

Steffen Blunck

# Modellierung und Optimierung von Hub-and-Spoke-Netzen mit beschränkter Sortierkapazität





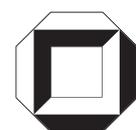
Steffen Blunck

**Modellierung und Optimierung von Hub-and-Spoke-Netzen  
mit beschränkter Sortierkapazität**

Wissenschaftliche Berichte des  
Institutes für Fördertechnik und Logistiksysteme  
der Universität Karlsruhe (TH)  
Band 65

# **Modellierung und Optimierung von Hub-and-Spoke-Netzen mit beschränkter Sortierkapazität**

von  
Steffen Blunck



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)

Fakultät für Maschinenbau, 2005

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Kai Furmans, Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Dieter Arnold

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2005  
Print on Demand

ISSN 0171-2772

ISBN 3-937300-69-4

# Modellierung und Optimierung von Hub-and-Spoke-Netzen mit beschränkter Sortierkapazität

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe (TH)  
genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Wi.-Ing. Steffen Blunck**

aus Pinneberg

Tag der mündlichen Prüfung:  
Hauptreferent:  
Korreferent:

17. Juni 2005  
Prof. Dr.-Ing. Kai Furmans  
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Dieter Arnold



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fördertechnik und Logistiksysteme (IFL) der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Prof. Dr.-Ing. Kai Furmans, Inhaber des Lehrstuhls für Logistik, möchte ich für seine Unterstützung sowie seine wertvollen Anregungen und inspirierenden Diskussionen sehr herzlich danken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Dieter Arnold, dem Leiter des Instituts für Fördertechnik und Logistiksysteme, danke ich sehr herzlich für die Übernahme des Korreferats und seine großzügige Förderung, die ich während meiner gesamten Zeit am Institut für Fördertechnik und Logistiksysteme erfahren habe.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Jürgen Fleischer, dem Leiter des Instituts für Produktionstechnik, danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Meinen Kollegen und allen, die mich während der Erstellung der Arbeit unterstützt haben, danke ich herzlich. Die motivierende Arbeitsatmosphäre und der sehr gute Zusammenhalt der Kollegen untereinander haben zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Mein ganz persönlicher Dank gilt meinen Eltern und meiner Lebensgefährtin Dr. Tina Grüntjens.

Karlsruhe, im Juli 2005

Steffen Blunck



# Kurzfassung

*Steffen Blunck*

## **Modellierung und Optimierung von Hub-and-Spoke-Netzen mit beschränkter Sortierkapazität**

Zur Bestimmung der Anzahl und Lage von Hubstandorten sowie der Transportmengen auf einzelnen Transportrelationen wird ein Hub-Location-Problem mit Direktverkehrsrelationen und beschränkter Sortierkapazität der potentiellen Hubstandorte als gemischt binäres lineares Optimierungsproblem modelliert. Somit werden bereits in der Planungsphase die Kapazitätsrestriktionen der Hubs berücksichtigt und dadurch mögliche Kapazitätsüberlastungen der Hubs sowie die daraus resultierende Errichtung von Sekundärhubs vermieden.

Zur optimalen Lösung des Hub-Location-Problems wird ein Branch-and-Bound-Verfahren eingesetzt, für das ein effizientes Näherungsverfahren zur Bestimmung von unteren Schranken in den Knoten des Suchbaums entwickelt wird. Zur Bestimmung einer Eröffnungslösung werden die heuristischen Add- und Drop-Verfahren eingesetzt. Für die im Rahmen der Eröffnungsverfahren notwendigen Berechnungen von Allokationslösungen wird ein modifizierter Tripel-Algorithmus entwickelt. Im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens werden erstmalig logische Tests bei einem Hub-Location-Problem mit dem Ziel eingesetzt, noch freie Entscheidungsvariablen des Suchbaums vorzeitig zu fixieren.

Mit Hilfe der entwickelten Verfahren werden Problemgrößen mit bis zu 100 potentiellen Hubstandorten optimal gelöst. Dies ist auf den Einsatz der logischen Tests sowie die effizient Berechnung der unteren Schranken zurückzuführen. Der Einsatz der logischen Tests bewirkt eine Reduzierung der Rechenzeit um bis zu 80%.



# Abstract

*Steffen Blunck*

## **Modelling and Optimization of Hub-and-Spoke-Networks with Limited Sorting Capacity**

For the determination of the number and locations of hubs as well as the transportation quantities on individual transportation relations a hub location problem with direct transports and limited sorting capacity of the potential hub locations is modelled as a mixed binary linear optimization problem. Thus the capacity restrictions of the potential hubs are already considered in the planning phase. As a result capacity overloading of the hubs and the resulting installation of secondary hubs can be avoided.

For the optimal solution of the hub location problem a branch and bound procedure is used. An efficient approximation method for the calculation of lower bounds in the vertices of the search tree is developed. For the determination of an opening solution, the heuristic add and drop procedures are used. A modified Tripel algorithm is developed to calculate the allocation solutions during the opening procedures. For the first time, logical tests are used during the application of the branch and bound procedure for the solution of a hub location problem. By means of the logical tests, free binary decision variables of the search tree can possibly be fixed prematurely.

With the developed procedures, problem sizes with up to 100 potential hubs are optimally solved. Logical tests and the efficient solution of the lower bounds make this possible. The calculation time can be reduced with the application of the logical tests by 80%.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	1
1.2	Aufbau der Arbeit . . . . .	2
1.3	Hinweis für den Leser . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Transportnetze von KEP-Diensten</b>	<b>5</b>
2.1	Definition von KEP-Diensten . . . . .	5
2.2	Elemente und Funktionsweise von Transportnetzen . . . . .	7
2.3	Sendungsbündelung . . . . .	10
2.4	Sendungsbearbeitung in den Netzstationen . . . . .	11
2.5	Typen von Transportnetzen . . . . .	16
2.6	Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netz im Vergleich . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Planung von Transportnetzen</b>	<b>29</b>
3.1	Planungsebenen . . . . .	29
3.2	Hub-Location-Probleme . . . . .	30
3.2.1	Struktureigenschaften der Hub-and-Spoke-Netze . . . . .	31
3.2.2	Klassifikation von Hub-Location-Problemen . . . . .	32
3.3	Kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Probleme - Ein Literaturüberblick . . . . .	35
3.3.1	Erstmalige Formulierung eines kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems im engeren Sinne . . . . .	35
3.3.2	Kapazitätsbeschränktes $p$ -Hub-Median-Problem . . . . .	37
3.3.3	Kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem im engeren Sinne mit einfacher Zuordnung . . . . .	39
3.3.4	Kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem im engeren Sinne mit mehrfacher Zuordnung . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Modellierung und Formulierung des Hub-Location-Problems</b>	<b>45</b>
4.1	Formale Modellbeschreibung . . . . .	45
4.1.1	Modellierung der Hub-Kosten . . . . .	46
4.1.2	Modellierung der Transportkosten . . . . .	47
4.1.3	Modellierung der Transportketten . . . . .	48
4.2	Formulierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. . . . .	49
<b>5</b>	<b>Theoretische Grundlagen der Problemlösung</b>	<b>53</b>
5.1	Lineare Optimierungsprobleme . . . . .	53
5.2	Lösungsverfahren . . . . .	54

5.2.1	Eröffnungsverfahren . . . . .	54
5.2.2	Branch-and-Bound-Verfahren . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Entwicklung von Algorithmen zur Problemlösung</b>	<b>65</b>
6.1	Bestimmung von Lösungen des Eröffnungsverfahrens . . . . .	65
6.1.1	Algorithmus zur Lösung des Allokationsproblems . . . . .	65
6.1.2	Prioritäten zur Auswahl von Hubstandorten . . . . .	70
6.2	Bestimmung unterer Schranken im Branch-and-Bound-Verfahren . . . . .	73
6.2.1	Relaxation . . . . .	74
6.2.2	Dualisierung . . . . .	76
6.3	Näherungsverfahren zur Bestimmung unterer Schranken . . . . .	78
6.3.1	Eröffnungsverfahren . . . . .	79
6.3.2	Verbesserungsverfahren . . . . .	79
6.4	Anwendung logischer Tests im Branch-and-Bound-Verfahren . . . . .	86
6.4.1	Logischer Test zum Zulassen eines Hubstandorts . . . . .	86
6.4.2	Logischer Test zum Verbot eines Hubstandorts . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Ergebnisse der Berechnungen</b>	<b>91</b>
7.1	Angaben zu den Berechnungen . . . . .	91
7.1.1	Datengrundlage . . . . .	91
7.1.2	Bewertungskriterien . . . . .	94
7.2	Ergebnisse des Eröffnungsverfahrens . . . . .	96
7.2.1	Güte der heuristischen Lösung des Allokationsproblems . . . . .	96
7.2.2	Güte der Eröffnungslösung und Rechenzeit . . . . .	98
7.3	Ergebnisse des Branch-and-Bound-Verfahrens . . . . .	106
7.3.1	Güte des Eröffnungsverfahrens zur Bestimmung unterer Schranken	106
7.3.2	Einfluss der Verfahrensparameter und des Verbesserungsverfahrens	108
7.3.3	Anwendung der logischen Tests . . . . .	114
7.4	Ergebnisse großer Probleminstanzen . . . . .	119
7.5	Darstellung ausgewählter Transportnetze . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	125
8.2	Ausblick . . . . .	127
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>129</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>134</b>
<b>A</b>	<b>Länge von Transportwegen in einem Direktverkehrsnetz</b>	<b>143</b>
<b>B</b>	<b>Drop-Verfahren</b>	<b>145</b>
<b>C</b>	<b>Adjazenz- und Bewertungsmatrix</b>	<b>147</b>
<b>D</b>	<b>Modifizierung von Sendungswegen</b>	<b>149</b>

<b>E</b>	<b>Bestimmung der dualen Entscheidungsvariablen</b>	<b>151</b>
<b>F</b>	<b>Anzahl der Berechnungen von Allokationslösungen</b>	<b>153</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Vor-, Haupt- und Nachlauf . . . . .	8
2.2	Sendungstransporte in einem zwei- und dreistufigen Transportnetz . . . . .	9
2.3	Durchlauforientierte und umlauforientierte Netzstationen . . . . .	11
2.4	Anordnung der funktionalen Bestandteile eines durchlauforientierten Stückgut-Sortiersystems . . . . .	12
2.5	Sortier- und Verteilanlage mit drei Schrägeinschleusplätzen . . . . .	14
2.6	Prinzipdarstellung einer Sortier- und Verteilanlage . . . . .	15
2.7	Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netz . . . . .	17
2.8	Regionallhubstruktur und Feederhub-Transportnetz . . . . .	18
2.9	Gemischtes Transportnetz . . . . .	19
2.10	Anzahl der Transportrelationen in einem Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netz . . . . .	20
2.11	Idealisierte Lage von Depots auf dem Umfang des Einheitskreises . . . . .	22
2.12	Gesamtlänge der Transportrelationen und mittlere Länge einer Transportkette in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz . . . . .	23
2.13	Anteil des von der Verspätung einer Transportrelation betroffenen Sendungsaufkommens in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz . . . . .	26
3.1	Hub-and-Spoke-Netz mit drei Hubs und sechs Depots . . . . .	31
4.1	Exemplarische Darstellung der Kostenverläufe von Sortieranlagen . . . . .	46
4.2	Transportkosten in Abhängigkeit der Sendungsmenge . . . . .	48
5.1	Beispielhafter Suchbaum eines Branch-and-Bound-Verfahrens . . . . .	59
5.2	Flussdiagramm eines Branch-and-Bound-Verfahrens . . . . .	61
6.1	Modifizierung eines Sendungswegs bei Überschreitung der Sortierkapazität eines Hubs . . . . .	70
6.2	Lage der optimalen Zielfunktionswerte eines primalen Minimierungsproblems, eines dazu relaxierten Problems, der dazu dualen Relaxation sowie Lage des Zielfunktionswerts einer zulässigen Lösung der dualen Relaxation . . . . .	74
6.3	Optimale Zielfunktionswerte der Allokationsprobleme sowie deren unterer und oberer Schranke bei logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten . . . . .	87

6.4	Optimale Zielfunktionswerte der Allokationsprobleme sowie deren unterer und oberer Schranke bei logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten . . . . .	89
7.1	Lage der Depots des AP-Datensatzes . . . . .	92
7.2	Verlauf der variablen Sortierkosten . . . . .	94
7.3	Relative Abweichung des heuristisch ermittelten Zielfunktionswerts des Allokationsproblems vom Optimum . . . . .	97
7.4	Mittlere relative Abweichung vom besten bekannten Zielfunktionswert bei Anwendung des Add-Verfahrens mit First-Fit-Strategie in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen . . . . .	103
7.5	Mittlere relative Abweichung vom besten bekannten Zielfunktionswert bei Anwendung des Drop-Verfahrens mit First-Fit-Strategie in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen . . . . .	104
7.6	Relative Abweichungen der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte von den optimalen Zielfunktionswerten der dualen Relaxation . . . . .	107
7.7	Absolute Maximalwerte der relativen Abweichungen der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte von den optimalen Zielfunktionswerten . . . . .	107
7.8	Mittlere Anzahl analysierter Knoten in Abhängigkeit des Eröffnungsverfahrens . . . . .	109
7.9	Mittlere Anzahl der analysierten Knoten in Abhängigkeit der Suchstrategie	110
7.10	Mittlere Anzahl analysierter Knoten in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen zur Auswahl der Verzweigungsvariablen . . . . .	112
7.11	Mittlere Anzahl analysierter Knoten und mittlere Rechenzeit ohne und mit Einsatz des Verbesserungsverfahrens . . . . .	113
7.12	Einfluss der logischen Tests zum Zulassen und zum Verbot von potentiellen Hubstandorten auf die mittlere Anzahl analysierter Knoten des Suchbaums und die mittlere Rechenzeit . . . . .	115
7.13	Einfluss der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten auf die mittlere Knotenanzahl des Suchbaums und die mittlere Rechenzeit	116
7.14	Mittlere Knotenanzahl und mittlere Rechenzeit in Abhängigkeit der Suchbaumtiefe, bis zu der die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten durchgeführt werden . . . . .	118
7.15	Darstellung eines Hub-and-Spoke-Netzes . . . . .	122
7.16	Einfluss der Veränderung der spezifischen Direktverkehrskosten . . . . .	123
7.17	Einfluss der Veränderung spezifischer Kosten der Hub-Vor- und Hub-Nachläufe . . . . .	124

# Tabellenverzeichnis

2.1	Unterscheidungsmerkmale von Kurier-, Express-, Paket- und Postdiensten	7
2.2	Anzahl von Transportrelationen in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz . . . . .	21
2.3	Gesamtlänge der Transportrelationen, Anzahl der Transportrelationen und mittlere Länge einer Transportrelation in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz . . . . .	23
2.4	Anteil des Sendungsaufkommens in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz, das von der Verspätung genau einer Transportrelation betroffen ist . . . . .	26
3.1	Darstellung der zu Hub-Location-Problemen zusammengefassten Planungsprobleme . . . . .	34
3.2	Übersicht der Veröffentlichungen auf dem Gebiet der kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Probleme . . . . .	36
6.1	Veränderung des Schlupfs . . . . .	82
7.1	Modifizierte Skalierungsfaktoren des AP-Datensatzes . . . . .	92
7.2	Depotanzahl und Anzahl potentieller Hubstandorte der untersuchten Probleminstanzen . . . . .	95
7.3	Mittlere relative Abweichungen der Eröffnungslösungen von den besten bekannten heuristisch ermittelten Eröffnungslösungen . . . . .	99
7.4	Mittlere Rechenzeit zur Bestimmung einer Eröffnungslösung . . . . .	100
7.5	Anzahl der Berechnungen von Allokationslösungen . . . . .	102
7.6	Vergleich der Eröffnungsverfahren anhand eines einzelnen Kennwerts . . .	105
7.7	Mittlere Anzahl analysierter Knoten des Suchbaums in Abhängigkeit der Strategie des Eröffnungsverfahrens und der Suchstrategie des Branch-and-Bound-Verfahrens . . . . .	111
7.8	Mittlere Anzahl durchgeführter und erfolgreich durchgeführter logischer Tests . . . . .	115
7.9	Mittlere Anzahl durchgeführter bzw. erfolgreich durchgeführter logischer Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten in Abhängigkeit der Suchbaumtiefe. . . . .	117
7.10	Mittlere Anzahl analysierter Knoten mit und ohne Anwendung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte . . . . .	119
7.11	Anzahl analysierter Knoten für Probleminstanzen mit $N = 100$ Depotstandorten und $M = 100$ potentiellen Hubstandorten . . . . .	120

7.12	Mittlere Rechenzeiten mit und ohne Anwendung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte . . . . .	120
7.13	Rechenzeit für Probleminstanzen mit $N = 100$ Depotstandorten und $M = 100$ potentiellen Hubstandorten . . . . .	121
C.1	Adjazenzmatrix des modifizierten Tripel-Algorithmus . . . . .	147
C.2	Bewertungsmatrix des modifizierten Tripel-Algorithmus . . . . .	148

# Liste der Algorithmen

1	Add-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie . . . . .	56
2	Add-Verfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie . . . . .	57
3	Modifizierter Tripel-Algorithmus . . . . .	68
4	Modifizierung von Sendungswegen bei überlasteter Hub-Hauptlauf-Sortierung . . . . .	71
5	Näherungsverfahren zur Lösung der dualen Relaxation . . . . .	78
6	Verbesserungsverfahren . . . . .	80
7	Logische Tests zum Zulassen von Hubstandorten . . . . .	88
8	Logische Tests zum Verbot von Hubstandorten . . . . .	89
9	Drop-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie . . . . .	145
10	Drop-Verfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie . . . . .	146
11	Modifizierung von Sendungswegen bei überlasteter Hub-Nachlauf-Sortierung . . . . .	149
12	Berechnung der Entscheidungsvariablen des dualen relaxierten Problems	151



# 1 Einleitung

*„...everybody on this planet  
is separated by only  
six other people.“<sup>1</sup>*

Der Begriff Netz bezeichnet eine Struktur aus einzelnen Elementen, die miteinander verbunden sind (vgl. Brockhaus (1998)). Netze treten in vielfältigen Bereichen des Lebens auf.

Die Gemeinsamkeit aller Netze ist, dass sie aus Knoten und Verbindungen zwischen diesen, den Kanten (Links), bestehen. In sozialen Netzen repräsentieren Menschen die Knoten und Freundschaften die Verbindungen. Auch das Ökosystem ist ein Netz, das Pflanzen und Tiere über die Nahrungskette verbindet (vgl. Rauner (2004)). Die Anzahl der Verbindungen, über die Knoten in das Netz eingebunden sind, variiert. Albert et al. (1999) stellen in ihrer Studie über die Vernetzung von Websites im World-Wide-Web fest, dass nur wenige Websites existieren, so genannte Hubs, die über eine große Anzahl von Links mit anderen Knoten verbunden sind. Die Mehrheit der Knoten ist nur mit wenigen anderen Knoten verbunden.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind logistische Transportnetze, sogenannte Hub-and-Spoke-Netze. Diese sind u. a. bei Kurier-, Express- und Postdienstleistern (KEP-Dienstleistern) vorzufinden.

## 1.1 Problemstellung

Gründe für die Bestimmung der Struktur von Transportnetzen der KEP-Dienstleister können die Neuplanung, die Reorganisation bestehender Netze oder auch die Zusammenführung von mehreren Netzen zu einem neuen Transportnetz sein.

Beispielsweise wird die Reorganisation eines bestehenden Transportnetzes innerhalb seiner ursprünglichen Ausdehnung durch eine weitere Liberalisierung des Postmarkts notwendig. So wird die Exklusivlizenz der Deutschen Post AG zur Beförderung von Sendungen bis 100 g Ende 2007 auslaufen (vgl. Woijsiek (2003)). Auf europäischer Ebene werden derzeit nur etwa 20% aller Sendungen grenzüberschreitend versendet (vgl. Baum et al. (2004)). Durch die zunehmende wirtschaftliche Integration, nicht zuletzt durch die jüngste Aufnahme zehn weiterer Mitgliedsstaaten in die Europäische Union, ist eine Zunahme der grenzüberschreitenden Sendungen zu erwarten, wodurch eine Veränderung der Transportnetze erforderlich sein wird.

---

<sup>1</sup>Aus dem Theaterstück „Six Degrees of Separation“ von John Guare.

Bedingt durch die Übernahmewellen der vergangenen Jahre bei KEP-Dienstleistern bestanden in den Unternehmungen parallele Transportnetze, die es zusammenzuführen galt. Beispielsweise hat die Deutsche Post AG im Jahr 2002 die Mehrheit des amerikanischen Luftfracht-Expressdienstes Dalsey, Hillblom und Lynn (DHL) übernommen.

Transportnetze von KEP-Dienstleistern sind in der Regel Hub-and-Spoke-Netze, die sich durch eine oder mehrere zentrale Sortier- und Umschlageinrichtungen (Hubs, engl. Nabe) und strahlenförmig auf die Hubs zulaufende Transportrelationen (Spokes, engl. Speiche) auszeichnen. Durch den gemeinsamen Transport von Sendungen über Hubs kann eine Bündelung der Sendungsströme erzielt und dadurch die Wirtschaftlichkeit der Transporte erhöht werden.

Im Bereich der betrieblichen Standortplanung wird durch die Modellierung und Lösung von Hub-Location-Problemen die Struktur von Hub-and-Spoke-Netzen bestimmt. Das Ziel dieser Modelle ist es, die Anzahl und Lage der Hubs sowie die Sendungsmengen auf den Transportrelationen zu ermitteln, so dass ein gegebenes Zielkriterium minimiert wird. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Lage der Versand- und Empfangsdepots sowie das Sendungsaufkommen bekannt sind.

Die zu erzielenden Kostenvorteile aufgrund der o. g. Bündelungseffekte werden in den Hub-Location-Modellen durch Skalenerträge auf den Transportrelationen zu und von den Hubs modelliert. Die intensive Nutzung dieser Transportrelationen kann zu einer Kapazitätsüberlastung der Hubs führen, die wiederum in netzweiten Verspätungen resultieren kann. Eine Maßnahme zum Abbau von Kapazitätsüberlastungen der Hubs in bereits bestehenden Transportnetzen ist die Errichtung weiterer Hubs, sogenannter Sekundär-Hubs.

Die in der vorliegenden Arbeit angestrebte Lösung zur Vermeidung von Kapazitätsengpässen in Hubs erreicht dies durch die Berücksichtigung der Kapazitäten bereits bei der strategischen Planung von Hub-and-Spoke-Netzen. Dazu wird ein kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem modelliert und als gemischt-binäres lineares Optimierungsproblem formuliert, das mit einem Branch-and-Bound-Verfahren gelöst wird.

## 1.2 Aufbau der Arbeit

Das Dienstleistungsangebot von KEP-Dienstleistern wird im zweiten Kapitel anhand einiger charakteristischer Merkmale beschrieben. Anschließend werden die Elemente der Transportnetze sowie die Abläufe in den Depots und Hubs (Netzstationen) dargestellt und die beiden grundlegenden Transportnetze, das Direktverkehrs- und das Single-Hub-and-Spoke-Netz, hinsichtlich verschiedener Kriterien miteinander verglichen.

Im dritten Kapitel wird das untersuchte kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S. in den Kontext der Planung von Transportnetzen eingeordnet. Anschließend werden die Struktureigenschaften von Hub-and-Spoke-Netzen beschrieben und die Ausprägungen von Hub-Location-Problemen vorgestellt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet ein umfassender Literaturüberblick über kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Probleme.

Das vierte Kapitel führt alle relevanten Planungsgrößen ein und beschreibt formal das

untersuchte kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S.. Die Modellierung der Transportkosten und der durch die Installation und den Betrieb der Hubs verursachten Kosten wird vorgenommen. Desweiteren werden die geforderten Eigenschaften der Transportketten beschrieben. Abschließend folgt die Formulierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. als gemischt-binäres lineares Optimierungsproblem.

Kapitel fünf widmet sich den theoretischen Grundlagen zur Lösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S.. Zur Bestimmung einer zulässigen Lösung des Optimierungsproblems wird ein Eröffnungsverfahren eingesetzt. Der Zielfunktionswert der mit diesem Verfahren bestimmten Lösung stellt eine obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts dar und wird zur effizienten Bestimmung einer optimalen Lösung im Rahmen des Branch-and-Bound-Verfahrens eingesetzt.

Im sechsten Kapitel werden die zur Lösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. entwickelten Algorithmen vorgestellt. Für die Anwendung des Eröffnungsverfahrens ist in jedem Schritt die Bewertung der aktuellen Lokationslösung mittels der Transport- und variablen Sortierkosten erforderlich. Zur Lösung dieses Allokationsproblems wird ein heuristisches Verfahren aufbauend auf einem modifizierten Kürzeste-Wege-Algorithmus entwickelt. Zur effizienten Abarbeitung des Branch-and-Bound-Verfahrens wird eine Heuristik entwickelt, die zur Bestimmung unterer Schranken in jedem Knoten des Suchbaums eingesetzt wird. Darüberhinaus werden logische Tests im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens mit dem Ziel eingesetzt, die Anzahl der zu untersuchenden Knoten des Suchbaums zu reduzieren und somit die Effizienz des Verfahrens weiter zu erhöhen.

In Kapitel sieben werden zunächst die untersuchten Probleminstanzen und die Kriterien zur Bewertung der entwickelten Verfahren vorgestellt. Es werden sowohl Bewertungskriterien für die heuristischen Eröffnungsverfahren als auch für das Branch-and-Bound-Verfahren angegeben. Daran schließt sich die Analyse der Eröffnungsverfahren an, für die sowohl die Güte des entwickelten Verfahrens zur Bestimmung der Allokationslösungen als auch die Güte der Eröffnungsverfahren an sich untersucht wird. Für das Branch-and-Bound-Verfahren wird der Einfluss von Verfahrensparametern sowie der Güte des entwickelten Heuristik zur Bestimmung unterer Schranken untersucht. Abschließend wird der Einfluss der logischen Tests zur Verringerung der Rechenzeit analysiert.

Die Arbeit schließt mit der Zusammenfassung und einem Ausblick.

## 1.3 Hinweis für den Leser

In der vorliegenden Arbeit wird eine Vielzahl von mathematischen Symbolen verwendet, die zusätzlich zum Text im Symbolverzeichnis mit einer kurzen Erläuterung aufgeführt werden. Ausgenommen davon sind die in Abschnitt 3.3 verwendeten Symbole, die aus den jeweiligen Literaturquellen unverändert übernommen wurden. Somit wird dem Leser das weiterführende Studium der Literatur erleichtert. Die übernommenen Symbole werden an den entsprechenden Stellen im Text erläutert.



## 2 Transportnetze von KEP-Diensten

Zu Beginn dieses Kapitels werden KEP-Dienste definiert. Daran schließt sich die Beschreibung der Elemente eines Transportnetzes und dessen Funktionsweise an. Die in Transportnetzen von KEP-Diensten durch Sendungsbündelung erzielbaren Einsparungen werden erläutert. Neben den grundlegenden Typen von Transportnetzen, den Direktverkehrsnetzen und Single-Hub-and-Spoke-Netzen, werden weitere Transportnetze vorgestellt. Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netze werden miteinander verglichen.

### 2.1 Definition von KEP-Diensten

Der Begriff KEP-Dienste war ursprünglich die abgekürzte Bezeichnung für Transportunternehmen aus dem Bereich der Kurier-, Express- und Paketbranche. Mit der Novellierung des Postgesetzes zum 1. Januar 1998 ist die Beförderung von Paketen mit einem Einzelgewicht bis zu 20 kg und von Briefsendungen gesetzlich als Postdienstleistung definiert worden (vgl. PostG (1997)). Seither steht der Begriff KEP für Kurier, Express und Post.

Durch die gesetzliche Definition der Postdienstleistung ist es einerseits zu einer Erweiterung des Dienstleistungsangebots der KEP-Dienste um die Briefbeförderung gekommen. Andererseits wird die Paketdienstleistung auf die Beförderung von Paketen bis 20 kg eingeschränkt und steht damit im Widerspruch zur Definition von Paketdiensten (vgl. Seegers-Krückeberg (1997)), die demnach Pakete bis 31,5 kg transportieren.

Orientiert man sich zur Unterteilung der Segmente der KEP-Branche nach der Novellierung des Postgesetzes an der Lizenzpflicht im Briefbereich<sup>1</sup> und nicht an der Definition der Postdienstleistung, so ist eine Unterteilung in Kurier-, Express-, Paket- und Briefdienste möglich (vgl. Pfeiffer (1998)). Als Gemeinsamkeit von Kurier-, Express- und Paketdiensten beschreibt Pfeiffer (1998) die Tatsache, dass die Beförderung der Sendungen jeweils einzeln nachgewiesen wird. Im Gegensatz dazu ist das Merkmal der Briefbeförderung der anonyme Versand, das heißt der Beförderungsnachweis einer einzelnen Sendung liegt nicht vor.

Das Dienstleistungsangebot von Kurier-, Express-, Paket- und Postdiensten unterscheidet sich u. a. bezüglich der transportierten Sendungen sowie des Zustellzeitpunkts. Die Zustellzeitpunkte werden bei Paket- und Postdiensten im Vergleich mit den Kurier- und

---

<sup>1</sup>Eine Lizenz für den Transport von Briefen ist bis zu einem Gewicht von einem Kilogramm notwendig (vgl. PostG (1997)).

Expressdiensten nicht zugesichert. Zur genaueren Unterscheidung von Kurier-, Express-, Paket- und Postdiensten werden diese im Folgenden definiert.

### **Kurierdienste**

Kurierdienste übernehmen den Transport und die Zustellung von Dokument- und Kleinsendungen bis zu einem Gewicht von drei Kilogramm. Das wesentliche Alleinstellungsmerkmal der Kurierdienste ist die permanente persönliche Begleitung der Sendung. Das Angebot der Kurierdienste reicht von lokal tätigen Stadtkurieren über landesweit agierende Kuriere bis hin zu weltweit operierenden Kurierdiensten. Kurierdienste bieten einen schnellen Transport und garantieren den Zustellzeitpunkt.

### **Expressdienste**

Expressdienste befördern Transportgüter ohne Gewichts- und Maßbeschränkungen und zeichnen sich durch ein Serviceversprechen aus. Beispielsweise wird die Zustellung der Sendung vor einer bestimmten Uhrzeit garantiert.

Im Gegensatz zu Kurierdiensten erfolgt der Transport nicht direkt vom Versender zum Empfänger sondern über Netzstationen eines Transportnetzes. Durch den Einsatz eines Sendungsverfolgungssystems kann die Beförderung jeder einzelnen Sendung nachgewiesen werden. Geeignet ist diese Art des Transports für eilige Termingüter ohne Gewichts- und Volumenrestriktionen.

### **Paketdienste**

Das Sendungsspektrum von Paketdiensten umfasst den Transport von volumenmäßig beschränkten Kleinsendungen mit einem Gewicht bis zu 31,5 kg.<sup>2</sup> Die maximalen Abmessungen für Paketsendungen betragen bei der Deutschen Post AG 1,2 m × 0,6 m × 0,6 m (Länge × Breite × Höhe). Im Gegensatz zu den Kurier- und Expressdiensten wird ein mit hoher Wahrscheinlichkeit erreichbarer Zustellzeitpunkt vom Paketdienstleister angegeben aber nicht zugesichert.

### **Postdienste**

Nach dem Postgesetz (vgl. PostG (1997)) umfasst das Dienstleistungsspektrum von Postdiensten die Beförderung von Briefsendungen und von Paketen mit einem Gewicht bis 20 kg. Für Briefsendungen gilt nach der Post-Universaldienstleistungsverordnung (vgl. PUDLV (1999)), dass im Jahresdurchschnitt 80% der eingelieferten Sendungen am Folgetag und 95% bis zum zweiten Tag nach der Einlieferung zugestellt werden müssen. Die Auslieferung von Paketen hat im Jahresdurchschnitt in 80% der Fälle bis spätestens zum zweiten Tag nach der Einlieferung zu erfolgen.

---

<sup>2</sup>Die aus den USA stammende Gewichtsbeschränkung von 70 lbs entspricht 31,5 kg und wurde von den amerikanischen Gewerkschaften vereinbart. Durch die Expansion amerikanischer KEP-Dienste wurde diese Gewichtsbeschränkung auch in Europa eingeführt.

In der Tabelle 2.1 sind die Unterscheidungsmerkmale von Kurier-, Express-, Paket- und Postdiensten zusammenfassend dargestellt.

Tabelle 2.1: Darstellung der Unterscheidungsmerkmale von Kurier-, Express-, Paket- und Postdiensten in Anlehnung an Vahrenkamp (1998a).

Bezeichnung des Dienstes	Sendungsart	Gewicht	Zustellzeitpunkt
Kurierdienst	Dokument	$\leq 3$ kg	garantiert
Expressdienst	Sammelgut	30 kg - 2800 kg	garantiert
	Partiegut	$> 2800$ kg	garantiert
Paketdienst	Paket	3,5 kg - 31,5 kg	nicht garantiert
Postdienst	Brief	$\leq 2$ kg	nicht garantiert
	Paket	$\leq 20$ kg	nicht garantiert

## 2.2 Elemente und Funktionsweise von Transportnetzen

Im Gegensatz zu Kurierdiensten, die Sendungen direkt vom Versender zum Empfänger transportieren, verwenden Express- und Postdienstleister ein Transportnetz. Bestandteile eines Transportnetzes sind Knoten, die Quellen und Senken von Sendungstransporten repräsentieren, sowie die Verbindungen zwischen den Knoten, die Transportrelationen. Quellen und Senken des Transportnetzes sind Netzstationen, zu denen Depots und Hubs zählen.

Depots sind regionale Einrichtungen eines KEP-Dienstleisters, die als Start- und Zielpunkte von Sammel- und Verteiltouren zu den Versendern bzw. Empfängern dienen. Sie sind zugleich Sammel- und Sortiereinrichtung für das Sendungsaufkommen, das ausgehend von der Region des Depots versendet bzw. den Empfängern in der Region zugestellt wird. Dahingegen sind Hubs zentrale Sortiereinrichtungen innerhalb des Transportnetzes. Im Verlauf der Zustellung von Sendungen von einem Versender zu einem Empfänger sind die logistischen Funktionen Sammeln, Sortieren, Transportieren und Verteilen zu erbringen.

Der Sendungstransport vom Versender zum Empfänger lässt sich in die logistischen Phasen Vor-, Haupt- und Nachlauf unterteilen (vgl. Abbildung 2.1).

Der Vorlauf bezeichnet den Sendungstransport zwischen den Versendern und einem Depot, dem die Versender zugeordnet sind. Ausgehend von einem Depot beginnen in der Regel mehrere Sammeltouren in der Region, auf denen das Sendungsaufkommen bei den Versendern abgeholt und zum Depot transportiert wird. Das Depot der Versandregion übernimmt die Sammelfunktion des Vorlaufs.

---

<sup>2</sup>Die Beförderung von Briefen mit einem Gewicht bis 2 kg wird in PUDLV (1999) als Universaldienstleistung definiert.

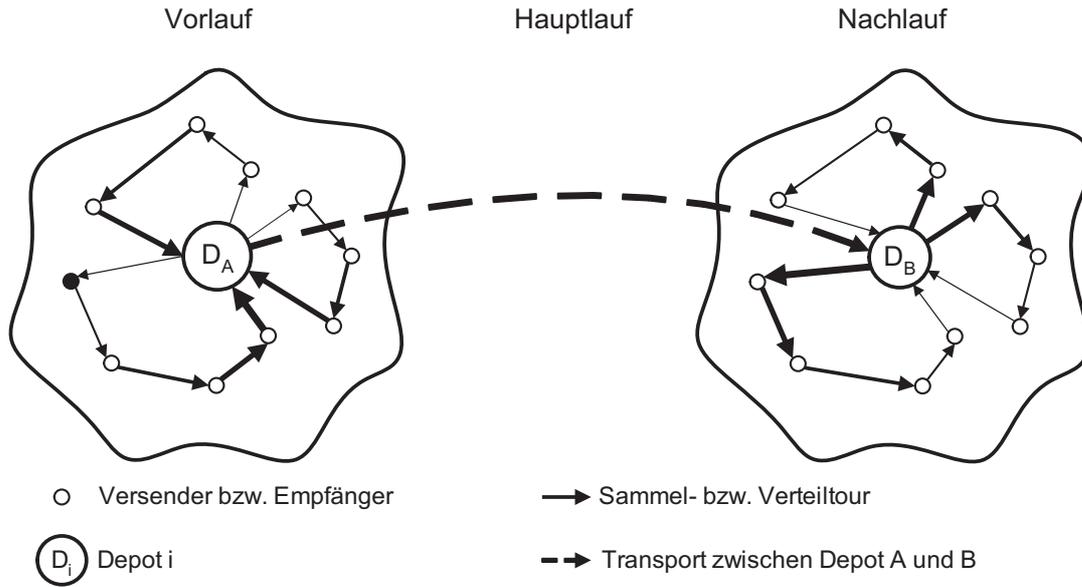


Abbildung 2.1: Darstellung des Vor-, Haupt- und Nachlaufs des Sendungstransports von Versendern in der Region des Depots A zu Empfängern in der Region des Depots B. Die Stärke der Pfeilverbindungen der Sammel- und Verteiltouren repräsentieren den Füllungsgrad der Fahrzeuge.

Abhängig von der Konfiguration des Transportnetzes erfolgt im Versanddepot die Sendungssortierung für den Hauptlauf gemäß gemeinsamer Transportrelationen. Dabei werden ggf. Sendungen mit unterschiedlichen Empfangsdepots bzgl. einer Transportrelationen zu einem Hub sortiert, um somit eine Sendungsbündelung zu erzielen. Diejenigen Sendungen, deren Empfänger ebenfalls in der Region des Versanddepots liegen, werden in der Regel nach dem Sendungseingang im Versanddepot aussortiert und bis zum Beginn der Nachlaufsartierung gepuffert. Dadurch wird der unwirtschaftliche Sendungstransport während des Hauptlaufs zu einer zentralen Sortiereinrichtung vermieden.

Während des Hauptlaufs zwischen dem Versand- und Empfangsdepot wird die größte Transportentfernung der Sendungsbeförderung zurückgelegt. Deshalb wird dieser Transportabschnitt auch als Fernverkehr bezeichnet.

In dem Empfangsdepot werden die Sendungen des Hauptlaufs mit den gepufferten Sendungen zusammengeführt und bzgl. der Verteiltouren des Nachlaufs sortiert. Der Nachlauf umfasst, ausgehend von dem Empfangsdepot, die Verteilung der Sendungen an die Empfänger.

Die Verteiltouren des Nachlaufs sind in der Regel mit den Sammeltouren des Vorlaufs gekoppelt, so dass es keine strenge zeitliche Trennung der Sammel- und Verteiltouren gibt. Im Verlauf eines Tages nimmt der Anteil der Auslieferungen auf den kombinierten Sammel- und Verteiltouren ab. Der Anteil der Sendungsabholungen bei Versendern nimmt dahingegen im Tagesverlauf zu. Die kombinierten Sammel- und Verteiltouren werden auch als Pick-up-and-Delivery-Touren bezeichnet. Cardeneo (2005) stellt ein neuartiges Modell zur optimalen Bestimmung von Touren des Vor- bzw. Nachlaufs mit alternativen Lieferorten und -zeiten vor.

Je nach Konfiguration des Transportnetzes kann der Sendungstransport während des Hauptlaufs durch einen oder mehrere Sortierprozesse in Hubs unterbrochen werden, wodurch der Grad der Sendungsbündelung auf Transportrelationen zwischen den Hubs weiter erhöht wird.

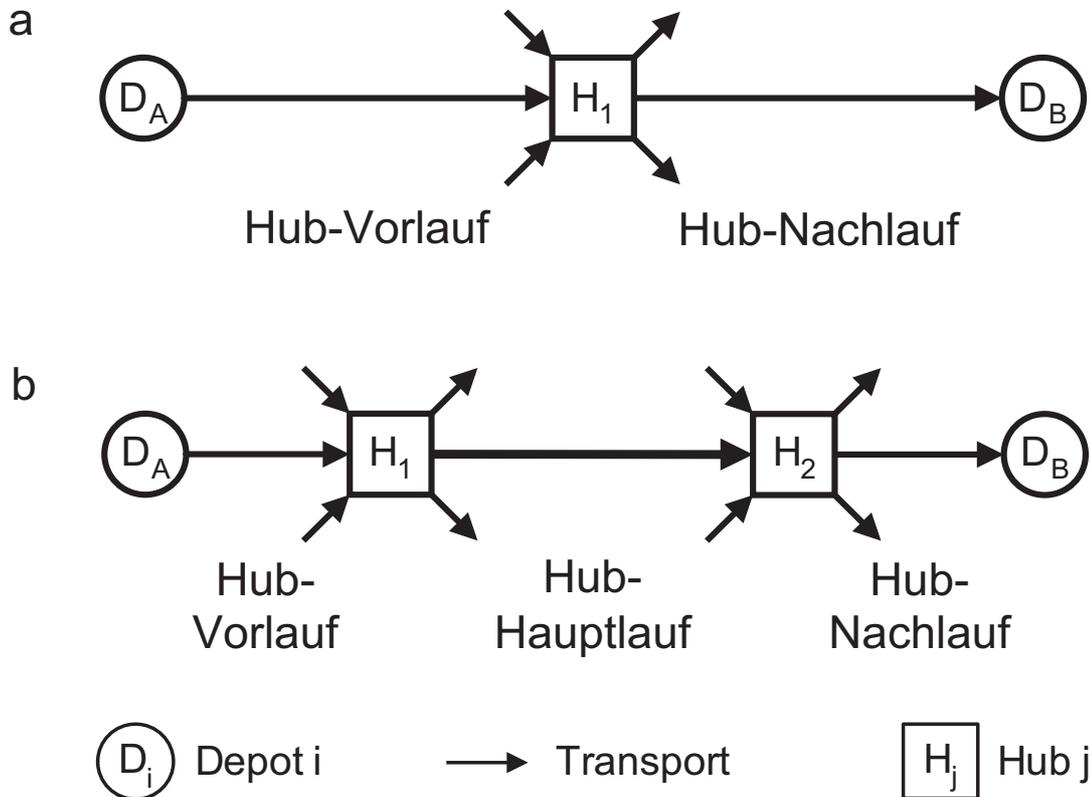


Abbildung 2.2: Darstellung des Sendungstransports in einem zweistufigen (a) und dreistufigen (b) Transportnetz.

In einem zweistufigen Transportnetz (vgl. Abbildung 2.2 (a)) wird der Sendungstransport durch einen Sortiervorgang unterbrochen. Der Hauptlauf unterteilt sich dadurch in einen Hub-Vor- und in einen Hub-Nachlauf. Dies ist der Fall in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz, in dem es genau einen zentralen Hub innerhalb des Transportnetzes gibt. Der zentrale Hub erbringt die gesamte Sortierleistung des Transportnetzes.

In einem dreistufigen Transportnetz (vgl. Abbildung 2.2 (b)) wird der Hauptlauf durch zwei Sortiervorgänge unterbrochen. Der Transport zwischen den Hubs wird als Hub-Hauptlauf bezeichnet. Die zusätzliche Sortierung nach dem Hub-Hauptlauf benötigt Zeit und vermindert somit die während des Hauptlaufs maximal zurücklegbare Transportentfernung.

Die Sortiervorgänge in den Hubs finden innerhalb festgelegter Zeitfenster statt. Deshalb ist eine zeitliche Synchronisation der ankommenden Transporte notwendig, so dass der Sortiervorgang abgeschlossen ist, bevor das erste Transportmittel der sich anschließenden Transporte den Hub verlassen muss.

Kommt es in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz beispielsweise auf einer Transportrelation des Hub-Vorlaufs zu einer Verspätung und können deshalb die Abfahrtszeitpunkte der folgenden Transporte nicht eingehalten werden, so hat dies weitreichende Konsequenzen für das gesamte Transportnetz. Unter Umständen können die dem Versender zugesicherten Serviceversprechen nicht mehr erfüllt werden. Die Auswirkungen von Verspätungen in Transportnetzen werden in Abschnitt 2.6 vorgestellt.

### 2.3 Sendungsbündelung

Sendungsbündelung ist die gemeinsame Beförderung von Sendungen auf einem oder mehreren Abschnitten ihrer Transportkette mit einem Transportmittel. Als Transportkette wird die „Folge von technisch und organisatorisch miteinander verknüpften Vorgängen bezeichnet, bei denen Güter von einer Quelle zu einem Ziel bewegt werden“ (vgl. DIN 30781 (1989)).

Die Grundvoraussetzung für die Sendungsbündelung sind freie Kapazitäten eines Transportmittels auf einer Transportrelation. Darüber hinaus muss zwischen den gebündelten Sendungen eine zeitliche Kompatibilität insofern bestehen, als keine der Sendungen nach ihrem spätestmöglichen Zeitpunkt ihren Zielort erreichen darf.

Sendungsbündelung wird durchgeführt, um die Wirtschaftlichkeit des Transports zu steigern. Dadurch wird die Auslastung der Transportmittel erhöht und es treten durch den Einsatz von größeren Transportmitteln Größendegressionseffekte (Economies of Scales) auf (vgl. Kaupp (2002)).

Bei KEP-Dienstleistern können Sendungen während des Vor- und Nachlaufs sowie während des Hauptlaufs gebündelt werden. Die Sendungsbündelung während des Hauptlaufs bedingt die Einführung von zentralen Sortiereinrichtungen (Hubs). Den erzielbaren Ersparnissen aufgrund der Sendungsbündelung stehen Investitionen und variable Betriebskosten der Hubs gegenüber.

Crainic (2000) und Irnich (2002) stellen in ihren Arbeiten folgende Formen der Sendungsbündelung vor:

1. Die einfachste Form der Bündelung liegt vor, wenn von einer Quelle mehrere Sendungen zu derselben Senke befördert werden. Der Transport aller Sendungen erfolgt mit einem gemeinsamen Transportmittel als Direktverkehr.
2. Werden Sendungen mit unterschiedlichen Quellen und derselben Senke oder derselben Quelle und unterschiedlichen Senken von einem Transportmittel befördert, so wird dies als Bündelung durch Mitnahme bezeichnet.  
In einem Transportnetz tritt diese Art der Bündelung beispielsweise dann auf, wenn ein Depot indirekt über ein weiteres Depot mit einem Hub verbunden ist.
3. Bündelung durch Pickup-and-Delivery kombiniert Sammel- und Verteiltouren wie sie im Vor- und Nachlauf bei KEP-Dienstleistern auftreten.
4. Bei der Bündelung durch Nutzung von zentralen Sortiereinrichtungen werden Sendungen gleicher Quelle gemeinsam zu einem Hub transportiert und dort sortiert.

Daran schließt sich der gemeinsame Transport von Sendungen mit derselben Senke an.

- Um Bündelung durch multimodalen Transport handelt es sich, wenn die Sendungen auf verschiedenen Abschnitten der Transportkette mit unterschiedlichen Verkehrsträgern befördert werden.

Beispielsweise wird der multimodale Transport bei KEP-Dienstleistern eingesetzt, um einen schnellstmöglichen Transport zu erzielen.

## 2.4 Sendungsbearbeitung in den Netzstationen

In einer Netzstation werden Sendungen verschiedener Quellen gesammelt und auf unterschiedliche Senken verteilt. Die Sendungsbearbeitung in einer Netzstation umfasst die Hauptprozesse Systemeingabe, Sortieren und Verteilen sowie Systemausgabe. Außerdem erfolgt eine Sendungsidentifikation, die für die Sortier- und Verteilprozesse sowie für die Sendungsverfolgung notwendig ist.

### Layout einer Netzstation

Das Layout einer Netzstation kann nach zwei grundlegenden Konzepten gestaltet werden, die sich durch den Verlauf des Sendungsstroms unterscheiden (vgl. Abbildung 2.3). Nach diesen zwei Layout-Konzepten sind die Briefzentren der Deutschen Post AG gestaltet.

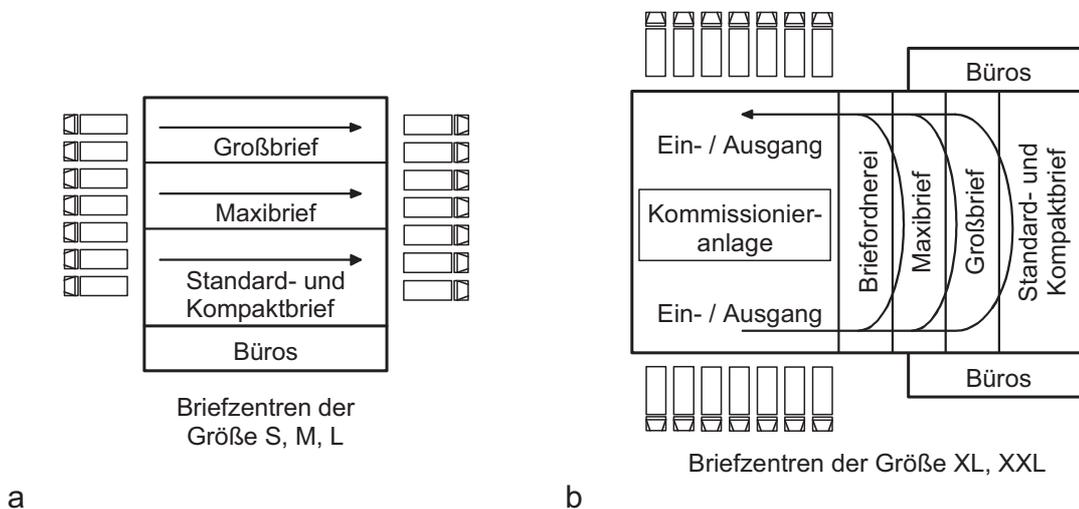


Abbildung 2.3: Darstellung einer durchlauforientierten (a) und einer umlauforientierten Netzstation (b) (vgl. Deutsche Post (1998)).

In einer durchlauforientierten Netzstation durchläuft der Sendungsstrom die Netzstation geradlinig von den Eingangsrampen auf der einen Seite des Gebäudes zu den Ausgangsrampen auf der gegenüberliegenden Seite. Im Gegensatz dazu entspricht der Sendungsstrom in einer umlauforientierten Netzstation der Form eines „U“.

## Stückgut-Sortiersysteme

Netzstationen, in denen Sendungen maschinell sortiert werden, nennt man Stückgut-Sortiersysteme. Dies sind „Anlagen bzw. Einrichtungen zum Identifizieren von in ungeordneter Reihenfolge ankommenden Stückguts aufgrund vorgegebener Unterscheidungsmerkmale und zum Verteilen auf Ziele, die nach den jeweiligen Erfordernissen festgelegt werden“ (vgl. VDI 3619 (1983)).

Nach dieser VDI-Richtlinie können Stückgut-Sortiersysteme in die folgenden funktionalen Bestandteile untergliedert werden:

1. Systemeingabe
2. Vorbereiten, Identifizieren, Sortieren, Verteilen
3. Systemausgabe

Die Funktionen Sortieren und Verteilen stellen die Hauptfunktionen innerhalb eines Stückgut-Sortiersystems dar und werden technisch durch Sortier- und Verteilanlagen realisiert (vgl. Föller (2003)).

Abbildung 2.4 zeigt die Anordnung der genannten funktionalen Bestandteile in einem durchlauforientierten Stückgut-Sortiersystem.

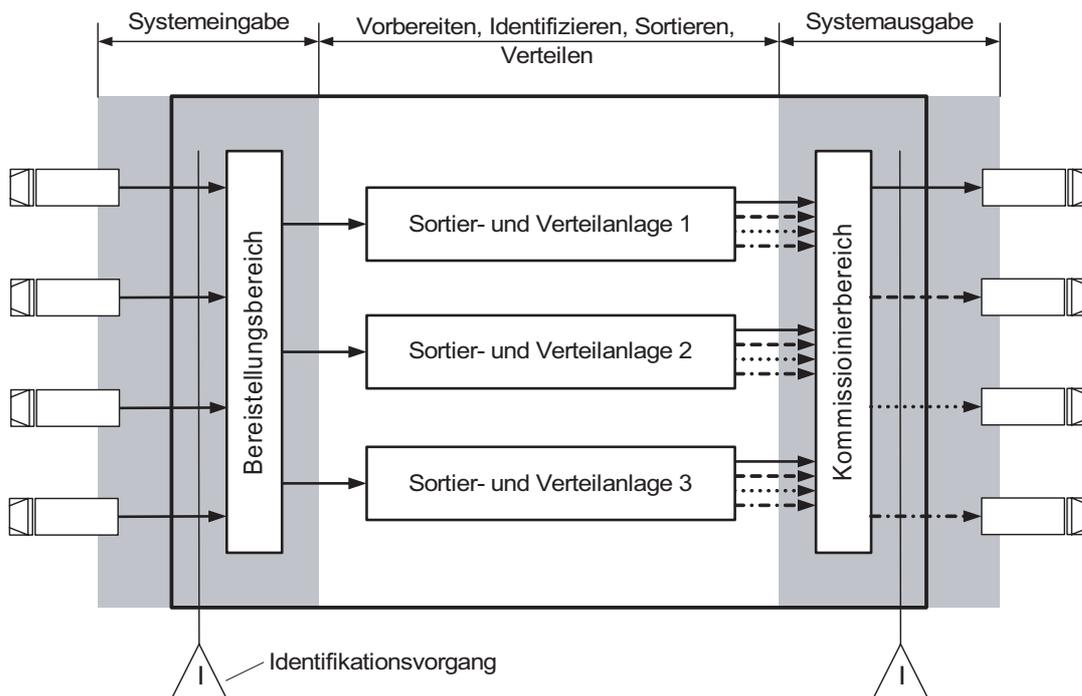


Abbildung 2.4: Anordnung der funktionalen Bestandteile eines durchlauforientierten Stückgut-Sortiersystems. Die Sendungen werden bei der Systemeingabe und -ausgabe identifiziert.

Die Systemeingabe umfasst alle Prozesse, die notwendig sind, um die Sortier- und Verteilanlagen mit Sortiergütern zu versorgen. Bei KEP-Dienstleistern werden die Sortiergüter

entweder lose oder aggregiert zu Ladeeinheiten in Transportmitteln angeliefert. Als Ladehilfsmittel werden u. a. Behälter, Gitterwagen und Säcke eingesetzt. Erfolgt die Anlieferung der Sortiergüter lose, so werden die Transportmittel manuell entladen und die Sortiergüter bspw. auf ein teleskopierbares Förderband aufgegeben. Ladeeinheiten werden entweder manuell oder mit Hilfe von Flurförderzeugen entladen und anschließend in einem Bereitstellungsbereich gepuffert. Dort werden sie ggf. vereinzelt, bevor die einzelnen Sortiergüter an die nachfolgenden Prozesse übergeben werden.

Das Vorbereiten umfasst die Vereinzelnung, die Ausrichtung und ggf. die Applizierung eines Codes, bevor das Sortiergut identifiziert und an die Sortier- und Verteilanlage übergeben wird. Abhängig von dem Aufbau dieser Anlage können Vereinzelnung, Ausrichtung und Identifikation auch Bestandteile dieser Anlage sein.

Die Sortier- und Verteilanlage hat nach der Eingabe des Sortierguts die Aufgabe, die Sortiergüter zu verteilen und zu den Zielstellen zu transportieren. Dort werden sie bis zur Entleerung bspw. in Behältern gespeichert.

Von den Zielstellen aus werden die sortierten Güter zur Systemausgabe transportiert und dort ggf. zu Ladeeinheiten aggregiert. Anschließend werden die Ladeeinheiten entsprechend der unterschiedlichen Transportrelationen kommissioniert und auf die Transportmittel verladen.

Ein Stückgut-Sortiersystem kann mehrere Sortier- und Verteilanlagen umfassen. Das ist bspw. dann erforderlich, wenn die Sortiergüter stark heterogen sind. Somit kann jede Sortier- und Verteilanlage entsprechend den Anforderungen des Sortierguts gestaltet werden. Dabei muss der Sortier- und Verteilprozess keinesfalls immer automatisiert sein. Der Anteil des Sortierguts, der nicht über automatisierte Sortier- und Verteilanlagen geleitet werden kann und somit manuell sortiert und verteilt werden muss, beträgt bis zu 10% des gesamten Sortiergutaufkommens (vgl. Arnold (2002a)). Diese Art der Sortiergüter werden auch als „Non-Conveyables“ bezeichnet.

### **Sortier- und Verteilanlagen**

In Abbildung 2.5 ist beispielhaft eine Sortier- und Verteilanlage eines Stückgut-Sortiersystems dargestellt. Anhand dieser Abbildung wird der Sortier- und Verteilprozess im Folgenden beschrieben.

Die Eingabe des Sortierguts in die Sortier- und Verteilanlage erfolgt an den Eingabepunkten, die von der Systemeingabe des Stückgut-Sortiersystems (vgl. Abbildung 2.4) mit Sortiergütern versorgt werden. Nach der Eingabe werden die Sortiergüter auf den mit konstanter Geschwindigkeit umlaufenden Verteilkreislauf übergeben. Dieser Vorgang wird als Einschleusung bezeichnet. In diesem Fall handelt es sich um die Winkelschleusung mit Hilfe von Schrägeinschleusbändern. Der Abschnitt des Verteilkreislaufs, an dem sich die Eingabepunkte befinden, wird als Sammelstrecke bezeichnet.

Hieran schließt sich der automatische Identifikationspunkt an, an dem die Sortiergüter automatisch anhand ihres Codes identifiziert werden, der an die Steuerung der Sortier- und Verteilanlage übertragen wird.

Die Sortiergüter werden nach der Identifikation auf dem Verteilkreislauf solange weiter transportiert, bis die Steuerung erkennt, dass sie ihre Zielstelle erreicht haben. Hier wer-

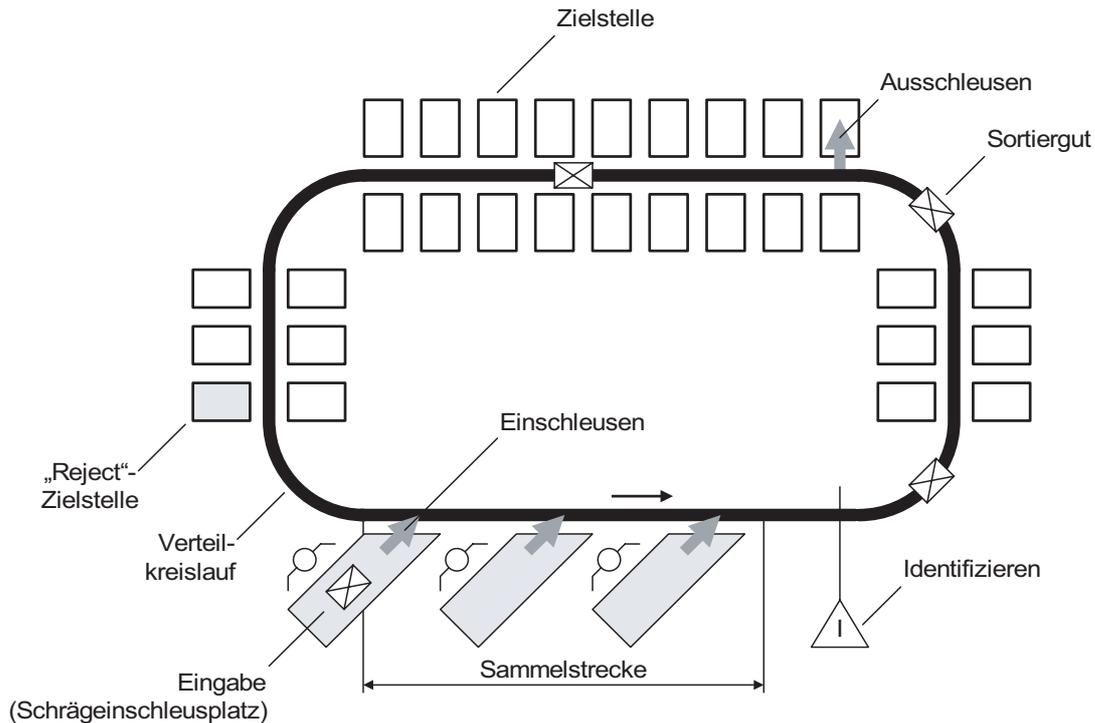


Abbildung 2.5: Darstellung einer Sortier- und Verteilanlage mit drei Schrägeinschleusplätzen in Anlehnung an Beumer (2002).

den die Sortiergüter mit Hilfe eines Ausschleusmechanismus von dem Verteilkreislauf in die Zielstelle bewegt und dort bis zur Entleerung in Behältern gespeichert.

Kommt es an dem automatischen Identifikationspunkt zu keiner Lesung („no read“) des Codes, so wird das entsprechende Sortiergut in die „Reject“-Zielstelle ausgeschleust und der Eingabe wieder zugeführt. An den Eingabepunkten wird dann das Sortiergut manuell kodiert. Fehllösungen können dann auftreten, wenn die Sortiergüter beispielsweise nicht ausreichend vereinzelt oder ausgerichtet sind bzw. ihr Code beschädigt ist.

In der folgenden Abbildung 2.6 ist der funktionale Aufbau der Sortier- und Verteilanlage aus Abbildung 2.5 dargestellt, die sich in zwei Anlagenteile untergliedern lässt. Die Sortieranlage umfasst die Prozesse Eingabe, Sammeln und Identifizieren. Danach liegen die Sortiergüter in einer bestimmten Reihenfolge vor, die der Steuerung der Sortier- und Verteilanlage bekannt ist. Daran schließt sich die Verteilanlage an.

Arnold (2002b) erweitert die funktionalen Bestandteile eines Stückgut-Sortiersystems (vgl. VDI 3619 (1983)) um die Sortiergutzuführung und -abführung, die Rückführung der zurückgewiesenen Sortiergüter sowie die Ver- und Entsorgung der Sortier- und Verteilanlage mit Leerbehältern.

Föller (2003) entwickelt eine neuartige Zuführstrecke zu einer Verteilanlage. Im Gegensatz zu herkömmlichen Zuführstrecken mit mehreren manuellen Eingabepunkten kommt es bei dieser Zuführstrecke nicht zu gegenseitigen Behinderungen der Sortiergüter aufgrund der asynchronen Eingabe. Dadurch gelingt es, den technischen Grenzdurchsatz gegenüber herkömmlichen Zuführstrecken mit manuellen Eingabepunkten zu erhöhen.

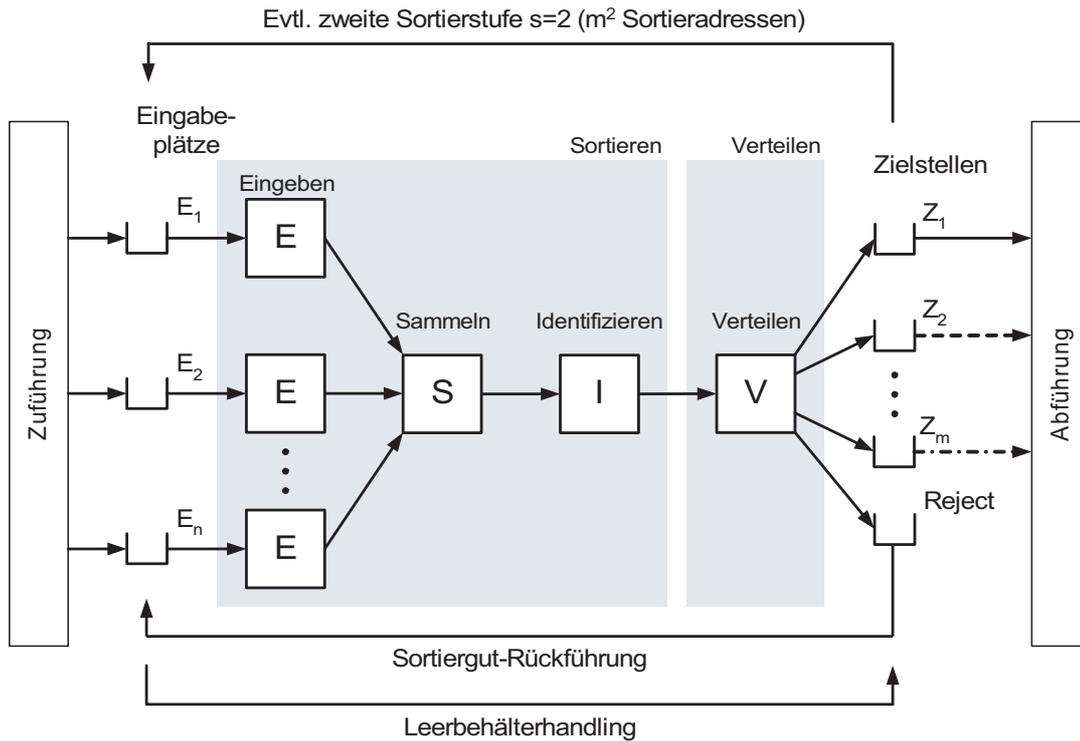


Abbildung 2.6: Prinzipdarstellung einer Sortier- und Verteilanlage (vgl. Arnold (2002b))

Die Anzahl der möglichen Sortieradressen der dargestellten Sortier- und Verteilanlage exklusive der „Reject“-Zielstelle, entspricht bei einer einmaligen Durchführung des oben beschriebenen Sortier- und Verteilvorgangs der Anzahl  $m$  der Zielstellen. Die Anzahl der Sortieradressen kann ohne Erhöhung der Anzahl der Zielstellen erhöht werden, indem weitere Sortierstufen durchgeführt werden. Bei zwei Sortierstufen und somit  $s$  Sortier- und Verteildurchläufen kann die Anzahl der Sortieradressen von  $m$  auf maximal  $m^2$  erhöht werden. Dadurch verlängert sich jedoch der Sortier- und Verteilprozess.

Die Sortier- und Verteilkapazität  $\kappa_k$  (Durchsatz in [Stück/Zeiteinheit]) eines Stückgut-Sortiersystems hängt vom Durchsatz  $\kappa_{k,i}$  der einzelnen Sortier- und Verteilanlagen ab und berechnet sich wie folgt:

$$\kappa_k = \sum_{i=1}^n \kappa_{k,i}.$$

Die Prozesse während der Systemeingabe und -ausgabe sind auf die Gesamtkapazität der Sortier- und Verteilanlagen abzustimmen, so dass diese Prozesse keinen Engpass des Stückgut-Sortiersystems darstellen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird die gesamte Sortier- und Verteilkapazität von Hubs durch den Bezeichner  $\kappa_k$  angegeben. Es erfolgt keine Differenzierung der Sortier- und Verteilkapazität bzgl. verschiedener Sortier- und Verteilanlagen.

### Sendungsverfolgung

Zur lückenlosen Verfolgung der Sendungen entlang ihrer Transportkette vom Versender zum Empfänger werden Sendungsverfolgungssysteme eingesetzt. Sie liefern Auskunft über die Orte und Zeitpunkte der Identifikationsvorgänge. Desweiteren können die bei der Identifikation ermittelten Daten auch zur Analyse des gesamten Transportnetzes herangezogen werden. Sendungsverfolgungssysteme werden auch als Tracking-and-Tracing-Systeme bezeichnet.

KEP-Dienstleister stellen die Daten des Sendungsverfolgungssystems als Servicedienstleistung ihren Kunden zur Verfügung. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn die logistischen Prozesse des Versenders und des Empfängers eng miteinander verzahnt sind. Die Sendungsempfänger sind somit in der Lage, eine verbesserte Planung von Folgeaktivitäten vorzunehmen, wenn es bspw. zu Verspätungen der Sendungsanlieferung kommt (vgl. Städtler-Schumann (1997)).

Eine erste Identifikation der Sendungen erfolgt bei der Abholung vom Versender, womit die Übergabe der Sendung an den Fahrer der Sammeltour dokumentiert ist. Im Verlauf des weiteren Transports werden die Sendungen in der Regel beim Eingang in eine Netzstation und beim Ausgang identifiziert (vgl. Abbildung 2.4). Letztmalig wird die Sendung bei der Übergabe an den Empfänger identifiziert. In Verbindung mit der Empfangsbestätigung des Empfängers ist somit die Sendungsauslieferung nachgewiesen.

Die Daten der Identifikationsvorgänge werden dem Sendungsverfolgungssystem zur Verfügung gestellt. Die Kunden können diese bspw. über das Internet oder ein Call-Center abrufen.

Während der Sendungsbearbeitung in den Netzstationen können weitere Identifikationsvorgänge erforderlich sein, deren Daten aber nicht notwendigerweise dem Sendungsverfolgungssystem zur Verfügung gestellt werden. Beim Einsatz von automatisierten Sortier- und Verteilanlagen wird eine Identifikation der Sendungen benötigt, um die Daten des Identifikationsvorgangs der Anlagensteuerung zu übermitteln. Weitere Identifikationen werden ggf. durchgeführt, wenn der Sendungsübergang zwischen rechtlich unabhängigen Partnern, die an der Sendungsbearbeitung beteiligt sind, zu dokumentieren ist.

## 2.5 Typen von Transportnetzen

Transportnetze lassen sich grundlegend in zwei Netztypen unterteilen, das Direktverkehrsnetz und das Hub-and-Spoke-Netz.

In einem einstufigen Direktverkehrsnetz (vgl. Abbildung 2.7 a) ist jedes Depot über eine Transportrelation direkt mit allen anderen Depots verbunden. Jedes Depot ist zugleich Quelle und Senke eines Hauptlaufs, so dass in jedem Depot die Sendungen bzgl. aller Depots sortiert bzw. von allen Depots gesammelt werden. In einem Direktverkehrsnetz mit  $N$  Depots gibt es maximal  $N \cdot (N - 1)$  Direktverkehrsrelationen. Die Anzahl der Direktverkehrsrelationen wächst somit quadratisch mit der Anzahl der Depots. Dies führt zu einem großen Bedarf an Transportmitteln, die aufgrund der hohen Anzahl von Transportrelationen unter Umständen nur gering ausgelastet sind.

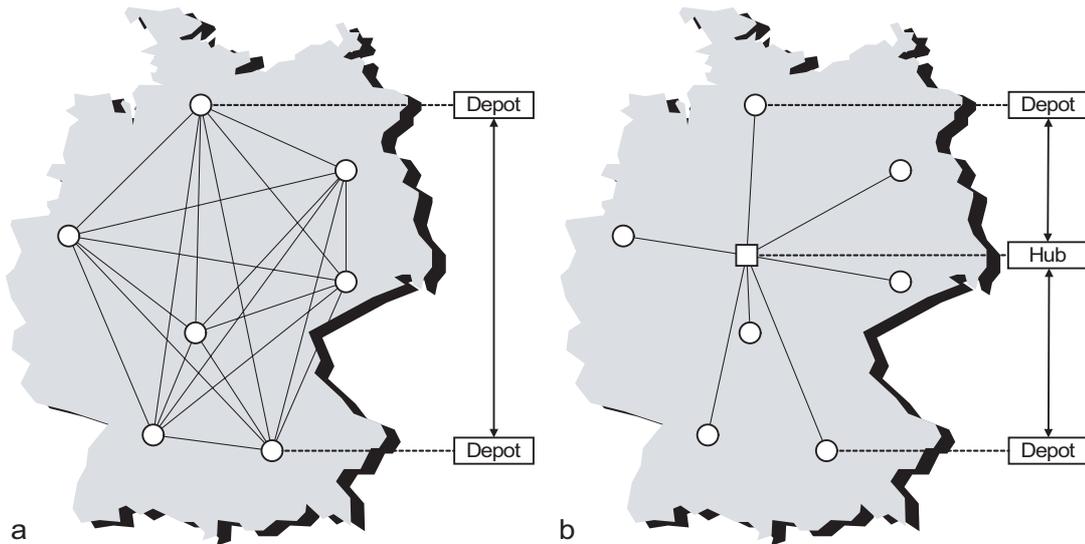


Abbildung 2.7: Darstellung eines Direktverkehrsnetzes (a) und eines Single-Hub-and-Spoke-Netzes (b). Der Sendungstransport in dem Single-Hub-and-Spoke-Netz ist durch einen Sortiervorgang in dem zentralen Hub unterbrochen.

Bei einem Single-Hub-and-Spoke-Netz (vgl. Abbildung 2.7 b) handelt es sich hingegen um ein zweistufiges Transportnetz, bei dem der Sendungstransport durch einen Sortiervorgang in einem zentralen Hub unterbrochen wird. Ausgehend von den Depots laufen die Transportrelationen sternförmig auf den Hub zu. In einem reinen Single-Hub-and-Spoke-Netz existieren keine Direktverkehrsrelationen zwischen den Depots, so dass alle Sendungen über den Hub transportiert und dort sortiert werden. Ausgenommen davon sind diejenigen Sendungen, bei denen sich der Versender in derselben Region wie der Empfänger befindet.

Der Transport in einem Hub-and-Spoke-Netz wird als gebrochener Verkehr bezeichnet, da ein Wechsel des Transportmittels stattfindet. Es kann zudem ein Wechsel des Verkehrsträgers erfolgen, wenn beispielsweise der Hub-Vor- und Hub-Nachlauf mit einem Lastkraftwagen und der Hub-Hauptlauf mit einem Flugzeug erfolgt. Dies ist beispielsweise bei international agierenden KEP-Dienstleistern der Fall.

Der Vorteil von Hub-and-Spoke-Netzen liegt in der geringeren Anzahl von Transportrelationen im Vergleich zu Direktverkehrsnetzen. Durch die Sendungsbündelung werden Transportverbindungen zwischen einzelnen Versand- und Empfangsdepot erst wirtschaftlich, die in einem Direktverkehrsnetz aufgrund der geringen Sendungsmenge nicht wirtschaftlich wären. Zudem können durch die Sendungsbündelung Transportmengenschwankungen einzelner Transportverbindungen ausgeglichen werden.

Ein Nachteil von Hub-and-Spoke-Netzen liegt in der Größe und der damit verbundenen Wirtschaftlichkeit der Sortier- und Verteilanlagen der Hubs. Der Sortierprozess erfolgt in einem engen Zeitfenster, so dass sich die Dimensionierung dieser Anlagen an der während des kurzen Zeitfensters erforderlichen Spitzenlast orientieren muss. Dies wirkt sich negativ auf die Wirtschaftlichkeit der Sortier- und Verteilanlagen aus (vgl. Blunck (2001)).

Die Sortiervorgänge in den Hubs verlängern die für den Hauptlauf benötigte Zeit. Von daher ist vor der Einführung eines Hub-and-Spoke-Netzes zu prüfen, ob genügend Zeitreserven für den Sortiervorgang zur Verfügung stehen. Außerdem reagieren Hub-and-Spoke-Netze sensibel auf Verspätungen schon weniger Transportrelationen.

Aufbauend auf dem grundlegenden Single-Hub-and-Spoke-Netz haben sich die in Abbildung 2.8 dargestellten Mehrhub-Transportnetze entwickelt.

In einer Regionalhubstruktur oder auch zweistufigen Hub-Struktur (vgl. Abbildung 2.8 a) werden die Sendungstransporte der Depots über Regionalhubs abgewickelt. Der Transport der Sendungen zwischen den Regionalhubs erfolgt auf Direktverkehrsrelationen. Die Bezeichnung der zweistufigen Hubstruktur resultiert aus der zweimaligen Sendungssortierung in den Regionalhubs (vgl. Wlček (1998a)).

Innerhalb eines Feederhub-Transportnetzes mit einer dreistufigen Hub-Struktur (vgl. Abbildung 2.8 b) werden die Transporte zwischen den Regionalhubs wie in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz über einen zentralen sog. Megahub abgewickelt, der wiederum über die Feederhubs versorgt wird.

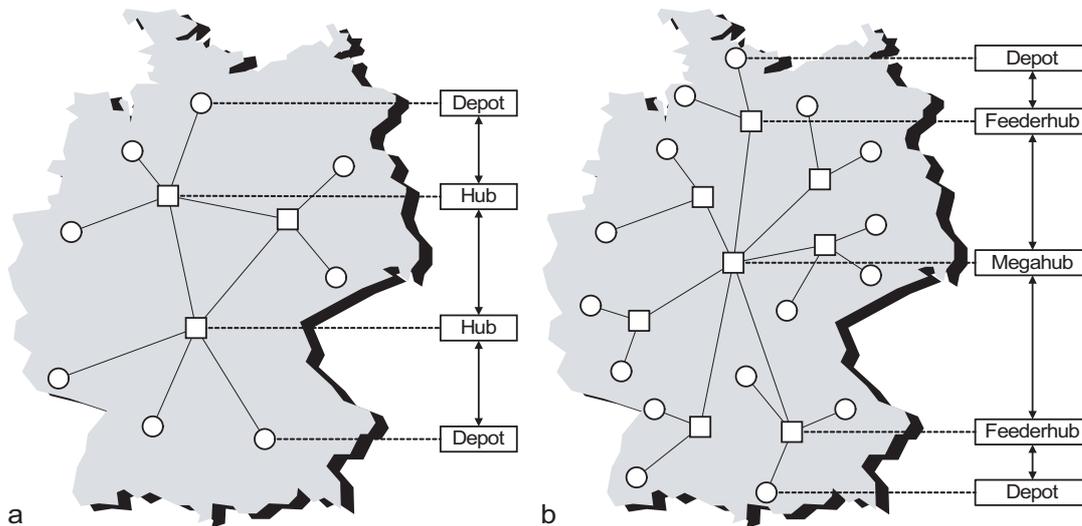


Abbildung 2.8: Darstellung einer Regionalhubstruktur (a) und eines Feederhub-Transportnetzes (dreistufige Hubstruktur) mit einem Mega-Hub (b).

In der Realität sind die bislang genannten Netzstrukturen nur selten in ihrer reinen Form anzutreffen. Stattdessen existieren Mischstrukturen aus den bereits vorgestellten Transportnetzen. Exemplarisch ist eine Mischstruktur in Abbildung 2.9 dargestellt.

In diesem Transportnetz existieren sowohl Direktverkehrsrelationen zwischen Depots als auch ein- und zweistufige Hubstrukturen.

Verschiedenartige Transportnetze der KEP-Dienstleister haben auf die Ausstattung der Depots und Hubs mit Sortier- und Verteilanlagen Auswirkungen, die Arnold (2002b) neben Bauarten und Auswahlkriterien von Sortier- und Verteilanlagen für die KEP-Branche beschreibt. In Linge (2001) und Linge (2003) wird die Neuentwicklung einer Verteilanlage für kleine und mittlere Durchsätze vorgestellt und deren Nutzungspotential

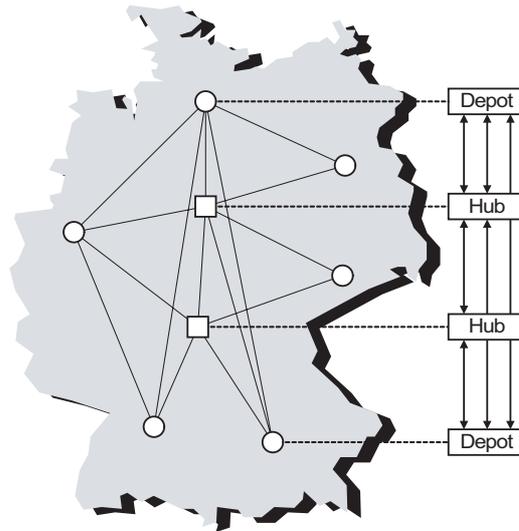


Abbildung 2.9: Darstellung eines gemischten Transportnetzes.

in dezentralen Netzen aufgezeigt, zu denen die Regionalhubstruktur und das Feederhub-Transportnetz gehören.

## 2.6 Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netz im Vergleich

Die wesentlichen Unterscheidungsmerkmale von Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netzen werden im Folgenden vorgestellt.

### Anzahl der Transportrelationen und der Transportmittel

Ein wesentlicher Unterschied zwischen einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz besteht in der Anzahl der Transportrelationen, die erforderlich sind, um alle Transportverbindungen zwischen je zwei Depots zu realisieren.

Die Anzahl der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz (vgl. Abbildung 2.7) mit  $N$  Depots beträgt

$$R_D = N \cdot (N - 1) = N^2 - N.$$

Im Gegensatz hierzu sind in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz die Depots nicht direkt sondern indirekt über einen zentralen Hub verbunden, so dass nur

$$R_{H\&S} = 2 \cdot N$$

Transportrelationen existieren.

In der Abbildung 2.10 ist die Anzahl der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz und einem Single-Hub-and-Spoke gegenübergestellt. Mit wachsender Anzahl  $N$  der

Depots nimmt die Zahl der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz quadratisch, die in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz linear zu.

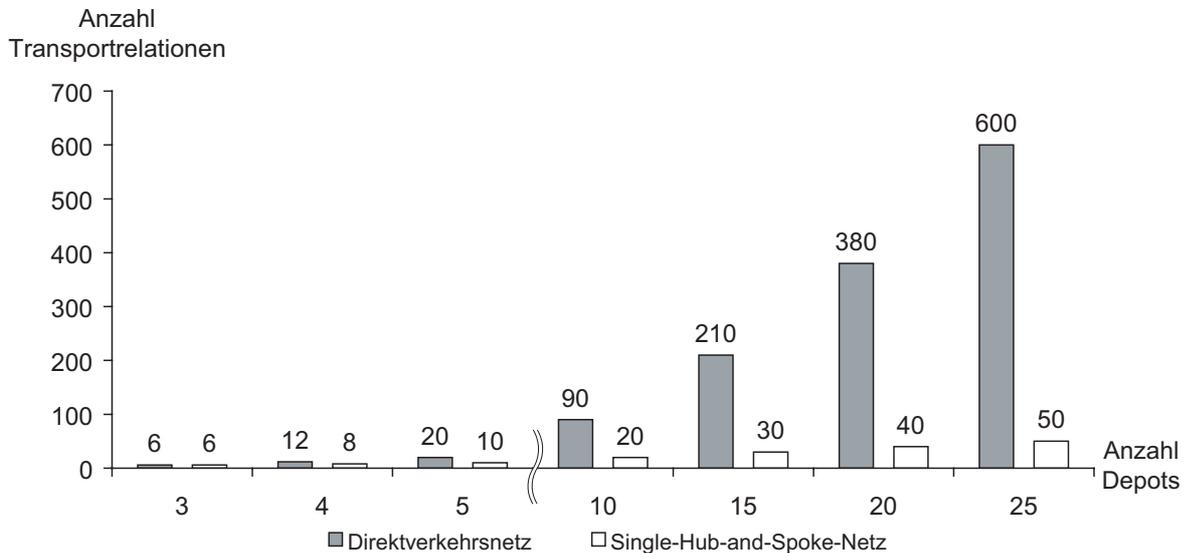


Abbildung 2.10: Anzahl der Transportrelationen in einem Direktverkehrs- und Single-Hub-and-Spoke-Netz in Abhängigkeit der Anzahl  $N$  der Depots.

Unter der Annahme, dass die Transportentfernungen zwischen je zwei Depots in einem Direktverkehrsnetz so groß sind, dass ein Pendelverkehr mit einem Transportmittel zwischen diesen während des Hauptlaufs nicht möglich ist, entspricht die Anzahl der benötigten Transportmittel  $T_D$  der Anzahl der Transportrelationen  $R_D$ . Ist jedoch zwischen einzelnen Depots ein Pendelverkehr möglich, so reduziert sich die Anzahl der benötigten Transportmittel.

In einem Single-Hub-and-Spoke-Netz, in dem zwischen Depots und Hubs ein Pendelverkehr besteht, beträgt die Anzahl der erforderlichen Transportmittel

$$T_{H\&S} = N.$$

In Tabelle 2.2 ist die Anzahl der Transportrelationen und der Transportmittel in einem Direktverkehrsnetz und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz in Abhängigkeit der Depotanzahl  $N$  angegeben.

Unter Vernachlässigung der Kapazitäten der Transportmittel können demnach in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz durch Sendungsbündelung (s. Abschnitt 2.3) mit der gleichen Anzahl von Transportmitteln deutlich mehr Transportverbindungen zwischen je zwei Depots als in einem Direktverkehrsnetz ohne Pendelverkehr realisiert werden. Können beispielsweise in einem Direktverkehrsnetz mit  $T_D = 20$  Fahrzeugen nur fünf Depots direkt miteinander verbunden werden, so ist in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz mit der gleichen Anzahl von Transportmitteln der Sendungstransport zwischen 20 Depots möglich.

Tabelle 2.2: Anzahl von Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz ( $R_D$ ) und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz ( $R_{H\&S}$ ) in Abhängigkeit von der Anzahl  $N$  von Depots.  $T_D$  und  $T_{H\&S}$  geben die Anzahl der benötigten Transportmittel an.

Anzahl Depots $N$	Direktverkehrsnetz		Single-Hub-and-Spoke-Netz	
	$R_D$	$T_D$	$R_{H\&S}$	$T_{H\&S}$
3	6	6	6	3
4	12	12	8	4
5	20	<b>20</b>	10	5
10	90	90	20	10
15	210	210	30	15
20	380	380	40	<b>20</b>
25	600	600	50	25

### Mittlere Länge einer Transportrelation und Transportaufwand

Für die folgende Betrachtung wird ein idealisiertes Transportnetz angenommen, bei dem  $N$  Depots gleichmäßig verteilt auf dem Umfang eines Kreises mit dem Radius  $r = 1$  um den Mittelpunkt  $M$  liegen (vgl. Abbildung 2.11).

Ausgehend von einem beliebigen Depot auf dem Kreisumfang kann die Summe  $L_D$  der Längen der Transportrelationen zu allen anderen Depots in einem Direktverkehrsnetz mit Hilfe des Cosinus-Satzes (vgl. Grosche (1996)) bestimmt werden (in Anlehnung an Vahrenkamp (1998b)):

$$L_D = \sum_{k=1}^N \sqrt{2 - 2 \cdot \cos(2\pi \frac{k}{N})}.$$

Dieser Ausdruck wird vereinfacht zu (vgl. Anhang A):

$$L_D = 2 \cdot \sum_{k=1}^N \sin(\pi \frac{k}{N}).$$

Die Summe der Längen  $L_D^N$  aller Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz mit  $N$  Depots lässt sich damit wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} L_D^N &= N \cdot L_D \\ &= 2 \cdot N \cdot \sum_{k=1}^N \sin(\pi \frac{k}{N}). \end{aligned}$$

Die mittlere Länge  $\bar{L}_D^N$  einer Transportrelation in einem Direktverkehrsnetz mit  $N$  Depots beträgt demnach

$$\bar{L}_D^N = \frac{L_D^N}{N(N-1)}.$$

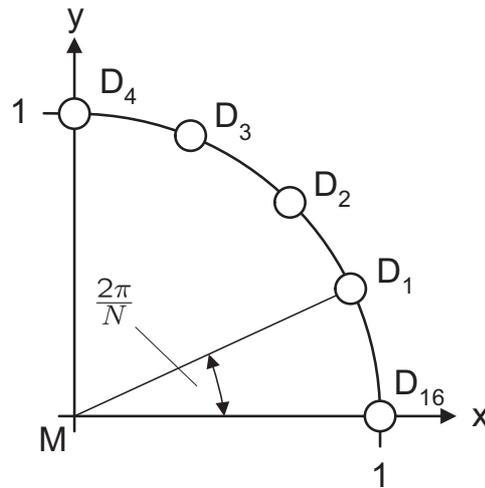


Abbildung 2.11: Idealisierte Lage von  $N = 16$  Depots auf dem Umfang des Einheitskreises, von dem nur der erste Quadrant abgebildet ist (in Anlehnung an Vahrenkamp (1998a)).

Für die mittlere Länge einer Transportrelation  $\bar{L}_D^\infty$  zwischen zwei Depots für den Grenzfalle von unendlich vielen Depots gilt Folgendes (vgl. Anhang A):

$$\begin{aligned} \bar{L}_D^\infty &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_D^N}{N \cdot (N - 1)} \\ &= \frac{4}{\pi} \approx 1,27. \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass der Sendungstransport der in Abbildung 2.11 dargestellten Depots über ein Single-Hub-and-Spoke-Netz abgewickelt wird, bei dem der Hub im Mittelpunkt  $M$  des Kreises liegt, beträgt die Länge jeder Transportrelation

$$L_{H\&S} = 1.$$

Somit beträgt die Länge jeder Transportkette

$$L_{H\&S,K} = 2.$$

Es kann festgehalten werden, dass unter den getroffenen Annahmen die mittlere Länge einer Transportkette  $L_{H\&S,K}$  in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz um den Faktor  $\frac{\pi}{2}$  länger ist als die mittlere Länge  $\bar{L}_D^\infty$  in einem Direktverkehrsnetz.

Die Summe der Längen aller Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz ist jedoch größer als in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz (vgl. Abbildung 2.12). Dies kommt dadurch zustande, dass die Anzahl der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz quadratisch mit der Zahl der Depots steigt.

In Tabelle 2.3 sind die mittleren Längen einer Transportrelation eines Direktverkehrsnetzes und eines Single-Hub-and-Spoke-Netzes in Abhängigkeit der Depotanzahl  $N$  angegeben. Desweiteren ist für jedes Netz die Summe der Längen aller Transportrelationen aufgeführt.

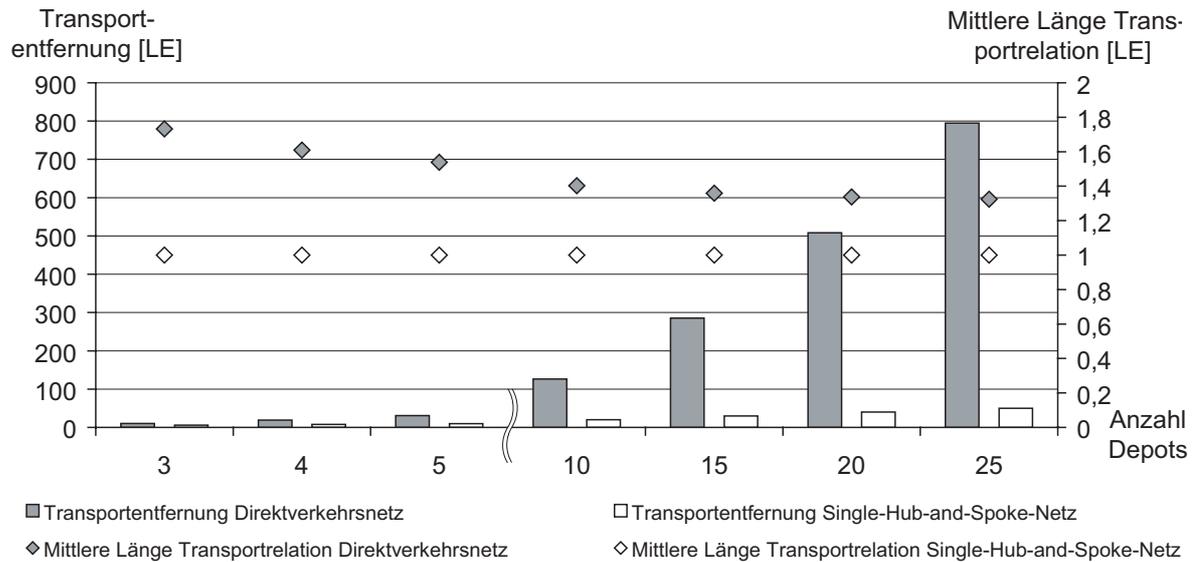


Abbildung 2.12: Die Summen der Längen der Transportrelationen in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz in Abhängigkeit der Depotanzahl  $N$  sind als Säulen dargestellt. Die Rauten geben die mittlere Länge einer Transportrelation in dem jeweiligen Netz an.

Tabelle 2.3: Es sind die Summen der Längen der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz  $L_D^N$  und in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz  $L_{H\&S}^N$  angegeben und in Relation zueinander gesetzt. Außerdem ist die Anzahl der Transportrelationen ( $R_D$  bzw.  $R_{H\&S}$ ) sowie die mittlere Länge der Transportrelationen ( $\bar{L}_D^N$  bzw.  $L_{H\&S}$ ) für beide Netze dargestellt.

Anzahl Depots $N$	Direktverkehrsnetz			Single-Hub-and-Spoke-Netz			
	$R_D$	$L_D^N$	$\bar{L}_D^N$	$R_{H\&S}$	$L_{H\&S}^N$	$L_{H\&S}$	$L_D^N/L_{H\&S}^N$
3	6	10,39	1,73	6	6	1	1,73
4	12	19,31	1,61	8	8	1	2,41
5	20	30,78	1,54	10	10	1	3,08
10	90	126,28	1,40	20	20	1	6,31
15	210	285,43	1,36	30	30	1	9,51
20	380	508,25	1,34	40	40	1	12,71
25	600	794,73	1,32	50	50	1	15,89

Im Folgenden wird eine Einheitssendungsmenge  $E_1$  für das gesamte Transportnetz angenommen sowie identische Sendungsmengen zwischen je zwei Depots. Damit wird der Transportaufwand  $A_D^N$  des Direktverkehrsnetzes mit  $N$  Depots, der sich als Produkt der Sendungsmenge auf einer Transportrelation (in Mengeneinheiten [ME]) und der mittleren Länge  $\bar{L}_D^N$  dieser Transportrelation (in Längeneinheiten [LE]) ergibt, wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}
 A_D^N &= \underbrace{\frac{E_1}{N \cdot (N-1)} \cdot \bar{L}_D^N}_{\text{Durchschnittlicher Transportaufwand pro Transportrelation}} \cdot \underbrace{N \cdot (N-1)}_{\text{Anzahl der Transportrelationen}} \\
 &= E_1 \cdot \bar{L}_D^N.
 \end{aligned}$$

Für den Grenzfall von unendlich vielen Depots gilt für den Transportaufwand  $A_D^\infty$  Folgendes:

$$\begin{aligned}
 A_D^\infty &= \lim_{N \rightarrow \infty} A_D^N \\
 &= E_1 \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{L}_D^N \\
 &= E_1 \cdot \frac{4}{\pi}.
 \end{aligned}$$

Analog dazu berechnet sich der Transportaufwand  $A_{H\&S}$  in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz:

$$\begin{aligned}
 A_{H\&S} &= \underbrace{\frac{E_1}{N} \cdot L_{H\&S}}_{\text{Transportaufwand pro Transportrelation}} \cdot \underbrace{2 \cdot N}_{\text{Anzahl der Transportrelationen}} \\
 &= 2 \cdot E_1 \cdot L_{H\&S} \\
 &= 2 \cdot E_1.
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ist festzustellen, dass der Transportaufwand in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz unter den getroffenen Annahmen ebenso wie die Länge der Transportketten um den Faktor  $\frac{\pi}{2}$  größer ist als in einem Direktverkehrsnetz.

### Folgen von Verspätungen

Verspätungen von Transporten während des Hauptlaufs verzögern die Sortiervorgänge in den Netzstationen (Depots und Hubs), was wiederum einen verspäteten Beginn der Transporte des Hub-Nachlaufs bzw. der Verteiltouren zur Folge haben kann. Sendungen können dadurch möglicherweise nicht vor dem garantierten Zustellzeitpunkt an den Empfänger übergeben werden, so dass sich dadurch der Servicegrad des KEP-Dienstleisters vermindert.

Im Folgenden wird angegeben, welcher Anteil des gesamten Sendungsaufkommens eines Direktverkehrs- und eines Single-Hub-and-Spoke-Netzes von der Verspätung einer oder mehrerer Transportrelationen betroffen ist. Es wird davon ausgegangen, dass die Höhe

des Sendungsaufkommens zwischen je zwei Depots identisch ist. Desweiteren wird angenommen, dass die Verspätungen einzelner Transportrelationen in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz so groß sind, dass die nachfolgenden Transporte den Hub verlassen haben, bevor die Sortierung der verspätet eingetroffenen Sendungen abgeschlossen ist.

Treten in einem Direktverkehrsnetz mit  $N$  Depots auf  $i$  Transportrelationen des Hauptlaufs Verspätungen auf, so beträgt der Anteil des davon betroffenen Sendungsaufkommens

$$d_D^i = \frac{i}{N(N-1)} \quad \text{mit } i \leq N \cdot (N-1).$$

In einem Direktverkehrsnetz hat die Verspätung einer Transportrelation keine Auswirkung auf andere Transportrelationen des Hauptlaufs sondern lediglich auf die sich anschließenden Verteiltouren des Nachlaufs.

In einem Single-Hub-and-Spoke-Netz können Verspätungen von Transportrelationen während des Hub-Vorlaufs- bzw. Hub-Nachlaufs mit unterschiedlichen Auswirkungen auftreten.

Eine verspätete Transportrelation des Hub-Vorlaufs hat im Gegensatz zu einem Direktverkehrsnetz Auswirkungen auf mehrere sich anschließende Transportrelationen. Tritt auf einer solchen Transportrelation eine Verspätung auf, hat dies zur Folge, dass Sendungen für  $N-1$  Empfangsdepots nicht mehr zum vorgegebenen Zeitpunkt das Hub und somit auch nicht mehr rechtzeitig das Empfangsdepot erreichen. Die Verspätung eines Hub-Vorlaufs bedingt zudem auch eine Verspätung des Hub-Nachlaufs zu dem Depot, das Ausgangsdepot der verspäteten Transportrelation des Hub-Vorlaufs war. Somit erreichen weitere Sendungen verspätet das Empfangsdepot.

Ausgehend von einem Single-Hub-and-Spoke-Netz mit  $N$  Depots und  $i$  verspäteten Transportrelationen des Hub-Vorlaufs beträgt der Anteil des verspätet im Empfangsdepot eintreffenden Sendungsaufkommens

$$d_{H\&S,HVL}^i = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{k=1}^i 2(N-k) \quad \text{mit } i \leq N.$$

Bei einer Verspätung während des Hub-Nachlaufs gilt für den Anteil des betroffenen Sendungsaufkommens:

$$\begin{aligned} d_{H\&S,HNL}^i &= \frac{i(N-1)}{N(N-1)} \\ &= \frac{i}{N} \quad \text{mit } i \leq N. \end{aligned}$$

Verspätungen während des Hub-Vorlaufs wirken sich somit auf einen größeren Anteil des Sendungsaufkommens aus als Verspätungen während des Hub-Nachlaufs.

In der folgenden Tabelle 2.4 ist der Anteil der Transportketten in einem Direktverkehrsnetz und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz angegeben, die von der Verspätung genau einer Transportrelation betroffen sind.

Mit zunehmender Anzahl der Depots sinkt in beiden Transportnetzen der Anteil des Sendungsaufkommens, das von einer verspäteten Transportrelation betroffen ist (vgl. Abbildung 2.13).

Tabelle 2.4: Anteil des Sendungsaufkommens in einem Direktverkehrs- ( $d_D^1$ ) und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz ( $d_{H\&S,HVL}^1$  und  $d_{H\&S,HNL}^1$ ), das von der Verspätung genau einer Transportrelation betroffen ist. In einem Single-Hub-and-Spoke-Netz wird zwischen der Verspätung des Hub-Vorlaufs und des Hub-Nachlaufs unterschieden.

Anzahl Depots $N$	$d_D^1$ [%]	$d_{H\&S,HVL}^1$ [%]	$d_{H\&S,HNL}^1$ [%]	$d_{H\&S,HVL}^1/d_D^1$	$d_{H\&S,HNL}^1/d_D^1$
3	16,66	66,66	33,33	4	2
4	8,33	50,00	25,00	6	3
5	5,00	40,00	20,00	8	4
10	1,11	20,00	10,00	18	9
15	0,48	13,33	6,67	28	14
20	0,26	10,00	5,00	38	19
25	0,17	8,00	4,00	48	24
50	0,04	4,00	2,00	98	49
100	0,01	2,00	1,00	198	99

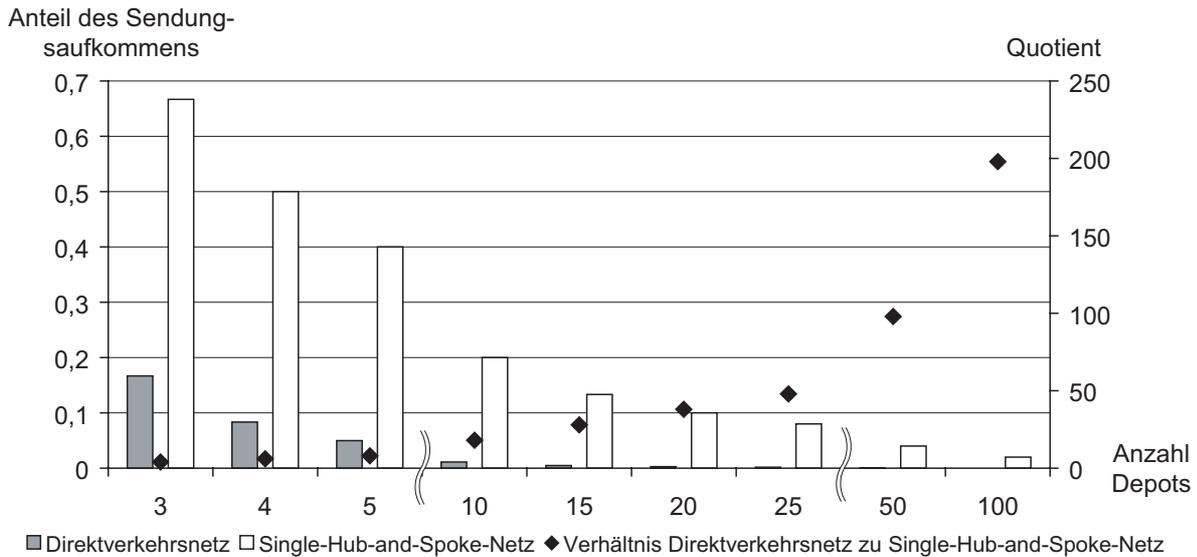


Abbildung 2.13: Anteil des Sendungsaufkommens in einem Direktverkehrs- und einem Single-Hub-and-Spoke-Netz in Abhängigkeit der Depotanzahl, das von der Verspätung einer Transportrelation betroffen ist (Säulen). Die Verspätung im Single-Hub-and-Spoke-Netz wird während des Hub-Vorlaufs angenommen. Die Rauten zeigen jeweils das Verhältnis der Anteile.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz die Verspätung einer einzelnen Transportrelation einen größeren Anteil von verspäteten Sendungen ver-

ursacht. Bedingt ist dies durch die Tatsache, dass auf einer Transportrelation eines Single-Hub-and-Spoke-Netzes die Sendungsmengen mehrerer Transportverbindungen gebündelt transportiert werden. Dieser Nachteil eines Single-Hub-and-Spoke-Netzes gegenüber einem Direktverkehrsnetz steigt mit zunehmender Anzahl der Depots stark an.



# 3 Planung von Transportnetzen

Gegenstand des folgenden Kapitels ist nach Einordnung des untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. in den Kontext der Planung von Transportnetzen, die Beschreibung der Planungsprobleme aus der Klasse der Hub-Location-Probleme. Daran schließt sich ein Literaturüberblick zu kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problemen an.

## 3.1 Planungsebenen

Die Transportnetzplanung lässt sich in drei Planungsebenen unterteilen, die strategische, taktische und operative Planung (vgl. Crainic und Laporte (1997), Wlček (1998a)). Diese unterscheiden sich hinsichtlich der zeitlichen Fristigkeit sowie des Detaillierungsgrads.

Die strategische Planung eines Transportnetzwerks ist langfristig wirksam und bestimmt somit die Ausrichtung und die Entwicklung des Transportunternehmens. Ein wesentlicher Bestandteil der Planung ist die Bestimmung der Anzahl und Lage der Depots und Hubs (Netzstationen), die maßgeblich für die Leistungsfähigkeit aber auch für die Kosten des Transportnetzes verantwortlich sind. Zur Fällung dieser Entscheidungen müssen bereits im Vorfeld der Planung Informationen über das zu erwartende Sendungsaufkommen vorliegen. Daran schließt sich die Dimensionierung der Netzstationen an.

Neben der Planung von stationären Einrichtungen des Transportnetzwerks sind in dieser Planungsphase auch Entscheidungen über die einzusetzenden Verkehrsträger zu fällen, denn abhängig von der Transportentfernung innerhalb des Netzes bestimmen diese die Laufzeiten der Sendungstransporte.

Im Gegensatz zur strategischen Planung beschäftigt sich die taktische Transportnetzplanung mit mittelfristig wirksamen Entscheidungen. In dieser Planungsphase wird eine Zuordnung der auszuführenden Aufgaben zu den in der strategischen Planung beschafften Ressourcen vorgenommen.

Taktische Entscheidungen betreffen nach Crainic (2000) die Gestaltung des Transportnetzwerks, u. a. werden den Transportrelationen Transportmittel zugeordnet. Dabei unterscheidet Crainic die Probleme des Frequency-Network- sowie des Dynamic-Network-Design. Im Rahmen von Frequency-Network-Design-Problemen wird die Anzahl der Transporte während einer Planungsperiode auf einzelnen Transportrelationen bestimmt. Hingegen wird bei Problemen des Dynamic-Network-Designs eine zeitliche Terminierung der Transporte sowie weiterer Tätigkeiten (bspw. Sortiervorgänge in den Hubs) vorgenommen. Desweiteren wird die Routenfolge festgelegt, auf der die Sendungen jeder

Quelle-Senke-Beziehung durch das Transportnetzwerk befördert werden, was als Routing bezeichnet wird.

Weiterhin werden in der taktischen Planungsphase die Betriebsstrategien der Netzstationen bestimmt und Personal- und Ressourcen-Einsatzpläne erstellt. Am Ende einer Planungsperiode kann eine Repositionierung der Transportmittel vorgenommen werden, um dem prognostizierten Transportbedarf der nächsten Periode gerecht zu werden.

Die operative Planung obliegt den Betriebsleitern und Disponenten der Depots und Hubs. Die Entscheidungen betreffen die Organisation des Materialflusses in den Netzstationen und die Kooperation der Netzstationen untereinander. Hierbei geht es u. a. um die Personaleinsatzplanung, die Wartung der technischen Einrichtungen und die Festlegung der Abläufe in den Netzstationen (vgl. Irnich (2002)).

## 3.2 Hub-Location-Probleme

Die strategischen Modelle zur Bestimmung der Anzahl und Lage von Hubs werden als Hub-Location-Probleme bezeichnet. Außer bei KEP-Dienstleistern treten diese Planungsprobleme auch bei Luftverkehrsgesellschaften (vgl. Adler und Berechmann (2001)) sowie im Telekommunikationsbereich (vgl. Klineciewicz (1998)) auf.

Ausgangsbasis der Planung von Hub-and-Spoke-Netzen bei KEP-Dienstleistern ist eine Menge von gegebenen Depotstandorten, zwischen denen es ein bestimmtes Sendungsaufkommen gibt. Abhängig von der Art des Hub-Location-Problems kann der Transport der Sendungen zwischen je zwei Depots auf Direktverkehrsrelationen oder Transportketten mit einem oder mehreren Hubs erfolgen, die unterschiedliche Kosten verursachen. Auf Transportrelationen, deren Quelle oder Senke ein Hub ist, sind die spezifischen Transportkosten einer Sendung aufgrund der Sendungsbündelung (s. Abschnitt 2.3) geringer als auf Direktverkehrsrelationen.

Ziel des Planungsproblems ist es, die Anzahl und Lage der Hubstandorte sowie die Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen derart zu bestimmen, dass ein gegebenes Zielkriterium minimiert wird. In der Regel setzt sich dieses aus den Fixkosten für die Installation der Hubs sowie den Transportkosten zusammen.

Die Bestimmung der Anzahl und Lage der Hubstandorte wird als Lokationsproblem bezeichnet. Im Rahmen des Allokationsproblems erfolgt die Zuordnung von Depotstandorten zu Hubstandorten, wodurch die Transportrelationen und somit auch die Transportmengen bestimmt werden. Hub-Location-Probleme werden deshalb auch als Lokations-Allokations-Probleme bezeichnet.

Analog zur klassischen Standortplanung (vgl. Domschke und Drexl (1996)) wird bei Hub-Location-Problemen ebenfalls zwischen kontinuierlichen und diskreten Standortplanungsmodellen für Hubs unterschieden. Bei kontinuierlichen Modellen ist jeder Punkt der Planungsebene ein potentieller Standort eines Hubs (vgl. Campbell (1990) und Aykin und Brown (1992)), wohingegen bei diskreten Problemen die Menge der potentiellen Hubstandorte auf eine Menge von Standorten eingeschränkt wird.

Darüber hinaus gibt es eine Menge weiterer Problemausprägungen, bei denen u. a. die Anzahl der zu bestimmenden Hubstandorte vorgegeben ist ( $p$ -Hub-Median-Problem) oder

die Sortierkapazität der Hubs beschränkt ist.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird ein diskretes Hub-Location-Problem mit beschränkter Sortierkapazität der Hubs untersucht.

### 3.2.1 Struktureigenschaften der Hub-and-Spoke-Netze

Die den Hub-Location-Problemen zu Grunde liegenden Struktureigenschaften der Transportnetze werden von Campbell (1994b) klassifiziert und sollen in diesem Abschnitt anhand von Abbildung 3.1 beschrieben werden.

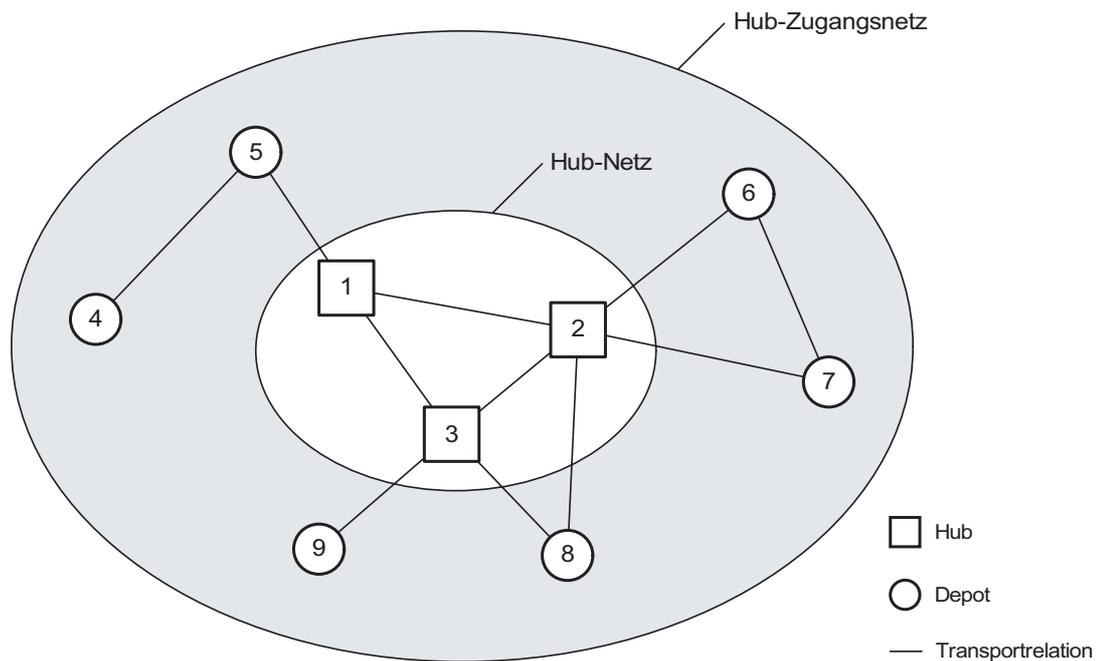


Abbildung 3.1: Darstellung eines Hub-and-Spoke-Netzwerks mit drei Hubs und sechs Depots.

Campbell unterteilt dazu das gesamte Transportnetz, das er als ungerichteten Graphen interpretiert, in ein Hub-Netz und ein Hub-Zugangs-Netz und nimmt die Klassifikation anhand der topologischen Merkmale dieser Teilnetze vor.

Das Hub-Netz umfasst die Hubs sowie die Transportrelationen zwischen den Hubs. In Abbildung 3.1 umfasst das Hub-Netz die Knotenmenge  $V_{HN} = \{1,2,3\}$  und die Kantenmenge  $E_{HN} = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ . Existiert zwischen je zwei Knoten des Hub-Netzes eine Kante, d. h. handelt es sich um einen vollständigen Graphen, so sind alle Transportrelationen determiniert und im Rahmen der Lösung des Hub-Location-Problems sind nur noch die Standorte der Hubs zu bestimmen. Stehen nicht ausreichend Transportmittel für den Transport auf allen möglichen Relationen des Hub-Netzes zur Verfügung, so müssen im Rahmen der Hub-Location-Probleme auch die Transportrelationen innerhalb des Hub-Netzes bestimmt werden. Diese Planungsprobleme werden als Hub-Arc-Location-Probleme bezeichnet.

Das Hub-Zugangsnetz umfasst alle Depots, alle Transportrelationen zwischen diesen sowie die Transportrelationen zwischen den Depots und den Hubs. Das Hub-Zugangsnetz des dargestellten Transportnetzes umfasst die Knotenmenge

$$V_{HZN} = \{4,5,6,7,8,9\}$$

und die Kantenmenge

$$E_{HZN} = \{(4,5),(5,1),(6,2),(6,7),(7,2),(8,2),(8,3),(9,3)\}.$$

Ist ein Depot mit genau einem Hub über eine Transportrelation verbunden (Depot 9), so wird dies als einfache Zuordnung (engl. *single allocation*) eines Depots zu einem Hub bezeichnet. Bestehen ausgehend von einem Depot (Depot 8) mehrere Transportrelationen zu unterschiedlichen Hubs, so handelt es sich um mehrfache Zuordnung (engl. *multiple allocation*).

Der Zugang von einem Knoten des Hub-Zugangsnetzes zu einem Hub kann entweder direkt (Depot 9) oder indirekt (Depot 4) sein. Desweiteren kann eine Direktverkehrsrelation zwischen zwei Knoten des Hub-Zugangsnetzes (Kante (6,7)) zugelassen oder verboten sein.

In einigen Planungsmodellen wird zusätzlich die maximale Sortierkapazität der Hubs mit in Betracht gezogen. Diese Modelle werden als kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Modelle bezeichnet.

### 3.2.2 Klassifikation von Hub-Location-Problemen

Im folgenden Abschnitt werden die unter der Bezeichnung Hub-Location-Probleme zusammengefassten Ausprägungen dieser Planungsprobleme vorgestellt. Zu jeder Ausprägung existiert ein analoges Modell der klassischen Standortplanung, das ebenfalls angegeben und kurz erläutert wird.

Bei den Planungsmodellen der klassischen Standortplanung tritt die Nachfrage nach einem bestimmten Service in einem Nachfrageknoten auf. Im Gegensatz dazu besteht die Nachfrage bei Hub-Location-Problemen nach einem Transport von einem bestimmten Angebots- zu einem bestimmten Nachfrageknoten. Der Transport kann durch einen oder mehrere Hubs unterbrochen sein, in denen die Sendungen umgeschlagen bzw. sortiert werden. Dadurch ist es möglich, Sendungen zu bündeln (vgl. Abschnitt 2.3) oder auf mehrere Transporte zu splitten.

Die in der Literatur untersuchten Modelle der Hub-Location-Probleme lassen sich nach Campbell (1994a) in folgende Klassen unterteilen:

#### ***p*-Hub-Median-Probleme**

Die Klasse der *p*-Hub-Median-Probleme umfasst alle Hub-Location-Probleme, bei denen aus der Menge der potentiellen Hub-Standorte eine vorgegebene Anzahl von *p* Standorten als Hubs bestimmt werden sollen, so dass die Transportkosten minimal sind (vgl. Campbell (1994a), Campbell (1996)). Dabei werden keine Fixkosten für die Installation der Hubs in der Zielfunktion berücksichtigt.

Dieses Planungsproblem ist analog zu den  $p$ -Median-Problemen der Standortplanung (vgl. Domschke und Drexl (1996)). Dabei geht es darum, in einem Graphen genau  $p$  Standorte (Mediane) derart zu bestimmen, dass die Summe der gewichteten kürzesten Transportentfernungen zu allen Knoten des Graphen ausgehend von den Medianen minimal ist.

### **Hub-Location-Probleme im engeren Sinne**

Hub-Location-Probleme im engeren Sinne (i. e. S.) stellen eine Ausprägung der Hub-Location-Probleme dar. Sie unterscheiden sich von den  $p$ -Hub-Median-Problemen insofern, als die Anzahl der zu errichtenden Hubs nicht vorgegeben ist, sondern auch Bestandteil des Optimierungsproblems ist. Dabei gehen neben den Transportkosten auch die Fixkosten für die Errichtung eines Hubstandorts mit in die Zielfunktion ein (vgl. Campbell (1994a)). Die Entscheidung über die Installation eines Hubs an einem Standort wird durch eine binäre Entscheidungsvariable bestimmt.

Hub-Location-Probleme i. e. S. entsprechen den Warehouse-Location-Problemen der diskreten Standortplanung (vgl. Neumann (1996) und Domschke und Drexl (1996)). Im Rahmen dieser Planungsprobleme wird die Anzahl und die Lage von Lagerstandorten unter der Maßgabe geplant, dass die Nachfrage der Kunden befriedigt wird. Ziel ist die Minimierung der Summe von Transport-, Lagerhaltungs- und Fixkosten für die Installation der Hubs.

### **$p$ -Hub-Center-Probleme**

Im Rahmen der  $p$ -Hub-Center-Probleme wird die Lage von  $p$  Hubs derart bestimmt, dass die maximalen Transportkosten einer Transportkette minimiert werden. Als  $p$ -Hub-Center wird die Menge der potentiellen Hub-Standorte bezeichnet, die die Zielfunktion minimiert.  $p$ -Hub-Center-Probleme eignen sich für Transportnetze, in denen zeitkritische Fracht transportiert wird (vgl. Campbell (1994a)).

Als mögliche Modifikation des Problems stellt Campbell vor, die maximalen Transportkosten zwischen je zwei Knoten des Netzwerks zu minimieren. Werden die Transportkosten als Zeiten interpretiert, so könnte dieses Modell u. a. zur Planung von Transportnetzen dienen, in denen die maximale Flugzeit von Piloten minimiert werden soll. Campbell beschreibt als weitere Ausprägung des  $p$ -Hub-Center-Problems, die Minimierung der maximalen Transportkosten des Hub-Vorlaufs bzw. Hub-Nachlaufs.

In der klassischen Standortplanung dienen  $p$ -Center-Probleme zur Bestimmung von Standorten zentraler Einrichtungen wie z. B. Feuerwachen, mit dem Ziel, den maximalen Fahrweg zu minimieren (Domschke und Drexl (1996), Current et al. (2002)).

### **Hub-Covering-Probleme**

Die Zielsetzung der Hub-Covering-Probleme ist die Bestimmung einer Menge von Hubstandorten aus der Menge der potentiellen Hub-Standorte unter der Bedingung, dass alle Transportketten überdeckt sind. Dabei gilt eine Transportkette als überdeckt, wenn die Ausprägung einer Eigenschaft dieser Transportkette einen vorgegebenen Wert nicht

überschreitet. Darf beispielsweise für jede Transportkette eine maximale Transportzeit nicht überschritten werden, so sind die Anzahl und Lage der Hubs unter Einhaltung dieser Zeitrestriktion zu bestimmen.

In den grundlegenden Modellen der Hub-Covering-Probleme ist die Summe der Fixkosten der Hubs zu minimieren. Erweiterte Modellierungen lassen die Forderung nach einer Überdeckung aller Transportketten fallen und bestrafen eine Nicht-Überdeckung einzelner Transportketten durch die zusätzliche Aufnahme eines Strafkostenterms in die Zielfunktion (vgl. Campbell (1994a)).

Die zu Hub-Covering-Problemen analogen Probleme der klassischen Standortplanung sind die Facility-Covering-Probleme. Diese werden zur Planung von Einrichtungen eingesetzt, bei denen die Lage der Einrichtungen eine gewisse Eigenschaft in Bezug zur Lage der Nachfrageknoten aufweisen muss. Das Ziel dieser Probleme ist es, eine minimale Anzahl von Einrichtungen zu bestimmen, so dass alle Nachfrageknoten überdeckt sind. Ein Nachfrageknoten  $j$  wird dann als überdeckt bezeichnet, wenn bspw. die Entfernung von einer Einrichtung  $i$  zu einem Nachfrageknoten  $j$  kleiner gleich einer gegebenen Entfernung  $E_{geg}$  ist:  $e_{ij} \leq E_{geg}$ . (vgl. Toregas et al. (1971)).

Einen interessanten Überblick über den Stand der Forschungen auf dem Gebiet der kontinuierlichen Covering-Probleme gibt Plastria (2002). Marianov und Serra (2002) stellen die Forschungen zur Standortplanung von zentralen öffentlichen Einrichtungen (bspw. von Rettungsdiensten) mit Hilfe der Covering-Probleme umfassend dar.

In Tabelle 3.1 sind die bislang vorgestellten Optimierungsprobleme der Klasse der Hub-Location-Probleme und ihre Analoga der klassischen Standortplanung zusammengefasst.

Tabelle 3.1: Darstellung der zu Hub-Location-Problemen zusammengefassten Planungsprobleme.

Hub-Location-Probleme	Anzahl der Hubs	Analogon der klassischen Standortplanung
$p$ -Hub-Median-Problem	$p$	$p$ -Median-Problem
Hub-Location-Problem i. e. S.	variabel	Warehouse-Location-Problem
$p$ -Hub-Center-Problem	$p$	$p$ -Center-Problem
Hub-Covering-Problem	variabel	Facility-Covering-Problem

### Hub-Arc-Location-Probleme

Im Gegensatz zu den bislang vorgestellten Problemen werden im Rahmen der Hub-Arc-Location-Probleme nicht nur die Standorte der Hubs, sondern auch das Design des Transportnetzes bestimmt.

Die Zielsetzung der Hub-Arc-Location-Probleme ist die Minimierung der Transportkosten unter der Maßgabe, dass genau  $q$  Kanten zwischen den Knoten des Hub-Netzes, die potentiellen Hubstandorten entsprechen, bestimmt werden (vgl. Abschnitt 3.2.1). Dadurch werden simultan auch die Hubstandorte bestimmt. Weiterhin wird gefordert, dass

jede Transportkette zwischen je zwei Depots mindestens einen Hub beinhaltet, somit sind keine Direktverkehrsrelationen zulässig (vgl. Campbell et al. (2003) und Campbell et al. (2002)).

### **3.3 Kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Probleme - Ein Literaturüberblick**

Die Planung von Hub-and-Spoke-Netzen ist ein junges Forschungsgebiet des Operations Research, das erst seit Mitte der achtziger Jahre wissenschaftlich an Bedeutung gewonnen hat. Der Betrieb des ersten Hub-and-Spoke-Netzes wurde jedoch schon 1973 in den USA durch das Transportunternehmen Federal Express aufgenommen.

O’Kelly (1986) veröffentlicht den ersten Artikel auf dem Gebiet der Hub-Location Problematik und beschreibt somit erstmalig die erzielbaren Einsparungen in einem Hub-and-Spoke-Netz gegenüber einem Direktverkehrsnetz bedingt durch die Reduzierung der Anzahl der Transportverbindungen und die Konzentration auf wenige Hubstandorte. In dieser Veröffentlichung behandelt O’Kelly analytisch die Fragestellung nach der optimalen Lokalisation von einem bzw. zwei Hubs in einem Flugnetz.

O’Kelly (1987) formuliert erstmalig ein quadratisches Optimierungsproblem eines Hub-Location-Problems mit einer vorgegebenen Anzahl von  $p$  Hubstandorten, zu dessen Lösung er zwei Heuristiken entwickelt. Dieses Modell bildet die Grundlage vieler weiterer Veröffentlichungen.

Seit diesen wegweisenden Veröffentlichungen zu Hub-Location-Problemen ist eine Vielzahl von Beiträgen erschienen. Einen ersten Literaturüberblick gibt Campbell (1994b), der auch eine Klassifikation von Hub-Location-Problemen vornimmt. Neben den Hub-Location-Problemen aus dem Bereich der Transportplanung werden auch Veröffentlichungen zu ähnlichen Problemen aus dem Telekommunikationsbereich vorgestellt. Jüngere Literaturüberblicke wurden von Bryan und O’Kelly (1999) und Mayer (2001) erstellt.

Im Folgenden wird ein Überblick über den Stand der Forschung auf dem Gebiet der kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Probleme gegeben (vgl. Tabelle 3.2). Dabei werden sowohl die Optimierungsmodelle als auch die Verfahren zur Lösung dieser Modelle vorgestellt.

#### **3.3.1 Erstmalige Formulierung eines kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems im engeren Sinne**

Campbell (1994a) stellt erstmalig eine grundlegende Formulierung eines kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. auf, bei dem die Kapazität der Hubs beschränkt ist. Basis ist das folgende nicht kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S.:

Tabelle 3.2: Übersicht der Veröffentlichungen auf dem Gebiet der kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Probleme

Veröffentlichung	Ausprägung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems	Lösungsmethode
Campbell (1994a)	Hub-Location-Problem i. e. S. mit einfacher Zuordnung	nur Formulierung
Aykin (1994)	$p$ -Hub-Median-Problem	unvollständiges Branch-and-Bound-Verfahren, Heuristik
Ernst und Krishnamoorthy (1999)	Hub-Location-Problem i. e. S. mit einfacher Zuordnung	Heuristik, Branch-and-Bound-Verfahren
Ebery et al. (2000)	Hub-Location-Problem i. e. S. mit mehrfacher Zuordnung	Heuristik

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m W_{ij} C_{ijkm} X_{ijkm} + \sum_k F_k Y_k \quad (3.1)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \sum_k \sum_m X_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \quad (3.2)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_k \quad \forall i, j, k, m \quad (3.3)$$

$$X_{ijkm} \leq Y_m \quad \forall i, j, k, m \quad (3.4)$$

$$Y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \quad (3.5)$$

$$0 \leq X_{ijkm} \leq 1 \quad \forall i, j, k, m \quad (3.6)$$

In dem vorliegenden Optimierungsproblem wird das Sendungsaufkommen  $W_{ij}$  pro Planungsperiode zwischen je zwei Standorten  $i$  und  $j$  angegeben. Der Transport der Sendungen kann über einen oder zwei Hubs erfolgen, Direktverkehrsrelationen sind in diesem Modell nicht zulässig.

Die Transportkosten  $C_{ijkm}$  einer Sendungseinheit von  $i$  nach  $j$  über die Hubs  $k$  und  $m$  entsprechen der Summe der Transportkosten des Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachlaufs und berechnen sich wie folgt:

$$C_{ijkm} = C_{ik} + \alpha \cdot C_{km} + C_{mj}$$

Durch den Parameter  $\alpha \in (0,1)$  wird die Transportkosteneinsparung während des Hub-

Hauptlaufs aufgrund der Sendungsbündelung ausgedrückt. Die Variable  $F_k$  gibt die Fixkosten für die Installation eines Hubs am Standort  $k$  an.

Das Ziel des vorliegenden Optimierungsproblems ist es, die Summe der Transportkosten und der Fixkosten für die Installation der Hubs zu minimieren (s. Zielfunktion (3.1)). Ergebnisse der Optimierung sind die Lage und Anzahl derjenigen Standorte  $k$ , an denen ein Hub errichtet wird sowie die Transportmengen, die auf den einzelnen Transportrelationen befördert werden.

Entscheidungsvariablen des Optimierungsproblems sind die Variablen  $Y_k$  und  $X_{ijkm}$ .  $Y_k$  ist eine binäre Entscheidungsvariable, die folgende Werte annimmt:

$$Y_k = \begin{cases} 1, & \text{am Standort } k \text{ wird ein Hub errichtet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

Die Entscheidungsvariable  $X_{ijkm}$  gibt den Anteil des Sendungsaufkommens  $W_{ij}$  an, der über die Hubs  $k$  und  $m$  transportiert wird.

Die Nebenbedingungen (3.2) gewährleisten, dass das gesamte Sendungsaufkommen  $W_{ij}$  von  $i$  nach  $j$  transportiert wird. Die Nebenbedingungen (3.3) und (3.4) stellen sicher, dass Sendungstransporte nur über den Standort  $k$  bzw.  $m$  stattfinden können, wenn an diesen Standorten ein Hub installiert wird.

Durch die Erweiterung des obigen Optimierungsproblems (3.1) - (3.6) um die folgenden Nebenbedingungen beschränkt Campbell die Sortierkapazität des Hubs  $k$  auf  $\Gamma_k$  Einheiten während einer Planungsperiode und formuliert somit erstmalig ein kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem i. e. S.:

$$\sum_i \sum_j W_{ij} \left( \sum_m (X_{ijkm} + X_{ijmk}) - X_{ijkk} \right) \leq \Gamma_k Y_k \quad \forall k \quad (3.8)$$

Die Nebenbedingungen (3.8) fordern, dass die Summe der Sendungsmengen, die in dem Hub  $k$  sortiert werden, dessen Kapazität  $\Gamma_k$  nicht übersteigt. Dabei geht Campbell von der Annahme aus, dass Sendungen, die über genau einen Hub  $k$  transportiert werden, in diesem nur einmal sortiert werden.

Die Nebenbedingung (3.8) stellt eine gemeinsame Kapazitätsbeschränkung für die Hub-Hauptlauf- und Hub-Nachlaufsartierung in Hub  $k$  dar.

### 3.3.2 Kapazitätsbeschränktes $p$ -Hub-Median-Problem

Aykin (1994) stellt ein kapazitätsbeschränktes  $p$ -Hub-Median-Problem zur Planung eines Hub-and-Spoke-Netztes mit mehrfacher Zuordnung, Direktverkehrsrelationen sowie Transportketten mit maximal zwei Hubs auf. Gegenstand seiner Untersuchungen sind die vierzig amerikanischen Flughäfen mit dem höchsten Passagieraufkommen im Jahr 1989. Ziel des vorliegenden Optimierungsproblems ist die Bestimmung der Lage der  $p$  Hub-Standorte sowie die Festlegung der Transportketten.

Aykin unterscheidet zwischen der Menge  $N$  aller Flughäfen und der Menge  $M \subseteq N$  der potentiellen Hub-Standorte. Somit kann unter Umständen die Anzahl der binären Entscheidungsvariablen seines Modells reduziert werden. Desweiteren sind in dem Modell

nicht zwischen allen Knoten  $i, j \in N$  Direktverkehrsrelationen zugelassen. Die Menge  $A$  entspricht der Menge aller zulässigen Direktverkehrsrelationen.

Die Transportkosten  $C_{iktj}$  einer Transportkette über die Hubs  $k$  und  $t$  werden auf Basis von realen Transportkosten pro Passagier und Flugmeile bei einer Auslastung der Sitzplatzkapazität von 60% berechnet.  $C_{i00j}$  entspricht den Transportkosten einer Direktverkehrsrelation von  $i$  nach  $j$ . Das von Aykin formulierte Optimierungsproblem lautet wie folgt:

$$\text{Min} \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} D_{ij} C_{i00j} X_{ij} + \sum_{i \in N} \sum_{k \in M} \sum_{t \in M} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} C_{iktj} X_{iktj} + \sum_{k \in M} F_k Y_k \quad (3.9)$$

$$\text{u. d. N.} \quad D_{ij} X_{ij} + \sum_{k \in M} \sum_{t \in M} X_{iktj} = 1 \quad \forall i, j \in N, i \neq j \quad (3.10)$$

$$\sum_{i \in N} \left( \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} (r_k(Y_i, Y_k, Y_j) X_{ikkj} + \sum_{\substack{i \in M \\ t \neq k}} (r_k(Y_i, Y_k, Y_j) X_{iktj} + p_k(Y_i, Y_k, Y_j) X_{itkj}) \right) \leq R_k Y_k \quad \forall k \in M \quad (3.11)$$

$$\sum_{k \in M} Y_k = p \quad (3.12)$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ i \neq k}} \sum_{\substack{l, h \in M \\ l, h \neq k}} (X_{ilhk} + X_{klhi}) + \sum_{(i,k), (k,j) \in A} (X_{ik} + X_{ki}) \leq V(1 - Y_k) \quad \forall k \in M \quad (3.13)$$

$$\sum_{\substack{h \in M \\ h \neq k \\ h \neq t}} (X_{kkht} + X_{thkk} + X_{tthk} + X_{khtt}) + \sum_{h \in M} (X_{khht} + X_{thhk}) \leq V(2 - Y_k - Y_t) \quad \forall k, t \in M, k \neq t \quad (3.14)$$

$$X_{ij}, X_{iktj}, Y_k \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N, \forall t, k \in M \quad (3.15)$$

Die zu minimierenden Gesamtkosten der Zielfunktion (3.9) setzen sich aus den Transportkosten der Direktverkehrsrelationen und der Transportketten über einen bzw. zwei Hubs sowie den Fixkosten  $F_k$  für die Installation eines Hubs zusammen. Die Indikatorfunktion  $D_{ij}$  nimmt den Wert 1 an, wenn zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  eine Direktverkehrsrelation zulässig ist, ansonsten gilt  $D_{ij} = 0$ . Die binären Entscheidungsvariablen  $X_{ij}$  und  $X_{iktj}$  geben an, ob für den Transport zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  eine Direktverkehrsrelation  $i \rightarrow j$  bzw. eine Transportkette  $i \rightarrow k \rightarrow t \rightarrow j$  über die Hubs  $k, t \in M$  genutzt wird. Gilt  $k = t$  so beschreibt die

Entscheidungsvariable  $X_{ikkj}$  die Transportkette  $i \rightarrow k \rightarrow j$  über nur einen Hub.  $Y_k$  ist ebenfalls eine binäre Entscheidungsvariable, die angibt, ob an dem Standort  $k \in M$  ein Hub errichtet wird.

Die Nebenbedingungen (3.10) stellen sicher, dass ein Transport zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  ausschließlich auf einer Direktverkehrsrelation oder einer Transportkette über maximal zwei Hubs erfolgen kann.

Durch die Nebenbedingungen (3.11) wird gewährleistet, dass die Kapazität  $R_k$  eines Hubs  $k \in M$  nicht überschritten wird. Die Funktion  $r_k(Y_i, Y_k, Y_j)$  ermittelt den am Hub  $k$  erforderlichen Kapazitätsbedarf der Transportkette  $i \rightarrow k \rightarrow j$ . Liegen Transportketten mit zwei Hubs  $i \rightarrow k \rightarrow t \rightarrow j$  und  $i \rightarrow t \rightarrow k \rightarrow j$  vor, so wird der Kapazitätsbedarf am Hub  $k$  durch die Funktionen  $p_k(Y_i, Y_t, Y_j)$  bzw.  $r_k(Y_i, Y_t, Y_j)$  bestimmt.

Die Einrichtung von genau  $p$  Hubs wird durch die Nebenbedingungen (3.12) erzwungen.

Durch die Nebenbedingungen (3.13) werden Transportketten der Art  $i \rightarrow l \rightarrow h \rightarrow k$  und  $k \rightarrow l \rightarrow h \rightarrow i$  zwischen einem Knoten  $i \in N$  und einem Hub-Standort  $k \in M$  verboten, bei denen für die Knoten  $l$  und  $h$  gilt:  $l, h \neq k$ . Die Konstante  $V \in \mathbb{N}^+$  ist derart festzusetzen, dass die rechte Seite dieser Nebenbedingung für den Fall  $Y_k = 0$  den Wertebereich der Entscheidungsvariablen der linken Seite nicht einschränkt. Desweiteren werden Direktverkehrsrelationen zwischen einem Knoten  $i \in N$  und einem Hub-Standort  $k \in M$  verboten, für die gilt  $(i, k), (k, i) \in A$ .

Die Nebenbedingungen (3.14) schränken die Transportketten zwischen zwei verschiedenen Hub-Standorten  $k$  und  $t$  ( $k \neq t$ ) auf eine einzelne Transportrelation zwischen diesen Knoten als Hub-Hauptlauf ein.

Aykin stellt zur Lösung des Optimierungsproblems einen unvollständigen Branch-and-Bound-Algorithmus und ein heuristisches Verfahren (Greedy-Interchange-Heuristik) vor. Die maximale Abweichung der Zielfunktionswerte des Branch-and-Bound-Verfahrens vom Optimum beträgt 3,59%. Bei 129 von 135 Testinstanzen konnte mit Hilfe der Heuristik ein geringerer Zielfunktionswert berechnet werden als mit dem unvollständigen Branch-and-Bound-Verfahren. Aykin favorisiert abschließend die Heuristik gegenüber dem unvollständigen Branch-and-Bound-Verfahren, da neben den besseren Ergebnissen deren Implementierung einfacher ist und zudem weniger Rechenzeit erfordert.

### 3.3.3 Kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem im engeren Sinne mit einfacher Zuordnung

Ernst und Krishnamoorthy (1999) modellieren ein kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem i. e. S. mit einfacher Zuordnung. Neben der Bestimmung der Anzahl und Lage der Hubs (Briefzentren), erfolgt eine Zuordnung der Depotstandorte zu den Hubs sowie die Bestimmung des Sendungsflusses durch das Hub-and-Spoke-Netz. Zugelassen sind Transportketten über einen oder zwei Hubs, nicht jedoch Direktverkehrsrelationen. Die Sortierkapazität der Hubs ist in diesem Modell für die sich an den Hub-Vorlauf anschließende Sortierung beschränkt.

Die Kernidee der folgenden Formulierung des Optimierungsproblems ist es, den Hub-Hauptlauf als Mehrgüterflussproblem zu modellieren. Ein Mehrgüterflussproblem liegt dann vor, wenn in einem Netzwerk mehrere Güter transportiert werden, die unterschiedliche Quellen und Senken haben können (vgl. Neumann und Morlock (1993)).

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} d_{ik} Z_{ik} (\chi O_i + \delta D_i) + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} \alpha d_{kl} Y_{kl}^i + \sum_{k \in N} F_k Z_{kk} \quad (3.16)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \sum_{k \in N} Z_{ik} = 1 \quad \forall i \in N \quad (3.17)$$

$$Z_{ik} \leq Z_{kk} \quad \forall i, k \in N \quad (3.18)$$

$$\sum_{i \in N} O_i Z_{ik} \leq \Gamma_k Z_{kk} \quad \forall k \in N \quad (3.19)$$

$$\sum_{l \in N} Y_{kl}^i - \sum_{l \in N} Y_{lk}^i = O_i Z_{ik} - \sum_{j \in N} W_{ij} Z_{jk} \quad \forall i, k \in N \quad (3.20)$$

$$Z_{ik} \in \{0, 1\} \quad \forall i, k \in N \quad (3.21)$$

$$Y_{kl}^i \geq 0 \quad \forall i, k, l \in N \quad (3.22)$$

Die zu minimierende Zielfunktion (3.16) setzt sich aus den Kosten des Hub-Vor- und Hub-Nachlaufs, den Kosten des Hub-Hauptlaufs sowie den Fixkosten  $F_k$  für die Errichtung der Hub-Standorte zusammen. Die Variablen  $O_i$  und  $D_i$  bezeichnen die Sendungsmengen, die ausgehend von Depot  $i$  versendet bzw. an das Depot  $i$  gesendet werden. Die Variable  $d_{ik}$  repräsentiert die Entfernung zwischen den Knoten  $i$  und  $k$ . Die Bezeichner  $\chi$ ,  $\alpha$  und  $\delta$  geben die entfernungsabhängigen Transportkosten pro Sendungseinheit auf einer Transportrelation des Hub-Vor-, Hub-Haupt- bzw. Hub-Nachlaufs an.

Die binären Entscheidungsvariablen sind  $Z_{ik}$  und  $Z_{kk}$ , die angeben, ob der Knoten  $i$  dem Hub  $k$  zugeordnet ist, bzw., ob an dem Standort  $k$  ein Hub errichtet wird.  $Y_{kl}^i$  gibt die Sendungsmenge des Quellorts  $i$  an, die zwischen den Hubstandorten  $k$  und  $l$  transportiert wird.

Die Nebenbedingungen (3.17) und (3.18) ordnen einen Standort  $i$  genau einem Hub-Standort  $k$  zu (single allocation). Die Kapazitätsrestriktionen  $\Gamma_k$  für die Hub-Hauptlaufsartierungen (vgl. Abschnitt 2.2) werden durch die Nebenbedingungen (3.19) eingehalten. Das Flussgleichgewicht für Gut<sup>1</sup>  $i$  im Knoten  $k$  wird durch die Nebenbedingungen (3.20) sichergestellt. Der Bezeichner  $W_{ij}$  gibt die Höhe des Sendungsaufkommens an, das von Depot  $i$  zu Depot  $j$  zu transportieren ist.

Zur Lösung des vorgestellten Optimierungsproblems verwenden die Autoren zwei heuristische Verfahren sowie ein Branch-and-Bound-Verfahren mit einem Preprocessing (engl. Vorverarbeitung). Die Heuristiken dienen dazu, eine obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts zu bestimmen, die beim sich anschließenden Branch-and-Bound-Verfahren eingesetzt wird. Mit Hilfe des Preprocessing, das vor dem Branch-and-Bound-Verfahren ausgeführt wird, versuchen die Autoren, das Problem einzuschränken.

Ernst und Krishnamoorthy untersuchen die Leistungsfähigkeit der Heuristiken an Probleminstanzen des AP-Datensatzes mit bis zu 50 Knoten. Die maximale Abweichung von der optimalen Lösung beträgt 3,72%.

Die Anwendung des Preprocessing vor der Ausführung des Branch-and-Bound-Verfahrens hat sich in den meisten der untersuchten Probleminstanzen als wirkungsvoll erwiesen. Es konnte eine Reduzierung der Rechenzeit um bis zu 25% erzielt werden.

---

<sup>1</sup>Das Gut  $i$  entspricht den Sendungen, die ausgehend von Knoten  $i$  versendet werden.

### 3.3.4 Kapazitätsbeschränktes Hub-Location-Problem im engeren Sinne mit mehrfacher Zuordnung

Ebery et al. (2000) geben drei neuartige Formulierungen eines kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. mit mehrfacher Zuordnung an. Sie entwickeln ein heuristisches Verfahren zur Bestimmung einer oberen Schranke des Optimierungsproblems, die sie im Rahmen der Bestimmung einer optimalen Lösung mit Hilfe eines Branch-and-Bound-Verfahrens einsetzen.

Aufbauend auf der Formulierung eines kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems von Campbell (1994a) (vgl. Seite 35) stellen sie eine modifizierte Formulierung auf, bei der im Gegensatz zur ursprünglichen Formulierung nur eine Kapazitätsbeschränkung des ersten Hubs einer Transportkette vorliegt. Sie ersetzen die Nebenbedingungen (3.8) durch die Folgenden:

$$\sum_i \sum_j W_{ij} \sum_m X_{ijkm} \leq \Gamma_k Y_k \quad \forall k \in N \quad (3.23)$$

Desweiteren geben sie jeweils eine aggregierte Darstellung der Nebenbedingungen (3.3) und (3.4) mit dem Ziel an, die Anzahl der Nebenbedingungen zu reduzieren.

Aufbauend auf einer von Ernst und Krishnamoorthy (1998) aufgestellten Formulierung eines nicht kapazitätsbeschränkten  $p$ -Hub-Median-Problems entwickeln Ebery et al. eine weitere Problemformulierung eines kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. mit mehrfacher Zuordnung auf der Basis eines Mehrgüterflussproblems:

$$\text{Min} \quad \sum_i \left( \chi \sum_k C_{ik} Z_{ik} + \alpha \sum_k \sum_l C_{kl} Y_{kl}^i + \delta \sum_l \sum_j C_{lj} X_{lj}^i \right) + \sum_k F_k H_k \quad (3.24)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \sum_k Z_{ik} = \sum_j W_{ij} \quad \forall i \quad (3.25)$$

$$\sum_l X_{lj}^i = W_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.26)$$

$$\sum_i Z_{ik} \leq \Gamma_k H_k \quad \forall k \quad (3.27)$$

$$\sum_l Y_{kl}^i + \sum_j X_{kj}^i - \sum_l Y_{lk}^i - Z_{ik} = 0 \quad \forall i, k \quad (3.28)$$

$$Z_{ik} \leq \sum_j W_{ij} H_k \quad \forall i, k \quad (3.29)$$

$$\sum_i X_{lj}^i \leq \sum_i W_{ij} H_l \quad \forall l, j \quad (3.30)$$

$$X_{lj}^i, X_{kl}^i, Z_{ik} \geq 0, H_k \in \{0,1\} \quad \forall i, j, k, l \quad (3.31)$$

Zu minimieren ist die Summe der Transportkosten und der Fixkosten ( $F_k$ ) für die Errichtung der Hubs. Die Transportkosten setzen sich aus den mengenabhängigen Transportkosten  $C_{ik}, C_{kl}$

und  $C_{lj}$  des Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachlaufs zusammen, gewichtet mit den jeweiligen Koeffizienten  $\chi$ ,  $\alpha$  bzw.  $\delta$ .

Als Entscheidungsvariablen treten in diesem Optimierungsproblem die Variablen  $Z_{ik}$ ,  $Y_{kl}^i$  und  $X_{lj}^i$  auf, die die Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen des Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachlaufs für die Sendungen von dem Versandort  $i$  angeben. Desweiteren gibt die binäre Entscheidungsvariable  $H_k$  an, ob an dem Standort  $k$  ein Hub errichtet wird.

Die Nebenbedingungen (3.25), (3.26) und (3.28) stellen die Flussgleichgewichte der Depot- sowie Hubstandorte sicher, wobei  $W_{ij}$  die Sendungsmenge angibt, die vom Versanddepot  $i$  zum Empfangsdepot  $j$  zu transportieren ist. Die Einhaltung der Kapazitätsrestriktion  $\Gamma_k$  der Hubs  $k$  wird durch die Nebenbedingungen (3.27) sichergestellt. Die Nebenbedingungen (3.29) und (3.30) gewähren, dass von einem Depot ausschließlich Transporte zu einem Hub ausgehen, Direktverkehrsrelationen zwischen zwei Depotstandorten sind nicht zulässig.

Ebery et al. entwickeln die Problemformulierung (3.24) - (3.31) mit dem Ziel weiter, die Anzahl der Entscheidungsvariablen zu reduzieren, indem sie folgende Ersetzung vornehmen:

$$Z_{ik} = \sum_l Y_{kl}^i \quad \forall i, k \quad (3.32)$$

Desweiteren werden die Nebenbedingungen (3.25) und (3.29) eliminiert und die Nebenbedingungen (3.30) durch die Folgenden ersetzt:

$$\sum_i \sum_k Y_{kl}^i \leq \sum_i \sum_j W_{ij} H_l \quad \forall l \quad (3.33)$$

Die durch die Eliminierungen und Substitutionen entstehende Formulierung des Optimierungsproblems lautet wie folgt:

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_k \sum_l (\chi C_{ik} + \alpha C_{kl}) Y_{kl}^i + \sum_i \sum_j \sum_l \delta C_{lj} X_{lj}^i + \sum_k F_k H_k \quad (3.34)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \sum_l X_{lj}^i = W_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.35)$$

$$\sum_i \sum_l Y_{kl}^i \leq \Gamma_k H_k \quad \forall k \quad (3.36)$$

$$\sum_i \sum_k Y_{kl}^i \leq \sum_l \sum_j W_{ij} H_l \quad \forall l \quad (3.37)$$

$$\sum_k Y_{kl}^i = \sum_j X_{lj}^i \quad \forall i, l \quad (3.38)$$

$$X_{lj}^i, X_{kl}^i, Z_{ik} \geq 0, H_k \in \{0, 1\} \quad \forall i, j, k, l \quad (3.39)$$

Ebery et al. geben für das kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S. (3.34) - (3.39) mit mehrfacher Zuordnung ein heuristisches Lösungsverfahren auf der Basis eines Standort-Austauschverfahrens an, das aufbauend auf dem Ergebnis eines Kürzesten-Wege-Problems des entsprechenden unkapazitierten Netzwerks eine zulässige generiert. Sie heben bei der Analyse

ihrer Ergebnisse die Bedeutung der exakten Berechnung der Transportkosten mit Hilfe des Mehrgüterflussproblems zum Abschluss der Heuristik hervor. Sie zeigen, dass hierdurch die mittlere Abweichung der berechneten oberen Schranke von der exakten Lösung von 0,78% auf 0,04% gesenkt werden kann.

Die Analyse der Rechenzeiten des Branch-and-Bound-Verfahrens zeigt, dass die Formulierungen (3.24) - (3.31) und (3.34) - (3.39) gegenüber der modifizierten Formulierung von Campbell (1994a) deutlich überlegen sind.



# 4 Modellierung und Formulierung des Hub-Location-Problems

In diesem Kapitel wird das kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem im engeren Sinne (i. e. S.) modelliert und als gemischt-ganzzahliges lineares Optimierungsproblem formuliert. Dabei werden neben den Transportkosten und den Fixkosten für die Installation der Hubs auch variable Sortierkosten berücksichtigt.

Ziel ist die Bestimmung der Anzahl und Lage der Hubstandorte sowie die Bestimmung der Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen. Ergebnis des Optimierungsproblems ist ein Hub-and-Spoke-Netz, bei dem ein Depot mehreren Hubs zugeordnet sein kann und der Sendungstransport vom Versand- zum Empfangsdepot sowohl auf Transportketten mit einem oder zwei Hubs als auch auf Direktverkehrsrelationen stattfinden kann.

## 4.1 Formale Modellbeschreibung

Grundlage des zu planenden Hub-and-Spoke-Netzes ist ein vollständiger Digraph  $\vec{G} = (V, E)$ , dessen Knotenmenge  $V = S_D \cup S_h$  die Menge  $S_D$  der bereits bestehenden Depotstandorte sowie die Menge  $S_h$  derjenigen potentiellen Hubstandorte umfasst, an denen kein Depot vorhanden ist. Die Kantenmenge  $E = V \times V$  beinhaltet die Menge der gerichteten Kanten zwischen je zwei Knoten  $i, j \in V$ . Eine gerichtete Kante  $[i, j] \in E$  entspricht einer Transportrelation von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$ . Desweiteren wird die Menge  $S_H \subseteq V$  eingeführt, die der Menge der potentiellen Hubstandorte entspricht. Es wird angenommen, dass nicht jeder Knoten  $k \in V$  ein potentieller Hubstandort ist.

Das Sendungsaufkommen zwischen je zwei Depots  $i, j \in S_D$  wird durch die Belastungsmatrix  $B$  beschrieben (vgl. Arnold (2003)). Ein Element  $b_{ij}$  dieser Matrix gibt die Sendungsmenge an, die von Versanddepot  $i$  über das Transportnetz zu Empfangsdepot  $j$  zu transportieren ist.

Die direkten Entfernungen zwischen je zwei Knoten aus der Menge  $V$ , die zur Berechnung der entfernungsabhängigen Transportkosten erforderlich sind, werden in der Entfernungsmatrix  $E$  angegeben. Der Sendungstransport entlang einer gerichteten Kante  $[i, j] \in E$  ist mit Kosten in Höhe von  $c_{ij}$  verbunden, die in der Bewertungsmatrix  $C$  enthalten sind (vgl. Arnold (2003)). Die Transportkosten werden als proportional zur Anzahl der transportierten Sendungseinheiten sowie zur Entfernung  $e_{ij}$  der Knoten  $i$  und  $j$  angenommen.

Mit der Installation und dem Betrieb eines Hubs  $k \in S_H$  sind sowohl fixe Installationskosten  $f_k$  sowie variable Sortierkosten  $s_k^{var}$  pro Sendung verbunden, die bei der Modellierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. berücksichtigt werden. Desweiteren wird angenommen, dass die Sortierkapazität der potentiellen Hubstandorte  $k \in S_H$  beschränkt ist. Die Sortierkapazität  $\kappa_k$  gibt die maximale Anzahl von Sendungen an, die jeweils während der Hub-Hauptlauf- bzw. Hub-Nachlauf-Sortierung sortiert werden kann (vgl. Abschnitt 2.2).

Auf Basis der beschriebenen Annahmen sind im Rahmen der Lösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. die Anzahl und Lage der Hubstandorte sowie die Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen mit dem Ziel der Minimierung der Summe von Transport-, Fix- und variablen Sortierkosten simultan zu bestimmen.

### 4.1.1 Modellierung der Hub-Kosten

Für die Installation und den Betrieb eines Hubs  $k \in S_H$  fallen fixe Kosten  $f_k$  sowie variable Sortierkosten  $s_k^{var}$  pro Sendungseinheit an. Fixe Hubkosten sind unabhängig von der Auslastung  $\rho_k$  der Sortieranlage und entsprechen dem periodisierten Aufwand für Sortieranlage ( $f_k^{Sort}$ ), Gebäude ( $f_k^{Geb}$ ) und Grundstück ( $f_k^{Grund}$ ).

Die variablen Sortierkosten einer Sortieranlage, zu denen Personal-, Energie- sowie Instandhaltungskosten gehören, steigen mit wachsender Auslastung  $\rho_k$  ( $\rho_k \in [0,1]$ ) an. Es wird angenommen, dass die variablen Sortierkosten linear zur Auslastung  $\rho_k$  ansteigen.

Die Gesamtkosten  $K_k$  eines potentiellen Hubs  $k \in S_H$  pro Planungsperiode in Abhängigkeit der Auslastung  $\rho_k$  werden wie folgt beschrieben:

$$K_k(\rho_k) = \underbrace{f_k^{Sort} + f_k^{Geb} + f_k^{Grund}}_{f_k} + \rho_k \cdot s_k^{var} \cdot \kappa_k. \quad (4.1)$$

Die variablen Sortierkosten  $s_k^{var}$  sind abhängig von dem Automatisierungsgrad einer Sortieranlage. Es wird angenommen, dass diese in manuellen Sortieranlagen am höchsten, dafür aber die Fixkosten  $f_k^{Sort}$  dieser Sortieranlagen am geringsten sind. Mit wachsendem Automatisierungsgrad steigen die Fixkosten, gleichzeitig sinken die variablen Sortierkosten.

In Abbildung 4.1 sind exemplarisch die Kostenverläufe einer gering automatisierten und einer hoch automatisierten Sortieranlage in Abhängigkeit der Auslastung dargestellt.

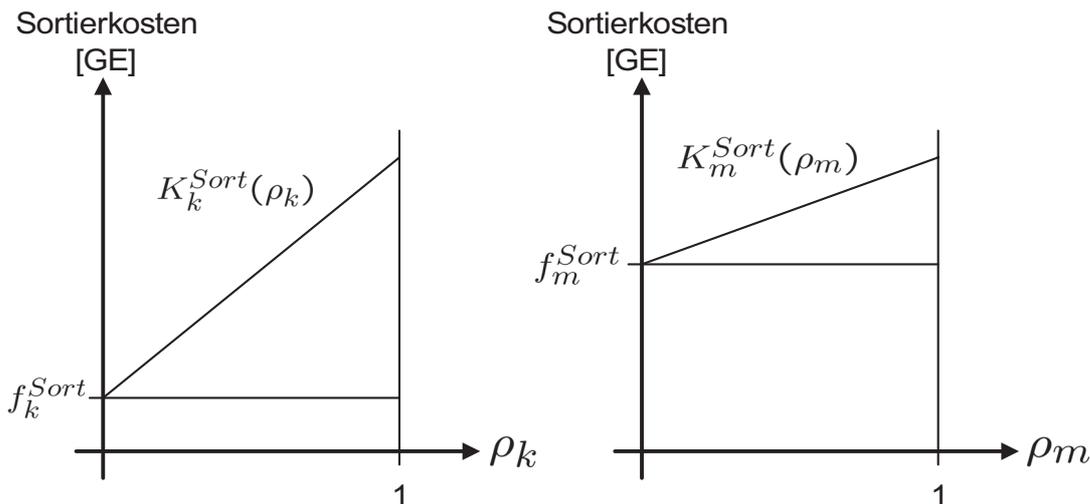


Abbildung 4.1: Exemplarische Darstellung der Kostenverläufe einer gering automatisierten Sortieranlage (links) und einer hoch automatisierten Sortieranlage (rechts) in Abhängigkeit ihres Auslastungsgrads.

Der linke Graph zeigt den Verlauf der Sortierkosten

$$K_k^{Sort}(\rho_k) = f_k^{Sort} + \rho_k \cdot s_k^{var} \cdot \kappa_k$$

einer Sortieranlage mit geringem Automatisierungsgrad und somit auch geringen Fixkosten. Der geringe Automatisierungsgrad erfordert mit steigender Sortierleistung einen stark zunehmenden Einsatz von Personal, wodurch die gesamten Sortierkosten stark ansteigen. Im Gegensatz dazu ist rechts der Kostenverlauf einer Sortieranlage mit hohem Automatisierungsgrad dargestellt.

## 4.1.2 Modellierung der Transportkosten

Der Einsatz eines Transportmittels verursacht entfernungsabhängige und von der Einsatzzeit des Transportmittels abhängige Transportkosten. Der entfernungsabhängige Transportkostensatz  $k_t^{Ent}$  des Transportmittels  $t$  umfasst die Kosten für Kraftstoff, Maut und Instandhaltung pro Entfernungseinheit.

Der einsatzzeitabhängige Kostensatz  $k_t^{Zeit}$  entspricht dem periodisierten Abschreibungsaufwand für das Transportmittel und dem periodisierten Personalaufwand. Die Einsatzzeit ergibt sich als Summe der Fahrzeit  $t_{ij,t}^{Fahr}$  auf der Transportrelation von  $i$  nach  $j$  mit dem Transportmittel  $t$ , die dem Quotient von durchschnittlicher Geschwindigkeit  $\bar{v}_{ij,t}$  und der Entfernung  $e_{ij}$  entspricht sowie der Be- und Entladezeit  $t^{Lade}$ . Die gesamten auf einer Transportrelation von  $i$  nach  $j$  anfallenden Kosten bei Einsatz eines Transportmittels vom Typ  $t$  entsprechen somit (vgl. Feige (2004)):

$$K_{ij,t}^{Tr} = \underbrace{e_{ij} \cdot k_t^{Ent}}_{\text{entfernungsabhängig}} + \underbrace{(t_{ij,t}^{Fahr} + t^{Lade}) \cdot k_t^{Zeit}}_{\text{einsatzzeitabhängig}}. \quad (4.2)$$

Der Ausdruck (4.2) beschreibt die Transportkosten unter Vernachlässigung der zu transportierenden Sendungsmenge  $b$ . Werden diese mit in Betracht gezogen, so sind der entfernungsabhängige Transportkostensatz  $k_t^{Ent}$  und die Be- und Entladezeit  $t^{Lade}$  nicht als Konstanten anzusetzen, sondern in Abhängigkeit von der Anzahl der Sendungseinheiten  $b$  anzugeben. Nach Wlček (1998b) können die dadurch zusätzlich entstehenden Kosten bei der Planung von Transportnetzen jedoch vernachlässigt werden.

Der Verlauf der Transportkosten  $K_{ij}^{Tr}(b)$  auf der Transportrelation von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$  in Abhängigkeit der Sendungsmenge  $b$  ist in der folgenden Abbildung 4.2 dargestellt. Es wird angenommen, dass die zur Verfügung stehenden Transportmittel jeweils eine Kapazität von  $\kappa_t^{Tr}$  besitzen.

Bis zu einer Sendungsmenge von  $b \leq \kappa_1^{Tr}$  Sendungseinheiten ist der Einsatz eines Transportmittels ausreichend. Für größere Sendungsmengen sind weitere Transportmittel notwendig.

Im Gegensatz zu den obigen Ausführungen sollen für die Modellierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. die Transportkosten mengenproportional zu der transportierten Sendungsmenge  $b$  angegeben werden. Dazu wird die in Abbildung 4.2 dargestellt Funktion  $K_{ij}^{Tr}(b)$  durch die gestrichelt gezeichnete Funktion  $\underline{K}_{ij}^{Tr}(b)$  beginnend im Koordinatenursprung approximiert. Ergebnis der Approximation ist der Einheitstransportkostensatz  $c_{ij}$ , der die Transportkosten pro Sendungsmenge auf der Transportrelation von  $i$  nach  $j$  angibt. Durch diese Approximation werden die realen Transportkostenverläufe vereinfacht modelliert. Dadurch entfallen die zur Modellierung des in Abbildung 4.2 dargestellten Transportkostenverlaufs  $K_{ij}^{Tr}(b)$  erforderlichen binären Entscheidungsvariablen, wodurch der Rechenaufwand zur Lösung des untersuchten Hub-Location-Problems reduziert werden kann.

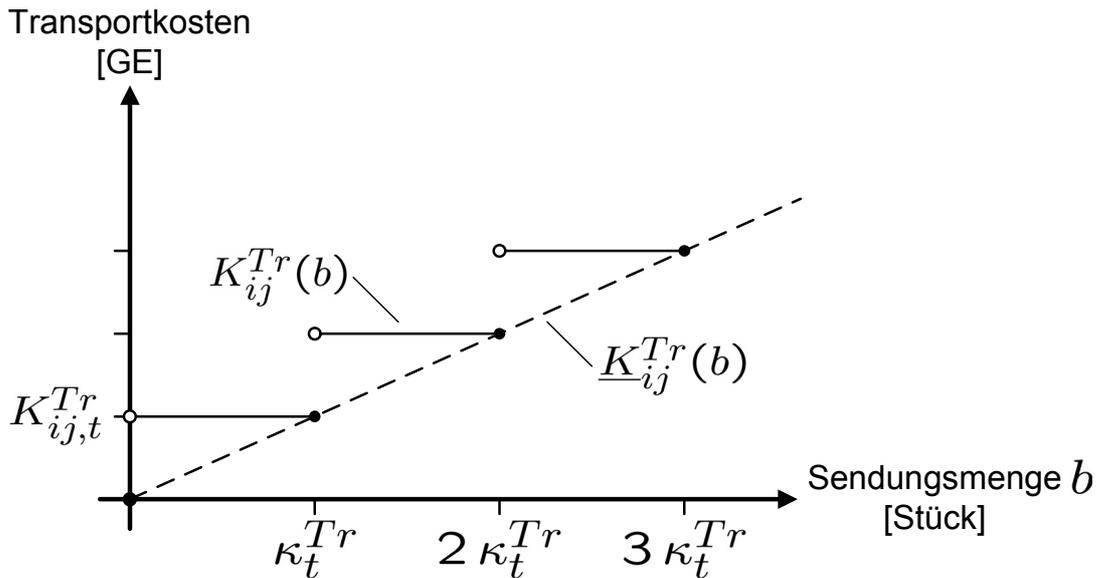


Abbildung 4.2: Darstellung der Transportkosten  $K_{ij}^{Tr}(b)$  in Abhängigkeit der Sendungsmenge  $b$  auf der Transportrelation von Knoten  $i$  zu Knoten  $j$ . Der Bezeichner  $\kappa_1^{Tr}$  gibt die Kapazität des Transportmittels  $t = 1$  an.

Auf den Transportrelationen des Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachlaufs wird, im Vergleich zu den Direktverkehrsrelationen, ein höheres Sendungsaufkommen durch die Sendungsbündelung angestrebt. Somit können auf jeder dieser Relationen größere Transportmittel eingesetzt werden, die Vorteile aufgrund der Kostendegression besitzen. Somit ist der Einheitstransportkostensatz auf jeweils einer dieser Relationen bei Einsatz eines größeren Fahrzeugs geringer als der Einheitstransportkostensatz auf der entsprechenden Direktverkehrsrelation.

Im weiteren Verlauf der Arbeit geben die Skalierungsfaktoren  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\alpha_3$  ( $\alpha_i \in (0,1)$ ,  $i = 1,2,3$ ) jeweils an, wie hoch der Einheitstransportkostensatz auf den Transportrelationen des Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachlauf im Verhältnis zu dem Einheitstransportkostensatz  $c_{ij}$  der entsprechenden Direktverkehrsrelationen ist.

### 4.1.3 Modellierung der Transportketten

Bei der Modellierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. wird angenommen, dass Sendungen während ihres Transports vom Versand- zum Empfangsdepot in maximal zwei Hubs sortiert werden, da ein weiterer Sortiervorgang die Laufzeit der Sendungen unzulässig erhöhen würde. Eine Transportkette von Versanddepot  $i$  über die zwei Hubs  $k$  und  $m$  zu Empfangsdepot  $j$  wird durch die folgende Schreibweise beschrieben:  $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$ .

Auf den Transportketten treten neben den Transportkosten auch die variablen Sortierkosten in den Hubs auf (vgl. Abschnitt 4.1.1). Die Transport- und Sortierkosten  $c_{ikmj}$  einer Sendungseinheit vom Versanddepot  $i$  über die Hubs  $k$  und  $m$  zum Empfangsdepot  $j$  setzen sich somit aus den Transportkosten des Hub-Vorlaufs  $i \rightarrow k$ , des Hub-Hauptlaufs  $k \rightarrow m$ , des Hub-Nachlaufs  $m \rightarrow j$  sowie den variablen Sortierkosten  $s_k^{var}$  und  $s_m^{var}$  zusammen. Die Transport- und Sortierkosten dieses Transports unter Berücksichtigung der Skalierungsfaktoren werden wie folgt

berechnet:

$$c_{ikmj} = (\alpha_1 \cdot c_{ik} + s_k^{var}) + (\alpha_2 \cdot c_{km} + s_m^{var}) + \alpha_3 \cdot c_{mj} \quad (4.3)$$

Für diejenigen Sendungen, die nur über einen Hub  $k$  transportiert werden, wird die Annahme getroffen, dass diese Sendungen bereits während der Hub-Hauptlaufsartierung bzgl. ihrer Zieldepots sortiert und bis zum Beginn des Hub-Nachlaufs in Hub  $k$  gespeichert werden. Für die Kosten  $c_{ikkj}$  eines solchen Transports gilt:

$$c_{ikkj} = (\alpha_1 \cdot c_{ik} + s_k^{var}) + \alpha_3 \cdot c_{kj} \quad (4.4)$$

Somit entfällt eine nochmalige Sortierung während der Hub-Nachlaufsartierung. Gleichzeitig setzt diese Annahme jedoch voraus, dass die Sortieranlage in Hub  $k$  ausreichend groß dimensioniert ist.

Jede gerichtete Kante  $[i, j] \in E$  des dem Hub-Location-Problem zu Grunde liegenden Graphen  $\vec{G}$  entspricht einer einzelnen Transportrelation  $i \rightarrow j$ , die abhängig von der Art ihres Quell- und Senkenknotens eine Direktverkehrsrelation oder eine Transportrelation des Hub-Vor-, Hub-Haupt- oder Hub-Nachlaufs mit definierten Transportkosten darstellt (vgl. Abschnitt 4.1.2). Für diejenigen Knoten  $i, j \in S_D \cap S_H$  des Graphen  $\vec{G}$ , die sowohl Depotstandorte als auch potentielle Hubstandorte repräsentieren, sind bei der Modellierung der Transportketten deshalb die im Folgenden beschriebenen Nebenbedingungen zu berücksichtigen. Diese sind notwendig, um die Transport- und variablen Sortierkosten einer Transportkette  $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$  gemäß den Ausführungen des Abschnitts 4.1.2 korrekt zu modellieren:

1. Handelt es sich bei den Knoten  $i$  und  $j$  um Hubstandorte, so ist die Transportkette nur dann zulässig, wenn  $i = k$  und  $m = j$  gilt. Sie beschreibt eine Transportrelation des Hub-Hauptlaufs zwischen den Hubs  $i$  und  $j$ .
2. Ist neben den Knoten  $k$  und  $m$  entweder nur der Knoten  $i$  oder nur der Knoten  $j$  ein Hubstandort so ist diese Transportkette nur dann zulässig, wenn  $i = k$  bzw.  $m = j$  gilt.

Für eine Direktverkehrsrelation  $i \rightarrow j$  ist die folgende Nebenbedingung zu modellieren:

3. Eine Direktverkehrsrelation zwischen zwei Knoten ist nur dann zulässig, wenn die Knoten  $i$  und  $j$  keine Hubstandorte sind.

## 4.2 Formulierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S.

In diesem Abschnitt wird das kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S. mit mehrfacher Zuordnung der Depots zu den Hubs und Direktverkehren als gemischt-binäres lineares Optimierungsproblem formuliert. Die Grundlage der Formulierung bilden die in Abschnitt 4.1 vorgestellten Modelleigenschaften des zu planenden Hub-and-Spoke-Netztes.

$$\begin{aligned}
 \text{Min } K((x,y)') &= \underbrace{\sum_{i \in S_D} \sum_{k \in S_H} \sum_{m \in S_H} \sum_{j \in S_D} b_{ij} c_{ikmj} x_{ikmj}}_{\text{Kosten der Transportketten über Hubs}} \\
 &+ \underbrace{\sum_{i \in S_D} \sum_{j \in S_D} b_{ij} c_{ij} x_{ij}}_{\text{Kosten der Direktverkehrsrelationen}} + \underbrace{\sum_{k \in S_H} f_k y_k}_{\text{Fixkosten}}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

u. d. N.

$$x_{ij} + \sum_{k \in S_H} \sum_{m \in S_H} x_{ikmj} = 1 \quad \forall i, j \in S_D \tag{4.6}$$

$$\sum_{i \in S_D} \sum_{m \in S_H} \sum_{j \in S_D} x_{ikmj} b_{ij} \leq \kappa_k y_k \quad \forall k \in S_H \tag{4.7}$$

$$\sum_{i \in S_D} \sum_{\substack{k \in S_H \\ k \neq m}} \sum_{j \in S_D} x_{ikmj} b_{ij} \leq \kappa_m y_m \quad \forall m \in S_H \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{k \in S_H \\ k \neq i}} \sum_{\substack{m \in S_H \\ m \neq j}} x_{ikmj} + \sum_{\substack{k \in S_H \\ k=i}} \sum_{\substack{m \in S_H \\ m \neq j}} x_{ikmj} + \sum_{\substack{k \in S_H \\ k \neq i}} \sum_{\substack{m \in S_H \\ m=j}} x_{ikmj} \\
 &+ x_{ij} \leq (2 - y_i - y_j) \cdot M \quad \forall i, j \in S_D \cap S_H
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\sum_{\substack{k \in S_H \\ k \neq i}} \sum_{m \in S_H} \sum_{j \in S_D} x_{ikmj} \leq (1 - y_i) \cdot M \quad \forall i \in S_D \cap S_H \tag{4.10}$$

$$\sum_{i \in S_D} \sum_{k \in S_H} \sum_{\substack{m \in S_H \\ m \neq j}} x_{ikmj} \leq (1 - y_j) \cdot M \quad \forall j \in S_D \cap S_H \tag{4.11}$$

$$\sum_{j \in S_D} x_{ij} \leq (1 - y_i) \cdot M \quad \forall i \in S_D \cap S_H \tag{4.12}$$

$$\sum_{i \in S_D} x_{ij} \leq (1 - y_j) \cdot M \quad \forall i \in S_D \cap S_H \tag{4.13}$$

$$x_{ikmj}, x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in S_D, \forall k, m \in S_H \tag{4.14}$$

$$y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in S_H \tag{4.15}$$

Die Zielfunktion (4.5) stellt die zu minimierenden Gesamtkosten dar, die sich aus den Transportkosten, den variablen Sortierkosten in den Hubs und den Fixkosten für die Installation der Hubs zusammensetzen. Die ersten Summanden geben die Transport- und Sortierkosten der Transportketten mit einem und zwei Hubs, die zweiten Summanden die Transportkosten der Direktverkehrsrelationen und die dritten Summanden die Fixkosten für die Installation der Hubs an.

Im Zuge der Lösung dieses Optimierungsproblems wird die Anzahl und Lage der zu errichtenden Hubstandorte sowie die Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen bestimmt. Dabei gibt die binäre Entscheidungsvariable  $y_k$  an, ob an dem Standort  $k$  ein Hub errichtet wird. Die Entscheidungsvariable  $x_{ikmj}$  bezeichnet den Anteil des Sendungsaufkommens  $b_{ij}$ , der von Versanddepot  $i$  über eine Transportkette mit den Hubs  $k$  und  $m$  zu Empfangsdepot  $j$  transportiert wird. Dementsprechend gibt  $x_{ij}$  den Anteil des Sendungsaufkommens  $b_{ij}$  an, der von  $i$  nach  $j$  auf einer Direktverkehrsrelation transportiert wird.

Die Nebenbedingung (4.6) stellt sicher, dass die gesamte Sendungsmenge  $b_{ij}$  vom Versanddepot  $i$  zum Empfangsdepot  $j$  transportiert wird.

Die Nebenbedingung (4.7) gewährleistet, dass die Sortierkapazität  $\kappa_k$  der Hub-Hauptlaufsor-tierung in Hub  $k$  nicht überschritten wird. Gleichzeitig werden auch alle Transportketten mit  $k$  als erstem Hub verboten, wenn  $y_k = 0$  gilt. Analog dazu gewähren die Restriktionen (4.8) die Einhaltung der Sortierkapazität  $\kappa_m$  der Hub-Nachlaufsor-tierung in Hub  $m$  und das Verbot von Transportketten mit  $m$  als zweiten Hub, wenn  $y_m = 0$  gilt.

Die Nebenbedingungen (4.9) bis (4.13) verhindern unzulässige Hub-Vor- und Nachläufe zwi-schen zwei unterschiedlichen Hubs und stellen sicher, dass nur Direktverkehrsrelationen zwi-schen zwei Depots stattfinden. Somit werden die in Abschnitt 4.1.3 geforderten Eigenschaften der Transportketten eingehalten. Die Konstante  $M \in \mathbb{N}^+$  ist so zu wählen, dass die entspre-chenden Nebenbedingungen Schlupf aufweisen, wenn deren rechten Seiten einen Wert ungleich null annehmen.

Die Nebenbedingung (4.14) stellt sicher, dass die Entscheidungsvariablen  $x_{ikmj}$  und  $x_{ij}$  nicht negativ werden. Die Variable  $y_k$  wird durch die Nebenbedingung (4.15) als binäre Entschei-dungsvariable deklariert.



# 5 Theoretische Grundlagen der Problemlösung

An die Modellierung des in dieser Arbeit untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. als gemischt-binäres lineares Optimierungsproblem schließt sich in diesem Kapitel eine Beschreibung der zur Problemlösung eingesetzten Verfahren an.

Als Eröffnungsverfahren zur Bestimmung einer zulässigen Lösung des Hub-Location-Problems wird das Add- bzw. das Drop-Verfahren eingesetzt. An das Eröffnungsverfahren schließt sich das Branch-and-Bound-Verfahren an, mit dem eine optimale Lösung bestimmt wird.

## 5.1 Lineare Optimierungsprobleme

Eine Formulierung der Art

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & F(x) \\ \text{u. d. N.} & x \in M \subseteq \mathbb{R}^n \end{array} \quad \begin{array}{l} (5.1) \\ (5.2) \end{array}$$

wird als Optimierungsproblem bezeichnet (vgl. Neumann und Morlock (1993)). Das Problem unterteilt sich in die Zielfunktion  $F(x)$  (5.1) und die Nebenbedingung (5.2) zur Beschreibung des zulässigen Bereichs  $M_{zul}$ .

Der zulässige Bereich  $M_{zul} \subseteq \mathbb{R}^n$  kann durch Gleichungen und Ungleichungen beschrieben werden. Eine Lösung  $x$  des Optimierungsproblems (5.1) - (5.2) ist zulässig, wenn gilt:  $x \in M$ . Ziel des Optimierungsproblems ist es, eine zulässige Lösung  $x^*$  zu bestimmen, so dass der Zielfunktionswert  $F(x^*)$  unter Einhaltung der Nebenbedingung minimal ist. Es gilt dann:  $F(x^*) = \min_{x \in M} F(x)$ .

Liegen die Zielfunktion (5.1) und die Nebenbedingungen (5.2) in linearer Form vor, so wird das Problem als lineares Optimierungsproblem bezeichnet. Lineare Optimierungsprobleme treten u. a. in der Produktionsplanung sowie in der inner- und außerbetrieblichen Transportplanung auf (vgl. Arnold (2003), Domschke (1996) und Neumann (1996)).

Lineare Optimierungsprobleme können mit Hilfe des Simplexverfahrens, das die Eckpunkte des zulässigen Bereichs  $M_{zul}$  systematisch untersucht, gelöst werden. Das Simplexverfahren ist u. a. in den Standardwerken des Operations Research von Domschke und Drexl (2002), Hillier und Lieberman (1997) sowie Neumann und Morlock (1993) beschrieben.

Wird das Optimierungsproblem (5.1) - (5.2) um binäre Entscheidungsvariablen erweitert, so wird es als gemischt-binäres Optimierungsproblem bezeichnet und kann wie folgt dargestellt

werden:

$$\text{Min} \quad F(x,y) \tag{5.3}$$

$$\text{u. d. N.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M \tag{5.4}$$

Dabei gilt  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $y \in \{0,1\}^k$ . Gilt zudem, dass die Zielfunktion (5.3) und die Nebenbedingungen (5.4) in linearer Form vorliegen, so spricht man von einem gemischt-binären linearen Optimierungsproblem. Binäre Entscheidungsvariablen werden immer dann in Optimierungsproblemen verwendet, wenn in der Zielfunktion Fixkosten berücksichtigt werden.

Gemischt-binäre lineare Optimierungsprobleme treten u. a. im Rahmen der Standortplanung und der Fertigungsplanung auf (vgl. Domschke und Drexl (1996) und Neumann (1996)). Hier werden Fixkosten in Form von einer Investitionsentscheidung für einen Standort bzw. als Rüstkosten an Fertigungsmaschinen berücksichtigt.

Bei dem in Kapitel 4 vorgestellten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problem i. e. S. (4.5) - (4.15) handelt es sich um ein gemischt-binäres lineares Optimierungsproblem. Dabei beschreiben die reellwertigen Entscheidungsvariablen jeweils den Anteil der Sendungsmenge, der auf den einzelnen Transportrelationen transportiert wird. Die binären Entscheidungsvariablen geben an, ob an einem Standort ein Hub installiert wird.

Eine sehr einfache aber auch außerordentlich rechenzeitintensive Methode, ein gemischt-binäres lineares Optimierungsproblem zu lösen, ist die vollständige Enumeration. Dabei werden alle zulässigen binären Vektoren  $y \subseteq \{0,1\}^k$  untersucht, indem jeweils der Zielfunktionswert  $F(x,y)$  bestimmt wird (vgl. Neumann und Morlock (1993)).

## 5.2 Lösungsverfahren

Zur Lösung von gemischt-binären linearen Optimierungsproblemen können sowohl heuristische als auch exakte Lösungsverfahren eingesetzt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Eröffnungsverfahren dazu verwendet, eine zulässige Lösung des untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. (4.5) - (4.15) zu bestimmen. Der korrespondierende Zielfunktionswert stellt eine obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts dar und wird zur effizienten Abarbeitung des sich anschließenden Branch-and-Bound-Verfahrens eingesetzt.

Im folgenden Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen der in dieser Arbeit verwendeten Add- und Drop-Verfahren sowie des Branch-and-Bound-Verfahrens vorgestellt.

### 5.2.1 Eröffnungsverfahren

Eröffnungsverfahren sind heuristische Lösungsverfahren zur Bestimmung einer ersten zulässigen Lösung eines Optimierungsproblems. An ein Eröffnungsverfahren schließt sich in der Regel ein heuristisches Verbesserungsverfahren mit dem Ziel an, die Lösung hinsichtlich des Zielkriteriums weiter zu verbessern. Die damit erzielbaren Lösungen stellen jedoch im Allgemeinen nur suboptimale Lösungen dar.

Im Bereich der Standortplanung sind das Add- und das Drop-Verfahren häufig eingesetzte Eröffnungsverfahren, die erstmalig von Feldman, Lehrer und Ray (1966) bzw. Kuehn und Hamburger (1963) für Warehouse-Location-Probleme beschrieben worden sind. Eine weiterführende Übersicht sowie Implementierungshinweise zu Add- und Drop-Verfahren sind in den Standardwerken Domschke und Drexl (1996) sowie Neumann (1996) enthalten.

Das Add- bzw. das Drop-Verfahren macht sich die Eigenschaft der Standortplanungsprobleme zu Nutze, dass sich die heuristische Lösung dieser Probleme in zwei Teilprobleme unterteilen lässt, die Bestimmung der Standorte (Lokationsproblem) und die Lösung des entsprechenden Allokationsproblems. Im Rahmen dieses Teilproblems erfolgt eine Zuordnung von Angebots- bzw. Nachfrageknoten zu den zuvor bestimmten Standorten, wodurch sich die Transportkosten ergeben. Die Summe der fixen Standortkosten und der Transportkosten einer zulässigen Lösung entsprechen dem Zielfunktionswert des Standortplanungsproblems.

Übertragen auf das untersuchte kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S. werden zunächst die Hubstandorte festgelegt. Daran schließt sich die Bestimmung der Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen des Transportnetzwerks an. Der Zielfunktionswert des Allokationsproblems gibt dabei die Transport- und variablen Sortierkosten an.

In jedem Verfahrensschritt des Add- und des Drop-Verfahrens wird die momentane Menge von Hubstandorten durch die Hinzunahme bzw. das Entfernen eines weiteren Hubstandorts modifiziert. Die dadurch entstehende neue Menge von Hubstandorten wird als Nachbarschaft der ursprünglichen Menge bezeichnet. An jede Modifikation der Menge der Hubstandorte schließt sich die Lösung des Allokationsproblems an.

Beide Verfahren werden jeweils abgebrochen, sobald die Summe der fixen Standortkosten und des Zielfunktionswerts des Allokationsproblems nicht weiter verringert werden kann.

Abhängig von der Art der Untersuchung der Nachbarschaft einer Menge von Hubstandorten können im Rahmen des Add- und des Drop-Verfahrens jeweils zwei Strategien zur Steuerung der Verfahren unterschieden werden (vgl. Domschke und Drexl (1996)):

- Wird ausgehend von einer bestehenden Menge von Hubstandorten genau eine weitere Menge in der Nachbarschaft untersucht, so wird diese Vorgehensweise als First-Fit-Strategie bezeichnet.
- Es wird von der Best-Fit-Strategie gesprochen, wenn in einem Verfahrensschritt die gesamte Nachbarschaft untersucht und diejenige Menge von Hubstandorten ausgewählt wird, die zu der größten Verringerung des Zielfunktionswerts führt.

Zur Bestimmung einer zulässigen Eröffnungslösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. werden im Rahmen dieser Arbeit das Add- und das Drop-Verfahren jeweils mit der First-Fit- bzw. der Best-Fit-Strategie angewendet.

In den folgenden beiden Abschnitten wird der genaue Verfahrensablauf des Add-Verfahrens bei Anwendung der First-Fit- und der Best-Fit-Strategie erläutert. Anschließend wird das Drop-Verfahren beschrieben, dessen algorithmischer Ablauf in Anhang B angegeben ist.

### Add-Verfahren (First-Fit-Strategie)

Der folgende Algorithmus 1 beschreibt die Vorgehensweise des Add-Verfahrens bei Anwendung der First-Fit-Strategie zur Bestimmung einer Eröffnungslösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S.

Vor Beginn des Verfahrens befinden sich alle potentiellen Hubstandorte der Menge  $S_H$  in der Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Hubstandorte. Die Menge  $H_0$  der verbotenen Hubstandorte und die Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte werden mit der leeren Menge initialisiert.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ein potentieller Hubstandort  $k \in S_H$  wird als verboten bezeichnet, wenn an diesem Standort kein Hub

---

**Algorithmus 1** Add-Verfahren (First-Fit-Strategie)

---

```

1:  $\bar{K} \leftarrow K_{A,H_1}(x)$ 
2: Verbesserung  $\leftarrow$  true
3: while (Verbesserung = true  $\wedge$   $H_0^{vorl} \neq \emptyset$ ) do
4:   wähle  $k \in H_0^{vorl}$ 
5:    $H_1 \leftarrow H_1 \cup \{k\}$ 
6:    $K \leftarrow \sum_{k \in H_1} f_k + K_{A,H_1}(x)$ 
7:   if  $K < \bar{K}$  then
8:      $\bar{K} \leftarrow K$ 
9:      $H_0^{vorl} \leftarrow H_0^{vorl} \setminus \{k\}$ 
10:  else
11:    Verbesserung  $\leftarrow$  false
12:     $H_1 \leftarrow H_1 \setminus \{k\}$ 
13:  $H_0 \leftarrow H_0^{vorl}$ 

```

---

Eine obere Schranke  $\bar{K}$  der Gesamtkosten aus Lokations- und Allokationskosten wird in Zeile 1 des Add-Verfahrens berechnet. Da  $H_1 = \emptyset$  gilt, d. h. es sind noch keine Hubstandorte zugelassen, entspricht die obere Schranke den Transportkosten des entsprechenden Direktverkehrsnetzes, die durch den Zielfunktionswert  $K_{A,H_1}(x)$  des zugehörigen Allokationsproblems angegeben wird. In jeder der folgenden Iterationen (Zeile 3 - 12) wird zunächst ein weiterer auszuwählender potentieller Hubstandort  $k$  in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte aufgenommen (Zeile 5). Die Auswahl der potentiellen Hubstandorte  $k$  erfolgt nach geeigneten Prioritäten, die in Abschnitt 6.1.2 erläutert werden.

Daraufhin werden die Gesamtkosten  $K$  berechnet (Zeile 6), die der Summe von fixen Standortkosten und den Transport- sowie variablen Sortierkosten entsprechen. Gilt  $K < \bar{K}$ , d. h. die Aufnahme des Standorts  $k$  in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Standorte führt zu Gesamtkosten  $K$ , die geringer sind als die momentane obere Schranke  $\bar{K}$ , so wird diese aktualisiert und der Standort  $k$  aus der Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Standorte entfernt. Sind die Gesamtkosten  $K$  größer gleich der oberen Schranke  $\bar{K}$ , so kann durch die Aufnahme des Hubstandorts  $k$  in die Menge  $H_1$  keine Verringerung der oberen Schranke erzielt werden. Der Standort  $k$  wird wieder aus der Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte entfernt.

Die Iteration terminiert, sobald in einem Iterationsschritt keine Verringerung der oberen Schranke erzielt werden konnte oder die Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Hubstandorte leer ist, d. h. an allen potentiellen Hubstandorten ein Hub installiert wird.

Zum Abschluss des Verfahrens wird die Menge  $H_0$  der verbotenen Hubstandorte mit den in der Menge  $H_0^{vorl}$  verbliebenen potentiellen Hubstandorten initialisiert. Der Wert der Variablen  $\bar{K}$  stellt eine obere Schranke des untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. dar.

---

errichtet wird, d. h. für die entsprechende binäre Entscheidungsvariable  $y_k = 0$  gilt. Als zugelassener Hubstandort wird ein potentieller Hubstandort  $k \in S_H$  dann bezeichnet, wenn an diesem Standort ein Hub errichtet wird. Für die Entscheidungsvariable gilt  $y_k = 1$ .

### Add-Verfahren (Best-Fit-Strategie)

Im Gegensatz zu dem Add-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie wird bei dem Add-Verfahren mit Best-Fit-Strategie in jedem Iterationsschritt derjenige vorläufig verbotene Standort  $k \in H_0^{vorl}$  in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte aufgenommen, der zu der größten Verringerung der oberen Schranke  $\overline{K}$  führt.

In jedem Iterationsschritt ist somit die Aufnahme jedes potentiellen Hubstandorts  $k \in H_0^{vorl}$  in die Menge  $H_1$  zu untersuchen. Die Anzahl der zu lösenden Allokationsprobleme entspricht der Anzahl der Elemente von  $H_0^{vorl}$ .

Der folgende Algorithmus 2 verdeutlicht den Ablauf des Add-Verfahrens bei Anwendung der Best-Fit-Strategie.

---

#### Algorithmus 2 Add-Verfahren (Best-Fit-Strategie)

---

```

1:  $\overline{K} \leftarrow K_{A,H_1}(x)$ 
2: Verbesserung  $\leftarrow$  true
3: while (Verbesserung = true  $\wedge$   $H_0^{vorl} \neq \emptyset$ ) do
4:    $K_{min} \leftarrow \infty$ 
5:   for all  $k \in H_0^{vorl}$  do
6:      $H_1 \leftarrow H_1 \cup \{k\}$ 
7:      $K \leftarrow \sum_{k \in H_1} f_k + K_{A,H_1}(x)$ 
8:      $H_1 \leftarrow H_1 \setminus \{k\}$ 
9:     if ( $K < K_{min}$ ) then
10:       $K_{min} \leftarrow K$ 
11:       $k^* \leftarrow k$ 
12:   if  $K_{min} < \overline{K}$  then
13:      $\overline{K} \leftarrow K_{min}$ 
14:      $H_1 \leftarrow H_1 \cup \{k^*\}$ 
15:      $H_0^{vorl} \leftarrow H_0^{vorl} \setminus \{k^*\}$ 
16:   else
17:     Verbesserung  $\leftarrow$  false
18:  $H_0 \leftarrow H_0^{vorl}$ 

```

---

Vor Beginn des Verfahrens wird, wie bei der First-Fit-Strategie, die Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Hubstandorte mit der Menge  $S_H$  der potentiellen Hubstandorte initialisiert. Die Menge  $H_0$  der verbotenen Hubstandorte und die Menge  $H_1$  der zugelassenen Standorte werden ebenfalls mit der leeren Menge initialisiert.

Zu Beginn des Verfahrens (Zeile 1) wird die obere Schranke  $\overline{K}$  berechnet, die den Transportkosten des Direktverkehrsnetzes entspricht.

In den folgenden Iterationsschritten (Zeile 3 - 17) wird zunächst jeder Standort  $k$  aus der Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Standorte sukzessive untersucht, indem dieser temporär in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Standorte aufgenommen wird (Zeile 6) und die Gesamtkosten  $K$  berechnet werden. Derjenige Standort  $k$ , dessen temporäre Aufnahme in die Menge  $H_1$  zu den minimalen Gesamtkosten  $K_{min}$  führt, wird gespeichert.

Gilt  $K_{min} < \overline{K}$ , d. h. sind die in der aktuellen Iteration ermittelten minimalen Gesamtkosten  $K_{min}$  geringer als die obere Schranke  $\overline{K}$ , so wird die obere Schranke aktualisiert (Zeile 13). Derjenige Hubstandort  $k^*$ , dessen temporäre Aufnahme in die Menge  $H_1$  zu der verringerten

oberen Schranke führte, wird in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte aufgenommen und aus der Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Hubstandorte entfernt.

Die Iteration bricht ebenso wie das Add-Verfahren mit der Best-Fit-Strategie ab, wenn in einem Iterationsschritt keine Verringerung der oberen Schranke  $\bar{K}$  erzielt werden konnte oder die Menge  $H_0^{vorl}$  der vorläufig verbotenen Hubstandorte der leeren Menge entspricht.

## Drop-Verfahren

Zur Berechnung einer Eröffnungslösung kann neben dem Add-Verfahren auch das Drop-Verfahren mit den Strategien First-Fit und Best-Fit eingesetzt werden. Da der Ablauf des Drop-Verfahrens (vgl. Domschke und Drexl (1996)) genau umgekehrt zu dem Add-Verfahren ist, wird das Drop-Verfahren in diesem Abschnitt nur kurz bei Anwendung beider Strategien beschrieben. Die ausführliche Darstellung beider Algorithmen befindet sich im Anhang B.

Im Gegensatz zum Add-Verfahren werden zu Beginn des Drop-Verfahrens alle potentiellen Hubstandorte in die Menge  $H_1^{vorl}$  der vorläufig zugelassenen Hubstandorte aufgenommen. Die initiale obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts ergibt sich als Summe der fixen Standortkosten aller potentieller Hubstandorte sowie der entsprechenden Transport- und variablen Sortierkosten.

Bei Anwendung der First-Fit-Strategie wird in jedem Iterationsschritt ein Standort  $k$  gemäß einer Priorität aus der Menge  $H_1^{vorl}$  der vorläufig zugelassenen Hubstandorte in die Menge  $H_0$  der verbotenen Standorte übernommen und die hieraus resultierenden Gesamtkosten  $K$  berechnet.

Wird das Drop-Verfahren mit der Best-Fit-Strategie angewendet, so wird in jeder Iteration derjenige Standort  $k$  aus der Menge  $H_1^{vorl}$  der vorläufig zugelassenen Hubstandorte in die Menge  $H_0$  der endgültig verbotenen Standorte übernommen, der zu der größtmöglichen Verringerung der oberen Schranke  $\bar{K}$  des optimalen Zielfunktionswerts führt.

Das Drop-Verfahren wird bei beiden Strategien solange fortgesetzt, bis die obere Schranke  $\bar{K}$  durch die Aufnahme eines Standorts  $k$  in die Menge  $H_0$  der endgültig verbotenen Hubstandorte nicht mehr verringert wird oder die Menge  $H_1^{vorl}$  der leeren Menge entspricht. Die am Ende der Verfahren in der Menge  $H_1^{vorl}$  vorhandenen Standorte werden in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte übernommen.

### 5.2.2 Branch-and-Bound-Verfahren

Der folgende Abschnitt basiert, soweit nicht anders angegeben, auf den Ausführungen von Neumann und Morlock (1993). Die Autoren beschreiben das Branch-and-Bound-Verfahren zur Lösung rein-binärer Optimierungsprobleme. Dieses Verfahren wird zur Lösung des gemischt-binären linearen Optimierungsproblems (4.5) - (4.15) geeignet modifiziert und im Folgenden dargestellt.

Das Branch-and-Bound-Verfahren ist ein implizites Enumerationsverfahren und kann zur Bestimmung einer optimalen Lösung eines gemischt-binären linearen Optimierungsproblems der folgenden Form eingesetzt werden:

$$\text{Min} \quad F((x,y)^T) \tag{5.5}$$

$$\text{u. d. N.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M \tag{5.6}$$

Es wird angenommen, dass für die reellen Entscheidungsvariablen  $x \in \mathbb{R}^n$  und für die binären Entscheidungsvariablen  $y \in \{0,1\}^k$  gilt. Im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens werden sukzessive Teilmengen des zulässigen Bereichs  $M_{zul}$  von der weiteren Suche ausgeschlossen, da hier keine optimalen Lösungen des Problems liegen können.

Die Lösungssuche erfolgt mit Hilfe eines binären Suchbaums<sup>2</sup>, in dem jeder Knoten eine bestimmte Konfiguration der Binärvariablen und somit ein korrespondierendes Teilproblem des Ausgangsproblems (5.5) - (5.6) repräsentiert. Die Erzeugung eines neuen Knotens und somit einer neuen Konfiguration der Binärvariablen wird als Branching (engl. verzweigen) bezeichnet. Dabei entsteht ein neues Teilproblem des Ausgangsproblems.

Ob die weitere Lösungssuche ausgehend von einem Knoten fortgesetzt werden kann, wird anhand eines Vergleichs der unteren Schranke  $LB$  (engl. lower bound) des Teilproblems des untersuchten Knotens und einer oberen Schranke  $UB$  (engl. upper bound) des Problems (5.5) - (5.6) entschieden. Es wird in diesem Zusammenhang von Bounding (engl. begrenzen) gesprochen.

Für die obere Schranke  $UB$  gilt stets:

$$UB \geq \min_{(x,y)^T \in M} F((x,y)^T).$$

Gilt für alle Elemente  $(x,y)^T$  einer Teilmenge des zulässigen Bereichs  $M_{zul}$   $F((x,y)^T) \geq UB$ , d. h. der Zielfunktionswert aller Elemente ist größer gleich der oberen Schranke, so kann diese Teilmenge keine optimalen Lösungen enthalten und kann von der weiteren Lösungssuche ausgeschlossen werden.

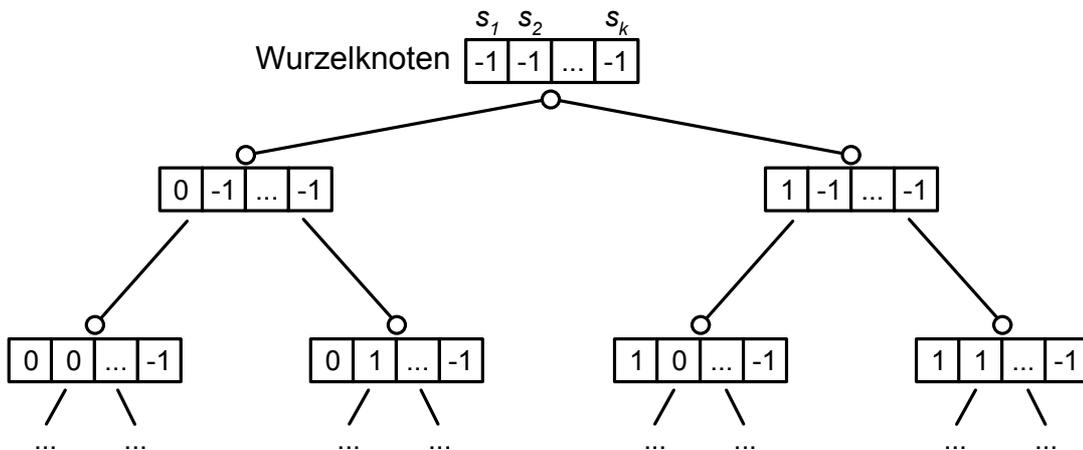


Abbildung 5.1: Beispielhafter Suchbaum eines Branch-and-Bound-Verfahrens. In jedem Knoten sind jeweils die Werte der Zustandsvariablen  $s_1, s_2, \dots, s_k$  der binären Entscheidungsvariablen  $y_1, y_2, \dots, y_k$  angegeben.

In Abbildung 5.1 ist der Suchbaum eines gemischt-binären linearen Optimierungsproblems dargestellt, der beispielsweise im Zuge eines Branch-and-Bound-Verfahrens aufgespannt werden könnte. Jeder Knoten des Baums repräsentiert eine bestimmte Konfiguration der Binärvariablen  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), deren Zustände sich im Verlauf des Verfahrens ändern und durch die Zustandsvariablen  $s_i$  beschrieben werden. Die Zustandsvariable  $s_i$  kann folgende drei Zustände

<sup>2</sup>Ein binärer Baum ist ein gerichteter Baum, in dem jeder Knoten höchstens zwei Söhne hat (vgl. Neumann und Morlock (1993)).

annehmen:

$$s_i = \begin{cases} 1, & \text{falls } y_i = 1 & (y_i \text{ ist zugelassen (fixiert)}) \\ 0, & \text{falls } y_i = 0 & (y_i \text{ ist verboten (fixiert)}) \\ -1, & \text{falls } y_i = 0 \vee y_i = 1 & (y_i \text{ ist frei}) \end{cases}$$

Zu Beginn des Branch-and-Bound-Verfahrens, d. h. im Wurzelknoten des Suchbaums, sind alle binären Entscheidungsvariablen  $y_i$  frei, d. h. es gilt:  $s_i = -1 (\forall i = 1, 2, \dots, k)$ .

Ein Verzweigungsschritt in einem binären Suchbaum erfolgt durch Fixieren einer noch freien binären Entscheidungsvariable  $y_i$  entweder auf den Wert 0 oder 1, wodurch sich der Wert der entsprechenden Zustandsvariablen  $s_i$  verändert. Somit entstehen ausgehend von einem Knoten zwei neue Knoten, die wiederum verzweigt werden können. Dadurch spannt sich sukzessive der Suchbaum auf.

Jeder Knoten des Suchbaums kann eindeutig durch einen Zustandsvektor  $s \in S := \{1, 0, -1\}^k$  beschrieben werden. Abhängig von der Lage des Knotens  $s$  im Suchbaum, wird der zulässige Bereich  $M_{zul}$  des gemischt-binären linearen Optimierungsproblems (5.5) - (5.6) auf die Menge  $M(s)$  eingeschränkt:

$$M(s) := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M \mid y_i = s_i, y_i \text{ ist fixiert } (i = 1, 2, \dots, k) \right\}.$$

Das zu jedem Knoten  $s$  des Suchbaums gehörende Optimierungsproblem lautet dann wie folgt:

$$\text{Min} \quad F((x, y)^T) \tag{5.7}$$

$$\text{u. d. N.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M(s) \tag{5.8}$$

Das Problem (5.7) - (5.8) stellt ein Teilproblem des ursprünglichen Optimierungsproblems (5.5) - (5.6) dar.

Im Zuge der Abarbeitung des Suchbaums sind diese Teilprobleme zu lösen. Dabei müssen sie nicht notwendigerweise exakt gelöst werden. Stattdessen kann eine Schrankenfunktion  $LB : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  eingesetzt werden, die folgende Bedingungen erfüllen muss:

- (1)**  $LB(s) \leq \min_{(x, y)^T \in M(s)} F((x, y)^T) = F^*(s)$   
Die Funktion  $LB(s)$  ist eine untere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts  $F^*(s)$  des Problems (5.7) - (5.8) im Knoten  $s$  des Suchbaums.
- (2)**  $M(s) := \{(x, y)^T \in M \mid s_i = 1 \vee s_i = 0 (\forall i = 1, 2, \dots, k)\} \Rightarrow LB(s) = \min_{(x, y)^T \in M(s)} F((x, y)^T)$   
Entspricht der Knoten  $s$  einem Blatt des Suchbaums, d. h. alle binären Entscheidungsvariablen sind fixiert, so gibt die Schrankenfunktion  $LB(s)$  den optimalen Zielfunktionswert des Problems (5.7) - (5.8) an und stellt somit die geringste untere Schranke dar.
- (3)**  $M(r) \subseteq M(s) \Rightarrow LB(r) \geq LB(s)$   
Wird der zulässige Bereich  $M(s)$  auf den Bereich  $M(r)$  eingeschränkt, so ist die untere Schranke  $LB(r)$  größer gleich der unteren Schranke  $LB(s)$ .

Im Folgenden wird die Erzeugung und die Abarbeitung des Suchbaums im Rahmen des Branch-and-Bound-Verfahrens anhand des in Abbildung 5.2 dargestellten Flussdiagramms erläutert.

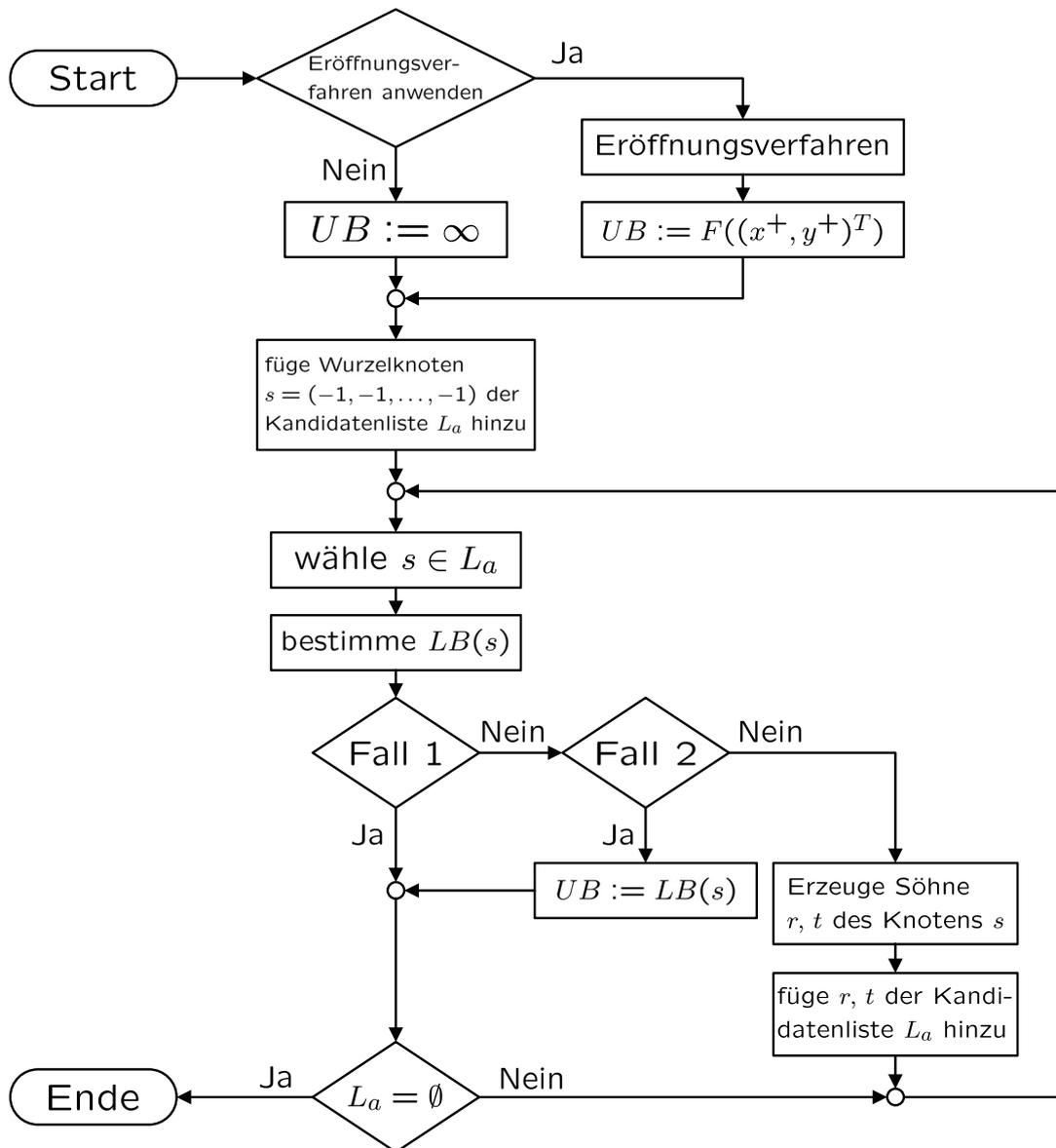


Abbildung 5.2: Darstellung eines Flussdiagramms für Branch-and-Bound-Verfahren in Anlehnung an Domschke (1996).

Zu Beginn des Branch-and-Bound-Verfahrens kann eine zulässige Lösung  $(x^+, y^+)^T$  des Problems (5.5) - (5.6) mit Hilfe eines Eröffnungsverfahrens bestimmt werden. Der entsprechende Zielfunktionswert stellt eine obere Schranke  $UB := F((x^+, y^+)^T)$  des Optimierungsproblems dar. In der vorliegenden Arbeit wird eine zulässige Lösung des untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. mit dem in Abschnitt 5.2.1 erläuterten Add- bzw. Drop-Verfahren bestimmt. Wird kein Eröffnungsverfahren angewendet, so wird die obere Schranke  $UB$  mit dem Wert unendlich initialisiert.

Der Suchbaum besteht zunächst aus dem aktiven Wurzelknoten, in dem alle binären Entscheidungsvariablen noch frei sind. Ein Knoten  $s$  wird dann als aktiv bezeichnet, wenn dessen untere Schranke  $LB(s)$  noch nicht mit der oberen Schranke  $UB$  verglichen worden ist. Aktive Knoten werden in der Kandidatenliste  $L_a$  gespeichert.

In jedem Iterationsschritt des Verfahrens wird aus der Kandidatenliste  $L_a$  ein Knoten  $s$  ausgewählt, aus dieser entfernt und die entsprechende untere Schranke  $LB(s)$  bestimmt. Daran schließt sich die folgende Untersuchung an:

**Fall 1:**  $LB(s) \geq UB$

Die untere Schranke  $LB(s)$  ist größer gleich der oberen Schranke. Aufgrund der Eigenschaft (1) der Schrankenfunktion besitzt das Optimierungsproblem (5.7) - (5.8) nur Lösungen  $(\bar{x}, \bar{y})^T$  für die gilt  $F(\bar{x}, \bar{y})^T \geq UB$ . Der Knoten  $s$  wird aus dem Suchbaum entfernt, ebenso der in den Knoten  $s$  einmündende Pfeil. Hat der Knoten  $s$  nur einen Vorgänger  $r$ , so wird auch dieser entfernt.

**Fall 2:**  $LB(s) < UB$

**(2a)** Alle Binärvariablen  $y_i$  sind fixiert, d. h. es gilt:  $s_i \in \{0,1\} (\forall i = 1, 2, \dots, k)$ . Der Knoten  $s$  ist somit ein Blatt des Suchbaums.

Gilt  $M(s) \neq \emptyset$ , so ist wegen  $LB(s) < UB$  und der Eigenschaft (2) der Schrankenfunktion  $b$  folgende Ungleichung erfüllt:

$$F(\bar{x}, y) = \min_{(x,y)^T \in M(s)} F(x,y) = LB(s) < UB = F(x^+, y^+)$$

Die in Knoten  $s$  ermittelte untere Schranke  $LB(s)$  ist kleiner als die bis dahin kleinste obere Schranke  $UB$ . Folgende Ersetzungen werden durchgeführt:  $UB := LB(s)$  und  $(x^+, y^+)^T := (\bar{x}, y)^T$ .

**(2b)**  $\exists i (i = 1, 2, \dots, k) s_i = -1$ , d. h. es ist noch mindestens eine binäre Entscheidungsvariable  $y_i$  frei.

Der Knoten  $s$  wird verzweigt, indem eine freie Variable  $y_i$  fixiert wird und somit zwei Söhne  $r$  und  $t$  des Vaterknotens  $s$  erzeugt werden. Im Knoten  $r$  gilt  $y_i := 0$ , im Knoten  $t$  gilt  $y_i := 1$ .

Die Knoten  $r$  und  $t$  sowie die Kanten zwischen diesen und dem Vaterknoten  $s$  werden dem Suchbaum hinzugefügt. Die aktiven Knoten  $r$  und  $t$  werden zudem in die Kandidatenliste  $L_a$  übernommen.

Das Branch-and-Bound-Verfahren bricht ab, sobald für die Kandidatenliste  $L_a = \emptyset$  gilt, d. h. keine aktiven Knoten mehr vorhanden sind. Die zu diesem Zeitpunkt gültige obere Schranke  $UB$  entspricht dem optimalen Zielfunktionswert  $F^* := UB$  des Optimierungsproblems (5.5) - (5.6). Für die optimale Lösung gilt:  $(x^*, y^*)^T := (x^+, y^+)^T$ .

In den Untersuchungsfällen (1) und (2a) wird das zu dem aktuellen Knoten  $s$  gehörende Optimierungsproblem (5.7) - (5.8) als ausgelotet bezeichnet. Im Gegensatz dazu kann in Fall (2b) das Problem verzweigt werden.

Im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens wird in jeder Iteration ein Knoten  $s$  aus der Kandidatenliste  $L_a$  ausgewählt, der zu untersuchen ist. Die Auswahl dieses Knotens erfolgt mit Hilfe einer der folgenden Suchstrategien:

1. First-in-First-out (FiFo)
2. Last-in-First-out (LiFo)
3. Least-Lower-Bound (LLB)

Bei der FiFo-Strategie werden neu erzeugte Knoten am Ende der Kandidatenliste gespeichert. Der bereits am längsten in der Liste vorhandene Knoten wird als nächster untersucht und aus der Kandidatenliste entfernt. Wird die LiFo-Strategie angewendet, so werden neu erzeugte Knoten an das Ende der Kandidatenliste eingefügt und als nächster Knoten derjenige untersucht, der sich am Ende der Liste befindet. Die LLB-Strategie zieht bei der Auswahl des nächsten zu untersuchenden Knotens den Wert der unteren Schranke jedes Knotens in Betracht. Es wird derjenige Knoten  $s$  als nächster untersucht, dessen untere Schranke  $LB(s)$  minimal ist.<sup>3</sup>

Im Verzweigungsfall (2b) kommen als mögliche Verzweigungsvariablen alle binären Entscheidungsvariablen  $y_i$  in Betracht, für die  $s_i = -1$  gilt. In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Auswahl der Verzweigungsvariablen anhand eines Prioritätswerts, der die relative Bedeutung einer freien Entscheidungsvariablen  $y_i$  bzgl. einer Eigenschaft des potentiellen Hubstandorts  $i$  angibt. Es wird die freie Variable mit dem größten Prioritätswert als Verzweigungsvariable ausgewählt. In Abschnitt 6.1.2 wird die Berechnung der Prioritätswerte hinsichtlich verschiedener Eigenschaften der potentiellen Hubstandorte vorgestellt. Weitere Strategien zur Auswahl der Verzweigungsvariablen werden in Lee (2002) und Nemhauser und Wolsey (1988) angegeben.

Zur Bestimmung einer unteren Schranke in einem Knoten  $s$  des Suchbaums ist die Definition einer geeigneten Schrankenfunktion  $LB(s)$  notwendig. Der optimale Zielfunktionswert eines zu dem Optimierungsproblem (5.7) - (5.8) relaxierten Problems erfüllt die geforderten Eigenschaften (vgl. Lee (2002)) und kann somit als Schrankenfunktion eingesetzt werden. Ein relaxiertes Problem kann u. a. durch die Eliminierung der Ganzzahligkeitsbedingungen der noch freien binären Entscheidungsvariablen erzeugt werden.

---

<sup>3</sup>Bei Anwendung der LLB-Strategie muss das in Abbildung 5.2 dargestellte Flussdiagramm geeignet verändert werden.



# 6 Entwicklung von Algorithmen zur Problemlösung

In diesem Kapitel werden die zur Lösung des untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. (4.5) - (4.15) entwickelten Algorithmen vorgestellt.

Zunächst werden die entwickelten Algorithmen beschrieben, die im Rahmen des Add- und des Drop-Verfahrens zur Bestimmung einer Eröffnungslösung verwendet werden. Mit Hilfe dieser Verfahren wird eine obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. berechnet. Die obere Schranke wird zur effizienten Abarbeitung des sich anschließenden Branch-and-Bound-Verfahrens eingesetzt, für das ein Algorithmus zur Berechnung unterer Schranken des optimalen Zielfunktionswerts in jedem Knoten des Suchbaums entwickelt wird. Zur weiteren Verkürzung der Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens werden in jedem Knoten logische Tests durchgeführt, die abschließend erläutert werden.

## 6.1 Bestimmung von Lösungen des Eröffnungsverfahrens

Im Zuge des Add- und des Drop-Verfahrens (s. Abschnitt 5.2.1) werden in jedem Iterationsschritt die Gesamtkosten bestehend aus den fixen Standortkosten der Hubs sowie den Transport- und variablen Sortierkosten berechnet. Die Transport- und variablen Sortierkosten werden mit Hilfe des Allokationsproblems bestimmt, zur dessen Lösung ein heuristisches Verfahren entwickelt wird.

Bei Anwendung der First-Fit-Strategie im Rahmen beider Verfahren muss in jedem Iterationsschritt zudem bestimmt werden, welcher potentielle Hubstandort in die Menge der zugelassenen bzw. in die Menge der verbotenen Hubstandorte aufgenommen wird. Für die Auswahl der Hubstandorte wird die Berechnung der notwendigen Prioritäten angegeben.

### 6.1.1 Algorithmus zur Lösung des Allokationsproblems

Die Aufgabe des entwickelten Algorithmus ist es, zunächst mit Hilfe eines modifizierten Tripel-Algorithmus eine optimale Lösung des Allokationsproblems unter Vernachlässigung der Kapazitätsbeschränkungen zu bestimmen. Daran schließt sich die Ermittlung der erforderlichen Sortierkapazitäten in den Hubs für die Hub-Hauptlauf- und Hub-Nachlaufsortierungen an. Im folgenden Verfahrensschritt werden die Kapazitätsbeschränkungen der Hubs wieder berücksichtigt. Überschreiten die erforderlichen die verfügbaren Sortierkapazitäten, so werden die mit Hilfe des modifizierten Tripel-Algorithmus bestimmten kürzesten Wege derart modifiziert, dass keine Kapazitätsüberschreitungen mehr auftreten.

### Formulierung des Allokationsproblems

Das folgende Allokationsproblem unterscheidet sich von dem kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problem i. e. S. (4.5) - (4.15) insofern, als von der Menge  $H_1$  von zugelassenen Hubstandorten ausgegangen wird. Somit entfallen die binären Entscheidungsvariablen  $y_k$ . Im Rahmen der Lösung des Allokationsproblems wird die Sendungsmenge auf den einzelnen Transportrelationen des Netzwerks mit dem Ziel bestimmt, die Summe von Transport- und variablen Sortierkosten zu minimieren.

$$\begin{aligned} \text{Min } K_{A,H_1}(x) = & \underbrace{\sum_{i \in S_D} \sum_{k \in H_1} \sum_{m \in H_1} \sum_{j \in S_D} b_{ij} c_{ikmj} x_{ikmj}}_{\text{Kosten der Transportketten über Hubs}} \\ & + \underbrace{\sum_{i \in S_D} \sum_{j \in S_D} c_{ij} b_{ij} x_{ij}}_{\text{Kosten der Direkverkehrsrelationen}} \end{aligned} \quad (6.1)$$

u. d. N.

$$x_{ij} + \sum_{k \in H_1} \sum_{m \in H_1} x_{ikmj} = 1 \quad \forall i, j \in S_D \quad (6.2)$$

$$\sum_{i \in S_D} \sum_{m \in H_1} \sum_{j \in S_D} x_{ikmj} b_{ij} \leq \kappa_k \quad \forall k \in H_1 \quad (6.3)$$

$$\sum_{i \in S_D} \sum_{\substack{k \in H_1 \\ k \neq m}} \sum_{j \in S_D} x_{ikmj} b_{ij} \leq \kappa_m \quad \forall m \in H_1 \quad (6.4)$$

$$x_{ikmj} \leq 0 \quad \forall i, j \in S_D \cap H_1, \forall k, m \in H_1, i \neq k, m \neq j \quad (6.5)$$

$$x_{ikmj} \leq 0 \quad \forall i, j \in S_D \cap H_1, \forall k, m \in H_1, i = k, m \neq j \quad (6.6)$$

$$x_{ikmj} \leq 0 \quad \forall i, j \in S_D \cap H_1, \forall k, m \in H_1, i \neq k, m = j \quad (6.7)$$

$$x_{ikmj} \leq 0 \quad \forall i, j \in S_D \cap H_1, \forall k, m \in H_1, m \neq j \quad (6.8)$$

$$x_{ikmj} \leq 0 \quad \forall i, j \in S_D \cap H_1, \forall k, m \in H_1, i \neq k \quad (6.9)$$

$$x_{ij} \leq 0 \quad \forall i, j \in S_D \cap H_1 \quad (6.10)$$

$$x_{ij} \leq 0 \quad \forall i \in S_D \cap H_1, \forall j \in S_D \quad (6.11)$$

$$x_{ij} \leq 0 \quad \forall j \in S_D \cap H_1, \forall i \in S_D \quad (6.12)$$

$$x_{ikmj}, x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in S_D, \forall k, m \in H_1 \quad (6.13)$$

Zur Bestimmung einer zulässigen Lösung wird das angegebene Optimierungsproblem zunächst relaxiert, indem die Nebenbedingungen (6.3) und (6.4) eliminiert werden. Dadurch entfallen die Kapazitätsbeschränkungen der Hubstandorte  $k \in H_1$ . Zur Lösung dieses relaxierten Problems muss lediglich gewährleistet werden, dass alle Sendungen unter Berücksichtigung der geforderten Eigenschaften der Transportketten von ihrem Versanddepot  $i$  zu dem entsprechenden Empfangsdepot  $j$  transportiert werden.

Zur Bestimmung einer optimalen Lösung des Optimierungsproblems (6.1), (6.2), (6.5) - (6.13) ist es erforderlich, für je zwei Knoten  $i, j \in S_D$  genau diejenige Transportkette zu bestimmen, die die geringsten Transport- und variablen Sortierkosten verursacht. Dieses Problem entspricht dem Kürzeste-Wege-Problem in Netzwerken.

### Modifizierter Tripel-Algorithmus

Der Tripel-Algorithmus ist ein Verfahren zur Bestimmung der kürzesten Wege zwischen allen Knoten eines Netzwerks (vgl. Arnold (2003) sowie Neumann und Morlock (1993)), das in modifizierter Form zur Lösung des nicht kapazitätsbeschränkten Allokationsproblems (6.1), (6.2), (6.5) - (6.13) verwendet wird.

Das Ergebnis des Verfahrens ist eine Routenmatrix  $R$  und eine Kürzeste-Wege-Matrix  $D$ , die den kürzesten Weg sowie die Länge des kürzesten Wegs zwischen je zwei Knoten des Netzwerks angeben, sofern ein solcher existiert. Die Länge eines Wegs wird bei dem vorliegenden Allokationsproblem synonym für die Höhe der Transport- und variablen Sortierkosten einer Sendungseinheit entlang dieses Wegs verwendet.

Damit die zu ermittelnden kürzesten Wege den in Abschnitt 4.1.3 geforderten Eigenschaften entsprechen, ist ein kantenbewerteter Digraph  $\vec{G}_A = (V_A, E_A; c_A)$  zu modellieren. Für jeden Depotstandort  $i \in S_D$  und jeden Hubstandort  $k \in H_1$  wird jeweils ein Knoten modelliert, so dass für die Anzahl der Knoten des Graphen  $\vec{G}_A$  gilt:  $|V_A| = |S_D| + |H_1|$ . Die Beschreibung der Struktur des Digraphen erfolgt mittels der Adjazenzmatrix  $A_A$ . Die Kantenbewertungen sind in der Bewertungsmatrix  $C_A$  angegeben. Beide Matrizen sind im Anhang C aufgeführt.

Mit Hilfe des modifizierten Tripel-Algorithmus sind die kürzesten Wege zwischen je zwei Knoten  $i, j \in \{1, 2, \dots, |S_D|\}$ , die einem Depot entsprechen, derart zu bestimmen, dass diese über maximal zwei Knoten  $k, m \in \{|S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  führen, die Hubs entsprechen.

Zur Bestimmung der kürzesten Wege werden zusätzlich die Bewertungsmatrizen  $C_A^{[3]}$  und  $C_A^{[4]}$  eingeführt, die vor Beginn des modifizierten Tripel-Algorithmus folgendermaßen initialisiert werden:

$$c_{A,ij}^{[3]} := c_{A,ij}^{[4]} := c_{A,ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, |S_D| + |H_1|).$$

Die Elemente der Matrizen  $C_A^{[3]}$  bzw.  $C_A^{[4]}$  geben in jedem Iterationsschritt des Algorithmus die Länge des kürzesten Wegs zwischen je zwei Knoten über maximal einen weiteren bzw. maximal zwei weitere Knoten an.

Desweiteren werden die Vorgängermatrizen  $V^{[3]}$  und  $V^{[4]}$  initialisiert, deren Elemente  $v_{ij}^{[3]}$  und  $v_{ij}^{[4]}$  den unmittelbaren Vorgänger von Knoten  $j$  auf dem kürzesten Weg von  $i$  nach  $j$  über maximal einen weiteren bzw. maximal zwei weitere Knoten angeben:

$$v_{ij}^{[3]} := v_{ij}^{[4]} := \begin{cases} i, & \text{falls } i = j \vee a_{A,ij} = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, |S_D| + |H_1|).$$

Der Bezeichner  $a_{A,ij}$  ist ein Element der Adjazenzmatrix  $A_A$ , dessen Wert eins ist, wenn ausgehend vom Knoten  $i$  eine gerichtete Kante zum Knoten  $j$  besteht.

An die Initialisierung der Bewertungsmatrizen  $C_A^{[3]}$  und  $C_A^{[4]}$  sowie der Vorgängermatrizen  $V^{[3]}$  und  $V^{[4]}$  schließt sich der folgende modifizierte Tripel-Algorithmus an.

---

**Algorithmus 3** Modifizierter Tripel-Algorithmus

---

```

1: for all  $k \in \{|S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  do
2:   for all  $i \in \{1, 2, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  do
3:     for all  $j \in \{1, 2, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  do
4:       if  $c_{A,ik} + c_{A,kj} < c_{A,ij}^{[3]}$  then
5:          $c_{A,ij}^{[3]} \leftarrow c_{A,ik} + c_{A,kj}$ 
6:          $v_{ij}^{[3]} \leftarrow k$ 
7:   for all  $k \in \{|S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  do
8:     for all  $i \in \{1, 2, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  do
9:       for all  $j \in \{1, 2, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  do
10:        if  $c_{A,ik} + c_{A,kj}^{[3]} < c_{A,ij}^{[4]}$  then
11:           $c_{A,ij}^{[4]} \leftarrow c_{A,ik} + c_{A,kj}^{[3]}$ 
12:           $v_{ij}^{[4]} \leftarrow k$ 
13:        else if  $c_{A,ik}^{[3]} + c_{A,kj} < c_{A,ij}^{[4]}$  then
14:           $c_{A,ij}^{[4]} \leftarrow c_{A,ik}^{[3]} + c_{A,kj}$ 
15:           $v_{ij}^{[4]} \leftarrow k$ 

```

---

Im Unterschied zum herkömmlichen Tripel-Algorithmus werden zur Bestimmung der kürzesten Wege nur Knoten berücksichtigt, die einem Hubstandort  $k \in \{|S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  entsprechen (Zeile 1).

In jedem der Iterationsschritte (Zeile 2 - 15) wird versucht, die Länge  $c_{A,ij}^{[3]}$  der kürzesten Wege mit maximal drei Knoten und die Länge  $c_{A,ij}^{[4]}$  der kürzesten Wege mit maximal vier Knoten zu verringern, indem zusätzliche Wege über den Knoten  $k$  berücksichtigt werden. Im Fall der Bestimmung der kürzesten Wege mit maximal vier Knoten (Zeile 7 - 15) ist zu beachten, dass diese sich aus kürzesten Wegen mit maximal drei und zwei Knoten bzw. aus kürzesten Wegen mit maximal zwei und drei Knoten zusammensetzen können.

Die Länge des kürzesten Wegs  $d_{ij}$  zwischen je zwei Knoten  $i, j \in \{1, 2, \dots, |S_D|\}$ , die Depots entsprechen, wird folgendermaßen bestimmt:

$$d_{ij} := \min\{c_{A,ij}^{[3]}, c_{A,ij}^{[4]}\} \quad (i, j = 1, 2, \dots, |S_D|).$$

Nach Abschluss des Verfahrens entsprechen die Vorgängermatrizen  $V^{[3]}$  bzw.  $V^{[4]}$  den gesuchten Routenmatrizen. Abhängig davon, ob der kürzeste Weg zwischen zwei Knoten  $i$  und  $j$  über maximal einen weiteren oder maximal zwei weitere Knoten führt, wird dieser kürzeste Weg durch rekursive Auswertung der Vorgängermatrizen  $V^{[3]}$  bzw.  $V^{[4]}$  bestimmt (vgl. Arnold (2003)).

### Ermittlung der erforderlichen Sortierkapazitäten in den Hubs

Die mit Hilfe des modifizierten Tripel-Algorithmus ermittelten kürzesten Wege können nicht zur Bestimmung einer oberen Schranke des optimalen Zielfunktionswerts des kapazitätsbeschränk-

ten Transportproblems (6.1) - (6.13) herangezogen werden, wenn die zur Verfügung stehenden Sortierkapazitäten  $\kappa_k$  der Knoten  $k \in \{|S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\}$  überschritten werden. Deshalb werden die erforderlichen Sortierkapazitäten  $\kappa_k^{[i]}$  ( $i = 1, 2$ ) während der Hub-Hauptlauf-Sortierung ( $i = 1$ ) und der Hub-Nachlauf-Sortierung ( $i = 2$ ) für den Fall bestimmt, dass die Sendungstransporte auf den kürzesten Wegen zwischen zwei Depots über einen oder zwei Hubs erfolgen.

Dazu werden die kürzesten Wege zwischen je zwei Depotstandorten  $i, j \in \{1, 2, \dots, |S_D|\}$  mittels der Vorgängermatrizen  $V^{[3]}$  oder  $V^{[4]}$  bestimmt. Den Hubstandorten  $k$  werden die erforderlichen Sortierkapazitäten während der Hub-Vor- und Hub-Hauptlauf-Sortierung zugeordnet. Folgende Fälle sind abhängig davon, ob der kürzeste Weg über maximal einen weiteren Knoten ( $n = 3$ ) oder maximal zwei weitere Knoten ( $n = 4$ ) führt, zu unterscheiden:

1.  $v_{ij}^{[n]} = i$   
Der kürzeste Weg zwischen Knoten  $i$  und  $j$  entspricht der gerichteten Kante zwischen beiden Knoten. Es handelt sich um eine Direktverkehrsrelation, es erfolgt keine Sortierung in einem Hub.
2.  $v_{ij}^{[n]} = k \wedge v_{ik}^{[n]} = i$   
Der kürzeste Weg zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  führt über den Knoten  $k$ , der einem Hubstandort entspricht. Somit erhöht sich die erforderliche Sortierkapazität  $\kappa_k^{[1]}$  um  $b_{ij}$  Sendungseinheiten:

$$\kappa_k^{[1]} \leftarrow \kappa_k^{[1]} + b_{ij}.$$

3.  $v_{ij}^{[n]} = m \wedge v_{im}^{[n]} = k$   
Der kürzeste Weg zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  führt über die Knoten  $k$  und  $m$ , die beide Hubstandorten entsprechen. Somit gilt für die erforderlichen Sortierkapazitäten:

$$\kappa_k^{[1]} \leftarrow \kappa_k^{[1]} + b_{ij} \quad \kappa_m^{[2]} \leftarrow \kappa_m^{[2]} + b_{ij}.$$

### Modifizierung von Sendungswegen

Gilt für die erforderliche Sortierkapazität  $\kappa_k^{[i]}$  in einem Hub  $k$  während der Hub-Hauptlauf- oder Hub-Nachlauf-Sortierung

$$\kappa_k^{[i]} > \kappa_k \quad (i = 1, 2),$$

so ist die erforderliche Sortierkapazität größer als die zur Verfügung stehende Sortierkapazität  $\kappa_k$ .

Die bestehenden Sendungswege, die den kürzesten Wegen entsprechen, sind derart zu modifizieren, dass die Sortierkapazitäten eingehalten werden. Die daraus resultierenden Sendungswege genügen dann allen Nebenbedingungen des Transportproblems (6.1) - (6.13) und der entsprechende Zielfunktionswert  $K_{A,H_1}(x)$  stellt eine obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts  $K_{A,H_1}(x^*)$  dar.

Die Modifizierung der Sendungswege erfolgt so, dass sukzessive die Sortierkapazitäten der Hub-Hauptlauf-Sortierungen (vgl. Nebenbedingungen (6.3)) und der Hub-Nachlauf-Sortierungen (vgl. Nebenbedingungen (6.4)) eingehalten werden.

In einem ersten Schritt erfolgt eine Modifizierung der Sendungswege, die über einen überlasteten Hub  $\hat{k}$  der Hub-Hauptlauf-Sortierung führen. Dazu wird das Sendungsaufkommen  $b_{ij}$  über denjenigen Hub  $k'$  mit ausreichender Sortierkapazität umgeleitet, zu dem der Knoten  $i$  die geringste Entfernung besitzt (vgl. Abbildung 6.1 (links)).

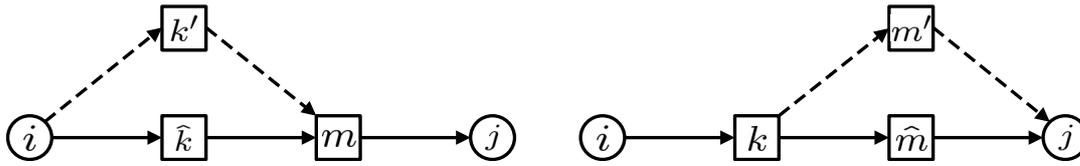


Abbildung 6.1: Darstellung der Modifizierung eines Sendungswegs bei Überschreitung der Sortierkapazität des Hubs  $\hat{k}$  während der Hub-Hauptlauf-Sortierung (links) und des Hubs  $\hat{m}$  während der Hub-Nachlauf-Sortierung (rechts).

In einem zweiten Schritt werden die Sendungswege modifiziert, bei denen der Hub  $\hat{m}$  der Hub-Nachlauf-Sortierung überlastet ist. Analog der obigen Vorgehensweise wird der zu dem Knoten  $j$  am dichtesten liegende Hub  $m'$  bestimmt, der ausreichend freie Sortierkapazität in Höhe von  $b_{ij}$  Sendungseinheiten besitzt (vgl. Abbildung 6.1 (rechts)).

Der folgende Algorithmus 4 beschreibt die Modifizierung von Sendungswegen, die über einen Hub  $\hat{k}$  führen, dessen Sortierkapazität während der Hub-Hauptlauf-Sortierung überschritten ist. Dieser Algorithmus ist für alle Hubs  $\hat{k} \in \{|S_D|+1, \dots, |S_D|+|H_1|\}$  auszuführen, für die  $\kappa_{\hat{k}}^{[1]} > \kappa_{\hat{k}}$  gilt. Danach werden die Sortierkapazitäten aller Hubs während der Hub-Hauptlauf-Sortierung eingehalten.

An diesen Algorithmus schließt sich für alle Hubs  $\hat{m}$  ein weiteres Verfahren zur Modifizierung von Sendungswegen an, für die gilt:

$$\kappa_{\hat{m}}^{[2]} > \kappa_{\hat{m}}.$$

Dieser Algorithmus zur Modifizierung von Sendungswegen bei überlasteter Hub-Nachlauf-Sortierung erfolgt analog dem Algorithmus 4 und ist in Anhang D angegeben.

### 6.1.2 Prioritäten zur Auswahl von Hubstandorten

In jedem Iterationsschritt des Add- und des Drop-Verfahrens (s. Abschnitt 5.2.1) bei Anwendung der First-Fit-Strategie wird ein weiterer noch freier Hubstandort fixiert. Die Reihenfolge, in der die Hubstandorte fixiert werden, wird durch einen Prioritätswert festgelegt, der mittels einer Prioritätsfunktion berechnet wird.

Im Folgenden werden sieben Prioritätsfunktionen  $p_i^A : S_H \rightarrow [0,1)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) für das Add-Verfahren angegeben, die jeweils Merkmalsausprägungen einer oder mehrerer Eigenschaften der potentiellen Hubstandorte  $k \in S_H$  berücksichtigen:<sup>1</sup>

1. Die folgende Prioritätsfunktion zieht zur Bestimmung des Prioritätswerts die Kosten pro Sendungseinheit heran, die sich als Summe der linearisierten Fixkosten  $\frac{f_k}{\kappa_k}$  und den variablen Sortierkosten  $s_k$  eines potentiellen Hubstandorts  $k \in S_H$  ergeben. Es werden solche potentiellen Hubstandorte priorisiert, die die geringsten spezifischen Sortierkosten pro Sendungseinheit verursachen.

$$p_1^A(k) := \frac{\max \left\{ \frac{f_k}{\kappa_k} + s_k \mid k \in S_H \right\} - \left( \frac{f_k}{\kappa_k} + s_k \right)}{\max \left\{ \frac{f_k}{\kappa_k} + s_k \mid k \in S_H \right\} - \min \left\{ \frac{f_k}{\kappa_k} + s_k \mid k \in S_H \right\} + \epsilon}$$

<sup>1</sup>Der Nenner der Prioritätsfunktionen wird um die Konstante  $\epsilon > 0$  erweitert, um eine unzulässige Division durch Null zu verhindern.

---

**Algorithmus 4** Modifizierung von Sendungswegen bei überlasteter Hub-Hauptlauf-Sortierung des Hubs  $\hat{k}$ 

---

**Schritt 0:** Speichere die Sendungsmengen  $b_{ij}$  aufsteigend in einer Liste  $L_B$ . Setze  $p = 1$ .

**Schritt 1:** Ermittle für das  $p$ -te Element der Liste  $L_B$  den Anfangsknoten  $i$  und den Endknoten  $j$  des Sendungstransports.

**Schritt 2:** Entspricht der kürzeste Weg zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  dem direkten Weg, so erhöhe  $p$  um eins und gehe zu Schritt 1.

**Schritt 3:** Ermittle für den kürzesten Weg von Knoten  $i$  nach  $j$ , ob dieser als ersten Hub den Knoten  $\hat{k}$  enthält. Wenn dies nicht der Fall ist oder  $\hat{k} = b(i)$  (vgl. Anhang C) gilt, d. h. das Depot  $i$  und der Hub  $\hat{k}$  sich am selben Standort befinden, dann erhöhe  $p$  um eins und gehe zu Schritt 1.

**Schritt 4:** Bestimme einen Knoten  $k' \in H_1$ , zu dem die gerichtete Kante vom Knoten  $i$  aus die geringste Länge aufweist und dessen freie Sortierkapazität größer gleich der Sendungsmenge  $b_{ij}$  ist:  $k' := \min_{k \in \{|S_D|+1, \dots, |S_D|+|H_1|\}} \{c_{A,ik} | \kappa_k - \kappa_k^{[1]} \geq b_{ij}\}$ .

**Schritt 5:** Handelt es sich bei dem Knoten  $j$  um einen Standort mit reiner Depot-Funktion und gilt  $k' \neq \emptyset$ , so ist die Länge des Wegs von  $i$  nach  $j$  über Knoten  $k'$  anstelle des Knotens  $\hat{k}$  zu bestimmen. Wähle als neuen Sendungsweg von Knoten  $i$  nach  $j$  den Weg über den Knoten  $k'$ , wenn die Länge dieses Wegs geringer ist als die Länge der gerichteten Kante von  $i$  nach  $j$ . Ansonsten wähle als neuen Sendungsweg den direkten Weg von  $i$  nach  $j$ .

**Schritt 6:** Handelt es sich bei dem Knoten  $j$  um einen Standort mit Depot- und Hub-Funktion und gilt  $k' \neq \emptyset$ , so ist die Länge des Wegs von  $i$  nach  $j$  über Knoten  $k'$  anstelle des Knotens  $\hat{k}$  zu bestimmen. Wähle als neuen Sendungsweg von Knoten  $i$  nach  $j$  den Weg über den Knoten  $k'$ .

**Schritt 7:** Aktualisiere die erforderlichen Sortierkapazitäten entsprechend der durchgeführten Modifizierung.

**Schritt 8:** Wenn für die erforderliche Sortierkapazität  $\kappa_{\hat{k}}^{[1]}$  des untersuchten Hubs  $\hat{k}$  gilt, dass diese größer der vorhandenen Sortierkapazität  $\kappa_{\hat{k}}$  ist, so erhöhe  $p$  um eins und gehe zu Schritt 1. Ansonsten beende den Algorithmus.

---

2. Im Gegensatz zu  $p_1^A(k)$  werden bei dieser Prioritätsfunktion die potentiellen Hubstandorte entsprechend den Gesamtkosten, bestehend aus den Fixkosten  $f_k$  und den variablen Sortierkosten  $s_k \cdot \kappa_k$ , priorisiert.

$$p_2^A(k) := \frac{\max\{f_k + s_k \cdot \kappa_k | k \in S_H\} - (f_k + s_k \cdot \kappa_k)}{\max\{f_k + s_k \cdot \kappa_k | k \in S_H\} - \min\{f_k + s_k \cdot \kappa_k | k \in S_H\} + \epsilon}$$

3. Bei dieser Prioritätsfunktion erhalten Hubstandorte mit hoher Sortierkapazität  $\kappa_k$  eine hohe Priorität. Es soll erreicht werden, dass nur wenige Hubs zur Abwicklung des Sendungsaufkommens notwendig sind.

$$p_3^A(k) := \frac{\kappa_k - \min\{\kappa_k | k \in S_H\}}{\max\{\kappa_k | k \in S_H\} - \min\{\kappa_k | k \in S_H\} + \epsilon}$$

4. Der Zielfunktionswert des Problems (4.5) - (4.15) wird neben den Fixkosten der Hubstandorte und den variablen Sortierkosten auch durch die Höhe der Transportkosten beeinflusst. Deshalb wird bei der folgenden Prioritätsfunktion die Summe der Transportkosten  $c_k$  des potentiellen Hubstandorts  $k$  zu allen anderen Knoten des Netzwerks betrachtet.

$$c_k := \sum_{j \in S_D \cup S_h} c_{kj} \quad \forall k \in S_H$$

Je geringer der Wert  $c_k$  ist, desto höher ist der Prioritätswert des potentiellen Hubstandorts  $k$ .

$$p_4^A(k) := \frac{\max\{c_k | k \in S_H\} - c_k}{\max\{c_k | k \in S_H\} - \min\{c_k | k \in S_H\} + \epsilon}$$

Die bislang vorgestellten Prioritätsfunktionen sind einattributig, d. h. sie berücksichtigen jeweils nur die Merkmalsausprägung einer Eigenschaft der potentiellen Hubstandorte. Die folgenden drei Prioritätsfunktionen sind zweiattributig und setzen sich jeweils als Summe der o. g. normierten Prioritätsfunktionen zusammen.

5.  $p_5^A(k) := \frac{1}{2} \cdot (p_2^A(k) + p_4^A(k))$

6.  $p_6^A(k) := \frac{1}{2} \cdot (p_3^A(k) + p_4^A(k))$

7.  $p_7^A(k) := \frac{1}{2} \cdot (p_1^A(k) + p_4^A(k))$

Die Aufnahme eines potentiellen Hubstandorts  $k$  in die Menge der endgültig verbotenen Standorte  $H_0$  im Verlauf des Drop-Verfahrens ist komplementär zu der Aufnahme eines Hubstandorts in die Menge  $H_1$  der endgültig zugelassenen Hubstandorte während des Add-Verfahrens, deshalb gilt für die Prioritäten des Drop-Verfahrens:

$$p_i^D(k) := 1 - p_i^A(k) \quad (i = 1, 2, \dots, 7).$$

Die ermittelten Prioritätswerte  $p_i^A(k)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) des Add-Verfahrens werden auch zur Auswahl der binären Verzweigungsvariablen im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens (vgl. Abschnitt 5.2.2) verwendet.

## 6.2 Bestimmung unterer Schranken im Branch-and-Bound-Verfahren

Das in dieser Arbeit untersuchte kapazitätsbeschränkte Hub-Location-Problem i. e. S. (4.5) - (4.15) ist ein gemischt binäres lineares Optimierungsproblem, zu dessen Lösung ein Branch-and-Bound-Verfahren (vgl. Abschnitt 5.2.2) eingesetzt wird. Während des Verfahrens wird sukzessive ein Suchbaum aufgespannt, dessen Knoten  $s \in S$  jeweils einen bestimmten Zustand der binären Entscheidungsvariablen  $y_k$  ( $k \in S_H$ ) repräsentieren. Zur Abarbeitung des Suchbaums ist es erforderlich, den optimalen Zielfunktionswert  $F^*(s)$  des zu dem Knoten  $s$  korrespondierenden Optimierungsproblems zu bestimmen oder eine untere Schranke  $LB(s)$  von  $F^*(s)$  zu berechnen.

In diesem Abschnitt wird ein heuristisches Verfahren zur Bestimmung der unteren Schranke  $LB(s)$  in den Knoten des Suchbaums entwickelt. Folgende Definition und Sätze sind dabei von zentraler Bedeutung.

**Definition 6.1 (Relaxation)** *Ein Problem  $P'$  wird als Relaxation eines Minimierungsproblems  $P$  bezeichnet, wenn für die zulässigen Bereiche  $M_P \subseteq M_{P'}$  und für die Zielfunktionswerte  $F_P(x) \geq F_{P'}(x)$  ( $\forall x \in M_P$ ) gilt (vgl. Geoffrion (1974)).*

**Satz 6.1 (Optimaler Zielfunktionswert einer Relaxation)** *Wenn ein Minimierungsproblem  $P$  lösbar ist, so gilt für den optimalen Zielfunktionswert  $F_P(x^*)$  dieses Problems und den optimalen Zielfunktionswert  $F_{P'}(x^*)$  eines relaxierten Problems  $P'$ :  $F_{P'}(x^*) \leq F_P(x^*)$  (vgl. Guignard (2002) und Nemhauser und Wolsey (1988)).*

**Satz 6.2 (Dualitätstheorem der linearen Optimierung)** *Besitzen ein lineares Optimierungsproblem  $P$  und das dazu duale Problem  $D$  zulässige Lösungen, so gilt für den optimalen Zielfunktionswert beider Probleme:  $F_P(x^*) = F_D(x^*)$  (vgl. Neumann und Morlock (1993)).*

Aus den Sätzen 6.1 und 6.2 ergibt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem optimalen Zielfunktionswert  $F_P(x^*)$  eines linearen Minimierungsproblems  $P$  und dem optimalen Zielfunktionswert  $F_{D'}(x^*)$  des dualen relaxierten Problems  $D'$ :

$$F_{D'}(x^*) = F_{P'}(x^*) \leq F_P(x^*). \quad (6.14)$$

Wird ein primales Minimierungsproblem  $P$  in ein relaxiertes Optimierungsproblem  $P'$  überführt und das dazu duale Optimierungsproblem  $D'$  aufgestellt, so gilt für den optimalen Zielfunktionswert  $F_{D'}(x^*)$  des dualen relaxierten Problems  $D'$ , dass dieser dem optimalen Zielfunktionswert  $F_{P'}(x^*)$  des primalen relaxierten Problems  $P'$  entspricht und stets kleiner gleich dem optimalen Zielfunktionswert  $F_P(x^*)$  des primalen linearen Minimierungsproblems  $P$  ist.

Bei dem dualen relaxierten Problem  $D'$  handelt es sich gemäß den Dualisierungsregeln (vgl. Neumann und Morlock (1993)) um ein Maximierungsproblem, somit gilt für den Zielfunktionswert  $F_{D'}(x)$  jeder zulässigen Lösung  $x \in M_{D'}$ :

$$F_{D'}(x) \leq \max_{x \in M_{D'}} F_{D'}(x) = F_{D'}(x^*). \quad (6.15)$$

Der Zielfunktionswert  $F_{D'}(x)$  jeder zulässigen Lösung  $x \in M_{D'}$  ist kleiner gleich dem optimalen Zielfunktionswert  $F_{D'}(x^*)$ . Mit den Ungleichungen (6.14) und (6.15) lässt sich abschließend die folgende Beziehung zwischen dem optimalen Zielfunktionswert  $F_P(x^*)$  des primalen Minimierungsproblems und dem Zielfunktionswert  $F_{D'}(x)$  einer zulässigen Lösung  $x$  eines dualen relaxierten Problems  $D'$  angeben:

$$F_{D'}(x) \leq F_P(x^*) \quad \forall x \in M_{D'}. \quad (6.16)$$

Der Zielfunktionswert jeder zulässigen Lösung  $x$  des dualen relaxierten Problems  $D'$  ist kleiner gleich dem optimalen Zielfunktionswert des ursprünglichen primalen Problems  $P$  und stellt somit eine untere Schranke dar.

Die folgende Abbildung 6.2 verdeutlicht die Lage der Zielfunktionswerte auf einem Zahlenstrahl.

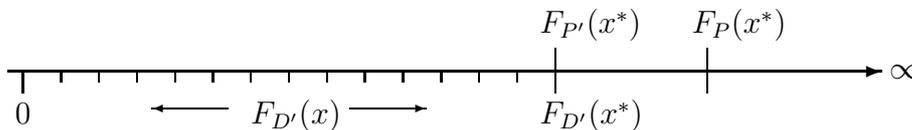


Abbildung 6.2: Darstellung der Lage der optimalen Zielfunktionswerte  $F_P(x^*)$ ,  $F_{P'}(x^*)$  und  $F_{D'}(x^*)$  des primalen Minimierungsproblems  $P$ , eines dazu relaxierten Problems  $P'$  sowie der dualen Relaxation  $D'$ .  $F_{D'}(x)$  gibt den Zielfunktionswert einer zulässigen Lösung der dualen Relaxation  $D'$  an.

Gemäß den obigen Ausführungen kann somit eine untere Schranke  $LB(s)$  des optimalen Zielfunktionswerts des zu dem Knoten  $s$  korrespondierenden Optimierungsproblems bestimmt werden. Dazu ist es erforderlich eine zulässige Lösung des dualen relaxierten Optimierungsproblems zu bestimmen. Der entsprechende Zielfunktionswert dieser Lösung stellt die untere Schranke dar.

### 6.2.1 Relaxation

In diesem Abschnitt wird eine relaxierte Formulierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. (4.5) - (4.15) in einem Knoten  $s$  des Suchbaums angegeben, die zur Abarbeitung des Branch-and-Bound-Verfahrens notwendig ist (vgl. Abschnitt 5.2.2).

Das Optimierungsproblem (4.5) - (4.15) wird in ein relaxiertes Problem überführt, indem die Nebenbedingungen (4.9) - (4.13) eliminiert, die Nebenbedingungen (4.8) modifiziert werden und für die noch nicht fixierten binären Entscheidungsvariablen der Wertebereich auf den Bereich der positiven reellen Zahlen erweitert wird.

Um das relaxierte Problem in jedem Knoten  $s$  des Verzweigungsbaums angeben zu können, sind die aktuellen Zustände der binären Entscheidungsvariablen  $y_k$  ( $k \in S_H$ ) zu berücksichtigen, die

durch den Zustandsvektor  $s \in S := \{1, 0, -1\}^k$  beschrieben werden (vgl. dazu Abschnitt 5.2.2). Die Menge der potentiellen Hubstandorte  $S_H$  zerfällt somit in die folgenden drei disjunkten Mengen:

1.  $H_1 = \{k | s_k = 1, k \in S_H\}$
2.  $H_0 = \{k | s_k = 0, k \in S_H\}$
3.  $H_{-1} = \{k | s_k = -1, k \in S_H\}$

Die Menge  $H_1$  entspricht der Menge der zugelassenen Standorte für die  $y_k = 1$  gilt.  $H_0$  umfasst alle verbotenen Standorte an denen kein Hub errichtet wird mit  $y_k = 0$ . Die Menge  $H_{-1}$  enthält die noch freien potentiellen Hubstandorte für die gemäß der Relaxation  $y_k \geq 0$  gilt.

Unter Berücksichtigung dieser Mengen, lässt sich das relaxierte Optimierungsproblem für jeden Knoten  $s \in S$  des Verzweigungsbaums folgendermaßen formulieren.

$$\text{Min} \quad \sum_{h \in H} \tilde{c}_h \tilde{x}_h + \sum_{h \in H} \sum_{l \in L} \tilde{c}_{hl} \tilde{x}_{hl} + \sum_{k \in H_{-1}} f_k y_k + \sum_{k \in H_1} f_k \quad (6.17)$$

u. d. N.

$$\tilde{x}_h + \sum_{l \in L} \tilde{x}_{hl} = 1 \quad \forall h \in H \quad (6.18)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in V_k^1} \tilde{x}_{hl} \tilde{b}_h - \kappa_k y_k \leq 0 \quad \forall k \in H_{-1} \quad (6.19)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in V_m^2} \tilde{x}_{hl} \tilde{b}_h - \kappa_m y_m \leq 0 \quad \forall m \in H_{-1} \quad (6.20)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in V_k^1} \tilde{x}_{hl} \tilde{b}_h \leq 0 \quad \forall k \in H_0 \quad (6.21)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in V_m^2} \tilde{x}_{hl} \tilde{b}_h \leq 0 \quad \forall m \in H_0 \quad (6.22)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in V_k^1} \tilde{x}_{hl} \tilde{b}_h \leq \kappa_k \quad \forall k \in H_1 \quad (6.23)$$

$$\sum_{h \in H} \sum_{l \in V_m^2} \tilde{x}_{hl} \tilde{b}_h \leq \kappa_m \quad \forall m \in H_1 \quad (6.24)$$

$$y_k, \tilde{x}_h, \tilde{x}_{hl} \geq 0 \quad \forall h \in H, l \in L, k \in H_{-1} \quad (6.25)$$

Die obige Formulierung zeichnet sich durch eine Aggregation der Indizes aus, die sich für die anschließende Dualisierung als vorteilhaft erweist. Dabei werden alle 2-Tupel  $(i, j)$  mit  $i, j \in S_D$  und  $(k, m)$  mit  $k, m \in S_H$  in den Mengen  $H$  bzw.  $L$  zusammengefasst. Daraus resultieren die folgenden veränderten Bezeichner:

- $\tilde{b}_{h=(i,j)} = b_{ij} \quad \forall i, j \in S_D$

- $\tilde{c}_{h=(i,j)} = b_{ij} \cdot c_{ij} \quad \forall i, j \in S_D$
- $\tilde{c}_{h=(i,j)l=(k,m)} = b_{ij} \cdot c_{ikmj} \quad \forall i, j \in S_D, \forall k, m \in S_H$

Die Entscheidungsvariable  $\tilde{x}_{hl}$  gibt den Anteil des Sendungsaufkommens  $\tilde{b}_h$  der Transportverbindung  $h$  an, der über das Hub-Paar  $l$  transportiert wird. Dementsprechend gibt die Entscheidungsvariable  $\tilde{x}_h$  den Anteil des Sendungsaufkommens  $\tilde{b}_h$  an, der auf einer Direktverkehrsrelation transportiert wird.

Die Mengen  $V_k^1$  und  $V_m^2$  sind folgendermaßen definiert:

$$V_k^1 := \{l \in L | l = (k, m), m \in S_H\} \quad V_m^2 := \{l \in L | l = (k, m), k \in S_H\}.$$

Sie umfassen diejenigen Hub-Paare  $l \in L$ , deren erster Hub dem potentiellen Hub  $k$  bzw. deren zweiter Hub dem potentiellen Hub  $m$  entspricht.

Im Vergleich zu der Problemformulierung (4.5) - (4.15) entfallen die Entscheidungsvariablen  $y_k$  mit  $k \in H_0$  und  $k \in H_1$ , da diese bereits fixiert sind. Jedoch müssen die Fixkosten  $f_k$  der zugelassenen Hubstandorte  $k \in H_1$  in der Zielfunktion (6.17) berücksichtigt werden.

## 6.2.2 Dualisierung

Das zu dem relaxierten Problem (6.17) - (6.25) duale Problem wird mit Hilfe der Dualisierungsregeln (vgl. Neumann und Morlock (1993) sowie Hillier und Lieberman (1997)) aufgestellt und lautet wie folgt:

$$\text{Max} \quad \sum_{h \in H} v_h - \sum_{k \in H_1} \kappa_k (w_k + z_k) + \sum_{k \in H_1} f_k \quad (6.26)$$

$$\text{u. d. N.} \quad v_h \leq \tilde{c}_h \quad \forall h \in H \quad (6.27)$$

$$v_h - \tilde{b}_h (w_k + z_m) \leq \tilde{c}_{hl} \quad \forall h \in H, \forall l \in L \quad (6.28)$$

$$(w_k + z_k) \kappa_k \leq f_k \quad \forall k \in H_{-1} \quad (6.29)$$

$$w_k, z_k \geq 0 \quad \forall k \in S_H \quad (6.30)$$

$$v_h \in \mathbb{R} \quad \forall h \in H \quad (6.31)$$

Der Zielfunktionswert der optimalen Lösung des dualen relaxierten Maximierungsproblems (6.26) - (6.31) entspricht gemäß Satz 6.2 (s. S. 73) dem optimalen Zielfunktionswert des primalen relaxierten Minimierungsproblems (6.17) - (6.25).

## Ökonomische Interpretation

Um Aussagen über das duale Optimierungsproblem (6.26) - (6.31) machen zu können, wird das primale Optimierungsproblem (6.17) - (6.25) wie folgt als Produktionsplanungsproblem interpretiert.

Es sollen  $|H|$  verschiedene Endprodukte hergestellt werden. Ein Endprodukt  $h \in H$  entspricht dem Transport von  $\tilde{b}_h$  Sendungseinheiten von Depot  $i$  zu Depot  $j$ . Zur Herstellung einer Einheit eines Endprodukts  $h$  können verschiedene Vorprodukte gemischt eingesetzt werden. Ein

Vorprodukt ist der direkte Sendungstransport zwischen den Depots  $i$  und  $j$  des Depot-Paares  $h \in H$ . Weitere Vorprodukte zur Herstellung des Endprodukts  $h$  sind die Transporte über eine Transportkette von  $i$  über das Hub-Paar  $l \in L$  nach  $j$ . Diese Vorprodukte sind jedoch mit Vorprodukten auch anderer Endprodukte auf gemeinsam genutzten Ressourcen (Sortieranlagen) zu bearbeiten. Für die Beschaffung der Vorprodukte fallen Kosten in Höhe von  $\tilde{c}_h$  bzw.  $\tilde{c}_{hl}$  an. Der Transport über das Hub-Paar  $l$  benötigt  $\tilde{b}_h$  Kapazitätseinheiten zur Sortierung an den Hubstandorten  $k$  und  $m$ . Das Kapazitätsangebot dieser Standorte ist jedoch teilweise beschränkt, so dass Kapazitätsengpässe auftreten können. Standorte  $k \in H_1$ , die endgültig als Hubstandorte zugelassen sind, besitzen jeweils  $\kappa_k$  Kapazitätseinheiten. Das Kapazitätsangebot der noch nicht fixierten Standorte  $k \in H_{-1}$  ist unbegrenzt, ist jedoch mit zusätzlichen Kosten in Höhe von  $\frac{f_k}{\kappa_k}$  pro Kapazitätseinheit verbunden.

Ziel dieses Produktionsplanungsproblems ist es, den Bedarf der jeweiligen Vorprodukte und der Kapazitätserweiterungen der noch nicht fixierten Hubstandorte zu ermitteln, so dass die Gesamtkosten minimal sind.

Im Folgenden wird das duale Optimierungsproblem (6.26) - (6.31) basierend auf den Ausführung bzgl. des primalen Problems erläutert.

Das Unternehmen möchte die (Grenz-)Preise  $v_h$  ( $h \in H$ ) der Endprodukte  $h$  so bestimmen, dass die Kostenstelle, die diese Produkte herstellt, möglichst viel erwirtschaftet. Dabei sind die vorhandenen Ressourcen  $k \in H_1$  wirtschaftlich einzusetzen. Von der Summe der (Grenz-)Preise sind deshalb die realisierten Einsparungen aufgrund der Kostenvorteile, die durch die Ressourcen  $k \in H_1$  erzielt werden können, zu subtrahieren.

Die Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_k$  geben die Schattenpreise der Ressource  $k$  während der Hub-Hauptlauf- bzw. Hub-Nachlaufsartierung an.

Werden die Endproduktanteile eines Vorprodukts mit den Preisen des Endprodukts bewertet, so kann der fiktive Verrechnungspreis einer Mengeneinheit des Vorprodukts ermittelt werden (vgl. Ellinger et al. (2003)). Da aber ein Vorprodukt ausschließlich in ein Endprodukt eingeht, entspricht dieser Verrechnungspreis gerade dem Preis  $v_h$  des Endprodukts  $h$ . Um konkurrenzfähig zu sein, darf deshalb der Preis  $v_h$  des Endprodukts  $h$  nicht höher sein als der jeweilige Preis des Vorprodukts. Für den Preis  $v_h$  des Endprodukts  $h \in H$  muss deshalb gelten, dass dieser nicht höher sein darf als der Preis  $\tilde{c}_h$  des direkten Transports von  $i$  nach  $j$  (vgl. Nebenbedingungen (6.27)):

$$v_h \leq \tilde{c}_h$$

Gleiches gilt auch für den Sendungstransport über das Hub-Paar  $l \in L$ . Hierbei darf der Preis  $v_h$  nicht höher sein als die Kosten des Transports über das Hub-Paar  $l \in L$  zuzüglich der Schattenpreise der Sortiervorgänge (vgl. Nebenbedingungen (6.28)):

$$v_h \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m)$$

Die Summe der Schattenpreise der Hub-Hauptlaufsartierung  $w_k$  und der Hub-Nachlaufsartierung  $z_k$  können für noch nicht fixierte Standorte  $k \in H_{-1}$  die spezifischen Fixkosten  $\frac{f_k}{\kappa_k}$  dieses Standorts nicht überschreiten (vgl. Nebenbedingungen (6.29)). Wäre die Summe der Schattenpreise größer als die spezifischen Fixkosten, so würde das im primalen Problem (6.17) - (6.25) bedeuten, dass zusätzliche Kosten durch die Kapazitätsbeschränkung des Hubs  $k$  entstehen, die größer wären als die Kosten  $\frac{f_k}{\kappa_k}$  für die Kapazitätserweiterung.

## 6.3 Näherungsverfahren zur Bestimmung unterer Schranken

Die Bestimmung von unteren Schranken im Branch-and-Bound-Verfahren kann grundsätzlich exakt oder heuristisch erfolgen. Die Bestimmung einer exakten Lösung ist in der Regel zeitaufwendiger als die Bestimmung einer zulässigen Lösung mit einem Näherungsverfahren, die nach dem Dualitätstheorem (vgl. Satz 6.2) eine untere Schranke darstellt.

Heuristisch ermittelte untere Schranken haben im Allgemeinen geringere Zielfunktionswerte als die exakt ermittelten Schranken. Dadurch kann es zu weniger Auslotungen (vgl. Abschnitt 5.2.2) während des Branch-and-Bound-Verfahrens kommen und die Effizienz des Verfahrens könnte darunter leiden. Dieses Defizit kann aber durch eine schnelle Bestimmung der unteren Schranken kompensiert oder überkompensiert werden. Der Einsatz von heuristisch bestimmten unteren Schranken ist daher nur sinnvoll, wenn eine Überkompensation erzielt werden kann. Um dies zu erreichen, ist eine möglichst große untere Schranke zu bestimmen.

Im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens zur Lösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. (4.5) - (4.15) werden in jedem Knoten des Suchbaums die unteren Schranken des relaxierten Optimierungsproblems (6.17) - (6.25) durch eine heuristische Lösung der dualen Relaxation (6.26) - (6.31) bestimmt. Das hierzu entwickelte Näherungsverfahren gliedert sich in ein Eröffnungs- und Verbesserungsverfahren (vgl. Algorithmus 5).

---

**Algorithmus 5** Näherungsverfahren zur Lösung der dualen Relaxation (6.26) - (6.31)

---

- 1: Eröffnungsverfahren
  - 2: **if**  $LB(s) < UB$  **then**
  - 3:   **if**  $\frac{UB-LB(s)}{LB(s)} < \delta_{Abw}$  **then**
  - 4:     Verbesserungsverfahren
- 

Während des Eröffnungsverfahrens werden zunächst die Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_k$  unter Beachtung der Nebenbedingungen (6.29) initialisiert. Darauf aufbauend werden die maximalen Werte der Entscheidungsvariablen  $v_h$  unter Einhaltung der Nebenbedingungen (6.27) und (6.28) berechnet, so dass abschließend ein zulässiger Zielfunktionswert bestimmt werden kann. Dieser stellt eine untere Schranke  $LB(s)$  (lower bound) des optimalen Zielfunktionswerts des zu dem Knoten  $s$  des Suchbaums korrespondierenden Optimierungsproblems dar.

Ist die untere Schranke  $LB(s)$  geringer als die kleinste obere Schranke  $UB$  (upper bound) des Optimierungsproblems (4.5) - (4.15), so wird das Verbesserungsverfahren nur unter der Bedingung gestartet, dass die relative Abweichung der unteren Schranke  $LB(s)$  von der oberen Schranke  $UB$  geringer als ein vorgegebener Wert  $\delta_{Abw}$  ist. Dadurch wird gewährleistet, dass das Verbesserungsverfahren nur dann angewendet wird, wenn eine Erhöhung der unteren Schranke  $LB(s)$  durch das Verbesserungsverfahren auf einen Wert größer gleich der oberen Schranke möglich erscheint. In diesem Fall würde der Auslotungsfall 1 (vgl. S. 62) eintreten und der untersuchte Knoten könnte aus der Kandidatenliste  $L_a$  gestrichen werden.

Ist die untere Schranke  $LB(s)$  jedoch größer gleich der obere Schranke  $UB$ , so ist der untersuchte Knoten bereits ausgelotet.

### 6.3.1 Eröffnungsverfahren

#### Initialisierungsverfahren

Die Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_k$  werden so initialisiert, dass die Nebenbedingungen (6.29) erfüllt sind und die Zielfunktion (6.26) einen möglichst großen Wert annimmt.

$$w_k := z_k := \begin{cases} \infty, & k \in H_0 \\ 0, & k \in H_1 \\ \frac{f_k}{2 \cdot \kappa_k}, & k \in H_{-1} \end{cases} \quad \forall k \in S_H \quad (6.32)$$

Für alle verbotenen Hubstandorte  $k \in H_0$  werden die Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_k$  mit unendlich initialisiert, wodurch der Subtrahend in der Nebenbedingung (6.28) einen unendlich großen Wert annimmt. Somit können die entsprechenden Entscheidungsvariablen  $v_h$  bei der anschließenden Berechnung des Zielfunktionswerts einen maximalen Wert annehmen.

Für bereits zugelassene Hubstandorte  $k \in H_1$  werden  $w_k$  und  $z_k$  mit null initialisiert, um somit den Subtrahenden der Zielfunktion (6.26) ebenfalls mit null zu initialisieren.

Für noch nicht fixierte Hubstandorte  $k \in H_{-1}$  werden  $w_k$  und  $z_k$  so gewählt, dass die Nebenbedingungen (6.29) ohne Schlupf erfüllt sind.

#### Berechnung der Entscheidungsvariablen $v_h$

Nachdem eine zulässige Initialisierung der Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_k$  vorgenommen wurde, sind die Belegungen der Entscheidungsvariablen  $v_h$  unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (6.27) und (6.28) zu berechnen. Aus beiden Nebenbedingungen ergibt sich folgende Berechnungsvorschrift:

$$v_h := \min\{\tilde{c}_h, \min_{l \in L}\{\tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m)\}\} \quad \forall h \in H.$$

Entspricht das Minimum dem Wert  $\tilde{c}_h$ , so wird die Nebenbedingung (6.27) ohne Schlupf erfüllt und  $v_h$  wird mit den Transportkosten einer Direktverkehrsrelation initialisiert. Andernfalls gibt es ein minimumbestimmendes Hub-Paar  $l^* = (k^*, m^*) \in L$  mit

$$\tilde{c}_{hl^*} + \tilde{b}_h(w_{k^*} + z_{m^*}) = \min_{l \in L}\{\tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m)\}, \quad (6.33)$$

das für die Bestimmung von  $v_h$  verantwortlich ist. Die Nebenbedingung (6.28) ist dann ohne Schlupf erfüllt.

Zum Abschluss des Eröffnungsverfahrens wird der Zielfunktionswert gemäß der Zielfunktion (6.26) berechnet, der eine untere Schranke  $LB(s)$  des optimalen Zielfunktionswerts des relaxierten Problems (6.17) - (6.25) darstellt.

### 6.3.2 Verbesserungsverfahren

Im Verlauf des Verbesserungsverfahrens wird versucht, bestimmte duale Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_m$  des Optimierungsproblems (6.26) - (6.31) zu erhöhen, so dass gezielt der Schlupf einer einzelnen Nebenbedingung der Klasse (6.28) von Nebenbedingungen vergrößert und somit die Entscheidungsvariable  $v_h$  angehoben werden kann. Somit kann eine Erhöhung des Zielfunktionswerts erzielt werden.

---

**Algorithmus 6** Verbesserungsverfahren

---

- 1: **for all**  $h \in H$  **do**
  - 2:   **if**  $v_h < \tilde{c}_h$  **then**
  - 3:     Erhöhung der dualen Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$
  - 4:     Berechnung der maximalen Erhöhung des Zielfunktionswerts
- 

Zu Beginn des Verfahrens wird für ein gegebenes  $h \in H$  untersucht, ob

$$v_h < \tilde{c}_h$$

gilt. Ist dies nicht der Fall, so ist die Nebenbedingung (6.27) ohne Schlupf erfüllt und die Erhöhung der Variablen  $v_h$  ist nicht möglich. Andernfalls existiert mindestens eine Nebenbedingung unter den Nebenbedingungen (6.28), die keinen Schlupf hat. Das entsprechende Hub-Paar dieser Nebenbedingung wird mit  $l^* = (k^*, m^*)$  bezeichnet und kann gemäß den Ausführungen auf Seite 79 bestimmt werden.

Das Verbesserungsverfahren (vgl. Algorithmus 6) prüft für alle Transportverbindungen  $h \in H$ , ob jeweils eine Erhöhung der dualen Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  vorgenommen werden sollte und ob dadurch der Zielfunktionswert erhöht werden kann. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Erhöhung der Variablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  ausgehend von einem minimumbestimmenden  $l^*$  nicht nur Auswirkungen auf die momentan betrachtete Transportverbindung  $h$  und somit auf die Variable  $v_h$  hat, sondern möglicherweise Veränderungen anderer Variablen  $v_h$  und des Subtrahenden der Zielfunktion (6.26) bewirken kann. Jede Erhöhung der Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  macht eine erneute Bestimmung aller  $v_h$  und des Zielfunktionswerts des Optimierungsproblems (6.26) - (6.31) erforderlich.

**Erhöhung der dualen Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$**

Die Werte der Entscheidungsvariablen  $v_h$  ( $h \in H$ ) werden durch die Nebenbedingungen (6.27) oder (6.28) bestimmt. Gilt für ein  $h \in H$

$$v_h < \tilde{c}_h,$$

so ist hierfür eine der Nebenbedingungen (6.28) verantwortlich und es existiert ein minimumbestimmendes  $l^* \in L$  gemäß Gleichung (6.33). Andernfalls ist die Nebenbedingung (6.27) ohne Schlupf erfüllt und die Erhöhung der Variablen  $v_h$  ist nicht möglich.

Die Grundidee des Verbesserungsverfahrens ist es, ausgehend von  $l^* \in L$  die korrespondierenden dualen Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  um  $\Delta_{w_{k^*}} \in \mathbb{R}^+$  und  $z_{m^*}$  um  $\Delta_{z_{m^*}} \in \mathbb{R}^+$  zu erhöhen, so dass die entsprechende minimumbestimmende Nebenbedingung der Nebenbedingungen (6.28) wieder Schlupf besitzt und die Entscheidungsvariable  $v_h$  erhöht werden kann.

Maximal dürfen  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $\Delta_{z_{m^*}}$  so groß gewählt werden, dass nach der Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  folgende drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

1. Die Nebenbedingung (6.27)

$$v_h \leq \tilde{c}_h$$

mit  $v_h := \tilde{c}_{hl^*} + \tilde{b}_h(w_{k^*} + \Delta_{w_{k^*}} + z_{m^*} + \Delta_{z_{m^*}})$  ist nach der Erhöhung weiterhin eingehalten.

2. Eine Erhöhung von  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  um  $\Delta_{w_{k^*}}$  bzw.  $\Delta_{z_{m^*}}$  ist nur sinnvoll, solange das Hub-Paar  $l^* = (k^*, m^*)$  gemäß (6.33) minimumbestimmend bleibt.

3. Die Nebenbedingungen (6.29) sind nach der Erhöhung der Dualvariablen ebenfalls weiterhin gültig. Eine Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  oder  $z_{m^*}$  hat eine Reduzierung der entsprechenden Dualvariablen  $z_{k^*}$  bzw.  $w_{m^*}$  zur Folge, wenn die Standorte  $k^*$  bzw.  $m^*$  noch nicht fixiert sind. Dabei sind die Nichtnegativitätsbedingungen (6.30) einzuhalten.

Der Bezeichner  $\Delta_{w_k}$  ( $k \in S_H$ ) gibt die erforderlichen Veränderungen aller dualen Entscheidungsvariablen  $w_k$  an, die aus einer Erhöhung der Variablen  $z_{m^*}$  um  $\Delta_{z_{m^*}}$  aufgrund der Nebenbedingungen (6.29) resultieren:

$$\Delta_{w_k} := \begin{cases} -\Delta_{z_{m^*}}, & k = m^* \wedge m^* \in H_{-1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall k \neq k^*.$$

Analog dazu gibt die Variable  $\Delta_{z_m}$  ( $m \in S_H$ ) die Veränderung der dualen Entscheidungsvariable  $z_m$  an, die aus der Erhöhung der Variablen  $w_{k^*}$  um  $\Delta_{w_{k^*}}$  resultiert:

$$\Delta_{z_m} := \begin{cases} -\Delta_{w_{k^*}}, & m = k^* \wedge k^* \in H_{-1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall m \neq m^*.$$

Im Folgenden wird eine Einteilung der Hub-Paare  $l \in L$  in sieben Mengen vorgenommen. Jede Menge enthält diejenigen Hub-Paare  $l = (k, m)$ , deren entsprechende Dualvariablen  $w_k$  und  $z_m$  aufgrund der Erhöhung von  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  in Summe die gleiche Veränderung  $\Delta_{w_k} + \Delta_{z_m}$  erfahren haben.

$$\begin{aligned} L_{\Delta_{w_{k^*}}^+} &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = \Delta_{w_{k^*}}\} \\ L_{\Delta_{z_{m^*}}^+} &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = \Delta_{z_{m^*}}\} \\ L_{\Delta_{w_{k^*}}^+, \Delta_{z_{m^*}}^+} &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = \Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}}\} \\ L_{\Delta_{w_{k^*}}^-} &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = -\Delta_{w_{k^*}}\} \\ L_{\Delta_{z_{m^*}}^-} &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = -\Delta_{z_{m^*}}\} \\ L_{\Delta_{w_{k^*}}^-, \Delta_{z_{m^*}}^-} &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = -(\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}})\} \\ L_0 &= \{l = (k, m) \in L \mid \Delta_{w_k} + \Delta_{z_m} = 0\} \end{aligned}$$

Von den oben dargestellten sieben Mengen gibt beispielsweise die Menge  $L_{\Delta_{w_{k^*}}^+}$  diejenigen Hub-Paare  $l \in L$  an, deren Dualvariablen  $w_k$  und  $z_m$  sich aufgrund der Erhöhung von  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  insgesamt um  $\Delta_{w_{k^*}}$  erhöhen.

Abhängig von der Zugehörigkeit eines Hub-Paares  $l \in L$  zu den obigen Mengen werden die entsprechenden Dualvariablen  $w_k$  und  $z_m$  modifiziert, wodurch sich der Schlupf der Nebenbedingungen (6.28)

$$v_h - \tilde{b}_h(w_k + z_m) \leq \tilde{c}_{hl} \quad \forall l \in L$$

verändert. Die zu erzielende Veränderung  $\Delta_l$  des Schlupfs bei Erhöhung von  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  um  $\Delta_{w_{k^*}}$  bzw.  $\Delta_{z_{m^*}}$  ist in der folgenden Tabelle 6.1 dargestellt.

Im Folgenden werden die auf Seite 80 geforderten Bedingungen für die Erhöhungsbeträge  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $\Delta_{z_{m^*}}$  formuliert.

Tabelle 6.1: Darstellung der Veränderung  $\Delta_l$  des Schlupfs der Nebenbedingungen (6.28), die durch eine Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  um den Wert  $\Delta_{w_{k^*}}$  bzw.  $\Delta_{z_{m^*}}$  hervorgerufen wird.

	$\Delta_l$
$l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^+}$	$\tilde{b}_h \cdot \Delta_{w_{k^*}}$
$l \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^+}$	$\tilde{b}_h \cdot \Delta_{z_{m^*}}$
$l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^+, \Delta_{z_{m^*}}^+}$	$\tilde{b}_h \cdot (\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}})$
$l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-}$	$-\tilde{b}_h \cdot \Delta_{w_{k^*}}$
$l \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^-}$	$-\tilde{b}_h \cdot \Delta_{z_{m^*}}$
$l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-, \Delta_{z_{m^*}}^-}$	$-\tilde{b}_h \cdot (\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}})$
$l \in L_0$	0

Die Einhaltung der Nebenbedingung (6.27) wird durch die Einführung der folgenden Ungleichung sichergestellt:

$$\tilde{b}_h \cdot (\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}}) \leq \tilde{c}_h - (\tilde{c}_{hl^*} + \tilde{b}_h(w_{k^*} + z_{m^*})). \quad (6.34)$$

Die Erhöhungsbeträge  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $\Delta_{z_{m^*}}$  dürfen nur so groß gewählt werden, dass die Hubverbindung  $l^* \in L$  in Gleichung (6.33) minimumbestimmend bleibt. Dies wird gewährleistet, wenn für

$$Z := \tilde{c}_{hl^*} + \tilde{b}_h(w_{k^*} + z_{m^*}) + \tilde{b}_h(\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}})$$

folgende Ungleichungen simultan erfüllt sind:

$$Z \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) + \tilde{b}_h \cdot \Delta_{w_{k^*}} \quad l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^+} \quad (6.35)$$

$$Z \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) + \tilde{b}_h \cdot \Delta_{z_{m^*}} \quad l \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^+} \quad (6.36)$$

$$Z \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) - \tilde{b}_h \cdot \Delta_{w_{k^*}} \quad l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-} \quad (6.37)$$

$$Z \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) - \tilde{b}_h \cdot \Delta_{z_{m^*}} \quad l \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^-} \quad (6.38)$$

$$Z \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) - \tilde{b}_h \cdot (\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}}) \quad l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-, \Delta_{z_{m^*}}^-} \quad (6.39)$$

$$Z \leq \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) \quad l \in L_0 \quad (6.40)$$

Mit der Einführung folgender Differenz

$$D_{hl, l^*} = \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m) - (\tilde{c}_{hl^*} + \tilde{b}_h(w_{k^*} + z_{m^*}))$$

ergibt sich daraus folgendes Ungleichungssystem:

$$\Delta_{z_{m^*}} \leq \min_{l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^+}} \left\{ \frac{D_{hl,l^*}}{\tilde{b}_h} \right\} \quad (6.41)$$

$$\Delta_{w_{k^*}} \leq \min_{l \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^+}} \left\{ \frac{D_{hl,l^*}}{\tilde{b}_h} \right\} \quad (6.42)$$

$$2 \cdot \Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}} \leq \min_{l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-}} \left\{ \frac{D_{hl,l^*}}{\tilde{b}_h} \right\} \quad (6.43)$$

$$\Delta_{w_{k^*}} + 2 \cdot \Delta_{z_{m^*}} \leq \min_{l \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^-}} \left\{ \frac{D_{hl,l^*}}{\tilde{b}_h} \right\} \quad (6.44)$$

$$\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}} \leq \min \left\{ \min_{l \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-, \Delta_{z_{m^*}}^-}} \left\{ \frac{D_{hl,l^*}}{2 \cdot \tilde{b}_h} \right\}, \min_{l \in L_0} \left\{ \frac{D_{hl,l^*}}{\tilde{b}_h} \right\}, \tilde{c}_h - v_h \right\} \quad (6.45)$$

Das vorliegende Ungleichungssystem gewährleistet die Einhaltung der ersten beiden Forderungen (vgl. S. 80), die für die Bestimmung der Erhöhungsbeträge von  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $\Delta_{z_{m^*}}$  eingehalten werden müssen.

Kommt es aufgrund der Erhöhungen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  zu Reduzierungen anderer Dualvariablen, so muss deren Nichtnegativität infolge der Nebenbedingungen (6.30) sichergestellt werden. Dazu werden die folgenden vier Fälle unterschieden und jeweils die erforderlichen Nebenbedingungen angegeben, die dem obigen Ungleichungssystem (6.41) - (6.45) hinzuzufügen sind:

1.  $k^* \in H_{-1} \wedge m^* \in H_{-1}$

Es ist sicherzustellen, dass die Variablen  $w_m$  und  $z_k$  aufgrund der Erhöhung der Variablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  nicht negativ werden. Folgende Nebenbedingungen müssen eingeführt werden:

$$\Delta_{w_{k^*}} \leq z_{k^*} \quad (6.46)$$

$$\Delta_{z_{m^*}} \leq w_{m^*} \quad (6.47)$$

2.  $k^* \in H_{-1} \wedge m^* \in H_1$

Für den maximalen Erhöhungsbetrag  $\Delta_{w_{k^*}}$  muss gelten:

$$\Delta_{w_{k^*}} \leq z_{k^*} \quad (6.48)$$

3.  $k^* \in H_1 \wedge m^* \in H_{-1}$

Der maximale Erhöhungsbetrag  $\Delta_{z_{m^*}}$  muss folgende Bedingung erfüllen:

$$\Delta_{z_{m^*}} \leq w_{m^*} \quad (6.49)$$

4.  $k^* \in H_1 \wedge m^* \in H_1$

Es müssen keine weiteren Nebenbedingungen hinzugefügt werden.

Die Erhöhungsbeträge  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $\Delta_{z_{m^*}}$  sind so zu bestimmen, dass deren Summe maximal ist. Somit wird der Schlupf der minimumbestimmenden Nebenbedingung (6.28) maximiert und somit auch der Wert der dualen Entscheidungsvariablen  $v_h$ . Die entsprechende Zielfunktion des zu lösenden Optimierungsproblems lautet:

$$\text{Max} \quad \Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}} \quad (6.50)$$

Die Maximierung hat unter Einhaltung der Nebenbedingungen (6.41) - (6.45) zu erfolgen, die unter Umständen um die Nebenbedingungen (6.46) - (6.47), (6.48) oder (6.49) erweitert werden müssen.

### Berechnung der maximalen Erhöhung des Zielfunktionswerts

In diesem Abschnitt wird eine obere Schranke  $\bar{S}_{\Delta ZF}$  berechnet, die die maximale Erhöhung des Zielfunktionswerts des Maximierungsproblems (6.26) - (6.31) angibt, die aus einer Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  um  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $z_{m^*}$  um  $\Delta_{z_{m^*}}$  resultiert.

Gilt für die obere Schranke

$$\bar{S}_{\Delta ZF} \leq 0,$$

so führt eine Erhöhung von  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  zu keiner Erhöhung des Zielfunktionswerts und die Erhöhung der Variablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  werden nicht durchgeführt. Andernfalls werden die Erhöhungen durchgeführt und es schließt sich eine Neuberechnung der Dualvariablen  $v_h$  und des Zielfunktionswerts an.

Im Rahmen des Verbesserungsverfahrens wird für ein Hub-Paar  $l^* \in L$  eine Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  und somit eine Erhöhung der entsprechenden Dualvariablen  $v_{h^*}$  angestrebt. Die Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  um die Beträge  $\Delta_{w_{k^*}}$  bzw.  $\Delta_{z_{m^*}}$  hat jedoch nicht notwendigerweise einen erhöhten Zielfunktionswert des Optimierungsproblems (6.26) - (6.31) zur Folge. In den Fällen 1 - 3 (vgl. S. 83) hat eine Erhöhung der Variablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  eine Verminderung anderer Dualvariablen zur Folge, die wiederum eine Verminderung der Werte  $v_h$  ( $h \neq h^*$ ) aufgrund der Nebenbedingungen (6.28) bewirken. Desweiteren vergrößert sich aufgrund der Erhöhung in den Fällen 2 - 4 der Wert des Subtrahenden in der Zielfunktion (6.26), wodurch sich der Zielfunktionswert vermindert.

Die obere Schranke  $\bar{S}_{\Delta ZF}$  zur Abschätzung der maximalen Erhöhung des Zielfunktionswerts ergibt sich als Summe der maximalen Erhöhungen  $\bar{s}_h$  der Dualvariablen  $v_h$  vermindert um die Zunahme des Subtrahenden der Zielfunktion (6.26).

Für jedes  $h \in H$  mit  $v_h < \tilde{c}_h$  wird dasjenige  $l_h^* = (k_h^*, m_h^*) \in L$  bestimmt, für das die Nebenbedingungen (6.28) ohne Schlupf erfüllt sind. Es gilt somit für  $l_h^*$ :

$$v_h - \tilde{b}_h(w_{k_h^*} + z_{m_h^*}) = \tilde{c}_h l_h^* . \quad (6.51)$$

Abhängig von der Veränderung der Dualvariablen  $w_{k_h^*}$  und  $z_{m_h^*}$  aufgrund der Erhöhungen von  $w_{k^*}$  um  $\Delta_{w_{k^*}}$  und  $z_{m^*}$  um  $\Delta_{z_{m^*}}$  verändert sich der Subtrahend der obigen Gleichung (6.51). Daraus resultiert eine Veränderung des Werts der Dualvariablen  $v_h$ , wenn die Nebenbedingung, wie gefordert, ohne Schlupf erfüllt ist.

Je nach Zugehörigkeit von  $l_h^*$  zu den auf Seite 81 eingeführten Mengen, kann die maximale Erhöhung  $\bar{s}_h$  der Dualvariablen  $v_h$  wie folgt angegeben werden:

$$\bar{s}_h = \begin{cases} \tilde{b}_h \cdot \Delta_{w_{k^*}}, & l_h^* \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^+} \\ \tilde{b}_h \cdot \Delta_{z_{m^*}}, & l_h^* \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^+} \\ \tilde{b}_h \cdot (\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}}), & l_h^* \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^+, \Delta_{z_{m^*}}^+} \\ -\tilde{b}_h \cdot \Delta_{w_{k^*}}, & l_h^* \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-} \\ -\tilde{b}_h \cdot \Delta_{z_{m^*}}, & l_h^* \in L_{\Delta_{z_{m^*}}^-} \\ -\tilde{b}_h \cdot (\Delta_{w_{k^*}} + \Delta_{z_{m^*}}), & l_h^* \in L_{\Delta_{w_{k^*}}^-, \Delta_{z_{m^*}}^-} \\ 0, & l_h^* \in L_0 \end{cases} \quad h \in H \quad (6.52)$$

Im Folgenden wird die maximale Erhöhung des Zielfunktionswerts  $\bar{S}_{\Delta ZF}$  in Folge der Erhöhung der Dualvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  angegeben. In den Fällen 2 - 4 (s. S. 85) muss neben der Veränderung der Dualvariablen  $v_h$  auch die Veränderung des Zielfunktionswerts infolge der Erhöhung des Subtrahenden berücksichtigt werden.

1.  $k^*, m^* \in H_{-1}$

$$\bar{S}_{\Delta ZF} := \sum_{h \in H} \bar{s}_h \quad (6.53)$$

2.  $k^* \in H_{-1} \wedge m^* \in H_1$

$$\bar{S}_{\Delta ZF} := \sum_{h \in H} \bar{s}_h - \kappa_{m^*} \cdot \Delta_{z_{m^*}} \quad (6.54)$$

3.  $k^* \in H_1 \wedge m^* \in H_{-1}$

$$\bar{S}_{\Delta ZF} := \sum_{h \in H} \bar{s}_h - \kappa_{k^*} \cdot \Delta_{w_{k^*}} \quad (6.55)$$

4.  $k^*, m^* \in H_1$

$$\bar{S}_{\Delta ZF} := \sum_{h \in H} \bar{s}_h - \kappa_{k^*} \cdot \Delta_{w_{k^*}} - \kappa_{m^*} \cdot \Delta_{z_{m^*}} \quad (6.56)$$

Ist  $\bar{S}_{\Delta ZF} > 0$ , so ist die Erhöhung der dualen Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  durchzuführen, an die sich eine Neuberechnung der Entscheidungsvariablen  $v_h$  ( $h \in H$ ) anschließt (vgl. Anhang E). Gilt für den dabei ermittelten Zielfunktionswert  $ZF$  des Optimierungsproblems (6.26) - (6.31)

$$ZF > LB(s),$$

d.h. heißt der Zielfunktionswert  $ZF$  ist größer der unteren Schranke  $LB(s)$ , dann wird die untere Schranke mit dem Wert  $ZF$  initialisiert. Die Erhöhung der Entscheidungsvariablen hat somit zu einer Erhöhung der unteren Schranke  $LB(s)$  geführt. Gilt

$$ZF \leq LB(s),$$

dann konnte durch die Erhöhung der  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  keine Erhöhung der unteren Schranke erzielt werden. Die Entscheidungsvariablen  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  sind wieder um  $\Delta_{w_{k^*}}$  bzw.  $\Delta_{z_{m^*}}$  zu vermindern. Dieser Fall kann trotz der Abschätzung einer steigenden unteren Schranke ( $\bar{S}_{\Delta ZF} > 0$ ) eintreten, da der Berechnung dieses Werts die Annahme zu Grunde liegt, dass die maximalen Erhöhungen  $\bar{s}_h$  tatsächlich realisiert werden können.

Gilt  $\bar{S}_{\Delta ZF} \leq 0$ , kann eine Erhöhung des Zielfunktionswerts infolge der Erhöhung von  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  ausgeschlossen werden. Die Erhöhung der  $w_{k^*}$  und  $z_{m^*}$  ist nicht durchzuführen.

## 6.4 Anwendung logischer Tests im Branch-and-Bound-Verfahren

Logische Tests werden im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens mit dem Ziel angewendet, die Anzahl der zu untersuchenden Knoten  $s$  des Suchbaums zu reduzieren. Dazu werden in allen aktiven Knoten  $s$  des Suchbaums jeweils die freien Hubstandorte  $h \in H_{-1}$  hinsichtlich der Fragestellung untersucht, ob diese vorzeitig in die Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte oder in die Menge  $H_0$  der verbotenen Hubstandorte aufgenommen und somit aus der Menge  $H_{-1}$  der freien Hubstandorte entfernt werden können. Es werden die logischen Tests zum „Zulassen eines Hubstandorts“ und zum „Verbot eines Hubstandorts“ unterschieden.

Können aufgrund der Durchführung der logischen Tests potentielle Hubstandorte vorzeitig fixiert, d. h. zugelassen oder verboten werden, so reduziert sich dadurch die Anzahl der von dem aktiven Knoten  $s$  ausgehend besuchten Knoten und somit die Anzahl der besuchten Knoten des gesamten Suchbaums.

Mit einer Verringerung der Anzahl der zu untersuchenden Knoten reduziert sich die Gesamtrechenzeit zur Bestimmung der unteren Schranken in den Knoten, gleichzeitig bedarf es aber zusätzlicher Rechenzeit zur Durchführung der logischen Tests. Der Einsatz der logischen Tests ist somit nur dann gerechtfertigt, wenn der zusätzliche Aufwand, der durch die logischen Tests verursacht wird, durch eine Verringerung des Aufwands zur Bestimmung der unteren Schranken überkompensiert werden kann.

Ansätze für logische Test werden u. a. bei Akinc und Khumawala (1977), Christofides und Beasley (1983) sowie van Roy (1986) zur Lösung von Standortplanungsproblemen vorgestellt.

### 6.4.1 Logischer Test zum Zulassen eines Hubstandorts

Bei dem logischen Test zum Zulassen eines Hubstandorts wird die minimale Erhöhung der Transport- und variablen Sortierkosten in einem Knoten  $s$  des Suchbaums berechnet, die durch das Verbot eines freien Hubstandorts  $k \in H_{-1}$  hervorgerufen würde.

Der Hubstandort  $k$  wird genau dann zugelassen, d. h. der Menge  $H_1$  der zugelassenen Hubstandorte hinzugefügt, wenn sich durch sein Verbot die Transport- und variablen Sortierkosten mindestens um die Fixkosten  $f_k$  erhöhen würden.

Die minimale Erhöhung von Transport- und variablen Sortierkosten  $\Delta_{k,s}$  bei Verbot des potentiellen Hubstandorts  $k \in H_{-1}$  in Knoten  $s$  wird wie folgt ermittelt:

$$\Delta_{k,s} = K_{A,H_1 \cup H_{-1} \setminus \{k\}}(x^*) - K_{A,H_1 \cup H_{-1}}(x^*) \quad (6.57)$$

Der Minuend gibt den optimalen Zielfunktionswert des Allokationsproblems (6.1) - (6.13) an, bei dem neben den bereits zugelassenen Hubstandorten zusätzlich auch alle freien Hubstandorte  $m \in H_{-1}$  ausgenommen des zu untersuchenden Hubstandorts  $k$  als zugelassen angenommen werden. Dementsprechend gibt der Subtrahend den optimalen Zielfunktionswert des Allokationsproblems an, bei dem neben den zugelassenen Hubstandorten ausschließlich die noch freien Standorte als zugelassen angenommen werden.

Gilt

$$\Delta_{k,s} \geq f_k,$$

d. h. die durch ein Verbot des potentiellen Hubstandorts  $k$  hervorgerufene minimale Erhöhung der Transport- und variablen Sortierkosten ist höher als die Fixkosten  $f_k$ , so wird der Standort  $k$  in die Menge  $H_1$  aufgenommen.

Der logische Test muss in jedem Knoten  $s$  des Suchbaums für alle  $k \in H_{-1}$  durchgeführt werden. Insgesamt sind somit  $|H_{-1}| + 1$  Berechnungen einer optimalen Allokationslösung des Problems (6.1) - (6.13) notwendig.

Um den Rechenaufwand zu reduzieren, der für die Berechnung der optimalen Zielfunktionswerte der Allokationsprobleme erforderlich ist, wird für den Wert der minimalen Erhöhung von Transport- und variablen Sortierkosten  $\Delta_{k,s}$  eine untere Schranke  $\underline{\Delta}_{k,s}$  angegeben, für die Folgendes gilt:

$$\underline{\Delta}_{k,s} \leq \Delta_{k,s}.$$

Diese untere Schranke wird folgendermaßen berechnet:

$$\underline{\Delta}_{k,s} = \underline{K}_{A,H_1 \cup H_{-1} \setminus \{k\}}(x) - \overline{K}_{A,H_1 \cup H_{-1}}(x).$$

Sie ergibt sich als Differenz einer unteren Schranke  $\underline{K}_{A,H_1 \cup H_{-1} \setminus \{k\}}(x)$  des optimalen Zielfunktionswerts  $K_{A,H_1 \cup H_{-1} \setminus \{k\}}(x^*)$  und einer oberen Schranke  $\overline{K}_{A,H_1 \cup H_{-1}}(x)$  des optimalen Zielfunktionswerts  $K_{A,H_1 \cup H_{-1}}(x^*)$ .

In der folgenden Abbildung 6.3 ist die Lage der optimalen Zielfunktionswerte sowie deren oberer und unterer Schranke dargestellt.

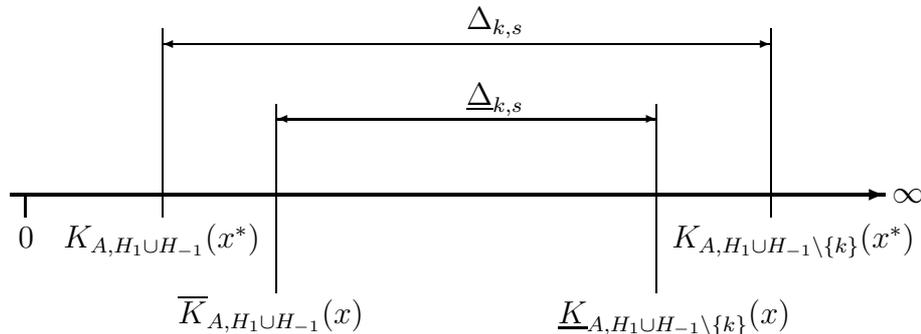


Abbildung 6.3: Darstellung der Lage der optimalen Zielfunktionswerte  $K_{A,H_1 \cup H_{-1} \setminus \{k\}}(x^*)$  und  $K_{A,H_1 \cup H_{-1}}(x^*)$  des Optimierungsproblems (6.1) - (6.13) sowie deren unterer und oberer Schranke.

Da  $\underline{\Delta}_{k,s}$  eine untere Schranke der minimalen Erhöhung von Transport- und variablen Sortierkosten darstellt, kann ein noch nicht fixierter Hubstandort  $k \in H_{-1}$  dann zugelassen werden, wenn gilt:

$$\underline{\Delta}_{k,s} \geq f_k .$$

Der folgende Algorithmus 7 verdeutlicht abschließend die Vorgehensweise der logischen Tests zum Zulassen von Hubstandorten in einem Knoten  $s$  des Suchbaums.

---

**Algorithmus 7** Logische Tests zum Zulassen von Hubstandorten

---

- 1: **for all**  $k \in H_{-1}$  **do**
  - 2:    $\underline{\Delta}_{k,s} \leftarrow (\underline{K}_{A,H_1 \cup H_{-1} \setminus \{k\}}(x) - \overline{K}_{A,H_1 \cup H_{-1}}(x))$
  - 3:   **if**  $\underline{\Delta}_{k,s} \geq f_k$  **then**
  - 4:      $H_1 \leftarrow H_1 \cup \{k\}$
  - 5:      $H_{-1} \leftarrow H_{-1} \setminus \{k\}$
- 

Zur Berechnung der oberen Schranke  $\overline{K}_{A,(\cdot)}(x)$  des Allokationsproblems wird der in Abschnitt 6.1.1 entwickelte Algorithmus verwendet. Die untere Schranke  $\underline{K}_{A,(\cdot)}(x)$  wird mit Hilfe des in Abschnitt 6.3 beschriebenen Algorithmus zur Bestimmung einer unteren Schranke des Optimierungsproblems (6.17) - (6.25) berechnet. Dieses Optimierungsproblem stellt für den Fall, dass alle Hubstandorte fixiert sind, eine Relaxation des Allokationsproblems (6.1) - (6.13) dar. Nach den Sätzen 6.1 und 6.2 stellt eine zulässige Lösung des dualen Problems (6.26) - (6.31) somit eine untere Schranke  $\underline{K}_{A,(\cdot)}(x)$  des Allokationsproblems dar.

### 6.4.2 Logischer Test zum Verbot eines Hubstandorts

Der logische Test zum Verbot eines Hubstandorts ist das Pendant des Tests zum Zulassen eines Hubstandorts. Hierbei wird die maximale Ersparnis der Transport- und variablen Sortierkosten berechnet, die durch das Zulassen eines noch nicht fixierten Hubstandorts  $k \in H_{-1}$  erzielt würde. Der Standort  $k$  kann nach Abschluss des Tests in die Menge  $H_0$  der verbotenen Standorte aufgenommen werden, wenn sich durch dessen Errichtung die Transport- und variablen Sortierkosten maximal um  $f_k$  erhöhen würden.

Die maximale Ersparnis der Transport- und variablen Sortierkosten  $\delta_{k,s}$  beim Zulassen des Standorts  $k$  in Knoten  $s$  wird folgendermaßen berechnet:

$$\delta_{k,s} = K_{A,H_1}(x^*) - K_{A,H_1 \cup \{k\}}(x^*) \tag{6.58}$$

Sie ergibt sich als Differenz des optimalen Zielfunktionswerts der Allokationslösung aller bereits zugelassener Hubstandorte und des optimalen Zielfunktionswerts der Allokationslösung, bei der der Standort  $k$  zusätzlich als bereits zugelassener Standort betrachtet wird.

Gilt

$$\delta_{k,s} \leq f_k ,$$

d. h. die durch das Zulassen des Standorts  $k$  bedingte maximale Verringerung der Transport- und variablen Sortierkosten ist höchstens so groß wie die Fixkosten, so kann der Standort  $k$  sofort in die Menge  $H_0$  der verbotenen Hubstandorte aufgenommen werden.

Die maximale Ersparnis der Transport- und variablen Sortierkosten wird bei diesem logischen Test durch eine obere Schranke  $\overline{\delta}_{k,s}$  abgeschätzt, für die gilt:

$$\overline{\delta}_{k,s} \geq \delta_{k,s} .$$

Eine obere Schranke  $\bar{\delta}_{k,s}$  der maximalen Ersparnis der Transport- und variablen Sortierkosten berechnet sich als Differenz einer oberen Schranke  $\bar{K}_{A,H_1}(x)$  des optimalen Zielfunktionswert  $K_{A,H_1}(x^*)$  und einer unteren Schranke  $\underline{K}_{A,H_1 \cup \{k\}}(x)$  des optimalen Zielfunktionswerts  $K_{A,H_1 \cup \{k\}}(x^*)$  und lautet:

$$\bar{\delta}_{k,s} = \bar{K}_{A,H_1}(x) - \underline{K}_{A,H_1 \cup \{k\}}(x).$$

In Abbildung 6.4 ist die Lage der optimalen Zielfunktionswerte sowie deren oberer und unterer Schranke dargestellt.

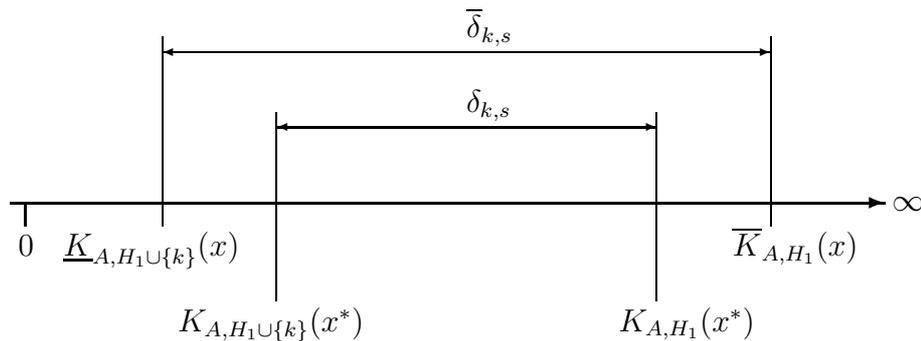


Abbildung 6.4: Darstellung der Lage der optimalen Zielfunktionswerte  $K_{A,H_1}(x^*)$  und  $K_{A,H_1 \cup \{k\}}(x^*)$  des Optimierungsproblems (6.1) - (6.13) sowie deren oberer und unterer Schranke.

Gilt für die obere Schranke

$$\bar{\delta}_{k,s} \leq f_k,$$

so kann der Standort  $k$  endgültig in die Menge  $H_0$  der verbotenen Hubstandorte aufgenommen werden.

Algorithmus 8 stellt die Durchführung der logischen Tests zum Verbot von Hubstandorten dar.

---

**Algorithmus 8** Logische Tests zum Verbot von Hubstandorten

---

- 1: **for all**  $k \in H_{-1}$  **do**
  - 2:      $\bar{\delta}_{k,s} \leftarrow (\bar{K}_{A,H_1}(x) - \underline{K}_{A,H_1 \cup \{k\}}(x))$
  - 3:     **if**  $\bar{\delta}_{k,s} \leq f_k$  **then**
  - 4:          $H_0 \leftarrow H_0 \cup \{k\}$
  - 5:          $H_{-1} \leftarrow H_{-1} \setminus \{k\}$
- 

Sollten aufgrund dieser logischen Tests ein oder mehrere Hubstandorte  $k \in H_{-1}$  verboten worden sein, so schließen sich hieran erneut die logischen Tests zum Zulassen von Hubstandorten an (vgl. Abschnitt 6.4.1).



# 7 Ergebnisse der Berechnungen

An die Formulierung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems (4.5) - (4.15) sowie die Entwicklung von Algorithmen in Kapitel 6 schließen sich im Folgenden die Ergebnisse der Berechnungen an. Zunächst werden jedoch Angaben zu den Berechnungen und zu den Bewertungskriterien der Algorithmen gemacht.

## 7.1 Angaben zu den Berechnungen

Die entwickelten Algorithmen werden mit Hilfe des Compiler Borland C++ Builder Version 6.0 implementiert. Die Berechnungen werden auf einem Computer mit zwei AMD Opteron Prozessoren mit jeweils einer Taktrate von 1,7 GHz und vier Gigabyte Hauptspeicher durchgeführt. Als Betriebssystem wird Microsoft Windows 2000 Server verwendet.

### 7.1.1 Datengrundlage

Datengrundlage der Untersuchungen bildet der von Ernst und Krishnamoorthy (1996) veröffentlichte Datensatz der australischen Post (Australia Post). Dieser sog. AP-Datensatz<sup>1</sup> enthält die Koordinaten von 200 Knoten, die jeweils die Lage eines Depots innerhalb eines Postleitzahlengebiets repräsentieren (vgl. Abbildung 7.1). Des Weiteren umfasst dieser Datensatz die Belastungsmatrix  $B$ , die Fixkosten  $f_k$  und die Sortierkapazitäten  $\kappa_k$  der potentiellen Hubstandorte  $k \in S_H$ , die Transportkosten  $c_{ij}$  sowie die Skalierungsfaktoren der Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachläufe.

Um Probleminstanzen mit weniger als 200 Depotstandorten zu erzeugen, haben Ernst und Krishnamoorthy (1996) einen Algorithmus entwickelt, mit dem reduzierte Probleminstanzen mit einer Depotanzahl von einem Vielfachen von fünf erzeugt werden können.<sup>2</sup>

Der AP-Datensatz enthält als einziger in der Literatur verwendeter Datensatz Fixkosten und Sortierkapazitäten für potentielle Hubstandorte und wird deshalb für die Untersuchungen des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems verwendet.

### Transportkosten

Die Transportkosten auf einer Direktverkehrsrelation  $i \rightarrow j$  des AP-Datensatzes werden als proportional zur Transportmenge angenommen und durch den Einheitstransportkostensatz  $c_{ij}$  beschrieben (vgl. Abschnitt 4.1.2). Die Skalierungsfaktoren, die die Einsparungen aufgrund

---

<sup>1</sup>Der AP-Datensatz ist unter folgender Adresse erhältlich:

<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/files/phub1.txt>.

<sup>2</sup>Dieser in der Programmiersprache C implementierte Algorithmus ist unter derselben Adresse wie der AP-Datensatz erhältlich.

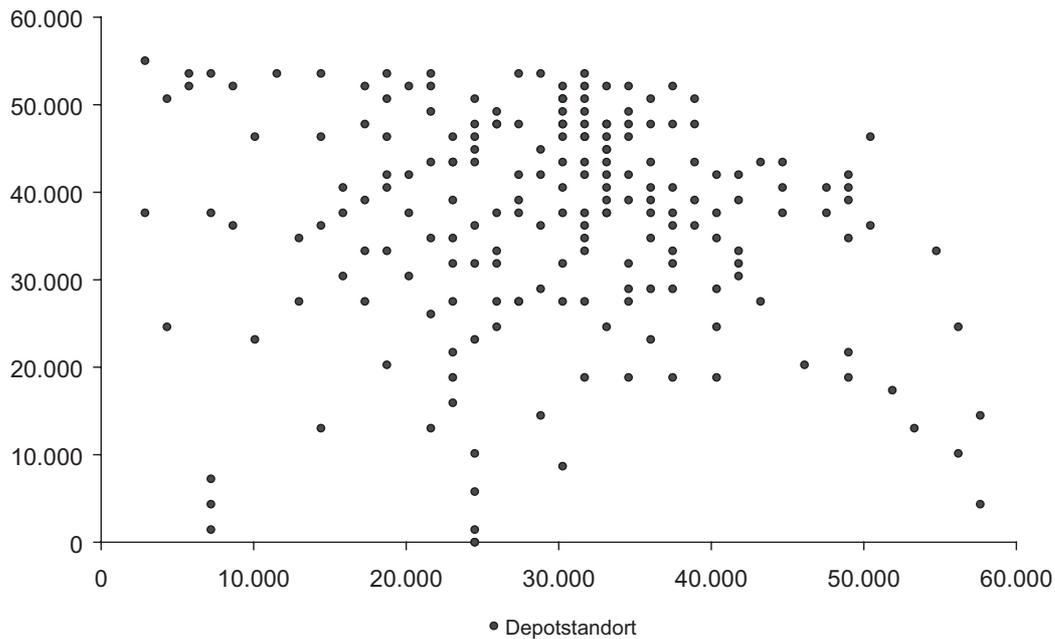


Abbildung 7.1: Lage der 200 Depots des AP-Datensatzes in einem normierten Koordinatensystem.

der Sendungsbündelung auf den Transportrelationen des Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachlaufs gegenüber den entsprechenden Direktverkehrsrelationen beschreiben, sind in Tabelle 7.1 angegeben.

Tabelle 7.1: Modifizierte Skalierungsfaktoren des AP-Datensatzes.

Art der Transportrelation	Skalierungsfaktor
Hub-Vorlauf	$\alpha_1 = \frac{2}{7}$
Hub-Hauptlauf	$\alpha_2 = \frac{3}{28}$
Hub-Nachlauf	$\alpha_3 = \frac{2}{7}$

### Fixkosten

Ernst und Krishnamoorthy (1999) stellen zwei Arten von Fixkosten für die Errichtung von Hubstandorten vor, die sie mit *tight* (Typ T) (engl. straff) und *loose* (Typ L) (engl. locker) bezeichnen. Bei Probleminstanzen mit Fixkosten vom Typ T korrelieren die Fixkosten stark mit dem Sendungsaufkommen des jeweiligen potentiellen Hubstandorts. Der Korrelationskoeffizient beträgt  $\sigma_{Fix_T,B} = 0,98$ . Dadurch wird nach Ernst und Krishnamoorthy (1999) die Entscheidung bzgl. der Installation von Hubs an den potentiellen Hubstandorten erschwert und infolgedessen ist das Optimierungsproblem schwerer zu lösen. Im Gegensatz dazu beträgt der Korrelationskoeffizient bei Probleminstanzen mit Fixkosten vom Typ L nur  $\sigma_{Fix_L,B} = 0,56$ .

## Sortierkapazitäten

Analog zu den Fixkosten unterscheiden die Autoren auch die Typen T und L bzgl. der Sortierkapazitäten der potentiellen Hubstandorte. Bei Probleminstanzen mit Sortierkapazitäten vom Typ T beträgt die Sortierkapazität eines potentiellen Hubstandorts im Mittel das 58-fache des eigenen Sendungsaufkommens. Bei Typ L ist es im Mittel das 140-fache. Die Korrelationskoeffizienten zwischen den Sortierkapazitäten der potentiellen Hubstandorte und dem Sendungsaufkommen dieser Standorte sind mit  $\sigma_{\kappa_T, B} = 0,03$  bzw.  $\sigma_{\kappa_L, B} = 0,13$  gering.

Der mittlere Korrelationskoeffizient von Fixkosten und Sortierkapazitäten über deren beschriebene mögliche Ausprägungen ist mit  $\bar{\sigma}_{Fix, Kap} = 0,07$  niedrig. Somit wird der Tatsache Rechnung getragen, dass die Höhe der Fixkosten eines potentiellen Hubstandorts nicht nur durch die Fixkosten der Sortieranlage bestimmt werden, sondern auch durch weitere Arten von Fixkosten (vgl. Abschnitt 4.1.1).

## Variable Sortierkosten

Im Gegensatz zu den in der Literatur bislang untersuchten kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problemen werden in der vorliegenden Arbeit zusätzlich zu den Fixkosten der potentiellen Hubstandorte auch die variablen Sortierkosten modelliert, zu denen der AP-Datensatz jedoch keine Angaben enthält.

Die variablen Sortierkosten  $s_k^{var}$  des potentiellen Hubs  $k \in S_H$  werden in Abhängigkeit von der Sortierkapazität  $\kappa_k$  wie folgt berechnet:

$$s_k^{var} = s_{man}^{var} \cdot \frac{1}{1 + d \cdot \underbrace{\frac{\kappa_k - \kappa_{min}}{\kappa_{max} - \kappa_{min}}}_{\text{Automatisierungsgrad}}} \quad \forall k \in S_H.$$

Die variablen Sortierkosten  $s_k^{var}$  ergeben sich als Produkt der rein manuellen Sortierkosten  $s_{man}^{var}$ , die auf 7,36 festgesetzt werden, und einem Degressionsfaktor, der die Abnahme der variablen Sortierkosten in Abhängigkeit des in dieser Arbeit definierten Automatisierungsgrads beschreibt. Die Bezeichner  $\kappa_{min}$  und  $\kappa_{max}$  geben die minimale bzw. die maximale Sortierkapazität aller in dem AP-Datensatz angegebenen Sortierkapazitäten der potentiellen Hubstandorte an. Mit Hilfe des Parameters  $d > 0$  kann die Höhe des Degressionsfaktors beeinflusst werden.

Der Verlauf der variablen Sortierkosten ist in Abbildung 7.2 exemplarisch dargestellt.

Dem Verlauf der variablen Sortierkosten liegt die Annahme zu Grunde, dass mit steigendem Automatisierungsgrad die variablen Sortierkosten sinken. Gleichzeitig wird angenommen, dass die realisierbaren Kostenvorteile mit steigendem Automatisierungsgrad geringer werden.

## Untersuchte Probleminstanzen

Für die durchzuführenden Berechnungen wird der originale AP-Datensatz mit den o. g. modifizierten Skalierungsfaktoren übernommen. Erweitert wird dieser Datensatz um die variablen Sortierkosten der Sortieranlagen an den potentiellen Hubstandorten.

Die Berechnungen werden für Datensätze mit einer unterschiedlichen Anzahl von Depotstandorten durchgeführt, die in der Menge

$$I_N = \{20, 25, 40, 50, 100\}$$

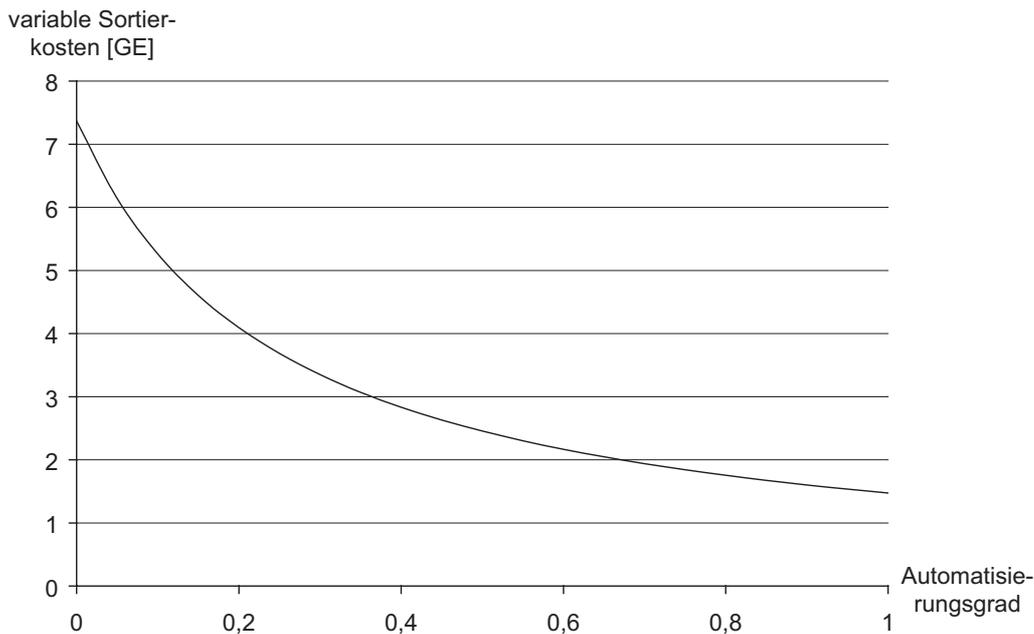


Abbildung 7.2: Verlauf der variablen Sortierkosten in Abhängigkeit des Automatisierungsgrads der Sortieranlagen und einem Degressionsfaktor von  $d = 4$ .

angegeben werden. Es wird angenommen, dass nicht zwingend jeder Depotstandort ein potentieller Hubstandort ist (vgl. Abschnitt 4.1). Die Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte in Abhängigkeit der Depotanzahl  $N$  wird folgendermaßen bestimmt:

$$M = \left\lceil \frac{k}{4} \cdot N \right\rceil \quad N \in I_N, k = 1, 2, 3, 4.^3$$

Alle zu untersuchenden Probleminstanzen sind mit ihrer Depotanzahl  $N$  und der Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte in Tabelle 7.2 angegeben.

Für jede der angegebenen Probleminstanzen werden sowohl die Typen T und L der Fixkosten als auch der Sortierkapazitäten untersucht. Des Weiteren werden bei Probleminstanzen, für die  $N > M$  gilt, die potentiellen Hubstandorte zufällig aus der Menge  $S_D$  der Depotstandorte bestimmt. In diesen Fällen werden jeweils fünf Probleminstanzen mit einer verschiedenartigen Menge von potentiellen Hubstandorten untersucht. Insgesamt werden somit 320 Probleminstanzen gelöst.

### 7.1.2 Bewertungskriterien

Die in Kapitel 6 entwickelten Verfahren zur Lösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems (4.5) - (4.15) werden anhand der folgenden Kriterien bewertet. Es wird zwischen Kriterien für die heuristischen Eröffnungsverfahren und für das exakte Branch-and-Bound-Verfahren unterschieden.

Die Bewertungskriterien der Eröffnungsverfahren sind:

<sup>3</sup>Der Ausdruck  $\lceil x \rceil$  gibt die kleinste ganze Zahl  $y \in \mathbb{N}$  an, für die gilt:  $y \geq x$ .

Tabelle 7.2: Depotanzahl  $N$  und Anzahl  $M$  potentieller Hubstandorte der untersuchten Probleminstanzen.

Depotanzahl $N$	Anzahl $M$ der potentiellen Hubstandorte			
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
20	5	10	15	20
25	7	13	19	25
40	10	20	30	40
50	13	25	38	50
100	25	50	75	100

### 1. Güte der heuristischen Lösung des Allokationsproblems

Die Güte des heuristischen Verfahrens zur Bestimmung einer zulässigen Lösung  $x^+$  des Allokationsproblems (6.1) - (6.13) bei gegebener Menge  $H_1$  von Hubstandorten (s. Abschnitt 6.1.1) wird anhand der relativen Abweichung des Zielfunktionswerts  $K_{A,H_1}(x^+)$  von dem optimalen Zielfunktionswert  $K_{A,H_1}(x^*)$  berechnet (vgl. Domschke und Drexl (1996)) und lautet:

$$\delta_H^A = \frac{K_{A,H_1}(x^+) - K_{A,H_1}(x^*)}{K_{A,H_1}(x^*)}.$$

### 2. Güte der Eröffnungslösung

Die Lösungsqualität der ermittelten Eröffnungslösung  $((x^+, y^+)')$  des Optimierungsproblems (4.5) - (4.15) wird anhand der relativen Abweichung des berechneten Zielfunktionswerts  $K_{A,H_1}(x^+)$  des Allokationsproblems (6.1) - (6.13) zzgl. der Fixkosten der zugelassenen Hubstandorte vom Optimum  $K((x^*, y^*)')$  bestimmt:

$$\delta_H^E = \frac{K_{A,H_1}(x^+) + \sum_{k \in H_1} f_k - K((x^*, y^*)')}{K((x^*, y^*)')}.$$

Ist der optimale Zielfunktionswert  $K((x^*, y^*)')$  nicht bekannt, so gibt  $\tilde{\delta}_H^E$  die relative Abweichung von der besten bekannten Lösung an.

### 3. Rechenzeit

Die benötigte Rechenzeit  $t_H$  wird zur Beurteilung der Lösungsgeschwindigkeit der Bestimmung einer Eröffnungslösung herangezogen.

Zur Bewertung des Branch-and-Bound-Verfahrens werden folgende Kriterien verwendet:

### 1. Güte des Näherungsverfahrens zur Bestimmung unterer Schranken

Im Zuge des Näherungsverfahrens wird in jedem Knoten des Suchbaums eine untere Schranke  $F_{D'}(x^+)$  des dualen relaxierten Problems  $D'$  (6.26) - (6.31) bestimmt (vgl. Abbildung 6.2). Die Güte dieses Verfahrens wird durch die relative Abweichung des heuristisch ermittelten Zielfunktionswerts  $F_{D'}(x^+)$  von dem optimalen Zielfunktionswert  $F_{D'}(x^*)$  bestimmt und lautet wie folgt:

$$\delta_{BB}^{LB} = \frac{F_{D'}(x^+) - F_{D'}(x^*)}{F_{D'}(x^*)}.$$

### 2. Anzahl der analysierten Knoten

Die Anzahl der analysierten Knoten des Suchbaums wird durch den Bezeichner  $K_{BB}$  angegeben. Die Anzahl analysierter Knoten, d. h. für die eine untere Schranke  $LB(s)$  berechnet wird, wird herangezogen, um den Einfluss des Verbesserungsverfahrens (vgl. Abschnitt 6.3.2) und der logischen Tests (vgl. Abschnitt 6.4) zu untersuchen.

### 3. Anzahl der durchgeführten logischen Tests

Die Anzahl der durchgeführten logischen Tests zum Zulassen bzw. Verbot potentieller Hubstandorte wird durch  $T_{BB}^{zu}$  bzw.  $T_{BB}^{verb}$  angegeben.

### 4. Anzahl der erfolgreich durchgeführten logischen Tests

Können aufgrund der logischen Tests potentielle Hubstandorte vorzeitig zugelassen bzw. verboten werden, so ist der entsprechende logische Test erfolgreich. Die Anzahl der erfolgreich durchgeführten logischen Tests wird durch  $T_{BB}^{zu,erf}$  bzw.  $T_{BB}^{verb,erf}$  angegeben.

### 5. Rechenzeit

Die benötigte Rechenzeit  $t_{BB}$  des Branch-and-Bound-Verfahrens wird ebenso wie beim Eröffnungsverfahren zur Beurteilung der Lösungsgeschwindigkeit herangezogen.

## 7.2 Ergebnisse des Eröffnungsverfahrens

Im folgenden Abschnitt wird das entwickelte heuristische Verfahren zur Bestimmung einer zulässigen Lösung des Allokationsproblems (6.1) - (6.13) sowie das Add- und das Drop-Verfahren zur Bestimmung einer oberen Schranke des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems (4.5) - (4.15) untersucht.

### 7.2.1 Güte der heuristischen Lösung des Allokationsproblems

Während der Ausführung der Eröffnungsverfahren (vgl. Abschnitt 5.2.1) und der logischen Tests (vgl. Abschnitt 6.4) wird der Zielfunktionswert des Allokationsproblems (6.1) - (6.13) heuristisch bestimmt (vgl. Abschnitt 6.1.1). Die Höhe der relativen Abweichung vom optimalen Zielfunktionswert hat somit Auswirkungen auf den Zielfunktionswert der Eröffnungslösung sowie die Wirksamkeit der logischen Tests und ist deshalb Gegenstand der Untersuchungen dieses Abschnitts.

In Abbildung 7.3 sind die relativen Abweichungen  $\delta_H^A$  der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte von den optimalen Zielfunktionswerten der Allokationsprobleme dargestellt. Diese Daten werden bei der Ermittlung der Eröffnungslösungen mit dem Add- und Drop-Verfahren (vgl. Abschnitt 5.2.1) bei Anwendung der First-Fit-Strategie für alle untersuchten Probleminstanzen (s. S. 93) bestimmt.

Angegeben sind u. a. die mittleren relativen Abweichung  $\bar{\delta}_H^A$  in Abhängigkeit der Anzahl  $a$  der zugelassenen Hubstandorte. Gilt  $a = 0$ , d. h. das untersuchte Transportnetz ist ein Direktverkehrsnetz, so entsprechen die heuristisch ermittelten den exakten Zielfunktionswerten und die relativen Abweichungen betragen für alle untersuchten Probleminstanzen  $\delta_H^A = 0\%$ . Die maximale mittlere relative Abweichung  $\bar{\delta}_H^A$  in Höhe von 4,1% wird bei einem zugelassenen

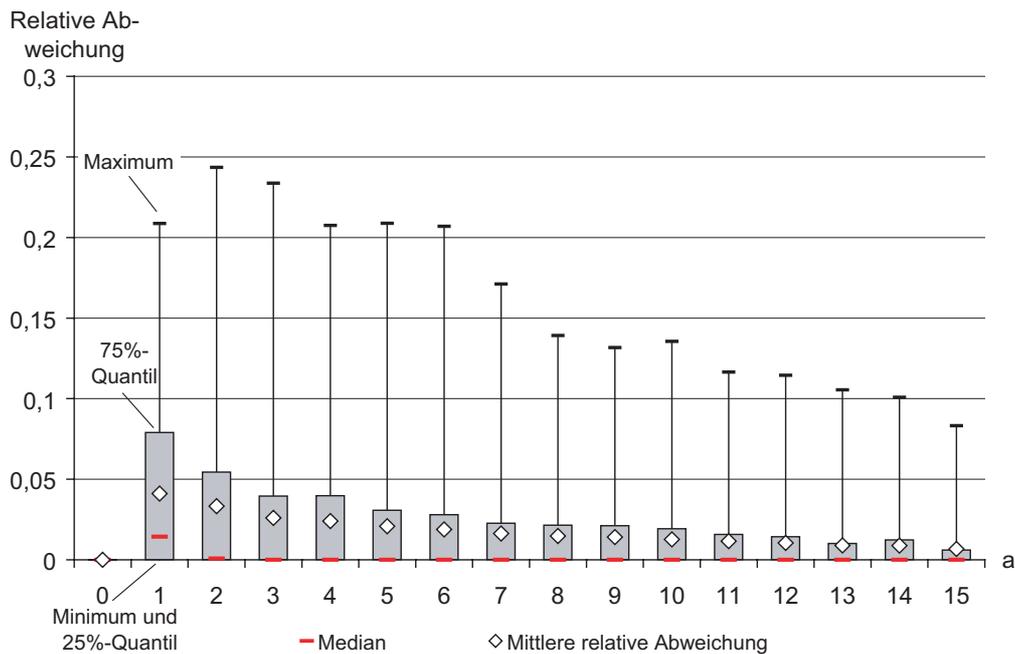


Abbildung 7.3: Darstellung der relativen Abweichung  $\delta_H^A$  als Box-and-Whisker-Plot und der mittleren relativen Abweichung  $\bar{\delta}_H^A$  in Abhängigkeit der Anzahl  $a$  der zugelassenen Hubstandorte.

Hubstandort erzielt. Für eine steigende Anzahl  $a$  von zugelassenen Hubstandorten ist eine kontinuierliche Abnahme der mittleren relativen Abweichungen zu erkennen. Diese Beobachtung ist damit zu erklären, dass bei geringer Anzahl  $a$  zugelassener Hubstandorte die innerhalb des gesamten Hub-and-Spoke-Netzes zur Verfügung stehende Sortierkapazität gering ist. Somit kann es nach der Bestimmung der kürzesten Wege mit Hilfe des modifizierten Tripel-Algorithmus (vgl. S. 67) zur häufigeren Modifizierung von Sendungswegen kommen, wodurch sich größere Abweichungen von der optimalen Allokationslösung ergeben können.

Der Box-and-Whisker-Plot stellt die 25%- und 75%-Quantile, die Mediane sowie die Minima und Maxima der relativen Abweichungen  $\delta_H^A$  dar. Im Gegensatz zur maximalen mittleren relativen Abweichung wird die maximale relative Abweichung bei zwei zugelassenen Hubstandorten mit 24,3% erzielt. Mit weiter steigender Anzahl zugelassener Hubstandorte nimmt auch dieser Wert ab. Für eine Anzahl  $a \geq 2$  zugelassener Hubstandorte sind aufgrund der Lage der jeweiligen Mediane bei mindestens 50% der untersuchten Probleminstanzen der heuristisch ermittelte und der exakte Zielfunktionswert identisch. Des Weiteren nimmt mit steigender Anzahl zugelassener Hubstandorte ebenfalls die Spannweite bis zum 75%-Quantil deutlich ab.

Aufgrund der Lage der Mediane und der Quantile sind die Verteilungen der relativen Abweichungen für jeweils ein festes  $a$  rechtsschief. Dies deutet darauf hin, dass für eine große Anzahl von untersuchten Probleminstanzen die relativen Abweichungen der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte von den optimalen Zielfunktionswerten jeweils nur sehr gering ist. Aufgrund dessen und der geringen mittleren relativen Abweichungen  $\bar{\delta}_H^A$  ist das entwickelte heuristische Verfahren zur Lösung des Allokationsproblems sehr gut für den Einsatz im Rahmen der Eröffnungsverfahren sowie der logischen Tests geeignet.

## 7.2.2 Güte der Eröffnungslösung und Rechenzeit

Im Folgenden wird das in Abschnitt 5.2.1 vorgestellte Add- sowie das Drop-Verfahren hinsichtlich der Güte der Eröffnungslösung sowie der dafür benötigten Rechenzeit untersucht. Bei beiden Verfahren wird jeweils der Einfluss der First-Fit- und der Best-Fit-Strategie analysiert. Bei Anwendung der First-Fit-Strategie wird zusätzlich der Einfluss der Prioritätsfunktionen (vgl. Abschnitt 6.1.2) untersucht.

### Güte der Eröffnungslösung

In Tabelle 7.3 sind für die Eröffnungsverfahren die Mittelwerte der relativen Abweichungen  $\bar{\delta}_H^E$  der Eröffnungslösungen von dem niedrigsten heuristisch ermittelten Zielfunktionswert für jede Probleminstanz angegeben. Die Mittelwerte werden anhand aller Kombinationen der in Abschnitt 7.1.1 beschriebenen Probleminstanzen und aller Prioritätsfunktionen (vgl. Abschnitt 6.1.2) berechnet. Dabei ist zu beachten, dass bei Anwendung der Best-Fit-Strategie keine Prioritätsfunktionen betrachtet werden.

Eine mittlere relative Abweichung von  $\bar{\delta}_H^E = 0\%$  bedeutet, dass für alle untersuchten Probleminstanzen mit dem jeweiligen Eröffnungsverfahren der niedrigste Zielfunktionswert berechnet werden kann. Die höchste mittlere relative Abweichung wird mit 28,67% bei der Probleminstanz mit  $N = 40$  Depots und  $M = 40$  potentiellen Hubstandorten bei Anwendung des Add-Verfahrens mit der First-Fit-Strategie ermittelt.

Der Vergleich der beiden Strategien zeigt, dass mit der Best-Fit-Strategie unabhängig von dem Eröffnungsverfahren mit Abstand die geringsten mittleren relativen Abweichungen erzielt werden können. So beträgt die mittlere relative Abweichung beim Add-Verfahren 0,34%, die beim Drop-Verfahren 1,64%. Eine detaillierte Analyse der Daten zeigt, dass bei 84,5% der Instanzen der niedrigste Zielfunktionswert mit dem Add-Verfahren und der Best-Fit-Strategie berechnet werden kann. Beim Drop-Verfahren kann bei 67,7% der untersuchten Probleminstanzen der niedrigste Zielfunktionswert mit der Best-Fit-Strategie ermittelt werden. Hinsichtlich der Güte der erzielten Eröffnungslösung ist somit bei Einsatz der Best-Fit-Strategie das Add- dem Drop-Verfahren vorzuziehen.

Im Gegensatz zur Best-Fit-Strategie können bei Verwendung der First-Fit-Strategie mit dem Drop-Verfahren im Mittel bessere Ergebnisse erzielt werden als mit dem Add-Verfahren. Hier betragen die mittleren relativen Abweichungen 17,26% bzw. 19,98%. Bei Anwendung der First-Fit-Strategie ist jeweils für ein festes  $N$  zu erkennen, dass mit steigender Anzahl potentieller Hubstandorte  $M$  generell eine Zunahme der mittleren relativen Abweichung verbunden ist. Dies ist darauf zurückzuführen, dass in jeder Iteration dieser Eröffnungsverfahren der nächste zu untersuchende potentielle Hubstandort anhand eines Prioritätswerts bestimmt wird. Im Gegensatz dazu wird bei der Best-Fit-Strategie in jeder Iteration derjenige potentielle Hubstandort ausgewählt, der zur größten Verringerung des Zielfunktionswerts führt.

Bei der Analyse der mittleren relativen Abweichungen der First-Fit-Strategie auf der in Tabelle 7.3 dargestellten Aggregationsebene ist jedoch zu beachten, dass den angegebenen Mittelwerten der relativen Abweichungen unterschiedliche Prioritätsfunktionen zu Grunde liegen. Im Einzelfall weicht die relative Abweichung bei Anwendung einer bestimmten Prioritätsfunktion deutlich von diesem Mittelwert ab. Eine detaillierte Analyse des Einflusses der Prioritätsfunktionen auf die erzielbare Lösungsgüte erfolgt im weiteren Verlauf der Arbeit (vgl. S. 102).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass mit der Best-Fit-Strategie deutlich geringere mittlere relative Abweichungen vom niedrigsten bekannten Zielfunktionswert der Eröff-

Tabelle 7.3: Mittlere relative Abweichungen  $\bar{\delta}_H^E$  der Eröffnungslösungen von den besten bekannten heuristisch ermittelten Eröffnungslösungen in Abhängigkeit der Depotanzahl  $N$  und der Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte. In der untersten Zeile ist die mittlere relative Abweichung für den jeweiligen Typ des Eröffnungsverfahrens angegeben.

$N$	$M$	First-Fit-Strategie		Best-Fit-Strategie	
		Add-Verf.	Drop-Verf.	Add-Verf.	Drop-Verf.
20	5	8,81%	5,58%	0,10%	0,36%
20	10	13,64%	11,81%	0,26%	0,57%
20	15	18,86%	14,30%	1,29%	0,81%
20	20	20,88%	14,91%	0,69%	2,09%
25	7	11,33%	10,93%	0,33%	0,19%
25	13	13,40%	12,57%	0,69%	0,39%
25	19	17,42%	15,91%	0,52%	0,90%
25	25	20,24%	18,16%	0,18%	2,10%
40	10	17,39%	15,21%	0,49%	0,46%
40	20	18,96%	16,02%	0,39%	2,29%
40	30	27,07%	19,18%	0,09%	1,05%
40	40	28,67%	19,90%	0,23%	1,16%
50	13	20,35%	19,46%	0,00%	2,28%
50	25	19,62%	20,40%	0,02%	2,93%
50	38	26,66%	24,92%	0,05%	5,63%
50	50	28,10%	27,62%	0,26%	7,23%
100	25	16,56%	13,55%	0,72%	0,27%
100	50	22,74%	20,46%	0,31%	0,43%
100	75	23,84%	21,56%	0,12%	0,45%
100	100	25,06%	22,76%	0,00%	1,27%
		19,98%	17,26%	0,34%	1,64%

nungslösung erzielt werden können als mit der First-Fit-Strategie. Dies ist unabhängig davon, ob es sich um das Add- oder das Drop-Verfahren handelt. Die erzielbare hohe Lösungsgüte bei Anwendung der Best-Fit-Strategie ist jedoch mit einem starken Anstieg der Rechenzeit im Vergleich zur First-Fit-Strategie verbunden, wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird.

### Rechenzeit zur Bestimmung einer Eröffnungslösung

In Tabelle 7.4 sind die mittleren Rechenzeiten angegeben, die zur Bestimmung von Eröffnungslösungen benötigt werden.

Tabelle 7.4: Mittlere Rechenzeit  $\bar{t}_H$  in Sekunden zur Bestimmung von Eröffnungslösungen in Abhängigkeit der eingesetzten Strategie und des Eröffnungsverfahrens.

		First-Fit-Strategie		Best-Fit-Strategie	
$N$	$M$	Add-Verf. [s]	Drop-Verf. [s]	Add-Verf. [s]	Drop-Verf. [s]
20	20	0,02	0,04	0,04	0,25
25	25	0,02	0,06	0,08	0,60
40	10	0,02	0,04	0,07	0,16
40	20	0,02	0,08	0,12	0,76
40	30	0,02	0,14	0,17	2,19
40	40	0,02	0,24	0,22	5,24
50	13	0,02	0,09	0,17	0,60
50	25	0,02	0,21	0,34	2,77
50	38	0,02	0,40	0,49	8,52
50	50	0,03	0,65	0,63	19,13
100	25	0,09	0,81	1,63	11,37
100	50	0,09	2,19	3,41	63,27
100	75	0,10	4,52	5,14	208,18
100	100	0,10	8,29	7,63	514,94

Unabhängig von der gewählten Strategie sowie der Art des Eröffnungsverfahrens ist festzustellen, dass mit steigender Depotanzahl  $N$  und steigender Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte die benötigte Rechenzeit zunimmt.<sup>4</sup>

Einerseits ist dies auf den mit steigender Knotenanzahl zunehmenden Rechenaufwand zur Bestimmung der Allokationslösung mit Hilfe des modifizierten Tripel-Algorithmus und der sich eventuell anschließenden Modifizierung der Sendungswege (vgl. Abschnitt 6.1.1) zurückzuführen. Die Zeitkomplexität dieser Verfahren beträgt beim Add-Verfahren jeweils  $O(N^2 \cdot |H_1|)$ , wohingegen die Zeitkomplexität beim Drop-Verfahren jeweils  $O(N^2 \cdot |H_1^{vorl}|)$  beträgt. Somit steigt der Rechenaufwand mit zunehmender Depotanzahl  $N$  quadratisch und mit zunehmender Anzahl  $|H_1|$  zugelassener bzw.  $|H_1^{vorl}|$  vorläufig zugelassener Hubstandorte linear an.

---

<sup>4</sup>Der Effekt ist beim Add-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie nicht sichtbar.

Andererseits nimmt bei wachsender Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte die Anzahl der zu berechnenden Allokationslösungen innerhalb des Drop-Verfahrens sowie des Add-Verfahrens bei Anwendung der Best-Fit-Strategie zu.

Beim detaillierten Vergleich der angegebenen Rechenzeiten ist ersichtlich, dass für jede Problemgröße das Drop-Verfahren bei gleicher Strategie eine höhere Rechenzeit als das entsprechende Add-Verfahren benötigt. Weiterhin ist mit jeweils gleichem Eröffnungsverfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie eine höhere Rechenzeit als bei der First-Fit-Strategie festzustellen.

Die Analyse der berechneten Eröffnungslösungen zeigt, dass die mittlere Anzahl der zugelassenen Hubstandorte mit 2,11 gering ist. Daraus folgt, dass die Anzahl der Iterationen innerhalb der Drop-Verfahren im Vergleich zu der Anzahl der ausgeführten Iterationen der Add-Verfahren wesentlich höher ist und mit wachsender Anzahl  $M$  potentieller Hubstandorte zudem weiter ansteigt.

Für eine Probleminstanz mit  $M$  potentiellen Hubstandorten und  $a$  zugelassenen Hubstandorten sind im Rahmen des Add-Verfahrens mit der First-Fit-Strategie

$$a + 1$$

Iterationen und somit dieselbe Anzahl von Berechnungen einer Allokationslösung notwendig. Bei den Betrachtungen wird die erstmalige Berechnung der Allokationslösung zu Beginn der Eröffnungsverfahren nicht berücksichtigt. Für dieselbe Probleminstanz bei Verwendung des Drop-Verfahrens sind im Gegensatz dazu

$$M - a + 1$$

Iterationen erforderlich. Bei dieser exemplarischen Betrachtung wird angenommen, dass die Anzahl  $a$  der endgültig zugelassenen Hubstandorte beim Add- und Drop-Verfahren identisch ist.

Die zunehmende Anzahl von Berechnungen einer Allokationslösung während des Drop-Verfahrens im Vergleich zum Add-Verfahren zeigt sich bei Anwendung der Best-Fit-Strategie noch ausgeprägter. Die Anzahl der Iterationen entspricht jeweils denen der First-Fit-Strategie, jedoch werden in jeder Iteration mehrfach Allokationslösungen berechnet.

Die Anzahl der zu berechnenden Allokationslösungen während des Add-Verfahrens bei Anwendung der Best-Fit-Strategie bei  $a$  zugelassenen Hubstandorten beträgt

$$\sum_{i=0}^a (M - i). \quad (7.1)$$

Im Vergleich dazu beträgt die Anzahl der Allokationslösungen des Drop-Verfahrens bei Anwendung der Best-Fit-Strategie

$$\sum_{i=0}^{M-a} (M - i). \quad (7.2)$$

In Tabelle 7.5 ist die Anzahl der erforderlichen Berechnungen von Allokationslösungen als geschlossener Ausdruck angegeben. Anhand eines Beispiels wird die Anzahl der benötigten Berechnungen von Allokationslösungen in Abhängigkeit der eingesetzten Strategie und des Eröffnungsverfahrens angegeben.

Es ist anhand obiger Tabelle zu erkennen sowie in Anhang F gezeigt, dass jeweils ein Wechsel vom Add- zum Drop-Verfahren bei gleicher Strategie eine Zunahme der Anzahl der zu berechnenden Allokationslösungen verursacht. Entsprechend steigt auch die Anzahl der Berechnungen

Tabelle 7.5: Anzahl der Berechnungen von Allokationslösungen bei  $M = 50$  potentiellen Hubstandorten und  $a = 2$  endgültig zugelassenen Hubstandorten.

	First-Fit-Strategie		Best-Fit-Strategie	
	Add-Verf.	Drop-Verf.	Add-Verf.	Drop-Verf.
Allgemein	$a + 1$	$M - a + 1$	$\frac{2M(a+1)-a(a+1)}{2}$	$\frac{M(M+1)-a(a-1)}{2}$
$M = 50$ $a = 2$	3	49	147	1274

von Allokationslösungen bei jeweils gleichem Eröffnungsverfahren aber einem Wechsel von der First-Fit- zur Best-Fit-Strategie.

Zusammenfassend kann für die untersuchten Probleminstanzen festgehalten werden, dass das Add-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie die geringste mittlere Rechenzeit benötigt (vgl. Tabelle 7.4), jedoch nicht die Eröffnungslösungen mit den geringsten mittleren relativen Abweichung von den besten bekannten Lösungen liefert (vgl. Tabelle 7.3).

### Einfluss der Prioritätsfunktionen auf die Lösungsgüte

Im Folgenden wird der Einfluss der sieben in Abschnitt 6.1.2 entwickelten Prioritätsfunktionen auf die Güte des Zielfunktionswerts der Eröffnungslösung untersucht.

In Abbildung 7.4 sind die mittleren relativen Abweichungen  $\bar{\delta}_H^E$  von den besten bekannten Lösungen in Abhängigkeit der verwendeten Prioritätsfunktionen dargestellt, die mit dem Add-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie erzielt werden können.

Die Abbildung zeigt, dass die mittlere relative Abweichung stark von der angewendeten Prioritätsfunktion abhängt und unterstreicht somit diese differenzierte Betrachtungsweise im Vergleich zu der in Tabelle 7.3 angegebenen aggregierten mittleren relativen Abweichungen.

Aufgrund der Anwendung einer problemspezifischen Priorisierung der potentiellen Hubstandorte können im Vergleich zur zufälligen Auswahl dieser Standorte die Abweichungen von der besten bekannten Lösung deutlich verringert werden. Die zufällige Auswahl der potentiellen Hubstandorte erweist sich als die schlechteste Vorgehensweise mit einer mittleren relativen Abweichung von 40,65%. Des Weiteren erweist sich die Prioritätsfunktion  $p_2^A(k)$  als außerordentlich unwirksam, mit der die potentiellen Hubstandorte ausschließlich gemäß den Gesamtkosten aufsteigend sortiert werden.

Für die zweiattributive Prioritätsfunktion  $p_5^A(k)$ , die sich aus den Prioritätsfunktionen  $p_2^A(k)$  und  $p_4^A(k)$  paritätisch zusammensetzt, ist ersichtlich, dass sie ihre elementare Prioritätsfunktionen  $p_2^A(k)$  dominiert. Gleichzeitig erweist sie sich jedoch nachteiliger als ihre zweite elementare Prioritätsfunktion  $p_4^A(k)$ .

Im Gegensatz zu Prioritätsfunktion  $p_5^A(k)$  ist bei den zweiattributigen Prioritätsfunktionen  $p_6^A(k)$  und  $p_7^A(k)$  zu erkennen, dass diese jeweils ihre elementaren Prioritätsfunktionen dominieren. Im Fall der Prioritätsfunktion  $p_6^A(k)$  erweisen sich potentielle Hubstandorte mit hoher Sortierkapazität (Prioritätsfunktion  $p_3^A(k)$ ) in zentraler Lage (Prioritätsfunktion  $p_4^A(k)$ ) in Be-

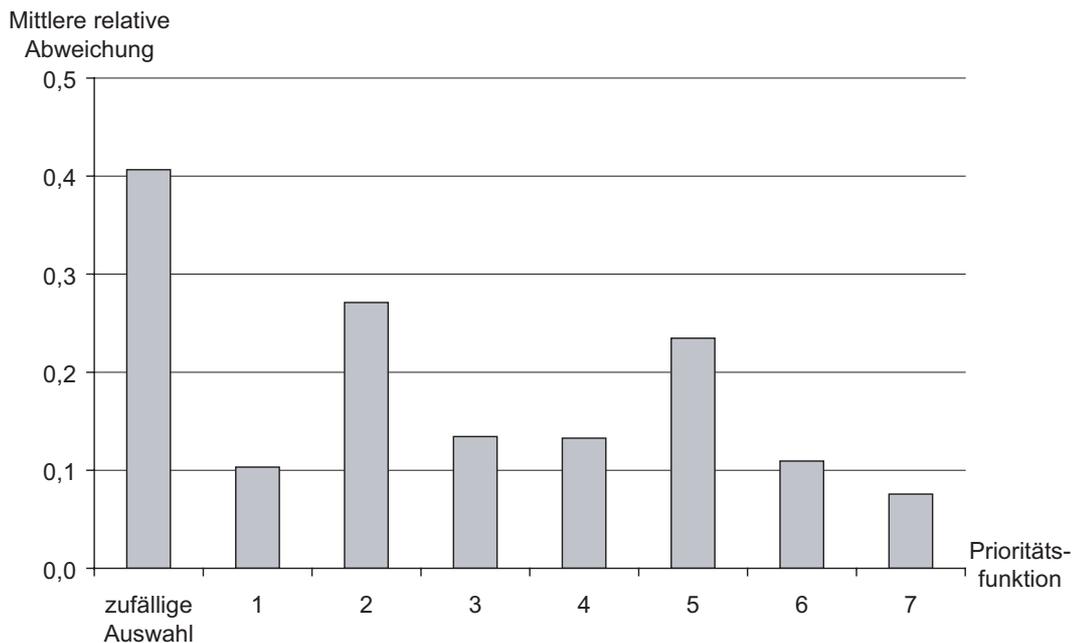


Abbildung 7.4: Mittlere relative Abweichung  $\bar{\delta}_H^E$  vom besten bekannten Zielfunktionswert beim Add-Verfahren mit First-Fit-Strategie in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen  $p_i^A(k)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ).

zug auf einen geringen Zielfunktionswert als vorteilhaft. Durch die Kombination der beiden Prioritätsfunktionen kann somit die mittlere relative Abweichung vermindert werden.

Zu der geringsten mittleren relativen Abweichung in Höhe von 7,56% von der besten bekannten Lösung führt jedoch die Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$ , die potentielle Hubstandorte mit geringen spezifischen Sortierkosten (Prioritätsfunktion  $p_1^A(k)$ ), bestehend aus den linearisierten Fixkosten zzgl. den variablen Sortierkosten, in zentraler Lage ( $p_4^A(k)$ ) priorisiert. Durch die Kombination dieser beiden Prioritätsfunktionen kann somit ebenfalls die mittlere relative Abweichung ihrer elementaren Prioritätsfunktionen verringert werden.

In Abbildung 7.5 sind die mittleren relativen Abweichungen  $\bar{\delta}_H^E$  von der besten bekannten Lösung bei Anwendung des Drop-Verfahrens in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen dargestellt.

Hierbei ist ähnlich wie bei dem Add-Verfahren zu erkennen, dass die Lösungsgüte des Drop-Verfahrens stark von der gewählten Prioritätsfunktion abhängt und die zufällige Auswahl der potentiellen Hubstandorte zu der höchsten mittleren relativen Abweichung der Eröffnungslösung in Höhe von 31,1% führt. Ebenso erweist sich hier die einattributige Prioritätsfunktion  $p_2^D(k)$ , ähnlich wie beim Add-Verfahren, mit einer mittleren relativen Abweichung in Höhe von 22,2% als unwirksam.

Als schlechteste zweiattributige Prioritätsfunktion ist auch beim Drop-Verfahren die Prioritätsfunktion  $p_5^D(k)$  zu ermitteln, obwohl ihre elementare Prioritätsfunktion  $p_4^D(k)$  mit einer mittleren relativen Abweichung von 10,5% die zweitbeste Prioritätsfunktion darstellt. Als beste Prioritätsfunktion stellt sich auch beim Drop-Verfahren  $p_7^D(k)$  heraus, die mit ihren elementaren Prioritätsfunktionen  $p_1^D(k)$  und  $p_4^D(k)$  zu Lösungen mit der geringsten mittleren relativen

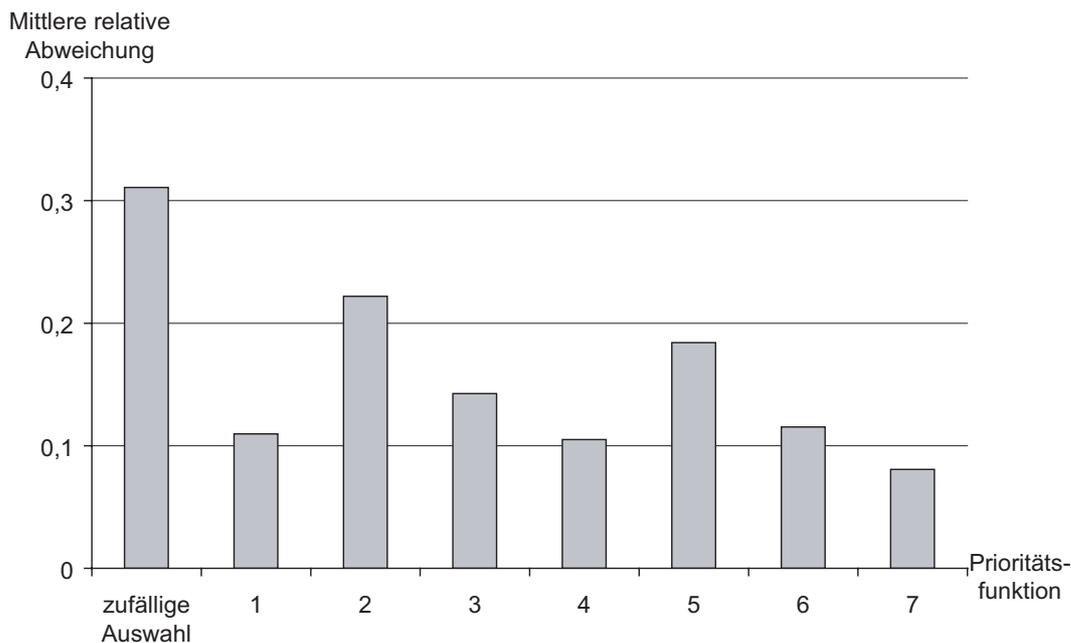


Abbildung 7.5: Mittlere relative Abweichung  $\tilde{\delta}_H^E$  vom besten bekannten Zielfunktionswert beim Drop-Verfahren mit First-Fit-Strategie in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen  $p_i^D(k)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ).

Abweichung in Höhe von 8,01% führt. Somit wird auch beim Drop-Verfahren der positive Einfluss der spezifischen Sortierkosten in Verbindung mit einer zentralen Lage des potentiellen Hubstandorts deutlich.

Abschließend kann festgehalten werden, dass die Anwendung der Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$  beim Add-Verfahren mit einer mittleren relativen Abweichung von der besten bekannten Lösung in Höhe von 7,56% zu den besten Ergebnissen bei Anwendung der First-Fit-Strategie führt. Das Add-Verfahren in Kombination mit der Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$  wird deshalb im weiteren Verlauf dieser Arbeit zur Bestimmung einer Eröffnungslösung mit der First-Fit-Strategie angewendet. Im Vergleich zu diesem Verfahren kann die geringste mittlere relative Abweichung in Höhe von 0,34% jedoch mit dem Add-Verfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie (vgl. Tabelle 7.3) erzielt werden. Dies ist jedoch mit einer deutlich höheren Rechenzeit verbunden.

### Auswahl eines geeigneten Eröffnungsverfahrens

Der Vergleich der Eröffnungsverfahren hinsichtlich der erzielbaren Lösungsgüte und der benötigten Rechenzeit zeigt, dass mit steigender Lösungsgüte eine Zunahme der Rechenzeit verbunden ist.

Im Folgenden wird für die Eröffnungsverfahren ein Kennwert aus den beiden Charakteristika Lösungsgüte und benötigte Rechenzeit bestimmt, so dass die Eröffnungsverfahren anhand dieses Kennwerts miteinander verglichen werden können. Bei Verfahren mit Anwendung der First-Fit-Strategie wird jeweils die Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$  bzw.  $p_7^D(k)$  verwendet, die zu den geringsten mittleren relativen Abweichungen führt (vgl. Abschnitt 7.2.2).

Der Kennwert  $x_i^N \in (0,1)$  ergibt sich als Mittelwert des normierten Werts der mittleren relativen Abweichung und des normierten Werts der mittleren Rechenzeit einer Probleminstanz und lautet wie folgt:

$$x_i^N = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\bar{\delta}_{H,i}^E}{\sum_{i \in E_V} \bar{\delta}_{H,i}^E} + \frac{\bar{t}_{H,i}}{\sum_{i \in E_V} \bar{t}_{H,i}} \right) \quad i \in E_V, N \in I_N.$$

Die Menge  $E_V$  umfasst die möglichen Kombinationen der eingesetzten Eröffnungsverfahren und Strategien. Es gilt:

$$E_V = \{\text{Add}_{\text{FF}}, \text{Drop}_{\text{FF}}, \text{Add}_{\text{BF}}, \text{Drop}_{\text{BF}}\}.$$

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Tabelle 7.6 dargestellt. Dasjenige Eröffnungsverfahren, für das der Wert  $x_i^N$  am geringsten ist, wird als das beste Verfahren angenommen.

Tabelle 7.6: Vergleich der Eröffnungsverfahren anhand des Kennwerts  $x_i^N$  der normierten mittleren relativen Abweichung und der normierten mittleren Rechenzeit.

$N$	First-Fit-Strategie (FF)		Best-Fit-Strategie (BF)	
	Add-Verf. $p_7^A(k)$	Drop-Verf. $p_7^D(k)$	Add-Verf.	Drop-Verf.
20	28,37%	28,50%	10,66%	32,47%
25	24,28%	30,20%	8,13%	37,38%
40	21,45%	25,84%	4,25%	48,47%
50	20,12%	21,77%	2,57%	55,55%
100	22,61%	26,41%	1,70%	49,28%
	23,37%	26,54%	5,46%	44,63%

Der Vergleich der Werte zeigt, dass das Add-Verfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie die anderen Eröffnungsverfahren bei allen Probleminstanzen dominiert. Mit diesem Verfahren werden bei kurzer Rechenzeit Eröffnungslösungen mit einer sehr geringen mittleren relativen Abweichung von der besten bekannten Eröffnungslösung berechnet. Der Tabelle 7.6 ist weiterhin zu entnehmen, dass sich dieses Verfahren mit steigender Knotenanzahl  $N$  gegenüber den anderen Verfahren als zunehmend vorteilhafter erweist. Dies ist auf die gleich bleibende mittlere relative Abweichung bei nur moderatem Zuwachs der Rechenzeit zu erklären.

Die Dominanz des Add-Verfahrens bei Anwendung der First-Fit-Strategie mit Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$  gegenüber dem entsprechenden Drop-Verfahren lässt sich mit der geringeren mittleren relativen Abweichung (vgl. Abbildungen 7.4 und 7.5) und der geringeren mittleren Rechenzeit (vgl. Tabelle 7.4) erklären.

Für alle Probleminstanzen erweist sich das Drop-Verfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie als das ungeeignetste Eröffnungsverfahren. Es können mit diesem Verfahren im Vergleich zu den Verfahren mit der First-Fit-Strategie zwar Eröffnungslösungen mit einer deutlich geringeren mittleren relativen Abweichung berechnet werden (vgl. Tabelle 7.3), jedoch wird dafür eine wesentlich höhere Rechenzeit benötigt (vgl. Tabelle 7.4).

In die Berechnung des Kennwerts  $x_i^N$  für eine Kombination aus Eröffnungsverfahren und verwendeter Strategie geht die mittlere relative Abweichung und die mittlere Rechenzeit paritätisch ein. In Hinblick auf die Rechenzeit zur Bestimmung einer optimalen Lösung mit Hilfe des sich

anschließenden Branch-and-Bound-Verfahrens kann jedoch von einem niedrigen Kennwert  $x_i^N$  der Kombination  $i$  von Eröffnungsverfahren und Strategie gegenüber einem höheren Kennwert  $x_j^N$  einer anderen Kombination  $j$  nicht unmittelbar auf deren Vorteilhaftigkeit geschlossen werden. Besitzt bspw. die Kombination  $i$  einen geringen Kennwert  $x_i^N$  aufgrund einer sehr geringen Rechenzeit bei einer hohen mittleren Abweichung im Vergleich zu Eröffnungsverfahren  $j$ , so kann dies u. U. eine wesentlich längere Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens und somit des gesamten Verfahrens, inkl. des Eröffnungsverfahrens, zur Folge haben.

Um den Effekt von niedrigeren gegenüber höheren Zielfunktionswerten der Eröffnungsverfahren auf die Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens zu untersuchen, wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit das Add-Verfahren jeweils mit der First-Fit- und der Best-Fit-Strategie als Eröffnungsverfahren eingesetzt. Im Fall der First-Fit-Strategie wird ausschließlich die Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$  angewendet.

### 7.3 Ergebnisse des Branch-and-Bound-Verfahrens

Im Folgenden werden die ermittelten Ergebnisse des Branch-and-Bound-Verfahrens zur Lösung des Hub-Location-Problems (4.5) - (4.15) vorgestellt. Dabei wird die Güte des entwickelten Näherungsverfahrens zur Bestimmung unterer Schranken in den Knoten des Suchbaums, der Einfluss der Verfahrensparameter sowie der logischen Tests auf die Anzahl der analysierten Knoten und die Lösungsgeschwindigkeit des Branch-and-Bound-Verfahrens untersucht.

#### 7.3.1 Güte des Eröffnungsverfahrens zur Bestimmung unterer Schranken

In diesem Abschnitt wird die Güte des Eröffnungsverfahrens zur Bestimmung unterer Schranken in den Knoten des Suchbaums untersucht (vgl. Abschnitt 6.3). Mit Hilfe des Eröffnungsverfahrens wird jeweils eine zulässige Lösung des Optimierungsproblems (6.26) - (6.31) bestimmt, deren Zielfunktionswert kleiner oder gleich dem optimalen Zielfunktionswert ist.

In Abbildung 7.6 sind u. a. die mittleren relativen Abweichungen  $\bar{\delta}_{BB}^{LB}$  der heuristisch bestimmten Zielfunktionswerte von den entsprechenden optimalen Zielfunktionswerten in Abhängigkeit der freien, d. h. noch nicht fixierten, Hubstandorte dargestellt. Untersucht werden die in Abschnitt 7.1.1 vorgestellten Probleminstanzen mit  $N = 20$  Depotstandorten und  $M = 20$  potentiellen Hubstandorten.

Es ist zu erkennen, dass mit zunehmender Anzahl freier Hubstandorte die mittlere relative Abweichung zunächst auf einen minimalen Wert von 0,51% bei drei freien Hubstandorten abnimmt. Für eine größere Anzahl freier Hubstandorte steigt die mittlere relative Abweichung an und erreicht ihren maximalen Wert von 3,6% bei 20 freien Hubstandorten.

Der Box-and-Whisker-Plot stellt die 25%- und 75%-Quantile sowie die Minima und Maxima der relativen Abweichungen  $\delta_{BB}^{LB}$  dar. Im Vergleich zu dem Verlauf der mittleren relativen Abweichungen zeigt sich beim absoluten Maximum der relativen Abweichungen ein entgegengesetzter Trend. Mit steigender Anzahl freier Hubstandorte nimmt dieses Maximum deutlich ab (vgl. auch Abbildung 7.7). Die maximale relative Abweichung zeigt sich mit 42,2%, wenn alle Hubstandorte fixiert sind. Gleichzeitig kann in diesem Fall aber auch in mindestens 50% der Fälle das Optimum gefunden werden, was anhand des Medians erkennbar ist.

Die Lage der Mediane und der Quantile deuten darauf hin, dass die Verteilungen der relativen Abweichungen für Probleminstanzen mit einer Anzahl von dreizehn oder weniger freien Hub-

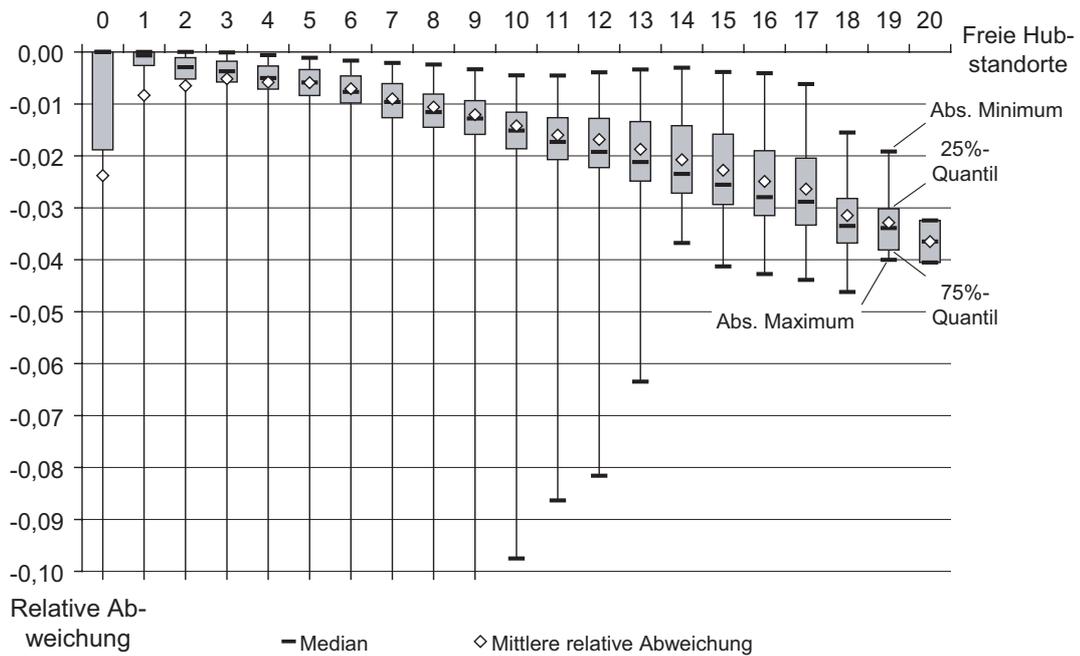


Abbildung 7.6: Darstellung der relativen Abweichungen  $\delta_{BB}^{LB}$  der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte von den optimalen Zielfunktionswerten der dualen Relaxation.

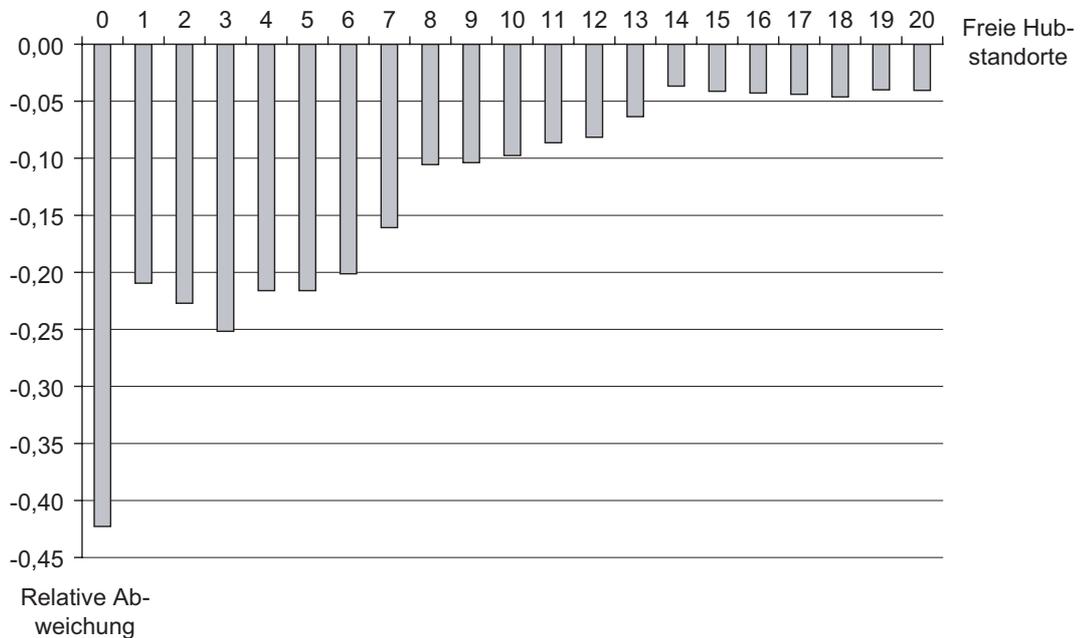


Abbildung 7.7: Absolute Maximalwerte der relativen Abweichungen der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte von den optimalen Zielfunktionswerten.

standorten rechtsschief sind. Aufgrund dieser Tatsache und der geringen mittleren relativen Abweichungen vom Optimum ist dieses Verfahren sehr gut für die Bestimmung von Lösungen der dualen Relaxation (6.26) - (6.31) geeignet.

### 7.3.2 Einfluss der Verfahrensparameter und des Verbesserungsverfahrens

Die Anzahl der zu analysierenden Knoten des Suchbaums und somit auch die Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens wird durch folgende Parameter beeinflusst:

**Güte der Eröffnungslösung** Die Güte der Eröffnungslösung (vgl. Abschnitt 7.2.2) gibt die relative Abweichung des heuristisch berechneten Zielfunktionswerts von der optimalen Lösung an.

**Suchstrategie** Nach der Suchstrategie werden die aktiven Knoten aus der Kandidatenliste  $L_a$  ausgewählt (vgl. Abschnitt 5.2.2).

**Prioritätsfunktion** Mit Hilfe der Prioritätsfunktionen werden die Prioritätswerte der potentiellen Hubstandorte berechnet (vgl. Abschnitt 6.1.2) und diejenige noch nicht fixierte Entscheidungsvariable als Verzweigungsvariable ausgewählt (vgl. Abschnitt 5.2.2), deren entsprechender Hubstandort den höchsten Prioritätswert besitzt.

Des Weiteren wird der Einfluss des Verbesserungsverfahrens (vgl. Abschnitt 6.3.2) auf die Anzahl der Knoten und die Rechenzeit untersucht. Im Gegensatz zu den genannten Verfahrensparametern verursacht die Anwendung des Verbesserungsverfahrens zusätzlich Rechenaufwand, so dass dessen Anwendung in Hinblick auf die Rechenzeit möglicherweise nicht effizient ist.

Der Einfluss der Verfahrensparameter und des Verbesserungsverfahrens auf die Anzahl analysierter Knoten und die Rechenzeit wird für die in Abschnitt 7.1.1 beschriebenen Probleminstanzen mit  $N = 20$  und  $N = 25$  Knoten untersucht. Ziel ist es, die Parameter derart zu bestimmen, dass im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens eine minimale Anzahl von Knoten des Suchbaums analysiert wird und somit die untersuchten Probleminstanzen in möglichst kurzer Zeit gelöst werden. Die ermittelten Parameter werden zur anschließenden Bestimmung von optimalen Lösungen größerer Probleminstanzen herangezogen.

#### Einfluss der Güte der Eröffnungslösung

Der Einfluss der Güte der Eröffnungslösung auf die Knotenanzahl des Suchbaums wird anhand des in Abschnitt 7.2.2 bestimmten Add-Verfahrens bei Anwendung der First-Fit- und der Best-Fit-Strategie untersucht. Bei Verwendung der First-Fit-Strategie wird die Prioritätsfunktion  $p_7^A(k)$  eingesetzt.

In Abbildung 7.8 ist die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  der analysierten Knoten in Abhängigkeit der Depotanzahl  $N$  und der Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte dargestellt.

Bei Anwendung der Best-Fit-Strategie steigt mit zunehmender Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte und somit steigender Anzahl der Binärvariablen die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  der analysierten Knoten des Suchbaums. Es ist zu erkennen, dass die mittlere Anzahl analysierter Knoten bei Anwendung der First-Fit-Strategie teilweise wesentlich höher ist als die mittlere Anzahl analysierter Knoten bei Anwendung der Best-Fit-Strategie.

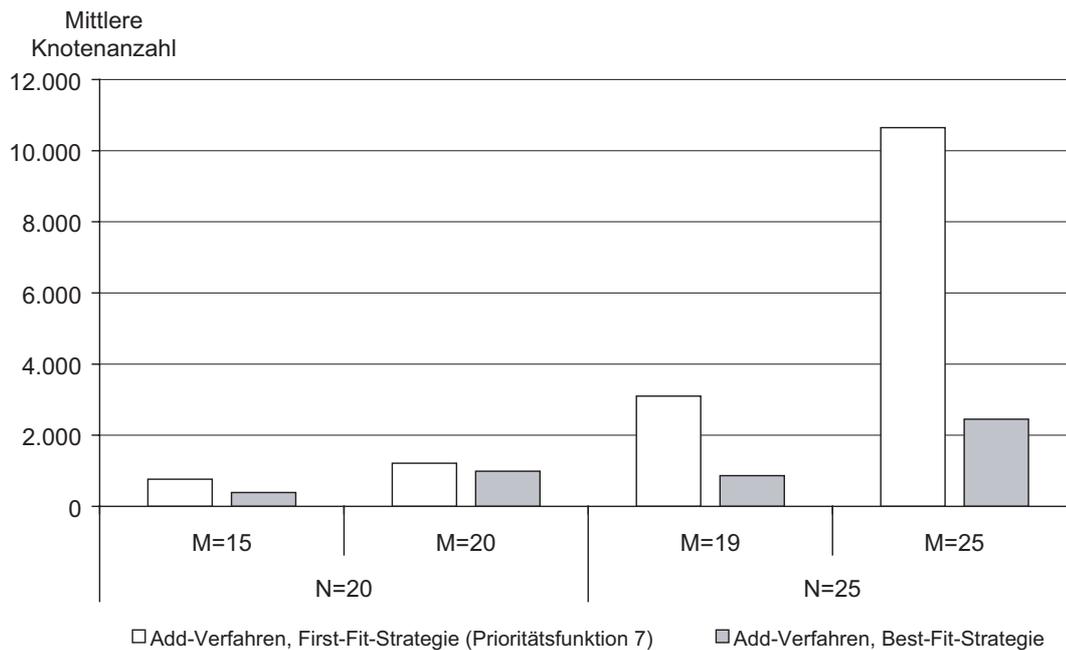


Abbildung 7.8: Mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten.

Diese Tatsache ist darauf zurückzuführen, dass mit Hilfe der Best-Fit-Strategie im Mittel deutlich niedrigere Zielfunktionswerte der Eröffnungslösung berechnet werden als mit der First-Fit-Strategie (vgl. Tabelle 7.3 und Abbildung 7.4). Der niedrigere Zielfunktionswert der Eröffnungslösung, der der oberen Schranke zu Beginn des Branch-and-Bound-Verfahrens entspricht, führt häufiger zu Auslotungsfall 1 (vgl. Seite 62), wodurch sich die Knotenanzahl des Suchbaums deutlich verringert.

Der positive Einfluss eines Zielfunktionswerts mit hoher Güte zeigt sich für die Probleminstanzen mit  $N = 25$  Depotstandorten wesentlich ausgeprägter als für die Probleminstanzen mit  $N = 20$  Depotstandorten. Bei  $N = 25$  Depots kann bei Anwendung der Best-Fit-Strategie die Knotenanzahl auf 23,0% bzw. 27,7% der Knotenanzahl bei Anwendung der First-Fit-Strategie reduziert werden. Hingegen ist bei  $N = 20$  Depotstandorten eine Reduzierung auf maximal 51,3% möglich.

Aus dieser Feststellung folgt, dass eine hohe Güte der Eröffnungslösung, insbesondere bei Probleminstanzen mit einer wachsenden Anzahl  $M$  potentieller Hubstandorte, von entscheidender Bedeutung für die Anzahl der im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens zu analysierenden Knoten ist. Im Folgenden kann gezeigt werden, dass durch weitere Parameter die Effizienz des Branch-and-Bound-Verfahrens noch erheblich gesteigert werden kann.

### Einfluss der Suchstrategie

Anhand der Abbildung 7.9 ist die Abhängigkeit der mittleren Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten von der verwendeten Suchstrategie (vgl. Abschnitt 5.2.2) zu erkennen.

Die Strategie der Breitensuche („first-in-first-out“) führt zu der höchsten mittleren Anzahl analysierter Knoten. Hierbei werden zunächst die aktiven Knoten mit der geringsten Tiefe

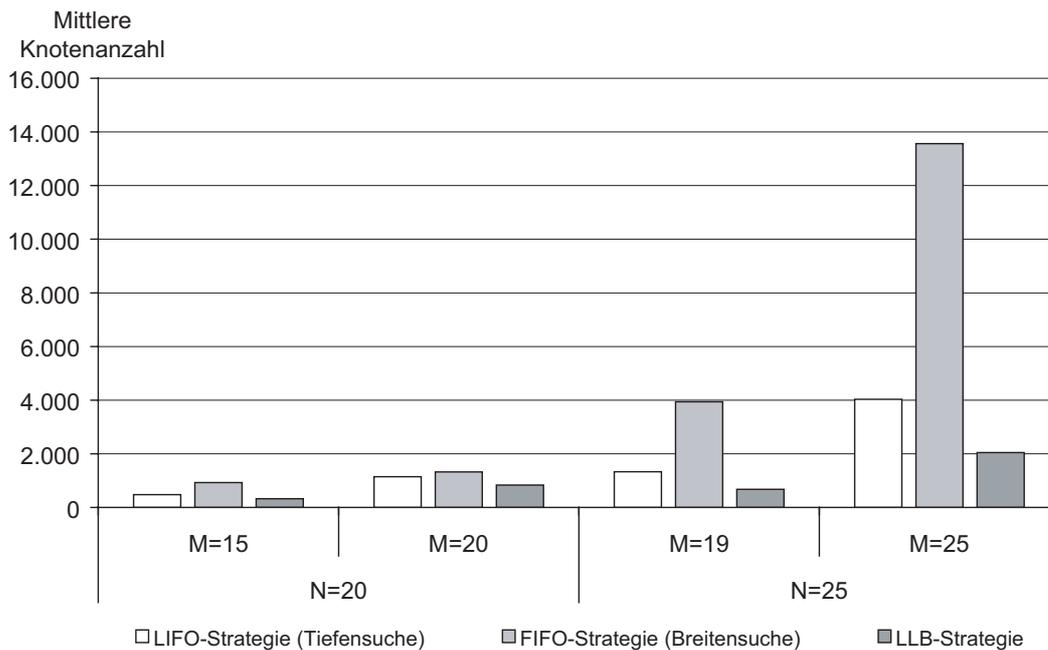


Abbildung 7.9: Mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  der analysierten Knoten in Abhängigkeit der Suchstrategie, nach der die aktiven Knoten aus der Kandidatenliste  $L_a$  ausgewählt werden.

innerhalb des Suchbaums analysiert, da diese als erste erzeugt und der Kandidatenliste  $L_a$  hinzugefügt werden.

Durch die Anwendung der Tiefensuche („last-in-first-out“) kann die mittlere Anzahl der analysierten Knoten des Suchbaums bei  $N = 25$  Depotstandorten und  $M = 25$  potentiellen Hubs im Vergleich zur Breitensuche auf 29,8% verringert werden.

Die Ergebnisse mit der geringsten mittleren Anzahl von untersuchten Knoten können jedoch bei Anwendung der Suchstrategie „least-lower-bound“ erzielt werden. Somit bestätigt sich die dieser Suchstrategie zugrundeliegende Vermutung, dass Knoten mit der geringsten unteren Schranke am schnellsten zur optimalen Lösung führen. Durch die Anwendung dieser Strategie kann die mittlere Knotenanzahl bei  $N = 25$  Depotstandorten um ca. 50% im Vergleich zur Tiefensuche reduziert werden. Hingegen kann die mittlere Anzahl der untersuchten Knoten mit der Suchstrategie „least-lower-bound“ im günstigsten Fall auf 15,1% der Knotenanzahl bei Anwendung der FIFO-Strategie reduziert werden.

In Tabelle 7.7 ist der Einfluss der Strategie des Eröffnungsverfahrens und der Suchstrategie auf die mittlere Anzahl der analysierten Knoten des Suchbaums angegeben.

Der Tabelle ist zu entnehmen, dass beim Wechsel von der First-Fit- zur Best-Fit-Strategie die Suchstrategie „first-in-first-out“ (FIFO-Strategie) zur größten Reduzierung der mittleren Knotenanzahl auf 11,2% der ursprünglichen Anzahl führt. Aufgrund der geringeren initialen oberen Schranke bei Anwendung der Best-Fit-Strategie können hier eine Vielzahl von Knoten ausgelotet werden. Die absolute Anzahl der untersuchten Knoten ist jedoch im Vergleich zu den anderen Suchstrategien bei dieser Suchstrategie weiterhin am höchsten.

Bei der Suchstrategie „last-in-first-out“ (LIFO-Strategie) kann durch den Einsatz der Best-Fit-

Tabelle 7.7: Mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten des Suchbaums in Abhängigkeit der Strategie des Eröffnungsverfahrens und der Suchstrategie des Branch-and-Bound-Verfahrens für  $N = 25$  und  $M = 25$ .

Suchstrategie	First-Fit-Strategie	Best-Fit-Strategie	Verhältnis von (2) zu (1)
	Add-Verfahren (1) $p_7^A(k)$	Add-Verfahren (2)	
FIFO	24.403,2	2.722,1	11,2%
LIFO	5.487,0	2.578,6	47,0%
LLB	2.047,2	2.047,2	100,0%

Strategie immerhin noch eine Reduzierung auf 47,0% der Knotenanzahl bei Anwendung der First-Fit-Strategie erzielt werden.

Im Gegensatz zu den ersten beiden Strategien hat die Güte der Eröffnungslösung bei Anwendung der Suchstrategie „least-lower-bound“ (LLB-Strategie) bei den untersuchten Probleminstanzen keinen Einfluss auf die mittlere Knotenanzahl. Diese Suchstrategie dominiert weiterhin die Strategien „first-in-first-out“ und „last-in-first-out“.

Bei der LLB-Strategie wird derjenige aktive Knoten mit der oberen Schranke  $UB$  verglichen, der die geringste untere Schranke besitzt. Das Optimum ist gefunden, sobald der Auslotungsfall 1 eintritt, da nachfolgende Knoten der Kandidatenliste  $L_a$  keine geringere untere Schranke besitzen als der vorderste Knoten der Kandidatenliste und diese somit auch ausgelotet werden können. Sofern das zu untersuchende Optimierungsproblem lösbar ist, kann somit bis zum erstmaligen Erreichen eines Blattknotens der Auslotungsfall 1 nicht eintreten.<sup>5</sup> Somit hat die Höhe der oberen Schranke  $UB$  keinen Einfluss auf das Branch-and-Bound-Verfahren. Ist der vorderste Knoten der Kandidatenliste ein Blattknoten, so kann die obere Schranke  $UB$  aktualisiert werden, wenn der Zielfunktionswert des Blattknotens kleiner als die obere Schranke ist. In jedem Fall bricht das Branch-and-Bound-Verfahren jedoch nach Erreichen des ersten Blattknotens ab. Die aktuelle obere Schranke  $UB$  entspricht dem Optimum.

Die im vorherigen Abschnitt aufgestellte Forderung nach einer weiteren Verbesserung des Zielfunktionswerts der Eröffnungslösung hat bei Anwendung der „least-lower-bound“-Strategie keinen Einfluss auf die Anzahl der zu analysierenden Knoten und auf die Rechenzeit.

### Einfluss der Verzweigungsvariablen

Die Auswahl der Verzweigungsvariablen im Verlauf des Branch-and-Bound-Verfahrens erfolgt gemäß eines Prioritätswerts, der mit Hilfe der in Abschnitt 6.1.2 vorgestellten Prioritätsfunktionen  $p_i^A(k)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) berechnet wird. Die Priorisierung der Verzweigungsvariablen entspricht der Priorisierung der freien Hubstandorte während des Add-Verfahrens bei Anwendung der First-Fit-Strategie.

Ziel ist es, diejenige Verzweigungsvariable als nächstes zu fixieren, die zu einem möglichst hohen Zielfunktionswert  $F_{D'}(x)$  der dualen Relaxation (6.26) - (6.31) führt. Dadurch kann eventuell der entsprechende Knoten des Suchbaums ausgelotet werden.

<sup>5</sup>Die in dieser Arbeit untersuchten Probleminstanzen des Hub-Location-Problems sind stets lösbar.

In Abbildung 7.10 ist der Einfluss der Prioritätsfunktionen auf die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  der analysierten Knoten des Suchbaums dargestellt.

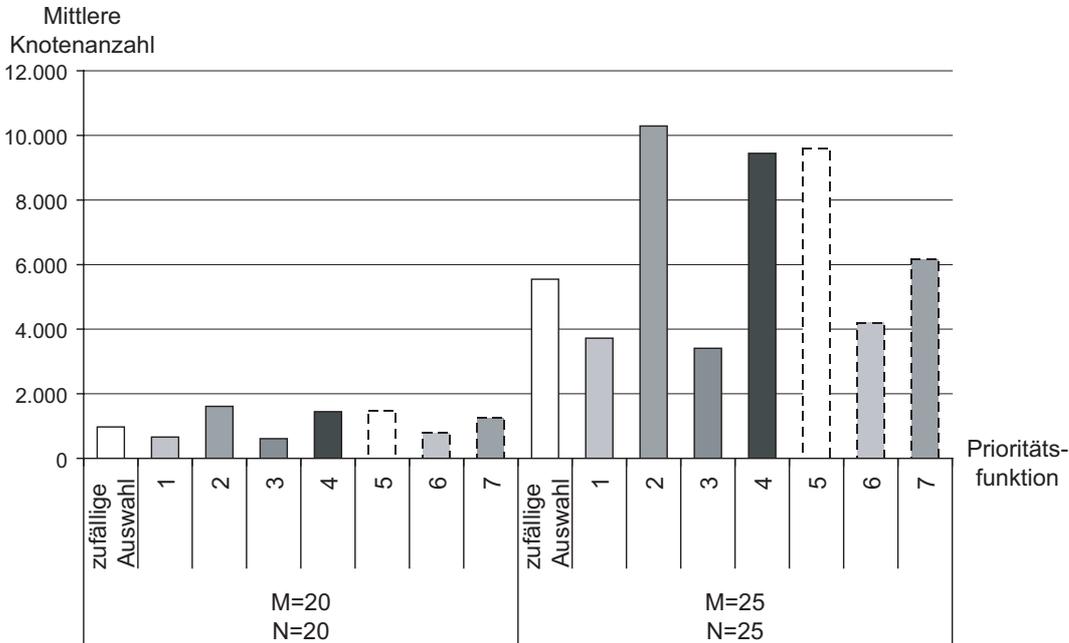


Abbildung 7.10: Mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten in Abhängigkeit der Prioritätsfunktionen zur Auswahl der Verzweigungsvariablen.

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Priorisierung der freien Variablen erheblichen Einfluss auf die Anzahl der analysierten Knoten des Branch-and-Bound-Verfahrens hat. Die größte mittlere Anzahl von analysierten Knoten verursacht die Prioritätsfunktion  $p_2^A(k)$ , bei der die freien Hubstandorte gemäß aufsteigenden Gesamtkosten priorisiert werden. Als ebenfalls ungeeignet erweisen sich die Prioritätsfunktionen  $p_4^A(k)$  und  $p_5^A(k)$ , die wiederum aus den elementaren Prioritätsfunktionen  $p_2^A(k)$  und  $p_4^A(k)$  besteht.

Bei Anwendung der zweiattributigen Prioritätsfunktionen  $p_6^A(k)$  bzw.  $p_7^A(k)$  kann die mittlere Anzahl der analysierten Knoten im Vergleich zu ihrer elementaren Prioritätsfunktion  $p_4^A(k)$  bereits deutlich vermindert werden. Die wirksamsten Prioritätsfunktionen sind jedoch nicht diese zweiattributigen Prioritätsfunktionen, sondern die einattributigen Prioritätsfunktionen  $p_1^A(k)$  und  $p_3^A(k)$ .

Die geringste Anzahl der im Mittel analysierten Knoten kann bei Anwendung der Prioritätsfunktion  $p_3^A(k)$  erzielt werden, die die potentiellen Hubstandorte gemäß absteigenden Sortierkapazitäten priorisiert. Die Anzahl der Knoten kann somit im Vergleich zu der unwirksamsten Prioritätsfunktion  $p_2^A(k)$  auf 33% reduziert werden.

Die Fixierung von potentiellen Hubstandorten entsprechend absteigenden Sortierkapazitäten ist sehr wirkungsvoll. Hubstandorte mit hoher Sortierkapazität können zu großen Transportkosteneinsparungen führen. Deshalb kann ihr Verbot zu einer stark steigenden unteren Schranke führen und der entsprechenden Knoten ggf. ausgelotet werden.

### Resumee der Verfahrensparameter

Die Anzahl der analysierten Knoten des Suchbaums hängt stark von den Parametern des Branch-and-Bound-Verfahrens ab. Es zeigt sich, dass die Anzahl analysierter Knoten bei Einsatz der Best-Fit-Strategie im Vergleich zur First-Fit-Strategie deutlich verringert werden kann.

Als wirksamste Suchstrategie mit der geringsten Knotenanzahl erweist sich die Strategie „least-lower-bound“ (LLB-Strategie). Bei Anwendung dieser Strategie hat die Güte der initialen oberen Schranke keinen Einfluss auf die Leistungsfähigkeit des Branch-and-Bound-Verfahrens.

Die beste Verzweigungsstrategie ist unabhängig von der Suchstrategie die Sortierung der binären Entscheidungsvariablen gemäß absteigenden Sortierkapazitäten (Prioritätsfunktion  $p_3^A(k)$ ).

Diese Verfahrensparameter werden zur weiteren Analyse des Branch-and-Bound-Verfahrens eingesetzt.

### Einfluss des Verbesserungsverfahrens

Ziel des Verbesserungsverfahrens ist es, die mit Hilfe des Eröffnungsverfahrens bestimmte untere Schranke des dualen relaxierten Problems (6.26) - (6.31) zu erhöhen (vgl. Abschnitt 6.3).

In Abbildung 7.11 sind die Veränderungen der mittleren Knotenanzahl sowie der mittleren Rechenzeit dargestellt, die aus der Anwendung des Verbesserungsverfahrens resultieren. Das Verbesserungsverfahren wird selektiv angewendet, wenn für die relative Abweichung der mit dem Eröffnungsverfahren berechneten unteren Schranke  $LB(s)$  von der oberen Schranke  $UB$  gilt:  $\delta_{Abw} \leq 0,025$ .

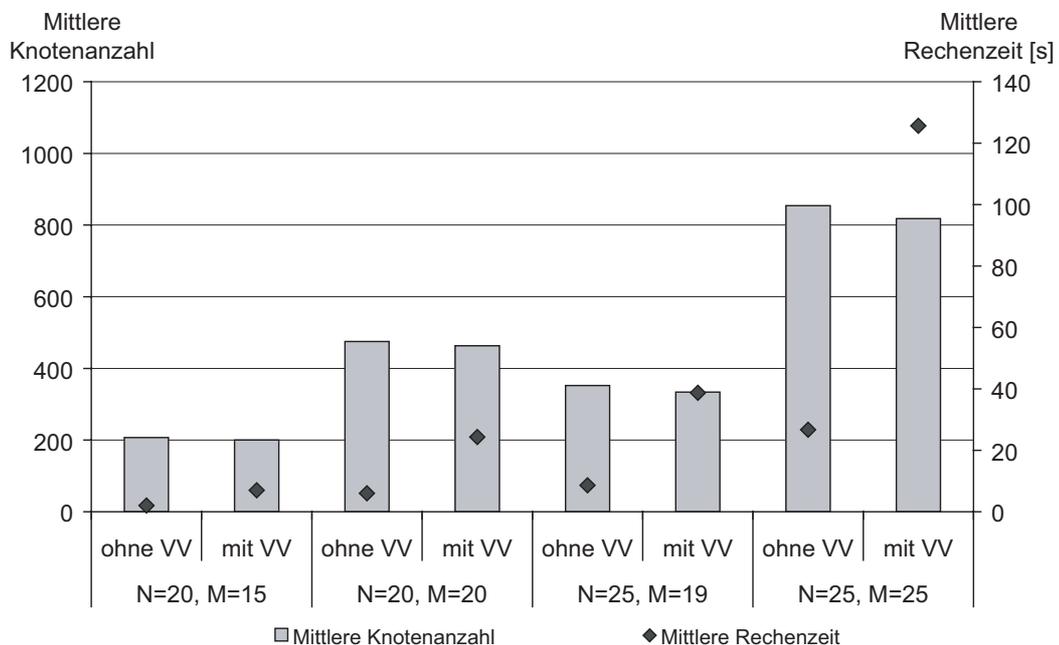


Abbildung 7.11: Mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten und mittlere Rechenzeit  $\bar{t}_{BB}$  ohne und mit Einsatz des Verbesserungsverfahrens (Abkürzung VV).

Es ist zu erkennen, dass durch die selektive Anwendung des Verbesserungsverfahrens die mittlere Knotenanzahl verringert werden kann. Im günstigsten Fall kann die mittlere Anzahl analysierter Knoten bei Anwendung des Verbesserungsverfahrens auf 94,7% der Knotenanzahl ohne Einsatz des Verbesserungsverfahrens reduziert werden. Dies wird bei den Probleminstanzen mit  $N = 25$  Depots und  $M = 19$  potentiellen Hubstandorten erzielt. Mit der Reduzierung der Knotenanzahl geht jedoch eine deutliche Erhöhung der mittleren Rechenzeit einher.

Der Rechenzeitanstieg ist durch die Zunahme der Anzahl der Neuberechnungen des Zielfunktionswerts während des Verbesserungsverfahrens zu begründen. Diese Berechnungen sind mit einer Zeitkomplexität von  $O(N^2 \cdot M^2)$  bestimmend für die gesamte Analysedauer in einem Knoten.

Um einen Anstieg der Anzahl der Neuberechnungen zu vermeiden, wird die Veränderung des Zielfunktionswerts aufgrund der Modifikation der dualen Entscheidungsvariablen  $w_k$  und  $z_m$  bereits im Verlauf des Verbesserungsverfahrens abgeschätzt (vgl. Abschnitt 6.3.2). Die Analysen zeigen jedoch, dass trotz dieser Abschätzung nur in 14,4% der Fälle eine Anhebung der unteren Schranke auf einen Wert größer gleich der oberen Schranke  $UB$  möglich ist und der Knoten somit ausgelotet werden kann. Die Verminderung des Zielfunktionswerts infolge der Modifikation der dualen Entscheidungsvariablen ist möglich, da die Abschätzung eine obere Schranke der Erhöhung des Zielfunktionswerts darstellt (vgl. dazu S. 84).

Der Einsatz des Verbesserungsverfahrens ist somit unter dem Aspekt der Reduzierung der Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens nicht vorteilhaft, da das Eröffnungsverfahren zur Bestimmung unterer Schranken bereits außerordentlich leistungsfähig ist.

### 7.3.3 Anwendung der logischen Tests

In Abbildung 7.12 ist die mittlere Anzahl analysierter Knoten des Suchbaums und die dafür im Mittel benötigte Rechenzeit in Abhängigkeit der Probleminstanzen und der Anwendung logischer Tests (vgl. Abschnitt 6.4) angegeben. Die logischen Tests werden in jedem Knoten des Suchbaums durchgeführt.

Der Abbildung ist zu entnehmen, dass bei Anwendung der logischen Tests zum Zulassen und Verbot von potentiellen Hubstandorten in jedem Knoten die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten deutlich gesenkt werden kann. Die absolut zu erzielende Reduzierung steigt mit wachsender Anzahl  $M$  potentieller Hubstandorte bei konstanter Depotanzahl  $N$ . Bei den untersuchten Probleminstanzen kann die Knotenanzahl bei Anwendung logischer Tests im günstigsten Fall (Probleminstanzen mit  $N = M$ ) auf 25% der Knotenanzahl ohne Anwendung logischer Tests reduziert werden.

Gleichzeitig ist jedoch festzustellen, dass aufgrund der Durchführung logischer Tests die mittleren Rechenzeiten in allen Fällen deutlich ansteigen. Somit ist die Durchführung der logischen Tests zum Zulassen und zum Verbot von potentiellen Hubstandorten in jedem Knoten nicht effizient.

Im Folgenden wird deshalb analysiert, welcher Anteil der jeweiligen logischen Tests erfolgreich durchgeführt werden kann (vgl. Tabelle 7.8).

Die mittlere Anzahl der durchgeführten logischen Tests nimmt bei jeweils konstanter Anzahl  $N$  der Depotstandorte mit steigender Anzahl  $M$  der potentiellen Hubstandorte zu. Dies ist durch die steigende mittlere Anzahl von Knoten des Suchbaums (vgl. Abbildung 7.12) zu erklären.

Es ist zu erkennen, dass der mittlere Anteil erfolgreich durchgeführter logischer Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten mit 24,4% deutlich höher ist als der entsprechende

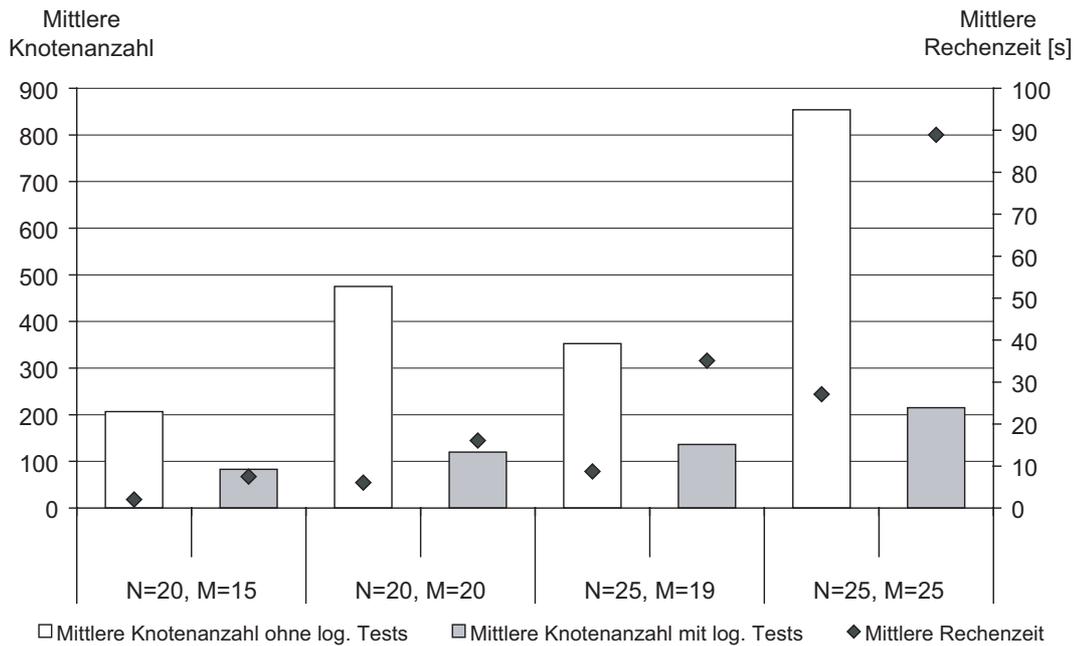


Abbildung 7.12: Einfluss der logischen Tests zum Zulassen und zum Verbot von potentiellen Hubstandorten auf die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten des Suchbaums und die mittlere Rechenzeit  $\bar{t}_{BB}$ .

Tabelle 7.8: Mittlere Anzahl  $\bar{T}_{BB}^{zu}$  und  $\bar{T}_{BB}^{verb}$  der durchgeführten logischen Test zum Zulassen bzw. zum Verbot von potentiellen Hubstandorten.  $\bar{T}_{BB}^{zu,erf}$  und  $\bar{T}_{BB}^{verb,erf}$  geben die entsprechende mittlere Anzahl von erfolgreich durchgeführten logischen Tests an.

	$N = 20$		$N = 25$		Mittelwert
	$M = 15$	$M = 20$	$M = 19$	$M = 25$	
$\bar{T}_{BB}^{zu}$	509,1	965,5	1003,6	2243,3	
$\bar{T}_{BB}^{zu,erf}$	4,7	5,5	3,3	5,25	
$\bar{T}_{BB}^{zu,erf} / \bar{T}_{BB}^{zu}$	0,9%	0,6%	0,3%	0,2%	0,5%
$\bar{T}_{BB}^{verb}$	461,5	869,75	903,2	1989	
$\bar{T}_{BB}^{verb,erf}$	106,4	239,75	186,9	519,5	
$\bar{T}_{BB}^{verb,erf} / \bar{T}_{BB}^{verb}$	23,0%	27,6%	20,7%	26,1%	24,4%

Anteil der logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten mit 0,5%. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Anzahl der ermittelten Hubstandorte im Mittel nur 1,7 beträgt. Aufgrund der geringen Wirksamkeit werden die logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten bei den folgenden Untersuchungen nicht weiter betrachtet.

### Ausschließliche Anwendung logischer Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten

Anhand von Abbildung 7.13 ist zu erkennen, dass bei der ausschließlichen Durchführung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte die Rechenzeit im Vergleich zur Durchführung der logischen Tests zum Zulassen und zum Verbot deutlich reduziert werden kann (vgl. Abbildung 7.12). Die Anzahl der analysierten Knoten des Suchbaums erhöht sich dabei nur sehr geringfügig.

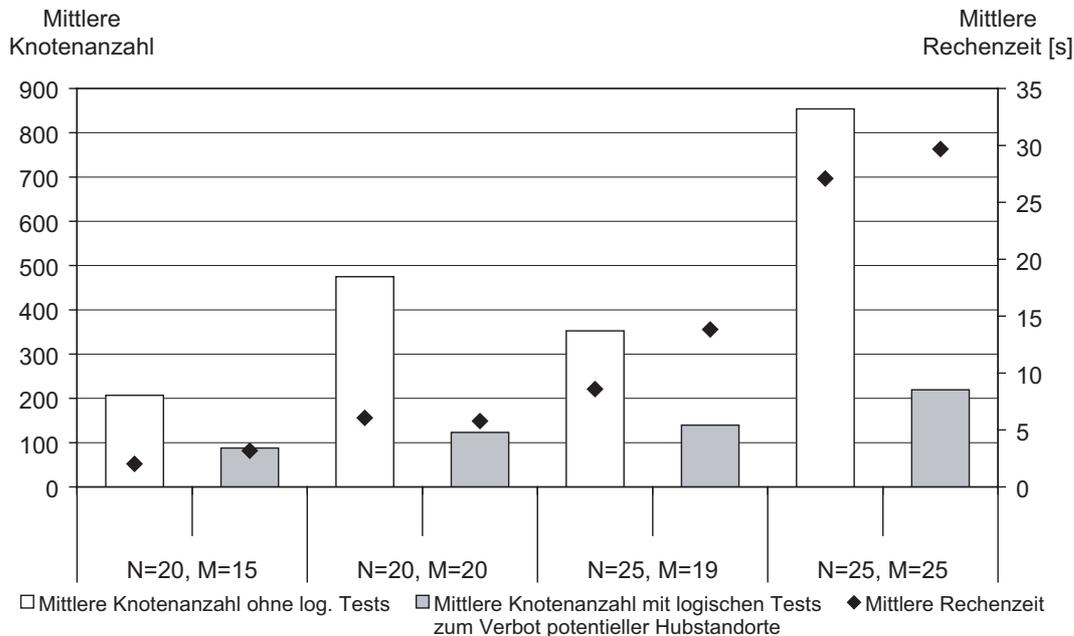


Abbildung 7.13: Einfluss der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten auf die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  der Knoten des Suchbaums und die mittlere Rechenzeit  $\bar{t}_{BB}$ .

Für die untersuchten Problem instanzen ist jedoch festzustellen, dass aufgrund der Durchführung der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten die mittlere Rechenzeit tendenziell noch nicht unterhalb der mittleren Rechenzeit ohne Durchführung logischer Tests liegt. Aus diesem Grund wird im folgenden Abschnitt untersucht, ob durch die Beschränkung der Suchbaumtiefe, bis zu der die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten durchgeführt werden, eine weitere Reduzierung der Rechenzeit erzielt werden kann.

### Einfluss der Suchbaumtiefe, bis zu der die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten durchgeführt werden

Die Tiefe  $T_B$  eines Knotens gibt die Anzahl der fixierten binären Entscheidungsvariablen an. Der Idee, die logischen Tests nicht in jedem Knoten bis zu den Blättern des Suchbaums durchzuführen, liegt die Tatsache zu Grunde, dass sich die Anzahl der Knoten in einem vollständigen binären Suchbaum bei Vergrößerung der Tiefe von  $T_B$  auf  $T_B + 1$  verdoppelt. Folglich kann dabei die Anzahl der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten drastisch ansteigen.

Die Tiefen des Suchbaums, bis zu denen die logischen Tests ausgeführt werden, werden in Abhängigkeit der Anzahl potentieller Hubstandorte  $M$  wie folgt festgelegt:

$$T_{B,i} = \left\lceil \frac{M}{4} \cdot i \right\rceil \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

In Tabelle 7.9 ist die Anzahl der durchgeführten und der erfolgreich durchgeführten logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten in Abhängigkeit der Suchbaumtiefe  $T_{B,i}$  angegeben.

Tabelle 7.9: Mittlere Anzahl  $\bar{T}_{BB}^{verb}$  und  $\bar{T}_{BB}^{verb,erf}$  durchgeführter bzw. erfolgreich durchgeführter logischer Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten in Abhängigkeit der Suchbaumtiefe  $T_{B,i}$ .

$N = 25, M = 25$				
	$T_B \leq T_{B,1}$	$T_B \leq T_{B,2}$	$T_B \leq T_{B,3}$	$T_B \leq T_{B,4}$
$\bar{T}_{BB}^{verb}$	260,0	906,5	1724,3	1994,3
$\bar{T}_{BB}^{verb,erf}$	63,8	245,5	451,5	519,5
$\bar{T}_{BB}^{verb,erf} / \bar{T}_{BB}^{verb}$	24,5%	27,1%	26,2%	26,0%

Es ist ersichtlich, dass mit wachsender Suchbaumtiefe  $T_{B,i}$ , die Anzahl der durchgeführten logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten deutlich zunimmt. Der Anteil der erfolgreich durchgeführten logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten hingegen ist nahezu unabhängig von der Suchbaumtiefe  $T_{B,i}$ . Es wird jedoch angenommen, dass die Rechenzeiterparnis, die aufgrund erfolgreich durchgeführter logischer Tests erzielt werden kann, mit zunehmender Suchbaumtiefe abnimmt und somit den zusätzlichen Rechenaufwand für die Durchführung der logischen Tests nicht überkompensieren kann.

In Abbildung 7.14 sind die mittleren Knotenanzahlen und die mittleren Rechenzeiten dargestellt, die aus einer Beschränkung der Suchbaumtiefe resultieren, bis zu der die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten durchgeführt werden.

Werden die logischen Tests in allen Knoten des Suchbaums durchgeführt ( $i=4$ ), so ist eine mittlere Knotenanzahl  $\bar{K}_{BB}$  von 219,3 und eine mittlere Rechenzeit  $\bar{t}_{BB}$  von 29,7s zu ermitteln. Die mittlere Anzahl  $\bar{T}_{BB}^{verb}$  der durchgeführten logischen Tests beträgt 1994,3 (vgl. Tabelle 7.9).

Im Vergleich zur Durchführung der logischen Tests in allen Knoten geht mit der Reduzierung der Suchbaumtiefe auf  $T_B \leq T_{B,1}$  eine Erhöhung der mittleren Knotenanzahl  $\bar{K}_{BB}$  auf 466,5

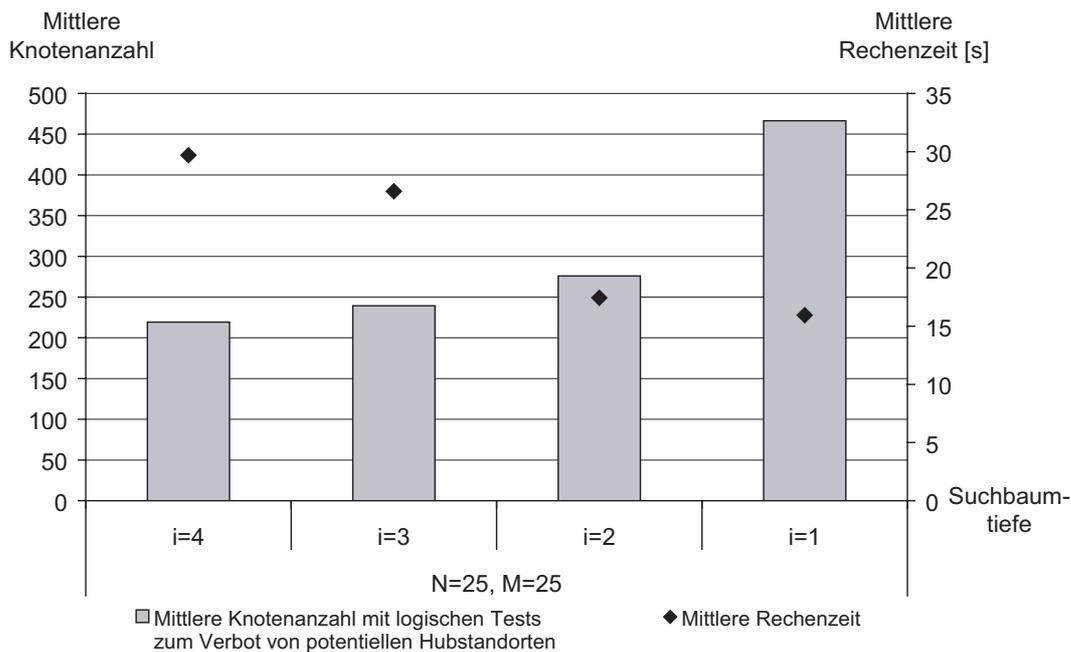


Abbildung 7.14: Mittlere Knotenanzahl  $\bar{K}_{BB}$  und mittlere Rechenzeit  $\bar{t}_{BB}$  in Abhängigkeit der Suchbaumtiefe  $T_{B,i}$ , bis zu der die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten durchgeführt werden.

einher. Gleichzeitig kann dadurch die mittlere Rechenzeit auf 53,7% ( $\bar{t}_{BB} = 15,9 s$ ) im Vergleich zur mittleren Rechenzeit bei Durchführung der logischen Tests in allen Knoten reduziert werden. Der vermehrte Aufwand zur Bestimmung unterer Schranken aufgrund der steigenden Knotenanzahl des Suchbaums kann durch eine Reduzierung der Anzahl der logischen Tests somit deutlich überkompensiert werden.

Verglichen mit der mittleren Rechenzeit ohne Anwendung der logischen Tests (vgl. Abbildung 7.13) bedeutet die Anwendung der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten in Knoten, in denen maximal ein Viertel der binären Entscheidungsvariablen fixiert sind, eine drastische Reduzierung der Rechenzeit auf 58,8%. Somit bestätigt sich die o. g. Vermutung, dass die zusätzlich benötigte Rechenzeit zur Durchführung der logischen Tests in tiefer liegenden Knoten des Suchbaums nicht durch eine Rechenzeiterparnis aufgrund der Reduzierung der Knotenanzahl kompensiert werden kann.

### Resumee

Die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten sind ein sehr leistungsstarkes Instrument, die Anzahl der zu analysierenden Knoten des Branch-and-Bound-Verfahrens deutlich zu reduzieren.

Die erzielbare Rechenzeitreduzierung aufgrund der Durchführung dieser logischen Tests ist abhängig von der Tiefe  $T_B$  des Suchbaums, bis zu der sie durchgeführt werden. Die niedrigsten mittleren Rechenzeiten bei den untersuchten Probleminstanzen können erzielt werden, wenn die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten in Knoten angewendet werden,

in denen die Anzahl fixierter binärer Entscheidungsvariablen kleiner gleich einem Viertel der Anzahl  $M$  der binären Entscheidungsvariablen ist.

## 7.4 Ergebnisse großer Probleminstanzen

Zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit des entwickelten Branch-and-Bound-Verfahrens werden ausgewählte Probleminstanzen untersucht. Für diese Instanzen wird die Anzahl der analysierten Knoten sowohl mit als auch ohne Anwendung der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten (vgl. Abschnitt 6.4) sowie die Rechenzeiten untersucht. Die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten werden ausschließlich in Knoten durchgeführt, in denen die Anzahl fixierter Variablen kleiner gleich einem Viertel der Anzahl  $M$  der binären Entscheidungsvariablen ist (vgl. Abschnitt 7.3.3).

In Tabelle 7.10 ist die mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten in Abhängigkeit der Problemgröße (vgl. Abschnitt 7.1.1) angegeben.

Tabelle 7.10: Mittlere Anzahl  $\bar{K}_{BB}$  analysierter Knoten mit und ohne Anwendung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte sowie deren Verhältnis in Abhängigkeit der Problemgröße.

$N$	$M$	Mittlere Knotenanzahl mit logischen Tests (1)	Mittlere Knotenanzahl ohne logische Tests (2)	Verhältnis (1) zu (2)
20	20	268,5	475,0	0,57
25	25	466,5	854,0	0,57
40	40	812,3	1522,5	0,53
50	50	1.634,2	3.098,5	0,53

Es ist zu erkennen, dass die mittlere Anzahl analysierter Knoten bei allen Probleminstanzen mit Anwendung logischer Tests deutlich geringer ist als ohne Anwendung logischer Tests. In den günstigsten Fällen kann die mittlere Knotenanzahl durch die Anwendung logischer Tests auf 53% der Knotenanzahl ohne Anwendung logischer Tests reduziert werden.

In Tabelle 7.11 ist die Anzahl  $K_{BB}$  analysierter Knoten für die Probleminstanzen mit  $N = 100$  Depotstandorten und  $M = 100$  potentiellen Hubstandorten in Abhängigkeit der eingesetzten Typen von Fixkosten und Sortierkapazitäten (vgl. Abschnitt 7.1.1) dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass die Wirksamkeit der logischen Tests erheblich von der untersuchten Probleminstanz abhängt. So kann beispielsweise für die Probleminstanz mit Fixkosten und Sortierkapazitäten vom Typ L die Anzahl der analysierten Knoten auf 22% reduziert werden. Im Vergleich dazu ist die Wirksamkeit bei der Probleminstanz mit Fixkosten vom Typ L und Sortierkapazitäten vom Typ T gering.

In Tabelle 7.12 sind die mittleren Rechenzeiten  $\bar{t}_{BB}$  mit und ohne Anwendung logischer Tests für Probleminstanzen bis  $N = 50$  Depotstandorte angegeben.

Ebenso wie die mittlere Knotenanzahl (vgl. Tabelle 7.10) reduziert sich die mittlere Rechenzeit bei Anwendung logischer Tests deutlich. Für eine Problemgröße mit  $N = 40$  Depotstandorten und  $M = 40$  potentiellen Hubstandorten beträgt die mittlere Rechenzeit beispielsweise mit Anwendung logischer Tests nur 55% der Rechenzeit ohne Anwendung logischer Tests.

Tabelle 7.11: Anzahl analysierter Knoten  $K_{BB}$  mit und ohne Anwendung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte für Probleminstanzen mit  $N = 100$  Depotstandorten und  $M = 100$  potentiellen Hubstandorten.

$N = 100, M = 100$				
Fixkosten	Sortierkapazitäten	Knotenanzahl mit logischen Tests (1)	Knotenanzahl ohne logische Tests (2)	Verhältnis (1) zu (2)
L	L	14.796	68.831	0,22
L	T	12.106	12.723	0,95
T	L	157	226	0,70
T	T	815	1.183	0,69
		6.968,5	20.740,75	0,64

Tabelle 7.12: Mittlere Rechenzeiten  $\bar{t}_{BB}$  in Sekunden mit und ohne Anwendung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte sowie deren Verhältnis in Abhängigkeit der Problemgröße.

$N$	$M$	Rechenzeit in [s] mit logischen Tests (1)	Rechenzeit in [s] ohne logische Tests (2)	Verhältnis (1) zu (2)
20	20	3,5	6,0	0,59
25	25	15,6	26,8	0,58
40	40	164,9	298,9	0,55
50	50	921,7	1.511,4	0,61

In Tabelle 7.13 sind die Rechenzeiten  $t_{BB}$  für die Probleminstanzen mit  $N = 100$  Depotstandorten und  $M = 100$  potentiellen Hubstandorten dargestellt.

Wie bei der Betrachtung der Wirksamkeit logischer Tests bezüglich der Knotenanzahl (vgl. Tabelle 7.11) zeigt sich bezüglich der Rechenzeit ebenfalls eine deutliche Abhängigkeit von der untersuchten Probleminstanz.

Bei der Probleminstanz mit Fixkosten vom Typ L und Sortierkapazitäten vom Typ T zeigt sich, dass trotz einer Reduzierung der Knotenanzahl bei Anwendung der logischen Tests keine Reduzierung der Rechenzeit erzielt werden kann, sondern diese stark ansteigt. Bei den anderen untersuchten Probleminstanzen wird bei Anwendung der logischen Tests die Rechenzeit deutlich verringert, im günstigsten Fall auf 20% der Rechenzeit ohne Anwendung logischer Tests.

Der Vergleich der Reduzierung einerseits der Knotenanzahl (vgl. Tabelle 7.11) und andererseits der Rechenzeit (vgl. Tabelle 7.13) bei Anwendung logischer Tests zeigt, dass bei drei der vier untersuchten Probleminstanzen die Rechenzeit stärker reduziert werden kann als die entsprechende Knotenanzahl. Dies ist darauf zurückzuführen, dass aufgrund erfolgreich durchgeführter logischer Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten die entsprechenden binären Entscheidungsvariablen den Wert null annehmen. Somit können die dualen Entscheidungsvariablen  $v_h$  effizienter bestimmt werden (vgl. Anhang E).

Im Vergleich zu den in Tabelle 7.12 angegebenen mittleren Rechenzeiten für die Problem-

Tabelle 7.13: Rechenzeit  $t_{BB}$  für Probleminstanzen mit  $N = 100$  Depotstandorten und  $M = 100$  potentiellen Hubstandorten mit und ohne Anwendung logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte.

$N = 100, M = 100$				
Fixkosten	Sortierkapazitäten	Rechenzeit in [s] mit log. Tests (1)	Rechenzeit in [s] ohne log. Tests (2)	Verhältnis (1) zu (2)
L	L	118.728	583.403	0,20
L	T	478.899	97.777	4,9
T	L	820	1.447	0,57
T	T	3.043	6.337	0,48
		150.373	172.241	1,5

stanzen mit  $N = 20$  und  $N = 25$  Depotstandorten betragen die entsprechenden mittleren Rechenzeiten zur Lösung dieser Probleminstanzen mit dem Optimierungsprogramm CPLEX bei Standardeinstellungen 1.537s bzw. 9.190s. Größere Probleminstanzen können mit diesem Optimierungsprogramm im Gegensatz zu dem entwickelten Branch-and-Bound-Verfahren aufgrund der Überschreitung der Speicherkapazität nicht gelöst werden.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass das in dieser Arbeit entwickelte Branch-and-Bound-Verfahren zur Lösung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems sehr gut geeignet ist. Die Leistungsfähigkeit des Verfahrens kann im Mittel wesentlich durch den Einsatz logischer Tests zum Verbot potentieller Hubstandorte erhöht werden. Die Wirksamkeit der Tests hängt jedoch deutlich von der untersuchten Probleminstanz ab.

## 7.5 Darstellung ausgewählter Transportnetze

In Abbildung 7.15 ist exemplarisch das berechnete Transportnetz für eine Probleminstanz mit  $N = 20$  Depotstandorten und  $M = 20$  potentiellen Hubstandorten dargestellt.

Dieses Hub-and-Spoke-Netz ist gekennzeichnet durch die zentrale Lage der beiden Hubstandorte in den Knoten 7 und 14. Diese Hubstandorte sind durch den Hub-Hauptlauf miteinander verbunden. Insgesamt sind zwölf Depots nur einem Hub zugeordnet (Single Allocation). So wickelt beispielsweise das Depot 3 sein Sendungsaufkommen zu und von den anderen Standorten ausschließlich über den Hub 7 ab.

In den Depotstandorten, die nur einem Hub zugeordnet sind, werden während der Hub-Vorlaufsortierung (vgl. Abschnitt 2.2) lediglich diejenigen Sendungen des Vorlaufs aussortiert, die in der Region des jeweiligen Depots während des Nachlaufs an die Empfänger zugestellt werden. Die verbleibenden Sendungen werden zum Hub 7 bzw. 14 transportiert.

Im Vergleich zu den oben genannten Depotstandorten sind die übrigen Depots, so beispielsweise Depot 10, mit beiden Hubs verbunden (Multiple Allocation). In diesen Depots werden die Sendungen auf drei oder mehr Sortierziele während der Hub-Vorlaufsortierung sortiert. Des Weiteren existieren Depotstandorte, die ihr Sendungsaufkommen zusätzlich auch über Direktverkehrsrelationen mit einem oder mehreren Depots austauschen (bspw. Depot 9).

Die Sendungen der Hub-Vorläufe werden in den Hubs gesammelt und bezüglich der Transportre-

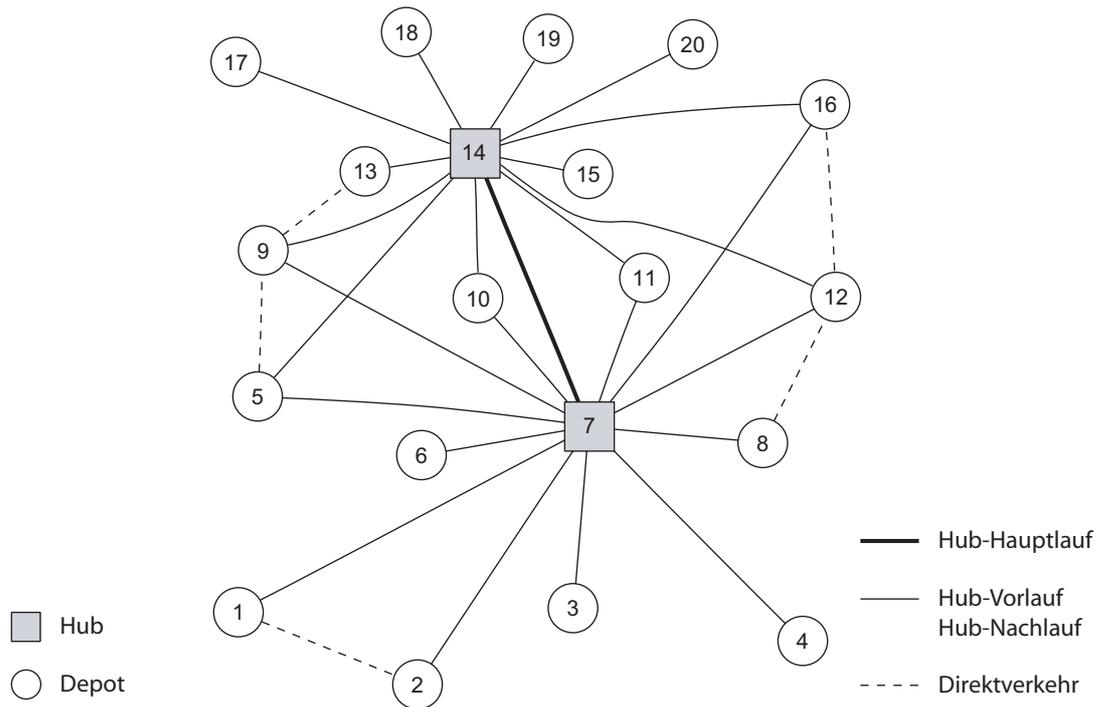


Abbildung 7.15: Darstellung eines Hub-and-Spoke-Netztes mit zwei Hubstandorten.

lation des Hub-Hauptlaufs oder der Zieldepots sortiert, sofern diese demselben Hub zugeordnet sind.

Die Anzahl der Sortierziele während der Hub-Nachlaufsartierung entspricht der Anzahl der Depots, die dem Hub zugeordnet sind. Die Anzahl der Sortierziele während der Nachlaufsartierung in den Depots wird durch die Anzahl der von den Depots ausgehenden Verteiltouren bestimmt.

### Einfluss von Veränderungen der spezifischen Transportkosten auf die Struktur des Hub-and-Spoke-Netztes

Im folgenden Abschnitt wird der Einfluss von Veränderungen der spezifischen Direktverkehrskosten und der spezifischen Kosten für die Hub-Vor-, Hub-Haupt- und Hub-Nachläufe auf die Struktur des Hub-and-Spoke-Netztes untersucht. Für jede Veränderung der spezifischen Transportkosten wird die Struktur des Hub-and-Spoke-Netztes erneut bestimmt.

In Abbildung 7.16 sind die Transportnetze dargestellt, die aufgrund einer Erhöhung bzw. Reduzierung der spezifischen Direktverkehrskosten um jeweils 30% im Vergleich zu den in Abschnitt 7.1.1 angegebenen Kosten berechnet werden.

Im Vergleich zu Abbildung 7.15 weist die linke Darstellung (a), in der die Auswirkungen einer Erhöhung der spezifischen Direktverkehrskosten dargestellt sind, eine geringere Anzahl von Direktverkehrsrelationen auf. So bestehen beispielsweise zwischen den Knoten 1 und 2 bzw. 8 und 12 keine Direktverkehrsrelationen mehr. Die Lage und Anzahl der Hubstandorte wird von der Erhöhung der spezifischen Direktverkehrskosten jedoch nicht beeinflusst.

Im Gegensatz dazu führt die Reduzierung der spezifischen Direktverkehrskosten (Darstellung (b)) zu einer grundlegenden Veränderung des Transportnetzes. Die Anzahl der Direktverkehrs-

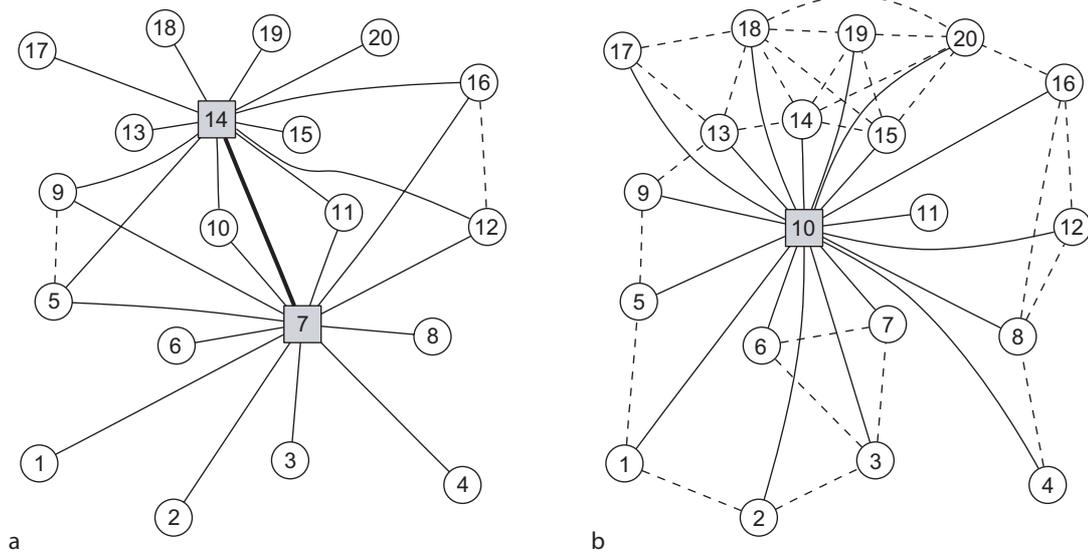


Abbildung 7.16: Einfluss der Erhöhung (a) und der Reduzierung (b) der spezifischen Direktverkehrskosten um 30% im Vergleich zu den Direktverkehrskosten aus Abbildung 7.15.

relationen erhöht sich aufgrund der niedrigeren spezifischen Direktverkehrskosten deutlich. Ein Großteil der nahe beieinander liegenden Depotstandorte ist nicht mehr über einen Hub, sondern über eine Direktverkehrsrelation miteinander verbunden. Aufgrund der Zunahme der Anzahl der Direktverkehrsrelationen steigt in einer Vielzahl der Depotstandorte die Anzahl der Sortierziele. Im Gegensatz zu Abbildung 7.15 existiert nur ein zentraler Hub. Deshalb handelt es sich bei diesem Transportnetz um ein Single-Hub-and-Spoke-Netz mit Direktverkehren.

Abbildung 7.17 zeigt den Einfluss einer Erhöhung bzw. Reduzierung der spezifischen Kosten der Hub-Vor- und Hub-Nachläufe um jeweils 30%.

Durch die Erhöhung der spezifischen Kosten der Hub-Vor- und Hub-Nachläufe (Darstellung (a)) verändert sich die Anzahl und Lage der Hubs im Vergleich zu Abbildung 7.15 nicht. Jedoch erhöht sich die Anzahl der Direktverkehrsrelationen auf insgesamt neun. Die Reduzierung der entsprechenden spezifischen Kosten (Darstellung (b)) führt ebenso wie die Reduzierung der spezifischen Direktverkehrskosten zu einem Single-Hub-and-Spoke-Netz mit Direktverkehren, wobei sich aus der Berechnung Knoten 10 als einziger Hub ergibt.

Die Erhöhung bzw. Reduzierung der spezifischen Kosten des Hub-Hauptlaufs hat für die untersuchte Problem Instanz keinen Einfluss auf die Lage und Anzahl der Hubstandorte. Lediglich die Anzahl der Direktverkehrsrelationen verändert sich hierdurch.

Abschließend kann festgehalten werden, dass bei der untersuchten Problem Instanz Veränderungen der spezifischen Kosten der Direktverkehrsrelationen sowie der Hub-Vor- und Hub-Nachläufe wesentlichen Einfluss auf die Struktur des Hub-and-Spoke-Netzes haben. Aus der Zunahme der Anzahl von Direktverkehrsrelationen (Dezentralisierung) folgt eine Veränderung der Sortierprozesse in den Depots insofern, als die Anzahl der Zielstellen der Sortieranlagen erhöht werden muss.

Mit der Reduzierung der spezifischen Direktverkehrskosten sowie der spezifischen Kosten der Hub-Vor- und Hub-Nachläufe geht eine Verringerung der Anzahl der Hubstandorte einher. Diese

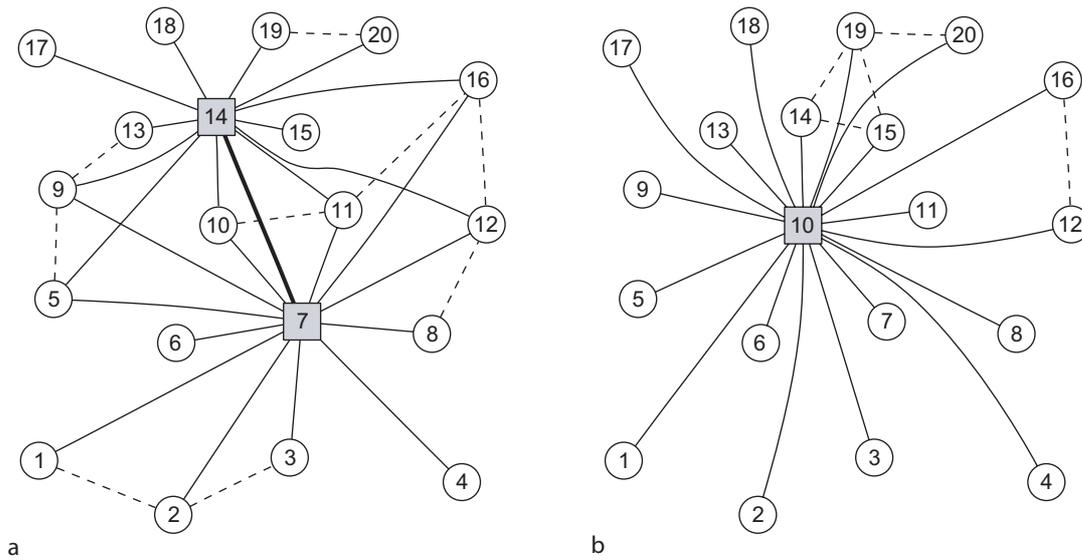


Abbildung 7.17: Einfluss der Erhöhung (a) und Reduzierung (b) der spezifischen Kosten der Hub-Vor- und Hub-Nachläufe um 30% auf die Struktur des Transportnetzes.

Zentralisierung des Hub-and-Spoke-Netzes führt dazu, dass Verspätungen von Transporten bzw. Störungen der Sortierprozesse in dem zentralen Hub stärkere negative Auswirkungen auf die Zuverlässigkeit des gesamten Transportnetzes haben als in einem dezentralen Transportnetz (vgl. Abschnitt 2.6).

# 8 Zusammenfassung und Ausblick

## 8.1 Zusammenfassung

Hub-and-Spoke-Netze sind Transportnetze, die u. a. bei Kurier-, Express- und Postdienstleistern anzutreffen sind. Charakteristische Merkmale solcher Netze sind Sortier- und Umschlag-einrichtungen, sog. Hubs, und strahlenförmig von den Depots auf die Hubs zulaufende Transportrelationen (Spokes). Die Bestimmung der Struktur von Hub-and-Spoke-Netzen kann durch Neuplanung sowie Reorganisation oder Zusammenführung bestehender Netze erforderlich sein.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Hub-Location-Problem mit beschränkten Sortierkapazitäten der potentiellen Hubstandorte und Direktverkehren zur Bestimmung der Anzahl und Lage der Hubs sowie der Sendungsmengen auf den einzelnen Transportrelationen untersucht. Bereits bei der Bestimmung der Struktur von Hub-and-Spoke-Netzen werden die Sortierkapazitäten der potentiellen Hubstandorte mit in Betracht gezogen, um spätere Kapazitätsüberlastungen sowie die mögliche Errichtung von Sekundärhubs zu vermeiden. Das Problem wird als gemischt binäres lineares Optimierungsproblem formuliert, zu dessen Lösung leistungsfähige Verfahren entwickelt werden.

Zur Bestimmung einer Eröffnungslösung wird sowohl das heuristische Add- als auch das Drop-Verfahren eingesetzt. Diese Verfahren nutzen die Möglichkeit, das Optimierungsproblem in ein Lokations- und ein Allokationsproblem aufzuteilen. Zur Auswahl eines potentiellen Hubstandorts (Lokation) bei Anwendung der First-Fit-Strategie werden sieben Prioritätsfunktionen entwickelt, mit Hilfe derer die Prioritätswerte der potentiellen Hubstandorte berechnet werden. Zur Lösung des Allokationsproblems, zunächst unter Vernachlässigung der Sortierkapazitäten der Hubstandorte, wird ein modifizierter Tripel-Algorithmus entwickelt. Damit werden kürzeste Wege zwischen je zwei Knoten über maximal zwei Hubs bestimmt, die bei Kapazitätsüberschreitungen modifiziert werden.

Die Untersuchung des heuristischen Verfahrens zur Bestimmung der Allokationslösung zeigt bei den untersuchten Probleminstanzen, dass die mittlere relative Abweichung des ermittelten Zielfunktionswerts von dem optimalen Wert in Abhängigkeit einer steigenden Anzahl von zugelassenen Hubstandorten abnimmt. Die maximale mittlere relative Abweichung tritt bei einem zugelassenen Hub auf und beträgt 4,1%.

Die geringsten mittleren relativen Abweichungen der Eröffnungslösung von der besten bekannten Lösung können mit dem Add-Verfahren bei Anwendung der Best-Fit-Strategie erzielt werden und betragen im Mittel 0,34%. Deutlich höhere Abweichungen in Höhe von 7,56% und 8,01% werden bei Anwendung der First-Fit-Strategie beim Add- bzw. Drop-Verfahren bei Verwendung der wirksamsten Prioritätsfunktion erreicht, die potentielle Hubstandorte mit geringen spezifischen Sortierkosten und einer zentralen Lage priorisiert.

Zur Bestimmung einer optimalen Lösung des untersuchten Hub-Location-Problems mit beschränkten Sortierkapazitäten wird ein Branch-and-Bound-Verfahren eingesetzt. Dafür ist es

erforderlich, in jedem Knoten des Suchbaums eine untere Schranke des entsprechenden dualen relaxierten Problems zu bestimmen. Zur Analyse der Knoten wird ein zweistufiges Näherungsverfahren, bestehend aus einem Eröffnungs- und einem Verbesserungsverfahren, entwickelt.

Mit Hilfe des Eröffnungsverfahrens können sehr gute Lösungen berechnet werden, die bei den untersuchten Probleminstanzen eine sehr geringe mittlere relative Abweichung von dem optimalen Zielfunktionswert in Höhe von maximal 3,6% aufweisen. Ein geringer Zielfunktionswert, der zu Beginn des Branch-and-Bound-Verfahrens die initiale obere Schranke darstellt, hat bei den Suchstrategien „last-in-first-out“ und „first-in-first-out“ erheblichen Einfluss auf die Anzahl analysierter Knoten. Die geringste Anzahl analysierter Knoten und die geringste mittlere Rechenzeit wird mit der „least-lower-bound“-Strategie erzielt. Die Auswahl der Verzweigungsvariablen gemäß abnehmenden Sortierkapazitäten der potentiellen Hubstandorte erweist sich als die wirksamste Verzweigungsstrategie. Durch die Anwendung des Verbesserungsverfahrens zur Bestimmung unterer Schranken kann zwar eine Reduzierung der Knotenanzahl des Suchbaums erzielt werden, jedoch erhöht sich insgesamt die Rechenzeit, so dass der Einsatz des Verbesserungsverfahrens nicht effizient ist.

Zur Verringerung der Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens werden logische Tests mit dem Ziel eingesetzt, die Anzahl der zu analysierenden Knoten des Suchbaums zu reduzieren. Dazu werden in jedem Knoten die freien Variablen hinsichtlich der Fragestellung untersucht, ob diese bereits frühzeitig fixiert werden können und somit u. U. eine wesentliche Anzahl der Knoten des Suchbaums von der weiteren Analyse ausgeschlossen werden kann. Zur Durchführung der logischen Tests ist es notwendig, sowohl untere als auch obere Schranken von Allokationslösungen möglichst effizient zu berechnen. Dazu wird der entwickelte modifizierte Tripel-Algorithmus möglicherweise mit der sich anschließenden Modifizierung der kürzesten Wege und das entwickelte Eröffnungsverfahren zur Bestimmung einer unteren Schranke der dualen Relaxation eingesetzt.

Die Anwendung der logischen Tests zum Verbot und Zulassen von potentiellen Hubstandorten in jedem Knoten des Suchbaums zeigt bei den untersuchten Probleminstanzen im günstigsten Fall eine Abnahme der mittleren Knotenanzahl auf 25% der Knotenanzahl ohne Anwendung logischer Tests. Hierbei ist jedoch eine deutliche Zunahme der Rechenzeit festzustellen.

Die Analysen ausgewählter Probleminstanzen zeigen, dass die logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten aufgrund der geringen Anzahl endgültig zugelassener Hubs unwirksam sind. Hingegen können die logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten die Rechenzeit stark verringern. Sie haben den größten verringernden Einfluss auf die Rechenzeit, wenn sie bis zu einem Viertel der maximalen Suchbaumtiefe ausgeführt werden. Die mittlere Rechenzeit kann hierbei im Vergleich zur Rechenzeit ohne logische Tests nahezu halbiert werden. Jedoch ist im Einzelfall festzustellen, dass die Wirksamkeit der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten erheblich von der untersuchten Probleminstanz abhängt.

Die entwickelten Verfahren zur Bestimmung einer optimalen Lösung des Hub-Location-Problems mit beschränkten Sortierkapazitäten sind auch zur Lösung von großen Probleminstanzen sehr gut geeignet. Dies ist auf die effiziente Lösung der unteren Schranken in den Knoten des Suchbaums sowie den Einsatz der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten zurückzuführen. In der vorliegenden Arbeit werden Problemgrößen mit bis zu 100 Depotstandorten gelöst. Mit den entwickelten Verfahren ist es somit möglich, die optimale Struktur von Hub-and-Spoke-Netzen der Kurier-, Express- und Postdienstleister für praxisrelevante Problemgrößen zu bestimmen.

## 8.2 Ausblick

Weiterentwicklungen von Modellierungsansätzen zur Planung von Hub-and-Spoke-Netzen berücksichtigen weitere logistische Fragestellungen oder ermöglichen eine genauere Abbildung der Realität.

Bei dem untersuchten Hub-Location-Problem mit beschränkter Sortierkapazität wird angenommen, dass an einem potentiellen Hubstandort ein Hub mit einer bestimmten Sortierkapazität errichtet werden kann. In der Regel stehen bei der Planung von Materialfluss- und Logistiksystemen mehrere Alternativen zur Auswahl. Im Rahmen der Planung von Hub-and-Spoke-Netzen bedeutet dies, dass an den potentiellen Hubstandorten alternativ unter mehreren Sortiersystemen unterschiedlicher Sortierkapazität auszuwählen ist. Werden diese Planungsalternativen bei der Bestimmung eines Hub-and-Spoke-Netzes berücksichtigt, so wird für einen potentiellen Hubstandort nicht nur entschieden, ob an diesem ein Hub errichtet wird, sondern auch welches Sortiersystem realisiert wird.

Die in Abschnitt 4.1.2 vorgestellte Modellierung der Transportkosten geht von rein variablen Kosten pro Sendungseinheit auf einer Transportrelation aus und stellt somit eine vereinfachte Modellierung der realen Transportkosten dar. Bei einer realitätsnäheren Modellierung unter Berücksichtigung der Transportmittelkapazitäten fallen pro eingesetztem Transportmittel auf einer Transportrelation Fixkosten an. Somit werden die Transportkosten in diesem Fall ausschließlich durch die Art und die Anzahl der Transportmittel bestimmt.

Sollen diese Art der Transportkosten sowie die alternativen Sortiersysteme an den potentiellen Hubstandorten in einem Optimierungsproblem berücksichtigt werden, so sind zunächst dementsprechende Planungsprobleme zu modellieren. Die Formulierung entsprechender Optimierungsprobleme macht die Einführung weiterer binärer Entscheidungsvariablen notwendig, wodurch der Lösungsaufwand gegenüber dem in dieser Arbeit formulierten Modell weiter ansteigt. Deshalb kann für praxisrelevante Probleme der Einsatz von heuristischen Verfahren erforderlich sein.

Ein anderer Aspekt der Erweiterung des vorgestellten Hub-Location-Problems betrifft die Berücksichtigung von stochastischen Schwankungen einerseits des Sendungsaufkommens und andererseits der Transportzeit. Die stochastischen Einflüsse des Verkehrssystems werden im Rahmen des Forschungsprojekts OVID<sup>1</sup> bereits am Beispiel eines Crossdocking-Terminals simulativ von Stickel et al. (2004) untersucht. Die Berücksichtigung stochastischer Aspekte bereits in der strategischen Planung von Hub-and-Spoke-Netzen eröffnet ein weiteres und außerordentlich interessantes Forschungsgebiet.

Zur Planung von Hub-and-Spoke-Netzen mit stochastischem Sendungsaufkommen sind in der Literatur noch keine Modelle bekannt. Wlček (1998a) stellt die Modellierung von Transportkosten bei stochastischen Transportmengen zur Planung von Güterverkehrsnetzen von Sammelgutspeeditionen vor. Die Berücksichtigung von stochastischen Transportmengen führt jedoch zu nicht linearen Optimierungsproblemen und macht somit den Einsatz von anderen Lösungsverfahren notwendig.

Sowohl bei der Planung von Hub-and-Spoke-Netzen als auch bei der Analyse bestehender Hub-and-Spoke-Netze wäre neben der Berücksichtigung der reinen Transport- und Sortierkosten auch die Untersuchung der Zuverlässigkeit dieser logistischen Netze wünschenswert. Dabei kann als Zuverlässigkeit die Wahrscheinlichkeit verstanden werden, mit der die Abfolge der logistischen Prozesse innerhalb einer vorgegebenen Zeit vollständig abgeschlossen wird (vgl.

---

<sup>1</sup>Das Forschungsprojekt „Stärkung der SelbstOrganisationsfähigkeit im Verkehr durch I+K-gestützte Dienste“ wird vom Bundesministerium für Bildung und Forschung gefördert.

Furmans (2003)). Stochastische Transportzeiten bleiben aber bei Hub-Location-Problemen bislang unberücksichtigt. Furmans (2003) entwickelt ein zeitdiskretes Modell zur Untersuchung von stochastischen Einflüssen auf Logistiknetzwerke. Bei der Planung von Hub-and-Spoke-Netzen kann dieses Modell der Bestimmung der Zuverlässigkeit dienen und somit in Verbindung mit den Transport- und Sortierkosten Auskunft über die Vorteilhaftigkeit bestimmter Planungsalternativen geben. Ebenso lassen sich mit Hilfe dieses Modells bestehende Hub-and-Spoke-Netze hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit analysieren.

Nicht nur die möglichen Erweiterungen der Modellierung stellen interessante Aspekte dar, sondern auch der Transfer der Hub-Location-Probleme auf Bereiche, die durch ähnliche Serviceanforderungen wie die KEP-Dienste gekennzeichnet sind.

Beispielsweise werden in Zuliefernetzwerken mit einer Vielzahl von Zulieferern und mehreren Produktionsstandorten Transportkostenvorteile durch Bündelung der Nachfragen mehrerer Perioden nach einem Produkt erzielt. Dies führt zu einem Aufbau von Lagerbeständen sowohl bei den Zulieferern als auch bei den Produzenten und reduziert somit die Transportkostenvorteile. Durch die Bestimmung eines Beschaffungsnetzes mit Hubstandorten kann eine Sendungsbündelung erzielt werden, indem die Nachfragen einer Planungsperiode bei Zulieferern, die in demselben Einzugsgebiet eines Hubs liegen, gebündelt werden. Dadurch können Lagerbestände bei Zulieferern und bei Produzenten verringert werden.

# Literatur

- Adler, N. und J. Berechmann (2001). Evaluating Optimal Multi-Hub Networks in a Deregulated Aviation Market with an Application to Western Europe. *Transportation Research Part A: General* 35(5), S. 1–18.
- Akinc, U. und B. M. Khumawala (1977). An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem. *Management Science* 23(6), S. 585–594.
- Albert, R., H. Jeong und A.-L. Barabási (1999). Diameter of the World-Wide-Web. *Nature* 401(9), S. 130–131.
- Arnold, D. (2002a). „Was braucht der KEP-Markt?“. *Logistik Heute* 24(10), S. 30–31.
- Arnold, D. (2002b). Sortiertechnik für den KEP-Markt. In: VDI-Gesellschaft Fördertechnik Materialfluß Logistik (Hrsg.), *Zuverlässige Partner-KEP Industrie VDI-Berichte 1677*, S. 71–82. Düsseldorf: VDI Verlag.
- Arnold, D. (2003). *Materialfluß in Logistiksystemen* (3. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Aykin, T. (1994). Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. *European Journal of Operational Research* 79(3), S. 501–523.
- Aykin, T. und G. F. Brown (1992, Aug). Interacting New Facilities and Location-Allocation Problems. *Transportation Science* 26(3), S. 212–222.
- Baum, H., A. Henn, K. Esser und J. Kurte (2004). *Produktivitäts- und Wachstumseffekte der Kurier-, Express- und Paketdienste für die arbeitsteilige Wirtschaft*. Bundesverband internationaler Express- und Kurierdienste e.V.
- Beumer, C. (2002). Sortier- und Verteilsysteme. In: D. Arnold, H. Iserman, A. Kuhn und H. Tempelmeier (Hrsg.), *Handbuch Logistik*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Blunck, S. (2001). Bedarf an wirtschaftlichen Sortern steigt. *Logistik für Unternehmen* 15(9), S. 72–74.
- Brockhaus (1998). *Brockhaus - Die Enzyklopädie* (20. Aufl.), Band 15. Leipzig, Mannheim: Brockhaus. Stichwort: Netz.
- Bryan, D. L. und M. E. O’Kelly (1999). Hub-and-Spoke Networks in Air Transportation: An Analytical Review. *Journal of Regional Science* 39(2), S. 275–295.
- Campbell, J. (1990). Locating transportation terminals to serve an expanding demand. *Transportation Research Part B: Methodological* 24(3), S. 173–192.
- Campbell, J. F. (1994a). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research* 72(2), S. 387–405.
- Campbell, J. F. (1994b, Feb). A survey of network hub location. *Studies in Locational Analysis* 6(-), S. 31–49.

- Campbell, J. F. (1996). Hub Location and the p-Hub Median Problem. *Operations Research* 44(6), S. 923–935.
- Campbell, J. F., A. T. Ernst und M. Krishnamoorthy (2002). Hub Location Problems. In: Z. Drezner und H. W. Hamacher (Hrsg.), *Facility Location: Applications and Theory* (1. Aufl.), Kapitel 12, S. 373–407. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Campbell, J. F., G. Stiehr, A. T. Ernst und M. Krishnamoorthy (2003, May). Solving hub arc location problems on a cluster of workstations. *Parallel Computing* 29(5), S. 555–574.
- Cardeneo, A. (2005). *Modellierung und Optimierung des B2C-Tourenplanungsproblems mit alternativen Lieferorten und -zeiten*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH). Zugleich Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Förder-technik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH), Heft 66.
- Christofides, N. und J. E. Beasley (1983). Extensions to a Lagrangean relaxation approach for the capacitated warehouse location problem. *European Journal of Operational Research* 12(1), S. 19–28.
- Crainic, T. G. (2000). Service network design in freight transportation. *European Journal of Operational Research* 122(2), S. 272–288.
- Crainic, T. G. und G. Laporte (1997). Planning models for freight transportation. *European Journal of Operational Research* 97(3), S. 409–438.
- Current, J., M. Daskin und D. Schilling (2002). Discrete Network Location Models. In: Z. Drezner und H. W. Hamacher (Hrsg.), *Facility Location: Applications and Theory* (1. Aufl.), Kapitel 3, S. 81–118. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Deutsche Post (1998). *Die Brieffabriken der Deutschen Post*. Bonn: Deutsche Post AG, Zentrale, Unternehmenskommunikation.
- DIN 30781 (1989). Transportkette. Deutsche Norm, Deutsches Institut für Normung e. V. (DIN), Berlin. Normenausschuß Transportkette (NTK).
- Domschke, W. (1996). *Logistik: Transport* (4. Aufl.). München, Wien: Oldenbourg.
- Domschke, W. und A. Drexl (1996). *Logistik: Standorte* (4. Aufl.). München, Wien: Oldenbourg.
- Domschke, W. und A. Drexl (2002). *Operations Research*, Band 5. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Ebery, J., M. Krishnamoorthy, A. Ernst und N. Boland (2000). The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulation and algorithms. *European Journal of Operational Research* 120(3), S. 614–631.
- Ellinger, T., G. Beuermann und R. Leisten (2003). *Operations Research* (6. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Ernst, A. T. und M. Krishnamoorthy (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location Science* 4(3), S. 139–154.
- Ernst, A. T. und M. Krishnamoorthy (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal of Operational Research* 104(1), S. 100–112.
- Ernst, A. T. und M. Krishnamoorthy (1999, Jan). Solution algorithm for the capacitated single allocation hub location problem. *Annals of Operations Research* 86(-), S. 141–159.

- Feige, D. (2004). Modellkosten. In: P. Klaus und W. Krieger (Hrsg.), *Gabler Lexikon Logistik* (3. Aufl.), S. 386–388. Wiesbaden: Gabler.
- Feldman, E., F. A. Lehrer und T. L. Ray (1966, May). Warehouse Location under Continuous Economies of Scale. *Management Science* 12(9), S. 670–684.
- Föller, J. (2003). *Analyse einer neuartigen Materialzuführung für Warensortier- und Verteilsysteme*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH). Zugleich Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH), Heft 60.
- Furmans, K. (2003). Zeitdiskrete stochastische Modelle von Logistiknetzwerken am Beispiel mehrstufiger Sammeltransporte. In: K. Inderfurth, M. Schenk, D. Ziem und G. Wäscher (Hrsg.), *Logistikplanung & -management: 9. Magdeburger Logistik-Tagung*, Magdeburg. Verlag LOGiSCH GmbH.
- Geoffrion, A. M. (1974). Lagrangian relaxation for integer programming. *Mathematical Programming Study* 2(-), S. 82–114.
- Grosche, G. (1996). *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart, Leipzig: Teubner.
- Guignard, M. (2002). Lagrangian Relaxation. In: P. M. Pardalos und M. G. C. Resende (Hrsg.), *Handbook of Applied Optimization*, Kapitel 9.5, S. 465–474. Oxford, New York: Oxford University Press.
- Hillier, F. S. und G. J. Lieberman (1997). *Operations Research* (5. Aufl.). München, Wien: Oldenbourg.
- Irnich, S. (2002). *Netzwerk-Design für zweistufige Transportsysteme und ein Branch-and-Price-Verfahren für das gemischte Direkt- und Hubflugproblem*. Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen.
- Kaupp, M. (2002). Logistiknetzwerke. In: D. Arnold, H. Isermann, A. Kuhn und H. Tempelmeier (Hrsg.), *Handbuch Logistik*, Kapitel D 3.6, S. D 3–34 – D 3–41. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Kliniewicz, J. G. (1998). Hub location in backbone/tributary network design: a review. *Location Science* 6(1), S. 307–335.
- Kuehn, A. A. und M. J. Hamburger (1963, Jul). A Heuristic Program for Locating Warehouses. *Management Science* 9(4), S. 643–666.
- Lee, E. K. (2002). Branch-and-Bound-Methods. In: P. M. Pardalos und M. G. C. Resende (Hrsg.), *Handbook of Applied Optimization*, Kapitel 3.2, S. 53–65. Oxford, New York: Oxford University Press.
- Linge, N. (2001). Sortiermaschine für kleine und mittlere Durchsätze. *Distribution* 32(6), S. 39–41.
- Linge, N. (2003). *Über die Entwicklung einer Sortiermaschine für kleine und mittlere Durchsätze*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH). Zugleich Wissenschaftliche Berichte des Institutes für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH), Heft 61.
- Marianov, V. und D. Serra (2002). Location Problems in the Public Sector. In: Z. Drezner und H. W. Hamacher (Hrsg.), *Facility Location: Applications and Theory* (1. Aufl.), Kapitel 4, S. 119–150. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Mayer, G. (2001, Feb). *Strategische Planung von Hub&Spoke-Systemen*. Deutscher Universitäts-Verlag.

- Nemhauser, G. L. und L. A. Wolsey (1988). *Integer and Combinatorial Optimization*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley and Sons Ltd.
- Neumann, K. (1996). *Produktions- und Operationsmanagement*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Neumann, K. und M. Morlock (1993). *Operations Research* (1. Aufl.). München, Wien: Carl Hanser.
- O’Kelly, M. E. (1986, May). The Location of Interacting Hub Facilities. *Transportation Science* 20(2), S. 92–106.
- O’Kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research* 32(3), S. 393–404.
- Pfeiffer, R. (1998). Das neue Postgesetz beschwört eine Neubetrachtung der bisherigen Definitionen im KEP-Markt herauf. *KEP-Zeit* 8(1). Mitgliederzeitschrift des Bundesverbands der Kurier-Express-Post-Dienste e.V.
- Plastria, F. (2002). Continuous Covering Location Problems. In: Z. Drezner und H. W. Hamacher (Hrsg.), *Facility Location: Applications and Theory* (1. Aufl.), Kapitel 2, S. 37–79. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- PostG (1997). Postgesetz. Ausfertigungsdatum: 22. Dezember 1997, Verkündungsfundstelle: BGBl I 1997, 3294, Sachgebiet: FNA 900-14, GESTA K006, Stand: Zuletzt geändert durch Art. 224 V v. 25.11.2003 I 2304.
- PUDLV (1999). Post-Universaldienstleistungsverordnung. Ausfertigungsdatum: 15. Dezember 1999, Verkündungsfundstelle: BGBl I 1999, 2418, Sachgebiet: FNA 900-14-2, Stand: Geändert durch Art. 2 G v. 30.1.2002 I 572.
- Rauner, M. (2004). Ziemlich verknotet. *Die Zeit* 59(10), S. 10.
- Seegers-Krückeberg, D. (1997). Paketdienst. In: J. Bloech und G. B. Ihde (Hrsg.), *Vahlens Großes Logistiklexikon*, S. 780. München: Vahlen.
- Städtler-Schumann, M. (1997). Sendungsverfolgung. In: J. Bloech und G. B. Ihde (Hrsg.), *Vahlens Großes Logistik Lexikon*. München: Vahlen.
- Stickel, M., M. Schleyer und K. Furmans (2004). Simulative Untersuchung der Auswirkungen von stochastischen Verkehrssystemen auf logistische Prozesse. In: K. Mertin und M. Rabe (Hrsg.), *Experiences from the Future, New Methods and Applications in Simulation for Production and Logistics*, S. 65–74. Stuttgart: Fraunhofer IRB Verlag.
- Toregas, C., R. Swain, C. ReVelle und L. Bergman (1971, Oct). The Location of Emergency Service Facilities. *Operations Research* 19(6), S. 1363–1373.
- Vahrenkamp, R. (1998a). *Logistikmanagement*. München, Wien: Oldenbourg.
- Vahrenkamp, R. (1998b). Web versus Hub Structure in the Parcel Services, A Comparison of their Respective Efficiency. Forschungsbericht, Universität Kassel, Fachgebiet Produktionswirtschaft und Logistik. Working Paper on Logistics Nr. 26A.
- van Roy, T. J. (1986). A Cross Decomposition Algorithm for Capacitated Facility Location. *Operations Research* 34(1), S. 145–163.
- VDI 3619 (1983). Sortiersysteme für Stückgut. VDI-Richtlinie, Verein Deutscher Ingenieure (VDI), Düsseldorf. VDI-Gesellschaft Fördertechnik Materialfluss Logistik.
- Wlöck, H. (1998a). *Gestaltung der Güterverkehrsnetze von Sammelgutspeditionen*. Dissertation, Universität Augsburg.

- Wlček, H. (1998b). Local Search Heuristics for the Design of Freight Carrier Networks. In: B. Fleischmann, J. A. E. E. van Nunen, G. Speranza und P. Stähly (Hrsg.), *Advances in Distribution Logistics*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 460, Kapitel 2, S. 265–285. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer.
- Wojtek, R. (2003). „Sesam, öffne Dich“. Deutsche Verkehrs-Zeitung (DVZ) vom 22.3.2003.



# Symbolverzeichnis

$\alpha_1$	Skalierungsfaktor des Hub-Vorlaufs
$\alpha_2$	Skalierungsfaktor des Hub-Hauptlaufs
$\alpha_3$	Skalierungsfaktor des Hub-Nachlaufs
$a$	Anzahl der zugelassenen Hubstandorte
$A_A$	Adjazenzmatrix des Graphen $\vec{G}_A$
$A_D^N$	Transportaufwand in einem Direktverkehrsnetz mit $N$ Depots
$A_D^\infty$	Transportaufwand in einem Direktverkehrsnetz mit unendlich vielen Depots
$A_{H\&S}$	Transportaufwand in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz
$a_{ij}$	Element der Adjazenzmatrix $A$
$\tilde{b}_{h=(i,j)}$	Belastung zwischen Knoten $i$ und $j$
$B$	Belastungsmatrix
$b_{ij}$	Element der Belastungsmatrix $B$
$\tilde{c}_{h=(i,j)l=(k,m)}$	Transportkosten beim Transport von $b_{ij}$ Sendungen von $i$ über die Hubs $k$ und $m$ nach $j$
$\tilde{c}_{h=(i,j)}$	Direktverkehrskosten des Transports von $b_{ij}$ Sendungen von $i$ nach $j$
$C_A$	Bewertungsmatrix des Graphen $\vec{G}_A$
$c_A$	Kantenbewertung des Graphen $\vec{G}_A$
$C_A^{[3]}$	Kürzeste-Wege-Matrix mit maximal drei Knoten
$C_A^{[4]}$	Kürzeste-Wege-Matrix mit maximal vier Knoten
$c_k$	Summe der Transportkosten des potentiellen Hubstandorts $k$ zu allen anderen Knoten des Netzwerks
$c_{A,ij}^{[3]}$	Länge des kürzesten Wegs zwischen den Knoten $i$ und $j$ mit maximal drei Knoten
$c_{A,ij}^{[4]}$	Länge des kürzesten Wegs zwischen den Knoten $i$ und $j$ mit maximal vier Knoten

$c_{ij}$	Einheitstransportkostensatz
$c_{ikmj}$	Variable Transport- und Sortierkosten einer Sendungseinheit entlang der Transportkette $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$
$\bar{\delta}_{BB}^{LB}$	Mittlere relative Abweichung der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte der dualen Relaxation von den entsprechenden optimalen Zielfunktionswerten
$\bar{\delta}_H^A$	Mittlere relative Abweichung der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte des Allokationsproblems von dem optimalen Zielfunktionswert
$\bar{\delta}_H^E$	Mittlere relative Abweichung der heuristisch ermittelten Zielfunktionswerte der Allokationsprobleme zzgl. der Fixkosten der zugelassenen Hubstandorte von den geringsten bekannten Zielfunktionswerten der entsprechenden kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Probleme
$\delta_{Abw}$	Relative Abweichung der unteren Schranke $LB(s)$ von der oberen Schranke $UB$
$\delta_{BB}^{LB}$	Relative Abweichung des heuristisch ermittelten Zielfunktionswerts der dualen Relaxation von dem optimalen Zielfunktionswert
$\delta_H^A$	Relative Abweichung des Zielfunktionswerts einer zulässigen Lösung des Allokationsproblems von dem optimalen Zielfunktionswert
$\delta_H^E$	Relative Abweichung des heuristisch ermittelten Zielfunktionswerts des Allokationsproblems zzgl. der Fixkosten der zugelassenen Hubstandorte von dem optimalen Zielfunktionswert des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems
$\Delta_{k,s}$	Minimale Erhöhung der Transport- und variablen Sortierkosten bei Verbot des potentiellen Hubstandorts $k \in H_{-1}$ in Knoten $s$
$\delta_{k,s}$	Maximale Ersparnis der Transport- und variablen Sortierkosten beim Zulassen des potentiellen Hubstandorts $k$ in Knoten $s$
$\Delta_l$	Veränderung des Schlupfs bei Erhöhung von $w_{k^*}$ und $z_{m^*}$ um $\Delta_{w_{k^*}}$ bzw. $\Delta_{z_{m^*}}$
$\Delta_{w_{k^*}}$	Erhöhungsbetrag der dualen Entscheidungsvariablen $w_{k^*}$
$\Delta_{z_{m^*}}$	Erhöhungsbetrag der dualen Entscheidungsvariablen $z_{m^*}$
$\bar{\delta}_{k,s}$	Obere Schranke von $\delta_{k,s}$
$\tilde{\delta}_H^E$	Relative Abweichung des heuristisch ermittelten Zielfunktionswerts des Allokationsproblems zzgl. der Fixkosten der zugelassenen Hubstandorte von dem geringsten bekannten Zielfunktionswert des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems
$\underline{\Delta}_{k,s}$	Untere Schranke von $\Delta_{k,s}$
$D$	Duales Optimierungsproblem

---

$d$	Parameter zur Bestimmung des Degressionsfaktors, der zur Berechnung der variablen Sortierkosten eines potentiellen Hubstandorts benötigt wird
$D'$	Duales relaxiertes Optimierungsproblem
$d_D^i$	Anteil der verspäteten Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz mit $i$ verspäteten Relationen
$d_{H\&S,HVL}^i$	Anteil der verspäteten Transportrelationen in einem Hub-and-Spoke-Netz mit $i$ verspäteten Relationen im Hub-Vorlauf
$\epsilon$	Konstante
$E$	Kantenmenge des Graphen $\vec{G}$
$E_1$	Einheitssendungsmenge in einem Transportnetz
$E_A$	Kantenmenge des Graphen $\vec{G}_A$
$E_V$	Menge möglicher Kombinationen von Eröffnungsverfahren und angewandten Strategien
$E_{geg.}$	Gegebene Entfernung
$E_{HN}$	Kantenmenge des Hub-Netzes
$E_{HZN}$	Kantenmenge des Hub-Zugangsnetzes
$e_{ij}$	Element der Entfernungsmatrix $E$
$F((x,y)^T)$	Zielfunktionswert
$F(x)$	Zielfunktion
$F^*(s)$	Optimaler Zielfunktionswert des zu dem Knoten $s$ korrespondierenden Optimierungsproblems
$f_k$	Fixkosten für die Errichtung des Hubs $k$
$F_P(x^*)$	Optimaler Zielfunktionswert des Optimierungsproblems $P$
$F_{D'}(x)$	Zielfunktionswert jeder zulässigen Lösung des Problems $D'$
$F_{D'}(x^*)$	Optimaler Zielfunktionswert des dualen relaxierten Problems $D'$
$F_D(x^*)$	Optimaler Zielfunktionswert des dualen Problems $D$
$F_{P'}(x^*)$	Optimaler Zielfunktionswert des relaxierten Problems $P'$
$\vec{G}$	Vollständiger Graph
$\vec{G}_A$	Kantenbewerteter Digraph
$H$	Menge der 2-Tupel $(i,j)$ mit $i,j \in S_D$
$h$	Element der Menge $H$

$H_0$	Menge der verbotenen Hubstandorte
$H_0^{vorl}$	Menge der vorläufig verbotenen Hubstandorte
$H_1$	Menge der zugelassenen Hubstandorte
$H_1^{vor}$	Menge der vorläufig zugelassenen Hubstandorte
$i$	Depotstandort
$I_N$	Menge der untersuchten Probleminstanzen. Ein Element dieser Menge gibt die Anzahl der Depots an.
$j$	Depotstandort
$\bar{K}_{BB}$	Mittlere Anzahl analysierter Knoten des Suchbaums
$\hat{k}$	Überlasteter Hub der Hub-Hauptlauf-Sortierung
$\kappa_k$	Sortierkapazität in Hub $k$
$\kappa_k^{[i]}$	Erforderliche Sortierkapazitäten während der Hub-Hauptlauf-Sortierung ( $i = 1$ ) und der Hub-Nachlauf-Sortierung ( $i = 2$ ) in Knoten $k$
$\kappa_t^{Tr}$	Kapazität des Transportmittels $t$
$\kappa_{k,i}$	Sortier- und Verteilkapazität der Sortier- und Verteilanlage $i$ am Standort $k$
$\kappa_{max}$	Maximale Sortierkapazität des AP-Datensatzes
$\kappa_{min}$	Minimale Sortierkapazität des AP-Datensatzes
$\bar{K}$	Obere Schranke der Gesamtkosten
$\bar{K}_{A,(\cdot)}(x)$	Obere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts $K_{A,(\cdot)}(x^*)$
$\underline{K}_{A,(\cdot)}(x)$	Untere Schranke des optimalen Zielfunktionswerts $K_{A,(\cdot)}(x^*)$
$\underline{K}_{ij}^{Tr}(b)$	Approximation der Transportkosten $K_{ij}^{Tr}(b)$
$K$	Gesamtkosten
$k$	Potentieller Hubstandort
$k'$	Hub mit ausreichender Sortierkapazität
$k^*$	Hubstandort
$K_k$	Gesamtkosten des Hubs $k$ pro Planungsperiode
$k_t^{Ent}$	Entfernungsabhängiger Transportkostensatz des Transportmittels $t$
$k_t^{Zeit}$	Einsatzzeitabhängiger Kostensatz des Transportmittels $t$
$K_{A,H_1}(x)$	Zielfunktionswert des Allokationsproblems in Abhängigkeit der Menge $H_1$

---

$K_{A,H_1}(x^*)$	Optimaler Zielfunktionswert des Allokationsproblems in Abhängigkeit der Menge $H_1$
$K_{BB}$	Anzahl der analysierten Knoten innerhalb des Suchbaums
$K_{ij,t}^{Tr}$	Kosten bei Einsatz eines Transportmittels vom Typ $t$ auf der Transportrelation von $i$ nach $j$
$K_{ij}^{Tr}(b)$	Transportkosten auf der Transportrelation von Knoten $i$ zu Knoten $j$ in Abhängigkeit der Sendungsmenge $b$
$K_{min}$	Minimale Gesamtkosten
$\bar{L}_D^\infty$	Mittlere Länge einer Transportrelation in einem Direktverkehrsnetz mit unendlich vielen Depots
$\bar{L}_D^N$	Mittlere Länge einer Transportrelation in einem Direktverkehrsnetz mit $N$ Depots
$L$	Menge der 2-Tupel $(k,m)$ mit $k,m \in S_H$
$l$	Element der Menge $L$
$l^*$	Minimumbestimmendes Hub-Paar
$L_a$	Kandidatenliste
$L_B$	Liste der Sendungsmengen $b_{ij}$
$L_D$	Länge der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz ausgehend von einem Depot
$L_D^N$	Länge der Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz mit $N$ Depots
$L_{H\&S,K}$	Länge einer Transportkette in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz
$L_{H\&S}$	Länge einer Transportrelation in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz
$L_{H\&S}^N$	Länge einer Transportrelation in einem Single-Hub-and-Spoke-Netz mit $N$ Depots
$LB$	Untere Schranke (engl. lower bound)
$LB(s)$	Untere Schranke von $F^*(s)$
$M$	Anzahl der potentiellen Hubstandorte
$m$	Potentieller Hubstandort
$M(s)$	Zulässiger Bereich im Knoten $s$ des Suchbaums
$M_P$	Zulässiger Bereich des Optimierungsproblems $P$
$M_{D'}$	Zulässiger Bereich des dualen relaxierten Optimierungsproblems $D'$
$M_{P'}$	Zulässiger Bereich des relaxierten Optimierungsproblems $P'$

$M_{zul}$	Zulässiger Bereich
$N$	Anzahl der Depots
$P$	Optimierungsproblem
$p$	Anzahl der Hubstandorte
$P'$	Relaxiertes Optimierungsproblem
$p_i^A$	Prioritätsfunktion für das Add-Verfahren
$p_i^D$	Prioritätsfunktion für das Drop-Verfahren
$R$	Routenmatrix
$R_D$	Anzahl Transportrelationen in einem Direktverkehrsnetz
$R_{H\&S}$	Anzahl Transportrelationen in einem Hub-and-Spoke-Netz
$\bar{\sigma}_{Fix,Kap}$	Mittlerer Korrelationskoeffizient zwischen den Fixkosten und den Sortierkapazitäten
$\bar{s}_h$	Maximale Erhöhung der Dualvariablen $v_h$
$\bar{S}_{\Delta ZF}$	Obere Schranke der maximalen Erhöhung des Zielfunktionswerts
$\sigma_{\kappa_{L,B}}$	Korrelationskoeffizient zwischen den Sortierkapazitäten vom Typ L der potentiellen Hubstandorte und dem Sendungsaufkommen dieser Standorte
$\sigma_{\kappa_{T,B}}$	Korrelationskoeffizient zwischen den Sortierkapazitäten vom Typ T der potentiellen Hubstandorte und dem Sendungsaufkommen dieser Standorte
$\sigma_{Fix_{L,B}}$	Korrelationskoeffizient zwischen den Fixkosten vom Typ L der potentiellen Hubstandorte und dem Sendungsaufkommen dieser Standorte
$\sigma_{Fix_{T,B}}$	Korrelationskoeffizient zwischen den Fixkosten vom Typ T der potentiellen Hubstandorte und dem Sendungsaufkommen dieser Standorte
$S$	Menge der Zustandsvektoren des Suchbaums
$s$	Zustandsvektor
$S_D$	Menge der bereits bestehenden Depotstandorte
$S_H$	Menge der potentiellen Hubstandorte
$S_h$	Menge der potentiellen Hubstandorte, an denen kein Depot vorhanden ist
$s_i$	Zustandsvariable der Binärvariablen $y_i$
$s_k^{var}$	Variable Sortierkosten des Hubs $k$
$s_{man}^{var}$	Variable Sortierkosten in einem Hub, in dem ausschließlich manuell sortiert wird
$\bar{t}_H$	Mittlere Rechenzeit in Sekunden zur Bestimmung von Eröffnungslösungen

---

$\bar{t}_{BB}$	Mittlere Rechenzeit in Sekunden zur Bestimmung der optimalen Lösung mit dem Branch-and-Bound-Verfahren
$\bar{T}_{BB}^{verb,erf}$	Mittlere Anzahl der erfolgreich durchgeführten logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten
$\bar{T}_{BB}^{verb}$	Mittlere Anzahl der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten
$\bar{T}_{BB}^{zu,erf}$	Mittlere Anzahl der erfolgreich durchgeführten logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten
$\bar{T}_{BB}^{zu}$	Mittlere Anzahl der logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten
$t^{Lade}$	Be- und Entladezeit
$t_H$	Rechenzeit zur Bestimmung einer Eröffnungslösung mit einem heuristischen Verfahren
$t_{BB}$	Rechenzeit des Branch-and-Bound-Verfahrens
$T_{BB}^{verb,erf}$	Anzahl der erfolgreich durchgeführten logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten
$T_{BB}^{verb}$	Anzahl der logischen Tests zum Verbot von potentiellen Hubstandorten
$T_{BB}^{zu,erf}$	Anzahl der erfolgreich durchgeführten logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten
$T_{BB}^{zu}$	Anzahl der logischen Tests zum Zulassen von potentiellen Hubstandorten
$T_B$	Tiefe eines Knotens innerhalb des Suchbaums, die die Anzahl der fixierten binären Entscheidungsvariablen angibt
$T_D$	Anzahl benötigter Transportmittel in einem Direktverkehrsnetz ohne Pendelverkehre
$T_{H\&S}$	Anzahl benötigter Transportmittel in einem Hub-and-Spoke-Netz
$t_{ij,t}^{Fahr}$	Fahrzeit auf der Transportrelation von $i$ nach $j$ mit dem Transportmittel $t$
$UB$	Obere Schranke (engl. upper bound)
$\bar{v}_{ij,t}$	Durchschnittliche Geschwindigkeit auf der Transportrelation von $i$ nach $j$ mit dem Transportmittel $t$
$V$	Knotenmenge des Graphen $\vec{G}$
$V^{[3]}$	Vorgängermatrix
$V^{[4]}$	Vorgängermatrix
$V_A$	Knotenmenge des Graphen $\vec{G}_A$

$v_h$	Duale Entscheidungsvariable
$V_k^1$	Menge der Hub-Paare $l \in L$ , deren erster Hub dem potentiellen Hub $k$ entspricht
$V_m^2$	Menge der Hub-Paare $l \in L$ , deren zweiter Hub dem potentiellen Hub $m$ entspricht
$V_{HN}$	Knotenmenge des Hub-Netz
$V_{HZN}$	Knotenmenge Hub-Zugangsnetz
$v_{ij}^{[3]}$	Unmittelbarer Vorgänger von $j$ auf dem kürzesten Weg von $i$ nach $j$ über maximal einen weiteren Hub
$v_{ij}^{[4]}$	Unmittelbarer Vorgänger von $j$ auf dem kürzesten Weg von $i$ nach $j$ über maximal zwei weitere Hubs
$w_k$	Duale Entscheidungsvariable
$\tilde{x}_{hl}$	Entscheidungsvariable
$\tilde{x}_h$	Entscheidungsvariable
$x$	Zulässige Lösung des Optimierungsproblems
$x_i^N$	Kennwert zum Vergleich der eingesetzten Eröffnungsverfahren
$x_{ij}$	Entscheidungsvariable: Anteil des Sendungsaufkommens $b_{ij}$ , der entlang der Direktverkehrsrelation von $i$ nach $j$ transportiert wird.
$x_{ikmj}$	Entscheidungsvariable: Anteil des Sendungsaufkommens $t_{ij}$ , der entlang der Transportkette $i \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow j$ transportiert wird.
$y$	Lösungsvektor der binären Entscheidungsvariablen
$y_k$	Binäre Entscheidungsvariable
$z_m$	Duale Entscheidungsvariable

# A Länge von Transportwegen in einem Direktverkehrsnetz

## Gesamtlänge der Transportwege ausgehend von einem Depot

$$\begin{aligned}L_D &= \sum_{k=1}^N \sqrt{2 - 2\cos(2\pi \frac{k}{N})} \\&= \sum_{k=1}^N \sqrt{2(1 - \cos(2\pi \frac{k}{N}))} \\&= \sum_{k=1}^N \sqrt{4 \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi \frac{k}{N}))} \\&= \sum_{k=1}^N \sqrt{4 \sin^2(\pi \frac{k}{N})} \\&= 2 \sum_{k=1}^N \sqrt{\sin^2(\pi \frac{k}{N})} \\&= 2 \sum_{k=1}^N \sin(\pi \frac{k}{N})\end{aligned}$$

Es wurde die folgende Beziehung verwendet (vgl. Grosche (1996), S. 60):

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

## Mittlere Länge eines Transportwegs

$$\begin{aligned}
 \bar{L}_D^\infty &= \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{L}_D^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N-1} \sum_{k=1}^N \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N-1} \frac{1}{\frac{\pi}{N}} \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{\pi(N-1)} \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right) \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2N}{\pi(N-1)} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{\pi}{N} \sin\left(\pi \frac{k}{N}\right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} [-\cos(x)]_0^\pi \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \left( \left( -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) \right) + \left( -\cos(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} (\cos(0) - \cos(\pi)) \\
 &= \frac{4}{\pi} \approx 1,27
 \end{aligned}$$

# B Drop-Verfahren

## Drop-Verfahren (First-Fit-Strategie)

---

**Algorithmus 9** Drop-Verfahren (First-Fit-Strategie)

---

```
1:  $\bar{K} \leftarrow \sum_{k \in H_1^{vorl}} f_k + K_{A, H_1^{vorl}}(x)$ 
2: Verbesserung  $\leftarrow$  true
3: while (Verbesserung = true  $\wedge$   $H_1^{vorl} \neq \emptyset$ ) do
4:   wähle  $k \in H_1^{vorl}$ 
5:    $H_1^{vorl} \leftarrow H_1^{vorl} \setminus \{k\}$ 
6:    $K \leftarrow \sum_{k \in H_1^{vorl}} f_k + K_{A, H_1^{vorl}}(x)$ 
7:   if  $K < \bar{K}$  then
8:      $\bar{K} \leftarrow K$ 
9:      $H_0 \leftarrow H_0 \cup \{k\}$ 
10:  else
11:    Verbesserung  $\leftarrow$  false
12:     $H_1^{vorl} \leftarrow H_1^{vorl} \cup \{k\}$ 
13:  $H_1 \leftarrow H_1^{vorl}$ 
```

---

## Drop-Verfahren (Best-Fit-Strategie)

---

### Algorithmus 10 Drop-Verfahren (Best-Fit-Strategie)

---

```

1:  $\bar{K} \leftarrow \sum_{k \in H_1^{vorl}} f_k + K_{A, H_1^{vorl}}(x)$ 
2: Verbesserung  $\leftarrow$  true
3: while (Verbesserung = true  $\wedge$   $H_1^{vorl} \neq \emptyset$ ) do
4:    $K_{min} \leftarrow \infty$ 
5:   for all  $k \in H_1^{vorl}$  do
6:      $H_1^{vorl} \leftarrow H_1^{vorl} \setminus \{k\}$ 
7:      $K \leftarrow \sum_{k \in H_1^{vorl}} f_k + K_{A, H_1^{vorl}}(x)$ 
8:      $H_1^{vorl} \leftarrow H_1^{vorl} \cup \{k\}$ 
9:     if ( $K < K_{min}$ ) then
10:       $K_{min} \leftarrow K$ 
11:       $k^* \leftarrow k$ 
12:   if  $K_{min} < \bar{K}$  then
13:      $\bar{K} \leftarrow K_{min}$ 
14:      $H_1^{vorl} \leftarrow H_1^{vorl} \setminus \{k^*\}$ 
15:      $H_0 \leftarrow H_0 \cup \{k^*\}$ 
16:   else
17:     Verbesserung  $\leftarrow$  false
18:  $H_1 \leftarrow H_1^{vorl}$ 

```

---

# C Adjazenz- und Bewertungsmatrix für den modifizierten Tripel-Algorithmus

Die Knotenmenge  $V_A$  des kantenbewerteten Digraphen  $\vec{G}_A$  umfasst im Gegensatz zur formalen Modellbeschreibung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. (vgl. Abschnitt 4.1) für jedes Depot und für jeden Hub jeweils einen Knoten.<sup>1</sup> Für die Knotenmenge  $V_A$  des Graphen  $\vec{G}_A$  gilt:  $V_A = \{1, 2, \dots, |S_D|, |S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\}$ . Die Knoten werden aufsteigend nummeriert, wobei die Depots den ersten  $|S_D|$  Knoten entsprechen.

Die Indikatorfunktion  $b : \{1, 2, \dots, |S_D|\} \rightarrow \{|S_D| + 1, \dots, |S_D| + |H_1|\} \cup \{0\}$  gibt für jeden Knoten  $i$ , der einem Depot entspricht, denjenigen Knoten  $k$  an, der einem Hub entspricht und sich an dem selben Standort befindet wie das Depot und ist folgendermaßen definiert:

$$b(i) := \begin{cases} k, & \text{am Standort des Depots } i \text{ befindet sich der Hub } k \\ 0, & \text{am Standort des Depots } i \text{ befindet sich kein Hub} \end{cases}$$

Die folgende Adjazenzmatrix  $A_A$  beschreibt in tabellarischer Form den Graphen  $\vec{G}_A$ , der dem Kürzeste-Wege-Problem zu Grunde liegt. Die Matrix  $C_A$  entspricht der Bewertungsmatrix des Graphen  $\vec{G}_A$  und gibt die Länge einer Kante an.

Tabelle C.1: Adjazenzmatrix  $A_A$  des Graphen  $\vec{G}_A$

	$a_{ij}$	Bedingung
$i, j \in \{1, 2, \dots,  S_D \}$	1	$i \neq j \wedge (b(i) = 0 \vee b(j) = 0)$
	0	sonst
$m \in \{ S_D  + 1, \dots,  S_D  +  H_1 \}$ $j \in \{1, 2, \dots,  S_D \}$	1	$b(j) = 0 \vee b(j) = i$
	0	sonst
$i \in \{1, 2, \dots,  S_D \}$ $k \in \{ S_D  + 1, \dots,  S_D  +  H_1 \}$	1	$b(i) = 0 \vee b(i) = j$
	0	sonst
$m, k \in \{ S_D  + 1, \dots,  S_D  +  H_1 \}$	1	$i \neq j$
	0	sonst

<sup>1</sup>Bei der formalen Modellbeschreibung des kapazitätsbeschränkten Hub-Location-Problems i. e. S. wird für jeden Standort ein Knoten in dem Graphen  $\vec{G}$  modelliert.

Tabelle C.2: Bewertungsmatrix  $C_A$  des Graphen  $\vec{G}_A$

	$c_{A,ij}$	Bedingung
$i, j \in \{1, 2, \dots,  S_D \}$	$c_{ij}$	$i \neq j \wedge (b(i) = 0 \vee b(j) = 0)$
	$\infty$	sonst
$m \in \{ S_D  + 1, \dots,  S_D  +  H_1 \}$ $j \in \{1, 2, \dots,  S_D \}$	$\alpha_3 \cdot c_{mj}$	$b(j) = 0$
	0	$b(j) = i$
	$\infty$	sonst
$i \in \{1, 2, \dots,  S_D \}$ $k \in \{ S_D  + 1, \dots,  S_D  +  H_1 \}$	$\alpha_1 \cdot c_{ik} + s_k$	$b(i) = 0$
	$s_k$	$b(i) = k$
	$\infty$	sonst
$k, m \in \{ S_D  + 1, \dots,  S_D  +  H_1 \}$	$\alpha_2 \cdot c_{km} + s_m$	$k \neq m$
	$\infty$	sonst

# D Modifizierung von Sendungswegen bei überlasteter Hub-Nachlauf-Sortierung

---

**Algorithmus 11** Modifizierung von Sendungswegen bei überlasteter Hub-Nachlauf-Sortierung des Hubs  $\hat{m}$

---

**Schritt 0:** Speichere die Sendungsmengen  $b_{ij}$  aufsteigend in einer Liste  $L_B$ . Setze  $p = 1$ .

**Schritt 1:** Ermittle für das  $p$ -te Element der Liste  $L_B$  den Anfangsknoten  $i$  und den Endknoten  $j$  des Sendungstransports.

**Schritt 2:** Entspricht der kürzeste Weg zwischen den Knoten  $i$  und  $j$  dem direkten Weg, so erhöhe  $p$  um eins und gehe zu Schritt 1.

**Schritt 3:** Ermittle für den kürzesten Weg von Knoten  $i$  nach  $j$ , ob dieser als dritten Hub den Knoten  $\hat{m}$  enthält. Wenn dies nicht der Fall ist oder  $\hat{m} = b(j)$  (vgl. Anhang C) gilt, d. h. der Hub  $\hat{m}$  und das Depot  $j$  befinden sich am selben Standort, dann erhöhe  $p$  um eins und gehe zu Schritt 1.

**Schritt 4:** Bestimme einen Knoten  $m' \in H_1$ , von dem aus die gerichtete Kante zum Knoten  $j$  die geringste Länge aufweist und dessen freie Sortierkapazität größer gleich der Sendungsmenge  $b_{ij}$  ist:  $m' := \min_{m \in \{|S_D|+1, \dots, |S_D|+|H_1|\}} \{c_{A,mj} | \kappa_m - \kappa_m^{[2]} \geq b_{ij}\}$ .

**Schritt 5:** Handelt es sich bei dem Anfangsknoten  $i$  um einen Standort mit reiner Depot-Funktion und gilt  $m' \neq \emptyset$ , so ist die Länge des Wegs von  $i$  nach  $j$  über Knoten  $m'$  anstelle des Knotens  $\hat{m}$  zu bestimmen. Wähle als neuen Transportweg von Knoten  $i$  nach  $j$  den Weg über den Knoten  $m'$ , wenn die Länge dieses Weges geringer ist, als die Länge der gerichteten Kante von  $i$  nach  $j$ . Ansonsten wähle als Transportweg den direkten Weg von  $i$  nach  $j$ .

**Schritt 6:** Handelt es sich bei dem Knoten  $i$  um einen Standort mit Depot- und Hub-Funktion und gilt  $m' \neq \emptyset$ , so ist die Länge des Wegs von  $i$  nach  $j$  über Knoten  $m'$  anstelle des Knotens  $\hat{m}$  zu bestimmen. Wähle als neuen Transportweg von Knoten  $i$  nach  $j$  den Weg über den Knoten  $m'$ .

**Schritt 7:** Aktualisiere die Kapazitätsbedarfe entsprechend der durchgeführten Modifizierungen.

**Schritt 8:** Wenn für den Kapazitätsbedarf  $\kappa_{\hat{m}}^{[2]}$  des untersuchten Hubs  $\hat{m}$  gilt, dass dieser größer der vorhandenen Sortierkapazität ist  $\kappa_{\hat{m}}$ , so erhöhe  $p$  um eins und gehe zu Schritt 1. Ansonsten beende den Algorithmus.

---



# E Bestimmung der dualen Entscheidungsvariablen

---

**Algorithmus 12** Berechnung der Entscheidungsvariablen  $v_h$  des dualen relaxierten Problems (6.26) - (6.31)

---

```
1:  $ZF \leftarrow 0$ 
2: for all  $h \in H$  do
3:    $v_h \leftarrow \tilde{c}_h$ 
4:   for all  $l \in L$  do
5:     if  $(\neg(k \in H_0) \wedge \neg(m \in H_0))$  then
6:       if  $(v_h > \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m))$  then
7:          $v_h \leftarrow \tilde{c}_{hl} + \tilde{b}_h(w_k + z_m)$ 
8:    $ZF \leftarrow ZF + v_h$ 
9: for all  $k \in H_1$  do
10:   $ZF \leftarrow ZF - \kappa_k(w_k + z_k) + f_k$ 
11: if  $LB(s) < ZF$  then
12:   $LB(s) \leftarrow ZF$ 
```

---

Der Ausdruck  $\neg a$  entspricht der logischen Negation des Ausdrucks  $a$ .



# F Anzahl der Berechnungen von Allokationslösungen

Im Folgenden wird gezeigt, dass beim Wechsel vom Add- zum Drop-Verfahren bzw. beim Wechsel von der First-Fit- zur Best-Fit-Strategie die Anzahl der Berechnungen von Allokationslösungen zunimmt.

Die Analyse der Eröffnungslösungen hat gezeigt, dass für die Anzahl  $a$  der ermittelten Hubstandorte stets gilt:  $a \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$  ( $a \in \mathbb{N}^+$ ). Somit erfolgen die Nachweise unter dieser Bedingung. Die Anzahl der erforderlichen Berechnungen von Allokationslösungen für die jeweilige Strategie und das jeweilige Eröffnungsverfahren kann der Tabelle 7.5 entnommen werden.

## F.1 Wechsel vom Add-Verfahren zum Drop-Verfahren bei First-Fit-Strategie

Es wird nachgewiesen, dass die Anzahl der Berechnungen einer Allokationslösung beim Übergang vom Add-Verfahren zum Drop-Verfahren bei Anwendung der First-Fit-Strategie zunehmen.

$$\underbrace{M - a + 1}_{\text{Drop-Verfahren First-Fit-Strategie}} - \underbrace{(a + 1)}_{\text{Add-Verfahren First-Fit-Strategie}} \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (\text{F.1})$$

$$\frac{M}{2} \stackrel{!}{\geq} a \quad (\text{F.2})$$

Laut Annahme gilt  $a \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$  somit ist zusammen mit der Beziehung

$$\frac{M}{2} \geq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$$

die Gleichung F.2 immer erfüllt.

## F.2 Wechsel vom Add-Verfahren zum Drop-Verfahren bei Best-Fit-Strategie

Die Ausdrücke (7.1) und (7.2) unterscheiden sich lediglich durch ihre oberen Summationsgrenzen, weshalb nur dieser miteinander verglichen werden.

$$\underbrace{M - a}_{\substack{\text{Obere Summationsgrenze} \\ \text{Drop-Verfahren Best-Fit-Strategie}}} - \underbrace{a}_{\substack{\text{Obere Summationsgrenze} \\ \text{Add-Verfahren Best-Fit-Strategie}}} \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (\text{F.3})$$

$$M \stackrel{!}{\geq} 2a \quad (\text{F.4})$$

$$\frac{M}{2} \stackrel{!}{\geq} a \quad (\text{F.5})$$

Laut Annahme gilt  $a \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$  somit ist die Gleichung F.5 immer erfüllt.

### F.3 Wechsel von der First-Fit-Strategie zur Best-Fit-Strategie beim Add-Verfahren

$$\underbrace{\frac{2M(a+1) - a(a+1)}{2}}_{\text{Add-Verfahren Best-Fit-Strategie}} \stackrel{!}{\geq} \underbrace{(a+1)}_{\text{Add-Verfahren First-Fit-Strategie}} \quad (\text{F.6})$$

$$2M(a+1) - a(a+1) \stackrel{!}{\geq} 2(a+1) \quad (\text{F.7})$$

$$2M - a \stackrel{!}{\geq} 2 \quad (\text{F.8})$$

$$2M - 2 \stackrel{!}{\geq} a \quad (\text{F.9})$$

Gleichung F.9 ist für  $M \geq 1$  und  $a \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor$  immer erfüllt.

### F.4 Wechsel von der First-Fit-Strategie zur Best-Fit-Strategie beim Drop-Verfahren

$$\underbrace{\frac{M(M+1) - a(a-1)}{2}}_{\text{Drop-Verfahren Best-Fit-Strategie}} \stackrel{!}{\geq} \underbrace{M - a + 1}_{\text{Drop-Verfahren First-Fit-Strategie}} \quad (\text{F.10})$$

$$M(M+1) - a(a-1) \stackrel{!}{\geq} 2M - 2a + 2 \quad (\text{F.11})$$

$$M^2 - M \stackrel{!}{\geq} a^2 - 2a + 1 \quad (\text{F.12})$$

$$\text{Mit } a \leq \lfloor \frac{M}{2} \rfloor \text{ gilt:} \quad (\text{F.13})$$

$$4a^2 - 2a \stackrel{!}{\geq} a^2 - 2a + 1 \quad (\text{F.14})$$

$$3a^2 \stackrel{!}{\geq} 1 \quad (\text{F.15})$$

Die Bedingung F.15 ist für  $a \geq 1$  immer erfüllt.





# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name Steffen Blunck  
Geburtsdatum 20. Juni 1971, Hamburg  
E-Mail-Adresse steffen.blunck@alumni.uni-karlsruhe.de  
Staatsangehörigkeit deutsch  
Familienstand ledig

## Schulbildung

1977 - 1981 Schule Rübekamp, Pinneberg  
1981 - 1990 Johannes-Brahms-Schule, Pinneberg  
06/1990 Allgemeine Hochschulreife

## Berufsausbildung und -praxis

08/1990 - 01/1993 Ausbildung zum Feinmechaniker  
Institut für Angewandte Physik, Universität Hamburg  
01/1993 Feinmechaniker

## Berufstätigkeit

02/1993 - 09/1993 Tätigkeit als Feinmechaniker  
Institut für Angewandte Physik, Universität Hamburg

## Zivildienst

03/1995 - 03/1996 Städtisches Klinikum Karlsruhe

## Studium

10/1993 - 06/1999 Wirtschaftsingenieurwesen, Universität Karlsruhe (TH)  
06/1999 Diplom-Wirtschaftsingenieur

## Berufspraxis

seit 06/1999 Wissenschaftlicher Mitarbeiter  
Institut für Fördertechnik und Logistiksysteme (IFL)  
Universität Karlsruhe (TH)