

**Gültigkeit der Ginzburg-Landau Approximation
in musterbildenden Systemen mit
zeitperiodischer Anregung**

Zur Erlangung des akademischen Grades

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik
der Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Norbert Breindl
geboren in Neumarkt, i. d. Opf.

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juni 2005

Referent: Prof. Dr. G. Schneider
Korreferent: Prof. Dr. M. Plum

Karlsruhe 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Ein Modellproblem	7
2.1	Einleitung	7
2.2	Triviale, räumlich homogene, zeitperiodische Lösung	9
2.3	Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung unter Vernachlässigung der zeitlichen Oszillationen	10
2.4	Fehlerabschätzung bei Vernachlässigung der zeitlichen Oszillationen	12
2.5	Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung bei Hinzunahme der zeitlichen Oszillationen	21
2.6	Fehlerabschätzung unter Berücksichtigung der zeitlichen Oszillationen	24
2.7	Zusammenfassung und Vergleich	29
2.7.1	Vergleich der Ginzburg-Landau-Gleichungen	29
2.7.2	Autonome Approximation nichtautonomer Gleichungen	31
2.7.3	Autonome Approximation eines nichtautonomen Ansatzes	32
2.8	Abschätzungen zu Kapitel 2.6	32
3	Das Standardmodell der Elektrokonvektion	34
3.1	Musterbildung in Flüssigkristallen	34
3.2	Das Standardmodell	35
3.3	Das Standardmodell als geschlossenes dynamisches System	39
3.4	Das regularisierte System	40
3.5	Die triviale Lösung	41
3.6	Lineare Stabilitätsanalyse	42
3.7	Die Projektion Q auf die divergenzfreien Vektorfelder	43

3.8	Die Funktionenräume	45
3.9	Die Projektionen	46
3.10	Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung und Abschätzungen für das Residuum	49
3.11	Abschätzungen der Halbgruppe und Nichtlinearität	51
3.12	Die Fehlerabschätzungen	53
4	Das Modell des schwachen Elektrolyten	56
4.1	Das System für n_2, n_3, v_i, ϕ und σ	58
4.2	Das regularisierte System	59
4.3	Die triviale zeitperiodische Lösung	60
4.4	Lineare Stabilitätsanalyse	61
4.5	Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung	62
4.6	Berechnung der Approximationen höherer Ordnung	65
4.7	Die Moden-Filter	67
4.8	Abschätzung für das Residuum	67
4.9	Die Fehlerabschätzungen	68
4.10	Zusammenfassung und Vergleich	72
	Literaturverzeichnis	76

Zusammenfassung

Die mathematische Analyse der Entstehung und Interaktion von musterbildenden Prozessen in physikalischen Systemen basiert in vielen Fällen auf einer Reduktion der zugrundeliegenden partiellen Differentialgleichungen auf endlich- oder unendlich-dimensionale Amplitudengleichungen. Damit ein solches Vorgehen zu sinnvollen Ergebnissen führt, muss gewährleistet sein, dass die wesentliche Dynamik in der Nähe des Bifurkationspunktes auch durch eine Amplitudengleichung beschrieben werden kann. Für die bekannteste Amplitudengleichung, die sog. Ginzburg-Landau-Gleichung ist dies der Fall. Die existierende mathematische Theorie beschränkt sich jedoch auf autonome, d.h. auf nicht explizit zeitabhängige Systeme. Der Zweck dieser Arbeit besteht darin, die Gültigkeit der Ginzburg-Landau-Gleichung mittels eines Approximationssatzes auch für den Fall einer zeitperiodischen Anregung zu zeigen.

Gültigkeit der Ginzburg-Landau Approximation in musterbildenden Systemen mit zeitperiodischer Anregung

Norbert Breindl

11. Juli 2005

1 Einleitung

Musterbildende Systeme finden sich in den unterschiedlichsten naturwissenschaftlichen Bereichen. Am bekanntesten sind wohl die Experimente aus der Fluidodynamik zur Beschreibung des Übergangs von laminarer zu turbulenter Strömung, wie beispielsweise die Rayleigh-Bénard-Konvektion oder das Taylor-Couette-Problem.

Bei einer Rayleigh-Bénard-Konvektion in einfachster Form wird Wasser in einem Behälter von unten erhitzt. Auf diese Weise findet ein Wärmetransport von unten nach oben statt. Solange die Temperaturdifferenz aus unterer und oberer Wasserschicht einen bestimmten Grenzwert nicht überschreitet, erfolgt der Austausch von Wärme lediglich durch Wärmeleitung. Da die unteren Wasserschichten wärmer sind als die oberen, haben diese eine geringere Dichte und das System kann instabil werden. Wird ein bestimmter Grenzwert der Temperaturdifferenz überschritten, so wird die laminare Strömung instabil und Konvektion setzt ein. Es entstehen mittels Bifurkation Muster, wie beispielsweise Rollen, Hexagone usw..

Beim Taylor-Couette-Problem wird ein kleinerer Zylinder in einem mit Flüssigkeit gefüllten größeren Hohlzylinder gedreht. Die Flüssigkeit im Zwischenraum wird dadurch in Bewegung versetzt und es entsteht die zylindrische Couette-Strömung. Wird bei der Drehung ein bestimmter Schwellenwert der Winkelgeschwindigkeit überschritten, so wird die Strömung instabil und es entstehen räumlich periodische Muster, sog. Taylorwirbel. Eine ausführliche Beschreibung der physikalischen Hintergründe des Taylor-Couette-Problems findet sich bei [Ta94].

Das in den Experimenten beobachtete Verhalten der Flüssigkeit, spontan Muster zu bilden, ist universell und nicht beschränkt auf diese Systeme.

Zur Beschreibung solcher musterbildenden Prozesse werden Amplitudengleichungen hergeleitet. Die bekannteste Amplitudengleichung, die sog. Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = c_1 A + c_2 \partial_X^2 A + c_3 A |A|^2 \quad (1)$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ und Lösungen $A = A(X, T) \in \mathbb{C}$ für $T \geq 0$ und $X \in \mathbb{R}$, beschreibt langsame zeitliche und räumliche Modulationen der Amplitude der linear instabilsten Moden. Wir erhalten die Ginzburg-Landau-Gleichung (1) durch Multiskalenanalyse.

Die Ginzburg-Landau-Gleichung (1) findet Anwendung bei einer Vielzahl physikalischer Probleme. So wurde die Gleichung beispielsweise für Reaktions-Diffusions-Systeme und hydrodynamische Stabilitätsprobleme, wie dem Bénard- oder Taylor-Couette-Problem hergeleitet. Es existieren bereits eine Vielzahl von Arbeiten, die die Gültigkeit der Ginzburg-Landau-Gleichung mittels Approximations- und Attraktionsergebnisse rechtfertigen [CE90, vH91, Eck93, Schn94, Schn95]. Ein Überblick findet sich in [Mie02]. Die Ginzburg-Landau-Gleichung ermöglicht also in der Tat eine gute Beschreibung des Originalsystems in der Nähe des Bifurkationspunktes.

Die Ginzburg-Landau-Gleichung wird formal auch zur Beschreibung musterbildender Prozesse in nematischen Flüssigkristallen herangezogen [Tr96, Zh00, AK02]. Eine mathematische Rechtfertigung durch die existierende Literatur ergibt sich aber lediglich für den Fall eines stationären elektrischen Feldes. Experimentell hätte dies die Zerstörung der Flüssigkristalle durch Elektrolyse zur Folge. In den Experimenten wird deshalb ein zeitperiodisches elektrisches Feld gewählt.

Die Resultate dieser Arbeit sind wie folgt. In Kapitel 2 beweisen wir zunächst einen Approximationssatz (Satz 2.14) für ein skalares zeitperiodisches Modellproblem (2). In Kapitel 3 und 4 beweisen wir dann einen solchen Satz jeweils für ein regularisiertes Standardmodell (Satz 3.14) bzw. für ein regularisiertes Modell des schwachen Elektrolyten (Satz 4.6).

Auftretende Konstanten werden wir im folgenden für gewöhnlich nicht unterscheiden und durchgehend mit C bezeichnen. Weiter sei stets $0 < \varepsilon \ll 1$ der zur Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung (1) verwendete Störungsparameter. Auf die explizite Angabe der ε -Abhängigkeit der Lösungen werden wir vielfach verzichten.

2 Ein Modellproblem

2.1 Einleitung

Wir betrachten zunächst folgendes Modellproblem (2), welches die zur Untersuchung der Rechtfertigung der Ginzburg-Landau-Gleichung (1) benötigten wesentlichen Eigenschaften nematischer Flüssigkristalle besitzt:

$$\partial_t u = -u + \beta \cos(\omega t) - \gamma \partial_x^8 u - u^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)u + u\partial_x u \quad (2)$$

mit $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u(x, t) \in \mathbb{R}$ sowie den Parametern $\beta, \gamma, \omega \in \mathbb{R}$, wobei $\beta \geq 0$, $\omega \neq 0$ und $\gamma > 0$ und klein ist. Der Term $-u$ liefert eine lineare Dämpfung und $\beta \cos(\omega t)$ modelliert die zeitperiodische Anregung, mit $\beta \geq 0$ als Kontrollparameter der Amplitude bei konstanter Frequenz $\omega \neq 0$. Die Nichtlinearität $-u^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)u$ entspricht der nichtlinearen viskosen Spannung zwischen den Flüssigkristallen und ist für die auftretende Instabilität verantwortlich. Der Term $u\partial_x u$ entspricht dem Konvektionsterm der Navier-Stokes-Gleichungen. Lediglich als technische Hilfe dient uns der Term $\gamma \partial_x^8 u$. Gleichung (2) - unser Modellproblem - wird hierdurch semilinear und wir können Halbgruppentheorie verwenden.

Für unser Modellproblem (2) leiten wir eine Ginzburg-Landau-Gleichung (1) her. Wir betrachten hierzu in Kapitel 2.2 die Linearisierung des Modellproblems für $\beta = 0$, und untersuchen für $\beta > 0$ die Stabilität der trivialen, räumlich homogenen, zeitperiodischen Lösung. Für die Störung $v = u - u_0(t)$ leiten wir eine Störungsgleichung (6) her. Wir setzen $u_0^2(t) = \bar{c} + c(t)$, wobei \bar{c} der Mittelwert der Oszillationen ist, und $c(t)$ und $u_0(t)$ oszillierend mit Mittelwert Null sind, und spalten die Störungsgleichung (6) in einen linearen und einen nichtlinearen Teil auf. Diese Terme unterscheiden wir dann, ob diese bezüglich ihres zeitlichen Charakters autonom (7)-(8) oder oszillierend (9)-(10) sind. Da die triviale Lösung für ein $\bar{c} = \bar{c}_{\text{krit}}$ instabil wird, leiten wir in Kapitel 2.3 für $\bar{c} - \bar{c}_{\text{krit}} = \varepsilon^2 > 0$ - zunächst unter Vernachlässigung der zeitlichen Oszillationen - eine autonome Ginzburg-Landau-Gleichung (3) her. Mit

$$\begin{aligned} \varepsilon \psi(x, t, \varepsilon) = & \underbrace{\varepsilon A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ik_c x} + \varepsilon A_{-1}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{-ik_c x}}_{\varepsilon \psi_c} \\ & + \underbrace{\varepsilon^2 A_2(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{-2}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{-2ik_c x} + \varepsilon^2 A_0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)}_{\varepsilon^2 \psi_s} \end{aligned}$$

als Ansatz, wobei $0 < \varepsilon \ll 1$ ein kleiner Störungsparameter ist und $\bar{A}_j = A_{-j}$, erhalten wir eine autonome Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = c_1 A_1 + c_2 \partial_X^2 A_1 + c_3 A_1 |A_1|^2 \quad (3)$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ und Lösungen $A_1 = A_1(X, T) \in \mathbb{C}$ für $T \geq 0$ und $X \in \mathbb{R}$. Als Skalierungen für die Orts- und Zeitvariable wählen wir

$$X = \varepsilon x \quad \text{und} \quad T = \varepsilon^2 t.$$

In Kapitel 2.4 zeigen wir, dass durch die Approximation mittels einer Ginzburg-Landau-Gleichung (3) eine exakte Lösung der autonomen Störungsgleichung (11) unseres Modellproblems auf der natürlichen Zeitskala $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$ bis auf einen Fehler von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ approximiert werden kann. Schwierigkeiten bei der Fehlerabschätzung ergeben sich aus den quadratischen Termen. Naive Energieabschätzungen, z. B. mittels der Gronwallschen Ungleichung, liefern lediglich Abschätzungen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$. Wir benötigen jedoch Abschätzungen auf der langen Zeitskala $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$. Wir teilen deshalb Approximation und Fehler in einen stabilen (exponentiell gedämpften) und einen kritischen Bereich auf, und definieren uns hierfür Moden-Filter. Die kritischen Moden für den Fehler können wir dann herausziehen und wir können zeigen, dass auch diese auf der $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$ -Zeitskala $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ -beschränkt bleiben.

In Kapitel 2.5 nehmen wir die zeitlichen Oszillationen hinzu und leiten eine Ginzburg-Landau-Gleichung mit zeitperiodischen Koeffizienten (5) her. Als neuen Ansatz wählen wir

$$\varepsilon \psi(x, t, \varepsilon) = \varepsilon A_1(X, T) e^{ik_c x + \varphi_0(t)} + \varepsilon^2 A_2(X, T) e^{2(ik_c x + \varphi_0(t))} + c.c. + \frac{\varepsilon^2}{2} A_0(X, T), \quad (4)$$

wobei wir mit $X = \varepsilon(x + \varphi_1(t))$ auch den Ort, der zuvor mit $X = \varepsilon x$ skaliert wurde, zeitabhängig skalieren. Durch die Modifikation des klassischen Ansatzes mit φ_0 und φ_1 können wir störende Terme mit zu niedriger ε -Ordnung eliminieren. Mit unserem Ansatz (4) erhalten wir eine nichtautonome Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = d_1 \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 + d_2 \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) \partial_X^2 A_1 + d_3 \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 |A_1|^2 \quad (5)$$

mit zeitabhängigen Koeffizienten $d_j = d_j(T/\varepsilon^2)$. Damit können langsame, zeitliche und räumliche, Modulationen des Musters für eine nichtautonome Gleichung durch die Lösungen $A_1(X, T, \varepsilon)$ einer nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (5) beschrieben werden. Die Fehlerabschätzung für den zeitperiodischen Fall in Kapitel 2.6 können wir, bis auf leichte Modifikationen, ähnlich wie im autonomen Fall durchführen. Zu beachten ist jedoch, dass

$$\varphi_0(t) = (4k_c^2 - k_c^4) \int_0^t c(\tau) d\tau + ik_c \int_0^t u_0(\tau) d\tau$$

und

$$\varphi_1(t) = (4k_c^3 - 8k_c) i \int_0^t c(\tau) d\tau + ik_c \int_0^t u_0(\tau) d\tau$$

einen zwar nichtverschwindenden, dafür jedoch beschränkten, Imaginärteil besitzen, d.h. die Lösung $A_1 = A_1(X, T, \varepsilon)$ der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (5) muss im zeitperiodischen Fall bezüglich X eine analytische Funktion sein.

In Kapitel 2.7.2 zeigen wir dann, dass wir unser zeitperiodisches Modellproblem (2) durch eine autonome Ginzburg-Landau-Gleichung (3) approximieren können (Satz 2.14). Wir zeigen, dass wir Lösungen der nichtautonomen Gleichung (5) durch Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (3) approximieren können. Letztendlich also den zeitperiodischen Fall durch eine autonome Ginzburg-Landau-Gleichung approximieren können.

Bemerkung 2.1 *Durch eine abstraktere Vorgehensweise in Kapitel 4 kann auf die Voraussetzung der Analytizität verzichtet werden.*

2.2 Triviale, räumlich homogene, zeitperiodische Lösung

Für $\beta = 0$ besitzt unser Modellproblem (2) die triviale Lösung $u = 0$. Um die Stabilität der Lösungen zu untersuchen, betrachten wir im Fall $\beta = 0$ die Linearisierung

$$\partial_t u = -u - \gamma \partial_x^8 u,$$

welche für $u = 0$ einen stabilen Fixpunkt liefert. Für den Fall $\beta > 0$ ergeben sich räumlich konstante, zeitperiodische Lösungen $u_0(t)$. Diese sind Lösungen der räumlich homogenen Gleichung

$$\partial_t u_0(t) = -u_0(t) + \beta \cos(\omega t).$$

Da

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \int_0^t e^{-(t-s)} \beta \cos(\omega s) ds + C e^{-t} \\ &= \beta \left(\frac{\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) - e^{-t}}{1 + \omega^2} \right) + C e^{-t}, \end{aligned}$$

erhalten wir für $C = \beta/(1 + \omega^2)$ als triviale, räumlich homogene, zeitperiodische Lösung

$$u_0(t) = \beta \left(\frac{\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{1 + \omega^2} \right).$$

Als nächstes leiten wir eine Gleichung für die Störung v von $u_0(t)$ her. Für $u = u_0(t) + v$ erhalten wir für unser Modellproblem (2) durch Betrachten der Gleichungen $\partial_t u_0$ und $\partial_t u$ als Gleichung für die Störung

$$\partial_t v = -v - \gamma \partial_x^8 v - (u_0(t) + v)^2 (4\partial_x^2 + \partial_x^4) v + (u_0(t) + v) \partial_x v. \quad (6)$$

In obiger Störungsgleichung (6) setzen wir $u_0^2(t) = \bar{c} + c(t)$, wobei \bar{c} der Mittelwert der Oszillationen ist, und $c(t)$ und $u_0(t)$ oszillierend mit Mittelwert Null sind. Wir spalten die Gleichung (6) zunächst in einen linearen autonomen (7) bzw. oszillierenden (9) Teil und einen nichtlinearen autonomen (8) bzw. oszillierenden (10) Teil auf. Wir erhalten

$$\partial_t v = -v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v \quad (7)$$

$$- v^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + v\partial_x v \quad (8)$$

$$- c(t)(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + u_0(t)\partial_x v \quad (9)$$

$$- 2u_0(t)v(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v. \quad (10)$$

2.3 Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung unter Vernachlässigung der zeitlichen Oszillationen

Eine erste Näherung der Störungsgleichung (7-10) erhalten wir durch Vernachlässigung der oszillierenden Terme, d.h. der Terme (9) und (10). Wir betrachten

$$\partial_t v = -v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v - v^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + v\partial_x v. \quad (11)$$

Wir untersuchen zunächst die Linearisierung

$$\partial_t v = -v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v. \quad (12)$$

Mittels Fouriertransformation erhalten wir

$$v(x, t) = e^{ikx + \lambda(k, \bar{c})t}$$

als Lösung mit

$$\lambda(k, \bar{c}) = -1 + 4\bar{c}k^2 - \bar{c}k^4 - \gamma k^8$$

als Eigenwertkurve. Für diese Eigenwertkurve existiert ein \bar{c}_{krit} und eine kritische Wellenzahl $k_c > 0$, so dass $\text{Re } \lambda(k_c, \bar{c}_{\text{krit}}) = 0$. Für $k \neq \pm k_c$ ist $\text{Re } \lambda(k, \bar{c}_{\text{krit}}) < 0$. Wir führen einen kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ ein, so dass

$$\bar{c} = \bar{c}_{\text{krit}} + \varepsilon^2$$

gilt. Wir erhalten dadurch Instabilität für $k = \pm k_c$ falls $\bar{c} > \bar{c}_{\text{krit}}$. Für die Eigenwertkurve, mit den kritischen Wellenzahlen $\pm k_c$ und $\varepsilon^2 > 0$ als Bifurkationsparameter, ergibt sich im instabilen Fall ein Verlauf wie er in Abbildung 1 skizziert ist. Aus dieser Abbildung ist auch ersichtlich, dass die für Ginzburg-Landau-Approximationen

charakteristische Form der Eigenwertkurve vorliegt. Die Herleitung einer Ginzburg-Landau-Gleichung ist also prinzipiell möglich.

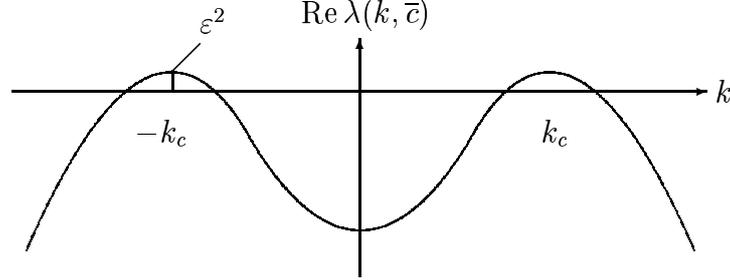


Abb.1 Eigenwertkurve mit kritischen Wellen $\pm k_c$ und Bifurkationsparameter $\varepsilon^2 > 0$ im instabilen Fall

Zur Herleitung einer autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (3) machen wir den üblichen Ansatz

$$\varepsilon\psi(x, t, \varepsilon) = \underbrace{\varepsilon A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{ik_c x} + \varepsilon A_{-1}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{-ik_c x}}_{\varepsilon\psi_c} + \underbrace{\varepsilon^2 A_2(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{-2}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{-2ik_c x} + \varepsilon^2 A_0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)}_{\varepsilon^2\psi_s} \quad (13)$$

wobei $\overline{A_j} = A_{-j}$ und $A_1 = A_1(X, T)$ Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (3) ist. Als Skalierungen für die Zeit wählen wir $T = \varepsilon^2 t$ und für den Ort $X = \varepsilon x$. Für die Gleichung (11) erhalten wir mittels formaler Störungsrechnung die autonome Ginzburg-Landau-Gleichung (15). Wir definieren hierzu $\tilde{\lambda}(k, \varepsilon^2) = \lambda(k, \bar{c}_{\text{krit}} + \varepsilon^2)$. Setzen wir den von uns gewählten Ansatz

$$\varepsilon\psi(x, t, \varepsilon) = \varepsilon A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{ik_c x} + \varepsilon^2 A_2(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)e^{2ik_c x} + c.c. + \varepsilon^2 A_0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t)$$

in (11) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_T A_1 &= \partial_2 \tilde{\lambda}(k_c, 0) A_1 - \frac{\partial_1^2 \tilde{\lambda}(k_c, 0)}{2} \partial_X^2 A_1 - A_1^2 (4(-ik_c)^2 + (-ik_c)^4) A_{-1} \quad (14) \\ &\quad - 2A_1 A_{-1} (4(ik_c)^2 + (ik_c)^4) A_1 \\ &\quad + A_2 (-ik_c) A_{-1} + A_{-1} (2ik_c) A_2 + A_0 (ik_c) A_1. \end{aligned}$$

Da

$$0 = \tilde{\lambda}(0, 0) A_0 + A_1 (-ik_c) A_{-1} + A_{-1} (ik_c) A_1$$

und

$$0 = \tilde{\lambda}(2k_c, 0) A_2 + A_1 (ik_c) A_1,$$

ist $A_0 = 0$ und $A_2 = -ik_c A_1^2 / \lambda(2k_c, 0)$. Setzen wir A_0 und A_2 in (14) ein, so erhalten wir als Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = (\partial_2 \tilde{\lambda}(k_c, 0) - \frac{\partial_1^2 \tilde{\lambda}(k_c, 0)}{2} \partial_X^2) A_1 + \left(\frac{k_c^2}{\lambda(2k_c, 0)} + 12k_c^2 - 3k_c^4 \right) A_1 |A_1|^2 \quad (15)$$

mit $A_1 = A_1(X, T) \in \mathbb{C}$ als Lösung, und $X = \varepsilon x$ bzw. $T = \varepsilon^2 t$ als Skalierungen für den Ort bzw. die Zeit.

2.4 Fehlerabschätzung bei Vernachlässigung der zeitlichen Oszillationen

In diesem Kapitel geben wir Voraussetzungen an, so dass der Fehler mit einer Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ klein bleibt im Vergleich zur Approximation $\psi(x, t, \varepsilon)$ und zur Lösung $v(x, t)$, die beide von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sind. Da die Approximation selbst für $t \in [0, T_0/\varepsilon^2]$ erfolgt, muss der Fehler bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$ in der Zeit von der Grössenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ bleiben. Wir erhalten dann näherungsweise gleiches Verhalten bei der Ginzburg-Landau-Gleichung und dem zu approximierenden System. Um dies zu zeigen, benötigen wir einen geeigneten Abstandsbegriff, damit wir die Abweichung, die sich aus Approximation und tatsächlicher Lösung ergibt, messen können. Die Lösung $t \rightarrow v(\cdot, t)$ von (11) definiert eine Kurve im unendlich-dimensionalen Phasenraum, d.h. $x \rightarrow v(x, t)$ liegt für festes t in einem geeignetem Funktionenraum. Wir beweisen Satz 2.2, indem wir für jedes feste t den Abstand zwischen der Kurve $t \rightarrow v(\cdot, t)$ mit der zugehörigen Approximation $t \rightarrow \psi(\cdot, t, \varepsilon)$ vergleichen. Zur Konstruktion von Lösungen partieller Differentialgleichungen auf beschränkten Gebieten bieten sich die Sobolev-Räume H^m mit der Norm

$$\|v\|_{H^m} = \sum_{j=0}^m \|\partial_x^j v\|_{L^2}, \text{ wobei } \|v\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx$$

an. Diese sind jedoch für unsere Zwecke nicht ausreichend. Fundamentale Lösungen wie konstante Funktionen, räumlich periodische Lösungen und Fronten sind in H^m nicht enthalten. Wir verwenden deshalb den Raum $H_{l,u}^m$ der lokal gleichmässig beschränkten Sobolev Funktionen [Schn94, MS95]. Der Raum $H_{l,u}^m$ ist mit der Norm

$$\|v\|_{H_{l,u}^m} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \|v\|_{H^m(x, x+1)}$$

versehen. Weiter gilt für Funktionen in $H_{l,u}^m$

$$\|T_y v - v\|_{H_{l,u}^m} \rightarrow 0 \text{ für } y \rightarrow 0,$$

wobei $(T_y v)(x) = v(x + y)$, wie bei der Einbettung von $C_{b,\text{unif}}^0 \subset C_b^0$. In diesem Raum sind die fehlenden Funktionen enthalten. Die Fouriertransformation steht

uns über die später aufgeführten Multiplikatorenätze ebenfalls zur Verfügung. Wir formulieren zunächst unseren Approximationssatz

Satz 2.2 Sei $A_1 = A_1(X, T)$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (15) für $T \in [0, T_0]$ und $m \geq 4$ in $H_{l,u}^{m+3}$. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0, C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|v(\cdot, t) - \varepsilon\psi_c(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H_{l,u}^m} \leq C\varepsilon^2$$

gilt, wobei $v(x, t)$ die Lösung von (11) zur Anfangsbedingung $v(x, 0) = \varepsilon\psi_c(x, 0, \varepsilon)$ ist, und $\varepsilon\psi_c$ wie in (13) definiert.

Bemerkung 2.3 Damit gilt auch

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |v(x, t) - \varepsilon\psi_c(x, t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^2.$$

Um Satz 2.2 zu beweisen, leiten wir zunächst eine Differentialgleichung für den Fehler her, und schätzen den Fehler dann als Lösung der Differentialgleichung ab. Eine einfache und auch oft verwendete Methode der Fehlerabschätzung - die Gronwall'sche Ungleichung - können wir im hier gegebenen Fall nicht direkt anwenden, da sich durch das Auftreten quadratischer Nichtlinearitäten im Linearteil der Differentialgleichung für den Fehler $\mathcal{O}(\varepsilon)$ statt $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ergibt [Schn92]. Dies hätte zur Folge, dass wir eine Abschätzung nur bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$ erhielten. Natürliche Zeitskala ist aber $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$. Nur dann hat die Ginzburg-Landau-Gleichung auf einer $\mathcal{O}(1)$ -Zeitskala gleiches Verhalten wie das volle System.

Die Differentialgleichung für den Fehler enthält also Terme mit zu geringer ε -Ordnung. Diese Terme sind jedoch exponentiell gedämpft und Interaktionen der kritischen Moden e^{ikx} ergeben diese Moden nicht mehr. Es macht somit Sinn, den Fehler in einen stabilen und einen kritischen Bereich aufzuteilen. Wir setzen deshalb für den Fehler

$$R(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s,$$

wobei R_c der kritische und R_s der stabile Bereich der Moden ist. Die Approximation $\varepsilon\psi_c$ der linear instabilen Fouriermoden ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Für $\varepsilon^2\psi_s$, d.h. für die linear gedämpften Fouriermoden, ergibt sich $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Der Fehler $\varepsilon^2 R_c$ im linear kritischen Fall ist somit $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ bzw. $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ im stabilen Fall $\varepsilon^3 R_s$.

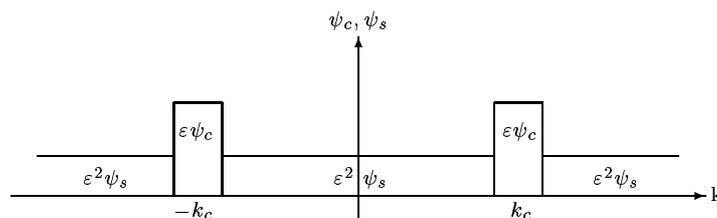
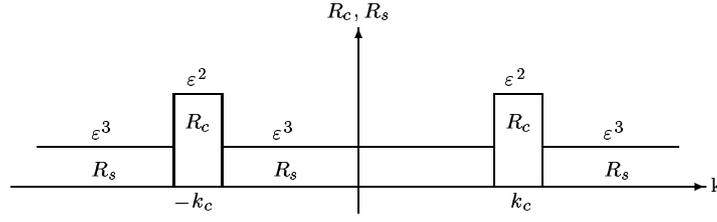


Abb. 2 kritischer ($\varepsilon\psi_c$) und stabiler ($\varepsilon^2\psi_s$) Teil der Approximation

Abb. 3 kritischer ($\varepsilon^2 R_c$) und stabiler ($\varepsilon^3 R_s$) Teil des Fehlers

Zum Beweis von Satz 2.2 definieren wir uns zunächst Moden-Filter und verwenden die im folgenden angegebenen Lemmata. Als Moden-Filter für die kritischen Moden definieren wir

$$E_c = \mathcal{F}^{-1} \hat{E}_c \mathcal{F},$$

wobei $\hat{E}_c = \chi_c$ eine gerade, positive C_0^∞ -Abschneidefunktion mit Werten aus $[0, 1]$ ist, und

$$\chi_c(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \in I_c = [-9k_c/8, -7k_c/8] \cup [7k_c/8, 9k_c/8], \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus ([-10k_c/8, -6k_c/8] \cup [6k_c/8, 10k_c/8]). \end{cases}$$

Für den linear stabilen Teil der Moden definieren wir den Operator

$$E_s = 1 - E_c$$

mit E_c als Distribution und Trägern $[-9k_c/8, -7k_c/8] \cup [7k_c/8, 9k_c/8]$, so dass die kritischen Wellenzahlen $k_c = \pm 1$ enthalten sind. Da E_c und E_s keine Projektionen, sind definieren wir uns zusätzliche Operatoren E_c^h und E_s^h . Wir definieren zunächst

$$\chi_c^h(k) = \begin{cases} 1 & \text{für } k \in ([-10k_c/8, -6k_c/8] \cup [6k_c/8, 10k_c/8]), \\ 0 & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus ([-11k_c/8, -5k_c/8] \cup [5k_c/8, 11k_c/8]), \end{cases}$$

und

$$\chi_s^h(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \in ([-10k_c/8, -6k_c/8] \cup [6k_c/8, 10k_c/8]), \\ 1 & \text{für } k \in \mathbb{R} \setminus ([-11k_c/8, -5k_c/8] \cup [5k_c/8, 11k_c/8]). \end{cases}$$

Die C_0^∞ -Funktionen χ_c^h und χ_s^h definieren

$$E_c^h = \mathcal{F}^{-1} \chi_c^h \mathcal{F}$$

und

$$E_s^h = \mathcal{F}^{-1} \chi_s^h \mathcal{F}.$$

Als weiteren Operator mit den gleichen Eigenschaften wie E_c definieren wir

$$E_0 = \mathcal{F}^{-1} \hat{E}_0 \mathcal{F} \quad \text{mit} \quad \hat{E}_0 = \begin{cases} 1 & \text{für } k \in [-k_c/8, k_c/8], \\ 0 & \text{für } |k| > 2k_c/8. \end{cases}$$

Das Komplement hierzu ist durch

$$E_0^c = 1 - E_0$$

gegeben.

Für die obig definierten Moden-Filter geben wir im folgenden Lemmata an. Zu beachten ist dabei, dass im Fourierraum lineare Differentialoperatoren und Fundamentallösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung durch Multiplikationsoperatoren gegeben sind. Um diese Operatoren in den $H_{l,u}^m$ -Räumen kontrollieren zu können, formulieren wir zunächst folgendes Multiplikatoren-Lemma 2.4. Zu diesem Lemma geben wir dann Bedingungen an, wann ein Multiplikator $\hat{M}(k) \in L(W_1, W_2)$ - W_1 und W_2 sind Hilberträume - einen beschränkten linearen Operator $M_{l,u}$ von $H_{l,u}^q(W_1)$ nach $H_{l,u}^{q+m}(W_2)$ definiert.

Lemma 2.4 *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $k \mapsto (1 + k^2)^{m/2} \hat{M}(k) \in C_b^2(\mathbb{R}, L(W_1, W_2))$. Dann ist der lineare Operator $M_{l,u} : H_{l,u}^q(W_1) \rightarrow H_{l,u}^{q+m}(W_2)$ beschränkt für alle $q \in \mathbb{N}_0$ mit $q + m \geq 0$ und die Norm*

$$\leq c(q, m) \|(1 + |\cdot|^2)^{m/2} \hat{M}\|_{C_b^2(\mathbb{R}, L(W_1, W_2))},$$

wobei $c(q, m)$ nicht von \hat{M} abhängt.

Beweis. Siehe [Schn94, Seite 441/442].

Damit folgern wir

Lemma 2.5 *Die Operatoren E_c und E_c^h sind linear stetige Abbildungen von $L_{l,u}^2$ nach $H_{l,u}^m$, d.h. für alle $m \geq 0$ gibt es Konstanten $C \geq 0$, so dass*

$$\|E_c u\|_{H_{l,u}^m} + \|E_c^h u\|_{H_{l,u}^m} \leq C \|u\|_{L_{l,u}^2}$$

gilt.

Beweis. Die Norm kann nach Lemma 2.4 durch

$$\begin{aligned} \|E_c u\|_{H_{l,u}^m} &\leq C \|(1 + |\cdot|^2)^{m/2} \hat{E}_c(\cdot)\|_{C_b^2} \|u\|_{L_{l,u}^2} \\ &\leq C \|u\|_{L_{l,u}^2} \end{aligned}$$

abgeschätzt werden. Analog E_c^h . □

Lemma 2.6 Die Operatoren E_s und E_s^h sind linear stetige Abbildungen in $H_{l,u}^m$, d.h. für alle $m \geq 0$ gibt es Konstanten $C \geq 0$, so dass

$$\|E_s u\|_{H_{l,u}^m} + \|E_s^h u\|_{H_{l,u}^m} \leq C \|u\|_{H_{l,u}^m}$$

gilt. Durch die Anwendung von E_0 auf ein skaliertes $A_m^n = A_m^n(\varepsilon x)$ wird A_m^n geglättet, und mit der Skalierung $X = \varepsilon x$ werden die Fourier-Moden in einer $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -Nähe zur Wellenzahl Null im Fourierraum konzentriert. Es kann deshalb nicht sein, dass die Anwendung von E_0 auf die skalierten A_m^n diese wesentlich ändert, was zur Folge hat, dass die Differenz aus $(E_0 A_m^n)(\varepsilon \cdot)$ und $A_m^n(\varepsilon \cdot)$ klein sein wird. Wir benötigen ein weiteres Lemma zur Abschätzung von Multiplikatoren, die auf skalierte Funktionen angewendet werden.

Lemma 2.7 Sei $m \in \mathbb{N}$, $(1 + |\cdot|^2)^{-m/2} \hat{M}(\cdot) \in C_b^2(\mathbb{R}, L(W_1, W_2))$ und $S_\varepsilon u(x) := u(\varepsilon x)$ ein Skalierungsoperator. Dann ist $M((S_\varepsilon \cdot) e^{ik_0 x}) : H_{l,u}^q(W_1) \mapsto H_{l,u}^{q+m}(W_2)$ beschränkt für alle $q \geq r \geq m$ mit der Norm

$$C(q, m, r) \|(1 + |\cdot|^2)^{-m/2} \hat{M}(\varepsilon \cdot + k_0)\|_{C_b^2(\mathbb{R}, L(W_1, W_2))} \times \|S_\varepsilon\|_{L(H_{l,u}^{q-m}(W_1), H_{l,u}^{q-r}(W_2))},$$

wobei $C(q, m, r)$ nicht von \hat{M} abhängt.

Beweis. Siehe [Schn94, Seite 444].

Durch die Differentiation skalierten Funktionen kommen wir eine ε -Ordnung höher. Es gilt $\partial_x u(\varepsilon x) = \varepsilon \partial_X u(X) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ für $X = \varepsilon x$. Wir notieren

Lemma 2.8 Mit den Voraussetzungen aus Lemma 2.7 und $\hat{M}(k + k_0) = \mathcal{O}(k^s)$ für $k \rightarrow 0$ und $s \leq m$ gilt

$$\|(1 + |\cdot|^2)^{-m/2} \hat{M}(\varepsilon \cdot + k_0)\|_{C_b^2(\mathbb{R}, L(W_1, W_2))} = \mathcal{O}(\varepsilon^s).$$

Beweis. Einfache Berechnungen. □

Daraus folgt unmittelbar

Lemma 2.9 Für alle $m \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|E_0^c A(\varepsilon \cdot)\|_{H_{l,u}^m} &\leq C \|(1 + |\cdot|^2)^{-m/2} \hat{E}_0^c(\varepsilon \cdot)\|_{C_b^2} \times \|S_\varepsilon\|_{L_{l,u}^2 \mapsto L_{l,u}^2} \|A\|_{H_{l,u}^m} \\ &\leq C \varepsilon^m \varepsilon^{-1/2} \|A\|_{H_{l,u}^m}. \end{aligned}$$

In Lemma 2.10 zeigen wir, dass die quadratischen Terme kritischer Moden durch die Anwendung von E_c verschwinden, wenn diese durch E_c gefiltert werden. Quadratische Interaktionen kritischer Moden ergeben also keine kritischen Moden.

Lemma 2.10 *Sei $m \geq 1$ und. Dann gilt für $u_1, u_2 \in H_{l,u}^m$*

$$E_c(E_c u_1 \cdot E_c u_2) = 0.$$

Beweis. Die Fouriertransformationen von $\mathcal{F}(E_c u_1)$ und $\mathcal{F}(E_c u_2)$ sind temperierte Distributionen mit kompakten Trägern auf $[-9k_c/8, -7k_c/8] \cup [7k_c/8, 9k_c/8]$. Die Konvolution von Distributionen mit kompakten Trägern ist wohldefiniert [W182]. Wenden wir den Operator E_c auf die Konvolution $\mathcal{F}(E_c u_1) * \mathcal{F}(E_c u_2)$ mit Träger auf $[-9k_c/4, -7k_c/4] \cup [-k_c/4, k_c/4] \cup [7k_c/4, 9k_c/4]$, so wird diese zu Null. \square

Definition 2.11 *Terme, die sich beim Einsetzen der Approximation in die Gleichung nicht gegenseitig wegekürzen, werden als Residuum bezeichnet.*

Als Residuum für unsere autonome Störungsgleichung (11) ergibt sich

$$Res(v) = -\partial_t v - v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v - v^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + v\partial_x v.$$

Falls $Res(v) = 0$, so ist dies äquivalent zu v ist Lösung von (11).

Lemma 2.12 *Sei $m \geq 4$ und $A_1 = A_1(X, T) \in C([0, T_0], H_{l,u}^{m+3})$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (15). Für die Approximation $\varepsilon\psi = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$ mit*

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi_c &= \varepsilon A_1(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ik_c x} + \varepsilon A_{-1}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{-ik_c x}, \\ \varepsilon^2\psi_s &= \varepsilon^2 A_2(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{-2}(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{-2ik_c x} + \varepsilon^2 A_0(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{0ik_c x} \end{aligned}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_s(Res(\varepsilon\psi))\|_{H_{l,u}^m} &= \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_c(Res(\varepsilon\psi))\|_{H_{l,u}^m} &= \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis findet sich für einen allgemeineren Fall in [Schn94, Seite 29-31].

Mit den angegebenen Lemmata können wir Satz 2.2 beweisen.

Beweis (Satz 2.2). Wir schreiben für die Gleichung (11) abstrakt

$$\partial_t v = \lambda v + B(v, v) + K(v, v, v) \tag{16}$$

mit

$$\lambda v = -v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v$$

als Linearteil,

$$B(v, v) = v \partial_x v$$

als symmetrische bilineare und

$$K(v, v, v) = -v^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v$$

als symmetrische trilineare Abbildung. Wir setzen die exakte Lösung

$$v = \varepsilon \psi + R = \varepsilon \psi_c + \varepsilon^2 \psi_s + \varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s \quad (17)$$

in (16) ein, und erhalten nach Division durch ε^2 und Trennung in lineare und nicht-lineare Terme

$$\begin{aligned} \partial_t R_c + \varepsilon \partial_t R_s &= \lambda R_c + \varepsilon \lambda R_s + \varepsilon \tilde{L}_2(R_c) + \varepsilon^2 \tilde{L}_1(R) + \varepsilon^2 \tilde{N}_2(R_c) \\ &+ \varepsilon^3 \tilde{N}_1(R) + \frac{1}{\varepsilon^2} Res(\varepsilon \psi) \end{aligned} \quad (18)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2(R_c) &= 2B(R_c, \psi_c), \quad \tilde{L}_1(R) = 2B(R_c, \psi_s) + 2B(R_s, \psi_c) + 3K(\psi_c, \psi_c, R_c), \\ \tilde{N}_2(R_c) &= B(R_c, R_c) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\tilde{N}_1(R) = B(R_s, 2R_c + 2\psi_s + \varepsilon R_s) + 6K(\psi_c, R_c, \psi_s) + 3K(\psi_c, \psi_c, R_s) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

wobei $\mathcal{O}(\varepsilon)$ weitere Terme enthält, die von K erzeugt werden.

Sind R_c , R_s , ψ_c und ψ_s jeweils von der Ordnung $\mathcal{O}(1) \in H_{l,u}^m$ dann gilt dies natürlich auch für \tilde{L}_1 , \tilde{L}_2 , \tilde{N}_1 und \tilde{N}_2 , allerdings mit Werten in $H_{l,u}^{m-4}$. Um auf Gleichungen für R_c und R_s zu kommen, verwenden wir die Moden-Filter E_c und E_s .

Wir beachten, dass $E_c \tilde{L}_2(R_c) = E_c \tilde{N}_2(R_c) = 0$ nach Lemma 2.10 gilt und spalten die Gleichung für den Fehler (18) in einen kritischen und einen stabilen Teil auf. Dabei seien R_c und R_s Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \partial_t R_c &= \lambda R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^3 N_c(R) + \varepsilon^2 \delta_c, \\ \partial_t R_s &= \lambda R_s + L_s(R_c) + \varepsilon N_s(R) + \delta_s \end{aligned} \quad (19)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{1}{\varepsilon^4} E_c(Res(\varepsilon \psi)), \quad \delta_s = \frac{1}{\varepsilon^3} E_s(Res(\varepsilon \psi)), \\ L_c(R) &= E_c(\tilde{L}_1(R)), \quad L_s(R_c) = E_s(\tilde{L}_2(R_c)), \\ N_c(R) &= E_c(\tilde{N}_1(R)), \quad N_s(R) = E_s(\tilde{L}_1(R) + \tilde{N}_2(R_c) + \varepsilon \tilde{N}_1(R)) \end{aligned}$$

und $(R_c(0), R_s(0)) = (0, 0)$ als Anfangsbedingung. Wir lösen dieses System im Raum

$$\mathcal{B}_m = C([0, T_0/\varepsilon^2], H_{l,u}^m)^2$$

mit

$$\|(R_c, R_s)|_{\mathcal{B}_m} = \sum_{i=c,s} \sup_{0 \leq t \leq T_0/\varepsilon^2} \|R_i(\cdot, t)\|_{H_{l,u}^m}$$

als Norm. Zu zeigen ist, dass die Lösungen in \mathcal{B}_m von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ sind. Wir invertieren hierzu den Linearteil von (19) und wenden das Kontraktionsprinzip an. Die Inhomogenität $\delta = (\delta_c, \delta_s)$ ist nach Lemma 2.12 von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$. Die Nichtlinearität $N = (N_c(R), N_s(R))$ ist eine Summe aus linearen, bilinearen und trilinearen Termen. Da $H_{l,u}^m$ für $m \geq 1$ eine Banach-Algebra ist, ist N eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung von \mathcal{B}_m nach \mathcal{B}_{m-4} , die beschränkte Mengen aus \mathcal{B}_m in beschränkte Mengen aus \mathcal{B}_{m-4} abbildet. Abzuschätzen bleiben somit lediglich die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \partial_t R_c &= \lambda R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^2 f_c, \\ \partial_t R_s &= \lambda R_s + L_s(R_c) + f_s \end{aligned} \quad (20)$$

mit $f_c = E_c^h f_c$, $f_s = E_s^h f_s$ und $f = (f_c, f_s) \in \mathcal{B}_{m-4}$. Da $L = (L_c(R), L_s(R_c))$ eine beschränkte lineare Abbildung von \mathcal{B}_m nach \mathcal{B}_{m-4} ist, existieren lokale Lösungen (Vgl. Lemma 2.4).

Um zu zeigen, dass die Lösungen auf dem Zeitintervall $[0, T_0/\varepsilon^2]$ von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist, verwenden wir die Erkenntnis, dass der Operator λ der Generator einer analytischen Halbgruppe $e^{\lambda t}$ ist. Wir können die Anwendung von $e^{\lambda t}$ auf E_c^h durch das Integral

$$e^{\lambda t} E_c^h u(x) = \int H(x - \xi, t) u(\xi) d\xi$$

mit

$$H = H(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx} e^{\lambda(ik, \varepsilon^2)t} E_c^h(k) dk$$

beschreiben. Da χ_c^h kompakten Träger besitzt und wegen der Glattheit bezüglich k erhalten wir

$$\|e^{\lambda t} E_c^h\|_{L(H_{l,u}^m, H_{l,u}^m)} \leq C \max_{r=0 \dots 2d-1} \int \left| \int e^{\lambda(ik, \varepsilon^2)t} \chi_c^h(k) e^{ikl} k^r dk \right| dl \leq C e^{C\varepsilon^2 t}$$

(siehe [Schn98]). Da für E_s^h nur gedämpfte Moden auftreten gilt für den stabilen Teil

$$\|e^{\lambda t} E_s^h\|_{L(H_{l,u}^m, H_{l,u}^m)} \leq C e^{-\sigma t}$$

und

$$\|e^{\lambda t} E_s^h\|_{L(H_{l,u}^{m-4}, H_{l,u}^m)} \leq C \max(1, t^{-1/2}) e^{-\sigma t}$$

mit ε -unabhängigen Konstanten $C, \sigma > 0$.

Unser System (20) können wir nun wie folgt abschätzen. Die Variation der Konstantenformel liefert für den zweiten Teil des Systems (20)

$$R_s(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} E_s^h(L_s(R_c) + f_s)(\tau) d\tau.$$

Mit $S_i(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|R_i(\cdot, \tau)\|_{H_{l,u}^m}$ für $i = s, c$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_s(t) &\leq \left(\int_0^t C \max(1, \tau^{-1/2}) e^{-\sigma \tau} d\tau \right) (C S_c(t) + \|f_s\|_{\mathcal{B}_{m-4}}) \\ &\leq C S_c(t) + C \|f_s\|_{\mathcal{B}_{m-4}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Auf ähnliche Weise können wir den ersten Teil von (20) abschätzen. Mit der Variation der Konstantenformel erhalten wir zunächst

$$R_c(t) = \varepsilon^2 \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} E_c^h(L_c(R) + f_c)(\tau) d\tau.$$

Unter Verwendung von (21) können wir dies durch

$$\begin{aligned} S_c(t) &\leq \varepsilon^2 \int_0^t C e^{C\varepsilon^2(t-\tau)} (S_c(\tau) + S_s(\tau) + \|f_c\|_{\mathcal{B}_{m-4}}) d\tau \\ &\leq \varepsilon^2 C \int_0^t S_c(\tau) d\tau + C \|f\|_{\mathcal{B}_{m-4}}. \end{aligned} \quad (22)$$

abschätzen. Aus der Gronwallschen Ungleichung und mittels (22) folgern wir dann, dass

$$\begin{aligned} S_c(t) &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{m-4}} e^{CT_0} = \mathcal{O}(1), \\ S_s(t) &\leq C \|f\|_{\mathcal{B}_{m-4}} = \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Wir definieren die Inverse J des Linearteils durch $R = Jf$, wobei R eine Lösung von (20) sei. Mit $J \in L(\mathcal{B}_{m-4}, \mathcal{B}_m)$ ist J deshalb ein von ε unabhängiger beschränkter linearer Operator. Wenden wir J auf (19) an, so erhalten wir

$$R = \varepsilon JN(R) + J\delta =: F(R). \quad (23)$$

Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von $N = (N_c(R), N_s(R))$ von \mathcal{B}_m nach \mathcal{B}_{m-4} und dem ε vor N ist für $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ die Abbildung $F : \mathcal{B}_m \mapsto \mathcal{B}_m$ eine Kontraktion auf einer Kugel mit Mittelpunkt $J\delta$ in \mathcal{B}_m . Es gibt deshalb einen eindeutigen Fixpunkt von (23) der Lösung von (19) mit Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist. Mit (17) ist somit eine Lösung des ursprünglichen Problems (16) gegeben. Mit den Abschätzungen aus Lemma 2.12 gilt

$$\|v - \varepsilon \psi_c\|_{\mathcal{B}_m} \leq \|v - \varepsilon \psi\|_{\mathcal{B}_m} + \|\varepsilon \psi - \varepsilon \psi_c\|_{\mathcal{B}_m} = \|(\varepsilon^2 R_c, \varepsilon^3 R_s)\|_{\mathcal{B}_m} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

□

2.5 Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung bei Hinzunahme der zeitlichen Oszillationen

In diesem Kapitel betrachten wir die gesamte Störungsgleichung (7)-(10). Wir nehmen zur Gleichung (11) die zuvor vernachlässigten oszillierenden Terme (9) und (10) hinzu. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \partial_t v &= -v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v - v^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + v\partial_x v \\ &\quad - c(t)(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + u_0(t)\partial_x v - 2u_0(t)v(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v \end{aligned} \quad (24)$$

mit $u_0^2 = \bar{c} + c(t)$, wobei \bar{c} der Mittelwert der Oszillationen ist, und $c(t)$ und $u_0(t)$ oszillierend mit Mittelwert Null sind. Durch die Hinzunahme der linear oszillierenden Terme (9) zur Gleichung (12) erhalten wir als Lösung der Linearisierung

$$v(x, t) = e^{ikx + \lambda(k, \bar{c})t} \hat{v}_k(t),$$

wobei $\hat{v}_k(t) = \hat{v}_k(t + 2\pi/\omega)$, d.h. die Floquet Exponenten der Linearisierung um die triviale, räumlich konstante, zeitperiodische Lösung $u_0(t)$ sind ebenfalls durch $\lambda = \lambda(k, \bar{c})$ gegeben [siehe (40)].

Um den Fall räumlicher und zeitlicher Oszillationen behandeln zu können, ändern wir die Skalierung der Ortsvariable. Den Ort, den wir zuvor mit $X = \varepsilon x$ skaliert haben, skalieren wir nun ebenfalls zeitabhängig. Wir verwenden im folgenden $X = \varepsilon(x + \varphi_1(t))$. Die Zeit skalieren wir weiterhin mit $T = \varepsilon^2 t$. Unseren ursprünglichen Approximationsansatz (13) müssen wir nun aber modifizieren, da wir ansonsten Terme mit zu geringer ε -Ordnung erhalten. Mit $\varepsilon > 0$ als Bifurkationsparameter machen wir folgenden Ansatz

$$\begin{aligned} \varepsilon\psi(x, t, \varepsilon) &= \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s = \varepsilon A_1(X, T)e^{ik_c x + \varphi_0(t)} + \frac{\varepsilon^2}{2}A_0(X, T) \\ &\quad + \varepsilon^2 A_2(X, T)e^{2(ik_c x + \varphi_0(t))} + c.c. \end{aligned} \quad (25)$$

und leiten für die Gleichung (24) eine Ginzburg-Landau-Gleichung mit räumlich und zeitlich periodischen Koeffizienten her. In dem zuvor betrachteten Fall zeitunabhängiger Koeffizienten sind $\varphi_0(t)$ und $\varphi_1(t)$ jeweils gleich Null gesetzt worden. Mit obigen Ansatz (25) bestimmen wir mittels Koeffizientenvergleich Gleichungen für die Funktionen $\varphi_0(t)$ und $\varphi_1(t)$. Wir lösen diese Gleichungen und untersuchen dann die Funktionen $\varphi_0(t)$ und $\varphi_1(t)$ auf Beschränktheit und Art der Oszillationen. Wir betrachten zunächst

$$\begin{aligned} \varepsilon e^{ik_c x} : A_1 \partial_t \varphi_0(t) &= -c(t)A_1(-4k_c^2 + k_c^4) + u_0(t)ik_c A_1, \\ \implies \partial_t \varphi_0(t) &= -c(t)(-4k_c^2 + k_c^4) + ik_c u_0(t) \\ \implies \varphi_0(t) &= (4k_c^2 - k_c^4) \int_0^t c(\tau) d\tau + ik_c \int_0^t u_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Das Integral $i \int_0^t u_0(\tau) d\tau$ ist rein imaginär. Dies führt in (25) lediglich zu Oszillationen. Für $\int_0^t c(\tau) d\tau$ ergibt sich ein reeller Wert, dieser bleibt aber beschränkt, da $c(t)$ periodisch mit Mittelwert Null ist. Die Funktion $\varphi_0(t)$ existiert und bleibt auch beschränkt. Wir betrachten weiter

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 e^{ik_c x}: \quad \partial_X A_1 \partial_t \varphi_1(t) &= -c(t)(8ik_c - 4ik_c^3) \partial_X A_1 + u_0(t) ik_c \partial_X A_1 \\ \implies \partial_t \varphi_1(t) &= -c(t)(8ik_c - 4ik_c^3) + ik_c u_0(t) \\ \implies \varphi_1(t) &= (4k_c^3 - 8k_c) i \int_0^t c(\tau) d\tau + ik_c \int_0^t u_0(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Für das Integral $i \int_0^t c(\tau) d\tau$, das wegen des verschwindenden Mittelwertes von $c(t)$ beschränkt ist, ergibt sich wiederum ein rein imaginärer Wert. Gleiches gilt für das Integral $i \int_0^t u_0(\tau) d\tau$. Die Funktion $\varphi_1(t)$ existiert also ebenfalls und ist auch beschränkt.

Bemerkung 2.13 Die Lösung $A = A(X, T)$ der Ginzburg-Landau-Gleichung an der Stelle $X = \varepsilon(x + \varphi_1(t))$ auszuwerten stellt kein Problem dar, wenn die Lösung A der Ginzburg-Landau-Gleichung als analytisch im Streifen um die reelle Achse in \mathbb{C} vorausgesetzt wird (Abb. 4). Dies ist auch keine wesentliche Einschränkung, da aus $A|_{T=0} \in L^\infty$ sofort $A(X, T)$ für $T > 0$ analytisch im Streifen mit Breite $\min(C\sqrt{T}, \delta_{GL})$ folgt [BDTvH96]. Da $|\operatorname{Im}(X)| = \mathcal{O}(\varepsilon) \ll \delta_{GL}$ kann die Lösung A der Ginzburg-Landau-Gleichung dann an der Stelle $X = \varepsilon(x + \varphi_1(t))$ ohne Probleme ausgewertet werden.

Wir formulieren unseren Approximationssatz, den wir aber endgültig erst in Kapitel 2.7 beweisen werden.

Satz 2.14 Sei $\delta_{GL} > 0$ und $A_1 = A_1(X, T)$ eine Lösung der Ginzburg-Landau (15) für $T \in [0, T_0]$, welche analytisch in X in einem Streifen $S_{\delta_{GL}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} z| < \delta_{GL}\}$ der komplexen Ebene ist, und

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|A_1(\cdot, T)\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} = \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \sup_{z \in S_{\delta_{GL}}} |A(z, T)| < \infty$$

erfüllt. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0, C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen v von (24) existieren, für die

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |v(\cdot, t) - \varepsilon \psi(\cdot, t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^2$$

zur Anfangsbedingung $v(x, 0) = \varepsilon \psi(x, 0, \varepsilon)$ gilt, und $\varepsilon \psi(x, t, \varepsilon)$ wie in (25) definiert ist.

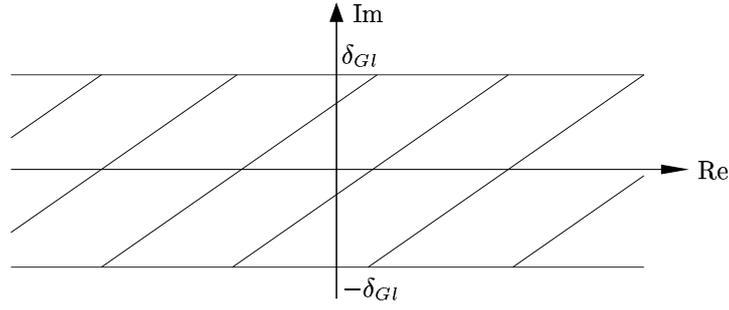


Abb.4 Analytizität der Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung

Aufgrund der gewählten Skalierung erhalten wir die Ginzburg-Landau-Gleichung durch Auswertung der Terme, die mit ε^3 skaliert sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \varepsilon^3 e^{ik_c x}: \quad \partial_T A_1 &= c_1 A_1 + c_2 \partial_X^2 A_1 + c_4 A_1 A_0 + c_5 A_2 A_{-1} + c_3 A_1 |A_1|^2 \\ &\quad - c(t)(4 - 6k_c^2) \partial_X^2 A_1 - 2u_0(t) A_0 (-4k_c^2 + k_c^4) A_1 \\ &\quad - 2u_0(t) A_2 (-4k_c^2 + k_c^4) A_{-1} - 2u_0(t) A_{-1} (-16k_c^2 + 16k_c^4) A_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Wir haben weiter

$$\varepsilon^2 e^{0k_c x}: \quad 0 = \lambda(0) A_0 - c(t)(4\partial_x^2 + \partial_x^4) \left(\frac{1}{2} A_0(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), T) \right) \quad (27)$$

$$+ u_0(t) \partial_x \left(\frac{1}{2} A_0(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), T) \right) \quad (28)$$

$$- 2u_0(t) A_1 (-4k_c^2 + k_c^4) A_{-1} - 2u_0(t) A_{-1} (-4k_c^2 + k_c^4) A_1$$

zu betrachten. Da der zweite Term in (27) von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^4) \ll \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ist, ist er sowohl für die Fehlerabschätzung als auch für die Approximation ohne Bedeutung. Gleiches gilt für den Term (28), der von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ ist. Es gilt somit für die Terme der Ordnung

$$\varepsilon^2 e^{0k_c x}: \quad 0 = \lambda(0) A_0 - 4u_0(t) (-4k_c^2 + k_c^4) A_1 A_{-1}. \quad (29)$$

Zu betrachten sind noch, die sich aus Kopplungen von A_1 ergebenden Terme der Ordnung

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 e^{2ik_c x}: \quad 0 &= \lambda(2k_c) A_2 + [-2u_0(t) (-4k_c^2 + k_c^4) + 2u_0(t) ik_c] A_1^2 \\ &\quad + [-c(t) (-16k_c^2 + 16k_c^4) + 2u_0(t) ik_c] A_2 + A_1 (ik_c) A_1, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 e^{2ik_c x}: \quad 0 &= (\lambda(2k_c) - c(t) (-16k_c^2 + 16k_c^4) + 2u_0(t) ik_c) A_2 \\ &\quad (2u_0(t) ik_c - 2u_0(t) (-4k_c^2 + k_c^4) + ik_c) A_1^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Um eine Ginzburg-Landau-Gleichung herzuleiten, setzen wir A_0 und A_2 , die wir aus (29) und (30) erhalten, in (26) ein. Wir erhalten dadurch zeitabhängige Koeffizienten in der Ginzburg-Landau-Gleichung. Wir ersetzen dabei auch t durch T/ε^2 . Mit den Berechnungen aus (29) und (30) ergibt sich

$$A_0 = \frac{4u_0(t)(-4k_c^2 + k_c^4)}{\lambda(0)} A_1 A_{-1} = c_{g_1} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 A_{-1}, \quad (31)$$

$$A_2 = -\frac{2u_0(t)ik_c - 2u_0(t)(-4k_c^2 + k_c^4) + ik_c}{(\lambda(2k_c) - c(t)(-8k_c^2 + 16k_c^4) + 2u_0(t)ik_c)} A_1^2 = c_{g_2} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1^2. \quad (32)$$

Setzen wir dies in (26) ein, so ergibt sich unsere zeitabhängige Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_T A_1 &= c_1 A_1 + c_2 \partial_X^2 A_1 + c_4 c_{g_1} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 |A_1|^2 + c_5 c_{g_2} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 |A_1|^2 + c_3 A_1 |A_1|^2 \\ &\quad - c \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) (4 - 6k_c^2) \partial_X^2 A_1 - 2u_0 \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) (-4k_c^2 + k_c^4) c_{g_1} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 |A_1|^2 \\ &\quad - 2u_0 \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) (-4k_c^2 + k_c^4) c_{g_2} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 |A_1|^2 - 16u_0 \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) (-2k_c^2 + 2k_c^4) c_{g_2} \left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right) A_1 |A_1|^2 \end{aligned} \quad (33)$$

mit räumlich und zeitlich periodischen Koeffizientenfunktion $c_{g_1}, c_{g_2} \in \mathbb{C}$, definiert in (31) und (32), sowie Konstanten $c_j \in \mathbb{C}$.

2.6 Fehlerabschätzung unter Berücksichtigung der zeitlichen Oszillationen

In diesem Kapitel beweisen wir den wesentlichen Teil unseres Approximationsatzes (Satz 2.14). Wir zeigen, dass wir Lösungen von (24) durch die Lösungen der nichtautonomen Ginzburg-Landau Gleichung (33) approximieren können, und dass der Fehler auch im nichtautonomen Fall bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$ in der Zeit von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ bleibt. Aufgrund des von uns gewählten Ansatzes (25) können wir die Fehlerabschätzung ähnlich wie im autonomen Fall in Kapitel 2.4 durchführen.

Satz 2.15 *Seien $\delta_1, C_1 > 0$ und für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $A_1 = A_1(X, T, \varepsilon) \in C([0, T_0], C_{\delta_1}^\omega)$ eine Lösung von (33) mit $\sup_{T \in [0, T_0]} \sup_{\varepsilon \in (0, 1)} \|A_1(\cdot, T, \varepsilon)\|_{C_{\delta_1}^\omega} \leq C_1$. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0, C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen v von (24) existieren, für die*

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|v(\cdot, t) - \varepsilon \psi(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H_{t,u}^m} \leq C \varepsilon^2$$

zur Anfangsbedingung $v(x, 0) = \varepsilon \psi(x, 0, \varepsilon)$ gilt, wobei $\varepsilon \psi(x, t, \varepsilon)$ wie in (25) definiert ist.

Wie zuvor spalten wir den Fehler in einen stabilen und einen kritischen Bereich auf, d.h. wir setzen für den Fehler $\varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s$, wobei R_c der kritische Bereich und R_s der stabile Bereich der Moden ist. Die Approximation $\varepsilon\psi_c$ der linear instabilen Fouriermoden ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Für die Approximation $\varepsilon^2\psi_s$ der linear gedämpften Fouriermoden gilt $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Für spätere Zwecke verwenden wir $\mathcal{X}^m = H_{l,u}^m$

Lemma 2.16 *Sei $m \geq 0$ und $\delta_1, C_1 > 0$ und für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $A_1 = A_1(X, T, \varepsilon) \in C([0, T_0], C_{\delta_1}^\omega)$ eine Lösung von (33), wobei $\varepsilon\psi = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$ mit*

$$\begin{aligned}\varepsilon\psi_c &= \varepsilon A_1(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t) e^{ik_c x + \varphi_0(t)} + \varepsilon A_{-1}(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t) e^{-(ik_c x + \varphi_0(t))}, \\ \varepsilon^2\psi_s &= \varepsilon^2 A_2(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t) e^{2(ik_c x + \varphi_0(t))} + \varepsilon^2 A_{-2}(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t) e^{-2(ik_c x + \varphi_0(t))} \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} A_0(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t)\end{aligned}$$

wie in (25) definiert ist. Dann gibt es Konstanten $C_2 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\begin{aligned}\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_s(\text{Res}(\varepsilon\psi(\cdot, t)))\|_{H_{l,u}^m} &\leq C_2 \varepsilon^3, \\ \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_c(\text{Res}(\varepsilon\psi(\cdot, t)))\|_{H_{l,u}^m} &\leq C_2 \varepsilon^4\end{aligned}$$

gilt.

Beweis. Siehe Kapitel 2.4.

Beweis (Satz 2.15). Für die Gleichung (24) schreiben wir abstrakt

$$\partial_t v = M(t)v + B(v, v) + K(v, v, v) \quad (34)$$

mit

$$M(t)v = v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v - c(t)(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + u_0(t)\partial_x v$$

als Linearteil,

$$B(v, v) = v\partial_x v - 2u_0 v(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v$$

als symmetrische bilineare Abbildung und

$$K(v, v, v) = -v^2(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v$$

als symmetrisch trilineare Abbildung. Entsprechend der Approximation aus Lemma 2.16 setzen wir für den Fehler

$$R(x, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 R_c(x, t, \varepsilon) + \varepsilon^3 R_s(x, t, \varepsilon), \quad (35)$$

wobei $R_c = E_c R_c \in \mathcal{X}^m$ und $R_s = E_s R_s \in \mathcal{X}^m$. Setzen wir die exakte Lösung

$$v = \varepsilon\psi + R = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s + \varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s \quad (36)$$

in (34) ein, so erhalten wir nach Division durch ε^2 und Trennung in lineare und nichtlineare Terme

$$\begin{aligned} \partial_t R_c + \varepsilon \partial_t R_s &= M(t)R_c + \varepsilon M(t)R_s + \varepsilon \tilde{L}_2(R_c) + \varepsilon^2 \tilde{L}_1(R) \\ &+ \varepsilon^2 \tilde{N}_2(R_c) + \varepsilon^3 \tilde{N}_1(R) + \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Res}(\varepsilon\psi) \end{aligned} \quad (37)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2(R_c) &= 2B(R_c, \psi_c), & \tilde{L}_1(R) &= 2B(R_c, \psi_s) + 2B(R_s, \psi_c) + 3K(\psi_c, \psi_c, R_c), \\ \tilde{N}_2(R_c) &= B(R_c, R_c) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \tilde{N}_1(R) &= B(R_s, 2R_c + 2\psi_s + \varepsilon R_s) + 6K(\psi_c, R_c, \psi_s) + 3K(\psi_c, \psi_c, R_s) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{O}(\varepsilon)$ weitere Terme enthält, die von K erzeugt werden.

Sind R_c , R_s , ψ_c und ψ_s jeweils von der Ordnung $\mathcal{O}(1) \in \mathcal{X}^m$, dann gilt dies natürlich auch für \tilde{L}_1 , \tilde{L}_2 , \tilde{N}_1 und \tilde{N}_2 , allerdings mit Werten in \mathcal{X}^{m-4} . Um auf Gleichungen für R_c und R_s zu kommen, verwenden wir die Moden-Filter E_c und E_s aus Kapitel 2.4.

Wir spalten die Gleichung für den Fehler (37) in einen kritischen und einen stabilen Teil auf und beachten, dass nach Lemma 2.10 $E_c \tilde{L}_2(R_c) = E_c \tilde{N}_2(R_c) = 0$ gilt. Dabei seien R_c und R_s Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \partial_t R_c &= M(t)R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^3 N_c(R) + \varepsilon^2 \delta_c, \\ \partial_t R_s &= M(t)R_s + L_s(R) + \varepsilon N_s(R) + \delta_s \end{aligned} \quad (38)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{1}{\varepsilon^4} E_c(\text{Res}(\varepsilon\psi)), & \delta_s &= \frac{1}{\varepsilon^3} E_s(\text{Res}(\varepsilon\psi)), \\ L_c(R) &= E_c(\tilde{L}_1(R)), & L_s(R) &= E_s(\tilde{L}_2(R_c)), \\ N_c(R) &= E_c(\tilde{N}_1(R)), & N_s(R) &= E_s(\tilde{L}_1(R) + \tilde{N}_2(R_c) + \varepsilon \tilde{N}_1(R)) \end{aligned}$$

und $(R_c(0), R_s(0)) = (0, 0)$ als Anfangsbedingung. Wir lösen dieses System im Raum

$$\mathcal{B}_m = C([0, T_0/\varepsilon^2], \mathcal{X}^m)^2$$

mit

$$\|(R_c, R_s)\|_{\mathcal{B}_m} = \sum_{i=c,s} \sup_{0 \leq t \leq T_0/\varepsilon^2} \|R_i(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}^m}$$

als Norm. Zu zeigen ist noch, dass die Lösungen in \mathcal{B}_m von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ sind. Wir invertieren hierzu den Linearteil von (38) und wenden das Kontraktionsprinzip an. Die Inhomogenität $\delta = (\delta_c, \delta_s)$ ist wegen Lemma 2.17 offensichtlich von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$. Die Nichtlinearität $N = (N_c(R), N_s(R))$ ist eine Summe aus linearen, bilinearen und trilinearen Termen. Da N eine lokal $\mathcal{O}(1)$ Lipschitz-stetige Abbildung von \mathcal{B}_m nach \mathcal{B}_{m-4} ist, die beschränkte Mengen von \mathcal{B}_m in beschränkte Mengen nach \mathcal{B}_{m-4} abbildet, sind nur die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}\partial_t R_c &= M(t)R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^2 f_c, \\ \partial_t R_s &= M(t)R_s + L_s(R_c) + f_s,\end{aligned}\tag{39}$$

mit $f_c = E_c f_c$, $f_s = E_s f_s$ und $f = (f_c, f_s) \in \mathcal{B}_{m-4}$ abzuschätzen. Wie im autonomen Fall existieren lokale Lösungen. Wir betrachten zunächst das homogene System

$$\partial_t R(t) = M(t)R(t),$$

wobei

$$M(t)v = -v - \gamma \partial_x^8 v - \bar{c}(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v - c(t)(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + u_0(t)\partial_x^4 v$$

ein $(2\pi/\omega)$ -periodischer Operator in t ist. Die Lösung von

$$\partial_t R(t) = M(t)R(t), \quad R(t)|_{t=\tau} = R_0$$

bezeichnen wir mit $R(t) = S(t, \tau)R_0$. Dadurch ist ein linearer Evolutionsoperator $S(t, \tau)$ definiert mit $S(t, \tau) = S(t + 2\pi/\omega, \tau + 2\pi/\omega)$. Im Fourierraum erhalten wir

$$\partial_t \hat{R}(k) = \hat{M}(k)\hat{R}(k) = \lambda(k)\hat{R}(k) + d_1 c(t)\hat{R}(k) + d_2 u_0(t)\hat{R}(k),$$

mit Konstanten $d_j = d_j(k)$ ($j = 1, 2$). Als Lösung ergibt sich

$$\hat{v}(k, t) = e^{\int_0^t \lambda(k) + d_1 c(\tau) + d_2 u_0(\tau) d\tau} \hat{v}(k, 0) = e^{\lambda(k)t} e^{d_1 \int_0^t c(\tau) d\tau} e^{d_2 \int_0^t u_0(\tau) d\tau} \hat{v}(k, 0),\tag{40}$$

und damit als Floquetmultiplikator $e^{\lambda(k)\frac{2\pi}{\omega}}$.

Lemma 2.17 *Es gibt ε -unabhängige Konstanten $C, \sigma > 0$, so dass für den stabilen Teil folgende Abschätzungen gelten*

$$\|S(t, \tau)E_s^h\|_{L(\mathcal{X}^m, \mathcal{X}^m)} \leq C e^{-\sigma(t-\tau)}$$

und

$$\|S(t, \tau)E_s^h\|_{L(\mathcal{X}^{m-4}, \mathcal{X}^m)} \leq C \max(1, (t-\tau)^{-1/2}) e^{-\sigma(t-\tau)}.$$

Für den kritischen Teil gilt

$$\|S(t, \tau)E_c^h\|_{L(\mathcal{X}^m, \mathcal{X}^m)} \leq C e^{C\varepsilon^2 \cdot (t-\tau)}$$

Für die zweite Gleichung in (39) haben wir mit der Variation der Konstantenformel

$$R_s(t) = \int_0^t S(t, \tau) E_s^h(L_s(R_c) + f_s)(\tau) d\tau.$$

Mit $S_i(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|R_i(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{X}^m}$ für $i = s, c$ ergibt sich

$$\begin{aligned} S_s(t) &\leq \left(\int_0^t C \max(1, \tau^{-1/2}) e^{-\sigma\tau} d\tau \right) (CS_c(t) + \|f_s\|_{\mathcal{B}_{m-4}}) \\ &\leq CS_c(t) + C\|f_s\|_{\mathcal{B}_{m-4}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Auf ähnliche Weise können wir beim ersten Teil von (39) vorgehen. Zunächst liefert die Variation der Konstantenformel

$$R_c(t) = \varepsilon^2 \int_0^t S(t, \tau) E_c^h(L_c(R) + f_c)(\tau) d\tau.$$

Dies können wir unter Verwendung von (41) durch

$$\begin{aligned} S_c(t) &\leq \varepsilon^2 \int_0^t C e^{C\varepsilon^2(t-\tau)} (S_c(\tau) + S_s(\tau) + \|f_c\|_{\mathcal{B}_{m-4}}) d\tau \\ &\leq \varepsilon^2 C \int_0^t S_c(\tau) d\tau + \varepsilon^2 C \|f\|_{\mathcal{B}_{m-4}}. \end{aligned}$$

abschätzen. Und mittels Gronwallscher Ungleichung und (41) folgern wir, dass

$$\begin{aligned} S_c(t) &\leq C\|f\|_{\mathcal{B}_{m-4}} e^{CT_0} = \mathcal{O}(1), \\ S_s(t) &\leq C\|f\|_{\mathcal{B}_{m-4}} = \mathcal{O}(1). \end{aligned}$$

Wir definieren die Inverse J des Linearteils durch $R = Jf$, wobei R eine Lösung von (39) sei. Mit $J \in L(\mathcal{B}_{m-4}, \mathcal{B}_m)$ ist J deshalb ein von ε unabhängiger, beschränkter linearer Operator. Wenden wir J auf (38) an, so erhalten wir

$$R = \varepsilon JN(R) + J\delta =: F(R). \quad (42)$$

Wegen der $\mathcal{O}(1)$ Lipschitz-Stetigkeit von N von \mathcal{B}_m nach \mathcal{B}_{m-4} und dem ε vor N ist für $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ die Abbildung $F : \mathcal{B}_m \mapsto \mathcal{B}_m$ eine Kontraktion auf einer Kugel mit Mittelpunkt $J\delta$ in \mathcal{B}_m . Es gibt deshalb einen eindeutigen Fixpunkt von (42), der eine $\mathcal{O}(1)$ -beschränkte Lösung von (38) ist. Mit dem Fehler (35) und der exakten Lösung (36) ist somit eine Lösung des ursprünglichen Problems (34) gegeben. \square

2.7 Zusammenfassung und Vergleich

Um unseren Approximationssatz (Satz 2.14) endgültig zu beweisen, vergleichen wir in 2.7.1 Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (43) mit den Lösungen der nichtautonomen Gleichung (44), und zeigen in 2.7.2, dass eine Betrachtung der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung ausreichend ist. In 2.7.3 diskutieren wir außerdem, unter welchen Voraussetzungen zur Approximation einer nichtautonomen Gleichung ein autonomer Ansatz genügt.

Approximationen, die wir mit Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (43) konstruieren, bezeichnen wir im folgenden mit $\varepsilon\psi_A$ und diejenigen, welche wir mit Lösungen der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (44) konstruieren mit $\varepsilon\psi_B$. Für die Approximation einer nichtautonomen Gleichung mit Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (43) schreiben wir $\varepsilon\psi_A^{\text{aut}}$. Eine Übersicht ergibt sich aus folgender Skizze.

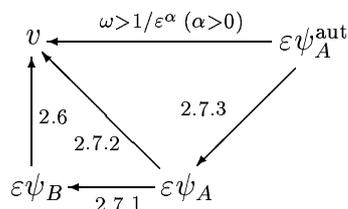


Abb. 5 Autonome und nichtautonome Approximation

2.7.1 Vergleich der Ginzburg-Landau-Gleichungen

Da die nichtautonome Ginzburg-Landau-Gleichung (33) immer noch den kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ enthält, können wir damit keine sinnvollen approximativen Lösungen von (24) konstruieren. Wir erwarten jedoch, dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ lediglich der Mittelwert der zeitabhängigen Koeffizienten von Bedeutung ist, so dass die Betrachtung einer autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (43) genügen sollte. Wir vergleichen deshalb die Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = c_1 \partial_X^2 A + c_2 A + c_3 A |A|^2 \quad (43)$$

mit den Lösungen der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T B = \left(c_1 + \tilde{c}_1\left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right)\right) \partial_X^2 B + \left(c_2 + \tilde{c}_2\left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right)\right) B + \left(c_3 + \tilde{c}_3\left(\frac{T}{\varepsilon^2}\right)\right) B |B|^2, \quad (44)$$

wobei die Koeffizienten $\tilde{c}_j(T/\varepsilon^2)$, $j = 1, 2, 3$, stark oszillierend sind, und

$$\tilde{c}_j(t) = \tilde{c}_j(t + 2\pi/\omega)$$

sowie

$$\int_0^{2\pi/\omega} \tilde{c}_j(t) dt = 0$$

erfüllen. Wir beweisen

Satz 2.18 Sei $\delta_{GL} > 0$ und $A \in C([0, T_0], C_{\delta_{GL}}^\omega)$ eine Lösung von (43). Dann gibt es Konstanten $C, \varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen B von (44) existieren für die

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \|A(\cdot, T) - B(\cdot, T)\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} \leq C\varepsilon^2$$

gilt.

Beweis. Wir definieren eine Fehlerfunktion R mit $B = A + \varepsilon^2 R$. Die Fehlerfunktion R erfüllt die Gleichung

$$\partial_t R = M(t)R + 3K(A, A, R) + 3\varepsilon^2 K(A, R, R) + \varepsilon^4 K(R, R, R) + \varepsilon^{-2} Res(A),$$

wobei

$$\begin{aligned} M(t)R &= (c_1 + \tilde{c}_1(\frac{T}{\varepsilon^2}))\partial_X^2 R + (c_2 + \tilde{c}_2(\frac{T}{\varepsilon^2}))R, \\ 3C(R_1, R_2, R_3) &= (c_3 + \tilde{c}_3(\frac{T}{\varepsilon^2}))(R_1 R_2 \bar{R}_3 + R_1 \bar{R}_2 R_3 + \bar{R}_1 R_2 R_3), \\ Res(A) &= \tilde{c}_1(\frac{T}{\varepsilon^2})\partial_X^2 A + \tilde{c}_2(\frac{T}{\varepsilon^2})A + \tilde{c}_3(\frac{T}{\varepsilon^2})A|A|^2. \end{aligned}$$

Wir definieren den linearen Evolutionsoperator $S(T, \tau)$ durch $R(T) = S(T, \tau)R(\tau)$, wobei $R(T)$ die Gleichung

$$\partial_T R = M(t)R, \quad R|_{T=\tau} = R(\tau)$$

löst, und betrachten

$$R(T) = \int_0^T S(T, \tau)(3K(A, A, R) + 3\varepsilon^2 K(A, R, R) + \varepsilon^4 K(R, R, R) + \varepsilon^{-2} Res(A))(\tau) d\tau.$$

Wir können

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \left\| \int_0^T S(T, \tau) \varepsilon^{-2} Res(A)(\tau) d\tau \right\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} \leq C_{Res}$$

mit $C_{Res} > 0$ als Konstante unabhängig von $0 < \varepsilon \ll 1$ abschätzen, da

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^T S(T, \tau) \check{c}_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) \partial_X^2 A(\tau) d\tau \right\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} &\leq \left\| \varepsilon^2 S(T, \tau) \check{c}_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) \partial_X^2 A(\tau) \Big|_{\tau=0}^T \right\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} \\
&+ \left\| \int_0^T \varepsilon^2 S(T, \tau) \check{c}_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) \partial_X^2 \partial_\tau A(\tau) d\tau \right\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} \\
&+ \left\| \int_0^T \varepsilon^2 (-S(T, \tau) \lambda(\tau)) \check{c}_1\left(\frac{\tau}{\varepsilon^2}\right) \partial_X^2 A d\tau \right\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} \\
&\leq C\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

wobei $\partial_\tau \check{c}_1 = \check{c}_1$ und $\partial_\tau S(T, \tau) = -S(T, \tau) \lambda(\tau)$. Die Funktion \check{c}_1 bleibt $\mathcal{O}(1)$ beschränkt, da der Mittelwert von \check{c}_1 verschwindet. Der restliche Teil des Satzes ergibt sich durch einfache Anwendung der Gronwallschen Ungleichung. \square

2.7.2 Autonome Approximation nichtautonomer Gleichungen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass wir aus den Sätzen 2.15 und 2.18 unseren Approximationssatz (Satz 2.14) folgern können. Approximationen, die wir mittels Lösungen A der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (43) konstruieren, bezeichnen wir wie zuvor mit $\varepsilon\psi_A$. Approximationen mit Lösungen B der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (44) mit ψ_B . Die Lösungen von (24) sind durch v gegeben. Da $C_{\delta_{GL}}^\omega \subset H_{l,u}^m$ ist nach Satz 2.18

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \|A(\cdot, T) - B(\cdot, T)\|_{H_{l,u}^m} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Dies impliziert

$$\sup_{t \in [T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon) - \varepsilon\psi_A(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H_{l,u}^m} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt weiter, dass $\sup_{T \in [0, T_0]} \|B(\cdot, T)\|_{C_{\delta_{GL}}^\omega} = \mathcal{O}(1)$ ist. Die Voraussetzung aus Satz 2.15 ist somit erfüllt. Nach Satz 2.15 gilt

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|v(\cdot, t) - \varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H_{l,u}^m} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Die Anwendung der Dreiecksungleichung und des Sobolevschen Einbettungssatz für $m \geq 1$ liefert

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon \psi_A(x, t, \varepsilon) - v(x, t)| &\leq C \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon \psi_A(\cdot, t, \varepsilon) - v(\cdot, t)\|_{H_{t,v}^m} \\
&\leq C \left(\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon \psi_A(\cdot, t, \varepsilon) - \varepsilon \psi_B(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H_{t,v}^m} \right. \\
&\quad \left. + \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon \psi_B(\cdot, t, \varepsilon) - v(\cdot, t)\|_{H_{t,v}^m} \right) \\
&= \mathcal{O}(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

□

2.7.3 Autonome Approximation eines nichtautonomen Ansatzes

Wir zeigen nun noch unter welchen Voraussetzungen zur Approximation einer nichtautonomen Gleichung ein autonomer Ansatz genügt. Wir vergleichen zu diesem Zweck den autonomen Ansatz

$$\varepsilon \psi_A^{\text{aut}} = \varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} + c.c.$$

mit dem nichtautonomen Ansatz

$$\varepsilon \psi_A = \varepsilon A(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t) e^{ix + \varphi_0(t)} + c.c..$$

Eine autonome Approximation einer nichtautonomen Gleichung ist nur im Falle starker Oszillationen sinnvoll. Sind φ_0 und φ_1 nicht klein, so ist der Fehler $\varepsilon \psi_A^{\text{aut}} - \varepsilon \psi_A$ groß, da

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon \psi_A^{\text{aut}} - \varepsilon \psi_A\| &= \|\varepsilon A(\varepsilon x, \varepsilon^2 t) e^{ix} - \varepsilon A(\varepsilon(x + \varphi_1(t)), \varepsilon^2 t) e^{ix + \varphi_0(t)}\| \\
&\approx C(\varepsilon \|\varphi_0\| + \varepsilon^2 \|\varphi_1\|) \approx C\left(\frac{\varepsilon}{|\omega|}\right),
\end{aligned}$$

d.h. $\varepsilon \psi_A^{\text{aut}}$ ist nahe v , falls $|\omega| = \mathcal{O}(1/\varepsilon^\alpha)$ mit $\alpha > 0$. Dies zeigt, dass ohne Modifikation des Ansatzes nur eine Approximation im Fall $|\omega| = \mathcal{O}(1/\varepsilon^\alpha)$ mit $\alpha > 0$ möglich ist.

2.8 Abschätzungen zu Kapitel 2.6

Das folgende Lemma zeigt, dass der Linearteil L_c beschränkt bleibt.

Lemma 2.19 *Für den Linearteil $L_c R = E_c(2B(R_c, \psi_s) + 2B(R_s, \psi_c))$ gilt die Abschätzung*

$$\|L_c(R)\|_{B^{m-4}} \leq \tilde{C} (\|R_c\|_{B^m} + \|R_s\|_{B^m})$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\|L_c R\|_{B^{m-4}} &= \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_c(2B(R_c, \psi_s) + 2B(R_s, \psi_c))\|_{H_{l,u}^{m-4}} \\
&= \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_c\|_{H_{l,u}^{m-4} \rightarrow H_{l,u}^{m-4}} \|(2B(R_c, \psi_s) + 2B(R_s, \psi_c))\|_{H_{l,u}^{m-4}} \\
&\leq \|E_c\|_{H_{l,u}^{m-4} \rightarrow H_{l,u}^{m-4}} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} (2C\|R_c\|_{H_{l,u}^m} \|\psi_s\|_{H_{l,u}^m} \\
&\quad + 2C\|R_s\|_{H_{l,u}^m} \|\psi_c\|_{H_{l,u}^m}) \\
&\leq \|E_c\|_{H_{l,u}^{m-4} \rightarrow H_{l,u}^{m-4}} 2C \left(\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|R_c\|_{H_{l,u}^m} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\psi_s\|_{H_{l,u}^m} \right. \\
&\quad \left. + \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|R_s\|_{H_{l,u}^m} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\psi_c\|_{H_{l,u}^m} \right) \\
&\leq C \cdot 2C \left(\underbrace{\|R_c\|_{B^m} \|\psi_s\|_{B^m}}_{\leq C} + \underbrace{\|R_s\|_{B^m} \|\psi_c\|_{B^m}}_{\leq C} \right) \\
&\leq \tilde{C} (\|R_c\|_{B^m} + \|R_s\|_{B^m}).
\end{aligned}$$

□

Den bilinearen Term $B(u, v)$ können wir auch abschätzen. Es gilt

Lemma 2.20 *Für den Bilinearteil $B(u, v) = 2u_0(t)v(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v$ gilt*

$$\|B(u, v)\|_{H_{l,u}^{m-4}} \leq C \|u\|_{H_{l,u}^m} \|v\|_{H_{l,u}^m}.$$

Beweis. Mit

$$B(u, v) = u_0(t)u(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v + u_0(t)u(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v$$

ist für $m - 4 \geq 1$

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{H_{l,u}^{m-4}} &\leq |u_0(t)| \|u\|_{H_{l,u}^{m-4}} \|(4\partial_x^2 + \partial_x^4)v\|_{H_{l,u}^{m-4}} \\
&\quad + |u_0(t)| \|v\|_{H_{l,u}^{m-4}} \|(4\partial_x^2 + \partial_x^4)u\|_{H_{l,u}^{m-4}} \\
&\leq C |u_0(t)| \|u\|_{H_{l,u}^m} \|v\|_{H_{l,u}^{m-4}} \\
&\leq C |u_0(t)| \|u\|_{H_{l,u}^m} \|v\|_{H_{l,u}^m}.
\end{aligned}$$

□

3 Das Standardmodell der Elektrokonvektion

Im folgenden zeigen wir mit dem Approximationssatz (Satz 3.14) Fehlerabschätzungen für die Ginzburg-Landau-Approximation des regularisierten Standardmodells der Elektrokonvektion in Flüssigkristallen. Wir formulieren hierzu in Kapitel 3.3 das Problem (45)-(48) als geschlossenes dynamisches System. Anschließend zeigen wir mittels linearer Stabilitätsanalyse (3.6), dass die Voraussetzungen zur Herleitung einer Ginzburg-Landau-Gleichung gegeben sind. Eine formale Herleitung erfolgt in Kapitel 3.10. In Kapitel 3.12 schätzen wir dann den Fehler als Lösung des dynamischen Systems ab. Vorbereitende Überlegungen bzgl. den Funktionenräumen (3.8), der Definition von Modenfiltern (3.9) und nötige Abschätzungen für Residuum (3.10), Halbgruppe und Nichtlinearität (3.11) sind erforderlich um den Approximationssatz (Satz 3.14) zu beweisen.

3.1 Musterbildung in Flüssigkristallen

Flüssigkristalle vereinen charakteristische Eigenschaften von Flüssigkeiten mit denen von Festkörpern. So verbinden sie beispielsweise das Fließverhalten einer Flüssigkeit mit der Anisotropie (Richtungsabhängigkeit) eines Festkörpers. Es gibt eine Vielzahl von Flüssigkristallphasen. Die einfachste Flüssigkristallphase ist die nematische. Die stabähnlichen Moleküle besitzen hier eine Orientierungsfernordnung, d.h. die Moleküle zeigen im Mittel in die gleiche Richtung und können durch elektrische Felder beeinflusst werden [Hel69, Ch77].

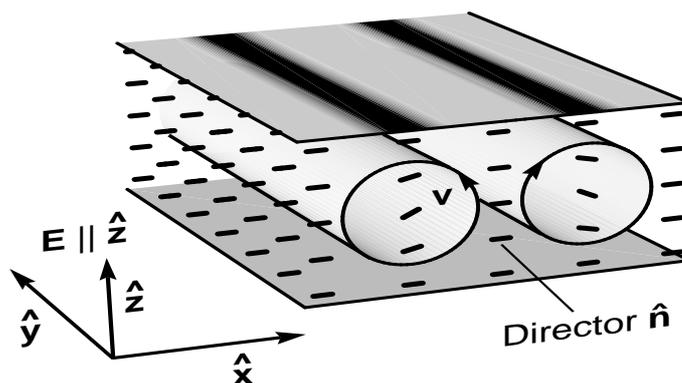


Abb. 6 Direktorfeld der Flüssigkristalle (Siehe [Tr96])

In der Kontinuumstheorie von Ericksen [Er61] und Leslie [Le68] werden nematische Flüssigkristalle als inkompressible Flüssigkeiten betrachtet, deren durchschnittliche Molekularachse lokal durch ein Direktorfeld n von Einheitsvektoren beschrieben werden kann. Die stabähnlichen Moleküle orientieren sich demnach im Mittel entlang einer makroskopischen Vorzugsrichtung (Direktorfeld). Durch das An-

legen eines elektrischen Potentials kann diese Orientierung beeinflusst werden. In dem von uns betrachteten Experiment (Abb. 6) wird eine dünne Schicht nematischer Flüssigkristalle, die sich zwischen zwei Glasplatten mit Abstand d befindet und negativ oder leicht positiv dielektrisch anisotrop ist, einem elektrischen Feld E ausgesetzt.

An das System wird Wechselspannung angelegt. Die Amplitude der Spannung dient dabei - neben der Frequenz ω - als äußerer Kontrollparameter. Wird durch Erhöhen der Spannung \bar{V} eine kritische Spannung \bar{V}_c überschritten, so ergeben sich elektrohydrodynamische Instabilitäten. Ab einem bestimmten Schwellenwert wird die räumlich homogene, zeitperiodische Grundlösung instabil [De95, Dr02]. Laut [Zh00] liegt dann folgendes Bifurkationsdiagramm vor (Abb. 7). Für $\omega < \omega_L$ bzw. $\omega > \omega_L$ treten als erste Strukturen Schräg (oblique)- bzw. Normalrollen (normal rolls) auf. Schrägrollen brechen die Reflektionssymmetrie bezüglich der x-Achse und sind weder senkrecht noch waagrecht zur ausgezeichneten Achse orientiert (y-Richtung). Normalrollen dagegen weisen eine Orientierung senkrecht zur ausgezeichneten Achse auf und das Direktorfeld ist periodisch gestört in der x-z-Ebene. Wird die Spannung weiter erhöht, so werden die Normalrollen instabil gegen die langwellige Zick-Zack-Instabilität entlang von ε_{ZZ} oder gegen Abnormalrollen entlang von ε_{AR} . Die Zick-Zack-Instabilität und die instabilen Abnormalrollen treffen sich im Kodimension-2-Punkt (C2-Punkt) bei ω_{AR} . In diesem C2-Punkt restabilisieren die Abnormalrollen gegen die Zickzack-Mode (ε_{ARst}). Des weiteren kreuzt in diesem Punkt eine Linie homokliner oder heterokliner Bifurkationen (HB).

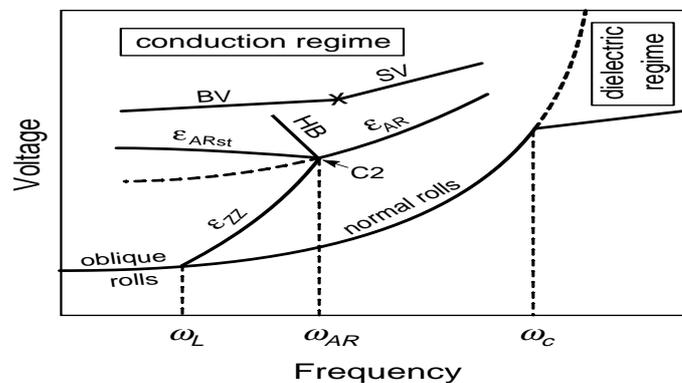


Abb. 7 Schematisches Stabilitätsdiagramm der elektrohydrodynamischen Konvektion (Siehe [Zh00])

Die Musterbildung in der Elektrokonvektion nematischer Flüssigkristalle erfolgt auf zwei Arten. Im Leitfähigkeitsbereich (conduction regime) oszillieren die freien Ladungsträger mit der niedrigen Frequenz des elektrischen Feldes, und das Direktorfeld befindet sich in Ruhelage. Für hohe Frequenzen der hier gewählten planaren Orientierung und negativer oder leicht positiver dielektrischer Anisotropie wird dies unterdrückt und es bilden sich dielektrische Rollen. Das Direktorfeld folgt so der äußeren Anregung und die Ladungsträger sind in Ruhelage. Die Trennung der beiden Regimes erfolgt zur sog. Cutoff-Frequenz ω_c . Unsere Untersuchungen beschränken sich

auf den Leitfähigkeitsbereich, d.h. auf $\omega < \omega_c$ [Vgl. Zh00 u. Abb. 7].

Eine mathematische Beschreibung erfolgt mittels der Gleichungen der Hydrodynamik, den quasistatischen Maxwell-Gleichungen und einer Gleichung für das Direktorfeld. Die hier betrachteten Modelle zur Beschreibung von Musterbildung in anisotropen Systemen sind das sog. Standardmodell [Hel69] und das Modell des schwachen Elektrolyten (WEM) [Tr96].

3.2 Das Standardmodell

Ein mathematisches Modell zur Beschreibung solcher elektrohydrodynamischer Instabilitäten ist das sog. Standard-Modell der Elektrokonvektion [Hel69, KP95, Tr96]. Als dreidimensionales Modell - basierend auf der Erhaltung von Energie, Masse und Impuls - verbindet es die Kontinuumstheorie von Ericksen [Er61] und Leslie [Le68] mit den quasistatischen Maxwell-Gleichungen und liefert unter der Annahme ohmscher Leitfähigkeit stationäre Rollen für die Materialparameter der im Experiment verwendeten Nematen [Tr96]. Wir erklären zunächst das physikalische Problem und seine mathematische Beschreibung. Die folgende Darstellung beruht auf den Arbeiten [BKZ88, Tr96, DO03].

Mit dem Standardmodell können im Leitfähigkeitsbereich für niedrige Frequenzen eine Vielzahl von Eigenschaften der Elektrohydrodynamik qualitativ gut beschrieben werden (Abb. 7). Für die in den Experimenten verwendeten nematischen Flüssigkristalle, die über die Materialparameter [Tr96, Anhang A.1] in die Gleichungen eingehen, kann die Schwellenspannung als eine Funktion der externen Frequenz dargestellt werden. Es können erste Instabilitäten, wie beispielsweise Existenz und Winkel von Schrägrollen sowie Normalrollen beschrieben werden, aber auch zweite Instabilitäten, wie z.B. der Übergang zu Zick-Zack- oder Abnormalrollen [DO03]. Weitere qualitativ auftretende Eigenschaften der Elektrohydrodynamik bleiben jedoch unberücksichtigt, insbesondere laufende Rollen. Um auch solche Phänomene beschreiben zu können, betrachten wir in Kapitel 4 mit dem Modell des schwachen Elektrolyten [Tr96, KT98] eine Verallgemeinerung des Standardmodells.

Für das in diesem Kapitel betrachtete Standardmodell wählen wir eine autonome Anregung. Erst in Kapitel 4 betrachten wir dann mit dem Modell des schwachen Elektrolyten den Fall der zeitperiodischen Anregung. Die triviale Lösung ist beim Standardmodell auch bei zeitperiodischer Anregung stationär.

Wir verwenden im folgenden die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. treten in multiplikativ verknüpften Ausdrücken zwei Indizes doppelt auf, so werden zunächst sämtliche Elemente des Wertevorrats gebildet und diese dann summiert. Weiter sei der Abstand d der Platten im folgenden auf π umskaliert.

Das Gleichungssystem für das Standardmodell (45)-(48) in den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $z \in (-\pi/2, \pi/2)$ besteht aus Gleichungen für die Ladungsdichte $\rho(x, y, z, t) \in$

\mathbb{R} , für den Direktor $n(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$ und die Geschwindigkeit $v(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$. Es ist durch

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\rho = -\nabla \cdot (\sigma E), \quad (45)$$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)n = \omega \times n + \delta^\perp(\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h), \quad (46)$$

$$\rho_m(\partial_t + v \cdot \nabla)v_i = -\partial_i p - \partial_j(\Pi_{ij} + T_{ij}^{\text{visc}}) + \rho E_i, \quad (47)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (48)$$

gegeben. Mit E_i wird die i -te Komponente des Vektors E bezeichnet. Das System wird durch die Randbedingungen (66)-(68) ergänzt.

Um die mathematische Struktur der Gleichungen (45)-(48) zu verstehen, ist es vorteilhaft gleichzeitig Kapitel 3.3 zu lesen. In Kapitel 3.3 wird das Standardmodell als geschlossenes dynamisches System geschrieben. Wir beschreiben zunächst obige Größen und Operatoren.

Mittels der Gleichung (45) wird das Raumladungsgleichgewicht eines schwach anisotropen, ohmschen Leiters mit der Raumladungsdichte

$$\rho = \partial_i(\varepsilon_{ij} E_j) \quad (49)$$

(Poisson-Gleichung), und der Leitfähigkeit

$$\sigma_{ij} = \sigma_\perp \delta_{ij} + \sigma_a n_i n_j \quad (50)$$

beschrieben. Das elektrische Feld E wird dabei unter Ausnutzung von

$$\nabla \times E = 0$$

in ein externes Feld

$$E_0 = \frac{\bar{V}\sqrt{2}}{\pi} \quad (51)$$

und eine Feldinhomogenität $\partial_i \phi$ aufgeteilt, d.h. für die Feldstärke E_i gilt

$$E_i = E_0 \delta_{i3} - \partial_i \phi. \quad (52)$$

Mit den Gleichungen (49), (50) und (52) ist durch (45) eine Gleichung für das elektrische Potential ϕ gegeben. Die in (49) auftretende dielektrische Permittivität ist durch

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_\perp \delta_{ij} + \varepsilon_a n_i n_j \quad (53)$$

definiert. Treten keine Kräfte auf, so bewegt sich der Direktor n in der Gleichung (46) mit

$$|n|^2 = 1$$

mit der ihn umgebenden Flüssigkeit wie ein Stab in einem Fluss, d.h.

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)n - \omega \times n = 0, \quad (54)$$

wobei

$$\omega = (\nabla \times v)/2 \quad (55)$$

die lokale Rotation der Flüssigkeit beschreibt. Sollten äußere Kräfte auftreten, so garantiert der Projektionstensor

$$\delta_{ij}^\perp = \delta_{ij} - n_i n_j, \quad (56)$$

dass $|n|^2 = 1$ erhalten bleibt. Die auf den Direktor in Gleichung (46) wirkenden Kräfte ergeben sich aus der orientierten Elastizität, das durch das Molekularfeld h und der Bindung des Direktors an die Flüssigkeitsscherung

$$A_{ij} = (\partial_i v_j + \partial_j v_i)/2 \quad (57)$$

(Flussausrichtung) beschrieben wird. Aus der Erhaltung des Drehimpulses ergibt sich die Rotationsviskosität

$$\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2 \quad (58)$$

und die Flussausrichtung

$$\lambda = (\alpha_2 + \alpha_3)/(\alpha_2 - \alpha_3), \quad (59)$$

ausgedrückt durch die Leslie-Koeffizienten α_2 und α_3 [Vgl. (64)]. Das Molekularfeld h ist durch

$$h = 2\left(\frac{\partial f}{\partial n} - \nabla \cdot \frac{\partial f}{\partial \nabla n}\right) - \varepsilon_a(n \cdot E)E \quad (60)$$

gegeben. Die Gleichung (60) enthält die elastische Energiedichte

$$2f = (\nabla \cdot n)^2 + K_2[n \times (\nabla \times n)]^2 + K_3[n \cdot (\nabla \times n)]^2, \quad (61)$$

die sich durch Ausbreitung, Verdrehung (K_2) und Biegung (K_3) des Molekularfeldes h ergibt. Der Term

$$v \cdot \nabla n \quad (62)$$

in (46) beschreibt die Direktoradvektion. In (47) bezeichnet

$$\Pi_{ij} = \frac{\partial f}{\partial n_{k,i}} n_{k,j} \quad (63)$$

die nichtlineare Erickson Spannung und ρ_m die Massendichte. Mit

$$-T_{ij}^{\text{visc}} = \alpha_1 n_i n_j n_k n_l A_{kl} + \alpha_2 n_j N_i + \alpha_3 n_i N_j + \alpha_4 A_{ij} + \alpha_5 n_j n_k A_{ki} + \alpha_6 n_i n_k A_{kj} \quad (64)$$

wird der negative viskose Spannungstensor bezeichnet, wobei sich

$$N = \delta^\perp(\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) \quad (65)$$

aus der Gleichung (46) ergibt. Die skalierten Leslie-Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ mit $\alpha_j = \tilde{\alpha}_j/\gamma_1$ und der Onsager-Koeffizient λ in (46) erfüllen die Onsager-Relationen

$$\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_6 - \alpha_5, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda = \alpha_5 + \alpha_6.$$

Durch die Gleichung (48) kommt die Inkompressibilität der Flüssigkeit zum Ausdruck. An die Randbedingungen stellen wir für das System (45)-(48) folgende Forderungen

$$\phi|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (\text{perfekte Leiterplatten}), \quad (66)$$

$$n|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{feste Verankerung}), \quad (67)$$

$$v|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (\text{endliche Viskosität}). \quad (68)$$

3.3 Das Standardmodell als geschlossenes dynamisches System

Wir schreiben die in Kapitel 3.2 vorgestellten Gleichungen (45) - (48) als dynamisches System bzgl. n, v_i und ϕ . Im folgenden bezeichnet \langle, \rangle das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 . Da $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ betrachten wir

$$\partial_t n_2 = \langle e_2, \omega \times n + \delta^\perp(\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle, \quad (69)$$

$$\partial_t n_3 = \langle e_3, \omega \times n + \delta^\perp(\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle, \quad (70)$$

wobei im folgenden für die untersuchten Lösungen $n_1 > 0$ gilt. Als Gleichungen für das Geschwindigkeitsfeld v erhalten wir

$$\partial_t v_i = Q((-\partial_j(\Pi_{ij} + T_{ij}^{\text{visc}}) + \rho E_i)(1/\rho_m) - (v \cdot \nabla)v_i) \quad (71)$$

mit Q als Projektion auf die divergenzfreien Vektorfelder $\{v \mid \text{div } v = 0\}$. Die Gleichung (45) ist noch in eine Gleichung für das elektrische Potential ϕ umzuschreiben.

Hierzu setzen wir (49), (50), (52) und (53) in (45) ein. Aus Gleichung (45), gegeben durch

$$(\partial_t + v_i \partial_i) \rho = -\partial_j (\sigma_{jl} E_l),$$

erhalten wir, indem wir ρ durch $\partial_k (\varepsilon_{km} E_m)$ ersetzen

$$(\partial_t + v_i \partial_i) \partial_k (\varepsilon_{km} E_m) = -\partial_j (\sigma_{jl} E_l).$$

Da $\varepsilon_{km} = \varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m$, $E_i = E_0 \delta_{i3} - \partial_i \phi$ und $\sigma_{jl} = \sigma_{\perp} \delta_{jl} + \sigma_a n_j n_l$ erhalten wir

$$(\partial_t + v_i \partial_i) \partial_k ((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m) (E_0 \delta_{m3} - \partial_m \phi)) = -\partial_j ((\sigma_{\perp} \delta_{jl} + \sigma_a n_j n_l) (E_0 \delta_{l3} - \partial_l \phi)).$$

Die Verwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} & -(\partial_k (\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m) \partial_m \partial_t \phi) + v_i \partial_i \partial_k ((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m) (E_0 \delta_{m3} - \partial_m \phi)) \\ & + \partial_k ((\partial_t (\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m)) (E_0 \delta_{m3} - \partial_m \phi)) = -\partial_j ((\sigma_{\perp} \delta_{jl} + \sigma_a n_j n_l) (E_0 \delta_{l3} - \partial_l \phi)). \end{aligned}$$

Lösen wir dies nach der Zeit-Ableitung von ϕ auf, so erhalten wir mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{n}$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\perp} \partial_t (\partial_k \partial_k \phi) &+ \varepsilon_a \partial_1 \partial_1 \partial_t \phi + ((\partial_k (\varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m)) \partial_m + \varepsilon_a (\tilde{n}_k + \tilde{n}_m + \tilde{n}_k \tilde{n}_m) \partial_k \partial_m) \partial_t \phi \\ &= v_i \partial_i \partial_k ((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m) (E_0 \delta_{m3} - \partial_m \phi)) \\ &+ \partial_k ((\partial_t (\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m)) (E_0 \delta_{m3} - \partial_m \phi)) \\ &+ \partial_j ((\sigma_{\perp} \delta_{jl} + \sigma_a \tilde{n}_j \tilde{n}_l) (E_0 \delta_{l3} - \partial_l \phi)) \\ &= F(v, n, \phi, \partial_t n, E_0). \end{aligned}$$

Die Gleichung für das elektrische Potential ϕ ist also von der Art

$$(M + G) \partial_t \phi = F(v, n, \phi, \partial_t n, E_0)$$

mit $G \cdot = (\partial_k (\varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m)) \partial_m \cdot + \varepsilon_a (\tilde{n}_k + \tilde{n}_m + \tilde{n}_k \tilde{n}_m) \partial_k \partial_m \cdot$ und $M \cdot = \varepsilon_{\perp} \Delta \cdot + \varepsilon_a \partial_1 \partial_1 \cdot$. In Lemma 3.10 zeigen wir die Invertierbarkeit des Operators M im Gebiet $\mathbb{R}^2 \times [-\pi/2, \pi/2]$ mit den Randbedingungen $\phi|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0$. Als Gleichung für das elektrische Potential ϕ erhalten wir

$$(1 + GM^{-1}) M \partial_t \phi = F(v, n, \phi, \partial_t n, E_0).$$

Mittels Neumannscher Reihe ergibt sich

$$\partial_t \phi = M^{-1} (1 + GM^{-1})^{-1} F(v, n, \phi, \partial_t n, E_0), \quad (72)$$

da GM^{-1} klein, falls \tilde{n} klein. Die Beschränktheit des Operators $M^{-1}(1 + GM^{-1})^{-1}$ zeigen wir in Lemma 3.11. Wir zeigen nun noch, dass die rechten Seiten von (69)-(72) tatsächlich als Funktionen von n, v und ϕ geschrieben werden können.

Wir betrachten zunächst die Gleichung (47) bzw. (71). Wie üblich ist $-\nabla p$ durch die Forderung der Divergenzfreiheit (48) festgelegt. Nach (63) ist Π_{ij} eine Funktion von f und n , wobei f nach (61) selbst eine Funktion von n ist. Mit T_{ij}^{visc} ist durch (64) eine Funktion von n, A und N gegeben, wobei A nach (57) eine Funktion von v ist. Die Gleichung für N (65) ist nach (54) und (55) eine Funktion von $n, \partial_t n$ und v , wobei $\partial_t n$ durch die rechte Seite von (46) festgelegt ist. Für ρE_i ergibt sich nach (49), (52) und (53) eine Funktion von n und ϕ .

Für die rechte Seite von (46) bzw. für (69) und (70) haben wir für δ nach (56) eine Funktion von n und für A nach (57) eine Funktion von v . Weiter ist h nach (60) eine Funktion von n und E , wobei E nach (52) eine Funktion von ϕ ist.

Wir betrachten nun noch die Gleichung (45) bzw. (72). Setzen wir (49) und (52), unter Verwendung von (53), in Gleichung (45) ein, so erhalten wir auf der linken Seite von (45) Zeitableitungen von ϕ und n . Da $\partial_t n$ durch die rechte Seite von (46) ersetzt werden kann, ist die Gleichung (45) letztendlich eine Gleichung für $\partial_t \phi$. Die rechte Seite von (45) liefert für σ nach (50) eine Funktion von n und für E nach (52) eine Funktion von ϕ .

3.4 Das regularisierte System

Das System (69)-(72), bestehend aus Gleichungen für die Komponenten des Direktorfeldes n_2 und n_3 , wobei n_1 durch Normierung bereits bestimmt ist, dem Geschwindigkeitsfeld v und dem elektrischen Potential ϕ , ist voll nichtlinear. Zu den Gleichungen (69)-(72) fügen wir nun jeweils einen regularisierenden Differentialoperator 4. Ordnung hinzu, so dass in der Nichtlinearität nur niedrigere Ableitungen als im Linearteil vorkommen. Das ursprünglich voll nichtlineare Problem wird dadurch semilinear. Für eine vergleichbare Vorgehensweise siehe [Te97]. Wir betrachten im folgenden

$$\partial_t n_2 = \langle e_2, \omega \times n + \delta^\perp(\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle - \beta \Delta^2 n_2, \quad (73)$$

$$\partial_t n_3 = \langle e_3, \omega \times n + \delta^\perp(\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle - \beta \Delta^2 n_3, \quad (74)$$

$$\partial_t v_i = Q((-\partial_j(\Pi_{ij} + T_{ij}^{\text{visc}}) + \rho E_i)(1/\rho_m) - (v \cdot \nabla)v_i - \beta \Delta^2 v_i), \quad (75)$$

$$\partial_t \phi = M^{-1}(1 + GM^{-1})^{-1} F(v, n, \phi, \partial_t n, E_0) - \beta \Delta^2 \phi \quad (76)$$

mit $\beta > 0$ und klein und den ursprünglichen Randbedingungen

$$n|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{feste Verankerung}), \quad (77)$$

$$v|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (\text{endliche Viskosität}), \quad (78)$$

$$\phi|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (\text{perfekte Leiterplatten}). \quad (79)$$

Wegen der Regularisierung benötigen wir zusätzliche Randbedingungen. Wir wählen

$$\partial_z^2 n_{2,3}|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (80)$$

$$\partial_z^2 v|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (81)$$

$$\partial_z^2 \phi|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (82)$$

Wir schreiben im folgenden

$$U = (n_2, n_3, v_1, v_2, v_3, \phi) \quad (83)$$

3.5 Die triviale Lösung

Die triviale, räumlich homogene Lösung des Standardmodells (45)-(48) erhalten wir durch Vernachlässigung aller Ortsableitungen bzgl. x und y von (73)-(76). Wir sehen sofort, dass

$$n_2 = n_3 = 0, \quad v = 0 \quad \text{und} \quad \phi = 0$$

die gesuchte triviale Lösung ist. Wir wählen diese als alten und neuen Ursprung und schreiben für die Gleichungen (73)-(76) abstrakt

$$\partial_t U = \Lambda U + N(U), \quad (84)$$

wobei Λ linear, N nichtlinear und U wie in (83) definiert ist.

3.6 Lineare Stabilitätsanalyse

Um die Stabilität der trivialen Lösung $U = 0$ zu untersuchen, betrachten wir das linearisierte System

$$\partial_t U = \Lambda U.$$

Wegen der Translationsinvarianz des Problems sind die Eigenfunktionen von Λ durch Fouriermoden gegeben, d.h.

$$\Lambda(\varphi_m(k, l, z)e^{i(kx+ly)}) = \lambda_m(k, l)\varphi_m(k, l, z)e^{i(kx+ly)}$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $k, l \in \mathbb{R}$. Die Funktionen $\varphi_m(k, l, \cdot)$ sind Eigenfunktionen des auf $[-\pi/2, \pi/2]$ gegebenen Differentialoperators $\Lambda(k, l)$, der durch

$$\Lambda(k, l)\varphi_m(k, l, \cdot)e^{i(kx+ly)} = \Lambda(\varphi_m(k, l, \cdot)e^{i(kx+ly)})$$

definiert ist. Da der Differentialoperator $\Lambda(k, l)$ in den später betrachteten Räumen eine kompakte Resolvente besitzt, hat $\Lambda(k, l)$ diskretes Spektrum und es ist $m \in \mathbb{N}$. Die Lösungen des linearisierten Systems sind daher durch

$$\begin{aligned} n_2 &= \varphi_{m,1}(k, l, z)e^{i(kx+ly)}e^{\lambda_m(k,l)t}, \\ n_3 &= \varphi_{m,2}(k, l, z)e^{i(kx+ly)}e^{\lambda_m(k,l)t}, \\ v_1 &= \varphi_{m,3}(k, l, z)e^{i(kx+ly)}e^{\lambda_m(k,l)t}, \\ v_2 &= \varphi_{m,4}(k, l, z)e^{i(kx+ly)}e^{\lambda_m(k,l)t}, \\ v_3 &= \varphi_{m,5}(k, l, z)e^{i(kx+ly)}e^{\lambda_m(k,l)t}, \\ \phi &= \varphi_{m,6}(k, l, z)e^{i(kx+ly)}e^{\lambda_m(k,l)t} \end{aligned}$$

mit $k, l \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi_m(k, l, \cdot)$ als Eigenfunktionen von $\Lambda(k, l)$ gegeben. Ist $U = 0$ asymptotisch stabil, so gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $(k, l) \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{Re} \lambda_m(k, l) < 0.$$

Wird die Lösung $U = 0$ durch Erhöhen der Spannung \bar{V} (51) instabil, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ (o. B. d. A. sei $m=1$), ein $(k, l) = (k_c, l_c) \in \mathbb{R}^2$ und ein $\bar{V} = \bar{V}_c$, so dass

$$\operatorname{Re} \lambda_1(k_c, l_c)|_{\bar{V}=\bar{V}_c} = 0.$$

gilt. Da ein reelles Problem vorliegt, ist auch $\operatorname{Re} \lambda_1(-k_c, -l_c)|_{\bar{V}=\bar{V}_c} = 0$. Experimentell ergeben sich u. a. stationäre periodische Muster und somit ist $(k_c, l_c) \neq (0, 0)$. Wir beschränken uns im folgenden auf Normalrollen, setzen also $l_c = 0$.

Im folgenden ist zu untersuchen ist, ob wir für das Originalsystem (73)-(76) eine Ginzburg-Landau-Gleichung herleiten können (85). Für den Nachweis der Approximationseigenschaft benötigen wir einige Voraussetzungen. So gehen wir im folgenden davon aus, dass die in Abbildung 9 skizzierte Situation vorliegt und $\operatorname{Re} \lambda_1(k_c, 0) > 0$ für $\bar{V} > \bar{V}_c$ ist. Wir setzen weiter voraus, dass $\operatorname{Im} \lambda_1(k, l) = 0$ für (k, l) nahe bei $(\pm k_c, 0)$ ist und $\lambda_1(k, l)$ für alle (k, l) in der Nähe von $(\pm k_c, 0)$ einfach ist. In Abbildung 9 wird in Abhängigkeit des Vorzeichens von $\operatorname{Re} \lambda_1(k, l)$ (Abb. 8) die zugehörige Fläche der Instabilität und das Restspektrum gezeigt.

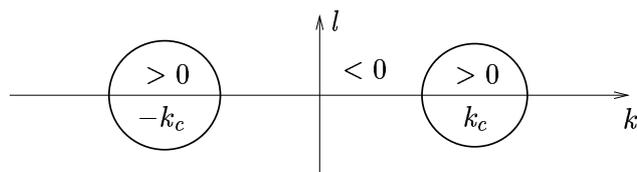
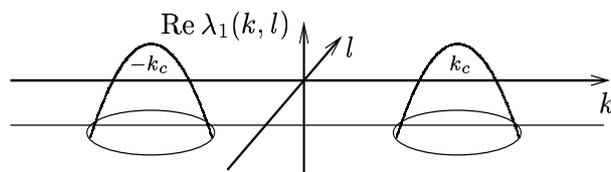
Abb. 8 Vorzeichen $\text{Re } \lambda_1(k, l)$ 

Abb. 9 zugehörige Fläche der Instabilität und Restspektrum

Die Voraussetzungen zur Herleitung einer Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = c_0 \partial_X^2 A_1 + c_1 \partial_Y^2 A_1 + c_2 A_1 - c_3 A_1 |A_1|^2 \quad (85)$$

mit Koeffizienten $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ und Lösungen $A_1 = A_1(X, Y, T) \in \mathbb{C}$ für $T \geq 0$ und $X, Y \in \mathbb{R}$ sind somit erfüllt. Mit $\varepsilon > 0$ als Bifurkationsparameter, definiert durch $\bar{V} - \bar{V}_c = \varepsilon^2 > 0$, sind durch die Gleichung (85) approximative Lösungen

$$\varepsilon A_1(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) \varphi_1(k_c, 0, z) + c.c.$$

für Modulationen des periodischen Grundmusters $e^{ik_c x}$ für das Orginalsystem (73)-(76) gegeben.

3.7 Die Projektion Q auf die divergenzfreien Vektorfelder

In diesem Kapitel definieren wir die Projektion auf die divergenzfreien Vektorfelder. Wir setzen zunächst Q mittels der Identität auf die erste, zweite und sechste Komponente von U (83) fort. In dieser Notation erfüllen die divergenzfreien Vektorfelder $U = QU$. Da $z \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt

Lemma 3.1 *Es gibt eine stetige Projektion Q , so dass $\text{div } v = 0$, $v_3|_{z=\pm\pi/2} = 0$ und $Q(0, 0, \partial_x p, \partial_y p, \partial_z p, 0) = 0$ für alle $(0, 0, \partial_x p, \partial_y p, \partial_z p, 0) \in L^2(\Omega)$ erfüllt sind.*

Beweis. Die Projektion findet nur Anwendung auf die hydrodynamischen Teile der Navier-Stokes Gleichungen. Wir definieren diesen Teil von Q durch die Lösungen $V = (v_1, v_2, v_3)$ des Systems

$$\begin{aligned} V - \nabla p &= f, \\ \nabla \cdot V &= 0 \end{aligned}$$

mit $v_3|_{z=\pm\pi/2} = 0$. Um Q zu definieren betrachten wir das Fourier-Transformierte System

$$\begin{aligned}v_1 - ikp &= f_1, \\v_2 - ilp &= f_2, \\v_3 - \partial_z p &= f_3, \\ikv_1 + ilv_2 + \partial_z v_3 &= 0,\end{aligned}$$

welches durch Entwicklung von

$$\begin{aligned}v_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} v_{1,m} \sin(mz), & v_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} v_{2,m} \sin(mz), & v_3 &= \sum_{m=0}^{\infty} v_{3,m} \cos(mz), \\f_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{1,m} \sin(mz), & f_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{2,m} \sin(mz), & f_3 &= \sum_{m=0}^{\infty} f_{3,m} \cos(mz), \\p &= \sum_{m=0}^{\infty} p_m \sin(mz)\end{aligned}$$

gelöst werden kann. Wir setzen obige Entwicklungen ein und erhalten die vierdimensionalen Systeme

$$\begin{aligned}v_{1,m} - ikp_m &= f_{1,m}, \\v_{2,m} - ilp_m &= f_{2,m}, \\v_{3,m} + mp_m &= f_{3,m}, \\ikv_{1,m} + ilv_{2,m} + mv_{3,m} &= 0\end{aligned}$$

mit Lösungen

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ v_{3,m} \end{pmatrix} &= A_m(k, l) \begin{pmatrix} f_{1,m} \\ f_{2,m} \\ f_{3,m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m^2 + k^2 + l^2} \begin{pmatrix} m^2 + l^2 & -lk & ikm \\ -lk & m^2 + k^2 & ilm \\ -ikm & -ilm & k^2 + l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,m} \\ f_{2,m} \\ f_{3,m} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Einträge der Matrizen $A_m(k, l)$ können bzgl. m , k und l gleichmässig abgeschätzt werden, falls $m \neq 0$, d.h.

$$\exists C \forall m, k, l : |v_{j,m}| \leq C \sum_{j=1}^3 |f_{j,m}|.$$

Gesondert betrachten wir den Fall $m=0$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ v_{3,m} \end{pmatrix} = \frac{1}{k^2 + l^2} \begin{pmatrix} l^2 & -lk & 0 \\ -lk & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 + l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{1,m} \\ f_{2,m} \\ f_{3,m} \end{pmatrix}$$

als Lösung. Die Matrix $A_0(k, l)$ kann gleichmässig bzgl. k, l mit $(k, l) \neq (0, 0)$ abgeschätzt werden. Wir betrachten weiter $k = l = m = 0$ und erhalten für

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1,m} \\ v_{2,m} \\ v_{3,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,m} \\ f_{2,m} \\ f_{3,m} \end{pmatrix}$$

als Lösung $v_{1,m} = f_{1,m}$, $v_{2,m} = f_{2,m}$ und $v_{3,m} = f_{3,m}$. □

Wir folgern daraus unmittelbar

Lemma 3.2 *Die Projektion Q ist stetig von H^m nach H^m .*

3.8 Die Funktionenräume

Wir definieren

$$\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}^2 \times [-\pi/2, \pi/2], \mathbb{R}^6) \cap \{QU = U\}$$

und

$$\mathcal{X}^1 = \{U \in H^4 \mid U \text{ erfüllt die Randbedingungen (77)-(82)}\} \cap \{QU = U\}.$$

Die Lösungen $U \in C([0, T_0], \mathcal{X}^\alpha)$ von (73)-(76), mit Λ als sektoriellem Operator in \mathcal{X} und Definitionsbereich $D(\Lambda) = \mathcal{X}^1$, werden wir - wie bei semilinearen Gleichungen üblich - durch Verwendung eines Fixpunktargumentes, mittels der Variation der Konstantenformel

$$u(t) = e^{\Lambda t} u_0 + \int_0^t e^{\Lambda(t-s)} N(u(s)) ds = F(u(s))$$

in dem abstrakten Raum \mathcal{X}^α konstruieren. Die Interpolationsräume \mathcal{X}^α , versehen mit der Norm $\|u\|_{\mathcal{X}^\alpha} = \|\Lambda^\alpha u\|_{\mathcal{X}}$, können für $\alpha > 3/4$ in H^3 eingebettet werden [He81, Satz 1.6.1]. Die Nichtlinearität N ist somit eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung von \mathcal{X}^α nach \mathcal{X} (Satz 3.13). Die analytische Halbgruppe $e^{\Lambda t}$ bildet \mathcal{X} wieder nach \mathcal{X}^α mit einer Singularität $t^{-\alpha}$ ab (Lemma 3.9). Ein Zusammenhang der hier verwendeten

Räume ergibt sich aus dem folgenden Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L^2 & \xleftarrow{\text{Satz 3.12}} & H^3 \\
 & & \parallel & \boxed{\text{Nicht-}} & \parallel \\
 & & & \text{linearität} & \\
 & & & \parallel & \uparrow \text{Satz 3.13} \\
 \mathcal{X}^1 = D(\Lambda) & \xrightarrow{\Lambda} & \mathcal{X} & \xrightarrow{e^{\Lambda t}} & \mathcal{X}^\alpha \\
 \cap & & & & \parallel \\
 H^4 & & & & \|u\|_{\mathcal{X}^\alpha} = \|\Lambda^\alpha u\|_{\mathcal{X}}
 \end{array}$$

Abb. 10 Zusammenhang der Funktionenräume

Wir führen unsere Untersuchungen teilweise im Fourierraum und teilweise im x -Raum durch. Wir verwenden den Funktionenraum $L^2(m)$ mit der Norm

$$\|\hat{u}\|_{L^2(m)}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(k)|^2 (1 + |k|^2)^m dk.$$

Bemerkung 3.3 Die Abbildung zwischen den Räumen $L^2(m)$ und H^m ist ein Isomorphismus.

3.9 Die Projektionen

Zur Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung benötigen wir einige Vorbereitungen. Wir definieren uns zunächst geeignete Moden-Filter. Wir verwenden

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{X}}^1 &= H^4(\mathbb{R}^2 \times [-\pi/2, \pi/2], \mathbb{R}^6) \cap \{U \text{ erfüllt Randbedingungen}\} \\
 &= L^2(\mathbb{R}, W_4) \cap H^4(\mathbb{R}, W_0)
 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 W_4 &= \{U \in H^4([-\pi/2, \pi/2], \mathbb{R}^6) \cap \{U \text{ erfüllt Randbedingungen}\}, \\
 W_0 &= L^2([-\pi/2, \pi/2], \mathbb{R}^6).
 \end{aligned}$$

Um kritische und unkritische Eigenfunktionen bei einem festen Wellenvektor (k, l) trennen zu können, definieren wir die $\Lambda(k, l, \varepsilon^2)$ -invariante Projektion auf den kritischen Eigenraum

$$\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2)\hat{U} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\Lambda(k, l, \varepsilon^2) - \mu I)^{-1} \hat{U} d\mu$$

mit Γ als geschlossene Kurve um den einfachen Eigenwert $\lambda(k_c, 0) = i\hat{\omega}_0$. Für $(k, l) \in [-k_c - \theta, k_c + \theta]$ und $\theta > 0$ setzen wir $\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2) = \overline{\tilde{E}_c(-k, -l, \varepsilon^2)}$. Zu bemerken

ist, dass $\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2)$ eine eindimensionale Projektion mit $\text{span} \{\varphi_1(k, l, \varepsilon^2)\}$ ist. Wir definieren deshalb für $(k, l) \in [-k_c - \theta, -k_c + \theta] \cup [k_c - \theta, k_c + \theta]$ und $\hat{U} \in W_0$ einen komplexwertigen Operator $\tilde{p}_\varphi = \tilde{p}_\varphi(k, l, \varepsilon^2)$ durch

$$\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2) \hat{Q}(k, l) \hat{U} = \tilde{p}_\varphi(k, l, \varepsilon^2) (\hat{U}) \tilde{\varphi}_{\pm 1}(k, l, \varepsilon^2).$$

Um $\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon)$ auf eine Funktion für alle $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ ausweiten zu können, definieren wir im Fourierraum eine gerade Abschneidefunktion

$$\hat{\chi}_0(k \pm k_c, l) = \begin{cases} 1 & \text{für } |k^2 + l^2|^{1/2} \leq \theta/6, \\ 0 & \text{für } |k^2 + l^2|^{1/2} \geq \theta/6. \end{cases}$$

Mittels dieser Abschneidefunktion definieren wir Multiplikatoren im Fourierraum.

Definition 3.4 *Wir definieren die Multiplikatoren*

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{\pm 1}(k, l, \varepsilon^2) &= \tilde{\varphi}(k, l, \varepsilon^2) \hat{\chi}_0(k \pm k_c, l), & \hat{\lambda}_{\pm 1}(k, l, \varepsilon^2) &= \tilde{\lambda}(k, l, \varepsilon^2) \hat{\chi}_0(k \pm k_c, l), \\ \hat{p}_{\pm 1}(k, l, \varepsilon^2) &= \tilde{p}(k, l, \varepsilon^2) \hat{\chi}_0(k \pm k_c, l). \end{aligned}$$

Diese Operatoren sind auf der gesamten reellen Achse definiert. Um die kritischen Moden herausziehen zu können, definieren wir uns den Operator

$$\hat{E}_c = \sum_{i=\pm 1} \hat{\varphi}_i \hat{p}_{\varphi_0}.$$

Der Operator für die unkritischen Moden ist durch

$$\hat{E}_s = 1 - \hat{E}_c$$

definiert. Da die Operatoren \hat{E}_c und \hat{E}_s kritische und unkritische Moden voneinander trennen, bezeichnen wir sie als Filter.

Lemma 3.5 *Die Operatoren $E_c = \mathcal{F}^{-1} \hat{E}_c \mathcal{F}$ und $E_s = 1 - E_c$ sind in X^α beschränkt und kommutieren mit Q .*

Beweis. Da das Bild von $\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2)$ eindimensional ist und $\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2)$ kompakten Träger bezüglich (k, l) besitzt, ist $\tilde{E}_c(k, l, \varepsilon^2)$ beschränkt von $\mathcal{X} = L^2 \supset \mathcal{X}^\alpha$ nach $H^4 \cap \{\text{Randbedingungen}\} = \mathcal{X}^1 \subset \mathcal{X}^\alpha$ und somit auch beschränkt in \mathcal{X}^α . Es gilt $\|\tilde{E}_c u\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq C \|\tilde{E}_c u\|_{\mathcal{X}^1} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}} \leq C \|u\|_{\mathcal{X}^\alpha}$. Da $E_s = 1 - E_c$ ist auch $E_s \in L(\mathcal{X}^\alpha, \mathcal{X}^\alpha)$. Weiter gilt $E_c Q = Q E_c$, da $Q \varphi_1 = \varphi_1$. □

Lemma 3.6 *Sei $u, v \in \mathcal{X}^\alpha$. Dann ist $E_c B(E_c u, E_c v) = 0$.*

Beweis. Analog zu Lemma 2.10.

Abzuschätzen sind noch die Multiplikatoren, die auf skalierte Funktionen wirken. Wir führen hierzu einen Skalierungsoperator $S_\varepsilon u(x) := u(\varepsilon x)$ ein. Betrachten wir $|x|^{-\alpha}$ mit $0 \leq \alpha < 1/2$ und $|x| \leq 1$, so finden wir $\|S_\varepsilon u\|_{L^2} = C\varepsilon^{-\alpha}\|u\|_{L^2}$ für alle $0 \leq \alpha < 1/2$. Allgemein gilt $\|S_\varepsilon u\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-1/2}\|u\|_{L^2}$ im Fall $x \in \mathbb{R}$ und $\|S_\varepsilon u\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-d/2}\|u\|_{L^2}$ im Fall $x \in \mathbb{R}^d$.

Das Lemma 2.4 ist wie folgt zu modifizieren.

Lemma 3.7 *Seien W_1 und W_2 Hilberträume, $(1+|\cdot|^2)^{-m/2} \hat{M}(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^2, L(W_1, W_2))$, $m \in \mathbb{N}$ und $S_\varepsilon u(x) := u(\varepsilon x)$ ein Skalierungsoperator. Dann ist $M((S_\varepsilon \cdot)e^{ik_0 x}) : H^q(W_1) \mapsto H^{q-r}(W_2)$ beschränkt für alle $q \geq r \geq m$ mit Norm*

$$C(q, r, m)\varepsilon^{-1} \|(1+|\cdot|^2)^{-m/2} \hat{M}(\varepsilon \cdot + k_0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2, L(W_1, W_2))},$$

wobei $C(q, r, m)$ nicht von \hat{M} abhängt.

Beweis. Für $k, k_0 \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \|M((S_\varepsilon u)e^{ik_0 x})\|_{H^{q-r}(W_2)} &= \|\hat{M}(k)\hat{u}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right)\|_{L^2(q-r, W_2)} \\ &= \left(\int \|\hat{M}(k)\hat{u}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right)\|_{W_2}^2 (1+|k|^2)^{q-r} dk\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int \|\hat{M}(k)\|_{L(W_1, W_2)}^2 \|\hat{u}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right)\|_{W_1}^2 (1+|k|^2)^{q-r} dk\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int \|\hat{M}(k)\|_{L(W_1, W_2)}^2 (1+|k|^2)^{-r} \|\hat{u}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right)\|_{W_1}^2 (1+|k|^2)^q dk\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{R}} (\|\hat{M}(k)\|_{L(W_1, W_2)} (1+|k|^2)^{-\frac{r}{2}}) \left(\int \|\hat{u}\left(\frac{k-k_0}{\varepsilon}\right)\|_{W_1}^2 (1+|k|^2)^q dk\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{R}} (\|\hat{M}(k)\|_{L(W_1, W_2)} (1+|k|^2)^{-\frac{r}{2}}) \left(\int \varepsilon^{-2} \|\hat{u}(l)\|_{W_1}^2 (1+|k_0 + \varepsilon l|^2)^q dl\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C(1+l^2)^q \sup_{k \in \mathbb{R}} (\|\hat{M}(k)\|_{L(W_1, W_2)} (1+|k|^2)^{-\frac{r}{2}}) \varepsilon^{-1} \|u\|_{H^q(W_1)}. \end{aligned}$$

□

3.10 Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung und Abschätzungen für das Residuum

Wie oben definieren wir das Residuum

$$Res(\psi_0) = -\partial_t \psi_0 + \Lambda \psi_0 + N(\psi_0),$$

und konstruieren im folgenden eine Approximation $\varepsilon\psi_A = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$, die in (87) definiert ist und $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ -nahe bei $\varepsilon\tilde{\psi}_c$ liegt, so dass das Residuum $Res(\psi_0)$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^n)$ für genügend großes $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir leiten formal eine Ginzburg-Landau-Gleichung (85) her.

Die Koeffizienten c_0, c_1 und c_2 des Linearteils der Ginzburg-Landau-Gleichung (85) werden durch λ_1 bestimmt [siehe (14)]. Der Koeffizient c_3 vor dem kubischen Term von (85) ergibt sich aus den quadratischen und kubischen Termen der Nichtlinearität N . Höhere Ordnungsterme sind nicht zu berücksichtigen, da diese lediglich eine höhere ε -Ordnung zur Folge haben. Zur Herleitung einer Ginzburg-Landau-Gleichung (85) für (84) schreiben wir deshalb

$$\partial_t U = \Lambda U + B(U, U) + K(U, U, U) + \mathcal{O}(\|U\|^4) \quad (86)$$

mit einer symmetrischen Bilinearform B und einer symmetrischen Trilinearform K . Wir wählen als Approximation

$$\begin{aligned} \varepsilon\tilde{\psi}_c(x, y, z, t, \varepsilon) &= A_1(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) e^{ik_c x} \varphi_1(k_c, 0, z) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &\quad + A_{-1}(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) e^{-ik_c x} \varphi_1(-k_c, 0, z) \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (87)$$

mit $A_1 = A_1(X, Y, T) \in \mathbb{C}$ als Lösung von (85) und $A_{-1} = \overline{A_1}$. Zu bemerken ist, dass $\varphi_{\pm 1}$ im folgenden die durch Multiplikatoren definierten Operatoren aus Definition 3.4 sind und keine festen Eigenfunktionen wie in (87).

Setzen wir (87) in (86) ein, so erhalten wir für das Residuum $Res(\varepsilon\tilde{\psi}_c)$ Terme mit zu geringer ε -Ordnung. Diese Terme sind deshalb zu eliminieren. Wir erweitern zu diesem Zweck unsere Approximation durch einen Term $\varepsilon^2\tilde{\psi}_s$ mit $\tilde{\psi}_s = E_s\tilde{\psi}_s$. Da der Term $\varepsilon^2\tilde{\psi}_s$ von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ist, ist er für die Approximation selbst nicht nötig. Der Term $\varepsilon^2\tilde{\psi}_s$ dient lediglich dazu, das Residuum klein zu machen. Setzen wir die Approximation

$$\psi_0 = \varepsilon\tilde{\psi}_c + \varepsilon^2\tilde{\psi}_s$$

mit $\tilde{\psi}_c = E_c\tilde{\psi}_c$ und $\tilde{\psi}_s = E_s\tilde{\psi}_s$ in (86) ein, so erhalten wir für das Residuum

$$\begin{aligned} Res(\psi_0) &= -\partial_t \psi_0 + \Lambda \psi_0 + B(\psi_0, \psi_0) + K(\psi_0, \psi_0, \psi_0) + \mathcal{O}(\|\psi_0\|^4) \\ &= -\varepsilon \partial_t \tilde{\psi}_c - \varepsilon^2 \partial_t \tilde{\psi}_s + \varepsilon \Lambda \tilde{\psi}_c + \varepsilon^2 \Lambda \tilde{\psi}_s + \varepsilon^3 K(\tilde{\psi}_c, \tilde{\psi}_c, \tilde{\psi}_c) \\ &\quad + \varepsilon^2 B(\tilde{\psi}_c, \tilde{\psi}_c) + 2\varepsilon^3 B(\tilde{\psi}_c, \tilde{\psi}_s) + \varepsilon^4 B(\tilde{\psi}_s, \tilde{\psi}_s) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Um die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, die nicht aus Zeit-Ableitungen hervorgehen ($\partial_t = \varepsilon^2 \partial_T$) oder sich auf den Linearteil der Ginzburg-Landau-Gleichung beziehen, zu eliminieren, wählen wir

$$\varepsilon^2 \Lambda \tilde{\psi}_s = -\varepsilon^2 B(\tilde{\psi}_c, \tilde{\psi}_c).$$

Da das Spektrum von $\Lambda(k, l, \varepsilon^2)$ für die auftretenden Wellenzahlen in der linken Halbebene liegt, können wir die Gleichung für $\tilde{\psi}_s$ in \mathcal{X} lösen. Wir erhalten $\hat{\Lambda}^{-1} = \hat{\Lambda}^{-1}(k, l, \varepsilon^2) \in L(W_0, W_4)$ für $k \in [-2k_c - \theta/3, -2k_c + \theta/3] \cup [-\theta/3, \theta/3] \cup [2k_c - \theta/3, 2k_c + \theta/3]$. Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ für k in der Nähe von $\pm k_c$ können wir eliminieren, indem wir den Koeffizienten c_3 vor der Nichtlinearität in (85) so wählen, dass

$$c_3 e^{ik_c x} = 2p_{\varphi_1} B(a, \Lambda^{-1} B(a, a)) + p_{\varphi_1} T(a, a, a)$$

mit $a = \hat{\varphi}_1(k_c, 0) e^{ik_c x} + \hat{\varphi}_{-1}(-k_c, 0) e^{-ik_c x}$ gilt. Damit ist formal

$$E_s(\text{Res}(\psi_0)) = \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad \text{und} \quad E_c(\text{Res}(\psi_0)) = \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Wegen der Skalierungseigenschaft der L^2 -Norm in \mathbb{R}^2 verlieren wir ε^{-1} , d.h.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} (A(\varepsilon x, \varepsilon y))^2 dx dy \right)^{1/2} = \varepsilon^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^2} (A(X, Y))^2 dX dY \right)^{1/2}.$$

Die Approximation muss deshalb um zusätzliche Terme erweitert werden [Schn92]. Als Bestimmungsgleichungen für die zusätzlichen Terme ergeben sich inhomogene lineare partielle Differentialgleichungen und lineare algebraische Gleichungen, deren Lösungen solange existieren wie die gegebene Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung. Für die um eine Approximationsstufe erweiterte Approximation gilt z. B.

$$\begin{aligned} \varepsilon \psi_c(x, y, z, t, \varepsilon) &= \varepsilon \varphi_1 A_1(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) e^{i(k_c x + \hat{\omega}_0 t)} \\ &\quad + \varepsilon \varphi_{-1} A_{-1}(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) e^{-i(k_c x - \hat{\omega}_0 t)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \varphi_1 A_1^1(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) e^{i(k_c x + \hat{\omega}_0 t)} \\ &\quad + \varepsilon^2 \varphi_{-1} A_{-1}^1(\varepsilon x, \varepsilon y, \varepsilon^2 t) e^{-i(k_c x - \hat{\omega}_0 t)} \end{aligned}$$

und

Lemma 3.8 *Sei $A_1 = A_1(X, Y, T) \in C([0, T_0], H^4(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}))$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (85). Es gibt eine Approximation $\varepsilon \psi_A = \varepsilon \psi_c + \varepsilon^2 \psi_s$, so dass*

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon \tilde{\psi}_c - \varepsilon \psi_A\|_{C_0^b} &= \mathcal{O}(\varepsilon^2), & \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} (\|\psi_c\|_{\mathcal{X}^1} + \|\psi_s\|_{\mathcal{X}^1}) &= \mathcal{O}(1), \\ \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_s(\text{Res}(\varepsilon \psi_A))\|_{\mathcal{X}} &= \mathcal{O}(\varepsilon^3), & \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_c(\text{Res}(\varepsilon \psi_A))\|_{\mathcal{X}} &= \mathcal{O}(\varepsilon^4) \end{aligned}$$

gilt mit $E_s \psi_c = 0$ und $E_c \psi_s = 0$.

Beweis. Analog zu [Schn94, Seiten 446/447] mit Hilfe von Lemma 3.7.

Mehr Details zu Approximationen höherer Ordnung finden sich in Kapitel 4.6.

3.11 Abschätzungen der Halbgruppe und Nichtlinearität

Lemma 3.9 *Es existieren Konstanten $C, \sigma_0 > 0$, so dass für die durch Λ erzeugte Halbgruppe $e^{\Lambda t}$ für $\alpha \in [0, 1)$ in \mathcal{X} folgende Abschätzungen gelten*

$$\|e^{\Lambda t} E_c\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\alpha)} \leq C e^{C\varepsilon^2 t} \quad (*)$$

und

$$\|e^{\Lambda t} E_s\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\alpha)} \leq C \max(1, t^{-\alpha}) e^{-\sigma_0 t}.$$

Beweis. Durch den Operator $-Q\beta\Delta^2$ ist der Generator einer analytischen Halbgruppe mit Definitionsbereich $D(A) = \{U \in H^4 \mid U \text{ erfüllt die Randbedingungen (77)-(82)}\}$ in $\mathcal{X} = L^2(\mathbb{R}^2 \times [-\pi/2, \pi/2], \mathbb{R}^6) \cap \{QU = U\}$ gegeben. Da $\Lambda + Q\beta\Delta^2$ nur eine relativ beschränkte Störung von $-Q\beta\Delta^2$ ist, ist auch Λ Generator einer analytischen Halbgruppe [He81, Satz 1.3.2]. Das Spektrum von $E_s\Lambda$ ist von der imaginären Achse mit Abstand $\mathcal{O}(1)$ wegbeschränkt. Die Abschätzung folgt somit im stabilen Fall nach [He81, Satz 1.3.4].

Da die Eigenwertfunktion λ_1 einfach ist, ist C in $(*)$ unabhängig von ε . Die Wachstumsrate von $e^{\Lambda t} E_c$ der kritischen Moden kann dadurch analog mit $\mathcal{O}(e^{C\varepsilon^2 t})$ abgeschätzt werden. Da der Wertebereich von $\hat{E}_c(k)$ für festes $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ eindimensional ist, sind $E_c\mathcal{X}$ und $E_c\mathcal{X}^\alpha$ äquivalent. \square

Lemma 3.10 *Der Operator M^{-1} ist stetig von H^s nach H^{s+2} .*

Beweis. Wir betrachten

$$M\phi(x, y, z) = f(x, y, z).$$

Der Ansatz

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= \int \int \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{\phi}(k, l, m) e^{ikx + ily} \sin(\pi m(z - \frac{\pi}{2})) \right) dk dl, \\ f(x, y, z) &= \int \int \left(\sum_{m \in \mathbb{N}} \hat{f}(k, l, m) e^{ikx + ily} \sin(\pi m(z - \frac{\pi}{2})) \right) dk dl \end{aligned}$$

liefert mit

$$(-\varepsilon_a k^2 - \varepsilon_\perp(k^2 + l^2 + m^2)) \hat{\phi}(k, l, m) = \hat{f}(k, l, m),$$

bzw.

$$\hat{\phi}(k, l, m) = -\frac{\hat{f}(k, l, m)}{(\varepsilon_a k^2 + \varepsilon_\perp(k^2 + l^2 + m^2))}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_{H^{s+2}}^2 &= \int \int \sum_{m \in \mathbb{N}} |\hat{\phi}|^2 (1 + k^2 + l^2 + m^2)^{s+2} dkdl \\
&= \int \int \sum_{m \in \mathbb{N}} |\hat{f}|^2 \frac{(1 + k^2 + l^2 + m^2)^{s+2}}{(\varepsilon_a k^2 + \varepsilon_\perp (k^2 + l^2 + m^2))} dkdl \\
&\leq \sup_{k,l,m} \left| \frac{1 + k^2 + l^2 + m^2}{\varepsilon_a k^2 + \varepsilon_\perp (k^2 + l^2 + m^2)} \right|^2 \int \int \sum_{m \in \mathbb{N}} |\hat{f}|^2 (1 + k^2 + l^2 + m^2)^s dkdl \\
&\leq C \int \int \sum_{m \in \mathbb{N}} |\hat{f}|^2 (1 + k^2 + l^2 + m^2)^s dkdl = C \|f\|_{H^s}^2.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.11 *Der Operator $M^{-1}(1 + GM^{-1})^{-1}$ ist stetig von L^2 nach L^2 .*

Beweis. Die Operatoren M^{-1} und G sind Abbildungen $M^{-1} : L^2 \mapsto H^2$ und $G : H^2 \mapsto L^2$. Da G echt nichtlinear ist, ist $\|GM^{-1}\|_{L^2 \rightarrow L^2}$ klein und mittels Neumannscher Reihe folgt, dass $(1 + GM^{-1})^{-1} : L^2 \rightarrow L^2$ beschränkt ist. Dann ist aber auch $M^{-1}(1 + GM^{-1})^{-1} : L^2 \mapsto L^2$ beschränkt.

Satz 3.12 *Die Nichtlinearität ist eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung von H^3 nach L^2 .*

Beweis. Wir betrachten die Gleichungen (45)-(47) und überlegen uns, in welchen Raum die jeweiligen Bestimmungsgrößen liegen. Insbesondere überlegen wir uns, wie oft die jeweiligen Größen differenzierbar sind. Seien v, n und $\phi \in H^3$. Dann ist nach (55) $\omega \in H^2$ und nach (57) $A \in H^2$. Da T_{ij}^{visc} nach (64) stetig von $\partial_x v, n$ und N abhängt, ist T_{ij}^{visc} ebenfalls in H^2 . Da in Gleichung (47) auf T_{ij}^{visc} eine weitere Ableitung fällt, ist $\partial_j T_{ij}^{visc} \in H^1$. Da $\phi \in H^3$ ist, folgt dass $E \in H^2$ ist nach (52). Weiter ist $h \in H^1$ nach (60) und (61), $\rho \in L^2$ nach (49) und (52), $\Pi_{ij} \in H^2$ nach (63), $\delta \in H^3$ nach (56), und $\lambda, \gamma_1, \varepsilon, \sigma$ Konstanten.

Damit ist unter Verwendung der Lemmata 3.9, 3.10 und 3.11 die rechte Seite der nichtregularisierten Gleichung (69)-(71) in L^2 , falls v, n und $\phi \in H^3$. □

Satz 3.13 *Die Nichtlinearität ist für $\alpha > 3/4$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung von \mathcal{X}^α nach \mathcal{X} .*

Beweis. Nach [He81, Satz 1.6.1] kann \mathcal{X}^α für $\alpha > 3/4$ in H^3 eingebettet werden.

3.12 Die Fehlerabschätzungen

Mit den angegebenen Lemmata und Vorüberlegungen beweisen wir

Satz 3.14 *Sei $\alpha \in (3/4, 1)$ und $A_1 = A_1(X, Y, T) \in C([0, T_0], H^4(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}))$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (85). Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0, C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen $U(\cdot, t)$ von (84) existieren für die*

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|U(\cdot, t) - \varepsilon\psi_A(\cdot, t, \varepsilon)\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq C\varepsilon^2$$

gilt, mit $\varepsilon\psi_A = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$ wie in Lemma 3.8.

Beweis. Probleme bereiten nur die quadratischen Terme. Wir schreiben daher (84) als

$$\partial_t U = \Lambda U + B(U, U) + K(U) \quad (88)$$

mit $B(U, U)$ als symmetrische Bilinearform und $K(U) = \mathcal{O}(\|U\|^3)$. Entsprechend der Approximation $\varepsilon\psi_A = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$ erwarten wir für den Fehler

$$R(x, y, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 R_c(x, y, t, \varepsilon) + \varepsilon^3 R_s(x, y, t, \varepsilon) \quad (89)$$

mit $R_c = E_c R_c \in \mathcal{X}^\alpha$ und $R_s = E_s R_s \in \mathcal{X}^\alpha$. Für die Lösungen des ursprünglichen Systems gilt somit

$$U = \varepsilon\psi_A + R = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s + \varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s. \quad (90)$$

Setzen wir (90) in (88) ein, so erhalten wir nach Division durch ε^2 und Trennung in lineare und nichtlineare Terme

$$\begin{aligned} \partial_t R_c + \varepsilon \partial_t R_s &= \Lambda R_c + \varepsilon \Lambda R_s + \varepsilon \tilde{L}_2(R_c) + \varepsilon^2 \tilde{L}_1(R) \\ &\quad + \varepsilon^2 \tilde{N}_2(R_c) + \varepsilon^3 \tilde{N}_1(R) + \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Res}(\psi_A) \end{aligned} \quad (91)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2(R_c) &= 2B(R_c, \psi_c), & \tilde{L}_1(R) &= 2B(R_c, \psi_s) + 2B(R_s, \psi_c) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \tilde{N}_2(R_c) &= B(R_c, R_c) + \mathcal{O}(\varepsilon) & \tilde{N}_1(R) &= \mathcal{O}(\|R\|_{\mathcal{X}^\alpha} + \varepsilon\|R\|_{\mathcal{X}^\alpha}^2), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{O}(\varepsilon)$ weitere Terme enthält, die von K erzeugt werden.

Sind R_c, R_s, ψ_c und ψ_s jeweils von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ in \mathcal{X}^α , dann sind auch $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \tilde{N}_1$ und \tilde{N}_2 von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ in \mathcal{X} . Um auf Gleichungen für R_c und R_s zu kommen, benötigen wir die Projektionen E_c und E_s aus Lemma 3.5.

Wir teilen die Gleichung für den Fehler (91) in einen kritischen und einen stabilen Teil auf und beachten, dass nach Lemma 3.6 $E_c B(R_c, \psi_c) = E_c B(R_c, R_c) = 0$ gilt. Dann sind R_c und R_s Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}\partial_t R_c &= \Lambda R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^3 N_c(R) + \varepsilon^2 \delta_c, \\ \partial_t R_s &= \Lambda R_s + L_s(R_c) + \varepsilon N_s(R) + \delta_s\end{aligned}\tag{92}$$

mit

$$\begin{aligned}\delta_c &= \frac{1}{\varepsilon^4} E_c(\text{Res}(\psi_A)), & \delta_s &= \frac{1}{\varepsilon^3} E_s(\text{Res}(\psi_A)), \\ L_c(R) &= E_c(\tilde{L}_1(R)), & L_s(R_c) &= E_s(\tilde{L}_2(R_c)), \\ N_c(R) &= E_c(\tilde{N}_1(R)), & N_s(R) &= E_s(\tilde{L}_1(R) + \tilde{N}_2(R_c) + \varepsilon \tilde{N}_1(R))\end{aligned}$$

und $(R_c(0), R_s(0)) = (0, 0)$ als Anfangsbedingung. Wir definieren die Räume

$$\mathcal{B}^\alpha = C([0, T_0/\varepsilon^2], \mathcal{X}^\alpha)^2$$

mit $0 \leq \alpha < 1$ und der Norm

$$\|(R_c, R_s)\|_{\mathcal{B}^\alpha} = \sum_{i=c,s} \sup_{0 \leq t \leq T_0/\varepsilon^2} \|R_i(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}^\alpha},$$

und lösen das System im Raum \mathcal{B}^α für $3/4 < \alpha < 1$. Zu zeigen ist, dass die Lösungen in \mathcal{B}^α von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ sind. Wir invertieren hierzu den Linearteil von (92) und wenden das Kontraktionsprinzip an. Aus Lemma 3.8 ergibt sich, dass die Inhomogenität $\delta = (\delta_c, \delta_s)$ in \mathcal{B}^0 liegt und von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist. Die Nichtlinearität $N = (N_c(R), N_s(R))$ ist nach Satz 3.13 eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung von \mathcal{B}^α nach \mathcal{B}^0 , die beschränkte Mengen aus \mathcal{B}^α in beschränkte Mengen aus \mathcal{B}^0 abbildet. Abschzuschätzen sind lediglich die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned}\partial_t R_c &= \Lambda R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^2 f_c, \\ \partial_t R_s &= \Lambda R_s + L_s(R_c) + f_s\end{aligned}\tag{93}$$

mit $f_c = E_c f_c$ und $f_s = E_s f_s$ für $f = (f_c, f_s) \in \mathcal{B}^0$. Die Existenz von Lösungen dieses Systems ist offensichtlich. Zu zeigen ist jedoch, dass die Lösungen auf dem Zeitintervall $[0, T_0/\varepsilon^2]$ beschränkt sind mit der Ordnung $\mathcal{O}(1)$.

Für den zweiten Teil von (93) liefert die Variation der Konstantenformel

$$R_s(t) = \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} (L_s(R_c) + f_s)(\tau) d\tau.$$

Mit $S_i(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|R_i(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{X}^\alpha}$ für $i = s, c$ und unter Verwendung der zweiten Abschätzung aus Lemma 3.9 ist

$$\begin{aligned} S_s(t) &\leq \left(\int_0^t C \max(1, \tau^{-\alpha}) e^{-\sigma_0 \tau} d\tau \right) (CS_c(t) + \|f_s\|_{\mathcal{B}^0}) \\ &\leq CS_c(t) + C\|f_s\|_{\mathcal{B}^0}. \end{aligned} \quad (94)$$

Den ersten Teil von (93) können wir auf ähnliche Weise abschätzen. Die Anwendung der ersten Abschätzung aus Lemma 3.9 und (94) liefert

$$\begin{aligned} S_c(t) &\leq \varepsilon^2 \int_0^t C e^{C\varepsilon^2(t-\tau)} (S_c(\tau) + S_s(\tau) + \|f_c\|_{\mathcal{B}^0}) d\tau \\ &\leq \varepsilon^2 C \int_0^t S_c(\tau) d\tau + C\|f\|_{\mathcal{B}^0}. \end{aligned}$$

Mittels der Gronwallschen Ungleichung und unter Verwendung von (94) ergibt sich

$$S_c(t) \leq C\|f\|_{\mathcal{B}^0} e^{CT_0} = \mathcal{O}(1) \quad \text{und} \quad S_s(t) \leq C\|f\|_{\mathcal{B}^0} = \mathcal{O}(1).$$

Wir definieren nun die Inverse J des Linearteils durch $R = Jf$, wobei R Lösung von (93) sei. Der Operator $J \in L(\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^\alpha)$ ist somit ein linearer, unabhängig von ε beschränkter Operator. Wenden wir den Operator J auf (92) an, so erhalten wir

$$R = \varepsilon JN(R) + J\delta =: F(R). \quad (95)$$

Wegen der $\mathcal{O}(1)$ Lipschitz-Stetigkeit von N ist die Funktion $F : \mathcal{B}^\alpha \mapsto \mathcal{B}^\alpha$ eine Kontraktion auf einer Kugel mit Mittelpunkt $J\delta$ in \mathcal{B}^α . Es existiert deshalb ein eindeutiger Fixpunkt von (95), der Lösung von (92) mit Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist. Mit (89) und (90) haben wir Lösungen des ursprünglichen Problems (84) konstruiert. Mit den Abschätzungen aus Lemma 3.8 gilt

$$\begin{aligned} \|U - \varepsilon\tilde{\psi}_c\|_{\mathcal{B}^0} &\leq \|U - \psi_A\|_{\mathcal{B}^0} + \|\psi_A - \varepsilon\tilde{\psi}_c\|_{\mathcal{B}^0} \\ &= \|(\varepsilon^3 R_c, \varepsilon^4 R_s)\|_{\mathcal{B}^\alpha} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

□

4 Das Modell des schwachen Elektrolyten

Die wesentlichen Aspekte nematischer Flüssigkristalle lassen sich mit dem Standardmodell (45)-(48) beschreiben, nicht jedoch laufende Rollen für die im Experiment verwendeten Nemat. Wir betrachten deshalb eine Erweiterung des Standardmodells - das Modell des schwachen Elektrolyten (96)-(100). Mit dem Modell des schwachen Elektrolyten stellen wir eine Verknüpfung zwischen dem Modellproblem (2) und dem Standardmodell (45)-(48) her. Dies ergibt sich insbesondere durch die zeitperiodische Anregung (101), im Vergleich zur autonomen Anregung beim Standardmodell (51). Für das Modell des schwachen Elektrolyten leiten wir in Kapitel 4.5 eine Ginzburg-Landau-Gleichung mit zeitabhängigen Koeffizienten (133) her.

Laufende Rollen, die sich aus Hopfbifurkationen durch spontanes Brechen der Reflexionssymmetrie ergeben, können mit dem Modell des schwachen Elektrolyten (96)-(100) beschrieben werden. Numerisch wurde dies für die Materialparameter [Tr96, Anhang A.1] der im Experiment verwendeten Nemat nachgewiesen. Hysterisis, die sich in bestimmten Parameterbereichen ergibt, ist nun ebenfalls erklärbar [Vgl. Tr96]. Wir erklären zunächst die physikalischen Aspekte. Die folgende Darstellung beruht im wesentlichen auf den Arbeiten [Tr96, KT98, DO03].

Im Modell des schwachen Elektrolyten (96)-(100) wird die Leitfähigkeit des Nemat durch zwei Sorten frei beweglicher Ionen mit entgegengesetzter Ladung beschrieben. Sie entstehen durch eine Dissoziation-Rekombinations-Reaktion und bewegen sich wie in einem schwachen Elektrolyten, relativ zur umgebenden Flüssigkeit, mit einer Geschwindigkeit proportional zu den Mobilitäten und dem elektrischen Feld. Die Raumladungsdichte ρ wird durch die Differenz der Teilchendichten der beiden Ladungsträgersorten ausgedrückt. Durch die Wanderung der Ladungsträger kommt es zu einer Ladungstrennung, und ein neues Feld mit lokaler Leitfähigkeit wird ange-regt. Für unsere Zwecke sei der Abstand d der Platten wieder auf π umskaliert.

Das Gleichungssystem für das Modell des schwachen Elektrolyten (96)-(100) in den Koordinaten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $z \in (-\pi/2, \pi/2)$, besteht aus Gleichungen für die Ladungsdichte $\rho(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$, die elektrische Leitfähigkeit $\sigma(x, y, z, t) \in \mathbb{R}$, den Direktor $n(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$ und das Geschwindigkeitsfeld $v(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3$ und ist durch

$$P_1(\partial_t + v \cdot \nabla)\rho = -\nabla \cdot (\mu E \sigma), \quad (96)$$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\sigma = -\alpha^2 \pi^2 \nabla \cdot (\mu E \rho) - r/2(\sigma^2 - 1 - P_1 \pi^2 \alpha \rho^2), \quad (97)$$

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)n = \omega \times n + \delta^\perp(\lambda A n - h), \quad (98)$$

$$\rho_m(\partial_t + v \cdot \nabla)v_i = -\partial_i p - \partial_j(\Pi_{ij} + T_{ij}^{visc}) + \rho E_i, \quad (99)$$

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (100)$$

gegeben. Zu den Randbedingungen (66)-(68) für das Standardmodell kommt als weitere Bedingung

$$\partial_z \sigma|_{z=\pm \frac{\pi}{2}} = 0$$

hinzu. Im Gegensatz zum Standardmodell (45)-(48) wird die äußere Anregung

$$E_0(t) = \frac{\bar{V}\sqrt{2}}{\pi} \cos(\omega t) \quad (101)$$

im Modell des schwachen Elektrolyten (96)-(100) zeitperiodisch gewählt [Vgl. (51)]. Das Modell des schwachen Elektrolyten unterscheidet sich vom Standardmodell (45)-(48) insbesondere darin, dass mit der Gleichung (97) die elektrische Leitfähigkeit σ als zusätzliche Bestimmungsgröße im Gleichungssystem berücksichtigt wird. Durch die Gleichung (97) wird die Gleichung (50) beim Standardmodell ersetzt. Der Parameter μ ist als Tensor durch

$$\mu_{ij} = \delta_{ij} + \sigma_a n_i n_j$$

gegeben. Eine Beschreibung der übrigen Größen und Operatoren findet sich in Kapitel 3.2. Die zusätzlich auftretenden Parameter P_1 , α und r verwenden ebenfalls Bezeichnungen und Ausdrücke aus Kapitel 3.2. So bezeichnet der in Gleichung (96) auftretende Parameter

$$P_1 = \frac{\tau_q}{\tau_d} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp} K_{11} \pi^2}{\sigma_{\perp} \gamma_1 d^2}$$

die Relaxation der Ladung, wobei

$$\tau_q = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \quad \text{und} \quad \tau_d = \frac{\gamma_1 d^2}{K_{11} \pi^2}$$

die Relaxationszeit der Ladung und des Direktors beschreiben. In der Gleichung (97) sind zwei neue dimensionslose Parameter

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_{\perp}^+ \mu_{\perp}^- \gamma_1 \pi^2}{\sigma_{\perp}^{eq} d^2}} \quad \text{und} \quad r = \frac{\tau_d}{\tau_{rec}} = \frac{\gamma_1 d^2}{K_{11} \pi^2 \tau_{rec}}$$

mit der Rotationsviskosität γ_1 , der Orientierungselastizität K_{11} für Verzerrungen des Direktorfeldes, der Leitfähigkeit σ_{\perp}^{eq} im Gleichgewicht, der Rekombinationszeit τ_{rec} und der Längenskalierung d/π mit d als Schichtdicke enthalten, wobei d wie bereits erwähnt für unsere Zwecke auf $\pi/2$ umskaliert sei. Die Mobilitäten μ^{\pm} der zwei Ladungsträgersorten sind tensoriell mit den Hauptwerten μ_{\perp}^{\pm} und μ_{\parallel}^{\pm} senkrecht und parallel zum Direktor. Eine ausführliche Beschreibung findet sich in [Tr96].

4.1 Das System für n_2, n_3, v_i, ϕ und σ

Die für das Standardmodell (45)-(48) hergeleiteten Gleichungen (69)-(71) für n_2, n_3 und v_i können unverändert übernommen werden. Die Gleichung (72) für das elektrische Potential ϕ ist wieder zu modifizieren. Wie zuvor schreiben wir die Gleichung (96) für die Ladungsdichte ρ , die durch

$$P_1(\partial_t + v_i \partial_i) \rho = -\partial_j(\mu_{jl} E \sigma) \quad (102)$$

gegeben ist, in eine Gleichung für ϕ um. Wir verwenden im folgenden Bezeichnungen und Ausdrücke, die sich aus Kapitel 3.2 ergeben. Wir setzen $\rho = \partial_k(\varepsilon_{km} E_m)$ in (102) ein und erhalten

$$P_1(\partial_t + v_i \partial_i) \partial_k(\varepsilon_{km} E_m) = -\partial_j(\mu_{jl} E_l \sigma).$$

Da $\varepsilon_{km} = \varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m$, $E_i = E_0(t) \delta_{i3} - \partial_i \phi$ und $\mu_{jl} = \delta_{jl} + \sigma_a n_j n_l$ gilt, erhalten wir

$$P_1(\partial_t + v_i \partial_i) \partial_k((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m)(E_0(t) \delta_{m3} - \partial_m \phi)) = -\partial_j((\delta_{jl} + \sigma_a n_j n_l)(E_0(t) \delta_{l3} - \partial_l \phi) \sigma).$$

Unter Verwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned} & P_1(-(\partial_k(\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m) \partial_m \partial_t \phi) + v_i \partial_i \partial_k((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m)(E_0(t) \delta_{m3} - \partial_m \phi)) \\ & + \partial_k((\partial_t(\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m))(E_0(t) \delta_{m3} - \partial_m \phi)) + \partial_k((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a n_k n_m)(\partial_t E_0(t) \delta_{m3})) \\ & = -\partial_j((\delta_{jl} + \sigma_a n_j n_l)(E_0(t) \delta_{l3} - \partial_l \phi) \sigma). \end{aligned}$$

Lösen wir dies nach der Zeit-Ableitung von ϕ auf, so erhalten wir mit $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{n}$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{\perp} \partial_t(\partial_k \partial_k \phi + \varepsilon_a \partial_1 \partial_1 \partial_t \phi + (\partial_k(\varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m) \partial_m + \varepsilon_a(\tilde{n}_k + \tilde{n}_m + \tilde{n}_k \tilde{n}_m) \partial_k \partial_m) \partial_t \phi) \\ & = v_i \partial_i \partial_k((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m)(E_0(t) \delta_{m3} - \partial_m \phi)) \\ & + \partial_k((\partial_t(\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m))(E_0(t) \delta_{m3} - \partial_m \phi)) \\ & + \partial_k((\varepsilon_{\perp} \delta_{km} + \varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m)(\partial_t E_0(t) \delta_{m3})) \\ & + (1/P_1) \partial_j((\delta_{jl} + \sigma_a \tilde{n}_j \tilde{n}_l)(E_0(t) \delta_{l3} - \partial_l \phi) \sigma) \\ & = F(v, n, \phi, \partial_t n, \sigma, E_0(t)). \end{aligned}$$

Die Gleichung für das elektrische Potential ϕ ist von der Art

$$(M + G) \partial_t \phi = F(v, n, \phi, \partial_t n, \sigma, E_0(t)) \quad (103)$$

mit $G \cdot = (\partial_k(\varepsilon_a \tilde{n}_k \tilde{n}_m)) \partial_m \cdot + \varepsilon_a (\tilde{n}_k + \tilde{n}_m + \tilde{n}_k \tilde{n}_m) \partial_k \partial_m \cdot$ und $M \cdot = \varepsilon_\perp \Delta \cdot + \varepsilon_a \partial_1 \partial_1 \cdot$. Da mit der Gleichung (97) eine algebraische konstitutive Gleichung (50) durch eine partielle Differentialgleichung ersetzt wird, ist das in Kapitel 3.3 für das Standardmodell (45)-(48) hergeleitete geschlossene dynamische System (69)-(72) um eine Gleichung für σ zu erweitern. Mit der modifizierten Gleichung (103) für das elektrische Potential ϕ und mit Q als Projektion auf divergenzfreien Vektorfelder $\{v \mid \text{div } v = 0\}$ ergibt sich für das Modell des schwachen Elektrolyten

$$\partial_t n_2 = \langle e_2, \omega \times n + \delta^\perp (\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle, \quad (104)$$

$$\partial_t n_3 = \langle e_3, \omega \times n + \delta^\perp (\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle, \quad (105)$$

$$\partial_t v_i = Q((-\partial_j(\Pi_{ij} + T_{ij}^{visc}) + \rho E_i)(1/\rho_m) - (v \cdot \nabla) v_i), \quad (106)$$

$$\partial_t \phi = M^{-1}(1 + M^{-1}G)^{-1} f(v, n, \phi, \partial_t n, \sigma, E_0(t)), \quad (107)$$

$$\partial_t \sigma = -\alpha \pi^2 \nabla \cdot (\mu E \rho) - r/2(\sigma^2 - 1 - P_1 \pi^2 \alpha \rho^2) - (v \cdot \nabla) \sigma. \quad (108)$$

4.2 Das regularisierte System

Das System (104)-(108) für n_2, n_3, v_i, ϕ und σ für das Modell des schwachen Elektrolyten ist ebenfalls voll nichtlinear. Zu den Gleichungen (104)-(108) fügen wir jeweils einen regularisierenden Differentialoperator 4. Ordnung hinzu, so dass in der Nichtlinearität nur niedrigere Ableitungen als im Linearteil vorkommen. Unser ursprüngliches Problem wird dadurch semilinear. Wir erhalten

$$\partial_t n_2 = \langle e_2, \omega \times n + \delta^\perp (\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle - \beta \Delta^2 n_2, \quad (109)$$

$$\partial_t n_3 = \langle e_3, \omega \times n + \delta^\perp (\lambda A n - \frac{1}{\gamma_1} h) - (v \cdot \nabla) n \rangle - \beta \Delta^2 n_3, \quad (110)$$

$$\partial_t v_i = Q((-\partial_j(\Pi_{ij} + T_{ij}^{visc}) + \rho E_i)(1/\rho_m) - (v \cdot \nabla) v_i - \beta \Delta^2 v_i), \quad (111)$$

$$\partial_t \phi = M^{-1}(1 + M^{-1}G)^{-1} F(v, n, \phi, \partial_t n, \sigma, E_0(t)) - \beta \Delta^2 \phi, \quad (112)$$

$$\partial_t \sigma = -\alpha \pi^2 \nabla \cdot (\mu E \rho) - r/2(\sigma^2 - 1 - P_1 \pi^2 \alpha \rho^2) - (v \cdot \nabla) \sigma - \beta \Delta^2 \sigma \quad (113)$$

mit $\beta > 0$ und klein und

$$n|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{feste Verankerung}), \quad (114)$$

$$v|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (\text{endliche Viskosität}), \quad (115)$$

$$\phi|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (\text{perfekte Leiterplatten}), \quad (116)$$

$$\partial_z \sigma|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0 \quad (117)$$

als Randbedingungen. Wegen der Regularisierung benötigen wir zusätzlich

$$\partial_z^2 n|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (118)$$

$$\partial_z^2 v|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (119)$$

$$\partial_z^2 \phi|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (120)$$

$$\partial_z^3 \sigma|_{z=\pm\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (121)$$

Im folgenden schreiben wir $U = (n_2, n_3, v_1, v_2, v_3, \phi, \sigma)^T$.

4.3 Die triviale zeitperiodische Lösung

Die triviale, räumlich homogene Lösung für das Modell des schwachen Elektrolyten erhalten wir durch Vernachlässigung aller Ortsableitungen bzgl. x und y in den Gleichungen (104)-(108). Für das Standardmodell ist die triviale, räumlich homogene Lösung nach Kapitel 3.5 konstant Null. Beim Modell des schwachen Elektrolyten erhalten wir als triviale räumlich homogene Lösung

$$U_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Wir setzen

$$U = U_0 + V$$

und erhalten

$$\partial_t V = M(t)V + N(V, t), \quad (122)$$

wobei $M(t)v$ der nichtautonome lineare Teil und $N(V, t)$ der nichtautonome nicht-lineare Teil ist.

4.4 Lineare Stabilitätsanalyse

Um die Stabilität der trivialen Lösung zu untersuchen, betrachten wir zunächst das linearisierte System (123). Wegen der Translationsinvarianz des Problems sind die Lösungen von

$$\partial_t V = M(t)V \quad (123)$$

durch Floquet-Fouriermoden gegeben, d.h. durch

$$\begin{aligned} n_2 &= \varphi_{j,1}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t}, \\ n_3 &= \varphi_{j,2}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t}, \\ v_1 &= \varphi_{j,3}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t}, \\ v_2 &= \varphi_{j,4}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t}, \\ v_3 &= \varphi_{j,5}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t}, \\ \phi &= \varphi_{j,6}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t}, \\ \sigma &= \varphi_{j,7}(k, l, z, t) e^{i(kx+ly)} e^{\lambda_j(k,l)t} \end{aligned}$$

mit $k, l \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$ und φ_j periodisch in t , d.h. $\varphi_{j,m}(\cdot, \cdot, \cdot, t) = \varphi_{j,m}(\cdot, \cdot, \cdot, t + 2\pi/\omega)$. Wir setzen im folgenden

$$\varphi_j = (\varphi_{j,1}, \varphi_{j,2}, \varphi_{j,3}, \varphi_{j,4}, \varphi_{j,5}, \varphi_{j,6}, \varphi_{j,7}).$$

Ist $V = 0$ asymptotisch stabil, so gilt für alle $j \in \mathbb{N}$ und $(k, l) \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{Re} \lambda_j(k, l) < 0.$$

Wird die Lösung $V = 0$ durch Erhöhen der Spannung \bar{V} (101) instabil, so gibt es ein j (o. B. d. A. sei $j=1$), ein $(k, l) = (k_c, l_c) \in \mathbb{R}^2$ und ein $\bar{V} = \bar{V}_c$, so dass

$$\operatorname{Re} \lambda_1(k_c, l_c) \Big|_{\bar{V}=\bar{V}_c} = 0.$$

Da ein reelles Problem vorliegt, ist $\operatorname{Re} \lambda_1(-k_c, -l_c) \Big|_{\bar{V}=\bar{V}_c} = 0$. Experimentell ergeben sich tatsächlich räumlich periodische Muster. Demzufolge ist $(k_c, l_c) \neq (0, 0)$. Wir beschränken uns wieder auf Normalrollen und setzen $l_c = 0$. Die zugehörige Fläche der Instabilität und das Restspektrum wird in Abbildung 12 gezeigt.

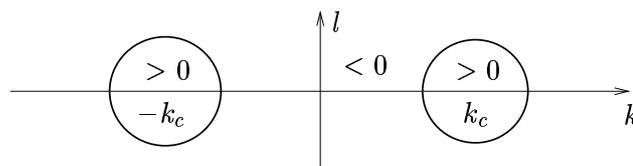


Abb. 11 Vorzeichen $\operatorname{Re} \lambda_1$

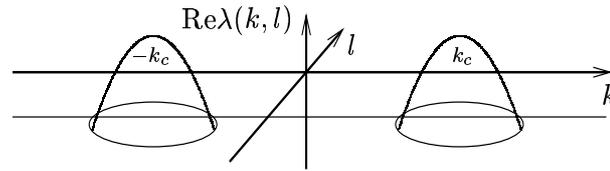


Abb. 12 zugehörige Instabilität und Restspektrum

Die Voraussetzungen zur Herleitung einer Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = c_1 \partial_X^2 A + c_2 \partial_Y^2 A + c_4 A - c_3 A |A|^2 \quad (124)$$

mit Koeffizienten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ und Lösungen $A = A(X, Y, T) \in \mathbb{C}$ für $T \geq 0$ sind daher gegeben. Wir können durch die Gleichung (124) für das Originalsystem (109)-(113) approximative Lösungen für langsame zeitliche und räumliche Modulationen des periodischen Grundmusters $e^{ik_c x}$ erwarten. Im folgenden wählen wir den kleinen Parameter $\varepsilon > 0$ als Bifurkationsparameter. Dieser ist durch $\bar{V} - \bar{V}_c = \varepsilon^2 > 0$ definiert.

4.5 Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung

Wir betrachten (122) im Fourierraum und erhalten

$$\partial_t \hat{V}(k, t) = \hat{M}(k, t) \hat{V}(k, t) + \hat{N}(\hat{V})(k, t) \quad (125)$$

mit $k \in \mathbb{R}^2, t \geq 0$ und $\hat{V}(k, t)$ als vektorwertige Funktion von z . Für die Herleitung der Ginzburg-Landau-Gleichung setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass der Linearoperator $\hat{M}(k, t)$ mit $\hat{M}(k, t) = \hat{M}(k, t + 2\pi/\omega)$ für jedes $k \in \mathbb{R}^2$ und $t \geq 0$ eine Schauder Basis $(\hat{\varphi}_j(k, t))_{j \in \mathbb{N}}$ aus $(2\pi/\omega)$ -periodischen Funktionen

$$\hat{\varphi}_j(k, t) = \hat{\varphi}_j(k, t + 2\pi/\omega)$$

besitzt, die

$$\partial_t \hat{\varphi}_j(k, t) = \hat{M}(k, t) \hat{\varphi}_j(k, t) - \hat{\lambda}_j(k) \hat{\varphi}_j(k, t)$$

erfüllen, d.h. $e^{\hat{\lambda}_j(k)t} \hat{\varphi}_j(k, t)$ ist eine Lösung von

$$\partial_t \hat{V}(k, t) = \hat{M}(k, t) \hat{V}(k, t)$$

und $\hat{\lambda}_j(k)$ der zugehörige Floquet Exponent. Wir normieren, so dass

$$\|\hat{\varphi}_j(k, 0)\|_{L^2} = 1.$$

Um Projektionen auf $\hat{\varphi}_j(k, t)$ zu definieren, betrachten wir das adjungierte Problem

$$\partial_t \hat{V}(k, t) = \hat{M}^*(k, t) \hat{V}(k, t).$$

Dieses Problem besitzt ebenfalls für jedes $k \in \mathbb{R}^2$ und $t \geq 0$ eine Schauder Basis $(\hat{\varphi}_j^*(k, t))_{j \in \mathbb{N}}$ von $(2\pi/\omega)$ -periodischen Funktionen

$$\hat{\varphi}_j^*(k, t) = \hat{\varphi}_j^*(k, t + 2\pi/\omega),$$

die

$$\partial_t \hat{\varphi}_j^*(k, t) = \hat{M}^*(k, t) \hat{\varphi}_j^*(k, t) - \overline{\hat{\lambda}_j(k)} \hat{\varphi}_j^*(k, t)$$

erfüllen, und der Orthogonalitätsbedingung

$$\langle \hat{\varphi}_i^*, \hat{\varphi}_j \rangle = \delta_{ij} \quad (126)$$

genügen.

Bemerkung 4.1 Die Terme für $j = 2, 3, \dots$ können zusammen gefasst werden und wie in Kapitel 3 behandelt werden, so dass die Voraussetzung einer Schauder-Basis nur gewählt wurde, um die zugrundeliegende Idee zu erläutern.

Wir schreiben die Lösung von (125) als

$$\hat{V}(k, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \hat{a}_j(k, t) \hat{\varphi}_j(k, t),$$

wobei $\hat{a}_j(k, t) \in \mathbb{C}$. Dies liefert uns

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathbb{N}} ((\partial_t \hat{a}_j(k, t)) \hat{\varphi}_j(k, t) + \hat{a}_j(k, t) \partial_t \hat{\varphi}_j(k, t)) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \hat{a}_j(k, t) \hat{M}(k, t) \hat{\varphi}_j(k, t) + \hat{N}(\hat{V})(k, t). \end{aligned}$$

Wir wenden hierauf die adjungierte Eigenfunktion $\hat{\varphi}_j^*(k, t)$ an, und erhalten unter Verwendung von (126) und der Tatsache, dass

$$\begin{aligned} & \langle \hat{\varphi}_j^*(k, t), \partial_t \hat{\varphi}_i(k, t) \rangle - \langle \hat{\varphi}_j^*(k, t), \hat{M}(k, t) \hat{\varphi}_i(k, t) \rangle \\ &= \langle \hat{\varphi}_j^*(k, t), \hat{\lambda}_i(k) \hat{\varphi}_i(k, t) \rangle = 0 \end{aligned}$$

für die Koeffizientenfunktionen $\hat{a}_j(k, t)$ die Gleichungen

$$\partial_t \hat{a}_j(k, t) = \hat{\lambda}_j(k) \hat{a}_j(k, t) + \langle \hat{\varphi}_j^*(k, t), \hat{N}(\hat{V})(k, t) \rangle \quad (127)$$

für $j \in \mathbb{N}$. Unsere Herleitung basiert im folgenden auf der Gleichung (127). Mit $\varepsilon > 0$ als Bifurkationsparameter wählen wir als Ansatz

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \varepsilon A_1(X, Y, T)e^{ik_c x} + \varepsilon^2 A_{2,1}(X, Y, T)e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{0,1}(X, Y, T)e^{0ik_c x} + c.c., \\ a_j(x, t) &= \varepsilon^2 A_{2,j}(X, Y, T)e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{0,j}(X, Y, T)e^{0ik_c x} + c.c., \end{aligned} \quad (128)$$

wobei $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(X, Y) = \varepsilon(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $T = \varepsilon^2 t$. Mit dem Ansatz (128) leiten wir formal eine Ginzburg-Landau-Gleichung mit zeitperiodischen Koeffizienten her. Für die Nichtlinearität $N(t, V)$ in (122) schreiben wir

$$N(t, V) = B(t, V, V) + K(t, V, V, V) + \mathcal{O}(V^4) \quad (129)$$

mit bilinearen und trilinearen symmetrischen Termen B und K . Wir führen folgende Abkürzungen ein

$$\hat{B}_1(t, k, k - m, m) = e^{-ikx} B(t, \varphi_1(k - m, t)e^{i(k-m)x}, \varphi_1(m, t)e^{imx})$$

und

$$\begin{aligned} \hat{K}_1(t, k, k - l_1, l_1 - l_2, l_2) \\ = e^{-ikx} K(t, \varphi_1(k - l_1, t)e^{i(k-l_1)x}, \varphi_1(l_1 - l_2, t)e^{i(l_1-l_2)x}, \varphi_1(l_2, t)e^{il_2x}). \end{aligned}$$

Für $\varepsilon^2 e^{0ix} \varphi_j$ ergibt sich

$$A_{0,j} = -2 \frac{\langle \varphi_j^*(0), \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle}{\lambda_j(0, \varepsilon)} |A_1|^2. \quad (130)$$

Als nächstes betrachten wir die Terme mit $\varepsilon^2 e^{2ik_c x} \varphi_j$. Es ergibt sich

$$A_{2,j} = - \frac{\langle \varphi_j^*(2k_c), \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle}{\lambda_j(2k_c, \varepsilon)} A_1^2. \quad (131)$$

Aufgrund der gewählten Skalierung erhalten wir die Ginzburg-Landau-Gleichung durch Auswertung der Terme, die mit ε^3 skaliert sind. Wir betrachten $\varepsilon^3 e^{ik_c x} \varphi_1$ und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_T A_1 &= d_0(\varepsilon) A_1 + d_1(\varepsilon) \partial_X^2 A_1 + d_2(\varepsilon) \partial_X \partial_Y A_1 + d_3(\varepsilon) \partial_Y^2 A_1 \\ &+ 2 \sum_j \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{B}_1(t, k_c, k_c, 0) \rangle A_1 A_{0,j} \\ &+ 2 \sum_j \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{B}_1(t, k_c, -k_c, 2k_c) \rangle A_{-1} A_{2,j} \\ &+ 3 \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{K}_1(t, k_c, k_c, k_c, -k_c) \rangle A_1 |A_1|^2 \end{aligned} \quad (132)$$

mit

$$d_0(\varepsilon) = \partial_{\varepsilon^2} \lambda_1(k_c, \varepsilon), \quad 2d_1(\varepsilon) = \partial_k^2 \lambda_1(k_c, \varepsilon), \quad 2d_3(\varepsilon) = \partial_l^2 \lambda_1(k_c, \varepsilon),$$

wobei $d_2(\varepsilon) = \partial_k \partial_l \lambda_1(k_c, \varepsilon) = 0$ aufgrund der Symmetrie $y \rightarrow -y$. Wir ersetzen in (132) $A_{0,j}$ durch (130) und $A_{2,j}$ durch (131) und erhalten als Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = d_0(\varepsilon) A_1 + d_1(\varepsilon) \partial_X^2 A_1 + d_3(\varepsilon) \partial_Y^2 A_1 + \gamma(t, \varepsilon) A_1 |A_1|^2$$

mit zeitperiodischem Koeffizienten $\gamma(t, \varepsilon)$. Die Koeffizienten $d_j(\varepsilon)$ und $\gamma(t, \varepsilon)$ hängen jedoch noch von ε ab. Da

$$d_j(\varepsilon) = d_j(0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \text{und} \quad \gamma(t, \varepsilon) = \gamma(t, 0) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

ergibt sich letztendlich als Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A_1 = d_0 A_1 + d_1 \partial_X^2 A_1 + d_3 \partial_Y^2 A_1 + \gamma(t) A_1 |A_1|^2. \quad (133)$$

4.6 Berechnung der Approximationen höherer Ordnung

Da wir ε^{-1} wegen der Skalierungseigenschaft der L^2 -Norm im \mathbb{R}^2 verlieren, erweitern wir die Approximation (128) zu

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= \varepsilon A_1(X, Y, T) e^{ik_c x} + \varepsilon^2 A_{2,1}(X, Y, T) e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{0,1}(X, Y, T) e^{0ik_c x} \quad (134) \\ &\quad + \varepsilon^2 A_1^1(X, Y, T) e^{ik_c x} + \varepsilon^3 A_{2,1}^1(X, Y, T) e^{2ik_c x} + \varepsilon^3 A_{0,1}^1(X, Y, T) e^{0ik_c x} \\ &\quad + \varepsilon^3 A_{3,1}(X, Y, T) e^{3ik_c x} + c.c. \\ a_j(x, t) &= \varepsilon^2 A_{2,j}(X, Y, T) e^{2ik_c x} + \varepsilon^2 A_{0,j}(X, Y, T) e^{0ik_c x} \\ &\quad + \varepsilon^3 A_{2,j}^1(X, Y, T) e^{2ik_c x} + \varepsilon^3 A_{0,j}^1(X, Y, T) e^{0ik_c x} + \varepsilon^3 A_{3,j}(X, Y, T) e^{3ik_c x} \\ &\quad + \varepsilon^3 A_{1,j}^2(X, Y, T) e^{3ik_c x} + c.c., \end{aligned}$$

wobei $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(X, Y) = \varepsilon(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $T = \varepsilon^2 t$.

Wir beginnen mit der Auswertung bei $\varepsilon^3 e^{0ik_c x} \varphi_j$ und erhalten

$$\begin{aligned} A_{0,j}^1 &= -\frac{1}{\lambda_j(0)} (\partial_1 \lambda_j(0) \partial_X A_{0,j} + \partial_2 \lambda_j(0) \partial_Y A_{0,j} + 2 \langle \varphi_j^*(0), \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle A_1 A_{-1} \\ &\quad + 2 \langle \varphi_j^*(0), \partial_2 \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle \partial_X (A_1 A_{-1}) \\ &\quad + 2 \langle \varphi_j^*(0), \partial_3 \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle \partial_Y (A_1 A_{-1}) \\ &\quad + \langle \varphi_j^*(0), \partial_4 \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle (\partial_X A_1) A_{-1} + \langle \varphi_j^*(0), \partial_5 \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle (\partial_Y A_1) A_{-1} \\ &\quad + \langle \varphi_j^*(0), \partial_6 \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle A_1 \partial_X A_{-1} + \langle \varphi_j^*(0), \partial_7 \hat{B}_1(t, 0, k_c, -k_c) \rangle A_1 \partial_Y A_{-1}. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon^3 e^{2ik_c x} \varphi_j$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
A_{2,j}^1 &= -\frac{1}{\lambda_j(2k_c)} (\partial_1 \lambda_j(2k_c) \partial_X A_{2,j} + \partial_2 \lambda_j(2k_c) \partial_Y A_{2,j}) \\
&+ 2 \langle \varphi_j^*(2k_c), \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle A_1^1 A_1 + 2 \langle \varphi_j^*(2k_c), \partial_2 \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle \partial_X (A_1 A_1) \\
&+ \langle \varphi_j^*(2k_c), \partial_3 \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle \partial_Y (A_1 A_1) + \langle \varphi_j^*(2k_c), \partial_4 \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle (\partial_X A_1) A_1 \\
&+ \langle \varphi_j^*(2k_c), \partial_5 \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle (\partial_Y A_1) A_1 + \langle \varphi_j^*(2k_c), \partial_6 \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle A_1 \partial_X A_1 \\
&+ \langle \varphi_j^*(2k_c), \partial_7 \hat{B}_1(t, 2k_c, k_c, k_c) \rangle A_1 \partial_Y A_1 > A_1 A_1).
\end{aligned}$$

Wir betrachten noch die Terme bei $\varepsilon^3 e^{ik_c x} \varphi_j$ mit $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned}
A_{1,j}^2 &= -\frac{1}{\lambda_j(k_c)} (2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \hat{B}_j(t, k_c, 0, k_c) \rangle A_{0,j} A_1 \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \hat{B}_j(t, k_c, 2k_c - k_c) \rangle A_{2,j} A_{-1} \\
&+ 3 \langle \varphi_j^*(k_c), \hat{K}_1(t, k_c, k_c, k_c, -k_c) \rangle A_1 |A_1|^2).
\end{aligned}$$

Aufgrund der um eine Ordnung erhöhten Approximation erhalten wir bei $\varepsilon^4 e^{ik_c x} \varphi_1$ eine linearisierte Ginzburg-Landau-Gleichung in A_1^1 mit inhomogenen Termen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\partial_T A_1^1 &= d_0 A_1^1 + d_1 \partial_X^2 A_1^1 + d_2 \partial_X \partial_Y A_1^1 + d_3 \partial_Y^2 A_1^1 \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{B}_j(t, k_c, k_c, 0) \rangle A_1^1 A_{0,j} + 2 \sum_j \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{B}_j(t, k_c, k_c, 0) \rangle A_1 A_{0,j}^1 \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{B}_j(t, k_c, -k_c, 2k_c) \rangle A_{-1}^1 A_{2,j} + 2 \sum_j \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{B}_j(t, k_c, -k_c, 2k_c) \rangle A_{-1} A_{2,j}^1 \\
&+ 6 \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{K}_1(t, k_c, k_c, k_c, -k_c) \rangle A_1^1 |A_1|^2 + 3 \langle \varphi_1^*(k_c), \hat{K}_1(t, k_c, -k_c, k_c, k_c) \rangle A_{-1}^1 A_1^2 \\
&+ \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_k^3 \lambda_1(k_c) + \partial_k^2 \partial_l \lambda_1(k_c) + \partial_l^2 \partial_k \lambda_1(k_c), \partial_l^3 \lambda_1(k_c) \rangle A_1 \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_2 \hat{B}_j \rangle \partial_X (A_1 A_{0,j}) + 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_3 \hat{B}_j \rangle \partial_Y (A_1 A_{0,j}) \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_4 \hat{B}_j \rangle (\partial_X A_1) A_{0,j} + 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_5 \hat{B}_j \rangle (\partial_Y A_1) A_{0,j} \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_6 \hat{B}_j \rangle A_1 \partial_X A_{0,j} + 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_7 \hat{B}_j \rangle A_1 \partial_Y A_{0,j} \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_2 \hat{B}_j \rangle \partial_X (A_{-1} A_{2,j}) + 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_3 \hat{B}_j \rangle \partial_Y (A_{-1} A_{2,j}) \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_4 \hat{B}_j \rangle (\partial_X A_{-1}) A_{2,j} + 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_5 \hat{B}_j \rangle (\partial_Y A_{-1}) A_{2,j} \\
&+ 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_6 \hat{B}_j \rangle A_{-1} \partial_X A_{2,j} + 2 \sum_j \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_7 \hat{B}_j \rangle A_{-1} \partial_Y A_{2,j} \\
&+ 3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_2 \hat{K}_1 \rangle \partial_X (A_1 |A_1|^2) + 3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_3 \hat{K}_1 \rangle \partial_Y (A_1 |A_1|^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_4 \hat{K}_1 \rangle (\partial_X A_1) |A_1|^2 + 3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_5 \hat{K}_1 \rangle (\partial_Y A_1) |A_1|^2 \\
& +3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_6 \hat{K}_1 \rangle A_1 (\partial_X A_{-1}) A_1 + 3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_7 \hat{K}_1 \rangle A_1 (\partial_Y A_{-1}) A_1 \\
& +3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_8 \hat{K}_1 \rangle |A_1|^2 \partial_X A_1 + 3 \langle \varphi_j^*(k_c), \partial_9 \hat{K}_1 \rangle |A_1|^2 \partial_Y A_1,
\end{aligned}$$

wobei

$$\hat{B}_j(t, k, k-m, m) = e^{-ikx} B_j(t, \varphi_1(k-m, t) e^{i(k-m)x}, \varphi_j(m, t) e^{imx})$$

für $j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und

$$\begin{aligned}
& \hat{K}_1(t, k, k-l_1, l_1-l_2, l_2) \\
& = e^{-ikx} K(t, \varphi_1(k-l_1, t) e^{i(k-l_1)x}, \varphi_1(l_1-l_2, t) e^{i(l_1-l_2)x}, \varphi_1(l_2, t) e^{il_2x}).
\end{aligned}$$

4.7 Die Moden-Filter

Wir gehen ähnlich wie in Kapitel 3.9 vor. Wir definieren uns Moden-Filter, um die linear instabilen Moden von den linear gedämpften Moden zu trennen. Im Gegensatz zu Kapitel 3.9 definieren wir

$$E_c = \chi_{[-k_c-\delta, -k_c+\delta]} + \chi_{[k_c-\delta, k_c+\delta]}$$

für ein $\delta > 0$ unabhängig von $0 < \varepsilon \ll 1$ und

$$E_s = 1 - E_c.$$

Lemma 4.2 *Sei $u, v \in \mathcal{X}^\alpha$. Dann ist $E_c B(t, E_c u, E_c v) = 0$.*

Beweis. Analog zu Lemma 2.10.

Im folgenden verwenden wir die Funktionenräume aus Kapitel 3.8.

4.8 Abschätzung für das Residuum

Da wir durch Ableitung in x - und y -Richtung jeweils $\varepsilon^{1/2}$ verlieren, haben wir unsere ursprüngliche Approximation (128) durch weitere Terme zu $\varepsilon \psi_B = \varepsilon \psi_c + \varepsilon^2 \psi_s$ gemäß (134) ergänzt. Die benötigten Abschätzungen für das Residuum

$$Res(\varepsilon \psi_B) = -\varepsilon \partial_t \psi_B + \varepsilon M(t) \psi_B + \varepsilon^2 B(t, \psi_B, \psi_B) + \varepsilon^3 K(t, \psi_B, \psi_B, \psi_B) + \mathcal{O}(\|\varepsilon \psi_B\|^4)$$

fassen wir in Lemma 4.3 zusammen.

Lemma 4.3 Sei $C_1 > 0$ und für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ sei durch $A_1 = A_1(X, Y, T, \varepsilon) \in C([0, T_0], H^4(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}))$ eine Familie von Lösungen der Ginzburg-Landau-Gleichung (133) gegeben für die

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \sup_{\varepsilon \in (0, 1)} \|A_1(\cdot, T, \varepsilon)\|_{H^4} \leq C_1$$

gilt. Dann gibt es ein $C > 0$, so dass die Approximation $\varepsilon\psi_B = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$, die sich aus (134) ergibt, den folgenden Abschätzungen genügt

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} (\|\psi_s(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}^1} + \|\psi_c(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}^1}) \leq C, \quad \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_s(\text{Res}(\varepsilon\psi_B(\cdot, t)))\|_{\mathcal{X}} \leq C\varepsilon^3,$$

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|E_c(\text{Res}(\varepsilon\psi_B(\cdot, t)))\|_{\mathcal{X}} \leq C\varepsilon^4,$$

sowie $E_s\psi_c = 0$ und $E_c\psi_s = 0$ erfüllt.

Beweis. Folgt direkt aus Kapitel 4.5 und 4.6.

4.9 Die Fehlerabschätzungen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass der Approximationsfehler für das regularisierte Modell des schwachen Elektrolyten ebenfalls bis zur Ordnung $\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$ in der Zeit von der Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ bleibt. Wir zeigen damit, dass wir auch für den Fall einer zeitperiodischen Anregung näherungsweise gleiches Verhalten bei der zeitabhängigen Ginzburg-Landau-Gleichung (133) und dem zu approximierenden System erwarten können. Wir formulieren

Satz 4.4 Sei $m \geq 4$, $C_1 > 0$ und für alle $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $A_1 = A_1(X, Y, T, \varepsilon) \in C([0, T_0], H^m)$ eine Lösung der Ginzburg-Landau-Gleichung (133) für die

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \sup_{\varepsilon \in (0, 1)} \|A_1(\cdot, T, \varepsilon)\|_{H^m} \leq C_1$$

gilt. Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0, C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen $V(\cdot, t)$ von (122) existieren für die

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|V(\cdot, t) - \varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon)\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq C\varepsilon^2$$

gilt, wobei $\varepsilon\psi_B = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$ die Approximation aus (134) ist.

Um Satz 4.4 zu beweisen, spalten wir wie zuvor den Fehler in einen stabilen und einen kritischen Bereich auf, d.h. wir setzen

$$R = \varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s,$$

wobei R_c der kritische und R_s der stabile Bereich der Moden ist. Die Approximation $\varepsilon\psi_c$ für die linear instabilen Fouriermoden ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Für die linear gedämpften Moden $\varepsilon^2\psi_s$ ergibt sich $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Da die Ordnung des Fehlers jeweils um eine ε -Ordnung höher ist, ergibt sich hierfür $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ respektive $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$.

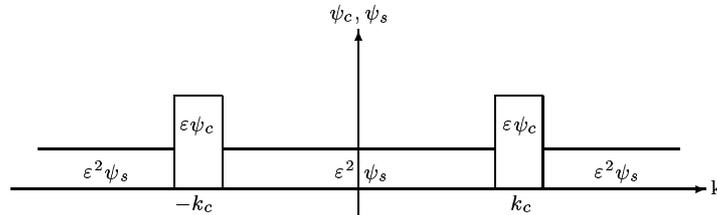


Abb. 13: kritischer ($\varepsilon\psi_c$) und stabiler ($\varepsilon^2\psi_s$) Teil der Approximation

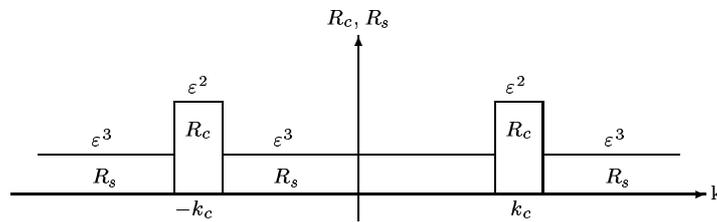


Abb. 14: kritischer ($\varepsilon^2 R_c$) und stabiler ($\varepsilon^3 R_s$) Teil des Fehlers

Beweis (Satz 4.4). Für das Gleichungssystem (122) schreiben wir abstrakt

$$\partial_t V = M(t)V + B(t, V, V) + K(t, V) \quad (135)$$

mit $(2\pi/\omega)$ -zeitperiodischen Termen $M(t)$ als Linearteil, $B(t, V, V)$ als symmetrische Bilinearform und $K(t, V) = \mathcal{O}(\|V\|^3)$. Entsprechend der Approximation $\varepsilon\psi_B = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s$ (134) erwarten wir für den Fehler

$$R(x, y, t, \varepsilon) = \varepsilon^2 R_c(x, y, t, \varepsilon) + \varepsilon^3 R_s(x, y, t, \varepsilon) \quad (136)$$

mit $R_c = E_c R_c \in \mathcal{X}^\alpha$ und $R_s = E_s R_s \in \mathcal{X}^\alpha$. Für die Lösungen des ursprünglichen Systems (122) gilt somit

$$V = \varepsilon\psi_B + R = \varepsilon\psi_c + \varepsilon^2\psi_s + \varepsilon^2 R_c + \varepsilon^3 R_s. \quad (137)$$

Setzen wir (137) in (135) ein, so erhalten wir nach Division durch ε^2 und Trennung in lineare und nichtlineare Terme als Gleichung für den Fehler

$$\begin{aligned} \partial_t R_c + \varepsilon \partial_t R_s &= M(t)R_c + \varepsilon M(t)R_s + \varepsilon \tilde{L}_2(R_c) + \varepsilon^2 \tilde{L}_1(R) + \varepsilon^2 \tilde{N}_2(R_c) \\ &\quad + \varepsilon^3 \tilde{N}_1(R) + \frac{1}{\varepsilon^2} Res(\varepsilon\psi_B) \end{aligned} \quad (138)$$

mit

$$\tilde{L}_2(R_c) = 2B(t, R_c, \psi_c), \quad \tilde{L}_1(R) = 2B(t, R_c, \psi_s) + 2B(t, R_s, \psi_c) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\tilde{N}_2(R_c) = B(t, R_c, R_c) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \tilde{N}_1(R) = \mathcal{O}(\|R\|_{\mathcal{X}^\alpha} + \varepsilon\|R\|_{\mathcal{X}^\alpha}^2),$$

wobei $\mathcal{O}(\varepsilon)$ weitere Terme enthält, die von K erzeugt werden.

Sind R_c , R_s , ψ_c und ψ_s jeweils von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ in \mathcal{X}^α dann sind auch \tilde{L}_1 , \tilde{L}_2 , \tilde{N}_1 und \tilde{N}_2 von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ in \mathcal{X} . Um auf Gleichungen für R_c und R_s zu kommen, wenden wir die Moden-Filter E_c und E_s aus Kapitel 4.7 an.

Die Gleichung für den Fehler (138) spalten wir in einen kritischen und einen stabilen Teil auf und beachten, dass nach Lemma 4.2 $E_c B(t, R_c, \psi_c) = E_c B(t, R_c, R_c) = 0$ gilt. Dann sind R_c und R_s Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \partial_t R_c &= M(t)R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^3 N_c(R) + \varepsilon^2 \delta_c, \\ \partial_t R_s &= M(t)R_s + L_s(R_c) + \varepsilon N_s(R) + \delta_s \end{aligned} \quad (139)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{1}{\varepsilon^4} E_c(\text{Res}(\varepsilon\psi_B)), & \delta_s &= \frac{1}{\varepsilon^3} E_s(\text{Res}(\varepsilon\psi_B)), \\ L_c(R) &= E_c(\tilde{L}_1(R)), & L_s(R_c) &= E_s(\tilde{L}_2(R_c)), \\ N_c(R) &= E_c(\tilde{N}_1(R)), & N_s(R) &= E_s(\tilde{L}_1(R) + \tilde{N}_2(R_c) + \varepsilon\tilde{N}_1(R)) \end{aligned}$$

und $(R_c(0), R_s(0)) = (0, 0)$ als Anfangsbedingung. Wir definieren die Räume

$$\mathcal{B}^\alpha = C([0, T_0/\varepsilon^2], \mathcal{X}^\alpha)^2$$

mit $0 \leq \alpha < 1$ und der Norm

$$\|(R_c, R_s)\|_{\mathcal{B}^\alpha} = \sum_{i=c,s} \sup_{0 \leq t \leq T_0/\varepsilon^2} \|R_i(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}^\alpha},$$

und lösen das System im Raum \mathcal{B}^α für $3/4 < \alpha < 1$. Zu zeigen ist, dass die Lösungen in \mathcal{B}^α von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ sind. Wir invertieren hierzu den Linearteil von (139) und wenden das Kontraktionsprinzip an. Die Inhomogenität $\delta = (\delta_c, \delta_s)$ ist nach Lemma 4.3 von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ und liegt in \mathcal{B}^0 . Die Abschätzung der Nichtlinearität $N = (N_c(R), N_s(R))$ ergibt sich analog zum Standardmodell, und ist nach Satz 3.13 eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung von \mathcal{B}^α nach \mathcal{B}^0 , die beschränkte Mengen aus \mathcal{B}^α in beschränkte Mengen aus \mathcal{B}^0 abbildet. Abzuschätzen sind somit lediglich die Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} \partial_t R_c &= M(t)R_c + \varepsilon^2 L_c(R) + \varepsilon^2 f_c, \\ \partial_t R_s &= M(t)R_s + L_s(R_c) + f_s \end{aligned} \quad (140)$$

mit $f_c = E_c f_c$, $f_s = E_s f_s$ für $f = (f_c, f_s) \in \mathcal{B}^0$. Dass Lösungen von (140) auf kleinen Zeitintervallen existieren, kann aus dem Banachschen Fixpunktssatz gefolgert

werden. Zu zeigen ist jedoch, dass die Lösungen auf dem Zeitintervall $[0, T_0/\varepsilon^2]$ beschränkt sind mit der Ordnung $\mathcal{O}(1)$, falls f von der Ordnung $\mathcal{O}(1)$ ist.

Wir betrachten zunächst das homogene System

$$\partial_t R(t) = M(t)R(t)$$

mit $M(t)$ als $(2\pi/\omega)$ -periodischer Operator in t . Die Lösung von

$$\partial_t R(t) = M(t)R(t), \quad R(t)|_{t=\tau} = R_0$$

bezeichnen wir mit $R(t) = S(t, \tau)R_0$. Dadurch ist ein linearer Evolutionsoperator $S(t, \tau)$ definiert mit $S(t, \tau) = S(t + 2\pi/\omega, \tau + 2\pi/\omega)$.

Lemma 4.5 *Es existieren ε -unabhängige Konstanten $C, \sigma > 0$, so dass folgende Abschätzungen gelten*

$$\|S(t, \tau)E_s\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\alpha)} \leq C \max(1, (t - \tau)^{-\alpha}) e^{-\sigma(t-\tau)}$$

und

$$\|S(t, \tau)E_c\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{X}^\alpha)} \leq C \max(1, (t - \tau)^{-\alpha}) e^{C\varepsilon^2(t-\tau)}. \quad (*)$$

Beweis. Durch den Operator $-Q\beta\Delta^2$ ist der Generator einer analytischen Halbgruppe mit Definitionsbereich $D(A) = \{U \in H^4 \mid U \text{ erfüllt die Randbedingungen (114)-(121)}\}$ in $X = L^2(\mathbb{R}^2 \times [-\pi/2, \pi/2]) \cap \{QU = U\}$ gegeben. Da $M(t) + Q\beta\Delta^2$ nur eine relativ beschränkte Störung von $-Q\beta\Delta^2$ ist, generiert $M(t)$ den Evolutionsoperator $S(t, \tau)$ [He81, Seite 197 Ex. 1]. Das Spektrum von $S(2\pi/\omega, 0)E_s$ ist $\mathcal{O}(1)$ vom Einheitskreis wegbeschränkt. Die Abschätzung im stabilen Fall folgt somit nach [He81, Satz 7.2.3].

Da die Eigenwertfunktion λ_1 einfach ist, ist C unabhängig von ε in (*). Die Wachstumsrate von $S(2\pi/\omega, 0)E_c$ der kritischen Moden kann dadurch mit $\mathcal{O}(e^{C\varepsilon^2(t+2\pi/\omega)})$ analog abgeschätzt werden. \square

Für die zweite Gleichung in (140) liefert die Variation der Konstantenformel

$$R_s(t) = \int_0^t S(t, \tau)E_s(L_s(R_c) + f_s)(\tau) d\tau.$$

Mit $S_i(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|R_i(\cdot, \tau)\|_{\mathcal{X}^\alpha}$ für $i = s, c$ und Lemma 4.5 ist

$$\begin{aligned} S_s(t) &\leq \left(\int_0^t C \max(1, (t - \tau)^{-\alpha}) e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau \right) (CS_c(t) + \|f_s\|_{\mathcal{B}^0}) \\ &\leq CS_c(t) + C\|f_s\|_{\mathcal{B}^0}. \end{aligned} \quad (141)$$

Den ersten Teil von Gleichung (140) können wir auf ähnliche Weise abschätzen. Zunächst liefert uns die Variation der Konstantenformel

$$R_c(t) = \varepsilon^2 \int_0^t S(t, \tau) E_c(L_c(R) + f_c)(\tau) d\tau.$$

Dies können wir unter Verwendung von Lemma 4.5 und (141) durch

$$\begin{aligned} S_c(t) &= \varepsilon^2 \int_0^t C \max(1, (t - \tau)^{-\alpha}) e^{C\varepsilon^2(t-\tau)} (S_c(\tau) + S_s(\tau) + \|f_c\|_{\mathcal{B}^0}) d\tau \\ &\leq \varepsilon^2 C \int_0^t \max(1, (t - \tau)^{-\alpha}) S_c(\tau) d\tau + C \|f\|_{\mathcal{B}^0} \end{aligned}$$

abschätzen. Die Gronwallsche Ungleichung in der Version für Evolutionsoperatoren [He81, Lemma 7.1.1] und (141) liefert uns dann

$$S_c(t) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}^0} e^{CT_0} = \mathcal{O}(1) \quad \text{und} \quad S_s(t) \leq C \|f\|_{\mathcal{B}^0} = \mathcal{O}(1).$$

Wir definieren nun die Inverse J des Linearteils durch $R = Jf$, wobei R eine Lösung von (140) sei. Der Operator $J \in L(\mathcal{B}^0, \mathcal{B}^\alpha)$ ist somit ein linearer, unabhängig von ε beschränkter Operator. Wenden wir J auf (139) an, so erhalten wir

$$R = \varepsilon JN(R) + J\delta =: F(R). \quad (142)$$

Wegen der $\mathcal{O}(1)$ Lipschitz-Stetigkeit von N ist die Funktion $F : \mathcal{B}^\alpha \mapsto \mathcal{B}^\alpha$ eine Kontraktion auf einer Kugel mit Mittelpunkt $J\delta$ in \mathcal{B}^α . Es gibt deshalb einen eindeutigen Fixpunkt von (142) der Lösung von (139) mit $\mathcal{O}(1)$ ist. Mit (136) und (137) haben wir Lösungen des ursprünglichen Problems konstruiert.

4.10 Zusammenfassung und Vergleich

Wir bezeichnen im folgenden wie in Kapitel 2.7 Approximationen, die wir mit Lösungen A der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (143) konstruieren mit $\varepsilon\psi_A$ und diejenigen, welche wir mit Lösungen B der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (144) konstruieren mit $\varepsilon\psi_B$. Die Lösungen von (122) sind wieder durch V gegeben. Wir formulieren zunächst unseren Approximationssatz

Satz 4.6 *Sei $m \geq 4$ und $A = A(X, Y, T)$ eine Lösung der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (143) für $T \in [0, T_0]$ mit*

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|A(\cdot, T)\|_{H^m} < \infty.$$

Dann gibt es Konstanten $\varepsilon_0, C > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen V von (122) existieren für die

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|V(\cdot, t) - \varepsilon \psi_A(\cdot, t, \varepsilon)\|_{\mathcal{X}^\alpha} \leq C\varepsilon^2$$

gilt, wobei $\varepsilon \psi_A = \varepsilon \psi_c + \varepsilon^2 \psi_s$ die Approximation aus (134) ist.

Korollar 4.7 *Dann gilt auch*

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|V(\cdot, t) - \varepsilon \psi_A(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H^3} \leq C\varepsilon^2.$$

Beweis. Nach [He81, Satz 1.6.1] kann \mathcal{X}^α für $\alpha > 3/4$ in H^3 eingebettet werden. \square

In der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (144) ist immer noch der kleine Parameter ε enthalten. Zu erwarten ist jedoch, dass für $\varepsilon \rightarrow 0$ lediglich der Mittelwert der zeitabhängigen Koeffizienten von Bedeutung ist, so dass die Betrachtung einer autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung genügen sollte. Wir vergleichen deshalb die Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T A = d_0 A + d_1 \partial_X^2 A + d_2 \partial_Y^2 A + \tilde{\gamma} A |A|^2, \quad (143)$$

wobei

$$\tilde{\gamma} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \gamma(t) dt$$

mit den Lösungen der nichtautonomen Ginzburg-Landau-Gleichung

$$\partial_T B = d_0 B + d_1 \partial_X^2 B + d_2 \partial_Y^2 B + \gamma(t) B |B|^2. \quad (144)$$

Satz 4.8 *Sei $m \geq 4$ und $A \in C([0, T_0], H^m)$ eine Lösung der autonomen Gleichung (143). Dann gibt es Konstanten $C, \varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ Lösungen B der nichtautonomen Gleichung (144) existieren für die*

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \|A(\cdot, T) - B(\cdot, T)\|_{H^m} \leq C\varepsilon^2$$

gilt.

Beweis. Analog Satz 2.18. \square

Um Satz 4.6 endgültig zu beweisen, vergleichen wir die Lösungen der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung mit denen der nichtautonomen (Satz 4.8), und zeigen, dass die Betrachtung der autonomen Ginzburg-Landau-Gleichung (143) genügt. Wir zeigen, dass wir aus den Sätzen 4.4 und 4.8 den Approximationssatz 4.6 folgern können.

Beweis (Satz 4.6). Nach Satz 4.8 ist

$$\sup_{T \in [0, T_0]} \|A(\cdot, T) - B(\cdot, T)\|_{H^m} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Dies impliziert

$$\sup_{t \in [T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon) - \varepsilon\psi_A(\cdot, t, \varepsilon)\|_{C_b^{m-2}} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt weiter, dass $\sup_{T \in [0, T_0]} \|B(\cdot, T)\|_{H^m} = \mathcal{O}(1)$ ist, und somit ist die Voraussetzung aus Satz 4.4 erfüllt. Mit [He81, Satz 1.6.1] und Satz 4.4 gilt

$$\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|V(\cdot, t) - \varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H^m} = \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Die Anwendung der Dreiecksungleichung und des Sobolevschen Einbettungssatz für $m \geq 2$ liefert

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varepsilon\psi_A(x, t, \varepsilon) - V(x, t)| &\leq C \left(\sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon\psi_A(\cdot, t, \varepsilon) - \varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon)\|_{H^m} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [0, T_0/\varepsilon^2]} \|\varepsilon\psi_B(\cdot, t, \varepsilon) - V(\cdot, t)\|_{H^m} \right) \\ &= \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

□

Literatur

- [AK02] I. Aranson, L. Kramer. The world of the complex Ginzburg-Landau equation. *Rev. Modern Phys.* **74**, no. 1, 99-143 (2002).
- [BDTvH96] P. Bollermann, A. Doelman, P. Tákac, E. S. Titi, A. van Harten. Analyticity of essentially bounded solutions to semilinear parabolic systems and validity of the Ginzburg-Landau equation. *SIAM J. Math. Anal.* **27**, no. 2, 424-448 (1996).
- [BKZ88] E. Bodenschatz, W. Zimmermann, L. Kramer. On electrically driven pattern-forming instabilities in planar nematics. *J. Phys. France* **49**, 1875-1899 (1988).
- [CE90] P. Collet, J.-P. Eckmann. The time dependent amplitude equation for the Swift-Hohenberg problem. *Comm. Math. Phys.* **132**, 139-153 (1990).
- [Ch77] S. Chandrashekar. *Liquid Crystals*. University Press, Cambridge, 1977.
- [CI94] P. Chossat, G. Iooss. *The Couette-Taylor problem*. Springer, New-York und Heidelberg, 1994.
- [De95] W. Decker. Mathematische Methoden zur Beschreibung strukturbildender Systeme - eine kritische Analyse. Dissertation, Universität Bayreuth, 1995.
- [Dr02] B. Dreßel. Zum Einfluß homogener Moden auf Konvektionsmuster in nematischen Flüssigkristallen. Dissertation, Universität Bayreuth, 2002.
- [DO03] G. Dangelmayr, I. Oprea. A bifurcation study of wave patterns for electroconvection in nematic liquid crystals. Preprint 2003.
- [DO04] G. Dangelmayr, I. Oprea. *Dynamics and Bifurcation of patterns in dissipative Systems*. Erschienenener Artikel von N. Breindl, G. Schneider, H. Uecker. World Scientific Series on Nonlinear Science, Editor L. Chua. World Scientific Publishing, Singapore, 39-57 (2004).
- [Eck93] W. Eckhaus. The Ginzburg-Landau equation is an attractor, *J. Nonlinear Science* **3**, 329-348 (1993).
- [Er61] J. L. Ericksen. Conservation laws for liquid crystals. *Transactions of the Society of Rheology* **5**, 23-34. 1961.
- [Hel69] W. Helfrich. *J. Chem. Phys.* **51**, 4092-4105 (1969).

- [He81] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, LNM **840**, Springer, Berlin und New-York, 1981.
- [KP95] L. Kramer, W. Pesch. Convection instabilities in nematic liquid crystals. *Annual review of fluid mechanics*, Vol. **27**, 515-541, Palo Alto, CA, 1995.
- [KT98] L. Kramer, M. Treiber. Coupled complex Ginzburg-Landau equations for the weak electrolyte model of electroconvection. *Phys. Rev. E* **58**, 1973 (1998).
- [Le68] F. M. Leslie. Some constitutive equations for liquid crystals, *Archive of Rational Mechanics and Analysis* **28**, 265-283 (1968).
- [Mie02] A. Mielke. The Ginzburg-Landau equation in its role as a modulation equation. In: *Handbook of Dynamical Systems II* (B. Fiedler, ed.). North-Holland, Amsterdam, 759-834 (2002).
- [MS95] A. Mielke, G. Schneider. Attractors for modulation equations on unbounded domains - existence and comparison. *Nonlinearity*, 1995.
- [Schn92] G. Schneider. Die Gültigkeit der Ginzburg-Landau-Approximation. Dissertation, Universität Stuttgart, 1992.
- [Schn94] G. Schneider. Error estimates for the Ginzburg-Landau approximation. *J. Appl. Math. Physics (ZAMP)* **45**, 433-457 (1994).
- [Schn95] G. Schneider. Analyticity of Ginzburg-Landau modes. *J. Diff. Eqns.* **121**, 233-257 (1995).
- [Schn98] G. Schneider. Hopf-bifurcation in spatially extended reaction-diffusion systems. *Journal of Nonlinear Science* **8**, 17-41 (1998).
- [Schn99] G. Schneider. Global existence results for pattern forming processes in infinite cylindrical domains - Applications to 3D Navier-Stokes problems, *Journal des Mathématiques Pures et Appliquées* **78**, 265-312 (1999).
- [Ta94] R. Tagg. The Taylor-Couette Problem. *Nonlinear Science Today*. Vol 4/3, 1994.
- [Te97] R. Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*. Springer, New-York, second-edition, 1997.
- [Tr96] M. Treiber. On the Theory of the Electrohydrodynamic Instability in Nematic Liquid Crystals near Onset, Ph. D. Thesis. Universität Bayreuth, 1996.

- [vH91] A. van Harten. On the validity of Ginzburg-Landau's equation. *J. Nonlinear Science* **1**, 397-422 (1991).
- [Wl82] J. Wloka. Partielle Differentialgleichungen. Teubner, Stuttgart, 1982.
- [Zh00] H. Zhao. Secondary Instabilities and Complex Patterns in Anisotropic Convection, Ph. D. Thesis. Universität Bayreuth, 1998.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei alldenjenigen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Bedanken möchte ich mich auch bei Freunden, Kollegen und Bekannten, die mich anderweitig unterstützt und begleitet haben. Besonderer Dank gilt hierbei

- Herrn Prof. Dr. G. Schneider für die hervorragende Betreuung während der Entstehungszeit dieser Arbeit. Mit besonderem Engagement und ständigem Freiraum für klärende Gespräche war die Zusammenarbeit stets beispielhaft einfach und freundschaftlich, und hat vor allem immer Spass gemacht
- Herrn Prof. Dr. M. Plum für die Übernahme des Korreferats
- Herrn Prof. Dr. L. Kramer (†) - Universität Bayreuth - für die Klärung physikalischer Fragen
- Herrn Dr. H. Uecker für die vielen hilfreichen Gespräche und Denkanstöße
- der Deutschen Forschungsgesellschaft (DFG) für die Unterstützung des Projektes
- den Mitarbeitern am mathematischen Institut I für ständiges und hilfreiches Entgegenkommen
- meinen Eltern