

Zum Satz von Belyi in Dimension zwei

Zur Erlangung des akademischen
Grades eines

DOKTORS DER
NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe (TH)
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Horst Hammer

aus Schramberg

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 2005
Referent: Prof. Dr. Frank Herrlich
Korreferent: PD Dr. habil. Stefan Kühnlein

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Der Satz von Belyi	7
2.1	Der 1. Schritt	7
2.2	Der 2. Schritt	9
3	Belyis Satz und Modulräume	10
3.1	Die Modulräume $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ und $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$	11
3.1.1	$\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$	11
3.1.2	$\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$	12
3.2	Die Verallgemeinerung	13
3.3	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und \mathbb{P}^2	15
4	Einige Klassen von Flächen	18
4.1	Flächenklassifikation	18
4.2	Beweis der Vermutungen für einige Klassen	19
4.2.1	Minimale Flächen mit Kodaira-Dimension -1	19
4.2.2	Minimalflächen mit $\kappa(X) = 0$	20
4.2.3	Minimalflächen mit $\kappa(X) = 1$	22
4.2.4	Minimalflächen mit $\kappa(X) = 2$	22
5	Abelsche Flächen	23
5.1	Isogenien	23
5.2	Klassifikation der Abelschen Flächen	24
5.3	Vermutung 2 für Abelsche Flächen	29
6	Spezielle Situationen	31
6.1	Spezielle kritische Orte	31
6.2	Spezielle Flächen	36
7	Zusammenfassung und Ausblick	39
7.1	Nichtsingularität	39
7.2	Höhere Dimension	40

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	2
8 Anhang	41
8.1 Der 1. Schritt	42
8.2 Der 2. Schritt	49
8.3 Der 3. Schritt	52
8.4 Der 4. Schritt	58
8.5 Der 5. Schritt	59
Literaturverzeichnis	62

Kapitel 1

Einleitung

Eines der großen Mysterien im Schnittgebiet zwischen algebraischer Geometrie, Zahlentheorie und komplexer Geometrie ist die Struktur der absoluten Galois-Gruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Ziel vieler Anstrengungen in den letzten 20 Jahren war es, diese Gruppe besser zu verstehen. Ein großer Schritt in diese Richtung ist die Definition der Grothendieck-Teichmüller-Gruppe \widehat{GT} . Diese durch Erzeuger und Relationen angegebene Gruppe enthält $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Bis heute ist jedoch nicht klar, ob beide Gruppen sogar gleich sind.

Will man $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ verstehen, so ist es nützlich, ein Kriterium zu haben, um die über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten algebraischen Varietäten von denen zu unterscheiden, die nicht über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert sind. In Dimension 1 ist dies vollständig gelungen durch den **Satz von Belyi** (siehe Kapitel 2): Über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive nichtsinguläre Kurven sind genau diejenigen, die $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ endlich und höchstens über drei Punkten verzweigt überlagern. Belyi konstruiert im Beweis seines Satzes einen Algorithmus, mit dessen Hilfe man für jede über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte nichtsinguläre projektive Kurve X einen solchen *Belyi-Morphismus* erhält. Da der Algorithmus von einem beliebigen nichtkonstanten Element des Funktionskörpers von $X/\overline{\mathbb{Q}}$ ausgeht, erhält man sehr viele verschiedene Belyi-Morphismen für eine gegebene Kurve X . Nun hat jede nichtsinguläre projektive Kurve über \mathbb{C} die Struktur einer Riemannschen Fläche. Ist die Kurve über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, so kann man sich auf ihr das Urbild des reellen Intervalls $[0, 1] \subset \mathbb{P}^1$ unter einem Belyi-Morphismus ansehen. Das ergibt eine kombinatorische Struktur auf X , die Grothendieck *dessin d'enfants*, Kinderzeichnung, genannt hat. Es stellt sich heraus, daß $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ treu auf der Menge der Kinderzeichnungen operiert. Das genaue Studium dieser Operation führt zu einem besseren Verständnis der absoluten Galois-Gruppe, genügt aber bisher nicht, um sie vollständig zu beschreiben.

Nun erscheint es natürlich, als nächstes den zweidimensionalen Fall zu betrachten, um sich weitere Strukturen zu verschaffen, auf denen $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ operiert. Deshalb versucht man, die über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten algebraischen *Flächen* in ähnlicher Weise wie im Satz von Belyi zu charakterisieren. Hierzu hat Grothendieck in seiner *Es-*

quisse d'un programme (siehe [GRO]) vorgeschlagen, den Modulraum $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ der stabilen projektiven Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 mit 5 ausgezeichneten Punkten zu überlagern. Dieser Ansatz wird auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt. Im Zweidimensionalen gibt es, anders als im Eindimensionalen, keinen eindeutig bestimmten nichtsingulären projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$. Deshalb wird in dieser Arbeit die folgende Vermutung als Verallgemeinerung des Satzes von Belyi auf Dimension 2 betrachtet:

Vermutung 1. *Sei X eine nichtsinguläre über \mathbb{C} definierte projektive Fläche. Genau dann ist X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, wenn X birational äquivalent zu einer projektiven normalen Fläche X' ist, die einen nichtsingulären über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ endlich und über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt überlagert.*

Proposition 3.3 in Kapitel 3 zeigt, daß jeder solche Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ im Sinne der Vermutung gleich gut ist, denn hat man für einen solchen Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ eine Überlagerung wie in der Vermutung gefunden, so auch für jeden anderen. Im allgemeinen sind die hierbei betrachteten überlagernden Flächen jedoch lediglich normal. Will man nichtsinguläre Flächen bekommen, die eine in Vermutung 1 geforderte Überlagerung tragen, so muß man sich bei der Wahl des projektiven Abschlusses von $\mathcal{M}_{0,5}$ einschränken. Obwohl Vermutung 1 nicht vollständig bewiesen ist, soll dennoch eine wesentlich schärfere Formulierung betrachtet werden:

Vermutung 2. *Sei X eine über \mathbb{C} definierte nichtsinguläre projektive Fläche. Genau dann ist X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, wenn X birational äquivalent ist zu einer **nichtsingulären** projektiven Fläche X' über $\overline{\mathbb{Q}}$, die eine endliche Überlagerung auf einen nichtsingulären über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ besitzt, die höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt.*

In der Tat zeigen die zentralen Resultate der vorliegenden Arbeit, Satz 11 und Satz 8, die Vermutung 2 für Abelsche und hyperelliptische Flächen. Für Flächen, die birational äquivalent zum Produkt zweier über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierter Kurven sind, gilt Vermutung 2 ebenfalls.

Volker Braungardt hat in seiner Dissertation [BR1] auch für die elliptischen und Enriques-Flächen, sowie für einige K3-Flächen einen Beweis von Vermutung 1 gefunden. Die dort präsentierten Resultate werden in der vorliegenden Arbeit der Vollständigkeit halber kurz zusammengetragen. Da in [BR1] jedoch immer $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ überlagert wird, konnten Braungardts Resultate in einigen Fällen durch die größere Flexibilität, die Vermutungen 1 und 2 bei der Wahl eines projektiven Abschlusses von $\mathcal{M}_{0,5}$ liefern, verbessert werden.

Es sei hier noch erwähnt, daß Igor Ronkin in seiner Diplomarbeit [RON], sowie Kapil Hari Paranjape in seinem Artikel [PAR] den konzeptionellen Weg Grothendiecks verlassen haben und auf andere Art und Weise vollständige Charakterisierungen der über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten nichtsingulären projektiven Flächen gefunden

haben. Erwähnt sei an dieser Stelle auch die Dissertation [WEN] von Andreas Weng. Diese beschäftigt sich ebenfalls mit einer Verallgemeinerung des Satzes von Belyi auf höhere Dimension und formuliert Vermutung 1. Desweiteren beschäftigt sie sich mit einer Verallgemeinerung der *dessins d'enfants* auf höhere Dimension. Im Rahmen eines Kurzaufenthaltes bei Professor Wolfart in Frankfurt hat mich Andreas Weng darauf aufmerksam gemacht, wie das Bild des Komplements von $\mathcal{M}_{0,5}$ in der Realisierung auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nach Ausdividieren der Operation der symmetrischen Gruppe S_2 auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ aussieht. Dies ermöglichte es mir in der weiteren Diskussion, eine erste Vorversion des in Abschnitt 3.3 angegebenen Morphismus zu konstruieren, was zum Beweis von Vermutung 1 für Abelsche Flächen führt. Diese Version findet sich auch in Wengs Dissertation [WEN] wieder. In der Zwischenzeit konnte ich dieses Resultat jedoch deutlich verbessern.

Ein Wort zur Gliederung der vorliegenden Arbeit.

Kapitel 2 enthält die wesentlichen Schritte im Beweis des Satzes von Belyi. Dieser wird im weiteren Verlauf der Arbeit eine zentrale Rolle spielen.

Kapitel 3 stellt den Zusammenhang des Satzes von Belyi mit den erwähnten Modulräumen her und erläutert die von Grothendieck vorgeschlagene Vorgehensweise. Danach wird mit den Vermutungen 1 und 2 das erhoffte Ziel abgesteckt. Proposition 3.3 und Abschnitt 3.3 sind erste Schritte, die später im Beweis der Vermutungen für einige Klassen von Flächen benötigt werden.

Kapitel 4 faßt die in der Dissertation [BR1] von Volker Braungardt enthaltenen Beweise der Vermutung 1 für einige Klassen von Flächen zusammen und verbessert diese Resultate teilweise. Insbesondere wird in Kapitel 4 gezeigt, daß für Flächen von Kodaira-Dimension $-\infty$ und für hyperelliptische Flächen die schärfere Vermutung 2 gilt. Dies ist ein neues Resultat.

Kern der vorliegenden Arbeit ist Kapitel 5. In diesem wird Vermutung 2 für Abelsche Flächen bewiesen. Dazu werden einige Resultate aus der Theorie der Abelschen Flächen benötigt, die in diesem Kapitel ebenfalls bereitgestellt werden. In Kapitel 6 werden für spezielle kritische Orte im \mathbb{P}^2 sowie für spezielle Flächen, die fast alle vom allgemeinen Typ sind, die Vermutungen 1 bzw. 2 bewiesen. Diese decken zwar den allgemeinen Fall nicht ab, sind aber dennoch ein Schritt in Richtung eines allgemeinen Beweises der Vermutungen.

Kapitel 7 faßt die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen und enthält einen kurzen Ausblick auf Möglichkeiten und Probleme, die sich in Dimensionen größer als 2 ergeben.

Im Anhang wird anhand eines konkreten Beispiels nachgerechnet, daß es sinnvoll ist, Vermutungen 1 und 2 in der in dieser Arbeit betrachteten Form zu formulieren.

Am Ende eines Vorhabens, wie es die vorliegende Arbeit darstellt, ist es immer schön, sich bei all denen zu bedanken, die das Zustandekommen ermöglicht haben. Dazu gehört mit Sicherheit an erster Stelle Prof. Dr. Frank Herrlich, der dieses

Promotionsvorhaben ermöglichte und dessen Betreuung beispielhaft war. Seine Tür steht für seine Studenten immer offen, wofür ihm nicht genug gedankt werden kann [EV]. Außer mittwochs. Aber das hat seine Gründe (siehe [BR1]). Weiter möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls bedanken, besonders bei Dr. Stefan Kühnlein und Dr. Markus Even. Dank gebührt auch meinen Eltern und meinem Bruder für die Unterstützung und das Korrekturlesen, sowie Monika Behrens für das Erstellen der Abbildungen im Anhang, sowie für verschiedenste T_EX-Problemlösungen. Ganz am Schluß des Dankes steht jedoch meine Freundin, Claudia Marcks, die die Endkorrektur übernommen hat. Sie hat in den letzten Monaten dafür gesorgt, daß ich ein Mensch geblieben bin, und durch ihre Geduld und ihre aufmunternden Worte einen wesentlichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit geleistet.

Kapitel 2

Der Satz von Belyi

Im folgenden sei eine *Kurve* ein integriertes projektives Schema der Dimension 1 von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k beziehungsweise eine in einen \mathbb{P}_k^n eingebettete Version davon.

Definition 2.1. *Ist k' ein Teilkörper von k , so heißt ein Schema X/k über k' definiert, wenn sich X schreiben läßt als $X \cong X_0 \times_{k'} k$ mit einem Schema X_0/k' .*

In der Sprache der Varietäten bedeutet dies, daß es eine projektive Einbettung von X gibt, so daß die Koeffizienten der definierenden Polynome von X in k' liegen.

Satz 1 (Belyi, 1979). *Sei X eine über \mathbb{C} definierte nichtsinguläre projektive algebraische Kurve. Genau dann ist X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, wenn es einen endlichen Morphismus $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ gibt, der höchstens über drei Punkten verzweigt. Diese sind ohne Einschränkung $0, 1$ und ∞ .*

André Weil beweist in [WE], daß die Existenz eines solchen Morphismus garantiert, daß X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist. Dabei wird an die Dimension der Varietät keine Bedingung gestellt. Man benötigt lediglich eine endliche Überlagerung auf eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Varietät, so daß der kritische Ort der Überlagerung ebenfalls über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist.

Wesentlich interessanter für die vorliegende Arbeit ist die andere Richtung dieser Aussage. Man geht aus von einer nichtsingulären projektiven Kurve X über $\overline{\mathbb{Q}}$ und will nun einen solchen *Belyi-Morphismus* $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}}^1$ konstruieren. Da der von Belyi gefundene Algorithmus in dem später betrachteten zweidimensionalen Fall eine große Rolle spielen wird, sei er hier im Detail aufgeführt.

2.1 Der 1. Schritt

Man beginnt mit einem nichtkonstanten Element des Funktionenkörpers von $X/\overline{\mathbb{Q}}$. Da man im Eindimensionalen ist, induziert dieses eine endliche, überall

definierte Überlagerung $u : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$. Die endlichen kritischen Werte von u haben Koordinaten in $\overline{\mathbb{Q}}$. Nun betrachtet man das Produkt $f_0 \in \mathbb{Q}[z_0]$ der Minimalpolynome dieser kritischen Werte. Bezeichnet S die Menge der Galois-Konjugierten der kritischen Werte von u , so läßt sich f_0 schreiben als

$$f_0(z_0) = \prod_{s \in S} (z_0 - s).$$

Die wesentliche Konstruktion des ersten Schrittes ist es, die endlichen kritischen Werte nach \mathbb{Q} zu bekommen: Man betrachtet für $j \geq 0$ das Polynom

$$f_{j+1}(z_{j+1}) := \text{Res}_{z_j} \left(\frac{df_j(z_j)}{dz_j}, f_j(z_j) - z_{j+1} \right).$$

Dabei bedeute Res_{z_j} die Resultante der angegebenen Polynome, aufgefaßt als Polynome in der Variablen z_j .

Proposition 2.2. *Seien $f, g \in k[X]$ Polynome in einer Variablen über einem Körper k . Dann sind äquivalent:*

- a) *Die Resultante von f und g ist ungleich Null.*
- b) *f und g haben in einem algebraischen Abschluß \overline{k} von k keine gemeinsame Nullstelle.*

Beweis: Siehe [BO, Kapitel 4.4, Korollar 8, Seite 172]. □

Proposition 2.2 besagt in der oben beschriebenen Situation, daß die Nullstellen von f_{j+1} genau die endlichen kritischen Werte von f_j sind. Da die in der Resultante auftretenden Polynome Koeffizienten in \mathbb{Q} haben, ist dies auch für ihre Resultante so. Wegen der Ableitung ist der Grad von f_{j+1} als Polynom in z_{j+1} kleiner als der Grad von f_j als Polynom in z_j . Somit erhält man nach endlich vielen Schritten ein lineares Polynom f_n . Nun setzt man

$$\beta' := f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_0 \circ u.$$

Das ist nach Konstruktion ein endlicher Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$. Die kritischen Werte von β' liegen in \mathbb{Q} : Für die kritischen Werte $C_{g \circ f}$ zweier Morphismen gilt ganz allgemein $C_{g \circ f} = C_g \cup g(C_f)$. Da jedes der f_j die kritischen Werte seines Vorgängers auf 0 abbildet, alle vorkommenden Polynome Koeffizienten in \mathbb{Q} haben und das letzte Polynom linear ist, also selbst keine kritischen Werte hat, liegen die kritischen Werte von β' in \mathbb{Q} .

Bemerkung 2.3. *Der so konstruierte Morphismus $\beta' : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ hat höchstens $\text{Grad}(f_0)$ viele verschiedene endliche kritische Werte. Hat β' kritische Werte, so ist 0 einer davon.*

Beweis: Die endlichen kritischen Werte von u werden durch f_0 auf 0 abgebildet. Hat f_0 Grad n , so hat es höchstens $n - 1$ verschiedene endliche kritische Werte, die Bilder unter f_0 der Nullstellen der Ableitung von f_0 . Diese werden von f_1 alle auf 0 abgebildet. Somit hat $f_1 \circ f_0 \circ u$ die kritischen Werte 0, $f_1(0)$ und die $n - 2$ Bilder der Nullstellen der Ableitung von f_1 , usw. Insbesondere folgt, daß 0 kritischer Wert von β' ist, als Bild unter f_n des kritischen Werts von f_{n-1} . \square

2.2 Der 2. Schritt

Nun liegt die Menge S' der endlichen kritischen Werte von β' in \mathbb{Q} .

- 1.) $|S'| \leq 2$. Dann genügt eine Möbiustransformation, um S' auf die Menge $\{0, 1\}$ abzubilden. Da 0 bereits ein kritischer Wert ist, benötigt man sogar nur eine Möbiustransformation der Form $x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{Q}$. Der Punkt ∞ ist auch ein kritischer Punkt, wird aber von allen vorkommenden Morphismen auf ∞ abgebildet, weshalb der Satz in diesem Fall bewiesen ist.
- 2.) $|S'| \geq 3$. Man wählt drei geordnete Punkte in S' . Zu diesen gibt es immer eine Möbiustransformation $x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, die diese Punkte auf 0, 1 und $\frac{c}{d}$ abbildet, wobei $0 < \frac{c}{d} < 1$ ist: Man bildet den kleinsten der kritischen Werte auf 0 ab und den größten auf 1. Der mittlere ist dann von der angegebenen Form, da Möbiustransformationen orientierungserhaltend sind. Nun schreibt man $\frac{c}{d}$ in der Form $\frac{m}{m+n}$ mit natürlichen Zahlen m und n . Das ist immer möglich, da $0 < \frac{c}{d} < 1$ ist. Weiter betrachtet man die Abbildung

$$t : z \mapsto \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} z^m (1-z)^n.$$

Diese bildet 0 und 1 auf 0 ab, $\frac{m}{m+n}$ auf 1 und verzweigt über den Punkten 0, 1 und ∞ . Der kritische Punkt ∞ wird von allen betrachteten Abbildungen auf ∞ abgebildet. Somit hat man die Anzahl der endlichen kritischen Werte um eins reduziert. Fährt man hiermit fort bis man nur noch zwei endliche kritische Werte übrig hat, so ist man im Fall 1.). Verkettet man nun alle in Schritt 2 und Schritt 1 erhaltenen Abbildungen, hat man einen endlichen Morphismus $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ konstruiert, der höchstens über der Menge $\{0, 1, \infty\}$ verzweigt. \square

Näheres zu Belyis Algorithmus und einen Beweis des zitierten Satzes von Weil in moderner Sprache für Kurven findet man beispielsweise in [KOE], in [WOL] und in [HAM].

Kapitel 3

Belyis Satz und Modulräume

Um den Satz von Belyi auf die zweidimensionale Situation übertragen zu können, muß man sich zunächst darüber klar werden, welche Objekte man überlagern möchte. Dazu gibt es verschiedene Ansätze. So hat Igor Ronkin in seiner Diplomarbeit [RON] den Ansatz verfolgt, weiter \mathbb{P}^1 zu überlagern und so eine Beschreibung der über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten komplexen Flächen gefunden. Die dabei betrachteten Morphismen sind aber schon aus Dimensionsgründen keine endlichen Überlagerungen.

Des weiteren muß man sich überlegen, was man als kritischen Ort zulassen möchte. Der naive Ansatz, vier Geraden in allgemeiner Lage im \mathbb{P}^2 als zulässigen kritischen Ort zu betrachten, ist zum Scheitern verurteilt, wie der folgende Satz lehrt (siehe [HOL, Theorem 6.10.1, Seite 391]):

Satz 2. *Sei $X \neq \mathbb{P}^2$ eine reguläre Überlagerung des \mathbb{P}^2 . Dabei heißt eine Überlagerung regulär, wenn ihr kritischer Ort aus glatten Kurven besteht, von denen sich je höchstens zwei in einem Punkt transversal schneiden. Dann gilt:*

$$c_1^2(X) \leq 2c_2(X).$$

Da es über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Flächen vom allgemeinen Typ mit $c_1^2(X) > 2c_2(X)$ gibt, muß man im kritischen Ort mindestens Tripelpunkte zulassen. Ein Ansatz in diese Richtung, der *geometrisch rigide Divisoren* in \mathbb{P}^2 benutzt und eine Charakterisierung der über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Flächen liefert, findet sich in [PAR]. Dieser Ansatz hat den Nachteil, daß der kritische Ort im allgemeinen sehr groß wird.

In der vorliegenden Arbeit wird ein anderer Ansatz verfolgt, der zuerst von Alexandre Grothendieck in seiner *Esquisse d'un programme* [GRO] vorgeschlagen wird. Um diesen formulieren zu können ist es notwendig, sich einige Grundkenntnisse auf dem Gebiet der Modulräume für stabile Kurven mit n markierten Punkten anzueignen. Diese werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

3.1 Die Modulräume $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$ und $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$

Diese sollen zusammenhängende stabile Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 mit vier bzw. fünf markierten Punkten parametrisieren.

Definition 3.1. *Eine (nicht notwendig irreduzible oder nichtsinguläre) projektive zusammenhängende Kurve $(X; x_1, \dots, x_n)$ mit n markierten Punkten heißt stabil, wenn sie höchstens gewöhnliche Doppelpunkte als Singularitäten hat und ihre Automorphismengruppe endlich ist.*

Dabei sei die Menge der singulären Punkte disjunkt zu $\{x_1, \dots, x_n\}$ und die x_i paarweise verschieden. Automorphismen seien solche, die die Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ der markierten Punkte sowie die Menge der singulären Punkte punktweise fix lassen.

Stabile Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 sind Bäume von endlich vielen projektiven Geraden. Sollen diese endliche Automorphismengruppen haben, müssen auf jeder Komponente der Bäume mindestens drei besondere Punkte liegen, also mindestens drei singuläre oder markierte Punkte, da die Automorphismengruppe des \mathbb{P}^1 dreifach transitiv auf \mathbb{P}^1 operiert. Da man fordert, daß diese Bäume zusammenhängend sind, gibt es für jedes n nur eine Art nichtsingulärer stabiler Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 mit n markierten Punkten, den \mathbb{P}^1 mit n markierten Punkten.

Bemerkung 3.2. *Da man nur Automorphismen zuläßt, die die markierten Punkte fix lassen, können diese Automorphismen im Fall von Geschlecht 0 keine irreduziblen Komponenten vertauschen. Es folgt, daß diese Automorphismen auch die singulären Punkte fix lassen, man muß dies nicht extra fordern.* \square

3.1.1 $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$

Nichtsinguläre stabile Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 mit vier markierten Punkten sind projektive Geraden mit vier ausgezeichneten Punkten. Drei dieser Punkte nennt man 0, 1 und ∞ , der vierte bleibt beliebig, darf aber nicht 0, 1 oder ∞ sein. Die nichtsingulären der hier betrachteten stabilen Kurven mit vier markierten Punkten werden also von $\mathbb{A}^1 \setminus \{0, 1\}$ parametrisiert. Am Rand dieses Modulraums sitzen singuläre stabile Kurven. Auch hier gibt es nur drei Arten: Man muß einen der Punkte 0, 1, ∞ zum gewöhnlichen Doppelpunkt machen und hat dann drei verschiedene Möglichkeiten, auf jede der zwei projektiven Geraden zwei der markierten Punkte zu legen. Damit hat man alle stabilen Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 mit vier markierten Punkten gefunden. Über einen verallgemeinerten Begriff des Doppelverhältnisses, siehe [GHvP], kann man die singulären unter ihnen mit den Punkten 0, 1 und ∞ im \mathbb{P}^1 identifizieren. Der (grobe) Modulraum $\overline{\mathcal{M}}_{0,4}$, der stabile vierfach punktierte projektive Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 parametrisiert, ist somit isomorph zu \mathbb{P}^1 .

Mit diesem Vorwissen kann man schreiben:

Satz 3 (Belyi, Version von Grothendieck). *Sei X eine nichtsinguläre projektive Kurve über \mathbb{C} . Genau dann ist X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, wenn es eine endliche Überlagerung $\beta : X \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{0,4} (\cong \mathbb{P}^1)$ gibt, die höchstens über dem Rand $\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \setminus \mathcal{M}_{0,4}$ (das ist die Menge $\{0, 1, \infty\}$) verzweigt. \square*

3.1.2 $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$

Dies ist der zweidimensionale unter den hier betrachteten Modulräumen und deshalb ein Objekt, das sich für eine Verallgemeinerung des Satzes von Belyi auf Dimension 2 anbietet.

Wie im Eindimensionalen gibt es nur eine Art nichtsingulärer stabiler Kurven vom arithmetischen Geschlecht 0 mit fünf markierten Punkten: Den \mathbb{P}^1 mit fünf markierten Punkten, von denen wieder drei die Punkte $0, 1$ und ∞ seien. Übrig bleiben die letzten zwei Punkte. Diese dürfen nicht $0, 1$ oder ∞ und auch nicht gleich sein. Das ergibt

$$\mathcal{M}_{0,5} \cong (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^2 \setminus (\text{Diagonale}).$$

Die dazu passende Realisierung von $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ erhält man durch Aufblasen des $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in den Punkten $((0 : 1), (0 : 1))$, $((1 : 1), (1 : 1))$ und $((1 : 0), (1 : 0))$ (siehe [GHvP, Example 2, Seite 151]). Das ergibt eine Fläche, die isomorph ist zu der del Pezzo-Fläche $\widehat{\mathbb{P}}^2$, die in [BHH, Seite 195/196] beschrieben ist.

Nach [BHH] läßt sich $\widehat{\mathbb{P}}^2$ auch realisieren als Aufblasung des \mathbb{P}^2 in vier Punkten in allgemeiner Lage. Der Randdivisor besteht dann aus den exceptionellen Geraden und den strikten Transformierten der sechs Verbindungsgeraden der vier Punkte im \mathbb{P}^2 , einer Konfiguration, die *vollständiges Viereck* heißt.

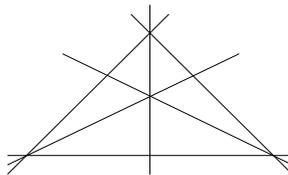


Abbildung 3.1: Vollständiges Viereck

Essentiell gibt es nur ein vollständiges Viereck im \mathbb{P}^2 , da die Automorphismengruppe des \mathbb{P}^2 vierfach transitiv auf Punkten in allgemeiner Lage operiert und deshalb jedes vollständige Viereck durch einen Automorphismus des \mathbb{P}^2 auf jedes andere abgebildet werden kann.

3.2 Die Verallgemeinerung

Um den Satz von Belyi auf Varietäten der Dimension $n > 1$ zu verallgemeinern hat Grothendieck vorgeschlagen, die Modulräume $\overline{\mathcal{M}}_{0,n+3}$ zu überlagern.

Anders als bei Kurven gibt es für Varietäten höherer Dimension kein einzelnes ausgezeichnetes Modell mehr, auf dem alle Morphismen definiert sind. Zu jeder projektiven Varietät X und jeder rationalen Abbildung $\varphi : U \subseteq X \rightarrow Y$ in eine projektive Varietät Y gibt es jedoch eine zu X birational äquivalente Varietät X' , die U als offenen dichten Teil enthält, und einen Morphismus $\overline{\phi} : X' \rightarrow Y$ mit $\overline{\phi}|_U = \varphi$. Deshalb wird im folgenden statt einer einzelnen über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Varietät ihre birationale Äquivalenzklasse über $\overline{\mathbb{Q}}$ betrachtet.

Des weiteren gibt es im höherdimensionalen Fall anders als im eindimensionalen keinen eindeutig bestimmten projektiven Abschluß des Modulraums $\mathcal{M}_{0,n+3}$ mehr.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem zweidimensionalen Fall. Hier ist die Situation noch recht übersichtlich, wie die folgende Proposition zeigt. Sei X eine nichtsinguläre über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive Fläche, Y ein nichtsingulärer über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierter projektiver Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ und $(*_Y^X)$ die folgende Bedingung:

- $(*_Y^X)$ Es gibt eine normale über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive Fläche X' , die birational äquivalent zu X ist, und einen endlichen Morphismus $X' \rightarrow Y$, der über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt ist.

Proposition 3.3. *Seien Y_1 und Y_2 nichtsinguläre über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive Abschlüsse von $\mathcal{M}_{0,5}$, sowie X eine nichtsinguläre über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive Fläche. Genau dann erfüllt X die Bedingung $(*_Y_1^X)$, wenn X die Bedingung $(*_Y_2^X)$ erfüllt.*

Beweis: Sei X' birational äquivalent zu X und $\varphi : X' \rightarrow Y_1$ ein endlicher Morphismus, der über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt ist. Da die projektiven Flächen Y_1 und Y_2 beide den offenen, dichten Teil $\mathcal{M}_{0,5}$ enthalten, sind sie birational äquivalent. Sei $\psi : Y_1 \rightarrow Y_2$ eine solche birationale Abbildung. Diese ist nach [BEAU, Seite 14] höchstens in endlich vielen Punkten im Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ nicht definiert. Nach [BEAU, Theorem II.7] kann man ψ zu einem birationalen Morphismus fortsetzen, indem man in den Punkten, in denen ψ nicht definiert ist, endlich oft aufbläst. Sei \tilde{Y}_1 das so aufgeblasene Y_1 und $f : \tilde{Y}_1 \rightarrow Y_2$ der aus ψ erhaltene birationale Morphismus. Man erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \tilde{Y}_1 & \\
 \eta \swarrow & & \searrow f \\
 Y_1 & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & Y_2
 \end{array}$$

Dabei sei η die Projektion der aufgeblasenen Fläche auf Y_1 . Da mit Y_1 auch \tilde{Y}_1 nichtsingulär und projektiv ist, ist f ein projektiver Morphismus und damit

surjektiv, da er dominant ist. Da man im Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ aufgeblasen hat und das obige Diagramm kommutativ ist, werden die exzeptionellen Geraden der Aufblasungen ins Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in Y_2 abgebildet.

Durch die Aufblasungen im Bild ist aus dem Morphismus $\varphi : X' \rightarrow Y_1$ eine rationale Abbildung $\tilde{\varphi} : X' \rightarrow \tilde{Y}_1$ geworden. Da Theorem II.7 in [BEAU] nur für nichtsinguläre Flächen gilt, X' jedoch als normale Fläche noch singuläre Punkte enthalten kann, muß man nun anders vorgehen. Zunächst bemerkt man, daß φ über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt und damit lokal injektiv ist. Da Y_1 nichtsingulär ist, liegen Singularitäten von X' höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$. Man bildet das Faserprodukt $\tilde{X} := X' \times_{Y_1} \tilde{Y}_1$ und erhält das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \longrightarrow & X' \\ \nu \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \tilde{Y}_1 & \xrightarrow{\eta} & Y_1. \end{array}$$

Da man über $\mathcal{M}_{0,5}$ Basiswechsel mit einem Isomorphismus durchgeführt hat, ist \tilde{X} birational äquivalent zu X' . Da φ ein endlicher Morphismus ist und dies unter Basiswechsel erhalten bleibt, ist ν ebenfalls endlich und über $\mathcal{M}_{0,5}$ gleich φ . Insbesondere ist ν über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt. Der zusammengesetzte Morphismus $f \circ \nu : \tilde{X} \rightarrow Y_2$ ist generisch endlich. Unendliche Fasern liegen jedoch höchstens über Punkten im Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in Y_2 . Nun macht man mit $f \circ \nu$ Stein-Faktorisierung (siehe [HAR, Chapter III, Corollary 11.5, Seite 280]). Man erhält eine Fläche \hat{X} und einen endlichen Morphismus $\mu : \hat{X} \rightarrow Y_2$, der über $\mathcal{M}_{0,5}$ gleich φ ist. \hat{X} ist eventuell keine normale Fläche, die nicht normalen Punkte von \hat{X} liegen jedoch über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in Y_2 . Nun besitzt \hat{X} wie jede Fläche eine Normalisierung $\pi : X_1 \rightarrow \hat{X}$. π ist ein endlicher surjektiver Morphismus, auf den normalen Punkten von \hat{X} sogar ein Isomorphismus, also insbesondere über $\mathcal{M}_{0,5}$. X_1 ist eine normale projektive Fläche, die birational äquivalent zu \hat{X} und X' ist. Nach Konstruktion ist X_1 eine endliche Überlagerung von Y_2 , die höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in Y_2 verzweigt.

Dieselbe Konstruktion funktioniert natürlich auch, wenn man anfangs einen endlichen Morphismus auf Y_2 gehabt hat. Sie produziert dann eine Fläche X_2 , die birational äquivalent zu X' ist und eine endliche Überlagerung $X_2 \rightarrow Y_1$, die nur über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in Y_1 verzweigt. \square

Proposition 3.3 zeigt, daß es im zweidimensionalen Fall ohne Bedeutung ist, für welchen projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ man sich entscheidet. Dies rechtfertigt, die folgende Vermutung als Verallgemeinerung des Satzes von Belyi auf den zweidimensionalen Fall anzusehen:

Vermutung 1. Sei X eine nichtsinguläre über \mathbb{C} definierte projektive Fläche. Genau dann ist X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, wenn X birational äquivalent zu einer projektiven normalen Fläche X' ist, die einen nichtsingulären über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ endlich und über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt überlagert.

Der Beweis von Proposition 3.3 liefert zwar, daß alle nichtsingulären projektiven Abschlüsse von $\mathcal{M}_{0,5}$ im Hinblick auf Vermutung 1 gleich gut sind. Um von einem projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ zu einem anderen zu kommen, muß man jedoch im allgemeinen Stein-Faktorisierung durchführen. Dabei können in der überlagernden Fläche Singularitäten entstehen. Im Verlauf der nächsten Kapitel wird sich für einige Flächen herausstellen, daß es zumindest einen nichtsingulären projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ gibt, so daß die Flächen, die die Überlagerungen aus Vermutung 1 tragen, **nichtsingulär** sind. Deshalb soll an dieser Stelle, obwohl Vermutung 1 weit davon entfernt ist, bewiesen zu sein, dennoch eine wesentlich schärfere Version dieser Vermutung aufgestellt werden:

Vermutung 2. Sei X eine über \mathbb{C} definierte nichtsinguläre projektive Fläche. Genau dann ist X über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, wenn sie birational äquivalent ist zu einer **nichtsingulären** projektiven Fläche X' über $\overline{\mathbb{Q}}$, die eine endliche Überlagerung eines nichtsingulären über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Abschlusses von $\mathcal{M}_{0,5}$ ist, die höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt.

3.3 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und \mathbb{P}^2

In Abschnitt 3.1.2 hat man gesehen, daß sowohl $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ als auch \mathbb{P}^2 nichtsinguläre projektive Abschlüsse von $\mathcal{M}_{0,5}$ sind. In diesem Abschnitt soll ein endlicher Morphismus $\beta : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ konstruiert werden, der das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auf das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in \mathbb{P}^2 abbildet und auch höchstens über diesem Komplement verzweigt.

Das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ besteht aus den Geraden $(0 : 1) \times \mathbb{P}^1$, $(1 : 0) \times \mathbb{P}^1$, $(1 : 1) \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 \times (0 : 1)$, $\mathbb{P}^1 \times (1 : 0)$, $\mathbb{P}^1 \times (1 : 1)$ und der Diagonalen $\{((s : t), (u : v)) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid sv = ut\}$. Die symmetrische Gruppe S_2 operiert in natürlicher Weise durch Vertauschen der Punkte auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Dividiert man diese Operation aus, so erhält man einen endlichen Morphismus $\beta_1 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$. Dieser schreibt sich in projektiven Koordinaten in folgender Weise:

$$\beta_1 : \begin{cases} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ ((s : t), (u : v)) & \mapsto & (su : tv : sv + tu) =: (a : b : c). \end{cases}$$

Das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ wird von β_1 auf die Geraden $V(a)$, $V(b)$ und $V(a + b - c)$, sowie auf $V(ab - \frac{1}{4}c^2)$ abgebildet. β_1 hat Grad 2, Verzweigungspunkte sind genau die Punkte auf der Diagonalen, die ohnehin im Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ liegt.

Somit ist das Bild des Komplements von $\mathcal{M}_{0,5}$ der Divisor $V(f) \subset \mathbb{P}^2$ mit

$$f := ab(a + b - c)\left(ab - \frac{1}{4}c^2\right).$$

Darin enthalten ist der kritische Ort $V(ab - \frac{1}{4}c^2)$ von β_1 .¹ Man betrachtet f als Polynom vom Grad 3 in **einer** Variablen c mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}[a, b]$. Auf f kann man den ersten Schritt im Beweis des eindimensionalen Satzes von Belyi anwenden (siehe Abschnitt 2.1) und erhält ein Polynom $\beta_2(a, b, c)$. Ganz offensichtlich gilt in dieser Situation Bemerkung 2.3 immer noch, allerdings liegen die kritischen Werte des so erhaltenen Morphismus $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}(a,b)}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{Q}(a,b)}^1$ nicht in \mathbb{Q} , sondern in $\overline{\mathbb{Q}}[a, b]$. Das etwas seltsam anmutende Verfahren soll nun gerechtfertigt werden.

Da f als Polynom in c den Grad 3 hat, erhält man mit Bemerkung 2.3 die drei kritischen Werte $0, p(a, b)$ und $q(a, b)$. Dabei sind $p(a, b)$ und $q(a, b)$ homogene Polynome in zwei Variablen. Diese definieren mit β_2 zusammen die rationale Abbildung

$$\beta_3 : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (a : b : c) & \mapsto & (\beta_2(a, b, c) : p(a, b) : q(a, b)) =: (x : y : z). \end{cases}$$

Die hier auftretenden Polynome lassen sich beispielsweise mit Maple berechnen:

$$\begin{aligned} \beta_2(a, b, c) &= (b + a - 3c)^2(2b^2 + 40ab + 6cb - 9c^2 + 6ac + 2a^2)^2, \\ p(a, b) &= 4(14ab + b^2 + a^2)^3, \\ q(a, b) &= 4(a + b)^2(a^2 - 34ab + b^2)^2. \end{aligned}$$

Die Abbildung β_3 ist ein endlicher Morphismus, wovon man sich leicht überzeugt: $p(a, b)$ und $q(a, b)$ haben genau die gemeinsame Nullstelle $a = b = 0$ und für diese Werte von a und b wird β_2 genau dann 0, wenn auch $c = 0$ ist, was aber kein Punkt in \mathbb{P}^2 ist. Da jede der Variablen in mindestens einem der Polynome in der höchsten vorkommenden Potenz allein steht, ist β_3 endlich.

Nun berechnet man den kritischen Ort von β_3 . Dieser ist das Bild der Nullstellen der Jacobideterminante

$$\begin{aligned} \text{Jac}(\beta_3) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_2}{\partial a} & \frac{\partial \beta_2}{\partial b} & \frac{\partial \beta_2}{\partial c} \\ \frac{\partial p}{\partial a} & \frac{\partial p}{\partial b} & \frac{\partial p}{\partial c} \\ \frac{\partial q}{\partial a} & \frac{\partial q}{\partial b} & \frac{\partial q}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_2}{\partial a} & \frac{\partial \beta_2}{\partial b} & \frac{\partial \beta_2}{\partial c} \\ \frac{\partial p}{\partial a} & \frac{\partial p}{\partial b} & 0 \\ \frac{\partial q}{\partial a} & \frac{\partial q}{\partial b} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial \beta_2}{\partial c} \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial a} \cdot \frac{\partial q}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b} \cdot \frac{\partial q}{\partial a} \right). \end{aligned}$$

¹Auf diesen Sachverhalt hat mich Andreas Weng von der Universität Frankfurt am Main aufmerksam gemacht. Im Rahmen eines kurzen Gastaufenthaltes bei Professor Wolfart entstand daraufhin aus allgemeinen Vorüberlegungen, die ich vorher schon gemacht hatte, der Prototyp des nachfolgenden Morphismus. Damals hatten wir allerdings f als Polynom in einer Variablen b mit Koeffizienten in $\overline{\mathbb{Q}}[a, c]$ angesehen, was lediglich eine rationale Abbildung $\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ liefert. Dieses Resultat konnte ich inzwischen wesentlich verbessern.

Nach Konstruktion von β_2 sind die Bilder der Nullstellen von $\frac{\partial\beta_2}{\partial c}$ unter β_2 gerade $x = 0$, $x = p$ und $x = q$. Damit erhält man als Teil des kritischen Ortes von β_3 die Geraden $V(x)$, $V(x - y)$ und $V(x - z)$. Die Geraden $V(a)$ und $V(b)$ im Bild des Komplements von $\mathcal{M}_{0,5}$ unter β_1 werden auf die Gerade $V(y - z)$ abgebildet, die Gerade $V(a + b - c)$ sowie der kritische Ort von β_1 auf die Gerade $V(x - z)$. Nun muß man noch die Nullstellen von $\left(\frac{\partial p}{\partial a} \cdot \frac{\partial q}{\partial b} - \frac{\partial p}{\partial b} \cdot \frac{\partial q}{\partial a}\right)$ betrachten. Beispielsweise mit Maple berechnet sich dieser Ausdruck zu

$$10368(a + b)(a^2 - 34ab + b^2)(14ab + b^2 + a^2)^2(b - a)^3.$$

Bilder der Nullstellen dieses Polynoms unter β_3 sind offensichtlich die Geraden $V(y - z)$, $V(z)$ und $V(y)$.

Zusammenfassend hat man einen endlichen Morphismus $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ konstruiert, der höchstens über $V(x)$, $V(y)$, $V(x - y)$, $V(x - z)$, $V(y - z)$ und $V(z)$ verzweigt. Diese Geraden bilden ein vollständiges Viereck, also das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in \mathbb{P}^2 . Das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ wird ebenfalls auf dieses vollständige Viereck abgebildet. Dies zeigt die folgende Proposition:

Proposition 3.4. *Jede endliche Überlagerung $X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, die höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt, induziert eine endliche Überlagerung $X \rightarrow \mathbb{P}^2$, die ebenfalls höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt. \square*

Kapitel 4

Einige Klassen von Flächen

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Dissertation [BR1] von Volker Braungardt vorgestellt, der Vermutung 1 für einige Klassen von Flächen bewiesen hat (siehe hierzu auch den Compositio-Artikel [BR2]). Dazu werden zunächst die Klassifikationstabelle der algebraischen Flächen nach Enriques-Kodaira wiedergegeben und einige Eigenschaften der verschiedenen Klassen vorgestellt, die dann benutzt werden, um Vermutung 1 für diese Klassen von Flächen zu zeigen. In einigen Fällen konnte ich die Resultate von Braungardt verbessern und sogar Vermutung 2 für diese Klassen von Flächen beweisen.

4.1 Flächenklassifikation

Die folgende Tabelle gibt die Klassifikationstheorie der algebraischen Flächen nach Enriques und Kodaira wieder (siehe [BPvV, Seite 188]). Die auftretenden Größen sind

- X , eine nichtsinguläre projektive minimale Fläche,
- $K = K_X$, ein kanonischer Divisor auf X ,
- $\kappa(X) := \text{tr deg}_k \left(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, L(nK)) \right) - 1 = \max_{n \in \mathbb{N}_0} \dim \varphi(X)$, wobei φ die von dem linearen System $|nK|$ bestimmte rationale Abbildung $X \rightarrow \mathbb{P}^N$ ist. $\kappa(X)$ heißt *Kodaira-Dimension* von X .
- $b_1(X)$, die erste Betti-Zahl von X ,
- $K^2 = K.K$, der Selbstschnitt des kanonischen Divisors. Für eine Definition des Schnittprodukts auf nichtsingulären projektiven Flächen siehe beispielsweise [HAR, Chapter V, Section 1].
- $p_a(X) := \chi(\mathcal{O}_X) - 1$, wobei $\chi(\mathcal{O}_X)$ die *Euler-Poincaré-Charakteristik* von X ist. $p_a(X)$ ist das *arithmetische Geschlecht* von X .

Für Details über die verwendeten Begriffe sei auf die Literatur, insbesondere [BPvV], [BEAU] und [HAR, Kapitel V], verwiesen. Es sei noch angemerkt, daß die vorkommenden Zahlen für die minimalen Modelle wohlbestimmt sind. Die nachfolgende Klassifikationstabelle stammt aus [BPvV, Seite 188].

Klasse von X	$\kappa(X)$	$b_1(X)$	K_X^2	$p_a(X)$
1.) rationale Fläche	-1	0	8 oder 9	0
2.) Regelfläche vom Geschlecht $g \geq 1$	-1	$2g$	$8(1-g)$	$-g$
3.) Enriques-Fläche	0	0	0	0
4.) hyperelliptische Fläche	0	2	0	-1
5.) K3-Fläche	0	0	0	1
6.) Abelsche Fläche	0	4	0	-1
7.) elliptische Fläche	1		0	≥ -1
8.) Fläche vom allgemeinen Typ	2	$\equiv 0(2)$	> 0	≥ 0

4.2 Beweis der Vermutungen für einige Klassen

In diesem Abschnitt werden für die Vermutungen 1 und 2 relevante Eigenschaften der verschiedenen Klassen von Flächen sowie die Resultate der Dissertation [BR1] zusammengetragen. Da in [BR1] stets $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ überlagert wird, können diese Ergebnisse teilweise durch die größere Flexibilität der Vermutungen 1 und 2 verbessert werden.

4.2.1 Minimale Flächen mit Kodaira-Dimension -1

Von diesen gibt es zwei Arten:

- 1.) Rationale Flächen. Diese sind alle zu \mathbb{P}^2 birational äquivalent.
- 2.) Regelflächen vom Geschlecht $g \geq 1$. Das sind Flächen, die birational äquivalent sind zu $C \times \mathbb{P}^1$, wobei C eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Geschlecht g ist.

Der Fall $\kappa(X) = -1$ ist schnell abgeschlossen: Ist X birational äquivalent zu \mathbb{P}^2 und damit auch zu $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$, so gibt es in der birationalen Äquivalenzklasse von X sogar für jeden nichtsingulären über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Abschluß Y von $\mathcal{M}_{0,5}$ eine glatte Fläche, die Y unverzweigt überlagert, nämlich Y selbst.

Ansonsten ist X birational äquivalent zu $C \times \mathbb{P}^1$, wobei C eine nichtsinguläre über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive Kurve vom Geschlecht $g \geq 1$ ist. Der eindimensionale Satz von Belyi produziert einen endlichen Morphismus $\beta : C \rightarrow \mathbb{P}^1$, der nur über $\{0, 1, \infty\}$ verzweigt. Damit verzweigt der endliche Morphismus $C \times \mathbb{P}^1 \xrightarrow{(\beta, id)} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ nur über $(0 : 1) \times \mathbb{P}^1$, $(1 : 1) \times \mathbb{P}^1$ und $(1 : 0) \times \mathbb{P}^1$, also über einem Teil des Komplements von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Insbesondere erhält man für die Wahl von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ als projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ und mit dem in Abschnitt 3.3 gefundenen Morphismus auch für die Wahl von \mathbb{P}^2 als projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ in diesem Fall immer eine glatte Fläche, die die gewünschte Überlagerung trägt.

Dasselbe Vorgehen funktioniert für alle Flächen, die birational äquivalent zu einer Fläche der Form $C \times C'$ sind, wobei C und C' über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte nichtsinguläre projektive Kurven seien. Man setzt Belyi-Morphismen für C und C' zusammen und erhält eine endliche Überlagerung von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und damit auch von \mathbb{P}^2 durch eine glatte Fläche, die sogar über der Diagonalen unverzweigt ist.

4.2.2 Minimalflächen mit $\kappa(X) = 0$

Hier ist die Situation bereits bedeutend komplizierter:

- 1.) Enriques-Flächen. Diese haben unter anderem die folgenden Eigenschaften:

Satz 4. *Jede Enriques-Fläche besitzt eine elliptische Faserung über \mathbb{P}^1 , also einen surjektiven Morphismus auf \mathbb{P}^1 , dessen Fasern fast alle elliptische Kurven sind.*

Beweis: Siehe [BPvV, Theorem 17.5, Seite 274]. □

Des weiteren hat die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_X(K)$ zum kanonischen Divisor K auf einer Enriques-Fläche X die Ordnung 2, das heißt $\mathcal{O}_X(K)^{\otimes 2}$ ist isomorph zu \mathcal{O}_X . Zu einer solchen invertierbaren Garbe gehört eine zweiblättrige unverzweigte Überlagerung von X . Es gilt:

Satz 5. *Sei X eine Enriques-Fläche und $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ die zu $\mathcal{O}_X(K)$ gehörende zweiblättrige unverzweigte Überlagerung. Dann ist \tilde{X} eine K3-Fläche.*

Beweis: Siehe [BEAU, Seite 104/105]. □

- 2.) Hyperelliptische Flächen. Diese haben nach [BPvV, Seite 189] eine elliptische Faserung über einer elliptischen Kurve. Eine weitere Eigenschaft der hyperelliptischen Flächen ist die folgende:

Satz 6. *Jede hyperelliptische Fläche X ist Quotient einer Produktfläche der Form $C_1 \times C_2$, wobei C_1 und C_2 elliptische Kurven sind, nach einer endlichen Untergruppe G der Translationsgruppe von C_1 , die auf C_2 durch eine Darstellung $G \rightarrow \text{Aut}(C_2)$ operiert, deren Bild nicht ganz in der Translationsgruppe von C_2 enthalten ist. Die Abbildung $C_1 \times C_2 \rightarrow (C_1 \times C_2)/G = X$ ist eine unverzweigte Überlagerung.*

Beweis: Siehe [BPvV, Seite 147/148]. □

- 3.) Abelsche Flächen. Das sind Flächen, die eine Struktur als abelsche Gruppe tragen. Diese werden in Kapitel 5 genauer beschrieben. Eines der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit ist der Beweis von Vermutung 2 für Abelsche Flächen.

Für Enriques-Flächen und die K3-Flächen aus Satz 5 hilft der folgende

Satz 7. *Jede elliptisch gefaserte Fläche erfüllt Vermutung 1.*

Beweis: Siehe [BR1, Seite 58]. □

In Verbindung mit Satz 4 sagt Satz 7, daß Vermutung 1 für alle Enriques-Flächen gilt. Desweiteren erhält man aus Satz 5 auch sofort einen Beweis der Vermutung 1 für diejenigen K3-Flächen, die Enriques-Flächen unverzweigt überlagern: Man schaltet die von Satz 7 garantierte Überlagerung mit richtigem Verzweigungsverhalten hinter die nach Satz 5 existierende unverzweigte Überlagerung der Enriques-Fläche.

Da hyperelliptische Flächen eine elliptische Faserung über einer elliptischen Kurve tragen, folgt der Beweis von Vermutung 1 für diese Flächen ebenfalls aus Satz 7. Für die hyperelliptischen Flächen gilt jedoch der schärfere

Satz 8. *Jede über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte hyperelliptische Fläche erfüllt Vermutung 2.*

Beweis: Man benutzt Satz 6. Ist C eine elliptische Kurve mit j -Invariante j , so ist C über $\overline{\mathbb{Q}}[j]$ definiert, ebenso jede endliche Untergruppe von $\text{Aut}(C)$. Damit ist die Überlagerung $C_1 \times C_2 \rightarrow X$ und insbesondere auch X über $\overline{\mathbb{Q}}[j_1, j_2]$ definiert. Liegt j_1 oder j_2 nicht in $\overline{\mathbb{Q}}$, so ist auch der Quotient X nicht über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert. Da dies nach Voraussetzung jedoch der Fall ist, sind C_1 und C_2 über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert. Dann sind auch $C_1 \times C_2$ und die Überlagerung über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert. Nun betrachtet man den Funktionenkörper $K(C_1)$ von C_1 . Dieser hat Transzendenzgrad 1 über $\overline{\mathbb{Q}}$. Sei $K(C_1)^G \subseteq K(C_1)$ der Teilkörper der G -invarianten rationalen Funktionen auf C_1 . Dann ist $[K(C_1) : K(C_1)^G] = |G|$, man hat also sehr viele nichtkonstante G -invariante Funktionen. Dies gilt auch für C_2 mit der anderen Operation von G . Seien $u \in K(C_1)^G$ und $v \in K(C_2)^G$ nichtkonstante G -invariante rationale Funktionen. Diese induzieren auf C_1 bzw. C_2 eine endliche Überlagerung

des \mathbb{P}^1 . Ihr Produkt (u, v) definiert somit einen G -invarianten endlichen Morphismus $C_1 \times C_2 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, der nach Konstruktion über endlich vielen Geraden der Form $(a : b) \times \mathbb{P}^1$ bzw. $\mathbb{P}^1 \times (c : d)$ verzweigt. Da (u, v) G -invariant ist, faktorisiert es über X und man erhält einen Morphismus $X \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, der ebenfalls nur über Geraden dieser Form verzweigt. Nun konstruiert man jeweils für u und v Belyi-Morphismen β_u und $\beta_v : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. (β_u, β_v) bildet die Geraden aus dem vorigen Schritt auf das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ab und verzweigt auch höchstens über diesem Komplement. \square

4.2.3 Minimalflächen mit $\kappa(X) = 1$

Diese heißen elliptische Flächen. Diese Begriffsbildung wird gerechtfertigt durch

Satz 9. *Sei X eine minimale Fläche mit $\kappa(X) = 1$. Dann gelten:*

- a) $K^2 = 0$.
- b) *Es gibt eine glatte Kurve C und einen surjektiven Morphismus $f : X \rightarrow C$, dessen generische Faser eine elliptische Kurve ist.*

Beweis: Siehe [BEAU, Proposition IX.2, Seite 112].

Auch für diese Flächen liefert somit Satz 7 den Beweis für Vermutung 1.

4.2.4 Minimalflächen mit $\kappa(X) = 2$

Hier ist die Situation am kompliziertesten, da nach Definition Flächen vom allgemeinen Typ diejenigen sind, die keine speziellen Eigenschaften haben. Immerhin ist zu bemerken, daß für diejenigen Flächen vom allgemeinen Typ, die birational äquivalent zum Produkt zweier Kurven von mindestens Geschlecht 2 sind, sogar Vermutung 2 gilt. Hierzu benutzt man wie im Fall $\kappa(X) = -1$ die nach Voraussetzung existierenden Belyi-Morphismen der beiden Kurven und erhält so einen endlichen Morphismus nach $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und damit auch nach \mathbb{P}^2 , der das gewünschte Verzweigungsverhalten hat.

In Kapitel 6 werden weitere Flächen vom allgemeinen Typ behandelt, die spezielle Überlagerungen auf dort näher beschriebene Konfigurationen von Geraden im \mathbb{P}^2 tragen.

Des weiteren werden in Kapitel 6 für einige kritische Orte von Überlagerungen des \mathbb{P}^2 Vorgehensweisen aufgezeigt, wie man diese auf das vollständige Viereck abbilden kann. Zu jedem dieser kritischen Orte gibt es normale Flächen, die den \mathbb{P}^2 mit dem jeweiligen Verzweigungsverhalten überlagern. Viele davon sind vom allgemeinen Typ. Eine vollständige Einordnung aller so behandelbaren Flächen in die Enriques-Kodaira-Klassifikation ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht möglich.

Kapitel 5

Abelsche Flächen

Abelsche Varietäten sind projektive Varietäten, die eine Struktur als (abelsche) Gruppe tragen. Jede komplexe Abelsche Varietät X läßt sich realisieren als komplexer Torus, das heißt als Quotient eines komplexen Vektorraums V nach einem Gitter Λ mit einer amplen invertierbaren Garbe L auf X . Einfachstes Beispiel sind elliptische Kurven. In diesem Kapitel sollen einige Resultate aus der Theorie der Abelschen Varietäten zusammengetragen werden, die in Abschnitt 5.3 dazu benutzt werden, um Vermutung 2 für Abelsche Flächen zu beweisen.

5.1 Isogenien

Definition 5.1. *Ein surjektiver Morphismus $f : X \rightarrow Y$ zwischen Abelschen Varietäten heißt Isogenie, wenn er ein Homomorphismus bezüglich der Gruppenstrukturen ist und sein Kern eine endliche Untergruppe von X ist. Gibt es eine Isogenie zwischen X und Y , so heißt X isogen zu Y .*

Offensichtlich ist ein surjektiver Homomorphismus Abelscher Varietäten X und Y genau dann eine Isogenie, wenn $\dim(X) = \dim(Y)$ ist.

Bemerkung 5.2. *Jede Isogenie f zwischen Abelschen Varietäten ist eine unverzweigte Überlagerung.*

Beweis: Kraft Voraussetzung ist f surjektiv. Dann folgt aus dem Homomorphiesatz für Gruppen, daß jeder Punkt in Y genau $|\text{Kern}(f)| < \infty$ Urbilder hat, was die Aussage beweist. \square

Sei X eine Abelsche Varietät der Dimension g und $n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$n_X : \begin{cases} X & \rightarrow X \\ x & \mapsto nx \end{cases}$$

ist ein Homomorphismus, dessen Kern X_n nach [BL, Proposition 1.2.5, Seite 12] isomorph ist zu $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$. Insbesondere ist n_X für $n \neq 0$ eine Isogenie. X_n heißt *Gruppe der n -Teilungspunkte* von X .

Proposition 5.3. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Isogenie und $n = n_f := |\text{Kern}(f)|$. Dann gibt es eine bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte Isogenie $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = n_X$ und $f \circ g = n_Y$. Insbesondere definieren die Isogenien eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abelschen Varietäten von gegebener Dimension.*

Beweis: Siehe [BL, Proposition 1.2.6, Seite 13]. \square

Bemerkung 5.4. *Hat man zu einer über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Abelschen Fläche Y eine endliche Überlagerung wie in Vermutung 1 oder 2 auf einen nichtsingulären über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ gefunden, so hat man eine solche auch für jede Abelsche Fläche in der Isogenieklasse von Y .*

Beweis: Ist $f : Y' \rightarrow Y$ eine Isogenie, so ist nach Proposition 5.3 der Kern von f enthalten in Y'_{n_f} und damit über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert, da Y'_{n_f} für jedes $n \in \mathbb{N}$ über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist. Nach Voraussetzung ist der Quotient $Y = Y'/\text{Kern}(f)$ und damit auch Y' über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert. Da Isogenien nach Bemerkung 5.2 unverzweigte Überlagerungen sind, erhält man die Behauptung. \square

5.2 Klassifikation der Abelschen Flächen

Ziel dieses Abschnitts ist ein Beweis des folgenden klassischen Resultats:

Proposition 5.5. *Eine prinzipal polarisierte Abelsche Fläche ist entweder das Produkt von zwei kanonisch polarisierten elliptischen Kurven oder die Jacobische einer nichtsingulären Kurve vom Geschlecht 2.*

Definition 5.6. *Eine Polarisierung auf einer Abelschen Varietät $X \cong V/\Lambda$ der Dimension n ist die erste Chern-Klasse $c_1(L)$ einer positiv definiten amplen invertierbaren Garbe L auf X .*

Nach [BL, Chapter 2, §1] entsprechen die Chern-Klassen der invertierbaren Garben auf X eineindeutig denjenigen Hermite-Formen H auf V , deren Imaginärteil E auf dem Gitter Λ Werte in \mathbb{Z} annimmt. Nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n$ von Λ , so daß E gegeben ist durch eine Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

mit $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$. Dabei sind die d_ν natürliche Zahlen mit $d_\nu \mid d_{\nu+1}$ für $1 \leq \nu \leq n-1$. Diese sind durch H und Λ , und damit durch L , eindeutig bestimmt. Die Polarisierung heißt dann vom Typ (d_1, \dots, d_n) . L heißt positiv definit, wenn die obige Matrix D positiv definit ist, also alle d_ν größer als 0 sind. Siehe [BL, Chapter 3, §1, Seite 46].

Definition 5.7. *Eine Polarisierung $H = H(L)$ auf X heißt prinzipal, wenn die zugehörige Matrix $D = \text{diag}(1, \dots, 1)$ ist.*

Es sei an dieser Stelle an die Konstruktion der *Jacobischen* einer nichtsingulären projektiven Kurve C vom Geschlecht g und ihre Eigenschaften erinnert.

Sei $H^0(\omega_C)$ der g -dimensionale \mathbb{C} -Vektorraum der holomorphen 1-Formen auf C . Die Homologiegruppe $H_1(C, \mathbb{Z})$ ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang $2g$, und nach dem Satz von Stokes ist für jedes $\gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})$ die Abbildung

$$\gamma' : H^0(\omega_C) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega \mapsto \int_{\gamma} \omega$$

eine wohldefinierte Linearform auf $H^0(\omega_C)$. Man erhält eine Abbildung

$$\begin{aligned} H_1(C, \mathbb{Z}) &\rightarrow H^0(\omega_C)^* = \text{Hom}(H^0(\omega_C), \mathbb{C}) \\ \gamma &\mapsto \gamma'. \end{aligned}$$

Diese ist nach [BL, Lemma 11.1.1, Seite 316/317] injektiv, $H_1(C, \mathbb{Z})$ ist sogar ein Gitter in $H^0(\omega_C)^*$. Faktorisiert man dieses aus, so erhält man einen g -dimensionalen komplexen Torus, die *Jacobi-Varietät* $J(C)$ von C . $J(C)$ ist eine Abelsche Varietät, siehe [BL, Seite 317/318]. Dort wird auch gezeigt, daß jede Jacobische einer Kurve eine Prinzipalpolarisierung L hat. Jeder effektive Divisor $\Theta \in |L|$ auf $J(C)$ heißt ein *Theta-Divisor* von $J(C)$.

Der Satz von Abel-Jacobi (siehe [BL, Theorem 11.1.3, Seite 319]) zeigt, daß $J(C)$ als abelsche Gruppe zur Divisorenklassengruppe $\text{Pic}^0(C)$ isomorph ist. Für festes $P_0 \in C$ gibt die Abbildung $P \mapsto [P - P_0]$ eine Einbettung $i : C \hookrightarrow J(C)$.

Sei C eine nichtsinguläre Kurve und $\text{Sym}^n(C)$ das n -fache symmetrische Produkt von C ($n \geq 1$). Faßt man die Punkte in $\text{Sym}^n(C)$ auf als effektive Divisoren vom Grad n auf C , so erhält man eine kanonische Abbildung

$$\rho_n : \text{Sym}^n(C) \rightarrow \text{Pic}^n(C).$$

Fixiert man einen Divisor D_n aus $\text{Sym}^n(C)$, so erhält man eine Abbildung

$$\text{Div}^n(C) \rightarrow J(C) = \text{Pic}^0(C), \quad D \mapsto \mathcal{O}_C(D - D_n).$$

Schränkt man diese Abbildung auf $\text{Sym}^n(C)$ ein, erhält man eine Abbildung $\alpha_{D_n} : \text{Sym}^n(C) \rightarrow J(C)$. Insbesondere ist $\alpha_{D_1} = i$. Schließlich erhält man für $L_n := \mathcal{O}(D_n)$ durch die Abbildung

$$\alpha_{L_n} : \text{Pic}^n(C) \rightarrow J(C), \quad L \mapsto L \otimes L_n^{-1}$$

ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Pic}^n(C) & \\
 \nearrow \rho_n & & \downarrow \alpha_{\mathcal{O}(D_n)} \\
 \text{Sym}^n(C) & \xrightarrow{\alpha_{D_n}} & J(C).
 \end{array}$$

Für jedes $n > 0$ ist α_{D_n} ein eigentlicher Morphismus, für $1 \leq n \leq g$ ist er birational auf sein Bild (siehe [GH, Seite 338]). Insbesondere ist $W_{g-1} := \alpha_{D_{g-1}}(\text{Sym}^{g-1}(C))$ ein Divisor in $J(C)$. Nach dem Satz von Riemann (siehe [BL, Theorem 11.2.4, Seite 324] oder [GH, Seite 338/339]) ist W_{g-1} ein Theta-Divisor auf $J(C)$.

Die Jacobische einer Kurve hat die folgende universelle Eigenschaft:

Satz 10. *Jeder Morphismus $\varphi : C \rightarrow X$ von einer nichtsingulären projektiven Kurve C in eine Abelsche Varietät X faktorisiert über $J(C)$.*

Beweis: Siehe [BL, 11.4.1, Seite 330]. □

Da die Dimension der Jacobischen einer Kurve C gleich dem Geschlecht von C ist, folgt aus Satz 10, daß keine Abelsche Varietät eine Kurve vom Geschlecht 0 enthalten kann, da die Einbettung dieser Kurve über ihre Jacobische faktorisieren müßte. Diese ist aber lediglich ein Punkt.

Die folgenden Bemerkungen stellen einige weitere Eigenschaften Abelscher Varietäten bereit, die man im Beweis von Proposition 5.5 und Satz 11 braucht.

Bemerkung 5.8. (Adjunktionsformel) *Sei C eine nichtsinguläre projektive Kurve vom Geschlecht g auf einer nichtsingulären projektiven Fläche X . Ist K ein kanonischer Divisor von X , so gilt*

$$2g - 2 = C.(C + K).$$

Beweis: Siehe [HAR, Chapter V, Proposition 1.5, Seite 361]. □

Sei (X, L) eine polarisierte Abelsche Fläche, L eine Polarisierung von Typ (d_1, d_2) . Nach [BL, Theorem 3.4.5, Seite 61 und Proposition 4.5.2, Seite 85] ist $h^1(L) = h^2(L) = 0$ und es gilt $L.L = L^2 > 0$. Dabei ist das Schnittprodukt auf den invertierbaren Garben das übliche Schnittprodukt auf Flächen. Es gilt sogar

Bemerkung 5.9. *Ist L eine Polarisierung vom Typ (d_1, d_2) auf einer Abelschen Fläche, so gilt*

$$h^0(L) = \frac{1}{2}(L^2) = d_1 d_2.$$

Beweis: Siehe [BL, Seite 282]. □

Bemerkung 5.10. Ist (X, L) eine polarisierte Abelsche Varietät, so gibt es eine prinzipal polarisierte Abelsche Varietät (X_1, L_1) und eine Isogenie $\varphi : X \rightarrow X_1$, so daß $L = \varphi^*(L_1)$ ist.

Beweis: Siehe [BL, Proposition 4.1.2, Seite 71]. \square

Da Isogenien nach Bemerkung 5.2 unverzweigte Überlagerungen sind, genügt es für unsere Zwecke, sich prinzipal polarisierte Abelsche Varietäten anzusehen.

Beweisskizze zu Proposition 5.5: Diese Skizze ist ein auf die Situation der Abelschen Flächen vereinfachter Beweis des viel allgemeineren Kriteriums von Matsusaka-Ran, siehe [BL, 11.8.1, Seite 341].

Sei L die invertierbare Garbe vom Typ $(1, 1)$, die die Prinzipalpolarisierung induziert. Nach Bemerkung 5.9 ist das lineare System $|L|$ eindimensional, also gehört zu L ein effektiver Divisor C auf X mit Selbstschnitt 2. Dieser schreibt sich als

$$C = \sum_{i=1}^n r_i C_i.$$

Dabei sind die $r_i > 0$ natürliche Zahlen und die C_i irreduzible projektive Kurven auf X . Nach dem Kriterium von Nakai-Moishezon (siehe [HAR, Chapter V, Theorem 1.10, Seite 365]) gilt für jedes der C_i :

$$0 < C.C_i = r_i C_i^2 + \sum_{j=1, j \neq i}^n r_j C_j.C_i.$$

Da weiter $2 = C^2 \geq \sum_{i=1}^n C.C_i$ ist, folgt zunächst $n \leq 2$. Nun gibt es zwei Fälle:

1.) $n = 1$. Dann ist $2 = C^2 = r_1^2 C_1^2$, damit $r_1 = 1$, $C_1 = C$ und $C^2 = 2$. Sei \tilde{C} die Normalisierung von C . Dann faktorisiert nach Satz 10 die Abbildung

$$\iota : \tilde{C} \rightarrow C \hookrightarrow X$$

über $J(\tilde{C})$, wobei die Abbildung $\psi : J(\tilde{C}) \rightarrow X$ ein Homomorphismus ist. Da C im Bild von ψ liegt, ist ψ surjektiv: Denn ansonsten ist C in einer echten Abelschen Untervarietät von X enthalten, ist also eine nichtsinguläre elliptische Kurve. Nach der Adjunktionsformel ist dann $C^2 = 0 \neq 2$, da der kanonische Divisor K auf einer Abelschen Fläche äquivalent zu 0 ist.

ι^*C ist ein effektiver Divisor auf \tilde{C} und hat nach [BPvV, Seite 67] Grad 2. Sei

$$\alpha_2 := \alpha_{\iota^*C} : \text{Sym}^2(\tilde{C}) \rightarrow J(\tilde{C})$$

wie auf Seite 25 definiert. Sei weiter für $x \in X$ die Abbildung $t_x : X \rightarrow X$ die Translation mit x . Nun definiert man eine rationale Abbildung h durch

$$h : \begin{cases} X & \rightarrow \text{Sym}^2(\tilde{C}) \\ x & \mapsto \iota^*t_x^*C. \end{cases}$$

Dann erhält man ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{h} & \mathrm{Sym}^2(\tilde{C}) & & \\ \downarrow \phi_L & & \downarrow \alpha_2 & & \\ \mathrm{Pic}^0(X) & \xrightarrow{\tau^*} & J(\tilde{C}) & \xrightarrow{\psi} & X. \end{array}$$

Dabei ist $\mathrm{Pic}^0(X)$ die zu X duale Abelsche Fläche der invertierbaren Garben vom Grad 0 und ϕ_L der durch $x \mapsto t_x^*L \otimes L^{-1}$ definierte Homomorphismus. Da L eine Prinzipalpolarisierung ist, ist ϕ_L nach [BL, Proposition 2.4.9, Seite 37] ein Isomorphismus. Das prinzipal polarisierte $J(\tilde{C})$ ist mit demselben Argument isomorph zu seinem Dual und τ^* ist die Komposition von ι^* mit dem von der Prinzipalpolarisierung auf $J(\tilde{C})$ induzierten Isomorphismus von $J(\tilde{C})$ mit seinem Dual. Das Diagramm ist kommutativ, da für fast alle $x \in X$ gilt:

$$\tau^* \phi_L(x) = \tau^* \mathcal{O}_X(t_x^*C - C) = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(\tau^* t_x^*C - \tau^*C) = \alpha_2 h(x).$$

Somit ist $\tau^* = \psi^*$ die zu ψ duale Abbildung. Da ψ surjektiv ist, ist τ^* und damit auch $\tau^* \phi_L$ injektiv. Die Kommutativität des Diagramms zeigt, daß auch h injektiv ist. Aus der Surjektivität von h folgt, daß h dominant ist, da X und $\mathrm{Sym}^2(\tilde{C})$ die gleiche Dimension haben. Somit ist $\mathrm{im}(\alpha_2) = \mathrm{im}(\alpha_2 \circ h) = \tau^* \phi_L(X)$. Da $J(\tilde{C})$ die kleinste Abelsche Varietät ist, die $\mathrm{im}(\alpha_2)$ enthält, ist $\tau^* \phi_L$ surjektiv, also ein Isomorphismus. Dies zeigt, daß die Dimension von $J(\tilde{C})$ gleich 2 ist und \tilde{C} eine Kurve vom Geschlecht 2. $\psi^*(C)$ ist das eingebettete \tilde{C} in seiner Jacobischen. Da \tilde{C} Geschlecht 2 hat, ist die Einbettung $\mathrm{Sym}^1(\tilde{C}) = \tilde{C} \hookrightarrow J(\tilde{C})$ gleich α_{D_1} . Nach dem Satz von Riemann ist das eingebettete \tilde{C} ein Theta-Divisor auf $J(\tilde{C})$ und induziert eine Prinzipalpolarisierung auf $J(\tilde{C})$.

2.) $n = 2$. Dann ist

$$2 = C^2 = r_1^2 C_1^2 + r_2^2 C_2^2 + 2r_1 r_2 C_1 \cdot C_2$$

und

$$C \cdot C_1 = r_1 C_1^2 + r_2 C_1 \cdot C_2 = 1 = r_2 C_2^2 + r_1 C_1 \cdot C_2 = C \cdot C_2.$$

Damit ist $r_1^2 C_1^2 + r_1 r_2 C_1 \cdot C_2 + r_2^2 C_2^2 + r_1 r_2 C_1 \cdot C_2 = r_1 + r_2 = 2$, also $r_1 = r_2 = 1$. Nun macht man für C_1 und C_2 einzeln dieselbe Konstruktion wie in Fall 1 und erhält ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{h=(h_1, h_2)} & \tilde{C}_1 \times \tilde{C}_2 & & \\ \downarrow \phi_L & & \downarrow \alpha_1^{C_1} \times \alpha_2^{C_2} & & \\ \mathrm{Pic}^0(X) & \xrightarrow{\tau^*} & J(\tilde{C}_1) \times J(\tilde{C}_2) & \xrightarrow{(\psi_1 \times \psi_2)} & X. \end{array}$$

Wie im ersten Fall erhält man, daß $\psi_1 \times \psi_2$ ein Isomorphismus ist. Damit sind \tilde{C}_1 und \tilde{C}_2 elliptische Kurven und $J(\tilde{C}_1) \times J(\tilde{C}_2)$ ist isomorph zu $\tilde{C}_1 \times \tilde{C}_2$.

Für $i = 1, 2$ hat die invertierbare Garbe $\psi_i^*(L)$ auf \tilde{C}_i den Selbstschnitt 1 und ist ampel. Dazu gehört jeweils ein reduzierter effektiver Divisor auf \tilde{C}_i , also ein Punkt $x_i \in \tilde{C}_i$. Zieht man L über den Isomorphismus $\psi_1 \times \psi_2$ auf $\tilde{C}_1 \times \tilde{C}_2$ zurück, ist ein zugehöriger Divisor $D := (\{x_1\} \times \tilde{C}_1) + (\tilde{C}_2 \times \{x_2\})$ mit $D^2 = 2$. Da

$$h^0((\psi_1 \times \psi_2)^*(L)) = \deg(\psi_1 \times \psi_2) \cdot h^0(L)$$

ist, folgt $h^0((\psi_1 \times \psi_2)^*(L)) = 1$, also ist $(\psi_1 \times \psi_2)^*(L)$ nach Bemerkung 5.9 eine Prinzipalpolarisierung auf X . \square

5.3 Vermutung 2 für Abelsche Flächen

In diesem Abschnitt soll der folgende Satz bewiesen werden:

Satz 11. *Sei X eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Abelsche Fläche. Dann ist X birational äquivalent zu einer nichtsingulären projektiven Fläche, die eine endliche über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigte Überlagerung des \mathbb{P}^2 ist. Insbesondere erfüllt X Vermutung 2.*

Beweis: Da man nach Bemerkung 5.10 lediglich prinzipal polarisierte Abelsche Flächen zu betrachten braucht, gibt es nach Proposition 5.5 nur noch zwei Fälle:

- 1.) Ist X isogen zum Produkt zweier über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierter elliptischer Kurven E und E' , so nimmt man Belyi-Morphismen β und β' für E und E' und erhält eine endliche Überlagerung

$$E \times E' \xrightarrow{(\beta, \beta')} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,$$

die nur über $(0 : 1) \times \mathbb{P}^1$, $(1 : 0) \times \mathbb{P}^1$, $(1 : 1) \times \mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^1 \times (0 : 1)$, $\mathbb{P}^1 \times (1 : 0)$ und $\mathbb{P}^1 \times (1 : 1)$ verzweigt. Diese Geraden liegen im Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Mit Proposition 3.4 erhält man daraus eine endliche Überlagerung des \mathbb{P}^2 , die nur über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt. Da das kartesische Produkt zweier nichtsingulärer Kurven nichtsingulär ist, hat man den Satz in diesem Fall bewiesen.

- 2.) Ansonsten ist X die Jacobi-Varietät einer über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Kurve C vom Geschlecht 2. Solch eine Jacobische ist birational äquivalent zum zweifachen symmetrischen Produkt $\text{Sym}^2(C)$ der Kurve. Nun nimmt man einen Belyi-Morphismus für C und erhält daraus das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \xrightarrow{/S_2} & \text{Sym}^2(C) \\ (\beta, \beta) \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{/S_2} & \mathbb{P}^2. \end{array}$$

Dabei sind die horizontalen Morphismen jeweils das Ausdividieren der Operation der symmetrischen Gruppe S_2 auf den Produkten. Da (β, β) ein Produkt von Belyi-Morphismen ist, ist der kritische Ort von (β, β) höchstens das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Der untere horizontale Morphismus in diesem Diagramm ist der erste Morphismus in Proposition 3.4. Man kann somit Proposition 3.4 anwenden und erhält aus dem obigen kommutativen Diagramm das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 C \times C & \xrightarrow{/S_2} & \text{Sym}^2(C) & & \\
 (\beta, \beta) \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{/S_2} & \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\beta_3} & \mathbb{P}^2.
 \end{array}$$

Der Morphismus $\varphi : C \times C \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ hat nach Proposition 3.4 als kritischen Ort genau das vollständige Viereck, also das Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ in \mathbb{P}^2 . Da das obige Diagramm kommutativ ist, faktorisiert φ über $\text{Sym}^2(C)$. Damit hat man einen endlichen Morphismus $\text{Sym}^2(C) \rightarrow \mathbb{P}^2$ gefunden, der höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt. Da $\text{Sym}^2(C)$ nichtsingulär und birational äquivalent zur Jacobischen von C ist, ist Vermutung 2 auch in diesem Fall gezeigt. \square

Kapitel 6

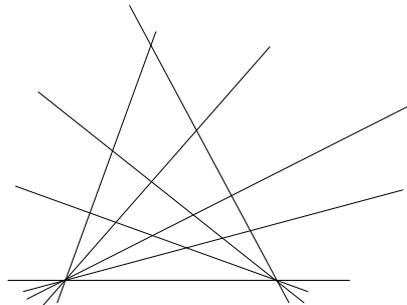
Spezielle Situationen

In den vorangegangenen Kapiteln ist Vermutung 1 für alle Klassen von Flächen bewiesen worden bis auf die K3-Flächen, die nicht unverzweigte Überlagerungen von Enriques-Flächen sind, und die Flächen vom allgemeinen Typ, die nicht birational äquivalent zum Produkt zweier Kurven sind. Hierfür steht ein allgemeiner Beweis aus. In diesem Kapitel werden jedoch einige Resultate zusammengefaßt, die sich mit Hilfe der in den vorangegangenen Kapiteln entwickelten Techniken behandeln lassen. Im ersten Abschnitt geht es um spezielle kritische Orte, im zweiten um spezielle Flächen vom allgemeinen Typ.

6.1 Spezielle kritische Orte

In diesem Abschnitt geht es darum, für spezielle kritische Orte im \mathbb{P}^2 die Vermutungen 1 bzw. 2 zu zeigen. Sei dazu X eine über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte nichtsinguläre Fläche, die birational äquivalent ist zu einer nichtsingulären Fläche X' , die eine endliche Überlagerung des \mathbb{P}^2 mit dem jeweils angegebenen kritischen Ort ist.

Verbundene Doppelbüschel. Ein *Büschel* ist eine endliche Familie von Geraden in der projektiven Ebene, die sich alle in einem Punkt schneiden. Dieser Punkt heißt *Büschelzentrum*. Ein *Doppelbüschel* ist die Vereinigung zweier Büschel mit verschiedenen Büschelzentren. Geht eine der Geraden durch beide Büschelzentren, so heißt das Doppelbüschel *verbunden*.



Proposition 6.1. *Verzweigt $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ höchstens über einem verbundenen Doppelbüschel, so gilt Vermutung 2 für X' .*

Beweis: Ohne Einschränkung seien die Büschelzentren die Punkte $(0 : 1 : 0)$ und $(1 : 0 : 0)$. Sind $(x : y : z)$ die homogenen Koordinaten des \mathbb{P}^2 , so haben die Büschelgeraden die Form $V(x - a_i z)$ bzw. $V(y - b_j z)$. Die Verbindungsgerade der beiden Büschelzentren ist $V(z)$. Die a_i und die b_j liegen kraft Voraussetzung alle in $\overline{\mathbb{Q}}$. Nun konstruiert man mit Hilfe des eindimensionalen Satzes von Belyi formal einen Belyi-Morphismus β_1 für **alle** a_i und b_j und betrachtet den endlichen Morphismus

$$\beta : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x : y : z) & \mapsto & (\beta_1(x, z) : \beta_1(y, z) : z^{\deg(\beta_1)}) =: (a : b : c). \end{cases}$$

Dieser bildet die Geraden $V(x - a_i z)$ auf $V(a)$ und $V(a - c)$ ab, die Geraden $V(y - b_j z)$ auf $V(b)$ und $V(b - c)$. β verzweigt nach Konstruktion über denselben Geraden und $V(c)$. Man erhält als kritischen Ort einen Teil des vollständigen Vierecks und kann sogar noch die Gerade $V(x - y)$ zum ursprünglichen kritischen Ort dazu nehmen, da diese von β auf $V(a - b)$ abgebildet wird. Man erhält einen endlichen Morphismus mit dem in Vermutung 2 geforderten Verzweigungsverhalten. \square

Offensichtlich funktioniert der Beweis von Proposition 6.1 auch für *Büschel*, sowie für die Vereinigung von zwei Büscheln.

Proposition 6.2. *Verzweigt die Überlagerung $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ höchstens über einem Divisor der Form $V(r(x, z)s(y, z)(p(y, z) - q(x, z))) =: V(f)$, wobei p, q, r und s homogene Polynome sind und p und q gleichen Grad haben, so gilt Vermutung 1 für X' . Haben $p(y, 1)$ und $q(x, 1)$ gleichen Grad, so gilt sogar Vermutung 2.*

Beweis: Ohne Einschränkung ist x kein Teiler von $q(x, z)$ und y kein Teiler von $p(y, z)$, da es immer einen projektiven Koordinatenwechsel

$$(x' + az' : y' + bz' : z') = (x : y : z)$$

gibt, der zu dieser Situation führt. Weiter sei ohne Einschränkung der Grad von $q(x, 1)$ größer oder gleich dem von $p(y, 1)$ und z kein Teiler von p und q ; denn teilt z beide Polynome, so schlägt man die gemeinsame Potenz von z zu $r(x, z)s(y, z)$ dazu. Nun betrachtet man die rationale Abbildung

$$\beta_1 : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x : y : z) & \mapsto & (p(y, z) : q(x, z) : z^{\deg(p(y, z))}) =: (a : b : c). \end{cases}$$

Ist der Grad von $p(y, 1)$ gleich dem von $q(x, 1)$, so ist β_1 ein endlicher Morphismus. Ansonsten ist β_1 nicht definiert im Punkt $(0 : 1 : 0)$, und der Rest der Geraden $V(z)$ wird auf den Punkt $(0 : 1 : 0)$ kontrahiert, der im Komplement

von $\mathcal{M}_{0,5}$ in \mathbb{P}^2 liegt. Kritischer Ort von β_1 , dort wo es endlich ist, ist das Bild der Nullstellenmenge von

$$\begin{aligned} \det(\text{Jac}(\beta_1)) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial p(y,z)}{\partial x} & \frac{\partial p(y,z)}{\partial y} & \frac{\partial p(y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial q(x,z)}{\partial x} & \frac{\partial q(x,z)}{\partial y} & \frac{\partial q(x,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial z^{\deg(p(y,z))}}{\partial x} & \frac{\partial z^{\deg(p(y,z))}}{\partial y} & \frac{\partial z^{\deg(p(y,z))}}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial p(y,z)}{\partial y} & \frac{\partial p(y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial q(x,z)}{\partial x} & 0 & \frac{\partial q(x,z)}{\partial z} \\ 0 & 0 & \deg(p(y,z))z^{\deg(p(y,z))-1} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial p(y,z)}{\partial y} \cdot \frac{\partial q(x,z)}{\partial x} \cdot \deg(p(y,z)) \cdot z^{\deg(p(y,z))-1}. \end{aligned}$$

Da p und q homogene Polynome sind, sind auch ihre Ableitungen homogen, man erhält endlich viele Geraden der Form $V(x - a_i'z)$, $V(y - b_j'z)$, sowie $V(z)$ als Verzweigungsort. Diese werden auf $V(b - a_i c)$, $V(a - b_j c)$ und $V(c)$ abgebildet. Nun muß man sich ansehen, wohin $V(f)$ abgebildet wird. Bild von $V(p - q)$ ist die Gerade $V(a - b)$. Ist z ein Teiler von f und der Grad von $p(y, 1)$ gleich dem von $q(x, 1)$, so wird die Gerade $V(z)$ auf $V(c)$ abgebildet. Wie gesehen, wird $V(z)$ ansonsten kontrahiert. Bild der Geraden $V(r(x, z))$ und $V(s(y, z))$ sind Geraden der Form $V(a - a_i c)$ bzw. $V(b - b_j c)$. Diese Geraden bilden bis auf die Gerade $V(a - b)$ ein verbundenes Doppelbüschel. Im Beweis von Proposition 6.1 hat man jedoch gesehen, daß man $V(a - b)$ dazunehmen darf. Proposition 6.1 liefert einen Morphismus, der alle so erhaltenen Geraden auf das vollständige Viereck abbildet und höchstens über diesem verzweigt. Die zusammengesetzte Abbildung ist genau dann ein endlicher Morphismus, wenn $p(y, 1)$ und $q(x, 1)$ gleichen Grad haben. Dann erfüllt X' die Vermutung 2. Ansonsten bläst man im ersten \mathbb{P}^2 auf, bis β_1 ein Morphismus wird. Diese Aufblasungen zieht man mit dem Faserprodukt wie im Beweis von Proposition 3.3 auf X' hoch. Nun führt man, wenn nötig, Stein-Faktorisierung durch, damit der entstandene Morphismus endlich wird, und normalisiert das Urbild. Man erhält eine zu X' birational äquivalente normale Fläche, die eine Überlagerung des \mathbb{P}^2 mit richtigem Verzweigungsverhalten ist. \square

Proposition 6.3. (Polynome vom Grad 3) *Verzweigt $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ höchstens über $V(f)$ mit $f = p(y, z)(x^3 + r(y, z)x + s(y, z))$ homogen, wobei r und s keinen gemeinsamen Faktor haben, so gilt Vermutung 2 für X' .*

Beweis: Man faßt f auf als Polynom in **einer** Variablen x und macht den ersten Schritt im Algorithmus von Belyi mit $x^3 + rx + s$. Dieser liefert die endliche Überlagerung

$$\beta_1 : \begin{cases} \mathbb{P}_{\mathbb{Q}(y,z)}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{Q}(y,z)}^1 \\ x & \mapsto & -78732x^2(x^2 + r)^2. \end{cases}$$

β_1 verzweigt über 0, $11664r^3$ und ∞ . Bild von $x^3 + rx + s = 0$ ist $-78732s^2$. Nun betrachtet man die rationale Abbildung

$$\beta : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow \\ (x : y : z) & \mapsto (-27x^2(x^2 + r)^2 : 4r^3 : -27s^2) =: (a : b : c). \end{cases}$$

Da r und s keinen gemeinsamen Faktor haben, ist β ein endlicher Morphismus. Nach Konstruktion verzweigt β über $V(a)$, $V(a - b)$, $V(a - c)$ und über endlich vielen Geraden der Form $V(b - a_i c)$. Die Geraden $V(p(y, z))$ werden ebenfalls auf Geraden der Form $V(b - a_i c)$ bzw. $V(c)$ abgebildet. Das ist bis auf die Gerade $V(a - b)$ ein verbundenes Doppelbüschel. Diese darf man aber wieder dazunehmen. Nun wendet man Proposition 6.1 an, um das Doppelbüschel auf das vollständige Viereck abzubilden und hat die Proposition bewiesen. \square

Bemerkung 6.4. *Haben in der Situation von Proposition 6.3 die Polynome r und s einen gemeinsamen Faktor $a_1 y - a_2 z$, so gilt immer noch Vermutung 1.*

Beweis: Man ist im wesentlichen in der Situation von Proposition 6.3. Die Abbildung β ist nun in $(0 : a_2 : a_1)$ nicht definiert und der Rest der Geraden $V(a_1 y - a_2 z)$ wird auf den Punkt $(1 : 0 : 0)$ kontrahiert, der im Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ liegt. Daraus erhält man wieder durch Aufblasungen im Urbild sowie anschließende Stein-Faktorisierung und Normalisierung eine endliche Überlagerung des \mathbb{P}^2 , die richtig verzweigt. Dabei können in der überlagernden Fläche Singularitäten entstehen. \square

Da man durch eine Möbiustransformation jedes homogene Polynom vom Grad 3 in die oben angegebene Form bringen kann, hat man mit Proposition 6.3 und Bemerkung 6.4 alle homogenen Polynome vom Grad drei abgedeckt.

Proposition 6.5. *Verzweigt die endliche Überlagerung $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ über $V(f)$, wobei $f := p(y, z)x^3 + r(y, z)x + s(y, z)$ homogen sei, so gilt Vermutung 1 für X' .*

Beweis: Essentiell ist man in derselben Situation wie in Bemerkung 6.4. Allerdings liefert Belyi hier die folgende rationale Abbildung:

$$\beta : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow \\ (x : y : z) & \mapsto (-27px^2(px^2 + r)^2 : 4r^3 : -27ps^2) =: (a : b : c). \end{cases}$$

Der weitere Beweis soll lediglich für den Fall durchgeführt werden, daß f homogen vom Grad 4 ist. Die Konstruktion der rationalen Abbildung β ist unabhängig vom Grad, man erhält im allgemeinen aber wesentlich mehr Punkte, an denen die Abbildung nicht definiert ist und mehr Geraden, die kontrahiert werden. Kontraktionen finden jedoch immer lediglich über den Punkten $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ und $(0 : 0 : 1)$ statt, also im Komplement von $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$.

Ist p ein Teiler von r und s , so klammert man p aus und ist in der Situation von Proposition 6.3 oder Bemerkung 6.4. Ansonsten ist die Abbildung nicht definiert in $(1 : 0 : 0)$. Ist p ein Teiler von r , so dividiert man p aus jeder Komponente der Abbildung aus. Nun wird die Gerade $V(p)$ auf den Punkt $(0 : 0 : 1)$ kontrahiert. Ist p kein Teiler von r , so wird die Gerade $V(p)$ auf den Punkt $(0 : 1 : 0)$ kontrahiert. Geraden, die zu gemeinsamen Faktoren von r und s gehören, werden auf den Punkt $(1 : 0 : 0)$ kontrahiert. Wieder erhält man durch Aufblasungen im Urbild und anschließende Stein-Faktorisierung einen endlichen Morphismus, der über einem Doppelbüschel verzweigt, und ist mit Proposition 6.1 fertig. \square

Proposition 6.6. (Polynome vom Grad 4) *Verzweigt $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ über $V(p(x, y, z))$ mit p homogen vom Grad 4, so gilt Vermutung 1 für X' .*

Beweis: Ist p ein Polynom von niedrigerem Grad in einer der Variablen, so benutzt man Proposition 6.5 mit dieser Variablen. Ansonsten macht man den Koordinatenwechsel $(x : y : z) \mapsto (x : y + ax : z) =: (x' : y' : z')$. Nun ist der Koeffizient von $(x')^4$ in $p(x', y', z')$ ein nichtkonstantes Polynom in a . Wählt man a als Nullstelle dieses Polynoms, so ist $p(x', y', z')$ ein Polynom vom Grad 3 in x' und Proposition 6.5 liefert die Behauptung. \square

Proposition 6.7. *Verzweigt $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$ höchstens über $V(x^n + p(y, z)x^a + q(y, z)) =: V(f)$ mit f homogen und $0 < a < n$, so gilt Vermutung 1 für X' .*

Beweis: Man muß ein Polynom in $\overline{\mathbb{Q}}(y, z)[v_1]$ finden, das die endlichen kritischen Werte von f auf 0 abbildet. Die Ableitung von $x^n + px^a + q$ nach x ist

$$nx^{n-1} + apx^{a-1} = x^{a-1}(nx^{n-a} + ap).$$

Nullstellen davon sind $x = 0$ und die Lösungen von $x^{n-a} = -\frac{a}{n}p$. Ein Polynom, das das Gewünschte leistet, ist somit beispielsweise (mit $v := q - v_1$)

$$g(v) := v(n^n v^{n-a} + (-1)^{a-1} a^a (n-a)^{n-a} p^n).$$

Die Ableitung von $g(v)$ nach v ist

$$\begin{aligned} & n^n v^{n-a} + (-1)^{a-1} a^a (n-a)^{n-a} p^n + n^n (n-a) v^{n-a} \\ &= (n-a+1)n^n v^{n-a} + (-1)^{a-1} a^a (n-a)^{n-a} p^n. \end{aligned}$$

Nullstellen dieses Polynoms sind die Lösungen von $v^{n-a} = (-1)^a \frac{a^a (n-a)^{n-a}}{(n-a+1)n^n} p^n$. Diese werden annulliert von einem Polynom $h(w) := bw^{n-a} + cp^{2n}$ mit konstanten Koeffizienten b, c . $h(w)$ hat als einzigen kritischen Wert cp^{2n} . Definiert man nun $\beta_1 := h(g(f(x, y, z)))$, so verzweigt der von β_1 definierte Morphismus $\mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}(y, z)}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\overline{\mathbb{Q}}(y, z)}^1$ nach Konstruktion über 0 und cp^{2n} . $V(f)$ wird auf ein weiteres Polynom $r(y, z)$ abgebildet: Man setzt $v = q$ in $g(v)$ ein und den so erhaltenen Funktionswert weiter in $h(w)$. Nun betrachtet man die rationale Abbildung

$$\beta : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (x : y : z) & \mapsto & (\beta_1(x, y, z) : cp(y, z)^{2n} : r(y, z)). \end{cases}$$

Ist $r = 0$ oder $r = p^{2n}$, so nimmt man ein zu p teilerfremdes Polynom an Stelle von r . β ist dann ein Morphismus. Nun wendet man Proposition 6.1 an und hat sogar Vermutung 2 gezeigt. Haben p und r keinen gemeinsamen Faktor, so ist β ebenfalls ein Morphismus, und man hat auch in diesem Fall nach einer Anwendung von Proposition 6.1 Vermutung 2 bewiesen. Andernfalls muß man wieder im Urbild aufblasen und anschließend Stein-Faktorisierung machen. Nun wendet man auch hier Proposition 6.1 an und hat zumindest noch Vermutung 1 bewiesen. \square

Bemerkung 6.8. *Zu jedem der obigen kritischen Orte $V(f(x, y, z))$ gibt es eine normale Fläche X_f und eine endliche Überlagerung $X_f \rightarrow \mathbb{P}^2$, die höchstens über $V(f)$ verzweigt. Da man sich nur für $V(f)$ interessiert, sei ohne Einschränkung f reduziert. Ist $V(f)$ nichtsingulär und der Grad von f größer als 4, so ist auch X_f nichtsingulär und vom allgemeinen Typ.*

Beweis: Sei $d := \deg(f)$ und $X_f := V(f(x, y, z) + t^d) \subseteq \mathbb{P}^3$. Offensichtlich haben die singulären Punkte von X_f Koordinaten $(a : b : c : 0)$, wobei $(a : b : c)$ die Koordinaten eines singulären Punktes von $V(f)$ sind. Somit ist X_f genau dann nichtsingulär, wenn $V(f)$ nichtsingulär ist. Ansonsten hat X_f isolierte singuläre Punkte und ist damit nach [HAR, Chapter II, Proposition 8.23, Seite 186] normal. Projiziert man diese Fläche vom Punkt $(0 : 0 : 0 : 1)$ aus auf den \mathbb{P}^2 , erhält man genau $V(f)$ als kritischen Ort. Ist $d > 4$ und X_f nichtsingulär, so ist X_f nach [BEAU, Proposition VII.5, Seite 90] vom allgemeinen Typ. Wie gesehen erfüllen alle so konstruierten Flächen die Vermutung 1. Ist der kritische Ort $V(f)$ nichtsingulär, erfüllt X_f die Vermutung 2 genau dann, wenn die in der entsprechenden Proposition konstruierte Abbildung bereits ein endlicher Morphismus ist. Dies ist beispielsweise für die *Fermat-Flächen* $V(x^n + y^n + z^n + t^n) \subset \mathbb{P}^3$ der Fall. \square

6.2 Spezielle Flächen

Nun geht es darum, Vermutung 2 für ganz spezielle Flächen vom allgemeinen Typ zu zeigen. Dazu gibt man sich als kritischen Ort das vollständige Viereck im \mathbb{P}^2 vor und sucht dazu passende Flächen, die eine über dem Komplement des vollständigen Vierecks unverzweigte endliche Überlagerung mit Zusatzeigenschaften tragen. Systematisch untersucht werden diese Überlagerungen in [BHH].

Lokal konstant verzweigte Überlagerungen. Das sind solche, die längs jeder der sechs Geraden $L_j =: V(l_j(z_0, z_1, z_2))$ des vollständigen Vierecks konstant und unabhängig von den anderen Geraden n -fach zyklisch verzweigt sind. Dazu gibt es immer passende Überlagerungsflächen, die Kummerflächen. Diese haben als Funktionenkörper die Kummererweiterung

$$K = \mathbb{C}(\mathbb{P}^2)(\sqrt[n]{l_1/l_6}, \dots, \sqrt[n]{l_5/l_6})$$

des rationalen Funktionenkörpers $\mathbb{C}(\mathbb{P}^2) = \mathbb{C}(z_1/z_0, z_2/z_0)$ des \mathbb{P}^2 und werden geometrisch realisiert durch

$$X_n := \{(u, v) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5 \mid v_i^n l_j(u) = v_j^n l_i(u) \text{ für } 1 \leq i < j \leq 6\}.$$

Die zugehörige gewünschte Überlagerung des \mathbb{P}^2 ergibt sich als Projektion von X_n auf die erste Komponente.

Bemerkung 6.9. *Die Flächen X_n erfüllen Vermutung 2.*

Beweis: Nach [BHH, 1.2 H] liegen in dieser speziellen Situation nur über den vier Dreifachpunkten des vollständigen Vierecks Singularitäten der Überlagerungsfläche. Bläst man jeden der vier Dreifachpunkte auf, geht also zu $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ über, und bläst dann in der überlagernden Fläche jeden der singulären Punkte einmal auf, so erhält man nach [BHH, 1.2 G] eine glatte Fläche \hat{X} , die $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ endlich und nur über dem Rand verzweigt überlagert. \square

Flächen vom allgemeinen Typ

Einfach erweiterte Fast-Büschel. Das sind Büschel, zu denen noch zwei weitere Geraden hinzugenommen werden, so daß deren Schnittpunkt nicht auf einer Büschelgeraden liegt, also spezielle Doppelbüschel.

Bemerkung 6.10. *Jede konstant n -fach verzweigte Überlagerung eines einfach erweiterten Fast-Büschels durch eine Kummerfläche erfüllt Vermutung 2. Wählt man $n \geq 4$, so sind diese Kummerflächen vom allgemeinen Typ.*

Beweis: Die Flächen erfüllen Vermutung 2 wieder wegen [BHH, 1.2 G/H]. Dort wird an die Anzahl der Geraden im Büschel keine Bedingung gestellt. Laut [BHH, Abschnitt 3.2 M] erhält man als Kummersche Überlagerungsflächen minimale Flächen vom allgemeinen Typ, sobald $n \geq 4$ ist. Diese sind gefasert über einer Basiskurve B . Ist $k > 4$ die Anzahl der Geraden im Fast-Büschel, so gilt für die Eulerzahlen der Basiskurve bzw. der allgemeinen Faser F :

$$\begin{aligned} \chi(B) &= -n^{k-4}((n-1)(k-4) - 2) < 0, \\ \chi(F) &= -n(n-3) < 0. \end{aligned}$$

Gewichtete Verzweigungskonfigurationen. Diese unterscheiden sich von den eben beschriebenen lokal konstant verzweigten Überlagerungen dadurch, daß man jeder irreduziblen Komponente der Geradenkonfiguration eine ganze Zahl n_j , den singulären Schnittpunkten m_ν als *Gewichte* zuordnet. Nun bläst man wieder die Mehrfachpunkte des kritischen Ortes auf. Eine dazu passende Überlagerung ist eine glatte Fläche \hat{X} , die über den strikten Transformierten L'_j der Geraden der Konfiguration lokal von Ordnung n_j und über den exceptionellen Geraden E_ν lokal von Ordnung m_ν zyklisch verzweigt ist.

Verbundene Doppelbüschel. [BHH, Seite 132] zeigen, daß man auch über verbundenen Doppelbüscheln nichtsinguläre Flächen vom allgemeinen Typ erhält, die $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und damit auch \mathbb{P}^2 endlich und mit Proposition 6.1 über $\mathcal{M}_{0,5}$ unverzweigt überlagern, wenn man die Gewichte groß genug wählt. Diese Konstruktion liefert allerdings keine neuen Erkenntnisse, da die überlagernden Flächen isomorph zum Produkt zweier Kurven sind.

Ballquotienten. Die Frage, wie die Gewichte zu Ballquotienten aussehen müssen, die eine endliche Überlagerung des $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ sind, die höchstens über dem Rand verzweigt, ist schon sehr früh untersucht worden. Eine vollständige Liste findet sich in der Dissertation von Le Vavasseur [LeV] und ist in [BHH, Abschnitt 5.4] wiedergegeben. Die für die vorliegende Arbeit interessierenden Flächen sind diejenigen mit den Nummern 1 bis 18. Diese sind kompakte Ballquotienten und insbesondere Flächen vom allgemeinen Typ, die eine Überlagerung des $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ tragen, die höchstens über dem Rand verzweigt.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Nichtsingularität

Wie im Kapitel 5 gesehen, findet man für jede über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte Abelsche Fläche X eine zu X birational äquivalente nichtsinguläre projektive Fläche X' und eine endliche Überlagerung $X' \rightarrow \mathbb{P}^2$, die höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigt ist. Die Berechnungen im Anhang zeigen, daß man (zumindest mit dieser Konstruktion) keine nichtsinguläre Fläche bekommt, die die entsprechende endliche Überlagerung von $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ trägt. Andererseits erhält man für die in Abschnitt 6.2 betrachteten Flächen vom allgemeinen Typ jeweils eine zu der gegebenen Fläche birational äquivalente nichtsinguläre Fläche, die Vermutung 2 mit $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ als überlagerter Fläche erfüllt. Deshalb scheint es vernünftig, sich nicht auf eine einzelne projektive Realisierung von $\mathcal{M}_{0,5}$ einzuschränken, wenn man nichtsinguläre Überlagerungsflächen bekommen möchte, sondern wie in den Vermutungen 1 und 2 **alle** über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten projektiven Realisierungen von $\mathcal{M}_{0,5}$ als zu überlagernde Flächen zuzulassen.

Flächen, die birational äquivalent zum Produkt von Kurven sind, erfüllen ebenfalls Vermutung 2; sie sind endliche Überlagerungen des $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, die höchstens über dem Komplement von $\mathcal{M}_{0,5}$ verzweigen. Mit Bemerkung 3.4 sind diese auch endliche Überlagerungen des \mathbb{P}^2 mit dem richtigen Verzweigungsverhalten.

Satz 8 zeigt die Aussage für hyperelliptische Flächen. Die Propositionen und Bemerkungen aus Kapitel 6 liefern noch einige spezielle Flächen vom allgemeinen Typ. Damit ist Vermutung 2 gezeigt für

- alle rationalen Flächen und alle Regelflächen
- alle hyperelliptischen Flächen
- alle Abelschen Flächen
- alle Flächen vom allgemeinen Typ, die Produkt zweier Kurven sind
- einige weitere Flächen vom allgemeinen Typ

7.2 Höhere Dimension

Das Besondere an den Modulräumen $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}$ ist, daß sich ihr Rand immer aus Kopien von $\overline{\mathcal{M}}_{0,n-1}$ zusammensetzt. Deshalb lassen sich die hier erzielten Resultate sofort auf solche höherdimensionalen Objekte verallgemeinern, die Produkt von Objekten sind, für die man die Vermutung bereits in kleinerer Dimension gezeigt hat. Dies geschieht wie im zweidimensionalen Fall durch einfaches Zusammen setzen der nach Voraussetzung existierenden Belyi-Abbildungen im Niedrigerdimensionalen. Leider sind das immer nur Randerscheinungen. Die generischen Fälle werden dadurch nicht abgedeckt.

Dennoch gilt die zu Vermutung 2 analoge Vermutung im Dreidimensionalen beispielsweise für alle Produkte von drei nichtsingulären Kurven. Bei Abelschen 3-Mannigfaltigkeiten gilt die zu Vermutung 2 analoge Vermutung für diejenigen, die entweder Produkt dreier elliptischer Kurven oder Produkt einer elliptischen Kurve mit der Jacobischen einer Kurve vom Geschlecht 2 sind. Der generische Fall, also der der Jacobischen einer Kurve vom Geschlecht 3, ist leider nicht abgedeckt. Eine zu Satz 11 analoge Vorgehensweise scheitert daran, daß die beim Ausdividieren der Operation von S_3 auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auftretenden Flächen im kritischen Ort keine solchen sind, für die Vermutung 1 oder gar Vermutung 2 bewiesen ist.

Ein weiteres Problem in höherer Dimension ist, daß hier nicht mehr jeder nichtsinguläre über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierte projektive Abschluß einfach in einen anderen überführt werden kann, da der bei Flächen gültige Satz über die Faktorisierung birationaler Abbildungen in eine Abfolge von Auf- und Niederblasungen nicht mehr stimmt. Damit geht auch Proposition 3.3 verloren.

Was jedoch in höherer Dimension immer noch funktionieren würde, wäre eine analoge Vorgehensweise zu der in dieser Arbeit des öfteren angewandten: Man gibt sich einen kritischen Ort im \mathbb{P}^n vor und benutzt Schritt 1 im Satz von Belyi. Würde es gelingen, die Anzahl der kritischen Punkte dieses Morphismus auf $n+2$ zu drücken, so wäre man im Satz von Belyi für Dimension $n-1$ angelangt und würde induktiv einen Morphismus mit richtigem Verzweigungsverhalten finden, siehe hierzu [BR1]. Leider gibt es solch einen Belyi-Algorithmus über Funktionenkörpern (noch) nicht.

Kapitel 8

Anhang

In diesem Kapitel soll noch einmal die Jacobische einer Kurve vom Geschlecht 2 betrachtet werden. In Kapitel 5 wurde ein endlicher Morphismus $\text{Sym}^2(C) \rightarrow \mathbb{P}^2$ konstruiert, der Vermutung 2 für solche Jacobische beweist. Nun geht es darum, das in Kapitel 3 beschriebene Verfahren anzuwenden, um aus dem Morphismus $\text{Sym}^2(C) \rightarrow \mathbb{P}^2$ einen endlichen Morphismus von einer zu $\text{Sym}^2(C)$ birational äquivalenten Fläche X' nach $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ zu konstruieren, der nur über dem Rand verzweigt. Es wird sich herausstellen, daß man verschiedene Typen von Singularitäten in der überlagernden Fläche X' erhält, wogegen \mathbb{P}^2 von der nichtsingulären Fläche $\text{Sym}^2(C)$ überlagert wird.

Der Übergang nach $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ ist nicht direkt möglich, da man den Morphismus $\text{Sym}^2(C) \rightarrow \mathbb{P}^2$ nicht explizit kennt. Man muß über $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $C \times C$ gehen. Dazu betrachtet man den Morphismus $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$ aus Kapitel 5 genauer. Dieser setzt sich aus den folgenden Einzelabbildungen zusammen:

$$\beta_1 : \begin{cases} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ ((s:t), (u:v)) & \mapsto & (su : tv : sv + ut), \end{cases}$$
$$\beta_2 : \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \rightarrow & \mathbb{P}^2 \\ (a : b : c) & \mapsto & ((a + b - 3c)^2(2a^2 + 40ab + 6ca - 9c^2 + 6bc + 2b^2)^2 \\ & & : 4(14ab + b^2 + a^2)^3 : 4(a + b)^2(a^2 - 34ab + b^2)^2). \end{cases}$$

Um nach $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ zu kommen, muß man im zweiten \mathbb{P}^2 die Dreifachpunkte $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ und $(1 : 1 : 1)$ des vollständigen Vierecks aufblasen und diese Aufblasungen in ihren Urbildern auf $\text{Sym}^2(C)$ so mitmachen, daß wieder ein endlicher Morphismus entsteht. Das soll für die einzelnen Punkte in fünf Schritten geschehen: Zuerst berechnet man die Urbilder der vier Punkte unter β_2 . Dann schaut man sich an, welche davon im Verzweigungsort von β_2 liegen, also Nullstellen der Jacobideterminante von β_2 sind.

Nun bläst man in diesen Urbildern im ersten \mathbb{P}^2 auf, bis wieder ein Morphismus entsteht. Da Aufblasen lokal geschieht, seien dabei die Koordinaten immer so gewählt, daß der aufzublasende Punkt der Nullpunkt eines umgebenden \mathbb{A}^2 ist.

Liegt der betrachtete Urbildpunkt nicht im Verzweigungsort des jeweiligen Morphismus, muß man in ihm lediglich die gleichen Aufblasungen wie im Bildpunkt durchführen und erhält wieder einen endlichen Morphismus. Die Urbildpunkte, die im Verzweigungsort liegen, muß man einzeln betrachten.

Dann schaut man sich den kritischen Ort des Morphismus $\varphi := \beta_1 \circ (\beta, \beta)$ an. Dieser ist

$$V \left(ab(a + b - c) \left(ab - \frac{1}{4}c^2 \right) \right).$$

In den Urbildern der Punkte, die nicht im kritischen Ort von φ liegen, muß man auf $\text{Sym}^2(C)$ lediglich dieselben Aufblasungen machen wie in \mathbb{P}^2 und erhält wieder einen endlichen Morphismus.

Von den restlichen Punkten berechnet man die Urbilder in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und macht aus β_1 wieder einen Morphismus.

Nun geht man zu $C \times C$ über und setzt (β, β) wieder zu einem Morphismus fort. Diesen muß man noch endlich machen und dann die entsprechenden Aufblasungen und Kontraktionen auf $\text{Sym}^2(C)$ durchführen.

8.1 Der 1. Schritt

In diesem Abschnitt geht es darum, im zweiten \mathbb{P}^2 die Tripelpunkte des vollständigen Vierecks aufzublasen und dann aus β_2 wieder einen Morphismus zu machen.

Der Punkt $(1 : 0 : 0)$

Dieser hat unter β_2 nur den Punkt $(0 : 0 : 1)$ als Urbild, der im Verzweigungsort von β_2 liegt. Man bläst den Punkt $(1 : 0 : 0)$ im Bild und seinen Urbildpunkt $(0 : 0 : 1)$ auf. Das ergibt im Urbild zwei affine Teile, Aff_1 und Aff_2 . Auf beiden hat man bereits wieder einen Morphismus. Der auf die exzeptionelle Gerade der Aufblasung im Urbild eingeschränkte Morphismus ist

$$(u_0, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(u_0+1)^2(u_0^2-34u_0+1)^2}{(u_0^2+14u_0+1)^3}, 0 \right) \\ \left(\frac{(u_0^2+14u_0+1)^3}{(u_0+1)^2(u_0^2-34u_0+1)^2}, 0 \right) \end{array} \right\}, \quad (u_1, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(u_1+1)^2(u_1^2-34u_1+1)^2}{(u_1^2+14u_1+1)^3}, 0 \right) \\ \left(\frac{(u_1^2+14u_1+1)^3}{(u_1+1)^2(u_1^2-34u_1+1)^2}, 0 \right) \end{array} \right\}.$$

Diese wird somit auf die exzeptionelle Gerade der Aufblasung im Bild abgebildet.

Der Punkt $(0 : 1 : 0)$

Auf $a = 0$ liegen keine Urbilder des Punktes $(0 : 1 : 0)$, da dann auch $b = 0$ sein müßte, womit die zweite Koordinate ebenfalls 0 wäre. Also ist man auf dem affinen Teil $a = 1$ und muß dort (in affinen Koordinaten) die folgenden Punkte betrachten:

Punkt	Koordinaten	Punkt	Koordinaten
p_1	$(-1, 0)$	p_6	$(17 + 12\sqrt{2}, 18 + 12\sqrt{2})$
p_2	$(-1, 2i)$	p_7	$(17 - 12\sqrt{2}, -6 + 4\sqrt{2})$
p_3	$(-1, -2i)$	p_8	$(17 - 12\sqrt{2}, 6 - 4\sqrt{2})$
p_4	$(17 + 12\sqrt{2}, -6 - 4\sqrt{2})$	p_9	$(17 - 12\sqrt{2}, 18 - 12\sqrt{2})$
p_5	$(17 + 12\sqrt{2}, 6 + 4\sqrt{2})$		

Diese liegen alle im Verzweigungsort von β_2 und im kritischen Ort von φ . Man muß jeden Punkt einzeln betrachten. Der auf die exzeptionellen Geraden der jeweiligen Aufblasungen eingeschränkte Morphismus berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
p_1 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{4}{(3u_0-1)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{1}{4}(3u_0-1)^2, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{4u_1^2}{(u_1-3)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(u_1-3)^2}{4u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_2 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{(3u_0+3i-1)^2}, 0 \right) \\ \left((3u_0+3i-1)^2, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(6i-8)u_1^2}{(10u_1-3-9i)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(10u_1-3-9i)^2}{(6i-8)u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_3 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{(3u_0-3i-1)^2}, 0 \right) \\ \left((3u_0-3i-1)^2, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{(6i+8)u_1^2}{(10u_1+9i-3)^2}, 0 \right) \\ \left(-\frac{(10u_1+9i-3)^2}{(6i+8)u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_4 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{34-24\sqrt{2}}{(3u_0+5-3\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(3u_0+5-3\sqrt{2})^2}{34-24\sqrt{2}}, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(22-12\sqrt{2})u_1^2}{(7u_1+15+9\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(7u_1+15+9\sqrt{2})^2}{(22-12\sqrt{2})u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_5 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{8(17-12\sqrt{2})}{(3u_0-1)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(3u_0-1)^2}{8(17-12\sqrt{2})}, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{8(17-12\sqrt{2})u_1^2}{(u_1-3)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(u_1-3)^2}{8(17-12\sqrt{2})u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_6 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{34-24\sqrt{2}}{(3u_0-7+3\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(3u_0-7+3\sqrt{2})^2}{34-24\sqrt{2}}, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(262-180\sqrt{2})u_1^2}{(31u_1-21-9\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(31u_1-21-9\sqrt{2})^2}{(262-180\sqrt{2})u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_7 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{34+24\sqrt{2}}{(3u_0+5+3\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(3u_0+5+3\sqrt{2})^2}{34+24\sqrt{2}}, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(22+12\sqrt{2})u_1^2}{(7u_1+15-9\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(7u_1+15-9\sqrt{2})^2}{(22+12\sqrt{2})u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_8 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{8(17+12\sqrt{2})}{(3u_0-1)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(3u_0-1)^2}{8(17+12\sqrt{2})}, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{8(17+12\sqrt{2})u_1^2}{(u_1-3)^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(u_1-3)^2}{8(17+12\sqrt{2})u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\} \\
p_9 : (u_0, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{34+24\sqrt{2}}{(3u_0-7-3\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(3u_0-7-3\sqrt{2})^2}{34+24\sqrt{2}}, 0 \right), \end{array} \right. & (u_1, 0) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{(262+180\sqrt{2})u_1^2}{(31u_1-21+9\sqrt{2})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{(31u_1-21+9\sqrt{2})^2}{(262+180\sqrt{2})u_1^2}, 0 \right) \end{array} \right\}.
\end{aligned}$$

Auch hier erhält man jeweils bereits nach einer Aufblasung wieder einen endlichen Morphismus auf das aufgeblasene Bild.

Der Punkt $(0 : 0 : 1)$

Dieser hat auf $a = 0$ keine Urbilder, da ansonsten $b = 0$ sein müßte, weshalb die dritte Koordinate auch 0 wäre. Sei also $a = 1$. Dann erhält man in affinen Koordinaten (b, c) die folgenden Punkte als Urbilder von $(0 : 0 : 1)$:

Punkt	Koordinaten	Punkt	Koordinaten
p_1	$(-7 + 4\sqrt{3}, -2 + \frac{4}{3}\sqrt{3})$	p_2	$(-7 - 4\sqrt{3}, -2 - \frac{4}{3}\sqrt{3})$

Diese liegen im Verzweigungsort von β_2 , aber nicht im kritischen Ort von φ . Man bläst im Bild den Punkt $(0 : 0 : 1)$ und seine beiden Urbildpunkte auf. Das ergibt im Urbild jeweils zwei affine Teile, Aff_1 und Aff_2 . Auf Aff_1 hat man bereits einen Morphismus, auf Aff_2 muß man im Nullpunkt nochmals aufblasen. Die auf die jeweiligen exzeptionellen Geraden eingeschränkten Morphismen sind:

p_1 : Die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung geht auf

$$(u_2, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2048\sqrt{3}}{27u_2(3u_2-8\sqrt{3})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{9\sqrt{3}u_2(3u_2-8\sqrt{3})^2}{2048}, 0 \right) \end{array} \right\}, \quad (u_3, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2048\sqrt{3}u_3^3}{81(8u_3-\sqrt{3})^2}, 0 \right) \\ \left(\frac{27\sqrt{3}(8u_3-\sqrt{3})^2}{2048u_3^3}, 0 \right) \end{array} \right\}.$$

Bild der exzeptionellen Geraden der ersten Aufblasung ist

$$(0, v_2) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (n.def., 0) \\ (0, 0) \end{array} \right\}, \quad (u_1, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (n.def., 0) \\ (0, 0) \end{array} \right\}.$$

p_2 : Die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung geht auf

$$(u_2, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{2048\sqrt{3}}{27u_2(3u_2+8\sqrt{3})^2}, 0 \right) \\ \left(-\frac{9\sqrt{3}u_2(3u_2+8\sqrt{3})^2}{2048}, 0 \right) \end{array} \right\}, \quad (u_3, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{2048\sqrt{3}u_3^3}{81(8u_3+\sqrt{3})^2}, 0 \right) \\ \left(-\frac{27\sqrt{3}(8u_3+\sqrt{3})^2}{2048u_3^3}, 0 \right) \end{array} \right\}.$$

Bild der exzeptionellen Geraden der ersten Aufblasung ist

$$(0, v_2) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (n.def., 0) \\ (0, 0) \end{array} \right\}, \quad (u_1, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (n.def., 0) \\ (0, 0) \end{array} \right\}.$$

Die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Urbild wird somit auf die exzeptionelle Gerade der Aufblasung im Bild abgebildet, die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im Urbild wird kontrahiert.

Der Punkt (1 : 1 : 1)

Urbilder unter β_2 sind hier

Punkt	Koordinaten	Punkt	Koordinaten
p_1	$(0 : 1 : 0)$	p_5	$(1 : 1 : -2)$
p_2	$(0 : 1 : 1)$	p_6	$(1 : 1 : \frac{10}{3})$
p_3	$(0 : 1 : -\frac{1}{3})$	p_7	$(1 : 1 : 2)$
p_4	$(0 : 1 : \frac{2}{3})$	p_8	$(1 : 1 : -\frac{2}{3})$

Von diesen liegen p_2 und p_3 nicht im Verzweigungsort von β_2 , p_6 und p_8 liegen nicht im kritischen Ort von φ . Die übrigen Punkte muß man einzeln betrachten. Man geht im Bild auf den affinen Teil $z = 1$. In jedem Fall ist man im Urbild auf dem affinen Teil $b = 1$. Es wird sich als nützlich herausstellen, vor der Aufblasung Koordinatenwechsel im Urbild zu machen, da sich dadurch die affine Darstellung der Aufblasungen erheblich vereinfacht: Die Aufblasung des Nullpunkts im \mathbb{A}^2 ist gegeben als

$$X := \{(x, y), (a : b) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid xb = ya\}.$$

Die beiden affinen Teile sind Aff_1 mit Abbildung $(u_0, v_0) \mapsto (v_0, u_0v_0) = (x, y)$, also $a = 1, v_0 = x, u_0 = b$, und Aff_2 mit der Abbildung $(u_1, v_1) \mapsto (u_1v_1, v_1) = (x, y)$, also $b = 1, v_1 = y, u_1 = a$. Will man den Punkt mit Koordinaten $(u : v)$, $u, v \neq 0$ auf der exzeptionellen Geraden weiter aufblasen, also den Punkt $(\frac{v}{u}, 0)$ auf Aff_1 bzw. den Punkt $(\frac{u}{v}, 0)$ auf Aff_2 , so macht man vor der ersten Aufblasung im \mathbb{A}^2 den folgenden Koordinatenwechsel:

$$(x', y') \mapsto (x', y' - \frac{v}{u}x') = (x, y).$$

Die Ursprungsgerade mit Steigung $\frac{v}{u}$ in den alten Koordinaten wird dadurch zur x' -Achse und liegt nur noch auf dem affinen Teil $b = 1$, also auf Aff_1 .

Nun bläst man im zweiten \mathbb{P}^2 den Punkt $(1 : 1 : 1)$ und jeden seiner Urbildpunkte im ersten \mathbb{P}^2 auf. Man erhält jeweils im Urbild zwei affine Teile Aff_1 und Aff_2 .

p_1 : Auf Aff_1 hat man bereits einen Morphismus. Auf Aff_2 bläst man im Nullpunkt nochmals auf und hat dann auch hier einen Morphismus. Für die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung ergibt das

$$(u_2, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{4}{u_2-4}, 0\right) \\ \left(-\frac{1}{4}u_2 + 1, 0\right) \end{array} \right\}, \quad (u_3, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{4u_3}{4u_3-1}, 0\right) \\ \left(\frac{4u_3-1}{4u_3}, 0\right) \end{array} \right\}.$$

Der auf die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung eingeschränkte Morphismus ist

$$(u_0, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (1, 0) \\ (1, 0) \end{array} \right\}, \quad (0, v_2) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (1, 0) \\ (1, 0) \end{array} \right\}.$$

Die Exzeptionelle der ersten Aufblasung wird kontrahiert, die der zweiten Aufblasung auf die exzeptionelle Gerade im Bild abgebildet.

p_2 : Hier muß man einmal aufblasen und hat dann bereits einen Morphismus.

p_3 : Auch hier muß man einmal aufblasen und hat wieder einen Morphismus.

p_4 : Auf Aff_1 hat man bereits einen Morphismus, auf Aff_2 muß man im Nullpunkt ein zweites Mal aufblasen.

Auf die Exzeptionelle der zweiten Aufblasung eingeschränkt ist der Morphismus nun

$$(u_2, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{4}{u_2-4}, 0\right) \\ \left(-\frac{1}{4}u_2 + 1, 0\right) \end{array} \right\}, \quad (u_3, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{4u_3}{4u_3-1}, 0\right) \\ \left(\frac{4u_3-1}{4u_3}, 0\right) \end{array} \right\}.$$

Für die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung ergibt sich

$$(0, v_2) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (1, 0) \\ (1, 0) \end{array} \right\}, \quad (u_0, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (1, 0) \\ (1, 0) \end{array} \right\}.$$

Die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung wird somit kontrahiert, die der zweiten Aufblasung wird auf die exzeptionelle Gerade der Aufblasung im Bild abgebildet.

p_5 : Man macht im Urbild den Koordinatenwechsel $(a', c') \mapsto (a', a' - c') = (a, c)$ und bläst dann im Nullpunkt auf. Die resultierende Abbildung ist auf Aff_1 im Nullpunkt nicht definiert, auf Aff_2 hat man einen Morphismus. Nun macht man auf Aff_1 den Koordinatenwechsel $(u'_0, v'_0) \mapsto (u'_0, v'_0 + 4u'_0) = (u_0, v_0)$ und bläst im Nullpunkt auf. Das ergibt die affinen Teile $\text{Aff}_{1,1}$ und $\text{Aff}_{1,2}$. Auf $\text{Aff}_{1,2}$ hat man einen Morphismus, auf $\text{Aff}_{1,1}$ macht man den Koordinatenwechsel $(u'_2, v'_2) \mapsto (u'_2, v'_2 + \frac{1}{8}u'_2) = (u_2, v_2)$ und bläst im Nullpunkt weiter auf. Man erhält die affinen Teile $\text{Aff}_{1,1,1}$ und $\text{Aff}_{1,1,2}$. Auf $\text{Aff}_{1,1,2}$ hat man einen Morphismus, auf $\text{Aff}_{1,1,1}$ muß man nochmals im Nullpunkt aufblasen und erhält dann auch hier einen Morphismus.

Das ergibt für die exzeptionelle Gerade der letzten Aufblasung

$$(u_6, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{u_6}{4(3u_6+128)}, 0\right) \\ \left(-\frac{4(3u_6+128)}{u_6}, 0\right) \end{array} \right\}, \quad (u_7, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(-\frac{1}{4(128u_7+3)}, 0\right) \\ \left(-\frac{1}{512u_7+12}, 0\right) \end{array} \right\}.$$

Die exzeptionelle Gerade der vorletzten Aufblasung wird abgebildet auf

$$(0, v_6) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{array} \right\}, \quad (u_5, 0) \mapsto \left\{ \begin{array}{l} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{array} \right\}.$$

Die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung geht auf

$$\begin{aligned} \left(u_6, -\frac{1}{8}\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & \left(-\frac{1}{8v_7}, v_7\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \\ (-8, v_5) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & (u_3, 0) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Bild der exzeptionellen Geraden der ersten Aufblasung ist

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{v_6}, v_6\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & (u_7, -4) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \\ \left(-\frac{4}{v_5}, v_5\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & \left(-\frac{1}{4}, v_3\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \\ (u_1, 0) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Somit werden alle exzeptionellen Geraden kontrahiert bis auf die der letzten Aufblasung, welche auf die exzeptionelle Gerade der Aufblasung im Bild abgebildet wird.

p_6 : Man macht im Urbild den Koordinatenwechsel $(x', y') \mapsto (x', y' + \frac{5}{3}x')$ und bläst im Nullpunkt auf. Auf Aff_1 ist das im Nullpunkt nicht definiert, auf Aff_2 hat man einen Morphismus. Nun macht man auf Aff_1 den Koordinatenwechsel $(u'_0, v'_0) \mapsto (u'_0, v'_0 - 4u'_0) = (u_0, v_0)$ und bläst im Nullpunkt auf. Das ergibt die affinen Teile $\text{Aff}_{1,1}$ und $\text{Aff}_{1,2}$. Auf $\text{Aff}_{1,2}$ hat man einen Morphismus, auf $\text{Aff}_{1,1}$ macht man den Koordinatenwechsel $(u'_2, v'_2) \mapsto (u'_2, v'_2 + \frac{1}{8}u'_2)$ und bläst im Nullpunkt weiter auf. Man erhält die affinen Teile $\text{Aff}_{1,1,1}$ und $\text{Aff}_{1,1,2}$. Auf $\text{Aff}_{1,1,2}$ hat man einen Morphismus, auf $\text{Aff}_{1,1,1}$ muß man nochmals im Nullpunkt aufblasen und erhält dann auch hier einen Morphismus.

Bild der exzeptionellen Geraden der letzten Aufblasung ist

$$(u_6, 0) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{u_6}{4(3u_6-128)}, 0\right) \\ \left(-\frac{4(3u_6-128)}{u_6}, 0\right) \end{cases}, \quad (u_7, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{4(128u_7-3)}, 0\right) \\ (512u_7 - 12, 0) \end{cases}.$$

Die exzeptionelle Gerade der vorletzten Aufblasung wird abgebildet auf

$$(0, v_6) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \quad (u_5, 0) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}.$$

Die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung geht auf

$$\begin{aligned} \left(u_6, -\frac{1}{8}\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & \left(-\frac{1}{8v_7}, v_7\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \\ (-8, v_5) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & (u_3, 0) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Bild der exceptionellen Geraden der ersten Aufblasung ist

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{v_6}, v_6\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & (u_7, 4) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \\ \left(\frac{4}{v_5}, v_5\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, & \left(\frac{1}{4}, v_3\right) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \\ (u_1, 0) &\mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}. \end{aligned}$$

Auch hier werden alle exceptionellen Geraden kontrahiert bis auf die der letzten Aufblasung. Diese wird auf die exceptionelle Gerade der Aufblasung im Bild abgebildet.

p_7 : Man macht im Urbild den Koordinatenwechsel $(x', y') \mapsto (x', y' + x')$ und bläst im Nullpunkt auf. Auf Aff_1 ist das im Nullpunkt nicht definiert, auf Aff_2 hat man einen Morphismus. Bläst man auf Aff_1 noch den Nullpunkt auf, so hat man überall einen Morphismus.

Bild der exceptionellen Geraden der zweiten Aufblasung ist

$$(u_2, 0) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{u_2^2}{16(u_2+4)}, 0\right) \\ \left(-\frac{16(u_2+4)}{u_2^2}, 0\right) \end{cases}, \quad (u_3, 0) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{1}{16u_1(4u_3+1)}, 0\right) \\ (-16u_1(4u_1+1), 0) \end{cases}.$$

Die exceptionelle Gerade der ersten Aufblasung wird abgebildet auf

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \quad (u_1, 0) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}.$$

p_8 : Man macht im Urbild den Koordinatenwechsel $(x', y') \mapsto (x', y' - \frac{1}{3}x')$ und bläst im Nullpunkt auf. Auf Aff_1 ist das im Nullpunkt nicht definiert, auf Aff_2 hat man einen Morphismus. Bläst man auf Aff_1 noch den Nullpunkt auf, so hat man überall einen Morphismus.

Bild der exceptionellen Geraden der zweiten Aufblasung ist

$$(u_2, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_2^2}{16(u_2-4)}, 0\right) \\ \left(\frac{16(u_2-4)}{u_2^2}, 0\right) \end{cases}, \quad (u_3, 0) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{1}{16u_3(4u_3-1)}, 0\right) \\ (-16u_3(4u_3-1), 0) \end{cases}.$$

Die exceptionelle Gerade der ersten Aufblasung wird abgebildet auf

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \quad (u_1, 0) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \end{cases}.$$

8.2 Der 2. Schritt

Nun geht es darum, die im vorigen Schritt gemachten Aufblasungen auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ so mitzumachen, daß man wieder einen Morphismus nach $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ bekommt.

Der Punkt $(1 : 0 : 0)$

Urbilder von $(1 : 0 : 0)$ auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sind $(1 : 0), (0 : 1)$ und $(0 : 1), (1 : 0)$. Man ist nicht im Verzweigungsort von β_1 und da man im ersten \mathbb{P}^2 lediglich einmal aufblasen mußte, erhält man einen endlichen Morphismus nach $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$, indem man in jedem der beiden Urbildpunkte einmal aufbläst.

Der Punkt $(0 : 1 : 0)$

Die Urbilder von $(0 : 1 : 0)$ auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ liegen auf $s = u = 1$ und sind dort in affinen Koordinaten (t, v) die folgenden Punkte (mit $a := 3 + 2\sqrt{2}$):

Punkt	Urbild 1	Urbild 2	Punkt	Urbild 1	Urbild 2
p_1	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	p_6	$(1, 17 + 12\sqrt{2})$	$(17 + 12\sqrt{2}, 1)$
p_2	(i, i)	n.v.	p_7	$(-3 + 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2})$	n.v.
p_3	$(-i, -i)$	n.v.	p_8	$(3 - 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$	n.v.
p_4	$(-a, -a)$	n.v.	p_9	$(1, 17 - 12\sqrt{2})$	$(17 - 12\sqrt{2}, 1)$
p_5	(a, a)	n.v.			

In den Punkten p_1, p_6 und p_9 ist man nach einer Aufblasung bereits fertig, da diese Punkte keine Urbilder auf der Diagonalen in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ haben.

Im Urbild der restlichen Punkte macht man den Koordinatenwechsel $(t', v') \mapsto (t', v' - t') = (t, v)$ und bläst dann den Nullpunkt auf. Die resultierende Abbildung ist auf Aff_1 im Nullpunkt nicht definiert, auf Aff_2 hat man einen Morphismus. Bläst man auf Aff_1 noch den Nullpunkt auf, so hat man überall einen Morphismus. Man erhält die folgenden Einzelabbildungen:

$$\begin{aligned}
 (u_2, v_2) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{u_2 v_2 - u_2 + c_1}, u_2 v_2^2 (u_2 v_2 - u_2 + c_1) \right) \\ (u_2 v_2 - u_2 + c_1, u_2 v_2^2), \end{array} \right. \\
 (u_3, v_3) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{u_3}{u_3 v_3 - 1 + c_1 u_3}, v_3^2 (u_3 v_3 - 1 + c_1 u_3) \right) \\ \left(\frac{u_3 v_3 - 1 + c_1 u_3}{u_3}, u_3 v_3^2 \right), \end{array} \right. \\
 (u_1, v_1) &\mapsto \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{u_1 v_1 + c_1 - u_1^2 v_1}, v_1 (u_1 v_1 + c_1 - u_1^2 v_1) \right) \\ (u_1 v_1 + c_1 - u_1^2 v_1, v_1). \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Dabei sind (c_1, c_2) die Koordinaten des jeweiligen Urbildpunktes. Nun betrachtet man wieder den auf die einzelnen exzeptionellen Geraden eingeschränkten

Morphismus: Für die Exzeptionelle der zweiten Aufblasung ergibt sich

$$(u_2, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{c_1 - u_2}, 0\right) \\ (c_1 - u_2, 0) \end{cases}, \quad (u_3, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_3}{c_1 u_3 - 1}, 0\right) \\ \left(\frac{c_1 u_3 - 1}{u_3}, 0\right) \end{cases}.$$

Diese wird somit auf die Exzeptionelle der Aufblasung im Bild abgebildet. Die Exzeptionelle der ersten Aufblasung geht auf

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{c_1}, 0\right) \\ (c_1, 0) \end{cases}, \quad (u_1, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{c_1}, 0\right) \\ (c_1, 0) \end{cases},$$

wird also auf einen Punkt kontrahiert.

Der Punkt (1:1:1)

Urbilder von $(1 : 1 : 1)$ auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, die noch weiter betrachtet werden müssen, sind

Punkt	Urbild 1	Urbild 2	Punkt	Urbild 1	Urbild 2
p_1	$(0 : 1), (0 : 1)$	n.v.	p_4	$(0 : 1), (\frac{2}{3} : 1)$	$(\frac{2}{3} : 1), (0 : 1)$
p_2	$(0 : 1), (1 : 1)$	$(1 : 1), (0 : 1)$	p_5	$(1 : -1), (1 : -1)$	n.v.
p_3	$(0 : 1), (-\frac{1}{3} : 1)$	$(-\frac{1}{3} : 1), (0 : 1)$	p_7	$(1 : 1), (1 : 1)$	n.v.

Man macht im ersten \mathbb{P}^2 die im vorigen Abschnitt ausgerechneten Aufblasungen und bläst dann die Urbildpunkte in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auf:

p_1 : Man macht im Urbild den Koordinatenwechsel $(s', u') \mapsto (s', u' - s') = (s, u)$ und bläst den Nullpunkt auf. Das ist auf Aff_1 im Nullpunkt nicht definiert, auf Aff_2 hat man einen Morphismus. Bläst man auf Aff_1 noch den Nullpunkt auf, hat man überall einen Morphismus. Bild der exzeptionellen Geraden der zweiten Aufblasung ist

$$(u_2, 0) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{1}{u_2}, 0\right) \\ (0, -u_2) \\ (n.def., 0) \end{cases}, \quad (u_3, 0) \mapsto \begin{cases} (-u_3, 0) \\ \left(0, -\frac{1}{u_3}\right) \\ (n.def., 0) \end{cases}.$$

Diese wird auf die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im Bild abgebildet.

Bild der exzeptionellen Geraden der ersten Aufblasung ist

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} (n.def., 0) \\ \left(\frac{v_2^2}{v_2 - 1}, 0\right) \\ \left(\frac{v_2 - 1}{v_2^2}, 0\right) \end{cases}, \quad (u_1, 0) \mapsto \begin{cases} (n.def., 0) \\ \left(-\frac{1}{u_1(u_1 - 1)}, 0\right) \\ (-u_1(u_1 - 1), 0) \end{cases}.$$

Diese wird auf die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Bild abgebildet.

p_2 : Hier muß man in jedem der beiden Urbildpunkte dieselben Aufblasungen wie in p_2 machen, also genau einmal aufblasen.

p_3 : Hier ist man in der gleichen Situation wie bei p_2 , man muß in jedem der beiden Urbildpunkte genau einmal aufblasen.

p_4 : Man bläst im Urbild den Nullpunkt auf, dann nochmals im Nullpunkt auf Aff_2 und erhält überall einen Morphismus. Die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung geht nach

$$(u_2, 0) \mapsto \begin{cases} (n.def., 0) \\ \left(\frac{3}{2}u_2, 0\right) \\ \left(\frac{2}{3u_2}, 0\right), \end{cases} \quad (u_3, 0) \mapsto \begin{cases} (n.def., 0) \\ \left(\frac{3}{2u_3}, 0\right) \\ \left(\frac{2}{3}u_3, 0\right), \end{cases}$$

was die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Bild ist.

Die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung wird abgebildet auf

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{3(v_2+1)}{2v_2}, 0\right) \\ \left(0, \frac{2v_2}{3(v_2+1)}\right) \\ (n.def., 0), \end{cases} \quad (u_0, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{3}{2}(u_0+1), 0\right) \\ \left(0, \frac{2}{3(u_0+1)}\right) \\ (n.def., 0), \end{cases}$$

was die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im Bild ist.

p_5 : Die im Urbild durchzuführenden Aufblasungen sind sehr kompliziert. Da das qualitative Ergebnis des Kapitels auch ohne diese Aufblasungen zustande kommt, seien sie hier nicht ausgeführt.

p_7 : Man macht im Urbild den Koordinatenwechsel $(s', u') \mapsto (s', u' - s') = (s, u)$ und bläst den Nullpunkt auf. Auf Aff_2 erhält man einen Morphismus, auf Aff_1 muß man nochmals im Nullpunkt aufblasen. Der auf die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung eingeschränkte Morphismus ist

$$(u_2, 0) \mapsto \begin{cases} \left(0, -\frac{u_2}{u_2-1}\right) \\ (n.def., 0) \\ \left(-\frac{u_2-1}{u_2}, 0\right), \end{cases} \quad (u_3, 0) \mapsto \begin{cases} \left(0, \frac{1}{u_3-1}\right) \\ (n.def., 0) \\ (u_3 - 1, 0). \end{cases}$$

Diese wird auf die Exzeptionelle der ersten Aufblasung im Bild abgebildet.

Die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung wird abgebildet auf

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} \left(-\frac{v_2^2}{v_2-1}, 0\right) \\ \left(-\frac{v_2-1}{v_2^2}, 0\right) \\ (n.def., 0), \end{cases} \quad (u_1, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{u_1(u_1-1)}, 0\right) \\ (u_1(u_1-1), 0) \\ (n.def., 0), \end{cases}$$

was die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Bild ist.

8.3 Der 3. Schritt

Nun geht es darum, aus der rationalen Abbildung von $C \times C$ auf den aufgeblasenen $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ wieder einen Morphismus zu machen. Dies geht nicht direkt, da man den Morphismus (β, β) nicht explizit kennt. Da (β, β) jedoch ein Produkt von Morphismen zwischen nichtsingulären Kurven ist, kann man nach [SE, GAGA] zur analytischen Kategorie übergehen und (β, β) lokal auf Kreisscheiben betrachten. Dort ist der Morphismus in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$(x, y) \mapsto (x^n, y^m),$$

wobei ohne Einschränkung $n \geq m$ sei. Es wird sich als nützlich erweisen, zu Beginn nicht einen beliebigen Belyi-Morphismus zu benutzen, sondern einen Morphismus β'' zu wählen, der bei ∞ voll verzweigt. Die Existenz eines solchen β'' wird von Riemann-Roch garantiert. Hinter β'' setzt man die endliche Überlagerung

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, (x : z) \mapsto ((x^2 - z^2)^2 : z^4).$$

Dieser verzweigt über $\{0, 1, \infty\}$ und alle Verzweigungsindizes sind nun 1 (unverzweigt) oder gerade. Insbesondere ist φ über ∞ voll verzweigt. Sei $\beta' := \varphi \circ \beta''$. Aus β' baut man sich einen sogenannten *reinen Belyi-Morphismus*, indem man hinter β' den Morphismus

$$\psi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, (x : z) \mapsto (-4x(x - z) : z^2)$$

setzt. Dieser verzweigt über 1 und ∞ und bildet 0 und 1 nach 0 ab. Über ∞ ist auch ψ voll verzweigt. Nun definiert man $\beta := \psi \circ \beta'$ und benutzt diesen Morphismus β . Das hat lokal folgenden Effekt:

Außerhalb des kritischen Ortes von (β, β) ist $m = n = 1$. Im kritischen Ort außerhalb der Schnittpunkte der sechs Geraden ist $m = 1, n$ gerade. Für Punkte der Form $(1 : 1), (a : b)$ ist in der lokalen Beschreibung $n = 2$. Über Punkten der Form $(1 : 0), (a : b)$ ist $n = \deg(\beta)$, in Punkten der Form $(0 : 1), (a : b)$ ist n beliebig, aber kleiner als $\deg(\beta)$. Für manche Punkte ist es sinnvoll, die Aufblasungen in der lokalen Beschreibung im Urbild mitzumachen, bis wieder ein Morphismus entsteht. Oft bietet sich jedoch eine andere Vorgehensweise an: Man berechnet lokal Gleichungen für das Faserprodukt

$$\begin{array}{ccc} (C \times C) \times_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)_{bl} & \longrightarrow & C \times C \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)_{bl} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1. \end{array}$$

Diese Konstruktion garantiert die Endlichkeit des entstehenden Morphismus vom Faserprodukt auf den aufgeblasenen $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, hat aber den Nachteil, daß das Faserprodukt im allgemeinen keine normale Fläche ist. Da Normalisierung jedoch

endlich ist und die Singularitäten des zurückgezogenen $C \times C$ lediglich über den exzeptionellen Geraden im Bild liegen, kommt man durch Normalisieren zu einer normalen Fläche, ohne die Endlichkeit oder das Verzweigungsverhalten des Morphismus zu zerstören.

Der Punkt $(1 : 0 : 0)$

Dieser hat die Urbilder $(1 : 0)$, $(0 : 1)$ und $(0 : 1)$, $(1 : 0)$ unter β_1 . Der Morphismus ist lokal gegeben durch $(x, y) \mapsto (x^d, y^n)$ mit $d := \deg(\beta)$ und $n < d$. Nun muß man im $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ einmal in jedem der Punkte aufblasen. Das ergibt jeweils zwei affine Teile Aff_1 und Aff_2 mit den folgenden affinen Koordinatenringen:

Aff_1 : Der affine Koordinatenring von Aff_1 ist $R := k[u, x, y]/(ux^d - y^n)$. Um R zu normalisieren, geht man folgendermaßen vor: Sei $r := \text{ggT}(d, n)$, sowie $d = ar$, $n = br$. Man nimmt $\xi := \frac{y^b}{x^a}$ dazu. Dann ist $\xi^r = \frac{y^n}{x^d} = u$ und man erhält

$$R[\xi] = k[u, x, y, t]/(ux^d - y^n, tx^a - y^b, t^r - u) = k[x, y, t]/(tx^a - y^b).$$

Nun ist man in der Situation $r = 1$. Ist $a > b$, so nimmt man $\xi := \frac{y}{x}$ dazu. Dann ist $\xi^b = \frac{y^b}{x^b} = tx^{a-b}$ und $R[\xi]$ hat dieselbe Normalisierung wie

$$k[x, t, z]/(tx^c - z^b)$$

mit $c := a - b$. Ist $c > b$, so wiederholt man diesen Schritt so lange, bis $c < b$ ist. Ist dann $c = 1$, so erhält man eine A_{b-1} -Singularität in der normalisierten Fläche. Ansonsten folgt man [BPvV, Seite 84], definiert die Zahl q durch $q \equiv -c \pmod{b}$ und erhält im Nullpunkt der normalisierten Fläche eine Singularität vom Typ $A_{b,q}$.

Aff_2 : Hier hat man den Ring $R := k[u, x, y]/(uy^n - x^d)$ zu normalisieren. Ist wieder $r := \text{ggT}(d, n)$, sowie $d = ar$, $n = br$, so nimmt man $\xi := \frac{x^a}{y^b}$ zu R dazu. Dann ist $\xi^r = \frac{x^d}{y^n} = \frac{uy^n}{y^n} = u$. Man erhält

$$R[\xi] = k[u, x, y, t]/(uy^n - x^d, ty^b - x^a, t^r - u) \cong k[x, y, t]/(ty^b - x^a).$$

Hier ist b bereits kleiner als a . Ist $b = 1$, so hat man eine normale Fläche mit einer isolierten A_{a-1} -Singularität im Nullpunkt. Ansonsten definiert man wieder q durch $q \equiv -b \pmod{a}$ und erhält in der normalisierten Fläche eine Singularität des Typs $A_{a,q}$.

Der Punkt $(0 : 1 : 0)$

Die Urbilder der Punkte p_2, p_3, p_4, p_5, p_7 und p_8 liegen nicht im kritischen Ort von (β, β) . Man macht in ihnen die Koordinatenwechsel und Aufblasungen im Bild

mit und ist in diesen Punkten fertig. Übrig sind noch die Urbilder der Punkte p_1, p_6 und p_9 . In diesen hat man $n = 2$, $m = 1$ und muß im Bild lediglich einmal aufblasen. Auf $C \times C$ erhält man damit lokal die folgenden affinen Koordinatenringe, die man normalisieren muß:

$$\begin{aligned} k[u, v, x, y]/(v - x^2, uv - y) &\cong k[x, u] \\ k[u, v, x, y]/(uv - x^2, v - y) &\cong k[u, x, y]/(uy - x^2). \end{aligned}$$

Diese Ringe sind beide normal: Der erste ist sogar regulär, auf dem ersten affinen Teil befinden sich keine Singularitäten. Die Normalität des zweiten Rings folgt aus [HAR, Chapter II, Proposition 8.23, Seite 186]. Hier befindet sich im Nullpunkt eine Singularität vom Typ A_1 .

Der Punkt $(1 : 1 : 1)$

Wie schon in den vorherigen Schritten schaut man sich die Punkte einzeln an.

p_1 : Hier bläst man den Punkt $(0 : 1), (0 : 1)$ auf. Da die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im vorigen Schritt auf die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung in Schritt 1 abgebildet wird, die man ohnehin kontrahieren muß, erhält man einen endlichen Morphismus nach $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$, indem man nur einmal aufbläst. Diese Aufblasung zieht man über das Faserprodukt nach $C \times C$ hoch: In den alten Koordinaten (s, u) ist der Morphismus lokal gegeben als $(x, y) \mapsto (x^n, y^m)$. Nun macht man das Inverse des Koordinatenwechsels in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und erhält als Morphismus in den neuen Koordinaten $(x, y) \mapsto (x^n, y^m + x^n)$. Dann bläst man im Bild einmal im Nullpunkt auf und zieht das auf $C \times C$ zurück. Man erhält zwei affine Teile mit den folgenden affinen Koordinatenringen:

$$\begin{aligned} k[u, x, y]/(ux^n - y^m - x^n) &\cong k[u', x, y]/(u'x^n - y^m) \text{ und} \\ k[u, x, y]/(u(y^m + x^n) - x^n). \end{aligned}$$

Dabei ist $u' := u - 1$. Der erste dieser Ringe ist genauso zu normalisieren, wie im Punkt $(1 : 0 : 0)$ beschrieben, man erhält höchstens eine Singularität des Typs $A_{b,q}$.

Die Normalisierung des zweiten Rings ist bedeutend komplizierter. Da diese für das qualitative Ergebnis des Kapitels nicht von entscheidender Bedeutung ist, sei sie nicht explizit ausgerechnet.

p_2 : Dieser hat in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Urbilder $(0 : 1), (1 : 1)$ und $(1 : 1), (0 : 1)$. Somit ist in der lokalen Beschreibung n gerade und $m = 2$, also lokal die Abbildung gegeben durch $(x, y) \mapsto (x^n, y^2)$. Nun muß man im Bild den Nullpunkt

aufblasen. Zieht man diese Aufblasung auf $C \times C$ zurück, so erhält man zwei affine Teile mit den folgenden affinen Koordinatenringen:

$$\begin{aligned} k[u, v, x, y]/(v - x^n, uv - y^2) &\cong k[u, x, y]/(ux^n - y^2) \text{ und} \\ k[u, v, x, y]/(uv - x^n, v - y^2) &\cong k[u, x, y]/(uy^2 - x^n). \end{aligned}$$

Dies sind im wesentlichen dieselben Ringe wie im Punkt $(1 : 0 : 0)$, allerdings mit der zusätzlichen Voraussetzung $m = 2$, also $\text{ggT}(n, m) = m = 2$. Mit derselben Argumentation wie im Punkt $(1 : 0 : 0)$ erhält man die folgenden Ringe als Normalisierungen:

$$\begin{aligned} k[u, x, y]/(ux^{\frac{n}{2}} - y) &\cong k[u, x] \text{ und} \\ k[u, x, y]/(uy - x^{\frac{n}{2}}). & \end{aligned}$$

Diese sind beide normal; über den Urbildern von p_2 in $C \times C$ sitzen jeweils $A_{\frac{n}{2}-1}$ -Singularitäten.

p_3 : Dieser hat in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Urbilder $(0 : 1)$, $(-\frac{1}{3} : 1)$ und $(-\frac{1}{3} : 1)$, $(0 : 1)$. Man hat somit n gerade und $m = 1$, also die Abbildung $(x, y) \mapsto (x^n, y)$. Nun muß man im Bild den Nullpunkt aufblasen. Zieht man diese Aufblasung auf $C \times C$ zurück, so erhält man zwei affine Teile mit den folgenden affinen Koordinatenringen:

$$\begin{aligned} k[u, v, x, y]/(v - x^n, uv - y) &\cong k[u, x] \text{ und} \\ k[u, v, x, y]/(uv - x^n, v - y) &\cong k[u, x, y]/(uy - x^n). \end{aligned}$$

Diese sind beide normal, über den Urbildern von p_3 in $C \times C$ sitzen jeweils A_{n-1} -Singularitäten.

p_4 : Dieser hat in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ die Urbilder $(0 : 1)$, $(\frac{2}{3} : 1)$ und $(\frac{2}{3} : 1)$, $(0 : 1)$. Man hat somit n gerade, $m = 1$, also lokal die Abbildung $(x, y) \mapsto (x^n, y)$. Nun muß man im Bild den Nullpunkt aufblasen und dann auf dem zweiten affinen Teil nochmals im Nullpunkt. Das ergibt die folgende Abbildung:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{y}{x^n}, x^n \right) \\ \left(\frac{y^2}{x^n}, \frac{x^n}{y} \right) \\ \left(\frac{x^n}{y^2}, y \right). \end{cases}$$

Nun bläst man im Urbild den Nullpunkt auf und erhält die beiden affinen Teile Aff_1 und Aff_2 mit den folgenden Abbildungen:

$$(u_0, v_0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_0}{v_0^{n-1}}, v_0^n \right) \\ \left(\frac{u_0^2}{v_0^{n-2}}, \frac{v_0^{n-1}}{u_0} \right) \\ \left(\frac{v_0^{n-2}}{u_0^2}, u_0 v_0 \right), \end{cases} \quad (u_1, v_1) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{u_1^n v_1^{n-1}}, u_1^n v_1^n \right) \\ \left(\frac{1}{u_1^n v_1^{n-2}}, u_1^n v_1^{n-1} \right) \\ \left(u_1^n v_1^{n-2}, v_1 \right). \end{cases}$$

Auf Aff_2 hat man bereits einen Morphismus, auf Aff_1 muß man im Nullpunkt weiter aufblasen, wenn n größer als 2 ist. Das ergibt

$$(u_2, v_2) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{u_2^{n-1}v_2^{n-3}}, u_2^n v_2^n \right) \\ \left(\frac{1}{u_2^{n-2}v_2^{n-4}}, u_2^{n-1}v_2^{n-2} \right) \\ \left(u_2^{n-2}v_2^{n-4}, u_2 v_2^2 \right), \end{cases} \quad (u_3, v_3) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_3}{v_3^{n-2}}, v_3^n \right) \\ \left(\frac{u_3^2}{v_3^{n-4}}, \frac{v_3^{n-2}}{u_3} \right) \\ \left(\frac{v_3^{n-4}}{u_3^2}, u_3 v_3^2 \right). \end{cases}$$

Man erhält einen Teil, auf dem man bereits einen Morphismus hat und einen, der genauso aussieht wie Aff_1 . Man hat somit einen Algorithmus konstruiert. Nach insgesamt $\frac{n}{2}$ Aufblasungen erhält man

$$(u_j, v_j) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{u_j^{\frac{n}{2}+1}v_j^{\frac{n}{2}}}, u_j^n v_j^n \right) \\ \left(\frac{1}{u_j^{\frac{n}{2}}}, u_j^{\frac{n}{2}+1}v_j^{\frac{n}{2}} \right) \\ \left(u_j^{\frac{n}{2}}, u_j^a v_j^b \right), \end{cases} \quad (u_k, v_k) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_k}{v_k^{\frac{n}{2}}}, v_k^n \right) \\ \left(u_k^2, \frac{v_k^{\frac{n}{2}}}{u_k} \right) \\ \left(\frac{1}{u_k^2}, u_k v_k^2 \right). \end{cases}$$

Nach weiteren $\frac{n}{2}$ Aufblasungen ist man fertig. Man erhält

$$(u_l, v_l) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{u_l}, u_l^n v_l^n \right) \\ \left(u_l^a v_l^b, u_l \right) \\ \left(\frac{1}{u_l^a v_l^b}, u_l^c v_l^d \right), \end{cases} \quad (u_m, v_m) \mapsto \begin{cases} (u_m, v_m^n) \\ \left(u_m^a v_m^b, \frac{1}{u_m} \right) \\ \left(\frac{1}{u_m^a v_m^b}, u_m v_m^n \right). \end{cases}$$

Alle exzeptionellen Geraden werden wieder kontrahiert, bis auf die der $\frac{n}{2}$ -ten Aufblasung und die der n -ten Aufblasung. Erstere wird auf die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Bild abgebildet, zweite auf die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im Bild.

p_5 : Dieser liegt nicht im kritischen Ort von (β, β) , man muß auf $C \times C$ exakt dieselben Aufblasungen machen wie in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

p_7 : Hier ist man im Punkt $(1 : 1), (1 : 1)$ auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. (β, β) ist lokal gegeben durch $(x, y) \mapsto (x^2, y^2)$. Nun macht man mit dieser lokalen Beschreibung den Koordinatenwechsel und die Aufblasungen im Bild sowie im Urbild den Koordinatenwechsel $(x', y') \mapsto (x' + iy', y' + ix') = (x, y)$. Das ergibt

$$(x', y') \mapsto \begin{cases} \left(\frac{(x'+iy')^4}{4ix'y'}, \frac{4ix'y'}{(x'+iy')^2} \right) \\ \left(\frac{4ix'y'}{(x+iy)^4}, (x'+iy')^2 \right) \\ \left(\frac{(x'+iy')^2}{4ix'y'}, 4ix'y' \right). \end{cases}$$

Nun bläst man im Urbild den Nullpunkt auf. Man erhält die beiden affinen Teile Aff_1 und Aff_2 . Auf beiden muß man im Nullpunkt weiter aufblasen,

was die affinen Teile $\text{Aff}_{1,1}$, $\text{Aff}_{1,2}$, $\text{Aff}_{2,1}$ und $\text{Aff}_{2,2}$ ergibt. Auf $\text{Aff}_{1,1}$ und $\text{Aff}_{2,1}$ hat man bereits einen Morphismus, auf $\text{Aff}_{1,2}$ und $\text{Aff}_{2,2}$ muß man jeweils noch einmal im Nullpunkt aufblasen. Nun betrachtet man den auf die exzeptionellen Geraden eingeschränkten Morphismus, zuerst auf Aff_1 :

Die exzeptionelle Gerade der dritten Aufblasung geht nach

$$(u_6, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_6}{4i}, 0\right) \\ \left(\frac{4i}{u_6}, 0\right) \\ (n.def., 0), \end{cases} \quad (u_7, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{4iu_7}, 0\right) \\ (4iu_7, 0) \\ (n.def., 0). \end{cases}$$

Das ist die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Bild.

Bild der exzeptionellen Geraden der zweiten Aufblasung ist

$$(0, v_6) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \\ (n.def., 0), \end{cases} \quad (u_2, 0) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \\ (n.def., 0). \end{cases}$$

Die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung geht nach

$$(0, v_2) \mapsto \begin{cases} \left(0, -\frac{4iv_2}{(v_2-i)^2}\right) \\ (n.def., 0) \\ \left(\frac{(v_2-i)^2}{4iv_2}, 0\right). \end{cases}$$

Das ist die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im Bild.

Nun betrachtet man die Situation auf Aff_2 . Die exzeptionelle Gerade der dritten Aufblasung geht nach

$$(u_8, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{u_8}{4i}, 0\right) \\ \left(\frac{4i}{u_8}, 0\right) \\ (n.def., 0), \end{cases} \quad (u_9, 0) \mapsto \begin{cases} \left(\frac{1}{4iu_9}, 0\right) \\ (4iu_9, 0) \\ (n.def., 0). \end{cases}$$

Das ist wieder die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung im Bild.

Bild der exzeptionellen Geraden der zweiten Aufblasung ist

$$(0, v_8) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \\ (n.def., 0), \end{cases} \quad (u_4, 0) \mapsto \begin{cases} (0, 0) \\ (n.def., 0) \\ (n.def., 0). \end{cases}$$

Die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung geht nach

$$(0, v_4) \mapsto \begin{cases} \left(0, \frac{4iv_4}{(v_4+i)^2}\right) \\ (n.def., 0) \\ \left(\frac{(v_4+i)^2}{4iv_4}, 0\right). \end{cases}$$

Das ist die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im Bild.

8.4 Der 4. Schritt

Der in Schritt 3 konstruierte Morphismus vom normalisierten zurückgezogenen bzw. aufgeblasenen $C \times C$ auf $\overline{\mathcal{M}}_{0,5}$ ist nicht endlich, da man in einigen der vorhergehenden Schritte exzeptionelle Geraden wieder hätte kontrahieren müssen. Dies soll nun auf $C \times C$ geschehen.

Der Punkt $(1 : 0 : 0)$

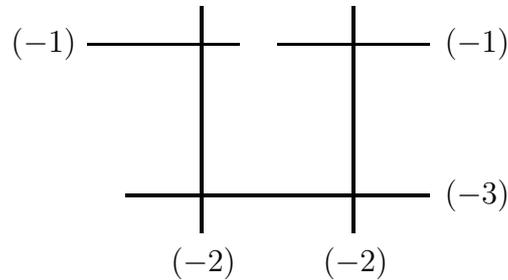
Hier mußte man in keinem der vorhergehenden Schritte wieder kontrahieren. Normalisieren ist ebenfalls endlich, der Punkt $(1 : 0 : 0)$ ist erledigt.

Der Punkt $(0 : 1 : 0)$

Über den Punkten p_1, p_6 und p_9 , deren Urbilder nicht über der Diagonalen in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ liegen, erhält man jeweils A_1 -Singularitäten im normalisierten $C \times C$. Über den Diagonalpunkten p_2, p_3, p_4, p_5, p_7 und p_8 muß man zweimal aufblasen und dann die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung kontrahieren. Das ergibt ebenfalls Singularitäten des Typs A_1 .

Der Punkt $(1 : 1 : 1)$

- p_1 : Diesen hat man bereits in Schritt 3 behandelt.
- p_2 : Hier erhält man über den Urbildern in $C \times C$ Singularitäten des Typs $A_{\frac{n}{2}-1}$.
- p_3 : Hier muß man in keinem Schritt kontrahieren und erhält im aufgeblasenen $C \times C$ über jedem der Urbilder von p_3 eine A_{n-1} -Singularität.
- p_4 : Man muß die exzeptionellen Geraden der letzten $\frac{n}{2}$ Aufblasungen kontrahieren, was nicht zu Singularitäten führt. Des weiteren muß man die ersten $\frac{n}{2} - 1$ exzeptionellen Geraden kontrahieren. Diese sind (-2) -Geraden, da man immer im Nullpunkt auf dem zweiten Teil aufgeblasen hat, also nicht im Schnittpunkt von zweien der vorhergehenden exzeptionellen Geraden. Man erhält über jedem Urbild von p_4 in $C \times C$ eine $A_{\frac{n}{2}-1}$ -Singularität.
- p_5 : Da die in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ zu machenden Aufblasungen im dritten Schritt nicht ausgerechnet wurden, ist an dieser Stelle keine Aussage über die auftretenden Singularitäten möglich. Der Verdacht ist aber, daß es sich um Singularitäten des Typs A_k für ein $k \in \mathbb{N}$ handelt.
- p_7 : Hier sieht die Konfiguration der exzeptionellen Geraden im aufgeblasenen $C \times C$ folgendermaßen aus:



Nun muß man alle exzeptionellen Geraden kontrahieren, die auf die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung im \mathbb{P}^2 abgebildet werden. Das sind die beiden (-1) -Geraden und die beiden (-2) -Geraden. Man erhält somit im aufgeblasenen $C \times C$ über p_7 keine Singularitäten.

8.5 Der 5. Schritt

In diesem letzten Schritt betrachtet man die Auswirkungen der in den vorherigen Schritten gemachten Aufblasungen auf $\text{Sym}^2(C)$. Außerhalb der Diagonalen in $C \times C$ gibt es für jeden Punkt (x, y) analytische Umgebungen, die disjunkt sind von den entsprechenden Umgebungen von (y, x) . Diese Umgebungen sind isomorph zu ihrem Bild in $\text{Sym}^2(C)$ und man erhält lokal für den Morphismus $\text{Sym}^2(C) \rightarrow \mathbb{P}^2$ exakt dieselben Aufblasungen wie für φ .

Der Punkt $(1 : 0 : 0)$

Da dieser keine Urbilder auf der Diagonalen in $C \times C$ hat, erhält man höchstens Singularitäten des Typs $A_{n,q}$ über den Urbildern in $\text{Sym}^2(C)$.

Der Punkt $(0 : 1 : 0)$

Die Urbildpunkte von p_1, p_6 und p_9 in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ liegen nicht auf der Diagonalen. Somit hat auch $\text{Sym}^2(C)$ über den Punkten p_1, p_6 und p_9 jeweils A_1 -Singularitäten. Die Urbilder der restlichen Punkte liegen auf der Diagonalen in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Man macht Fallunterscheidung:

- 1.) Urbildpunkte, die nicht auf der Diagonalen in $C \times C$ liegen. Hier erhält man durch die Kontraktion der (-2) -Kurve in $\text{Sym}^2(C)$ jeweils A_1 -Singularitäten.
- 2.) Urbildpunkte auf der Diagonalen in $C \times C$. Hier ist der Morphismus nach $\text{Sym}^2(C)$ lokal gegeben durch $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$, da dies die invarianten Polynome unter der Operation von S_2 auf $C \times C$ sind. Man muß auf $\text{Sym}^2(C)$

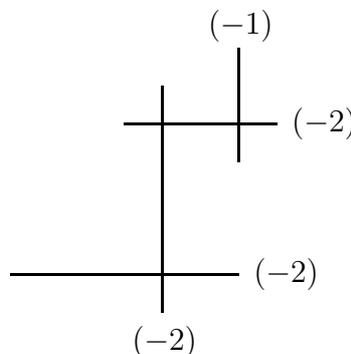
zweimal aufblasen, erhält dann wieder einen Morphismus, und muß die exzeptionelle Gerade der zweiten Aufblasung kontrahieren. Da dies eine (-1) -Gerade ist, erhält man in den Urbildpunkten von $(0 : 1 : 0)$ im Bild der Diagonalen in $\text{Sym}^2(C)$ keine Singularitäten.

Der Punkt $(0 : 0 : 1)$

Man muß hier in jedem der Urbildpunkte auf $\text{Sym}^2(C)$ einmal aufblasen und dann nochmals jeweils in einem Punkt der exzeptionellen Geraden. Dann kontrahiert man die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung, was eine A_1 -Singularität zur Folge hat. Über $(0 : 0 : 1)$ liegen somit lediglich A_1 -Singularitäten.

Der Punkt $(1 : 1 : 1)$

- p_1 : In den Urbildpunkten, die nicht im Bild der Diagonalen in $C \times C$ liegen, erhält man mindestens Singularitäten des Typs $A_{b,q}$. Da die Normalisierung des zweiten Teils nicht ausgerechnet wurde, ist hier auch keine weitere Aussage möglich.
- p_2 : Dieser hat keine Urbilder auf der Diagonalen in $C \times C$. Deshalb erhält man im aufgeblasenen $\text{Sym}^2(C)$ Singularitäten vom Typ $A_{\frac{n}{2}-1}$.
- p_3 : Auch dieser Punkt hat keine Urbilder auf der Diagonalen in $C \times C$. Deshalb erhält man über p_3 im aufgeblasenen $\text{Sym}^2(C)$ jeweils Singularitäten des Typs A_{n-1} .
- p_4 : Da p_4 keine Urbilder auf der Diagonalen in $C \times C$ hat, erhält man in $\text{Sym}^2(C)$ über jedem Urbild von p_4 eine Singularität vom Typ $A_{\frac{n}{2}-1}$.
- p_5 : Da der dritte Schritt mit p_5 nicht durchgeführt wurde, ist hier keine Aussage möglich.
- p_6 : Dieser liegt nicht im kritischen Ort von φ ; man macht auf $\text{Sym}^2(C)$ dieselben Aufblasungen wie in \mathbb{P}^2 . Das ergibt in jedem der Urbildpunkte die folgende Konfiguration der exzeptionellen Geraden:



Nun muß man alle (-2) -Geraden kontrahieren. Das hat jeweils eine A_3 -Singularität zur Folge.

- p_7 :
- 1.) In den Urbildpunkten, die nicht im Bild der Diagonalen von $C \times C$ liegen, erhält man keine Singularitäten in $\text{Sym}^2(C)$, da ihre Urbilder auf $C \times C$ nichtsingulär sind.
 - 2.) Urbilder von p_7 in $\text{Sym}^2(C)$ im Bild der Diagonalen von $C \times C$. Hier ist der Morphismus $C \times C \rightarrow \text{Sym}^2(C)$ lokal gegeben durch $(x, y) \mapsto (xy, x + y)$. Nun macht man im Urbild den Koordinatenwechsel und bläst im Nullpunkt auf. Das ergibt die affinen Teile Aff_1 und Aff_2 . Man hat nun die folgenden Morphismen nach $\text{Sym}^2(C)$:

$$\begin{aligned} \text{Aff}_1 : (u_0, v_0) &\mapsto (i(u_0^2 + 1)v_0^2, (1 + i)(1 + u_0)v_0) \\ \text{Aff}_2 : (u_1, v_1) &\mapsto (i(u_1^2 + 1)v_1^2, (1 + i)(1 + u_1)v_1). \end{aligned}$$

Da man in p_7 aufgeblasen hat und vorher einen Morphismus von $\text{Sym}^2(C)$ nach \mathbb{P}^2 hatte, muß man $\text{Sym}^2(C)$ in jedem Fall in den Urbildern von p_7 aufblasen. Die konkrete Rechnung liefert, daß man dann keinen Morphismus von $C \times C$ nach $\text{Sym}^2(C)$ mehr hat. Man muß in einem Punkt der exzeptionellen Geraden der ersten Aufblasung in $\text{Sym}^2(C)$ nochmals aufblasen und dann die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung wieder kontrahieren. Letztlich erhält man über den Urbildern von p_7 , die im Bild der Diagonalen in $\text{Sym}^2(C)$ liegen, jeweils eine A_1 -Singularität.

- p_8 : Da p_8 nicht im kritischen Ort von φ liegt, muß man in jedem der Urbildpunkte auf $\text{Sym}^2(C)$ zweimal aufblasen und dann die exzeptionelle Gerade der ersten Aufblasung kontrahieren. Das ergibt über jedem der Urbildpunkte von p_8 in $\text{Sym}^2(C)$ eine A_1 -Singularität.

Als Fazit dieser Berechnungen läßt sich somit festhalten, daß es im Hinblick auf Vermutung 1 ohne Bedeutung ist, welchen projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ man betrachtet, da in Vermutung 1 lediglich die Normalität der überlagernden Fläche gefordert wurde. Die Rechnungen zeigen jedoch, daß man beim Übergang von einem projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ zu einem anderen im allgemeinen verschiedenste Arten von Singularitäten in der überlagernden Fläche bekommt. Die Flexibilität der Vermutungen 1 und 2 erlaubt es, einen projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$ zu wählen, bei dem die Singularitäten möglichst milder Natur sind. Im vorliegenden Fall erhält man in \mathbb{P}^2 sogar einen projektiven Abschluß von $\mathcal{M}_{0,5}$, so daß die überlagernde Fläche nichtsingulär ist. Dies rechtfertigt die Formulierung der Vermutungen an einem konkreten Beispiel.

Literaturverzeichnis

- [BEAU] Arnaud Beauville. *Complex Algebraic Surfaces*. London Math. Soc. Lect. Notes Series 68. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [BHH] Gottfried Barthel, Friedrich Hirzebruch, Thomas Höfer. *Geradenkonfigurationen und Algebraische Flächen*. Aspekte der Mathematik, D4. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1987.
- [BL] Christina Birkenhake, Herbert Lange. *Complex Abelian Varieties*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 302, 2. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [BO] Siegfried Bosch. *Algebra*. 3. überarb. und erw. Auflage. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BPvV] Wolf Barth, Chris Peters, Antonius Van de Ven. *Compact Complex Surfaces*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 4. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [BR1] Volker Braungardt. *Überlagerungen von Modulräumen für Kurven*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 2001.
- [BR2] Volker Braungardt. *Covers of moduli surfaces*. In: *Compositio Mathematica* 140, S. 1033-1036, London Math. Soc., 2004.
- [EV] Markus Even. *Über die Topologie des Raumes der metrisierten Bändergraphen*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 1997.
- [GH] Phillip Griffiths, Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Pure and applied mathematics. John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [GHvP] Lothar Gerritzen, Frank Herrlich, Marius van der Put. *Stable n -pointed trees of projective lines*. Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Series A, Vol. 91, No. 2, 1988.
- [GRO] Alexandre Grothendieck. *Esquisse d'un programme*. In [SL].

- [HAM] Horst Hammer. *Der Satz von Belyi*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 2001.
- [HAR] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [HOL] Rolf-Peter Holzapfel. *Ball and Surface Arithmetics*. Aspects of Mathematics, E29. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1998.
- [KOE] Bernhard Köck. *Belyi's Theorem Revisited*. University of Southampton, Faculty of Mathematical Sciences Preprint Series No. 360. Southampton, England, 2001. Erscheint in *Beiträge zur Algebra und Geometrie*.
- [LeV] Robert Le Vavasseur. *Sur le système d'équations aux dérivées partielles simultanées auxquelles satisfait la série hypergéométrique à deux variables*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math VII, F1–F205, 1893.
- [PAR] Kapil Hari Paranjape. *A Geometric Characterization of Arithmetic Varieties*. Preprint, 2001.
- [RON] Igor Ronkine. *Eine höherdimensionale Variante des Satzes von Belyi*. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2003.
- [SE] Jean-Pierre Serre. *Géométrie algébrique et géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier 6, Seite 1- 42, 1956.
- [SL] Leila Schneps (ed.), Pierre Lochak (ed.). *Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un programme*. London Math. Soc. Lect. Notes Series 242. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [WE] André Weil. *The field of definition of a variety*. Amer. J. Math. 78, Seite 509-524, 1956.
- [WEN] Andreas Weng. *Endliche Überlagerungen von Varietäten und der Satz von Belyi*. Dissertation, Frankfurt am Main, 2004.
- [WOL] Jürgen Wolfart. *The Obvious Part of Belyi's Theorem and Riemann Surfaces with many Automorphisms*. In [SL].

Lebenslauf

Horst Hammer
Winterstraße 1
76137 Karlsruhe
E-Mail: hammer@mathematik.uni-karlsruhe.de

16. Oktober 1972	geboren in Rottweil am Neckar
1979 - 1983	Grund- und Hauptschule Sulgen
August 1983 - Mai 1993	Gymnasium Schramberg mit Abschluß Allgemeine Hochschulreife
August 1993 - Oktober 1994	Zivildienst in der Stiftung St. Franziskus, Schramberg- Heiligenbronn, Einrichtung für Hör- und Sehgeschädigte
Oktober 1994 - März 1997	Grundstudium der Mathematik an der Universität Karlsruhe (TH)
April 1997 - Juli 2001	Hauptstudium der Mathematik an der Universität Karlsruhe (TH)
26. Juni 2001	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Physik
seit Oktober 2001	Doktorand am Mathematischen Institut II der Universität Karlsruhe (TH)
Januar 2002 - September 2003	Stipendiat der Landesgraduiertenförderung
Oktober 2003 - März 2005	Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Institut II der Universität Karlsruhe (TH)
April 2005 - Juli 2005	IPP-Promotionsstipendiat der Fakultät für Mathematik
13. Juli 2005	Promotionskolloquium.