

# Anwendung von adaptiven Finite Element Algorithmen auf Probleme der Strukturdynamik

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

vorgelegte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Jens Neumann  
aus Löbau

Tag der mündlichen Prüfung : 29.10.2004  
Hauptreferent : Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof  
Korreferent : Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Karlsruhe 2004



## Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit werden adaptive Finite Element Algorithmen in der Strukturdynamik diskutiert. Zur Schätzung des globalen, räumlichen Diskretisierungsfehlers werden residuelle und superkonvergenzbasierte Schätzer verwendet. Auf Grund der einfacheren Struktur des superkonvergenzbasierten Schätzers wird dieser für die weiteren adaptiven FE-Berechnungen verwendet, damit besteht auch kein Problem bzgl. der Bestimmung der Fehlerkonstanten.

Zusätzlich benötigt man grundsätzlich einen Fehlerindikator zur Schätzung des kinetischen Energiefehlers. Der Einfluß dieses Indikators auf die Fehlerschätzung und die anschließende Adaption des Raugitters wird untersucht. Ein weiteres Phänomen der räumlichen Diskretisierung ist die künstliche oder numerische Dispersion, die an einem Wellenausbreitungsproblem diskutiert wird.

Zur Adaption des FE-Netzes wird bisher der globale Diskretisierungsfehler in der Energienorm verwendet. Zur Kontrolle des Fehlers lokaler Größen (Zielfunktional) wird das duale Problem eingeführt. In Anlehnung an die Fehlerschätzung bei Problemen der Elastostatik wird hierbei nur der räumliche Diskretisierungsfehler berücksichtigt.

Die kontinuierlichen und diskontinuierlichen Galerkinverfahren zur Zeitintegration werden untersucht und an Beispielen diskutiert. Daran schließt sich das Thema der Schätzung des Zeitintegrationsfehlers an. In Anlehnung an den Fehlerschätzer für lokale Variablen wird hier das duale Hilfsproblem benutzt, um den globalen Zeitintegrationsfehler zu schätzen.

Für den Sonderfall homogener Rand- und Anfangsbedingungen und homogener rechter Seite der Bewegungsgleichung ergibt sich ein allgemeines Eigenwertproblem. Der räumliche Diskretisierungsfehler einer speziellen Eigenform wird in der Energienorm und in der  $L_2$ -Norm geschätzt. Die verwendeten Methoden zur Fehlerschätzung werden an Beispielen getestet, um Vor- und Nachteile zu diskutieren. Dabei zeigten sich die adaptiven  $h$ -Methoden der Standard- $h$ -Methode grundsätzlich überlegen.

# Abstract

This thesis deals with Adaptive Finite Element Methods in structural dynamics. The spatial discretization error is estimated with residual and superconvergent based error estimators. Due to the simple implementation and efficient estimation the superconvergent error estimator is preferred for further investigations. Furthermore the usual error constant from residual error estimators must not be approximated.

In principle the kinetic energy error is estimated with the method of Riccius. The influence of the kinetic energy error on the global error estimation and on the mesh adaptation is investigated for two examples. The numerical dispersion as a result of the spatial discretization is discussed for wave propagation problems.

The mesh adaptation is usually based on the error in some global norm. In order to control the error in a local quantity a dual problem is introduced. Here only the spatial part of the discretization error is considered for the error estimation of the chosen local quantity. The time discretization is based on time continuous and time discontinuous Galerkin methods. Also the global time discretization error is estimated with an additional dual problem for time-continuous ansatz functions.

In the eigenvalue problem for Cauchy's equation of motion homogeneous boundary and initial conditions are assumed. The spatial discretization error is estimated in the energy norm and in the  $L_2$  norm. Here advantages and disadvantages of the methods for error estimation are discussed also on some numerical examples. It is shown - as expected, that in principle the adaptive- $h$  method is superior to the standard  $h$ -method.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des DFG-Projektes „Adaptive FE Algorithmen für nichtlineare dynamische Probleme der Strukturmechanik“ und als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe.

Meinem geschätzten wissenschaftlichen Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, die engagierte und kompetente wissenschaftliche Unterstützung und die angenehme Arbeitsatmosphäre am Institut.

Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Ramm danke ich für die Übernahme des Korreferates, die sorgfältige Durchsicht dieser Arbeit und die wertvollen Hinweise.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Vielsack für die stete Diskussionsbereitschaft.

Schließlich danke ich allen Kollegen und Kolleginnen des Instituts für das Arbeitsklima und für die vielen, offenen und kritischen Diskussionen. Außerdem möchte ich mich insbesondere bei Herrn Dr.-Ing. M. Thies, Herrn Dr.-Ing. B. Göttlicher und Herrn Dr.-Ing. Th. Rottner bedanken, deren Hilfe und Motivation in vielen Situationen sehr hilfreich war.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen - Normen</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Grundgleichung der Elastodynamik</b>	<b>5</b>
3.1	Linearisierung der kinematischen Gleichungen – Grundgleichung der linearen Elastodynamik . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Räumliche Approximation der Variationsgleichung durch Ansatzfunktionen</b>	<b>13</b>
<b>5</b>	<b>Numerische Methoden zur Zeitintegration</b>	<b>17</b>
<b>6</b>	<b>Numerische Eigenschaften der verwendeten Zeitintegratoren</b>	<b>25</b>
6.1	Auswertung und Vergleich der 3 Zeitintegrationsverfahren . . . . .	29
6.2	Lösung des Gleichungssystems beim DG P1-P1 Verfahren . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Adaption des Raumgitters</b>	<b>33</b>
7.1	Netzveränderung des Raumgitters . . . . .	35
7.2	Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers . . . . .	37
7.3	Vergleich Residueller Fehlerschätzer und Fehlerschätzer für die Gesamtenergienorm . . . . .	44
7.4	Steuerung der Netzveränderung . . . . .	45
7.5	Einfluß des geschätzten Fehlers in der kinetischen Energienorm auf die numerische Lösung bei adaptiver Netzveränderung . . . . .	47
<b>8</b>	<b>Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers für lokale Größen</b>	<b>54</b>
<b>9</b>	<b>Schätzung des Zeitintegrationsfehlers</b>	<b>69</b>
9.1	Schätzung des lokalen Zeitintegrationsfehlers . . . . .	70
9.2	Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers . . . . .	73
9.2.1	Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehler bei nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen . . . . .	83
9.2.2	Adaptive Zeitschrittweitensteuerung . . . . .	91
<b>10</b>	<b>Dispersion – Ergebnis der räumlichen Diskretisierung</b>	<b>99</b>

<b>11 Schätzung des Fehlers der Eigenform</b>	<b>106</b>
11.1 Variationelle Formulierung des Eigenwertproblem in der Strukturmechanik	107
11.2 Schätzung des Diskretisierungsfehlers der Eigenfunktion . . . . .	108
11.3 Effektivitätsindex für den geschätzten Fehler . . . . .	111
11.4 Andere Fehlerschätzer für Eigenformen . . . . .	112
11.5 Numerische Beispiele . . . . .	112
11.6 Adaptive Netzveränderung . . . . .	117
<b>12 Zusammenfassung</b>	<b>123</b>
<b>A Bestimmung von Referenzlösungen</b>	<b>132</b>



# Bezeichnungen – Notation

Im folgenden werden alle wesentlichen Bezeichnungen angegeben, die in dieser Arbeit verwendet werden. Hier nicht genannte Bezeichnungen werden im Text erläutert.

## Lateinische Buchstaben

<b>A</b>	...	Übertragungsmatrix
$a(\cdot, \cdot)_\Omega$	...	Bilinearform, Energienorm
$\mathbf{a}_n$	...	diskrete Beschleunigung bei $t = t_n$
<b>b</b>	...	massebezogene Gewichtskraft
$\mathcal{C}$	...	komplexe Zahl
$\mathcal{D}$	...	rechte Seite des dualen Problems, Differentialoperator
$D$	...	Differentialquotient
$\mathbb{C}$	...	Materialmatrix
$C$	...	Physikalische Dämpfungsmatrix
<b>d</b>	...	Knotenverschiebungsvektor
$\dot{\mathbf{d}}$	...	Knotengeschwindigkeitsvektor
$\ddot{\mathbf{d}}$	...	Knotenbeschleunigungsvektor
$E$	...	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
<b>e</b>	...	exakter Fehler
$\mathbf{e}^h$	...	geschätzter Fehler
$\mathbf{e}(t_m)$	...	exakter Fehler bei $t = t_m$
$\mathbf{e}_t$	...	lokaler Zeitintegrationsfehler
$\mathbf{e}_t$	...	globaler Zeitintegrationsfehler
$\mathbf{e}_s$	...	räumlicher Diskretisierungsfehler
<b>F</b>	...	Lastvektor nach räumlicher Diskretisierung
<b>f</b>	...	kompakter Lastvektor in variationeller Form
<b>g</b>	...	Wichtungsfunktion im Zeitbereich
$h$	...	Netzweite
$H_0^1$	...	Hilbertraum, der nur die Funktionen mit $\mathbf{u} _{x \in \Gamma} = 0$ enthält
$k$	...	Zeitschrittweite
<b>K</b>	...	Steifigkeitsmatrix
<b>M</b>	...	Massenmatrix
<b>n</b>	...	Nichtlinearität bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Normalenvektor
<b>N</b>	...	Matrix der Ansatzfunktionen
$N^i$	...	Ansatzfunktion, die zum Knoten $i$ gehört
$\mathcal{N}_{eq}$	...	Anzahl der Unbekannten
<b>p</b>	...	Randspannungsvektor
$p$	...	Polynomgrad der räumlichen Ansatzfunktion
$q$	...	Polynomgrad der zeitlichen Ansatzfunktion
<b>R</b>	...	Residuum der Differentialgleichung
$t$	...	Zeit

## Lateinische Buchstaben

$\mathbf{u}$	...	exakte Verschiebungslösung
$\dot{\mathbf{u}}$	...	exakte Geschwindigkeitslösung
$\mathbf{u}_t$	...	Geschwindigkeit beim Diskontinuierlichen Galerkinverfahren
$\mathbf{u}^h$	...	FE-Verschiebungslösung
$\mathbf{U}$	...	exakte Eigenform
$\mathbf{U}^h$	...	FE-Eigenform
$\mathbf{v}$	...	Geschwindigkeitsvektor
$\mathcal{V}$	...	Funktionsraum der Lösung
$\mathbf{w}$	...	Wichtungsfunktion
$\mathbf{W}$	...	räumliche Wichtungsfunktion
$\mathcal{W}$	...	Funktionsraum der Wichtungsfunktion
$\mathbf{X}$	...	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{x}$	...	Ortsvektor in der Momentankonfiguration

## Griechische Buchstaben

$\beta, \gamma$	...	Parameter der Newmarkmethode, geschrieben als Finites Differenzenverfahren
$\varepsilon$	...	klassischer Verzerrungstensor
$\eta$	...	Effektivitätsindex des geschätzten Fehlers
$\eta_i = \ \mathbf{e}_h\ _{a, E_i}$	...	Fehlerindikator bzw. geschätzter Fehler in der Energienorm des Elementes $E_i$
$\lambda$	...	Eigenwert
$\Gamma$	...	Rand des Berechnungsgebietes
$\rho$	...	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}$	...	Spannungstensor
$\Omega$	...	Berechnungsgebiet
$\omega$	...	Eigenkreisfrequenz

## Sonstige Bezeichnungen

$(\cdot, \cdot)_{\Omega}$	...	Bilinearform
$\propto$	...	proportional zu
$ \cdot $	...	Euklidische Norm
$\ \cdot\ _g$	...	Gesamtenergienorm
$\ \cdot\ _a$	...	Verzerrungsenergienorm
$\ \cdot\ _{L_2}$	...	$L_2$ -Norm
$\operatorname{div} \cdot$	...	Divergenz eines Tensors bzgl. $\mathbf{x}$
$\operatorname{Div} \cdot$	...	Divergenz eines Tensors bzgl. $\mathbf{X}$
$\nabla_{\mathbf{X}}$	...	Nabla-Kalkül bzgl. $\mathbf{X}$

# 1 Einleitung

Die numerische Lösung der 1. Cauchyschen Bewegungsgleichung ist Bestandteil vieler Arbeiten, z.B. Courant et al. [24], Bajer [8] und Hulbert/Hughes [57]. Während die Untersuchungen von Courant et al. auf der Finiten Differenzen Methode basieren, verwendeten Hulbert/Hughes bzw. Bajer die Finite Element Methode zur Diskretisierung der Bewegungsgleichung. Ein Vorteil dieser Methode liegt darin, daß insbesondere die Gradienten bzgl. der Raumvariable  $x$  unbeschränkt sein können.

Mit der erheblichen Verbesserung der Leistungsfähigkeit von elektronischen Rechenmaschinen in der vergangenen Zeit können nun komplexe Problemstellungen numerisch gelöst werden. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, sind jedoch adaptive Lösungstechniken notwendig. Hierfür werden a-priori und a-posteriori Fehlerschätzer benötigt. Grundlegende Arbeiten zu hyperbolischen Problemen sind bei Johnson [61] bzw. French [37] zu finden, die die Konvergenz der numerischen Lösung bei Verwendung diskontinuierlicher bzw. kontinuierlicher Galerkinverfahren untersuchen. Sie verwenden dabei jeweils ein duales Hilfsproblem, um a-priori Fehlerabschätzungen anzugeben. Die Verwendung von dualen Problemstellungen für die numerische Lösung elliptischer Differentialgleichungen (Statik), z.B. Becker/Rannacher [13], Suttmeier [92], Cirak/Ramm [21], führt zur Fehlerkontrolle vorab definierter Zielfunktionale. Diese Dualitätstechniken wurden in der Vergangenheit auch zur a-posteriori Fehlerschätzung von numerischen Lösungen der Wellengleichung, z.B. Bangerth [9], und der Bewegungsgleichung, z.B. Maute [70], verwendet. Andererseits haben z.B. Franz [36], Li/Wiberg [66], Riccius [82] Fehlerschätzer bzw. Fehlerindikatoren benutzt, um den globalen Diskretisierungsfehler zu kontrollieren. In der vorliegenden Arbeit wird insbesondere die Anwendung der lokalen und globalen Fehlerschätzer innerhalb adaptiver Finite Element Algorithmen in der Strukturdynamik diskutiert.

Ein wesentliches Element innerhalb eines adaptiven Algorithmus ist der Fehlerschätzer. Zunächst wird der Schätzer für den Fehler in der Gesamtenergienorm hinsichtlich der Konvergenz an drei repräsentativen Beispielen getestet. Das Beispiel 'Wellenausbreitung' dient zum Vergleich des residuellen Fehlerschätzers von Franz [36] mit dem Fehlerschätzer in der Gesamtenergienorm von Riccius [80]. Dabei zeigen sich keine qualitativen Unterschiede im Ergebnis der Fehlerschätzung. Da der residuelle Fehlerschätzer die üblichen Konstanten enthält, von denen i.a. nur deren Größenordnung bekannt ist, wird auch wegen der schwierigen Bestimmbarkeit der Konstanten der Schätzer in der Gesamtenergienorm für die späteren Untersuchungen verwendet.

Dieser Fehlerschätzer besteht aus einem Anteil in der Verzerrungsenergienorm und einem kinetischen Energieanteil. Da für elastostatische Problemstellungen der Fehler in der Verzerrungsenergienorm benutzt wird, soll hier insbesondere der Einfluß des kinetischen Fehleranteils auf die numerische Lösung von Problemen der Strukturdynamik untersucht werden. Die (natürliche) Dispersion des gewählten mechanischen Modells spielt dabei eine wichtige Rolle.

Als Folge der räumlichen Diskretisierung, d.h. der Verwendung einer endlichen Anzahl von Ansatz- und Testfunktionen, besitzt die numerische Lösung eine künstliche Dispersion. Diese Eigenschaft ist besonders deutlich bei Wellenausbreitungsproblemen erkennbar. Außerdem wird der Einfluß des gewählten Zeitintegrationsschemas auf die künstliche Dispersion beispielhaft untersucht.

In den oben genannten Verfahren wurde der Diskretisierungsfehler in der Gesamtener-

gienorm gemessen. Dadurch ist es nicht möglich z.B. den lokalen Verschiebungsfehler an einem Punkt der Struktur zu kontrollieren. Hierfür wird ein duales Problem, das aus der primalen Problemstellung folgt, gelöst. Der Zeitintegrationsfehler besitzt hierfür eine untergeordnete Bedeutung.

Der zweite Teil der Arbeit beinhaltet die Untersuchung der Zeitintegrationsverfahren sowie die Schätzung des Zeitintegrationsfehlers. Ausgehend von der hybriden Formulierung des Hamilton'schen Prinzips wird die Diskontinuierliche Galerkinformulierung als Zeitintegrationsverfahren (DG P1-P1 und DG P2) eingeführt. Mittels des Block Gauß-Seidel Verfahrens wird der numerische Aufwand zum Lösen des zugeordneten algebraischen Gleichungssystems wesentlich reduziert. An der Modellgleichung erfolgt die grundsätzliche Untersuchung der Eigenschaften der numerischen Zeitintegrationsverfahren. Beim diskontinuierlichen Galerkinverfahren DG P2 zeigt sich jedoch, daß im Gegensatz zur Zustandsgrößenformulierung (DG P1-P1) nicht alle hohen Eigenfrequenzen gedämpft werden.

In der Arbeit von Riccius [80] wurde für lineare Differentialgleichungen ein Schätzer für den globalen Zeitintegrationsfehler eingeführt. Da das Standard-Newmarkverfahren als Finite Element Methode geschrieben werden kann, können auch die bekannten Techniken zur Fehlerschätzung bei Finite Element Methoden, d.h. sogenannte duale Methoden, benutzt werden. Basierend auf der dualen Differentialgleichung wird für das Newmarkverfahren ( $2\beta = \gamma = 0.5$ ) ein globaler Schätzer für den Zeitintegrationsfehler entwickelt. Es zeigt sich, daß der globale Fehlerschätzer von Riccius zwar für lineare Problemstellungen gute Ergebnisse bei hoher Effizienz liefert, aber bei nichtlinearen Differentialgleichungen völlig versagt. Hingegen liegt der Effektivitätsindex des auf der dualen Problemstellung basierenden Schätzers auch bei nichtlinearen Differentialgleichungen nahe '1'.

Ein weiterer Teil der Arbeit ist der Fehlerschätzung bei Eigenwertproblemen gewidmet. Der Sonderfall homogener Rand- und Anfangsbedingungen sowie ohne äußere Anregung der Struktur führt auf das zugeordnete Eigenwertproblem. Für den Fehler in der Verzerungsenergienorm einer vorab definierten Eigenform wird der Zienkiewicz/Zhu Schätzer benutzt. Zur Schätzung des Fehlers der Eigenform in der  $L_2$ -Norm kann derselbe Indikator wie zur Schätzung des Fehlers in der kinetischen Energienorm verwendet werden. An repräsentativen Aufgabenstellungen wird die Konvergenz der geschätzten Fehler untersucht. Daran schließt sich eine adaptive Netzverfeinerung an, die auf dem geschätzten Fehler in der Energienorm aufbaut. Zur Bestimmung der erforderlichen Referenzlösungen bei gleichmäßiger Netzverfeinerung wird die Aitkens Extrapolation als zusätzliche Maßnahme zur Konvergenzbeschleunigung diskutiert.

## 2 Grundlagen - Normen

In dieser Arbeit werden Aspekte der Fehlerschätzung bei Problemen der Strukturmechanik behandelt. Zur quantitativen und qualitativen Beurteilung dieser Finite Element (FE) Lösung bedient man sich der Größe 'Norm'. Die Norm kann als Maß(einheit) der Lösung  $\mathbf{u}$  oder jeder anderen Funktion verstanden werden. Je nach Objekt, für die eine Norm gebildet wird, unterscheidet man nach z.B. Euklidischer Norm, Maximumnorm, Zeilennorm, Spaltennorm, Frobeniusnorm, Normen in Hilberträumen. Jede Norm besitzt 3 Eigenschaften:

- i)  $\|\mathbf{u}\| \geq 0$ ,  $\|\mathbf{u}\| = 0$  wenn  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,
- ii)  $\|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\| \leq \|\mathbf{u}_1\| + \|\mathbf{u}_2\|$  (Dreiecksungleichung)
- iii)  $|c|\|\mathbf{u}\| = \|c\mathbf{u}\|$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .

Zur Anwendung des Galerkinverfahrens auf die 1.Cauchysche Bewegungsgleichung (3.21) wird der Begriff der verallgemeinerten Ableitung  $\mathbf{g}_1$  eingeführt. Die eingeführten Ansatzfunktionen  $\mathbf{u}^h$  sind im Gebiet  $\Omega$  global stetig, jedoch nur stückweise stetig differenzierbar. Die Anwendung der Greenschen Formel liefert,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^h \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \mathbf{w} \mathbf{n}_1 ds - \int_{\Omega} \mathbf{g}_1 \mathbf{w} dx. \quad (2.1)$$

Hierbei ist  $\mathbf{n}_1$  die 1. Koordinate des Normalenvektors am Rand  $\Gamma$ . Nach Voraussetzung an die Wichtungsfunktion (Testfunktion)  $\mathbf{w} = \mathbf{0}|_{x \in \Gamma}$  ( $\mathbf{w} \in C_0^\infty$ ) gilt dann:

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^h \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{g}_1 \mathbf{w} dx. \quad (2.2)$$

Die verallgemeinerte Ableitung erhält man durch Vergleich der linken und rechten Seite von Gl. (2.2),  $\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial x_1}$ .

Auf dieselbe Weise ist  $\mathbf{g}_2$  und  $\mathbf{g}_3$  sowie jede weitere höhere verallgemeinerte Ableitung mit dem Multiindex  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  definierbar:

$$D^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{u}^h = \frac{\partial^l \mathbf{u}^h}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad (2.3)$$

mit:  $|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = l.$

Zur Messung des Abstands  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$  zweier Funktionen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}^h$  werden in der Regel die  $L_2$ -Norm und die  $H^1$ -Norm benutzt. Damit hat man Funktionenräume als funktionalanalytische Hilfsmittel eingeführt. Z.B. enthält der Funktionenraum  $L_2$  alle die Funktionen  $\mathbf{e}$ , für die

$$\|\mathbf{e}\|_{L_2} = \left( \int_{\Omega} \mathbf{e} \mathbf{e} dx \right)^{1/2} < \infty \quad (2.4)$$

gilt. Der Hilbertraum  $H^1$ , der auf der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)_\Omega : \mathcal{W} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  basiert, beinhaltet die Norm des Funktionenraumes  $L_2$  sowie alle verallgemeinerten Ableitungen mit  $|\boldsymbol{\alpha}| = 1$ :

$$\|\mathbf{e}\|_1 = \|\mathbf{e}\|_{H^1} = \left( \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq 1} \int_{\Omega} |\partial^{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{e}|^2 dx \right)^{1/2} < \infty.$$

Der Funktionenraum  $L_2(0, T; \mathbf{X})$ , dessen Elemente zusätzlich eine Funktion der Variablen Zeit sind, ist folgendermaßen definiert, Evans [33]:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} : [0, T] &\rightarrow \mathbf{X}, \\ \|\mathbf{e}\|_{L_2(0, T; \mathbf{X})} &= \left( \int_0^T \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{X}}^2 dt \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

$\mathbf{X}$  bezeichnet dabei den Hilbertraum  $L_2$  bzw.  $H^1$ . Die entsprechende Definition der Maximumnorm  $L_\infty$  ist:

$$\|\mathbf{e}\|_{L_\infty(0, T; \mathbf{X})} = \max \|\mathbf{e}(t)\|_{\mathbf{X}} \leq C < \infty \quad \text{mit: } C \in \mathbb{R}.$$

Dabei muß die Bedingung  $C < \infty$  bis auf eine Teilmenge mit dem Maß 0 überall erfüllt sein.

### 3 Grundgleichung der Elastodynamik

In diesem Abschnitt werden die wesentlichen kontinuumsmechanischen Grundlagen zur Verfügung gestellt, die für die Grundgleichung der Elastodynamik benötigt werden. Dabei werden nur die wesentlichen Beziehungen und Zusammenhänge erläutert, die für diese Arbeit von Bedeutung sind. Ausführliche Darstellungen zur Kontinuumsmechanik sind z.B. in Altenbach/Altenbach [3] und Marsden/Hughes [69] zu finden. In der Kontinuumsmechanik wird die Materie durch materielle Punkte im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  beschrieben. Ein Körper  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  wird durch eine zusammenhängende Menge materieller Punkte dargestellt. Der Abschluß des Körpers  $\Omega$  bildet der Rand  $\Gamma = \partial\Omega$ . Die Festlegung eines Inertialsystems (räumlicher Nullpunkt) und der zugehörigen Basis erlaubt die Definition des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  eines jeden materiellen Punktes. Zur Beschreibung der Bewegung eines jeden materiellen Punktes wird die kausale Größe Zeit  $t$  eingeführt. Zum Referenzzeitpunkt  $t = t_0$  (hier:  $t_0 = 0$ ) gilt für jeden materiellen Punkt  $\mathbf{x}(t = 0) = \mathbf{X}$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  bilden alle materiellen Punkte das Gebiet  $\Omega_0$  mit dem Rand  $\partial\Gamma_0$ . Die dadurch gebildete Konfiguration wird sich mit fortschreitender Zeit verändern. Zu einem speziellen Zeitpunkt  $t$  wird die Momentankonfiguration  $\Omega_t$  definiert, die stetig abhängig von der Zeit  $t$  ist.

Die Differenz des Ortsvektors  $\mathbf{x}(t)$  in der Momentankonfiguration  $\Omega_t$  zum Ortsvektor  $\mathbf{X}$  in der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  bildet den Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}(t)$  eines materiellen Punktes,

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{X}(t).$$

Durch die Einführung zweier unterschiedlicher Konfigurationen werden auch zwei unterschiedliche Beschreibungsweisen eingeführt: die materielle Lagrangesche Beschreibungsweise, bezogen auf die Referenzkonfiguration, und die räumliche Eulersche Beschreibungsweise, bezogen auf die Momentankonfiguration.

Zur Beschreibung der Kinematik einer Deformation von einem materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  wird der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  eingeführt. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  bildet ein differentielles Linienelement  $d\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration auf das Linienelement  $d\mathbf{x}$  in der Momentankonfiguration ab,

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.1)$$

mit:  $\mathbf{F} = (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x})^T$ .

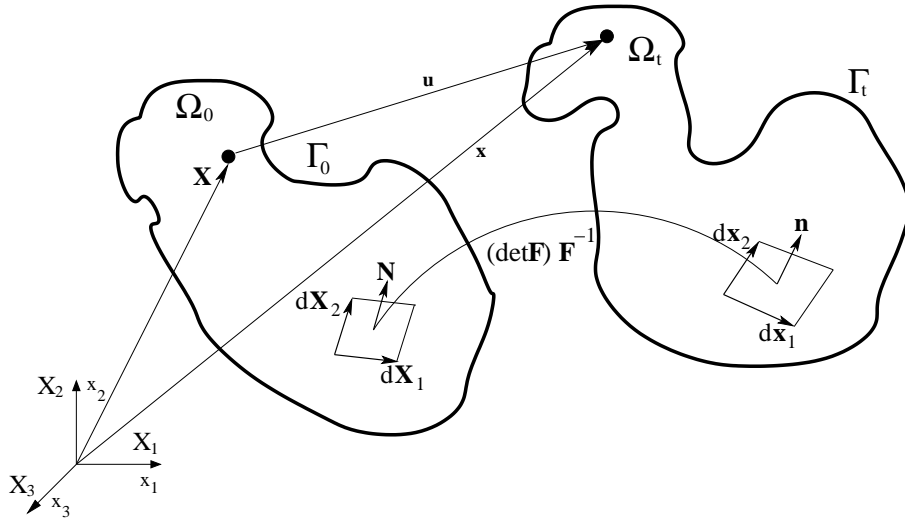
Für die Transformation von Flächenelementen und Volumenelementen zwischen Referenz- und Momentankonfiguration gelten folgende Beziehungen, die sich aus der Definition des Deformationsgradienten ergeben, siehe auch Abb. 3.1,

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2, \quad d\mathbf{a} = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2, \quad (3.2)$$

$$d\mathbf{a} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{A}, \quad (3.2)$$

$$dv = \det \mathbf{F} dV. \quad (3.3)$$

Da der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  die gesamte Deformation beinhaltet, d.h.  $\mathbf{F}$  enthält auch Starrkörperbewegungen, kann er nicht direkt als Verzerrungsmaß verwendet werden. Vielmehr sollte ein Verzerrungsmaß in der Referenzkonfiguration und für reine Starrkörperbewegungen den Wert Null annehmen. Ein quantitatives Maß, das diese Eigenschaften



**Bild 3.1:** Kinematik des Kontinuums  $\Omega$ , Flächenelement in der Referenz- und Momentankonfiguration

besitzt, ist der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$ ,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) . \quad (3.4)$$

Dieser stellt letztlich die Differenz der Linienquadrate der Momentan- und Referenzkonfiguration dar,

$$\Delta = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}) .$$

Zur Formulierung der Impulsbilanz wird an dieser Stelle der Cauchysche Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  eingeführt. Der räumliche Spannungsvektor

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{f}_a}{da} \quad (3.5)$$

wird durch den auf die differentielle Fläche  $da$  bezogenen Schnittkraftvektor  $d\mathbf{f}_a$  definiert. Die Orientierung der Fläche  $da$  wird durch den Normalenvektor  $\mathbf{n}$  festgelegt,  $da = \mathbf{n} da$ . Durch das Cauchysche Fundamentaltheorem wird jeder Flächennormale  $\mathbf{n}$  mit dem Cauchyschen Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  der Spannungsvektor  $\mathbf{p}$  zugeordnet,

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} . \quad (3.6)$$

Alternativ können auf der Basis von zwei verschiedenen Konfigurationen auch weitere Spannungstensoren eingeführt werden. Für die anschließende Formulierung der Impulsbilanz in der Referenzkonfiguration werden sinnvollerweise Piola-Kirchhoffsche Spannungstensoren benutzt. Bezieht man den aktuellen Kraftvektor  $d\mathbf{f}$  auf ein differentielles Flächenelement  $d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA$  in der Referenzkonfiguration, erhält man den Nennspannungsvektor,

$${}_I \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{f}_a}{dA} . \quad (3.7)$$



Der dazugehörige Spannungstensor heißt 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor  $\mathbf{P}$ ,

$${}^I\mathbf{p} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{P}. \quad (3.8)$$

Hierbei kennzeichnet  $\mathbf{N}$  den Normalenvektor des differentiellen Flächenelementes  $dA$  in der Referenzkonfiguration. Zusätzlich zu dem Zweifeldtensor  $\mathbf{P}$  wird noch der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  $\mathbf{S}$  eingeführt, der z.B. bei der Formulierung des linearen, elastischen Materialgesetzes nach St. Venant-Kirchhoff Anwendung findet,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{P} (\mathbf{F}^{-1})^T \\ \mathbf{S} &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^T)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Mit den eingeführten Spannungsvektoren können die räumliche und materielle Impulsbilanzgleichung angegeben werden. Die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit des Gesamtimpulses bei Deformation eines Körpers ist gleich der Summe aller auf den Körper von außen eingepägten Oberflächen- und Volumenkräfte,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \dot{\mathbf{u}} \rho \, dv = \int_{\Gamma_t} \mathbf{p} \, da + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} \, dv. \quad (3.10)$$

Unter Berücksichtigung der differentiellen Beziehungen (3.2) und (3.3) sowie der Definition des 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensors  $\mathbf{P}$  kann man die materielle Form der Impulsbilanz angeben,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0} \dot{\mathbf{u}} \rho_0 \, dV = \int_{\Gamma_0} {}^I\mathbf{p} \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV. \quad (3.11)$$

Die Anwendung des Cauchy-Theorems (3.6), die Beziehung (3.8) und der Gaußsche Integralsatz liefern die 1. Cauchysche Bewegungsgleichung in räumlicher und materieller Form,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega_t \times (0, T], \quad (3.12)$$

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in \Omega_0 \times (0, T], \quad (3.13)$$

mit:

- $\rho$  ... Dichte in der Momentankonfiguration,
- $\rho_0$  ... Dichte in der Referenzkonfiguration,
- $\dot{\mathbf{u}}$  ... Geschwindigkeit,
- $\mathbf{b}$  ... massebezogene Gewichtskraft
- $\mathbf{p}$  ... eingepägte Oberflächenkraft am Rand  $\Gamma_t$  in der Momentankonfiguration,
- ${}^I\mathbf{p}$  ... eingepägte Oberflächenkraft am Rand  $\Gamma_0$  in der Referenzkonfiguration.

Die Einführung des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors  $\mathbf{S}$  erlaubt eine zweite Variante der 1. Cauchyschen Bewegungsgleichung in materieller Form,

$$\operatorname{Div} \mathbf{S} \mathbf{F}^T + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}, \quad \forall (\mathbf{X}, t) \in \Omega_0 \times (0, T]. \quad (3.14)$$

Als einfachstes Materialgesetz für die Referenzkonfiguration wird die Formulierung nach St.Venant-Kirchhoff verwendet,

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}(\mu, \lambda) : \mathbf{E}. \quad (3.15)$$

Somit sind diese drei Differentialgleichungen (3.12), (3.13) und (3.14) nichtlinear in dem gesuchten Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t) = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ .

Obgleich erst ab Abschnitt 9.2 auch nichtlineare Problemstellungen diskutiert werden, wird hier die zu Differentialgleichung (3.14) bzw. (3.13) zugehörige schwache Form der Differentialgleichung bereits angegeben. Dabei wird, wie auch im Abschnitt 3.1 gezeigt wird, die Differentialgleichung (3.13) mit einer Testfunktion  $\mathbf{W}(\mathbf{X})$  multipliziert, integriert und anschließend partiell integriert,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} (\text{Div} \mathbf{P} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} + \rho_0 \mathbf{b}_0) \cdot \mathbf{W} \, dV &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W} = H_0^1(\Omega_0)^n \text{ und } 0 < t \leq T, \quad (3.16) \\ \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{W} \, dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{W} \, dV &= \int_{\Gamma_0} I_{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{W} \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{W} \, dV \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Objektivität der Tensoren und aus Gründen der numerischen Umsetzung wird in obiger Gleichung (3.16) der symmetrische 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor berücksichtigt,

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{W} \, dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \mathbf{F} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{W} \, dV = \int_{\Gamma_0} I_{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{W} \, dA + \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{W} \, dV \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W} \quad (3.17)$$

### 3.1 Linearisierung der kinematischen Gleichungen – Grundgleichung der linearen Elastodynamik

Der erste Teil der Arbeit basiert auf der Grundgleichung der linearen Elastodynamik. Hierfür muß die 1. Cauchysche Bewegungsgleichung linearisiert werden. Da nur die kinematischen Gleichungen in Form des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors nichtlinear sind, werden diese linearisiert. Um die Größe einer Deformation zu quantifizieren, wird der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  in Abhängigkeit vom Verschiebungsgradienten  $\mathbf{J}$  definiert,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{I} + \mathbf{J}, \quad (3.18) \\ \text{mit: } \mathbf{J} &= (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u})^T. \end{aligned}$$

Die Norm von  $\mathbf{J}$  kann damit als Maß für eine Deformation verwendet werden,

$$\delta = \|\mathbf{J}\| = \sqrt{\text{Sp}(\mathbf{J} \mathbf{J}^T)}. \quad (3.19)$$

Damit besitzt  $\mathbf{J}$  die Größenordnung  $\mathcal{O}(\delta)$ , da folgende Ungleichung gemäß Ordnungsdefinition gilt,

$$\|\mathcal{O}(\delta)\| < M \delta.$$

Daraus folgt für das Produkt  $\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T$ ,

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}^T = \mathcal{O}(\delta^2).$$

Im Rahmen der Linearisierung der Kinematik werden alle Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\delta^m)$ ,  $m > 2$  vernachlässigt, d.h. der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  geht über in den klassischen linearen Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,

$$\mathbf{E}_{lin} = \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{J} + \mathbf{J}^T). \quad (3.20)$$

Daraus folgt die Übereinstimmung von Lagrangescher (materieller) und Eulerscher (räumlicher) Formulierung der Impulsbilanz im linearen Fall. D.h., man muß dann nicht mehr zwischen Lagrangeschen Koordinaten  $\mathbf{X}$  und Eulerschen Koordinaten  $\mathbf{x}$  unterscheiden. Die Grundgleichung der linearen Elastodynamik ist somit eine hyperbolische Differentialgleichung 2. Ordnung, die auf dem offenen Gebiet  $\Omega$  mit Rand  $\Gamma$  angewendet wird, siehe Abb. 3.2,

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{b}, \forall (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (0, T]. \quad (3.21)$$

Weiterhin wird die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes vorausgesetzt,

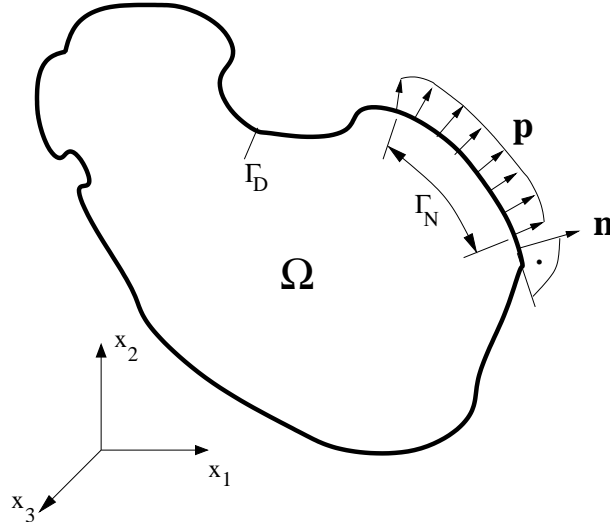
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.22)$$

Der Materialtensor  $\mathbb{C}$  ist somit die lineare Abbildung für den Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Wegen der Eindeutigkeit von  $\mathbf{u}$  müssen Anfangs- und Randbedingungen vorgegeben werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \forall (\mathbf{x}, t = 0) \in \Omega, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}_0 \quad \forall (\mathbf{x}, t = 0) \in \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_b \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_D \times (0, T] \quad (\text{Dirichlet-Rand}), \\ \mathbf{p} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \forall (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_N \times (0, T] \quad (\text{Neumann-Rand}). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Wichtig dabei ist, daß  $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$  und  $\Gamma_D \neq \emptyset$  gilt, um Starrkörperbewegungen auszuschließen. Zudem werden gemischte Randbedingungen (Robinsche Randbedingungen, Großmann/ Roos [44]) nicht zugelassen, die in Form von z.B. elastischer Bettung am Rand auftreten können,  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + c\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Die klassische Lösung, von (3.21)  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  besitzt, falls sie überhaupt existiert, eine hohe Regularität. Bei Betrachtung der Koeffizienten  $\rho$  und  $\mathbb{C}$  in Gl. (3.21) und Gl. (3.22) wird deutlich, daß es sich bei Gl.(3.21) um eine Differentialgleichung 2.Ordnung hyperbolischen Typs handelt. Die Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot)$  von Gl. (3.21) im klassischen Sinne muß im Raum der stetigen Funktionen  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , gesucht werden. Oft gelingt dies nicht, siehe z.B. Großmann/ Roos [44], Hackbusch [45]. Ein Typenwechsel in den Randbedingungen, Sprünge der Koeffizienten im Materialgesetz, konkave Gebiete usw. bedingen Singularitäten in der Lösungsfunktion  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot)$ , so daß der klassische Lösungsraum für  $\mathbf{u}$  dann ungeeignet ist. Eine weitere Einschränkung bzgl. der analytischen Lösung  $\mathbf{u}$  ist die Annahme des Separationsansatzes

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) \mathbf{d}(t). \quad (3.24)$$



**Bild 3.2:** Beschränkter, offener Körper  $\Omega$  mit erfüllter Kegelbedingung; Dirichlet-Rand  $\Gamma_D$ , Neumann-Rand  $\Gamma_N$

Um das Problem der Regularität zu umgehen, wird hier die zugehörige Variationsformulierung verwendet, bei der diesbezüglich reduzierte Anforderungen gestellt werden. Die Differentialgleichung (3.21) wird hierfür zunächst mit einer Wichtungsfunktion  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  multipliziert; danach wird über  $\Omega$  integriert und die partielle Integration des div-Terms bzgl.  $\mathbf{x}$  ausgeführt. Gesucht wird eine Lösung  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot) \in \mathcal{V} = H^1(\Omega)$ , die die Variationsgleichung zu jedem Zeitpunkt  $t$  erfüllt,

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{W} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{W} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dx = \int_{\Omega} \rho \mathbf{W} \cdot \mathbf{b} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{W} \cdot \mathbf{p} ds$$

$$\forall \mathbf{W} \in \mathcal{W} = H_0^1(\Omega)^n \text{ und } 0 < t \leq T. \quad (3.25)$$

Unter Ausnutzung der Bequemlichkeitshypothese wird in die kontinuierliche Form (3.25) die Rayleighdämpfung (Parameter  $c_M, c_K$ ) eingeführt. Die zugehörige Kurzschreibweise ist

$$(\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{W})_{\Omega} + c_M(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{W})_{\Omega} + c_K a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{W})_{\Omega} + a(\mathbf{u}, \mathbf{W})_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{W})_{\Omega}$$

$$\forall \mathbf{W} \in \mathcal{W} = H_0^1(\Omega) \text{ und } 0 < t \leq T. \quad (3.26)$$

Dabei steht  $(\cdot, \cdot)$  für das Skalarprodukt in  $L_2(\Omega)$ . Der Vorteil der Variationsformulierung zeigt sich nun im Existenzsatz der zugehörigen schwachen Lösung. Die wesentlichen Aussagen sind dem Lehrbuch von Evans [33] entnommen. Es existiert ein

$$\mathbf{u} \in L_2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ wenn :} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{iklm} &\in L_{\infty}(\Omega), (i, k, l, m = 1, \dots, n), \\ \mathbf{b}_0 &\in L_2(\Omega), \\ \mathbf{p} &\in L_2(\Gamma_N), \\ \mathbf{u}_0 &\in H_0^1(\Omega), \\ \dot{\mathbf{u}}_0 &\in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aussagen zur Glattheit von  $\mathbf{u}$  werden mittels der zu erwartenden Regularität beschrieben. Unter Annahme, daß für die Koeffizienten des Materialgesetzes  $\mathbb{C} \in C_0(\Omega)$  gilt und die Aussagen zur Existenz von  $\mathbf{u}$  (Gl. 3.28) übernommen werden, kann die minimale Regularitätsaussage bewiesen werden, Evans [33],

$$\mathbf{u} \in L_\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \text{ und } \dot{\mathbf{u}} \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)). \quad (3.29)$$

Stärkere Regularitätsaussagen existieren nur unter Annahme idealer Rand- und Anfangsbedingungen. Mittels des Sobolevschen Einbettungssatzes, Schwab [86], kann aus Gl. (3.29) der klassische Lösungsraum ableitet werden. Für die praktische Umsetzung der kontinuierlichen Galerkinformulierung (3.25) gilt eine Beschränkung auf endlich dimensionale Ansatz- und Testräume,  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$ . In der diskreten Variationsformulierung wird dann eine Lösung  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}^h$  gesucht, für die gilt;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^h \cdot \ddot{\mathbf{u}}^h + c_M \rho \mathbf{W}^h \cdot \dot{\mathbf{u}}^h + c_K \nabla \mathbf{W}^h : \mathbb{C} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h + \nabla \mathbf{W}^h : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^h dx = \\ \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^h \cdot \mathbf{b} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{W}^h \cdot \mathbf{p} ds \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \text{ und } 0 < t \leq T, \quad (3.30) \\ \text{mit: } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h = \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}}^h + (\nabla \dot{\mathbf{u}}^h)^T). \end{aligned}$$

Wegen der Regularitätsaussage für  $\mathbf{u}$  (3.29), der Existenz für  $\mathbf{u}$  (3.27) und wegen der angestrebten Symmetrie der Variationsformulierungen (3.25, 3.30) ist die Wahl von  $H_0^1$  bzw.  $H^1$  als Test- und Ansatzraum zulässig.

Die Kurzschreibweise der diskreten Variationsformulierung lautet,

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_M (\dot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_K a(\dot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega + a(\mathbf{u}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega = \\ (\mathbf{f}, \mathbf{W}^h), \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \text{ und } 0 < t \leq T, \quad (3.31) \end{aligned}$$

und entsprechend in Matrixform unter Berücksichtigung des Separationsansatzes (3.24):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + (c_M \mathbf{M} + c_K \mathbf{K})\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \forall 0 < t \leq T. \quad (3.32)$$

Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.32) wird in Abschnitt 5 beschrieben. Um eine numerische Methode bei Anwendung auf Differentialgleichungen verifizieren zu können, werden a-priori Aussagen zur Konvergenz der numerischen Lösung  $\mathbf{u}_h$  gegen  $\mathbf{u}$  in einer geeigneten Norm benötigt. Eine geeignete a-priori Fehlerabschätzung in der Energienorm ist bei French/Peterson [38] zu finden, die den Sonderfall der Wellengleichung behandeln. Sie verwenden stetige Ansatzfunktionen für Raum- und Zeitbereich zur Diskretisierung der Wellengleichung, deren Approximationsfehler  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$  bei  $t = T$  folgender a-priori Fehlerabschätzung genügt,

$$\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2, T} + \|\mathbf{e}\|_{a, T} \leq C_1(h^p + k^{2q}) + C_2 h^p + C_3 k^{2q}. \quad (3.33)$$

$q$  ist der Polynomgrad der Näherungsfunktion  $\mathbf{u}^h$  bzgl. der Zeit  $t$  und  $p$  der Polynomgrad der Näherungsfunktion  $\mathbf{u}^h$  bzgl. der Raumkoordinate  $\mathbf{x}$ ;  $h$  bezeichnet die Netzweite des Raumgitters und  $k$  ist die Zeitschrittweite des Zeitintegrators.  $C_i$  ist unabhängig von  $h$

und  $k$ , aber abhängig von der rechten Seite  $\mathbf{f}$  (siehe Gl. 3.26) sowie den Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0$  und  $\dot{\mathbf{u}}_0$ . Diese Abschätzung gilt nur bei hinreichend kleiner Raumgitterweite  $h > 0$  und hinreichend kleiner Zeitschrittweite  $k > 0$ , siehe Hilfssatz von Cea, Großmann/Roos [44]. Eine a-priori Fehlerabschätzung in der Energienorm bei  $t = T$  für ein vollständig (Raum+Zeit) diskontinuierliches Galerkinverfahren ( $P1 - P1$ ) ist in Johnson [61] zu finden,

$$\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2,T} + \|\mathbf{e}\|_{a,T} \leq C(h + h^{-1/2}k^2 + k^3). \quad (3.34)$$

Der wesentliche Nachteil dieser a-priori Fehlerschätzer besteht darin, daß sie von sehr idealen Annahmen ausgehen. Allgemeine Gebiete (Innenwinkel  $> 180^\circ$ ), wechselnde Randbedingungen (Williams [98]), oszillierende und unstetige Koeffizienten der Materialmatrix  $\mathbb{C}$  verursachen aber Singularitäten u.ä., die die Konvergenz des Fehlers  $\mathbf{e}$  in einer Norm wesentlich beeinflussen können. Bei Problemstellungen der linearen Elastizitätstheorie kann die gesuchte Lösung  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot)$  in einen regulären  $\mathbf{u}_{reg}$  und singulären Lösungsanteil  $\mathbf{u}_{sing}$  zerlegt werden, Petersdorff [95]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot) = \mathbf{u}_{reg} + \mathbf{u}_{sing} \quad \text{mit:} \quad \mathbf{u}_{sing} = \sum_i K_i r^{\alpha_i} \mathbf{U}_{s,i}. \quad (3.35)$$

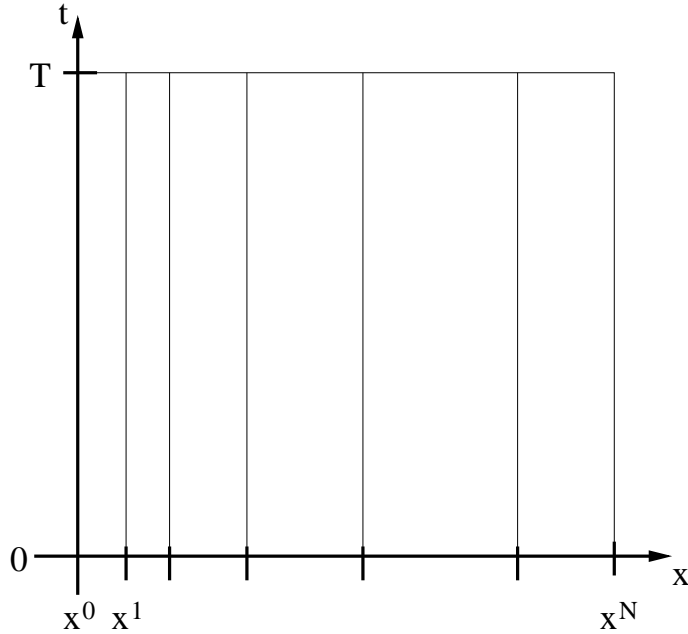
Hierbei ist  $K_i$  der Spannungsintensitätsfaktor, und  $\mathbf{U}_{s,i}$  ist die zugehörige Winkelfunktion, die von der lokalen Geometrie und Materialeigenschaften abhängt. Deren Einfluß klingt mit  $r^{\alpha_i}$  vom Punkt der Singularität ab, wobei  $r$  der Abstand vom Punkt der Singularität ist. In die a-priori Fehlerabschätzung des Diskretisierungsfehlers  $\mathbf{e}$  geht der kleinste Exponent  $\alpha = \min_i(\alpha_i)$  des singulären Lösungsanteiles ein. Die Singularität ist durch  $\alpha < 1$  gekennzeichnet. Für 2-D Gebiete kann  $\alpha$  analytisch bestimmt werden, siehe Williams [98], Leguillon [63]. Bei 3-D Gebieten ist man gezwungen,  $\alpha$  über ein Eigenwertproblem zu ermitteln, siehe Petersdorff [95], Grisvard [42];

$$\|\mathbf{e}\|_a \leq C \min \left( h^\alpha, \frac{h^{\min(\lambda, p-\alpha)}}{p^{2\alpha}} \right). \quad (3.36)$$

Dabei charakterisiert  $p$  den gewählten Polynomgrad;  $h$  ist die räumliche Netzweite der gewählten Diskretisierung. Bei Verwendung der  $h$ -Version wird deutlich, daß die maximale Fehlerordnung des Approximationsfehlers  $\mathcal{O}(h^\alpha)$  mit  $\alpha = \lambda$  beträgt, wobei  $\lambda$  der kleinste Eigenwert des zugeordneten Eigenwertproblems ist. Beispielsweise ist bei einer Ecke mit Innenwinkel  $270^\circ$  mit beidseitigem freiem Rand  $\lambda = 0.543$ . Höherwertige polynomiale Ansätze  $p \geq 2$  garantieren bei der  $h$ -Version der Finiten Elemente somit keine höhere Fehlerordnung des Diskretisierungsfehlers, jedoch ist die generische Konstante  $C$  für  $p > 1$  wesentlich kleiner. Die Verwendung der  $p$ -Version, d.h. die Erhöhung der Polynomordnung  $p$ , zeigt die doppelte Konvergenzordnung  $\mathcal{O}(1/p^{2\alpha})$ , siehe Babuska/Suri [6].

## 4 Räumliche Approximation der Variationsgleichung durch Ansatzfunktionen

Für die Überführung der kontinuierlichen Variationsform (3.25) mit Hilfe des Separationsansatzes in die semidiskrete Form (3.30) wurde die (vertikale) Linienmethode verwendet, siehe Abb. 4.1. Alternativ zur Linienmethode existiert die horizontale Linienmethode,



**Bild 4.1:** Vertikale Linienmethode, Raumbgitter, 1. räumliche Diskretisierung – 2. zeitliche Diskretisierung

auch Rothe-Methode genannt, Großmann/Roos [44]. Bei der vertikalen Linienmethode wird zuerst das Bubnov-Galerkin Verfahren bzgl. der Raumvariablen  $\mathbf{x}$  angewendet. Daran schließt sich die zeitliche Diskretisierung mit Finiten Differenzen bzw. Finiten Elementen an; bei der horizontalen Linienmethode wird die Reihenfolge der Diskretisierung umgekehrt. Für konstante Raum- und Zeitgitter liefern beide Diskretisierungsmethoden dieselben Ergebnisse. Die in dem Zusammenhang stehende räumliche Diskretisierung bedeutet zunächst die Festlegung von  $\mathcal{N}_K$  Knoten mit den Koordinaten  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_K$ . Jedem Knoten  $K_1, \dots, K_{\mathcal{N}_K}$  sind  $n_{df,i}$  Knotenfreiwerte zugeordnet. Daraus resultiert die Gesamtzahl der Knotenfreiwerte

$$\mathcal{N}_{eq} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_K} n_{df,i} .$$

Für Scheibenprobleme gilt  $n_{df,i} = 2$ , für Plattenprobleme  $n_{df,i} = 3$  und für Schalenaufgaben ist  $n_{df,i}$  gleich 5.

Weiterhin wird jedem Knoten  $K_1, \dots, K_{\mathcal{N}_K}$  mit der Koordinate  $\mathbf{x}_i$  eine Ansatzfunktion  $N_i$

zugeordnet, die folgende Eigenschaften besitzen:

$$N_i(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega); i = 1 \dots \mathcal{N}_K, \quad (4.1)$$

$$N_i(\mathbf{x}_i) = 1; i = 1 \dots \mathcal{N}_K, \quad (4.2)$$

$$N_i(\mathbf{x}_j) = 0; j = 1 \dots \mathcal{N}_K; j \neq i. \quad (4.3)$$

Zur Erfüllung der Bedingung  $N_i(\mathbf{x}) \in H_0^1(\Omega)$  muß  $N_i(\mathbf{x})$  stetig im gesamten Berechnungsgebiet  $\Omega$  sein. Dies wird durch  $N_i(\mathbf{x}) \in C_0(\Omega)$  garantiert, d.h.  $N_i(\mathbf{x})$  ist stetig in  $\Omega$ .

Dabei wird das Teilgebiet  $\Omega_l$ , in dem  $N_i(\mathbf{x}) \neq 0$  ist, als ein Element  $E_l$  betrachtet. Bei Verwendung z.B. der bilinearen Lagrangepolynome werden die Bedingungen (4.2) und (4.3) automatisch erfüllt. Das bedeutet, 4 Knoten bilden mit den 4 bilinearen Ansatzfunktionen ein Element  $E_l$ .

Zur kompakten Darstellung werden die  $\mathcal{N}_K$  skalaren Ansatzfunktionen in Vektorschreibweise dargestellt. Daraus entstehen  $\mathcal{N}$  vektorwertige Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_i$ ,  $i = 1 \dots \mathcal{N}$ . Komponenten, die nicht zum Freiwert  $i$  gehören, werden mit Nullen belegt,

$$\mathbf{N}_i = \left( 0, \dots, \underbrace{N_{K(i)}, \dots, 0}_{j(i)\text{-te Komponente}} \right)^T$$

mit

$K(i)$  ... dem globalen Freiwert  $i$  zugeordnete Knotennummer  $K(i)$ ,  
 $j(i)$  ... lokaler Freiwert, welcher zum globalen Freiwert  $i$  gehört.

Hieraus ergibt sich die Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{N} = (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_{\mathcal{N}})^T. \quad (4.4)$$

Jetzt können der endlich dimensionale Ansatz-  $\mathcal{V}^h \in \mathcal{V}$  und Testraum  $\mathcal{W}^h \in \mathcal{W}$  definiert werden:

$$\mathcal{W}^h = \{ \mathbf{W}^h \mid \mathbf{W}^h := \mathbf{N}_i; i = 1, \dots, \mathcal{N}_{eq} \} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{V}^h = \{ \mathbf{u}^h \mid \mathbf{u}^h := \mathbf{N} \mathbf{d}; \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}} \}. \quad (4.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \dots, \mathbf{N}_{\mathcal{N}})^T && \dots \text{ Ansatzmatrix der Verschiebungen} \\ \mathbf{d} &= (d_1, \dots, d_{\mathcal{N}})^T && \dots \text{ unbekannter Knotenverschiebungsvektor} \\ \mathcal{N} = \mathcal{N}_{eq} &&& \dots \text{ Anzahl der Freiwerte.} \end{aligned}$$

Stillschweigend wird die zeitliche Abhängigkeit des Knotenverschiebungsvektors  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$  vorausgesetzt. Durch die Verwendung der vertikalen Linienmethode wird der Separationsansatz für die Näherungslösung impliziert,

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}^h(\mathbf{x}) \mathbf{d}(t), \quad \text{mit: } \mathbf{U}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}.$$

Da Singularitäten der Lösung nicht ausgeschlossen werden, sollen die oben erwähnten bilinearen Ansatzfunktionen Verwendung finden. Alle Beispieluntersuchungen beschränken sich auf ebene Flächen (Scheibe, Platte)  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  und gekrümmte Flächen (Schale)  $\Omega \in \mathbb{R}^3$ .



Die Ansatzfunktionen auf der Einheitsraumzelle  $E = \xi(-1, 1) \times \eta(-1, 1)$  sind die bilinearen Lagrangepolynome,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(E, t) &= \mathbf{d}_{ndf}^1(t)N^1 + \mathbf{d}_{ndf}^2(t)N^2 + \mathbf{d}_{ndf}^3(t)N^3 + \mathbf{d}_{ndf}^4(t)N^4, \\ N^1 &= (1 - \xi)(1 - \eta), \quad N^2 = (1 + \xi)(1 - \eta), \\ N^3 &= (1 + \xi)(1 + \eta), \quad N^4 = (1 - \xi)(1 + \eta). \end{aligned} \quad (4.7)$$

$\mathbf{d}_{ndf}^i$  ist der Vektor der  $ndf$  Knotenfreiwerte des Knotens  $i$  der Einheitsraumzelle. Zur Diskretisierung von  $\Omega$  wird das isoparametrische Konzept verwendet. Für eine Raumzelle der Triangulisation von  $\Omega$  werden ebenfalls die obigen bilinearen Lagrangepolynome verwendet,

$$\mathbf{x}(E) = \mathbf{x}^1 N^1 + \mathbf{x}^2 N^2 + \mathbf{x}^3 N^3 + \mathbf{x}^4 N^4 \quad \text{mit } \mathbf{x}^i \in R^2/R^3.$$

$\mathbf{x}^i$  sind dabei die Koordinaten der Knoten eines Finiten Elements. Gekrümmte Ränder werden dadurch nur facettiert approximiert. Der damit eingeführte geometrische Approximationsfehler wurde bisher nur in wenigen Arbeiten behandelt, z.B. Tiihonen[94], Dörfler/Rumpf [28]. Für gekrümmte Ränder haben Dörfler/Rumpf am Beispiel der Poissongleichung mit Dirichletrand gezeigt, daß der geometrische Diskretisierungsfehler, gemessen in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_a$ , die Ordnung  $\mathcal{O}(h^{3/2})$  hat und damit eine halbe Größenordnung kleiner ist als der Approximationsfehler  $\|\mathbf{e}\|_a = \mathcal{O}(h)$  der diskreten Lösung  $\mathbf{u}^h$ .

Eine dritte Möglichkeit basiert auf der vollständig variationellen Formulierung der Differentialgleichung (3.21), siehe z.B. Hulbert/Hughes [59] und French/Peterson [38]. Zusätzlich zur Testfunktion  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  wird die Differentialgleichung (3.21) mit der Testfunktion  $\mathbf{g}(t)$  gewichtet,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \rho \mathbf{w} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \nabla \mathbf{w} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dxdt &= \int_{\Sigma} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dxdt + \int_{\Gamma_N \times I} \mathbf{w} \cdot \mathbf{p} \, dsdt \\ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W} \subset L_2(I, H_0^1(\Omega)), \quad \text{mit: } \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Lösung  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  wird nun im Funktionenraum  $\mathcal{V} = L_2(H^1(\Omega), I)$  gesucht.  $\Sigma = \Omega \times I$  ist der Raum-Zeit Zylinder;  $I$  ist das betrachtete Zeitintervall  $I = (0, T]$ . Die Raumzeitwichtungsfunktion  $\mathbf{w}$  besitzt ebenfalls die Struktur des Separationsansatzes  $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{g}(t)$ . Für die numerische Lösung der schwachen Formulierung (4.8) unterteilt man den Raum-Zeit Zylinder in einzelne Zellen  $E \times I_n$ .  $E$  ist ein Element der räumlichen Triangulierung,  $I_n = (t_{n-1}, t_n]$  ist ein Teilintervall des gesamten Zeitintervalls  $I = \cup_n I_n$ . Für die Diskretisierung können stetige und unstetige Ansatzfunktionen für  $\mathbf{d}(t)$  benutzt werden. Die (Ge)Wichtungsfunktion  $\mathbf{g}(t)$  ist grundsätzlich sinnvollerweise unstetig, um die schrittweise Lösung der schwachen Variationsformulierung (4.9) auch mit Ansätzen sehr niedriger Ordnung zu ermöglichen,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^h &= \mathbf{W}^h(x) \mathbf{g}^k(t), \\ \int_{\Sigma} \rho \mathbf{w}^h \cdot \ddot{\mathbf{u}}^h + \nabla \mathbf{w}^h : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^h \, dxdt &= \int_{\Sigma} \rho \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{b} \, dxdt + \int_{\Gamma_N \times I} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{p} \, dsdt \\ \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die diskontinuierliche Finite Element Formulierung in der Zeit wird in Abschnitt 5 diskutiert. Der Vorteil der Volldiskretisierung in einem Schritt besteht in der Wahl örtlich verschiedener Zeitschrittweiten. Ein sehr hoher Programmieraufwand steht dem Vorteil jedoch entgegen. Das wesentliche Problem der Entkopplung der räumlich lokalen Zeitschritte besteht damit weiterhin. Für 1-D Aufgabenstellungen existieren Ansätze zur Verwendung von 'echten' Raum-Zeit Elementen, siehe French/Peterson [38].

## 5 Numerische Methoden zur Zeitintegration

Die dominierenden numerischen Methoden zur Zeitintegration der semidiskreten Form (3.30) basieren auf Finiten Differenzen Methoden, z.B. die (H)ilber-(H)ughes-(T)aylor- $\alpha$  Methode [54], das Verfahren nach Chung/Hulbert [19] und die Gruppe der Runge-Kutta Verfahren [46]. Die Lösung der Einschritt-Zeitintegrationsverfahren bei  $t = t_n$  basiert ausschließlich auf den Daten vom Zeitpunkt  $t = t_{n-1}$ . Mehrschrittverfahren basieren auf den numerischen Lösungen bei  $\{\dots, t_{n-2}, t_{n-1}\}$ , z.B. Frank et al. [35], Hughes [56]. Allerdings hat Hulbert [58] beobachtet, daß nur die 3-Schritt Methode von Houbolt [55] eine numerische Dämpfung bei der Genauigkeitsordnung  $\mathcal{O}(k^2)$  besitzt. Erst bei 4-Schrittmethode wirkt die numerische Dämpfung nur auf die höheren Eigenfrequenzen. Der erhöhte Speicherbedarf rechtfertigt jedoch nicht die größere Genauigkeit der Mehrschrittverfahren, so daß nur Einschrittverfahren verwendet werden.

Dabei wird der Zeitbereich  $I = (0, T]$  in  $N + 1$  diskrete Zeitpunkte  $t_0, \dots, t_n, \dots, t_N = T$  unterteilt. Für diese Zeitpunkte  $t_n$  wird die Differenzengleichung gelöst. Der Abstand zwischen den diskreten Zeitpunkten  $t_0, \dots, t_n, \dots, t_N = T$  ist als Zeitschrittweite  $k_n = t_n - t_{n-1}$  definiert. Eine oft verwendete Methode ist das Newmarkverfahren (N), Newmark [74];

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + k\mathbf{v}_n + (1 - 2\beta)k^2/2\mathbf{a}_n + \beta k^2\mathbf{a}_{n+1}, \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + (1 - \gamma)k\mathbf{a}_n + \gamma k\mathbf{a}_{n+1}, \\ \mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + (c_M\mathbf{M} + c_K\mathbf{K})\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{F}_{n+1}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die gesuchte Funktion  $\mathbf{d}(t)$  wird durch die diskreten Zustandsgrößen ersetzt,  $\mathbf{d}(t = t_n) \rightarrow \mathbf{d}_n$ ,  $\dot{\mathbf{d}}(t = t_n) \rightarrow \mathbf{v}_n$ . Die Funktion  $\ddot{\mathbf{d}}(t)$  wird ebenfalls durch die diskrete Beschleunigung bei  $t = t_n$  ersetzt,  $\ddot{\mathbf{d}}(t = t_n) \rightarrow \mathbf{a}_n$ . Die Parameter  $\beta$  und  $\gamma$  bestimmen Genauigkeit und numerische Stabilität des Verfahrens. Für die Untersuchung der Stabilität ist die Übertragungsmatrix  $\ddot{\mathbf{U}}_N$  wichtig, die in Abschnitt 6 ausführlich analysiert wird. Die Matrix  $\ddot{\mathbf{U}}$  ist die lineare Abbildung der Zustandsgrößen  $(\mathbf{d}_n, \mathbf{v}_n)^T$  vom Zeitpunkt  $t = t_n$  auf den Zeitpunkt  $t = t_{n+1}$ . Hierfür wird  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$  angenommen,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} \end{pmatrix} = \ddot{\mathbf{U}}_N \begin{pmatrix} \mathbf{d}_n \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Zu einigen Differenzenverfahren (5.2) existieren auch äquivalente Galerkinverfahren für die semidiskrete Form (3.30). Wood [99] führte das Newmarkverfahren mit  $\gamma = 2\beta = 0.5$  auf ein für  $\mathbf{d}$  und  $\mathbf{v}$  in der Zeit stetiges Petrov-Galerkinverfahren mit quadratischen Verschiebungsansatz zurück. Wegen der (c)ontinuierlichen Ansatzfunktion wird dieses Verfahren mit (C) gekennzeichnet. Für die zeitliche Diskretisierung wird der Zeitintervall  $I = (0, T]$  in  $M$  Zeitschritte  $I_n = (t_{n-1}, t_n]$  mit der Zeitschrittweite  $k_n = t_n - t_{n-1}$  unterteilt,  $I = \cup_n I_n$ . Der quadratische Verschiebungsansatz im Intervall  $I_n$  ist dann:

$$\mathbf{d}^k(t) = \mathbf{d}_{n-1} + \mathbf{v}_{n-1}(t - t_{n-1}) + \frac{1}{2}(t - t_{n-1})^2 \mathbf{a}_n \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n]. \quad (5.3)$$

Die bisher noch nicht spezifizierte Wichtungsfunktion  $\mathbf{g}^k(t)$  ist

$$\mathbf{g}^k(t) = \mathbf{G}_n \left( 1/5 - (t - t_{n-1})/k_n + (t - t_{n-1})^2/k_n^2 \right), \quad \text{mit: } \mathbf{G}_n \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}} = \text{const.} \quad (5.4)$$

Das Petrov-Galerkin Verfahren, Eriksson et al. [50], wird nun zur Formulierung der schwachen Form im Zeitintervall  $k_n$  genutzt,

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{g}^k \left( \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}^k + (c_M \mathbf{M} + c_K \mathbf{K}) \dot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{K} \mathbf{d}^k - \mathbf{F} \right) dt = 0 \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n], \quad (5.5)$$

mit den 'schwachen' Anfangsbedingungen bei  $t = 0$ :

$$a(\mathbf{w}^h(t=0), \mathbf{u}^h(t=0))_\Omega = a(\mathbf{w}^h(t=0), \mathbf{u}_0)_\Omega \quad \text{und} \\ (\dot{\mathbf{w}}^h(t=0), \dot{\mathbf{u}}^h(t=0))_\Omega = (\dot{\mathbf{w}}_h(t=0), \dot{\mathbf{u}}_0)_\Omega. \quad (5.6)$$

Falls die Anfangsbedingungen  $\mathbf{u}_0$  und  $\dot{\mathbf{u}}_0$  durch  $\mathbf{u}^h(t=0)$  exakt abbildbar sind, werden diese auch exakt erfüllt. Deshalb werden hier die schwachen Anfangsbedingungen über die Bilinearformen, Gl. (5.6), eingeführt.

Die Äquivalenz zwischen Finiten Differenzen Methode (N) und Galerkin-Verfahren, d.h. Finiten Element Methode (C), wird über die Gleichheit der Übertragungsmatrizen  $\ddot{\mathbf{U}}_N$  und  $\ddot{\mathbf{U}}_C$  gesichert;

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} \end{pmatrix} = \ddot{\mathbf{U}}_C \begin{pmatrix} \mathbf{d}_n \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \ddot{\mathbf{U}}_N \begin{pmatrix} \mathbf{d}_n \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Im autonomen Fall ( $\mathbf{F} = 0$ ) ist folgendes algebraisches System, resultierend aus der Finite Element Formulierung, schrittweise zu lösen:

$$(4\mathbf{M} + 2k_n \mathbf{C} + k_n^2 \mathbf{K}) \mathbf{a}_n = -2(k_n \mathbf{K} \mathbf{v}_n + 2\mathbf{C} \mathbf{v}_n + 2\mathbf{K} \mathbf{d}_n). \quad (5.8)$$

$\mathbf{a}_n$  ist hier die mittlere Beschleunigung im Zeitschritt  $(t_{n-1}, t_n]$ . Man beachte, daß bei der Finiten Differenzenformulierung  $\mathbf{a}_n$  die Beschleunigung bei  $t = t_n$  symbolisiert. Der Vorteil der FE-Formulierung (C), d.h. der kontinuierlichen Galerkinformulierung, ist die Möglichkeit der Verwendung der Algorithmen zur Fehleranalyse, die schon für elliptische Differentialgleichungen eingesetzt wurden. Hierfür wird auf Abschnitt 9 verwiesen. Zusätzlich ist man beim Finiten Differenzenansatz aus algorithmischen Gründen gezwungen, eine nicht-physikalische Anfangsbeschleunigung  $\mathbf{a}_0$  bei  $t = 0$  zu bestimmen,

$$\mathbf{a}_0 = -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C} \mathbf{v}_0 + \mathbf{K} \mathbf{d}_0).$$

Ein zweiter Zugang zur Darstellung des Standard-Newmarkverfahrens resultiert aus der von Ruge [84] vorgegebenen Formulierung von Gl. (3.32). Diese Bewegungsgleichung in Matrixform wird hierfür als Zustandsgleichung, d.h. als System 1. Ordnung, geschrieben:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (5.9) \\ \text{kompakt: } \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{U} \mathbf{z}.$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{U} \cdot t} \mathbf{z}_0$$

folgt nach einem Zeitschritt  $t = k$ :

$$\mathbf{z}_1 = e^{\mathbf{U} k} \mathbf{z}_0.$$

Für die numerische Umsetzung kann man z.B. die Pade-11 Entwicklung für  $e^{\mathbf{U}k}$  verwenden:

$$e^{\mathbf{U}k} \approx \left( \mathbf{1} - \frac{1}{2}k\mathbf{U} \right)^{-1} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2}k\mathbf{U} \right).$$

Pade-Entwicklungen sind gebrochen rationale Approximationen von  $e^x$ . Die Übertragungsmatrix  $\ddot{\mathbf{U}}$  für einen Zeitschritt ist die Pade-11 Entwicklung:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{P11} = \left( \mathbf{1} - \frac{1}{2}k\mathbf{U} \right)^{-1} \left( \mathbf{1} + \frac{1}{2}k\mathbf{U} \right).$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{P11} = \ddot{\mathbf{U}}_N = \ddot{\mathbf{U}}_C$$

und somit auch die Äquivalenz zwischen Pade-11 Entwicklung und Newmarkverfahren. Die stetige Approximation von  $\mathbf{d}(t)$  im Zeitbereich gewährleistet bei entsprechender Wahl der Testfunktion  $\mathbf{g}^k(t)$  auch Energieerhaltung. Allerdings können als Folge der Energieerhaltung z.B. bei Wellenausbreitungsproblemen künstliche Oszillationen der Lösung  $\mathbf{u}^h(x, t)$  beobachtet werden, die unterdrückt werden sollten.

Die zeitliche Approximation mit dem Diskontinuierlichen Galerkinverfahren (DG), Hughes/Hulbert [57], kann diesen Effekt wesentlich dämpfen. Dann ist allerdings die Energieerhaltung nicht mehr gewährleistet. Im folgenden wird die Diskontinuierliche Galerkinapproximation (DG P1-P1) vorgestellt. Erste theoretische Untersuchungen über Diskontinuierliche Galerkinverfahren sind in Hughes/Hulbert [57, 60] und Johnson [61] zu finden. Beim DG P1-P1 Verfahren, d.h. lineare polynomiale Approximation von Verschiebung und Geschwindigkeit im Zeitbereich, für die Variationsgleichung (3.25)

$$\begin{aligned} (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_\Omega + c_M(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_\Omega + c_K a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{w})_\Omega + a(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\Omega &= (\mathbf{f}, \mathbf{w})_\Omega \\ \forall \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)^n \text{ und } 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

wird mittels der Kompatibilitätsbedingung

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_t \tag{5.10}$$

das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}, t)$  neben dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  als unabhängige Zustandsgröße eingeführt. Mit den Testfunktionen  $\mathbf{w}_u = \mathbf{w}_u(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{W} = L_2(I, H_0^1(\Omega))$  und  $\mathbf{w}_{u_t} = \mathbf{w}_{u_t}(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{W} = L_2(I, H_0^1(\Omega))$  ( $\boldsymbol{\chi} = (\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_{u_t}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}$ ) resultiert daraus die Variationsgleichung als System 1. Ordnung, bei der das Lösungspaar  $\boldsymbol{\zeta} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}_t)$  gesucht ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\zeta}) &= \mathbf{F}^*(\boldsymbol{\chi}) \forall \boldsymbol{\chi} \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}, \\ \int_I (\dot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{w}_{u_t})_\Omega dt + \int_I c_M(\dot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{w}_{u_t})_\Omega dt + \int_I c_K a(\mathbf{u}_t, \mathbf{w}_{u_t})_\Omega dt + \int_I a(\mathbf{u}, \mathbf{w}_{u_t})_\Omega dt \\ + \int_I a(\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_u)_\Omega dt &= \int_I (\mathbf{f}, \mathbf{w}_{u_t})_\Omega dt, \quad \forall (\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_{u_t}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Die zugehörige, ausführliche Variationsgleichung lautet somit:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} \rho \mathbf{w}_{u_t} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t \, dxdt + \int_{\Sigma} c_{MP} \mathbf{w}_{u_t} \cdot \mathbf{u}_t \, dxdt + \int_{\Sigma} c_K \nabla \mathbf{w}_{u_t} : \mathbb{C} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_t + \nabla^T \mathbf{u}_t) \, dxdt + \\
& \int_{\Sigma} \nabla \mathbf{w}_{u_t} : \mathbb{C} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \, dxdt + \int_{\Sigma} \nabla \mathbf{w}_u : \mathbb{C} : \frac{1}{2} (\nabla \dot{\mathbf{u}} + \nabla^T \dot{\mathbf{u}} - \nabla \mathbf{u}_t - \nabla^T \mathbf{u}_t) \, dxdt \\
& = \int_{\Sigma} \mathbf{w}_{u_t} \cdot \mathbf{f} \, dxdt \quad \forall (\mathbf{w}_u, \mathbf{w}_{u_t}) \in \mathcal{W} \times \mathcal{W} = L_2(I, H_0^1(\Omega)) \times L_2(I, H_0^1(\Omega)), \quad (5.11)
\end{aligned}$$

$$\text{mit: } \int_{\Sigma} \mathbf{w}_{u_t} \cdot \mathbf{f} \, dxdt = \int_{\Sigma} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \, dxdt + \int_{\Gamma_N \times I} \mathbf{w} \cdot \mathbf{p} \, dsdt.$$

Ausgangspunkt der Diskretisierung von Raum und Zeit ist der Separationsansatz nach Gl.(3.24). Die räumliche Diskretisierung wird aus Abschnitt 4 übernommen, d.h. zur räumlichen Approximation von  $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{u}_t(\mathbf{x}, \cdot))$  und  $(\mathbf{w}_u(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{w}_{u_t}(\mathbf{x}, \cdot))$  werden  $C_0$  stetige, bilineare Lagrangepolynome verwendet. Das gesamte Zeitintervall  $(0, T]$  wird wie beim Galerkinverfahren für die Newmarkmethode in  $N$  Subintervalle  $I_n = (t_{n-1}, t_n)$  der Länge  $k_n = t_n - t_{n-1}$  geteilt. Für die zeitliche Approximation von  $(\mathbf{u}(\cdot, t), \mathbf{u}_t(\cdot, t))$  und  $(\mathbf{w}_u(\cdot, t), \mathbf{w}_{u_t}(\cdot, t))$  werden diskontinuierliche lineare Ansatzfunktionen verwendet, die nur lokal (auf  $I_n$ ) stetig sind, siehe auch Abb. 5.1;

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{U}^h(\mathbf{x}) \mathbf{d}^k(t), \quad \mathbf{u}_t^h = \mathbf{U}_t^h(\mathbf{x}) \mathbf{d}_t^k(t), \quad (5.12)$$

$$\text{Knotenverschiebung: } \mathbf{d}^k(t) = \mathbf{d}_+^{n-1} \frac{t_n - t}{k_n} + \mathbf{d}_-^n \frac{t - t_{n-1}}{k_n}, \quad (5.13)$$

$$\text{Knotengeschwindigkeit: } \mathbf{d}_t^k(t) = \mathbf{d}_{t+}^{n-1} \frac{t_n - t}{k_n} + \mathbf{d}_{t-}^n \frac{t - t_{n-1}}{k_n}. \quad (5.14)$$

An den Zeitpunkten  $\{0, t_1, \dots, t_n, \dots, t_N = T\}$  wird ein Sprung in den Zustandsgrößen zugelassen, siehe auch Abb. 5.1;

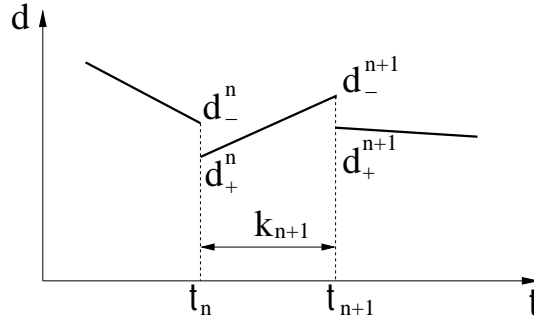
$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}^h(\cdot, t = t_n)] &= \mathbf{u}^h(\cdot, t_{n+}) - \mathbf{u}^h(\cdot, t_{n-}), \\
[\mathbf{u}_t^h(\cdot, t = t_n)] &= \mathbf{u}_t^h(\cdot, t_{n+}) - \mathbf{u}_t^h(\cdot, t_{n-}), \\
\text{mit: } \mathbf{u}^h(\cdot, t_{n\pm}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0\pm} \mathbf{u}^h(\cdot, t_n \pm \epsilon), \quad \mathbf{u}_t^h(\cdot, t_{n\pm}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0\pm} \mathbf{u}_t^h(\cdot, t_n \pm \epsilon).
\end{aligned}$$

Damit läßt sich der Sprung als entsprechende Knotengröße schreiben:

$$[\mathbf{d}(t = t_n)] = \mathbf{d}_+^n - \mathbf{d}_-^n, \quad [\mathbf{d}_t(t = t_n)] = \mathbf{d}_{t+}^n - \mathbf{d}_{t-}^n, \quad (5.15)$$

Mit Berücksichtigung der Sprünge und der Rayleigh-Dämpfung erhält man dann die volldiskretisierte Form für das DG P1-P1 Verfahren,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \int_{k_n} (\mathbf{w}_{u_t}^h, \dot{\mathbf{u}}_t^h)_{\Omega} + c_M (\mathbf{w}_{u_t}^h, \mathbf{u}_t^h)_{\Omega} + c_k a(\mathbf{w}_{u_t}^h, \mathbf{u}_t^h)_{\Omega} + a(\mathbf{w}_{u_t}^h, \mathbf{u}^h)_{\Omega} + a(\mathbf{w}_u^h, \dot{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}_t^h)_{\Omega} \, dt \\
& + \sum_{n=2}^N (\mathbf{w}_{u_t+}^{n-1}, [\dot{\mathbf{u}}_t^{n-1}])_{\Omega} + a(\mathbf{w}_{u+}^{n-1}, [\mathbf{u}_t^{n-1}])_{\Omega} + (\mathbf{w}_{u_t+}^0, \dot{\mathbf{u}}_t^0)_{\Omega} + a(\mathbf{w}_{u+}^0, \mathbf{u}_t^0)_{\Omega} = \\
& (\mathbf{w}_{u_t+}^0, \dot{\mathbf{u}}_t^0)_{\Omega} + a(\mathbf{w}_{u+}^0, \mathbf{u}^0)_{\Omega} + \sum_{n=1}^N \int_{k_n} (\mathbf{w}_{u_t}^h, \mathbf{f})_{\Omega} \, dt \quad \forall \mathbf{w}_{u_t}^h \times \mathbf{w}_u^h \in \mathcal{W}^h \times \mathcal{W}^h \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W} \quad (5.16)
\end{aligned}$$



**Bild 5.1:** Sprung der Knotengrößen, hier in der Verschiebung, bei  $t = t_{n+1}$  und  $t = t_n$

Die räumliche Vorabintegration liefert die Matrixform der Variationsgleichung (5.16), die sogenannte diskrete (zeitliche) Variationsform des DG P1-P1 Verfahrens. Mit Hilfe der ebenfalls zeitlich diskontinuierlichen Testfunktionen

$$\mathbf{w}_u^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}_u^h(\mathbf{x}) \mathbf{g}_d(t), \quad \mathbf{w}_{ut}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{W}_{ut}^h(\mathbf{x}) \mathbf{g}_{dt}(t) \quad (5.17)$$

kann dann die volldiskretisierte Form schrittweise gelöst werden;

$$\int_{k_n} \mathbf{g}_{dt} \left( \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_t^k + \mathbf{C} \mathbf{d}_t^k + \mathbf{K} \mathbf{d}^k \right) dt + \int_{k_n} \mathbf{g}_d \mathbf{K} \left( \dot{\mathbf{d}}^k - \mathbf{d}_t^k \right) dt + \mathbf{g}_{d_{t,+}}^{n-1} \cdot \mathbf{M} \mathbf{d}_{t,+}^{n-1} + \mathbf{g}_{d,+}^{n-1} \cdot \mathbf{K} \mathbf{d}_+^{n-1} = \int_{k_n} \mathbf{g}_{dt}^k \mathbf{F} dt + \mathbf{g}_{d_{t,+}}^{n-1} \cdot \mathbf{M} \mathbf{d}_{t,-}^{n-1} + \mathbf{g}_{d,-}^{n-1} \cdot \mathbf{K} \mathbf{d}_-^{n-1}.$$

Infolge der räumlichen Diskretisierung besitzen die Massen- und Steifigkeitsmatrix die Dimension  $\mathcal{N}_{eq} \times \mathcal{N}_{eq}$ , d.h.  $\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq} \times \mathcal{N}_{eq}}$ ; die Spaltenvektoren der Knotengeschwindigkeiten und Knotenverschiebungen haben die Dimension  $\mathcal{N}_{eq}$ , d.h.  $\mathbf{d}_{t\pm}^n, \mathbf{d}_{\pm}^n \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}}$ . Nach zeitlicher Integration und Separation der virtuellen Knotengeschwindigkeiten und virtuellen Knotenverschiebungen besitzt das Gleichungssystem des P1-P1 Verfahrens zunächst die Dimension  $4\mathcal{N}_{eq}$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{K} & -\frac{1}{3}k_n\mathbf{K} & -\frac{1}{6}k_n\mathbf{K} \\ -\frac{1}{2}\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{K} & -\frac{1}{6}k_n\mathbf{K} & -\frac{1}{3}k_n\mathbf{K} \\ \frac{1}{3}k_n\mathbf{K} & \frac{1}{6}k_n\mathbf{K} & \frac{1}{2}\mathbf{M} + \frac{1}{3}k_n\mathbf{C} & \frac{1}{2}\mathbf{M} + \frac{1}{6}k_n\mathbf{C} \\ \frac{1}{6}k_n\mathbf{K} & \frac{1}{3}k_n\mathbf{K} & -\frac{1}{2}\mathbf{M} + \frac{1}{6}k_n\mathbf{C} & \frac{1}{2}\mathbf{M} + \frac{1}{3}k_n\mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_+^{n-1} \\ \mathbf{d}_-^n \\ \mathbf{d}_{t+}^{n-1} \\ \mathbf{d}_{t-}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \mathbf{d}_-^{n-1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_1 + \mathbf{M} \mathbf{d}_{t-}^{n-1} \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

$$\text{mit : } \begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \int_{k_n} \left( \frac{t_n - t}{k_n} \right) \mathbf{F}(t) dt, \\ \mathbf{F}_2 &= \int_{k_n} \left( \frac{t - t_{n-1}}{k_n} \right) \mathbf{F}(t) dt. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Blockstruktur von Gl. (5.18) kann eine effizientere Darstellung erzielt werden, die von Wiberg/Li [65] benutzt wurde,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\frac{1}{6}k_n\mathbf{I} & \frac{1}{6}k_n\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\frac{1}{2}k_n\mathbf{I} & -\frac{1}{2}k_n\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^* & \frac{2}{3}\mathbf{M} + \frac{1}{6}k_n\mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{2}k_n\mathbf{C} + \frac{1}{3}k_n^2\mathbf{K} & \mathbf{M}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_+^{n-1} \\ \mathbf{d}_-^n \\ \mathbf{d}_{t+}^{n-1} \\ \mathbf{d}_{t-}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_-^{n-1} \\ \mathbf{d}_-^{n-1} \\ \mathbf{F}_1^* \\ \mathbf{F}_2^* \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

$$\text{mit: } \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \frac{1}{2}k_n \mathbf{C} + \frac{1}{6}k_n^2 \mathbf{K}, \quad \mathbf{M}^* \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq} \times \mathcal{N}_{eq}}$$

$$\mathbf{F}_1^* = \frac{5}{3}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{M}\mathbf{d}_{t-}^{n-1}) - \frac{1}{3}\mathbf{F}_2 - \frac{2}{3}k_n \mathbf{K}\mathbf{d}_{t-}^{n-1}, \quad \mathbf{F}_2^* = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}\mathbf{d}_{t-}^{n-1} - k_n \mathbf{K}\mathbf{d}_{t-}^{n-1}.$$

Man erkennt, daß die 3. und 4. Blockzeile von den ersten beiden Gleichungen vollständig entkoppelt sind, somit ist noch ein Gleichungssystem der Größe  $2 \times \mathcal{N}_{eq}$  zu lösen. Außerdem sind die Blockmatrizen auf der Diagonale der 3. und 4. Blockzeile symmetrisch. Dies reduziert den numerischen Aufwand für die Gleichungslösung beträchtlich. In der Nachlaufrechnung ergeben sich noch:

$$\mathbf{d}_-^n = \mathbf{d}_-^{n-1} + \frac{1}{2}k_n(\mathbf{d}_{t+}^{n-1} + \mathbf{d}_{t-}^n), \quad \mathbf{d}_+^{n-1} = \mathbf{d}_-^{n-1} + \frac{1}{6}k_n(\mathbf{d}_{t+}^{n-1} - \mathbf{d}_{t-}^n). \quad (5.20)$$

Alternativ zum Galerkinverfahren von Wiberg/Li [65] kann dasselbe Zeitintegrationsverfahren, Gl. (5.12-5.18), über eine hybride Hamiltonformulierung von Ruge [85] generiert werden. Die Hamiltonfunktion  $H = U + T$  setzt sich dabei aus Verzerrungsenergie  $U$  und kinetischer Energie  $T$  zusammen. Beim Hamiltonschen Prinzip wird für einen beliebigen Zeitraum  $k_n$  die Stationarität des Integrals  $I$  für die Lagrangefunktion  $L$  gefordert,

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dx, \quad T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \rho^{-1} \mathbf{p} \, dx, \quad \mathbf{p} = \rho \mathbf{u}_t, \quad (5.21)$$

$$I = \int_{k_n} \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p} \, dx - H \, dt \rightarrow \text{stationär: } , \delta I = 0. \quad (5.22)$$

Dabei wurde die Legendre-Transformation für die Lagrangefunktion  $L = \int_{\Omega} \dot{\mathbf{u}} \mathbf{p} \, dx - T - U$  benutzt.  $\mathbf{p}$  ist der Impuls eines materiellen Punktes der Dichte  $\rho$  mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_t$ . Für nichtkonservative Systeme wird die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte  $\mathbf{f}$  (Spannungsrandbedingungen und Volumenkräfte) und sowie viskose Dämpfung hinzugefügt. Zudem ist es nach Bailey [7] erforderlich, die virtuelle Arbeit der Impulse bei  $t = t_{n-1}$  und  $t = t_n$  in die gemischte Form einzubringen,

$$\delta I_1 = \delta I + \int_{\Omega \times k_n} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{f} - c_M \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} - \frac{c_K}{\rho} \delta(\nabla \mathbf{u}) : \mathbb{C} : \nabla \mathbf{p} \, dx \, dt - \left[ \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{p} \, dx \right]_{t_{n-1}}^{t_n} = 0.$$

Mittels partieller Integration in der Zeit werden die Zeitrandimpulse eliminiert,

$$\begin{aligned} \delta I_1 &= \int_{k_n} \int_{\Omega} \delta \mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \delta \mathbf{u} \cdot \left( \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{f} + c_M \mathbf{p} \right) - \frac{c_K}{\rho} \delta(\nabla \mathbf{u}) : \mathbb{C} : \nabla \mathbf{p} \, dx \, dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Benutzt man diese Form zur zeitlichen Diskretisierung mit linearen Ansatzfunktionen, so ergibt sich ein numerisch instabiler Zeitintegrator, siehe Ruge [85]. Werden aber die



Sprünge in den Zustandsgrößen mechanisch konsistent hinzugefügt, erhält man wiederum ein diskontinuierliches Galerkinverfahren in einer Zweifeldformulierung,

$$\begin{aligned} \delta I_2 = \int_{k_n} \int_{\Omega} \delta \mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{u}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) - \delta \mathbf{u} \cdot \left( \dot{\mathbf{p}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} - \mathbf{f} + c_M \mathbf{p} \right) - \frac{c_K}{\rho} \delta(\nabla \mathbf{u}) : \mathbb{C} : \nabla \mathbf{p} \, dx dt \\ + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}_{t+}^{n-1} (\mathbf{u}_+^{n-1} - \mathbf{u}_-^{n-1}) - \rho \delta \mathbf{u}_+^{n-1} (\mathbf{u}_{t+}^{n-1} - \mathbf{u}_{t-}^{n-1}) \, dx = 0 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Nach der räumlichen Approximation mit bilinearen Lagrangepolynomen und linearen Ansatzfunktionen für die Zustandsgrößen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}_t$  resultiert daraus die Matrixform des DG P1-P1 Verfahrens, das nun auf der hybriden Lagrangefunktion basiert:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{1}{k_n} \mathbf{M} + \frac{2}{3} \mathbf{C} + \frac{5}{18} k_n \mathbf{K} & -\frac{k_n}{6} \mathbf{C} - \frac{k_n^2}{9} \mathbf{K} \\ -\frac{1}{k_n} \mathbf{M} + \frac{2}{3} \mathbf{C} + \frac{7}{18} k_n \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{k_n}{6} \mathbf{C} - \frac{k_n^2}{18} \mathbf{K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_-^n \\ \mathbf{d}_{t-}^n \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_n} \mathbf{M} + \frac{2}{3} \mathbf{C} - \frac{2}{9} k_n \mathbf{K} & \mathbf{M} \\ -\frac{1}{k_n} \mathbf{M} + \frac{1}{3} \mathbf{C} - \frac{1}{9} k_n \mathbf{K} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_-^{n-1} \\ \mathbf{d}_{t-}^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\text{Kurzform: } \mathbf{A} \mathbf{z}_1 = \mathbf{B} \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}. \quad (5.26)$$

Für die im Nachfolgenden vorgeschlagene schrittweise Lösung von Gl.(5.26) ist es von Vorteil, gleiche Hauptdiagonalelemente in der Hypermatrix  $\mathbf{A}$  zu erzeugen. Dies gelingt mittels der Matrizen  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  und Substitution des Zustandsvektors  $\mathbf{z}_1$ ,

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \frac{2}{k_n} \mathbf{1} & \frac{3}{k_n} \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \text{mit Gl. (5.26) und } \mathbf{z}_1 = \mathbf{T}_2 \mathbf{y}_1 \quad (5.27)$$

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{A} \mathbf{T}_2 \mathbf{y}_1 = \mathbf{T}_1 \mathbf{B} \mathbf{z}_0 + \mathbf{T}_1 \mathbf{r}, \quad \rightarrow \mathbf{A}^* \mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^* \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}^* \quad (5.28)$$

$$\text{mit } \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{M}}{k_n} + \mathbf{C} + \frac{5}{18} k_n \mathbf{K} & 2\frac{\mathbf{M}}{k_n} + \frac{7}{6} \mathbf{C} + \frac{2}{9} k_n \mathbf{K} \\ \frac{\mathbf{C}}{3} + \frac{2}{9} k_n \mathbf{K} & \mathbf{A}_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\text{und } \mathbf{A}_{11}^* = \frac{\mathbf{M}}{k_n} + \mathbf{C} + \frac{5}{18} k_n \mathbf{K}.$$

Im Abschnitt 6 wird auf die speziellen Eigenschaften des entwickelten Zeitintegrationsverfahrens eingegangen. Weiterhin wird zusätzlich zu den vorher beschriebenen kontinuierlichen 1-Feld und diskontinuierlichen 2-Feld Formulierungen für den anschließenden Vergleich die diskontinuierliche 1-Feld Formulierung (DG P2) angegeben. Es wird vorausgesetzt, daß die räumliche Diskretisierung vorab durchgeführt wurde,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{F}.$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung wird dann mit der Testfunktion  $\mathbf{g}^k$  gewichtet, außerdem werden der Geschwindigkeits- und Verschiebungssprung energetisch konsistent

gewichtet,

$$\begin{aligned} & \int_{k_n} \dot{\mathbf{g}}^k (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{K}\mathbf{d}^k - \mathbf{F}) dt + \dot{\mathbf{g}}_+^{n-1} \cdot \mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}_+^{n-1} + \mathbf{g}_+^{n-1} \cdot \mathbf{K}\mathbf{d}_+^{n-1} \\ &= \int_{k_n} \dot{\mathbf{g}}^k \mathbf{F} dt + \dot{\mathbf{g}}_+^{n-1} \cdot \mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}_-^{n-1} + \mathbf{g}_+^{n-1} \cdot \mathbf{K}\mathbf{d}_-^{n-1}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die quadratischen Test- und Ansatzfunktionen im Intervall  $(t_{n-1}, t_n)$  sind hierfür

$$\mathbf{d}^k = \mathbf{d}_+^{n-1} + (t - t_{n-1})\dot{\mathbf{d}}_+^{n-1} + 1/2(t - t_{n-1})^2\ddot{\mathbf{d}}^n, \quad (5.31)$$

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{g}_+^{n-1} + (t - t_{n-1})\dot{\mathbf{g}}_+^{n-1} + 1/2(t - t_{n-1})^2\ddot{\mathbf{g}}^n. \quad (5.32)$$

Die zugehörige Matrixform ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ) nach analytischer Vorabintegration ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ k_n^2 \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{k_n^2}{2} \mathbf{K} & \mathbf{M} + \frac{k_n^2}{6} \mathbf{K} \\ \frac{k_n^2}{2} \mathbf{K} & \frac{k_n^2}{3} \mathbf{K} & \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \frac{k_n^2}{4} \mathbf{K}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_+^{n-1} \\ k_n \dot{\mathbf{d}}_+^{n-1} \\ k_n^2 \ddot{\mathbf{d}}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}\mathbf{d}_-^{n-1} \\ k_n \mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}_-^{n-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

Aus der 1. Blockzeile ist zu entnehmen, daß kein Verschiebungssprung zugelassen ist,

$$\mathbf{d}_+^{n-1} = \mathbf{d}_-^{n-1}.$$

Grundsätzlich ist bei beiden Diskontinuierlichen Galerkinverfahren (DG P1-P1 Gl. (5.24)/ DG P2 Gl. (5.30)) ein Gleichungssystem der Größe  $2\mathcal{N}_{eq}$  zu lösen. Die numerischen Eigenschaften dieser beiden Zeitintegratoren sind jedoch verschieden.

## 6 Numerische Eigenschaften der verwendeten Zeitintegratoren

Zur Untersuchung der Konvergenzeigenschaften und der numerischen Stabilität von Finite Element Methoden werden i.a. funktionalanalytische Hilfsmittel bemüht. Zur Analyse der numerischen Eigenschaften bei semidiskreten Formulierungen, siehe Gl. (3.32), werden hingegen Finite-Differenzen-Techniken benutzt,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \forall t \in (0, T], \quad (6.1)$$

Anfangsbedingungen:  $\mathbf{d}(t=0) = \mathbf{d}_0$ ,  $\dot{\mathbf{d}}(t=0) = \dot{\mathbf{d}}_0$ .

Zur Untersuchung der numerischen Eigenschaften genügt es, ein Einfreiheitsgradsystem zu benutzen,

$$m\ddot{d} + \mu\dot{d} + cd = 0, \quad \text{mit: } d(t=0) = d_0 \text{ und } \dot{d}(t=0) = \dot{d}_0. \quad (6.2)$$

Dabei wird angenommen, daß für Gleichung (6.1) immer eine Modalmatrix  $\mathbf{X}$  existiert, mit der dieses Gleichungssystem der Größe  $\mathcal{N}_{eq}$  in  $\mathcal{N}_{eq}$  Gleichungen transformiert werden kann.  $m$  ist die modale Masse,  $\mu$  ist die modale Dämpfung und  $c$  ist die modale Steifigkeit. Damit werden allerdings folgende Aussagen auf die Diskretisierung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschränkt. Auch generalisierte Kräfte  $\mathbf{F}$  und viskose Rayleighdämpfung werden zunächst nicht berücksichtigt. Folgende Parameter werden im folgenden untersucht, mit denen die numerische Stabilität und Genauigkeit beschrieben werden können:

1. Spektralradius,
2. lokaler Verfahrensfehler,
3. Numerische Dissipation und Dispersion .

Zur Bestimmung der numerischen **Stabilität** wird der **Spektralradius** der Übertragungsmatrix  $\ddot{\mathbf{U}}$  ausgewertet. Hierzu wird das entsprechende Zeitintegrationsverfahren auf Gl. (6.1) bzw. Gl. (6.2) angewendet. Die Übertragungsmatrix  $\ddot{\mathbf{U}}$  überträgt die Zustandsgrößen  $\mathbf{z}^{n-1}$  auf die Zustandsgrößen  $\mathbf{z}^n$  zum Zeitpunkt  $t = t_n$ .  $\ddot{\mathbf{U}}$  muß bei einem stabilen Verfahren kontrahierend auf den Zustandsvektor  $\mathbf{z}^{n-1} = (d^{n-1}, \dot{d}^{n-1})^T$  wirken,

$$\begin{pmatrix} d^n \\ \dot{d}^n \end{pmatrix} = \ddot{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} d^{n-1} \\ \dot{d}^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{bzw. } \mathbf{z}^n = \ddot{\mathbf{U}}\mathbf{z}^{n-1}. \quad (6.3)$$

$$U_1 = 1/2 \text{ spur}(\ddot{\mathbf{U}}), \quad U_2 = \det \ddot{\mathbf{U}}$$

Die Eigenwerte von  $\ddot{\mathbf{U}}$  sind  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , wobei i.a.  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = a + ib$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , gilt. Gl. (6.3) kann auch in impliziter Differenzenform dargestellt werden,

$$d^{n+1} - 2U_1 d^n + U_2 d^{n-1} = 0. \quad (6.4)$$

Entwickelt man die exakte Lösung  $d$  bei  $t = t_n$  in eine Taylorreihe und setzt diese Entwicklung in Gl.(6.4) ein, so ergibt sich der Verfahrensfehler des betrachteten Zeitintegrationsschemas,

$$\tau = k_n^{-2} [d(t_n + k_n) - 2U_1 d(t_n) + U_2 d(t_n - k_n)] . \quad (6.5)$$

$\tau$  beschreibt somit die Abweichung der exakten Lösung  $d(t_n + k_n)$ ,  $d(t_n)$  und  $d(t_n - k_n)$  von der Differenzengleichung (6.4). Die Differenzengleichung (6.4) selbst kann mittels des Ansatzes  $d_n = B\lambda^n$  gelöst werden,

$$d^n = \rho_h (B_1 \cos(\omega_h t_n) + B_2 \sin(\omega_h t_n)) \text{ mit } \rho_h = \exp^{-\zeta_h \omega_h t_n} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\omega_h = k_n^{-1} \arctan(b/a), \text{ und } \zeta_h = -\frac{\ln \rho_h}{k_n \omega_h}.$$

Die Koeffizienten  $B_i$  dienen dabei der Erfüllung der Anfangsbedingungen. Für die Fehlerordnung von Phasen- und Amplitudenfehler wird noch die exakte Lösung von Gl. (6.2) benötigt,

$$d = \rho (b_1 \sin(\omega_d t) + b_2 \cos(\omega_d t)), \text{ mit } \rho = \exp^{-\frac{\mu}{2m}} \text{ und } \omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\mu^2}{4mc}\right)}. \quad (6.6)$$

Zunächst sollen die numerischen Eigenschaften des Newmarkverfahrens für die 4 Parameterkombinationen  $\beta = 0/\gamma = 1/2$ ,  $2\beta = \gamma = 1/2$ ,  $3\beta = \gamma = 1/2$ ,  $6\beta = \gamma = 1/2$  diskutiert werden, siehe hierzu auch Wood [99]. Damit ein Zeitintegrationsschema  $A$ -stabil ist, muß nach Dahlquist [27] für den Spektralradius  $\rho \leq 1$  gelten. Aus Tab. 6.1 erkennt man, daß

$\beta$	0	1/4	1/6	1/12
$\gamma$	1/2	1/2	1/2	1/2
$\rho$	$1 - 2k_n^2 \omega_0^2 + 1/2 k_n^4 \omega_0^4$	1	$\frac{36 - 60k_n^2 \omega_0^2 + 7k_n^4 \omega_0^4}{36 + 12k_n^2 \omega_0^2 + k_n^4 \omega_0^4}$	$\frac{144 - 696k_n^2 \omega_0^2 + 121k_n^4 \omega_0^4}{144 + 24k_n^2 \omega_0^2 + k_n^4 \omega_0^4}$
$\rho_h \leq 1$ $\mu = 0.0$	$k_n \omega_0 \leq 2$	0	$k_n \omega_0 \leq \sqrt{12}$	$k_n \omega_0 \leq \sqrt{6}$

**Tabelle 6.1:** Spektralradius  $\rho$  des Newmark-Verfahrens bei Variation von  $\beta$  und  $\gamma$ , Wahl der Zeitschrittweite in Abhängigkeit von  $\beta$  und  $\gamma$  für  $\rho_h \leq 1$

die bekannte Parameterkombination  $2\beta = \gamma = 1/2$   $A$ -stabil ist, d.h. der Spektralradius  $\rho$  ist unabhängig von der Zeitschrittweite  $k_n$ . Alle anderen Kombinationen sind nur bedingt stabil, die Zeitschrittweite  $k_n$  ist in Abhängigkeit von  $\omega_0$  zu beschränken, siehe Tab. 6.1 – 4. Zeile.

Damit die numerische Lösung auch eine Schwingung abbilden kann, muß, wie oben erwähnt,  $\lambda \in \mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}$  Menge der komplexen Zahlen) gelten. Daraus folgen für  $\mu = 0.0$  dieselben Bedingungen an die Zeitschrittweite  $k_n$  wie für die numerische Stabilität ( $\rho \leq 1.0$ ), siehe Tab. 6.2. Im ungedämpften Fall liefern beide Bedingungen, d.h. die numerische Stabilität und die Abbildung einer Schwingung, dasselbe Ergebnis. Im gedämpften Fall mit  $m\ddot{d} + \mu\dot{d} + cd = 0$  und  $\mu^2 < 4mc$  ist die Forderung nach Existenz eines komplexen Eigenwertes strikter als die Forderung an den Spektralradius. Der Dämpfungsgrad ist mit

$\beta$	0	1/4	1/6	1/12
$\gamma$	1/2	1/2	1/2	1/2
$\mu = 0.0$	$k_n \omega_0 \leq 2$	0	$k_n \omega_0 \leq \sqrt{12}$	$k_n \omega_0 \leq \sqrt{6}$
$\mu > 0$	$k_n \omega_0 < 2\sqrt{1 - \nu^2}$	$\nu^2 - 1 < 0$	$k_n \omega_0 < 2\sqrt{3(1 - \nu^2)}$	$k_n \omega_0 < \sqrt{6(1 - \nu^2)}$

**Tabelle 6.2:** Zusammenhang zwischen viskoser Dämpfung und (komplexen) Eigenwert  $\lambda$  für verschiedene Parameterkombinationen des Newmarkverfahrens

$\nu = \frac{\mu}{2m\omega_0}$  definiert. Für  $2\beta = \gamma = 1/2$  ist die Forderung  $\nu^2 - 1 < 0$  mit der Forderung nach unterkritischer Dämpfung identisch.

Der lokale Verfahrensfehler  $\tau$  wird durch die Wahl von  $\gamma$  bestimmt. Grundsätzlich gilt beim Newmarkverfahren die Genauigkeitsordnung  $\mathcal{O}(k)$ . Damit ist das Verfahren konsistent, d.h. es gilt

$$\lim_{k \rightarrow 0} \tau(k) = 0.$$

Die spezielle Wahl von  $\gamma = 1/2$  sichert grundsätzlich die Genauigkeitsordnung  $\mathcal{O}(k^2)$ , siehe Tab. 6.3. Für  $\beta = 1/12$  besitzt das Verfahren die größte Genauigkeit, die allerdings

$\gamma = 1/2, \beta$	0	1/4	1/6	1/12
$\tau$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^4)$

**Tabelle 6.3:** Genauigkeitsordnung des Newmarkverfahrens für verschiedene Parameterkombinationen mit  $\mu = 0.0$

mit dem Verlust der  $A$ -Stabilität einhergeht. Für  $\gamma = 1/2$  ist die Genauigkeitsordnung  $\mathcal{O}(k^2)$  unabhängig von  $\beta$ .

Ein Kriterium für die numerische Dispersion des Zeitintegrationsverfahrens ist der Phasenfehler der numerischen Lösung,

$$e_\varphi = k(\omega_h - \omega_0). \quad (6.7)$$

Der Amplitudenfehler wiederum beschreibt die numerische Dissipation des Zeitintegrationsverfahrens,

$$e_\rho = \rho - \rho_h. \quad (6.8)$$

Die Ordnungen für Phasen- und Amplitudenfehler des Newmarkverfahrens ohne viskose Dämpfung ( $\mu = 0$ ) können Tab. 6.4 entnommen werden. Die Fehlerordnungen mit visko-

$\gamma = 1/2, \beta$	0	1/4	1/6	1/12
$e_\varphi$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^4)$
$e_\rho$	0	0	0	0

**Tabelle 6.4:** Phasen- und Amplitudenfehler des Newmarkverfahrens für verschiedene Parameterkombinationen mit  $\mu = 0.0$

ser Dämpfung ( $\mu \neq 0$ ) sind in Tab. 6.5 angegeben. Bei Unterschreitung der Grenzbedin-

$\gamma = 1/2, \beta$	0	1/4	1/6	1/12
$e_\varphi$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$
$e_\rho$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$	$\mathcal{O}(k^2)$

**Tabelle 6.5:** Phasen- und Amplitudenfehler des Newmarkverfahrens für verschiedene Parameterkombinationen mit  $\mu > 0.0$

gung für die  $A$ -Stabilität beim System ohne viskose Dämpfung ist der Amplitudenfehler null, dies ändert sich jedoch bei  $\mu > 0$ . Bei  $\beta = 1/12$  ist der Phasenfehler am kleinsten. Dies korrespondiert mit der Genauigkeitsordnung des Verfahrens  $\tau = \mathcal{O}(k^4)$ .

Für das *DG P1-P1* Verfahren wurden obige Untersuchungen bereits von Hulbert/Hughes [60] durchgeführt. Die zugehörige Übertragungsmatrix  $\ddot{\mathbf{U}}$  des Einfreiheitsgradsystems für  $k = k_n$  ist

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-}^{n+1} \\ \mathbf{d}_{t,-}^{n+1} \end{pmatrix} = \ddot{\mathbf{U}} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-}^n \\ \mathbf{d}_{t,-}^n \end{pmatrix},$$

mit  $\ddot{\mathbf{U}} = \mathbb{F} \begin{pmatrix} -7ck^2m + 18m^2 + 12mk\mu - k^3\mu c + 3k^2\mu^2 & km(18m + 3k\mu - ck^2) \\ -ck(18m + 3k\mu - ck^2) & m(18m - 6k\mu - 7ck^2) \end{pmatrix},$

$$\mathbb{F} = \frac{2}{36m^2 + 4ck^2m + 24mk\mu + c^2k^4 + 6k^2\mu^2 + 4k^3\mu c}.$$

Der Vorteil dieses Verfahrens ist die  $A$ -Stabilität und die hohe Genauigkeitsordnung mit  $\tau = \mathcal{O}(k^3)$ . Für den Spektralradius gilt

$$\rho^2 = \frac{4m(9m + ck^2)}{36m^2 + c^2k^4 + 4ck^2m}. \quad (6.9)$$

D.h., der Spektralradius ist immer kleiner als '1'. Dies impliziert aber numerische Dissipation. Da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = 0$$

gilt, ist dieses Verfahren  $L$ -stabil. Deswegen ist es für steife Differentialgleichungen geeignet, siehe Hairer/Wanner [47]. Der Phasen- und Amplitudenfehler besitzen die Ordnung  $e_\varphi = \mathcal{O}(k^3)$ ,  $e_\rho = \mathcal{O}(k^3)$ .

Die diskontinuierliche 1-Feld Formulierung *DG P2* hat zunächst ebenfalls die Genauigkeitsordnung  $\tau = \mathcal{O}(k^3)$ . Bei genauer Analyse der Übertragungsmatrix zeigt sich aber, daß für den Spektralradius mit  $\mu = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(k) = 1 \quad (6.10)$$

gilt. D.h., das Verfahren ist zwar  $A$ -stabil, es ist aber nicht für steife Differentialgleichungen geeignet. Ein weiterer Nachteil ist die Eigenschaft der Eigenwerte  $\lambda$  der Übertragungsmatrix  $\ddot{\mathbf{U}}$ . Um eine Schwingung abbilden zu können, muß  $\lambda$  komplex sein. Aber bei zu großer Wahl der Zeitschrittweite verzweigen die komplexen Eigenwerte in reelle Eigenwerte und

umgekehrt:

$$\begin{aligned}
0 \leq \Omega_h \leq 3.09 & : \lambda_{1,2} \in \mathcal{C}, \\
3.09 < \Omega_h \leq 4.33 & : \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}, \\
4.33 < \Omega_h \leq 10.75 & : \lambda_{1,2} \in \mathcal{C}, \\
10.75 < \Omega_h < \infty & : \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Durch den Übergang der Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  vom Bereich der komplexen Zahlen in den Bereich der reellen Zahlen können keine Schwingungen abgebildet werden. Daher scheidet das DG P2 Verfahren zur Zeitintegration für praktische Probleme aus.

## 6.1 Auswertung und Vergleich der 3 Zeitintegrationsverfahren

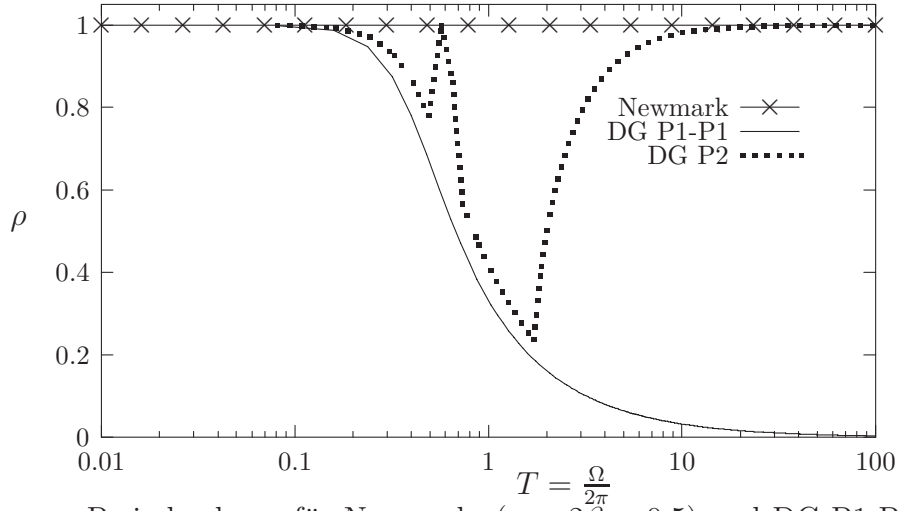
Für das Einfreiheitsgradsystem mit  $\mu = 0$  werden die obigen Ergebnisse zunächst grafisch dargestellt. Dazu werden die notwendigen Definitionen wiederholt bzw. neu eingeführt:

$$\begin{aligned}
\text{Spektralradius: } \rho &= |\lambda|, \quad \text{Phase: } \Omega_h = \omega_h k, \Omega_0 = \omega_0 k \\
\text{Eigenkreisfrequenz: } \omega_h^I &= \frac{\arctan \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)}}{k}, \quad \omega_h^{II} = \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{-\text{Re}(\lambda)}{\text{Im}(\lambda)}}{k}.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

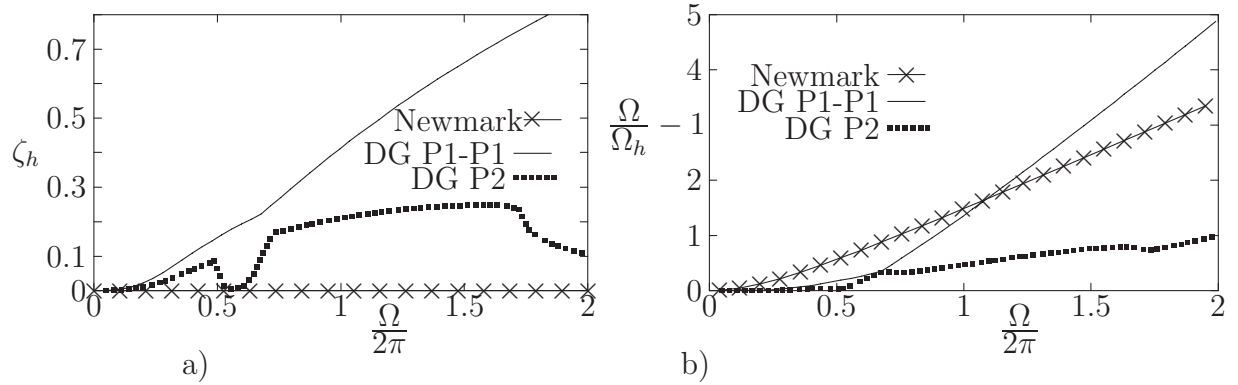
Die Definitionen für die algorithmische Dämpfung  $\zeta_h$  und normierten Phasenfehler  $e_\Omega$  sind:

$$\zeta_h = -\frac{\ln \rho_h}{k\omega_h}, \quad e_\Omega = \frac{\Omega}{\Omega_h} - 1. \tag{6.13}$$

Es ist zu beachten, daß Gl.(6.12/1) im 1. Quadranten der komplexen Zahlenebene gilt und Gl.(6.12/2) im 2. Quadranten ausgewertet wird. Für den 3. und 4. Quadranten der komplexen Zahlenebene wird in analoger Weise vorgegangen. In Abb. **6.1** erkennt man, daß nur das DG P1-P1 Verfahren  $L$ -stabil ist. Außerdem wird der Wechsel in der Charakteristik der Eigenwerte deutlich, siehe Gl. (6.11). Bei  $T = (0.492; 0.689; 1.71)$  ändert sich jeweils der Charakter der Eigenwerte von  $\ddot{U}$  des  $DG P2$  Verfahrens. Ab  $T > 0.689$  kann man außerdem feststellen, daß das  $DG P2$  Verfahren nicht mehr kontrahierend wirkt, siehe Abb. **6.1** DG P2 •••. Die numerische Dämpfung, siehe Abb. **6.2a**), ist beim DG P1-P1 Verfahren am größten, die durch die Größe des Zeitschrittes gesteuert wird. Im höherfrequenten Bereich besitzt das DG P2 Verfahren keine numerische Dämpfung, siehe Formel (6.11). Hingegen zeigt sich, daß das DG P2 Verfahren den kleinsten Phasenfehler, siehe Abb. **6.2b**), besitzt. Dies wird durch den dominierenden Koeffizienten des lokalen Zeitintegrationsfehlers bestimmt, siehe Abb. **6.2b**). Aus oben beschriebenen Eigenschaften erkennt man, daß es nicht den in allen Fällen optimalen Zeitintegrator gibt. Vielmehr muß die Problemstellung die Wahl des Zeitintegrators beeinflussen. Kriterien hierfür sind zum Beispiel Steifheit der Differentialgleichung und Erhaltungsgrößen.



**Bild 6.1:**  $\rho$  vs. Periodendauer für Newmark- ( $\gamma = 2\beta = 0.5$ ) und DG P1-P1/P2 Zeitintegrationsverfahren



**Bild 6.2:** a) Numerische Dämpfung  $\zeta_h$  b) Phasenfehler  $e_\Omega$  für Newmark und DG Zeitintegration,  $\mu = 0.0$

## 6.2 Lösung des Gleichungssystems beim DG P1-P1 Verfahren

Beim DG P1-P1 Verfahren muß zunächst ein Gleichungssystem der Größe  $2 \times \mathcal{N}_{eq}$  gelöst werden. Das entsprechende Verfahren von Hulbert/Hughes [60] hat folgende Struktur,

$$\mathbf{A}\mathbf{z}_1 = \mathbf{B}\mathbf{z}_0 + \mathbf{r}, \quad (6.14)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^* & \frac{2}{3}\mathbf{M} + \frac{1}{6}k_n\mathbf{C} \\ \frac{1}{2}k_n t\mathbf{C} + \frac{1}{3}\Delta t^2\mathbf{K} & \mathbf{M}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{t,+}^{n-1} \\ \mathbf{d}_{t,-}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1^* \\ \mathbf{F}_2^* \end{pmatrix} \quad (6.15)$$

$$\text{mit: } \mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \frac{1}{2}k_n\mathbf{C} + \frac{1}{6}k_n^2\mathbf{K}, \quad \mathbf{M}^* \in \mathbb{R}^{neq \times neq}$$

$$\mathbf{F}_1^* = \frac{5}{3}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{M}\mathbf{d}_{t-}^{n-1}) - \frac{1}{3}\mathbf{F}_2 - \frac{2}{3}k_n\mathbf{K}\mathbf{d}_{t-}^{n-1},$$

$$\mathbf{F}_2^* = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{M}\mathbf{d}_{t-}^{n-1} - k_n\mathbf{K}\mathbf{d}_{t-}^{n-1}.$$

Bei diesem System wird die Gauss-Seidel Block Iteration angewendet, das von Hulbert/Hughes [60] als Prädiktor-Multikorrekter Verfahren bezeichnet wird. Dabei wird



die Gleichheit der Hauptdiagonalelemente ausgenutzt. Der Algorithmus zur Lösung von Gl. (6.15) lautet damit:

Iteration  $i$  :

$$\mathbf{M}^* \mathbf{d}_{t+}^{n-1(i)} = \mathbf{F}_1^* - \left( \frac{2}{3} \mathbf{M} + \frac{1}{6} k \mathbf{C} \right) \mathbf{d}_{t-}^{n(i-1)} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{M}^* \mathbf{d}_{t-}^{n(i)} = \mathbf{F}_2^* - \left( \frac{1}{2} k_n \mathbf{C} + \frac{1}{3} k_n^2 \mathbf{K} \right) \mathbf{d}_{t+}^{n-1(i)} \quad (6.17)$$

Kontrolle der Konvergenz:

$$\text{diff} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{t+}^{n-1(i)} \\ \mathbf{d}_{t-}^{n(i)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{t+}^{n-1(i-1)} \\ \mathbf{d}_{t-}^{n(i-1)} \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{t+}^{n-1(i)} \\ \mathbf{d}_{t-}^{n(i)} \end{pmatrix} \right\|} \quad (6.18)$$

wenn  $\text{diff} \leq \text{tol}$  dann finish,  $\mathcal{N}_{iter} = i$ ;      sonst nächste Iteration  $i \rightarrow i + 1$  .

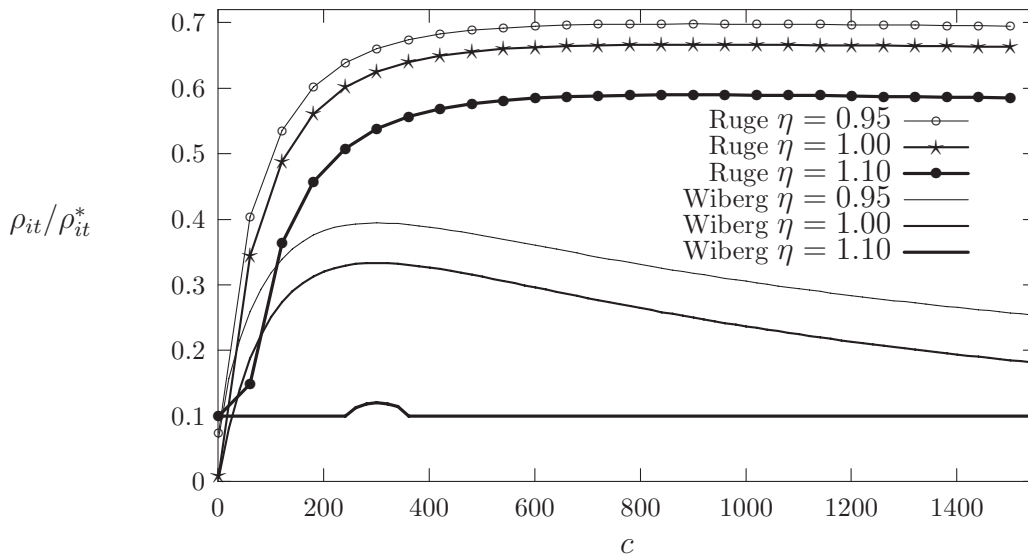
Zur Lösung jeder einzelnen Blockzeile (1/2) wird damit nur eine einmalige  $LDL^T$  Zerlegung benötigt, und im Zyklus verbleibt die Vorwärts-Rückwärtssubstitution als einziger Schritt. Daran schließt sich die Nachlaufrechnung an, siehe Gl. (5.20). Dasselbe Verfahren kann auch auf den Zeitintegrator angewendet werden, der auf dem Hamiltonschen Prinzip basiert, Gl. (5.28). Zur Diskussion wird hier nur die Kurzform verwendet,

$$\mathbf{A}^* \mathbf{y}_1 = \mathbf{B}^* \mathbf{z}_0 + \mathbf{r}^* .$$

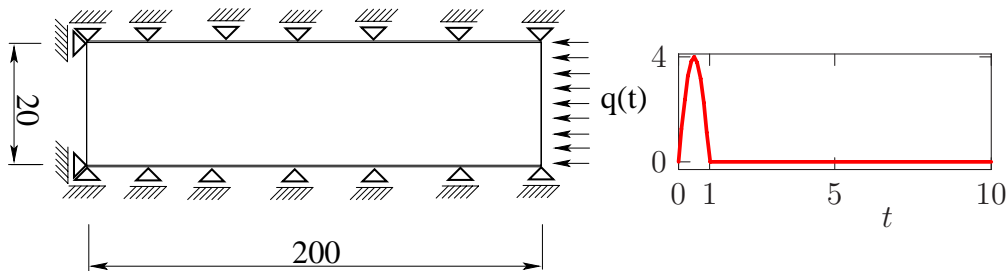
Beide Verfahren, Ruge Gl.(5.26) und Wiberg Gl.(5.19) besitzen dieselbe Übertragungsmatrix. Somit sind die numerischen Ergebnisse identisch. Es gilt nun zu klären, welcher Ansatz ein effizienteres Vorgehen ermöglicht. Grundsätzlich wird die Anzahl der Iterationen  $i$  durch die Konditionszahl von  $\mathbf{A}$  (Gl. (6.14)) bzw.  $\mathbf{A}^*$  (Gl. (5.28)) bestimmt. Diese Matrizen können in eine untere und obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{L}^*$ ,  $\mathbf{U}^*$  und die Diagonalmatrix  $\mathbf{S}$  bzw.  $\mathbf{S}^*$  zerlegt werden,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\mathbf{L} + \mathbf{S} - \mathbf{U} , \\ \mathbf{A}^* &= -\mathbf{L}^* + \mathbf{S}^* - \mathbf{U}^* . \end{aligned}$$

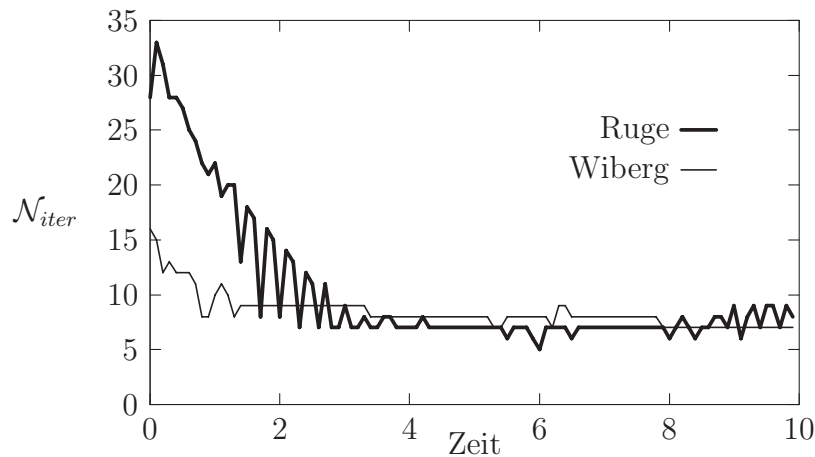
Ein Vergleich der Diagonaleinträge von  $\mathbf{A}$  in Gl. (6.15) und  $\mathbf{A}^*$  in Gl. (5.29) zeigt, daß hier die Diagonaleinträge von  $\mathbf{A}$  die Nebendiagonale von  $\mathbf{A}$  dominieren. Diese Dominanz ist in Matrix  $\mathbf{A}^*$  nach Gl. (5.29) nicht vorhanden. Hierzu wird der jeweilige Spektralradius  $\rho_{it}$  bzw.  $\rho_{it}^*$  der Iterationsmatrix  $\mathbf{T}_{it} = (\mathbf{S} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{T}_{it}^* = (\mathbf{S}^* - \mathbf{L}^*)^{-1} \mathbf{U}^*$  am Beispiel des Einmassenschwingers verglichen. Zur Konvergenzbeschleunigung besteht zudem die Möglichkeit der Einführung eines Relaxationsparameters  $\eta$ . Dann gilt für  $\mathbf{T}_{it} = (\mathbf{S} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} [(1 - \eta) \mathbf{S} + \eta \mathbf{U}]$  und für  $\mathbf{T}_{it}^* = (\mathbf{S}^* - \mathbf{L}^*)^{-1} \mathbf{U}^* [(1 - \eta) \mathbf{S}^* + \eta \mathbf{U}^*]$ . Für den Einmassenschwinger wird  $\eta = 0.95/1.0/1.1$  gewählt. Es zeigt sich zunächst, daß die ursprüngliche DG P1-P1 Formulierung (6.15) einen deutlich kleineren Spektralradius insbesondere bei größerer Steifigkeit aufweist, siehe Abb. 6.3. Dies wird mit einer gängigen Wahl von  $\eta$  nur gemildert. Am Wellenausbreitungsproblem, siehe Abb. 6.4, wurden beide Formulierungen nochmals getestet. Es bestätigen sich die Ergebnisse des Einmassenschwingers; die Galerkinformulierung generiert eine Matrix  $\mathbf{A}$  mit kleinerem



**Bild 6.3:** Spektralradius  $\rho_{it}/\rho_{it}^*$  vs. Federsteifigkeit  $c$  für DG P1-P1 Verfahren nach Wiberg/Li [65] und nach Ruge [85] kombiniert mit Relaxation Einmassenschwinger:  $m = 0.5 = const.$ ,  $k = 0.1 = const.$



**Bild 6.4:** Wellenausbreitungsproblem; Rechteckscheibe unter Stoßbelastung, System, Belastung, Randbedingungen; Materialparameter:  $E = 1 \cdot 10^4$ ,  $\rho = 10$ , Dicke  $t = 1$ ,  $\nu = 0.0$ .



**Bild 6.5:** Wellenausbreitungsproblem – Anzahl der Iteration  $\mathcal{N}_{iter}$  zum Lösen des Blockgleichungssystems (6.15) bzw. (5.29).

Spektralradius  $\rho_{it}$ , das sich bis zu  $t = 2$  in den deutlich kleineren Iterationszahlen auswirkt, siehe Abb. 6.5. Damit muß der Formulierung (6.15) klar der Vorzug gegeben werden.

## 7 Adaption des Raumgitters

Die gleichförmige Vernetzung des Raum- und Zeitgitters erfordert einen hohen Bedarf an Rechenzeit und Speicher. Dies bedingt den Wunsch nach adaptiven Techniken zur Steuerung des Raum- und Zeitgitters, die auf a-posteriori Fehlerschätzern basieren. Der exakte Fehler  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$  soll hierfür in einer Norm  $||| \cdot |||$  abgeschätzt werden,  $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{e}^h$ .

Der hier bestimmte Fehler ist ein Maß für die Abweichung der exakten Lösung  $\mathbf{u}$  von der numerischen Lösung  $\mathbf{u}^h$ . Ausgeschlossen werden der Modellfehler, siehe Ohnimus/Stein [88], Oden et al. [77], Baumann [12], der geometrische Approximationsfehler bei gekrümmten Rändern und Gebieten und der Fehler infolge der Zahlendarstellung als Gleitpunktzahlen. Der Modellfehler ist nur dann wesentlich, wenn bei den Annahmen für die verwendete Differentialgleichung starke Vereinfachungen getroffen wurden. Bei der Modell( $m$ )-Adaptivität, oft auch als Dimensions( $d$ )-Adaptivität bezeichnet, wird versucht, die Dimension der Differentialgleichung gebietsweise zu verändern. Dies ist außerordentlich schwierig und aufwendig, da hierfür z.B. die Kontinuumslösung als Vergleichslösung erzeugt werden müßte. Die numerischen Beispiele in Ohnimus/Stein [88] zeigen, daß dieser Weg nur in wenigen Fällen eine praktikable Lösung darstellt. Da heute für viele Problemstellungen z.B. die Randschichtbereiche und die Punkte mit Singularitäten in der Lösung der zugeordneten Differentialgleichung bekannt sind, kann im Prinzip vor der Berechnung die Dimension des Kontinuums bereichsweise festgelegt werden. Das gewählte mechanische Modell bleibt dann im gesamten Berechnungsprozeß unverändert. Der Rundungsfehler infolge numerischer Operationen wird üblicherweise vernachlässigt, da angenommen wird, daß mit überschaubaren Konditionszahlen gearbeitet wird. D.h., die Probleme sind grundsätzlich ausreichend gut konditioniert. Zur Erhöhung der Genauigkeit der Finite Element Lösung stehen 3 Methoden zur Verfügung:

- a) Verringerung der Netzweite  $h$  bzw.  $k \rightarrow h$ -Adaptivität oder geometrische Adaptivität;  
Zeitschrittweitensteuerung
- b) Erhöhung der Polynomordnung  $p$  bzw.  $q$  für die räumliche bzw. zeitliche Diskretisierung  $\rightarrow p$ -Adaptivität
- c) Optimierung der Elementform des Raumgitters  $\rightarrow r$ -Adaptivität (Netzglättung)

Bei c) wird versucht, durch Verschiebung der Knotenkoordinaten die Elementform dahingehend zu optimieren, daß alle Innenwinkel gegen  $90^\circ$  gehen und alle Elementseiten in etwa gleichlang sind. Dies basiert auf der a-priori Fehlerabschätzung für elliptische Differentialgleichungen von Goering/Roos/Tobiska [40],

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_a \leq C^* h \|\mathbf{u}\|_2, \text{ mit: } C^* = \frac{C}{\sin(\theta)^2} \text{ und } \mathbf{u} \in H^2.$$

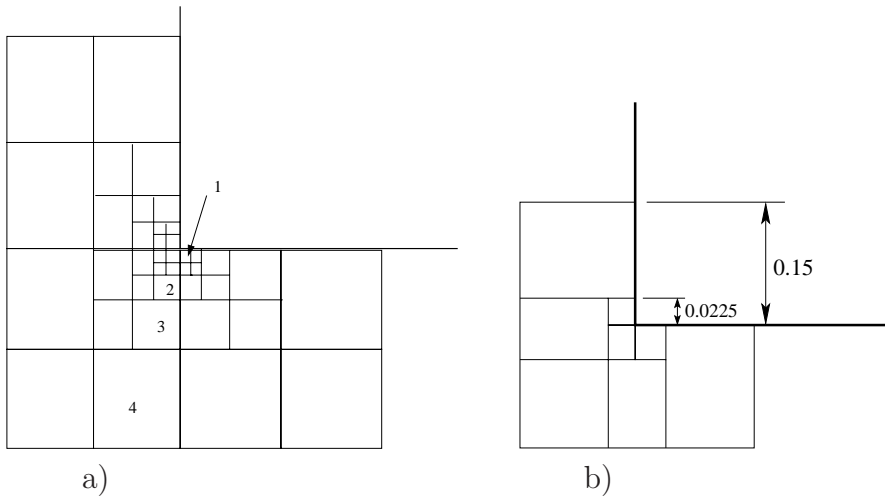
$\theta$  ist dabei der kleinste Innenwinkel der Triangulierung. Gleichzeitig wird dabei sichtbar, daß mit der  $r$ -Adaptivität der Approximationsfehler  $\mathbf{e}$  nur sehr beschränkt verkleinert werden kann. Wesentlich wirkungsvoller sind die  $h$ -Version, die  $p$ -Version sowie die  $hp$ -Version der Finiten Elemente. Die optimale Konvergenz bei der  $h$ -Version für den

Polynomgrad  $p = 1$  ist  $\|\mathbf{e}\|_a \leq Ch^\alpha$ , siehe Ungl. (3.36). Hierbei ist  $\alpha$  der kleinste Singulärexponent der Zerlegung in reguläre und singuläre Lösungsanteile, siehe Gl. (3.35). Bei Singularitäten  $\alpha < 1$  oder starken Gradienten der Lösung  $\mathbf{u}$  wird die Konvergenzrate bei gleichmäßiger Verfeinerung des Netzes vermindert. Erst durch eine räumlich adaptive Netzverfeinerung, d.h. lokale Netzverfeinerung, wird die optimale Konvergenzrate wieder erreicht.

Die  $p$ -Version besitzt zwar die doppelte Konvergenzrate  $2\alpha$ , jedoch erfordert dies eine geometrische ( $h$ ) Verfeinerung um den Ort  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{sing}$ , an dem  $\mathbf{u}$  singulär ist bzw. große Gradienten aufweist, Szabo/Babuska [93]. Dabei sollte die Breite  $b$  der Randschichten  $i$  ein Verhältnis  $b_i/b_{i+1} \approx 0.15$  besitzen. Für die exponentielle Konvergenz der  $hp$ -Version in der Energienorm für  $\Omega \in \mathbb{R}^2$

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_E \leq C \exp(-b\sqrt[3]{\mathcal{N}_{eq}}), C, b > 0$$

ist ebenfalls die geometrische Netzverfeinerung unabdingbar. Zusätzlich muß der Polynomgrad  $p$  linear in Richtung der Singularität  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{sing}$  abklingen; man spricht vom *linear degree vector*  $\mathbf{p}$ . D.h., die Anzahl der Randschichten  $n$  ist proportional zum Polynomgrad  $|\mathbf{p}|$ , siehe Schwab [86]. Für die Situation in Abb. 7.1a) ist die Anzahl der Randschichten  $n = 3$ . Der Vektor der Polynomgrad ist  $\mathbf{p} = (1, 2, 3, 4)$ . Damit ist  $|\mathbf{p}| = \sqrt{30}$ .



**Bild 7.1:** a) geometrisch verfeinertes Netz für  $hp$ -Version mit linear veränderlichem Polynomgrad  $p$ ,  $n = 3$ ,  $b_i/b_{i+1} = 0.5$ ; b)  $h$ -Netz für  $p/hp$ -Version mit geometrischer Regression  $b_i/b_{i+1} = 0.15$  am Beispiel einer einspringenden Ecke, Schwab [86]

Damit wird deutlich, daß sinnvollerweise auch bei der  $p$ - und selbstverständlich bei der  $hp$ -Version der Finiten Elemente eine entsprechende  $h$ -Verfeinerung durchgeführt werden muß. Im Abb. 7.1 sind aus Gründen der Übersichtlichkeit irreguläre Netze dargestellt, d.h. die Kompatibilität zwischen den Elementen ist dabei nicht gewährleistet. Zur Sicherstellung regulärer Netze müssen Übergangselemente eingefügt werden. Ein Nachteil der  $p$ - bzw.  $hp$ -Methode ist der hohe Aufwand bei der Erstellung und Adaption des  $p$  Netzes. Zudem ist der numerische Aufwand zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix und deren Zerlegung oft größer als bei der  $h$ -Version, da die Bandbreite der Steifigkeitsmatrix meist deutlich höher ist. Die Entscheidung, wann lokale  $h$  oder lokale  $p$ -Verfeinerung des

Raumgitters erfolgen soll, ist bei der  $hp$ -Version noch nicht abschließend geklärt. Bekannte  $hp$ -Verfeinerungsstrategien basieren auf der Abschätzung der lokalen Regularität der Lösung, Ainsworth/Senior [2]. Ein alternativer Ansatz von Melenk/Wohlmuth [71] benutzt die Extrapolation des geschätzten Fehlers. Hierzu werden die geschätzten Fehler der vorherigen Verfeinerungsschritte benutzt.

Obwohl die Konvergenzrate für die  $h$ -Version wesentlich kleiner ist, eignet sie sich zum einen wegen der vergleichbar einfachen Implementierung für Probleme der Strukturmechanik. Zum anderen ist der Transfer der Zustandsgrößen wesentlich einfacher, sofern die Polynomordnung für die  $h$ -Version  $p = 1$  ist, d.h. es wird mit (bi)linearen Ansätzen gearbeitet. Desweiteren liegen bereits alle Algorithmen zur Netzverfeinerung und Netzvergrößerung, basierend auf der Arbeit von Riccius [80], vor.

Da in der Regel der Fehler  $\mathbf{e}$  nicht konstant über  $\Omega$  verteilt ist, ist eine gleichmäßige Netzverfeinerung zur Minimierung des Gesamtfehlers bzgl. einer Norm  $|||\mathbf{e}|||$  nicht optimal. Vielmehr haben Li/Bettes [64] nachgewiesen, daß eine Gleichverteilung der Elementfehler den Gesamtfehler minimiert.

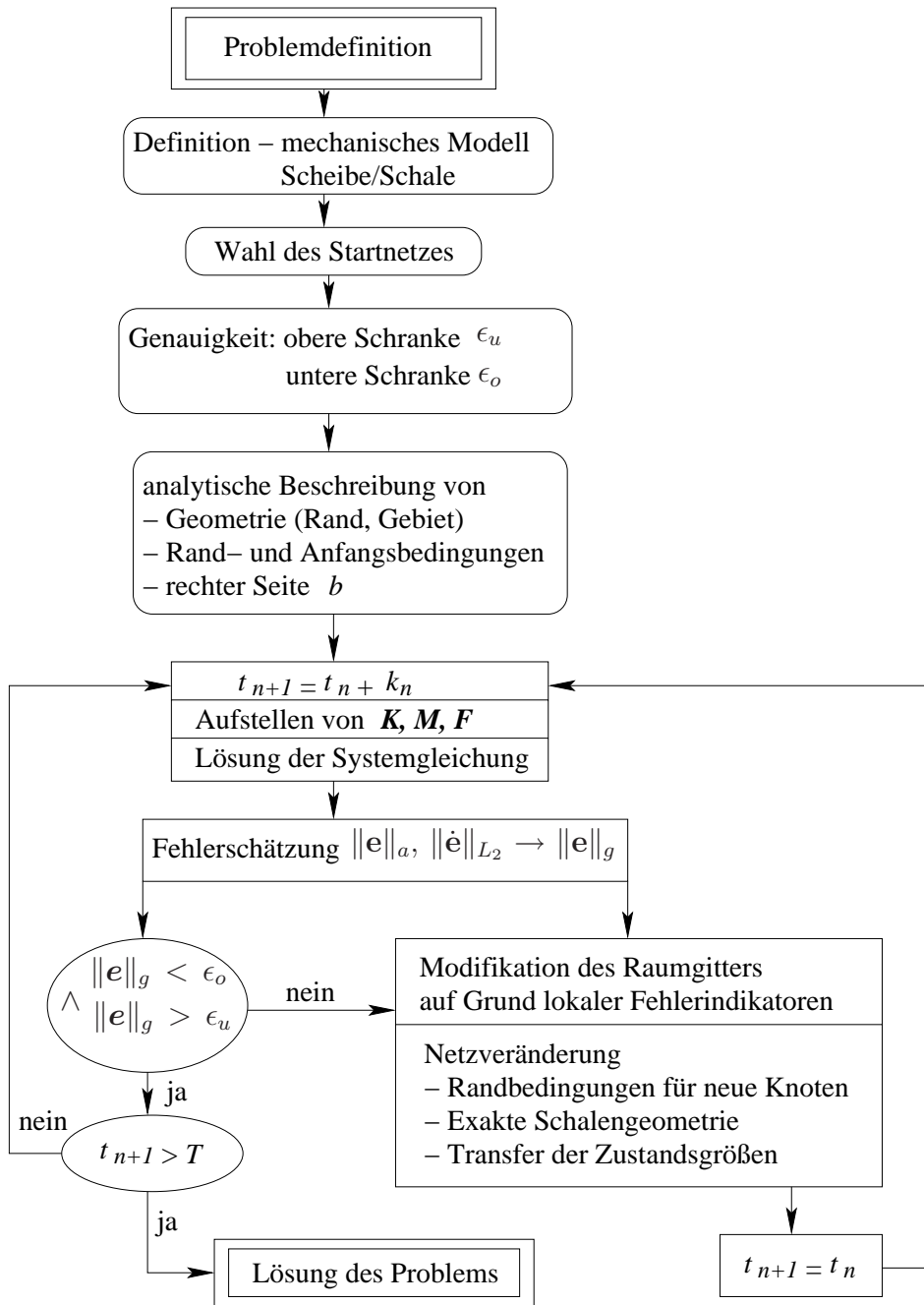
## 7.1 Netzveränderung des Raumgitters

Die Steuerung der Netzweite  $h$  des Raumgitters beruht auf dem geschätzten Diskretisierungsfehler in einer Norm  $|||\mathbf{e}|||$ . Grundsätzlich existieren zwei Methoden zur Netzmodifikation, Neuvernetzung und Hierarchische Vernetzung. Bei der Neuvernetzung wird, basierend auf dem geschätzten Fehler  $|||\mathbf{e}_h|||$ , eine Netzdichtefunktion bestimmt, die die lokale Netzweite auf dem neuen Netz bestimmt. Eine bekannter Vertreter der Neuvernetzungsstrategie ist die „Advancing Front“ Methode von Peraire et al. [78]. Problematisch bei dieser Methode ist die schwer beherrschbare Qualität der Vernetzung. Vor allem können Elemente mit ungünstigen Elementformen entstehen, die wiederum die Qualität der Lösung nachteilig beeinflussen. Bei Problemen der Strukturmechanik wird auch der Transfer der Zustandsvariablen schwieriger und der numerische Aufwand für den konsistenten Transfer ist dabei beträchtlich, Maute [70]. Deshalb wird im folgenden die hierarchische Netzmodifikation verfolgt. Diese ist besonders für Aufgabenstellungen geeignet, bei denen z.B. Zustandsgrößen und Geschichtsvariablen transferiert werden müssen. Eine detaillierte Beschreibung der hierarchischen Netzverfeinerung bzw. Netzvergrößerung ist in Riccius [80] zu finden, wo auch unterschiedliche Transferstrategien diskutiert werden.

Das grundsätzliche Vorgehen bei einer  $h$ -adaptiven Finite Element Berechnung in der Strukturmechanik ist in Abb. 7.2 dargestellt. Ovale Boxen kennzeichnen die Eingaben, die vom Benutzer definiert werden müssen. Die Aufgaben in Rechtecken werden vom adaptiven Finite Element Programm übernommen. Im Anschluß an die Lösung des Gleichungssystems schließt sich die Fehlerschätzung an. Dies ist der zentrale Punkt zur Steuerung der Netzveränderung. Ziel der adaptiven Netzverfeinerung ist das Auffinden eines Netzes, bei dem die Größe  $\mathcal{N}_{eq}$  des Finite Element Ansatzraumes  $\mathcal{V}^h$  minimal wird. Dabei soll die Nebenbedingung

$$\epsilon_u < |||\mathbf{e}||| \leq \epsilon_o \quad (7.1)$$

eingehalten werden, wobei  $|||\cdot|||$  eine Norm ist. Da  $|||\mathbf{e}|||$  in der Regel nicht bekannt



**Bild 7.2:** Flußdiagramm der  $h$ -adaptiven Finite Element Methode

ist, muß  $||e||$  geschätzt werden. Dieses in den folgenden Abschnitten genauer diskutierte Vorgehen führt in der Regel zu sehr effizienten Näherungslösungen bei kontrollierter Genauigkeit. Allerdings gibt es Grenzen bei Problemen mit lokal stark unterschiedlichen Koeffizienten, bei denen eine adaptive Netzverfeinerung letztlich zu einem Endnetz mit gleichförmig großen Elementen führt. Babuska/Osborn [4] haben an einem 1D Beispiel gezeigt, daß bei stark unterschiedlichen Koeffizienten

$$\mathbb{C} = [r, (\mathbf{x}_u = \mathbf{x}_0 < \mathbf{x} < \mathbf{x}_1)], [-r, (\mathbf{x}_1 < \mathbf{x} < \mathbf{x}_2)], \dots, [r, (\mathbf{x}_n < \mathbf{x} < \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_o)] \quad (r \in \mathbb{R})$$

der adaptive Algorithmus die Konvergenz des Fehlers nicht verbessert. Beispiele bei denen solche un stetigen Koeffizienten auftreten, sind heterogene Materialien, z.B. Faser-

verstärkte Kunststoffe, und Materialensoren, die aus dem Homogenisierungsprozeß auf Mikroebene resultieren, d.h. lokal auf Mikroebene stark variieren. Dann sollten z.B. die Richtungen der Materialien separat betrachtet werden. Derartige Fragestellungen werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet.

## 7.2 Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers

Für die a-posteriori Fehlerschätzung wird der Approximationsfehler  $\mathbf{e}$  in einen räumlichen  $\mathbf{e}_s$  und in einen zeitlichen Fehleranteil  $\mathbf{e}_t$  aufgeteilt, Eriksson et al. [49],

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{h,k} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h + \mathbf{u}^h - \mathbf{u}^{h,k} = \mathbf{e}_s + \mathbf{e}_t. \quad (7.2)$$

Da hier zunächst auf den räumlichen Diskretisierungsfehler eingegangen wird, wird vorerst der untere Index  $s$  weggelassen,  $\mathbf{e} = \mathbf{e}_s$ . Für den Adaptionsprozeß wird nun lediglich das Raugitter adaptiert. Die Zeitschrittweite wird unter folgenden Annahmen bei Adaption des Raugitters nicht verändert:

- a) es existieren keine unterschiedlichen Zeitskalen bei der Cauchyschen Bewegungsgleichung, Gl. (3.21,3.25); d.h. es gibt keinen schnell abklingenden Lösungsanteil (Grenzschicht) und keinen 'asymptotischen' Lösungsanteil, siehe Beispiele der chemischen Reaktionskinetik Stoer/Burlisch [90];
- b) da die Lösung  $\mathbf{u}$  für  $c_K = c_M = 0$  von Gl. (3.25) keinen kontrahierenden Charakter hat, ist eine Adaption des Zeitschrittes nicht sinnvoll; bei der instationären Wärmeleitungsgleichung ist die Zeitschrittadaption sinnvoll, da deren Lösung kontrahierenden Charakter besitzt (parabolische Differentialgleichung).

Unabhängig davon werden in Abschnitt 9 gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen betrachtet, um die lokale Zeitschrittweite zu adaptieren.

In der Literatur wurden erst in den letzten Jahren a-posteriori Fehlerschätzer für hyperbolische Differentialgleichungen 2. Ordnung diskutiert, Johnson [61], Eriksson et al. [49], French [38], Bangerth et al. [10], Maute [70], Adjerid [1]. Während in den ersten fünf Arbeiten Fehlerschätzer mittels dualer Hilfsprobleme beschrieben werden, wird hier auch ein **residueller Fehlerschätzer** von Franz [36] in der schwächeren  $H^{-1}$ -Norm für den Verschiebungsfehler  $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t_m)$  bei  $t = t_m$  getestet,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{x}, t_m) &= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_m) - \mathbf{u}^h(x, t_m), \\ \|\mathbf{e}(t_m)\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq D_{disp} \left( \sum_{n=1}^{numel} \eta(n) \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \eta(n) \text{ als lokalem Fehlerindikator des Elementes } E_n, \\ \eta(n) &= \|\mathbf{e}(0)\|_{L_2(n)}^2 + \|\dot{\mathbf{e}}(0)h_n^2\|_{L_2(n)}^2 + \|\mathbf{r}^h h_n^2\|_{L_2(0,t_m;L_2(n))}^2 + \\ &\quad \sum_{e_i(n)} \|p[\boldsymbol{\sigma}^h \cdot \mathbf{n}] h_n^{3/2}\|_{L_2(0,t_m;L_2(e_i))}^2. \end{aligned} \quad (7.4)$$



Die Konstante  $D_{disp}$  setzt sich aus den Interpolationskonstanten  $\mathcal{C}_i$ , der Konstante aus dem Spursatz  $\mathcal{C}_{tr}$  und der Konstante aus der Poincare-Friedrichs Ungleichung  $\mathcal{C}_{PF}$  zusammen,

$$D_{disp} = \left( \mathcal{C}_{PF} + \mathcal{C}_i^2 + t_m \mathcal{C}_i^2 + \frac{3}{4} t_m \mathcal{C}_{tr}^2 \mathcal{C}_i \right)^{1/2},$$

wobei die kalligrafischen Buchstaben bedeuten:

$$\mathcal{C} = \max_{n=1 \dots Numel} \mathcal{C}(n),$$

$n$  ... Nummer des Finiten Elementes  $E_n$  der aktuellen räumlichen Diskretisierung von  $\Omega$ ,

$\mathbf{r}^h = \text{div} \boldsymbol{\sigma}^h - \rho \ddot{\mathbf{u}}^h - \mathbf{f}$  ... Residuum der Differentialgleichung (3.21),

$p[\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}] = \frac{1}{2} [\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}] \forall e_i \in (e_i \cup \Gamma = \emptyset)$  ... Sprung des Spannungsvektors

entlang Elementkante  $e_i(n)$  von Element  $E_n$ ,

$p[\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}] = 1 [\boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}] \forall e_i \in (e_i \cup \Gamma \neq \emptyset)$  ... Sprung des Spannungsvektors

entlang Gebietskante  $\Gamma = e_i(n)$  von Element  $E_n$ ,

$\mathbf{e}(0)$ ... Fehler der Anfangsverschiebung ,

$\dot{\mathbf{e}}(0)$ ... Fehler der Anfangsgeschwindigkeit .

Zusätzlich zum Fehler  $\|\mathbf{e}(t_m)\|_{H^{-1}(\Omega)}$  gibt Franz auch eine Schranke für den Geschwindigkeitsfehler  $\|\dot{\mathbf{e}}(t_m)\|_{H^{-1}(\Omega)}$  an. In Testrechnungen zeigte sich aber, daß bei Netzverfeinerungen der Fehlerindikator  $\eta(n)$  nicht kleiner wurde. Eine Alternative ohne Verlust der Schärfe der Abschätzung für den räumlichen Geschwindigkeitsfehler  $\dot{\mathbf{e}}$  ist in Süli [91] zu finden. Dabei wird aber der Geschwindigkeitsfehler in der schwächeren  $H^{-2}$ -Norm bestimmt. Somit wird nur der Verschiebungsfehler in der  $H^{-1}$ -Norm geschätzt, Gl. (7.3).

Um die Effizienz und Genauigkeit des geschätzten Fehlers zu garantieren, ist es wichtig, die Konstanten  $\mathcal{C}_i$ ,  $\mathcal{C}_{tr}$  und  $\mathcal{C}_{PF}$  quantitativ zu bestimmen. Dabei kann nur für die Konstanten  $\mathcal{C}_i(m, k)$  des Interpolationsfehlers eine genaue Abschätzung angegeben werden,

$$|\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}|_{H^m(E_n)} \leq \mathcal{C}_i(m, k) \frac{h^{k+1}}{o^m} |\mathbf{u}|_{H^2(E_n)} = M(m, k) |\mathbf{u}|_{H^2(n)}, \quad (7.5)$$

mit:  $h$  ... Netzweite von Element  $n$  und

$o$  ... maximaler Durchmesser  $o$  aller Kreise, die in Element  $E_n$  liegen

$\Pi_h \mathbf{u}$  ist die (bi)lineare Interpolierende der exakten Lösung  $\mathbf{u}$ , d.h. der Interpolationsfehler verschwindet an den 4 Ecken des Elementes  $E_n$ . Infolge der linearen Ansatzfunktionen  $\mathbf{u}_h$  gilt  $|\mathbf{e}|_{2(E_n)} = |\mathbf{u}|_{2(E_n)}$ . Die Bestimmung von  $M(m, k)$  basiert auf der Idee von Handscomb [48], bei der die Ungleichungen (7.5) in zugeordnete Eigenwertprobleme umgewandelt

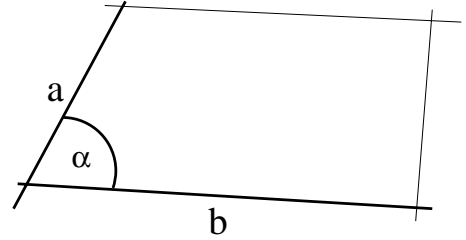


werden;  $\square$  symbolisiert die Fläche eines Elementes,

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \sum_{j=1}^4 N_j \mathbf{d}e_j, \\ (\mathcal{N}_0)_{ij} &= \int_{\square} N_i N_j \, dx dy, \\ (\mathcal{N}_1)_{ij} &= \int_{\square} N_{i,x} N_{j,x} + N_{i,y} N_{j,y} \, dx dy, \\ (\mathcal{N}_2)_{ij} &= \int_{\square} N_{i,xx} N_{j,xx} + 2N_{i,xy} N_{j,xy} + N_{i,yy} N_{j,yy} \, dx dy, \\ \|\mathbf{e}\|_{L_2}^2 &= \mathbf{d}e^T \mathcal{N}_0 \mathbf{d}e, \quad |e|_{H^1}^2 = de^T \mathcal{N}_1 de, \quad |e|_{H^2}^2 = de^T \mathcal{N}_2 de, \\ \mathcal{N}_2 \mathbf{d}e &= \lambda_0^2 \mathcal{N}_0 \mathbf{d}e, \\ \mathcal{N}_2 \mathbf{d}e &= \lambda_1^2 \mathcal{N}_1 \mathbf{d}e. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Die Konstanten  $M(0, 1)$  und  $M(1, 1)$  werden aus dem kleinsten Eigenwert  $\lambda_0 = 1/M(0, 1)$  und  $\lambda_1 = 1/M(1, 1)$  der allgemeinen Eigenwertprobleme (7.7) und (7.8) bestimmt. Bei der numerischen Auswertung der Eigenwertaufgaben (7.7,7.8) werden bikubische Polynome benutzt, um den Interpolationsfehler durch lineare Polynome zu bestimmen. Für spezielle Elementformen können die Konstanten  $C_i(0, 1)$  und  $C_i(1, 1)$  numerisch ermittelt werden, Tabelle 7.1. Für die beiden anderen Konstanten  $C_{tr}$  und  $C_{pf}$  konnten keine oberen

a	b	$\alpha$	$\lambda_0$	$\lambda_1$	$C_i(0, 1)$	$C_i(1, 1)$
2	2	90	0.5	0.606	0.0625	0.1515
4	2	90	1.52	1.25	0.076	0.125
3.6	1.6	63.5	0.99	1.2	0.0495	0.078
4	1	90	1.46	1.25	0.086	0.0735
8	0.5	90	5.84	2.53	0.091	0.0196
2.5	2	90	0.68	0.76	0.066	0.148
1	1	90	0.125	0.303	0.0625	0.1515
4	4	90	2	1.21	0.0625	0.1515



**Tabelle 7.1:** Interpolationskonstanten für spezielle Viereckselemente mit den Seitenlängen  $a$  und  $b$  und dem eingeschlossenen Winkel  $\alpha$

Schranken gefunden werden. Durch Einsetzen verschiedener Funktionen in den Spursatz

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Gamma)} \leq C_{tr} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}$$

und in die Poincare-Friedrichssche Ungleichung

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_{pf} |\mathbf{u}|_{H^1(\Omega)}$$

wurden die Konstanten zu  $C_{pf} = 5.0$  und  $C_{tr} = 3.6$  gesetzt. D.h., allgemein kann angenommen werden, daß die ermittelten Konstanten zu klein sind. Am Beispiel der Wellenausbreitung in einem Rechteckgebiet wird der Verschiebungsfehler in der  $H^{-1}$ -Norm

geschätzt, siehe Abschnitt 7.3. Eine quantitative Beurteilung der Schätzung kann nicht vorgenommen werden, da die exakte Lösung in der  $H^{-1}$ -Norm nicht bestimmbar ist. Zudem fehlen a-priori Fehlerabschätzungen zur qualitativen Beurteilung der Schätzung in der  $H^{-1}$ -Norm. Deshalb kann dieser Schätzer (7.3) nur als Fehlerindikator verwendet werden.

Eine Alternative zum residuellen Fehlerschätzer wurde von Riccius [80] angegeben. Dabei wird der **Fehler in der Gesamtenergienorm**  $\|\mathbf{e}\|_{g,\Omega} = (\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega}^2 + \|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2,\Omega}^2)^{1/2}$  bestimmt. Der Fehler in der Verzerrungsenergienorm  $\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega}$  wird mit dem Superconvergent Patch Recovery (SPR) Konzept von Zienkiewicz/Zhu [100, 101] geschätzt. Diese Methode hat sich für die räumliche Adaption als sehr effizient und genau erwiesen. Dies zeigten Vergleiche zu residuellen Fehlerschätzern und Untersuchungen in Babuska et al. [5] und Carstensen/Bartels [16]. Desweiteren weisen Carstensen/Funken [17] am Beispiel vom inkompressiblen Strömungsproblem bzw. inkompressibler Elastizität die exakte Konvergenzrate des geschätzten Fehlers in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega}$  nach. Dabei zeigt sich besonders die Effizienz und Exaktheit des geschätzten Fehlers mittels SPR Konzept bezüglich des Effektivitätsindex. Zwecks Vollständigkeit ist der SPR Algorithmus hier wiedergegeben. Bei linear elastischen Materialverhalten gilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Der Verzerrungsenergienorm des Fehlers  $\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega}$  ist dann definiert als

$$\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega}^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) d\Omega = \sum_n \int_{E_n} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h) dx.$$

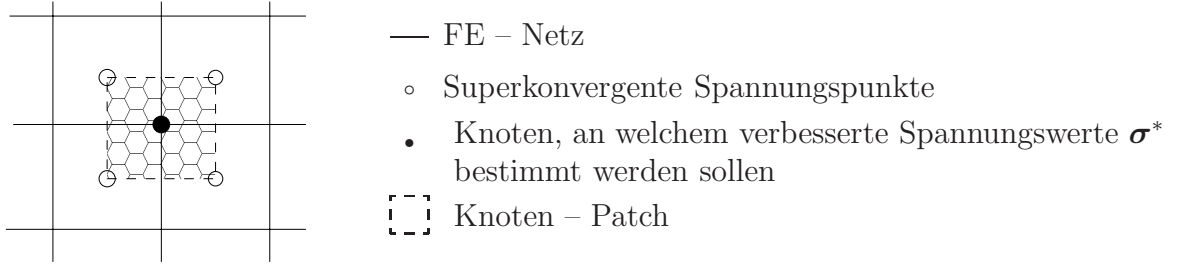
$\int_{E_n} dx$  ist die Fläche des  $n$ -ten Elementes  $E_n$ . Nach Zienkiewicz/Zhu [100] wird  $\boldsymbol{\sigma}$  durch  $\boldsymbol{\sigma}^*$  mit der Superconvergent-Patch-Recovery Methode approximiert. Der Begriff 'Superconvergent' ist der Tatsache geschuldet, daß die Verschiebungsableitungen, hier  $\boldsymbol{\sigma}_h$ , in der Elementmitte  $\mathbf{x}_k$  - (bi)lineare Ansatzfunktionen vorausgesetzt - die größte Genauigkeit besitzen, siehe Barlow [11]. Mittels eines lokalen, diskreten Quadratmittelpblems wird für jede Spannungskomponente  $\sigma_{h,ij}$  auf einem Elementpatch, siehe Abb. 7.3, ein global stetiger Spannungsverlauf bestimmt, bei dem sukzessive genauere Knotenspannungen  $\boldsymbol{\sigma}^*$  bestimmt werden. Für den global  $C_0$  stetigen Spannungsverlauf  $\boldsymbol{\sigma}^*$  wird im Elementpatch ein linearer Verlauf angenommen, hier für die Spannungsordinate  $\sigma_{ij}^*$  bei  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$ ;

$$\sum_{k=1}^4 (\sigma_{h,ij}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{P}\mathbf{a})^2 \rightarrow \text{stationär}, \quad \text{mit } \mathbf{P} = (1 \ x \ y), \quad (7.9)$$

$$\rightarrow \sigma_{ij}^*(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}. \quad (7.10)$$

Carstensen/Bartels [16] haben nachgewiesen, daß der SPR-Schätzer dem exakten räumlichen Fehler in der Verzerrungsenergienorm mit einer Fehlerkonstanten  $c_1 \approx 1$  sehr nahe kommt,

$$\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega} \leq c_1 \left( \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) : \mathbb{C}^{-1} : (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_h) dx \right)^{1/2}. \quad (7.11)$$



**Bild 7.3:** Definition eines Patches

Für technische Details zur Implementierung, z.B. Knoten mit weniger als 4 Nachbarelementen, wird auf Riccius [80] verwiesen. Zusätzlich zu dem Fehlerschätzer von  $Z^2$  für elliptische Randwertaufgaben benötigt man einen Schätzwert für den räumlichen Fehler der kinetischen Energie  $\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2}$ . Hierzu wird im Folgenden die von Riccius [80] entwickelte Methode der 'verschlechterten' Geschwindigkeiten benutzt. Diese beruht auf folgender Überlegung: Douglas et al. [29] haben die Superkonvergenz des Fehlers bei Knotenverschiebungen  $\mathbf{u}(x_i)$ ,  $i = 1 \dots 4$  nachgewiesen,

$$\max_i |(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(x_i)| \leq Ch^{r+2} \|\mathbf{u}\|_{r+3, \Omega}, \text{ falls: } \mathbf{u} \in H^{r+3}(\Omega). \quad (7.12)$$

D.h., der maximale Fehler  $\max_i |(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)(\mathbf{x}_i)|$  aller Knotenverschiebungen ist mindestens eine Ordnung besser als der  $L_\infty$ -Fehler

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{L_\infty} \leq ch|\mathbf{u}|_2. \quad (7.13)$$

Dies gilt allerdings nur für genügend reguläre elliptische Probleme ( $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)^n$ ). Ohne Beweis wird nun diese Aussage auf den Geschwindigkeitsfehler der FE-Approximation übertragen. Die Berechnungsvorschrift für diesen Fehlerindikator lautet dann:

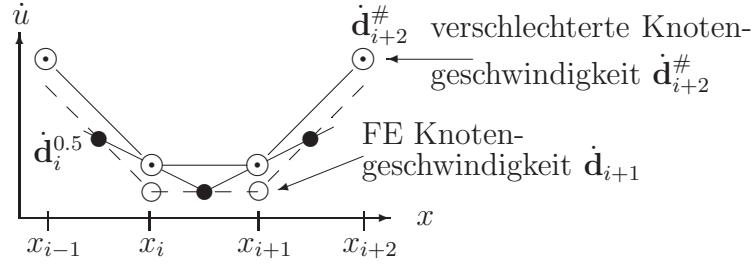
- 1) Bestimme die Geschwindigkeiten im Elementmittelpunkt ( $\bullet$ )  $\dot{\mathbf{d}}^{0.5}$  aller Elemente,
- 2) Berechne 'virtuelle' Knotengeschwindigkeiten ( $\odot$ )  $\dot{\mathbf{d}}_k^\#$  durch Mittelung der Elementmittelpunktschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{d}}^{0.5}$  aller  $n_k$  Elemente  $E_j$ , die an den Knoten  $k$  angeschlossen sind,

$$\dot{\mathbf{d}}_k^\# = \frac{1}{n_k} \left( \sum_{j=1}^{n_k} \dot{\mathbf{d}}_j^{0.5} \right),$$

- 3) Berechne die Geschwindigkeiten  $\dot{\mathbf{u}}^\# = \mathbf{N} \dot{\mathbf{d}}^\#$ ,  $\mathbf{N}$  ... Matrix der Ansatzfunktionen
- 4) Schätze den Geschwindigkeitsfehler in der mit der Dichte  $\rho$  gewichteten  $L_2$ -Norm:

$$\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2, \Omega}^2 \approx \|\dot{\mathbf{u}}^\# - \dot{\mathbf{u}}_h\|_{k, \Omega}^2 = c_2^2 \int_{\Omega} \rho (\dot{\mathbf{u}}^\# - \dot{\mathbf{u}}_h) \cdot (\dot{\mathbf{u}}^\# - \dot{\mathbf{u}}_h) dx. \quad (7.14)$$

In Abb. 7.4 sind diese Schritte skizziert. Die Konstante  $c_2 = 0.365$  wurde durch einen



**Bild 7.4:** Prinzipdarstellung zur Bestimmung 'verschlechterter' Geschwindigkeiten beim  $L_2$ -Fehler

Abgleich von (bi)-linearer Approximation und verschiedenen vorgegebenen analytischen Funktionen von Riccius [80] bestimmt. Die 'verschlechterte' Geschwindigkeit  $\dot{\mathbf{u}}^\#$  kann auch als  $\dot{\mathbf{u}}_h$  auf einem gröberen Netz interpretiert werden. Interessant dabei ist, daß dieses Vorgehen zur Schätzung des  $L_2$ -Verschiebungsfehlers in der Elastostatik und bei Eigenwertproblemen, siehe Kapitel 11, benutzt werden kann und sich als sehr erfolgreich erweist.

Zur Verifizierung des geschätzten Fehlers in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_{a,\Omega}$  und in der kinetischen Energie  $\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2,\Omega}$  werden drei numerische Beispiele benutzt. Hierfür soll die numerische Konvergenzrate mit der Konvergenzrate der a-priori Fehlerabschätzung von French/Peterson [38], Gl. (3.33), verglichen werden. Für die Konvergenzstudie werden jeweils die Raumgitterweite  $h$  und die Zeitschrittweite  $k$  halbiert. Die räumliche Diskretisierung von Scheibenproblemen wird mit dem  $Q_1$  Standardverschiebungselement durchgeführt, bei Plattenproblemen wird das *ANS4* Element von Hauptmann [51] benutzt. Letzteres basiert ebenfalls auf einer bilinearen Interpolation der Verschiebungen, zur Vermeidung der Schubversteifung werden die Querschubverzerrungen als unabhängige Feldvariable interpoliert. Zur Zeitintegration wird zunächst das Newmarkverfahren  $\gamma = 2\beta = 0.5$  benutzt, da keine physikalische Dämpfung angenommen wird. Aus dem geschätzten Fehler  $\|\mathbf{e}\|_a$  bzw.  $\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2}$  der Verfeinerungsstufe  $j$  wird die numerische Konvergenzrate  $\kappa_a = \frac{\|\mathbf{e}\|_{a,j-1}}{\|\mathbf{e}\|_{a,j}}$  bzw.  $\kappa_2 = \frac{\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2,j-1}}{\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2,j}}$  bestimmt.

## Numerische Beispiele

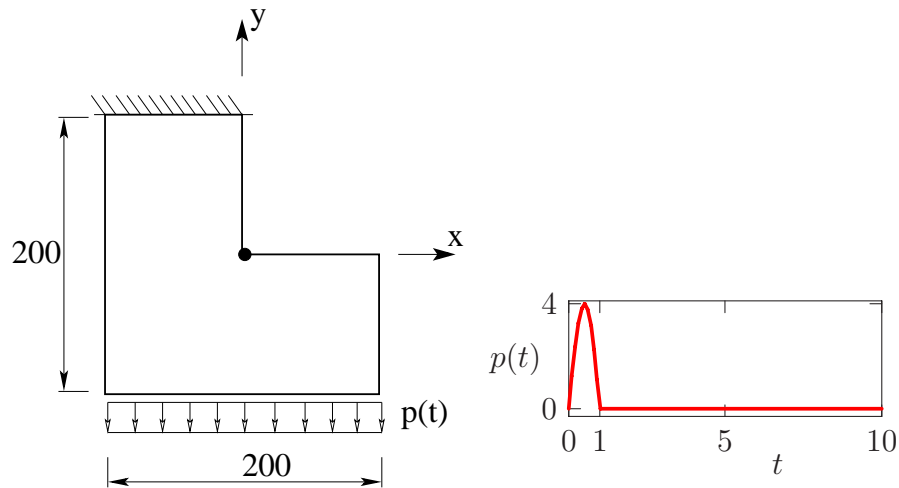
**1D Wellenausbreitung:** Dieses Standardbeispiel, siehe Abb. 6.4, besitzt keine Singularitäten. Man kann also bei uniformer Verfeinerung die maximale Konvergenzrate erwarten. Der räumliche Diskretisierungsfehler wird zum Zeitpunkt  $t = 5$  und  $t = 10$  ausgewertet. Hierbei wird bei  $t \approx 6.3$  die Sinushalbwellen am rechten Rand reflektiert. Die Auswertung der numerischen Konvergenzraten zeigt, daß der geschätzte Fehler in der Verzerrungsenergienorm bei uniformer Raumgitterverfeinerung nahezu exakt konvergiert, d.h. mit der Konvergenzrate  $\kappa_a = 2$ , siehe Tab. 7.2 Spalte 4 und Spalte 8. Der geschätzte Fehler in der kinetischen Energienorm konvergiert bei den hier gewählten Raumgittern zu langsam. Markant hierbei ist die starke Abhängigkeit  $\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2}$  von der Netzweite  $h$ . Das läßt vermuten, daß erst bei genügend kleiner Gitterweite  $h$  die Konvergenzrate 2 erreicht wird.

**L-Gebiet:** Da bei diesem Beispiel Singularitäten auftreten, ist eine kleinere Konvergenzrate zu erwarten. Aus der 2D Elastizitätstheorie ist der kleinste Singulärkoeffizient der asymptotischen Entwicklung  $\alpha_1 = 0.544$  bekannt, siehe Gl. (3.35). Es werden homogene Anfangsbedingungen angenommen,  $\mathbf{u}_0 = 0.0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0 = 0.0$ . Das System wird wie vorher durch

$\mathcal{N}_{eq}$	$k$	$\ e\ _a(5)$	$\kappa_a(5)$	$\ \dot{e}\ _{L_2}(5)$	$\kappa_2(5)$	$\ e\ _a(10)$	$\kappa_a(10)$	$\ \dot{e}\ _{L_2}(10)$	$\kappa_2(10)$
81	0.2	$1.61 \cdot 10^{-1}$		$4.83 \cdot 10^{-2}$		$1.59 \cdot 10^{-1}$		$5.46 \cdot 10^{-2}$	
323	0.1	$8.84 \cdot 10^{-2}$	1.82	$1.97 \cdot 10^{-2}$	2.45	$8.84 \cdot 10^{-2}$	1.8	$1.97 \cdot 10^{-2}$	2.8
1287	0.05	$4.61 \cdot 10^{-2}$	1.91	$7.09 \cdot 10^{-3}$	2.77	$4.60 \cdot 10^{-2}$	1.92	$7.43 \cdot 10^{-3}$	2.65
5135	0.025	$2.35 \cdot 10^{-2}$	1.96	$2.48 \cdot 10^{-3}$	2.85	$2.34 \cdot 10^{-2}$	1.96	$2.57 \cdot 10^{-3}$	2.89
20511	0.0125	$1.17 \cdot 10^{-2}$	2.0	$7.97 \cdot 10^{-4}$	3.11	$1.19 \cdot 10^{-2}$	1.94	$7.69 \cdot 10^{-4}$	3.5

**Tabelle 7.2:** Räumlicher Diskretisierungsfehler für 1D Wellenausbreitung bei simultaner uniformer Raum- und Zeitgitterverfeinerung bei  $t = 5$  und  $t = 10$ ; Konvergenzrate des geschätzten Fehlers in der Verzerrungsenergie und in der kinetischen Energie

einen Impuls in Form einer Sinushalbwelle angeregt, siehe Abb. 7.5. Da das  $L$ -Gebiet



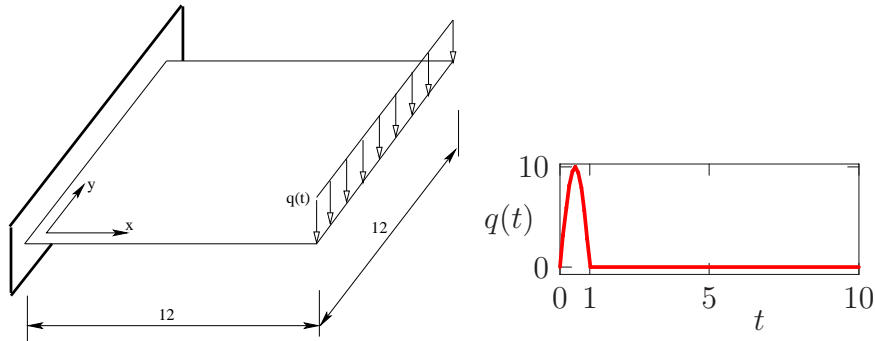
**Bild 7.5:**  $L$ -Gebiet, Lastfunktion für unteren Rand,  $E = 1.0 \cdot 10^4$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 10.0$ ;  $p(t) = p_0 \sin(\pi t) \forall t \in [0, 1]$ ,  $p_0 = 4.0$

ein 2D Kontinuum ist, gibt es keine ausgezeichnete Wellenausbreitungsrichtung. Als Konsequenz der natürlichen Dispersion erfolgt eine fortschreitende Verbreiterung der Sinushalbwelle und ein Auseinanderdriften selbiger. Der räumliche Diskretisierungsfehler in der Energienorm und in der kinetischen Energienorm wird für  $t = 10$  geschätzt. Prinzipiell erkennt man auch bei diesem Beispiel die Abhängigkeit der numerischen Konvergenzrate  $\kappa_2$  von der Raumgitterweite  $h$ . Infolge der Singularität wird eine bestimmte Raumgitterweite  $h$  benötigt (siehe: Cea's Lemma, Großmann/Roos [44]), damit eine konstante Konvergenzrate erreicht wird,  $\kappa_a = 1.68$ . Die optimale Konvergenzrate ist bekanntermaßen  $1/0.545 = 1.83$ .

Die **Kragplatte** in Abb. 7.6 wird am rechten Rand ( $x = 12$ ,  $y \in [0, 12]$ ) durch eine Linienlast senkrecht zur Platte mit zeitlichem Verlauf einer Sinushalbwelle angeregt. Die Anfangsbedingungen sind homogen  $\mathbf{u}_0 = 0.0$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0 = 0.0$ . Die räumliche Dispersion ist auch beim Reissner-Mindlin Plattenmodell inhärent, siehe Abschnitt 10. Bei  $t = 5$  wird der räumliche Diskretisierungsfehler geschätzt.

$\mathcal{N}_{eq}$	$k$	$\ \mathbf{e}\ _a(10)$	$\kappa_a$	$\ \dot{\mathbf{e}}\ _{L_2}(10)$	$\kappa_2$
120	0.2	$8.560 \cdot 10^{-1}$		$6.521 \cdot 10^{-1}$	
432	0.1	$7.431 \cdot 10^{-1}$	1.15	$2.830 \cdot 10^{-1}$	2.3
1632	0.05	$4.434 \cdot 10^{-1}$	1.68	$1.367 \cdot 10^{-1}$	2.07
6336	0.025	$2.629 \cdot 10^{-1}$	1.68	$4.519 \cdot 10^{-2}$	3.02
24960	0.0125	$1.543 \cdot 10^{-1}$	1.67	$1.610 \cdot 10^{-2}$	2.81

**Tabelle 7.3:** Räumlicher Diskretisierungsfehler für L-Gebiet bei simultaner Raum- und Zeitgitterverfeinerung; Konvergenzrate des geschätzten Fehlers in der Verzerrungsenergie und in der kinetischen Energie



**Bild 7.6:** Rechteckplatte, Lastfunktion für den rechten Rand,  $E = 3.0 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2.5 \cdot 10^3$ ,  $q = q_0 \sin(\pi t) \forall t \in [0, 1]$ ,  $q_0 = 10.0$

Grundsätzlich zeigen die Untersuchungen an diesen drei Beispielen, daß die numerische Konvergenzrate  $\kappa_a$  für den Fehler in der Verzerrungsenergie für größere räumliche Diskretisierungen von der optimalen Konvergenzrate abweicht. Bei genügender Netzfeinheit kann die analytische Konvergenzrate  $\kappa_a$  mit und ohne Singularität beobachtet werden. Diese Beobachtungen stimmen mit der a-priori Konvergenzaussage (3.33) überein.

Die Konvergenzrate  $\kappa_2$  des Fehlerindicators (7.14) der kinetischen Energienorm korrespondiert mit der a-priori Fehlerschätzung (3.33), vorausgesetzt, die Lösung besitzt keine Singularität. Zudem zeigt der Fehlerindicator (7.14) eine große Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung.

### 7.3 Vergleich Residueller Fehlerschätzer und Fehlerschätzer für die Gesamtenergienorm

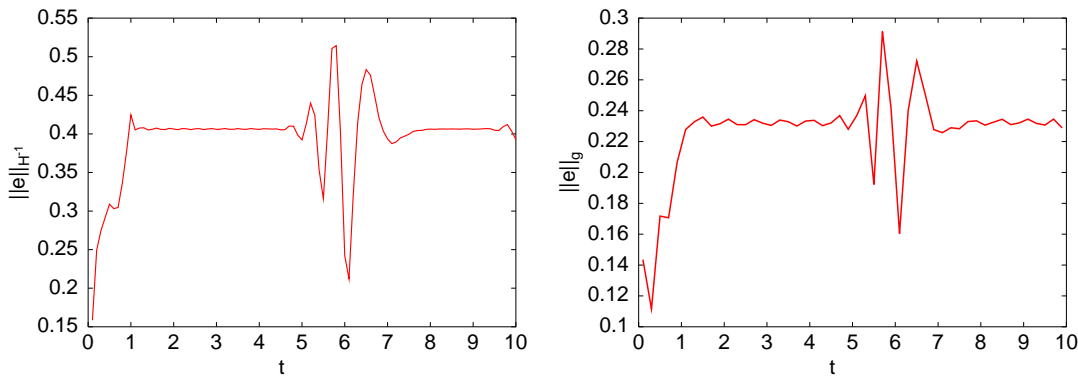
Zunächst wurde die Konvergenz für den geschätzten Fehler in der Verzerrungsenergienorm und in der kinetischen Energienorm bei den oben genannten drei Problemen verglichen. Da für den geschätzten Fehler in der  $H^{-1}$ -Norm keine a-priori Fehlerabschätzungen bekannt sind, wurde hierfür auch keine Konvergenzuntersuchung durchgeführt.

Für das Beispiel **Wellenausbreitung**, siehe Abb. 6.4, wird aber der geschätzte Fehler in der Gesamtenergienorm  $\|\mathbf{e}\|_g$ , Gl. (7.11,7.14) und der geschätzte Fehler in der  $H^{-1}$ -Norm, Gl. (7.4), ausgewertet. Die Parameter des Problems sind wie vorher definiert. Die

$\mathcal{N}_{eq}$	$k$	$\ \mathbf{e}\ _a(5)$	$\kappa_a$	$\ \dot{\mathbf{e}}\ _{L_2}(5)$	$\kappa_2$
60	0.2	$1.275 \cdot 10^{-1}$		$5.594 \cdot 10^{-2}$	
216	0.1	$8.201 \cdot 10^{-2}$	1.55	$1.623 \cdot 10^{-2}$	3.45
816	0.05	$2.085 \cdot 10^{-2}$	3.9	$7.243 \cdot 10^{-3}$	2.24
3168	0.025	$1.551 \cdot 10^{-2}$	1.34	$1.698 \cdot 10^{-3}$	4.2
12480	0.0125	$8.365 \cdot 10^{-3}$	1.85	$4.099 \cdot 10^{-4}$	4.14
49536	0.06025	$4.276 \cdot 10^{-3}$	1.95	$1.020 \cdot 10^{-4}$	4.02
197376	0.00625	$2.212 \cdot 10^{-3}$	1.94	$2.619 \cdot 10^{-5}$	3.91

**Tabelle 7.4:** Rechteckplatte; Räumlicher Diskretisierungsfehler für Kragplatte bei simultaner Raum- und Zeitgitterverfeinerung; Konvergenzrate des geschätzten Fehlers in der Verzerrungsenergie und in der kinetischen Energie

Raumgitterweite und die Zeitschrittweite bleiben konstant mit  $h = 10$  und  $k = 0.1$ . Die Belastung ist  $q(t) = 4.0 \sin(\pi t)$ ,  $\forall t \in [0, 1]$ .



**Bild 7.7:** Wellenausbreitung; geschätzter Fehler  $\|\mathbf{e}\|_{H^{-1}(\Omega)}$  nach Franz [36] und  $\|\mathbf{e}\|_{g,\Omega}$  nach Riccius [80]

Beide geschätzten räumlichen Diskretisierungsfehler, dargestellt in Abb. 7.7a) und Abb. 7.7b), zeigen weitgehend dasselbe Verhalten; bei  $t \approx 6$  wird die Sinushalbwellen am rechten Rand reflektiert. Letzteres führt zu einer kurzzeitigen Oszillation in beiden Funktionsverläufen.

Da die praktische Umsetzung des residuellen Fehlerschätzers für beliebige Probleme mit schwer bestimmbar Konstanten verbunden ist, wird im weiteren nur der superkonvergenzbasierte Fehlerschätzer benutzt. Zudem fehlt der Vergleich des geschätzten Fehler in der  $H^{-1}(\Omega)$ -Norm zur Lösung in der  $H^{-1}(\Omega)$ -Norm.

## 7.4 Steuerung der Netzveränderung

Für die Steuerung der lokalen Anpassung des Raumgitters wird der lokale Fehlerindikator  $\eta_{g,i} \approx \|\mathbf{e}\|_{g,E_i}$  des Elementes  $E_i$  in der Gesamtenergienorm benutzt, da der exakte Fehler

$\|\mathbf{e}\|_{g,E_i}$  nicht bekannt ist. Die Überlegungen zur Netzveränderungssteuerung der adaptiven Methode in der Strukturmechanik sind der Arbeit von Riccius entnommen, Riccius [80]. Für die Entscheidung zur Netzveränderung werden eine untere  $\epsilon_u$  und eine obere  $\epsilon_o$  Schranke für den globalen, räumlichen Diskretisierungsfehler benötigt. Ist die Ungleichung (7.1) nicht erfüllt, so wird das Raumgitter verfeinert oder vergrößert. Dabei darf die obere Schranke der Ungleichung (7.1) nicht zu klein gewählt werden, da i.d.R. die Rechen- und Speicherkapazität limitiert ist. Allerdings kann die Erfüllung von Ungleichung (7.1) nicht immer garantiert werden, da insbesondere am Anfang einer Finite Element Berechnung der geschätzte Fehler  $\|\mathbf{e}\|_g$  klein sein kann. Dies bedeutet, daß keine Vergrößerung des Raumgitters über das gewählte Startgitter hinaus erfolgt. Ziel der Veränderung des Raumgitters ist ansonsten, daß der geschätzte Fehler des neuen Gitters mit der Netzweite  $h'$  einem vorgegebenen Fehler  $\epsilon_v$  entsprechen soll

$$\|\mathbf{e}\|_g' = \epsilon_v .$$

Für  $\epsilon_v$  wird sinnvollerweise  $0.8 \dots 0.9 \epsilon_o$  gewählt, um eine zu dichte Folge von Netzveränderungen zu vermeiden. Die Entscheidung *Verfeinerung, Vergrößerung oder Beibehaltung* der Netzweite wird mit Hilfe des mittleren Fehlers des neuen Netzes  $\|\mathbf{e}\|_{g,m}'$  getroffen. Hierfür nutzt man die lokale Konvergenzordnung, d.h. eine Halbierung der Netzweite bewirkt eine Viertelung des Elementfehlers. Falls demnach für ein Element  $E_i$

i) die Ungleichung

$$1/2 \|\mathbf{e}\|_{g,m}' < \|\mathbf{e}\|_{g,E_i} \leq 2 \|\mathbf{e}\|_{g,m}' \quad (7.15)$$

erfüllt ist, bleibt die Gitterweite  $h$  des Elementes  $E_i$  unverändert, und wenn

ii) die Ungleichung

$$\|\mathbf{e}\|_{g,E_i} > 2 \|\mathbf{e}\|_{g,m}' \quad (7.16)$$

erfüllt ist, wird die Netzweite  $h$  des Elements  $E_i$  halbiert, und wenn

iii) die Ungleichung

$$\left( \sum_{j=1}^4 \|\mathbf{e}\|_{g,E_{i(j)}}^2 \right)^{1/2} \leq \|\mathbf{e}\|_{g,m}' \quad (7.17)$$

erfüllt ist, so werden die Elemente  $E_{i,(1)}, \dots, E_{i,(4)}$  zum ursprünglichen Element  $E_i$  des vorherigen größeren Gitters zusammengefaßt.

Der mittlere Fehler des neuen, veränderten Raumgitters  $\|\mathbf{e}\|_{g,m}'$  wird über den globalen Fehler des neuen Raumgitters  $\epsilon_v$  und über den lokalen Fehler  $\|\mathbf{e}\|_{g,E_i}$  des aktuellen Netzes festgelegt,

$$\|\mathbf{e}\|_{g,m}' = \frac{\epsilon_v^2}{\sum_{i=1}^{N_E} \|\mathbf{e}\|_{g,E_i}} . \quad (7.18)$$

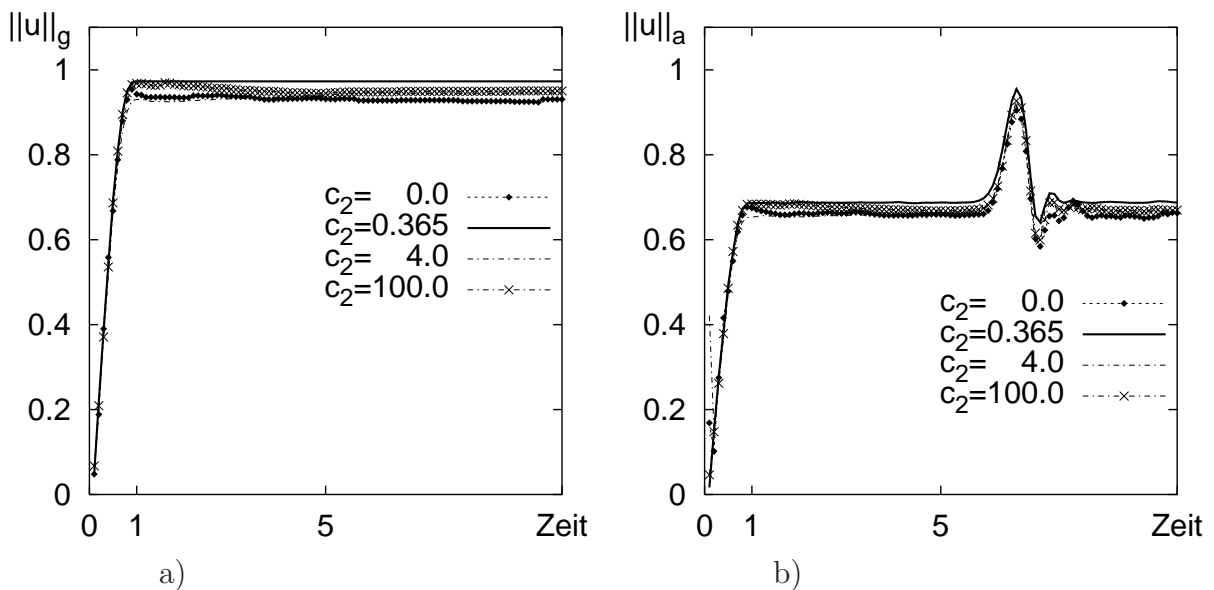


## 7.5 Einfluß des geschätzten Fehlers in der kinetischen Energienorm auf die numerische Lösung bei adaptiver Netzveränderung

Die Bestimmung des Diskretisierungsfehlers in der kinetischen Energienorm  $\|\dot{\mathbf{e}}\|_{L_2}$ , Gl. (7.14), basiert auf der Superkonvergenzeigenschaft der Knotengeschwindigkeit  $\mathbf{d}^k$ . In Riccius [80] wird der Korrekturfaktor  $c_2$  an Polynomen verschiedener Ordnung abgeglichen. Hier soll der Einfluß des Faktors  $c_2$  auf die Energienorm der Lösung für  $c_2 = 0.0, 0.365, 4.0, 100.0$  untersucht werden. Bei  $c_2 = 0.0$  wird der geschätzte Fehler in der kinetischen Energienorm für die adaptive Netzveränderung nicht berücksichtigt.

### Beispiel 1: 1-D Wellenausbreitung in einem Rechteckgebiet

Dieses Beispiel wurde in den Abschnitten 6, 7.2, Abb. 6.4, bereits zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers genutzt. Das Standard-Newmarkverfahren ( $\gamma = 1/2$ ,  $\beta = 1/4$ ) wird mit konstantem Zeitschritt ( $k = 0.1$ ) zur Zeitintegration verwendet. Die 'exakte' Gesamtenergienorm der Lösung ist  $\|\mathbf{u}\|_{g,ex} = 1 \forall t \in [1, T < \infty]$  und resultiert aus einer Referenzlösung. Das Raumgitter soll nun mittels des geschätzten Diskretisierungsfehlers in der Gesamtenergienorm  $\|\mathbf{e}\|_g$  angepaßt werden. Zur Netzveränderung werden folgende untere und obere Fehlerschranken gewählt:  $\epsilon_u = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $\epsilon_o = 3 \cdot 10^{-2}$ . Die Auswertung der



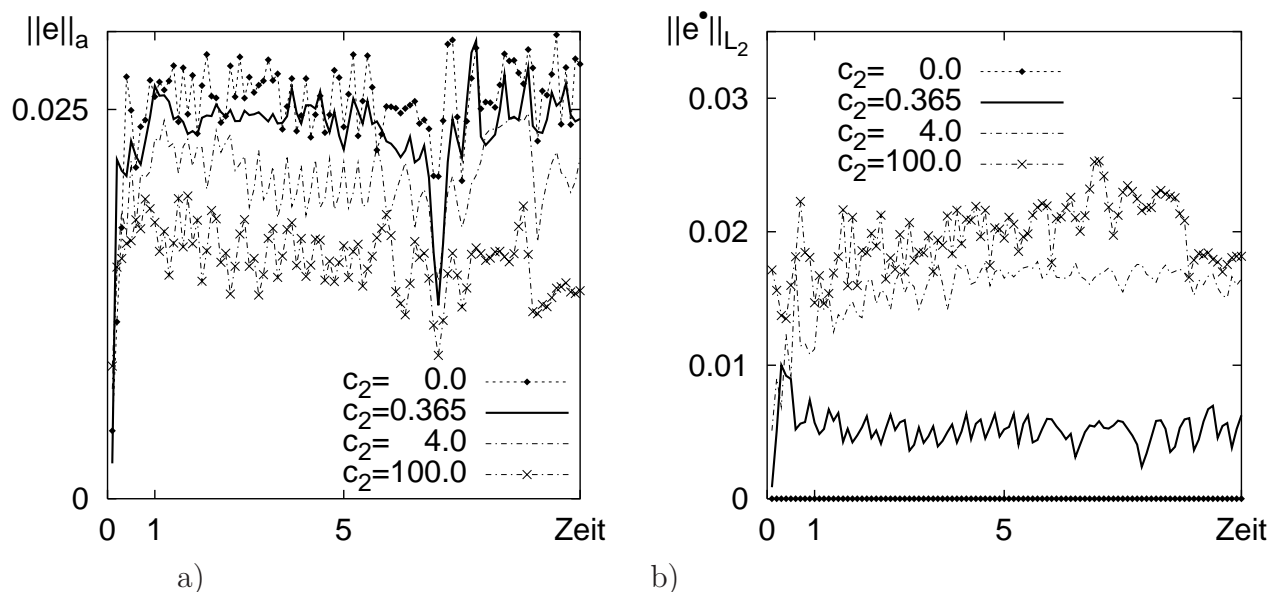
**Bild 7.8:** Wellenausbreitung, Variation von  $c_2$

a) Gesamtenergienorm der Lösung

b) Verzerrungsenergienorm der Lösung

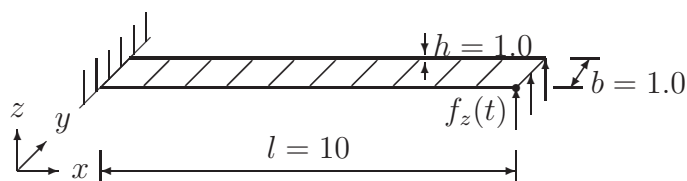
Gesamtenergienorm der Lösung für verschiedene Parameterwerte  $c_2$ , Abb. 7.8a), zeigt, daß nur der spezielle Wert  $c_2 = 0.365$  den exakten Wert  $\|\mathbf{u}\|_{g,ex} = 1$  am besten annähert. Bei Wahl anderer Werte für  $c_2$  wird der exakte Wert für die Gesamtenergienorm der Lösung unterschritten. Ein ähnliches Verhalten ist bei der Verzerrungsenergienorm der Lösung  $\|\mathbf{u}\|_a$  in Abb. 7.8b) zu erkennen. Bei  $t \approx 6.3$  wird die Sinushalbwellen am Dirichletrand reflektiert. Daher besitzt das System für einen Zeitpunkt keine kinetische Energie. Mit

der Wahl von  $c_2 = 0.365$  wird auch dieser Zustand am besten abgebildet,  $\|\mathbf{u}\|_{a,max} = 1.0$ . Aus Voruntersuchungen bei Wellenausbreitungsproblemen zeigte sich, daß der geschätzte Fehler in der kinetischen Energienorm dieselbe Größenordnung haben sollte wie der Fehler in der Verzerrungsenergienorm. Dies spiegelt Abb. 7.9 wieder. Hierfür wird auch auf die Konvergenzuntersuchung in Tab. 7.2 verwiesen.



**Bild 7.9:** Wellenausbreitung; Variation von  $c_2$   
a) geschätzter Fehler in der Verzerrungsenergienorm sowie b) kinetische Energienorm des Fehlers über der Zeit

Das zweite Beispiel **Rechteckplatte** zählt zu der Problemklasse 'Biegeschwingungen', Abb. 7.10. Die Systemparameter der Rechteckplatte sind:



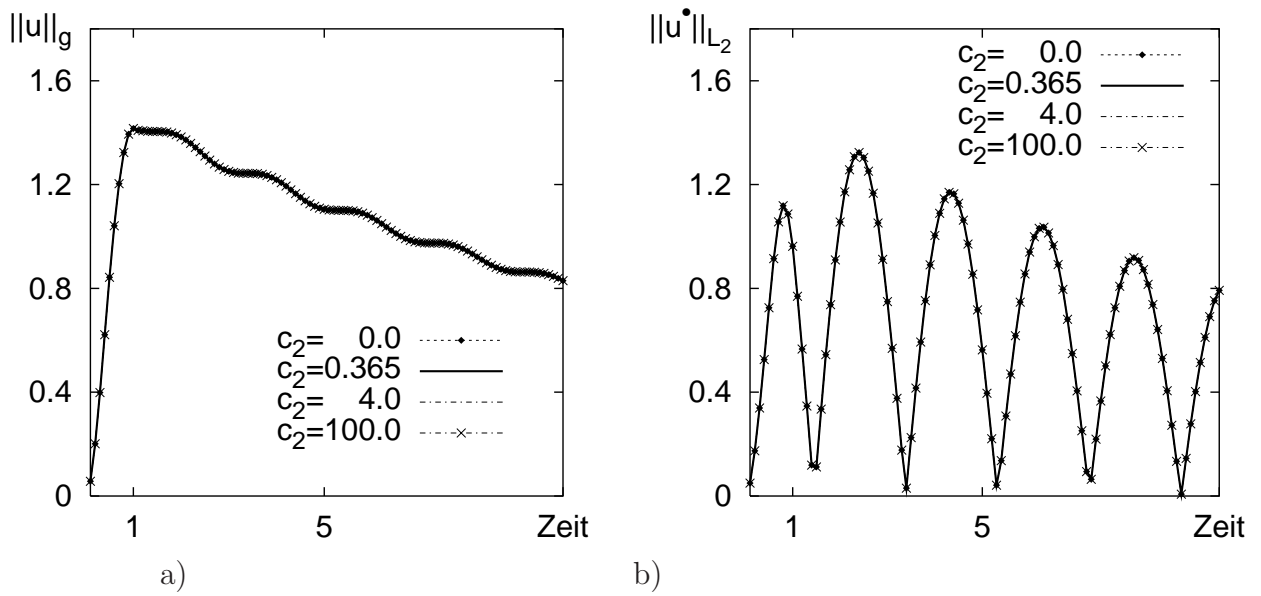
**Bild 7.10:** Rechteckplatte

$$E = 2.1 \cdot 10^8, \rho = 7700, \nu = 0.29, h = 1(\text{Dicke}), k = 0.1, c_M = 0.01, c_K = 0.001 \text{ (Rayleigh-Dämpfung)}$$

$$f_z(t) = 350.0 \sin(\pi t), \forall t \in [0, 1], \quad \epsilon_u = 5 \cdot 10^{-4}, \epsilon_o = 3 \cdot 10^{-2}$$

Für die numerische Zeitintegration wurde ebenfalls das Newmarkverfahren mit konstanter Zeitschrittweite verwendet. Im Gegensatz zum Wellenausbreitungsbeispiel wird hier Rayleigh-Dämpfung ( $c_M, c_K$ ) angenommen.

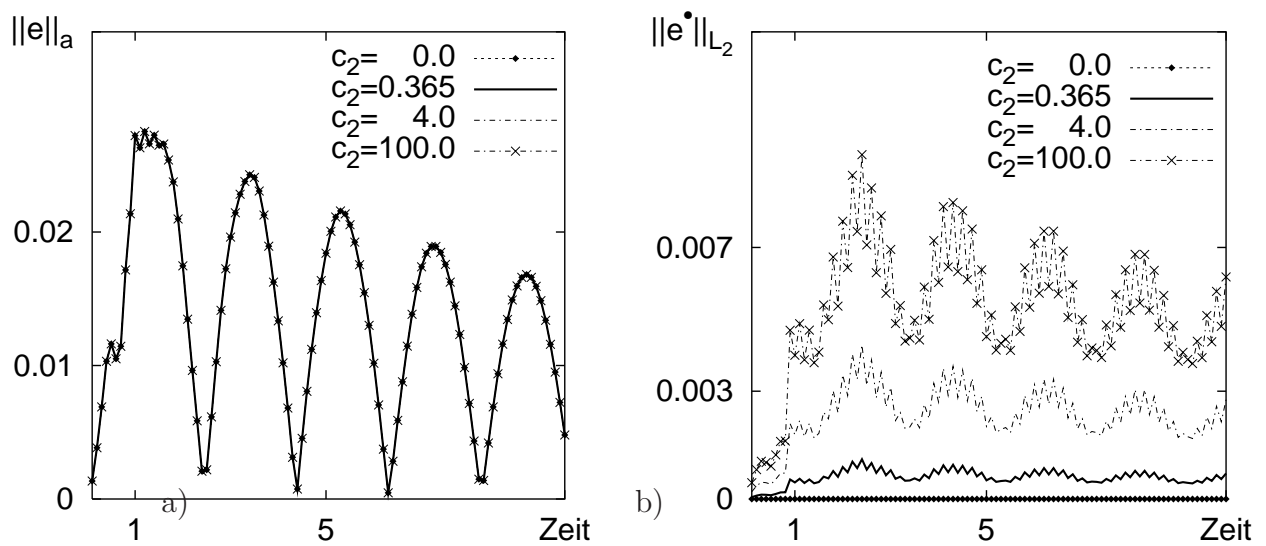
Die Lösung dieses Problems zeigt keine große Abhängigkeit vom Korrekturfaktor  $c_2$ , siehe Abb. 7.11. Sowohl die Gesamtenergienorm der Lösung  $\|\mathbf{u}\|_g$  als auch die kinetische Energienorm der Lösung  $\|\dot{\mathbf{u}}\|_{L_2}$  werden durch die Variation von  $c_2$  nicht merklich beeinflusst. In selbiger Weise kann Abb. 7.12a) gedeutet werden. Auch bei der überzogenen



**Bild 7.11:** Rechteckplatte; Variation von  $c_2$   
 a) Energienorm der Lösung  
 der Lösung

b) kinetische Energienorm

Wahl  $c_2 = 100.0$  ist der maximale geschätzte Fehler in der kinetischen Energienorm  $\|\dot{e}\|_{L_2}$  nur 1/4 des maximalen geschätzten Fehlers in der Verzerrungsenergienorm  $\|e\|_a$ . Eine Vernachlässigung des geschätzten Fehlers der kinetischen Energienorm  $\|\dot{e}\|_{L_2}$  hat somit keinen Einfluß auf die Lösung und auf die Netzverfeinerung. Unabhängig von  $c_2$  schwankt die Gleichungsanzahl  $N_{eq}$  zwischen 1000 und 1235.



**Bild 7.12:** Rechteckplatte; Variation von  $c_2$   
 a) Verzerrungsenergienorm der Lösung  
 norm des Fehlers

b) kinetische Energie-

Die Ursache für die Unabhängigkeit der Lösung von dem kinetischen Energienormfehler

ist die inhärente Dispersion des Plattenmodells, auf das in Abschnitt 10 näher eingegangen wird.

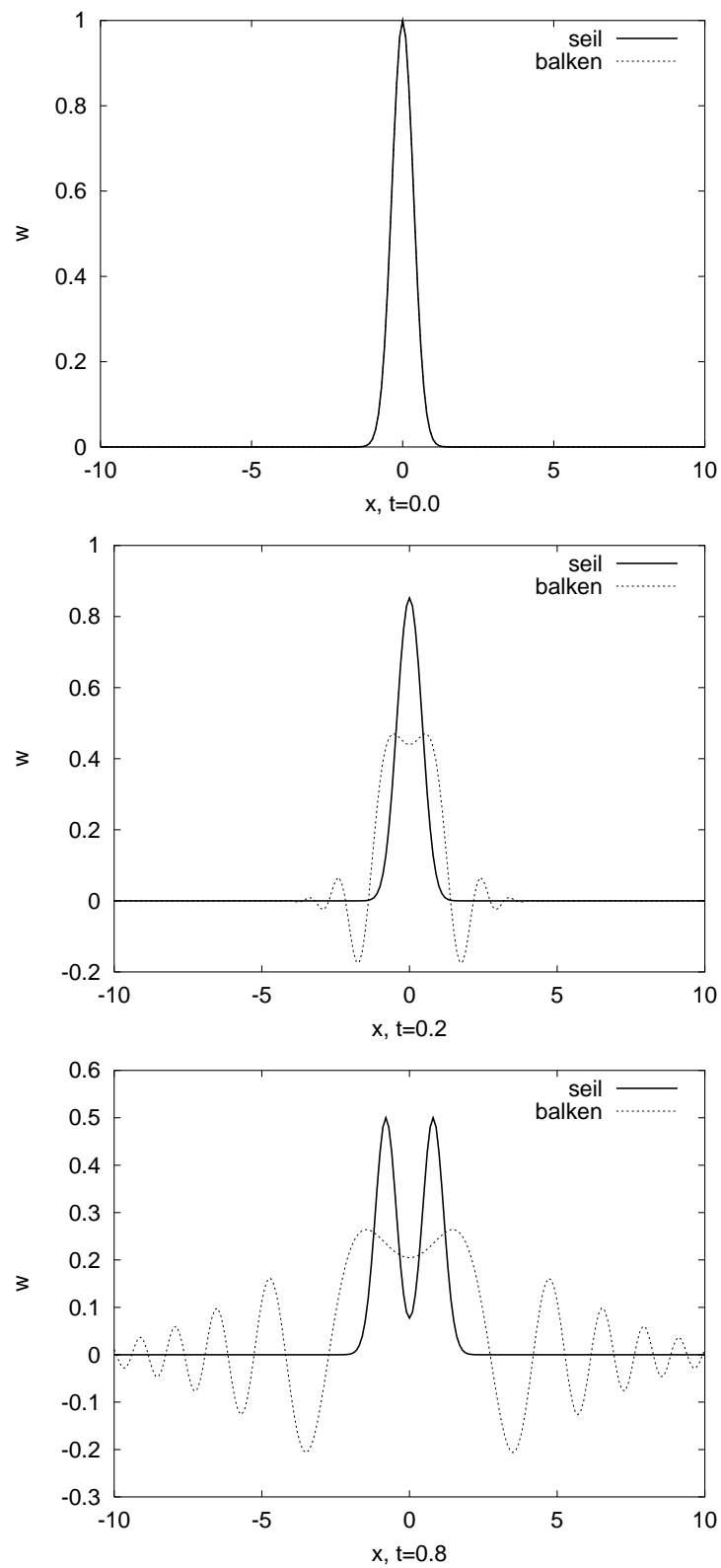
Am Beispiel des Balkens und des Seiles mit jeweils unbeschränkter Länge und derselben Anfangsbedingung

$$w_0(x, t = 0) = e^{-4x^2}$$

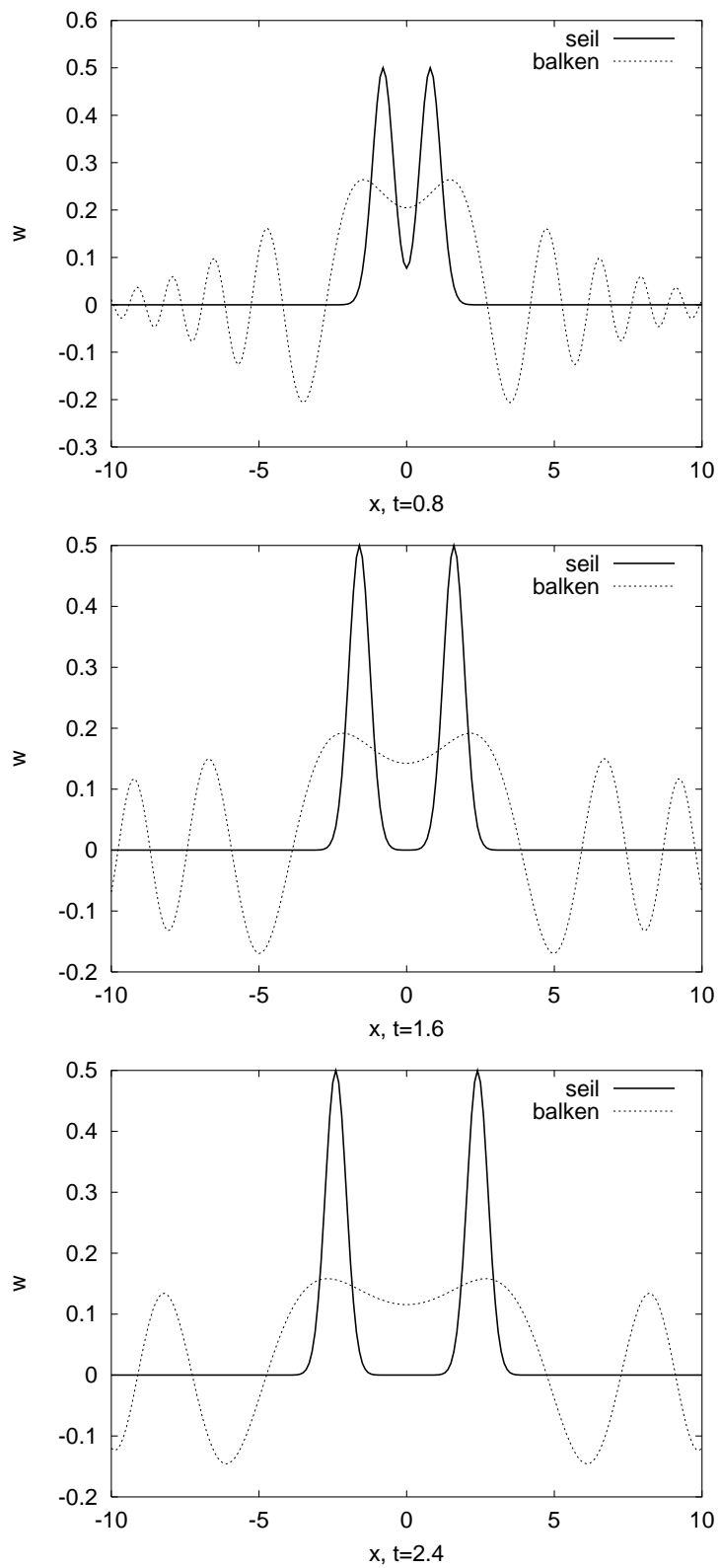
soll der unterschiedliche Lösungscharakter bildhaft verdeutlicht werden, siehe Abb. **7.13** und Abb. **7.14**. Die Lösung für das Seil wurde mit der d'Alembertschen Charakteristikenmethode bestimmt,  $w = \frac{1}{2}(w_0(x - ct) + w_0(x + ct))$ ,  $c = 1$ . Die analytische Lösung für den Balken wurde mittels Laplacetransformation hergeleitet, Graff [41].

Die Form der Gaussverteilung der Verschiebung  $u$  bleibt beim Seil auch nach beliebiger Zeit erhalten. Somit ist die Seillösung immer auf einen kleinen Bereich beschränkt. D.h., die Gesamtenergie des Seiles ist auch in diesem kleinen Bereich jeweils in positiver und negativer Richtung konzentriert. Schon nach kurzer Zeit wird hingegen beim Balken dieselbe Anfangsbedingung 'verschmiert', der lokale Charakter von  $w_0(x, 0)$  geht verloren. Die Gesamtenergie wird mit zunehmender Zeit über die gesamte Länge des Balkens verteilt, d.h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = 0$ . Beim ursprünglich diskutierten Wellenausbreitungsproblem, Abb. **6.4**, muß daher auch die numerische Geschwindigkeitsfunktion  $\dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t)$  den lokalen Charakter der Lösung abbilden, siehe Abb. **7.15**. Dies erfordert eine lokale Netzverfeinerung im Bereich der Wellenfront und im Bereich des Maximalwertes.

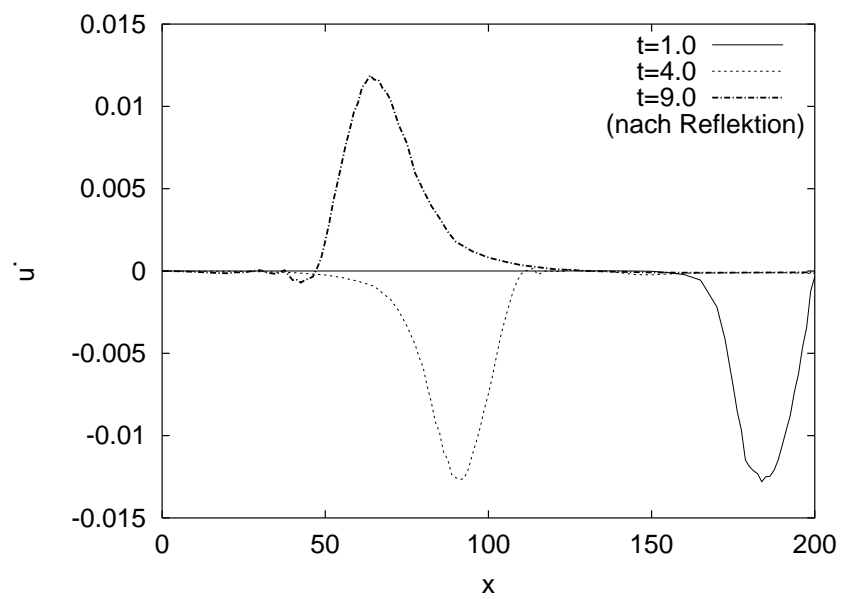
Beim Schwingungsproblem dagegen ist die zeitliche Änderung der Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$  von untergeordneter Bedeutung. Wesentlich hierfür ist die räumliche Änderung der Verschiebungsfunktion  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , d.h. der Gradient  $\nabla \mathbf{u}$  muß möglichst genau durch die FE-Lösung  $\nabla \mathbf{u}^h$  abgebildet werden. Deshalb dominiert dann der Unterschied  $\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^h$  die adaptive Netzveränderung.



**Bild 7.13:** Balken- und Seillösung  $w(x)$  für  $t = 0.0/0.2/0.8$  für Anfangsbedingung  $w_0(x, 0)$



**Bild 7.14:** Balken- und Seillösung  $w(x)$  für  $t = 0.8/1.6/2.4$  für Anfangsbedingung  $w_0(x, 0)$



**Bild 7.15:** 1-D Wellenausbreitung; Geschwindigkeitszustand für  $t = 1.0/4.0/9.0$

## 8 Fehlerindikator zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers für lokale Größen

In Abschnitt 7.2 wurden Schätzer für den globalen, räumlichen Diskretisierungsfehler diskutiert. Mit deren Hilfe sollte in einem adaptiven Algorithmus der Diskretisierungsfehler in der Gesamtenergienorm  $\|\mathbf{e}\|_g$  minimiert werden. Es ist aber bekannt, daß bei dieser Adaption z.B. der lokale Fehler  $\mathbf{e}_i(\mathbf{x}_0, \cdot) = \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0) - \mathbf{u}_i^h(\mathbf{x}_0)$  der Verschiebungskomponente  $i$  für  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  wie auch bei gleichmäßiger Netzverfeinerung nicht gleichmäßig konvergiert, d.h. er kann oszillieren.

Als Alternative entwickelten Becker/Rannacher [13] ein Konzept zur a posteriori Fehlerschätzung lokaler Größen, zunächst für elliptische Differentialgleichungen. Dieses Konzept wurde auch für Probleme der Elastostatik, siehe z.B. Cirak/Ramm [23], sowie für Kontaktprobleme Rieger [83] eingesetzt. Die Anwendung lokaler Fehlerschätzer auf Problemstellungen der Elastoplastizität wird bei Suttmeier [92], Ramm/Cirak [22] und Ramm/Steeb [87] ausführlich diskutiert. Das Dualitätsprinzip zur Schätzung des lokalen Diskretisierungsfehlers in der Strukturmechanik wurde erstmals von Cirak [20] für das Einfreiheitsgradsystem vorgestellt. Weitergehende ausführliche Darstellungen sind bei Bangerth [10] und darauf aufbauend in Maute [70] zu finden.

Basierend auf der Vorgehensweise, die im wesentlichen in [10] bzw. [70] beschrieben ist, wird im folgenden ein einfacher, lokaler Fehlerindikator zur Steuerung des Raumgitters vorgestellt. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Variationsformulierung für das kontinuierliche Problem, siehe Gl. (3.26), die hier zusätzlich als schwache Formulierung bzgl. der Zeit geschrieben ist,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{W})_\Omega + c_M(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{W})_\Omega + c_K a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{W})_\Omega + a(\mathbf{u}, \mathbf{W})_\Omega dt = \int_0^{t_m} (\mathbf{f}, \mathbf{W})_\Omega dt$$

$$\forall \mathbf{W} \in \mathcal{W} = L_2(0, t_m; H_0^1(\Omega)), \quad (8.1)$$

und die Variationsformulierung für das diskretisierte Problem, Gl. (3.31), ebenfalls erweitert um die Zeitvariation,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_M(\dot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_K a(\dot{\mathbf{u}}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega + a(\mathbf{u}^h, \mathbf{W}^h)_\Omega dt = \int_0^{t_m} (\mathbf{f}, \mathbf{W}^h)_\Omega dt$$

$$\forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}. \quad (8.2)$$

$\mathbf{W}$  in Gleichung (8.1) kann durch  $\mathbf{W}^h$  ersetzt werden, da für  $\mathbf{W}^h$  gilt:  $\mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$ ,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_M(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_K a(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{W}^h)_\Omega + a(\mathbf{u}, \mathbf{W}^h)_\Omega dt = \int_0^{t_m} (\mathbf{f}, \mathbf{W}^h)_\Omega dt$$

$$\forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h. \quad (8.3)$$



Daraus kann die Galerkinorthogonalität abgeleitet werden,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{e}}, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_M(\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{W}^h)_\Omega + c_K a(\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{W}^h)_\Omega + a(\mathbf{e}, \mathbf{W}^h)_\Omega dt = 0$$

$$\forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h, \quad (8.4)$$

oder kompakt:  $B(\mathbf{e}, \mathbf{W}^h)_{\Omega \times (0, t_m]} = 0$ .

Dabei wird vorausgesetzt, daß die gewöhnliche Differentialgleichung (8.2) exakt gelöst wird. Partielles Integrieren von Gl. (8.4) bzgl.  $x$  liefert die Differentialgleichung des Fehlers  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$ ,

$$\int_{\Omega \times (0, t_m]} (\rho \ddot{\mathbf{e}} + c_M \rho \dot{\mathbf{e}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_e - c_K \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e) \mathbf{W}^h dx dt = 0$$

$$\rightarrow \rho \ddot{\mathbf{e}} + c_M \rho \dot{\mathbf{e}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_e - c_K \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e = \mathbf{R}, \quad \text{mit: } \boldsymbol{\sigma}_e = \mathbb{C} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{e} + \nabla \mathbf{e}^T). \quad (8.5)$$

Das Residuum ist mit  $\mathbf{R}$  gekennzeichnet. Das Konzept des lokalen Fehlerindicators beinhaltet die Nutzung des dualen Problems, das vom primalen Problem (8.1) abgeleitet wird. Durch zusätzliche Integration von Gl. (8.1) bzgl.  $t$  und anschließender partieller Integration bzgl.  $x$  kann das zugehörige duale Problem formuliert werden,

$$\rho \ddot{\mathbf{z}} - c_M \rho \dot{\mathbf{z}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_z + c_K \operatorname{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_z = \mathbf{D}. \quad (8.6)$$

mit:  $\mathbf{z}(t = t_m) = \mathbf{z}_{t_m}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}(t = t_m) = \dot{\mathbf{z}}_{t_m}$  und  $\boldsymbol{\sigma}_z = \mathbb{C} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{z} + \nabla \mathbf{z}^T)$ .

Die dem dualen Problem zugehörigen Randbedingungen sind homogen. Zunächst ist rechte Seite  $\mathbf{D}$  frei wählbar. Zur Überführung der dualen Gleichung (8.6) in eine kontinuierliche Variationsgleichung ist  $\mathbf{e}$  als Testfunktion zulässig,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{e})_\Omega - c_M(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e})_\Omega - c_K a(\dot{\mathbf{z}}, \mathbf{e})_\Omega + a(\mathbf{z}, \mathbf{e})_\Omega dt = \int_0^{t_m} (\mathbf{D}, \mathbf{e})_\Omega dt, \quad (8.7)$$

oder kompakt:  $B^*(\mathbf{z}, \mathbf{e})_{\Omega \times (0, t_m]} = (\mathbf{D}, \mathbf{e})_{\Omega \times (0, t_m]}$ .

Bei der diskretisierten, schwachen Formulierung von (8.6) wird eine duale Lösung für  $\mathbf{z}^h \in \mathcal{W}^h$  gesucht,

$$\int_{t_m}^0 (\ddot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{V}^h)_\Omega - c_M(\dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{V}^h)_\Omega - c_K a(\dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{V}^h)_\Omega + a(\mathbf{z}^h, \mathbf{V}^h)_\Omega dt = \int_{t_m}^0 (\mathbf{D}, \mathbf{V}^h)_\Omega dt$$

$$\forall \mathbf{V}^h \in \mathcal{V}^h \subset L_2(0, t_m; H_0^1(\Omega)). \quad (8.8)$$

Bei Verwendung des Separationsansatzes für  $\mathbf{z}^h$  und  $\mathbf{V}^h$ , siehe auch Gl. (3.24),

$$\mathbf{z}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^h(\mathbf{x}) \mathbf{d}_z(t),$$

$$\mathbf{V}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}^h(\mathbf{x}) \mathbf{g}(t),$$

ergibt sich die Matrixform mit der zugehörigen Wichtungsfunktion  $\mathbf{g} = \mathbf{g}^k$  des Newmarkverfahrens, siehe Gl. 5.4:

$$\int_{t_m}^0 \mathbf{g}^k \left( \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_z(t) - (c_M \mathbf{M} + c_K \mathbf{K}) \dot{\mathbf{d}}_z(t) + \mathbf{K} \mathbf{d}_z(t) \right) dt = \int_{t_m}^0 \mathbf{g}^k \mathcal{D}(t) dt \quad \forall T > t \geq 0, \quad (8.9)$$

mit den Endbedingungen:  $\mathbf{d}_{z,t_m} = \mathbf{d}_z(t = t_m)$   $\dot{\mathbf{d}}_{z,t_m} = \dot{\mathbf{d}}_z(t = t_m)$ ,

$$\text{und: } \mathcal{D}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{N}^h(\mathbf{x}) \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) dx.$$

Für die numerische Umsetzung dieses Rückwärtsproblems wird hier die Finite Element Formulierung des Newmarkverfahrens, siehe Gleichungen (5.3) bis (5.5) verwendet.

Da für die Näherungslösung  $\mathbf{z}^h \in \mathcal{W}^h$  angenommen wird, kann die Galerkinorthogonalität in Gl. (8.4) auch mit  $\mathbf{z}^h$  getestet werden,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{e}}, \mathbf{z}^h)_{\Omega} + c_M (\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{z}^h)_{\Omega} + c_K a(\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{z}^h)_{\Omega} + a(\mathbf{e}, \mathbf{z}^h)_{\Omega} dt = 0, \quad (8.10)$$

oder kompakt:  $B(\mathbf{e}, \mathbf{z}^h)_{\Omega \times (0, t_m]} = 0$ .

Unter der Annahme  $\mathbf{e}(t = 0) = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{e}}(t = 0) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{z}(t = T) = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}(t = T) = \mathbf{0}$  und somit  $\mathbf{z}^h(t = T) = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{z}}^h(t = T) = \mathbf{0}$  führt die partielle Integration bzgl.  $t$  zur Vertauschung von  $\mathbf{e}$  mit der Testfunktion  $\mathbf{z}^h$ ,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} - c_M (\dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} - c_K a(\dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} + a(\mathbf{z}^h, \mathbf{e})_{\Omega} dt = 0, \quad (8.11)$$

oder kompakt:  $B^*(\mathbf{z}^h, \mathbf{e})_{\Omega \times (0, t_m]} = 0$ .

Die Kombination von Gl. (8.11) mit Gl. (8.7) führt auf,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{z}} - \ddot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} - c_M (\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} - c_K a(\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} + a(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e})_{\Omega} dt = \int_0^{t_m} (\mathbf{D}, \mathbf{e})_{\Omega} dt \quad (8.12)$$

Da  $c_K \ll E$  und  $c_M \ll \rho$  sind, können die Beiträge aus der Dämpfung vernachlässigt werden,

$$\int_0^{t_m} (\ddot{\mathbf{z}} - \ddot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})_{\Omega} + a(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{e})_{\Omega} dt \approx \int_0^{t_m} (\mathbf{D}, \mathbf{e})_{\Omega} dt.$$

Um den Fehlerindikator  $(\mathbf{D}, \mathbf{e})$  in einen kinetischen Fehleranteil und einen Anteil in der Verzerrungsenergienorm aufzuspalten, kann auch  $(\ddot{\mathbf{z}} - \ddot{\mathbf{z}}^h, \mathbf{e})$  bzgl.  $t$  partiell integriert werden. Berücksichtigt man obige Anfangsbedingungen für  $\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}_h$  sowie anschließend die

Cauchy-Schwarz Ungleichung, resultiert daraus die folgende Form für den Fehlerindikator  $(\mathbf{D}, \mathbf{e})_\Omega$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} (\mathbf{D}, \mathbf{e})_\Omega dt &\leq \int_0^{t_m} \left( (\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)_\Omega^{1/2} (\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{e}})_\Omega^{1/2} + a(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)_\Omega^{1/2} a(\mathbf{e}, \mathbf{e})_\Omega^{1/2} \right) dt \\ &= \int_0^{t_m} (\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{e}})_\Omega dt. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Mit der Wahl von  $\mathbf{D}$  kann die lokale Fehlergröße  $\mathbf{e}$  festgelegt werden, die kontrolliert werden soll. Für  $\mathbf{D}$  wird gewählt,

$$\mathbf{D} = \delta_i(x = x_0) \mathbf{\Delta}(t). \quad (8.14)$$

$\delta_i(x = x_0)$  ist die Dirac-Distribution für  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$  in Richtung  $i$  und  $\mathbf{\Delta}(t)$  besitzt die Form der Sprungfunktion für  $t_{m-1} < t \leq t_m$ , siehe Abb. 8.1c). Damit kann der Fehler  $\mathbf{e}_i$  der Verschiebungsordinate  $i$  bei  $x = x_0$  für  $t = [t_m + t_{m-1}]/2$  gefiltert werden,

$$\int_0^{t_m} (\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{e}})_\Omega dt = \int_{\Omega \times (0, t_m]} \delta_i(x_0) \mathbf{\Delta}(t) \mathbf{e} dx \approx k_m \mathbf{e}_i(x = x_0; [t_m + t_{m-1}]/2).$$

Bei Auswertung des Zeitintegrals wird angenommen, daß der Fehler  $\mathbf{e}$  sich im Zeitschritt nur linear ändert. Dafür ist eine 1-Punkt Gauß-Legendre Integration ausreichend. Höhere Anteile werden vernachlässigt. Zur Auswertung des Integrales

$$\int_0^{t_m} \left( (\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)_\Omega^{1/2} (\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{e}})_\Omega^{1/2} + a(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)_\Omega^{1/2} a(\mathbf{e}, \mathbf{e})_\Omega^{1/2} \right) dt \quad (8.15)$$

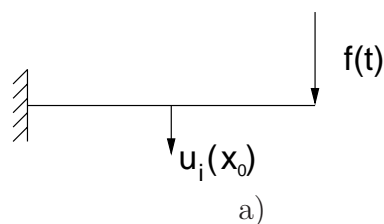
werden folgende stark vereinfachende Annahmen getroffen:

- i) der Einfluß der numerischen Zeitintegration auf die lokale Fehlergröße  $\mathbf{e}_i(x = x_0; [t_m + t_{m-1}]/2)$  ist vernachlässigbar, siehe Ungleichung (3.33) und Bangerth [9],
- ii) das Rückwärtsproblem (8.8) wird nur im Zeitbereich  $t \in (t_{m-1}, t_m]$  gelöst; hierfür wird angenommen, daß für  $t \in (0, t_m]$  die zeitschrittweise Auswertung des Integrals (8.15) näherungsweise der Auswertung des Zeitintegrals  $\int_{t_{m-1}}^{t_m} \dots dt$  entspricht:

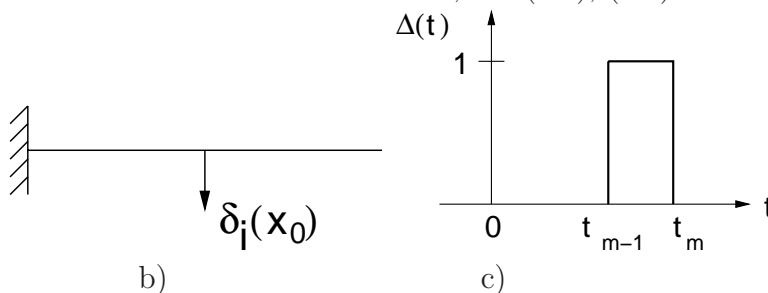
$$\int_0^{t_m} \dots dt = \frac{t_m - t_{m-1}}{k_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \dots dt = N_{m-1} \int_0^{t_m} \dots dt.$$

Infolge dieser starken Vereinfachungen, das Rückwärtsproblem wird nicht vollständig gelöst, resultiert daraus die folgende Vorschrift für den Fehlerindikator  $\mathbf{e}_i(x = x_0; [t_m +$

Primales Problem, Gl. (8.2)



Duales Problem, Gl. (8.8), (8.9)



**Bild 8.1:** Vergleich der primalen und dualen Aufgabenstellung bei Betrachtung einer Verschiebungsgröße bei  $x_0$

$t_{m-1}] / 2$ ):

$$\frac{N_{m-1} + 1}{k_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left( (\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h, \dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{z}}^h)_{\Omega}^{1/2} (\dot{\mathbf{e}}, \dot{\mathbf{e}})_{\Omega}^{1/2} + a(\mathbf{z} - \mathbf{z}^h, \mathbf{z} - \mathbf{z}^h)_{\Omega}^{1/2} a(\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\Omega}^{1/2} \right) dt = \mathbf{e}_i(x = x_0; [t_m + t_{m-1}] / 2).$$

Das praktische Vorgehen für die Fehlerschätzung beinhaltet somit folgende Teilschritte:

- Löse primales Problem bis zu  $t = t_m$ , siehe Gl. (3.31,3.32),
- Löse duales Problem, siehe Gl. (8.8), auf demselben Raumgitter der primalen Lösung für das Zeitintervall  $(t_{m-1}, t_m]$ ,
- Überlagerung des räumlichen Diskretisierungsfehler in der Verzerrungsenergienorm und kinetischen Energienorm der primalen und dualen Aufgabenstellung.

Hierbei wird im Rahmen der im Abschnitt 7.4 beschriebenen Netzsteuerung keine Netzvergrößerung zugelassen. D.h., der geschätzte Fehler  $(\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{e}})$  steuert die adaptive Netzverfeinerung. Numerische Untersuchungen zeigten, daß der Fehler  $\mathbf{e}_i(\mathbf{x} = \mathbf{x}_0; [t_m + t_{m-1}] / 2)$  sich bei Netzvergrößerung teilweise vergrößerte, d.h. der lokale Fehler konnte in einem Zeitintervall dann auch divergieren.

## Numerische Untersuchungen

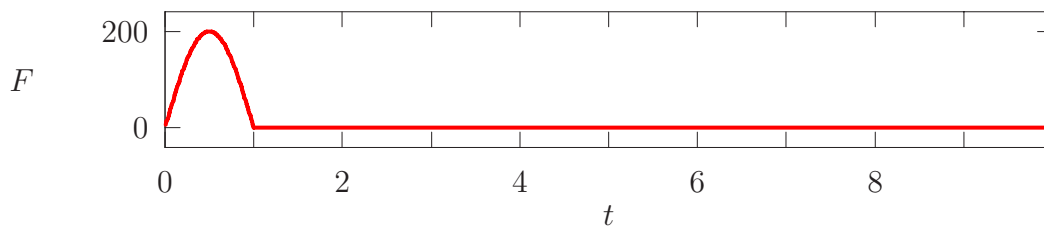
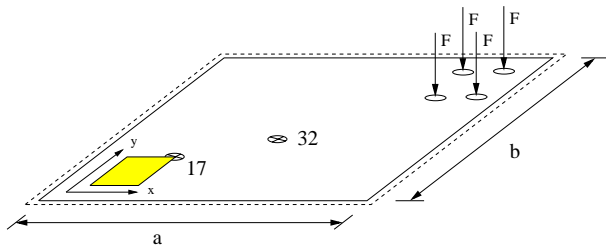
Der oben beschriebene lokale Fehlerschätzer soll nun an 2 Beispielen getestet werden. Zum Vergleich werden vier Lösungsverfahren untersucht:

- Numerische Lösung mittels Adaption des Raumgitters basierend auf dem globalen Fehlerschätzer (7.11,7.14), Verfeinerung und Vergrößerung des Raumgitters, [global]
- Numerische Lösung mittels Adaption des Raumgitters basierend auf dem lokalen Fehlerschätzer (8.13), stetige Verfeinerung des Raumgitters, [lokal]

- III) Numerische Lösung mit [e]ndgültigem Raumgitter aus II), keine Änderung des Raumgitters,  
[e-lokal]
- IV) Generierung eines Raumgitters, das bzgl. des Energienormfehlers in der 1. Eigenform adaptiert wurde, Vorgehen siehe Abschnitt 11  
Nutzung dieses Raumgitters zur transienten Simulation,  
[eigv].

Die verwendete Schalenformulierung basiert auf der Reissner/Mindlin Kinematik, d.h. es wird die Annahme der (Quer-)Schubstarrheit aufgegeben. Für die räumliche Diskretisierung von Gl. (3.26) bzw. Gl. (8.1) werden bilineare Ansatzfunktionen, siehe Gl. (4.7), verwendet. Der daraus resultierende Versteifungseffekt (netzabhängige Konvergenzordnung) wird mittels des ANS(Assumed Natural Strain) Konzepts von Dvorkin/Bathe [30] beseitigt bzw. reduziert.

Am Beispiel **Platte mit Loch**, Abb. 8.2, soll das Raumgitter adaptiv basierend auf der Fehlerschätzung für die Verschiebungsordinate  $\mathbf{u}_z$  jeweils an den Punkten 17 und 32 angepaßt werden. Die Belastung  $F_0$  wird auf eine Kreisfläche mit dem Durchmesser



Geometrie:  $a = 12$ ,  $b = 10$ ,  $t = 0.3$ ,  $x_{17} = 2.0$ ,  $y_{17} = 2.0$ ,  $x_{32} = 6.0$ ,  $y_{32} = 4.5$ ,  
Loch□:  $1 \times 1$

Material:  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2500$

Randbedingungen: Loch - freier Rand; sonst - soft simple support

Belastung:  $4 \times F$ ,  $F_0 = 200$  bei  $x = 8.0/10.0$ ,  $y = 7.0/9.0$

Zeitintegration: Galerkinverfahren, Gl. (5.2) bzw. Gl. (5.5),  $k = 0.04 = const.$

Rayleighdämpfung:  $c_M = 0.03$ ,  $c_K = 0.003$

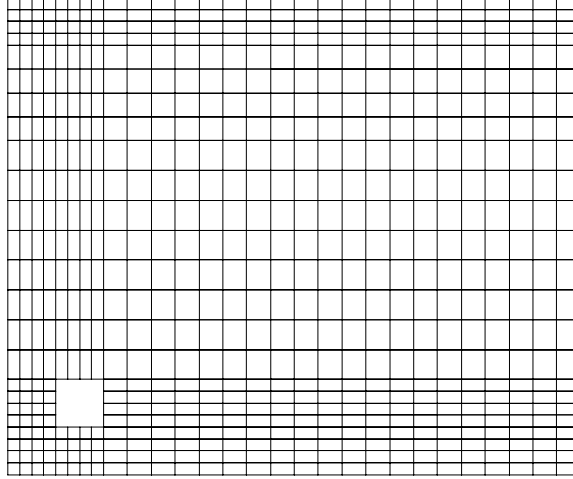
**Bild 8.2:** System Platte mit Loch

0.3 verteilt, um die Spannungssingularität infolge der Punktkraft zu verhindern. Für die globale und lokale Fehlerschätzung werden folgende Fehlerschranken verwendet,

I) global:  $\epsilon_u = 1.0 \cdot 10^{-3}$ ,  $\epsilon_o = 2.1 \cdot 10^{-1}$ ,

II) lokal:  $\epsilon_o = 6.5 \cdot 10^{-5}$ .

Das Rauggitter, das bzgl. der 1. Eigenform adaptiert wurde, ist in Abb. 8.3 dargestellt. In Abb. 8.8 findet man die Rauggitter, die jeweils aus der lokalen Fehlerschätzung für



**Bild 8.3:** Rauggitter, adaptiert bzgl. der 1. Eigenform

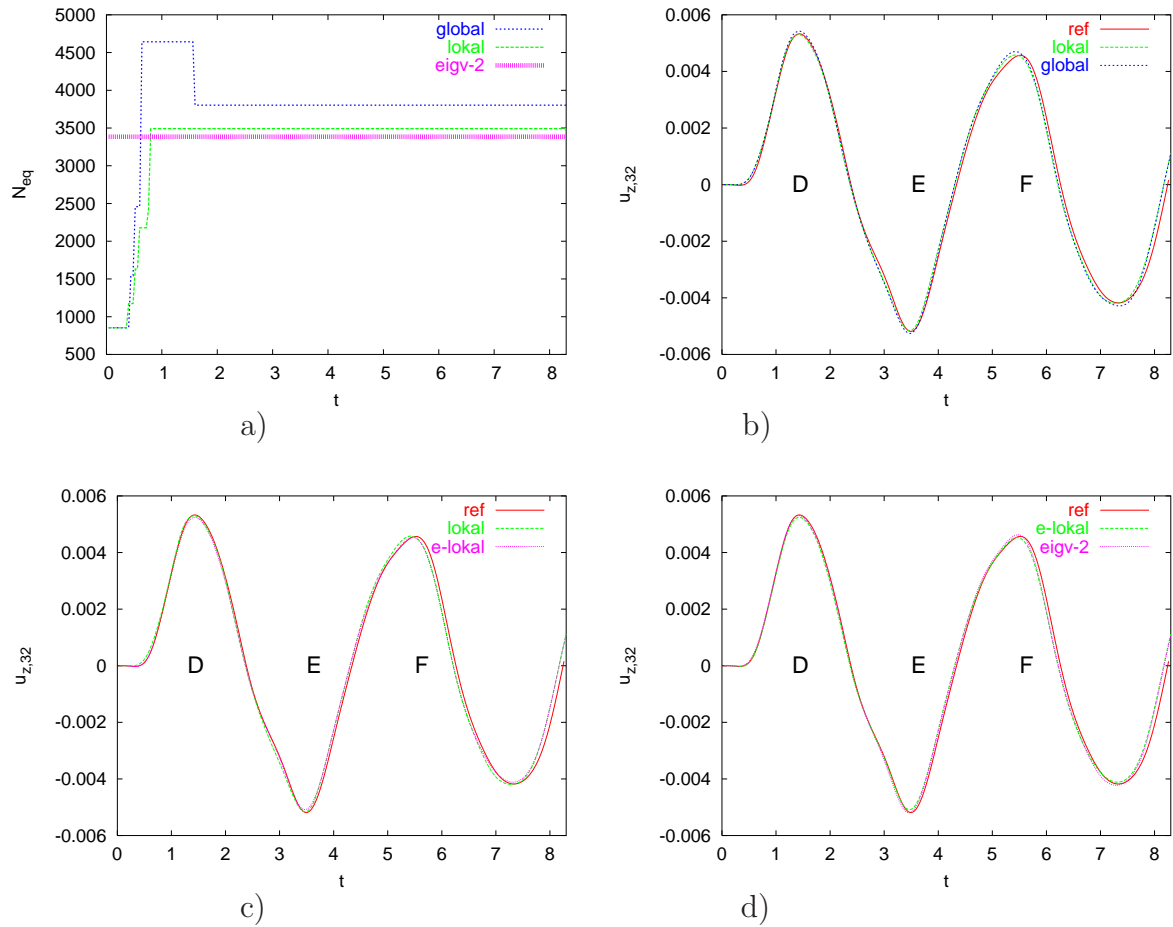
Knoten 32 und 17 resultieren und gleichzeitig als Startnetz für die Lösungsmöglichkeit III) dienen [e-lokal]. Zur Beurteilung der Qualität der Lösung  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t)$  wurde eine Referenzlösung  $\mathbf{u}_{ref}$  auf einem Rauggitter mit kleiner Gitterweite  $h$  generiert,  $\mathcal{N}_{eq,ref} = 53017$ . Für die Zeitpunkte der lokalen Extrema  $t = D, E, F$ , siehe Abb. 8.4, wurden folgende Referenzwerte bestimmt,

$$\begin{aligned} t = 1.4 = D & : \mathbf{u}_{z,32,ref} = 5.327 \cdot 10^{-3}, \\ t = 3.47 = E & : \mathbf{u}_{z,32,ref} = -5.184 \cdot 10^{-3}, \\ t = 5.5 = F & : \mathbf{u}_{z,32,ref} = 4.569 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Damit werden die Fehler an den lokalen Extrema zu  $t = D, E, F$  bestimmt,  $\mathbf{e}_{z,32} = |\mathbf{u}_{z,32,ref} - \mathbf{u}_{z,32}^h| / |\mathbf{u}_{z,32,ref}| \cdot 100$  [%]. Die lokalen Extrema bzgl.  $t$  für  $\mathbf{u}_{z,32}$  bei  $t = D, E, F$  sind in Tabelle 8.1 angegeben. Daraus wird der exakte, lokale Fehler  $\mathbf{e}_{z,32}$  ermittelt, siehe Tabelle 8.2. Die grafische Darstellung von  $\mathbf{u}_{z,32}^h$  der 4 Lösungsmethoden zeigt

$t = t_{extrem}$	global	lokal	e-lokal	eigv
D	5.423 E-03	5.244 E-03	5.297 E-03	5.307 E-03
E	-5.260 E-03	-5.161 E-03	-5.085 E-03	-5.190 E-03
F	4.700 E-03	4.581 E-03	4.525 E-03	4.626 E-03
$\mathcal{N}_{eq}$	max.4643	max.3416	3416	3385

**Tabelle 8.1:** Platte mit Loch; Lokale Extrema für  $\mathbf{u}_{z,32}$  bei  $t = D, E, F$



**Bild 8.4:** Platte mit Loch; a) Gleichungszahl  $\mathcal{N}_{eq}$  aufgetragen über die Zeit für 3 Netzadaptionen; b),c),d) Vergleich der Lösung  $\mathbf{u}_{z,32}(t)$ , bestimmt mit unterschiedlichen Verfahren

$t = t_{extrem}$	global	lokal	e-lokal	eigv
D	1.8 %	1.6 %	0.6 %	0.4 %
E	1.5 %	0.4 %	1.9 %	0.1 %
F	2.9 %	0.3 %	1.0 %	1.2 %

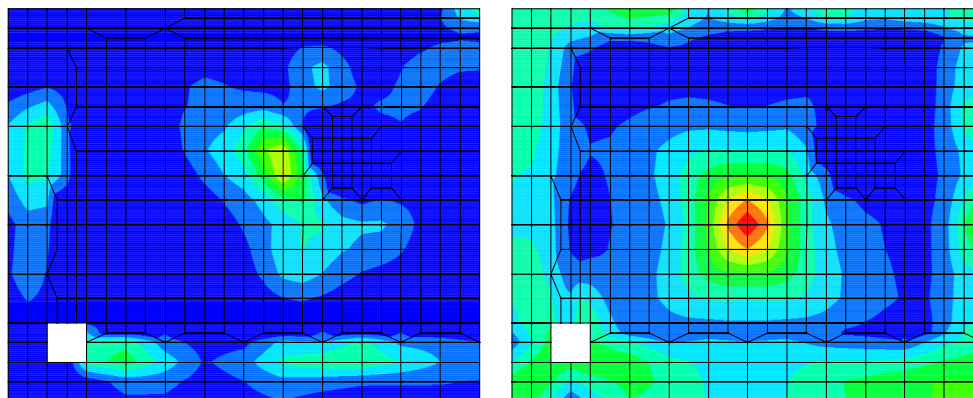
**Tabelle 8.2:** Platte mit Loch; Exakter Fehler  $\mathbf{e}_{z,32}$  bei  $t = D, E, F$  (lokale Extrema)

zunächst geringe Unterschiede in der numerischen Lösung. Markant hierfür ist aber die größere Anzahl der Gleichungen für die adaptive Methode mit globaler Fehlerkontrolle. Bei annähernd gleicher Gleichungszahl  $\mathcal{N}_{eq}$  besitzt die Lösung aller anderen Methoden annähernd die gleiche Genauigkeit, siehe Abb. 8.4b)-d). Die zahlenmäßige Auswertung der Ergebnisse für  $\mathbf{e}_{z,32}$  zeigt, daß die Verwendung des feinsten Rauggitters aus der lokalen Fehlerschätzung [e-lokal] und die Lösungsmethode II) [lokal] genaue Ergebnisse liefert, siehe Tab. 8.2. Das relative uniforme Rauggitter, resultierend aus der adaptiven Anpassung an die 1. Eigenform [eigv], liefert ähnlich gute Ergebnisse, da die Lösung dominant durch eine stationäre Schwingung in der ersten Eigenform beschrieben wird. Ein Nachteil beider Methoden ([lokal]/[e-lokal]) ist der höhere numerische Aufwand bei der Lösung. In

Abb. 8.5 und 8.6 ist die räumliche Fehlerverteilung des primalen und dualen Problems für  $t = 0.8$  ( $\mathcal{N}_{eq} = 2428$ ) und  $t = 1.2$  ( $\mathcal{N}_{eq} = 3492$ ) elementweise qualitativ wiedergegeben. Helle Bereiche symbolisieren 'großer' Elementfehler, dunklere Bereiche bedeuten 'kleiner' Elementfehler.

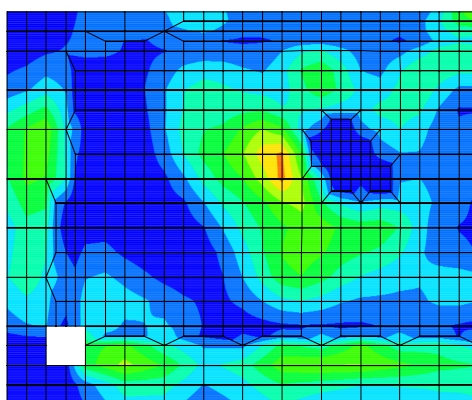
Fehlerverteilung primales Problem

Fehlerverteilung duales Problem



a)

b)



c) Überlagerung primaler Fehler  $\otimes$  dualer Fehler

**Bild 8.5:** Platte mit Loch; Kopplung von a) primaler (globaler) Fehlerverteilung mit b) dualer Fehlerverteilung zur c) Bestimmung des geschätzten lokalen Fehlers  $\tilde{\mathbf{e}}_z(32)$  bei  $t = 0.8$ ,  $\mathcal{N}_{eq} = 2428$

Zusätzlich zu Punkt 32 werden die Lösungsmethoden (I-IV) auf Punkt 17 angewendet. Für die Zeitpunkte der lokalen Extrema der Referenzlösung  $t = A, B, C$ , siehe Abb. 8.7, wurden folgende Referenzwerte bestimmt,

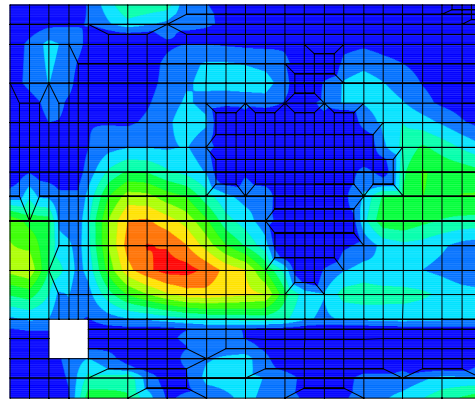
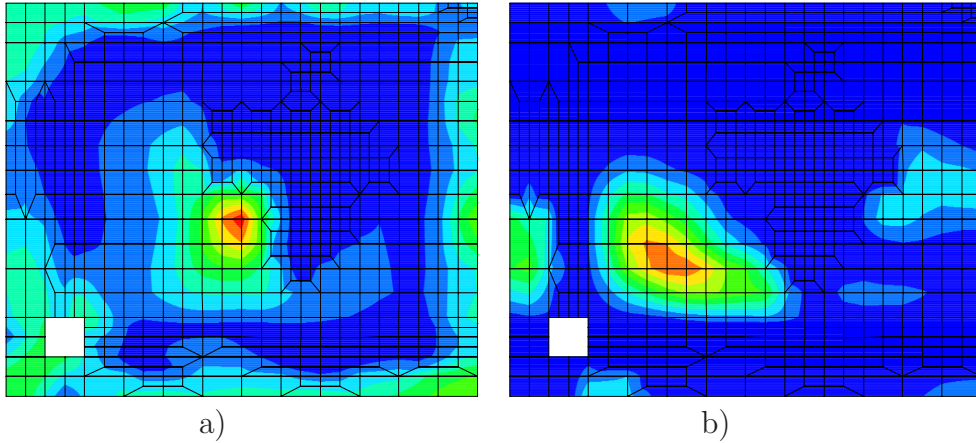
$$\begin{aligned} t = 1.68 = A & : \mathbf{u}_{z,17,ref} = 4.094 \cdot 10^{-3}, \\ t = 5.56 = B & : \mathbf{u}_{z,17,ref} = 2.826 \cdot 10^{-3}, \\ t = 7.88 = C & : \mathbf{u}_{z,17,ref} = -2.314 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Der exakte lokale Fehler wird ebenfalls bei  $t = A, B, C$  für die jeweilige Vorgehensweise ausgewertet,  $\mathbf{e}_{z,17} = |\mathbf{u}_{z,17,ref} - \mathbf{u}_{z,17}^h| / |\mathbf{u}_{z,17,ref}| \cdot 100$  [%], siehe Tabellen 8.3 und 8.4.



Fehler primales Problem

Fehler duales Problem

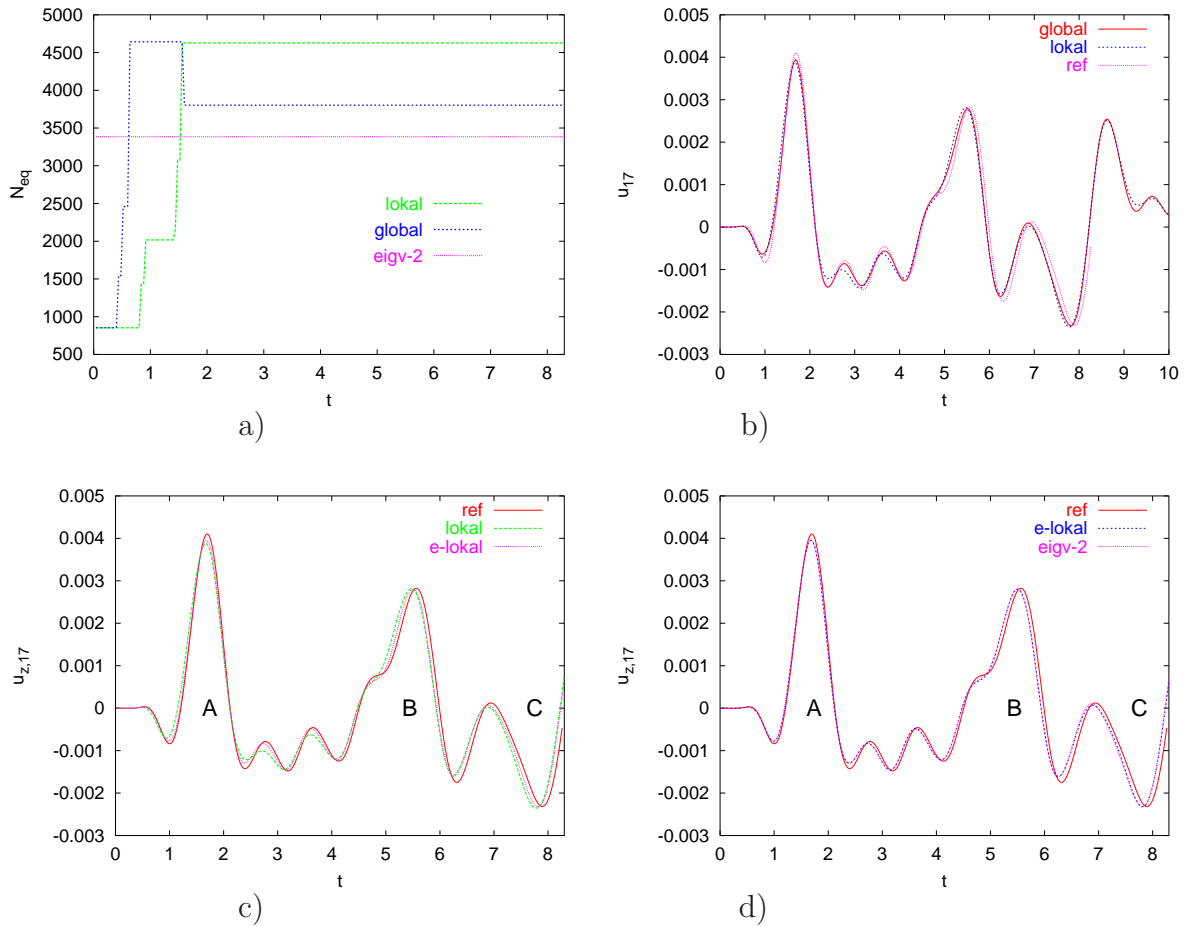
c) Überlagerung primaler Fehler  $\otimes$  dualer Fehler

**Bild 8.6:** Platte mit Loch; Kopplung von a) primaler (globaler) Fehlerverteilung mit b) dualer Fehlerverteilung zur c) Bestimmung des geschätzten lokalen Fehlers  $\tilde{e}_z(32)$  bei  $t = 1.2$ ,  $\mathcal{N}_{eq} = 3492$

$t = t_{extrem}$	global	lokal	e-lokal	eigv
A	3.947 E-03	3.703 E-03	3.955 E-03	3.904 E-03
B	2.704 E-03	2.819 E-03	2.806 E-03	2.795 E-03
C	-2.323 E-03	-2.355 E-03	-2.322 E-03	-2.317 E-03
$\mathcal{N}_{eq}$	max.4643	max.4627	4627	3385

**Tabelle 8.3:** Platte mit Loch; Lokale Extrema für  $\mathbf{u}_{z,17}$  bei  $t = A, B, C$

Grundsätzlich ist die Qualität der Ergebnisse in einer vergleichbaren Größenordnung. Die Gleichungsgröße, siehe Abb. 8.7a), infolge der lokalen Fehlerschätzung weicht aber nicht von dem entsprechenden maximalen Wert für die globale Fehlerschätzung ab. Auch die Nutzung des Raumgitters, das auf dem Schätzer für den globalen Energienormfehler in der 1.Eigenform basiert, führt ebenfalls zu einem genauen Ergebnis und dies bei ca. 25% weniger Gleichungen. Letzteres ist wiederum der Effekt der dominierenden Schwingung



**Bild 8.7:** Platte mit Loch; a) Gleichungszahl  $\mathcal{N}_{eq}$  über die Zeit aufgetragen für 3 Netzadaptionen; b),c),d) Vergleich der Lösung  $\mathbf{u}_{z,17}(t)$ , bestimmt mit unterschiedlichen Verfahren

in der ersten Eigenform.

Beim 2. Beispiel **Pavillon**, siehe Abb. 8.9, soll der lokale Verschiebungsfehler  $\mathbf{e}_{x,61}$  kontrolliert werden. Hierzu werden wiederum die oben beschriebenen vier Lösungsverfahren verwendet, [global], [lokal],[e-lokal],[eigv]. Die Schalenfläche wird durch die implizite Funktion

$$g_{shell} = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{6^2} + \frac{(z-1)^2}{4^2} - 1 = 0, \quad z \geq 0.0; \quad x \leq 1.5$$

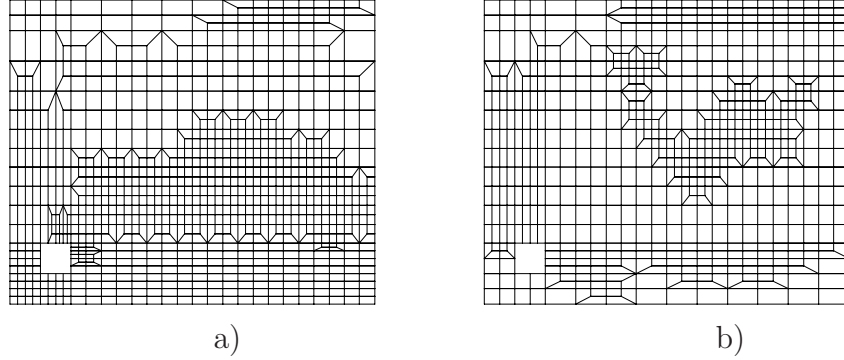
beschrieben. Die adaptierten FE-Netze erfüllen in den Gitterpunkten die Funktion  $g_{shell}$  exakt. Die Belastung  $f_0$  wird auf eine Kreisfläche mit dem Radius 0.25 gleichmäßig verteilt, um die Spannungssingularität infolge einer Punktkraft zu verhindern. Für die globale und lokale Fehlerschätzung werden folgende Fehlerschranken verwendet,

I) global:  $\epsilon_u = 5.0 \cdot 10^{-6}$ ,  $\epsilon_o = 1.76 \cdot 10^{-1}$ ,

II) lokal:  $\epsilon_o = 9.5 \cdot 10^{-6}$ .

$t = t_{extrem}$	global	lokal	e-lokal	eigv
A	3.6 %	9.5 %	3.4 %	4.6 %
B	4.3 %	0.2 %	0.7 %	2.0 %
C	0.4 %	1.8 %	0.3 %	0.1 %

**Tabelle 8.4:** Platte mit Loch; Exakter Fehler  $\mathbf{e}_{z,17}$  bei  $t = A, B, C$  (lokale Extrema)



**Bild 8.8:** Platte mit Loch, Raumgitter für a) Knoten 17 ( $t \in (1.8, 8)$ ,  $\mathcal{N}_{eq} = 4628$ ) und b) Knoten 32 ( $t \in (1.2, 8)$ ,  $\mathcal{N}_{eq} = 3492$ ) – resultierend aus lokaler Fehlerschätzung

Die Fehlerschranken für beide adaptive FE-Methoden wurden so gewählt, daß die Gleichungsanzahl bei beiden Lösungsverfahren annähernd gleich ist. Das Raumgitter, das bzgl. der 1. Eigenform adaptiert wurde, ist in Abb. 8.10 dargestellt. In Abb. 8.10 ist ebenfalls das feinste Netz enthalten, daß mittels lokaler Fehlerschätzung von  $\mathbf{u}_{x,61}$  generiert wurde. Zur Beurteilung der Qualität der Lösung  $\mathbf{u}^h(x, t)$  wurde eine Referenzlösung  $\mathbf{u}_{ref}$  auf einem Raumgitter mit kleiner Gitterweite  $h$  und  $\mathcal{N}_{eq,ref} = 61915$  generiert. Für den Zeitpunkt  $t = M$  der Maximalverschiebung wurde folgender Referenzwert ermittelt:

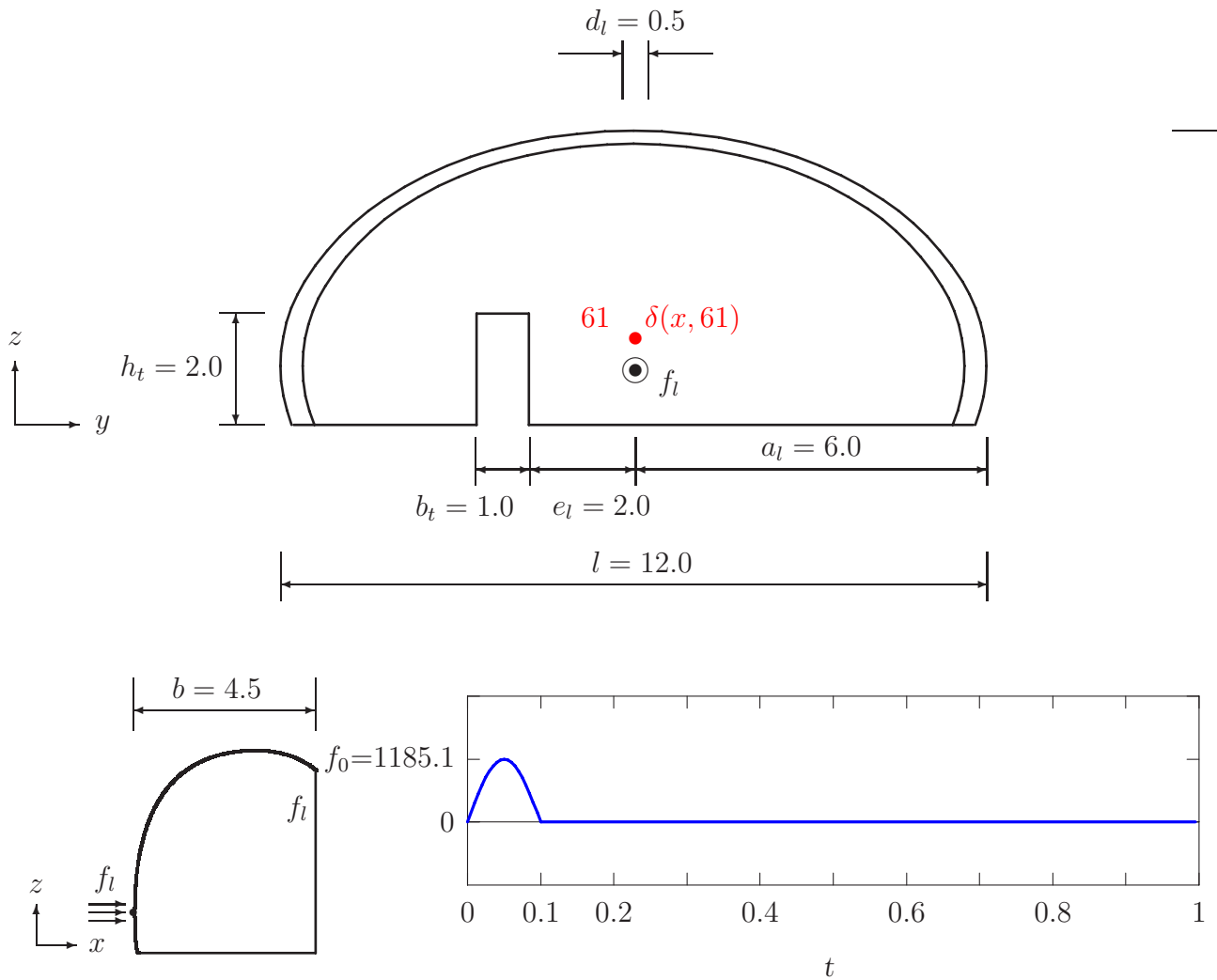
$$t = M : \mathbf{u}_{x,61,ref} = 3.466 \cdot 10^{-3}.$$

Damit wird der Fehler der jeweiligen numerischen Lösungen bei  $t = M$  bestimmt,  $\mathbf{e}_{x,61} = |\mathbf{u}_{x,61,ref} - \mathbf{u}_{x,61}^h| / \mathbf{u}_{x,61,ref} \cdot 100$  [%]. Die Maximalverschiebung für  $\mathbf{u}_{x,61}$  bei  $t = M$  und der jeweils exakte lokale Fehler  $\mathbf{e}_{z,32}$  sind in Tabelle 8.5 ausgewertet. Im Gegensatz zum Bei-

	$\mathbf{u}_{x,61}$	$\mathbf{e}_{x,61}$
Referenz	3.466 E-03	—
global	2.717 E-03	21.6 %
lokal	3.287 E-03	5.2 %
e-Lokal	3.410 E-03	1.6 %
eigv	2.613 E-03	24.6 %

**Tabelle 8.5:** Pavillon; Vergleich des exakten Verschiebungsfehlers für  $t = M$  basierend auf den Ergebnissen der vier Netzadaptionverfahren

spiel *Platte mit Loch* ist die numerische Lösung, basierend auf der adaptiven Methode mit lokalem Fehlerschätzer [lokal]/[e-lokal], deutlich genauer als die Lösung auf dem Raumgitter [eigv], das aus der Schätzung des Energienormfehlers für die 1. Eigenform resultiert,



Geometrie:  $x_{61} = -2.999$ ,  $y_{61} = 0.0$ ,  $z_{61} = 0.018$

Material:  $E = 3 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0.17$ ,  $\rho = 2500$

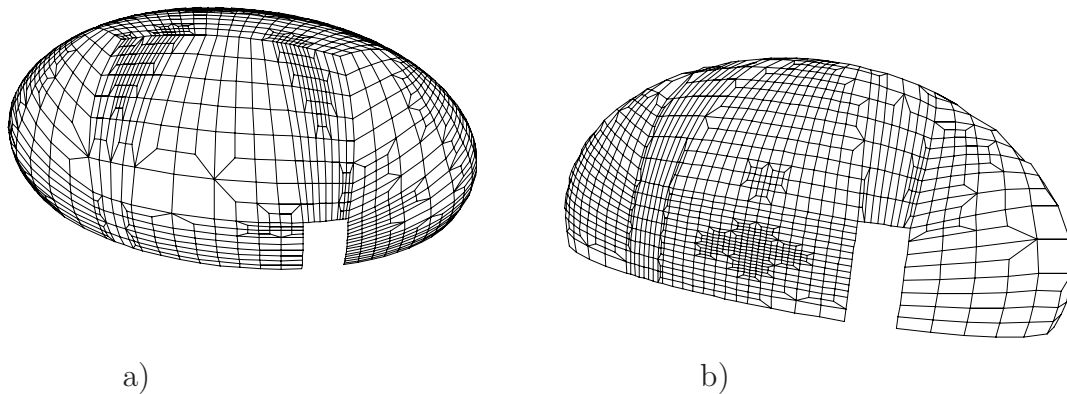
Randbedingungen:  $z = -1.0$  - 'hart' eingespannt

Belastung:  $f_0 = 1185.1$  bei  $x = -3.0$ ,  $y = 0.0$ ,  $z = 0.0$ ,  $f_l = f_0 \sin(10\pi t)$

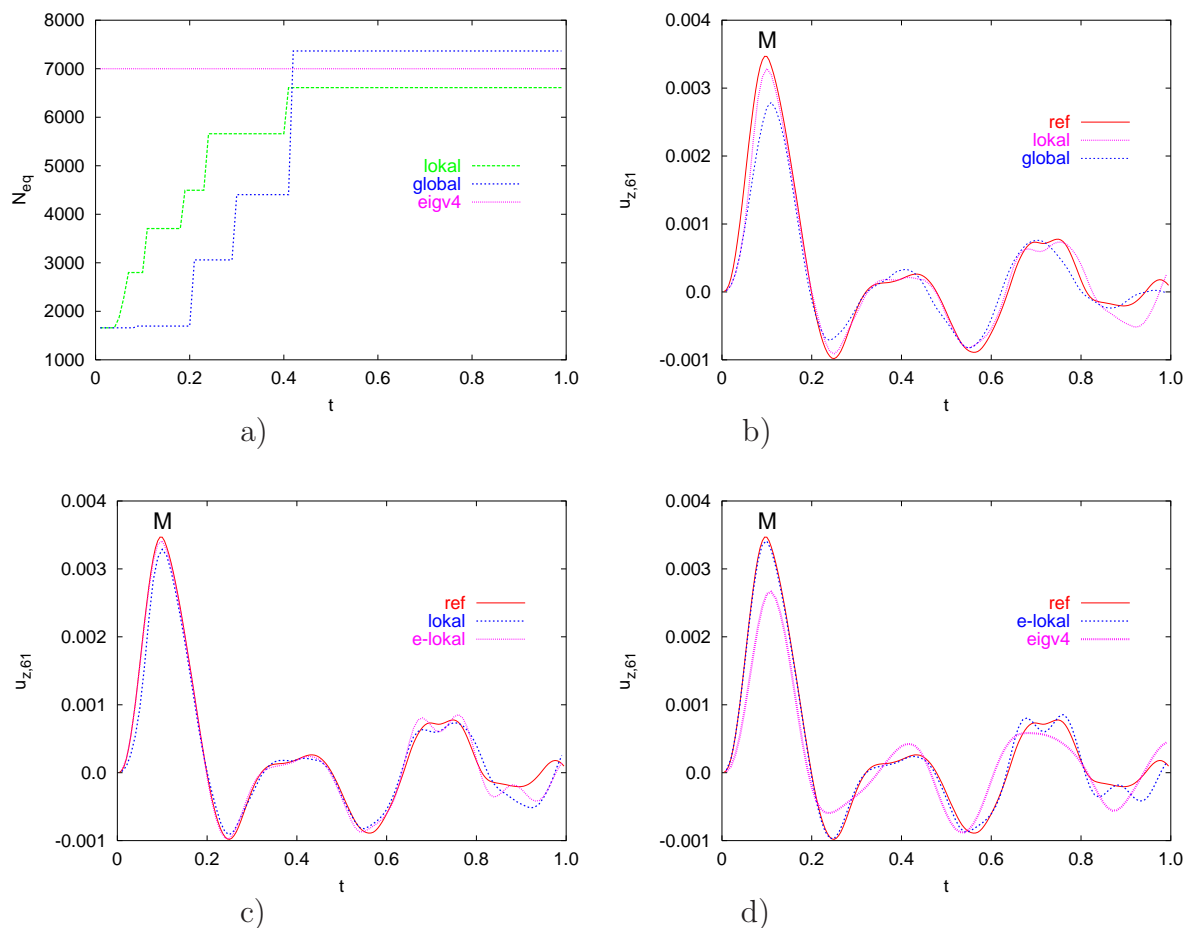
Zeitintegration: Galerkinverfahren, Gl. (5.2) bzw. Gl. (5.5),  $k = 0.005 = const.$

**Bild 8.9:** Pavillon unter Stoßbelastung, Systemdaten und Berechnungsdaten

siehe Abb. 8.11b)-d). Besonders deutlich wird diese Tatsache bei der Auswertung des exakten Verschiebungsfehlers, siehe Tabelle 8.5. Der besonders große Fehler des Raumgitters [eigv] ist eine Folge der stoßartigen Belastung. Zusätzlich zu einer stationären, niederfrequenten Schwingung beinhaltet die Gesamtlösung höherfrequente Lösungsanteile (Wellen) mit größeren Amplituden bereits zu Beginn der Betrachtung. Diese breiten sich über das gesamte Gebiet aus. Wegen dieses erkennbaren instationären Verhaltens ist die adaptive Anpassung des Raumgitters an die 1. Eigenform nicht ausreichend, d.h. auch höhere Eigenformen sind wesentlich für die Gesamtlösung. Zudem ist eine Randschicht in der Lösung erkennbar, die zu der partiell starken Verfeinerung des Raumgitters entlang des freien und des eingespannten Randes beim globalen Energienormschätzer führt.



**Bild 8.10:** Pavillon unter Stoßbelastung; Raumgitter a) adaptiert bzgl. der 1. Eigenform, b) adaptiert bzgl. lokalem Verschiebungsfehler  $\mathbf{e}_{x,61}$



**Bild 8.11:** Pavillon unter Stoßbelastung; a) Gleichungsanzahl  $\mathcal{N}_{eq}$  über der Zeit für 3 Netzadaptionsverfahren, b),c),d) Vergleich der Lösung  $\mathbf{u}_{x,61}(t)$ , bestimmt mit unterschiedlichen Lösungsverfahren

Die numerischen Ergebnisse beider Beispiele zeigen, daß die adaptive Methode mit lokalem Fehlerschätzer zu genaueren lokalen Verschiebungsgrößen führt. Dies gilt für die untersuchten Extrema der Verschiebungsgrößen. Aus Effizienzgründen wird das duale Problem hier aber nur jeweils für einen Zeitschritt gelöst,  $(t_{m-1}, t_m]$ . Der Neustart auf dem endgültig verfeinerten Raunggitter bei lokaler Fehlerschätzung führt i.d.R. zu vergleichbar guten Ergebnissen. Die hier beschriebene und getestete Methode zur Schätzung des lokalen räumlichen Diskretisierungsfehlers kann aber nicht auf Fragestellungen mit dominanten Wellenausbreitungsphänomenen, wie in Abb. 6.4 dargestellt, angewandt werden. Da sich dann die Wellenfront entlang der Charakteristik bewegt, muß auch das duale Problem im gesamten Zeitbereich gelöst werden  $t \in (t_m, 0]$ . Der numerische Aufwand hierfür ist beträchtlich. Das duale Problem verlangt dann eine besondere Behandlung; die räumliche Diskretisierung muß entweder mit höheren Ansatzfunktionen  $p > 1$  oder mit Raunggittern kleinerer Gitterweite  $h_{dual} < h_{primal}$  durchgeführt werden. Für grundsätzliche theoretische Untersuchungen und numerische Ergebnisse bei Wellenausbreitungsproblemen wird auf Bangerth/Rannacher [10] verwiesen.

## 9 Schätzung des Zeitintegrationsfehlers

In den Abschnitten 7.2, 7.5 und 8 wurde der Einfluß der räumlichen Diskretisierung auf die numerische Lösung behandelt. Hierfür wurde angenommen, daß der Zeitintegrationsfehler bei entsprechender Wahl der Zeitschrittgröße  $k_n$  vernachlässigt werden kann. Bei Verwendung der Volldiskretisierung durch Finite Elemente, d.h. der gleichzeitigen Diskretisierung von Raum und Zeit mit den hier verwendeten Galerkinverfahren, kann man auch örtlich verschiedene Zeitschrittweiten verwenden. Allerdings ist als großer Nachteil dieses Vorgehens der enorme Programmieraufwand und der erhebliche zusätzliche Speicherbedarf festzuhalten. Zudem ist dieses Vorgehen nur dann direkt anwendbar, wenn eine Formulierung für Gl. (4.9) vorliegt, die die Entkoppelung der räumlich lokalen Zeitschritte ermöglicht. Bisher wurden entsprechende Algorithmen nur für die Raumdimension 1 vorgestellt, Hulbert/Hughes [59], French/Peterson [38]. Auf Grund dieser technischen Probleme soll im folgenden entsprechend zum semidiskreten Vorgehen die Zeitschrittweite  $k$  nur zeitlich lokal für das gesamte Raugitter angepaßt werden. Weiterhin wird, wie in Abschnitt 7.2 erläutert, die Zeitschrittweite bei dominanten Wellenausbreitungsproblemen nicht verändert. Eine Änderung der Zeitschrittweite  $k_n$  wird somit nur bei stationären und instationären Schwingungsproblemen vorgenommen.

In Anlehnung an die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers, Abschnitt 7.2, wird auch beim Zeitintegrationsfehler zwischen dem lokalen Zeitintegrationsfehler und dem globalen Zeitintegrationsfehler unterschieden.

Der lokale Zeitintegrationsfehler resultiert aus der numerischen Ein-Schrittlösung  $t_{n-1} \rightarrow t_n$  der gewöhnlichen Differentialgleichung (3.32)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}(t) + (c_M\mathbf{M} + c_K\mathbf{K})\dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{d}(t) = \mathbf{F}(t) \quad \forall t : 0 < t \leq T. \quad (9.1)$$

Dabei wird angenommen, daß die numerische Lösung  $\mathbf{d}^k$  die Bedingungen zum Zeitpunkt  $t_{n-1}$  exakt erfüllt. Der lokale Zeitintegrationsfehler ist definiert als

$$\mathbf{e}_t(t_n) = \mathbf{d}(t_n) - \mathbf{d}_n. \quad (9.2)$$

$\mathbf{d}(t_n)$  ist die exakte Lösung von (3.32) mit Anfangsbedingungen bei  $t = t_{n-1}$ .  $\mathbf{d}_n$  ist die numerische Lösung  $\mathbf{d}^k$  zum Zeitpunkt  $t_n$ , die mittels eines Zeitintegrators aus Abschnitt 5 bestimmt wurde, wobei bei  $t = t_{n-1}$   $\mathbf{d}_{n-1} = \mathbf{d}(t_{n-1})$  gilt. Der lokale Geschwindigkeitsfehler ist analog definiert,

$$\dot{\mathbf{e}}_t(t_n) = \dot{\mathbf{d}}(t_n) - \dot{\mathbf{d}}_n. \quad (9.3)$$

Der globale Zeitintegrationsfehler  $\mathbf{e}_t(t_n)$  beinhaltet den Einfluß aller lokalen Zeitintegrationsfehler  $\mathbf{e}_t(t_n)$  für den gesamten Zeitbereich  $(0, t_n]$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_t(t_n) &= \mathbf{d}(t_n) - \mathbf{d}_n, \\ \dot{\mathbf{e}}_t(t_n) &= \dot{\mathbf{d}}(t_n) - \dot{\mathbf{d}}_n. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Hierfür wird die Annahme fallen gelassen, daß bei  $t = t_{n-1}$   $\mathbf{d}_{n-1} = \mathbf{d}(t_{n-1})$  gilt.

## 9.1 Schätzung des lokalen Zeitintegrationsfehlers

Da zur Schätzung des lokalen Zeitintegrationsfehlers nur der letzte Zeitintegrationsschritt berücksichtigt werden muß, sind die zugehörigen Methoden einfach zu implementieren. Es werden 2 Methoden vorgestellt, die auf der Differenzenformulierung von Newmark und dem diskontinuierlichen Galerkinverfahren (DG P1-P1) basieren.

Zur Schätzung des lokalen Zeitintegrationsfehlers für das Newmarkverfahren wird der Indikator von Riccius [80] benutzt. Die lokale Konvergenzordnung für den Geschwindigkeits- und Verschiebungsfehler mit  $2\beta = \gamma = 0.5$  ist nach Dahlquist/Björck [26]:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_l(t_n) &= \mathcal{O}(k^3), \\ \dot{\mathbf{e}}_l(t_n) &= \mathcal{O}(k^3).\end{aligned}$$

Mit der Wahl von  $\beta = 1/12$  kann die lokale Konvergenzordnung erhöht werden. Diese Kombination wird aber wegen des Verlustes der  $A$ -Stabilität nicht benutzt. Basierend auf der Taylorreihenentwicklung der exakten Lösung  $\mathbf{d}$  bzw.  $\dot{\mathbf{d}}$  bei  $t = t_n$  gibt Riccius [80] folgende Schätzwerte für den lokalen Zeitintegrationsfehler für Geschwindigkeiten und Verschiebungen an,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)_N &= \frac{k^2}{24} \left( \ddot{\mathbf{d}}_{n-2} + (2 - 24\beta)\ddot{\mathbf{d}}_{n-1} + (24\beta - 3)\ddot{\mathbf{d}}_n \right) \approx \mathbf{e}_l(t_n), \\ \tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(t_n)_N &= \frac{k}{12} \left( \ddot{\mathbf{d}}_{n-2} + (4 - 12\gamma)\ddot{\mathbf{d}}_{n-1} + (12\gamma - 5)\ddot{\mathbf{d}}_n \right) \approx \dot{\mathbf{e}}_l(t_n).\end{aligned}\quad (9.5)$$

Für  $\beta \neq 1/6$  kann auch ein Vorwärtsdifferenzenquotient eingeführt werden, der zu einem einfacheren Schätzwert für  $\mathbf{e}_l(t_n)$  führt,

$$\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)_N = k^2(1/6 - \beta) \left( \ddot{\mathbf{d}}_{n-1} - \ddot{\mathbf{d}}_n \right).$$

$N$  kennzeichnet die Beziehung zum ( $N$ )ewmarkverfahren, geschrieben als Finites Differenzenverfahren. Zunächst soll die lokale Konvergenzordnung des geschätzten Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)_N$  und  $\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(t_n)_N$  an der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}m\ddot{d} + \mu\dot{d} + cd = 0 \quad \forall t \in (0, 2], \quad \text{mit: } d(t=0) = 1.0 \quad \text{und} \quad \dot{d}(t=0) = 0.0 \\ \text{sowie: } m = 0.25, \mu = 0.0, c = 0.9\end{aligned}\quad (9.6)$$

getestet werden. Die Konvergenzordnung des lokalen Fehlers wird bei  $t = 1$  und  $t = 2$  in den Tabellen **9.1** und **9.2** dargestellt. Die Auswertung des lokalen Fehlers  $\mathbf{e}_l$  und  $\dot{\mathbf{e}}_l$  zeigt wie erwartet die Konvergenzordnung  $\mathcal{O}(k^3)$ . Der geschätzte lokale Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_l, \tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l$  sollte die gleiche Ordnung haben. Man erkennt jedoch, daß bei zu 'großem' Zeitschritt  $k$  die Konvergenzordnung kleiner ist. Eine weitere Verkleinerung der Zeitschrittweite  $k$  ergibt, daß der geschätzte lokale Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_l(1), \tilde{\mathbf{e}}_l(2), \tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(1), \tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(2)$  asymptotisch mit der korrekten Ordnung konvergiert. Diese Beobachtung zeigt sich auch bei a-posteriori Fehlerschätzern für Probleme der Elastostatik, z.B. Riccius [80], Brink [15]. Der Einfluß der physikalischen Dämpfung auf die Konvergenz des geschätzten lokalen Fehlers soll mit folgender Gleichung untersucht werden,

$$\begin{aligned}m\ddot{d} + \mu\dot{d} + cd = 0 \quad \forall t \in (0, 5], \quad \text{mit: } d(t=0) = 1.0 \quad \text{und} \quad \dot{d}(t=0) = 0.0 \\ \text{sowie: } m = 1.0, \mu = 0.5, c = 1.0.\end{aligned}\quad (9.7)$$



$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_l(1)$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(1)$	$\mathbf{e}_l(1)$	$\dot{\mathbf{e}}_l(1)$
0.2	$4.443 \cdot 10^{-3}$	$5.894 \cdot 10^{-4}$	$4.225 \cdot 10^{-3}$	$2.690 \cdot 10^{-3}$
0.1	$5.522 \cdot 10^{-4}$	$1.406 \cdot 10^{-4}$	$5.362 \cdot 10^{-4}$	$3.443 \cdot 10^{-4}$
0.05	$6.834 \cdot 10^{-5}$	$3.075 \cdot 10^{-5}$	$6.730 \cdot 10^{-5}$	$4.324 \cdot 10^{-5}$
0.025	$8.487 \cdot 10^{-6}$	$4.641 \cdot 10^{-6}$	$8.421 \cdot 10^{-6}$	$5.412 \cdot 10^{-6}$

**Tabelle 9.1:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen, ohne Dämpfung,  $m = 0.25$ ,  $c = 0.9$ , Konvergenz des geschätzten und exakten lokalen Fehlers bei  $t = 1.0$  für Verschiebungen und Geschwindigkeiten beim Newmarkverfahren

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_l(2)$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(2)$	$\mathbf{e}_l(2)$	$\dot{\mathbf{e}}_l(2)$
0.2	$1.829 \cdot 10^{-3}$	$8.110 \cdot 10^{-3}$	$2.701 \cdot 10^{-3}$	$6.729 \cdot 10^{-3}$
0.1	$2.948 \cdot 10^{-4}$	$9.626 \cdot 10^{-4}$	$3.439 \cdot 10^{-4}$	$8.533 \cdot 10^{-4}$
0.05	$4.030 \cdot 10^{-5}$	$1.144 \cdot 10^{-4}$	$4.317 \cdot 10^{-5}$	$1.071 \cdot 10^{-4}$
0.025	$5.230 \cdot 10^{-6}$	$1.387 \cdot 10^{-5}$	$5.398 \cdot 10^{-6}$	$1.340 \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 9.2:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen, ohne Dämpfung,  $m = 0.25$ ,  $c = 0.9$ , Konvergenz des geschätzten und exakten lokalen Fehlers bei  $t = 2.0$  für Verschiebungen und Geschwindigkeiten beim Newmarkverfahren

Im Gegensatz zum Einmassenschwinger ohne Dämpfung ist die Abhängigkeit der Konvergenzordnung vom Zeitschritt nicht ausgeprägt. Zudem zeigen die beide obigen Beispiele, daß der Effektivitätsindex  $\eta_l = \frac{\dot{\mathbf{e}}_l}{\mathbf{e}_l}$  bzw.  $\dot{\eta}_l = \frac{\ddot{\mathbf{e}}_l}{\dot{\mathbf{e}}_l}$  des Fehlerindicators aus Gl. (9.5) nahe '1' ist. Der Nachteil des Indicators besteht darin, daß zusätzlich zu den Beschleunigungsvektoren  $\mathbf{d}_n$  und  $\mathbf{d}_{n-1}$  der Beschleunigungsvektor  $\mathbf{d}_{n-2}$  abgespeichert werden muß. Zudem darf der Zeitschritt  $k$  zwischen  $t_{n-2}$  und  $t_n$  nicht verändert werden.

In Abschnitt 5 wurde als Alternative das Diskontinuierliche Galerkinverfahren (DG P1-P1) eingeführt,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^N \int_{k_n} (\mathbf{w}_{ut}^h, \dot{\mathbf{u}}_t^h)_\Omega + c_M (\mathbf{w}_{ut}^h, \mathbf{u}_t^h)_\Omega + c_K a(\mathbf{w}_{ut}^h, \mathbf{u}_t^h)_\Omega + a(\mathbf{w}_{ut}^h, \mathbf{u}_t^h)_\Omega + a(\mathbf{w}_u^h, \dot{\mathbf{u}}^h - \mathbf{u}_t^h)_\Omega dt + \\
& \sum_{n=2}^N (\mathbf{w}_{ut,+}^{n-1}, [\dot{\mathbf{u}}_t^{n-1}])_\Omega + a(\mathbf{w}_{u,+}^{n-1}, [\mathbf{u}_t^{n-1}])_\Omega + (\mathbf{w}_{ut,+}^0, \dot{\mathbf{u}}_t^0)_\Omega + a(\mathbf{w}_{u,+}^0, \mathbf{u}_t^0)_\Omega = (\mathbf{w}_{ut,+}^0, \dot{\mathbf{u}}_t^0)_\Omega + \\
& a(\mathbf{w}_{u,+}^0, \mathbf{u}_t^0)_\Omega + \sum_{n=1}^N \int_{k_n} (\mathbf{w}_{ut}^h, \mathbf{f}) dt \quad \forall \mathbf{w}_{ut}^h \times \mathbf{w}_u^h \in \mathcal{W}^h \times \mathcal{W}^h \subset \mathcal{W} \times \mathcal{W}. \quad (5.16)
\end{aligned}$$

An den Zeitintervallgrenzen  $t_n$  werden Sprünge in den Zustandsgrößen, Verschiebung und Geschwindigkeit, zugelassen, siehe Gl. (5.15):

$$[\mathbf{d}(t = t_n)] = \mathbf{d}_+^n - \mathbf{d}_-^n, \quad [\mathbf{d}_t(t = t_n)] = \mathbf{d}_{t,+}^n - \mathbf{d}_{t,-}^n. \quad (5.15)$$

Nach dem Vorschlag von Ruge [85] werden die Sprünge, siehe Abb. 5.1, als Indikatoren für den lokalen Zeitintegrationsfehler des DG P1-P1 Verfahrens genutzt,

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)_D &= \mathbf{d}_+^n - \mathbf{d}_-^n, \\
\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(t_n)_D &= \mathbf{d}_{t,+}^n - \mathbf{d}_{t,-}^n.
\end{aligned} \quad (9.8)$$

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_l(5)$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(5)$	$\mathbf{e}_l(5)$	$\dot{\mathbf{e}}_l(5)$
0.2	$1.635 \cdot 10^{-4}$	$1.302 \cdot 10^{-4}$	$1.585 \cdot 10^{-4}$	$1.517 \cdot 10^{-4}$
0.1	$1.999 \cdot 10^{-5}$	$1.790 \cdot 10^{-5}$	$1.985 \cdot 10^{-5}$	$1.907 \cdot 10^{-5}$
0.05	$2.480 \cdot 10^{-6}$	$2.319 \cdot 10^{-6}$	$2.482 \cdot 10^{-6}$	$2.388 \cdot 10^{-6}$
0.025	$3.105 \cdot 10^{-7}$	$2.943 \cdot 10^{-7}$	$3.103 \cdot 10^{-7}$	$2.987 \cdot 10^{-7}$

**Tabelle 9.3:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen, mit Dämpfung,  $m = 1$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $c = 1.0$ , Konvergenz des geschätzten und exakten lokalen Fehlers bei  $t = 5.0$  für Verschiebungen und Geschwindigkeiten beim Newmarkverfahren

$D$  ist die Kennzeichnung für das ( $D$ )iskontinuierliche Galerkinverfahren. Zunächst wird wie oben die Konvergenz des exakten und geschätzten Fehlers für beide Beispiele des Einmassenschwingers getestet. Im Gegensatz zum lokalen Fehlerschätzer des Newmark-

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_l(1)$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(1)$	$\mathbf{e}_l(1)$	$\dot{\mathbf{e}}_l(1)$
0.2	$1.303 \cdot 10^{-2}$	$3.772 \cdot 10^{-2}$	$1.183 \cdot 10^{-4}$	$4.915 \cdot 10^{-4}$
0.1	$2.621 \cdot 10^{-3}$	$1.021 \cdot 10^{-2}$	$6.613 \cdot 10^{-6}$	$3.167 \cdot 10^{-5}$
0.05	$5.700 \cdot 10^{-4}$	$2.631 \cdot 10^{-3}$	$3.874 \cdot 10^{-7}$	$2.003 \cdot 10^{-6}$
0.025	$1.314 \cdot 10^{-4}$	$6.663 \cdot 10^{-4}$	$2.340 \cdot 10^{-8}$	$1.250 \cdot 10^{-7}$

**Tabelle 9.4:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 0.25$ ,  $c = 0.9$ , Konvergenz des geschätzten und exakten lokalen Fehlers bei  $t_n^- = 1.0$  für Verschiebung und Geschwindigkeit beim DG P1-P1 Verfahren

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_l(2)$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(2)$	$\mathbf{e}_l(2)$	$\dot{\mathbf{e}}_l(2)$
0.2	$1.463 \cdot 10^{-2}$	$3.546 \cdot 10^{-2}$	$2.074 \cdot 10^{-4}$	$3.703 \cdot 10^{-4}$
0.1	$4.256 \cdot 10^{-3}$	$7.985 \cdot 10^{-3}$	$1.368 \cdot 10^{-5}$	$2.204 \cdot 10^{-5}$
0.05	$1.131 \cdot 10^{-3}$	$1.868 \cdot 10^{-3}$	$8.753 \cdot 10^{-7}$	$1.338 \cdot 10^{-6}$
0.025	$2.904 \cdot 10^{-4}$	$4.499 \cdot 10^{-4}$	$5.530 \cdot 10^{-8}$	$8.200 \cdot 10^{-8}$

**Tabelle 9.5:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 0.25$ ,  $c = 0.9$ , Konvergenz des geschätzten und exakten lokalen Fehlers bei  $t_n^- = 2.0$  für Verschiebung und Geschwindigkeit beim DG P1-P1 Verfahren

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_l(5)$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(5)$	$\mathbf{e}_l(5)$	$\dot{\mathbf{e}}_l(5)$
0.2	$9.278 \cdot 10^{-4}$	$1.377 \cdot 10^{-3}$	$5.214 \cdot 10^{-6}$	$2.406 \cdot 10^{-6}$
0.1	$2.090 \cdot 10^{-4}$	$3.712 \cdot 10^{-4}$	$3.227 \cdot 10^{-7}$	$1.612 \cdot 10^{-7}$
0.05	$4.914 \cdot 10^{-5}$	$9.610 \cdot 10^{-5}$	$2.004 \cdot 10^{-8}$	$1.040 \cdot 10^{-8}$
0.025	$1.188 \cdot 10^{-5}$	$2.443 \cdot 10^{-5}$	$1.250 \cdot 10^{-9}$	$0.654 \cdot 10^{-9}$

**Tabelle 9.6:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 1$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $c = 1.0$ , Konvergenz des geschätzten und exakten lokalen Fehlers bei  $t_n^- = 5.0$  für Verschiebung und Geschwindigkeit beim DG P1-P1 Verfahren

verfahrens, Gl. (9.5), besitzt der lokale Fehlerschätzer des DG P1-P1 Verfahrens  $\tilde{\mathbf{e}}_l$ ,  $\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l$

nur die Genauigkeitsordnung  $\mathcal{O}(k^2)$ , siehe Tabellen 9.4, 9.5 und 9.6. Berücksichtigt man die Genauigkeitsordnung des DG P1-P1 Verfahrens, so muß der globale Zeitintegrationsfehler  $\mathbf{e}_t$  mit  $\mathcal{O}(k^3)$  konvergieren. D.h., der lokale Zeitintegrationsfehler  $\mathbf{e}_l$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_l$  des DG P1-P1 Verfahrens müßte demzufolge mit  $\mathcal{O}(k^4)$  konvergieren, siehe Tabellen 9.4, 9.5, 9.6. Damit unterschreitet der geschätzte lokale Fehler den exakten lokalen Fehler um zwei Ordnungen. Die Ursache für dieses abweichende Verhalten liegt in der niedrigen Konvergenz von  $\mathbf{d}_+^n$  bzw.  $\dot{\mathbf{d}}_+^n$ . Für das Beispiel  $m = 0.25$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $c = 0.9$  wird daher der exakte lokale Fehler  $\mathbf{d}(t_n) - \mathbf{d}_+^n$  bzw.  $\dot{\mathbf{d}}(t_n) - \dot{\mathbf{d}}_+^n$  ermittelt, siehe Tabelle 9.7. Aus

$k$	$\mathbf{d}(2) - \mathbf{d}_+^n(2)$	$\dot{\mathbf{d}}(2) - \dot{\mathbf{d}}_+^n(2)$
0.2	$1.446 \cdot 10^{-3}$	$3.518 \cdot 10^{-2}$
0.1	$4.244 \cdot 10^{-3}$	$7.965 \cdot 10^{-3}$
0.05	$1.129 \cdot 10^{-3}$	$1.866 \cdot 10^{-3}$
0.025	$2.904 \cdot 10^{-4}$	$4.450 \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 9.7:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen, ohne Dämpfung,  $m = 0.25$ ,  $\mu = 0.0$ ,  $c = 0.9$ , Konvergenz des lokalen Fehlers in Verschiebung und Geschwindigkeit beim DG P1-P1 Verfahren für  $t_n^+ = 2.0$

Tabelle 9.7 ist klar ersichtlich, daß der lokale Fehler der numerischen Lösung  $\mathbf{d}_+^n$  mit  $\mathcal{O}(k^2)$  gegen  $\mathbf{d}(t_n)$  konvergiert. Dies begründet die extreme Abweichung des geschätzten lokalen Fehlers  $\tilde{\mathbf{e}}_l(t_n)_D$  bzw.  $\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(t_n)_D$ . Desweiteren gibt der Vergleich der Ergebnisse von Tabelle 9.7 mit dem geschätzten lokalen Fehler in Tabelle 9.5 ein Indiz dafür, daß mit dem Indikator (9.8) letztlich der lokale Fehler bei  $t = t_n^+$  geschätzt wird. Basierend auf den vorher beschriebenen Indikatoren, Gl. (9.5) und (9.8), für den lokalen Zeitintegrationsfehler wird im folgenden Abschnitt eine Schätzung für den globalen Zeitintegrationsfehler entwickelt.

## 9.2 Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers

Aus den vorherigen Ergebnissen und Untersuchungen in Abschnitt 6 gilt folgende a-priori Fehlerschätzung für den lokalen Zeitintegrationsfehler, Hairer et al. [46],

$$\|\mathbf{e}_l(t_m)\| \leq Ck^s, \quad (9.9)$$

mit:  $\mathbf{e}_l(t_m) = \mathbf{d}(t = t_m) - \mathbf{d}_m$ ,  $C > 0$

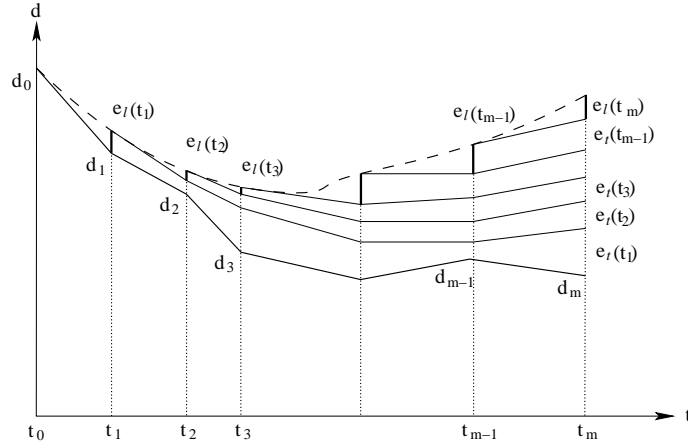
$\|\cdot\|$  ist hierbei eine beliebig gewählte Norm,  $s - 1$  steht für die Genauigkeitsordnung des Verfahrens, siehe Abschnitt 6. Im Unterschied zum lokalen Zeitintegrationsfehler werden die Annahmen  $\mathbf{d}(t_{n-1}) = \mathbf{d}_{n-1}$  und  $\dot{\mathbf{d}}(t_{n-1}) = \dot{\mathbf{d}}_{n-1}$  aufgegeben, siehe Gl. (9.2,9.3) bzw. Gl. (9.4). Die einfache Summation aller lokalen Fehleranteile zur Bestimmung des globalen Fehlers  $\mathbf{e}_t$  führt zu einer extremen Überschätzung des exakten globalen Zeitintegrationsfehlers.

Vielmehr muß der Transport der lokalen Fehleranteile bis zu  $t = t_m$  berücksichtigt werden, erst danach können alle gefilterten lokalen Fehler  $\mathbf{e}_l(t_i)$  zum globalen Fehler  $\mathbf{e}_t$  bei  $t = t_m$

akkumuliert werden, siehe Abb. ( 9.1),

$$\mathbf{e}_t(t_m) = \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{e}_t(t_i) + \mathbf{e}_l(t_m). \quad (9.10)$$

Für Differenzenverfahren liegen von Hairer et al.[46] bzw. Stoer/Burlisch [90] a-priori



**Bild 9.1:** Schematische Darstellung der Fortpflanzung des lokalen Zeitintegrationsfehlers  $e_l(t_n)$  zum globalen Fehleranteil  $e_t(t_n)$ , aus Hairer et al. [46]

Fehlerabschätzungen für den globalen Zeitintegrationsfehler vor,

$$\|\mathbf{e}_t(t_m)\| \leq k^{s-1} \frac{C e^{L(t_m-t_0)} - 1}{L}, \text{ mit: } L \dots \text{ Lipschitzkonstante, } C > 0. \quad (9.11)$$

Ähnlich Fehlerabschätzungen gibt Estep [32, 31] für kontinuierliche und diskontinuierliche Galerkinverfahren an,

$$|\mathbf{e}_t(t_m)|_{[0,t_m]} \leq C (1 + Lt_m e^{CLt_m})^{1/2} \max_{i \leq m} k_i^{s-1} |\mathbf{d}^{(s-1)}|_{L_m}. \quad (9.12)$$

Wesentlich hierbei ist, daß durch den Übergang zum globalen Zeitintegrationsfehler eine Genauigkeitsordnung verloren geht.

Basierend auf dem lokalen Fehlerschätzer (9.5) für das Newmarkverfahren (N) hat Riccius [80] einen Indikator für den globalen Zeitintegrationsfehler abgeleitet,

$$\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_N = \frac{t_m}{k_m} \tilde{\mathbf{e}}_l(t_m)_N, \quad (9.13)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_l(t_m)_N = \frac{t_m}{k_m} \tilde{\mathbf{e}}_l(t_m)_N. \quad (9.14)$$

Im Unterschied zur Akkumulation aller unterschiedlichen lokalen Fehler  $\mathbf{e}_l(t_i)$  wird hier angenommen, daß alle lokalen Fehler  $\mathbf{e}_l(t_i)$  für  $t < t_m$  denselben Anteil zum globalen Fehler  $\mathbf{e}_t(t_i)$  liefern.

Für das DG P1-P1 Verfahren (D) wird wiederum der Sprung bei  $t = t_m$  in den Zustandsgrößen, siehe Gl. (9.8), benutzt, um den globalen Zeitintegrationsfehler zu schätzen,

$$\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_D = \tilde{\mathbf{e}}_l(t_m)_D, \quad (9.15)$$

$$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_t(t_m)_D = \tilde{\dot{\mathbf{e}}}_l(t_m)_D. \quad (9.16)$$

Im Kapitel 5 wurde die Äquivalenz zwischen der Differenzenformulierung und Galerkinformulierung des Newmarkverfahrens angegeben. Als Konsequenz kann das Dualitätsprinzip zur Fehlerschätzung benutzt werden. Die Übertragung des Dualitätsprinzips von der Nutzung bei elliptischen Differentialgleichungen auf die Fehlerschätzung bei der numerischen Lösung hyperbolischer Differentialgleichungen ist in Bangerth/Rannacher [10] zu finden. Grundlage der Untersuchungen war die Wellengleichung als Sonderfall der Cauchyschen Bewegungsgleichung, geschrieben als Differentialgleichung 1. Ordnung bzgl.  $t$ . Bei Maute [70] ist das Dualitätsprinzip zur Fehlerschätzung lokaler Größen in allgemeiner Form für die Cauchysche Bewegungsgleichung zu finden. Estep [32, 31] nutzte diese Technik auch zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers für gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung  $\dot{\mathbf{d}} - \mathbf{g}(\mathbf{d}, t) = \mathbf{0}$ ,

$$|\mathbf{e}(t_m)| \leq S_m \max_{i \leq m} k^{s-1} \left| \frac{d^s \mathbf{r}}{dt^s} \right|_{I_m}, \quad (9.17)$$

mit:  $\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}}^k - \mathbf{g}(\mathbf{d}^k, t) \dots$  Residuum ,

$\mathbf{d}^k \dots$  Näherungslösung, Polynom  $s$ -ter Ordnung für  $\mathbf{d}$ .

$S_m$  ist der Stabilitätsfaktor, der die Akkumulation des lokalen Fehlers bis  $t = t_m$  mißt. Dieser wird mit Hilfe eines dualen Hilfsproblems bestimmt. Grundsätzlich besitzen die Fehlerindikatoren (9.13), (9.14), (9.15), (9.16) die gleiche Struktur wie (9.17).

Ein analoges Vorgehen wie in Gl.(9.17) wird nun zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers der numerischen Lösung linearer und nichtlinearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen vorgestellt. Ausgangspunkt der folgenden Untersuchungen sind Starrkörperprobleme bzw. die schwache Form der nichtlinearen 1. Cauchyschen Bewegungsgleichung (3.17). Unter Berücksichtigung des Separationsansatzes (3.24) und bei Verwendung endlich dimensionaler Funktionenräume (räumliche Diskretisierung),  $\mathcal{V}^h \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$  resultiert daraus folgende nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichung,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{n}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}, t) = \mathbf{0} \quad \forall t > 0, \quad \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}}, \quad \mathbf{M} \text{ positiv definit}, \quad (9.18)$$

mit den Anfangsbedingungen bei  $t = 0$  :  $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}(t = 0)$  ,  $\dot{\mathbf{d}}_0 = \dot{\mathbf{d}}(t = 0)$  .

Die analytische Lösung  $\mathbf{d} = \mathbf{d}(t)$  muß die Gleichung (9.18) zu jedem beliebigen Zeitpunkt  $t > 0$  erfüllen. Die Dimension des Systems ist  $\mathcal{N}_{eq}$ . Um die Lösbarkeit und Eindeutigkeit von (9.18) zu gewährleisten, muß der Vektor  $\mathbf{n}(t, \dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) : (\mathbb{R}, \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}}, \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}}$  die Lipschitzbedingung erfüllen, Stoer/Burlisch [90];

$$\|\mathbf{n}(t, \dot{\mathbf{d}}_1, \mathbf{d}_1) - \mathbf{n}(t, \dot{\mathbf{d}}_2, \mathbf{d}_2)\| \leq \mathcal{L} \|\mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2\| \quad \text{mit } \mathcal{L} > 0. \quad (9.19)$$

$\mathbf{d}_2$  und  $\mathbf{d}_1$  sind zwei unterschiedliche Lösungen, die aus verschiedenen Anfangsbedingungen resultieren. Damit ist auch die stetige Abhängigkeit der Lösung  $\mathbf{d}$  von den Anfangsbedingungen gewährleistet. Die Lipschitzbedingung (9.19) kann durch den Mittelwertsatz der

Differentialrechnung ersetzt werden, aus dem die Bedingungen für die partiellen Ableitungen, die Funktionalmatrix  $D_{\mathbf{d}\mathbf{n}}$  (Jacobimatrix), folgen:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{d}\mathbf{n}} &= \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial \mathbf{d}_j} (i, j = 1 \dots \mathcal{N}_{eq}) \text{ stetig und beschränkt} \quad \text{und} \\ D_{\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n}} &= \frac{\partial \dot{\mathbf{n}}_i}{\partial \dot{\mathbf{d}}_j} (i, j = 1 \dots \mathcal{N}_{eq}) \text{ stetig und beschränkt} . \end{aligned} \quad (9.20)$$

Existiert die Jacobimatrix  $D_{\mathbf{d}\mathbf{n}}$  bzw.  $D_{\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n}}$ , dann ist die Lösung  $\mathbf{d}$  von Gleichung (9.18) stetig differenzierbar und stetig abhängig von den Anfangsbedingungen. Alle bisher benutzten gewöhnlichen Differentialgleichungen erfüllen die Bedingung (9.19,9.20). Für die anschließend verwendeten nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen kann dies vorab ebenfalls garantiert werden. Die verwendeten Systeme sind konservativ, damit ist die Gesamtenergie immer beschränkt.

In Abschnitt 5 wurde auf die Äquivalenz zwischen Differenzenansatz und Galerkinformulierung für das Newmarkverfahren hingewiesen. Wird nun die zugehörige diskretisierte Variationsformulierung (5.5),

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{g}^k \left( \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{K}\mathbf{d}^k - \mathbf{F} \right) dt = 0 \quad \forall \mathbf{g}^k \in \mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}, \quad (5.5)$$

von der Variationsformulierung

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{g}^k \left( \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} - \mathbf{F} \right) dt = 0 \quad \forall \mathbf{g}^k \in \mathcal{V}^k \subset \mathcal{V} \quad (9.21)$$

abgezogen, resultiert daraus die Orthogonalität des Residuums  $\mathbf{R}$  der Differentialgleichung.

$$\begin{aligned} \int_0^{t_m} \mathbf{g}^k \cdot \mathcal{D}\mathbf{e} dt &= 0, \quad \mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{d}^k \\ \text{mit : } \mathcal{D}\mathbf{e} &= \mathbf{M}(\ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{d}}^k) + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{d}}^k) + \mathbf{K}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^k) \\ &= \mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e} \\ &= - \left( \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}^k + \mathbf{K}\mathbf{d}^k \right) + \mathbf{F} = \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (9.22)$$

In Anlehnung an Bangerth [9] und Maute [70] kann zur primalen Differentialgleichung (9.1) durch partielle Integration auch die adjungierte bzw. duale Differentialgleichung mit der dualen Variable  $\mathbf{y}$  angegeben werden,

$$\mathcal{D}^*\mathbf{y} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \forall t < t_m, \quad (9.23)$$

mit den Endbedingungen bei  $t = t_m$ :  $\mathbf{y}_m = \mathbf{y}(t = t_m)$ ,  $\dot{\mathbf{y}}_m = \dot{\mathbf{y}}(t = t_m)$ .

Die Wahl von  $\mathbf{y}_m$  und  $\dot{\mathbf{y}}_m$  erscheint zunächst willkürlich, wird aber im folgenden beschrieben.

Die Differentialgleichung des Fehlers  $\mathcal{D}\mathbf{e} = \mathbf{R}$  wird mit der Lösung des dualen Problems  $\mathbf{y}$  gewichtet,

$$\int_0^{t_m} \mathbf{y} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}\mathbf{e}) dt = \int_0^{t_m} \mathbf{y}\mathbf{R} dt. \quad (9.24)$$

Aus der partiellen Integration von Gl. (9.24) gewinnt man Informationen über die Wahl der dualen Anfangsbedingungen, die aus der Wahl der Fehlergröße folgen,

$$\int_0^{t_m} \mathbf{y} \mathcal{D}\mathbf{e} dt = \int_0^{t_m} \mathbf{e} \mathcal{D}^*\mathbf{y} dt + \mathbf{y} \mathbf{M}\dot{\mathbf{e}} \Big|_0^T - \dot{\mathbf{y}} \mathbf{M}\mathbf{e} \Big|_0^{t_m} + \mathbf{y} \mathbf{C}\mathbf{e} \Big|_0^{t_m}. \quad (9.25)$$

Da die Anfangsbedingungen des primalen Problems von der numerischen Lösung  $\mathbf{d}^k$  exakt erfüllt werden sollen, fallen alle Randterme bei  $t = 0$  weg,  $\mathbf{e}(t = 0) = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{e}}(t = 0) = \mathbf{0}$ .

Die spezielle Wahl  $\mathbf{y}_m = \mathbf{y}(t_m) = \mathbf{0}$  führt zu

$$\int_0^{t_m} \mathbf{y} \mathcal{D}\mathbf{e} dt = \int_0^{t_m} \mathbf{e} \mathcal{D}^*\mathbf{y} dt - \dot{\mathbf{y}} \mathbf{M}\mathbf{e} \Big|^{t_m}.$$

Da  $\mathbf{y}$  die Lösung des dualen Problems (9.23) ist, gilt  $\mathcal{D}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ,

$$\int_0^{t_m} \mathbf{y}\mathbf{R} dt = -\dot{\mathbf{y}} \mathbf{M}\mathbf{e}_t \Big|^{t_m}. \quad (9.26)$$

Der globale Zeitintegrationsfehler zum Zeitpunkt, gemessen in der Euklidischen Norm  $|\mathbf{e}_t(t_m)|$ , ist:

$$|\mathbf{e}_t(t = t_m)| = \int_0^{t_m} \mathbf{y}\mathbf{R} dt. \quad (9.27)$$

Daraus folgt die zugehörige Anfangsbedingung  $\dot{\mathbf{y}}(t_m)$ :

$$-\dot{\mathbf{y}} \mathbf{M}\mathbf{e}_t \Big|^{t_m} = |\mathbf{e}_t(t_m)|.$$

Durch geschickte Umformung erhält man

$$\dot{\mathbf{y}}(t_m) = \frac{-(\mathbf{M}^{-T}\mathbf{e}_t(t_m))^T}{|\mathbf{e}_t(t_m)|}. \quad (9.28)$$

Kennt man die analytische Lösung des dualen Problems (9.23), so kann man den globalen Zeitintegrationsfehler in der euklidischen Norm  $|\cdot|$  bestimmen. Das Paradoxon ist hier, daß der vollständige Vektor  $\mathbf{e}_t(t = t_m)$  bzw. die normierte Verteilung bekannt sein muß, um  $\mathbf{e}_t(t = t_m)$  selbst zu bestimmen. Möchte man aber den globalen Zeitintegrationsfehler

$\mathbf{e}_{t,i}$  eines einzelnen Freiwertes  $i$  bestimmen, so existiert diese Schwierigkeit nicht, da man aus

$$\dot{\mathbf{y}} = -(\mathbf{M}^{-T}\mathbf{I})^T, \quad (9.29)$$

mit:  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq}}$ ,  $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ , außer:  $\mathbf{I}_i = 1$

$$\mathbf{e}_{t,i}(t = t_m) = \int_0^{t_m} \mathbf{y} \mathbf{R} dt \quad (9.30)$$

ableiten kann.

Eine weiterer Zugang zur Bestimmung des globalen Zeitintegrationsfehlers ist die Verwendung von  $\dot{\mathbf{y}}$  als Testfunktion für Gleichung (9.22),

$$\int_0^{t_m} \dot{\mathbf{y}} \mathcal{D} \mathbf{e} dt = \int_0^{t_m} \dot{\mathbf{y}} \mathbf{R} dt. \quad (9.31)$$

Partielles Integrieren und die Berücksichtigung von  $\mathbf{e}_t(t = 0) = \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{e}}_t(t = 0) = \mathbf{0}$  liefert die Bestimmungsgleichung des globalen Zeitintegrationsfehlers

$$\int_0^{t_m} \dot{\mathbf{y}} \mathbf{R} dt = \dot{\mathbf{y}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}} \Big|^{t_m} + \mathbf{y} \mathbf{K} \mathbf{e} \Big|^{t_m}. \quad (9.32)$$

Setzt man als Anfangsbedingungen des dualen Problems

$$\mathbf{y}(t = t_m) = \mathbf{e}_t(t = t_m), \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{y}}(t = t_m) = \dot{\mathbf{e}}_t(t = t_m), \quad (9.33)$$

so erhält man den globalen Zeitintegrationsfehler, gemessen in der Gesamtenergienorm,

$$\left( \|\mathbf{e}_t(t_m)\|_a^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_t(t_m)\|_{L_2}^2 \right)^{1/2} = \left( \int_0^{t_m} \dot{\mathbf{y}} \mathbf{R} dt \right)^{1/2}. \quad (9.34)$$

Das Problem der Wahl der Anfangsbedingungen besteht jedoch auch hier.

Im weiteren wird folgende Heuristik für die duale Anfangsgeschwindigkeit genutzt, die bei linearen Problemstellungen mit 2 Koordinaten ( $\mathcal{N}_{eq} = 2$ ) brauchbare Ergebnisse liefert,

$$\dot{\mathbf{y}}(t = t_m) = \frac{(-\mathbf{M}^{-T} \mathbf{e}_l(t_m))^T}{|\mathbf{e}_l(t_m)|} \approx \frac{(-\mathbf{M}^{-T} \tilde{\mathbf{e}}_l(t_m))^T}{|\tilde{\mathbf{e}}_l(t_m)|}. \quad (9.35)$$

D.h., der lokale Fehler bzw. der lokale geschätzte Fehler der Verschiebung aus Abschnitt 9.1 wird als Schätzung für die globale Fehlerverteilung der Verschiebung genutzt. Grundsätzlich wird die duale Lösung numerisch ermittelt, d.h. man erhält zusammen mit der Heuristik (9.35) für die Anfangsbedingungen einen Schätzwert für den globalen Zeitintegrationsfehler. In den folgenden Beispielen wird der globale Zeitintegrationsfehler der Verschiebung in der euklidischen Norm geschätzt,

$$|\mathbf{e}_t(t_m)| \approx |\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_C| = \int_0^{t_m} \mathbf{y}_h \mathbf{R} dt. \quad (9.36)$$



Der Buchstabe  $C$  bezeichnet die Fehlerschätzung, die auf dem ( $C$ )ontinuierlichen Galerkinverfahren basiert.

Für die Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers bei  $t = t_m$  wird die numerische Lösung des dualen Problems benötigt. Hierzu wird das Zeitintegrationsschema des primalen Problems benutzt,

$$\sum_{n=m}^1 \int_{t_n}^{t_{n-1}} \mathbf{g}^k (\mathbf{M}\dot{\mathbf{y}}^k - \mathbf{C}\mathbf{y}^k + \mathbf{K}\mathbf{y}^k) dt = 0 \quad \forall \mathbf{g}^k \in \mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}. \quad (9.37)$$

Faßt man obige Aussagen kompakt zusammen, dann besteht der Algorithmus zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers aus folgenden drei Punkten:

- a) Löse das primale Problem bis  $t = t_m$ , Gl. (5.5), und bestimme Residuum  $\mathbf{R}(t)$ ,
- b) Löse das duale Problem von  $t = t_m$  bis  $t = 0$  mit demselben Zeitintegrationsschema, Gl. (9.37) und derselben Zeitschrittweite  $k = k(t)$  auf dem Raumgitter des primalen Problems,
- c) Werte  $\int_0^{t_m} \mathbf{y}_h \mathbf{R} dt$  aus:  $\rightarrow |\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_C|$

Die Schätzer des globalen Zeitintegrationsfehlers, Gl. (9.36,9.15,9.13), werden zunächst auf Konvergenz und Genauigkeit am Einmassenschwinger getestet. Hierzu werden die oben benutzten Parameterkombination verwendet, Gl. (9.6,9.7). Der globale Zeitintegrationsfehler wird bei  $t = 2$  und  $t = 5$  untersucht.

Beim **DG P1-P1 Verfahren** wird der exakte Fehler bei  $t = t_m^-$  und  $t = t_m^+$  mit  $\mathbf{e}_t(t_m^-)_D = \mathbf{d}(t = t_m) - \mathbf{d}_-^m$  und  $\mathbf{e}_t(t_m^+)_D = \mathbf{d}(t = t_m) - \mathbf{d}_+^m$  bestimmt. Für den Geschwindigkeitsfehler sind die entsprechenden Werte einzusetzen. Die Ergebnisse des globalen

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_t(2)_D$	$\tilde{\dot{\mathbf{e}}}_t(2)_D$	$\mathbf{e}_t(2^-)$	$\dot{\mathbf{e}}_t(2^-)$	$\mathbf{e}_t(2^+)$	$\dot{\mathbf{e}}_t(2^+)$
0.2	$1.463 \cdot 10^{-2}$	$3.546 \cdot 10^{-2}$	$2.072 \cdot 10^{-3}$	$3.698 \cdot 10^{-3}$	$1.256 \cdot 10^{-2}$	$3.176 \cdot 10^{-2}$
0.1	$4.256 \cdot 10^{-3}$	$7.984 \cdot 10^{-3}$	$2.736 \cdot 10^{-4}$	$4.407 \cdot 10^{-4}$	$3.982 \cdot 10^{-3}$	$7.544 \cdot 10^{-3}$
0.05	$1.130 \cdot 10^{-3}$	$1.867 \cdot 10^{-3}$	$3.501 \cdot 10^{-5}$	$5.355 \cdot 10^{-5}$	$1.096 \cdot 10^{-3}$	$1.814 \cdot 10^{-3}$
0.025	$2.904 \cdot 10^{-4}$	$4.500 \cdot 10^{-4}$	$4.416 \cdot 10^{-6}$	$6.576 \cdot 10^{-6}$	$2.860 \cdot 10^{-4}$	$4.434 \cdot 10^{-4}$

**Tabelle 9.8:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 1.0$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $c = 1.0$ , Konvergenz des geschätzten Fehlers (Gl. (9.15,9.16)) und exakten globalen Fehlers bei  $t_m^- = 2.0$  bzw.  $t_m^+ = 2.0$  für Verschiebung und Geschwindigkeit beim DG P1-P1 Verfahren

geschätzten Fehler zeigen, siehe Tabellen 9.8 und 9.9, daß der Sprung in den Zustandsgrößen den exakten Fehler bei  $t = t_m^+$  schätzt. Der exakte Fehler bei  $t = t_m^-$  besitzt dieselbe Ordnung wie der Verfahrensfehler  $\mathcal{O}(k^3)$ . Da die Konvergenzordnung des globalen Fehlers bei  $t = t_m^+$  nur  $\mathcal{O}(k^2)$  ist, überschätzt der Sprungindikator den exakten Fehler bei  $t = t_m^-$

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_t(5)D$	$\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_t(5)D$	$\mathbf{e}_t(5^-)$	$\dot{\mathbf{e}}_t(5^-)$	$\mathbf{e}_t(5^+)$	$\dot{\mathbf{e}}_t(5^+)$
0.2	$9.278 \cdot 10^{-4}$	$1.377 \cdot 10^{-3}$	$1.303 \cdot 10^{-4}$	$6.018 \cdot 10^{-4}$	$7.975 \cdot 10^{-4}$	$1.317 \cdot 10^{-3}$
0.1	$2.090 \cdot 10^{-4}$	$3.712 \cdot 10^{-4}$	$1.613 \cdot 10^{-5}$	$8.052 \cdot 10^{-6}$	$1.928 \cdot 10^{-4}$	$3.632 \cdot 10^{-4}$
0.05	$4.914 \cdot 10^{-5}$	$9.610 \cdot 10^{-5}$	$2.004 \cdot 10^{-6}$	$1.039 \cdot 10^{-6}$	$4.714 \cdot 10^{-5}$	$9.505 \cdot 10^{-5}$
0.025	$1.188 \cdot 10^{-5}$	$2.442 \cdot 10^{-5}$	$2.474 \cdot 10^{-5}$	$1.248 \cdot 10^{-7}$	$1.163 \cdot 10^{-5}$	$2.430 \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 9.9:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 1.0$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $c = 1.0$ , Konvergenz des geschätzten und exakten globalen Fehlers bei  $t_m^- = 5.0$  bzw.  $t_m = 5.0^+$  für Verschiebung und Geschwindigkeit beim DG P1-P1 Verfahren

$k$	$\tilde{\mathbf{e}}_t(2)_N$	$\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_t(2)_N$	$\tilde{\mathbf{e}}_t(2)_C$	$\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_t(2)_C$	$\mathbf{e}_t(2)$	$\dot{\mathbf{e}}_t(2)$
0.2	$1.828 \cdot 10^{-2}$	$8.113 \cdot 10^{-2}$	$2.531 \cdot 10^{-2}$	$6.842 \cdot 10^{-2}$	$2.629 \cdot 10^{-2}$	$6.829 \cdot 10^{-2}$
0.1	$5.897 \cdot 10^{-3}$	$1.925 \cdot 10^{-2}$	$6.766 \cdot 10^{-3}$	$1.714 \cdot 10^{-2}$	$6.829 \cdot 10^{-3}$	$1.713 \cdot 10^{-2}$
0.05	$1.611 \cdot 10^{-3}$	$4.577 \cdot 10^{-3}$	$1.720 \cdot 10^{-3}$	$4.288 \cdot 10^{-3}$	$1.724 \cdot 10^{-3}$	$4.287 \cdot 10^{-3}$
0.025	$4.183 \cdot 10^{-4}$	$1.109 \cdot 10^{-3}$	$4.318 \cdot 10^{-4}$	$1.072 \cdot 10^{-3}$	$4.320 \cdot 10^{-4}$	$1.072 \cdot 10^{-3}$

**Tabelle 9.10:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 1.0$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $c = 1.0$ , Konvergenz des geschätzten globalen Fehlers  $\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_N$  (9.13) bzw.  $\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_t(t_m)_C$  (9.29) und exakten globalen Fehlers der numerischen Verschiebung und Geschwindigkeit bei  $t_m = 2.0$  für das Newmarkverfahren

beträchtlich. Andererseits besitzt der Sprungindikator einen Effektivitätsindex  $\eta = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m^+)}{\mathbf{e}_t(t_m^+)}$  für  $t = t_m^+$ , der nahe '1' ist.

Der geschätzte Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_C$ , der auf der **kontinuierlichen Galerkinformulierung des Newmarkverfahrens** basiert, besitzt einen Effektivitätsindex  $\eta = \frac{\tilde{\tilde{\mathbf{e}}}_t(t_m)_C}{\mathbf{e}_t(t_m)_C}$ , der ebenfalls nahe '1' liegt, siehe Tabellen 9.10 und 9.10 – Spalten 2 und 3. Beim Fehlerschätzer von Riccius  $\tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)_N$ , Gl. (9.13), ist zu beobachten, daß erst bei genügend kleiner Zeitschrittweite die korrekte Konvergenzordnung  $\mathcal{O}(k^2)$  erreicht wird. Die Qualität des geschätzten Fehlers ist zunächst auch abhängig von der Zeitschrittweite, siehe Tabellen 9.10 und 9.11 – Spalte 2 und 3.

### System mit 2 Freiheitsgraden

Die oben beschriebenen Schätzer für den globalen Zeitintegrationsfehler werden zunächst auch an Systemen mit 2 Freiheitsgraden getestet. Das einfachste Modell ist der lineare Zweimassenschwinger, siehe Abb. (9.2), für den die folgende Matrizenform gilt:

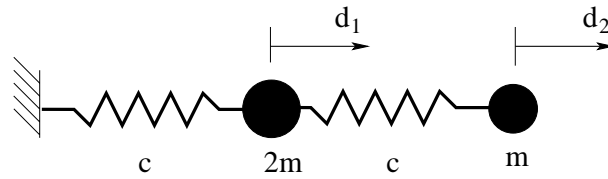
$$\begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{d}_1 \\ \ddot{d}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 200 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{für } t > 0,$$

mit den Anfangsbedingungen:  $\begin{bmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \end{bmatrix}$  und  $\begin{bmatrix} \dot{d}_1^0 \\ \dot{d}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$ . (9.38)

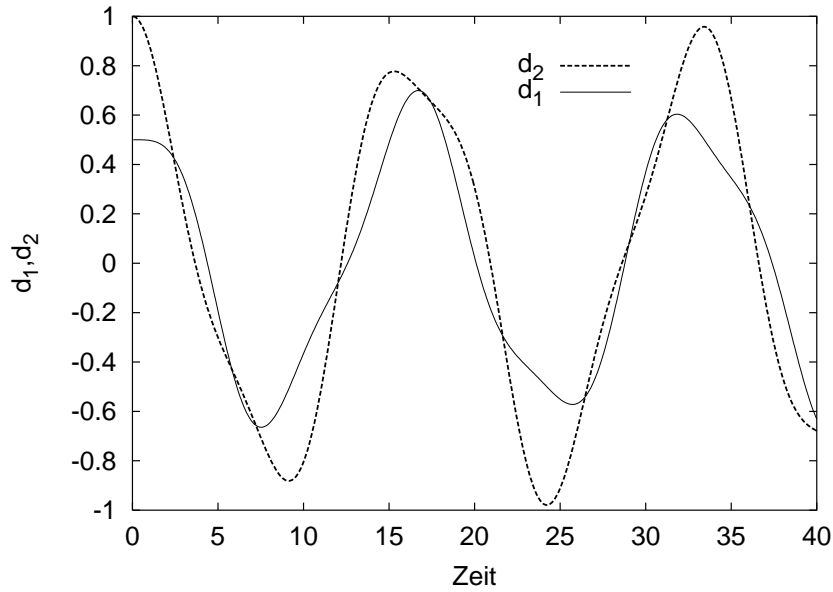
Die Zeitschrittweite wird für alle drei Zeitintegrationsverfahren zu  $k = 0.05 = \text{const.}$  gewählt. Die Lösung für die Verschiebungen des Zweimassenschwingers ist in Abb. (9.3) zu dargestellt. Im gesamten Zeitbereich  $t \in (0, 40]$  wird der Zeitintegrationsfehler

$k$	$\tilde{e}_t(5)_N$	$\tilde{\tilde{e}}_t(5)_N$	$\tilde{e}_t(5)_C$	$\tilde{\tilde{e}}_t(5)_C$	$e_t(5)$	$\dot{e}_t(5)$
0.2	$4.410 \cdot 10^{-3}$	$3.254 \cdot 10^{-3}$	$4.039 \cdot 10^{-3}$	$3.779 \cdot 10^{-3}$	$4.000 \cdot 10^{-3}$	$3.796 \cdot 10^{-3}$
0.1	$1.044 \cdot 10^{-3}$	$8.948 \cdot 10^{-4}$	$9.973 \cdot 10^{-4}$	$9.530 \cdot 10^{-4}$	$9.949 \cdot 10^{-4}$	$9.540 \cdot 10^{-4}$
0.05	$2.545 \cdot 10^{-4}$	$2.319 \cdot 10^{-4}$	$2.486 \cdot 10^{-4}$	$2.387 \cdot 10^{-4}$	$2.484 \cdot 10^{-4}$	$2.388 \cdot 10^{-4}$
0.025	$6.283 \cdot 10^{-5}$	$5.889 \cdot 10^{-5}$	$6.203 \cdot 10^{-5}$	$5.964 \cdot 10^{-5}$	$6.209 \cdot 10^{-5}$	$5.972 \cdot 10^{-5}$

**Tabelle 9.11:** Einmassenschwinger mit Anfangsbedingungen,  $m = 1.0$ ,  $\mu = 0.5$ ,  $c = 1.0$ , Konvergenz des geschätzten globalen Fehlers  $\tilde{e}_t(t_m)_N$  (9.13) bzw.  $\tilde{\tilde{e}}_t(t_m)_C$  (9.29) und exakten globalen Fehlers der numerischen Verschiebung und Geschwindigkeit bei  $t_m = 5.0$  für das Newmarkverfahren



**Bild 9.2:** Zweimassenschwinger mit  $c = 100$  und  $m = 200$



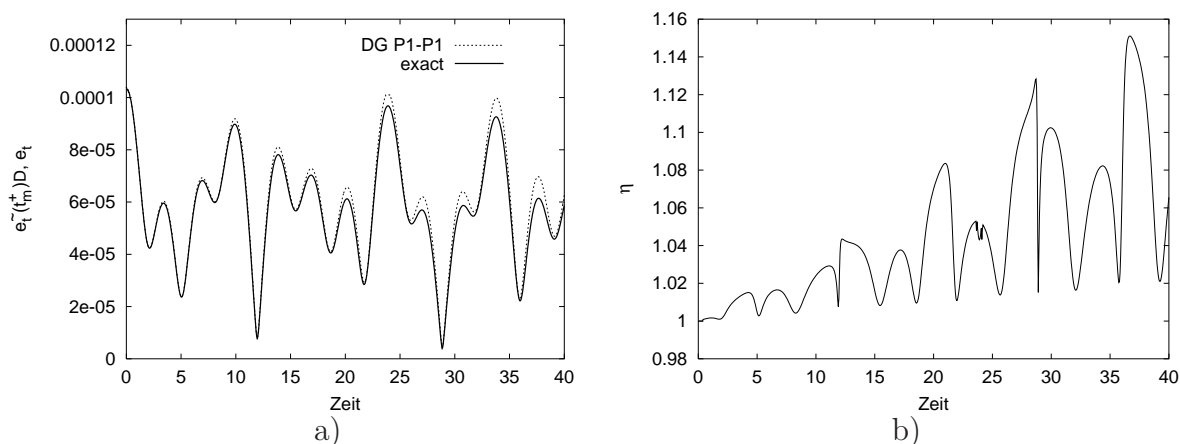
**Bild 9.3:** Verschiebungen  $d_1(t)$  und  $d_2(t)$  des Zweimassenschwingers mit Anfangsbedingungen

$$|e_t| = \sqrt{e_{t,1}^2 + e_{t,2}^2}$$

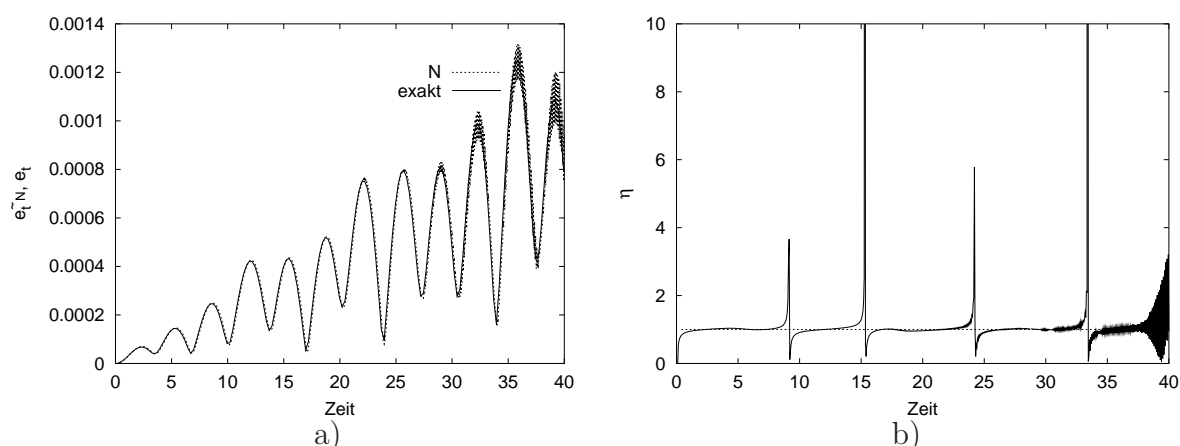
geschätzt. Zur Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehlers mit Hilfe von Gl. (9.36) wird eine 'geschickte' Vorabschätzung für  $e_{t,1}$  und  $e_{t,2}$  benötigt. Hierzu wird der jeweilige lokale Fehler  $e_{l,1}(t_m)$  und  $e_{l,2}(t_m)$  bei  $t = t_m$  geschätzt. Die Anfangsbedingungen des dualen Problems (9.23,9.37) sind somit:

$$\dot{y}(t = t_m) = \frac{-(\mathbf{M}^{-T} \tilde{e}_l(t_m))^T}{|\tilde{e}_l(t_m)|}.$$

Basierend auf den Erkenntnissen beim Einmassenschwinger wird beim DG P1-P1 Verfahren der globale Zeitintegrationsfehler in der euklidischen Norm bei  $t = t_m^+$  gemessen.

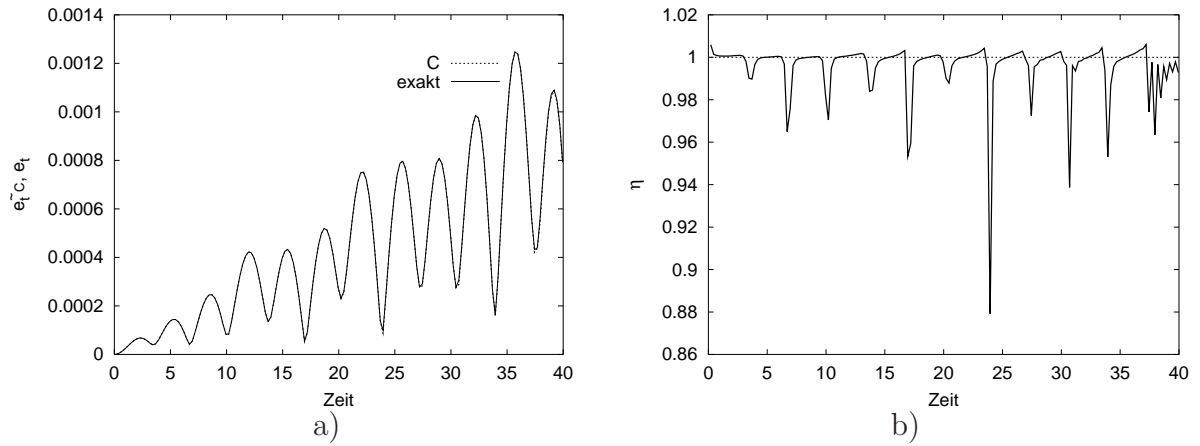


**Bild 9.4:** Zweimassenschwinger; a) Vergleich geschätzter und exakter globaler Zeitintegrationsfehler des DG P1-P1 Verfahrens bei  $t = t_m^+$ , gemessen in der euklidischen Norm; b) Effektivitätsindex  $\eta$



**Bild 9.5:** Zweimassenschwinger; a) Vergleich geschätzter und exakter globaler Zeitintegrationsfehler der Newmarkmethode, geschrieben als Differenzenverfahren (N), gemessen in der euklidischen Norm; b) Effektivitätsindex  $\eta$

Die numerischen Ergebnisse zeigen, siehe Abb. 9.4, 9.5, 9.6, daß der geschätzte Fehler den exakten Fehler approximiert. Der geschätzte Fehler für das Differenzenverfahren  $\tilde{e}_N$ , Abb. 9.5, oszilliert um den exakten Fehler mit wachsendem  $t$ . Eine Ursache liegt in der einfachen Konstruktion des Schätzers, der die Fehlerfortpflanzung aller lokalen Fehler nicht berücksichtigt. Der Einfluß der numerischen Differentiation ist eine weitere Ursache, da der lokale Schätzer, Gl. (9.5), auf verschiedenen Differenzenquotienten basiert. Dies kann zu Stellenauslöschungen führen. Die Wahl von  $\tilde{e}_l(t_m)$  zur Bestimmung der Fehlerverteilung für die Endbedingungen des dualen Problems erscheint für dieses Beispiel passend zu sein, da der Effektivitätsindex  $\eta$  für  $\tilde{e}_{tC}$  im gesamten Zeitbereich nahe an '1' liegt, siehe Abb. 9.6.



**Bild 9.6:** Zweimassenschwinger; a) Vergleich geschätzter und exakter globaler Zeitintegrationsfehler der Newmarkmethode, geschrieben als kontinuierliches Galerkinverfahren (C), gemessen in der euklidischen Norm; b) Effektivitätsindex  $\eta$

### 9.2.1 Schätzung des globalen Zeitintegrationsfehler bei nichtlinearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen

Der oben beschriebene duale Fehlerschätzer (9.27) soll nun auch auf nichtlineare Problemstellungen, siehe Gl.(9.18), angewendet werden. Mittels Galerkin- oder Newmarkverfahren wird die numerische Lösung  $\mathbf{d}^k = \mathbf{d}^k(t)$  bestimmt. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems für das kontinuierliche Galerkinverfahren

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}^k dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{n}(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, t) dt = 0 \quad \forall \mathbf{g}^k \in \mathcal{V}^k \quad (9.39)$$

wird das Newtonverfahren verwendet. Das Integral

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{n}(\mathbf{d}^k, \dot{\mathbf{d}}^k, t) dt$$

wird z.B. mittels einer 4-Punkt Gauß-Legendre Quadratur ausgewertet.

Da nur für lineare Operatoren  $\mathcal{D} = \mathbf{n}$  das Prinzip der Dualität gilt,

$$\int_0^{t_m} \mathbf{y} \cdot \mathcal{D} \mathbf{e} dt = \int_0^{t_m} \mathbf{e} \cdot \mathcal{D}^* \mathbf{y} dt,$$

muß bei nichtlinearen Problemstellungen  $\mathbf{n}$  linearisiert werden. D.h. es wird das Frechet-Differential bei  $\mathbf{d}$ ,  $\dot{\mathbf{d}}$  gebildet,

$$d\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \dot{\mathbf{d}}} d\dot{\mathbf{d}} + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{d}} d\mathbf{d} = \mathbf{C}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) d\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d}) d\mathbf{d}. \quad (9.40)$$

Ergänzend soll hier  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$  angenommen werden. Das weitere Vorgehen ist nun äquivalent zu linearen Differentialgleichungen, d.h. Multiplikation mit der dualen Lösung  $\mathbf{y}$  und partielle Integration bzgl.  $t$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_m} \mathbf{y} \cdot \left( \mathbf{M}d\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})d\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})d\mathbf{d} \right) dt \\ &= \int_0^{t_m} d\mathbf{d} \cdot \left( \mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})\mathbf{y} \right) dt. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Das linearisierte, duale Problem ist demnach,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} - \mathbf{C}^T(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{d}}, \mathbf{d})\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (9.42)$$

An zwei Problemen der Starrkörperdynamik wird zunächst die Qualität und Effektivität der Fehlerschätzung untersucht.

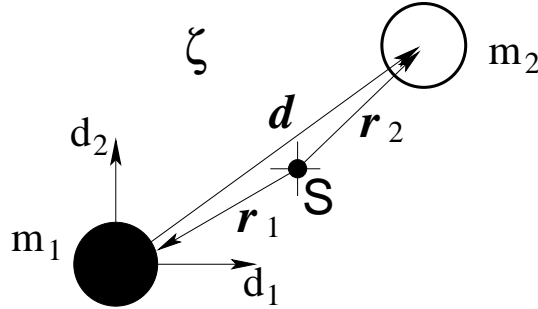


Bild 9.7: Zweikörperproblem

Das **Zweikörperproblem**, siehe Abb. 9.7, besteht aus zwei miteinander in Wechselwirkung stehenden Massepunkten  $m_1$  und  $m_2$ . Die Bewegung von  $m_1$  und  $m_2$  mit den Koordinaten  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  bzgl. des Massenschwerpunktes  $S$  kann mittels Umrechnungen auf die Bewegung eines Massepunktes  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  in einem Gravitationsfeld mit der Koordinate  $\mathbf{d} = (d_1, d_2)^T$  zurückgeführt werden. Das Gravitationsfeld ist dann kugelsymmetrisch mit der Konstanten  $\zeta$ ,

$$\begin{bmatrix} m\ddot{d}_1 + \zeta \frac{d_1}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} = 0 \\ m\ddot{d}_2 + \zeta \frac{d_2}{(d_1^2 + d_2^2)^{3/2}} = 0 \end{bmatrix} \quad \text{für } t > 0 \quad (9.43)$$

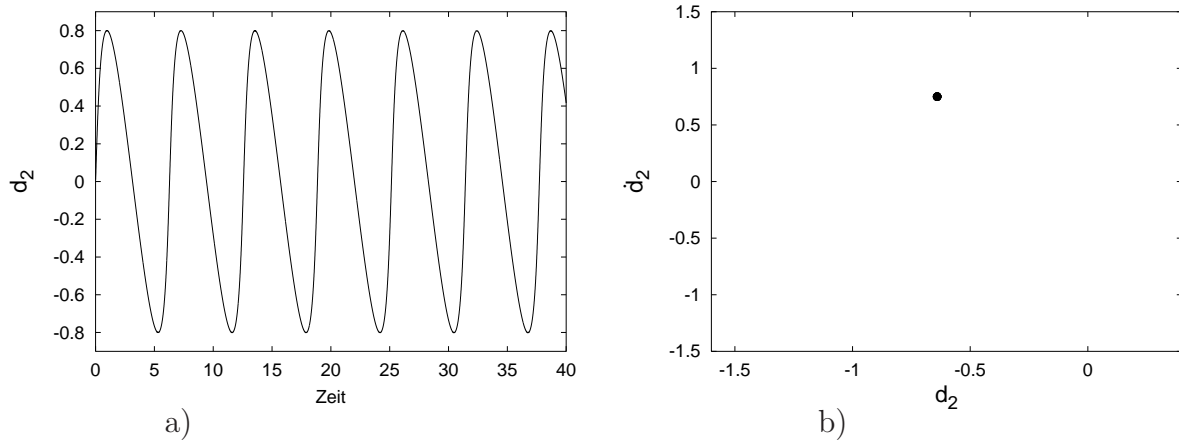
mit den Anfangsbedingungen:  $d_1^0 = 0.4$ ,  $d_2^0 = 0.0$ ,  $\dot{d}_1^0 = 0.0$ ,  $\dot{d}_2^0 = 2.0$ .

Für dieses bzgl. der Koordinaten nichtlineare Zweikörperproblem existiert eine analytische Lösung mit  $\zeta = 1.0$  und  $m = 1.0$ ,

$$d_1(t) = \cos(\tau) - 0.6, \quad d_2(t) = 0.8 \sin(\tau) \quad \text{mit: } t = \tau - 0.6 \sin(\tau).$$

Für die numerische Lösung wird die Newmarkformulierung mit  $2\beta = \gamma = 0.5$  und die kontinuierliche Galerkinformulierung, Gl. (9.39), mit  $k = 0.005 = \text{const.}$  genutzt. In Abbildung 9.8a) ist zunächst die Lösung  $d_2(t)$  dargestellt, die mittels des kontinuierlichen

Galerkinverfahrens (9.39) ermittelt wurde. Die Lösung mittels Newmarkverfahren weicht hier nur unwesentlich von der Lösung des kontinuierlichen Galerkinverfahrens ab. Deshalb ist diese Lösung nicht dargestellt. Die gewählten Anfangsbedingungen führen zu einer periodischen Lösung, was mit dem Poincareschnitt bestätigt wird, Abb. 9.8b), da sich für  $d_1 = 0$  und  $\dot{d}_1 > 0$  ein einziger Punkt ergibt. Zur Schätzung des globalen Zeitintegrati-



**Bild 9.8:** Zweikörperproblem; a) Lösung  $d_2(t)$  und b) Poincare Schnitt für  $d_1 = 0$  und  $\dot{d}_1 > 0$

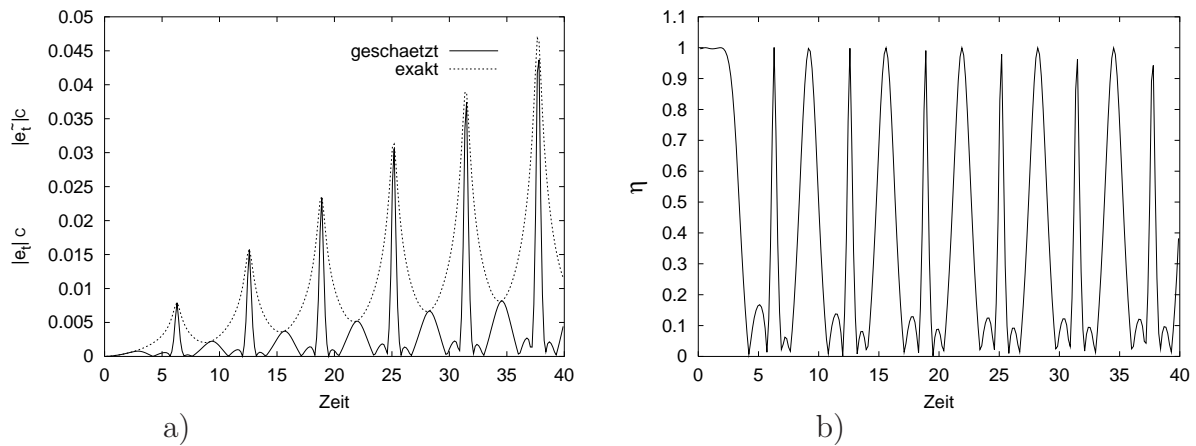
onsfehlers in der euklidischen Norm wird die Formulierung über das duale Hilfsproblem (9.27) und die Formulierung über den lokalen Zeitintegrationsfehler (9.13) benutzt. In Abb. 9.9a) ist der geschätzte Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_{t_C}$  und in Abb. 9.9b) der zugehörige Effektivitätsindex  $\eta$  dargestellt. Obwohl  $\eta$  stark oszilliert, wird der maximale und der minimale Fehler in der Euklidischen Norm fast exakt geschätzt. Der Effektivitätsindex  $\eta$  ist zu diesen Zeitpunkten  $\approx 1$ . Die Ursache der starken Oszillationen liegt in der Approximation des geschätzten Fehlers  $\tilde{\mathbf{e}}_{t_C}$  durch den lokalen Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_{t_N}$  bei  $t = t_m$ . Testrechnungen mit den 'richtigen' Anfangsbedingungen  $\dot{\mathbf{y}}^k(t = t_m) = -(\mathbf{M}^{-T} \mathbf{e}_t(t_m))^T / |\mathbf{e}_t(t_m)|$  bestätigen diese Vermutung, siehe Abb. 9.10. Abb. 9.11 zeigt die Schätzung mittels des Fehlerindikators basierend auf dem lokalen Diskretisierungsfehler für das Newmarkverfahren. Im Gegensatz zum linearen Beispiel (Zweimassenschwinger) ist hier der Effektivitätsindex  $\eta \ll 1$ . Die Maxima des geschätzten Fehlers  $\tilde{\mathbf{e}}_{t_N}$  werden zwar fast zu den korrekten Zeitpunkten indiziert; sie sind aber quantitativ völlig falsch.

Um den Einfluß der 'geschätzten' Anfangsbedingung  $\dot{\mathbf{y}}^k(t = t_m) = -(\mathbf{M}^{-T} \tilde{\mathbf{e}}_i(t_m))^T / |\tilde{\mathbf{e}}_i(t_m)|$  auf die Schätzung zu untersuchen, soll jetzt der globale Zeitintegrationsfehler für die numerische Lösung der Koordinate  $d_1$  bestimmt werden. Hierzu wird die Anfangsbedingung nach Gl. (9.29) gewählt:

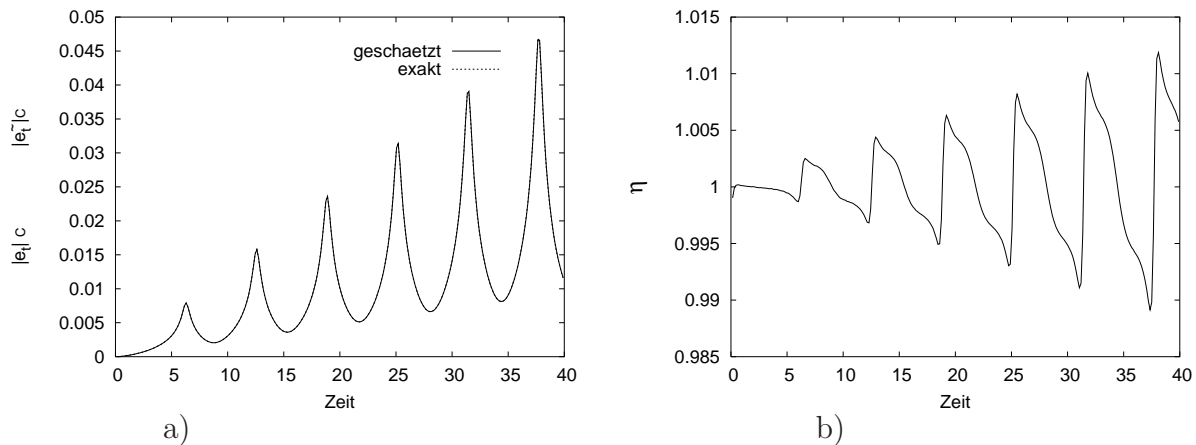
$$\dot{\mathbf{y}}_1^k = -(\mathbf{M}^{-T} \mathbf{I})^T \quad \text{mit: } \mathbf{I} = (1, 0)^T.$$

Das daraus resultierende Ergebnis ist in Abb. 9.12a) dargestellt. Dieselbe Vorgehensweise wird separat für die 2. Koordinate angewandt:

$$\dot{\mathbf{y}}_2^k = -(\mathbf{M}^{-T} \mathbf{I})^T \quad \text{mit: } \mathbf{I} = (0, 1)^T.$$



**Bild 9.9:** Zweikörperproblem; a) Geschätzter Fehler  $\tilde{e}_{tC}$ , gemessen in euklidischer Norm, und b) zugehöriger Effektivitätsindex  $\eta$  basierend auf dem kontinuierlichen Galerkinverfahren

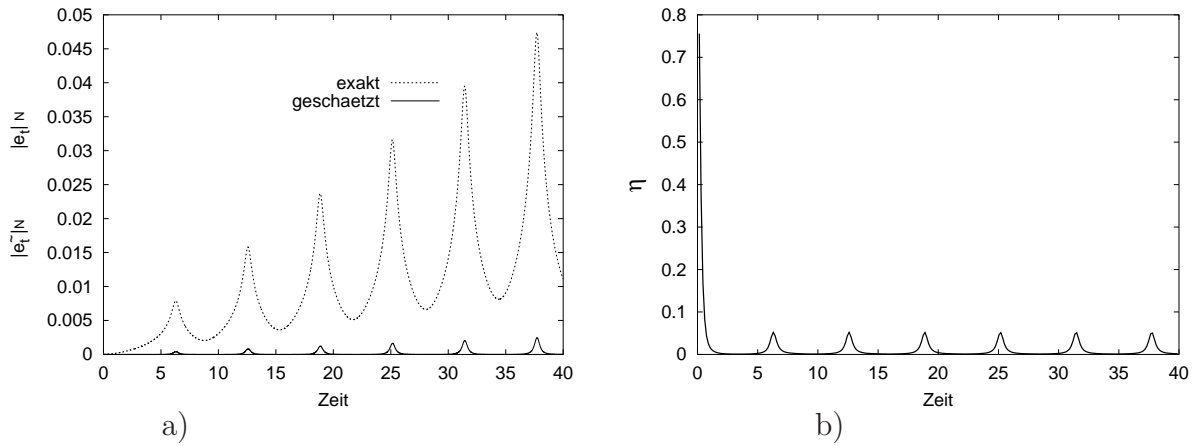


**Bild 9.10:** Zweikörperproblem; a) Geschätzter Fehler  $\tilde{e}_{tC}$ , gemessen in euklidischer Norm, und b) zugehöriger Effektivitätsindex  $\eta$  basierend auf dem kontinuierlichen Galerkinverfahren mit den 'richtigen' Anfangsbedingungen

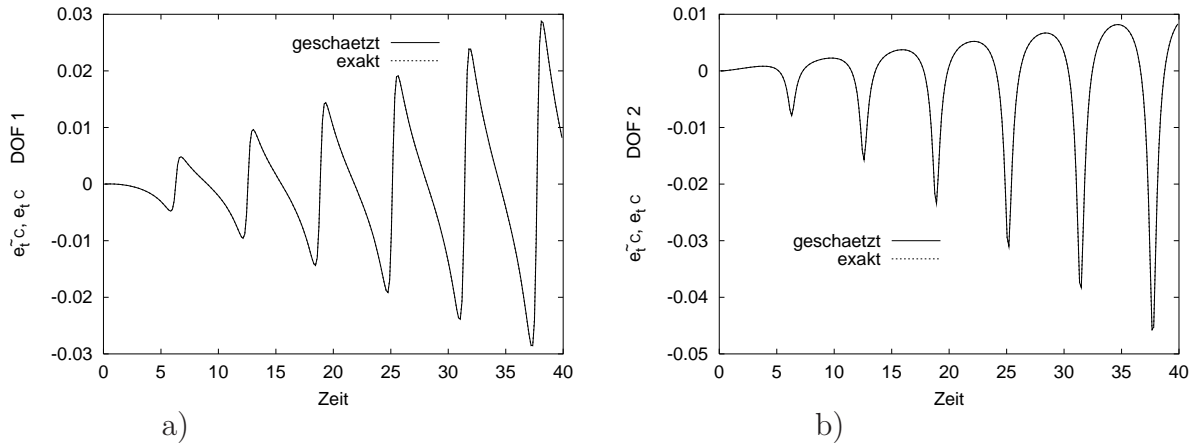
Man erkennt an diesem Beispiel, daß die Schätzung der Anfangsbedingung auf den Fehler den dominierenden Einfluß besitzt.

Das zweite Beispiel, das **Federpendel**, diente Mettler [72] der phänomenologischen Beschreibung der Instabilität der Längsschwingungen von Schachtanlagen und bei federnd gelagerten Maschinenfundamenten. Die Untersuchungen basieren auf der regulären Störungsrechnung und der Annahme quadratischer (schwacher) Nichtlinearitäten. Das nichtlineare Federpendel, siehe Abb. **9.13**, mit starker Nichtlinearität führt zu folgender





**Bild 9.11:** Zweikörperproblem; Geschätzter Fehler  $|\tilde{\mathbf{e}}_t|_N$ , gemessen in euklidischer Norm, und zugehöriger Effektivitätsindex  $\eta$  basierend auf dem lokalen Fehler des Newmarkverfahrens



**Bild 9.12:** Zweikörperproblem; Geschätzter Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_{t,C}$  und exakter Fehler  $\mathbf{e}_{t,C}$  für a) 1. Koordinate und b) 2. Koordinate des kontinuierlichen Galerkinverfahrens (C)

Bewegungsgleichung,

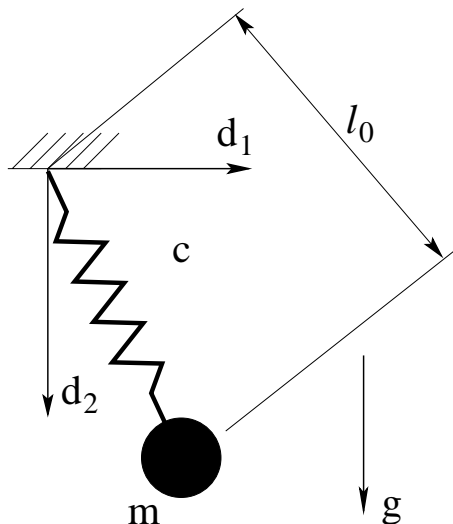
$$\left[ \begin{array}{l} m\ddot{d}_1 + cd_1 \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} - l_0}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} = 0 \\ m\ddot{d}_2 + cd_2 \frac{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} - l_0}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2}} = mg \end{array} \right] \text{ für } t > 0, \quad (9.44)$$

mit den Anfangsbedingungen:  $d_1^0 = 10^{-11}$ ,  $d_2^0 = 1.5$ ,  $\dot{d}_1^0 = 0.0$ ,  $\dot{d}_2^0 = 0.0$ ,

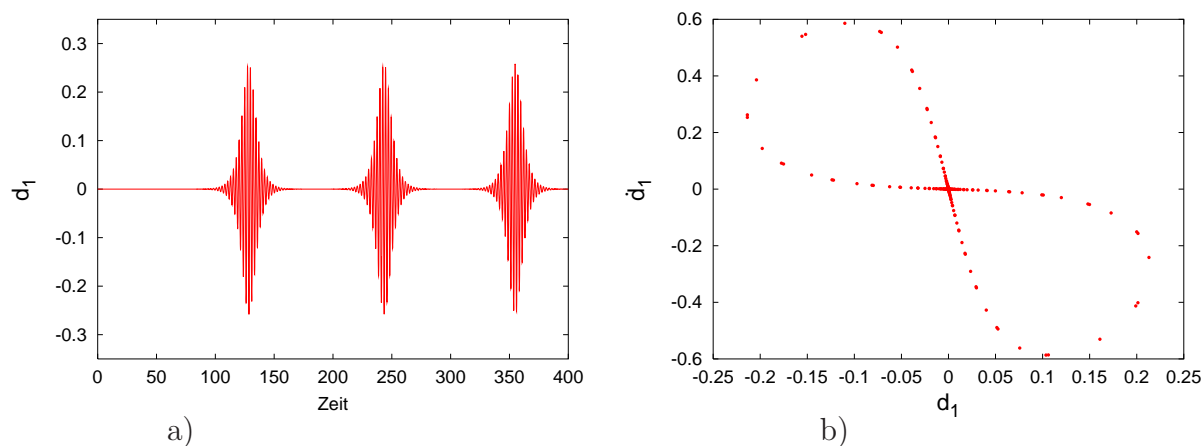
und den Parametern:  $m = 1.4$ ,  $l_0 = 1.0$  (Länge der entspannten Feder),  $c = 38.5$ .

Zur numerischen Zeitintegration wurde wiederum das Galerkinverfahren mit quadratischen Test- und Ansatzfunktionen  $\mathbf{g}^k/\mathbf{d}^k$  und das Newmarkverfahren (Differenzenverfahren) mit  $k = 0.05 = \text{const.}$  benutzt, siehe Gl. (9.39). Die Schwingungsperiode der

Grundlösung ( $d_1 = 0.0$ ) ist  $T = 1.2$ . Da keine analytische Lösung für das nichtlineare Federpendel bekannt ist, wurde eine Referenzlösung mit  $k = 0.000625 = \text{const.}$  generiert. In Abb. 9.14a) ist die Querbewegung  $d_1(t)$  des Pendels infolge der Anfangsstörung  $d_1^0$



**Bild 9.13:** Federpendel in allgemeiner Lage

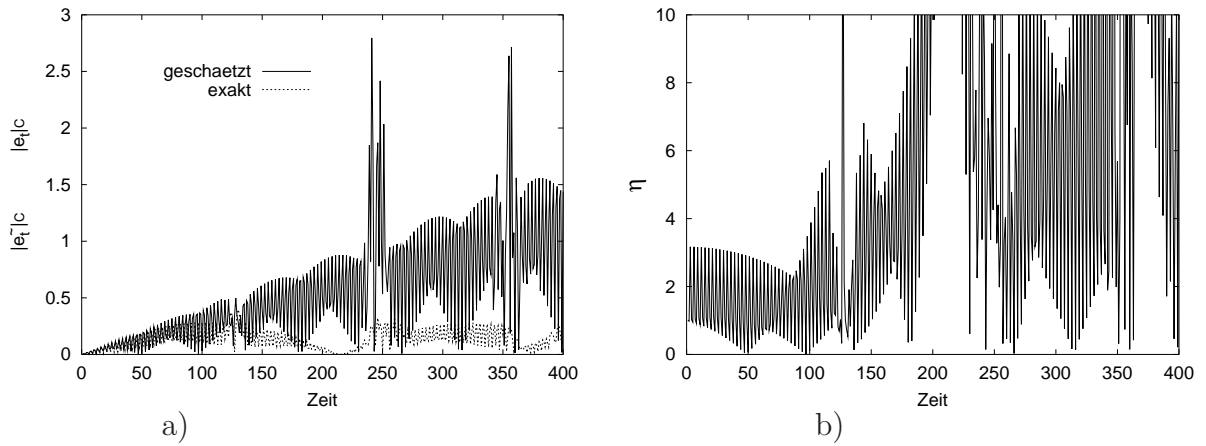


**Bild 9.14:** Federpendel; a) Lösung  $d_1(t)$  und b) Poincaréschnitt für  $d_2 - (l_0 + mg/c) = 0$  und  $\dot{d}_2 > 0$

dargestellt. In regelmäßigen Zeitabständen  $\Delta t \approx 130$  wird die Grundlösung der Störungsrechnung mit  $d_1 = 0$  in eine Nachbarbewegung  $d_1 \neq 0$  'verzweigen'. Das Lösungsverhalten ist quasiperiodisch, dies ist an der 'geschlossenen' Kurve im Poincaréschnitt zu erkennen. Der geschätzte Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_{tC}$  besitzt quantitativ bis  $t \approx 125$  dieselbe Größenordnung wie der exakte Fehler  $\mathbf{e}_t$ .

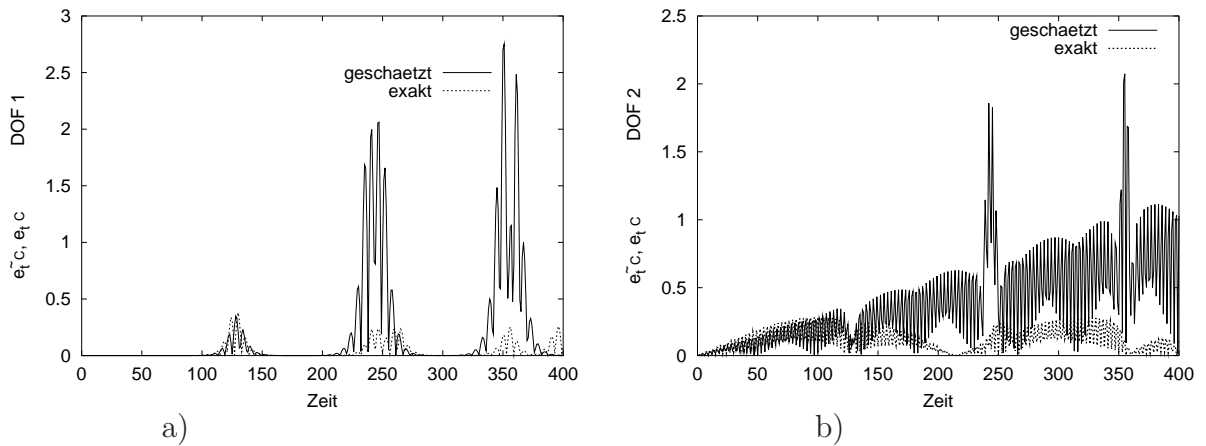
Nachdem die erste 'Störung', d.h. eine Querschwingung mit großen Amplituden, erfolgte, weicht die Fehlerschätzung stark vom exakten Fehler ab, siehe Abb. 9.15a). Dies wird auch im Effektivitätsindex ersichtlich, siehe Abb. 9.15b).

Um wie vorher beim Zweikörperproblem den Einfluß der geschätzten Anfangsbedingung



**Bild 9.15:** Federpendel; a) Geschätzter globaler Fehler  $\tilde{e}_{tC}$  und exakter Fehler  $e_{tC}$ , gemessen in euklidischer Norm, des kontinuierlichen Galerkinverfahrens und b) zugehöriger Effektivitätsindex  $\eta$

zu untersuchen, wird jeweils der Zeitintegrationsfehler des kontinuierlichen Galerkinverfahrens für die Koordinate  $d_1$  und  $d_2$  separat geschätzt, siehe Abb. 9.16. Die Anfangsbedingungen wurden nach Gl. (9.29) gewählt. Im Gegensatz zum Zweikörperproblem wird

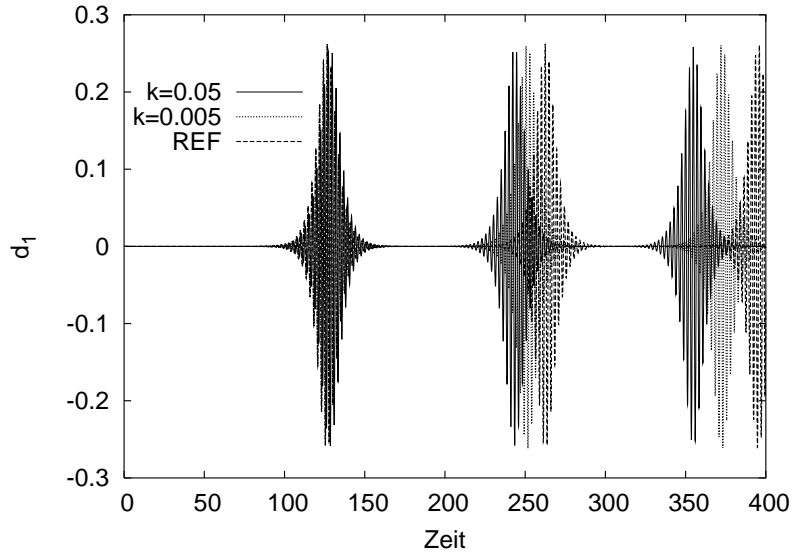


**Bild 9.16:** Federpendel; Separat geschätzter globaler Fehler  $\tilde{e}_{tC}$  und exakter Fehler  $e_{tC}$  a) der Koordinate  $d_1$  und b) der Koordinate  $d_2$  des kontinuierlichen Galerkinverfahrens (C)

bei den hier gewählten Anfangsbedingungen  $d_1^0 = 10^{-11}$ ,  $d_2^0 = 1.5$  auch der separate, globale Zeitintegrationsfehler der Freiheitsgrade  $d_1$  und  $d_2$  beträchtlich überschätzt, siehe Abb. 9.16. Bis zu  $t \approx 125$  sind geschätzter und exakter Fehler einander ähnlich. Danach unterscheiden sich beide Fehler sehr stark. In dem Zeitbereich, in dem neben der Grundbewegung die Nachbarbewegung wesentlich ist, wird der exakte Fehler besonders stark überschätzt, siehe Abb. 9.15 bzw. Abb. 9.16b).

Um die Abweichung des geschätzten Fehlers  $\tilde{e}_{tC}$  vom exakten Fehler  $e_{tC}$  zu erklären, ist in Abb. 9.17 die numerische Lösung  $d_1^k$  für  $k = 0.05$  und zusätzlich für  $k = 0.005$  sowie

die Referenzlösung  $\mathbf{d}_1$  gegenübergestellt. Es wird deutlich, daß der geschätzte Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_{tC}$



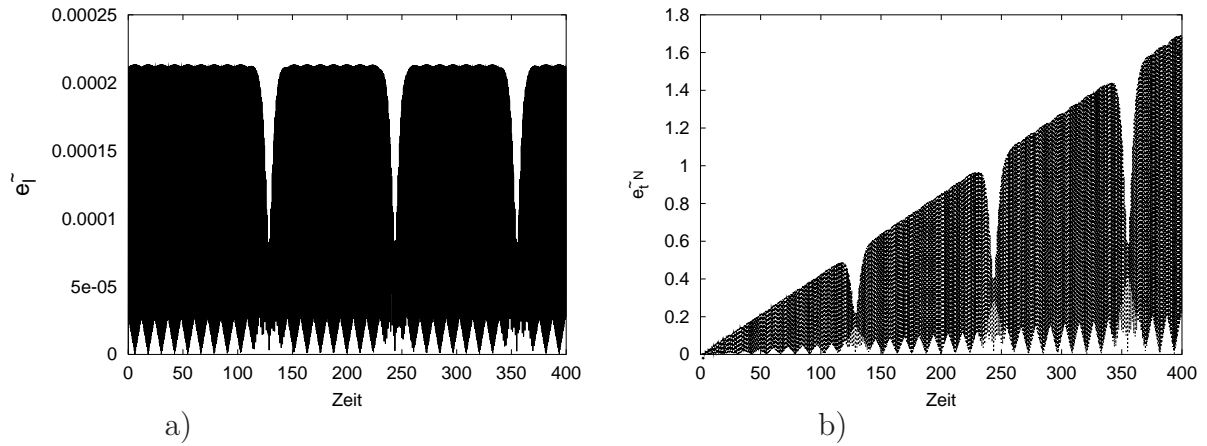
**Bild 9.17:** Federpendel; Vergleich der numerische Lösung  $\mathbf{d}_1^k$  für  $k = 0.05$  und  $k = 0.005$  mit kontinuierlichem Galerkinverfahren (C) und Referenzlösung  $\mathbf{d}_1$

in diesem Beispiel offensichtlich von der primalen Lösung  $\mathbf{d}^k$  abhängt. Da bei nichtlinearen Differentialgleichungen die numerische Lösung  $\mathbf{d}^k$  direkt in das Rückwärtsproblem eingeht, wird somit die Schätzung auch von der Güte der numerischen Lösung  $\mathbf{d}^k$  bestimmt. Bei diesem Beispiel weicht die numerische Lösung  $\mathbf{d}^k$  (hier:  $\mathbf{d}_1^k$ ) für  $t > 200$  von der Referenzlösung ab. Dadurch kann man ab diesem Zeitpunkt große Abweichungen in der Schätzung erwarten, siehe Abb. 9.16 und Abb. 9.15a). Dies ist ein Indiz für die numerische Empfindlichkeit bzgl. der gewählten Zeitschrittweite.

Die Abweichung des geschätzten Fehlers  $\tilde{\mathbf{e}}_{tC}$  vom exakten Fehler wird weiterhin durch folgende Näherungen verursacht,

- i) In das duale Problem geht die linearisierte, primale Differentialgleichung ein,
- ii) Die Anfangsbedingungen für Rückwärtsproblem sind für den geschätzten Fehler in der euklidischen Norm selbst Schätzwerte.

Die Ergebnisse der Schätzung des Newmarkverfahrens, basierend auf dem lokalem Fehler des Newmarkverfahrens  $\tilde{\mathbf{e}}_{lN}$ , Abb. 9.18b), zeigen, daß dieser zur Fehlerschätzung auch in diesem Fall unbrauchbar ist. Da die Schätzung  $\tilde{\mathbf{e}}_{tN}$  vom lokalen Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_l(t_m)$  dominiert wird, ist auch die globale Schätzung sehr weit vom exakten Fehler entfernt. Damit kann generell festgestellt werden, daß dieser Schätzer für nichtlineare Problemstellungen für eine adaptive Zeitschrittweitensteuerung nicht geeignet ist. Der auf dem dualen Rückwärtsproblem basierende Fehlerschätzer  $\tilde{\mathbf{e}}_{tC}$  ist wesentlich genauer und somit auch erheblich effizienter, obwohl der numerische Aufwand hierfür beträchtlich ist.



**Bild 9.18:** Federpendel; a) Geschätzter lokaler Fehler  $\tilde{e}_t$  und b) globaler Fehler  $\tilde{e}_{tN}$ , basierend auf dem lokalen Fehler des Newmarkverfahrens (N), gemessen in der euklidischen Norm

### 9.2.2 Adaptive Zeitschrittweitensteuerung

Bei Problemstellungen der Mechanik deformierbarer Körper werden Fehlerschätzer zur lokalen  $h$ - oder  $p$ - Verfeinerung/Vergrößerung des zugehörigen Finite Element Netzes benutzt. Ein ähnlicher Algorithmus kann zur Effizienzsteigerung auch auf die numerische Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen angewandt werden. Dabei ist es sinnvoll mit der Kombination von lokaler und globaler Fehlerschätzung den Zeitschritt adaptiv anzupassen. Als globaler Fehlerschätzer werden die oben beschriebenen Schätzer, Gl. (9.13-NEWM, 9.15-DG, 9.27-CG) verwendet. Hierfür ist allerdings zu berücksichtigen, daß die lokale Verfeinerung der Zeitschrittweite nicht notwendigerweise eine Reduktion des globalen Zeitintegrationsfehlers zur Folge haben muß. Für den vorgeschlagenen adaptiven Algorithmus müssen vorab drei Schranken definiert werden:

- i) obere Schranke des globalen Zeitintegrationsfehlers  $gtol$ ; für  $gtol$  wird z.B. gesetzt:  
 $gtol = c_g d_{i,max}$  mit  $c_g > 0$  (d.h. proportional zur maximalen Verschiebung  $\mathbf{d}_{i,max}$ )  
oder  
 $gtol = c_g \|\mathbf{u}\|_{g,max}$  (proportional zum Maximum der Gesamtenergienorm der Lösung),  
oder  
 $gtol = c_g \|\mathbf{d}\|_{max}$  (proportional zum Maximum der Euklidischen Norm der Lösung)
- ii) obere Schranke des lokalen Zeitintegrationsfehlers  $ltol_o$ ; für  $ltol_o$  wird z.B. gesetzt:  
 $ltol_o = gtol / C_o$  mit  $C_o \gg 1$
- iii) untere Schranke des lokalen Zeitintegrationsfehlers  $ltol_u$ ; für  $ltol_u$  wird z.B. gesetzt:  
 $ltol_u = ltol_o / C_l$  mit  $C_l = 2 \dots 10$

Der geschätzte lokale Fehler  $\tilde{e}_t$  dient prinzipiell zur Beschränkung der lokalen Zeitschrittweite und damit auch zur Beschränkung des lokalen Residuums. Über das duale Problem (9.27) geht das Residuum  $\mathbf{R}$  auch in den globalen Fehler  $\mathbf{e}_t$  ein. Die lokale Steuerung der Zeitschrittweite  $k$  basiert dann auf der Proportionalität zwischen lokalem Fehler  $\mathbf{e}_t$  und

Zeitschrittweite  $k$ . Für das Newmarkverfahren und das kontinuierliche Galerkinverfahren gilt:

$$\mathbf{e}_t \propto k^s, \quad s = 3. \quad (9.45)$$

Das DG P1-P1 Verfahren besitzt eine höhere Genauigkeitsordnung

$$\mathbf{e}_l^- \propto k^s, \quad s = 4. \quad (9.46)$$

Letzteres gilt allerdings nur für die Zustandsgrößen bei  $t = t_n^-$ .

Am zeitlichen Ende  $t = T$  der numerischen Simulation wird der maximale globale Fehler  $emax = \max_{t \in [0, T]} \tilde{\mathbf{e}}_t(t_m)$  ermittelt. Bei Überschreitung der Schranke  $emax > gtol$  wird die numerische Simulation wieder bei  $t = 0$  gestartet, jetzt aber mit modifizierten Schranken  $ltol_o(neu)/ltol_u(neu)$ . Dieser iterative Prozeß endet, wenn die Ungleichung  $emax < gtol$  für den gesamten betrachteten Zeitbereich erfüllt ist. Berücksichtigt man den Verlust einer Ordnung des Approximationsfehlers beim Übergang vom lokalen zum globalen Fehler, so können nach Gl. (9.45) bzw. (9.46) daraus  $ltol_o(neu)$  und  $ltol_u(neu)$  ermittelt werden,

$$\begin{aligned} gtol &\propto k^{s-1}(neu), \quad emax \propto k^{s-1}, \\ ltol_o(neu) &\propto k^s(neu), \quad ltol_u \propto k^s, \\ \rightarrow ltol_o(neu) &= \left( \frac{gtol}{emax} \right)^{s/(s-1)} ltol_o, \quad \text{und} \quad ltol_u(neu) = \left( \frac{gtol}{emax} \right)^{s/(s-1)} ltol_u. \end{aligned}$$

In Abb. **9.19** ist die vorgeschlagene Vorgehensweise in einem Flußdiagramm zusammengefaßt. Dieser adaptive Algorithmus wird nun an 3 Beispielen getestet.

### Numerische Beispiele

Im Gegensatz zum Zweikörperproblem und Federpendel wird für die Schale unter Windbelastung geometrisch lineares Verhalten angenommen. Die Geometrie der **Schale unter Windbelastung** (Abb. **9.20**) wird durch die Funktion  $z = -x^2/50 - 8y^2/100$  beschrieben und ist an 2 Rändern bei  $x = 0$  und  $y = 0$  eingespannt (hart). Folgende Parameter dienen der Beschreibung des Problems,

Material:  $E = 3.0 \cdot 10^7$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2.5 \cdot 10^3$ , Schalendicke:  $t = 0.3$ ,

Rayleigh-Dämpfung:  $c_M = 0.4$ ,  $c_K = 0.001$ ,

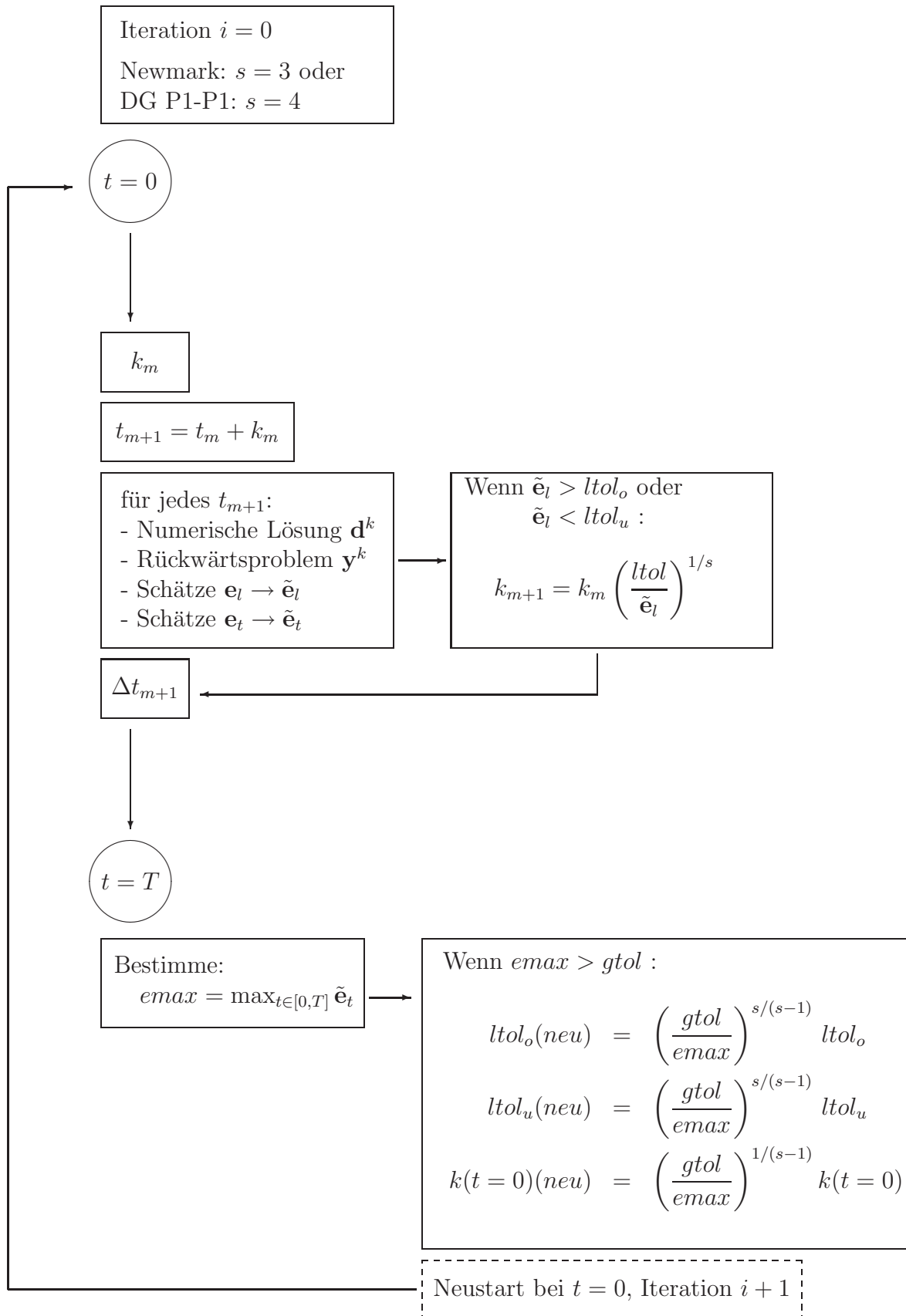
Raumgitter:  $\mathcal{N}_{el} = 64$ ,  $\mathcal{N}_{node} = 81$ ,

Geometrie:  $x \in (-10, 0)$ ,  $y \in (-5, 0)$ ,

Fehlerschranken für  $\|\mathbf{e}_t\|_g = \sqrt{\|\mathbf{e}_t\|_a^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_t\|_{L_2}^2}$ :  $gtol = 2.9$ ,  $ltol_u = 2.0 \cdot 10^{-3}$ ,  
 $ltol_o = 1.5 \cdot 10^{-2}$ .

Der maximale räumliche Diskretisierungsfehler in der Energienorm ist  $\|\mathbf{e}_s\|_{max,g} = 3.0$ , der aus der Simulation mit konstanter Zeitschrittweite  $k = 0.1$  resultiert.

Die gewählte Anfangszeitweite bei  $t = 0$  ist  $k_0 = 0.1$ . Im gesamten Zeitraum  $t \in (0, 20]$  soll dabei die obere Schranke des globale Zeitintegrationsfehlers  $gtol$  nicht



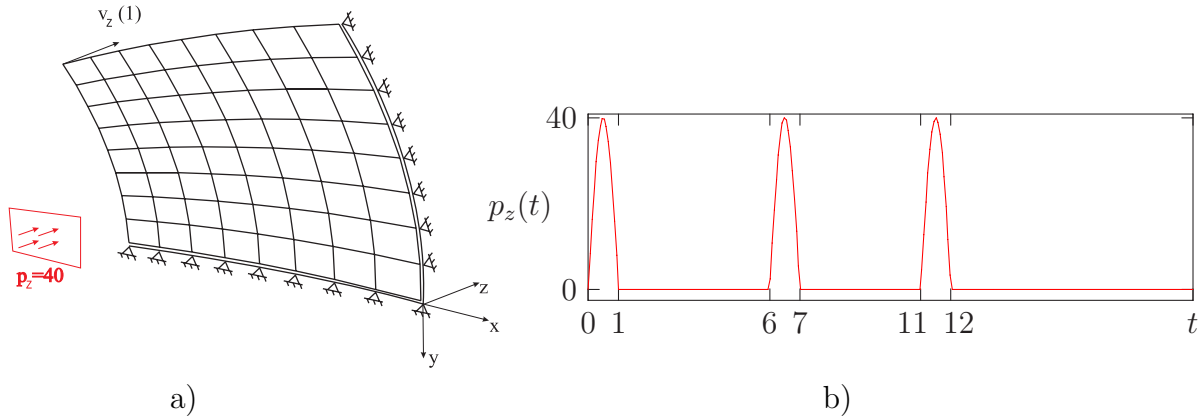
**Bild 9.19:** Algorithmus zur adaptiven Zeitschrittwertensteuerung

überschritten werden. Der globale Zeitintegrationsfehler wird bei diesem Beispiel in der Energienorm gemessen, da der räumliche Diskretisierungsfehler ebenfalls in der Energienorm geschätzt wird,

$$\|\mathbf{e}_t\|_g = (\|\mathbf{e}_t\|_a^2 + \|\dot{\mathbf{e}}_t\|_{L_2}^2)^{1/2},$$

mit:  $\|\mathbf{e}_t\|_a^2 = \mathbf{e}_t^T \mathbf{K} \mathbf{e}_t$ , und  $\|\dot{\mathbf{e}}_t\|_{L_2}^2 = \dot{\mathbf{e}}_t^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}}_t$ .

Bei  $t = 0$  werden homogene Anfangsbedingungen angenommen,  $\mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{0}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(\cdot, t = 0) = \mathbf{0}$ . Die Kraftanregung der Struktur erfolgt durch Stöße in der Form von 3 Sinushalbwellen, siehe Abb. 9.20, die als Flächenlast  $p_z = 40$  in  $z$ -Richtung wirken. Zum Vergleich



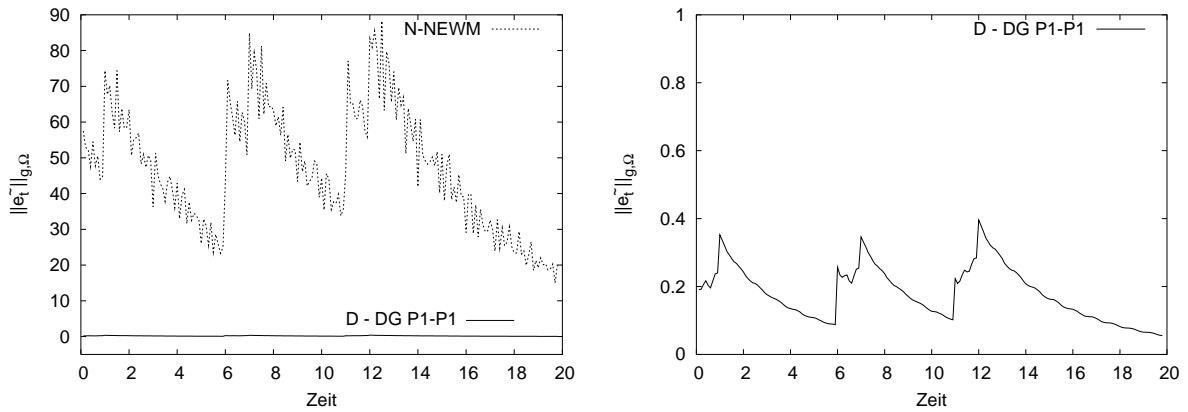
**Bild 9.20:** System Schale unter gleichförmig in  $z$ -Richtung verteilter Windbelastung; Lastfunktion  $p_z(t)$

für  $v_z(1)$  wird die exakte Lösung im Zeitbereich durch modale Integration ermittelt. Zur numerischen Zeitintegration wird das Newmarkverfahren ( $N : s = 3$ ) und das diskontinuierliche Galerkinverfahren ( $D : s = 4$ ) benutzt. Für beide Methoden wird der globale Zeitintegrationsfehler in der Energienorm geschätzt, Gl. (9.13,9.15). Zunächst wird die numerische Lösung mit konstanter Zeitschrittweite bestimmt, um diese mit der adaptiven Zeitschrittweitensteuerung vergleichen zu können, siehe Abb. 9.21. Der geschätzte Fehler für das Newmarkverfahren liegt dabei um eine Größenordnung über der entsprechenden Schätzung des Zeitintegrationsfehlers für das DG P1-P1 Verfahren. In den Zeitbereichen, in denen dem System Energie zugeführt wird, steigt der geschätzte Zeitintegrationsfehler jeweils an. Dazwischen nimmt der geschätzte Zeitintegrationsfehler wegen der vorhandenen Rayleigh-Dämpfung ab. Der starke Unterschied zwischen den beiden geschätzten Fehlern  $\|\tilde{\mathbf{e}}_t\|_g N$ ,  $\|\tilde{\mathbf{e}}_t\|_g D$  resultiert aus dem Unterschied in der globalen Konvergenzordnung der Verfahren.

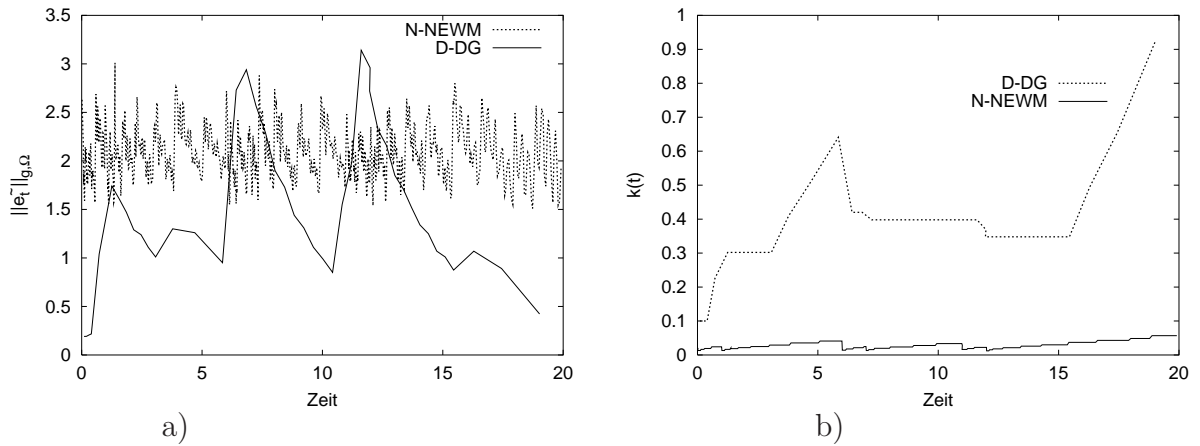
Für die Lösung mit adaptierten Zeitschritten wird auf Abb. 9.22, 9.23 verwiesen. Wie zuvor bei konstanter Zeitschrittweite wird hier bei Energiezufuhr der Fehler größer und die Zeitschrittweite wird in der Folge verkleinert. Außerhalb dieser Zeitbereiche wird der Zeitschritt wegen der physikalischen Dämpfung vergrößert, Abb. 9.22. Die unterschiedliche Fehlerordnung des Verfahrens ist auch an den deutlich kleineren Zeitschrittweiten des Newmarkverfahrens erkennbar.

Vergleicht man die numerischen Lösungen für  $v_z(1)$  mit der exakten Lösung für  $v_z(1)$ , siehe Abb. 9.23a) und 9.23b), so kann mit adaptierten Zeitschrittweiten eine deutlich





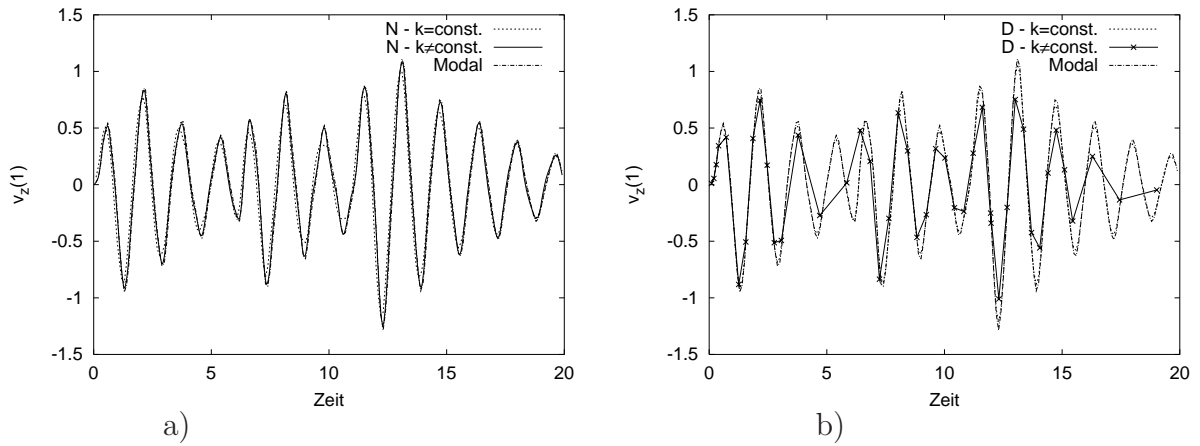
**Bild 9.21:** Schale unter gleichförmiger Windbelastung, geschätzter Zeitintegrationsfehler in Energienorm für Newmarkverfahren und Diskontinuierliches Galerkinverfahren mit  $k = 0.1 = const.$



**Bild 9.22:** Schale unter gleichförmiger Windbelastung; a) geschätzter Zeitintegrationsfehler in Energienorm für  $k \neq const.$ , b) adaptierte Zeitschrittweite für Newmark und DG P1-P1 Zeitintegrationsverfahren

verbesserte Übereinstimmung der numerischen Lösung zu der modalen Lösung festgestellt werden. Abb. 9.23b) könnte zunächst falsch gedeutet werden: Infolge der größeren Genauigkeitsordnung des DG P1-P1 Verfahrens ist bei den oben gegebenen Schranken ein größerer Zeitschritt wie für das Newmarkverfahren zulässig, obwohl die geschätzten globalen Zeitintegrationsfehler für beide Verfahren dieselbe Größenordnung besitzen. Dies bedingt aber deutlich weniger Lösungspunkte bei adaptierter Zeitschrittweite, Abb. 9.23b) und damit bei einfacher polynomialer Approximation einen scheinbar zu groben Verlauf. Dabei ist zu bemerken, daß die numerische Lösung an den Zeitpunkten  $t_n$  kaum von der exakten Lösung (Modal) abweicht.

Am **Zweikörperproblem**, Abb. 9.7, wurde der geschätzte und der exakte globale Zeitintegrationsfehler für  $k = const.$  untersucht. Da der auf Differenzenbasis geschätzte glo-



**Bild 9.23:** Schale unter Windbelastung; Geschwindigkeitsverlauf  $v_z(t)$  am Punkt  $x = -10$ ,  $y = -5$  mit und ohne Adaption des Zeitschrittes für a) Newmark- und b) DG P1-P1 Verfahren - Vergleich mit modaler Lösung

bale Fehler (N) zu stark vom exakten Fehler bei  $k = const.$  abweicht, Abb. 9.11, wird zur Fehlerschätzung des globalen Fehlers nur das kontinuierliche Galerkinverfahren (C) benutzt. Es sei dabei nochmals darauf hingewiesen, daß die Äquivalenz zwischen Newmarkverfahren (N) und kontinuierlichem Galerkinverfahren (C) nicht für nichtlineare Differentialgleichungen gilt. Das DG P1-P1 Verfahren wird wegen der inhärenten numerischen Dämpfung nicht eingesetzt.

Für die adaptive Schrittweitensteuerung werden folgende Schranken angenommen,

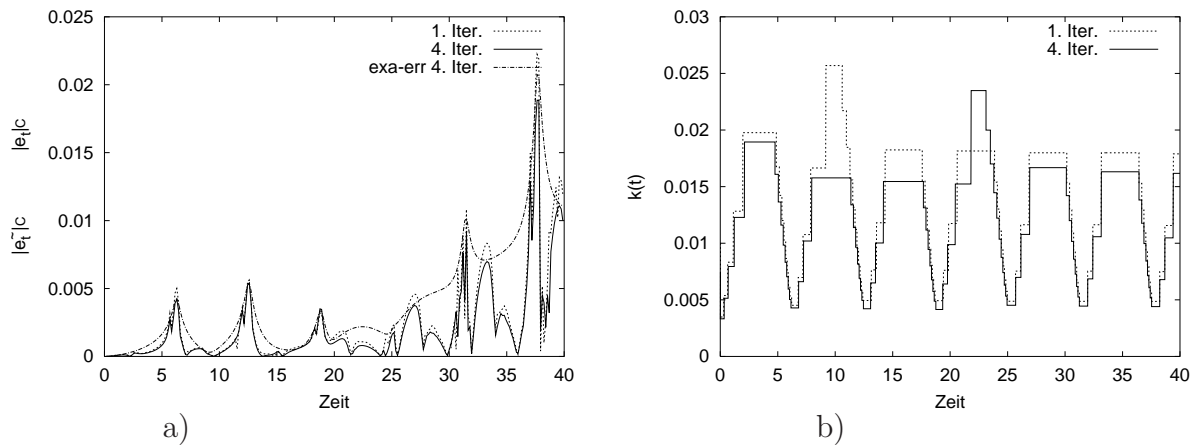
$$gtol = 1.5 \cdot 10^{-2}, \quad ltol_u = 1 \cdot 10^{-5}, \quad ltol_o = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Dabei soll der globale Zeitintegrationsfehler in der euklidischen Norm kontrolliert werden. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel (nur ein Durchlauf) sind hier 4 komplette Durchläufe (Iterationen) notwendig, um die obere Schranke für den geschätzten Fehler im gesamten Zeitbereich nicht zu überschreiten. Bemerkenswerterweise weicht in Abb. 9.24 der geschätzte Fehler der 1. Iteration erst ab  $t > 30$  markant vom geschätzten Fehler der 4. Iteration ab, siehe Abb. 9.24.

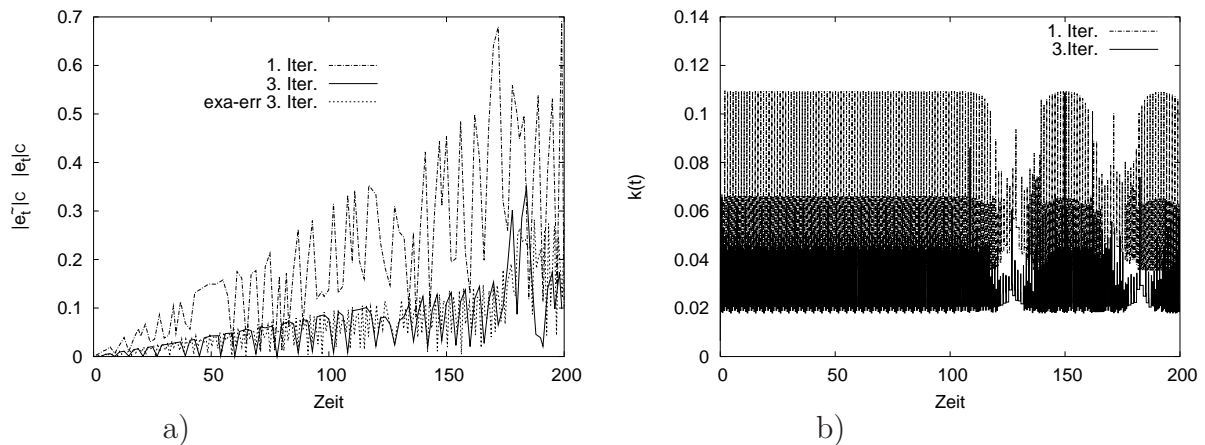
Dasselbe Vorgehen mit dem kontinuierlichen Galerkinverfahren (C) wird am **Federpendel**, Abb. 9.13, eingesetzt. Es werden folgende Fehlerschranken angenommen:

$$gtol = 6 \cdot 10^{-1}, \quad ltol_u = 2 \cdot 10^{-5}, \quad ltol_o = 1 \cdot 10^{-4}.$$

Im Gegensatz zur numerischen Simulation mit  $k = 0.005 = const.$  wird nun der globale Zeitintegrationsfehler in der euklidischen Norm  $|\mathbf{e}_t|$  im Zeitbereich  $t \in (0, 200]$  kontrolliert. Da der geschätzte lokale Fehler, der selbst stark oszilliert – Abb. 9.26, zur Adaption der Zeitschrittweite benutzt wird, ergeben sich auch starke Oszillationen der Zeitschrittweite, Abb. 9.25b). Der geschätzte globale Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_t^C$  der 3. Iteration korreliert jedoch gut mit dem exakten Fehler  $\mathbf{e}_t$  der 3. Iteration. Bemerkenswerterweise ist im Zeitbereich mit zusätzlicher Querbewegung der geschätzte lokale Fehler  $\tilde{\mathbf{e}}_t$  wesentlich kleiner als bei dominanter Längsbewegung, Abb. 9.26.



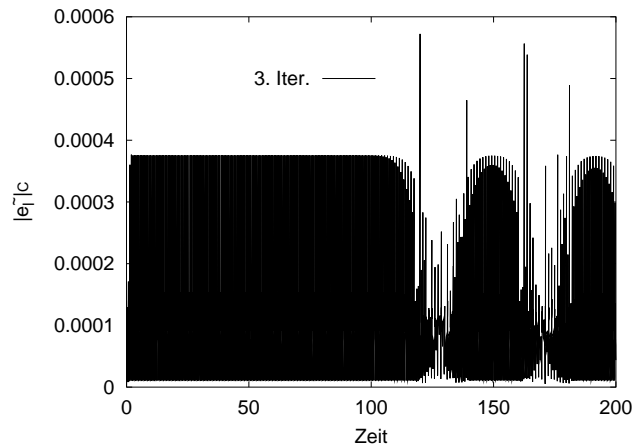
**Bild 9.24:** Zweikörperproblem - Adaption der Zeitschrittweite; a) geschätzter globaler Fehler für 1. Iteration und 4. Iteration, Vergleich mit exaktem Fehler der 4. Iteration; b) adaptierte Zeitschrittweite für 1. Iteration und 4. Iteration



**Bild 9.25:** Federpendel - Adaption der Zeitschrittweite; a) geschätzter globaler Fehler für 1. Iteration und 3. Iteration sowie exakter Fehler für 3. Iteration; b) adaptierte Zeitschrittweite für 1. Iteration und 3. Iteration

### Zusammenfassung:

Mit dem vorgeschlagenen Algorithmus zur adaptiven Steuerung der Zeitschrittweite kann der geschätzte globale Zeitintegrationsfehler gut kontrolliert werden. Außerdem zeigt der exakte Zeitintegrationsfehler bei beiden nichtlinearen Problemen dasselbe Verhalten wie der geschätzte globale Zeitintegrationsfehler. Trotz dieser guten Übereinstimmung zwischen exaktem und geschätztem globalen Zeitintegrationsfehler muß auf den numerischen Aufwand, der beim dualen Fehlerschätzer Gl. (9.27) anfällt, hingewiesen werden. Für jeden Zeitpunkt  $t = t_m$  ist ein duales Rückwärtsproblem ( $t_m \rightarrow 0$ ) zu lösen, damit  $e_t(t_m)$  geschätzt werden kann. Bei linearen Problemstellungen kann das duale Rückwärtsproblem durch das primale (Vorwärts)Problem ersetzt werden, Maute [70]. Dieser Vorteil geht bei nichtlinearen Problemstellungen verloren. Außerdem ist bei dem hier praktizierten Vorgehen die Speicherung der kompletten primalen Lösung erforderlich, da diese selbst im linearisierten, dualen Problem benötigt wird. Die Wahl des geschätzten lokalen Fehlers  $\tilde{e}_l(t_m)$



**Bild 9.26:** Federpendel - Adaption der Zeitschrittweite; geschätzter lokaler Fehler für 3. Iteration

als Approximation für  $\mathbf{e}_t(t_m)$  erwies sich bei den hier getesteten Problemen meist als zutreffend, da mindestens der maximale Diskretisierungsfehler quantitativ richtig geschätzt wurde. Der Schätzer für den globalen Zeitintegrationsfehler des Newmarkverfahrens, basierend auf der Differenzenformulierung, ist zur Kontrolle des Diskretisierungsfehler bei linearen Differentialgleichungen geeignet. Bei nichtlinearen Problemstellungen wird hingegen der zeitliche Diskretisierungsfehler nicht korrekt erfaßt.

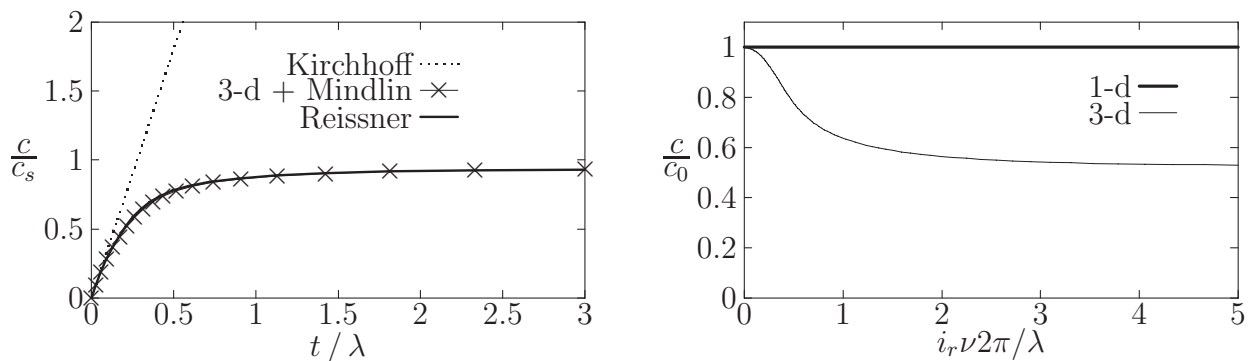
Der Sprungindikator für das DG P1-P1 Verfahren wurde nur an linearen Differentialgleichungen getestet. Für diese scheint er geeignet, da der Diskretisierungsfehler dann auch bei  $t = t_m^+$  korrekt geschätzt wird.

## 10 Dispersion – Ergebnis der räumlichen Diskretisierung

Die numerische Zeitintegration von Bewegungsgleichungen der Starrkörperdynamik, Abschnitt 6, führt i.a. zu dem Amplitudenfehler und dem Phasenfehler. Der erstgenannte Fehler resultiert aus der algorithmischen Dissipation, d.h. der numerische Integrator wirkt kontrahierend. Der Phasenfehler ergibt sich mittelbar aus dem Imaginär- und Realteil des Eigenwertes der Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{U}}$ . Grundsätzlich besitzt jeder numerische Zeitintegrator einen Phasenfehler, dessen Größenordnung mit der Verfahrensgenauigkeit  $\mathcal{O}(k^{s-1})$  korreliert.

Ein ähnlicher Effekt ist bei der räumlichen Approximation der Cauchyschen Bewegungsgleichung (Gl. 3.21) mit dem Bubnov-Galerkinverfahren zu beobachten. Es ist bekannt, daß die Modelle für 2-D bzw. 3-D Probleme eine natürliche (inhärente) Dispersion besitzen, siehe Graff [41], d.h. in Abhängigkeit vom gewählten mechanischen Modell tritt dieses Phänomen auf. Bei Biegeschwingungen zeigen die Plattenmodelle 'Kirchhoff', 'Reissner und Mindlin' sowie das 3-D Kontinuumsmodell ein sehr unterschiedliches Dispersionsverhalten. Während das Kirchhoff-Plattenmodell einen linearen Zusammenhang zwischen  $h/\lambda$  und der zugeordneten (normierten) Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c/c_s$  zeigt, konvergieren mit  $\lambda \rightarrow 0$  allen anderen Modelle gegen eine normierte Ausbreitungsgeschwindigkeit  $\bar{c} = \frac{c}{c_s} = 0.955$  für  $\nu \rightarrow 0.5$ , siehe Abb. 10.1a).  $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Scherwelle,  $t$  ist die Dicke der Platte,  $\lambda$  ist die Wellenlänge,  $\mu$  ist der Schubmodul.

Im Gegensatz zum Verhalten bei 1-D-Kontinua mit einer Geschwindigkeit  $c_0 = \sqrt{E/\rho}$  breiten sich Longitudinalwellen, dieses sind P-Wellen (Druckwellen) mit der Wellenzahl  $\gamma$ , in 3-D Kontinua mit einer Querdehnzahl  $\nu$  mit einer deutlich anderen Geschwindigkeit  $c$  aus. Mit kleiner werdender Wellenlänge  $\lambda$  konvergiert die bezogene Ausbreitungsgeschwindigkeit gegen  $c/c_0 \approx 0.57$ , siehe Abb. 10.1b). An diesen beiden Beispielen wird



a) Biegeschwingung in Platten nach Mindlin [73]

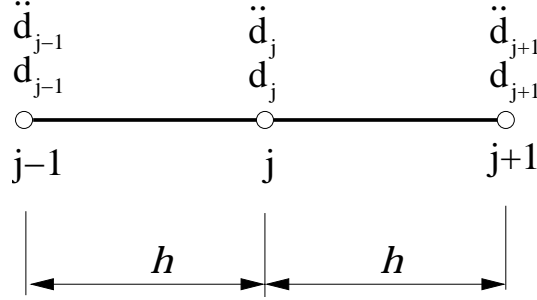
b) Longitudinalwellen im kreisförmigen Querschnitt mit Trägheitsradius  $i_r$  und Querdehnzahl  $\nu$  als 1-D Kontinuum und als 3-D Kontinuum nach Graff [41]

**Bild 10.1:** Ausbreitungsgeschwindigkeit vs. Inverse der Wellenlänge  $\lambda$ .

deutlich, daß nur beim Modell des 1-D Kontinuums (Dehnstab, Seil – konstanter Quer-

schnitt, Dichte, E-Modul) keine natürliche Dispersion auftritt, d.h. das 1-D Kontinuum ist dispersionsfrei.

Durch die räumliche Diskretisierung der Bewegungsgleichung wird jedoch die sogenannte künstliche Dispersion induziert. Der Einfluß der künstlichen Dispersion soll deshalb am 1-D Wellenausbreitungsproblem, siehe Abb. 10.2, untersucht werden. Wegen des besseren



**Bild 10.2:** Dehnstab diskretisiert, Knotengrößen  $\mathbf{d}$ ,  $\ddot{\mathbf{d}}$

Vergleichs mit der exakten (analytischen) Lösung wird  $\nu = 0.0$  gewählt. Damit reduziert sich die partielle Differentialgleichung (3.21) auf die 1-D Wellengleichung, hier als homogen angenommen mit  $E = const.$ ,  $\rho = const.$ ,  $A = const.$ ;

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (10.1)$$

Zur Vollständigkeit sind Rand- und Anfangsbedingungen  $u_0, \dot{u}_0$  gegeben, die die Eindeutigkeit der Lösung von Gl. (10.1) garantieren sollen. Die analytische Lösung von (10.1) ist, siehe z.B. Werner [96]

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - c_0 t) + u_0(x + c_0 t)) + \int_{s=x-c_0 t}^{x+c_0 t} \dot{u}_0(s) ds, \quad \text{oder} \quad (10.2)$$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{u}(x)_k \sin(\omega_k t + \alpha_k). \quad (10.3)$$

Gl. (10.2) ist die d'Alembertsche Lösung, die von den von den Anfangsbedingungen bestimmt wird. Die Geraden  $x \pm c_0 t = const.$  sind die Charakteristiken der Lösung  $u$ . Allerdings ist die d'Alembertsche Lösungsformel in der Regel nur bei einfachen Randbedingungen anwendbar. Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist beim gewählten 1-D-Kontinuum  $c = c_0 = \sqrt{E/\rho} = const.$  Dies ist die Ursache für die Dispersionsfreiheit der analytischen Lösung  $u(x, t)$ . Gl. (10.3) wird durch die Eigenformen  $\bar{u}(x)_k$  und Eigenkreisfrequenzen  $\omega_k$  bestimmt, die aus den Randbedingungen folgen; d.h. es stehen  $2 \cdot \infty$  Freiwerte zur Anpassung an die Anfangsbedingungen zur Verfügung.

Die räumliche Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung (10.1) mit Testfunktionen  $w_h(x) \in C_0(x)$  und Ansatzfunktionen  $u_h(x) \in C_0(x)$  führt bei Anwendung des Bubnov-Galerkin Verfahrens auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für die Knotenverschiebung  $d_j = d_j(t)$ ,

$$\ddot{d}_{j+1} + 4\ddot{d}_j + \ddot{d}_{j-1} + 6\frac{c_0^2}{h^2}(-d_{j+1} + 2d_j - d_{j-1}) = 0, \quad j \dots \text{Knotenindex} . \quad (10.4)$$

Diese Differenzengleichung bzgl. des Knotenindex  $j$  und Differentialgleichung bzgl. der Zeit kann mit dem Ansatz, siehe Fröberg [39],

$$d_j = C e^{i\alpha j} e^{i\omega_h t} \quad (10.5)$$

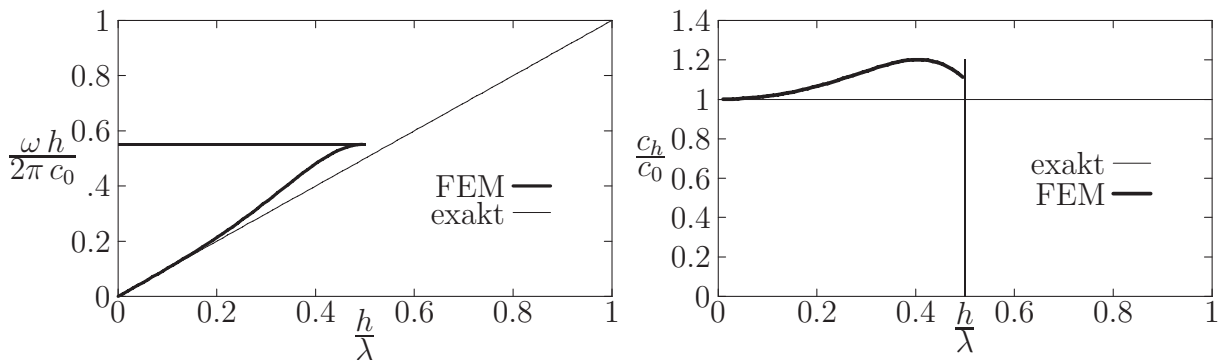
gelöst werden.  $\alpha$  ist dabei die normierte Wellenzahl -  $\alpha = \frac{2\pi h}{\lambda}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .  $\lambda$  ist die Wellenlänge, die durch die räumliche Diskretisierung (10.4) abgebildet werden soll;  $\lambda = \frac{c_0 2\pi}{\omega}$ . Durch Rückwärtseinsetzen erhält man den nichtlinearen Zusammenhang zwischen der Kreisfrequenz  $\omega_h$  der Näherungslösung  $u_h$  und einer vorgegebenen Wellenzahl  $\alpha$ , siehe auch Nilsson [75],

$$\omega_h = \frac{c_0}{h} \sqrt{6 \frac{1 - \cos \alpha}{2 + \cos \alpha}}. \quad (10.6)$$

Im Gegensatz zur analytischen Lösung bedingt die Näherungslösung eine sogenannte 'Cut-Off' Frequenz  $\omega_{co}$ . D.h.,  $\omega_{co}$  ist die maximal abbildbare Frequenz des diskretisierten Systems (10.4), die im Gegensatz zur analytischen Lösung nach oben beschränkt ist, siehe Abb. 10.3a). Selbstverständlich stimmt  $\omega_{co}$  mit der größten möglichen Eigenkreisfrequenz  $\omega_{h,max}$  eines Finiten Elementes mit der Netzweite  $h$  überein. Die numerische Wellenausbreitungsgeschwindigkeit  $c_h$  weicht somit auch von  $c_0 = const.$  ab, siehe Abb. 10.3b),

$$c_h = \frac{\lambda_h}{T_h} = \frac{\omega_h h}{\alpha}. \quad (10.7)$$

An diesem einfachen Beispiel zeigt sich, daß die Auswertung des Einflusses der künstlichen



a) Kreisfrequenz  $\omega_h$  mit Cut-off

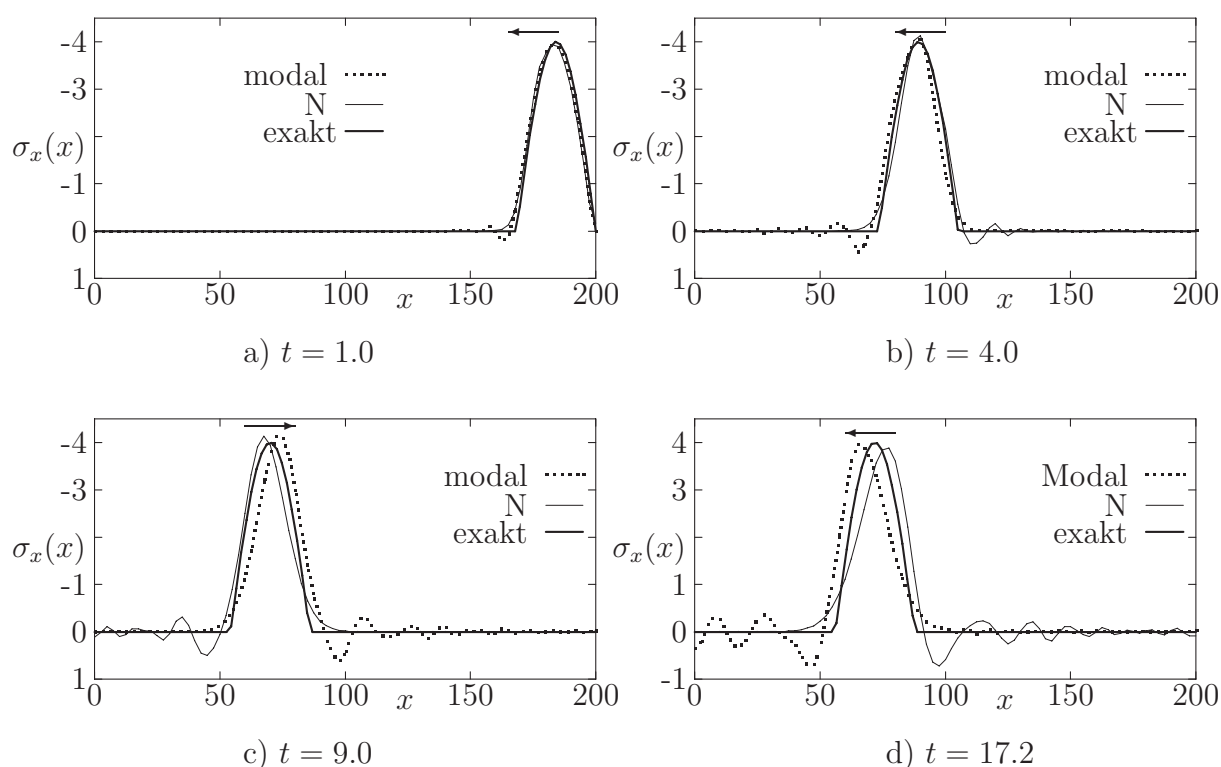
b) Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_h$  mit Cut-off

**Bild 10.3:** a) Kreisfrequenz  $\omega_h$  bzw. b) Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_h$  dargestellt über dem Verhältnis Element-/Wellenlänge für das diskretisierte 1-D Kontinuumsproblem.

Dispersion auf die numerische Lösung nur im 1-D Fall möglich ist. Praktisch nicht möglich ist die Trennung bei 2-D und 3-D Problemstellungen, da diese Probleme zusätzlich eine natürliche Dispersion besitzen.

Diese analytischen Ergebnisse sollen nun am Beispiel **Wellenausbreitung** in einem Rechteckgebiet mit den numerischen Ergebnissen verglichen werden. Alle Parameter des

Beispiels werden von Abbildung 6.4 übernommen. Zusätzlich zur räumlichen Diskretisierung wird der Einfluß der numerischen Zeitintegration untersucht. Hierzu wird das Newmarkverfahren (N) als Vertreter der Finite Differenzen Methode und das diskontinuierliche Galerkinverfahren DG P1-P1 (D) verwendet. Bei uniformer Netzverfeinerung wird zusätzlich die modale Zeitintegration (Modal) benutzt. Die exakte Lösung des Problems ist mit (exakt) angegeben. Diese resultiert aus der Lösungsdarstellung (10.3), die auf dem Separationsansatz aufbaut. Zum Ergebnisvergleich wird der Spannungszustand im Gebiet zu den Zeitpunkten  $t = 1.0$ ,  $t = 4.0$ ,  $t = 9.0$  und  $t = 17.2$  ausgewertet, siehe Abb. 10.4. Infolge der numerischen Dispersion läuft die Sinushalbwellen ( $\sigma_x$ ) bei modaler Integration

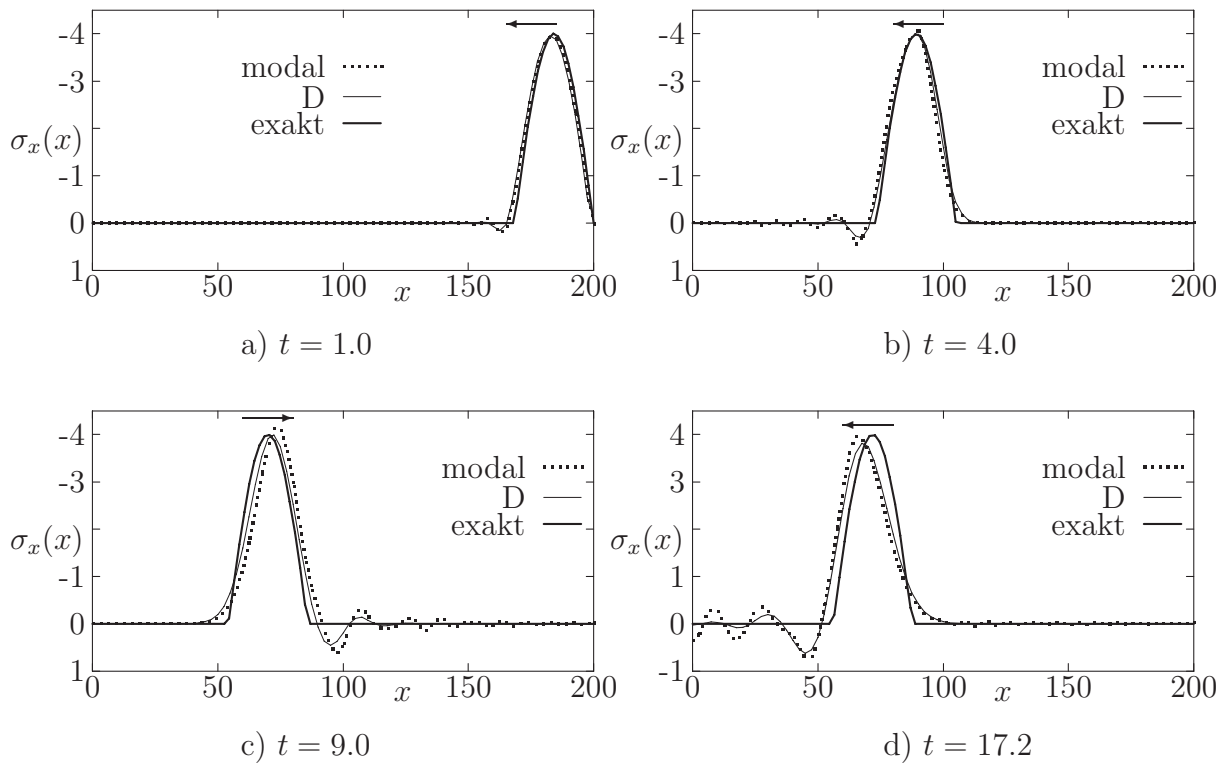


**Bild 10.4:** Wellenausbreitung - Spannungszustand  $\sigma_x(\cdot, t)$ ; uniformes Raugitter; Zeitintegration mit Newmarkverfahren (N), Vergleich mit der modalen und der exakten Lösung

nach einiger Zeit der exakten Lösung vorweg, da die kurzwelligen Lösungsanteile eine höhere Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c_h$  als die langwelligen Lösungsanteile aufweisen. Mit fortschreitender Zeit nimmt der Einfluß der numerischen Dissipation auf die numerische Lösung, hier  $\sigma_{x,h}$ , zu. Bei Verwendung des Newmarkverfahrens zur numerischen Zeitintegration (N) wird zusätzlich der Einfluß des Phasenfehlers deutlich, siehe Abb. 10.4. Wegen des Phasenfehlers des Zeitintegrationsverfahrens sind die künstlichen Oszillationen, resultierend aus der räumlichen Diskretisierung, nachlaufend, siehe Abb. 10.4. Die Verwendung des diskontinuierlichen Galerkinverfahrens (D) zeigt sich bei diesem Beispiel hingegen als vorteilhaft. Infolge der größeren Genauigkeitsordnung des Verfahrens  $\mathcal{O}(k^3)$  und der numerischen Dissipation der 'hohen' Eigenkreisfrequenzen  $\omega_h$  wird die exakte Lösung (exakt) besser angenähert als bei Verwendung des Newmarkverfahrens, siehe Abb. 10.5. Hierbei muß allerdings bedacht werden, daß bestenfalls das Ergebnis der



modalen Zeitintegration (*modal*) angenähert werden kann. Die vorhandene numerische



**Bild 10.5:** Wellenausbreitung - Spannungszustand  $\sigma_x(\cdot, t)$ ; uniformes Raugitter; Zeitintegration mit DG P1-P1 Verfahren (D); Vergleich mit der modalen und der exakten Lösung

Dissipation des DG P1-P1 Verfahrens verursacht aber zusätzlich eine Verkleinerung der Spannungsamplitude ( $\sigma_x^0 = 4.0$ ).

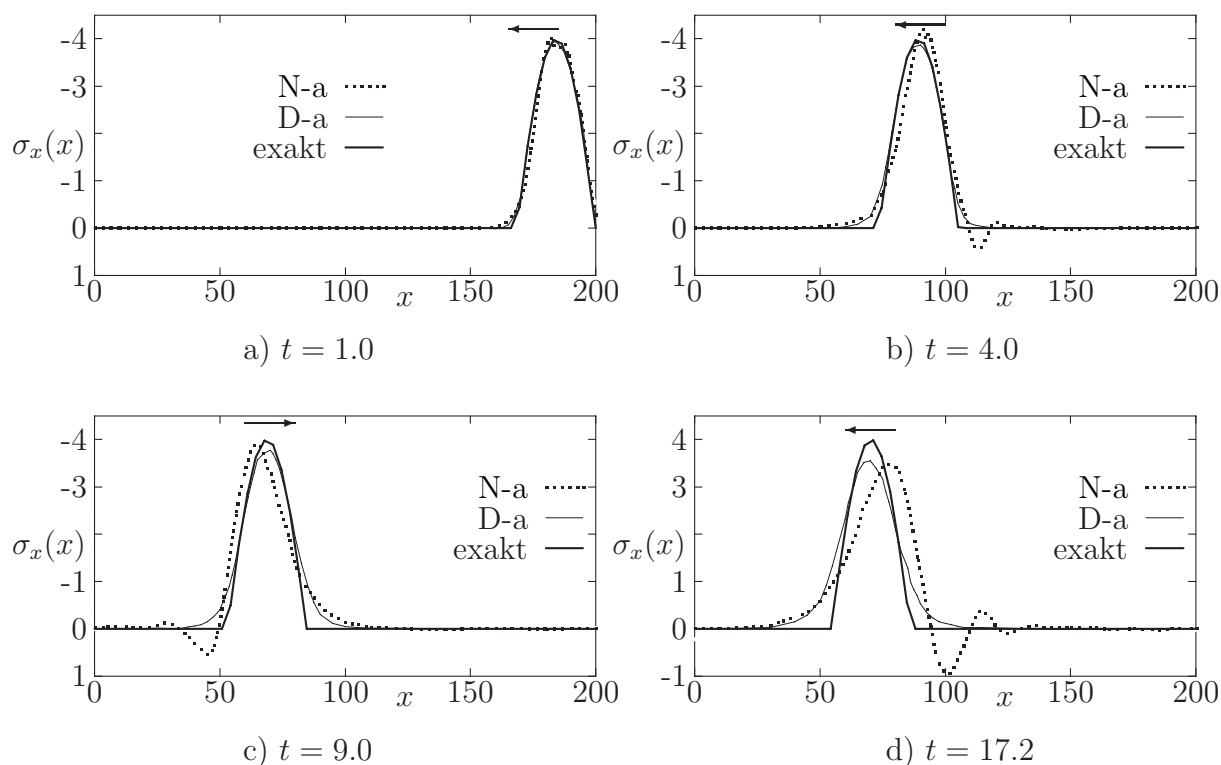
Neben der numerischen Lösung auf einem stationären Raugitter wird nun auch der adaptive Algorithmus zur Steuerung der lokalen Netzweite des Raugitters benutzt, siehe Abschnitt 7.4. Zur Kontrolle des räumlichen Diskretisierungsfehlers in der Gesamtenergienorm werden folgende Schranken verwendet:

$$\epsilon_u = 5.0 \cdot 10^{-6}, \quad \epsilon_o = 3.0 \cdot 10^{-2}.$$

Für die Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers werden die Indikatoren von Zienkiewicz/Zhu [100] und Riccius [80], siehe Abschnitt 7.2, eingesetzt. Die Zeitschrittweite ist  $k = 0.1 = \text{const.}$ . Auf Grund der instationären Raugitter wird kein Vergleich mit der modalen Lösung erstellt. D.h., es wird nur die analytische Lösung nach Gl. (10.3) (exakt) mit den numerischen Lösungen verglichen, die mittels Newmarkverfahren (N-a) und diskontinuierlichen Galerkinverfahren (D-a) bestimmt werden.

Vergleicht man nun die Lösung mit adaptierten Raugittern mit der Lösung auf dem uniformen FE-Netz, so erkennt man die reduzierten Oszillationen bei Verwendung von adaptierten FE-Netzen. Infolge der Netzadaption wird allerdings der Dissipationseffekt

des DG P1-P1 Verfahrens verstärkt und die Amplitude der Sinushalbwellen stärker reduziert wie bei Verwendung des uniformen FE-Netzes. Die Ursache liegt in der jeweiligen Übertragung der Zustandsgrößen ( $u_h, \dot{u}_h$ ) zwischen den unterschiedlichen FE-Netzen. Bei Nutzung des diskontinuierlichen Galerkinverfahrens (D-a) verschwinden die künstlichen Oszillationen, die beim uniformen Raumgitter vor der Sinushalbwellen 'laufen', völlig. Hierbei ist zu beachten, daß beim diskontinuierlichen Galerkinverfahren für  $t \rightarrow \infty$  alle Eigenmoden gedämpft werden, d.h. für  $t \rightarrow \infty$  die gesamte Energie des Systems künstlich eliminiert wird. In Abb. 10.7 ist der lokale Lösungscharakter der Wellengleichung mit

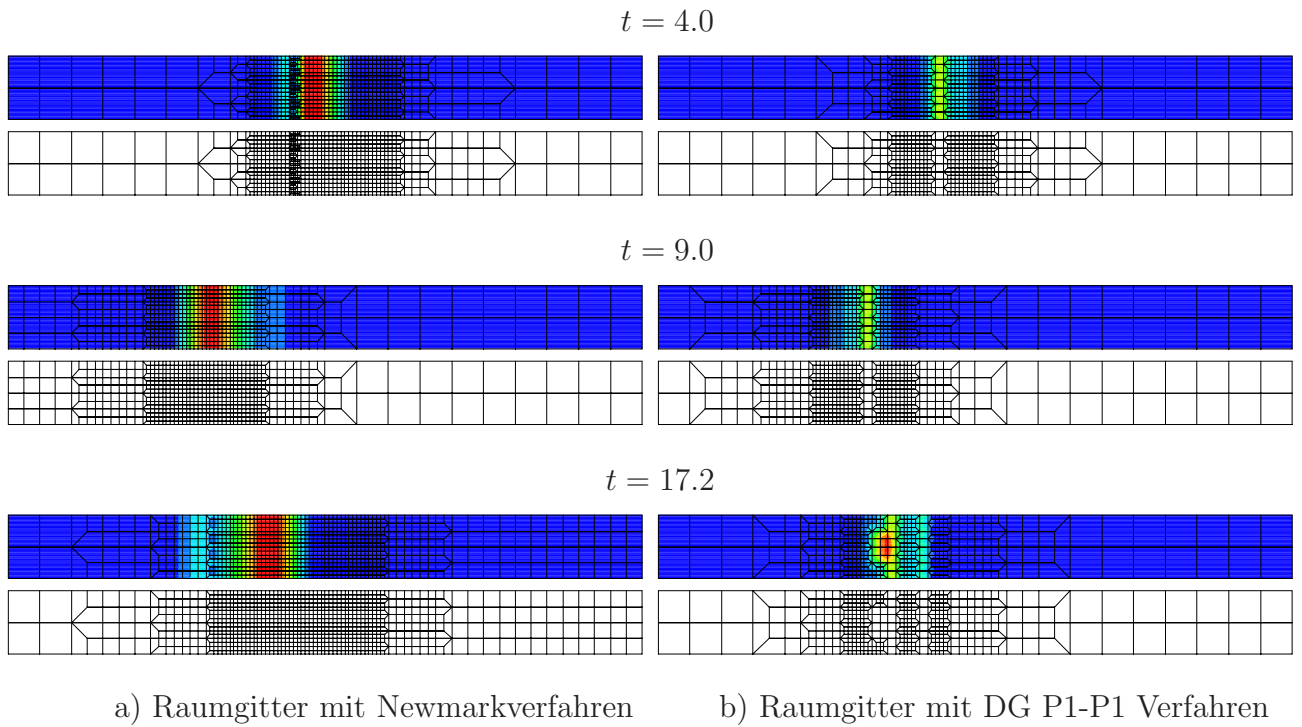


**Bild 10.6:** Wellenausbreitung - Spannungszustand  $\sigma_x(\cdot, t)$ ; adaptiertes Raumgitter; Zeitintegration mit DG P1-P1 Verfahren (D-a) und Newmarkverfahren (N-a)

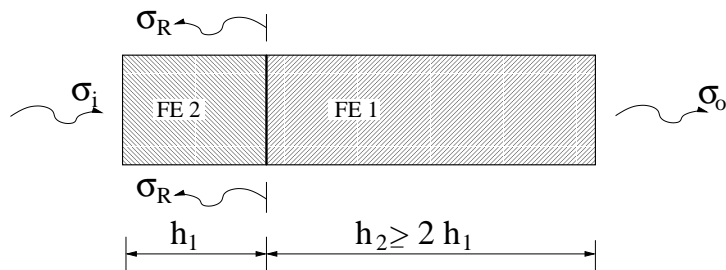
der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  an Hand der Gesamtenergienorm zu unterschiedlichen Zeitpunkten zu erkennen. Die zugehörigen adaptierten Raumgitter, die bei Verwendung des Newmark- und Galerkinverfahrens DG P1-P1 generiert wurden, sind ebenfalls in Abb. 10.7 zu finden.

## Künstliche Reflektion der numerischen Lösung an Elementgrenzen

Zusätzlich zur künstlichen Dispersion tritt das Phänomen der künstlichen Reflektion auf. Untersuchungen von Bazant/Celep [18] zeigen jedoch, daß nur kurzweilige Lösungsanteile  $h_1 \geq \lambda/10$  bei stark gradierten Netzen  $h_2 \geq 2h_1$  künstlich reflektiert werden können, siehe Abb. 10.8. Die Netzweiten  $h_1$  und  $h_2$  kennzeichnen die Gittergröße benachbarter Elemente. Da aber die Ungleichung  $h_2 \geq 2h_1$  bei jedem der verwendeten Netze erfüllt



**Bild 10.7:** Wellenausbreitung; adaptierte Rauggitter bei  $t = 4.0/9.0/17.2$  unter Verwendung des a) Newmarkverfahrens und des b) DG P1-P1 Verfahrens; im Grauton dargestellt: räumliche Verteilung der Gesamtenergienorm der Lösung  $\|\mathbf{u}\|_{g,\Omega}$



**Bild 10.8:** Bedingungen für künstliche Reflexion bei gradierten Rauggitter

ist, konnten derartige künstlichen Reflexionen an den Elementgrenzen bei dem Beispiel Wellenausbreitung nicht beobachtet werden.

## 11 Modale Analyse in der Strukturdynamik – Schätzung des Eigenwertfehlers und des Fehlers der Eigenform

Ein Sonderfall der Cauchyschen Bewegungsgleichung (3.21) ergibt sich bei Annahme von homogenen Anfangs- und Randbedingungen und einer homogenen rechten Seite  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \rho\ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega & (11.1) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, \cdot) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_D \quad \text{und} \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}, \cdot) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_N, \\ \mathbf{u}(\cdot, t = 0) &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{u}}(\cdot, t = 0) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned}$$

Mittels des Separationsansatzes, siehe Gl. (3.24),

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x})e^{i\omega t}, \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}, \quad (11.2)$$

spaltet man die Zeitabhängigkeit ab,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U}) + \rho\omega^2\mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (11.3)$$

In der Strukturdynamik dienen die Lösungspaare  $\{\mathbf{U}, \omega\}$  der Beurteilung des Schwingungsverhaltens und des Abstimmungsverhältnisses bei einer gegebener Anregung der Struktur. Eine genaue Kenntnis der Resonanzfrequenzen  $\omega$  ist dabei wesentlich. Wegen der Annahmen  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$  mit  $\mathbb{C}$  positiv definit und  $\rho > 0$  sind alle Eigenwerte  $\lambda = \omega^2$  reell.

Die Bedeutung von Eigenwertproblemen soll an zwei weiteren Beispielen dokumentiert werden. Die **Stabilität von Lösungen** bei parametererregten Schwingungen

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} - \rho\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$$

kann mittels des Verfahrens nach Floquet [34] bestimmt werden. Der Koeffizient  $\mathbf{g}(t) = \mathbf{g}(t + T)$  ist  $T$ -periodisch. Dieser Koeffizient kann z.B. die Trägheitskräfte aus der Coriolisbeschleunigung beinhalten, die für die Bemessung der Brückenkonstruktionen für schnellfahrende Schienenfahrzeuge, z.B. ICE und Transrapid, bedeutsam sind. Die räumliche Diskretisierung führt dabei auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit periodischen Koeffizienten,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}(t)\mathbf{d} &= \mathbf{0}, \\ \text{mit: } \mathbf{M}(t) &= \mathbf{M}(t + T), \quad \mathbf{C}(t) = \mathbf{C}(t + T), \quad \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(t + T). \end{aligned}$$

Das Verfahren nach Floquet basiert auf dem Lösungsansatz für die Zustandsfunktionen, siehe auch Gl. (5.9),

$$\mathbf{z} = e^{\mathbf{S}t}\mathbf{z}(t = 0) \quad \text{mit } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \dot{\mathbf{d}} \end{pmatrix}, \quad \text{und: } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{S}(t)\mathbf{z},$$

wobei  $\mathbf{S}(t)$  die  $T$ -periodische Systemmatrix darstellt.

Die zeitliche Diskretisierung von  $\mathbf{S}$  z.B. mit einer Pade-Entwicklung führt zur Übertragungsmatrix  $\mathbf{A}$  des Systems für eine Periode  $T$ . Die Vektoren  $\mathbf{Z}_T$  und  $\mathbf{Z}_0$  beinhalten dabei die diskretisierten Zustandsgrößen bei  $t = T$  und  $t = 0$ ; damit ergibt sich:

$$\mathbf{Z}_T = \mathbf{A}\mathbf{Z}_0 \text{ mit } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\mathcal{N}_{eq} \times 2\mathcal{N}_{eq}}.$$

Diese Differenzgleichung wird mittels  $\mathbf{Z}_T = \lambda\mathbf{Z}_0$ ,  $\lambda \in \mathcal{C}$ , in ein Eigenwertproblem überführt:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}.$$

Für  $|\lambda| > 1$  divergiert die Lösung, d.h. die Lösung ist instabil.

Im Gegensatz zu 2-D Problemen der Elastostatik, siehe z.B. Williams [98], können die Koeffizienten des singulären Lösungsanteiles bei 3-D Problemen der Elastostatik nicht mehr analytisch bestimmt werden. Die Gesamtlösung  $\mathbf{u}$  kann aber nach Petersdorff [95] in einen regulären  $\mathbf{u}_{reg}$  und einen singulären Lösungsanteil  $\mathbf{u}_{sing}$  aufgespalten werden,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{reg} + \mathbf{u}_{sing}$ . Der singuläre Lösungsanteil wird dann mittels des Eigenwertproblems

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_{sing}) = \Delta\mathbf{u}_{sing} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}_{sing}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{SP}^\epsilon$$

bestimmt.  $\Omega_{SP}^\epsilon$  ist hierbei die Umgebung des Punktes  $SP$  mit singulären Lösungseigenschaften. Wie beim Eigenwertproblem der Strukturmechanik wird zur Lösung wieder ein Separationsansatz gewählt,  $\mathbf{u}_{sing} = Kr^\lambda \mathbf{U}_{sing}(\varphi, \theta)$  mit  $r, \varphi, \theta$  als Kugelkoordinaten für  $\Omega_{SP}^\epsilon$ . Das variationelle Vorgehen, siehe nächster Abschnitt, führt mittels geeigneter Ansatzfunktionen wiederum auf ein Eigenwertproblem,

$$\left(\bar{\lambda}^2 \mathbf{M} + \bar{\lambda} \mathbf{G} + \mathbf{K}\right) = \mathbf{0} \text{ mit } \mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{\mathcal{N}_{eq} \times \mathcal{N}_{eq}} \text{ und } \bar{\lambda} = \lambda + 1/2. \quad (11.4)$$

Für  $Re(\lambda) \in (-1/2, 1.0)$  besitzt die Gesamtlösung einen singulären Lösungsanteil. Es sei festgehalten, daß der in der Bruchmechanik wesentliche Spannungsintensitätsfaktor  $K$  mittelbar aus der Bestimmung von  $\lambda$  folgt.

## 11.1 Variationelle Formulierung des Eigenwertproblems in der Strukturmechanik

Die Lösung der Differentialgleichung (11.3) ist für allgemeine Strukturen nur in wenigen Fällen möglich. Es gelten dieselben Einschränkungen hinsichtlich klassischer Lösbarkeit, die in Kapitel 3.1 für die 1. Cauchysche Bewegungsgleichung beschrieben wurden. Deshalb wird für Gleichung (11.3) die zugehörige variationelle Formulierung verwendet, mit der diese Einschränkungen umgangen werden können. Für die Spannungs-Dehnungs Beziehung wird das Hookesche Gesetz verwendet,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$ .  $\mathbb{C}$  ist der Materialtensor des linearen Werkstoffgesetzes,  $\boldsymbol{\epsilon}$  ist der linearisierte Verzerrungstensor. Mit der Testfunktion  $\mathbf{W} \in H_0^1$  und partieller Integration ergibt sich die variationelle Darstellung des

Eigenwertproblems:

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{W} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} dx - \lambda \int_{\Omega} \rho \mathbf{W} \cdot \mathbf{U} dx = 0 \quad \forall \mathbf{W} \in H_0^1(\Omega)^n, \quad (11.5)$$

mit:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$ , kompakt:  $a(\mathbf{W}, \mathbf{U}) - \lambda(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = 0 \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W} = H_0^1(\Omega)^n$ .

Für die numerische Auswertung von (11.5) wird hier die Finite Element Methode benutzt, d.h. es werden endlich dimensionale Ansatzräume  $\mathcal{W}^h \subset H_0^1$  gewählt. Die Finite Elementformulierung lautet dann,

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{W}^h : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^h dx - \lambda^h \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^h \cdot \mathbf{U}^h dx = 0 \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h, \quad (11.6)$$

in kompakter Form:  $a(\mathbf{W}^h, \mathbf{U}^h) - \lambda^h(\mathbf{W}^h, \mathbf{U}^h) = 0 \quad \forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{W}^h$ .

Die Lösung von (11.6) beinhaltet die Paare  $(\lambda_i^h, \mathbf{U}_i^h)$ ,  $i = 1..k$ , wobei  $k$  die endliche Dimension des Test- und Ansatzraumes ist. Unter Berücksichtigung der Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}$  kann Gl. (11.6) in die zugehörige Matrixschreibweise überführt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^h &= \mathbf{N} \mathbf{d}, \\ (\mathbf{K} - \lambda^h \mathbf{M}) \mathbf{d} &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Dabei ist  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{M}$  ist die Massenmatrix,  $\mathbf{d}$  ist der Eigenvektor, der die Eigenfunktion  $\mathbf{U}^h$  bestimmt.

Da die Eigenfunktion  $\mathbf{U}, \mathbf{U}^h$  bis auf eine freie wählbare Konstante bestimmt ist, wird meist die folgende, massenorientierte Normierung benutzt:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} dx = 1 = \int_{\Omega} \rho \mathbf{U}^h \cdot \mathbf{U}^h dx.$$

Durch diese Normierung kann der Eigenwert  $\lambda$  durch die Energienorm der zugehörigen Eigenform ersetzt werden:

$$\lambda^h = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = a(\mathbf{U}^h, \mathbf{U}^h)_{\Omega}.$$

Bei bestimmten Randbedingungen und Gebietsformen können mehrfache Eigenwerte auftreten.

## 11.2 Schätzung des Diskretisierungsfehlers der Eigenfunktion

Zur quantitativen Beurteilung der Approximation  $\{\mathbf{U}_i^h, \lambda_i^h\}$  von  $\{\mathbf{U}_i, \lambda_i\}$  sind a-priori und a-posteriori Fehlerschätzungen in einer geeigneten Norm notwendig. Zur Überprüfung einer korrekten FE-Implementierung und der dazugehörigen Ansatzfunktionen werden a-priori Fehlerabschätzungen benötigt. Als Ansatzfunktion werden bilineare Lagrangepolynome ( $Q_1$  Element) verwendet. Für Schalen- und Plattenprobleme werden die Querschubverzerrungen gemäß des ANS-Konzeptes modifiziert, siehe z.B. Hauptmann [51].

Die Konvergenzbetrachtungen im Rahmen der Fehlerschätzung beziehen sich auf die  $h$ -Methode der Finiten Elemente.

Für konvexe Gebietsformen kann gezeigt werden, daß die Eigenfunktion  $\mathbf{U}$  aus dem Funktionenraum  $H_2$  ist. Darauf basieren in der Literatur a-priori Fehlerabschätzungen für den Fehler in der Energienorm, siehe z.B. Hackbusch [45], Nystedt [76]

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_a = a(\mathbf{U} - \mathbf{U}^h, \mathbf{U} - \mathbf{U}^h)_\Omega^{1/2} \leq C_a \frac{\lambda + 2d}{d} \|hD^2\mathbf{U}\|_{L_2} \quad (11.8)$$

$$\text{mit: } D^2\mathbf{U} = \left( \sum_{|\alpha|=2} (D^\alpha\mathbf{U})^2 \right)^{1/2}$$

sowie für den Fehler in der  $L_2$  - Norm

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_{L_2} = (\mathbf{U} - \mathbf{U}^h, \mathbf{U} - \mathbf{U}^h)_\Omega^{1/2} \leq C_2 \frac{\lambda + 2d}{d} \|h^2 D^2\mathbf{U}\|_{L_2}. \quad (11.9)$$

$d$  kennzeichnet den geringsten Abstand des betrachteten Eigenwertes  $\lambda$  zu allen anderen Eigenwerten  $\lambda_i$ . Der Fehler in den Eigenwerten besitzt das gleiche Konvergenzverhalten wie der Fehler in der Energienorm, siehe Gl. (11.8):

$$\lambda^h - \lambda \leq C_\lambda \frac{\lambda + 2d}{d} \|hD^2\mathbf{U}\|_{L_2}^2. \quad (11.10)$$

$C_2 > 0, C_a > 0, C_\lambda > 0$  sind dabei Konstanten, die nur vom betrachteten Gebiet  $\Omega$  abhängen.

Aus den Gl. (11.8), (11.9) und 11.10) wird deutlich, daß die Abschätzungen nur für einfache Eigenwerte sinnvoll sind. Mehrfache Eigenwerte bedürfen einer gesonderten Betrachtung, siehe z.B. Heuveline, Rannacher [53]. Für nichtkonvexe Gebiete (L-form, einspringende Ecke) spiegelt sich die Singularität der Eigenfunktionen in den Ableitungen wieder. Auf Grund der Singularität ist dann  $\mathbf{U} \in H^k$ ,  $1 < k < 2$ . Daraus resultiert eine geringere Konvergenzrate für nichtkonvexe Gebiete, Nystedt [76]:

Energienorm:

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_a \leq C_a \frac{\lambda + 2d}{d} \|\min(D\mathbf{U}, hD^2\mathbf{U})\|_{L_2} \quad (11.11)$$

$L_2$  - Norm:

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_{L_2} \leq C_2 \frac{\lambda + 2d}{d} \|r^{-\beta} \min(hD\mathbf{U}, h^2 D^2\mathbf{U})\|_{L_2} \quad (11.12)$$

Eigenwert:

$$\lambda^h - \lambda \leq C_\lambda \left( \|\min(D\mathbf{U}, hD^2\mathbf{U})\|_{L_2}^2 + \epsilon \|r^{-\beta} \min(D\mathbf{U}, hD^2\mathbf{U})\|_{L_2}^2 \right). \quad (11.13)$$

$r$  ist der Abstand zur nächsten nicht-konvexen Ecke (Innenwinkel  $\alpha > \pi$ ). Der Exponent  $\beta$  bestimmt das Abklingverhalten in der Nähe der Singularität,  $\beta + \pi/\alpha > 1$ .  $\epsilon > 0$  besitzt die Größenordnung  $\mathcal{O}(h^2/d)$ . In numerischen Versuchen zeigte sich eine Konvergenzordnung  $h^{\alpha/\pi}$  für den Fehler in der Energienorm. Diese entspricht der erwarteten Konvergenzordnung in der Elastostatik, siehe Grisvard [43], Braess [14].

## A-posteriori Fehlerschätzung

Zu einer adaptiven Lösungsstrategie werden a-posteriori Fehlerschätzer/-indikatoren benötigt, die die Netzverfeinerung steuern. Da a-priori Konvergenzaussagen in der Energienorm  $\|\cdot\|_a$  und in der  $L_2$ -Norm  $\|\cdot\|_{L_2}$  existieren, werden im folgenden Fehlerschätzer für beide Normen vorgestellt.

### **Fehler der Eigenfunktion in der Energienorm $\|\mathbf{e}\|_a$ :**

Betrachtet wird ein spezieller einfacher Eigenwert  $\lambda = \lambda_i$  mit zugehöriger Eigenfunktion  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_i$ . Unter Ausnutzung der *max-min* Eigenschaft für Eigenwerte, Courant/Hilbert [25], und der Normierung der Eigenfunktion gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_h - \lambda &= a(\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) - a(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \geq 0, \text{ mit:} \\ (\mathbf{U}_h, \mathbf{U}_h) &= (\mathbf{U}, \mathbf{U}) = 1. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Das bedeutet, daß der Eigenwertfehler aus der Differenz der Energienorm der FE-Lösung mit der exakten Energienorm bestimmt wird. Für die *Schätzung des Fehlers in der Energienorm*  $\|\mathbf{e}\|_a$  wird das SPR-Konzept von Zienkiewicz/Zhu [100] verwendet, das in Abschnitt 7.2 zur Schätzung des räumlichen Diskretisierungsfehlers bei transienten Problemstellungen benutzt wurde.

Grundlage ist die Existenz von superkonvergenten (Spannungs)punkten, die jedoch nur bei regelmäßigen FE-Netzen vorhanden sind. Bei verzerrten Netzen gilt obige Aussage nicht mehr; trotzdem wird auch bei verzerrten FE-Netzen die Superkonvergenzeigenschaft benutzt. Der exakte Fehler  $\|\mathbf{e}\|_a$  wird durch  $\|\mathbf{e}_h\|_a$  approximiert:

$$\|\mathbf{e}\|_a^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^h) dx, \quad (11.15)$$

$$\|\mathbf{e}_h\|_a^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}^h) : (\boldsymbol{\epsilon}^* - \boldsymbol{\epsilon}^h) dx, \quad (11.16)$$

$\boldsymbol{\sigma}^*$  und  $\boldsymbol{\epsilon}^*$  beinhalten das Gradientenfeld, das mit Hilfe des 'Superconvergent Patch Recovery' Prinzips erzeugt wurde.

Zur **Schätzung des Approximationsfehlers in der  $L_2$ -Norm** der Eigenfunktion  $\mathbf{U}^h = \mathbf{U}_i^h$  wird auf das Konzept des 'verschlechterten' Verschiebungsfeldes zurückgegriffen. Dieses Konzept wurde von Riccius/Schweizerhof [81] zur Schätzung des kinetischen Energiefehlers bei transienten Problemen, siehe Abschnitt 7.2 benutzt.

Basierend auf den Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}_i$  der Eigenfunktion  $\mathbf{U}^h$  wird die Verschiebung  $\mathbf{d}_{m,j}$  im Mittelpunkt des Elementes  $j$  bestimmt. Eine anschließende arithmetische Mittelung von  $\mathbf{d}_{m,j}$  über alle  $(n_i)$  an den Knoten  $i$  anschließenden Elemente definiert die verschlechterte Eigenfunktion  $\mathbf{U}^\#$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i^\# &= \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{d}_{m,j}}{n_i}, \\ \mathbf{U}^\# &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}_n} \mathbf{N}_i \mathbf{d}_i^\#. \end{aligned} \quad (11.17)$$

$\mathcal{N}_n$  ... Anzahl der Knoten der Diskretisierung



Mit der 'verschlechterten' Eigenform  $\mathbf{U}^\#$  wird der  $L_2$ -Fehler der Eigenform geschätzt:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_h^\# &= \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{N}_i(\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^\#) \\ \|\mathbf{e}_h\|_{L_2}^2 &= c_2^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{e}_h^\# \cdot \mathbf{e}_h^\# dx.\end{aligned}\tag{11.18}$$

Die Konstante  $c_2 = 0.365$  dient zur quantitativen Anpassung des geschätzten Fehlers an den exakten  $L_2$ -Fehler, siehe Riccius [80].

Ein *alternatives Konzept* zur Schätzung des Energienormfehlers der Eigenform und damit automatisch zur Schätzung des Eigenwertfehlers basiert auf Polynomen höherer Ordnung, die mittels eines Quadratmittelproblems über einem Elementpatch generiert werden, siehe Wiberg et al. [97]. Die Nachteile dieses Vorgehens sind die größere Anzahl der Unbekannten (6) beim Quadratmittelproblem und die wesentliche höhere Anzahl von Integrationspunkten (9/Element), die zur Auswertung des Fehlerschätzers notwendig sind. Weiterhin kann in manchen Fällen die Matrix, die dem Quadratmittelproblem zugeordnet ist, singular sein. Dies erfordert zusätzliche Betrachtungen.

### 11.3 Effektivitätsindex für den geschätzten Fehler

Zur Beurteilung der quantitativen Schätzung des Approximationsfehlers kann der Effektivitätsindex  $\eta$  benutzt werden,

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_a}{\|\mathbf{e}^h\|_a}.$$

Dieser Quotient gibt das Verhältnis des exakten zum geschätzten Fehler in der Energienorm wieder.  $\eta > 1$  bedeutet eine Unterschätzung,  $\eta < 1$  bedeutet eine Überschätzung des exakten Fehlers. Im Rahmen der numerischen Betrachtungen soll der Effektivitätsindex ausschließlich auf den Fehler in der Energienorm angewandt werden. Als Grund kann zum einen die unterschiedliche Größenordnung des Fehlers in der Energienorm und  $L_2$ -Norm angegeben werden:

$$\|\mathbf{e}\|_a^2 = \mathcal{O}(h^2), \quad \|\mathbf{e}\|_{L_2}^2 = \mathcal{O}(h^4).$$

Zum anderen ist der Aufwand zur Ermittlung des 'exakten'  $L_2$  Fehlers aus Referenzlösungen erheblich. Zur Bestimmung des 'exakten' Fehlers in der Energienorm wird nun zunächst folgende Identität benutzt,

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_a^2 = (\lambda^h - \lambda) + \lambda \|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_{L_2}^2.\tag{11.19}$$

Die a-priori Fehlerabschätzungen nach den Gleichungen (11.9,11.10) erlauben eine Aussage über die jeweilige Größenordnung der rechten Seite von Gl. (11.19) zu:

$$\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_{L_2}^2 = \mathcal{O}(h^4), \quad \lambda^h - \lambda = \mathcal{O}(h^2).\tag{11.20}$$

Aus (11.19,11.20) erhält man dann eine Beziehung unter Berücksichtigung der Größenordnung der rechten Seite von (11.19) :

$$\|\mathbf{e}\|_a^2 = \|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_a^2 = \lambda^h - \lambda + \mathcal{O}(h^4). \quad (11.21)$$

Unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung, hier  $\mathcal{O}(h^4)$ , und der Ausnutzung der Normierungsannahme (11.14) kann nun eine Berechnungsvorschrift für den Effektivitätsindex angegeben werden:

$$\eta = \frac{\sqrt{\|\mathbf{U}^h\|_a^2 - \|\mathbf{U}\|_a^2}}{\|\mathbf{e}^h\|_a}. \quad (11.22)$$

## 11.4 Andere Fehlerschätzer für Eigenformen

Zusätzlich zu den oben beschriebenen Fehlerschätzern/-indikatoren existieren residuelle Fehlerschätzer für die Eigenwerte  $\lambda^h$  und die Eigenform  $\mathbf{U}^h$ , Nystedt [76], Larson [62]. Eine alternativer Zugang zu a-posteriori Fehlerschätzern wurde von Rannacher und Mitarbeitern [13, 79] erarbeitet, aus dem für Eigenwertprobleme mit Hilfe eines dualen Hilfsproblems ein Fehlerschätzer entwickelt wurde, siehe Heuveline/Rannacher [53]. Damit kann der Fehler jeder beliebigen Größe geschätzt werden. Neben dem erforderlichen Aufwand sollte aber beachtet werden, daß die Fehlerschätzung einzelner lokaler Größen (punkteller Wert der Eigenfunktion) bei Eigenwertproblemen von untergeordneter Bedeutung ist.

## 11.5 Numerische Beispiele

Zunächst sollen an drei Beispielen die jeweiligen Fehler in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_a$  und in der  $L_2$ -Norm  $\|\mathbf{e}\|_{L_2}$  mit den Indikatoren aus Gl. (11.16) und Gl. (11.18) geschätzt werden. Die Ergebnisse werden dann mit den a-priori Aussagen, Gl. (11.8) - (11.9) verglichen.

Die **Membran** ist über einem L-Gebiet, siehe Abb. 11.1, mit  $\sigma_0 = 1.0$  homogen vorgespannt. Es werden nur Querverschiebungen (z-Richtung) zugelassen. Zudem wird eine Faltenbildung der Struktur unterdrückt, da in der Modellannahme (Membran) keine Biegesteifigkeit enthalten ist. Die Dichte beträgt  $\rho = 1.0$ . Auf Grund des skalaren Charakters der Differentialgleichung  $\sigma_0 \Delta u - \rho \ddot{u} = 0$  besitzt die Lösung sowie der Gradient der Lösung für die Verschiebung in z-Richtung keine Singularität. Bei uniformer Netzverfeinerung soll der Fehler in den Eigenformen der Schwingung für die 1. und 10. Eigenkreisfrequenz geschätzt werden. Die Konvergenz des geschätzten Fehlers für beide Eigenformen entspricht der Fehlerordnung der a-priori Fehlerschätzer. D.h. die Ordnung des geschätzten Fehlers in der  $L_2$ -Norm ist  $\mathcal{O}(h^2)$ , siehe Abb. 11.2b, und der geschätzte Diskretisierungsfehler, gemessen in der Energienorm, besitzt die erwartete Konvergenzordnung  $\mathcal{O}(h^1)$ , siehe Abb. 11.3a. Der zugehörige Effektivitätsindex  $\eta$  in Abb. 11.3b) - für die exakten Eigenformen liegen analytische Lösungen vor (Hettich et al. [52]) - weicht vom Idealwert nur bei groben Netzen ab, wobei, wie erwartet, der Effektivitätsindex für die 10. Eigenform geringfügig schlechter ist.

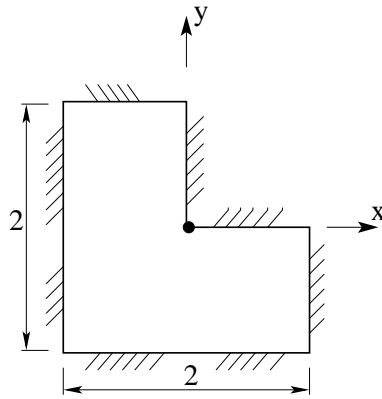


Bild 11.1: Membran mit Vorspannung und konstanter Dicke  $d = 1$

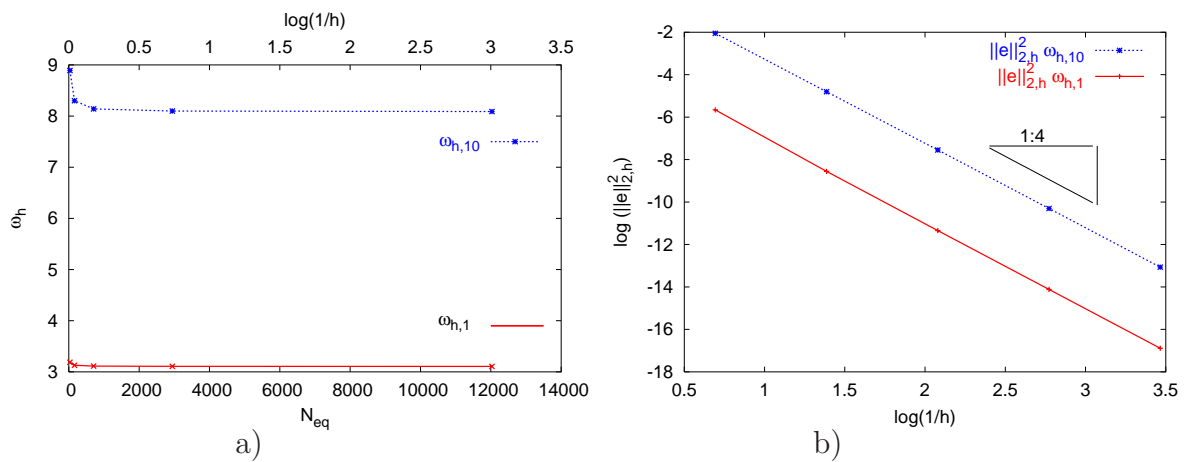


Bild 11.2: Membran, uniforme Netzverfeinerung; a) Konvergenz der 1. und 10. Eigenkreisfrequenz, b) Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 10. Eigenform in der  $L_2$ -Norm

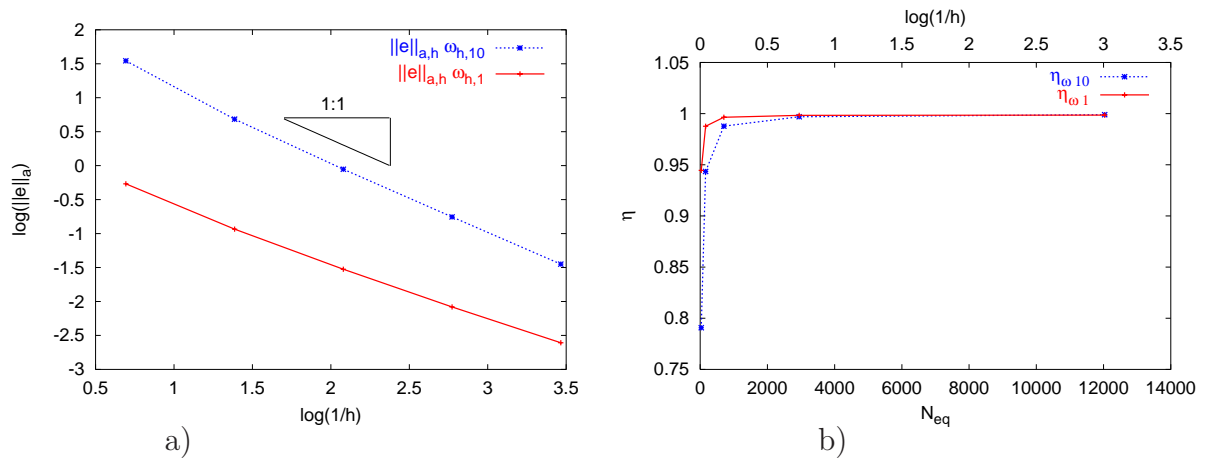
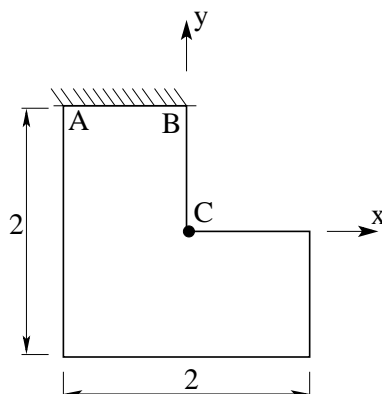


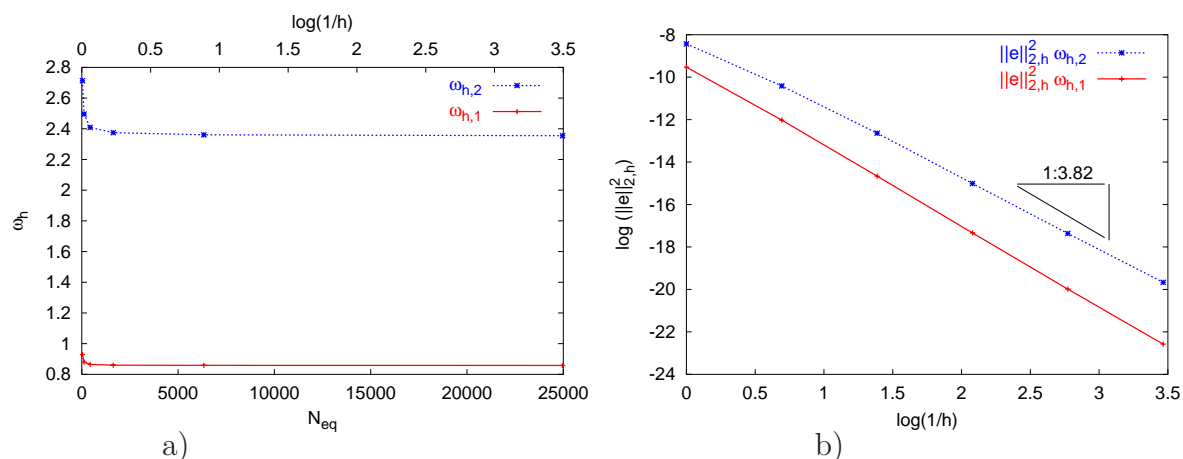
Bild 11.3: Membran, uniforme Netzverfeinerung; a) Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 10. Eigenform in der Energienorm, b) Effektivitätsindex  $\eta$  des geschätzten Fehlers in der Energienorm  $\|e\|_a$

Für die **Scheibe** in L-Form, Abb. 11.4, wird der ebene Spannungszustand angenommen. Bei  $y = 1$  ist ein Dirichletrand definiert, der restliche Teil des Randes ist spannungsfrei. Die gewählten Systemparameter sind:  $E = 10^5$ ,  $\nu = 0.0$ ,  $\rho = 2.5 \cdot 10^3$ ,  $d = 0.3$  ( Dicke ). D.h., es findet eine Schwingung in der Ebene statt. Der Diskretisierungsfehler wird hier



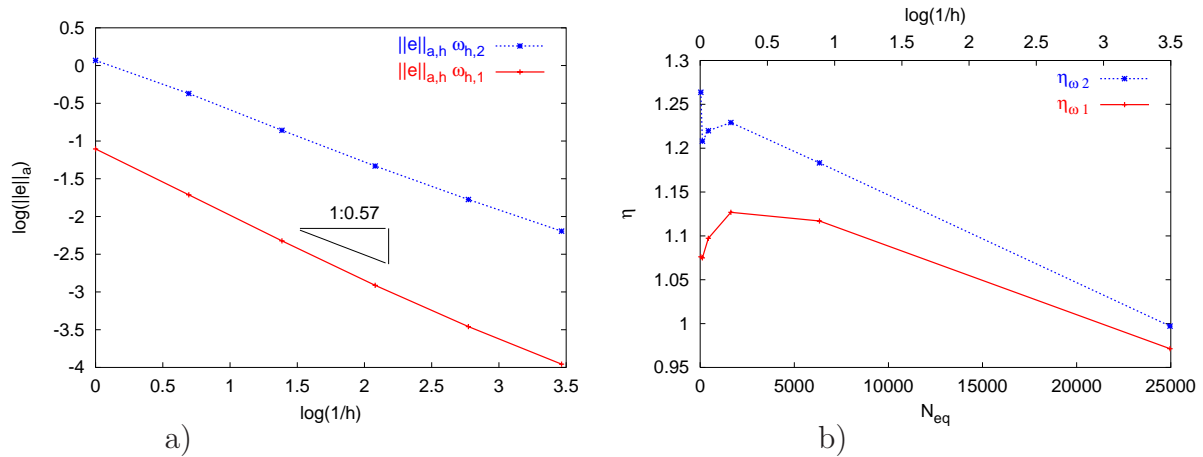
**Bild 11.4:** Scheibe in L-Form, Schwingung in der Ebene

für die 1. und 2. Eigenform bei uniformer Netzverfeinerung geschätzt. Die Eigenwerte  $\omega_{h,1}$



**Bild 11.5:** Scheibe, uniforme Netzverfeinerung; a) Konvergenz der 1. und der 2. Eigenkreisfrequenz, b) Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 2. Eigenform in der  $L_2$ -Norm

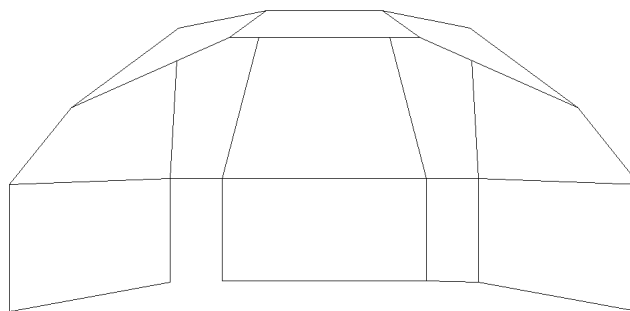
und  $\omega_{h,2}$  konvergieren gemäß dem 'Minmax Prinzip' von 'oben' gegen den exakten Wert  $\omega_1$  bzw.  $\omega_2$ . Da alle Eigenformen bei  $(x = -1, y = 1)$ ,  $(x = 0, y = 1)$  und  $(x = 0, y = 0)$  eine Singularität in den Ableitungen  $\nabla \mathbf{U}$  besitzen, ist die Konvergenzrate des Fehlers in der Energienorm  $\|e\|_a$  und des Fehlers in der  $L_2$ -Norm geringer als im Beispiel 'Membran', siehe Abb. 11.5b) und Abb. 11.6a). Für 2-D Probleme der Elastostatik kann der Singulärexponenten  $\lambda$ , siehe Gl. (11.4), aus einem skalaren Eigenwertproblem bestimmt werden. Dieser Singulärkoeffizient ist entscheidend für die Konvergenzrate des Fehlers in der Energienorm,  $\|\mathbf{U} - \mathbf{U}^h\|_a \leq ch^\lambda \|\mathbf{U}\|_{\lambda+1}$ . Für die einspringende Ecke beträgt der kleinste Eigenwert  $\lambda^* = 0.545$ , siehe Williams [98]. Die numerisch ermittelte Konvergenzrate  $h^{0.57}$ , siehe Abb. 11.6a) stimmt annähernd mit  $h^{\lambda^*}$  überein. Zur Ermittlung des Effektivitätsindex  $\eta$  wurde eine Referenzlösung für die 1. und 2. Eigenform auf einem Raumgitter



**Bild 11.6:** Scheibe, uniforme Netzverfeinerung; a) Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 2. Eigenform in der Energienorm  $\|e\|_a$ , b) Effektivitätsindex  $\eta$  des geschätzten Fehlers

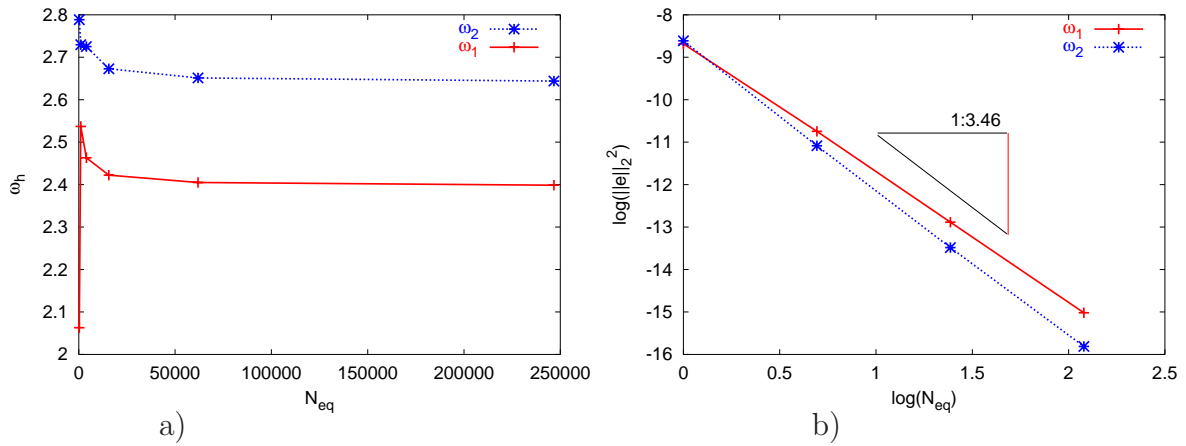
mit  $N_{eq} = 99200$  Gleichungen generiert. Der damit ermittelte Effektivitätsindex  $\eta$  liegt für den geschätzten Fehler beider Eigenformen in der Energienorm nahe '1'. Allerdings wird für grobe Netze der Fehler in der Energienorm meist unterschätzt.

Das Beispiel **Pavillon** wurde bereits in Abschnitt 8 zur Fehlerschätzung lokaler Größen benutzt, siehe Abb. 8.9. Die Systemparameter sind ebenfalls Abb. 8.9 zu entnehmen. Zur räumlichen Diskretisierung wird das  $Q1 - ANS$  Schalenelement verwendet, siehe Hauptmann [51]. Es sei bemerkt, daß der geometrische Diskretisierungsfehler, der aus der facettierten Approximation des Gebietes resultiert, bei der Fehlerschätzung vernachlässigt wird. Für dieses Beispiel wurden nur die beiden unteren Lösungspaare zu Ergebnisdis-

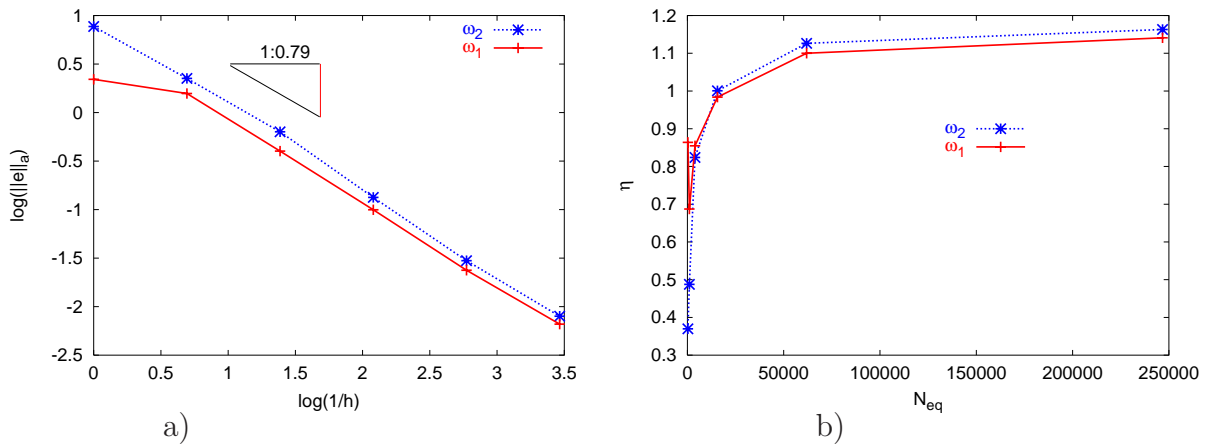


**Bild 11.7:** Pavillon; gewähltes Startnetz für gleichmäßige und adaptive Netzverfeinerung

kussion gewählt, da zur Bestimmung von Referenzlösungen für höhere Eigenwerte bzw. Eigenfunktionen ein deutlich größerer numerischer Aufwand notwendig ist. Die 1. und 2. Eigenkreisfrequenz ( $\omega_{h,1}$  und  $\omega_{h,2}$ ) konvergieren wiederum von 'oben' gegen die exakte Lösung, siehe Abb. 11.8a). Im Gegensatz zu den beiden vorherigen Beispielen ist der geschätzte Fehler in der  $L_2$ -Norm für die 2. Eigenform kleiner als der geschätzte Fehler für die 1. Eigenform. Die Ursache liegt in der Wahl des Startnetzes, Abb. 11.7, das, gemessen in der  $L_2$ -Norm, die 2. Eigenform besser als die 1. Eigenform approximiert. Der



**Bild 11.8:** Pavillon, gleichmäßige Netzverfeinerung; a) Konvergenz der 1. und 2. Eigenkreisfrequenz, b) Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 2. Eigenform in der  $L_2$ -Norm



**Bild 11.9:** Pavillon, gleichmäßige Netzverfeinerung; a) Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 2. Eigenform in der Energienorm, b) Effektivitätsindex  $\eta$  des geschätzten Fehlers in der Energienorm  $\|e\|_a$

geschätzte Energienormfehler für beide Eigenformen besitzt auf Grund der Randschichteffekte des gewählten Reissner-Mindlin Modells für die Schalenberechnung die numerisch ermittelte Fehlerordnung  $\mathcal{O}(h^{0.79})$ , Abb. 11.9a). Mittels der in Abschnitt A beschriebenen Extrapolationsmethode werden die Referenzlösungen für die 1. und 2. Eigenform zu  $\|\mathbf{U}\|_{a,1} = 2.395$ ,  $\|\mathbf{U}\|_{a,2} = 2.641$  bestimmt. Der exakte Fehler in der Energienorm wird für beide Eigenformen im Bereich grober Netze überschätzt,  $\eta < 1$ . Für feinere Netze wird der exakte Fehler leicht unterschätzt,  $1.15 > \eta > 1$ , Abb. 11.9b).

Da der Effektivitätsindex  $\eta$  des geschätzten Fehlers in der Energienorm  $\|e\|_a$  in den drei Beispielen annähernd '1' ist und die Konvergenzrate des geschätzten Fehlers mit den a-priori Fehlerabschätzungen übereinstimmt, erscheint es sinnvoll eine adaptive Netzveränderung durchzuführen.

## 11.6 Adaptive Netzveränderung

Mittels des Separationsansatzes (11.2) konnte die Zeitabhängigkeit der Differentialgleichung (11.3) eliminiert werden. Dann liegt für das Eigenwertproblem eine elliptische Differentialgleichung vor. Folglich kann der SPR-Schätzer für den Diskretisierungsfehler in der Energienorm (11.16) verwendet werden, der ursprünglich für Probleme der Statik entwickelt wurde.

Überschreitet der geschätzte Fehler die vom Anwender vorgegebene Genauigkeitsschranke, so muß die Netzweite  $h$  verändert werden. Es besteht nun einerseits die Möglichkeit, eine uniforme bzw. gleichmäßige Netzverfeinerung durchzuführen, die im vorherigen Abschnitt benutzt wurde. Andererseits sollten aus Effizienzgründen jedoch nur die Bereiche des Berechnungsgebietes verfeinert werden, deren Beitrag zum globalen Fehler wesentlich ist. Deshalb wird die sogenannte hierarchische Netzverfeinerungsstrategie verwendet. Bei dieser Methode wird das gegebene FE-Netz hierarchisch verfeinert. Die Stetigkeit der Näherungslösung wird durch sogenannte Übergangselemente nicht optimaler Form gewährleistet. Der Algorithmus zur hierarchischen Netzverfeinerung wurde unverändert von Riccius [80] übernommen. Für eine weitergehende Beschreibung des Algorithmus wird deshalb verzichtet.

Zur Netzverfeinerungssteuerung wird ein Kriterium benötigt, mit dem die Elemente ermittelt werden, die verfeinert werden sollen. Es wird die sogenannte Maximalfehlersteuerung benutzt, siehe Riccius [80], die im folgenden kurz erläutert wird.

Für jedes Element  $i$  ist der Fehlerindikator  $\eta_i$ , d.h. der geschätzte Fehler des Elementes,

$$\eta_i \approx \|\mathbf{e}\|_{a,i} \quad i = 1 \dots \mathcal{N}_E, \quad \|\mathbf{e}\|_{a,i}^2 = a(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h, \mathbf{U} - \mathbf{U}_h)_{\Omega_i}$$

$\Omega_i \dots$  Gebiet eines Elements  $i$ ,

gegeben. Grundsätzlich sollen die Elemente verfeinert werden, die die Ungleichung

$$\begin{aligned} \eta_i &> c\eta_{max}, \\ \text{mit: } \eta_{max} &= \max_{i=1 \dots \mathcal{N}_E} \eta_i \\ c &< 1 \\ \mathcal{N}_E &\dots \text{ Anzahl der Elemente des FE-Netzes} \end{aligned}$$

erfüllen. Zur Bestimmung der Konstanten  $c$  wird die globale Größenordnung des Fehlers in der Energienorm benutzt,

$$\|\mathbf{e}\|_a = \mathcal{O}(h^p). \quad (11.23)$$

$p = 1$  ist die Polynomordnung der gewählten Ansatzfunktion. Besitzt die analytische Lösung an beliebigen Punkten im Gebiet Singularitäten, so kann  $p$  nicht mehr vom Polynomgrad abgeleitet werden. Dieser Zusammenhang wurde im vorherigen Abschnitt beim Scheibenproblem in L-Form sichtbar. Trotzdem soll angenommen werden, daß bei Halbierung der Netzweite  $h \rightarrow h/2$  der Fehler in der Energienorm halbiert wird,

$$\|\mathbf{e}(\frac{h}{2})\|_a = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}(h)\|_a. \quad (11.24)$$

Diese Annahme kann auch auf ein spezielles Element  $i$  angewendet werden,

$$\|\mathbf{e}(\frac{h}{2})\|_{a,i} = \frac{1}{2}\|\mathbf{e}(h)\|_{a,i}. \quad (11.25)$$

$$\boxed{i} = \begin{array}{|c|c|} \hline (i, 1) & (i, 2) \\ \hline (i, 3) & (i, 4) \\ \hline \end{array} \quad i = \cup_{j=1}^4 (i, j).$$

Die Energienorm des Fehlers nach Verfeinerung des Elementes  $i$  wird durch elementweise Aufsummierung bestimmt,

$$\|\mathbf{e}(\frac{h}{2})\|_{a,i} = \left( \sum_{j=1}^4 \|\mathbf{e}(h)\|_{a,(i,j)}^2 \right)^{1/2}. \quad (11.26)$$

Da in der Regel der Fehler nach der Verfeinerung in den Elementen  $(i, j) j = 1..4$  unterschiedlich ist, wird ein mittlerer Fehler aller 4 Elemente definiert,

$$\|\mathbf{e}(\frac{h}{2})\|_{a,(i,m)} = \left( \frac{\left( \sum_{j=1}^4 \|\mathbf{e}(h)\|_{a,(i,j)}^2 \right)}{4} \right)^{1/2}. \quad (11.27)$$

Nach sukzessiven Einsetzen von Gl. (11.26) und Gl. (11.25) in die rechte Seite von Gl. (11.27) ergibt sich daraus die Konvergenzordnung für den lokalen Fehler,

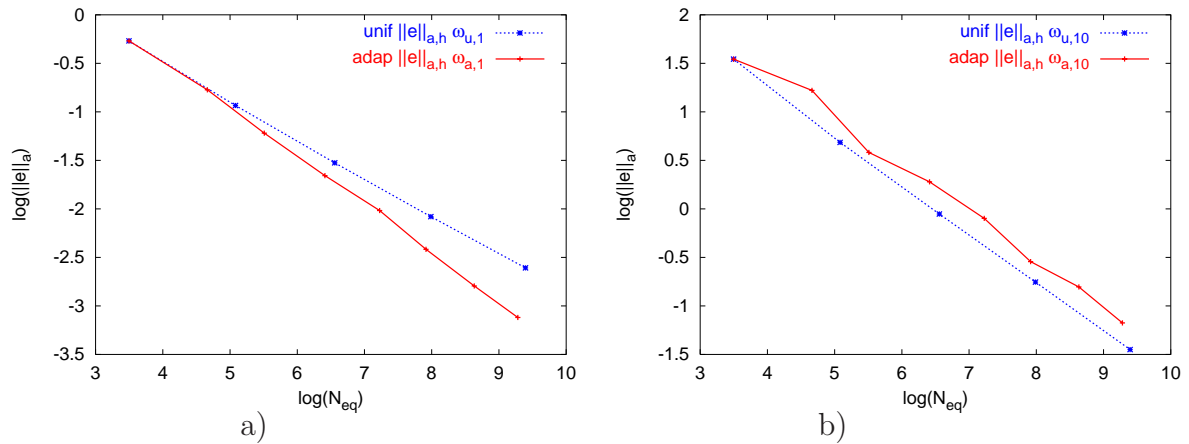
$$\|\mathbf{e}(\frac{h}{2})\|_{a,(i,m)} \approx \frac{\|\mathbf{e}\|_{a,i}}{2}. \quad (11.28)$$

D.h. der Fehler des Ausgangselementes  $i$  wird durch einmalige Verfeinerung auf  $1/4$  reduziert. Die Fläche jedes einzelnen verfeinerten Elementes  $(i, j)$  ist dann auf  $1/4$  der Fläche des Ausgangselementes  $i$  reduziert. Werden diese Überlegungen auf den Fehlerindikator  $\eta_i$ , d.h. den geschätzten Elementfehler  $\|\tilde{\mathbf{e}}\|_{a,i}$  übertragen, so erhält man  $c = 1/4$ . D.h. alle Elemente mit  $\eta_i > 1/4\eta_{max}$  werden verfeinert.

Dieses Vorgehen zur adaptiven Netzverfeinerung wird an den drei Beispielen aus Abschnitt 11.5 getestet, die auch zur Studie der Konvergenzordnung dienen. Bei den numerischen Untersuchungen auf adaptierten FE-Gittern wird jeweils nur der Energienormfehler in einer Eigenform kontrolliert, die vorab definiert werden muß.

Beim Beispiel **Membran** soll das FE-Netz mittels des geschätzten Fehlers in der Energienorm adaptiv an die 1. Eigenform angepaßt werden. Zum Vergleich werden die Schätzwerte der 1. und 10. Eigenform für gleichmäßig verfeinerte Gitter aufgetragen. Da das adaptierte FE-Netz an die 1. Eigenform angepaßt wurde, wird der geschätzte Energiefehler für die 1. Eigenform stärker reduziert als bei uniformer Verfeinerung. Exemplarisch werden eine uniforme und eine adaptive Verfeinerungsstufe mit ähnlicher Gleichungsgröße verglichen: uniform:  $\mathcal{N}_{eq} = 2945$ ,  $\|\mathbf{e}\|_a = 1.25 \cdot 10^{-1}$ ; adaptiv:  $\mathcal{N}_{eq} = 2738$ ,  $\|\mathbf{e}\|_a = 8.92 \cdot 10^{-2}$ .





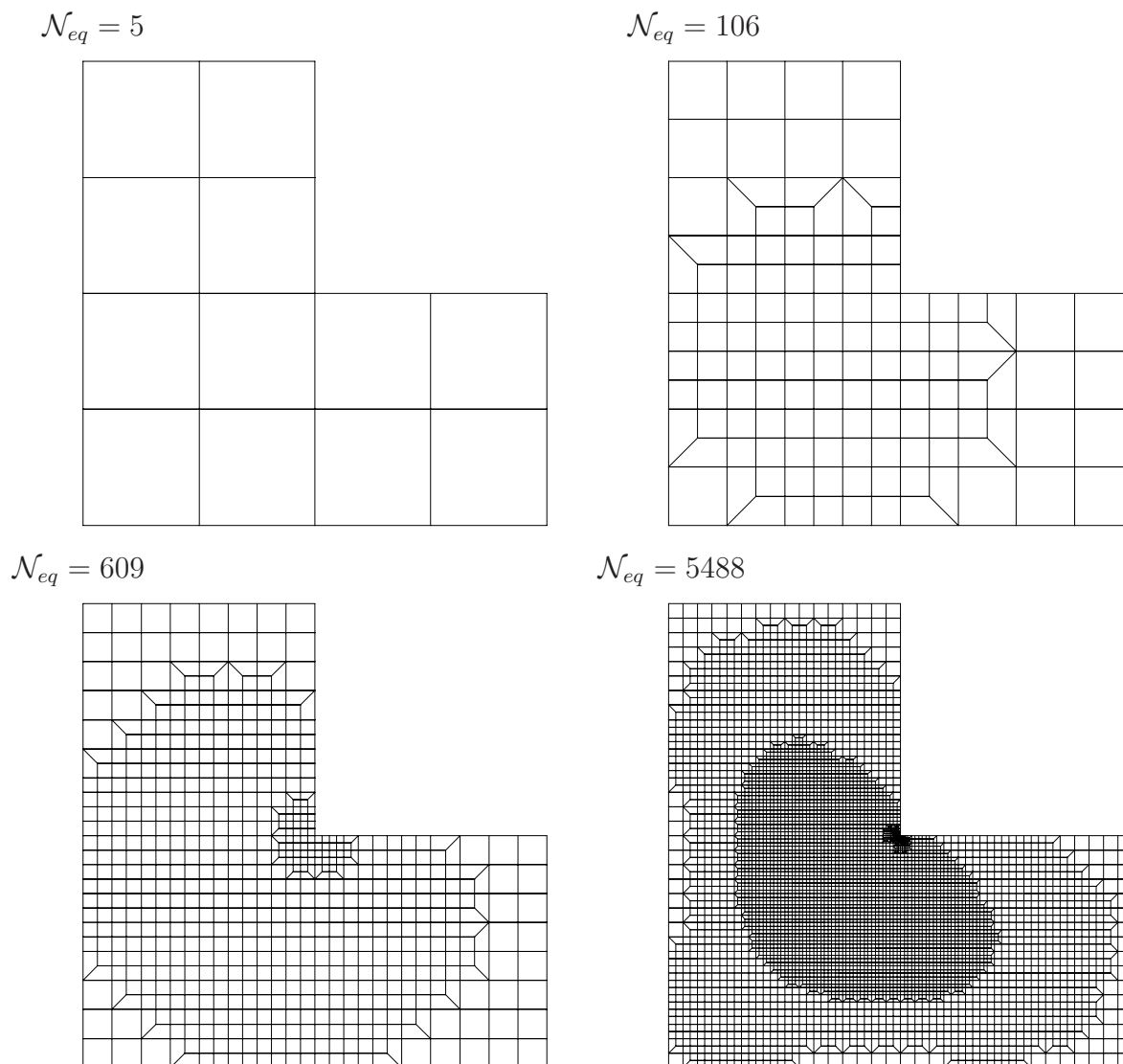
**Bild 11.10:** Membran; Konvergenz des geschätzten Fehlers der 1. und 10. Eigenform in der Energienorm bei a) uniformer Verfeinerung sowie bei b) adaptiver Verfeinerung bzgl. der 1. Eigenform

D.h. der geschätzte Fehler bei adaptiver Netzverfeinerung ist um rund 30 % kleiner als bei uniformer Verfeinerung. Dies zeigt die Effizienz des adaptiven Vorgehens. Konsequenterweise ist die Konvergenz für den geschätzten Fehler in der 10. Eigenform bei adaptiver Verfeinerung des Raumgitters basierend auf der 1. Eigenform, Abb. 11.10b), geringfügig schlechter. Obwohl die Membran über ein  $L$ -Gebiet aufgespannt wird, besitzen alle Eigenformen keine Singularität. Trotzdem erfolgt die Verringerung der Netzweite in der Umgebung des Punktes  $x = 0/y = 0$ , da hier die größten Verschiebungsgradienten der 1. Eigenform existieren. Die Verwendung der Maximalfehlersteuerung führt auf symmetrische FE-Netze.

Für die **Scheibe** in L-Form wird das FE-Netz mit Hilfe des geschätzten Energienormfehlers in der 2. Eigenform adaptiv generiert. Um die Lösung auf adaptierten FE-Netzen bewerten zu können, ist die zugehörige Lösung auf gleichmäßig verfeinerten Raumgittern angegeben, Abb. 11.12. Grundsätzlich ist dasselbe Verhalten vom Beispiel Membran wieder erkennbar. Die Lösungen auf adaptierten FE-Netzen, die auf der Basis des geschätzten Energienormfehlers in der 2. Eigenform generiert wurden, zeigen eine stärkere Fehlerreduktion als der geschätzte Fehler bei uniformen FE-Netzen. Interessanterweise kann auch eine leichte Verbesserung der Konvergenz des geschätzten Fehlers für die 1. Eigenform beobachtet werden, Abb. 11.12a). Festzuhalten ist, um eine Lösung mit annähernd gleicher Größenordnung des geschätzten Energienormfehlers zu erhalten, ein rund 2.5-facher numerischer Aufwand bei uniformer Netzverfeinerung notwendig ist: uniform:  $\mathcal{N}_{eq} = 24960$ ,  $\|\mathbf{e}\|_a = 1.11 \cdot 10^{-1}$ ; adaptiv:  $\mathcal{N}_{eq} = 9650$ ,  $\|\mathbf{e}\|_a = 8.31 \cdot 10^{-2}$ .

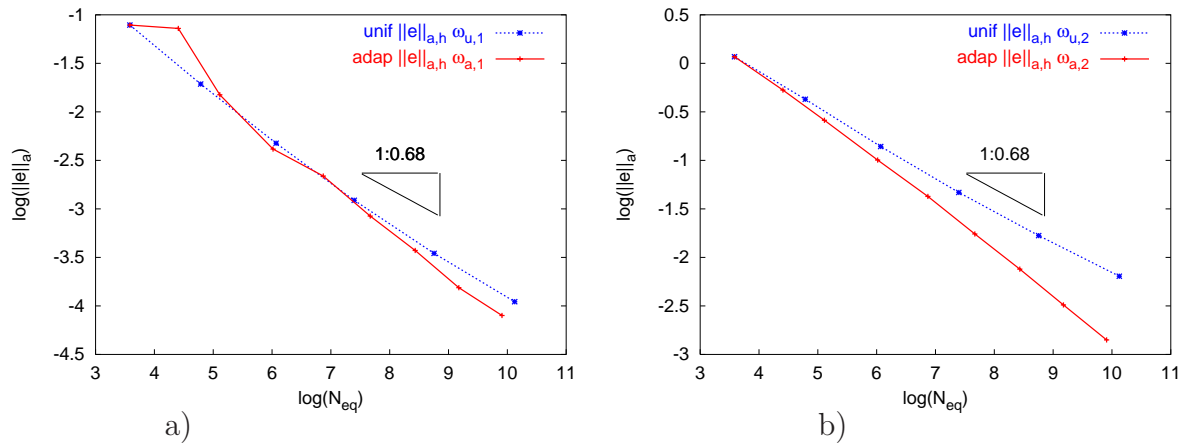
Im Gegensatz zur Membran wird das Gitter bei der Scheibe in L-Form an den Punkten  $A$  und  $B$  verfeinert, da alle Eigenformen in diesen Punkten eine Singularität besitzen, die jedoch schwächer ist wie im Punkt  $C$ , Abb. 11.13, siehe Williams [98]. Die Ursache der Singularität in den Punkten  $A$  und  $B$  ist in der aufgezwungenen Symmetrie des Spannungstensors (Wechsel der Randbedingung bei A/B) begründet.

Beim Beispiel **Pavillon** wird das FE-Netz bzgl. der 1. Eigenform adaptiv verfeinert. Die Lösungen auf gleichmäßig verfeinerten Raumgittern sind zum Vergleich aufgeführt,

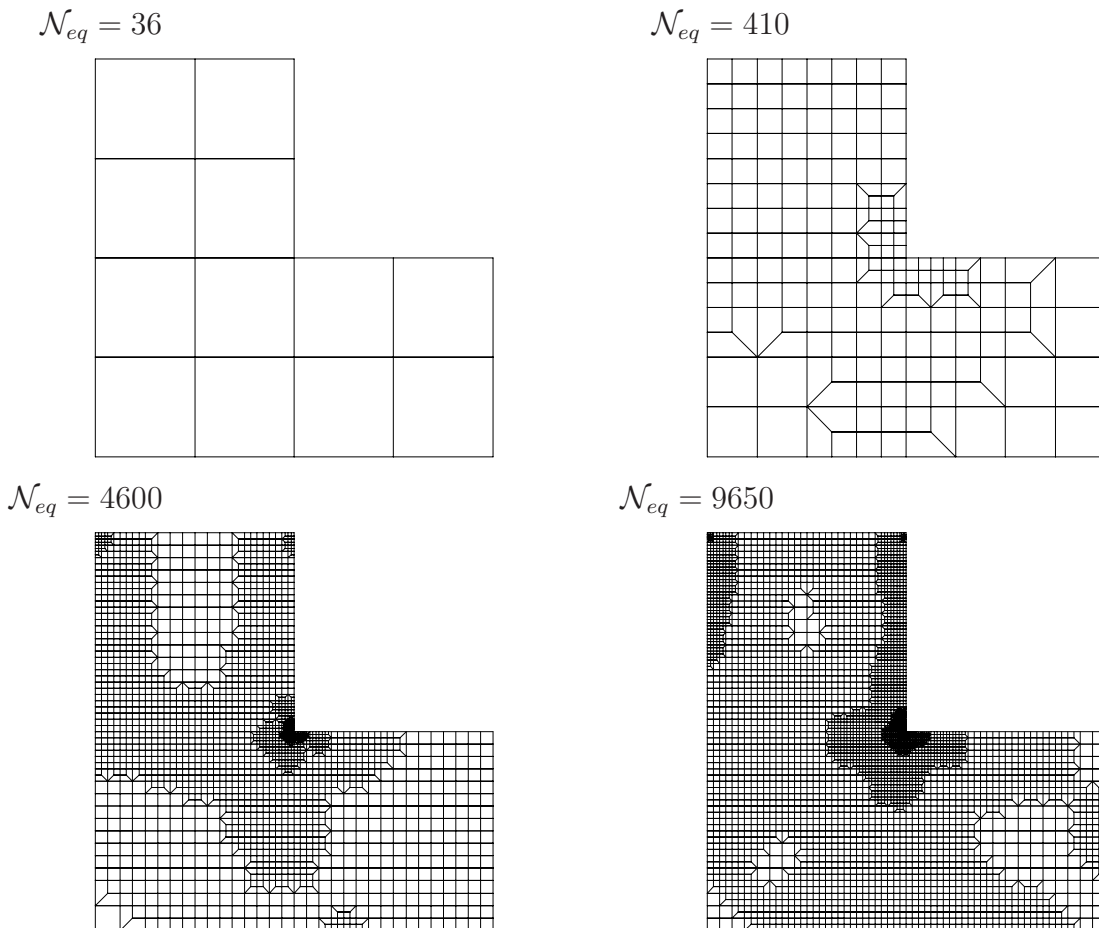


**Bild 11.11:** Membran; FE-Netze verschiedener Verfeinerungsstufen, basierend auf dem geschätzten Energiefehler der 1. Eigenform

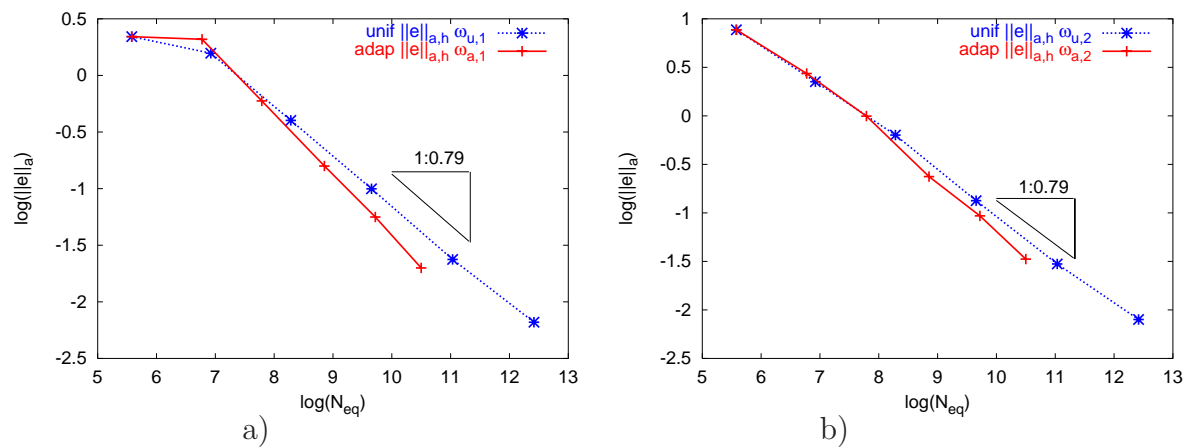
Abb. 11.14. Der geschätzte Fehler in der Energienorm der 1. Eigenform wird bei adaptiver Netzverfeinerung wie erwartet stärker reduziert als bei gleichmäßiger Netzverfeinerung. Für sehr große Netzweiten zeigt der geschätzte Fehler bei adaptiver und uniformer Netzverfeinerung keine gleichmäßige Konvergenz, Abb. 11.14a), da sich am Anfang der Konvergenzstudie das Berechnungsgebiet infolge des isoparametrischen Ansatzes ebenfalls stark ändert. Obwohl die adaptive Netzverfeinerung auf dem geschätzten Fehler in der Energienorm für die 1. Eigenform basiert, wird auch der geschätzte Fehler für die 2. Eigenform bei adaptiver Netzverfeinerung stärker reduziert, Abb. 11.14b). Aus dem Vergleich des numerischen Aufwands zwischen uniformer und adaptiver Netzverfeinerung bei gleicher Genauigkeit, uniform:  $\mathcal{N}_{eq} = 61915$ ,  $\|\mathbf{e}\|_a = 1.97 \cdot 10^{-1}$ ; adaptiv:  $\mathcal{N}_{eq} = 36270$ ,  $\|\mathbf{e}\|_a = 1.83 \cdot 10^{-2}$ , ist deutlich die Effizienz der adaptiven Netzverfeinerungsstrategie zu erkennen. Das Raum-



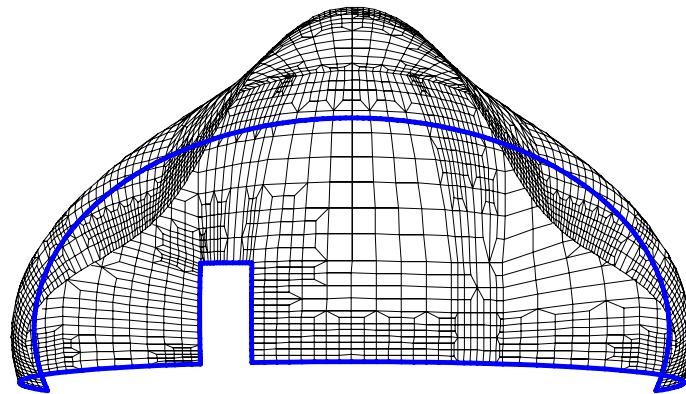
**Bild 11.12:** Scheibe in  $L$ -Form; Konvergenz des geschätzten Fehlers der a) 1. und b) 2. Eigenform in der Energienorm bei uniformer Verfeinerung sowie adaptiver Verfeinerung ausgelegt für die 2. Eigenform



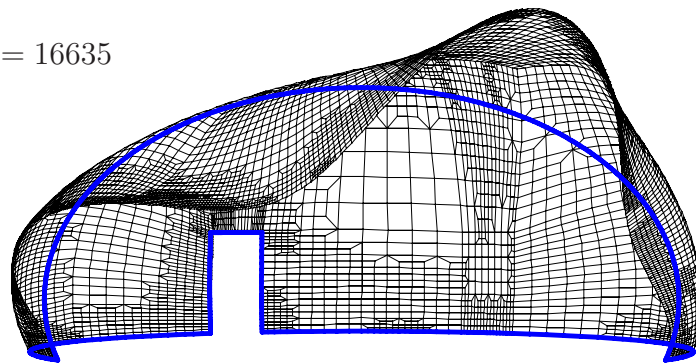
**Bild 11.13:** Scheibe in  $L$ -Form; FE-Netze verschiedener Verfeinerungsstufe, basierend auf dem geschätzten Energiefehler der 2. Eigenform



**Bild 11.14:** Pavillon; Konvergenz des geschätzten Fehlers der a) 1. und b) der 2. Eigenform in der Energienorm bei uniformer Verfeinerung sowie adaptiver Verfeinerung bzgl. 1. Eigenform



1. Eigenform,  $\mathcal{N}_{eq} = 16635$



2. Eigenform,  $\mathcal{N}_{eq} = 36270$

**Bild 11.15:** Pavillon; FE-Netze verschiedener Verfeinerungsstufe, basierend auf dem geschätzten Energiefehler der 1. Eigenform, überhöhte Darstellung beider Eigenformen

gitter wurde bei adaptiver Netzverfeinerung besonders an den Teilbereichen mit Singularitäten (Türöffnung) und auch am freien Rand verfeinert, Abb. 11.15.

## 12 Zusammenfassung

Durch die Anwendung von numerischen Methoden, hier die Finite Element Methode und die Methode der Finiten Differenzen, zur Lösung der Differentialgleichungen wird der Diskretisierungsfehler  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^h$  eingeführt. Dabei muß der Unterschied zwischen der exakten Lösung  $\mathbf{u}$  und der numerischen Lösung  $\mathbf{u}^h$  in einer Norm gemessen werden. Die Diskretisierung der Bewegungsgleichung der Strukturmechanik mit der vertikalen Linienmethode führt zu einem räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsfehler. Zunächst wird der räumliche Diskretisierungsfehler in der Energienorm  $\|\mathbf{e}\|_{g,\Omega}$  und in der  $H^{-1}$ -Norm geschätzt. Dabei zeigt der residuelle Fehlerschätzer von Franz [36] in der  $H^{-1}$ -Norm dasselbe Verhalten wie der Energienormschätzer von Riccius [80]. Der Fehler in der Verzerrungsenergienorm wird mittels des Zienkiewicz/Zhu Schätzers [101] bestimmt; der Fehlerindikator auf Basis 'verschlechterter' Geschwindigkeiten von Riccius schätzt den kinetischen Fehleranteil. Wegen der unbekanntenen Fehlerkonstanten beim residuellen Fehlerschätzer sowie der unbekanntenen Konvergenzordnung des Fehlers in der  $H^{-1}$ -Norm wird für die darauf folgenden Untersuchungen der Energienormschätzer benutzt. An 3 Beispielen wird die Konvergenzordnung des geschätzten Fehlers studiert. Dabei zeigte der geschätzte Fehler grundsätzlich dieselben Eigenschaften wie die a-priori Fehlerabschätzung von French [38]. Bei Problemen, deren Lösungen singular sind, hing die Konvergenzrate vom Singulärkoeffizienten ab.

Um den lokalen Diskretisierungsfehler zu untersuchen, wird in einfacher Weise das Dualitätsprinzip angewendet. An 2 Beispielen wird dabei der Diskretisierungsfehler an ausgezeichneten Punkten untersucht. Es zeigte sich, daß die numerische, lokale Lösung auf den adaptierten FE-Netzen, die mittels des dualen Fehlerschätzers generiert wurden, genauer ist als bei Nutzung eines globalen Fehlerschätzers.

Zur numerischen Zeitintegration werden das Newmarkverfahren, das bei linearen Differentialgleichungen mit dem kontinuierlichen Galerkinverfahren äquivalent ist, und das diskontinuierliche Galerkinverfahren mit linearen Ansätzen für Verschiebung und Geschwindigkeit benutzt. Die Konvergenzordnung sowie die spektralen Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren werden an der Modellgleichung untersucht. Um den globalen Zeitintegrationsfehler für das Newmarkverfahren zu schätzen, wird der lokale Fehlerschätzer von Riccius [80] benutzt. Zur Schätzung des Zeitintegrationsfehlers des DG P1-P1 Verfahrens wird der künstlich eingeführte Sprung in den Zustandsgrößen benutzt. Diese beiden Fehlerschätzer wurden zunächst an linearen Differentialgleichungen getestet. Es zeigt sich, daß beide Indikatoren den Fehler genau und effizient schätzen. Bei nichtlinearen Problemstellungen versagt der Fehlerindikator für das Newmarkverfahren. Die Äquivalenz zwischen dem Newmarkverfahren als Finite Differenzen Formulierung und als Finite Element Formulierung wird genutzt, um einen Fehlerindikator für den globalen Zeitintegrationsfehler zu entwickeln. Hierfür wird das bekannte Prinzip der Dualität benutzt, um den Fehler z.B. in der euklidischen Norm zu schätzen. Ein Problem dieses Schätzers ist, daß man die Anfangsbedingung des dualen Problems schätzen muß, um den Fehler in der euklidischen Norm messen zu können. Ein erster Ansatz mittels des geschätzten lokalen Fehlers zeigt, daß z.B. beim Zweikörperproblem der geschätzte maximale Fehler mit dem exakten Fehler übereinstimmt. Bei dem Beispiel des Federpendels wird der Fehler bis zur 1. 'Verzweigung' exakt geschätzt. Anschließend weicht der geschätzte Fehler vom exakten Fehler stark ab. Die verwendeten Fehlerschätzer wurden ebenfalls zur Zeitschrit-

tadaptation benutzt. Bei linearen Problemstellungen wurde nur ein kompletter Durchlauf benötigt, damit die obere, vorgegebene Fehlerschranke nicht überschritten wird. Beim Zweikörperproblem und Federpendel werden auf Grund des nichtlinearen Verhaltens 4 bzw. 3 vollständige Iterationen benötigt, um die vorgegebene Fehlerschranke in der euklidischen Norm zu unterschreiten. Es muß aber noch angemerkt werden, daß insbesondere der numerische Aufwand des Fehlerschätzers mit dualem Hilfsproblem sehr hoch ist.

Bei homogenen Anfangs- und Randbedingungen sowie homogener rechter Seite der Bewegungsgleichung kann man diese hyperbolische Differentialgleichung in ein elliptisches Eigenwertproblem umschreiben. Zur Schätzung des Fehlers in der Verzerrungsenergienorm einer speziell gewählten Eigenform wird wiederum der  $Z^2$  Schätzer verwendet. Für den Fehler der speziell gewählten Eigenform in der  $L_2$ -Norm wird der Indikator mit 'verschlechterten' Verschiebungen verwendet. Es zeigt sich grundsätzlich, daß beide Fehlerschätzer die korrekte Konvergenzordnung zeigen. Dies gilt insbesondere für den geschätzten Fehler in der Verzerrungsenergienorm auch bei Problemen mit Singularitäten. Um die Quantität der Schätzung zu überprüfen, wird bei die Extrapolationsmethode von Aitken zur Konvergenzbeschleunigung benutzt. Bei Testrechnungen zeigt sich, daß nur bei uniformer Netzverfeinerung eine Konvergenzbeschleunigung festzustellen ist.

Das Problem der numerischen Dispersion infolge der räumlichen Diskretisierung wird am  $1 - D$  Wellenausbreitungsproblem untersucht. Da die analytische Lösung dispersionsfrei ist, kann man dieses numerische Phänomen nur bei diesem Beispiel isolieren. Es zeigt sich, daß insbesondere bei adaptiver Netzverfeinerung sowie bei Verwendung des diskontinuierlichen Galerkinverfahrens die nachteilige Beeinflussung der numerischen Lösung infolge der nichtkonstanten Ausbreitungsgeschwindigkeit der einzelnen Frequenzanteile verhindert wird.

Für zukünftige Untersuchungen erscheint der in jüngster Zeit diskutierte Aspekt der räumlich variierenden Zeitschrittweite interessant, siehe Logg [67], [68]. Dabei wird der gesamte Zeitintervall in  $m$  Zeitabschnitte unterteilt. In jedem dieser  $m$  Zeitabschnitte wird der Zeitschritt räumlich lokal mittels Fehlerschätzer angepaßt. Nach jedem dieser  $m$ -Zeitabschnitte erfolgt eine zeitliche Synchronisation aller Gleichungen. D.h. anstelle des gewöhnlichen (zeit)schrittweisen Vorgehens wird beim diesem Vorgehen ein Gleichungssystem für den gesamten Zeitabschnitt aufgestellt und gelöst. Der erhöhte Aufwand zum Lösen dieses Gleichungssystems ist mit der erhöhten Effizienz der räumlich lokalen Zeitschrittweiten abzuwägen.

## Literatur

- [1] S. Adjeri. A posteriori Finite Element error estimation for second-order hyperbolic problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 191:4699–4719, 2002.
- [2] M. Ainsworth, B. Senior. Aspects of an adaptive  $hp$ -Finite Element method: Adaptive strategy, conforming approximation and efficient solvers. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 150:65–87, 1997.
- [3] J. Altenbach, H. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner Stuttgart, 1994.
- [4] I. Babuska, J.E. Osborn. Can a Finite Element method perform arbitrarily badly? *Mathematics of Computation*, 69(230):443–462, 1999.
- [5] I. Babuska, T. Stroboulis, J.T. Upadhyay, K. Gangaraj, S.K. Copps. An objective criterion for assessing the reliability of a-posteriori error estimators in Finite Element computations. *IACM Bulletin*, 10:27–37, 1995.
- [6] I. Babuska, M. Suri. The  $p$  and  $h - p$  versions of the Finite Element method, an overview. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 80:5–26, 1990.
- [7] C.D. Bailey. Hamilton, ritz and elastodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, 12:684–688, 1976.
- [8] C.I. Bajer. Notes on the stability of non-rectangular space-time Finite Elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 24:1721–1739, 1987.
- [9] W. Bangerth. Adaptive Finite-Elemente-Methoden zur Lösung der Wellengleichung mit Anwendung in der Physik der Sonne. Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1998.
- [10] W. Bangerth, R. Rannacher. Finite element approximation of the acoustic wave equation: Error control and mesh adaption. *East-West J. Num. Math.*, 7(4):263–282, 1999.
- [11] J. Barlow. Optimal stress locations in Finite Element models. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 10:143–251, 1976.
- [12] M. Baumann. *Lineare Finite Element Konzepte für Schalenträgerwerke unter Berücksichtigung von adaptiven Methoden*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 1994.
- [13] R. Becker, R. Rannacher. A feed-back approach to error control in Finite Element methods: Basic analysis and examples. Institut für Angewandte Mathematik Universität Heidelberg, Preprint 08/96, 1996.
- [14] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, Berlin – Heidelberg, 1996.
- [15] U. Brink. *Adaptive Gemischte Finite Elemente in der nichtlinearen Elastostatik und deren Kopplung mit Randelementen*. Dissertation, Universität Hannover, 1997.



- [16] C. Carstensen, S. Bartels. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids Part I: Low order conforming, nonconforming and mixed FEM. *Mathematics of Computation*, 71(239):945–969, 2002.
- [17] C. Carstensen, S.A. Funken. A posteriori error control in low-order Finite Element discretisations of incompressible stationary flow problems. Technical Report 99-05, Mathematisches Seminar, Universität Kiel, 1999.
- [18] Z. Celep, Z.P. Bazant. Spurious reflection of elastic waves due to gradually changing Finite Element size. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19:631–646, 1983.
- [19] J. Chung, G.M. Hulbert. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized  $\alpha$  method. *Journal of Applied Mechanics*, 60:371–375, 1993.
- [20] F. Cirak. *Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1998.
- [21] F. Cirak, E. Ramm. A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 156:351–362, 1998.
- [22] F. Cirak, E. Ramm. A posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 47(1-3):379–393, 2000.
- [23] F. Cirak, A. Schleupen, E. Ramm. Error estimators for local and global variables using duality principles. *Fourth World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires*, IACM, 1998.
- [24] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [25] R. Courant, D. Hilbert. *Methoden der mathematischen Physik*. Springer, Berlin, 1931.
- [26] G. Dahlquist, A. Björck. *Numerical Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.Y., 1974.
- [27] G.G. Dahlquist. A special stability problem for linear multistep methods. *BIT*, 3:27–43, 1963.
- [28] W. Dörfler, M. Rumpf. An adaptive strategy for elliptic problems including a posteriori controlled boundary approximation. *Mathematics of Computation*, 67(224):1361–1382, 1998.
- [29] T. Douglas, J. Dupont, M.F. Wheeler. An  $L^\infty$  estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials. *RAIRO Anal. Numer.*, 8:47–59, 1974.
- [30] E. Dvorkin, K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. *Engineering computations*, 1:77–88, 1984.



- [31] D. Estep. A posteriori error bounds and global error control for approximations of ordinary differential equations. *SIAM Journal of Numer. Analysis*, 32(1):1–48, 1995.
- [32] D. Estep, D. French. Global error control for the continuous Galerkin Finite Element method for ordinary differential equations. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 28(7):815–852, 1994.
- [33] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.
- [34] M.G. Floquet. Sur une class d'equations differentielles linearies nonhomogenes. *Annales scientifiques de 'Ecole Normale Superieure*, 3(4):111–128, 1887.
- [35] W. Frank, J. Hundsdorfer, J.G. Verwer. On the stability of implicit-explicit linear multistep methods. *Applied Numerical Mathematics*, 25:193–205, 1997.
- [36] U. Franz. *A posteriori error estimation and adaptivity for Finite Element approximations of second-order hyperbolic equations: Analysis and numerical implementation for the equation for vibrations of a membrane*. Diplomarbeit, Technische Hochschule Darmstadt, 1995.
- [37] D.A. French. A space-time Finite Element method for the wave equation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 107:145–157, 1993.
- [38] D.A. French, T.E. Peterson. A continuous space-time Finite Element method for the wave propagation. *Mathematics of Computation*, 65(214):491–506, 1996.
- [39] C.-E. Fröberg. *Introduction to Numerical Analysis*. Addison-Wesley, 1. Ausgabe, 1966.
- [40] H.-G. Goering, H. Roos, L. Tobiska. *Finite Element Methode*. Akademie Verlag, Berlin, 3. Ausgabe, 1993.
- [41] K.F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Ohio State University Press, 1975.
- [42] P. Grisvard. *Elliptic Problems on Nonsmooth Domains*. Pitman Publishing, Boston, 1985.
- [43] P. Grisvard. Problèmes aux limites dans les polygones, mode d'emploi. *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Mathematiques*, Serie C(1):21–59, 1986.
- [44] C. Großmann, H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [45] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. B.G. Teubner Stuttgart, 1996.
- [46] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Ausgabe, 1992.

- [47] E. Hairer, G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2. Ausgabe, 1991.
- [48] D.C. Handscomb. Errors of linear interpolation on a triangle. Oxford University Computing Laboratory, Technical Report 95/09, 1995.
- [49] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson. Introduction to Adaptive Methods for Differential Equations. *Acta Numerica*, pages 105–158, 1995.
- [50] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, C. Johnson. *Computational Differential Equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [51] R. Hauptmann. *Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.
- [52] R. Hettich, G. Still. Local aspects of a method for solving membrane eigenvalue problems by parametric semi-infinite programming multicomputer systems. In J. Guggat, H. Jongen, B. Kummer, F. Nozicka, editors, *Parametric optimization and related topics*. Akademie Verlag, Berlin, 1987.
- [53] V. Heuveline, R. Rannacher. A posteriori error control for Finite Element approximations of elliptic eigenvalue problems. Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Preprint 02/2001, 2001.
- [54] H.M. Hilber, T.J.R. Hughes, R.L. Taylor. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engrg. Structural Dynam.*, 5:283–292, 1977.
- [55] J.C. Houbolt. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. *J. aeronaut. sci.*, 17(5):540–550, 1950.
- [56] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice–Hall International Editions, 1987.
- [57] T.J.R. Hughes, G.M. Hulbert. Space-time Finite Element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 62:339–363, 1988.
- [58] G.M. Hulbert. Limitations on linear multistep methods for structural dynamics. *Earthquake Engrg. Structural Dynam.*, 20:191–196, 1991.
- [59] G.M. Hulbert, T.J.R. Hughes. Numerical evaluation and comparison of subcycling algorithms for structural dynamics. *Technical Report, Stanford University*, pages 1–65, 1988.
- [60] G.M. Hulbert, T.J.R. Hughes. Space-time Finite Element methods for second-order hyperbolic equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 84:327–348, 1990.
- [61] C. Johnson. Discontinuous Galerkin Finite Element methods for second order hyperbolic problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 107:117–129, 1993.

- [62] M.G. Larson. A posteriori and a priori error analysis for Finite Element approximations of selfadjoint elliptic eigenvalue problems. *SIAM Journal of Numer. Analysis*, 38(2):608–625, 2000.
- [63] D. Leguillon, E. Sanchez-Palencia. *Computation of Singular Solutions in Elliptic Problems and Elasticity*, volume 5. RMA, Masson, Paris, 1987.
- [64] L.Y. Li, P. Bettles. Notes on optimal criteria in adaptive Finite Element computations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:911–915, 1995.
- [65] X.D. Li, N.E. Wiberg. Structural dynamic analysis by a time-discontinuous Galerkin Finite Element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 39:2131–2152, 1996.
- [66] X.D. Li, N.E. Wiberg. Implementation and adaptivity of a space-time Finite Element method for structural mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 156:211–229, 1998.
- [67] A. Logg. Multi-adaptive error control for odes. Chalmers University of Technology, Sweden, 2000.
- [68] A. Logg. A multi-adaptive ode-solver. Chalmers University of Technology, Sweden, 2000.
- [69] J.E. Marsden, T.J.R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice–Hall International Editions, 1983.
- [70] A. Maute. *Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [71] M. Melenk, J., B. I. Wohlmuth. On residual-based a posteriori error estimation in *hp*-fem. *Advances in Computational Mathematics*, 15:311–331, 2001.
- [72] E. Mettler. Stabilitätsfragen bei freien Schwingungen mechanischer Systeme. *Ingenieur–Archiv*, 17:213–228, 1959.
- [73] R.D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18:31–38, 1951.
- [74] N.M. Newmark. A numerical method for structural dynamics. *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 85:67–94, 1959.
- [75] L. Nilsson. *Impact loading on concrete structures*. Phd thesis, Department of Structural Mechanics, Chalmers, Gothenburg, 1979.
- [76] Chr. Nystedt. A priori and a posteriori error estimates and adaptive Finite Element methods for a model eigenvalue problem. Department of Mathematics, Chalmers University of Technology, NO 1995-05, 1995.
- [77] J.T. Oden, S. Prudhomme, D.C. Hammerand, M.S. Kuczma. Modelling error and adaptivity in nonlinear continuum mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 49(190):6663–6684, 2001.

- [78] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, O.C. Zienkiewicz. Adaptive remeshing for compressible flow computations. *Journal of Computational Physics*, 72:449–466, 1987.
- [79] R. Rannacher, F.-S. Suttmeier. A posteriori error control and mesh adaptation for FE models in Elasticity and Elasto-Plasticity. Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, Preprint 07, 1997.
- [80] J. Riccius. *Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.
- [81] J. Riccius, K. Schweizerhof. Aspects of hierarchical  $h$ -adaptive dynamic analyses. In B.H.V. Topping, editor, *Third International Conference on Computational Structures Technology*. Civil-Comp Press, 1996.
- [82] J. Riccius, K. Schweizerhof, M. Baumann. Combination of adaptivity and mesh smoothing for the Finite Element analysis of shells with intersections. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 40:2459–2474, 1997.
- [83] A. Rieger. *Adaptive Algorithmen für thermomechanisch gekoppelte Kontaktprobleme*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, 2002.
- [84] P. Ruge. Gemischte Finite Zeitelemente und Padéentwicklungen in der Strukturmechanik. *TU Dresden, Internes Papier*, 1995.
- [85] P. Ruge. Hybrid time-Finite-Elements with time-step-adaption by discontinuity control. *Computational Mechanics*, 17:392–397, 1996.
- [86] Ch. Schwab.  *$p$ - and  $hp$ -Finite Element Methods*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [87] H. Steeb, A. Maute, E. Ramm. Goal-Oriented Error Estimation in Solid Mechanics. In E. Stein, editor, *Error-controlled Adaptive Finite Elements in Solid Mechanics*, pages 303–331. Wiley, Chichester, 2003.
- [88] E. Stein, S. Ohnimus. Anisotropic discretization and model error estimation in solid mechanics by local Neumann problems. *Fourth World Congress on Computational Mechanics*, IACM, 1998.
- [89] J. Stoer. *Einführung in die numerische Mathematik I*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 4. Ausgabe, 1983.
- [90] J. Stoer, R. Burlisch. *Numerische Mathematik 2*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 3. Ausgabe, 1990.
- [91] E. Süli. A posteriori error analysis and global error control for adaptive Finite Element approximations of hyperbolic problems. Technical Report 95/14, Oxford University, Computing Laboratory, 1995.
- [92] F.T. Suttmeier. *Adaptive Finite Element Approximation of Problems in Elasto-Plasticity Theory*. Dissertation, Universität Heidelberg, 1996.

- [93] B. A. Szabo, I. Babuska. *Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 1991.
- [94] T. Tiihonen. Shape calculus and Finite Element method in smooth domains. *Mathematics of Computation*, 70(233):1–15, 2000.
- [95] T. von Petersdorff. *Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder - Singularitäten und Approximation mit Randelementmethoden*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, 1989.
- [96] D. Werner. Baudynamik, 2. Lehrbrief. Lehrbriefe für das Hochschulfernstudium, TU Dresden, 1984.
- [97] N.E. Wiberg, R. Bausys, P. Hager. Improved eigenfrequencies and eigenmodes in free vibration analysis. *Computer and Structures*, 73:79–89, 1999.
- [98] M.L. Williams. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*, pages 526–528, 1952.
- [99] W.L. Wood. *Practical Time-stepping Schemes*. Clarendon Press, Oxford University Press, 1990.
- [100] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1131–1364, 1992.
- [101] O.C. Zienkiewicz, J.Z. Zhu. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2: Error estimates and adaptivity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 33:1365–1382, 1992.

## A Bestimmung von Referenzlösungen

Zur Bewertung der Qualität des geschätzten Fehlers wird eine 'genaue' Lösung der Aufgabenstellung benötigt. In der Regel ist die exakte Lösung nicht bekannt, bzw. eine Lösung der Differentialgleichung existiert nicht. Zur Bestimmung einer 'genauen' Lösung auf einem FE-Netz mit sehr kleiner Netzweite wird wiederum ein sehr großer numerischer Aufwand notwendig.

Um dieses Problem zu umgehen, können verschiedene Extrapolationstechniken benutzt werden. Ein Beispiel hierfür ist die  $\Delta^2$ -Methode von Aitken, siehe Stoer [89].

Gegeben sei eine Folge numerischer Lösungen  $\{\|\mathbf{u}^h\|_{a,i}\}$ , die gegen die exakte Lösung in der Energienorm (Grenzwert) konvergiert:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^h\|_{a,i} = \|\mathbf{u}\|_a. \quad (\text{A.1})$$

$i$  ist der Zähler der Verfeinerungsstufe. Es wird angenommen, daß die Beziehung

$$\sqrt{\|\mathbf{u}^h\|_{a,i}^2 - \|\mathbf{u}\|_a^2} = \|\mathbf{e}\|_{a,i}$$

gültig ist. Dabei muß die Folge die geometrische Eigenschaft besitzen, d.h. der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder muß konstant sein. Alternativ kann der Grenzwert (A.1) auch als Differenz definiert werden:

$$\rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}^h\|_{a,i}^2 - \|\mathbf{u}\|_a^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}\|_{a,i}^2 = 0. \quad (\text{A.2})$$

Für die Folge  $\{\|\mathbf{e}\|_{a,i}\}$  besteht die geschilderte geometrische Eigenschaft. Aus der Konvergenz des Fehlers in der Energienorm folgt, falls die Lösung  $\mathbf{u}$  keine Singularität aufweist:

$$\frac{\|\mathbf{e}\|_{a,i}}{\|\mathbf{e}\|_{a,i+1}} = c \leq \frac{2}{1}. \quad (\text{A.3})$$

Damit ist eine Folge  $\{\|\mathbf{u}^*\|_{a,i}\}$  generierbar, die schneller gegen  $\|\mathbf{u}\|_a$  konvergiert als die Folge der FE-Lösungen  $\{\|\mathbf{u}^h\|_{a,i}\}$ ,

$$\|\mathbf{u}^*\|_{a,i}^2 = \|\mathbf{u}^h\|_{a,i}^2 - \frac{(\|\mathbf{u}^h\|_{a,i-1}^2 - \|\mathbf{u}^h\|_{a,i}^2)^2}{\|\mathbf{u}^h\|_{a,i-2}^2 - 2\|\mathbf{u}^h\|_{a,i-1}^2 + \|\mathbf{u}^h\|_{a,i}^2}. \quad (\text{A.4})$$

Aus der Darstellung (A.4) folgt, daß zur Bestimmung eines Gliedes der Folge  $\{\|\mathbf{u}^*\|_{a,i}\}$  3 Glieder der Folge  $\{\|\mathbf{u}\|_{a,i}\}$  erforderlich sind.

Diese Methode zur Konvergenzbeschleunigung wird nun zunächst an der Eigenwertaufgabe **Scheibe in L-Form** aus Abschnitt 11, siehe Abb. 11.4, getestet. Die FE-Lösungen für die 1. Eigenform selbst werden auf uniform verfeinerten Netzen bestimmt.

Untersucht wird die Konvergenz der Folgen

$$\text{a) } \{\|\mathbf{e}\|_{a,i}^2\} = \{\|\mathbf{u}^h\|_{a,i}^2 - \|\mathbf{u}\|_a^2\} \text{ und b) } \{\|\mathbf{e}^*\|_{a,i}^2\} = \{\|\mathbf{u}^*\|_{a,i}^2 - \|\mathbf{u}\|_a^2\}.$$

Beim **Pavillon**, Abb. 8.9/ 11.7, werden die Näherungslösungen für die 1. Eigenform auf gleichmäßig verfeinerten FE-Netzen bestimmt. Die Konvergenz der Folgen a) und b) wird für den Pavillon in Abb. A.2 dargestellt.

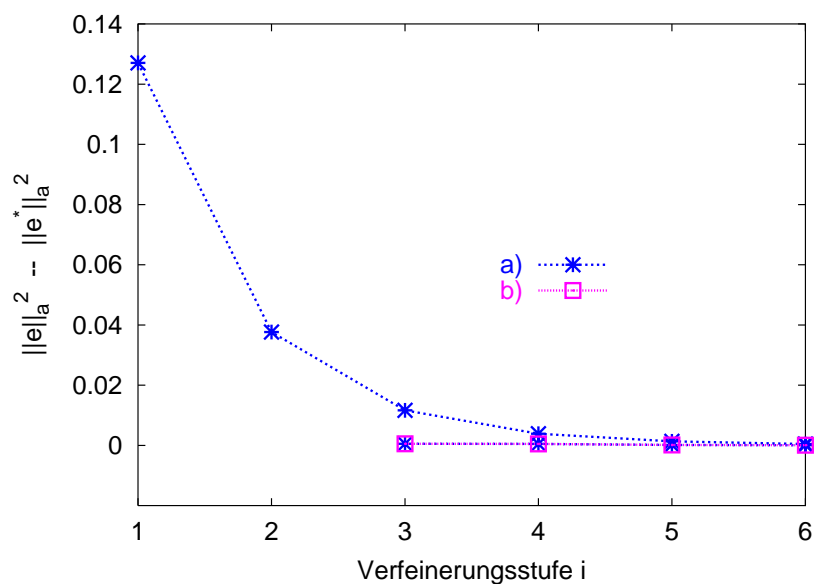


Abbildung **A.1**: Scheibe in L-Form; Konvergenz der Folgen a) FE-Lösung und b) beschleunigte Lösung

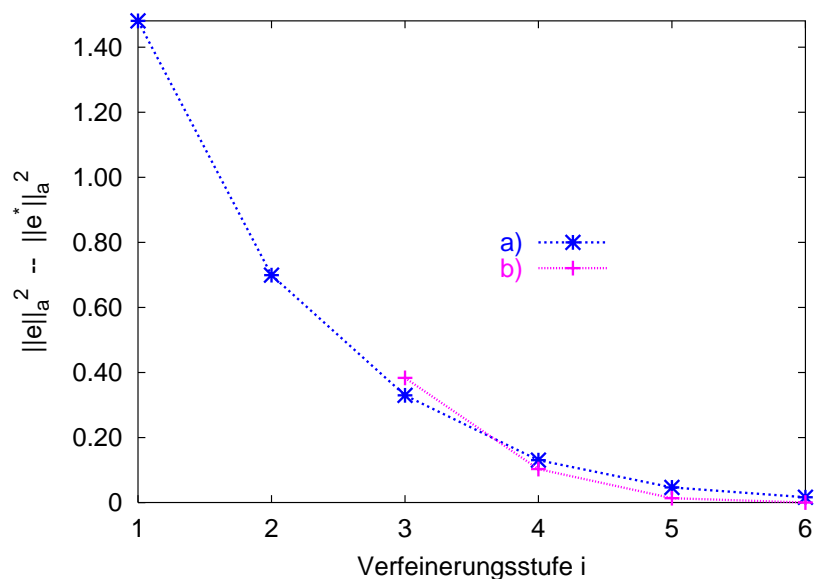


Abbildung **A.2**: Pavillon; Konvergenz der Folgen a) FE-Lösung und b) beschleunigte Lösung

Die Ursache für die nur geringfügig bessere Konvergenz der Folge b) liegt in der Konvergenz des exakten Fehlers in der Energienorm begründet. Dieser ist für die 1. und 2. Eigenform in Abb. **A.3** dargestellt. Bei genauer Betrachtung der Ergebnisse in Abb. **A.3** erkennt man, daß die eingezeichneten Linien keine gerade Linien darstellen. D.h., bei diesem Beispiel konvergiert der exakte Fehler in der Energienorm nicht gleichmäßig. Das bedeutet wiederum, daß die Folge  $\{||\mathbf{u}^h||_{a,i}\}$  nicht geometrisch ist. Daher kann die  $\Delta^2$ -Methode von Aitken zu keiner wesentlichen Konvergenzbeschleunigung führen. Der Grund für die ungleichmäßige Konvergenz liegt darin, daß das Berechnungsgebiet selbst immer besser

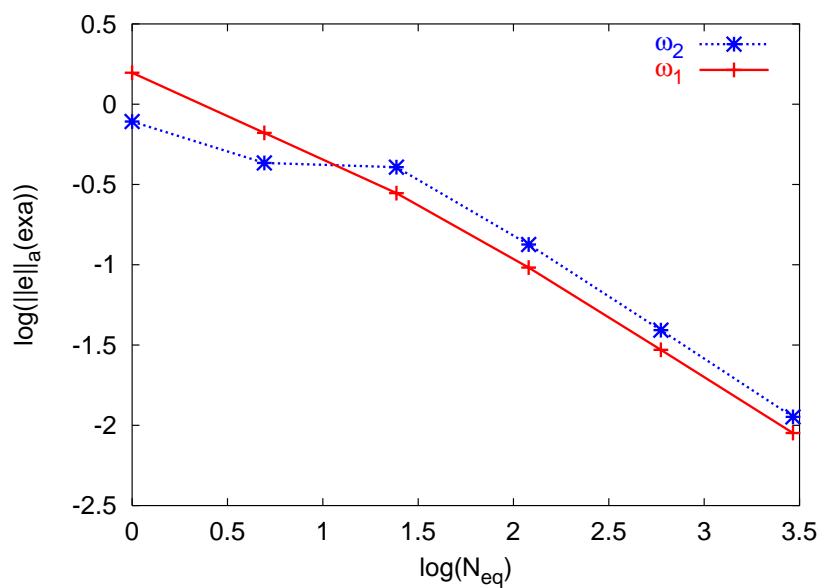


Abbildung **A.3**: Pavillon; Konvergenz des exakten Fehlers in der Energienorm für 1. und 2. Eigenform bei gleichmäßiger Netzverfeinerung

abgebildet wird. Dieser Einfluß wird aber vernachlässigt.

Da das Gebiet und der Rand der Scheibe in L-Form exakt abgebildet werden, ist die Konvergenz gleichmäßig, d.h. es gilt die Bedingung (A.3), und wird deshalb beschleunigt.





# Lebenslauf

<b>Name</b>	Jens Neumann
<b>Geburtsdatum</b>	28. Oktober 1970
<b>Geburtsort</b>	Löbau
<b>Schulbildung</b>	1977 – 1987 Besuch der Allgemeinbildenden Polytechnischen Oberschule in Ebersbach/Sa.  1987 – 1990 Berufsausbildung zum Maschinen- und Anlagenmonteur im VEB Waggonbau Niesky, Erlangung der allgemeinen Hochschulreife
<b>Zivildienst</b>	1990 – 1991 Feierabend- und Pflegeheim „Frieda Thomas“ in Ebersbach/Sa.
<b>Studium</b>	1991 – 1996 Bauingenieurwesen an der Technischen Universität Dresden, Abschluß als Diplom-Ingenieur
<b>Beruf</b>	1996 – 2003 wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe (TH), seit 2004 Berechnungsingenieur bei TRW Automotive GmbH, Alfdorf

## In dieser Schriftenreihe bisher erschienene Berichte

- M97/1 KLAUS KNEBEL  
Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen.
- M97/2 JÖRG RICCIUS  
Adaptive Methoden zur statischen und dynamischen Analyse von Flächentragwerken mit linearen Finiten Elementen.
- M97/3 RALF HAUPTMANN  
Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke.
- M98/1 HARALD KAMMERER  
Nichtglatte Dynamik eines fremderregten elastischen Balkens mit Reibglied.
- M98/2 STEFAN DOLL  
Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten.
- M00/1 THOMAS ROTTNER  
Sensitivitätsanalyse stabiler Gleichgewichtslagen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung von Lösungsverfahren für Parallelrechner.
- M00/2 CHRISTOF FREISCHLÄGER  
Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier Volumenelemente.
- M00/3 THOMAS ENGLEDER  
Starrkörper und FE-Modellierung nichtglatter Schwingungen infolge Reibung und Stößen.
- M02/1 BURKHARD GÖTTLICHER  
Effiziente Finite-Element-Modellierung gekoppelter starrer und flexibler Strukturbereiche bei transienten Einwirkungen.
- M02/2 QIGUO RONG  
Finite Element Simulation of the Bone Modeling and Remodeling Processes around a Dental Implant.
- M03/1 THORSTEN RUMPEL  
Effiziente Diskretisierung von statischen Fluid-Struktur-Problemen bei großen Deformationen.
- M04/1 MATTHIAS HARNAU  
Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt.
- M04/2 JENS NEUMANN  
Anwendung von adaptiven Finite Element Algorithmen auf Probleme der Strukturdynamik.