

Herbert Oertel

Aerothermodynamik



universitätsverlag karlsruhe

Aerothermodynamik

Herbert Oertel

Unter Mitarbeit von
M. Böhle, J. Delfs, D. Hafermann und H. Holthoff



universitätsverlag karlsruhe

Autor

Prof. Prof. e.h. Dr.-Ing. habil. Herbert Oertel, Ordinarius
Institut für Strömungslehre, Universität Karlsruhe (TH)
Kaiserstr. 12, 76128 Karlsruhe

Originalveröffentlichung im Springer-Verlag
Berlin, Heidelberg, New York, 1994

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2005
Print on Demand

ISBN 3-937300-78-3

Vorwort

Das Lehrbuch Aerothermodynamik, das die klassischen Gebiete der Hyperschall-aerodynamik mit der Chemie heißer Gase verknüpft, ergänzt den Lehrstoff der Strömungsmechanik Lehrbuchreihe. Es ist als Vertiefung der strömungsmechanischen Grundlagen für die interessierten Maschinenbaustudenten der höheren Semester und Doktoranden der Graduiertenkollegs verfaßt. Das Lehrbuch beabsichtigt nicht, das Gebiet der Aerothermodynamik umfassend zu behandeln. Es umfaßt die Stoffauswahl einer vom Erstautor über mehr als einem Jahrzehnt gehaltenen Spezialvorlesung, die dem Wissensstand eines Maschinenbaustudenten im 8. Semester angepaßt ist, der erfahrungsgemäß noch keine Berührung mit der Nichtgleichgewichts-Thermodynamik und gaskinetischen Betrachtungsweise der Strömungsmechanik hatte. Die Mitautoren haben im Rahmen ihrer Dissertationen den Vorlesungsstoff weiter vertieft und insbesondere in den numerisch orientierten Kapiteln die neuesten Ergebnisse eingearbeitet. Damit wird auch der im Beruf stehende Ingenieur für seine praktische Projektarbeit in den Hyperschall-Technologieprogrammen und Projekten zahlreiche Anregungen finden können.

Als Leitfaden für das Lehrbuch dient der Wiedereintritt einer Raumkapsel in die Erdatmosphäre, die entlang ihrer Wiedereintrittstrajektorie erst den gaskinetischen Bereich der verdünnten hohen Atmosphäre durchfliegt. In etwa 90 km Höhe der Erdatmosphäre erfolgt der Übergang zur Kontinuumsmechanik. Beim Abbremsen der Wiedereintrittskapsel in der Erdatmosphäre wird die Luft so heiß, daß die thermodynamische Nichtgleichgewichtschemie berücksichtigt werden muß. Es folgt entlang der Wiedereintrittstrajektorie der Bereich der Hyperschallaerodynamik, der bis zur Landung der Kapsel auf der Erde von der klassischen Unterschallaerodynamik abgelöst wird. Die strömungsphysikalischen Phänomene beim Wiedereintritt und die Lösungsmethoden der gaskinetischen und kontinuumsmechanischen Grundgleichungen unter Einbeziehung der Nichtgleichgewichtschemie fassen wir unter dem Begriff Aerothermodynamik zusammen.

Entsprechend den aerothermodynamischen Phänomenen entlang der Wiedereintrittstrajektorie der Raumkapsel gliedert sich der Lehrstoff in Einführungskapitel über die Grundlagen und Eigenschaften von Hyperschallströmungen und die Grundbegriffe der Nichtgleichgewichts-Thermodynamik heißer Gase. Es folgen die Kapitel "Verdünnte Strömungen" und "Kontinuumsströmungen", in denen die gaskinetischen und kontinuumsmechanischen Grundgleichungen, ausgewählten numerischen Lösungsmethoden und der Modellierung der Luftchemie ein besonders breiter Raum eingeräumt wurde. Dabei wird der Entwicklung Rechnung getragen, daß den neuen numerischen Methoden auf Großrechenanlagen neben dem klassischen Hyperschallwindkanal in der praktischen Projektarbeit der Industrie eine immer größere Bedeutung zukommt. Das Lehrbuch schließt mit dem Kapitel über einige ausgewählte Hyperschall-Projekte und Technologieprogramme unter Einbeziehung der Versuchsanlagen und Großrechner-Verbundsysteme ab. Dabei soll dem interessierten Ingenieur gezeigt werden, wie das Erlernte in der Praxis umgesetzt werden kann.

Die Literaturangaben in den einzelnen Kapiteln beschränken sich auf eine begrenzte

Auswahl von Fachbüchern und Zeitschriftenartikeln, die dem Leser die Vertiefung des Lehrstoffes in den behandelten Fachgebieten ermöglichen sollen.

Ergänzend zu dem Lehrbuch haben unsere Studenten Tilman Schmidt-Sandte und Lutz Schröder einen Lehrfilm erstellt, der die numerisch simulierten Strömungsverhältnisse der Raumkapsel entlang der Wiedereintrittstrajektorie darstellt. Dafür sei ihnen besonderer Dank gesagt.

Wir danken Frau Bellack und Frau Kleimann für die Anfertigung und Durchsicht des Manuskripts und der Abbildungen.

Braunschweig, Juli 1993

Herbert Oertel jr.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	
1	Einführung 1
2	Eigenschaften einer Hyperschallströmung 5
2.1	Überblick über das Wiedereintrittsproblem 5
2.2	Gasdynamische Grundlagen und Realgaseffekte 11
2.3	Entropieschichten 17
2.4	Grenzschichten 18
2.5	Verdünnungseffekte 20
3	Aerothermodynamische Grundlagen 24
3.1	Zustandsgrößen - Zustandsgleichungen 24
3.2	Hauptsätze der Thermodynamik 28
3.3	Innere Energien heißer Gase 30
3.4	Chemische Prozesse in heißer Luft 37
3.5	Thermodynamisches Nichtgleichgewicht 39
3.6	Methode der Sensitivitätsanalyse 47
4	Verdünnte Strömungen 52
4.1	Phänomene 52
4.1.1	Stoßstruktur 52
4.1.2	Nachlaufströmung 53
4.2	Grundgleichungen - Boltzmann-Gleichung 54
4.2.1	Partikelstöße 57
4.2.2	Boltzmann-Gleichung 60
4.2.3	Innere Energien 63
4.2.4	Chemische Reaktionen 64
4.2.5	Gas-Oberflächenwechselwirkung 65
4.3	Berechnungsverfahren 67
4.3.1	Molecular Dynamics (MD) 68
4.3.2	Direkte Monte-Carlo Simulationsmethode (DSMC) 69
4.3.3	Simulation der inneren Freiheitsgrade 74
4.3.4	Simulation der Luftchemie 76
4.3.5	Simulation der Gas-Oberflächenwechselwirkung 80
4.4	Simulationsergebnisse 81
5	Kontinuumsströmungen 84
5.1	Phänomene 85
5.1.1	Verdichtungsstoß 85

5.1.2	Expansion	92
5.1.3	Hyperschall-Einfriereigenschaft	93
5.1.4	Hyperschallgrenzschichten	95
5.1.5	Transition in Hyperschallgrenzschichten	98
5.2	Grundgleichungen – Navier-Stokes-Gleichungen	105
5.2.1	Realgasmodelle	108
5.2.2	Transportmodelle	110
5.2.3	Randbedingungen	113
5.3	Berechnungsverfahren	117
5.3.1	Approximative Verfahren	117
5.3.2	Numerische Algorithmen	121
5.4	Simulationsergebnisse	129
6	Projekte, Technologieprogramme und Simulationsanlagen	135
6.1	Projekte und Technologieprogramme	135
6.1.1	BREMSAT-Satellit	140
6.1.2	EXPRESS-Wiedereintrittskapsel	144
6.1.3	SÄNGER-Orbitaltransportsystem	153
6.1.4	HERMES – Technologie-Programm	155
6.2	Experimentelle Versuchsanlagen	158
6.2.1	Funktionsweise eines einfachen Stoßrohrs	159
6.2.2	Gun-Tunnel	163
6.2.3	Simulationsbereiche	164
6.2.4	Optische Strömungsmeßtechnik	166
6.3	Simulation auf Großrechnern	170
6.3.1	Großrechnerverbund	170
6.3.2	Workstation Pool	172
6.3.3	Simulationsbereiche	175
6.4	Validierung aerothermodynamischer Entwurfswerkzeuge	176
6.4.1	Entwurfskonzept	176
6.4.2	Validierungskonzept	178
6.4.3	Vereinfachte Modellgesetze	179
	Ausgewählte Literatur	183
	Sachwortverzeichnis	186
	Anhang	188

1 Einführung

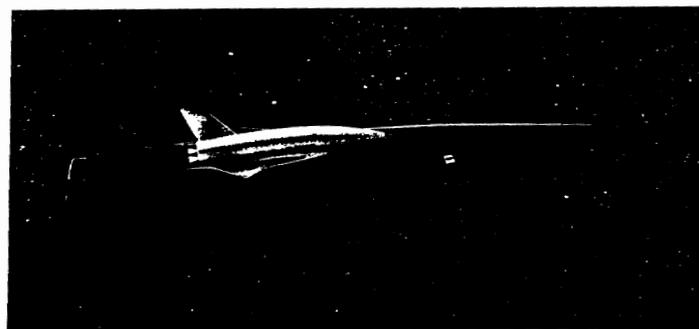
Das Fachgebiet Aerothermodynamik hat sich mit dem Transport von Satelliten und Raumstationen in den erdnahen Orbit in den letzten Jahrzehnten entwickelt. Mit dem Bau neuer Raumstationen und dem größer werdenden Bedarf geostationärer Satelliten in der Erdumlaufbahn wird die Entwicklung kostengünstiger und damit wiederverwendbarer Orbitaltransport- und Rückkehrsysteme immer notwendiger. Die historische Entwicklung des Orbitaltransports begann 1949 mit dem Start der ersten zweistufigen V-2 Rakete in den Vereinigten Staaten (Abbildung 1.1). Bei der Rückkehr der zweiten Stufe in die Erdatmosphäre wurde erstmals in der Ge-



V-2 Rakete



Space Shuttle

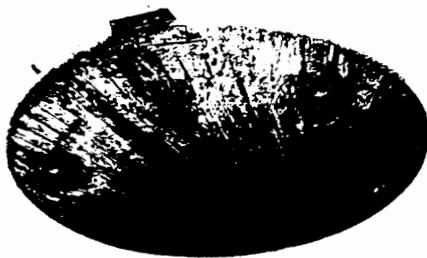


Sänger

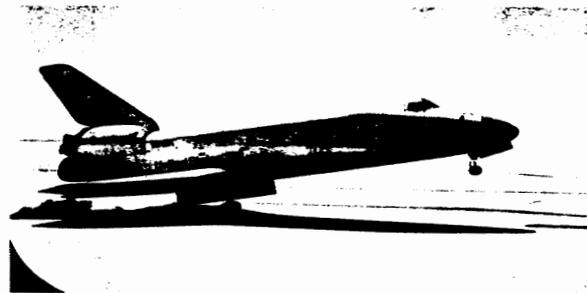
Abb. 1.1: Orbitaltransport

schichte der Luft- und Raumfahrt die Machzahl 5 überschritten. Damit hatte das Zeitalter der Hyperschallaerodynamik begonnen. Die weitere Entwicklung des Orbitaltransports ist in Abbildung 1.1 an zwei Beispielen dargestellt. In den siebziger Jahren wurde in Amerika das teilweise wiederverwendbare Orbitaltransportsystem Space-Shuttle entwickelt, das bis heute im Einsatz ist. Die für den Start erforderlichen Feststoff-Raketenbooster werden wieder geborgen. Der Orbiter landet nach seiner Mission auf der Erde. Lediglich der Treibstofftank geht nach jedem Start verloren. Das entsprechende russische System Buran kam 7 Jahre später einmalig zum Einsatz. In den späten achtziger Jahren wurde im Rahmen von Hyperschall-Technologieprogrammen begonnen, die Schlüsseltechnologien für vollständig wiederverwendbare Systeme zu entwickeln. In den Vereinigten Staaten verfolgte das NASP-Programm (National Aerospace Plane) den anspruchsvollen Ansatz, mit einem Hyperschallflugzeug in den Orbit zu fliegen und nach dem Wiedereintritt auf der Erde zu landen. Dies führte zur Entwicklung der Schlüsseltechnologien für einen Scramjet-Antrieb mit der technischen Realisierung einer Überschallverbrennung. In Deutschland wurde das zweistufige Sänger-Konzept verfolgt. Ein Machzahl 7 Hyperschallflugzeug transportiert den Orbiter in 30 km Höhe, der mit einem klassischen Raketenantrieb den Restflug in den Orbit absolviert. Beide Flugzeuge landen nach erfolgter Mission wieder auf der Erde. Dabei wurde für das Hyperschallflugzeug ein Turbojet-Staustrahl-Kombinationstriebwerk mit einer Unterschallverbrennung favorisiert.

Nachdem wir in groben Zügen die technologische Entwicklung des Orbitaltransports beschrieben haben, wenden wir uns dem Thema unseres Lehrbuchs zu, das sich ausschließlich mit der Aerothermodynamik des Wiedereintritts in die Erdatmosphäre befasst wird. Auch hier soll zunächst ein kurzer historischer Abriß in die Thematik einführen. Nachdem 1949 die Raketenspitze der zweiten Stufe der V-2 bei ihrem ballistischen Wiedereintritt in die Erdatmosphäre aus 390 km Höhe verglühte, folgte 1961 der erste bemannte Wiedereintritt in die Erdatmosphäre mit der Vostok I Wiedereintrittskapsel. Beim Abbremsen der Kapsel in der Erdat-



Gemini Kapsel



Space Shuttle

Abb. 1.2: Wiedereintritt

mosphäre wurden Machzahlen über 25 erreicht. Das Gas vor der Kapsel wurde dabei über 10000 K heiß, so daß die Wiedereintrittskapsel vor dem Verglühen durch ein Hitzeschild geschützt werden mußte. Es haben sich in der frühen Phase der Wiedereintrittstechnologie Ablationshitzeschilder aus beispielsweise faserverstärkten Kunstharzen als Hitzeschutz bewährt. Dabei wird die teilweise Zerstörung der äußeren Wandschicht durch chemische Reaktionen, Sublimation, Verdunsten oder auch Schmelzfluß für die Wärmeabfuhr genutzt. Die Abbildung 1.2 zeigt die Ablationsspuren auf der Kugelkappe der Gemini Wiedereintrittskapsel. Nach jedem Wiedereintritt muß das Hitzeschild der Kapsel ersetzt werden. Erst in jüngster Zeit sind neue hitzebeständige Faserverbund-*C/SiC*-Materialien entwickelt worden, die mit einem entsprechenden Oxidationsschutz ein wiederverwendbares und damit kostengünstiges Hitzeschild möglich machen. Ein erster Ansatz eines wiederverwendbaren Hitzeschutzes wurde bereits beim Space-Shuttle realisiert. Eine beträchtliche Gewichtsreduzierung des wiederverwendbaren Hitzeschilds konnte im Rahmen des europäischen Hermes-Technologieprogramms mit den neu entwickelten Materialien und erstmals mit numerischen aerothermodynamischen Entwurfsmethoden erreicht werden.

Nachdem wir die technologische Motivation für den Aerothermodynamik-Lehrstoff des Wiedereintrittsproblems kurz skizziert haben, wollen wir in die Kapitel des Lehrbuchs einführen, die für das Verständnis der aerodynamischen und chemischen Vorgänge heißer Gase erforderlich sind. Dazu dient uns die Abbildung 1.3, die die Wiedereintrittstrajektorie einer Raumkapsel darstellt, auf die wir unseren Lehrstoff beschränken. Der Wiedereintritt beginnt mit einem Rückkehrmanöver in der Erdumlaufbahn. Die Kapsel durchfliegt zunächst den verdünnten Bereich der oberen Atmosphäre. Dabei besitzen die thermodynamischen Zustandgrößen Druck, Dichte und Temperatur bei einer typischen Wiedereintrittsbahn z.B. in 100 km Höhe im Strömungsfeld die Werte $p = 35 \cdot 10^{-5}$ bar, $\rho = 5 \cdot 10^{-5}$ kg/m³ und $T = 24000$ K. In diesem Bereich werden wir in Kapitel 4 die gaskinetischen Grundgleichungen der

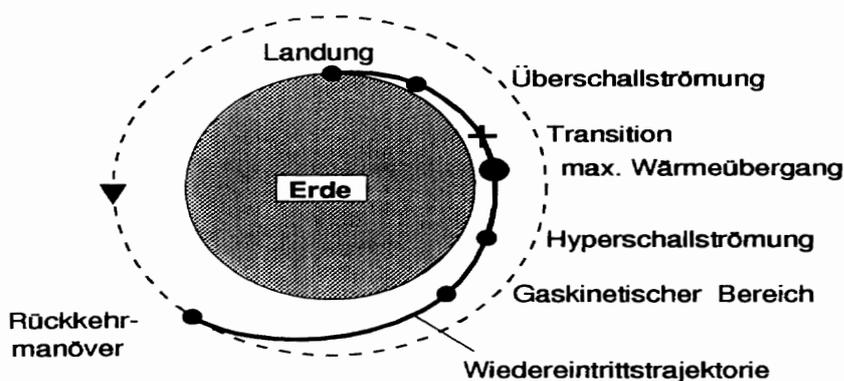


Abb. 1.3: Prinzipische Skizze einer Wiedereintrittstrajektorie

Strömungsmechanik einschließlich der numerischen Lösungsmethoden behandeln. Da beim Wiedereintritt das Gas vor der Kapsel so heiß wird, daß die Luftmoleküle dissoziieren, wird dabei die Einbeziehung der Chemie heißer Luft erforderlich sein. Folgen wir weiter der Wiedereintrittstrajektorie, so schließt sich der Bereich der Kontinuums-Hyperschallströmung an. Es werden beim ballistischen Wiedereintritt der Raumkapsel aus dem erdnahen Orbit Machzahlen bis zu 30 erreicht. Die Beschreibung der kontinuumsmechanischen Grundgleichungen einschließlich der chemischen Quellterme ist in Kapitel 5 vorgesehen. In etwa 45 km Höhe verzeichnen wir auf der ballistischen Wiedereintrittstrajektorie den für die Auslegung des Hitzeschilds ausgezeichneten Punkt des maximalen Wärmeübergangs. Bei einer Wiedereintrittskapsel von einem Meter Durchmesser werden dabei Wärmelasten von bis zu 3 MW/m² erreicht. Die zugehörigen Zustandsgrößen im Staupunkt des Hitzeschilds betragen $p = 1$ bar, $\rho = 0,1$ kg/m³ und $T = 2900$ K. Dabei ist zu berücksichtigen, daß die heiße Phase des Wiedereintritts nach etwa 300 Sekunden abgeschlossen ist, so daß die Temperatur der Nutzlast in der Kapsel, trotz der extrem hohen Wärmebelastung, auf etwa 70°C gehalten werden kann. Die aerothermodynamische Entwurfsmethodik eines Hitzeschilds und der Wärmeisolation der Kapsel wird in Kapitel 6 beschrieben.

Ein weiterer ausgezeichnete Punkt auf der Wiedereintrittstrajektorie in geringeren Höhen ist der laminar-turbulente Übergang in der Hyperschall-Grenzschicht, die sich inzwischen auf der Wiedereintrittskapsel ausgebildet hat. Der zusätzliche Wärmeaustausch in einer turbulenten Grenzschicht erhöht den Wärmestrom auf der Kapsel erneut um bis zu einem Faktor 2. Dieses für die Auslegung des Hitzeschilds wichtige Phänomen wird ebenfalls in Kapitel 5 behandelt.

Die auf der Wiedereintrittstrajektorie folgenden Bereiche der Überschallströmung und der Landung der Raumkapsel auf der Erde sind nicht Gegenstand dieses Lehrbuchs. Wir beschränken uns auf den heißen Höhenbereich der Wiedereintrittstrajektorie zwischen 120 km und 30 km Höhe, in dem die Luftchemie die Aerodynamik der Wiedereintrittskapsel entscheidend beeinflusst. Die Aufheizung des Gases erfolgt dabei durch die in der Abbildung 1.4 gezeigte Kopfwelle vor der Wiedereintrittskapsel, die eine sprunghafte Erhöhung der thermodynamischen Zustandsgrößen Druck, Dichte und Temperatur verursacht. Die gasdynamischen und aerothermodynamischen Grundlagen der durch die Kopfwelle verursachten Aufheizung des Gases sind in den Kapiteln 2 und 3 beschrieben.

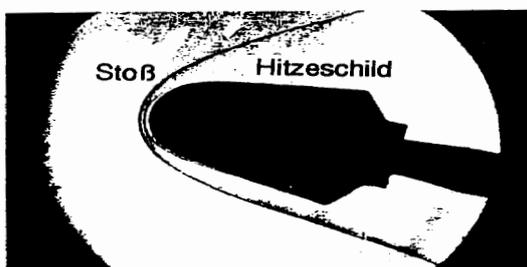


Abb. 1.4: Windkanal Experiment bei $M = 12$

2 Eigenschaften einer Hyperschallströmung

2.1 Überblick über das Wiedereintrittsproblem

Nachdem wir in der Einführung erfahren haben, daß beim Wiedereintritt einer Raumkapsel in die Erdatmosphäre Machzahlen bis 30 und Gastemperaturen bis 20000 K erreicht werden können, werden wir nun die Einführung in die Physik der heißen Gase entlang der betrachteten Wiedereintrittstrajektorie fortsetzen. Dazu dient uns Abbildung 2.1. Es ist die Höhe H in der Atmosphäre über der Machzahl M_∞ der Wiedereintrittskapsel aufgetragen. Dabei bezeichnet die Machzahl M_∞ das Verhältnis der ungestörten Anströmgeschwindigkeit u_∞ und der jeweiligen Schallgeschwindigkeit a_∞ . Die betrachtete ballistische Wiedereintrittstrajektorie ist im Diagramm fett eingetragen. Neben der Höhe H ist die dimensionslose Knudsenzahl Kn als Ordinate zugeordnet. Die Knudsenzahl ist als das Verhältnis der mittleren freien Weglänge $\bar{\lambda}$ und der charakteristischen Länge L der Wiedereintrittskapsel definiert. Die mittlere freie Weglänge bezeichnet die Weglänge, die ein Molekül bzw. Atom im Mittel zwischen zwei Zusammenstößen mit einem anderen Teilchen zurücklegt (vgl. Kapitel 2.5):

$$Kn = \frac{\bar{\lambda}}{L}, \quad (2.1)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_T n}, \quad (2.2)$$

mit der Teilchenzahldichte n der Luftmoleküle. σ_T bezeichnet den totalen Streuquerschnitt der jeweils stoßenden Luftmoleküle. Die dimensionslose Knudsenzahl gibt uns die Möglichkeit, den Wiedereintritt in die Erdatmosphäre in den gas-kinetischen Bereich verdünnter Gase und den kontinuumsmechanischen Bereich

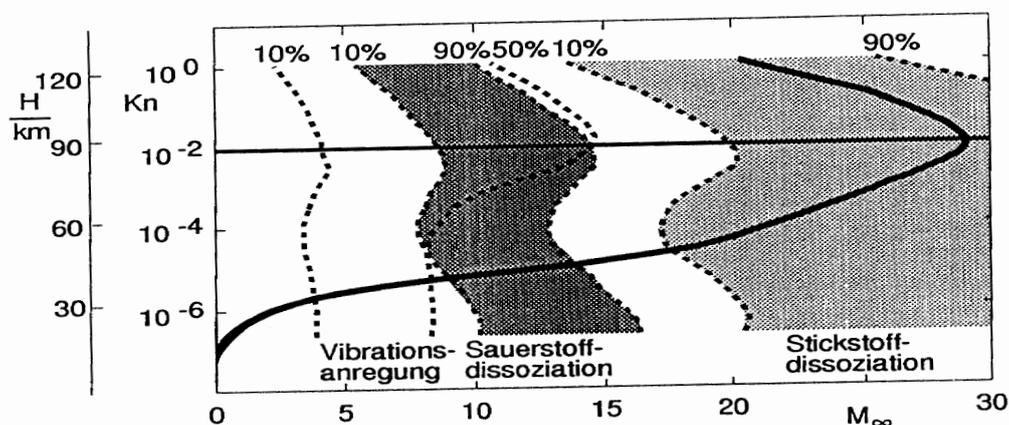


Abb. 2.1: Prinzipbild einer Wiedereintrittstrajektorie

einzuteilen:

$$\begin{array}{ll}
 \text{FREIE MOLEKÜLSTRÖMUNG} & 10 < Kn \quad . \\
 \text{ÜBERGANGSBEREICH} & 10^{-2} < Kn < 10 \quad , \\
 \text{KONTINUUMSMECHANIK} & Kn < 10^{-2} \quad .
 \end{array} \quad (2.3)$$

Wir sprechen von einer freien Molekülströmung, wenn die mittlere freie Weglänge wesentlich größer als die geometrische Ausdehnung der Wiedereintrittskapsel ist ($Kn > 10$). Diese Strömung ist dadurch gekennzeichnet, daß die Moleküle in der Nähe der Kapsel nur mit der Kapseloberfläche stoßen. Untereinander finden praktisch keine Stöße statt. Der gaskinetische Übergangsbereich liegt im Knudsenzahlbereich von 10 bis 10^{-2} . In diesem Bereich beginnen die intermolekularen Stöße die Strömung zu beeinflussen. Von einer Kontinuumsströmung sprechen wir, wenn die Knudsenzahl Werte kleiner als 10^{-2} annimmt, und damit die mittlere freie Weglänge der stoßenden Luftmoleküle wesentlich kleiner als die geometrische Ausdehnung der Wiedereintrittskapsel ist. Die horizontale Linie in Abbildung 2.1 kennzeichnet diesen Übergang von der Gaskinetik zur Kontinuumsmechanik. Die Anströmmachzahl einer Wiedereintrittskapsel erreicht im Übergangsbereich der betrachteten Wiedereintrittstrajektorie ein Maximum von $M_\infty = 29$.

Folgen wir nun in unserem Diagramm der Wiedereintrittstrajektorie, so beginnt entsprechend Abbildung 1.3 der Wiedereintritt in die Erdatmosphäre mit dem Deorbit-Manöver im Bereich der freien Molekülströmung. In etwa 90 km Höhe wird der Übergang von der gaskinetischen Umströmung der Wiedereintrittskapsel zur kontinuumsmechanischen Umströmung erreicht. Dabei ändern sich die charakteristischen Merkmale der Strömung drastisch. Im kontinuumsmechanischen Bereich bilden sich vor der Kapsel eine scharfe Kopfwelle und hinter der Kapsel eine kontinuumsmechanische Nachlaufströmung aus (siehe auch Abbildung 2.2). Dieses Strömungsbild bleibt im gesamten Hyperschallbereich der Wiedereintrittstrajektorie erhalten.

Die gepunkteten Bereiche der Abbildung 2.1 zeigen die Auswirkungen der durch die Abbremsung der Wiedereintrittskapsel verursachten Aufheizung des Gases. Aufgrund der hohen Temperaturen werden neben der Molekültranslation und Rotation die Molekülschwingung bis zur Dissoziation angeregt. Folgen wir der Wiedereintrittstrajektorie mit steigender Machzahl, so wird zunächst die Molekülschwingung der Sauerstoffmoleküle angeregt, gefolgt von der Vibrationsanregung der Stickstoffmoleküle. Dabei führt die Umverteilung der inneren Energie der Luftmoleküle zu einer Verringerung der Temperatur im Strömungsfeld. Die gepunkteten Linien zeigen die Bereiche an, bei denen 10% der Schwingungsenergie bzw. 50% angeregt sind. Etwa bei der Machzahl 10 auf der Wiedereintrittstrajektorie wird die Temperaturerhöhung über die Kopfwelle so groß, daß die Sauerstoffmoleküle zu dissoziieren beginnen und dabei Sauerstoffatome im Strömungsfeld entstehen. Bei der Machzahl 15 sind bereits 90% der Sauerstoffmoleküle dissoziiert. Folgen wir der Wiedereintrittstrajektorie zu noch größeren Anströmmachzahlen, so zeigt das Höhen-Machzahl-Diagramm, daß die Dissoziation der Stickstoffmoleküle in großer Höhe etwa bei der Anströmmachzahl 20 beginnt. Der thermodynamische Zustand

an dieser Stelle der Wiedereintrittstrajektorie ist durch die vollständige Dissoziation der Sauerstoffmoleküle, die Schwingungsanregung und beginnende Dissoziation der Stickstoffmoleküle bestimmt. Die Dissoziation der Luftmoleküle setzt sich bis in den gaskinetischen Bereich der Atmosphäre fort. Die gepunkteten Bereichsgrenzen der Schwingungsanregung und Dissoziation der Luftmoleküle sind durch die thermodynamischen Zustandsgrößen in der jeweiligen Höhe der Atmosphäre bestimmt.

Die Diskussion der Abbildung 2.1 macht deutlich, daß beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre neben den aerodynamischen Parametern der Wiedereintrittskapsel die thermodynamische Nichtgleichgewichtsschemie berücksichtigt werden muß. Dies begründet letztendlich den in diesem Buch behandelten Lehrstoff der Aerothermo-

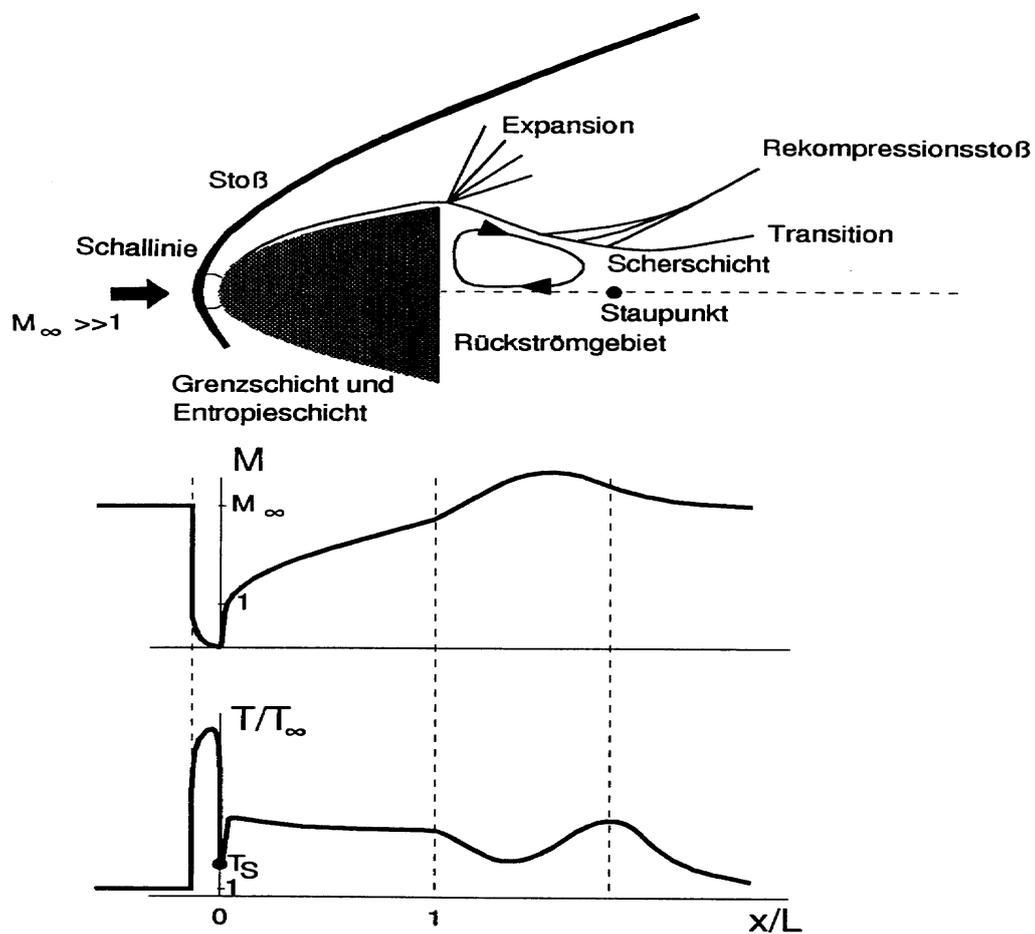


Abb. 2.2: Prinzipbild der Umströmung einer Wiedereintrittskapsel

dynamik.

Es bleibt noch zu ergänzen, wie wir die Ausgangsgeschwindigkeit u_∞ der Wiedereintrittskapsel im Orbit berechnen. Dazu betrachten wir die Kapsel auf einer Kreisbahn um den Erdmittelpunkt mit dem Radius $(R + H)$. Hierin bezeichnet R den Erdradius und H die Flughöhe. Das Kräftegleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Schwerkraft lautet:

$$\frac{m u_\infty^2}{R + H} = m g \quad . \quad (2.4)$$

m ist die Masse der Kapsel, g die Erdbeschleunigung. Unter der Voraussetzung $H \ll R$ erhält man die Kreisbahngeschwindigkeit $u_\infty = 7.9$ km/s. Mit dieser Geschwindigkeit beginnt der Wiedereintritt in die Erdatmosphäre. Da die Geschwindigkeit in der hohen Atmosphäre praktisch konstant ist, die Temperatur jedoch merklich variiert, ist die zugehörige Machzahl nicht konstant.

Um einen ersten Eindruck über die Hochtemperatureffekte zu gewinnen, schreiben wir den Energiesatz entlang der Staupromlinie der Wiedereintrittskapsel (s. Abbildung 2.2):

$$h + \frac{u_\infty^2}{2} = h_s \quad . \quad (2.5)$$

Bei der betrachteten hohen Wiedereintrittsgeschwindigkeit kann für eine erste Abschätzung die Enthalpie h gegenüber der kinetischen Energie pro Masse $u_\infty^2/2$ vernachlässigt werden. Für ein ideales Gas ergibt sich damit für die Enthalpie h_s im Staupunkt der Kapsel näherungsweise:

$$\begin{aligned} h_s &\approx \frac{u_\infty^2}{2} \quad , \\ h_s &= \frac{7}{2} RT_s \quad , \\ a_\infty^2 &= \frac{7}{5} RT_\infty \quad . \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Staupunkttemperatur T_s :

$$\frac{T_s}{T_\infty} \approx \frac{M_\infty^2}{5} \quad . \quad (2.6)$$

In 90 km Höhe der Wiedereintrittstrajektorie entspricht dies bei $M_\infty = 29$ und $T_\infty = 180$ K einem Wert der Staupunkttemperatur von $T_s = 30000$ K.

Wir haben inzwischen gelernt, daß das Modell des idealen Gases aufgrund der Anregung der inneren Freiheitsgrade der Luftmoleküle nicht im gesamten Hyperschallbereich der Wiedereintrittstrajektorie gültig sein wird. Deshalb kann der abgeschätzte Wert der Staupunkttemperatur nur eine obere Grenze darstellen. Wir werden in den folgenden Kapiteln lernen, daß aufgrund der Realgaseffekte sich in Wirklichkeit deutlich niedrigere Gastemperaturen einstellen werden. Dabei fassen wir unter dem Begriff der "Realgaseffekte" die Rotations- und Schwingungsanregung der Luftmoleküle sowie die gesamten chemischen Prozesse des Gases zusammen. Im Energiesatz (2.5) gilt beispielsweise für die Enthalpie h_s eines binären

dissoziierenden Gases die folgende Gleichung:

$$h_s = \frac{(7 + \alpha)}{2} RT_s + (1 - \alpha)e_v(T_s) + \alpha R\theta_D \quad . \quad (2.7)$$

e_v steht für die Schwingungsenergie, θ_D für die charakteristische Temperatur der Dissoziation und α für den Dissoziationsgrad. Der Dissoziationsgrad des Sauerstoffs ist wie folgt definiert:

$$\alpha = \frac{n_O}{n_O + 2n_{O_2}} \quad .$$

n steht für die Anzahl der entsprechenden Teilchen pro Volumen.

Wir wollen den ersten Teil des einführenden Kapitels und damit die Diskussion der Abbildung 2.1 mit der Zusammenstellung der Temperaturbereiche der unterschiedlichen Realgaseffekte heißer Luft für einen Staudruck von 1 bar abschließen:

$T < 400$	K	keine Realgaseffekte
$400 < T < 2000$	K	O_2 – Schwingungsanregung
$600 < T < 3000$	K	N_2 – Schwingungsanregung
$2000 < T < 4000$	K	O_2 – Dissoziation
$4000 < T < 9000$	K	N_2 – Dissoziation
$2000 < T < 6000$	K	NO – Bildung
$T > 3500$	K	NO – Zerfall
$T > 9000$	K	NO – Ionisation

Nachdem wir uns einen ersten Überblick über die Hochtemperatureffekte entlang der Wiedereintrittstrajektorie verschafft haben, setzen wir die einführende Diskussion des Wiedereintrittsproblems fort, indem wir die Strömung um die Wiedereintrittskapsel selbst betrachten. In Abbildung 2.2 ist das Prinzipbild der Umströmung der Kapsel und die dazugehörigen Machzahl- und Temperaturverteilungen entlang einer ausgewählten Stromlinie im kontinuumsmechanischen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie dargestellt.

Die Aufheizung des Gases erfolgt über die Kopfwelle vor der Wiedereintrittskapsel. Im Verdichtungsstoß fällt die Machzahl sprunghaft auf einen Wert kleiner als eins. Entlang der Staustromlinie sinkt die Machzahl kontinuierlich bis zum Wert null im Staupunkt der Kapsel. Die Temperaturverteilung zeigt über dem Stoß eine sprunghafte Erhöhung um einen Faktor 110 in 90 km Höhe. Das Temperaturmaximum im Strömungsfeld läßt sich dadurch erklären, daß die Wandtemperatur des Hitzeschildes im Staupunkt der Kapsel wesentlich kleiner ist als die Temperatur im Strömungsfeld hinter dem Stoß. Dies läßt sich sofort verstehen, wenn man die unterschiedlichen Zeitskalen der einzelnen Transportvorgänge berücksichtigt. Der gesamte ballistische Wiedereintrittsvorgang ist in etwa 300 Sekunden abgeschlossen. Die diskutierten chemischen Prozesse laufen in einer Zeitskala der Größenordnung 10^{-4} Sekunden ab. Die Aufheizung des Hitzeschildes der Kapsel

wird durch Wärmeleitung, Diffusion, Konvektion, Strahlung und chemische Rekombination auf der Oberfläche verursacht. Die charakteristischen Zeitkonstanten dieser Transportvorgänge sind in einer Nichtgleichgewichtsströmung von ähnlicher Größenordnung wie die chemischen Prozesse. Die Oberflächentemperatur der Kapsel wird jedoch allein durch die Wärmekapazität und die Wärmeleitfähigkeit der Struktur bestimmt. Hierdurch wird eine Zeitkonstante der Größenordnung > 10 Sekunden eingeführt. Mit dieser einfachen Abschätzung der unterschiedlichen Zeitskalen läßt sich verstehen, daß das Maximum der Temperaturverteilung entlang der Staustromlinie in 45 km Höhe 8500 K beträgt, die Temperatur des hier vorausgesetzten keramischen Hitzeschildes im Staupunkt der Kapsel $T_s \approx 2500$ K während des Wiedereintrittsvorgangs nicht überschreitet.

Wir führen die Diskussion der Abbildung 2.2 entlang der Stromlinie am Grenzschichtrand der Wiedereintrittskapsel fort. In der Umgebung des Staupunkts wird die Strömung beschleunigt. Dies führt zu Überschallmachzahlen am Rand der Grenzschicht. Die Temperatur am Grenzschichtrand ist höher als die Wandtemperatur. Daraus resultiert die Temperaturzunahme in der Nähe des Staupunkts. Längs des Grenzschichtrands nimmt die Temperatur aufgrund der Beschleunigung der Strömung auf der Kontur ab.

An der Hinterkante der Wiedereintrittskapsel folgt ein Expansionsbereich, der die Strömung weiter beschleunigt. Damit verbunden ist ein Temperaturabfall im Nachlauf der Kapsel. Die Grenzschichtströmung geht in eine freie Scherschicht über, die das Rückströmgebiet im nahen Nachlauf der Kapsel verursacht. Der zweite Staupunkt im Strömungsfeld hat erneut ein Temperaturmaximum zur Folge. Der Übergang zur ungestörten Hyperschallanströmung wird im Strömungsfeld mit einem schiefen Rekompansionsstoß realisiert, der in großen Höhen der Wiedereintrittstrajektorie im allgemeinen zur Transition der laminaren zu einer turbulenten Nachlaufströmung führt.

Für eine Vertiefung dieses einführenden Kapitels über das Wiedereintrittsproblem seien die Lehr- und Fachbücher von J.D. ANDERSON JR. 1982, 1989, J.F. CLARKE, M. MCCHESENEY 1976, CH. PARK 1989 und W.G. VINCENTI, CH.H. KRUGER JR. 1965 genannt. Wir verweisen auch auf den Anhang, in dem in Einzelbildern eines Wiedereintrittsfilms das Strömungsfeld um die Wiedereintrittskapsel in verschiedenen Höhen der Trajektorie dargestellt ist.

2.2 Gasdynamische Grundlagen und Realgaseffekte

Nachdem wir im letzten Kapitel einen ersten Überblick über das Wiedereintrittsproblem gewonnen haben, behandeln wir in diesem Kapitel die gasdynamischen Grundlagen der Hyperschallumströmung der betrachteten Wiedereintrittskapsel im kontinuumsmechanischen Bereich und den globalen Einfluß der Realgaseffekte heißer Gase. Abbildung 2.3 zeigt das bereits bekannte Bild der Hyperschallumströmung einer Wiedereintrittskapsel. Das Strömungsfeld ist gekennzeichnet durch die Kopfwelle, die sich in Abhängigkeit der Anströmmachzahl M_∞ mit dem Stoßabstand δ vor dem Wiedereintrittskörper ausbildet. In Abbildung 2.4 ist der Verlauf des Stoßabstands bezogen auf den Radius R der Kapsel zunächst für das ideale Gas (gestrichelte Kurve) aufgetragen. Wir erkennen, daß der Stoßabstand mit abnehmender Machzahl entlang der Wiedereintrittstrajektorie zunimmt, bis er schließlich bei der Anströmmachzahl $M_\infty = 1$ den Wert ∞ erreicht. Wir erkennen weiterhin, daß sich für Machzahlen größer als 8 nahezu ein konstanter Wert des Kopfwellenabstands einstellt. Dies werden wir später als "Einfriereigenschaft" der Hyperschallströmung bezeichnen. Die thermodynamischen Zustandsgrößen und damit verbunden die aerodynamischen Beiwerte der Wiedereintrittskapsel werden unter der Annahme idealer Gase unabhängig von der Anströmmachzahl. Der Verlauf des Stoßabstands in Abbildung 2.4 unter Einbeziehung der Realgaseffekte (durchgezogene Kurve) zeigt jedoch, daß die für Hyperschallströmungen idealer Gase wichtige Einfriereigenschaft beim Wiedereintrittsproblem nicht zum Tragen kommt. Wie wir bereits wissen, setzt entlang der Wiedereintrittstrajektorie bei Anströmmachzahlen größer als 6 die Anregung der inneren Energie der Luftmoleküle verbunden mit einer Dichteerhöhung im Strömungsfeld ein, die mit steigender Machzahl und der damit verbundenen Temperaturerhöhung eine weitere drastische Abnahme des Stoßabstands verursacht.

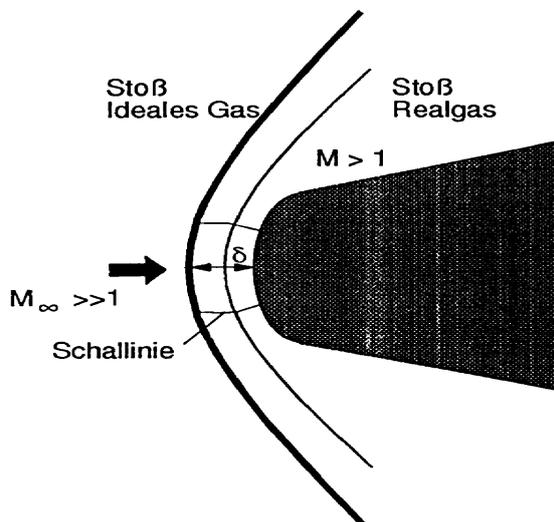


Abb. 2.3: Prinzipbild des Kopfwellenabstands in Abhängigkeit von Hochtemperatureffekten

Der Diskussion der Abbildung 2.3 und 2.4 entnehmen wir die wichtige Schlussfolgerung für den gesamten Lehrstoff der Aerothermodynamik, daß die Realgaseffekte beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre nicht nur eine kleine Korrektur der klassischen Strömungsmechanik idealer Gase zur Folge haben, sondern bezüglich des Stoßabstands δ eine Verringerung bis zu einem Faktor 2 mit sich bringen.

Die gasdynamischen Grundgleichungen, die zu diesem Ergebnis führen, entnehmen wir den klassischen Gasdynamikbüchern von R. COURANT, K.O. FRIEDRICHS 1976, H.W. LIEPMANN, A. ROSHKO 1957, K. OSWATITSCH 1976 und J. ZIEREP 1976. Die eindimensionale Masse-, Impuls-, und Energieerhaltung schreiben sich entlang der Staustromlinie der Wiedereintrittskapsel für den senkrechten Verdichtungsstoß:

$$\rho u = \text{konst} \quad , \quad (2.8)$$

$$p + \rho u^2 = \text{konst} \quad , \quad (2.9)$$

$$h + \frac{1}{2}u^2 = \text{konst} \quad , \quad (2.10)$$

mit der thermischen und kalorischen Zustandsgleichung idealer Gase

$$p = \rho RT \quad , \quad (2.11)$$

$$h = \frac{7}{2}RT \quad . \quad (2.12)$$

p , ρ , T , h sind die thermodynamischen Zustandsgrößen Druck, Dichte, Temperatur, Enthalpie, und u die Geschwindigkeit vor und hinter dem senkrechten Verdichtungsstoß. R bezeichnet jetzt die stoffspezifische Gaskonstante der jeweiligen Luftmoleküle. Aus den gasdynamischen Grundgleichungen berechnet sich der auf den Krümmungsradius R^* im Staupunkt bezogene Kopfwellenabstand für schallnahe Strömungen nach J. ZIEREP:

$$\frac{\delta}{R^*} = 2 \cdot \left(\frac{0,099}{\bar{\chi}} \right)^{2/3} \quad , \quad (2.13)$$

$$\bar{\chi} = \frac{M_\infty^2 - 1}{\kappa + 1} \quad ,$$

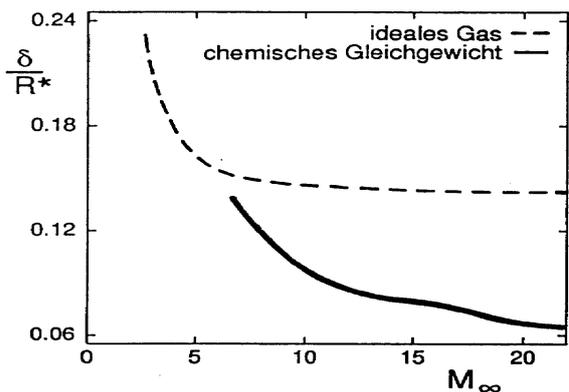


Abb. 2.4: Kopfwellenabstand δ im Abhängigkeit von Hochtemperatureffekten

mit dem Ähnlichkeitsparameter $\bar{\chi}$ und dem Verhältnis der spezifischen Wärmen $\kappa = c_p/c_v$. Die Übertragung auf den Hyperschall erfolgt mit der folgenden Korrelation experimenteller Ergebnisse:

$$\frac{\delta}{R^*} = 0.143 \cdot \exp(3.24/M_\infty^2) \quad . \quad (2.14)$$

Die gasdynamischen Grundgleichungen für heiße Gase unter Berücksichtigung der Realgaseffekte entnehmen wir zum Beispiel den Büchern von E. BECKER 1966, J.F. CLARKE, M. MCCHESENEY 1976, J.D. ANDERSON JR. 1982, H. OERTEL SEN. 1965 und W.G. VINCENTI, CH.H. KRUGER JR. 1965. Die gasdynamischen Grundgleichungen des Verdichtungsstoßes (2.8) - (2.10) bleiben erhalten. Die innere Energieanregung aufgrund der Molekülrotation, der Vibration und der Dissoziation machen sich lediglich in den thermodynamischen Zustandsgleichungen bemerkbar. Die thermische und kalorische Zustandsgleichung schreiben sich beispielsweise für ein Gasgemisch bestehend aus einer Molekül- und einer Atomsorte unter der Annahme thermodynamischen Gleichgewichts:

$$p = (1 + \alpha)\rho RT \quad , \quad (2.15)$$

$$h = \frac{7 + \alpha}{2} RT + (1 - \alpha)e_v(T) + \alpha R\theta_D \quad . \quad (2.16)$$

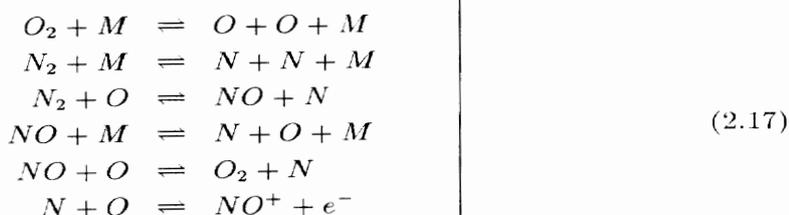
R steht für die spezifische Gaskonstante der molekularen Gaskomponente. e_v ist die Schwingungsenergie der Luftmoleküle, der Term $\alpha R\theta_D$ mit der charakteristischen Dissoziationstemperatur θ_D trägt der Bindungsenergie der dissoziierenden Moleküle Rechnung. In Kapitel 3 werden wir ausführlich auf die Zustandsgleichungen heißer Luft zurückkommen.

Im vorangegangenen Kapitel haben wir die Chemie heißer Luft im thermodynamischen Gleichgewicht bereits angesprochen. In diesem Kapitel wollen wir zum einen die möglichen chemischen Reaktionen ergänzen und zum anderen wollen wir zeigen, daß sowohl die Schwingungsanregung als auch die Dissoziation der Luftmoleküle eine bestimmte charakteristische Zeit bis zum Erreichen des thermodynamischen Gleichgewichtszustands benötigen. Diese thermodynamischen Nichtgleichgewichtsprozesse werden wir im folgenden als Relaxation bezeichnen. Auch davon haben wir bereits im letzten Kapitel bei der Abschätzung der charakteristischen Zeiten des Wiedereintrittsproblems Gebrauch gemacht.

Um die unterschiedlichen Relaxationsvorgänge verstehen zu lernen, betrachten wir ein Volumenelement hinter dem Verdichtungsstoß auf der Staustromlinie in 45 km Höhe der Wiedereintrittstrajektorie. Das Gas im Volumenelement wird momentan auf die Temperatur $T = 8500$ K gebracht. In Abbildung 2.5 verfolgen wir zunächst die zeitlichen Verläufe der Anregung der Schwingungsenergie e_v der Sauerstoff- und Stickstoffmoleküle der Luft. Wie zu erwarten ist, steigt die Schwingungsenergie von ihrem Ausgangswert Null mit größer werdender Zeit kontinuierlich an. Sie erreicht für die Sauerstoffmoleküle ihren Endwert nach ungefähr $5 \cdot 10^{-7}$ Sekunden, den wir als thermodynamischen Gleichgewichtszustand bezüglich der O_2 -Relaxation

bezeichnen. Die Stickstoff-Schwingungsrelaxation bedarf bereits zwei Größenordnungen mehr Zeit bis zur thermodynamischen Gleichgewichtseinstellung.

Bevor wir den zeitlichen Verlauf der Dissoziation der Luftmoleküle diskutieren können, müssen wir uns zunächst mit der Reaktionskinetik heißer Luft befassen. Wir stützen uns dabei auf die von CH. PARK 1985 eingeführte Luftchemie:



In den Reaktionsgleichungen repräsentiert M die jeweiligen Reaktionspartner O_2 , N_2 , NO , O , N , NO^+ und e^- . In diesem vereinfachten luftchemischen Modell werden insgesamt 24 Reaktionsgleichungen berücksichtigt. Die ersten beiden Reaktionen der Sauerstoff- und Stickstoff-Dissoziation haben wir bereits kennengelernt. Neu hinzugekommen ist die Stickstoff-Bildung NO und deren Dissoziation. Die Stickoxid-Ionisation NO^+ haben wir mit aufgeführt, obwohl sie beim Wiedereintritt aus dem erdnahen Orbit in der kalorischen Zustandsgleichung (2.16) und damit im Energiesatz (2.10) keinen nennenswerten Beitrag liefert. Sie beschreibt jedoch den für die Telemetrie wichtigen Vorgang des "Blackout". Aufgrund der erhöhten Ionen- und Elektronenkonzentration um die Wiedereintrittskapsel fällt während der Wiedereintrittsphase die Funkverbindung zur Kapsel aus.

Nachdem wir die Luftchemie heißer Gase kurz skizziert haben (ausführliche Be-

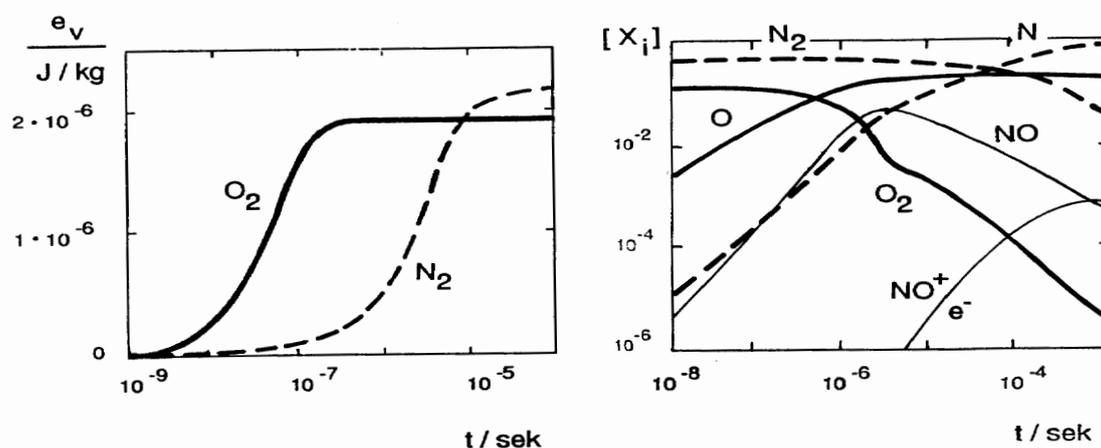


Abb. 2.5: Schwingungsanregung und chemische Relaxation in sprungartig erhitzter Luft ($H = 45$ km, $T = 8500$ K, $p = 1$ bar)

schreibung siehe Kapitel 3.4), kommen wir zum betrachteten Volumenelement hinter dem Verdichtungsstoß zurück. In Abbildung 2.5 sind die molaren Konzentrationen $[X_i]$ der einzelnen Spezies, Anzahl der Mole der Spezies i pro Volumen des Gemisches, als Funktion der Zeit bei der betrachteten momentanen Temperaturerhöhung auf $T = 8500$ K aufgetragen. Entsprechend der Abbildung 2.1 ist zu erwarten, daß die Sauerstoffmoleküle bei der vorgegebenen Temperatur sofort dissoziieren. Entsprechend nimmt die O_2 -Konzentration mit fortschreitender Zeit ab und die O -Konzentration zu. Die Stickstoff-Dissoziation folgt mit einer Zeitverzögerung von zwei Größenordnungen. Damit verbunden steigt die Stickoxidkonzentration NO , deren Dissoziation wiederum nach 10^{-6} Sekunden einsetzt. Etwa zum gleichen Zeitpunkt beginnt die NO -Ionisation die wir bisher nicht betrachtet haben. Die um drei Größenordnungen geringeren Ionen NO^+ und Elektronen e^- -Konzentrationen erreichen zeitverzögert nach 10^{-3} Sekunden ihren Endwert. Die bei der Höhe $H = 45$ km durchgeführte Betrachtung im Volumenelement kann an jedem Ort der Wiedereintrittstrajektorie entsprechend der veränderten thermodynamischen Zustandsänderung über den Stoß wiederholt werden (siehe Kapitel 3.5).

Wir fassen diese erste Diskussion der thermodynamischen Relaxationsvorgänge heißer Luft mit einer Abschätzung der mikroskopisch erforderlichen Stöße pro Partikel (Moleküle bzw. Atome) zusammen, die für die jeweilige thermodynamische Gleichgewichtseinstellung erforderlich sind: Es bedarf im Mittel 3 Stöße pro Partikel für die Gleichgewichtseinstellung der Translation, 3-5 Stöße pro Partikel für die Molekülrotation. Diese Relaxationsvorgänge vollziehen sich innerhalb der Stoßstruktur der Kopfwelle (siehe Kapitel 2.5) und werden deshalb nicht betrachtet. Es bedarf im Mittel 10^3 Stöße pro Partikel für die Gleichgewichtseinstellung der Molekülschwingung und 10^5 Stöße für die Moleküldissoziation. Der zeitlich verzögerte Ablauf der thermodynamischen Gleichgewichtseinstellung führt zu den entsprechenden Schwingungs- und Dissoziationsrelaxationszonen im Strömungsfeld um die Wiedereintrittskapsel.

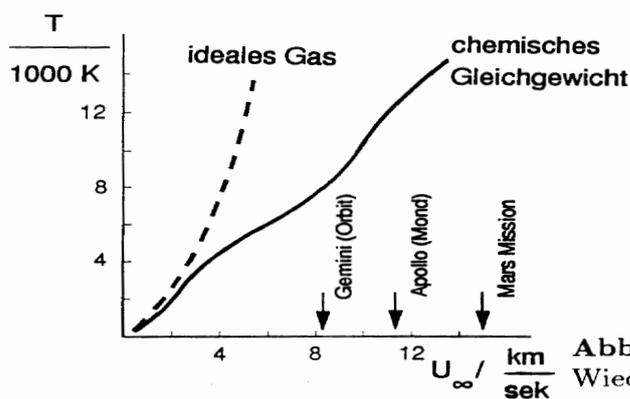


Abb. 2.6: Temperaturerhöhung beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre

Die Abbildung 2.6 ergänzt das vorläufige Bild der Hochtemperatureffekte entlang der Wiedereintrittstrajektorie. Es ist die globale Temperaturerhöhung T hinter der Kopfwelle der Wiedereintrittskapsel als Funktion der Anströmgeschwindigkeit u_∞ für eine Orbital- (7,5 km/s), Mond- (11,3 km/s) bzw. Marsmission (15 km/s) der Wiedereintrittskapsel aufgetragen. Die jeweiligen realen Temperaturerhöhungen in 52 km Höhe der Wiedereintrittstrajektorie betragen unter der Annahme chemischen Gleichgewichts 7500 K, 12000 K bzw. 15500 K. Auch hier zeigt der Vergleich mit dem Modell des idealen Gases, daß die Realgaseffekte für Machzahlen größer als 3 eine drastische Temperaturverringern im Strömungsfeld zur Folge haben.

Letztendlich interessiert den Ingenieur, der das Hitzeschild der Wiedereintrittskapsel auslegt, die durch die Abbremsung in der Erdatmosphäre verursachte Wärmebelastung der Kapsel. Das Prinzipbild der Abbildung 2.7 zeigt die zu diskutierenden Transportvorgänge. Die durch die Kopfwelle aufgeheizte Strömung gibt per Wärmeleitung, Diffusion, Konvektion und Strahlung Energie an die gegenüber dem Strömungsfeld relativ kältere Oberfläche ab. Hinzu kommt die Wärmebelastung durch die Rekombination der Sauerstoff- und Stickstoffmoleküle an der Oberfläche.

Stellt sich auf der Wand eine Gleichgewichtsverteilung gemäß der Wandtemperatur und des dort wirksamen Drucks ein, so wirkt die Wand vollkatalytisch auf die Chemie der Strömungsgrenzschicht. Finden hingegen auf der Kontur keine chemischen Reaktionen statt, also auch keine Rekombination, so bezeichnet man die Wirkung der Wand auf die Chemie der Strömung als nicht-katalytisch. Technische Oberflächen sind weder vollkatalytisch noch nicht-katalytisch, sondern die Wand wirkt teilweise katalytisch auf die Chemie der Strömung. Die Wand beschleunigt wohl die chemischen Reaktionen, aber nicht so stark, daß sich auf der Wand eine Gleichgewichtsverteilung gemäß der Größen p und T einstellt. Durch die Rekombination auf der Wand wiederum wird Energie frei, die teilweise durch die entstehenden Moleküle von der Wand wegtransportiert wird (Diffusion). Ein großer

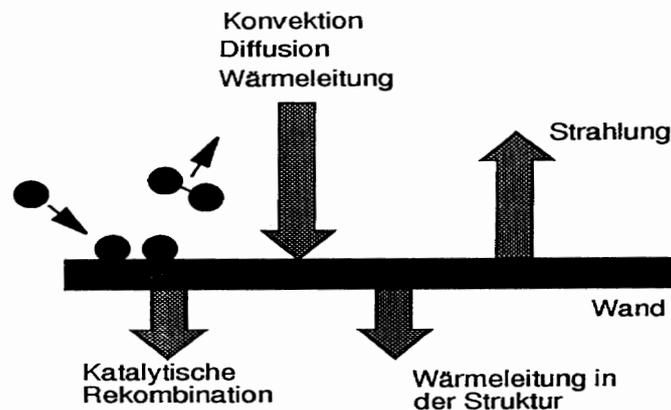


Abb. 2.7: Wärmetransportmechanismen an einem Hitzeschild

Teil der Rekombinationswärme wird jedoch von der Wand aufgenommen, die dadurch zusätzlich aufgeheizt wird. Die Energieabgabe der glühenden Oberfläche des Hitzeschildes erfolgt wiederum per Strahlung in das Strömungsfeld und per Wärmeleitung an die kältere Isolation und Struktur der Wiedereintrittskapsel.

Die Wärmebelastung im Staupunkt der Kapsel läßt sich näherungsweise berechnen. In Abbildung 2.8 ist der Wärmestrom entlang der betrachteten Wiedereintrittstrajektorie aufgetragen. Das Maximum der Wärmebelastung tritt in 45 km Höhe mit 3 MW/m^2 auf. Die Oberflächentemperatur des Hitzeschildes erreicht dort, abhängig vom Material, einen Wert von 2500 K , während die Gastemperatur im Strömungsfeld 8500 K beträgt.

Für Höhen kleiner als 40 km tritt der Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Grenzschichtströmung auf der Wiedereintrittskapsel auf. Aufgrund des erhöhten Impuls- und Energieaustausches in der turbulenten Grenzschicht erhöht sich der Wärmestrom auf die Kapsel, erreicht aber nicht den bereits diskutierten maximalen Wert der Wärmebelastung. Da die Modelle zur Berechnung der Transportvorgänge in turbulenten, heißen Hyperschallgrenzschichtströmungen nicht entwickelt sind, endet unsere Betrachtung der Wiedereintrittstrajektorie in Abbildung 2.8 mit dem durch ein Kreuz bezeichneten Transitionsbereich. Zur Vorhersage der Wärmebelastung werden an den mit einem Punkt in Abbildung 2.8 gekennzeichneten Höhen 120 km , 90 km , 75 km und 45 km numerische Lösungen der Umströmung der Wiedereintrittskapsel in den Kapiteln 4 und 5 bereitgestellt.

2.3 Entropieschichten

Die Entropie $ds = dq/T$ eines Fluidvolumens nimmt über die Kopfwelle der Wiedereintrittskapsel, entsprechend dem Anstieg der übrigen Zustandsgrößen, sprunghaft zu. Dabei ist die Entropieerhöhung entlang der Staustromlinie über den senkrechten Verdichtungsstoß größer als über den schiefen Stoß im gekrümmten Bereich der Kopfwelle. Dies führt zu einer Entropieschichtung im Strömungsfeld zwischen

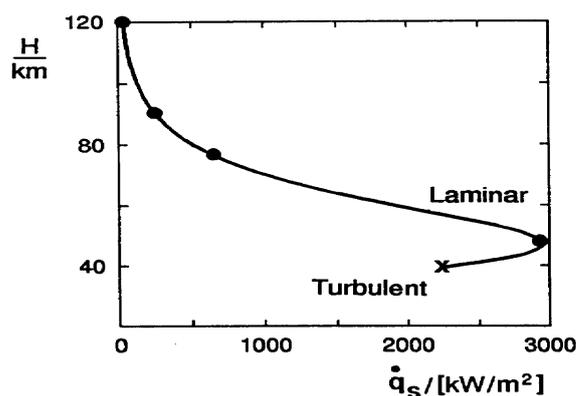


Abb. 2.8: Wärmebelastung im Staupunkt der Wiedereintrittskapsel
 ● Ergebnisse in Kapitel 4 und 5
 × Laminar-turbulenter Übergang

der Kopfwelle und der Kapsel, die sich stromab entlang der Körperkontur auswirkt. Diese Entropieschichtung ist nach dem Satz von L. CROCCO 1937 für reibungsfreie kompressible Strömungen mit einer starken Wirbelstärkeproduktion im Strömungsfeld verbunden. Der Satz von Crocco schreibt sich:

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -T \nabla s \quad . \quad (2.18)$$

∇ bezeichnet den Nabla Operator und \vec{v} den Geschwindigkeitsvektor. Die Entropieschichtung ∇s , verknüpft mit der Temperatur T , ist direkt verbunden mit der Wirbelstärke im Strömungsfeld $\nabla \times \vec{v}$. Die Entropieerhöhung über den senkrechten Stoß ist proportional dem Logarithmus der Anströmmachzahl M_∞^2 :

$$s \sim \ln\left(\frac{\kappa}{2} M_\infty^2\right) \quad . \quad (2.19)$$

Hierin bezeichnet κ das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und c_v . Die Entropieerhöhung Δs wächst also mit $M_\infty^2 \rightarrow \infty$ logarithmisch über alle Grenzen.

Abbildung 2.9 zeigt ergänzend das Prinzipbild der durch die gekrümmte Kopfwelle verursachten Entropieschicht und das qualitative Entropieprofil senkrecht zur Kapseloberfläche. Die Entropie und damit die Wirbelstärke nimmt zur Wand hin stark zu. Dies verursacht im Zusammenhang mit Grenzschichtberechnungen analytische Probleme bezüglich der Randbedingungen am Rand der Grenzschicht. Diesen Sachverhalt gilt es bei der Auswahl der numerischen Simulationsverfahren in Kapitel 5 zu berücksichtigen.

2.4 Grenzschichten

Entlang der Kapseloberfläche bildet sich im kontinuumsmechanischen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie eine Reibungs- und Temperaturgrenzschicht aus. Diese

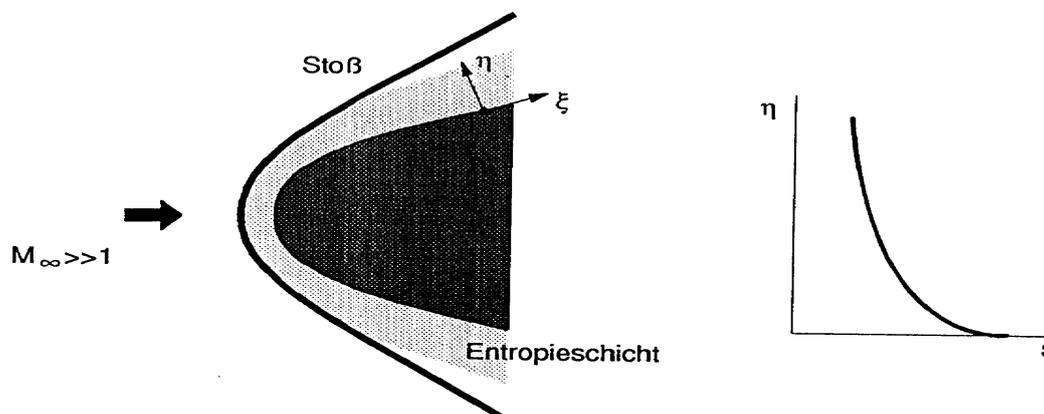


Abb. 2.9: Durch die Krümmung der Kopfwelle verursachte Entropieschicht

wachsen entlang der Oberflächenkoordinate ξ in die Entropiegrenzschicht hinein. Die viskose Grenzschichtdicke δ wächst bei der zu betrachtenden Hyperschall-Grenzschichtströmung entsprechend der Proportionalität

$$\frac{\delta(\xi)}{\xi} \sim \frac{M_\delta^{3/2}}{\sqrt{(Re_\xi)_\delta}} \quad (2.20)$$

$$(Re_\xi)_\delta = \frac{u_\delta \rho_\delta \xi}{\mu_\delta} \quad (2.21)$$

$(Re_\xi)_\delta$ ist die lokale Reynoldszahl am betrachteten Ort der Oberflächenkoordinate ξ gebildet mit der Dichte und der Zähigkeit am Grenzschichttrand. Die Abhängigkeit $1/\sqrt{(Re_\xi)_\delta}$ kennen wir aus den Grundvorlesungen der Strömungsmechanik. Aufgrund der geringen Dichte in der hohen Atmosphäre ist diese Reynoldszahl in großen Höhen trotz der hohen Fluggeschwindigkeit klein. Das bedeutet entsprechend der Gleichung (2.20), daß die Hyperschallgrenzschichten auf der Wiedereintrittskapsel dick sind. Eine weitere Grenzschichtaufdickung wird im Hyperschallbereich durch den Kompressibilitätseinfluß mit der Proportionalität $M_\delta^{3/2}$ verursacht. Dieser Effekt macht sich verstärkt bei schlanken Körpern bemerkbar, da der schiefe Stoß an einem schlanken Körper zu höheren Machzahlen am Grenzschichttrand führt. Die Aufdickung der Grenzschicht im Hyperschall verursacht eine Verdrängungswirkung, die die Geometrie der Wiedereintrittskapsel fiktiv vergrößert und damit die aerodynamischen Parameter der Kapsel beeinflusst. Die relativ zur Strömung kalte Wand wirkt dieser Verdrängungswirkung entgegen, da sie die Dichte in der Grenzschicht erheblich erhöht. In großen Höhen der Wiedereintrittstrajektorie ($H > 80$ km) kann die Grenzschicht mit der Kopfwelle zusammenwachsen, so daß die Bereichseinteilung in reibungsfreie Strömungen (Gasdynamik) und reibungsbehaftete Strömungen (Grenzschichttheorie) nicht mehr möglich ist. Es wird dann von einer viskosen Stoßschicht gesprochen.

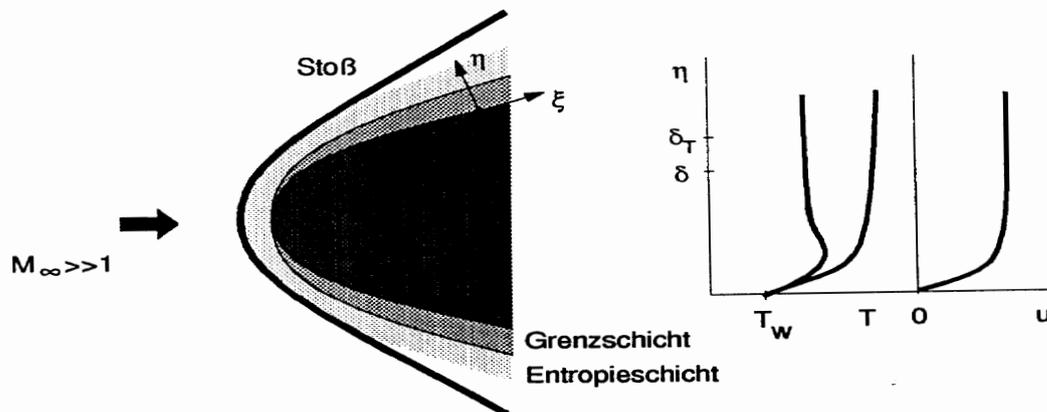


Abb. 2.10: Reibungs- und Temperaturgrenzschicht auf der Wiedereintrittskapsel

Die Temperaturgrenzschicht auf der Wiedereintrittskapsel stellt sich entsprechend der Abbildung 2.10 relativ zur Geschwindigkeitsgrenzschicht nach dem lokalen Wert der Prandtlzahl ein ($Pr = \mu c_p / k$). Die Prandtlzahl ist von der lokalen Gaszusammensetzung abhängig. Sie schwankt in Hyperschallströmungen i.a. zwischen 0,6 und 0,8. Entsprechend ist die thermische Grenzschichtdicke δ_T größer als die Dicke der Reibungsgrenzschicht δ . Der qualitative Temperaturverlauf in der thermischen Grenzschicht variiert mit der Koordinate ξ . Mit zunehmender Lauflänge nimmt die Temperatur am Grenzschichttrand ab. Durch Selbstaufheizung können sich Über-temperaturen innerhalb der Grenzschicht bilden.

2.5 Verdünnungseffekte

Nach unserem Exkurs in die Hyperschall-Kontinuumsmechanik kommen wir zum Bereich der verdünnten Gase in der hohen Atmosphäre oberhalb von 90 km zurück. Im letzten Kapitel haben wir gelernt, daß aufgrund der geringen Dichte die Grenzschichten so groß geworden sind, daß der gesamte Strömungsbereich zwischen Kopf-welle und Wiedereintrittskapsel reibungsbehaftet behandelt werden muß. Der Verdichtungsstoß mit der Dicke von etwa 10 mittleren freien Weglängen $\bar{\lambda}$ (s. Gleichung (2.24)) kommt in die Größenordnung der Kapselgeometrie. So ergibt sich z.B. in

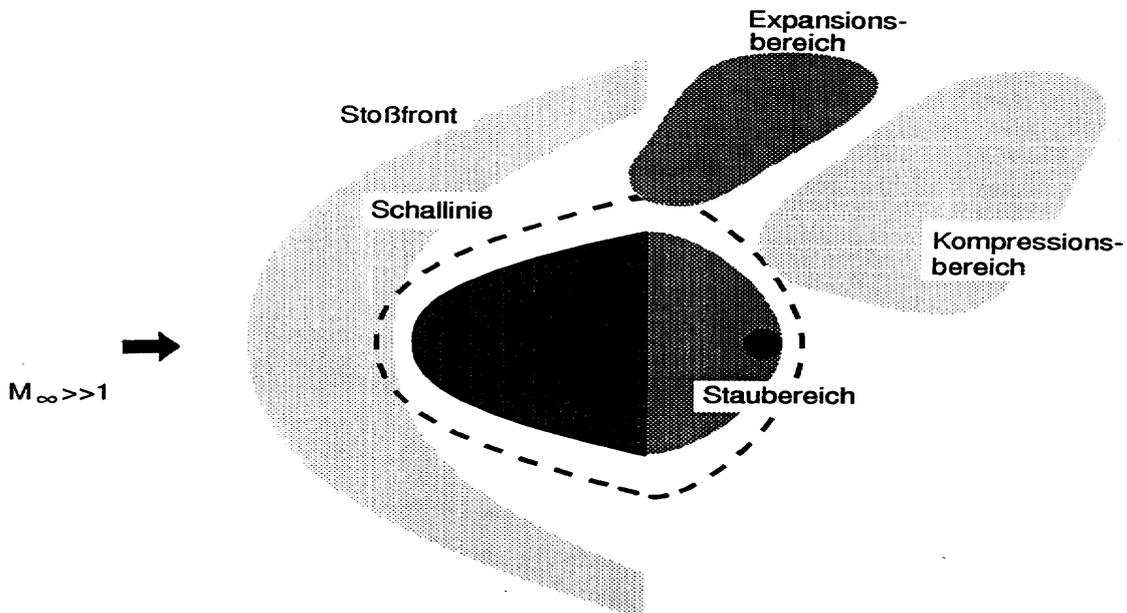


Abb. 2.11: Prinzipbild der Umströmung einer Wiedereintrittskapsel im gaskinetischen Bereich

90 km Höhe bei $\rho = 2,2 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^3$ eine mittlere freie Weglänge von $\bar{\lambda} = 3,6 \text{ cm}$. In 120 km Höhe berechnen wir bei $\rho = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ kg/m}^3$ die mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda} = 3,96 \text{ m}$. Abbildung 2.11 ergänzt die kontinuumsmechanische Prinzipskizze 2.2.

Die thermodynamische Gleichgewichtseinstellung der Molekültranslation und -rotation vollzieht sich in der Stoßfront. Entlang der Staustromlinie, hinter der Stoßfront, erfolgt die Schwingungs- und Dissoziationsrelaxation der Luftmoleküle. Die relaxationsbedingte Temperaturabnahme führt zu einem Maximum der Temperatur hinter der Stoßfront. Die um eine Größenordnung geringere Wandtemperatur wird vom Gas nicht erreicht. Kontinuumsmechanisch betrachtet tritt an der Wand ein regelrechter Temperatursprung auf. Gaskinetisch gesehen nehmen die Moleküle bei ihrer Reflexion an der Wand die Wandtemperatur nicht vollständig an, sondern werden mit einer höheren Temperatur als der Wandtemperatur reflektiert. In Kapitel 4 berechnen wir in 120 km Höhe eine maximale Temperatur von $T = 18500 \text{ K}$ und in 90 km Höhe von $T = 21000 \text{ K}$.

Die Beschleunigung der Strömung auf der Kapsel hat im gaskinetischen Bereich die gleiche Wirkung wie in der Kontinuumsmechanik. Aufgrund der Verdünnungseffekte wandert die Schalllinie vom Körper weg. Der kontinuumsmechanische Expansionsfächer an der Hinterkante der Kapsel verschmiert im gaskinetischen Bereich aufgrund der vergrößerten mittleren freien Weglänge der Moleküle in gleicher Weise wie der Verdichtungsstoß. Es bildet sich im Nachlauf der Kapsel wiederum ein Rückströmgebiet, gefolgt von einem Staubereich.

Es seien in diesem einführenden Kapitel über Verdünnungseffekte einige gaskinetische Grundbegriffe erläutert, die wir bereits in Kapitel 2.1 angedeutet haben und im gaskinetischen Kapitel 4 benötigen werden.

Die mikroskopische Betrachtung der verdünnten Hyperschallströmungen geht von der deterministischen Beschreibung der Bewegung und der Kollisionen der einzel-

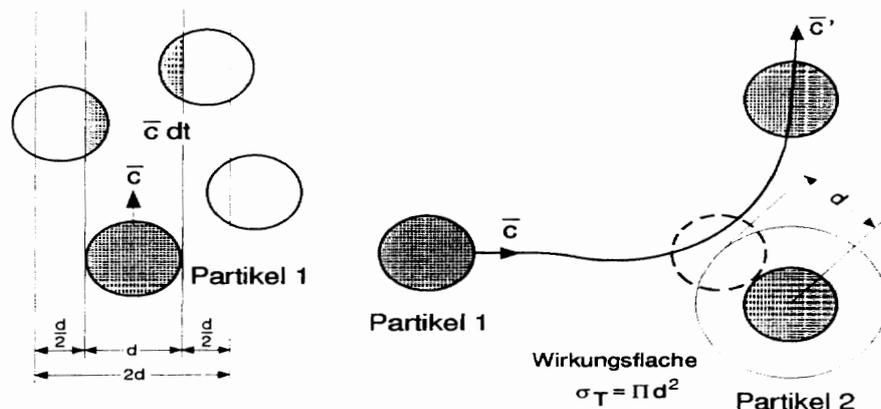


Abb. 2.12: Stoß zweier Partikel, totaler Streuquerschnitt und Prinzipskizze zur Berechnung der Stoßfrequenz

nen Luftmoleküle und Atome aus. Für die Bestimmung der Kollisionen ist die Kenntnis des Wechselwirkungspotentials zwischen den einzelnen Partikeln erforderlich. Bezüglich der detaillierten Beschreibung der Molekülwechselwirkung verweisen wir auf Kapitel 4. An dieser Stelle genügt es uns, die stoßenden Moleküle und Atome als harte Kugeln mit dem Durchmesser d zu behandeln. Entsprechend der Abbildung 2.12 läßt sich der Stoß zweier Partikel mit der Wirkungsfläche $\sigma_T = \pi d^2$ beschreiben, die wir totalen Streuquerschnitt nennen. Die mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$, die ein Teilchen im Mittel bis zum nächsten Stoß zurücklegt, berechnet sich aus dem Verhältnis der mittleren Relativgeschwindigkeit der Partikel \bar{c} und der mittleren Stoßfrequenz $\bar{\nu}$.

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{c}}{\bar{\nu}} \quad (2.22)$$

Die mittlere Stoßfrequenz der Partikel läßt sich mit der Prinzipskizze in Abbildung 2.12 leicht ableiten. Alle Moleküle im betrachteten Zylinder $2d$ bewegen sich mit der Relativgeschwindigkeit \bar{c} . Sie werden von Partikel 1 in der Zeiteinheit dt gestoßen. Insgesamt werden alle Partikel im betrachteten Zeitintervall dt gestoßen, die sich im Kreiszyylinder der Wirkungsfläche πd^2 und der Länge $\bar{c} dt$ befinden. Damit ergeben sich im zeitlichen Mittel $\pi d^2 \bar{c} dt n$ Stöße im Zeitintervall dt mit der Teilchenzahldichte n . Die Stöße pro Zeiteinheit, die gesuchte Stoßfrequenz $\bar{\nu}$, schreibt sich damit:

$$\bar{\nu} = \pi d^2 \bar{c} n \quad (2.23)$$

Die genaue Berechnung der Stoßfrequenz liefert eine Korrektur um den Faktor $\sqrt{2}$. Damit schreibt sich die Gleichung für die mittlere freie Weglänge:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2} \sigma_T n} \quad (2.24)$$

Wir schließen diese Einführung mit der Abschätzung der Stoßfrontdicke D der Kopfzelle ab. Dazu führen wir im Übergangsbereich zwischen Gaskinetik und Kontinuumsmechanik in 90 km Höhe eine einfache Größenordnungsabschätzung des nichtlinearen Trägheitsterms $u \partial u / \partial x$ und des Reibungsterms $\nu \partial^2 u / \partial x^2$ der Navier-Stokes Gleichung durch. Der Trägheitsterm $u \partial u / \partial x$ besitzt die Größenordnung u_∞^2 / D und der Reibungsterm $\nu \partial^2 u / \partial x^2$ die Größenordnung $\nu u_\infty / D$ mit der kinematischen Zähigkeit ν . Wir gehen davon aus, daß der Trägheitsterm und der Reibungsterm in der kontinuumsmechanischen Grundgleichung von gleicher Größenordnung sind. Damit schreibt sich:

$$\frac{u_\infty^2}{D} \sim \nu \frac{u_\infty}{D^2} \quad (2.25)$$

Die kinematische Zähigkeit läßt sich mit den gaskinetischen Größen darstellen:

$$\nu \sim \frac{1}{3} \bar{c} \bar{\lambda} \quad (2.26)$$

Damit ergibt sich für die auf die mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$ bezogene Stoßdicke D :

$$\frac{D}{\bar{\lambda}} \sim \frac{\bar{c}}{u_\infty} \sim \frac{1}{M_\infty} \quad (2.25)$$

Kommen wir zur Abbildung 2.1 zurück, in der die Machzahländerung entlang der Wiedereintrittstrajektorie dargestellt ist. In 90 km Höhe verzeichnen wir das Maximum der Machzahl $M_\infty = 29$. Mit zunehmender Höhe nimmt im gaskinetischen Bereich die Anströmmachzahl ab. Dies ist entsprechend unserer Größenordnungsabschätzung 2.25 mit der bereits diskutierten Aufdickung der Stoßfront verbunden.

3 Aerothermodynamische Grundlagen

3.1 Zustandsgrößen - Zustandsgleichungen

Wir fassen in diesem Kapitel die thermodynamischen Grundgleichungen und Bezeichnungen zusammen, die wir in den folgenden Kapiteln nutzen wollen. Für eine Vertiefung seien erneut die Bücher von J.D. ANDERSON JR. 1982, 1989, H. OERTEL SEN. 1965 und W.G. VINCENTI, CH.H. KRUGER JR. 1965 genannt.

Die thermodynamischen Zustandsgrößen beschreiben den thermodynamischen Zustand eines Gases. Unter der Voraussetzung, daß das Gas in Ruhe und homogen ist, reichen zur Beschreibung des thermodynamischen Zustands zwei thermodynamische Größen, z.B. Dichte ρ und Temperatur T , aus. Die restlichen thermodynamischen Größen sind dann durch die thermischen und die kalorischen Zustandsgleichung festgelegt. Es lassen sich beispielsweise der Druck p und die innere Energie e des Gases als Funktion der Dichte und Temperatur darstellen:

$$\text{Thermische Zustandsgleichung:} \quad p = p(\rho, T) \quad . \quad (3.1)$$

$$\text{Kalorische Zustandsgleichung:} \quad e = e(\rho, T) \quad . \quad (3.2)$$

Es gibt eine Vielzahl von Zustandsgrößen. Nachfolgend sollen die wichtigsten von ihnen aufgelistet werden.

Druck: Der Druck ist eine auf eine Flächeneinheit bezogene Kraft \vec{F} . Sie wirkt senkrecht zur Fläche A .

$$p = \frac{|\vec{F}|}{A} \quad . \quad (3.3)$$

Der Druck ist eine skalare Größe. In einem Gas ist der Druck an jeder beliebigen Stelle in jeder Richtung gleich groß (vgl. Strömungsmechanik I).

Dichte: Die Dichte ist die auf das eingenommene Volumen bezogene Masse. Für einen mit Gas gefüllten Behälter besitzt die Dichte den Wert $\rho = \text{Masse } M \text{ im Behälter} / \text{Volumen } V \text{ des Behälters}$. Wird das Volumen differentiell klein gewählt, dann kann jeder Stelle im Behälter ein Dichtewert zugeordnet werden.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad . \quad (3.4)$$

Temperatur: Für homogene, in Ruhe befindliche Systeme wird die Temperatur aus dem Mittelwert der Translationsenergie der einzelnen Gaspartikel abgeleitet. In einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand ist die Temperatur T wie folgt definiert:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m\bar{c}^2 \quad . \quad (3.5)$$

dabei ist k die Boltzmann-Konstante, m die Masse eines Gaspartikels, \bar{c}^2 der Mittelwert des Geschwindigkeitsquadrats der Gaspartikel.

Innere Energie: Die Moleküle und Atome eines Gases können Energie in Form von Translationsenergie aufnehmen. Moleküle können zusätzlich Energie in Form von Rotations- und Schwingungsenergie speichern. Alle genannten Anteile zusammen machen die innere Energie eines Gases aus. Die innere Energie e schreibt sich:

$$e = \frac{f}{2}RT \quad . \quad (3.6)$$

mit den inneren Freiheitsgraden f der Gasmoleküle, die wir in Kapitel 3.3 einführen werden, und der speziellen Gaskonstanten R . Für die Translation zählen wir $f = 3$ Freiheitsgrade, für die Molekülrotation $f = 2$ und die Molekülschwingung ebenfalls maximal $f = 2$.

Enthalpie: Die Enthalpie ist eine ergänzende Zustandsgröße, die sich aus den bereits eingeführten Zustandsgrößen ergibt und bei der Formulierung des Energiesatzes nützlich ist.

$$h = e + \frac{p}{\rho} \quad . \quad (3.7)$$

Entropie: Die Entropie ist eine weitere Zustandsgröße, die für die Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik erforderlich ist. Mit dem integrierenden Faktor $1/T$ wird mit der folgenden Definitionsgleichung die Wärmeänderung dq zur thermodynamischen Zustandsgröße ds :

$$ds = \frac{dq}{T} \quad . \quad (3.8)$$

Schallgeschwindigkeit: Abschließend sei die Schallgeschwindigkeit a als thermodynamische Zustandsgröße eingeführt, die wir bereits in den vorangegangenen Kapiteln zur Definition der Machzahl benutzt haben:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad . \quad (3.9)$$

Nachdem wir die von uns benutzten thermodynamischen Zustandsgrößen eingeführt haben, folgt die Formulierung der thermodynamischen Zustandsgleichungen.

Thermische Zustandsgleichung

Der Zustand eines Gases oder Gasgemisches, das in einem Volumenelement V unter Druck steht und eine gewisse Temperatur besitzt, wird vollständig durch die Größen Druck und Temperatur beschrieben. Die Dichte des Gases kann mit Hilfe der thermischen Zustandsgleichung (3.1) ermittelt werden:

$$p = nkT \quad . \quad (3.10)$$

In dieser Gleichung wird die intermolekulare Wechselwirkung der Gaspartikel vernachlässigt, d.h. die stoßenden Partikel werden als harte Kugeln betrachtet. Der

Druck ist ausschließlich von der Zahl der Partikel n pro Volumen V , der Boltzmannkonstanten k ($k = 1,38066 \cdot 10^{-28}$ J/K) und der Temperatur T abhängig. Für ein homogenes Einkomponentengas ergibt sich die zu ermittelnde Dichte $\rho = n \cdot m$, mit der Partikelmasse m . Mit der Avogadro-Konstante N_A ($N_A = 6,02214 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$) und

$$\frac{k}{m} = \frac{N_A k}{N_A m} = \frac{\mathfrak{R}}{M} = R$$

schreibt sich die gasspezifische Gaskonstante R als das Verhältnis der allgemeinen Gaskonstante $\mathfrak{R} = 8,314$ J/(mol K) und der Molmasse M . Damit lautet die thermische Zustandsgleichung für ein ideales Gas:

$$p = \rho R T \quad . \quad (3.11)$$

Kalte Luft besteht bekanntlich aus ungefähr 21% Volumenanteilen Sauerstoff und 79% Stickstoff. Nun treten in Wiedereintrittströmungen so hohe Temperaturen auf (bis zu 20000 K), daß die Luft infolge der Erhitzung ihre ursprüngliche Zusammensetzung ändert, also chemisch reagiert. Neben dem molekularen Sauerstoff und Stickstoff sind dann zusätzlich atomarer Sauerstoff und Stickstoff sowie Stickoxid enthalten.

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, daß auch die chemische Zusammensetzung eines homogenen Gases nur eine Funktion von zwei Zustandsgrößen ist. Sind z.B. der Druck p und die Temperatur T eines homogenen Gases bekannt, so können alle Partialdichten der einzelnen Gaskomponenten ermittelt werden. Es schreibt sich für ein Gasgemisch:

$$\bar{\rho} = \sum_i n_i m_i \quad , \quad \bar{m} = \frac{\sum_i n_i m_i}{n} \quad . \quad (3.12)$$

Mit dem Index i werden die Partikel pro Volumen n_i und die Partikelmasse m_i der einzelnen Spezies i des Gasgemisches bezeichnet. Die thermische Zustandsgleichung schreibt sich dann analog zu Gleichung (3.11) für ein Gasgemisch (Gesetz von DALTON $p = \sum_i p_i$)

$$p = \bar{\rho} \bar{R} T \quad . \quad (3.13)$$

Für kalte Luft mit 21% Sauerstoff und 79% Stickstoff ergibt sich mit $M(O_2) = 32$ g/mol, $M(N_2) = 28,016$ g/mol, der Anzahl der Partikel pro Volumen $n_{O_2}/n = 0,21$ und $n_{N_2}/n = 0,79$ die mittlere Molmasse \bar{M} und die spezielle Gaskonstante \bar{R} :

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{n_{O_2}}{n} M_{O_2} + \frac{n_{N_2}}{n} M_{N_2} \quad , \quad \bar{M} = 28,9 \text{ g/mol} \quad . \\ \bar{R} &= \mathfrak{R}/\bar{M} \quad , \quad \bar{R} = 287 \text{ J/(kg K)} \quad . \end{aligned}$$

Für ein dissoziierendes binäres Gas mit dem Dissoziationsgrad α schreibt sich die thermische Zustandsgleichung:

$$p = (1 + \alpha)\rho RT \quad (3.14)$$

mit $\alpha = \frac{n_O}{2n_{O_2} + n_O}$, $\alpha = 0$ keine Dissoziation ,
 $\alpha = 1$ vollständige Dissoziation .

R und ρ sind dabei die Molekülwerte.

Kalorische Zustandsgleichung

Die kalorische Zustandsgleichung (3.2) beschreibt die innere Energie des betrachteten Gases. Die Translationsenergie ϵ_t pro Partikel lautet:

$$\epsilon_t = \frac{m}{2}\bar{c}^2 \quad (3.15)$$

Eine Aussage über den Mittelwert des Quadrats der Geschwindigkeit liefert die Maxwellverteilung, die wir später kennenlernen werden. Damit berechnet sich

$$\bar{c}^2 = \frac{3kT}{m} \quad (3.16)$$

Für die Translationsenergie der Atome pro Masse $e_t = \epsilon_t/m$ ergibt sich mit $R = k/m$:

$$e_t = \frac{3}{2}RT \quad (3.17)$$

Der Vergleich mit Gleichung (3.6) ergibt $f = 3$ Freiheitsgrade für die Translation der Atome.

Betrachten wir die Luftmoleküle O_2 und N_2 , so kommen $f = 2$ Freiheitsgrade für die Rotationsanregung der Moleküle hinzu. Damit schreibt sich die kalorische Zustandsgleichung für ein ideales Molekülgas:

$$e_t = \frac{5}{2}RT \quad (3.18)$$

Wir erkennen, daß die innere Energie für ein ideales Gas ausschließlich eine Funktion der Temperatur T ist. Ein solches Gas wird als kalorisch ideal, oder im angelsächsischen Sprachgebrauch "perfekt", bezeichnet. Die zusätzliche Abhängigkeit von der Dichte ρ (vgl. Gleichung (3.2)) wird sich in der kalorischen Zustandsgleichung erst bei der Berücksichtigung der Dissoziation der Luftmoleküle auswirken. Wir setzen die Diskussion der kalorischen Zustandsgleichung einschließlich der Realgaseffekte in Kapitel 3.3 fort.

3.2 Hauptsätze der Thermodynamik

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz das Wesentliche des ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik zusammenfassen, wobei wir mit dem ersten Hauptsatz beginnen.

Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der erste Hauptsatz besagt, daß die Energie in einem abgeschlossenen System konstant bleibt. Wir betrachten z.B. eine isolierte abgeschlossene Gasmenge in einem Behälter. Das Gas besitzt innere Energie, die der Bewegungsenergie der im Gas enthaltenen Moleküle entspricht. Da das Gas gänzlich von der Umgebung isoliert ist, ändert sich seine innere Energie nicht.

Sie ändert sich allerdings dann, wenn wir dem Gas Wärme oder mechanische Arbeit zuführen. Bezeichnen wir die zugeführte Wärmemenge mit dq , die zugeführte Arbeit mit dA und die Änderung der inneren Energie mit de , so läßt sich der erste Hauptsatz der Thermodynamik wie folgt ausdrücken:

$$\boxed{de = dq + dA} \quad . \quad (3.19)$$

Die dem Gas zugeführte Wärme bzw. die mechanische Arbeit werden mit einem positiven Vorzeichen vor dq bzw. dA berücksichtigt. Wird dem Gas Wärme entzogen bzw. gibt das Gas Energie in Form von Arbeit an die Umgebung ab, so sind die genannten Ausdrücke negativ.

Mit der Volumenänderungsarbeit $p dv = -p d(1/\rho)$ und der Definitionsgleichung der Entropie $ds = dq/T$ läßt sich der erste Hauptsatz in die für die Gasdynamik gebräuchliche Form umschreiben:

$$\begin{aligned} de &= dq - p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad . \\ T ds &= de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Der Energiesatz für den Verdichtungsstoß (2.10) wurde mit der Zustandsgröße Enthalpie h formuliert. Die Definitionsgleichung (3.7)

$$dh = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dp \quad .$$

ergibt mit dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik und der Entropie $ds = dq/T$

$$\boxed{T ds = dh - \frac{dp}{\rho}} \quad . \quad (3.21)$$

Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die Formulierung des zweiten Hauptsatzes geht von der thermodynamischen Zustandsgröße Entropie aus:

$$ds = \frac{dq}{T} \quad (3.22)$$

Wir betrachten zur Verdeutlichung des zweiten Hauptsatzes die Zustandsänderung eines Gases. Nehmen wir zuerst an, daß die Zustandsänderung reversibel verläuft, d.h. es treten in dem Gas keine viskosen und wärmeleitenden Transportvorgänge sowie Nichtgleichgewichtsvorgänge auf. Dann berechnet sich die Änderung der Entropie dq gemäß der Gleichung (3.22).

Betrachten wir nun die reale, irreversible Zustandsänderung des Gases. Im Gas treten also u.a. viskose und wärmeleitende Vorgänge auf. In diesem Fall setzt sich die Änderung der Entropie gemäß der folgenden Formel aus zwei Anteilen zusammen:

$$ds = \frac{dq}{T} + ds_{irrev} \quad (3.23)$$

Die dissipativen Vorgänge erhöhen die Entropie eines Systems um ds_{irrev} . Für ein abgeschlossenes System $dq = 0$ gilt also gemäß der Gleichung (3.23):

$$ds > 0 \quad (3.24)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik schränkt die Möglichkeiten der Zustandsänderungen, die gemäß des ersten Hauptsatzes möglich wären, ein. So wäre es z.B. gemäß des ersten Hauptsatzes möglich, daß ein kaltes Gas Energie mittels Wärmeleitung an ein warmes Gas abgeben würde, also $ds < 0$. Dieser Prozeß ist nach dem zweiten Hauptsatz nicht möglich. Der zweite Hauptsatz schreibt also die Richtung vor, in der ein thermodynamischer Prozeß abläuft.

3.3 Innere Energien heißer Gase

Wir haben bereits die kalorische Zustandsgleichung für die inneren Energien eingeführt. In diesem Abschnitt soll nun erläutert werden, welche Energieformen die Luftmoleküle aufnehmen können.

Translationsenergie und Rotationsenergie

Die Bewegungsenergie der Moleküle und Atome ist eine Energieform der inneren Energie und wird als Translationsenergie bezeichnet. Die Temperatur eines Gases im thermodynamischen Gleichgewicht (Gleich- und Ungleichgewicht werden noch erläutert) ist ein Maß für diese Energieform.

In der Abbildung 3.1 ist das Hantelmodell eines homonuklearen zweiatomigen Moleküls (O_2 , N_2) dargestellt. Es kann Translationsenergie in den drei Achsenrichtungen x , y , z aufnehmen. Zusätzlich könnte das Molekül theoretisch Rotationsenergie um die drei Rotationsachsen aufnehmen. Bezüglich der Translationsanregung behandeln wir die stoßenden Moleküle und Atome als harte Kugeln entsprechend dem Wechselwirkungspotential der Abbildung 3.1, bezüglich der Rotationsanregung der Moleküle als starren Rotator. Dabei ist das Trägheitsmoment Θ des Moleküls um die Längsachse x so klein, daß die Wahrscheinlichkeit der Rotationsanregung um diese Achse verschwindend klein ist. Damit zählen wir

$$\begin{aligned} \text{Translation: } f &= 3, \\ \text{Rotation: } f &= 2 \end{aligned}$$

Freiheitsgrade. Für die innere Energie des Moleküls ergibt sich entsprechend der

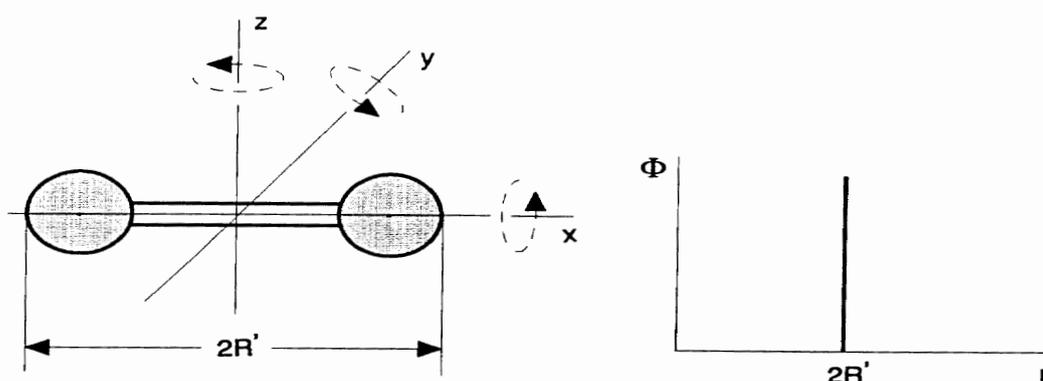


Abb. 3.1: Hantelmodell für die Translations- und Rotationsenergie eines Moleküls

Gleichung (3.6) die kalorische Zustandsgleichung (3.15):

$$e = \frac{f}{2}RT = \frac{5}{2}RT \quad . \quad (3.25)$$

Dieses heuristisch hergeleitete Ergebnis wollen wir mit einem kurzen Exkurs in die statische Gaskinetik und Quantenmechanik untermauern.

Die Moleküle tauschen Translationsenergie durch Stöße aus. Die mittlere Translationsenergie pro Moleküle $\epsilon_t = m/2 \cdot \bar{c}^2$ haben wir bereits eingeführt. Eine Aussage über \bar{c}^2 macht die Maxwell-Verteilung, die thermodynamische Gleichgewichtsverteilung für die Translation (siehe auch Kapitel 4.2.2). Sie bestimmt die Häufigkeit der Partikelgeschwindigkeiten von N Molekülen. Davon haben dN Moleküle eine Geschwindigkeit zwischen $c - dc/2$ und $c + dc/2$. Im thermodynamischen Gleichgewicht gilt für ein ruhendes Gas die folgende statistische Wahrscheinlichkeit der Partikelgeschwindigkeiten:

$$f(c) dc = \frac{dN}{N} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{c}{c_{mp}} \right)^2 \exp \left[- \left(\frac{c}{c_{mp}} \right)^2 \right] \frac{dc}{c_{mp}} \quad . \quad (3.26)$$

mit der häufigsten Geschwindigkeit

$$c_{mp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad . \quad (3.27)$$

Die für die mittlere Translationsenergie gesuchte effektive Partikelgeschwindigkeit \bar{c}^2 ergibt sich aus der Maxwell-Verteilung zu

$$\bar{c}^2 = \frac{3kT}{m} \quad . \quad (3.28)$$

Damit ergibt sich mit der Molekülmasse m entsprechend der Gleichung (3.17) die mittlere Translationsenergie für die Moleküle

$$\epsilon_t = \frac{3}{2}RT \quad . \quad (3.29)$$

Während die Moleküle in einem unbegrenzten Strömungsfeld kontinuierlich Translationsenergie aufnehmen können, gilt dies für die Rotationsanregung nicht mehr. Die Moleküle sind nur in der Lage, in diskreten Energiesprüngen (Quanten) Rotationsenergie ϵ_r aufzunehmen. Die Abbildung 3.2 zeigt die möglichen Rotationsenergieniveaus des N_2 -Moleküls unter der Annahme des in Abbildung 3.1 gezeigten Modells eines starren Rotators. Die Rotationsenergie ϵ_r kann in den folgenden Quantensprüngen j vom Molekül aufgenommen werden:

$$\epsilon_{rj} = \frac{h^2}{8\pi^2\Theta} j(j+1) \quad . \quad (3.30)$$

mit der Rotationsquantenzahl $j = 0, 1, 2, \dots$, dem Planckschen Wirkungsquantum h ($h = 6,6261 \cdot 10^{-34}$ J sek) und dem Trägheitsmoment Θ des Moleküls. Die Energiequantenzahlen in Abbildung 3.2 sind entsprechend der in der Physik gebräuchlichen Einheiten hc ($c = 299792$ km/sec) bzw. Elektronenvolt eV aufgetragen.

Ohne daß wir näher darauf eingehen, entnehmen wir der Quantenmechanik, daß die Wahrscheinlichkeit der Übertragung von Rotationsenergie bei Partikelstößen durch die Boltzmann-Verteilung beschrieben wird. Die Boltzmann-Verteilung macht eine statistische Aussage über die Verteilung der Moleküle dN auf die möglichen diskreten Rotations-Energieniveaus ϵ_r :

$$f(\epsilon_{rj}) = \frac{N(\epsilon_{rj})}{N} = \frac{g_{rj}}{\sigma_r} \exp\left(-\frac{\epsilon_{rj}}{kT}\right) \quad (3.31)$$

σ_r ist die Zustandssumme der Molekülrotation:

$$\sigma_r = \sum_j g_{rj} \exp\left(-\frac{\epsilon_{rj}}{kT}\right) \quad (3.32)$$

summiert wird über alle möglichen diskreten Energieniveaus ϵ_{rj} . Der Summationsindex j ist die Rotationsquantenzahl. g_{rj} bezeichnet den sogenannte Entartungsfaktor, auf den wir nicht weiter eingehen. Für eine Vertiefung empfehlen wir das Buch von W.G. VINCENTI, CH.H. KRUGER JR. 1965

Für das von uns betrachtete Wiedereintrittsproblem gilt $kT \gg \epsilon_r(j=1)/2$. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Zustandssumme σ_r schreiben:

$$\sigma_r = \frac{T}{2\Theta_r} \quad (3.33)$$

mit der charakteristischen Rotationstemperatur

$$\Theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2\Theta k} \quad (3.34)$$

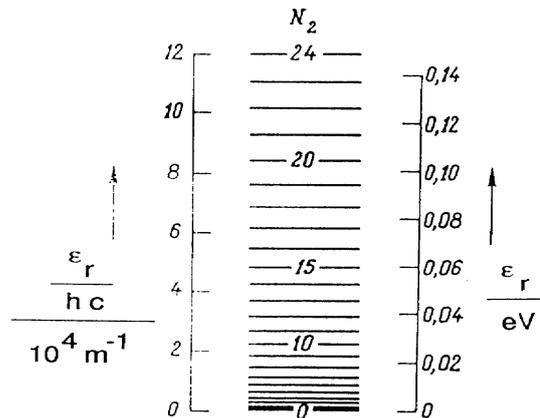


Abb. 3.2: Rotations-Energieniveaus des N_2 -Moleküls für das Modell des starren Rotators

Die Mittelwertbildung über die Boltzmann-Verteilung ergibt die mittlere Rotationsenergie ϵ_r pro Partikel.

$$\epsilon_r = kT \quad . \quad (3.35)$$

Für die Rotationsenergie $\epsilon_r = \epsilon_r/m$ pro Masse schreibt sich:

$$e_r = RT \quad . \quad (3.36)$$

Die Translations- und Rotationsenergie ergibt mit $f = 5$ die kalorische Zustandsgleichung für Moleküle:

$$\begin{aligned} e &= e_t + e_r = \frac{5}{2}RT \quad , \\ h &= \frac{2+f}{2}RT = \frac{7}{2}RT \quad . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Für isentrope Zustandsänderungen ergibt sich die Enthalpie mit der Schallgeschwindigkeit $a^2 = \kappa RT$ und $\kappa = (2+f)/f$ zu

$$h = \frac{f}{2}a^2 \quad . \quad (3.38)$$

Schwingungsenergie

Neben Translations- und Rotationsenergie können die Moleküle zusätzlich wiederum in diskreten Energiequanten Schwingungsenergie aufnehmen. Wir gehen jetzt von dem Modell eines harmonischen Oszillators aus. Abbildung 3.3 zeigt das

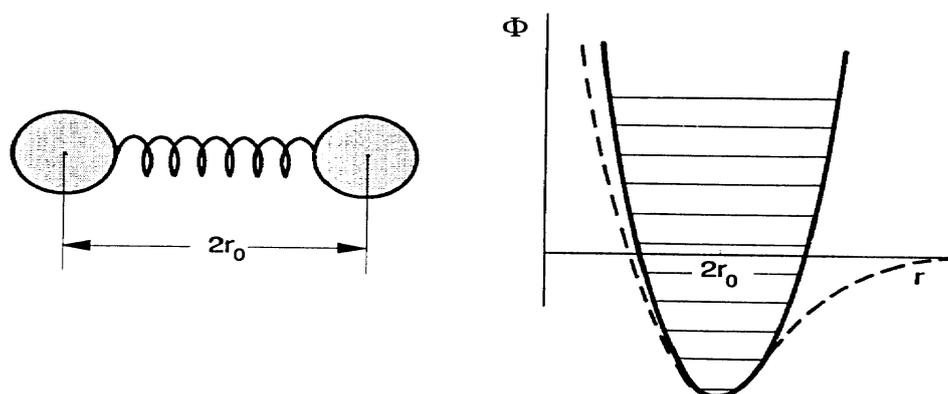


Abb. 3.3: Modell des Harmonischer Oszillators für die Schwingungsenergie eines Moleküls

Federmodell des betrachteten Moleküls und das dazugehörige parabolische Wechselwirkungspotential der beiden beteiligten Atome. Die Energieniveaus sind jetzt, wie in Abbildung 3.4 dargestellt, äquidistant. Dies entspricht nicht der physikalischen Wirklichkeit, sondern ist eine Konsequenz des angenommenen Modells des harmonischen Oszillators.

Bei der Schwingungsanregung wird die Schwingungsenergie ϵ_v vom Molekül mit den äquidistanten Quantensprüngen ν aufgenommen:

$$\epsilon_{vv} = (v + \frac{1}{2})h\nu \quad , \quad (3.39)$$

mit der Schwingungsquantenzahl $v = 0, 1, 2, \dots$ und der Schwingungseigenfrequenz ν ($\nu = 4,7 \cdot 10^{13}$ 1/sek für O_2). Die Partikelstöße sorgen wiederum für die Verteilung der Moleküle auf die möglichen Schwingungsenergieniveaus. Im thermodynamischen Gleichgewicht wird diese Verteilung wiederum durch die Boltzmann-Verteilung beschrieben:

$$f(\epsilon_{vv}) = \frac{N(\epsilon_{vv})}{N} = \frac{g_{vv}}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{\epsilon_{vv}}{kT}\right) \quad , \quad (3.40)$$

σ_v ist die Zustandssumme für die Molekülschwingung

$$\sigma_v = \sum_v g_{vv} \exp\left(-\frac{\epsilon_{vv}}{kT}\right) \quad , \quad (3.41)$$

mit der Schwingungsquantenzahl v . Für die äquidistanten Schwingungs-Ergieniveaus stellt sich σ_v als geometrische Reihe dar. Danach schreibt sich nach Mittelung über die Boltzmann-Verteilung die Schwingungsenergie $e_v = \epsilon_v/2m$ pro Masse

$$e_v = \frac{\Theta_v/T}{\exp\left(\frac{\Theta_v}{T}\right) - 1} RT \quad , \quad (3.42)$$

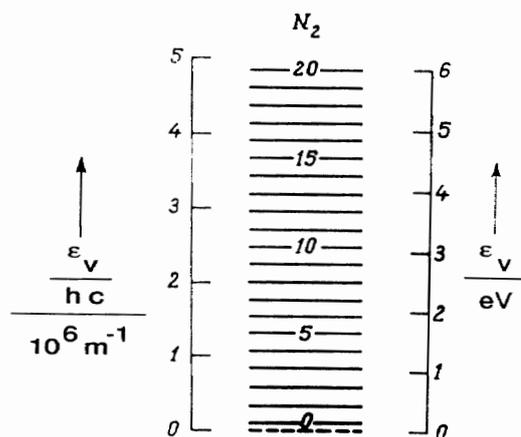


Abb. 3.4: Schwingungs-Ergieniveaus des N_2 -Moleküls für das Modell des harmonischen Oszillators

mit der charakteristischen Schwingungstemperatur

$$\Theta = \frac{h\nu}{k} \quad . \quad (3.43)$$

Der Schwingungsenergie können wiederum zwei weitere Freiheitsgrade f zugeordnet werden, obwohl diese nicht mit Raumrichtungen, Drehachsen oder ähnlichem in Verbindung gebracht werden können. Eine Möglichkeit der Vorstellung besteht aus der Aufteilung der Schwingungsenergie in kinetische und potentielle Energie.

$$\text{Schwingung:} \quad \text{maximal} \quad f = 2 \quad (3.44)$$

$$0 < \epsilon_v < RT \quad (3.45)$$

Bei niedrigen Temperaturen ist die Schwingung der Moleküle kaum angeregt. Erst bei Temperaturen um ungefähr 400 K werden die Freiheitsgrade der Schwingung allmählich angeregt und sind für die O_2 Moleküle bei Temperaturen von ungefähr 2000 K voll angeregt. Bei den N_2 Molekülen erfordert dies bereits Temperaturen von 3000 K.

Die gesamte Energie der Moleküle ergibt sich aus der Summe der Translations-, Rotations- und Schwingungsenergie

$$e = e_t + e_r + e_v \quad . \quad (3.46)$$

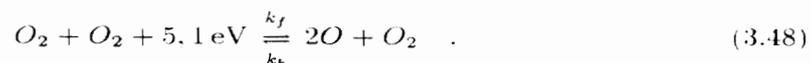
Damit schreibt sich die kalorische Zustandsgleichung für zweiatomige Moleküle:

$$e = \frac{5}{2}RT + \frac{\Theta_v/T}{\exp\left(\frac{\Theta_v}{T}\right) - 1} RT \quad . \quad (3.47)$$

Weitere Energie kann ein Gas durch die Bewegungsenergie der Elektronen aufnehmen. Dieser Anteil der inneren Energie ist im Vergleich mit den bisher behandelten Energieformen verschwindend klein und wird deshalb im folgenden vernachlässigt.

Dissoziation

Die Zustandsgleichung (3.47) setzt voraus, daß das Gas keine dissoziierte Atome besitzt. Nachfolgend wollen wir nun die Zustandsgleichung aufstellen, mit der die innere Energie eines dissoziierten Gases berechnet werden kann. Bei der Dissoziation spaltet sich ein Teil der Moleküle in Atome, wobei Energie verbraucht wird. Die Schwingungsenergieniveaus werden in Abbildung 3.5 bis zur Dissoziationsgrenze angeregt. So muß beispielsweise für die Sauerstoff-Dissoziation eine Bindungsenergie von 5,1 eV aufgebracht werden, bevor die O_2 Moleküle dissoziieren. Dem entspricht eine Gastemperatur von > 2000 K. Die Reaktionsgleichung schreibt sich:



Mit der Dissoziation der Luftmoleküle erhöht sich die Teilchenzahldichte n . Dies haben wir bereits in der thermischen Zustandsgleichung (3.10) berücksichtigt. Die Bildung von Atomen reduziert gegenüber Gleichung (3.47) die innere Energie des Gases. Für die betrachtete Sauerstoff-Dissoziationsreaktion schreiben wir für die innere Energie:

$$e = \frac{n_{O_2} \bar{\epsilon}_{O_2} + n_O \bar{\epsilon}_O}{n_{O_2} m_{O_2} + n_O m_O} \quad , \quad (3.49)$$

mit den Teilchenzahldichten der Sauerstoff-Moleküle und Atome n_{O_2} , n_O , den gemittelten Partikelenergien $\bar{\epsilon}_{O_2}$ und $\bar{\epsilon}_O$ und den Partikelmassen m_{O_2} , m_O der Sauerstoff-Moleküle und Atome.

Mit den mittleren Partikelenergien

$$\bar{\epsilon}_{O_2} = \frac{3}{2}kT + kT + \epsilon_v(T) \quad , \quad (3.50)$$

$$\bar{\epsilon}_O = \frac{3}{2}kT + \frac{\epsilon_D}{2} \quad , \quad (3.51)$$

der Bindungsenergie ϵ_D und der charakteristischen Temperatur Θ_D/k ergibt sich die kalorische Zustandsgleichung für dissoziierte zweiatomige Moleküle:

$$e = \frac{(5 + \alpha)}{2}RT + (1 - \alpha)e_v(T) + \alpha R\theta_D \quad , \quad (3.52)$$

mit dem Dissoziationsgrad α der jeweils betrachteten dissoziierten Luftmoleküle.

Betrachten wir alle Spezies i heißer Luft entsprechend des Reaktionsschemas (2.17) schreiben sich die Energieanteile der jeweiligen Moleküle und Atome

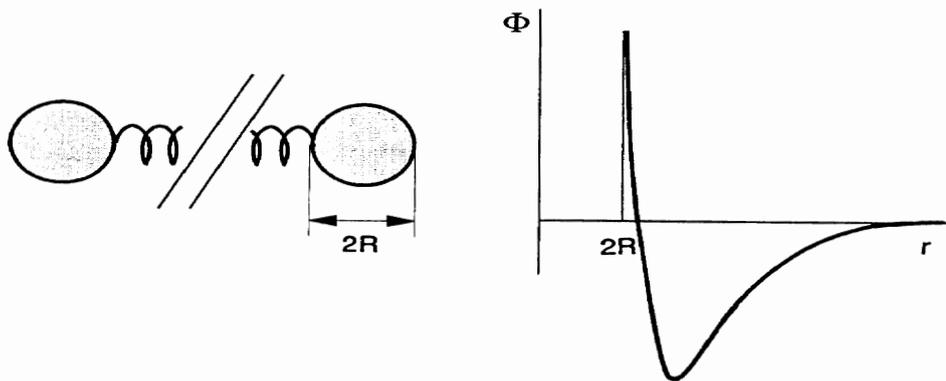
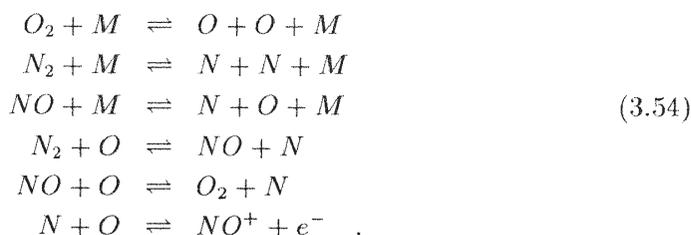


Abb. 3.5: Dissoziation der O_2 - und N_2 -Moleküle

$$e = \sum_{\text{Moleküle}} \frac{\rho_i}{\rho} \cdot \left(\frac{5}{2} R_i T + \frac{\Theta_{vi}/T}{\exp\left(\frac{\Theta_{vi}}{T}\right) - 1} R_i T \right) + \sum_{\text{Atome}} \frac{\rho_i}{\rho} \cdot \left(\frac{3}{2} R_i T + R_i \theta_{Di} \right) . \quad (3.53)$$

3.4 Chemische Prozesse in heißer Luft

Nachdem wir die inneren Energien heißer Gase diskutiert haben, gilt es nun die Chemie heißer Luft im Detail einzuführen. Wie in den vorangegangenen Kapiteln bereits beschrieben, gehen wir davon aus, daß heiße Luft aus den Gaskomponenten O_2 , N_2 , NO , NO^+ , O , N und e^- besteht. Dann lassen sich die chemischen Prozesse, die in heißer Luft beim Wiedereintritt von erdnahen Umlaufbahnen ablaufen, ausreichend genau entsprechend Kapitel 2.2 mit den folgenden chemischen Reaktionen beschreiben:



Die ersten drei chemischen Reaktionen beschreiben die Dissoziation von O_2 , N_2 und NO . M steht für jede der sieben Gaskomponenten, die in heißer Luft auftreten. Mit der Schreibweise der ersten drei Gleichungen der Gleichungen (3.54) werden also jeweils sieben Reaktionen ausgedrückt.

Die Dissoziation bzw. die Rekombination des Gases ist der energetisch dominante Vorgang während des Wiedereintritts. Aufgrund der hohen Temperaturen ist die Translationsgeschwindigkeit der Moleküle groß und beim Zusammenstoß eines Moleküls mit einem anderen Teilchen wird, wenn der Stoß stark genug ist, das Molekül entsprechend Abbildung 3.5 in Atome aufgespalten.

Entlang der Wiedereintrittstrajektorie beginnt bei Temperaturen über 2000 K zuerst der Sauerstoff zu dissoziieren. Er ist bei einer Temperatur von 4000 K nahezu vollständig dissoziiert. Der Stickstoff dissoziiert erst bei wesentlich höheren Temperaturen. Ab ungefähr 4000 K setzt die Dissoziation ein. Wir haben bereits gelernt, daß bevor ein Molekül dissoziiert, es vorher durch Zusammenstöße mit anderen Teilchen zum Schwingen angeregt wird. Wir kommen auf den Zusammenhang zwischen der Schwingungsanregung und der Dissoziation im nächsten Kapitel noch einmal zurück.

Die Sauerstoffdissoziation läuft vornehmlich über die Reaktionen $O_2 + M \rightleftharpoons O + O + M$ ab. Hingegen wird der atomare Stickstoff nicht vornehmlich, wie man zunächst

annehmen könnte, über die Stickstoffdissoziationsreaktion gebildet, sondern über die Austauschreaktionen $N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$ und $NO + O \rightleftharpoons N + O_2$. Das gebildete NO zerfällt dann weiter über die NO -Dissoziation in N und O .

Mit Ausnahme der Ionisation des Stickoxids werden Ionisationsreaktionen vernachlässigt, da sie wegen der kleinen Partialdichten beim Wiedereintritt aus erdnahen Umlaufbahnen energetisch keine Rolle spielen. Das Stickoxid ist das Molekül, das zuerst ionisiert, wenn Luft erhitzt wird. Anhand des Einsetzens der Ionisation kann der Beginn des "Blackout" auf der Wiedereintrittstrajektorie vorhergesagt werden. Unter dem Blackout versteht man die Unterbrechung des Funkkontakts des Fluggeräts mit der Bodenstation, der durch die Ionisierung verursacht wird.

Nachdem wir die chemischen Reaktionen aufgelistet und erläutert haben, stellt sich die Frage, wie schnell sie im Gas ablaufen (auf welchen Zeitskalen) und wie die Partialdichten der Gaskomponenten entsprechend der chemischen Reaktionen berechnet werden können. Diese Fragen werden im nächsten Kapitel unter Einführung der

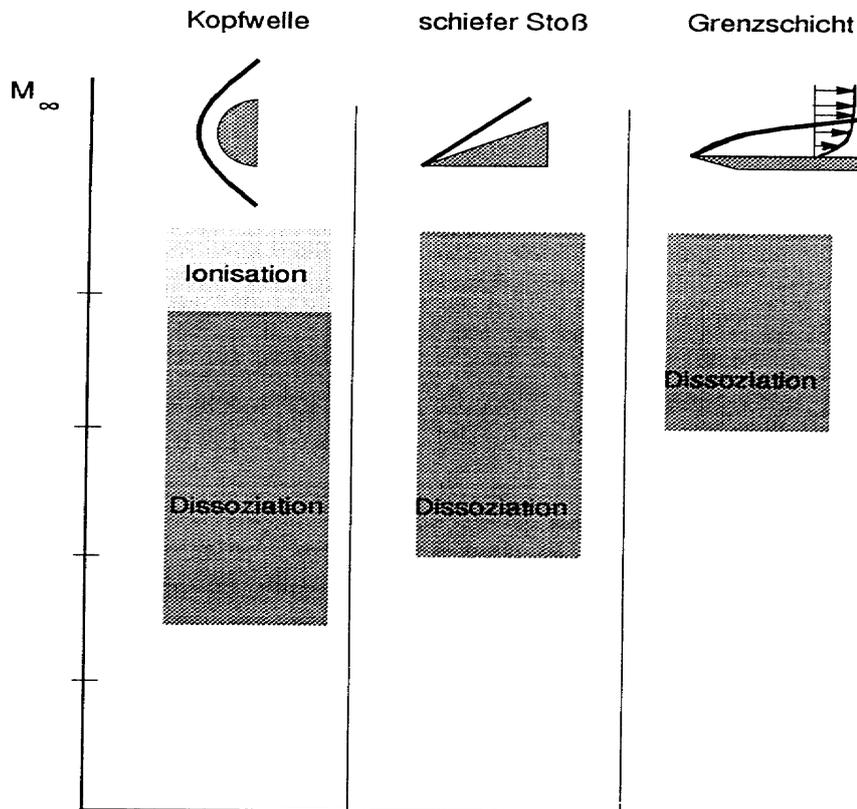


Abb. 3.6: Bereiche der Dissoziation und Ionisation für die Kopfwelle, den schiefen Verdichtungsstoß und die Grenzschichtströmung

neuen Begriffe “chemisches Gleichgewicht” und “chemisches Nichtgleichgewicht” beantwortet.

3.5 Thermodynamisches Nichtgleichgewicht

In diesem Kapitel berücksichtigen wir, daß die thermodynamische Gleichgewichtseinstellung der inneren Energieanregung Zeit bedarf. In Kapitel 2.2 haben wir bereits kennengelernt, daß es einer bestimmten Anzahl von Partikelstößen bedarf, bis sich die Maxwell- bzw. Boltzmann-Gleichgewichtsverteilung der Translation bzw. der Rotation und Schwingung einstellt. Dem entspricht im Strömungsfeld zwischen Kopfwelle und Wiedereintrittskapsel ein thermodynamischer Nichtgleichgewichtsbereich, den wir Relaxationszone nennen. Von einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand sprechen wir, wenn die Verteilung der Partikel auf die möglichen Energieniveaus mit der Maxwell- beziehungsweise Boltzmannverteilung beschrieben werden können.

Wir betrachten das Fluidelement der Abbildung 3.7 unmittelbar vor und hinter dem Verdichtungsstoß auf der Staustromlinie. Es wird wie die gesamte Strömung über den Stoß erhitzt und komprimiert. Nehmen wir der Einfachheit halber zunächst an, daß sich die Temperatur (konkret die Translationstemperatur des Gases) und der Druck in der Stoßschicht entlang der Staustromlinie nicht ändern.

Die schlagartige Erhitzung über den Stoß ist gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Translationsenergie der Moleküle. Durch Kollisionen der Partikel werden die übrigen Freiheitsgrade der Moleküle (Rotation und Schwingung) angeregt. Die vollständige Anregung der Freiheitsgrade benötigt Zeit, in der das Fluidelement weiter stromab wandert. Die Strömung befindet sich im thermodynamischen Nichtgleichgewicht.

Nun gerät die Rotationsenergie innerhalb von fünf Molekülstößen ins Gleichgewicht mit der Translationsenergie, so daß wir für die kontinuumsmechanischen

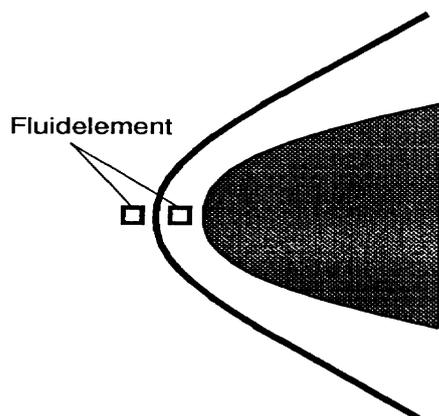


Abb. 3.7: Volumenelement vor und hinter einem Stoß

Strömungssimulationen die Translationsenergie als im Gleichgewicht mit der Rotationsenergie annehmen können.

Für die vollständige Anregung der Schwingungsenergie sind allerdings mindestens 1000 Stöße erforderlich. Die Strömungssimulationen in Höhen oberhalb von 80 km müssen deshalb unter Berücksichtigung der Nichtgleichgewichtseffekte der Schwingungsenergie durchgeführt werden. In niedrigeren Höhen kann sie als im Gleichgewicht befindlich mit der Translationsenergie angenommen werden. Sie berechnet sich dann gemäß Gleichung (3.42).

Die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie für den thermodynamischen Nichtgleichgewichtsbereich entlang der Staustromlinie bleiben wie im thermodynamischen Gleichgewicht erhalten (Gleichungen (2.8) - (2.10)). Im Gegensatz zum thermodynamischen Gleichgewichtszustand ist die Enthalpie $h(p, \rho, e_{vi})$ jetzt zusätzlich eine Funktion der Schwingungsenergie e_{vi} der betrachteten Spezies i . Diese berechnet sich unter der Annahme eines harmonischen Oszillators mit der linearen Schwingungsrelaxationsgleichung:

$$\frac{de_{vi}}{dt} = \frac{e_{vi}^{eq} - e_{vi}}{\tau_{vi}}, \quad (3.55)$$

dabei ist e_{vi} die Schwingungsenergie der O_2 -, N_2 - bzw. NO -Moleküle. τ_{vi} die Schwingungsrelaxationszeit ($\tau_{vO_2} = 9 \cdot 10^{-8}$ sek. $\tau_{vN_2} = 4,5 \cdot 10^{-6}$ sek in 45 km Höhe) und e_{vi}^{eq} die Schwingungsenergie im Gleichgewicht, gebildet mit der Translations- und Rotationsenergie. Die Schwingungsrelaxationsgleichung ist eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung, die am betrachteten Ort der Relaxationszone die jeweilige Abweichung vom thermodynamischen Gleichgewichtszustand beschreibt.

Da die thermodynamische Gleichgewichtseinstellung der Translation und Rotation innerhalb von fünf Stößen pro Partikel abgeschlossen ist, die Molekülschwingung jedoch 10^3 Stöße pro Partikel bedarf, können wir von dem in Abbildung 3.8 skizzierten Modell der Schwingungsrelaxationszone entlang der Staustromlinie ausgehen. Vom ungestörten Anfangszustand vor dem Verdichtungsstoß mit der Schwingungsenergie $e_{v\infty} = 0$ kommen wir über die Stoßstruktur (etwa $10 \bar{\lambda}$) in einen thermo-

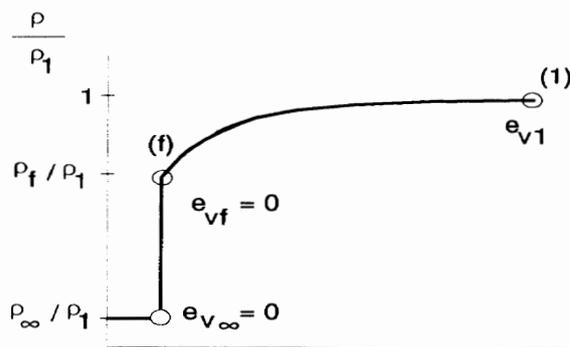


Abb. 3.8: Schwingungsrelaxationszone

dynamischen Zwischenzustand, den wir als gefrorenen Zustand (f) bezüglich der Schwingungsanregung bezeichnen. Im Zustand (f) befindet sich die Translation und Rotation im Gleichgewicht mit der Schwingungsenergie $e_{vf} = 0$, die Dichte springt in der Stoßfront auf den Wert ρ_f . In der darauf folgenden Schwingungsrelaxationszone steigen die Dichte ρ und die Schwingungsenergie kontinuierlich an, bis der Gleichgewichtszustand mit der Schwingungsenergie e_{v1} erreicht wird.

Bis zu diesem Punkt haben wir nur von einer Temperatur, der Gleichgewichtstemperatur gesprochen. Sobald Relaxationsprozesse auftreten, können den einzelnen Anteilen der inneren Energie jeweils eine eigenen Temperatur zugeordnet werden. Entsprechend der Definitionsgleichungen (3.37) und (3.42) wird von nun ab der Translations- und Rotationsenergie gemeinsam die Translationstemperatur T_t und der Schwingungsenergie die Vibrationstemperatur T_v zugeordnet. D.h. mit dem Anwachsen der Schwingungsenergie wächst die Vibrationstemperatur von Null bis zum Gleichgewichtswert kontinuierlich an. Im thermodynamischen Gleichgewicht sind die Translationstemperatur und die Vibrationstemperatur identisch.

In Abbildung 3.9 ist ergänzend zum Dichteverlauf ρ der Druck p und die Enthalpie h qualitativ aufgetragen, die in der Relaxationszone ebenfalls kontinuierlich anwachsen. Die Translationstemperatur und die Geschwindigkeit u fallen hinter dem Verdichtungsstoß entlang der Staustromlinie von ihrem gefrorenen Wert bis zum Gleichgewichtszustand ab. D.h. die Schwingungsenergie nimmt auf Kosten der Translations- und Rotationsenergie zu. Dabei haben wir den Körper im Strömungsfeld zunächst nicht berücksichtigt.

Eine entsprechende Betrachtung kann für die Dissoziationsrelaxationszone der Luftmoleküle durchgeführt werden. Wir betrachten die Luftchemie im Fluidelement der Abbildung 3.7 zunächst für eine Molekülsorte i . Da die thermodynamische Gleichgewichtseinstellung der Dissoziation 10^5 Stöße pro Partikel bedarf, kann man entsprechend der Abbildung 3.10 wiederum einen gefrorenen Zustand (f) einführen, in dem sich die Schwingungsenergie e_{vi} im Gleichgewicht befindet, der Dissoziationsgrad α aber noch $\alpha = 0$ ist. Erst in der darauf folgenden Relaxationszone steigt die Dichte erneut bis zum endgültigen Gleichgewichtszustand (1) an.

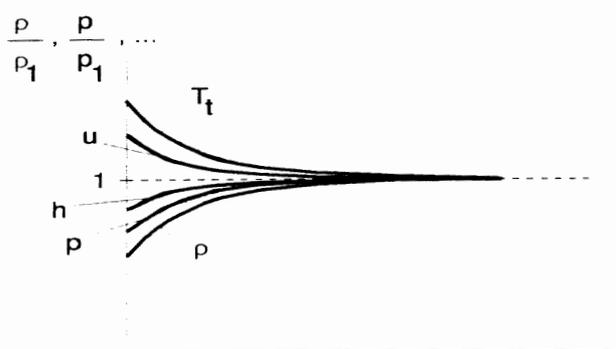
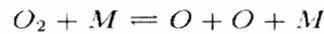


Abb. 3.9: Temperatur-, Geschwindigkeits-, Enthalpie-, Druck- und Dichteverläufe in der Schwingungsrelaxationszone

Diese Betrachtung am Fluidelement entlang der Staustromlinie wird auf das dreidimensionale Strömungsfeld um die Wiedereintrittskapsel nicht direkt übertragbar sein, da in Wirklichkeit das dreidimensionale Strömungsfeld mit den Relaxationsvorgängen gekoppelt sein werden. Dennoch erlaubt uns die Einteilung in unterschiedliche Relaxationszonen eine Bereichseinteilung in thermodynamische Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsgebiete, die wir in Kapitel 4 und 5 nutzen werden. Abbildung 3.11 ergänzt qualitativ die Abbildung 2.1 bezüglich der thermodynamischen Bereichseinteilung. In großen Höhen ($H > 100$ km) der Erdatmosphäre ist beim Wiedereintritt der Kapsel aufgrund der geringen Dichte in der Atmosphäre die Luftchemie gefroren. In geringen Höhen ($H < 30$ km) kann die Schwingungsrelaxation und die Luftchemie im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet werden. Auch im thermodynamischen Nichtgleichgewichts-Zwischenbereich kann im Strömungsfeld um die Wiedereintrittskapsel eine weitere Bereichseinteilung vorgenommen werden, auf die in den Abbildungen 4.1 und 5.1 eingegangen wird.

Wir wollen nun die Sauerstoffdissoziation genauer betrachten. Das Gas des Fluidvolumens wird erhitzt und die Sauerstoffdissoziationsreaktion



läuft von links nach rechts schneller ab als in die entgegengesetzte Richtung. Die O -Atome vermehren sich. Obwohl noch immer weitere Teilchen dissoziieren, rekombiniert ein Teil der O -Atome wieder zu Molekülen. Ab einem gewissen Zeitpunkt ist die O -Konzentration im Gas so groß, daß die Anzahl der Moleküle, die dissoziieren, gleich der Anzahl der durch Rekombination gebildeten Moleküle ist. Dann ist die Sauerstoffdissoziationsreaktion im Gleichgewicht. Sie läuft in beiden Richtungen gleich schnell ab.

Wir wollen nun die Gleichungen aufstellen, mit denen wir die zeitlichen Änderungen der chemischen Zusammensetzung im Fluidvolumen berechnen können. Dabei behalten wir die Annahme bei, daß sich die Translationstemperatur und der Druck hinter dem Stoß kaum ändern. Die molare $[O]$ -Konzentrationsvermehrung schreibt

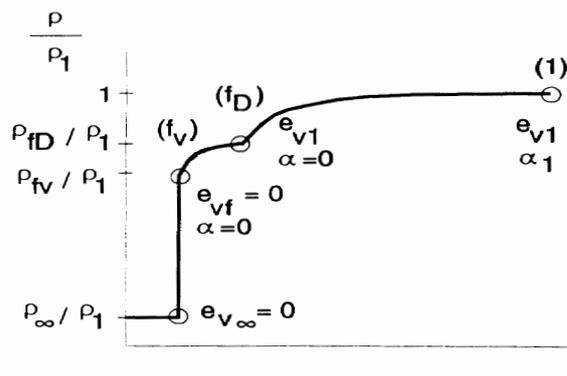


Abb. 3.10: Dissoziationsrelaxationszone

sich gemäß der Formel:

$$\frac{d[O]}{dt} = \sum_i^n 2 \cdot k_f \cdot [O_2] \cdot [M_i] \quad . \quad (3.56)$$

Die molare Konzentration $[O]$ wird in Mol der Spezies O pro Volumen des Gemisches gemessen. k_f ist der Geschwindigkeitskoeffizient der Vorwärtsreaktion (Index f für forward), der nur eine Funktion der Translations- und Vibrations- und Rotationstemperatur T_t und T_v ist. Gleichzeitig läuft die Reaktion auch von rechts nach links ab, so daß sich die gesamte $[O]$ -Konzentrationsänderung gemäß der Gleichung

$$\frac{d[O]}{dt} = \sum_i^n 2 \cdot k_f \cdot [O_2] \cdot [M_i] - 2 \cdot k_b \cdot [O]^2 \cdot [M_i] \quad (3.57)$$

mit der Konzentration $[M_i]$ der jeweiligen Stoßpartner angegeben läßt. In der Gleichung (3.57) steht k_b für den Geschwindigkeitskoeffizienten der Rückwärtsreaktion (Index b für backward).

Wir wollen nun die Gleichung (3.57) für beliebige chemische Reaktionen, die mit der Formel

$$\sum_i^m \nu_i' \cdot X_i = \sum_i^m \nu_i'' \cdot X_i \quad (3.58)$$

geschrieben werden können, verallgemeinern. In der Gleichung (3.58) stehen ν_i' und ν_i'' für die stöchiometrischen Koeffizienten und X_i für die verschiedenen Spezies. Verallgemeinern wir nun die Gleichung (3.57), so erhalten wir die folgende Gleichung zur Berechnung der Änderungen der Molkonzentration $[X_j]$:

$$\frac{d[X_j]}{dt} = (\nu_j'' - \nu_j') \cdot \left\{ k_f \cdot \prod_i [X_i]^{\nu_i'} - k_b \cdot \prod_i [X_i]^{\nu_i''} \right\} \quad . \quad (3.59)$$

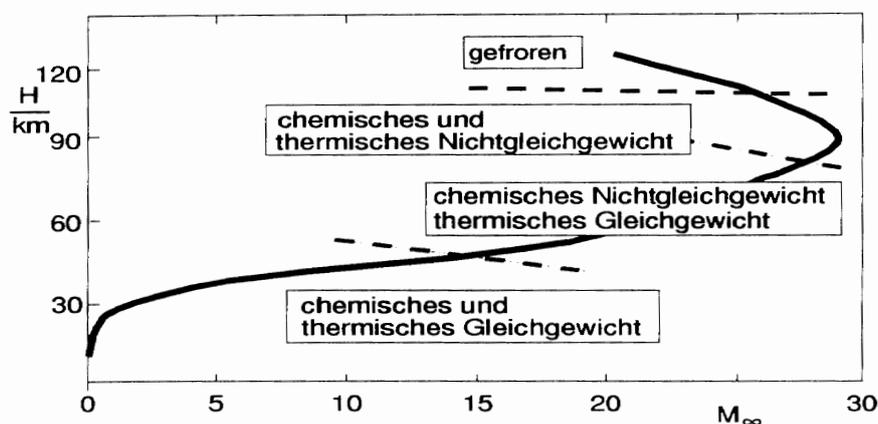


Abb. 3.11: Thermodynamische Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsbereiche beim Wiedereintritt in die Erdatmosphäre

Berücksichtigen wir darüberhinaus, daß im Gas nicht nur eine Reaktion abläuft, sondern mehrere, so erhalten wir als endgültige Gleichung zur Berechnung der Molkonzentrationsänderungen:

$$\frac{d[X_j]}{dt} = \sum_{k=1}^r \left((\nu_j'' - \nu_j') \cdot \left\{ k_f \cdot \prod_i [X_i]^{\nu_i'} - k_b \cdot \prod_i [X_i]^{\nu_i''} \right\} \right) \quad (3.60)$$

r steht für die Anzahl der im Gas ablaufenden Reaktionen.

Die Geschwindigkeitskoeffizienten k_f und k_b berechnen sich, wie wir bereits zuvor gelernt haben, mit dem erweiterten Arrheniusansatz

$$k_{f/b} = A \cdot T^S \cdot e^{-C/T} \quad (3.61)$$

Die Konstanten A , S und C müssen experimentell bestimmt werden (vgl. CH. PARK 1985, 1989). Sie sind mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Auf eine Möglichkeit, wie diese Unsicherheiten bei der numerischen Simulation berücksichtigt werden können, wird im nächsten Kapitel erörtert.

Mit der Gleichung (3.60) kann für jede Gaskomponente, die in dem Fluidelement enthalten ist, eine gewöhnliche Differentialgleichung aufgestellt werden. Würde die getroffene Annahme, daß sich die Temperatur in der Stoßschicht nicht ändert, richtig sein, so könnten wir die chemische Zusammensetzung des Fluidelements mit Hilfe des so erhaltenen Differentialgleichungssystems an jeder Stelle auf der Staustromlinie berechnen, vorausgesetzt wir kennen die Temperatur und die Geschwindigkeit der Strömung entlang dieser Linie.

Im allgemeinen ändern sich jedoch die Temperatur und der Druck im Strömungsfeld, so daß die chemische Berechnung gekoppelt mit der Strömungsberechnung durchgeführt werden muß. Wir kommen in den späteren Kapiteln auf dieses Problem zurück.

Abschließend wollen wir noch ein Gas im chemischen Gleichgewicht betrachten. Wir haben bereits erwähnt, daß diese Betrachtung nur eine Näherung darstellen kann, und daß diese Betrachtung nur dann sinnvoll ist, wenn der chemische Prozeß im Gas im Vergleich zu den Strömungsänderungen schnell abläuft. Wie wir nachfolgend sehen werden, liegt der Vorteil in der Vereinfachung des chemischen Modells.

Wenn die Chemie des Fluidvolumens im Gleichgewicht ist, gilt für die zeitlichen Änderungen der einzelnen molaren Konzentrationen $[X_i]$:

$$\frac{d[X_i]}{dt} = 0 \quad (3.62)$$

Wenden wir diese Beziehung für die O_2 -Dissoziationsreaktion mit einem beliebigen Stoßpartner $[M_i]$ an, erhalten wir die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot k_f \cdot [O_2] \cdot [M_i] - 2 \cdot k_b \cdot [O]^2 \cdot [M_i] \quad , \\ \implies K_{C,O_2}(T_t) &=: \frac{k_f(T_t)}{k_b(T_t)} = \frac{[O]^2}{[O_2]} \quad . \end{aligned} \quad (3.63)$$

K_{C,O_2} wird als Gleichgewichtskonstante bezüglich der Konzentration bezeichnet. Sie ist nur eine Funktion der Temperatur (Gleichgewichtstemperatur).

Für die restlichen Reaktionen können analoge Gleichungen aufgestellt werden. Wir wollen hier nur die entsprechenden Gleichungen für die N_2 - und NO -Dissoziationsreaktionen sowie für die Reaktion $N+O \rightleftharpoons NO^+ + e^-$ aufstellen (die entsprechenden Gleichungen für die Austauschreaktionen werden nicht benötigt). Die Gleichungen lauten:

$$K_{C,N_2} = \frac{[N]^2}{[N_2]} \quad K_{C,NO} = \frac{[N] \cdot [O]}{[NO]} \quad K_{C,N+O} = \frac{[NO^+] \cdot [e^-]}{[O] \cdot [N]} \quad . \quad (3.64)$$

Zur Bestimmung der sieben Unbekannten $[O_2]$, $[N_2]$, $[NO]$, $[NO^+]$, $[O]$, $[N]$ und $[e^-]$ haben wir bis jetzt mit den Gleichungen (3.63) und (3.64) vier Beziehungen. Wir benötigen also noch drei weitere Gleichungen.

Eine weitere Gleichung ergibt sich aus der Erhaltung der Ladung im Gas. Es wird angenommen, daß lokal zu jedem NO^+ -Teilchen ein freies Elektron existiert. Damit werden elektrische Ströme vernachlässigt. Weiterhin bleibt das Verhältnis der Sauer- und Stickstoffatomkerne des betrachteten Fluidteilchens konstant, das sich aus der Gaszusammensetzung der Zuströmung ergibt. Mit dieser Annahme wird der Einfluß der Diffusion vernachlässigt. Dies ist gerechtfertigt, da Sauerstoff und Stickstoff ähnliche Molekulargewichte und Kollisionsquerschnitte besitzen. Es gelten also zusätzlich die beiden folgenden Gleichungen:

$$[NO^+] = [e^-] \quad , \quad (3.65)$$

$$\frac{2 \cdot [N_2] + [N] + [NO] + [NO^+]}{2 \cdot [O_2] + [O] + [NO] + [NO^+]} = \eta_0 \quad , \quad (3.66)$$

η_0 ist eine bekannte Konstante, die sich, wie bereits gesagt, aus der Gaszusammensetzung der Zuströmung ergibt. Es fehlt nun noch eine weitere Gleichung. Da für jede Spezies die thermische Zustandsgleichung gilt, berechnet sich der Gesamtdruck als Summe der Partialdrücke gemäß ($p = \sum_i p_i$):

$$p = ([O_2] + [N_2] + [NO] + [NO^+] + [O] + [N] + [e^-]) \cdot \mathfrak{R}T \quad . \quad (3.67)$$

Mit den Gleichungen (3.63) bis (3.67) haben wir sieben Gleichungen zur Bestimmung der sieben Unbekannten ($[O_2]$, $[N_2]$, $[NO]$, $[NO^+]$, $[O]$, $[N]$ und $[e^-]$) zur Verfügung. Wir sehen mit den Gleichungen unsere frühere Aussage bestätigt, daß der vollständige Gaszustand mit der Festlegung von zwei Zustandsgrößen (in diesem Fall von p und T_t) eindeutig bestimmt ist, sofern sich das Gas im thermodynamischen Gleichgewicht befindet.

Die Annahme, daß sich das Gas im Gleichgewicht befindet, bietet den Vorteil, daß die chemische Zusammensetzung aus einem algebraischen, allerdings nichtlinearen Gleichungssystem berechnet werden kann. Es müssen keine umfangreichen Differentialgleichungen, wie für den Nichtgleichgewichtszustand, integriert werden. Allerdings ist die Gleichgewichtsannahme, nur in niedrigen Flughöhen (Höhen klei-

ner 45 km) ausreichend genau erfüllt, da nur bei höheren Gasdichten genügend Kollisionen zur Gleichgewichtseinstellung zwischen den Partikeln stattfinden.

Bisher sind wir von der Betrachtung entlang der Staustromlinie (Abbildung 3.7) ausgegangen und haben die Molekül-Rotation, Schwingung und Dissoziation mit den separaten Modellen des starren Rotators, des harmonischen Oszillators behandelt. Gleichzeitig werden die Partikel bei Gleichgewichtseinstellung der Translationsenergie als harte Kugeln betrachtet. Dies können nur vereinfachte Modelle sein, um die einzelnen physikalischen Prozesse beim Wiedereintritt einzuführen. In Wirklichkeit müßten wir das reale Wechselwirkungspotential der Molekül-, Atom-, Ionen- und Elektronen-Wechselwirkung berücksichtigen, das die Quantenmechanik nur in Ansätzen entwickelt hat. Wir müßten die Luftchemie für jedes mögliche Schwingungsenergieniveau des nichtharmonischen Oszillators betrachten. Einen ersten Eindruck über die sich daraus ergebenden Reaktionsgleichungen gibt Abbildung 3.12, ohne daß wir auf die Details der realen Reaktionskinetik, die der Chemiker heute beherrscht, eingehen wollen. Das vollständige Reaktionsgleichungssystem

Reaktion (Energie in J)	Reaktionsratenkoeffizient ($m^3 / (Molekül \text{ sek})$)
$O_2 + N + 8.197 \times 10^{-19} \rightarrow 2O + N$	$1.375 \times 10^{-10} T^{-1} \exp(-59370/T)$
$O_2 + NO + 8.197 \times 10^{-19} \rightarrow 2O + NO$	$4.58 \times 10^{-11} T^{-1} \exp(-59370/T)$
$O_2 + N_2 + 8.197 \times 10^{-19} \rightarrow 2O + N_2$	$4.58 \times 10^{-11} T^{-1} \exp(-59370/T)$
$2O_2 + 8.197 \times 10^{-19} \rightarrow 2O + O_2$	$4.58 \times 10^{-11} T^{-1} \exp(-59370/T)$
$O_2 + O + 8.197 \times 10^{-19} \rightarrow 3O$	$1.375 \times 10^{-10} T^{-1} \exp(-59370/T)$
$N_2 + O + 1.561 \times 10^{-18} \rightarrow 2N + O$	$1.85 \times 10^{-8} T^{-1.6} \exp(-113000/T)$
$N_2 + O_2 + 1.561 \times 10^{-18} \rightarrow 2N + O_2$	$6.17 \times 10^{-9} T^{-1.6} \exp(-113000/T)$
$N_2 + NO + 1.561 \times 10^{-18} \rightarrow 2N + NO$	$6.17 \times 10^{-9} T^{-1.6} \exp(-113000/T)$
$2N_2 + 1.561 \times 10^{-18} \rightarrow 2N + N_2$	$6.17 \times 10^{-9} T^{-1.6} \exp(-113000/T)$
$N_2 + N + 1.561 \times 10^{-18} \rightarrow 3N$	$1.85 \times 10^{-8} T^{-1.6} \exp(-113000/T)$
$NO + N_2 + 1.043 \times 10^{-18} \rightarrow N + O + N_2$	$3.83 \times 10^{-13} T^{-0.5} \exp(-75550/T)$
$NO + O_2 + 1.043 \times 10^{-18} \rightarrow N + O + O_2$	$3.83 \times 10^{-13} T^{-0.5} \exp(-75550/T)$
$NO + NO + 1.043 \times 10^{-18} \rightarrow N + O + NO$	$3.83 \times 10^{-13} T^{-0.5} \exp(-75550/T)$
$NO + O + 1.043 \times 10^{-18} \rightarrow N + 2O$	$7.66 \times 10^{-13} T^{-0.5} \exp(-75550/T)$
$NO + N + 1.043 \times 10^{-18} \rightarrow 2N + O$	$7.66 \times 10^{-13} T^{-0.5} \exp(-75550/T)$
$NO + O + 2.19 \times 10^{-19} \rightarrow N + O_2$	$3.6 \times 10^{-22} T^{1.29} \exp(-19700/T)$
$N_2 + O + 5.175 \times 10^{-19} \rightarrow N + NO$	$5.3 \times 10^{-17} T^{0.1} \exp(-37500/T)$
$O_2 + N + 2.19 \times 10^{-19} \rightarrow O + NO$	$5.2 \times 10^{-22} T^{1.29} \exp(-3600/T)$
$NO + N + 5.175 \times 10^{-19} \rightarrow O + N_2$	$2.02 \times 10^{-17} T^{0.1} \exp(-3600/T)$
$N + O + 4.422 \times 10^{-19} \rightarrow NO + e$	$2.55 \times 10^{-20} T^{0.37} \exp(-32030/T)$
$O + e + 2.18 \times 10^{-18} \rightarrow O + 2e$	$3 \times 10^{-12} \exp(-157900/T)$
$O + O + 1.12 \times 10^{-18} \rightarrow O_2 + e$	$6.42 \times 10^{-22} T^{0.49} \exp(-81100/T)$
$O_2 + e + 1.12 \times 10^{-18} \rightarrow O + O$	$3.83 \times 10^{-9} T^{-1.51} \exp(-18760/T)$
$O + O + 2.57 \times 10^{-19} \rightarrow O + O_2$	$1.89 \times 10^{-16} T^{-0.52} \exp(-18760/T)$
$O + O_2 + 2.57 \times 10^{-19} \rightarrow O + O_2$	$1.89 \times 10^{-16} T^{-0.52} \exp(-18760/T)$
$N + N_2 + 1.67 \times 10^{-19} \rightarrow N + N_2$	$1.67 \times 10^{-17} T^{-0.18} \exp(-12100/T)$
$O + NO + 7.04 \times 10^{-19} \rightarrow O + NO$	$4.58 \times 10^{-17} T^{0.01} \exp(-51000/T)$
$N + N + 9.34 \times 10^{-19} \rightarrow N_2 + e$	$2.98 \times 10^{-20} T^{0.77} \exp(-67650/T)$
$N + e + 2.33 \times 10^{-18} \rightarrow N + 2e$	$1 \times 10^{-14} \exp(-168800/T)$
$O + NO + 7.04 \times 10^{-19} \rightarrow O + N_2$	$1.97 \times 10^{-17} T^{0.01} \exp(-22160/T)$
$O + N_2 + 3.06 \times 10^{-19} \rightarrow O + N_2$	$1.06 \times 10^{-16} T^{-0.21} \exp(-22160/T)$
$N_2 + e + 9.34 \times 10^{-19} \rightarrow N + N$	$8.88 \times 10^{-10} T^{-1.23} \exp(-168800/T)$
$NO + e + 4.42 \times 10^{-19} \rightarrow N + O$	$4.03 \times 10^{-9} T^{-1.63} \exp(-168800/T)$
$N_2 + N + 1.66 \times 10^{-19} \rightarrow N + N_2$	$2.37 \times 10^{-18} T^{-0.52} \exp(-168800/T)$
$N_2 + O + 3.15 \times 10^{-19} \rightarrow O + N_2$	$1.77 \times 10^{-17} T^{-0.21} \exp(-168800/T)$
$N + NO + 8.43 \times 10^{-19} \rightarrow N + NO$	$1.84 \times 10^{-15} T^{-0.02} \exp(-61060/T)$
$N + NO + 8.43 \times 10^{-19} \rightarrow N + NO$	$1.84 \times 10^{-15} T^{-0.02} \exp(-61060/T)$
$O_2 + NO + 4.47 \times 10^{-19} \rightarrow NO + O_2$	$1.72 \times 10^{-14} T^{-0.17} \exp(-32400/T)$
$NO + N + 4.47 \times 10^{-19} \rightarrow NO + N$	$4.47 \times 10^{-15} T^{-0.17} \exp(-32400/T)$
$N + NO + 4.9 \times 10^{-19} \rightarrow O + N_2$	$2.83 \times 10^{-17} T^{0.4} \exp(-35500/T)$
$O + N_2 + 4.9 \times 10^{-19} \rightarrow N + NO$	$4.1 \times 10^{-18} T^{0.4} \exp(-35500/T)$

Abb. 3.12: Ausschnitt aus dem Reaktionsgleichungssystem heißer Luft

stem umfaßt mehr als 1000 Reaktionen. Als vertiefende Lektüre empfehlen wir das Lehrbuch von J. WARNATZ und U. MAAS 1993.

An dieser Stelle des Lehrbuchs ist es erforderlich, die notwendige pragmatische Vorgehensweise des Ingenieurs verständlich zu machen. Letztendlich interessiert uns in diesem Lehrbuch die ingenieurmäßige Vorhersage des Wärmestroms auf die Wiedereintrittskapsel um ein Entwurfswerkzeug für die neu entwickelten Hitzeschildmaterialien (siehe Kapitel 6.4.3) bereitstellen zu können. Dazu dienen numerische Lösungsmethoden der gaskinetischen und kontinuumsmechanischen Grundgleichungen, in die das chemische Modell praktikabel und effizient integriert werden muß. Dies ist nicht mit 1000 chemischen Reaktionen erreichbar, deren Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizienten nur auf Größenordnungen genau theoretisch bestimmt werden können und experimentell nur bezüglich einzelner chemischer Reaktionen zugänglich sind. Aus diesen Gründen beschränken wir uns für dieses Lehrbuch auf das vereinfachte chemische Modell mit 7 Spezies. Die Reaktionsraten werden mit Hilfe eines vereinfachten Zweitemperaturmodells berechnet, das unseren Ingenieursanforderungen entspricht.

Wie die Bezeichnung "Zweitemperaturmodell" bereits ausdrückt, werden die chemischen Prozesse in Abhängigkeit von der Translations- und der Vibrationstemperatur, die für alle Moleküle identisch ist, berechnet. In der Formel (3.60) sind die Geschwindigkeitskoeffizienten k_f der Dissoziationsreaktionen Funktionen der beiden genannten Temperaturen, da die Dissoziation durch die Schwingungsanregung der Moleküle bestimmt wird. Die Geschwindigkeitskoeffizienten k_b der Rekombination wiederum hängen nur von der Translations- und Vibrationstemperatur ab.

Die Geschwindigkeitskoeffizienten k_f der Austauschreaktionen sind ebenfalls Funktionen der Translations- und Vibrationstemperatur. Die Rückwärtskoeffizienten k_b hängen nur von der Translations- und Vibrationstemperatur ab, da die durch die Vorwärtsreaktion gebildeten Moleküle nur sehr wenig Schwingungsenergie aufnehmen.

3.6 Methode der Sensitivitätsanalyse

In den vorangehenden Kapiteln haben wir gelernt, daß die chemischen Prozesse im Gas durch die Geschwindigkeitskoeffizienten und Gleichgewichtskonstanten bestimmt werden. Diese Konstanten werden experimentell ermittelt oder sind sogar nur aus Experimenten abgeleitet. Sie sind deshalb sehr ungenau bekannt. Es fehlen bis heute immer noch ausreichend genaue experimentelle Daten, um die Luftchemie, insbesondere die Chemie bei extrem hohen Temperaturen (größer als 7000 K), genau bestimmen zu können. Die in der Literatur von unterschiedlichen Experimentatoren angegebenen Daten unterscheiden sich um bis zu ungefähr zwei Größenordnungen.

Beschränken wir uns auf die chemischen Reaktionen (2.17), so haben wir bei Strömungssimulationen 24 Geschwindigkeitskoeffizienten und sieben Gleichgewichtskonstanten für die chemische Modellierung zu berücksichtigen. Wir wollen nun

herausfinden, welche Konstanten die chemischen Prozesse bestimmen und wie groß der Einfluß ihrer eventuellen Ungenauigkeiten ist. Dafür ist eine mathematische Technik entwickelt worden, die in der Literatur als Sensitivitätsanalyse bezeichnet wird, und die nun nachfolgend erklärt werden soll.

Wir kommen wieder auf die Betrachtung des in Abbildung 3.7 dargestellten Fluidelements zurück. Wenn es sich über die Kopfwelle bewegt, wird es, schlagartig erhitzt und komprimiert. Während der weiteren Bewegung ändert sich seine chemische Zusammensetzung. Der chemische Relaxationsprozeß wird mit dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \frac{d[x_1]}{dt} &= f_1([x_1], \dots, [x_7], k_{f,1}, \dots, k_{f,n}, K_{C,1}, \dots, K_{C,m}) \\
 \frac{d[x_2]}{dt} &= f_2([x_1], \dots, [x_7], k_{f,1}, \dots, k_{f,n}, K_{C,1}, \dots, K_{C,m}) \\
 \frac{d[x_3]}{dt} &= f_3([x_1], \dots, [x_7], k_{f,1}, \dots, k_{f,n}, K_{C,1}, \dots, K_{C,m}) \\
 \frac{d[x_4]}{dt} &= f_4([x_1], \dots, [x_7], k_{f,1}, \dots, k_{f,n}, K_{C,1}, \dots, K_{C,m}) \\
 0 &= f_5([x_1], \dots, [x_7]) \\
 0 &= f_6([x_1], \dots, [x_7]) \\
 0 &= f_7([x_1], \dots, [x_7]) \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

das im allgemeinen aus gewöhnlichen Differentialgleichungen und algebraischen Gleichungen besteht, beschrieben. Die Differentialgleichungen ergeben sich aus der Formel (3.60). Nun könnte man für jede Gaskomponente eine Differentialgleichung aufstellen und man hätte damit genügend Gleichungen, um den chemischen Prozeß zu berechnen. Es ist jedoch sinnvoll, ein Teil der Differentialgleichungen durch algebraische Gleichungen zu ersetzen, da durch sie das Gleichungssystem einfacher und schneller zu lösen ist. Eine mögliche algebraische Gleichung, die eine Differentialgleichung ersetzt, lautet z.B.

$$[NO^+] = [e^-] \quad . \tag{3.69}$$

Sie beinhaltet das Gesetz von der Erhaltung der Ladung im Gas. Für jedes NO^+ -Teilchen gibt es ein Elektron im Gas. Auf weitere algebraische Gleichungen wird zu einem späteren Zeitpunkt noch eingegangen.

Kommen wir nun wieder auf das Gleichungssystem (3.68) zurück, das wir zusammenfassend wie folgt schreiben können:

$$\underline{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \Theta) \quad . \tag{3.70}$$

\mathbf{u} steht für die molaren Konzentrationen und Θ für die Geschwindigkeitskoeffizienten und Gleichgewichtskonstanten, von denen wir den Einfluß ihrer eventuellen Ungenauigkeiten auf die chemische Modellierung bestimmen wollen. $\underline{\mathbf{E}}$ entspricht der Matrix

$$\begin{pmatrix}
 \underline{\mathbf{I}}^s & \vdots & \mathbf{0} \\
 \dots & \dots & \dots \\
 \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0}
 \end{pmatrix} \quad .$$

in der \mathbf{I}^s wiederum die Einheitsmatrix mit dem Rang s ist (in diesem Fall $s = 4$).

Als Maß für den Einfluß eines Koeffizienten K mit dem Index $j - K$ kann ein Geschwindigkeitskoeffizient k_f oder auch eine Gleichgewichtskonstante K_C sein – auf eine molare Konzentration mit dem Index i führen wir den Sensitivitätsparameter W_{ij} ein. Er ist wie folgt definiert:

$$W_{ij} = \frac{\partial [x_i]}{\partial K_j} \quad (3.71)$$

Mit der nun nachfolgenden Rechnung wollen wir ein Gleichungssystem zur Bestimmung der W_{ij} erhalten. Dazu differenzieren wir das Gleichungssystem (3.70) partiell nach Θ . Damit erhalten wir:

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \Theta} + \mathbf{u}' \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \Theta} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Theta} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta} \quad (3.72)$$

In der Gleichung (3.72) ist $\partial \mathbf{E} / \partial \Theta = \mathbf{0}$. Bezeichnen wir die Jacobi-Matrix $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}$ mit \mathbf{J} und berücksichtigen, daß

$$\mathbf{W}' = \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \Theta}, \quad \mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Theta}$$

gilt, erhalten wir mit der Gleichung (3.72) die folgende Gleichung für \mathbf{W} :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{W}'(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \Theta} + \mathbf{J}(t) \cdot \mathbf{W} \quad (3.73)$$

Das Gleichungssystem (3.73) kann in der Zeit integriert werden und man erhält als Lösung die Matrix $\mathbf{W}(t)$. Die Matrix enthält die einzelnen $W_{ij}(t)$, die den Einfluß einer Konstanten K_j mit auf eine molare Konzentration $[x_i]$ in Abhängigkeit von der Zeit angeben.

Wir diskutieren die Lösung des Gleichungssystems (3.73) anhand des Weg-Zeit Diagramms des Fluidelement der Abbildung 3.7. Die Lösung bezieht sich auf eine Wiedereintrittsströmung in 45 km Höhe bei einer Machzahl $M_\infty = 20$. In einer

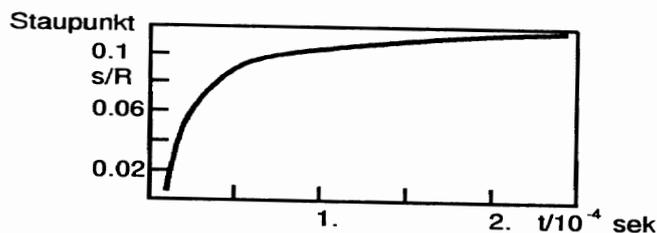


Abb. 3.13: Weg-Zeit Diagramm eines Teilchens entlang der Staustromlinie

solchen Strömung wird das Fluidelement über den Stoß hinweg auf ungefähr 8500 K erhitzt und auf ungefähr 0,65 bar komprimiert.

In der Abbildung 3.13 ist die Wegkoordinate des Teilchens zwischen dem Stoß und dem Staupunkt über der Zeit aufgetragen. Das Fluidteilchen benötigt ungefähr $3 \cdot 10^{-4}$ sek bis es dicht an den Staupunkt gelangt. In der Abbildung 3.14 sind die zugehörigen zeitlichen Verläufe der Sensitivitätsparameter $W_{N,1}$ und $W_{O,1}$ dargestellt. Der Index 1 kennzeichnet den Geschwindigkeitskoeffizienten der Reaktion



d.h. wir betrachten den zeitlichen Einfluß des Geschwindigkeitskoeffizienten k_f der zuletzt genannten Reaktion auf die molare N - und O -Konzentration.

Der Verlauf des Sensitivitätsparameters bezüglich der O -Konzentration besitzt ein wesentlich größeres Maximum als der Verlauf des Sensitivitätsparameters bezüglich der N -Konzentration. Das erstgenannte Maximum liegt bei ungefähr $5 \cdot 10^{-5}$ sek und das zweite bei 10^{-4} sek.

Ordnet man den beiden Maxima gemäß des Zeit-Weg Diagramms einen Ort zwischen Stoß und Staupunkt zu, so ist zu erkennen, daß der betrachtete Geschwindigkeitskoeffizient unmittelbar hinter dem Stoß sensitiv auf die O -Konzentration wirkt, weiter stromab die O -Konzentration jedoch kaum noch beeinflußt. Im Gegensatz dazu beeinflußt der Geschwindigkeitskoeffizient im gesamten Bereich zwischen Stoß und Staupunkt die N -Konzentration. Die Erklärung liegt darin, daß der Sauerstoff hinter dem Stoß wesentlich schneller dissoziiert als der Stickstoff. Die Konzentrationen des atomaren und molekularen Sauerstoffs befinden sich praktisch im Gleichgewicht. Nahe dem Gleichgewicht geht der Betrag des Sensitivitätsparameters per Definition gegen Null.

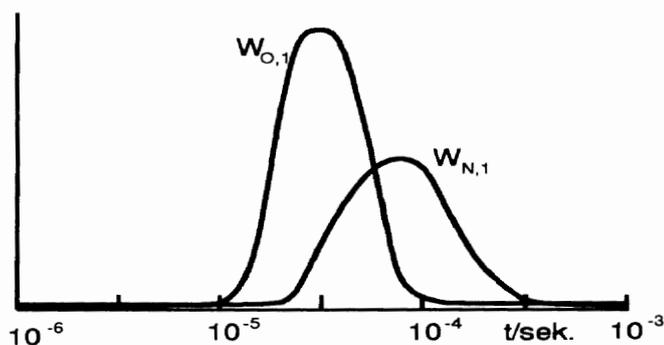


Abb. 3.14: Sensitivitätsparameter bezüglich der N - und O -Konzentration in 45 km Höhe bei $M_\infty = 20$

Wenn also mit einer Strömungssimulation die molaren O - und N -Konzentrationen einer Wiedereintrittsströmung in 45 km Höhe bei der Machzahl $M_\infty = 20$ bestimmt werden sollen, dann muß der Geschwindigkeitskoeffizient der Reaktion $NO + N = N + O + N$ genau bekannt sein.

4 Verdünnte Strömungen

4.1 Phänomene

Beim Wiedereintritt in die hohe Erdatmosphäre durchfliegt die Wiedereintrittskapsel, wie in Abbildung 1.3 und 2.1 dargestellt, zunächst den Bereich freier Molekülströmung und dann den Übergangsbereich zur Kontinuumströmung. Bei Flugkörpern mit einer charakteristischen Länge von einem Meter liegt der Übergangsbereich oberhalb etwa 90 km Höhe. In diesem Bereich ist die Strömung einerseits durch die hohe Fluggeschwindigkeit, andererseits durch die geringe Gasdichte gekennzeichnet. Die hohe Geschwindigkeit bewirkt eine starke Temperaturerhöhung und das Einsetzen der Realgaseffekte. Da die Zustandsänderungen nur durch Molekülstöße erfolgen können, bei denen Bewegungsenergie in innere Energie überführt wird, benötigt der Ausgleichsvorgang zur Erlangung des Gleichgewichts Zeit. Diese Zeit wird, entsprechend Kapitel 3.5, als Relaxationszeit bezeichnet. Bei geringer Gasdichte führen die damit verbundenen langen thermodynamischen Relaxationszeiten zu einem Nichtgleichgewichtszustand. Aufgrund der geringen Dichte in den großen Höhen der Atmosphäre gilt es, die mikroskopische Betrachtungsweise der Strömungsmechanik anzuwenden, die die Bewegung und Kollisionen der einzelnen Luftmoleküle verfolgt. Eine Einführung in die kinetische Gastheorie geben die Lehrbücher von G.A. BIRD 1976 und A. FROHN 1988.

4.1.1 Stoßstruktur

Die prinzipielle Darstellung in Abbildung 4.1 zeigt die Strömungsbereiche um eine Wiedereintrittskapsel im Übergangsbereich von freimolekularer Strömung zur Kon-

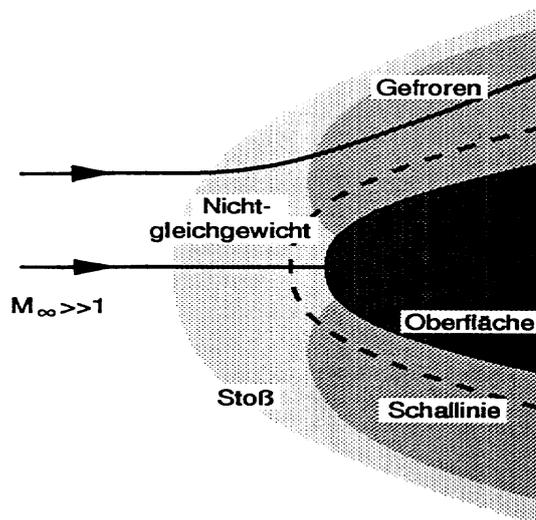


Abb. 4.1: Gaskinetische Strömungsbereiche um eine Wiedereintrittskapsel

tinuumsströmung. Die Kopfwelle hat eine Ausdehnung von etwa 10 mittleren freien Weglängen und ist wegen der geringen Dichte der Atmosphäre über das Strömungsfeld verschmiert. Einen scharfen Verdichtungsstoß, wie er aus der Kontinuumsmechanik bekannt ist, gibt es in großen Höhen der Wiedereintrittstrajektorie (siehe Kapitel 2.5) nicht. Über die Kopfwelle ändern sich die Zustandsgrößen stark, die Temperatur steigt bis auf das 150-fache, die Dichte auf das sechsfache der Werte der Anströmung. Die Strömung in und hinter der Kopfwelle befindet sich in einem thermodynamischen Nichtgleichgewichtszustand, da im Strömungsfeld nur sehr wenige Molekülstöße stattfinden. Chemisches und thermisches Gleichgewicht wird, wenn überhaupt, nur im Staupunkt erreicht, wo sich die Moleküle lange aufhalten. Weiter stromaufwärts ist in der Prinzipskizze der Bereich markiert, in dem die Strömung eingefroren ist. Hier finden aufgrund der Beschleunigung auf der Wiedereintrittskapsel zu wenig Partikelstöße statt, um den Gleichgewichtszustand zu erreichen. Aufgrund der Beschleunigung entlang der Körperkontur ist die Temperatur so weit abgesunken, daß die thermodynamischen Vorgänge entsprechend langsamer ablaufen.

4.1.2 Nachlaufströmung

An der Hinterkante der Wiedereintrittskapsel expandiert die Strömung stark. Hinter der Kapsel bildet sich ein Entmischungsgebiet, in dem sich die leichteren Teilchen der Strömung (Atome) anreichern. Die chemischen Reaktionen bleiben im nahen Nachlaufbereich eingefroren. Ein bis zwei Kapseldurchmesser stromab existiert ein zweites, freies Staugebiet. Die Temperaturen sind hier annähernd so hoch wie in dem vorderen Staugebiet. Dies bedingt erneut den Ablauf der chemischen Reaktionen und führt zu thermodynamischen Nichtgleichgewichtsvorgängen. Eine Scherschicht trennt die heiße langsame innere Strömung von der relativ kalten Außenströmung. Erst 10 bis 100 Körperdurchmesser stromab klingt die Temperatur auf Umgebungstemperatur ab. Damit ist der gesamte Wiedereintrittsvorgang

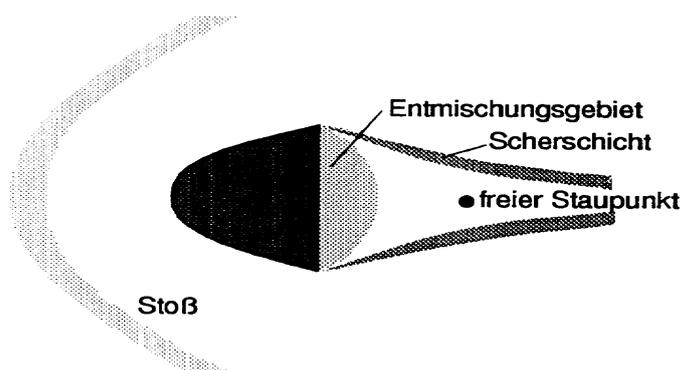


Abb. 4.2: Gaskinetischer Nachlauf hinter einer Wiedereintrittskapsel

am betrachteten Ort der Atmosphäre abgeschlossen.

4.2 Grundgleichungen - Boltzmann-Gleichung

Für die Beschreibung von Hyperschallumströmungen um stumpfe Wiedereintrittskörper im Übergangsbereich zwischen freier Molekülströmung und Kontinuumsströmung muß die kinetische Gastheorie herangezogen werden.

Im Gegensatz zur Kontinuumsstheorie wird hier die molekulare Struktur des Gases betrachtet. Während die klassische Thermodynamik den Zustand eines Systems durch jeweils zwei makroskopische thermodynamische Zustandsgrößen (z.B. p und T) festlegt, wird in der kinetischen Gastheorie der Zustand des Systems durch die Angabe des Ortes und der Geschwindigkeiten aller Moleküle und deren inneren Zustand beschrieben. Die Molekülpositionen werden im dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem festgelegt. Dieser Raum wird physikalischer Raum oder Lageraum genannt. Die Geschwindigkeiten der Moleküle, die sich im Volumenelement $d\vec{r} = dx \cdot dy \cdot dz$ befinden, unterscheiden sich im allgemeinen durch Größe und Richtung. Zur Kennzeichnung der Geschwindigkeiten wird zusätzlich ein Geschwindigkeitsraum eingeführt. Beide Räume sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Sie werden zu einem sechsdimensionalen Raum zusammengefaßt. Ein Punkt in diesem Raum ist durch die Angabe der kartesischen Koordinaten x , y , z , c_x , c_y und c_z festgelegt und repräsentiert ein Molekül. Wir fassen x , y , z zu \vec{r} und c_x , c_y , c_z zu \vec{c} zusammen.

Ein Gas mit N Teilchen wird durch N Punkte in unserem sechsdimensionalen Raum repräsentiert. Ein Mol eines Gases besitzt also $6 \cdot 10^{23}$ Bildpunkte. Wegen dieser hohen Partikelzahl empfiehlt sich die Einführung einer stetigen Funktion zur Beschreibung der Teilchendichte im sechsdimensionalen Raum. Die Verteilungsdichtefunktion in diesem Raum wird durch

$$f(\vec{r}, \vec{c}) = \frac{dN}{d\vec{r}d\vec{c}} \quad (4.1)$$

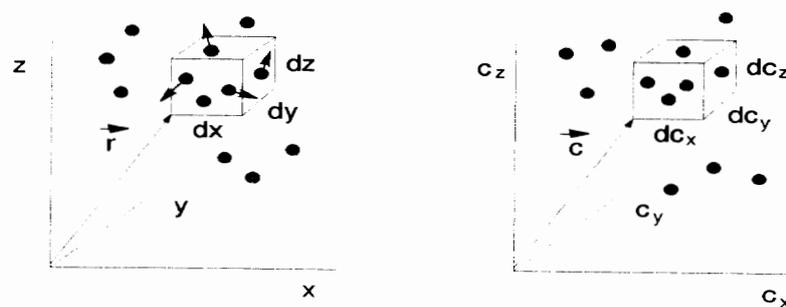


Abb. 4.3: Physikalischer Raum und Geschwindigkeitsraum

definiert. Sie beschreibt die statistische Verteilung der Partikel auf den physikalischen und den Geschwindigkeitsraum. Dabei ist dN die Anzahl der Bildpunkte im Volumenelement $dx \cdot dy \cdot dz \cdot dc_x \cdot dc_y \cdot dc_z$ an der Stelle \vec{r}, \vec{c} und $d\vec{c} = dc_x \cdot dc_y \cdot dc_z$. Aus der Integration der Verteilungsfunktion über alle Geschwindigkeits- und Ortskoordinaten ergibt sich als Summe aller Bildpunkte die Gesamtzahl der Teilchen

$$N = \int_{\vec{r}} \int_{\vec{c}} f(\vec{r}, \vec{c}, t) d\vec{r} d\vec{c} \quad . \quad (4.2)$$

Aus der Kenntnis der mikroskopischen Struktur der Strömung in der Form der sechsdimensionalen, skalaren Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$, können alle Gaseigenschaften in Abhängigkeit der Zeit abgeleitet werden. Im Geschwindigkeitsraum kann eine Verteilungsfunktion über die Beziehung

$$dN = N f(\vec{c}) d\vec{c} \quad (4.3)$$

definiert werden. Makroskopische Größen können zu einem bestimmten Zeitpunkt als Mittelwerte molekularer Eigenschaften aufgefaßt werden. Dazu betrachten wir eine homogene Gasprobe, die aus Molekülen aufgebaut ist und durch die Verteilungsfunktion im Geschwindigkeitsraum $f(\vec{c})$ beschrieben wird. Die makroskopischen Größen ergeben sich durch Mittelung der molekularen Größen Q gewichtet mit der Verteilungsfunktion $f(\vec{c})$. Der Mittelwert ist

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \int_N Q dN \quad , \text{ mit Gl. (4.3)} \quad (4.4)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{+\infty} Q f(\vec{c}) N d\vec{c} \quad , \quad (4.5)$$

$$\bar{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q f(\vec{c}) d\vec{c} \quad . \quad (4.6)$$

Die oben beschriebene Vorgehensweise wird als Bildung von Momenten der Verteilungsfunktion bezeichnet. Die wichtigsten Momente der Verteilungsfunktion sind die mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$\vec{c} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{c} f(\vec{c}) d\vec{c} \quad . \quad (4.7)$$

der Druck p

$$p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{3} c^2 f(\vec{c}) d\vec{c} \quad (4.8)$$

und über die ideale Gasgleichung die Translationstemperatur T_t

$$T_t = \frac{2}{3nk} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{2} c^2 f(\vec{c}) d\vec{c} \quad , \quad (4.9)$$

mit der Teilchendichte n (Anzahl Teilchen pro Volumen), der Teilchenmasse m und der Boltzmann Konstanten k . Mit den Gleichungen (4.4) bis (4.9) ist die Verknüpfung der mikroskopischen mit der makroskopischen Betrachtungsweise hergestellt.

Da die Moleküle eines Gases eine endliche Ausdehnung besitzen, kommt es bei ihrer Bewegung im Gas zu Partikelstößen. Um die Stoßfrequenz der Partikel abzuschätzen, betrachten wir die Partikel als starre Kugeln mit dem Durchmesser d . Zwei Kugeln berühren sich also, wenn ihre Mittelpunkte sich bis auf d genähert haben. Der totale Stoßquerschnitt σ ist πd^2 .

Wir betrachten ein typisches Molekül mit einer Geschwindigkeit c_1 . Die anderen Moleküle haben eine Geschwindigkeit, die zwischen \vec{c} und $\vec{c} + \Delta\vec{c}$ liegt, wir bezeichnen sie als Moleküle der Klasse \vec{c} . Die Teilchendichte dieser Moleküle sei Δn . Bewegen wir uns in einem Bezugssystem, in welchem die anderen Partikel der Klasse \vec{c} für den Betrachter feststehend sind, hat dieses Partikel die Geschwindigkeit

$$\vec{c}_r = \vec{c}_1 - \vec{c} \quad . \quad (4.10)$$

In einem sehr kleinen Zeitintervall Δt wird unser Testmolekül mit jedem Molekül kollidieren, welches sich in einem Zylinder mit dem Volumen $\sigma c_r \Delta t$ (vgl. Abbildung 4.4) befindet. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Testmolekül mit einem Molekül der Klasse \vec{c} zusammentrifft, ist also $\sigma c_r \Delta t \Delta n$. Nach einer Kollision wird der Zylinder, der durch den Stoßquerschnitt entlang der Trajektorie beschrieben wird, natürlich verändert. Für ein verdünntes Gas, in dem nur ein kleiner Anteil der Partikeltrajektorien durch Kollisionen betroffen sind, ist eine Begrenzung des Zeitintervalls Δt nicht erforderlich. Die Zahl der Kollisionen mit einem Molekül der Klasse \vec{c} pro Zeiteinheit ist $\sigma c_r \Delta t \Delta n$. Die mittlere Kollisionsrate erhalten wir durch Summation über alle Klassen \vec{c} bzw. durch Summation über alle Relativgeschwindigkeiten c_r :

$$\nu = \sum (\sigma c_r \Delta n) = n \sum \left(\frac{\Delta n}{n} \sigma c_r \right) \quad , \quad (4.11)$$

$$\nu = n \overline{\sigma c_r} \quad , \quad (4.12)$$

da $\Delta n/n$ den Anteil der Moleküle mit dem Stoßquerschnitt σ und der Relativgeschwindigkeit \vec{c}_r bezeichnet. Die Gesamtzahl der Kollisionen pro Volumen- und Zeiteinheit ergibt sich damit

$$N_t = \frac{1}{2} n^2 \overline{\sigma c_r} \quad . \quad (4.13)$$

Der Symmetriefaktor $1/2$ rührt daher, daß an jeder Kollision zwei Partikel beteiligt sind.

Der Weg, den ein Molekül im Durchschnitt zwischen zwei Kollisionen zurücklegt, wurde bereits in Kapitel 2.5 als mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$ eingeführt. Die mittlere

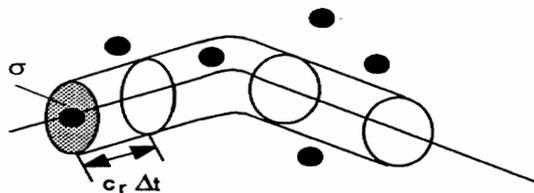


Abb. 4.4: Prinzipskizze zur Erläuterung der Stoßfrequenz

freie Weglänge ist gleich der mittleren Geschwindigkeit der Moleküle geteilt durch die Kollisionsfrequenz

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{c}}{\nu} = \frac{1}{n(\bar{\sigma}c_r)/\bar{c}} \quad (4.14)$$

Um die Verdünnung eines Gases zu beschreiben wird die Knudsen Zahl verwendet. Sie drückt das Verhältnis zwischen der mittleren freien Weglänge und einer charakteristischen Länge aus. Bei der Umströmung einer Wiedereintrittskapsel ist die charakteristische Länge typischerweise der Durchmesser oder die Länge der Kapsel. Die Knudsen Zahl beschreibt damit die Anzahl der Kollisionen, die die Atome und Moleküle der Umströmung der Kapsel untereinander ausführen. Mit steigender Knudsen Zahl treten immer weniger Kollisionen auf.

4.2.1 Partikelstöße

Im Hinblick auf die noch zu beschreibenden Berechnungsverfahren, die eine direkte numerische Simulation der Verteilungsfunktion f durchführen, behandeln wir die gaskinetischen Gleichungen der einzelnen Partikelstöße. In verdünnten Gasen finden im wesentlichen Zusammenstöße je zweier Moleküle statt. Für die gaskinetische Betrachtung reicht es daher im allgemeinen aus, ausschließlich Zweierkollisionen zu berücksichtigen. Die Beschreibung des Prozesses besteht in der Berechnung der Geschwindigkeitsvektoren \vec{c}'_1 und \vec{c}'_2 und der inneren Energien $\epsilon'_{i,1}$ und $\epsilon'_{i,2}$ nach dem Stoß der beiden einzelnen Partikel.

Der einfachste Fall eines Partikelstoßes ist der elastische Stoß. Hier werden zwischen den Molekülen nur translatorische Energien ausgetauscht, ein Austausch zwischen translatorischer Energie und den inneren Energien der Moleküle erfolgt nicht. Wir können daher diesen Stoß mit den klassischen Erhaltungsgleichungen der Mechanik behandeln.

In Abbildung 4.5 sowie in den folgenden Gleichungen bezeichnen die Indizes 1 und 2 die beiden Stoßpartner. Variablen nach dem Partikelstoß werden mit einem Strich

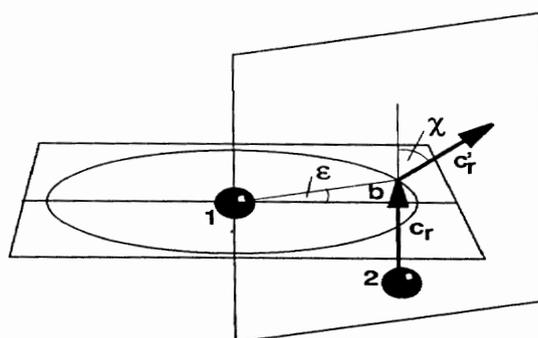


Abb. 4.5: Geometrie der Zweierkollisionen im Massenschwerpunktssystem

gekennzeichnet. Es gilt die Massenerhaltung

$$m_1 + m_2 = m_1' + m_2' \quad . \quad (4.15)$$

Die Impulserhaltung ergibt

$$m_1 \vec{c}_1 + m_2 \vec{c}_2 = m_1 \vec{c}_1' + m_2 \vec{c}_2' = (m_1 + m_2) \vec{c}_m \quad , \quad (4.16)$$

mit der Schwerpunktgeschwindigkeit c_m . Die Energieerhaltung schreibt sich

$$m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = m_1 c_1'^2 + m_2 c_2'^2 \quad . \quad (4.17)$$

Definieren wir die Relativgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \vec{c}_r &= \vec{c}_1 - \vec{c}_2 \quad , \\ \vec{c}_r' &= \vec{c}_1' - \vec{c}_2' \quad , \end{aligned} \quad (4.18)$$

so folgt aus der Impuls- und Energieerhaltung

$$\vec{c}_1 = \vec{c}_m + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{c}_r \quad , \quad (4.19)$$

$$\vec{c}_2 = \vec{c}_m - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{c}_r \quad , \quad (4.20)$$

$$\vec{c}_1' = \vec{c}_m + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{c}_r' \quad , \quad (4.21)$$

$$\vec{c}_2' = \vec{c}_m - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{c}_r' \quad . \quad (4.22)$$

Führt man diese Beziehungen in die Erhaltungsgleichungen ein, ergeben sich mit der reduzierten Masse

$$m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (4.23)$$

die Gleichungen

$$m_1 \vec{c}_1^2 + m_2 \vec{c}_2^2 = (m_1 + m_2) \vec{c}_m^2 + m_r \vec{c}_r^2 \quad , \quad (4.24)$$

$$m_1 \vec{c}_1'^2 + m_2 \vec{c}_2'^2 = (m_1 + m_2) \vec{c}_m^2 + m_r \vec{c}_r'^2 \quad , \quad (4.25)$$

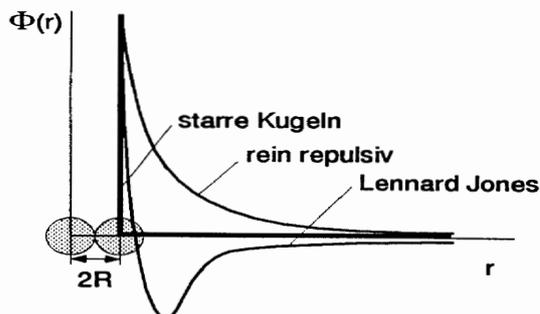


Abb. 4.6: Wechselwirkungspotentiale

aus denen sofort folgt, daß sich der Betrag der Relativgeschwindigkeit über die Kollision nicht ändert.

Die Richtung der Relativgeschwindigkeiten nach dem Stoß ist durch die zwei Stoßparameter χ und ϵ festgelegt. Wir betrachten dazu zwei Partikel und führen eine Stoßebene ein, die durch den Mittelpunkt von Partikel 1 geht und senkrecht auf dem Relativgeschwindigkeitsvektor \vec{c}_r vor dem Stoß steht (vgl. Abbildung 4.5). Durch die Polarkoordinaten b und ϵ ist die Position des Auftreffpunktes von Partikel 2 auf Partikel 1 gekennzeichnet. Mit χ bezeichnen wir den Ablenkwinkel, der in der Ebene liegt, die durch die Vektoren \vec{c}_r und \vec{c}_r' aufgespannt wird.

Die Beschreibung der Transporteigenschaften eines Gases, wie z.B. der Zähigkeit μ oder der Wärmeleitfähigkeit λ , wird entscheidend durch das verwendete Wechselwirkungspotential zwischen den Partikeln bestimmt. In Abbildung 4.6 sind verschiedene Modelle der Wechselwirkungspotentiale dargestellt.

Das klassische Wechselwirkungspotential der Gaskinetik ist das der starren elastischen Kugeln, bei dem eine Wechselwirkung zwischen den Molekülen nur dann stattfindet, wenn sich diese berühren. Dieses Modell liefert als Temperaturabhängigkeit der dynamischen Zähigkeit und der Wärmeleitfähigkeit das Ergebnis

$$\mu(T) \sim T^{0,5} \quad , \quad (4.26)$$

$$\lambda(T) \sim T^{0,5} \quad . \quad (4.27)$$

Sie sind unabhängig von der Gassorte. Weitere Wechselwirkungspotentiale sind das rein repulsive Wechselwirkungspotential und das Lennard-Jones Potential, das wir bereits in Kapitel 3.3 kennengelernt haben. Das rein repulsive Wechselwirkungspotential berücksichtigt die elektrostatische Abstoßung der elektrisch gleichgeladenen Partikelkerne. Dabei ist die Wechselwirkungspotentialkraft $\vec{K} = -\nabla\Phi$ definiert. Das Lennard-Jones-Potential berücksichtigt neben der elektrostatischen Abstoßung bei kleinen Relativabständen r der stoßenden Partikel die anziehende Van-der-Waals-Multipolwechselwirkung, die aufgrund der Deformation der Elektronenhüllen der stoßenden Moleküle bzw. Atome bei größeren Relativabständen dominiert. Für unsere Anwendungen sind die Wechselwirkungsenergien so hoch ($> 1\text{eV}$), daß für die Beschreibung der Transportvorgänge das Modell der sogenannten "Variablen Harten Kugeln" (VHS), welches aus dem "Harte-Kugel Modell" entwickelt wurde, eine gute Näherung darstellt. In dem Modell der Variablen Harten Kugeln wird der totale Streuquerschnitt als Funktion der relativen kinetischen Energie in der Form

$$\sigma_T \sim \left(\frac{1}{2}m_r c_r^2\right)^{-\omega} \quad (4.28)$$

angesetzt. Der Exponent ω stellt eine gasspezifische Größe dar. Damit beschreibt das VHS-Modell für die Spezialfälle $\omega = 0$ das Starrkugelmodell und für $\omega = 0,5$ die sogenannten Maxwell-Moleküle. Die Kollisionswahrscheinlichkeit der Maxwell-Moleküle ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit der Moleküle. In den folgenden Kapiteln wird ausschließlich von diesem vereinfachten Wechselwirkungsmodell Gebrauch gemacht. Für Luft wird typischerweise ($\omega = 0,25$) verwendet.

4.2.2 Boltzmann-Gleichung

Die gaskinetische Grundgleichung, die Boltzmann-Gleichung ist die Bestimmungsgleichung der Verteilungsfunktion f . Sie läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{c} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{c}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll}} \quad (4.29)$$

Die linke Seite der dimensionsbehafteten Boltzmann-Gleichung stellt die substantielle Ableitung der Verteilungsfunktion f nach der Zeit im sechsdimensionalen Phasenraum dar, wobei der Term $\frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{c}}$ die Änderung der Verteilungsfunktion durch die Beschleunigung der Partikel aufgrund äußerer Kraftfelder \vec{F} beschreibt, die in den folgenden Betrachtungen vernachlässigt wird. Die Geschwindigkeit der Partikel wird mit \vec{c} bezeichnet. Es wird zunächst ein ruhendes System vorausgesetzt, d.h. die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle ist Null. Die rechte Seite repräsentiert die Änderung der Verteilungsfunktion als Folge der Kollisionen der Partikel. Dieser Term ist ein Integralausdruck, in dem die Verteilungsfunktion quadratisch erscheint:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \int \int \int (f' f'_1 - f f_1) c_r b db d\epsilon dc_1 \quad (4.30)$$

Aufgrund dieser Nichtlinearität gibt es nur in Sonderfällen analytische Lösungen. Ist die freie Weglänge im Verhältnis zur charakteristischen Länge sehr groß, geht Kn gegen unendlich und der Kollisionsterm fällt weg. Damit erhalten wir eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für unsere Verteilungsfunktion.

Für den Grenzfall $Kn = \bar{\lambda}/L \rightarrow 0$ ist die linke Seite gleich Null. Diese Bedingung ist für

$$f' f'_1 = f f_1 \quad (4.31)$$

erfüllt. Beide Seiten logarithmiert ergibt

$$\ln f' + \ln f'_1 = \ln f + \ln f_1 \quad (4.32)$$

Jeder Term dieser Gleichung ist eine Funktion der Geschwindigkeiten c , c_1 , c' und c'_1 . Wir führen, mathematisch formal, eine neue Funktion $\psi = \ln f$ ein und schreiben Gleichung 4.32 als

$$\psi(c') + \psi(c'_1) = \psi(c) + \psi(c_1) \quad (4.33)$$

Diese Gleichung hat die Form einer Erhaltungsgleichung. Lösungen dieser Gleichung sind die Massen-, Impuls- und Energieerhaltung $\psi = m$, $\psi = c_i$ und $\psi = c^2$, die man als Stoßinvarianten bezeichnet. Jede Linearkombination dieser Stoßinvarianten ist wiederum eine Lösung der Gleichung. Damit ergibt sich als allgemeine Lösung

$$\psi(c) = a_1 \left(\frac{1}{2} m c^2 \right) + \vec{a}_2 \cdot (m \vec{c}) + a_3 \quad (4.34)$$

mit den Konstanten a_1 , \vec{a}_2 und a_3 . Mit $\psi = \ln f$ folgt

$$f = \exp\left(a_1\left(\frac{1}{2}mc^2\right) + \vec{a}_2 \cdot (m\vec{c}) + a_3\right) . \quad (4.35)$$

Unter der Voraussetzung einer richtungsunabhängigen Verteilungsfunktion entfällt \vec{a}_2 . f läßt sich mit den Konstanten a und β darstellen als:

$$f = a \exp(-\beta(\vec{c})^2) . \quad (4.36)$$

Mit den physikalischen Normierungen

$$\int f dc = n \quad , \quad \int c_i f dc = 0 \quad , \quad \int \frac{m}{2} \vec{c}^2 f dc = \frac{3}{2} kT$$

ergibt sich die Maxwellverteilung

$$f = \frac{n}{(2\pi kT/m)^{3/2}} e^{-mc^2/2kT} . \quad (4.37)$$

In einem bewegten System mit der makroskopischen Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} und der Teilchengeschwindigkeit \vec{c} schreibt sich die Maxwellverteilung

$$f = \frac{n}{(2\pi kT/m)^{3/2}} e^{-m(\vec{c}-\vec{v})^2/2kT} . \quad (4.38)$$

Für diese Herleitung wurde keine Annahme über die intermolekularen Kräfte benötigt. Die einzige Bedingung lautet $Kn \rightarrow 0$, d.h. in jedem betrachteten Volumen ist die mittlere freie Weglänge $\bar{\lambda}$ sehr klein im Verhältnis zur makroskopischen Länge L . Die Anzahl der Partikelstöße wird so groß, daß ständig Gleichgewicht herrscht.

Wir betrachten wieder ein ruhendes Gas, d.h. die Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} ist gleich Null. Im thermodynamischen Gleichgewicht muß die Verteilungsfunktion unabhängig von der Zeit und Richtung immer die gleiche Form $f(\vec{c}, \vec{r}, t) = f(\vec{c})$ besitzen. Wir nennen dies eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung. Damit hängt die Verteilungsfunktion nur von dem Geschwindigkeitsbetrag $c = \sqrt{\vec{c}^2}$ ab, d.h., daß die Verteilungsfunktion auf Kugelschalen im Geschwindigkeitsraum konstant ist. Die

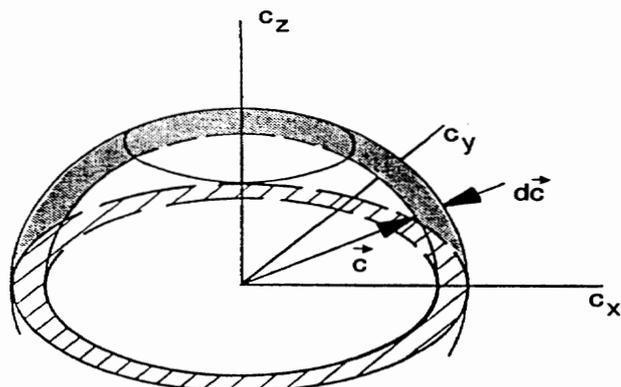


Abb. 4.7: Geschwindigkeitsintervall im dreidimensionalen Phasenraum

Variable c reicht also zur Beschreibung der Verteilungsfunktion aus. Wir betrachten zunächst nur die Moleküle mit einem Geschwindigkeitsbetrag zwischen c und $c + dc$. Das bedeutet, wir fragen nach der Anzahl der Bildpunkte im Geschwindigkeitsraum, die zwischen der Kugelschale mit dem Radius c und der Kugelschale mit dem Radius $c + dc$ liegen. Diese Punkte sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Wir bezeichnen die dazugehörige Verteilungsfunktion mit $f(c)$. In Kugelkoordinaten gilt für den Geschwindigkeitsraum

$$f(c)dc = \frac{n}{(2\pi kT/m)^{3/2}} \cdot \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} c^2 e^{-mc^2/2kT} \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dc \quad (4.39)$$

Integration führt auf

$$f(c) = \frac{4\pi c^2 n}{(2\pi kT/m)^{3/2}} \cdot e^{-m(c^2)/2kT} \quad (4.40)$$

In Abbildung 4.8 ist der Verlauf der Verteilung als Funktion des Geschwindigkeitsbetrags dargestellt. Mit steigenden Werten für c wird ein Maximum erreicht, für große Werte von c überwiegt das Abklingen entsprechend dem Exponentialfaktor.

Aus df/dc gleich Null folgt die wahrscheinlichste Geschwindigkeit $c_{mp} = \sqrt{2kT/m}$. Da die Verteilungsfunktion hier ein Maximum besitzt, ist die Dichte der Bildpunkte für den Radius $c = c_{mp}$ am größten, d.h. die Geschwindigkeit c_{mp} tritt am häufigsten auf. Der Mittelwert des Geschwindigkeitsbetrages ergibt sich aus der Integration

$$\bar{c} = \frac{1}{n} \int_{c=0}^{\infty} cf(c) \, dc = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (4.41)$$

Analog zu den obigen Überlegungen können wir Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitskomponenten zeichnen (Abbildung 4.9). In der nichtnormierten Darstellung wird der Einfluß der Temperatur deutlich.

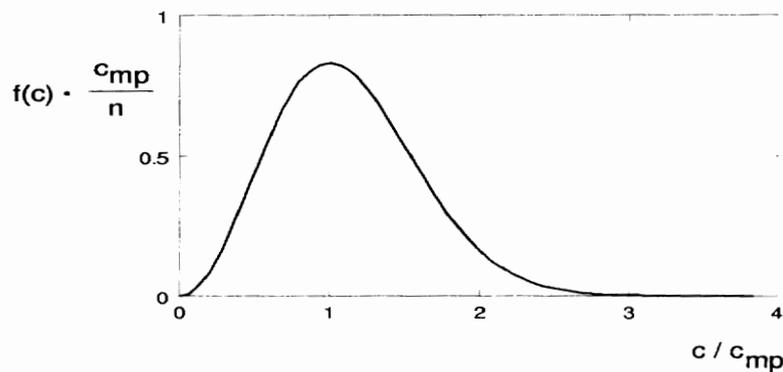


Abb. 4.8: Gleichgewichtsverteilung in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsbetrag

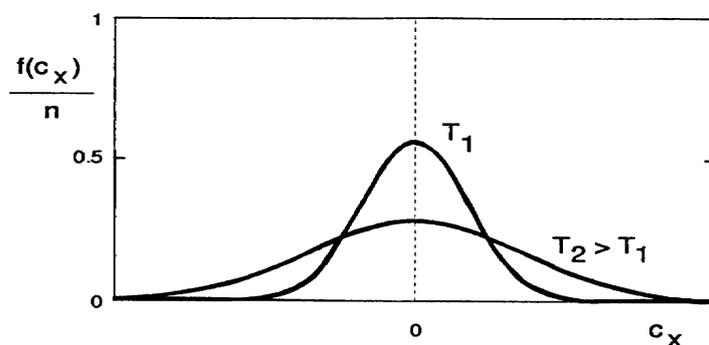


Abb. 4.9: Verteilungsfunktion einer Geschwindigkeitskomponente

4.2.3 Innere Energien

Bei der gaskinetischen Beschreibung mehratomiger Gase muß in den Kollisionen der Austausch zwischen translatorischer und innerer Energie berücksichtigt werden. Zweiatomige Moleküle können die innere Energie in Form von Translation, Rotation und Schwingung speichern (vgl. Kapitel 3.3).

In einem einfachen Modell besitzt ein Molekül drei verschiedene Formen von Energie pro Teilchen:

1. Das Molekül bewegt sich mit drei Geschwindigkeitskomponenten durch den Ortsraum. Es besitzt damit drei Translationsfreiheitsgrade f_t . Die Translationsenergie ϵ_t pro Teilchen ist im Mittel auf alle drei Freiheitsgrade gleichmäßig verteilt:

$$\epsilon_t = \frac{f_t}{2} kT_t = \frac{3}{2} kT_t \quad , \quad (4.42)$$

mit der Translationstemperatur T_t .

2. Das Molekül rotiert um drei Achsen im Raum. Ein hantelförmiges Molekül besitzt jedoch nur um zwei Achsen ein nennenswertes Trägheitsmoment und deshalb nur zwei Rotationsfreiheitsgrade f_r , um die Rotationsenergie ϵ_r zu speichern. Analog zur Translationstemperatur können wir über die Gleichung

$$\epsilon_r = \frac{f_r}{2} kT_r = kT_r \quad (4.43)$$

die Rotationstemperatur T_r definieren. Im Gegensatz zum kontinuumsmechanischen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie sind die Translationstemperatur und die Rotationstemperatur i.a. verschieden, d.h. im Nichtgleichgewicht.

3. Wie die Schwingungsenergie pro Teilchen schreibt sich

$$\epsilon_v = \frac{f_v}{2} k T_v = k T_v \quad , \quad (4.44)$$

mit der Vibrationstemperatur T_v .

Diese Betrachtung der Energie macht deutlich, daß eine thermodynamische Temperatur T eine Größe ist, die nur im Gleichgewicht definiert ist. Die eingeführten Temperaturen für die verschiedenen Energieformen sind Rechengrößen, für die im Gleichgewichtszustand $T = T_t = T_r = T_v$ gilt. Als gewichtetes Mittel der Temperaturen kann die Rechengröße T_{ges} definiert werden:

$$T_{ges} = \frac{f_t T_t + f_r T_r + f_v T_v}{f_t + f_r + f_v} \quad . \quad (4.45)$$

4.2.4 Chemische Reaktionen

Beim Wiedereintritt einer Kapsel von einem Meter Durchmesser besitzen die chemischen Reaktionen ab einer Höhe von rund 100 km einen erheblichen Einfluß auf das Strömungsfeld. In größeren Höhen ist die Atmosphäre noch so verdünnt, daß trotz der hohen Gastemperaturen kaum chemische Reaktionen stattfinden. Die Anzahl der Kollisionen ist zu gering.

Die dominierenden Reaktionen sind Dissoziations-Reaktionen, da für die Rekombination von Molekülen Dreierstöße erforderlich sind. Da die Dissoziation eine endotherme Reaktion ist, wird beim Zerfallen der Moleküle Energie benötigt. Dies wirkt sich durch eine Verringerung der Temperatur im Strömungsfeld aus. Bezüglich der Modellierung der Luftchemie beziehen wir uns auf Kapitel 3.4 und

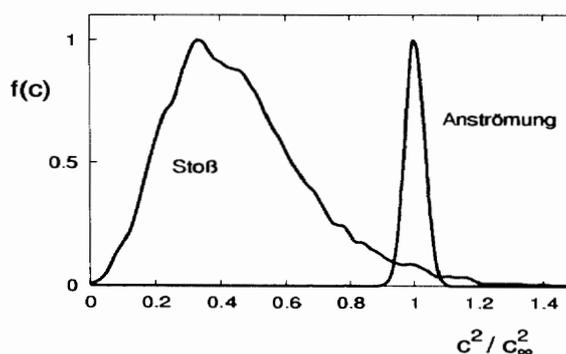


Abb. 4.10: Verteilungsfunktion vor und hinter der Kopfwelle

3.5. Es werden die Reaktionsraten aus dem chemischen Modell von CH. PARK 1985 übernommen.

In Abbildung 4.10 ist die Verteilungsfunktion $f(c)$ für die Strömung vor und hinter einer Kopfwelle qualitativ skizziert. Vor der Kopfwelle erhalten wir eine Verteilung, die der Maxwellverteilung der Anströmtemperatur bzw. -geschwindigkeit entspricht. Hinter der Kopfwelle ist das Maximum der Verteilungsfunktion zu niedrigeren Geschwindigkeiten verschoben, da die Strömungsgeschwindigkeit hinter dem Stoß geringer ist und der Strömung durch die Anregung der Rotations- und Vibrationsenergie und die chemischen Reaktionen Translationsenergie entzogen wird. Die Breite der Funktion entspricht qualitativ der Temperatur. Der charakteristische Anteil von hohen Geschwindigkeiten in der Nichtgleichgewichtsverteilung resultiert aus schnellen Atomen, die bei den Dissoziationsreaktionen entstehen.

4.2.5 Gas-Oberflächenwechselwirkung

Zur Vorhersage des Wärmeübergangs auf den Flugkörper ist es erforderlich, die Gas-Oberflächen-Wechselwirkung zu modellieren. Das gaskinetische Verhalten an der Oberfläche hängt von verschiedenen Einflußparametern, wie Oberflächengeometrie, Rauhigkeit und chemischer Beschaffenheit ab. Hierbei spielt der Begriff der Akkommodation eine wichtige Rolle. Unter Akkommodation versteht man die Impuls- und Energieübertragung bei der Kollision der Atome und Moleküle mit der Oberfläche. Durch den Stoß ändert sich die Verteilungsfunktion der einfallenden Moleküle von f_e auf f_r nach der Reflexion. Diese Änderung kann durch die Gaskinetik allein nicht theoretisch bestimmt werden. An dieser Stelle fließen einfache Modelle mit empirisch ermittelten Parametern ein.

Deshalb bleiben die einfachen klassischen Modelle spiegelnder und diffuser Reflexion von Maxwell oder eine Kombination beider die brauchbarsten Modelle für praktische Anwendungen (vgl. Abbildung 4.11). Spiegelnde Reflexion bedeutet, daß die Partikel ideal elastisch reflektiert werden, ihre Geschwindigkeitskomponente in Wandnormalenrichtung wird umgekehrt. Die Geschwindigkeit der reflektierten Moleküle ist also nur von der Einfallsgeschwindigkeit der Moleküle abhängig und unabhängig von der Wandtemperatur. Im Fall diffuser Reflexion ist die Geschwindigkeit des reflektierten Moleküles vollständig unabhängig von der Einfallsg-



Abb. 4.11: Modelle für die Partikelreflexion an der Wand

geschwindigkeit. Die Partikel werden im gesamten Halbraum über der Oberfläche diffus gestreut, wobei für die Geschwindigkeitsverteilung im Mittel eine Maxwellverteilung gebildet mit der Wandtemperatur T_w angenommen wird.

Um die Wechselwirkung der Partikel mit der Wandoberfläche zu modellieren, müssen Randbedingungen für die Impuls- und Energieakkommodation an der Wand festgelegt werden. Für den Tangential- und Normalimpuls werden hierzu zwei Akkommodationskoeffizienten definiert:

$$\sigma_T = \frac{\tau_e - \tau_r}{\tau_e} \quad , \quad (4.46)$$

$$\sigma_N = \frac{p_e - p_r}{p_e - p_w} \quad . \quad (4.47)$$

Hier bezeichnet τ den Tangential-, p den Normalimpuls. Der Index e kennzeichnet die einfallenden Größen, der Index r die reflektierten Größen und w die Größen an der Wand. Der Normalimpuls an der Wand errechnet sich aus der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit bei der Wandtemperatur T_w :

$$p_w = m c_w' \quad . \quad (4.48)$$

Für den Energiefluß \dot{e} kann analog zum Normalimpuls ein Energieakkommodationskoeffizient gebildet werden:

$$\sigma_E = \frac{\dot{E}_e - \dot{E}_r}{\dot{E}_e - \dot{E}_w} \quad . \quad (4.49)$$

Der Energiefluß setzt sich aus Translationsenergie und der inneren Energie zusammen. \dot{E}_w ist der Energiefluß bei der Wandtemperatur T_w :

$$\dot{E}_w = \dot{n}_e (m c_w'^2 + \epsilon_r(T_w) + \epsilon_v(T_w)) \quad . \quad (4.50)$$

Es können zwei Grenzfälle festgelegt werden. Bei der spiegelnden Reflexion gilt für alle Teilchen: $\sigma_T = \sigma_N = \sigma = 0$ und $\sigma_E = 0$. Bei der diffusen Reflexion werden die Teilchen entsprechend einer Raumwinkelverteilung gestreut, wobei im Mittel für die Akkommodationskoeffizienten gilt: $\sigma_T = \sigma_N = \sigma = 1$ und $\sigma_E = 1$.

Das Modell der diffusen Reflexion eignet sich zur Beschreibung der Wechselwirkung eines Gases mit einer technischen Oberfläche. Diese Oberflächen sind mikroskopisch rau, sodaß die einfallenden Teilchen eine mehrfache Streuung erfahren und im Mittel ihren Tangentialimpuls verlieren. Dies ist die mikroskopische Beschreibung der Wandschubspannung. Abweichungen von der vollständigen Impulsakkommodation ergeben sich für glatte und gut gereinigte Oberflächen, bei denen ein Teil des Tangentialimpulses nach der Reflexion erhalten bleibt.

Experimente mit technischen Oberflächen bei Umgebungstemperatur deuten an, daß der reale Reflexionsvorgang durch die diffuse Reflexion mit vollständiger Energieakkommodation beschrieben werden kann. Ist die Translationstemperatur der einfallenden Teilchen im Verhältnis zur Wandtemperatur sehr groß, so ist die vollständige Energieakkommodation nicht mehr zu erreichen.

Es fehlen noch geeignete Modelle zur Beschreibung der Reaktionen an der Oberfläche und mit der Oberfläche. Reaktionen mit der Oberfläche werden hier nicht weiter betrachtet. Das einfachste Modell für die Rekombination von Atomen an der Oberfläche ist die Annahme, daß die Atome, die an die Oberfläche gelangen, entweder ohne Reaktion reflektiert werden oder an der Oberfläche haften bleiben und dort vollständig akkommodieren. Von denen, die an der Oberfläche haften, kann ein bestimmter Anteil rekombinieren. Dies geschieht entweder mit anderen Atomen auf der Oberfläche oder mit Atomen in der Nähe der Oberfläche. Es wird angenommen, daß die gebildeten Moleküle die gesamte latente Bindungsenergie an die Oberfläche abgeben. Dieses Modell ist die Grundlage nahezu aller bisherigen Berechnungen zur aerothermischen Erwärmung.

Der Anteil der einfallenden Atome, die rekombinieren, ist

$$\gamma_i = \frac{|\dot{m}_i|}{|\dot{m}_{i,e}|} \quad (4.51)$$

$\dot{m}_{i,e}$ bezeichnet den Massenstrom der einfallenden Atome und \dot{m}_i den Massenstrom der rekombinierenden Atome. Der Bruch γ_i wird häufig als Atom-Rekombinations-Koeffizient oder als Rekombinationswahrscheinlichkeit bezeichnet. Der Wert hängt von der jeweiligen Atomart und der Oberfläche ab. Üblicherweise betrachtet man den Koeffizienten als druck- und temperaturunabhängig.

4.3 Berechnungsverfahren

Nachdem wir die gaskinetischen Grundlagen und die Grundgleichungen einschließlich der gaskinetischen Modellierung der Schwingungsanregung und der Nichtgleichgewichtschemie heißer Gase kennengelernt haben, wenden wir uns den numerischen Simulationen zu. Der Lösungsweg für die betrachtete Wiedereintrittsströmung führt über die sogenannte direkte Simulation der Verteilungsfunktion $f(\vec{r}, \vec{c}, t)$, da im Gegensatz zu den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen kein effizienter Algorithmus zur numerischen Lösung der Boltzmann-Gleichung (4.29) in Abhängigkeit der sieben eingeführten Variablen existiert.

Wir verfolgen konkret den zeitlichen Verlauf der Bewegung und der elastischen bzw. inelastischen Kollisionen von einigen hunderttausend Modellpartikeln in einem vorgegebenen Simulationsgebiet.

Den Zugang zur gaskinetischen Simulation liefert uns die mit $x^* = x/L$, $\vec{c}^* = \vec{c}/\bar{c}$, $f^* dc_i^* = f dc_i/n$, $b^* db^* = b db/(\sqrt{2}\pi d^2)$ und $t^* = t/(L/\bar{c})$ dimensionslos gemachte Boltzmann-Gleichung

$$\left(\frac{\partial}{\partial t^*} + \vec{c}^* \frac{\partial}{\partial \vec{r}^*} \right) f^* = \frac{1}{Kn} \int \int \int (f_1'^* f_1^* - f^* f_1^*) c_{rel}^* b^* db^* dc_1^* \quad (4.52)$$

Die dimensionslose Boltzmann-Gleichung liefert identische Lösungen für Probleme

mit der gleichen Knudsenzahl

$$Kn = \frac{\bar{\lambda}}{L} = \frac{1}{n \frac{\sigma c_r}{c} L} \quad ,$$

d.h. bei vorgegebener charakteristischer Länge L muß das Produkt $\sigma \cdot n$ konstant gehalten werden, um eine identische Lösung zu erhalten. Damit können wir die reale Zahl von Molekülen in einer Strömung durch einige zehntausend Modellpartikel mit künstlich vergrößertem Streuquerschnitt ersetzen (Satz von DERZKO 1972). Für die lokale Mittlung der makroskopischen Größen müssen jedoch genügend Teilchen zur Verfügung stehen.

Von der Vielzahl der numerischen Simulationsmethoden haben wir die Molecular Dynamics (MD) und die direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode (DSMC) ausgewählt. Bei der MD-Methode werden die Trajektorien der Teilchen exakt mit der Zeit verfolgt. Eine Kollision findet nur statt, wenn sich zwei Teilchen bis auf ihren Streuquerschnitt angenähert haben. Im Gegensatz dazu werden bei der DSMC-Methode die Teilchen freimolekular bewegt und die Kollisionspartner statistisch ausgewählt. Wegen des relativ hohen Rechenaufwands der MD-Methode hat sich die heuristische DSMC-Methode für die Behandlung des Wiedereintrittsproblems durchgesetzt. Als ergänzende Literatur für das Kapitel Berechnungsverfahren empfehlen wir den Übersichtsartikel von J.N. MOSS 1984.

4.3.1 Molecular Dynamics (MD)

Die Molecular-Dynamics-Methode ist dadurch gekennzeichnet, daß ausschließlich der Anfangszustand durch statistische Methoden festgelegt wird. Das weitere Vor-

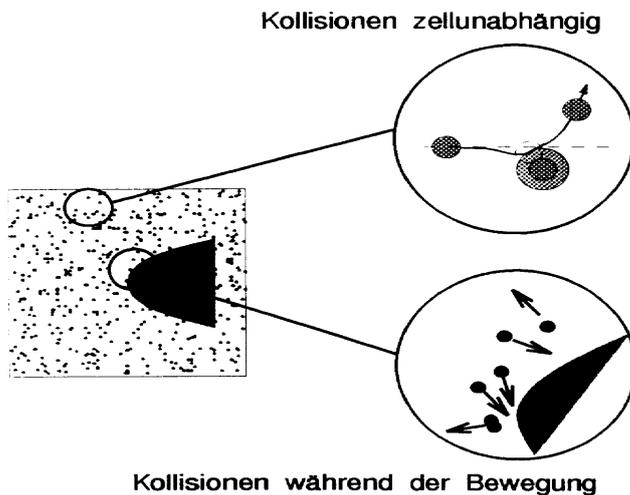


Abb. 4.12: Rechenablauf der MD-Methode

gehen ist streng deterministisch, d.h. zu jedem späteren Zeitpunkt kann vom Zustand des Systems auf den Anfangszustand geschlossen werden.

Zu Beginn der Rechnung wird eine vorgegebene Anzahl Modellteilchen im Rechenraum unter der Berücksichtigung der geometrischen Randbedingungen positioniert (Abbildung 4.12). Die Anzahl der Partikel ist so zu wählen, daß das Produkt $\sigma \cdot n$ konstant bleibt. Jedem Partikel werden darauf die thermischen Geschwindigkeitskomponenten zugeordnet. Nach Überlagerung der makroskopischen Geschwindigkeit ist dann der Zustand des Strömungsfeldes festgelegt. Diese Modellpartikel werden nun mit der zugeordneten Geschwindigkeit bewegt. Kollisionen zwischen Partikeln finden dann statt, wenn der Abstand der Partikel voneinander kleiner als der Streuquerschnitt wird. Analog treten Kollisionen der Teilchen mit der Kapsel auf, wenn die Teilchenbahn die Körperoberfläche schneidet. Die Kollisionen werden nach den Gesetzen der Mechanik berechnet.

4.3.2 Direkte Monte-Carlo Simulationsmethode (DSMC)

Die direkte Monte-Carlo Simulationsmethode (DSMC) wurde von G.A. BIRD 1976 entwickelt und stellt ein leistungsfähiges, heuristisches Verfahren zur Untersuchung verdünnter Gasströmungen dar. Der entscheidende Unterschied zur Molecular-Dynamics-Methode (MD) besteht in der entkoppelten statistischen Behandlung der Bewegung und Kollisionen der Modellpartikel.

Bei diesem Verfahren werden die real im Strömungsfeld vorhandenen Moleküle ebenfalls durch Modellpartikel ersetzt. Für die dreidimensional durchgeführten Wiedereintrittsrechnungen wurden mehrere hunderttausend Modellpartikel verwendet. Der Anfangszustand wird, wie bei der Molecular Dynamics Methode, zufällig festgelegt (Abbildung 4.13 a) und ändert sich durch die Bewegung und Kollisionen der Partikel mit der Simulationszeit. Das Strömungsfeld wird zur Ermittlung makroskopischer Größen und zur Gewährleistung korrekter lokaler Kollisionsraten in Zellen unterteilt. Dieses Gitter kann entweder an den Körper angepaßt oder rechteckig sein (Abbildung 4.14).

Im Monte-Carlo-Verfahren werden Partikelbewegung und Kollisionen entkoppelt. Der zentrale Iterationsschritt des Simulationsverfahrens sieht folgendermaßen aus:

1. Die Partikel werden entsprechend einem vorgegebenen Zeitschritt Δt_m bewegt. Partikel, die das Rechengebiet verlassen, werden entfernt und Kollisionen der Partikeln mit der Oberfläche des Flugkörpers berechnet. Hier müssen Wandwechselwirkungsmodelle und chemische Reaktionen an der Wandoberfläche berücksichtigt werden (Abbildung 4.13 b).
2. An den Rändern des Strömungsfeldes werden aus Kontinuitätsgründen neue Partikel generiert (Abbildung 4.13 c).
3. Es wird bestimmt, in welche Zelle jedes Partikel gehört. Umgekehrt wird nun für jede Zelle bestimmt, welche Partikel sich in ihr befinden.

4. Für jede Zelle wird eine auf den Zeitschritt Δt_m abgestimmte Anzahl von Kollisionen durchgeführt. Die Positionen der Partikel bleiben dabei unverändert. An dieser Stelle geht die Modellierung von Rotations- und Schwingungsanregung sowie chemischer Reaktionen in der Gasphase ein (Abbildung 4.13 d).

In der Art, wie die Anzahl der Kollisionen pro Zelle ermittelt und durchgeführt werden, unterscheiden sich die Verfahren von G.A. BIRD 1984, K. NANBU 1992 und M.S. IVANOV 1990.

Nach BIRD ergibt sich die Anzahl der Kollisionen pro Zelle über den Zeitschritt Δt_m aus Gleichung (4.13) zu

$$N_t = \frac{1}{2} N_m n \Delta t_m \overline{\sigma c_r} \quad , \quad (4.53)$$

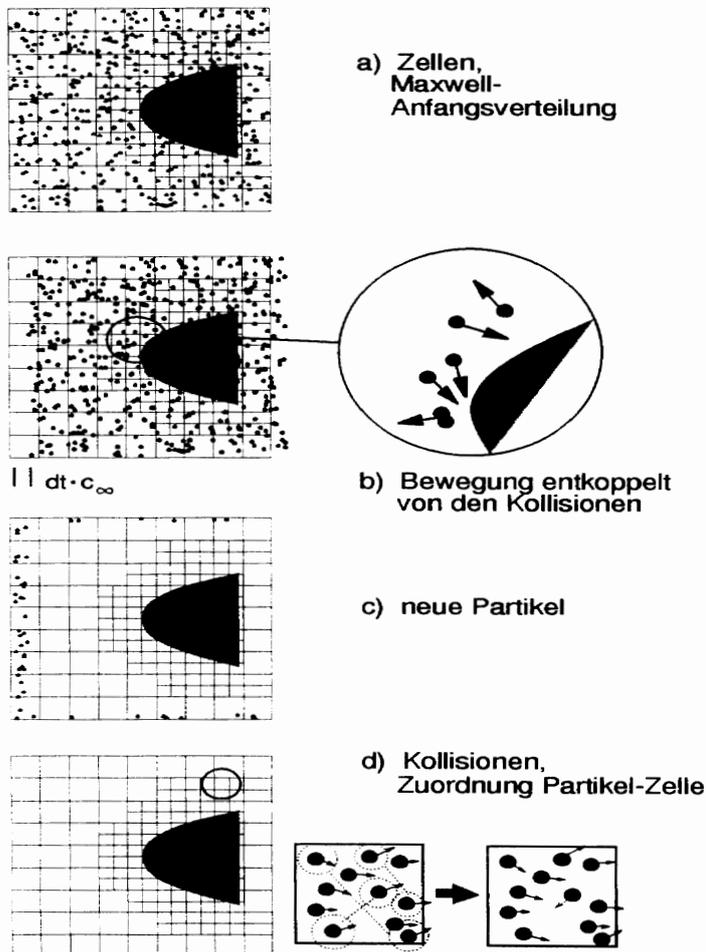


Abb. 4.13: Rechenablauf der DMSC-Methode

mit der Partikelzahl N_m pro Zelle, der Teilchendichte n der Relativgeschwindigkeit c_r und dem Stoßquerschnitt σ der Stoßpartner.

Die Berechnung des Produktes $\overline{\sigma c_r}$ ist sehr aufwendig, da alle möglichen Partikelkombinationen in einer Zelle zur Bildung des Mittelwertes herangezogen werden müssen. BIRD führte deshalb einen Kollisionszeitzähler t_C ein, welcher nach jeder Kollision unter Verwendung des Stoßquerschnittes σ und der Relativgeschwindigkeit c_r der jeweiligen Stoßpartner um

$$\Delta t_C = \frac{2}{N_m n \sigma c_r} \quad (4.54)$$

erhöht wird, bis dieser Zähler gleich der Simulationszeit ist. Dadurch wird im Mittel die oben nach Gleichung (4.53) geforderte Kollisionszahl N_t im Zeitschritt Δt_m erreicht. Die Kollisionspartner werden innerhalb der Zellen zufällig gewählt. Hieraus ergibt sich, daß eine Kollision zwischen zwei Partikeln umso wahrscheinlicher wird, je größer ihr Stoßquerschnitt und ihre Relativgeschwindigkeit wird.

Ist ein geeignetes Paar gefunden, so werden die sechs unbekanntenen Geschwindigkeitskomponenten der ausgewählten Stoßpartner berechnet. Dazu stehen die Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen (4.16) - (4.17) zur Verfügung. Die Richtung des Relativgeschwindigkeitsvektors nach dem Stoß wird durch Zufallszahlen bestimmt, das Verfahren ist also im Gegensatz zur direkten Simulationsmethode nicht deterministisch.

Die Methode von NANBU unterscheidet sich von der BIRDschen Methode allein in der Behandlung des Kollisionsprozesses. Das rein phänomenologische Modell von BIRD ersetzt NANBU durch einen aus der Boltzmann-Gleichung abgeleiteten Kollisionsmechanismus. In diesem Verfahren ändert bei einer Kollision nur ein Teilchen seinen Zustand. Die Anzahl der Kollisionen über den Zeitschritt Δt_m ist

$$N_t = N_m n \Delta t_m \overline{\sigma c_r} \quad (4.55)$$

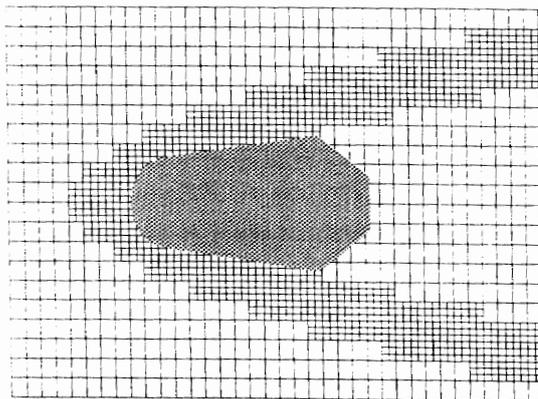


Abb. 4.14: Gitter für die Monte-Carlo-Simulation.

Die Kollisionen finden mit einer Wahrscheinlichkeit

$$P_i = \sum_{j=1}^{N_m} \frac{n \Delta t_m}{N_m} (\sigma c_r)_{ij} \quad (4.56)$$

statt. Für jedes Partikel wird in einer Zelle die Wahrscheinlichkeit P_i berechnet, um dann mit einer Zufallszahl zu entscheiden, ob eine Kollision im Zeitintervall Δt_m stattfindet. Findet eine Kollision statt, wird für dieses Partikel ein Kollisionspartner ausgesucht. Die Berechnung unterscheidet sich von der Methode von Bird dadurch, daß nur ein Kollisionspartner eine Geschwindigkeitsänderung erfährt.

Die Methode von IVANOV wird als "Majorant Frequency Scheme" bezeichnet. Im Unterschied zu Bird wird für jede Zelle eine obere Abschätzung der Kollisionszahl berechnet:

$$N_{t,maj} = \frac{1}{2} N_m n \Delta t_m [\sigma c_r]_{max} \quad (4.57)$$

An die Stelle des Mittelwertes $\overline{\sigma c_r}$ tritt der einfach zu bestimmende Maximalwert $[\sigma c_r]_{max}$. Es werden nun für jede Zelle $N_{t,maj}$ Kollisionspaare ermittelt. Die Kollisionen finden mit einer Wahrscheinlichkeit $(\sigma c_r)/[\sigma c_r]_{max}$ statt. Die Kollision die akzeptiert werden, bezeichnet man als reale Kollisionen, die verworfenen Kollisionen als fiktive Kollisionen. Für die realen Kollisionen werden die neuen Geschwindigkeiten wie beim Verfahren von Bird berechnet. Die Anzahl der realen Kollisionen ergibt den in Gleichung (4.53) geforderten Wert.

Die IVANOVsche Methode bietet gegenüber der BIRDSchen Methode zwei Vorteile:

1. Die Kollisionen lassen sich rechentechnisch effizienter berechnen. Damit kann die Rechenzeit erheblich reduziert werden.
2. Wir erhalten statistisch bessere Ergebnisse für kleine Partikelzahlen, da im Verfahren von Bird unwahrscheinliche Kollisionen (mit kleinem σc_r) den Kollisionszeitähler sehr weit vorrücken lassen. Damit finden über einen großen Zeitraum keine Kollisionen mehr statt.

Das Verfahren von IVANOV wurde mathematisch aus der Boltzmann-Gleichung hergeleitet. Ähnliche Methoden wurden inzwischen auch von BIRD und NANBU vorgestellt und werden in der Literatur als "No Time Counter Schemes" (NTC) bezeichnet.

Die Erhaltung des Drehimpulses ist bei den in diesem Abschnitt vorgestellten Verfahren nicht von vornherein sichergestellt. Am Beispiel des Zerfalls des Oseen-Wirbels wurde jedoch nachgewiesen, daß der Drehimpuls erhalten bleibt, wenn genügend Partikel in einer Zelle vorhanden sind. Der Oseen-Wirbelzerfall beschreibt die zeitliche Änderung der Geschwindigkeitsverteilung in einem Wirbel, der in Nähe der Wirbelachse aus einem Starrkörperwirbel besteht und mit zunehmenden Achsenabstand in einen Potentialwirbel übergeht. Abbildung 4.15 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der analytischen Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mit den Simulationsergebnissen der Molecular Dynamics-Methode und der DSMC-Methode.

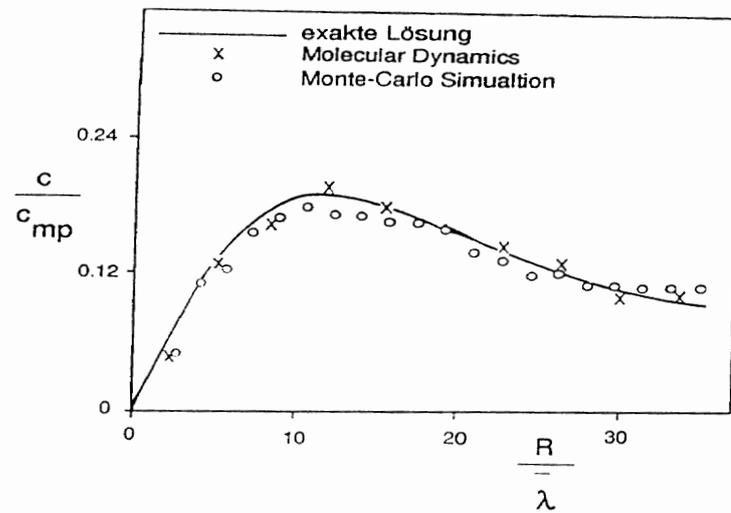


Abb. 4.15: Zerfall eines Oseen-Wirbels

Zur Überprüfung der dreidimensionalen DSMC-Methode und ihrer Anwendung auf Strömungen mit Verdichtungsstößen diente der Vergleich mit einer experimentell untersuchten Kugelumströmung. Die Rechnung wurde für Argonatome mit einer Anströmmachzahl von $M_\infty = 3.83$, der adiabaten Wandtemperatur $T_W = 300K$ und einer mit dem Kugelradius gebildeten Knudsenzahl $Kn_\infty = 0,062$ durchgeführt. Eine sensitive Größe stellt der Stoßabstand dar, der in Abbildung 4.16 mit den gemessenen Größen und der Kontinuumslösung verglichen wird.

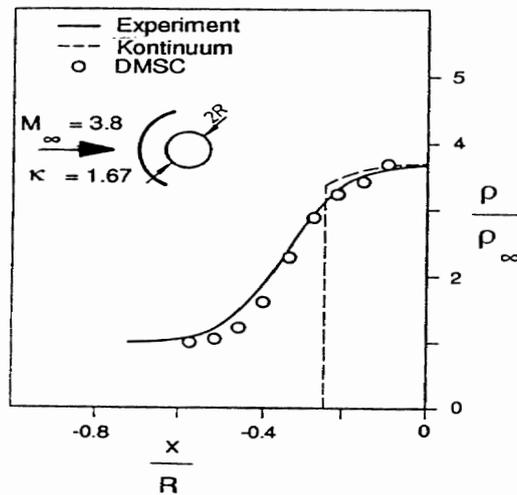


Abb. 4.16: Vergleich der berechneten Stoßstruktur mit einem experimentellen Ergebnis

4.3.3 Simulation der inneren Freiheitsgrade

Für die Behandlung mehratomiger Moleküle ist es notwendig, den Energietransfer zwischen Translations- und innerer Energie zu beschreiben. Wir betrachten dazu zunächst den Transfer von Translations- zu Rotationsenergie und gehen dazu von der makroskopischen Relaxationsgleichung

$$\frac{dT_r}{dt} = \frac{1}{\tau_r}(T_{eq} - T_r) \quad (4.58)$$

aus. Darin sind T_{eq} die Gleichgewichts- und T_r die momentane Rotationstemperatur. τ_{rot} heißt Relaxationszeit und ist die Zeit, nach der die Differenz $T_{eq} - T_r$ nur noch $1/e$ der Anfangsdifferenz beträgt.

Um diese makroskopische Gleichung zu simulieren, wird das Modell von BORGNAKKE-LARSEN 1975 zugrunde gelegt. Zur Anpassung der Relaxationszeit wird ein Teil der Partikelkollisionen elastisch (ohne Transfer innerer Energien), der andere Teil inelastisch behandelt. Bei der Berechnung einer inelastischen Kollision wird davon ausgegangen, daß nach einer Kollision sowohl die Translations- als auch die inneren Energien im Gleichgewicht, entsprechend der jeweiligen Gleichgewichtsverteilung, vorliegen. Aus dieser Grundüberlegung kann eine Funktion hergeleitet werden, die angibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß nach dem Stoß ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Translationsenergie $\epsilon_t = 0,5m_r c_r^2$ und der Kollisionsenergie

$$\epsilon_C = \epsilon_t + \epsilon_{i,1} + \epsilon_{i,2}$$

auftritt. Mit ϵ_i werden die inneren Energien der beiden betrachteten Stoßpartner bezeichnet. Für das Modell harter Kugeln ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$P\left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon_C}\right) = f \frac{\epsilon_t}{\epsilon_C} \left[\left(1 - \frac{\epsilon_t}{\epsilon_C}\right) \left(\frac{f}{f-1}\right) \right]^{f-1}. \quad (4.59)$$

Mit f wird in dieser Gleichung die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet.

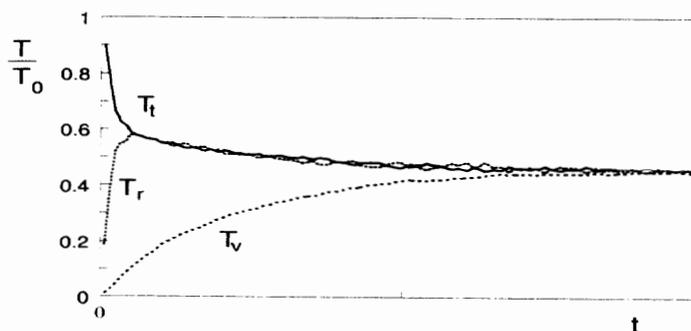


Abb. 4.17: Relaxationsprozeß der verschiedenen Anteile der inneren Energie

Die innere Energie nach dem Stoß ergibt sich dann aus:

$$\epsilon_i = \epsilon_C - \epsilon_t \quad (4.60)$$

Die Aufteilung der gesamten inneren Energie auf die beiden Moleküle wird nach dem gleichen Prinzip mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion geregelt. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Verhältnisses von innerer Energie des Teilchens 1 zur gesamten inneren Energie ist

$$P\left(\frac{\epsilon_{i,1}}{\epsilon_i}\right) = \left[4 \left(\frac{\epsilon_{i,1}}{\epsilon_i}\right) \left(1 - \frac{\epsilon_{i,1}}{\epsilon_i}\right)\right]^{f/2-1} \quad (4.61)$$

Das Teilchen 2 erhält dann entsprechend die innere Energie

$$\epsilon_{i,2} = \epsilon_i - \epsilon_{i,1} \quad (4.62)$$

zugeordnet. Die Aufteilung der jeweiligen inneren Energie auf die Rotations- und Schwingungsenergie wird entsprechend der Freiheitsgrade f_r und f_v durchgeführt.

Bei diesem Modell stimmt im thermodynamischen Gleichgewichtszustand die Geschwindigkeitsverteilung mit der Maxwell-Verteilung überein. Abbildung 4.17 zeigt, wie die verschiedenen Anteile der inneren Energie eines Gases relaxieren nachdem die Translationstemperatur schlagartig auf den Wert T_0 erhöht wird. Entsprechend der Anzahl der erforderlichen Stöße zum Erreichen des Gleichgewichts ist die Relaxationszeit der Rotationsenergie deutlich kleiner als die der Vibrationsenergie. Die innere Energie wird auf Kosten der Translationsenergie der Moleküle angeregt. Deshalb sinkt die Translationstemperatur.

Ein wesentliches Merkmal aller Monte-Carlo-Verfahren ist das Ermitteln von Zustandsgrößen aus vorgegebenen Verteilungsfunktionen. Deshalb soll an dieser Stelle kurz schematisch erläutert werden, wie aus der Gleichung (4.59) Werte für ϵ_t bestimmt werden. Die verwendete Methode ist die sogenannte "acceptation-rejection"-Methode, welche auf J. v. Neumann zurückgeht. In Abbildung 4.18 ist der Verlauf

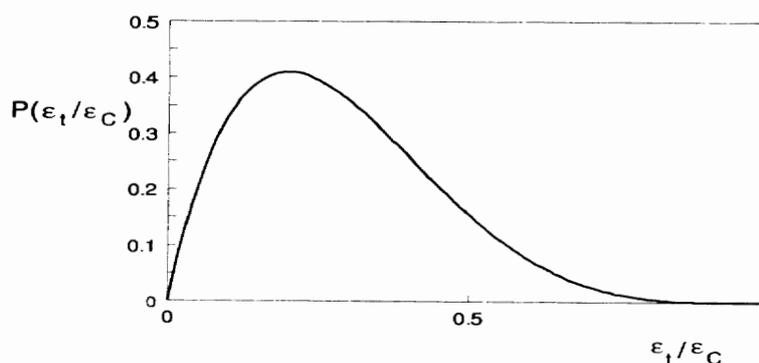


Abb. 4.18: Beispiel einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Gl.(4.59))

der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Rotations- und Schwingungsrelaxation prinzipiell skizziert. Ziel ist es, nach einer sehr großen Anzahl von Kollisionen eine Häufigkeitsverteilung von Energieverhältnissen zu erhalten, die der Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht. Das Schema der Vorgehensweise ist in Abbildung 4.19 skizziert.

Zunächst wird ein Wert ϵ_t/ϵ_C mit einem Zufallsgenerator "gewürfelt". Dann wird mit Gleichung (4.59) die Wahrscheinlichkeit $P(\epsilon_t/\epsilon_C)$ bestimmt, mit der dieser Wert auftritt. Dieser Wert wird mit einem zweiten Zufallswert verglichen. Ist der Zufallswert kleiner als der Häufigkeitswert, was natürlich umso öfter der Fall ist, je größer $P(\epsilon_t/\epsilon_C)$ ist, wird dieser Wert akzeptiert. Ist die Zufallszahl jedoch größer als der Wahrscheinlichkeitswert, wird dieser Wert verworfen ("rejected") und der Vorgang mit zwei neuen Zufallszahlen solange wiederholt, bis ein Wert akzeptiert wird.

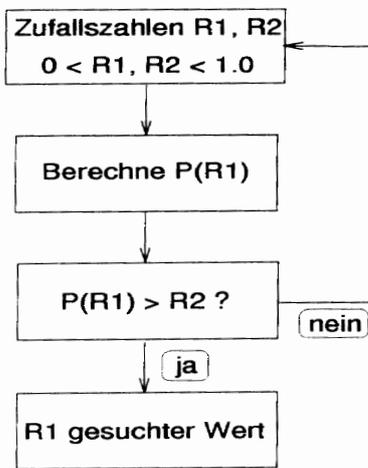


Abb. 4.19: Schema der "acceptation-rejection"-Methode

4.3.4 Simulation der Luftchemie

Um die gaskinetische Simulation chemischer Reaktionen zu erläutern, betrachten wir zunächst folgende einfache Reaktion



A , B , C und D stellen unterschiedliche Spezies dar. Unser Ziel ist es, makroskopisch richtige Reaktionsraten mikroskopisch zu simulieren. Die zeitliche Änderung der Teilchenzahl der Spezies A ist bei konstantem Volumen

$$-\frac{dn_A}{dt} = k_f(T)n_A n_B - k_r(T)n_C n_D \quad . \quad (4.64)$$

Für die Reaktionskoeffizienten der Hin- und Rückreaktion k_f und k_r ist entsprechend Kapitel 3.4 der modifizierte Arrheniusansatz gebräuchlich:

$$k(T) = aT^b \exp\left(-\frac{\epsilon_A}{kT}\right) \quad (4.65)$$

Die Konstanten a , b und E_A werden von CH. PARK 1985 angegeben. Der Zusammenhang zwischen der makroskopischen Reaktionsrate k_f und der mikroskopischen Reaktionswahrscheinlichkeit P_r lautet für die Hinreaktion

$$k_f n_A n_B = n_A \nu_{AB} \cdot \int_{\epsilon_A/kT}^{\infty} f\left(\frac{\epsilon_C}{kT}\right) \cdot P_r\left(\frac{\epsilon_C}{kT}\right) \cdot d\left(\frac{\epsilon_C}{kT}\right) \quad (4.66)$$

Diese Gleichung soll kurz erläutert werden: Reagieren können nur Teilchen, die miteinander kollidieren. Die Gesamtzahl der Kollisionen zwischen den Spezies A und B pro Zeiteinheit ist gleich dem Produkt aus der Gleichgewichtskollisionsrate ν_{AB} und der Teilchendichte n_A . Von den kollidierenden Teilchenpaaren können wiederum nur die miteinander reagieren, deren Kollisionsenergie

$$\epsilon_C = \frac{1}{2} m_r c_r^2 + (\epsilon_{i,1} + \epsilon_{i,2}) \quad (4.67)$$

größer als die Aktivierungsenergie ϵ_A ist. Dieser Teil ist in Abbildung 4.20 schraffiert dargestellt. Damit ist die Reaktionsrate indirekt von der inneren Energie der Kollisionspartner abhängig. Teilchen mit höherer innerer Energie reagieren mit höherer Wahrscheinlichkeit. Dies entspricht der Aussage des Zweitemperaturmodells (vgl. Kapitel 3.5).

Der Anteil der energiereichen Molekülpaarungen, die tatsächlich miteinander reagieren, wird durch die Einführung des sogenannten Sterikfaktors $P_r(\epsilon_C/kT)$ so

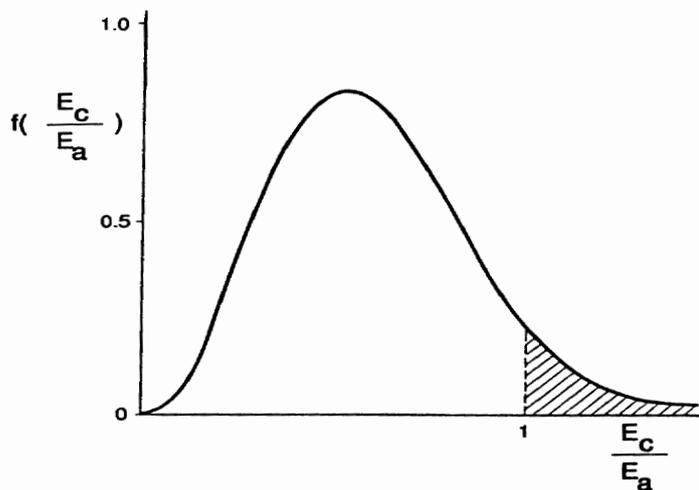


Abb. 4.20: Beispiel einer Energieverteilungsfunktion

modelliert, daß sich nach Integration der rechten Seite von Gleichung (4.66) die linke Seite ergibt. Ein Beispiel für die Abhängigkeit des Sterikfaktors von der Kollisionsenergie ist in Abbildung 4.21 dargestellt. Die Abkürzungen (M-A) und (M-M) bezeichnen Molekül-Atom Kollisionen bzw. Molekül-Molekül Kollisionen. Der Sterikfaktor P_r leitet sich aus dem Gleichgewichtsfall ab und sorgt dafür, daß im chemischen Gleichgewicht korrekte Reaktionsraten berechnet werden.

Die Modellierung der Rekombination



wird nach einem Ansatz von NANBU 1992 vorgenommen. Ein Atompaar kann nur dann zu einem Molekül reagieren, wenn ein Stoß mit einem dritten Teilchen stattfindet (Dreierstoß). Denn das dritte Teilchen muß die Bildungsenergie aufnehmen.

Bei dem Berechnungsverfahren werden generell keine Dreierstöße berücksichtigt. Daher wird die Rekombination durch die Einführung eines weiteren Wahrscheinlichkeitsfaktors P_{Rekom} modelliert. Um eine korrekte Rekombinationsrate zu erhalten, muß festgelegt werden, welcher Teil der Atom-Atom-Kollisionen tatsächlich zu einer Rekombination führt. Im chemischen Gleichgewicht muß die Anzahl der Dissoziationen gleich der Anzahl der Rekombinationen sein. Wir bezeichnen den Anteil der dissoziierten Atome N_A bezogen auf die Gesamtzahl der in dem System befindlichen Atomkerne als Dissoziationsgrad

$$\alpha = \frac{N_A}{N_a + 2 \cdot N_M} \quad (4.69)$$

Der Anteil der Atom-Atom-Zusammenstöße, die zu einer Rekombination führen ist

$$P_{Rekom} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_{eq}} \right)^2 \cdot \frac{N_{Diss}}{N_{A-A}} \quad (4.70)$$

N_{Diss} bezeichnet die Anzahl der Kollisionen, die zur Dissoziation führen. N_{A-A} ist Gesamtzahl der Atomkollisionen. Die Wahrscheinlichkeit einer Rekombination ist proportional P_{Rekom} .

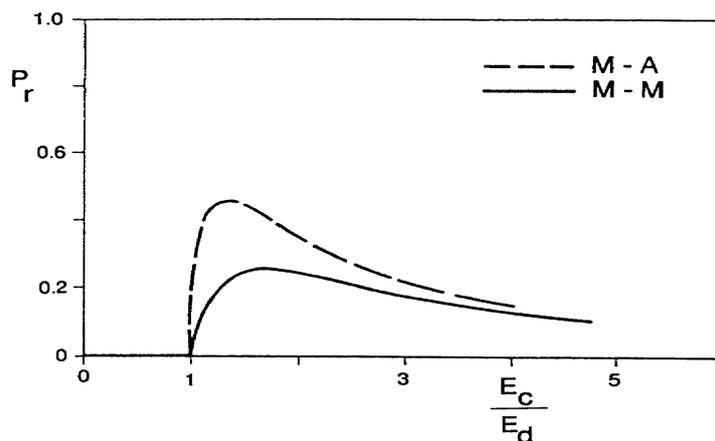


Abb. 4.21: Beispiel eines Sterikfaktors

Aus Gründen der Energieerhaltung muß die überschüssige Energie

$$e_{excess} = 0,25m_r c_r^2 + h_{Diss} \quad (4.71)$$

an ein drittes Teilchen abgegeben werden. Dieses Teilchen wird wiederum zufällig in der Umgebung ausgewählt.

Nachdem wir mit Abbildung 4.16 nachgewiesen haben, daß die gaskinetischen Simulationsmethoden die gasdynamischen Eigenschaften einer kalten Hyperschallströmung richtig wiedergeben, gilt es nun zu prüfen, ob auch die vereinfachte mikroskopische Modellierung der Luftchemie heißer Gase ihre Berechtigung hat. Dazu werden die Modelle zunächst entkoppelt von einer Strömung untersucht. Die Betrachtung einer Zustandsänderungen im Volumenelement der Abbildung 3.7 entspricht einem Experiment in einem idealen, adiabaten Reagenzglas.

Der Einfluß der Rekombination auf die Gleichgewichtstemperatur und -zusammensetzung kann anhand einer analytischen Beziehung überprüft werden. Im thermodynamischen Gleichgewicht schreibt sich der Dissoziationsgrad α eines binären Gases nach Lighthill als Funktion der Gleichgewichtstemperatur T :

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{\rho_d}{\rho} \exp\left(-\frac{\Theta_d}{T}\right) \quad (4.72)$$

mit der Dissoziationstemperatur Θ_d und der Stoffkonstanten ρ_d . In Abbildung 4.22 sind die Ergebnisse mehrerer Simulationen bei unterschiedlichen Anfangsbedingungen der analytischen Funktion von Lighthill gegenübergestellt. Es ist eine ausgezeichnete Übereinstimmung zu erkennen. Die Temperatur- und Dichteabhängigkeit des Dissoziationsgrads werden korrekt wiedergegeben.

Abbildung 4.23 zeigt die Simulation der zeitlichen Partialdichteverläufe ρ_i/ρ in schlagartig auf 25000 K erhitzter Luft.

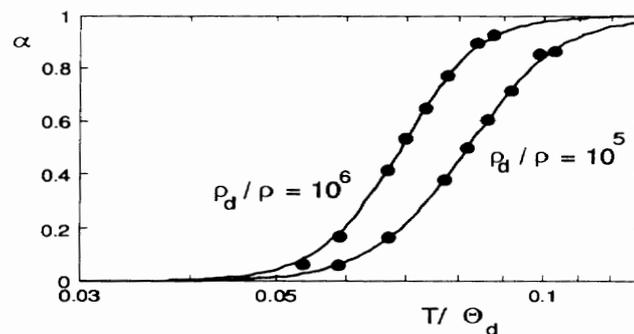


Abb. 4.22: Gleichgewichtsdissoziationsgrad als Funktion der Gleichgewichtstemperatur

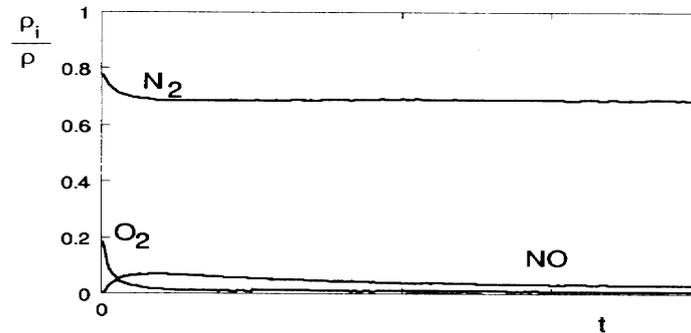


Abb. 4.23: Chemischer Relaxationsprozeß

4.3.5 Simulation der Gas-Oberflächenwechselwirkung

Zur Simulation der Gas-Oberflächenwechselwirkung an der technischen Oberfläche einer Wiedereintrittskapsel eignet sich für die Impulsakkomodation das diffuse Modell, da die technische Oberfläche des Hitzschildes bei der mikroskopischen Betrachtung "rauh" sein wird. In diesem Fall sind die Geschwindigkeitskomponenten der reflektierten Partikel von den Komponenten vor Auftreffen auf die Körperoberfläche unabhängig. Die Geschwindigkeitsverteilung der reflektierten Partikel entspricht im Mittel einer Maxwellverteilung für die Wandtemperatur T_w .

Für mehratomige Gase muß die innere Energie berücksichtigt werden. Wir machen dazu folgende, vereinfachende Annahmen: Nach der Reflexion hat das Molekül eine Rotationsenergie, die mit der Wandtemperatur im Gleichgewicht ist ("vollständige Akkomodation"), während die Vibrationsenergie sich nicht ändert, also nicht akkomodiert.

Als ersten Schritt zur Untersuchung des Einflusses der Katalytizität der Oberfläche auf den Wärmestrom wurden die Grenzfälle einer nichtkatalytischen ($\gamma = 0$) und einer vollkatalytischen Oberfläche ($\gamma = 1$) behandelt. Im vollkatalytischen Fall findet bei jedem Stoß mit der Oberfläche eine Rekombination statt sofern ein Rekombinationspartner in der Umgebung vorhanden ist. Die überschüssige Rekombinationsenergie wird an die Wand abgegeben.

Im DSMC-Verfahren muß die Oberflächentemperatur als Randbedingung vorgegeben werden. Die sich beim Wiedereintritt einstellende Oberflächentemperatur ergibt sich erst aus einer Koppelung des DSMC-Verfahrens mit einem strukturmechanischen Verfahren, das die Wärmeleitung bzw. Aufheizung des Körpers berücksichtigt.

4.4 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel stellen wir die gaskinetischen Simulationsergebnisse für eine ballistische Wiedereintrittskapsel vor, deren maximaler Durchmesser 1,4 m beträgt. In Abbildung 4.24 sind die verschiedenen Temperaturen entlang einer Staustrom-Grenzschichtlinie in einer Flughöhe von 90 km wiedergegeben. Vor dem Körper bildet sich ein starker Verdichtungsstoß aus. Die Translationstemperatur steigt auf das 110-fache des Wertes der Anströmung an. Aufgrund der relativ niedrigen Wandtemperatur sinkt die Temperatur hinter dem Stoß zum Staupunkt hin wieder ab.

Im weiteren Verlauf entfernt sich die betrachtete Grenzschichtlinie etwas von der Wand; deshalb steigt die Translationstemperatur gegenüber der isothermen Wandtemperatur an. Bei der Beschleunigung der Strömung entlang der Kapselkontur sinkt die Temperatur. An der Hinterkante der Kapsel expandiert die Strömung. Dadurch kommt es zu einer weiteren Temperaturverringerung. Hinter dem Körper treffen sich die Stromlinien in einem freien Staugebiet. An dieser Stelle tritt ein zweites Temperaturmaximum auf. Die Translationstemperatur beträgt dort etwa das 50-fache der Anströmtemperatur.

Die Rotations- und Vibrationstemperatur folgen der Translationstemperatur verzögert. An der Differenz der verschiedenen Temperaturen ist zu erkennen, daß sich die Strömung in weiten Bereichen im Nichtgleichgewicht befindet. Im Expansionsgebiet sind die Rotations- und Vibrationstemperatur nahezu konstant. Der Zustand wird als gefroren bezeichnet.

Der Einfluß der Dichte der Atmosphäre auf das Strömungsfeld und den Wärmeüber-

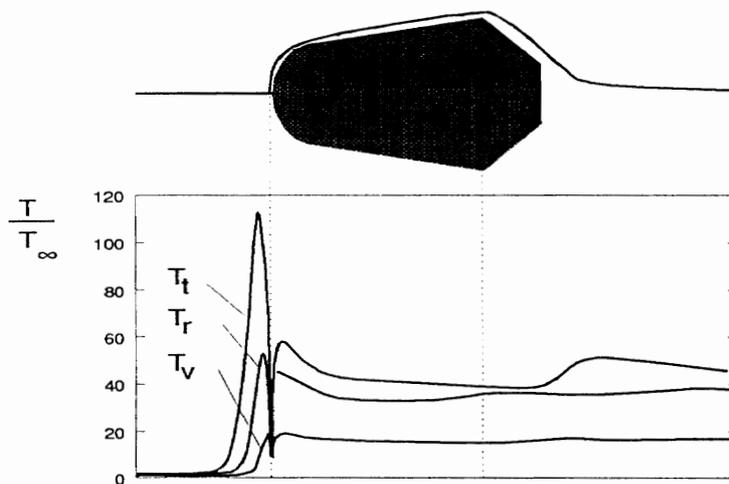
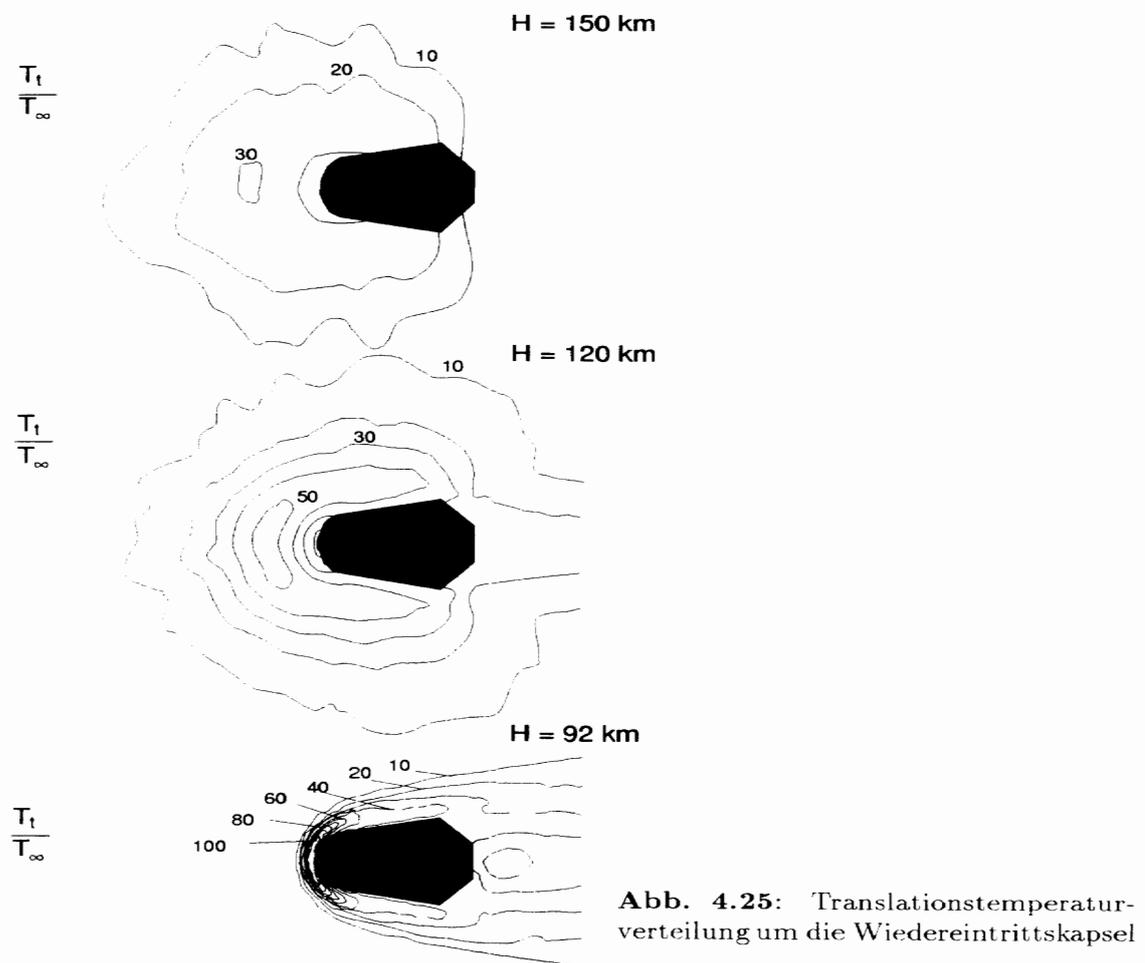


Abb. 4.24: Temperaturverlauf auf einer Staustrom-Grenzschichtlinie (Translationstemperatur T_t , Rotationstemperatur T_r , Vibrationstemperatur T_v)

gang wurde in drei verschiedenen Höhen der Wiedereintrittstrajektorie untersucht. Die Simulationsparameter der gaskinetischen Rechnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Diskretisierung erfolgte mit 80000 Zellen und 1200000 Teilchen.

Höhe	90 km	120 km	150 km
λ_∞	0,036 m	3,967 m	30,94 m
u_∞	7750 m/s	7700 m/s	7500 m/s
T_∞	180 K	400 K	733 K
T_W	1370	820 K	1000 K

In Abbildung 4.25 sind die dazugehörigen Translationstemperaturverteilungen dargestellt. Die Störung, die durch die Kapsel verursacht, zieht sich mit abnehmender



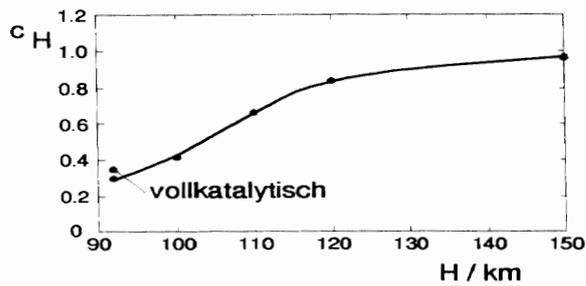


Abb. 4.26: Wärmeübergangsbeiwert als Funktion der Flughöhe

Höhe auf ein immer kleineres Gebiet zusammen. Dieser Effekt ist auf die abnehmende mittlere freie Weglänge zurückzuführen.

In Abbildung 4.26 ist der dimensionslose Wärmestrom c_H , der auf den Körper gerichtet ist, als Funktion der Flughöhe aufgetragen.

$$c_H = \frac{\dot{q}}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^3} \quad (4.73)$$

Die Kurvenverläufe zeigen die erwartete Tendenz: Mit abnehmender Verdünnung nimmt der Wärmeübergangskoeffizient c_H ab. Der dimensionsbehaftete Wärmestrom pro Fläche \dot{q} steigt dagegen mit abnehmender Höhe entlang der Wiedereintrittstrajektorie, da die Dichte der Anströmung stark zunimmt.

Zur Untersuchung des Einflusses der katalytischen Rekombination an der Wand werden in 90 km Höhe die Simulationen für eine vollkatalytische und eine nichtkatalytische Wand verglichen. Abbildung 4.27 zeigt die Partialdichte ρ_N/ρ des atomaren Stickstoffs in der Umgebung der Kapsel. Während im nichtkatalytischen Fall die Konzentration des atomaren Stickstoffs zur Wand hin ansteigen, bildet sich bei Berücksichtigung der Rekombination ein Konzentrationsmaximum aus, welches etwa an der Stelle des Temperaturmaximums liegt. Zur Wand hin sinkt die Konzentration aufgrund des katalytischen Effekts. Weiter stromabwärts ist bei dem vollkatalytischen Ergebnis der atomare Stickstoff fast vollständig zu Molekülen rekombiniert.

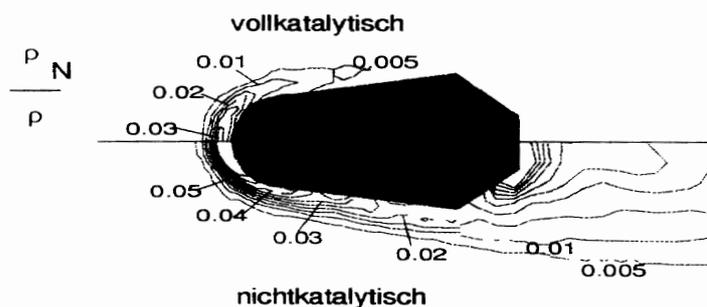


Abb. 4.27: Einfluß der katalytischen Rekombination an der Wand auf den atomaren Stickstoff

5 Kontinuumsströmungen

Im kontinuumsmechanischen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie vereinfacht sich die Boltzmann-Gleichung zu den kontinuumsmechanischen Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie. Das kontinuumsmechanische Strömungsfeld um eine Wiedereintrittskapsel haben wir bereits in Kapitel 2 beschrieben (s. Abbildung 2.2). Es bildet sich vor der Kapsel die scharf begrenzte Kopfwelle aus, die das Gas aufheizt. An der Hinterkante der Kapsel vollzieht sich der Übergang in die Nachlaufströmung über den Expansionsfächer.

Der Bereich der Kontinuumsmechanik ist erreicht, wenn die mittlere freie Weglänge der Moleküle so klein geworden ist, daß sie zur Beschreibung der makroskopischen Phänomene nicht mehr aufgelöst werden muß ($Kn < 0,01$). Das Prinzipbild 5.1 zeigt das Strömungsfeld in 45 km Höhe. In der Umgebung der Staustromlinie befindet sich das Gas im thermischen und chemischen Nichtgleichgewicht. Die starke Zustandsänderung über den Stoß kommt wegen der hohen Strömungsgeschwindigkeit und der noch relativ niedrigen Dichte in einem weiten Bereich der Wiedereintrittstrajektorie nicht ins Gleichgewicht. Aufgrund der starken Temperaturabnahme bei der Beschleunigung entlang der Körperoberfläche friert der Nichtgleichgewichtszustand ein. Für die Zustandsänderungen in der Grenzschicht auf der Kapsel sind die Eigenschaften der Körperoberfläche entscheidend. Die Oberflächentemperatur ist niedrig im Vergleich zu den Temperaturen im Strömungsfeld hinter dem Stoß. Katalytisch wirkende Oberflächen beschleunigen die chemischen Reaktionen. Es kommt zur teilweisen Rekombination der Moleküle. Bei nicht katalytischen Hitzeschutzmaterialien befindet sich die Strömung auch direkt an der Oberfläche noch im chemischen Nichtgleichgewicht.

Mit abnehmender Flughöhe und Flugeschwindigkeit nimmt die Dichte sehr stark zu. Dadurch kommen die thermodynamischen Nichtgleichgewichtsprozesse (Dissoziation, Rekombination, Schwingungsanregung) ins Gleichgewicht. Mit weiter

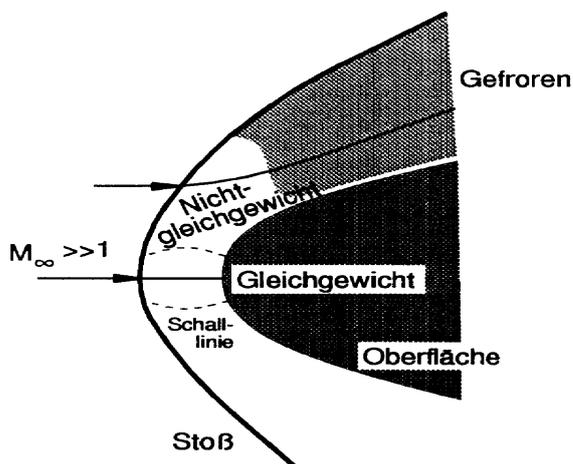


Abb. 5.1: Prinzipbild einer Nichtgleichgewichtsströmung im Kontinuumsbereich

abnehmender Fluggeschwindigkeit tritt im Gleichgewicht keine Dissoziation mehr auf. Schließlich ist bei kleinen Überschallmachzahlen auch die Schwingungsanregung nicht mehr von Bedeutung. Dann verhält sich Luft wie ein ideales Gas.

5.1 Phänomene

5.1.1 Verdichtungsstoß

Die Zustandsänderung über den senkrechten Stoß kann mit den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie einer eindimensionalen reibungsfreien Strömung beschrieben werden (Abbildung 5.2):

$$\begin{aligned}
 \text{Masse:} & \quad \rho_{\infty} u_{\infty} = \rho_1 u_1 \quad , \\
 \text{Impuls:} & \quad p_{\infty} + \rho_{\infty} u_{\infty}^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \quad . \\
 \text{Energie:} & \quad h_{\infty} + \frac{1}{2} u_{\infty}^2 = h_1 + \frac{1}{2} u_1^2 \quad .
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die thermische Zustandsgleichung liefert einen weiteren Zusammenhang zwischen Druck p , Dichte ρ und Temperatur T (Gleichungen (3.11), (3.13)). Die Enthalpie h folgt aus der kalorischen Zustandsgleichung (Gleichungen (3.37) (3.53)).

Dieses nichtlineare Gleichungssystem für den Gleichgewichtszustand 1 hinter dem senkrechten Verdichtungsstoß besitzt zwei Lösungen, die Identität ($p_1 = p_{\infty}$) und die Stoßlösung ($p_1 > p_{\infty}$). Über einen Stoß erhöhen sich sprunghaft Druck, Dichte und Temperatur. Die Geschwindigkeit wird durch einen senkrechten Stoß von Überschall auf Unterschall verzögert.

Bei einem idealen Gas ist die Zustandsänderung allein von der Machzahl M_{∞} abhängig. Der Stoß ist umso stärker, d.h. der Drucksprung ist umso größer, je höher die Anströmmachzahl M_{∞} ist.

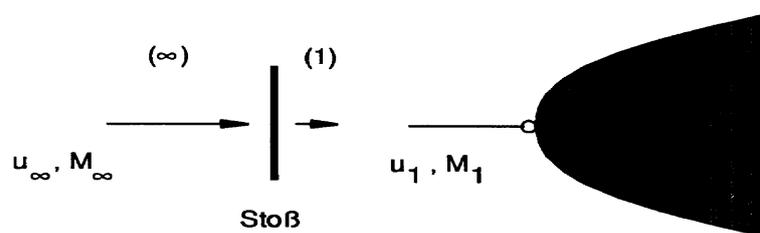


Abb. 5.2: Senkrechter Verdichtungsstoß

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \frac{(2+f)M_\infty^2 - 1}{1+f} \quad (5.2)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} = \frac{(1+f)M_\infty^2}{M_\infty^2 + f} \quad (5.3)$$

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \left(\frac{a_1}{a_\infty}\right)^2 = \frac{(M_\infty^2 + f)[(2+f)M_\infty^2 - 1]}{(1+f)^2 M_\infty^2} \quad (5.4)$$

$$\frac{u_1}{u_\infty} = \frac{M_\infty^2 + f}{(1+f)M_\infty^2} \quad (5.5)$$

$$\frac{M_1}{M_\infty} = \frac{u_1 a_\infty}{a_1 u_\infty} = \frac{M_\infty^2 + f}{M_\infty \sqrt{(M_\infty^2 + f)[(2+f)M_\infty^2 - 1]}} \quad (5.6)$$

Diese Stoßbeziehungen können statt mit der Anzahl der Freiheitsgrade f auch mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen κ ausgedrückt werden.

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{2+f}{f} \quad (5.7)$$

$$f = \frac{2}{\kappa - 1} \quad (5.8)$$

Für den Hyperschall ($M_\infty \gg 1$) ergeben sich folgende Grenzwerte:

$$\frac{p_1}{p_\infty} \rightarrow \frac{2+f}{1+f} M_\infty^2 \quad (5.9)$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_\infty} \rightarrow 1+f \quad (5.10)$$

$$\frac{T_1}{T_\infty} \rightarrow \frac{2+f}{(1+f)^2} M_\infty^2 \quad (5.11)$$

$$\frac{u_1}{u_\infty} \rightarrow \frac{1}{1+f} \quad (5.12)$$

$$M_1 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2+f}} \quad (5.13)$$

Während Druck und Temperatur mit der Machzahl beliebig steigen, strebt das Dichteverhältnis dem endlichen Grenzwert $(1+f)$ zu, das von der Anzahl der Freiheitsgrade der Atome und Moleküle abhängt. Für ein Gas aus zweiatomigen Molekülen ($f = 5$) steigt die Dichte auf maximal den 6-fachen Wert der Anströmung. Für Druck und Enthalpie gilt im Grenzübergang $M_\infty \rightarrow \infty$

$$p_1 \approx \rho_\infty u_\infty^2 \quad (5.14)$$

$$h_1 \approx \frac{1}{2} u_\infty^2 \quad (5.15)$$

Die Zustandsänderungen über einen Stoß können im Hugoniot-Diagramm diskutiert werden. Hierzu wird das Druckverhältnis p_1/p_∞ als Funktion des Dichtesprungs ρ_∞/ρ_1 in Abbildung 5.3 aufgetragen. Die Idee der folgenden Betrachtungen liegt darin, die Kinematik (Massen- und Impulserhaltung) von der Thermodynamik (Energieumsetzung) zu trennen. Aus der Kontinuitätsgleichung und dem Impulssatz (Gleichungen (5.1)) folgt:

$$\begin{aligned} u_\infty^2 &= \frac{\rho_1}{\rho_\infty} \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_1 - \rho_\infty} \\ u_1^2 &= \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \frac{p_1 - p_\infty}{\rho_1 - \rho_\infty} \end{aligned}$$

Mit der Enthalpie

$$h = \frac{f + 2p}{2\rho} \quad (5.16)$$

ergibt sich aus dem Energiesatz dann die folgende Beziehung

$$\frac{p_1}{p_\infty} = \frac{(1+f) - \frac{\rho_\infty}{\rho_1}}{(1+f)\frac{\rho_\infty}{\rho_1} - 1} \quad (5.17)$$

Diese Hyperbel wird als Hugoniot-Kurve bezeichnet. Sie gibt alle thermodynamisch möglichen Zustände 1 an. Die kinematisch möglichen Zustände werden durch die sogenannte Rayleigh-Gerade beschrieben. Sie folgt allein aus der Kontinuitäts- und der Impulsgleichung. Mit dem Zwischenschritt

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 + \frac{u_\infty^2}{p_\infty/\rho_\infty} - \frac{u_\infty^2}{p_\infty/\rho_\infty} \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \quad (5.18)$$

folgt

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 + \frac{2+f}{f} M_\infty^2 - \frac{2+f}{f} M_\infty^2 \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \quad (5.19)$$

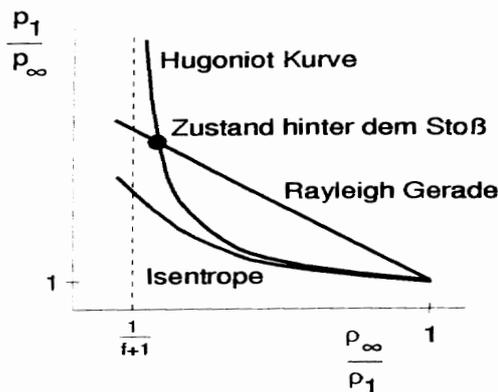


Abb. 5.3: Hugoniot-Diagramm

Die Steigung der Rayleigh-Geraden ist durch die Machzahl M_∞ vor dem Stoß und durch die Anzahl der Freiheitsgrade f bestimmt. Der Schnittpunkt beider Kurven in Abbildung 5.3 ist die gesuchte Stoßlösung. Im Punkt (1,1) stimmt die Steigung und die zweite Ableitung der Hugoniot-Kurve mit der Isentropen überein. Das bedeutet, daß schwache Stöße nahezu isentrop, starke Stöße, die im Hyperschall auftreten, dagegen anisentrop verlaufen.

Die Flächen unter den Kurven in Abbildung 5.4 repräsentieren Energiedifferenzen der inneren Energie über den Verdichtungsstoß. Die Fläche unterhalb der Rayleigh-Geraden entspricht der Erhöhung der inneren Energie pro Masse $e_1 - e_\infty$ bezogen auf $p_\infty v_\infty$, denn aus dem Energiesatz folgt:

$$\frac{e_1 - e_\infty}{p_\infty v_\infty} = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1}{p_\infty} - 1 \right] \left[1 - \frac{p_\infty}{p_1} \right] + \left[1 - \frac{p_\infty}{p_1} \right] \quad (5.20)$$

Die Fläche unter der Isentropen repräsentiert die Erhöhung der inneren Energie $e_i - e_\infty$ bei einer entsprechenden isentropen Dichteerhöhung. Dies folgt unmittelbar aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (3.20) mit $ds = 0$. Damit entspricht die Fläche zwischen der Hugoniot-Kurve und der Isentropen der kinetischen Energie, die bei gleicher Dichteerhöhung zusätzlich in innere Energie umgewandelt wird.

Bisher haben wir den senkrechten Verdichtungsstoß für ein kalorisch ideales Gas ($f = \text{konst.}$) behandelt. Das Hugoniot-Diagramm läßt sich auch für die anschauliche Darstellung der Realgaseffekte heißer Gase benutzen. Aufgrund der Realgaseffekte ist f nun variabel. Die Rayleigh-Gerade bleibt davon unbeeinflusst, da die Kontinuitätsgleichung und die Impulsgleichung weiterhin gelten ($f = f_\infty$).

Die Anregung der inneren Energie wirkt sich über den Energiesatz ausschließlich in der Hugoniot-Kurve aus. Aus der Diskussion der Relaxationsvorgänge hinter einem Verdichtungsstoß wissen wir bereits, daß die Dichte durch die Anregung der Schwingungsenergie und infolge der Dissoziation weiter ansteigt (Abbildungen 3.8-3.10). Während der Schwingungsanregung nimmt f zu. Deshalb weicht die Hugoniot-Kurve bei großen Druckverhältnissen p_1/p_∞ und damit verbundenen hohen Anströmmachzahlen von der Kurve eines idealen Gases mit $f = 5$ ab

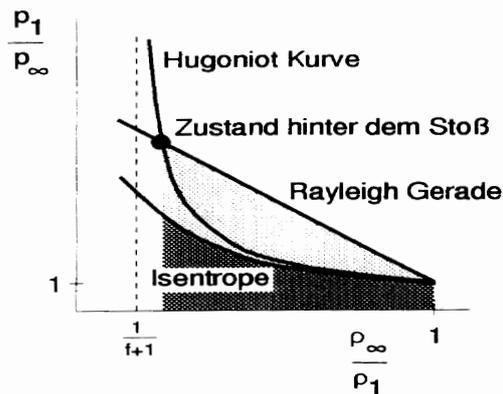


Abb. 5.4: Energien im Hugoniot-Diagramm

(Abbildung 5.5). Es werden größere Dichteverhältnisse als beim idealen Gas über den Stoß erreicht. Hinzu kommt der Effekt, daß sich das Gas aufgrund der Anregung der Schwingungsenergie und der Dissoziation abkühlt. Da diese Relaxation näherungsweise isobar verläuft, bedeutet dies eine weitere Dichtezunahme, so daß die Dichte sogar über den Grenzwert $(f + 1) = 8$ ansteigen kann (vgl. Gleichung (5.3)).

Beim einem vollständig dissoziierenden Gas wird der Dichtesprung wieder kleiner. Die Hugoniot-Kurve strebt asymptotisch gegen die Hugoniot-Kurve eines aus Atomen bestehenden Gases.

Sobald Realgaseffekte eine Rolle spielen, ist die Hugoniot-Kurve nicht mehr allein vom M_∞ und f_∞ abhängig. Es kommt eine Abhängigkeit von Temperatur und Druck der Anströmung hinzu. Je höher die Anströmtemperatur ist, desto kleiner ist die Machzahl, bei der die Schwingungsanregung und die Dissoziation einsetzt.

Die thermodynamischen Nichtgleichgewichtsvorgänge lassen sich im Hugoniot-Diagramm nur qualitativ darstellen, da die Zeit als zusätzlicher Parameter eingeht. Entsprechend den Abbildungen 3.8 folgt die Schwingungsrelaxation in der Abbildung 5.6 der Rayleigh-Geraden vom gefrorenen Zustand (f) (Molekültranslation und -rotation im Gleichgewicht) bis zum Gleichgewichtszustand (e) (Molekültranslation, -rotation und -schwingung im Gleichgewicht). Eine entsprechende Betrachtung läßt sich auch für die Dissoziationsrelaxation durchführen.

Bisher haben wir ausschließlich den senkrechten Verdichtungsstoß auf der Stauströmlinie vor der Wiedereintrittskapsel behandelt. Die Abbildung 5.1 zeigt jedoch abseits der Stauströmlinie eine gekrümmte Kopfwelle, deren Form durch die Verdrängungswirkung der Kapsel bestimmt ist. Eine einfache Überlegung wird uns zeigen, daß wir alle für den senkrechten Stoß durchgeführten Ableitungen direkt auf den gekrümmten Bereich der Kopfwelle übertragen können.

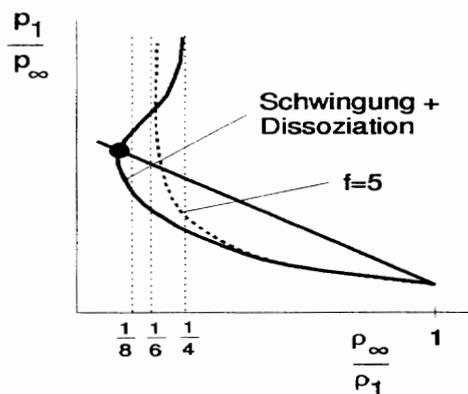


Abb. 5.5: Hugoniot-Diagramm mit Hochtemperatureffekten

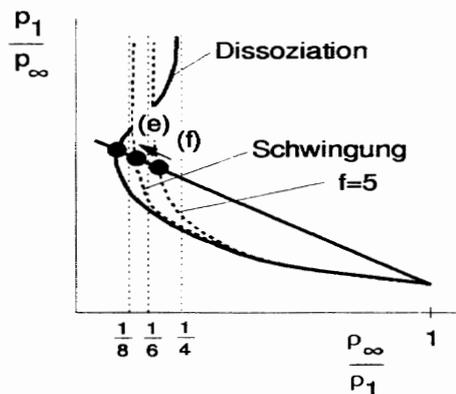


Abb. 5.6: Hugoniot-Diagramm mit Nichtgleichgewichtseffekten

Der schiefe, zur Anströmung geneigte, Verdichtungsstoß realisiert die Umlenkung der Überschallströmung um die Kapsel. Betrachten wir die Umströmung eines Keils in Abbildung 5.7. Die Strömung wird über den Stoß dem Keilwinkel β_K entsprechend umgelenkt.

Schiefe Stöße müssen mit zweidimensionalen Erhaltungsgleichungen (analog Gleichung (5.1)) behandelt werden. Es zeigt sich, daß die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit über einen Stoß erhalten bleibt. Die Normalkomponente verhält sich nach den Gesetzen des geraden Verdichtungsstoßes, d.h. in einem mit $u_{\infty t} = u_{1 t}$ mitbewegten Koordinatensystem liegt ein senkrechter Verdichtungsstoß vor. Deshalb gilt für die Normalkomponenten der Geschwindigkeit (analog (5.1)):

$$\begin{aligned} \text{Masse:} & \quad \rho_{\infty} u_{\infty n} = \rho_1 u_{1 n} \quad , \\ \text{Impuls:} & \quad p_{\infty} + \rho_{\infty} u_{\infty n}^2 = p_1 + \rho_1 u_{1 n}^2 \quad , \quad (5.21) \\ \text{Energie:} & \quad h_{\infty} + \frac{1}{2} u_{\infty n}^2 = h_1 + \frac{1}{2} u_{1 n}^2 \quad . \end{aligned}$$

Die Umlenkung der Strömung erfolgt gerade so, daß das Gas hinter einem anliegenden Stoß wandparallel abströmt.

$$u_{\infty n} = u_{\infty} \sin \Theta \quad , \quad (5.22)$$

$$u_{1 n} = u_1 \sin (\Theta - \beta_k) \quad , \quad (5.23)$$

$$u_{\infty t} = u_{\infty} \cos \Theta \quad , \quad (5.24)$$

$$u_{1 t} = u_1 \cos (\Theta - \beta_k) \quad . \quad (5.25)$$

Der Stoßwinkel Θ geht in die Formeln ein, wenn die Machzahl M_n , gebildet mit der Normalkomponente $u_{\infty, n}$, durch die Machzahl der Anströmung ausgedrückt wird:

$$M_n = M_{\infty} \cdot \sin \Theta \quad . \quad (5.26)$$

Aus geometrischen Betrachtungen ergibt sich der Zusammenhang zwischen dem Umlenkwinkel β_k und dem Stoßwinkel Θ :

$$\tan \beta_k = 2 \cot \Theta \frac{M_{\infty}^2 \sin^2 \Theta - 1}{M_{\infty}^2 (\kappa + \cos 2\Theta) + 2} \quad . \quad (5.27)$$

D.h. der Umlenkwinkel ist eine Funktion des Stoßwinkels und der Machzahl ($\beta_k = \beta_k(\Theta, M_{\infty})$). Zusammen mit dem Druckverhältnis über den schiefen Stoß

$$\frac{p_1}{p_{\infty}} = \frac{2\kappa M_{\infty}^2 \sin^2 \Theta - (\kappa - 1)}{\kappa + 1} \quad (5.28)$$

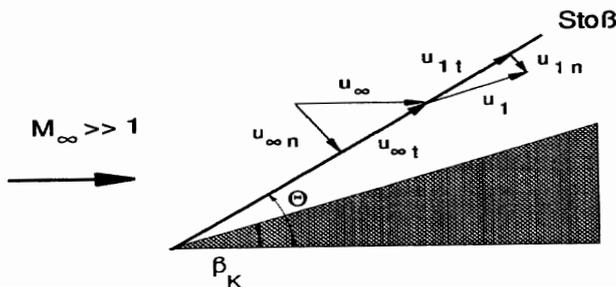


Abb. 5.7: Schiefer Verdichtungsstoß am Keil

ergibt sich nach Elimination des Stoßwinkels Θ die folgende Beziehung zwischen Umlenkwinkel und Anströmmachzahl:

$$\tan \beta_k = \frac{\frac{p_1}{p_\infty} - 1}{\kappa M_\infty^2 - \left(\frac{p_1}{p_\infty} - 1\right)} \sqrt{\frac{\frac{2\kappa}{\kappa+1}(M_\infty^2 - 1) - \left(\frac{p_1}{p_\infty} - 1\right)}{\frac{p_1}{p_\infty} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1}}} \quad (5.29)$$

Die Umkehrfunktion, der Druckanstieg hinter dem Stoß in Abhängigkeit vom Umlenkwinkel β_k , wird in dem sogenannten Herzkurvendiagramm (Abbildung 5.8) aufgetragen. Dieses Diagramm gilt dann jeweils für eine Anströmmachzahl.

Für kleine Keilwinkel existieren zwei Lösungen der Stoßgleichungen, die schwache und die starke Lösung. Im Grenzfall $\beta_k = 0$ sind dies die Identität und der senkrechte Stoß. Für $\beta_k \neq 0$ stellt sich im allgemeinen die schwache Lösung ein. Wird β_k größer als ein bestimmter, von der Anströmmachzahl abhängiger Grenzwinkel β_g , dann löst sich der schiefe anliegende Stoß vom Keil ab. In diesem Fall stellt sich eine Unterschallanströmung des Keils ein. Die Machzahl hinter einem schiefen Stoß ist (im Gegensatz zum senkrechten Stoß) i.a. größer als eins.

Die Strömung über die gekrümmte Kopfwelle ist lokal mit der Strömung über den schiefen anliegenden Stoß am Keil identisch. Die Neigung der Kopfwelle stellt sich gerade so ein, daß der für die Umströmung der Kapsel notwendige Umlenkwinkel erreicht wird. Aus diesem Grund kann die Kopfwelle lokal als schiefer Stoß an einen fiktiven Ersatzkeil behandelt werden.

Für eine Vertiefung der gasdynamischen Grundlagen empfehlen wir die Lehrbücher von E. BECKER 1966 und J. ZIEREP 1976. Der Einfluß der Realgaseffekte ist in dem klassischen Stoßrohrbuch von H. OERTEL SEN. 1965 und bei J.D. ANDERSON JR. 1989 nachzulesen.

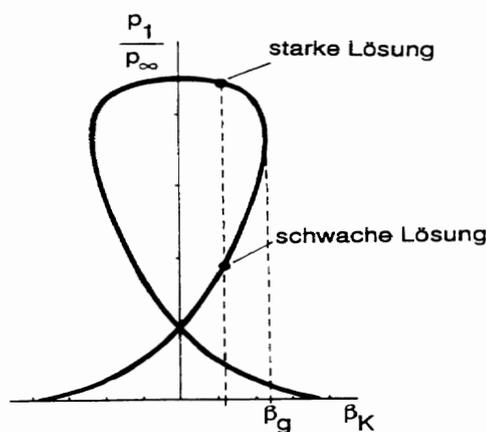


Abb. 5.8: Herzkurvendiagramm: Druckverhältnis in Abhängigkeit des Umlenkwinkels

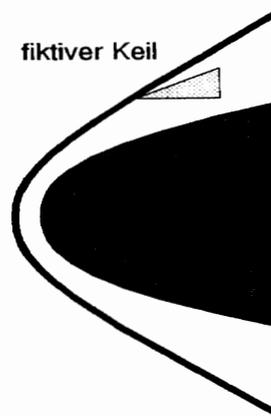


Abb. 5.9: Schiefer Verdichtungsstoß der Kopfwelle

5.1.2 Expansion

Wie wir bereits in Kapitel 2.1, Abbildung 2.2, diskutiert haben, wird die Strömung an der Hinterkante der Wiedereintrittskapsel über einen Expansionsfächer umgelenkt und dabei beschleunigt. Es wird von einer zentrierten Expansion gesprochen, da der Expansionsfächer von einer scharfen Kante ausgeht. Die folgenden Betrachtungen werden unter Vernachlässigung der Reibungseffekte in der Nähe der Wand durchgeführt. Im Gegensatz zum Verdichtungsstoß verläuft die Expansion kontinuierlich. Bei der Expansion erhöhen sich Strömungsgeschwindigkeit und Machzahl. Druck, Dichte und Temperatur nehmen ab. Die Stromlinien im Expansionsgebiet haben einen glatten Verlauf. Die chemischen Reaktionen sind entsprechend der Abbildung 5.1 bereits vor der Expansion eingefroren.

Wir betrachten die Expansion der Abbildung 5.10 um die Hinterkante der Kapsel mit einem Umlenkwinkel Θ . Der Expansionsfächer besteht aus einer unbegrenzten Zahl von Machschen Wellen, die von der Ecke ausgehen. Eine Machsche Welle ist eine Linie, auf der der Strömungszustand konstant ist. Die Machschen Wellen werden auch als Charakteristiken bezeichnet. Unter der Voraussetzung, daß der Durchmesser der Kapsel groß ist, kann die Expansion an der Hinterkante näherungsweise als ebene Prandtl-Meyer-Expansion behandelt werden (J. ZIEREP 1976).

Das Expansionsgebiet wird durch zwei Machsche Wellen begrenzt, die unter den Winkeln μ_1 und μ_2 verlaufen.

$$\tan \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}} \quad , \quad \tan \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2^2 - 1}} \quad . \quad (5.30)$$

Mit anderen Worten, eine infinitesimale Störung breitet sich in einer Überschallströmung unter einem Winkel μ aus. Dies ist ein Ergebnis, das aus einer Betrachtung der linearisierten, ebenen gasdynamischen Grundgleichungen für stationäre Strömungen folgt. Aus den geometrischen Zusammenhängen kann hieraus die folgende Differentialgleichung für die Beziehung zwischen der Strömungsgeschwindigkeit

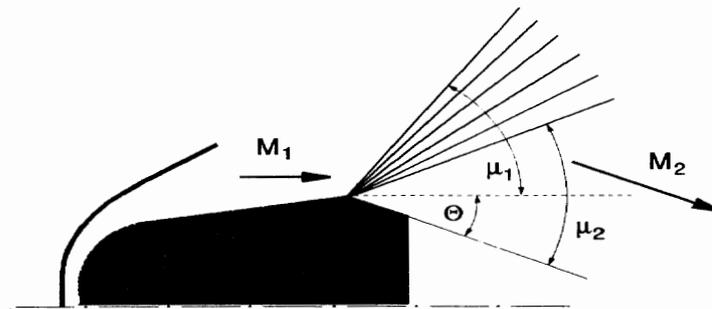


Abb. 5.10: Zentrierte Expansion

keit V und dem Umlenkwinkel Θ hergeleitet werden:

$$d\Theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \quad . \quad (5.31)$$

Diese Gleichung basiert lediglich auf geometrischen Überlegungen und der Definition der Machschen Wellen. Daher gilt sie sowohl für ideale Gase als auch beispielsweise für chemisch reagierende Gase. Die Integration der Differentialgleichung unter der Voraussetzung eines idealen Gases liefert den Zusammenhang zwischen den Machzahlen vor und hinter der Expansion und dem Umlenkwinkel.

$$\Theta = \nu(M_2) - \nu(M_1) \quad . \quad (5.32)$$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \left[\tan^{-1} \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} (M^2 - 1)} \right] - \tan^{-1} \sqrt{M^2 - 1} \quad . \quad (5.33)$$

mit $\kappa = c_p/c_c = (2 + f)/f$.

Die Zustandsänderung durch den Expansionsfächer erfolgt isentrop:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_2^2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (5.34)$$

Für hohe Machzahlen vereinfachen sich diese Beziehungen zu:

$$\Theta = \frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2} \right) \quad (5.35)$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} M_1 \Theta \right)^{2\kappa/(\kappa-1)} \quad (5.36)$$

Der Ausdruck $M_1 \Theta$ wird auch als Hyperschall-Ähnlichkeitsparameter bezeichnet. In Gleichung (5.35) ist zu erkennen, daß für $M_2 \rightarrow \infty$ ein maximaler Umlenkwinkel existiert. Bei diesem Winkel wird theoretisch Vakuum erreicht. Im realen Nachlauf der Kapsel spielen Reibungseffekte jedoch eine wichtige Rolle. Es bildet sich ein Rückströmgebiet aus, das den Expansionsbereich verkleinert. Der gefrorenen Strömung unmittelbar vor der Expansion tragen wir dadurch Rechnung, daß wir κ entlang der Wiedereintrittstrajektorie entsprechend anpassen.

5.1.3 Hyperschall-Einfriereigenschaft

Ein weitere charakteristische Eigenschaft einer Hyperschallströmung ist die Einfriereigenschaft. Sie besagt, daß im Grenzübergang $M_\infty \Theta \rightarrow \infty$ die Druckverteilung um die Wiedereintrittskapsel unabhängig von der Anströmmachzahl M_∞ wird. Θ bezeichnet jetzt den Anstellwinkel der Kapsel. Das Produkt $M_\infty \Theta$ ist der Hyperschall-Ähnlichkeitsparameter, der insbesondere in den Beziehungen für den schiefen Verdichtungsstoß auftritt. Als Konsequenz der Hyperschall-Einfriereigenschaft streben die dimensionslosen Auftriebs- und Widerstandsbeiwerte c_A

und c_W gegen konstante Werte. Die dimensionsbehafteten Größen, beispielsweise der Druck, sind weiterhin von der Machzahl abhängig. Die Auftriebskraft F_A und der Widerstand F_W werden mit der kinetischen Energie der Anströmung und einer charakteristischen Fläche A , der Projektionsfläche des Körpers, dimensionslos gemacht:

$$c_A = \frac{F_A}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 A} \quad (5.37)$$

$$c_W = \frac{F_W}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 A} \quad (5.38)$$

Die Hyperschall-Einfriereigenschaft darf nicht mit dem Einfrieren der thermodynamischen Relaxationsvorgänge verwechselt werden. Die Hyperschall-Einfriereigenschaft resultiert aus der Tatsache, daß sich die Zustandsänderungen kalorisch idealer Gase als Funktion der Machzahl schreiben lassen (vgl. Stoßbeziehungen). Bei chemisch reagierenden Gasen verliert die Machzahl ihre Bedeutung als Ähnlichkeitszahl. Die Zustandsänderung über den Stoß ist dann eine Funktion der Geschwindigkeit, des Drucks und der Temperatur der Anströmung. Das bedeutet, daß die Hyperschall-Einfriereigenschaft nur bei relativ niedrigen Temperaturen im sogenannten kalten Hyperschall gilt.

Abbildung 5.11 zeigt die Machzahlabhängigkeit des c_W -Beiwerts einer Kugel. Wir erkennen, daß der Widerstandsbeiwert ab $M_\infty = 6$ konstant wird. Das Einfrieren des Kopfwellenabstands kann in Abbildung 2.4 nachvollzogen werden. Die Realgas-effekte jedoch wirken dem Einfrieren entgegen. Bei einem dissoziierenden Gas im chemischen Gleichgewicht ist der Kopfwellenabstand am kleinsten. Im Nichtgleichgewicht liegt der Kopfwellenabstand zwischen den Grenzfällen des idealen Gases und des chemischen Gleichgewichts.

Da sich das Ausmaß des thermodynamischen Nichtgleichgewichts entlang der Wiedereintrittstrajektorie kontinuierlich ändert, variiert der Kopfwellenabstand der

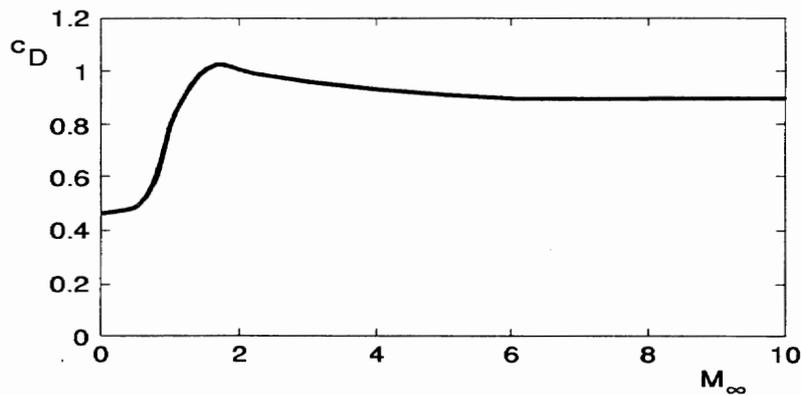


Abb. 5.11: Einfriereigenschaft des Widerstandsbeiwerts einer Kugel

Wiedereintrittskapsel auch bei sehr hohen Machzahlen. Dies kann in den Einzelbildern des im Anhang aufgeführten Lehrfilms verfolgt werden.

5.1.4 Hyperschallgrenzschichten

Im kontinuumsmechanischen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie bildet sich auf der Wiedereintrittskapsel eine Hyperschallgrenzschicht aus. Wir wollen zunächst die Dicke einer laminaren, kompressiblen Grenzschicht abschätzen. Die Dicke δ_S einer inkompressiblen Plattengrenzschicht wächst bekanntermaßen mit der Wurzel der von der Plattenvorderkante gezählten Lauflänge x an. In der kompressiblen Grenzschicht sorgt die mit der starken Verzögerung (Haftbedingung) einhergehende Temperaturerhöhung prinzipiell für eine Dichteabnahme und eine Viskositätszunahme des Gases. Die erhöhte Viskosität bewirkt einen weiter in die Außenströmung hineinreichenden Reibungseinfluß und die Dichteabnahme führt zu einer räumlichen Ausdehnung wandnaher (d.h. langsamer) Fluidelemente. Die adiabate kompressible Plattengrenzschicht ist deshalb dicker als die inkompressible Plattengrenzschicht. Die für den Hyperschall typische Wärmeabfuhr an die Wand wirkt dieser Aufdickung wiederum entgegen. In der unmittelbaren Nähe der Wand nimmt die Dichte deshalb erheblich, häufig sogar stärker als über die Kopfwelle, zu.

Betrachten wir der Einfachheit halber die kompressible Plattengrenzschicht (Abbildung 5.12). Man beachte: Strömungs- und Temperaturgrenzschichtdicke δ_S bzw. δ_T unterscheiden sich entsprechend der Prandtlzahl.

Aus dem integralen Impulssatz (vgl. J. ZIEREP 1993) erhalten wir für den in der Skizze der Abbildung 5.12 strich-punktiert eingetragenen Kontrollraum pro Ein-

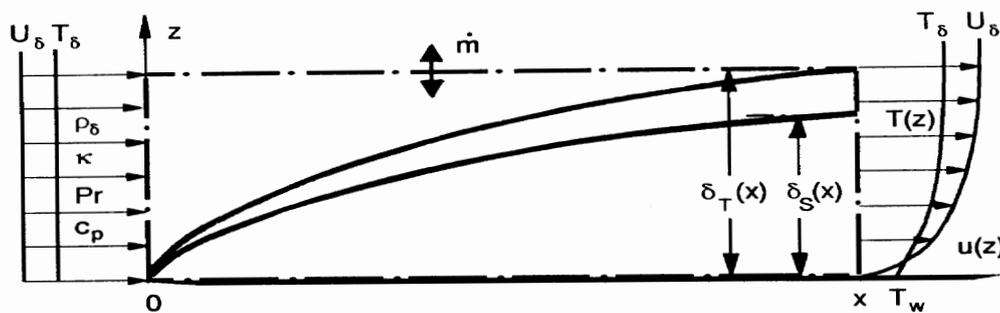


Abb. 5.12: Kompressible Plattengrenzschicht

heitstiefe die x -Bilanz:

$$-(\rho_\delta U_\delta) U_\delta \delta_T(x) + U_\delta \dot{m} + \int_0^{\delta_T(x)} (\rho u) u \, dz = - \int_0^x \left[\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0} dx \quad (5.39)$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert den die obere Berandung des Kontrollvolumens überquerenden Massenstrom $\dot{m} = \int_0^{\delta_T(x)} (\rho_\delta U_\delta - \rho u) \, dz$ (positiv bei Massenaustritt). Setzen wir diesen in die Impulsbilanz (5.39) ein und beziehen alle Größen auf ihren jeweiligen Wert am Grenzschichttrand (Index "δ"), ergibt sich:

$$\int_0^{\delta_S(x)} \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{u}{U_\delta} \left(1 - \frac{u}{U_\delta}\right) dz = - \frac{\mu_\delta}{\rho_\delta U_\delta} \int_0^x \frac{\mu_w}{\mu_\delta} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{U_\delta} \right) \right]_w dx \quad (5.40)$$

Für die Dichte gilt wegen des in der Grenzschicht herrschenden konstanten Drucks $\rho/\rho_\delta = T_\delta/T$. Die mit der Temperatur steigende Viskosität approximieren wir mit dem für hohe Temperaturen vereinfachten Sutherlandschen Gesetz durch

$$\frac{\mu}{\mu_\delta} = \sqrt{\frac{T}{T_\delta}} \left(1 + \frac{110K}{T_\delta}\right) \quad (5.41)$$

Damit sind sämtliche Strömungsgrößen auf den Geschwindigkeits- und Temperaturverlauf zurückgeführt. Diese werden jetzt zur Auswertung des Impulssatzes (5.40) benötigt und wir wollen dazu vereinfachte Funktionen entsprechend Abbildung 5.13 näherungsweise ansetzen:

$$\frac{u}{U_\delta} \approx \frac{z}{\delta_S(x)} \quad , \quad \frac{T}{T_\delta} \approx \frac{T_w}{T_\delta} - \left(\frac{T_w^a}{T_\delta} - 1\right) \left[\frac{z}{\delta_T(x)}\right]^2 + \left(\frac{T_w^a}{T_\delta} - \frac{T_w}{T_\delta}\right) \frac{z}{\delta_T(x)} \quad (5.42)$$

Wir gehen für den Temperaturansatz $T(z)$ vom Fall einer wärmeundurchlässigen ("adiabaten") Wand aus. Dieses adiabate Profil $T^a(z)$ nähern wir durch ein Parabelstück an. Die sich infolge der Selbstaufheizung einstellende Wandtemperatur T_w^a bestimmen wir näherungsweise mit Hilfe der Energiebilanz für das obige Kontrollvolumen. Bei sonst analogem Vorgehen wie oben ist die transportierte Größe

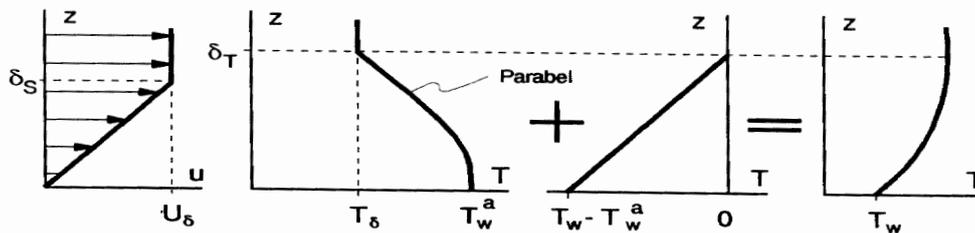


Abb. 5.13: Vereinfachte Ansatzfunktionen für die Anwendung des Impulssatzes

jetzt die volumenbezogene Totalenthalpie $\rho(\frac{1}{2}u^2 + c_p T)$ anstelle des Impulses ρu (beachte: adiabate Wand, sehr kleine Wärmeleitung in Stromabrichtung):

$$-\rho_\delta(\frac{1}{2}U_\delta^2 + c_p T_\delta)U_\delta \delta_T(x) + (\frac{1}{2}U_\delta^2 + c_p T_\delta) \dot{m} + \int_0^{\delta_T(x)} \rho(\frac{1}{2}u^2 + c_p T) u dz = 0 \quad (5.43)$$

Wir setzen den Ausdruck für \dot{m} in diese Gleichung ein, teilen die Integration in die beiden Teilintervalle $0 \leq z \leq \delta_S$ und $\delta_S < z \leq \delta_T$ auf und beziehen alle Größen auf ihren jeweiligen Wert am Grenzschichttrand:

$$\int_0^{\delta_S(x)} \frac{u}{U_\delta} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\delta}\right) dz + \frac{\kappa - 1}{2} M_\delta^2 \int_0^{\delta_S(x)} \frac{\rho}{\rho_\delta} \frac{u}{U_\delta} \left[\left(\frac{u}{U_\delta}\right)^2 - 1\right] dz + \int_{\delta_S(x)}^{\delta_T(x)} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\delta}\right) dz = 0 \quad .$$

Wir unterstellen im Intervall $\delta_S < z \leq \delta_T$ nur sehr kleine Dichteunterschiede, so daß näherungsweise $\rho(z)/\rho_\delta \simeq 1$ in $\delta_S < z < \delta_T$ gelte und somit das letzte der Integrale in dieser Gleichung verschwindet. Wir setzen nun unsere vereinfachten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile entsprechend der Beziehungen (5.42) für $T_w = T_w^a$ in die obigen Integrale ein und berücksichtigen dabei, daß wegen der Annahme großer Machzahlen M_δ die Vereinfachung $T_w^a/T_\delta \gg 1$ gilt. Nach elementarer Lösung der Integrale können wir daraus die adiabate Wandtemperatur

$$\frac{T_w^a}{T_\delta} \simeq \frac{\kappa - 1}{2} M_\delta^2 r \quad , \quad r = \frac{1}{Pr^4} \left[(1 - Pr^2) \ln(1 - Pr^2) + Pr^2 \right] \quad (5.44)$$

bestimmen. Der fest vorgegebenen Wandtemperatur T_w tragen wir durch zusätzliche Überlagerung eines Geradenstücks Rechnung. Berücksichtigen wir, daß das Verhältnis von Strömungs- zu Temperaturgrenzschichtdicke der Prandtlzahl Pr entspricht ($\delta_S/\delta_T \simeq Pr$), so können wir unser Temperaturprofil

$$\frac{T}{T_\delta} \simeq r \frac{\kappa - 1}{2} M_\delta^2 \left(\theta_w + Pr \frac{\tilde{z}}{\delta} \right) \left(1 - Pr \frac{\tilde{z}}{\delta} \right) \quad , \quad \theta_w := \frac{T_w}{T_\delta^a} \quad . \quad (5.45)$$

schreiben. Der Impulssatz lautet schließlich ($\tilde{z} = z/\delta_S(x)$):

$$\delta_S(x) \int_0^1 \frac{\tilde{z}(1 - \tilde{z})}{(\theta_w + Pr\tilde{z})(1 - Pr\tilde{z})} d\tilde{z} \simeq \frac{\mu_\delta}{\rho_\delta U_\delta} \left[r \frac{\kappa - 1}{2} \right]^{3/2} M_\delta^3 \left(1 + \frac{110K}{T_\delta} \right) \int_0^x \frac{dx}{\delta(x)} \quad . \quad (5.46)$$

Eliminieren wir nun noch durch Differentiation das x -Integral der rechten Seite, erhalten wir eine homogene, gewöhnliche Differentialgleichung für $\delta_S(x)$, deren einfache Lösung (Trennung der Variablen) uns schließlich zur Grenzschichtdicke führt:

$$\boxed{\frac{\delta_S(x)}{x} \simeq \frac{M_\delta^{3/2}}{\sqrt{(Re_x)_\delta}} C} \quad . \quad (5.47)$$

mit der Proportionalitätskonstanten

$$C = \left[\frac{2 \left(r \frac{\kappa - 1}{2} \right)^{3/2} Pr^3 \left(1 + \frac{110K}{T_\delta} \right) (1 + \theta_w)}{(1 + \theta_w)Pr + (1 - Pr) \ln(1 - Pr) - \theta_w(\theta_w + Pr) \ln\left(1 + \frac{Pr}{\theta_w}\right)} \right]^{1/2} \quad .$$

Hyperschallgrenzschichten zeichnen sich demnach gegenüber inkompressiblen Grenzschichten dadurch aus, daß sie mit der Wurzel der dritten Potenz der Machzahl aufdicken.

5.1.5 Transition in Hyperschallgrenzschichten

Laminare Grenzschichten werden beim Überschreiten einer sog. kritischen Reynoldszahl Re_x^{krit} instabil. Das heißt, daß der stationäre, laminare Strömungszustand nicht beibehalten wird, sondern kleine Störungen, die in einem realen Strömungsfeld immer vorhanden sind, angefacht werden. Eine sich daran anschließende, im einzelnen sehr komplizierte räumliche und zeitliche Entwicklung der Strömung führt schließlich zur turbulenten Strömung. Dieser Übergangsprozeß wird auch als Transition bezeichnet.

Für das Wiedereintrittsproblem ist er deshalb von Bedeutung, weil der Wärmeübergang auf die Wiedereintrittskapsel in einer turbulenten Grenzschichtströmung um bis zu einen Faktor zwei erhöht wird (siehe Abbildung 5.15). Bei der aerothermodynamischen Auslegung der Wiedereintrittskapsel muß dafür Sorge getragen werden, daß der laminar-turbulente Übergang unterhalb des in der Abbildung 2.8 gezeigten Bereichs der maximalen Wärmebelastung ($H = 45$ km) liegt. Für die von uns betrachtete ballistische Wiedereintrittskapsel ist der laminar-turbulente Übergang in der Hyperschallgrenzschicht unterhalb von 40 km Höhe zu erwarten (Abbildung 5.14). Damit ist ein wesentliches Auslegungskriterium der Kapsel erfüllt.

Wir wollen uns nun mit den wesentlichen Merkmalen und Einflußparametern der Transition in der Hyperschallgrenzschicht befassen. Zunächst machen wir uns den Transitionsvorgang an der bekannten inkompressiblen Plattengrenzschicht klar.

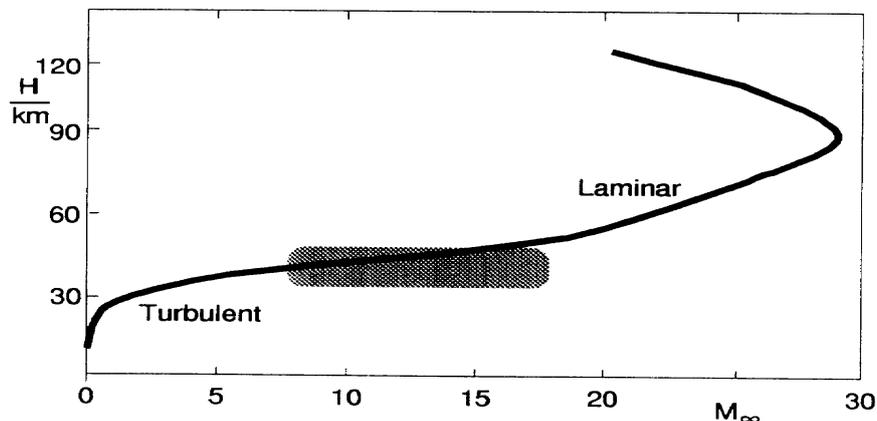


Abb. 5.14: Transitionsbereich auf der Wiedereintrittstrajektorie

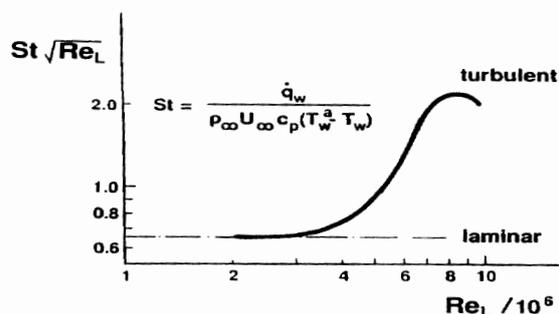


Abb. 5.15: Dimensionsloser Wärmestrom an einem spitzen Kegel (Stantonzahl St), $\beta_k = 8^\circ$, $M_\infty = 10$, $U_\infty/\nu_\infty \cdot 1\text{m} = 6,4 \cdot 10^5$

Die in Abbildung 5.16 a in der Aufsicht und Seitenansicht skizzierte Platte wird von links laminar angeströmt (0). Bei einer bestimmten Lauflänge x^{krit} (Reynoldszahl $Re_x^{krit} = U_\delta x^{krit} / \nu_\delta$) werden stromab laufende, wellenförmige, sog. primäre Störungen (Tollmien-Schlichting-Wellen) angefacht. Es sind die Wellenfronten (1) dargestellt. In der Folge wachsen die Störungsamplituden an, bis sich die ursprünglich geradlinigen Fronten verformen, wodurch die Störungen dreidimensional werden (2) (sekundäre Störungen). Weiter stromab werden die verformten Fronten gestreckt und bilden die sog. Lambda-Strukturen (3). Ein darauf folgender Zerfall dieser Strukturen und das räumlich und zeitlich unregelmäßige Auftreten von rasch anwachsenden Turbulenzflecken (4) leiten schließlich den vollturbulenten Zustand (5) ein. Zugleich findet eine starke Aufdickung der Grenzschicht statt, denn infolge der während des Transitionsprozesses immer weiter anwachsenden Störungsamplituden, insbesondere der Vertikalschwankungen, wird der Impuls im zeitlichen Mittel inner-

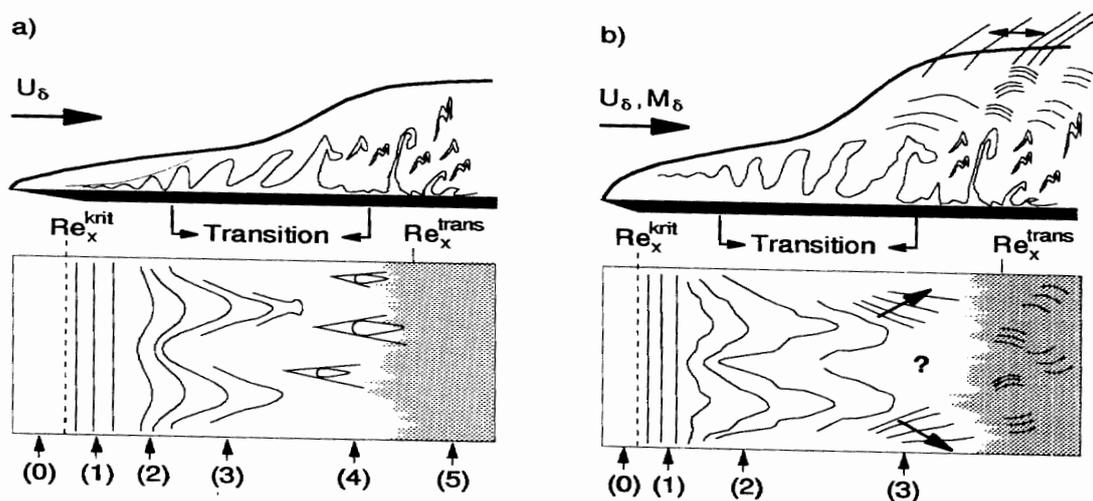


Abb. 5.16: Transition auf der Platte, a) inkompressibel, b) kompressibel

halb der Grenzschicht gleichmäßiger verteilt. Die stärkste Schwankungsintensität wird dabei zunächst in unmittelbarer Nähe der Wand wahrgenommen, was zum einen dazu führt, daß die mittlere Wandschubspannung im Transitionsgebiet sogar einen höheren Wert als in der ausgebildeten Turbulenz annimmt. Grundlegend ist, daß der ganze beschriebene Übergang nicht an einem Ort stattfindet, sondern sich über eine stromab ausgedehnte Strecke vollzieht. Die instabile Primärstörung (1) der Laminarströmung verändert nachhaltig das Strömungsfeld nur stromab der kritischen Position x^{krit} . Stromauf dieser Stelle bleibt die Strömung dauerhaft laminar. Würde an einem Punkt $x > x^{krit}$ kurzfristig eine kleine, lokale Störung eingebracht, so enthielte sie, als Wellenpaket aufgefaßt, instabile Wellenteile. Das Wellenpaket würde sich nicht nur mit einer charakteristischen Geschwindigkeit ausbreiten, sondern gleichzeitig zerfließen, also sich vergrößern, während seine Störintensität anwüchse. Erfäßt ein solches instabiles Wellenpaket dabei auf Dauer den ganzen Raum, so spricht man von einer absoluten Instabilität, anderenfalls von einer konvektiven Instabilität. Die Primärstörung der Plattengrenzschicht ist konvektiv instabil. Daher setzt die Turbulenz nicht schlagartig ein, sondern entwickelt sich über die oben skizzierten Phasen innerhalb eines stromab ausgedehnten Transitionsbereichs.

Die Transition der kompressiblen Plattengrenzschicht ist weitaus komplizierter. Für kleine Überschallmachzahlen kann die Transition bereits mit dreidimensionalen Tollmien-Schlichting-Instabilitäten beginnen, da diese am stärksten angefaßt sind. Bei größeren Machzahlen entsteht eine zusätzliche, mit der Kompressibilität des Mediums zusammenhängende, zweidimensionale kurzwellige Welleninstabilität (1), die mit der Tollmien-Schlichting-Welle interagiert (vgl. Abbildung 5.16 b). Diese ist thermodynamischen Ursprungs und wird auch als Mack-Mode bezeichnet. Mit zunehmender Machzahl wandern die maximalen Amplituden der Primärstörungen von der Wand in Richtung Grenzschichtrand. Infolgedessen beginnt für hohe Machzahlen die Transition im oberen Bereich der Grenzschicht, im Gegensatz zu niedrigen Machzahlen, für die die Störungsentwicklung anfänglich in unmittelbarer Wandnähe stattfindet. Ähnlich wie im inkompressiblen Fall treten auch im kompressiblen Fall Lambda-ähnliche Strukturen (2) auf, deren Form aber stark von der Machzahl und der Anfangsstörung abhängt. Diese Strukturen stellen lokale, bewegte Scherschichten dar, die Schall (3) induzieren. Starke, an den Strukturen auftretende Geschwindigkeitsgradienten rufen lokale Druck- und Dichteänderungen hervor und sind die Ursache dieses akustischen Phänomens. Die vollturbulente Strömung regt schließlich innerhalb der Grenzschicht ein breitbandiges akustisches Rauschspektrum an. Da die Außenströmung supersonisch ist, überlagern sich diese kleinen Störungen außerhalb der Grenzschicht zu Machschen Linien mit charakteristischem Winkel zur Platte. Ähnliche Ergebnisse sind an Überschallfreistrahlen experimentell und theoretisch nachgewiesen worden. Ein genaues Bild aller Stadien der Überschalltransition kann bislang jedoch nicht gegeben werden.

Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse

Das Anfangsstadium des Transitionsvorgangs an der Platte kann inkompressibel wie kompressibel mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse untersucht werden. Wir geben hier einen kurzen Abriss einer solchen Untersuchung an. Der auf Stabilität zu untersuchenden Laminarströmung wird eine kleine, zunächst beliebige Störung additiv überlagert. Der so gebildete, neue Stömungszustand wird in die Navier-Stokes-Gleichungen eingesetzt. Dabei hebt sich die laminare Grundlösung heraus. Es verbleiben dann Terme, die die Schwankungsgrößen genau einmal enthalten, sowie die nichtlinearen Terme, in denen sie in höherer Ordnung vorkommen. Da wir nach Voraussetzung kleine Störungen betrachten wollen, sind die nichtlinearen Terme sehr klein und werden vernachlässigt. Das hiernach verbleibende Differentialgleichungssystem ist linear und beschreibt die Dynamik der angesetzten Störungen. Die Einzelheiten der Stabilitätstheorie kann der am Detail interessierte Leser in unserem Lehrbuch über strömungsmechanische Instabilitäten H. OERTEL JR., M. BÖHLE, J. DELFS 1994 nachlesen. Unter der Annahme einer zur Platte bzw. Kapselkontur parallelen Grundströmung sind die Störungen f als Wellen darstellbar. Der entsprechende Störwellenansatz lautet:

$$f(\vec{r}, z, t) = \hat{f}(z) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad , \quad \vec{r} = (x, y)^T \quad . \quad \vec{k} = (\alpha, \beta)^T \quad . \quad (5.48)$$

Unter Einbeziehung der Randbedingungen für die Schwankungsgrößen verbleibt dann ein Eigenwertproblem für die Eigenfunktionen $\hat{f}(z)$. Hierbei bezeichnet z die Koordinate in wandnormaler Richtung. Es enthält die drei wechselseitig voneinander abhängigen komplexen Größen ω , α und β . Entsprechend unseres Ansatzes (5.48) stellt der Realteil ω_r von ω die Störfrequenz, der Imaginärteil ω_i hingegen die zeitliche Anfachungsrate dar. Ebenso bedeuten die Realteile α_r und β_r von α und β die Wellenzahlen in x - und y -Richtung, während ihre Imaginärteile α_i und β_i die räumlichen Anfachungen in den entsprechenden Richtungen sind.

Zwei dieser drei komplexen Größen werden vorgegeben und die dritte Größe ergibt sich als Lösung des Eigenwertproblems. Von einer räumlichen Stabilitätsanalyse sprechen wir, wenn ω als reelle Zahl (also die Störfrequenz) vorgegeben wird. Unter Vorgabe eines (reellen) Wellenzahlvektors \vec{k} liefert das Eigenwertproblem ein i. a. komplexes $\omega = \omega_r + i \omega_i$, also die Kreisfrequenz ω_r und die zeitliche Anfachungsrate ω_i der angesetzten Wellenstörung. Die laminare Grundströmung heißt stabil, wenn $\omega_i < 0$ für alle \vec{k} gilt, anderenfalls instabil. Üblicherweise wird anstatt des Wellenzahlvektors \vec{k} sein Betrag $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ und der Wellenausbreitungswinkel ϕ gegenüber der Stromabrichtung x entsprechend $\tan \phi = \beta/\alpha$ angegeben. Wir sprechen von zweidimensionalen Störwellen für $\beta = 0$, andernfalls von dreidimensionalen Störungen, bzw. schräglaufenden Wellen.

Wir wollen nun die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse im sog. Stabilitätsdiagramm diskutieren. Abbildung (5.17) a) zeigt den inkompressiblen, b) und c) den kompressiblen Fall der adiabaten Plattengrenzschicht.

Die charakteristischen Kurven bedeuten die Parameterkombinationen (k, Re_d) , für

die $\omega_i = 0$, $\alpha_i = \beta_i = 0$ gilt und heißen Indifferenzkurven. Innerhalb der durch sie umschlossenen Gebiete ist die Strömung instabil, außerhalb stabil. Es ist üblich, im Rahmen der Stabilitätsanalysen die Reynoldszahl mit der problemangepaßten charakteristischen Länge $d = \sqrt{\nu_\delta x / U_\delta}$ zu bilden. Dann ist $Re_d = \sqrt{Re_x}$ und wir finden die Verbindung zu Skizze (5.16), indem wir die Reynoldszahl Re_d als Wurzel der auf die Referenzlänge $(U_\delta \rho_\delta / \mu_\delta)^{-1}$ bezogenen Lauflänge x interpretieren.

Als Besonderheit der kompressiblen Strömung erkennen wir eine zweite Indifferenzkurve, die neben der Tollmien-Schlichting-Welle die Koexistenz einer zweiten Art von Welleninstabilität mit kürzerer Wellenlänge nachweist. Diese heißt Mack-

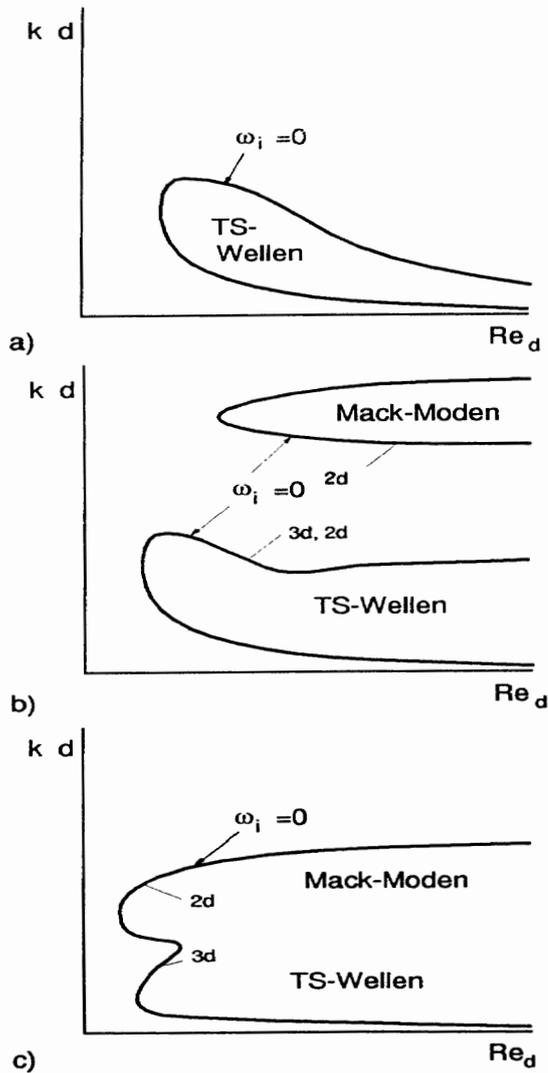


Abb. 5.17: Stabilitätsdiagramm der adiabaten Plattengrenzschicht. a) inkompressibel, b) kompressibel, $2,2 < M_\delta < 4,5$; c) kompressibel, $M_\delta > 4,5$.

Mode. Ab Machzahlen $M_\delta > 4$ stellt sie die am stärksten angefachte Instabilität dar. Es sei angemerkt, daß bei Steigerung der Machzahl sukzessive immer neue zusätzliche Mack-Moden entstehen. Die Reibung wirkt grundsätzlich dämpfend auf die Mack-Moden; daher steigen ihre Anfachungsraten mit der Reynoldszahl. Die Mack-Moden zeichnen sich gegenüber den Tollmien-Schlichting-Wellen neben ihrer Kurzwelligkeit durch hohe Frequenz und Phasengeschwindigkeit aus. Eine Erhöhung der Machzahl verkleinert in der Regel die Anfachungsraten der Tollmien-Schlichting-Welle. Dieses gilt im Falle sehr großer Machzahlen ($M_\delta > 5$), wie sie an der Flanke der Kapsel auftreten, ebenfalls für die Mack-Moden.

Die kritische Reynoldszahl Re_x^{krit} wird für Machzahlen $M_\delta < 4,5$ durch die Tollmien-Schlichting-Wellen bestimmt (Abbildung 5.17). Bei supersonischen Machzahlen ist die entsprechende kritische Störung dreidimensional. Im hohen Machzahlbereich legen die Mack-Moden die kritische Reynoldszahl fest. Sie sinkt mit steigender Machzahl, unabhängig davon, ob sie durch Tollmien-Schlichting-Wellen oder Mack-Moden bestimmt ist. Somit stellen wir fest, daß bei erhöhten Machzahlen Störungen zwar früher instabil werden, in der Folge aber schwächer aufklingen.

Wir wollen unsere Diskussion des laminar-turbulenten Übergangs mit einigen experimentellen Beobachtungen abschließen und physikalisch interpretieren. Die lineare Stabilitätsanalyse liefert nur Informationen über die Selbsterregungsmechanismen bei der Einleitung der Transition. Viele weitere Einflüsse können jedoch den tatsächlichen Übergang zur Turbulenz bestimmen und sind im einzelnen derzeit nicht verstanden. Einige dieser Einflüsse auf die (Stromab-) Lage des Punktes abgeschlossener Transition x^{trans} , der sich stromab des Indifferenzpunkts befindet, seien in Form der dimensionslosen Transitionsreynoldszahl $Re_x^{trans} = U_\delta x^{trans} / \nu_\delta$ kurz aufgeführt:

$$Re_x^{trans} = f(T_w/T_\infty, M_\infty, \kappa, \text{weitere Einflüsse}) \quad (5.49)$$

Dabei sei T_w die Wandtemperatur und κ repräsentiere den Gaszustand. Die weiteren Einflüsse berücksichtigen z.B. Anstellwinkel, Kegelwinkel, Nasenradius, Absaugung/Ausblasen, Ablation, Druckgradient, Rauigkeit, Störspektrum der Anströmung und vieles weitere.

Einfluß der Wandtemperatur

Die Wandtemperatur hat je nach Typ der Instabilität eine unterschiedliche Wirkung. Entsprechend der linearen Stabilitätsanalyse wirkt eine Wandkühlung stabilisierend auf Tollmien-Schlichting-Wellen, während Mack-Moden stärker angefacht werden. Eine dementsprechende "Stabilitätsumkehr" an kühlen Wänden bei hypersonischen Strömungen ist auch experimentell beobachtet worden. Unter einer kühlen Wand verstehen wir dabei eine Wand, die eine gegenüber der adiabaten Wand kleinere Temperatur besitzt. Auch die Flanke der Kapsel muß danach als kühle Wand betrachtet werden, gleichwohl Werte von $T_w > 1000$ K angenommen werden. Eine ähnlich destabilisierende Wirkung haben nach der linearen Stabilitätsanalyse die die Translationstemperatur senkenden Realgaseffekte auf die

Mack-Moden. Im hinteren Bereich der Flanke unserer Wiedereintrittskapsel liegen hohe Machzahlen bei kühler Wand vor, was die Transition infolge vermehrt angefachter Mack-Moden begünstigt.

Einfluß der Machzahl

Das Diagramm (5.18) zeigt die Abhängigkeit des Punktes x^{trans} abgeschlossener Transition von der Machzahl für die Umströmung eines spitzen Kegels (dimensionslose Auftragung als Re_x^{trans}). Für Machzahlen $M_\delta > 4$ erkennen wir eine zunehmende Stabilisierung der Strömung. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse, nach der die in diesem Machzahlbereich dominanten Mack-Moden bei zunehmender Machzahl schwächer angefacht sind. Da bei spitzen Körpern die Machzahl am Grenzschichttrand in einfacher Weise von der Anströmmachzahl abhängt, und insbesondere die stoßbedingte Temperaturerhöhung mäßig bleibt, können wir diese Überlegungen auf die Anströmmachzahl M_∞ vor dem Körper übertragen. Im unteren Machzahlbereich, $2 \leq M_\delta \leq 4$, dominiert die Tollmien-Schlichting-Instabilität. Sowohl die durch sie bestimmte kritische Reynoldszahl Re_x^{krit} als auch die Größe der Anfachungsrate hängen nach der linearen Stabilitätsanalyse in viel komplizierterer Weise von der Machzahl ab.

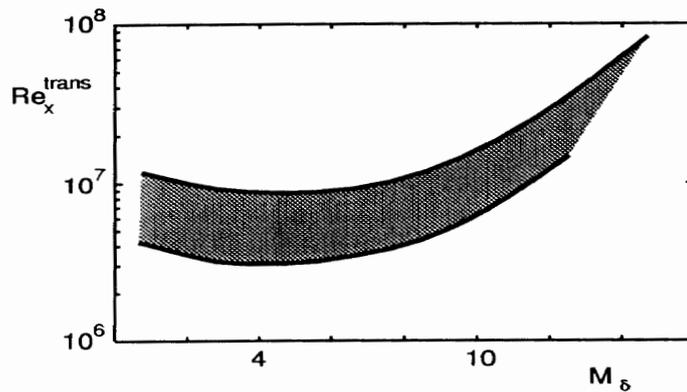


Abb. 5.18: Machzahlabhängigkeit des Ortes abgeschlossener Transition

5.2 Grundgleichungen – Navier-Stokes-Gleichungen

Die Grundgleichungen der Berechnung von Hyperschallströmungen im kontinuumsmechanischen Bereich sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Die bekannten Navier-Stokes-Gleichungen eines idealen Gases müssen um die in Kapitel 3 eingeführten thermischen und chemischen Nichtgleichgewichtseffekte erweitert werden. Dazu gehören die Schwingungsanregung der Moleküle, die Dissoziation, die Elektronenanregung, die Ionisation, die Diffusion und der Energieaustausch durch Strahlung. Nicht immer müssen alle diese Effekte berücksichtigt werden. In Abhängigkeit vom Ort auf der Wiedereintrittstrajektorie ergibt sich ein unterschiedlich komplexes System aus gekoppelten partiellen Differentialgleichungen und zusätzlichen algebraischen Gleichungen.

Die folgenden dimensionsbehafteten Gleichungen beschreiben laminare Strömungen. Die chemischen Reaktionen im Nichtgleichgewicht werden durch zusätzliche Kontinuitätsgleichungen erfaßt, die für einzelne Atom- bzw. Molekülspezies aufgestellt werden. Der Quellterm einer Spezies-Kontinuitätsgleichung bewirkt die lokale Zu- oder Abnahme der betreffenden Teilchensorte aufgrund der relaxierenden chemischen Reaktionen des Gasmischens. Für jede chemische Spezies tritt eine Kontinuitätsgleichung hinzu. Da die Gesamtdichte durch die globale Kontinuitätsgleichung im Gleichungssystem vertreten ist, werden $n - 1$ Kontinuitätsgleichungen benötigt, um ein Gemisch aus n Spezies zu erfassen. Der Quellterm der globalen Kontinuitätsgleichung ist Null, da für das Gemisch die Massenerhaltung gilt. Sobald in einem Gemisch Konzentrationsgradienten entstehen, tritt Diffusion auf. Die Diffusion muß in den Spezies-Kontinuitätsgleichungen als zusätzlicher Massenfluß j und in der Energiegleichung als zusätzlicher Energiefluß \dot{q}_{diff} berücksichtigt werden. Die Impulsgleichungen bleiben gegenüber den Gleichungen für ideale Gase unverändert. Zur Berechnung der Schwingungsenergie im Nichtgleichgewicht ist mindestens eine zusätzliche Energiegleichung erforderlich. Da im hier verwendeten Zwei-Temperaturmodell alle Moleküle dieselbe Schwingungstemperatur besitzen, wird die Schwingungsrelaxation mit einer Energiegleichung erfaßt.

Die um eine Energiegleichung und um $n-1$ Kontinuitätsgleichungen erweiterten Navier-Stokes-Gleichungen für ein Gemisch aus n Spezies können in kartesischen Koordinaten x_k ($k = 1, 2, 3$) in folgender allgemeiner Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial x_k} + \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial x_k} \right) = \mathbf{W} \quad (5.50)$$

Hierin bezeichnet

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e_{tot}, \rho e_v, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1})^T$$

den Zustandsvektor. Er enthält die Gesamtdichte ρ , die Impulsdichten ρu_i , die Gesamtenergie pro Masse e_{tot} , die Vibrationsenergie pro Masse e_v und die Partialdichten ρ_i . Die konvektiven Flüsse in Richtung k werden mit \mathbf{F}_k bezeichnet. Der Einfluß der Viskosität und der Wärmeleitung wird im Vektor \mathbf{G} zusammengefaßt. Der Vektor \mathbf{H} berücksichtigt die Massendiffusion. Der Quellterm \mathbf{W} beschreibt

den Massenaustausch zwischen den Spezies infolge chemischer Reaktionen und den Energieaustausch aufgrund der Anregung von Freiheitsgraden der inneren Energie.

Die Gesamtenergie e_{tot} ist definiert als die Summe der inneren Energien, der kinetischen Energie, und der Bildungsenthalpie Δh_f der einzelnen Spezies:

$$e_{tot} = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho} e_i + \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho} (e_v)_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 u_k^2 + \sum_{i=1}^n \frac{\rho_i}{\rho} (\Delta h_f)_i \quad (5.51)$$

Wir nehmen im folgenden an, daß sich die Translations- und Rotationsenergie unabhängig vom Strömungszustand immer sofort lokal im thermodynamischen Gleichgewicht befinden. Damit gilt $T_t = T_r$ und es ist:

$$e_i = \frac{3}{2} R_i T_t \quad \text{für Atome,} \quad (5.52)$$

$$e_i = \frac{5}{2} R_i T_t \quad \text{für Moleküle,}$$

$$(e_v)_i = R_i \frac{(\Theta_v)_i}{\exp((\Theta_v)_i/T_v) - 1} \quad \text{für Moleküle,} \quad (5.53)$$

mit der speziellen Gaskonstante $R_i = \frac{\mathfrak{R}}{M_i}$,

der Molmasse M_i ("kg pro Mol der Spezies i "),

und der charakteristischen Schwingungstemperatur $(\Theta_v)_i$.

Der Druck ergibt sich aus der Summe der Partialdrücke, wobei für die einzelnen Komponenten die thermische Zustandsgleichung gilt:

$$p = \sum_{i=1}^n p_i, \quad p_i = \rho_i R_i T_t. \quad (5.54)$$

Die Flußvektoren \mathbf{F} , \mathbf{G} und \mathbf{H} sind folgendermaßen aufgebaut:

$$\mathbf{F}_k = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u_k u_1 + \delta_{1k} p \\ \rho u_k u_2 + \delta_{2k} p \\ \rho u_k u_3 + \delta_{3k} p \\ u_k (\rho e_{tot} + p) \\ \rho u_k e_v \\ \rho_1 u_k \\ \rho_2 u_k \\ \vdots \\ \rho_{n-1} u_k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau_{k1} \\ -\tau_{k2} \\ -\tau_{k3} \\ -u_l \tau_{lk} + \dot{q}_k \\ (\dot{q}_v)_k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (\dot{q}_{diff})_k \\ (\dot{q}_{diff v})_k \\ (j_1)_k \\ (j_2)_k \\ \vdots \\ (j_{n-1})_k \end{pmatrix} \quad (5.55)$$

mit $\delta_{kl} = 0$ für $k \neq l$ und $\delta_{kk} = 1$.

Von oben nach unten gelesen verbergen sich hinter den einzelnen Zeilen die globale Kontinuitätsgleichung, die drei Impulsgleichungen, die globale Energiegleichung, die Schwingungsenergiegleichung und die $(n-1)$ Spezies-Kontinuitätsgleichungen.

Für laminare Strömungen mit der dynamischen Viskosität μ gilt der folgende Schubspannungsansatz:

$$\tau_{kl} = \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \mu \delta_{kl} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} . \quad (5.56)$$

Der Fouriersche Wärmeleitungsansatz mit der Wärmeleitfähigkeit k_t bezüglich der Translations- und Rotationsenergie bzw. der Wärmeleitfähigkeit k_v bezüglich der Schwingungsenergie liefert den Wärmestrom \dot{q}_j in Richtung j :

$$\dot{q}_j = -k_t \frac{\partial T_t}{\partial x_j} - k_v \frac{\partial T_v}{\partial x_j} , \quad (5.57)$$

$$(\dot{q}_v)_j = -k_v \frac{\partial T_v}{\partial x_j} . \quad (5.58)$$

Die Komponenten des Vektors \mathbf{H} ergeben sich aus dem Fickschen Ansatz für die Diffusion. Der diffusive Massenstrom j und die damit verbundenen diffusiven Wärmeströme \dot{q}_{diff} und $\dot{q}_{diff v}$ schreiben sich für die Richtung k :

$$(j_i)_k = -\rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial x_k} , \quad (5.59)$$

$$(\dot{q}_{diff})_k = \sum_{i=1}^n h_i (j_i)_k , \quad (5.60)$$

$$(\dot{q}_{diff v})_k = \sum_{i=1}^n (e_v)_i (j_i)_k . \quad (5.61)$$

Die Enthalpie der Spezies i ist definiert als

$$h_i = e_i + (e_v)_i + \frac{p_i}{\rho_i} + (\Delta h_f)_i . \quad (5.62)$$

Der Quelltermvektor \mathbf{W} modelliert die Nichtgleichgewichtsprozesse:

$$\mathbf{W} = (0, 0, 0, 0, 0, w_v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})^T . \quad (5.63)$$

Im einzelnen beschreiben w_v die Relaxation der Schwingungsenergie und w_i die Massenzu- bzw. -abnahme der Spezies i aufgrund der chemischen Reaktionen. Die Quellterme der globalen Kontinuitätsgleichung, der Impulsgleichungen und der Gesamtenergiegleichung sind Null. Im thermo-chemischen Gleichgewicht verschwinden alle Quellterme.

Im Gleichgewicht ist die chemische Zusammensetzung eines Gases allein durch die lokale Temperatur und den lokalen Druck festgelegt. Die Schwingungsenergie ergibt sich aus der Gleichgewichtstemperatur. Befindet sich das gesamte Strömungsfeld im thermodynamischen Gleichgewicht, dann können die Spezies-Kontinuitätsgleichungen und die Schwingungsenergiegleichung aus dem Differentialgleichungssystem gestrichen werden.

Im folgenden Abschnitt wird der Quelltermvektor für das in Kapitel 2 und 3 vorgestellte chemische Modell mit 7 Species (Gleichung (2.17)) angegeben.

5.2.1 Realgasmodelle

Es wird ein Luftgemisch bestehend aus O_2 , N_2 , O , N , NO , NO^+ und e^- betrachtet. Als Reaktionsgleichungen werden 3 allgemeine Dissoziationsreaktionen berücksichtigt, wobei jede Spezies als Stoßpartner auftreten kann. Hinzu kommen 2 Austauschreaktionen und die Ionisation von NO . Im Zustandsvektor werden jedoch nur vier Partialdichten mitgeführt, da die übrigen Partialdichten beim Wiedereintritt aus dem erdnahen Orbit aus algebraischen Beziehungen ermittelt werden können:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e_{tot}, \rho e_{vib}, \rho_{O_2}, \rho_{N_2}, \rho_{NO}, \rho_{NO^+})^T \quad .$$

Der zugehörige Quellterm lautet:

$$\mathbf{W} = (0, 0, 0, 0, 0, w_{vib}, w_{O_2}, w_{N_2}, w_{NO}, w_{NO^+})^T \quad . \quad (5.64)$$

Zur Ermittlung von O , N und e^- dienen die folgenden 3 Beziehungen. Für die Gesamtdichte gilt

$$\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i \quad . \quad (5.65)$$

Näherungsweise gilt die Erhaltung des Verhältnisses der Sauerstoff- und der Stickstoffatome, wie es in der ungestörten Anströmung vorliegt. Die Atome, die in Molekülen gebunden sind, werden hierbei mitgezählt. Dieses Verhältnis wird durch die chemische Reaktionen und die Ionisation nicht gestört. Dies gilt auch in reibungsbehafteten Strömungen, sofern die Diffusionsgeschwindigkeiten der beiden Elemente ungefähr gleich sind. Wegen der fast identischen Molekulargewichte ist dies für Sauerstoff und Stickstoff erfüllt. In der Anströmung liegen ungefähr 21% Sauerstoff- und 79% Stickstoffmoleküle vor. Im Hinblick auf die numerische Strömungsberechnung schreiben wir für die Partialdichten:

$$\frac{0,7885}{M_O}(\rho_O + \rho_{O_2}) + \frac{0,577}{M_{NO}}(\rho_{NO} + \rho_{NO^+}) = \frac{0,2115}{M_N}(\rho_N + \rho_{N_2}) \quad . \quad (5.66)$$

Darüberhinaus wird ein lokales Ladungsgleichgewicht angenommen:

$$\rho_{NO^+} = \frac{M_{NO^+}}{M_{e^-}} \rho_{e^-} \quad . \quad (5.67)$$

Mit den Reaktionsgeschwindigkeiten k_f und k_b der Vorwärts- und Rückwärtsreaktionen aller in Gleichung (2.17) aufgeführten Reaktionen können die Quellterme w_i berechnet werden:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sum_{i=1}^7 \left(-k_{f1} \frac{\rho_{O_2} \rho_i}{M_{O_2} M_i} + k_{b1} \left(\frac{\rho_O}{M_O} \right)^2 \frac{\rho_i}{M_i} \right) \quad . \\ R_2 &= \sum_{i=1}^7 \left(-k_{f2} \frac{\rho_{N_2} \rho_i}{M_{N_2} M_i} + k_{b2} \left(\frac{\rho_N}{M_N} \right)^2 \frac{\rho_i}{M_i} \right) \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= \sum_{i=1}^7 \left(-k_{f3i} \frac{\rho_{NO} \rho_i}{M_{NO} M_i} + k_{b3i} \frac{\rho_N \rho_O \rho_i}{M_N M_O M_i} \right) \cdot \\
R_4 &= -k_{f4} \frac{\rho_{NO} \rho_O}{M_{NO} M_O} + k_{b4} \frac{\rho_{O_2} \rho_N}{M_{O_2} M_N} \cdot \\
R_5 &= -k_{f5} \frac{\rho_{N_2} \rho_O}{M_{N_2} M_O} + k_{b5} \frac{\rho_{NO} \rho_N}{M_{NO} M_N} \cdot \\
R_6 &= -k_{f6} \frac{\rho_N \rho_O}{M_N M_O} + k_{b6} \frac{\rho_{NO^+} \rho_{e^-}}{M_{NO^+} M_{e^-}} \cdot
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
w_{O_2} &= M_{O_2} (R_1 - R_4) \cdot \\
w_{N_2} &= M_{N_2} (R_2 + R_5) \cdot \\
w_{NO} &= M_{NO} (R_3 + R_4 - R_5) \cdot \\
w_{NO^+} &= M_{NO^+} (-R_6) \cdot
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Die Reaktionsgeschwindigkeiten sind Funktionen der Temperatur und werden näherungsweise durch den in Kapitel 3.5 vorgestellten modifizierten Arrhenius-Ansatz (3.61) beschrieben:

$$k_f = AT^S \exp\left(-\frac{C}{kT}\right) \cdot$$

Hierbei wird für die Temperatur T ein Mittelwert (z.B. $T = \sqrt{T_t T_v}$) aus der Translationstemperatur T_t und der Vibrationstemperatur T_v eingesetzt. Ein solches Mehrtemperaturmodell berücksichtigt den Einfluß der Schwingungsanregung auf die Reaktionsgeschwindigkeiten. Allgemein akzeptiert ist das aus Kapitel 3.5 bekannte Zwei-Temperaturmodell von CH. PARK 1985, das die Translationstemperatur und die Vibrationstemperatur des Gemisches verwendet. Ein genaueres Modell, das zwischen den Vibrationstemperaturen der verschiedenen Molekülarten unterscheidet, ist nicht sinnvoll, solange die Reaktionsraten für hohe Temperaturen nicht genauer gemessen werden können.

Die Reaktionsgeschwindigkeiten der Rückwärtsreaktionen ergeben sich aus den gut bekannten Gleichgewichtskonzentrationen $K_C(T_t)$:

$$k_b = k_f(T_t) / K_C(T_t) \cdot \tag{5.70}$$

Die Schwingungsenergiegleichung beschreibt die Relaxation der Summe der Schwingungsenergien der einzelnen Molekülarten. Folglich ergibt sich der Quellterm als Summe der Quellterme der einzelnen Spezies (vgl. Gleichung 3.55 in Kapitel 3.5):

$$w_v = \sum_{i=1}^n \rho_i (w_v)_i \cdot \tag{5.71}$$

$$(w_v)_i = \frac{(e_v^{eq})_i - (e_v)_i}{(\tau_v)_i} \cdot \tag{5.72}$$

$$(e_v^{eq})_i = (e_v)_i(T_t) \cdot \tag{5.73}$$

Hierin bezeichnet $(\epsilon_v^{eq})_i$ die Schwingungsenergie des zur vorliegenden Translations- temperatur gehörenden Gleichgewichtszustands und $(\tau_v)_i$ die Relaxationszeit der Spezies i . In Kapitel 3.5 wurde dieses einfache Modell des harmonischen Oszillators für ein Gas bestehend aus einer einzigen Molekülart eingeführt. Als Mechanismus der Schwingungsanregung wird dabei lediglich der Austausch von Translations- und Schwingungsenergie berücksichtigt. Die Berechnung von τ wird schnell kompliziert, wenn Luft als Gemisch verschiedener Spezies aufgefaßt wird.

Die meisten Meßdaten unter 5000 K können mit der folgenden Korrelation nach Millikan und White erfaßt werden, die auch Gasgemische einschließt:

$$\begin{aligned}
 (\tau_v)_i &= \frac{\sum_{i'=1}^n \frac{\rho_{i'}}{M_{i'}}}{\sum_{i'=1}^n \frac{\rho_{i'}}{M_{i'}} \tau_{ii'}} & (5.74) \\
 \tau_{ii'} &= \frac{1}{p} \exp \left[1,16 \cdot 10^{-3} \left(\frac{M_i M_{i'}}{M_i + M_{i'}} \right)^{1/2} \Theta_{vi}^{4/3} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \left(T_i^{-1/3} - 0,015 \left[\frac{M_i M_{i'}}{M_i + M_{i'}} \right]^{1/4} \right) - 18,42 \right] .
 \end{aligned}$$

Bei sehr hohen Temperaturen (> 5000 K) muß der Quellterm der Schwingungsrelaxation (5.72) korrigiert werden, da der Relaxationsprozess sonst zu schnell abläufe (CH. PARK 1989).

Im Fall des thermo-chemischen Gleichgewichts ist der Quellterm identisch Null. Es ist dann nicht notwendig, die Partialdichten zu integrieren. Sie befinden sich stets im Gleichgewicht mit den lokalen Werten des Drucks und der Temperatur und können deshalb aus dem nichtlinearen algebraischen Gleichungssystem (3.63)-(3.67) a priori berechnet und beispielsweise in Form einer Polynomdarstellung der Strömungssimulation zugänglich gemacht werden. Hierbei sind die Gleichgewichtskonstanten K_C wieder Funktionen der Gleichgewichtstemperatur, die aus der Gesamtenergie der Strömungssimulation folgt.

5.2.2 Transportmodelle

Die Berechnung von Wärmeströmen innerhalb heißer kompressibler Strömungen erfordert die Berechnung des diffusiven Transports von Masse, Impuls und Energie. Aufgrund der niedrigen Dichten in der hohen Atmosphäre gelten die Transportkoeffizienten verdünnter Gase.

Die Gaspartikel eines homogenen ruhenden Gases besitzen im allgemeinen verschiedene Geschwindigkeiten und Bewegungsrichtungen. Infolge ihrer unterschiedlichen

Makroskopische Ursache	Molekularer Transport	Makroskopisches Ergebnis
Geschwindigkeitsgradient	Impuls	Zähigkeit
Temperaturgradient	Energie	Wärmeleitung
Konzentrationsgradient	Masse	Diffusion

Geschwindigkeiten und Richtungen stoßen sie sich untereinander und tauschen dabei Impuls und Energie aus. Dieses mikroskopische Verhalten des Gases ist die Ursache für die makroskopischen Eigenschaften Zähigkeit, Wärmeleitfähigkeit und die Fähigkeit, Wärmeenergie zu speichern.

Die Wärmeleitfähigkeit basiert auf dem Energieaustausch der Gaspartikel untereinander. Wird an einer Stelle eines homogenen Gases Wärmeenergie zugeführt, so wird an dieser Stelle die thermische Bewegung der Gaspartikel erhöht. Die Partikelgeschwindigkeiten in der unmittelbaren Umgebung der genannten Stelle werden sich infolge der Partikelkollisionen ebenfalls erhöhen. Mittels der Kollisionen werden letztendlich überall im Gas die thermischen Geschwindigkeiten vergrößert und damit die Wärmeenergie transportiert. Deshalb wird auch von Transporteigenschaften eines Gases gesprochen.

Der Impuls- und Wärmetransport in einem Gas ist ein Nichtgleichgewichtsvorgang. Betrachten wir nochmals den beschriebenen Wärmeleitungsvorgang. An der Stelle, an der die Wärmeenergie zugeführt wird, wird der homogene Zustand des Gases gestört. Das Gas reagiert mit einem Transportvorgang (Wärmeleitung), um wieder in den homogenen Zustand zu gelangen. Der erläuterte Transportvorgang bedarf einer gewissen Zeit und er gehört, weil das Gas während des Vorgangs im Nichtgleichgewicht ist, zu den Nichtgleichgewichtsvorgängen.

Der Impulsaustausch der Gaspartikel ist die Ursache der inneren Reibung bzw. der makroskopischen Zähigkeit eines Gases. Die innere Reibung eines Gases tritt bei Formveränderungen eines Gases auf, z.B. wenn ein Gasvolumen gesichert wird. Bei diesem Vorgang wird an einer Stelle des Gases ein Impuls eingeleitet und dieser wird, analog der Wärmeenergie, transportiert. Auch dies ist ein Nichtgleichgewichtsvorgang, denn der Impulstransport bedarf Zeit.

Für konkrete Strömungsberechnungen müssen die Zähigkeit und die Wärmeleitfähigkeit quantitativ angegeben werden. Aus den Grundlagen der Strömungsmechanik sind die Begriffe "dynamische Zähigkeit" und "Wärmeleitfähigkeit" bekannt. Es sind sogenannte Stoffwerte. Sie sind unter Normalbedingungen (Atmosphärendruck und Raumtemperatur) nur von der Temperatur abhängig. Bei höheren Temperaturen jedoch kommt eine Abhängigkeit vom Druck hinzu. In Hyperschallströmungen sind die Temperaturen so hoch, daß die Temperatur- und Druckabhängigkeit der Stoffwerte berücksichtigt werden muß. Die grundlegende Ableitung der Berechnungsformeln der Stoffwerte ist in dem umfangreichen Buch von J.O. HIRSCHFELDER, CH.F. CURTIS und R.B. BIRD 1954 zu finden. Für praktische Zwecke müssen diese Formeln in der Regel weiter vereinfacht werden. Einen Überblick über eine vereinfachte Berechnung der Transportkoeffizienten geben die folgenden Beziehungen.

Für die dynamische Zähigkeit eines reinen Gases mit der Molmasse M gilt

$$\mu = 2,6693 \cdot 10^{-6} \frac{\sqrt{MT}}{\sigma^2 \Omega_\mu} \quad (\text{N m}^{-2}\text{sek}) \quad . \quad (5.75)$$

Die Temperatur T wird in der Einheit K und der Durchmesser σ in Angstrom (10^{-8} cm) gemessen. Im thermodynamischen Nichtgleichgewicht wird als Tempe-

ratur die Translationstemperatur T_t verwendet. Die dimensionslose Größe Ω_μ stellt ein tabelliertes Kollisionsintegral dar, das die Variation des effektiven Kollisionsquerschnitts der Partikel als Funktion der Temperatur beschreibt. Obwohl diese Formel für einatomige Gase abgeleitet ist, gilt sie auch sehr gut für mehratomige Gase. Hiernach variiert die Viskosität eines Gases bei niedriger Dichte mit einer Potenz von 0,6 bis 1,0 der Temperatur. Für numerische Zwecke werden häufig Ausgleichskurven verwendet.

Die Zähigkeit des Gasgemisches ergibt sich nach dem empirischen Ansatz zu

$$\mu = \sum_i \frac{X_i \mu_i}{\sum_{i'} X_{i'} \Phi_{ii'}} \quad (5.76)$$

$$\Phi_{ii'} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(1 + \frac{M_i}{M_{i'}}\right)^{-1/2} \left[1 + \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i'}}\right)^{1/2} + \left(\frac{M_{i'}}{M_i}\right)^{1/4}\right]^2$$

Bei moderaten Temperaturen kann diese Beziehung für Luft mit dem dann gültigen Sutherland-Gesetz überprüft werden:

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty}\right)^{3/2} \frac{T_\infty + 110 \text{ K}}{T + 110 \text{ K}} \quad (5.77)$$

Die Wärmeleitfähigkeit einer Spezies berechnet sich nach der Eucken-Approximation:

$$k_i = \left((c_p)_i + \frac{5}{4} \frac{\mathfrak{R}}{M_i}\right) \mu_i \quad (5.78)$$

Demnach steht die Wärmeleitfähigkeit in einem direkten Zusammenhang mit der dynamischen Viskosität. Dies ist verständlich, da derselbe mikroskopische Transportmechanismus vorliegt. Der Betrag der transportierten Energie kommt durch das Verhältnis der spezifischen Wärmen c_p und den Quotienten \mathfrak{R}/M zum Ausdruck. Hierdurch wird die Gasart berücksichtigt. Für die Wärmeleitfähigkeit des Gemisches wird wieder die Formel (5.76) angewendet.

Der Diffusionskoeffizient eines binären Gemisches folgt wie die Zähigkeit aus der Theorie der Gaskinetik:

$$D_{ii'} = 1,834 \cdot 10^{-12} \frac{\sqrt{T^3 \left(\frac{1}{M_i} + \frac{1}{M_{i'}}\right)}}{p \sigma_{12}^2 \Omega_{ii'}} \quad (\text{m}^2 \text{sek}^{-1}) \quad (5.79)$$

Der Druck wird in N/m^2 gemessen. Das Kollisionsintegral $\Omega_{ii'}$ wird wiederum unter der Annahme eines Lennard-Jones-Wechselwirkungspotentials der Partikel berechnet und tabelliert. Hieraus folgt, daß der Diffusionskoeffizient bei tiefen Temperaturen mit dem Quadrat der Temperatur und bei sehr hohen Temperaturen mit dem Exponenten 1,65 steigt.

Der effektive binäre Diffusionskoeffizient D_i der Species i im Gemisch ergibt sich vereinfacht aus den binären Diffusionskoeffizienten $D_{ii'}$:

$$D_i = \frac{1 - X_i}{\sum_{i' \neq i} X_{i'} / D_{ii'}} \quad (5.80)$$

5.2.3 Randbedingungen

Erst durch die Angabe der Rand- und Anfangsbedingungen beschreiben die vorgestellten Differentialgleichungen ein spezielles Wiedereintrittsproblem. Bei der Angabe der Randbedingungen sind mathematische und physikalische Forderungen zu erfüllen. Die Anfangsbedingungen können zu einem gewissen Grad willkürlich gewählt werden, da wir im folgenden nur an stationären Lösungen am jeweiligen Ort der Wiedereintrittstrajektorie interessiert sind.

Die kompressiblen instationären Navier-Stokes-Gleichungen stellen im wesentlichen ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem dar. Das bedeutet, daß sich Störungen (Wellen) mit einer ihnen eigenen Geschwindigkeit bewegen. Kleine Druckstörungen beispielsweise bewegen sich mit der Schallgeschwindigkeit. Im Überschall besitzen Störungen nur einen begrenzten Einflußbereich. Beim Übergang von Überschall zum Unterschall dehnt sich das Einflußgebiet auf den gesamten Unterschallbereich aus. Dies hat Konsequenzen für die Formulierung der Randbedingungen. An einem Überschalleinströmrand beispielsweise müssen Randbedingungen gesetzt werden, während sich die Zustandsgrößen an einem Überschallausströmrand als Lösung der Differentialgleichung ergeben.

Die Randbedingungen an der Oberfläche eines Wiedereintrittskörpers sind von besonderem Interesse. Im Bereich der Kontinuumsmechanik gilt für viskose Strömungen an der Oberfläche die Haftbedingung als Randbedingung für die Geschwindigkeit sofern keine Ablation am Hitzeschild auftritt:

$$u = v = w = 0 \quad . \quad (5.81)$$

Dies gilt nicht im Übergangsbereich zur Gaskinetik. Wie wir bei der Beschreibung der Reflexion von Partikeln an einer Wand in Kapitel 4.2.5 gesehen haben, liegt an der Wand eine Gleitströmung vor, d.h. die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit ist von Null verschieden. Ebenso tritt ein Temperatursprung auf.

Die Randbedingungen der Energiegleichungen können in Form einer Bedingung für die Temperatur oder den Wärmestrom formuliert werden. Hierbei stellen die isotherme und die adiabate Wand zwei Grenzfälle dar. Bei einer isothermen Wand wird ein bestimmter Wandtemperaturverlauf vorgeschrieben:

$$T_t = T_{tWand} \quad \text{und} \quad T_v = T_{vWand} \quad . \quad (5.82)$$

Analog kann ein bestimmter Wärmestrom an der Wand vorgeschrieben werden. Bei einer adiabaten Wand wird gefordert, daß der Wärmestrom \dot{q}_w normal zur Wand verschwindet:

$$\dot{q}_w = -k_t \frac{\partial T_t}{\partial x_n} - k_v \frac{\partial T_v}{\partial x_n} + \sum_{i=1}^n h_i (j_i)_n \quad . \quad (5.83)$$

An diesen beiden Randbedingungen wird die Problematik der Strömungssimulation deutlich. Die eigentlich zu berechnenden Größen Wandtemperatur und Wärmestrom können ohne weitere Annahmen durch die Berechnung des Strömungsfelds allein nicht bestimmt werden. Hierzu ist eine Energiebilanz erforderlich, die Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit des umströmten Körpers mit einschließt. Für

rein strömungsmechanische Berechnungen muß die Wandtemperatur abgeschätzt werden. Sehr hilfreich ist dabei das Modell einer strahlungsadiabaten Wand. Dieses Modell nimmt an, daß der gesamte Wärmestrom, der durch Wärmeleitung, Diffusion und Rekombination der Atome an der Wand auf die Wand zukommt, wieder ins Unendliche abgestrahlt wird. Aus dieser Bedingung ergibt sich über das Stefan-Boltzmann-Gesetz eines grauen Strahlers die Wandtemperatur:

$$\dot{q}_{\text{Strahlung}} = \epsilon \sigma T^4 \quad \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right) \quad . \quad (5.84)$$

mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten $\sigma = 5,66 \cdot 10^{-8} (\text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4))$.

Der Emissionsgrad ϵ ($0 \leq \epsilon \leq 1$) ist eine Materialeigenschaft der Oberfläche. Für eine heißes *C - SiC*-Hitzeschild ist $\epsilon = 0,78$ ein realistischer Wert.

Die Randbedingungen für die Partialdichten hängen von den katalytischen Eigenschaften der Wand ab. Wir unterscheiden drei Typen von Randbedingungen.

Voll katalytische Wand :

Die chemischen Reaktionen laufen mit unendlich großer Reaktionsgeschwindigkeit ab. Der Massenbruch $c_i = \rho_i/\rho$ der Spezies *i* an der Wand ist im lokalen Gleichgewicht mit dem lokalen Druck und der Wandtemperatur:

$$c_i = (c_i)_{eq} \quad . \quad (5.85)$$

Teilweise katalytische Wand :

Die chemischen Reaktionen im Nichtgleichgewicht laufen beschleunigt ab. Im stationären Zustand kann der Massenverlust \dot{w}_i der Spezies *i* aufgrund der Oberflächenkatalyse nur durch Diffusion normal zur Oberfläche herantransportiert werden:

$$\dot{w}_i = \rho D_i \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_n} \right) \quad . \quad (5.86)$$

Nicht katalytische Wand :

Es findet keine Rekombination an der Oberfläche statt ($\dot{w}_i = 0$):

$$0 = \rho D_i \left(\frac{\partial c_i}{\partial x_n} \right) \quad . \quad (5.87)$$

Die Wechselwirkung einer chemisch reagierenden Nichtgleichgewichtsströmung mit einem technisch relevanten Hitzeschutzmaterial, beispielsweise mit einer beschichteten *C - SiC*-Keramik, muß mit einem sog. Wand-Wechselwirkungsmodell beschrieben werden. Diese Wechselwirkung äußert sich durch teilweise Rekombination atomarer Spezies an der Oberfläche. Hierbei werden angeregte Moleküle erzeugt, so daß nicht die gesamte Bindungsenthalpie an die Oberfläche abgegeben wird. Dieses Phänomen wird als unvollständige Energieakkommodation bezeichnet.

Die Entwicklung solcher Wand-Wechselwirkungsmodelle für strömungsmechanische Anwendungen steht noch am Anfang. Es existieren derzeit keine validierten Berechnungsverfahren zur Bestimmung des Wärmeübergangs am Hitzeschutzmaterial, die über ein Wand-Wechselwirkungsmodell verfügen. Die Entwicklung solcher Berechnungsverfahren ist Gegenstand von Kapitel 6.4.

Wenn Atome auf die Oberfläche eines Wiedereintrittsflugkörpers treffen, können sie zu Molekülen rekombinieren und dabei einen Teil oder die Gesamtheit ihrer Dissoziationswärme freisetzen. Dieser Vorgang wird als katalytische Atom-Rekombination bezeichnet. In einer Nichtgleichgewichtströmung kann diese Reaktion den Wärmeübergang auf die Oberfläche erheblich erhöhen. Beim Wiedereintrittsflug ist die katalytische Rekombination ein unerwünschter Effekt. Deshalb kommen als wiederverwendbare, nicht ablativ Hitzeschutzmaterialien nur Materialien mit geringer katalytischer Effizienz in Frage.

Der Ausdruck "vollständig katalytisch" bedeutet, daß alle Atome, die auf die Oberfläche treffen, dort rekombinieren und ihre gesamte Dissoziationsenergie an die Oberfläche abgeben. Es zeigt sich, daß der Wärmestrom bei einer vollständig katalytischen Oberfläche in einer Nichtgleichgewichtsströmung und der entsprechende Wärmestrom in einer Gleichgewichtsströmung häufig ungefähr gleich groß sind. Deshalb werden die Bezeichnung "voll katalytisch" und "im Gleichgewicht" gelegentlich synonym verwendet. Es handelt sich jedoch um zwei völlig verschiedene Modelle. In einer Nichtgleichgewichtsströmung kann die Rekombination durch geringe Diffusionsraten in der Grenzschicht limitiert sein.

Es existieren verschiedene Mechanismen, die einen katalytischen Effekt bewirken. Die komplexen Vorgänge an der Wand (Absorption von Atomen, Verweilzeit an der Wand, Reaktion, Desorption) können im Rahmen der strömungsmechanischen Simulation jedoch nicht im Detail aufgelöst werden. Die theoretischen Ansätze liefern für technische Oberflächen ohnehin nur sehr ungenaue Ergebnisse. Daher wird die katalytische Rekombination im folgenden mit einem eher phänomenologischen Ansatz behandelt, dessen Parameter experimentell bestimmt werden müssen.

Das einfachste Modell der Rekombination von Atomen an einer Oberfläche besteht in der Annahme, daß die Atome, die an die Oberfläche gelangen, entweder spiegelnd reflektiert werden (weder Energie gewinnen noch verlieren) oder an der Oberfläche haften und dort vollständig akkommodieren. Von denen, die an der Oberfläche haften, kann ein bestimmter Anteil rekombinieren. Dies geschieht entweder mit anderen Atomen auf der Oberfläche oder mit Atomen in der Nähe der Oberfläche. Es wird angenommen, daß die gebildeten Moleküle die gesamte latente Bindungsenergie an die Oberfläche abgeben.

Der Anteil der einfallenden Atome, die rekombinieren, ist

$$\gamma'_i = \frac{\dot{m}_{i,rekomb}}{\dot{m}_{i,ein}} \quad , \quad (5.88)$$

hierin bezeichnet $\dot{m}_{i,ein}$ den Massenfluß der einfallenden Atome der Spezies i und $\dot{m}_{i,rekomb}$ den Massenfluß der rekombinierenden Atome. Der Bruch γ' wird als der Atom-Rekombinations-Koeffizient oder Rekombinationswahrscheinlichkeit bezeichnet. Der Wert hängt von dem jeweiligen Atom und der Oberfläche ab. Üblicherweise wird er als unabhängig von Druck und Dichte betrachtet, weil die Rekombination im allgemeinen eine Reaktion erster Ordnung ist.

In vielen Fällen ist die Energieakkommodation an der Wand nur unvollständig. Dies kann durch eine unabhängige Messung des rekombinierenden Massenstroms

und des zugehörigen Wärmestroms nachgewiesen werden. Messungen für verschiedene Oberflächenmaterialien haben ergeben, daß die pro Molekül übertragene Energie i.a. kleiner als die Dissoziationsenergie ist. Das bedeutet, daß die gebildeten Moleküle die Oberfläche entweder energetisch angeregt oder mit einer wesentlich höheren Geschwindigkeit verlassen als es der Wandtemperatur entspricht. In diesem Zusammenhang wird der folgende chemische Energieakkommodationskoeffizient

$$\beta_i = \frac{\dot{q}_{rekomb}}{\dot{m}_{i,rekomb} \cdot h_{Di}} \quad (5.89)$$

definiert, wobei \dot{q}_{rekomb} den tatsächlichen Wärmestrom aufgrund der Rekombination, $\dot{m}_{i,rekomb}$ den Massenfluß der Atome und h_{Di} die spezifische Dissoziationswärme pro Masse bezeichnet. Die Abgabe der Dissoziationswärme kann durch emittierte Moleküle in einem angeregten Zustand geschehen. Sie können in der Grenzschicht abkühlen oder wieder auf die Wand treffen und dadurch ihre Anregungsenergie abgeben. Für glasartige Materialien wie z.B. den beim Space-Shuttle verwendeten Kachelmaterialien gibt es Anhaltspunkte, daß eine unvollständige Energieakkommodation vorliegt. Das Produkt $\gamma = \gamma' \beta$ kann als effektiver katalytischer Rekombinationskoeffizient bezüglich des Wärmestroms angesehen werden.

Der Zusammenhang zwischen dem Wand-Wechselwirkungsmodell und den strömungsmechanischen Grundgleichungen ergibt sich aus dem Rekombinationsgeschwindigkeitskoeffizienten. Der Rekombinationsgeschwindigkeitskoeffizient k_W ist der konstante Geschwindigkeitsfaktor mit dem die Atomdichte in der Gasphase an der Oberfläche multipliziert werden muß, um den Fluß \dot{m}_i (kg/(m² sek)) der rekombinierenden Atome zu erhalten:

$$\dot{m}_{i,rekomb} = (\rho c_i)^p k_{Wi} \quad (5.90)$$

Hierin bezeichnet c_i Massenbruch der Spezies i , ρ die Gesamtdichte und p die Reaktionsordnung (normalerweise 1). Es gilt

$$k_{Wi} = \gamma_i \sqrt{k T_t / 2\pi M_i} \quad (5.91)$$

Hierbei steht k für die Boltzmann-Konstante, T_t für die Translationstemperatur und M_m für die Masse eines Teilchens.

Der Wärmestrom normal zur Oberfläche setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen. Innerhalb der Grenzschicht erfolgt der Wärmetransport zur Wand durch Wärmeleitung und Diffusion. Der konvektive Anteil geht gegen Null. Wenn x_n als wandnormale Richtung angenommen wird, ergibt sich der Wärmestrom zu

$$\dot{q} = -k_t \frac{\partial T_t}{\partial x_n} - k_v \frac{\partial T_v}{\partial x_n} + \sum_i h_i \dot{m}_i \quad (5.92)$$

Nach dem Fickschen Ansatz berechnet sich der Massenfluß aus dem Konzentrationsgradienten.

$$\dot{m}_i = -\rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial x_n} \quad (5.93)$$

wobei D_i den Diffusionskoeffizienten der Spezies i in einem Mehrkomponentengas bezeichnet.

Damit folgt beispielsweise als Randbedingung für die Kontinuitätsgleichung des atomaren Sauerstoffs

$$\left. \frac{\partial c_O}{\partial x_n} \right|_{Wand} = \frac{\gamma_O c_O}{D_O} \sqrt{\frac{kT_t}{2\pi M_O}} \quad . \quad (5.94)$$

Für den Grenzfall einer vollkatalytischen Wand gilt $\gamma = 1$. Die Randbedingung einer nichtkatalytischen Wand ($\gamma_O = 0$) lautet damit

$$\left. \frac{\partial c_O}{\partial x_n} \right|_{Wand} = 0 \quad . \quad (5.95)$$

5.3 Berechnungsverfahren

5.3.1 Approximative Verfahren

Zur Vorhersage von aerodynamischen Beiwerten werden im ersten Entwurfsschritt Handbuchmethoden und einfache Nachrechnungsmethoden eingesetzt. Im folgenden soll auf die beiden wichtigsten Näherungsmethoden, die Newton-Theorie zur Berechnung der Druckverteilung und die klassische Grenzschichtlösung von J.A. FAY, F.R. RIDDELL 1958 zur Berechnung des Wärmeübergangs im Staupunkt, eingegangen werden.

Für hypersonische Strömungen läßt sich die Druckverteilung auf der Körperoberfläche mit Hilfe der Newton-Methode approximieren. Dabei wird angenommen, daß der Normalimpuls der Strömungsteilchen an den Körper übergeht, während der Tangentialimpuls erhalten bleibt (Abbildung 5.19). Die auf eine Fläche A ausgeübte Kraft F bzw. der lokale Druckbeiwert c_p sind damit nur vom Auftreffwinkel Θ abhängig:

$$\begin{aligned} F &= \rho_\infty u_\infty^2 A \sin^2 \Theta \quad , \\ \frac{F}{A} &= p - p_\infty \quad , \end{aligned}$$

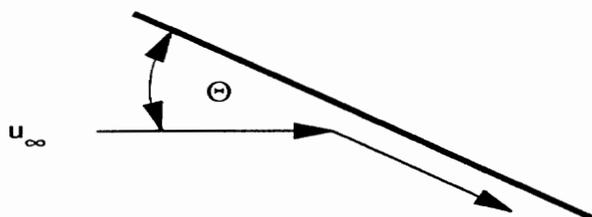


Abb. 5.19: Prinzip der Newton-Theorie

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty^2} \quad , \quad (5.96)$$

$$c_p = 2 \sin^2 \Theta \quad . \quad (5.97)$$

Bei dieser Betrachtung unterstellt Newton, daß die Fluidteilchen keine zufällige thermische Bewegung besitzen und nicht miteinander wechselwirken. Dies ist der Grund, warum die Newton-Theorie im Unterschall versagt. Gerade der statische Druck ist auf die thermische Bewegung der Atome und Moleküle zurückzuführen. Dadurch ist die Vorwärtswirkung eines umströmten Körpers im Unterschall unendlich groß. Im Überschall ist der Einflußbereich eines Körpers durch die Kopfwelle begrenzt. Bei hohen Machzahlen liegt die Kopfwelle dicht am Körper. Die Voraussetzungen der Newton-Theorie werden damit näherungsweise erfüllt. Mit zunehmender Machzahl nimmt die Genauigkeit der Newton-Approximation zu, da das vom Körper beeinflusste Strömungsgebiet immer dichter an den Körper rückt.

Nach der Newton-Theorie liegen die leeseitigen Oberflächenelemente im sog. aerodynamischen Schatten ($c_p = 0$) und liefern keinen Beitrag zum Auftrieb bzw. Widerstand. Die somit vernachlässigten Expansionsgebiete bewirken zu geringe Auftriebs- bzw. Widerstandsbeiwerte.

Die Genauigkeit der Newton-Theorie kann durch eine Skalierung des Druckbeiwerts c_p verbessert werden:

$$c_p = c_{pmax} \sin^2 \Theta \quad . \quad (5.98)$$

Der Faktor c_{pmax} wird so gewählt, daß der Druckbeiwert im Staupunkt hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß exakt wiedergegeben wird. In diesem Fall wird von der modifizierten Newton-Theorie gesprochen. Für ideale Gase kann der Skalierungsfaktor aus den Beziehungen des senkrechten Stoßes analytisch berechnet werden. Die modifizierte Newton-Theorie ist dann nicht mehr Machzahl-unabhängig.

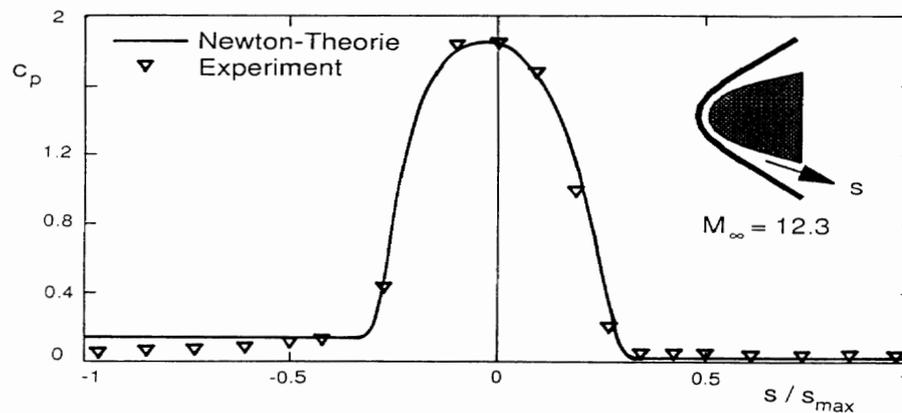


Abb. 5.20: Druckbeiwert der modifizierten Newton-Theorie entlang der Oberfläche einer Wiedereintrittskapsel bei 5° Anstellwinkel

Im Grenzfall $M_\infty \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$c_{p,max} = \left[\frac{(\kappa + 1)^2}{4\kappa} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[\frac{4}{\kappa + 1} \right]$$

Zur Berücksichtigung von Nichtgleichgewichtseffekten wird das Verhältnis der spezifischen Wärmen κ zwischen 1 und 1,2 gewählt. Für $M_\infty \rightarrow \infty$ und $\kappa = 1$ ergibt sich wieder die ursprüngliche Newton-Theorie ($c_{p,max} = 2$).

Bei der Auslegung eines Hitzeschutzschildes ist die Temperatur und der Wärmestrom im Punkt der maximalen Belastung, dem Staupunkt, von besonderer Bedeutung. Während die Newton-Theorie nur die Druckverteilung liefert, muß zur Berechnung des Wärmestroms ein Verfahren gewählt werden, das den Temperaturverlauf und die Konzentrationsverläufe der einzelnen Spezies in der Staupunktgrenzschicht im Detail auflöst. Die Theorie zur Berechnung der Staupunktgrenzschicht einer reagierenden Strömung im chemischen Nichtgleichgewicht wurde von J.A. FAY, F.R. RIDDELL 1958 angegeben und besitzt auch heute noch praktische Bedeutung.

Ziel der Grenzschichttheorie ist es, die partiellen Navier-Stokes-Gleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückzuführen. Dies führt auf ein gekoppeltes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung (1 Impulsgleichung, 1 Energiegleichung und $(n-1)$ Spezies-Kontinuitätsgleichungen). Die Impulsgleichung normal zur Wand reduziert sich auf die Bedingung $\partial p / \partial x_n = 0$. Typisch für die Grenzschichttheorie ist es, daß die Randbedingungen am Rand der Grenzschicht vorgegeben werden müssen. Dabei fällt der Rand der Grenzschicht nicht mit der Kopfwelle zusammen. An dieser Stelle gehen die Newton-Theorie und Annahmen über die Temperatur und die Zusammensetzung des Gases ein.

Die Grenzschichtgleichungen werden in dimensionsloser Form geschrieben. Hieraus ergeben sich zwei dimensionslose Kennzahlen, die die Wärmeleitfähigkeit und

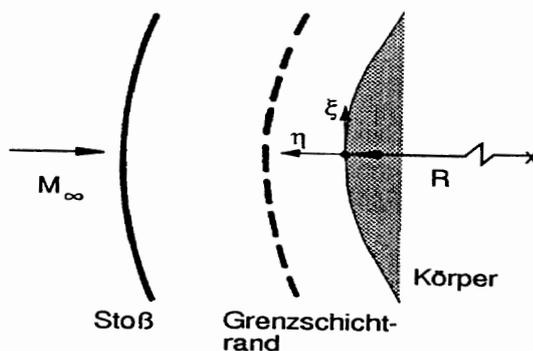


Abb. 5.21: Staupunktbereich einer Wiedereintrittskapsel

den Diffusionskoeffizienten mit der Zähigkeit in Beziehung setzen. Dies sind die Prandtlzahl Pr und die Lewiszahl Le :

$$Pr = \frac{\mu c_p}{k} \quad , \quad Le = \frac{\rho D c_p}{k} \quad . \quad (5.99)$$

In vereinfachten Lösungsformeln werden diese Kennzahlen als konstant vorausgesetzt (z.B. $Pr = 0,71$, $Le = 1,4$). Bei der numerischen Lösung der Grenzschichtgleichungen ist diese Vereinfachung aber zwingend erforderlich.

Es ist kaum zu erwarten, daß sich die Lösung des Differentialgleichungssystems auf eine einfache Formel für den Wärmestrom reduzieren läßt. Dazu sind die Variationsmöglichkeiten, die in den Differentialgleichungen und den Randbedingungen enthalten sind, zu vielfältig. In Abhängigkeit der Reaktionsgeschwindigkeiten kann die Grenzschicht im Gleichgewicht, im Nichtgleichgewicht oder gefroren sein. Die Wand kann eine katalytische, eine teilweise katalytische oder eine nicht katalytische Oberfläche darstellen.

Um dennoch zu einem überschaubaren Ergebnis zu kommen, vereinfachten Fay und Riddell die Gleichungen auf ein Gas bestehend aus einer Molekülsorte. Sie führten zahlreiche numerische Parameterstudien durch, deren Ergebnisse im Form von Korrelationsformeln zusammengefaßt werden konnten. Es ergeben sich 3 interessante Grenzfälle: die Gleichgewichtsgrenzschicht, die gefrorene Grenzschicht mit voll katalytischer Wand und die gefrorene Grenzschicht mit nicht katalytischer Wand. Bei einer Grenzschicht im chemischen Gleichgewicht spielt die Katalytizität der Wand keine Rolle, da die Strömung bereits im Gleichgewicht ist. In einer gefrorenen Grenzschicht erhöht sich der Wärmestrom infolge einer katalytischen Wand erheblich. Es ist bemerkenswert, daß sich die Ergebnisse der Gleichgewichtsgrenzschicht und der gefrorenen Grenzschicht bei katalytischer Wand nur gering unterscheiden. Bei der Gleichgewichtsgrenzschicht erfolgt die Rekombination in der Grenzschicht oberhalb der Wand. Die freigesetzte chemische Energie gelangt primär durch Wärmeleitung an die Wand. In der gefrorenen Grenzschicht erfolgt die Rekombination direkt an der katalytischen Wand. Für diesen Fall gilt die folgende Korrelation für den Wärmestrom \dot{q}_s im Staupunkt:

$$\dot{q}_s = 0,763 Pr^{-0,6} (\rho_e \mu_e)^{0,4} (\rho_w \mu_w)^{0,1} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s} (h_{0e} - h_w) \left[1 + (Le^{0,63} - 1) \frac{h_D}{h_{0e}}\right] \quad . \quad (5.100)$$

Hierin bezeichnet der Index e Werte am Grenzschichttrand, h_0 ist die totale Enthalpie und h_D die Bildungsenthalpie. Der Geschwindigkeitsgradient folgt aus der Newton-Theorie:

$$\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{2(p_e - p_\infty)}{\rho_e}} \quad , \quad (5.101)$$

mit dem Krümmungsradius R_s . Für die Lewiszahl $Le = 1,0$, die Prandtlzahl $Pr = 0,71$ und mit dem Sutherland-Gesetz der Zähigkeit der Luft läßt sich diese Beziehung zu

$$\dot{q}_s = 1,24 \cdot 10^{-4} \frac{\sqrt{\text{kg}}}{\text{m}} \sqrt{\frac{\rho_\infty}{R_s}} u_\infty^3 \quad (5.102)$$

vereinfachen.

5.3.2 Numerische Algorithmen

Von den zahlreichen numerischen Algorithmen für die näherungsweise Lösung des kontinuumsmechanischen partiellen Differentialgleichungssystems (5.50) haben wir ein spezielles Lösungsverfahren ausgewählt, das wir im folgenden behandeln. Für die Details der Navier-Stokes-Lösungsalgorithmen verweisen wir auf unser Lehrbuch Numerische Strömungsmechanik H. OERTEL JR., E. LAURIEN 1994. Von den zahlreichen Übersichtsartikel über die numerische Simulation im Hyperschallbereich sei lediglich der neuste Artikel zitiert, G.A. TIRSKY 1993.

Bevor wir uns dem von uns favorisierten Taylor-Galerkin-Finite-Elemente Verfahren zuwenden, wollen wir einige allgemeine Anmerkungen über die Entwicklung der numerischen Lösungsverfahren machen.

Alle Verfahren benötigen in irgendeiner Form Rechengitter mit deren Hilfe Zeit und Raum in Form von Punkten oder Zellen diskretisiert werden. Die Numerik liefert dann eine Näherungslösung der Strömungsgrößen an diskreten Punkten. Häufig gelten zwischen diesen Punkten gewisse Näherungsfunktionen. In der historischen Entwicklung sind in der Strömungsmechanik Finite-Differenzen-Methoden FDM und Finite-Volumen-Methoden FVM und in der Folge Finite-Elemente-Verfahren (FEM) entwickelt worden.

Ein Finite-Differenzen-Verfahren ersetzt die Differentialquotienten der Grundgleichungen näherungsweise durch Differenzenquotienten unter Verwendung des ange-

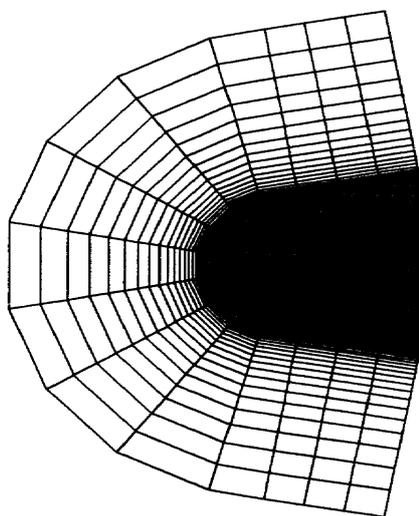


Abb. 5.22: Beispiel eines Rechengitters der Finite-Differenzen-Methode

sprochenen Rechengitters (Abbildung 5.22). Dies führt auf große Differenzengleichungssysteme, die häufig über den Zwischenschritt einer Linearisierung in lineare Gleichungssysteme überführt werden. Eine Stärke der FDM liegt in der Möglichkeit, unterschiedliche Randbedingungen (auch Ableitungen höherer Ordnung) explizit vorschreiben zu können. Die Techniken zur genauen Berechnung von Stößen bzw. Diskontinuitäten sind sehr weit entwickelt. Der Nachteil der FDM ist, daß das Verfahren auf rechteckige Ränder beschränkt ist. Bei komplexen Geometrien ergeben sich damit aufwendige Koordinatentransformationen auf ein Rechteckgebiet.

Die Finite-Volumen-Methode integriert zunächst die Grundgleichungen (5.50) und diskretisiert die Gleichungen dann in integraler Form. Es ist üblich, in einem ersten Schritt nur eine räumliche Diskretisierung vorzunehmen. Dies führt auf gewöhnliche Differentialgleichungen bezüglich der Zeit. Diese gewöhnlichen Differentialgleichungen werden dann beispielsweise mit einem mehrstufigen Runge-Kutta-Verfahren zeitlich integriert, bis eine stationäre Lösung erreicht wird oder eine vorgegebene Simulationszeit überschritten ist. Mit der FVM lassen sich auch sehr komplexe Geometrien ohne Koordinatentransformation erfassen.

Eine weitere allgemeine Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen ist die Finite-Elemente-Methode FEM, die z.B. in der Strukturmechanik sehr weite Verbreitung gefunden hat. Ihre Stärke liegt in der Verwendung unstrukturierter Netze, mit denen komplexe Rechengebiete einfacher beschrieben werden können, als es mit strukturierten Gittern der FDM möglich ist. Eine FEM-Rechnung ist im allgemeinen mit adaptiven Netzverfeinerungen verbunden (Abbildung 5.23). Hierdurch kann die geforderte Genauigkeit mit möglichst wenig Netzknoten, d.h. mit möglichst geringem Rechenaufwand, erreicht werden.

Eine spezielles Finite-Elemente-Verfahren, das sich bei der Behandlung kompressibler Strömungen bewährt hat, soll im folgenden behandelt werden. Die Taylor-

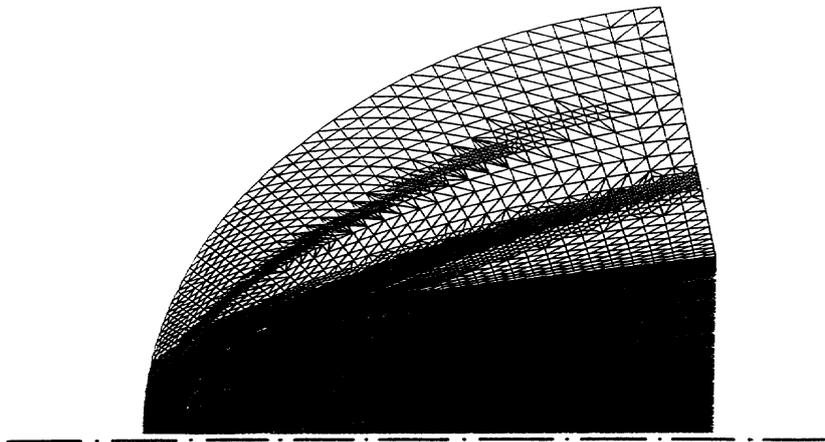


Abb. 5.23: Beispiel ein Rechengitters der Finite-Elemente-Methode

Galerkin-Finite-Elemente-Methode ist geeignet, zeitabhängige Systeme partieller Differentialgleichungen, die in Erhaltungsform entsprechend der Gleichung 5.50 formuliert sind, zu integrieren.

Ziel der Integration beim Wiedereintrittsproblem ist die Berechnung einer stationären Lösung der Umströmung der Wiedereintrittskapsel für konstante Anströmbedingungen am betrachteten Ort der Wiedereintrittstrajektorie.

Die numerische stationäre Lösung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems führt zwangsläufig zu einem Iterationsprozeß. Hierbei bietet sich die Zeit als natürliche Iterationsvariable an. Die Numerik vollzieht damit den instationären Aufbau des Strömungsfelds nach. Ausgehend von einem vorgegebenen Anfangszustand, beispielsweise einer ungestörten Parallelströmung, wird wiederholt ein Zeitschritt berechnet. Das Taylor-Galerkin-Verfahren arbeitet explizit bezüglich der Zeit, d.h. die Strömungsgrößen in der neuen Zeitebene sind nicht über ein Gleichungssystem gekoppelt.

Die Diskretisierung des Gleichungssystems bezüglich der Zeit wird mit Hilfe einer Taylor-Entwicklung durchgeführt. Zur Diskretisierung der räumlichen Dimensionen wird das Rechengebiet Ω in Elemente, im zweidimensionalen Fall in Dreiecke (Abbildung 5.24), unterteilt. Gesucht sind die Strömungsgrößen in den Eckpunkten der Dreiecke. Es wird angesetzt, daß die Strömungsvariablen innerhalb der Dreiecke linear variieren (stückweise lineare Ansatzfunktionen). Hierbei wird offensichtlich ein Approximationsfehler (im Gegensatz zu numerischen Rundungsfehlern) begangen. Die Idee der Finite-Elemente-Methode liegt darin, die Knotenwerte so zu bestimmen, daß dieser Fehler in einem gewissen integralen Sinn minimal wird.

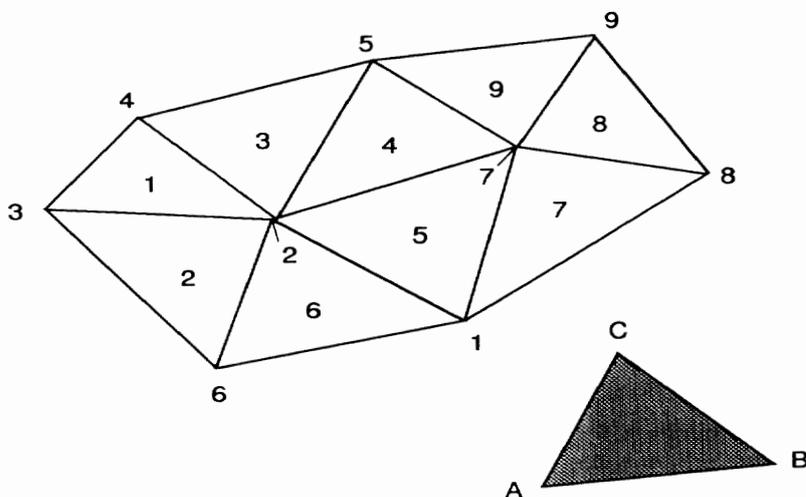


Abb. 5.24: Unstrukturiertes Netz. Knoten und Elemente sind in beliebiger Reihenfolge fortlaufend nummeriert

Zum Auffinden dieses Minimums wird eine sog. Galerkin-Prozedur durchgeführt. Die Vorgehensweise wird auch als "Methode der gewichteten Residuen" bezeichnet. Der lokale Fehler, das Residuum, wird mit sog. Testfunktionen gewichtet und über das Rechengebiet integriert. Dieses Integral muß verschwinden. Im Fall der Galerkin-Methode sind die Testfunktionen identisch mit den Ansatzfunktionen. Für jede Testfunktion ergibt sich eine Gleichung. Dies führt schließlich wieder auf ein lineares Gleichungssystem.

Um diese Schritte nachvollziehen zu können, sind einige Vorbemerkungen zur räumlichen Diskretisierung erforderlich. Im einfachsten Fall erfolgt die Unterteilung des Rechengebiets in Dreiecks- (zweidimensional) oder Tetraederelemente (dreidimensional). Die Eckpunkte der Elemente heißen Knoten. Im Unterschied zu einem strukturierten Netz, bei dem jeder Punkt oder jede Zelle durch ein Indexpaar (oder Tripel) definiert ist, ergeben sich dadurch unstrukturierte Netze, deren Knoten und Elemente mehr oder weniger zufällig durchnummeriert sind.

Der Zusammenhang zwischen Knoten und Elementen wird durch eine Zuordnungsmatrix hergestellt. Jedem Dreieckselement mit den lokalen Knotennummern A, B und C (im mathematisch positiven Drehsinn angeordnet) werden darin die globalen Knotennummern zugeordnet. Die Zuordnungsmatrix für das Beispiel in Abbildung 5.24 lautet:

Element-Nr.	A	B	C
1	3	2	4
2	6	2	3
3	2	5	4
4	2	7	5
5	1	7	2
6	1	2	6
7	1	8	7
8	7	8	9
9	7	9	5

Die Positionen der Knoten im Raum oder in der Ebene sind durch ihre globalen Ko-

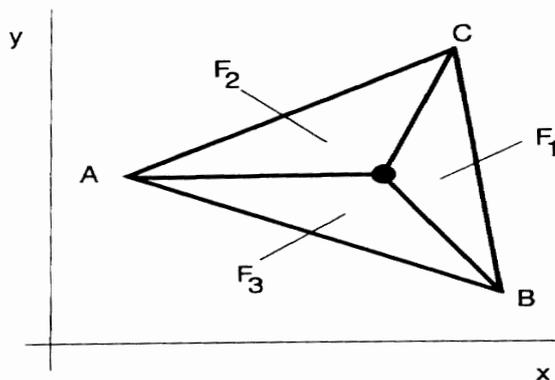


Abb. 5.25: Lagrangesche Flächenkoordinaten

ordinaten gegeben, also z.B. in dem kartesischen Koordinatensystem x, y . In jedem Element werden lokale Koordinaten eingeführt, die unabhängig von der tatsächlichen Form des Elements (z.B. langgestreckt oder annähernd gleichseitig) sind. In diesen lokalen Koordinaten können dann unterschiedliche Elemente gleich behandelt werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, lokale Koordinaten zu definieren, z.B. Lagrangesche Flächenkoordinaten

$$\xi_k = \frac{F_k}{\sum_k F_k} \quad , \quad (5.103)$$

die als das Verhältnis der in Abbildung 5.25 durch einen beliebigen Punkt abgetrennten Flächen zur Gesamtfläche des Dreiecks gedeutet werden können. Jeweils zwei Koordinaten nehmen in den Knoten des Dreiecks den Wert null an und jeweils eine auf den Seiten des Dreiecks. Der Wert der Koordinaten liegt zwischen null und eins, die Summe aller drei Koordinaten ist eins. Der Zusammenhang zwischen den lokalen Koordinaten eines Elements und den globalen Koordinaten lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

Die darin vorkommende Matrix heißt Transformationsmatrix T . Die lokalen Koordinaten werden nun zur Definition von Formfunktionen verwendet, mit denen dann die endgültige Diskretisierung vorgenommen wird. Die Formfunktion S_j hat die Eigenschaft, daß sie an einem Knoten j den Wert eins besitzt und an allen anderen Knoten den Wert null. Eine beliebige Zustandsgröße $u(\mathbf{x})$ kann mit dem Ansatz

$$u(\mathbf{x}) = \sum_j u_j \cdot S_j(\mathbf{x}) \quad (5.105)$$

approximiert werden. Dabei sind aufgrund der o.g. Eigenschaft die Ansatzkoeffizienten u_j auch gleichzeitig die Werte der Funktion u an den Knoten j , d.h. $u(\mathbf{x}_j) =$

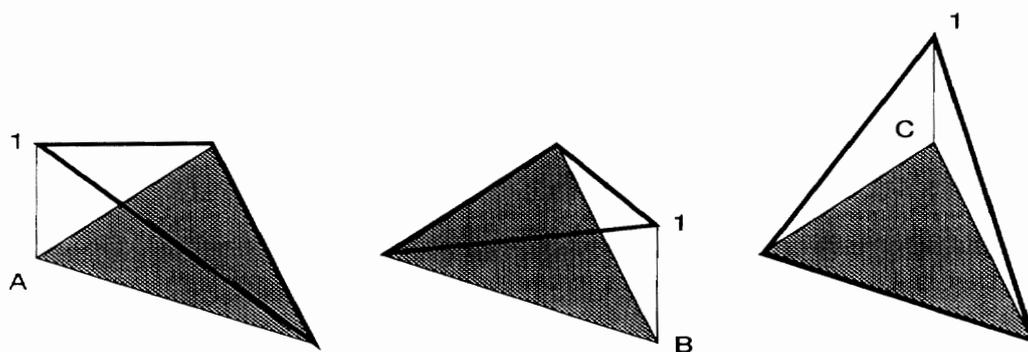


Abb. 5.26: Lineare Formfunktionen für Dreieckselemente

u_j . Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Formfunktionen zu wählen. Die Taylor-Galerkin-Methode basiert auf linearen Formfunktionen (Abbildung 5.26):

$$N_A = \xi_1 \quad , \quad N_B = \xi_2 \quad , \quad N_C = \xi_3 \quad (5.106)$$

und auf im Element konstanten Formfunktionen:

$$P_e = 1 \quad , \quad (5.107)$$

die innerhalb des Elements e den Wert eins annehmen und außerhalb den Wert null.

Ausgehend vom kontinuierlichen Zustandsvektor \mathbf{U} wird zunächst die Zeit diskretisiert und zwar in Form einer Taylorreihe um den Zeitpunkt t_n (n ist der Index der Zeitdiskretisierung $t_n = n \cdot \Delta t$, Δt ist die Zeitschrittweite):

$$\mathbf{U}^{n+1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}^n(\mathbf{x}, t^n) + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n(\mathbf{x}, t^n)}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}^n(\mathbf{x}, t^n)}{\partial t^2} + \dots \quad (5.108)$$

Wird diese Reihe nach dem quadratischen Glied abgebrochen, so ist das Verfahren bezüglich der Zeit von zweiter Ordnung genau. Es ist jedoch aufwendig, die auftretenden zweiten Ableitungen des Zustandsvektors zu berechnen, weshalb dieses Verfahren nicht so häufig verwendet wird. Weit verbreitet ist dagegen das Taylor-Galerkin-Zweischrittverfahren, bei dem die Taylorreihe schon nach dem linearen Term abgebrochen wird. Dieses Verfahren ist nur dann numerisch stabil, wenn ein Zwischenschritt $n + 1/2$ eingeführt wird

$$\mathbf{U}^{n+1/2} = \mathbf{U}^n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial t} \quad , \quad (5.109)$$

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \frac{\partial \mathbf{U}^{n+1/2}}{\partial t} \quad . \quad (5.110)$$

Die Zeitableitungen von \mathbf{U} können entsprechend dem zu lösenden Differentialgleichungssystem (5.50) direkt durch räumliche Ableitungen der Flußvektoren \mathbf{F} , \mathbf{G} und \mathbf{H} ersetzt werden.

Diese räumlichen Ableitungen müssen nun numerisch approximiert werden. Hierbei kommen zum ganzzahligen Zeitschritt stückweise lineare Ansatzfunktionen $N_j(x, y)$ und im Zwischenschritt im Element e konstante Ansatzfunktionen $P_e(x, y)$ zu Einsatz:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^n &= \sum_j \mathbf{U}_j^n N_j \quad , \\ \mathbf{F}_k^n &= \sum_j \mathbf{F}_{kj}^n N_j \quad , \\ \mathbf{W}^n &= \sum_j \mathbf{W}_j^n N_j \quad , \\ \mathbf{U}^{n+1/2} &= \sum_e \mathbf{U}_e^{n+1/2} P_e \quad . \end{aligned} \quad (5.111)$$

Die räumlichen Ableitungen schreiben sich damit in folgender Form:

$$\frac{\partial \mathbf{U}^n}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{U}_j^n \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{x}} \quad , \quad (5.112)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{F}_j^n \sum_j \frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{x}} \quad , \quad (5.113)$$

während die Ableitungen des Zwischenschritts verschwinden. Die Ableitungen der Formfunktionen N bestimmen sich über die Kettenregel:

$$\frac{\partial N_j}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial \mathbf{x}} \quad j = 1, 2, 3 \quad . \quad (5.114)$$

Die Ableitungen der lokalen nach den globalen Koordinaten folgen aus der Inversion der Transformationsmatrix.

Nach diesen Vorbereitungen kann die Galerkin-Technik angewendet werden. Die diskretisierten Grundgleichungen werden mit den Ansatzfunktionen (im ersten Teilschritt mit P_e , im zweiten Teilschritt mit N_j) multipliziert und über das gesamte Rechengebiet Ω integriert.

Dies führt im ersten Teilschritt auf

$$\Delta_e \mathbf{U}_e^{n+\frac{1}{2}} = \sum_j \left(\int_{\Omega_e} N_j d\Omega \right) \left[\mathbf{U}_j^n + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{W}_j^n \right] - \frac{1}{2} \Delta t \sum_j \sum_k \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} d\Omega \right) \mathbf{F}_{kj}^n$$

$$e = 1, \dots, E \quad ,$$

wobei Δ_e die Fläche des Elements e bedeutet.

Der Lösungsvektor für das Element e zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ errechnet sich direkt, ohne die Lösung eines Gleichungssystems, da die Integration nur das Element e erfaßt.

Für den zweiten Zeitschritt lautet die Taylor-Entwicklung

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n - \Delta t \sum_k \left[\left. \frac{\partial \mathbf{F}_k}{\partial x_k} \right|^{n+1/2} + \left. \frac{\partial \mathbf{G}_k}{\partial x_k} \right|^n + \left. \frac{\partial \mathbf{H}_k}{\partial x_k} \right|^n \right] + \Delta t \mathbf{W}^{n+1/2} + O(\Delta t^2) \quad .$$

Es werden folgende Näherungen verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{n+1} &= \sum_j \mathbf{U}_j^{n+1} N_j \quad , \\ \mathbf{F}_k^{n+1/2} &= \sum_e \mathbf{F}_{ke}^{n+1/2} P_e \quad , \\ \mathbf{G}_k^n &= \sum_e \mathbf{G}_{ke}^n P_e \quad , \\ \mathbf{H}_k^n &= \sum_e \mathbf{H}_{ke}^n P_e \quad , \\ \mathbf{W}^{n+1/2} &= \sum_e \mathbf{W}_e^{n+1/2} P_e \quad . \end{aligned}$$

Die Galerkin-Prozedur ergibt:

$$\begin{aligned} \sum_j \left(\int_{\Omega} N_j N_l d\Omega \right) \delta \mathbf{U}_j &= \Delta t \sum_e \sum_k \left(\int_{\Omega_e} \frac{\partial N_l}{\partial x_k} d\Omega \right) \left(\mathbf{F}_{ke}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{G}_{ke}^n + \mathbf{H}_{ke}^n \right) - \\ &\Delta t \sum_e \sum_k \left(\int_{\Gamma_e} l_k N_l d\Gamma \right) \left(\mathbf{F}_{ke}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{G}_{ke}^n + \mathbf{H}_{ke}^n \right) + \\ &\Delta t \sum_e \left(\int_{\Omega_e} N_l d\Omega \right) \mathbf{W}_e^{n+\frac{1}{2}} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 2 \quad , \\ k &= 1, \dots, K \quad . \end{aligned}$$

wobei

$$\delta \mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \quad .$$

gilt.

Das Integral über den Rand Γ des Rechengebiets Ω stammt aus der Anwendung des Gaußschen Satzes. Der Richtungscosinus der nach außen gerichteten Oberflächennormale wird hierbei mit l_k abgekürzt. Diese Randintegrale dienen dazu, die physikalisch vorgeschriebenen Randbedingungen zu setzen.

In Matrixschreibweise lautet diese Gleichung

$$\mathbf{M} \delta \mathbf{U} = \mathbf{f}_{\Omega} + \mathbf{f}_{\Gamma} \quad ,$$

wobei \mathbf{M} konsistente Massenmatrix heißt. Die Beiträge der Gebiets- und Randintegrale werden als \mathbf{f}_{Ω} bzw. \mathbf{f}_{Γ} abgekürzt. Dieses lineare Gleichungssystem kann iterativ gelöst werden:

$$\mathbf{M}_L (\delta \mathbf{U}^{(r)} - \delta \mathbf{U}^{(r-1)}) = \mathbf{f}_{\Omega} + \mathbf{f}_{\Gamma} - \mathbf{M} \delta \mathbf{U}^{(r-1)} \quad ,$$

wobei der Index r die r -te Iterierte bezeichnet. Als Startwert wird $\delta \mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{0}$ gewählt. \mathbf{M}_L ist die diagonalisierte Massenmatrix, d.h. die Zeilensummen von \mathbf{M} werden jeweils auf das Diagonalelement zusammengezogen und alle übrigen Zeilenelemente auf Null gesetzt. Bei dieser Vorgehensweise braucht die Massenmatrix, die nur sehr schwach mit von Null verschiedenen Elementen besetzt ist, im Rechenprogramm nicht gespeichert zu werden. Dies wird ausgenutzt, um den Speicherbedarf bei dreidimensionalen Berechnungen in Grenzen zu halten.

Die beschriebenen zwei Rechenschritte stellen nur den Kern des Berechnungsverfahrens dar. Es sind zusätzliche Techniken erforderlich, um numerische Oszillationen bzw. Instabilitäten in der Nähe von Verdichtungsstößen zu verhindern.

Das Taylor-Galerkin-Zweischrittverfahren ist unter der Bedingung stabil, daß die Courant-Friedrich-Levy-Bedingung (CFL-Bedingung) eingehalten wird. Diese Bedingung besagt, daß in jedem Zeitschritt der numerische Abhängigkeitsbereich eines Punktes größer sein muß als der physikalische Abhängigkeitsbereich. Sonst kann die physikalische Wellenausbreitung durch das numerische Verfahren nicht richtig wiedergegeben werden. Letztere ist unter anderem durch die Strömungsgeschwindigkeit u und die Schallgeschwindigkeit c bestimmt. Hierdurch ergibt sich eine

Beschränkung für den numerischen Zeitschritt. Die CFL-Bedingung im Element lautet:

$$\Delta t < \text{CFL} \beta \frac{h_e}{\max |u| + c} \quad , \quad (5.115)$$

mit der CFL-Zahl, einem Sicherheitsfaktor β (z.B. 0,9) und einer charakteristischen Länge des Elements h_e (z.B. dem Inkreisdurchmesser). Die CFL-Zahl kann mit Hilfe von Stabilitätsanalysen theoretisch bestimmt werden, sie beträgt $1/\sqrt{3}$ für die konsistente und eins für die diagonalisierte Massenmatrix. Es kommen weitere Bedingungen aufgrund der Reibungs- und Diffusionsvorgänge hinzu, die in der Grenzschicht von Bedeutung sind. Da die Stabilitätstheorien auf den linearisierten Gleichungen beruhen, also nur für Änderungen kleiner Amplitude gelten, und die Randbedingungen vernachlässigt werden, muß die Zeitschrittweite u.U. durch geeignete Wahl des Sicherheitsfaktors noch verkleinert werden.

Wird diese Bedingung nicht eingehalten, so ist das Verfahren instabil, d.h. numerische Störungen, die während einer Strömungssimulation im Integrationsgebiet auftreten, werden stets angefacht. Sie wachsen in ihrer Amplitude über alle Grenzen und führen schließlich zum Abbruch der Rechnung.

Vorausgesetzt, das Verfahren wird im stabilen Bereich angewendet, so ist die Genauigkeit der Approximation von Interesse. Diese hängt in erster Linie vom verwendeten numerischen Netz ab, also von der Netzfeinheit und der Netzglattheit. Auf glatten Netzen ist das Verfahren von zweiter Ordnung, d.h. bei Halbierung der Kantenlänge der Elemente und sonst gleichen Bedingungen wird der Fehler auf ein Viertel des ursprünglichen Fehlers reduziert. Die Genauigkeit bezüglich der Zeit ist von untergeordnetem Interesse, da das Verfahren hier nur möglichst schnell in Richtung der stationären Lösung konvergieren soll.

5.4 Simulationsergebnisse

Für eine Kapsel mit einer charakteristischen Länge von einem Meter ($L = 1,49$ m) beginnt der Bereich der Kontinuumsmechanik in ca. 90 km Höhe. Im Übergangsbe-

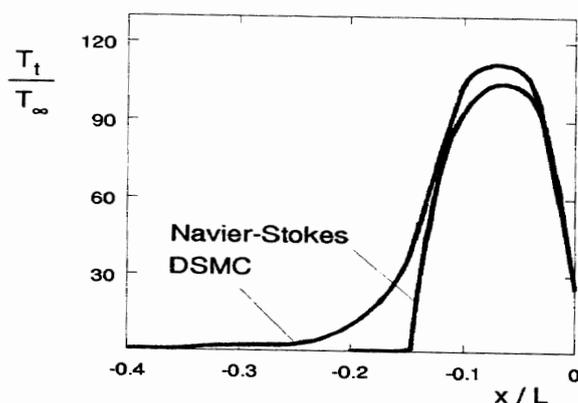


Abb. 5.27: Vergleich der Translationstemperatur entlang der Stauströmlinie in 90 km Höhe

reich sind sowohl die gaskinetischen als auch die kontinuumsmechanischen Berechnungsverfahren anwendbar. Abbildung 5.27 zeigt den Vergleich der DSMC Lösung aus Kapitel 4.4 in 90 km Höhe mit der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen bezüglich der Translationstemperatur entlang der Staustromlinie.

In der gaskinetischen Lösung reicht der Einflußbereich der Kapsel etwas weiter stromauf. In 90 km Höhe ist der Stoß immer noch über einige Zentimeter verschmiert. Innerhalb dieser Stoßschicht sind die Navier-Stokes-Gleichungen nicht gültig, da die Molekültranslation und Rotation im thermodynamischen Gleichgewicht angesetzt wird und die linearen Ansätze zur Berechnung der Reibung, der Wärmeleitung und der Diffusion die Transportphänomene nicht vollständig beschreiben. Deshalb kann ein Navier-Stokes-Verfahren die Details der Stoßstruktur grundsätzlich nicht auflösen. Dennoch sind die mit beiden Verfahren berechneten maximalen Translationstemperaturen (≈ 20000 K) ungefähr gleich. Im Übergangsbereich muß bei der kontinuumsmechanischen Berechnung an der Wand ein Temperatursprung als Randbedingung der Navier-Stokes-Gleichungen berücksichtigt werden, der der gaskinetischen Lösung entspricht. Das bedeutet, daß die Temperatur bei $x = 0$ nicht die Wandtemperatur, sondern die Gastemperatur darstellt. Mit dem Vergleich in Abbildung 5.27 wird deutlich, daß im Übergangsbereich die gaskinetische Lösung in die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen übergeht.

In 75 km Höhe ist die Dichte der Anströmung um eine Größenordnung größer als in 90 km Höhe. Nun ist es nicht mehr erforderlich, in den Randbedingungen Verdünnungseffekte zu berücksichtigen. Der Temperaturverlauf entlang der Staustromlinie in Abbildung 5.28 wird durch 3 physikalische Effekte bestimmt. Unmittelbar hinter dem Verdichtungsstoß erreicht die Temperatur ihr Maximum (≈ 15000 K). Danach setzen die Dissoziationsreaktionen ein. Hierdurch nimmt die Temperatur ab. Der damit verbundene Temperaturgradient wird mit zunehmender Entfernung vom Stoß immer schwächer. Die gegenüber der heißen Strömung relativ kalte Wand bewirkt jedoch erneut eine starke Temperaturabnahme bis hin zur Staupunkttemperatur (Temperaturgrenzschicht). In 75 km Höhe befindet sich die Vibrationstemperatur sehr nah am Gleichgewicht ($T_t = T_v$). Damit

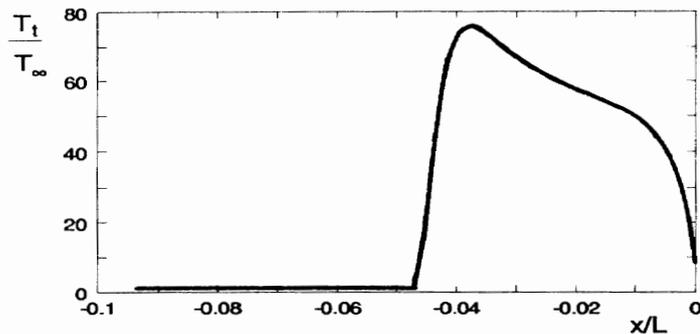


Abb. 5.28: Temperaturverlauf entlang der Staustromlinie in 75 km Höhe

geht das Zwei-Temperaturmodell zur Berechnung der Reaktionsraten in ein Ein-Temperaturmodell über.

Die Nichtgleichgewichtseffekte und der Einfluß der Katalytizität der Wand können anhand der Molverhältnisse des Sauerstoffs und des Stickstoffs (Anzahl der Mole einer Spezies bezogen auf das Gemisch) entlang der Staustromlinie verfolgt werden (Abbildung 5.29 und 5.30). Im Gegensatz zum Stickstoff dissoziiert der Sauerstoff hinter der Kopfwelle vollständig. Der Stickstoff dissoziiert wesentlich langsamer als der Sauerstoff. Die relativen molaren Konzentrationen von NO und NO^+ liegt unter 5% bzw. 0,01%. Im nichtkatalytischen Fall ist in der unmittelbaren Nähe des Staupunkts praktisch kein molekularer Sauerstoff vorhanden. Im Gegensatz dazu bewirkt die relativ kalte Wand (maximal 1700 K) eine gewisse Rekombination des Stickstoffs in der Temperaturgrenzschicht. Hieran wird deutlich, daß die chemischen Reaktionen in der Grenzschicht nicht gefroren sind. Im Fall einer katalytischen Wand kommt es in einer sehr dünnen Schicht zur vollständigen Re-

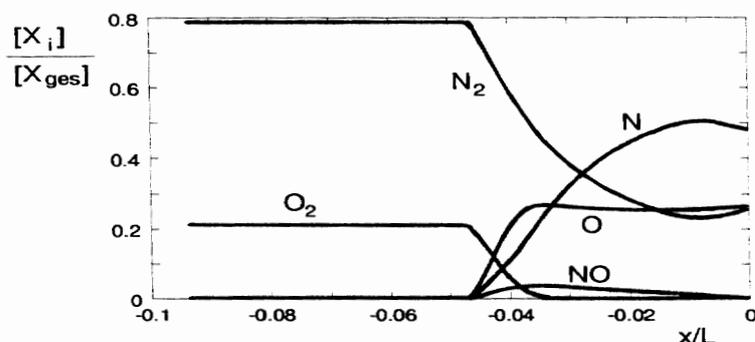


Abb. 5.29: Relative molare Konzentrationen entlang der Staustromlinie in 75 km Höhe für eine nichtkatalytische Wand

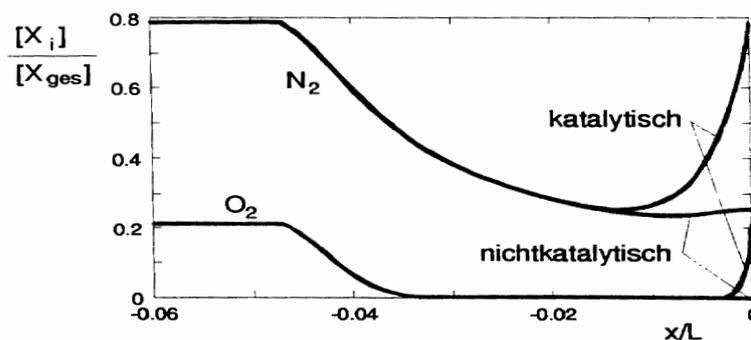


Abb. 5.30: Vergleich vollkatalytische/nichtkatalytische Wand

kombination der atomaren Spezies. Die molaren Konzentrationen an der Wand sind mit den Konzentrationen der Anströmung praktisch identisch.

Die Wandtemperatur kann mit dem in Kapitel 5.2.3 eingeführten Modell der strahlungsadiabaten Wand bestimmt werden (Abbildung 5.31). Hierdurch ergibt sich ein realistischerer Temperatur- und Wärmestromverlauf entlang der Kapselkontur als unter der bisher getroffenen Annahme einer konstanten Wandtemperatur. Das Temperaturmaximum tritt im Staupunkt auf. In 75 km Höhe betragen die berechneten Staupunkttemperaturen 1700 K bzw. 2000 K im nichtkatalytischen bzw. vollkatalytischen Fall. Die zugehörigen Wärmeströme betragen im Staupunkt 360 kW/m² bzw. 720 kW/m². Während der Druck auf der Kapselflanke entsprechend der Newton-Theorie praktisch konstant ist, nehmen Temperatur und der Wärmestrom schwach ab. Die Konzentrationsverläufe entlang der Wand zeigen im nichtkatalytischen Fall eine leichte Abnahme des atomaren Stickstoffs ($\approx 10\%$) entlang der Kapselflanke. Das bedeutet, daß die Grenzschicht im Gegensatz zur Außenströmung nicht gefroren ist. Wir bestätigen damit die Prinzipskizze 5.1.

Wir fassen die Ergebnisse der Simulationen in den Höhen 90 km, 75 km und 45 km in einem Übersichtsbild zusammen. Abbildung 5.32 zeigt die Bereiche, in denen die Strömung im Nichtgleichgewicht bzw. gefroren ist.

In Kapitel 3.6 wurde die chemische Sensitivitätsanalyse einer Strömung vorgestellt. Die Sensitivitätsanalyse gibt Aufschluß darüber, wie empfindlich die Zusammensetzung des Gases von den verschiedenen Reaktionsraten abhängt. Ein Ergebnis der Sensitivitätsanalyse für eine reibungsfreie Staupunktströmung in 45 km Höhe wurde bereits in Abbildung 3.14 wiedergegeben. An dieser Stelle interessiert uns die Sensitivität der Strömung innerhalb der Temperaturgrenzschicht. Die Vorgehensweise ist in Kapitel 3.6 beschrieben. Wir integrieren das Gleichungssystem (3.73) zur Bestimmung der Sensitivitätsparameter unter Berücksichtigung der zeitlichen Temperaturänderung des betrachteten Fluidelements. Diesen Temperaturverlauf entnehmen wir der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Der zeitliche Verlauf der

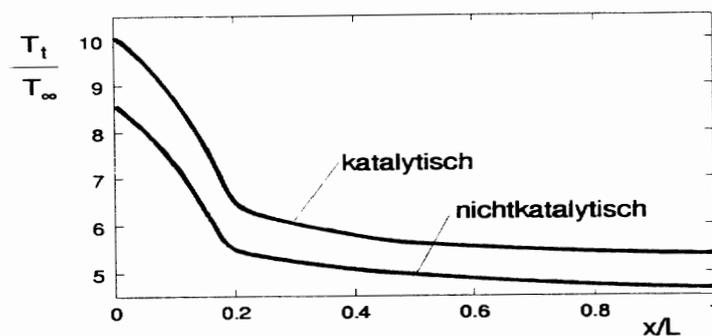


Abb. 5.31: Verlauf der Oberflächentemperatur bei einer strahlungsadiabaten Wand in 75 km Höhe

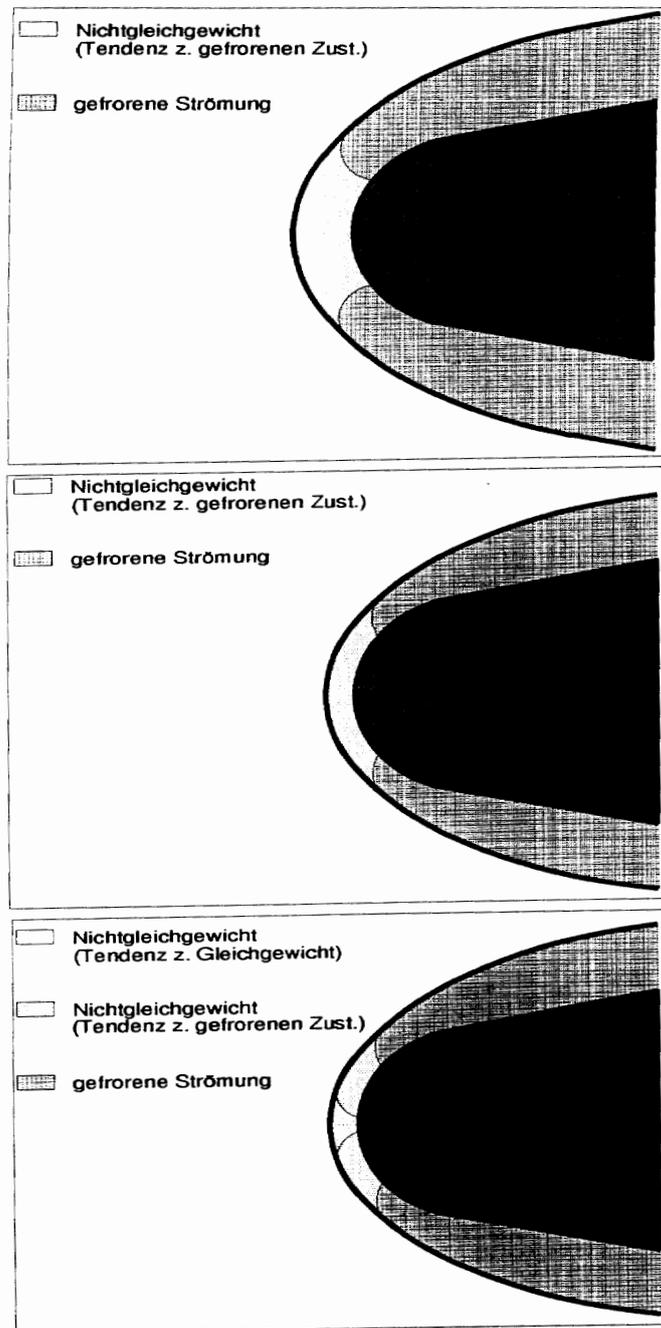


Abb. 5.32: Bereiche thermodynamischen Nichtgleichgewichts im Strömungsfeld

Sensitivitätsparameter beschreibt die lokale Sensitivität entlang der Teilchenbahn. Der Vergleich der maximalen zeitlichen Werte der 24 Sensitivitätskoeffizienten weist die Reaktionsraten aus, auf die die Gaszusammensetzung sensitiv reagiert. Im Fall der nichtkatalytischen Wand sind die relativen Konzentrationsänderungen in der Temperaturgrenzschicht relativ schwach (Abbildung 5.29). Der Sauerstoff bleibt praktisch vollständig dissoziiert, NO zerfällt wieder. Es zeigt sich, daß die Reaktionsraten der Austauschreaktion $N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$ den größten Einfluß auf die Gaszusammensetzung besitzen. Abbildung 5.33 gibt den Verlauf der zugehörigen Sensitivitätskoeffizienten in der Staupunktgrenzschicht wieder.

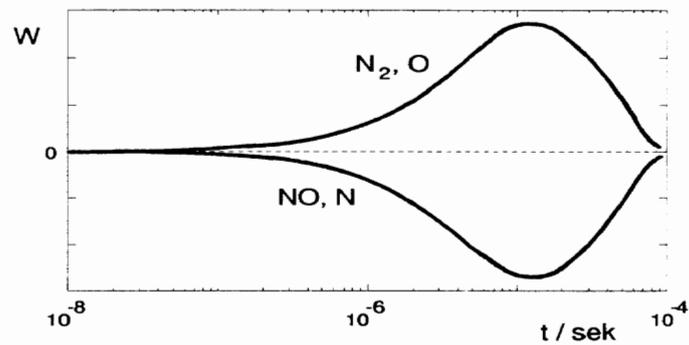


Abb. 5.33: Zeitlicher Verlauf der Sensitivitätskoeffizienten der Austauschreaktion $N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$ in der Staupunktgrenzschicht

6 Projekte, Technologieprogramme und Simulationsanlagen

6.1 Projekte und Technologieprogramme

Nachdem wir die aerothermodynamischen Grundlagen und numerischen Simulationsmethoden entlang der Wiedereintrittstrajektorie behandelt haben, wollen wir deren Anwendung bei einigen aktuellen Wiedereintritts-Projekten beschreiben. Dabei soll auch gezeigt werden, wie Hyperschall-Versuchsanlagen und Rechner-Verbandssysteme für die Technologieentwicklung in den Projekten eingesetzt werden können. Eine Ergänzung gibt das Buch von H. OERTEL JR., H. KÖRNER (Eds.) 1993. Um die Bedeutung des Orbitaltransports zu Beginn des Kapitels nochmals herauszustellen, ist in Abbildung 6.1 die steigende Zahl der jährlichen Raketenstarts dargestellt. Wir haben inzwischen 100 Starts pro Jahr erreicht, an denen die europäische ARIANE-Rakete einen gesicherten Marktanteil hat. Die ARIANE 1 Rakete transportierte 1980 1835 kg Nutzlast in den geostationären Orbit. Die ARIANE 4 erreicht mit 4 Boostern bereits 4230 kg Nutzlast. Mit dem Start der ARIANE 5 Rakete ist 1995 zu rechnen (Abbildung 6.2).

Mit dem zunehmenden Orbitaltransport wächst auch der Bedarf an wiederverwendbarer Rückkehrtechnologie. Beim Wiedereintritt unterscheiden wir den geflügelten Wiedereintritt mit Auftrieb, wie er beim Space Shuttle realisiert ist, und den ballistischen Wiedereintritt einer Kapsel, den wir bisher ausschließlich behandelt haben. Im Vergleich zur ballistischen Wiedereintrittstrajektorie der Abbildung 2.1 haben wir in Abbildung 6.3 den Wiedereintritts-Korridor eines geflügelten Wiedereintrittsflugzeugs aufgetragen.

Je nach Auftriebsbeiwert und Anstellwinkel des Wiedereintrittsflugzeugs wird gegenüber der ballistischen Bahn eine höhere Wiedereintrittstrajektorie durchflogen. Gegenüber unserer Diskussion der thermodynamischen Nichtgleichgewichtschemie

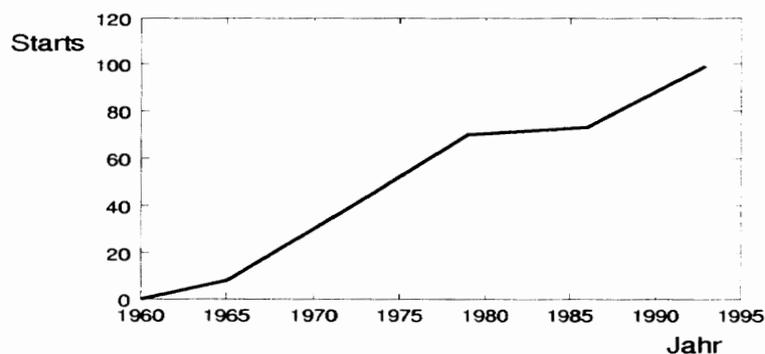


Abb. 6.1: Raketenstarts seit 1960

bei der rotationssymmetrischen Wiedereintrittskapsel ändert sich nichts Wesentliches. Es muß lediglich das jeweilige Rechennetz der numerischen Verfahren für die gegebene Konfiguration des Wiedereintrittsflugzeugs entwickelt werden, und es müssen die chemischen Sensitivitätsanalysen für das dreidimensionale Strömungsfeld neu durchgeführt werden. In Ergänzung ist in Abbildung 6.5 das maximale Verhältnis von Auftrieb und Widerstand $(A/W)_{max}$ in Abhängigkeit des Hyperschall-Reibungsparameters $M_\infty/(Re_L)^{1/2}$ für unterschiedliche Wiedereintrittskonfigurationen aufgetragen. Das Diagramm zeigt, daß $(A/W)_{max}$ für alle Körper mit zunehmender Geschwindigkeit U_∞ abnimmt. Das rührt daher, daß die Reibungseffekte (z.B. Strömungsablösung) aufgrund der Anstellung des Wiedereintrittskörpers sowohl den Druckwiderstand als auch den Reibwiderstand erhöhen. Der Widerstandsbeiwert rotationssymmetrischer Wiedereintrittskapseln ohne Anstellung ist in Abbildung 6.4 in Abhängigkeit des Volumens V der Kapsel dargestellt.

Bevor wir in folgenden Kapiteln einige ausgewählte Wiedereintritts-Projekte und Hyperschall-Technologieprogramme beschreiben, wollen wir in Abbildung 6.6 die charakteristischen geometrischen und Anströmdaten der zu behandelnden Raumflugkörper zusammenstellen. Abbildung 6.7 zeigt die Flugmeßdaten des Wärme-

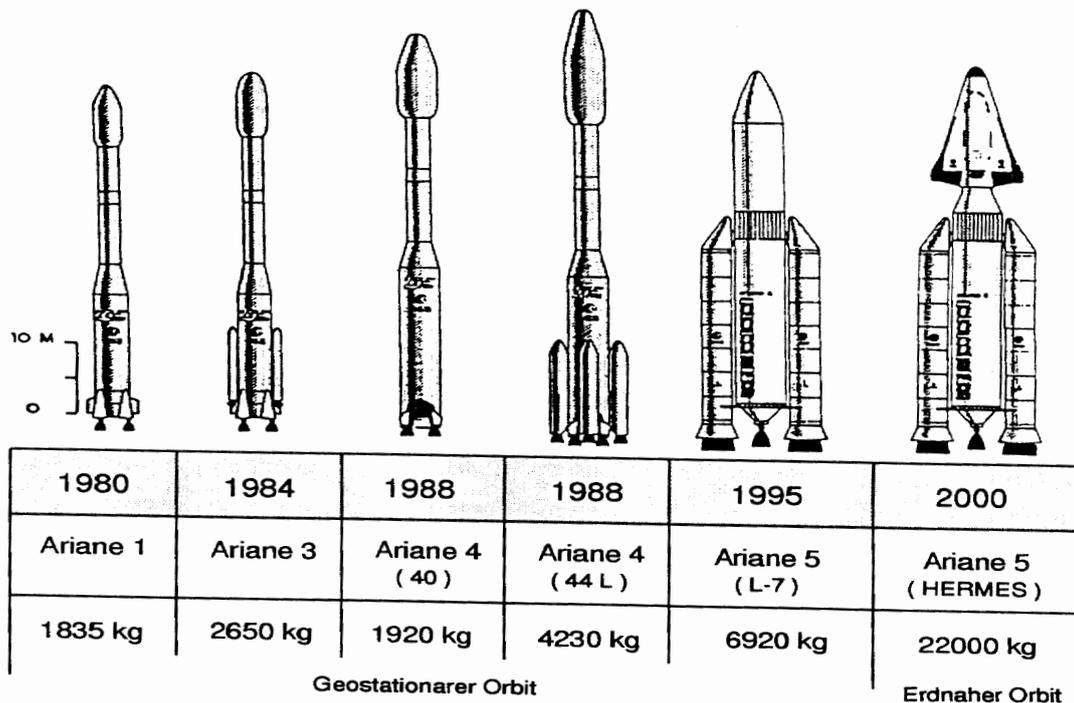


Abb. 6.2: Entwicklung des europäischen ARIANE-Orbital-Transportsystems

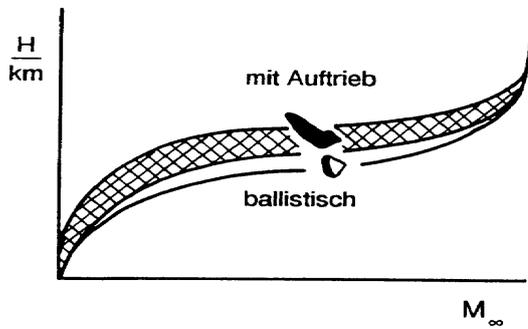


Abb. 6.3: Wiedereintrittstrajektorien beim ballistischen und auftriebsbedingten Wiedereintritt

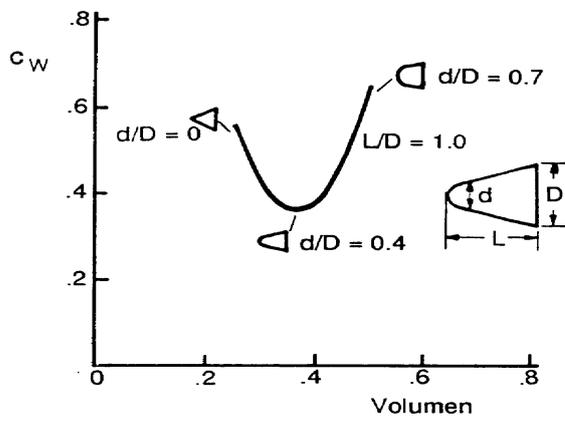


Abb. 6.4: Widerstandsbeiwerte

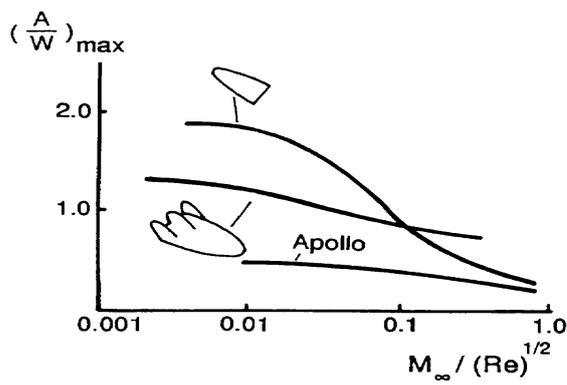


Abb. 6.5: Einfluß der Reibungseffekte auf das Verhältnis von Auftrieb zu Widerstand $(A/W)_{max}$ für unterschiedliche Wiedereintrittsflugkörper

stroms der Apollo-Kapsel im Vergleich mit der theoretischen Vorhersage unter stark vereinfachenden Annahmen (kalte Wand, keine Ablation). Die theoretische Vorhersage überschätzte die im Wiedereintrittsflug gemessenen Staupunkt-Wärmeströme um mehr als Faktor 2. Dies führte zu einer Überdimensionierung des Apollo-Hitzeschilds, wie auch im darauffolgenden Space-Shuttle-Projekt zu einer Überdimensionierung der Hitzeschildkacheln. Hier wird der Bedarf an verbesserten numerischen Vorhersagemöglichkeiten des Wärmestroms für eine effizientere und damit wirtschaftlichere Auslegung des Hitzeschilds deutlich, die wir im abschließenden Kapitel 6.4 behandeln werden.

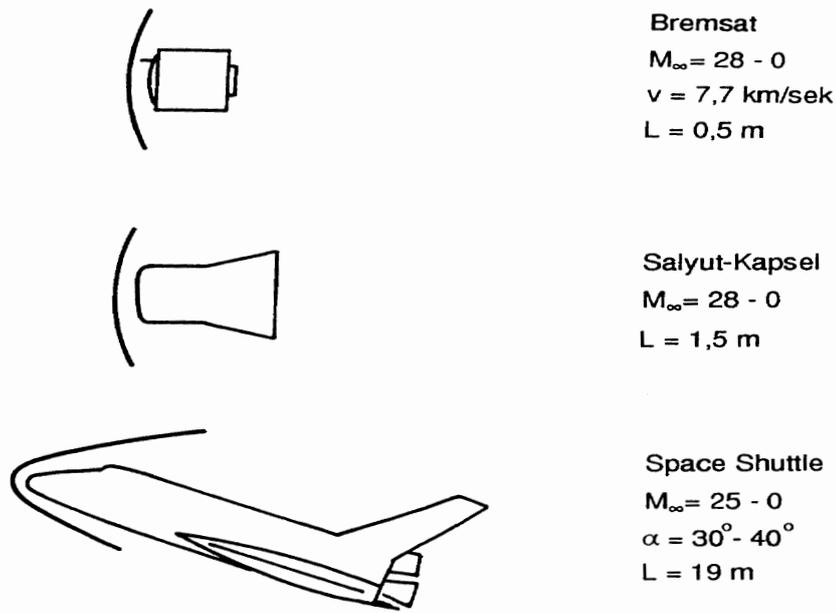


Abb. 6.6: Konfigurationen von Raumflugkörpern

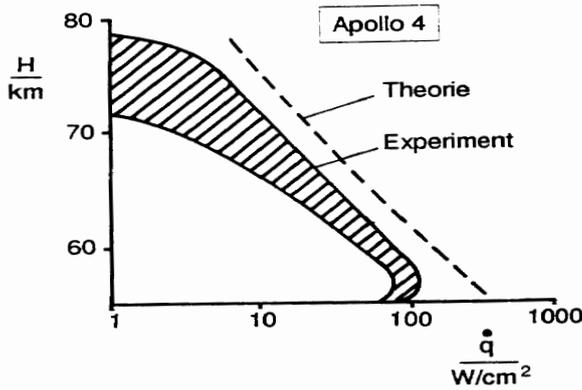


Abb. 6.7: Theoretische Vorhersage und Flugmeßdaten des Staupunkt-Wärmestroms der Apollo 4 Kapsel

Zum Abschluß der Einführung in Kapitel 6 sei das Modell der Erdatmosphäre angesprochen, das wir bei den folgenden Strömungsberechnungen entlang der unterschiedlichen Wiedereintrittstrajektorien verwenden. Die Atmosphäre zwischen 0 und 100 km Höhe setzt sich aus 4 verschiedenen Schichten zusammen. Die unterste Schicht, die Troposphäre, wird in etwa 12 km Höhe von der Stratosphäre abgelöst. Die Mesosphäre beginnt in 47 km Höhe und geht schließlich in 86 km Höhe in die Thermosphäre über. Die aneinandergrenzenden Schichten zeichnen sich durch einen jeweils entgegengesetzten Temperaturgradienten aus (Abbildung 6.8). Der Druck und die Dichte in 100 km Höhe sind um ungefähr 6 Größenordnungen kleiner als auf Meereshöhe. Das Molekulargewicht der Luft ist bis in eine Höhe von 100 km nahezu konstant. Die für die Strömungssimulation erforderlichen Werte der Dichte, der Temperatur und der Gaszusammensetzung entnehmen wir der U.S. Standard-Atmosphäre.

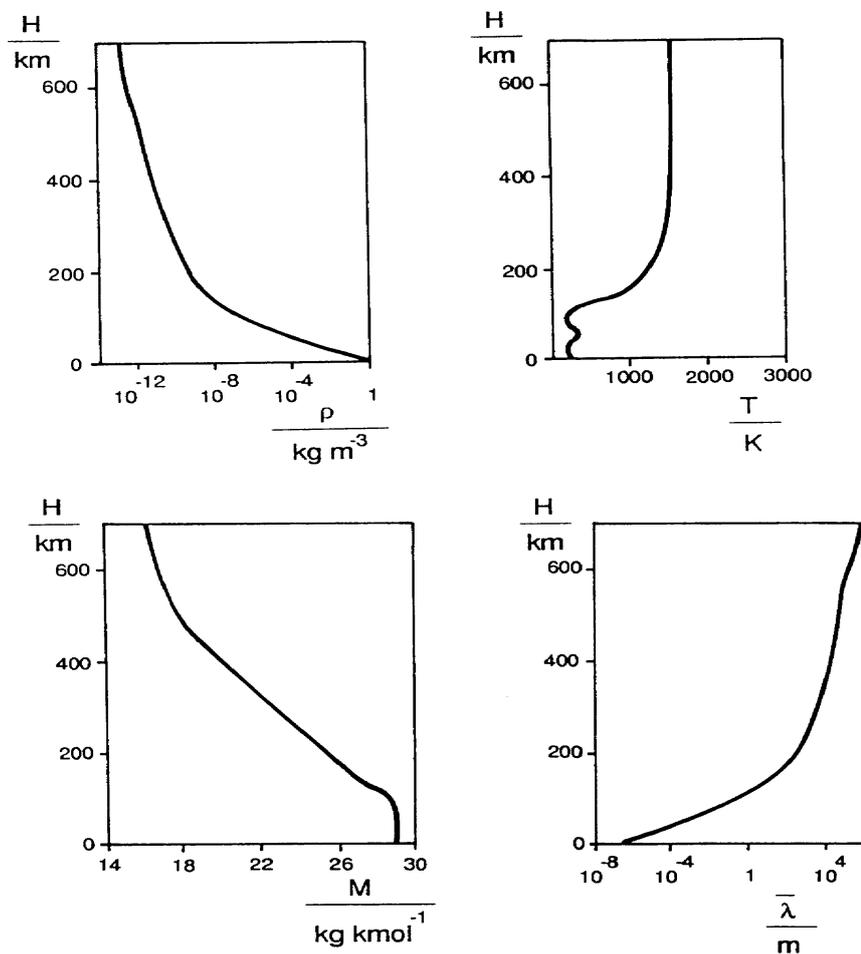


Abb. 6.8: Daten der U.S. Standard-Atmosphäre 1962

6.1.1 BREMSAT-Satellit

Der Bremer Universitätssatellit BREMSAT wird von Bord des Space Shuttle aus gestartet. Während seiner verschiedenen Flugphasen werden folgende Experimente durchgeführt:

Flugphase im Space Shuttle

Mikrogravitationsexperimente während des Aufenthalts in der Shuttle-Nutzlastbucht: Es werden die Restbeschleunigung im Space Shuttle und die Wärmeleitfähigkeit in Kühlflüssigkeiten ohne die störende Konvektion auf der Erde gemessen.

Flugphase im Orbit

Nach etwa 48 Stunden in der Space-Shuttle-Nutzlastbucht wird der Satellit in den Orbit ausgesetzt und mißt über 2-3 Monate den Einschlag von Mikrometeoriten und den Staubfluß im niedrigen Orbit. Die Restatmosphäre, die auf der erdnahen Satellitenbahn durchflogen wird, besteht aus verschiedenen molekularen und atomaren Teilchensorten. Eine dieser Teilchensorten, der atomare Sauerstoff, ist der Hauptverursacher eines Zersetzungsprozesses, von dem vor allem organische Substanzen und einige Metalle der Satellitenaußenhaut betroffen sind. Die Dichte des atomaren Sauerstoffes hängt auf komplizierte Weise von der Bahnhöhe und der Aktivität der Sonne ab. Während der orbitalen Phase von BREMSAT wird die Partialdichte des atomaren Sauerstoffs gemessen.

Das Gas-Oberflächen-Wechselwirkungs-Experiment mißt während der spin-stabilisierten Flugphase des BREMSAT-Satelliten mit einer Zwei-Komponenten-Waage die Normal- und Tangentialkräfte an einem der zwölf Solar-Panel.

Mit der Messung der Kräfte und der Kenntnis der Sauerstoff-Konzentration der Anströmung lassen sich im Bereich der freien Molekülströmung die Konstanten der Wand-Wechselwirkungsmodelle (Kapitel 4) näherungsweise anpassen. Damit läßt sich zukünftig der Widerstandsbeiwert von Satelliten genauer berechnen, und es wird eine bessere Langzeitvorhersage der Satellitenbahnen im Orbit möglich.

Wiedereintritts-Flugphase

Der Wiedereintritt des BREMSAT Satelliten in die hohe Atmosphäre ist die Flugphase, die uns im Rahmen des Lehrbuchs am meisten interessiert. Vor dem Wiedereintritt wird der Satellit ein Schwenk-Manöver durchführen, so daß er mit der Nasenkugelhülle (Abbildung 6.9) voran in die Erdatmosphäre eintaucht. Da die Kapsel nicht mit einem Hitzeschild versehen ist, wird sie beim Eintritt in die Atmosphäre verglühen. Deshalb wird nur der Höhenbereich zwischen 150 km und

100 km untersucht. Die Kapsel wird zunächst fast freimolekular umströmt und nähert sich bei 100 km Höhe dem Übergangsbereich zur Kontinuumsströmung. Im Bereich zwischen 120 km und 100 km wird mit Flußsonden die Wärme- und Teilchenflußdichte auf der Satellitenkapsel und in der freien Anströmung gemessen. Mit Kenntnis dieser Größen sind Aussagen bezüglich der Art der Teilchenwechselwirkung im Bereich der Kapsel möglich. Die Sondenpositionen zur Messung der Flußdichte sind in Abbildung 6.9 dargestellt.

Als Vorbereitung für die Auswertung der BREMSAT-Wiedereintrittsexperimente haben wir mit dem in Kapitel 4 beschriebenen gaskinetischen Monte-Carlo-Verfahren das Strömungsfeld um den Satelliten einschließlich der Meßsonde berechnet. Abbildung 6.10 zeigt das für die Berechnung des Strömungsfelds in 100 km Höhe verwendete Rechennetz, welches im Bereich der zu erwartenden starken Gradienten verfeinert ist. Die Öffnung der ausgefahrenen Sonde befindet sich 10 cm vor der Kapselnase. Das Rechennetz besteht aus 30000 Zellen. Die Simulationsrechnung wurde unter Berücksichtigung des thermodynamischen Nichtgleichgewichts mit 500000 Modellteilchen durchgeführt. Die Anströmdaten in 100 km Höhe sind:

H	Kn	T_∞	n_∞	λ_∞	u_∞	M_∞
100 km	0,266	180 K	$1,68 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$	0,137 m	7420 m	26,9

Abbildung 6.10 zeigt das Ergebnis der Simulationsrechnung für diffuse Oberflächenreflexion und ideale Energieakkommodation. Es ist eine kontinuierliche Zunahme der Dichte zum Körper hin zu erkennen, während die Translationstemperatur im Bereich des Stoßes ein Maximum besitzt und zum Körper hin auf die Kapseloberflächentemperatur abfällt.

Die numerischen Simulationsrechnungen liefern Informationen über das Strömungsfeld und dienen auch zur Auslegung der während des Freiflugs durchzuführenden Wiedereintrittsexperimente. Als Beispiel sei hier die Messung der Teilchenflußdichten mit einer Sonde im Strömungsfeld vor der Kapsel und auf der Kapseloberfläche vorgestellt. Für die Höhe von 100 km wurden Simulationen durchgeführt, die dar-

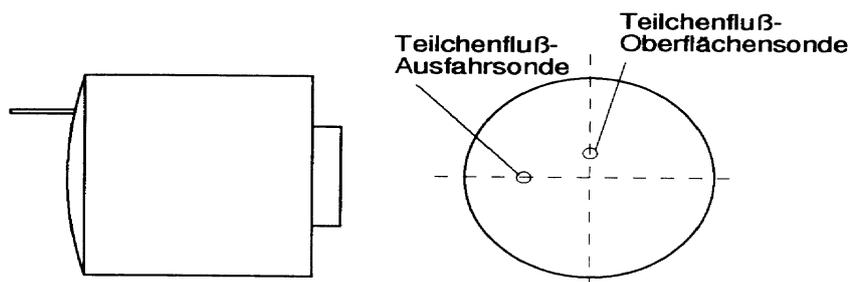


Abb. 6.9: BREMSAT-Satellit mit Flußdichtesonden

auf abzielen, die zu erwartenden Teilchenflußdichten vorherzusagen, um damit zum einen die optimale Position der ausgefahrenen Sonde zu ermitteln und zum anderen die Größenordnung der Flußdichte und damit den Empfindlichkeitsbereich der Meßapparatur besser einzuschätzen. Als Parameter wurde das Wandwechselwirkungsmodell der Teilchen mit der Kapseloberfläche verändert. Neben dem für technische Oberflächen realistischen Modell der diffusen Reflexion wurde auch ein kombiniertes Modell verwendet, welches die diffuse und die spiegelnde Reflexion im Verhältnis 1:1 berücksichtigt. Es wird erwartet, daß die experimentellen Resultate zwischen den Ergebnissen der beiden Modelle liegen. Mit diesem Experiment kann dann nach dem Flug auf ein verbessertes Wandwechselwirkungsmodell geschlossen werden.

In Abbildung 6.11 ist die dimensionslose Dichte auf der Staustromlinie vor der Kapsel aufgetragen. Der Abstand x wird auf die Kapsellänge L bezogen. Man erkennt, daß sich für die rein diffuse Reflexion ein größerer Dichtezuwachs vor der Kapsel ergibt als beim kombinierten Modell, da die Teilchen im Mittel nach der Reflexion eine geringere Geschwindigkeit besitzen und sich deshalb bis zur Kollision mit den anströmenden Teilchen nicht so weit entgegen der Strömungsrichtung bewegen können. Für die Teilchenflußdichtemessung interessiert nun die optimale Position der ausgefahrenen Sonde. Zum einen soll die Sonde möglichst die Flußdichte der ungestörten Anströmung messen, zum anderen darf sie aus konstruktiven Gründen nicht unangemessen weit ausgefahren werden. Abbildung 6.11 zeigt das Verhältnis der Teilchenflußdichte auf der Kapselstirnfläche \dot{n}_s zu der Teilchenflußdichte \dot{n} entlang der Staustromlinie. Als Resultat der Simulation erkennt man, daß das Verhältnis bei einem Abstand von $x/L < -0,3$ nahezu konstant ist. In diesem Bereich kann die ausgefahrene Sonde die Flußdichten der ungestörten Anströmung messen. Entsprechende Untersuchungen für die Wärmeflußdichte zeigen, daß dieser Abstand noch größer sein muß, damit die Sondenspitze der Temperatur der Anströmung ausgesetzt ist. In Abbildung 6.10 ist zu erkennen, daß sich die Sondenspitze bei einer Sondenposition 10 cm vor der Kapselnase ($x/L = -0,21$) nahe dem Temperaturmaximum befindet. Mit Hilfe der numerischen Simulation ist trotz der vorgegebenen Sondenposition von 10 cm eine Auswertung der Experi-

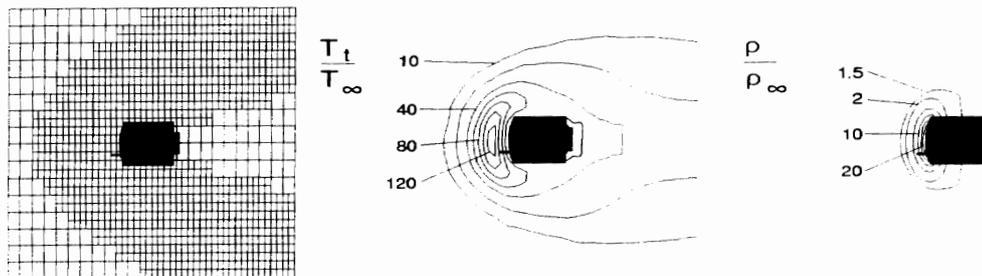


Abb. 6.10: Rechnernetz, Translationstemperatur und Dichte in 100 km Höhe um den BREMSAT-Satelliten (diffuse Wandreflexion, ideale Energieakkommodation)

mente möglich.

Es hat sich damit gezeigt, daß die in Kapitel 4 eingeführte Monte-Carlo-Simulationsmethode beim BREMSAT-Projekt sowohl für die Auslegung der gaskinetischen Sensorik als auch für die quantitative Auswertung der Wiedereintrittsexperimente eingesetzt werden kann.

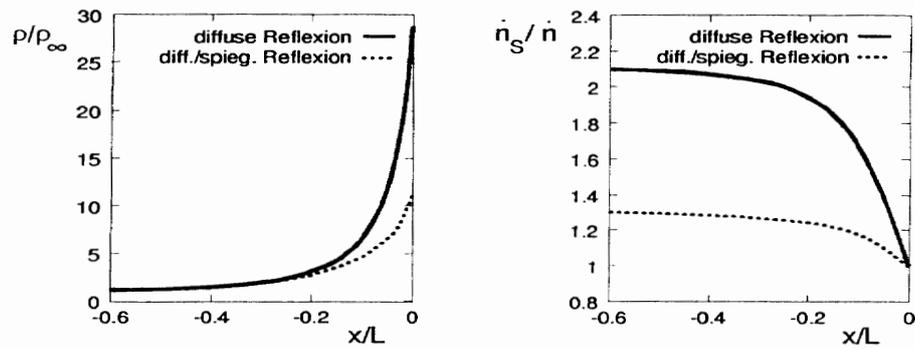


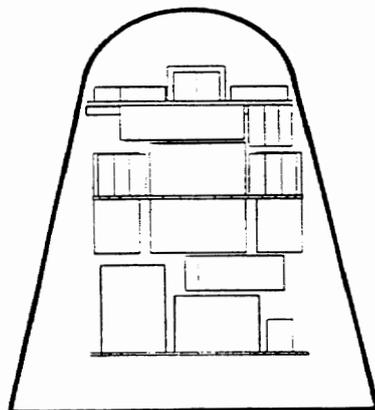
Abb. 6.11: Dichte und Teilchenflußdichte entlang der Staustromlinie der BREMSAT-Kapsel

6.1.2 EXPRESS-Wiedereintrittskapsel

EXPRESS (EXPeriment REentry Space System) bezeichnet ein deutsch-japanisches Raumfahrtprojekt einer rückkehrfähigen Wiedereintrittskapsel, die als Nutzlastträger von Mikrogravitationsexperimenten auf einer erdnahen Umlaufbahn ($210 \text{ km} < H < 398 \text{ km}$) dient. Während der Wiedereintrittsphase sollen Experimente zur Aerothermodynamik und Präzisionsnavigation durchgeführt werden. In der ersten Mission wird die EXPRESS-Kapsel auf einer japanischen Träger Rakete (M-3SII) von Kagoshima (Japan) aus in den Orbit gebracht, um nach einer fünftägigen Mission im Orbit einen ballistischen Wiedereintritt in die Erdatmosphäre durchzuführen. In der letzten Sinkphase erfolgt die Landung mit einem Fallschirm in Woomera (Australien). Die für fünf Missionen ausgelegte SALYUT-Kapsel wurde in den GUS-Staaten entwickelt und bereits mehrfach in Wiedereintrittsflügen erprobt. Abbildung 6.16 zeigt die Konfiguration der russischen SALYUT-Wiedereintrittskapsel, die mit einem herkömmlichen ablativen Hitzeschutzmaterial den Thermalschutz der Nutzlast gegen die hohen Temperaturen im Strömungsfeld beim Wiedereintritt sichert. Auf der Oberfläche der Kugel-Zylinder-Kegel-Kapsel werden im Ablatormaterial eingebettete wiederverwendbare Hitzeschildproben aus hochtemperaturbeständigen Faserkeramikwerkstoffen erprobt.

An diesem Projektbeispiel kann der Ingenieur zum einen den Projektablauf über die Definitionsphasen A und B, bis zur Entwicklungs- und Realisationsphase C und D, kennenlernen. Zum anderen werden wir lernen, wie sich die technologische Zielsetzung im Ablauf eines Projekts aufgrund veränderter Rahmenbedingungen ändern kann.

Der Express-Projektstatus zu Beginn der Definitionsphase B ist in Abbildung 6.12 dargestellt. Als Geometrie der Wiedereintrittskapsel wurde eine Kugel-Kegel-Konfiguration gewählt. Die stumpfe Kegelkappe sichert einen möglichst geringen



- Stumpfer Kegel: $L/d = 1,21$
- Konuswinkel 10°
- Stabilität der Kapsel durch Trimmung
- Nutzlast 200 kg
- Maximaler Wärmefluß im Staupunkt von ca. $3,8 \text{ MW/m}^2$
- Maximale Konustemperatur 1100 K
- 3-stufiges Fallschirmsystem

Abb. 6.12: EXPRESS-Projekt-Status zu Beginn der Definitionsphase B

Wärmeübergang im Staupunkt der Kapsel, und die Kegelflanke sorgt für die aerodynamische Stabilität während des Wiedereintritts. Die Kapsel landet an einem Fallschirm, der in 20 km Flughöhe bei einer Machzahl von ungefähr 2 geöffnet wird. Die Nutzlast wurde mit 200 kg Masse und 400 L Volumen festgelegt.

Im Rahmen der Definitionsphase-B-Studie wurden zwei Systemoptimierungen durchgeführt, die nachfolgend beschrieben werden.

1. Systemoptimierung:

- **System-Ressourcen**

- Verfügbarkeit elektrischer Energie mit Reserven
- Trägernutzlast ergibt 400 L Volumen

- **Wiedereintrittsbahn**

- Geringere Bahnabweichung durch spätere Fallschirmauslösung
- Passive aerodynamische Stabilität bis ca. 14 km Höhe

- **Aerodynamik**

- Vergrößerung des Krümmungsradius im Staupunkt
- Konuswinkel von 11° stabilisiert den Kapselflug ($L/d = 1.06$)
- Stabilität der Kapsel bis ca. $M_\infty = 1$ durch Massenschwerpunkt- und Druckpunkt-Optimierung
- Konus (45°) als Heck

- **Aerothermodynamik**

- Maximaler Wärmefluß im Staupunkt von ca. $3,0 \text{ MW/m}^2$
- Temperaturanforderung der hinteren Konus-Struktur maximal 500 K

- **Landung**

- Öffnung des Fallschirms bei ca. $M_\infty = 1$ in 14 km Höhe
- Reduzierung der Masse und Erhöhung der Kapselsicherheit durch ein 2-stufiges Fallschirmsystem

Die Abflachung der Kugelkappe zu einer Ellipse reduziert aufgrund des größeren Krümmungsradius die Wärmebelastung im Staupunkt (Gleichungen (5.100), (5.101)). Der um 1° größere Kegelwinkel erhöht die aerodynamische Stabilität, die in Verbindung mit der Massenschwerpunkt- und Druckpunkt-Optimierung ein späteres Öffnen des Fallschirms ermöglicht.

Es folgte eine 2. Systemoptimierung mit der Festlegung der Systemressourcen

und einer weiteren aerodynamischen Stabilitätsverbesserung durch eine erneute Massenschwerpunkt- und Druckpunkt-Optimierung. Das Heck der Kapsel wurde bezüglich der Reduzierung der Wärmebelastung neu konzipiert.

2. Systemoptimierung:

- **System Ressourcen**

- Durch Einführung eines externen Versorgungsmoduls Erweiterungsmöglichkeiten für weitere Flüge
- Reduzierung der Wiedereintrittsmasse durch kleineres Energieversorgungsmodul

- **Aerodynamik**

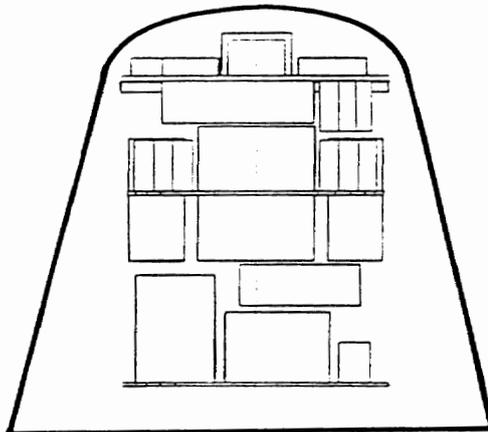
- Weitere Stabilitätsverbesserung durch Schwerpunktveränderung
- Kein hinterer Konus

- **Aerothermodynamik**

- Reduzierung der Wärmebelastung am Heck durch geänderte Formgebung

- **Landung**

- Einführung eines Gleitschirms mit Profilklappen, dadurch Erhöhung der Flugstabilität und Reduzierung der Landegeschwindigkeit ≤ 2 m/sek



- Stumpfer Kegel: $L/d = 1,06$
- Konuswinkel 11°
- Nutzlast 165 kg
- Maximaler Wärmefluß im Staupunkt von ca. $3,0 \text{ MW/m}^2$
- 2-stufiges Fallschirmsystem

Abb. 6.13: EXPRESS Projekt-Status zu Beginn der Entwicklungsphase C/D

Am Ende der Definitionsphase B Studie stellte sich die EXPRESS-Wiedereintrittskapsel entsprechend der Skizze in Abbildung 6.13 dar. Für die damit eingefrorene Kapsel-Konfiguration wurden alle aerothermodynamischen Simulationsrechnungen durchgeführt, die wir in den vorangegangenen Kapiteln diskutiert haben.

Nachfolgend sind die deutsch-japanischen Wiedereintrittsexperimente aufgeführt, die am Ende der Definitionsphase B vorgesehen waren. Das zentrale Element der deutschen Nutzlast ist eine wiederverwendbare C/SiC-Hitzeschild-Kachel mit Oxidationsschutz, die in das Ablations-Hitzeschild der Kapsel integriert wird.

Deutsche Nutzlast:

- **HYPERBA**¹ (**HYPER**sonic **B**allistic Reentry Experiment)
Temperatur- und Druckmessung auf der Kontur des Ablatormaterials der Kapsel
 - Diese Messungen sind für die Validierung von Ablationsmodellen in numerischen Verfahren erforderlich.
 - Staupunktdichtemessung auf der C/SiC-Kachel
 - Die Staupunktdichtemessung mit einem phasenkompensierten Michelson-Interferometer PMI nimmt für die Validierung der Modellparameter der Wandwechselwirkung des heißen Gases mit der wiederverwendbaren C/SiC-Hitzeschildkachel einen besonderen Stellenwert ein, da die Dichte im Staupunkt sensitiv auf die chemischen Reaktionen der Strömung an der Wand reagiert.
 - **SPACENAV**² (**SPACENAV**igation Experiments)
Präzisionsnavigationsexperimente
 - Die Vermessung der präzisen Flugbahn der EXPRESS-Mission ermöglicht die Auswertung der Anströmungsdaten entlang der Wiedereintrittstrajektorie.
 - Als technologisches Ziel wird aufbauend auf den SPACENAV-Ergebnissen die Entwicklung eines Sensorsystems für die aktive Bahn- und Lageregelung aerodynamisch steuerbarer Wiedereintrittsflugkörper angestrebt.
 - **CETEX**³ (**C**eramic **T**ile **E**Xperiment)
Temperatur- und Druckmessung auf der C/SiC-Kachel
 - Diese Messungen dienen wie die Staupunktdichtemessung der Validierung der Wandwechselwirkungsmodelle an wiederverwendbaren Hitzeschildern.
 - Mit der Entwicklung hochtemperaturbeständiger wiederverwendbarer Hitzeschildmaterialien wird eine Reduzierung des Strukturgewichts zukünftiger Hyperschalltransportfluggeräte und Wiedereintrittsflugkörper angestrebt und somit die Wirtschaftlichkeit solcher Fluggeräte erhöht.
-

- **RAFLEX**⁴ (**RA**refied **FL**uxsensor **EX**periments)
Temperatur-, Druck- und Wärmeflußmessungen im Ablatormaterial der Kapsel und auf der C/SiC-Kachel
 - Technologisches Ziel ist die Verifikation der Meßsensorik als Referenz zu den japanischen Messungen im speziellen Ablatormaterial und die Bestimmung von Gleitgeschwindigkeiten und Temperatursprüngen an der Kapselwand im Übergangsbereich von der frei-molekularen zur kontinuumsmechanischen Wiedereintrittsströmung.
- **PYREX**⁵ (**PYR**ometer **EX**periment)
Berührungslose Temperaturmessung (Wärmestrahlung) auf der Rückseite der C/SiC-Kachel
 - Bestimmung der auftretenden Wärmespannungen in der C/SiC-Kachel.
 - Die berührungslose Temperaturmessung wird aus mechanischen Gründen insbesondere bei dünnwandigen Hitzeschutzmaterialien eingesetzt.

Japanische Nutzlast:

Die japanische EXPRESS-Nutzlast stellt eine Ergänzung zu den deutschen Wiedereintrittsexperimenten dar und vervollständigt die Experimente im Orbit und während der Wiedereintrittsphase.

- **RTEX**⁶ (**Re**entry **T**echnology **EX**periment)
Temperatur- und Druckmessungen auf speziellem Ablatormaterial und spektroskopische Messung im heißen, chemisch reagierenden Gas hinter dem Stoß. Die Freiflugmessungen dienen der Validierung der numerischen Verfahren.
- **HIPMEX**⁷ (**HI**gh **P**erformance **M**aterial **EX**periment)
Temperatur- und Druckmessungen auf japanischen Hitzeschutz-Faserkeramikproben im konischen Teil der Kapsel
- **CATEX**⁸ (**CAT**alyst **EX**periment)
Mikrogravitationsexperiment zur Züchtung hochwertiger Kristalle für die Petroleumraffinerie

¹Institut für Strömungsmechanik der TU Braunschweig

²Institut für Flugführung der TU Braunschweig

³DLR-Stuttgart

⁴Hyperschall Technologie Göttingen (HTG)

⁵Universität Stuttgart

⁶Institute of Space and Astronautical Science (ISAS), Japan

⁷Japanisches Ministerium für Handel und Industrie (MITI), Japan

⁸MITI, Japan

Auf die Staupunkt-Dichtemessung als Referenzgröße für die aerothermodynamische Validierung der Modelle in den numerischen Verfahren wollen wir näher eingehen, da sie eine besondere Herausforderung für den Konstrukteur bedeutet. Es muß ein optischer Sensor in ein glühendes Hitzeschild mit einer maximalen Oberflächentemperatur von 2800 K integriert werden.

Der optische Teil des Interferometers wird in einer Thermaleinheit, bestehend aus einer Kupfer-Wärmesenke und ZrO_2 -Isolationsschutzschichten, derart in die Hitzeschildkachel integriert, daß in einer Kerbe (Cavity) der C/SiC-Kachel die Dichte gemessen werden kann.

Die Aufgabe der PMI-Thermaleinheit besteht darin, durch eine geeignete Kombination von Materialien unterschiedlicher Thermaleigenschaften die Wärmebelastung des gesamten Interferometers so gering zu halten, daß die optische Funktion des Interferometers während des Wiedereintritts erhalten bleibt. Entsprechend des in Abbildung 6.14 dargestellten Aufbaus des Michelson-Interferometers wird als Isolationsmaterial eine ZrO_2 -Kachel mit einer minimalen Dicke von 5 mm vorgesehen. In Verbindung mit dem Kupfer werden über diese Isolationsschicht die extrem hohen Oberflächentemperaturen abgebaut. Der symmetrische Quarzglasblock, in dem der Laserstrahl des Interferometers verläuft, wird in einen Kupferblock eingebettet, der aufgrund seiner hohen Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität die Wärme vom Quarzglas ableitet (Prinzip der Wärmesenke). Um das Quarzglas des Interferometers vor der heißen Strömung zu schützen, ist ein Saphirfenster vorgesehen, welches aufgrund seiner guten Wärmeleitfähigkeit ($\lambda_{Sa} = 27 \text{ W/(mK)} > \lambda_{ZrO_2} \approx \lambda_{Quarz} = 2 \text{ W/(mK)}$) den hohen Wärmefluß aus der Strömung durch direkten Kontakt mit der Wärmesenke in das Kupfer abführen kann. Die Wärmesenke ist so ausgelegt,

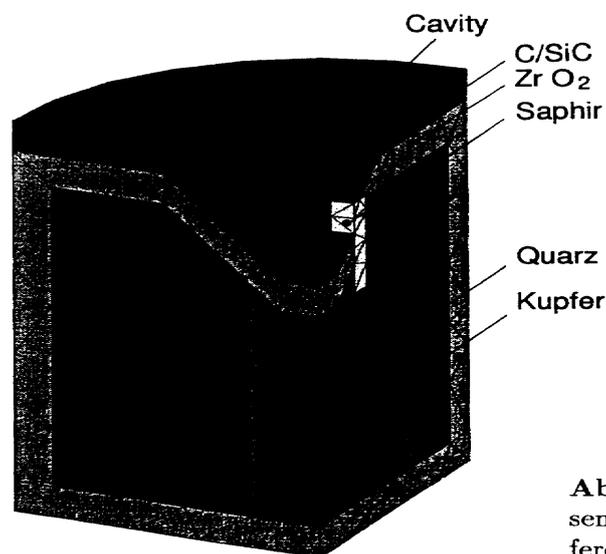


Abb. 6.14: Integration des phasenkompensierten Michelson-Interferometers (PMI) in die C/SiC-Hitzeschild-Kachel

daß selbst bei einem etwaigen Verlust der C/SiC- und der ZrO₂-Kachel die gesamte Wärmelast während der Wiedereintrittsphase aufgenommen werden kann.

Das Konstruktionsprinzip der Abbildung 6.14 wurde mit numerischen Thermalanalysen überprüft. In Abbildung 6.15 ist das Ergebnis einer solchen instationären Thermalanalyse zum Zeitpunkt der maximalen Wärmebelastung des PMI durch die heiße Außenströmung in 45 km Flughöhe dargestellt. Die Temperaturverteilung im Interferometer wird durch Linien konstanter Temperatur (Isothermen) auf den Schnittflächen eines Viertel-Modells des PMI dargestellt. Es ist zu erkennen, daß innerhalb der mit der heißen Außenströmung in Berührung kommenden Faserkeramikachel Temperaturen von annähernd 2800 K auftreten. In einem Schnitt durch das Interferometer wird ersichtlich, daß diese hohen Temperaturen durch eine mehrschichtige Isolation aus ZrO₂, die in Kontakt mit dem Kupferblock steht, abgebaut werden können. Innerhalb der in den Kupferblock eingebetteten Quarzglasscheiben werden somit Temperaturen über 1000 K vermieden, wodurch ein thermisches Versagen der Optik ausgeschlossen werden kann. Auf der Basis der numerischen Thermalanalysen kann somit die Funktionsfähigkeit des Interferometers auch bei inhomogener Temperaturverteilung in den optischen Bauteilen gewährleistet werden.

Der ausschlaggebende Einschnitt im EXPRESS-Projekt kam zu Beginn der Phase C/D mit der Entscheidung, die Wiedereintrittskapsel nicht in Deutschland zu entwickeln, sondern sie aus den Beständen der GUS-Staaten zu beschaffen. Die Entscheidung für die in Abbildung 6.16 dargestellte SALYUT-Wiedereintrittskapsel hatte tiefgreifende Konsequenzen für die Wiedereintrittsnutzlast, da die Kapsel den Wiedereintritt in die Atmosphäre mit dem Heck voran beginnt. $\Theta_e = 180^\circ$,

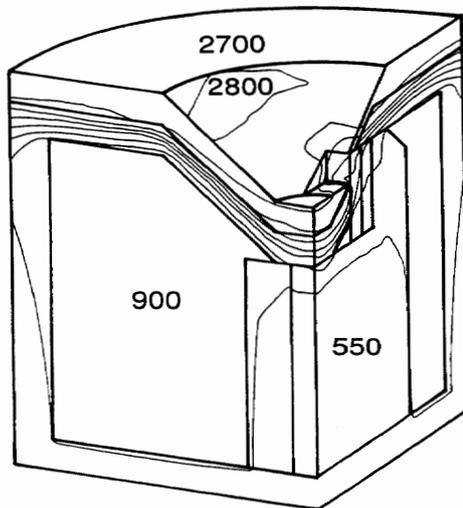


Abb. 6.15: Dreidimensionale Thermalanalyse des PMI ($H = 45 \text{ km}$)

und einen unkontrollierten Wiedereintritt durchführt. Im gaskinetischen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie taumelt die Kapsel noch. Sie wird erst im kontinuumsmechanischen Bereich über die stabilisierende Wirkung der Kegelflanke ausgerichtet, behält jedoch einen nicht vorhersehbaren Spin um die Rotationsachse beim weiteren Wiedereintritt bei.

Beim Wiedereintritt in die Atmosphäre erfährt die Raumflugkapsel Anstellwinkelschwingungen im Bereich von $\pm 100^\circ > \Theta > \pm 5^\circ$ mit einer Frequenz von mehreren Hz. Unter diesen Bedingungen lassen sich die für die Wiedereintrittsexperimente entscheidenden Anströmbedingungen nicht mehr eindeutig bestimmen.

Als Konsequenz des unkontrollierten Wiedereintritts in die Atmosphäre sind mit der SALYUT-Kapsel keine quantitativen Messungen für die aerothermodynamische Validierung numerischer Verfahren durchführbar. Das ursprüngliche deutsch-japanische Nutzlastkonzept mußte verworfen werden.

Dennoch geben wir ergänzend zwei numerische Lösungen für einen kontrollierten

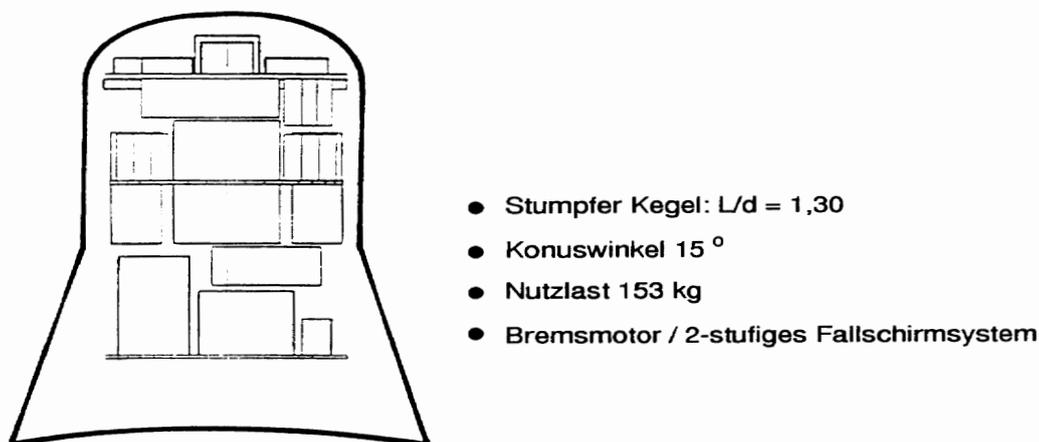


Abb. 6.16: EXPRESS-Projektstatus, Entwicklungsphase C/D

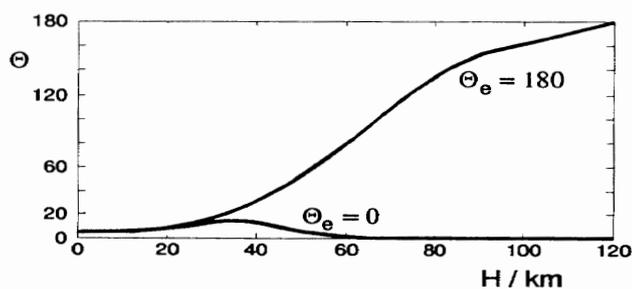


Abb. 6.17: Anstellwinkelverlauf beim unkontrollierten SALYUT-Wiedereintritt

Wiedereintritt der SALYUT-Kapsel in Abbildung 6.18 und Abbildung 6.19 an.

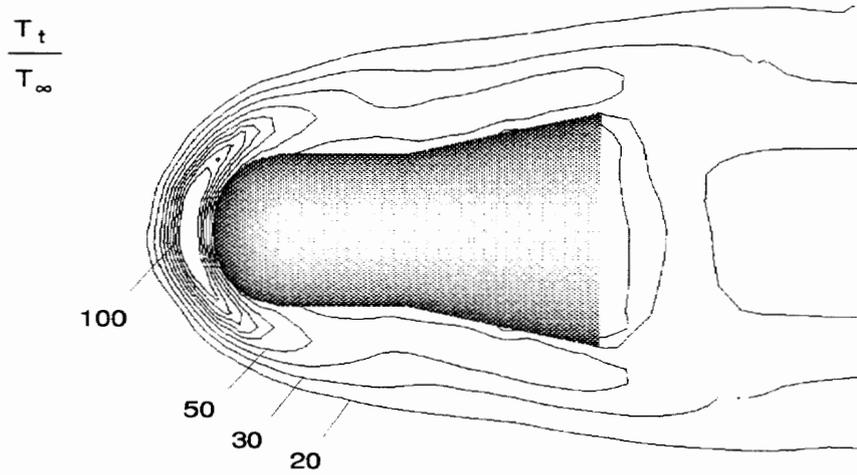


Abb. 6.18: Gaskinetische Simulation des SALYUT-Wiedereintritts (90 km)

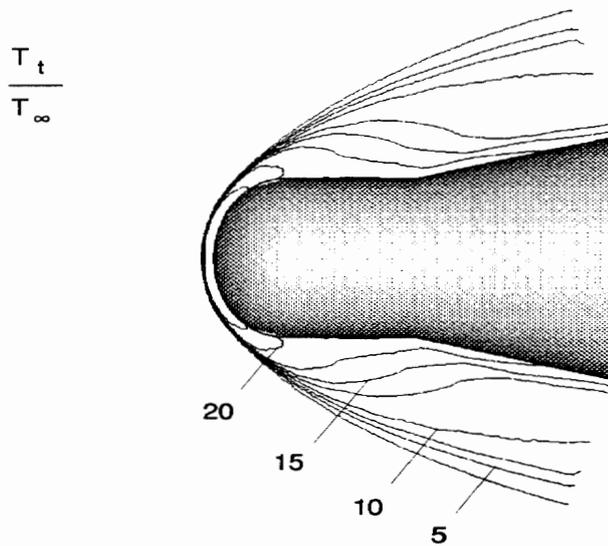


Abb. 6.19: Navier-Stokes-Simulation des SALYUT-Wiedereintritts (45 km)

6.1.3 SÄNGER-Orbitaltransportsystem

Im Hinblick auf eine Senkung der Orbital-Transportkosten wurde mit Konzeptstudien für die Entwicklung zukünftiger wiederverwendbarer Orbitaltransportsysteme für das Jahr 2010 im Rahmen des nationalen Hyperschall-Technologieprogramms begonnen. Es geht von einem zweistufigen Transportsystem aus. Der Orbiter wird mit einem Machzahl 7 Hyperschallflugzeug in 35 km Höhe transportiert. Eine aerothermodynamische Schlüsseltechnologie ist dabei die Stufentrennung, die in Abbildung 6.20 im Modellexperiment dargestellt ist. Der Orbiter setzt seine Mission mit einem herkömmlichen Raketenantrieb in den Orbit fort. Beide Flugzeuge landen nach ihrer Mission auf einem Flugplatz auf der Erde. In Systemstudien wurden mögliche Flugbahnen analysiert.

Während man in Amerika und Japan die Technologie für einen Hyperschallantrieb mit Überschallverbrennung (SCRAMJET) in der Vorentwicklung hatte, hat man in Deutschland, ausgehend von den Erfahrungen der Luftfahrtindustrie, den RAMJET favorisiert. Dieser ermöglicht den Start des zweistufigen Orbitaltransporters mit einem Kombinationstriebwerk, das bei einer Machzahl zwischen 2 und 3 vom Turbo-Betrieb auf den RAM-Betrieb umgeschaltet wird. Zu den Schlüsseltechnologien gehören die Einlaufströmung der Triebwerke, der Turbo-Ram Betrieb in der Aufstiegsphase des Orbital-Transporters und die Aerothermodynamik des Hyperschall-Transporters.

In Abbildung 6.20 ist der Ablaufplan des Hyperschall-Technologieprogramms dargestellt. Das Technologieprogramm beginnt in der ersten Phase mit Konzeptstudien, die die zu entwickelnden kritischen Technologien des Raumtransporters festlegen. Daraus ergeben sich die Anforderungen an die experimentelle Simulation in Versuchsanlagen, an die numerische Simulation auf Großrechnern und für die Verifikation der neuen Technologien im Flug. In der zweiten Phase des Technologieprogramms werden die einzelnen Komponenten des Orbitaltransporters, wie zum Beispiel die Antriebskomponenten, die Einlaufströmung des Hybrid-Antriebs, die heiße Struktur und Aerothermodynamik des Hyperschallflugzeugs, die Stufentrennung und die Steuersensorik, in Hyperschall-Versuchsanlagen getestet. Es folgt der Test der Integration der einzelnen Komponenten in einen Orbitaltransporter mit Hilfe eines Windkanalmodells. Parallel wird in der zweiten Phase des Technologieprogramms ein Flugerprobungsträger für die neu entwickelten Orbital-Transporttechnologien in Konzeptstudien definiert und danach im Flugversuch erprobt.

Ob sich diese von der Luftfahrt abgeleitete Orbitaltransporttechnologie gegenüber der in Abbildung 6.2 dargestellten klassischen Raketentechnologie durchsetzen wird, wird erst die Zukunft nach dem Jahr 2010 zeigen.

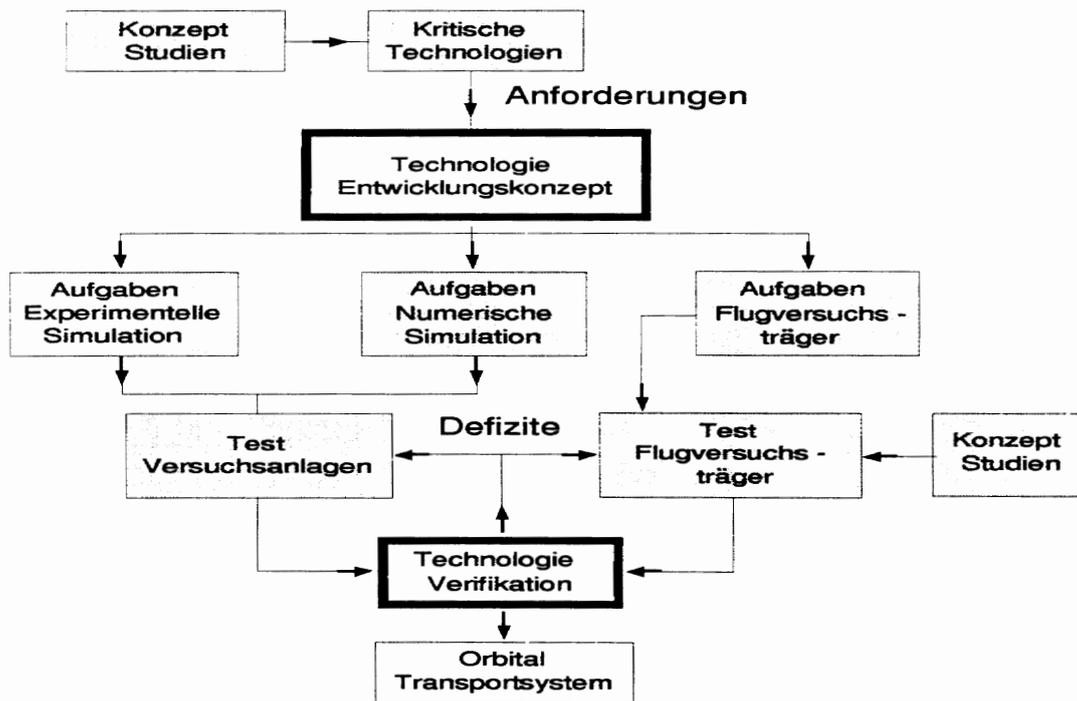
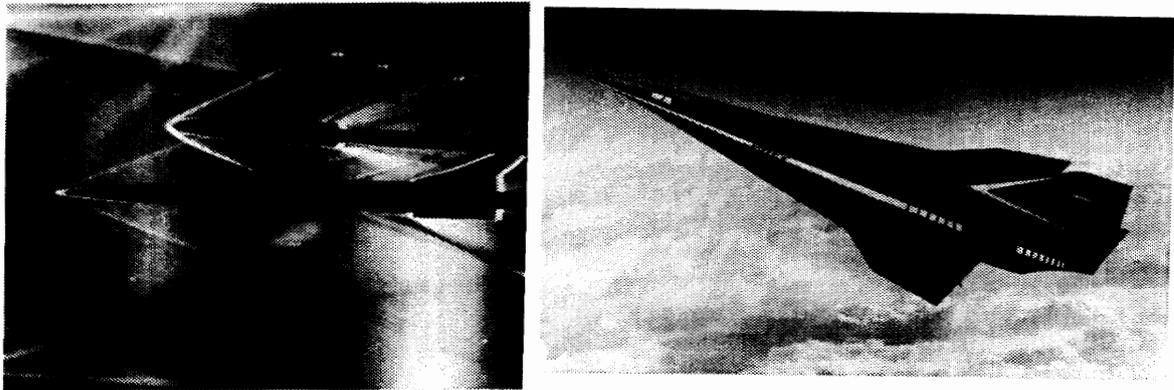


Abb. 6.20: Technologieentwicklung und Verifikation

6.1.4 HERMES – Technologie-Programm

Mit dem HERMES Technologie-Programm sollen in Europa die Kenntnisse erworben werden, die für die Auslegung eines Raumgleiters erforderlich sind. Darüber hinaus kann der HERMES Raumgleiter als Entwicklungsvorstufe für den SÄNGER-Orbiter genutzt werden. Das ursprüngliche Ziel des HERMES Technologie-Programms war es, die Unabhängigkeit Europas in der Technologie rückkehrbarer Raumfahrzeuge zu erreichen. Ein solches rückkehrbares Transportsystem stellt der Raumgleiter HERMES in Verbindung mit der ARIANE V Rakete dar (Abbildung 6.21). Er sollte den eigenständigen europäischen Zugang zur Columbus-Plattform der amerikanischen Raumstation FREEDOM ermöglichen und die europäische Raumfahrt-Technologie auf bemannte Wiedereintrittssysteme erweitern.

Der Raumgleiter HERMES (Abbildung 6.21) besitzt keinen eigenen Antrieb und wird mit der modifizierten ARIANE V Rakete in den erdnahen Orbit gebracht (Abbildung 6.2). Die aerodynamische Steuerbarkeit des HERMES erlaubt dann einen kontrollierten Wiedereintritt mit der automatischen Landung auf einem Flugplatz in Europa.

Abbildung 6.22 zeigt den HERMES/ARIANE V Orbitaltransporter im Vergleich zum SPACE SHUTTLE. Die Nutzlast ist aufgrund der Transportkapazität der ARIANE V Rakete auf 3000 kg begrenzt. Die Crew besteht aus 3 Astronauten.

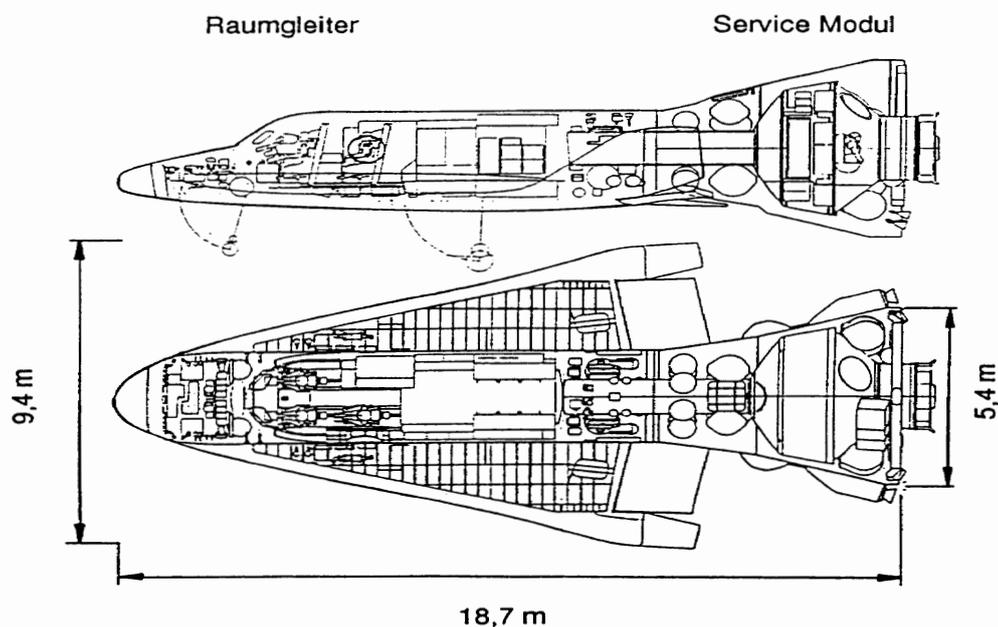


Abb. 6.21: Der europäische Raumgleiter HERMES

In den ersten Phasen des HERMES-Technologieprogramms wurden die folgenden Schlüsseltechnologien bearbeitet:

- Aerodynamik und Aerothermodynamik
- Hitzeschutzsystem
- Hochtemperatur-Materialien
- Heiße Strukturen
- Energie-Versorgungssysteme
- Avionik

Im Rahmen unseres Lehrbuchs interessiert uns die Aerothermodynamik des Wiedereintritts. Es wurde die thermodynamische Nichtgleichgewichts-Strömung in 69 km Höhe einer geplanten Wiedereintrittstrajektorie mit dem Navier-Stokes-Verfahren aus Kapitel 5 berechnet. In Abbildung 6.23 ist die Temperaturverteilung auf der Nase des HERMES-Raumgleiters in der Umgebung des Staupunkts dargestellt. Die obere Kurve zeigt den Verlauf der Temperatur für eine strahlungsadiabate vollkatalytische Wand. Dabei wurde ein Emissionskoeffizient $\epsilon = 0,85$ angenommen. Die Wandtemperatur ergibt sich aus der Energiebilanz (Kapital 5.2.3).

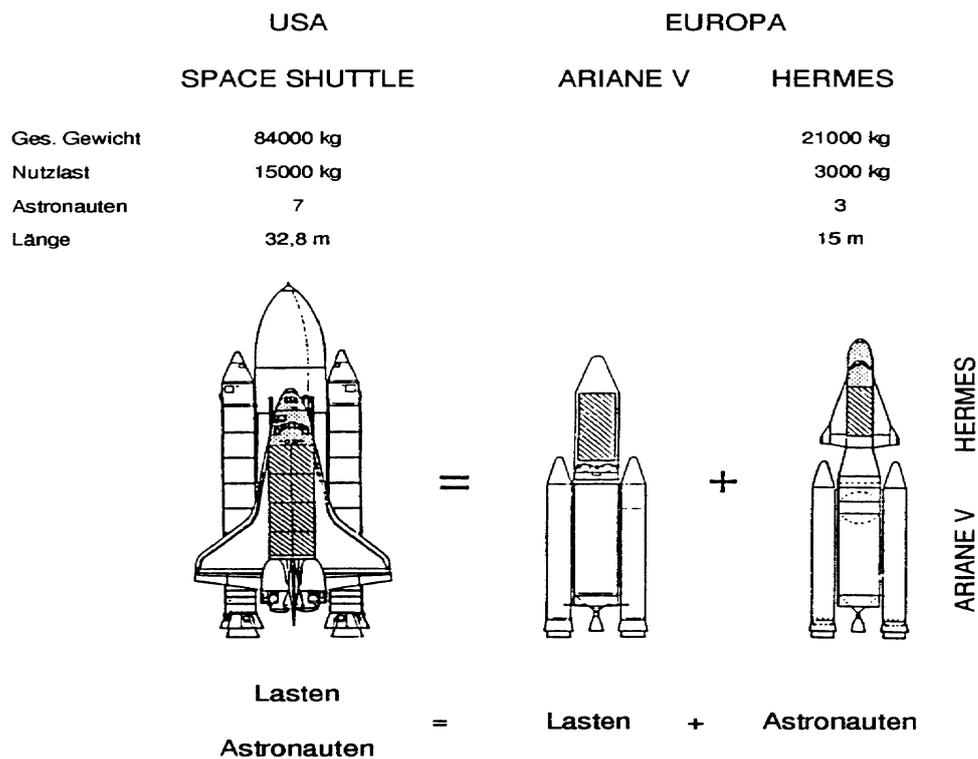


Abb. 6.22: Orbitaltransportsysteme SPACE SHUTTLE und ARIANE V/HERMES im Vergleich

Bei einer vollkatalytischen Wand berechnet sich die Gaszusammensetzung an der Oberfläche als thermodynamische Gleichgewichtszusammensetzung für die lokalen Werte von Druck und Temperatur. Im Staupunkt wird eine maximale Temperatur von etwa 2200 K erreicht. Längs der Bogenlänge s nimmt die Temperatur ab. Bei einer nichtkatalytischen Wand verschwindet der durch die Diffusion verursachte Wärmestrom. Durch ein Absinken der Wandtemperatur erhöht sich der Wärmestrom infolge Wärmeleitung, da sich der Temperaturgradient in der Grenzschicht vergrößert. Die strahlungsadiabate Staupunkttemperatur beträgt 2080 K.

Wegen der hohen thermischen Belastung ist der Raumgleiter HERMES aus einer Kombination kalter und heißer Strukturen aufgebaut:

- Kalte tragende Struktur: Die innere tragende Struktur des Wiedereintrittsflugzeugs besteht aus Aluminiumlegierungen. Dieses Material darf nur mit Temperaturen bis zu 700 K belastet werden. Da während des Wiedereintritts die Temperaturen wesentlich höher liegen, muß die kalte tragende Struktur durch eine thermische Isolation geschützt werden. Beispiele für die kalte tragende Struktur sind die Unterseite des HERMES und das Cockpit.
- Heiße Hitzeschutzstruktur: Diese Strukturen werden dort verwendet, wo die Kombination aus kalter Struktur und thermischer Isolation den thermischen Belastungen nicht standhält. Beispiele hierfür sind die Nase des HERMES und die Flügelkanten.

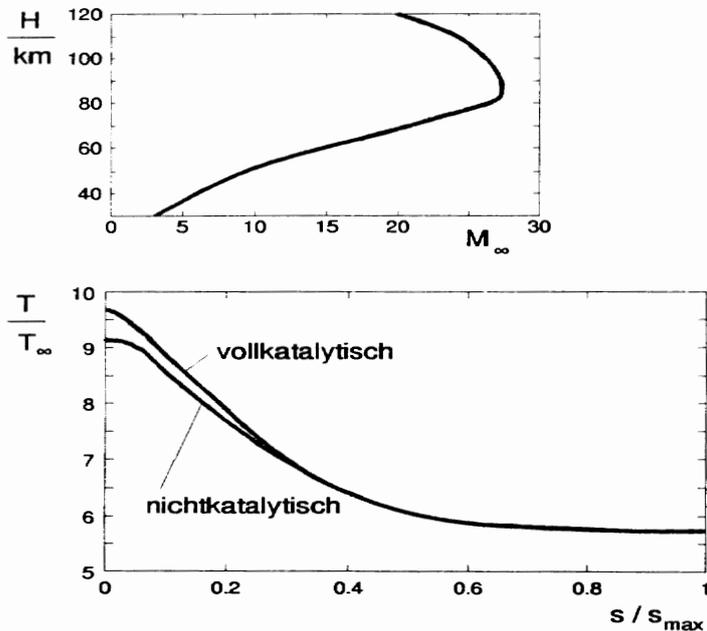


Abb. 6.23: HERMES-Wiedereintrittstrajektorie und Temperaturverteilung auf der Oberfläche in 69 km Höhe

6.2 Experimentelle Versuchsanlagen

In diesem Kapitel wollen wir zwei ausgewählte Hyperschall-Versuchsanlagen beschreiben, die in den zuvor beschriebenen Technologieprogrammen und Projekten eingesetzt wurden. Dabei werden wir lernen, daß eine vollständige experimentelle Simulation der Wiedereintrittsbedingungen grundsätzlich nicht möglich ist. Dennoch läßt sich mit quantitativen Experimenten eine Teilvalidierung der in Kapitel 4 und 5 beschriebenen numerischen Verfahren durchführen. Eine umfassende Übersicht über die Hyperschall-Versuchsanlagen gibt das klassische Stoßrohrbuch von H. OERTEL SEN. 1966. Wir behandeln das Stoßrohr in seiner einfachsten Bauart zur Simulation von Strömungen bei hohen Temperaturen ($T_\infty = 7000$ K) und den Gun-Tunnel für die Simulation kalter Hyperschallströmungen bis zu einer Anströmmachzahl von $M_\infty = 16$.

Unter der Teilvalidierung der numerischen Verfahren verstehen wir, daß mit den für die realen Wiedereintrittsbedingungen entwickelten Verfahren die Strömungsberechnungen bei den experimentellen Versuchsbedingungen durchgeführt werden und die Modellparameter (insbesondere der Wand-Wechselwirkungsmodelle) an die experimentellen Ergebnisse angepaßt werden. Dabei tritt bei der experimentellen Simulation chemisch reagierender Gase die grundsätzliche Schwierigkeit auf, daß im Experiment nicht alle Ähnlichkeitsparameter des Wiedereintritts eingehalten werden können. Um dies zu verstehen, greifen wir auf die Reaktionsgeschwindigkeitskoeffizienten k_f , k_b der Hin- und Rückreaktionen des chemischen Modells von Kapitel 3.5 zurück. Das Produkt $\rho_\infty \cdot L$ ist die charakteristische Größe der Hinreaktion, während $\rho_\infty^2 \cdot L$ die Rückreaktion charakterisiert (vgl. Gleichung 3.57). Bei vorgegebener Modellabmessung L im Experiment wird sofort klar, daß während eines Experimentes nie beide Parameter gleichzeitig simuliert werden können. Die Versuchsparameter lassen sich nur so einrichten, daß entweder $\rho_\infty \cdot L$ oder $\rho_\infty^2 \cdot L$ eingehalten wird. Ein weiteres Problem bei der Simulation heißer Hyperschallströmungen im Stoßrohr ist die Einhaltung der Anströmmachzahl und der Reynoldszahl. Dies scheitert an einer physikalischen Grenze für die instationäre Beschleunigung von Gasen. Im Stoßrohr kann ein Gaspaket nicht über die Grenzmachzahl $M_\infty = 1,89$ (ideales Gas) bzw. $M_\infty \approx 3$ (reales Gas) beschleunigt werden. Diese Grenzmachzahl läßt sich nur durch die Beschleunigung in einer Expansionsdüse überwinden. Bei der Expansion in der Düse verringert sich jedoch die Temperatur drastisch. Es lassen sich dann lediglich die Machzahl und die Reynoldszahl simulieren, was jedoch nicht den Wiedereintrittsbedingungen entspricht. Für eine vollständige Simulation der Wiedereintrittsströmung ist daher ein Freiflug-Wiedereintrittsexperiment notwendig. Nur dabei können alle Ähnlichkeitsparameter eingehalten werden.

6.2.1 Funktionsweise eines einfachen Stoßrohres

Für die Simulation der Wandwechselwirkung chemisch reagierender Luft mit dem Hitzeschild wird ein einfaches Stoßrohr mit konstantem Querschnitt betrachtet (Abbildung 6.24). Es besteht im wesentlichen aus drei Teilen, dem Treibrohr, der Membraneinspannung und dem Laufrohr, in dem die Meßkammer zur Aufnahme der Modelle integriert ist. Treibrohr und Laufrohr sind durch eine Membran getrennt.

Der Versuchsablauf beginnt damit, daß zunächst das Laufrohr mit dem zu untersuchenden Testgas gefüllt wird. Das Treibrohr wird mit Treibgas unter Überdruck gefüllt, bis die Membran zwischen Treibrohr und Laufrohr platzt. Dadurch läuft ein Verdichtungsstoß in das ruhende Gas des Laufrohrs, der nach einer gewissen Anlaufzeit eine konstante Geschwindigkeit erreicht. Mit dem von dem Stoß aufgeheizten Gaspaket, das dem Verdichtungsstoß hinterherströmt, werden die Experimente in der Meßkammer durchgeführt. Die zeitlichen Abläufe sind in Abbildung 6.24 dargestellt. Auf der Ordinate ist hier die Zeit t nach dem Platzen der Membran und auf der Abszisse der Weg x im Stoßrohr aufgetragen. Dargestellt ist die Ausbreitung des Verdichtungsstoßes im Laufrohr und des Expansionsfächers im Treibrohr.

Zu Beginn des Versuchsablaufs, nach Einlegen der Membran zwischen Treib- und Laufrohr, wird das Laufrohr zunächst in den Hochvakuumbereich auf 10^{-6} mbar evakuiert, um möglichst viele Fremdbestandteile, wie z.B. Wasserablagerungen an den Wänden oder aus Dichtungsmaterialien ausgegaste Bestandteile, aus dem Rohr zu entfernen und um so die Reinheit des späteren Testgases zu gewährleisten. Nach Erreichen des gewünschten Enddrucks wird das Testgas (p_0, ρ_0) in das Laufrohr und anschließend das Treibgas (p_4, ρ_4) in das Treibrohr gefüllt. Aufgrund der Druckdif-

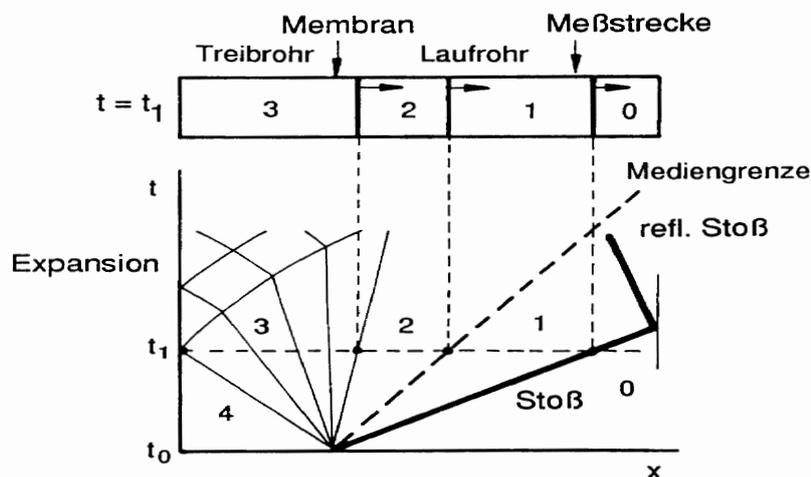


Abb. 6.24: Stoßrohr und Weg-Zeit-Diagramm eines Stoßrohrexperiments

ferenz $p_4 - p_0$ zwischen den beiden Rohren platzt die Membran, und es breiten sich Druckstörungen in Richtung Laufrohrende aus, die sich zu einem Verdichtungsstoß aufteilen und das Testgas auf hohe Geschwindigkeiten in Richtung Laufrohrende beschleunigen, bei gleichzeitig sprunghafter Erhöhung der Zustandsgrößen Temperatur, Dichte und Druck. Dem Verdichtungsstoß folgt die Mediengrenze, die Treib- und Laufgas voneinander trennt. Parallel dazu breitet sich eine Expansionswelle in das Treibrohr aus.

Nachdem der Verdichtungsstoß in der Meßkammer über das Modell gelaufen ist, startet die Messung. Das heiße Gaspaket, das zwischen dem Verdichtungsstoß und der Mediengrenze eingeschlossen ist, bildet das eigentliche Gasvolumen, das zur Messung zur Verfügung steht. Abbildung 6.25 zeigt ein Beispiel der Umströmung der Salyut-Wiedereintrittskapsel.

Wenn der am Laufrohrende reflektierte Verdichtungsstoß am Modell angekommen ist, endet die Messung. Die zur Verfügung stehende Meßzeit bei dieser Versuchsanlage liegt im Bereich von $500 \mu\text{s} - 1 \text{ ms}$.

Im folgenden betrachten wir einige der wichtigsten Gleichungen, um die Zustandsgrößen im Stoßrohr zu berechnen. Im Stoßrohr handelt es sich um einen laufenden Verdichtungsstoß mit der konstanten Geschwindigkeit \dot{x}_S . Die Grundgleichungen zur Berechnung der Zustandsänderungen über einen senkrechten Verdichtungsstoß wurden in Kapitel 5.1.1 für ein stoßfestes Koordinatensystem hergeleitet. Durch diesen Wechsel des Bezugssystems erscheint der betrachtete Stoß in Ruhe und wird mit der Geschwindigkeit \dot{x}_S angeströmt. Im Stoßrohr stellt sich jedoch im Gegensatz zu Kapitel 5.1.1 nicht die Frage nach dem Druckverhältnis über den Stoß, son-

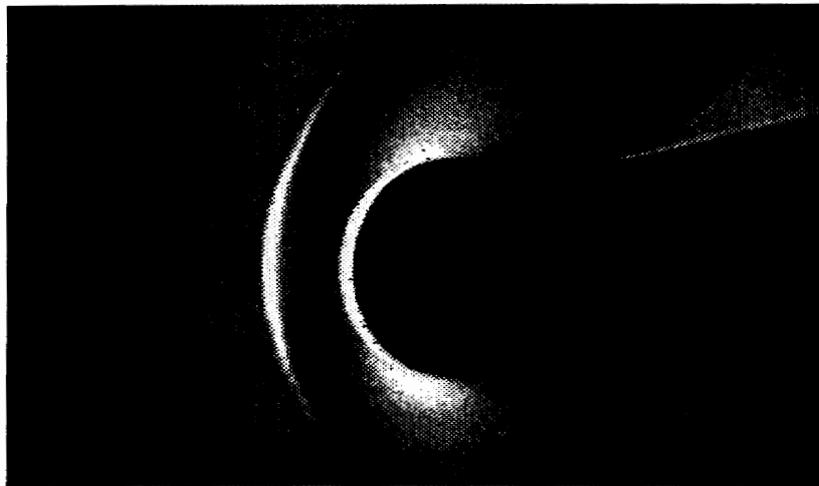


Abb. 6.25: Differentialinterferogramm der Wiedereintrittskapsel Salyut im Stoßrohr

dern es ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit \dot{x}_S bei einem gegebenen Druckverhältnis p_4/p_0 gesucht. Die Stoßgeschwindigkeit wird üblicherweise mit der Schallgeschwindigkeit a_0 im ruhenden Medium dimensionslos gemacht. Hierdurch ist die Stoßmachzahl $M_S = \dot{x}_S/a_0$ definiert.

Die Kopplung des Drucksprungs über den Stoß mit der Druckänderung während der Expansion liefert die folgende implizite Gleichung für die Stoßmachzahl:

$$\frac{p_4}{p_0} = \frac{1 + \frac{2 + f_0}{1 + f_0} (M_S^2 - 1)}{\left(1 - \frac{f_0 a_0}{f_4 a_4} \frac{M_S^2 - 1}{(1 + f_0) M_S}\right)^{2 + f_4}} \quad (6.1)$$

Wie bereits in Abschnitt 6.2 beschrieben, existiert in einem einfachen Stoßrohr ohne Düse und bei idealem Gasverhalten eine Grenzmachzahl der Anströmung von $M_\infty = 1,89$, die nicht überschritten werden kann. Dies soll hier kurz erläutert werden.

Nachdem der einfallende Stoß über das Modell gelaufen ist, wird das Modell mit der Machzahl M_1 angeströmt. Das bedeutet, M_1 entspricht der Anströmmachzahl M_∞ . Durch Auflösen der Erhaltungsgleichungen nach M_1 erhalten wir:

$$M_1 = \frac{f_0 (M_S^2 - 1)}{\sqrt{M_S^2 + f_0} \sqrt{(2 + f_0) M_S^2 - 1}} \quad (6.2)$$

Als Grenzwert für $M_S \rightarrow \infty$ und $f_0 = 5$ ergibt sich $M_{1, \text{grenz}} = 1,89$.

Der Druck p_1 und die Temperatur T_1 der Anströmung des Modells hinter dem

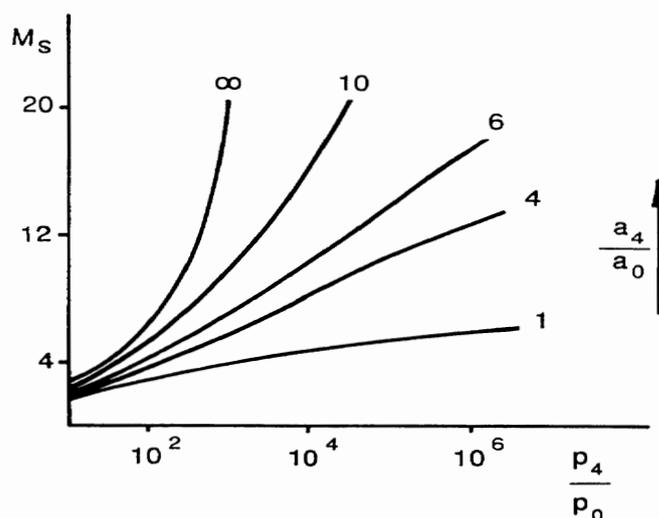


Abb. 6.26: Stoßmachzahl M_S bei verschiedenen Verhältnissen der Schallgeschwindigkeiten a_T/a_L idealer Gase vor dem Platzen der Membran

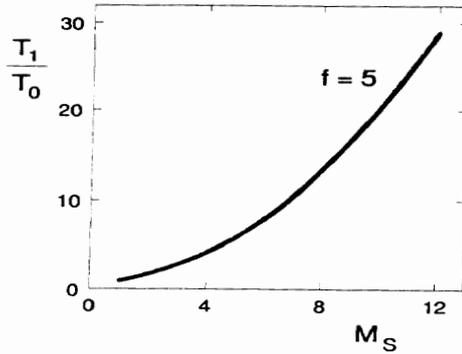


Abb. 6.27: Temperatur T_1 hinter dem einfallenden Verdichtungsstoß als Funktion der Stoßmachzahl M_S

einfallenden Verdichtungsstoß schreiben sich als Funktion der Stoßmachzahl M_S :

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{(2 + f_0) \cdot M_S^2 - 1}{1 + f_0}, \quad (6.3)$$

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{(M_S^2 + f_0)[(2 + f_0) \cdot M_S^2 - 1]}{(1 + f_0)^2 \cdot M_S^2}. \quad (6.4)$$

Um die für chemische Reaktionen erforderlichen hohen Anströmtemperaturen T_1 zu erzeugen, erfolgt die Durchführung der Versuche mit unterschiedlichen Gasen im Treib- und Laufrohr. Dies hat folgenden Hintergrund: Einen entscheidenden Einfluß auf die Stoßmachzahl hat das Verhältnis der beiden Schallgeschwindigkeiten a_4/a_0 von Treib- und Laufgas zu Beginn des Versuchs. In Abbildung 6.26 ist für ideales Gasverhalten die Stoßmachzahl M_S als Funktion von p_4/p_0 mit dem Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten a_4/a_0 als Parameter aufgetragen. Darin ist zu erkennen, daß M_S mit anwachsendem a_4/a_0 steigt, und damit auch die Zustandsgrößen hinter dem sich ins Laufrohr bewegenden Verdichtungsstoß.

Im Versuchsbetrieb werden deshalb als Treibgas überwiegend Wasserstoff (Schallgeschwindigkeit $a_0 = 1260$ m/sek bei $T = 273,16$ K und $p = 1,013$ bar) und Helium (Schallgeschwindigkeit $a_0 = 970$ m/sek) verwendet. Mit Luft als Test- und Wasserstoff als Treibgas ergibt sich ein Verhältnis von $a_4/a_0 \approx 3,8$. Die dabei erzielten Temperaturen T_1 liegen für ein Druckverhältnis von $p_4/p_0 = 10000$ und idealem Gasverhalten bei $T_1 = 7000$ K (Abbildung 6.27). Aufgrund der Realgaseffekte sinkt die Temperatur in der realen Strömung, so daß sich am Modell eine wesentlich kleinere Temperatur einstellt. Für das oben genannte Beispiel (Luft als Test- und Wasserstoff als Treibgas) beträgt die Temperatur hinter der Relaxationszone des einfallenden Verdichtungsstoßes noch $T_1 \approx 3000$ K.

Neben Druck- und Wärmeübergangsmessungen werden überwiegend optische Meßverfahren eingesetzt, die wir in Kapitel 6.2.4 behandeln werden. Kraftmessungen zur Bestimmung des Widerstands- und Auftriebsbeiwerts werden im Stoßrohr nicht durchgeführt, da bei dieser Anlage neben der sehr kurzen Meßzeit auch die für Kraftmessungen erforderlichen Ähnlichkeitsparameter, Mach- und Reynoldszahl, nicht eingehalten werden können. Kraftmessungen werden im Gun-Tunnel bei kalter Hyperschallströmung durchgeführt, da hier Meßzeiten bis 30 ms bei Machzahlen

bis $M_\infty = 16$ realisiert werden können.

6.2.2 Gun-Tunnel

Ebenso wie beim Stoßrohr ist beim Gun-Tunnel (Abbildung 6.28) ein Hochdruckbehälter wesentlicher Bestandteil der Versuchsanlage. Getrennt durch eine Membran ist an den Hochdruckbehälter ein Rohr angeflanscht, in das zu Versuchsbeginn ein Kolben eingelegt wird. Am Ende des Rohres, vor der Meßkammer, befindet sich eine weitere Membran, der eine Lavaldüse zur Erzeugung der kalten Hyperschallströmung in der Meßkammer folgt. Der engste Querschnitt der Düse legt bei festem Austrittsquerschnitt die Machzahl in der Meßkammer fest. Hinter der Meßkammer befindet sich ein Kessel, der evakuiert wird, um das nötige Druckverhältnis für die Überschallströmung in der Lavaldüse aufzubauen.

Mit dem Platzen der ersten Membran zwischen Hochdruckbehälter und Rohr startet der Versuchsablauf. In Abbildung 6.28 ist das zugehörige Weg-Zeit-Diagramm aufgetragen. Das Gas im Hochdruckbehälter (maximal 500 bar) beschleunigt nach dem Platzen der ersten Membran den Kolben in Richtung Meßkammer auf eine hohe Geschwindigkeit. Bei der Beschleunigung des Kolbens erzeugt dieser Kompressionswellen, die durch mehrfache Reflexion zwischen Kolben und Membran

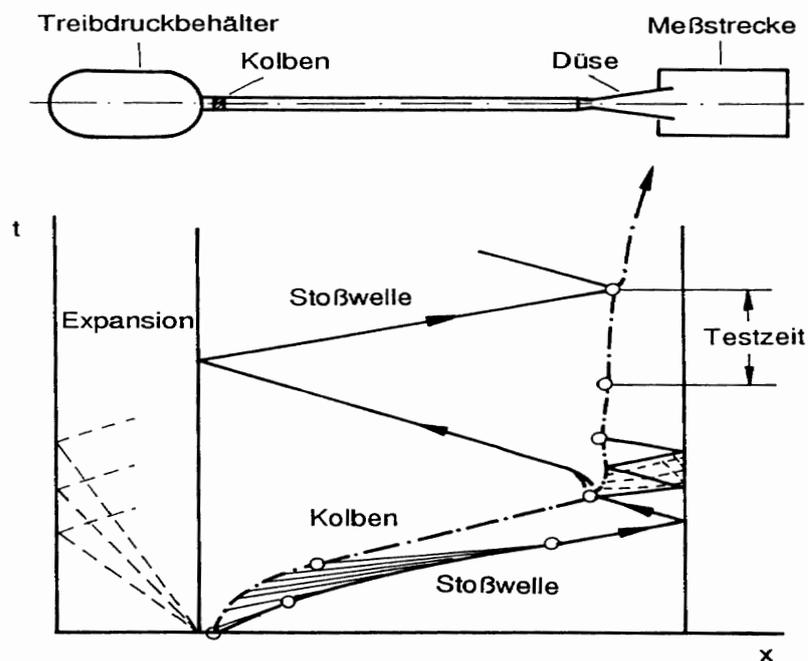


Abb. 6.28: Gun-Tunnel und Weg-Zeit-Diagramm eines Gun-Tunnel-Experiments

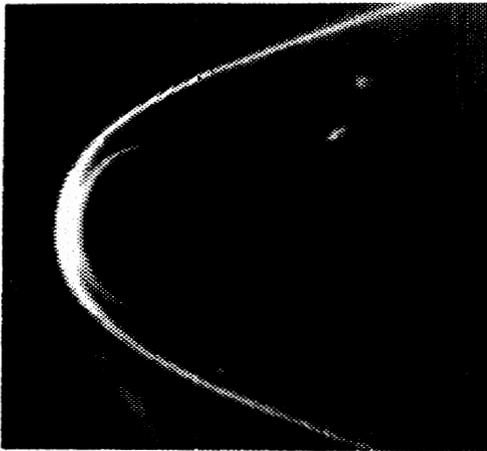


Abb. 6.29: Differentialinterferogramm der Wiedereintrittskapsel Salyut, $M_\infty = 12$, $Re_\infty = 5 \cdot 10^5$

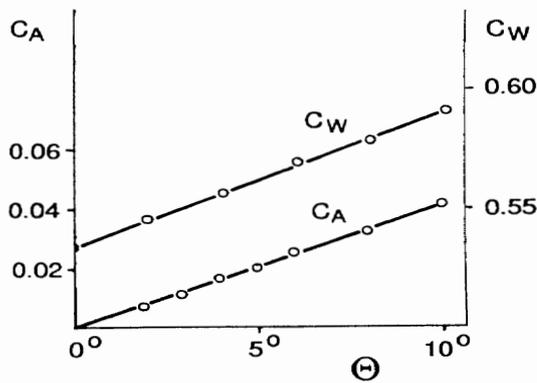


Abb. 6.30: Auftrieb- und Widerstandsbeiwerte der Wiedereintrittskapsel Salyut

das eingeschlossene Testgas adiabatisch komprimieren. Vor dem Platzen der zweiten Membran zur Meßkammer befindet sich der Kolben nahezu in Ruhe. Aufgrund des hohen Drucks platzt die zweite Membran, und es baut sich in der Meßstrecke entsprechend dem gewählten Querschnittsverhältnis der Lavaldüse eine zeitlich begrenzte kalte Hyperschallströmung auf. Abbildung 6.29 zeigt die Umströmung einer Wiedereintrittskapsel bei einer Machzahl von $M_\infty = 12$. Im Vergleich zur Abbildung 6.25 ist aufgrund der höheren Anströmmachzahl ein kleinerer Stoßabstand zu erkennen. Die Anströmtemperatur lag bei diesem Experiment bei $T_\infty = 30$ K. Im Gegensatz zum Stoßrohr erreicht der Gun-Tunnel Meßzeiten im Bereich von ca. 30 ms (bei $M_\infty = 12$ und einem Druck im Hochdruckbehälter von $p_4 = 200$ bar).

6.2.3 Simulationsbereiche

Wie bereits beschrieben, unterscheiden sich die beiden Anlagen im wesentlichen durch die zu simulierenden Größen und Kennzahlen. Während im Stoßrohr heiße

Strömungen und damit die Ähnlichkeitsparameter der Relaxationsvorgänge, wie z.B. $\rho_\infty L$ oder $\rho_\infty^2 L$, simuliert werden können, dient der Gun-Tunnel überwiegend der Messung der Widerstands- und Auftriebsbeiwerte von Wiedereintrittsflugkörpern. In Abbildung 6.31 sind die Simulationsbereiche beider Anlagen im Höhen- M_∞ und im M_∞ - Re_∞ -Diagramm dargestellt. Zu erkennen ist die bereits beschriebene geringe Grenzmachzahl im Stoßrohr. Die Abbildung zeigt auch die Wiedereintrittstrajektorien der EXPRESS-Kapsel und des HERMES-Raumgleiters. Der Simulationsbereich des Gun-Tunnels deckt für Machzahlen von $M_\infty = 8$ bis $M_\infty = 16$ einen Bereich entlang der Wiedereintrittstrajektorien ab. Damit können die aerodynamischen Parameter allerdings bei falschen Temperaturen gemessen werden.

Die Experimente beider Anlagen ergänzen sich und erlauben eine Teilvalidierung der numerischen Verfahren in den beschriebenen Bereichen, auf die wir in Kapitel 6.4.2 zurückkommen werden. Sie ersetzen aber kein Freiflugexperiment unter realen Wiedereintrittsbedingungen.

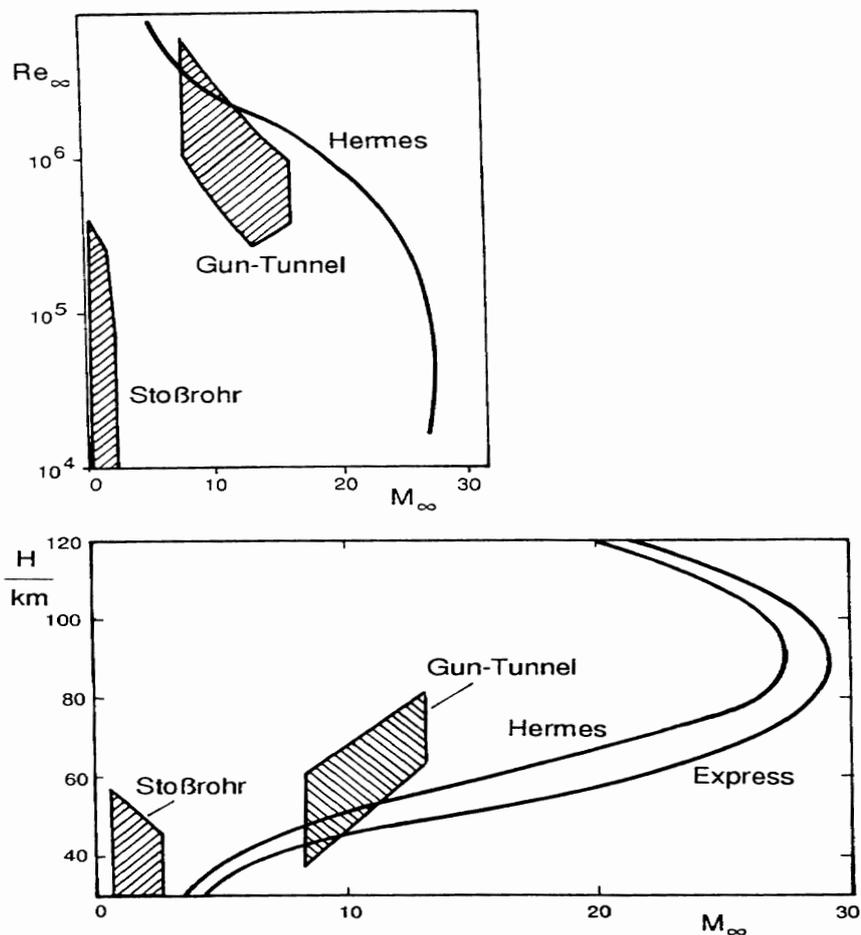


Abb. 6.31: Simulationsbereiche für das Stoßrohr und den Gun-Tunnel

6.2.4 Optische Strömungsmesstechnik

Nachdem wir zwei ausgewählte Hyperschallversuchsanlagen kennengelernt haben, gilt es kurz die Meßtechnik zu behandeln, die es uns erlaubt, innerhalb der Meßzeit von 1 ms die Meßdaten zu erfassen, die wir für die Teilvalidierung der numerischen Verfahren benötigen. Dabei erinnern wir uns an die Ergebnisse der Sensitivitätsanalysen von Kapitel 3.6 und 5.4. Es waren im Strömungsfeld der Wiedereintrittskapsel in 45 km Höhe der Wiedereintrittstrajektorie die Reaktionsgeschwindigkeiten der Reaktion $NO + N \rightleftharpoons N + O + N$ genau zu messen. In der Grenzschicht erwies sich die Austauschreaktion $N_2 + O \rightleftharpoons NO + N$ als sensitiv.

Dies gelingt mit optischen Meßverfahren. Von der Vielzahl der optischen Strömungsmeßmethoden (siehe H. OERTEL SEN., H. OERTEL JR. 1989) wählen wir die Meßmethoden aus, die wir zur Messung der Reaktionsgeschwindigkeiten im Stoßrohr brauchen. Letztendlich gilt es, die Partialdichten von NO , N und O zu messen.

Differentialinterferometer

Zunächst verschaffen wir uns einen Überblick über das gesamte Strömungsfeld um die Wiedereintrittskapsel. Dazu benutzen wir ein Ganzfeld-Differentialinterferometer, dessen Aufbau in Abbildung 6.32 dargestellt ist.

Das Differentialinterferometer besteht aus einer Lichtquelle (Blitzlampe), die mit den Linsen L für die Beleuchtung der Meßkammer und die Abbildung des Meßobjekts auf der Abbildungsebene der Aufnahmekamera (CCD) sorgt. Die wesentlichen optischen Bauelemente des Differentialinterferometers sind zwei Wollastonprismen WP , die in Verbindung mit zwei Polarisationsfiltern PF jeden Lichtstrahl in zwei Teilstrahlen aufspalten, welche die Meßkammer mit dem Strahlabstand ϵ durchlaufen (Abbildung 6.33) und in der Abbildungsebene zur Interferenz gebracht werden. Die $\lambda/2$ -Platte dient dazu, die Fabrikationsfehler der optischen Bauelemente zu

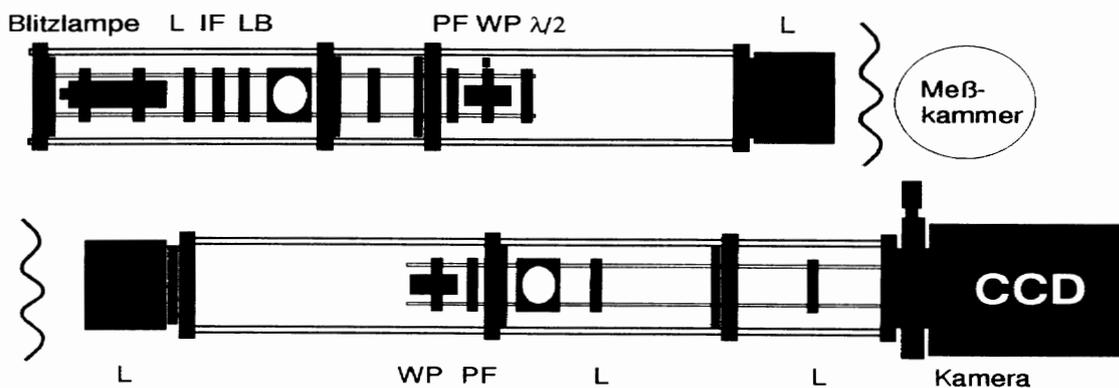


Abb. 6.32: Aufbau des Ganzfeld-Differentialinterferometers (DI)

kompensieren.

Als Ergebnis erhalten wir ein Interferenzstreifenmuster des Strömungsfelds auf der Abbildungsebene, das wir mit der Aufnahmekamera digitalisieren und auf einem Rechner auswerten. Dabei visualisiert das Differentialinterferometer die Dichtedifferenz zwischen den beiden Teilstrahlen des Interferometers entlang des optischen Wegs in der Meßkammer. Das Interferometer registriert die Differenz des Brechungsindex Δn im Strömungsfeld, die mit der stoffspezifischen Gladstone-Dale-Konstanten G in die Dichtedifferenz $\Delta\rho$ der zu visualisierenden Strömung überführt werden kann.

$$\Delta n = G \cdot \Delta\rho \quad . \quad (6.5)$$

Für die Details der Auswertung von Differentialinterferogrammen verweisen wir auf unser Fachbuch über die optische Strömungsmeßtechnik.

Die Abbildungen 6.25 und 6.29 haben bereits Differentialinterferogramme des Strömungsfelds um die Wiedereintrittskapsel gezeigt. Durch die Strahltrennung e des Differentialinterferometers erscheinen die Kapsel und die Kopfwelle als Doppelbild. Zusätzlich ist zu beachten, daß wir mit dem Differentialinterferometer entlang des optischen Wegs durch die Meßkammer integrieren und damit ein integrales Bild der Dichtedifferenzverteilung des Strömungsfelds erhalten. Abbildung 6.34 zeigt den Vergleich eines Stoßrohrexperimentes der SALYUT-Wiedereintrittskapsel mit der numerischen Lösung. Die Integration längs der beiden Teilstrahlen des Differentialinterferometers wurde bei der numerischen Lösung nachvollzogen. Es stimmen der im Experiment und mit dem Navier-Stokes-Verfahren berechnete Kopfwellenabstand, das Expansionsgebiet beim Übergang von der Kugelkappe zum Zylinder und der durch die Kegelflanke der Kapsel verursachte schiefe Verdichtungsstoß überein. Damit werden die numerischen Ergebnisse bei den Stoßrohrbedingungen durch das Experiment bestätigt, was wir bisher als Teilvalidierung der numerischen Verfahren bezeichnet haben.

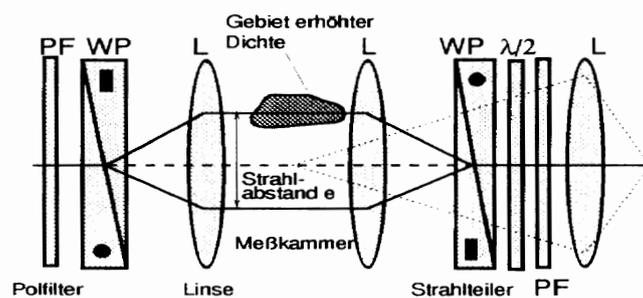


Abb. 6.33: Strahlengang des Differentialinterferometers

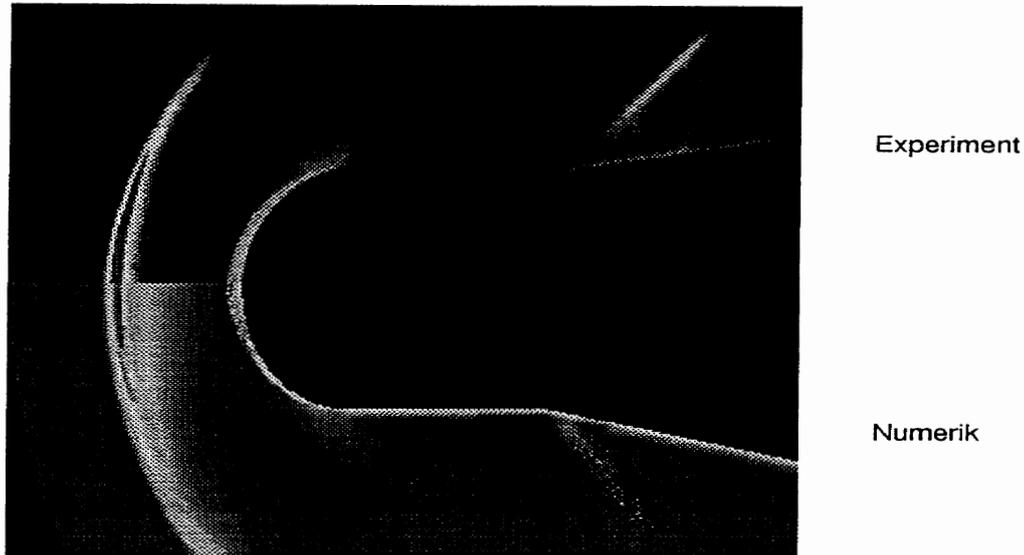


Abb. 6.34: Vergleich der experimentellen Dichtedifferenz-Verteilung mit der numerischen Lösung für die Wiedereintrittskapsel SALYUT (Stoßrohrexperiment $M_\infty = 1,35$)

Zweiwellenlängen-Laserdifferentialinterferometer (2- λ -LDI)

Unser eigentliches Ziel ist die Messung der Partialdichten des Sauerstoffs und des Stickstoffs. Dazu bedienen wir uns wiederum eines Differentialinterferometers, wobei wir jetzt als Lichtquelle einen Diodenlaser benutzen und die beiden Teilstrahlen des Differentialinterferometers in der Meßkammer fokussieren. Die Aufnahmekamera wird durch eine lichtempfindliche PIN-Diode ersetzt, deren Signale wiederum auf dem Rechner ausgewertet werden.

Beim Zweiwellenlängen-Laserdifferentialinterferometer nutzen wir jetzt die Tatsache aus, daß die mit Gleichung (6.5) eingeführte Gladstone-Dale-Konstante G eine Funktion der Lichtwellenlänge λ ist. Wir betreiben das Laser-Differentialinterferometer mit zwei Diodenlasern unterschiedlicher Wellenlänge λ_1 und λ_2 und zwei entsprechenden Nachweisdiode. Damit ergibt sich für die Auswertung z.B. der O_2 - und O -Partialdichten ein der Gleichung (6.5) entsprechendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{c} \text{Brechungsindexdiff.} \\ \left(\begin{array}{c} \Delta n_{12}(\lambda_1) \\ \Delta n_{12}(\lambda_2) \end{array} \right) \\ \text{gemessen} \end{array} = \begin{array}{c} \text{GLADSTONE-DALE} \\ \left(\begin{array}{cc} G_{O_2}(\lambda_1) & G_O(\lambda_1) \\ G_{O_2}(\lambda_2) & G_O(\lambda_2) \end{array} \right) \\ \text{bekannt} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \text{Partialdichtediff.} \\ \left(\begin{array}{c} \Delta \rho_{O_2} \\ \Delta \rho_O \end{array} \right) \\ \text{gesucht} \end{array} \quad (6.6)$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die zugehörige Determinante ungleich Null ist. Dies ist der Fall, wenn sich die Gladstone-Dale-Konstanten $G(\lambda_1)$ und $G(\lambda_2)$ nicht nur um einen konstanten Faktor unterscheiden (Abbildung 6.35). Dies läßt sich insbesondere in der Nähe einer Absorptionsbande des Sauerstoff-Moleküls realisieren.

Verbleibt noch anzumerken, mit welcher optischen Methode wir die NO -Konzentration messen, die von den Sensitivitätsstudien für die Bestimmung der Reaktionsraten als besonders wichtig identifiziert wurde. Hierbei bietet sich die Methode der laserinduzierten Fluoreszenzspektroskopie (LIF) an, die heute in der Lage ist, O_2 -Teilchendichten bis 10^{16} Moleküle/cm³ und NO -Teilchendichten bis 10^{12} Moleküle/cm³ bei den Versuchsbedingungen des Stoßrohrs aufzulösen. Es würde jedoch weit über den Rahmen des Aerothermodynamiklehrbuchs hinausführen, die spektroskopischen Details dieser Meßmethode zu beschreiben. Insofern verweisen wir auf die entsprechende Fachliteratur (H. OERTEL SEN., H. OERTEL JR. 1989, LA VISION 1993).

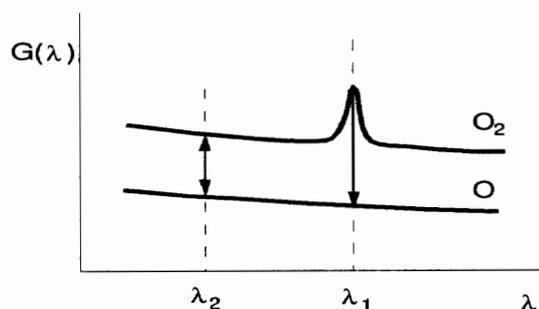


Abb. 6.35: Gladstone-Dale-Konstanten für Sauerstoffatome und -moleküle in der Umgebung einer Absorptionsbande

6.3 Simulation auf Großrechnern

6.3.1 Großrechnerverbund

Der Hyperschall-Versuchsanlage und der Meßtechnik entsprechen bei der numerischen Strömungssimulation der Großrechner und das numerische Verfahren. Die numerischen Simulationen der vorangegangenen Kapitel wurden auf unterschiedlichen Rechnerarchitekturen durchgeführt.

Der Vektorrechner ist derzeit der am häufigsten eingesetzte Großrechnertyp. Er erzielt seine Leistung durch die Vereinigung mehrerer, spezieller Architekturkonzepte. Es wird ausgenutzt, daß eine mathematische Operation in jedem Prozessor in kleinere Elementaroperationen zerlegt wird, beispielsweise die Multiplikation zweier Zahlen in die Normalisierung der Zahlendarstellung, die Addition der Exponenten, die Multiplikation der Mantissen und die Normalisierung des Ergebnisses. Die Vektoreinheit des Prozessors ermöglicht durch die Aufspaltung in Elementaroperationen eine überlappende Befehlsabarbeitung mehrerer mathematischer Operationen (Pipelineprinzip, Fließbandprinzip). Hierdurch lassen sich gleichartige Operationen, die auf lange Vektoren von Zahlen angewendet werden, erheblich beschleunigen (beispielsweise die Addition zweier Vektoren). Durch die Verkettung von Funktionseinheiten (Additionspipeline und Multiplikationspipeline) wird eine weitere Beschleunigung erzielt. Da Vektorrechner bereits seit längerem verfügbar sind, existiert eine große Zahl vektorisierter Algorithmen und Softwarebibliotheken.

Mit mehreren Vektorprozessoren lassen sich unterschiedliche Vektoroperationen parallel ausführen. Derartige Rechner verfügen in der Regel über nicht mehr als 16 Prozessoren, die auf einen gemeinsamen Hauptspeicher zugreifen. Die Leistungsfähigkeit dieser Architekturen ist weitgehend ausgeschöpft, da die Entwicklung der Spezialprozessoren an technisch-physikalische Grenzen stößt.

Um die Rechenleistung um mehrere Größenordnungen zu steigern, sind derzeit massiv-parallele Systeme in der Entwicklung und Erprobung. Bei mehreren hundert oder tausend Prozessoren ist es nicht mehr denkbar, jeden Prozessor über eine eigene Verbindung mit einem Hauptspeicher zu koppeln. Um der Prozessorleistung entsprechend schnelle Speicherzugriffe zu erhalten, lassen sich dann nur noch relativ kleine lokale Speicher pro Prozessor realisieren. Dies erhöht den Aufwand der Entwicklung und Programmierung effizienter Algorithmen erheblich. An dieser Stelle sollen am Beispiel des Wiedereintrittsproblems die Anforderungen an einen Großrechner skizziert und ein heute verfügbares Rechnerverbundsystem vorgestellt werden.

Die dreidimensionalen gaskinetischen Simulationen in 90 km Höhe erfordern bei einem Netz mit 75000 Zellen ($35 \times 35 \times 60$) 10^6 Modellpartikel. Dies ist eine untere Grenze in Anbetracht der aufzulösenden Kopfwelle und der Wandgrenzschicht. Jedes Teilchen trägt mindestens 9 physikalische Informationen (Ortskoordinaten, Geschwindigkeitskomponenten, innere Energien, Spezieszugehörigkeit). Es kommen die Variablen für die makroskopischen Daten in der Zelle hinzu. Darüberhinaus benötigt ein Rechenprogramm zahlreiche interne Variablen. In diesem Fall

sind es insgesamt rund 20 teilchenspezifische und 40 zellspezifische Daten. Hierdurch ergibt sich eine Speicheranforderung von etwa 200 MByte (1 MByte = 10^6 Zeichen). Die Tendenz ist steigend, je spezialisierter die Rechnerarchitektur ist. Jedes Teilchen wird in einem Rechenzeitschritt bewegt und führt Kollisionen mit der Wand und anderen Teilchen aus. Es sind etwa 2000 Zeitschritte bis zu einer stationären Lösung erforderlich. Ein heutiger Großrechner mit einer Spitzenleistung von 1 GFlops (10^9 Fließkommaoperationen pro Sekunde) benötigt hierfür mehr als 2 Stunden Rechenzeit. Praktisch ist nur ein Bruchteil der Spitzenleistung nutzbar. Dies hängt von der Optimierung des Rechenprogramms hinsichtlich der vorliegenden Rechnerarchitektur ab. Im Fall der DSMC-Simulation sind nicht alle Rechenschritte vektorisierbar.

Eine typische rotationssymmetrische Navier-Stokes-Rechnung in 75 km Höhe erfolgt auf einem Netz mit 25000 Netzknoten. Neben den Ortskoordinaten, den Geschwindigkeitskomponenten, den inneren Energien muß Speicher für die Partialdichten, die Zähigkeit, die Wärmeleitfähigkeit, die Diffusionskoeffizienten und die Zuordnung von Knoten und Elementen vorgehalten werden. Die Vektorisierung der Rechenoperationen erfordert zusätzlichen Speicher, so daß auch dieses Problem bei einer Größe von 100 MByte mehr als 1 Stunde Rechenzeit benötigt.

Die interaktive Auswertung und Visualisierung der großen Datenmengen erfordert Arbeitsplatzrechner (Workstations), die in der Lage sind, die numerischen Lösungen im Speicher zu halten. In einem Rechnerverbund sind deshalb verschiedene Computersysteme mit unterschiedlichen Rechenkapazitäten über ein schnelles Datennetz verbunden. Die Übertragungsrate des Datennetzes muß an die zur Verfügung stehende Rechenleistung angepaßt sein. Die Übertragung darf nicht länger dauern als die Simulation selbst.

Da in der Entwicklungsphase der zu Beginn beschriebenen Projekte mehrere Disziplinen (Aerothermodynamik, Strukturmechanik, Werkstoffwissenschaften, Flugmechanik, Flugführung, Meßtechnik, etc.) beteiligt sind, die jeweils über eigene Arbeitsplatzrechner verfügen, muß die Projektarbeit zunehmend im Verbund betrieben werden. Im Bereich der Aerothermodynamik liefert die Integration der experimentellen Versuchsanlagen den unmittelbaren Vergleich numerischer und experimenteller Ergebnisse. Ein Beispiel hierfür gibt die Abbildung 6.34. Das mit einer CCD-Kamera digitalisierte Differentialinterferogramm kann von derselben Software verarbeitet werden, die auch die numerischen Ergebnisse visualisiert. Durch die Verbindung der Konstruktion der Versuchsmodelle und der aerodynamischen Berechnung können die Konstruktionsdaten direkt in die Netzgenerierung der Strömungssimulation einfließen. Die direkte Steuerung der Produktion durch Daten der Konstruktion ist ohnehin Gegenstand der sich schnell entwickelnden CIM-Technologien (CIM - Computer Integrated Manufacturing).

Abbildung 6.36 zeigt einen solchen Rechnerverbund. Workstations stellen die graphischen Arbeitsplätze zur Programmentwicklung, Auswertung und Visualisierung der numerischen und experimentellen Ergebnisse und für die Konstruktion dar. CATIA ist ein in der Luft- und Raumfahrt etabliertes Programmsystem, das die Verbindung von Konstruktion und Produktion ermöglicht. Aufgrund der vorgege-

benen Schnittstellen vieler Meßgeräte sind an den Versuchsanlagen PCs verbreitet. Workstations und PCs sind in einem lokalen Netz verbunden. Die Übertragungsleistung eines solchen Netzes wird in wenigen Jahren von 10 auf 100 MBit/sek anwachsen (8 Bit = 1 Byte). Die oben beschriebenen Beispielrechnungen zeigen, daß die weiter entfernt stehenden Großrechner (Vektor- und Parallelrechner) mit einer ähnlichen Übertragungsrate im Rechnerverbund verfügbar gemacht werden müssen.

In den kommenden Jahren werden Massiv-Parallelrechner die heutigen Großrechner ergänzen und ersetzen. Im folgenden Kapitel werden wir auf den Einsatz von Workstation Clustern als Parallelrechner eingehen.

6.3.2 Workstation Pool

Wir registrieren die Entwicklung, daß im universitären und industriellen Bereich zunehmend leistungsfähigere Arbeitsplatzrechner eingesetzt werden, die in ihrer Summe der Leistungsfähigkeit von Großrechnern entsprechen. Als Konsequenz werden zukünftig Workstation-Pools als Parallelrechner genutzt.

Eine mögliche Parallelisierungstechnik für den Workstation Cluster ist die Methode der Gebietszerlegung. Das räumliche Simulationsgebiet wird in Teilgebiete aufgeteilt, die verschiedenen Prozessoren zugeordnet werden. Jeder Prozessor berechnet

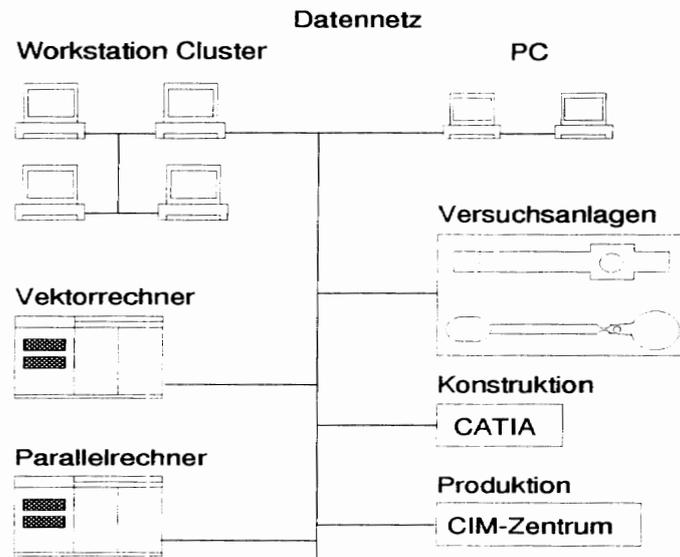


Abb. 6.36: Rechnerverbund: Workstations, PCs, Großrechner, Versuchsanlagen, Konstruktion und Produktion

nur einen Teil des Strömungsproblems auf einem verkleinerten Rechengebiet. An den Rändern der Gebiete werden zwischen den Prozessoren Informationen ausgetauscht. Deshalb ist es wichtig, die Oberfläche der Ränder möglichst zu minimieren. Damit die Parallelisierung effizient ist, muß die Rechenlast gleichmäßig auf die einzelnen Prozessoren verteilt werden. Die Abbildungen 6.37 und 6.38 zeigen Beispiele der Gebietszerlegung für die Finite-Elemente-Methode und die Monte-Carlo-Simulation.

Eine entscheidende Rolle spielt die Kommunikation zwischen den Prozessoren. Da das Programmiermodell von Parallelrechnern mit verteiltem Speicher auf dem Austausch von Daten mittels Nachrichten (Message Passing) basiert, ist die Kommunikationsleistung der maßgebliche leistungsmindernde Faktor. Verzögerungen, die durch Warten auf Nachrichten auftreten, müssen minimiert werden.

Am Beispiel einer dreidimensionalen Monte-Carlo-Simulation soll das Prinzip der Parallelisierung diskutiert werden. Wie in Kapitel 4.3.2 beschrieben, werden bei einem DSMC-Verfahren Simulationspartikel mit der Zeit entsprechend ihrer Geschwindigkeit im Simulationsgebiet bewegt und Kollisionen der Partikel unterein-

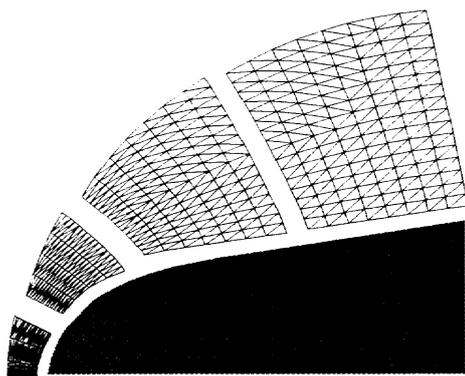
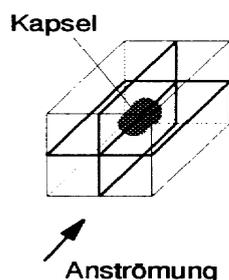


Abb. 6.37: Gebietszerlegung für die Navier-Stokes-Simulation

a)



b)

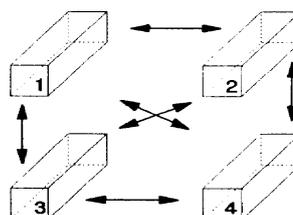


Abb. 6.38: a) Berechnungsgebiet der DSMC-Simulation, b) Gebietsaufteilung

ander durchgeführt. Diese beiden Operationen, die Bewegung und die Kollision, sind Teil eines Zeitschritts, welcher mehr als 1000 mal während einer Simulation wiederholt wird. Durch Zuordnung der Simulationspartikel entsprechend ihres Ortes zu den Prozessoren, beispielsweise entsprechend der in Abbildung 6.38 dargestellten Aufteilung, erhält man für jeden Prozessor ein Strömungsproblem mit einer kleineren Anzahl von Partikeln und einem kleineren Rechengebiet.

Der Zeitschritt kann nun parallel auf allen Prozessoren in einer entsprechend verkürzten Zeit durchgeführt werden. Nach jedem Zeitschritt muß berücksichtigt werden, daß einige Partikel aufgrund ihrer Bewegung den Bereich des zugeordneten Prozessors verlassen und einem anderen Prozessor zugeordnet werden müssen. Es müssen also Informationen, die mit den Teilchen verbunden sind, wie z.B. Ort und Geschwindigkeit der Teilchen, an andere Prozessoren weitergegeben werden. Es wird deshalb zwischen den Zeitschritten eine Kommunikationsroutine benötigt, die den Informationsaustausch zwischen den Prozessoren durchführt (Pfeile in Abbildung 6.38b).

Der Vorteil der Parellelisierung liegt in der schnelleren Abarbeitung der Programme und in der erhöhten zur Verfügung stehenden Hauptspeichergröße. Man definiert den Quotienten von Rechenzeit t_s bei seriellem Programmmlauf zur Rechenzeit t_N pro Prozessor bei N parallel eingesetzten Prozessoren als Speed-Up-Faktor ($S_N = t_s/t_N$). Im Idealfall führt die Parellelisierung bei Nutzung von N Prozessoren zu einem Speed-Up von $S_N = N$. Da aber auch für die Kommunikation zwischen den Prozessoren Zeit benötigt wird, ist der Faktor bei einer realen Anwendung häufig erheblich kleiner.

Der Nachteil eines Workstation Clusters besteht darin, daß ab einer gewissen Anzahl von Workstations die Kommunikation über ein typisches lokales Rechnernetz (Busstruktur) ineffizient wird. Es treten verstärkt Kollisionen der Nachrichten auf. Das bedeutet, die Größe eines Workstation Clusters ist nicht beliebig skalierbar. Abhilfe schaffen massiv-parallele Systeme mit optimierten Kommunikations- und Synchronisationsstrukturen, die bei der zukünftigen Generation von Parallelrechnern realisiert werden.

Dies hat zur Konsequenz, daß die Lebensdauer der entwickelten Software kurz ist. Die Entwicklungsdauer eines Simulationsprogramms von mehreren Jahren liegt im Bereich der Fortentwicklung der Hardware. Um dieses Problem zu lösen, werden Standardbibliotheken definiert, die die Kommunikation und Synchronisation hardwareunabhängig formulieren. Hierdurch wird eine einfache Portierung auf unterschiedliche Rechnerarchitekturen ermöglicht. Es ist denkbar, daß heute auf einem Workstation Cluster entwickelte Parallelprogramme in einigen Jahren auf spezialisierten Parallelrechnern eingesetzt werden können. Einen de-facto Standard stellt die PVM-Schnittstelle (Parallel Virtual Machine) dar, auf der die Parellelisierung der vorgestellten Monte-Carlo-Methode basiert.

6.3.3 Simulationsbereiche

Die numerische Simulation von Wiedereintrittsströmungen wird im Bereich verdünnter Gase ($Kn > 10^{-2}$) durch die Monte-Carlo-Methoden abgedeckt. Im Bereich der Kontinuumsströmungen existiert eine Vielzahl von Navier-Stokes-Verfahren. Die numerische Simulation erlaubt prinzipiell die Einhaltung aller Kennzahlen. Dies ist ein Vorteil gegenüber einem Windkanalexperiment. Die praktischen Grenzen der Numerik liegen dagegen in der Modellbildung. Es fehlen zum Beispiel allgemeingültige Turbulenzmodelle. Damit ist eine große Klasse technischer Probleme einer numerischen Simulation nicht zugänglich. Im Bereich der Aerothermodynamik bedürfen numerische Verfahren grundsätzlich einer experimentellen Validierung, da für die hohen Temperaturen während des Wiedereintritts die Transportkoeffizienten, die chemischen Reaktionsraten und die Wandwechselwirkung nur unzureichend theoretisch beschrieben werden können.

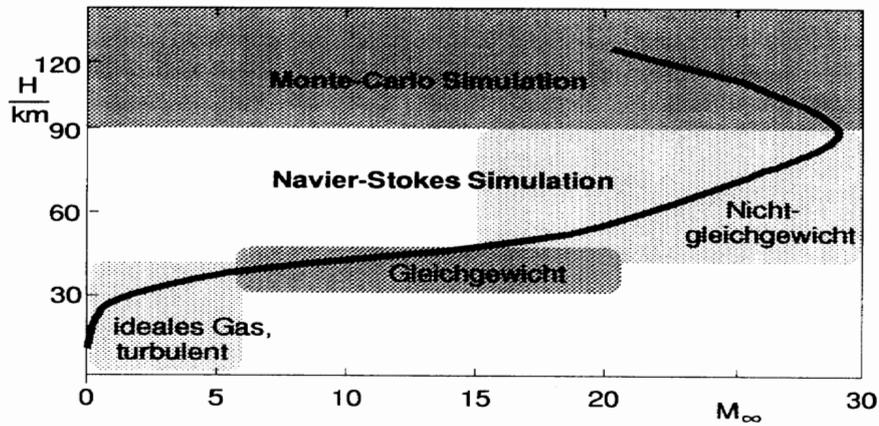


Abb. 6.39: Simulationsbereiche der numerischen Berechnungsverfahren

6.4 Validierung aerothermodynamischer Entwurfs- werkzeuge

Im abschließenden Kapitel wollen wir zeigen, wie das bisher Erlernte für den verbesserten aerothermodynamischen Entwurf einer Wiedereintrittskapsel genutzt werden kann. Wir erinnern uns daran, daß es unser Ziel war, den Wärmestrom in das Hitzeschild der Kapsel entlang der Wiedereintrittstrajektorie vorherzusagen. Ausgangspunkt war die vereinfachte Korrelation von Fay-Riddell 1958 (Kapitel 5.3.1). Zunächst sollen jedoch das Entwurfskonzept einer Wiedereintrittskapsel und das Validierungskonzept der numerischen und experimentellen Methoden als Voraussetzung für die Entwicklung aerothermodynamischer Entwurfswerkzeuge von Wiedereintrittsflugkörpern beschrieben werden.

6.4.1 Entwurfskonzept

Der aerothermodynamische Entwurf einer Wiedereintrittskapsel beginnt mit der Festlegung der Projektanforderungen bezüglich:

- Größe der Wiedereintrittskapsel
- Nutzlast
- Wiedereintrittstrajektorie
- Aerodynamische Stabilität
- Landegenauigkeit

Diese Anforderungen führen zwangsläufig auf eine Kugel-Kegelkonfiguration der Wiedereintrittskapsel. Die Kugelkappe sollte dabei einen möglichst großen Krümmungsradius besitzen (Abbildung 6.6), um den Wärmeübergang auf das Hitzeschild (Gleichungen 5.100, 5.101) gering zu halten. Die Kegelflanke der Kapsel sichert die aerodynamische Stabilität beim Wiedereintrittsflug und erhöht damit die Landegenauigkeit. Nachdem die Konfiguration der Wiedereintrittskapsel festliegt, gilt es entsprechend der Nutzlastanforderungen (s. Kapitel 6.1.2) den Krümmungsradius und den Kegelwinkel zu optimieren. Dazu nutzen wir entsprechend Abbildung 6.40 die in Kapitel 4 und 5 beschriebenen numerischen Nachrechenverfahren und die Versuchsanlagen von Kapitel 6.2. Dabei verstehen wir unter der Teilvalidierung der numerischen Verfahren beispielsweise die Anpassung des chemischen Modells an die Versuchsbedingungen. Als Ergebnis der numerischen Simulationsrechnung erhalten wir nach 2-3 Iterationen mit dem Experiment eine erste Vorhersage des Wärmestroms \dot{q} auf die Wiedereintrittskapsel. Die Messungen in den Versuchsanlagen liefern ergänzend den Widerstandsbeiwert c_W und den Auftriebsbeiwert c_A der Kapsel bei unterschiedlichen Anstellwinkeln. Mit diesen Vorgaben wird die Kapsel gebaut und mit einer quantitativen Validierungssensorik bestückt geflogen. Als Ergebnis werden wir die erwarteten Abweichungen vom vorausberechneten Wärmestrom (Abbildung 6.7) und von den im Windkanal ermittelten Widerstands- und Auftriebsbeiwerten erhalten. Hier setzt die Aufgabe des Entwurfs-Ingenieurs ein, die numerischen Simulationsmethoden und die chemischen Wand-Wechselwirkungs-

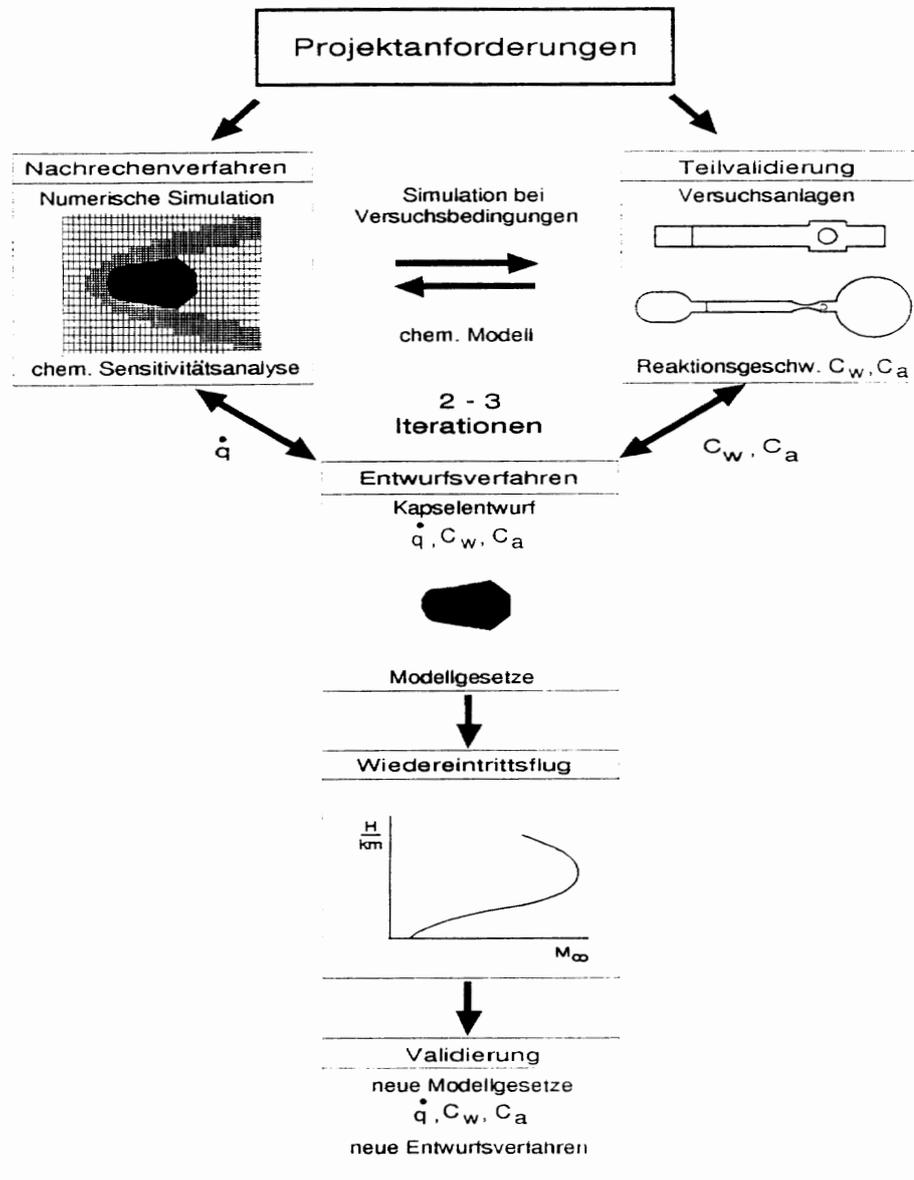


Abb. 6.40: Entwurfskonzept einer Wiedereintrittskapsel

modelle dem Freiflug-Experiment so anzupassen, daß daraus verbesserte Entwurfsverfahren abgeleitet werden können. Diesen Prozeß nennen wir Validierung der numerischen und experimentellen Entwurfsmethoden.

6.4.2 Validierungskonzept

Wir gehen von den beim Wiedereintrittsflug gemessenen Wärmeströmen \dot{q} und den aerodynamischen Beiwerten c_w und c_a aus (Abbildung 6.41). Mit den im vorangegangenen Kapitel teilvalidierten numerischen Verfahren berechnen wir jetzt unter

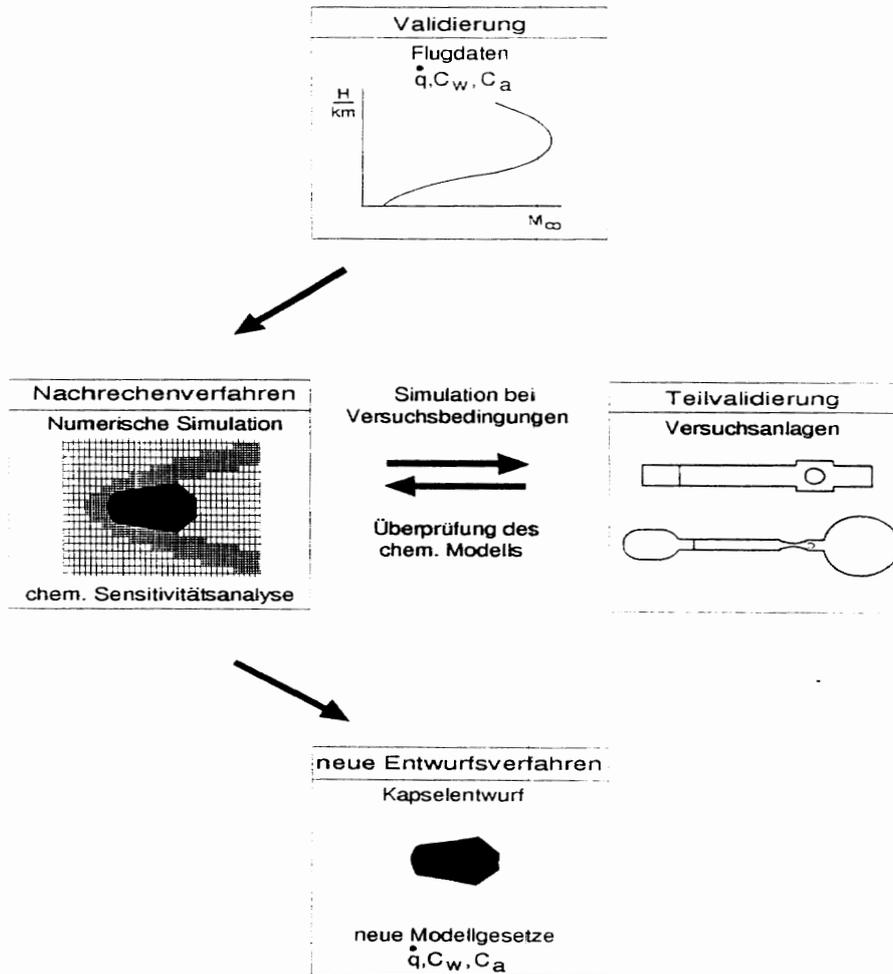


Abb. 6.41: Validierungskonzept für den verbesserten aerodynamischen Entwurf zukünftiger Wiedereintrittskapseln

den Anströmbedingungen der geflogenen Wiedereintrittstrajektorie das Strömungsfeld. Wir wiederholen die Experimente mit den beim Flug aufgetretenen Machzahlen, Reynoldszahlen und Temperaturen im Strömungsfeld entsprechend der jeweiligen Möglichkeiten der Versuchsanlagen und vergleichen sie mit den numerischen Ergebnissen. Die in Kapitel 3.6 und 5.4 beschriebenen chemischen Sensitivitätsanalysen ermöglichen die Anpassung der in den numerischen Verfahren benutzten chemischen Modelle an die Wiedereintrittsflugbedingungen.

Danach folgt der entscheidende Schritt, die Ableitung vereinfachter Modellgesetze für die verbesserte Vorhersage des Wärmestroms \dot{q} und der aerodynamischen Parameter, die die neuen Entwurfsverfahren für die Auslegung zukünftiger Wiedereintrittskapseln darstellen.

6.4.3 Vereinfachte Modellgesetze

Die vorgestellten Simulationsverfahren im gaskinetischen und kontinuumsmechanischen Bereich stellen aufwendige Nachrechenverfahren dar. Für die ersten Phasen des Entwurfs einer Wiedereintrittskapsel sind jedoch schnelle Entwurfsverfahren beziehungsweise vereinfachte Modellgesetze erforderlich, die Parameterstudien zulassen. Exakte Gleichungen für die lokalen aerodynamischen Größen Druck, Wand Schubspannung und Wärmestrom auf der Oberfläche der Kapsel lassen sich jedoch nur im freimolekularen Bereich der Wiedereintrittstrajektorie angeben, wobei schon in diesem Fall Unsicherheiten infolge der zu spezifizierenden Akkommodationskoeffizienten entstehen. Bei der Darstellung der verfügbaren vereinfachten Modellgesetze folgen wir der Bereichseinteilung der Abbildung 6.39.

Freimolekulare Strömung:

Die exakten aerodynamischen Beiwerte sind Funktionen der molekularen Machzahl $S_\infty = u_\infty/c_{mp}$, der Akkommodationskoeffizienten σ_N , σ_T und σ_E , des Anstellwinkels Θ_n und der Wandtemperatur T_w . Θ_n bezeichnet hier den Winkel zwischen der Anströmung und der Oberflächennormalen. Für stumpfe Körper ($S_\infty \cdot \cos \Theta_n > 1$) gilt:

$$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = (2 - \sigma_N) 2 \cdot \cos^2 \Theta_n + \sigma_N \sqrt{\pi} \frac{\cos \Theta_n}{S_W} \quad (6.7)$$

$$\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = 2 \cdot \sigma_T \cdot \sin \Theta_n \cdot \cos \Theta_n \quad (6.8)$$

$$\frac{\dot{q}}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^3} = \sigma_E \cdot \cos \Theta_n \left(1 - \frac{2}{S_W^2}\right) \quad (6.9)$$

mit $S_W = u_\infty / \sqrt{2(k/m)T_w}$. Im Grenzübergang $S_\infty \cdot \cos \Theta_n \rightarrow \infty$ ist hierin als Sonderfall die Newton-Theorie enthalten ($\sigma_N = 1$, $\sigma_T = 0$, $T_w = 0$):

$$\frac{p}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = 2 \cdot \cos^2 \Theta_n \quad (6.10)$$

$$\frac{\tau}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2} = 0 \quad (6.11)$$

Die Gesamtbeiwerte c_A , c_W und c_H ergeben sich aus der Integration der lokalen Beiwerte über die gesamte Kapseloberfläche (Gleichung (5.37), (5.38), (4.73)). Der Vergleich der Beiwerte des Bremsat-Satelliten ($c_W = 2,15$, $c_H = 1,05$) und der Express-Kapsel ($c_W = 2,06$, $c_H = 0,97$) zeigt die Geometrieabhängigkeit im freimolekularen Bereich.

Im Übergangsbereich sind keine einfachen Modellgesetze ableitbar, da keine wesentlichen Vereinfachungen der Grundgleichungen möglich sind. Die Strömung zwischen Kopfwelle und Kapsel ist voll viskos, d.h. eine Trennung zwischen Grenzschicht und reibungsfreier Außenschicht ist nicht möglich. Der Wärmeübergang ist jetzt nicht allein von der Körperform, der molekularen Machzahl und der Gasoberflächenwechselwirkung, sondern auch von der Knudsenzahl, d.h. von der Körpergröße, abhängig. Für die Berechnung des Wärmestroms muß eine vollständige gaskinetische Simulation durchgeführt werden. Lediglich die Newton-Theorie zur Berechnung der Druckverteilung ($c_p = 2 \cdot \cos^2 \Theta_n$) besitzt Gültigkeit. Im kontinuumsmechanischen Bereich ist jedoch mittels der modifizierten Newton-Theorie (Kapitel 5.3.1) eine genauere Vorhersage möglich.

Kontinuumsmechanischer Bereich der Wiedereintrittstrajektorie:

Mit steigender Reynoldszahl wird ab etwa 75 km Höhe die Grenzschicht-Approximation gültig. Damit steht wieder ein Ansatz zur Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen zur Verfügung. Im chemischen Nichtgleichgewicht existiert jedoch nur für die Staupunktströmung eine Ähnlichkeitslösung der Grenzschichtgleichungen (J.A. FAY, F.R. RIDDELL 1958). Das bedeutet, daß sich die rotations-symmetrischen Gleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückführen lassen. Die Lösung dieser Gleichungen ist auf einer Workstation bzw. einem PC möglich. Außerhalb des Staupunkts müssen im Nichtgleichgewicht die Grenzschichtgleichungen bzw. die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst werden. Im chemischen Gleichgewicht existieren ebenfalls nur wenige Ähnlichkeitslösungen, beispielsweise für den spitzen Kegel und die Plattengrenzschicht.

Um zu einfachen Berechnungsformeln zu gelangen, müssen die Ergebnisse einer großen Anzahl von Simulationen und Experimenten für eine bestimmte Geometrie in Korrelationsformeln zusammengefaßt werden. Diesen Weg haben Fay und Riddell hinsichtlich des Wärmestroms im Staupunkt aufgezeigt. Dies führte auf die drei folgenden Gleichungen (Bezeichnungen vgl. Kapitel 5.3.1):

Gleichgewichtsgrenzschicht:

$$\dot{q}_s = 0,763 Pr^{-0,6} (\rho_e \mu_e)^{0,4} (\rho_w \mu_w)^{0,1} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s} (h_{0e} - h_w) \left[1 + (Le^{0,53} - 1) \frac{h_D}{h_{0e}}\right] . \quad (6.12)$$

Gefrorene Grenzschicht mit vollkatalytischer Wand:

$$\dot{q}_s = 0,763 Pr^{-0,6} (\rho_e \mu_e)^{0,4} (\rho_w \mu_w)^{0,1} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s} (h_{0e} - h_w) \left[1 + (Le^{0,63} - 1) \frac{h_D}{h_{0e}}\right] . \quad (6.13)$$

Gefrorene Grenzschicht mit nichtkatalytischer Wand:

$$\dot{q}_s = 0,763 Pr^{-0,6} (\rho_e \mu_e)^{0,4} (\rho_w \mu_w)^{0,1} \sqrt{\left(\frac{du_e}{dx}\right)_s} (h_{0e} - h_w) \left[1 - \frac{h_D}{h_{0e}}\right] \quad (6.14)$$

mit der Bildungsenthalpie $h_D = \sum_i c_{ie}(\Delta h_f)_i$.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Formeln liegt in der Angabe der Randbedingungen am Grenzschichttrand und an der Wand. Fay und Riddell nehmen am Grenzschichttrand eine Gleichgewichtszusammensetzung hinter einem senkrechten Stoß an. Diese Annahme ist umso besser erfüllt, je größer der Krümmungsradius und je niedriger die Flughöhe ist. Die Viskosität am Grenzschichttrand ist aufgrund der hohen Temperaturen und der ungenau bekannten Gaszusammensetzung schwierig zu bestimmen. Ein Fehler am Grenzschichttrand geht mit größerer Potenz ein als an der Wand. Die Wandtemperatur ist a priori unbekannt und muß im Fall des Modells der strahlungsadiabaten Wand über eine Iteration bestimmt werden. Ein Fehler von 30% bezüglich der Vorhersage des Wärmestroms ist nicht ungewöhnlich. Eine eventuelle Ablation des Hitzeschildes wird durch diese Formeln nicht berücksichtigt.

Wegen der unsicheren Berechnung der Transportkoeffizienten (k und D gehen in dimensionsloser Form als Pr bzw. Le ein), die nicht nur von der Temperatur, sondern auch von der Gaszusammensetzung abhängen, ist die Lösung der zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung von 7 Spezies (O_2 , N_2 , NO , NO^+ , O , N , e^-) zur Nachrechnung eines Entwurfs erforderlich. Damit entfällt die ungenaue Wiedergabe der Grenzschichtlösungen durch eine Korrelation. Hierbei ist die Annahme einer konstanten Prandtl-Zahl und Lewis-Zahl nicht mehr erforderlich. Die Genauigkeit der Grenzschicht-Methode kann durch die inzwischen weiterentwickelten Modelle zur Berechnung der Transporteigenschaften und der chemischen Reaktionsraten gegenüber dem Modell von Fay/Riddell verbessert werden.

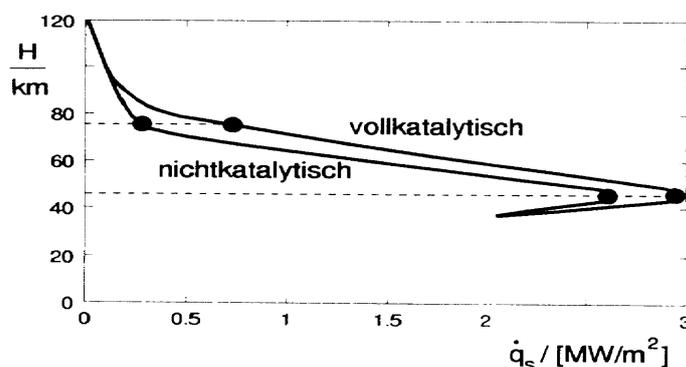


Abb. 6.42: Wärmestrom im Staupunkt der Wiedereintrittskapsel entlang der Trajektorie

Abbildung 6.42 zeigt den Verlauf des Wärmestroms im Staupunkt der Wiedereintrittskapsel aus Kapitel 4 und 5. Oberhalb von 100 km Höhe besitzt die Chemie keinen Einfluß auf den Wärmestrom. In 90 km Höhe ist der Wärmestrom bei einer vollkatalytischen Oberfläche um etwa 10% größer als bei einer nichtkatalytischen Oberfläche. Das Verhältnis der Wärmeströme bei vollkatalytischer und nichtkatalytischer Oberfläche vergrößert sich auf über 100% unterhalb von 75 km Höhe. Dieses Potential verringert sich wieder, je weiter sich die Strömung dem chemischen Gleichgewicht nähert. Es ist von der Wiedereintrittstrajektorie und der Kapselgröße abhängig. Im chemischen Gleichgewicht spielen die katalytischen Eigenschaften keine Rolle mehr.

Angesichts der großen Anzahl der eingehenden Parameter ist die Angabe von Korrelationen anhand einer begrenzten Anzahl Navier-Stokes-Rechnungen relativ schwierig. Abgesehen von einfachen Kapselgeometrien stellen Wiedereintrittsflugkörper bzw. Hyperschallflugzeuge sehr komplexe Geometrien dar, die nicht mit einfachen Korrelationen entworfen und optimiert werden können. Deshalb sind mit Freiflugexperimenten validierte numerische Methoden zur Nachrechnung eines Entwurfs erforderlich.

Ausgewählte Literatur

- J.D. Anderson jr.:
Modern Compressible Flow: with Historical Perspective, McGraw-Hill, New York, 1982
- J.D. Anderson jr.:
Hypersonic and High Temperature Gas Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1989
- E. Becker:
Gasdynamik, Teubner, Stuttgart, 1966
- R.B. Bird, W.E. Stewart, E.N. Lightfoot:
Transport Phenomena, Wiley, New York, 1960
- G.A. Bird:
Molecular Gas Dynamics, Clarendon Press, Oxford, 1976
- C. Borgnakke, P.S. Larsen:
Statistical Collision Modell for Monte Carlo Simulation of Polyatomic Gas Mixture, Journal of Computational Physics 18 (1975)
- V. di Christina:
Three-Dimensional Laminar Boundary Layer Transition on a Sharp 80 Cone at Mach 10, AIAA Journal 8 (1970)
- J.F. Clarke, M. McChesney:
Dynamics of Relaxing Gases, Butterworths, 1976
- R. Courant, K.O. Friedrichs:
Supersonic Flow and Shock Waves, Springer, New York, 1976
- L. Crocco:
Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation, ZAMM 17 (1937)
- N.A. Derzko:
Review of Monte Carlo methods in kinetic theory, UTIAS Review 35, University of Toronto, 1972
- J.A. Fay, F.R. Riddell:
Theory of Stagnation Point Heat Transfer in Dissociated Air, Journal of the Aeronautical Sciences 25 (1958)
- A. Frohn:
Einführung in die Kinetische Gastheorie, AULA-Verlag, Wiesbaden, 1988
- J.O. Hirschfelder, Ch.F. Curtis, R.B. Bird:
Molecular Theory of Gases and Liquids, Wiley, New York, 1954
-

- M.S. Ivanov, S.V. Rogasinsky:
Theoretical Analysis of Traditional and Modern Schemes of the DSMC Method, Proc. 17th RGD Symposium, Aachen 1990, Verlag Chemie, 1991
- LaVision Firmeninformation:
Fa. LaVision 2S-Meßtechnik GmbH, Notepad, Göttingen, 1993
- H.W. Liepmann, A. Roshko:
Elements of Gasdynamics, Wiley, New York, 1957
- R. Löhner:
Finite element flux-corrected transport (FEM-FCT) for Euler and Navier-Stokes equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids 7 (1987)
- J.N. Moss, G.A. Bird:
Direct Simulation of Transitional Flow for Hypersonic Reentry Conditions, AIAA Paper 84-0223 (1984)
- K. Nanbu:
Numerical Simulation of Boltzmann Flows of Real Gases — Accuracy of Models used in the Monte Carlo Method, Rep. Inst. Fluid Science 4 (1992), Tohoku University, Sendai, Japan
- H. Oertel sen.:
Stoßrohre, Springer Verlag, Wien, 1966
- H. Oertel sen., H. Oertel jr.:
Optische Strömungsmeßtechnik, Springer, Berlin, Heidelberg, 1989
- H. Oertel jr.:
Berechnungen und Messungen der Dissoziationsrelaxation hinter schief reflektierten Stößen in Sauerstoff, Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 1974
- H. Oertel jr.:
Turbulenzentstehung (Stabilitätstheorie) in K. Gersten-H. Schlichting, Grenzschichttheorie, Springer, Berlin, Heidelberg, 1994
- H. Oertel jr., H. Körner (Eds.):
Orbital Transport — Technical, Meteorological and Chemical Aspects, Proc. Third Aerospace Symposium Braunschweig 1991, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993
- H. Oertel jr., M. Böhle:
Strömungsmechanik, Methoden und Phänomene, Springer, Berlin, Heidelberg, 1994
- H. Oertel jr., E. Laurien:
Numerischen Strömungsmechanik, Springer, Berlin, Heidelberg, 1994
- H. Oertel jr., M. Böhle, J. Delfs:
Strömungsmechanische Instabilitäten, Springer, Berlin, Heidelberg, 1994
-

- K. Oswatitsch:
Gasdynamik I u. II, Springer, Wien, 1976, 1977
- Ch. Park:
Nonequilibrium Hypersonic Aerothermodynamics, Wiley, New York, 1989
- Ch. Park:
On Convergence of Computation of Chemically Reacting Flows, AIAA Paper 85-0247 (1985)
- G.A. Tirskey:
Up-to-date Gasdynamic Models of Hypersonic Aerodynamics and Heat Transfer with Real Gas Properties, Annual Review Fluid Mechanics 25 (1993)
- W.G. Vincenti, Ch.H. Kruger jr.:
Introduction to Physical Gas Dynamics, Wiley, New York, 1965
- J. Warnatz, U. Maas:
Technische Verbrennung — Physikalisch-Chemische Grundlagen, Modellbildung, Schadstoffentstehung, Springer, Heidelberg, 1993
- J. Zierep:
Theoretische Gasdynamik, Braun Verlag, Karlsruhe, 1976
- J. Zierep:
Grundzüge der Strömungslehre, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993
-

Sachwortverzeichnis

- Akkommodationskoeffizient, 66, 115
Arrhenius-Ansatz, 44, 109
Atmosphäre, 138
Auftriebsbeiwert, 93
- Blackout, 38
Boltzmann-Verteilung, 32, 34
Boltzmann-Gleichung, 60, 67
BREMSAT, 140
- CFL-Zahl, 128
- Differentialinterferometer, 166
Diffusion, 107
Diffusionskoeffizient, 112
Direkte Monte-Carlo-Simulationsmethode (DSMC), 68, 69, 152
Dissoziation, 35
- Enthalpie, 25
Entropie, 25, 28, 29
Eucken-Approximation, 112
Expansion, 53, 84, 92
EXPRESS, 144
- Fickscher Ansatz, 107
Finite-Elemente-Methode, 122
Fourierscher Wärmeleitungsansatz, 107
Freie Molekülströmung, 6
Freie Weglänge, 5, 22, 56
Freier Staupunkt, 53
- Gas-Oberflächenwechselwirkung, 65, 114
Gasdynamik, 19
Gaskinetik, 5, 21, 54
Gaskonstante, 26
Geforene Strömung, 84
Gesamtenergie, 106
Geschwindigkeit
 häufigste, 31
 mittlere, 31, 62
 wahrscheinlichste, 62
Gladstone-Dale-Konstante, 167, 168
Gleichgewichtdissoziationsgrad, 79
Grenzschicht, 95
 Dicke, 97
- Entropie, 17
Grenzschichttheorie, 19
Plattengrenzschicht, 95
Staupunkt, 119, 180
Strömungsgrenzschicht, 18, 95
Temperaturgrenzschicht, 18, 81, 95, 130
- Gun-Tunnel, 163
- Haftbedingung, 113
Harmonischer Oszillator, 33, 40, 109
Hauptsatz der Thermodynamik, 28, 29
Herzkurvendiagramm, 91
Hochtemperatureffekte, 8
Hugoniot-Kurve, 87
Hyperschall, 2
 Einfriereigenschaft, 11, 93
 Grenzschicht, 95
 Grenzwerte, 86
 kalter, 158, 163
 Transition, 98
- Innere Energie, 25, 30
- Knudsenzahl, 5, 57, 67
Kollisionsrate, 56
Kontinuumsmechanik, 5
Konzentration
 Änderung, 42, 131
 molare, 14
- Kopfwelle, 11
 Abstand, 12
- Kugelmodell
 harte Kugeln, 59
 VHS, 59
- Lambda-Strukturen, 98
Lewiszahl, 119
Luftchemie, 14
- Machsche Welle, 92
Machzahl, 5
Mack-Mode, 100, 102, 104
Majorant Frequency Scheme, 72
Makroskopisch, 55
Maxwell-Verteilung, 31, 61

- Mehrtemperaturmodell, 109
 Mikroskopisch, 55
 Molecular Dynamics (MD), 68
- Nachlaufströmung, 6, 53
 Navier-Stokes-Gleichungen, 105
 Newton-Approximation, 117, 179
 Nichtgleichgewicht, 13, 39, 84, 107
 No Time Counter Scheme, 72
 Numerische Methoden, 121
- Parallelisierung
 Gebietszerlegung, 172
 Workstation Cluster, 172
 Prandtlzahl, 19, 119
- Quantenmechanik, 31
 Quellterm, 107
- Rayleigh-Gerade, 87
 Reaktionsgeschwindigkeiten, 109
 Reaktionsgleichungen, 47
 Realgaseffekte, 8
 Reflexion, 65
 Relaxation, 13, 48
 Rotationsenergie, 30
- SALYUT, 150
 Schallgeschwindigkeit, 25
 Schwingungsenergie, 33
 Schwingungsrelaxation, 109
 Schwingungstemperatur, 35
 Sensitivitätsanalyse, 47, 132
 Stabilitätsanalyse, 101
 Stefan-Boltzmann-Gesetz, 114
 Sterikfaktor, 77
 Stoßmachzahl, 160
 Stoßrohr, 158
 Streuquerschnitt, 5, 22
 Stufentrennung, 153
 Sutherland-Gesetz, 96
- Taylor-Galerkin-Methode, 122
 Teilchendichte, 55
 Teilchenflußsonde, 140
 Temperatur
 Translationstemperatur, 41, 55
 Vibrationstemperatur, 41
 Tollmien-Schlichting-Welle, 98
- Totalenthalpie, 96
 Transition, 98
 Translationsenergie, 27, 30
- Validierung, 176, 178
 Verdünnungseffekte, 20, 52
 Verdichtungsstoß, 85
 Druckverhältnis, 90
 schiefer, 89
 schwache, starke Lösung, 91
 senkrechter, 85
 Stoßdicke, 22
 Stoßwinkel, 90
 Umlenkwinkel, 90
- Verteilungsfunktion, 54, 60, 65, 75
 Momente, 55
- Wärmeleitfähigkeit, 110
- Wand
 adiabat, 113
 isotherm, 113
 katalytisch, 114, 180
 strahlungsadiabat, 113
- Wand-Wechselwirkungsmodell, 65, 114
 Wechselwirkungspotential, 59
- Wellen
 Störwellenansatz, 101
- Wiedereintrittstrajektorie, 3
 ballistisch, 5
 mit Auftrieb, 135
- Widerstandsbeiwert, 93
 Wirbelstärke, 17
- Zähigkeit, 110
- Zustandsänderung
 isentrop, 93
- Zustandsgleichung
 kalorisch, 12, 24, 27, 31, 33, 35, 36
 thermisch, 12, 24, 25
- Zweitemperaturmodell, 47, 109

Anhang

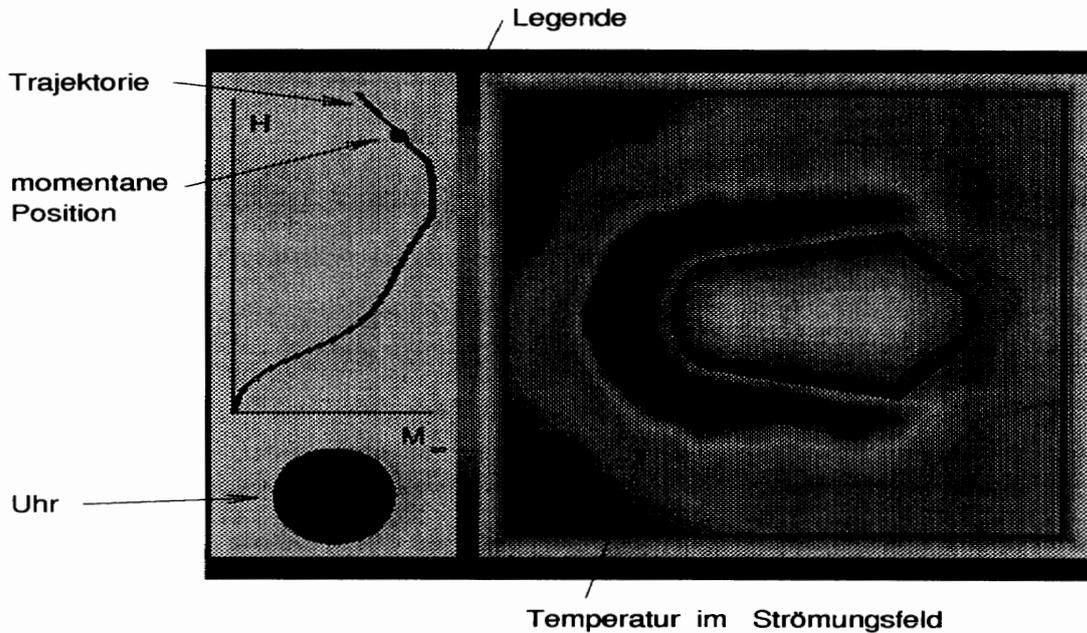


Abb. A.1: Lehrfilm zum Wiedereintritt einer Kapsel

Ergänzend zum Lehrstoff der Aerothermodynamik wurde ein Lehrfilm zum Wiedereintritt einer Raumkapsel erstellt. Hierzu wurde die Umströmung der Kapsel in verschiedenen Höhen der Wiedereintrittstrajektorie berechnet. Die Interpolation zwischen diesen Lösungen ergab über 900 Einzelbilder. Abbildung A.1 zeigt ein solches Einzelbild. Neben der im Film farbig dargestellten Temperaturverteilung im Strömungsfeld ist die Wiedereintrittstrajektorie als Höhen- M_∞ -Diagramm mit der momentanen Position der Kapsel und der eingeblendeten Zeit zu erkennen. Der reale Wiedereintritt einer Kapsel dauert etwa 300 Sekunden.

Abbildung A.2 zeigt eine Folge von Einzelbildern entlang der Wiedereintrittstrajektorie. Im gaskinetischen Bereich reicht der Einfluß der Kapsel sehr weit ins Strömungsfeld hinein. Im Übergangsbereich formiert sich ein scharfer Verdichtungsstoß, der mit abnehmenden chemischen Nichtgleichgewichtseffekten immer näher an die Kapsel wandert und einen begrenzten Bereich hoher Temperatur zur Folge hat. Im Bereich kleiner Überschallmachzahlen entfernt sich der Stoß wieder von der Kapsel, bis er schließlich bei $M_\infty = 1$ ins Unendliche wandert.

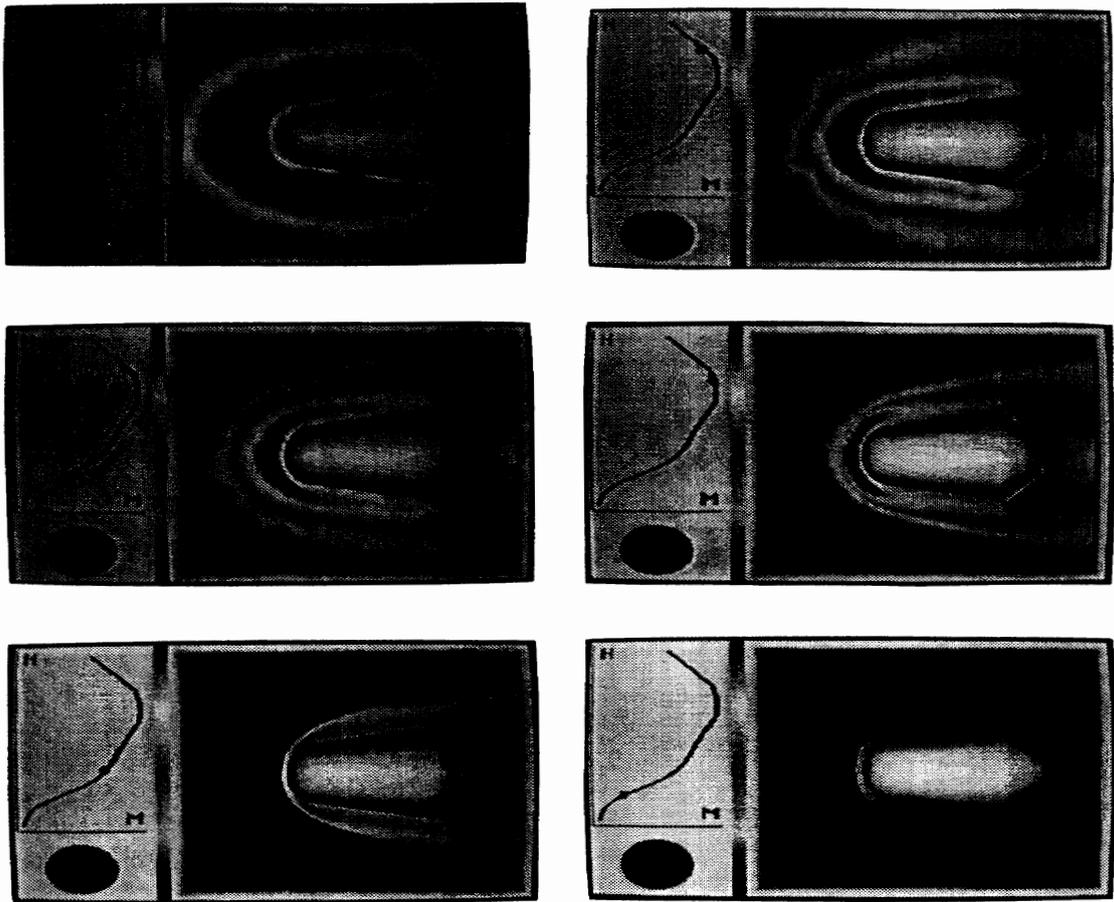


Abb. A.2: Temperaturfeld in verschiedenen Höhen der Wiedereintrittstrajektorie