \|\Delta \mathbf{p}_i\| ,$$

y la **parametrización centrípeta** [Lee '89], donde

$$\Delta u_i = \sqrt{\|\Delta \mathbf{p}_i\|} .$$

Estos y otros métodos se discuten exhaustivamente en [Foley & Nielson '89, Farin '02, Hoschek & Lasser '92].

**Observación 9:** Un proceso de interpolación con abscisas  $u_i$  prescritas se denomina lineal si los puntos de Bézier  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_{3m}$  dependen linealmente de los puntos  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$ . Esto es, un **esquema de interpolación lineal** está definido por una matriz  $S$ , de dimensión  $m+1 \times 3m+1$  que no depende de los  $\mathbf{p}_i$  y satisface

$$[\mathbf{b}_0 \dots \mathbf{b}_{3m}] = [\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_m]S .$$

Note que el esquema de interpolación anterior, donde las derivadas  $\mathbf{d}_i$  se obtienen a partir de polinomios cuadráticos, es lineal.

## 4.6 Aproximación

En general, dado un conjunto de funciones base  $C_1, \dots, C_n$  no existe una curva

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i C_i(u)$$

que interpole más de  $m$  puntos  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_m$ ,  $m > n$ , en valores prescritos de los parámetros  $u_1, \dots, u_m$ . En este último caso se puede construir un **aproximante**  $\mathbf{p}(u)$ , usualmente bajo la condición que las diferencias

$$\mathbf{p}(u_i) - \mathbf{p}_i = \mathbf{r}_i$$

se hagan pequeñas en algún sentido.

Usando la notación matricial, necesitamos minimizar

$$\begin{bmatrix} C_1(u_1) & \dots & C_n(u_1) \\ \vdots & & \vdots \\ C_1(u_m) & \dots & C_n(u_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m^t \end{bmatrix}$$

o en forma más abreviada

$$CX - P = R = [r_{ij}] .$$

Hay varias posibles elecciones para la distancia que se va a utilizar para minimizar  $R$ . Lo usual es minimizar la suma de los cuadrados

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{r}_i^2 = \sum_{i,j} r_{ij}^2 = \text{traza} R^t R = \text{traza} R R^t .$$

Este es el método de Gauss de **ajuste por mínimos cuadrados**.

Una modificación de este método consiste en minimizar una suma ponderada

$$\sum w_i^2 \mathbf{r}_i^2 = \text{traza}(W R)^t (W R) ,$$

donde

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & w_m \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal de pesos.

Ambos esquemas son lineales en el sentido de la sección siguiente. Otros esquemas son más complicados. Por ejemplo se podría minimizar

$$\max \|\mathbf{r}_i\|_\infty = \max \|r_{ij}\| .$$

Esto nos conduce a un sistema lineal de desigualdades, el cual puede ser resuelto usando el método simplex. Vea el Ejercicio 8.

**Observación 10:** Es importante observar que para cualquier  $j$ , la  $j$ -ésima columna de  $R$ , depende solamente de la  $j$ -ésima columna de  $X$  para todo  $j$ . Por lo tanto la minimización de  $R$  utilizando cualquiera de las tres distancias anteriores significa minimizar cada columna de  $R$  de manera independiente.

## 4.7 Ajustes por mínimos cuadrados

En esta sección veremos como encontrar un ajuste por mínimos cuadrados. Es más, en esta sección el tratamiento será más general, pues impondremos una restricción adicional  $DX = Q$  sobre la solución  $X$ . Esta restricción típicamente fuerza al aproximante  $\mathbf{p}(u)$  a interpolar ciertos puntos  $\mathbf{p}_i$ . Como explicamos en la Observación 10 de 4.6 es suficiente considerar una columna  $\mathbf{x}$  de  $X$  y las correspondientes columnas  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ , y  $\mathbf{r}$  de  $P$ ,  $Q$ , y  $R$ , respectivamente. El siguiente teorema muestra como se puede calcular el residual mínimo:

$$\mathbf{r} = C\mathbf{x} - \mathbf{p}$$

bajo la restricción  $D\mathbf{x} = \mathbf{q}$ :

La suma de los cuadrados  $\mathbf{r}^t \mathbf{r} = \sum r_i^2$  es mínima para la solución  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de

$$(2) \quad \left[ \begin{array}{c|c} C^t C & D^t \\ \hline D & O \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^t \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} .$$

tal que  $D\mathbf{x} = \mathbf{q}$ .

**Demostración:** Sean  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  una solución de (2) y supongamos que  $\mathbf{x} + \mathbf{h}$  satisface la restricción

$$D[\mathbf{x} + \mathbf{h}] = \mathbf{q} .$$

Esto implica  $D\mathbf{h} = \mathbf{o}$ . Es más, si

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{r}} &= C[\mathbf{x} + \mathbf{h}] - \mathbf{p} \\ &= \mathbf{r} + C\mathbf{h} , \end{aligned}$$

entonces se tiene

$$\bar{\mathbf{r}}^t \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r}^t \mathbf{r} + 2\mathbf{r}^t C\mathbf{h} + \mathbf{h}^t C^t C\mathbf{h} .$$

El último sumando de la expresión anterior es no negativo y el segundo término es cero, pues teniendo en cuenta (2)

$$\mathbf{h}^t C^t \mathbf{r} = \mathbf{h}^t C^t [C\mathbf{x} - \mathbf{p}] = -\mathbf{h}^t D^t \mathbf{y} = 0 .$$

Por lo tanto  $\mathbf{r}^t \mathbf{r}$  es mínima.  $\diamond$

**Observación 11:** Si no hay restricciones i.e.,  $D = 0$  y  $\mathbf{q} = \mathbf{o}$  entonces el sistema lineal (2) se reduce a las **ecuaciones normales de Gauss**

$$C^t C\mathbf{x} = C^t \mathbf{p} .$$

**Observación 12:** Si la matriz  $C$  es la identidad y si  $D\mathbf{x} = \mathbf{q}$  es un sistema subdeterminado entonces (2) consiste en las **ecuaciones de correlación**

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} - D^t \mathbf{y} .$$

y las **ecuaciones normales**

$$D\mathbf{p} - DD^t \mathbf{y} = \mathbf{q} ,$$

las cuales se obtienen por sustitución de las ecuaciones de correlación en la expresión de las restricciones  $D\mathbf{x} = \mathbf{v}q$ .

**Observación 13:** Sea  $W$  una matriz diagonal de pesos de dimensión  $m \times m$ . Entonces por el teorema anterior, el residual ponderado

$$W\mathbf{r} = WC\mathbf{x} - W\mathbf{p}$$

se hace mínimo cuando  $D\mathbf{x} = \mathbf{q}$  para la solución  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de la ecuación ponderada

$$(3) \quad \left[ \begin{array}{c|c} C^t W^2 C & D^t \\ \hline D & O \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^t W^2 \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} .$$

## 4.8 Mejoras en el parámetro

A menudo se puede mejorar la calidad de una aproximación si se escogen de manera diferente los nodos  $u_i$ . Sea  $\mathbf{p}(u)$  una curva que aproxima los puntos  $\mathbf{p}_i$  en los valores  $u_i$  de los parámetros. Denotemos por  $v_i$  los valores de los parámetros para los cuales  $\mathbf{p}(u)$  está más cerca de los  $\mathbf{p}_i$ . En general,  $u_i$  y  $v_i$  son diferentes. Por lo tanto un ajuste por mínimos cuadrados con respecto a los  $v_i$  producirá una curva que yace más cerca de los  $\mathbf{p}_i$  porque el nuevo conjunto de curvas sobre el cual se minimiza también contiene la curva  $\mathbf{p}(u)$ .

Un método elemental para calcular aproximadamente los  $v_i$  a partir de los  $u_i$  es el siguiente: linealizamos  $\mathbf{p}(u)$ , en  $u_i$ . Esto es, calculamos la recta tangente en  $u_i$  y determinamos el punto más cercano a  $\mathbf{p}_i$  sobre esta recta tangente a  $\mathbf{p}$  en  $u_i$  (Ver la Figura 4.6, izquierda). Esto significa encontrar  $\Delta_i$  tal que:

$$[\mathbf{p}(u_i) + \Delta_i \mathbf{p}'(u_i) - \mathbf{p}_i]^t \mathbf{p}'(u_i) = 0 ,$$

entonces se obtiene

$$\Delta_i = [\mathbf{p}_i - \mathbf{p}(u_i)]^t \frac{\mathbf{p}'(u_i)}{\|\mathbf{p}'(u_i)\|_2^2} .$$

Entonces  $u_i + \Delta_i$  es una aproximación de  $v_i$ .

Otro método para estimar  $\Delta_i$  se basa en que la recta que pasa por  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}(u_i + \Delta_i)$  sea perpendicular a la tangente en  $\mathbf{p}(u_i + \Delta_i)$ , como se ilustra en la Figura 4.6 (derecha). Esto se expresa por la condición:

$$f(\Delta_i) = [\mathbf{p}(u_i + \Delta_i) - \mathbf{p}_i]^t \mathbf{p}'(u_i + \Delta_i) = 0 .$$

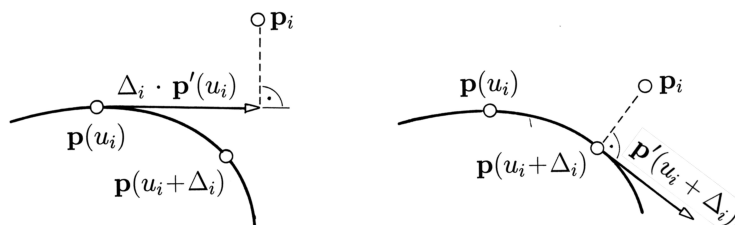


Figura 4.6: Mejora del parámetro.

Usando el método de Newton, se obtiene

$$\Delta_i \approx -\frac{f(0)}{f'(0)} = -\frac{[\mathbf{p}(u_i) - \mathbf{p}_i]^t \mathbf{p}'(u_i)}{\mathbf{p}'(u_i) \cdot \mathbf{p}'(u_i) + [\mathbf{p}(u_i) - \mathbf{p}_i]^t \mathbf{p}''(u_i)} .$$

Se podría también iterar directamente estos dos procesos para obtener mejores aproximaciones de los  $v_i$ , pero lo usual es que antes de cada iteración se calcule una nueva curva de aproximación usando los valores calculados  $u_i + \Delta_i$ .

## 4.9 Ejercicios

- 1 Use inducción sobre  $n$  para probar la **fórmula de Hermite-Genocchi** para diferencias divididas [de Boor '84]

$$[u_0 \dots u_n] \mathbf{q} = \int_{0 \leq x_n \leq \dots \leq x_1 \leq 1} \mathbf{q}^{(n)}(u_0 + (u_1 - u_0)x_1 + \dots + (u_n - u_{n-1})x_n) dx .$$

- 2 Deduzca de la fórmula de Hermite-Genocchi que

$$\lim_{u_0, \dots, u_n \rightarrow u} [u_0 \dots u_n] \mathbf{q} = \mathbf{q}^{(n)}(u)/n! .$$

- 3 Escriba los polinomios de Hermite de grado 5,  $H_0^5, \dots, H_5^5$ . Encuentre sus puntos de Bézier.
- 4 Para cualesquiera tres puntos  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}$  calcule el punto  $\mathbf{b}_2$  sobre la recta  $\mathbf{b}_1\mathbf{c}$  tal que los puntos de Bézier  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$  definan una curva cuadrática  $\mathbf{b}(t)$  con curvatura prescrita  $\kappa_0 = \|\dot{\mathbf{b}} \times \ddot{\mathbf{b}}\|/\|\dot{\mathbf{b}}\|^3$  en  $\mathbf{b}_0$ .
- 5 Calcule y dibuje el polinomio que interpola la función **error de Gauss**

$$\exp(-t^2/2) \quad \text{en } t = -7, -5, -3, \dots, 7 .$$

- 6** Calcule y dibuje una cúbica por trozos  $C^1$  que interpole  $\exp(-t^2/2)$  y sus derivadas en  $t = -7, -1, +1, +7$ .
- 7** Evalúe el interpolador del Ejercicio 6 con el algoritmo de de Casteljaun en  $\pm 6, \pm 4, \pm 2, 0$ .
- 8** Sea  $\mathbf{r} = C\mathbf{x} - \mathbf{p}$ . Demuestre que  $\|\mathbf{r}\|_\infty = \max |r_i|$  es mínimo para la solución  $\mathbf{x}, \rho$  del problema (de programación lineal)

$$\begin{aligned} C\mathbf{x} - \mathbf{p} - \mathbf{e}\rho &\leq \mathbf{0} \\ -C\mathbf{x} + \mathbf{p} - \mathbf{e}\rho &\leq \mathbf{0} \\ \rho &= \min! \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{e} = [1 \dots 1]^t$ , véase por ejemplo, [Boehm & Prautzsch '93, 10.4].





## 5 Representación por B-splines

[5.1 Splines](#) — [5.2 B-splines](#) — [5.3 Una definición recursiva de B-splines](#) — [5.4 El algoritmo de de Boor](#) — [5.5 El teorema fundamental](#) — [5.6 Derivadas y suavidad](#) — [5.7 Propiedades de los B-splines](#) — [5.8 Conversión a la representación B-spline](#) — [5.9 El algoritmo de de Boor extendido](#) — [5.10 Conversión entre las representaciones de de Boor y de Bézier](#) — [5.11 B-splines como diferencias divididas](#) — [5.12 Ejercicios](#)

Los splines son curvas polinómicas por trozos continuamente diferenciables hasta un orden prescrito. El ejemplo más sencillo es el spline  $C^0$ , o sea, lineal por trozos. Este spline es simplemente una poligonal en el plano o en el espacio. Otro ejemplo son los splines cúbicos  $C^1$  construidos en [4.5](#).

El nombre “spline” es una palabra en idioma inglés que significa “listón elástico”. Estos listones eran usados por artesanos para crear curvas, que describen superficies a construir, como cascos de barcos y fuselajes de aviones. Constreñidos por pesos, estos listones elásticos o splines asumen una forma que minimiza su energía elástica, propiedad que heredan en forma aproximada los splines matemáticos  $C^2$  de grado tres.

La herramienta de los splines se desarrolla para solventar las limitaciones de las curvas de Bézier: falta de control local, la laboriosidad requerida para imponer continuidad  $C^2$  y el hecho de que el número de puntos de control de una curva de Bézier impone su grado.

### 5.1 Splines

Una curva  $\mathbf{s}(u)$  se denomina un **spline de grado  $n$**  sobre la secuencia de **nodos**  $a_0, \dots, a_m$ , con  $a_i \leq a_{i+1}$  y  $a_i < a_{i+n+1}$  para todos los posibles  $i$ , si

$\mathbf{s}(u)$  es  $n-r$  veces diferenciable en cada nodo de multiplicidad<sup>1</sup>  $r$  y  $\mathbf{s}(u)$  es un polinomio de grado  $\leq n$  sobre cada intervalo internodal  $[a_i, a_{i+1}]$ , para  $i = 0, \dots, m-1$ .

---

<sup>1</sup>Un nodo  $a_{i+1}$  tiene multiplicidad  $r$  si  $a_i < a_{i+1} = \dots = a_{i+r} < a_{i+r+1}$ .

Nótese que los nodos denotan valores del parámetro donde la curva cambia su expresión polinómica.

También es común referirse a un spline de grado  $n$  como **spline de orden**  $n + 1$ . Las Figuras 5.1 y 5.2 muestran ejemplos de splines sobre secuencias de nodos simples (de multiplicidad uno), obtenidos a través de la construcción de Stärk, vea las Figuras 3.8 y 3.9. Los puntos de Bézier internos y extremos se denotan por pequeños círculos blancos y negros, respectivamente.

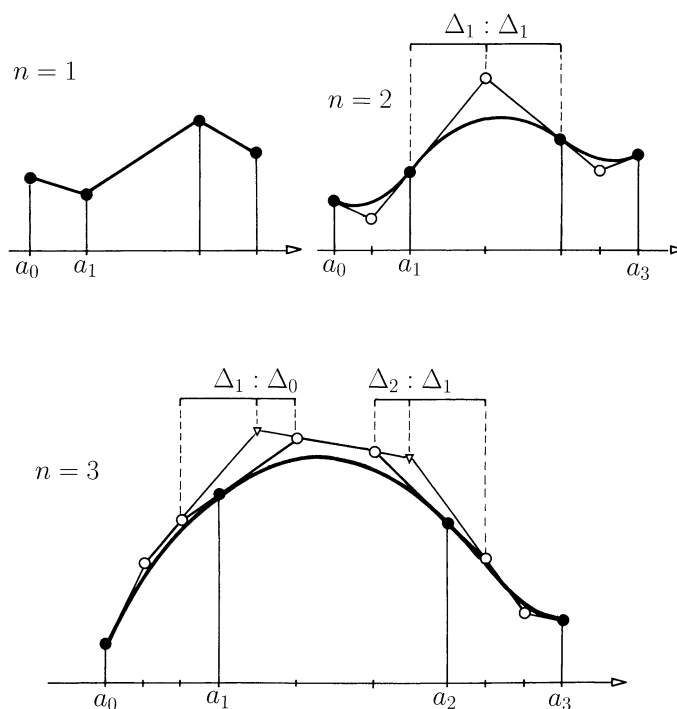


Figura 5.1: Funciones spline de grado 1, 2 y 3.

## 5.2 B-splines

En analogía a la representación de Bézier de curvas polinómicas también es conveniente expresar un spline  $s(u)$  como una combinación afín de ciertos puntos de control  $\mathbf{c}_i$ , esto es:

$$\mathbf{s}(u) = \sum \mathbf{c}_i N_i^n(u)$$

donde los  $N_i^n(u)$  son funciones polinómicas por trozos con soporte finito (se anulan fuera de un intervalo finito) y satisfacen ciertas condiciones de

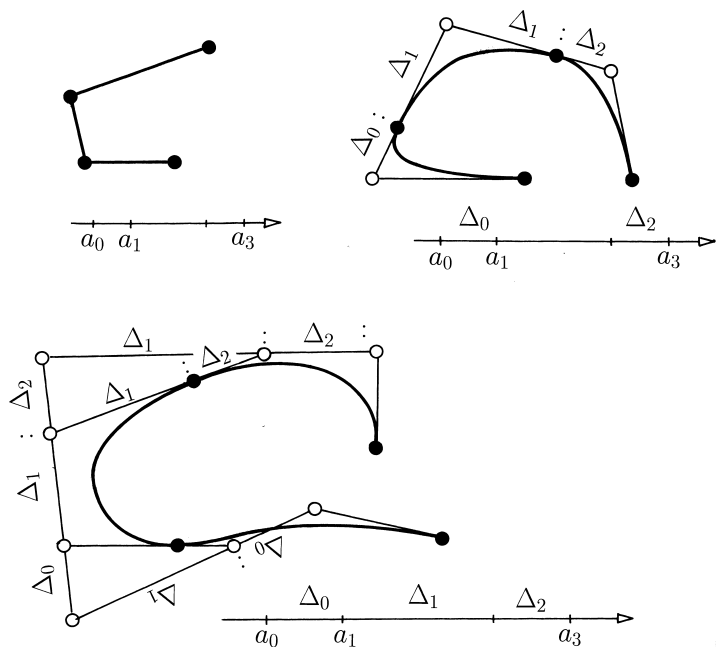


Figura 5.2: Splines paramétricos de grado 1, 2, y 3.

continuidad. Schoenberg introdujo el nombre de B-splines para estas funciones [Schoenberg '67]. Sus polígonos de Bézier se pueden obtener a través de la construcción de Stärk.

La Figura 5.3 ilustra un B-spline  $C^2$  por trozos de grado tres. Note que el teorema de Stärk sólo se requiere para las ordenadas. Las abscisas se obtienen como en la Observación 8 de 2.8.

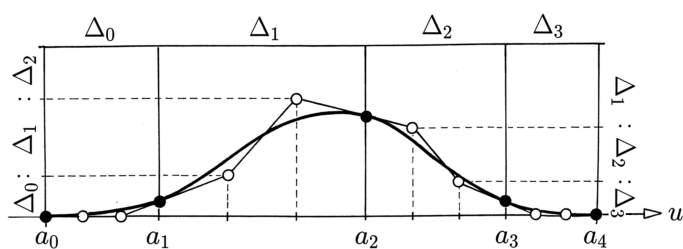


Figura 5.3: Puntos de Bézier del B-spline  $N_0^3(u)$ .

Para grados más altos, esta construcción, aunque en principio posible, es más complicada, véase [Prautzsch '89]. Por lo tanto nosotros utilizaremos una construcción alternativa, encontrada independientemente por de Boor y

Mansfield [de Boor '72] en 1970 y Cox [Cox '72] en 1971. Definimos los B-splines en términos de esta construcción y a partir de ella deduciremos las relaciones y propiedades más importantes de los B-splines.

### 5.3 Una definición recursiva de los B-splines

Para introducir la relación de recurrencia para definir los B-splines, consideramos por simplicidad una secuencia  $(a_i)$  doblemente infinita de nodos simples tales que  $a_i < a_{i+1}$  para todo  $i$ . Entonces los **B-splines**  $N_i^n$  se definen a través de la siguiente relación de recurrencia

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \in [a_i, a_{i+1}) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$N_i^n(u) = \alpha_i^{n-1} N_i^{n-1}(u) + (1 - \alpha_{i+1}^{n-1}) N_{i+1}^{n-1}(u),$$

donde

$$\alpha_i^{n-1} = (u - a_i) / (a_{i+n} - a_i)$$

es el parámetro local con respecto al soporte de  $N_i^{n-1}$ . La Figura 5.4 muestra algunos B-splines de grado 0, 1 y 2.

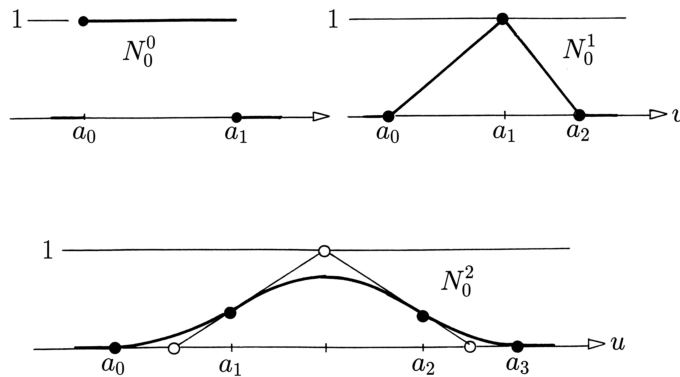


Figura 5.4: Algunos B-splines de grado 0,1 y 2.

En el caso de nodos múltiples los B-splines se definen por la misma recursión teniendo en cuenta la convención

$$N_i^{r-1} \equiv N_i^{r-1} / (a_{i+r} - a_i) = 0 \quad \text{si } a_i = a_{i+r} .$$

La Figura 5.5 muestra algunos B-splines con nodos múltiples.

De la definición de B-splines se desprenden de forma inmediata las siguientes propiedades

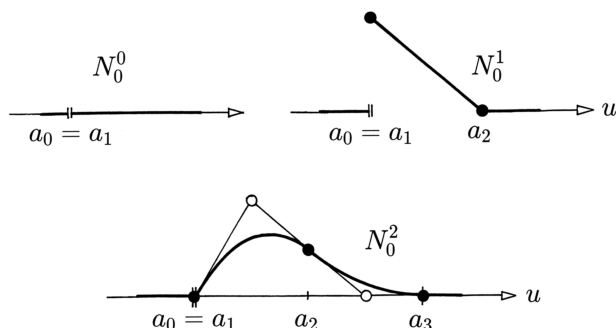


Figura 5.5: B-splines con nodos múltiples.

- $N_i^n(u)$  es polinómica a trozos y tiene grado  $n$ ,
- $N_i^n(u)$  es positiva sobre  $(a_i, a_{i+n+1})$ ,
- $N_i^n(u) = 0$  fuera de  $[a_i, a_{i+n+1}]$ ,
- $N_i^n(u)$  es continua por la derecha.

En las secciones 5.5 y 5.6 veremos que los B-splines son  $n - r$  veces continuamente diferenciables en los nodos de multiplicidad  $r$  y que un spline de grado  $n$  se puede expresar como una combinación lineal de los B-splines  $N_i^n$ . Esta expresión es única.

La desventaja del modelo B-spline frente al de Bézier, aparte de la mayor complejidad matemática, consiste en que las funciones base no admiten una expresión explícita, y cambian al variar el vector de nodos. De hecho, muchos programas de CAD, para procesar splines (dibujo, cálculo de curvatura, intersecciones) transforman cada segmento al modelo de Bézier y así el procesado resulta más eficiente.

**Observación 1:** Para el caso particular  $a_1 = \dots = a_n = 0$  y  $a_{n+1} = \dots = a_{2n} = 1$ , entonces la recursión anterior para  $N_0^n, \dots, N_n^n$  coincide con la recursión para los polinomios de Bernstein. Por lo tanto

$$N_i^n(u) = B_i^n(u) \quad \text{para } i = 0, \dots, n \quad \text{y } u \in [0, 1] .$$

Esto es, los B-splines son una generalización de los polinomios de Bernstein.

## 5.4 El algoritmo de de Boor

Considere la combinación lineal

$$s(u) = \sum_i c_i^0 N_i^n(u)$$

de B-splines de grado  $n$  sobre una secuencia de nodos  $(a_i)$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la secuencia de nodos y la sumatoria se extienden de  $-\infty$  a  $\infty$ . Por la forma de los soportes locales de los  $N_i^n$  esta suma es siempre finita para cualquier  $u$  dado. Supongamos que  $u \in [a_n, a_{n+1})$ , entonces

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i^0 N_i^n(u) .$$

Usando repetidamente la relación de recurrencia para B-splines y agrupando términos obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(u) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i^1 N_i^{n-1}(u) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=n}^n \mathbf{c}_i^n N_i^0(u) = \mathbf{c}_n^n , \end{aligned}$$

donde los  $\mathbf{c}_i^r$  están dados por las combinaciones afines

$$\mathbf{c}_i^r = (1 - \alpha) \mathbf{c}_{i-1}^{r-1} + \alpha \mathbf{c}_i^{r-1} , \quad \alpha = \alpha_i^{n-r} = \frac{u - a_i}{a_{i+n+1-r} - a_i} .$$

Note que  $\alpha \in [0, 1]$  pues  $u \in [a_n, a_{n+1})$ , y por tanto, las combinaciones afines son convexas.

Este algoritmo fue desarrollado por de Boor en 1972 [de Boor '72]. Los puntos  $\mathbf{c}_i^r$  se pueden ordenar en el siguiente esquema triangular, donde la regla de recursión es la anterior recursión afín.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{c}_0^0 & & & & & & \\ \mathbf{c}_1^0 & \mathbf{c}_1^1 & & & & & \\ \mathbf{c}_2^0 & \mathbf{c}_2^1 & \mathbf{c}_2^2 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ \mathbf{c}_n^0 & \mathbf{c}_n^1 & \mathbf{c}_n^2 & \cdots & \mathbf{c}_n^n & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{regla} \\ * \begin{array}{c} \swarrow 1-\alpha \\ \searrow \\ * \xrightarrow{\alpha} * \end{array} \\ (\alpha \text{ depende de la posición}) \end{array}$$

Una consecuencia importante del algoritmo de de Boor es que el spline  $\mathbf{s}(u)$  sobre un intervalo internodal (i.e. entre dos nodos consecutivos) es una combinación convexa de  $n + 1$  coeficientes consecutivos  $\mathbf{c}_i$ . Por lo tanto si los  $\mathbf{c}_i$  representan puntos en un espacio afín, entonces  $\mathbf{s}(u)$  también es un punto del espacio afín. Por esta razón, los  $\mathbf{c}_i$  se denominan **puntos de control** de  $\mathbf{s}(u)$ .

Es más, el spline yace en la cápsula convexa de los puntos de control, lo cual

implica que

$$\sum_{i=0}^n 1 \cdot N_i^n(u) = 1 \quad \text{para } u \in [a_n, a_{n+1}) ,$$

los B-splines forman una partición de la unidad. La Figura 5.6 ilustra la interpretación geométrica del algoritmo de de Boor dada por Gordon y Riesenfeld en 1974, [Gordon & Riesenfeld '74].

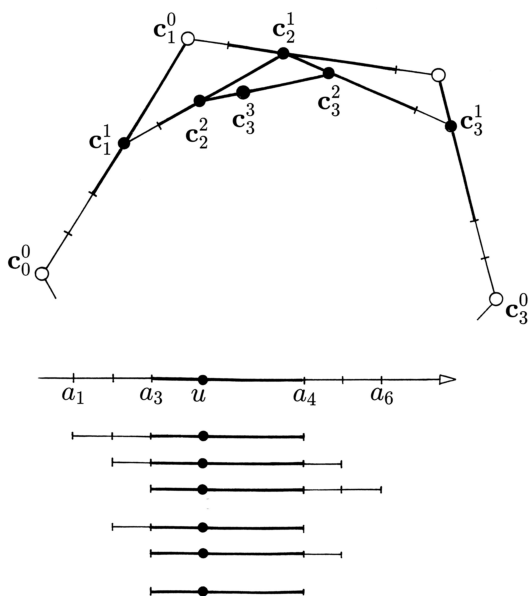


Figura 5.6: Combinaciones convexas del algoritmo de de Boor para  $n = 3$ .

**Observación 2:** Para  $u \in \mathbb{R}$ , el algoritmo de de Boor aplicado a los puntos  $c_0^0, \dots, c_n^0$  calcula el polinomio  $s_n(u)$ , el cual coincide con  $s(u)$  sobre el intervalo internodal  $[a_n, a_{n+1})$ .

## 5.5 El teorema fundamental

Los polinomios simétricos nos permitirán considerar el algoritmo de de Boor en un contexto más amplio. Sea

$$s(u) = \sum_i c_i N_i^n(u)$$

un spline de grado  $n$  sobre los nodos  $a_i$ , y sea  $s_i[u_1 \dots u_n]$  la forma polar que coincide sobre su diagonal con  $s(u)$  sobre  $[a_i, a_{i+1})$ . Entonces tenemos una versión más general del **teorema fundamental** de 3.2:



Los puntos de control de  $\mathbf{s}$  están dados por

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{s}_j[a_{i+1} \dots a_{i+n}] , \quad i = j - n, \dots, j .$$

Para la demostración considere

$$\mathbf{p}_i^r = \mathbf{s}_j[a_{i+1} \dots a_{i+n-r} \ u \ .^r \ u] ,$$

y

$$u = (1 - \alpha)a_i + \alpha a_{i+n-r+1} .$$

Entonces, como  $\mathbf{s}_j$  es multiafín y simétrico se tiene que

$$\mathbf{p}_i^r = (1 - \alpha)\mathbf{p}_{i-1}^{r-1} + \alpha\mathbf{p}_i^{r-1} , \quad \alpha = \alpha_i^{n-r} = \frac{u - a_i}{a_{i+n-r+1} - a_i} ,$$

y en particular

$$\mathbf{p}_i^0 = \mathbf{s}_j[a_{i+1} \dots a_{i+n}] \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_j^n = \mathbf{s}_j(u) .$$

Para  $u \in [a_j, a_{j+1})$  esta construcción coincide con el algoritmo de de Boor y puede utilizarse para calcular cualquier polinomio,  $\mathbf{s}_j[u \dots u]$  de grado  $n$ . Por lo tanto, cualquier polinomio de grado  $n$  puede expresarse, sobre  $[a_j, a_{j+1})$  como una combinación lineal de B-splines  $N_{j-n}^n(u), \dots, N_j^n(u)$ . Contando dimensiones se verifica que la expresión es única, lo que prueba la aseveración.  $\diamond$

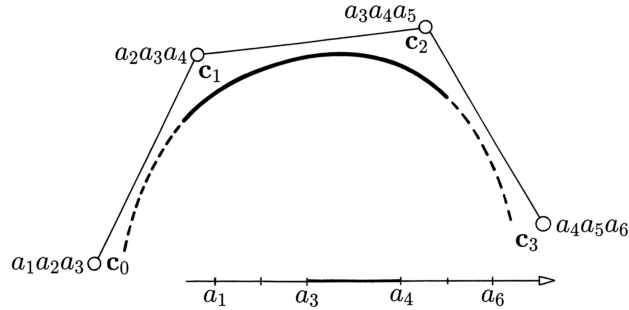


Figura 5.7: El teorema fundamental para un spline cúbico .

**Observación 3:** En la demostración se verificó que los B-splines  $N_0^n(u), \dots, N_n^n(u)$  forman una base para el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que  $n$ . Este resultado es de [Curry & Schoenberg '66].

**Observación 4:** El “segmento”  $\mathbf{s}_i$  del spline determina los puntos de control  $\mathbf{c}_{i-n}, \dots, \mathbf{c}_i$ . Recíprocamente, todo punto  $\mathbf{c}_j$  está determinado por cualquiera de los “segmentos”  $\mathbf{s}_j, \dots, \mathbf{s}_{j+n}$ , esto es, se tiene

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{s}_i[a_{i+1} \dots a_{i+n}] = \dots = \mathbf{s}_{i+n}[a_{i+1} \dots a_{i+n}] .$$

**Observación 5:** La prueba anterior muestra que el polinomio simétrico  $\mathbf{s}_n[u_1 \dots u_n]$  se puede calcular a través de la versión más general del algoritmo de de Boor. Es suficiente sustituir en la recursión  $\alpha(u)$  por

$$\alpha(u_r) = \frac{u_r - a_i}{a_{i+n-r+1} - a_i} .$$

Si  $m$ , de las  $n$  variables  $u_i, \dots, u_n$  coinciden con nodos, entonces se requiere sólo  $n - m$  pasos recursivos para calcular  $s_j[u_1 \dots, u_n]$ . Este cálculo se puede organizar en un esquema triangular de  $1 + 2 + \dots + (n - m + 1)$  puntos.

## 5.6 Derivadas y suavidad

Debido a que los B-splines forman una base, vea la Observación 3, la derivada de un segmento polinómico  $\mathbf{s}_n$  se puede escribir como

$$\mathbf{s}'_n(u) = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i N_i^{n-1}(u) , \quad u \in [a_n, a_{n+1}) ,$$

donde los vectores  $\mathbf{d}_i$  a determinar, se pueden expresar fácilmente en términos de los  $\mathbf{c}_i$ . De hecho denotemos por  $\mathbf{s}'_n[u_2 \dots u_n]$  el polinomio simétrico de  $\mathbf{s}'_n(u)$  y sea  $\Delta = a_{i+n} - a_i$  la longitud del soporte del B-spline  $N_i^{n-1}(u)$ . Entonces se desprende del teorema fundamental y de 3.9 que

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i &= \mathbf{s}'_n[a_{i+1} \dots a_{i+n-1}] \\ &= \frac{n}{\Delta} \mathbf{s}_n[\Delta \ a_{i+1} \dots a_{i+n-1}] \\ &= \frac{n}{a_{i+n} - a_i} (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1}) . \end{aligned}$$

Como los  $\mathbf{d}_i$  no dependen del intervalo internodal  $[a_n, a_{n+1})$ , la derivada del spline  $\mathbf{s}$  evaluada en cualquier  $u \in \mathbb{R}$  se puede expresar como

$$(1) \quad \mathbf{s}'(u) = \sum_i \frac{n}{a_{i+n} - a_i} \nabla \mathbf{c}_i N_i^{n-1}(u) ,$$

donde  $\nabla \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-1}$  denota la **primera diferencia hacia atrás**.

De manera similar se pueden obtener representaciones B-spline de derivadas de  $\mathbf{s}(u)$  de orden superior. Esto es también útil para verificar las propiedades de suavidad de los B-splines.

Observe primero que un spline  $\mathbf{s}$  de grado  $n$  es continuo en cualquier nodo de multiplicidad  $n$ . De hecho si  $a_0 < a_1 = \dots = a_n < a_{n+1}$ , entonces la

Observación 4 de 5.5 implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_0(a_1) &= \mathbf{s}_0[a_1 \dots a_n] = \mathbf{c}_0 \\ &= \mathbf{s}_n[a_1 \dots a_n] \\ &= \mathbf{s}_n(a_n) . \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $a_1$  es un nodo de multiplicidad  $r$ , entonces la derivada  $n - r$  de  $s$  en  $a_1$  es continua. En otras palabras,

*un B-spline satisface las propiedades de suavidad dadas en 5.1.*

## 5.7 Propiedades de los B-splines

En esta sección resumimos las propiedades más importantes de los B-splines.

- Los B-splines de grado  $n$  definidos sobre una secuencia de nodos dada, que no se anulan sobre un intervalo internodal, son **linealmente independientes** sobre este intervalo.
- Contando dimensiones se verifica que los B-splines  $N_0^n, \dots, N_m^n$  con nodos  $a_0, \dots, a_{m+n+1}$  forman una **base** para todos los splines de grado  $n$  con soporte en el intervalo  $[a_0, a_{m+n+1}]$  y este conjunto de nodos.
- Análogamente, los B-splines  $N_0^n, \dots, N_m^n$  con nodos  $a_0, \dots, a_{m+n+1}$  restringidos al intervalo  $[a_n, a_{m+1}]$  forman una **base** para todos los splines de grado  $n$  restringidos a este intervalo.
- Los B-splines forman una **partición de la unidad**,

$$\sum_{i=0}^m N_i^n(u) = 1, \quad \text{para todo } u \in [a_n, a_{m+1}] .$$

- Un segmento de spline  $s[a_n, a_{m+1}]$  de grado  $n$  con **nodos extremos de multiplicidad n**

$$(a_0 =) a_1 = \dots = a_n \quad \text{y} \quad a_{m+1} = \dots = a_{m+n} (= a_{m+n+1})$$

tienen los mismos puntos extremos y rectas tangentes en esos puntos que sus polígonos de control.

- Los **nodos extremos**  $a_0$  y  $a_{m+n+1}$  no influyen sobre  $N_0^n$  y  $N_m^n$  sobre el intervalo  $[a_n, a_{m+1}]$ .
- Los B-splines son **positivos** en el interior de su soporte

$$N_i^n(u) > 0 \quad \text{para } u \in (a_i, a_{i+n+1}) .$$

- Los B-splines tienen **soporte compacto**

$$\text{supp}N_i^n = [a_i, a_{i+n+1}] .$$

- Los B-splines satisfacen la **recursión de de Boor, Mansfield y Cox** donde  $\alpha_i^{n-1} = (u - a_i)/(a_{i+n} - a_i)$  representa el parámetro local sobre el soporte de  $N_i^{n-1}$ .
- La **derivada** de un B-spline está dada por

$$\frac{d}{du} N_i^n(u) = \frac{n}{a_{i+n} - a_i} N_i^{n-1}(u) - \frac{n}{a_{i+n+1} - a_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(u) .$$

- La representación en términos de B-splines de una curva spline es **invariante bajo aplicaciones afines**.
- Un segmento  $s_j[a_j, a_{j+1}]$  de un spline de grado  $n$  yace en la **cápsula convexa** de sus  $n + 1$  puntos de control  $\mathbf{c}_{j-n}, \dots, \mathbf{c}_j$ .

$$\mathbf{s}_j(u) = \sum_{i=j-n}^j \mathbf{c}_i N_i^n(u) , \quad u \in [a_j, a_{j+1}] ,$$

- Existe una fórmula de **elevación de grado**. Esta se presenta en 6.5.

La propiedad más importante desde el punto de vista práctico es la de control local. Un punto de control sólo interviene en los intervalos en que la función base asociada tiene soporte, o sea, en los intervalos en que el punto aparece en el algoritmo de de Boor.

El vector de nodos con multiplicidad  $n$  en los nodos extremos, es muy importante por ser prácticamente el único empleado en los programas de CAD comerciales, para curvas no cerradas. Así la curva en los puntos extremos disfruta de las deseables propiedades del modelo de Bézier: pasa por dichos puntos, es tangente en ellos al polígono de control, la curvatura sólo depende de los tres puntos extremos, etc. Con este tipo de vector de nodos el B-spline es una verdadera generalización intuitiva de las curvas de Bézier. Y si no hay nodos internos se tiene una curva de Bézier. Vea la Observación 1.

## 5.8 Conversión a la representación B-spline

Dado que cualquier polinomio de grado  $n$  se puede considerar como un spline de grado  $\geq n$  sobre cualquier secuencia de nodos, en particular podemos expresar los monomios como combinaciones lineales de B-splines sobre una

secuencia de nodos  $(a_i)$  prefijada. Para esto recordemos de 3.1 que los monomios  $A_j^n(u) = \binom{n}{j} u^j$  tienen forma polar

$$A_j^n[u_1 \dots u_n] = \sum_{i < \dots < k} u_i \cdot \dot{i} \cdot u_k \cdot$$

Entonces resulta del teorema fundamental 5.5 que

$$A_j^n(u) = \sum_i \alpha_{ji} N_i^n(u) ,$$

donde  $\alpha_{ji} = A_j^n[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$ , y en consecuencia

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(u) &= \mathbf{a}_0 A_0^n(u) + \dots + \mathbf{a}_n A_n^n(u) \\ &= \sum_i (\mathbf{a}_0 \alpha_{0i} + \dots + \mathbf{a}_n \alpha_{ni}) N_i^n(u) , \end{aligned}$$

lo cual generaliza la identidad de Marsden. Ver Ejercicio 4. En particular para la función identidad

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{n} A_1^n(u) \\ &= \sum_i \gamma_i N_i^n(u) , \end{aligned}$$

donde  $\gamma_i = \alpha_{1i}/n = (a_{i+1} + \dots + a_{i+n})/n$ . Los  $\gamma_i$  se denominan **abscisas de Greville** [Greville '67].

**Observación 6:** Las abscisas de Greville aparecen de forma natural como los puntos de control del gráfico de una función spline

$$s(u) = \sum_i c_i N_i^n .$$

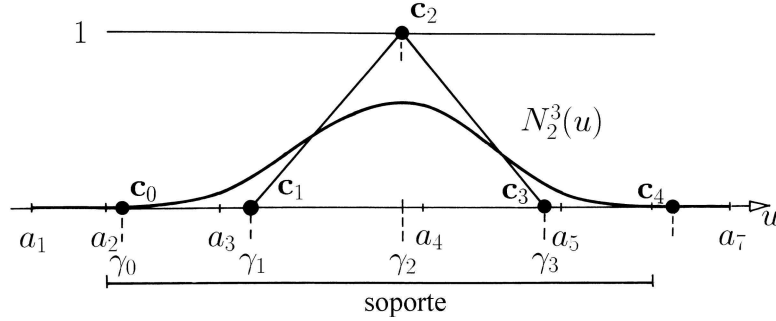
De hecho, el gráfico  $\mathbf{s}(u) = [u \ s(u)]^t$  tiene puntos de control  $\mathbf{c}_i = [\gamma_i \ c_i]^t$ . La Figura 5.8 muestra un ejemplo,  $s(u) = N_2^3(u)$ . Otros ejemplos se presentan en la Figura 5.1.

## 5.9 El algoritmo de de Boor extendido

La expansión de Taylor de un polinomio  $\mathbf{s}_n(u)$  determinado por un segmento de spline

$$\mathbf{s}_n(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i N_i^n(u) , \quad u \in [a_n, a_{n+1}) ,$$

puede calcularse para cualquier  $u \in \mathbb{R}$ , usando las ideas presentadas en 2.6 para curvas de Bézier.

Figura 5.8: Puntos de control del B-spline cúbico  $N_2^3(u)$ .

Sea  $\mathbf{s}_n[u_1 \dots u_n]$  la forma polar de  $\mathbf{s}_n$  y considere los puntos y los vectores

$$\mathbf{c}_{r,i,k} = \mathbf{s}_n[\varepsilon \ .^r \ . \varepsilon a_{i+1} \dots a_{i+n-r-k} u \ .^k \ . u]$$

donde  $\varepsilon$  denota la dirección  $1 - 0$ , para  $i = r + k, \dots, n$ . Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{du^r} \mathbf{s}_n(u) &= \frac{n!}{(n-r)!} \mathbf{c}_{r,n,n-r} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=r}^n \mathbf{c}_{r,i,0} N_i^{n-r}(u) \end{aligned}$$

y la expansión de Taylor

$$\mathbf{s}_n(u+h) = \sum_{r=0}^n \mathbf{c}_{r,n,n-r} \binom{n}{r} h^r .$$

Los puntos y vectores  $\mathbf{c}_{rik}$  pueden organizarse en un esquema tetraédrico ilustrado en la Figura 5.9 para  $n = 2$ , donde  $\varepsilon 4$  significa  $\mathbf{s}_n[\varepsilon a_4]$ , etc.

Este esquema fué considerado por primera vez por Sablonniere en 1978 [Sablonniere '78] y consta de  $\binom{n+2}{3}$  subtetraedros que contienen los puntos de control dados  $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_{0,i,0}$  en la arista "izquierda" y los múltiples

$$\frac{(n-r)!}{n!} \mathbf{s}_n^{(r)}(u)$$

de las derivadas en el lado opuesto.

Cualesquiera dos puntos de los cuatro de un subtetraedro pueden calcularse a partir de los otros dos. Las reglas para realizar estos cálculos se desprenden directamente de las propiedades de los polinomios simétricos multiafinos. Por ejemplo, en la cara "izquierda" se tiene

$$\mathbf{c}_{r+1,i,k} = \frac{1}{a_{i+n-r-k} - a_i} (\mathbf{c}_{r,i,k} - \mathbf{c}_{r,i-1,k}) ,$$

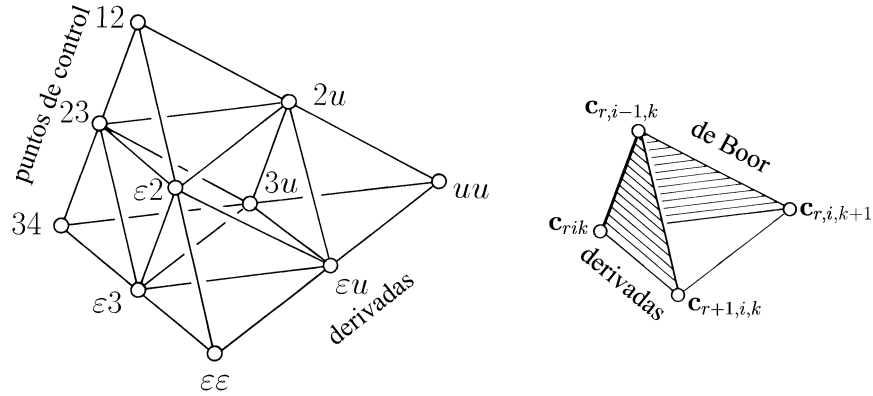


Figura 5.9: El algoritmo de de Boor extendido.

en la cara de “atrás”

$$\mathbf{c}_{r,i,k+1} = (1 - \alpha)\mathbf{c}_{r,i-1,k} + \alpha\mathbf{c}_{r,i,k} \quad , \quad \alpha = \frac{u - a_i}{a_{i+n-r-k} - a_i} \quad ,$$

en la cara de “abajo”

$$(2) \quad \mathbf{c}_{r,i,k} = \mathbf{c}_{r,i,k+1} + (a_{i+n-r-k} - u)\mathbf{c}_{r+1,i,k} \quad ,$$

y en la cara de la “derecha”

$$(3) \quad \mathbf{c}_{r,i-1,k} = \mathbf{c}_{r,i,k+1} + (a_i - u)\mathbf{c}_{r+1,i,k} \quad .$$

**Observación 7:** Las fórmulas anteriores se pueden usar para ir de la representación B-spline a la forma monomial y viceversa.

**Observación 8:** Para obtener las derivadas a partir de los puntos de control o viceversa es suficiente conocer solamente las caras izquierda y derecha del arreglo tetraédrico, [Lee '82, Boehm '84b].

**Observación 9:** Si se calcula primero la cara de atrás y luego la cara de abajo (o arriba) del tetraedro, es necesario usar la fórmula (2)(o (3)) para determinar  $\mathbf{c}_{r+1,i,k}$  (o  $\mathbf{c}_{r,i-1,k}$ ). Sin embargo, esto es imposible si  $u = a_{i+n-r-k}$  (o  $u = a_1$ ). Por lo tanto las derivadas del polinomio  $s_n$  no se pueden calcular de esta manera para  $u = a_{n+1}, \dots, a_{2n}$  (o  $u = a_0, \dots, a_{n-1}$ ).

## 5.10 Conversión entre las representaciones de de Boor y de Bézier

También existe un algoritmo tetraédrico para convertir la representación B-spline en la representación de Bézier y viceversa [Boehm '77, Sablonniere '78].

Este se puede derivar de manera similar al algoritmo de 5.9. Sea la notación como en 5.9 y

$$\mathbf{q}_{rik} = \mathbf{s}_n[a \ .\tau. \ a \ a_{i+1} \ \dots \ a_{i+n-r-k} \ b \ .\kappa. \ b]$$

para  $i = r + k, \dots, n$ . Entonces los puntos de control del spline están dados por

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{q}_{0,i,0}$$

y los puntos de Bézier del polinomio  $\mathbf{s}_n$  sobre  $[a, b]$  estan dados

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{q}_{n-j,n,j} \ .$$

Como antes, los puntos  $\mathbf{q}_{rik}$  se pueden organizar en un esquema teatrétrico tal como se ilustra en la Figura 5.10 para  $n = 2$ , donde  $a3, ab$ , etc. denotan  $\mathbf{q}_{1,2,0}, \mathbf{q}_{1,0,1}$ , etc.

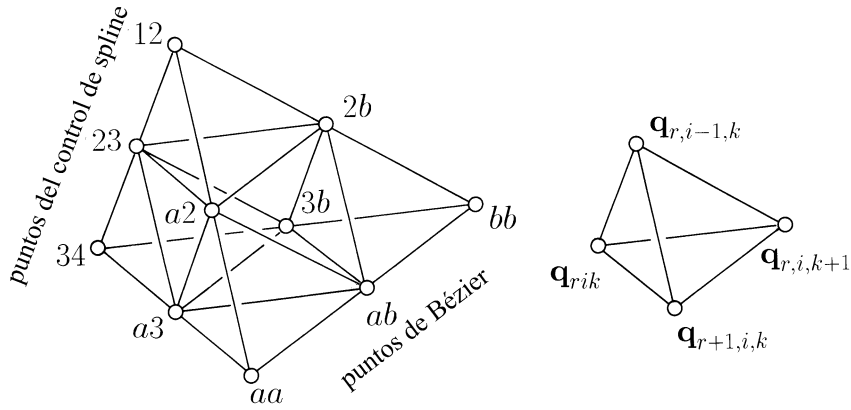


Figura 5.10: Conversión entre las representaciones de Bézier y de de Boor.

Aquí la cara izquierda se calcula con la regla

$$\mathbf{q}_{r+1,i,k} = (1 - \alpha)\mathbf{q}_{r,i-1,k} + \alpha \mathbf{q}_{r,i,k} \ , \quad \alpha = \frac{a - a_i}{a_{i+n-r-k} - a_i} \ ,$$

y la cara de abajo por

$$\mathbf{q}_{r,i,k+1} = (1 - \gamma)\mathbf{q}_{r+1,i,k} + \gamma \mathbf{q}_{r,i,k} \ , \quad \gamma = \frac{b - a}{a_{i+n-r-k} - a} \ .$$

Recíprocamente, los puntos de control de la representación B-spline se calculan a partir de los de Bézier de la siguiente manera. Primero despejamos  $\mathbf{q}_{r,i-1,k}$  y  $\mathbf{q}_{rik}$  de las fórmulas anteriores. Luego aplicamos las fórmulas para calcular los puntos de la cara de abajo y luego de la cara izquierda.



## 5.11 B-splines como diferencias divididas

La definición clásica de B-spline usa diferencias divididas, técnica que ha sido explotada sistemáticamente para el desarrollo de la teoría de los splines de una variable [de Boor '78]. En particular las diferencias divididas fueron usadas por de Boor, Cox, y Mansfield en 1971 para obtener la relación de recurrencia que satisfacen los B-splines.

Usando la fórmula de la derivada (1) de 5.6 mostraremos que los B-splines son diferencias divididas de la **función potencial truncada**:

$$f(a) = (a - u)_+^n := \begin{cases} (a - u)^n & \text{si } a > u \\ 0 & \text{si } a \leq u \end{cases} .$$

Vea la Figura 5.11. Nótese que  $f$  es una función de  $a$ ,  $u$  es un parámetro fijo.

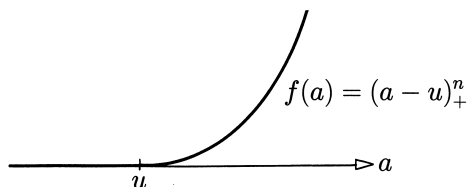


Figura 5.11: Función potencial truncada.

Usando la notación de las diferencias divididas dada en 4.3, se obtiene

*el B-spline  $N_0^n$  sobre los nodos  $a_0, \dots, a_{n+1}$  se puede escribir*

$$N_0^n(u) = (a_{n+1} - a_0)[a_0 \dots a_{n+1}](a - u)_+^n .$$

Este hecho se puede probar por inducción sobre  $n$ . Para  $n = 0$  la identidad se verifica directamente. Para el paso inductivo, recordemos de 4.3 que  $[a_0 \dots a_{n+1}]f(a)$  es el coeficiente del término de mayor grado del polinomio de grado  $(n + 1)$  que interpola  $f(a)$  en  $a_0, \dots, a_{n+1}$ . Por lo tanto podemos sustituir  $f(a)$  por la función cero si  $u \geq a_{n+1}$  y por el monomio  $(a - n)^n$  de grado  $n$  en  $a$ , si  $u < a_0$ . Esto significa que nuestra identidad se verifica para  $u < a_0$  y  $u \geq a_{n+1}$ .

Entonces, es suficiente demostrar que se satisface la derivada de la identidad de la tesis del teorema. Nótese que la diferencia dividida es una combinación lineal de la función potencial y sus derivadas. Por lo tanto la anterior diferencia dividida es diferenciable en todo  $u$  excepto en los nodos de multiplicidad  $n + 1$ . Esto sin embargo no causa ningún problema debido a que a lo sumo existe un nodo de multiplicidad  $n + 1$ .

Usando la definición recursiva de las diferencias divididas, la hipótesis de inducción y la fórmula de la derivada para B-splines obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{du} (a_{n+1} - a_0) [a_0 \dots a_{n+1}] (a - u)_+^n \\
 &= -n (a_{n+1} - a_0) [a_0 \dots a_{n+1}] (a - u)_+^{n-1} \\
 &= n ([a_0 \dots a_n] (a - u)_+^{n-1} - [a_1 \dots a_{n+1}] (a - u)_+^{n-1}) \\
 &= \frac{n}{a_n - a_0} N_0^{n-1} - \frac{n}{a_{n+1} - a_1} N_1^{n-1} \\
 &= \frac{d}{du} N_0^n(u) ,
 \end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra aseveración.  $\diamond$

## 5.12 Ejercicios

- 1 Considere un spline  $s(u)$  cúbico  $C^2$  sobre la secuencia de nodos simples  $a_0, \dots, a_m$ . Muestre que cualquier función  $C^2$   $f(u) \neq s(u)$  que interpola  $s$  en todos los nodos y la derivada en  $u = a_0$  y  $u = a_m$  tiene mayor energía que  $s$ , es decir,

$$\int_{a_0}^{a_m} |f''(u)|^2 du > \int_{a_0}^{a_m} |s''(u)|^2 du .$$

Para la solución puede consultar cualquier libro de análisis numérico, por ejemplo [Boehm & Prautzsch '93, p. 125f].

- 2 Dado un spline  $s(u) = \sum_{i=0}^m c_i N_i^n(u)$  sobre la secuencia de nodos  $a_0, \dots, a_{m+n+1}$ , muestre que

$$\int_{a_0}^{a_{m+n+1}} s(u) du = \sum_{i=0}^m \frac{a_{i+n+1} - a_i}{n+1} c_i .$$

- 3 Bosqueje los B-splines cúbicos sobre las siguientes secuencias de nodos:  $0, 0, 0, 0, 1$ ;  $0, 0, 0, 1, 2$ ;  $0, 0, 1, 2, 3$  y  $0, 1, 2, 3, 4$ . Despliegue sus polígonos de Bézier y calcule las ordenadas de los puntos de Bézier.
- 4 Use polinomios simétricos para probar la **identidad de Marsden**

$$(u - a)^n = \sum_i (a_{i+1} - a) \dots (a_{i+n} - a) N_i^n(u) .$$

- 5 Use la fórmula para la derivada de un B-spline para deducir por inducción, la fórmula de recursión de de Boor, Mansfield y Cox.

- 6 Use la regla de Leibniz para el producto de dos funciones  $f = gh$ ,

$$[a_i \dots a_{i+k}]f = \sum_{r=i}^{i+k} ([a_i \dots a_r]g)([a_r \dots a_{i+k}]h) ,$$

para obtener la recursión de de Boor, Mansfield y Cox. Véase también [de Boor '72].

- 7 Sea  $s(u) = \sum_{i=0}^3 c_i N_i^3$  el spline definido sobre los nodos  $0, 1, 2, \dots, 7$  dado por  $c_0, \dots, c_3 = 4, 7, -2, 1$ .
- Bosqueje  $s[3, 4]$  y su polígono de control.
  - Calcule  $s, s', s'', s'''$  en  $u = 3$ .
  - Calcule la representación monomial de  $s(u)$  sobre el intervalo  $[3, 4]$ .
  - Calcule la representación de Bézier de  $s(u)$  sobre  $[3, 4]$ .

- 8 Demuestre que si un polinomio simétrico y a multiafín puede calcularse a partir de  $n + 1$  puntos  $\mathbf{p}[a_{i,1} \dots a_{i,n}]$ ,  $i = 0, \dots, n$ , por combinaciones afines como en el algoritmo de de Boor, entonces existen números reales  $a_1, \dots, a_{2n}$  tales que  $a_{i,j} = a_{i+j}$ .

## 6 Técnicas de B-splines

[6.1 Inserción de nodos](#) — [6.2 El algoritmo de Oslo](#) — [6.3 Convergencia por inserción de nodos](#) — [6.4 Un algoritmo para la elevación de grado](#) — [6.5 Una fórmula de elevación de grado](#) — [6.6 Convergencia por elevación de grado](#) — [6.7 Interpolación](#) — [6.8 Interpolación con splines cúbicos](#) — [6.9 Ejercicios](#)

La mayoría de los algoritmos para curvas de Bézier tienen una generalización para splines. Un ejemplo es la técnica de inserción de nodos, la cual puede emplearse para la elevación de grado, para la implementación del algoritmo de Boor y también en el proceso de subdivisión. En particular, el algoritmo de de Casteljau puede interpretarse como un caso de inserción de nodos múltiples.

### 6.1 Inserción de nodos

Considere un spline, como en [5.7](#)

$$\mathbf{s}(u) = \sum_i \mathbf{c}_i N_i^n(u)$$

sobre la secuencia de nodos  $(a_i)$ . Sea  $(\hat{a}_j)$  un refinamiento de  $(a_i)$ , esto es, la secuencia de nodos  $(\hat{a}_j)$  contiene a  $(a_i)$ , como una subsecuencia. Véase la [Figura 6.1](#).

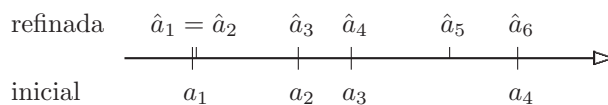


Figura 6.1: Refinamiento de una secuencia de nodos.

Sea  $\hat{N}_j(u)$  el B-spline de grado  $n$  sobre  $\hat{a}_j, \dots, \hat{a}_{j+n+1}$ , entonces  $\mathbf{s}(u)$  se puede describir como

$$\mathbf{s}(u) = \sum_j \hat{\mathbf{c}}_j \hat{N}_j^n(u) .$$

La mejor manera de calcular los  $\hat{\mathbf{c}}_j$  es a través de la inserción repetida de nodos simples, esto es: se inserta un nodo en cada paso [Boehm '80]. Supongamos entonces que  $(\hat{a}_j)$  se obtiene a partir de  $(a_i)$  por inserción de un sólo nodo  $\hat{a}$ . Desplazando el índice de ser necesario, podemos suponer que  $\hat{a} = \hat{a}_{n+1}$  y  $a_n \leq \hat{a} < a_{n+1}$ .

Como consecuencia inmediata del teorema fundamental de 5.5 se tiene

$$\hat{\mathbf{c}}_j = \begin{cases} \mathbf{c}_j & \text{para } j \leq 0 \\ \mathbf{c}_{j-1} \cdot (1 - \alpha_j) + \mathbf{c}_j \cdot \alpha_j & \text{para } j = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{c}_{j-1} & \text{para } j \geq n + 1 \end{cases},$$

donde

$$\alpha_j = \frac{\hat{a} - a_j}{a_{j+n} - a_j}$$

es la coordenada local de  $\hat{a}$  con respecto al soporte  $[a_j, a_{j+n}]$  de  $\hat{N}_j^n$ . La Figura 6.2 muestra una ilustración para  $n = 3$ .

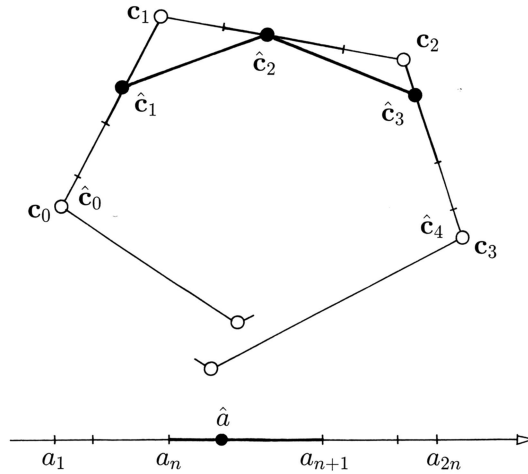


Figura 6.2: Inserción de un nuevo nodo.

Comparando el proceso de inserción de nodos con el algoritmo de de Boor de 5.4, se observa que los nuevos puntos de control  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n$  son los puntos  $\mathbf{c}_1^1, \dots, \mathbf{c}_n^1$  que aparecen en la segunda columna del arreglo triangular de de Boor [Boehm '80]. Es más, los puntos

$$\mathbf{c}_1^1, \dots, \mathbf{c}_r^r, \dots, \mathbf{c}_n^r, \dots, \mathbf{c}_n^1$$

del esquema de de Boor coinciden con los nuevos puntos de control de  $s$  cuando  $\hat{a}$  es insertado  $r$  veces.

En particular, para  $r = n$  el algoritmo de de Boor coincide con la inserción repetida  $n$  veces del nodo  $\hat{a}$ .

**Observación 1:** Si todos los nodos  $(\hat{a}_i)$  en la secuencia refinada tienen multiplicidad  $n$ , entonces el polígono de control  $\mathbf{c}_i$  representa el polígono de Bézier de  $\mathbf{s}$ . Esto es consecuencia de la Observación 1 de 5.3. Por lo tanto, si se incrementa hasta  $n$  la multiplicidad de cada nodo de un spline, se genera la representación de Bézier del spline. Esto fue observado por primera vez por Cohen [Cohen et al. '80].

**Observación 2:** Un B-spline se puede expresar como una combinación lineal de B-splines sobre una secuencia de nodos refinada  $(\hat{a}_j)$ . La fórmula correspondiente

$$N_i^n(u) = \sum_j \alpha_{ij} \hat{N}_j^n(u)$$

fue dada por de Boor [de Boor '76b]. Los coeficientes  $\alpha_{ij}$  se denominan **B-splines discretos** con nodos  $\hat{a}_j$ . Esta denominación fue acuñada por Schumaker [Schumaker '73] para el caso en que los  $\hat{a}_j$  son nodos equidistantes.

**Observación 3:** En particular, si  $s(u) = N_j^n(u)$  es un B-spline, entonces el proceso anterior de inserción de nodos implica la siguiente identidad

$$N_j^n(u) = \begin{cases} \hat{N}_j^n(u) & \text{para } j \leq 0 \\ \alpha_j \hat{N}_j^n(u) + (1 - \alpha_{j+1}) \hat{N}_{j+1}^n(u) & \text{para } j = 1, \dots, n \\ \hat{N}_{j+1}^n(u) & \text{para } j \geq n + 1 \end{cases}$$

Esta identidad representa la **eliminación de nodos** para B-splines [Boehm '80].

## 6.2 El algoritmo de Oslo

Aunque usualmente la inserción repetida de nodos simples es en general el mejor método [Lyche '93] para calcular los puntos de control con respecto a cualquier refinamiento  $(\hat{a}_j)$  de  $(a_i)$ , también se puede calcular cada punto  $\mathbf{c}_j$  a través de la generalización del algoritmo de de Boor considerada en la Observación 5 de 5.5.

Para calcular  $\mathbf{c}_j$  se requiere algún intervalo internodal  $[a_k, a_{k+1}]$  cuya intersección con el soporte  $[\hat{a}_j, \hat{a}_{j+n+1}]$  de  $\hat{N}_j^n$  sea no vacía, tal como se ilustra en la Figura 6.3. Entonces cada punto de control

$$\hat{\mathbf{c}}_j = \mathbf{s}_k[\hat{a}_{j+1} \dots \hat{a}_{j+n}]$$

puede calcularse usando el algoritmo generalizado de de Boor. Esta relación de recurrencia para  $\mathbf{c}_j$  fue descubierta por Cohen, Lyche y Riesenfeld en Oslo en 1980, y se denomina el **algoritmo de Oslo** [Cohen et al. '80]. Note

que las combinaciones afines en el algoritmo de Oslo en general pueden ser no convexas. En consecuencia se requieren mejoras adicionales para evitar combinaciones no convexas.

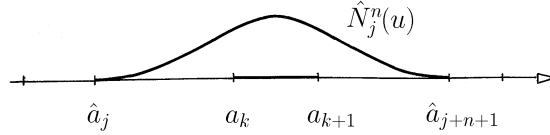


Figura 6.3: Elección de  $a_k$  para la construcción de  $\mathbf{c}_j$ .

### 6.3 Convergencia por inserción de nodos

En esta sección generalizamos las ideas presentadas en 3.3. Considere el spline  $\mathbf{s}(u) = \sum_i \mathbf{c}_i N_i^n(u)$  sobre la secuencia de nodos  $(a_i)$ . Entonces a través de un proceso de inserción de nodos que finalmente se hacen densos, la secuencia de los correspondientes polígonos de control converge al spline  $\mathbf{s}$ . La velocidad de convergencia es cuadrática con relación al máximo de las distancias internodales.

Sea  $[a, b]$  un intervalo,  $h = \max\{\Delta a_i | [a_i, a_{i+1}] \subset [a, b]\}$ , y sean  $\gamma_i = (a_{i+1} + \dots + a_{i+n})/n$  las abscisas de Greville. Entonces se tiene

$$\max \|\mathbf{s}(\gamma_i) - \mathbf{c}_i\| = O(h^2) ,$$

donde el máximo se toma sobre todos los  $i$  tales que  $[a_{i+1}, a_{i+n}] \subset [a, b]$ .

Para la demostración [Schaback '93] consideramos un punto de control  $\mathbf{c}_i = \mathbf{s}_r[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$ , donde  $\mathbf{s}_r$  es el polinomio simétrico de  $\mathbf{s}$  restringido al intervalo internodal  $[a_r, a_{r+1})$  que contiene a  $\gamma_i$ . Como

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{s}_r[u \dots u] = \dots = \frac{\partial}{\partial u_n} \mathbf{s}_r[u \dots u]$$

la expansión de Taylor de  $\mathbf{s}_r$  alrededor de  $[\gamma_i \dots \gamma_i]$  tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i &= \mathbf{s}_r[\gamma_i \dots \gamma_i] + \sum_{j=i+1}^{i+n} (a_j - \gamma_i) \frac{\partial}{\partial u_1} \mathbf{s}_r[\gamma_i \dots \gamma_i] + O(h^2) \\ &= \mathbf{s}(\gamma_i) + O(h^2) , \end{aligned}$$

lo cual prueba la aseveración.  $\diamond$

## 6.4 Un algoritmo para la elevación de grado

Todo spline de grado  $n$

$$\mathbf{s}(u) = \sum_i \mathbf{c}_i N_i^n(u)$$

sobre una secuencia de nodos  $(a_i)$  también puede describirse en términos de B-splines  $N_i^{n+1}$  de grado  $n+1$ ,

$$\mathbf{s}(u) = \sum_i \mathbf{d}_i \hat{N}_i^{n+1}(u)$$

sobre la secuencia de nodos  $(\hat{a}_i)$  obtenida a partir de  $(a_i)$  elevando la multiplicidad de cada nodo en uno, tal como se ilustra en la Figura 6.4.

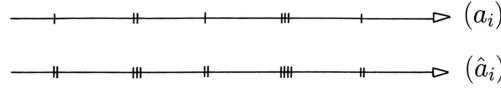


Figura 6.4: Secuencia de nodos para la elevación de grado.

El teorema fundamental de 5.5 y la fórmula (2) de la Sección 3.11 implican que

$$\mathbf{d}_j = \mathbf{s}_r[\hat{a}_{j+1} \dots \hat{a}_{j+n+1}] = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \mathbf{s}_r[\hat{a}_{j+1} \dots \hat{a}_k^* \dots \hat{a}_{j+n+1}]$$

donde  $\mathbf{s}_r[u_1 \dots u_r]$  y  $\mathbf{s}_r[u_1 \dots u_{n+1}]$  representan las formas polares en  $n$  y  $n+1$  variables, respectivamente, de un segmento polinómico del spline  $s(u)$  que depende de  $\mathbf{d}_j$ . Cada punto

$$\mathbf{s}_r[\hat{a}_{j+1} \dots \hat{a}_k^* \dots \hat{a}_{j+n}]$$

se puede calcular por medio del algoritmo de de Boor generalizado en la Observación 5 de la Sección 5.5, requiriéndose de la inserción de a lo sumo  $[(n-1)/2]$  nodos. Para el caso de un spline cúbico uniforme, este algoritmo fue descrito por primera vez en [Ramshaw '87, pp. 109f] para dos segmentos y en [Seidel '89] para cinco segmentos.

**Observación 4:** El número de operaciones para este algoritmo es de orden  $n^2$  por cada punto de control  $\hat{c}_i$ . Es posible reorganizarlo con más eficiencia resultando de orden  $n$ , ver [Prautzsch & Piper '91, Liu '97, Trump '01].

**Observación 5:** En [Prautzsch '84a, Cohen et al. '85, Piegl & Tiller '94] se pueden encontrar otros algoritmos de orden  $n^2$ .



## 6.5 Una fórmula de elevación de grado

Un B-spline de grado  $n$  se puede expresar en términos de B-splines de grado  $n + 1$ . Denotemos por  $N^n(u|a_i \dots a_{i+n+1})$  un B-spline de grado  $n$  sobre los nodos  $a_i, \dots, a_{i+n+1}$ .

Con esta notación se tiene la fórmula

$$(1) \quad N^n(u|a_0 \dots a_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n+1} N^{n+1}(u|a_0 \dots a_i a_i \dots a_{n+1}) ,$$

la cual fue descubierta por C. A. Micchelli [Micchelli '79]. La Figura 6.5 ilustra el ejemplo para  $n = 1$

$$N^1(u|abc) = \frac{1}{3}(N^2(u|abc) + N^2(u|abb) + N^2(u|abcc)) .$$

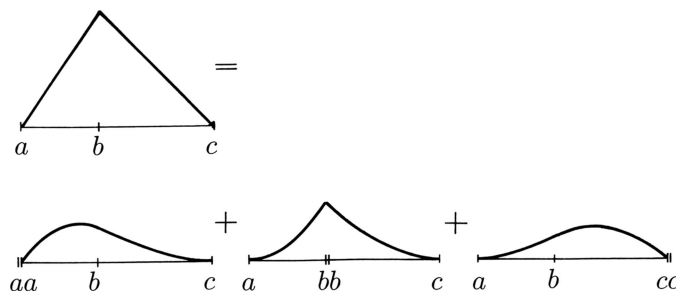


Figura 6.5: Fórmula de elevación de grado.

Para la demostración empleamos la técnica de [Lee '94] y utilizamos diferencias divididas. Si  $f(a) = (a - u)_+^{n+1}$  la fórmula de elevación de grado se expresa como

$$[a_0 \dots a_{n+1}]f' = \sum_{i=0}^{n+1} [a_0 \dots a_i a_i \dots a_{n+1}]f .$$

Esta fórmula es válida para cualquier función diferenciable  $f$ , lo cual verificamos por inducción. Para  $n = -1$  la fórmula es válida por definición de diferencias divididas

$$[a_0]f' = f'(a_0) = [a_0 a_0]f .$$

Para  $n \geq 0$  usamos la relación de recurrencia para diferencias divididas (vea

4.3), la hipótesis de inducción y luego otra vez esta relación:

$$\begin{aligned}
& [a_0 \dots a_{n+1}]f' \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - a_0} ([a_1 \dots a_{n+1}]f' - [a_0 \dots a_n]f') \\
&= \frac{1}{a_{n+1} - a_0} \left( \sum_{i=1}^n ([a_1 \dots a_i a_i \dots a_{n+1}]f - [a_0 \dots a_i a_i \dots a_n]f) \right. \\
&\quad \left. + [a_1 \dots a_{n+1} a_{n+1}]f - [a_0 \dots a_{n+1}]f \right. \\
&\quad \left. + [a_0 \dots a_{n+1}]f - [a_0 a_0 \dots a_n]f \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} [a_0 \dots a_i a_i \dots a_{n+1}]f \quad \diamond
\end{aligned}$$

## 6.6 Convergencia por elevación de grado

Una repetida elevación de grado genera una secuencia de polígonos de control que converge al spline. Considere un spline  $\mathbf{s}(u)$  de grado  $n$ , cuya representación de grado  $m$

$$\mathbf{s}(u) = \sum \mathbf{c}_i N_i^m(u) \quad , \quad m > n \quad ,$$

sobre la secuencia de los nodos  $a_i$  ha sido generada por elevación de grado. Los soportes de los  $N_i^m$  tienen longitud no mayor que  $h := \sup |a_{i+n+1} - a_i|$ . Sean  $\gamma_i := \frac{1}{m}(a_{i+1} + \dots + a_{i+m})$  las abscisas de Greville, entonces si  $h$  y todas las derivadas de  $\mathbf{s}$  son acotadas, se tiene

$$\sup \|\mathbf{c}_i - \mathbf{s}(\gamma_i)\| = O(1/m) \quad .$$

**Demostración:** Procedemos como en 6.3 y consideramos un punto de control, por ejemplo  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{s}[a_1 \dots a_m]$ , donde  $\mathbf{s}[u_1 \dots u_m]$  denota la forma polar de  $\mathbf{s}$  sobre un intervalo internodal adecuado. Por la Observación 9 en 3.9,

$$\frac{\partial^k}{\partial u_{i_1} \dots \partial u_{i_k}} \mathbf{s}[\gamma_0 \dots \gamma_0] = \frac{\varepsilon_{\mathbf{i}}}{m \dots (m-k+1)} \mathbf{s}^{(k)}(\gamma_0) \quad ,$$

donde  $\varepsilon_{\mathbf{i}} = 1$  si todas las coordenadas de  $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_k)$  son distintas y  $\varepsilon_{\mathbf{i}} = 0$  en cualquier otro caso. Entonces la expansión de Tylor de  $\mathbf{s}[a_1 \dots a_m]$  alrededor de  $[\gamma_0 \dots \gamma_0]$  está dada por

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{s}(\gamma_0) + \sum_{k=1}^n \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\varepsilon_{\mathbf{i}}}{k!} \frac{(a_{i_1} - \gamma_0) \dots (a_{i_k} - \gamma_0)}{m \dots (m-k+1)} \mathbf{s}^{(k)}(\gamma_0) \quad .$$

Utilizando el hecho que  $\varepsilon_{\mathbf{i}} = 0$  para  $m^k - (m \dots (m-k+1))$  índices  $\mathbf{i}$  distintos y teniendo en cuenta que  $\sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m (a_{i_1} - \gamma_0) \dots (a_{i_k} - \gamma_0) = 0$  se obtiene

$$\|\mathbf{c}_0 - \mathbf{s}(\gamma_0)\| \leq \sum_{k=2}^n \frac{h^k}{k!} \frac{m^k - (m \dots (m-k+1))}{m \dots (m-k+1)} \sup \|s^k(u)\| ,$$

lo que finaliza la demostración.  $\diamond$

## 6.7 Interpolación

Los splines se utilizan frecuentemente para resolver problemas de interpolación. En particular es de interés la unicidad del interpolante. Sean  $N_0^n, \dots, N_m^n$  B-splines de grado  $n$  sobre la secuencia de nodos  $a_0, \dots, a_{m+n+1}$  y sean  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m$  puntos que deben ser interpolados en las abscisas  $u_0 < \dots < u_m$ . Si deseamos hallar un spline  $\mathbf{s} = \sum_{i=0}^m \mathbf{c}_i N_i^n$  tal que

$$\mathbf{s}(u_j) = \sum_{i=0}^m \mathbf{c}_i N_i^n(u_j) = \mathbf{p}_j ,$$

tenemos que resolver el siguiente sistema lineal

$$(2) \quad \begin{bmatrix} N_0^n(u_0) & \dots & N_m^n(u_0) \\ \vdots & & \vdots \\ N_0^n(u_m) & \dots & N_m^n(u_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0^t \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^t \\ \vdots \\ \mathbf{p}_m^t \end{bmatrix} ,$$

que abreviamos:  $NC = P$ . Nótese que este sistema lineal consiste de varios sistemas, que pueden ser resueltos independientemente, uno para cada columna de  $C$ . La matriz  $N$  se denomina **matriz de colocación**.

El **Teorema Schoenberg-Whitney** de 1953 establece cuando el problema de interpolación tiene solución única [Schoenberg & Whitney '53]

*La matriz  $N$  es invertible si y sólo si tiene diagonal positiva, i.e.  $N_i^n(u_i) \neq 0$  para todo  $i$ .*

Note que si las  $N_i^n$  son continuas entonces la condición  $N_i^n(u_i) \neq 0$  es equivalente a que  $u_i \in (a_i, a_{i+n+1})$ .

Para probar el teorema, nos basamos en [Powell '81]. Sea  $N_i^n(u_i) = 0$  para algún  $i$  y supongamos que  $a_{i+n+1} \leq u_i$ . Entonces

$$N_0^n(u_j) = \dots = N_i^n(u_j) = 0 \text{ para todo } j \geq i ,$$









- 5** Considere las representaciones de Bézier de grado  $n$  y de grado  $m$  de una curva polinómica  $\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{c}_i B_i^m(u)$ , donde  $n < m$ . Sean  $N_0^n, \dots, N_n^n$  y  $M_0^m, \dots, M_m^m$  los B-splines de grado  $n$  sobre los nodos:  $0, 1, \dots, n, m+1, m+2, \dots, m+n+1$  y  $0, 1, 2, \dots, m+n+1$ , respectivamente. Demuestre

$$\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i N_i^n = \sum_{i=0}^m \mathbf{c}_i M_i^m,$$

es decir, una representación de Bézier de grado mayor puede ser calculada a partir de la de grado menor por inserción de nodos [Trump & Prautzsch '96].

- 6** Determine y dibuje los puntos de Bézier de los splines de la Figuras 6.8 y 6.9.
- 7** Sea  $a_0, \dots, a_4$  una secuencia de nodos y sea  $m_i$  el número de nodos que coinciden con  $a_i$ . Para cada posible secuencia  $m_0, \dots, m_4$  considere la secuencia de nodos  $a_0, \dots, a_4$  y dibuje los puntos de Bézier del B-spline cúbico correspondiente.
- 8** Describa un algoritmo de elevación de grado para splines que utilice polinomios simétricos. Véase también 3.11.
- 9** Sea  $s(u)$  un spline funcional que interpola los valores  $p_0, \dots, p_m$ . Si alguna de las filas de la matriz de colocación  $N$  no suma uno entonces el spline que interpola  $q_i = p_i + h$  difiere de  $s(u) + h$ .
- 10** Use la identidad

$$\begin{aligned} & (u_1 - u_2)[u_1 u_2 u_3 \dots u_n] f \\ + & (u_2 - u_0)[u_0 u_2 u_3 \dots u_n] f \\ + & (u_0 - u_1)[u_0 u_1 u_3 \dots u_n] f = 0 \end{aligned}$$

para diferencias divididas para obtener las fórmulas de eliminación y de inserción de nodos [Boehm '80].





## 7 Curvas suaves

[7.1 Contacto de orden  \$r\$](#)  — [7.2 Parametrización por longitud de arco](#) — [7.3 Gamma splines](#) — [7.4 B-splines gamma](#) — [7.5 Nu-splines](#) — [7.6 El marco de Frenet](#) — [7.7 Continuidad de Frenet](#) — [7.8 Osculantes y polinomios simétricos](#) — [7.9 Interpretación geométrica del teorema fundamental](#) — [7.10 Splines con matrices de conexión arbitrarias](#) — [7.11 Inserción de nodos](#) — [7.12 Bases de splines](#) — [7.13 Ejercicios](#)

Hay varias maneras de definir continuidad geométrica. La condición de  $C^r$ -continuidad de Stärk establece, desde el punto de vista de construcción, el criterio más simple para continuidad geométrica de curvas construidas con segmentos de Bézier. Un criterio más general es el contacto  $GC^r$  de orden  $r$ . Una curva es  $GC^r$  si admite una parametrización  $r$ -veces diferenciable. Una noción todavía más general, denominada continuidad de Frenet se basa en invariantes geométricos de orden superior tales como curvaturas, torsión, etc. Los polinomios simétricos proveen una herramienta elegante para el estudio de la continuidad geométrica de curvas polinómicas a trazos.

La continuidad  $C^r$  es un concepto clásico que permite un esquema sencillo (este es el caso de los B-spline) para construir curvas  $C^r$ . Además, es la definición adecuada cuando la parametrización de la curva es relevante, como en el caso de: construcción de superficies que interpolen curvas y la animación de objetos a lo largo de trayectorias, en que el parámetro corresponde al tiempo. Un ejemplo es la parametrización de trayectorias para máquinas de control numérico. Sin embargo, no es la definición adecuada, por ser innecesariamente restrictiva, si estamos interesados sólo en la forma de la curva (el lugar geométrico que define), pues la continuidad  $C^r$  depende de la parametrización. Lo anterior justifica la introducción del contacto  $GC^r$  el cual es independiente de la parametrización y es útil para la modelación de formas. Una aplicación práctica de la continuidad de Frenet es la definición de orientaciones de sólidos rígidos mediante el triedro de Frenet asociado a una trayectoria. Si se desean aceleraciones continuas basta con continuidad  $F^3$  en la base de Frenet.

## 7.1 Contacto de orden $r$

Considere dos curvas  $\mathbf{p}(s)$  y  $\mathbf{q}(t)$ ,  $r$  veces diferenciables en  $s = t = 0$ . Decimos que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen **contacto de orden  $r$**  en 0 si  $\dot{\mathbf{q}}(0) \neq \mathbf{o}$  y si existe una reparametrización  $s(t)$  con  $s(0) = 0$  tal que  $\mathbf{p}(t)$  y  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(s(t))$  tienen las mismas derivadas hasta orden  $r$  en  $t = 0$ . El contacto de orden  $r$  también se denomina **conexión general  $C^r$**  y se denota por  $GC^r$ .

Como en casos anteriores denotamos las derivadas con respecto a  $s$  y  $t$  con punto y apóstrofe, respectivamente.

Por la regla de la cadena, el contacto de orden  $r$  en  $s = t = 0$  significa:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p} & & = \mathbf{q} \\ \mathbf{p}' \dot{s} & & = \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{p}' \ddot{s} + \mathbf{p}'' \dot{s}^2 & & = \ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{p}' \ddot{s} + 3\mathbf{p}'' \dot{s} \ddot{s} + \mathbf{p}''' \dot{s}^3 & = & \ddot{\mathbf{q}} \\ \vdots & & \vdots \end{array} .$$

Usando notación matricial

$$[\mathbf{p} \ \mathbf{p}' \ \dots \ \mathbf{p}^{(r)}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \alpha & \beta & \gamma & \dots & \\ & & \alpha^2 & 3\alpha\beta & \dots & \\ & & & \alpha^3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha^r \end{bmatrix} = [\mathbf{q} \ \dot{\mathbf{q}} \ \dots \ \mathbf{q}^{(r)}]$$

o en forma abreviada

$$PC = Q ,$$

donde  $\alpha = \dot{s} \neq 0, \beta = \ddot{s}, \gamma = \ddot{\ddot{s}}$ , etc. Las matrices  $P$  y  $Q'$  se denominan **jets de orden  $r$**  de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  en  $t = 0$  y  $s = 0$ , respectivamente. La matriz  $C$  se denomina la **matriz de conexión** de orden  $r$ .

En particular, sean  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  curvas polinómicas de grado  $n \geq r$  con puntos de Bézier  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{q}_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ , respectivamente. Entonces 2.4 implica que los  $r$ -jets  $P$  y  $Q$  en  $p_n$  y  $q_0$  están determinados por los últimos y primeros  $r + 1$  puntos Bézier, respectivamente. El recíproco también es cierto. Por consiguiente el contacto de orden  $r$  se puede expresar en términos de los puntos de Bézier como

$$[\mathbf{p}_n \ \dots \ \mathbf{p}_{n-r}] \tilde{C} = [\mathbf{q}_0 \ \dots \ \mathbf{q}_r] ,$$

donde  $\widetilde{C}$  es una matriz triangular superior con elementos en la diagonal  $\widetilde{c}_{ii} = (-\alpha)^i \neq 0, i = 0, \dots, r$ . Nótese que  $\widetilde{C}$  depende de  $n$ .

**Observación 1:** Dada una reparametrización  $s(t)$  siempre existe una reparametrización polinómica, equivalente hasta la derivada  $r$ -ésima:

$$s(t) = st + \frac{\ddot{s}}{2!}t^2 + \dots + \frac{s^{(r)}}{r!}t^r .$$

En particular, cualquier conexión  $GC^1$  se puede transformar en una conexión  $C^1$  usando el cambio de parámetro  $s = \alpha t$ .

**Observación 2:** Similarmente, una conexión  $GC^2$  puede transformarse en una conexión  $C^2$  simple por medio de la transformación cuadrática  $s = \alpha t + (\beta/2)t^2$ . Nótese que la conexión  $C^2$  simple también se puede obtener aplicando una transformación proyectiva, vea por ejemplo [Degen '88].

$$s = \frac{\alpha^2 t}{\alpha - (\beta/2)t} .$$

**Observación 3:** Si  $s = t$ , entonces  $\ddot{s} = \dots = s^{(r)} = 0$ . Por lo tanto obtenemos la condición de Stärk tal como se ilustra en la Figura 7.1 para  $r = n = 3$  con los puntos de Bézier  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{q}_j$  de  $\mathbf{p}(s)$  y  $\mathbf{q}(t)$  definidas sobre  $[-1, 0]$  y  $[0, 1]$ , respectivamente

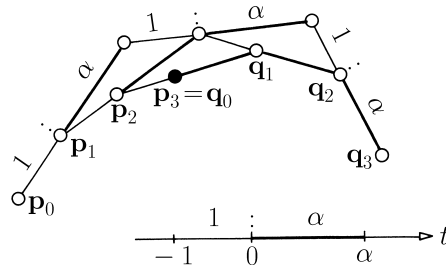
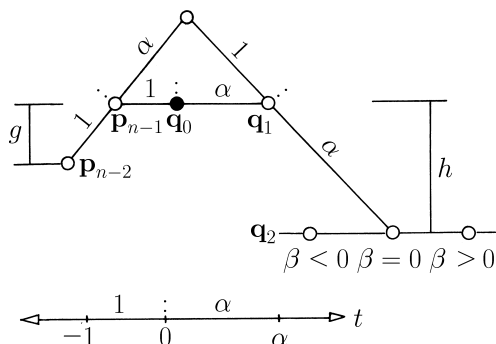


Figura 7.1: Contacto  $C^3$  de Stärk.

**Observación 4:** Cuando se modifica  $\beta = \ddot{s}$  entonces  $\mathbf{q}_2$  se mantiene a lo largo de una paralela a la tangente que pasa por  $\mathbf{q}_0$  y  $\mathbf{q}_1$  como se ilustra en la Figura 7.2. Entonces  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen contacto  $GC^2$  en  $\mathbf{p}_n = \mathbf{q}_0$  si las distancias  $g$  y  $h$  de  $\mathbf{p}_{n-2}$  y  $\mathbf{q}_2$  a la tangente  $\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1$  satisfacen  $g : h = 1 : \alpha^2$ , vea [Farin '82, Boehm '85].

**Observación 5:** Para contactos de orden superior se tiene una situación similar: si modificamos  $s^{(n)}$  entonces  $\mathbf{q}_n$  se mueve a lo largo de una paralela a la tangente  $\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1$ .

Figura 7.2: Contacto  $GC^2$  de Farin.

## 7.2 Parametrización por longitud de arco

Sea  $\mathbf{x}(t)$  una parametrización diferenciable de la curva  $\mathbf{x}$ . Entonces

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\mathbf{x}}\| dt$$

es la **longitud de arco** del segmento  $\mathbf{x}[0, t]$  y

$$\|\mathbf{x}'\| = 1,$$

donde  $\mathbf{x}' = \frac{d}{ds}\mathbf{x}(t(s))$  denota la derivada de  $\mathbf{x}$  con respecto a la longitud de arco y  $t(s)$  es la inversa de  $s(t)$ .

Además, si  $\mathbf{x}(t)$  es **regular**, es decir,  $\dot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{o}$ , entonces la longitud de arco  $s(t)$ , su inversa  $t(s)$  y  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t(s))$  son diferenciables hasta el mismo orden que  $\mathbf{x}(t)$ , pues  $\dot{s} = \|\dot{\mathbf{x}}\|$ . En otras palabras, la parametrización con respecto a la cual una curva alcanza su máxima suavidad es la longitud de arco.

Por lo tanto dos curvas regulares  $\mathbf{p}(s)$  y  $\mathbf{q}(s)$  parametrizadas por longitud de arco tienen contacto de orden en  $r$  en  $s = 0$  si

$$\mathbf{x}(s) = \begin{cases} \mathbf{p}(s) & \text{si } s \leq 0 \\ \mathbf{q}(s) & \text{si } s > 0 \end{cases}$$

es  $r$  veces diferenciable en  $s = 0$ . En consecuencia

*la matriz de una conexión de dos curvas parametrizadas por longitud de arco es la identidad.*

## 7.3 Gamma splines

Sea  $\mathbf{s}(u)$  una curva cúbica por trozos consistente de  $m$  segmentos con conexión  $GC^2$ . Denotamos por  $\mathbf{b}_{3i}, \dots, \mathbf{b}_{3i+3}$  a los puntos de Bézier del segmento  $i$ -

ésimo, es decir,

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_{3i+j} B_j^3(t) , \quad i = 0, \dots, m-1 ,$$

donde  $u = a_i(1-t) + a_{i+1}t$  y  $t \in [0, 1]$ .

Supondremos en las próximas tres secciones sobre  $\gamma$ -splines y  $\nu$ -splines que los nodos  $a_i$  se han escogido de manera tal que  $\mathbf{s}(u)$  es continuamente diferenciable, esto es:  $\mathbf{s}'(a_i-) = \mathbf{s}'(a_i+)$ , o sea

$$(\mathbf{b}_{3i+1} - \mathbf{b}_{3i})\Delta a_{i-1} = (\mathbf{b}_{3i} - \mathbf{b}_{3i-1})\Delta a_i$$

donde  $\Delta_j = a_{j+1} - a_j$ , tal como se ilustra en la Figura 3.8.

Como los segmentos de  $\mathbf{s}$  tienen contacto  $GC^2$ , los cuatro puntos  $\mathbf{b}_{3i-2}, \mathbf{b}_{3i-1}, \mathbf{b}_{3i+1}, \mathbf{b}_{3i+2}$  son coplanares, para todo  $i$ . Denotamos por  $\mathbf{c}_i$  y  $\mathbf{d}_i$  los vértices exteriores de este cuadrilátero, tal como se ilustra en la Figura 7.3 para  $i = 1$ . El cuadrilátero se denomina **A-marco generalizado** o  $\gamma$ -**A-marco**.

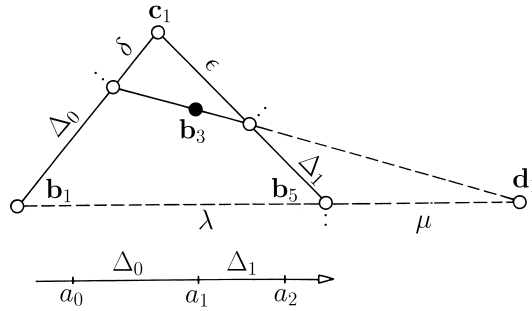


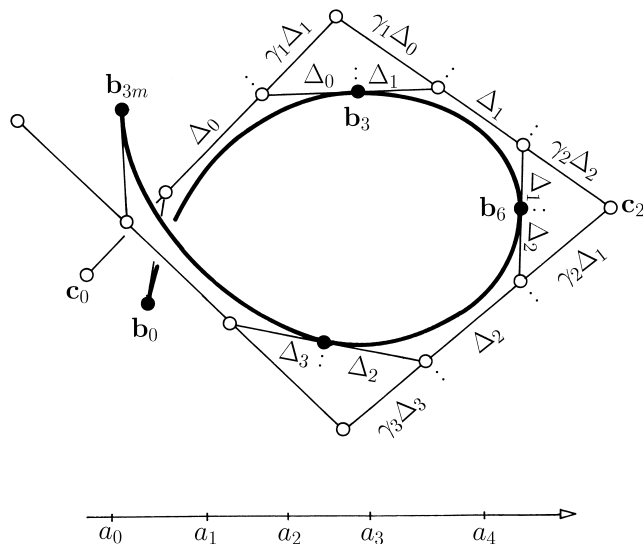
Figura 7.3: A-marco generalizado.

La Figura 7.2 indica que existe un número  $\gamma$  distinto de cero, tal que

$$\epsilon = \gamma\Delta_0 \quad \text{y} \quad \delta = \gamma\Delta_1 .$$

Una curva cúbica por trozos que satisface las condiciones de conexión  $GC^2$  con  $\gamma$  finito se denomina un  $\gamma$ -**spline**. Por lo tanto, un  $\gamma$ -spline está definido por puntos de control  $\mathbf{c}_i$ , números  $\gamma_i \neq 0$  asociados y nodos  $a_i$  [Boehm '85]. La construcción de su representación de Bézier se ilustra en la Figura 7.4. Note que los  $\gamma_i$  podrían ser negativos.

**Observación 6:** La razón  $\lambda : \mu$  en la Figura 7.3 coincide con  $(\Delta_0^2 - \Delta_1^2) : \Delta_1^2$ . Los puntos  $\mathbf{c}_1$  o  $\mathbf{d}_1$  yacen en el infinito (o en la recta ideal), es decir, están

Figura 7.4: Un  $\gamma$ -spline.

infinitamente distantes si  $\gamma = \infty$  o  $\mu = \infty$ , respectivamente. Nótese además que la razón  $\lambda : \mu$  no depende de  $\gamma$ .

**Observación 7:** En la Sección 7.7, verificaremos que una curva  $GC^2$  tiene curvatura continua.

**Observación 8:** Un  $\gamma$ -spline con todos los  $\gamma$ 's iguales a 1 es un spline cúbico  $C^2$ , tal como se discutió en 5.1. Ver la Figura 5.2.

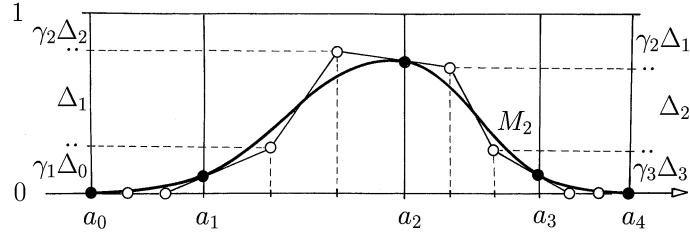
## 7.4 B-splines gamma

Un  $\gamma$ -spline  $s(u)$  depende afinmente de sus puntos de control  $c_i$ . Por lo tanto se puede escribir como una combinación afín de estos

$$s(u) = \sum_i c_i M_i(u) ,$$

donde los  $M_i(u)$  forman una base de  $\gamma$ -splines con nodos  $a_i, \dots, a_{i+3}$  y valores  $\gamma$  asociados  $\gamma_i, \dots, \gamma_{i+3}$ . Las ordenadas de Bézier de  $M_i$  se pueden obtener por medio de la construcción de 7.3 en dimensión uno donde  $c_i = 1$  y todos los demás  $c_j$  son iguales a cero. Las abscisas de Bézier subdividen uniformemente los intervalos internodales, como se muestra en la Observación 10 de 2.8.

La construcción del  $\gamma$ -B-spline  $M_2$  se ilustra en la Figura 7.5.

Figura 7.5: Un  $\gamma$ -B-spline.

**Observación 9:** Los  $\gamma$ -B-splines son no negativos sólo si todos los  $\gamma$ 's son positivos. Si algún  $\gamma_i$  es negativo, entonces obtenemos  $\gamma$ -B-splines con valores negativos y un  $\gamma$ -spline construido con tales  $\gamma$ -B-splines en general no yace en la cápsula convexa de sus puntos de control  $\mathbf{c}_i$ .

**Observación 10:** De manera similar se pueden construir **splines cuárticos con torsión continua**, ver [Boehm '87].

En términos prácticos si  $\gamma_i$  tiende a cero entonces la curva es atraída hacia el punto  $C_i$ .

## 7.5 Nu-splines

Como un  $\gamma$ -spline  $\mathbf{s}(u)$  es  $GC^2$ , entonces de acuerdo con 7.1, existen constantes  $\nu_i$  tales que

$$(1) \quad \mathbf{s}''(a_i+) = \mathbf{s}''(a_i-) + \nu_i \mathbf{s}'(a_i-) .$$

En particular para cualquier  $j$  tenemos

$$M_j''(a_i+) = M_j''(a_i-) + \nu_i M_j'(a_i-) .$$

Usando la representación de Bézier de los  $M_i$  es fácil calcular los  $\nu_i$  [Boehm '85]:

$$\nu_i = 2 \left( \frac{1}{\Delta a_{i-1}} + \frac{1}{\Delta a_i} \right) \left( \frac{1}{\gamma_i} - 1 \right) .$$

Los splines cúbicos  $GC^2$  que satisfacen la condición (1) se denominan  $\nu$ -**splines**. Los coeficientes  $\nu_i$  se denominan **tensiones**. Los  $\gamma$ -spline fueron introducidos por Nielson en 1974 [Nielson '74], para interpolar puntos  $\mathbf{s}(a_i)$  en el plano, por medio de curvas cuyo ajuste se pueda controlar.



## 7.6 El marco de Frenet

Una definición de continuidad menos restrictiva que el contacto  $GC^r$ , además válida en espacios de dimensión arbitraria, se basa en el marco de Frenet. Sea  $\mathbf{x}(s)$  una curva regular en  $\mathbb{R}^d$  parametrizada por longitud de arco y supongamos que sus derivadas hasta orden  $d$  son linealmente independientes. En consecuencia, la curva  $\mathbf{x}$  no está contenida en ningún subespacio afín de  $\mathbb{R}^d$ .

El **marco de Frenet** de  $\mathbf{x}(s)$  es el sistema ortonormal de orientación positiva  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d$  obtenido de  $\mathbf{x}', \dots, \mathbf{x}^{(d)}$  por el proceso de Gram-Schmidt de manera tal que  $\mathbf{f}_i^t \mathbf{x}^{(i)} > 0$  para cada  $i = 1, \dots, d-1$ . El vector  $\mathbf{f}_1 = \mathbf{x}'$  es el **vector tangente** de  $\mathbf{x}$ . Para  $d = 3$   $\mathbf{f}_2$  se denomina el **vector normal** y  $\mathbf{f}_3$  el **vector binormal** de  $\mathbf{x}$ . La Figura 7.6 ilustra esta definición.

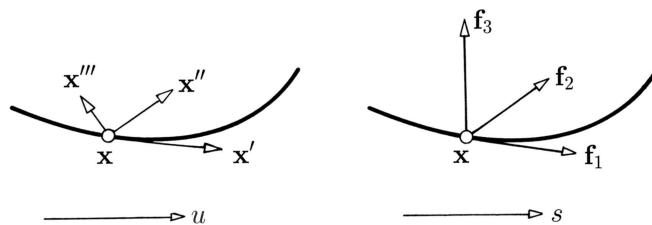


Figura 7.6: El marco de Frenet.

La derivada del marco de Frenet, la cual mide el cambio local de la curva con respecto a la longitud de arco, está dada por las **fórmulas de Frenet**

$$[\mathbf{f}'_1 \ \dots \ \mathbf{f}'_d] = [\mathbf{f}_1 \ \dots \ \mathbf{f}_d] \begin{bmatrix} 0 & -\kappa_1 & & & & \\ \kappa_1 & 0 & -\kappa_2 & & & \\ & \kappa_2 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -\kappa_{d-1} & \\ & & & & \kappa_{d-1} & 0 \end{bmatrix},$$

donde los  $\kappa_i$  están dados por,

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mathbf{f}_2^t \mathbf{x}'' \\ \kappa_1 \kappa_2 &= \mathbf{f}_3^t \mathbf{x}''' \\ \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 &= \mathbf{f}_4^t \mathbf{x}'''' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Vea por ejemplo [Carmo '76]. Los  $\kappa_i$  son diferentes de cero y también se pueden calcular utilizando las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \text{vol}_2[\mathbf{x}'\mathbf{x}''] \\ \kappa_1^2\kappa_2 &= \text{vol}_3[\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''] \\ \kappa_1^3\kappa_2^2\kappa_3 &= \text{vol}_4[\mathbf{x}'\mathbf{x}''\mathbf{x}'''\mathbf{x}''''] \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Los escalares  $\kappa_i$  se denominan **curvaturas** y son **invariantes geométricos** de la curva  $\mathbf{x}$ , es decir, sólo dependen de su forma. La primera de ellas,  $\kappa_1$  es la **curvatura** usual, y la segunda  $\kappa_2$  es la **torsión** de  $\mathbf{x}$ . Véase los Ejercicios 1, 2 y 3 para una interpretación geométrica de  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$ .

## 7.7 Continuidad de Frenet

Una curva continua  $\mathbf{x}(s)$  en  $\mathbb{R}^d$  se dice **Frenet continua de orden**  $r$  si los primeros  $r$  vectores  $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r$  del marco de Frenet y las primeras  $r - 1$  curvaturas  $\kappa_1, \dots, \kappa_{r-1}$  de  $\mathbf{x}$  son continuas. La continuidad de Frenet de orden  $r$ , está definida sólo para  $r \leq d$ .

Sean  $\mathbf{x}'_-, \dots, \mathbf{x}_-^{(r)}$  y  $\mathbf{x}'_+, \dots, \mathbf{x}_+^{(r)}$  las derivadas por la izquierda y por la derecha de  $\mathbf{x}$  en  $s = s_0$ . Entonces se tiene:

*la curva  $\mathbf{x}$  parametrizada por su longitud de arco  $s$  es Frenet continua de orden  $r$  en  $s = s_0$  si y sólo si*

$$(2) \quad [\mathbf{x}'_- \dots \mathbf{x}_-^{(r)}]C = [\mathbf{x}'_+ \dots \mathbf{x}_+^{(r)}] ,$$

*donde  $C$  es una matriz de conexión triangular superior cuya diagonal consta de 1's.*

**Demostración:** Sean  $[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_r]_-$  y  $[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_r]_+$  las matrices formadas por los vectores de Frenet, por la izquierda y por la derecha, respectivamente. Análogamente, sean  $\kappa_i^-$  y  $\kappa_i^+$  las curvaturas por la izquierda y por la derecha de  $\mathbf{x}$  en  $s_0$ . Se desprende de 7.6 que

$$[\mathbf{x}'_- \dots \mathbf{x}_-^{(r)}] = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_r]_- U_- ,$$

donde  $U_-$  es una matriz triangular superior cuya diagonal es

$$1, \kappa_1^-, \dots, (\kappa_1^- \dots \kappa_{r-1}^-) .$$

Para las derivadas por la derecha se satisface una relación similar. Por lo tanto la ecuación (2) se satisface si y sólo si

$$(3) \quad [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_r]_- U_- C U_+^{-1} = [\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_r]_+ ,$$

donde  $U_-CU_+^{-1}$  es triangular superior con diagonal

$$1, (\kappa_1^-/\kappa_1^+), \dots, (\kappa_1^- \dots \kappa_{r-1}^-/\kappa_1^+ \dots \kappa_{r-1}^+).$$

Como los vectores de Frenet son ortogonales entonces (3) se satisface si y sólo si  $U_-CU_+^{-1}$  es la matriz identidad. Luego (3) y (2) son ciertas si y sólo si las curvaturas y los vectores de Frenet son continuos.

Esto termina la demostración.  $\diamond$

De acuerdo a 7.1, los  $r$ -jets de una curva con respecto a dos parametrizaciones distintas están relacionados por una matriz cuya diagonal es de la forma  $\alpha^0, \alpha^1, \dots, \alpha^r$ , con  $\alpha \neq 0$ . Por lo tanto reparametrizando la curva podemos describir la condición (2) de la siguiente manera. Sea  $\mathbf{x}(t)$  una parametrización de la curva  $\mathbf{x}$  con derivadas linealmente independientes hasta orden  $r$  por la derecha y por la izquierda en un punto  $t = t_0$ . Entonces:

*La curva  $\mathbf{x}(t)$  es Frenet continua hasta orden  $r$  en  $t = t_0$  si y sólo si*

$$[\dot{\mathbf{x}}_- \dots \mathbf{x}_-^{(r)}] \bar{C} = [\dot{\mathbf{x}}_+ \dots \mathbf{x}_+^{(r)}] ,$$

*donde  $\bar{C}$  es una matriz triangular superior cuya diagonal es de la forma  $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^r$  con  $\alpha \neq 0$ .*

**Observación 11:** El contacto de orden  $r$  implica continuidad de Frenet de orden  $r$ . El recíproco es cierto en general sólo para  $r \leq 2$ .

**Observación 12:** Una curva plana en  $\mathbb{R}^3$  tiene torsión cero.

**Observación 13:** Las curvaturas  $\kappa_i$  son invariantes euclidianos, es decir, se preservan bajo rotaciones, reflexiones en planos y traslaciones. Note sin embargo que la continuidad de Frenet es invariante desde el punto de vista afín, de hecho es invariante por transformaciones proyectivas.

**Observación 14:** El contacto de orden  $r$  es invariante bajo proyecciones. Sin embargo, la continuidad de Frenet de orden  $r$  se preserva bajo proyecciones sólo si las derivadas hasta orden  $r$  de la curva proyectada son linealmente independientes.

**Observación 15:** Considere las curvas polinómicas  $\mathbf{p}(t)$  y  $\mathbf{q}(t)$  en  $\mathbb{R}^d$  tales que

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(0) \quad \text{y} \quad -\alpha \mathbf{p}'(0) = \mathbf{q}'(0) ,$$

con  $\alpha \neq 0$ . Sean  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$  y  $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n$  puntos de Bézier  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  sobre  $[0, 1]$ . Entonces  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen los mismos marcos de Frenet y curvaturas en  $t = 0$  si los subespacios generados por  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_{i-1}$  dividen el segmento  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{q}_i$  en la razón

$$1 : (\alpha)^i, \text{ si } i \text{ es par} \quad \text{y} \quad -1 : \gamma^i \text{ para } i \text{ impar},$$

ver [Boehm '87]. La Figura 7.7 ilustra la situación para  $d = 3$ .

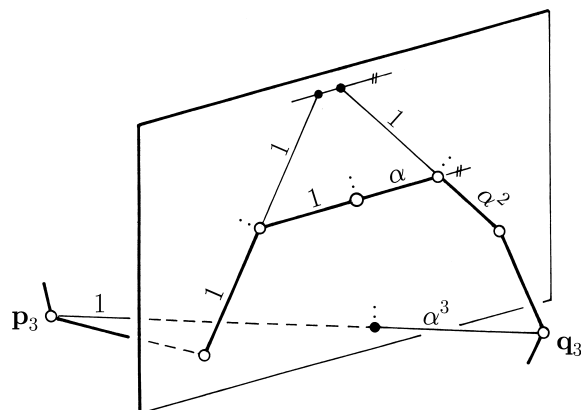


Figura 7.7: Continuidad de Frenet: visión de Boehm.

## 7.8 Osculantes y polinomios simétricos

Para los splines Frenet continuos también existen polígonos de control y un algoritmo de inserción de nodos, como para el caso de los  $C^r$ -splines simples. Ambos pueden deducirse a partir de los polinomios simétricos y del teorema fundamental de 5.5, como mostraremos a continuación.

Sea  $\mathbf{p}(u)$  una curva polinómica de grado  $n$ . Entonces

$$\mathbf{p}_a(u) = \mathbf{p}(u) + \frac{1}{n}(a - u)\mathbf{p}'(u)$$

es una curva polinómica de grado  $n - 1$  en  $u$ . Esta curva se denomina el **primer osculante** de  $\mathbf{p}$  en el nodo  $a$ . La Figura 7.8 ilustra esta definición.

El **segundo osculante** de  $\mathbf{p}$  se obtiene tomando el primer osculante de  $\mathbf{p}_a$ .

De manera similar se pueden construir osculantes de grado más elevado, tomando osculantes sucesivos de  $\mathbf{p}$ . El  $i$ -ésimo osculante de  $\mathbf{p}$  en los nodos  $a_1, \dots, a_i$  se puede escribir

$$\mathbf{p}_{a_1 \dots a_i} = (\mathbf{p}_{a_1})_{a_2 \dots a_i} .$$

Los osculantes tienen las siguientes propiedades. Véase también el Ejercicio 7.

- La **diagonal** del  $n$ -ésimo osculante de una curva polinómica de grado  $n$  coincide con ésta, esto es

$$\mathbf{p}_{a \dots a} = \mathbf{p}(a) .$$

- Los osculantes son **simétricos** con respecto a los nodos

$$\mathbf{p}_{ab}(u) = \mathbf{p}_{ba}(u) .$$

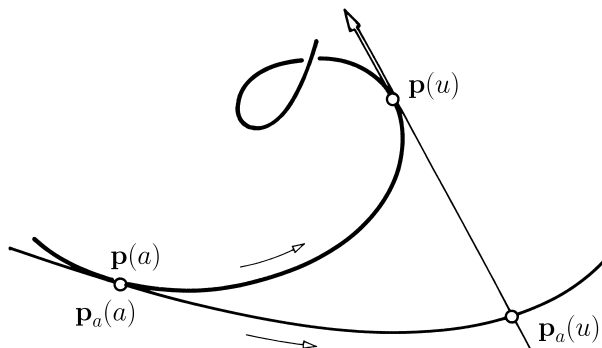


Figura 7.8: Primer osculante de una curva.

- Los osculantes son **afines** con respecto a sus nodos. Para  $a = (1 - \alpha)c + \alpha d$  se tiene

$$\mathbf{p}_a = (1 - \alpha) \cdot \mathbf{p}_c + \alpha \cdot \mathbf{p}_d .$$

Debido a 3.1 estas tres propiedades caracterizan el  $n$ -ésimo osculante de  $\mathbf{p}$  como el polinomio simétrico multiafín de  $\mathbf{p}$ , esto es:

$$\mathbf{p}_{u_1 \dots u_n} = \mathbf{p}[u_1 \dots u_n] .$$

Supongamos que  $\mathbf{p}', \dots, \mathbf{p}^{(n)}$  son linealmente independientes, entonces  $\mathbf{p}, \mathbf{p}', \dots, \mathbf{p}^{(i)}$  generan un subespacio de dimensión  $r$  que denotamos por  $\mathcal{P}_u^r$ , véase también el Ejercicio 10. Este subespacio se denomina el  **$r$ -ésimo subespacio osculador** de  $\mathbf{p}$  en  $u$ . De 3.9 se desprende

$$\mathbf{p}_a^{(r)} = \frac{n-r}{n} \mathbf{p}^{(r)}(a) .$$

Note que  $\mathbf{p}$  y su primer osculante tienen el mismo  $r$ -ésimo subespacio osculador en  $u = a$  para  $r = 0, \dots, n-1$ .

## 7.9 Interpretación geométrica del teorema fundamental

Sea  $\mathbf{s}(u) = \sum \mathbf{c}_i N_i^n$  un spline con nodos simples  $a_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , y sea  $\mathbf{s}^j$  el polinomio que coincide con  $\mathbf{s}$  sobre el intervalo internodal  $[a_j, a_{j+1}]$ . Recuerde del teorema fundamental 5.5 que

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{s}^j[a_{i+1} \dots a_{i+n}] = \mathbf{s}_{a_{i+1} \dots a_{i+n}}^j$$

para  $j = i, \dots, i + n$ .

Sea  $\mathcal{S}_j^k$  el  $k$ -ésimo plano osculador en  $\mathbf{s}$  en  $a_j$ . Como el primer osculante  $\mathbf{s}_{a_j}^j$  genera el subespacio  $\mathcal{S}_j^{n-1}$  y como los osculantes son simétricos en sus nodos, obtenemos la siguiente interpretación del teorema fundamental:

*El punto de control  $\mathbf{c}_i$  yace en los subespacios osculadores  $\mathcal{S}_{i+1}^{n-1}, \dots, \mathcal{S}_{i+n}^{n-1}$ .*

Es más

*cualesquiera  $n$  subespacios osculadores consecutivos  $\mathcal{S}_{i+1}^{n-1}, \dots, \mathcal{S}_{i+n}^{n-1}$  se intersecan precisamente en el punto de control  $\mathbf{c}_i$ , si todos los  $\mathcal{S}_j^n$  generados por los segmentos  $\mathbf{s}^j$  son  $n$ -dimensionales*

De hecho, cualesquiera  $n + 1$  puntos de control consecutivos  $\mathbf{c}_{j-n}, \dots, \mathbf{c}_j$  generan  $\mathcal{S}_j^n$ . Por lo tanto son independientes lo cual implica que las intersecciones  $\mathcal{S}_{i+1}^{n-1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_{i+k}^{n-1}$  están generadas por  $\mathbf{c}_{i-n+k}, \dots, \mathbf{c}_i$ .

En particular observe que, los  $n + 1$  planos osculadores  $\mathcal{S}_i^{n-1}, \dots, \mathcal{S}_{i+n}^{n-1}$  tienen intersección vacía.

**Observación 16:** Esta interpretación geométrica del teorema fundamental, es también válida en el caso de nodos múltiples si interpretamos la intersección  $\mathcal{S}_j^{n-1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_j^{n-1}$  como el  $(n - k)$ -ésimo subespacio osculador de  $\mathcal{S}_j^{n-k}$ .

**Observación 17:** Sea  $\mathbf{p}(u)$  una curva polinómica  $n$ -dimensional (es decir, que no yace en ningún subespacio propio) y  $\mathcal{P}_u^k$  su  $k$ -ésimo subespacio osculador en  $u$ . Como  $\mathbf{p}(u)$  es un spline sobre cualquier secuencia de nodos con segmentos  $n$ -dimensionales, entonces para cualquier  $m \leq n + 1$  los subespacios osculantes  $\mathcal{P}_{a_1}^{n-1}, \dots, \mathcal{P}_{a_m}^{n-1}$  los cuales podrían coincidir, se intersecan en un espacio de dimensión  $n - m$ . De lo contrario,  $n + 1$  subespacios osculadores no tendrían intersección vacía.

**Observación 18:** Por la Observación 17 existen a lo sumo  $m$  subespacios osculadores  $\mathcal{P}_{a_1}^{n-1}, \dots, \mathcal{P}_{a_m}^{n-1}$  posiblemente coincidentes, cuya intersección contiene un subespacio de dimensión  $n - m$ .

**Observación 19:** Es más, se puede demostrar que la intersección de cualquier espacio osculador  $\mathcal{P}_u^{n-r}$  con un subespacio  $m$ -dimensional tiene dimensión  $m - r$ , excepto para un número finito de  $n$ 's, vea [Prautzsch '02].

**Observación 20:** Vea [Pottmann '93, Mazure & Pottmann '96] para una extensión del tratamiento geométrico de B-splines a los splines de Tchebycheff.

**Observación 21:** Los puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  de una curva cúbica  $\mathbf{p}(u)$  que

genera  $\mathbb{R}^3$  están dados por los osculantes de orden 3, vea la Figura 7.9,

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0 &= \mathbf{p}_{000} = \mathcal{P}_0^0, \\ \mathbf{b}_1 &= \mathbf{p}_{001} = \mathcal{P}_0^1 \cap \mathcal{P}_1^2, \\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{p}_{011} = \mathcal{P}_0^2 \cap \mathcal{P}_1^1 \quad y \\ \mathbf{b}_3 &= \mathbf{p}_{111} = \mathcal{P}_1^0. \end{aligned}$$

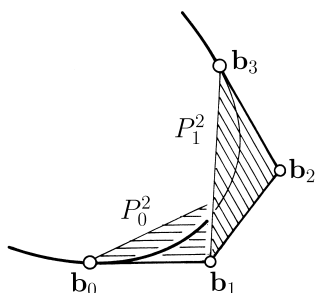


Figura 7.9: Subespacios osculadores y el polígono de Bézier

## 7.10 Splines con matrices de conexión arbitraria

Sean  $\mathbf{a}_i$  nodos simples, esto es que satisfacen  $a_i < a_{i+1}$  para todo  $i$ , y sea  $\mathbf{s}(u)$  una curva continua que es polinómica sobre cada intervalo internodal  $[a_i, a_{i+1}]$ . Supongamos además que las derivadas por la izquierda y por la derecha de  $\mathbf{s}(u)$  en cada nodo y hasta grado  $n - 1$  están relacionadas por una matriz de conexión no singular arbitraria. Entonces la curva  $\mathbf{s}$  tiene un plano osculador  $(n - 1)$ -dimensional en cada nodo  $a_i$ , que denotamos por  $\mathcal{S}_i$  o  $\mathcal{S}_{a_i}$ . ¡Sin embargo, en general,  $\mathbf{s}$  no es Frenet continua!

Supondremos además que cada segmento polinómico de  $\mathbf{s}$  genera el espacio  $n$ -dimensional e introducimos la notación

$$\mathbf{s}[a_{i+1} \dots a_{i+n}] = \mathcal{S}_{i+1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_{i+n}$$

para la intersección de  $n$  subespacios osculadores en nodos consecutivos.

Por la Observación 18 de 7.9 se tiene que dos subespacios osculadores consecutivos  $\mathcal{S}_{j+1}$  y  $\mathcal{S}_{j+2}$  se intersecan en un subespacio de  $\mathcal{S}_{j+2}$  de dimensión  $n - 2$ . Entonces aplicando sucesivamente la Observación 19 de 7.9, se tiene que  $m$  subespacios osculadores consecutivos

$$\mathcal{S}_{j+1}, \dots, \mathcal{S}_{j+m}$$

se intersecan en un subespacio  $(n - m)$ -dimensional de  $\mathcal{S}_{j+m}$ . Por lo tanto, en general,  $\mathbf{s}[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$  es un punto. Sin embargo este punto podría estar en el infinito, véase el Ejercicio 9.

Como  $\mathbf{s}$  es también un spline sobre cualquier secuencia de nodos más fina, la definición de  $\mathbf{s}[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$  se puede extender a cualquier secuencia de nodos consecutivos  $x_1, \dots, x_n$  de un refinamiento de la secuencia  $(a_i)$ . La función de  $n$  variables  $\mathbf{s}[x_1 \dots x_n]$  tiene las siguientes tres propiedades, que se desprenden directamente de la definición:

- $\mathbf{s}[x_1 \dots x_n]$  coincide con  $\mathbf{s}(u)$  sobre la **diagonal**, esto es

$$\mathbf{s}[u \dots u] = \mathbf{s}(u)$$

- $\mathbf{s}[x_1 \dots x_n]$  es **simétrica**, es decir, si  $(y_1, \dots, y_n)$  es una permutación de  $(x_1, \dots, x_n)$  entonces

$$\mathbf{s}[y_1 \dots y_n] = \mathbf{s}[x_1 \dots x_n] .$$

- $\mathbf{s}[x_1 \dots x_n]$  es una **función racional por trozos**. Si, por ejemplo  $x_2, \dots, x_n$  están fijos entonces  $\mathbf{s}[x_2 \dots x_n]$  yace sobre la recta  $S_{x_2} \cap \dots \cap S_{x_n}$ .

Generalizando la nomenclatura del teorema 5.5 los puntos  $\mathbf{c}_i = \mathbf{s}[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$  se denominan también **puntos de control** de  $\mathbf{s}$  [Seidel '92].

**Observación 22:** Si las matrices de conexión son totalmente positivas, entonces cualesquiera  $n$  subespacios osculantes consecutivos  $\mathcal{S}_{i+1}, \dots, \mathcal{S}_{i+n}$  se intersecan en un punto, vea [Dyn & Micchelli '88].

## 7.11 Inserción de nodos

Considere una curva polinómica por trozos  $\mathbf{s}(u)$  de grado  $n$  sobre la secuencia de nodos  $a_i$  como en 7.10 tales que cualesquiera  $n$  subespacios osculantes consecutivos  $\mathcal{S}_{j+1}, \dots, \mathcal{S}_{j+n}$  se intersecan en un punto. Sea  $\hat{a} \in [a_j, a_{j+1})$  un nuevo nodo y sean

$$\hat{a}_i = \begin{cases} a_i & \text{para } i \leq j \\ \hat{a} & \text{para } i = j + 1 \\ a_{i-1} & \text{para } i \geq j + 2 \end{cases} ,$$

los nodos de la secuencia refinada. Usando las propiedades de los osculantes generalizados,  $\mathbf{s}[x_1 \dots x_n]$ , se pueden calcular los nuevos puntos de control  $\hat{\mathbf{c}}_i = \mathbf{s}[\hat{a}_{i+1} \dots \hat{a}_{i+n}]$  a partir de los controles iniciales  $\mathbf{c}_i = \mathbf{s}[a_{i+1} \dots a_{i+n}]$ . De hecho, de 7.10 resulta:

$$\hat{\mathbf{c}}_i = \begin{cases} \mathbf{c}_i & \text{para } i \leq j - n \\ \mathbf{c}_{i-1}(1 - \alpha_i) + \mathbf{c}_i \alpha_i & \text{para } i = j - n + 1, \dots, j \\ \mathbf{c}_{i-1} & \text{para } i \geq j + 1 \end{cases} ,$$



donde  $\alpha_i$  es una función racional por trozos de  $\hat{a}$ . Véase el Ejercicio 6.

En particular, si insertamos el nodo  $\hat{a}$   $n$  veces entonces se obtiene un algoritmo similar al algoritmo de de Boor para el cálculo de  $\mathbf{s}[\hat{a} \dots \hat{a}] = \mathbf{s}(\hat{a})$ . La única diferencia, es que en general los pesos  $\alpha_i$  no dependen linealmente de  $\hat{a}$ . Observe que este algoritmo de **de Boor generalizado** funciona solamente cuando todas las intersecciones  $\mathbf{s}[a_{j+1} \dots a_{j+k} \hat{a} \overset{n-k}{\cdot} \hat{a}] = \mathcal{S}_{j+1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_{j+k} \cap$  ( $k$ -ésimo subespacio osculante en  $\hat{a}$ ), requeridas para el cálculo de  $\mathbf{s}[\hat{a} \dots \hat{a}]$ , son puntos. Sin embargo, tal como se desprende de la Observación 18, estas intersecciones pueden no ser puntos en a lo sumo un número finito de nodos  $\hat{a}$ .

**Observación 23:** Los puntos de control  $\mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, \dots, m$ , definen el spline  $\mathbf{s}(u)$  para todo  $u \in [a_n, a_{m+1}]$ . Por lo tanto, si consideramos  $\mathbf{s}$  solamente sobre  $[a_n, a_{m+1}]$ , es conveniente suponer nodos de multiplicidad  $n$  en los extremos.

$$a_0 = \dots = a_{n-1} \quad \text{y} \quad a_{m+1} = \dots = a_{m+n+1} .$$

## 7.12 Bases de splines

Hasta ahora hemos supuesto que la curva  $\mathbf{s}(u)$  tiene derivadas independientes hasta orden  $n - 1$ . Esto sin embargo no es necesario para que estén bien definidos los puntos de control y para que exista un algoritmo de inserción de nodos.

Sea  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_m)$  una secuencia de nodos simples y  $C = (C_1, \dots, C_{m-1})$  una secuencia de matrices  $(n-1) \times (n-1)$  no singulares. Una curva polinómica por trozos  $\mathbf{s}(u)$  se denomina un spline de grado  $n$  sobre  $\mathbf{a}$  y  $C$  si es polinómica de grado  $n$  sobre cada intervalo internodal  $(a_i, a_{i+1})$ ,  $i = 0, \dots, m - 1$ , y si para cada  $u = a_1, \dots, a_{m-1}$ , las derivadas por la izquierda y por la derecha están relacionadas por

$$[\mathbf{s}_-^{(1)} \dots \mathbf{s}_-^{(n-1)}] C_i = [\mathbf{s}_+^{(1)} \dots \mathbf{s}_+^{(n-1)}] .$$

Para fijar ideas suponderemoas que  $\mathbf{s}$  yace en 3D.

Dada la secuencia de nodos  $a_0, \dots, a_m$  y la secuencia de matrices no singulares  $C_1, \dots, C_{m-1}$  para cualesquiera  $m+n$  puntos  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{2n}, \dots, \mathbf{b}_{mn}$ , que generan un espacio de dimensión  $m+n$ , se puede construir un spline de grado  $n$ , que tiene derivadas continuas hasta grado  $n - 1$ . Este spline se denomina una **curva normal** para el espacio de los splines en 3D de grado  $n$ , sobre la secuencia de nodos  $a$  y matrices de conexión  $C$ .

La curva normal la denotamos por  $\mathbf{s}_{\text{norm}}$  y los puntos de Bézier de sus segmentos polinómicos son  $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n; \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_{2n}$ , etc. Los puntos de

Bézier (tales como  $\mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}, \dots, \mathbf{b}_{2n+1}, \dots$ ) están determinados por las condiciones de conexión dadas por las matrices de conexión  $C$ .

Cualquier spline de grado  $n$ , sobre  $\mathbf{a}$  y  $C$  es la imagen por una aplicación afín del espacio  $n + m$  dimensional en 3D. H.P. Seidel se refiere a la curva normal como spline universal en [Seidel '92]. Las imágenes de los puntos de control de  $\mathbf{s}_{\text{norm}}$  son los puntos de control de  $\mathbf{s}$ . Esto entonces demuestra que para cualquier spline  $\mathbf{s}$  sobre  $\mathbf{a}$  y  $C$  hay un polígono de control y que existe un algoritmo de inserción de nodos. Los pesos  $\alpha_i$  de 7.11 dependen solamente de  $\mathbf{a}$ ,  $C$  y de  $\hat{a}$ , pero no de cada spline en particular.

Es más, las curvas normales sobre  $\mathbf{a}$  y  $C$  con puntos de control  $0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$  forman una base para el espacio de splines sobre  $\mathbf{a}$  y  $C$ . El algoritmo de de Boor generalizado implica que estos splines tienen igual soporte que los B-splines ordinarios sobre  $\mathbf{a}$ .

**Observación 24:** En los casos que no se pueda definir los puntos de control de un spline normal sobre  $\mathbf{a}$  y  $C$ , por intersección de los  $n$  subespacios osculantes, podemos perturbar los nodos  $a_i$  de manera tal que los osculantes en cada uno de los  $n$  nodos consecutivos se intersecten en exactamente un punto. Véase la Observación 18 de 7.9. Vea también los Ejercicios 13 - 15.

## 7.13 Ejercicios

- 1 Considere la curva  $\mathbf{x}(t)$  con curvatura  $\kappa(t) \neq 0$ . Muestre que los círculos tangentes a  $\mathbf{x}$  con contacto de orden 2 tiene radio  $1/\kappa$ . Estos círculos se denominan osculadores y sus centros son los centros de curvatura.
- 2 Considere una curva  $\mathbf{x}(s)$  parametrizada por longitud de arco. Su vector tangente  $\mathbf{t}(s)$  describe una curva sobre la esfera unitaria. La longitud de arco de la curva  $\mathbf{t}$ , que denotamos por  $\alpha(s)$ , representa cuanto se han desviado los ángulos de la curva en tiempo  $s$  con respecto a los valores angulares iniciales en  $s = 0$ . Demuestre que la curvatura  $\kappa$  de  $\mathbf{x}$  es igual a la derivada de  $\mathbf{t}$  respecto a  $s$ , es decir,  $\alpha' = \kappa$ .
- 3 Demuestre que la torsión de una curva en  $\mathbb{R}^3$  coincide con la velocidad angular del vector binormal con respecto a  $s$ .
- 4 Convierta un  $\nu$ -spline a su representación  $\gamma$ -spline, o sea, exprese los  $\gamma_i$  en términos de los  $\nu_i$ , vea 7.5.
- 5 Un  $\gamma$ -spline ( $\nu$ -spline) sobre los nodos  $a_0, \dots, a_{m+2}$  con parámetros  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m+1}$  ( $\nu_1, \dots, \nu_{m+1}$ ) es también un  $\gamma$ -spline ( $\nu$ -spline) sobre una secuencia de nodos refinada  $\hat{a}_0 = a_0, \dots, \hat{a}_i = a_i, \hat{a}_{i+1}, \hat{a}_{i+2} = a_{i+1}, \dots, \hat{a}_{m+3} = a_{m+2}$  con parámetros  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{m+2}$  ( $\hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_{m+2}$ ). Exprese los valores  $\hat{\gamma}_i$  ( $\hat{\nu}_i$ ) en función de los  $\gamma_i$  ( $\nu_i$ ) respectivamente.

- 6 En 7.3 mostramos como se puede obtener el polígono de control de un  $\gamma$ -spline  $\mathbf{s}(u)$  a partir de su polígono de Bézier. Subdivida el polígono de Bézier de un segmento de  $\mathbf{s}(u)$  y construya el polígono de control correspondiente de este segmento spline. Expresé los nuevos puntos de control como combinaciones afines de los puntos de control dados, cf. [Boehm '85].
- 7 Verifique que los osculantes son afines y simétricos en términos de sus nodos.
- 8 Considere el  $\gamma$ -spline  $\mathbf{s}(u) = \mathbf{s}(u+4)$  sobre los nodos 0, 1, 2, 3, 4 con puntos de control  $[1 \ 1]^t$ ,  $[-1 \ 1]^t$ ,  $[-1 \ -1]^t$ ,  $[1 \ -1]^t$  y parámetros  $\gamma = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4$ . ¿Para qué valor de  $\gamma$   $\mathbf{s}(u)$  interpola un círculo de radio  $\rho < \sqrt{2}$  centrado en el origen para  $u = 1, 2, 3, 4$ ? ¿Para qué  $\gamma$ ,  $\mathbf{s}(u)$  interpola a este círculo en  $u = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ ?
- 9 Encuentre dos cúbicas  $\mathbf{p}(u)$  y  $\mathbf{q}(u)$  con el mismo marco de Frenet en  $u = 0$  tales que sus planos osculadores en  $u = 1$  son paralelos pero diferentes.
- 10 Sea  $\mathbf{p}(u)$  una curva polinómica de grado  $n$  que genere  $\mathbb{R}^n$ . Demuestre que cada  $i$ -ésimo subespacio osculador de  $\mathbf{p}$  tiene dimensión  $i$  para  $i = 0, 1, \dots, n$ .
- 11 Encuentre un spline cúbico que consista de segmentos planos y con nodos simples tales que cada uno de sus puntos de control es intersección de 3 planos osculadores consecutivos  $\mathcal{S}_j^2$ .
- 12 Sea  $\mathbf{p}(u)$  una curva de grado  $n$  que genera  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\mathcal{P}_u^k$  su  $k$ -ésimo subespacio osculador en  $u$ . Demuestre que cualquier intersección  $\mathcal{P}_a^{n-i} \cap \mathcal{P}_b^{n-j}$  converge a  $\mathcal{P}_a^{n-i+j}$ , cuando  $b$  tiende a  $a$ .
- 13 Considere el espacio de splines cúbicos sobre  $\mathbf{Z}$  con matrices de conexión  $C_i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  para  $i = 1, \dots, m$  y  $C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  para todos los demás nodos. Muestre que tres planos osculadores en nodos consecutivos pueden intersectarse en una recta.
- 14 Encuentre los spline base (en el sentido de 7.12) del espacio de splines cúbicos del Ejercicio 13. Trate de que en su base haya el mayor número posible de B-splines.
- 15 Construya una base para el espacio de splines cúbicos del Ejercicio 13, cuyos elementos tengan soporte mínimo.

## 8 Subdivisión uniforme

*8.1 B-splines uniformes* — *8.2 Subdivisión uniforme* — *8.3 Subdivisión iterada*  
— *8.4 La matriz de subdivisión* — *8.5 Derivadas* — *8.6 Subdivisión estacionaria*  
— *8.7 Teoremas de convergencia* — *8.8 Cálculo del esquema de diferencias* —  
*8.9 El esquema de los cuatro puntos* — *8.10 Análisis del esquema de los cuatro puntos* — *8.11 Ejercicios*

Los splines se simplifican mucho si los nodos son simples y están uniformemente espaciados. En este caso dos B-splines de un mismo grado difieren por una traslación, lo cual permite una evaluación eficiente por medio de un método matricial o a través de una tabla de valores precalculados. Por esta razón, se han ideado algoritmos simples para convertir una representación B-spline arbitraria en una representación B-spline sobre una secuencia de nodos más fina pero satisfaciendo la condición de estar uniformemente espaciados. Estos algoritmos son prototipos de toda una clase de algoritmos que se denominan **algoritmos de subdivisión estacionaria**.

### 8.1 B-splines uniformes

Los B-splines sobre la secuencia de nodos  $\mathbf{Z}$  se pueden definir como en 5.3 y también por convolución, usando la fórmula de la derivada de 5.7. Sea

$$N^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{para } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

el B-spline constante por trozos sobre los nodos 0 y 1, vea la Figura 5.4. Usando la fórmula de la derivada de un B-spline  $N^n(u)$  de grado  $n$  sobre los nodos  $0, 1, 2, \dots, n+1$  se obtiene por la recursión

$$N^j(u) = \int_0^u (N^{j-1}(v) - N^{j-1}(v-1))dv, \quad j = 1, \dots, n,$$

que se puede reescribir

$$N^j(u) = \int_0^1 N^{j-1}(u-t)dt$$

o también

$$\begin{aligned} N^j(u) &= \int_{\mathbf{R}} N^{j-1}(u-t)N^0(t)dt \\ &= N^{j-1} * N^0 \end{aligned}$$

la cual se denomina **convolución** de  $N^{j-1}$  con  $N^0$ . La Figura 8.1 ilustra esta construcción recursiva. En lo que sigue consideramos los **trasladados**  $N^n(u-i)$  y los denotamos como en los Capítulos 5 y 6:

$$N_i^n(u) = N^n(u-i) .$$

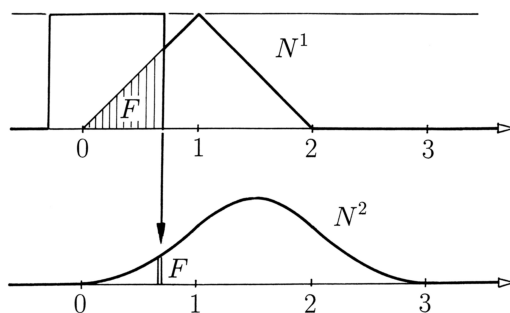


Figura 8.1: Construcción del B-spline uniforme  $N^2(u)$ .

## 8.2 Subdivisión uniforme

La combinación afín de puntos  $\mathbf{c}_i$  ponderados

$$\mathbf{s}^n(u) = \sum \mathbf{c}_i N_i^n(u)$$

con **B-splines uniformes** sobre  $Z$  se denomina un **spline uniforme** sobre  $Z$ . **Subdivisión uniforme** es el cálculo de la representación B-spline de  $\mathbf{s}^n(u)$  sobre la secuencia refinada de nodos  $\frac{1}{2}Z$ .

Para esta representación introducimos los **B-splines escalados**  $M^n(u) = N^n(2u)$  y sus trasladados

$$M_i^n(u) = M^n(u - i/2) = N^n(2u - i),$$

vea la Figura 8.2.

La construcción de la representación sobre la secuencia refinada

$$\mathbf{s}^n(u) = \sum \mathbf{b}_i^n M_i^n(u)$$

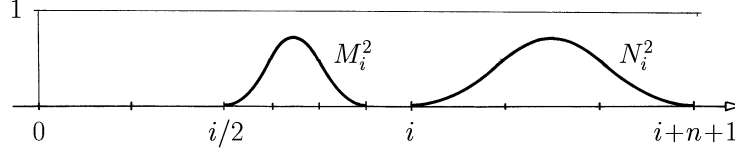


Figura 8.2: Escalamiento de un B-spline uniforme.

no es difícil. Para  $n = 0$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^n(u) &= \sum \mathbf{c}_i N_i^0(u) \\ &= \sum \mathbf{c}_i (M_{2i}^0(u) + M_{2i+1}^0(u)) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{b}_{2i}^0 = \mathbf{b}_{2i+1}^0 = \mathbf{c}_i .$$

Para  $n = j + 1 > 0$  la recursión para los B-splines uniformes implica lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^n(u) &= \sum \mathbf{c}_i N_i^{j+1}(u) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sum \mathbf{c}_i N_i^j(u-t) N^0(t) dt \\ &= \int_{\mathbf{R}} \sum \mathbf{b}_i^j M_i^j(u-t) [M_0^0(t) + M_1^0(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \sum \mathbf{b}_i^j [M_i^{j+1}(u) + M_{i+1}^{j+1}(u)] \\ &= \sum \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{i-1}^j + \mathbf{b}_i^j) M_i^{j+1}(u) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\mathbf{b}_i^{j+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{b}_{i-1}^j + \mathbf{b}_i^j) .$$

Este cálculo recursivo de los  $\mathbf{b}_i^n$  se denomina **el algoritmo de Lane y Riesenfeld** [Lane & Riesenfeld '80].

*Dado un polígono de control primero se **duplican** todos los puntos de control y posteriormente se construyen los polígonos conectando los **puntos medios** repetidamente.*

La Figura 8.3 ilustra esta construcción para  $n = 3$ . Los puntos negros corresponden al polígono original, los cuales se duplican. La secuencia de círculos en el cuadro superior derecho de la Figura 8.3, denota el polígono para  $n = 1$ .

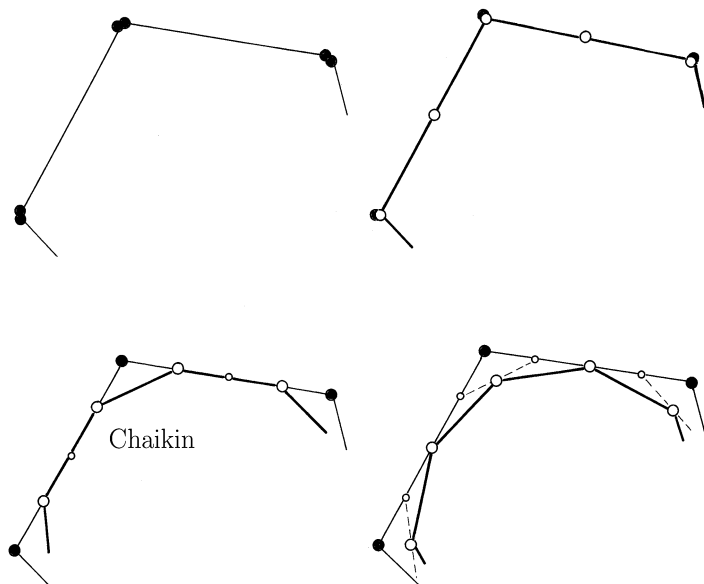


Figura 8.3: Subdivisión uniforme.

En los dos cuadros inferiores los círculos pequeños siempre indican vértices del polígono previo.

**Observación 1:** La construcción anterior para  $n = 2$  se denomina el **algoritmo de Chaikin** aunque fue estudiado anteriormente por de Rham [Rham '47].

**Observación 2:** Se tiene

$$\mathbf{s}^{n+1}(u) = \int_{u-1}^u \mathbf{s}^n(t) dt = \mathbf{s}^n * N^0 = \mathbf{s}^0 * N^n .$$

### 8.3 Subdivisión iterada

El algoritmo de la subdivisión uniforme se puede describir de una manera más compacta utilizando una notación matricial.

Sea

$$C = [\dots \quad \mathbf{c}_{-1} \mathbf{c}_0 \mathbf{c}_1 \quad \dots]$$

y

$$B_n = [ \quad \dots \quad \mathbf{b}_{-1}^n \mathbf{b}_0^n \mathbf{b}_1^n \quad \dots \quad ]$$

las matrices formadas por los puntos de control de un spline uniforme  $\mathbf{s}^n$  de grado  $n$  sobre  $\mathbf{Z}$  y  $\frac{1}{2}\mathbf{Z}$ , respectivamente. Entonces el procedimiento de Lane-Riesenfeld dado en 8.2, puede describirse

$$B_0 = CD \quad \text{y} \quad B_{j+1} = B_j M, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

donde  $D$  y  $M$  son las matrices bi-infinitas

$$D = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

y

$$M = 1/2 \begin{bmatrix} \cdot & & & & & \\ \cdot & 1 & & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & \cdot & \\ & & & & \cdot & \end{bmatrix}.$$

La multiplicación por  $D$  corresponde duplicar cada punto de control y la multiplicación por  $M$  equivale al cálculo de los punto medios de pares consecutivos de puntos de control. Entonces la matriz

$$S_n = DM^n,$$

representa el operador de subdivisión para los splines uniformes de grado  $n$ . El proceso de subdivisión se puede repetir. Aplicando  $S_n = DM^n$  dos veces, se obtiene el polígono de control del spline  $\mathbf{s}^n$  sobre  $\frac{1}{4}\mathbf{Z}$ . Esto significa

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^n(u) &= \sum \mathbf{c}_i N_i^n(u) \\ &= \sum \mathbf{b}_i^n N_i^n(2u) \\ &= \sum \mathbf{a}_i^n N_i^n(4u), \end{aligned}$$

donde

$$[\dots \mathbf{a}_{-1} \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \dots] = CS_n S_n.$$

**Observación 3:** En 6.3 se demostró que la secuencia de los polígonos de control

$$C_k = CS_n^k$$

del spline  $\mathbf{s}^n$  sobre  $2^{-n}\mathbf{Z}$  converge a  $\mathbf{s}^n$  cuando  $k$  tiende a infinito.



## 8.4 La matriz de subdivisión

La matriz de subdivisión  $S_1 = DM$  para los splines lineales por trozos se obtiene directamente de la Figura 8.3

$$S_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} .$$

Similarmente la matriz de subdivisión  $S_2$  para splines cuadráticos por trozos (algoritmo de Chaikin) resulta

$$S_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

y en general la matriz  $S_n$  es de la forma

$$S_n = \begin{bmatrix} \cdots & & & & & & \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n+1} & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n+1} & & \\ & & & & & \cdots & \end{bmatrix} ,$$

donde  $a_i$  es el coeficiente binomial

$$a_i = 2^{-n} \binom{n+1}{i} .$$

Otra derivación de  $S_n$  está dada en la Observación 5 de 8.8.

La multiplicación del polígono de control  $C$  por la matriz de subdivisión  $S_n$  nos conduce a las **ecuaciones de refinamiento**

$$\mathbf{b}_{2i}^n = \sum_j \mathbf{c}_j a_{2i-2j} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_{2i+1}^n = \sum_j \mathbf{c}_j a_{2i+1-2j},$$

las cuales se pueden combinar en una sola expresión.

$$\mathbf{b}_i^n = \sum_j \mathbf{c}_j a_{i-2j} .$$

## 8.5 Derivadas

La derivada de un spline  $\mathbf{s}(u) = \sum \mathbf{c}_i N_i^n(u)$  sobre  $\mathbf{Z}$  tiene una forma particularmente simple. Especializando la identidad (1) de 5.6 obtenemos

$$\mathbf{s}'(u) = \sum \nabla \mathbf{c}_i N_i^{n-1}(u) ,$$



también convergen a  $\mathbf{c}(u)$ , que es uniformemente continua sobre intervalos compactos.

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia uniforme fue dada en [Dyn et al. '91] y [Micchelli & Prautzsch '87].

*Los polígonos de control  $C_k$  convergen uniformemente a una curva uniformemente continua  $\mathbf{c}(u)$  si y sólo si los polígonos diferencia  $\nabla \mathbf{c}_k$  convergen uniformemente a cero.*

La prueba de este hecho está en 15.3. Véase también los Ejercicios 3 y 4.

## 8.7 Teoremas de convergencia

Consideremos ahora una secuencia  $C_k = [\dots \mathbf{c}_i^k \dots]$  de polígonos arbitrarios, no necesariamente obtenidos por subdivisión y supongamos que la secuencia de polígonos  $2^k \nabla^2 C_k$ , las segundas diferencias divididas, converge uniformemente a cero. Entonces por 8.6, los polígonos primera diferencia dividida  $2^k \nabla C_k$  convergen uniformemente a una curva uniformemente continua,  $\mathbf{d}(u)$ . Por lo tanto, las primeras diferencias  $\nabla C_k$  convergen uniformemente a cero y los polígonos  $C_k$ , a una curva uniformemente continua  $\mathbf{c}$ .

Este hecho implica que el spline constante por trozos

$$\mathbf{d}_k(u) = \sum 2^k \nabla \mathbf{c}_i^k N_i^0(2^k u)$$

y que los splines lineales por trozos

$$\mathbf{c}_k(u) = \sum \mathbf{c}_i^k N_i^1(2^k u)$$

convergen uniformemente a  $\mathbf{d}(u)$  y  $\mathbf{c}(u)$ , respectivamente. Como

$$\mathbf{c}_k(u) = \mathbf{c}_{-1}^k + \int_0^u \mathbf{d}_k(t) dt ,$$

y como integración y convergencia uniforme conmutan, resulta

$$\mathbf{c}(u) = \mathbf{c}(0) + \int_0^u \mathbf{d}(t) dt .$$

En consecuencia  $\mathbf{c}$  es diferenciable y  $\mathbf{c}'(u) = \mathbf{d}(u)$ . Una aplicación repetida de este resultado resulta en el siguiente teorema general:

*Si la secuencia de polígonos  $2^{kr} \nabla^{r+1} C_k$  converge uniformemente a cero cuando  $k$  tiende a infinito, entonces  $\mathbf{c}$  es una curva  $C^r$ . Además para todo  $i = 0, \dots, r$ , los polígonos  $2^{ki} \nabla^i C_k$  convergen uniformemente a las derivadas  $\mathbf{c}^i$  de una curva  $\mathbf{c}$ ,  $r$  veces continuamente diferenciable.*

## 8.8 Cálculo del esquema de diferencias

Para utilizar los resultados de 8.7 debemos calcular los polígonos diferencia  $\nabla C_k$ . Sea  $C = [\dots \mathbf{c}_i \dots]$  un polígono de control y  $S$  la matriz de subdivisión como en 8.6. Tal como se explicó en 8.4, los vértices  $\mathbf{b}_i$  del polígono subdividido  $B = CS$  se calcula usando la **ecuación de refinamiento**

$$\mathbf{b}_i = \sum_j \mathbf{c}_j \alpha_{i-2j} .$$

Multiplicando por el monomio  $z^i$  y sumando sobre  $i$  obtenemos el polinomio de Laurent

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{b}_i z^i &= \sum_i \sum_j \mathbf{c}_j \alpha_{i-2j} z^{2j} z^{i-2j} \\ &= \sum_j \mathbf{c}_j z^{2j} \sum_k \alpha_k z^k , \end{aligned}$$

el cual se puede expresar de manera compacta como:

$$\mathbf{b}(z) = \mathbf{c}(z^2) \cdot \alpha(z) .$$

El factor

$$\alpha(z) = \sum_k \alpha_k z^k$$

no depende de  $C$  y se denomina el **polinomio característico** del esquema de subdivisión  $S$ . Note que cada esquema de subdivisión tiene un único polinomio característico y viceversa.

La representación de esquemas de subdivisión por polinomios característicos permite obtener fácilmente sus esquemas de diferencias asociados: Multiplicando las diferencias  $\nabla \mathbf{b}_i$  por  $z^i$  y sumando sobre  $i$  obtenemos el polinomio de Laurent

$$\nabla \mathbf{b}(z) = \sum_i \nabla \mathbf{b}_i z^i = \mathbf{b}(z)(1 - z) .$$

Sustituyendo la ecuación para  $\mathbf{b}(z)$  se tiene

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{b}(z) &= \mathbf{c}(z^2) \alpha(z) (1 - z) \\ &= \nabla \mathbf{c}(z^2) \alpha(z) \frac{1 - z}{1 - z^2} \\ &= \nabla \mathbf{c}(z^2) \frac{\alpha(z)}{1 + z} . \end{aligned}$$

La suposición  $\sum \alpha_{2i} = \sum \alpha_{2i+1} = 1$  establecida en 8.5 es equivalente a  $\alpha(-1) = 0$  y  $\alpha(1) = 2$ . Por lo tanto  $(1 + z)$  es un factor de  $\alpha(z)$ , lo cual implica que

$$\beta(z) = \frac{\alpha(z)}{1 + z} .$$

es el **polinomio característico del esquema de diferencias** asociado con  $S$ .

**Observación 4:** La matriz de subdivisión  $D$  para un spline constante por trozos sobre  $\mathbf{Z}$  dada en 8.3, tiene polinomio característico

$$\sigma_0(z) = (1 + z) .$$

**Observación 5:** La matriz  $\frac{1}{2}S_{n-1}$  definida en 8.4 representa el esquema de diferencias correspondiente al algoritmo de subdivisión para splines de grado  $n$  sobre  $\mathbf{Z}$ , vea 8.5. Por lo tanto el polinomio característico  $\sigma_n(z)$  de  $S_n$  está dado por

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{2}(1+z)\sigma_{n-1}(z) \\ &= \frac{1}{4}(1+z)^2\sigma_{n-2}(z) \\ &\vdots \\ &= 2^{-n}(1+z)^n\sigma_0(z) = 2^{-n}(1+z)^{n+1} , \end{aligned}$$

lo cual prueba de manera distinta la identidad  $a_i = 2^{-n}\binom{n+1}{i}$  de 8.4.

## 8.9 El esquema de los cuatro puntos

Como un ejemplo de los resultados anteriores presentamos el **esquema de los cuatro puntos** de Dyn, Gregory y Levin [Dyn et al. '87]. Dado un polígono  $P_0 = [\dots \mathbf{p}_i^0 \dots]$  se construye una secuencia de polígonos  $P_k = [\dots \mathbf{p}_i^k \dots]$  de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{2i-1}^{k+1} &= \mathbf{p}_{i+2}^k \\ \mathbf{p}_{2i}^{k+1} &= -\omega\mathbf{p}_{i-3}^k + (1/2 + \omega)\mathbf{p}_{i-2}^k + (1/2 + \omega)\mathbf{p}_{i-1}^k - \omega\mathbf{p}_i^k , \end{aligned}$$

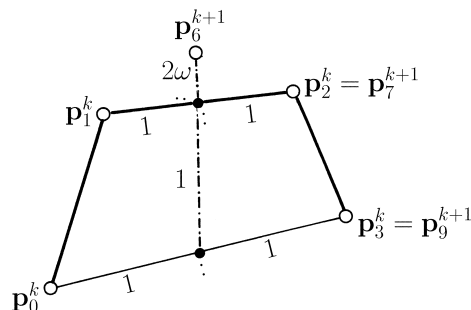
donde  $\omega$  es un parámetro de diseño para controlar la forma de la curva. La construcción correspondiente se ilustra en la Figura 8.4.

Note que cada polígono  $P_{k+1}$  obtenido por medio del esquema de los cuatro puntos, interpola al polinomio previo  $P_k$ . Los algoritmos de subdivisión con esta propiedad también se denominan **esquemas iterativos interpolantes**.

**Observación 6:** Sea  $\mathbf{p}(u)$  una curva cúbica y sea

$$P_0 = [\dots \mathbf{p}_i^0 \dots]$$

el polígono dado por  $\mathbf{p}_i^0 = \mathbf{p}(i)$ ,  $i \in \mathbf{Z}$ . Si  $\omega = 1/16$  entonces todos los polígonos  $P_k$  obtenidos a través del esquema de los cuatro puntos también

Figura 8.4: Esquema de los cuatro puntos - construcción de  $\mathbf{p}_6^{k+1}$ .

yacen sobre la cúbica, concretamente

$$\mathbf{p}_{i+1}^k = \mathbf{p}(1 + i/2^k).$$

.Entonces el esquema de los cuatro puntos tiene precisión cúbica para  $\omega = 1/16$ .

**Observación 7:** Usando la interpolación polinómica de grado  $2k - 1$  en abscisas equidistantes, se pueden construir esquemas de  $2k$  puntos con precisión polinomial de grado  $2k - 1$ . Véase [Kobbelt '94].

## 8.10 Análisis del esquema de los cuatro puntos

Por inspección de la definición del esquema de los cuatro puntos se obtiene su polinomio característico

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= -\omega + (1/2 + \omega)z^2 + z^3 + (1/2 + \omega)z^4 - \omega z^6 \\ &= (1 + z)\beta(z), \end{aligned}$$

donde

$$\beta(z) = -\omega + \omega z + 1/2z^2 + 1/2z^3 + \omega z^4 - \omega z^5$$

es el polinomio característico del esquema de diferencias. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{p}_{2i}^{k+1}\| &= \|-\omega \nabla \mathbf{p}_i^k + 1/2 \nabla \mathbf{p}_{i+1}^k + \omega \nabla \mathbf{p}_{i+2}^k\| \\ &\leq (1/2 + 2|\omega|) \sup_i \|\nabla \mathbf{p}_i^k\| \end{aligned}$$

y similarmente

$$\|\nabla \mathbf{p}_{2i+1}^{k+1}\| \leq (1/2 + 2|\omega|) \sup_i \|\nabla \mathbf{p}_i^k\| .$$

Por lo tanto, para  $|\omega| < 1/4$  los polígonos de diferencias  $\nabla P_k$  convergen a cero y los polígonos  $P_k$  convergen a una curva continua. Es más, de acuerdo

a 8.7 la diferenciabilidad depende de las segundas diferencias  $2^k \nabla^2 P_k$ . De 8.8 se desprende que el esquema de diferencias asociado tiene el polinomio característico

$$\gamma(z) = \frac{2\beta(z)}{1+z} = -\omega + 2\omega z + (1/2 - 2\omega)z^2 + 2\omega z^3 - \omega z^4 .$$

Como previamente, en este caso también se puede demostrar que  $2^k \nabla^2 P_k$  tiende a cero si  $0 < \omega < 1/8$ . Por lo tanto en este caso el esquema de los cuatro puntos produce interpolantes  $C^1$ .

**Observación 8:** Se puede demostrar [Dyn et al. '91] que el esquema de los cuatro puntos produce interpolantes  $C^1$  si  $0 < \omega < (\sqrt{5} - 1)/8 \approx 0.15$ . Sin embargo, en general no produce curvas  $C^2$ .

**Observación 9:** El esquema de  $2k$  puntos de Kobbelt produce interpolantes  $C^{k-1}$  [Kobbelt '94]

## 8.11 Ejercicios

- 1 El B-spline uniforme  $N^n$  se puede obtener como una convolución de  $N^0$   $n$  veces,

$$N^n = N^0 * \dots * N^0 .$$

- 2 Use la relación de recurrencia para B-splines uniformes de 8.1 para demostrar

$$\sum_i N_i^n = 1, \quad \sum_i (i + \frac{n+1}{2}) N_i^n(u) = u, \quad \text{y} \quad \int_{\mathbf{R}} N_i^n = 1 .$$

- 3 Use la notación de 8.6 para demostrar que  $\|\mathbf{c}_{2i}^{k+1} - \mathbf{c}_i^k\|$  y  $\|\mathbf{c}_{2i+1}^{k+1} - 1/2(\mathbf{c}_i^k + \mathbf{c}_{i+1}^k)\|$  están acotados por algún múltiplo de  $\sup_i \|\mathbf{c}_i^k\| \cdot \sum_i |\alpha_i|$ .
- 4 Deduzca del Ejercicio 3 que la curva lineal por trozos  $\sum \mathbf{c}_i^k N_i^1(2^{-k}u)$  converge uniformemente si las diferencias  $\nabla \mathbf{c}_i^k$  convergen uniformemente a cero.
- 5 Sea  $S_k$  la matriz del algoritmo de subdivisión de splines uniformes de grado  $k$  dada en 8.4 y considere la secuencia de polígonos

$$C_k = C_{k-1} S_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots ,$$

donde  $C_0 = [\dots \mathbf{c}_i \dots]$  es un polígono de control arbitrario. Demuestre que los polígonos  $C_k$  convergen a una curva  $C^\infty$ , [Rvachev '90].

- 6** Considere los splines uniformes  $\mathbf{s}_n = \sum \mathbf{c}_i N_i^n(u)$  de grado  $n$  sobre  $\mathbf{Z}$ . Para cualquier entero  $r \in \mathbf{N}$  sea

$$\mathbf{s}_n = \sum \mathbf{b}_i^n N_i^n(ru)$$

la representación correspondiente sobre  $\frac{1}{r}\mathbf{Z}$ . Demuestre que los puntos de control  $\mathbf{b}_i^n$  se pueden calcular a través de la relación de recurrencia.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ri}^0 &= \cdots = \mathbf{b}_{ri+r-1}^0 = \mathbf{c}_i \\ \mathbf{b}_i^{n+1} &= \frac{1}{r}(\mathbf{b}_{i-r+1}^n + \cdots + \mathbf{b}_i^n). \end{aligned}$$

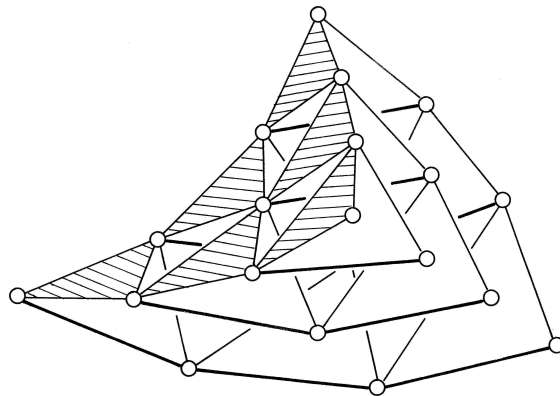
- 7** Considere dos matrices de subdivisión  $R$  y  $S$  con polinomios característicos  $\alpha(z)$  y  $(1+z)\alpha(z)/2$ . Dado el polígono  $C$  suponga que los polígonos  $CR^k$  convergen a una curva  $\mathbf{c}(u)$ . Demuestre que los polígonos  $CS^k$  convergen a la curva  $\mathbf{d}(u) = \int_{u-1}^u \mathbf{c}(u)du$ .





Parte II

Superficies





## 9 Superficies producto tensorial

*9.1 Productos tensoriales — 9.2 Superficie producto tensorial de Bézier — 9.3 Formas polares del producto tensorial de Bézier — 9.4 Conversión entre las formas monomial y de Bézier — 9.5 Algoritmo de de Casteljau — 9.6 Derivadas — 9.7 Conexiones simples  $C^r$  — 9.8 Interpolación bicúbica  $C^1$  por trozos — 9.9 Superficies de topología arbitraria — 9.10 Parametrización singular — 9.11 Splines bicúbicos  $C^1$  de topología arbitraria — 9.12 Ejercicios*

La manera más sencilla de construir una superficie consiste en barrer una curva en el espacio, por ejemplo en la representación de Bézier. Los puntos de control de esta curva se mueven a su vez siguiendo curvas de Bézier, cuyos puntos de control definen la superficie.

La representación de la superficie por medio de estos puntos de control tiene propiedades similares a la representación de Bézier univariada. Por esta razón se puede trabajar con estas superficies aplicando los algoritmos para curvas. También, se pueden construir volúmenes multidimensionales barriendo una superficie o un volumen en el espacio de manera que sus puntos de control se mueven a lo largo de diversas curvas. Análogamente se obtienen mallas de control con propiedades similares de las de representaciones de curvas.

### 9.1 Productos tensoriales

Para mostrar como se construye una superficie producto tensorial a partir de curvas, sean

$$A_0(u), \dots, A_m(u) \quad \text{y} \quad B_0(v), \dots, B_n(v)$$

dos conjuntos de funciones independientes y consideramos la curva

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{a}_i A_i(u) \quad ,$$

Cada uno de los puntos de control de esta curva yace sobre una curva de Bézier

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i(v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_j(v) .$$

La superficie  $\mathbf{p}$  dada por

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_i \sum_j \mathbf{b}_{ij} A_i(u) B_j(v) .$$

se denomina **superficie producto tensorial**

Es fácil ver que los productos  $A_i B_j$  también son linealmente independientes.

**Observación 1:** El producto de dos funciones es una función producto tensorial especial

$$\sum_i \mathbf{a}_i A_i(u) \cdot \sum_j \mathbf{b}_j B_j(v) = \sum_i \sum_j \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j A_i(u) B_j(v) .$$

**Observación 2:** La expresión  $uv + (1-u)(1-v)$  es una función producto tensorial. Nótese sin embargo que esta expresión no es el producto tensorial de una función de  $u$  y una función de  $v$ , vea la Figura 9.1.

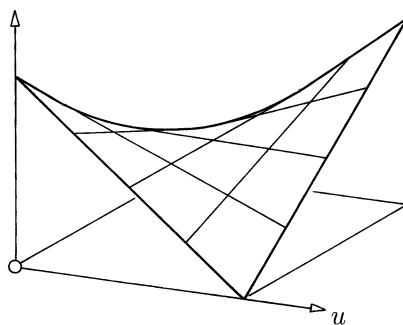


Figura 9.1: La función  $uv + (1-u)(1-v)$ .

**Observación 3:** Sean  $A_i(u)$  y  $B_j(v)$  los polinomios de Lagrange, ver 4.2, con nodos  $u_0, \dots, u_m$  y  $v_0, \dots, v_n$  definidos por  $A_i(u_k) = \delta_{i,k}$  y  $B_j(v_l) = \delta_{j,l}$  tal como la ilustra en la Figura 9.2. Entonces la superficie producto tensorial

$$\mathbf{p}(u, v) = \sum_i \sum_j \mathbf{p}_{ij} A_i(u) B_j(v)$$

se denomina **superficie de Lagrange**. Esta superficie interpola los puntos  $\mathbf{p}_{ij}$ , como ilustra la Figura 9.3.

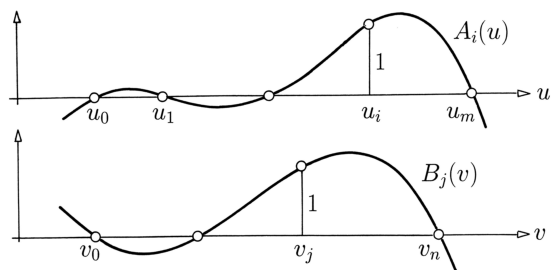


Figura 9.2: Polinomios de Lagrange.

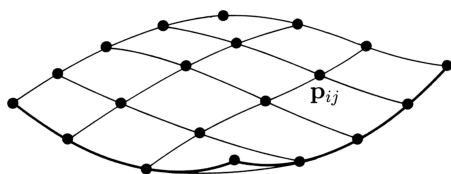


Figura 9.3: Superficie de interpolación.

## 9.2 Superficies producto tensorial de Bézier

En esta sección veremos como extender a las superficies tensoriales de Bézier las técnicas desarrolladas para curvas. Esto también facilitará la extensión de las técnicas de B-splines al caso de superficies.

Una superficie polinómica  $\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}(u, v)$  es de grado  $\mathbf{m} = (m, n)$  si es de grados  $m$  y  $n$  en  $u$  y  $v$ , respectivamente. La pareja de transformaciones afines

$$u = c_1(1 - s) + d_1s, \quad v = c_2(1 - t) + d_2t$$

mantiene invariante el grado de  $\mathbf{b}$ , es decir,  $\mathbf{b}(s, t) = \mathbf{b}(\mathbf{u}(s, t))$  es también de grado  $\mathbf{m}$  en  $\mathbf{s} = (s, t)$ . El polinomio  $\mathbf{b}(s, t)$  se puede considerar como un polinomio de grado  $n$  en  $t$  cuyos coeficientes son polinomios de grado  $m$  en  $s$ . Entonces  $\mathbf{b}(s, t)$  tiene la **representación de Bézier**

$$\mathbf{b}(s, t) = \sum_i \mathbf{b}_i(t)B_i^m(s) = \sum_i \sum_j \mathbf{b}_{ij}B_i^m(s)B_j^n(t) ,$$

o en notación más compacta

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}B_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{s}) ,$$

donde  $\mathbf{i} = (i, j)$ .

Los coeficientes  $\mathbf{b}_i$  se denominan **los puntos de Bézier** de  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  sobre el intervalo  $[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = [c_1, d_1] \times [c_2, d_2]$ . Cuando estos puntos se conectan como indica la Figura 9.4 nos referimos a la configuración resultante como la **mallá de Bézier** de  $\mathbf{b}$ . La variable  $\mathbf{s}$  se denomina **parámetro local** y  $\mathbf{u}$  es el **parámetro global**.

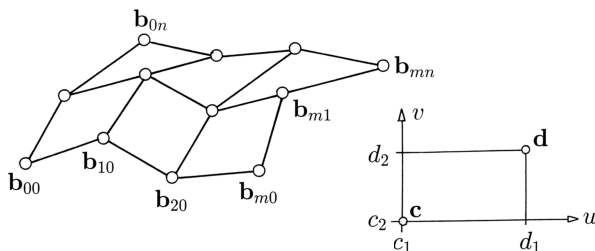


Figura 9.4: Una malla de Bézier.

Como en el caso de las curvas, las superficies tensoriales de Bézier heredan las propiedades de los polinomios de Bernstein.

- La **simetría** de los polinomios de Bernstein implica

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{i,j} \mathbf{b}_{ij} B_{ij}^m(\mathbf{s}) = \sum_{i,j} \mathbf{b}_{m-i,j} B_{i,j}^m(\bar{\mathbf{s}}) ,$$

donde  $\bar{\mathbf{s}} = (1 - s, t)$ , etc.

La utilidad práctica de la simetría consiste en que para parametrizar el mismo parche tomando como origen otro vértice, simplemente se invierte el orden de todas las filas o columnas, o de ambas.

Como una curva pasa por su primer y último punto de Bézier, se tiene que

- el borde de la malla de Bézier determina las cuatro **curvas frontera** del parche  $\mathbf{b}[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ .

Por ejemplo, se tiene

$$\mathbf{b}(c_1, v) = \sum_j \mathbf{b}_{0j} B_j^n(v) .$$

En particular, resulta que

- las cuatro **esquinas** del parche y de su malla Bézier coinciden, esto es:

$$\mathbf{b}(c_1, d_1) = \mathbf{b}_{00}, \quad \mathbf{b}(c_1, d_2) = \mathbf{b}_{0n} , \quad \text{etc.}$$

Como los polinomios de Bernstein suman uno,

- sus productos también forman una **partición de la unidad**,

$$\sum_i B_i^m = \sum_j B_j^n = 1 .$$

- Por lo tanto  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  es una **combinación afín** de sus puntos de Bézier y la representación de Bézier afinmente invariante .

Como los polinomios de Bernstein son no negativos en  $[0, 1]$ , se tiene que

- para todo  $\mathbf{u} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  es una **combinación convexa** de los  $\mathbf{b}_i$ .

Por lo tanto

- el parche  $\mathbf{b}[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$  está contenido en la **cápsula convexa** de sus puntos de Bézier.

**Observación 4:** Usando la propiedad de la cápsula convexa para cada componente se obtiene una caja de acotación para el parche  $\mathbf{b}[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ ,

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) \in [\min_i \mathbf{b}_i, \max_i \mathbf{b}_i] \quad \text{para } \mathbf{u} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}] ,$$

donde  $\min \mathbf{b}_i$  es el punto cuya primera coordenada es el mínimo de las primeras coordenadas de los  $\mathbf{b}_i$ ; y de modo similar se definen las demás coordenadas de  $\min \mathbf{b}_i$ . La definición de  $\max \mathbf{b}_i$  es análoga. Ver la Figura 9.5.

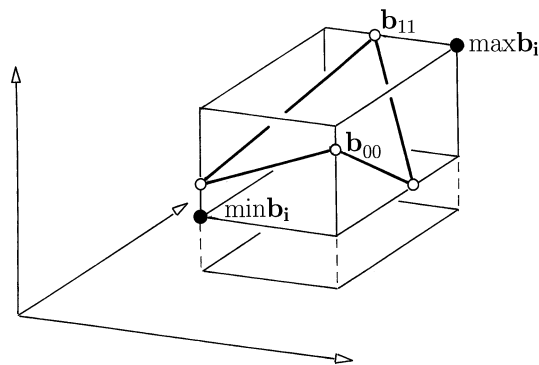


Figura 9.5: La caja de acotación.



### 9.3 Formas polares del producto tensorial

Sean  $A_0(u), \dots, A_m(u)$  y  $B_0(v), \dots, B_n(v)$  bases para los espacios vectoriales de polinomios, hasta grado  $m$  y  $n$ , respectivamente.

Denotamos por

$$A_i[u_1 \dots u_m] \quad \text{y} \quad B_j[v_1 \dots v_n]$$

las formas polares correspondientes. Entonces la superficie producto tensorial

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_i \sum_j \mathbf{b}_{ij} A_i(u) B_j(v)$$

tiene **forma polar tensorial**

$$\mathbf{b}[u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n] = \sum_i \sum_j \mathbf{b}_{ij} A_i[u_1 \dots u_m] B_j[v_1 \dots v_n] .$$

Esta forma polar satisface las siguientes tres propiedades.

- $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$  coincide con  $\mathbf{b}(u, v)$  sobre su **diagonal**,

esto es  $\mathbf{b}[u, \dots, u, v, \dots, v] = \mathbf{b}(u, v)$

- $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$  es **simétrica** en las variables  $u_i$  y en las variables  $v_j$ ,

esto es

$$\mathbf{b}[s_1 \dots s_m, t_1 \dots t_n] = \mathbf{b}[u_1 \dots u_m, v_1 \dots v_n]$$

para cualesquiera permutaciones  $(s_1, \dots, s_m)$  y  $(t_1, \dots, t_n)$  de  $(u_1, \dots, u_m)$  y  $(v_1, \dots, v_n)$ , respectivamente.

- $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$  es **afín** en cada una de las variables.

Los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(u, v)$  sobre un intervalo  $[a, b] \times [c, d]$  se pueden obtener directamente del teorema fundamental 3.2. Para cualquier  $u$  fijo, el polinomio  $\mathbf{b}(v) = \mathbf{b}(u, v)$  tiene puntos de Bézier

$$\mathbf{b}_j(u) = \mathbf{b}[u \overset{m}{\cdot} \cdot \cdot \cdot u, c \overset{n-j}{\cdot} \cdot \cdot \cdot c \overset{j}{\cdot} \cdot \cdot \cdot d] , \quad j = 0, \dots, n ,$$

y para cada  $j$ , el polinomio  $\mathbf{b}_j(u)$  tiene puntos de Bézier

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}[a \overset{m-i}{\cdot} \cdot \cdot \cdot a \overset{i}{\cdot} \cdot \cdot \cdot b, c \overset{n-j}{\cdot} \cdot \cdot \cdot c \overset{j}{\cdot} \cdot \cdot \cdot d] .$$

Entonces hemos demostrado la siguiente versión del **teorema fundamental**

El polinomio  $\mathbf{b}(u, v)$  del producto tensorial cuya forma polar es  $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$  tiene puntos de Bézier

$$\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}[a \binom{n-i}{k} a b \dots b, c \binom{m-j}{l} c d \dots d]$$

sobre el intervalo  $[a, b] \times [c, d]$ .

La forma polar  $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$  del producto tensorial se puede calcular utilizando la generalización del algoritmo de de Casteljau a partir de los puntos

$$\mathbf{b}_j(u) = \mathbf{b}[u_1 \dots u_m, c \binom{m-j}{k} c d \dots d], \quad j = 0, \dots, m,$$

y éstos a su vez, se pueden determinar a partir de los  $\mathbf{b}_{ij}$ . Como los puntos de Bézier son únicos, el polinomio  $\mathbf{b}(u, v)$  de un producto tensorial de grado  $\leq (m, n)$  tiene una única forma polar  $\mathbf{b}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n]$ .

## 9.4 Conversión entre las formas monomial y de Bézier

La forma monomial de una superficie tensorial polinómica

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n \mathbf{a}_{kl} \binom{m}{k} \binom{n}{l} u^k v^l$$

se puede expresar en forma abreviada usando la siguiente notación vectorial

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{m}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \binom{\mathbf{m}}{\mathbf{k}} \mathbf{u}^{\mathbf{k}},$$

donde  $\mathbf{u} = (u, v)$ ,  $\mathbf{k} = (k, l)$  y  $\mathbf{m} = (m, n)$ .

Convertir  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  de la forma monomial a la forma de Bézier sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$  resulta sencillo. Aplicando dos veces la fórmula de conversión de 2.8 se obtiene

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{m}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{u}),$$

donde

$$\mathbf{b}_{\mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{\mathbf{i}} \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}.$$

Similarmente, aplicando dos veces la expresión de 2.9 se obtiene la fórmula para convertir de la representación de Bézier a la monomial

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{i}=0}^{\mathbf{k}} (-1)^{k+l-i-j} \binom{\mathbf{k}}{\mathbf{i}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}}.$$

**Observación 5:** Si  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  es un polinomio bilineal, es decir, una aplicación bi-afín, entonces  $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$  para todo  $\mathbf{k} \leq (1, 1)$ . Por lo tanto, los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ij} &= \mathbf{a}_{00} + i\mathbf{a}_{10} + j\mathbf{a}_{01} + ij\mathbf{a}_{11} \\ &= \mathbf{b}(i/m, j/n) . \end{aligned}$$

Esta propiedad se denomina **precisión bilineal** de la representación de Bézier.

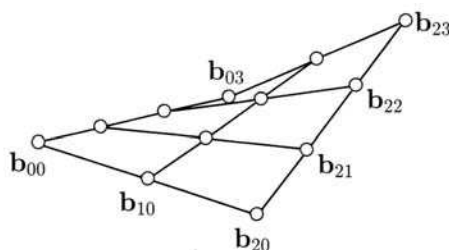


Figura 9.6: Malla de Bézier uniforme bilineal.

## 9.5 Algoritmo de de Casteljaú

Una superficie polinómica en la representación de Bézier es,

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^m(\mathbf{s}) ,$$

y se puede evaluar en  $\mathbf{s} = (s, t)$  aplicando el algoritmo de la Casteljaú para curvas,  $(m + 2)$  o  $(n + 2)$  veces. Esto conduce al siguiente algoritmo para superficies:

*Use el algoritmo de de Casteljaú para calcular*

1. los puntos  $\mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_j^n(t)$  y
2. el punto  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  de la superficie dado por  $\sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(s)$  .

**Observación 6:** Por ejemplo, considere el polinomio  $b(s, t) = \sum b_{ij} B_{ij}^{3,2}(s, t)$  cuya matriz de Bézier aparece en la esquina superior izquierda de la Figura 9.7. Esta Figura ilustra el algoritmo mostrando los  $8 = 4 \cdot 2$  pasos de de Casteljaú para  $t = 1/2$  y tres pasos para  $s = 2/3$  en la última fila. Cada flecha corresponde a un paso.

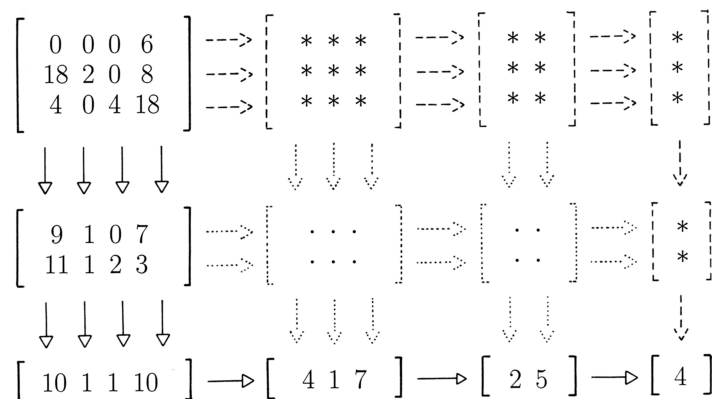


Figura 9.7: Evaluación de un producto tensorial con el algoritmo de de Casteljau.

**Observación 7:** También podemos aplicar el algoritmo de de Casteljau Bézier primero a la filas de Bézier para  $s = 2/3$  y posteriormente a las columnas para  $t = 1/2$  tal y como se ilustra con las matrices y flechas a trazos. Es más, se puede alternar arbitrariamente las operaciones sobre filas y columnas, como se ilustra en la Figura 9.7 con matrices y flechas punteadas, lo cual es importante pues el corte del algoritmo varía si  $m$  es distinto de  $n$ .

**Observación 8:** La propiedad de subdivisión del algoritmo de de Casteljau descrita en 3.3 muestra que los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(s, t)$  sobre  $[0, 1] \times [0, t]$  y  $[0, 1] \times [t, 1]$  son ciertos Bézier puntos intermedios calculados con este algoritmo.

**Observación 9:** El polinomio  $\mathbf{b}(u, v)$  definido en la Figura 9.8 tiene matrices de Bézier

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 9 & 1 & 0 & 7 \\ 10 & 1 & 1 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 10 \\ 11 & 1 & 2 & 13 \\ 4 & 0 & 4 & 18 \end{bmatrix} .$$

sobre  $[0, 1] \times [0, 1/2]$  y  $[0, 1] \times [1/2, 1]$ , respectivamente.

## 9.6 Derivadas

Las derivadas de una superficie tensorial también se pueden obtener usando los algoritmos para curvas. La primera derivada parcial de una superficie

$$\mathbf{b}(\mathbf{s}) = \sum \mathbf{b}_i B_i^m(\mathbf{s}) ,$$

tiene la representación de Bézier

$$\mathbf{b}_s = \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{b} = m \sum \Delta^{10} \mathbf{b}_i B_i^{m-1, n}(\mathbf{s}) ,$$

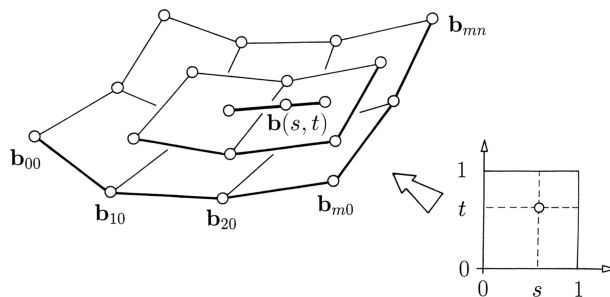


Figura 9.8: Evaluación usando el algoritmo de de Casteljau alternando  $s$  y  $t$ .

donde  $\Delta^{10}\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}$ , vea la Figura 9.9.

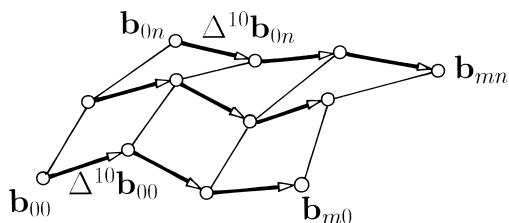


Figura 9.9: Los puntos de Bézier  $\Delta^{10}\mathbf{b}_i$  de la derivada  $\mathbf{b}_u$ .

Derivando repetidamente se obtiene la fórmula general

$$\frac{\partial^{q+r}}{\partial s^q \partial t^r} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{m}!}{(\mathbf{m} - \mathbf{q})!} \sum \Delta^{\mathbf{q}} \mathbf{b}_i B_i^{\mathbf{m} - \mathbf{q}},$$

donde  $\Delta^{qr} = \Delta^{10} \Delta^{q-1,r} = \Delta^{01} \Delta^{q,r-1}$  y  $\mathbf{m}! = m!n!$  y  $\mathbf{q} = (q, r)$ . En particular, se tiene que  $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{01}$  generan el **plano tangente** de  $\mathbf{b}$  en  $(u, v) = (0, 0)$  y que la **torsión cruzada** está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{st}(0, 0) &= mn \Delta^{11} \mathbf{b}_{00} \\ &= mn(\mathbf{b}_{11} - \mathbf{b}_{10} - \mathbf{b}_{01} + \mathbf{b}_{00}), \end{aligned}$$

vea la Figura 9.10.

**Observación 10:** Por la simetría de los polinomios de Bernstein la propiedad anterior es también válida en las otras tres esquinas del parche definido sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

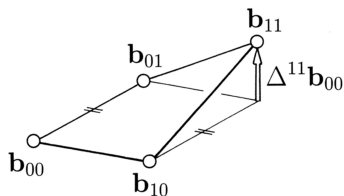


Figura 9.10: La torsión cruzada  $\Delta^{11}\mathbf{b}_{00}$ .

### 9.7 Conexiones simples $C^r$

El teorema de Stärk de 3.10 conduce también a una condición necesaria y suficiente para garantizar la conexión  $C^r$  de dos parches  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  y  $\mathbf{c}(\mathbf{u})$  dados por mallas de Bézier  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_m$  y  $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_m$  sobre  $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$  y  $[u_1, u_2] \times [v_0, v_1]$ , respectivamente:

*Las derivadas de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  coinciden hasta orden  $r$  sobre  $u = u_1$  si y sólo si los puntos*

$$\mathbf{b}_{m-r,j}, \dots, \mathbf{b}_{mj} = \mathbf{c}_{0j}, \dots, \mathbf{c}_{rj}$$

*forman el polígono de Bézier compuesto de una curva de grado  $r$  sobre  $[u_0, u_1, u_2]$  para todo  $j = 0, \dots, n$ .*

La Figura 9.11 ilustra una conexión  $C^1$  simple para  $m = 3, n = 3$  y donde  $\Delta_i = \Delta u_i$ .

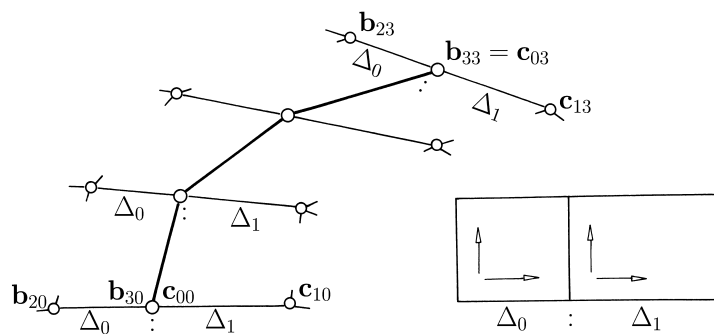


Figura 9.11: Conexión  $C^1$  de dos parches bicúbicos.

## 9.8 Interpolación $C^1$ bicúbica por trozos

Los esquemas de interpolación para curvas también se pueden extender fácilmente a productos tensoriales. Ilustramos este proceso para el caso de interpolación cúbica discutida en 4.5.

Dados  $(m+1) \times (n+1)$  puntos  $\mathbf{p}_{ij}$  a interpolar que corresponden a los valores de los parámetros  $(u_i, v_j)$ , para  $i = 0, \dots, m$  y  $j = 0, \dots, n$ , nuestro objetivo es construir una superficie producto tensorial,  $\mathbf{s}(u, v)$  bicúbica  $C^1$  por trozos tal que  $\mathbf{s}(u_i, v_j) = \mathbf{p}_{ij}$ . En concreto, para cada  $(i, j)$  construimos puntos de Bézier  $\mathbf{b}_{3i,3j}, \dots, \mathbf{b}_{3i+3,3j+3}$  que definen el segmento de  $\mathbf{s}$  sobre  $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ .

Sea  $P = [\mathbf{p}_{ij}]$  la matrix  $(m+1) \times (n+1)$  formada por los puntos de interpolación. Nótese que los elementos de  $P$  son puntos y no escalares. Sean  $S$  y  $T$  las matrices  $(m+1) \times (3m+1)$  y  $(n+1) \times (3n+1)$  de los esquemas de interpolación lineales sobre las abscisas  $u_0, \dots, u_m$  y  $v_0, \dots, v_n$ , respectivamente, tal como se describe en la Observación 9 de 4.5.

Entonces la interpolación tensorial basada en las matrices  $S$  y  $T$  se describe en dos pasos.

1 *Interpole cada columna de  $P$ , calculando  $A = S^t P$ .*

2 *Interpole cada fila de  $A$ , calculando  $B = AT$ .*

Entonces los puntos de Bézier buscados son los elementos de la matrix  $B = [\mathbf{b}_{ij}] = S^t P T$ . La Figura 9.12 presenta una ilustración.

Note que la interpolación de las filas y de las columnas es intercambiable. Esto es, por interpolación de filas se obtiene  $C^t = P T$  y por interpolación de columnas resulta entonces  $B = S^t C = S^t P T$ .

Claramente  $\mathbf{s}(u_i, v_j) = \mathbf{b}_{3i,3j} = \mathbf{p}_{i,j}$  y si  $S$  y  $T$  generan interpoladores  $C^1$ ,  $\mathbf{s}(u, v)$  es diferenciable en  $u$ , y como los pasos 1 y 2 conmutan, también es diferenciable respecto a  $v$ .

**Observación 11:** Una aproximación a la superficie se puede obtener de manera análoga al presentado en 4.6 para curvas.

## 9.9 Superficies de topología arbitraria

La interpolación proporcionada por superficies producto tensorial es excelente para interpolar los vértices de una malla rectangular, en cada nodo de la malla inciden exactamente 4 cuadriláteros. Sin embargo no toda superficie se puede descomponer en parches rectangulares, tal que sus fronteras formen una malla regular. Esto se ilustra en la Figura 9.13.

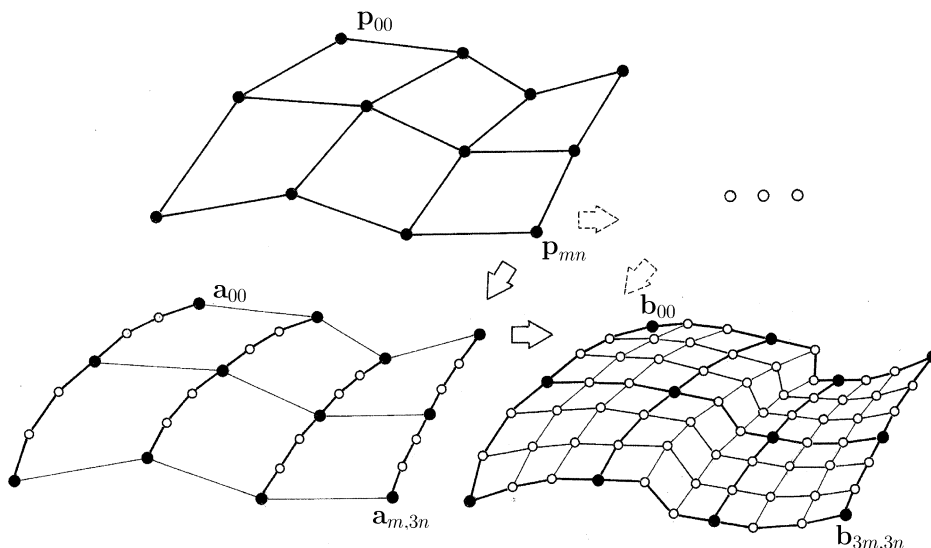


Figura 9.12: Esquema de interpolación del producto tensorial.

En estos casos, una solución es refinar la malla y transformarla en una malla no regular de cuadriláteros, como en la Figura 9.14.

Aún así, resulta complicado construir una superficie  $C^1$  con trozos rectangulares que formen una malla arbitraria. Las construcciones dadas en 9.7 sólo permiten conectar tetraedros de parches en vértices interiores. Una manera de resolver este problema será estudiada en los capítulos 13 y 14. Otra opción consiste en la utilización de parametrizaciones singulares, las cuales consideraremos en el resto de este capítulo.

## 9.10 Parametrización singular

Considere un parche de Bézier

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum \mathbf{b}_{ij} B_{ij}^{mn}(u, v) ,$$

con una singularidad en  $(u, v) = \mathbf{o}$ , esto es, con  $\mathbf{b}_{00} = \mathbf{b}_{10} = \mathbf{b}_{01} = \mathbf{b}_{11}$  tal como se ilustra en la Figura 9.15 para  $m = n = 3$ .

Las derivadas parciales  $\mathbf{b}_u$  y  $\mathbf{b}_v$  son cero en  $(u, v) = (0, 0)$ , o sea, la parametrización de  $\mathbf{b}$  es singular en  $(0, 0)$  y la expansión de Taylor de  $\mathbf{b}$  alrededor  $(0, 0)$  es de la forma

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum \mathbf{a}_{ij} u^i v^j ,$$

donde  $\mathbf{a}_{10} = \mathbf{a}_{01} = \mathbf{a}_{11} = \mathbf{o}$ . En general, el plano tangente de  $\mathbf{b}$  en  $(0, 0)$  no



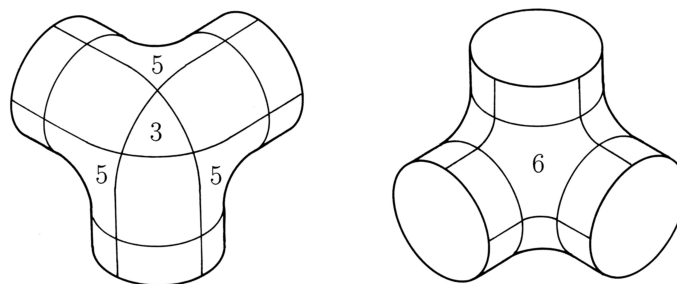


Figura 9.13: Malla no regular.

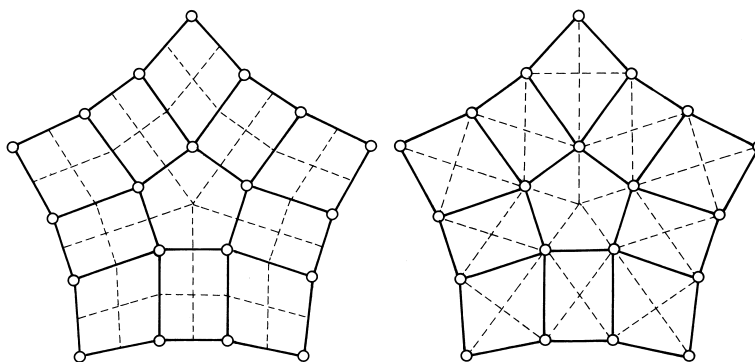


Figura 9.14: Dos posibles conversiones a mallas de cuadriláteros.

está definido. Sin embargo, si  $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{20}, \mathbf{b}_{02}$  son independientes y coplanares con  $\mathbf{b}_{21}$  y  $\mathbf{b}_{12}$ , si además  $\mathbf{b}_{21}$  yace al mismo lado de la tangente  $\mathbf{b}_{00}\mathbf{b}_{20}$  que  $\mathbf{b}_{02}$  y si  $\mathbf{b}_{12}$  yace al mismo lado de la tangente  $\mathbf{b}_{00}\mathbf{b}_{02}$  que  $\mathbf{b}_{20}$ , entonces  $\mathbf{b}(u, v)$  admite una parametrización regular en una vecindad de  $(0, 0)$ . En particular, en este caso  $\mathbf{b}(u, v)$  tiene un plano tangente bien definido [Reif '93, Teorema 3.3].

### 9.11 Splines bicúbicos $C^1$ de topología arbitraria

En general, es posible construir superficies de Bézier bicúbicas,  $C^1$  por trozos, de topología arbitraria, si trabajamos con parches regulares más los parches singulares descritos en 9.10, [Reif '93]. Cualesquiera dos parches adyacentes tendrán conexión  $C^1$  simple, pero algunos de los parches serán singulares. En primer lugar describiremos la construcción de este tipo de spline y posteriormente utilizaremos esta técnica para el caso de una malla de cuadriláteros con topología arbitraria.

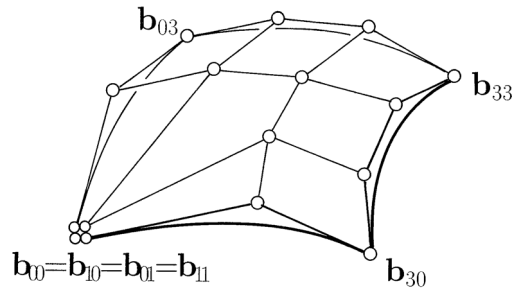


Figura 9.15: Una malla de Bézier singular.

Una superficie bicúbica con conexiones  $C^1$  está determinada por los puntos de Bézier internos de cada parche, marcados con círculos  $\circ$  en la Figura 9.16. Los puntos de Bézier de la frontera se denotan por  $\square$  y  $\bullet$  calculados como el punto medio del segmento que une los puntos de Bézier adyacentes.

Nótese que los puntos de Bézier interiores vecinos a una esquina compartida por tres o más de cuatro parches deben coincidir, para que las conexiones a lo largo de las curvas que emanan de este punto sean  $C^1$ . Un punto que tiene esta propiedad se llama **vértice extraordinario**. Los parches ubicados alrededor de un vértice extraordinario tienen un mismo plano tangente en ese punto solamente si los puntos de Bézier interiores conectados por líneas punteadas en la Figura 9.16 son coplanares y si satisfacen las condiciones dadas en 9.10.

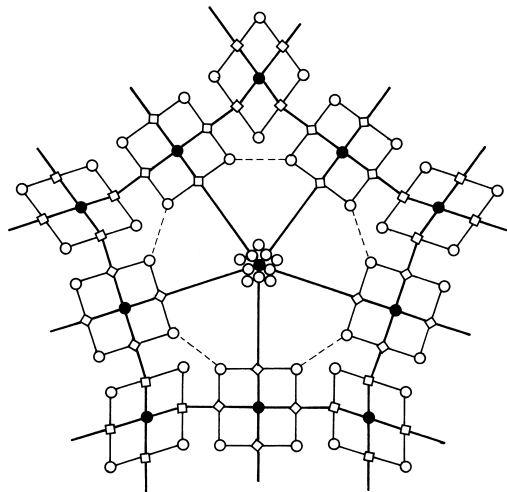


Figura 9.16: Un spline  $C^1$  bicúbico.

**Observación 12:** La condición de coplanaridad mencionada anteriormente puede ser satisfecha, en general, solamente si cada parche  $\mathbf{b}$  tiene a lo sumo un vértice extraordinario. Esta hipótesis siempre se cumplirá si cada parche se subdivide en cuatro subparches.

**Observación 13:** Los puntos de Bézier interiores  $\circ$  determinan el spline completamente, pero deben satisfacer ciertas restricciones para garantizar que la superficie sea  $C^1$ . A dichos puntos Reif los denomina **puntos de cuasi control**.

**Observación 14:** Reif también ha propuesto una aplicación proyectiva que convierte mallas de control arbitrarias en mallas de cuasi control que satisfacen las condiciones de arriba, vea el Ejercicio 6. En 14.6. presentamos un método más general.

## 9.12 Ejercicios

- 1 Generalice el algoritmo de generación de curvas de 3.5 a superficies producto tensorial.
- 2 Generalice el algoritmo de generación de curvas por diferencias hacia adelante presentado en 3.6 a superficies producto tensorial.
- 3 Generalice el algoritmo de intersección de curvas de 3.7 a productos tensoriales.
- 4 Implemente un esquema de interpolación basado en los splines  $C^1$  bicúbicos de 9.11 para interpolar los vértices de una malla arbitraria de cuadriláteros.
- 5 La subdivisión de cada parche bicúbico del spline  $C^1$  de 9.10 en cuatro subparches sobre  $[0, 1/2]^2, \dots, [1/2, 1]^2$  corresponde a un refinamiento de la malla de cuasi control, vea la Observación 13. Desarrolle esta construcción.
- 6 Considere  $2n$  vectores  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{2n}$  que generan  $\mathbb{R}^3$  y sea  $c_i = \cos(i\frac{\pi}{n})$ . Demuestre que los vectores  $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{2n}$  dados por

$$[\mathbf{d}_1 \dots \mathbf{d}_{2n}] = [\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_{2n}] \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{2n-1} \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1-2n} & c_{2-2n} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

son coplanares.

- 7 Extienda la interpolación de Hermite para curvas, discutida en 4.4, al caso de las superficies tensoriales en su representación de Bézier.

# 10 Representaciones de Bézier de parches triangulares

[10.1 Polinomios de Bernstein multivariados](#) — [10.2 Simples de Bézier](#) — [10.3 Precisión lineal](#) — [10.4 El algoritmo de de Casteljaou](#) — [10.5 Derivadas](#) — [10.6 Convexidad de superficies funcionales](#) — [10.7 Limitaciones de la convexidad](#) — [10.8 Ejercicios](#)

La representación de Bézier sobre triángulos es la generalización natural de la representación de Bézier univariada y es útil particularmente en el caso de datos dispersos. Con la excepción de la propiedad de variación decreciente, básicamente todas las propiedades pueden ser generalizadas. Conociendo la representación de Bézier sobre un triángulo, los resultados se pueden extender fácilmente a dimensión mayor obteniéndose la representación de Bézier sobre un simplex multidimensional, véase el Capítulo 19.

## 10.1 Polinomios de Bernstein multivariados

Debido a su simetría, la mejor descripción de los polinomios de Bernstein es en coordenadas baricéntricas. Sea  $A$  un triángulo con vértices  $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  en  $\mathbb{R}^2$  y sea  $\mathbf{u} = [u \ v \ w]^t$  las coordenadas baricéntricas de un punto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  con respecto a  $A$ . Entonces escribimos  $\mathbf{x} = A\mathbf{u} = \mathbf{a}_0u + \mathbf{a}_1v + \mathbf{a}_2w$ , vea 1.2.

Procediendo como en 2.1, el cálculo de la expansión trinomial

$$1 = (u + v + w)^n = \sum_{i,j,k} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k ,$$

donde  $0 \leq i, j, k, i + j + k = n$ , conduce a los **polinomios de Bernstein** de grado  $n$

$$B_{ijk}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k ,$$

estos se pueden abreviar como

$$B_{\mathbf{i}} = B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} \mathbf{u}^{\mathbf{i}} ,$$

donde  $\mathbf{i} = (i, j, k) \in \{0, 1, \dots, n\}^3$  y  $|\mathbf{i}| = i + j + k = n$ . La Figura 10.1 ilustra dos ejemplos y la Figura 10.2 provee el listado canónico de los polinomios de Bernstein de grado  $n = 3$ .

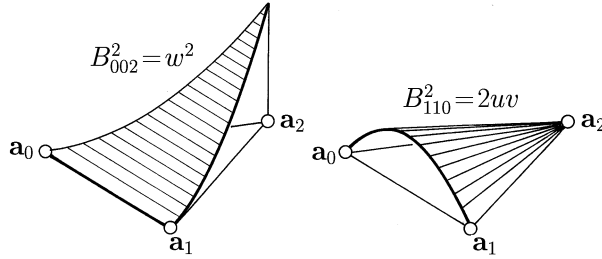


Figura 10.1: Dos polinomios de Bernstein de grado 2.

$B_{003}$	$www$
$B_{102} \quad B_{012}$	$3uw^2 \quad 3vw^2$
$B_{201} \quad B_{111} \quad B_{021}$	$3u^2w \quad 6uvw \quad 3v^2w$
$B_{300} \quad B_{210} \quad B_{120} \quad B_{030}$	$uuu \quad 3u^2v \quad 3uv^2 \quad vvv$

Figura 10.2: Los polinomios de Bernstein cúbicos ordenados canónicamente.

Nótese que sólo dos de las tres variables de los  $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u})$  son independientes. Como es usual  $u$  representa **parámetro local** con respecto a  $A$  y  $\mathbf{x}$  es el **parámetro global**.

Estas definiciones se pueden generalizar a un simplex  $A$  de dimensión  $d > 1$ . Los correspondientes polinomios de Bernstein multivariados se definen de manera análoga

$$B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} \mathbf{u}^{\mathbf{i}} = \frac{n!}{i_0! \dots i_d!} u_0^{i_0} \dots u_d^{i_d},$$

donde  $\mathbf{i} = (i_0, \dots, i_d) \in \{0, 1, \dots, n\}^{d+1}$ ,  $|\mathbf{i}| = i_0 + \dots + i_d = n$ , y  $\mathbf{u} = (u_0, \dots, u_d)$  son coordenadas baricéntricas de un punto  $\mathbf{x}$  respecto a  $A$ . Los polinomios de Bernstein en dimensión  $d$  verifican las propiedades siguientes:

- *Los polinomios de Bernstein de grado  $n$  son linealmente independientes.*

Esto se puede verificar dividiendo

$$\sum b_{\mathbf{i}} \mathbf{u}^{\mathbf{i}} = 0$$

por  $u_0^n$ , lo cual conduce a

$$\sum b_i v_1^{i_1} \dots v_d^{i_d} = 0 ,$$

donde  $v_k = u_k/u_0$ . Como los monomios son linealmente independientes se tiene que todos los  $b_i$  son cero, lo cual termina la verificación.

Existen  $\binom{n+d}{d}$  polinomios de Bernstein de grado  $n$ . En consecuencia dichos polinomios

- forman una **base** para el espacio de polinomios de grado total  $\leq n$ , sobre  $d$  variables.
- son **simétricos**, esto es,  $B_i^n(\mathbf{u}) = B_{\pi(i)}^n(\pi(\mathbf{u}))$  para cualquier permutación  $\pi$ .
- sus raíces yacen sobre las caras del simplex  $A$ . En particular

$$B_i^n(\mathbf{e}_k) = \begin{cases} 1 & \text{para } i_k = n \\ 0 & \text{para } i_k < n \end{cases} ,$$

donde  $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_d$  son las columnas de la matriz identidad de dimensión  $d+1$ .

- forman una **partición de la unidad**

$$\sum_i B_i^n(\mathbf{u}) \equiv 1 .$$

- son **positivos** para  $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ ,

lo cual es la razón porque usualmente se trabaja con polinomios de Bernstein definidos sobre su simplex de referencia  $A$ .

- satisfacen la **relación de recurrencia**

$$B_i^n(\mathbf{u}) = u_0 B_{i-\mathbf{e}_0}^{n-1} + \dots + u_d B_{i-\mathbf{e}_d}^{n-1} ,$$

donde  $B_{\mathbf{0}}^0 = 1$  y  $B_i^n = 0$  si  $i$  tiene alguna coordenada negativa y  $|i-\mathbf{e}_j| = n-1$ .

## 10.2 Simples de Bézier

Como los polinomios de Bernstein forman una base, toda superficie polinómica  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  tiene una única **representación de Bézier**,

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) ,$$

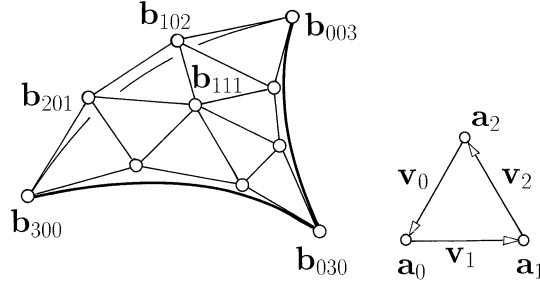


Figura 10.3: La malla de Bézier de una superficie cúbica.

con respecto a un simplex de referencia  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_d$ . Los coeficientes  $\mathbf{b}_i$  se denominan **puntos de Bézier** de  $\mathbf{b}$  y son los vértices de la **mall**a de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre el simplex  $A$ , vea la Figura 10.3, donde  $d = 2$  y  $n = 3$ .

Las propiedades de simetría de los polinomios de Bernstein se traducen en propiedades correspondientes para las representaciones de Bézier de superficies:

- Los puntos  $\mathbf{b}_{\pi(i)}$  son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}$  con respecto a  $\pi^{-1}(\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_d)$ , para cualquier permutación  $\pi$ .
- Los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  restringido a cualquier **cara de dimensión inferior** de  $A$  coincide con la “cara” de la malla de Bézier. Por ejemplo para cualquier  $\delta < d$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{b}_{i_0 \dots i_\delta 0 \dots 0} B_{i_0 \dots i_\delta}^n(\mathbf{v}) ,$$

donde  $\mathbf{v}$  son las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{x}$  con respecto a  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_\delta$ .

En particular, en los **vértices** del simple  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_d$  se tiene

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}_0) = \mathbf{b}_{n0 \dots 0} , \dots , \mathbf{b}(\mathbf{a}_d) = \mathbf{b}_{0 \dots 0n} ,$$

y que

$$n(\mathbf{b}_{n-1,1,0,\dots,0} - \mathbf{b}_{n,0,\dots,0})$$

es la derivada direccional de  $\mathbf{b}$  respecto a  $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$  en  $\mathbf{a}_0$ .

Como los polinomios de Bernstein suman uno,

- $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  es una **combinación afín** de sus puntos de Bézier.

En consecuencia,

- la representación de Bézier es **invariante** por transformaciones afines.

Como los polinomios de Bernstein son no negativos sobre el simplex de referencia,

- $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  es una **combinación convexa** para todo  $\mathbf{u} \geq \Phi$ .

Por lo tanto,

- la superficie  $\mathbf{b}(A)$  yace en la cápsula convexa de sus puntos de control.

### 10.3 Precisión lineal

Todo polinomio lineal

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = u_0\mathbf{p}_0 + \dots + u_d\mathbf{p}_d = P\mathbf{u} \quad , \quad 1 = u_0 + \dots + u_d \quad ,$$

admite la siguiente representación de Bézier de grado  $n > 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{u}) &= [u_0\mathbf{p}_0 + \dots + u_d\mathbf{p}_d] \sum_j B_j^{n-1}(\mathbf{u}) \\ &= \sum_i \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) \quad , \end{aligned}$$

los puntos

$$\mathbf{b}_i = [i_0\mathbf{p}_0 + \dots + i_d\mathbf{p}_d]/n = P\mathbf{i}/n$$

son los vértices del **refinamiento uniforme** del simplex  $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_d$ , vea la Figura 10.4.

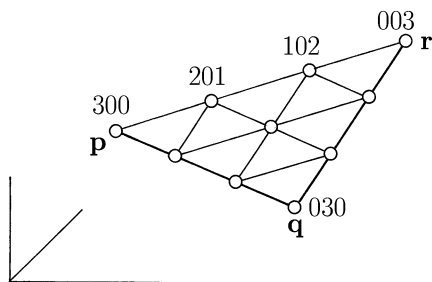


Figura 10.4: Partición uniforme del triángulo  $\mathbf{pqr}$ .

**Observación 1:** La evaluación de un polinomio lineal  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  en los puntos  $\mathbf{b}_i$  resulta en sus puntos de Bézier,

$$\mathbf{b}(\mathbf{i}/n) = \mathbf{b}_i \quad \text{o} \quad \mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_i \mathbf{b}(\mathbf{i}/n) B_i^n(\mathbf{u}) \quad .$$



Esta propiedad de la representación de Bézier se denomina **precisión lineal**.

**Observación 2:** Como consecuencia de la Observación 1, la superficie funcional

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ b(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \text{donde } b(\mathbf{x}) = \sum b_i B_i^n,$$

tiene puntos de Bézier  $[\mathbf{a}_i^t \ b_i^t]^t$ , donde  $n\mathbf{a}_i = [\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_d]i$ , como se ilustra en la Figura 10.5. Los  $b_i$  se denominan los **ordenadas de Bézier** y las  $\mathbf{a}_i$  las **abscisas de Bézier** de  $b(\mathbf{x})$ .

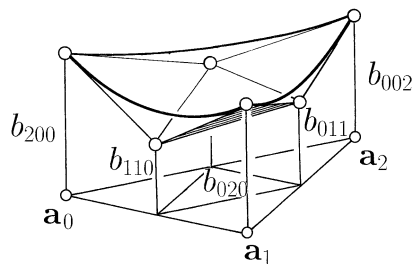


Figura 10.5: Una función cuadrática con su poliedro de Bézier.

## 10.4 El algoritmo de de Casteljau

Un simplex de Bézier  $\mathbf{b} = \sum \mathbf{b}_i B_i^n$  se puede evaluar fácilmente usando una generalización del algoritmo de de Casteljau. Usando repetidamente las relaciones de recurrencia de los polinomios de Bernstein, tal como se hizo para curvas, primero se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{x}) &= \sum_{|i|=n} \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{|i|=n-1} \mathbf{b}_i B_i^{n-1}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

y posteriormente, después de  $n-2$  pasos

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_{|i|=0} \mathbf{b}_i B_i^0(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{000},$$

donde

$$\mathbf{b}_i = [\mathbf{b}_{i+e_0} \dots \mathbf{b}_{i+e_d}] \mathbf{u}.$$

La Figura 10.6 ilustra un ejemplo.

Los puntos intermedios  $\mathbf{b}_i, |i| \leq n$  del algoritmo de de Casteljau, en su ordenación canónica, forman un esquema tetraédrico. Si  $\mathbf{x}$  yace en un simplex  $A$ , entonces todos los pasos del algoritmo de de Casteljau son combinaciones convexas, lo cual garantiza su estabilidad numérica.

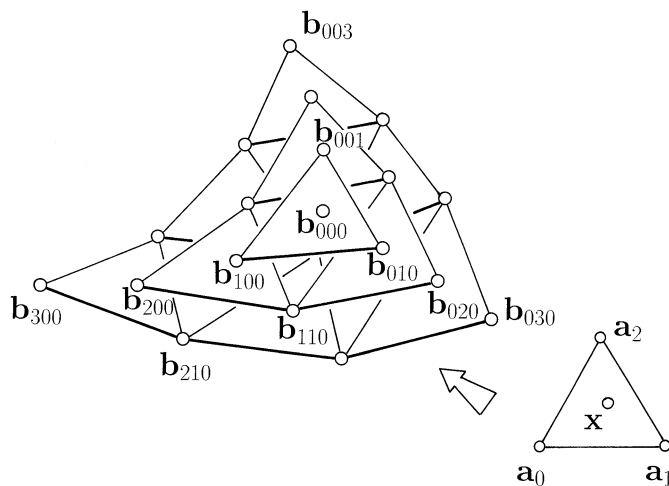


Figura 10.6: La construcción de de Casteljaou.

### 10.5 Derivadas

Las derivadas parciales de un polinomio de Bernstein son fáciles de calcular. Sean  $u_0, \dots, u_d$  las variables independientes. Entonces se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial u_j} B_i^n = n B_{i-e_j}^{n-1} \text{ , etc.,}$$

donde  $B_j = 0$ , si  $j$  tiene una coordenada negativa. A continuación considere una recta

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \text{ ,}$$

donde  $\mathbf{v} = \mathbf{a}_0 v_0 + \dots + \mathbf{a}_d v_d$  y  $v_0 + \dots + v_d = 0$ . Esta recta determina la curva  $\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$  sobre la superficie

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}) = \sum_i \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) \text{ .}$$

Su derivada respecto a  $t$ , en  $t = 0$  está dada por

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}\mathbf{b}(\mathbf{p}) &= \left. \frac{d}{dt} \mathbf{b}(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=0} \\ &= v_0 \frac{\partial}{\partial u_0} \mathbf{b} + \dots + v_d \frac{\partial}{\partial u_d} \mathbf{b} \\ &= n \sum_j \mathbf{c}_j B_j^{n-1} \text{ ,} \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{c}_j = v_0 \mathbf{b}_{j+e_0} + \cdots + v_d \mathbf{b}_{j+e_d} ,$$

lo cual se abrevia por  $\mathbf{c}_j = \Delta_{\mathbf{v}} \mathbf{b}_j$  tal como se ilustra en la Figura 10.7.

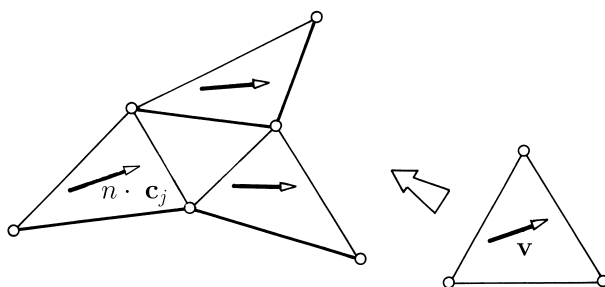


Figura 10.7: Las diferencias  $\mathbf{c}_j$ .

De manera similar se pueden calcular derivadas de orden superior. Una derivada direccional  $r$ -ésima  $D_{\mathbf{v}_1} \dots D_{\mathbf{v}_r} \mathbf{b}$  tiene coeficientes de Bézier  $\Delta^{\mathbf{v}_1} \dots \Delta^{\mathbf{v}_r} \mathbf{b}_j$ , donde  $|\mathbf{j}| = n - r$ . El operador diferencia  $\Delta^{\mathbf{v}}$  conmuta con los pasos del algoritmo de de Casteljau debido a que tomar combinaciones afines es una operación conmutativa, vea 2.6.

Por lo tanto podemos calcular la derivada  $r$ -ésima, realizando  $n - r$  pasos de de Casteljau seguidos por  $r$  pasos de diferencias. En particular, se obtiene que los puntos  $\mathbf{b}_{10\dots 0}, \dots, \mathbf{b}_{0\dots 01}$  calculados en el penúltimo paso de de Casteljau generan el plano tangente de  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{x}$ .

**Observación 3:** Si  $d = 2$ , podemos considerar la malla de Bézier de un polinomio  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u})$  como una función lineal por trozos  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ . Entonces

- La derivada direccional  $D_{\mathbf{v}} \mathbf{p}(\mathbf{x})$  de la malla de Bézier contiene los puntos de Bézier de  $D_{\mathbf{v}} \mathbf{b}(\mathbf{x})$ .

Este hecho se ilustra en la Figura 10.8 para una superficie funcional.

## 10.6 Convexidad de superficies funcionales

En la presente sección nos restringiremos al caso de dos variables. Esto es,  $d = 2$  y  $\mathbf{u} = [u, v, w]^t$ .

Dada la representación de Bézier de un polinomio  $b(\mathbf{x})$  sobre un triángulo  $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ , se denomina **poliedro de Bézier** de  $b(\mathbf{x})$  sobre  $A$  al polinomio  $p(\mathbf{x})$  a trazos que interpola las ordenadas  $b_i$  en las correspondientes abscisas. Demostraremos que

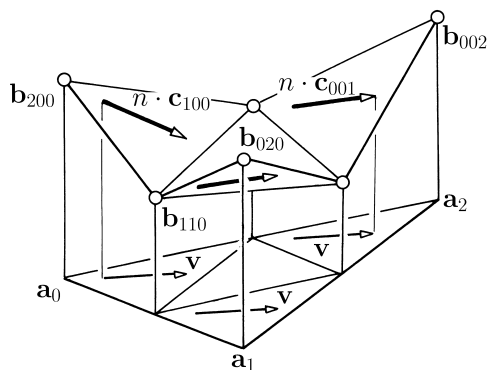


Figura 10.8: La derivada de una malla de Bézier.

si el poliedro de Bézier  $p(\mathbf{x})$  de un polinomio  $b(\mathbf{x})$  es convexo, entonces  $b(\mathbf{x})$  es también convexo.

El recíproco no es cierto en general. Véase 3.13, Ejercicio 11.

Para la prueba, sea

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0$$

tal como se ilustra en la Figura 10.3 y sea

$$b_{\mu\nu} = D_{\mathbf{v}_\mu} D_{\mathbf{v}_\nu} b$$

la segunda derivada de  $b$  con respecto a las direcciones  $\mathbf{v}_\mu$  y  $\mathbf{v}_\nu$ , y  $p_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  denotará su poliedro de Bézier.

El poliedro de Bézier  $p(\mathbf{x})$  es convexo si y sólo si cada par de triángulos adyacentes forman una función convexa. Esto se satisface precisamente, si

$$p_{01} \leq 0, p_{12} \leq 0 \quad \text{y} \quad p_{20} \leq 0,$$

vea la Figura 10.9. Debido a la propiedad de la cápsula convexa esto implica que  $b_{01} \leq 0, b_{12} \leq 0$ , y  $b_{20} \leq 0$ , y también que

$$\begin{aligned} b_{00} &= -b_{01} - b_{02} \geq 0, \\ b_{11} &= -b_{12} - b_{10} \geq 0, \\ b_{22} &= -b_{20} - b_{21} \geq 0. \end{aligned}$$

Como cada dirección  $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$  se puede expresar como

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}_\mu + \beta \mathbf{v}_\nu, \quad \text{donde} \quad \alpha\beta \leq 0 \quad \text{y} \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2\},$$

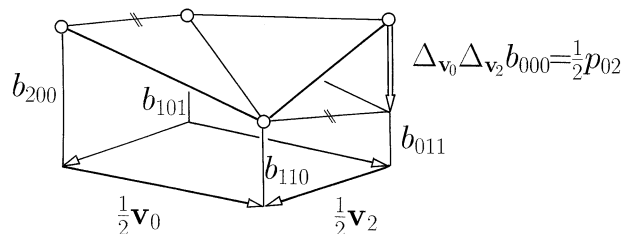


Figura 10.9: Convexidad de una malla de Bézier.

podemos describir la segunda derivada  $D_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{v}} b$  como la suma de tres términos no negativos

$$D_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{v}} b = \alpha^2 b_{\mu\mu} + 2\alpha\beta b_{\mu\nu} + \beta^2 b_{\nu\nu} \geq 0 ,$$

lo cual prueba la convexidad de  $b$ .  $\diamond$

**Observación 4:** Un polígono convexo en el plano siempre representa una curva convexa. Para mallas de Bézier triangulares en el espacio esto no es cierto en general, tal como lo ilustra la Figura 10.10.

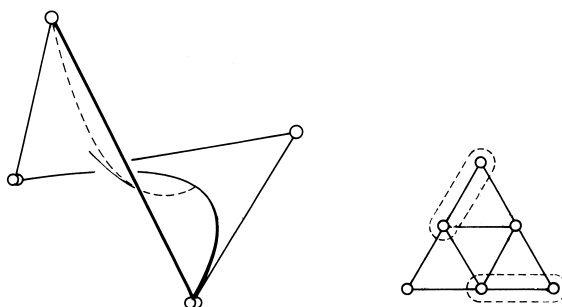


Figura 10.10: Parche cuadrático no-convexo con malla de Bézier convexa.

## 10.7 Limitaciones de la convexidad

Sabemos que los polinomios funcionales cuyos poliedros de Bézier son convexos también son convexos. El recíproco, sin embargo, no es cierto en general. Considere el polinomio cuadrático

$$b = 3B_{200} - B_{101} + 3B_{002} ,$$

ilustrado junto con su poliedro de Bézier en la Figura 10.11.

Esta malla de Bézier es claramente no convexa, pero  $b$  es convexo. Concretamente, las segundas derivadas parciales son  $b_{00} = b_{11} = 6$  y  $b_{01} = 2$ .

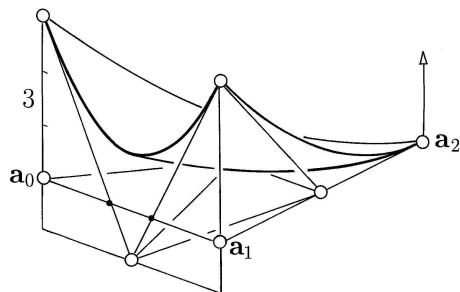


Figura 10.11: Un polinomio convexo con malla no convexa.

Entonces para cualquier  $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}_0 + \beta\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{o}$  se tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{v}}b &= \alpha^2b_{00} + 2\alpha\beta b_{01} + \beta^2b_{11} \\ &= 4(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha + \beta)^2 > 0, \end{aligned}$$

lo cual significa que  $b$  es estrictamente convexo.

Note que todos los poliedros de Bézier de  $b$  de grado más alto también son **no** convexos, pues para cualquier representación de Bézier de grado  $n$  del polinomio constante  $b_{01} = 2$ , las ordenadas de Bézier son iguales a 2. Este resultado es sorprendente porque los poliedros de Bézier de  $b$  convergen a  $b$  cuando  $n$  tiende a infinito, vea 11.9. Por lo tanto tenemos una secuencia de funciones no convexas con un límite estrictamente convexo.

Otro resultado negativo fue observado por Grandine [Grandine '89]. Considere un cuadrilátero  $\mathbf{abcd}$  no convexo tal como se ilustra en la Figura 10.12 y sean  $b$  y  $c$  dos polinomios con contacto  $C^1$  a lo largo del segmento  $\mathbf{ad}$ . Si  $b$  y  $c$  tienen mallas de Bézier convexas sobre  $\mathbf{adc}$  y  $\mathbf{abd}$ , respectivamente, entonces tienen que ser lineales sobre  $\mathbf{ad}$ .

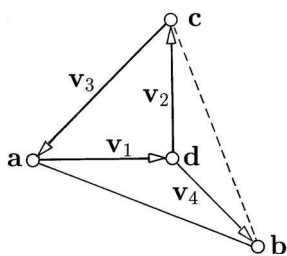


Figura 10.12: Dominio cuadrilateral no convexo.

Se desprende del contacto  $C^1$  que  $b_{14} = c_{14}(= D_{\mathbf{v}_1}D_{\mathbf{v}_4}c)$  sobre  $\mathbf{ad}$ . Como existen constantes positivas  $\alpha, \beta$  tales que  $\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_4$ , la convexidad de

los poliedros de Bézier implica

$$b_{11} = \alpha b_{12} + \beta b_{14} \leq 0 \quad \text{sobre la línea } \mathbf{ad}$$

y también que  $b_{11} \geq 0$ . Entonces  $b_{11} = 0$ , lo que termina la prueba.

Este resultado tiene también una consecuencia sorprendente. Supongamos que  $b$  tiene un poliedro de Bézier convexo sobre  $\mathbf{abc}$ . Entonces sus poliedros de Bézier sobre los triángulos  $\mathbf{abd}$ ,  $\mathbf{bcd}$ , y  $\mathbf{adc}$  no pueden ser todos convexos a menos que  $b$  sea lineal sobre las tres rectas  $\mathbf{ad}$ ,  $\mathbf{bd}$  y  $\mathbf{cd}$ .

Como  $b$  es convexo esto implica que  $b$  es lineal. Por lo tanto,

*la subdivisión, tal como se describe en 11.3, no preserva convexidad.*

Sin embargo vea el Ejercicio 1 de 11.12.

## 10.8 Ejercicios

- 1 El polinomio de Bernstein  $B_i^n(\mathbf{u})$  tiene un único máximo sobre su triángulo de referencia. Este máximo se alcanza en  $\mathbf{u} = \mathbf{i}/n$ .
- 2 El **operador de Bernstein**  $\mathcal{B}$  asigna a una función  $f$ , un polinomio de grado  $n$

$$\mathcal{B}[f] = \sum f(\mathbf{i}/n) B_i^n(\mathbf{u}) .$$

Muestre que el operador de Bernstein aplica sobreyectivamente los polinomios de grado  $m \leq n$  sobre polinomios de grado  $m$ .

- 3 Verifique que el monomio  $u^\alpha v^\beta$  tiene la representación de Bézier de grado  $n \geq \alpha + \beta$

$$u^\alpha v^\beta = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{n!} \sum_{\mathbf{i}} \binom{i}{\alpha} \binom{j}{\beta} B_i^n(u, v, w) ,$$

donde  $w = 1 - u - v$ ,  $\gamma = n - \alpha - \beta$  y  $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ .

- 4 Calcule la representación de Bézier sobre el triángulo  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  del polinomio en base monomial de grado  $n$

$$\mathbf{b}(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} \mathbf{a}_{ij} x^i y^j .$$

5 Sea  $\Delta_{\alpha\beta}$  el operador diferencia definido recursivamente por

$$\begin{aligned}\Delta^{\alpha\beta}\mathbf{b}_i &= \Delta^{\alpha-1,\beta}\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3} - \Delta^{\alpha-1,\beta}\mathbf{b}_i \\ &= \Delta^{\alpha,\beta-1}\mathbf{b}_{i+\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3} - \Delta^{\alpha,\beta-1}\mathbf{b}_i \\ \text{y } \Delta^{00}\mathbf{b}_i &= \mathbf{b}_i .\end{aligned}$$

Demostrar que

$$\Delta^{\alpha\beta}\mathbf{b}_{00n} = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^{\beta} \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{j} (-1)^{\alpha+\beta-i-j} \mathbf{b}_{ijk} ,$$

donde  $k = n - i - j$ .

6 Usando la expansión de Taylor y el Ejercicio 5 demuestre la siguiente fórmula de conversión de la representación de Bézier a la monomial

$$\sum \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) = \sum_{0 \leq \alpha+\beta \leq n} \sum_i \binom{\alpha}{i} \binom{\beta}{j} (-1)^{k-\gamma} \mathbf{b}_i \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!} u^\alpha v^\beta ,$$

donde  $\gamma = n - \alpha - \beta$ .





# 11 Técnicas de Bézier para parches triangulares

*11.1 Polinomios simétricos — 11.2 El teorema fundamental — 11.3 Subdivisión y reparametrización — 11.4 Convergencia bajo subdivisión — 11.5 Generación de superficies — 11.6 El polinomio simétrico de la derivada — 11.7 Conexiones  $C^r$  simples — 11.8 Elevación de grado — 11.9 Convergencia por elevación de grado — 11.10 Conversión a la representación tensorial de Bézier — 11.11 Conversión a la representación triangular de Bézier — 11.12 Ejercicios.*

Similarmente al caso de una variable, a cada polinomio le corresponde, de manera única, un polinomio simétrico multiafín. Usando estos polinomios simétricos es fácil deducir algoritmos para evaluar, elevar de grado, reparametrizar y subdividir representaciones triangulares de superficies de Bézier. Esto generaliza lo desarrollado para polinomios univariados en el Capítulo 3.

## 11.1 Polinomios simétricos

Cada superficie polinómica  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  de grado total  $\leq n$  se puede asociar con un único **polinomio simétrico**  $n$ -afín  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  sobre  $\mathbb{R}^2$  que tiene las siguientes propiedades.

- $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  coincide con  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre su **diagonal**, esto es

$$\mathbf{b}[\mathbf{x} \dots \mathbf{x}] = \mathbf{b}(\mathbf{x})$$

- $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  es **simétrica** en sus variables, esto significa que para cualquier permutación  $(\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n)$  de  $(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n)$  se tiene

$$\mathbf{b}[\mathbf{y}_1 \dots \mathbf{y}_n] = \mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$$

- $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  es **afín** en cada variable, es decir,

$$\mathbf{b}[(\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}), \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] = \alpha\mathbf{b}[\mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] + (1-\alpha)\mathbf{b}[\mathbf{y}, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] .$$

El polinomio simétrico  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  también se denomina la **forma polar** [Casteljau '85] o **blossom** de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  [Ramshaw '87]. Para demostrar que para cada  $\mathbf{b}(x)$  existe el polinomio simétrico es suficiente verificar que éste existe para todos los elementos de una base de polinomios. Considere una combinación lineal

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{c}_{\mathbf{i}} C_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$$

de polinomios  $C_{\mathbf{i}}(\mathbf{x})$  de grado  $n$ . Sean  $C_{\mathbf{i}}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  sus polinomios simétricos donde  $\mathbf{i} = (i, j, k) \geq \mathbf{0}$  y  $|\mathbf{i}| = n$ , entonces el polinomio simétrico de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  es

$$\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] = \sum_{\mathbf{i}} \mathbf{c}_{\mathbf{i}} C_{\mathbf{i}}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] ,$$

pues satisface las tres propiedades mencionadas anteriormente. Note que la diagonal  $\mathbf{b}[\mathbf{x} \dots \mathbf{x}]$  puede tener grado menor que  $n$  a pesar de que  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  depende de  $n$  variables.

En el caso que las  $C_{\mathbf{i}}$  sean los monomios  $A_{i,j}^n(x, y) = \binom{n}{\mathbf{i}} x^i y^j$ , se obtienen los **polinomios simétricos elementales**

$$A_{i,j}^n[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] = \sum_{\substack{\alpha < \dots < \beta \\ \gamma < \dots < \delta}} x_{\alpha} \dots x_{\beta} y_{\gamma} \dots y_{\delta} ,$$

donde  $\mathbf{x}_{\alpha} = (x_{\alpha}, y_{\alpha})$  y  $\alpha, \dots, \beta, \gamma, \dots, \delta$  son  $i + j$  enteros distintos, entre 1 y  $n$ .

En el caso de que los  $C_{\mathbf{i}}$  son los polinomios de Bernstein  $B_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{u}) = \binom{n}{\mathbf{i}} \mathbf{u}^{\mathbf{i}}$ , se obtienen los polinomios

$$B_{\mathbf{i}}^n[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n] = \sum_{\substack{\alpha < \dots < \beta \\ \gamma < \dots < \delta \\ \varepsilon < \dots < \varphi}} u_{\alpha} \dots u_{\beta} v_{\gamma} \dots v_{\delta} w_{\varepsilon} \dots w_{\varphi} ,$$

donde  $u_{\alpha}, v_{\alpha}, w_{\alpha}$  son las coordenadas de  $\mathbf{u}_{\alpha}$  y  $(\alpha, \dots, \beta, \gamma, \dots, \delta, \varepsilon, \dots, \varphi)$  es una permutación de  $(1, \dots, n)$ .

**Observación 1:** Los polinomios simétricos  $B_{\mathbf{i}}^n[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n]$  satisfacen la relación de recurrencia

$$B_{\mathbf{i}}^n[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n] = u_1 B_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1}^{n-1}[\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n] + v_1 B_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2}^{n-1}[\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n] + w_1 B_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_3}^{n-1}[\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n] .$$

**Observación 2:** El vector  $\mathbf{u}$ , de coordenadas baricéntricas, y el vector  $\mathbf{x}$  de coordenadas afines están relacionados por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{u}) = [\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] \mathbf{u} \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + [v_1, v_2] \mathbf{x} ,$$

donde  $\mathbf{p}; v_1, v_2$  denotan las coordenadas afines asociadas al sistema de coordenadas baricéntricas. Como estas transformaciones son afines, a partir de la forma polar  $\mathbf{a}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$ , dada por las coordenadas afines, se puede construir la forma polar  $\mathbf{b}[\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n] = \mathbf{a}[A\mathbf{u}_1 \dots A\mathbf{u}_n]$  y recíprocamente. Esto es, se tiene  $\mathbf{a}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] = \mathbf{b}[\mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \dots \mathbf{u}(\mathbf{x}_n)]$ .

## 11.2 El teorema fundamental

La unicidad del polinomio simétrico y su relación con la representación de Bézier están dadas por el siguiente teorema:

*Para cada superficie polinómica  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  de grado  $\leq n$  existe un único polinomio  $n$ -variado, simétrico, multiafín  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  con diagonal  $\mathbf{b}[\mathbf{x} \dots \mathbf{x}] = \mathbf{b}(\mathbf{x})$ . Es más, los puntos*

$$\mathbf{b}_i^0 = \mathbf{b}[\mathbf{p} \dots \mathbf{p} \mathbf{q} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{r}]$$

*son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{pqr}$ .*

**Prueba:** Considere los puntos

$$\mathbf{b}_i^l = \mathbf{b}[\mathbf{p} \dots \mathbf{p} \mathbf{q} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{r} \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l] , \quad i + j + k + l = n .$$

Como  $\mathbf{b}_i^n = \mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  es simétrico y multiafín, este punto se puede calcular a partir de los puntos  $\mathbf{b}_i^0$  a través de la siguiente relación de recurrencia

$$(1) \quad \mathbf{b}_i^l = u_l \mathbf{b}_{i+e_1}^{l-1} + v_l \mathbf{b}_{i+e_2}^{l-1} + w_l \mathbf{b}_{i+e_3}^{l-1} ,$$

donde  $u_l, v_l, w_l$  son las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{x}_l$  con respecto a  $\mathbf{pqr}$ , véase la Figura 11.1, donde las aplicaciones multiafines simétricas distintas deben diferir en alguno de sus argumentos  $[\mathbf{p} \dots \mathbf{p} \mathbf{q} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{r}]$ .

Es más, si todos los  $\mathbf{x}_l$  son iguales a  $\mathbf{x}$ , entonces la relación de recurrencia anterior se reduce a la aplicación del algoritmo de Casteljaou para el cálculo de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ . En consecuencia, como la representación de Bézier es única, los puntos  $\mathbf{b}_i^0$  son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{pqr}$  y, adicionalmente, puede haber solamente un polinomio simétrico y multiafín que coincide con  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre su diagonal.  $\diamond$

## 11.3 Subdivisión y reparametrización

La fórmula recursiva (1) ilustrada en la Figura 11.1 revela una propiedad muy importante del algoritmo de de Casteljaou: El cálculo de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  genera también los puntos de Bézier

$$\mathbf{b}[\mathbf{p} \dots \mathbf{p} \mathbf{q} \dots \mathbf{q} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}], \quad \mathbf{b}[\mathbf{p} \dots \mathbf{p} \mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{r} \dots \mathbf{r}] ,$$

y

$$\mathbf{b}[\mathbf{x} \dots \mathbf{x} \mathbf{q} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{r}]$$

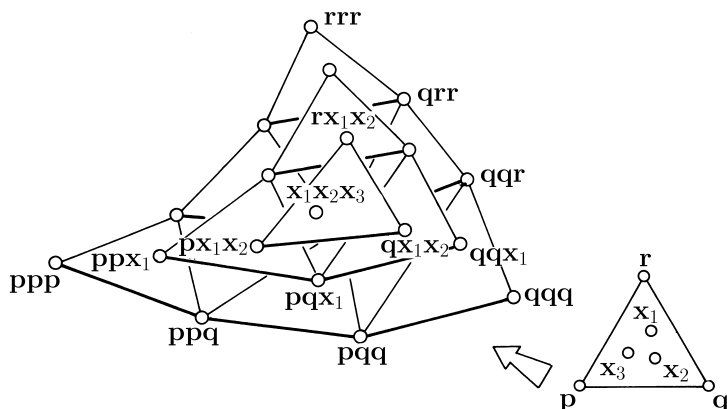


Figura 11.1: El algoritmo de de Casteljau generalizado.

de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{pqx}$ ,  $\mathbf{pxr}$ , y  $\mathbf{xqr}$ , respectivamente. La Figura 11.2 ilustra un ejemplo para  $n = 3$ . Nótese que los puntos  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3]$  están etiquetados por sus argumentos  $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ .

Note que las mallas de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{pqx}$ ,  $\mathbf{pxr}$ , y  $\mathbf{xqr}$  forman parte de una malla compuesta la cual se dobla sobre si misma si  $\mathbf{x}$  yace fuera de  $\mathbf{pqr}$ . El cálculo de esta malla compuesta se denomina **subdivisión** de la malla de Bézier sobre  $\mathbf{pqr}$  en  $\mathbf{x}$ .

Dada la malla de Bézier de una superficie polinómica  $\mathbf{b}$  sobre el triángulo  $\mathbf{pqr}$  se puede calcular su malla de Bézier sobre un triángulo cualquiera  $\mathbf{xyz}$  a través de un proceso de subdivisión, vea [Prautzsch '84a, Boehm et al. '84]. Primero se subdivide la malla sobre  $\mathbf{pqr}$  en  $\mathbf{x}$ , luego se subdivide la malla sobre  $\mathbf{xqr}$  en  $\mathbf{y}$ ; y finalmente se subdivide, la malla sobre  $\mathbf{xyr}$  en  $\mathbf{z}$ , vea la Figura 11.3.

La permutación de  $\mathbf{pqr}$  o de  $\mathbf{xyz}$  resulta en una subdivisión diferente. Es recomendable subdividir siempre en puntos interiores para evitar combinaciones afines no convexas.

La Figura 11.4 ilustra un caso en el cual es imposible evitar combinaciones no convexas con la construcción anterior, independientemente como se permuten  $\mathbf{pqr}$  y  $\mathbf{xyz}$ .

**Observación 3:** Para la construcción anterior se necesitan  $3 \cdot \binom{n+2}{3} = O(n^3)$  combinaciones afines

**Observación 4:** Cada punto de Bézier  $\mathbf{b}[\mathbf{x} \cdot^i \cdot \mathbf{y} \cdot^j \cdot \mathbf{z} \cdot^k \cdot \mathbf{z}]$  de  $\mathbf{b}$  sobre  $\mathbf{xyz}$  se puede calcular usando el algoritmo de de Casteljau generalizado, vea la Figura 11.2. Las combinaciones afines calculadas por este algoritmo son

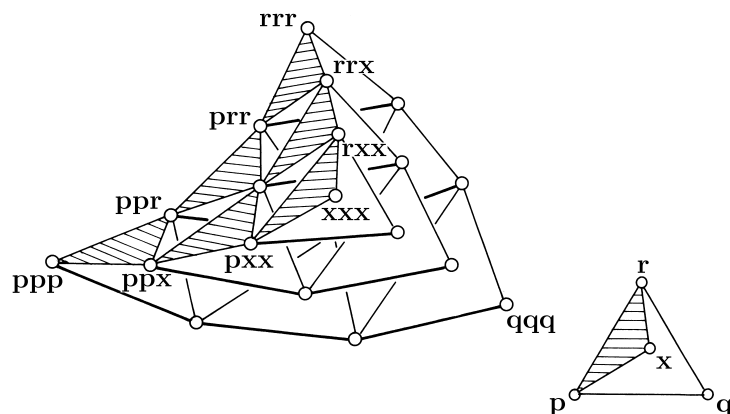


Figura 11.2: Subdivisión de una malla de Bézier.

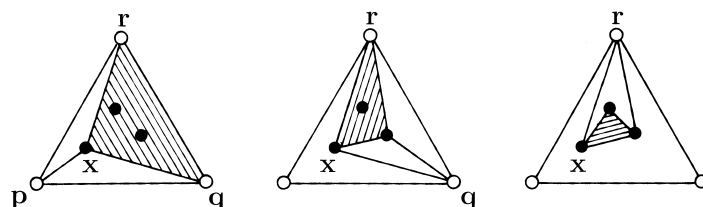


Figura 11.3: Reparametrización por subdivisión repetida.

convexas si  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$  yacen en el triángulo  $\mathbf{pqr}$ .

**Observación 5:** Para calcular la malla de Bézier sobre  $\mathbf{xyz}$  por medio de las  $\binom{n+2}{2}$  aplicaciones del algoritmo de de Casteljau se necesitan  $\binom{n+2}{2} \cdot \binom{n+3}{3} = O(n^5)$  combinaciones afines.

## 11.4 Convergencia bajo subdivisión

La malla de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre un triángulo  $\mathbf{pqr}$  es una buena aproximación del parche  $\mathbf{b}$  si el triángulo es suficientemente pequeño. Más concretamente, sea  $\mathbf{pqr}$  un triángulo y sea  $h$  su diámetro. Denotemos por

$$\mathbf{i} = \mathbf{p} \frac{i}{n} + \mathbf{q} \frac{j}{n} + \mathbf{r} \frac{k}{n}$$

un punto de coordenadas baricéntricas  $\mathbf{i}/n$ . Entonces existe una constante

$M$  independiente de  $\mathbf{pqr}$  tal que

$$\max_{\mathbf{i}} \|\mathbf{b}(\mathbf{i}) - \mathbf{b}_i\| \leq Mh^2 .$$

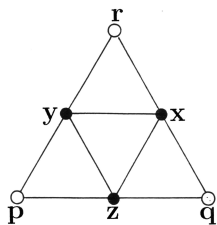


Figura 11.4: Triángulos de referencia especiales.

Para la prueba sea  $D$  el diferencial de  $\mathbf{b}[\mathbf{x}, \mathbf{i} \dots \mathbf{i}] = \dots = \mathbf{b}[\mathbf{i} \dots \mathbf{i}, \mathbf{x}]$  en  $\mathbf{x} = \mathbf{i}$ . Expandiendo el polinomio simétrico  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  alrededor de  $[\mathbf{i} \dots \mathbf{i}]$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i &= \mathbf{b}[\mathbf{i} \dots \mathbf{i}] + iD[\mathbf{p} - \mathbf{i}] + jD[\mathbf{q} - \mathbf{i}] + kD[\mathbf{r} - \mathbf{i}] + O(h^2) \\ &= \mathbf{b}(\mathbf{i}) + O(h^2), \end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba.  $\diamond$

Una aplicación de esta propiedad se presenta en la próxima sección

## 11.5 Generación de superficies

Como consecuencia de la Sección 11.4, la subdivisión repetida de una malla de Bézier produce aproximaciones tan buenas como se requiera de la superficie exacta. Discutimos tres estrategias de subdivisión:

1. Repitiendo la subdivisión siempre en el centro del triángulo de referencia, tal como se ilustra en la Figura 11.5 deja invariantes los diámetros máximos de los triángulos de referencia. Por lo tanto la secuencia de mallas de Bézier obtenidas a través de esta estrategia de subdivisión **no** converge a la superficie.

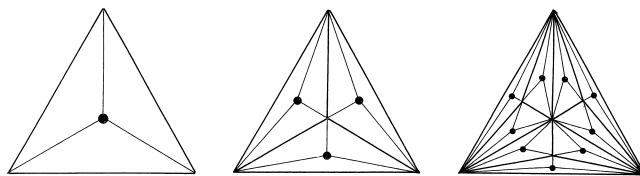


Figura 11.5: Subdivisión en los centros.

2. La subdivisión uniforme de cada triángulo de referencia tal como se muestra en las Figuras 11.6 y 11.7 genera una secuencia de Bézier mallas de Bézier, que converge a la superficie.

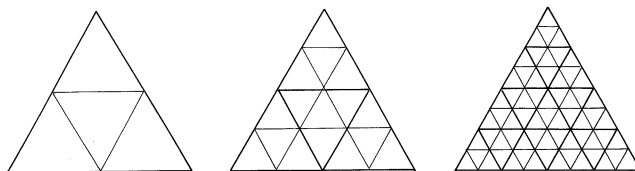


Figura 11.6: Subdivisión uniforme.

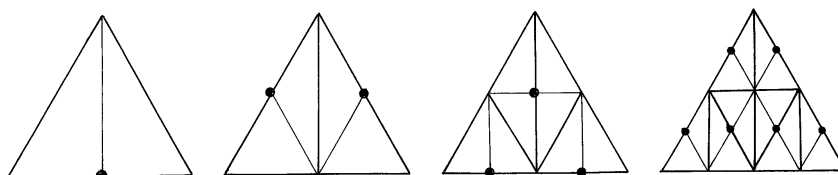


Figura 11.7: Subdivisión por bisección repetida.

3. La subdivisión uniforme de la Figura 11.6 es computacionalmente costosa y usa combinaciones afines, posiblemente no-convexas, véase 11.3. Entonces para generar un parche, la mejor estrategia es la ilustrada en la Figura 11.7. Es de bajo coste computacional y para su implementación sólo se requiere de la evaluación de combinaciones convexas.

Comparando con otros métodos de generación de superficies se observa que el método ilustrado en la Figura 11.7 es el más rápido conocido hasta ahora [Peters '94].

## 11.6 El polinomio simétrico de la derivada

La derivada direccional  $D_{\mathbf{v}}\mathbf{b}(\mathbf{u})$  de una superficie polinómica en la dirección  $\mathbf{v} = [v_0, v_1, v_2]^t, |\mathbf{v}| = v_0 + v_1 + v_2 = 0$ , también puede escribirse en términos del polinomio simétrico  $\mathbf{b}[u_1 \dots u_n]$ .

Se desprende de 10.5 o directamente por derivación del polinomio simétrico que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}\mathbf{b}(\mathbf{u}) &= n(v_0\mathbf{b}[e_0\mathbf{u} \dots \mathbf{u}] + v_1\mathbf{b}[e_1\mathbf{u} \dots \mathbf{u}] + v_2\mathbf{b}[e_2\mathbf{u} \dots \mathbf{u}]) \\ &= n\mathbf{b}[\mathbf{v}\mathbf{u} \dots \mathbf{u}] . \end{aligned}$$

Claramente,  $n\mathbf{b}[\mathbf{v}\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n]$  representa el polinomio simétrico  $(n - 1)$ -afín de  $D_{\mathbf{v}}\mathbf{b}(\mathbf{u})$ .

Note que  $\mathbf{b}[\mathbf{v}\mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n]$  es afín en  $\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  y es lineal en  $\mathbf{v}$ .



Repitiendo el proceso de diferenciación, se puede obtener los polinomios simétricos de derivadas direccionales de orden superior  $\mathbf{c}(\mathbf{u}) = D_{\mathbf{v}_r} \dots D_{\mathbf{v}_1} \mathbf{b}(\mathbf{u})$  con respecto a  $r$  vectores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ , concretamente,

$$\mathbf{c}[\mathbf{u}_{r+1} \dots \mathbf{u}_n] = \frac{n!}{(n-r)!} \mathbf{b}[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r \mathbf{u}_{r+1} \dots \mathbf{u}_n] .$$

## 11.7 Conexiones $C^r$ simples

La subdivisión también es una herramienta útil para describir ciertas condiciones de diferenciabilidad sobre dos superficies polinómicas  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  a lo largo de su curva común en términos de sus puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  y  $\mathbf{c}_i$  sobre  $\mathbf{pqr}$  y  $\mathbf{sqr}$ , respectivamente. Véase la Figura 11.8.

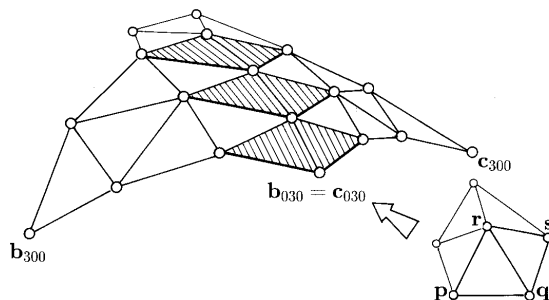


Figura 11.8: La conexión  $C^1$  simple de Sabin.

De 10.5 se desprende que las derivadas hasta orden  $r$  sobre el segmento  $\mathbf{qr}$  determinan y son determinadas por los puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  y  $\mathbf{c}_i$  para  $i = 0, \dots, r$ . Esto nos lleva a la versión de Farin del teorema de Stärk [Farin '86, p.98]; véase también [Sabin '77], p.85.

*Las derivadas de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  coinciden hasta orden  $r$  sobre  $\mathbf{qr}$  si y sólo si las primeras  $r + 1$  filas de los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  sobre  $\mathbf{sqr}$  también coinciden, lo cual significa que  $\mathbf{b}[\mathbf{s} \dots \mathbf{i} \dots \mathbf{s} \mathbf{q} \dots \mathbf{j} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{k} \dots \mathbf{r}] = \mathbf{c}_i$ ,  $i = 0, \dots, r$ .*

Sobre  $\mathbf{pqr}$  y  $\mathbf{sqr}$ , el polinomio  $\mathbf{b}[\mathbf{x} \dots \mathbf{r} \dots \mathbf{x} \mathbf{q} \dots \mathbf{l} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{n-r-l} \dots \mathbf{r}]$  tiene puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  y  $\mathbf{c}_i$ , respectivamente, donde  $i \leq r$ ,  $j \leq l$  y  $k \geq n - r - l$ . Los puntos  $\mathbf{c}_i$  pueden calcularse a partir de los  $\mathbf{b}_i$  usando el algoritmo de de Casteljau, véase 11.3 y las Figuras 11.8 y 11.9.

Usando el teorema fundamental 11.2, lo anterior se puede describir de la siguiente manera

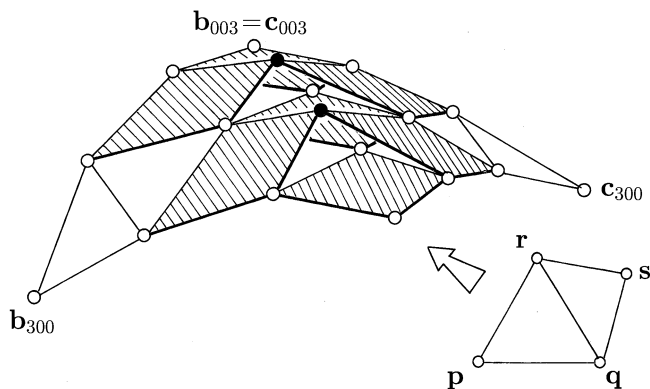


Figura 11.9: La conexión  $C^2$  simple de Farin.

Las derivadas de  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{c}$  coinciden hasta orden  $r$  sobre  $\mathbf{qr}$  si y sólo si para todo  $l = 0, \dots, n - r$  los polinomios  $\mathbf{b}[\mathbf{x} \ .r. \ \mathbf{x} \ \mathbf{q} \ .l. \ \mathbf{q} \ \mathbf{r} \ .n-r-l \ \mathbf{r}]$  y  $\mathbf{c}[\mathbf{x} \ .r. \ \mathbf{x} \ \mathbf{q} \ .l. \ \mathbf{q} \ \mathbf{r} \ .n-r-l \ \mathbf{r}]$  son iguales.

**Observación 6:** Los cuadriláteros sombreados de las Figuras 11.8 y 11.9 son imágenes diferentes del cuadrilátero  $\mathbf{pqrs}$ . En consecuencia, cualesquiera  $m$  parches triangulares  $\mathbf{b}^i(\mathbf{x}), i = 1 \dots, m$ , alrededor de un vértice común tienen una conexión  $C^1$  simple en ese vértice si y sólo si sus triángulos-parámetros forman un polígono que es imagen afín del polígono formado por los respectivos triángulos esquinas de las mallas de Bézier asociadas.

**Observación 7:** Como dos polinomios son iguales si y sólo si, sus formas polares coinciden, entonces  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  tienen las mismas derivadas hasta orden  $r$  sobre el segmento  $\mathbf{qr}$  si y sólo si sus formas polares satisfacen

$$\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_r \ \mathbf{q} \ .j. \ \mathbf{q} \ \mathbf{r} \ .k. \ \mathbf{r}] = \mathbf{c}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_r \ \mathbf{q} \ .j. \ \mathbf{q} \ \mathbf{r} \ .k. \ \mathbf{r}]$$

para cualquiera  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r$  y todo  $j$  y  $k$  tales que  $r + j + k = n$ . Esta condición se emplea en [Lai '91] para caracterizar splines  $C^r$  multivariados sobre triangulaciones arbitrarias

## 11.8 Elevación de grado

Una superficie de Bézier polinómica de grado  $n$  siempre tiene también una representación de Bézier de grado  $m$ , para cualquier  $m > n$ . Tal como para el caso de curvas, la conversión a una representación de un grado mayor se denomina **elevación de grado**.

Dada una representación de Bézier de grado  $n$

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{u}) \ , \quad \mathbf{x} = [\mathbf{pqr}]\mathbf{u} \ ,$$

de una superficie polinómica  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  sobre un triángulo  $\mathbf{pqr}$  veremos como se construye la representación de Bézier de grado  $n + 1$ . Análogamente al caso de curvas presentado en 3.11 utilizamos el polinomio simétrico  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  de  $\mathbf{b}(x)$ . Es fácil verificar que

$$\mathbf{c}[\mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_n] = \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n \mathbf{b}[\mathbf{x}_0 \dots \mathbf{x}_l^* \dots \mathbf{x}_n]$$

es multiafín, simétrica y coincide con  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre la diagonal. Entonces por el teorema fundamental de 11.2 se tiene que los puntos

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{c}[\mathbf{p}^{j_0}, \mathbf{p} \mathbf{q}^{j_1}, \mathbf{q} \mathbf{r}^{j_2}, \mathbf{r}]$$

son los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{pqr}$  en su representación de grado  $n + 1$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j &= \frac{j_0}{n+1} \mathbf{b}[\mathbf{p}^{j_0-1}, \mathbf{p} \mathbf{q}^{j_1}, \mathbf{q} \mathbf{r}^{j_2}, \mathbf{r}] \\ &+ \frac{j_1}{n+1} \mathbf{b}[\mathbf{p}^{j_0}, \mathbf{p} \mathbf{q}^{j_1-1}, \mathbf{q} \mathbf{r}^{j_2}, \mathbf{r}] \\ &+ \frac{j_2}{n+1} \mathbf{b}[\mathbf{p}^{j_0}, \mathbf{p} \mathbf{q}^{j_1}, \mathbf{q} \mathbf{r}^{j_2-1}, \mathbf{r}] \end{aligned}$$

La Figura 11.10 ilustra la construcción asociada para  $n = 2$ .

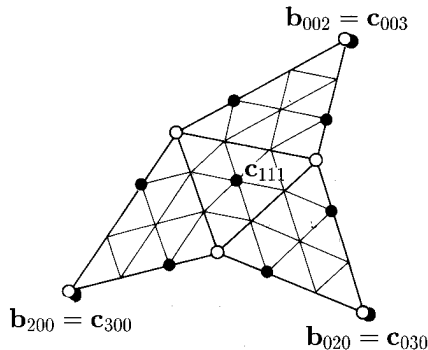


Figura 11.10: Elevación de grado en uno.

## 11.9 Convergencia por elevación de grado

Repitiendo el proceso de elevación de grado se obtienen representaciones de Bézier de grado mayor

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{d}_k B_k^m(\mathbf{u}), \quad m > n .$$

Los nuevos puntos de Bézier  $\mathbf{d}_k$  se pueden expresar fácilmente en términos de los  $\mathbf{b}_i$ . Tomando  $r = m - n$ , podemos reescribir

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i B_i^n \cdot 1$$

como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{x}) &= \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i B_i^n \cdot \sum_{|\mathbf{j}|=r} B_j^r \\ &= \sum_{|\mathbf{k}|=m} \left( \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i \beta_{i\mathbf{k}} \right) B_{\mathbf{k}}^m, \end{aligned}$$

donde

$$\beta_{i\mathbf{k}} = \frac{B_i^n B_{\mathbf{k}-i}^r}{B_{\mathbf{k}}^m} = \frac{\binom{n}{\mathbf{i}} \binom{r}{\mathbf{k}-\mathbf{i}}}{\binom{m}{\mathbf{k}}}.$$

Entonces obtenemos la fórmula de Zhou

$$\mathbf{d}_k = \sum_{|\mathbf{i}|=n} \mathbf{b}_i \beta_{i\mathbf{k}},$$

Vea [Farin '86, de Boor '87]. Sean  $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3)$  y  $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ . Entonces  $\beta_{i\mathbf{k}}$  se puede escribir

$$\binom{n}{\mathbf{i}} \binom{k_1}{m} \cdots \binom{k_1 - i_1 + 1}{m - i_1 + 1} \binom{k_2}{m - i_1} \cdots \binom{k_2 - i_2 + 1}{m - i_1 - i_2 + 1} \binom{k_3}{m - i_1 - i_2} \cdots \binom{k_3 - i_3 + 1}{m - n + 1},$$

de donde concluimos que

$$\beta_{i\mathbf{k}} \leq \binom{n}{\mathbf{i}} \left( \frac{k_1}{m} + \frac{n}{m - n} \right)^{i_1} \left( \frac{k_2}{m} + \frac{n}{m - n} \right)^{i_2} \left( \frac{k_3}{m} + \frac{n}{m - n} \right)^{i_3}$$

y

$$\beta_{i\mathbf{k}} \geq \binom{n}{\mathbf{i}} \left( \frac{k_1}{m} - \frac{n}{m} \right)^{i_1} \left( \frac{k_2}{m} - \frac{n}{m} \right)^{i_2} \left( \frac{k_3}{m} - \frac{n}{m} \right)^{i_3}.$$

En consecuencia

$$\beta_{i\mathbf{k}} = B_i^n(\mathbf{k}/m) + O(1/m)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{d}_k = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(\mathbf{k}/m) + O(1/m).$$

Por lo tanto podemos concluir que la malla de Bézier de grado  $m$  de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  converge a  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  linealmente cuando  $m$  tiende a infinito. Vea [Farin '79, Trump & Prautzsch '96].

### 11.10 Conversión a la representación tensorial de Bézier

Sea  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  un polinomio  $n$ -variado y sea  $\mathbf{b}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  su forma polar, denotamos por  $\mathbf{x}_{st} = \mathbf{x}(s, t)$  una aplicación biafín que envía el cuadrado unitario  $[0, 1]^2$  sobre un cuadrilátero convexo, vea Figura 11.11. Entonces el polinomio reparametrizado

$$\mathbf{c}(s, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}(s, t))$$

es un producto tensorial  $(n, n)$  en  $(s, t)$ . La forma polar de este producto tensorial está dada por

$$\mathbf{c}[s_1 \dots s_n, t_1 \dots t_n] = \frac{1}{n!} \sum_{\tau} \mathbf{b}[\mathbf{x}(s_1, \tau_1) \dots \mathbf{x}(s_n, \tau_n)] ,$$

donde la suma se extiende sobre todas las permutaciones  $(\tau_1, \dots, \tau_n)$  de  $(t_1, \dots, t_n)$ . La prueba de ésto se reduce a verificar que  $\mathbf{c}$  satisface las tres propiedades que caracterizan la forma polar de un polinomio: simetría, afinidad en cada variable y restricción a la diagonal.

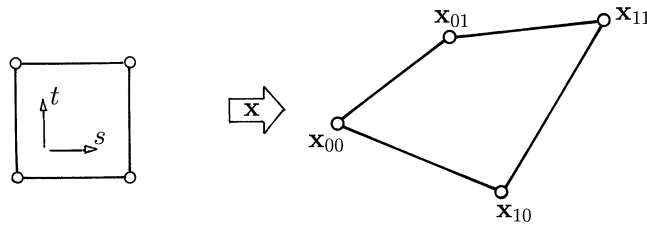


Figura 11.11: Una reparametrización biafín.

Conociendo la forma polar del producto tensorial se puede aplicar el teorma fundamental 9.3 para obtener los puntos de Bézier de  $\mathbf{c}(s, t)$  sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Estos puntos son

$$\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{c}[0 \dots 0 \overset{i}{1} \dots 1, 0 \dots 0 \overset{j}{1} \dots 1]$$

la cual puede describirse como

$$\mathbf{c}_{ij} = \sum_{k=0}^j \beta_{ijk} \mathbf{b}[\mathbf{x}_{00} \overset{n+k-i-j}{\dots} \mathbf{x}_{00} \mathbf{x}_{01} \overset{j-k}{\dots} \mathbf{x}_{01} \mathbf{x}_{10} \overset{i-k}{\dots} \mathbf{x}_{10} \mathbf{x}_{11} \overset{k}{\dots} \mathbf{x}_{11}] ,$$

siendo  $n! \beta_{ijk}$  el número de parametrizaciones de  $(0 \dots 0 \overset{i}{1} \dots 1)$  tales que exactamente  $k$  1's están ubicados en las últimas  $i$  posiciones. Luego

$$\begin{aligned} \beta_{ijk} &= \frac{1}{n!} \cdot \binom{j}{k} i \dots (i+1-k) \cdot (n-i) \dots (n-i+1-j+k) \cdot (n-j)! \\ &= \frac{k!}{n!} \binom{i}{k} \binom{j}{k} \frac{(n-i)!(n-j)!}{(n+k-i-j)!} . \end{aligned}$$

De 11.3 recordamos que los puntos

$$\mathbf{b}[\mathbf{x}_{00} \dots \mathbf{x}_{00} \mathbf{x}_{01} \dots \mathbf{x}_{01} \mathbf{x}_{10} \dots \mathbf{x}_{10} \mathbf{x}_{11} \dots \mathbf{x}_{11}]$$

resultan de la subdivisión de la malla de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre  $\mathbf{x}_{00} \mathbf{x}_{01} \mathbf{x}_{10}$  en  $\mathbf{x}_{11}$ , véase también [DeRose et al. '93].

## 11.11 Conversión a la representación triangular de Bézier

Un producto tensorial  $\mathbf{b}(x, y)$  de grado  $(m, n)$  tiene grado total  $\leq m + n$ . Por lo tanto tiene una representación de Bézier de grado  $l = m + n$  sobre cualquier triángulo  $\mathbf{pqr}$ . Para calcular esta representación triangular, sea  $\mathbf{b}[x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n]$  la forma polar del producto tensorial de  $\mathbf{b}(x, y)$ . Entonces la forma polar (no necesariamente producto tensorial) de  $\mathbf{b}(x)$  está dada por

$$\mathbf{c}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l] = \frac{1}{l!} \sum \mathbf{b}[x_{i_1} \dots x_{i_m}, y_{i_{m+1}} \dots y_{i_l}]$$

donde la suma se extiende por todas las permutaciones  $(i_1 \dots i_l)$  de  $(1 \dots l)$  y  $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)$ . Claramente,  $\mathbf{c}$  satisface las tres propiedades que caracterizan la forma polar.

Los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  sobre un triángulo con vértices  $\mathbf{p} = [p_1, p_2]^t$ ,  $\mathbf{q} = [q_1, q_2]^t$  y  $\mathbf{r} = [r_1, r_2]^t$  puede obtenerse a través del teorema fundamental 11.2.

*Estos son los puntos*

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{ijk} &= \mathbf{c}[\mathbf{p} \dots \mathbf{p} \mathbf{q} \dots \mathbf{q} \mathbf{r} \dots \mathbf{r}] \\ &= \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=m \\ (\alpha, \beta, \gamma) \leq (i, j, k)}} \delta_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} \mathbf{b}[p_1 \dots p_1 q_1 \dots q_1 r_1 \dots r_1, \\ &\quad p_2 \dots p_2 q_2 \dots q_2 r_2 \dots r_2] \end{aligned}$$

donde

$$\delta_{\alpha\beta\gamma}^{ijk} = \binom{i}{\alpha} \binom{j}{\beta} \binom{k}{\gamma} m!n! .$$

De 9.5 obtenemos que los puntos

$$\mathbf{b}[p_1 \dots p_1 q_1 \dots q_1 r_1 \dots r_1, p_2 \dots p_2 q_2 \dots q_2 r_2 \dots r_2]$$

aparecen en el algoritmo de de Casteljau para el producto tensorial usado para calcular  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  a partir de los puntos de Bézier sobre  $\mathbf{pqr}$ .

## 11.12 Ejercicios

- 1 Considere un parche funcional con un poliedro de Bézier convexo. Demuestre que la elevación de grado y la subdivisión uniforme de la Figura 11.6 preservan la convexidad del poliedro de Bézier.
- 2 Existen parches paramétricos para los cuales la observación del Ejercicio 1 no es válida. Produzca un ejemplo.
- 3 Generalice el algoritmo de intersección de 3.7 para parches triangulares.
- 4 Sean  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{p}$  y  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{q}$ . Muestre que la malla de Bézier  $\mathbf{b}_i$  sobre  $\mathbf{pqr}$  es plana si  $\Delta_{\mathbf{v}_1} \Delta_{\mathbf{v}_1} \mathbf{b}_i$ ,  $\Delta_{\mathbf{v}_1} \Delta_{\mathbf{v}_2} \mathbf{b}_i$  y  $\Delta_{\mathbf{v}_2} \Delta_{\mathbf{v}_1} \mathbf{b}_i$  son cero. Por lo tanto el máximo de estas diferencias es una medida de la planaridad del parche de Bézier.
- 5 El almacenamiento digital de mallas de Bézier requiere cierto cuidado en aras de la eficiencia, tanto desde el punto de vista de utilización de memoria como de su acceso. Una manera eficiente de almacenar muchas mallas de Bézier consiste en guardar los puntos  $\mathbf{b}_{ijk}$ ,  $i + j + k = n$  de cada malla en un arreglo lineal, digamos

$$\mathbf{a}[L] = \mathbf{b}_{ijk}$$

donde  $L = L(i, j)$  varía desde 1 hasta  $\binom{n+2}{2}$ . El acceso rápido se garantiza si la función  $L$  se almacena en una matriz  $L = [L_{ij}]$ . Dé una fórmula explícita para la función  $L$  del Ejercicio 5.

## 12 Interpolación

[12.1 Interpolación de Hermite](#) — [12.2 El interpolador de Clough-Tocher](#) — [12.3 El interpolador de Powell-Sabin](#) — [12.4 Superficies de topología arbitraria](#) — [12.5 Parametrización singular](#) — [12.6 Splines  \$C^1\$  de grado cinco de topología arbitraria](#) — [12.7 Ejercicios](#)

Dados valores y derivadas de una función bivariada es fácil construir un interpolador polinómico por trozos usando la representación de Bézier. Sin embargo no existe una extensión a superficies paramétricas arbitrarias, por ejemplo, esferas. Para esto se requieren conexiones  $C^r$  más generales y/o parametrizaciones singulares.

### 12.1 Interpolación de Hermite

Dada una triangulación  $\mathcal{T}$  de un dominio poligonal de  $\mathbf{R}^2$  se puede construir una función polinómica por trozos de grado  $4r+1$  que es  $r$ -veces diferenciable e interpola cualesquiera derivadas dadas en los vértices de  $\mathcal{T}$ , hasta orden  $2r$ . La representación de Bézier es una herramienta muy útil para describir esta construcción. La Figura 12.1 muestra un triángulo de la triangulación  $\mathcal{T}$  y las abscisas de Bézier del interpolador para este triángulo en el caso  $r = 2$ , vea 10.3. Hay tres tipos de abscisas de Bézier: las denotadas por  $\bullet$  en las cuales las derivadas están prefijadas, aquellas en las cuales las ordenadas son arbitrarias, etiquetadas con  $\circ$  y las abscisas  $\ominus, \odot, \ominus$  cuyas ordenadas dependen de los triángulos adyacentes y están determinadas por las condiciones de conexión  $C^r$ .



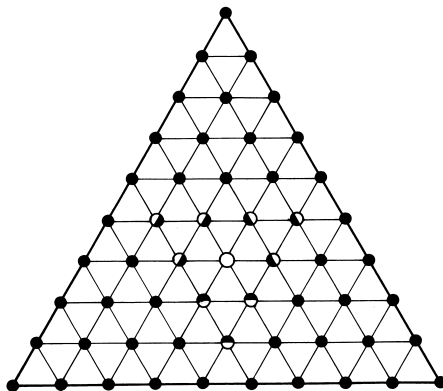


Figura 12.1: Abscisas de Bézier para  $r = 2$ .

## 12.2 El interpolador de Clough-Tocher

Interpoladores de grado más bajo que los presentados en 12.1 se pueden construir para datos correspondientes a topologías arbitrarias. Sin embargo, ésto se puede hacer sólo a expensas de aumentar el número de parches. El interpolador cúbico  $C^1$  polinómico por trozos que se describe a continuación fue propuesto por Clough y Tocher [Clough & Tocher '65].

Dada una triangulación  $\mathcal{T}$  de un dominio poligonal en  $\mathbb{R}^2$ , subdividimos cada triángulo de  $\mathcal{T}$  en un punto interior en tres microtriángulos, tal como se ilustra en la Figura 12.2. Para cualesquiera valores y primeras derivadas en los vértices de  $\mathcal{T}$  se puede construir una función  $C^1$  que será cúbica sobre cada microtriángulo.

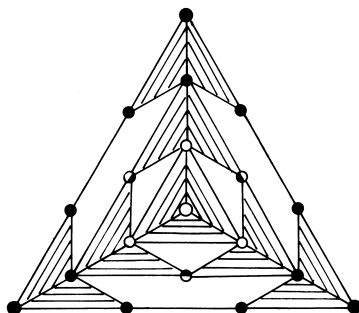


Figura 12.2: Subdivisión de un macrotriángulo en tres microtriángulos.

La Figura 12.2 ilustra las abscisas de Bézier de un tal interpolador sobre un triángulo de  $\mathcal{T}$ . Las ordenadas de Bézier sobre las abscisas  $\bullet$  están dadas por

los datos de interpolación en los vértices. Las ordenadas en las abscisas  $\bullet, \circ, \bullet$  se determinan por las condiciones de conexión  $C^1$  a lo largo de las aristas de  $\mathcal{T}$  tal como se describe en 12.1. Las ordenadas en las abscisas  $\circ$  están determinadas por las condiciones de conexión  $C^1$  a través de las aristas de la triangulación refinada. Esto significa que los cuatro puntos correspondientes a cada cuadrilátero sombreado en la Figura 12.2 son coplanares.

**Observación 1:** El interpolador anterior es dos veces diferenciable en los puntos de subdivisión. Para una prueba considere el parche cuadrático definido por las ordenadas de Bézier sobre las seis abscisas interiores  $\bullet, \circ, \bullet, \circ, \bullet, \circ$  de la Figura 12.2. Como las diez ordenadas de Bézier sobre las diez abscisas interiores  $\bullet, \circ, \bullet, \circ, \bullet, \circ, \bullet, \circ, \bullet, \circ$  de la Figura 12.2 también constituyen la malla de Bézier subdividida del parche cuadrático, la condición de diferenciable se deduce del teorema de Stärk de 11.7.

## 12.3 El interpolador de Powell-Sabin

El problema de interpolación 12.2 también se puede abordar con un interpolador  $C^1$  cuadrático por trozos. Esto, sin embargo, requiere un número aún mayor de parches [Powell & Sabin '77]. En esta construcción cada macrotriángulo se subdivide en seis microtriángulos introduciendo puntos interiores  $\circ$  y puntos  $\diamond$  sobre las aristas, vea la Figura 12.3. Los segmentos que conectan los puntos interiores, de triángulos adyacentes deben intersectar las aristas comunes en los puntos  $\diamond$ . Si los puntos  $\circ$  son los incentros de los triángulos, entonces los segmentos que conectan los incentros de triángulos adyacentes, en efecto, cortan sus aristas comunes en los puntos  $\diamond$ . Véase también el Ejercicio 5.

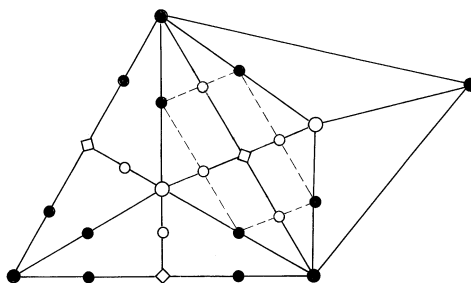


Figura 12.3: Abscisas de Bézier de la subdivisión de Powell-Sabin

Las ordenadas de Bézier en las abscisas  $\bullet$  están determinadas por las condiciones de interpolación, las ordenadas denotadas por  $\diamond$  y  $\circ$  están dadas por las condiciones de conexión  $C^1$  a lo largo de las aristas de subdivisión.

Las nueve ordenadas de Bézier que pertenecen al paralelogramo (de líneas

interrumpidas) en la Figura 12.3 yacen sobre una superficie bilineal. Esto implica  $C^1$ -continuidad entre macrotriángulos adyacentes.

## 12.4 Superficies de topología arbitraria

Las conexiones  $C^k$  simples descritas en 11.7, aunque suficientes para la modelación de superficies no paramétricas, no son suficientes para la modelación de superficies suaves arbitrarias.

En particular se tiene lo siguiente: usando solamente parches triangulares regulares y conexiones  $C^1$  simples, es imposible construir una superficie cerrada a menos que sea de género uno.

La Figura 12.4 muestra ejemplos de superficies cerradas de géneros 0, 1, 2 y 3.

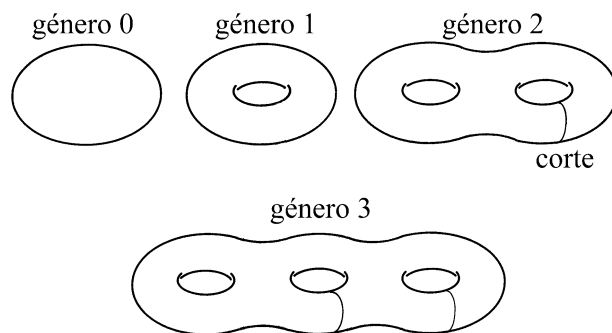


Figura 12.4: Superficies cerradas de varios géneros: 0, 1, 2 y 3.

Para la prueba consideramos primero el caso cuando el género es cero y procedemos por reducción al absurdo. Considere una superficie cerrada de género 0 compuesta de parches triangulares regulares unidos con conexiones  $C^1$  simples. Tal como se ilustra en la Figura 12.5, subdividimos la superficie en dos pedazos, entonces por la Observación 6 de 11.7, cada uno de éstos se puede escribir en términos de una parametrización regular  $C^1$  sobre un dominio triangulado simplemente conexo. Es más, existe una aplicación afín que envía todos los triángulos frontera del primer dominio sobre triángulos que bordean el segundo dominio. Sin embargo, claramente, esto es imposible, lo cual termina la prueba en este caso.

Note que al contrario de la situación anterior, un toro o cualquier otra superficie de género 1, se puede parametrizar por medio de una aplicación  $C^1$  regular sobre un rectángulo, vea el Ejercicio 1.

Finalmente, si una superficie de género  $n \geq 2$  estuviera compuesta por parches triangulares con conexiones  $C^1$  simples (vea 11.7), ésta se podría

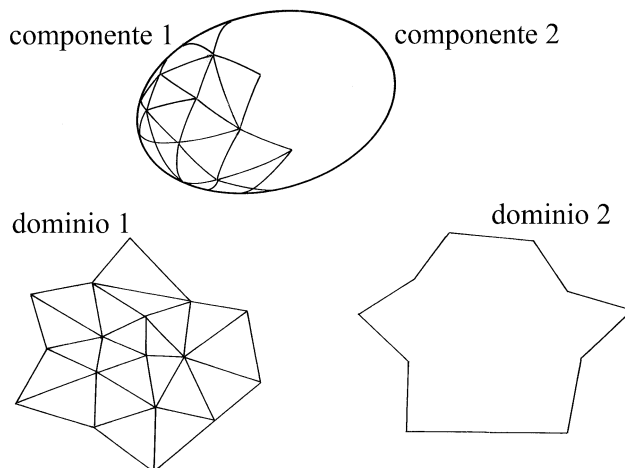


Figura 12.5: Separación de una superficie de género en dos componentes.

cortar tal como se ilustra en la Figura 12.4 y podría parametrizarse sobre un dominio triangulado con  $2(n-1)$  huecos cuyas fronteras corresponden a los cortes. Tal como en la situación anterior, en estas condiciones también existe una aplicación afín que envía los triángulos frontera de un hueco en sus triángulos frontera adyacentes del hueco correspondiente. Esto, sin embargo es imposible, por lo cual una superficie de género  $\geq 2$  tampoco puede estar compuesta de parches triangulares regulares con conexiones simples  $C^1$ .

## 12.5 Parametrización singular

Para modelar superficies suaves de topología arbitraria hay que introducir conexiones  $C^1$  de tipo general, (las cuales se describen en el Capítulo 14) o permitir parametrizaciones singulares. Para el caso de parches triangulares se pueden utilizar las singularidades estudiadas en 9.10 para productos tensoriales. Sin embargo, es suficiente considerar las singularidades más débiles ilustradas en la Figura 12.6.

La Figura 12.6 muestra parte de la malla de Bézier de un parche triangular polinómico

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum \mathbf{b}_i B_i^n(u, v, 1 - u - v) ,$$

donde

$$\mathbf{b}_{00n} = \mathbf{b}_{1,0,n-1} = \mathbf{b}_{0,1,n-1}$$

y

$$\mathbf{b}_{1,1,n-2} = \alpha \mathbf{b}_{2,0,n-2} + \beta \mathbf{b}_{0,2,n-2} + \gamma \mathbf{b}_{00n}$$

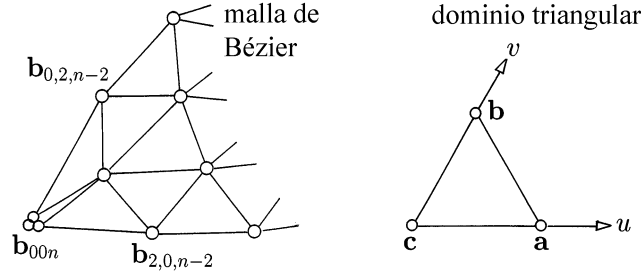


Figura 12.6: Puntos de Bézier de una parametrización singular en un vértice.

con  $\alpha, \beta > 0$ ,  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  y puntos independientes  $\mathbf{b}_{00n}$ ,  $\mathbf{b}_{2,0,n-2}$ ,  $\mathbf{b}_{0,2,n-2}$ .

Las derivadas de  $\mathbf{b}(u, v)$  en  $\mathbf{u} = (u, v) = (0, 0)$  se anulan. Sin embargo, existe una reparametrización  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  tal que  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ , regular en  $\mathbf{x} = \mathbf{u}^{-1}(\mathbf{o})$ .

Después de una transformación afín se obtiene

$$\mathbf{b}_{00n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{b}_{2,0,n-2} = \frac{2}{n(n-1)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{0,2,n-2} = \frac{2}{n(n-1)} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la expresión de Taylor de  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  en  $\mathbf{u} = (0, 0)$  es de la forma

$$\mathbf{b}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\mathbf{u}) \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{d}(\mathbf{u}),$$

donde

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u^2 + 2\alpha uv \\ v^2 + 2\beta uv \end{bmatrix} = O(\|\mathbf{u}\|^2)$$

y

$$\|\mathbf{d}(\mathbf{u})\| = O(\|\mathbf{u}\|^3).$$

Claramente,  $x$  e  $y$  son estrictamente monótonas en  $u$  y  $v$  para  $u, v \geq 0$ . Por lo tanto  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  es inyectiva en el dominio  $u, v \geq 0$ . Es más,  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  es regular para  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ . En consecuencia,  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$  es continuamente diferenciable si  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  tiene parciales continuas. Estas parciales están dadas por

$$[\mathbf{c}_x \mathbf{c}_y] = [\mathbf{d}_u \mathbf{d}_v] \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{x_u y_v - x_v y_u} [\mathbf{d}_u \mathbf{d}_v] \begin{bmatrix} y_v & -x_v \\ -y_u & x_u \end{bmatrix},$$

lo cual conduce a

$$\|\mathbf{c}_x\| = O(\|\mathbf{u}\|) = O(\sqrt{\|\mathbf{x}\|}).$$

De manera similar se puede argumentar para  $d_y$ . Por lo tanto,  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  y consecuentemente también  $\mathbf{b}(\mathbf{u}(\mathbf{x}))$ , son continuamente diferenciables.

**Observación 2:** Si  $\alpha, \beta < 0$  y  $4\alpha\beta > 1$ , también se puede demostrar que  $\mathbf{b}(\mathbf{u})$  tiene un plano tangente continuo [Reif '95a].

## 12.6 Splines $C^1$ de grado cinco de topología arbitraria

Para construir superficies  $C^1$  de topología arbitraria que interpolan planos tangentes prescritos en puntos dados, se pueden utilizar parametrizaciones singulares de parches triangulares. A continuación describimos los ingredientes básicos para construir estas superficies. Note sin embargo, que esta descripción no debe ser considerada como un método elaborado para la construcción.

Considere una malla triangular con normales especificadas en cada uno de sus vértices, tal como se ilustra en la Figura 12.7.

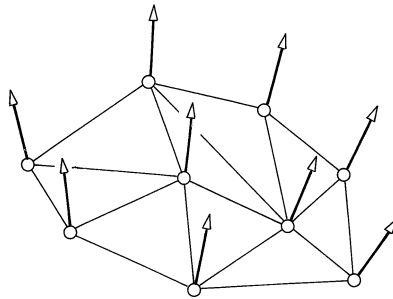


Figura 12.7: Malla triangular con normales en los vértices.

Para cada cara de la malla se construye un interpolador de grado cinco tal como se ilustra esquemáticamente en la Figura 12.8. Dado un triángulo de la malla cuyos lados están dados por líneas gruesas, los puntos de Bézier esquina  $\bullet$  y los puntos de Bézier adyacentes  $\circ$  (que coinciden con los anteriores) están dados por los vértices del triángulo.

El próximo anillo de puntos  $*$  y  $\diamond$  alrededor de cada conjunto de puntos de Bézier coincidentes se escoge de manera tal que yazcan sobre el plano tangente prescrito en el vértice de su esquina y tal que los cuadriláteros sombreados sean paralelogramos. Los puntos de Bézier restantes  $\bullet, \bullet, \bullet$  se escogen de manera tal que el resto de los cuadriláteros sombreados sean también paralelogramos.

## 12.7 Ejercicios

- 1 Construya una superficie cerrada de género 1, es decir, una superficie topológicamente equivalente a un toro, utilizando parches regulares con conexiones  $C^1$  simples.

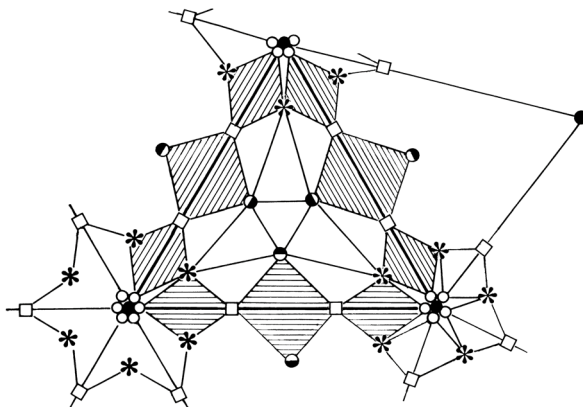


Figura 12.8: La malla de Bézier de un interpolador de grado cinco con singularidades.

- 2 Muestre que no se puede modelar superficies abiertas  $C^1$  cuya frontera tiene menos de tres esquinas, utilizando solamente parches regulares con conexiones simples  $C^1$ . La Figura 12.9 muestra dos tales superficies.

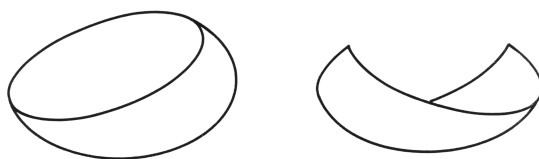


Figura 12.9: Superficies abiertas sin esquinas y con dos esquinas.

- 3 Demuestre que se pueden modelar superficies  $C^1$  de topología arbitraria con parches triangulares cuadráticos singulares con conexiones  $C^1$  simples.
- 4 Demuestre que la superficie del Ejercicio 3, en general, podría contener parches planos.
- 5 Dada una triangulación de  $\mathbb{R}^2$ , conecte los centroides de cada par de triángulos adyacentes. Verifique a través de un ejemplo que estos segmentos de conexión podrían intersectar otros triángulos.
- 6 Refute por medio de un ejemplo, que un elemento de Powell-Sabin tenga un poliedro de Bézier cóncavo o convexo si los tres planos tangentes en las esquinas se intersectan encima de un punto interior del triángulo

dominio. Véase también [Floater '97, Carnicer & Dahmen '92, Bangert & Prautzsch '99].

- 7 Generalice el esquema de interpolación Powell-Sabin para funciones multivariadas, véase también [Bangert & Prautzsch '99].





## 13 Construcción de superficies suaves

[13.1 La conexión general  \$C^1\$](#)  — [13.2 Conexión de dos parches triangulares cúbicos](#)  
— [13.3 Un interpolador triangular  \$G^1\$](#)  — [13.4 El problema del vértice compartido](#)  
— [13.5 El problema de la paridad](#) — [13.6 Ejercicios](#)

La conexión  $C^1$  simple discutida en 11.7 es demasiado restrictiva para la modelación de superficies regulares arbitrarias. Por esta razón, en esta sección, introducimos condiciones más generales para la conexión  $C^1$  de superficies interpolantes construidas con parches triangulares. Estas superficies nos permitirán diseñar modelos en 3D de topología arbitraria.

### 13.1 La conexión general $C^1$

Sean  $\mathbf{p}(x, y)$  y  $\mathbf{q}(x, y)$  dos parches regulares  $C^1$  que poseen una frontera común a lo largo de  $x = 0$ , es decir,

$$\mathbf{p}(0, y) = \mathbf{q}(0, y)$$

para todo  $y \in [0, 1]$ . La Figura 13.1 provee una ilustración. Note que no se requiere que los parches  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  sean polinómicos o que sean de tres o cuatro lados.

Se dice que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una conexión **general**  $C^1$  o **conexión geométrica**  $C^1$  o simplemente una **conexión**  $G^1$  a lo largo de  $x = 0$ , si sus normales unitarias coinciden sobre la frontera común, es decir, si

$$\frac{\mathbf{p}_x \times \mathbf{p}_y}{\|\mathbf{p}_x \times \mathbf{p}_y\|} = \frac{\mathbf{q}_x \times \mathbf{q}_y}{\|\mathbf{q}_x \times \mathbf{q}_y\|} \quad \text{para } x = 0 .$$

Equivalentemente, la continuidad  $G^1$  también se puede caracterizar requiriendo que existan **funciones de conexión**  $\lambda(y)$ ,  $\mu(y)$  y  $\nu(y)$  tales que para todo  $x = 0$  y todo  $y$

$$(1) \quad \lambda \mathbf{p}_x = \mu \mathbf{q}_x + \nu \mathbf{q}_y \quad \text{y} \quad \lambda \mu > 0 ,$$

con la posible excepción de puntos aislados.

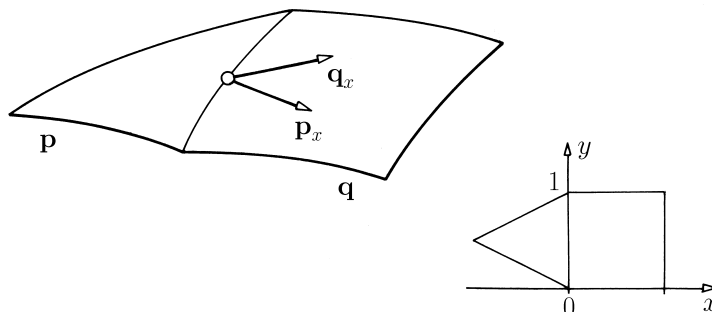


Figura 13.1: Dos parches con un borde común.

En particular, si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son polinómicos y tienen una conexión  $G^1$  entonces las funciones de conexión son polinomios y salvo un factor común, se tiene

$$\begin{aligned} \text{grado } \lambda &\leq \text{grado } \mathbf{q}_x(0, y) + \text{grado } \mathbf{q}_y(0, y) , \\ \text{grado } \mu &\leq \text{grado } \mathbf{p}_x(0, y) + \text{grado } \mathbf{q}_y(0, y) , \\ \text{grado } \nu &\leq \text{grado } \mathbf{p}_x(0, y) + \text{grado } \mathbf{q}_x(0, y) . \end{aligned}$$

Para la prueba se calcula el producto vectorial de ambos lados de la ecuación (1) con  $\mathbf{q}_x$  y  $\mathbf{q}_y$ . Se obtiene

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{p}_x \times \mathbf{q}_x &= \nu \mathbf{q}_y \times \mathbf{q}_x \quad \text{y} \\ \lambda \mathbf{p}_x \times \mathbf{q}_y &= \mu \mathbf{q}_x \times \mathbf{q}_y . \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{q}$  es regular, por lo menos una de las coordenadas de  $[\mathbf{q}_x \times \mathbf{q}_y]$ , es diferente de cero. Como la ecuación (1) se puede multiplicar por un factor, podemos suponer que

$$\lambda = [\mathbf{q}_x \times \mathbf{q}_y]_1 .$$

Esto implica

$$\mu = [\mathbf{p}_x \times \mathbf{q}_y]_1 \quad \text{y} \quad \nu = -[\mathbf{p}_x \times \mathbf{q}_x]_1 ,$$

lo cual prueba la aseveración.  $\diamond$

**Observación 1:** Frecuentemente, se fija  $\lambda = 1$ , entonces  $\mu$  y  $\nu$  son, en general, funciones racionales.

**Observación 2:** La prueba anterior también es válida cuando  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son funciones racionales. En este caso, las funciones  $\lambda, \mu$  y  $\nu$  son racionales y salvo un factor común, satisfacen los estimados de arriba.

**Observación 3:** Cualquier conexión  $G^1$  se puede convertir en una conexión simple  $C^1$ , por medio de un cambio de variable. Concretamente, si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$

satisfacen la condición  $G^1$  dada por (1), entonces  $\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{p}(x, y)$  y  $\mathbf{b}(x, y) = \mathbf{q}(\mu x, \nu x + y)$  tienen una conexión  $C^1$  simple. Véase 9.7 y 11.7.

**Observación 4:** El hecho de que dos parches se conecten  $G^1$  a lo largo de su frontera común no depende de sus parametrizaciones. Sin embargo, las funciones de conexión dependen de las parametrizaciones. El grado máximo de las funciones de conexión es invariante bajo reparametrización afín.

### 13.2 Conexión de dos parches triangulares cúbicos

Considere dos parches triangulares

$$\mathbf{p}(\mathbf{u}) = \sum \mathbf{p}_i B_i^3(\mathbf{u}) \quad \text{y} \quad \mathbf{q}(\mathbf{u}) = \sum \mathbf{q}_i B_i^3(\mathbf{u}) ,$$

donde  $0 \leq i = (i, j, k)$ ,  $|i| = i + j + k = 3$  y  $\mathbf{p}_i = \mathbf{q}_i$  para  $i = 0$ . Esto significa que los parches  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  están conectados continuamente a lo largo de  $u = 0$  y que sus planos tangentes coinciden en  $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0)$  y  $\mathbf{e}_2 = (0, 0, 1)$ . Esta situación se ilustra en la Figura 13.2.

Note que los cuadriláteros sombreados son planos pero no están necesariamente en correspondencia afín.

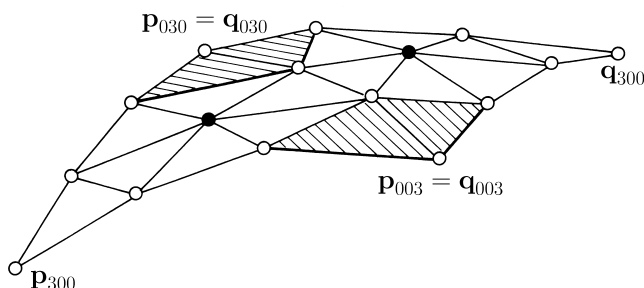


Figura 13.2: Conexión  $G^1$  y movimiento de los puntos interiores.

*En general, los puntos interiores de Bézier  $\mathbf{p}_{111}$  y  $\mathbf{q}_{111}$ , se pueden mover para lograr una conexión  $G^1$  a lo largo de  $u = 0$ .*

En particular, en esta sección veremos como obtener una conexión suave usando funciones de conexión  $\lambda(v)$ ,  $\mu(v)$  y  $\nu(v)$ , que son lineales. Entonces la condición para la conexión  $G^1$  a lo largo de  $u = 0$  se reduce a una ecuación cúbica en  $w = 1 - v$ . Denotando las derivadas parciales en las direcciones  $\mathbf{e}_0 - \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1$ , con los subíndices 0 y 1, respectivamente, la ecuación cúbica resulta

$$\lambda \mathbf{p}_0 = \mu \mathbf{q}_0 - \nu \mathbf{q}_1 \quad , \quad \lambda \mu > 0 \quad .$$

En  $v = 0$ , las derivadas  $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$  y  $\mathbf{q}_1$  son conocidas. Por lo tanto esta ecuación establece un sistema lineal en  $\lambda_0 = \lambda(0), \mu_0 = \mu(0)$  y  $\nu_0 = \nu(0)$ , el cual tiene una familia a un parámetro de soluciones. Similarmente también se tiene una familia monoparamétrica de soluciones para  $\lambda_1, \mu_1$  y  $\nu_1$  en  $v = 1$ . Si escogemos soluciones arbitrarias en  $v = 0$  y en  $v = 1$  éstas determinan las funciones lineales  $\lambda, \mu$  y  $\nu$ . Como una cúbica está determinada por sus valores y los valores de sus derivadas en dos puntos, en nuestro caso,  $v = 0$  y  $v = 1$  y estamos interesados en la expresión de su derivada, entonces diferenciamos la condición para la conexión  $G^1$ , a lo largo de  $u = 0$ . En consecuencia se obtiene

$$\lambda \mathbf{p}_{01} - \mu \mathbf{q}_{01} = \nu \mathbf{q}_{11} + \nu' \mathbf{q}_1 - \lambda' \mathbf{p}_0 + \mu' \mathbf{q}_0 .$$

Expresando  $\mathbf{p}_{01}, \mathbf{q}_{01}$ , etc. en términos de los puntos de Bézier, en  $\mathfrak{e}_1$  obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{01} &= 6(\mathbf{p}_{003} + \mathbf{p}_{111} - \mathbf{p}_{012} - \mathbf{p}_{102}) , \\ \mathbf{q}_{01} &= 6(\mathbf{q}_{021} + \mathbf{q}_{111} - \mathbf{q}_{012} - \mathbf{q}_{120}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

y expresiones similares para  $\mathbf{p}_{01}, \mathbf{q}_{01}$ , etc. en  $\mathfrak{e}_2$ . Los puntos  $\mathbf{q}_{11}, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0$  y  $\mathbf{p}_0$  no dependen de  $\mathbf{p}_{111}, \mathbf{q}_{111}$  en  $v = 0$  y  $v = 1$ . Sustituyendo estas expresiones en la derivada de la condición  $G^1$ , se obtiene una ecuación lineal para  $\mathbf{p}_{111}$  y  $\mathbf{q}_{111}$ :

$$[\mathbf{p}_{111} \mathbf{q}_{111}] \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\mu_0 & -\mu_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1] ,$$

donde  $\mathbf{w}_0$  y  $\mathbf{w}$  son combinaciones de puntos de Bézier  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{q}_i$ , con la excepción de  $\mathbf{p}_{111}$  y  $\mathbf{q}_{111}$ . Este sistema tiene una solución si la matriz

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ -\mu_0 & -\mu_1 \end{bmatrix}$$

es invertible. Por lo tanto, existe una solución, a menos que  $\lambda(y) : \mu(y) = \text{constante}$ . Esta última situación se ilustra en la Figura 13.3  $\diamond$ .

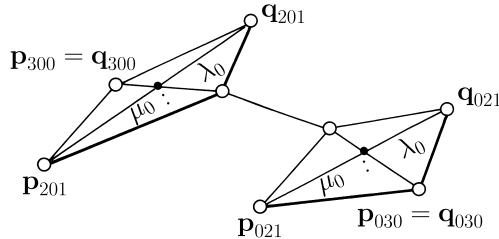


Figura 13.3: Configuración crítica.

En efecto, no hay solución si  $\lambda(y) : \mu(y) = \text{constante}$ , si los dos cuadriláteros no están en correspondencia afín y si la frontera común  $\mathbf{p}(0, y) = \mathbf{q}(0, y)$  es

una cúbica regular, es decir, si  $\mathbf{q}_y(0, y)$  es una cónica que no pasa por el origen.

Concretamente, rescribiendo la condición  $G^1$  como

$$\mathbf{p}_x - \frac{\mu}{\lambda} \mathbf{q}_x = \frac{\nu}{\lambda} \mathbf{q}_y$$

notamos que su lado izquierdo es cuadrático y como  $\mathbf{q}_y$  también es una cuadrática sin raíces reales, se tiene que  $\nu/\lambda$  tiene que ser constante. Esto, finalmente, contradice la suposición de que los cuadriláteros de la Figura 13.3 están en correspondencia afín.

Si  $\mathbf{q}_{0,y}$  es cuadrática o no regular, se puede verificar que existe una solución con funciones lineales  $\lambda, \mu$  y  $\nu$ . Vea el Ejercicio 3.

### 13.3 Un interpolador triangular $G^1$

En 1985, Bruce Piper [Piper '87] introdujo una técnica para construir superficies cuadráticas  $G^1$  que interpolan un conjunto de curvas cúbicas dispuestas en forma triangular, tal como se ilustra en la Figura 13.4. A continuación presentamos esta construcción, pero evitando situaciones críticas, lo cual permite su realización con parches cúbicos.

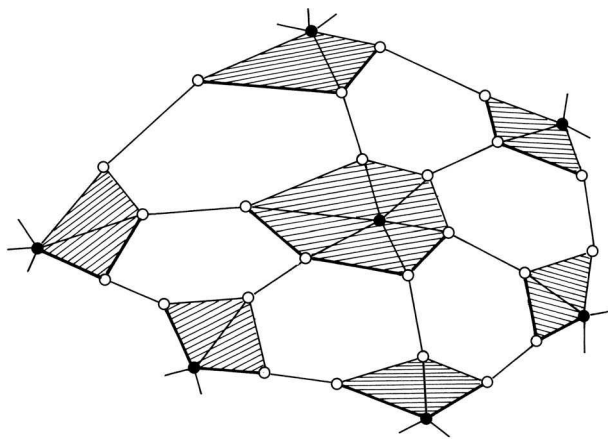


Figura 13.4: Una red triangular  $G^1$  de curvas cúbicas.

Los “triángulos” adyacentes de la red de cúbicas se comportan tal como se ilustra en la Figura 13.2. Por simplicidad, suponemos que no hay soluciones críticas, tales como las ilustradas en la Figura 13.3. Entonces, cada “triángulo” se puede interpolar con un macroparche que consiste de tres parches cúbicos como se describe a continuación. La Figura 13.5 ilustra esquemáticamente la posición de los puntos de Bézier del macroparche.

Los puntos de Bézier  $\circ$ , en la frontera están dados por la red de cúbicas. Los puntos de Bézier  $\bullet$  son los centroides de ternas de puntos vecinos  $\circ$ , tal como se indica en la Figura 13.5.

Los puntos de Bézier  $\ominus$  se determinan como en 13.2, de manera que macroparches adyacentes se conecten  $G^1$ .

Los puntos denotados con  $\square$  son los centroides de las ternas vecinas de puntos  $\ominus \bullet \ominus$ . El punto de Bézier  $\blacksquare$  es el centroide del triángulo  $\square\square\square$ .

Entonces los parches adyacentes del macroparche tienen conexiones  $C^1$  simples. Ésto es similar al elemento de Clough-Tocher, véase 12.2.

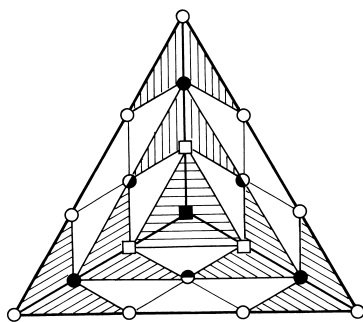


Figura 13.5: El macroparche.

### 13.4 El problema del vértice compartido

Por medio de su construcción, Piper resuelve de manera implícita una dificultad que se presenta cuando se trata de construir una conexión  $G^1$  con varios parches que comparten un vértice. Éste se denomina **problema del vértice compartido** y consiste en garantizar que todos los parches tengan el mismo plano tangente en el vértice común. Estas condiciones forman un sistema cíclico.

Considere  $n$  parches (triangulares o cuadrangulares)  $\mathbf{p}^i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, n$  tales que

$$\mathbf{p}^i(0, z) = \mathbf{p}^{i+1}(z, 0) ,$$

donde  $\mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{p}^1$ , tal como se ilustra en la Figura 13.6, y

$$(2) \quad \lambda_i \mathbf{p}_x^i(0, z) = \mu_i \mathbf{p}_y^{i+1}(z, 0) + \nu_i \mathbf{p}_x^{i+1}(z, 0) ,$$

con  $3n$  funciones de conexión  $\lambda_i(z)$ ,  $\mu_i(z)$  y  $\nu_i(z)$ .

Para  $z = 0$ , estas ecuaciones imponen restricciones sobre la derivada  $\mathbf{p}_x^i$  y las funciones de conexión.

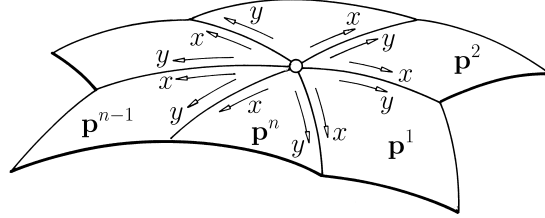


Figura 13.6: Un vértice compartido por  $n = 6$  parches.

También se tienen condiciones sobre las segundas derivadas, las cuales se obtiene diferenciando las condiciones para la continuidad  $G^1$ , dadas por (2),

$$\lambda'_i \mathbf{p}_x^i + \lambda_i \mathbf{p}_{xy}^i = \mu'_i \mathbf{p}_y^{i+1} + \mu_i \mathbf{p}_{xy}^{i+1} + \nu'_i \mathbf{p}_x^{i+1} + \nu_i \mathbf{p}_{xx}^{i+1} ,$$

las cuales se denominan **restricciones de torsión**. Para  $z = 0$ , estas ecuaciones forman un sistema lineal cíclico.

$$[\mathbf{p}_{xy}^1 \cdots \mathbf{p}_{xy}^n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & -\mu_1 \\ -\mu_2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\mu_n & \lambda_n \end{bmatrix} = [\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_n] ,$$

donde

$$\mathbf{r}_i = -\lambda'_i \mathbf{p}_x^i + \mu'_i \mathbf{p}_y^{i+1} + \nu'_i \mathbf{p}_x^{i+1} + \nu_i \mathbf{p}_{xx}^{i+1} .$$

Escribimos este último sistema de manera abreviada como  $TA = R$ .

### 13.5 El problema de la paridad

La matriz cíclica  $A$ , correspondiente a las restricciones de torsión tiene rango  $n$  si  $n$  es impar, y rango  $n - 1$  si  $n$  es par. Por lo tanto  $A$  es no singular sólo para  $n$  impar.

Se tiene entonces, que las restricciones de torsión se pueden satisfacer si el número de parches es impar. Cuando  $n$  es par, en general no se puede garantizar que las restricciones puedan ser satisfechas. Para verificar este sorprendente hecho, nótese que

$$\begin{aligned} \det A &= \lambda_1 \cdots \lambda_n - \mu_1 \cdots \mu_n \\ &= \prod \lambda_i - \prod \mu_i . \end{aligned}$$

Calculando el producto vectorial de

$$\lambda_i \mathbf{p}_x^i = \mu_i \mathbf{p}_y^{i+1} + \nu_i \mathbf{p}_x^{i+1} ,$$



con  $\mathbf{p}_x^{i+1} = \mathbf{p}_x^i$  se obtiene

$$\lambda_i : \mu_i = [\mathbf{p}_x^{i+2} \times \mathbf{p}_x^{i+1}] : [\mathbf{p}_x^i \times \mathbf{p}_x^{i+1}] ,$$

lo cual implica que

$$\Pi \lambda_i : \Pi \mu_i = (-1)^n$$

y, como  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i$ ,

$$\det A = \begin{cases} = 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \neq 0 & \text{si } n \text{ s impar} \end{cases} .$$

Como la submatriz de  $A$  obtenida eliminando la primera fila y la primera columna, tiene rango máximo entonces el rango de  $A$  es por lo menos  $n - 1$ , lo cual termina la verificación.

**Observación 5:** Las restricciones de torsión,  $AT = R$ , se satisfacen si los datos provienen de parches  $\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^n$  que forman una superficie  $G^1$ . En particular este es el caso si los  $\mathbf{p}^i$  resultan de reparametrizaciones locales de un parche polinómico  $\mathbf{p}$ .

**Observación 6:** Si  $n = 4$  y  $\lambda'_i(0) = \mu'_i(0) = \nu'_i(0) = 0$ , para  $i = 1, 2, 3, 4$  como se ilustra en la Figura 13.7, entonces las restricciones de torsión pueden ser satisfechas, véase 9.7.

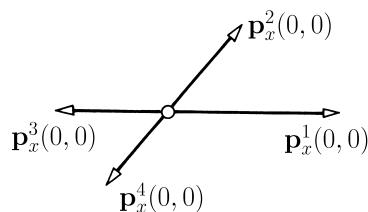


Figura 13.7: Tangentes opuestas iguales.

**Observación 7:** Cuando se subdivide cada parche  $\mathbf{p}^i$ , tal como en la construcción de Peters, las restricciones de torsión siempre pueden ser satisfechas. Véase [Peters '91].

## 13.6 Ejercicios

- Demuestre que el problema de la Sección 13.2 siempre se puede resolver si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son parches cuadráticos.
- Resuelva el problema de la Sección 13.2 para la siguiente configuración de  $\mathbf{p}_{ijk}$ 's

$$\begin{array}{cccc}
 & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{p}_{201} & \mathbf{p}_{111} & \mathbf{p}_{012} & \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{111} \\ \mathbf{p}_{111} \\ \mathbf{p}_{111} \end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \mathbf{p}_{300} & \mathbf{p}_{210} & \mathbf{p}_{120} & \mathbf{p}_{030} \\
 \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\
 \mathbf{q}_{300} & \mathbf{q}_{210} & \mathbf{q}_{120} & \mathbf{q}_{030} \\
 \\
 & & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \mathbf{q}_{201} & \mathbf{q}_{111} & \mathbf{q}_{012} & \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{111} \\ \mathbf{q}_{111} \\ \mathbf{q}_{111} \end{bmatrix} \\
 & & & \begin{bmatrix} 5 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} .
 \end{array}$$

- Verifique que el problema de la Sección 13.2, vea la Figura 13.3, tiene una solución con funciones lineales  $\lambda = \mu$  y  $\nu$ , si  $\mathbf{q}(0, v, 1, -v)$  es cuadrática o no regular. Sugerencia: Si  $\mathbf{q}(0, v, 1, -v)$  es cuadrático escogemos  $\lambda = \mu = 1$ . Si  $\mathbf{q}(0, v, 1, -v) = \mathbf{0}$  para  $v = v_0$ , escogemos  $\lambda = \mu = (v - v_0)c_1$  y  $\nu = vc_2$ , donde las constantes  $c_1$  y  $c_2$  se eligen de manera que se satisfaga la condición  $G^1$  para  $v = 1$ .
- Demuestre que las restricciones de torsión de 13.4 se satisfacen si y sólo si

$$\mathbf{s} = \mathbf{t}_1 \left( 1 - \frac{\mu_1 \cdots \mu_n}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \right)$$

se puede resolver para  $\mathbf{t}_1$ , donde

$$\mathbf{s} = \frac{\mu_1 \cdots \mu_{n-1}}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \mathbf{r}_n + \cdots + \frac{\mu_1}{\lambda_1 \lambda_2} \mathbf{r}_2 + \frac{1}{\lambda_1} \mathbf{r}_1 .$$

- La ecuación  $\mathbf{s} = \mathbf{0}$  se puede interpretar como un sistema lineal en  $\nu_1'(0)$ ,  $\nu_2'(0)$  y  $\nu_1(0)$ . Este sistema tiene una solución única a menos que  $\mathbf{p}_{xx}^2 = \mathbf{0}$ .
- Considere los parches cuadráticos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}(x, y) &= \sum \mathbf{p}_{ij} B_{ij}^{44}(x, y) \quad y \\
 \mathbf{q}(x, y) &= \sum \mathbf{q}_{ij} B_{ij}^{44}(x, y)
 \end{aligned}$$

tales que las curvas frontera  $\mathbf{p}(x, 0)$  y  $\mathbf{q}(x, 0)$  coincidan y son cúbicas. Vea la Figura 13.8. Y sean  $\lambda, \mu$  y  $\nu$ , funciones de conexión de grado 1, 1 y 3, respectivamente, tales que la condición de continuidad  $G^1$

$$\lambda \mathbf{p}_y(x, 0) = \mu \mathbf{p}_y(x, 0) + \nu \mathbf{q}_x(x, 0)$$

y su derivada con respecto a  $x$ , en  $x = 0$  y  $x = 1$ , se satisfacen.

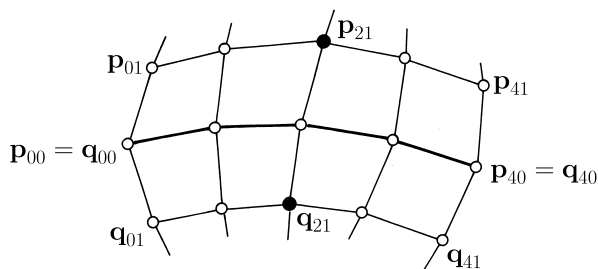


Figura 13.8: Desplazamiento de los puntos de Bézier para garantizar la conexión  $G^1$  para todo  $x$ .

Demuestre que, en general se pueden ajustar los puntos  $\mathbf{p}_{21}$  y  $\mathbf{q}_{21}$  de manera que la condición  $G^1$  se satisfaga para todo  $x$ .

## 14 Construcciones - $G^k$

[14.1](#) La conexión general  $C^k$  — [14.2](#) Conexiones  $G^k$  usando curvas transversales  
— [14.3](#) Conexiones  $G^k$  usando la regla de la cadena — [14.4](#) Superficies  $G^k$   
de topología arbitraria — [14.5](#) Parches suaves de  $n$  lados — [14.6](#) Parches  
multilaterales en el plano — [14.7](#) Ejercicios

Dos parches se pueden conectar suavemente si cada uno se puede parametrizar de manera tal que todas sus derivadas hasta cierto orden son iguales en cada uno de los puntos de su frontera común. Para una reparametrización arbitraria esta condición para una conexión suave significa que, en cada punto de la frontera común las derivadas de ambos parches están relacionadas por una matriz de conexión. Esto es análogo al caso de las curvas.

En este capítulo consideraremos las condiciones de suavidad y las utilizaremos para construir superficies de topología arbitraria con un grado de suavidad prescrito.

### 14.1 La conexión general $C^k$

Sean  $p$  y  $q$  dos parches regulares con una curva frontera común  $b$ .

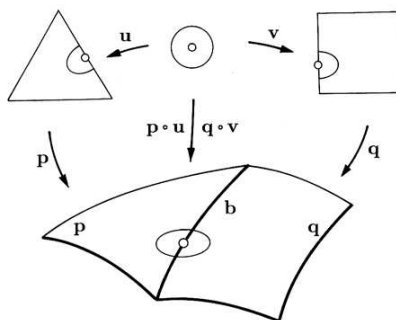


Figura 14.1: Una conexión general  $C^k$ .

Decimos que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una **conexión general**  $C^k$  a lo largo de  $\mathbf{b}$  si para cada  $\mathbf{b}_0$  de  $\mathbf{b}$  estos dos parches tienen una conexión local  $C^k$  simple, reparametrizando si es necesario. Esto significa que localmente existen reparametrizaciones regulares  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  tales que  $\mathbf{p} \circ \mathbf{u}$  y  $\mathbf{q} \circ \mathbf{v}$  tienen derivadas parciales iguales a lo largo de la curva  $\mathbf{b}$  hasta orden  $k$ . Nótese que es suficiente reparametrizar uno solo de los parches, digamos  $\mathbf{q}$  por  $\mathbf{v} \circ \mathbf{u}^{-1}$ , vea la Figura 14.2. Una conexión general  $C^k$  se denomina también **conexión  $G^k$** .

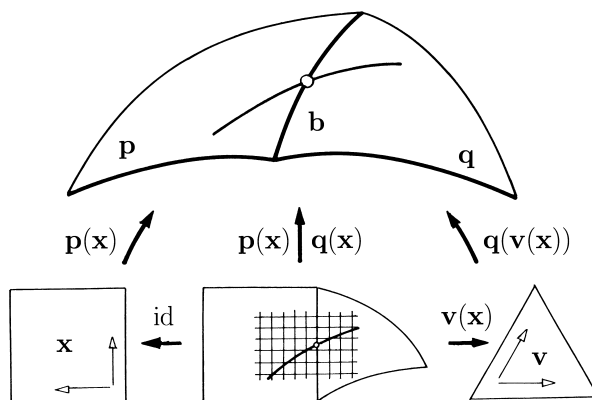


Figura 14.2: La conexión general  $C^k$  simplificada.

Si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una conexión  $G^k$  en un punto  $\mathbf{b}_0$ , de su frontera común, entonces se puede construir una parametrización local  $C^k$  proyectando sobre un plano conveniente. Esto se deduce del teorema de la función implícita.

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{cases} \mathbf{p} \circ \mathbf{u} \circ \phi^{-1}(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ yace en } \pi(\mathbf{p}) \\ \mathbf{q} \circ \mathbf{v} \circ \psi^{-1}(x, y) & \text{si } (x, y) \text{ yace en } \pi(\mathbf{q}) \end{cases} .$$

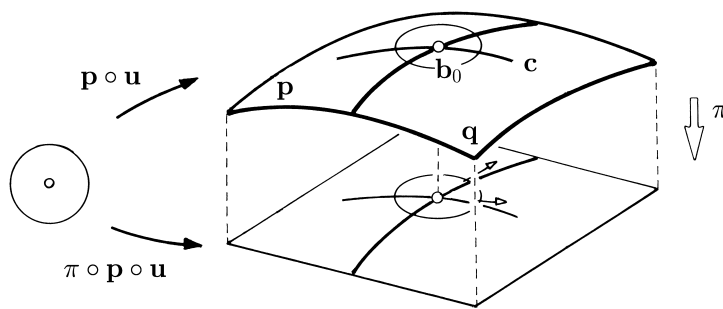


Figura 14.3: Parametrización por proyección.

## 14.2 Conexiones $G^k$ usando curvas transversales

Un método para verificar si dos parches  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una conexión  $G^k$  a lo largo de su frontera común  $\mathbf{b}(t)$  está dado por:

*Si  $\mathbf{b}(t)$  es diferenciable, y si para cada  $\mathbf{b}_0$  en  $\mathbf{b}(t)$  existe una curva regular  $\mathbf{c}(s)$   $k$  veces diferenciable que yace en la unión de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ , e intersecta transversalmente la curva  $\mathbf{b}$  entonces  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una conexión  $G^k$ .*

Probaremos este hecho por inducción sobre  $k$ . De acuerdo a nuestras hipótesis,  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  están conectados continuamente. Por lo tanto es suficiente verificar la condición de conexión  $G^k$  suponiendo que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen conexión  $G^{k-1}$  a lo largo de  $\mathbf{b}$  para  $k > 0$ .

Supongamos que  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  están parametrizados localmente alrededor de  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(t_0) = \mathbf{c}(s_0)$  por una proyección  $\pi$  sobre un plano  $P$ , tal como se ilustra en la Figura 14.2. Sin pérdida de generalidad podemos usar las coordenadas afines  $x$  e  $y$  con respecto al sistema dado por  $\pi\mathbf{b}$  y las derivadas de  $\pi\mathbf{b}$  y  $\pi\mathbf{c}$  en el punto  $\pi\mathbf{b}_0$ .

Es más, sean

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_{x.i.x y.j.y} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_{x.i.x y.j.y}$$

derivadas parciales de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  de orden  $i + j = k - 1$ . Entonces la hipótesis de inducción implica

$$\bar{\mathbf{p}}(\pi\mathbf{b}(t)) = \bar{\mathbf{q}}(\pi\mathbf{b}(t)) \quad .$$

Derivando esta expresión con respecto a  $t$  en  $t = t_0$

$$\bar{\mathbf{p}}_x(\mathbf{o}) = \bar{\mathbf{q}}_x(\mathbf{o}) \quad .$$

Entonces sólo queda por verificar

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} [\mathbf{p}(\mathbf{o}) - \mathbf{q}(\mathbf{o})] = \mathbf{o} \quad .$$

Como la curva  $\mathbf{c}(s)$  es  $k$  veces continuamente diferenciable obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{o} &= \frac{\partial^k}{\partial s^k} [\mathbf{c}(s) - \mathbf{c}(s)]_{s=s_0} \\ &= \frac{\partial^k}{\partial s^k} [\mathbf{p}(\pi\mathbf{c}(s)) - \mathbf{q}(\pi\mathbf{c}(s))]_{s=s_0} \quad . \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena podemos expresar esta derivada en términos de la derivada de  $\pi\mathbf{c}$  y las parciales de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$ . Entonces como  $\pi\mathbf{c}'(s_0) = (0, 1)$  y se tiene

$$\mathbf{o} = \frac{\partial^k}{\partial y^k} [\mathbf{p}(\mathbf{x}) - \mathbf{q}(\mathbf{x})]_{x=0} \quad ,$$

lo cual concluye la prueba.  $\diamond$

**Observación 1:** Si la curva  $\mathbf{b}(t)$  no es diferenciable en  $t = t_0$ , pero el cociente  $[\mathbf{b}(t_n) - \mathbf{b}(t_0)]/(t_n - t_0)$  converge a dos direcciones diferentes, por lo menos para dos secuencias  $t_n \rightarrow t_0$ , entonces  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una conexión  $G^k$  en  $\mathbf{b}(t_0)$  si tienen una conexión  $G^{k-1}$  a lo largo de  $\mathbf{b}(t)$ .

### 14.3 Conexiones $G^k$ usando la regla de la cadena

Sean  $\mathbf{p}(u, v)$  y  $\mathbf{q}(u, v)$  dos superficies regulares tales que  $\mathbf{p}(0, y) = \mathbf{q}(0, y)$ . En 14.1 vimos que se tiene una conexión  $G^k$  a lo largo de  $x = u = 0$  si para cada  $u$  existe una reparametrización local  $\mathbf{u}(x, y)$  para  $\mathbf{q}$  tal que las derivadas de  $\mathbf{p}(x, y)$  y  $\mathbf{q}(\mathbf{u}(x, y))$  son iguales hasta orden  $k$ .

De 14.2 se desprende que si todas las parciales de  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q} \circ \mathbf{u}$  con respecto a  $x$  son iguales, entonces todas las derivadas cruzadas también son iguales. Por lo tanto  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  tienen una conexión  $G^k$  a lo largo de  $x = u = 0$  si y sólo si existe una aplicación regular  $C^k$   $\mathbf{u}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$  tal que para todo  $(0, y)$  se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{p}_x &= \mathbf{q}_u u_x + \mathbf{q}_v v_x \\ \mathbf{p}_{xx} &= \mathbf{q}_{uu} u_x^2 + 2\mathbf{q}_{uv} u_x v_x + \mathbf{q}_{vv} v_x^2 + \mathbf{q}_u u_{xx} + \mathbf{q}_v v_{xx} \\ &\text{etc. ,} \end{aligned}$$

donde  $u_x > 0$ . Nótese que  $\mathbf{u}(0, y) = (0, y)$ .

En particular, si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  son racionales, estas condiciones  $G^k$  implican que  $u_x(0, y), v_x(0, y), u_{xx}(0, y), \dots$  son también funciones racionales.

Las condiciones de conexión  $G^k$  se simplifican si  $\mathbf{u}$  es lineal en  $x$ . En este caso  $\mathbf{u}_{x.s.x}$  es cero para  $s = 2, \dots, k$  y se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{q} , \\ \mathbf{p}_x &= \mathbf{q}_u \alpha + \mathbf{q}_v \beta , \\ \mathbf{p}_{xx} &= \mathbf{q}_{uu} \alpha^2 + 2\mathbf{q}_{uv} \alpha \beta + \mathbf{q}_{vv} \beta^2 , \\ &\vdots \\ (1) \quad \mathbf{p}_{x.k.x} &= \sum_{i+j=k} \binom{k}{i} \mathbf{q}_{u.^i.uv.^j.v} \alpha^i \beta^j , \end{aligned}$$

donde  $\alpha = \alpha(y) = u_x(0, y)$  y  $\beta = \beta(y) = v_x(0, y)$ .

Note que el lado derecho de la igualdad representa también las derivadas de  $\mathbf{q}$  en la dirección  $[\alpha \beta]^t = \mathbf{u}_x$ .

**Observación 2:** Una derivada parcial cruzada  $\mathbf{p}_{x.^i.xy.^j.y}$  se puede expresar en términos de las parciales cruzadas de  $\mathbf{q}$  hasta orden total  $i + j$  y de las

parciales cruzadas de  $\mathbf{u}(x, y)$  hasta orden  $(i, j)$ . Por ejemplo

$$\mathbf{p}_{xy} = \mathbf{q}_{uu}u_xu_y + \mathbf{q}_{uv}(u_xv_y + u_yv_x) + \mathbf{q}_{vv}v_xv_y + \mathbf{q}_u u_{xy} + \mathbf{q}_v v_{xy} .$$

**Observación 3:** En particular, si  $\mathbf{u}(x, y)$  es una dilatación en  $x$  e  $y$ , es decir,  $\mathbf{u}(x, y) = [c_1x \ c_2y]^t$ , entonces todas las parciales cruzadas  $\mathbf{p}_{x.i,xy.i,y}$  se pueden expresar en términos de las parciales cruzadas de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{u}$  hasta de orden  $(i, j)$ .

## 14.4 Superficies $G^k$ de topología arbitraria

En esta sección consideramos la técnica de diseño a “mano alzada”. Nuestra meta es construir superficies que interpolen un conjunto vértices  $\mathbf{c}_i$  con contactos prescritos en esos puntos  $\mathbf{c}_i$  por superficies polinómicas  $\mathbf{s}_i$ . Consideramos que los  $\mathbf{c}_i$  están organizados en una malla de cuadriláteros.

La superficie resultante es  $G^k$  continua y consiste de parches producto tensorial, cada uno definido sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Cada parche correponderá unívocamente a un cuadrilátero.

Por simplicidad suponemos que la malla es orientable y no tiene frontera.

Un vértice se denomina **regular** si tiene exactamente cuatro vecinos e **irregular** si esta condición no se cumple. Supondremos además que los vértices irregulares están aislados, esto significa que los vecinos de cada vértice aislado son regulares, vea la Figura 14.4.

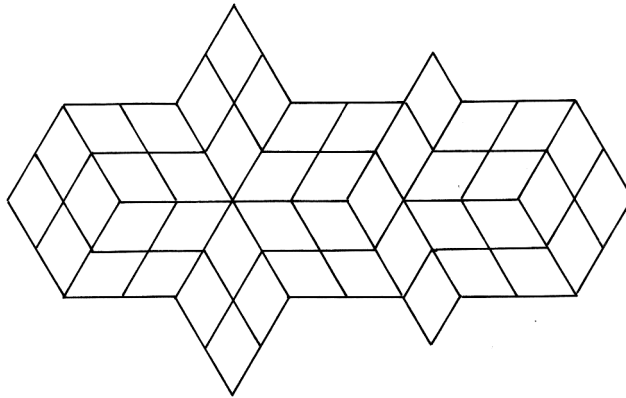


Figura 14.4: Malla con vértices irregulares aislados.

Los pasos de la construcción son los siguientes:

1. Se reparametrizan las superficies  $\mathbf{s}_i$  por rotaciones del dominio.



2. Para cualesquiera dos superficies vecinas,  $\mathbf{s}_i$  y  $\mathbf{s}_j$ , calculamos un interpolador de Hermite  $\mathbf{b}_{ij}$ .
3. Para cada cuadrilátero  $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\mathbf{c}_k\mathbf{c}_l$  de la malla construimos un parche  $\mathbf{p}$  que tiene contacto  $G^k$  con  $\mathbf{b}_{ij}$ ,  $\mathbf{b}_{jk}$ ,  $\mathbf{b}_{kl}$  y  $\mathbf{b}_{li}$  a lo largo de sus cuatro curvas frontera. Si todos los vértices son regulares  $\mathbf{p}$  tiene bi-grado  $2k + 1$  y si no, entonces el bigrado es  $2k^2 + 2k + 1$ .

A continuación daremos la descripción detallada de cada uno de estos pasos.

1. Para cada  $i$ , suponemos que  $\mathbf{s}_i(0,0) = \mathbf{c}_i$  y denotamos por,  $\nu$  el número de segmentos que confluyen en  $\mathbf{c}_i$ . Rotamos la superficie  $\mathbf{s}_i$  por  $\varphi_i = 360^\circ/\nu$ . Estos producen los polinomios

$$\mathbf{s}_i^k(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_i(R^k \mathbf{x}) ,$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} .$$

Enumeramos los vecinos de  $\mathbf{c}_i$  en el sentido contrario de las agujas del reloj. Si  $\mathbf{c}_j$  es el  $k$ -ésimo vecino, entonces asociamos el polinomio escalado

$$\mathbf{s}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}_i^k \left( x, \frac{y}{\tan(\varphi_j/2)} \right)$$

con la arista dirigida  $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j$ . Esto se ilustra en la Figura 14.5.

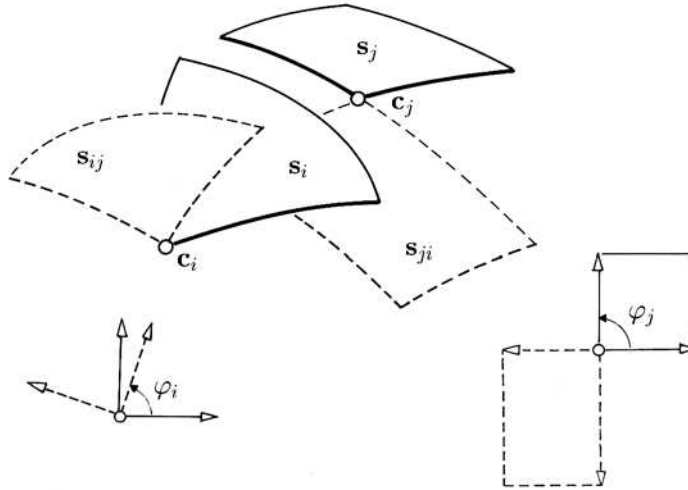


Figura 14.5: Reparametrización del dominio por rotación.

2. Para cada arista dirigida  $\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j$  se determina un polinomio  $\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x})$  por interpolación de Hermite de  $\mathbf{s}_{ij}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{s}_{ji}(\mathbf{x})$ . Si  $\mathbf{c}_i$  es regular entonces  $\mathbf{b}_{ij}$  se construye de manera que hasta orden  $(k, k)$  sus derivadas en  $\mathbf{x} = (0, 0)$  coincidan con las de  $\mathbf{s}_{ij}$ . Esto se abrevia por

$$\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}=\mathbf{0}}{\overset{k,k}{\equiv}} \mathbf{s}_{ij}(\mathbf{x}) .$$

Si  $\mathbf{c}_i$  es irregular, entonces se requiere  $C^{2k}$ -contacto,

$$\mathbf{b}_{ij}(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}=\mathbf{0}}{\overset{2k}{\equiv}} \mathbf{s}_{ij}(\mathbf{x})$$

y análogamente en  $\mathbf{x} = (1, 0)$ , se requiere contacto  $C^{k,k}$  o contacto,  $C^{2k}$  de  $\mathbf{b}_{ij}(x, y)$  y  $\mathbf{s}_{ji}(1-x, -y)$ , respectivamente. Esto se ilustra en la Figura 14.6.

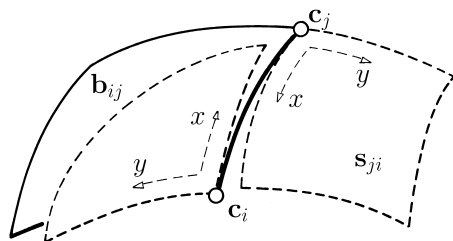


Figura 14.6: Un polinomio frontera.

Los  $\mathbf{b}_{ij}$  se determinan de manera tal que sus derivadas transversales

$$\frac{\partial^r}{\partial y^r} \mathbf{b}_{ij}(x, 0) , \quad r = 0, \dots, k ,$$

tengan grado minimal. Por lo tanto si  $\mathbf{c}_i$  y  $\mathbf{c}_j$  son regulares, entonces  $\mathbf{b}_{ij}$  tiene grado  $2k+1$  y si  $\mathbf{c}_i$  o  $\mathbf{c}_j$  es irregular, entonces  $\frac{\partial^r}{\partial y^r} \mathbf{b}_{ij}$  tiene grado  $3k+1-r$ . Los puntos de Bézier de  $\mathbf{b}_{ij}$  se presentan esquemáticamente en la Figura 14.7 para  $k = 2$ , cuando  $\mathbf{c}_i$  es irregular. Los puntos determinados por los  $C^{2k}$ -contactos en  $\mathbf{c}_i$  se señalan con triángulos  $\triangle$ , los puntos determinados por los contactos  $C^{k,k}$  en  $\mathbf{c}_j$  se denotan con cuadrados  $\square$  y los puntos determinados por la condición de minimalidad se señalan con círculos  $\circ$ . Los puntos etiquetados por “.” no son de interés.

Análogamente se obtiene un segundo polinomio  $\mathbf{b}_{ji}$  para la arista (orientada al revés)  $\mathbf{c}_j\mathbf{c}_i$ . Por construcción ambos polinomios tienen contacto simple  $C^k$  a lo largo de  $y = 0$ ,

$$\mathbf{b}_{ij}(x, y) \underset{y=0}{\overset{k}{\equiv}} \mathbf{b}_{ji}(1-x, -y) .$$

Además, también por construcción, los polinomios  $\mathbf{b}_{ij}$  y  $\mathbf{b}_{ik}$  asociados al vértice  $\mathbf{c}_i$  tienen contacto  $G^{k,k}$  o  $G^{2k}$  en  $\mathbf{c}_i$ .

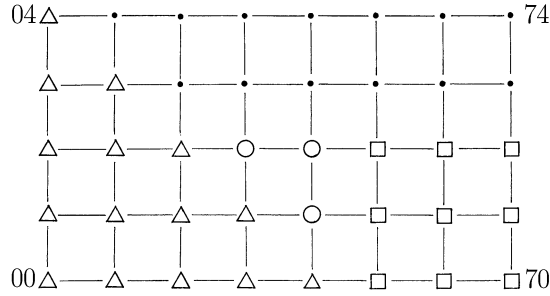


Figura 14.7: Esquema de los puntos de Bézier de un polinomio frontera.

3. Para cualquier cuadrilátero de la malla se construye un parche  $\mathbf{p}(u, v)$  de la superficie final  $G^k$  a partir de los cuatro polinomios asociados a sus aristas. Para cada  $\mathbf{c}_i \mathbf{c}_j$  usamos la reparametrización

$$\mathbf{x}_{ij}(u, v) = \sum \mathbf{b}_{rs} B_{rs}^{2k, 2k}(u, v)$$

de bigrado  $2k$ . La malla de Bézier de la reparametrización  $\mathbf{x}_{ij}$  se muestra en la Figura 14.8 para  $k = 2$  y  $\varphi = \varphi_i = 360^\circ/5$ .

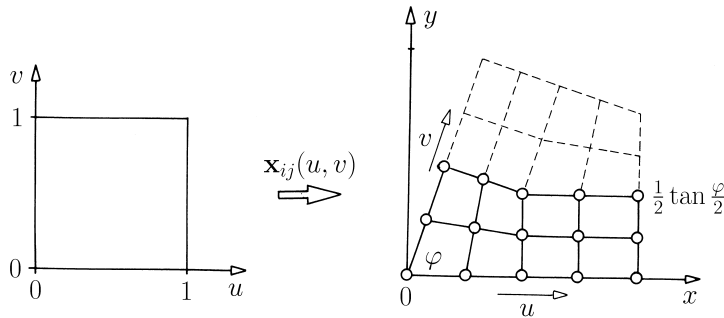


Figura 14.8: Reparametrización  $\mathbf{x}_{ij}$ .

En general, si  $\mathbf{c}_j$  es regular, los puntos de Bézier relevantes de  $\mathbf{x}_{ij}$  están dados por

$$\mathbf{b}_{rs} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{bmatrix} B_{01}^{11}(u, v) + \begin{bmatrix} 1 \\ \tan \frac{\varphi_i}{2} \end{bmatrix} B_{11}^{11}(u, v) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} B_{00}^{11}(u, v) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} B_{10}^{11}(u, v)$$

donde  $(u, v) = \frac{1}{2k}(r, s)$  si  $r, s \leq k$  y por

$$\mathbf{b}_{rs} = \frac{1}{2k} \begin{bmatrix} r \\ s \sin \frac{\varphi_i}{2} \end{bmatrix} \quad \text{si } s \leq k \leq r .$$

Los puntos de Bézier restantes  $\mathbf{b}_{rs}$ , para  $r > k$  pueden escogerse en forma arbitraria, lo cual se indica por líneas punteadas en la Figura 14.8. Si  $\mathbf{c}_j$  es irregular,  $\mathbf{x}_{ij}$  se obtiene a partir de  $\mathbf{x}_{ji}$  por medio de la transformación

$$\mathbf{x}_{ij}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{ji}(1 - u, v) .$$

Note que la aplicación  $\mathbf{x}_{ij}$  es la identidad si  $\mathbf{c}_i$  y  $\mathbf{c}_j$  son regulares.

Sean  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3, \mathbf{c}_4$  los vértices de un cuadrilátero (ordenados en el sentido contrario a las agujas de un reloj). Entonces el parche  $\mathbf{p}(u, v)$  correspondiente de la superficie final  $G^k$  se construye de manera que

$$(2) \quad \mathbf{p}(u, v) \begin{cases} \stackrel{k}{v=0} \mathbf{b}_{12} \circ \mathbf{x}_{12}(u, v) \\ \stackrel{k}{u=1} \mathbf{b}_{23} \circ \mathbf{x}_{23}(v, 1 - u) \\ \stackrel{k}{v=1} \mathbf{b}_{34} \circ \mathbf{x}_{34}(1 - u, 1 - v) \\ \stackrel{k}{u=0} \mathbf{b}_{41} \circ \mathbf{x}_{41}(1 - v, u) \end{cases}$$

Note que, por construcción, las derivadas parciales de  $\mathbf{p}$  hasta orden  $(k, k)$  en los vértices están bien definidas por estas condiciones. Además recuerde que la  $r$ -ésima derivada transversal a la frontera de un polinomio  $\mathbf{b}_{ij}$  es de grado menor o igual que  $\leq 3k + 1 - r$ . Por lo tanto se desprende de (1) en 14.3 que la  $r$ -ésima derivada transversal a la curva frontera de  $\mathbf{p}(u, v)$  es de grado menor o igual que  $2kr + 3k + 1 - r \leq 2k^2 + 2k + 1$ . A lo largo de una arista entre dos vértices regulares el grado es más bajo, de hecho menor o igual que  $\leq 2k + 1$ .

Si todos los vértices son regulares, las condiciones (2) definen un único parche  $\mathbf{p}$  de bigrado  $2k + 1$ . Si uno o dos de los vértices son irregulares entonces  $\mathbf{p}$  ha de tener bigrado  $2k^2 + 2k + 1$  para satisfacer todas las condiciones de frontera (2). Sin embargo en este caso, las condiciones (2) no determinan  $\mathbf{p}$  completamente: sus  $2k^2 \times 2k^2$  puntos de Bézier interiores pueden ser escogidos arbitrariamente.

## 14.5 Parches suaves de $n$ lados

La construcción en 14.4 produce una superficie de bigrado  $2k^2 + 2k + 1$ . Aún para  $k = 2$ , el bigrado resultante: 13, podría ser demasiado alto en aplicaciones prácticas. Concretamente, los costos de almacenamiento son altos y los procesos de evaluación, largos y susceptibles a errores de redondeo.

Para evitar lo anterior [Prautzsch '97] introdujo un método general para construir superficies  $G^k$  regulares de bigrado  $2(k+1)$ . A continuación presentamos las ideas fundamentales de este método.

Recordemos de 14.4 y 13.4 que la dificultad fundamental para construir una superficie suave con parches rectangulares (o triangulares) consiste en la unión de tres o más de cuatro parches con un vértice común. Por lo tanto es de interés estudiar parches suaves con  $n$  curvas frontera, que puedan ser ajustados con conexiones simples  $C^k$  en huecos con  $n$  lados. Para construir tales superficies se puede proceder de la manera siguiente.

**Primero**, construimos una reparametrización del plano  $x, y$  con parches planos  $\mathbf{x}_i(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in [0, 1]^2$ ,  $i = 1, \dots, 4n$ , de bigrado  $k+1$  de manera que formen un polígono curvilíneo, tal como se ilustra en la Figura 14.9 para  $n = 5$ . Los parches interiores  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_1$  tienen conexión  $C^0$ ,

$$\mathbf{x}_i(0, u) = \mathbf{x}_{i+1}(u, 0) ,$$

mientras que todas las otras conexiones son conexiones simples  $C^k$ , es decir, para todo  $u, v$  e  $i = 1, \dots, n$  se satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{x}_i(u, 1) \stackrel{k}{=} \mathbf{x}_{i+3n}(u, 0) ,$$

$$\mathbf{x}_i(1, v) \stackrel{k}{=} \mathbf{x}_{i+2n}(0, v) ,$$

$$\mathbf{x}_{i+3n}(1, v) \stackrel{k}{=} \mathbf{x}_{i+n}(0, v) ,$$

$$\mathbf{x}_{i+n}(u, 0) \stackrel{k}{=} \mathbf{x}_{i+2n}(u, 1) ,$$

$$\mathbf{x}_{1+2n}(u, 0) \stackrel{k}{=} \mathbf{x}_{4n}(0, u)$$

y para  $i = 2, \dots, n$

$$\mathbf{x}_{i+2n}(u, 0) \stackrel{k}{=} \mathbf{x}_{i+3n}(0, u) .$$

Note que todas las conexiones son  $G^\infty$  (es decir,  $G^k$ , para cualquier  $k$ ) pues la superficie yace en el plano. En 14.6 describiremos los parches  $\mathbf{x}_i$ , explícitamente.

**Segundo**, consideramos cualquier polinomio  $\mathbf{p}(x, y)$  en  $\mathbb{R}^3$  y lo reparametrizamos a través de las aplicaciones  $\mathbf{x}_i$ . Entonces obtenemos  $4n$  parches

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{u}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_i(\mathbf{u})) , \quad i = 1, \dots, 4n ,$$

conectados  $G^\infty$ . Es más, dos parches adyacentes  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_j$  con  $i \geq n$  o  $j \geq n$  tienen una conexión  $C^k$  simple.

La superficie con  $n$  lados que consiste de los parches  $\mathbf{p}_i$  se denomina **macro-parche** o suscitamente **p-parche**. El p-parche tiene muchos parámetros

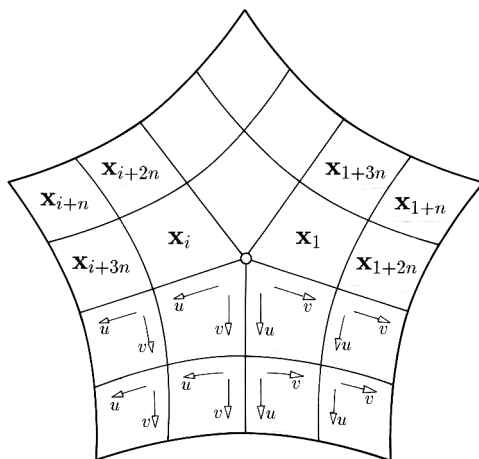


Figura 14.9: Un macroparche plano de  $n$  lados,  $n = 5$ .

libres, o sea que los parches  $\mathbf{p}_i$  pueden ser modificados preservando las conexiones  $C^k$  simples y las  $G^k$ -conexiones.

En particular, sea  $\mathbf{p}$  un polinomio cuadrático, entonces el  $\mathbf{p}$ -parche es de bigrado  $2k + 2$ . Sus puntos de Bézier se despliegan esquemáticamente en la Figura 14.10 para  $k = 1$  y  $n = 5$ . Los puntos de Bézier indicados con puntos sólidos determinan las conexiones  $G^k$  entre los  $n$  parches interiores y se denominan **fijos**.

Los puntos de Bézier etiquetados con cuadrados y aquellos sin marcas se denominan **libres**. Estos pueden ser modificados arbitrariamente. Los demás puntos de Bézier están etiquetados con círculos y son **dependientes**. Éstos se determinan a partir de la condición de que cualesquiera dos parches adyacentes  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{p}_j$  para  $j > n$ , tengan una conexión  $C^k$  simple .

Similarmente, tenemos puntos de Bézier fijos, libres y dependientes para cualesquiera  $k$  y  $n$ . En particular, se pueden escoger todos los puntos de Bézier libres de manera que todas las  $n$  fronteras del  $\mathbf{p}$ -parche y también sus derivadas transversales hasta orden  $k$  (o  $k + 1$ ) sean polinómicas y no solamente polinómicas por trozos. En consecuencia dados cualesquiera parches polinómicos  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}$  de bigrado menor o igual  $2k + 2$  con  $C^k$  conexiones, así como se ilustra en la Figura 14.11, existen  $\mathbf{p}$ -parches de  $n$  lados de bigrado  $2k + 2$  que se ajustan con conexiones  $C^k$  al hueco formado por  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{2n}$ .

También es posible escoger los puntos de Bézier de dos  $\mathbf{p}$ -parches de manera que tengan cuatro parches polinómicos en común. Por ejemplo, los puntos de Bézier indicados por cuadrados  $\square$  en la Figura 14.10 pueden escogerse como los puntos de Bézier fijos del segundo  $\mathbf{p}$ -parche.

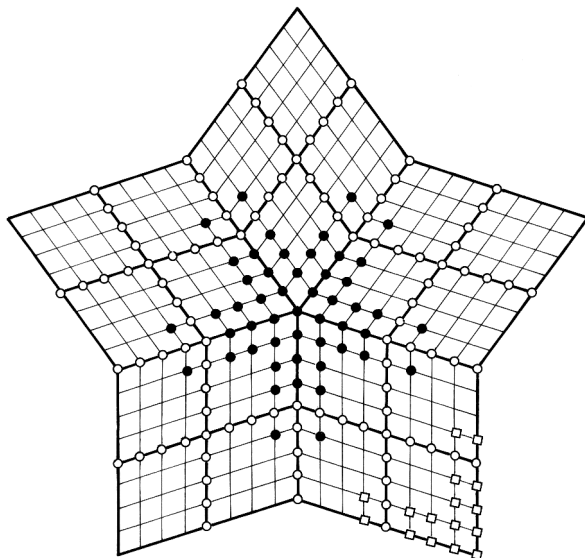


Figura 14.10: Puntos de Bézier de un macroparche de 5 lados.

Por lo tanto, si cada vértice irregular tiene sólo vecinos regulares, es posible interpolar cualquier malla de cuadriláteros por medio de parches polinómicos con conexiones  $G^k$  simples y generales.

Una cara de la malla de este interpolador corresponde a un parche de bigrado  $2k + 1$  si todos sus vértices son regulares, y corresponde a cuatro parches de bigrado  $2k + 2$ , en caso contrario. En vértices regulares, la superficie puede interpolar cualesquiera parciales cruzadas hasta orden  $(k, k)$  y en vértices extraordinarios hasta orden 2.

## 14.6 Parches multilaterales en el plano

En 14.5 consideramos p-parches planos que consisten de  $4n$  parches  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{4n}$  de bigrado  $k+1$  con conexiones simples  $C^0$  y  $C^k$ , lo cual se ilustra en la Figura 14.9. En esta sección estudiamos los p-parches planos explícitamente. Estos parches son regulares e inyectivos y no tienen superposición. Omitiremos los detalles técnicos de la prueba.

La Figura 14.12 muestra los puntos de control de la representación B-spline, de los parches exteriores  $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{4n}$  para  $k = 4$  y  $n = 5$ . Éstos se indican por círculos. El centro de la figura es un punto de control múltiple. Los círculos pequeños indican algunos de los puntos de control para el caso  $k = 3$

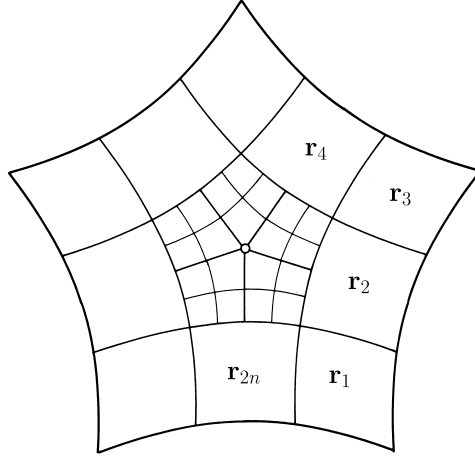


Figura 14.11: Construyendo un p-parche para un hueco.

y  $n = 5$ .

A continuación especificamos estos parches con mayor precisión. Cualesquiera cuatro parches de la frontera  $\mathbf{x}_{i+n}, \mathbf{x}_{i+3n}, \mathbf{x}_{i+1+2n}, \mathbf{x}_{i+1+n}$  forman una superficie B-spline producto tensorial

$$\mathbf{s}_i(u, v) = \sum_{r=3}^{k+1} \sum_{s=0}^{k+1} \mathbf{c}_{rs}^i N_i(u) N_j(v) \quad , \quad (u, v) \in [k-2, k+2] \times [k+1, k+2]$$

donde los  $N_i$  denotan los B-splines uniformes de grado  $k+1$  y nodos  $i, i+1, \dots, i+k+2$ . Note que las superficies  $\mathbf{s}_i$  se superponen en los parches de las esquinas  $\mathbf{x}_{i+n}$ .

Los puntos de control  $\mathbf{c}_{00}^i, \dots, \mathbf{c}_{k-2, k-2}^i$  son todos cero y para  $k$  par, los puntos  $\mathbf{c}_{rs}$ , tales que  $r$  y  $s > \frac{k}{2} - 1$ , están dados por

$$\mathbf{c}_{rs}^i = \left(r - \frac{k}{2} + 1\right) \begin{bmatrix} \cos \varphi_{i-1} \\ \sin \varphi_{i-1} \end{bmatrix} + \left(s - \frac{k}{2} + 1\right) \begin{bmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{bmatrix} \quad ,$$

con  $\varphi_i = i \cdot 360^\circ / n$ . Los demás puntos de control se definen por la relación

$$\mathbf{c}_{rs}^i = \mathbf{c}_{s, k-2-r}^{i+1} \quad , \quad -3 \leq r \leq \frac{k}{2} - 1 \quad \text{y} \quad \frac{k}{2} - 1 \leq s \leq k+1 \quad .$$

Los centros de los cuadriláteros de la malla de control son los puntos de control  $\mathbf{c}_{rs}^i$  para los  $\mathbf{x}_i$  de bigrado impar  $k$ .

Los  $n$  parches interiores  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  tienen contacto  $C^k$  con los parches exteriores  $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{4n}$ . Por lo tanto conocemos todos los puntos de Bézier con



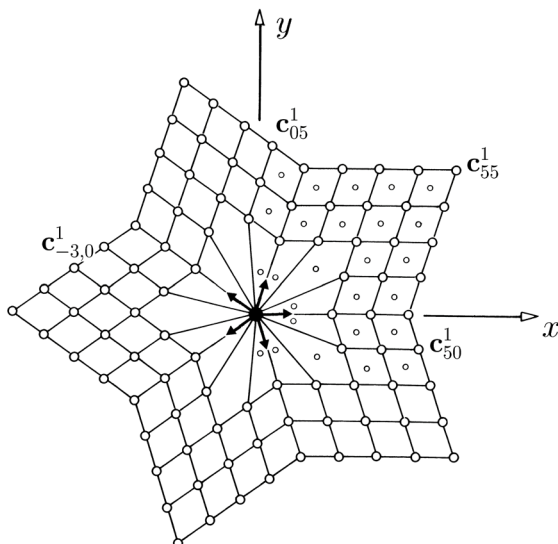


Figura 14.12: La malla de control para  $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{4n}$ .

la excepción de  $\mathbf{x}_{00}$ , el cual está asociado con el polinomio de Bernstein, producto tensorial  $B_0^{k+1}(u) \cdot B_0^{k+1}(v)$ . Por razones de simetría definimos  $\mathbf{x}_{00} = 0$ .

**Observación 4:** La escogencia de arriba de los  $\mathbf{x}_i$  no es la única posible. Por ejemplo, la aplicación característica del esquema del punto medio, vea 16.1 y 16.6, provee también buenos candidatos para los parches  $\mathbf{x}_{n+1}, \dots, \mathbf{x}_{4n}$  para  $k = 1$  y  $k = 2$ .

**Observación 5:** Los parches  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  tienen una singularidad en el origen si  $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{o}$  para todo  $i, j = 0, \dots, k - 1$ . Con esta reparametrización la construcción de 14.6 resulta en splines  $C^k$  parametrizados singularmente, véase [Reif '98].

## 14.7 Ejercicios

- 1 Calcule la derivada

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \mathbf{q}(\mathbf{u}(x, y))$$

en términos de las derivadas parciales de  $\mathbf{q}(u, v)$  y  $\mathbf{u}(x, y)$ .

- 2 En 14.4 se supone que cada parche de la superficie  $G^k$  que se construye tiene por lo menos dos vértices regulares en esquinas opuestas.

Modifique la construcción de manera que esta condición no sea necesaria. ¿Cuál es el grado de la superficie resultante?

- 3** Haga una construcción similar a la de 14.4 pero consistente de parches triangulares conectados  $G^k$ . ¿Cuál es el máximo grado de los parches?
- 4** Haga una construcción similar a la de 14.6, de un p-parche regular que consiste de parches polinómicos triangulares con conexiones  $G^k$ . ¿En este caso cuál sería el grado máximo de los parches?
- 5** Desarrolle una construcción de un macroparche multilateral plano consistente de parches triangulares con conexiones  $C^0$  o  $C^k$ . Trabaje análogamente a 14.6. Demuestre que el grado minimal de un tal macroparche es  $3k/2 + 1$ . Véase [Prautzsch & Reif '99].



# 15 Subdivisión estacionaria para mallas regulares

*15.1 Esquemas de producto tensorial — 15.2 Subdivisión estacionaria en general y máscaras — 15.3 Teoremas de convergencia — 15.4 Promedios crecientes — 15.5 Cálculos con esquemas de diferencias — 15.6 Cálculos con esquemas de promedios — 15.7 Subdivisión de mallas triangulares — 15.8 Box splines sobre mallas triangulares — 15.9 Subdivisión de mallas hexagonales — 15.10 Half-box splines sobre mallas triangulares — 15.11 Ejercicios*

En el esquema de subdivisión una malla de control regular se transforma en otra malla de control regular cuyos vértices son combinaciones afines de los puntos de control originales. Los pesos de estas combinaciones afines se pueden dar gráficamente por medio de máscaras o pueden ser representadas algebraicamente a través de un polinomio característico como en el caso de curvas.

En este capítulo discutimos esquemas de subdivisión especiales y generales sobre mallas triangulares y hexagonales e introducimos box splines y half-box splines sobre mallas triangulares regulares.

## 15.1 Esquemas de producto tensorial

Cualesquiera dos esquemas de subdivisión para curvas definen un esquema de subdivisión para productos tensoriales, definido sobre una malla rectangular.

Tal como fue presentado en 8.6 y 8.8, sean  $A = [\alpha_{j-2i}]$  y  $B = [\beta_{j-2i}]$

dos esquemas estacionarios para curvas, y sean  $\alpha(x) = \sum \alpha_i x^i$  y  $\beta(y) = \sum \beta_j y^j$ , sus polinomios característicos, respectivamente. Sean  $\mathbf{c}_{ij}$ ,  $i, j \in \mathbf{Z}$  los vértices de una malla rectangular y supongamos, por simplicidad que la matriz  $C = [\mathbf{c}_{ij}]$  es bi-infinita en filas y columnas. Esto también cubre el caso de mallas finitas pues siempre se pueden agregar puntos de control iguales a cero.

Diremos que la secuencia de mallas de control

$$C_m = (A^t)^m C B^m$$

obtenida a partir de  $C$  subdividiendo  $m$  veces, todas las columnas usando  $A$  y todas las filas usando  $B$ , resulta de la aplicación del **esquema de producto tensorial** dado por  $A$  y  $B$ .

Más precisamente, cualquier vértice  $\mathbf{c}_{ij}^{m+1}$  de la malla  $C_{m+1}$  se calcula a partir de los vértices  $\mathbf{c}_{kl}^m$  de  $C_m$  a través de la **ecuación de refinamiento**

$$\mathbf{c}_{ij}^{m+1} = \sum_k \sum_l \mathbf{c}_{kl}^m \alpha_{i-2k} \beta_{j-2l} .$$

Usando los multi-índices  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2$  y la abreviación  $\gamma_{kl} = \alpha_k \beta_l$  la **ecuación de refinamiento** toma una forma similar a la de 8.8 para los esquemas de curvas, concretamente

$$\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^{m+1} = \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{c}_{\mathbf{j}}^m \gamma_{\mathbf{i} - 2\mathbf{j}} .$$

Si  $A$  y  $B$  coinciden en la matriz de subdivisión del algoritmo de Lane-Riesenfeld  $S_n = DM^n$ , para splines uniformes de grado  $n$ , (vea 8.4), entonces el esquema de producto tensorial que se le asocia también se puede describir por medio de los siguientes dos operadores.

El **operador de duplicación**  $\mathcal{D}$  cuadruplica todos los puntos de control de una malla de control  $C$ ,

$$\mathcal{D}(C) = D^t C D = [\mathbf{c}_{[\mathbf{i}/2]}] .$$

Sean  $\mathbf{e}_1 = [1\ 0]$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0\ 1]$  y  $\mathbf{e} = [1\ 1]$ . Entonces el **operador de promediación**  $\mathcal{A}$  aplica una malla  $C$  en la malla

$$\mathcal{A}(C) = M^t C M = \frac{1}{4} [\mathbf{c}_{\mathbf{i}} + \mathbf{c}_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_1} + \mathbf{c}_{\mathbf{i}-\mathbf{e}_2} + \mathbf{c}_{\mathbf{i}-\mathbf{e}}]$$

la cual conecta los centroides de cualesquiera dos cuadriláteros de  $C$  que tengan una arista común.

Entonces el algoritmo de Lane-Riesenfeld para splines producto tensorial de bigrado  $n$  está dado por el operador  $\mathcal{M}_n = \mathcal{A}^n \mathcal{D}$ . En particular,  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{A} \mathcal{D}$  representa el operador de refinamiento que aplica una malla  $C$  en una malla  $\mathcal{M}_1(C)$  más fina, que conecta los puntos medios de las aristas de  $C$  con sus extremos y los centroides de dos cuadriláteros adyacentes de  $C$ . En la Figura 15.1 la malla  $C$  se indica con trazos suaves, la malla  $\mathcal{M}_1(C)$  con trazos suaves y trazos punteados y la malla  $\mathcal{M}_2(C)$  con trazos sólidos.

**Observación 1:** De 8.2 se desprende que para cualquier  $m$  la secuencia de mallas de control

$$C^m = [\mathbf{c}_{ij}^m] = \mathcal{M}_n^m(C)$$

representa la misma superficie spline

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i,j} \mathbf{c}_{ij} N_i^n(u) N_j^n(v) ,$$

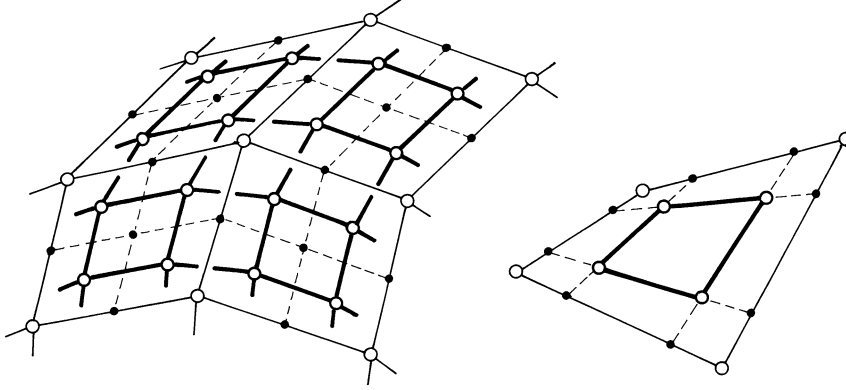


Figura 15.1: Refinación y promediación de una malla.

donde  $N_i^n$  denota el B-spline uniforme de grado  $n$  sobre los nodos  $i, i + 1, \dots, i + n + 1$ . Aplicando dos veces el resultado sobre convergencia de 6.3 se obtiene la siguiente estimación

$$\sup_{i,j} \|\mathbf{s}((i,j)/2^m) - \mathbf{c}_{ij}^m\| = O(1/4^m)$$

bajo la condición que las segundas derivadas de  $\mathbf{s}$  están acotadas en  $\mathbb{R}^2$ .

## 15.2 Subdivisión estacionaria en general y máscaras

Cualquier ecuación de refinamiento

$$\mathbf{c}_i^{m+1} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{c}_k^m \gamma_{i-2\mathbf{k}}$$

con un número finito de coeficientes  $\gamma_i$  representa un **esquema general de subdivisión**. Si los  $\gamma_{ij}$  son productos de la forma  $\alpha_i \beta_j$ , entonces se tiene el esquema de producto tensorial, presentado en 15.1.

En la ecuación de refinamiento se presentan cuatro tipos de combinaciones diferentes. Los índices  $\mathbf{k}$  de los pesos  $\gamma_{\mathbf{k}}$  usados en el cálculo del punto  $\mathbf{c}_i^{m+1}$  forman el conjunto  $\mathbf{i} + 2\mathbb{Z}^2$  el cual es uno de los siguientes

$$\mathbb{Z}^2, \mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}^2, \mathbf{e}_2 + \mathbb{Z}^2, \mathbf{e} + \mathbb{Z}^2 .$$

Las cuatro matrices (finitas)  $[\gamma_{-2\mathbf{k}}], [\gamma_{\mathbf{e}_1-2\mathbf{k}}], [\gamma_{\mathbf{e}_2-2\mathbf{k}}]$  y  $[\gamma_{\mathbf{e}-2\mathbf{k}}]$  se denominan **máscaras**. Las máscaras también caracterizan el esquema de subdivisión.

**Observación 2:** Una condición necesaria para la convergencia de un esquema de subdivisión es que cada máscara defina una combinación afín, (vea

15.3). Esto significa que los pesos de cada máscara deben sumar uno. Sin embargo, para evitar fracciones es común trabajar con algún múltiplo. La máscara siempre se puede recuperar dividiendo por la suma de los pesos. En lo que sigue usaremos esta convención.

**Observación 3:** Las cuatro máscaras del operador  $\mathcal{M}_1$  definido en 15.1, son

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ellas se representan gráficamente del lado izquierdo de la Figura 15.2. El lado derecho de esta figura muestra las cuatro máscaras

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} .$$

del operador  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{A}\mathcal{M}_\infty$  para splines bi-cuadráticos.

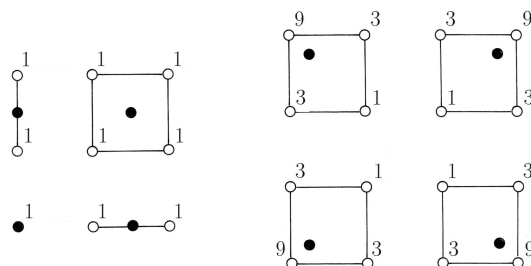


Figura 15.2: Las cuatro máscaras del algoritmo de Lane-Riesenfeld  $\mathcal{M}_1$  (izquierda) y  $\mathcal{M}_2$  (derecha).

**Observación 4:** Note que el operador de refinamiento  $\mathcal{M}_1$  se describe con cuatro máscaras, mientras que el operador de promediación  $\mathcal{A}$  es caracterizado por una sola máscara. Las Figuras 15.3 y 15.4 ilustran las máscaras de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}^2$ .

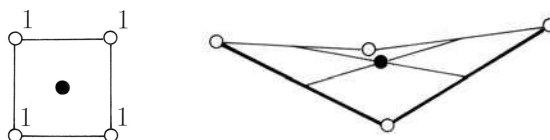


Figura 15.3: La máscara del operador de promediación  $\mathcal{A}$  (izquierda) y su acción (derecha).

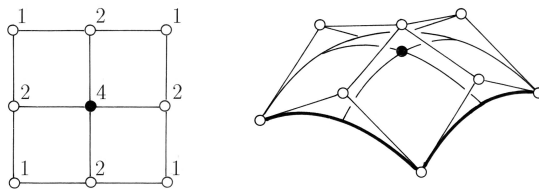


Figura 15.4: La máscara del operador  $\mathcal{A}^2$  (izquierda) y su acción (derecha).

### 15.3 Teoremas de convergencia

Una secuencia de mallas de control  $C_m = [\mathbf{c}_i^m]$  se obtiene en el esquema de subdivisión estacionaria a partir de una secuencia finita  $\gamma_i$ :

$$\mathbf{c}_i^{m+1} = \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{c}_j^m \gamma_{i-2\mathbf{j}} .$$

Decimos que la secuencia  $C_m$  converge uniformemente a una función  $\mathbf{c}(x, y)$  si el máximo de las distancias

$$\sup_{\mathbf{i}} \|\mathbf{c}_i^m - \mathbf{c}(\mathbf{i}/2^m)\|$$

converge a cero, cuando  $m$  tiende a infinito.

*Si la función límite  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  es continua y diferente de cero, entonces los pesos  $\gamma_{i-2j}$ ,  $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}^2$ , de cada máscara, suman uno.*

Para la prueba, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\mathbf{c}(\mathbf{o}) \neq \mathbf{o}$ . Entonces, para todo  $\mathbf{i}$ , los puntos

$$\mathbf{c}_i^m = \mathbf{c}(\mathbf{i}/2^m) + (\mathbf{c}_i^m - \mathbf{c}(\mathbf{i}/2^m))$$

convergen a  $\mathbf{c}(\mathbf{o})$  cuando  $m$  tiende a infinito. En consecuencia, la suma finita

$$\mathbf{c}_i^m = \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{c}_j^{m-1} \gamma_{i-2\mathbf{j}}$$

converge a

$$\mathbf{c}(\mathbf{o}) = \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{c}(\mathbf{o}) \gamma_{i-2\mathbf{j}} ,$$

lo cual concluye la prueba.  $\diamond$

La convergencia de una secuencia de mallas de control  $C_m$ , depende de dos secuencias de polígonos de diferencias

$$\nabla_k C_m = [\mathbf{c}_i^m - \mathbf{c}_{i-\mathbf{e}_k}^m] , \quad k = 1, 2 .$$

Concretamente, se tiene el siguiente hecho:



*Una secuencia  $C_m$  obtenida por subdivisión estacionaria converge uniformemente a una función uniformemente continua  $\mathbf{c}(x, y)$  si y sólo si los polígonos de diferencias  $\nabla_1 C_m$  y  $\nabla_2 C_m$  convergen uniformemente a cero.*

Obviamente, si  $C_m$  converge a una función continua entonces las diferencias tienden a cero. Para simplificar la prueba del recíproco supongamos que el máximo de las diferencias

$$\delta_m = \max_{k=1,2} \sup_{\mathbf{i}} \|\nabla_k \mathbf{c}_i^m\| ,$$

converge a cero. Sea además

$$\mathbf{c}^m(x, y) = \sum_{i,j} \mathbf{c}_{ij}^m N_i(2^m x) N_j(2^m y)$$

un interpolador lineal por trozos de la malla de control  $C_m$ , donde  $N_i(x)$  es el B-spline lineal por trozos sobre los nodos  $i-1, i, i+1$ . Entonces  $\mathbf{c}^m(\mathbf{i}/2^m) = \mathbf{c}_i^m$ .

Como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{c}_{2\mathbf{j}}^{m+1} - \mathbf{c}_{\mathbf{j}}^m\| &\leq \sum_{\mathbf{k}} \|\mathbf{c}_{\mathbf{k}}^m - \mathbf{c}_{\mathbf{j}}^m\| \cdot |\gamma_{2\mathbf{j}-2\mathbf{k}}| \\ &\leq \delta_m \gamma , \end{aligned}$$

donde  $\gamma$  es un múltiplo de  $\sum_{\mathbf{i}} |\gamma_{\mathbf{i}}|$ , que depende del tamaño de la máscara  $[\gamma_{2k}]$ . Por lo tanto para  $\mathbf{i} \in 2\mathbf{j} + \{0, 1\}^2$  obtenemos

$$\|\mathbf{c}_i^{m+1} - \mathbf{c}_{2\mathbf{j}}^{m+1} + \mathbf{c}_{2\mathbf{j}}^{m+1} - \mathbf{c}^m(\mathbf{j}/2^m) + \mathbf{c}^m(\mathbf{j}/2^m) - \mathbf{c}^m(\mathbf{i}/2^{m+1})\| \leq 2\delta_{m+1} + \delta_m \gamma + \delta_m .$$

Esto implica

$$\sup \|\mathbf{c}^{m+1}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}^m(\mathbf{x})\| \leq 2\delta_{m+1} + (\gamma + 1)\delta_m .$$

Por lo tanto los splines lineales  $\mathbf{c}^m(\mathbf{x})$  y sus mallas  $C_m$  convergen uniformemente a funciones uniformemente continuas  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ .  $\diamond$

Es más, si los polígonos  $C_m$  y los polígonos de diferencias divididas  $2^m \nabla_{\mathbf{v}} C_m = 2^m [\mathbf{c}_i^m - \mathbf{c}_{i-\mathbf{v}}^m]$  convergen uniformemente a funciones uniformemente continuas  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ , respectivamente, donde  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^2$ , entonces

$\mathbf{d}(\mathbf{x})$  es la derivada direccional de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  respecto a  $\mathbf{v}$ .

Para la prueba, sea  $\mathbf{u} \in \mathbf{Z}^2$  tal que  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  sean linealmente independientes. Claramente, las mallas de control

$$[\mathbf{c}_{ij}^m] = [\mathbf{c}_{i\mathbf{u}+j\mathbf{v}}^m]$$

convergen a  $\mathbf{c}(x\mathbf{u} + y\mathbf{v})$  y los polígonos de diferencias  $2^m \nabla_{\mathbf{v}}[\mathbf{c}_{ij}^m]$  convergen a  $\mathbf{d}(x\mathbf{u} + y\mathbf{v})$ . Entonces sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$ . Claramente los splines localmente constantes

$$\mathbf{d}_m(x, y) = \sum_{i,j} 2^m \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{c}_{ij}^m N_i^0(2^m x) N_j^0(2^m y)$$

y los splines

$$\mathbf{c}_m(x, y) = \int \mathbf{d}_m(x, y) dy = \sum_{i,j} \mathbf{c}_{ij}^m N_i^0(2^m x) N_j^1(2^m y)$$

convergen uniformemente a  $\mathbf{d}(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , respectivamente. Entonces  $\mathbf{c}(x, y) = \int \mathbf{d}(x, y) dy$ , lo cual concluye la prueba.  $\diamond$

## 15.4 Promedios crecientes

En 15.3 consideramos diferencias divididas de mallas de control. En esta sección estudiaremos promedios de mallas

*Si la secuencia de polígonos  $C_m = [\mathbf{c}_i]_{\mathbf{i}} \in \mathbf{Z}^2$  converge uniformemente a una función  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , con soporte compacto e integrable Riemann, entonces la sucesión de promedios*

$$\mathbf{a}_{ij}^m = \frac{1}{4^m} \sum_{k,l=0}^{2^m-1} \mathbf{c}_{i-k, j-l}^m$$

*converge uniformemente a la función uniformemente continua*

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \int_{[0,1]^2} \mathbf{c}(\mathbf{x} - \mathbf{t}) d\mathbf{t} .$$

Para la prueba, sea  $\Omega$  el intervalo  $(\mathbf{i} - [0, 1]^2)/2^m$  el cual depende de  $\mathbf{i}$  y  $m$ . Como  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  tiene soporte compacto y es integrable Riemann, las sumas

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^2} 4^{-m} (\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{c}(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \mathbf{c}(\mathbf{x}))$$

convergen a cero. Por lo tanto las sumas de Riemann

$$\mathbf{r}_{\mathbf{i}}^m = 4^{-m} \sum_{k,l=0}^{2^m-1} \mathbf{c}((i-k, j-l)/2^m)$$

convergen uniformemente a  $\mathbf{a}(\mathbf{i})$ , para todo  $\mathbf{i}$ , cuando  $m$  tiende a infinito.

Como  $\mathbf{c}_{\mathbf{i}}^m$  converge uniformemente a  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , los promedios  $\mathbf{a}_{\mathbf{i}}^m$  converge uniformemente a las sumas de Riemann  $\mathbf{r}_{\mathbf{i}}^m$  lo concluye la prueba.  $\diamond$

Similarmente se puede demostrar también el siguiente resultado:

Si la sucesión de polígonos  $C_m = [\mathbf{c}_i]_i \in \mathbb{Z}^2$  converge uniformemente sobre cualquier compacto a una función continua  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , entonces los **promedios crecientes sobre rectas**

$$\mathbf{b}_i^m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \mathbf{c}_{i-k\mathbf{v}}^m, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2,$$

convergen uniformemente sobre cualquier compacto a la función uniformemente continua

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{c}(\mathbf{x} - t\mathbf{v}) dt.$$

**Observación 5:** Los promedios  $\mathbf{a}_i^m$  son promedios sobre rectas de promedios sobre rectas. Concretamente,

$$\mathbf{a}_i^m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \mathbf{b}_{i-k\mathbf{e}_1}^m, \quad \mathbf{e}_1 = [1 \ 0],$$

donde

$$\mathbf{b}_i^m = \frac{1}{2^m} \sum_{l=0}^{2^m-1} \mathbf{c}_{i-l\mathbf{e}_2}^m, \quad \mathbf{e}_2 = [0 \ 1].$$

## 15.5 Cálculos con esquemas de diferencias

Un esquema de subdivisión estacionaria también puede representarse con funciones generatrices. Análogamente al método de la sección 8.8, multiplicamos la ecuación de refinamiento por el monomio  $\mathbf{x}^i = x^i y^j$  y sumamos sobre  $i$ . Esto resulta en

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{c}_i^{m+1} \mathbf{x}^i &= \sum_i \sum_j \mathbf{c}_j^m \gamma_{i-2j} \mathbf{x}^{2j} \mathbf{x}^{i-2j} \\ &= \sum_j \mathbf{c}_j^m \mathbf{x}^{2j} \sum_k \gamma_k \mathbf{x}^k, \end{aligned}$$

lo cual se puede abreviar como

$$\mathbf{c}^{m+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^m(\mathbf{x}^2) \gamma(\mathbf{x}).$$

El factor

$$\gamma(\mathbf{x}) = \sum_k \gamma_k \mathbf{x}^k$$

representa el esquema de subdivisión y se denomina su **símbolo** o **polinomio característico**. En el caso de un producto tensorial el polinomio característico es el producto de dos polinomios univariados,  $\alpha(x)$  y  $\beta(y)$ , que representan a los dos esquemas de subdivisión de las curvas.

Cualquier esquema de subdivisión para curvas tiene un esquema de diferencias subyacente, pero esto en general no es cierto para los esquemas de subdivisión de superficies. Para estudiar cuando un esquema de subdivisión para superficies tiene un esquema de diferencias, identificamos las mallas de control y los esquemas de subdivisión con sus polinomios generatrices.

Dada una malla de control

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{c}_i \mathbf{x}^i ,$$

su refinamiento bajo un esquema estacionario  $\gamma(\mathbf{x})$  está dado por

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}^2)\gamma(\mathbf{x}) ,$$

y las diferencias  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ , forman el polígono

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x})(1 - \mathbf{x}^{\mathbf{v}}) .$$

Entonces las diferencias del polinomio refinado  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}^2)\gamma(\mathbf{x})$  están dadas por

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{c}(\mathbf{x}^2)\gamma(\mathbf{x}) \frac{1 - \mathbf{x}^{\mathbf{v}}}{1 - \mathbf{x}^{2\mathbf{v}}} .$$

En consecuencia, existe un esquema estacionario, que denominaremos, **el esquema de las  $\nabla_{\mathbf{v}}$ -diferencias**, el cual aplica  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{c}$  en  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{b}$  si y sólo si  $\delta(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})/(1 - \mathbf{x}^{\mathbf{v}})$  es un polinomio. Cuando  $\delta(\mathbf{x})$  resulta un polinomio, entonces es el **polinomio característico del esquema de diferencias**.

**Observación 6:** Dada una malla de control  $C = [\mathbf{c}_i]$  denotamos por  $\nabla C$  la malla de control cuyos “vértices” son las matrices

$$\nabla \mathbf{c}_i = [\nabla_{\mathbf{e}_1} \mathbf{c}_i \quad \nabla_{\mathbf{e}_2} \mathbf{c}_i]$$

Si la malla de control  $B$  se obtiene por subdivisión estacionaria de  $C$ , entonces  $\nabla B$  se obtiene a partir de  $\nabla C$  bajo un esquema estacionario cuyos pesos son matrices  $2 \times 2$ . Véase [Kobbelt '00, Cavaretta et al. '91, Teorema 2.3].

**Observación 7:** El esquema de Lane-Riesenfeld  $\mathcal{M}_n$  (vea 15.1), tiene polinomio característico

$$\gamma(x, y) = 4^{-n}(1+x)^{n+1}(1+y)^{n+1} .$$

Esto se desprende directamente de la Observación 5 de la sección 8.8.

## 15.6 Cálculos con esquemas de promedios

Usando polinomios característicos es fácil ver que para cualquier esquema de subdivisión estacionaria hay un esquema estacionario para los promedios.

Sea

$$\mathbf{c}^m(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})\mathbf{c}^{m-1}(\mathbf{x}^2)$$

la representación de la secuencia de mallas de control  $[\mathbf{c}_i^m]$  obtenida con el esquema de subdivisión estacionaria  $\gamma$ . Usando las variables  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}^{2^k}$  esta secuencia se puede escribir como

$$\mathbf{c}^m(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}_0) \dots \gamma(\mathbf{x}_{m-1})\mathbf{c}^0(\mathbf{x}_m) .$$

Es más, para cualquier  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$  los polinomios  $\mathbf{b}^m(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{b}_i^m \mathbf{x}^i$  que representan los promedios por rectas

$$\mathbf{b}_i^m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \mathbf{c}_{i-k\mathbf{v}}^m .$$

Tomando  $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^{k\mathbf{v}}$ , lo anterior se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^m(\mathbf{x}) &= 2^{-m}(1 + \mathbf{y} + \mathbf{y}^2 + \mathbf{y}^3 + \dots + \mathbf{y}^{2^m-1})\mathbf{c}^m(\mathbf{x}) \\ &= 2^{-m}(1 + \mathbf{y})(1 + \mathbf{y}^2)(1 + \mathbf{y}^4) \dots (1 + \mathbf{y}^{2^{m-1}})\mathbf{c}^m(\mathbf{x}) \\ &= \beta(\mathbf{x}_0) \dots \beta(\mathbf{x}_{m-1})\mathbf{c}^0(\mathbf{x}) , \end{aligned}$$

donde

$$\beta(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})(1 + \mathbf{x}^{\mathbf{v}})/2$$

es el polinomio característico del **esquema de promedios** obtenido a partir del esquema  $\gamma$ .

Esto significa que el esquema  $\beta$  se puede describir a través del siguiente algoritmo:

Dados puntos de control  $\mathbf{b}_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^2$  y un vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$  repetimos

**1** Para cada  $\mathbf{i}$  subdividimos con el esquema  $\gamma$ , es decir,

$$\mathbf{d}_i = \sum_j \mathbf{b}_j \gamma_{i-2j}$$

**2** Para cada  $\mathbf{i}$  calculamos los promedios por rectas

$$\mathbf{b}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_{i-\mathbf{v}})$$

Similarmente, se tiene que los promedios

$$\mathbf{a}_i^m = \frac{1}{4^m} \sum_{k,l=0}^{2^m-1} \mathbf{c}_{i-k,j-l}^m$$

se obtienen a partir de los puntos  $\mathbf{a}_i^0 = \mathbf{c}_i^0$  con el esquema estacionario representado por

$$\alpha(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})(1+x)(1+y)/4.$$

Este esquema se describe también con un algoritmo:

Dados los puntos de control  $\mathbf{a}_i, i \in \mathbb{Z}^2$

repetimos

1 Para cada  $i$  subdividimos con el esquema  $\gamma$ , es decir,

$$\mathbf{d}_i = \sum_j \mathbf{a}_j \gamma_{i-2j}$$

2 Para cada  $i$  calculamos los promedios por rectas

$$\mathbf{f}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_i + \mathbf{d}_{i-\mathbf{e}_1})$$

3 Para cada  $i$  calculamos los promedios por rectas

$$\mathbf{a}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{i-\mathbf{e}_2})$$

## 15.7 Subdivisión de mallas triangulares

Cada malla regular de cuadriláteros puede ser transformada en una malla regular de triángulos y viceversa agregando o eliminando aristas “diagonales” tal como se ilustra en la Figura 15.5. Por lo tanto cada malla regular de triángulos se puede representar por una matriz bi-infinita

$$C = \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \ddots \\ & & & \cdots & \mathbf{c}_{ij} & \cdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & & \ddots \end{bmatrix}$$

cuyos elementos son los vértices de la malla.

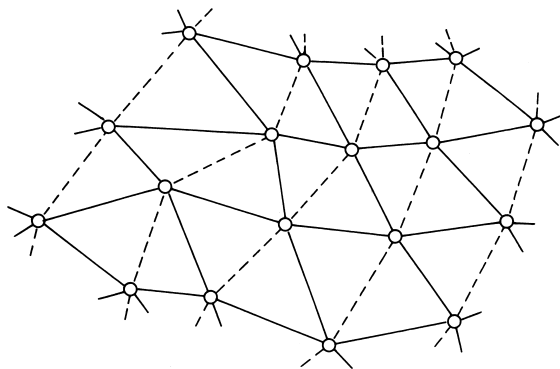


Figura 15.5: Transformación de una malla regular de cuadriláteros en una malla regular de triángulos.

En particular, los tres vectores

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de  $\mathbb{R}^2$  generan una red triangular regular uniforme tal como se ilustra en la Figura 15.6.

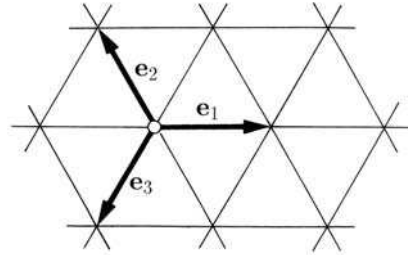


Figura 15.6: Una malla regular uniforme generada por tres vectores.

Usando las tres direcciones de la malla triangular podemos generalizar el algoritmo de Lane-Riesenfeld a un **algoritmo de promediación en tres direcciones**. Véase [Prautzsch '84b], y también [Boehm et al. '87].

Dada una matriz  $C = [\mathbf{c}_i]_{i \in \mathbb{Z}^2}$  que representa una malla triangular regular, la promediación en tres direcciones se describe con cuatro operadores: el **operador de duplicación**  $\mathcal{D}$ , el cual cuadruplica todos los vértices

$$\mathcal{D}(C) = [\mathbf{d}_i]_{i \in \mathbb{Z}^2}, \quad \text{donde } \mathbf{d}_i = \mathbf{c}_{\lfloor i/2 \rfloor},$$

y los tres **operadores de promediación**  $\mathcal{A}_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , los cuales promedian vértices con respecto a cada una de las direcciones  $\mathbf{e}_k$ ,

$$\mathcal{A}_k(C) = [\mathbf{a}_i]_{i \in \mathbb{Z}^2}, \quad \text{donde } \mathbf{a}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_{i - \mathbf{e}_k}).$$

Para cualquier  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}_0^3$ , el operador compuesto

$$\mathcal{B}_{\mathbf{n}} = \mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_2^{n_2} \mathcal{A}_3^{n_3} \mathcal{D}$$

representa el algoritmo de promediación en las tres direcciones y  $C_m = \mathcal{B}_{\mathbf{n}}^m(C)$  representa la secuencia de mallas triangulares obtenidas a partir de  $C$  con el algoritmo de promediación  $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}$ .

**Observación 8:** El operador  $\mathcal{D}$  coincide con el operador  $\mathcal{M}_0$  de Lane-Riesenfeld, dado en la Observación 7. Su polinomio característico es

$$\delta(x, y) = (1 + x)(1 + y).$$

**Observación 9:** En particular,  $\mathcal{B}_{001}$  representa al **operador de refinamiento**  $\mathcal{R}$  el cual subdivide cada triángulo de una malla regular, uniformemente en cuatro subtriángulos congruentes, tal como se ilustra en la Figura 15.7. Esta figura también ilustra las cuatro máscaras que representan  $\mathcal{B}_{001}$ . Los pesos de estas cuatro máscaras forman los coeficientes del polinomio característico de  $\mathcal{B}_{001}$ , (vea 15.2). Este polinomio es:

$$\gamma(x, y) = (1 + x)(1 + y)(1 + \mathbf{x}^{e_3})/2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x^{-1} & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{-1} \\ 1 \\ y \end{bmatrix} .$$

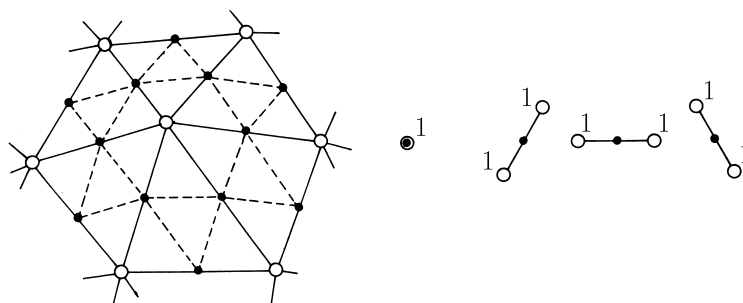


Figura 15.7: El operador de refinamiento  $\mathcal{R}$  aplicado a una malla triangular y sus cuatro máscaras.

**Observación 10:** Cualquier malla obtenida por aplicaciones sucesivas del operador de refinamiento  $\mathcal{R}$  a una malla triangular regular  $C$  representa la misma superficie lineal por trozos. Por lo tanto una secuencia de mallas obtenida por refinamiento con  $\mathcal{R}$  converge.

**Observación 11:** El operador de promediación simétrica  $\mathcal{A}_{111} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$  está dado por una sola máscara y se ilustra en la Figura 15.8. Esta máscara fue introducida en [Boehm '83]. El polinomio que representa a  $\mathcal{A}_{111}$  es

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \end{bmatrix} .$$

## 15.8 Box splines sobre mallas triangulares

Sea  $C_m$  una secuencia de mallas triangulares obtenidas por la aplicación del operador de promediación  $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}$ . Claramente, si  $\mathcal{B}_{\mathbf{n}}$  es el operador de duplicación, dado por  $\mathbf{n} = (0, 0, 0)$ , o el operador de refinamiento, dado por



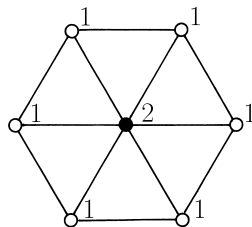


Figura 15.8: La máscara de Boehm del operador de promediación simétrica  $\mathcal{A}_{111}$ .

$\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , entonces  $C_m$  converge a un spline localmente constante o a un spline continuo y lineal por trozos, respectivamente.

En general, si

$$k = \min\{n_1+n_2, n_1+n_3-1, n_2+n_3-1\} \geq 0 ,$$

entonces, sobre cada dominio compacto,  $C_m$  converge a un spline  $C^k$ , polinómico de grado total  $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + n_3$  sobre cada triángulo de la malla generada por  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .

Estos splines son box splines a tres direcciones, los cuales serán estudiados con detalle en el Capítulo 17.

Para la prueba, aplicamos repetidamente los resultados de 15.4 y 15.6 y tomamos en cuenta que si  $f(\mathbf{x})$  es continua entonces la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(\mathbf{x} - u\mathbf{e}_1 - v\mathbf{e}_2 - w\mathbf{e}_3) du dv dw$$

tiene derivadas cruzadas continuas respecto a cualesquiera dos direcciones  $\mathbf{e}_i$  y  $\mathbf{e}_j$ . Como  $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k$  para todas las permutaciones  $i, j, k$  de  $(1, 2, 3)$ , todas las parciales de orden dos existen. Por lo tanto la integración iterada con respecto a dos direcciones eleva el grado de suavidad en uno pero la integración iterada con respecto a tres direcciones lo eleva en dos.  $\diamond$

**Observación 12:** El segundo resultado de 15.4 también es cierto si suponemos convergencia sobre un compacto a un spline polinómico por trozos, sobre una malla triangular. En consecuencia, el teorema anterior también se cumple para  $k = -1$ .

**Observación 13:** Si  $n_3 = 0$  entonces  $\mathcal{B}_n$  representa el algoritmo de subdivisión de Lane-Riesenfeld para productos tensoriales uniformes de bigrado  $(n_1, n_2)$ .

### 15.9 Subdivisión de mallas hexagonales

Cualquier malla regular triangular determina una malla hexagonal cuyas aristas conectan los centros de triángulos adyacentes. La Figura 15.9 ilustra ésto en el caso especial de una malla triangular uniforme

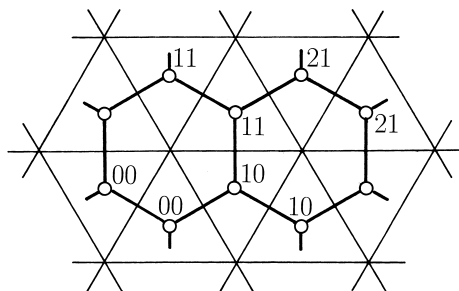


Figura 15.9: Mallas regulares, triangular y hexagonal.

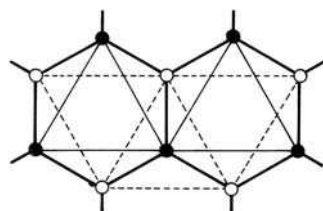


Figura 15.10: Descomposición de una malla hexagonal en dos mallas triangulares.

Es más, una malla hexagonal regular puede originar dos mallas triangulares (con vértices distintos) tal como se ilustra en la Figura 15.10. Entonces, una malla regular hexagonal se puede representar por dos matrices bi-infinitas

$$C^\Delta = \begin{bmatrix} \vdots & & \ddots \\ \cdots & \mathbf{c}_{ij}^\Delta & \cdots \\ \cdot & \cdot & \vdots \end{bmatrix}, \quad y \quad C^\nabla = \begin{bmatrix} \vdots & & \ddots \\ \cdots & \mathbf{c}_{ij}^\nabla & \cdots \\ \cdot & \cdot & \vdots \end{bmatrix},$$

cuyos elementos son los vértices de las mallas o se representan por los polinomios

$$\mathbf{c}^\Delta(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{c}_i^\Delta \mathbf{x}^i \quad y \quad \mathbf{c}^\nabla(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{c}_i^\nabla \mathbf{x}^i .$$

El algoritmo de promediación en tres direcciones de la sección 15.7 se puede adaptar a mallas hexagonales. El operador de duplicación  $\mathcal{D}_{hex}$ , para mallas hexagonales está dado por

$$\mathcal{D}_{hex}[C^\Delta, C^\nabla] = [[\mathbf{d}_i^\Delta], [\mathbf{d}_i^\nabla]] ,$$

donde

$$\mathbf{d}_{2i,2j}^\Delta = \mathbf{d}_{2i+1,2j}^\Delta = \mathbf{d}_{2i+1,2j}^\nabla = \mathbf{d}_{2i+1,2j+1}^\Delta = \mathbf{c}_{ij}^\Delta$$

y

$$\mathbf{d}_{2i,2j}^\nabla = \mathbf{d}_{2i,2j+1}^\nabla = \mathbf{d}_{2i,2j+1}^\Delta = \mathbf{d}_{2i+1,2j+1}^\nabla = \mathbf{c}_{ij}^\nabla .$$

Los índices se indican en la Figura 15.9. Los tres operadores de promediación  $\mathcal{A}_k, k = 1, 2, 3$ , definidos en 15.7 se generalizan a

$$\mathcal{A}_k[C^\Delta, C^\nabla] = [\mathcal{A}_k C^\Delta, \mathcal{A}_k C^\nabla] .$$

Y para cada  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbf{N}_0^3$ , el operador compuesto

$$\mathcal{H}_{\mathbf{n}} = \mathcal{A}_1^{n_1} \mathcal{A}_2^{n_2} \mathcal{A}_3^{n_3} \mathcal{D}_{hex}$$

representa el algoritmo de promediación en tres direcciones para mallas hexagonales introducido en [Prautzsch '84b].

Los operadores de subdivisión  $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$  también pueden representarse con **máscaras características**  $2 \times 2$  cuyos elementos son polinomios. En particular, la operación de duplicación

$$[C^\Delta, C^\nabla] = \mathcal{D}_{hex}[C^\Delta, C^\nabla]$$

se describe a través de la asignación polinómica:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^\Delta(\mathbf{x}) \\ \mathbf{c}^\nabla(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+x+xy & y \\ x & 1+y+xy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\Delta(\mathbf{x}^2) \\ \mathbf{c}^\nabla(\mathbf{x}^2) \end{bmatrix} ,$$

lo cual puede abreviarse a

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = D(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x}^2) .$$

La Figura 15.11 ilustra las cuatro máscaras asociadas, arriba para la malla  $C^\Delta$  y abajo para  $C^\nabla$

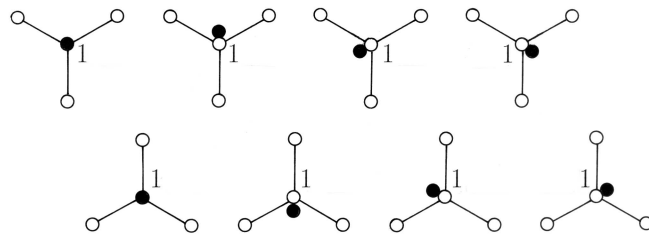


Figura 15.11: Las ocho máscaras del operador de duplicación.

Es más, la operación de promediación  $[C^\Delta, C^\nabla] = \mathcal{A}^k[C^\Delta, C^\nabla]$  se describe por la asignación polinómica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c}^\Delta(\mathbf{x}^2) \\ \mathbf{c}^\nabla(\mathbf{x}^2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{x}^{\mathbf{e}_k}) \begin{bmatrix} \mathbf{c}^\Delta(\mathbf{x}^2) \\ \mathbf{c}^\nabla(\mathbf{x}^2) \end{bmatrix},$$

la cual abreviamos por

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \alpha_k(\mathbf{x})\mathbf{c}(\mathbf{x}).$$

Por lo tanto  $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$  se representa por una matriz polinómica  $2 \times 2$

$$\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^{n_3} D.$$

La Figura 15.12 muestra la máscara asociada con el operador de promediación simétrica  $\mathcal{A}_{111} = \mathcal{A}_1\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$  para  $C^\Delta$  del lado izquierdo, y para  $C^\nabla$ , del lado derecho.

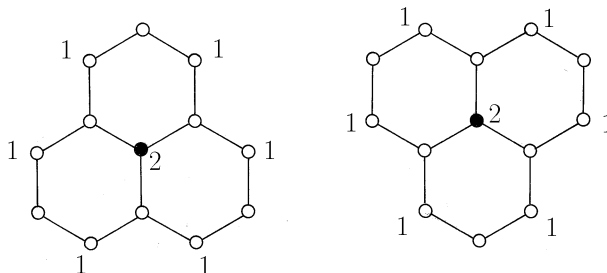


Figura 15.12: Las máscaras del operador de promediación simétrica  $\mathcal{A}_{111}$ .

## 15.10 Half-box splines sobre mallas triangulares

Análogamente, al caso de las mallas triangulares y a las de cuadriláteros, decimos que una malla hexagonal  $C_m = [C_m^\Delta, C_m^\nabla]$  converge uniformemente a una función  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  si los supremos

$$\sup_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} \max\{\|\mathbf{c}_{\mathbf{i}_m}^\Delta - \mathbf{c}((\mathbf{i} + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3))/3)/2^m)\|, \|\mathbf{c}_{\mathbf{i}_m}^\nabla - \mathbf{c}((\mathbf{i} + (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3))/3)/2^m)\|\}$$

convergen a cero cuando  $m$  tiende a infinito.

Entonces  $C_m$  converge a una función continua  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  si las dos secuencias de triángulos,  $C_m^\Delta$  y  $C_m^\nabla$ , convergen a  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ .

Sea  $C_m = [C_m^\Delta, C_m^\nabla]$  una secuencia de mallas hexagonales obtenida por la aplicación repetida del operador de promediación  $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$  definido en 15.9. Claramente, si  $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}$  es el operador de duplicación, es decir,  $\mathbf{n} = (0, 0, 0)$ , entonces  $C_m$  converge a un spline localmente constante sobre la malla triangular.

Es más, usando los argumentos de 15.6 se puede ver que cualquier secuencia  $(\mathcal{A}_k \mathcal{H}_{\mathbf{n}})^m C$  se obtiene de  $\mathcal{H}_{\mathbf{n}}^m C$  por promediación creciente, tal como se describió en 15.4. Además, como promediamos la malla hexagonal  $C$  a través de la promediación de las mallas triangulares  $C^\Delta$  y  $C^\nabla$  separadamente, similarmente a 15.8, se obtiene lo siguiente:

*para  $k = \min\{n_i + n_j | i \neq j\} - 1$ , la secuencia  $C_m$  converge sobre cualquier compacto a un spline  $C^k$ . Este spline es polinómico de grado total  $|\mathbf{n}| = n_1 + n_2 + n_3$  sobre cada triángulo de la malla generada por  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .*

Estos splines se denominan half-box splines y serán estudiados con detenimiento en el Capítulo 17. En particular, los operadores simétricos  $\mathcal{H}_{nnn}$  generan splines  $C^{2n-1}$  localmente polinómicos, de grado  $3n$ .

### 15.11 Ejercicios

- 1 El **algoritmo de la mariposa** introducido por [Dyn et al. '90] es un esquema interpolatorio de subdivisión de mallas triangulares. Está dado por las dos máscaras ilustradas en la Figura 15.13, donde la segunda máscara corresponde a las tres máscaras simétricas. Demuestre que cualquier secuencia de mallas triangulares regulares obtenida por aplicaciones repetidas del algoritmo de la mariposa, converge a una superficie  $C^1$  para  $0 < \omega < 1/2$ , véase [Gregory '91, Shenkman et al. '99].

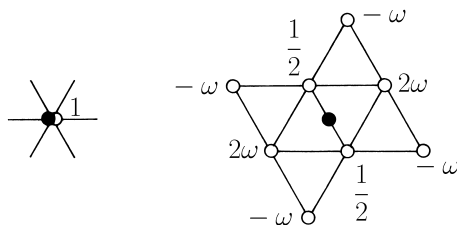


Figura 15.13: La máscara del algoritmo de la mariposa.

- 2 Sea  $C_m = [\mathbf{c}_i^m]$  una secuencia de mallas obtenida por el refinamiento

$$\mathbf{c}_i^{m+1} = \sum \mathbf{c}_j^m \gamma_{2i-j}$$

a partir de una malla inicial  $C_0$ . Suponga que para cualquier malla inicial  $C_0$  la secuencia  $C_m$  converge a una función  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ . Demuestre que existe una función refinable  $N(\mathbf{x})$ , es decir,

$$N(\mathbf{x}) = \sum \gamma_i N(2\mathbf{x} - \mathbf{i}) ,$$

la cual define una base, esto es, que la función límite para cualquier malla  $C_0$ , se puede expresar como

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{c}_i^m N(2^{-m}\mathbf{x} - \mathbf{i}) .$$

- 3** Sea  $N(\mathbf{x})$  una base continua para el esquema de subdivisión del Ejercicio 2 y sea  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ . Demuestre que

$$\bar{N}(\mathbf{x}) = \int_0^1 N(\mathbf{x} - t\mathbf{v}) dt$$

es la función base para el esquema de subdivisión cuya máscara tiene los coeficientes

$$\bar{\gamma}_i = \frac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_{i-\mathbf{v}}) .$$

- 4** En 15.5 se definieron los esquemas de diferencias  $\nabla_1, \nabla_2$  y  $\nabla_3$ . Demuestre que existe un esquema de diferencias  $\nabla_{\mathbf{v}}$  para todo  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^2$ , si existen esquemas de diferencias  $\nabla_1$  y  $\nabla_2$ .
- 5** Encuentre un esquema de subdivisión estacionaria tal que los esquemas de diferencias  $\nabla_1$  y  $\nabla_2$  no son estacionarios.
- 6** Pruebe el segundo teorema de 15.4 en el cual se sustituye la convergencia a una función uniformemente continua por convergencia sobre compactos a un spline polinómico por trozos sobre una malla triangular generada por  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$ .



## 16 Subdivisión estacionaria para mallas arbitrarias

[16.1 El esquema del punto medio](#) — [16.2 La superficie límite](#) — [16.3 La parametrización standard](#) — [16.4 La matriz de subdivisión](#) — [16.5 Continuidad de superficies obtenidas por subdivisión](#) — [16.6 La aplicación característica](#) — [16.7 Suavidad de orden superior](#) — [16.8 Mallas triangulares y hexagonales](#) — [16.9 Ejercicios](#)

En 1978 Doo y Sabin presentaron una generalización del algoritmo de subdivisión de splines producto tensorial bicuadráticos. Simultáneamente, Catmull y Clark también presentaron una generalización análoga para splines bicúbicos. Estos algoritmos pueden aplicarse a mallas de cuadriláteros de topologías arbitrarias y producen secuencias de mallas de control que convergen a superficies bicuadráticas o bicúbicas por trozos que tienen un número finito de “puntos extraordinarios”.

En contraste con la atractiva simplicidad de estos algoritmos ha sido difícil el análisis de la suavidad de estas superficies límite en sus puntos extraordinarios. Tomó 15 años y sólo después de varios intentos por otros investigadores, Ulrich Reif logró establecer un conjunto de condiciones suficientes bajo las cuales los algoritmos de Catmull-Clark, de Sabin y otros similares generan superficies cuyo plano tangente varía continuamente.

### 16.1 El esquema del punto medio

En [15.1](#) describimos el algoritmo de Lane-Riesenfeld para splines producto tensorial en términos de dos operadores.

El primero es el **operador de refinamiento**  $\mathcal{R}$ , el cual aplica una malla de control  $C$  en una malla  $\mathcal{R}C$  que conecta los puntos medios de todas las aristas de  $C$  con sus extremos y los centroides de polígonos adyacentes de la malla. El segundo es el **operador de promediación**  $\mathcal{A}$  el cual aplica una malla de control  $C$  en una malla  $\mathcal{A}C$  que conecta los centroides de polígonos adyacentes de la malla.

Para la aplicación de estos dos operadores no hace falta suponer que los



polígonos de la malla  $C$  son cuadriláteros o que la malla es regular. La malla puede ser arbitraria, tal como se ilustra en Figura 16.1, en la cual las líneas suaves indican la malla  $C$ , las líneas suaves y las punteadas indican la malla  $\mathcal{R}C$  y las líneas sólidas, la malla  $\mathcal{ARC}$ .

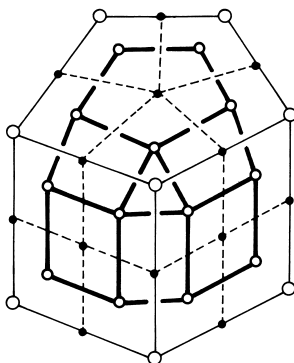


Figura 16.1: Refinamiento y promediación de una malla.

El operador  $\mathcal{M}_n = \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{R}$ , el cual refina una malla y la promedia  $(n-1)$  veces sucesivas, se denomina el **operador del punto medio**. Dada una malla  $C$  decimos que la secuencia de mallas  $\mathcal{M}_n^i C$  se obtiene a partir de  $C$  a través del **esquema del punto medio**  $\mathcal{M}_n$ .

En particular, si  $C$  es una malla de cuadriláteros, entonces  $\mathcal{M}_n$  representa el algoritmo de Lane-Riesenfeld para splines producto tensorial de bigrado  $n$ . Es más, para mallas arbitrarias,  $\mathcal{M}_2$  y  $\mathcal{M}_3$  representan instancias específicas de los algoritmos de **Doo-Sabin** [Doo & Sabin '78] y **Catmull-Clark** [Catmull & Clark '78], respectivamente. La Figura 16.2 ilustra una secuencia de mallas obtenidas bajo el esquema de subdivisión  $\mathcal{M}_3$ .

Para  $n$  par e impar el esquema  $\mathcal{M}_n$  del punto medio tiene propiedades duales. Si  $n$  es impar, todas las mallas  $\mathcal{M}_n^i C, i \geq 1$ , son mallas de cuadriláteros y si  $n$  es par, los vértices interiores de cada malla  $\mathcal{M}_n^i C, i \geq 1$ , pueden tener solamente valencia 4. Las mallas cuyos polígonos no son cuadriláteros y los vértices internos de valencia  $\neq 4$  se denominan **mallas extraordinarias** y **vértices extraordinarios**, respectivamente.

Cada vértice extraordinario de una malla  $\mathcal{M}_n^i C$  es el resultado de una combinación afín de vértices que yacen alrededor del vértice extraordinario correspondiente de la malla  $\mathcal{M}_n^{i-1} C$ . Como un elemento extraordinario de  $\mathcal{M}_n^{i-1} C$  corresponde a lo sumo a un elemento extraordinario en  $\mathcal{M}_n^i C$ , entonces el número de éstos últimos está acotado por el número de elementos extraordinarios en  $C$ . Si  $C$  es una malla sin frontera, entonces el número de elementos extraordinarios es el mismo para cada una de las mallas  $\mathcal{M}_n^i C, i \geq 0$ .

**Observación 1:** La distancia entre dos vértices extraordinarios en una

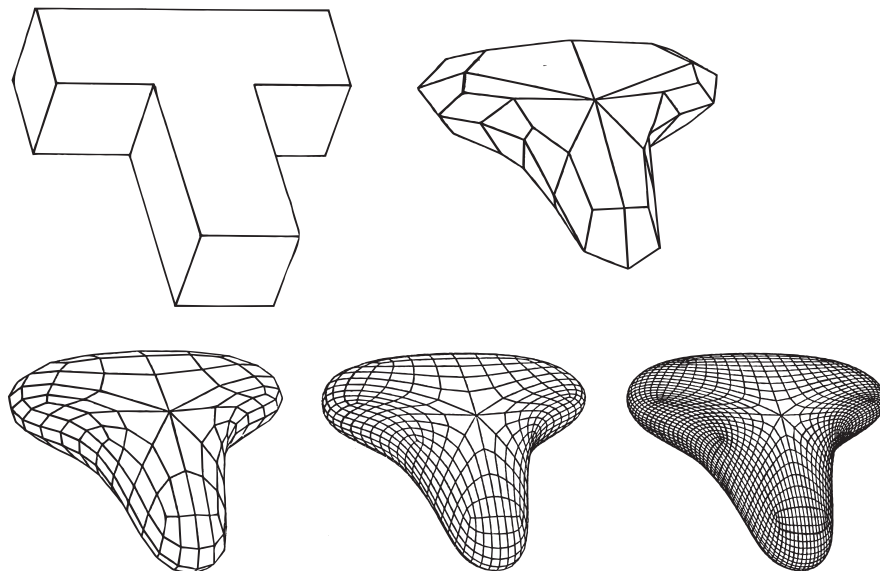


Figura 16.2: Una secuencia de mallas obtenida por medio del algoritmo de Catmull-Clark.

La malla  $\mathcal{M}_n^i C$  se define como el número de aristas del camino más corto que los conecta. La distancia entre los dos vértices extraordinarios en  $\mathcal{M}_n^{i+1} C$  que les corresponden es aproximadamente el doble.

## 16.2 La superficie límite

El esquema del punto medio  $\mathcal{M}_n$  restringido a una submalla regular de una malla de cuadriláteros cualquiera coincide con el algoritmo de Lane-Riesenfeld para splines de bigrado  $n$ . Si  $C$  es la malla de cuadriláteros, entonces la secuencia de mallas  $\mathcal{M}_n^i C, i \in \mathbb{N}$ , converge a una superficie  $s$  poligonal por trozos y las secuencias de vértices extraordinarios convergen. Vea 16.5. Estos puntos límite se denominan **puntos extraordinarios** de  $s$ . Note que  $s$  consiste de un número infinito de parches polinómicos en cada vecindad de un punto extraordinario.

En este capítulo estudiaremos el comportamiento de la superficie límite  $s$  en un punto extraordinario.

De la Observación 1 de 16.1 se desprende que es suficiente considerar una malla  $C$  con un solo punto extraordinario, rodeado de varios anillos de cuadriláteros tal como se ilustra en la Figura 16.3.

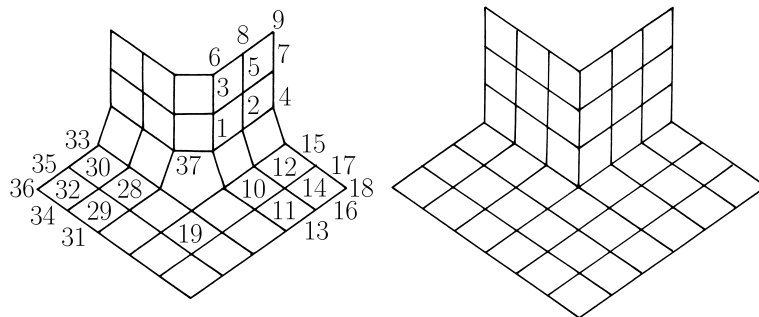


Figura 16.3: Mallas de control con un solo punto extraordinario.

Cada submalla regular de la malla  $\mathcal{M}_n^i C$  que consiste de cuadriláteros  $n \times n$  es la B-malla de control de un parche de la superficie polinómica  $\mathbf{s}$ . Los parches definidos por todas estas submallas regulares de  $\mathcal{M}_n^i C$  forman una superficie  $\mathbf{s}_i$ ,  $(n - 1)$  veces diferenciable que es parte de la superficie límite  $\mathbf{s}$ . Es más, la diferencia de la superficie  $\mathbf{s}_i$  y la superficie  $\mathbf{s}_{i-1}$  forma un anillo  $\mathbf{r}_i$  de  $m$  lados que consiste de  $3m\rho_n^2$  parches, donde

$$\rho_n = \lfloor n/2 \rfloor = \max\{i \in \mathbf{N} | i \leq n/2\} .$$

Conjuntamente, los anillos  $\mathbf{r}_i$  constituyen la superficie  $\mathbf{s}$ . Cada superficie anular  $\mathbf{r}_i$  se puede partir en  $3m$  macroparches  $\mathbf{r}_i^1, \dots, \mathbf{r}_i^{3m}$ , cada uno de ellos parametrizado sobre  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Cada macroparche consiste de  $\rho_n \times \rho_n$  parches. Esto se ilustra esquemáticamente en la Figura 16.4, en la cual las líneas punteadas indican parches de  $\mathbf{r}_1^5$  para  $\rho_n = 3$ .

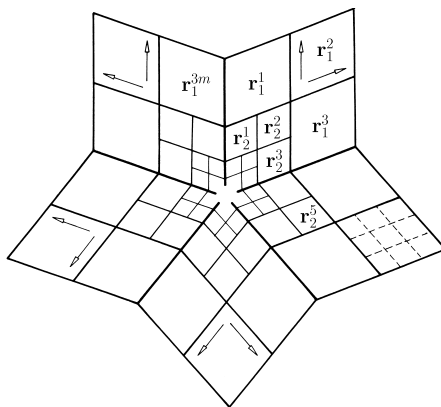


Figura 16.4: Los parches  $\mathbf{r}_i^j$  adyacentes, para  $m = 5$ .

## 16.3 La parametrización standard

La superficie anular completa  $\mathbf{r}_i$  está parametrizada sobre  $3m$  copias de  $[0, 1] \times [0, 1]$  o equivalentemente,  $\Omega = \{1, \dots, 3m\} \times [0, 1]^2$ .

Conjuntamente todos los anillos conforman una superficie con conexiones simples  $C^{n-1}$ . De acuerdo con 9.7 esto significa que

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_i^j(1, v) &= \frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+1}(0, v) , \\ \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+1}(u, 0) &= \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+2}(u, 1) , \\ \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+2}(u, 0) &= -\frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+3}(0, u) \end{aligned}$$

y

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_{i+1}^j(u, 1) &= \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_i^j\left(\frac{u}{2}, 0\right) , \\ \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_{i+1}^{j+1}(u, 1) &= \frac{\partial^\kappa}{\partial v^\kappa} \mathbf{r}_i^j\left(\frac{1}{2} + \frac{u}{2}, 0\right) , \\ \frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_{i+1}^{j+1}(1, v) &= \frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+2}\left(0, \frac{1}{2} + \frac{v}{2}\right) , \\ \frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_{i+1}^{j+2}(1, v) &= \frac{\partial^\kappa}{\partial u^\kappa} \mathbf{r}_i^{j+2}\left(1, \frac{v}{2}\right) , \end{aligned}$$

para todo  $u, v \in [0, 1], i \in \mathbf{N}, \kappa = 0, 1, \dots, n-1$ , y  $j = 1, 4, 7, \dots, 3n-2$ , donde  $\mathbf{r}_i^{3n+1} = \mathbf{r}_i^1$ .

Es más, si  $\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_p$  denotan los puntos de control de  $\mathbf{r}_i$ , entonces éste también se puede expresar como

$$\mathbf{r}_i(j, u, v) = \mathbf{r}_i^j(u, v) = \sum_{l=1}^p \mathbf{c}_l B_l^j(u, v) ,$$

donde  $B_l^j(u, v)$  son ciertos B-splines, producto tensorial de bigrado  $n$ .

**Observación 2:** Usando la numeración de las Figuras 16.3 y 16.4 se obtiene para  $n = 2$  y  $j = 2, 3$

$$\begin{bmatrix} B_6^2 & B_8^2 & B_9^2 \\ B_3^2 & B_5^2 & B_7^2 \\ B_1^2 & B_2^2 & B_4^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_3^3 & B_5^3 & B_7^3 \\ B_1^3 & B_2^3 & B_4^3 \\ B_{10}^3 & B_{12}^3 & B_{15}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{0,-2} & \cdots & N_{0,0} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{-2,-2} & \cdots & N_{-2,0} \end{bmatrix} ,$$

donde  $N_{km}$  denota el producto tensorial  $N_k^2(u)N_m^2(v)$  de B-splines cuadráticos sobre los nodos  $k, \dots, k+3$  y  $m, \dots, m+3$ , respectivamente.

## 16.4 La matriz de subdivisión

Cada superficie anular  $\mathbf{r}_i$  tiene tres funciones coordenada. Denotamos por  $\mathcal{R}$  el espacio lineal de todas las posibles funciones coordenada

$$\mathcal{R} = \left\{ \sum c_l B_l^j(u, v) \mid c_l \in \mathbf{R} \right\} .$$

Sea

$$\mathbf{r}_i(j, u, v) = \sum \mathbf{c}_l^i B_l^j(u, v) \in \mathbf{R}^3$$

la superficie anular obtenida por aplicaciones sucesivas del esquema  $\mathcal{M}_n$  del punto medio a partir de los puntos del control iniciales  $\mathbf{c}_1^0, \dots, \mathbf{c}_p^0$ . Como los puntos  $\mathbf{c}_l^i$  son combinaciones afines  $\mathbf{c}_l^{i-1}$ , se tiene una **matriz de subdivisión**  $S$ , de dimension  $p \times p$  tal que para todo  $i \geq 1$ ,

$$[\mathbf{c}_1^i \dots \mathbf{c}_p^i]^t = S[\mathbf{c}_1^{i-1} \dots \mathbf{c}_p^{i-1}]^t .$$

La matriz de subdivisión  $S$  es **estocástica**, esto es: sus elementos son no negativos y cada fila suma uno. Por lo tanto el autovalor dominante de  $S$  corresponde al autovector  $\mathbf{e} = [1 \dots 1]^t$ . Todos los puntos  $\mathbf{c}_l^i$  dependen de los vértices extraordinarios de la malla inicial  $\mathbf{c}_1^0 \dots \mathbf{c}_p^0$ . Por lo tanto,  $S^2$  tiene una fila estrictamente positiva, lo cual implica que uno es un autovalor simple de  $S^2$ , véase [Michelli & Prautzsch '89].

En consecuencia las mallas de control  $[\mathbf{c}_1^i \dots \mathbf{c}_p^i]$  convergen a un punto  $[\mathbf{c} \dots \mathbf{c}]$  de multiplicidad  $p$ , el cual representa un punto extraordinario  $\mathbf{c}$ , de la superficie  $\mathbf{s}$  resultante del proceso de subdivisión.

**Observación 3:** Usando la numeración de la izquierda de la Figura 16.3 la matriz de subdivisión  $S$  para el esquema del punto medio  $\mathcal{M}_2$  alrededor de un polígono de  $m$  lados es la matriz cíclica  $9m \times 9m$

$$S = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \cdots & S_m \\ S_m & S_1 & \cdots & S_{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ S_2 & \cdots & S_m & S_1 \end{bmatrix} .$$

Los  $S_i$  son bloques  $9 \times 9$  de la forma

$$S_i = \begin{bmatrix} A_i & O \\ O & O \end{bmatrix} ,$$

donde  $O$  denota matrices cero de varios tamaños,

$$A_3 = \dots = A_{m-1} = [4/m] ,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 9 & \cdot & 3 & \cdot & \cdot \\ 3 & 9 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 3 & 9 & 1 & 3 & \cdot \\ 3 & \cdot & 9 & \cdot & \cdot \\ 3 & 9 & 1 & \cdot & 3 \\ 3 & 1 & 9 & \cdot & 3 \\ 1 & 3 & 3 & \cdot & 9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} b & \cdot & \cdot \\ 3 & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & 3 \end{bmatrix}, \quad A_m = \begin{bmatrix} b & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 3 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

con  $a = 8 + 4/m$ ,  $b = 4 + 4/m$  y los elementos que son cero se indican con puntos.

## 16.5 Continuidad de superficies obtenidas por subdivisión

A partir de ahora consideramos que  $\mathcal{R}$  es un espacio lineal arbitrario de funciones  $r(j, u, v)$  definido para  $j \in \{1, \dots, 3n\}$  y  $u, v \in [0, 1]$  las cuales son  $k$  veces diferenciables en  $u$  y  $v$ . Y sea  $S$  una aplicación lineal de  $\mathcal{R}$  tal que para cualquier función  $r_i \in \mathcal{R}$  y su imagen  $r_{i+1} = Sr_i$  satisface las condiciones de suavidad (1) y (2) de 16.3 para todo  $\kappa = 1, \dots, k$ .

Sean  $x_1, \dots, x_p$  los autovectores y los autovectores generalizados de  $S$  que forman una base de  $\mathcal{R}$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  los autovalores asociados, los cuales supondremos ordenados en forma decreciente, es decir,  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_p|$ .

Cualquier superficie anular  $r_i$  cuyas coordenadas están en  $\mathcal{R}$ , es imagen del anillo

$$\mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$$

y cualquier superficie de subdivisión obtenida por aplicaciones sucesivas de  $S$  es una imagen de la superficie  $\mathbf{r}$  conformada por los anillos

$$\mathbf{r}_m = S^m \mathbf{r}_0 = \begin{bmatrix} S^m x_1 \\ \vdots \\ S^m x_p \end{bmatrix}, \quad m \in \mathbf{N}_0,$$

bajo alguna aplicación lineal. Por lo tanto para estudiar la suavidad de estas superficies de subdivisión es suficiente analizar  $\mathbf{r}$ .

Claramente, los iterados  $\mathbf{r}_m$  convergen al origen cuando  $|\lambda_1| < 1$  y convergen a un punto diferente, es decir, una función constante diferente de cero, si  $\lambda_1 = 1$  y  $|\lambda_2| < 1$  y  $x_1$  es una función constante. Recuerde que las funciones

$x_i$  son linealmente independientes. Por lo tanto sólo una función coordenada  $x_i$  puede ser constante.

Si  $x_1$  es constante y  $\lambda_1 = 1$ , entonces la superficie de subdivisión  $\mathbf{r}$  es un trasladado de la superficie de subdivisión formada por los iterados “más cortos”  $S^m[x_2 \dots x_p]^t$ . En consecuencia para analizar la suavidad es suficiente suponer  $|\lambda_1| < 1$ .

Note sin embargo que cualquier esquema de subdivisión afinmente independiente tiene una matriz de subdivisión con el autovalor uno asociado a autovectores que son funciones constantes. Véase por ejemplo el esquema del punto medio de [16.4](#).

## 16.6 La aplicación característica

En esta sección continuaremos el análisis de la suavidad de la superficie  $\mathbf{r}$  en el origen. Cuando  $|\lambda_1| < 1$ . Supondremos además que  $\lambda_1 = \lambda_2$  (lo cual implica que  $\lambda_1$  es real) y  $|\lambda_2| > |\lambda_3|$  y que los  $x_i$  son autovectores (no generalizados).

Bajo estas condiciones  $\mathbf{r}_m/\lambda_1^m$  converge a  $[x_1 x_2 0 \dots 0]^t$ . Por lo tanto si  $\mathbf{r}$  tiene un plano tangente en el origen, éste coincide con el plano  $x_1 x_2$ . Este argumento también demuestra que  $\mathbf{r}$  no tiene plano tangente en el origen si hay más de dos autovectores dominantes  $x_i$ .

Si  $\mathbf{r}$  es una superficie regular en el origen, entonces es la gráfica de una función en  $x_1, x_2$ . En particular, esto significa que para cada  $j = 1, \dots, 3n$  el parche

$$\mathbf{c}_j(u, v) = [x_1(j, u, v) \ x_2(j, u, v)], \quad j = 1, \dots, 3n,$$

tiene inversa. Además las condiciones (1) y (2) de [16.3](#) implican que la intersección de dos de estos parches es su frontera común. Más brevemente, la aplicación  $\mathbf{c} : \{1, \dots, 3n\} \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$  es invertible. Esta aplicación fue introducida en [\[Reif '93\]](#) y se denomina la **aplicación característica** del esquema de subdivisión  $S$ . Su imagen es un anillo planar  $R$  sin pliegues y los iterados  $\lambda^m \mathbf{R}$  llenan el hueco encerrado por  $R$  sin intersecciones dos a dos. La Figura [16.5](#) ilustra la situación.

Entonces cualquier coordenada  $r_i$  de  $\mathbf{r}$  puede considerarse como una función sobre  $U = \bigcup_{m=0}^{\infty} \lambda^m R$ , es decir, la  $i$ -ésima coordenada es la función

$$(3) \quad r_i(\mathbf{x}) = \lambda_i^m x_i(\mathbf{c}^{-1}(\mathbf{x}/\lambda^m)), \quad \text{donde } \mathbf{x} \in \lambda^m R .$$

## 16.7 Suavidad de orden superior

Si una superficie de subdivisión  $\mathbf{r}$  es regular y  $k$  veces continuamente diferenciable, entonces como función de  $x_1, x_2$  tiene un desarrollo de Taylor hasta

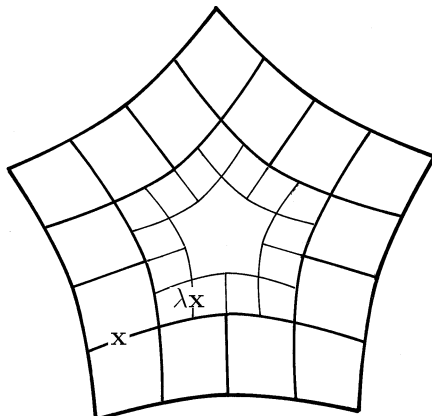


Figura 16.5: Una aplicación característica  $\mathbf{x}$  y su versión escalada  $\lambda \mathbf{x}$ .

orden  $k$  en el origen. Comparando esta expansión con (3) se deduce que  $\lambda_i$  debe ser una potencia de  $\lambda$  o satisfacer  $|\lambda_i| < |\lambda|^k$ . Es más, si  $\lambda_i = \lambda^\kappa$ , se tiene que el autovector  $x_i$  es un polinomio homogéneo de orden  $\kappa$  en  $x_1$  y  $x_2$ .

Recíprocamente, supongamos que los autovalores y autovectores de  $S$  tienen estas propiedades. Si  $\lambda_i = \lambda^\kappa$ ,  $\kappa < k$ , entonces  $r_i$  es un polinomio en  $x_1$  y  $x_2$ . Si  $|\lambda_i| < |\lambda|^k$ , entonces para cualquier derivada mixta  $\partial$  de orden  $\kappa \leq k$  se tiene que

$$\partial r_i(\mathbf{x}) = \left( \frac{\lambda_i}{\lambda^\kappa} \right)^m \partial(x_i \circ \mathbf{c}^{-1})(\mathbf{x}/\lambda^m)$$

converge a cero cuando  $\mathbf{x}$  tiende a cero o equivalentemente cuando  $m$  tiende a infinito.

En consecuencia se tiene el siguiente teorema [Prautzsch '98]

*Suponemos que  $1 > |\lambda| > |\lambda_3|$  y que  $\lambda$  está asociado a dos autovectores  $x_1$  y  $x_2$  que definen una aplicación característica. Entonces la superficie de subdivisión  $\mathbf{r}$  es regular y  $C^k$  si y sólo si*

- *la aplicación característica es invertible*
- y
- *para todo  $i = 1, \dots, p$  se tiene que  $\lambda_i = \lambda^\kappa$  y  $x_i$  pertenece al espacio generado  $\{x_1^\alpha x_2^\beta \mid \alpha + \beta = \kappa\}$  o  $|\lambda_i| < |\lambda|^k$ .*

**Observación 4:** El teorema anterior también es válido si uno es un autovalor de  $S$  cuyo autovector asociado es una función constante. Véase también 16.5.

**Observación 5:** Un teorema similar también es válido si los autovalores



$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son complejos conjugados o reales distintos, véase [Prautzsch '98, Reif '95b].

## 16.8 Mallas triangulares y hexagonales

El análisis presentado hasta ahora en el presente capítulo también es válido para la subdivisión estacionaria de mallas triangulares y hexagonales.

Una malla triangular arbitraria consiste de triángulos, pero podría tener vértices extraordinarios, es decir, aquellos vértices con valencia distinta de 6, vea la Figura 16.6.

Dualmente a lo anterior, una malla hexagonal arbitraria tiene solamente vértices regulares, es decir, de valencia 3, pero puede contener polígonos extraordinarios, es decir, que no tienen 6 lados. Ver la Figura 16.6.

Tal como ya se presentó en 15.9 a partir de una malla triangular se puede obtener una hexagonal conectando los centros de triángulos adyacentes. Similarmente, la obtención de mallas triangulares a partir de mallas hexagonales se ilustra en la Figura 16.6.

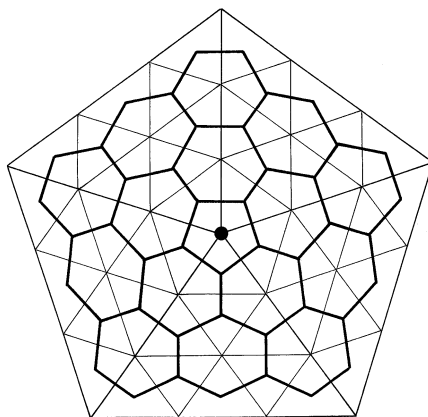


Figura 16.6: Conversión de una malla triangular en hexagonal y viceversa.

Tal como se discutió en 15.8 y 15.10 una malla triangular o hexagonal controla una superficie que consiste de parches triangulares. En general, estos parches no tienen porque ser polinómicos. Alrededor de un punto extraordinario el arreglo de los parches se ilustra en la Figura 16.7. Es más, alrededor de un punto extraordinario es posible aparear parches triangulares para constituir una malla de cuadriláteros, lo cual se ilustra en la Figura 16.4.

Por lo tanto el análisis de suavidad y el teorema 16.7 también se pueden aplicar en el caso de mallas triangulares y hexagonales.

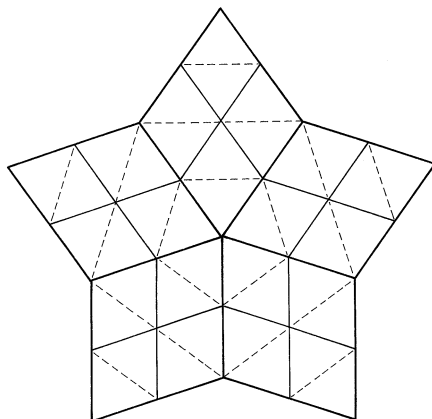


Figura 16.7: Parches triangulares (cuadrilaterales) alrededor de un punto extraordinario.

### 16.9 Ejercicios

- 1 Sea  $S$  una matriz estocástica  $n \times n$  con una columna estrictamente positiva. Demuestre que existe una constante  $\gamma \in (0, 1)$  tal que para todos los vectores  $\mathbf{v} = [v_1 \dots v_n]^t$

$$\text{diam}(S\mathbf{v}) \leq \gamma \text{diam}(\mathbf{v}) ,$$

donde  $\text{diam}(\mathbf{v})$  denota el diámetro  $\max v_i - \min v_i$ . Véase también [Michelli & Prautzsch '89].

- 2 Implemente el algoritmo de la mariposa dado por la máscara en la Figura 15.13 para mallas triangulares arbitrarias.

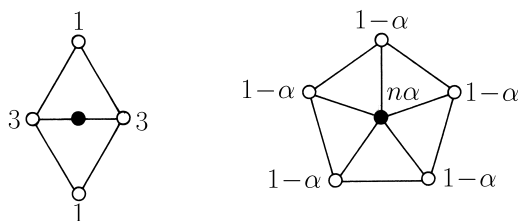


Figura 16.8: Las máscaras del algoritmo de Loop.

- 3 En 1987, Loop [Loop '87] generalizó las máscaras de Boehm para el algoritmo de subdivisión de box splines de grado cuatro considerado en 15.7. Las máscaras generalizadas de Loop se pueden aplicar a mallas

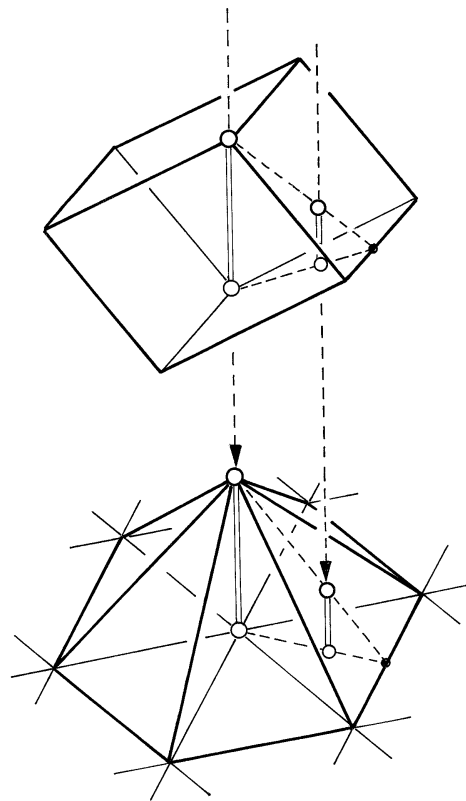
triangulares arbitrarias. Estas se ilustran en la Figura 16.8, en la cual  $n$  denota la valencia del vértice y  $\alpha$  es un parámetro libre que depende de  $n$ . Verifique el resultado de Loop, el cual establece que los planos tangentes de la superficie límite varían continuamente en puntos extraordinarios si

$$\alpha(6) = 5/8 \quad \text{y} \quad -\frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} < \alpha(n) < \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} .$$

- 4 Refine una malla triangular arbitraria subdividiendo cada triángulo uniformemente en cuatro subtriángulos. Calcule los centros de los subtriángulos. Estos puntos son los vértices de una malla hexagonal. Finalmente calcule los centroides de todos los polígonos ordinarios y extraordinarios de la malla hexagonal. Estas operaciones conforman un paso del **esquema del punto medio** para mallas triangulares. Calcule las máscaras de este esquema y compárelas con las máscaras del algoritmo de Loop.
- 5 Refine una malla hexagonal arbitraria cuadruplicando cada uno de los vértices, vea la Figura 15.11. Los nuevos vértices definen una malla hexagonal que contiene polígonos degenerados. Estos forman una malla triángulos, calcule sus centros. Este proceso es un paso del **esquema del punto medio** para mallas hexagonales. Calcule las máscaras de este esquema y compárelas con las máscaras del algoritmo de subdivisión para los half-box splines cúbicos de 15.9.
- 6 Una aplicación característica  $\mathbf{x}$  polinómica por trozos regular e invertible que corresponde a una matriz de subdivisión  $S$  alrededor de un punto extraordinario, que es  $k$  veces diferenciable, tiene grado  $\geq k + 1$ . Véase [Prautzsch & Reif '99]. Use este hecho para demostrar que una superficie polinómica por trozos  $C^2$ , obtenida por subdivisión con curvatura Gaussiana positiva en su punto extraordinario tiene necesariamente grado  $\geq 6$ .

## Parte III

# Splines Multivariados





## 17 Box splines

[17.1 Definición de box splines](#) — [17.2 Box splines como sombras](#) — [17.3 Propiedades de los box splines](#) — [17.4 Derivadas de un box spline](#) — [17.5 Propiedades de las superficies box spline](#) — [17.6 Subdivisión de superficies box spline](#) — [17.7 Convergencia bajo subdivisión](#) — [17.8 Half-box splines](#) — [17.9 Superficies half-box](#) — [17.10 Ejercicios](#)

Los box splines son funciones de densidad de las “sombras” de poliedros de dimensión mayor. Ellos incluyen a los B-splines univariados y también las superficies obtenidas por el algoritmo de promediación sobre una malla regular triangular son box splines. En este capítulo se presenta una introducción a la teoría general de los box splines y de los half-box splines. De hecho los half-box splines simétricos de grado  $3n$  son más convenientes para la construcción de superficies  $G^{2n-1}$  consistentes de parches triangulares que los box splines.

### 17.1 Definición de box splines

Un **box spline**  $s$ -variado  $B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  está determinado por  $k$  direcciones  $\mathbf{v}_i$  en  $\mathbb{R}^s$ . Por simplicidad supondremos que  $k \geq s$  y que  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  son linealmente independientes. Bajo esta hipótesis los box splines  $B_k(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$ ,  $k = s, s + 1, \dots$ , se definen por convoluciones sucesivas, análogamente a [8.1](#),

$$B_s(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/|\det[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s]| & \text{si } \mathbf{x} \in [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s][0, 1)^s \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{array} \right\}.$$
$$B_k(\mathbf{x}) = \int_0^1 B_{k-1}(\mathbf{x} - t\mathbf{v}_k) dt, \quad k > s.$$

Esto se ilustra en la [Figura 17.1](#) para  $s = 2$  y

$$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vea también la Figura 8.1.

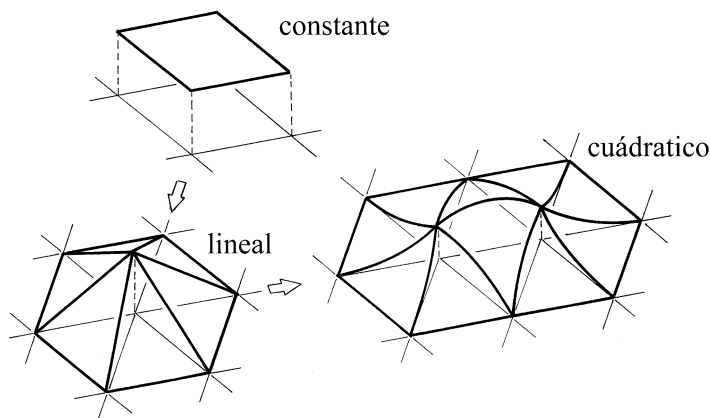


Figura 17.1: Box splines bivariados sobre una malla triangular.

Los box splines  $B_i(x)$  satisfacen la condición de normalización

$$\int_{\mathbf{R}^s} B_k(\mathbf{x}) dx = 1 ,$$

la cual puede ser verificada directamente para  $k = s$  y por inducción para  $k > s$ . Concretamente,

$$\int_{\mathbf{R}^s} \int_0^1 B_{k-1}(\mathbf{x} - t\mathbf{v}_k) dt d\mathbf{x} = \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^s} B_{k-1}(\mathbf{x} - t\mathbf{v}_k) d\mathbf{x} dt = \int_0^1 dt = 1 .$$

## 17.2 Box splines como sombras

Un box spline  $B_k(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  también se puede construir geoméricamente. Sea  $\pi$  la proyección ortogonal

$$\pi : [t_1 \dots t_k]^t \mapsto [t_1 \dots t_s]^t ,$$

y sea

$$\beta_k = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k][0, 1)^k$$

el paralelepípedo tal que  $\mathbf{v}_i = \pi \mathbf{u}_i$

Entonces  $B_k(\mathbf{x})$  representa la densidad de la “sombra” de  $\beta_k$ , es decir,

$$(1) \quad B_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\text{vol}_k \beta_k} \text{vol}_{k-s} \beta_k(\mathbf{x}) ,$$

donde

$$\beta_k(\mathbf{x}) = \pi^{-1}\mathbf{x} \cap \beta_k .$$

Para  $k = 3$  y  $s = 2$ , la construcción geométrica correspondiente se ilustra en la Figura 17.2.

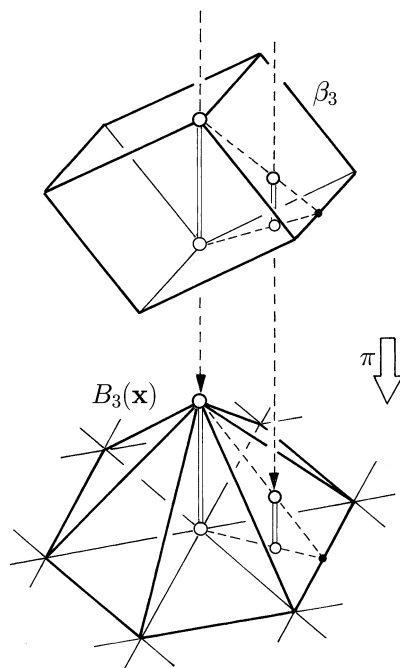


Figura 17.2: La construcción geométrica de un box spline lineal por trozos sobre una malla triangular.

Esta caracterización de los box splines se prueba por inducción: para  $k = s$  la ecuación (1) es obvia y para valores mayores de  $k$  se observa que

$$\beta_k(\mathbf{x}) = \bigcup_{s \in [0,1)} \left( (\beta_{k-1} + s\mathbf{u}_k) \cap \pi^{-1}\mathbf{x} \right) .$$

Por lo tanto si  $h$  mide la distancia entre  $\beta_{k-1}$  y  $\mathbf{u}_k + \beta_{k-1}$  a lo largo de  $k$ -ésimo vector unitario de  $\mathbb{R}^k$  (vea la Figura 17.3), se tiene que

$$\text{vol}_{k-s}\beta_k(\mathbf{x}) = \int_0^1 h \text{vol}_{k-s-1}(\beta_{k-1}(\mathbf{x} - s\mathbf{v}_k)) ds ,$$

lo cual corresponde a la definición inductiva de box splines, salvo un factor multiplicativo constante. Consecuentemente  $\text{vol}_{k-s}\beta_k(\mathbf{x})$  es un múltiplo del



box spline  $B_k(\mathbf{x})$  y como

$$\int_{\mathbf{R}^s} \text{vol}_{k-s} \beta_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \text{vol}_k \beta_k \quad \text{y} \quad \int_{\mathbf{R}^s} B_k(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 ,$$

queda demostrada la ecuación (1).  $\diamond$

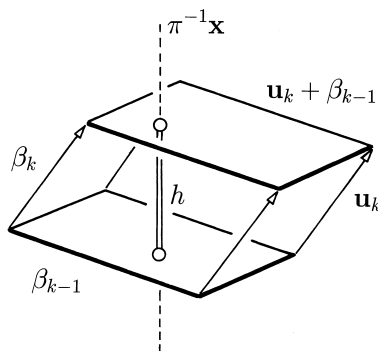


Figura 17.3: Medidas de la caja  $\beta_k$ .

**Observación 1:** De la definición geométrica (1) se deduce que el box spline  $B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  satisface la ecuación funcional

$$\int_{\mathbf{R}^s} B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{[0,1]^k} f([\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{t}) d\mathbf{t}$$

para cualquier función continua  $f(\mathbf{x})$ .

### 17.3 Propiedades de los box splines

A partir de la definición geométrica de  $B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  se desprende que

- el box spline no depende del **orden** de las direcciones  $\mathbf{v}_i$ ,
- es **positivo** sobre el conjunto convexo  $(\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)[0,1]^k$ ,
- tiene **soporte**  $\text{supp} B(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k][0,1]^k$ ,
- es **simétrico** con respecto al centro de su soporte.

Es más, sea  $B(\mathbf{x})$  la sombra de la caja  $\beta$  como en 17.2. Entonces las caras  $(s-1)$ -dimensionales de  $\beta$  proyectadas en  $\mathbf{R}^s$  forman un teselado del soporte. Esto se ilustra en la Figura 17.4 para

$$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} .$$

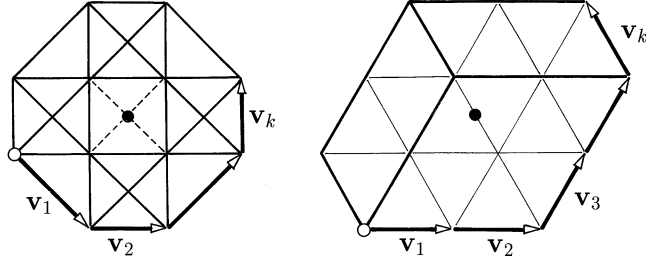


Figura 17.4: Soporte de box splines cuadráticos y cúbicos.

- El box spline  $B(\mathbf{x})$  es **polinómico** de grado  $\leq k - s$  sobre cada tesela de esta partición.

Para la prueba observe que los puntos extremos de los conjuntos convexos  $\pi^{-1}\mathbf{x} \cap \beta$  yacen en las caras  $s$ -dimensionales de  $\beta$ . Entonces un punto extremo es de la forma  $[\mathbf{x}^t \mathbf{e}^t]^t$ , donde  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{k-s}$ , depende linealmente de  $\mathbf{x}$ , sobre la proyección de la correspondiente cara  $s$ -dimensional. El volumen  $\pi^{-1}\mathbf{x} \cap \beta$  puede expresarse como una combinación lineal de determinantes de matrices  $(k-s) \times (k-s)$  cuyas columnas representan diferencias de los puntos extremos  $\mathbf{e}$ . Luego, el volumen es un polinomio de grado  $\leq k - s$  en  $\mathbf{x}$  sobre cada tesela de la partición dada.  $\diamond$

## 17.4 Derivadas de un box spline

De la definición inductiva de los box splines se desprende que la restricción del box spline  $B(y) = B(\mathbf{x} + y\mathbf{v}_r)$  es constante por trozos en  $y$  si  $\mathbf{v}_r$  no pertenece al espacio generado por  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r^*, \dots, \mathbf{v}_k\}$ . Si  $\mathbf{v}_r$  pertenece a este espacio, entonces  $B(y)$  es continuo pues se puede obtener por convolución a partir de

$$B^*(y) = B(\mathbf{x} + y\mathbf{v}_r | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k) ,$$

esto es,

$$\begin{aligned} B(y) &= \int_0^1 B^*(y-t)dt = \int_{y-1}^y B^*(t)dt \\ (2) \quad &= \int_{-\infty}^y B^*(t) - B^*(t-1)dt . \end{aligned}$$

Es más la **derivada direccional** respecto a  $\mathbf{v}_r$  está dada por

$$(3) \quad B'(y)|_{y=0} = B^*(0) - B^*(-1) .$$

Si  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r^*, \dots, \mathbf{v}_k$  generan  $\mathbf{R}^s$  para  $r = 1, \dots, s$ , entonces  $B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  es continuo y sus derivadas direccionales se pueden escribir como una combinación de trasladados de los box splines  $B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k)$ . Aplicando este argumento repetidamente se obtiene

*$B(\mathbf{x})$  es  $r$  veces continuamente diferenciable si todos los subconjuntos de  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  obtenidos por eliminación de  $r+1$  vectores  $\mathbf{v}_i$  generan  $\mathbf{R}^s$ .*

**Observación 2:** Las expresiones anteriores se pueden utilizar para dar una prueba inductiva de las propiedades polinómicas de  $B(\mathbf{x})$ . Concretamente, si  $B^*(\mathbf{x})$  es polinómica de grado  $\leq k - s - 1$  sobre cada tesela de la partición, entonces  $B^*(\mathbf{x} - \mathbf{v}_r)$  también lo es. Por (3),  $B(y)$  es polinómica de grado  $\leq k - s$  en cada dirección  $\mathbf{v}_r$  y por lo tanto en  $\mathbf{x}$ .

**Observación 3:** El box spline cuadrático  $C^1$  cuyo soporte se ilustra en el lado izquierdo de la Figura 17.4 se llama el **elemento de Zwart-Powell**.

## 17.5 Propiedades de las superficies box spline

De aquí en adelante supondremos que las direcciones  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  pertenecen a  $\mathbf{Z}^s$ , y que como antes,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  generan  $\mathbf{R}^s$ .

Claramente, la suma de los trasladados  $B(\mathbf{x} - \mathbf{j}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s)$ ,  $\mathbf{j} \in [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s]\mathbf{Z}^s$ , es

$$(4) \quad \gamma = 1/|\det[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s]| .$$

Como  $\mathbf{Z}^s$  se puede descomponer en un número finito, digamos  $m$ , de subconjuntos de la forma  $\mathbf{i} + [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s]\mathbf{Z}^s$ , vea la Figura 17.5, se tiene que

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} B(\mathbf{x} - \mathbf{i}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s) = m\gamma .$$

Como  $\int_0^1 m\gamma dt = m\gamma$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} m\gamma &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} B(\mathbf{x} - \mathbf{i}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k) \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} B(\mathbf{x} - \mathbf{i}|\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_s \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k) , \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector unitario. Finalmente, por (4) la última suma es uno y entonces se tiene

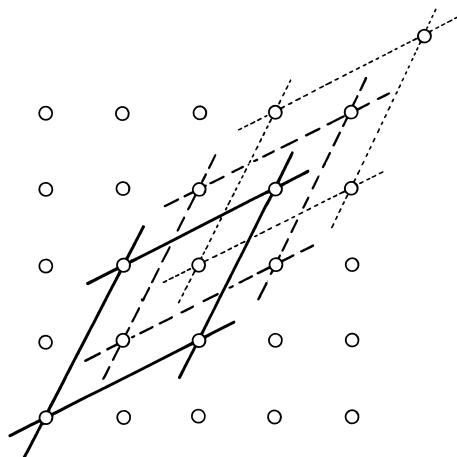


Figura 17.5: Descomposición de  $\mathbf{Z}^s$  en trasladados de mallas más gruesas.

los desplazamientos (enteros) de cualquier box spline  $B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  forman una **partición de la unidad**.

Por lo tanto cualquier **superficie box spline**

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{c}_i B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$$

es una combinación afín de sus **puntos de control**  $\mathbf{c}_i$ . Esta superficie es **afinmente invariante** esto significa que las imágenes de los puntos de control bajo una aplicación afín son los puntos de control de la superficie imagen.

Como los box splines son no negativos, cada punto  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  de la superficie es una **combinación convexa** de sus puntos de control y por lo tanto yace en la **cápsula convexa** de estos puntos.

Es más, los  $B(\mathbf{x} - \mathbf{i}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s$ , son linealmente dependientes si  $|\det[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s]| \neq 1$ . Como el box spline no depende del orden de los  $\mathbf{v}_i$ , esta secuencia es linealmente dependiente si existe una subsecuencia independiente  $\mathbf{v}_{i_1} \dots \mathbf{v}_{i_s}$  tal que  $|\det[\mathbf{v}_{i_1} \dots \mathbf{v}_{i_s}]| \neq 1$ . El recíproco también es cierto [Dahmen & Micchelli '83, '85] y puede verificarse por inducción. Véase [Jia '83, '85]. En resumen, se tiene el siguiente teorema

$B(\mathbf{x} - \mathbf{i}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s$ , es linealmente independiente sobre cada subconjunto abierto de  $\mathbf{R}^s$  si y sólo si  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]$  es **unimodular**,

Una matriz  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]$  se dice unimodular si el determinante de cada submatriz  $[\mathbf{v}_{i_1} \dots \mathbf{v}_{i_s}]$  es 1, 0 o -1.

Si las direcciones  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$  generan  $\mathbf{R}^s$ , entonces podemos calcular la **derivada direccional**  $D_{\mathbf{v}_k} \mathbf{s}$  de  $\mathbf{s}$  con respecto a  $\mathbf{v}_k$ . Usando la fórmula de la derivada (3) de 17.3 se obtiene

$$(5) \quad D_{\mathbf{v}_k} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \nabla_{\mathbf{v}_k} \mathbf{c}_i B(\mathbf{x} - \mathbf{i} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_{k-1}) ,$$

donde  $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-\mathbf{v}}$ . Es más, si para todo  $j = 1, \dots, k$  las  $k-1$  direcciones  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j^*, \dots, \mathbf{v}_k$  generan  $\mathbf{R}^s$ , entonces  $B(\mathbf{x})$  es continua, como se demuestra en 17.3 y sus trasladados generan los polinomios lineales. En particular, si

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{i} + \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_k)$$

denota el **centro** del soporte  $\text{supp} B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$ , entonces

$$(6) \quad \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{m}_i B(\mathbf{x} - \mathbf{i}) = \mathbf{x} .$$

De hecho, por simetría, esta ecuación se verifica para  $\mathbf{x} = \mathbf{m}_o$  para todo  $j = 1, \dots, s$  y se tiene

$$D_{\mathbf{v}_j} \sum \mathbf{m}_i B(\mathbf{x} - \mathbf{i}) = \mathbf{v}_j .$$

Como la representación box spline es afinmente invariante, para todo polinomio lineal  $l(\mathbf{x})$  se tiene

$$l(\mathbf{x}) = \sum l(\mathbf{m}_i) B(\mathbf{x} - \mathbf{i}) .$$

Nos referimos también a esta propiedad como la **precisión lineal** de la representación box spline. Vea los Ejercicios 1 y 2.

## 17.6 Subdivisión de superficies box spline

Cualquier caja  $\beta = [\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_k][0, 1)^k$  de  $\mathbf{R}^k$  se puede particionar en  $2^k$  trasladados de la caja escalada  $\hat{\beta} = \beta/2$  generada por las direcciones  $\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{u}_i/2$ . En [Prautzsch '84a] se usa esta observación para probar que la “sombra” no normalizada

$$M_\beta(\mathbf{x}) = \text{vol}_{k-s}(\pi^{-1} \mathbf{x} \cap \beta)$$

de  $\beta$  bajo la proyección de

$$\pi : [t_1 \dots t_k]^t \mapsto [t_1 \dots t_s]^t$$

se puede expresar como una combinación lineal de los trasladados de los box splines escalados

$$M_{\beta}(\mathbf{x}) = 2^{s-k} M_{\beta}(2\mathbf{x}) .$$

Por lo tanto, si las proyecciones  $\mathbf{v}_i = \pi \mathbf{u}_i$  yacen en  $\mathbf{Z}^s$ , entonces cualquier superficie box spline

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{c}_i^1 B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$$

con  $B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  también tiene una representación más “fina”

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{c}_i^2 B(2\mathbf{x} - \mathbf{i}) .$$

Los nuevos puntos de control  $\mathbf{c}_i^2$  pueden ser calculados iterativamente a partir de los puntos de control iniciales  $\mathbf{c}_i^1$  por medio de la relación de recurrencia

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^0(\mathbf{i}) &= \begin{cases} \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{i}/2 \notin \mathbf{Z}^s \\ \mathbf{c}_{\mathbf{i}/2}^1 & \text{si } \mathbf{i}/2 \in \mathbf{Z}^s \end{cases} , \\ \mathbf{d}^r(\mathbf{i}) &= \frac{1}{2} \left( \mathbf{d}^{r-1}(\mathbf{i}) + \mathbf{d}^{r-1}(\mathbf{i} - \mathbf{v}_r) \right) , \quad r = 1, \dots, k , \\ \mathbf{c}_i^2 &= 2^s \mathbf{d}^k(\mathbf{i}) . \end{aligned}$$

Para la prueba se puede utilizar una técnica similar a la presentada en [Prautzsch '84a]: se subdivide cada caja  $\beta_{r-1} = [\hat{\mathbf{u}}_1 \dots \hat{\mathbf{u}}_{r-1} \mathbf{u}_r \dots \mathbf{u}_k][0, 1)^k$  en  $\beta_r$  y  $\hat{\mathbf{u}}_r + \beta_r$ . Las sombras asociadas satisfacen

$$M_{\beta_{r-1}}(\mathbf{x}) = M_{\beta_r}(\mathbf{x}) + M_{\beta_r}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{v}}_r) ,$$

donde  $\hat{\mathbf{v}}_r = \mathbf{v}_r/2$ . Dividiendo esta ecuación por  $\text{vol}\beta_{r-1} = 2 \text{vol}\beta_r$ , se obtiene

$$B_{r-1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( B_r(\mathbf{x}) + B_r(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{v}}_r) \right) ,$$

donde  $B_r(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{v}}_1 \dots \hat{\mathbf{v}}_r \mathbf{v}_{r+1} \dots \mathbf{v}_k)$ . Usando esta identidad repetidamente y la relación

$$B(\mathbf{x}|\hat{\mathbf{v}}_1 \dots \hat{\mathbf{v}}_k) = 2^s B(2\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$$

resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{c}_i^1 B_0(\mathbf{x} - \mathbf{i}) \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{d}^r(\mathbf{i}) B_r(\mathbf{x} - \mathbf{i}/2) , \quad r = 0, 1, \dots, k , \end{aligned}$$

o sea

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{c}_i^2 B_0(2\mathbf{x} - \mathbf{i}) ,$$

lo cual concluye la prueba.  $\diamond$

**Observación 4:** La suma de los trasladados  $B_r(\mathbf{x} - \mathbf{j})$  sobre  $\mathbf{j} \in \mathbf{Z}^s/2$  y  $r \geq s$  es  $2^s$  debido a que

$$B_r(\mathbf{x} - \mathbf{j}) = 2^s B(2\mathbf{x} - 2\mathbf{j} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r 2\mathbf{v}_{r+1} \dots 2\mathbf{v}_k) .$$

**Observación 5:** Si  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s] \mathbf{Z}^s = \mathbf{Z}^s$ , entonces  $2^s \mathbf{d}_i^s = \mathbf{c}_{[i/2]}^1$  y cada punto  $\mathbf{c}_i^2$  es una combinación convexa de los puntos iniciales  $\mathbf{c}_i^1$ . Véase también el Ejercicio 7.

**Observación 6:** Es fácil la extensión de algoritmo de subdivisión, para obtener una representación más fina, es decir, para cualquier  $m \in \mathbf{N}$  se tiene

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \mathbf{c}_i^m B(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) ,$$

donde los “puntos”  $\mathbf{c}_i^m = m^s \mathbf{d}^k(\mathbf{i})$  se pueden calcular sucesivamente a través de las fórmulas

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^0(\mathbf{i}) &= \begin{cases} \mathbf{o} & \text{si } \mathbf{i}/m \notin \mathbf{Z}^s \\ \mathbf{c}_{\mathbf{i}/m}^1 & \text{si } \mathbf{i}/m \in \mathbf{Z}^s \end{cases} , \text{ y} \\ \mathbf{d}^r(\mathbf{i}) &= \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} \mathbf{d}^{r-1}(\mathbf{i} - l\mathbf{v}_r) , \quad r = 1, \dots, k . \end{aligned}$$

Esta forma y versiones más generales del algoritmo de subdivisión se pueden encontrar en [Cohen et al. '84] y [Dahmen & Micchelli '84]. Estos trabajos ofrecen derivaciones algebraicas del algoritmo.

**Observación 7:** La derivación geométrica del algoritmo de subdivisión presentada arriba, muestra que cada punto de control  $\mathbf{c}_j^m$  depende de los puntos de control  $\mathbf{c}_i^1$ , para los cuales  $\text{supp} B(m\mathbf{x} - \mathbf{j}) \subset \text{supp} B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$ . Entonces su cantidad está acotada por un número  $h$  que no depende de  $m$  y  $\mathbf{j}$ . Por lo tanto

$$(7) \quad \|\mathbf{c}_j^m\| \leq h \sup_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \|\mathbf{c}_i^1\| .$$

**Observación 8:** El algoritmo de subdivisión se puede utilizar una segunda vez para calcular los puntos de control de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  sobre cualquier malla más fina  $\mathbf{Z}^s/(mn)$ . Como la partición de una caja  $\beta$  en trasladados de cajas escaladas

$\beta/(mn)$  es única, los puntos de control  $\mathbf{c}_i^{mn}$  resultantes se pueden calcular a partir de los  $\mathbf{c}_i^1$  por una sola aplicación del algoritmo de subdivisión.

**Observación 9:** Similarmente se observa que los puntos  $\mathbf{c}_i^m$  no dependen del orden de las direcciones  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ , es decir, del orden de los pasos de promediación.

## 17.7 Convergencia bajo subdivisión

Por medio de la aplicación repetida del algoritmo de subdivisión de 17.6 se obtienen los puntos de control de la representación refinada

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^s} \mathbf{c}_i^m B(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) \quad , \quad \text{donde} \quad B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k) \quad ,$$

de una superficie  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  sobre cualquier malla escalada  $\mathbb{Z}^s/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Una propiedad importante de este proceso es que, bajo condiciones adecuadas sobre  $V = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]$  los puntos  $\mathbf{c}_i^m$  convergen a la superficie  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ .

Sea  $h$  como en (7) y

$$M = \sup\{\|\nabla_{\mathbf{v}_r} \mathbf{c}_i^1\|, \mathbf{i} \in \mathbb{Z}^s \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r^*, \dots, \mathbf{v}_k \quad \text{generan} \quad \mathbb{R}^s\} \quad .$$

Entonces se tiene el siguiente teorema

$$\text{Si } [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k] \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}^s, \text{ entonces } \|\mathbf{c}_i^m - \mathbf{s}(\mathbf{x})\| \leq hM/m \text{ para todo } \mathbf{i}, \text{ tal que } B(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) > 0.$$

Este resultado fue obtenido por de Boor et al. [de Boor et al. '93] quienes también demuestran que una condición suficiente para que la convergencia sea cuadrática es que  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_i^* \dots \mathbf{v}_k] \mathbb{Z}^{k-1} = \mathbb{Z}^s$  y que  $B(\mathbf{x} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  sea diferenciable.

Para la prueba ordenamos  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  de manera que  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r^*, \dots, \mathbf{v}_k$  generen  $\mathbb{R}^s$  si y sólo si  $r \geq q$  para algún  $q \in \{1, \dots, k+1\}$ . Entonces  $\mathbb{R}^s$  es la suma directa

$$\mathbb{R}^s = \mathbf{v}_1 \mathbb{R} \oplus \dots \oplus \mathbf{v}_{q-1} \mathbb{R} \oplus [\mathbf{v}_q \dots \mathbf{v}_k] \mathbb{R}^{k-q} \quad .$$

Es más, cualquier punto  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  de la superficie yace en la cápsula convexa de los puntos de control  $\mathbf{c}_i^m$ , con  $m$  fijo y  $B(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) > 0$ . Veremos que los diámetros de estas cápsulas convexas tienden a cero.

Como  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k] \mathbb{Z}^k = \mathbb{Z}^s$  y el generado de  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k]$  no coincide con  $\mathbb{R}^s$  para  $r = 1, \dots, q-1$ , entonces resulta de  $B(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) > 0$  que  $B(m\mathbf{x} - \mathbf{k}) = 0$  para todo  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^s$  tal que  $\mathbf{i} - \mathbf{k}$  no pertenece al generado de  $\mathbf{v}_q \dots \mathbf{v}_k$ .



Por lo tanto, si  $\mathbf{c}_i^m$  y  $\mathbf{c}_k^m$  son dos puntos de control de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  entonces  $\mathbf{i} - \mathbf{k} = \mathbf{v}$  pertenece al generado  $[\mathbf{v}_q \dots \mathbf{v}_k]$  y  $+\mathbf{v}$  o  $-\mathbf{v}$  pertenecen a  $\text{supp}B(\mathbf{x})$ .

Como  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}^k = \mathbf{Z}^s$  y como  $\mathbf{Z}^s$  es la suma directa

$$\mathbf{v}_1\mathbf{Z} \oplus \dots \oplus \mathbf{v}_{q-1}\mathbf{Z} \oplus [\mathbf{v}_{q-1} \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}^{k-q} ,$$

se tiene que cualquier  $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}^s \cap \text{span} [\mathbf{v}_q \dots \mathbf{v}_k]$  se puede expresar como una suma de vectores posiblemente repetidos del conjunto  $\{\mathbf{v}_q, -\mathbf{v}_q, \dots, \mathbf{v}_k, -\mathbf{v}_k\}$ . Por lo tanto cualquier diferencia  $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{c}_i^m$  se puede expresar como una suma de diferencias  $\nabla_{\mathbf{v}_r}\mathbf{c}_i^m$ ,  $r = q, \dots, k$ . Entonces para terminar la prueba es suficiente acotar las diferencias  $\nabla_{\mathbf{v}_r}\mathbf{c}_i^m$ .

Para  $r \geq q$  podemos omitir el  $r$ -ésimo paso de promediación del algoritmo de subdivisión de 17.6, obteniéndose (haciendo caso omiso del factor  $m$ ) el esquema de diferencias  $\nabla_{\mathbf{v}_r}$ , véase 15.5 y 15.6. Esto significa: si aplicamos el algoritmo de subdivisión 17.6 omitiendo el  $r$ -ésimo paso de promediación a las diferencias  $\nabla_{\mathbf{v}_r}\mathbf{c}_i^1$  obtenemos las diferencias divididas  $m\nabla_{\mathbf{v}_r}\mathbf{c}_i^m$ .

Entonces de (7) resulta

$$\sup_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} \|\nabla_{\mathbf{v}_r}\mathbf{c}_i^m\| \leq hM/m ,$$

lo cual termina la prueba.  $\diamond$

En caso contrario, cuando  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}^k \neq \mathbf{Z}^s$ , entonces no hay convergencia, como verificaremos para  $s(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})$ .

Concretamente, si existe un punto  $\mathbf{i}$  de la malla  $\mathbf{Z}^s$ , el cual no yace en  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}^k$ , entonces ningún  $\mathbf{j} \in J = \mathbf{i} + [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_s]\mathbf{Z}^s$  yace en  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}^k$ . Como  $\sum_{\mathbf{j} \in J} B(\mathbf{x} - \mathbf{j}) > 0$ , (vea (4) de 17.6), para cada  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^s$  existe  $\mathbf{j} \in J$  tal que  $B(\mathbf{x} - \mathbf{j}) > 0$ .

Subdividiendo un box spline  $B(\mathbf{x})$  con el algoritmo de 17.5 obtenemos puntos de control  $c_i^m$  tales que

$$B(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^s} c_i^m B(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) .$$

La derivación geométrica del algoritmo de 17.6 demuestra que  $c_i^m \neq 0$  si y sólo si  $\mathbf{i} \in [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}_m^k$ .

Entonces, si  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]\mathbf{Z}^k \neq \mathbf{Z}^s$  o  $J \neq \emptyset$ , entonces para todo  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^s$  existe un punto de control  $c_j^m = 0$  tal que  $B(m\mathbf{x} - \mathbf{j}) > 0$ . Para cada  $\mathbf{x}$ , tal que  $B(\mathbf{x}) > 0$ , estos puntos de control, que son cero, no convergen a  $B(\mathbf{x})$  cuando  $m$  tiende a infinito.

## 17.8 Half-box splines

Los half-box splines se definen sobre mallas triangulares generadas por los vectores  $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^t$ ,  $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^t$  y  $\mathbf{e}_3 = [1 \ 1]^t$ . En 15.10, estos splines fueron introducidos, en el contexto de la subdivisión de mallas hexagonales. En esta sección presentamos la definición inductiva propuesta en [Sabin '77] y su interpretación geométrica.

Subdividiendo el cuadrado unitario a lo largo de su diagonal en la dirección e se obtienen dos triángulos

$$\Delta = \{\mathbf{x} | 0 \leq x \leq y < 1\} \quad \text{y} \quad \nabla = \{\mathbf{x} | 0 \leq y < x < 1\} .$$

Estos triángulos determinan los siguientes half-box splines, de soporte constante

$$H_{\Delta}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Delta \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y

$$H_{\nabla}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \nabla \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} .$$

Análogamente al caso de los box spline, los half-box splines de orden superior se pueden obtener por medio de convoluciones sucesivas,

$$H_{\Delta}(\mathbf{x} | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k) = \int_0^1 H_{\Delta}(\mathbf{x} - t\mathbf{v}_k | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_{k-1}) dt$$

y

$$H_{\nabla}(\mathbf{x} | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k) = \int_0^1 H_{\nabla}(\mathbf{x} - t\mathbf{v}_k | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_{k-1}) dt ,$$

donde  $k \geq 3$ . Supondremos que los  $\mathbf{v}_i$ , son direcciones unitarias

$$\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k \in \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} .$$

Note que la suma de los half-box splines  $H_{\Delta}(\mathbf{x} | \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k)$  y  $H_{\nabla}(\mathbf{x} | \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k)$  es el box spline  $B(\mathbf{x} | \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k)$ , inclusive para  $k = 2$ . La Figura 17.6 ilustra dos half-box splines  $C^1$ .

Similarmente a lo estudiado para box splines en 17.1, se obtienen propiedades para los half-box splines. Por razones de simetría listamos solamente las propiedades correspondientes a  $H(\mathbf{x}) = H_{\Delta}(\mathbf{x} | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k)$ .

Los half-box splines están **normalizados**

$$\int_{\mathbf{R}^2} H(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1/2 .$$

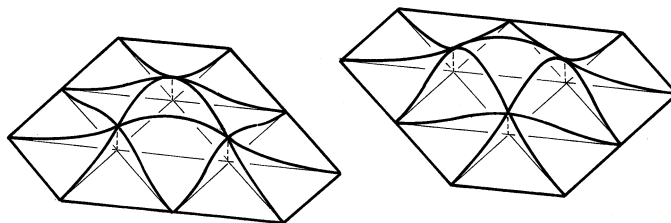


Figura 17.6: Dos half-box splines  $C^1$  cúbicos por trozos.

Cualesquiera  $k$  direcciones independientes  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^k$  definen un half-box spline

$$\vartheta = \left\{ \sum \mathbf{u}_i \alpha_i \mid 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ y } \alpha_2, \dots, \alpha_k \in [0, 1] \right\} .$$

La **densidad de la sombra** de esta “media caja” representa un half-box spline. Esto es, si  $\pi$  denota la proyección de  $\mathbf{R}^k$  sobre  $\mathbf{R}^2$  que aplica  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  en  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ , entonces

$$H(\mathbf{x} \mid \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k) = \frac{1}{2 \text{vol}_k \vartheta} \text{vol}_{k-2}(\pi^{-1} \mathbf{x} \cap \vartheta) .$$

A partir de esta construcción geométrica se desprende que  $H(\mathbf{x})$  satisface las siguientes propiedades

- *no depende del orden de  $\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k$ ,*
- *es **positivo** sobre el conjunto convexo  $\Delta + [\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k](0, 1)^{k-2}$ ,*
- *tiene como **soporte** a  $\text{clausura}(\Delta) + [\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k][0, 1]^{k-2}$ ,*
- *tiene **derivada direccional***

$$D_{\mathbf{v}_r} H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} \mid \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k) - H(\mathbf{x} - \mathbf{v}_r \mid \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k)$$

*con respecto a  $\mathbf{v}_r$ ,  $r \geq 3$  ,*

- *es  $r$  veces **continuamente diferenciable** si todos los subconjuntos de  $\{\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k\}$  obtenidos omitiendo  $r + 1$  vectores  $\mathbf{v}_i$  generan  $\mathbf{R}^2$ .*
- *es **polinómica** de grado total  $\leq k - 2$  sobre cada triángulo  $\mathbf{i} + \Delta$ , para  $\mathbf{i} \in \mathbf{Z}^2$ .*

**Observación 10:** Los half-box splines  $H_{\Delta}(\mathbf{x} \mid \mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \dots \mathbf{e}_3)$  son continuamente diferenciables  $2k - 1$  veces y tienen grado  $\leq 3k$ .

## 17.9 Superficies half-box

La suma de cualquier par de half-box splines

$$\begin{aligned} H_{\Delta}(\mathbf{x}) &= H(\mathbf{x}|\mathbf{e}_3\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k) , \\ H_{\nabla}(\mathbf{x}) &= H(\mathbf{x}|\mathbf{e}_3\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k) \end{aligned}$$

es el box spline  $B(\mathbf{x}|\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k)$ . Por lo tanto los trasladados  $H_{\Delta}(\mathbf{x} - \mathbf{i})$  y  $H_{\nabla}(\mathbf{x} - \mathbf{i})$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2$ , forman una **partición de la unidad**.

Por lo tanto cualquier **superficie half-box spline**

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} (\mathbf{c}_i^{\Delta} H_{\Delta}(\mathbf{x} - \mathbf{i}) + \mathbf{c}_i^{\nabla} H_{\nabla}(\mathbf{x} - \mathbf{i}))$$

es una combinación afín de sus **puntos de control** y por lo tanto **afinmente invariante**. Esto significa que bajo cualquier aplicación afín las imágenes de los puntos de control, determinan la superficie imagen de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ .

Como los half-box splines son no negativos,  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  es una combinación convexa de sus puntos de control y por lo tanto yace en la **cápsula convexa** de éstos.

Si conectamos los puntos de control  $\mathbf{c}_i^{\Delta}$  y  $\mathbf{c}_j^{\nabla}$  cuyos triángulos asociados  $\mathbf{i} + \Delta$  y  $\mathbf{j} + \nabla$  tienen una arista en común, entonces obtenemos una malla hexagonal, la malla de control de  $\mathbf{s}$ . La Figura 17.7 ilustra un ejemplo en forma esquemática.

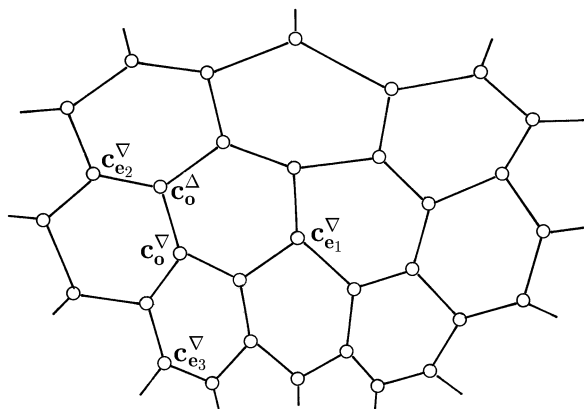


Figura 17.7: Una malla de control hexagonal.

La **derivada direccional** de  $\mathbf{s}$  con respecto a  $\mathbf{v}_r$  se puede calcular a través

de la fórmula de 17.8 para un half-box spline,

$$D_{\mathbf{v}_r} \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^s} \left( \nabla_{\mathbf{v}_r} \mathbf{c}_i^\Delta H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i} | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k) \right. \\ \left. + \nabla_{\mathbf{v}_r} \mathbf{c}_i^\nabla H_\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{i} | \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k) \right) ,$$

donde  $\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{c}_i = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_{i-\mathbf{v}}$ .

Si  $H_\Delta(\mathbf{x})$  es continuo o equivalentemente, si dos de las direcciones  $\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_k$ , son independientes, entonces cualquier derivada direccional de la suma de los trasladados  $\sum H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i})$ , es cero. Por lo tanto esta suma es una función constante. Por simetría y debido a que los half-box splines  $H_\Delta$  y  $H_\nabla$  forman una partición de la unidad se tiene

$$(8) \quad \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} H_\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{i}) = 1/2 .$$

En particular, esto implica que los trasladados de  $H_\Delta$  y  $H_\nabla$  son **linealmente dependientes**.

Además, si el box spline

$$B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x} | \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{v}_3 \dots \mathbf{v}_k) = H_\Delta(\mathbf{x}) + H_\nabla(\mathbf{x})$$

es continuo, entonces a partir de (6) en 17.5 se obtiene

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} \mathbf{m}_i (H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i}) + H_\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{i})) = \mathbf{x} ,$$

donde  $\mathbf{m}_i$  es el centro de  $\text{supp} B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$ . Si  $H_\Delta$  es continuo, usando (8) para cualquier  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} ((\mathbf{m}_i + \mathbf{v}) H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i}) + (\mathbf{m}_i - \mathbf{v}) H_\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{i})) = \mathbf{x} .$$

Por ejemplo, si  $\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)/6$ , los puntos  $\mathbf{m}_i^\Delta = \mathbf{m}_i + \mathbf{v}$  y  $\mathbf{m}_i^\nabla = \mathbf{m}_i - \mathbf{v}$  forman una malla hexagonal regular tal como se ilustra en la Figura 17.8.

Como la representación de los half-box splines es afinmente invariante, para cualquier polinomio lineal  $l(\mathbf{x})$ , se tiene

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} (l(\mathbf{m}_i^\Delta) H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i}) + l(\mathbf{m}_i^\nabla) H_\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{i})) .$$

Nos referimos a esta propiedad como **precisión lineal** de la representación half-box spline.

**Observación 11:** Cualquier superficie half-box spline

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} (\mathbf{c}_i^\Delta H_\Delta(\mathbf{x} - \mathbf{i}) + \mathbf{c}_i^\nabla H_\nabla(\mathbf{x} - \mathbf{i}))$$

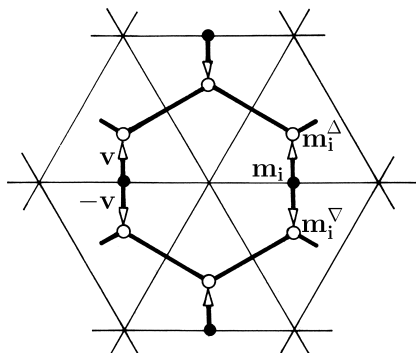


Figura 17.8: La malla hexagonal de “centros”  $\mathbf{m}_i^\Delta$  y  $\mathbf{m}_i^\nabla$ .

también tiene una representación “más fina”

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} (\mathbf{d}_i^\Delta H_\Delta(m\mathbf{x} - \mathbf{i}) + \mathbf{d}_i^\nabla H_\nabla(m\mathbf{x} - \mathbf{i}))$$

para cualquier  $m \in \mathbb{N}$ . En particular, para  $m = 2^k, k \in \mathbb{N}$ , los nuevos puntos de control  $\mathbf{d}_i^\Delta$  y  $\mathbf{d}_i^\nabla$  (los cuales dependen de  $m$ ) pueden calcularse por  $k$  aplicaciones repetidas del algoritmo de subdivisión 15.9. Similarmente al algoritmo de subdivisión para box splines de 17.6, este algoritmo tiene una generalización inmediata que permite generar los puntos  $\mathbf{d}_i^\Delta$  y  $\mathbf{d}_i^\nabla$  para cualquier  $m \in \mathbb{N}$ . Dejamos como un ejercicio la formulación y prueba de esta generalización.

### 17.10 Ejercicios

- Suponga que las direcciones  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{Z}^s$  generan  $\mathbb{R}^s$  y que el box spline asociado  $B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  es  $r$  veces continuamente diferenciable. Dado un polinomio  $c(\mathbf{x})$  de grado total  $d \leq r + 1$  demuestre por inducción sobre  $k$  que

$$s(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^s} c(\mathbf{i})B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$$

también es un polinomio de grado  $d$ . Use la fórmula (5) de 17.5

- 2 Bajo las mismas condiciones del Ejercicio 1 verifique que la aplicación  $c(\mathbf{x}) \mapsto \sum c(\mathbf{i})B(\mathbf{x} - \mathbf{i})$  es lineal y regular en el espacio de los polinomios de grado  $\leq r + 1$ .
- 3 Pruebe por inducción que el conjunto de los polinomios  $B(\mathbf{x} - \mathbf{i} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^s$  es linealmente independiente si y sólo si  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k]$  es unimodular.
- 4 Verifique la siguiente relación de recurrencia para box splines

$$B(\mathbf{x} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k) = \frac{1}{k-s} \sum_{r=1}^k (\alpha_r B(\mathbf{x} | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k) + (1 - \alpha_r) B(\mathbf{x} - \mathbf{v}_r | \mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_r^* \dots \mathbf{v}_k)),$$

donde  $\mathbf{x} = \sum_{r=1}^k \alpha_r \mathbf{v}_r$ . Esta fórmula fue descubierta por de Boor y Höllig [de Boor & Höllig '82]. En 1984 Boehm encontró una prueba geométrica y descubrió un mecanismo de evaluación de los box splines similar al algoritmo de de Boor [Boehm '84a].

- 5 Dada la malla de control hexagonal de una superficie half-box  $C^1$ , sus puntos de Bézier se pueden calcular usando las tres máscaras de la Figura 17.9 y de las versiones simétricas de estas máscaras. La Figura 17.9 también indica esquemáticamente la parte relevante de la malla hexagonal y un triángulo de Bézier cuyo punto de control sólido es calculado por la máscara. Use estas máscaras para calcular la representación de Bézier de un half-box spline cúbico, verificando que obtiene el resultado correcto.

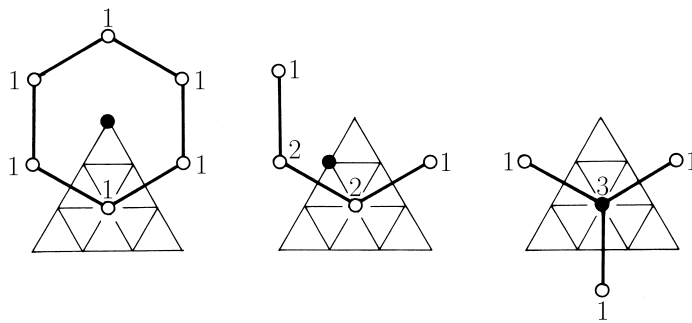


Figura 17.9: Máscaras para el cálculo de puntos de Bézier.

- 6 Dada una superficie cuártica  $C^2$  con representación box spline  $\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}^2} c_{\mathbf{i}} B(\mathbf{x} - \mathbf{i} | \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3)$  sobre  $\mathbb{R}^2$  su malla de Bézier se puede calcular como sigue. En primer lugar se subdivide la malla de control por medio del operador de refinamiento  $\mathcal{R}$ . (Vea la Observación 10 de 15.7). A

continuación se usa la máscara ilustrada en la Figura 17.10 para calcular los puntos de Bézier a través de la malla subdividida [Boehm '83, Prautzsch & Boehm '02].

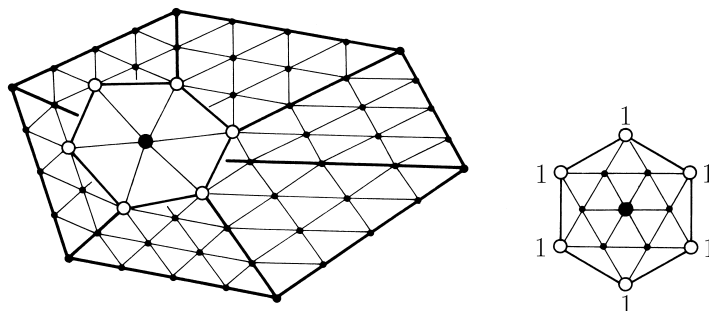


Figura 17.10: Cálculo de los puntos de Bézier de una superficie box spline cuártica  $C^2$ .

- 7 Verifique que los puntos de control  $\mathbf{c}_i^m$  calculados con el algoritmo de subdivisión de la Observación 5 de 17.6, son combinaciones convexas de los puntos de control iniciales  $\mathbf{c}_i^1$  si

$$[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k] \mathbf{Z}^k = \mathbf{Z}^s.$$

- 8 Sean  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  direcciones de  $\mathbb{R}^2$  tales que los ángulos entre  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_r$  para  $r = 1, \dots, k$  crecen y están acotados por  $180^\circ$ . Demuestre que la frontera del soporte del box spline  $B(\mathbf{x}|\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)$  está formada por los puntos

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{r-1} + \mathbf{v}_r \alpha$$

y

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}_k + \dots + \mathbf{v}_{r+1} + \mathbf{v}_r \alpha,$$

donde  $r = 1, \dots, k$  y  $\alpha \in [0, 1]$  como se ilustra en la Figura 17.2.

- 9 Sea  $S$  el soporte de un box spline y suponga, por simplicidad, que el spline es bivariado. Demuestre que la intersección de  $S$  con cualquier trasladado de  $S$  es el soporte de algún box spline.

- 10 Sea  $k = 4$  y  $[\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Verifique que los puntos  $\mathbf{c}_i^2$  obtenidos a través del algoritmo de subdivisión de 17.6 también pueden ser calculados a través del siguiente esquema de promediación:

1. Calcule los puntos medios de todas las aristas  $\mathbf{c}_i^1 \mathbf{c}_{i-\mathbf{v}_1}^1$  y  $\mathbf{c}_i^1 \mathbf{c}_{i-\mathbf{v}_2}^1$ .



2. Conecte los puntos medios de cualesquiera dos aristas que tienen un punto extremo en común. Estas son las “nuevas aristas”.
3. Los puntos medios de las nuevas aristas son los puntos  $\mathbf{c}_i^2$ .

Este esquema fue introducido en [Sabin '86] y se ilustra en la Figura 17.11. Su aplicación a mallas de control arbitraria se estudia en [Peters & Reif '97] .

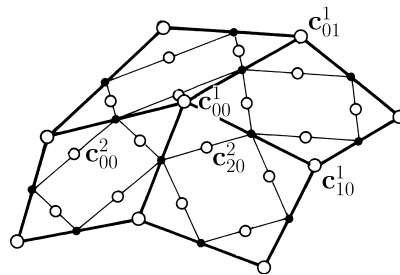


Figura 17.11: Un esquema elemental de subdivisión.

- 11 Deduzca el algoritmo de subdivisión para superficies half-box para un  $m$  arbitrario. Vea la Observación 11 de 17.9. Trabaje geoméricamente o analíticamente.

## 18 Simplex splines

[18.1 Sombras de simples](#) — [18.2 Propiedades de los simplex splines](#) — [18.3 Simplex splines normalizados](#) — [18.4 Inserción de nodos](#) — [18.5 Una relación de recurrencia](#) — [18.6 Derivadas](#) — [18.7 Ejercicios](#)

Los B-splines introducidos en el Capítulo 5 también pueden construirse proyectando simples sobre el eje real. Concretamente, un B-spline es la función densidad de la sombra de un simplex.

Esta interpretación geométrica fue descubierta por Schoenberg en 1965 y Carl de Boor [[de Boor '76b](#)] la utilizó para definir spline multivariados en 1976.

Esta interpretación también permite una presentación más natural de las propiedades recursivas y de suavidad de la inserción de nodos y de la elevación de grado.

### 18.1 Sombras de simples

Para construir los splines multivariados empleamos la proyección de  $\mathbf{R}^k$  en  $\mathbf{R}^s$  dada por

$$\pi[x_1 \dots x_k]^t = [x_1 \dots x_s]^t .$$

Para cada  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^s$

$$\pi^{-1}\mathbf{x} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^k \mid \pi\mathbf{z} = \mathbf{x}\} ,$$

se denomina **fibra** de  $\pi$ . Las fibras son subespacios  $k - s$  dimensionales paralelos de  $\mathbf{R}^k$ .

Si  $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_k$  son  $k + 1$  puntos independientes de  $\mathbf{R}^k$ , entonces su cápsula convexa  $\sigma$  se denomina **simplex**. La “sombra” de  $\sigma$  en  $\mathbf{R}^s$  con respecto a  $\pi$  define un **simplex spline**  $s$ -variado, el cual está dado por

$$M_\sigma(\mathbf{x}) = \text{vol}_{k-s}(\sigma \cap \pi^{-1}\mathbf{x}) .$$

La Figura [18.1](#) y [18.2](#) ilustran el caso  $k = 3$ , cuando  $s = 2$  y  $s = 1$ , respectivamente.

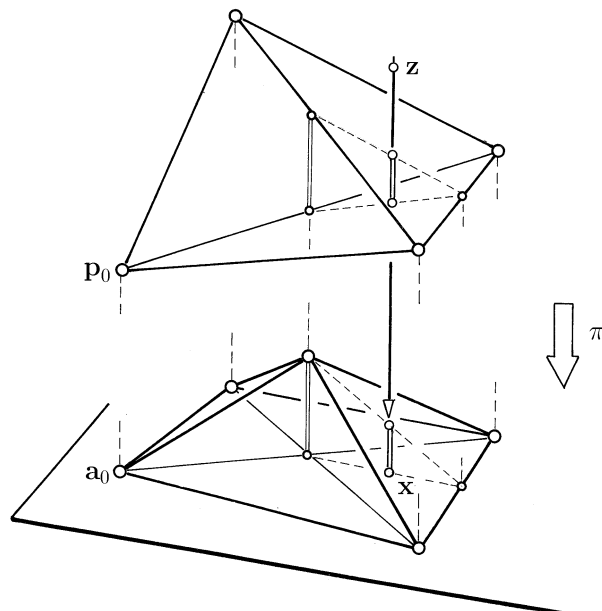


Figura 18.1: La sombra de un tetraedro sobre un plano.

Note que  $M_\sigma(\mathbf{x})$  es el volumen  $k - s$  dimensional de una rodaja de  $\sigma$ .

En particular si  $k = s$ , entonces  $M_\sigma$  es la **función característica** de  $\sigma$ , la cual está definida por

$$M_\sigma(\mathbf{x}) = \chi_\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \sigma \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases},$$

y si  $k = s + 1$ , entonces  $M_\sigma$  es lineal por trozos.

## 18.2 Propiedades de los simplex splines

Claramente cualquier simplex spline  $M_\sigma$  es no negativo y su **soporte** es la proyección  $\pi\sigma$  del simplex  $\sigma$ . Además  $M_\sigma$  es continuo sobre su soporte y si se hace cero sobre la frontera, entonces es continuo sobre  $\mathbf{R}^s$ .

Los vértices  $\mathbf{p}_i$  de  $\sigma$  se proyectan en los puntos  $\mathbf{a}_i = \pi\mathbf{p}_i$ , denominados **nodos** de  $M_\sigma$ . La cápsula convexa de cualesquiera  $m$  nodos se denomina  **$m$ -nodo**. En particular,  $\pi\sigma$  es un  $(k + 1)$ -nodo, y cualquier  $k$ -nodo de dimensión  $s - 1$  de  $\pi\sigma$  yace en su frontera. Es más,

*$M_\sigma$  es continuo en todo  $\mathbf{R}^s$  excepto posiblemente en un  $k$ -nodo de dimensión  $s - 1$ .*

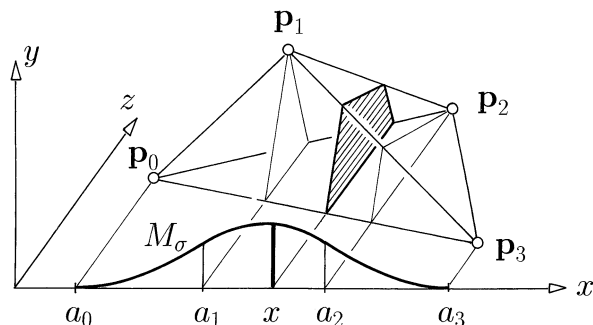


Figura 18.2: La sombra de un tetraedro sobre una recta.

Para la prueba, supongamos que  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$  determinan un  $m$ -nodo de dimensión  $s - 1$  que yace en la frontera de  $\pi\sigma = \text{supp}M_\sigma$ . Supongamos además que la cápsula afín de este  $m$ -nodo no contiene a ningún otro nodo. Sea  $\rho$  el simplex correspondiente dado por  $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_m$ . Entonces, como  $\pi\rho$  yace en la frontera de  $\pi\sigma$ , se tiene que para cada  $\mathbf{x} \in \pi\rho$

$$\pi^{-1}\mathbf{x} \cap \rho = \pi^{-1}\mathbf{x} \cap \sigma .$$

Como  $\pi^{-1}\mathbf{x} \cap \rho$  es  $(m - 1) - (s - 1) = m - s$  dimensional, entonces  $M_\sigma(\mathbf{x})$  no se anula sobre  $\pi\rho$  si y sólo si  $m = k$ .  $\diamond$

Los  $s$ -nodos (no degenerados) particionan el soporte de  $M_\sigma$ . Esto se ilustra en la Figura 18.3 para  $k = 4$  y  $s = 2$ .

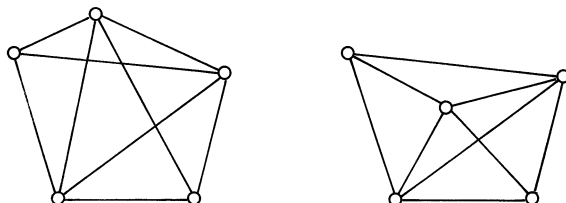


Figura 18.3: Nodos de soporte y 2-nodos de un simplex spline cuadrático bivariado.

Veremos que  $M_\sigma$  restringido a cada tesela de esta partición es un polinomio de grado total  $\leq k - s$  y que  $M_\sigma$  es continuamente diferenciable  $k - m - 1$  veces sobre cada  $s$ -nodo cuya cápsula afín contiene  $m$  nodos. Entonces si los nodos están en posición general, se tiene que  $M_\sigma$  es diferenciable  $k - s - 1$  veces.

**Observación 1:** Para cada función continua  $f$  definida sobre  $\mathbf{R}^s$  se tiene

$$\int_{\mathbf{R}^s} M_\sigma(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_\sigma f(\pi\mathbf{y})d\mathbf{y} .$$

Por lo tanto  $M_\sigma$  también se puede definir requiriendo que esta ecuación se satisfaga para todo  $f$ . Véase [Michelli '80] y también la Observación 1 de 17.2.

### 18.3 Simplex splines normalizados

De acuerdo a nuestra definición un simplex spline  $s$ -variado  $M_\sigma$  depende de un simplex  $\sigma$  de dimensión  $k$ . A continuación veremos que  $M_\sigma$  realmente sólo depende de sus nodos en  $\mathbf{R}^s$ .

Sea  $\rho$  otro  $k$ -simplex tal que sus nodos (es decir, las proyecciones de sus vértices sobre  $\mathbf{R}^k$ ) coinciden con los nodos  $\mathbf{p}_i$  de  $\sigma$ , entonces la aplicación afín  $\varphi$  que envía  $\sigma$  sobre  $\rho$ , satisface  $\pi \circ \varphi = \pi$ . Por lo tanto la imagen por  $\varphi$  de una rodaja  $\sigma_{\mathbf{x}} = \sigma \cap \pi^{-1}\mathbf{x}$  coincide con  $\rho_{\mathbf{x}} = \rho \cap \pi^{-1}\mathbf{x}$ .

Cualesquiera dos rodajas  $\sigma_{\mathbf{x}}$  y  $\sigma_{\mathbf{y}}$  son paralelas, por lo tanto la razón de sus volúmenes se preserva bajo  $\varphi$ , lo cual implica que las razones

$$M_\sigma(\mathbf{x}) : M_\sigma(\mathbf{y}) = M_\rho(\mathbf{x}) : M_\rho(\mathbf{y})$$

y

$$M_\sigma(\mathbf{x}) : M_\rho(\mathbf{x}) = M_\sigma(\mathbf{y}) : M_\rho(\mathbf{y})$$

son constantes para todo  $\mathbf{x}$ .

Como

$$\int_{\mathbf{R}^s} M_\sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \text{vol}_k \sigma ,$$

podemos concluir que el **simplex spline normalizado**

$$M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = M_\sigma(\mathbf{x})/\text{vol}_k \sigma$$

depende solamente de los nodos  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$  y no depende del  $k$ -simplex  $\sigma$ .

**Observación 2:** La integral de un simplex spline normalizado es uno,

$$\int_{\mathbf{R}^s} M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) d\mathbf{x} = 1 .$$

**Observación 3:** Las propiedades de suavidad establecidas en 18.2 caracterizan un simplex spline univariado  $M(x|a_0 \dots a_k)$  como un múltiplo de un B-spline ordinario  $N(x|a_0 \dots a_k)$  sobre los mismos nodos, vea 5.4. Por lo tanto, se desprende del Ejercicio 2 de 5.12 que

$$M(x|a_0 \dots a_k) = \frac{k}{a_k - a_0} N(x|a_0 \dots a_k) ,$$

donde suponemos que  $[a_0, a_k]$  es el soporte.

## 18.4 Inserción de nodos

La fórmula de inserción de nodos para B-splines univariados presentada en 6.1 corresponde a una subdivisión del simplex generador y se puede generalizar fácilmente.

Como antes, denotamos por  $\sigma$  el simplex de vértices  $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_k$  y  $\mathbf{a}_i = \pi \mathbf{p}_i$  son los nodos correspondientes en  $\mathbb{R}^s$ . Sea

$$\mathbf{a}_{k+1} = \sum_{i=0}^k \alpha_i \mathbf{a}_i, \quad 1 = \sum_{i=0}^k \alpha_i,$$

un nodo “nuevo”, el cual consideraremos como la proyección del punto

$$\mathbf{p}_{k+1} = \sum \alpha_i \mathbf{p}_i$$

que yace en  $\mathbb{R}^k$ . Si  $k > s$  los pesos  $\alpha_i$  no están unívocamente determinados por  $\mathbf{a}_{k+1}$ . Finalmente, denotamos por  $\sigma_i$  el simplex  $\mathbf{p}_0 \dots \mathbf{p}_i^* \dots \mathbf{p}_{k+1}$ , donde el asterisco denota la ausencia del vértice correspondiente. En particular lo anterior implica que  $\sigma_{k+1} = \sigma$  y se tiene que los otros simples:  $\sigma_0, \dots, \sigma_k$  forman una partición del simplex  $\sigma$  de manera que la siguiente suma de los splines  $M_{\sigma_i}$  coincide con  $M_\sigma$ , esto es

$$M_\sigma = \sum_{i=0}^k (\text{sign} \alpha_i) M_{\sigma_i}.$$

En la Figura 18.4 se ilustran dos ejemplos, uno para  $k = 2$  y otro para  $k = 3$ . En el caso  $k = 2$ ,  $M_\sigma = M_{\sigma_1} + M_{\sigma_2} - M_{\sigma_0}$ , y para  $k = 3$ ,  $M_\sigma = M_{\sigma_0} + M_{\sigma_1} + M_{\sigma_2} + M_{\sigma_3}$ .

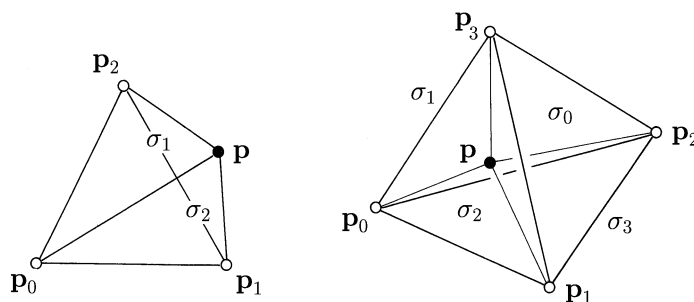


Figura 18.4: Subdivisión de un triángulo y de un tetraedro.

Para la prueba considere un punto  $\mathbf{y} = \sum \eta_i \mathbf{p}_i$  y sean  $\eta_{k+1} = 0$  y  $\alpha_{k+1} = -1$ . Entonces, para cualquier  $\lambda \in \mathbb{R}$  se tiene la ecuación

$$\mathbf{y} = \sum_{i=0}^{k+1} (\eta_i - \lambda \alpha_i) \mathbf{p}_i.$$

En particular, para  $\lambda = \lambda_j = \eta_j/\alpha_j$ , los pesos  $\eta_i - \lambda_j\alpha_i$  son las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{y}$  con respecto a  $\sigma_j$ . Es más,  $\mathbf{y}$  yace en el interior del simplex  $\sigma_j$  si y sólo si todos los pesos  $\eta_i - \lambda_j\alpha_i, j \neq i$ , son positivos. Si  $\lambda_j = \lambda_k$  entonces  $\mathbf{y}$  yace en la frontera común de  $\sigma_j$  y  $\sigma_k$ . Supondremos que éste no es el caso.

Como los pesos  $\eta_i - \lambda\alpha_i$  son monótonos en  $\lambda$  y existen coeficientes  $\alpha_i$  tanto positivos como negativos, entonces existe a lo sumo un intervalo no vacío  $(\lambda_j, \lambda_k)$  sobre el cual todos los pesos  $\eta_i - \lambda\alpha_i$  son positivos. Por lo tanto,  $\mathbf{y}$  no pertenece a ningún simplex o yace en exactamente dos simples  $\sigma_j$  y  $\sigma_k$ , caso en el cual  $\alpha_j$  y  $\alpha_k$  tienen signos opuestos. Vea la Figura 18.5.

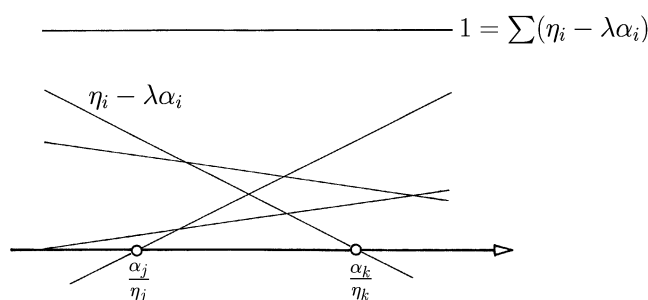


Figura 18.5: Los pesos  $\eta_i - \lambda\alpha_i$ .

Entonces la funciones características de los splines satisfacen

$$0 = (\text{sign}\alpha_0)\chi_{\sigma_0} + \cdots + (\text{sign}\alpha_k)\chi_{\sigma_k} - \chi_{\sigma_{k+1}}$$

sobre  $\mathbb{R}^k$  sin incluir las caras de dimensión inferior de  $\sigma_i$ .

Esto implica que

$$M_\sigma = \text{sign}\alpha_0 M_{\sigma_0} + \cdots + \text{sign}\alpha_k M_{\sigma_k}$$

y concluye la prueba.  $\diamond$

Si se normaliza la expresión anterior obtenemos la **fórmula de inserción de nodos**

$$(1) \quad M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \sum_{i=0}^k \alpha_i M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_i^* \dots \mathbf{a}_{k+1})$$

para todo  $\mathbf{x}$  donde los splines considerados son continuos. Vea [Michelli '80] y los Ejercicios 2 y 3. Observe también que el lado derecho de la fórmula de inserción de nodos es una combinación afín.

### 18.5 Una relación de recurrencia

Si el nuevo nodo insertado  $\mathbf{a}_{k+1}$  coincide con  $\mathbf{x}$ , entonces la fórmula de inserción (1) de 18.3 se transforma en una representación del simplex spline en  $\mathbf{x}$  como una combinación afín de simplex splines, con  $\mathbf{x}$  como un nodo, específicamente

$$M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \sum_{i=0}^k \xi_i M(\mathbf{x}|\mathbf{x} \mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_i^* \dots \mathbf{a}_k) ,$$

donde  $\mathbf{x} = \sum \xi_i \mathbf{a}_i$  y  $1 = \sum \xi_i$ .

Esto conduce a una fórmula recursiva pues los simplex splines del lado derecho tienen grado más bajo. Por ejemplo, sea  $\sigma_0$  el simplex de vértices  $\mathbf{p} \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_k$  en  $\mathbb{R}^k$  con sombra

$$M_{\sigma_0}(\mathbf{x}) = M(\mathbf{x}|\mathbf{x} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k) ,$$

donde  $\pi \mathbf{p}, \pi \mathbf{p}_1, \dots, \pi \mathbf{p}_k$  son los nodos  $\mathbf{x}, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ . Suponemos que el “simplex base”  $\rho$ , definido por los vértices  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k$  yace en el hiperplano ortogonal a las fibras de la proyección  $\pi$ .

Por lo tanto, si  $h$  denota la distancia euclídea entre  $\mathbf{p}$  y  $\rho$ , entonces se tiene

$$\text{vol}_k \sigma_0 = \frac{1}{k} h \cdot \text{vol}_{k-1} \rho$$

y

$$\text{vol}_{k-s}(\sigma_0 \cap \pi^{-1} \mathbf{x}) = \frac{1}{k-s} h \cdot \text{vol}_{k-s-1}(\rho \cap \pi^{-1} \mathbf{x})$$

tal como se ilustra en la Figura 18.6 para  $k = 3$  y  $s = 1$ .

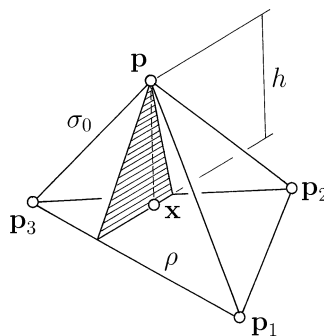


Figura 18.6: Cálculo de los volúmenes de  $\sigma_0$  y  $\sigma_0 \cap \pi^{-1} \mathbf{x}$ .

Dividiendo la segunda de estas ecuaciones por la primera, obtenemos

$$M(\mathbf{x}|\mathbf{x} \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k) = \frac{k}{k-s} M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_k) .$$



Entonces hemos deducido la **relación de recurrencia de Micchelli**

$$(2) \quad M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \frac{k}{k-s} \sum_{i=0}^k \xi_i M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_i^* \dots \mathbf{a}_k) ,$$

Esta relación representa un simplex spline con  $k+1$  nodos como una combinación lineal de los simplex spline de  $k$  nodos. Véase [Micchelli '80]. Como los pesos  $\xi_i$  dependen linealmente de  $\mathbf{x}$ , la aplicación repetida de esta relación de recurrencia implica que

*un simplex spline  $s$ -variado con  $k+1$  nodos es polinómico por trozos de grado total  $\leq k-s$ .*

**Observación 4:** Comparando las relaciones de recurrencia para simplex splines y polinomios de Bernstein (vea 10.1), se observa que un simplex spline  $s$ -variado con solamente  $s+1$  distintos nodos es un polinomio de Bernstein, es decir

$$M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0^{i_0+1} \mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_s^{i_s+1} \mathbf{a}_s) = \frac{\binom{k}{s}}{\text{vol}_s \Delta} B_{\mathbf{i}}^{k-s}(\mathbf{u}) ,$$

donde  $\mathbf{i} = (i_0 \dots i_s)$ ,  $k = i_0 + \dots + i_s + s$ ,  $\Delta$  denota el simplex  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_s$  y  $\mathbf{u}$  el vector columna de coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{x}$  con respecto a  $\Delta$ . Vea la Figura 18.7.

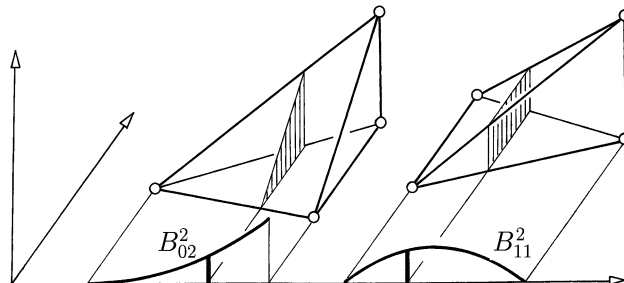


Figura 18.7: Polinomios de Bernstein cuadráticos.

**Observación 5:** Aplicando repetidamente la relación de recurrencia (2) se puede demostrar que cada segmento polinómico de un B-spline multivariado depende continuamente de los nodos  $\mathbf{a}_i$ .

## 18.6 Derivadas

Supongamos que  $\mathbf{x}$  depende linealmente de  $t$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} ,$$

donde  $\mathbf{x}_0 = \sum \alpha_i \mathbf{p}_i$  con  $\sum \alpha_i = 1$ , representa un punto y  $\mathbf{v} = \sum \nu_i \mathbf{p}_i$  con  $\sum \nu_i = 0$ , representa un vector en  $\mathbb{R}^s$ . Derivando un B-spline  $s$ -variado  $M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k)$  con respecto a  $t$  obtenemos la **derivada direccional** en  $\mathbf{x}$  con respecto a  $\mathbf{v}$ , la cual se denota por  $\dot{M}$ . La derivada direccional puede ser expresada en términos de B-splines  $\dot{M}_i = M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_i^* \dots \mathbf{a}_k)$ ,

$$(3) \quad \dot{M} = k \sum \nu_i \dot{M}_i .$$

Para la prueba, supondremos primero que  $k = s + 1$ . Entonces la relación (3) se obtiene derivando la relación de recurrencia de Micchelli de 18.5.

Si  $k$  es mayor que  $s + 1$ , consideramos los puntos  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k$  como las proyecciones bajo  $\pi : [x_1 \dots x_{k-1}]^t \mapsto [x_1 \dots x_s]^t$  de ciertos puntos  $\bar{\mathbf{a}}_0, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$  en  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Se obtiene

$$(4) \quad M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \int_{\mathbb{R}^{k-s-1}} M\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \middle| \bar{\mathbf{a}}_0 \dots \bar{\mathbf{a}}_k\right) d\mathbf{y} .$$

Como  $M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k)$  tiene derivadas continuas por la derecha y por la izquierda, se pueden derivar ambos lados de la identidad e intercambiar el símbolo integral y la derivada. Ésto conduce a

$$\frac{d}{dt} M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \int_{\mathbb{R}^{k-s-1}} \frac{d}{dt} M\left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \middle| \bar{\mathbf{a}}_0 \dots \bar{\mathbf{a}}_k\right) d\mathbf{y} .$$

Aplicando (3) al integrando y usando (4) se obtiene la expresión para  $\dot{M}$  dada por (3).  $\diamond$

La diferenciación repetida de la derivada  $r$ -ésima de un B-spline  $s$ -variado  $M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k)$  se puede expresar como una combinación lineal de B-splines con  $k+1-r$  nodos  $\mathbf{a}_i$ . Estos splines son continuos sobre cualquier  $s$ -nodo cuya cápsula aún no contiene más de  $k-r-1$  nodos. Por lo tanto,  $M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k)$  es continuamente diferenciable  $k-m-1$  veces sobre cualquier  $s$ -nodo cuya cápsula aún no contiene más de  $m$  nodos.

**Observación 6:** Derivando la relación de recurrencia de Micchelli (2) de 18.5 se obtiene

$$\dot{M} = \frac{k}{k-s} \sum_{i=0}^k (\nu_i \dot{M}_i + \xi_i \dot{M}_i) .$$

Por (3) ésto es equivalente a la fórmula

$$\dot{M} = \frac{1}{k-s} \dot{M} + \frac{k}{k-s} \sum_{i=0}^k \xi_i \dot{M}_i ,$$

lo cual se puede transformar en la **relación de recurrencia para la derivada** [Micchelli '80]

$$\frac{d}{dt} M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \frac{k}{k-s-1} \sum_{i=0}^k \xi_i \frac{d}{dt} M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_i^* \dots \mathbf{a}_k) .$$

## 18.7 Ejercicios

- 1 El volumen de un simplex  $\mathbf{q}_0 \dots \mathbf{q}_{k-s}$  en  $\mathbb{R}^{k-s}$  está dado por

$$\text{vol}_{k-s}[\mathbf{q}_0 \dots \mathbf{q}_{k-s}] = \left| \frac{1}{(k-s)!} \det \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \dots & \mathbf{q}_{k-s} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right| .$$

Utilice esta fórmula para deducir a partir de la definición en 18.1 que un simplex spline  $s$ -variado con  $k+1$  nodos es polinómico por trozos de grado  $k-s$ .

- 2 Demuestre que la fórmula de inserción de nodos de 18.4 es válida también en la frontera de la cápsula convexa  $[\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k]$  inclusive en el caso cuando alguno de los splines involucrados no son continuos en ésta.
- 3 Deduzca la fórmula de inserción de nodos para B-splines univariados a partir de la fórmula general (1) de 18.4.
- 4 Deduzca la relación de recurrencia para B-splines univariados a partir de la fórmula general (2) de 18.5.
- 5 Un simplex  $\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_k$  en  $\mathbb{R}^k$  y una dirección  $\mathbf{v}$  definen un **prisma**. Ésta es la cápsula convexa de sus  $2k$  vértices  $\mathbf{p}_i$  y  $\mathbf{q}_i = \mathbf{p}_i + \mathbf{v}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Demuestre que los  $k$  simples  $\mathbf{q}_i \mathbf{p}_i \dots \mathbf{p}_k$ , para  $i = 1, \dots, k$  tienen el mismo volumen y forman una partición del prisma. Vea la Figura 18.8.

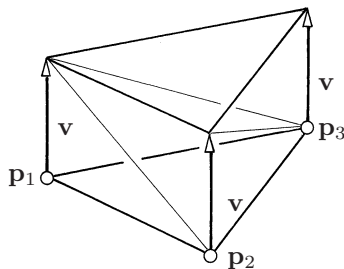


Figura 18.8: Triangulación de un prisma.

- 6 Use el Ejercicio 5 para demostrar la **fórmula de elevación de grado** de Micchelli para B-splines multivariados [Micchelli '79].

$$M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k M(\mathbf{x}|\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i \dots \mathbf{a}_k) .$$

## 19 Splines multivariados

*19.1 Generalización del algoritmo de de Casteljaou — 19.2 B-polinomios y B-parches — 19.3 Precisión lineal — 19.4 Derivadas de un B-parche — 19.5 B-splines multivaridos — 19.6 Combinaciones lineales de B-splines — 19.7 Una relación de recurrencia — 19.8 Derivadas de un spline — 19.9 El teorema fundamental — 19.10 Ejercicios*

El algoritmo de de Boor es una generalización del algoritmo de de Casteljaou y los B-splines univariados generalizan a los polinomios de Bernstein. De manera similar se puede generalizar el algoritmo de de Casteljaou para polinomios de varias variables a splines multivariados. Las funciones base subyacentes del algoritmo generalizado son los simplex splines, los cuales forman una partición de la unidad.

Estos simplex splines son la generalización adecuada de los B-splines univariados y muchas de las propiedades de estos últimos también son válidas para los simplex splines multivariados.

### 19.1 Generalización del algoritmo de de Casteljaou

Los polinomios de Bernstein restringidos a un simplex pueden ser interpretados como simplex splines con nodos múltiples. Vea la Observación 4 en 18.5.

Por lo tanto, el algoritmo de de Casteljaou es un caso especial del algoritmo de de Boor para splines univariados. De manera análoga el algoritmo de de Casteljaou para polinomios multivariados también se puede extender [Seidel '91]. La idea se ilustra en las Figuras 19.1 y 19.2 para el caso de un polinomio cuadrático  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ . Como anteriormente (vea la Figura 11.1) denotamos por  $\mathbf{xy}$ , la evaluación  $\mathbf{c}[\mathbf{xy}]$ , de la forma polar correspondiente al polinomio  $\mathbf{c}$ .

La Figura 19.1 ilustra el algoritmo de de Casteljaou con respecto al triángulo **012**. A partir de los seis puntos de Bézier  $\mathbf{c}[\mathbf{i}\mathbf{j}]$  se calculan los tres puntos intermedios  $\mathbf{c}[\mathbf{j}\mathbf{x}]$  y a partir de estos últimos se obtiene  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}[\mathbf{x}\mathbf{x}]$ .

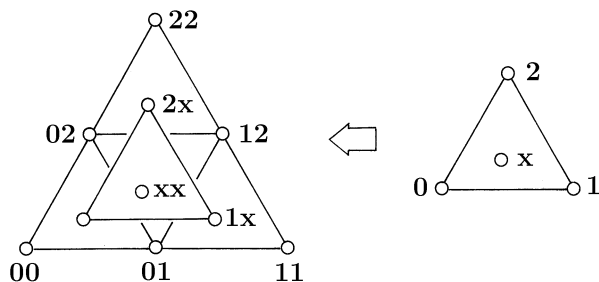


Figura 19.1: El algoritmo de de Casteljaou en el caso cuadrático.

La Figura 19.2 esquematiza la generalización: En vez de tres nodos se tiene tres secuencias de nodos  $\mathbf{0}\bar{\mathbf{0}}, \mathbf{1}\bar{\mathbf{1}}, \mathbf{2}\bar{\mathbf{2}}$ . A partir de los seis puntos de control  $\mathbf{c}[\mathbf{0}\bar{\mathbf{0}}], \mathbf{c}[\mathbf{0}\bar{\mathbf{1}}], \mathbf{c}[\mathbf{1}\bar{\mathbf{1}}], \mathbf{c}[\mathbf{1}\bar{\mathbf{2}}], \mathbf{c}[\mathbf{2}\bar{\mathbf{2}}], \mathbf{c}[\mathbf{2}\bar{\mathbf{0}}]$  se calculan los tres puntos  $\mathbf{c}[\mathbf{i}\bar{\mathbf{x}}]$  los cuales a su vez determinan  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}[\mathbf{x}\bar{\mathbf{x}}]$ .

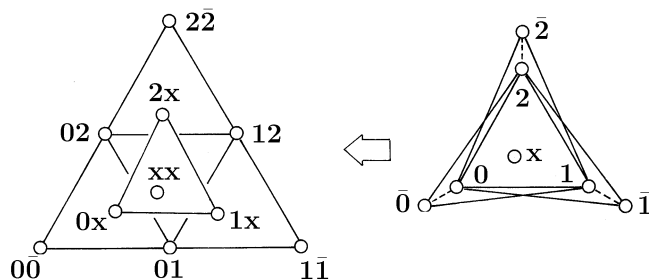


Figura 19.2: La generalización de Seidel del algoritmo de de Casteljaou para el caso cuadrático.

Para considerar la generalización del algoritmo de de Casteljaou sean  $\mathbf{a}_i^0, \dots, \mathbf{a}_i^{n-1}$  secuencias, también denominadas **cadena** o **nubes de nodos**, para  $i = 0, \dots, s$ . Si estos nodos están en posición general, entonces cualquier superficie polinómica  $s$ -variada  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  con forma polar  $\mathbf{c}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_s]$  está completamente definida por sus **B-puntos**

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{c}[\mathbf{a}_0^0 \dots \mathbf{a}_0^{i_0-1} \dots \mathbf{a}_s^0 \dots \mathbf{a}_s^{i_s-1}] ,$$

donde  $\mathbf{i} = [i_0 \dots i_s] \in \Delta_n$  y

$$\Delta_n = \{\mathbf{i} | \mathbf{i} \in \mathbf{Z}^{s+1}, 0 \leq i, i_0 + \dots + i_s = n\} .$$

Concretamente  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  se puede calcular a través de la relación de recurrencia

$$\mathbf{c}_j = \xi_0 \mathbf{c}_{j+\mathbf{e}_0} + \dots + \xi_s \mathbf{c}_{j+\mathbf{e}_s} \quad \mathbf{j} \in \Delta = \Delta_{n-1} \cup \dots \cup \Delta_0 ,$$

donde  $\xi_k$  son las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{x}$  con respecto al simplex

$$S_j = [\mathbf{a}_0^{j_0} \dots \mathbf{a}_s^{j_s}]$$

y  $\mathbf{e}_k$  denota el  $k$ -ésimo vector unitario de  $\mathbb{R}^{s+1}$ . Esto significa que

$$\mathbf{c}_j = \mathbf{c}[\mathbf{a}_0^0 \dots \mathbf{a}_0^{j_0-1} \dots \mathbf{a}_s^0 \dots \mathbf{a}_s^{j_s-1} \mathbf{x} \dots \mathbf{x}]$$

y que los nodos están en **posición general** si todos los simples  $S_j$  son no degenerados.

**Observación 1:** Si  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  es cuadrático, entonces sus puntos de Bézier  $\mathbf{b}_i$  sobre el simplex  $S_0$  satisfacen

$$\mathbf{b}_{\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j} = \mathbf{c}_{\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j} \quad \text{para todo } i \neq j,$$

y  $\mathbf{b}_{\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_i}$  yace en el plano generado por los puntos  $\mathbf{c}_{\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j}$ ,  $j = 0, \dots, s$ . La Figura 19.5 muestra un ejemplo.

## 19.2 B-polinomios y B-parches

La generalización del algoritmo de de Casteljaou presentada en 19.1, se puede aplicar a una malla arbitraria de puntos de control  $\mathbf{c}_i$ ,  $|\mathbf{i}| \in \Delta_n$ .

En particular, si los puntos de control están dados por

$$\mathbf{c}_i = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{i} = \mathbf{k} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad \mathbf{i} \in \Delta_n,$$

los polinomios  $C_{\mathbf{k}}^n(\mathbf{x})$ , a valores reales, forman una base para el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que  $n$ . De hecho, como el algoritmo de de Casteljaou generalizado es lineal en los puntos de control, cualquier polinomio  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  de grado  $\leq n$  se puede representar

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{i} \in \Delta_n} \mathbf{c}_i C_{\mathbf{i}}^n(\mathbf{x}),$$

donde  $\mathbf{c}_i$  está definido en 19.1. Además, como el número de polinomios  $C_{\mathbf{i}}^n$  coincide con la dimensión  $\binom{n+s}{s}$  del espacio de los polinomios de grado total  $\leq n$ , tenemos que éstos son linealmente independientes.

Los polinomios  $C_{\mathbf{i}}^n$ , los denominaremos **B-polinomios** y la representación anterior de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , como una combinación lineal de los B-polinomios, se denomina **B-parche**. De la construcción anterior se desprenden las siguientes propiedades, similares a las de los polinomios de Bernstein de la Sección 10.1. Los B-polinomios  $s$ -variados de grado  $n$

- forman una **base** del espacio vectorial de todos los polinomios de grado total  $\leq n$ ,

- *forman una partición de la unidad:*

$$\sum_{i \in \Delta_n} C_i^n(\mathbf{x}) = 1 ,$$

- *son positivos para todo  $\mathbf{x}$  del interior de la intersección  $\Gamma$ , de todos los simples  $S_j, |j| \leq n - 1$ ,*
- *satisfacen la relación de recurrencia*

$$C_i^n(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^s \xi_k C_{i-e_k}^{n-1}(\mathbf{x}) ,$$

donde  $\xi_k$  es la  $k$ -ésima coordenada baricéntrica de  $\mathbf{x}$  con respecto a  $S_{i-e_k}$  y  $C_j = 0$  si  $j$  tiene alguna coordenada negativa.

La intersección  $\Gamma$  de los simples  $S_j, |j| \leq n - 1$ , se ilustra en la Figura 19.3 para  $n = 2$  y  $s = 2$ . Nótese que esta intersección podría ser vacía, lo cual depende de la posición de los nodos.

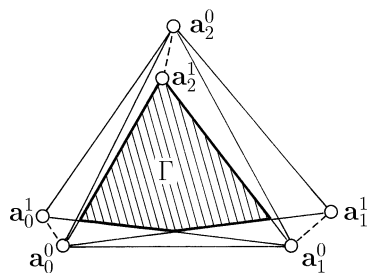


Figura 19.3: La región  $\Gamma$  sobre la cual todos los B-splines para  $n = s = 2$  son positivos.

Como los B-polinomios forman una partición de la unidad,  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  es una combinación afín de los puntos  $\mathbf{c}_i$ . Por lo tanto los B-parches son invariantes por transformaciones afines. Es más, para  $\mathbf{x} \in \Gamma$ ,  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  yace en la cápsula convexa de los B-puntos  $\mathbf{c}_i$  pues los B-polinomios son no negativos sobre  $\Gamma$ .

**Observación 2:** Si todos los nodos de cada cadena son iguales, es decir,  $S_{\mathbf{o}} = S_j$  para todo  $j$ , entonces los B-polinomios  $C_i^n$  coinciden con los polinomios de Bernstein  $B_i^n$  sobre el simplex  $S_{\mathbf{o}}$  pues ambos conjuntos de polinomios satisfacen la misma relación de recurrencia.

### 19.3 Precisión lineal

El polinomio identidad  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , de  $\mathbb{R}^s$ , se puede representar con un B-parche de grado  $n$  con respecto a los nodos  $\mathbf{a}_i^j$  introducidos en 19.1. Como

la forma polar de  $\mathbf{x}$  es

$$\mathbf{x}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] = \frac{1}{n}(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n) ,$$

sus B-puntos son

$$\mathbf{x}_i = \frac{1}{n}(\mathbf{a}_0^0 + \dots + \mathbf{a}_0^{i_0-1} + \dots + \mathbf{a}_s^0 + \dots + \mathbf{a}_s^{i_s-1}) .$$

Vea 19.1 y la Figura 19.4, la cual bosqueja el caso  $n = s = 2$ .

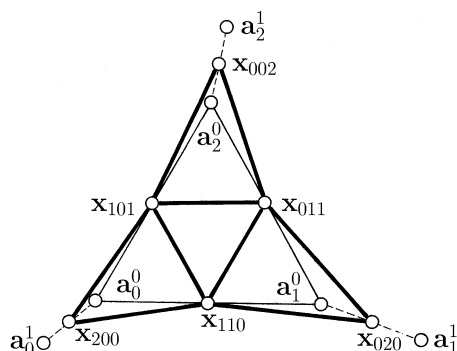


Figura 19.4: La representación de la identidad sobre  $\mathbb{R}^2$  como B-parche cuadrático.

Similarmente se pueden obtener los B-puntos de cualquier otro polinomio  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  de grado uno. Como  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  es una aplicación afín, su forma polar está dada por

$$\mathbf{c}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n] = \mathbf{c}(\mathbf{x}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]) .$$

Por lo tanto los B-puntos de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  son  $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}(\mathbf{x}_i)$ . Esta propiedad de la representación de un polinomio de grado uno como un B-parche se denomina **precisión lineal**.

**Observación 3:** Una consecuencia importante de la precisión lineal es que cualquier superficie funcional  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  de grado  $\leq n$  se puede representar como

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ c(\mathbf{x}) \end{bmatrix} , \quad \text{donde} \quad c(\mathbf{x}) = \sum c_i C_i^m(\mathbf{x}) .$$

Ésto es, los B-puntos de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  son  $\mathbf{c}_i = [\mathbf{x}_i^t c_i]^t$ , tal como se ilustra en la Figura 19.5 para  $n = s = 2$ .

## 19.4 Derivadas de un B-parche

La derivada direccional de un polinomio

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \sum \mathbf{c}_i C_i^m(\mathbf{x})$$



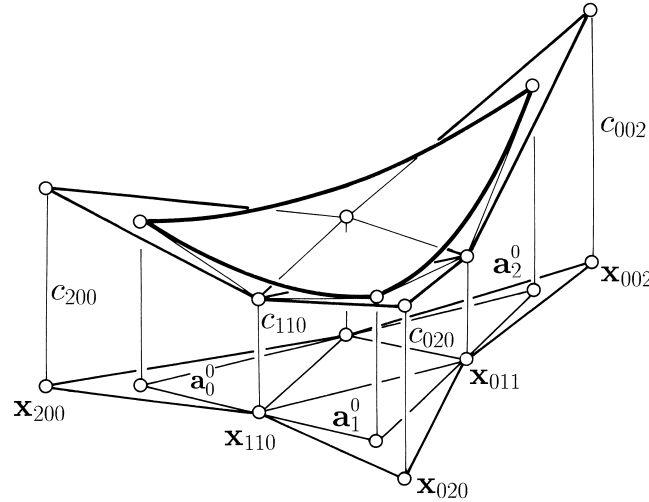


Figura 19.5: Un polinomio cuadrático con sus ordenadas como parche y como B-parche de Bézier.

dado como un B-spline con respecto a una secuencia de nodos  $A_{n-e}$  tiene una representación como un B-parche de grado  $n - 1$  con respecto a la secuencia de nodos  $A_{n-2e}$ . Esta representación depende de los puntos  $\mathbf{c}_i$  de una manera elemental.

Sea  $\Delta \mathbf{x}$  una dirección cualquiera de  $\mathbb{R}^s$  y denotemos por

$$\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \mathbf{c}(\mathbf{x} + t\Delta \mathbf{x})|_{t=0}$$

la derivada direccional de  $\mathbf{c}$  en la dirección  $\Delta \mathbf{x}$  en el punto  $\mathbf{x}$ . Si  $\mathbf{c}[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  es el polinomio simétrico de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ , entonces la forma polar de  $\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$  está dada por

$$\dot{\mathbf{c}}[\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] = n\mathbf{c}[\Delta \mathbf{x} \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n] ,$$

tal como se presentó en 11.6. Por lo tanto los B-puntos de  $\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$  son

$$n\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{j}} = n\mathbf{c}[\Delta \mathbf{x} \mathbf{a}_0^0 \dots \mathbf{a}_0^{i_0-1} \dots \mathbf{a}_s^0 \dots \mathbf{a}_s^{i_s-1}] , \quad \mathbf{j} \in \Delta_{n-1} .$$

Expresando  $\Delta \mathbf{x}$  con respecto a  $S_{\mathbf{j}}$ , es decir, rescribiendo  $\Delta \mathbf{x}$  como

$$\Delta \mathbf{x} = \sum_{k=0}^s \nu_k \mathbf{a}_k^{j_k}, \quad 0 = \sum_{k=0}^s \nu_k ,$$

y usando que las formas polares son multiafines, se obtiene

$$\dot{\mathbf{c}}_{\mathbf{j}} = \sum_{k=0}^s \nu_k \mathbf{c}_{\mathbf{j} + \mathbf{e}_k} .$$

La Figura 19.6 ilustra el caso  $s = n = 2$ .

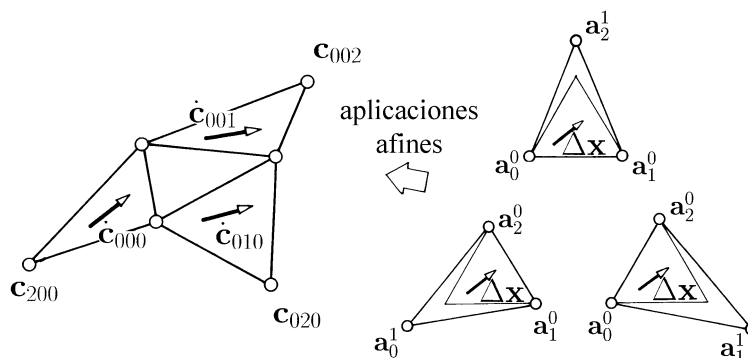


Figura 19.6: Las diferencias  $\dot{c}_j$ .

**Observación 4:** Sean  $\mathbf{x}_i$  los B-puntos del polinomio identidad  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  con respecto a los nodos  $\mathbf{a}_k^i$ . Entonces, podemos pensar en la B-malla de  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  como una colección de parches lineales

$$\mathbf{c}_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^s \gamma_k \mathbf{c}_{j+e_k}, \quad \mathbf{j} \in \Delta_{n-1},$$

sobre los simples  $\mathbf{x}_{j+e_0} \dots \mathbf{x}_{j+e_s}$ , donde  $\gamma_0, \dots, \gamma_s$  son las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{x}$  respecto a  $\mathbf{x}_{j+e_0} \dots \mathbf{x}_{j+e_s}$ .

Como  $\hat{\gamma}_k = n\nu_k$ , la derivada direccional de  $\mathbf{c}_j(\mathbf{x})$  en la dirección  $\Delta \mathbf{x}$  es  $n\dot{c}_j$  y se tiene que

*la derivada de la B-malla consiste en los B-puntos de la derivada  $\dot{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$ .*

Esto se ilustra para una función cuadrática bivariada en la Figura 19.7.

## 19.5 B-splines multivariados

Los B-polinomios  $C_i$ ,  $i \in \Delta_n$ , están definidos con respecto a los nodos

$$\mathbf{a}_0^0, \dots, \mathbf{a}_0^{n-1}, \dots, \mathbf{a}_s^0, \dots, \mathbf{a}_s^{n-1}.$$

Si se agregan  $s + 1$  nodos  $\mathbf{a}_{0n}, \dots, \mathbf{a}_{sn}$  demostraremos que

*los simplex splines normalizados*

$$N_i = \frac{\text{vol } S_i}{\binom{n+s}{s}} M(\mathbf{x}|A_i), \quad i \in \Delta_n,$$

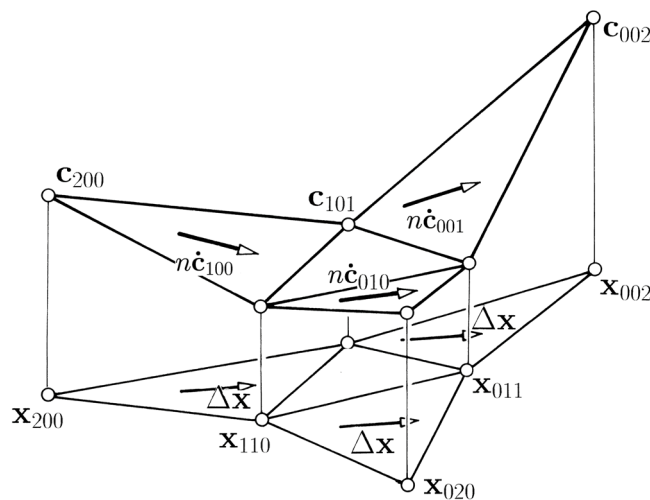


Figura 19.7: La derivada direccional de una B-malla para  $n = s = 2$ .

con la secuencias de nodos  $A_i = \mathbf{a}_0^0 \dots \mathbf{a}_0^{i_0} \dots \mathbf{a}_s^0 \dots \mathbf{a}_s^{i_s}$  coinciden con los B-polinomios  $C_i(\mathbf{x})$  para todo

$$\mathbf{x} \in \Omega = \text{interior} \left( \bigcap_{j \in \Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_n} S_j \right) .$$

Este resultado fue probado en [Dahmen et al. '92].

Los splines  $N_i$  son **B-splines** multivariados y tienen propiedades análogas a las de los splines univariados. De hecho, si  $s = 1$ , los B-splines  $N_i(x)$  coinciden con los B-splines univariados definidos en 5.3.

**Prueba:** A partir de la definición de simplex splines en 18.1 y teniendo en cuenta la fórmula de recurrencia (2) de 18.5, obtenemos para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^s$  la siguiente relación de recurrencia

$$N_{\mathbf{0}}^0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in S_{\mathbf{0}} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} ,$$

$$N_{\mathbf{j}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^s \frac{\text{vol } S_{\mathbf{j}}}{\binom{j+s}{s}} \frac{j+s}{s} \frac{\sigma_{\mathbf{j}}^k \text{vol } S_{\mathbf{j}}^k}{\sigma_{\mathbf{j}} \text{vol } S_{\mathbf{j}}} M(\mathbf{x} | A_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_k}) , \quad j = |\mathbf{j}| ,$$

donde  $S_{\mathbf{j}}^k$  se obtiene a partir de  $S_{\mathbf{j}}$  reemplazando  $\mathbf{a}_k^{j_k}$  por  $\mathbf{x}$ . Las orientaciones  $-1$  y  $+1$  de las secuencias  $S_{\mathbf{j}}$  y  $S_{\mathbf{j}}^k$  se denotan por  $\sigma_{\mathbf{j}}$  y  $\sigma_{\mathbf{j}}^k$ , respectivamente. Como ambos simples,  $S_{\mathbf{j}}$  y  $S_{\mathbf{j}-\mathbf{e}_k}$ , contienen a  $\Omega$ , sus orientaciones son iguales

y la ecuación anterior es equivalente a

$$\begin{aligned}
 N_j(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^s \frac{\sigma_j^k}{\sigma_{j-e_k} \text{vol } S_{j-e_k}^k} \text{vol } S_j^k N_{j-e_k}(\mathbf{x}) \\
 (1) \qquad &= \sum_{k=0}^s \xi_{j-e_k}^k N_{j-e_k}(\mathbf{x}) \ ,
 \end{aligned}$$

donde  $\xi_{j-e_k}^k$  es la  $k$ -ésima coordenada baricéntrica con respecto a  $S_{j-e_k}$ . Para que todos los términos estén bien definidos, para  $j_k = 0$ , convenimos

$$\begin{aligned}
 \xi_{j-e_k}^k &= \sigma_j^k \text{vol}(S_j^k) / \sigma_{j-e_k} \text{vol}(S_{j-e_k}) = 1 \quad \text{y} \\
 (2) \qquad N_{j-e_k}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\binom{j+s-1}{s}} M(\mathbf{x}|A_{j-e_k}) \ .
 \end{aligned}$$

Entonces, si  $j_k = 0$ , tenemos que  $N_{j-e_k}$  es un simplex spline sobre la secuencia de nodos  $A_{j-e_k}$ , la cual no contiene ningún nodo de la  $k$ -ésima nube  $\mathbf{a}_k^0 \dots \mathbf{a}_k^n$ . Su soporte tiene intersección vacía con  $\Omega$ , lo cual probamos a continuación.

El soporte de  $N_{j-e_k}$  es la cápsula convexa de los nodos  $A_{j-e_k}$ . Por lo tanto cualquier punto en el soporte es una combinación convexa de ciertos puntos  $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k^*, \dots, \mathbf{a}_s$ , donde cada  $\mathbf{a}_i$  yace en la cápsula convexa de los primeros  $j_i + 1$  nodos  $\mathbf{a}_i^0, \dots, \mathbf{a}_i^{j_i}$  de la  $i$ -ésima cadena de nodos. Por lo tanto debemos demostrar que cualquier simplex  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_k^* \dots \mathbf{a}_s$  no interseca  $\Omega$ . Como  $\Omega$  está contenido en todos los simples  $S_k$ , para los cuales  $0 \leq k \leq j$ , entonces también está contenido en cualquier simplex  $\mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1^0 \dots \mathbf{a}_s^0$ . Repitiendo este razonamiento se demuestra que el abierto  $\Omega$  está contenido en el simplex  $\mathbf{a}_0 \dots \mathbf{a}_s$ , lo cual implica que  $\Omega$  y el soporte de  $N_{j-e_k}$  son disjuntos.

Por lo tanto para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$  la recurrencia para los B-splines  $N_j$  coincide con la recurrencia para los B-polinomios  $C_j$ . Luego,  $N_i(\mathbf{x}) = C_i(\mathbf{x})$  para todo  $\mathbf{x} \in \Omega$ .  $\diamond$

## 19.6 Combinaciones lineales de B-splines

Hasta ahora hemos considerado B-splines sobre un complejo de  $s + 1$  cadenas de nodos. Sin embargo, la verdadera utilidad de los B-splines se manifiesta cuando consideramos el espacio de splines definidos sobre una partición de  $\mathbf{R}^s$  en complejos de tales cadenas de nodos.

Sean  $\mathbf{a}_k^0$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , los vértices de una triangulación  $\mathbf{R}^s$  y denotemos por  $K \subset \mathbf{Z}^{s+1}$  el conjunto de índices para los splines.

$$\mathbf{a}_{k_0}^0 \dots \mathbf{a}_{k_s}^0 \ , \quad \mathbb{k} = [k_0 \dots k_s] \in K \ ,$$

de la triangulación. Supongamos además que cada uno de estos vértices pertenece a una cadena  $\mathbf{a}_k^0 \dots \mathbf{a}_k^n$ , y denotamos por  $S_{\mathbb{k}j}$  al simplex  $\mathbf{a}_{k_0}^{j_0} \dots \mathbf{a}_{k_s}^{j_s}$

y por  $A_{\mathbb{k}j}$  la secuencia de nodos

$$\mathbf{a}_{k_0}^0 \dots \mathbf{a}_{k_0}^{j_0} \dots \mathbf{a}_{k_s}^0 \dots \mathbf{a}_{k_s}^{j_s}, \text{ donde } \mathbb{k} \in K, \text{ y } j \in \Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_{n-1} .$$

Finalmente, supondremos que para todo  $\mathbb{k} \in K$  la intersección

$$\Omega_{\mathbb{k}} = \text{interior} \bigcap_{j \in \Delta_0 \cup \dots \cup \Delta_n} S_{\mathbb{k}j}$$

es no vacía y como en 19.5, denotamos por  $N_{\mathbb{k}i}$  el B-spline multivariado definido sobre la cadena de nodos  $A_{\mathbb{k}i}$ .

Cualquier combinación lineal

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbb{k} \in K} \sum_{i \in \Delta_n} \mathbf{c}_{\mathbb{k}i} N_{\mathbb{k}i}(\mathbf{x})$$

de los B-splines  $N_{\mathbb{k}i}$  conforman una superficie  $C^{n-1}$  polinómica por trozos de grado total  $\leq n$  si los nodos están en posición general. Los coeficientes  $\mathbf{c}_{\mathbb{k}i}$  forman la **mall**a de control de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ . La Figura 19.8 ilustra el caso  $n = s = 2$ . Note que la malla de control no tiene porque ser conexas, pudiendo descomponerse en submallas, una para cada  $\mathbb{k} \in K$ . Estas son las B-mallas de los segmentos polinómicos  $\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbb{k}}$ .

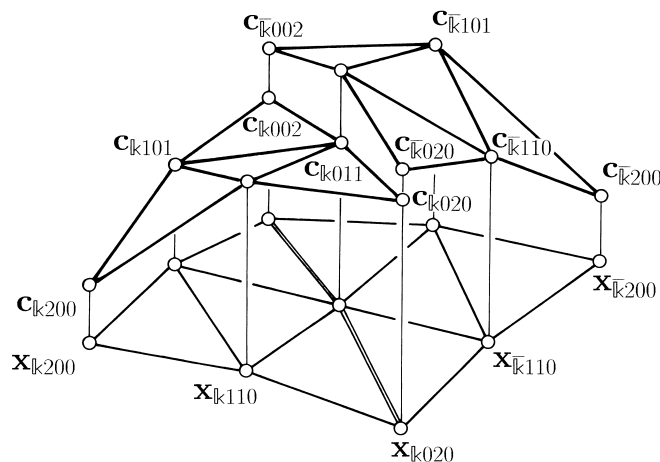


Figura 19.8: La malla de control de un spline cuadrático bivariado sobre dos triángulos.

Decimos que los puntos de control

$$\mathbf{c}_{\mathbb{k}i}, \quad \mathbb{k} \in K, \quad i \in \Delta_n,$$

forman una **mallá conexa**, si para cualesquiera dos simples adyacentes  $S_{\mathbb{k}_0}$  y  $S_{\bar{\mathbb{k}}_0}$ , después de un cambio adecuado de índices de manera que

$$k_0 \neq \bar{k}_0 \quad \text{y} \quad [k_1 \dots k_s] = [\bar{k}_1 \dots \bar{k}_s] ,$$

los puntos de control  $\mathbf{c}_{\mathbb{k}_i}$  y  $\mathbf{c}_{\bar{\mathbb{k}}_i}$  son iguales para todos los  $i$ , para los cuales  $i_0 = 0$ .

## 19.7 Una relación de recurrencia

Si el spline

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbb{k}} \sum_{\mathbb{i}} \mathbf{c}_{\mathbb{k}_i} N_{\mathbb{k}_i}(\mathbf{x})$$

tiene una mallá de control conexa, entonces de la relación de recurrencia (1) de 19.5 se desprende que  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  también se puede expresar como una combinación de B-splines  $N_{\mathbb{k}_j}$  de grado  $|\mathbb{j}| = n - 1$ . Más precisamente,

$$(3) \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbb{k} \in K} \sum_{\mathbb{j} \in \Delta_{n-1}} \mathbf{d}_{\mathbb{k}_j} N_{\mathbb{k}_j}(\mathbf{x}) ,$$

donde

$$\mathbf{d}_{\mathbb{k}_j} = \sum_{l=0}^s \xi_{\mathbb{k}_j}^l \mathbf{c}_{\mathbb{k},j+e_l}$$

y  $\xi_{\mathbb{k}_j}^0, \dots, \xi_{\mathbb{k}_j}^s$  son las coordenadas baricéntricas de  $\mathbf{x}$  respecto a  $S_{\mathbb{k}_j}$ .

Para la prueba aplicamos la relación de recurrencia (1) de 19.5 a los B-splines  $N_{\mathbb{k}_i}$ , obteniéndose

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbb{k}} \sum_{\mathbb{i}} \sum_{l=0}^s \xi_{\mathbb{k},i-e_l}^l \mathbf{c}_{\mathbb{k}_i} N_{\mathbb{k},i-e_l} .$$

Esta suma envuelve términos

$$\mathbf{c}_{\mathbb{k},j+e_l} N_{\mathbb{k}_j} ,$$

con  $j_l = -1$ . Veremos que la suma de todos estos términos es cero, lo cual nos llevará a expresión para  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ , de la ecuación (3).

Debido a la transformación de los índices es suficiente considerar un índice  $\mathbb{k}_j$ , para el cual  $j_0 = -1$  y  $\mathbb{k} = [0 \dots s]$ . Adicionalmente podemos suponer que  $\bar{\mathbb{k}} = [-1 1 \dots s]$  está también en  $K$ . Por lo tanto los simples  $S_{\mathbb{k}_0}$  y  $S_{\bar{\mathbb{k}}_0}$  tienen orientaciones opuestas, es decir,

$$\sigma_{\mathbb{k}_0} = -\sigma_{\bar{\mathbb{k}}_0} .$$

Por aplicaciones sucesivas del argumento usado para deducir (1) se obtiene

$$\sigma_{k,j} = -\sigma_{\bar{k},j}$$

y consecuentemente

$$\xi_{k,j}^0 = -\xi_{\bar{k},j}^0 .$$

Como la malla de control es conexa y  $N_{k,j} = N_{\bar{k},j}$ , vea (2), se obtiene

$$\xi_{k,j}^0 \mathbf{c}_{k,j+\mathbf{e}_0} N_{k,j} + \xi_{\bar{k},j}^0 \mathbf{c}_{\bar{k},j+\mathbf{e}_0} N_{\bar{k},j} = 0 ,$$

lo cual concluye la prueba.  $\diamond$

## 19.8 Derivadas de un spline

La relación de recurrencia (2) de 18.5 y la fórmula de la derivada (3) de 18.6 para los simplex splines son similares. La fórmula de la derivada, salvo un factor constante, se obtiene diferenciando los pesos de la fórmula de recurrencia, a pesar de que podría esperarse más términos, debido a la regla del producto.

Debido a ésto la relación de recurrencia (1) de 19.5 para splines multivariados se puede transformar en una fórmula para la derivada. Derivando las coordenadas baricéntricas  $\xi$  en la prueba de la fórmula de recurrencia de 19.7 se obtiene que, la derivada direccional en la dirección  $\Delta \mathbf{x}$  de un spline  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in K} \sum_i \mathbf{c}_{ki} N_{ki}(\mathbf{x})$$

de grado  $n = |i|$  con una malla de control conexa está dada por

$$\frac{d}{dt} \mathbf{s}(\mathbf{x} + t\Delta \mathbf{x})|_{t=0} = n \sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta} \dot{\mathbf{c}}_{kj} N_{kj}(\mathbf{x}) ,$$

donde

$$\dot{\mathbf{c}}_{kj} = \sum_{l=0}^s \nu_l \mathbf{c}_{k,j+\mathbf{e}_l}$$

y  $\nu_0, \dots, \nu_s$  son las coordenadas baricéntricas de la dirección  $\Delta \mathbf{x}$  con respecto al simplex  $S_{kj}$ . Véase también 19.4.

**Observación 5:** Como ya se observó en 19.4 las direcciones  $\dot{\mathbf{c}}_{kj}$  están relacionadas con las derivadas respecto a  $\Delta \mathbf{x}$  de las mallas de control  $\mathbf{c}_{kj}(\mathbf{x})$  de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  sobre los simples  $\mathbf{x}_{k,j+\mathbf{e}_0} \dots \mathbf{x}_{k,j+\mathbf{e}_s}$ .

## 19.9 El teorema fundamental

En esta sección usamos la notación de 19.6 y suponemos que los primeros  $r$  nodos  $\mathbf{a}_k^0, \dots, \mathbf{a}_k^{r-1}$  de cada nube de nodos son iguales. Tomando en cuenta que los simples  $S_{k\circ}$  forman una triangulación de  $\mathbf{R}^s$  probaremos que cualquier función polinómica por trozos, con continuidad  $C^{n-r}$  sobre esta triangulación es una combinación lineal de los B-splines  $N_{ki}$ . En segundo lugar, expresaremos sus puntos de control en términos de las formas polares de sus segmentos polinómicos.

Sea  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  un spline  $n - r$  veces continuamente diferenciable, tal que sobre cada simplex  $S_{k\circ}$  coincide con un polinomio  $\mathbf{s}_k(\mathbf{x})$  de grado  $\leq n$ . Entonces la versión multivariada del teorema principal de 5.5 tiene la siguiente formulación [Seidel '92]:

*El spline  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  se puede expresar como*

$$(4) \quad \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in K} \sum_{i \in \Delta_n} \mathbf{s}_k[A_{k,i-e}] N_{ki}(\mathbf{x}) ,$$

*donde  $\mathbf{s}_k[\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n]$  es la forma polar de  $\mathbf{s}_k$ .*

La prueba de este teorema es por inducción sobre  $n - r$ . Si  $n - r = -1$ , entonces los B-splines  $N_{ki}$  son los polinomios de Bernstein sobre  $S_{k\circ}$ . Véase la 19.5 y la Observación 2 de 19.2. En este caso la identidad (4) se desprende del teorema de 11.2. Supongamos ahora que  $n - r \geq 0$  y sea  $D\mathbf{s}(\mathbf{x})$  la derivada direccional de  $\mathbf{s}(\mathbf{x})$  con respecto a un vector  $\Delta\mathbf{x}$  y supongamos que

$$D\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta_{n-1}} D\mathbf{s}_k[A_{k,j-e}] N_{kj}(\mathbf{x}) .$$

En 11.6 demostramos que la forma polar de  $D\mathbf{s}_k$  se puede expresar en términos de la forma polar de  $\mathbf{s}_k$ , esto es

$$\begin{aligned} D\mathbf{s}_k[A_{k,j-e}] &= n\mathbf{s}_k[\Delta\mathbf{x} A_{k,j-e}] \\ &= n \sum_{l=0}^s \nu_l \mathbf{s}_k[A_{k,j-e+e_l}] , \end{aligned}$$

donde  $\nu_0, \dots, \nu_s$  son las coordenadas baricéntricas de  $\Delta\mathbf{x}$  con respecto a  $S_{kj}$ . Por la Observación 7 in 11.7 los puntos de control  $\mathbf{s}_k[A_{k,i-e}]$  forman una malla conexa. Entonces 19.8 implica que

$$D \sum_k \sum_i \mathbf{s}_k[A_{k,i-e}] N_{ki} = D\mathbf{s}$$

Por lo tanto (4) se verifica, salvo una constante. Pero como (2) es cierto sobre  $\Omega_k$ , (vea 19.4 y 19.5), esta constante es cero, lo cual concluye la prueba.  $\diamond$



En particular se tiene que los B-splines forman una **partición de la unidad**

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in \Delta_n} N_{ki} = 1 .$$

El polinomio identidad  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  tiene puntos de control

$$\mathbf{x}_{ki} = \frac{1}{n} A_{ki} \mathbf{e} .$$

Vea también 19.3. La Figura 19.8 ilustra el caso  $n = s = 2$ .

## 19.10 Ejercicios

- 1 Escriba un algoritmo de elevación de grado para B-parches. Dada una secuencia de cadenas de nodos  $A_n = \mathbf{a}_0^0 \dots \mathbf{a}_s^n$  en  $\mathbf{R}^s$  y cualquier polinomio  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  de grado  $n$ , considere las dos representaciones por B-parches

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \Delta_n} \mathbf{p}_i C_i^n(\mathbf{x})$$

y

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \Delta_{n+1}} \mathbf{p}_k C_k^{n+1}(\mathbf{x})$$

con respecto a  $A_{n-e}$  y  $A_n$ , respectivamente. Expresé los puntos de control  $\mathbf{p}_k$  como combinaciones afines de los puntos  $\mathbf{p}_i$ .

- 2 Encuentre un algoritmo que permita describir un spline sobre la triangulación  $S_{k,0}$ ,  $k \in K$ , definida en 19.9 con nodos  $\mathbf{a}_k^0 = \dots = \mathbf{a}_k^{r-1}$ , de multiplicidad  $r$ , como una combinación lineal de B-splines con nodos de multiplicidad  $r+1$ ,  $\mathbf{a}_k^0 = \dots = \mathbf{a}_k^r$ .
- 3 Proponga un algoritmo de elevación de grado para splines multivariados sobre una triangulación de  $\mathbf{R}^s$ . Estos splines deben presentarse como combinaciones lineales de B-splines.
- 4 Encuentre un algoritmo para calcular la representación de Bézier de un spline sobre la triangulación  $S_{k,0}$ ,  $k \in K$ , definida en 19.9.
- 5 Sea  $A_n = [\mathbf{a}_0^0 \dots \mathbf{a}_s^n]$  la matriz de  $s+1$  cadenas, cada una con  $n+1$  nodos y denotemos por  $\mathbf{x}_i = \frac{1}{n} A_i \mathbf{e}$ , sus abscisas de **Greville**. Véase la Observación 3 de 19.3. Decimos que los puntos  $\mathbf{x}_j$  están **bien posicionados** si todos los simples,  $\mathbf{x}_{j+e_0} \dots \mathbf{x}_{j+e_s}$ ,  $j \in \Delta_{n-1}$  tienen interiores disjuntos. Demuestre que los  $\mathbf{x}_i$  están bien posicionados si cualquier nodo  $\mathbf{a}_{\mu\nu}$  se puede expresar como

$$\mathbf{a}_{\mu\nu} = \mathbf{a}_{\mu 0} + \sum_{k=0}^s \alpha_k \mathbf{a}_{k0} ,$$

donde  $0 = \alpha_0 + \dots + \alpha_s$  y  $|\alpha_0|, \dots, |\alpha_s| < 1/2$ . Véase también [Prautzsch '97, Teorema 4.2].

- 6 Sea  $A_n, n_0 = n_1 = n_2 = 2$ , una secuencia de nodos con abscisas de Greville bien posicionadas. Demuestre que cualquier polinomio cuadrático bivariado (a valores en  $\mathbb{R}^2$ ) es convexo sobre  $\mathbb{R}^2$  si la malla de su B-parche, con respecto a  $A_n$ , es convexa. Vea 10.6 y las Figuras 10.6 y 19.5.
- 7 Sea  $A_n$  una secuencia de nodos en  $\mathbb{R}^2$  con abscisas de Greville bien posicionadas. Demuestre que cualquier polinomio cuadrático bivariado, a valores en  $R$ , es convexo sobre el dominio  $\Omega$ , definido en 19.5 si su B-malla con respecto a  $A_n$  es convexa.



## Bibliografía

- C. BANGERT AND H. PRAUTZSCH (1999). A geometric criterion for the convexity of Powell-Sabin interpolants and its multivariate extension. *Computer Aided Geometric Design*, 16(6):529–538.
- R.E. BARNHILL AND R.F. RIESENFELD, editors (1974). *Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, New York, 1974.
- W. BOEHM (1977). Über die Konstruktion von B-Spline-Kurven. *Computing*, 18:161–166.
- W. BOEHM (1980). Inserting new knots into B-Spline-Curves. *Computer-Aided Design*, 12(4):199–201.
- W. BOEHM (1983). Generating the Bézier points of triangular splines. In R.E. BARNHILL AND W. BOEHM, editors (1983), *Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, pages 77–91. Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), 1983.
- W. BOEHM (1984a). Calculating with box splines. *Computer Aided Geometric Design*, 1:149–162.
- W. BOEHM (1984b). Efficient evaluation of splines. *Computing*, 33:171–177.
- W. BOEHM (1985). Curvature continuous curves and surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 2:313–323.
- W. BOEHM (1987). Smooth curves and surfaces. In G. FARIN, editor (1987), *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pages 175–184. SIAM, 1987.
- W. BOEHM, G. FARIN, AND J. KAHMANN (1984). A survey of curve and surface methods in CAGD. *Computer Aided Geometric Design*, 1(1):1–60.
- W. BOEHM AND H. PRAUTZSCH (1993). *Numerical Methods*. Vieweg, Wiesbaden and AK Peters, Wellesley, Mass.
- W. BOEHM, H. PRAUTZSCH, AND P. ARNER (1987). On triangular splines. *Constructive Approximation*, 3:157–167.

- C. DE BOOR (1972). On calculating with B-splines. *Journal of Approximation Theory*, 6:50–62.
- C. DE BOOR (1976). Total positivity of the spline collocation matrix. *Indiana University Journal Math.*, 25:541–551.
- C. DE BOOR (1976a). Splines as linear combinations of B-splines. In SCHUMAKER, LORENTZ, CHUI, editor (1976a), *Approximation Theory II*, pages 1–47. Academic Press, New York, 1976.
- C. DE BOOR (1978). *A Practical Guide to Splines*. Springer, New York.
- C. DE BOOR (1984). Splinefunktionen. Research Report 84-05, Seminar für angewandte Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Switzerland, 1984.
- C. DE BOOR (1987). B-form basics. In G. FARIN, editor (1987), *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, pages 131–148. SIAM, Philadelphia, 1987.
- C. DE BOOR AND K. HÖLLIG (1982). Recurrence relations for multivariate B-splines. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 85(3).
- C. DE BOOR, K. HÖLLIG, AND S. RIEMENSCHNEIDER (1993). *Box Splines*. Applied Mathematical Sciences 98. Springer, New York.
- M. DO CARMO (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- J.M. CARNICER AND W. DAHMEN (1992). Convexity preserving interpolation and Powell-Sabin elements. *Computer Aided Geometric Design*, 9(4):279–290.
- P. DE FAGET DE CASTELJAU (1959). Outillage méthodes calcul. *Enveloppe Soleau 40.040, Institute National de la Propriété Industrielle, Paris*.
- P. DE FAGET DE CASTELJAU (1985). Formes a poles. In *Mathematiques et CAO 2*. Hermes Publishing, Paris, 1985.
- E. CATMULL AND J. CLARK (1978). Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10(6):350–355.
- A.S. CAVARETTA, W. DAHMEN, AND C.A. MICCHELLI (1991). Stationary subdivision. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 93(453):1–186.
- G.M. CHAIKIN (1974). An algorithm for high-speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing*, 3:346–349.

- R.W. CLOUGH AND J.L. TOCHER (1965). Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending. In *Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Wright-Patterson AFB AFFDL TR, pages 515–545, 1965.
- E. COHEN, T. LYCHE, AND R.F. RIESENFELD (1980). Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics. *Computer Graphics and Image Processing*, 14:87–111.
- E. COHEN, T. LYCHE, AND R.F. RIESENFELD (1984). Discrete box splines and refinement algorithms. *Computer Aided Geometric Design*, 1:131–148.
- E. COHEN, T. LYCHE, AND L.L. SCHUMAKER (1985). Algorithms for degree raising of splines. *ACM Transactions on Graphics*, 4(3):171–181.
- M.G. COX (1972). The numerical evaluation of B-splines. *J. Inst. Maths. Applics.*, 10:134–149.
- H.B. CURRY AND I.J. SCHOENBERG (1966). On Pólya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits. *J. d'Analyse Math.*, 17:71–107.
- W. DAHMEN AND C.A. MICCHELLI (1983). Translates of multivariate splines. *Linear Algebra and its Applications*, 217-234.
- W. DAHMEN AND C.A. MICCHELLI (1984). Subdivision algorithms for the generation of box spline surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 1:115–129.
- W. DAHMEN AND C.A. MICCHELLI (1985). On the local linear independence of translates of a box spline. *Studia Math.*, 82:243-262.
- W. DAHMEN, C.A. MICCHELLI, AND H.-P. SEIDEL (1992). Blossoming begets B-splines built better by B-patches. *Mathematics of computation* 59, 199:97–115.
- W. DEGEN (1988). Some remarks on Bézier curves. *Computer Aided Geometric Design*, 5:259–268.
- A.D. DEROSE, R.N. GOLDMANN, H. HAGEN, AND S. MANN (1993). Functional composition algorithms via blossoming. *ACM Transactions on Graphics*, 12:113–135.
- D.W.H. DOO AND M.A. SABIN (1978). Behavior of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*, 10(6):356–360.

- N. DYN, J. GREGORY, AND D. LEVIN (1990). A butterfly subdivision scheme for surface interpolation with tension control. *ACM Transactions on Graphics*, 9:160–169.
- N. DYN, J.A. GREGORY, AND D. LEVIN (1991). Analysis of uniform binary subdivision schemes for curve design. *Constructive Approximation*, 7:127–147.
- N. DYN, D. LEVIN, AND J.A. GREGORY (1987). A 4-point interpolatory subdivision scheme for curve design. *Computer Aided Geometric Design*, 4:257–268.
- N. DYN AND C.A. MICCHELLI (1988). Piecewise polynomial spaces and geometric continuity of curves. *Numerical Mathematics*, 54:319–337.
- M. ECK (1993). Degree reduction of Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 10:237–251.
- M. ECK (1995). Least squares degree reduction of Bézier curves. *Computer-Aided Design*, 27 (11):845–853.
- G. FARIN (1979). *Subsplines über Dreiecken*. Diss., TU Braunschweig, Germany, 1979.
- G. FARIN (1982). Visually  $C^2$  cubic splines. *Computer-Aided Design*, 14:137–139.
- G. FARIN (1986). Triangular Bernstein-Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, 3(2):83–127.
- G. FARIN (2002). *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Morgan Kaufmann Publishers, 5th edition.
- D. FILIP, R. MAGDSON, AND R. MARKOT (1986). Surface algorithms using bounds on derivatives. *Computer Aided Geometric Design*, 3(4):295–311.
- M.S. FLOATER (1997). A counterexample to a theorem about the convexity of Powell-Sabin elements. *Computer Aided Geometric Design*, 14:383–385.
- T.A. FOLEY AND G.M. NIELSON (1989). Knot selection for parametric spline interpolation. In T. LYCHE AND L.L. SCHUMAKER, editors (1989), *Mathematical Methods in Computer Aided Geometric Design*, pages 261–271. Academic Press, Boston, 1989.
- W. GORDON AND R.E. RIESENFELD (1974). B-spline curves and surfaces. In *[Barnhill & Riesenfeld '74]*, pages 95–125, 1974.

- T.A. GRANDINE (1989). On convexity of piecewise polynomial functions on triangulations. *Computer Aided Geometric Design*, 6(3):181–187.
- J. GRAVESEN (1997). Adaptive subdivision and the length of Bézier curves. *Computational Geometry*, 8:13–31.
- J.A. GREGORY (1991). An introduction to bivariate uniform subdivision. In D.F. GRIFFITHS AND G.A. WATSON, editors (1991), *Numerical Analysis*, pages 103–117. Pitman Research Notes in Mathematics, Longman Scientific and Technical, 1991.
- T.N.E. GREVILLE (1967). On the normalization of the B-splines and the location of the nodes for the case of unequally spaced knots. In O. SHISKA, editor (1967), *Inequalities*. Academic Press, New York, 1967.
- J. HOSCHEK AND D. LASSER (1992). *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. B.G. Teubner, Stuttgart, second edition. English translation: *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*, AK Peters, Wellesley, 1993.
- R.-Q. JIA (1983). Linear independence of translates of a box spline. *Journal of Approximation Theory*, 40:158–160.
- R.-Q. JIA (1985). Local linear independence of the translates of a box spline. *Constructive Approximation*, 1:175–182.
- S. KARLIN (1968). *Total Positivity*. Stanford University Press, 1968.
- W. KLINGENBERG (1978). *A Course in Differential Geometry*. Springer, New York.
- L. KOBBELT (1994). *Iterative Erzeugung glatter Interpolanten*. Diss., Universität Karlsruhe, 1994.
- L. KOBBELT (2000).  $\sqrt{3}$ -Subdivision. *Proceedings of SIGGRAPH 2000*, Academic Press, New York, pages 103–112.
- L. KOBBELT AND H. PRAUTZSCH (1995). Approximating the length of a spline by its control polygon. In T. LYCHE M. DÆHLEN AND L.L. SCHUMAKER, editors (1995), *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, pages 291–292, 1995.
- M.-J. LAI (1991). A characterization theorem of multivariate splines in blossoming form. *Computer Aided Geometric Design*, 8:513–521.
- J.M. LANE AND R.F. RIESENFELD (1980). A theoretical development for the computer generation and display of piecewise polynomial surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2(1):35–46.



- E.T.Y. LEE (1982). A simplified B-spline computation routine. *Computing*, 29:365–373.
- E.T.Y. LEE (1989). Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer-Aided Design*, 21:363–370.
- E.T.Y. LEE (1994). Remarks on an identity related to degree elevation. *Computer Aided Geometric Design*, 11:109–111.
- W. LIU (1997). A simple, efficient degree raising algorithm for B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 14:693–698.
- C.T. LOOP (1987) Smooth subdivision surfaces based on triangles. Master thesis, University of Utah, 1987.
- D. LUTTERKORT, J. PETERS AND U. REIF (1999). Polynomial degree reduction in the  $L_2$ -norm equals best Euclidean approximation of Béziercoefficients. *Computer Aided Geometric Design*, 16:607–612.
- M.-L. MAZURE AND H. POTTMANN (1996). Tchebycheff curves. In M. GASCA AND C.A. MICCHELLI, editors (1996), *Total Positivity and its Applications*, pages 187–218. Kluwer, 1996.
- C.A. MICCHELLI (1979). On a numerically efficient method for computing multivariate B-splines. In W. SCHEMPP AND K. ZELLER, editors (1979), *Multivariate Approximation Theory*, pages 211–248. Birkhäuser, Basel, 1979.
- C.A. MICCHELLI (1980). A constructive approach to Kergin interpolation in  $R^k$ : multivariate B-splines and Lagrange interpolation. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 10(3):485–497.
- C.A. MICCHELLI AND H. PRAUTZSCH (1987). Refinement and subdivision for spaces of integer translates of a compactly supported function. In D.F. GRIFFITHS AND G.A. WATSON, editors (1987), *Numerical Analysis*, pages 192–222. Longman, London, 1987.
- C.A. MICCHELLI AND H. PRAUTZSCH (1989). Computing curves invariant under subdivision. *Computer Aided Geometric Design*, 4:321–328.
- D. NAIRN, J. PETERS, AND D. LUTTERKORT (1999). Sharp, quantitative bounds on the distance between a polynomial piece and its Bézier control polygon. *Computer Aided Geometric Design*, 16(7):613–633.
- G. NIELSON (1974). Some piecewise polynomial alternatives to splines under tension. In R.E. BARNHILL AND R.F. RIESENFELD, editors (1974), *Computer Aided Geometric Design*, pages 209–235. Academic Press, 1974.

- J. PETERS (1991). Smooth interpolation of a mesh of curves. *Constructive Approximation*, 7:221–246.
- J. PETERS (1994). Evaluation and approximate evaluation of the multivariate Bernstein-Bézier form on a regularly partitioned simplex. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(4):460–480.
- J. PETERS AND U. REIF (1997). The simplest subdivision scheme for smoothing polyhedra. *ACM Transaction on Graphics*, 16(4):420–431.
- L. PIEGL AND W. TILLER (1994). Software-engineering approach to degree elevation of B-spline curves. *Computer-Aided Design*, 26(1):17–28.
- B. PIPER (1987). Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches. In G. FARIN, editor (1987), *Geometric Modeling: Algorithms and New Trends*, Philadelphia, pages 221–233. SIAM, 1987.
- H. POTTMANN (1993). The geometry of Tchebycheffian splines. *Computer Aided Geometric Design*, 10:181–210.
- H. POTTMANN AND A.D. DEROSE (1991). Classification using normal curves. *Curves and Surfaces in Computer Vision and Graphics 2*, 1610:217–228.
- M.J.D. POWELL (1981). Approximation theory and methods. *Cambridge University Press*.
- M.J.D. POWELL AND M.A. SABIN (1977). Piecewise quadratic approximations on triangles. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 3(4):316–325.
- H. PRAUTZSCH (1984a). Degree elevation of B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 1:193–198.
- H. PRAUTZSCH (1984b). Unterteilungsalgorithmen für multivariate Splines Ein geometrischer Zugang. Diss., TU Braunschweig, 1984.
- H. PRAUTZSCH (1989). A round trip to B-splines via de Casteljaou. *ACM Transactions on Graphics*, 8(3):243–254.
- H. PRAUTZSCH (1997). Freeform splines. *Computer Aided Geometric Design*, 14:201–206.
- H. PRAUTZSCH (1998). Smoothness of subdivision surfaces at extraordinary points. *Advances in Computational Mathematics*, 9:377–389.
- H. PRAUTZSCH (2002). B-splines with arbitrary connection matrices. Preprint, 2002.
- H. PRAUTZSCH AND W. BOEHM (2002). Box Splines. In KIM ET AL, editor (2002), *Handbook of Computer Aided Design*, Elsevier, 2002.

- H. PRAUTZSCH AND B. PIPER (1991). A fast algorithm to raise the degree of spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 8:253–265.
- H. PRAUTZSCH AND U. REIF (1999). Degree estimates for  $C^k$ -piecewise polynomial subdivision surfaces. *Advances in Computational Mathematics*, 10:209–217.
- L. RAMSHAW (1987). Blossoming: a Connect-the-Dots Approach to Splines. Technical report, Digital Systems Research Center, Palo Alto, California, June 21, 1987.
- U. REIF (1993). *Neue Aspekte in der Theorie der Freiformflächen beliebiger Topologie*. Diss., Mathematisches Institut A der Universität Stuttgart, 1993.
- U. REIF (1995a). A note on degenerate triangular Bézier patches. *Computer Aided Geometric Design*, 12:547–550.
- U. REIF (1995b). A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary vertices. *Computer Aided Geometric Design*, 12:153–174.
- U. REIF (1996). A degree estimate for subdivision surfaces of higher regularity. *Proc. of the AMS*, 124(7):2167–2174.
- U. REIF (1998). TURBS - Topologically unrestricted rational B-splines. *Constructive Approximation*, 14(1):57–78.
- U. REIF (2000). Best bounds on the approximation of polynomials and splines by their control structure. *Computer Aided Geometric Design*, 17:579–589.
- G. DE RHAM (1947). Un peu de mathématiques à propos d’une courbe plane. *Elemente der Mathematik*, 2(4):89–104.
- V.L. RVACHEV (1990). Compactly supported solutions of functional differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys*, 45:87–120.
- M.A. SABIN (1977). *The use of piecewise forms for the numerical representation of shape*. PhD thesis, Hungarian Academy of Science, Budapest, 1977.
- M.A. SABIN (1986). Recursive subdivision. In GREGORY, editor (1986), *The Mathematics of Surfaces*, Clarendon Press, Oxford, England, pages 269–282.
- P. SABLONNIERE (1978). Spline and Bézier polygons associated with a polynomial spline curve. *Computer-Aided Design*, 10:257–261.

- R. SCHABACK (1993). Error estimates for approximations from control nets. *Computer Aided Geometric Design*, 10:57–66.
- I.J. SCHOENBERG (1967). On spline functions. In O. SISCHA, editor (1967), *Inequalities*, pages 255–291. Academic Press, New York, 1967.
- I.J. SCHOENBERG AND A. WHITNEY (1953). On Pólya frequency functions, 3: The positivity of translation determinants with applications to the interpolation problem by spline curves. *TAMS*, 74:246–259.
- L.L. SCHUMAKER (1973). Constructive aspects of discrete polynomial spline functions. In G.G. LORENTZ ET AL, editor (1973), *Approximation Theory*, pages 469–476. Academic Press, New York, 1973.
- L.L. SCHUMAKER (1981). *Spline functions – Basic theory*. John Wiley & Sons, New York.
- H.-P. SEIDEL (1989). Computing B-spline control points. In W. STRASSER AND H.-P. SEIDEL, editors (1989), *Theory and Practice of geometric modeling*, pages 17–32. Springer, Berlin, 1989.
- H.-P. SEIDEL (1991). Symmetric recursive algorithms for surfaces: B-patches and the de Boor algorithm for polynomials over triangles. *Constructive Approximation*, 7:257–279.
- H.-P. SEIDEL (1992). New algorithms and techniques for computing with geometrically continuous spline curves of arbitrary degree. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 26(1):149–176.
- P. SHENKMAN, D. DYN, AND D. LEVIN (1999). Normals of the butterfly subdivision scheme surfaces and their application. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 102(1):157–180.
- E. STÄRK (1976). *Mehrfach differenzierbare Bézier-Kurven und Bézier-Flächen*. Diss., TU Braunschweig, 1976.
- W. TRUMP (2001). *Neue Algorithmen zur Graderhöhung und Umparametrisierung von Bézier- und B-Spline-Darstellungen*. Diss., Universität Karlsruhe, 2001.
- W. TRUMP AND H. PRAUTZSCH (1996). Arbitrary degree elevation for simplicial Bézier polynomials. *Computer Aided Geometric Design*, 13:387–398.



# Indice

- A-marco, 37
  - generalizado, 95
- abscisas
  - de Greville, 70, 80, 282
  - de Bézier, 21, 146
- afines
  - invariante bajo aplicaciones, 69
- afinmente
  - independientes, 4
  - invariante, 129, 144, 245, 253
- afín
  - aplicación, 5
  - combinación, 5, 129, 144
  - coordenadas, 4
  - en cada variable, 25, 130, 155
  - espacio, 3
  - osculantes, 102
- ajuste
  - por mínimos cuadrados, 53
- algoritmo
  - de Aitken, 46
  - de Catmull-Clark, 226
  - de de Boor, 63, 66, 78
    - extendido, 70
    - generalizado, 67, 106
  - de de Casteljau, 13, 131, 132, 146
    - estabilidad numérica, 14, 146
    - generalización, 158, 269, 270
  - de Doo-Sabin, 226
  - de inserción de nodos, 101, 107
  - de la mariposa, 222, 235
  - de Lane-Riesenfeld, 30, 111, 206, 216, 226
  - de Oslo, 79
  - de promediación en tres direcciones, 220
  - de subdivisión estacionaria, 109
  - esquema de promedios, 214
  - para la elevación de grado, 81
- aplicación
  - característica, 232
  - del esquema de subdivisión, 232
  - lineal subyacente, 5
- aproximación, 43, 52
- aproximante, 52
- Arner, 216
- autointersecciones, 41
- B-malla, 278
- B-parche, 271
  - derivada, 273
- B-polinomio, 271
- B-punto, 270
- B-spline, 60, 62, 276
  - como diferencias divididas, 74
  - conversión a la representación, 69
  - de grado  $n$ , 68
  - derivada, 69
  - discretos, 79
  - escalados, 110
  - fórmula de recursión, 64, 111
  - gamma, 96
  - propiedades de suavidad, 67
  - recursión de de Boor, 69
  - representación por, 59

- técnica, 77
- trasladados, 110
- una definición recursiva, 62
- uniformes, 109
- Bangert, 177
- base, 68, 143
  - de  $\gamma$ -splines, 96
  - polinómica de Newton, 46
- blossom, 26, 156
- Boehm, 72, 75, 78, 79, 93, 95, 97, 100, 108, 216, 217, 256, 257
- de Boor, 31, 39, 56, 61, 63, 64, 66, 67, 69, 70, 74–76, 79, 85, 106, 165, 249, 256, 259
- Box spline
  - sobre mallas triangulares, 217
- box spline, 218, 239
  - como sombras, 240
  - definición, 239
  - densidad de la sombra, 240
  - subdivisión de superficies, 246
  - superficie, 245
- cálculo
  - con esquema de diferencias, 212
  - con esquema de promedios, 214
- cápsula convexa, 64, 69, 245, 272
- cadena de nodos, 277
- caja de acotación, 13, 33
- cara
  - de dimensión inferior, 144
  - de la malla de Bézier, 144
- do Carmo, 99
- Carnicer, 177
- de Casteljau, 131, 132, 156, 158
- Catmull, 225, 226
- Cavaretta, 213
- centro del soporte, 246
- Chaikin, 112
- Clark, 225, 226
- Clough, 170
- Cohen, 79, 81, 248
- combinación
  - afín, 129, 144
  - convexa, 12, 14, 64, 145, 245
- conexión
  - $C^r$  simples, 36, 162
  - $G^1$ , 179
  - $G^k$ , 190
  - $G^k$  usando
    - curvas transversales, 191
    - la regla de la cadena, 192
  - de dos parches triangulares cúbicos, 181
  - general  $C^1$ , 179
  - general  $C^k$ , 189
  - general  $GC^r$ , 92
  - geométrica  $G^1$ , 179
  - simple  $C^r$ , 135
- construcción
  - de Stärk, 37, 60
  - geométrica de un box spline, 241
  - recursiva, 110
- construcción  $G^k$ , 189
- contacto
  - de orden  $r$ , 92
- continuidad
  - de Frenet, 99
  - de superficies obtenidas por subdivisión, 231
- convergencia
  - bajo subdivisión, 29, 159, 249
  - por elevación de grado, 39, 83, 164
  - por inserción de nodos, 80
  - teorema
    - para  $C^r$ -subdivisión, 116
  - uniforme, 115
- conversión
  - a la forma monomial, 22
  - a la representación B-spline, 69
  - a la representación de Bézier, 20
  - a la representación tensorial de Bézier, 166
  - a la representación triangular de Bézier, 167

- de forma de Bézier a forma monomial, 131
- de forma monomial a forma de Bézier, 131
- entre las representaciones de de Boor y de Bézier, 72
- convexa
  - cápsula, 5, 8, 12, 64, 69, 145, 272
  - combinación, 5, 12, 14, 64, 145, 245
- convexidad, 148, 152
  - limitaciones, 150
- convolución, 109
  - de  $N^{j-1}$  con  $N^0$ , 110
  - sucesiva, 239
- coordenadas
  - baricéntricas, 4, 141
  - extendidas, 3
  - origen del sistema de, 4
- Cox, 62, 69, 74–76
- cúbica plana
  - cúspide, 23
- Curry, 66
- curva
  - borde, 128
  - convexa, 35
  - Frenet continua de orden  $r$ , 99
  - funcionales, 7
  - normal, 106
  - paramétrica, 6
  - polinómica, 6
    - derivada, 35
  - suaves, 91
- curva de Bézier, 11
  - recta tangente, 16, 18
- curvatura, 99
  - de una cúbica, 49
  - invariante euclideo, 100
  - prescrita, 56
- curvatura continua
  - segmentos conectados por, 94
- círculos tangentes, 107
- Dahmen, 177, 213, 245, 248, 276
- Degen, 93
- densidad de la sombra, 240, 252
- derivada, 15, 114, 133, 147, 266
  - $r$ -ésima, 18
  - de un B-parche, 273
  - de un polinomio de Bernstein parciales, 147
  - de un producto tensorial, 133
  - de un spline, 114
    - suavidad, 67
  - direccional, 161, 267, 273
    - de un box spline, 243, 246
    - de un half-box spline, 252, 253
  - en la representación de Bézier, 16
    - parcial, 36
- DeRose, 167
- desplazamientos uniformes, 40
- diferencia
  - dividida, 47, 74
  - hacia adelante, 15, 16
  - hacia atrás, 67
- dimensión, 4
- distribución polihipergeométrica, 39
- Doo, 225, 226
- Dyn, 105, 118, 120, 222
- Eck, 38
- ecuación
  - de correlación, 54
  - de refinamiento, 114, 117, 206, 212
  - funcional de un box spline, 242
  - normales, 54
  - normales de Gauss, 54
- elemento
  - de Zwart-Powell, 244
- elevación de grado, 38, 69, 163
- esquema
  - de diferencias, 115
    - cálculo con, 117, 212
    - polinomio característico, 213
  - de las  $\nabla_v$ -diferencias, 213
  - de los cuatro puntos, 118, 119



- de producto tensorial, 206, 213
- de promediación, 257
- de promedios, 214
  - algoritmo, 214
- de subdivisión
  - aplicación característica, 232
  - polinomio característico, 213
  - símbolo, 213
- de subdivisión estacionaria
  - de mallas hexagonales, 234
  - de mallas triangulares, 234
  - de una malla regular, 205
- del punto medio, 225, 226, 236
- general de subdivisión, 207
- iterativo interpolante, 118
- tetraédrico, 19, 71, 73
- triangular, 11, 64
- esquina
  - del parche, 128
  - extraordinaria, 139
- expansión
  - binomial, 9
  - de Taylor
    - de un segmento de spline, 71
    - en una superficie triangular, 153
  - trinomial, 141
- fórmula
  - de elevación de grado, 39, 82, 268
  - de Micchelli, 268
  - de Frenet, 98
  - de Hermite-Genocchi, 56
  - de inserción de nodos, 264
  - de recurrencia
    - de polinomios de Bernstein, 10
  - de recursión
    - de polinomios de Bernstein, 63, 143
- Farin, 39, 40, 52, 93, 94, 162
- fibra, 259
- Filip, 31
- Floater, 177
- Foley, 52
- forma polar, 65, 156
  - asociada, 26
  - del producto tensorial, 130
  - diagonal, 25
  - simetría, 25
  - tensorial, 130
- función
  - característica, 260
  - de conexión, 179
  - de densidad, 239
  - error de Gauss, 56
  - generatriz, 212
  - gráfico de una, 6
  - potencial truncada, 74
  - racional, 180
  - racional por trozos, 105
- $\gamma$ -A-marco, 95
- $\gamma$ -spline, 95, 108
- Goldman, 167
- Gordon, 65
- graficación
  - programa de, 30
- Grandine, 151
- Gravesen, 41
- Gregory, 118, 222
- Hagen, 167
- half-box spline, 251
  - normalizados, 251
  - superficies, 253
- Half-box splines
  - sobre mallas triangulares, 221
- Hoschek, 52
- Höllig, 249, 256
- identidad de Marsden, 70, 75
- inserción
  - de nodos, 77, 105, 263
  - repetida de nodos, 78
- integral
  - de una curva polinómica, 19
- intercambio

- entre formas monomial y de Bézier, 131
- interpolación, 43, 84, 169
  - $C^1$  bicúbica por trozos, 136
  - con splines cúbicos, 86
  - de Hermite, 48, 169
    - cúbica por trozos, 50
  - de Hermite para curvas en representación de Bézier, 140
  - de Lagrange, 44
  - de Newton, 46
  - lineal, 4
  - lineal, esquema, 52
  - tensorial, 136
- interpolador
  - de Clough-Tocher, 170
  - de Hermite, 194
  - de Powell-Sabin, 171
  - triangular  $G^1$ , 183
- interpretación geométrica, 251
- intersección, 32
  - de dos curvas de Bézier, 32
  - programa de, 33
- invariantes geométricos, 99
- jets de orden  $r$ , 92
- Jia, 245
- Karlin, 85
- Kobbelt, 41, 119, 213
- Lai, 163
- Lane, 30, 111, 206, 226
- Lasser, 52
- Lee, 52, 72, 82
- Levin, 118, 222
- linealmente independientes, 9, 142
- linearización, 55
- Liu, 81
- longitud de arco, 41, 94
  - parametrización por, 94
- longitud de cuerdas, 52
- Loop, 235
- Lutterkort, 38
- Lyche, 79, 81, 248
- máscara, 207, 256
- método
  - de Horner, 14
  - simplex, 53
- macroparche, 198
- malla
  - conexa, 279
  - cuadrilateral, 193, 215
    - de topología arbitraria, 138
  - cuadrilateral no regular, 137
  - cuadrilateral regular, 136
  - de control, 278
    - secuencia, 209
  - de cuasi control, 140
  - de Bézier, 128, 144, 196
  - extraordinaria, 226
  - hexagonal, 219, 234
  - hexagonal regular, 254
  - regular, 215
  - subdivisión repetida, 160
  - triangular, 215, 234
    - subdivisión, 215
- Mann, 167
- Mansfield, 62, 69, 74–76
- marco, 4
  - de Frenet, 98
- matriz
  - característica, 220
  - de colocación, 84
    - totalmente positiva, 85
  - de conexión, 92, 99
    - arbitraria, 104
    - totalmente positiva, 105
  - de subdivisión, 114, 205, 230
  - estocástica, 230
- Mazure, 103
- Micchelli, 82, 105, 213, 230, 235, 245, 248, 262, 264, 267, 268
- microtriángulo, 170
- multiafín
  - polinomios simétricos, 27

- $\nu$ -splines, 97
- Nairn, 29
- Nielson, 97
- $m$ -nodo, 260
- nodos, 59, 260
  - algoritmo de inserción, 101, 107
  - cadena, 270
  - convergencia por inserción, 80
  - eliminación para B-splines, 79
  - fórmula de inserción, 264
  - inserción, 77, 105, 263
  - inserción repetida, 78
  - múltiples, 103
  - multiplicidad de, 68
  - nubes, 270
  - refinamiento, 77
- notación vectorial, 131
- operador
  - de Bernstein, 23, 40, 152
  - de diferencia, 153
  - de duplicación, 206, 216, 219
  - de promediación, 206, 216, 225
  - de refinamiento, 206, 217, 225
  - del punto medio, 226
- ordenadas de Bézier, 21, 146
- origen
  - del sistema de coordenadas, 4
- osculante, 101
  - afín, 102
  - diagonal, 101
  - generalizado, 105
  - primer, 101
  - propiedades, 101
  - segundo, 101
  - simetría, 101
- osculante generalizado
  - diagonal, 105
- parámetro
  - de diseño, 118
  - global, 11, 128, 142
  - local, 11, 128, 142
- parametrización
  - centrípeto, 52
  - equidistante, 51
  - por longitud de arco, 94
  - regular, 94
  - singular, 137, 173
  - standard, 229
- parches
  - multilaterales en el plano, 200
- paridad
  - el problema, 185
- partición de la unidad, 10, 65, 68, 143, 245, 253, 272, 282
- partición de prisma, 268
- Peters, 38, 161, 186, 258
- Piegl, 81
- Piper, 81
- plano
  - osculador, 16, 18
  - tangente, 134, 138, 148
    - continuo, 174
- poliedro de Bézier, 148
  - convexos, 150
- polinomio
  - característico del esquema
    - de diferencias, 118, 213
    - de subdivisión, 117, 213
  - de Bernstein, 9, 141, 266, 272
  - derivada de un, 15
  - derivadas parciales, 147
  - fórmula de recurrencia, 10, 63, 143
  - multivariados, 142
  - propiedades, 9
  - propiedades de simetría, 144
  - propiedades en dimensión  $d$ , 142
  - raíces, 10
  - simetría, 10, 12, 143
- de Hermite, 48
- de Lagrange, 44, 126
- de Laurent, 117
- simétrico, 25, 101, 155
  - de la derivada, 161
- elementales, 26, 156
- multiafín, 102
- relación de recurrencia, 26

- polígono
  - convexo, 35
  - de control, 101
  - de diferencias, 115
  - de Bézier, 11
  - de Bézier compuesto, 29, 37
- Pottmann, 103
- Powell, 84
- p-parche, 198
- Prautzsch, 40, 41, 61, 75, 81, 89, 103, 165, 177, 198, 203, 216, 230, 233, 235, 236, 246, 247, 283
- precisión bilineal
  - de representación de Bézier, 132
- precisión lineal, 21, 145, 146, 246, 254, 273
- primer hodógrafo, 15
- primera diferencia
  - hacia atrás, 67
- prisma
  - partición de, 268
- problema
  - de la paridad, 185
  - del vértice compartido, 184
- producto tensorial, 125
  - esquema, 206, 213
- programación lineal, 57
- promedios crecientes, 211
- propiedad
  - de variación decreciente, 88
- puntos
  - de control, 64, 66, 105, 126, 245, 249, 253
  - de cuasi control, 140
  - de Bézier, 11, 128, 144
  - dependientes, 199
  - extraordinarios, 227
  - libres, 199
- Ramshaw, 26, 81, 156
- razón simple, 4
- recorte de esquinas, 34
- recursión
  - de de Boor, 69
- reducción de grado, 38
- refinamiento uniforme, 145
- regla de Leibniz, 76
- Reif, 29, 38, 138, 174, 202, 203, 225, 232, 234, 258
- relación de recurrencia, 143, 156
  - de B-polinomios, 272
  - de Micchelli, 266, 267
  - de polinomios simétricos, 26
  - fórmula para B-splines, 64
  - para box splines, 256
  - para la derivada del simplex spline, 267
- reparametrización, 190
- representación
  - de Bézier, 9, 11, 127, 143, 152, 157
  - de parches triangulares, 141
  - del spline, 79
  - monomial, 20
- residual mínimo, 53
- de Rham, 112
- Riemenschneider, 249
- Riesenfeld, 30, 65, 79, 111, 206, 226, 248
- Rvachev, 120
- Sabin, 162, 171, 225, 226, 251, 258
- Sablonniere, 71, 72
- Schaback, 80
- Schoenberg, 61, 66, 259
- Schumaker, 79, 81, 88
- secuencia de mallas de control, 209
- segmento de curva
  - extremos, 12
- Seidel, 81, 105, 107, 269, 281
- Shenkman, 222
- simétrico, 105
- simetría, 128
  - de polinomios de Bernstein, 12
- simplex
  - $k$ -dimensional, 259
  - de referencia, 144
  - de Bézier, 143, 146
- simplex spline normalizado, 262

- simplex splines, 259
- sombras de simples, 259
- soporte, 260
- soporte compacto, 69
- spline
  - $C^1$  de grado cinco de topología arbitraria, 175
  - cúbicos, interpolación, 86
  - bases, 106, 107
  - bicúbico  $C^1$  de topología arbitraria, 138
  - cúbicos periódicos, 87
  - con matrices de conexión arbitraria, 104
  - cuárticos con torsión continua, 97
  - de grado  $n$ , 59
  - de orden  $n + 1$ , 60
  - de Tchebycheff, 103
  - empotrado, 87
  - multivariados, 269
  - nu, 97
  - representación de Bézier, 79
  - simplex, 259
    - propiedades, 260
  - tensiones, 97
  - uniforme, 110
  - universal, 107
- spline half-box, 222
- Stärk, 36, 93, 135
- subdivisión, 29, 36, 152
  - de la malla de Bézier, 158
  - de mallas hexagonales, 219
  - de mallas triangulares, 215
  - de superficies box spline, 246
  - estacionaria, 115
    - de una malla regular, esquema, 205
    - en general, 207
    - para mallas arbitrarias, 225
    - para mallas regulares, 205
  - iterada, 112, 115
  - repetida, 249
  - uniforme, 109, 110
- subespacio osculador, 102
- suma ponderada, 5
- superficie
  - $G^k$  de topología arbitraria, 193
  - box spline, 245
    - subdivisión, 246
  - cerrada, 172
  - continuidad obtenida por subdivisión, 231
  - de Lagrange, 126
  - de topología arbitraria, 136, 172
  - funcional, 7, 146, 273
  - half-box, 253
  - límite, 227
  - paramétrica, 7
  - polinómica, 7
  - producto tensorial, 125, 126
- superficies suaves, 179
- símbolo
  - del esquema de subdivisión, 213
- técnica
  - de B-splines, 77
  - de diferencias
    - hacia adelante, 31
  - de Bézier, 25
    - para parches triangulares, 155
- Taylor
  - expansión de, 22
- tensorial
  - forma polar, 130
- teorema
  - de convergencia, 116, 209
    - para  $C^r$ -subdivisión, 116
  - de Stärk, 36, 61, 135, 162, 171
  - fundamental, 65, 157
    - interpretación geométrica, 102
    - producto tensorial, 130
  - para curvas, 27
  - Schoenberg-Whitney, 84
- teselado del soporte, 242
- Tiller, 81
- Tocher, 170
- topología arbitraria, 193
- torsión, 99

- restricciones, 185
- torsión cruzada, 134
- trasladado, 110
- Trump, 40, 81, 89, 165
  
- unimodular, 245
  
- vértice, 144
  - compartido, 184
  - extraordinarios, 226
  - irregular, 193
  - regular, 193
- variación decreciente
  - propiedad, 34
- vector
  - binormal, 98
  - normal, 98
  - tangente, 98
- vectorial
  - espacio, 3
  - notación, 131
  
- Zhou, 39