

Ein Anpassungstest für Kopulafunktionen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von
Dipl.-Math.techn. Peter Ender
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:
Referent:
Korreferent:

17. März 2005
Prof. Dr. Norbert Henze
Prof. Dr. Christian Hipp

Karlsruhe 2005

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit am Graduiertenkolleg Naturkatastrophen und meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mathematische Stochastik der Universität Karlsruhe. Mein herzlicher Dank geht an alle, die mich bei der Anfertigung der Arbeit unterstützt, ermuntert und beraten haben.

- Zuerst danke ich Herrn Prof. Dr. Norbert Henze für die wissenschaftliche Betreuung der Arbeit. Er gab mir in zahlreichen Gesprächen wertvolle Anregungen und hat den Fortgang meiner Arbeit stets mit Interesse verfolgt.
- Ferner danke ich Herrn Prof. Dr. Christian Hipp für die freundliche Übernahme des Korreferats.
- Dank schulde ich auch dem Rechenzentrum der Universität Karlsruhe, welches mir ausreichend Rechenleistung am Großrechner zur Verfügung gestellt hat.
- Zudem danke ich allen Mitgliedern des Instituts für Mathematische Stochastik für das angenehme Arbeitsklima, insbesondere Dank an Prof. Dr. Günter Last, Prof. Dr. Wolfgang Bischoff, PDoz. Dr. Dieter Kadelka und Dr. Bernhard Klar für die gute Zusammenarbeit bei der gemeinsamen Betreuung von Übungen bzw. Praktika.
- Den KollegInnen vom Graduiertenkolleg Naturkatastrophen danke ich für die gemeinsame wissenschaftliche Tätigkeit in Projekten sowie den Besuch von Vorlesungen, Tagungen und Exkursionen.
- Meiner Familie danke ich, dass sie ein Ort der Geborgenheit ist.
- Schließlich ist mein Dank an alle meine Freunde von Steiger Pforzheim gerichtet, die immer an mich geglaubt haben.

Karlsruhe, den 24. Januar 2004

Inhaltsverzeichnis

| | |
|---|-----------|
| 1. Kopulafunktionen | 5 |
| 1.1. Einführung der Kopulafunktion | 5 |
| 1.2. Schätzmethoden für Kopulafunktionen | 9 |
| 2. Anpassungstest | 25 |
| 2.1. Anpassungstest-Problem | 25 |
| 2.2. Geschätzter empirischer Kopula-Prozess | 27 |
| 2.3. H_0 -Asymptotik der Teststatistik | 31 |
| 2.4. Ein Anpassungstest und seine Konsistenz | 34 |
| 2.5. Grenzverteilung der Teststatistik unter Alternativen | 37 |
| 2.6. Erweiterung der Theorie auf Dreiecksschemata | 40 |
| 3. Simulation | 48 |
| 3.1. Verteilung der Teststatistik unter H_0 | 48 |
| 3.2. Simulation einer Clayton-Kopula | 50 |
| 3.3. Simulation einer Frank-Kopula | 50 |
| 3.4. Simulation einer Gauß-Kopula | 51 |
| 3.5. Simulation einer Gumbel-Kopula | 51 |
| 3.6. Simulationsstudien | 52 |
| 3.7. Approximation der Güte | 70 |
| A. Hilberträume | 75 |
| A.1. Zufallselemente in Hilberträumen | 75 |
| A.2. L^2 -Raum, Gauß-Prozesse | 77 |

| | |
|--|------------|
| B. Kovarianzfunktionen | 80 |
| B.1. Kovarianzfunktion γ | 80 |
| B.2. Abschätzung von $E[h^2]$ | 82 |
| B.3. Kovarianzfunktion γ_0 | 83 |
| B.4. Nichtparametrischer Schätzer für γ_0 | 89 |
| B.5. Schätzer für σ_0^2 | 93 |
| C. Beweis von Satz 2.8 | 95 |
| C.1. Grenzverteilung von W_n | 95 |
| C.2. Asymptotisch vernachlässigbare Restterme | 96 |
| D. Partielle Ableitungen einer Kopula | 108 |
| D.1. Clayton-Kopula | 108 |
| D.2. Frank-Kopula | 109 |
| D.3. Gauß-Kopula | 110 |
| D.4. Gumbel-Kopula | 111 |
| E. Alternative Darstellung von T_n | 112 |
| E.1. Hilfsmittel | 112 |
| E.2. Gewichtsfunktion $w \equiv 1$ | 113 |
| E.3. Beliebige Gewichtsfunktion | 117 |

Einleitung

Kopulafunktionen oder *Kopulae* (Plural von *Kopula*) wurden 1959 von Abe Sklar ([SK59]) eingeführt. Die Kopula ist im zweidimensionalen Fall eine bivariate Verteilungsfunktion auf dem Einheitsquadrat mit gleichverteilten Randverteilungen. Zu jeder bivariaten Verteilungsfunktion H existiert eine (nicht notwendigerweise eindeutig bestimmte) Kopula C , so dass gilt:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind die Randverteilungsfunktionen F und G durch $F(x) := H(x, \infty)$ bzw. $G(y) := H(\infty, y)$ gegeben.

Seit Ende der neunziger Jahre werden Kopulae zur stochastischen Modellierung von Abhängigkeiten in Modellen der Finanz- und Versicherungswissenschaft eingesetzt. Aufschlussreich darüber berichten die Arbeiten [EM99], [BOU00] und [EM03]. Die Modellierung von abhängigen Kreditrisiken, bei denen die Normalverteilungs-Annahme nicht gerechtfertigt ist, wird in [LI00] und [FR01] vorgestellt.

Dem Bereich der Geowissenschaften ist folgendes stochastisches Modell mit Kopulae zuzuordnen. Für die Niederschlagsmenge, die bei einem Sturm fällt, beschreiben die Autoren von [DS03] ein auf Kopulafunktionen basierendes stochastisches Modell. Dabei ist die Niederschlagsmenge das Produkt der abhängigen Zufallselemente Niederschlagsintensität und Sturmdauer. Eine Anwendung von Kopulafunktionen in der Hydrologie findet sich in [FA04].

Kopulae werden auch *Abhängigkeits-Funktionen* genannt (z.B. in [DE79]), da sie unabhängig von den Randverteilungen die Abhängigkeit zwischen den Komponenten vollständig beschreiben. Ein multivariates Modell mit Kopulae erfüllt die Forderungen des folgenden Zitats:

My view of multivariate modelling, ..., is that models should try to capture important characteristics, such as the appropriate density shapes for the univariate margins and the appropriate dependence structure, and otherwise be as simple as possible. The parameters of the model should be in a form most suitable for easy interpretation (e.g., a parameter is interpreted as either a dependence parameter or a univariate parameter but not some mixture);
... ([JOE97], S.16).

Die Zerlegung eines multivariaten stochastischen Modells in Randverteilungen und Kopula ermöglicht eine Modellwahl in zwei Schritten: Zuerst werden die Randverteilungen gewählt, welche anschließend durch die Wahl einer Kopula zusammengefügt werden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die Wahl der Randverteilungen und der Kopula völlig unabhängig voneinander erfolgt. Im zweidimensionalen Fall sind die üblichen Kopulafamilien einparametrisch ([JOE97], S.139ff). Dadurch ist die einfache Interpretation des Parameters als *Abhängigkeits-Parameter* möglich. Zweiparametrische Kopulafamilien werden benutzt, um mehrere *Abhängigkeits-Typen* zu modellieren ([JOE97], S.19ff).

Allgemeine Schätzmethoden für Kopulae finden sich in [GE95], [JOE97], S.299ff; [BOU00], S.20ff; [DUR00] und [FE02], S.16ff. Ein auf [GE93] basierendes grafisches Verfahren zur Bestimmung der Anpassungsgüte einer *archimedischen Kopula* wird in [FR97] diskutiert. Mit der *Median-Regression* und einem speziellen QQ-Plot stellen die Autoren von [KLU99] weitere grafische Verfahren zur Beurteilung der Anpassungsgüte vor. Eine gute Übersicht dieser Methoden sowie Anwendungen bei Versicherungsdaten sind in [DEM01], S.35ff, zu finden. Ferner ist der in [VE01] durchgeführte Vergleich zwischen *kumulierter Tau-Funktion* und einer entsprechenden empirischen Version ein weiteres grafisches Kriterium zur Bestimmung der Anpassungsgüte. In [CA94] wird ein Anpassungstest für einparametrische Kopulafamilien entwickelt, welcher einen funktionalen Zusammenhang zwischen *Kendalls Tau* und *Spearman's Rho* ausnutzt. Ein *Test auf Extremwert-Kopula* ist in [GH98] beschrieben. Zwei Versionen des *Chi-Quadrat-Tests* werden in [OLC03] benutzt, um bei einem bivariaten Datensatz von Versicherungsdaten die Güte der Anpassung einer Kopula zu beurteilen. Um eine unbekannte Kopula auf die Hypothese *Gauß-Kopula* zu testen, schlagen die Autoren von [MS03] eine *Bootstrap*-Prozedur vor. Diese Prozedur wird dann bei der Untersuchung von abhängigen Finanzdaten verwendet. In der kürzlich erschienenen Arbeit [FE03] werden zwei *verteilungsfreie* Anpassungstests für Kopulae vorgestellt. Einer dieser Anpassungstests basiert auf dem L^2 -Abstand zwischen einem *Kernschätzer* und einem *parametrischen Schätzer* für die Dichte der unbekanntenen Kopula. Der zweite Anpassungstest ist ein *Chi-Quadrat-Test*, welcher die beiden bereits genannten Schätzmethoden für die Dichte der Kopula miteinander vergleicht. Beide Testmethoden finden wir erneut in [CHEN03] beschrieben. Dort werden sie auf Daten angewendet, die unter einer *mehrdimensionalen Wahrscheinlichkeits-Integraltransformation* aus den ursprünglichen Daten hervorgehen.

In dieser Arbeit gehen wir von folgender Situation und Fragestellung aus: Es seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit unbekannter gemeinsamer Verteilungsfunktion H und unbekannter Kopula C . Weiter sei $\mathcal{C} := \{C(\cdot, \vartheta) : \vartheta \in \Theta\}$ eine einparametrische Kopulafamilie mit *Parameterbereich* $\Theta \subset \mathbb{R}$. Zu testen ist die (*Null-*)*Hypothese*

$$H_0 : C \in \mathcal{C}$$

gegen die *Alternative*

$$H_1: C \notin \mathcal{C}.$$

Diese Testsituation wird im Folgenden als *Anpassungstest-Problem* für (die Kopulafamilie) \mathcal{C} bezeichnet.

Zur Entwicklung eines Tests der Hypothese H_0 gegen die Alternative H_1 liegt es nahe, die unbekannte Kopula C auf zweierlei Weisen zu schätzen, und zwar zum einen mit Hilfe eines geeignet zu definierenden nichtparametrischen Schätzers C_n (der sog. *empirischen Kopula*, siehe Abschnitt 1.2.1), zum anderen durch einen passenden Vertreter $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)$ aus der hypothetischen Kopulafamilie \mathcal{C} . Hierbei ist $\hat{\vartheta}_n$ eine auf $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ basierende Stichprobenfunktion mit Werten in Θ , welche gewisse Voraussetzungen erfüllen soll (siehe Abschnitt 1.2.2.1). Ein spezieller Schätzer $\hat{\vartheta}_n$, den wir über einen funktionalen Zusammenhang aus der empirischen Version von Kendalls Tau gewinnen, erfüllt diese Voraussetzungen (siehe Abschnitt 1.2.2.2); er wird im Folgenden ausschließlich benutzt. Aus beiden Schätzern für die Kopula wird mit Hilfe eines geeigneten Abstandsmaßes δ eine Teststatistik

$$T_n = \delta(C_n, C(\cdot, \hat{\vartheta}_n))$$

konstruiert. Übliche Abstandsmaße zwischen nichtparametrischer und parametrischer Schätzung der Kopula sind das *Kolmogorov-Smirnov-Abstandsmaß*

$$\delta(C_n, C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)) = \sqrt{n} \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n)|$$

bzw. das *Cramér-von Mises-Abstandsmaß*

$$\delta(C_n, C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)) = n \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n)]^2 d(u, v). \quad (0.1)$$

Diese Abstandsmaße werden vom *geschätzten empirischen Kopula-Prozess*

$$\sqrt{n}\delta_n = \sqrt{n} [C_n - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)]$$

abgeleitet. Dieser Prozess ist *marginal-verteilungsfrei* (siehe Bemerkung 2.4), d.h. bei der Untersuchung von $\sqrt{n}\delta_n$ können wir o.B.d.A. $(0, 1)$ -gleichverteilte Randverteilungen für die zu Grunde liegenden Zufallsvektoren annehmen. Damit überträgt sich das Prinzip der Unabhängigkeit von Randverteilungen und Kopula auf die Test-Situation, und man erhält einen von den Randverteilungen unabhängigen Anpassungstest für die Kopulafamilie \mathcal{C} . In dieser Arbeit beschränken wir uns auf eine Teststatistik nach (0.1).

Die Hypothese H_0 wird abgelehnt, falls T_n einen kritischen Wert c überschreitet. Dieser Wert hängt vom Stichprobenumfang n und einem Signifikanzniveau α (z.B. $\alpha = 0.05$) ab und wird deshalb mit $c_{n,\alpha}$ bezeichnet. In Satz 2.8 bestimmen wir die Grenzverteilung von T_n unter H_0 . Die Konsistenz einer *Testfolge* $\varphi_n = 1\{T_n > c_{n,\alpha}\}$ wird in Satz 2.12 nachgewiesen. Eine Fortführung dieser Untersuchung hinsichtlich der Grenzverteilung

der Teststatistik unter Alternativen schließt sich in Abschnitt 2.5 an.

Die Teststatistik T_n ist nicht *Kopula-verteilungsfrei* unter H_0 , d.h. ihre asymptotische Verteilung hängt vom zu Grunde liegenden unbekanntem Kopulaparameter ab. Deshalb schätzen wir $c_{n,\alpha}$ aus den Daten durch *parametrischen Bootstrap* und bezeichnen den Schätzwert mit $c_{n,\alpha}^*$. Die zugehörige *Bootstrap-Testfolge* $\varphi_n^* = 1\{T_n > c_{n,\alpha}^*\}$ besitzt asymptotisch das vorgegebene Niveau α und ist konsistent (siehe Abschnitt 2.6.1).

In einer Simulationsstudie in Abschnitt 3.6 überprüfen wir, wie gut der Bootstrap-Test φ_n^* ein vorgegebenes Niveau α einhält. Eine empirische Gütestudie untersucht das Verhalten von φ_n^* unter Alternativen. Abschnitt 3.7 schließt die Untersuchungen mit einer Approximation der Güte ab.

1. Kopulafunktionen

Wir klären zunächst Definition, Bedeutung und Eigenschaften einer *Kopulafunktion*. Anschließend werden exemplarisch einige wichtige Kopulafamilien vorgestellt. In einem statistischen Teil führen wir die *empirische Kopula*, welche ein *nichtparametrischer Schätzer* für die (unbekannte) Kopula ist, ein und betrachten Schätzmethoden für Kopulae in einem *parametrischen Modell*. Umfassende Einführungen in Theorie und Anwendung der Kopulafunktionen bilden [NEL98], [LIN00], [JOE97] und [DK01].

1.1. Einführung der Kopulafunktion

Im Folgenden bezeichne $I := [0, 1]$ das *Einheitsintervall*.

Definition 1.1 (Kopula)

Eine *Kopula(-funktion)* ist eine Funktion $C : I^2 \rightarrow I$ mit folgenden Eigenschaften ([NEL98], S.8):

1. Für alle $u, v \in I$ gilt

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v)$$

und

$$C(u, 1) = u, C(1, v) = v.$$

2. Für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ mit $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$ gilt

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Aufgrund der obigen Eigenschaften ist eine Kopula eine bivariate Verteilungsfunktion auf dem Einheitsquadrat mit gleichverteilten Randverteilungen. Der folgende Satz, welcher nach [SK59], S.230, zitiert ist, zeigt die Bedeutung der Kopula auf. Dieser Satz wird üblicherweise als *Sklar's Theorem* bezeichnet.

Satz 1.2 (Sklar's Theorem)

Es sei (X, Y) ein bivariater Zufallsvektor mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow I$. Die Zufallsvariablen X und Y besitzen die Verteilungsfunktion $F(x) := H(x, \infty)$, $x \in$

\mathbb{R} , bzw. $G(y) := H(\infty, y)$, $y \in \mathbb{R}$. In dieser Situation existiert eine Kopula C , so dass gilt:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)), \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

([NEL98], S.21). Sind F und G stetig, dann ist die Kopula C in (1.1) durch die Beziehung

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)), \quad 0 < u, v < 1, \quad (1.2)$$

eindeutig bestimmt. Dabei ist die durch $F^{-1}(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$ definierte Funktion $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ die *Quantilfunktion* von F . Analog definiert man die zu G korrespondierende Quantilfunktion G^{-1} .

Sind in der Situation von Satz 1.2 die Verteilungsfunktionen F und G stetig, so verwenden wir die Sprechweise „ (X, Y) besitzt die Kopula C “ oder „es sei (X, Y) mit Kopula C gegeben“. Die Beziehung (1.1) erklärt den Namen Kopula (lat. Band): Eine Kopula verbindet die Randverteilungsfunktionen F und G zur gemeinsamen Verteilungsfunktion H .

Im Folgenden formulieren wir eine Kopula-Version der *Fréchet-Hoeffding-Schranken* für Verteilungsfunktionen (siehe [DK01], S.68ff und [JOE97], S.58). Die durch

$$C^-(u, v) := \max(u + v - 1, 0), \quad (u, v) \in I^2,$$

und

$$C^+(u, v) := \min(u, v), \quad (u, v) \in I^2,$$

definierten Funktionen $C^+ : I^2 \rightarrow I$ und $C^- : I^2 \rightarrow I$ sind Kopulafunktionen ([NEL98], S.12). Für jede Kopula C gelten die Ungleichungen

$$C^-(u, v) \leq C(u, v) \leq C^+(u, v), \quad (u, v) \in I^2.$$

Deshalb bezeichnen wir C^- als *untere Fréchet-Kopula* und C^+ als *obere Fréchet-Kopula*.

Durch die Festsetzung $C^\perp(u, v) := uv$ ist die sogenannte *Produktkopula* $C^\perp : I^2 \rightarrow I$ definiert. Sind X und Y Zufallsvariablen mit stetigen Verteilungsfunktionen, und besitzt (X, Y) die Kopula C , so sind X und Y genau dann stochastisch unabhängig, wenn $C = C^\perp$ gilt ([NEL98], S.21).

Bemerkung 1.3 (Invarianz)

Es seien f und g streng monoton wachsende reellwertige Funktionen auf dem Wertebereich von X bzw. Y . Ferner sei (X, Y) ein bivariater Zufallsvektor mit Kopula C . Dann besitzt $(f(X), g(Y))$ die Kopula C ([NEL98], S.22 oder [LIN00], S.6). Die Voraussetzung der strengen Monotonie von f und g kann abgeschwächt werden, indem man f und g als fast sicher streng monoton wachsend voraussetzt ([SW81], S.881).

In den Beispielen 1.4 bis 1.6 stellen wir einige einparametrische Kopulafamilien vor. Dabei bezeichnen wir eine Funktionenfamilie

$$C : I^2 \times \Theta \rightarrow I \quad (1.3)$$

als *einparametrische Kopulafamilie*, wenn $C(\cdot, \vartheta) : I^2 \rightarrow I$ für jedes $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$ die in Definition 1.1 formulierten Eigenschaften einer Kopula besitzt.

Beispiel 1.4 (Gauß-Kopula)

Es seien X und Y standard-normalverteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion Φ und (X, Y) bivariat normalverteilt mit (Pearson-)Korrelation $\vartheta = \text{Cov}(X, Y)$ und Verteilungsfunktion Φ_ϑ . Aus (1.2) mit $H = \Phi_\vartheta$ und $F^{-1} = G^{-1} = \Phi^{-1}$ erhalten wir für $\vartheta \in (-1, 1)$ die *Gauß-Kopula* $C_N(\cdot, \vartheta)$, welche somit für $0 < u, v < 1$ durch

$$\begin{aligned} C_N(u, v, \vartheta) &= \Phi_\vartheta(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\vartheta^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\vartheta st + t^2}{2(1-\vartheta^2)}\right) dt ds \end{aligned} \quad (1.4)$$

gegeben ist ([DK01], S.71 bzw. [JOE97], S.140f). Der Index N soll an Normalverteilung erinnern. Man beachte, dass die Produktkopula C^\perp als Spezialfall für $\vartheta = 0$ enthalten ist. Für $\vartheta = -1$ und $\vartheta = 1$ ergänzt man die Familie der Gauß-Kopulae durch die untere bzw. obere Fréchet-Kopula, d.h. man setzt $C_N(\cdot, -1) := C^-$ und $C_N(\cdot, 1) := C^+$.

1.1.1. Archimedische Kopula

Ist

$$\varphi : I \rightarrow [0, \infty] \quad (1.5)$$

eine stetige, konvexe, streng monoton fallende Funktion mit der Eigenschaft $\varphi(1) = 0$, so ist die *Pseudo-Inverse* von φ die durch

$$\varphi^{[-1]}(t) := \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases}$$

definierte Funktion $\varphi^{[-1]} : [0, \infty] \rightarrow I$. Die durch

$$C(u, v) := \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (1.6)$$

definierte Funktion $C : I^2 \rightarrow I$ ist dann eine Kopula ([NEL98], S.91 bzw. [DK01], S.84); sie wird als *archimedische Kopula* bezeichnet. Die Funktion φ heißt *Generator* von C . Die Kopula C heißt *strikt*, falls $\varphi(0) = \infty$ gilt. Dann ist $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, und (1.6) wird zu

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Besitzt eine Kopula C den Generator φ , so nennen wir C *von φ erzeugt* und schreiben auch $C = C_\varphi$. Ist der Generator φ aus einer einparametrischen Familie $\{\varphi(\cdot, \vartheta) :$

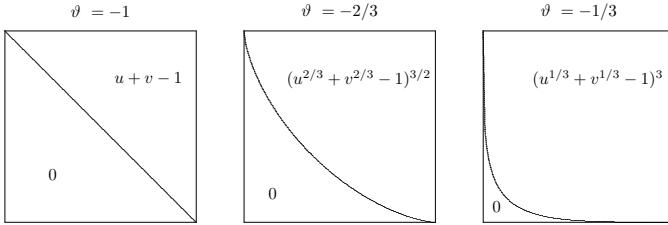


Abbildung 1.1.: Funktionsvorschrift von $C_C(u, v, \vartheta)$ für $\vartheta = -1, -2/3, -1/3$ und $(u, v) \in I^2$.

$\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, so schreiben wir $\varphi = \varphi(\cdot, \vartheta)$ für den *einparametrischen Generator* sowie $C(\cdot, \vartheta) = C_{\varphi(\cdot, \vartheta)}$ für die erzeugte *einparametrische Kopula* $C(\cdot, \vartheta) : I^2 \rightarrow I$.

Im Folgenden werden einige Familien von archimedischen Kopulae vorgestellt. Bei den Definitionen der Funktionsvorschrift einer Kopula gelten die üblichen Konventionen $1/0 := \infty$, $1/\infty := 0$, $\infty^\vartheta := \infty$ für $\vartheta > 0$, $\log 0 := -\infty$ und $\exp(-\infty) := 0$. Außerdem sei $C(\cdot, \infty)$ der Grenzwert von $C(\cdot, \vartheta)$ für $\vartheta \rightarrow \infty$ bei gleichmäßiger Konvergenz, d.h. es gilt

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \sup_{u, v \in I} |C(u, v, \vartheta) - C(u, v, \infty)| = 0.$$

Ferner sei stets $(u, v) \in I^2$.

Beispiel 1.5 (Clayton-Kopula)

Die *Clayton-* oder *Pareto-Kopula* $C_C(\cdot, \vartheta)$ wird aus einer bivariaten Pareto-Verteilung abgeleitet ([NEL98], S.29). Sie ist für $\vartheta \geq -1$ und $\vartheta \neq 0$ durch

$$C_C(u, v, \vartheta) := \max((u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta}, 0) \quad (1.7)$$

und für $\vartheta = 0$ durch

$$C_C(u, v, 0) := uv$$

gegeben. Eine Fallunterscheidung der rechten Seite von (1.7) nach ϑ ergibt die Darstellung

$$C_C(u, v, \vartheta) = \begin{cases} (u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta}, & \vartheta > 0, \\ uv, & \vartheta = 0, \\ \begin{cases} (u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta}, & v > (1 - u^{-\vartheta})^{-1/\vartheta}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} & -1 < \vartheta < 0. \end{cases}$$

Der zugehörige Generator ist $\varphi_C(t, \vartheta) = (t^{-\vartheta} - 1)/\vartheta$, $\vartheta \neq 0$, bzw. $\varphi_C(t, 0) = -\log t$ für $t \in [0, 1]$. Für die Clayton-Kopula gilt $C_C(\cdot, -1) = C^-$, $C_C(\cdot, 0) = C^\perp$ und $C_C(\cdot, \infty) = C^+$ ([NEL98], S.94).

Beispiel 1.6 (Frank-Kopula)

Die Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$ ist für $\vartheta \neq 0$ durch

$$C_F(u, v, \vartheta) := -\frac{1}{\vartheta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\vartheta u} - 1)(e^{-\vartheta v} - 1)}{e^{-\vartheta} - 1} \right) \quad (1.8)$$

und für $\vartheta = 0$ durch $C_F(u, v, 0) := uv$ gegeben. Der zugehörige Generator ist

$$\varphi_F(t, \vartheta) = -\log \left(\frac{e^{-\vartheta t} - 1}{e^{-\vartheta} - 1} \right), \quad t \in [0, 1],$$

für $\vartheta \neq 0$ und $\varphi_F(t, 0) = -\log t$ für $\vartheta = 0$. Ferner gilt: $C_F(\cdot, -\infty) = C^-$, $C_F(\cdot, 0) = C^\perp$ und $C_F(\cdot, \infty) = C^+$ ([NEL98], S.94). Eine Kopula C heißt *strahlen-symmetrisch*, falls sie die Funktionalgleichung

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$$

für jedes $(u, v) \in I^2$ erfüllt ([NEL98], S.33). Die Frank-Kopula ist die einzige archimedische Kopula, die *strahlen-symmetrisch* ist ([FR79], S.216).

Beispiel 1.7 (Gumbel-Kopula)

Die Gumbel(-Hougaard)-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$ ist für $\vartheta \geq 1$ durch

$$C_G(u, v, \vartheta) := \exp \left(- [(-\log u)^\vartheta + (-\log v)^\vartheta]^{1/\vartheta} \right) \quad (1.9)$$

definiert. Sie besitzt den Generator $\varphi_G(t, \vartheta) = (-\log t)^\vartheta$ für $t \in [0, 1]$. Weiter gilt $C_G(\cdot, 1) = C^\perp$ und $C_G(\cdot, \infty) = C^+$ ([NEL98], S.94). Die Gumbel-Kopula ist eine *Extremwert-Kopula* ([JOE97], S.142 und S.140), da sie die Gleichung $C(u^s, v^s) = C^s(u, v)$ für alle $(u, v) \in I^2$ und $s > 0$ erfüllt. Sie ist die einzige archimedische Kopula, die zugleich eine Extremwert-Kopula ist ([DK01], S.96).

In [NEL98], S.94ff werden weitere einparametrische Familien von archimedischen Kopulae aufgeführt.

1.2. Schätzmethoden für Kopulafunktionen

Zunächst betrachten wir in Abschnitt 1.2.1 die *empirische Kopula* als einen nichtparametrischen Schätzer für die unbekannt Kopula. In Abschnitt 1.2.2 stellen wir parametrische Schätzer für die unbekannt Kopula vor. Allen Schätzmethoden liegt folgende Annahme zu Grunde.

Annahme 1.8 (Folge bivariater Zufallsvektoren)

Es sei $(X_i, Y_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von stochastisch unabhängigen, identisch verteilten bivariaten Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) mit *stetigen* Verteilungsfunktionen

$$\begin{aligned} F(x) &:= P(X_1 \leq x), & x \in \mathbb{R}, \\ G(y) &:= P(Y_1 \leq y), & y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

und gemeinsamer Verteilungsfunktion

$$H(x, y) := P(X_1 \leq x, Y_1 \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

sowie Kopula C .

Bemerkung 1.9

Als Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) in Annahme 1.8 wählen wir folgendes kanonische Modell: Es sei mit

$$Q((-\infty, x] \times (-\infty, y]) := H(x, y), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen

$$((\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i))_{i \geq 1} := ((\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, Q))_{i \geq 1}$$

gegeben. Ferner sei

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) := \bigotimes_{i=1}^{\infty} (\Omega_i, \mathcal{A}_i, P_i) = \bigotimes_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2, Q)$$

der Produkt-Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist die Folge von Zufallsvektoren

$$(X_i, Y_i) : \begin{cases} (\Omega, \mathcal{A}) & \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2) \\ (x_i, y_i)_{i \geq 1} & \mapsto (x_i, y_i) \end{cases}, \quad i \geq 1,$$

stochastisch unabhängig bzgl. des Produktmaßes $P = \bigotimes_{i=1}^{\infty} P_i$, und die Zufallsvektoren (X_i, Y_i) , $i \geq 1$, besitzen dieselbe Verteilung Q . Für die (eindeutig bestimmte) Kopula C von (X_1, Y_1) gilt dann

$$C(u, v) = Q((-\infty, F^{-1}(u)] \times (-\infty, G^{-1}(v)]), \quad (u, v) \in I^2.$$

Unser Ziel ist es, Schätzmethoden zu finden, die unabhängig von den Randverteilungsfunktionen F und G , sprich *marginal-verteilungsfrei*, sind. Dazu führen wir mit der sog. *Wahrscheinlichkeits-Integraltransformation* die neuen Zufallsvariablen

$$\left. \begin{array}{l} U_i := F(X_i) \\ V_i := G(Y_i) \end{array} \right\}, \quad i \geq 1, \quad (1.10)$$

ein. Da F und G als stetig vorausgesetzt sind, gilt $U_i \sim V_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ für $i \geq 1$ und $(U_i, V_i) \sim C$, d.h.

$$C(u, v) = P(U_i \leq u, V_i \leq v), \quad (u, v) \in I^2, \quad (1.11)$$

für $i \geq 1$.

Eine auf *Kernschätzern* basierende nichtparametrische Schätzmethode für Kopulae und deren Ableitungen wird in [FS03] vorgestellt. Die im folgenden Abschnitt eingeführte *empirische Kopula* ist ein weiterer wichtiger nichtparametrischer Schätzer für die unbekannte Kopula.

1.2.1. Empirische Kopula

In [DE79], [NEL98] und [GS87] gibt es unterschiedliche Zugänge zur *empirischen Kopula*. Zunächst betrachten wir den Zugang aus [DE79] und benutzen die Bezeichnung *Deheuwels-Kopula* gemäß [DUR00]. Aus [GS87] gewinnen wir dann die Definition der empirischen Kopula.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien

$$F_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$G_n(y) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{Y_i \leq y\}, \quad y \in \mathbb{R},$$

und

$$H_n(x, y) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq x, Y_i \leq y\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

die *empirischen Verteilungsfunktionen* von X_1, \dots, X_n bzw. Y_1, \dots, Y_n bzw. $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

Definition 1.10

Jede Kopula D_n mit der Eigenschaft

$$H_n(x, y) = D_n(F_n(x), G_n(y)), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

heißt eine *Version der Deheuwels-Kopula* ([DE79], S.276). Die Familie \mathcal{D}_n aller Kopulae, welche (1.12) erfüllen, heißt *Deheuwels-Kopula*, kurz

$$\mathcal{D}_n := \{D_n : D_n \text{ ist Kopula und erfüllt (1.12)}\}.$$

In den beiden folgenden Sätzen werden wir wichtige Eigenschaften einer Version der Deheuwels-Kopula kennen lernen. Zuvor führen wir die Begriffe *Ordnungs-* und *Rang-Statistiken* ein.

Definition 1.11

Durch Sortieren von X_1, \dots, X_n nach aufsteigender Größe erhält man die mit $\{X_{i:n}\}_{i=1}^n$ bezeichneten sog. *Ordnungsstatistiken* von X_1, \dots, X_n . Aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit der Verteilungsfunktion von X_1 gilt

$$X_{1:n} < X_{2:n} < \dots < X_{n:n} \quad P - f.s.$$

Dies bedeutet, dass die *Rangstatistiken* $\{R_{i:n}^X\}_{i=1}^n$ fast sicher durch die Beziehungen

$$X_i = X_{R_{i:n}^X, n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

oder gleichbedeutend durch

$$R_{i,n}^X := n \cdot F_n(X_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

festgelegt sind. Analog werden die Ordnungsstatistiken $\{Y_{i,n}\}_{i=1}^n$ und die Rangstatistiken $\{R_{i,n}^Y\}_{i=1}^n$ von Y_1, \dots, Y_n definiert.

Satz 1.12

Jede Version D_n der Deheuvels-Kopula ist auf dem Gitter $L_n := \{(i/n, j/n) : i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}\}$ durch die Beziehung

$$D_n\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1\{R_{k,n}^X \leq i, R_{k,n}^Y \leq j\} \quad (1.13)$$

eindeutig bestimmt ([DE79], S.276).

Gleichung (1.13) ist die Definition der empirischen Kopula nach [NEL98], S.176. Zusammen mit den Vorschlägen zur Approximation einer Kopula nach [LI97] können wir damit einen nichtparametrischen Schätzer für die Kopula bilden.

Satz 1.13

Die empirische Verteilungsfunktion H_n ist eindeutig bestimmt durch die empirischen Verteilungsfunktionen F_n und G_n sowie die Werte einer Version der Deheuvels-Kopula D_n auf dem Gitter L_n ([DE81], S.33).

Wegen der Eindeutigkeit jeder Version der Deheuvels-Kopula auf dem Gitter L_n (vgl. Satz 1.12) und Satz 1.13 können wir oft eine Version der Deheuvels-Kopula D_n mit ihrer Familie \mathcal{D}_n identifizieren und bezeichnen dann kurz D_n als *Deheuvels-Kopula*.

Zur Definition der *empirischen Kopula* nach [GS87], S.50, ergänzen wir die Definition der Quantilfunktion von F_n um die Randpunkte von $(0, 1)$ wie folgt: $F_n^{-1}(1) := X_{n,n}$ und $F_n^{-1}(0) := -\infty$. Die Definition der Quantilfunktion G_n^{-1} von G_n wird analog ergänzt.

Definition 1.14

Die *empirische Kopula* C_n ist durch

$$C_n(u, v) := H_n(F_n^{-1}(u), G_n^{-1}(v)) \quad (1.14)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\}, \quad (u, v) \in I^2, \quad (1.15)$$

definiert.

Wegen

$$C_n(u, 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{X_i \leq F_n^{-1}(u)\} = F_n(F_n^{-1}(u)) = \frac{k}{n} \geq u$$

für $u \in ((k-1)/n, k/n]$, $k = 1, \dots, n$, ist C_n keine Version der Deheuvels-Kopula. Jedoch erfüllt C_n die Beziehung (1.13) und bestimmt deshalb zusammen mit F_n und G_n die empirische Verteilungsfunktion H_n eindeutig (vgl. Satz 1.13). In [GS87], S.51, finden wir eine Beweisskizze für die folgende asymptotische Aussage:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C_n(u, v) - C(u, v)| = 0 \quad P - f.s. \quad (1.16)$$

Diese Grenzwertaussage zeigt, dass C_n ein konsistenter nichtparametrischer Schätzer für C ist, was nachträglich die Bezeichnung empirische Kopula für C_n rechtfertigt. Der ausführliche Beweis von (1.16) wird in Anhang B.4 erbracht. Ferner ist mit (B.16) eine Konvergenzgeschwindigkeit angegeben.

Im Folgenden weisen wir nach, dass die empirische Kopula unabhängig von den Randverteilungsfunktionen F und G ist (siehe auch [GS87], S.51). Mit (1.15) und den Zufallsvariablen

$$\left. \begin{array}{l} U_i = F(X_i) \\ V_i = G(Y_i) \end{array} \right\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

nach (1.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} C_n(u, v) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{F(X_i) \leq F(F_n^{-1}(u)), G(Y_i) \leq G(G_n^{-1}(v))\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{U_i \leq F(F_n^{-1}(u)), V_i \leq G(G_n^{-1}(v))\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

wobei das erste Gleichheitszeichen mit Wahrscheinlichkeit eins gilt. Es sei

$$\tilde{F}_n(u) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{U_i \leq u\}, \quad u \in I, \quad (1.18)$$

die empirische Verteilungsfunktion von U_1, \dots, U_n . Für \tilde{F}_n erhalten wir die mit Wahrscheinlichkeit eins gültige Aussage

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(u) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{F(X_i) \leq u\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{X_i \leq F^{-1}(u)\} \\ &= F_n(F^{-1}(u)). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Quantilfunktion \tilde{F}_n^{-1} von \tilde{F}_n die Darstellung

$$\tilde{F}_n^{-1} = F \circ F_n^{-1}. \quad (1.19)$$

Für die durch

$$\tilde{G}_n(v) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{V_i \leq v\}, \quad v \in I, \quad (1.20)$$

definierte empirische Verteilungsfunktion von V_1, \dots, V_n , erhalten wir die analoge Aussage

$$\tilde{G}_n^{-1} = G \circ G_n^{-1}. \quad (1.21)$$

Mit der empirischen Verteilungsfunktion

$$\tilde{H}_n(u, v) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{U_i \leq u, V_i \leq v\}, \quad (u, v) \in I^2, \quad (1.22)$$

von $(U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)$ folgt aus (1.17) für die empirische Kopula

$$\begin{aligned} C_n(u, v) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{U_i \leq \tilde{F}_n^{-1}(u), V_i \leq \tilde{G}_n^{-1}(v)\} \\ &= \tilde{H}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dabei gilt das erste Gleichheitszeichen wegen (1.19) und (1.21). Für alle Wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen benutzen wir im Folgenden die Darstellung (1.23) der empirischen Kopula.

Abschließend werden in diesem Abschnitt eine Invarianzeigenschaft bzw. eine alternative Darstellung der empirischen Kopula betrachtet. Es seien f und g reellwertige monoton nichtfallende Funktionen mit

$$P(X_1 \in W(f)) = 1 \text{ und } P(Y_1 \in W(g)) = 1. \quad (1.24)$$

Dabei bezeichnet $W(f) := \{x \in \mathbb{R} : f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon) > 0 \forall \varepsilon > 0\}$ die Menge der Wachstumspunkte von f . Anstatt in (1.10) die Wahrscheinlichkeits-Integraltransformation durchzuführen, ergibt eine Transformation von X_i und Y_i , $i = 1, \dots, n$, mit f bzw. g dieselbe Darstellung (1.23) für die empirische Kopula. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Invarianzeigenschaft aus Bemerkung 1.3. Aus (1.15) folgt ferner für C_n die Darstellung

$$\begin{aligned} C_n(u, v) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{nF_n(X_i) \leq nu, nG_n(Y_i) \leq nv\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1\{R_{i,n}^X \leq nu, R_{i,n}^Y \leq nv\}. \end{aligned}$$

Dabei sind $\{R_{i,n}^X\}_{i=1}^n$ und $\{R_{i,n}^Y\}_{i=1}^n$ die Rangstatistiken von X_1, \dots, X_n bzw. Y_1, \dots, Y_n .

1.2.2. Parametrische Schätzmethoden

In einem *parametrischen Modell* sei die Kopula C aus Annahme 1.8 Element einer einparametrischen Kopulafamilie $\{C(\cdot, \vartheta) : \vartheta \in \Theta\}$ mit *Parameterbereich* $\Theta \subset \mathbb{R}$ (vgl. mit (1.3)). Für die zur Kopulafamilie gehörende Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$ gilt gemäß (1.11)

$$P_\vartheta(U_1 \leq u, V_1 \leq v) = C(u, v, \vartheta), \quad (u, v) \in I^2.$$

Der *Kopulaparameter* ϑ sei von den Randverteilungsfunktionen F und G unabhängig, weshalb er wie in [JOE97], 1.7, als *Abhängigkeits-Parameter* bezeichnet werden kann. Weiter sei

$$\hat{\vartheta}_n : [\mathbb{R}^2]^n \longrightarrow \Theta \quad (1.25)$$

eine (messbare) *Schätzfunktion*, kurz: *Schätzer*, für ϑ .

In diesem Absatz weisen wir kurz auf verschiedene Maximum-Likelihood-Methoden (kurz: ML-Methoden) zum Schätzen eines Kopulaparameters hin. Werden für die Randverteilungen parametrische Verteilungsfamilien gewählt, so können die Parameter für die Randverteilungen und der Kopulaparameter ϑ durch Maximierung einer geeigneten Log-Likelihood-Funktion getrennt (sog. *IFM-Methode*, inference functions for margins) oder zusammen (sog. *EML-Methode*, exact maximum likelihood) geschätzt werden ([JOE97], 10.1; Anwendungsbeispiel in [KLU99]). Bei der *CML-Methode* (canonical maximum likelihood) werden die Randverteilungsfunktionen F bzw. G durch die empirischen Verteilungsfunktionen F_n bzw. G_n geschätzt. Danach wird der Kopulaparameter ϑ durch einen ML-Schätzer $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n((F_n(X_1), G_n(Y_1)), \dots, (F_n(X_n), G_n(Y_n)))$ geschätzt ([BOU00], 3.3.1). Die *MCML-Methode* (modified cml) benutzt ein semiparametrisches Modell für die Randverteilungen. Der „Tail-Bereich“ wird durch eine Verallgemeinerte Paretoverteilung angepasst und der „Verteilungsbauch“ durch die empirische Verteilungsfunktion geschätzt. Bis auf die CML-Methode sind die aufgeführten ML-Methoden nicht marginal-verteilungsfrei, d.h. sie genügen nicht der nachfolgenden Bedingung (A1).

Für die Familie der archimedischen Kopulae wird in [GE93] eine spezielle Schätzmethode vorgestellt, welche auf der eindimensionalen empirischen Verteilungsfunktion von $C(U_1, V_1), \dots, C(U_n, V_n)$ basiert (siehe auch [DK01], S.92f). Ferner wird in [SU96] gezeigt, dass die *Diagonal-Kopula* $D(u) := C(u, u)$, $u \in I$, die zugehörige archimedische Kopula eindeutig bestimmt. Daraus wird eine Schätzmethode auf Grundlage der empirischen Verteilungsfunktion von $\max(U_1, V_1), \dots, \max(U_n, V_n)$ bzw. $\min(U_1, V_1), \dots, \min(U_n, V_n)$ entwickelt. Ein Anwendungsbeispiel für diese Methode findet sich in [DK01], S.91f.

1.2.2.1. Bedingungen an den Schätzer eines Kopulaparameters

Für ϑ suchen wir einen Schätzer $\hat{\vartheta}_n$, der von F und G unabhängig, sprich *marginalverteilungsfrei*, ist. Diese Eigenschaft fordern wir in **(A1)**. Die Forderung **(A2)** ist eine sog. *Regularitätsvoraussetzung*.

Die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soll folgende Voraussetzungen erfüllen:

(A1) Der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ ist *marginalverteilungsfrei*, d.h. es gelten für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit eins die Beziehungen

$$\hat{\vartheta}_n((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)) = \hat{\vartheta}_n((U_1, V_1), \dots, (U_n, V_n)) \quad (1.26)$$

$$= \hat{\vartheta}_n((R_{1,n}^X, R_{1,n}^Y), \dots, (R_{n,n}^X, R_{n,n}^Y)). \quad (1.27)$$

Dabei sind $\{(U_i, V_i)\}_{i=1}^n$ durch (1.10) gegeben, und $\{R_{i,n}^X\}_{i=1}^n$ bzw. $\{R_{i,n}^Y\}_{i=1}^n$ sind die Rangstatistiken von X_1, \dots, X_n bzw. Y_1, \dots, Y_n .

(A2) Für den *Schätzfehler* $\hat{\vartheta}_n - \vartheta$ existiert unter dem parametrischen Modell $C = C(\cdot, \vartheta)$ eine Darstellung der Form

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(U_i, V_i, \vartheta) + \tilde{\varepsilon}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.28)$$

wobei $l(\cdot, \vartheta) : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

$$E_{\vartheta} l(U_1, V_1, \vartheta) = 0, \quad \vartheta \in \Theta,$$

und

$$\sigma_2(\vartheta) := E_{\vartheta} l^2(U_1, V_1, \vartheta) < \infty, \quad \vartheta \in \Theta, \quad (1.29)$$

ist. Der *Restterm* $\tilde{\varepsilon}_n$ in (1.28) soll stochastisch gegen null konvergieren, d.h. es soll

$$\tilde{\varepsilon}_n \xrightarrow{P_{\vartheta}} 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.30)$$

gelten.

Dabei bezeichnen wir mit $\xrightarrow{P_{\vartheta}}$ die stochastische Konvergenz unter P_{ϑ} und in der folgenden Bemerkung mit $\xrightarrow{D_{\vartheta}}$ die Verteilungskonvergenz.

Bemerkung 1.15

1. Eine Verallgemeinerung von **(A1)** lautet: Es seien f und g reellwertige monoton nichtfallende Funktionen, welche die Eigenschaft (1.24) besitzen. Für den Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ soll für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit eins

$$\hat{\vartheta}_n((X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)) = \hat{\vartheta}_n((f(X_1), g(Y_1)), \dots, (f(X_n), g(Y_n)))$$

gelten. Wählen wir speziell für f und g die Funktionen $f(x) := F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, bzw. $g(y) := G(y)$, $y \in \mathbb{R}$, so erhalten wir (1.26).

2. Aus (1.28) folgt mit dem Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Lévy die Asymptotik

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_2(\vartheta)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (1.31)$$

falls $\sigma_2(\vartheta) > 0$ ist.

3. Die *Konsistenz* der Schätzfolge $(\hat{\vartheta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\vartheta \in \Theta$ folgt aus (1.31), d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$P_\vartheta(|\hat{\vartheta}_n - \vartheta| > \varepsilon) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.32)$$

Im nächsten Abschnitt stellen wir einen Schätzer vor, welcher die Voraussetzungen **(A1)** und **(A2)** erfüllt.

1.2.2.2. Schätzmethode basierend auf Kendalls Tau

Die im Folgenden beschriebene Schätzmethode für den Kopulaparameter ϑ wird im Falle der Clayton-Kopula in [GE95], S.547, basierend auf [OAK82], S.420f, untersucht. Im Falle der Frank-Kopula finden wir eine Einführung dieser Methode in [GE87], S.553.

Es seien (x_1, y_1) eine Realisierung von (X_1, Y_1) bzw. (x_2, y_2) eine Realisierung von (X_2, Y_2) . Man bezeichnet (x_1, y_1) und (x_2, y_2) als *konkordant*, falls $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ oder $x_1 > x_2$ und $y_1 > y_2$ gilt. Im Falle $x_1 < x_2$ und $y_1 > y_2$ oder $x_1 > x_2$ und $y_1 < y_2$ heißen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) *diskordant*. Offenbar sind (x_1, y_1) und (x_2, y_2) konkordant bzw. diskordant je nachdem, ob das Produkt $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)$ positiv oder negativ ist.

Definition 1.16

Der Koeffizient τ ist durch

$$\tau := P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

definiert; er wird als *Kendalls Tau* bezeichnet.

Kendalls Tau gibt die Differenz der Wahrscheinlichkeiten für Konkordanz und Diskordanz an. Als Funktional der gemeinsamen Verteilung von X_1 und Y_1 erfüllt τ die Eigenschaften eines *Assoziationsmaßes* zwischen X_1 und Y_1 nach [GIB92], S.336, und die Eigenschaften eines *Konkordanzmaßes* nach [NEL98], S.136. Da die Randverteilungsfunktionen F und G als stetig vorausgesetzt sind, gilt

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (1.33)$$

([NEL98], S.129). Kendalls Tau ist somit ein Funktional der Kopula und folglich unabhängig von den Randverteilungen.

Definition 1.17

Ein nichtparametrischer Schätzer $\hat{\tau}_n : [\mathbb{R}^2]^n \rightarrow [-1, 1]$ für τ ist durch

$$\hat{\tau}_n := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)]$$

definiert ([GIB92], S.340).

Der Schätzer $\hat{\tau}_n$ ist marginal-verteilungsfrei, da die erste Gleichung der Gleichungskette

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}[(F(X_i) - F(X_j))(G(Y_i) - G(Y_j))] \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}[(U_i - U_j)(V_i - V_j)] \end{aligned} \quad (1.34)$$

mit Wahrscheinlichkeit eins gilt. Dabei sind $\{(U_i, V_i)\}_{i=1}^n$ durch (1.10) gegeben. Für alle wahrscheinlichkeitstheoretischen Aussagen benutzen wir im Folgenden die Darstellung (1.34) von $\hat{\tau}_n$. Ein alternative Darstellung von $\hat{\tau}_n$ ist

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_n &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}[(nF_n(X_i) - nF_n(X_j))(nG_n(Y_i) - nG_n(Y_j))] \\ &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{sign}[(R_{i,n}^X - R_{j,n}^X)(R_{i,n}^Y - R_{j,n}^Y)]. \end{aligned}$$

Dabei sind $\{R_{i,n}^X\}_{i=1}^n$ und $\{R_{i,n}^Y\}_{i=1}^n$ die Rangstatistiken von X_1, \dots, X_n bzw. Y_1, \dots, Y_n . Der Schätzer $\hat{\tau}_n$ ist erwartungstreu ([GIB92], S.340), und die Schätzfolge $(\hat{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konsistent ([GIB92], S.342). Die Varianz von $\hat{\tau}_n$ ist

$$V(\hat{\tau}_n) = \frac{2}{n(n-1)} (2(n-2)\sigma^2 + 1 - \tau^2),$$

wobei

$$\sigma^2 := V(\psi(U_1, V_1)) \quad (1.35)$$

mit

$$\psi(u, v) := P((u - U_1)(v - V_1) > 0) - P((u - U_1)(v - V_1) < 0) \quad (1.36)$$

für $(u, v) \in I^2$ gesetzt ist ([LEE90], S.14). Mit

$$\begin{aligned} P((u - U_1)(v - V_1) > 0) &= \int_0^1 \int_0^1 1\{(u - \tilde{u})(v - \tilde{v}) > 0\} dC(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= \int_0^u \int_0^v dC(\tilde{u}, \tilde{v}) + \int_u^1 \int_v^1 dC(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ &= C(u, v) - C(u, 0) - C(0, v) + C(0, 0) \\ &\quad + C(1, 1) - C(1, v) - C(u, 1) + C(u, v) \\ &= 2C(u, v) + 1 - u - v \end{aligned}$$

und

$$P((u - U_1)(v - V_1) < 0) = u + v - 2C(u, v)$$

erhalten wir für $\psi(\cdot)$ in (1.36) die Darstellung

$$\psi(u, v) = 4C(u, v) + 1 - 2u - 2v. \quad (1.37)$$

Wegen $-1 \leq \psi(u, v) \leq 1$ gilt $E\psi^2(U_1, V_1) \leq 1$ und damit

$$0 \leq \sigma^2 \leq 1 - \tau^2. \quad (1.38)$$

Somit ist σ^2 endlich. Der sog. *degenerierte Fall* $\sigma^2 = 0$ tritt für $\tau \in \{-1, 1\}$ ein. Dieser Fall wird im Folgenden ausgeschlossen. Der folgende Satz ([LEE90], S.76) beschreibt die Asymptotik der Schätzfolge $(\hat{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Satz 1.18

Für $\sigma^2 > 0$ ist der Schätzer $\hat{\tau}_n$ asymptotisch normalverteilt, d.h. es gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 4\sigma^2), \quad n \rightarrow \infty. \quad (1.39)$$

Da der Schätzer $\hat{\tau}_n$ wegen (1.34) marginal-verteilungsfrei ist, möchten wir ihn zur Konstruktion eines marginal-verteilungsfreien Schätzers für ϑ benutzen. Unter $C = C(\cdot, \vartheta)$ hängt τ in (1.33) von ϑ ab, d.h. es gilt

$$\tau = \tau(\vartheta) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \vartheta) dC(u, v, \vartheta) - 1.$$

Ist dieser Zusammenhang

$$\Theta \ni \vartheta \longleftrightarrow \tau(\vartheta) \in D \subset (-1, 1) \quad (1.40)$$

eindeutig, so ist die durch

$$g : \begin{cases} D & \longrightarrow \Theta \\ \tau & \longmapsto g(\tau) := \vartheta \end{cases} \quad (1.41)$$

definierte Funktion g eindeutig, und es liegt nahe, ϑ durch

$$\hat{\vartheta}_n := \begin{cases} g(\hat{\tau}_n), & \text{falls } \hat{\tau}_n \in D, \\ \vartheta_0 \in \Theta, & \text{falls } \hat{\tau}_n \notin D, \end{cases} \quad (1.42)$$

zu schätzen. Dabei ist ϑ_0 beliebig gewählt.

Für den Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ nach (1.42) zeigen wir abschließend, dass er die Voraussetzungen **(A1)** und **(A2)** erfüllt. Dabei sei die Funktion $g : D \subset (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ in (1.41) als stetig differenzierbar vorausgesetzt, und $C(u, v, \cdot)$, $(u, v) \in I^2$, sei stetig in ϑ (vgl. mit Annahme 2.1).

Zu (A1): Der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ ist marginal-verteilungsfrei, da $\hat{\tau}_n$ marginal-verteilungsfrei ist und die Funktion g nur von $\hat{\tau}_n$ abhängt.

Zu (A2): Mit der abkürzenden Schreibweise

$$\tilde{\varepsilon}_{1,n} := (\vartheta_0 - \vartheta) \cdot \sqrt{n} \cdot \mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \notin D\}$$

gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) &= \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \cdot \mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \in D\} + \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \cdot \mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \notin D\} \\ &= \sqrt{n}(g(\hat{\tau}_n) - g(\tau)) \cdot \mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \in D\} + \tilde{\varepsilon}_{1,n}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Falls $\hat{\tau}_n \in D$ ist, erhalten wir mit einer Taylorentwicklung von $g(\cdot)$ um die Entwicklungsstelle τ die Aussage

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(g(\hat{\tau}_n) - g(\tau)) &= g'(\bar{\tau}_n)\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau) \\ &= g'(\tau)\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau) \\ &\quad + (g'(\bar{\tau}_n) - g'(\tau))\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau), \end{aligned} \quad (1.44)$$

wobei $\bar{\tau}_n = \tau + \xi_n(\hat{\tau}_n - \tau)$ für ein $\xi_n \in (0, 1)$ ist. Für den Term $\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau)$ auf der rechten Seite von (1.44) gewinnen wir mit der durch

$$\tilde{\tau}_n := \sum_{i=1}^n E_{\vartheta}(\hat{\tau}_n | U_i, V_i) - (n-1)E_{\vartheta}(\hat{\tau}_n)$$

definierten *Hajek-Projektion* von $\hat{\tau}_n$ (siehe [KOTZ88], S.440) die Darstellung

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau) &= \sqrt{n}(\tilde{\tau}_n - \tau) + \sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tilde{\tau}_n) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (\psi(U_i, V_i, g(\tau)) - \tau) + \sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tilde{\tau}_n). \end{aligned}$$

Dabei ist die Funktion $\psi(\cdot, g(\tau))$ durch

$$\psi(u, v, g(\tau)) = \psi(u, v, \vartheta) = 4C(u, v, \vartheta) + 1 - 2u - 2v$$

gemäß (1.37) mit $C = C(\cdot, \vartheta)$ gegeben. Diese Darstellung von $\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau)$ eingesetzt in (1.44) ergibt zusammen mit (1.43) die Darstellung (1.28), wobei speziell

$$l(U_1, V_1, \vartheta) = g'(g^{-1}(\vartheta)) \cdot 2 \cdot (\psi(U_1, V_1, \vartheta) - g^{-1}(\vartheta)) \quad (1.45)$$

und

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}_{1,n} + \tilde{\varepsilon}_{2,1,n} + \tilde{\varepsilon}_{2,2,n} + \tilde{\varepsilon}_{2,3,n} \quad (1.46)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{2,1,n} &:= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \{g'(\tau) \cdot 2 \cdot (\psi(U_i, V_i, g(\tau)) - \tau)\} \cdot (\mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \in D\} - 1), \\ \tilde{\varepsilon}_{2,2,n} &:= g'(\tau) \cdot \sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tilde{\tau}_n) \cdot \mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \in D\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{2,3,n} &:= (g'(\bar{\tau}_n) - g'(\tau)) \cdot \sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau) \cdot \mathbf{1}\{\hat{\tau}_n \in D\} \end{aligned}$$

sind.

Es gilt $E_\vartheta l(U_1, V_1, \vartheta) = 0$, da $E_\vartheta \psi(U_1, V_1, \vartheta) = \tau = g^{-1}(\vartheta)$ ist ([LEE90], S.11). Wegen $-1 \leq \psi(u, v, \vartheta) \leq 1$ bzw. $-1 \leq g^{-1}(\vartheta) \leq 1$ folgt

$$-2 \leq \psi(u, v, \vartheta) - g^{-1}(\vartheta) \leq 2$$

und somit aus (1.45) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sigma_2(\vartheta) &= E_\vartheta l^2(U_1, V_1, \vartheta) \\ &= 2^2 [g'(g^{-1}(\vartheta))]^2 E_\vartheta [\psi(U_1, V_1, \vartheta) - g^{-1}(\vartheta)]^2 \\ &\leq 16 [g'(g^{-1}(\vartheta))]^2 < \infty. \end{aligned}$$

Im Folgenden erbringen wir den Nachweis von $\tilde{\varepsilon}_n = o_{P_\vartheta}(1)$. Zunächst betrachten wir den Restterm $\tilde{\varepsilon}_{1,n}$ unter der Voraussetzung $D = (-1, 1)$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} E_\vartheta \tilde{\varepsilon}_{1,n} &= (\vartheta_0 - \vartheta) \cdot \sqrt{n} P_\vartheta(\hat{\tau}_n \in \{-1, 1\}) \\ &= (\vartheta_0 - \vartheta) \cdot \sqrt{n} [P_\vartheta(\hat{\tau}_n = -1) + P_\vartheta(\hat{\tau}_n = 1)]. \end{aligned}$$

Aufgrund von (1.34) und (1.10) gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} P_\vartheta(\hat{\tau}_n = 1) &= P_\vartheta \left(\bigcap_{1 \leq i < j \leq n} \{(U_i - U_j)(V_i - V_j) > 0\} \right) \\ &\leq P_\vartheta \left(\bigcap_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \{(U_{2i-1} - U_{2i})(V_{2i-1} - V_{2i}) > 0\} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} P_\vartheta((U_{2i-1} - U_{2i})(V_{2i-1} - V_{2i}) > 0) = p_k^{\lfloor n/2 \rfloor}, \end{aligned}$$

wobei

$$p_k := P_\vartheta((U_1 - U_2)(V_1 - V_2) > 0) = \frac{1}{2}(\tau + 1)$$

nach [NEL98], S.127, ist. Wegen $-1 < \tau < 1$ folgt $0 < p_k < 1$ und somit

$$0 \leq \sqrt{n} P_\vartheta(\hat{\tau}_n = 1) \leq \sqrt{n} p_k^{\lfloor n/2 \rfloor} \longrightarrow 0 \quad (1.47)$$

für $n \rightarrow \infty$. Analog erhalten wir die Aussage

$$\sqrt{n} P_\vartheta(\hat{\tau}_n = -1) \longrightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Dabei muss man die Wahrscheinlichkeit p_k durch

$$p_d := P_\vartheta((U_1 - U_2)(V_1 - V_2) < 0) = 1 - p_k = \frac{1}{2}(1 - \tau)$$

ersetzen. Insgesamt ergibt sich $\tilde{\varepsilon}_{1,n} = o_{P_\vartheta}(1)$.

Im Falle der Gauß-Kopula wird der Bereich $(-1, 1)$ für τ auf die Teilmenge $D = (c, d)$ mit $-1 < c < d < 1$ eingeschränkt (siehe Abschnitt C.2.6). Für diese Situation müssen wir

$$\sqrt{n}P_\vartheta(\hat{\tau}_n \notin D) = \sqrt{n}[P_\vartheta(-1 \leq \hat{\tau}_n \leq c) + P_\vartheta(d \leq \hat{\tau}_n \leq 1)] \longrightarrow 0 \quad (1.48)$$

für $n \rightarrow \infty$ zeigen. Dazu sei mit

$$\Phi_1((u_1, v_1), (u_2, v_2)) := -\text{sign}[(u_1 - u_2)(v_1 - v_2)], \quad (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in I^2,$$

die U-Statistik

$$\hat{\tau}_{1,n} := \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Phi_1((U_i, V_i), (U_j, V_j))$$

definiert. Es gilt dann $\hat{\tau}_{1,n} = -\hat{\tau}_n$ sowie $\tau_1 := E_\vartheta \Phi_1((U_1, V_1), (U_2, V_2)) = -\tau$. Wegen $-1 \leq \Phi_1 \leq 1$ und $s := \tau - c > 0$ gewinnen wir aus [KOTZ88], S.442, die Abschätzung

$$P_\vartheta(\hat{\tau}_{1,n} - \tau_1 \geq s) \leq \exp\left(-\frac{s^2}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

und somit

$$P_\vartheta(\hat{\tau}_n \leq c) = P_\vartheta(-\hat{\tau}_n - (-\tau) \geq \tau - c) = P_\vartheta(\hat{\tau}_{1,n} - \tau_1 \geq s) \leq \exp\left(-\frac{s^2}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

sowie die Konvergenz

$$0 \leq \sqrt{n}P_\vartheta(\hat{\tau}_n \leq c) \leq \sqrt{n} \exp\left(-\frac{s^2}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \longrightarrow 0 \quad (1.49)$$

für $n \rightarrow \infty$. Ferner erhält man mit $t := d - \tau > 0$ nach [KOTZ88], S.442, die obere Schranke $\exp(-t^2/2 \cdot \lfloor n/2 \rfloor)$ für $P_\vartheta(\hat{\tau}_n \geq d)$, und es gilt

$$0 \leq \sqrt{n}P_\vartheta(\hat{\tau}_n \geq d) \leq \sqrt{n} \exp\left(-\frac{t^2}{2} \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \longrightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$. Der Beweis von $\tilde{\varepsilon}_{1,n} = o_{P_\vartheta}(1)$ ist somit erbracht.

Falls wie im Falle der Gumbel-Kopula $D = (0, 1)$ ist (siehe Tabelle 1.1), müssen wir

$$\sqrt{n}P_\vartheta(\hat{\tau}_n \notin D) = \sqrt{n}[P_\vartheta(-1 \leq \hat{\tau}_n \leq 0) + P_\vartheta(\hat{\tau}_n = 1)] \longrightarrow 0 \quad (1.50)$$

für $n \rightarrow \infty$ nachweisen. Mit $c = 0$ in (1.49) und (1.47) ist (1.50) bereits gezeigt.

Für den Restterm $\tilde{\varepsilon}_{2,1,n}$ gilt

$$\tilde{\varepsilon}_{2,1,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \{-g'(\tau) \cdot 2 \cdot (\psi(U_i, V_i, g(\tau)) - \tau)\} \cdot 1\{\hat{\tau}_n \notin D\}.$$

Mit

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \{-g'(\tau) \cdot 2 \cdot (\psi(U_i, V_i, g(\tau)) - \tau)\} \xrightarrow{D_\vartheta} \mathcal{N}(0, 4[g'(\tau)]^2 \sigma^2)$$

für $n \rightarrow \infty$ und den Überlegungen zum Restterm $\tilde{\varepsilon}_{1,n}$ folgt $\tilde{\varepsilon}_{1,n} = o_{P_\vartheta}(1)$.

Der Restterm $\tilde{\varepsilon}_{2,2n}$ auf der rechten Seite von (1.46) konvergiert stochastisch gegen null, da nach [KOTZ88], S.440, $E_\vartheta(\sqrt{n}(\hat{\tau}_n - \tau))^2 = O(1/n)$ gilt und $1\{\hat{\tau}_n \in D\}$ stochastisch beschränkt ist. Wegen der Konsistenz von $(\hat{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für τ gilt

$$\bar{\tau}_n = \tau + \xi_n(\hat{\tau}_n - \tau) \xrightarrow{P_\vartheta} \tau, \quad n \rightarrow \infty.$$

Zusammen mit der Stetigkeit von $g'(\cdot)$ an der Stelle τ und (1.39) ist damit gezeigt, dass auch $\tilde{\varepsilon}_{2,3n}$ stochastisch gegen null konvergiert. Insgesamt folgt, dass $\tilde{\varepsilon}_n$ stochastisch gegen null konvergiert. Der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ nach (1.42) erfüllt also Voraussetzung **(A2)**. Somit gilt insbesondere die asymptotische Aussage von (1.31) mit $\sigma_2(\vartheta) = 4[g'(g^{-1}(\vartheta))]^2 \sigma^2$; außerdem ist die Schätzfolge $(\hat{\vartheta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konsistent für $\vartheta \in \Theta$.

Im folgenden Beispiel zeigen wir, dass für die Kopulafamilien aus Beispiel 1.4 bis 1.7 der Zusammenhang (1.40) eindeutig und die entsprechende Funktion $g : D \subset (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ in (1.41) stetig differenzierbar ist.

Beispiel 1.19

Zwischen Kendalls Tau und dem Kopulaparameter besteht im Falle der Clayton-Kopula der Zusammenhang $\tau(\vartheta) = \vartheta/(\vartheta + 2)$ ([NEL98], S.130), und in (1.42) gilt speziell

$$\hat{\vartheta}_n = \frac{2}{1 - \hat{\tau}_n} - 2 =: g_C(\hat{\tau}_n)$$

für $\hat{\tau}_n < 1$. Für $\hat{\tau}_n = 1$ setzen wir formal $\hat{\vartheta}_n = \infty$. Es gilt dann $C_C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) = C_C(\cdot, \infty) = C^+$ (siehe Beispiel 1.5). Im Falle der Frank-Kopula gilt

$$\tau(\vartheta) = 1 + \frac{4}{\vartheta}(D_1(\vartheta) - 1),$$

wobei $D_1(x) = 1/x \int_0^x t/(\exp(t) - 1)dt$, $x \in \mathbb{R}$, die *Debye-Funktion erster Ordnung* ist ([NEL98], S.138). Der Schätzer $\hat{\vartheta}_n = g_F(\hat{\tau}_n)$ für $-1 < \hat{\tau}_n < 1$, den wir aus der eindeutigen Beziehung (1.40) (siehe Abbildung 1.2) gewinnen, muss in diesem Fall numerisch berechnet werden. Für $\hat{\tau}_n = -1$ bzw. 1 setzt man formal $\hat{\vartheta}_n = -\infty$ bzw. ∞ . Die dazugehörige parametrisch geschätzte Kopula ist dann C^- bzw. C^+ (siehe Beispiel 1.6). Kendalls Tau ist im Falle der Gauß-Kopula durch $\tau(\vartheta) = 2/\pi \cdot \arcsin \vartheta$ ([LIN00], S.47) bestimmt. Damit gilt in (1.42) speziell

$$\hat{\vartheta}_n = \sin(\pi/2 \cdot \hat{\tau}_n) =: g_N(\hat{\tau}_n).$$

Im Falle der Gumbel-Kopula ist $\tau(\vartheta) = 1 - 1/\vartheta$ ([NEL98], S.131). Deshalb gilt in (1.42)

$$\hat{\vartheta}_n = \frac{1}{1 - \hat{\tau}_n} =: g_G(\hat{\tau}_n)$$

für $0 < \hat{\tau}_n < 1$. Für $-1 \leq \hat{\tau}_n \leq 0$ bzw. $\hat{\tau}_n = 1$ setzen wir $\hat{\vartheta}_n = 1$ bzw. ∞ .

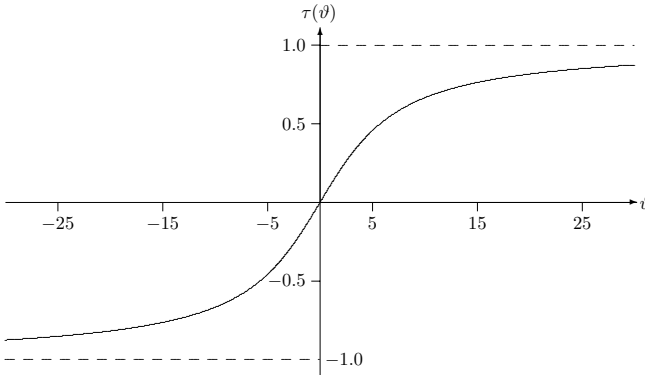


Abbildung 1.2.: Zusammenhang (1.40) im Falle der Frank-Kopula

| | $\tau \in$ | $(\vartheta \equiv) g(\tau)$ | $g'(\tau)$ |
|---------|------------|--|--|
| Clayton | $(-1, 1)$ | $2/(1 - \tau) - 2$ | $2/(1 - \tau)^2$ |
| Frank | $(-1, 1)$ | $h^{-1}(\tau)$, wobei $h(\vartheta) = 1 + \frac{4}{\vartheta}(D_1(\vartheta) - 1)$ | $\frac{1}{h'(h^{-1}(\tau))}$ |
| Gauß | $(-1, 1)$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$ | $\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$ |
| Gumbel | $(0, 1)$ | $1/(1 - \tau)$ | $1/(1 - \tau)^2$ |

Tabelle 1.1.: Beispiele für die nach (1.41) definierte Funktion g

Bei der Entwicklung eines Anpassungstests für Kopulafunktionen im nächsten Kapitel werden wir diese auf Kendalls Tau basierende Schätzmethode verwenden.

2. Anpassungstest

2.1. Anpassungstest-Problem

Es seien $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n), \dots$ unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit unbekannter gemeinsamer Verteilungsfunktion H und unbekannter Kopula C . Die Verteilungsfunktionen F von X_1 bzw. G von Y_1 seien stetig. Weiter sei

$$\mathcal{C} := \{C(\cdot, \vartheta) : \vartheta \in \Theta\} \tag{2.1}$$

eine einparametrische Kopulafamilie mit *Parameterbereich* $\Theta \subset \mathbb{R}$. Zu testen ist die (*Null-*)*Hypothese*

$$H_0 : C \in \mathcal{C}$$

gegen die *Alternative*

$$H_1 : C \notin \mathcal{C}.$$

Unter der Hypothese H_0 existiert ein $\vartheta \in \Theta$, so dass $C = C(\cdot, \vartheta)$ erfüllt ist. Eine gleichwertige Formulierung des Anpassungstest-Problems ist durch die Hypothese

$$H_0 : \exists \vartheta \in \Theta : C = C(\cdot, \vartheta)$$

und die Alternative

$$H_1 : \forall \vartheta \in \Theta : C \neq C(\cdot, \vartheta)$$

gegeben. Bei einem *Test auf Clayton-Kopula* sind der Parameterbereich $\Theta = (-1, \infty)$ und die Kopulafamilie $\mathcal{C} = \{C_C(\cdot, \vartheta) : \vartheta \in \Theta\}$ zu wählen. Einem *Test auf Gumbel-Kopula* liegen der Parameterbereich $\Theta = (1, \infty)$ und die Kopulafamilie $\mathcal{C} = \{C_G(\cdot, \vartheta) : \vartheta \in \Theta\}$ zu Grunde.

Allgemeine Voraussetzungen für die Kopulafamilie (2.1) fassen wir im nächsten Abschnitt zusammen. Dabei orientieren wir uns an den Eigenschaften der Kopulafamilien aus den Beispielen 1.4 bis 1.7.

Annahme 2.1 (Kopulafamilie)

Der Parameterbereich Θ sei eine offene Teilmenge von \mathbb{R} . Der Zusammenhang (1.40) zwischen Kendalls Tau τ und ϑ sei eineindeutig, d.h der eineindeutige funktionale Zusammenhang $\vartheta = g(\tau)$ soll gegeben sein. Die Funktion g aus (1.41) sei ferner stetig differenzierbar auf $D := g^{-1}(\Theta)$. Die Kopula $C(\cdot, \cdot)$ sei eine Funktion aus $C^1((0, 1)^2 \times \Theta)$,

| Kopulafamilie | Θ | $D = g^{-1}(\Theta)$ |
|---------------|---------------------|----------------------|
| Clayton | $(-1, \infty)$ | $(-1, 1)$ |
| Frank | $(-\infty, \infty)$ | $(-1, 1)$ |
| Gauß | $(-1, 1)$ | $(-1, 1)$ |
| Gumbel | $(1, \infty)$ | $(0, 1)$ |

Tabelle 2.1.: Parameterbereich Θ der Kopulafamilie und entsprechender Bereich D für Kendalls Tau

| Kopulafamilie | Θ | $(\sup_{\vartheta \in \Theta}) M_{1,\vartheta}$ |
|---------------|---------------------|---|
| Clayton | $(-1, \infty)$ | $\log 2$ |
| Frank | $(-\infty, \infty)$ | $1/32$ |
| Gauß | $(-1, 1)$ | $2/\pi \cdot (1 - \vartheta^2)^{-5/2}$ |
| Gumbel | $(1, \infty)$ | $\log 2 \cdot \exp(-1)$ |

Tabelle 2.2.: Bedingung (2.2) bei verschiedenen Kopulafamilien

d.h. die partiellen Ableitungen der Ordnung ≤ 1 von C existieren und sind stetig auf $(0, 1)^2 \times \Theta$. Zusätzlich soll für jedes $\vartheta \in \Theta$ eine Konstante $M_{1,\vartheta} \in (0, \infty)$ mit

$$\sup_{(u,v) \in I^2} \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \right| \leq M_{1,\vartheta} \quad (2.2)$$

existieren. Weiter sei die einhüllende Funktion $\Theta \ni \vartheta \mapsto M_{1,\vartheta}$ stetig in ϑ . Die Kopula sei symmetrisch, d.h. es soll $C(u, v, \vartheta) = C(v, u, \vartheta)$ für jedes $(u, v) \in I^2$ und $\vartheta \in \Theta$ gelten. Die Eigenschaft der Symmetrie benötigen wir ausschließlich für die Darstellung (2.30) der Teststatistik.

Beispiel 2.2 (Fortsetzung von Beispiel 1.19)

Für die Kopulafamilien Clayton, Frank, Gauß und Gumbel sind der Parameterbereich Θ und $D = g^{-1}(\Theta)$ in Tabelle 2.1 aufgelistet. Für jede dieser Kopulafamilien ist der Zusammenhang (1.40) zwischen Kendalls Tau τ und ϑ eindeutig. Die entsprechende Funktion g nach (1.41) ist stetig differenzierbar auf D (siehe Tabelle 1.1). Die partiellen Ableitungen erster Ordnung einer (einparametrischen) Kopula $C(\cdot, \cdot)$ aus einer dieser Kopulafamilien werden in Anhang D berechnet. Bei den Kopulafamilien Clayton, Frank und Gumbel ist $M_{1,\vartheta}$ gemäß

$$M_{1,\vartheta} := \sup_{(u,v) \in I^2} \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \right|$$

definiert. In Tabelle 2.2 sind für diese drei Kopulafamilien die Werte $\sup_{\vartheta \in \Theta} M_{1,\vartheta}$ und für die Gauss-Kopula ein Wert von $M_{1,\vartheta}$ nach der ursprünglichen Definition (2.2) aufgelistet. Mit Maple wurden die Ergebnisse in Tabelle 2.2 numerisch oder teilweise analytisch berechnet. Die einhüllende Funktion $\Theta \ni \vartheta \mapsto M_{1,\vartheta}$ ist stetig in ϑ . Ferner sind alle Kopulae symmetrisch.

2.2. Geschätzter empirischer Kopula-Prozess

Die Teststatistik eines *Anpassungstests* für die Kopulafamilie (2.1) leiten wir vom *empirischen Kopula-Prozess mit geschätzten Parametern* ab.

Definition 2.3 (Geschätzter empirischer Kopula-Prozess)

Es seien C_n die empirische Kopula nach (1.14) und $\hat{\vartheta}_n$ ein Schätzer für den Kopulaparameter ϑ , der die Voraussetzungen aus Abschnitt 1.2.2.1 erfüllt. Der *geschätzte empirische Kopula-Prozess* ist definiert durch

$$\sqrt{n}\delta_n(u, v) := \sqrt{n} \left[C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n) \right], \quad (u, v) \in I^2. \quad (2.3)$$

Im Folgenden schreiben wir auch kurz

$$\sqrt{n}\delta_n = \sqrt{n} \left[C_n - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) \right] \quad (2.4)$$

und bezeichnen $\sqrt{n}\delta_n$ als *geschätzten empirischen Kopula-Prozess*.

Bemerkung 2.4

1. Ein Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ der in (1.42) angegebenen Gestalt erfüllt gemäß Abschnitt 1.2.2.2 die Voraussetzungen an den Schätzer eines Kopulaparameters aus Abschnitt 1.2.2.1.
2. Die empirische Kopula C_n ist wegen (1.23) und der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ wegen (1.26) marginal-verteilungsfrei. Somit ist auch $\sqrt{n}\delta_n$ marginal-verteilungsfrei.

Wir interessieren uns für das asymptotische Verhalten von $\sqrt{n}\delta_n$ unter der Hypothese H_0 . Für (2.4) schreiben wir

$$\sqrt{n}\delta_n = \sqrt{n} [C_n - C(\cdot, \vartheta)] - \sqrt{n} [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)]. \quad (2.5)$$

Den Term

$$\sqrt{n}\delta_{A,n} := \sqrt{n} [C_n - C(\cdot, \vartheta)] \quad (2.6)$$

in (2.5) bezeichnet man als *empirischen Kopula-Prozess* (siehe [GS87], S.51) und

$$\sqrt{n}\delta_{B,n} := \sqrt{n} [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] \quad (2.7)$$

als *parametrisch geschätzten Kopula-Prozess*. Die beiden Prozesse $\sqrt{n}\delta_{A,n}$ und $\sqrt{n}\delta_{B,n}$ zerlegen wir jeweils in zwei Bestandteile, indem vom Prozess asymptotisch vernachlässigbare Terme abgespalten werden. Als Hauptbestandteil bleibt eine mit $1/\sqrt{n}$ standardisierte Summe von stochastisch unabhängigen und identisch verteilten Zufallselementen übrig. Mit einem entsprechenden Zentralen Grenzwertsatz kann man für diese Summe eine Grenzverteilung bestimmen. Die abgespaltenen Terme werden jeweils zum sogenannten *Restterm* zusammenfasst, welcher unter einer geeigneten Norm stochastisch gegen null konvergiert. Zur einfachen Beschreibung des Restterms benötigt man die Definition der folgenden stochastischen Prozesse.

Definition 2.5 (Empirischer Standard(-Quantil-)Prozess)

Es seien $\tilde{F}_n, \tilde{G}_n, \tilde{H}_n$ die empirischen Verteilungsfunktionen nach (1.18), (1.20) bzw. (1.22). Weiter seien \tilde{F}_n^{-1} bzw. \tilde{G}_n^{-1} die Quantilfunktionen von \tilde{F}_n bzw. \tilde{G}_n . Der zu $\{U_i\}_{i=1}^n$ korrespondierende *empirische Standardprozess* ist durch

$$\tilde{U}_n(u) := \sqrt{n}(\tilde{F}_n(u) - u), \quad u \in I,$$

und der zu $\{V_i\}_{i=1}^n$ korrespondierende *empirische Standardprozess* durch

$$\tilde{V}_n(v) := \sqrt{n}(\tilde{G}_n(v) - v), \quad v \in I,$$

definiert. Weiter ist

$$\tilde{u}_n(u) := \sqrt{n}(\tilde{F}_n^{-1}(u) - u), \quad u \in I,$$

der zu $\{U_i\}_{i=1}^n$ korrespondierende *Standardquantilprozess* und

$$\tilde{v}_n(v) := \sqrt{n}(\tilde{G}_n^{-1}(v) - v), \quad v \in I,$$

der zu $\{V_i\}_{i=1}^n$ korrespondierende *Standardquantilprozess*.

Der zu $\{(U_i, V_i)\}_{i=1}^n$ korrespondierende *zweidimensionale empirische Standardprozess* $\tilde{\beta}_n$ ist gegeben durch

$$\tilde{\beta}_n(u, v) := \sqrt{n} \left[\tilde{H}_n(u, v) - C(u, v, \vartheta) \right], \quad (u, v) \in I^2. \quad (2.8)$$

Die im folgenden Abschnitt durchgeführte Zerlegung von $\sqrt{n}\delta_{A,n}$ basiert auf Überlegungen in [GS87], S.52f. Weitere Ergebnisse zur (schwachen) Konvergenz von $\sqrt{n}\delta_{A,n}$ sind in [VA96], S.389f, und [FE02], S.6, zu finden.

2.2.1. Zerlegung von $\sqrt{n}\delta_{A,n}$

Den empirischen Kopula-Prozess $\sqrt{n}\delta_{A,n}$ in (2.6) zerlegen wir mit der Darstellung von C_n nach (1.23) wie folgt:

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\delta_{A,n}(u, v) &= \sqrt{n}[C_n(u, v) - C(u, v, \vartheta)] \\ &= \sqrt{n} \left[\tilde{H}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - C(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v), \vartheta) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$+ \sqrt{n} \left[C(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v), \vartheta) - C(u, v, \vartheta) \right]. \quad (2.10)$$

Den Term in (2.9) schreiben wir mit $\tilde{\beta}_n$ nach (2.8) in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) &= \tilde{\beta}_n(u, v) + \tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - \tilde{\beta}_n(u, v) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [1\{U_i \leq u, V_i \leq v\} - C(u, v, \vartheta)] \\ &\quad + \varepsilon_{A,1,n}(u, v), \end{aligned} \quad (2.11)$$

wobei

$$\varepsilon_{A,1,n}(u, v) := \tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - \tilde{\beta}_n(u, v) \quad (2.12)$$

gesetzt wurde. Mit Hilfe einer Taylorentwicklung der Kopula $C(\cdot, \vartheta)$ um die Entwicklungsstelle (u, v) erhalten wir für den Term in (2.10) mit $z := (z_1, z_2) := (\tilde{F}_n^{-1}(u) - u, \tilde{G}_n^{-1}(v) - v)$ die Darstellung

$$\sqrt{n} \int_0^1 (\nabla z) C(u + tz_1, v + tz_2, \vartheta) dt \quad (2.13)$$

([WA91], S. 92; sog. *Restglied in Integralform*). Dabei ist der lineare Differentialoperator ∇z durch

$$\nabla z := z_1 \frac{\partial}{\partial u} + z_2 \frac{\partial}{\partial v}$$

gegeben. Mit Definition 2.5 und $\varepsilon_{U,n} := \tilde{U}_n + \tilde{u}_n$ sowie $\varepsilon_{V,n} := \tilde{V}_n + \tilde{v}_n$ schreiben wir (2.13) in der Form

$$\begin{aligned} & \sqrt{n}(\nabla z)C(u, v, \vartheta) + \sqrt{n} \int_0^1 (\nabla z)[C(u + tz_1, v + tz_2, \vartheta) - C(u, v, \vartheta)]dt \\ = & -\frac{\partial}{\partial u}C(u, v, \vartheta) \cdot \tilde{U}_n(u) - \frac{\partial}{\partial v}C(u, v, \vartheta) \cdot \tilde{V}_n(v) \\ & + \frac{\partial}{\partial u}C(u, v, \vartheta) \cdot \varepsilon_{U,n}(u) + \frac{\partial}{\partial v}C(u, v, \vartheta) \cdot \varepsilon_{V,n}(v) \\ & + \sqrt{n} \int_0^1 (\nabla z)[C(u + tz_1, v + tz_2, \vartheta) - C(u, v, \vartheta)]dt \\ = & \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[-\frac{\partial}{\partial u}C(u, v, \vartheta)(1\{U_i \leq u\} - u) \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial v}C(u, v, \vartheta)(1\{V_i \leq v\} - v) \right] \\ & + \varepsilon_{A,2,n}(u, v) + \varepsilon_{A,3,n}(u, v). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dabei wurde abkürzend

$$\varepsilon_{A,2,n}(u, v) := \frac{\partial}{\partial u}C(u, v, \vartheta) \cdot \varepsilon_{U,n}(u) + \frac{\partial}{\partial v}C(u, v, \vartheta) \cdot \varepsilon_{V,n}(v) \quad (2.15)$$

und

$$\varepsilon_{A,3,n}(u, v) := \sqrt{n} \int_0^1 (\nabla z)[C(u + tz_1, v + tz_2, \vartheta) - C(u, v, \vartheta)]dt \quad (2.16)$$

gesetzt. Insgesamt ergibt sich für $\sqrt{n}\delta_{A,n}$ die Zerlegung

$$\sqrt{n}\delta_{A,n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h_1(u, v, U_i, V_i) + \varepsilon_{A,n}(u, v), \quad (2.17)$$

wobei h_1 mit (2.11) und (2.14) durch

$$\begin{aligned} h_1(u, v, U_1, V_1) &:= 1\{U_1 \leq u, V_1 \leq v\} - C(u, v, \vartheta) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v, \vartheta)(1\{U_1 \leq u\} - u) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} C(u, v, \vartheta)(1\{V_1 \leq v\} - v) \end{aligned} \quad (2.18)$$

bestimmt ist. Der Restterm $\varepsilon_{A,n}$ in (2.17) ist die Summe

$$\varepsilon_{A,n} := \varepsilon_{A,1,n} + \varepsilon_{A,2,n} + \varepsilon_{A,3,n} \quad (2.19)$$

von $\varepsilon_{A,1,n}$ nach (2.12), $\varepsilon_{A,2,n}$ nach (2.15) und $\varepsilon_{A,3,n}$ nach (2.16).

2.2.2. Zerlegung von $\sqrt{n}\delta_{B,n}$

Den parametrisch geschätzten Kopula-Prozess $\sqrt{n}\delta_{B,n}$ in (2.7) formen wir zuerst mit einer Taylorentwicklung der Kopula $C(u, v, \cdot)$ um die Entwicklungsstelle ϑ um und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} \sqrt{n}\delta_{B,n}(u, v) &= \sqrt{n} \left[C(u, v, \hat{\vartheta}_n) - C(u, v, \vartheta) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \tilde{\vartheta}_n) \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \\ &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \tilde{\vartheta}_n) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \right] \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta), \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei $\tilde{\vartheta}_n = \vartheta + \eta_n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ für ein $\eta_n \in (0, 1)$ ist. Wird in (2.20) der Term $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ durch seine Darstellung (1.28) ersetzt, so ergibt sich

$$\sqrt{n}\delta_{B,n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h_2(u, v, U_i, V_i) + \varepsilon_{B,n}(u, v),$$

wobei

$$h_2(u, v, U_1, V_1) := \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \cdot l(U_1, V_1, \vartheta) \quad (2.21)$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon_{B,n}(u, v) &:= \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \cdot \xi_n \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \tilde{\vartheta}_n) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta) \right] \sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \end{aligned} \quad (2.22)$$

gesetzt wurde.

2.2.3. Zerlegung von $\sqrt{n}\delta_n$

Für $\sqrt{n}\delta_n$ in (2.5) erhalten wir die gewünschte Zerlegung

$$\sqrt{n}\delta_n(u, v) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h(u, v, U_i, V_i) + \varepsilon_n(u, v) \quad (2.23)$$

in eine zentrierte Summe und einen Restterm ε_n , der sich später als asymptotisch vernachlässigbar erweisen wird. Dabei sind

$$h(u, v, U_1, V_1) := h_1(u, v, U_1, V_1) - h_2(u, v, U_1, V_1) \quad (2.24)$$

durch h_1 nach (2.18) und h_2 nach (2.21) sowie

$$\varepsilon_n := \varepsilon_{A,n} - \varepsilon_{B,n} \quad (2.25)$$

durch $\varepsilon_{A,n}$ nach (2.19) und $\varepsilon_{B,n}$ nach (2.22) gegeben. Die Abhängigkeit der Funktionen h und ε_n von ϑ wurde aus bezeichnungstechnischen Gründen unterdrückt.

2.3. H_0 -Asymptotik der Teststatistik

Für das Anpassungstest-Problem in Abschnitt 2.1 wählen wir als Teststatistik ein gewichtetes Cramér-von Mises-Abstandsmaß (siehe (0.1)).

Definition 2.6 (Teststatistik)

Es sei

$$w : I^2 \rightarrow [0, \infty) \quad (2.26)$$

eine Borel-messbare integrierbare Funktion, die wir im Folgenden als *Gewichtsfunktion* bezeichnen. Das durch

$$\mu(A) := \int_A w(u, v) d(u, v), \quad A \in \mathcal{B}^2 \cap I^2, \quad (2.27)$$

definierte Maß μ ist dann ein endliches Maß mit der Dichte w bezüglich des Lebesgue-Maßes auf I^2 . Die *Teststatistik* T_n sei durch

$$T_n := \int_0^1 \int_0^1 [\sqrt{n}\delta_n(u, v)]^2 d\mu(u, v) \quad (2.28)$$

$$= n \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n)]^2 d\mu(u, v) \quad (2.29)$$

$$= n \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n)]^2 w(u, v) d(u, v)$$

definiert. Dabei gilt das zweite Gleichheitszeichen aufgrund der Definition von $\sqrt{n}\delta_n$ in (2.3).

T_n berechnet den quadratischen Abstand (bzgl. einer Gewichtsfunktion w) zwischen dem nichtparametrischen Schätzer C_n und dem parametrischen Schätzer $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)$ der unbekannten Koptula C .

Im Hinblick auf eine alternative Darstellung der Teststatistik T_n benötigen wir die Ordnungsstatistiken $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ von X_1, \dots, X_n nach Definition 1.11 und die *nach Y sortierte Umordnung* $X_{[1],n}, X_{[2],n}, \dots, X_{[n],n}$ von X_1, X_2, \dots, X_n . Diese Umordnung entsteht durch Sortieren von $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ nach der Größe der Werte in der Y -Komponente. Es ist also

$$(X_{[1],n}, Y_{1,n}), (X_{[2],n}, Y_{2,n}), \dots, (X_{[n],n}, Y_{n,n})$$

die nach aufsteigenden Y -Werten sortierte Umordnung von $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$. Mit diesen Definitionen erhalten wir die Darstellung

$$T_n = \left. \begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\ & + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq X_{k,n}\} \\ & - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\ & + n \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 d\mu(u, v), \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

wobei für $1 \leq i, j, k \leq n$

$$\begin{aligned} a_{ij} &:= \int_{(i-1)/n}^1 \int_{(j-1)/n}^1 d\mu(u, v), \\ b_{jk} &:= \int_{(j-1)/n}^1 \int_{(k-1)/n}^{k/n} d\mu(u, v), \\ c_{ij} &:= \int_{(i-1)/n}^1 \int_{(j-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d\mu(u, v) \end{aligned}$$

gesetzt sind. Die ausführliche Herleitung der Darstellung (2.30) erfolgt in Anhang E.

Bezeichnen $\{R_{[i],n}^X\}_{i=1}^n$ die Rangstatistiken von $X_{[1],n}, X_{[2],n}, \dots, X_{[n],n}$, so besitzt T_n die alternative Darstellung

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} 1\{R_{[i],n}^X = j\} \\ &+ \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} 1\{\max(R_{[i],n}^X, R_{[j],n}^X) \leq k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} 1\{R_{[i],n}^X = R_{j,n}^X\} \\
& + n \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 d\mu(u, v).
\end{aligned}$$

Der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ ist nach (1.27) eine Stichprobenfunktion von $\{(R_{i,n}^X, R_{i,n}^Y)\}_{i=1}^n$ nach Θ . Diese Erkenntnisse führen zur folgenden Annahme.

Annahme 2.7

Da $\sqrt{n}\delta_n$ nach Bemerkung 2.4, 2. marginal-verteilungsfrei ist, ist die Teststatistik T_n ebenso marginal-verteilungsfrei. Deshalb können wir für die weitere Verteilungstheorie o.B.d.A. $X_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $Y_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $i \geq 1$, annehmen, d.h. o.B.d.A. seien

$$Z_1 := (X_1, Y_1), Z_2 := (X_2, Y_2), \dots, Z_n := (X_n, Y_n), \dots \quad (2.31)$$

stochastisch unabhängige bivariate Zufallsvektoren mit $X_i \sim Y_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $(X_i, Y_i) \sim C$, $i \geq 1$.

Ein geeigneter Rahmen für die asymptotische Untersuchung der Teststatistik T_n ist der in Anhang A.2 eingeführte und nach (A.3) kurz mit L^2 bezeichnete separable Hilbertraum $L^2(I^2, \mathcal{B}^2 \cap I^2, d\mu)$. Den geschätzten empirischen Kopula-Prozess $\sqrt{n}\delta_n$ betrachten wir als Element des Raumes L^2 , welcher mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ nach (A.4) und der kanonischen Norm $\|\cdot\|_2$ nach (A.5) versehen ist. Wir führen dazu allgemein in Anhang A.1 Zufallselemente in Hilberträumen und die Verteilungskonvergenz $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ in Hilberträumen ein. Die Verteilungskonvergenz unter P_ϑ mit $\vartheta \in \Theta$ wird mit $\xrightarrow{\mathcal{D}_\vartheta}$ bezeichnet. In Anhang A.2 werden Gauß-Prozesse in L^2 eingeführt. Mit diesen Grundlagen können wir jetzt den folgenden Satz über die Asymptotik der Teststatistik unter der Hypothese formulieren.

Satz 2.8 (Grenzverteilung der Teststatistik unter H_0)

Es seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit Kopula C gemäß Annahme 2.7. Weiter seien $\sqrt{n}\delta_n$ der geschätzte empirische Kopula-Prozess gemäß (2.4) und T_n die in (2.28) eingeführte Teststatistik. Im Falle $C = C(\cdot, \vartheta)$, $\vartheta \in \Theta$, existiert ein zentrierter Gauß-Prozess W in L^2 mit Kovarianzfunktion

$$\gamma(s, t) = E_\vartheta[h(s, Z_1)h(t, Z_1)], \quad s, t \in I^2, \quad (2.32)$$

(h nach (2.24)), so dass

$$\sqrt{n}\delta_n \xrightarrow{\mathcal{D}_\vartheta} W, \quad n \rightarrow \infty,$$

und

$$T_n = n\|\delta_n\|_2^2 \xrightarrow{\mathcal{D}_\vartheta} \|W\|_2^2 =: T, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

gelten.

Eine ausführliche Darstellung der Kovarianzfunktion γ nach (2.32) findet sich in Anhang B.1. Der BEWEIS von Satz 2.8 wird in Anhang C erbracht.

2.4. Ein Anpassungstest und seine Konsistenz

Im Folgenden wird ein Test zum Anpassungstest-Problem H_0 gegen H_1 konstruiert. Dieser sog. *Anpassungstest* soll *asymptotisch* das Niveau α , $0 < \alpha < 1$, *annehmen* und *konsistent* sein. Als Nullhypothese H_0 wählen wir die einparametrische Kopulafamilie (2.1) mit Parameterbereich Θ und führen das *statistische Modell* $(\mathcal{X}_n, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein, wobei $\mathcal{X}_n := [I^2]^n$ der *Stichprobenraum* ist. Aufgrund der Annahme der stochastischen Unabhängigkeit und identischen Verteilung der bivariaten Zufallsvektoren $Z_i = (X_i, Y_i)$, $i = 1, \dots, n$, (siehe (2.31) mit $C = C(\cdot, \vartheta)$) ist

$$P_\vartheta(Z_{(n)} \leq w_{(n)}) = \prod_{i=1}^n P_\vartheta(X_i \leq u_i, Y_i \leq v_i) = \prod_{i=1}^n C(u_i, v_i, \vartheta)$$

die Verteilungsfunktion von $Z_{(n)} := (Z_1, \dots, Z_n)$. Dabei ist

$$w_{(n)} := ((u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)), \quad u_i, v_i \in I, i = 1, \dots, n,$$

gesetzt.

Zu der Teststatistik T_n nach (2.28) definieren wir eine *Testfolge* $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\varphi_n : \mathcal{X}_n \rightarrow [0, 1]$) durch

$$\varphi_n := \begin{cases} 1, & T_n > c_n \\ 0, & T_n \leq c_n \end{cases}.$$

Dabei ist c_n ein noch zu bestimmender *kritischer Wert*. Bei $\varphi_n = 1$ wird H_0 abgelehnt, bei $\varphi_n = 0$ erhebt man keine Einwände gegen H_0 .

Um die erste Forderung nach einem *Test zum asymptotischen Niveau* α zu erfüllen, werden wir den kritischen Wert c_n nach folgender Definition festlegen.

Definition 2.9

Die Testfolge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt *asymptotisch* das Niveau α , $0 < \alpha < 1$, für H_0 , falls gilt: Für jedes $\vartheta \in \Theta$ ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta(\varphi_n = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_\vartheta(T_n > c_n) = \alpha. \quad (2.34)$$

Erfüllt die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der kritischen Werte die Eigenschaft (2.34), so schreiben wir $c_{n,\alpha} = c_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Man beachte, dass die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch die Forderung (2.34) nicht eindeutig bestimmt ist und vom unbekanntem Parameter ϑ abhängt. In Abschnitt 2.6.1 wird ein für praktische Zwecke brauchbarer Bootstrap-Test entwickelt. Zur Formulierung der Forderung nach *Konsistenz* der Testfolge benötigen wir die folgenden Definitionen und zwei Hilfssätze.

Wir setzen

$$H_\vartheta(t) := P_\vartheta(T \leq t), \quad t \geq 0, \quad (2.35)$$

wobei T nach (2.33) gegeben ist, und bezeichnen mit

$$H_{n,\vartheta}(t) := P_\vartheta(T_n \leq t), \quad t \geq 0, \quad (2.36)$$

die Verteilungsfunktion von T_n unter H_0 .

Lemma 2.10

Es sei W ein zentrierter Gauß-Prozess in L^2 mit Kovarianzfunktion γ nach (2.32). Für die kanonische Norm $\|\cdot\|_2$ von L^2 setzen wir $d(\cdot) := \|\cdot\|_2$, und mit $Q := P_\vartheta^W$ sei die Verteilung von W unter H_0 bezeichnet. Es gilt:

- a) $Q^d = P_\vartheta^{d(W)}$ ist auf $(0, \infty)$ konzentriert und absolut-stetig bezüglich des Lebesgue-Maßes λ .
- b) $dQ^d/d\lambda$ ist auf $(0, \infty)$ positiv.
- c) H_ϑ ist stetig und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$.

BEWEIS: Es bezeichne N_Q den linearen Träger des Maßes Q ([DAV85], S.2797). Für das Gauß-Maß Q stimmt dabei N_Q mit dem topologischen Träger überein ([DAV85], Theorem 5.1.3). Die Verteilung Q ist zentriert, und es gilt $0 \in N_Q$ ([DAV85], S.2814). Das Funktional d ist konvex. Mit $\inf_{x \in N_Q} d(x) = 0$ folgt aus Theorem 7.1 in [DAV85] a) und b), wobei in a) nur gezeigt wurde, dass Q^d auf $[0, \infty)$ konzentriert ist. Der Randpunkt 0 kann allerdings wegen $P_\vartheta(d(W) = 0) = P_\vartheta(W = 0) = 0$ ausgeschlossen werden. Diese Aussage folgt aus der Normeigenschaft $d(W) = 0 \Leftrightarrow W = 0$ und der Voraussetzung, dass die Kopula $C(\cdot, \vartheta)$ nicht degeneriert und somit Q nicht das Einpunktmass in 0 ist. Die Verteilungsfunktion $\tilde{H}_\vartheta(t) := P_\vartheta(d(W) \leq t)$ ist stetig und streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$. Die gleichen Eigenschaften besitzt folglich auch die Verteilungsfunktion $H_\vartheta(t) = \tilde{H}_\vartheta(\sqrt{t})$.

Lemma 2.11

Es sei $H_{n,\vartheta}$ nach (2.36) gegeben. Für den kritischen Wert $c_{n,\alpha}$ aus (2.34) erhalten wir die Aussage

$$c_{n,\alpha} = H_{n,\vartheta}^{-1}(1 - \alpha) \longrightarrow H_\vartheta^{-1}(1 - \alpha), \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.37)$$

BEWEIS: Aus Satz 2.8 erhalten wir unter Hinzunahme des Satzes von Pólya die Konvergenz

$$\sup_{t \geq 0} |H_{n,\vartheta}(t) - H_\vartheta(t)| \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Da H_ϑ nach Lemma 2.10 stetig und streng monoton wachsend ist, folgt die Aussage (2.37) unmittelbar.

Die Konsistenzeigenschaft formulieren wir im folgenden Satz.

Satz 2.12 (Konsistenz)

Es seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit Kopula C gemäß Annahme 2.7, so dass gilt:

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} \|C - C(\cdot, \vartheta)\|_2^2 = \inf_{\vartheta \in \Theta} \int_{I^2} [C(s) - C(s, \vartheta)]^2 d\mu(s) > 0. \quad (2.38)$$

Die Eigenschaft (2.38) bedeutet, dass $C \notin \mathcal{C}$ ist. Die Teststatistik $T_n = T_n(Z_1, \dots, Z_n)$ wird nach (2.28) gebildet. Die *Konsistenzeigenschaft*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T_n > c_{n,\alpha}) = 1 \quad (2.39)$$

ist erfüllt, falls $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(Z_1, \dots, Z_n)$ stochastisch gegen ein $\vartheta \in \Theta$ konvergiert. Dabei wird der kritische Wert $c_{n,\alpha}$ in (2.39) nach (2.37) festgelegt.

BEWEIS: Wir führen den Beweis zunächst unter der stärkeren Voraussetzung $\hat{\vartheta}_n \rightarrow \vartheta \in \Theta$ P -f.s. Es existiert also eine Einsmenge Ω_1 mit der Eigenschaft

$$\hat{\vartheta}_n(\omega) := \hat{\vartheta}_n(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega)) \longrightarrow \vartheta \in \Theta \text{ für jedes } \omega \in \Omega_1. \quad (2.40)$$

Nach (1.16) existiert eine weitere Einsmenge Ω_2 , so dass gilt:

$$\sup_{s \in I^2} |C_n^\omega(s) - C(s)| \longrightarrow 0 \text{ für jedes } \omega \in \Omega_2. \quad (2.41)$$

Dabei ist $C_n^\omega := C_n(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$ gesetzt. Es sei nun $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Aus (2.29) erhalten wir für die Teststatistik $T_n^\omega = T_n(Z_1(\omega), \dots, Z_n(\omega))$

$$\frac{T_n^\omega}{n} = \int_{I^2} [C_n^\omega(s) - C(s, \hat{\vartheta}_n(\omega))]^2 d\mu(s). \quad (2.42)$$

Für $f_n^\omega(s) := [C_n^\omega(s) - C(s, \hat{\vartheta}_n(\omega))]^2$, $s \in I^2$, gilt wegen (2.40), (2.41) und der Stetigkeit von C in ϑ

$$f_n^\omega(s) \longrightarrow [C(s) - C(s, \vartheta)]^2 =: f(s), \quad n \rightarrow \infty,$$

für jedes $s \in I^2$. Da $|f_n^\omega(s)| \leq 1$ ist, schließen wir aus dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^2} f_n^\omega(s) d\mu(s) = \int_{I^2} f(s) d\mu(s) =: \Delta \quad (2.43)$$

gilt. Wegen (2.38) ist $\Delta > 0$. Aus (2.42) und (2.43) folgt damit

$$T_n^\omega \longrightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Zusammen mit (2.37) ist damit die Konsistenzeigenschaft (2.39) erfüllt. Bei stochastischer Konvergenz von $\hat{\vartheta}_n$ gegen $\vartheta \in \Theta$ greifen wir auf das *Teilfolgenkriterium zur stochastischen Konvergenz* zurück: Jede Teilfolge $(\hat{\vartheta}_{n_k})$ von $(\hat{\vartheta}_n)$ besitzt eine weitere Teilfolge $(\hat{\vartheta}_{n'_k})$ mit $(\hat{\vartheta}_{n'_k}) \rightarrow \vartheta$ P -fast sicher. Es sei nun Ω_1 die Einsmenge mit

$$\hat{\vartheta}_{n'_k}(\omega) \longrightarrow \vartheta \in \Theta, \quad \omega \in \Omega_1.$$

Dann erhalten wir wie in (2.44)

$$T_{n_k}^\omega \longrightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

für $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Da (n_k) eine Teilfolge einer beliebigen Teilfolge von (n) ist, folgt mit dem Teilfolgenkriterium zur stochastischen Konvergenz

$$T_n \xrightarrow{P} \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

und damit zusammen mit (2.37) die Konsistenzeigenschaft (2.39).

2.5. Grenzverteilung der Teststatistik unter Alternativen

Wir wiederholen die Situation von Satz 2.12: Es seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit Kopula C gemäß Annahme 2.7. Die Kopula C sei ferner eine Funktion aus $C^1((0,1)^2)$. Weiter soll ein $\vartheta \in \Theta$ existieren, so dass für die Zufallsvariable $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)$ die Voraussetzung **(A2)** erfüllt ist. Insbesondere konvergiert dann $\hat{\vartheta}_n$ stochastisch gegen ϑ . Für

$$\Delta = \int_{I^2} [C(s) - C(s, \vartheta)]^2 d\mu(s)$$

soll $\Delta > 0$ gelten.

In Satz 2.12 haben wir $n^{-1}T_n \xrightarrow{P} \Delta$ für $n \rightarrow \infty$ und damit die Konsistenz eines auf T_n basierenden Anpassungstests gegen jede Alternative mit $\Delta > 0$ nachgewiesen. In diesem Abschnitt zeigen wir das folgende stärkere Resultat.

Satz 2.13 (Grenzverteilung der Teststatistik unter Alternativen)

Unter den obigen Voraussetzungen gilt

$$\sqrt{n} \left(\frac{T_n}{n} - \Delta \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.45)$$

wobei mit $s = (u, v) \in I^2$ und $Z_1 = (X_1, Y_1)$

$$\sigma_0^2 := \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma_0(s, t) K(s) K(t) d\mu(s) d\mu(t), \quad (2.46)$$

$$K(s) := 2[C(s) - C(s, \vartheta)],$$

$$\gamma_0(s, t) := E[k(s, Z_1)k(t, Z_1)],$$

$$k(s, Z_1) := k_1(s, Z_1) - k_2(s, Z_1),$$

$$\begin{aligned} k_1(s, Z_1) &:= 1\{X_1 \leq u, Y_1 \leq v\} - C(s) - \frac{\partial}{\partial u} C(s)(1\{X_1 \leq u\} - u) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} C(s)(1\{Y_1 \leq v\} - v), \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$k_2(s, Z_1) := \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s, \vartheta) \cdot l(Z_1, \vartheta) \quad (2.48)$$

gesetzt wurde. Die Funktion $l(\cdot, \vartheta) : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ wurde in (1.28) eingeführt.

BEWEIS: Wir setzen

$$\begin{aligned} T_n^* &:= \sqrt{n}(T_n/n - \Delta), \\ \varrho_{A,n} &:= \sqrt{n}[C_n - C], \\ \varrho_{B,n} &:= \sqrt{n}[C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)], \\ \varrho_n &:= \varrho_{A,n} - \varrho_{B,n}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Gleichung $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} T_n^* &= \sqrt{n} \int \left\{ [C_n - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)]^2 - [C - C(\cdot, \vartheta)]^2 \right\} d\mu \\ &= \sqrt{n} \int \left\{ C_n - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - [C - C(\cdot, \vartheta)] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ C_n - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) + C - C(\cdot, \vartheta) \right\} d\mu \\ &= \sqrt{n} \int \left\{ C_n - C - [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ C_n - C + 2C - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta) \right\} d\mu \\ &= \sqrt{n} \int [C_n - C]^2 d\mu - \sqrt{n} \int [C_n - C] [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &\quad + \sqrt{n} \int [C_n - C] [2C - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &\quad - \sqrt{n} \int [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] [2C - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int \varrho_{A,n}^2 d\mu - \frac{1}{\sqrt{n}} \int \varrho_{A,n} \varrho_{B,n} d\mu \\ &\quad + \int \varrho_{A,n} [2C - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &\quad - \int \varrho_{B,n} [2C - C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \|\varrho_{A,n}\|_2^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \langle \varrho_{A,n}, \varrho_{B,n} \rangle_2 \\ &\quad + \int \varrho_{A,n} 2[C - C(\cdot, \vartheta)] d\mu - \int \varrho_{A,n} [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &\quad - \int \varrho_{B,n} 2[C - C(\cdot, \vartheta)] d\mu + \int \varrho_{B,n} [C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) - C(\cdot, \vartheta)] d\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \|\varrho_{A,n}\|_2^2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \langle \varrho_{A,n}, \varrho_{B,n} \rangle_2 \\ &\quad + \langle \varrho_{A,n} - \varrho_{B,n}, K \rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \langle \varrho_{A,n} - \varrho_{B,n}, \varrho_{B,n} \rangle_2. \end{aligned}$$

Der empirische Kopula-Prozess $\varrho_{A,n} = \sqrt{n}[C_n - C]$ lässt sich mit der in (2.47) eingeführten Funktion k_1 in der Form

$$\varrho_{A,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n k_1(\cdot, Z_i) + \varepsilon_{A,n}$$

darstellen (vgl. mit Abschnitt 2.2.1). Für den parametrischen Kopula-Prozess $\varrho_{B,n}$ gilt

$$\varrho_{B,n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n k_2(\cdot, Z_i) + \varepsilon_{B,n}$$

(vgl. mit Abschnitt 2.2.2, k_2 nach (2.48)). Somit erhalten wir für ϱ_n die Darstellung

$$\varrho_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n k(\cdot, Z_i) + \varepsilon_n,$$

wobei $\varepsilon_n := \varepsilon_{A,n} - \varepsilon_{B,n}$ und $k := k_1 - k_2$ gesetzt sind (vgl. mit Abschnitt 2.2.3). Wie im Beweis von Satz 2.8 kann $\|\varepsilon_{A,n}\|_2 = \|\varepsilon_{B,n}\|_2 = o_P(1)$ und somit $\|\varepsilon_n\|_2 = o_P(1)$ gezeigt werden. Aus Satz A.7 folgt, dass ϱ_n nach Verteilung in L^2 gegen einen zentrierten Gauß-Prozess W mit Kovarianzfunktion $\gamma_0(s, t) = E[k(s, Z_1)k(t, Z_1)]$ konvergiert (vgl. mit Abschnitt C.1). Für die Asymptotik von T_n^* ist nur die Asymptotik des Terms $\langle \varrho_n, K \rangle_2$ entscheidend, da alle anderen Terme stochastisch gegen null konvergieren. Es gilt also

$$T_n^* \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle W, K \rangle_2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dabei ist die Zufallsvariable $\langle W, K \rangle_2$ normalverteilt mit Erwartungswert null und Varianz

$$\sigma_0^2 = \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma_0(s, t) K(s) K(t) d\mu(s) d\mu(t).$$

Wir vergleichen die Definition der Kovarianzfunktion $\gamma_0(s, t) = E[k(s, Z_1)k(t, Z_1)]$ mit der Definition $\gamma(s, t) = E[h(s, Z_1)h(t, Z_1)]$, $s, t \in I^2$, nach (2.32). Für k und h gilt $k = k_1 - k_2$ bzw. $h = h_1 - h_2$, wobei k_2 und h_2 identisch sind. Die Funktion k_1 unterscheidet sich von h_1 nur dadurch, dass an Stelle von $C(\cdot, \vartheta)$ die Kopula C verwendet wird. Somit erhalten wir eine zu γ ähnliche Darstellung von γ_0 (siehe Anhang B.3).

Benutzt man einen Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ der in (1.42) angegebenen Gestalt, so erhält man den Grenzwert ϑ durch $\vartheta = g(\tau)$, wobei g nach (1.41) und τ gemäß (1.33) durch

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1$$

gegeben sind. Insbesondere gilt für $l(\cdot, \vartheta)$ die Darstellung

$$l(u, v, \vartheta) = g'(g^{-1}(\vartheta)) \cdot 2 \cdot (4C(u, v) + 1 - 2u - 2v - g^{-1}(\vartheta)) \quad (2.49)$$

(vgl. mit (1.45)).

Mit dem Resultat aus Satz 2.13 kann man näherungsweise für große Stichprobenumfänge n die Güte des Anpassungstests bei Ablehnung von H_0 sowie asymptotische Konfidenzintervalle für Δ angeben. Dabei ersetzt man die Varianz σ_0^2 aus (2.45) durch einen Schätzer $\hat{\sigma}_{0,n}^2$. In Anhang B.5 wird ein konsistenter Schätzer für σ_0^2 angegeben. Mit dem $(1 - \alpha/2)$ -Quantil $u_{1-\alpha/2}$ der Standardnormalverteilung erhält man das asymptotische Konfidenzintervall

$$\left[\frac{T_n}{n} - \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{0,n}^2}{n}} u_{1-\alpha/2}, \frac{T_n}{n} + \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_{0,n}^2}{n}} u_{1-\alpha/2} \right]$$

für Δ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$. Eine Approximation der Güte $P(T_n > c_{n,\alpha})$ steht durch

$$1 - \Phi \left(\sqrt{n/\hat{\sigma}_{0,n}^2} (c_{n,\alpha}/n - \Delta) \right)$$

zur Verfügung, wobei $c_{n,\alpha}$ nach (2.37) das $(1-\alpha)$ -Quantil der Verteilung der Teststatistik unter H_0 ist. Zur Bestimmung einer Approximation von $c_{n,\alpha}$ siehe Abschnitt 3.1.

2.6. Erweiterung der Theorie auf Dreiecksschemata

Im Hinblick auf den Bootstrap-Test, den wir in Abschnitt 2.6.1 vorstellen, ist es notwendig, die Situation von Annahme 2.7 zu erweitern. An Stelle von (2.31) betrachten wir im Folgenden ein *Dreiecksschema* $(Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nm})_{n \geq 1}$. Dabei sind $Z_{ni} \sim C(\cdot, \vartheta_n)$, $i = 1, \dots, n$, $\vartheta_n \in \Theta$, zeilenweise stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren. Ferner existiert ein $\vartheta \in \Theta$, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n = \vartheta$ gilt. Für den Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ ersetzen wir Voraussetzung **(A2)** durch folgende Annahmen.

(A2) Für die Zufallsvariable $\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n$ existiert eine Darstellung der Form

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(Z_{ni}, \vartheta_n) + \tilde{\xi}_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.50)$$

wobei $l: I^2 \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

$$E_{\vartheta_n} l(Z_{n1}, \vartheta_n) = 0, \quad \vartheta_n \in \Theta,$$

und

$$\sigma_k(\vartheta_n) := E_{\vartheta_n} l^k(Z_{n1}, \vartheta_n) < \infty, \quad \vartheta_n \in \Theta, \quad k = 2, 4,$$

ist. Ferner soll $\tilde{\xi}_n = o_{P_{\vartheta_n}}(1)$ gelten.

(A3) Für jede gegen ein $\vartheta \in \Theta$ konvergente Folge $(\vartheta_n)_{n \geq 1}$ aus Θ soll

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l(u, v, \vartheta_n) = l(u, v, \vartheta), \quad (u, v) \in I^2,$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_k(\vartheta_n) = \sigma_k(\vartheta), \quad k = 2, 4, \quad (2.51)$$

gelten.

Bemerkung 2.14

1. Aus (2.50) und (2.51) mit $k = 2$ folgt aus dem Zentralen Grenzwertsatz von Lindeberg-Feller die Asymptotik

$$\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta_n) \xrightarrow{D_{\vartheta_n}} \mathcal{N}(0, \sigma_2(\vartheta)), \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Wegen (2.51) gilt $\sup_{n \geq 1} \sigma_k(\vartheta_n) < \infty$, $k = 2, 4$, für jede Folge $(\vartheta_n)_{n \geq 1}$ aus Θ , die gegen ein $\vartheta \in \Theta$ konvergiert.
3. Für die auf Kendalls Tau basierende spezielle Schätzmethode (vgl. mit Abschnitt 1.2.2.2) schulden wir den Nachweis von Voraussetzung **(A2)** und **(A3)**. Wie unter Annahme 1.8 wird gezeigt, dass **(A2)** erfüllt ist. Zu **(A3)** führen wir folgende Überlegungen durch: Da $g^{-1}(\cdot)$, $g(\cdot)$ und

$$\psi(u, v, \cdot) = 4C(u, v, \cdot) + 1 - 2u - 2v, \quad (u, v) \in I^2,$$

stetig in ϑ sind, ist

$$l(u, v, \cdot) = g'(g^{-1}(\cdot)) \cdot 2 \cdot (\psi(u, v, \cdot) - g^{-1}(\cdot)), \quad (u, v) \in I^2,$$

als stetige Komposition dieser Funktionen stetig in ϑ .

Mit Q_n und Q werde die zu $C(\cdot, \vartheta_n)$ bzw. $C(\cdot, \vartheta)$ gehörige Verteilung bezeichnet. Wir setzen $f_n(\cdot) := l^k(\cdot, \vartheta_n)$, $f(\cdot) := l^k(\cdot, \vartheta)$, $S_n := l^k(Z_{n1}, \vartheta_n)$ und $S := l^k(Z, \vartheta)$, wobei $Z \sim C(\cdot, \vartheta)$ ist. Da f stetig auf I^2 ist und f_n gleichmäßig auf jedem Kompaktum von I^2 gegen f konvergiert, gilt

$$A := \{z \in I^2 : \exists(z_n) \subset I^2 \text{ mit } z_n \rightarrow z \text{ und } f_n(z_n) \not\rightarrow f(z)\} = \emptyset.$$

Die Voraussetzungen von [BI68], Theorem 5.5, sind mit $Q_n \xrightarrow{D_{\vartheta_n}} Q$, $f_n \rightarrow f$ und $Q(A) = 0$ erfüllt, und die Verteilungskonvergenz $S_n \xrightarrow{D_{\vartheta_n}} S$ ist gezeigt. Die Folge $(S_n)_{n \geq 1}$ ist gleichgradig integrierbar, da

$$\sup_{n \geq 1} |S_n| \leq 4^k \sup_{n \geq 1} |g'(g^{-1}(\vartheta_n))|^k < \infty$$

gilt. Insgesamt folgt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_k(\vartheta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\vartheta_n} S_n = E_{\vartheta} S = \sigma_k(\vartheta)$$

die Konvergenz in (2.51).

Es folgt eine Verallgemeinerung des Satzes 2.8 auf Dreiecksschemata.

Satz 2.15

Es sei $(Z_{n1}, Z_{n2}, \dots, Z_{nm})_{n \geq 1}$ mit $Z_{ni} := (X_{ni}, Y_{ni}) \sim C(\cdot, \vartheta_n)$, $i = 1, \dots, n$, $\vartheta_n \in \Theta$, ein Dreiecksschema von zeilenweise stochastisch unabhängigen und identisch verteilten bivariaten Zufallsvektoren, wobei $\vartheta = \lim_{n \rightarrow \infty} \vartheta_n$ ($\vartheta \in \Theta$) existiere. Weiter seien $Z \sim C(\cdot, \vartheta)$, $\sqrt{n}\delta_n$ nach (2.4) und $T_n = T_n(Z_{n1}, \dots, Z_{nm})$ nach (2.28) gegeben. Dann gilt

$$\sqrt{n}\delta_n \xrightarrow{D_{\vartheta_n}} W, \quad n \rightarrow \infty,$$

in L^2 , wobei W ein zentrierter Gauß-Prozess mit Kovarianzfunktion $\gamma(s, t) = E_{\vartheta}[h(s, Z)h(t, Z)]$, $s, t \in I^2$, (h nach (2.24)) ist. Weiter gilt

$$T_n = n\|\delta_n\|_2^2 \xrightarrow{D_{\vartheta_n}} \|W\|_2^2, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

BEWEIS: Wie in Abschnitt 2.2 erhalten wir für $\sqrt{n}\delta_n$ die Darstellung

$$\sqrt{n}\delta_n(s) = W_n(s) + \varepsilon_n(s), \quad s \in I^2, \quad (2.53)$$

wobei der Restterm ε_n nach (2.25) (dort mit ϑ_n für ϑ) gegeben ist. Der Prozess W_n in (2.53) besitzt die Gestalt

$$W_n(s) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(s).$$

Dabei ist

$$W_{ni}(s) := \frac{1}{\sqrt{n}} h_n(s, Z_{ni})$$

durch

$$h_n(s, Z_{ni}) := h_{1n}(s, Z_{ni}) - h_{2n}(s, Z_{ni})$$

mit $(s := (u, v) \in I^2)$

$$\begin{aligned} h_{1n}(s, Z_{ni}) &:= \mathbf{1}\{X_{ni} \leq u, Y_{ni} \leq v\} - C(s, \vartheta_n) - \frac{\partial}{\partial u} C(s, \vartheta_n)(\mathbf{1}\{X_{ni} \leq u\} - u) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} C(s, \vartheta_n)(\mathbf{1}\{Y_{ni} \leq v\} - v) \end{aligned}$$

(vgl. mit (2.18)) und

$$h_{2n}(s, Z_{ni}) := \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s, \vartheta_n) \cdot l(Z_{ni}, \vartheta_n)$$

(vgl. mit (2.21)) bestimmt. Die Zufallselemente $W_{n1}, W_{n2}, \dots, W_{nm}$ sind stochastisch unabhängige und identisch verteilte L^2 -wertige Zufallselemente mit $E_{\vartheta_n} \langle W_{n1}, \cdot \rangle_2 = 0$ und $E_{\vartheta_n} \|W_{n1}\|_2^2 < \infty$ (vgl. mit Anhang C.1).

Wir überprüfen im Folgenden die Bedingungen a) - c) von Satz A.8 aus Anhang A.1. Es sei γ_n die Kovarianzfunktion von W_n , die aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit und identischen Verteilung der W_{ni} durch

$$\begin{aligned}\gamma_n(s, t) &= E_{\vartheta_n}[W_n(s)W_n(t)] = \sum_{i,j=1}^n E_{\vartheta_n}[W_{ni}(s)W_{nj}(t)] \\ &= \sum_{i=1}^n E_{\vartheta_n}[W_{ni}(s)W_{ni}(t)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_{\vartheta_n}[h_n(s, Z_{ni})h_n(t, Z_{ni})] \\ &= E_{\vartheta_n}[h_n(s, Z_{n1})h_n(t, Z_{n1})], \quad s, t \in I^2,\end{aligned}$$

gegeben ist, und es sei Γ_n der Kovarianzoperator von W_n . Für $s, z \in I^2$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s, z) = h(s, z),$$

und es folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(s, t) = \gamma(s, t)$$

punktweise auf $I^2 \times I^2$ und

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{s, t \in I^2} |\gamma_n(s, t)| \leq K_\gamma \quad (2.54)$$

gilt. Für die Konstante K_γ in (2.54) erhalten wir mit der in Anhang B.2 durchgeführten Abschätzung den Wert

$$K_\gamma = 2 \left(\frac{5}{4} + K_{1,\vartheta}^2 K_{2,\vartheta} \right).$$

Dabei sind $K_{1,\vartheta}$ und $K_{2,\vartheta}$ durch

$$\begin{aligned}K_{1,\vartheta} &:= \sup_{n \geq 1} M_{1,\vartheta_n} = \sup_{n \geq 1} \sup_{s \in I^2} \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s, \vartheta_n) \right| < \infty \\ K_{2,\vartheta} &:= \sup_{n \geq 1} \sigma_2(\vartheta_n) < \infty\end{aligned}$$

($\sigma_2(\cdot)$ nach (1.29)) definiert. Die Existenz von $K_{1,\vartheta}$ und $K_{2,\vartheta}$ folgt wegen (2.2) und der Stetigkeit von $\vartheta \mapsto M_{1,\vartheta}$ in ϑ bzw. aus (1.29). Mit (2.54) und dem Satz von dominierten Konvergenz gilt weiter

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Gamma_n e_k, e_l \rangle_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma_n(s, t) e_k(s) e_l(t) d\mu(s) d\mu(t) \\ &= \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma(s, t) e_k(s) e_l(t) d\mu(s) d\mu(t) \\ &= \langle \Gamma e_k, e_l \rangle_2 =: a_{kl},\end{aligned}$$

wobei Γ der Kovarianzoperator von W ist. Damit ist a) von Satz A.8 gezeigt. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, der Parsevalschen Gleichung, dem Satz von Tonelli

und dem Satz von der dominierten Konvergenz ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Gamma_n e_k, e_k \rangle_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} E_{\vartheta_n} \langle h_n(\cdot, Z_{n1}), e_k \rangle_2^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\vartheta_n} \sum_{k=0}^{\infty} \langle h_n(\cdot, Z_{n1}), e_k \rangle_2^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\vartheta_n} \|h_n(\cdot, Z_{n1})\|_2^2 \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\vartheta_n} \int_{I^2} h_n^2(s, Z_{n1}) d\mu(s) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^2} \gamma_n(s, s) d\mu(s) \\
 &= \int_{I^2} \gamma(s, s) d\mu(s).
 \end{aligned}$$

Betrachten wir die Gleichungskette vom vorletzten zum ersten Gleichheitszeichen und ersetzen dabei γ_n durch γ , so erhalten wir

$$\int_{I^2} \gamma(s, s) d\mu(s) = E_{\vartheta} \|h(\cdot, Z)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Gamma e_k, e_k \rangle_2 = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kk} < \infty.$$

Somit ist Bedingung b) in Satz A.8 nachgewiesen. Es sei $\tilde{V}_{nk} := \langle h_n(\cdot, Z_{n1}), e_k \rangle_2$. Um Bedingung c) von Satz A.8 zu zeigen, genügt es, aufgrund von

$$L_n(\varepsilon, e_k) = E_{\vartheta_n} (\tilde{V}_{nk}^2 \mathbf{1}\{|\tilde{V}_{nk}| > \varepsilon \sqrt{n}\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n} E_{\vartheta_n} \tilde{V}_{nk}^4, \quad \varepsilon > 0,$$

die Bedingung

$$\sup_{n \geq 1} E_{\vartheta_n} \tilde{V}_{nk}^4 < \infty \tag{2.55}$$

nachzuweisen. Die Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}_{nk}^2 &= \langle h_n(\cdot, Z_{n1}), e_k \rangle_2^2 \leq \|h_n(\cdot, Z_{n1})\|_2^2 \cdot \|e_k\|_2^2 \\
 &= \int_{I^2} h_n^2(s, Z_{n1}) d\mu(s).
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Eine obere Schranke von h_n^2 ist für $s, z \in I^2$ durch

$$\begin{aligned}
 h_n^2(s, z) &\leq 2 \cdot h_{1n}^2(s, z) + 2 \cdot h_{2n}^2(s, z) \\
 &\leq 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot M_{1, \vartheta_n}^2 I^2(z, \vartheta_n)
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

gegeben. Bei dieser Abschätzung wurden die Ungleichungen

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(s, \vartheta_n) \leq 1, \quad 0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(s, \vartheta_n) \leq 1$$

([NEL98], S.36) und (2.2) benutzt. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
E_{\vartheta_n} \tilde{V}_{nk}^A &\leq E_{\vartheta_n} \left[\int_{I^2} h_n^2(s, Z_{n1}) d\mu(s) \right]^2 \\
&= \int_{z \in I^2} \left[\int_{I^2} h_n^2(s, z) d\mu(s) \right]^2 dC(z, \vartheta_n) \\
&= \int_{z \in I^2} \int_{s_1 \in I^2} h_n^2(s_1, z) d\mu(s_1) \int_{s_2 \in I^2} h_n^2(s_2, z) d\mu(s_2) dC(z, \vartheta_n) \\
&= \int_{s_1 \in I^2} \int_{s_2 \in I^2} \int_{z \in I^2} h_n^2(s_1, z) h_n^2(s_2, z) dC(z, \vartheta_n) d\mu(s_2) d\mu(s_1) \\
&\leq \int_{s_1 \in I^2} d\mu(s_1) \int_{s_2 \in I^2} d\mu(s_2) 4 \int_{z \in I^2} (36 + M_{1, \vartheta_n}^2 l^2(z, \vartheta_n))^2 dC(z, \vartheta_n).
\end{aligned}$$

Dabei gilt das erste Ungleichheitszeichen wegen (2.56), das letzte Gleichheitszeichen aufgrund des Satzes von Tonelli und das letzte Ungleichheitszeichen nach (2.57). Für

$$I_n := \int_{z \in I^2} (36 + M_{1, \vartheta_n}^2 l^2(z, \vartheta_n))^2 dC(z, \vartheta_n)$$

folgt weiter die Darstellung

$$\begin{aligned}
I_n &= 1296 + 72M_{1, \vartheta_n}^2 E_{\vartheta_n} l^2(Z_{n1}, \vartheta_n) + M_{1, \vartheta_n}^4 E_{\vartheta_n} l^4(Z_{n1}, \vartheta_n) \\
&= 1296 + 72M_{1, \vartheta_n}^2 \sigma_2(\vartheta_n) + M_{1, \vartheta_n}^4 \sigma_4(\vartheta_n).
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $\Theta \ni \vartheta \mapsto M_{1, \vartheta}$ sowie

$$\sup_{n \geq 1} \sigma_k(\vartheta_n) < \infty, \quad k = 2, 4,$$

erhalten wir (2.55). Somit gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon, e_k) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$, und der Nachweis der Bedingung c) von Satz A.8 ist erbracht. Da die Voraussetzungen in Satz A.8 erfüllt sind, gilt $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \tilde{\Gamma})$ in L^2 , wobei der Kovarianzoperator $\tilde{\Gamma}$ durch

$$\langle \tilde{\Gamma}f, e_k \rangle_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, e_j \rangle_2 a_{jk}$$

für $k \geq 0$ gegeben ist. Da

$$\begin{aligned}
\langle \Gamma f, e_k \rangle_2 &= \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma(s, t) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \langle f, e_j \rangle_2 e_j(s) \right) e_k(t) d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \langle f, e_j \rangle_2 a_{jk}
\end{aligned}$$

ist, gilt $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und somit $W_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{\vartheta_n}} W$. Mit $\|\varepsilon_n\|_2 = o_{P_{\vartheta_n}}(1)$ (siehe (C.1) in Anhang C, Beweis von Satz 2.8) ist der Beweis von Satz 2.15 erbracht.

2.6.1. Bootstrap-Test

Es seien Z_1, \dots, Z_n, \dots stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit Kopula C gemäß Annahme 2.7. Ferner sei $T_n = T_n(Z_1, \dots, Z_n)$ die in (2.28) definierte Teststatistik. Ein Test der Hypothese H_0 mit der Teststatistik T_n lehnt H_0 ab, falls bei gegebenen Daten $z_1 = (x_1, y_1), \dots, z_n = (x_n, y_n)$ die Zahl $T_n(z_1, \dots, z_n)$ einen kritischen Wert $c_{n,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, überschreitet. Dabei soll die Folge $(c_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft (2.34) erfüllen. Die Teststatistik T_n ist nicht (Kopula-)verteilungsfrei unter H_0 . Deshalb schätzen wir $c_{n,\alpha}$ aus den Daten durch *parametrischen Bootstrap* wie folgt:

Es sei $H_{n,\vartheta}(t) = P_\vartheta(T_n \leq t)$ die Verteilungsfunktion von T_n unter H_0 . Wir schätzen das unbekannte $(1 - \alpha)$ -Quantil von $H_{n,\hat{\vartheta}_n}$ als natürlichen kritischen Wert von T_n durch folgendes Monte-Carlo-Verfahren:

Bedingt nach dem beobachteten Wert von $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(z_1, \dots, z_n)$ werden b Pseudo-Zufallsstichproben vom Umfang n mit Kopula $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)$ erzeugt, d.h. jeweils unabhängig voneinander werden

$$Z_{j1}^* = (X_{j1}^*, Y_{j1}^*), Z_{j2}^* = (X_{j2}^*, Y_{j2}^*), \dots, Z_{jn}^* = (X_{jn}^*, Y_{jn}^*), \quad j = 1, \dots, b,$$

gemäß $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)$ erzeugt. Die Simulation eines Pseudo-Zufallsvektors unter verschiedenen Kopulafamilien beschreiben die Abschnitte 3.2 bis 3.5. Anschließend werden die Bootstrap-Teststatistiken $T_{jn}^* := T_n(Z_{j1}^*, \dots, Z_{jn}^*)$ für $j = 1, \dots, b$ berechnet. Die empirische Verteilungsfunktion von $T_{1n}^*, \dots, T_{bn}^*$ ist durch

$$H_{n,b}^*(t) := \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b 1\{T_{jn}^* \leq t\}, \quad t \geq 0, \quad (2.58)$$

gegeben. Mit $T_{1,b}^*, \dots, T_{b,b}^*$ bezeichnen wir die Ordnungsstatistiken von $T_{1n}^*, \dots, T_{bn}^*$. Das empirische $(1 - \alpha)$ -Quantil $c_{n,\alpha}^*$ von $H_{n,b}^*$ ist durch

$$c_{n,\alpha}^* := \begin{cases} T_{b(1-\alpha),b}^*, & \text{falls } b(1 - \alpha) \in \mathbb{N}, \\ T_{\lfloor b(1-\alpha) \rfloor + 1, b}^*, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.59)$$

definiert. Dabei deuten wir die Abhängigkeit von $c_{n,\alpha}^*$ von b nicht an. Ein modifizierter Wert von $c_{n,\alpha}^*$ ist durch

$$\check{c}_{n,\alpha} := T_{\alpha_b, b}^* + (1 - \lambda_b)(T_{\alpha_b + 1, b}^* - T_{\alpha_b, b}^*)$$

mit $\alpha_b := b - \lfloor \alpha(b+1) \rfloor$ und $\lambda_b := \alpha(b+1) - \lfloor \alpha(b+1) \rfloor$ gegeben. Beide Werte sind Schätzwerte für den kritischen Wert $c_{n,\alpha}$ ([BA92], S.272f). Die Hypothese H_0 wird verworfen, falls T_n den Wert $c_{n,\alpha}^*$ überschreitet. In Satz 2.16 c) zeigen wir, dass unter allgemeinen Bedingungen der Bootstrap-Test für H_0 asymptotisch (d.h. für $n, b \rightarrow \infty$) das vorgegebene Niveau α annimmt. Es sei o.B.d.A. (siehe [HE96], S.89)

$$T_{jn}^* = H_{n,\hat{\vartheta}_n}^{-1}(\tilde{U}_j), \quad j = 1, \dots, b, \quad (2.60)$$

wobei $\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \dots, \tilde{U}_b, \dots$ eine Folge von stochastisch unabhängigen $(0, 1)$ -gleichverteilten Zufallsvariablen bezeichnet, welche unabhängig von Z_i , $i = 1, \dots, n$, ist.

Satz 2.16

Die Verteilungsfunktionen $H_{n,b}^*$ und H_ϑ seien gemäß (2.58) bzw. (2.35) gegeben. Ferner entnehmen wir $c_{n,\alpha}^*$ aus (2.59). Dann gilt:

- a) $\|H_{n,b}^* - H_\vartheta\| = \sup_{t \geq 0} |H_{n,b}^*(t) - H_\vartheta(t)| \xrightarrow{P_\vartheta} 0$ für $n, b \rightarrow \infty$,
- b) $c_{n,\alpha}^* \xrightarrow{P_\vartheta} H_\vartheta^{-1}(1 - \alpha)$ für $n, b \rightarrow \infty$,
- c) $\lim_{n, b \rightarrow \infty} P_\vartheta(T_n > c_{n,\alpha}^*) = \alpha$.

BEWEIS: Mit (2.52) und der Stetigkeit von H_ϑ (siehe Lemma 2.10) erhalten wir mit dem Satz von Pólya die Grenzwertaussage $\lim_{n \rightarrow \infty} \|H_{n,\vartheta_n} - H_\vartheta\| = 0$ für jede Folge (ϑ_n) aus Θ , die für $n \rightarrow \infty$ gegen ϑ konvergiert. In Verbindung mit der stochastischen Konvergenz von $\hat{\vartheta}_n$ gegen ϑ ergibt sich

$$\|H_{n,\hat{\vartheta}_n} - H_\vartheta\| \xrightarrow{P_\vartheta} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.61)$$

Mit (2.60) folgt

$$\begin{aligned} \|H_{n,b}^* - H_{n,\hat{\vartheta}_n}\| &= \sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b 1\{\tilde{U}_j \leq H_{n,\hat{\vartheta}_n}(t)\} - H_{n,\hat{\vartheta}_n}(t) \right| \\ &\leq \sup_{u \in I} \left| \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b 1\{\tilde{U}_j \leq u\} - u \right|, \end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck für $b \rightarrow \infty$ fast sicher gegen null konvergiert. Zusammen mit (2.61) ergibt sich Aussage a). Wegen $c_{n,\alpha}^* = (H_{n,b}^*)^{-1}(1 - \alpha)$, der Stetigkeit und strikten Monotonie von H_ϑ (siehe Lemma 2.10) erhalten wir b). Behauptung c) folgt aus b). Offenbar liegt in a) und b) fast sichere Konvergenz vor, falls $\hat{\vartheta}_n \rightarrow \vartheta$ *f.s.* gilt.

Wir zeigen im Folgenden die Konsistenz des auf T_n basierenden Bootstrap- Tests. Es sei $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ eine Folge stochastisch unabhängiger und identisch verteilter bivariater Zufallsvektoren mit Kopula C gemäß Annahme 2.7, so dass (2.38) erfüllt ist. Wir beweisen die Konsistenz

$$\lim_{n, b \rightarrow \infty} P(T_n > c_{n,\alpha}^*) = 1, \quad (2.62)$$

falls $\hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_n(Z_1, \dots, Z_n)$ stochastisch gegen ein $\vartheta \in \Theta$ konvergiert. Aus Satz 2.15 erhält man $\|H_{n,\hat{\vartheta}_n} - H_\vartheta\| \xrightarrow{P} 0$ für $n \rightarrow \infty$. Damit ergibt sich wie im Satz 2.16 die Asymptotik $\|H_{n,b}^* - H_\vartheta\| \xrightarrow{P} 0$ für $n, b \rightarrow \infty$. Insgesamt folgt dann $c_{n,\alpha}^* \xrightarrow{P} H_\vartheta^{-1}(1 - \alpha)$ für $n, b \rightarrow \infty$. Für die Teststatistik T_n erhalten wir wie in Satz 2.12 die stochastische Konvergenz $T_n \xrightarrow{P} \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Somit ist (2.62) gezeigt.

3. Simulation

3.1. Verteilung der Teststatistik unter H_0

Die Verteilungsfunktion $H_{n,\vartheta}(t) = P_\vartheta(T_n \leq t)$, $t \geq 0$, der Teststatistik T_n unter H_0 besitzt für $n \geq 2$ keine analytische Berechnungsvorschrift. Allerdings kann $H_{n,\vartheta}$ näherungsweise durch *stochastische Simulation* wie folgt berechnet werden:

Es werden b ($b \geq 1000$) mal n *bivariate Pseudo-Zufallsvektoren* $(U_{j1}, V_{j1}), (U_{j2}, V_{j2}), \dots, (U_{jn}, V_{jn})$, $j = 1, \dots, b$, erzeugt, welche die Eigenschaften der stochastischen Unabhängigkeit und der identischen Verteilung mit $(0, 1)$ -gleichverteilten Randverteilungen sowie Kopula $C(\cdot, \vartheta)$ nachbilden sollen. Man erhält weiter $T_{jn;\vartheta} := T_n((U_{j1}, V_{j1}), \dots, (U_{jn}, V_{jn}))$ nach (2.30), und sortiert $T_{1n;\vartheta}, \dots, T_{bn;\vartheta}$ in aufsteigender Anordnung gemäß

$$T_{1,b;\vartheta} \leq T_{2,b;\vartheta} \leq \dots \leq T_{b,b;\vartheta}.$$

Das $(1 - \alpha)$ -Quantil von $H_{n,\vartheta}$ ist durch

$$t_{n,\vartheta,1-\alpha} := T_{[(1-\alpha)b],b;\vartheta}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

näherungsweise bestimmt. Im Falle der Clayton-Kopula sind für $n = 10, 20, 50, 100$; $\vartheta = 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10$ und $\alpha = 0.1, 0.05, 0.01$ die Quantile in Tabelle 3.1 aufgelistet.

Die Erzeugung eines bivariaten Pseudo-Zufallsvektors (U, V) bei zu Grunde liegender archimedischen Kopulafamilie ist in [NEL98], Exercise 4.13, S.108, beschrieben: Es seien $\varphi(\cdot, \vartheta)$ ein Generator nach (1.5), $C(\cdot, \vartheta)$ eine archimedische Kopula nach (1.6) und (U, V) ein bivariater Zufallsvektor mit $(0, 1)$ -gleichverteilten Randverteilungen und Kopula $C(\cdot, \vartheta)$. Die Verteilungsfunktion von $C(U, V, \vartheta)$ ist durch

$$K(t, \vartheta) := P_\vartheta(C(U, V, \vartheta) \leq t) = t - \frac{\varphi(t, \vartheta)}{\partial_t \varphi(t, \vartheta)}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.1)$$

darstellbar ([NEL98], S.101,103). Im Folgenden bedeutet die Schreibweise $S, T \sim \mathcal{V}$, dass die Zufallsvariablen S, T stochastisch unabhängig sind und die Verteilung \mathcal{V} besitzen.

Algorithmus 3.1

1. Erzeuge $S, T \sim U(0, 1)$.

| α | $t_{10,0.1,1-\alpha}$ | $t_{10,0.5,1-\alpha}$ | $t_{10,1,1-\alpha}$ | $t_{10,2,1-\alpha}$ | $t_{10,5,1-\alpha}$ | $t_{10,10,1-\alpha}$ |
|----------|------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|
| 0.10 | 0.0693 | 0.0650 | 0.0613 | 0.0564 | 0.0449 | 0.0395 |
| 0.05 | 0.0744 | 0.0708 | 0.0669 | 0.0616 | 0.0482 | 0.0415 |
| 0.01 | 0.0850 | 0.0869 | 0.0775 | 0.0725 | 0.0547 | 0.0492 |
| α | $t_{20,0.1,1-\alpha}$ | $t_{20,0.5,1-\alpha}$ | $t_{20,1,1-\alpha}$ | $t_{20,2,1-\alpha}$ | $t_{20,5,1-\alpha}$ | $t_{20,10,1-\alpha}$ |
| 0.10 | 0.0462 | 0.0438 | 0.0402 | 0.0346 | 0.0257 | 0.0208 |
| 0.05 | 0.0511 | 0.0485 | 0.0442 | 0.0384 | 0.0280 | 0.0218 |
| 0.01 | 0.0611 | 0.0575 | 0.0542 | 0.0468 | 0.0319 | 0.0248 |
| α | $t_{50,0.1,1-\alpha}$ | $t_{50,0.5,1-\alpha}$ | $t_{50,1,1-\alpha}$ | $t_{50,2,1-\alpha}$ | $t_{50,5,1-\alpha}$ | $t_{50,10,1-\alpha}$ |
| 0.10 | 0.0339 | 0.0307 | 0.0280 | 0.0223 | 0.0140 | 0.0100 |
| 0.05 | 0.0379 | 0.0342 | 0.0307 | 0.0249 | 0.0155 | 0.0107 |
| 0.01 | 0.0450 | 0.0422 | 0.0380 | 0.0313 | 0.0203 | 0.0123 |
| α | $t_{100,0.1,1-\alpha}$ | $t_{100,0.5,1-\alpha}$ | $t_{100,1,1-\alpha}$ | $t_{100,2,1-\alpha}$ | $t_{100,5,1-\alpha}$ | $t_{100,10,1-\alpha}$ |
| 0.10 | 0.0306 | 0.0277 | 0.0242 | 0.0191 | 0.0108 | 0.0064 |
| 0.05 | 0.0341 | 0.0312 | 0.0273 | 0.0216 | 0.0120 | 0.0069 |
| 0.01 | 0.0411 | 0.0391 | 0.0333 | 0.0274 | 0.0153 | 0.0081 |

Tabelle 3.1.: Geschätzte Quantile $t_{n,\vartheta,1-\alpha}$ von T_n bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula: $n = 10, 20, 50, 100$; $\vartheta = 0.1, 0.5, 1, 2, 5, 10$; $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$; $b = 1000$ Simulationen.

2. Bilde $W := K^{-1}(T, \vartheta)$,
wobei $K^{-1}(\cdot, \vartheta)$ die Inverse von $K(\cdot, \vartheta)$ ist.
3. Setze $U := \varphi^{-1}(S\varphi(W, \vartheta), \vartheta)$ und $V := \varphi^{-1}((1 - S)\varphi(W, \vartheta), \vartheta)$,
wobei $\varphi^{-1}(\cdot, \vartheta)$ die Inverse von $\varphi(\cdot, \vartheta)$ ist.

Dann ist $(U, V) \sim C(\cdot, \vartheta)$.

Im Falle der Clayton-Kopula besitzt (3.1) die Gestalt

$$K_C(t, \vartheta) = t + \frac{t^{\vartheta+1}}{\vartheta} (t^{-\vartheta} - 1)$$

für $\vartheta \geq -1$ und $\vartheta \neq 0$. Im Falle der Gumbel-Kopula müssen wir für (3.1) speziell

$$K_G(t, \vartheta) = t \left(1 - \frac{1}{\vartheta} \log t \right)$$

für $\vartheta \geq 1$ und im Falle der Frank-Kopula

$$K_F(t, \vartheta) = t + \frac{1 - e^{\vartheta t}}{\vartheta} \log \left(\frac{e^{-\vartheta t} - 1}{e^{\vartheta} - 1} \right)$$

für $\vartheta \neq 0$ benutzen. Die Gauß-Kopula ist keine archimedische Kopula, weshalb Algorithmus 3.1 nicht anwendbar ist. In den folgenden Abschnitten beschreiben wir spezielle Algorithmen zur Simulation von Pseudo-Zufallsvektoren bei zu Grunde liegender Kopulafamilie Clayton, Frank, Gauß oder Gumbel.

3.2. Simulation einer Clayton-Kopula

Im Falle der Clayton-Kopula verwenden wir für $\vartheta > 0$ die Ergebnisse aus [NEL98], Exercise 4.15, S.108. Die Simulation einer Clayton-Kopula geschieht im Fall $\vartheta > 0$ in folgenden Schritten:

1. Erzeuge $S, T \sim \text{Exp}(1)$ und $W \sim \Gamma(1/\vartheta, 1)$ stochastisch unabhängig voneinander.
2. Setze $U := (1 + S/W)^{-1/\vartheta}$ und $V := (1 + T/W)^{-1/\vartheta}$.

Dann ist $(U, V) \sim C_C(\cdot, \vartheta)$.

Für $\vartheta = 0$ werden jeweils stochastisch unabhängig voneinander $U, V \sim \mathcal{U}(0, 1)$ erzeugt. Dann ist $(U, V) \sim C_C(\cdot, 0)$.

Im Fall $-1 < \vartheta < 0$ benutzen wir den nachstehenden Algorithmus nach [NEL98], Exercise 4.14, S.108:

1. Erzeuge $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.
2. Setze $W := U \cdot T^{1/(\vartheta+1)}$.
3. Bilde

$$V := \begin{cases} (W^{-\vartheta} - U^{-\vartheta} + 1)^{-1/\vartheta}, & \text{falls } U^{-\vartheta} - W^{-\vartheta} \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $(U, V) \sim C_C(\cdot, \vartheta)$.

Für $\vartheta = -1$ erzeugt man $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und erhält damit $V := 1 - U$.

Der Algorithmus nach [NEL98], Exercise 4.14, S.108 ist auch für $\vartheta > 0$ sowie für jede beliebige archimedische Kopula anwendbar.

3.3. Simulation einer Frank-Kopula

Im Falle der Frank-Kopula verwenden wir den nachfolgenden Algorithmus nach [NEL98], Exercise 4.14, S.108. Hierzu bezeichne φ_F den Generator aus Beispiel 1.6.

1. Erzeuge $U, T \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

Im Fall $\vartheta = 0$ wird $V = T$ gesetzt. Andernfalls sind folgende Schritte durchzuführen:

2. Bilde $W := U + \frac{1}{\vartheta} \log(\exp(-\vartheta U) + (1 - \exp(-\vartheta U))T)$.
3. Setze $V := -\frac{1}{\vartheta} \log(\exp(\varphi_F(U, \vartheta) - \varphi_F(W, \vartheta))(\exp(-\vartheta) - 1) + 1)$.

Dann gilt $(U, V) \sim C_F(\cdot, \vartheta)$.

3.4. Simulation einer Gauß-Kopula

Zur Erzeugung eines bivariaten Pseudo-Zufallsvektors $(U, V) \sim C_N(\cdot, \vartheta)$ benutzen wir direkt die Definition der Gauß-Kopula in (1.4). Für $\vartheta \in (-1, 1)$ führt man die folgenden Schritte durch:

1. Erzeuge $(X, Y) \sim \Phi_\vartheta$ mit $\vartheta \in (-1, 1)$.
2. Setze $U := \Phi(X)$ und $V := \Phi(Y)$.

Dabei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion einer standard-normalverteilten Zufallsvariablen und Φ_ϑ die Verteilungsfunktion eines bivariat normalverteilten Zufallsvektors mit (Pearson-)Korrelation ϑ . Dann ist $(U, V) \sim C_N(\cdot, \vartheta)$.

Für $\vartheta = -1$ bzw. $\vartheta = 1$ erzeugt man $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und bildet damit $V := 1 - U$ bzw. $V := U$.

3.5. Simulation einer Gumbel-Kopula

Zur Simulation einer Gumbel-Kopula greifen wir auf den Vorschlag von [DK01], S.111, basierend auf [LEE79], S.274f, zurück. Es seien $\varphi_G(\cdot, \vartheta)$, $\vartheta > 1$, der Generator aus Beispiel 1.7 und $(U, V) \sim C_G(\cdot, \vartheta)$. Dann ist die Zufallsvariable

$$T = \frac{\varphi_G(U, \vartheta)}{\varphi_G(U, \vartheta) + \varphi_G(V, \vartheta)}$$

gleichverteilt auf $(0, 1)$ und unabhängig von $Z = C_G(U, V, \vartheta)$ ([NEL98], S.104). Speziell für die Gumbel-Kopula lässt sich $Z_1 = \varphi_G(Z, \vartheta)^{1/\vartheta}$ in der Form

$$Z_1 \sim \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) \Gamma(1, 1) + \frac{1}{\vartheta} \Gamma(2, 1)$$

als Verteilungsmischung zweier Gammaverteilungen darstellen. Aus Pseudo-Zufallszahlen T und Z_1 lassen sich damit Pseudo-Zufallszahlen U und V mit dem gewünschten Ergebnis $(U, V) \sim C_G(\cdot, \vartheta)$, $\vartheta \geq 1$ nach folgendem Algorithmus gewinnen:

Im Fall $\vartheta = 1$ werden jeweils unabhängig voneinander die Pseudo-Zufallszahlen $U, V \sim \mathcal{U}(0, 1)$ erzeugt.

Für $\vartheta > 1$ sind die folgenden Schritte durchzuführen:

1. Erzeuge $T \sim \mathcal{U}(0, 1)$ und $B \sim \text{Bin}(1, 1/\vartheta)$ stochastisch unabhängig voneinander.
2. Falls $B = 0$ ist, wird $Z_1 \sim \text{Exp}(1)$ erzeugt, sonst $Z_1 \sim \Gamma(2, 1)$.
3. Setze $U := \exp(-T^{1/\vartheta} Z_1)$ und $V := \exp(-(1 - T)^{1/\vartheta} Z_1)$.

3.6. Simulationsstudien

In Abschnitt 3.6.1 vergleichen wir das vorgegebene Niveau des auf T_n basierenden Niveau- α -Tests mit einem durch Simulationsstudien geschätzten Niveau. Das Verhalten des Tests bei einer vorgegebenen Alternative wird in Abschnitt 3.6.2 untersucht.

3.6.1. Empirische Niveaustudie

Die tabellarisch aufgeführten Ergebnisse zeigen auf, wie gut der auf T_n basierende Bootstrap-Test $\varphi_n^* = 1\{T_n > c_{n,\alpha}^*\}$ das vorgegebene Niveau $\alpha = 0.05$ einhält. Dabei wählen wir den Parameter ϑ aus dem entsprechenden Parameterbereich einer Kopulafamilie. Der Stichprobenumfang n ist 20, 50 oder 100. Die Bootstrap-Stichprobe b eines Bootstrap-Tests umfasst stets 100 simulierte Teststatistiken, und es werden $m = 10000$ Bootstrap-Tests durchgeführt. Mit $\hat{\alpha}$ bezeichnen wir das geschätzte Niveau.

Bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula wird α nur in zwei Fällen leicht überschritten. Am Rand von $\Theta = [-1, \infty)$ ist $\hat{\alpha}$ etwas kleiner als im Bereich um 0 (Tab. 3.2, Abb. 3.1). Das Niveau wird bei zu Grunde liegender Frank-Kopula durchweg gut eingehalten. Der Wert $\hat{\alpha}$ liegt meistens zwischen 0.04 und α (Tab. 3.3, Abb. 3.2).

Liegt eine Gauß-Kopula zu Grunde, so ist $\hat{\alpha}$ stets kleiner als α . Am Rand von $\Theta = (-1, 1)$ wird das Niveau wesentlich schlechter eingehalten als im Innern von Θ (Tab. 3.4, Abb. 3.3).

Im Falle einer Gumbel-Kopula ergeben sich folgende Beobachtungen. Für ϑ nahe 1 fällt $\hat{\alpha}$ für wachsendes n und ist teilweise größer als α . Eine Erklärung dafür ist, dass $\Theta = [1, \infty)$ nur Abhängigkeiten $\tau \geq 0$ abdeckt. Für großes ϑ ist $\hat{\alpha}$ wachsend in n , und das Niveau wird gut eingehalten (Tab. 3.5, Abb. 3.4).

3.6.2. Empirische Gütestudie

In diesem Abschnitt soll anhand einiger Simulationsstudien die Güte $P(T_n > c_{n,\alpha}^*)$ des auf T_n basierenden Bootstrap-Tests bei festem Stichprobenumfang $n \in \{50, 100, 200, 400\}$ und Niveau $\alpha = 0.05$ untersucht werden. Dabei ist $b = 100$ und $m = 2000$. Mit $\hat{\beta}$ bezeichnen wir die geschätzte Güte.

Bei zu Grunde liegender Produktkopula, d.h. falls eine der Kopulae $C_C(\cdot, 0)$, $C_F(\cdot, 0)$, $C_N(\cdot, 0)$ oder $C_G(\cdot, 1)$ zu Grunde liegt, bleibt $\hat{\beta}$ durch α beschränkt. Mit wachsendem Abstand zwischen ϑ und 0 bzw. 1 wächst $\hat{\beta}$ in ϑ . Ferner nähert sich $\hat{\beta}$ für festes ϑ und wachsendem n dem Wert 1.

Bei einem Test auf Clayton-Kopula ist Folgendes zu erkennen. Bei zu Grunde liegender Frank-Kopula ist die Güte für positives ϑ besser als für negatives. Für $n = 50$ sind mit

| ϑ | $n = 20$ | $n = 50$ | $n = 100$ |
|-------------|----------|----------|-----------|
| -0.9 | 0.0289 | 0.0185 | 0.0258 |
| -0.5 | 0.0492 | 0.0334 | 0.0333 |
| -0.3 | 0.032 | 0.0399 | 0.0403 |
| -0.1 | 0.0475 | 0.0418 | 0.0393 |
| 0 | 0.0461 | 0.0433 | 0.0448 |
| 0.1 | 0.0512 | 0.0472 | 0.0393 |
| 0.6 | 0.0419 | 0.0538 | 0.0413 |
| 1.1 | 0.0497 | 0.0365 | 0.0418 |
| 1.6 | 0.0429 | 0.0355 | 0.0398 |
| 2.1 | 0.0225 | 0.0355 | 0.0385 |

Tabelle 3.2.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

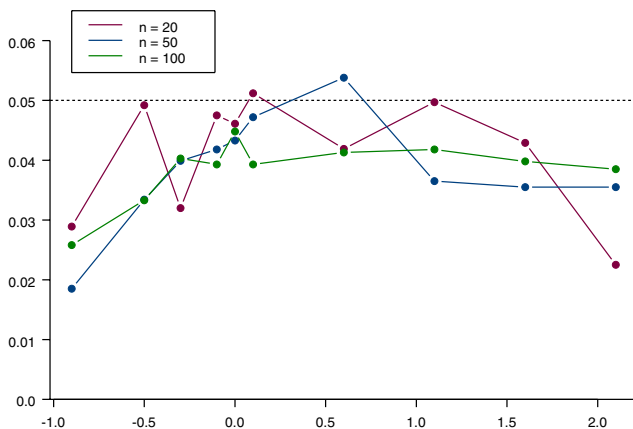


Abbildung 3.1.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 20$ | $n = 50$ | $n = 100$ |
|-------------|----------|----------|-----------|
| -1.5 | 0.0484 | 0.0419 | 0.0435 |
| -1 | 0.0405 | 0.0408 | 0.0475 |
| -0.5 | 0.0416 | 0.0428 | 0.0455 |
| 0 | 0.0441 | 0.0422 | 0.0475 |
| 0.5 | 0.0397 | 0.0429 | 0.045 |
| 1 | 0.0403 | 0.0396 | 0.049 |
| 1.5 | 0.0363 | 0.0394 | 0.042 |

Tabelle 3.3.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

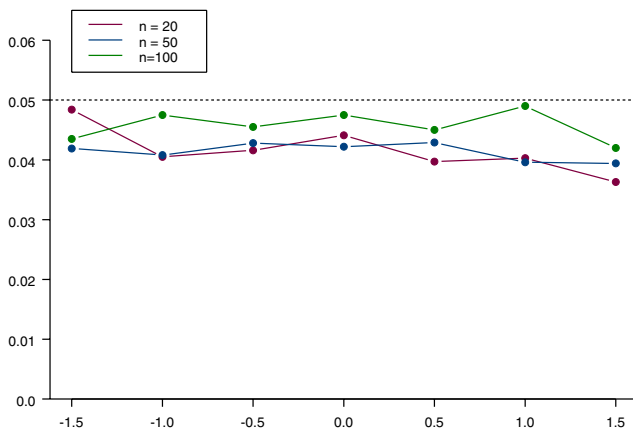


Abbildung 3.2.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 20$ | $n = 50$ | $n = 100$ |
|-------------|----------|----------|-----------|
| -0.9 | 0.0042 | 0.0118 | 0.016 |
| -0.7 | 0.033 | 0.0425 | 0.0415 |
| -0.5 | 0.0387 | 0.0355 | 0.0365 |
| -0.3 | 0.0431 | 0.0416 | 0.0465 |
| -0.1 | 0.0421 | 0.0387 | 0.0405 |
| 0 | 0.0385 | 0.0412 | 0.0465 |
| 0.1 | 0.0414 | 0.0372 | 0.044 |
| 0.3 | 0.0341 | 0.0378 | 0.0445 |
| 0.5 | 0.0269 | 0.0402 | 0.035 |
| 0.7 | 0.0157 | 0.0239 | 0.0365 |
| 0.9 | 0.004 | 0.0082 | 0.011 |

Tabelle 3.4.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

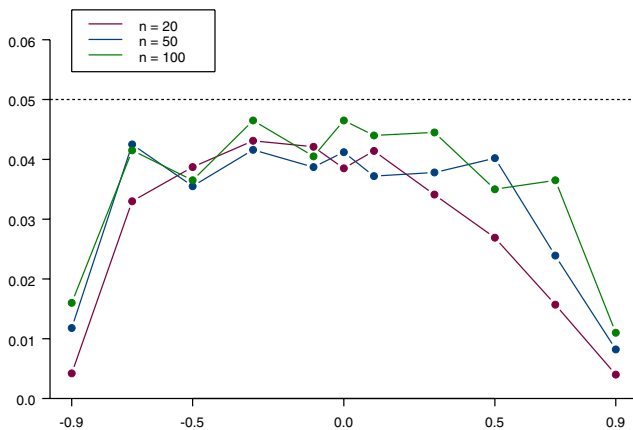


Abbildung 3.3.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 20$ | $n = 50$ | $n = 100$ |
|-------------|----------|----------|-----------|
| 1.1 | 0.0635 | 0.051 | 0.0523 |
| 1.3 | 0.052 | 0.0362 | 0.046 |
| 1.5 | 0.0395 | 0.034 | 0.0347 |
| 1.9 | 0.0239 | 0.0322 | 0.0453 |
| 2.3 | 0.015 | 0.0255 | 0.0423 |
| 2.7 | 0.0082 | 0.0229 | 0.043 |
| 3.1 | 0.0062 | 0.0175 | 0.034 |

Tabelle 3.5.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

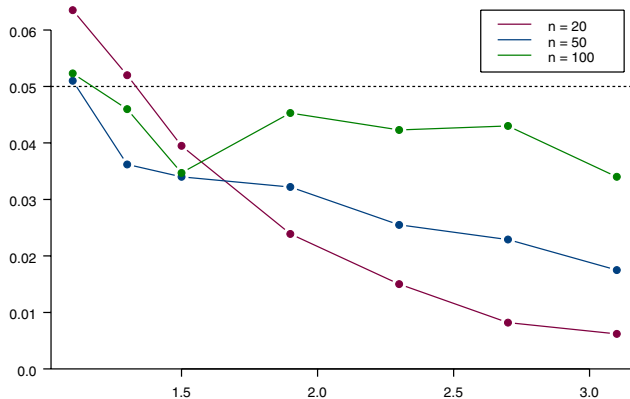


Abbildung 3.4.: Geschätztes Testniveau bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

$\hat{\beta} < \alpha$ noch schlechte Werte für $\hat{\beta}$ zu sehen (Tab. 3.6, Abb. 3.5). Tabelle 3.7 und Abbildung 3.6 zeigen bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula ein ähnliches Verhalten. Liegt eine Gumbel-Kopula zu Grunde, so ist die Güte im Vergleich zur Frank- bzw. Gauß-Kopula am besten. Für $n = 200$ liegt $\hat{\beta}$ sehr nahe bei 1 (Tab. 3.8, Abb. 3.7).

Ein Test auf Frank-Kopula liefert bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula für $n = 200$ nahe an 1 liegende Werte von $\hat{\beta}$ (Tab. 3.9, Abb. 3.8). Das selbe gilt bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula für $n = 400$ (Tab. 3.11, Abb. 3.10). Bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula bleibt $\hat{\beta}$ selbst für $n = 400$ meistens kleiner als 0.4 (Tab. 3.10, Abb. 3.9). Bei einem Test auf Gauß-Kopula ist die Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula am besten, da $\hat{\beta}$ für $n = 200$ nahe bei 1 liegt (Tab. 3.12, Abb. 3.11). Bei zu Grunde liegender Frank- bzw. Gumbel-Kopula bleibt $\hat{\beta}$ selbst für $n = 400$ kleiner als 0.6 (Tab. 3.13, Abb. 3.12 bzw. Tab. 3.14, Abb. 3.13). Ferner ist in Abbildung 3.13 zu sehen, dass für wachsendes ϑ die Güte schlechter wird.

Ein Test auf Gumbel-Kopula liefert bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula für $n = 200$ nahe an 1 liegende Werte von $\hat{\beta}$ (Tab. 3.15, Abb. 3.14). Das gleiche gilt bei zu Grunde liegender Frank-Kopula für $n = 400$ (Tab. 3.16, Abb. 3.15). Bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula bleibt $\hat{\beta}$ selbst für $n = 400$ kleiner als 0.6 (Tab. 3.17, Abb. 3.16).

Die beste Güte erkennen wir in den Abbildungen 3.8, 3.11 und 3.14 bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula und die schlechteste in den Abbildungen 3.9 bzw. 3.16 bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula. Der Test auf Clayton-Kopula besitzt bei allen drei Alternativen gute Werte für $\hat{\beta}$ (Abb. 3.5, 3.6, 3.7), wogegen der Test auf Gauß-Kopula bei den Alternativen Frank und Gumbel schlechte Werte für $\hat{\beta}$ liefert (Abb. 3.12, 3.13). Die beste Kombination zweier Kopulafamilien in der Bewertung der Güte sind Clayton und Gumbel (Abb. 3.7, 3.14); die schlechteste ist Frank und Gauß (Abb. 3.9, 3.12).

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| -5.6 | 0.0195 | 0.351 | 0.9755 |
| -4.9 | 0.025 | 0.336 | 0.958 |
| -4.2 | 0.0245 | 0.3025 | 0.912 |
| -3.5 | 0.026 | 0.2515 | 0.818 |
| -2.8 | 0.0325 | 0.1855 | 0.631 |
| -2.1 | 0.0265 | 0.1105 | 0.412 |
| -1.4 | 0.022 | 0.0655 | 0.183 |
| 1.4 | 0.1245 | 0.17 | 0.291 |
| 2.1 | 0.186 | 0.282 | 0.502 |
| 2.8 | 0.249 | 0.4195 | 0.71 |
| 3.5 | 0.3205 | 0.541 | 0.823 |
| 4.2 | 0.3615 | 0.624 | 0.9105 |
| 4.9 | 0.4155 | 0.6985 | 0.9385 |
| 5.6 | 0.4265 | 0.7405 | 0.961 |

Tabelle 3.6.: Test auf Clayton-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

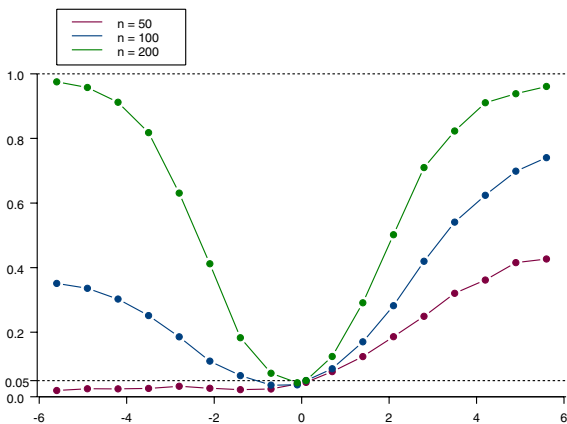


Abbildung 3.5.: Test auf Clayton-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| -0.9 | 0.0005 | 0.046 | 0.9935 |
| -0.7 | 0.0155 | 0.234 | 0.9575 |
| -0.5 | 0.0275 | 0.1725 | 0.6725 |
| -0.3 | 0.025 | 0.0715 | 0.223 |
| -0.2 | 0.0285 | 0.048 | 0.093 |
| -0.1 | 0.0315 | 0.032 | 0.05 |
| 0.1 | 0.071 | 0.0755 | 0.082 |
| 0.2 | 0.0915 | 0.1165 | 0.195 |
| 0.3 | 0.1585 | 0.2225 | 0.3615 |
| 0.5 | 0.28 | 0.451 | 0.726 |
| 0.7 | 0.4015 | 0.6905 | 0.9405 |
| 0.9 | 0.4405 | 0.8255 | 0.993 |

Tabelle 3.7.: Test auf Clayton-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

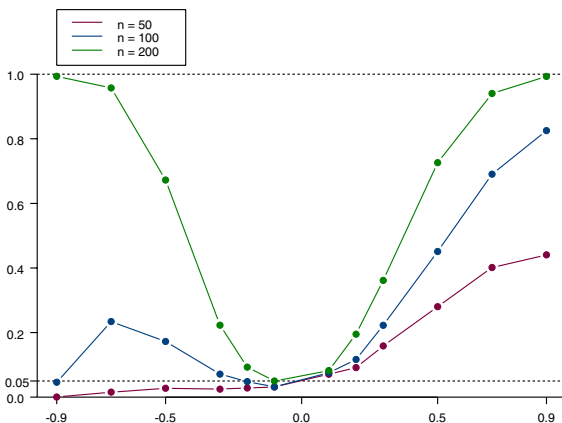


Abbildung 3.6.: Test auf Clayton-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| 1.1 | 0.126 | 0.1675 | 0.2675 |
| 1.5 | 0.522 | 0.8125 | 0.9785 |
| 1.9 | 0.665 | 0.9425 | 0.9975 |
| 2.3 | 0.725 | 0.9745 | 0.9995 |
| 2.7 | 0.7315 | 0.983 | 1 |
| 3.1 | 0.717 | 0.9855 | 1 |

Tabelle 3.8.: Test auf Clayton-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

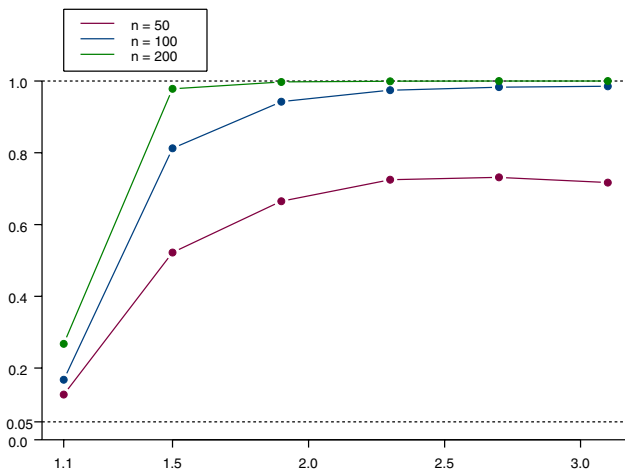


Abbildung 3.7.: Test auf Clayton-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| -0.7 | 0.862 | 0.9935 | 1 |
| -0.4 | 0.294 | 0.509 | 0.84 |
| -0.1 | 0.062 | 0.069 | 0.085 |
| 0.1 | 0.032 | 0.043 | 0.045 |
| 0.5 | 0.05 | 0.1415 | 0.3295 |
| 1.1 | 0.117 | 0.369 | 0.766 |
| 1.6 | 0.166 | 0.4835 | 0.8935 |
| 2.1 | 0.1895 | 0.557 | 0.9405 |
| 2.6 | 0.198 | 0.5915 | 0.9635 |
| 3.1 | 0.1845 | 0.6045 | 0.972 |
| 3.6 | 0.1805 | 0.607 | 0.98 |
| 4.1 | 0.1895 | 0.61 | 0.982 |
| 4.6 | 0.1885 | 0.6095 | 0.976 |
| 5.1 | 0.2 | 0.6065 | 0.982 |

Tabelle 3.9.: Test auf Frank-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

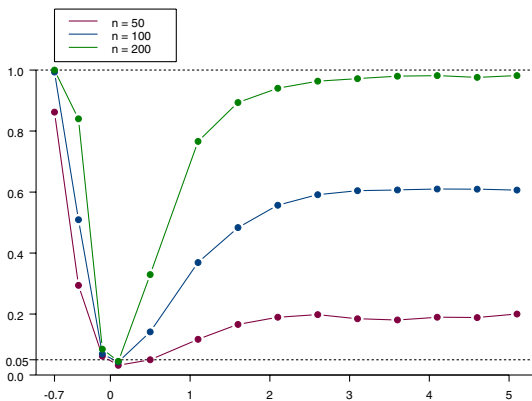


Abbildung 3.8.: Test auf Frank-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 400$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| -0.9 | 0.0655 | 0.1715 | 0.389 | 0.7875 |
| -0.7 | 0.0615 | 0.0865 | 0.1995 | 0.4285 |
| -0.5 | 0.042 | 0.058 | 0.1015 | 0.181 |
| -0.3 | 0.0495 | 0.043 | 0.0515 | 0.0655 |
| -0.2 | 0.047 | 0.037 | 0.0455 | 0.055 |
| -0.1 | 0.034 | 0.0465 | 0.042 | 0.043 |
| 0.1 | 0.037 | 0.047 | 0.049 | 0.045 |
| 0.2 | 0.045 | 0.041 | 0.054 | 0.058 |
| 0.3 | 0.04 | 0.0415 | 0.0515 | 0.074 |
| 0.5 | 0.04 | 0.045 | 0.084 | 0.1725 |
| 0.7 | 0.034 | 0.0655 | 0.155 | 0.413 |
| 0.9 | 0.0345 | 0.11 | 0.336 | 0.742 |

Tabelle 3.10.: Test auf Frank-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

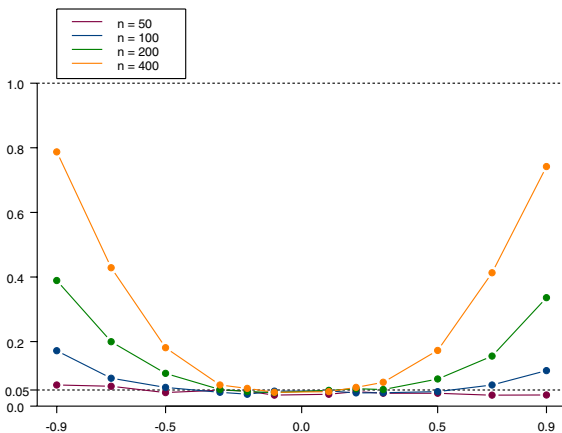


Abbildung 3.9.: Test auf Frank-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 400$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 1.1 | 0.055 | 0.0705 | 0.0855 | 0.115 |
| 1.5 | 0.084 | 0.1695 | 0.36 | 0.712 |
| 1.9 | 0.0915 | 0.206 | 0.481 | 0.8565 |
| 2.3 | 0.0695 | 0.2065 | 0.558 | 0.925 |
| 2.7 | 0.067 | 0.208 | 0.574 | 0.947 |
| 3.1 | 0.055 | 0.1945 | 0.5865 | 0.9625 |
| 3.5 | 0.052 | 0.207 | 0.5805 | 0.9675 |
| 3.9 | 0.0505 | 0.1885 | 0.581 | 0.9695 |
| 4.3 | 0.041 | 0.1895 | 0.5985 | 0.98 |
| 4.7 | 0.055 | 0.1825 | 0.613 | 0.978 |
| 5.1 | 0.0525 | 0.186 | 0.605 | 0.979 |
| 5.5 | 0.043 | 0.1885 | 0.6015 | 0.973 |

Tabelle 3.11.: Test auf Frank-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

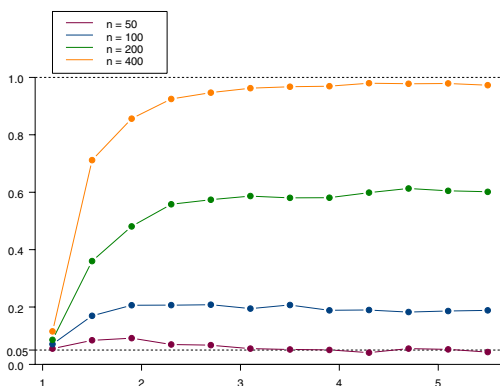


Abbildung 3.10.: Test auf Frank-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| -0.7 | 0.7975 | 0.987 | 1 |
| -0.4 | 0.249 | 0.4565 | 0.7625 |
| -0.1 | 0.051 | 0.063 | 0.785 |
| 0.1 | 0.022 | 0.0405 | 0.044 |
| 0.3 | 0.044 | 0.0705 | 0.134 |
| 0.5 | 0.044 | 0.108 | 0.2635 |
| 0.8 | 0.079 | 0.216 | 0.513 |
| 1.1 | 0.106 | 0.322 | 0.6765 |
| 1.6 | 0.1375 | 0.4285 | 0.8315 |
| 2.1 | 0.168 | 0.5075 | 0.92 |
| 2.6 | 0.177 | 0.534 | 0.928 |
| 3.1 | 0.1595 | 0.533 | 0.937 |
| 3.6 | 0.156 | 0.5395 | 0.9315 |
| 4.1 | 0.144 | 0.534 | 0.947 |

Tabelle 3.12.: Test auf Gauß-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

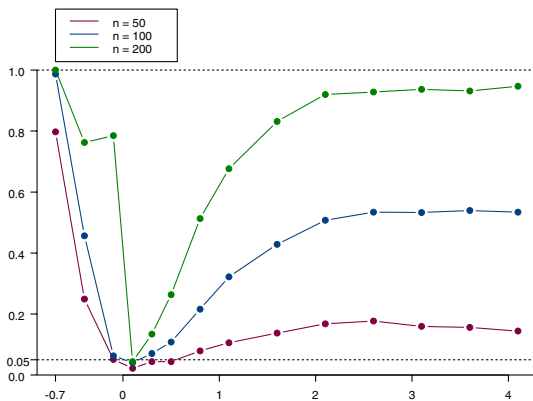


Abbildung 3.11.: Test auf Gauß-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 400$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| -9.1 | 0.036 | 0.0805 | 0.221 | 0.6019 |
| -7.7 | 0.042 | 0.081 | 0.2275 | 0.5591 |
| -6.3 | 0.0505 | 0.087 | 0.1845 | 0.491 |
| -4.9 | 0.049 | 0.088 | 0.145 | 0.3733 |
| -3.5 | 0.051 | 0.0725 | 0.099 | 0.2105 |
| -2.1 | 0.047 | 0.049 | 0.0705 | 0.0943 |
| -0.7 | 0.0375 | 0.0325 | 0.046 | 0.0395 |
| 0.7 | 0.0435 | 0.0375 | 0.0505 | 0.039 |
| 2.1 | 0.046 | 0.053 | 0.0665 | 0.0995 |
| 3.5 | 0.047 | 0.0665 | 0.126 | 0.2157 |
| 4.9 | 0.0545 | 0.0935 | 0.1915 | 0.3824 |
| 6.3 | 0.0595 | 0.1075 | 0.226 | 0.5138 |
| 7.7 | 0.0525 | 0.1105 | 0.275 | 0.6214 |
| 9.1 | 0.0445 | 0.109 | 0.289 | 0.6567 |

Tabelle 3.13.: Test auf Gauß-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

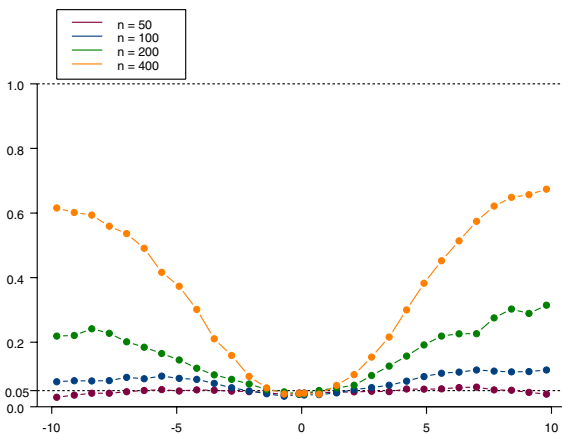


Abbildung 3.12.: Test auf Gauß-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 400$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 1.1 | 0.0545 | 0.0605 | 0.078 | 0.107 |
| 1.5 | 0.0775 | 0.145 | 0.2515 | 0.473 |
| 1.9 | 0.0775 | 0.1325 | 0.27 | 0.5445 |
| 2.3 | 0.0605 | 0.116 | 0.263 | 0.5215 |
| 2.7 | 0.0355 | 0.0995 | 0.2195 | 0.505 |
| 3.1 | 0.0265 | 0.075 | 0.1875 | 0.448 |
| 3.5 | 0.0215 | 0.0505 | 0.16 | 0.3714 |
| 3.9 | 0.016 | 0.032 | 0.1065 | 0.3329 |
| 4.3 | 0.01 | 0.023 | 0.079 | 0.2571 |
| 4.7 | 0.008 | 0.0145 | 0.0695 | 0.2129 |
| 5.1 | 0.0055 | 0.0105 | 0.0425 | 0.1539 |
| 5.5 | 0.0035 | 0.01 | 0.0345 | 0.1277 |

Tabelle 3.14.: Test auf Gauß-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

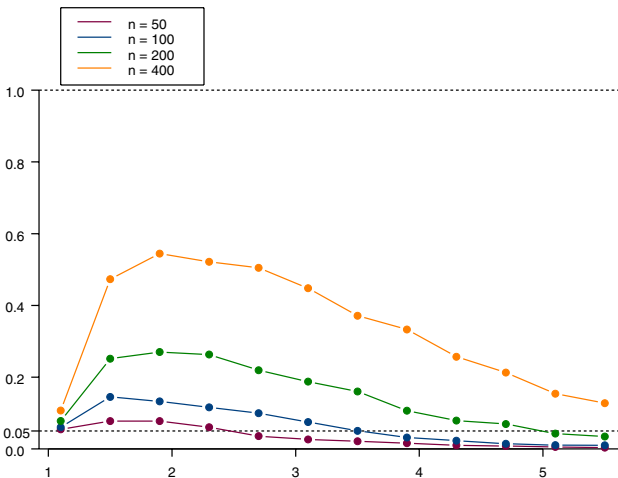


Abbildung 3.13.: Test auf Gauß-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|
| 0.1 | 0.05 | 0.0686 | 0.0875 |
| 0.6 | 0.1625 | 0.415 | 0.788 |
| 1.1 | 0.337 | 0.75 | 0.9785 |
| 1.6 | 0.457 | 0.8825 | 0.9975 |
| 2.1 | 0.519 | 0.93 | 0.999 |
| 2.6 | 0.578 | 0.9425 | 0.995 |
| 3.1 | 0.564 | 0.9485 | 1 |

Tabelle 3.15.: Test auf Gumbel-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

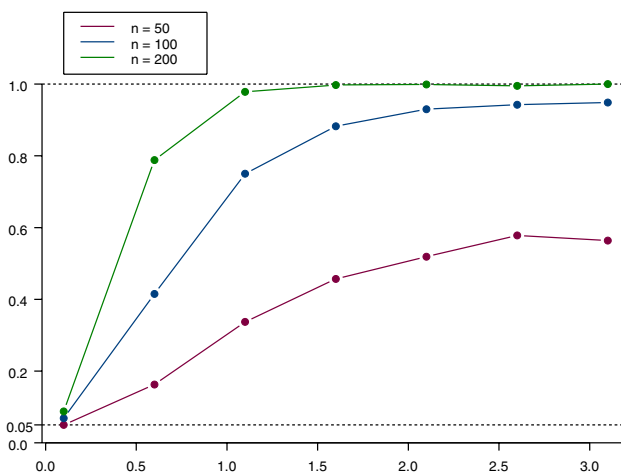


Abbildung 3.14.: Test auf Gumbel-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Clayton-Kopula $C_C(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 400$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.6 | 0.054 | 0.06 | 0.062 | 0.0875 |
| 1.6 | 0.0605 | 0.061 | 0.119 | 0.2485 |
| 2.6 | 0.066 | 0.1215 | 0.259 | 0.5485 |
| 3.6 | 0.089 | 0.188 | 0.3804 | 0.724 |
| 4.6 | 0.114 | 0.2395 | 0.4772 | 0.837 |
| 5.6 | 0.1265 | 0.2695 | 0.5632 | 0.891 |
| 6.6 | 0.137 | 0.3125 | 0.6052 | 0.9175 |
| 7.6 | 0.1425 | 0.3405 | 0.6363 | 0.9485 |
| 8.6 | 0.137 | 0.352 | 0.6693 | 0.945 |
| 9.6 | 0.142 | 0.327 | 0.6747 | 0.96 |

Tabelle 3.16.: Test auf Gumbel-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

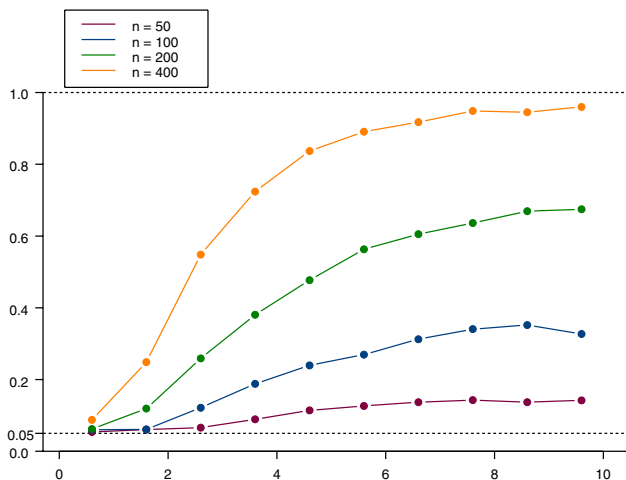


Abbildung 3.15.: Test auf Gumbel-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Frank-Kopula $C_F(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

| ϑ | $n = 50$ | $n = 100$ | $n = 200$ | $n = 400$ |
|-------------|----------|-----------|-----------|-----------|
| 0.1 | 0.042 | 0.042 | 0.0525 | 0.0875 |
| 0.3 | 0.0475 | 0.067 | 0.1125 | 0.209 |
| 0.4 | 0.0545 | 0.073 | 0.1485 | 0.333 |
| 0.5 | 0.0675 | 0.083 | 0.2035 | 0.428 |
| 0.6 | 0.072 | 0.126 | 0.256 | 0.519 |
| 0.7 | 0.0755 | 0.141 | 0.2935 | 0.5875 |
| 0.9 | 0.0405 | 0.121 | 0.276 | 0.5735 |

Tabelle 3.17.: Test auf Gumbel-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

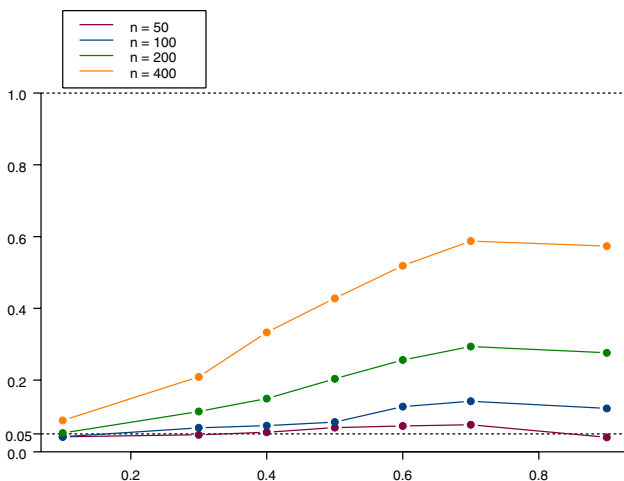


Abbildung 3.16.: Test auf Gumbel-Kopula: Geschätzte Güte bei zu Grunde liegender Gauß-Kopula $C_N(\cdot, \vartheta)$, $\alpha = 0.05$.

3.7. Approximation der Güte

Es seien $Z_1, Z_2, \dots, Z_n, \dots$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit Kopula $C_A(\cdot, \vartheta_A)$, $\vartheta_A \in \Theta_A$, für ein $A \in \{C, F, G, N\}$. Weiter soll ein $\vartheta_H \in \Theta_H$, $H \neq A$, existieren, so dass für die Zufallsvariable $\sqrt{n}(\vartheta_n - \vartheta_H)$ die Voraussetzung **(A2)** erfüllt ist. Ferner wählen wir für das Maß μ das Lebesgue-Maß auf I^2 . Für

$$\Delta = \int_{I^2} [C_A(s, \vartheta_A) - C_H(s, \vartheta_H)]^2 ds$$

soll $\Delta > 0$ gelten.

Es sind z.B. $\Theta_C = (-1, \infty)$, $\Theta_F = (-\infty, \infty)$, $\Theta_G = (1, \infty)$ und $\Theta_N = (-1, 1)$. Weiter gelten $\vartheta_A = g_A(\tau)$, wobei

$$\tau = 4 \int_{I^2} C_A(s, \vartheta_A) dC_A(s, \vartheta_A) - 1$$

ist, sowie $\vartheta_H = g_H(\tau)$.

In dieser Situation ist die

$$\text{Hypothese } H_0 : C = C_H(\cdot, \vartheta_H) \text{ für ein } \vartheta_H \in \Theta_H$$

gegen die

$$\text{Alternative } H_1 : C = C_A(\cdot, \vartheta_A) \text{ für ein } \vartheta_A \in \Theta_A$$

zu testen.

Eine Approximation $\hat{\beta}_n$ der Güte $P_{\vartheta_A}(T_n > c_{n,\alpha})$ ist aufgrund des Satzes 2.13 durch

$$\hat{\beta}_n := 1 - \Phi\left(\sqrt{n/\sigma_{0,m}^2}(c_{n,\alpha}/n - \Delta)\right)$$

gegeben, wobei der kritische Wert $c_{n,\alpha}$ mit $H_{n,\vartheta_H}(t) = P_{\vartheta_H}(T_n \leq t)$ durch $c_{n,\alpha} = H_{n,\vartheta_H}^{-1}(1 - \alpha)$ mittels stochastischer Simulation gemäß Abschnitt 3.1 bestimmt wird. Den Wert Δ erhält man durch numerische Integration. Ferner wurde die Varianz σ_0^2 in (2.45) durch eine Monte Carlo-Approximation $\sigma_{0,m}^2$ ersetzt. Diese Approximation wird wie folgt bestimmt: Unter $C = C_A(\cdot, \vartheta_A)$ erhalten wir mit $s = (u, v) \in I^2$ und $z_1 = (u_1, v_1) \in I^2$

$$\begin{aligned} K(s) &= 2[C_A(s, \vartheta_A) - C_H(s, \vartheta_H)], \\ k(s, z_1) &= k_1(s, z_1) - k_2(s, z_1), \\ k_1(s, z_1) &= 1\{u_1 \leq u, v_1 \leq v\} - C_A(s, \vartheta_A) - \frac{\partial}{\partial u} C_A(s, \vartheta_A)(1\{u_1 \leq u\} - u) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} C_A(s, \vartheta_A)(1\{v_1 \leq v\} - v), \\ k_2(s, z_1) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_H(s, \vartheta_H) \cdot l(z_1, \vartheta_H). \end{aligned}$$

Dabei ist

$$l(z_1, \vartheta_H) = g'_H(g_H^{-1}(\vartheta_H)) \cdot 2 \cdot (4C_A(z_1, \vartheta_A) + 1 - 2u_1 - 2v_1 - g_H^{-1}(\vartheta_H)).$$

Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma_0(s, t) K(s) K(t) ds dt \\ &= \int_{I^2} \int_{I^2} E[k(s, Z_1) k(t, Z_1)] K(s) K(t) ds dt \\ &= E \int_{I^2} \int_{I^2} k(s, Z_1) k(t, Z_1) K(s) K(t) ds dt \\ &= E \left[\int_{I^2} k(s, Z_1) K(s) ds \right]^2 \\ &= E [f(Z_1)]^2, \end{aligned}$$

wobei $f(Z_1) := \int_{I^2} k(s, Z_1) K(s) ds$ ist. Sind nun $\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2, \dots$ stochastisch unabhängig mit gleicher Verteilung wie Z_1 , so gilt aufgrund des starken Gesetzes großer Zahlen

$$\sigma_{0,m}^2 := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [f(\tilde{Z}_i)]^2 \longrightarrow E [f(Z_1)]^2 = \sigma_0^2 \quad P - f.s.$$

für $m \rightarrow \infty$. Somit ist $\sigma_{0,m}^2$ für große m (z.B. $m = 1000$) eine gute Näherung für σ_0^2 . Bei der Berechnung von $\sigma_{0,m}^2$ werden Pseudo-Zufallsvektoren $\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_m$ benutzt, welche gemäß der Kopula $C_A(\cdot, \vartheta_A)$ unabhängig voneinander erzeugt werden (siehe Abschnitte 3.2 bis 3.5). Die Integrale

$$f(\tilde{Z}_i) = \int_{I^2} k(s, \tilde{Z}_i) K(s) ds, \quad i = 1, \dots, m,$$

erhält man durch numerische Integration. Bei den folgenden Berechnungen wurde die NAG-Routine `lag_multid_quad_adapt_1 (d01wcc)` verwendet.

Abschließend betrachten wir bei einem Test auf Clayton-Kopula die Güte unter der speziellen Alternative einer Gumbel-Kopula. Dazu sei der Stichprobenumfang n und Kendalls Tau τ gegeben. In Tabelle 3.18 sind Werte von $\sigma_{0,m}^2$ für $m = 1000$ und $\tau = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ aufgelistet. Die Approximationen $\hat{\beta}_n$, $n = 50, 100, 200, 400$, der Güte schließen sich in Tabelle 3.19 sowie Abbildung 3.17 an. In den Abbildungen 3.18 und 3.19 werden die Approximationen $\hat{\beta}_n$ für $n = 100, 200$ mit den Werten aus der Bootstrap-Simulationsstudie nach Tabelle 3.8 verglichen. Eine akzeptable Übereinstimmung liegt erst bei $n = 200$ sowie $\vartheta_G \leq 5$ vor (siehe Abb. 3.19). In beiden Abbildungen 3.18 und 3.19 sind die unter der Bootstrap-Simulationsstudie gewonnenen Werte für die Güte (deutlich) größer als die Werte der Approximation.

| τ | ϑ_C | ϑ_G | Δ | $\sigma_{0,m}^2$ |
|--------|---------------|---------------|------------|------------------|
| 0.1 | 0.22 | 1.11 | $3.99e-05$ | $6.36e-07$ |
| 0.2 | 0.50 | 1.25 | $1.30e-04$ | $1.70e-06$ |
| 0.3 | 0.86 | 1.43 | $2.27e-04$ | $2.55e-06$ |
| 0.4 | 1.33 | 1.67 | $2.92e-04$ | $2.82e-06$ |
| 0.5 | 2.00 | 2.00 | $3.01e-04$ | $2.08e-06$ |
| 0.6 | 3.00 | 2.50 | $2.52e-04$ | $1.34e-06$ |
| 0.7 | 4.67 | 3.33 | $1.63e-04$ | $6.70e-07$ |
| 0.8 | 8.00 | 5.00 | $7.07e-05$ | $1.44e-07$ |
| 0.9 | 18.00 | 10.00 | $1.23e-05$ | $3.54e-09$ |

Tabelle 3.18.: Test auf Clayton-Kopula bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula: Näherung $\sigma_{0,m}^2$ für σ_0^2 , $m = 1000$.

| τ | $\hat{\beta}_{50}$ | $\hat{\beta}_{100}$ | $\hat{\beta}_{200}$ | $\hat{\beta}_{400}$ |
|--------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0.1 | $3.22e-12$ | $6.83e-05$ | 0.019140 | 0.15405 |
| 0.2 | 0.000829 | 0.082122 | 0.412734 | 0.809888 |
| 0.3 | 0.024829 | 0.334026 | 0.786874 | 0.980921 |
| 0.4 | 0.102395 | 0.587084 | 0.935979 | 0.998133 |
| 0.5 | 0.150479 | 0.716567 | 0.977516 | 0.999759 |
| 0.6 | 0.159949 | 0.761113 | 0.985994 | 0.999912 |
| 0.7 | 0.087894 | 0.687193 | 0.980742 | 0.999852 |
| 0.8 | 0.000978 | 0.361876 | 0.942181 | 0.998581 |
| 0.9 | 0.0 | $8.29e-10$ | 0.211345 | 0.988980 |

Tabelle 3.19.: Test auf Clayton-Kopula: $\hat{\beta}_n$ bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula, $n = 50, 100, 200, 400$; $\alpha = 0.05$.

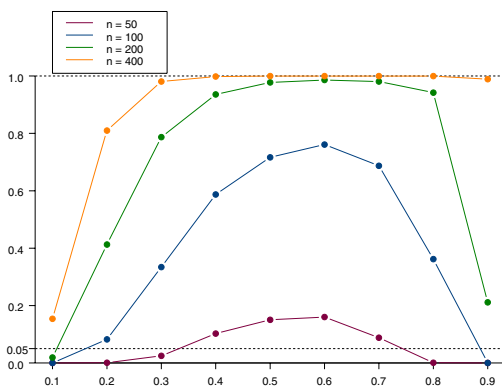


Abbildung 3.17.: Test auf Clayton-Kopula: Approximation der Güte bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula, $\tau = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$; $\alpha = 0.05$.

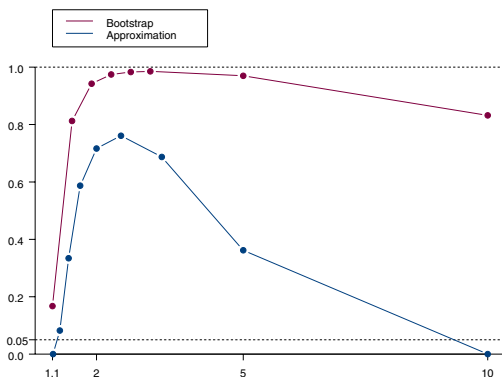


Abbildung 3.18.: Test auf Clayton-Kopula bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula : Vergleich der Approximation $\hat{\beta}_{100}$ mit Werten der Bootstrap-Simulationsstudie, $\vartheta_G = 1.11, 1.25, \dots, 5, 10$; $\alpha = 0.05$.

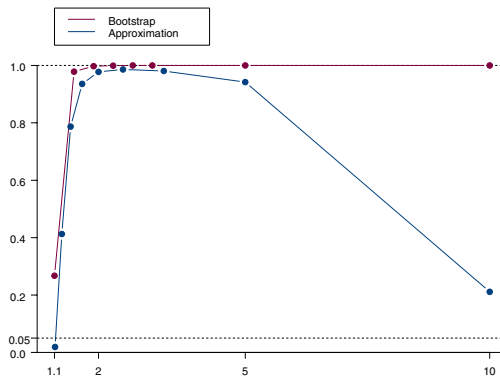


Abbildung 3.19.: Test auf Clayton-Kopula bei zu Grunde liegender Gumbel-Kopula: Vergleich der Approximation $\hat{\beta}_{200}$ mit Werten der Bootstrap-Simulationsstudie, $\vartheta_G = 1.11, 1.25, \dots, 5, 10$; $\alpha = 0.05$.

A. Hilberträume

In diesem Anhang stellen wir die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Hilberträumen bereit. Dabei beschränken wir uns auf die für diese Arbeit wesentlichen Punkte. Als Quellen für Abschnitt A.1 dienen [PA67], [LT91] und [KUN00]. In Abschnitt A.2 verweisen wir auf [KOL75], [IB78] und [GIH74].

Im Folgenden sei \mathbb{H} ein *reeller separabler Hilbertraum* mit *Skalarprodukt* $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, *kanonischer Norm* $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ und fest gewählter Orthonormalbasis $(e_k)_{k \geq 0}$. Weiter sei \mathbb{H} mit der *Borel- σ -Algebra* \mathcal{B} versehen. Ein linearer Operator $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ heißt *symmetrisch*, falls $\langle Sh_1, h_2 \rangle = \langle h_1, Sh_2 \rangle$ für alle $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$ gilt. Ein symmetrischer Operator $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ heißt *positiv*, falls $\langle Sh, h \rangle \geq 0$ für jedes $h \in \mathbb{H}$ gilt.

A.1. Zufallselemente in Hilberträumen

Definition A.1

Es sei \mathbf{X} ein \mathbb{H} -wertiges Zufallselement mit $E\|\mathbf{X}\| < \infty$ und $E\|\mathbf{X}\|^2 < \infty$. Das durch die Gleichung

$$\langle h, a \rangle = E\langle h, \mathbf{X} \rangle \quad \text{für jedes } h \in \mathbb{H} \quad (\text{A.1})$$

charakterisierte Element $a \in \mathbb{H}$ heißt *Erwartungswert* EX von \mathbf{X} . Das Zufallselement \mathbf{X} heißt *zentriert*, falls $EX = a = 0$ gilt. Der symmetrische positive Operator $S : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, der durch

$$\langle Sh, h \rangle = E[\langle h, \mathbf{X} - EX \rangle^2] \quad \text{für jedes } h \in \mathbb{H} \quad (\text{A.2})$$

definiert ist, heißt *Kovarianzoperator* $S_{\mathbf{X}}$ von \mathbf{X} ([PA67], S.154-155,168).

Bemerkung A.2

Es sei \mathbf{X} ein \mathbb{H} -wertiges Zufallselement mit $E\|\mathbf{X}\|^2 < \infty$. Aus der Symmetrie des linearen Operators $S_{\mathbf{X}}$ folgt

$$\begin{aligned} \langle S_{\mathbf{X}}h_1, h_2 \rangle &= E[\langle h_1, \mathbf{X} - EX \rangle \langle h_2, \mathbf{X} - EX \rangle] \\ &= Cov(\langle h_1, \mathbf{X} \rangle, \langle h_2, \mathbf{X} \rangle) \end{aligned}$$

für alle $h_1, h_2 \in \mathbb{H}$. Weiter gilt aufgrund der Parsevalschen Gleichung und dem Satz von der monotonen Konvergenz $E\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} E[\langle e_k, \mathbf{X} \rangle^2]$.

Definition A.3

Eine Folge $(P_n)_{n \geq 1}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{H}, \mathcal{B})$ heißt *straff*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Kompaktum $K \subset \mathbb{H}$ mit der Eigenschaft $P_n(K) \geq 1 - \varepsilon$ für jedes $n \geq 1$ existiert. Eine Folge $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ von \mathbb{H} -wertigen Zufallselementen heißt *straff*, wenn die Folge ihrer Verteilungen straff in $(\mathbb{H}, \mathcal{B})$ ist.

Definition A.4

Es seien $(P_n)_{n \geq 1}$ und P Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{H}, \mathcal{B})$. Die Folge $(P_n)_{n \geq 1}$ *konvergiert schwach* gegen P , falls gilt:

$$\int f(x)P_n(dx) \longrightarrow \int f(x)P(dx), \quad n \rightarrow \infty,$$

für jede stetige, beschränkte Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$. **Schreibweise:** $P_n \xrightarrow{\mathcal{D}} P$.

Es seien $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ und \mathbf{X} \mathbb{H} -wertige Zufallselemente. Die Folge $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ *konvergiert nach Verteilung* gegen \mathbf{X} , falls gilt:

$$Ef(\mathbf{X}_n) \longrightarrow Ef(\mathbf{X}), \quad n \rightarrow \infty,$$

für jede stetige, beschränkte Funktion $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$. **Schreibweise:** $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{X}$ ([LT91], S.39-41).

Das folgende Lemma ([LT91], S.41) beschreibt eine Charakterisierung der Verteilungskonvergenz.

Lemma A.5

Es seien $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$ und \mathbf{X} \mathbb{H} -wertige Zufallselemente. Dann gilt:

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathbf{X} \iff \begin{cases} \langle \mathbf{X}_n, h \rangle \xrightarrow{\mathcal{D}} \langle \mathbf{X}, h \rangle \text{ in } \mathbb{R} \text{ für jedes } h \in \mathbb{H} \\ (\mathbf{X}_n)_{n \geq 1} \text{ ist straff.} \end{cases}$$

Definition A.6

Ein \mathbb{H} -wertiges Zufallselement \mathbf{X} heißt *Gaußsches Zufallselement* in \mathbb{H} , wenn $\langle \mathbf{X}, h \rangle$ für jedes $h \in \mathbb{H}$ normalverteilt ist ([LT91], S.54-56). Für die zugehörige Verteilung schreibt man $\mathcal{N}(E\mathbf{X}, S_{\mathbf{X}})$.

Der Erwartungswert $E\mathbf{X}$ und der Kovarianzoperator $S_{\mathbf{X}}$ eines Gaußschen Zufallselements \mathbf{X} in \mathbb{H} existieren.

Satz A.7 (Zentraler Grenzwertsatz)

Es seien \mathbf{X} ein \mathbb{H} -wertiges Zufallselement und $(\mathbf{X}_i)_{i \geq 1}$ eine Folge unabhängiger \mathbb{H} -wertiger Zufallselemente mit derselben Verteilung wie \mathbf{X} . Gilt $E\mathbf{X} = 0$ und $E\|\mathbf{X}\|^2 < \infty$, so folgt

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, S_{\mathbf{X}}), \quad n \rightarrow \infty,$$

in \mathbb{H} , wobei $S_{\mathbf{X}}$ der Kovarianzoperator von \mathbf{X} ist ([LT91], S.272-273).

Den folgenden Zentralen Grenzwertsatz für Dreiecksschemata zitieren wir aus [KUN00], Theorem 1.1.

Satz A.8

Es sei $(e_k)_{k \geq 0}$ eine Orthonormalbasis von \mathbb{H} . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien $\mathbf{W}_{n1}, \mathbf{W}_{n2}, \dots, \mathbf{W}_{nm}$ unabhängige \mathbb{H} -wertige Zufallselemente mit $E\|\mathbf{W}_{nj}\|^2 < \infty$ und $E\langle e_k, \mathbf{W}_{nj} \rangle = 0$ für jedes $1 \leq j \leq n$ und $k \geq 0$. Es sei Γ_n der Kovarianzoperator von $\mathbf{W}_n := \sum_{j=1}^n \mathbf{W}_{nj}$. Die folgenden Bedingungen seien erfüllt:

- a) Der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Gamma_n e_k, e_l \rangle =: a_{kl}$ existiert für $k \geq 0$ und $l \geq 0$.
- b) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Gamma_n e_k, e_k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kk} < \infty$.
- c) Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\varepsilon, e_k) = 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $k \geq 0$, wobei

$$L_n(\varepsilon, h) := \sum_{j=1}^n E \langle \langle h, \mathbf{W}_{nj} \rangle^2 1_{\{|\langle h, \mathbf{W}_{nj} \rangle| > \varepsilon\}} \rangle$$

für $h \in \mathbb{H}$ ist.

Dann folgt

$$\mathbf{W}_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \Gamma), \quad n \rightarrow \infty,$$

in \mathbb{H} , wobei der Kovarianzoperator Γ durch $\langle \Gamma h, e_k \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} \langle h, e_j \rangle a_{jk}$ für jedes $k \geq 0$ charakterisiert ist.

A.2. L^2 -Raum, Gauß-Prozesse

Es sei μ das durch (2.27) definierte Maß auf den Borelmengen von I^2 . Der Raum

$$\mathcal{L}^2(I^2, \mathcal{B}^2 \cap I^2, d\mu) := \{f : I^2 \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ Borel-messbar, } \int_{I^2} f^2 d\mu < \infty\}$$

ist der Raum der Borel-messbaren reellwertigen Funktionen auf I^2 , welche bzgl. μ quadratisch integrierbar sind. Funktionen, die fast überall gleich sind, sollen identifiziert werden, d.h. mit der Menge $\mathcal{N}_0 := \{f \in \mathcal{L}^2(I^2, \mathcal{B}^2 \cap I^2, d\mu) : \int_{I^2} f^2 d\mu = 0\}$ gehen wir durch Äquivalenzklassenbildung zum Quotientenraum

$$L^2 := L^2(I^2, \mathcal{B}^2 \cap I^2, d\mu) := \mathcal{L}^2(I^2, \mathcal{B}^2 \cap I^2, d\mu) / \mathcal{N}_0 \quad (\text{A.3})$$

über. In L^2 führen wir durch

$$\langle [f_1], [f_2] \rangle_2 := \int_{I^2} f_1 f_2 d\mu, \quad [f_1], [f_2] \in L^2,$$

ein reelles Skalarprodukt ein und schreiben kurz

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 := \langle [f_1], [f_2] \rangle_2 = \int_{I^2} f_1 f_2 d\mu \quad (\text{A.4})$$

für $f_1 \in [f_1] \in L^2$ und $f_2 \in [f_2] \in L^2$. Die kanonische Norm ist durch

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle_2} = \left(\int_{I^2} f^2 d\mu \right)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

gegeben. Der Raum L^2 , versehen mit dem Skalarprodukt (A.4), ist ein separabler Hilbertraum (siehe [KOL75], S.380,382f).

Die folgenden Überlegungen stammen aus [IB78], S.1-13. Alle im Weiteren auftretenden Zufallselemente seien auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) definiert.

Definition A.9

Ein *Gauß-Prozess* \mathbf{Z} auf I^2 ist eine Familie $(\mathbf{Z}(t))_{t \in I^2}$ von Zufallsvariablen $\mathbf{Z}(\cdot, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, deren endlichdimensionale Verteilungen $P^{\mathbf{Z}(t_1), \dots, \mathbf{Z}(t_k)}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jede Wahl von $t_1, \dots, t_k \in I^2$ multivariat normalverteilt sind.

Ein Gauß-Prozess \mathbf{Z} ist eindeutig bestimmt durch seine *Erwartungswertfunktion*

$$m(t) := E[\mathbf{Z}(t)], \quad t \in I^2,$$

und seine *Kovarianzfunktion*

$$\begin{aligned} \gamma(s, t) &:= E[(\mathbf{Z}(s) - m(s))(\mathbf{Z}(t) - m(t))] \\ &= \text{Cov}(\mathbf{Z}(s), \mathbf{Z}(t)), \quad s, t \in I^2. \end{aligned}$$

Unter den Bedingungen

$$\lim_{s \rightarrow t} [m(s) - m(t)] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow t} [\gamma(s, s) - 2\gamma(s, t) + \gamma(t, t)] = 0$$

folgt $\lim_{s \rightarrow t} E[(\mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}(t))^2] = 0$ für jedes $t \in I^2$, d.h. Z ist stetig im quadratischen Mittel. Nach [GIH74], S.171, existiert dann ein messbarer stochastischer Prozess, der äquivalent zu \mathbf{Z} ist. Deshalb sei o.B.d.A. Z messbar. Mit

$$\int_{I^2} m^2(t) d\mu(t) < \infty \quad (\text{A.6})$$

und

$$\int_{I^2} \gamma(t, t) d\mu(t) < \infty \quad (\text{A.7})$$

folgt $\int_{I^2} E[\mathbf{Z}(t)]^2 d\mu(t) < \infty$. Mit dem Satz von Fubini kann man zeigen, dass fast alle Pfade $Z(\omega, \cdot)$ in L^2 liegen. Deswegen können wir im Folgenden von einem messbaren

Prozess \mathbf{Z} mit Pfaden in L^2 ausgehen. Dieser Prozess kann auch als Gaußsches Zufallselement in dem separablen Hilbertraum L^2 im Sinne von Definition A.6 aufgefasst werden. Dabei ist

$$\langle \mathbf{Z}, h \rangle_2 = \int_{I^2} \mathbf{Z}(t)h(t)d\mu(t)$$

für jedes $h \in L^2$ eine normalverteilte Zufallsvariable ([IB78], S.12).

Ist \mathbf{Z} ein L^2 -wertiges Zufallselement, so ergibt sich für jedes $h \in L^2$ durch Anwendung des Satzes von Fubini

$$E[\langle \mathbf{Z}, h \rangle_2] = E \left[\int_{I^2} \mathbf{Z}(t)h(t)d\mu(t) \right] = \int_{I^2} E[\mathbf{Z}(t)]h(t)d\mu(t) = \langle m, h \rangle_2.$$

Der Erwartungswert von \mathbf{Z} ist somit μ -fast sicher gleich der Erwartungswertfunktion m . Für *zentriertes* \mathbf{Z} ist der Kovarianzoperator $S_{\mathbf{Z}}$ nach (A.2) durch die Kovarianzfunktion γ eindeutig bestimmt, da in diesem Fall der Zusammenhang

$$\langle S_{\mathbf{Z}}h_1, h_2 \rangle_2 = E[\langle h_1, \mathbf{Z} \rangle_2 \langle h_2, \mathbf{Z} \rangle_2] = \int_{I^2} \int_{I^2} \gamma(s, t)h_1(s)h_2(t)d\mu(s)d\mu(t)$$

besteht.

B. Kovarianzfunktionen

B.1. Kovarianzfunktion γ

Es seien $s_1 := (u_1, v_1), s_2 := (u_2, v_2) \in I^2$ sowie die Funktionen $h_1(s_1) := h_1(s_1, U_1, V_1)$ nach (2.18) und $h_2(s_1) := h_2(s_1, U_1, V_1)$ nach (2.21) mit $(U_1, V_1) \sim C(\cdot, \vartheta)$ gegeben. Für $h(s_1) := h_1(s_1) - h_2(s_1)$ (vgl. mit (2.24)) ist die Erwartungswertfunktion $m(s_1) = E_\vartheta[h(s_1)]$ identisch null. Die Kovarianzfunktion γ von h gemäß (2.32) ist durch

$$\begin{aligned}
 \gamma(s_1, s_2) &= E_\vartheta[h(s_1)h(s_2)] \\
 &= E_\vartheta[(h_1(s_1) - h_2(s_1))(h_1(s_2) - h_2(s_2))] \\
 &= E_\vartheta[h_1(s_1)h_1(s_2)] - E_\vartheta[h_1(s_1)h_2(s_2)] \\
 &\quad - E_\vartheta[h_2(s_1)h_1(s_2)] + E_\vartheta[h_2(s_1)h_2(s_2)] \\
 &=: \gamma_1(s_1, s_2) - \gamma_2(s_1, s_2) - \gamma_3(s_1, s_2) + \gamma_4(s_1, s_2)
 \end{aligned}$$

gegeben. Dabei sind

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(s_1, s_2) &:= E_\vartheta[h_1(s_1)h_1(s_2)] \\
 &= C(\min(u_1, u_2), \min(v_1, v_2), \vartheta) - C(s_1, \vartheta)C(s_2, \vartheta) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial u}C(s_2, \vartheta)(C(\min(u_1, u_2), v_1, \vartheta) - C(s_1, \vartheta)u_2) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial v}C(s_2, \vartheta)(C(u_1, \min(v_1, v_2), \vartheta) - C(s_1, \vartheta)v_2) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta)(C(\min(u_1, u_2), v_2, \vartheta) - u_1C(s_2, \vartheta)) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta)\frac{\partial}{\partial u}C(s_2, \vartheta)(\min(u_1, u_2) - u_1u_2) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta)\frac{\partial}{\partial v}C(s_2, \vartheta)(C(u_1, v_2, \vartheta) - u_1v_2) \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta)(C(u_2, \min(v_1, v_2), \vartheta) - v_1C(s_2, \vartheta)) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta)\frac{\partial}{\partial u}C(s_2, \vartheta)(C(u_2, v_1, \vartheta) - u_2v_1) \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta)\frac{\partial}{\partial v}C(s_2, \vartheta)(\min(v_1, v_2) - v_1v_2),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2(s_1, s_2) &:= E_\vartheta[h_1(s_1)h_2(s_2)] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \cdot E_\vartheta \left[\left(1\{U_1 \leq u_1, V_1 \leq v_1\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta)1\{U_1 \leq u_1\} - \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta)1\{V_1 \leq v_1\} \right) l(U_1, V_1, \vartheta) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \cdot \left[\int_0^{u_1} \int_0^{v_1} l(u, v, \vartheta) dC(u, v, \vartheta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta) \int_0^{u_1} \int_0^1 l(u, v, \vartheta) dC(u, v, \vartheta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta) \int_0^1 \int_0^{v_1} l(u, v, \vartheta) dC(u, v, \vartheta) \right],
\end{aligned}$$

$$\gamma_3(s_1, s_2) := \gamma_2(s_2, s_1),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_4(s_1, s_2) &:= E_\vartheta[h_2(s_1)h_2(s_2)] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) E_\vartheta l^2(U_1, V_1, \vartheta) \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \int_0^1 \int_0^1 l^2(u, v, \vartheta) dC(u, v, \vartheta)
\end{aligned}$$

gesetzt.

Besitzt nun in (2.21) die Funktion $l(\cdot, \vartheta)$ die spezielle Gestalt (1.45), so ergibt sich mit der abkürzenden Schreibweise $a := g^{-1}(\vartheta)$ und $b := 1 - g^{-1}(\vartheta)$

$$\begin{aligned}
\gamma_2(s_1, s_2) &= E_\vartheta[h_1(s_1)h_2(s_2)] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \cdot 2g'(a) \cdot \\
&\quad \left[2E_\vartheta[1\{U_1 \leq u_1, V_1 \leq v_1\}]\{2C(U_1, V_1, \vartheta) - U_1 - V_1\}] + b C(s_1, \vartheta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta)\{2E_\vartheta[1\{U_1 \leq u_1\}]\{2C(U_1, V_1, \vartheta) - V_1\}] + bu_1 - u_1^2\} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta)\{2E_\vartheta[1\{V_1 \leq v_1\}]\{2C(U_1, V_1, \vartheta) - U_1\}] + bv_1 - v_1^2\} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \cdot 2g'(a) \cdot \\
&\quad \left[2 \int_0^{u_1} \int_0^{v_1} \{2C(u, v, \vartheta) - u - v\} dC(u, v, \vartheta) + b C(s_1, \vartheta) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial u}C(s_1, \vartheta) \left(2 \int_0^{u_1} \int_0^1 \{2C(u, v, \vartheta) - v\} dC(u, v, \vartheta) + bu_1 - u_1^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial v}C(s_1, \vartheta) \left(2 \int_0^1 \int_0^{v_1} \{2C(u, v, \vartheta) - u\} dC(u, v, \vartheta) + bv_1 - v_1^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_4(s_1, s_2) &= E_\vartheta[h_2(s_1)h_2(s_2)] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \cdot 4g'(a)^2 \cdot \\
&\quad \left[16E_\vartheta[C(U_1, V_1, \vartheta)(C(U_1, V_1, \vartheta) - U_1 - V_1)] \right. \\
&\quad \left. + 8E_\vartheta[U_1V_1] - a^2 + 2a + \frac{5}{3} \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s_2, \vartheta) \cdot 4g'(a)^2 \cdot \\
&\quad \left[16 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \vartheta)(C(u, v, \vartheta) - u - v) dC(u, v, \vartheta) \right. \\
&\quad \left. + 8 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v, \vartheta) - a^2 + 2a + \frac{5}{3} \right].
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung von γ_4 wurde dabei die Beziehung $g^{-1}(\vartheta) = 4E_\vartheta C(U_1, V_1, \vartheta) - 1$ verwendet ([NEL98], S.129).

B.2. Abschätzung von $E[h^2]$

Als Spezialfall der Kovarianzfunktion γ erhalten wir die Varianz von $h(s)$

$$\begin{aligned}
V_\vartheta(h(s)) &= \gamma(s, s) \\
&= E_\vartheta[h(s)^2] = E_\vartheta[(h_1 - h_2)^2] \\
&= E_\vartheta[h_1^2] - 2E_\vartheta[h_1h_2] + E_\vartheta[h_2^2],
\end{aligned} \tag{B.1}$$

wobei mit $s := (u, v) \in I^2$

$$\begin{aligned}
E_\vartheta[h_1^2] &= C(s, \vartheta)(1 - C(s, \vartheta)) \\
&\quad + \left[\frac{\partial}{\partial u}C(s, \vartheta) \right]^2 u(1 - u) + \left[\frac{\partial}{\partial v}C(s, \vartheta) \right]^2 v(1 - v) \\
&\quad - 2C(s, \vartheta) \left[\frac{\partial}{\partial u}C(s, \vartheta)(1 - u) + \frac{\partial}{\partial v}C(s, \vartheta)(1 - v) \right] \\
&\quad + 2 \frac{\partial}{\partial u}C(s, \vartheta) \frac{\partial}{\partial v}C(s, \vartheta) [C(s, \vartheta) - uv], \\
E_\vartheta[h_1h_2] &= \frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s, \vartheta) \cdot E_\vartheta \left[\left(1\{U_1 \leq u, V_1 \leq v\} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial u}C(s, \vartheta)1\{U_1 \leq u\} - \frac{\partial}{\partial v}C(s, \vartheta)1\{V_1 \leq v\} \right) l(U_1, V_1, \vartheta) \right], \\
E_\vartheta[h_2^2] &= \left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}C(s, \vartheta) \right]^2 E_\vartheta l^2(U_1, V_1, \vartheta)
\end{aligned}$$

sind. Aus $(h_1 - h_2)^2 \leq 2h_1^2 + 2h_2^2$ und (B.1) folgt für $E_\vartheta [h^2]$ die Abschätzung

$$E_\vartheta [h^2] \leq 2E_\vartheta [h_1^2] + 2E_\vartheta [h_2^2]. \quad (\text{B.2})$$

Die Kopula ist eine bivariate Verteilungsfunktion und deshalb beschränkt. Ebenso ist

$$\frac{\partial}{\partial u} C(s, \vartheta) = P_\vartheta(V_1 \leq v | U_1 = u)$$

eine bedingte Verteilungsfunktion ([NEL98], S.36). Wegen $\max_{0 \leq u \leq 1} u(1-u) = 1/4$ und

$$\max_{0 \leq u, v \leq 1} [C(u, v, \vartheta) - uv] \leq \max_{0 \leq u, v \leq 1} [\min(u, v) - uv] = \frac{1}{4}$$

erhält man

$$E_\vartheta [h_1^2] \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Die Varianz $\sigma_2(\vartheta)$ ist endlich nach (1.29), weshalb

$$E_\vartheta [h_2^2] \leq M_{1,\vartheta}^2 \sigma_2(\vartheta) < \infty$$

erfüllt ist. Insgesamt gilt

$$E_\vartheta [h^2] \leq 2 \left(\frac{5}{4} + M_{1,\vartheta}^2 \sigma_2(\vartheta) \right) < \infty.$$

B.3. Kovarianzfunktion γ_0

Es seien $s_1 := (u_1, v_1), s_2 := (u_2, v_2) \in I^2$ sowie die Funktionen $k_1(s_1, Z_1)$ nach (2.47), $k_2(s_1, Z_1)$ nach (2.48) und $k(s_1, Z_1) = k_1(s_1, Z_1) - k_2(s_1, Z_1)$ mit $Z_1 = (X_1, Y_1) \sim C$ gegeben. Wie in Anhang B.1 erhält man für γ_0 die Darstellung

$$\begin{aligned} \gamma_0(s_1, s_2) &= E[k(s_1, Z_1)k(s_2, Z_1)] \\ &= \gamma_{0,1}(s_1, s_2) - \gamma_{0,2}(s_1, s_2) - \gamma_{0,3}(s_1, s_2) + \gamma_{0,4}(s_1, s_2). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \gamma_{0,1}(s_1, s_2) &:= E[k_1(s_1, Z_1)k_1(s_2, Z_1)] \\ &= C(\min(u_1, u_2), \min(v_1, v_2)) - C(s_1)C(s_2) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} C(s_2)(C(\min(u_1, u_2), v_1) - C(s_1)u_2) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial v} C(s_2)(C(u_1, \min(v_1, v_2)) - C(s_1)v_2) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial u} C(s_1)(C(\min(u_1, u_2), v_2) - u_1 C(s_2)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u} C(s_1) \frac{\partial}{\partial u} C(s_2)(\min(u_1, u_2) - u_1 u_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial u} C(s_1) \frac{\partial}{\partial v} C(s_2) (C(u_1, v_2) - u_1 v_2) \\
& - \frac{\partial}{\partial v} C(s_1) (C(u_2, \min(v_1, v_2)) - v_1 C(s_2)) \\
& + \frac{\partial}{\partial v} C(s_1) \frac{\partial}{\partial u} C(s_2) (C(u_2, v_1) - u_2 v_1) \\
& + \frac{\partial}{\partial v} C(s_1) \frac{\partial}{\partial v} C(s_2) (\min(v_1, v_2) - v_1 v_2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,2}(s_1, s_2) & := E[k_1(s_1, Z_1)k_2(s_2, Z_1)] \\
& = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_2, \vartheta) \cdot \left[\int_0^{u_1} \int_0^{v_1} l(u, v, \vartheta) dC(u, v) \right. \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial u} C(s_1) \int_0^{u_1} \int_0^1 l(u, v, \vartheta) dC(u, v) \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} C(s_1) \int_0^1 \int_0^{v_1} l(u, v, \vartheta) dC(u, v) \right],
\end{aligned}$$

$$\gamma_{0,3}(s_1, s_2) := \gamma_{0,2}(s_2, s_1),$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,4}(s_1, s_2) & := E[k_2(s_1, Z_1)k_2(s_2, Z_1)] \\
& = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_2, \vartheta) \int_0^1 \int_0^1 l^2(u, v, \vartheta) dC(u, v)
\end{aligned}$$

gesetzt.

Besitzt nun in (2.48) die Funktion $l(\cdot, \vartheta)$ die spezielle Gestalt (2.49), so ergibt sich mit den Abkürzungen $a := g^{-1}(\vartheta)$ und $b := 1 - g^{-1}(\vartheta)$

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,2}(s_1, s_2) & = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_2, \vartheta) \cdot 2g'(a) \cdot \\
& \quad \left[2 \int_0^{u_1} \int_0^{v_1} \{2C(u, v) - u - v\} dC(u, v) + b C(s_1) \right. \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial u} C(s_1) \left(2 \int_0^{u_1} \int_0^1 \{2C(u, v) - v\} dC(u, v) + bu_1 - u_1^2 \right) \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial v} C(s_1) \left(2 \int_0^1 \int_0^{v_1} \{2C(u, v) - u\} dC(u, v) + bv_1 - v_1^2 \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{0,4}(s_1, s_2) & = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_2, \vartheta) \cdot 4g'(a)^2 \cdot \\
& \quad \left[16 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) (C(u, v) - u - v) dC(u, v) \right. \\
& \quad \left. + 8 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - a^2 + 2a + \frac{5}{3} \right].
\end{aligned}$$

In der Darstellung von $\gamma_{0,2}$ und $\gamma_{0,4}$ treten Integrale bzgl. $dC(u, v)$ auf. Der folgende Satz stellt für diese Integrale alternative Darstellungen zur Verfügung, wobei die dort vorkommenden Integrale bzgl. $d(u, v)$ integriert werden. Als Vorlage für den folgenden Satz und Beweis dient [NEL98], Theorem 5.1.5., S.131. Nach dem *Lebesgueschen Integrierbarkeitskriterium* ([HEU91B], S.446) ist eine Funktion auf I^2 Riemann-integrierbar, falls sie dort beschränkt und fast überall stetig ist. Mit der Voraussetzung, dass C eine Funktion aus $C^1((0, 1)^2)$ ist, sowie [NEL98], S.36, ist somit die Existenz aller im Weiteren auftretenden (Riemann-)Integrale gesichert.

Satz B.1

Es sei C eine Funktion aus $C^1((0, 1)^2)$. Ferner sei

$$\partial_{u,v}C(u, v) := \frac{\partial}{\partial u}C(u, v) \cdot \frac{\partial}{\partial v}C(u, v).$$

Dann gilt für $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in I^2$

$$\int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} C(u, v) dC(u, v) = \frac{1}{2}C(\tilde{u}, \tilde{v})^2 - \int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} \partial_{u,v}C(u, v) d(u, v), \quad (\text{B.4})$$

$$\int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} u dC(u, v) = \tilde{u}C(\tilde{u}, \tilde{v}) - \int_0^{\tilde{u}} C(u, \tilde{v}) du, \quad (\text{B.5})$$

$$\int_0^1 \int_0^1 C(u, v)^2 dC(u, v) = \frac{1}{3} - 2 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \partial_{u,v}C(u, v) d(u, v), \quad (\text{B.6})$$

$$\int_0^1 \int_0^1 u C(u, v) dC(u, v) = \frac{1}{3} - \int_0^1 \int_0^1 u \partial_{u,v}C(u, v) d(u, v), \quad (\text{B.7})$$

$$\int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) d(u, v). \quad (\text{B.8})$$

BEWEIS: Es sei zunächst C absolut stetig, d.h. C besitze die Dichte $\partial^2/\partial u \partial v C$. Man erhält dann die Beziehungen (B.4) bis (B.8) durch partielle Integration. Für (B.4) führen wir exemplarisch die partielle Integration durch. Es gilt

$$\int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} C(u, v) dC(u, v) = \int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} C(u, v) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, v) d(u, v).$$

Für das innere Integral bzgl. du folgt

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{u}} C(u, v) \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \right] du &= \left[C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \right]_0^{\tilde{u}} - \int_0^{\tilde{u}} \partial_{u,v} C(u, v) du \\ &= C(\tilde{u}, v) \frac{\partial}{\partial v} C(\tilde{u}, v) - \int_0^{\tilde{u}} \partial_{u,v} C(u, v) du \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$\begin{aligned} \int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} C(u, v) dC(u, v) &= \int_0^{\tilde{v}} \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{2} C(\tilde{u}, v)^2 \right] dv - \int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} \partial_{u,v} C(u, v) d(u, v) \\ &= \frac{1}{2} C(\tilde{u}, \tilde{v})^2 - \int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} \partial_{u,v} C(u, v) d(u, v). \end{aligned}$$

Den Beweis im allgemeinen Fall führen wir mit Riemann-Summen. Es sei $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_m = \tilde{u} \leq 1$ eine Partition von $[0, \tilde{u}]$ bzw. $0 = v_0 < v_1 < \dots < v_n = \tilde{v} \leq 1$ eine Partition von $[0, \tilde{v}]$. In (B.6) bis (B.8) sind $\tilde{u} = \tilde{v} = 1$. Ferner seien $\Delta u_i := u_i - u_{i-1}$, $i = 1, \dots, m$, und $\Delta v_j := v_j - v_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$, sowie mit $R_{ij} := [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j]$

$$V_C(R_{ij}) := C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j) - C(u_i, v_{j-1}) + C(u_{i-1}, v_{j-1})$$

für $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ gegeben.

Mit

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C(u_i, v_j) V_C(R_{ij}), \\ B_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[C(u_i, v_j)^2 - C(u_i, v_j) C(u_i, v_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - C(u_{i-1}, v_j)^2 + C(u_{i-1}, v_j) C(u_{i-1}, v_{j-1}) \right], \\ C_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)] [C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})] \end{aligned}$$

folgt

$$A_{m,n} = B_{m,n} - C_{m,n}.$$

Die Summe $A_{m,n}$ ist eine Riemann-Summe für die linke Seite von (B.4) und

$$C_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\frac{C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)}{\Delta u_i} \right] \left[\frac{C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})}{\Delta v_j} \right] \Delta u_i \Delta v_j$$

eine Riemann-Summe für das Integral auf der rechten Seite von (B.4). Summiert man bei $B_{m,n}$ zuerst über den Index i , so folgt

$$\begin{aligned} B_{m,n} &= \sum_{j=1}^n [C(\tilde{u}, v_j)^2 - C(\tilde{u}, v_j) C(\tilde{u}, v_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n C(\tilde{u}, v_j) \left[\frac{C(\tilde{u}, v_j) - C(\tilde{u}, v_{j-1})}{\Delta v_j} \right] \Delta v_j, \end{aligned}$$

d.h. $B_{m,n}$ ist eine Riemann-Summe für

$$\int_0^{\tilde{v}} C(\tilde{u}, v) \frac{\partial}{\partial v} C(\tilde{u}, v) dv = \frac{1}{2} C(\tilde{u}, \tilde{v})^2.$$

Insgesamt ist (B.4) nachgewiesen.

Wir zeigen

$$\int_0^{\tilde{u}} \int_0^{\tilde{v}} u dC(u, v) + \int_0^{\tilde{u}} C(u, \tilde{v}) du = \tilde{u}C(\tilde{u}, \tilde{v}). \quad (\text{B.9})$$

Die Ausdrücke

$$A_{m,n} := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i V_C(R_{ij})$$

und

$$B_m := \sum_{i=1}^m C(u_{i-1}, \tilde{v}) \Delta u_i$$

bilden Riemann-Summen für die Integrale auf der linken Seite von (B.9). Es gilt

$$\begin{aligned} A_{m,n} + B_m &= \sum_{i=1}^m u_i \sum_{j=1}^n \left\{ [C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)] \right. \\ &\quad \left. - [C(u_i, v_{j-1}) - C(u_{i-1}, v_{j-1})] \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^m C(u_{i-1}, \tilde{v}) \Delta u_i \\ &= \sum_{i=1}^m u_i [C(u_i, \tilde{v}) - C(u_{i-1}, \tilde{v})] + \sum_{i=1}^m C(u_{i-1}, \tilde{v}) [u_i - u_{i-1}] \\ &= \tilde{u}C(\tilde{u}, \tilde{v}). \end{aligned}$$

Somit ist (B.5) gezeigt.

Zum Nachweis von (B.6) seien

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C(u_i, v_j)^2 V_C(R_{ij}), \\ B_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[C(u_i, v_j)^3 - C(u_i, v_j)^2 C(u_i, v_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. - C(u_{i-1}, v_j)^3 + C(u_{i-1}, v_j)^2 C(u_{i-1}, v_{j-1}) \right], \\ C_{1,m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ C(u_i, v_j) [C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)] \right. \\ &\quad \left. \cdot [C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})] \right\}, \\ C_{2,m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left\{ C(u_{i-1}, v_j) [C(u_i, v_j) - C(u_{i-1}, v_j)] \right. \\ &\quad \left. \cdot [C(u_{i-1}, v_j) - C(u_{i-1}, v_{j-1})] \right\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$A_{m,n} = B_{m,n} - (C_{1,m,n} + C_{2,m,n}).$$

Wegen

$$\begin{aligned} B_{m,n} &= \sum_{j=1}^n [C(1, v_j)^3 - C(1, v_j)^2 C(1, v_{j-1})] \\ &= \sum_{j=1}^n [v_j^3 - v_j^2 v_{j-1}] = \sum_{j=1}^n v_j^2 \Delta v_j \end{aligned}$$

ist $B_{m,n}$ eine Riemann-Summe für $\int_0^1 v^2 dv = 1/3$. Die Summe $A_{m,n}$ ist eine Riemann-Summe für die linke Seite von (B.6) und $C_{1,m,n}$ bzw. $C_{2,m,n}$ eine Riemann-Summe für das Integral auf der rechten Seite von (B.6). Damit gilt (B.6).

Um (B.7) zu zeigen, setzen wir

$$\begin{aligned} A_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i C(u_i, v_j) V_C(R_{ij}), \\ B_{m,n} &:= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[u_i C(u_i, v_j)^2 - u_i C(u_i, v_j) C(u_{i-1}, v_j) \right. \\ &\quad \left. - u_i C(u_i, v_{j-1})^2 + u_i C(u_i, v_{j-1}) C(u_{i-1}, v_{j-1}) \right] \end{aligned}$$

sowie

$$C_{m,n} := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_i [C(u_i, v_{j-1}) - C(u_{i-1}, v_{j-1})] [C(u_i, v_j) - C(u_i, v_{j-1})].$$

Offenbar gilt

$$A_{m,n} = B_{m,n} - C_{m,n}.$$

Es ist $A_{m,n}$ eine Riemann-Summe für die linke Seite von (B.7). Für $B_{m,n}$ gilt

$$\begin{aligned} B_{m,n} &= \sum_{i=1}^m [u_i C(u_i, 1)^2 - u_i C(u_i, 1) C(u_{i-1}, 1)] \\ &= \sum_{i=1}^m [u_i^3 - u_i^2 u_{i-1}] = \sum_{i=1}^m u_i^2 \Delta u_i. \end{aligned}$$

Somit ist $B_{m,n}$ eine Riemann-Summe für $\int_0^1 u^2 du = 1/3$. Die Summe $C_{m,n}$ ist eine Riemann-Summe für das Integral auf der rechten Seite von (B.7). Insgesamt ist damit (B.7) gezeigt.

Die Gleichung (B.8) gilt, da für zwei Kopulae C_1 und C_2 die Gleichheit

$$\int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 C_1(u, v) dC_2(u, v)$$

besteht ([NEL98], S.127f). Mit $C_1 = C$ und $C_2 = C^\perp$ ist (B.8) gezeigt und der Beweis von Satz B.1 erbracht.

Für $\gamma_{0,2}$ und $\gamma_{0,4}$ erhalten wir mit Satz B.1 und der Abkürzung $c := 1 + g^{-1}(\vartheta)$ jeweils die Darstellung

$$\begin{aligned} \gamma_{0,2}(s_1, s_2) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_2, \vartheta) \cdot 2g'(a) \cdot \\ &\quad \left[2 \left\{ \int_0^{u_1} C(u, v_1) du + \int_0^{v_1} C(u_1, v) dv \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \int_0^{u_1} \int_0^{v_1} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) d(u, v) \right\} \right. \\ &\quad + 2C(s_1)^2 + (b - 2u_1 - 2v_1)C(s_1) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u} C(s_1) \left(2 \left\{ 2 \int_0^{u_1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) d(u, v) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 C(u_1, v) dv \right\} - u_1^2 + cu_1 \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v} C(s_1) \left(2 \left\{ 2 \int_0^1 \int_0^{v_1} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) d(u, v) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 C(u, v_1) du \right\} - v_1^2 + cv_1 \right) \Big], \\ \gamma_{0,4}(s_1, s_2) &= \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_1, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(s_2, \vartheta) \cdot 4g'(a)^2 \cdot \\ &\quad \left[16 \int_0^1 \int_0^1 [u + v - 2C(u, v)] \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) d(u, v) \right. \\ &\quad \left. + 8 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) d(u, v) - a^2 + 2a - \frac{11}{3} \right]. \end{aligned}$$

B.4. Nichtparametrischer Schätzer für γ_0

In diesem Abschnitt wird ein Ansatz für einen nichtparametrischen Schätzer $\hat{\gamma}_{0,n}$ für γ_0 vorgestellt. Zuvor entwickeln wir einen nichtparametrischen Schätzer für die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Kopula C .

Die Ableitungen sind Grenzwerte von *Differenzenquotienten*, d.h. es gilt z.B. für $h > 0$

$$\frac{\partial}{\partial u} C(u, v) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(u+h, v) - C(u, v)}{h} \quad (\text{B.10})$$

für $0 < u, v < 1$ mit $u + h \leq 1$. Wir ersetzen auf der rechten Seite von (B.10) die Kopula C durch die empirische Kopula C_n und erhalten mit $h = h_n > 0$ und

$$u_n := \min(u + h_n, 1)$$

die Definition

$$\partial_{n,u} C_n(u, v) := \frac{1}{h_n} [C_n(u_n, v) - C_n(u, v)] \quad (\text{B.11})$$

für $0 \leq u, v \leq 1$. Damit das Integral auf der linken Seite von (B.14) wohldefiniert ist, umfasst Definition (B.11) alle $(u, v) \in I^2$. Im Folgenden wird gezeigt, dass $\partial_{n,u} C_n$ marginal-verteilungsfrei und L^2 -konsistent für $\partial/\partial u C$ ist, falls für die *Bandbreite* h_n

$$h_n \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (\text{B.12})$$

mit einer noch zu bestimmenden Konvergenzgeschwindigkeit gilt. Der Schätzer $\partial_{n,u} C_n$ ist marginal-verteilungsfrei, da C_n marginal-verteilungsfrei ist. Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\begin{aligned} c_{1,n}(u, v) &:= \frac{1}{h_n} [C_n(u_n, v) - C(u_n, v)], \\ f_n(u, v) &:= \frac{1}{h_n} [C(u_n, v) - C(u, v)], \\ f(u, v) &:= \frac{\partial}{\partial u} C(u, v), \\ c_{2,n}(u, v) &:= \frac{1}{h_n} [C(u, v) - C_n(u, v)], \\ g_n(u, v) &:= |f_n(u, v) - f(u, v)| \end{aligned}$$

gilt

$$\partial_{n,u} C_n(u, v) - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) = c_{1,n}(u, v) + [f_n(u, v) - f(u, v)] + c_{2,n}(u, v)$$

sowie

$$\left| \partial_{n,u} C_n(u, v) - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \right| \leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{1,n}(u, v)| + g_n(u, v) + \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)|. \quad (\text{B.13})$$

Wegen

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C_n(u_n, v) - C(u_n, v)| \leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C_n(u, v) - C(u, v)|$$

folgt

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{1,n}(u, v)| \leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)|.$$

Weiter erhält man aus (B.13)

$$\left[\partial_{n,u} C_n(u, v) - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \right]^2 \leq 8 \left[\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)| \right]^2 + 2g_n^2(u, v)$$

sowie

$$\int_{I^2} \left[\partial_{n,u} C_n(u, v) - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \right]^2 dudv \leq 8 \left[\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)| \right]^2 \quad (\text{B.14})$$

$$+ 2 \int_{I^2} g_n^2(u, v) dudv. \quad (\text{B.15})$$

Zunächst zeigen wir, dass mit einer geeigneten Konvergenzgeschwindigkeit von h_n die Konvergenz

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)| \longrightarrow 0 \quad P - f.s.$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C_n(u, v) - C(u, v)| &= \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{H}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - C(u, v)| \\ &\leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{H}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) \\ &\quad - C(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v))| \\ &\quad + \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - C(u, v)| \\ &\leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{H}_n(u, v) - C(u, v)| \\ &\quad + \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - C(u, v)| \\ &=: D_{1n} + D_{2n}. \end{aligned}$$

Nach [WI73], S.282, gilt das *Gesetz vom iterierten Logarithmus*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{nD_{1n}}{(2n \log \log n)^{1/2}} = \frac{1}{2} \quad P - f.s.$$

Dabei wurde benutzt, dass C stetig ist. Es folgt ferner

$$D_{1,n} = O(n^{-1/2}(\log \log n)^{1/2}) \quad P - f.s.$$

(vgl. mit [GS79], S.202). Mit der sog. *Lipschitz-Bedingung* einer Kopula ([NEL98], S.9) gilt

$$|C(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - C(u, v)| \leq |\tilde{F}_n^{-1}(u) - u| + |\tilde{G}_n^{-1}(v) - v|.$$

Aus [GS87], S.14, entnehmen wir die Konvergenzaussagen

$$\sup_{0 \leq u \leq 1} |\tilde{F}_n^{-1}(u) - u| = O(n^{-1/2}(\log \log n)^{1/2}) \quad P - f.s.$$

und

$$\sup_{0 \leq v \leq 1} |\check{G}_n^{-1}(v) - v| = O(n^{-1/2}(\log \log n)^{1/2}) \quad P - f.s.$$

Somit folgt

$$D_{2,n} = O(n^{-1/2}(\log \log n)^{1/2}) \quad P - f.s.$$

Insgesamt gilt

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |C_n(u, v) - C(u, v)| = O(n^{-1/2}(\log \log n)^{1/2}) \quad P - f.s., \quad (\text{B.16})$$

also

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)| = \frac{1}{h_n} O(n^{-1/2}(\log \log n)^{1/2}) \quad P - f.s.$$

und somit

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |c_{2,n}(u, v)| \longrightarrow 0 \quad P - f.s.$$

für $n \rightarrow \infty$, falls die Bedingung

$$\frac{\log \log n}{h_n^2 n} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (\text{B.17})$$

erfüllt ist.

Wir betrachten nun den Term in (B.15). Wegen

$$f_n(u, v) \longrightarrow f(u, v), \quad 0 < u, v < 1,$$

für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$g_n(u, v) \longrightarrow 0, \quad 0 < u, v < 1,$$

für $n \rightarrow \infty$. Nach [NEL98], S.9 und S.36, gilt $g_n^2 \leq 4$. Eine Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz liefert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{I^2} g_n^2(u, v) dudv = \int_{I^2} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n^2(u, v) dudv = 0.$$

Somit ist gezeigt, dass der Schätzer $\partial_{n,u} C_n$ L^2 -konsistent für $\partial/\partial u C$ ist, falls h_n die Bedingungen (B.12) und (B.17) erfüllt.

Als Bandbreite wählen wir nun $h_n = n^{-1/4}$. Um die Konvergenzgeschwindigkeit von $(h_n)_{n \geq 1}$ zu berücksichtigen, ändern wir die Definition in (B.11) wie folgt:

$$\partial_{n,u} C_n(u, v) := \frac{1}{k_n} [C_n(u_n, v) - C_n(u, v)], \quad (\text{B.18})$$

Dabei sind

$$u_n := \max(0, \min(u + k_n, 1)),$$

$$k_n := \begin{cases} -n^{-1/4}, & u > 1/2, \\ n^{-1/4}, & u \leq 1/2. \end{cases}$$

Analog definiert man einen nichtparametrischen Schätzer für $\partial/\partial v C$ durch

$$\partial_{n,v} C_n(u, v) := \frac{1}{l_n} [C_n(u, v_n) - C_n(u, v)], \quad (\text{B.19})$$

wobei

$$v_n := \max(0, \min(v + l_n, 1)),$$

$$l_n := \begin{cases} -n^{-1/4}, & v > 1/2, \\ n^{-1/4}, & v \leq 1/2. \end{cases}$$

sind.

Aufgrund von (B.3) setzen wir als nichtparametrischen Schätzer für γ_0

$$\hat{\gamma}_{0,n} := \hat{\gamma}_{0,1,n} - \hat{\gamma}_{0,2,n} - \hat{\gamma}_{0,3,n} + \hat{\gamma}_{0,4,n}, \quad (\text{B.20})$$

wobei $\hat{\gamma}_{0,i,n}$ eine empirische Version von $\gamma_{0,i,n}$, $i = 1, 2, 3, 4$, ist. Diese empirische Versionen erhält man, indem an den entsprechenden Stellen C durch C_n , ϑ durch $\hat{\vartheta}_n$, $\partial/\partial u C$ durch (B.18) sowie $\partial/\partial v C$ durch (B.19) ersetzt wird.

B.5. Schätzer für σ_0^2

Wir ersetzen K und γ_0 in (2.46) durch deren empirische Versionen

$$\hat{K}_n(s) := 2 [C_n(s) - C(s, \hat{\vartheta}_n)]$$

bzw. $\hat{\gamma}_{0,n}(s, t)$ nach (B.20), d.h es wird

$$\hat{\sigma}_{0,n}^2 := \int_{I^2} \int_{I^2} \hat{\gamma}_{0,n}(s, t) \hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t) d\mu(s) d\mu(t)$$

gesetzt. Wir zeigen im Folgenden, dass $\hat{\sigma}_{0,n}^2$ ein konsistenter Schätzer für σ_0^2 ist. Dazu gelte zunächst für den Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ des Kopulaparameters die Voraussetzung

$$\hat{\vartheta}_n \longrightarrow \vartheta \quad P - f.s.$$

für $n \rightarrow \infty$. Es ergibt sich folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\hat{\sigma}_{0,n}^2 - \sigma_0^2| \\
&\leq \int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{\gamma}_{0,n}(s, t) \hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t) - \gamma_0(s, t) K(s) K(t)| d\mu(s) d\mu(t) \\
&\leq \int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t)| |\hat{\gamma}_{0,n}(s, t) - \gamma_0(s, t)| d\mu(s) d\mu(t) \\
&\quad + \int_{I^2} \int_{I^2} |\gamma_0(s, t)| |\hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t) - K(s) K(t)| d\mu(s) d\mu(t) \\
&\leq 16 \int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{\gamma}_{0,n}(s, t) - \gamma_0(s, t)| d\mu(s) d\mu(t) \\
&\quad + 2 \left(\frac{5}{4} + M_{1,\vartheta}^2 \sigma_2(\vartheta) \right) \int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t) - K(s) K(t)| d\mu(s) d\mu(t).
\end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aus $|\hat{K}_n| \leq 4$ und den Überlegungen von Anhang B.2. Weiter gilt mit (B.20) und (B.3)

$$\int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{\gamma}_{0,n}(s, t) - \gamma_0(s, t)| d\mu(s) d\mu(t) \leq \sum_{i=1}^4 \int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{\gamma}_{0,i,n}(s, t) - \gamma_{0,i}(s, t)| d\mu(s) d\mu(t).$$

Wegen der P -f.s. Konvergenz von C_n und $\hat{\vartheta}_n$ gegen C bzw. ϑ sowie der L^2 -Konsistenz von $\partial_{n,u} C_n$ und $\partial_{n,v} C_n$ für $\partial/\partial u C$ bzw. $\partial/\partial v C$ erhält man durch Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz die Konvergenzaussage

$$\int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{\gamma}_{0,i,n}(s, t) - \gamma_{0,i}(s, t)| d\mu(s) d\mu(t) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.s.}$$

für $n \rightarrow \infty$ und $i = 1, 2, 3, 4$. Ferner gilt

$$\hat{K}_n(s) = 2 [C_n(s) - C(s, \hat{\vartheta}_n)] \rightarrow 2 [C(s) - C(s, \vartheta)] = K(s) \quad P\text{-f.s.}$$

für $n \rightarrow \infty$ und somit

$$|\hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t) - K(s) K(t)| \rightarrow 0 \quad P\text{-f.s.}$$

für $n \rightarrow \infty$. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz folgt

$$\int_{I^2} \int_{I^2} |\hat{K}_n(s) \hat{K}_n(t) - K(s) K(t)| d\mu(s) d\mu(t) \rightarrow 0 \quad P\text{-f.s.}$$

für $n \rightarrow \infty$. Insgesamt gilt

$$|\hat{\sigma}_{0,n}^2 - \sigma_0^2| \rightarrow 0 \quad P\text{-f.s.}$$

für $n \rightarrow \infty$. Unter der Voraussetzung $\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P} \vartheta$ erhält man mit dem Teilfolgenkriterium für stochastische Konvergenz die Konsistenz $|\hat{\sigma}_{0,n}^2 - \sigma_0^2| = o_P(1)$.

C. Beweis von Satz 2.8

Der geschätzte empirische Koptula-Prozess $\sqrt{n}\delta_n$ hat nach (2.23) die Darstellung

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\delta_n(s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n h(s, Z_i) + \varepsilon_n(s), \quad s := (u, v) \in I^2, \\ &= W_n(s) + \varepsilon_n(s),\end{aligned}$$

wobei $Z_i := (U_i, V_i) \sim C(\cdot, \vartheta)$, $i \geq 1$, und $W_n(\cdot) := 1/\sqrt{n} \sum_{i=1}^n h(\cdot, Z_i)$ gesetzt sind.

C.1. Grenzverteilung von W_n

Die Zufallsvariablen $h(s, Z_1), h(s, Z_2), \dots, h(s, Z_n)$ sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Aufgrund der Definition von h in (2.24) und einer einfachen Rechnung ergibt sich $E_\vartheta h(s, Z_1) = 0$. In Abschnitt B.2 wurde bereits $V_\vartheta(h(s, Z_1)) < \infty$ gezeigt. Die Zufallselemente $h(\cdot, Z_1), h(\cdot, Z_2), \dots, h(\cdot, Z_n)$ des Hilbertraumes L^2 sind stochastisch unabhängig und identisch verteilt. Aufgrund der charakterisierenden Gleichung (A.1) für den Erwartungswert $E_\vartheta h(\cdot, Z_1)$ berechnen wir durch Anwendung des Satzes von Fubini und $E_\vartheta h(s, Z_1) = 0$ für ein beliebiges $f \in L^2$

$$\begin{aligned}E_\vartheta \langle f, h(\cdot, Z_1) \rangle_2 &= E_\vartheta \int_{I^2} h(s, Z_1) f(s) d\mu(s) \\ &= \int_{I^2} [E_\vartheta h(s, Z_1)] f(s) d\mu(s) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit Definition A.1 für den Erwartungswert:

$$E_\vartheta h(\cdot, Z_1) = 0.$$

Wiederum durch Anwendung des Satzes von Fubini und $E_\vartheta h(s, Z_1) = 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}E_\vartheta \|h(\cdot, Z_1)\|_2^2 &= E_\vartheta \int_{I^2} h^2(s, Z_1) d\mu(s) \\ &= \int_{I^2} [E_\vartheta h^2(s, Z_1)] d\mu(s) \\ &\leq \sup_{s \in I^2} |E_\vartheta h^2(s, Z_1)| \cdot \int_{I^2} d\mu(s).\end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt B.2 erhalten wir die Abschätzung

$$\sup_{s \in I^2} |E_{\vartheta} h^2(s, Z_1)| \leq 2 \cdot \left(\frac{5}{4} + M_{1,\vartheta}^2 \sigma_2(\vartheta) \right) < \infty.$$

Dabei können die Werte von $M_{1,\vartheta}$ für die einzelnen Kopulafamilien aus Tabelle 2.2 abgelesen werden. Wegen $\sigma_2(\vartheta) = E_{\vartheta} l^2(Z_1, \vartheta) < \infty$ nach (1.29) folgt $E_{\vartheta} \|h(\cdot, Z_1)\|_2^2 < \infty$. Mit dem Zentralen Grenzwertsatz A.7, angewandt auf $\mathbf{X}_i = h(\cdot, Z_i)$, $i \geq 1$, folgt im Falle $C = C(\cdot, \vartheta)$ die Verteilungskonvergenz

$$W_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{\vartheta}} \mathcal{N}(0, S_{h(\cdot, Z_1)}), \quad n \rightarrow \infty,$$

in L^2 . Nach Anhang A.2 existiert ein zentrierter Gauß-Prozess W in L^2 mit Kovarianzfunktion $\gamma(s, t) = E_{\vartheta}[h(s, Z_1)h(t, Z_1)]$, so dass

$$W \sim \mathcal{N}(0, S_{h(\cdot, Z_1)})$$

gilt. Zur expliziten Darstellung von γ siehe Anhang B.1.

C.2. Asymptotisch vernachlässigbare Restterme

Für den Beweis der Aussage

$$\sqrt{n} \delta_n \xrightarrow{\mathcal{D}_{\vartheta}} W, \quad n \rightarrow \infty,$$

in L^2 bleibt zu zeigen, dass

$$\|\sqrt{n} \delta_n - W_n\|_2 = \|\varepsilon_n\|_2 = o_{P_{\vartheta}}(1) \tag{C.1}$$

gilt. Mit (2.25) und (2.19) ergibt sich unter Anwendung der Minkowski-Ungleichung

$$\|\varepsilon_n\|_2 \leq \|\varepsilon_{A,1,n}\|_2 + \|\varepsilon_{A,2,n}\|_2 + \|\varepsilon_{A,3,n}\|_2 + \|\varepsilon_{B,n}\|_2. \tag{C.2}$$

Die Konvergenzaussage (C.1) ist gezeigt, falls alle Summanden auf der rechten Seite in (C.2) stochastisch gegen null konvergieren. Wegen

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \left(\int_{I^2} f(s)^2 d\mu(s) \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\| \left(\int_{I^2} d\mu(s) \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{C.3}$$

wobei

$$\|f\| := \sup_{s \in I^2} |f(s)|$$

und

$$\left(\int_{I^2} d\mu(s) \right)^{1/2} < \infty$$

sind, folgt z.B. aus $\|\varepsilon_{A,1,n}\| = o_{P_\vartheta}(1)$ in (C.3) die Konvergenzaussage

$$\|\varepsilon_{A,1,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1).$$

Dieses Vorgehen benutzen wir bei $\varepsilon_{A,1,n}$ und $\varepsilon_{A,2,n}$. Bei $\varepsilon_{A,3,n}$ und $\varepsilon_{B,n}$ zeigen wir direkt $\|\varepsilon_{A,3,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$ bzw. $\|\varepsilon_{B,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$.

C.2.1. Restterm $\varepsilon_{A,1,n}$ (Teil 1)

Wir betrachten zunächst den in (2.12) definierten Restterm

$$\varepsilon_{A,1,n}(u, v) = \tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - \tilde{\beta}_n(u, v), \quad (u, v) \in I^2.$$

Dem Nachweis von $\|\varepsilon_{A,1,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$ schicken wir einige Betrachtungen zur (starken) Approximation des zweidimensionalen empirischen Standardprozesses $\tilde{\beta}_n$ voraus.

C.2.2. Approximation des zweidimensionalen empirischen Standardprozesses

Für den zweidimensionalen empirischen Standardprozess $\tilde{\beta}_n$ nach (2.8) schreiben wir in diesem Abschnitt

$$\tilde{\beta}_n(u, v) = \sqrt{n}(\tilde{H}_n(u, v) - C(u, v)), \quad (u, v) \in I^2, \quad (\text{C.4})$$

und vermeiden dabei die Angabe des Parameters ϑ der Kopula $C(\cdot, \vartheta)$. Ferner wird in diesem Abschnitt beim zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsmaß und beim E -Operator auf die Indizierung mit dem Parameter ϑ verzichtet. Um $\|\varepsilon_{A,1,n}\|_2 = o_P(1)$ zu zeigen, verwenden wir die Tatsache, dass auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum eine Folge $B_{C,n}$ von *Brownschen Brücken mit Intensitätsmaß* C existiert, welche $(\tilde{\beta}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig approximiert (siehe Lemma C.4). Wir orientieren uns dabei im Folgenden an [CS84], S.439ff und führen zuerst geeignete Funktionenräume und stochastische Prozesse ein.

Definition C.1

Es seien T eine beliebige nichtleere Menge sowie

$$\begin{aligned} C_T &:= \{Z : T \rightarrow \mathbb{R} : Z \text{ stetig}\}, \\ D_{I^2} &:= \{Z : I^2 \rightarrow \mathbb{R} : \forall s \in (0, 1]^2 \text{ gilt } Z(s-) = Z(s), \\ &\quad \forall s \in [0, 1)^2 \text{ existiert } Z(s+)\}. \end{aligned}$$

Dabei stehen $Z(s-) := Z(u-, v-)$ und $Z(s+) := Z(u+, v+)$ für den komponentenweise gebildeten links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert von $Z(\cdot)$ an der Stelle s . Weiter sei

$$D_{I^2 \times [0, \infty)} := \left\{ Z : I^2 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} : \forall s \in (0, 1]^2 \times (0, \infty) \text{ gilt } Z(s-) = Z(s), \right. \\ \left. \forall s \in [0, 1)^2 \times [0, \infty) \text{ existiert } Z(s+) \right\}.$$

Ist D ein (messbarer) Funktionenraum, so ist ein D -wertiger *Gauß-Prozess* Z ein D -wertiges Zufallselement auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) , dessen endlichdimensionale Randverteilungen multivariat normalverteilt sind. Für $D = D_{I^2}$ z.B. ist dann der m -dimensionale Zufallsvektor $(Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_m))$, $s_i \in I^2$, $i = 1, \dots, m$, multivariat normalverteilt. Ferner ist D_{I^2} mit der Projektions- σ -Algebra \mathcal{M} versehen. Dabei ist \mathcal{M} die kleinste σ -Algebra auf D_{I^2} , so dass alle Projektionen

$$\pi_{s_1, \dots, s_m} : \begin{cases} D_{I^2} & \rightarrow \mathbb{R}^m \\ Z & \mapsto (Z(s_1), Z(s_2), \dots, Z(s_m)) \end{cases},$$

$s_i \in I^2$, $i = 1, \dots, m$, messbar sind, kurz

$$\mathcal{M} = \sigma(\pi_{s_1, \dots, s_m} : s_1, \dots, s_m \in I^2, m \in \mathbb{N})$$

([SHW86], S.24-27).

Definition C.2 (Wiener-Prozess, Brownsche Brücke, Kiefer-Prozess)

Ein *Wiener-Prozess* W_C auf I^2 mit *Intensitätsmaß* C ist ein D_{I^2} -wertiger Gauß-Prozess mit folgenden Eigenschaften: Mit $s_1 = (u, v)$, $s_2 = (\tilde{u}, \tilde{v}) \in I^2$ gilt

- $P(W_C \in C_{I^2}) = 1$,
- $EW_C(s_1) = 0$,
- $W_C(0, v) = W_C(u, 0) = 0$,
- $E[W_C(s_1)W_C(s_2)] = C(\min(s_1, s_2))$.

Dabei ist $\min(s_1, s_2) := (\min(u, \tilde{u}), \min(v, \tilde{v}))$ gesetzt. Der durch

$$B_C(u, v) := W_C(u, v) - C(u, v)W_C(1, 1), \quad (u, v) \in I^2,$$

definierte Prozess heißt *Brownsche Brücke auf I^2 mit Intensitätsmaß C* .

Ein *Wiener-Prozess* W_C auf $I^2 \times [0, \infty)$ mit *Intensitätsmaß* C ist ein $D_{I^2 \times [0, \infty)}$ -wertiger Gauß-Prozess mit folgenden Eigenschaften: Mit $s_1 = (u, v)$, $s_2 \in I^2$, $t_1, t_2 \in [0, \infty)$ gilt

- $P(W_C \in C_{I^2 \times [0, \infty)}) = 1$,
- $EW_C(s_1) = 0$,

- $W_C(0, v, t_1) = W_C(u, 0, t_1) = W_C(u, v, 0) = 0$,
- $E[W_C(s_1, t_1)W_C(s_2, t_2)] = \min(t_1, t_2) \cdot C(\min(s_1, s_2))$.

Der durch

$$K_C(u, v, t) := W_C(u, v, t) - C(u, v)W_C(1, 1, t), \quad (u, v) \in I^2, t \geq 0,$$

definierte Prozess heißt *Kiefer-Prozess* K_C auf $I^2 \times [0, \infty)$ mit Intensitätsmaß C .

Falls keine weiteren Annahmen über die Kopula C gemacht werden, gilt die folgende starke Approximation des zweidimensionalen empirischen Standardprozesses $\tilde{\beta}_n$ ([CS84], S.441).

Lemma C.3 (Starke Approximation)

Es seien $Z_1 = (U_1, V_1), \dots, Z_n = (U_n, V_n), \dots$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte bivariate Zufallsvektoren mit $U_i \sim V_i \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $i \geq 1$, und Kopula C . Ferner sei $\tilde{\beta}_n$ der zweidimensionale empirische Standardprozess nach (C.4). Dann kann ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) konstruiert werden, auf dem sowohl Z_1, Z_2, \dots als auch ein Kiefer-Prozess K_C auf $I^2 \times [0, \infty)$ mit Intensitätsmaß C definiert sind, so dass gilt:

$$P \left(\sup_{1 \leq k \leq n} \sup_{s \in I^2} |k^{1/2} \tilde{\beta}_k(s) - K_C(s, k)| > c_1 n^{1/2-\lambda} \right) \leq c_2 n^{-(1+1/36)}. \quad (\text{C.5})$$

Dabei sind c_1, c_2 positive Konstanten, die nur von C abhängen, und es gilt $\lambda = 1/20000$.

Analog zu [CS84], S.441, folgern wir aus (C.5) die Gültigkeit der Beziehungen

$$n^{-1/2} \sup_{1 \leq k \leq n} \sup_{s \in I^2} |k^{1/2} \tilde{\beta}_k(s) - K_C(s, k)| = O(n^{-\lambda}) \quad P - f.s.$$

und

$$\sup_{s \in I^2} |\tilde{\beta}_n(s) - n^{-1/2} K_C(s, n)| = O(n^{-\lambda}) \quad P - f.s. \quad (\text{C.6})$$

Mit der Abkürzung

$$B_{C,n}(\cdot) := n^{-1/2} K_C(\cdot, n)$$

geht (C.6) in

$$\sup_{s \in I^2} |\tilde{\beta}_n(s) - B_{C,n}(s)| = O(n^{-\lambda}) \quad P - f.s. \quad (\text{C.7})$$

über. Man beachte die für jedes $t > 0$ bestehende Verteilungsgleichheit

$$\{t^{-1/2} K_C(s, t); s \in I^2\} \sim \{B_C(s); s \in I^2\},$$

aus der insbesondere $B_{C,n}(\cdot) \sim B_C(\cdot)$ folgt.

Lemma C.4 (Approximation von $\tilde{\beta}_n$ durch Brownsche Brücke)

Unter den Voraussetzungen von Lemma C.3 lässt sich der Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) für Z_1, \dots, Z_n, \dots und darauf eine Folge von Brownschen Brücken $(B_{C,n})_{n \in \mathbb{N}}$ auf I^2 mit Intensitätsmaß C derart konstruieren, dass

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(u, v)| = o_P(1)$$

gilt.

BEWEIS: Wir setzen den Wahrscheinlichkeitsraum, den uns Lemma C.3 bereitstellt, voraus und ersetzen in (C.7) die Argumente von $\tilde{\beta}_n(u, v)$ durch $\tilde{F}_n^{-1}(u)$ und $\tilde{G}_n^{-1}(v)$. Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(u, v)| \\ & \leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v))| \\ & \quad + \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |B_{C,n}(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(u, v)|. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass beide Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung stochastisch gegen null streben. Der erste Summand lässt sich durch $\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{\beta}_n(u, v) - B_{C,n}(u, v)|$ nach oben abschätzen; die P -fast sichere Konvergenz dieses Ausdrucks gegen null folgt aus (C.7). Für den Beweis der Konvergenz des zweiten Summanden verwenden wir die P -fast sichere Stetigkeit einer Brownschen Brücke B_C auf I^2 mit Intensitätsmaß C . Es seien hierzu $\varepsilon, \eta > 0$ beliebig. Für den Stetigkeitsmodul

$$\omega_{B_C}(\mu) := \sup_{0 \leq |u_1 - u_2|, |v_1 - v_2| \leq \mu} |B_{C,n}(u_1, v_1) - B_{C,n}(u_2, v_2)|, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

einer Brownschen Brücke B_C auf I^2 mit Intensitätsmaß C gilt

$$P(\omega_{B_C}(\mu) > \varepsilon) \longrightarrow 0, \quad \mu \rightarrow 0,$$

d.h. es existiert ein $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon, \eta) \in (0, 1)$, so dass

$$P(\omega_{B_C}(\mu) > \varepsilon) < \eta$$

für jedes $\mu \leq \mu_0$ gilt. Nun gibt es ein $n_0 = n_0(\mu_0) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\sup_{0 \leq u \leq 1} |\tilde{F}_n^{-1}(u) - u| \leq \mu_0 \quad \text{und} \quad \sup_{0 \leq v \leq 1} |\tilde{G}_n^{-1}(v) - v| \leq \mu_0 \quad P - f.s.$$

für jedes $n \geq n_0$. Somit gilt für $n \geq n_0$

$$P\left(\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |B_{C,n}(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(u, v)| > \varepsilon\right) \leq P(\omega_{B_C}(\mu_0) > \varepsilon) < \eta.$$

Da η und ε beliebig waren und $B_{C,n}$ für jedes n eine Brownsche Brücke auf I^2 mit Intensitätsmaß C ist, entspricht diese Aussage gerade der geforderten stochastischen Konvergenz

$$\sup_{0 \leq u, v \leq 1} |B_{C,n}(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(u, v)| = o_P(1).$$

C.2.3. Restterm $\varepsilon_{A,1,n}$ (Teil 2)

Mit der Minkowski-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{A,1,n}\| &\leq \sup_{0 \leq u, v \leq 1} |\tilde{\beta}_n(\tilde{F}_n^{-1}(u), \tilde{G}_n^{-1}(v)) - B_{C,n}(u, v)| \\ &\quad + \sup_{(u,v) \in I^2} |\tilde{\beta}_n(u, v) - B_{C,n}(u, v)|. \end{aligned}$$

Der erste Summand der rechten Seite konvergiert stochastisch gegen null nach Lemma C.4 und der zweite Summand nach (C.7). Damit ist $\|\varepsilon_{A,1,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$ gezeigt.

C.2.4. Restterm $\varepsilon_{A,2,n}$

Für den in (2.15) definierten Restterm $\varepsilon_{A,2,n}$ gilt

$$\|\varepsilon_{A,2,n}\| \leq \left\| \frac{\partial}{\partial u} C(\cdot, \vartheta) \right\| \cdot \|\varepsilon_{U,n}\| + \left\| \frac{\partial}{\partial v} C(\cdot, \vartheta) \right\| \cdot \|\varepsilon_{V,n}\|. \quad (\text{C.8})$$

Nach [NEL98], S.36, sind $\partial/\partial u C(\cdot, \vartheta)$ bzw. $\partial/\partial v C(\cdot, \vartheta)$ bedingte Verteilungsfunktionen, weshalb

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} C(\cdot, \vartheta) \right\| \leq 1 \quad \text{bzw.} \quad \left\| \frac{\partial}{\partial v} C(\cdot, \vartheta) \right\| \leq 1$$

gilt. Nach [GS87], S.15, gilt

$$\|\varepsilon_{U,n}\| = \|\varepsilon_{V,n}\| = O(n^{-1/4}(\log \log n)^{3/4}) \quad P_\vartheta - f.s.$$

Dabei ist $\varepsilon_{U,n}$ der sog. Restterm aus dem BAHADUR-KIEFER-Theorem. Zusammen mit (C.8) folgt

$$\|\varepsilon_{A,2,n}\| = O(n^{-1/4}(\log \log n)^{3/4}) \quad P_\vartheta - f.s.,$$

also insbesondere $\|\varepsilon_{A,2,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$.

C.2.5. Restterm $\varepsilon_{A,3,n}$

Den in (2.16) eingeführten Restterm $\varepsilon_{A,3,n}$ zerlegen wir gemäß

$$\begin{aligned} \varepsilon_{A,3,n}(u, v) &= \sqrt{n} \int_0^1 (\nabla z)[C(u + tz_1, v + tz_2, \vartheta) - C(u, v, \vartheta)] dt \\ &= \varepsilon_{A,3,1,n}(u, v) + \varepsilon_{A,3,2,n}(u, v), \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon_{A,3,1,n}(u, v) := \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(\bar{u}_n(u, t), \bar{v}_n(v, t), \vartheta) dt - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v, \vartheta) \right] \tilde{u}_n(u)$$

und

$$\varepsilon_{A,3,2n}(u, v) := \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} C(\bar{u}_n(u, t), \bar{v}_n(v, t), \vartheta) dt - \frac{\partial}{\partial v} C(u, v, \vartheta) \right] \tilde{v}_n(v)$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(u, t) &:= u + tz_1 = u + t/\sqrt{n} \cdot \tilde{u}_n(u), \\ \bar{v}_n(v, t) &:= v + tz_2 = v + t/\sqrt{n} \cdot \tilde{v}_n(v) \end{aligned}$$

gesetzt sind. Es ist $\|\varepsilon_{A,3,1,n}\|_2^2 \geq 0$. Deshalb folgt aus

$$E_{\vartheta} \|\varepsilon_{A,3,1,n}\|_2^2 \longrightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

die Konvergenzaussage $\|\varepsilon_{A,3,1,n}\|_2 = o_{P_{\vartheta}}(1)$. Mit der abkürzenden Schreibweise

$$f_n(u, v; \omega) := \left[\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(\bar{u}_n(u, t; \omega), \bar{v}_n(v, t; \omega), \vartheta) dt - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v, \vartheta) \right] \tilde{u}_n(u; \omega)$$

gilt

$$\begin{aligned} E_{\vartheta} \|\varepsilon_{A,3,1,n}\|_2^2 &= \int_{\Omega} \int_0^1 \int_0^1 f_n^2(u, v; \omega) d\mu(u, v) dP_{\vartheta}(\omega) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_{\Omega} f_n^2(u, v; \omega) dP_{\vartheta}(\omega) d\mu(u, v). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Dabei folgt das letzte Gleichheitszeichen aus dem Satz von Tonelli. Zunächst betrachten wir in (C.9) das innere Integral

$$E_n(u, v) := \int_{\Omega} f_n^2(u, v; \omega) dP_{\vartheta}(\omega), \quad (u, v) \in I^2.$$

Die Zufallsvariable $f_n(u, v; \cdot)$ ist eine Transformation der Zufallsvariablen $\tilde{u}_n(u) = \varepsilon_{U,n}(u) - \tilde{U}_n(u)$ und $\tilde{v}_n(v) = \varepsilon_{V,n}(v) - \tilde{V}_n(v)$. Nach [GS87], S.15, gilt

$$\|\varepsilon_{U,n}\| = \|\varepsilon_{V,n}\| \leq Kb_n \quad P_{\vartheta} - f.s.,$$

wobei $b_n := n^{-1/4}(\log \log n)^{3/4}$ eine Nullfolge ist. Somit konvergieren $\varepsilon_{U,n}$ und $\varepsilon_{V,n}$ für $n \rightarrow \infty$ P_{ϑ} -fast sicher gegen null. Der zweidimensionale empirische Standard-Prozess $\tilde{\beta}_n$ konvergiert nach Verteilung in $D_{\mathcal{I}^2}$ gegen eine Brownsche Brücke mit Intensitätsmaß $C(\cdot, \vartheta)$ ([CS84], S.442). Somit erhalten wir mit dem Lemma von Slutsky die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u}_n(u) \\ \tilde{v}_n(v) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{U,n}(u) \\ \varepsilon_{V,n}(v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_n(u, 1) \\ \tilde{\beta}_n(1, v) \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{D_{\vartheta}} &\begin{pmatrix} N_u \\ N_v \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u(1-u) & \sigma^2(u, v) \\ \sigma^2(u, v) & v(1-v) \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

wobei $\sigma^2(u, v) = C(u, v, \vartheta) - uv$ und $N_0 = N_1 = 0$ P_ϑ -f.s. sind. Aufgrund des Satzes von Skorokhod ([BI86], S.399) existiert ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{P})$, so dass die Verteilungskonvergenz zur P -fast-sicheren Konvergenz

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_n(u, \tilde{\omega}) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N_u(\tilde{\omega}) \\ \tilde{v}_n(v, \tilde{\omega}) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N_v(\tilde{\omega}) \end{aligned} \right\}, \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega},$$

äquivalent ist. Mit der Abkürzung

$$g_n(t, u, v; \tilde{\omega}) := \frac{\partial}{\partial u} C(\tilde{u}_n(u, t; \tilde{\omega}), \tilde{v}_n(v, t; \tilde{\omega}), \vartheta), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

sei nun für jedes $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$

$$A_n(u, v; \tilde{\omega}) := \int_0^1 g_n(t, u, v; \tilde{\omega}) dt - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v, \vartheta)$$

gesetzt. Für jede Wahl von $u, v, t \in I$ gilt

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_n(u, t; \tilde{\omega}) &= u + t/\sqrt{n} \cdot \tilde{u}_n(u; \tilde{\omega}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \\ \tilde{v}_n(v, t; \tilde{\omega}) &= v + t/\sqrt{n} \cdot \tilde{v}_n(v; \tilde{\omega}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v \end{aligned} \right\}, \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}.$$

Zusammen mit der Stetigkeit der partiellen Ableitung $\partial/\partial u C(\cdot, \vartheta)$ an der Stelle (u, v) folgt die Konvergenz

$$g_n(t, u, v; \tilde{\omega}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\partial}{\partial u} C(u, v, \vartheta), \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}.$$

Wegen $|g_n| \leq 1$ ([NEL98], S.36) liefert eine Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(u, v; \tilde{\omega}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(t, u, v; \tilde{\omega}) dt - \frac{\partial}{\partial u} C(u, v, \vartheta) = 0, \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}.$$

Ferner gilt

$$f_n(u, v; \tilde{\omega}) = A_n(u, v; \tilde{\omega}) \cdot \tilde{u}_n(u; \tilde{\omega}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad \tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}.$$

Mit $|A_n| \leq 1$ folgt die Abschätzung

$$f_n^k \leq 2^{k-1} \left[(Kb_n)^k + \tilde{U}_n^k \right], \quad k = 2, 4. \quad (\text{C.10})$$

Das vierte Moment der Zufallsvariable $\tilde{U}_n(u)$ hat die Darstellung

$$\begin{aligned} E_\vartheta \tilde{U}_n^4(u) &= E_\vartheta [\sqrt{n}(\tilde{F}_n(u) - u)]^4 \\ &= n^2 E_\vartheta \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1\{U_i \leq u\} - u) \right]^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i_1, i_2, i_3, i_4=1}^n E_\vartheta \left[\prod_{\nu=1}^4 (1\{U_{i_\nu} \leq u\} - u) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left(n E_\vartheta[1\{U_1 \leq u\} - u]^4 \right. \\
&\quad \left. + \binom{4}{2} \binom{n}{2} E_\vartheta[(1\{U_1 \leq u\} - u)^2 (1\{U_2 \leq u\} - u)^2] \right) \\
&= \frac{1}{n} (u - 4u^2 + 6u^3 - 4u^4 + u^4) + \frac{3(n-1)}{n} u^2 (1-u)^2 \\
&= \frac{u}{n} + \left(3 - \frac{7}{n}\right) u^2 + \left(-6 + \frac{12}{n}\right) u^3 + \left(3 - \frac{6}{n}\right) u^4.
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Tatsache $E_\vartheta[1\{U_1 \leq u\} - u] = 0$ benutzt. Weiter gilt mit $\varepsilon = 2$ und $k = 2$ in (C.10)

$$\sup_{n \geq 1} E_\vartheta f_n^{2+\varepsilon}(u, v; \cdot) \leq 8 \left[\sup_{n \geq 1} (K b_n)^4 + \sup_{n \geq 1} E_\vartheta \tilde{U}_n^4(u) \right] < \infty.$$

Damit ist die Folge der Zufallsvariablen $(f_n(u, v; \cdot))_{n \geq 1}$ gleichgradig integrierbar, und es ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_\vartheta f_n^2(u, v; \cdot) = 0.$$

Wir betrachten nun in (C.9) das äußere Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 E_n(u, v) d\mu(u, v).$$

Wegen $0 < b_n$ für jedes $n \geq 3$ und $b_n \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$ existiert ein $B < \infty$ mit $b_n \leq B$ für jedes $n \geq 3$. Ferner gilt für das zweite Moment der Zufallsvariable $\tilde{U}_n(u)$

$$\begin{aligned}
E_\vartheta \tilde{U}_n^2(u) &= E_\vartheta[\sqrt{n}(\tilde{F}_n(u) - u)]^2 \\
&= n E_\vartheta \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1\{U_i \leq u\} - u) \right]^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i_1, i_2=1}^n E_\vartheta \left[\prod_{\nu=1}^2 (1\{U_{i_\nu} \leq u\} - u) \right] \\
&= \frac{1}{n} \cdot n E_\vartheta[1\{U_1 \leq u\} - u]^2 \\
&= u - 2u^2 + u^2 = u(1-u).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir mit $k = 2$ in (C.10) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
E_n(u, v) &\leq 2[(K b_n)^2 + u(1-u)] \\
&\leq 2 \left[K^2 B^2 + \frac{1}{4} \right] \approx 2K^2 \cdot 0.50769^2 + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zum Maximalwert B der Folge $(b_n)_{n \geq 3}$ siehe Tabelle C.1 und Abbildung C.1. Der Satz von der dominierten Konvergenz ergibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 E_n(u, v) d\mu(u, v) = \int_0^1 \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(u, v) d\mu(u, v) = 0.$$

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} E_\vartheta \|\varepsilon_{A,3,1,n}\|_2^2 = 0$ sowie $\|\varepsilon_{A,3,1,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$ gezeigt. Für $\varepsilon_{A,3,2,n}$ erhalten wir analog $\|\varepsilon_{A,3,2,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$, und somit insgesamt $\|\varepsilon_{A,3,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$.

| n | b_n |
|-----|---------|
| 15 | 0.50669 |
| 16 | 0.50739 |
| 17 | 0.50769 |
| 18 | 0.50768 |
| 19 | 0.50741 |
| 20 | 0.50694 |

Tabelle C.1.: Werte der Folge (b_n) an den Stellen $n \in \{15, 16, \dots, 20\}$.

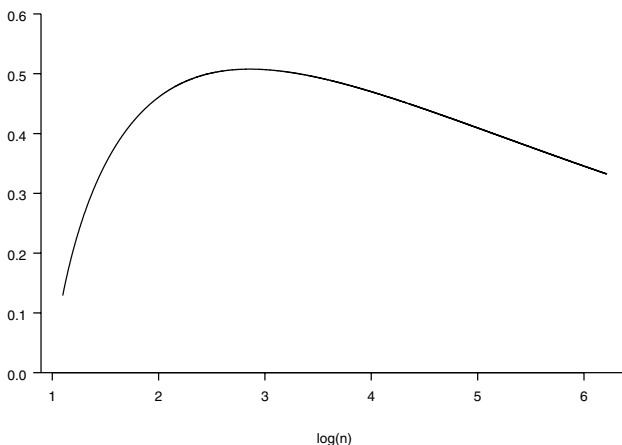


Abbildung C.1.: Lineare Interpolation der Folge (b_n) über $\log(n)$, $3 \leq n \leq 500$.

C.2.6. Restterm $\varepsilon_{B,n}$

Für den nach (2.22) gegebenen Restterm $\varepsilon_{B,n}$ gilt

$$\|\varepsilon_{B,n}\|_2 \leq M_{1,\vartheta} \left(\int_{\mathcal{I}^2} d\mu(s) \right)^{1/2} \cdot |\tilde{\varepsilon}_n| + M(\tilde{\vartheta}_n) \cdot |\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta)|,$$

wobei $M(\tilde{\vartheta}_n) := \left\| \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(\cdot, \tilde{\vartheta}_n) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(\cdot, \vartheta) \right\|_2$ gesetzt ist. Es gilt $\tilde{\varepsilon}_n = o_{P_\vartheta}(1)$ nach (1.30) und $\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_n - \vartheta) \xrightarrow{P_\vartheta} \mathcal{N}(0, \sigma_2(\vartheta))$ nach (1.31). Die Aussage $\|\varepsilon_{B,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$ ist gezeigt, falls $M^2(\tilde{\vartheta}_n) \xrightarrow{P_\vartheta} 0$ nachgewiesen ist. Zum Beweis benutzen wir folgendes zur stochastischen Konvergenz äquivalentes Kriterium: Für jede beliebige Teilfolge $(n_k)_{k \geq 1}$ von $(n)_{n \geq 1}$ existiert eine weitere Teilfolge $(n'_k)_{k \geq 1}$ von $(n_k)_{k \geq 1}$, so dass

$$M^2(\tilde{\vartheta}_{n'_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad P_\vartheta - f.s. \quad (\text{C.11})$$

gilt. Wir setzen

$$g_n(u, v; \omega) := \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \tilde{\vartheta}_n(\omega)) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} C(u, v, \vartheta).$$

Für die Zwischenstelle

$$\tilde{\vartheta}_n = \vartheta + \eta_n(\hat{\vartheta}_n - \vartheta), \quad 0 < \eta_n < 1,$$

folgt

$$\min(\vartheta, \hat{\vartheta}_n) \leq \tilde{\vartheta}_n \leq \max(\vartheta, \hat{\vartheta}_n).$$

Mit $\hat{\vartheta}_n \xrightarrow{P_\vartheta} \vartheta$, dem Einschnürungssatz für Folgen ([HEU91], S.152) und dem Teilfolgenkriterium für stochastische Konvergenz erhalten wir zunächst die stochastische Konvergenz $\tilde{\vartheta}_n \xrightarrow{P_\vartheta} \vartheta$. Sei nun $(n_k)_{k \geq 1}$ eine beliebige Teilfolge von $(n)_{n \geq 1}$. Dann ist $(\tilde{\vartheta}_{n_k})_{k \geq 1}$ eine beliebige Teilfolge von $(\tilde{\vartheta}_n)_{n \geq 1}$. Nach dem Teilfolgenkriterium für stochastische Konvergenz existiert eine weitere Teilfolge $(\tilde{\vartheta}_{n'_k})_{k \geq 1}$ von $(\tilde{\vartheta}_{n_k})_{k \geq 1}$, so dass

$$\tilde{\vartheta}_{n'_k}(\omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vartheta, \quad \omega \in \Omega_0,$$

erfüllt ist. Dabei ist Ω_0 eine Einsmenge bzgl. P_ϑ . Wegen der Stetigkeit von $\partial/\partial \vartheta C(u, v, \cdot)$ an der Stelle ϑ gilt ferner

$$g_{n'_k}(u, v; \omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \omega \in \Omega_0.$$

Im Falle der Kopulafamilien Clayton, Frank oder Gumbel existiert das Supremum $M_1 := \sup_{\vartheta \in \Theta} M_{1,\vartheta}$ (siehe Tabelle 2.2). Für $-1 < a < b < 1$ existiert im Falle der Gauß-Kopula mit $\Theta := (a, b)$ das Supremum

$$M_1 := \sup_{\vartheta \in \Theta} M_{1,\vartheta} = \sup_{a < \vartheta < b} \frac{2}{\pi} (1 - \vartheta^2)^{-5/2} = \frac{2}{\pi} (1 - \max(a, b)^2)^{-5/2}$$

(siehe Abb. C.2). Das Supremum M_1 existiert im Falle der Gauß-Kopula für den größtmöglichen Parameterbereich $\Theta = (-1, 1)$ nicht. Deshalb ist in diesem Falle eine Einschränkung auf einen Parameterbereich $\mathcal{O} = (a, b)$ mit $-1 < a < b < 1$ nötig. Mit M_1 erhalten wir $|g_{n'_k}^2| \leq 4M_1^2$. Eine Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz ergibt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^2(\tilde{\vartheta}_{n'_k}(\omega)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 g_{n'_k}^2(u, v; \omega) d\mu(u, v) = 0, \quad \omega \in \Omega_0.$$

Damit ist (C.11) und insgesamt $\|\varepsilon_{B,n}\|_2 = o_{P_\vartheta}(1)$ gezeigt.

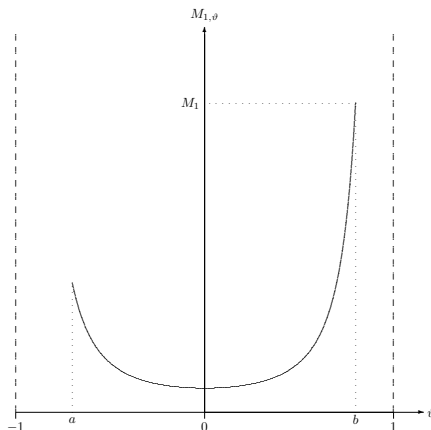


Abbildung C.2.: Zum Supremum M_1 im Falle der Gauß-Kopula.

D. Partielle Ableitungen einer Kopula

In den folgenden Abschnitten berechnen wir die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach u und ϑ einer Clayton-, Frank-, Gauß- und Gumbel-Kopula. Da alle Kopulae symmetrisch sind, verzichten wir auf die Darstellung der partiellen Ableitung erster Ordnung nach v . Ferner sei im Folgenden stets $(u, v) \in (0, 1)^2$.

D.1. Clayton-Kopula

Es seien $C_C(\cdot, \vartheta)$ die Clayton-Kopula nach (1.7) und

$$f := f(u, v, \vartheta) := u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1$$

sowie

$$g := \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = -u^{-\vartheta} \log u - v^{-\vartheta} \log v$$

gesetzt. Es gilt für $\vartheta > -1$

$$C_C(u, v, \vartheta) = f(u, v, \vartheta)^{-\frac{1}{\vartheta}}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u} C_C(u, v, \vartheta) = u^{-(\vartheta+1)} f(u, v, \vartheta)^{-\frac{\vartheta+1}{\vartheta}} = u^{-(\vartheta+1)} (u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-\frac{\vartheta+1}{\vartheta}}$$

falls $f > 0$ und 0 sonst. Für $\vartheta > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(u, v, \vartheta) &= C_C(u, v, \vartheta) \left(\frac{1}{\vartheta^2} \log f - \frac{1}{\vartheta} \frac{g}{f} \right) \\ &= -\frac{1}{\vartheta} C_C(u, v, \vartheta) \left(\log C_C(u, v, \vartheta) + \frac{g}{f} \right) \\ &= -\frac{1}{\vartheta} (u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta} \left(\log(u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1)^{-1/\vartheta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{u^{-\vartheta} \log u + v^{-\vartheta} \log v}{u^{-\vartheta} + v^{-\vartheta} - 1} \right). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(u, v, 0) = uv \log u \log v$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(u, v, \vartheta) = \begin{cases} -\frac{1}{\vartheta} C_C(u, v, \vartheta) \left(\log C_C(u, v, \vartheta) + \frac{g}{f} \right), & f > 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $-1 < \vartheta < 0$. Auf den Rändern des Einheitsquadrats verschwindet die partielle Ableitungsfunktion $\partial/\partial \vartheta C_C(\cdot, \vartheta)$ für $\vartheta > -1$, d.h es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(0, v, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(u, 0, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(1, v, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(u, 1, \vartheta) = 0$$

für $\vartheta > -1$. Für $\vartheta \rightarrow \infty$ konvergiert $\partial/\partial \vartheta C_C(\cdot, \vartheta)$ gleichmäßig gegen null. Ferner gilt

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} C_C(u, v, -1) = (u + v - 1) \log(u + v - 1) - u \log u - v \log v$$

falls $u + v - 1 > 0$ und 0 sonst.

D.2. Frank-Kopula

Es seien $C_F(\cdot, \vartheta)$ die Frank-Kopula nach (1.8) und

$$f(u) := f(u, \vartheta) := e^{-\vartheta u} - 1$$

sowie

$$g := g(u, v, \vartheta) := ue^{-\vartheta u} + ve^{-\vartheta v} - (u + v)e^{-\vartheta(u+v)}$$

gesetzt. Dann gilt

$$C_F(u, v, \vartheta) = -\frac{1}{\vartheta} \log \left(1 + \frac{f(u)f(v)}{f(1)} \right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial u} C_F(u, v, \vartheta) = \frac{e^{-\vartheta u} f(v)}{f(1) + f(u)f(v)} = \frac{e^{-\vartheta u} (e^{-\vartheta v} - 1)}{(e^{-\vartheta} - 1) + (e^{-\vartheta u} - 1)(e^{-\vartheta v} - 1)}$$

für $\vartheta \neq 0$ sowie

$$\frac{\partial}{\partial u} C_F(u, v, 0) = v$$

für $\vartheta = 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_F(u, v, \vartheta) &= -\frac{1}{\vartheta} \left(C_F(u, v, \vartheta) + \frac{gf(1) + f(u)f(v)e^{-\vartheta}}{f(1)^2 + f(u)f(v)f(1)} \right) \\ &= \frac{1}{\vartheta^2} \log \left(1 + \frac{f(u)f(v)}{f(1)} \right) - \frac{1}{\vartheta} \cdot \frac{gf(1) + f(u)f(v)e^{-\vartheta}}{f(1)^2 + f(u)f(v)f(1)} \end{aligned}$$

für $\vartheta \neq 0$ sowie

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} C_F(u, v, 0) = \frac{1}{2}(uv - uv^2 - u^2v + u^2v^2)$$

für $\vartheta = 0$. Auf den Rändern des Einheitsquadrats verschwindet die partielle Ableitungsfunktion $\partial/\partial \vartheta C_F(\cdot, \vartheta)$ für beliebiges $\vartheta \in \mathbb{R}$. Für $|\vartheta| \rightarrow \infty$ konvergiert $\partial/\partial \vartheta C_F(\cdot, \vartheta)$ gleichmäßig gegen null.

D.3. Gauß-Kopula

Es seien $C_N(\cdot, \vartheta)$ die Gauß-Kopula nach (1.4), Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, Φ^{-1} die Quantilfunktion von Φ und

$$\phi(s, t, \vartheta) := \frac{1}{2\pi(1-\vartheta^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\vartheta st + t^2}{2(1-\vartheta^2)}\right), \quad -1 < \vartheta < 1,$$

die Dichte der zweidimensionalen Normalverteilung mit Erwartungswert null und (Pearson-)Korrelation ϑ . Dann gilt mit $x := \Phi^{-1}(u)$ und $y := \Phi^{-1}(v)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} C_N(u, v, \vartheta) &= \frac{\partial}{\partial u} \Phi_\vartheta(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \\ &= \int_0^y \phi(x, t, \vartheta) dt \cdot (2\pi)^{1/2} \exp(-x^2) \\ &= \int_0^y \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(1-\vartheta^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\vartheta xt + t^2}{2(1-\vartheta^2)}\right) \exp(-x^2) dt \\ &= \int_0^y \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(1-\vartheta^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(t-\vartheta x)^2}{2(1-\vartheta^2)}\right) dt \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \vartheta\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1-\vartheta^2}}\right), \quad -1 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\partial}{\partial u} C_N(u, v, 0) = v.$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} C_N(u, v, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Phi_\vartheta(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{\partial}{\partial \vartheta} \phi(s, t, \vartheta) dt ds.$$

Mit der Festsetzung

$$f(s, t, \vartheta) := \frac{-\vartheta^3 + st\vartheta^2 + (1-s^2-t^2)\vartheta + st}{(1-\vartheta^2)^2}$$

gilt ferner

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \phi(s, t, \vartheta) = \phi(s, t, \vartheta) \cdot f(s, t, \vartheta)$$

sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_N(u, v, \vartheta) &= \frac{\vartheta}{1-\vartheta^2} C_N(u, v, \vartheta) \\ &\quad + \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \phi(s, t, \vartheta) \frac{st\vartheta^2 - (s^2+t^2)\vartheta + st}{(1-\vartheta^2)^2} dt ds. \end{aligned}$$

Für $\vartheta = 0$ gilt speziell

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_N(u, v, 0) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \phi(s, t, 0) \cdot st \, dt ds \\ &= \int_{-\infty}^x (-s) \exp(-s^2/2) \, ds \cdot \int_{-\infty}^y (-t) \exp(-t^2/2) \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp(-(\Phi^{-1}(u)^2 + \Phi^{-1}(v)^2)/2). \end{aligned}$$

D.4. Gumbel-Kopula

Im Falle der Gumbel-Kopula $C_G(\cdot, \vartheta)$ nach (1.9) gilt

$$C_G(u, v, \vartheta) = \exp\left(-f^{\frac{1}{\vartheta}}\right)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} C_G(u, v, \vartheta) &= C_G(u, v, \vartheta) f(u, v, \vartheta)^{\frac{1-\vartheta}{\vartheta}} (-\log u)^{\vartheta-1}/u \\ &= C_G(u, v, \vartheta) [(-\log u)^\vartheta + (-\log v)^\vartheta]^{\frac{1-\vartheta}{\vartheta}} (-\log u)^{\vartheta-1}/u \end{aligned}$$

für $\vartheta \geq 1$, wobei

$$f := f(u, v, \vartheta) := (-\log u)^\vartheta + (-\log v)^\vartheta$$

gesetzt ist. Mit

$$g := \frac{\partial f}{\partial \vartheta} = (-\log u)^\vartheta \log(-\log u) + (-\log v)^\vartheta \log(-\log v)$$

gilt ferner

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_G(u, v, \vartheta) &= -\frac{1}{\vartheta} C_G(u, v, \vartheta) f^{1/\vartheta} \cdot \left(\frac{g}{f} - \frac{1}{\vartheta} \log f \right) \\ &= -\frac{1}{\vartheta} C_G(u, v, \vartheta) [(-\log u)^\vartheta + (-\log v)^\vartheta]^{1/\vartheta} \\ &\quad \cdot \left(\frac{(-\log u)^\vartheta \log(-\log u) + (-\log v)^\vartheta \log(-\log v)}{(-\log u)^\vartheta + (-\log v)^\vartheta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\vartheta} \log [(-\log u)^\vartheta + (-\log v)^\vartheta] \right) \end{aligned}$$

für $\vartheta > 1$. Für $\vartheta = 1$ gilt speziell

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} C_G(u, v, 1) &= -uv \left\{ \log u \cdot [\log(-\log u - \log v) - \log(-\log u)] \right. \\ &\quad \left. + \log v \cdot [\log(-\log u - \log v) - \log(-\log v)] \right\}. \end{aligned}$$

Auf den Rändern des Einheitsquadrats verschwindet die partielle Ableitungsfunktion $\partial/\partial \vartheta C_G(\cdot, \vartheta)$ für $\vartheta \geq 1$. Für $\vartheta \rightarrow \infty$ konvergiert $\partial/\partial \vartheta C_G(\cdot, \vartheta)$ gleichmäßig gegen null.

E. Alternative Darstellung von T_n

E.1. Hilfsmittel

Die Ordnungsstatistiken $X_{1,n}, X_{2,n}, \dots, X_{n,n}$ von X_1, \dots, X_n seien nach Definition 1.11 gegeben. Weiter sei $\tilde{X}_{[1],n}, \tilde{X}_{[2],n}, \dots, \tilde{X}_{[n],n}$ die *nach aufsteigenden Y -Werten sortierte Umordnung von X_1, X_2, \dots, X_n* nach folgender Definition.

Definition E.1

Mit $X_{[1],n}, X_{[2],n}, \dots, X_{[n],n}$ bezeichnen wir die *nach aufsteigenden Y -Werten sortierte Umordnung von X_1, X_2, \dots, X_n* . Sie entsteht durch Sortieren von

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$$

nach der Größe der Werte in der Y -Komponente, d.h.

$$(X_{[1],n}, Y_{1,n}), (X_{[2],n}, Y_{2,n}), \dots, (X_{[n],n}, Y_{n,n})$$

ist die *nach aufsteigenden Y -Werten sortierte Umordnung von $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$* . Analog wird durch $Y_{[1],n}, \dots, Y_{[n],n}$ die *nach aufsteigenden X -Werten sortierte Umordnung von Y_1, Y_2, \dots, Y_n* definiert.

Offensichtlich gilt

$$X_{[j],n} = X_{j,n} \iff Y_{[j],n} = Y_{j,n}$$

sowie für die Quantilfunktionen F_n^{-1} und G_n^{-1}

$$F_n^{-1}(u) = \begin{cases} X_{k,n}, & u \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad k = 1, \dots, n, \\ -\infty, & u = 0, \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

bzw.

$$G_n^{-1}(v) = \begin{cases} Y_{k,n}, & v \in \left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad k = 1, \dots, n, \\ -\infty, & v = 0. \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

Die Teststatistik T_n sei nach (2.28) gegeben. Um die Berechnung übersichtlich zu gestalten, führen wir sie ausführlich für die Gewichtsfunktion $w \equiv 1$ (siehe (2.26)) durch.

E.2. Gewichtsfunktion $w \equiv 1$

Die einparametrische Kopula $C(\cdot, \vartheta)$ ist nach Annahme 2.1 symmetrisch. Diese Voraussetzung hat zur Folge, dass die Teststatistik bei Vertauschung der Komponenten X und Y invariant bleibt.

Unter Verwendung von (2.29) und (1.14) folgt

$$\begin{aligned}
 T_n &= n \cdot \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n)]^2 d(u, v) \\
 &= n \cdot \int_0^1 \int_0^1 C_n(u, v)^2 d(u, v) \\
 &\quad - 2n \cdot \int_0^1 \int_0^1 C_n(u, v) C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v) \\
 &\quad + n \cdot \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 d(u, v) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\} d(u, v) \\
 &\quad + \frac{1}{n} \sum_{i \neq j} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\{\max(X_i, X_j) \leq F_n^{-1}(u), \max(Y_i, Y_j) \leq G_n^{-1}(v)\} d(u, v) \\
 &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\} C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v) \\
 &\quad + n \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 d(u, v) \\
 &=: \frac{1}{n} S_1 + \frac{1}{n} S_2 - 2S_3 + nS_4
 \end{aligned}$$

mit

$$S_1 := \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\} d(u, v), \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &:= \sum_{i \neq j} \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\{\max(X_i, X_j) \leq F_n^{-1}(u)\} \\
 &\quad \cdot \mathbf{1}\{\max(Y_i, Y_j) \leq G_n^{-1}(v)\} d(u, v), \quad (\text{E.4})
 \end{aligned}$$

$$S_3 := \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\} C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v), \quad (\text{E.5})$$

$$S_4 := \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 d(u, v). \quad (\text{E.6})$$

Der Term S_1 nach (E.3) wird unter Verwendung von (E.2) und (E.1) sowie Summation sortiert nach aufsteigenden Y -Werten folgendermaßen umgeformt:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k=1}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\} dv du \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k=1}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq Y_{k,n}\} dv du \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k=1}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_{[i],n} \leq F_n^{-1}(u), Y_{i,n} \leq Y_{k,n}\} dv du \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k=i}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_{[i],n} \leq F_n^{-1}(u)\} dv du \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \sum_{k=1}^n \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_{[i],n} \leq F_n^{-1}(u)\} du \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \sum_{k=1}^n \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_{[i],n} \leq X_{k,n}\} du \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} 1\{X_{[i],n} \leq X_{k,n}\} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (n-i+1) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n-i+1)(n-j+1) 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\}.
\end{aligned}$$

Für den Term S_2 nach (E.4) erhalten wir analog

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{i \neq j} \int_0^1 1\{\max(X_i, X_j) \leq F_n^{-1}(u)\} du \int_0^1 1\{\max(Y_i, Y_j) \leq G_n^{-1}(v)\} dv \\
&= \sum_{i \neq j} \int_0^1 1\{\max(X_i, X_j) \leq F_n^{-1}(u)\} du \sum_{k=1}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{\max(Y_i, Y_j) \leq Y_{k,n}\} dv \\
&= \sum_{i \neq j} \int_0^1 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq F_n^{-1}(u)\} du \sum_{k=1}^n 1\{\max(Y_{i,n}, Y_{j,n}) \leq Y_{k,n}\} \frac{1}{n} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{i < j} (n-j+1) \int_0^1 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq F_n^{-1}(u)\} du \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (n-j+1) \sum_{k=1}^n \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq X_{k,n}\} du
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (n-j+1) \sum_{k=1}^n 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq X_{k,n}\}.$$

Dabei folgt das vierte Gleichheitszeichen aufgrund von Symmetriüberlegungen. Mit denselben Hilfsmitteln wie bei der Umformung von S_1 wird der Term S_3 nach (E.5) wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k=1}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq G_n^{-1}(v)\} C(u, v, \hat{\vartheta}_n) dv du \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \sum_{k=1}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_i \leq F_n^{-1}(u), Y_i \leq Y_{k,n}\} C(u, v, \hat{\vartheta}_n) dv du \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 1\{X_{[i],n} \leq F_n^{-1}(u)\} \sum_{k=i}^n \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} C(u, v, \hat{\vartheta}_n) dv du \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{v=(i-1)/n}^1 \sum_{k=1}^n \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} 1\{X_{[i],n} \leq X_{k,n}\} C(u, v, \hat{\vartheta}_n) du dv \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n 1\{X_{[i],n} \leq X_{k,n}\} \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} \int_{v=(i-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v). \end{aligned}$$

Mit der Festlegung

$$\tilde{c}_{ik} := \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} \int_{v=(i-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v)$$

folgt

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \tilde{c}_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \sum_{k=j}^n \tilde{c}_{ik}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \sum_{k=j}^n \tilde{c}_{ik} &= \sum_{k=j}^n \int_{u=(k-1)/n}^{k/n} \int_{v=(i-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v) \\ &= \int_{u=(j-1)/n}^1 \int_{v=(i-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v) =: c_{ij} \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

für $1 \leq i, j \leq n$ ist. Es ergibt sich insgesamt

$$T_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n-i+1)(n-j+1) 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (n-j+1) \sum_{k=1}^n 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq X_{k,n}\} \\
& - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\
& + n \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 d(u, v),
\end{aligned}$$

wobei nach (E.7) und der vorausgesetzten Symmetrie der Kopula $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n)$

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \int_{u=(j-1)/n}^1 \int_{v=(i-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v) \\
&= \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v)
\end{aligned}$$

für $1 \leq i, j \leq n$ ist.

Die zweidimensionalen bestimmten Integrale in (E.7) und (E.6) müssen i.Allg. numerisch berechnet werden. Liefert der Schätzer $\hat{\vartheta}_n$ die Produktkopula, d.h gilt $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) = C^\perp$, so lässt sich die Teststatistik wie folgt analytisch berechnen:

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n-i+1)(n-j+1) 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\
&+ \frac{2}{n^3} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (n-j+1) \sum_{k=1}^n 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq X_{k,n}\} \\
&- \frac{1}{2n^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (n^2 - (i-1)^2)(n^2 - (j-1)^2) 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} + \frac{n}{9}.
\end{aligned}$$

Im Falle $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) = C^+$ erhalten wir in (E.7)

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 \min(u, v) d(u, v) \\
&= \int_{u=(i-1)/n}^{(j-1)/n} \int_{v=(j-1)/n}^1 u dv du + \int_{u=(j-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^u v dv du \\
&+ \int_{u=(j-1)/n}^1 \int_{v=u}^1 u dv du \\
&= \frac{1}{6n^3} [2n^3 - 2(j-1)^3 - 3(n-j+1)((i-1)^2 + (j-1)^2)]
\end{aligned}$$

für $i \leq j$ und in (E.6)

$$S_4 = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 \min(u, v)^2 d(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^u v^2 \, dv du + \int_{u=0}^1 \int_{v=u}^1 u^2 \, dv du \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung von (E.7) im Falle $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) = C^-$ müssen wir zwei Fälle betrachten: Für $i \leq j$ und $n - (i - 1) - (j - 1) \leq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 \max(u+v-1, 0) \, d(u, v) \\
&= \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 u+v-1 \, dv du \\
&= \frac{1}{2n^3} (n-i)(n-j)(i+j).
\end{aligned}$$

Für $i \leq j$ und $n - (i - 1) - (j - 1) > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 \max(u+v-1, 0) \, d(u, v) \\
&= \int_{u=(i-1)/n}^{1-(j-1)/n} \int_{v=1-u}^{1-(i-1)/n} u+v-1 \, dv du + \int_{u=(i-1)/n}^{1-(j-1)/n} \int_{v=1-(i-1)/n}^1 u+v-1 \, dv du \\
&\quad + \int_{u=1-(j-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 u+v-1 \, dv du \\
&= \frac{1}{6n^3} ((n-j)^3 - i^3) + \frac{1}{2n^2} (n-j)j.
\end{aligned}$$

Der Term S_4 in (E.6) hat im Falle $C(\cdot, \hat{\vartheta}_n) = C^-$ den Wert

$$\begin{aligned}
S_4 &= \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 \max(u+v-1, 0)^2 \, d(u, v) \\
&= \int_{u=0}^1 \int_{v=1-u}^1 (u+v-1)^2 \, dv du \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

E.3. Beliebige Gewichtsfunktion

Bei beliebiger symmetrischer Gewichtsfunktion w ergibt sich

$$\begin{aligned}
T_n &= n \cdot \int_0^1 \int_0^1 [C_n(u, v) - C(u, v, \hat{\vartheta}_n)]^2 w(u, v) \, d(u, v) \\
&= n \cdot \int_0^1 \int_0^1 C_n(u, v)^2 w(u, v) \, d(u, v)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2n \cdot \int_0^1 \int_0^1 C_n(u, v) C(u, v, \hat{\vartheta}_n) w(u, v) d(u, v) \\
& + n \cdot \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 w(u, v) d(u, v).
\end{aligned}$$

Mit den Festsetzungen

$$\begin{aligned}
a_{ij} & := \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 w(u, v) d(u, v), \\
b_{jk} & := \int_{u=(j-1)/n}^1 \int_{v=(k-1)/n}^{k/n} w(u, v) d(u, v), \\
c_{ij} & := \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) w(u, v) d(u, v)
\end{aligned}$$

für $1 \leq i, j, k \leq n$ liefert eine zum Fall $w \equiv 1$ völlige analoge Rechnung die Darstellung

$$\begin{aligned}
T_n & = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\
& + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{k=1}^n b_{jk} 1\{\max(X_{[i],n}, X_{[j],n}) \leq X_{k,n}\} \\
& - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} 1\{X_{[i],n} = X_{j,n}\} \\
& + n \int_0^1 \int_0^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n)^2 w(u, v) d(u, v).
\end{aligned}$$

Im Spezialfall $w \equiv 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}
a_{ij} & = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \left(1 - \frac{j-1}{n}\right), \\
b_{jk} & = \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{n}, \\
c_{ij} & = \int_{u=(i-1)/n}^1 \int_{v=(j-1)/n}^1 C(u, v, \hat{\vartheta}_n) d(u, v).
\end{aligned}$$

Symbolverzeichnis

| | | |
|---------------------------------------|---|-----------|
| $[\cdot]$ | Gauß-Klammer | |
| \sim | ist verteilt wie | |
| ∂_u | partielle Ableitung nach u | |
| $1\{\cdot\}$ | Indikatorfunktion | |
| \mathcal{B}^k | Borelmengen in \mathbb{R}^k | |
| $\tilde{\beta}_n$ | zweidimensionaler empirischer Standardprozess | 28 |
| $Bin(n, p)$ | Binomialverteilung mit $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$ | |
| C | einparametrische Kopulafamilie | 25 |
| C | Kopula(-funktion) | 5,6,10,25 |
| $C_C(\cdot, \vartheta)$ | Clayton-Kopula | 8 |
| $C_F(\cdot, \vartheta)$ | Frank-Kopula | 9 |
| $C_G(\cdot, \vartheta)$ | Gumbel-Kopula | 9 |
| C^- | untere Fréchet-Kopula | 6 |
| C_n | empirische Kopula | 12,14 |
| $C_N(\cdot, \vartheta)$ | Gauß-Kopula | 7 |
| $c_{n,\alpha}$ | kritischer Wert | 34,35 |
| $c_{n,\alpha}^*$ | kritischer Wert beim Bootstrap-Test | 46 |
| C^+ | obere Fréchet-Kopula | 6 |
| C^\perp | Produktkopula | 6 |
| $C(\cdot, \vartheta)$ | einparametrische Kopula | 7,15,25 |
| $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ | Verteilungskonvergenz | |
| $\xrightarrow{\mathcal{D}_\vartheta}$ | Verteilungskonvergenz unter $C = C(\cdot, \vartheta)$ | |
| $E_\vartheta X$ | Erwartungswert von X unter $C = C(\cdot, \vartheta)$ | |
| $Exp(\lambda)$ | Exponentialverteilung mit $\lambda > 0$ | |
| F, G | Verteilungsfunktion von X bzw. Y | 6,9,25 |
| F_n, G_n | empirische Verteilungsfunktionen | 11 |
| F_n^{-1}, G_n^{-1} | Quantilfunktion von F_n bzw. G_n | 12 |
| \tilde{F}_n, \tilde{G}_n | empirische Verteilungsfunktionen | 13 |
| $\tilde{F}_n^{-1}, \tilde{G}_n^{-1}$ | Quantilfunktion von \tilde{F}_n bzw. \tilde{G}_n | 13 |
| γ | Kovarianzfunktion | 33 |
| $\Gamma(\alpha, \beta)$ | Gammaverteilung mit $\alpha, \beta > 0$ | |
| γ_0 | Kovarianzfunktion | 37 |
| H | gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y | 5,10,25 |
| H_n | empirische Verteilungsfunktion | 11 |

| | | |
|-------------------------------|---|----------|
| \hat{H}_n | empirische Verteilungsfunktion | 14 |
| $H_{n,\vartheta}$ | Verteilungsfunktion von T_n unter H_0 | 35 |
| H_ϑ | Grenzverteilung | 35 |
| I | Einheitsintervall | 5 |
| i.i.d. | unabhängig und identisch verteilt | |
| $l(\cdot, \vartheta)$ | | 16,40,41 |
| L^2 | L^2 -Raum | 33 |
| $M_{1,\vartheta}$ | | 26 |
| μ | Maß | 31 |
| \mathcal{N} | Normalverteilung | |
| $\sqrt{n}\delta_n$ | geschätzter empirischer Kopula-Prozess | 27 |
| $\sqrt{n}\delta_{A,n}$ | empirischer Kopula-Prozess | 27 |
| $\sqrt{n}\delta_{B,n}$ | parametrisch geschätzter Kopula-Prozess | 27 |
| $O(1/n)$ | Konvergenzordnung $1/n$ | |
| \xrightarrow{P} | stochastische Konvergenz | |
| $P - f.s.$ | P -fast sicher, mit Wahrscheinlichkeit eins | |
| P_ϑ | Wahrscheinlichkeitsmaß unter $C = C(\cdot, \vartheta)$ | |
| $\xrightarrow{P_\vartheta}$ | stochastische Konvergenz unter $C = C(\cdot, \vartheta)$ | |
| Φ | Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung | |
| φ_n | Testvorschrift | 34 |
| $\psi(\cdot)$ | | 19 |
| $\psi(\cdot, \vartheta)$ | | 20,41 |
| $R_{i,n}^X$ | i -te Rangstatistik von X_1, \dots, X_n | 11 |
| $R_{[i],n}^X$ | i -te Rangstatistik von $X_{[1],n}, \dots, X_{[n],n}$ | 32 |
| $\sigma_2(\vartheta)$ | | 16 |
| $\sigma_k(\vartheta_n)$ | | 40 |
| τ | Kendalls Tau | 17 |
| $\hat{\tau}_n$ | Schätzer für τ | 18 |
| ϑ | Kopulaparameter | 7,15 |
| Θ | Parameterbereich von ϑ | 7,15,25 |
| $\hat{\vartheta}_n$ | Schätzer für ϑ | 15,16 |
| $\mathcal{U}(0,1)$ | Gleichverteilung auf $(0,1)$ | |
| \tilde{u}_n, \tilde{v}_n | Standardquantilprozesse | 28 |
| \tilde{U}_n, \tilde{V}_n | empirische Standardprozesse | 28 |
| w | Gewichtsfunktion | 31 |
| $X_{i,n}$ | i -te Ordnungsstatistik von X_1, \dots, X_n | 11 |
| $X_{[1],n}, \dots, X_{[n],n}$ | nach Y sortierte Umordnung von X_1, \dots, X_n | 32 |

Literaturverzeichnis

- [BA92] **Baringhaus, L.; Henze, N.** (1992): A goodness of fit test for the Poisson distribution based on the empirical generating function, *Statist. & Prob. Lett.* 13, 269-274.
- [BI68] **Billingsley, P.** (1968): *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons, New York.
- [BI86] **Billingsley, P.** (1986): *Probability and Measure*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York.
- [BOU00] **Bouyé, E. et.al.** (2000): *Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications*, working paper, Financial Econometrics Research Centre, City University Business School, London.
- [CA94] **Carriere, J.F.** (1994): A large sample test for one-parameter families of copulas, *Commun. Stat. Theory Methods* 23, No.5, 1311-1317.
- [CHEN03] **Chen, X.; Fan, Y.; Patton, A.** (2003): *Simple Tests for Models of Dependence Between Financial Time Series: with Applications to U.S. Equity Returns and Exchange Rates*, working paper, September 2003, New York University.
- [CS84] **Csörgő, M.** (1984): Invariance Principles for empirical Processes. In *Handbook of Statistics*, Vol.4, North-Holland, Amsterdam, 431-462.
- [DAV85] **Davydov, Y.A.; Lifshits, M.A.** (1985): Fibering method in some probabilistic problems, *J. Sov. Math* 31, 2796-2858.
- [DE79] **Deheuvels, P.** (1979): La fonction de dépendance empirique et ses propriétés - Un test non paramétrique d'indépendance, *Bull. Cl. Sci., V. Ser., Acad. R. Belg.* 65, 274-292.
- [DE81] **Deheuvels, P.** (1981): A non parametric test for independence, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 26 (2), 29-50.
- [DEM01] **De Matteis, R.** (2001): *Fitting copulas to data*, Diplomarbeit, ETH Zürich.
- [DK01] **Drouet Mari, D.; Kotz, S.** (2001): *Correlation and Dependence*, Imperial College Press.

- [DS03] **De Michele, C.; Salvadori, G.** (2003): A Generalized Pareto intensity-duration model of storm rainfall exploiting 2-Copulas, *J. Geophys. Res.*, 108(0), accepted 7 October 2002.
- [DUR00] **Durrleman, V.; Nikeghbali, A.; Roncalli, T.** (2000): Which copula is the right one?, working paper, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.
- [EM99] **Embrechts, P.; McNeil, A.; Straumann, D.** (1999): Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. In: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, Cambridge, 176-223.
- [EM03] **Embrechts, P.; Lindskog, F.; McNeil, A.** (2003): Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, In: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, ed. S. Rachev, Elsevier, Chapter 8, 329-348.
- [FA04] **Favre, A.-C.; El Adlouni, S.; Perreault, L.; Thiémonge, N.; Bobée, B.** (2004): Multivariate hydrological frequency analysis using copulas, *Water Resour. Res.*, 40, published 8 January 2004.
- [FE02] **Fermanian, J.D.; Radulovic, D.; Wegkamp, M.** (2002): Weak Convergence of Empirical Copula Processes, working paper, No. 2002-6, CREST.
- [FE03] **Fermanian, J.D.** (2003): Goodness of Fit Tests for Copulas, working paper, No. 2003-34, CREST.
- [FR79] **Frank, M.J.** (1979): On the simultaneous associativity of $F(x, y)$ and $x + y - F(x, y)$, *Aequationes Math.* 19, 194-226.
- [FR97] **Frees, E.W.; Valdez, E.A.** (1997): Understanding Relationship using Copulas, *North American Actuarial Journal*, Volume 2, Number 1, 1-25.
- [FR01] **Frey, R.; McNeil, A.J.** (2001): Modelling dependent defaults, Working Paper, ETH Zürich, ETH E-Collection.
- [FS03] **Fermanian, J.D.; Scaillet, O.** (2003): Nonparametric Estimation of Copulas for Time Series, *Journal of Risk* 5, No. 4, 25-54.
- [GE87] **Genest, Ch.** (1987): Frank's family of bivariate distributions, *Biometrika* 74, No. 3, 549-555.
- [GE93] **Genest, Ch.; Rivest, L.-P.** (1993): Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, *J. Am. Stat. Assoc.* 88, No. 423, 1034-1043.
- [GE95] **Genest, Ch.; Ghoudi, K.; Rivest, L.-P.** (1995): A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika* 82, 543-552.

- [GH98] **Ghoudi, K.; Khoudraji, A.; Rivest, L.-P.** (1998): Propriétés statistiques des copules de valeur extrêmes bidimensionnelles, *Can. J. Stat.* 26, No.1, 187-197.
- [GIB92] **Gibbons, J.D.** (1992): Nonparametric statistical inference, Third Edition, Marcel Dekker, New York.
- [GIH74] **Gihman, I.L., Skorohod, A.V.** (1974): The theory of stochastic processes I, Springer, Berlin.
- [GS77] **Gänssler, P., Stute, W.** (1977): Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer, Berlin.
- [GS79] **Gaenssler, P., Stute, W.** (1979): Empirical Processes: A survey of results for independent and identically distributed random variables, *Ann. Prob.*, Vol. 7, No. 2, 193-243.
- [GS87] **Gaenssler, P., Stute, W.** (1987): Seminar on Empirical Processes, DMV Seminar, Band 9, Birkhäuser, Basel.
- [HE96] **Henze, N.** (1996): Empirical-distribution-function goodness-of-fit tests for discrete models, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 24, No. 1, 81-93.
- [HEU91] **Heuser, H.** (1991): Lehrbuch der Analysis, Teil 1, 9. Auflage, Teubner, Stuttgart.
- [HEU91B] **Heuser, H.** (1991): Lehrbuch der Analysis, Teil 2, 7. Auflage, Teubner, Stuttgart.
- [HEU92] **Heuser, H.** (1992): Funktionalanalysis, 3. Auflage, Teubner, Stuttgart.
- [IB78] **Ibragimov, I., Rozanov, Y.** (1978): Gaussian random processes, Springer, New York.
- [JOE97] **Joe, H.** (1997): Multivariate Models and Dependence Concepts, Chapman & Hall, London.
- [KLU99] **Klugman, S.A., Parsa, R.** (1999): Fitting bivariate loss distributions with copulas. *Insurance Mathematics & Economics* 24 (1999), 139 - 148.
- [KOL75] **Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.** (1975): Reelle Funktionen und Funktionalanalysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- [KOTZ88] **Kotz, S., Johnson, N.L. (Hrsg.)** (1988): Encyclopedia of Statistical Sciences, Wiley, New York.
- [KUN00] **Kundu, S.; Majumdar, S.; Mukherjee, K.** (2000): Central Limit Theorems revisited. *Statist. & Prob. Lett.*, 47, 265-275.
- [LEE79] **Lee, L.** (1979): Multivariate Distributions having Weibull Properties, *Journal of Multivariate Analysis* 9, 267-277.

- [LEE90] **Lee, A. J.** (1990): U-Statistics, Marcel Dekker, New York.
- [LI00] **Li, D.X.** (2000): On default correlation: A copula function approach, *J. Fixed Income*, 9(4), 43-54.
- [LI97] **Li, X.; Mikusiński, P.; Sherwood, H.; Taylor, M.D.** (1997): On approximation of copulas, in V. Beneš and J. Štěpán (Eds.), *Distributions with Given Marginals and Moment Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [LIN00] **Lindskog, F.** (2000): *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Diplomarbeit, ETH Zürich.
- [LT91] **Ledoux, M.; Talagrand, M.** (1991): *Probability in Banach Spaces: isoperimetry and processes*, Springer, Berlin.
- [MS03] **Malevergne, Y.; Sornette, D.** (2003): Testing the Gaussian copula hypothesis for financial assets dependences, *Quantitative Finance*, No. 3, 231-250.
- [NEL98] **Nelson, R.B.** (1998): *An Introduction to copulas*, Springer, New York.
- [OAK82] **Oakes, P.** (1982): A Model for Association in Bivariate Survival Data, *J. R. Statist. Soc. B* 44, No. 3, 414-422.
- [OLC03] **Olivier, B.; Levi, Ch.; Carpenter, G.** (2003): Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Automobile et Incendie à l'aide de la théorie des copules, abstract, 24. International ASTIN Colloquium, Berlin.
- [PA67] **Parthasarathy, K.** (1967): *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, London.
- [SHW86] **Shorack, G.R.; Wellner, J.A.** (1986): *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- [SK59] **Sklar, A.** (1959): Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 8, 229-231.
- [SU96] **Sungur, E. A.; Yang, Y.** (1996): Diagonal Copulas of Archimedean Class, *Commun. Statist. - Theory Meth.*, 25(7), 1659 - 1676.
- [SW81] **Schweizer, B.; Wolff, E.F.** (1981): On nonparametric measures of dependence for random variables, *The Annals of Statistic*, Vol. 9, No. 4, 879-885.
- [VA96] **van der Vaart, A. W.; Wellner, J. A.** (1996): *Weak Convergence and Empirical Processes*, Springer, New York.
- [VE01] **Venter, G.** (2001): Tails of copulas, abstract, 23. International ASTIN Colloquium, Washington D.C.
- [WA91] **Walter, W.** (1991): *Analysis II*, 2. Auflage, Springer, Berlin.

-
- [WI73] **Wichura, M.J.** (1973): Some Strassen-type laws of the iterated logarithm for multiparameter stochastic processes with independent increments, Ann. Prob., Vol. 1, No. 2, 272-296.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Peter Ender
Geboren: 18.09.1970 in Karlsruhe
Eltern: Edgar und Helga Ender
Familienstand: ledig

Ausbildung:

1977 - 1981 Grundschole in Kleinsteinbach
1981 - 1990 Ludwig-Marum-Gymnasium Pfnztal
Mai 1990 Abschluss der Allgemeinen Hochschulreife

Studium:

Okt. 1991 - Sept. 1992 Studium Bauingenieurwesen
an der Universität Karlsruhe
Okt. 1992 - Sept. 1998 Studium Technomathematik
an der Universität Karlsruhe
Okt. 1998 Diplomprüfung in Technomathematik

Tätigkeiten und Berufstätigkeiten:

Juli 1990 - Sept. 1991 Zivildienst bei der Ev. Stadtmission Karlsruhe
Okt. 1995 - Dez. 1998 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für
Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe
Nov. 1998 - Okt. 2001 Kollegiat im Interfakultativen Graduiertenkolleg
Naturkatastrophen der Universität Karlsruhe
Nov. 2001 - Feb. 2004 Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für
Mathematische Stochastik der Universität Karlsruhe

DRUCKEREI ERNST GRÄSSER
Humboldtstrasse 1
76131 karlsruhe

Tel. 07 21 / 61 50 50, Fax - 62 11 91
www.druckerei-graesser.com
Email: info@druckerei-graesser.com