

Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.–Ing. Jan Schütt

aus Oldenburg / Holstein

Tag der mündlichen Prüfung: 15. Juli 2005

Hauptreferent: Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Korreferenten: Prof. Dr.–Ing. L. Stempniewski

Karlsruhe 2005

Vorwort

Diese Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe.

Dem Hauptreferenten und Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wagner möchte ich meinen Dank aussprechen für die jahrelange fachkundige und engagierte Betreuung sowie die hervorragende technische Ausstattung. Die ausgesprochen angenehme Atmosphäre am Institut, die von großer Offenheit und Freundlichkeit geprägt war, trug maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Herrn Prof. Dr.-Ing. L. Stempniewski sei gedankt für die bereitwillige Übernahme des Korreferates, das stets fördernde Interesse und die Unterstützung in materialtheoretischen Fragen.

Dank gilt allen Kollegen, Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen am Institut für die gute Zusammenarbeit. Hervorgehoben sei dabei Herr Dipl.-Ing. J. Wüst für die vielen konstruktiven Diskussionen und seine unermüdliche Tätigkeit als Systemadministrator. Bei meinem langjährigen Freund und Kollegen Herrn Dr.-Ing. S. Klinkel möchte ich mich ganz besonders bedanken – nicht nur für die gewissenhafte und kritische Durchsicht des Manuskripts, sondern auch für die unzähligen wertvollen Hinweise in vielen wissenschaftlichen Fragen und die zahlreichen befruchtenden Fachdiskussionen.

Schließlich danke ich ganz herzlich meiner Frau Melanie für die fortwährende Unterstützung und die Geduld während der letzten Jahre.

Karlsruhe, im Juli 2005

Jan Schütt

Kurzfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein dreidimensionales Materialmodell zur vollständigen Beschreibung des Vor- und Nachbruchverhaltens von Beton entwickelt. Die wenigen dafür erforderlichen Modellparameter lassen sich direkt aus einfachen Versuchen bestimmen oder sind einschlägigen Normen zu entnehmen. Desweiteren werden die für eine Berechnung von Verbundstrukturen erforderlichen Formulierungen bereitgestellt. Die diskrete Abbildung der Bewehrungsstäbe erfolgt mittels dreidimensionaler Rebar-Ansätze, wobei das elastoplastische Verhalten des Stahls über eine von Mises-Fließbedingung berücksichtigt wird. Mit der Einführung eines speziellen 'interface'-Elementes, welches auf dem Coulombschen Reibungsgesetz beruht, ist zum einen die Simulation des nichtlinearen Verbund-Schlupf-Verhaltens innerhalb einer Kopfbolzenverbindung möglich, zum anderen läßt sich die Evolution diskreter Risse darstellen.

Bei der Herleitung der Materialformulierung wird für die Beschreibung des inelastischen Betonverhaltens von einem Modell ausgegangen, welches auf den Zusammenhängen und Algorithmen der Plastizitätstheorie für gekoppelte Fließflächen aufbaut. Bei der ratenunabhängigen Formulierung werden die Green-Lagrangeschen Verzerrungen additiv aufgespalten. Die Evolutionsgleichungen der irreversiblen Größen ergeben sich nach Einführung der zusammengesetzten Fließbedingungen über das Prinzip der maximalen Dissipation. Da eine verschmierte Betrachtung von Materialschädigung und Rißentwicklung zum Tragen kommt, können die entfestigenden Strukturbereiche weiterhin als Kontinuum angesehen werden, woraus sich Vorteile bei einer Finite-Element-Berechnung ergeben. Um dem Betonverhalten bei wiederholter Be- und Entlastung gerecht zu werden, stellt sich in Anlehnung an die Schädigungstheorie nach dem Überschreiten der maximalen Belastbarkeit eine Degradation der elastischen Materialparameter ein.

Die Basis für die Finite-Element-Implementierung bildet ein trilineares Kontinuumselement, das um 'enhanced-assumed-strain'- und 'assumed-natural-strain'-Interpolationen erweitert wurde, so daß numerische Versteifungseffekte nahezu ausgeschlossen werden können. Die effiziente Berechnung von flächenorientierten Strukturen wird somit ermöglicht.

Im Rahmen der numerischen Untersuchungen von bewehrten und unbewehrten Strukturen ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentell gewonnenen Ergebnissen. Gegenüber anderen in der Literatur zu findenden makroskopischen Formulierungen zeigt das entwickelte dreidimensionale Modell trotz der geringen Zahl der verwendeten Materialparameter eine deutliche Überlegenheit bei der Erfassung der Versagensphänomene und der Approximation des Nachbruchverhaltens.

Abstract

Within this thesis a three-dimensional material-model is introduced to approximate the whole fracture behaviour of concrete before and after reaching the maximal strength. The small number of required material parameters can be gained easily from conventional experiments or they were specified in appropriate construction standards. Furthermore a formulation is proposed to simulate the characteristics of composite steel-concrete constructions. Three-dimensional rebar-elements are applied for a discrete representation of the reinforcement. To describe the non-linear material properties of steel a von Mises yield criterium is employed. A special interface formulation which is founded on the friction law of Coulomb is introduced. This allows the simulation of non-linear bond slip characteristic of a doweled connection. In addition the interface element is able to describe the discrete evolution of cracks.

The presented constitutive model for the inelastic concrete behaviour is defined by the non-smooth multisurface plasticity theory. The rate independent algorithms are based on the assumption that the Green-Lagrange strain tensor is split additively. The evolution equations of the irreversible variables result from the plastic potential and the principle of the maximum dissipation. Using a smeared crack model leads to a continuity of the displacements for the cracked zones. Therefore essential advantages arise in the context of a finite element calculation. To capture the concrete behaviour at cyclic loading, a degradation of the elastic material parameters is used. This is in accordance with the fracture theory after exceeding the maximum strength.

The material model is implemented into a geometrically non-linear isoparametric hexahedral element with an enhanced assumed strain and an assumed natural strain interpolation to reduce locking effects. This results in an efficient calculation of shell-like structures including a three-dimensional material-law.

Within the numerical examinations of pure and reinforced concrete structures a very good agreement with experimental data is obtained. A comparison with other macroscopic models from the literature shows the excellent approximation of the limit load, the failure phenomena and the post-critical characteristic of the developed three-dimensional formulation.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation, Ziele und Vorgehensweise	1
1.2	Inhaltliche Gliederung der Arbeit	6
2	Der Werkstoff Beton	9
2.1	Materialverhalten und Werkstoffeigenschaften	9
2.1.1	Einaxiales Verhalten	10
2.1.2	Zweiaxiales Verhalten	18
2.1.3	Dreiaxiales Verhalten	19
2.2	Modelle zur numerischen Beschreibung von Beton	21
2.2.1	Elastische Modelle	22
2.2.2	Elastoplastische Modelle	23
2.2.3	Modelle nach der Schädigungstheorie	24
2.2.4	Konzepte zur Rißmodellierung	25
3	Allgemeine Form der Plastizitätstheorie	28
3.1	Grundlegende Zusammenhänge	28
3.2	Thermodynamische Betrachtungsweise	29
3.3	Diskrete Formulierung der Plastizität	37
3.3.1	Numerische Zeitintegration	37
3.3.2	Projektionsalgorithmus	37
3.3.3	Konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul	44
4	Inelastisches Materialmodell für Beton	48
4.1	Allgemeine Vorstellung des Modells	48
4.2	Formulierung des Zug- und Zug/Druck-Verhaltens	52
4.2.1	Fließbedingungen nach Drucker-Prager	52
4.2.2	Approximation der Ver- und Entfestigung	53
4.2.3	Ansätze für zyklische Belastungen	57
4.2.4	Numerische Stabilität für reinen Zug	58

4.2.5	Projektionsalgorithmus für gekoppelte Fließbedingungen	60
4.2.6	Tangentenmodul der zusammengesetzten Fließfläche	65
4.3	Formulierung des reinen Druckbereiches	69
4.3.1	Vorstellung der kugelförmigen Fließfläche	70
4.3.2	Projektionsalgorithmus der Kugel	71
4.3.3	Algorithmisch konsistenter Tangentenmodul	78
4.3.4	Kopplung von Fließkegel und Kugel	80
4.4	Darstellung des Modellverhaltens	84
4.4.1	Skalierung der zusammengesetzten Fließfläche	85
4.4.2	Versagensformen für verschiedene Spannungskombinationen	86
4.4.3	Monotone sowie zyklische Be- und Entlastung	93
5	Alternative Modellformulierung	97
5.1	Formulierung eines Hauptspannungskriteriums	97
5.2	Projektionsalgorithmus für Rankine-Kriterium	100
5.3	Tangentenmodul für alternative Formulierung	104
5.4	Einbindung in das bestehende Betonmodell	108
6	Finite-Element-Implementierung	112
6.1	Beschreibung des verwendeten Elementtyps	112
6.2	Wesentliche kontinuumsmechanische Grundlagen	113
6.3	Finite-Element-Approximation	117
6.4	Verbesserung des Standardansatzes	120
6.4.1	'enhanced assumed strain'-Interpolation	121
6.4.2	'assumed natural strain'-Formulierungen	123
7	Stahl und Beton im Verbund	126
7.1	Materialeigenschaften und numerische Modellierung von Stahl	126
7.2	Stahl als Bewehrung	128
7.2.1	Zusammenwirken von Stahl und Beton	128
7.2.2	Möglichkeiten der numerischen Beschreibung	132
7.2.3	Diskrete Formulierung nach dem Rebar-Konzept	133

7.3	Stahlbeton-Verbundkonstruktionen	140
7.3.1	Modellierung des Verbundbereiches	140
7.3.2	Elastoplastische 'interface'-Formulierung	143
8	Numerische Beispiele	153
8.1	Unbewehrte Betonbauteile	153
8.1.1	Imperfekter Zugstab	153
8.1.2	Unbewehrter Betonwinkel	158
8.1.3	Keilspaltversuch	166
8.2	Untersuchung von Verbundstrukturen	171
8.2.1	Bewehrte Biegebalken	171
8.2.2	Gedrungene Stahlbetonkonsole	178
8.2.3	'push-out'-Versuch für Kopfbolzendübel	184
8.2.4	Stahlverbundträger mit Stegausschnitt	190
9	Zusammenfassung und Ausblick	198
	Literaturverzeichnis	201

1 Einleitung

1.1 Motivation, Ziele und Vorgehensweise

Bereits die Römer schätzten die Eigenschaften des Baustoffes Beton und nutzten ihn zur Errichtung von Gebäuden, Brücken und Wehranlagen. Neben der sehr guten Formbarkeit und der einfachen sowie kostengünstigen Beschaffung der erforderlichen Ausgangsmaterialien, bilden die hohe Druckfestigkeit und die Beständigkeit gegen Umwelteinflüsse wie Bewitterung oder Brand die wesentlichen Vorteile dieses Werkstoffes. Bis in die heutige Zeit hat sich an der weiten Verbreitung von Beton als Baumaterial nur wenig geändert, zumal der Nachteil der geringen Zugfestigkeit durch das Einbringen einer Bewehrung oder im Zusammenwirken mit Stahlprofilen als Verbundsystem deutlich reduziert werden kann. Im Hinblick auf das oft unerwünscht hohe Eigengewicht und die schlechten Wärmedämmeigenschaften stellen moderne Leicht- und Porenbetone attraktive Weiterentwicklungen dar, FAUST [70], WEBER & HULLMANN [227].

Mit dem Wunsch nach immer filigraneren und aufwendigeren Konstruktionen sowie dem Streben nach einer möglichst vollständigen Ausnutzung der Beanspruchbarkeit aller verwendeten Materialien geht die Entwicklung komplexer und detaillierter Berechnungsverfahren einher. Einfache Berechnungsmethoden reichen in der Regel nicht mehr aus um das komplizierte und hochgradig nichtlineare Versagensverhalten, die einzelnen Schädigungsphänomene des Betons oder die durch Spannungsumlagerungen entstehenden Tragreserven zu erfassen. Mit Hilfe effizienter Finite-Element-Ansätze und stetig zunehmender Leistungsfähigkeit der Rechensysteme wird es möglich, entsprechende mathematische Modelle zur numerischen Simulation des Strukturverhaltens zu entwickeln und bei tolerierbaren Rechenzeiten einzusetzen.

Da sich im Bauwesen das Interesse in erster Linie auf den Nachweis von Standsicherheit und Gebrauchstauglichkeit der gesamten Struktur oder einzelner Bauteile beschränkt, sind für eine wirtschaftliche Berechnung in der Regel Materialmodelle, die auf makroskopischer Ebene formuliert sind, ausreichend. Einen ersten Überblick über entsprechende Modelle geben unter anderem die Bücher von HOFSTETTER & MANG [94] und JIRASEK & BAŽANT [104]. Die meso- oder mikroskopische Erfassung der einzelnen Betonbestandteile, wie beispielsweise Zementmatrix, Zuschlag und Luftporen, bietet sich infolge des hohen Diskretisierungs- und Berechnungsaufwandes ausschließlich für die Untersuchung einzelner Detailpunkte an. Mesoskopische Ansätze kommen unter anderem bei CAROL & BAŽANT [29], D’ADETTA et al. [45], ECKARDT et al. [64] oder ZOHDİ & WRIGGERS [242] zur Anwendung, WITTMANN [235], CHEN [37] und TOUMI & BAS-

COUL [217] führen Beschreibungen auf mikroskopischen Skalen ein. Eine weitaus detailliertere Vorstellung und Klassifizierung einzelner in der Literatur zu findender numerischer Modelle, die Darstellung aktueller Forschungstendenzen sowie umfangreiche Diskussionen, Gegenüberstellungen und Literaturhinweise sind an den entsprechenden Stellen im weiteren Verlauf dieser Arbeit zu finden.

Neben der algorithmischen Effizienz und der numerischen Stabilität ist die einfache Identifizierung der notwendigen Modellparameter ein wesentliches Kriterium für die Praxistauglichkeit einer Materialformulierung. Besonders bei Modellen, die sich durch eine sehr exakte Beschreibung der einzelnen Schädigungsphänomene auszeichnen, bereitet die experimentelle Bestimmung der erforderlichen Parameter erhebliche Schwierigkeiten, so daß eine umfangreiche Kalibrierung an bestehenden Versuchskurven unumgänglich wird. Das dreiaxiale Stoffgesetz von HÄUSSLER-COMBE & PRÖCHTEL [100] beispielsweise basiert auf insgesamt 19 Parametern, TIKHOMIROV & STEIN [216] verwenden für ihr Schädigungsmodell 11 Materialparameter, zur Erfassung des Verhaltens von bewehrten Strukturen werden für letztgenanntes weitere 15 Größen erforderlich. Es ist offensichtlich, daß zur Vermeidung aufwendiger Parameterstudien für ein praxisorientiertes Betonmodell im Idealfall möglichst nur Kenngrößen herangezogen werden sollten, die sich direkt aus Normen und Regelwerken ableiten lassen. Dementsprechend müßte jeder Entwicklung einer neuen Materialformulierung ein konsequentes Abwägen zwischen erforderlicher Genauigkeit und vertretbarem Aufwand vorausgehen, was in den meisten Fällen allerdings nicht der Fall zu sein scheint. Vielmehr geht die Entwicklung zu immer detaillierteren und komplexeren Werkstoffmodellen, die in der Ingenieurpraxis kaum anwendbar sind.

Die große Anzahl der in den letzten Jahrzehnten veröffentlichten Betonmodelle läßt sich in Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Theorie klassifizieren. Im Allgemeinen wird zwischen elastischen Modellen, zum Beispiel CHEN & SALEEB [39], AHMAD et al. [1], STANKOWSKI & GERSTLE [207] und inelastischen Modellen unterschieden. Letztere basieren entweder auf der Plastizitätstheorie, CHEN [36], LUBLINER [140], oder auf der Schädigungstheorie, MAZARS [147], LEMAITRE & CHARBOCHE [135]. Um eine möglichst detaillierte Formulierung des Betonversagens zu erlangen, werden häufig unterschiedliche Modellansätze kombiniert, wie beispielsweise von LUBLINER [139], TIKHOMIROV & STEIN [216] oder HÄUSSLER-COMBE & PRÖCHTEL [100]. Diese Arbeiten verwenden sowohl Zusammenhänge der Plastizitäts- als auch der Schädigungstheorie, bringen aber den bereits erörterten Nachteil der hohen Parameteranzahl mit sich.

Für die Approximation der mehrdimensionalen Versagensfläche nach den Regeln der Fließtheorie haben sich unterschiedliche Vorgehensweisen etabliert. Wird eine zweiaxiale Beschreibung angestrebt, bietet sich für die Begrenzung des elastischen

Materialbereiches die Kopplung zweier klassischer Fließbedingungen – wie zum Beispiel die Drucker-Prager-Bedingung oder das Hauptspannungs-Kriterium von Rankine – an, FEENSTRA & DE BORST [73], MESCHKE et al. [153], [155]. Im Rahmen einer dreidimensionalen Betrachtung kommen entweder die sogenannten 'cap-models', die auf Arbeiten von DIMAGGIO & SANDLER [53] und SANDLER & RUBIN [184] zurückgehen, zur Anwendung oder aber kontinuierlich formulierte Fließflächen, LADE [131], EHLERS [65] KRENK [121]. Die beiden letztgenannten Modelltypen basieren im allgemeinen auf mindestens sieben Modell- und einem Verfestigungsparameter.

Das für Zug- und Druckbelastung sehr unterschiedliche Versagensverhalten von Beton kann unter anderem mit Hilfe bruchmechanisch motivierter Ver- und Entfestigungsfunktionen erfolgen. Für das Zugversagen wird im CEB-FIP MODEL CODE [30] ein bilineares Entfestigungsgesetz vorgeschlagen, der exponentielle Ansatz von FEENSTRA [71] und FEENSTRA & DE BORST [73] gibt das reale Verhalten allerdings wesentlich besser wieder. Die Gefügauflockerung unter Druck wird mit der Formulierung von FEENSTRA nur ungenau erfaßt, hier sind die Funktionen von LACKNER [129] und WINKLER [232] zu bevorzugen.

Da sich beim Erreichen des Traglastzustandes einer Betonstruktur nur in seltenen Fällen ein Einzelriß einstellt, sondern es in der Regel zur Entwicklung eines ausgedehnten Rißbandes kommt, hat sich die verschmierte Betrachtung der Rißeolution für eine effiziente Berechnung allgemein etabliert. Alternativ ist in der Literatur bei INGRAFFEA & SAOUMA [101], BELYTSCHKO & BLACK [13], MOËS et al. [159] und anderen eine diskrete Abbildung der einzelnen Risse zu finden. Zur Wahrung der Objektivität des bruchmechanischen Ansatzes gegenüber Verfeinerungen der Finite-Element-Diskretisierung sind entsprechende Vorkehrungen zu treffen, wie beispielsweise die Einführung einer charakteristischen Elementlänge. Diese Länge hängt neben der Elementgeometrie auch vom Grad der Ansatzordnung ab, unterschiedliche Formulierungen finden sich in den Arbeiten von BAŽANT [7], WILLAM et al. [230], OLIVER [163], HOFSTETTER & MANG [94] oder GRASBERGER [81].

Ab dem Überschreiten der maximalen Betonfestigkeit stellt sich unabhängig von der Richtung der aufgebracht Belastung eine Schädigung des Materialgefüges ein, die sowohl das Ent- als auch das Wiederbelastungsverhalten stark verändert. Erfassen lassen sich diese Phänomene beispielsweise über eine Degradation der elastischen Materialparameter – MAZARS [146], CRISFIELD & WILLS [44], DAHLBLOM & OTTOSEN [46] schlagen hierfür verschiedene Formulierungen vor. Infolge der Spannungumlagerungen, die sich in den Nachbarbereichen der versagenden Zonen ergeben und so zu einer sukzessiven Entlastung dieser Teilbereiche führen, ist die Degradation bereits für den monotonen Belastungspfad zu berücksichtigen.

Ziel der weiteren Ausführungen ist es, ein effizientes und leistungsstarkes dreidimensionales Materialmodell zur Beschreibung von Betonverhalten und -versagen bereitzustellen, welches sowohl eine ingenieurmäßige als auch eine phänomenologische Erfassung und Bewertung des Tragverhaltens von Betonstrukturen ermöglicht. Aufgrund der gewählten allgemeinen dreidimensionalen Form der Ansätze lassen sich diese prinzipiell in jeden beliebigen Elementtyp implementieren. Für die Verwendung innerhalb einer ein- oder zweidimensionalen Elementformulierung wäre eine Kondensation des Stoffgesetzes erforderlich, entsprechende Ansätze finden sich unter anderem bei DVORKIN et al. [62] oder KLINKEL & GOVINDJEE [111]. Die Approximation des irreversiblen Materialverhalten von Beton erfolgt mit den Algorithmen der Plastizitätstheorie, wobei sich die Versagensfläche aus der Kopplung einzelner klassischer Fließbedingungen ergibt. Zeitabhängige Phänomene wie beispielsweise Kriechen oder Schwinden sollen im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden. Besonderes Augenmerk wird bei der makroskopischen Formulierung auf die Verwendung einer möglichst geringen Anzahl von Modellparametern, welche sich aus eindimensionalen Versuchen bestimmen lassen und in entsprechenden Normen und Regelwerken vertafelt sind, gelegt. Zur Beschreibung des Vor- und Nachbruchverhaltens werden für das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte numerische Modell neben den elastischen Materialkennwerten ausschließlich die eindimensionale Zug- und Druckfestigkeit sowie die spezifischen Bruchenergien G_f und G_c erforderlich, HILLERBORG et al. [92], MÜLLER et al. [158]. Die beiden zusätzlich notwendigen geometrischen Parameter müssen einmalig mit Hilfe einschlägiger zweiachsender Versagenskurven kalibriert werden. Sie sind unabhängig von der gewählten Betongüte.

Über die Entwicklung der Projektionsalgorithmen nach der sogenannten 'non-smooth multisurface plasticity theory' und der konsistenten Herleitung der elastoplastischen Tangentenmoduln ergeben sich effiziente und leistungsstarke Lösungsverfahren, SIMO et al. [200], [194], HOFSTETTER & MANG [94]. Die anschließende Finite-Element-Implementierung erfolgt in ein vollständig dreidimensional formuliertes 8-Knoten-Kontinuumselement, KLINKEL [110], KLINKEL et al. [112]. Durch die Verwendung spezieller Ansätze zur Reduktion von numerischen Versteifungseffekten eignet sich diese Elementformulierung nicht nur für die Berechnung kompakter und gedrungener Strukturen, sondern auch für die Approximation dünner Flächentragwerke. Der Einsatz dieses Elementtyps bringt gegenüber den von MESCHKE [152], SUANNO [210] oder HOHN [97] genutzten 27-Knoten-Elementen eine deutliche Reduktion der erforderlichen Rechenzeit mit sich.

Die Vorzüge, die sich aus der Verwendung eines Kontinuumselementes gegenüber einer Schalenformulierung ergeben sind unter anderem in den Möglichkeiten der exakten Beschreibung der Topologie von Strukturen zu sehen. Infolge der un-

abhängigen Knoten an Elementober- und unterseite lassen sich neben den Randbedingungen auch Kontaktbedingungen wie Haften und Reiben sehr genau an die tatsächlichen Gegebenheiten anpassen, was beispielsweise für die wirklichkeitnahe Approximation von Verbundfugen unerlässlich ist. Desweiteren zeichnen sich Kontinuumsselemente durch die sehr genauen Erfassung von komplexen Spannungs- und Verzerrungszuständen in der Dickenrichtung und die einfache Möglichkeit einer Netzverfeinerung über die Bauteilhöhe aus. Wie sich unter anderem bei der Berechnung numerischer Beispiele zeigen wird, bringt eine Kontinuumsformulierung auch bei scheinbar ebenen, flächenorientierten Strukturen deutliche Vorteile mit sich. Im Gegensatz zu den zweidimensionalen Simulationen von MENRATH [150], FEIST et al. [76] oder OLIVER et al. [164] lassen sich für die untersuchten Fälle nur so die im Versuch festgestellten maximalen Belastbarkeiten und Versagensphänomene in adäquater Weise erfassen.

Zur Modellierung von Stahlbetonstrukturen und deren numerischer Simulation im Rahmen der Finite-Element-Methode haben sich unterschiedliche Vorgehensweisen etabliert, welche sich in Diskretisierungs- und Rechenaufwand aber auch in der Genauigkeit der Ergebnisse stark unterscheiden. Neben der diskreten Modellierung, bei der jeder Bewehrungsstab durch ein einzelnes Stab- oder Balkenelement abgebildet wird, was zu einer starken Zunahme der Freiheitsgrade führt, stehen die eingebettete sowie die verschmierte Beschreibung zur Verfügung, HOFSTETTER & MANG [94], CHEN [36], [37]. Eine attraktive Alternative zu den genannten Varianten stellt die Verwendung von Rebar-Ansätzen dar, die eine diskrete Abbildung der einzelnen Bewehrungsstäbe ermöglichen, ohne daß weitere Freiheitsgrade notwendig oder spezielle Anforderungen an die Netzgeometrie gestellt werden, MESCHKE & HELNWEIN [154], GEBBEKEN [78], SPRENGER & WAGNER [206], TIKHOMIROV & STEIN [216]. Im Gegensatz zur üblichen Vorgehensweise wird die Bewehrung im Rahmen dieser Arbeit nicht als eindimensionaler Stab aufgefaßt, sondern als ein dreidimensionales Kontinuum. Somit kann zum einen der dreidimensionalen Formulierung des Betonmaterials Rechnung getragen werden, zum anderen ist es nur so möglich den Einfluß der Bewehrung bei Belastungen quer zur Bewehrungsrichtung – beispielsweise bei Biegebeanspruchungen durch Querkräfte – wirklichkeitsnah zu simulieren.

Als Folge des immer größer werdenden Kostendrucks und der damit einhergehenden Forderung nach beschleunigten Bauabläufen und einem hohen Maß an Vorfertigung nimmt der Anteil von Stahlbeton-Verbundkonstruktionen stetig zu. Da für die numerische Erfassung des Strukturverhaltens eine detaillierte Vernetzung jedes einzelnen Kopfbolzendübels der Verbundfuge nicht vertretbar ist, bietet sich die Verwendung sogenannter 'interface'-Elemente zur Abbildung des Verbundschlupf-Verhaltens an, BODE et al. [22], KRAUS & WURZER [119], ZHOU [239]

und ROTS [183]. Während letztgenannter für die konstitutiven Beziehungen von drei linearen Federn ausgeht, erscheint die Formulierung eines dreidimensionalen Coulombschen Reibungsgesetzes mit einer multilinearen Entfestigungsbeschreibung sehr viel realitätsnäher, SCHELLEKENS [188]. Wird im Rahmen der irreversiblen Beschreibung alternativ zum multilinearen ein exponentieller Entfestigungsansatz, der die Bruchenergie als einzigen Materialparameter benötigt, verwendet, können – bei Kenntnis des späteren Rißverlaufes – mit der hier vorgestellten Formulierung auch einzelne Makrorisse im Beton abgebildet werden.

1.2 Inhaltliche Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit, die sich grob in vier Schwerpunkte einteilen läßt, beginnt mit einer allgemeinen Vorstellung des Werkstoffes Beton. An die Entwicklung zweier numerischer Modelle zur Simulation dieses heterogenen Materialgefüges schließt sich eine Erweiterung auf das Zusammenwirken von Beton und Stahl im Verbund an. Den Abschluß bildet eine Auswahl unterschiedlicher Beispielrechnungen.

Die einzelnen Abschnitte gliedern sich inhaltlich wie folgt:

Abschnitt 2 befaßt sich in einem ersten Unterkapitel mit dem Materialverhalten und den Werkstoffeigenschaften von Beton bei ein- und mehraxialer Belastung, die sich unter anderem in den experimentellen Versuchen von KUPFER [126], VAN MIER [220] und REINHARDT et al. [179] zeigen. Dabei wird ausführlich auf das differierende Schädigungsverhalten in Zug- und Druckrichtung eingegangen, welches neben den unterschiedlichen Maximalwerten von Zug- und Druckfestigkeit auch von den beiden Bruchenergien G_f und G_c abhängt. Mit Blick auf eine spätere Finite-Elemente-Approximation wird eine charakteristische Länge eingeführt. Der zweite Teil dieses Abschnitts stellt verschiedene mathematische Formulierungen gegenüber, welche in der Literatur zur Beschreibung von Beton und granularen Materialien zu finden sind. Neben elastischen und elastoplastischen Ansätzen werden auch Modelle nach der Schädigungstheorie vorgestellt. Eine Diskussion alternativer Konzepte zur Rißmodellierung bilden den Abschluß.

Da die später entwickelten inelastischen Materialmodelle auf der Plastizitätstheorie basieren, erfolgt in **Abschnitt 3** eine Herleitung der wesentlichen Zusammenhänge dieser Theorie im Rahmen einer thermodynamischen Betrachtung. Bei der Formulierung eines allgemeinen ratenunabhängigen Projektionsalgorithmus und des entsprechenden konsistenten Tangentenmoduls wird insbesondere auf die nichtglatte Kopplung einzelner Fließflächen eingegangen, der sogenannten 'non-smooth multisurface plasticity'. Es wird von einem additiven Split der Verzerrungen in elastische und irreversible Anteile ausgegangen.

Die Herleitung einer elastoplastischen Materialformulierung zur Beschreibung des Vor- und Nachbruchverhaltens von Beton unter mehraxialer Belastung erfolgt in **Abschnitt 4**. An eine allgemeine Vorstellung und einen Vergleich mit anderen in der Literatur zu findenden Modellen schließt sich die mathematischen Umsetzung an. Insgesamt werden drei Drucker-Prager-Kegel und eine kugelförmige Fließfläche gekoppelt, wobei einer der Kegel über eine invertierte Projektionsrichtung verfügt und ausschließlich für die numerische Stabilität bei nahezu hydrostatischen Zugzuständen verwendet wird. Die Erfassung von allseitigem Druck erfolgt in Anlehnung an die sogenannten 'cap-models' mit Hilfe einer kugelförmigen Fließfläche. Der genutzte Projektionsalgorithmus basiert auf einer Zeitintegration mit dem Euler-Rückwärts-Verfahren. Nach der Herleitung des konsistenten Tangentenmoduls wird ausführlich das Modellverhalten und die eintretenden Versagensphänomene für unterschiedliche mehrdimensionale Lastzustände dargestellt und erörtert. Dabei wird sowohl eine monotone, als auch eine zyklische Be- und Entlastung berücksichtigt.

Speziell für den Fall eines ausgeprägten Zugversagens unbewehrter Strukturen wird in **Abschnitt 5** eine Modifikation des zuvor entwickelten Materialmodells vorgeschlagen. Zur Begrenzung des reinen Zugbereiches dienen drei eindimensionale Rankine-Kriterien, die algorithmisch gemäß der Theorie gekoppelter Fließflächen behandelt werden. Durch diese spezielle Formulierung, welche konsistent zu den übrigen Ansätzen ist, werden die numerischen Probleme, die sich bei der Verwendung eines dreidimensionalen Hauptspannungs-Kriteriums in dessen Eckbereichen ergeben, WINKLER [232], MESCHKE et al. [155], vermieden.

Abschnitt 6 befaßt sich mit der Finite-Element-Implementierung der bisher entwickelten Betonmodelle. Nach einer Darstellung der für die Finite-Element-Methode wesentlichen kontinuumsmechanischen Grundlagen kann ein geometrisch nichtlineares Element mit trilinearen Verschiebungsansätzen vorgestellt werden. Dieses dreidimensionale Element verfügt zur effizienten Strukturberechnung über spezielle 'enhanced-assumed-strain'- und 'assumed-natural-strain'-Interpolationen, so daß numerische Versteifungseffekte nahezu ausgeschlossen werden können, SIMO & RIFAI [202], DVORKIN & BATHE [61], KLINKEL [110].

Die Bereitstellung von Formulierungen, die eine Berechnung von Stahl und Beton im Verbund ermöglichen, geschieht in **Abschnitt 7**. Begonnen wird mit der Einführung einer von Mises-Fließbedingung, aus welcher sich die Algorithmen für eine elastoplastische Beschreibung von Stahl ableiten lassen. Im Anschluß an eine ausführliche Darstellung des Zusammenwirkens von Beton und Bewehrungsstahl sowie der 'tension-stiffening'-Effekte werden unterschiedliche in der Literatur zu findende Ansätze zur Bewehrungsmodellierung diskutiert. Für eine diskrete dreidimensionale Formulierung nach dem Rebar-Konzept erfolgt die Ableitung der

dazu notwendigen Ansätze. Der zweite Teil dieses Abschnittes widmet sich der numerischen Behandlung von Stahlbeton-Verbundkonstruktionen. Es erfolgt die Entwicklung eines 'interface'-Elementes, welches mit Hilfe eines Coulombschen Reibungsgesetzes die Wirkungsweise einer Kopfbolzenverbindung simuliert. Die spezielle Formulierung macht es möglich mit diesem Zwischenelement auch diskrete Betonrisse abzubilden.

Im Beispielteil, **Abschnitt 8**, können die Möglichkeiten, die sich aus den im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modellen ergeben, anhand von bewehrten und unbewehrten Betonstrukturen verifiziert werden. Die Einsatzgebiete und die Funktionsweisen der 'interface'-Formulierung wird dargestellt. Als Referenzlösungen dienen zum einen experimentelle Untersuchungen zum anderen die numerischen Ergebnisse, welche der Literatur zu entnehmen sind.

2 Der Werkstoff Beton

Nach einer eingehenden Darstellung des Materialverhaltens von Beton bei ein- und mehraxialer Belastung soll ein Überblick über verschiedene Möglichkeiten der numerischen Beschreibung dieses Werkstoffes gegeben werden.

2.1 Materialverhalten und Werkstoffeigenschaften

Beton ist ein heterogenes Material, das sich im wesentlichen aus hydraulischen Bindemitteln, Wasser sowie grobkörnigen Zuschlagstoffen zusammensetzt. Letztere können dabei sowohl in Kornform als auch im Korndurchmesser sehr stark variieren. In Abhängigkeit von den Mischungsverhältnissen und den Güteklassen der einzelnen Bestandteile ergeben sich unterschiedliche Eigenschaften und Festigkeiten des ausgehärteten Materials. Das Verhalten des belasteten Betons hängt dabei wesentlich von der Interaktion zwischen den Zuschlagstoffen und der Zementmatrix ab. Während der Hydratation beim Abbinden des frischen Betons und dem Kriechen und Schwinden infolge Austrocknung entsteht ein Eigenspannungszustand, so daß sich um die einzelnen Zuschlagskörner kleinste Mikrorisse ausbilden. Aufgrund der unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften der einzelnen Bestandteile stellt sich bei fortschreitender Belastung ein Rißwachstum ein, infolge dessen sich die Mikrorisse zu Makrorissen vereinen und damit letztendlich zum Versagen der Werkstoffstruktur führen.

Materialmodelle, die dieses komplexe Werkstoffverhalten wiedergeben, lassen sich je nach der zu untersuchenden Problemstellung auf mikroskopischer, mesoskopischer oder aber makroskopischer Ebene formulieren. Für einen Überblick über die mikroskopische Beschreibung, die Aufschluß über das Zusammenwirken einzelner Kristalle oder Moleküle gibt, sei auf die Arbeiten von WITTMANN [234], [235], VONK [223], CHEN [37] und TOUMI & BASCOUL [217] verwiesen. Im mesoskopischen Bereich kann von einem viskoelastischen Zementverhalten, von offenen und geschlossenen Poren – deren Größe und Verteilung vom Wasser/Zement-Wert abhängen – sowie von linearelastischen Zuschlagskörnern ausgegangen werden. Zeit-, temperatur- oder feuchtigkeitsabhängige Vorgänge finden in der Regel über die Beschreibung der Zementmatrix Einzug, die Interaktion von Zuschlag und Matrixmaterial kann beispielsweise über verschmierte plastische Mikroflächen erfaßt werden, siehe dazu unter anderem COFER [40], CAROL & BAŽANT [29], D’ADETTA et al. [45] sowie ZOHDI & WRIGGERS [242].

Die Materialmodelle, die in der Strukturanalyse verwendet und im Rahmen dieser Arbeit formuliert und diskutiert werden, sind im makroskopischen Bereich

anzusiedeln. Sie sind durch die Annahme charakterisiert, das die einzelnen Betonbestandteile und mögliche Fehlstellen über das gesamte Volumen gleichmäßig verteilt sind. Das heterogene Gefüge wird somit auf ein homogenes Material mit nichtlinearen, isotropen Eigenschaften abgebildet.

Das je nach Belastungsart sehr unterschiedliche Betonverhalten hängt im Makroskopischen neben dem nichtlinearen Zusammenhang von Spannungen und Dehnungen auch von der Evolution des Rißfortschrittes und dem Belastungsbild ab. So weist beispielsweise ein multiaxial beanspruchter Körper ein gänzlich anderes Vor- und Nachbruchverhalten auf als ein einaxial belasteter.

2.1.1 Einaxiales Verhalten

Um das Verhalten eines Materials unter Belastung einschätzen zu können und die für eine Berechnung notwendigen Materialkennwerte zu bestimmen, ist die Durchführung von Versuchen mit einaxialer Beanspruchung unerlässlich. Für den Werkstoff Beton zeigen sich dabei im Zug- und im Druckbereich deutlich unterschiedliche Verhaltensweisen, die im folgenden diskutiert werden:

Zugbeanspruchung

Da die Bestimmung der einaxialen zentrischen Zugfestigkeit f_{ctm} bei Beton versuchstechnisch sehr aufwendig ist, HEILMANN et al. [89], REINHARDT et al. [179], wird sie häufig indirekt über Biege- oder Spaltversuche ermittelt. Bei Biegeversuchen wird in der Regel ein Einfeldträger in der Mitte (Dreipunktbiegung) oder in den Drittelpunkten (Vierpunktbiegung) belastet. Die Biegezugfestigkeit ist als maximal aufnehmbare Spannung am Zugrand definiert und ergibt sich unter Annahme eines linearelastischen Verhaltens des Biegebalkens, BONZEL [24], EIBL & IVANYI [66]. Zur Ermittlung der Spaltzugfestigkeit wird eine zylindrische Probe entlang zweier gegenüberliegender Mantellinien mit einer Druckkraft beansprucht; es ergeben sich hohe Querspannungen, so daß der Probekörper aufspaltet, BONZEL [25], SCHLEEH [189].

Zwischen der mittleren zentrischen Zugfestigkeit f_{ctm} und der mittleren Spaltzugfestigkeit $f_{ct,sp}$ wird nach dem CEB-FIP Model Code [30] der Zusammenhang

$$f_{ctm} = 0.9f_{ct,sp} \quad (2.1)$$

angenommen. In die Umrechnung von der mittleren Biegezugfestigkeit $f_{ct,fl}$ auf f_{ctm} gehen neben der Höhe h_b des Balkens, an dem die Biegezugfestigkeit be-

stimmt wurde, und der Bezugshöhe $h_0 = 100\text{ mm}$ auch der bruchmechanisch motivierte Parameter $\alpha_{fl} = 1.5$ ein

$$f_{ctm} = f_{ct,fl} \frac{\alpha_{fl}(h_b/h_0)^{0.7}}{1 + \alpha_{fl}(h_b/h_0)^{0.7}} \quad (2.2)$$

Es kann beobachtet werden, daß sich Beton bis zum Erreichen von f_{ctm} über weite Strecken nahezu elastisch verhält, (Abb. 2.1 a). In Abhängigkeit von der Betongüte endet der elastische Bereich bei etwa 70-80% der zentrischen Zugfestigkeit. Ab dieser Grenze kommt es zu einem vermehrten Wachstum der Mikrorisse und deren Zusammenschluß zu Makrorissen. Im Rahmen von verschiebungsgesteuerten Versuchen ist festzustellen, daß sich das Rißwachstum nach dem Überschreiten der Zugfestigkeit auf den schwächsten Teil des Querschnitts konzentriert. Es kommt dabei zu einem Abfall der aufnehmbaren Last, der Beton entfestigt. Während die Dehnungen in diesem immer schmaler werdenden Rißband kontinuierlich zunehmen, kommt es in den benachbarten Bereichen zu einer Entlastung und damit zu einer Dehnungsabnahme, (Abb. 2.1 b), HOFSTETTER & MANG [94]. Unabhängig von der Länge des untersuchten Probekörpers stellen sich als Folge die-

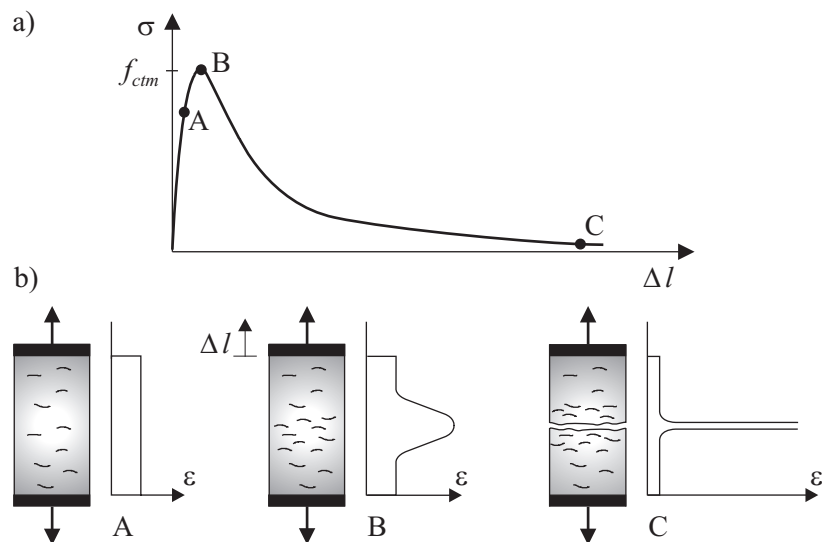


Abbildung 2.1: Beton unter einaxialem Zug: a) Spannungs-Verschiebungs-Diagramm, b) Lokalisation der Dehnungen

ser sehr lokalen Konzentration annähernd identischen Spannungs-Verschiebungs-Kurven ein, die Spannungs-Dehnungs-Kurven dagegen unterscheiden sich stark: der Kurvenast im Nachbruchverhalten fällt bei Probekörpern mit einer größeren Gesamtlänge l stärker ab als bei kurzen Proben, wie Abb. 2.2 qualitativ darstellt, VAN MIER [220].

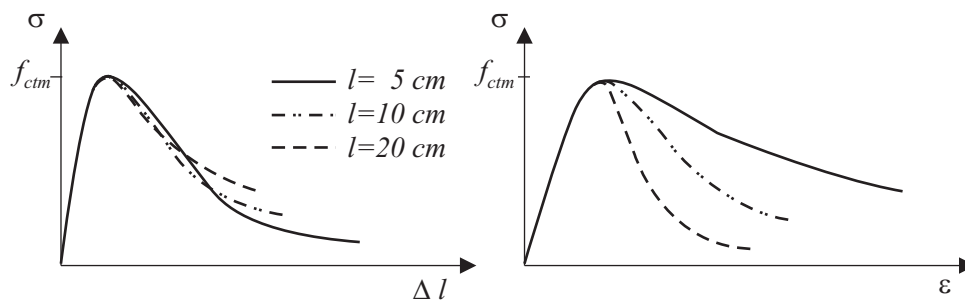


Abbildung 2.2: Spannungs-Verschiebungs- und Spannungs-Dehnungs-Diagramm für unterschiedliche Probenlängen

Im Nachbruchbereich setzen sich die über eine Probe gemittelten Dehnungen additiv aus zwei Anteilen zusammen: einem elastischen ε^{el} , der im ungerissenen Bereich entsteht und infolge der dort auftretenden Entlastung abnimmt, sowie einem irreversiblen ε^f , der sich aus dem Verschmieren der Rißöffnungsweite w_n über die Probenlänge l ergibt:

$$\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^f \quad \text{wobei} \quad \varepsilon^{el} = \frac{\sigma}{E} \quad , \quad \varepsilon^f = \frac{w_n(\sigma)}{l} \quad (2.3)$$

Diese Annahme basiert auf dem fiktiven Riß-Modell von HILLERBORG et al. [93], [91] und läßt die getrennte Berücksichtigung von unterschiedlichen zeit- oder feuchteabhängigen Ansätzen zu, DE BORST [50]. Die Spannungs-Dehnungs-Verläufe des elastischen und des infinitesimal dünnen gerissenen Anteils sind in Abb. 2.3 a), b) dargestellt.

Der Zusammenhang zwischen der Zugspannung normal zum Riß und der zugehörigen Rißöffnungsweite kann mittels der Exponentialfunktion

$$\sigma(w_n) = f_{ctm} \exp\left(-\frac{w_n}{w_{n,u}}\right) \quad (2.4)$$

beschrieben werden, wobei $w_{n,u} = G_f/f_{ctm}$ die Anfangssteigung H_{w0} der Entfestigungsfunktion definiert. Die in (2.4) verwendete spezifische Bruchenergie G_f ist eine materialspezifische Größe, welche der Energie, die beim Reißen einer Einheitsfläche freigesetzt wird, entspricht. Aus diesem Grund wird sie häufig auch als Energiefreisetzungsrates bezeichnet. Sie kann im Rahmen von ein-axialen Versuchen bestimmt werden und ist proportional zu der Fläche unter der Spannungs-Rißöffnungs-Kurve, Abb.2.3 c), siehe zum Beispiel HILLERBORG et al. [92], MÜLLER et al. [158]. Im allgemeinen nimmt G_f bei Normalbeton Werte im Bereich von 50 Nm/m^2 bis 200 Nm/m^2 an. Für eine überschlägige Abschätzung dieser Materialkonstante sind in Abhängigkeit vom Durchmesser

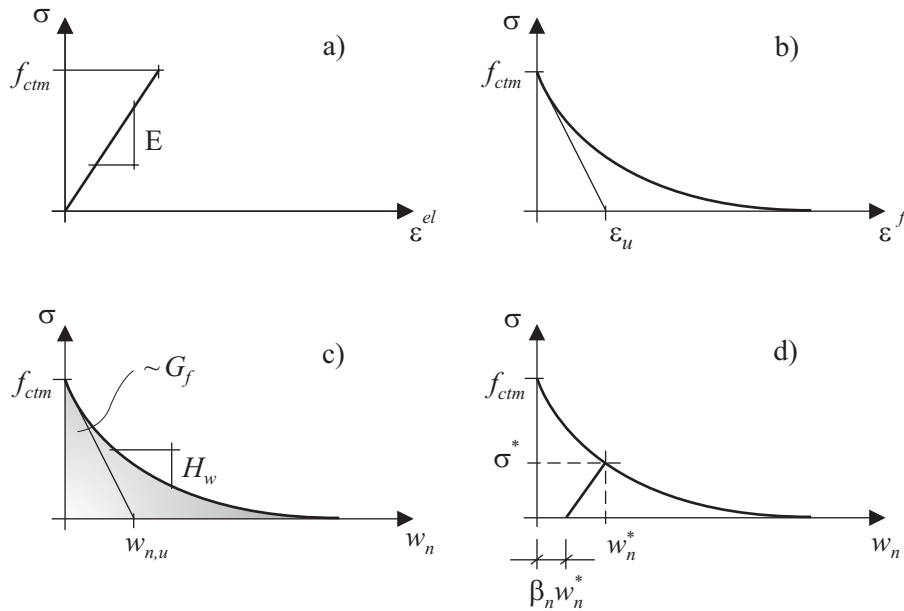


Abbildung 2.3: Spannungs-Dehnungs-Diagramm a) des Vorbruchbereichs, b) des Nachbruchbereichs, c) Spannungs-Rißweiten-Verlauf, d) Ent- und Wiederbelastung im Nachbruchbereich

des Größtkorns d_{max} im CEB-FIP Model Code [30] empirische Formeln angegeben.

Durch den Tangentenmodul E^t , welcher sich nach dem Einsetzen von (2.4) in die konstitutive Beziehung

$$\dot{\sigma} = E^t \dot{\epsilon} \quad (2.5)$$

folgt, läßt sich der Zusammenhang zwischen den Evolutionen von Spannung und Gesamtdehnung im Nachbruchbereich bestimmen. Mit Hilfe der Steigung der Entfestigungsfunktion $H_w = \dot{\sigma}$ und der Beziehung $\dot{w}_n = 1/\dot{\sigma}$ folgt

$$E^t = \frac{E}{1 - \frac{\lambda}{l}} \quad \text{mit} \quad \lambda = -\frac{E}{H_w} \quad (2.6)$$

Da sich für einen entfestigenden Kurvenast ein negativer Tangentenmodul ergeben muß, gilt stets die Einschränkung

$$\lambda/l > 1 \quad , \quad (2.7)$$

womit sich bei einem exponentiellen Materialversagen gemäß (2.4) als maximaler Wert für λ

$$\max \lambda = \lambda_f = \frac{G_f E}{f_{ctm}^2} \quad (2.8)$$

zu Beginn der Entfestigung ergibt. Dieser Parameter λ_f , der die Dimension einer Länge besitzt, hängt offensichtlich ausschließlich von Materialkonstanten ab und ist somit ein materialspezifischer Wert, der je nach Zusammensetzung des Betons im Bereich zwischen 400 und 800 mm liegt, OTTOSEN [169]. Er wird oft als charakteristische Länge für das Zugversagen bezeichnet.

Wird im Rahmen der Finite-Element-Methode von einer verschmierten Betrachtung der Riße und des Materialversagens ausgegangen, so wird als Probenlänge l eine sogenannte charakteristische Elementlänge l_c angesetzt. Sie beschreibt die Breite des entstehenden Rißbandes. Es zeigt sich, daß diese Länge eine vom Finite-Element-Netz implizierte Größe ist, die im wesentlichen von den Elementabmessungen, der Ansatzordnung und der Ordnung der Integration abhängt, siehe dazu zum Beispiel CRISFIELD [43], BAŽANT & OH [9], BAŽANT [7] sowie WILLAM et al. [230]. Da zudem die Orientierung des Risses durch das Element einen Einfluß auf die charakteristische Länge hat, OLIVER [163], schlagen STEMPNIIEWSKI & EIBL [209], HOFSTETTER & MANG [94] und andere vor, bei linearen Ansatzfunktionen die maximale Ausdehnung des finiten Elementes quer zur Hauptzugspannungsrichtung als l_c anzusetzen. Für höhere Ansatzordnungen geht der Abstand benachbarten Elementknoten in die Bestimmung von l_c ein. Liegt ein regelmäßiges Netz vor, so folgt nach ROTS [183] und LOURENCO et al. [138] unabhängig vom tatsächlichen Verlauf des Rißbandes für zweidimensionale Elemente mit der Fläche A^e

$$l_c = \zeta_l \sqrt{A^e} \quad , \quad (2.9)$$

mit $\zeta_l = \sqrt{2}$ für lineare und $\zeta_l = 1$ für quadratische Ansatzfunktionen. Als vereinfachten Ansatz für dreidimensionale Elemente mit dem Volumen V^e und n_{int} Integrationspunkten ergibt sich

$$l_c = \sqrt[3]{\frac{V^e}{n_{int}}} \quad , \quad (2.10)$$

GRASBERGER [81]. Um ein stabiles Materialverhalten bei einer numerischen Berechnung zu gewährleisten, muß nach (2.7) die charakteristische Elementlänge l_c immer kleiner als die Länge λ gewählt werden.

Kommt es im Nachbruchbereich bei einer Rißöffnung von w_n^* und dem zugehörigen Spannungszustand σ^* zu einer Entlastung, so beginnt sich der bestehende Riß

zu schließen, es gilt $\dot{w}_n < 0$, siehe Abb.2.3 d). Wird von einem linearen Zusammenhang zwischen der Abnahme der Riweite und den Spannungen ausgegangen, so verbleibt bei $\sigma = 0$ eine Rißöffnung von

$$\hat{w}_n = \beta_n w_n^* \quad \text{mit} \quad 0 \leq \beta_n \leq 1 \quad . \quad (2.11)$$

Die Grenzen $\beta_n = 0$ und $\beta_n = 1$ beschreiben das vollständige Schließen des Risses, beziehungsweise eine unveränderte Rißöffnung. Bei einem erneuten Anstieg der Zugbelastung kommt es anfänglich zu einem linearen Verhalten bis zum Erreichen von σ^* , w_n^* , dann zu einer weiteren exponentiellen Entfestigung gemäß (2.4). Nach DAHLBLOM & OTTOSEN [46] stimmt das Modellverhalten für $\beta_n = 0.2$ sehr gut mit den experimentellen Untersuchungen von REINHARDT [177] überein.

Druckbeanspruchung

Anders als bei der experimentellen Untersuchung des Zugverhaltens, stellt die Ermittlung von Spannungs-Verschiebungs-Kurven im Druckbereich und damit die Bestimmung der mittleren Druckfestigkeit f_{cm} keine besonderen Schwierigkeiten dar. In der Regel werden zylindrische oder kubische Probekörper mit einer Schlankheit von $h/d > 2$ für den last- oder verschiebungsgesteuerten Druckversuch verwendet, REINHARDT [178].

Es zeigt sich, daß die Mikrorisse aus Hydratation und Schwinden im Zementmörtel und an den Kontaktstellen von Zement und Zuschlag bis etwa 30% der Druckfestigkeit keinen Einfluß auf das Tragverhalten haben. Der Beton verhält sich nahezu linearelastisch. Bei weiterer Laststeigerung kommt es zu einem vermehrten Rißwachstum parallel zur Belastungsrichtung und zur Ausbildung von Verbundrissen.

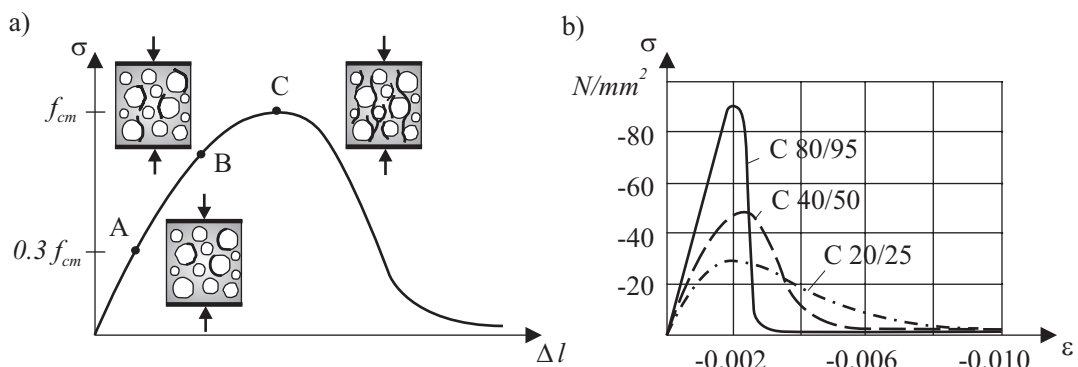


Abbildung 2.4: Beton unter einaxialem Druck: a) qualitativer Spannungs-Verschiebungs-Verlauf und Rißentwicklung im Probekörper, b) Spannungs-Dehnungs-Diagramme für verschiedene Betone, CEB-FIP MODEL CODE [30]

Die Nichtlinearität zwischen Spannungen und Dehnungen nimmt mit steigender Beanspruchung überproportional zu. Nach Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung f_{cm} fällt σ mit steigender Dehnung deutlich ab, und zwar umso steiler, je höher die Druckfestigkeit des Betons ist, siehe dazu Abb. 2.4. Die Gegenüberstellung von Spannungs-Dehnungs- und Spannungs-Volumendehnungs-Beziehung, Abb. 2.5, läßt erkennen, daß es ab einer kritischen Druckspannung von

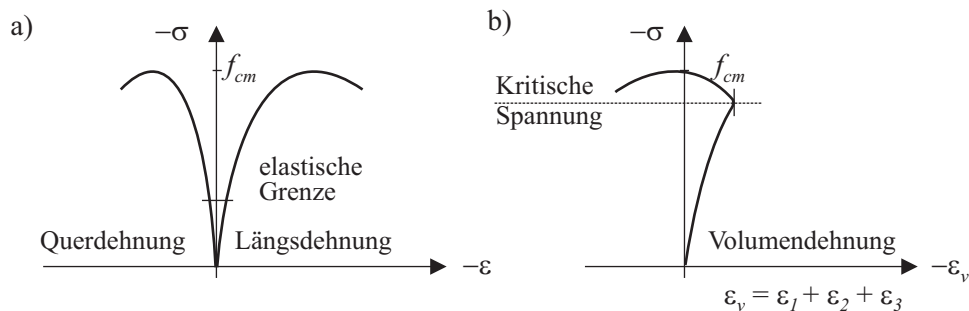


Abbildung 2.5: a) Spannungs-Dehnungs- und b) Spannungs-Volumendehnungs-Beziehung bei Druckbeanspruchung

etwa $0.8 f_{cm}$ zu einer Änderung im Dehnungsverhalten kommt: Aus der anfänglichen Volumenabnahme wird eine -zunahme (Dilatation), KUPFER et al. [128], CHEN [36]. Es bilden sich Rißbänder aus, die zu einer Auflockerung und schließlich zur Zerstörung des Gefüges führen, LIU et al. [137], SHAH & WINTER [192]. Das Spannungsniveau, bei dem das Betonvolumen einen Minimalwert annimmt, bezeichnen KOTSOVOS & NEWMAN [117] als Beginn der instabilen Rißausbreitung. Im Nachbruchbereich bestimmen lokale Verformungen in den Bruchflächen die Gesamtdehnungen des Probekörpers, ähnlich wie schon bei der Zugbeanspruchung festgestellt, spielen hierbei Lokalisierungseffekte eine entscheidende Rolle.

Als Folge dieser Beschränkung des Versagens auf schmale Bereiche zeigt sich auch bei Druckbeanspruchung das Phänomen, daß sich für unterschiedliche Längen des Probekörpers nahezu identische Spannungs-Längenänderungs-Kurven ergeben. Die Verläufe der Spannungs-Dehnungs-Beziehungen unterscheiden sich dagegen stark. Je länger der Probekörper ist, desto schneller fallen die aufnehmbaren Spannungen bei vorgegebener Dehnung ab, siehe dazu unter anderem VAN MIER [220] und VONK [223].

In der Literatur sind unterschiedliche Formulierungen zur Beschreibung des Verhaltens nach Erreichen der maximalen Druckspannung zu finden. Während beispielsweise die Ansätze nach VECCHINO & COLLINS [222], SARGIN [186], CEB-FIP MODEL CODE [30], EC 2 [68] oder DIN 1045-1 [54] nicht auf bruchmechanischen Grundlagen beruhen, berücksichtigen diejenigen von FEENSTRA [71],

FEENSTRA & DE BORST [72], LACKNER [129] und anderen die Bruchenergie G_c . Letztere Modelle sind somit für eine objektive Beschreibung zu bevorzugen.

Nach LACKNER [129] läßt sich des Materialverhalten im Verlauf der Entfestigung mittels des exponentiellen quadratischen Entfestigungsgesetzes

$$\sigma(w_n) = f_{cm} \exp\left(-\frac{w_n^2}{w_{n,u}^2}\right) \quad \text{mit} \quad w_{n,u} = \frac{2G_c}{\sqrt{\pi} f_{cm}} \quad (2.12)$$

annähern. Für diesen Zusammenhang ist – wie schon für den Zugbereich – der Parameter $w_{n,u}$ über die spezifische Bruchenergie des Druckversagens G_c definiert. Für Normalbeton nimmt G_c Werte an, die das 100-500 fache der Bruchenergie für Zug betragen.

Der maximale Gradient der Entfestigungsfunktion (2.12) ergibt sich an der Stelle $w_n = w_{n,u}/\sqrt{2}$. Durch Einsetzen der zugehörigen Steigung H_w in Beziehung (2.6) folgt als charakteristische Länge für das Druckversagen

$$\lambda_c = \frac{G_c E_c}{f_{cm}^2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} e^{(-0.5)}} \quad (2.13)$$

Wie bereits diskutiert muß bei einer Finite-Element-Berechnung die charakteristische Elementlänge l_c kleiner als λ_c gewählt werden, um das Verhalten der untersuchten Struktur objektiv abbilden zu können.

Experimentelle Untersuchungen von SINHA & GERSTLE [205], KARSAN & JIRSA [108], SUARIS & FERNANDO [211] und anderen zeigen, daß sich bei einer Entlastung im eindimensionalen Druckzustand je nach Belastungsgeschichte unterschiedliche Verhaltensweisen einstellen: Wird vor dem Erreichen der maximalen Druckspannung mit der Entlastung begonnen, so lassen sich nur geringe Nichtlinearitäten erkennen, die Steifigkeit bei Ent- und Wiederbelastung ist nahezu identisch zur Anfangssteifigkeit. Beginnt hingegen die Rücknahme der aufgebrachten Druckspannung erst nach Überschreiten des Maximalwertes, so nimmt die Steifigkeit bei zunehmender Entfestigung stetig ab. Es verbleibt analog zum Zugverhalten nach der vollständigen Entlastung eine Restaufweitung korrespondierend zu (2.11). Als Ursache für dieses Phänomen ist die fortschreitende Auflockerung des Betongefüges zu sehen.

Diese Auflockerung und die damit verbundene Volumenzunahme spiegelt sich auch in der Größe der Querdehnzahl ν wieder. Im einaxialen Versuch variiert sie je nach Betongüte zwischen 0.15 und 0.22; CHEN [36] empfiehlt einen Wert von 0.19 oder 0.2. Während ν anfänglich einen konstanten Wert hat, kommt es ab der kritischen Spannung von etwa $0.8 f_{cm}$ zu einem nichtlinearen Anstieg auf bis zu $\nu = 0.4$, siehe dazu STEMPNIEWSKI & EIBL [209].

2.1.2 Zweiachiales Verhalten

Bei der Belastung einer realen Struktur stellt sich im allgemeinen ein dreidimensionaler Spannungszustand ein, für die Untersuchung des Haupttragverhaltens von Platten, Scheiben und dünnen Schalen ist allerdings eine Beschränkung auf einen zweiachsigen Spannungszustand vertretbar.

Zur Beschreibung des zweiachsigen Materialverhaltens ist es notwendig zwischen Versagenskurve und Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu unterscheiden. Die im Hauptspannungsraum aufgetragene Versagenskurve gibt an, bei welcher Spannungs-kombination Materialversagen eintritt. Während sich diese Kurve experimentell und eindeutig für monotone Belastungen bestimmen lassen, siehe zum Beispiel KUPFER et al. [128], [127], OTTOSEN [168] und GERSTLE et al. [79], gibt es keine generell eindeutigen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für das zweiachsiale Verhalten, STEMPNIEWSKI & EIBL [209]. Der einzige Zusammenhang zwischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung und Versagenskurve besteht darin, das letztere die Spannungsmaxima der Spannungs-Dehnungs-Beziehung wiedergibt. Allgemeingültige Aussagen über die Festigkeit von Beton unter mehrachsiger Beanspruchung sind somit nur auf Grundlage der sogenannten Bruchhypothesen möglich, REINHARDT [178].

Aus den biaxialen Versagenskurven von KUPFER et al. [127], Abb. 2.6 a), ist zu erkennen, daß für den Druck/Druck-Bereich die maximal aufnehmbare Spannung deutlich über der des eindimensionalen Versuchs liegt. Für ein Hauptspannungsverhältnis von $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-1$ ist eine Erhöhung um etwa 16%, für $\sigma_1/\sigma_2 = -1/-0.52$ sogar um 25% festzustellen. Diese erhöhte Tragfähigkeit ist auf ein Verkeilen der uneben gebrochenen Rißflächen zurückzuführen. Bei einer gemischten Druck/Zug-Belastung reduziert sich die Druckfestigkeit deutlich. Unabhängig vom Verhältnis der aufgebrachten Spannungen tritt das Versagen für eine reine Zugbeanspruchung (Zug/Zug) immer bei Erreichen der maximalen eindimensionalen Zugfestigkeit ein.

Versuche von NELISSEN [160] zeigen, daß die zweidimensionale Bruchumhüllende nahezu unabhängig von der Belastungsgeschichte ist. Die in Abb. 2.6 b) dargestellten Versagensmodi für unterschiedliche Hauptspannungsverhältnisse zeigen große Ähnlichkeiten mit denen des einachsialen Versagens. Obwohl bisher kaum experimentelle Untersuchungen zum Entfestigungsverhalten bei mehrdimensionaler Beanspruchung vorliegen, legt die Ähnlichkeit zum eindimensionalen Fall auch hier die Anwendung einer bruchmechanischen Formulierung zur Beschreibung des Nachbruchverhaltens nahe. Das Versagen unter zweiachsialer Belastung kann somit als Summe zweier voneinander unabhängig eintretender Mechanismen interpretiert werden.

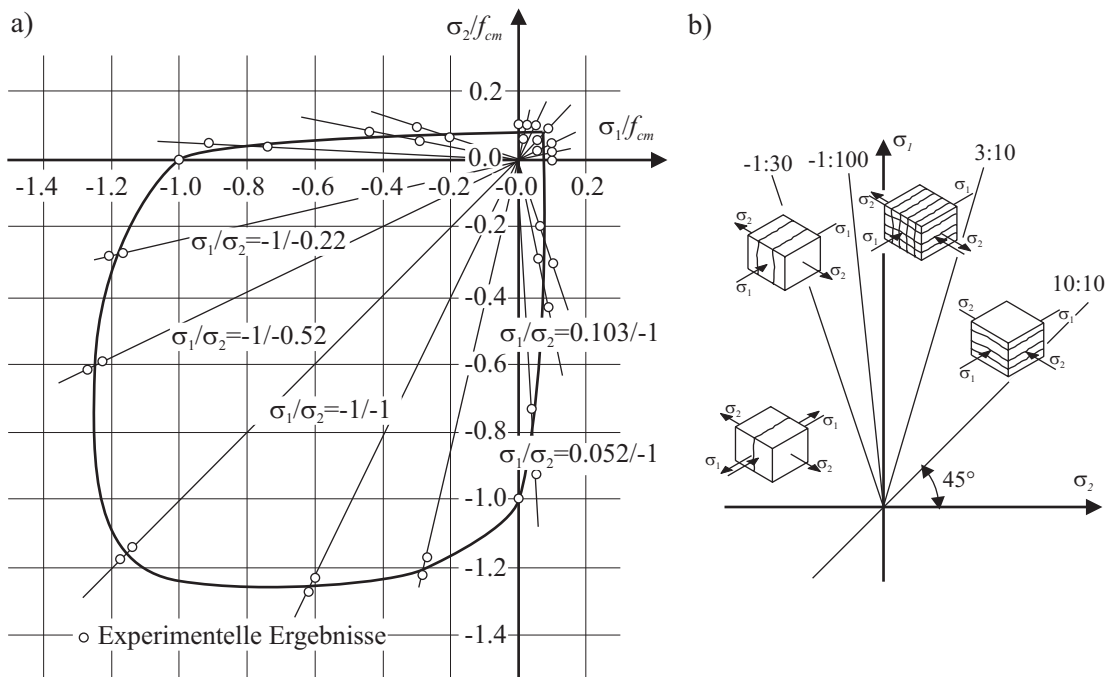


Abbildung 2.6: a) zweiachsigale Versagenskurve von Beton, KUPFER et al. [128], b) Abhängigkeit der Versagensmodi vom Spannungsverhältnis σ_1/σ_2

Die bereits bei einaxial belasteten Proben festgestellte Volumenzunahme kurz vor Erreichen der Traglast ist auch bei zweiachsig belasteten zu beobachten, CHEN [36]. Der elastische Bereich endet bei etwa 35% der Druckfestigkeit; die kritische Spannung, bei der das Volumen sein Minimum erreicht und der Übergang vom stabilen zum instabilen Rißwachstum stattfindet, ist im Bereich von 80 bis 90% der Beanspruchbarkeit zu finden.

2.1.3 Dreiaxiales Verhalten

Dreiaxiale Versuche lassen sich in sogenannte konventionelle und in echte dreiaxiale Versuche einteilen. Bei ersteren wird ein zylindrischer Versuchskörper unter radialem Flüssigkeitsdruck in Längsrichtung belastet. Bei letzteren können alle drei Richtungen gesondert beaufschlagt werden. Dreiaxiale Versuchsergebnisse sind zum Beispiel in BALMER [5], GERSTLE et al. [79], VAN MIER [220] und KUPFER [126] zu finden. Eine umfangreiche Zusammenstellung und Auswertung verschiedener Versuche ist bei SCHOLZ et al. [190] sowie GUO et al. [83] dokumentiert.

Wie die Spannungs-Dehnungs-Kurven von Beton unter dreiaxialer Belastung, zeigen, Abb. 2.7 a), JAMET et al. [103], nimmt die Festigkeit zu, je mehr sich der

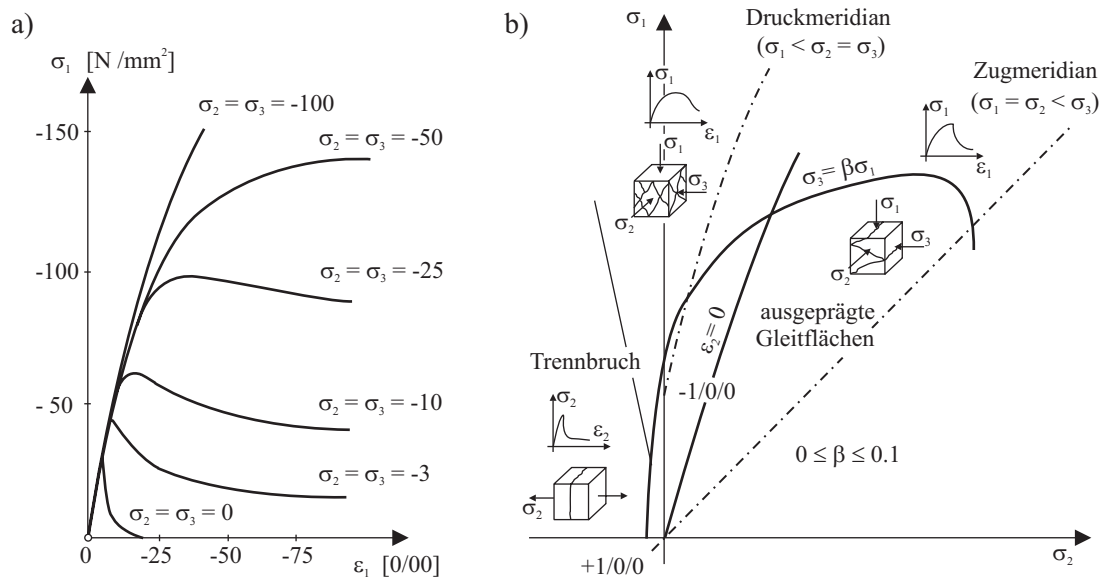


Abbildung 2.7: a) dreiaxiale Spannungs-Dehnungs-Verhalten im Druckversuch, b) Versagensmodi bei unterschiedlichen Verhältnissen $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$

aufgebrachte Spannungszustand dem hydrostatischen Zustand ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) nähert. Infolge der Umschnürungswirkung, die sich bei dreiaxialem Druck ausbildet, stellt sich auch bei stark zunehmenden Dehnungen kein oder ein nur sehr geringer Spannungsabfall ein. Dieses Phänomen ist als ein wesentlicher Unterschied zum ein- oder zweiachsialen Fall zu sehen.

In Abhängigkeit von der Größe des hydrostatischen Druckanteils sind Versagensverhalten von quasi-spröde bis hin zu quasi-duktil zu beobachten. Die zugehörigen Versagensmodi, die in Abb. 2.7 b), VAN MIER & REINHARDT [221], dargestellt sind, reichen dabei von einem Trennbruch bei zugdominierter Belastung über die Entwicklung von Mikro-, Makrorissen und Gleitflächen bei allseitigem Druck bis hin zu einer vollständigen Zerstörung der Zementmatrix. Da für dreiaxiale Zugbeanspruchung kaum detaillierte Versuchsergebnisse vorliegen, muß in erster Näherung davon ausgegangen werden, daß sich in diesem Zustand jede Zugspannungskomponente wie im eindimensionalen Fall verhält, STEMPNIEWSKI & EIBL [209]. Zurückführen läßt sich diese Annahme auf das Verhalten von Beton unter zweiachsiger Zugbeanspruchung, siehe dazu Abschnitt 2.1.2.

Wird von einer Unabhängigkeit von der Belastungsgeschichte ausgegangen, so läßt sich das Betonversagen unter dreiaxialer Beanspruchung über eine geschlossene Fläche im Hauptspannungsraum beschreiben. Abb. 2.8 zeigt eine schematische Darstellung dieser Grenzfläche. Der aktuelle Spannungszustand kann in einen hydrostatischen Anteil, der die Volumenänderung beschreibt, und einen deviatorischen, gestaltsändernden Anteil zerlegt werden. Für eine gegebene hydrostatische

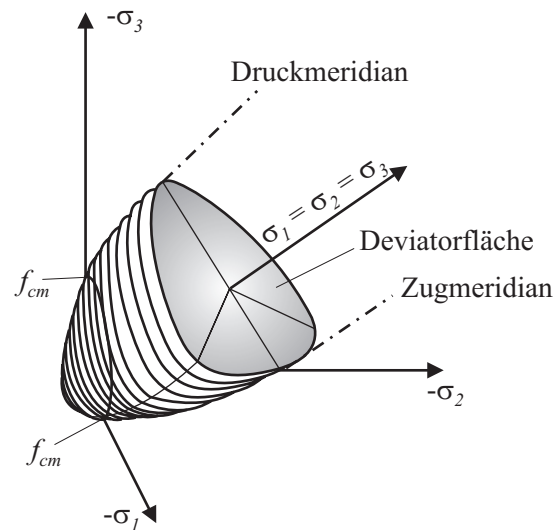


Abbildung 2.8: Grenzfläche der dreiaxialen Festigkeit nach OTTOSEN [168]

Spannung tritt Betonversagen ein, sobald der deviatorische Anteil außerhalb der Deviatorfläche (die Fläche senkrecht zur hydrostatischen Achse $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) liegt. Bei steigendem volumetrischen Druck nimmt diese Fläche mehr und mehr eine kreisförmige Gestalt an. Im Bereich von kleinen hydrostatischen Drücken ist der Deviatorschnitt zwar noch konvex nicht aber kreisförmig, CHEN [36]. Er weist eine dreifache Symmetrie auf, wobei eine Symmetrieebene durch die σ_3 -Achse und die Gerade $\sqrt{2}\sigma_2 - \sqrt{2}\sigma_1 = 0$ definiert ist. Die zwei weiteren Ebenen ergeben sich aus einer Permutation der Indizes. Als Schnittkurven der einzelnen Symmetrieebenen mit der Versagensfläche folgen die jeweiligen Zug- und Druckmeridiane.

2.2 Modelle zur numerischen Beschreibung von Beton

Obwohl in den letzten Jahrzehnten eine große Anzahl unterschiedlicher mathematischer Modelle zur Beschreibung des Betonverhaltens veröffentlicht wurden, gibt es bisher noch kein allumfassendes. Die numerische Formulierung dieses Werkstoffes ist unter anderem so aufwendig, weil sich – wie in den vorangegangenen Abschnitten dargestellt – das Verhalten für Druck-, Zug- sowie gemischter Beanspruchung stark unterscheidet. Desweiteren variieren die Versagensarten je nach Größe und Form der aufgetragenen Belastung und den äußeren Gegebenheiten wie Temperatur, Feuchte und Hydratationsgrad zwischen spröde und duktil. Die meisten der vorgeschlagenen Modelle sind zwar in der Lage einzelne Phänomene sehr gut abzubilden, zeigen aber bei anderen deutliche Schwächen, MESCHKE [152], REINHARDT [178], HOFSTETTER & MANG [94], JIRASEK & BAŽANT [104].

In Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Theorie lassen sich die einzelnen kon-

stitutiven Modelle klassifizieren. In der Regel wird zwischen elastischen Modellen, zum Beispiel CHEN & SALEEB [39], und inelastischen Modellen unterschieden. Letztere basieren entweder auf der Plastizitätstheorie, CHEN [36], LUBLINER [140], oder auf der Schädigungstheorie, LEMAITRE & CHARBOCHE [135].

Im folgenden soll ein Überblick über die wesentlichen Unterschiede der möglichen numerischen Materialmodelle und den Stand der aktuellen Forschung gegeben werden, für eine vertiefende Darstellung sei auf HOFSTETTER & MANG [94], JIRASEK & BAŽANT [104] sowie auf die sehr umfassende Arbeit von ZHOU [240] verwiesen.

2.2.1 Elastische Modelle

Die Grundlage aller elastischen Modelle ist die direkte Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen. Zu jedem beliebigen Spannungszustand existiert bei gegebenen klimatischen Bedingungen genau ein Dehnungszustand. Die Formulierung von zeitabhängigem Verhalten, wie zum Beispiel Schwinden und Kriechen ist mit rein elastischen Modellen nicht möglich. Eine Erweiterung um viskose Anteile wäre erforderlich.

Grundsätzlich lassen sich elastische Modelle in zwei Kategorien einteilen, die erste Gruppe umschließt die Cauchy-elastischen und hyperelastischen Materialien, die zweite die sogenannten hypoelastischen.

Für Cauchy-elastische Materialien ergibt sich im allgemeinen Fall der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ direkt als Funktion von Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ und Temperatur T

$$\boldsymbol{\sigma} = g(\boldsymbol{\varepsilon}, T) \quad . \quad (2.14)$$

Nach CHEN [36] verletzt (2.14) beim Durchlaufen mehrerer Lastzyklen die Grundregeln der Thermodynamik und ist somit nur bedingt als numerisches Modell geeignet. Als Folge des fehlenden Potentialcharakters ergeben sich pfadabhängige Ergebnisse. Werden die Spannungen eines elastischen Materials als Funktion der elastischen Verzerrungsenergiefunktion W^{el} dargestellt

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W^{el}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad (2.15)$$

so sind die thermodynamischen Prinzipien erfüllt, siehe Abschnitt 3.2. Dieser Typ von Modellen wird als hyperelastisch oder Green-elastisch bezeichnet und verfügt über den Materialtensor \mathbb{C}

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 W^{el}}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \mathbb{C}_{klij} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (2.16)$$

der bezüglich ij und kl symmetrisch ist. Bei einer konvexen Formänderungsenergiefunktion führt (2.16) auf einen positiv definiten Materialtensor. Der Doppelpunkt symbolisiert hier die zweifache Kontraktion tensorieller Größen, für die im orthonormierten Basissystem $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B^{ij}$ gilt.

Cauchy-elastische und hyperelastische Materialien sind unabhängig von der gewählten Belastungsgeschichte und eindeutig in der Zuordnung von Spannungen und Dehnungen. Da nicht zwischen Be- und Entlastung unterschieden wird, eignet sich diese Form der Materialbeschreibung nur für monotone Laststeigerungen. Beispiele für die Verwendung dieser Modelle zur Beschreibung von Beton sind unter anderem in den Arbeiten von OTTOSEN [168], CEDOLIN et al. [31], KOTSOVOS & NEWMAN [117], [118] und AHMAD et al. [1] zu finden.

Im Gegensatz zu den bisher beschriebenen elastischen Modellen ist die konstitutive Beziehung für hypoelastisches Material ratenabhängig

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, T) \quad . \quad (2.17)$$

Somit ist es möglich die Belastungsgeschichte bei der Formulierung zu berücksichtigen. Da sich aber die Spannungen nicht aus einer Potentialfunktion ableiten, werden auch im Rahmen einer hypoelastischen Formulierung die Hauptsätze der Thermodynamik nicht erfüllt. Der inkrementelle Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen ergibt sich aus

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad . \quad (2.18)$$

Dabei ist der Materialtensor eine Funktion der Spannungen beziehungsweise der Verzerrungen. Als wesentliche Arbeiten sind DARWIN & PECKNOLD [48], STANKOWSKI & GERSTLE [207] und BOUZAIENE & MASSICOTTE [26] zu nennen.

Für einen weiterführenden Einblick in die Elastizitätstheorie sei unter anderem auf STEIN & BARTHOLD [208] oder MARSDEN & HUGHES [144] verwiesen.

2.2.2 Elastoplastische Modelle

Im allgemeinen endet der elastische Bereich eines Materials an einer fest definierten Grenze. Bei einer weiter zunehmenden Belastung stellen sich irreversible Verformungen ein, die auch nach einer vollständigen Entlastung bestehen bleiben.

Dieses geschichtsabhängige Verhalten läßt sich im Rahmen der Plastizitätstheorie mit der Einführung weiterer Parameter, den internen Variablen \mathbf{q} , erreichen

$$\boldsymbol{\sigma} = g(\boldsymbol{\varepsilon}, T, \mathbf{q}) \quad . \quad (2.19)$$

Die Plastizitätstheorie umfaßt eine ganze Reihe von unterschiedlichen Ansätzen. Die wesentlichen, die im folgenden kurz beschrieben werden, sind: die klassische Deformationstheorie, die Fließtheorie, die sogenannte 'plastic-fracture-theory', die endochrone Plastizität sowie die Hypoplastizität.

Die Grundlage der klassischen Deformationstheorie ist die totale Formulierung von Spannungen und Verzerrungen sowie die Aufspaltung letzterer in einen elastischen und einen inelastischen Anteil. Da diese Formulierung keinen Potentialcharakter besitzt, ist es zwar möglich plastische Verformungen sowie einen Be- und Entlastungszyklus zu beschreiben, bei einer erneuten Wiederbelastung ergeben sich allerdings Pfadabhängigkeiten. Anders dagegen bei Verwendung der Fließtheorie: Diese beruht auf einer inkrementellen Betrachtung, bei der durch die Einführung einer Fließfläche, einer Fließregel und eines plastischen Potentials eine irreversible Verzerrungsrate formuliert werden kann, siehe dazu beispielsweise LUBLINER [140] und SIMO [198]. Die von DOUGILL & RIDA [57] beschriebene 'plastic-fracture-theory' ist eine Kombination beider Ansätze. Zur Simulation von viskosen, zeitabhängigen Vorgängen – wie Kriechen oder Schwinden – bietet sich die endochrone Theorie an, bei der die Verzerrungen als Funktion einer inneren Zeit berücksichtigt werden können, BAŽANT & SHIEH [11]. Als letzte Möglichkeit der Beschreibung plastischer Verformung sei an dieser Stelle noch die inkrementelle Hypoplastizität erwähnt. Im Rahmen dieser Theorie, die häufig auch im Zusammenhang mit Granulaten und Geomaterialien verwendet wird, KOLYMBAS [116], GUDEHUS [82], werden die Ratengleichungen nicht assoziativ hergeleitet, sondern direkt angegeben. Die Hypoplastizität verfügt weder über ein plastisches Potential noch über eine Fließfläche.

2.2.3 Modelle nach der Schädigungstheorie

Eine dritte Möglichkeit der mathematischen Beschreibung von Beton stellen Modelle dar, die auf der Schädigungstheorie basieren. Anders als bei den zuvor beschriebenen Formulierungen bleibt bei diesen die elastische Steifigkeit nicht den gesamten Be- und Entlastungsvorgang über konstant. Beim Auftreten irreversibler Effekte verringert sich die elastische Steifigkeit als Funktion von einem oder mehreren Schädigungsparametern. Diese Degradation, die sowohl isotrop als auch anisotrop erfolgen kann, läßt sich über thermodynamische Prinzipien herleiten

und wurde von DOUGILL [56] erstmals im Zusammenhang mit der Beschreibung von Betonverhalten verwendet. Eine Weiterführung dieser Ansätze finden sich beispielsweise bei MAZARS [147] und LEMAITRE & CHARBOCHE [135].

Nicht selten wird der Versuch unternommen eine wirklichkeitsnahe Formulierung über die Kopplung verschiedenen Modellansätze zu erhalten. Eine Kombination von Plastizitäts- und Schädigungstheorie wird unter anderem von BAŽANT & KIM [8], LUBLINER [139], TIKHOMIROV & STEIN [216], KRAETZIG et al. [123] sowie HÄUSSLER-COMBE & PRÖCHTEL [100] vorgeschlagen.

2.2.4 Konzepte zur Rißmodellierung

Zur numerischen Erfassung und Beschreibung des Rißverhaltens, das sich bei zunehmender Betonbelastung einstellt, haben sich im Rahmen der Finite-Element-Methode zwei unterschiedliche Konzepte etabliert: die diskreten und die verschmierten Rißmodelle. Bei ersteren stellt der Riß eine geometrische Unstetigkeit dar, bei letzteren wird der gerissene Bereich wie ein Kontinuum behandelt. Im folgenden sollen beide Möglichkeiten dargestellt werden, wobei das wesentliche Augenmerk der späteren Formulierungen auf die verschmierte Betrachtung gerichtet sein wird.

Diskrete Betrachtung

Im Zuge einer diskreten Betrachtung von Rissen wird die Diskontinuität im Verschiebungsfeld entlang der Rißränder exakt berücksichtigt. Klassischerweise entwickeln sich bei Verwendung dieses Ansatzes die numerisch berechneten Risse entlang der Elementgrenzen des Finite-Element-Netzes. Bei Auftreten eines Risses werden die gemeinsamen Knoten benachbarter Elemente durch jeweils zwei einzelne ersetzt, die sich im weiteren unabhängig voneinander verschieben können. Nachteilig an dieser Vorgehensweise ist, daß infolge der hinzukommenden Freiheitsgrade eine ständige Neuvernetzung der Struktur oder gewisser Teilbereiche notwendig wird. Für eine wirklichkeitsnähere Beschreibung der Rißausbreitung wurde das ursprüngliche Konzept von NGO & SCORDELIS [161] durch INGRAF-FEA & SAOUMA [101] und andere mit adaptiven Ansätzen erweitert. Um die mögliche Position eines Risses nicht auf die Elementgrenzen beschränken zu müssen, schlagen BELYTCHKO & BLACK [13] und MOËS et al. [159] die Erweiterung der Elementformulierung um spezielle Sprungfunktionen vor. Diese ermöglichen ein Aufreißen eines einzelnen Elementes an einer beliebigen Stelle, eine Neuvernetzung kann so umgangen werden.

Ist bei dem zu untersuchenden Bauteil infolge von geometrischen oder physikalischen Unstetigkeiten, wie zum Beispiel eine sprunghafte Änderung in den Querschnittsabmessungen oder ein Wechsel im verwendeten Material, die Lage des maßgebenden Risses im Vorfeld bekannt, so ist die Verwendung von sogenannten 'interface'-Elementen möglich, ROTS [183], MEHLHORN [148]. Eine detaillierte Beschreibung dieses Elementtyps ist in Abschnitt 7.3.2 zu finden.

Verschmierte Betrachtung

Kommt es bei der Belastung einer Struktur nicht zur Entstehung nur eines einzelnen Risses, sondern bilden sich Bereiche mit mehreren kleiner Rissen aus, so ist die verschmierte Betrachtung einer diskreten vorzuziehen, BAŽANT & OH [9], PÖLLING [171]. In diesem Fall werden die geschädigten Gebiete weiterhin als Kontinuum angesehen, wobei für jene die Steifigkeit herabgesetzt und die Diskontinuitäten gewissermaßen über die Struktur verschmiert werden. Im Rahmen der Finite-Element-Methode bieten sich für dieses Verschmieren die Integrationsbereiche der einzelnen Integrationspunkte an, womit der Zusammenhang zwischen Spannungen, Dehnungen und Versagensvorgängen weiterhin für jeden Materialpunkt bestimmbar bleibt, SUANNO [210]. Diese Form der Erfassung von Rissen, die auf der Arbeit von RASHID [175] beruht, läßt mehrere Rißebenen je Integrationspunkt zu. In Abhängigkeit von der Lage der einzelnen Ebenen zueinander kann zwischen verschiedenen Modellen unterschieden werden: Die sogenannten 'fixed crack models' gehen davon aus, daß sich die Orientierung einer einmal entstandenen Rißebene nicht mehr ändert. Je nach Formulierung stellen sich die weiteren Rißebenen senkrecht zu dieser ersten ein ('fixed orthogonal crack model'), SUIDAN & SCHNOBRICH [212], oder in beliebigen anderen Winkeln ('fixed non-orthogonal crack model' und 'multiple fixed crack model'), DE BORST & NAUTA [52]. Wie experimentelle Untersuchungen zeigen, kommt es infolge der Verzahnung der einzelnen Zuschlagskörner unter Umständen zu einer Drehung der Rißebenen, was in den 'rotating crack models' berücksichtigt wird, CRISFIELD & WILLS [44]. Als letzter weitverbreiteter Ansatz seien die 'microplane models' erwähnt, die mikro-mechanische Ansätze aufgreifen. Für einen tieferen Einblick in die theoretischen Hintergründe dieser vorgestellten Formulierungen bieten sich die Arbeiten von DE BORST [50], WILLAM et al. [231] und ROTS [183] an.

Bei der Anwendung des Konzeptes der verschmierten Risse in seiner Standardform läßt sich feststellen, daß es besonders bei unbewehrten Bauteilen zu einer physikalisch nicht akzeptablen Abhängigkeit vom verwendeten Finite-Element-Netz kommt: Die maximale Traglast der berechneten Struktur nimmt mit fortschreitender Netzfeinheit ab, ohne gegen einen Wert zu konvergieren. Der Grund

für dieses Phänomen ist, wie eingehend in Abschnitt 2.1.1 erörtert, in der Lokalisierung des Betonversagens auf einen kleinen Bereich zu sehen. Zur Modifikation des Konzepts der verschmierten Risse wird die in (2.9) und (2.10) eingeführte charakteristische Elementlänge l_c herangezogen. Mit Hilfe dieser Länge lassen sich die spezifischen Bruchenergien G_c für Druck und G_f für Zug über das entstehende Rißband mitteln, so daß im Zuge einer ingenieurmäßigen Betrachtung die Objektivität gegenüber der Netzfeinheit gewährleistet ist. Eine Abbildung der lokalen Versagensformen wird somit ermöglicht. Diese Formulierung geht auf die Arbeit von BAŽANT & OH [9] zurück und wird allgemein als 'crack band model' bezeichnet.

Aus der Nutzung von adaptiven Algorithmen zur Netzverfeinerung und einer verschmierten Rißbeschreibung folgen für unbewehrte Betonstrukturen gute Übereinstimmungen von numerischer Simulation und experimentellen Versuchen hinsichtlich der ermittelten Traglasten und Rißbilder, LACKNER [129], HUEMER [98]. Die Anwendbarkeit einer verschmierten Betrachtungsweise wird somit bestätigt.

Im Rahmen der weiteren Darstellungen soll zur Beschreibung des inelastischen Betonverhaltens von einem Modell ausgegangen werden, welches auf den Zusammenhängen und Algorithmen der Plastizitätstheorie aufbaut. Für die ratenunabhängige Formulierung werden die Greenschen Verzerrungen additiv aufgespalten, die Evolutionsgleichungen der irreversiblen Größen ergeben sich nach Einführung einer Fließbedingung aus dem plastischen Potential. Da eine verschmierte Betrachtung von Materialschädigung und Rißentwicklung zum Tragen kommt, können die entfestigenden Strukturbereiche weiterhin als Kontinuum angesehen werden, woraus sich Vorteile bei einer späteren Finite-Element-Implementierung ergeben. Um dem Betonverhalten bei wiederholter Be- und Entlastung gerecht zu werden, stellt sich in Anlehnung an die Schädigungstheorie nach dem Überschreiten der maximalen Belastbarkeit eine Degradation der elastischen Materialparameter ein.

3 Allgemeine Form der Plastizitätstheorie

Vor der Entwicklung eines inelastischen dreidimensionalen Stoffgesetzes für Beton, siehe Abschnitt 4 und 5, sollen hier die grundlegenden Beziehungen und Zusammenhänge der Plastizitätstheorie dargestellt werden. An die Einführung der wesentlichen Zusammenhänge schließt sich eine thermodynamische Betrachtungsweise an, den Abschluß bildet die Formulierung des Projektionsalgorithmus und eines allgemeinen konsistenten elastoplastischen Tangentenmoduls. Eine detaillierte Darstellung der Plastizitätstheorie in kontinuierlicher beziehungsweise algorithmischer Schreibweise ist unter anderem bei KAHN & HUANG [105], SIMO [194], SIMO & HUGHES [198], CHEN & HAN [38] oder LUBLINER [140] zu finden.

3.1 Grundlegende Zusammenhänge

Während in der Elastizitätstheorie zwischen den auftretenden Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ und den zugehörigen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ eine eindeutige Beziehung besteht, hängt das Verzerrungsverhalten bei elastoplastischen Materialien stark von der Belastungsgeschichte und den bereits aufgetretenen inelastischen Verformungen ab, siehe dazu Abschnitt 2.2. Da im folgenden die Geschwindigkeit, mit der sich Belastungen einstellen oder sich die Materialeigenschaften ändern, nicht berücksichtigt werden soll, beruhen die inelastischen Vorgänge ausschließlich auf plastischen Verformungen. Es wird somit kein viskoses Materialverhalten impliziert. Man spricht in diesem Fall von einer ratenunabhängigen Formulierung, bei der die Zeit nur die Reihenfolge einzelner Prozesse beschreibt.

Wird eine totale Lagrangesche Formulierung – die von der kinematischen Annahme großer Verschiebungen, großer Verdrehungen aber kleiner Verzerrungen (bis etwa 5%) ausgeht – verwendet, so ist eine additive Zerlegung der Greenschen Verzerrungen \boldsymbol{E} , (6.5), in einen elastischen und einen plastischen Anteil möglich

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{el} + \boldsymbol{E}^{pl} \quad . \quad (3.1)$$

Die Beschreibung der auftretenden plastischen Verzerrungen soll auf der Basis der Fließtheorie erfolgen, was die Formulierung einer Fließbedingung, einer Fließregel und eines Ver-/Entfestigungsgesetzes erforderlich macht.

Die skalarwertige Fließbedingung f beschreibt in der Plastomechanik den Zusammenhang der einzelnen Spannungskomponenten S_{ij} bei Beginn des plastischen Fließens. In Abhängigkeit vom aktuellen 2. Piola-Kirchhoff-Spannungszustand \boldsymbol{S} ,

(6.6), läßt sich im allgemeinen Fall die Grenze des elastischen Werkstoffverhaltens als

$$f = F(\mathbf{S}) - q(\alpha) \leq 0 \quad \text{mit} \quad f \begin{cases} < 0 & \text{elastisch} \\ = 0 & \text{plastisch} \end{cases} \quad (3.2)$$

darstellen. Dabei beschreibt die Teilfunktion $F(\mathbf{S})$ die Form des Fließkörpers, die Ver-/Entfestigungsfunktion $q(\alpha)$ dessen Größe in Abhängigkeit von einer internen Variablen α . Für die Erfassung einer kinematischen Ver- oder Entfestigung, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll, sind die Spannungen \mathbf{S} mit dem Anteil der sogenannten 'back-stresses' β zu modifizieren, siehe beispielsweise SIMO & HUGHES [198] und KAHN & HUANG [105].

Zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den plastischen Verzerrungszu- und abnahmen und den aktuellen Spannungen beziehungsweise den Spannungszu- und abnahmen infolge Fließens dient die Fließregel. Diese Regel, häufig auch Fließgesetz genannt, legt somit die Evolution der plastischen Verzerrungen fest.

Die Entwicklung der internen plastischen Variablen α hängt von der Modifikation der Fließfläche während der plastischen Verformung ab, diese Änderung wird durch ein Ver-/Entfestigungsgesetz charakterisiert.

Herleiten und begründen lassen sich die zwei Beziehungen Fließregel und Ver-/Entfestigungsgesetz zum einen aus rein mechanischen Überlegungen, CHEN & HAN [38], VON MISES [157], DRUCKER & PRAGER [60] und andere, oder mittels einer thermodynamischen Betrachtung, was im folgenden geschehen soll.

3.2 Thermodynamische Betrachtungsweise

Die Grundlagen der weiteren Betrachtung der Plastizitätstheorie bilden der erste und zweite Hauptsatz der Thermodynamik, welche in ihren Grundaussagen kurz erläutert werden. Einflüsse aus chemischer, elektrischer, magnetischer oder ähnlicher Belastung werden dabei vernachlässigt, da sie im vorliegenden Fall für die weiteren Herleitungen unerheblich sind. Eine vertiefte Einführung in die Thermodynamik und deren ingenieurmäßige Anwendung ist unter anderem in den Arbeiten von MAUGIN [145], BECKER & BÜRGER [12] und LANGEHEINECKE et al. [133] zu finden.

Der erste Hauptsatz führt auf die Definition der inneren Energie eines Systems: Wird für einen beliebigen Referenzzustand die innere Energie des Systems mit E_0 und im Endzustand mit E_t bezeichnet, so entspricht die zeitlich Änderung dE

der inneren Energie der Summe der Leistung von eingepprägten Oberflächen- und Volumenkräften dW und der zugeführten Wärmemenge dQ

$$dE = E_t - E_0 = dW + dQ \quad . \quad (3.3)$$

Um die Beschreibung von inhomogenen Körpern zu ermöglichen wird in der Thermodynamik in der Regel mit spezifischen, auf die Masseneinheit bezogenen Größen gerechnet. Mit der Einführung eines spezifischen Dichtefeldes $\rho(\mathbf{x})$ und einer spezifischen Energie $e(\mathbf{x})$ ergibt sich für die innere Energie

$$E_t = \int_{\mathcal{B}_t} \rho_t(\mathbf{x})e(\mathbf{x}) d v \quad . \quad (3.4)$$

Mit (3.4) wird über das Volumen v der Momentankonfiguration \mathcal{B}_t integriert, welche über die Koordinaten \mathbf{x} gegeben ist, siehe Abb. 6.1. Wird E_t auf die Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 , \mathbf{X} bezogen, so gilt

$$E_t = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})e(\mathbf{X}, \mathbf{F}, s) d V \quad . \quad (3.5)$$

Dabei ist \mathbf{F} der Deformationsgradient, (6.3), und s die sogenannte spezifische Entropiedichte, die über den zweiten Hauptsatz definiert ist. Sie ist eine additive Zustandsgröße, deren zeitliche Änderung ds der Summe der inneren Energie- und Entropieproduktion ds_{int} und der Entropiezufuhr durch den Wärmeflußvektor über die Oberfläche ds_{ext} entspricht. Die Gesamtentropie eines Körpers läßt sich als

$$S = \int_{\mathcal{B}_t} \rho_t(\mathbf{x})s(\mathbf{x}) d v \quad \text{bzw.} \quad S = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X})s(\mathbf{X}) d V \quad (3.6)$$

schreiben. Mit Einführung der stets positiven Temperaturfunktion Θ , die auch als absolute Temperatur bezeichnet wird, folgt die sogenannte Clausius-Duehm-Ungleichung

$$\Theta dS \geq dQ = dE + dW \geq 0 \quad . \quad (3.7)$$

Für alle irreversiblen Vorgänge ist das Produkt ΘdS größer als die zugeführte Wärmeenergie, was bedeutet, daß mechanische Energie in Wärme umgewandelt wird. Im Falle einer reversiblen Zustandsänderung kann die mechanische Energie vollständig zurückgewonnen werden. Mit Blick auf die Größenverhältnisse der einzelnen Komponenten in (3.7) spricht man auch von dem Prinzip der positiven Entropie, beziehungsweise vom Prinzip der positiven Dissipation.

Mit Hilfe der sogenannten Gibbs'schen Relation

$$d e = \Theta d s + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : d \mathbf{E} \quad (3.8)$$

ist es möglich einen Zusammenhang zwischen der spezifischen Entropie, der zeitlichen Änderung der Greenschen Verzerrungen \mathbf{E} und den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen \mathbf{S} aufzustellen. Letztere sind die auf die Referenzkonfiguration bezogenen Spannungen. Durch Einführung der spezifischen freien Energie $\psi = e - \Theta s$, die auch Helmholtz-Energie genannt wird, läßt sich (3.8) nach einer Legendreschen Transformation in der Gestalt

$$d \psi = - d \Theta s + \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : d \mathbf{E} \quad (3.9)$$

schreiben. Werden nur isotherme Vorgänge betrachtet so gilt $d \Theta = 0$, was bei einer Integration über das Volumen zum Zeitpunkt t_0 den Zusammenhang

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 d \psi d V = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : d \mathbf{E} d V \quad (3.10)$$

liefert. Mit Einführung der spezifischen Formänderungsenergiedichte $W_{0S} = \rho_0 \psi$ und der abkürzenden Schreibweise $d(\cdot) = \frac{d}{dt}(\cdot) = \dot{(\cdot)}$ kann dieser Zusammenhang als

$$\int_{\mathcal{B}_0} \dot{W}_{0S} d V = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} d V \quad (3.11)$$

formuliert werden.

Wird die Formänderungsenergie und die spezifische Helmholtz-Energie aus (3.10) beziehungsweise (3.11) im rechten Teil der Clausius-Duehm-Ungleichung (3.7) berücksichtigt, so ergibt sich für den allgemeinen Fall

$$\int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} d V - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 d \psi d V \geq 0 \quad , \quad (3.12)$$

womit sich über die lokale Form dieser Beziehung die Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{W}_{0S} \geq 0 \quad (3.13)$$

definieren läßt. Diese besagt, daß sich die Dissipationsleistung \mathcal{D} , die niemals negativ werden kann, aus der Differenz der Spannungsleistung und der zeitlichen

Änderung der Formänderungsenergiedichte ergibt. Die Ableitung der Dissipationsungleichung in der Kontinuumsmechanik auf Basis von (3.7) geht auf die Arbeit von COLEMAN & NOLL [42] und TRUESDELL & NOLL [218] zurück, in denen Methoden zur Beschreibung dissipativer Materialien vorgestellt werden.

Für elastoplastische Vorgänge setzt sich die Formänderungsenergiedichte W_{0S} aus der elastischen Verzerrungsenergiefunktion $W^{el}(\mathbf{E}^{el})$ und der plastischen Deformationsenergie $W^{pl}(\alpha)$ zusammen

$$W_{0S} = W^{el}(\mathbf{E}^{el}) + W^{pl}(\alpha) \quad (3.14)$$

und hängt folglich von den elastischen Verzerrungen \mathbf{E}^{el} und der internen plastischen Variablen α ab. Die Dissipationsungleichung (3.13) nimmt somit die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \left(\frac{\partial W^{el}}{\partial \mathbf{E}^{el}} : \dot{\mathbf{E}}^{el} + \frac{\partial W^{pl}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \right) \\ &= \left(\mathbf{S} - \frac{\partial W^{el}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \right) : \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial W^{el}}{\partial \mathbf{E}^{el}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} - \frac{\partial W^{pl}}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \geq 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

an, wobei der additive Split der Verzerrungen $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{el} + \mathbf{E}^{pl}$ berücksichtigt wurde. Folgt man der Standardargumentation der Kontinuumsmechanik, so ist nach COLEMAN & GURTIN [41] der Klammerausdruck identisch zu Null, was auf die konstitutive Beziehung

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W^{el}}{\partial \mathbf{E}^{el}} \quad (3.16)$$

führt. Derselbe Zusammenhang ließe sich auch über das partielle Differential von (3.11) entwickeln. Gleichung (3.15) vereinfacht sich mit (3.16) zu

$$\mathcal{D} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + q \dot{\alpha} \geq 0 \quad \text{wobei} \quad q = -\frac{\partial W^{pl}}{\partial \alpha} \quad . \quad (3.17)$$

Durch die Übertragung des Prinzips vom Maximum der spezifischen Entropie, MAUGIN [145], auf die Plastizitätstheorie ergibt sich das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation, HILL [90], LUBLINER [140]. Dieses besagt, daß sich für jeden gegebenen plastischen Verzerrungszustand $(\mathbf{E}^{pl}, \alpha)$ von allen möglichen Spannungen $(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{q})$, welche die Fließbedingung $f(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{q}) \leq 0$ erfüllen, diejenigen einstellen, bei denen die Dissipation maximal wird.

$$\mathcal{D}(\mathbf{S}, q) = \max\{\tilde{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + \tilde{q} \dot{\alpha}\} \quad \text{für} \quad \{(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{q}) \mid f(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{q}) \leq 0\} \quad (3.18)$$

Die Dissipationsgleichung (3.18) führt auf eine Variationsungleichung

$$(\mathbf{S} - \tilde{\mathbf{S}}) : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + (q - \tilde{q}) \dot{\alpha} \geq 0 \quad , \quad (3.19)$$

aus der sich mit der Nebenbedingung $f \leq 0$ ein Sattelpunktsproblem formulieren läßt. Eine Beschreibung des Optimierungsproblems (3.18) kann über die zugehörige Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{q}, \lambda) = -\mathcal{D} + \lambda f(\tilde{\mathbf{S}}, \tilde{q}) \quad \longrightarrow \quad \text{Minimum} \quad (3.20)$$

erfolgen, wobei die negative Dissipation $-\mathcal{D} \leq 0$ die Zielfunktion bildet. Die Nebenbedingung wird dabei mit dem Lagrange-Parameter λ multipliziert, LUENBERGER [141], LAWO [134]. Aus den partiellen Ableitungen von (3.20) nach den Optimierungsvariablen an der Stelle $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$ und $\tilde{q} = q$ folgen die notwendigen Bedingungen für den gesuchten Sattelpunkt.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{S}} = -\dot{\mathbf{E}}^{pl} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \dot{\alpha} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q} = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = f(\mathbf{S}, q) = 0 \quad (3.23)$$

Die Lösung von Gleichung (3.20) ist gefunden, wenn die sogenannten Kuhn-Tucker-Bedingungen

$$\lambda \geq 0 \quad , \quad f \leq 0 \quad , \quad \lambda f = 0 \quad (3.24)$$

erfüllt sind. Im Rahmen der Plastizitätstheorie stellen diese Optimierungsbedingungen die Be- und Entlastungsbedingungen dar: Wird ein bereits belasteter Körper mit einer weiteren Last beaufschlagt, so können sich die Zustände

$$\begin{aligned} \dot{f} < 0 \quad , \quad \lambda = 0 &\quad \longrightarrow \quad \text{elastische Entlastung} \\ \dot{f} = 0 \quad , \quad \lambda = 0 &\quad \longrightarrow \quad \text{neutrale Spannungsänderung} \\ \dot{f} = 0 \quad , \quad \lambda > 0 &\quad \longrightarrow \quad \text{plastische Belastung} \end{aligned} \quad (3.25)$$

einstellen. Aus den beschriebenen Möglichkeiten der Spannungsänderung läßt sich die Konsistenzbedingung

$$\lambda \dot{f} = 0 \quad (3.26)$$

ableiten. Nach der Umstellung von (3.21) bis (3.23) ergeben sich die Evolutionsgleichungen für die plastischen Größen \mathbf{E}^{pl} und α sowie die Erfüllung der Fließbedingung

$$\dot{\mathbf{E}}^{pl} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \quad , \quad \dot{\alpha} = -\lambda \frac{\partial f}{\partial q} \quad , \quad f(\mathbf{S}, q) = 0 \quad . \quad (3.27)$$

Die beiden ersten Beziehungen bilden dabei die in Abschnitt 3.1 eingeführte Fließregel und das Ver-/Entfestigungsgesetz. Je nach Wahl der Verfestigungsfunktion $q(\alpha)$ in (3.2) können unterschiedliche Arten der Ver- und Entfestigung beschrieben werden: Bei isotropem Verhalten, das im weiteren vorausgesetzt werden soll, kommt es zu einer gleichmäßigen Modifikation der Fließfläche, bei einer ungleichmäßigen liegt anisotropes Ver-/Entfestigungsverhalten vor. Eine kinematische Ver- oder Entfestigung berücksichtigt den Bauschinger-Effekt: das elastische Gebiet bleibt in seiner Größe konstant, die Lage in der Deviatorebene ändert sich allerdings. Die Beschreibung dieses Phänomens ist mit Einführung einer weiteren Spannungsgröße, die in der Regel als 'back-stress' bezeichnet wird, möglich, SIMO & HUGHES [198], KAHN & HUANG [105].

Die Entwicklung der Fließregel auf Basis einer thermodynamischen Betrachtung führt auf eine assoziierte Form, bei der die Evolutionsrichtung des elastischen Bereichs nach außen gerichtet ist und senkrecht auf dem Fließflächenrand steht, die sogenannte Normalenregel. Die Fließfläche f hat somit Potentialcharakter. Nur für den Fall eines stetigen Fließflächenrandes ist die Richtung von $\dot{\mathbf{E}}^{pl}$ durch (3.27)₁ eindeutig definiert. Setzt sich die Fließfläche beispielsweise aus mehreren unstetig gekoppelten Fließbedingungen zusammen ('non-smooth multisurface plasticity'), so ist in den Eckbereichen die Evolutionsrichtung von \mathbf{E}^{pl} uneindeutig, wie Abb. 3.1 illustriert. KOITER [114] schlägt für den Fall, daß sich eine idealplastische Fließfläche aus m stetigen Teilfließflächen $f_i = 0$ mit $i = 1, \dots, m$ zusammensetzt, eine spezielle Betrachtung vor. Ein Spannungszustand \mathbf{S} liegt im elastischen Bereich, solange $f_i < 0$ für alle i gilt, stellt sich bei nur einer Fließbedingung $f_i = 0$ ein, befindet sich \mathbf{S} auf dem entsprechenden Fließflächenrand, sind dagegen zwei Fließbedingungen identisch Null, liegt er im zugehörigen Verschneidungspunkt. Die allgemeine Fließregel kann demzufolge als

$$\dot{\mathbf{E}}^{pl} = \sum_{i=1}^z \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{S}} \quad (3.28)$$

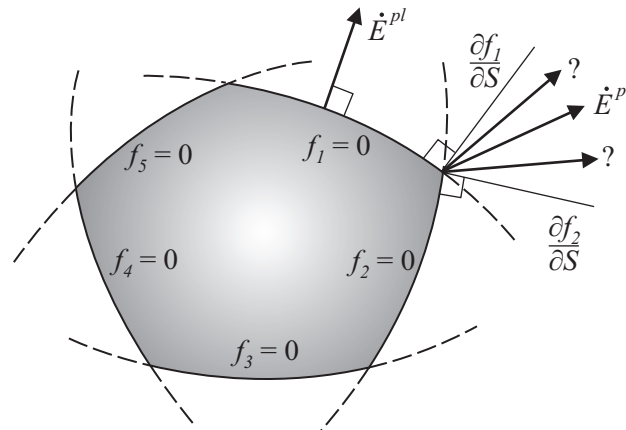


Abbildung 3.1: Uneindeutige Normalenrichtung bei unstetigen Fließflächen

angegeben werden, wobei z die Anzahl der m Teilflächen ist für die $f_i \geq 0$ gilt. Nur für diese ist der zugehörige Konsistenzparameter $\lambda_i > 0$.

Nach dem Postulat von Drucker weisen Werkstoffe ein stabiles Verhalten auf, solange das Produkt aus Spannungs- und plastischem Verzerrungszuwachs nicht negativ wird

$$d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \text{stabiles Material} \quad , \quad (3.29)$$

DRUCKER [59]. Diese Beziehung gilt uneingeschränkt nur für verfestigende Materialien. Eine Entfestigung ist dagegen durch $d\sigma_{ij} < 0$ und $d\varepsilon_{ij} > 0$ charakterisiert, wodurch (3.29) verletzt wird. Wird bei entfestigendem Materialverhalten die Zunahme der Beanspruchung über eine Erhöhung der Spannungen erreicht – was einer Laststeuerung entspricht – so stellt sich ein instabiles Materialverhalten ein, das Material ist allerdings weiterhin stabil gegenüber einer Verzerrungszunahme (Verschiebungssteuerung), HOFSTETTER & MANG [94].

Aus der Variationsungleichung (3.19), in der das Postulat von Drucker in allgemeiner Form impliziert ist, kann mittels einfachen Überlegungen gefolgert werden, daß das von der Fließfläche beschriebene elastische Gebiet konvex sein muß, damit eine stabile Lösung gefunden werden kann, LUBLINER [140]. Dabei ist es unerheblich, ob die Fließfläche aus nur einer oder aus mehreren gekoppelten Fließbedingungen besteht.

Analog zur Elastizitätstheorie läßt sich auch für den Fall, daß sich bei der Belastung plastische Verzerrungen einstellen, ein direkter Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verzerrungszuwächsen aufstellen. Mit Einführung des elasto-plastischen Tangentenmoduls \mathbb{C}^{ep} , der auch als Prandtl-Reuss-Tensor bezeichnet wird, ergibt sich

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C}^{ep} : \dot{\mathbf{E}} \quad . \quad (3.30)$$

Die Herleitung dieses Tangentenmoduls basiert auf dem Elastizitätstensor \mathbb{C} , siehe (2.16), dem Verfestigungsmodul H

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}^{el} \quad , \quad q = H \alpha \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = \frac{\partial^2 W^{el}}{\partial \mathbf{E}^{el2}} \quad , \quad H = \frac{\partial^2 W^{pl}}{\partial \alpha^2} \quad (3.31)$$

sowie der additiven Zerlegung der Verzerrungen in elastische und plastische Anteile. Die zeitliche Änderung der Fließbedingung läßt sich mit Hilfe der Evolutionsgleichungen (3.27)₁, (3.27)₂ und der Konsistenzbedingung (3.26) als

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \\ &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} - \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial f}{\partial q} H \frac{\partial f}{\partial q} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

schreiben. Somit ist es möglich den Konsistenzparameter λ , der das Maß der Aufweitung der Fließfläche angibt, zu ermitteln

$$\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial f}{\partial q} H \frac{\partial f}{\partial q}} \quad . \quad (3.33)$$

Ein erneutes Einsetzen von λ in (3.32) führt unter Ausnutzung der Rechenregeln der Tensoralgebra, siehe dazu DE BOER [49] oder BETTEN [18], auf den elastoplastischen Tangentenmodul

$$\mathbb{C}^{ep} = \mathbb{C} - \frac{\mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \otimes \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \mathbb{C}}{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} : \mathbb{C} : \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} + \frac{\partial f}{\partial q} H \frac{\partial f}{\partial q}} \quad , \quad (3.34)$$

der nach LUBLINER [140] und anderen für alle Materialien, die über eine assoziierte Fließregel verfügen, symmetrisch ist. Der Operator \otimes symbolisiert dabei das dyadische Produkt, welcher für zweistufige Tensoren die Form $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A^{ij} B^{kl} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)$ hat.

3.3 Diskrete Formulierung der Plastizität

3.3.1 Numerische Zeitintegration

Im Rahmen einer numerischen Simulation von Material- und Strukturverhalten werden – anders als bei einer Formulierung auf der Kontinuumsebene – endliche Zeit- und Lastinkremente verwendet. Ist die beliebige Zustandsgröße $x_n = x(t_n)$ und die Evolution $\dot{x}(t)$ zum Zeitpunkt t_n bekannt, so ergibt sich für t_{n+1}

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{x} \, dt \quad . \quad (3.35)$$

Zur numerischen Integration von (3.35) können beispielsweise die verallgemeinerte Trapezregel

$$x_{n+1} = x_n + [(1 - \tau)\dot{x}_n + \tau\dot{x}_{n+1}] \Delta t \quad \text{mit} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (3.36)$$

oder die verallgemeinerte Mittelpunktsregel

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_{n+\tau} \Delta t \quad (3.37)$$

verwendet werden, ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241], BATHE [6]. In (3.37) gilt $\dot{x}_{n+\tau} = \dot{x}(t_n + \tau \Delta t)$. Für $\tau = 0$ und $\tau = 1$ liefern beide Varianten dieselben Lösungen, $\tau = 0$ führt dabei auf das explizite Euler-Vorwärtsverfahren, $\tau = 1$ auf das implizite Euler-Rückwärtsverfahren. Mit $\tau = 1/2$ ergeben sich die implizite Trapez- beziehungsweise Mittelpunktsregel. Im folgenden soll das nach ORTIZ & POPOV [166] und KRIEG & KRIEG [122] unbedingt stabile Euler-Rückwärtsverfahren Verwendung finden. Unbedingt stabil bedeutet in diesem Zusammenhang, daß sich ausgehend vom Zeitpunkt t_n unabhängig von der gewählten Zeitschrittweite Δt immer eine Lösung für den Zeitpunkt t_{n+1} ergibt. Diese ist kleiner oder gleich der wahren Lösung für den entsprechenden Zeitpunkt.

Neben den bisher vorgestellten Integrationsverfahren sind in der Literatur noch eine Vielzahl weiterer Ansätze zu finden, wie beispielsweise die expliziten Mehrschritt-Verfahren, ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241], auf die im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht eingegangen werden soll.

3.3.2 Projektionsalgorithmus

Zu einem Zeitpunkt t_n seien die Spannungen \mathbf{S}_n , die Verzerrungen \mathbf{E}_n und die internen Größen α_n beziehungsweise q_n bekannt. Wird nun der inkrementelle

Verzerrungstensor $\Delta \mathbf{E}$ aufgebracht, sind die Zustandsgrößen für den aktuellen Zeitschritt t_{n+1} zu bestimmen. Bei Verwendung des impliziten Euler-Rückwärtsverfahrens ergibt sich nach SIMO et al. [200] ein Optimierungsproblem welches über die Kuhn-Tucker-Bedingungen (3.24) in diskreter Form

$$\gamma \geq 0 \quad , \quad f(\mathbf{S}_{n+1}, q_{n+1}) \leq 0 \quad , \quad \gamma f(\mathbf{S}_{n+1}, q_{n+1}) = 0 \quad (3.38)$$

definiert ist. Dabei gilt für den plastischen Parameter $\gamma = \lambda \Delta t$. Die Ermittlung der aktuellen Größen erfolgt mit Hilfe eines Projektionsverfahrens, das sich in zwei Schritte aufteilt: In einen elastischen Prädiktorschritt und einen plastischen Korrektorschritt ('elastic-plastic operator split'). Eine wesentliche Grundlage dieses Verfahrens bildet die Arbeit von WILKINS [229], einen umfangreichen Überblick über weitere Entwicklungen sind bei ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241] zu finden. Die folgenden Herleitungen orientieren sich an SIMO & HUGHES [198] und SIMO [194].

Beim elastischem Prädiktorschritt wird von der Annahme ausgegangen, daß das aufgebrachte Verzerrungsinkrement $\Delta \mathbf{E}$ rein elastisch ist und zu den elastischen Versuchs- oder Prädiktorspannungen

$$\mathbf{S}_{trial} = \mathbb{C} : \mathbf{E}_{trial} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_{trial} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl} \quad (3.39)$$

führt, wobei $\mathbf{E}_{n+1} = \mathbf{E}_n + \Delta \mathbf{E}$ gilt. Da für diesen ersten Schritt die plastischen Größen q und α zum Zeitpunkt t_n „eingefroren“ werden, ergibt sich die Fließbedingung

$$f_{trial} = f_{trial}(\mathbf{S}_{trial}, q_n) \quad . \quad (3.40)$$

Aufgrund der Konvexität der Fließfläche folgt

$$f_{trial}(\mathbf{S}_{trial}, q_n) \geq f_{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}, q_{n+1}) \quad , \quad (3.41)$$

somit ist für den Fall $f_{trial} \leq 0$ der neue Spannungszustand $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{trial}$ gefunden, die Annahme eines elastischen Verzerrungszuwachses war folglich korrekt.

Ist andererseits $f_{trial} > 0$, so liegt ein plastischer Belastungsschritt vor, ein plastischer Korrektorschritt wird erforderlich. Nach dem Einsetzen von $\tau = 1$ in (3.36) beziehungsweise (3.37) ergeben sich die zu t_{n+1} gehörenden plastischen Größen aus der diskreten Form der Evolutionsgleichungen (3.27)

$$\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_n^{pl} + \gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad (3.42)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \quad (3.43)$$

Die zugeordneten Spannungen \mathbf{S}_{n+1} lassen sich mit (3.42) und der konstitutiven Beziehung aus den Prädiktorspannungen bestimmen

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1} &= \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^{pl}) \\ &= \mathbf{S}_{trial} - \gamma \mathbb{C} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad (3.44) \end{aligned}$$

Eine allgemeine geometrische Interpretation dieser Rückskalierung des Versuchszustandes auf die Fließfläche ist in Abb. 3.2 dargestellt. Es ist aus der Abbildung zu erkennen, daß die Projektion nach dem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren

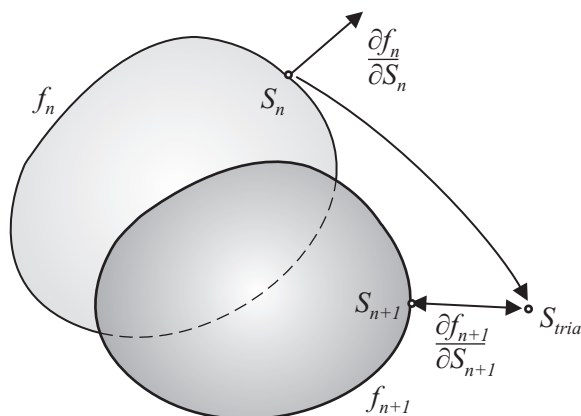


Abbildung 3.2: Projektionsalgorithmus bei impliziter Zeitintegration

unbedingt stabil ist, da die elastische Prädiktorspannung in Richtung des Gradienten $\partial f_{n+1}/\partial \mathbf{S}_{n+1}$ auf die entsprechende Fließfläche f_{n+1} projiziert wird. Im Gegensatz dazu gibt beim expliziten Euler-Vorwärtsverfahren $\partial f_n/\partial \mathbf{S}_n$ die Korrekturrichtung an, was bei größeren Lastschrittweiten die numerische Stabilität beeinträchtigen kann, HOFSTETTER & MANG [94]. Als gängiges explizites Projektionsverfahren sei an dieser Stelle der 'cutting plane algorithm' genannt, ORTIZ & SIMO [167].

Im folgenden soll für den Fall einer irreversiblen Belastung die Ermittlung der aktuellen plastischen Größen zum Zeitpunkt t_{n+1} beschrieben werden. Im Rahmen des verwendeten impliziten Verfahrens erfolgt dies iterativ, wobei sich die

Verwendung einer quadratisch konvergierenden lokalen Newton-Iteration angeboten. Diese macht eine Linearisierung der Entwicklungsgleichungen nötig. Einen weitreichenden Überblick über die Vor- und Nachteile verschiedener Iterationsverfahren, sowie über die Methode der Linearisierung im Rahmen von nichtlinearen Theorien vermitteln die Arbeiten von WRIGGERS [237], [238].

Für die Ermittlung des noch unbekanntem plastischen Parameters γ wird der endgültige Zustand $f_{n+1}(\mathbf{S}_{n+1}, q_{n+1}) = 0$ betrachtet. Zu diesem Zeitpunkt lassen sich die diskreten Zuwächse der plastischen Größen \mathbf{E}^{pl} und α für den Zeitschritt von t_n zu t_{n+1} über die Evolutionsgleichungen (3.42) und (3.43) aus

$$\Delta \mathbf{E}^{pl} = \mathbf{E}_{n+1}^{pl} - \mathbf{E}_n^{pl} = \gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad (3.45)$$

$$\Delta \alpha = \alpha_{n+1} - \alpha_n = -\gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \quad (3.46)$$

bestimmen. Aus diesen Beziehungen und der Fließbedingung folgen die Residuen für den k -ten Schritt der Newton-Iteration:

$$R_f^{(k)} = f_{n+1}^{(k)}(\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}, q_{n+1}^{(k)}) \quad (3.47)$$

$$\mathbf{R}_E^{(k)} = -\Delta \mathbf{E}^{pl (k)} + \gamma^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} = -\mathbb{C}^{-1} : \Delta \mathbf{S}^{(k)} + \gamma^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} \quad (3.48)$$

$$R_\alpha^{(k)} = \Delta \alpha^{(k)} + \gamma^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)}} = -H^{-1} \Delta q^{(k)} + \gamma^{(k)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)}} \quad (3.49)$$

In (3.49) wurde der Zusammenhang

$$\Delta \alpha = -H^{-1} \Delta q \quad , \quad (3.50)$$

der auf (3.31)₂ basiert, ausgenutzt. In (3.48) fand der Zuwachs der plastischen Verzerrungen \mathbf{E}^{pl}

$$\Delta \mathbf{E}^{pl} = \mathbb{C}^{-1} : (\mathbf{S}_{trial} - \mathbf{S}_{n+1}) = \mathbb{C}^{-1} : \Delta \mathbf{S} \quad , \quad (3.51)$$

der aus der konstitutiven Beziehung

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_{n+1}^{pl}) = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{trial} - \Delta \mathbf{E}^{pl}) \quad (3.52)$$

resultiert, Berücksichtigung. Mit Hilfe einer Linearisierung der Taylor-Reihenentwicklung der Residuen (3.47) bis (3.49) nach den iterativ zu bestimmenden Größen \mathbf{S}_{n+1} , q_{n+1} und γ

$$R_f^{(k+1)} = R_f^{(k)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} : \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)}} \Delta q^{(k+1)} = 0 \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_E^{(k+1)} = \mathbf{R}_E^{(k)} + & \left[\mathbb{C}^{-1} + \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)2}} \right] : \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} \\ & + \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} \partial q_{n+1}^{(k)}} \Delta q^{(k+1)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} \Delta \gamma^{(k+1)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} R_\alpha^{(k+1)} = R_\alpha^{(k)} + \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)} \partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} : \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} \\ + \left[H^{-1} + \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)2}} \right] \Delta q^{(k+1)} + \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)}} \Delta \gamma^{(k+1)} = 0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

läßt sich eine Beziehung zu den Werten des nächsten Iterationsschrittes herstellen. Durch die Einführung von

$$\mathbb{A}^{(k)-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}^{-1} + \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)2}} & \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} \partial q_{n+1}^{(k)}} \\ \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)} \partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} & H^{-1} + \gamma^{(k)} \frac{\partial^2 f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)2}} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

können (3.54) und (3.55) in Matrixschreibweise zusammengefaßt werden

$$\bar{\mathbf{R}}^{(k)} + \mathbb{A}^{(k)-1} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} \\ \Delta q^{(k+1)} \end{bmatrix} + \Delta \gamma^{(k+1)} \bar{\mathbf{N}}^{(k)} = \mathbf{0} \quad , \quad (3.57)$$

wobei die Abkürzungen

$$\bar{\mathbf{N}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k)}} & \frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial q_{n+1}^{(k)}} \end{bmatrix}^T \quad , \quad \bar{\mathbf{R}}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_E^{(k)} & R_\alpha^{(k)} \end{bmatrix}^T \quad (3.58)$$

gelten. Die Auflösung von (3.57) nach den Unbekannten $\Delta \mathbf{S}^{(k+1)}$ und $\Delta q^{(k+1)}$ sowie ein anschließendes Einsetzen in das Residuum (3.53) ermöglicht die Bestimmung des plastischen Parameters

$$\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + \Delta\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + \frac{R_f^{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^{(k)T} \mathbb{A}^{(k)} \bar{\mathbf{R}}^{(k)}}{\bar{\mathbf{N}}^{(k)T} \mathbb{A}^{(k)} \bar{\mathbf{N}}^{(k)}} \quad (3.59)$$

für den Iterationsschritt $k+1$. Mit $\Delta\gamma^{(k+1)}$ können aus (3.57) die Zuwächse $\Delta\mathbf{S}^{(k+1)}$ und $\Delta\mathbf{q}^{(k+1)}$ berechnet werden, über die dann mit (3.51) $\Delta\mathbf{E}^{pl(k+1)}$ und mit (3.50) $\Delta\alpha^{(k+1)}$ folgen. Die Iteration ist abgeschlossen, sobald die Residuen (3.47)-(3.49) kleiner als ein gewünschter Toleranzwert sind. Das anteilige Verhältnis von elastischen und plastischen Verzerrungen sowie die Spannungen und die plastischen Größen für den Zeitschritt t_{n+1} ist somit bestimmt, die Rückprojektion ist abgeschlossen. In Tafel 3.1 ist eine Zusammenfassung des Projektionsalgorithmus zu finden.

Erfolgt die Rückskalierung nicht auf eine einteilige Fließfläche f , sondern auf eine, die aus mehreren unstetig zusammengesetzten Teilflächen f_i besteht, so ist ein modifiziertes Verfahren zur Ermittlung der zugehörigen diskreten Konsistenzparameter γ_i anzuwenden. Anders als bei einer einteiligen Fließfläche, die die gesamte Projektion über aktiv ist, kann sich bei gekoppelten Flächen die Anzahl der beteiligten f_i im Laufe der Iteration ändern. Desweiteren ist bei einem ver- und entfestigenden Materialverhalten die Lage der Verschneidungspunkte der einzelnen Fließflächenteile am Ende der Projektion nicht von vornherein bekannt.

SIMO et al. [200] schlagen einen unbedingt stabilen Algorithmus vor, bei dem die Anzahl der aktiv beteiligten Flächen am Ende des Fließprozesses geringer oder gleich der Menge der im Prädiktorschritt verletzten Fließbedingungen ist. Stellt sich für eine Fließfläche f_i ein negativer Parameter γ_i ein, so wird diese Teilfläche deaktiviert. Eine detaillierte Beschreibung des algorithmischen Vorgehens ist bei dessen Anwendung in Abschnitt 4.2.5 zu finden. Dem Projektionsverfahren von SIMO et al. steht das von PRAMONO & WILLAM [173] formulierte gegenüber. Hier erfolgt die Rückskalierung zuerst auf diejenige aktive Fläche mit dem größten Einfluß auf den Versuchszustand. Sind nach Ende der Projektion noch weitere Flächen aktiv, so werden diese bei einer erneut vom Prädiktor ausgehenden Iteration berücksichtigt. Der Vorteil dieses sehr rechenintensiven Verfahrens liegt darin, daß auch anfänglich inaktive Bereiche der Fließfläche im weiteren Verlauf beteiligt werden können.

Um die Bedeutung von aktiven und inaktiven Fließflächen aufzuzeigen sind in Abb. 3.3 a) und b) zwei unterschiedliche Prädiktorzustände \mathbf{S}_{trial} dargestellt. Für beide Zustände gilt $f_{1trial} > 0$ und $f_{2trial} > 0$, womit anfänglich sowohl die Fließfläche f_1 als auch die Fläche f_2 aktiv an der Rückprojektion beteiligt sind. Für den Fall a) liegt der endgültige Spannungszustand \mathbf{S}_{n+1} auf f_{1n+1} , aber innerhalb des von f_{2n} begrenzten Gebietes. Somit ist nur noch erstere aktiv, es

Versuchsspannungen: $\mathbf{S}_{trial} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl})$

$$f_{trial}(\mathbf{S}_{trial}, q_n) \begin{cases} \leq 0 & \longrightarrow \text{elast. Zustand} \\ & [\cdot]_{n+1} = [\cdot]_{trial} \\ > 0 & \longrightarrow \text{plast. Zustand} \end{cases}$$

Startwerte Iteration: $\gamma^{(k)} = 0, \quad \alpha_{n+1}^{(k)} = \alpha_n, \quad q_{n+1}^{(k)} = q_n$

- Bestimmung des plastischen Parameters $\gamma^{(k+1)}$

$$\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + \frac{R_f^{(k)} - \bar{\mathbf{N}}^{(k)T} \mathbb{A}^{(k)} \bar{\mathbf{R}}^{(k)}}{\bar{\mathbf{N}}^{(k)T} \mathbb{A}^{(k)} \bar{\mathbf{N}}^{(k)}}$$

mit den Größen $\bar{\mathbf{N}}^{(k)}, \bar{\mathbf{R}}^{(k)}, \mathbb{A}^{(k)}$ aus (3.58) und (3.56)

- Ermittlung der Zuwächse $\Delta \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)}$ und $\Delta q_{n+1}^{(k+1)}$ aus

$$\bar{\mathbf{R}}^{(k)} + \mathbb{A}^{(k)-1} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} \\ \Delta q^{(k+1)} \end{bmatrix} + \Delta \gamma^{(k+1)} \bar{\mathbf{N}}^{(k)} = \mathbf{0}$$

- Überprüfung der Residuen

$$\left. \begin{aligned} R_f^{(k+1)} &= f_{n+1}^{(k+1)}(\mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)}, q_{n+1}^{(k+1)}) \\ R_E^{(k+1)} &= -\mathbb{C}^{-1} : \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} + \gamma^{(k+1)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k+1)}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)}} \\ R_\alpha^{(k+1)} &= -H^{-1} \Delta q^{(k+1)} + \gamma^{(k+1)} \frac{\partial f_{n+1}^{(k+1)}}{\partial q_{n+1}^{(k+1)}} \end{aligned} \right\} \leq \text{Tol.} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Ende}}$$

- Gehe zu 1. mit $(k) = (k + 1)$

Nachlauf: $\gamma = \gamma^{(k+1)} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n - H^{-1} \Delta q^{(k+1)}$
 $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \Delta \mathbf{S}^{(k+1)} \quad \mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_n^{pl} + \mathbb{C}^{-1} : \Delta \mathbf{S}^{(k+1)}$

Tafel 3.1: Prädiktor-Korrektor Verfahren in allgemeiner Form

ergibt sich $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 = 0$. Da für die angenommene Situation von einem entkoppelten Verfestigungsverhalten der Fließbedingungen ausgegangen werden soll, ändert f_2 ihre Lagen nicht, es gilt $f_{2n+1} = f_{2n}$. Anders verhält es sich im Fall b), in dem der neue Spannungszustand im Verschneidungspunkt von f_{1n+1} und f_{2n+1} liegt und sich somit die Konsistenzparameter $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$

einstellen. Beide Flächen sind hier aktiv und weiten sich auf.

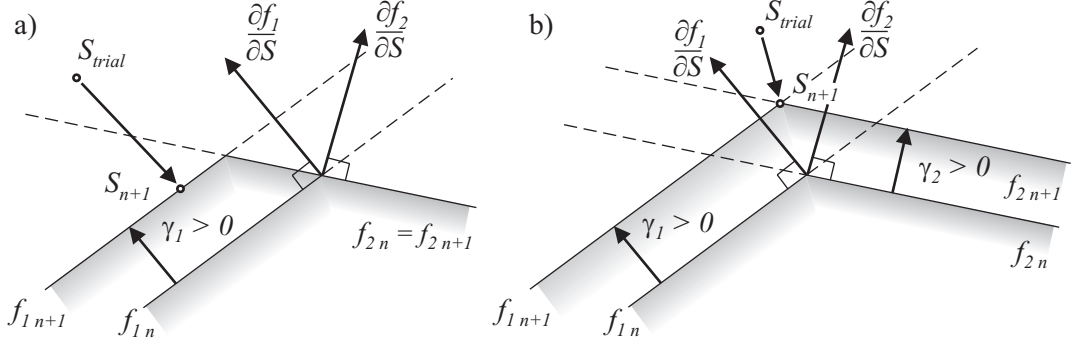


Abbildung 3.3: Rückprojektion auf aktive Teile der gekoppelten Fließflächen gemäß SIMO et al. [200]

3.3.3 Konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul

Nachdem im Rahmen des Projektionsalgorithmus der Spannungs- und Verzerrungszustand zum Zeitpunkt t_{n+1} bestimmt wurde, ist es möglich den konsistenten elastoplastischen Tangentenmodul $\mathbb{C}_{n+1}^t = d\mathbf{S}_{n+1}/d\mathbf{E}_{n+1}$ zu ermitteln. Dieser Tangentenmodul wird für die Berechnung der inkrementellen Verschiebungen des nächstfolgenden Lastschrittes benötigt. Bei einer Verwendung des kontinuierlichen Tangentenmoduls $\mathbb{C}^{ep} = d\mathbf{S}/d\mathbf{E}$, (3.34), anstelle von \mathbb{C}_{n+1}^t geht die quadratische Konvergenz der globalen Newton-Raphson-Iteration verloren, es werden deutlich mehr Iterationsschritte notwendig, wie Studien von SIMO & HUGHES [198] zeigen. Im Gegensatz zu \mathbb{C}^{ep} wird der konsistente Tangentenmodul nicht aus den konstitutiven Beziehungen der Kontinuumsmechanik gefolgert, sondern hängt von den zur Spannungsermittlung verwendeten Algorithmen ab.

Im weiteren soll der zu dem im letzten Abschnitt vorgestellte Projektionsalgorithmus gehörende Tangentenmodul in allgemeiner Form hergeleitet werden, siehe dazu SIMO et al. [201],[194] oder HOFSTETTER & MANG [94]. Hierfür sind die totalen Ableitungen $d\mathbf{E}_{n+1}^{pl}$, $d\mathbf{S}_{n+1}$, $d\alpha_{n+1}$ und df_{n+1} der auskonvergierten Lösungen erforderlich, die sich aus der Fließregel (3.42), der konstitutiven Beziehung (3.44), dem Verfestigungsgesetz (3.43) und der Fließbedingung ergeben:

$$d\mathbf{E}_n^{pl} = d\gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} + \gamma \left[\frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} : d\mathbf{S}_{n+1} + \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} dq_{n+1} \right] \quad (3.60)$$

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \mathbb{C} : (d\mathbf{E}_n + d\mathbf{E}_n^{pl}) \quad (3.61)$$

$$d\alpha_{n+1} = -d\gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} - \gamma \left[\frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : d\mathbf{S}_{n+1} + \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1}^2} dq_{n+1} \right] \quad (3.62)$$

$$df_{n+1} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : d\mathbf{S}_{n+1} + \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} dq_{n+1} \quad (3.63)$$

Wird (3.60) in (3.61) eingesetzt und nach $d\mathbf{S}_{n+1}$ aufgelöst, so folgt

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \Xi_{n+1} : \left[d\mathbf{E}_{n+1} - d\gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} - \gamma \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} dq_{n+1} \right], \quad (3.64)$$

wobei die abkürzende Schreibweise

$$\Xi_{n+1} = \left[\mathbb{C}^{-1} + \gamma \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} \right]^{-1} \quad (3.65)$$

gilt. Nach der Substitution von $d\gamma$ und γdq_{n+1} in (3.64) durch Ausdrücke die von $d\mathbf{E}_{n+1}$ abhängen, kann der Tangentenmodul \mathbb{C}_{n+1}^t angegeben werden. Im folgenden sollen diese Ausdrücke bestimmt werden.

Eine Berücksichtigung von (3.64) in der totalen Ableitung (3.63) der Fließbedingung führt wegen $df_{n+1} = 0$ auf den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \Xi_{n+1} : d\mathbf{E}_n = d\gamma \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \Xi_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\ + \gamma \left[\frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \Xi_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \right] dq_{n+1} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Mit dem inkrementellen Ver- und Entfestigungsgesetz (3.50) läßt sich (3.62) zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \Xi_{n+1} : d\mathbf{E}_n = \\ d\gamma \left[\frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \Xi_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \right] \\ + \gamma \left[\frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \Xi_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1}^2} - \frac{1}{\gamma^2} H^{-1} \right] dq_{n+1} \end{aligned} \quad (3.67)$$

umformen, wobei für $d\mathbf{S}_{n+1}$ (3.64) angesetzt wurde. Das Auflösen von (3.66) und (3.67) nach den gesuchten Größen $d\gamma$ und γdq_{n+1} ergibt die Matrizenform

$$\begin{bmatrix} d\gamma \\ \gamma dq_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{n+1}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : d\mathbf{E}_{n+1} \\ \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : d\mathbf{E}_{n+1} \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Die Komponenten z_{ij} der Matrix \mathbf{Z}_{n+1} lauten dabei

$$\begin{aligned} z_{11} &= \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\ z_{12} &= \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \\ z_{21} &= \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}} \\ z_{22} &= \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1}^2} - \frac{1}{\gamma^2} H^{-1}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Aufgrund der Vertauschbarkeit der Ableitungsreihenfolge bei assoziierter Plastizität und der Symmetrie von \mathfrak{E}_{n+1} sind die Koeffizienten z_{12} und z_{21} identisch. Wird abschließend (3.68) in die Beziehung (3.64) eingesetzt, kann der konsistente elastoplastischen Tangentenmodul mit der abkürzenden Schreibweise

$$\bar{\mathbf{N}}_{1n+1} = \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{N}}_{2n+1} = \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} \quad (3.70)$$

in der Form

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \frac{d\mathbf{S}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}} = \mathfrak{E}_{n+1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 z_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_{in+1} \otimes \bar{\mathbf{N}}_{jn+1} \quad (3.71)$$

dargestellt werden. Die Unterschiede von \mathbb{C}_{n+1}^t zum kontinuierlichen Tangentenmodul \mathbb{C}^{ep} aus (3.33) sind offensichtlich. Mit der Annahme von infinitesimal kleinen Lastschritten Δt , was $\gamma \rightarrow 0$ und $\mathfrak{E}_{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ bedeutet, können beide Moduli ineinander überführt werden: Wird in (3.66) und (3.67) $\gamma = 0$ und $\mathfrak{E}_{n+1} = \mathbb{C}$ gesetzt, so ist die direkte Bestimmung von $d\gamma$ möglich. Aus (3.64) folgt mit diesem Wert und $\gamma = 0$ sowie $\mathfrak{E}_{n+1} = \mathbb{C}$ der kontinuierliche elastoplastische Tangentenmodul \mathbb{C}^{ep} .

Eine knappe Zusammenstellung der für die Berechnung von \mathbb{C}_{n+1}^t wesentlichen Beziehungen ist in Tafel 3.2 gegeben.

allgemeiner konsistenter Tangentenmodul

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \frac{d \mathbf{S}_{n+1}}{d \mathbf{E}_{n+1}} = \mathfrak{E}_{n+1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 z_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_{i n+1} \otimes \bar{\mathbf{N}}_{j n+1}$$

mit algorithmischen Modul $\mathfrak{E}_{n+1} = \left[\mathbb{C}^{-1} + \gamma \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} \right]^{-1}$ und

$$\bar{\mathbf{N}}_{1 n+1} = \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}}, \quad \bar{\mathbf{N}}_{2 n+1} = \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}}$$

z_{ij}^{-1} bilden die Komponenten der invertierten Koeffizientenmatrix \mathbf{Z}_{n+1} mit

$$z_{11} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}}$$

$$z_{12} = \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}}$$

$$z_{21} = \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial f_{n+1}}{\partial q_{n+1}}$$

$$z_{22} = \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathfrak{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{n+1}} - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 f_{n+1}}{\partial q_{n+1}^2} - \frac{1}{\gamma^2} \mathbb{H}^{-1}$$

\mathbb{H} folgt aus Zusammenhang (3.50)

Tafel 3.2: konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul

Die bisher angegebenen Formulierungen stellen den Projektionsalgorithmus und den zugehörigen konsistenten elastoplastischen Tangentenmodul nach dem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren in allgemeiner Form dar. Je nach verwendeter Fließbedingung und gewählter Verfestigungsfunktion ist es möglich durch geschickte Umformungen den Rechenaufwand und damit auch die notwendige Rechenzeit bei numerischer Anwendung zu optimieren, SIMO & TAYLOR [204], HOFSTETTER et al. [95] und andere.

4 Inelastisches Materialmodell für Beton

Im Rahmen dieses Abschnittes soll ein dreidimensionales Materialmodell zur Beschreibung des Verhaltens von Beton entwickelt werden. An eine allgemeine Vorstellung des inelastischen Modells und einen Vergleich mit anderen in der Literatur zu findenden Formulierungen schließt sich die mathematische Umsetzung an. Diese erfolgt getrennt für die unterschiedlichen charakteristischen Versagensbereichen und beruht auf den im letzten Abschnitt vorgestellten Algorithmen der Plastizitätstheorie. Den Abschluß bildet eine Darstellung des Modellverhaltens für verschiedene ein- und mehraxiale Belastungssituationen.

4.1 Allgemeine Vorstellung des Modells

Die Grundidee des hier vorgestellten inelastischen Materialmodells zur numerischen Erfassung des dreidimensionalen Betonverhaltens im Vor- und Nachbruchbereich liegt in der Kopplung mehrerer einfacher Fließbedingungen bei Verwendung einer möglichst geringen Zahl von Modellparametern.

Die große Anzahl der in der Literatur zu findenden Formulierungen, die auf der Fließtheorie beruhen, siehe Abschnitt 2.2.2, läßt sich anhand ihrer grundlegenden Merkmale in verschiedene Gruppen unterteilen. Die vier Gruppen aus denen die Ansätze des hier vorgestellten Modells im wesentlichen entstammen seien im folgenden mit Typ A bis Typ D bezeichnet. Die Typen A und B eignen sich in erster Linie für eine zweidimensionale Beschreibung des Materialverhaltens, bei den Typen C und D handelt es sich um dreidimensionale Modelle.

Die Formulierungen vom Typ A basieren auf der Kopplung eines Rankine Hauptspannungs-Kriteriums f_1 für den Zug/Zug- und den Zug/Druck-Bereich sowie einer Drucker-Prager-Fließfläche f_2 , siehe Abb. 4.1. Diese hängt von der

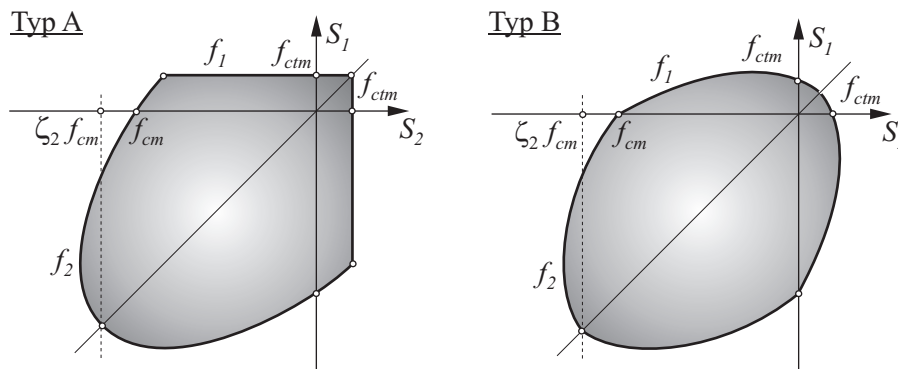


Abbildung 4.1: Werkstoffmodelle zur zweidimensionalen Beschreibung

ersten und zweiten Spannungsinvarianten $I_1 = S_{ii}$ beziehungsweise $J_2 = S_{ij}S_{ij}/2$ ab und kommt in erster Linie bei reiner Druckbeanspruchung zu tragen. Das Ver- und Entfestigungsverhalten beider Fließbedingungen ist bruchmechanisch motiviert und wird somit über die Bruchenergien G_f und G_c für Zug- und Druckversagen charakterisiert. Die maximal aufnehmbaren Spannungen entsprechen den aus einaxialen Versuchen gewonnenen Werten f_{ctm} und f_{cm} . Zusätzlich zu diesen Materialparametern ist für die Skalierung der Drucker-Prager-Fläche ein weiterer geometrischer Parameter ζ_2 erforderlich.

Eine detaillierte Beschreibung dieser Art von elastoplastischen Modellen ist unter anderem in den Arbeiten von FEENSTRA [71], FEENSTRA & DE BORST [73], MESCHKE et al. [153], [155] und THOMÉE et al. [215] zu finden.

Auch die Ansätze des Typs B beruhen auf zwei nichtglatt gekoppelten Fließflächen f_1 und f_2 , die in Abhängigkeit von zwei internen Formbeiwerten das Drucker-Prager-Kriterium als Spezialfall enthalten. Neben diesen Beiwerten sind die eindimensionalen Festigkeiten f_{ctm} und f_{cm} sowie der geometrische Parameter ζ_2 für die Beschreibung der Versagensfläche notwendig. Die von der Bruchenergie unabhängige Ver- und Entfestigung beider Teilflächen ist gekoppelt und isotrop. Aufgrund der Verwendung einer einzigen Fließflächenform ist für diese auf CHEN & CHEN [35] zurückgehende Formulierung die algorithmische Beschreibung deutlich einfacher.

Ein weit verbreitetes Kriterium zur Beschreibung von dreidimensionalem Betonversagen stellt die Gruppe der 'cap-models' dar, die hier als Typ C eingeführt wird. Diese in Invarianten formulierten Modelle setzen sich in der Regel aus drei unstetig gekoppelten Fließflächen zusammen: einer elliptischen Kappe f_3 für den reinen Druckzustand, einer ebenfalls elliptischen Zwischenfläche f_2 und einem sogenannten 'tension cut-off' f_1 , der den Zugbereich begrenzt. Insgesamt werden mindestens sieben Parameter für die Gestalt der zusammengesetzten Fläche und

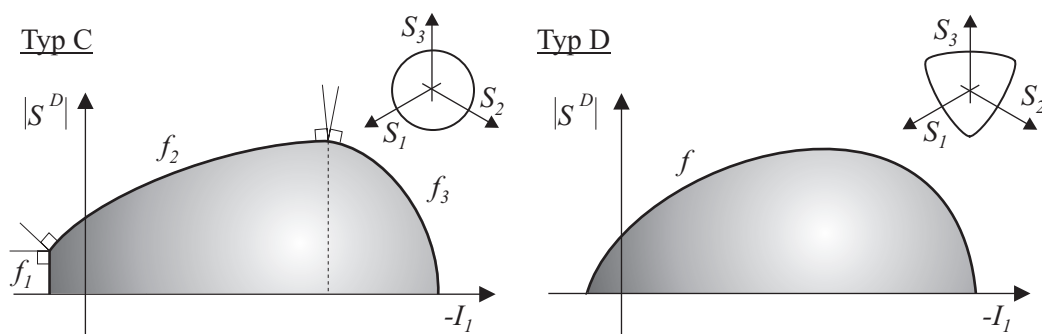


Abbildung 4.2: Dreidimensionale Werkstoffmodelle vom Typ C und D

eine Materialkonstante für die Ver- und Entfestigung benötigt. In Abb. 4.2 ist dieses Kriterium in Invariantendarstellung und im Hauptspannungsraum skizziert, $|\mathbf{S}^D|$ ist dabei der Betrag der deviatorischen Spannungsanteile.

Modelle des Typs C, die ursprünglich zur Beschreibung von Granulaten verwendet wurden, gehen auf die Arbeit von DIMAGGIO & SANDLER [53] zurück. Als weitere wesentliche Veröffentlichungen seien SANDLER & RUBIN [184], SIMO et al. [199] sowie HOFSTETTER et al. [95] genannt.

Der vierte und letzte Typ, Typ D, beinhaltet die im dreidimensionalen Spannungsraum kontinuierlich formulierten Fließflächen f . Da in diese Modelle zusätzlich zu I_1 und J_2 auch die dritte Spannungsinvariante I_3 eingeht, ist es mit Hilfe des Lode-Winkels möglich die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene nicht kreisförmige Deviatorfläche abzubilden. Basierend auf den Ansätzen von LADE [131] sind neuere Entwicklungen beispielsweise bei EHLERS [65], KRENK [121] oder KRÄTZIG & PÖLLING [124] zu finden. Auch das häufig verwendete 'extended Leon model' (*ELM*), ETSE & WILLAM [67], ist dieser Gruppe von Fließflächen zuzuordnen. Für die Anpassung der geschlossenen Fläche auf die in Versuchen ermittelte Versagenskurve von Beton sind wie beim Typ C mindestens sieben Modell- und ein Verfestigungsparameter erforderlich.

Ausgehend von diesen vier unterschiedlichen Gruppen numerischer Modelle wird nachfolgend eine Formulierung vorgestellt, bei welcher der Versuch unternommen wird die Vorteile der einzelnen Typen, wie beispielsweise eine geringe Zahl von Parametern oder die Verwendung bruchmechanischer Ansätze, zu vereinen und dabei die Nachteile zu minimieren. Nachteilig sind unter anderem eine unbefriedigende Approximation des realen Betonverhaltens oder die Notwendigkeit aufwendiger mathematischer Algorithmen. Angestrebt wird ein Modell, das sich nach Möglichkeit aus einer Kopplung grundlegender Fließflächen ergibt. Die dabei erforderlichen Parameter und Formbeiwerte sollen sich weitestgehend aus leicht bestimmbareren ingenieurmäßigen Materialkonstanten des eindimensionalen Versagensfalles ableiten. Für das objektiv formulierte Ver- und Entfestigungsverhalten wird eine verschmierte Betrachtungsweise, die auf bruchmechanischen Ansätzen beruht, verwendet. Erreicht wird dies – in Anlehnung an die Modelle vom Typ B – über eine nichtglatte Kopplung zweier Drucker-Prager-Fließflächen f_1 und f_2 für den reinen Zug- und den Zug/Druck-Bereich. Als maximal aufnehmbare Spannungen werden die eindimensionalen Werte f_{ctm} und f_{cm} angesetzt. Neben dem geometrischen Parameter ζ_2 ist ein weiterer Parameter ζ_1 erforderlich, um die zweidimensionalen Versagenskurven von KUPFER et al. [128], Abb. 2.6, in guter Näherung beschreiben zu können. Für die Simulation des Betonverhaltens im Falle von dreidimensionaler Druckbeanspruchung erscheint eine kugelförmige Fließfläche f_4 , die sich als Sonderfall der elliptischen Kappe der Typ C-Modelle

einstellt, angebracht. An diese schmiegt sich, mit Blick auf die stetig formulierten Fließflächen vom Typ D, der Drucker-Prager-Kegel f_2 tangential an. Im Gegensatz zu den 'cap-models' dient als Begrenzung des Zugbereiches kein abrupter 'tension cut-off', sondern erfolgt kontinuierlich in Abhängigkeit vom Betrag der deviatorischen Spannungen mit dem Kegel f_1 . Wie die Invariantendarstellung in Abb. 4.3 zeigt, liegt darin eine weitere Ähnlichkeit zu den Formulierungen vom

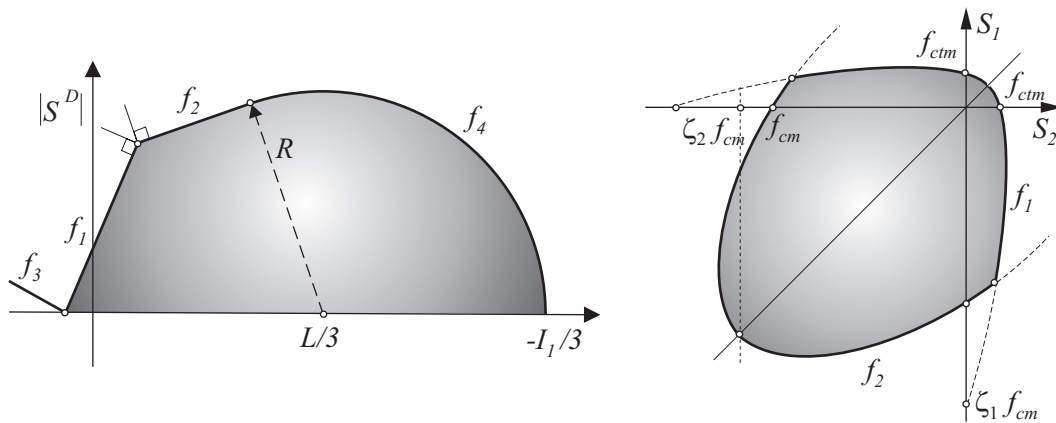


Abbildung 4.3: Zusammengesetzte dreidimensionale Fließfläche für Beton

Typ D. Die numerischen Probleme, die sich aus einer Unstetigkeit der Ableitungen des Drucker-Prager-Kegels f_1 bei nahezu hydrostatischen Zugbeanspruchungen ergeben, lassen sich auf unterschiedliche Weisen eliminieren. Im vorliegenden Fall wird ähnlich wie in der Arbeit von PONTES et al. [172] und MENRATH [150] eine weitere Drucker-Prager-Fließfläche f_3 eingeführt, ein sogenannter 'inverted cone', der hydrostatische Zugzustände auf die Kegelspitze von f_1 projiziert.

Die Erfassung des für Zug und Druck unterschiedlichen Ver- und Entfestigungsverhaltens geschieht analog zum Typ A in Abhängigkeit von den Bruchenergien G_f und G_c – die Einführung einer charakteristischen Elementlänge, Abschnitt 2.1, ermöglicht dabei eine objektive und netzunabhängige Beschreibung.

Das im weiteren eingeführte dreidimensionale Modell für das Vor- und Nachbruchverhalten von Beton basiert somit auf insgesamt vier teilweise nichtglatt zusammengesetzten Fließbedingungen, die sich von zwei unterschiedlichen Kriterien ableiten. Als Parameter der konvexen Versagensfläche sind neben den eindimensionalen Größen f_{ctm} , f_{cm} , G_f und G_c nur noch die zwei geometrische Konstanten ζ_1 und ζ_2 erforderlich.

4.2 Formulierung des Zug- und Zug/Druck-Verhaltens

4.2.1 Fließbedingungen nach Drucker-Prager

Wie bereits diskutiert soll die Beschreibung des Zug- und des gemischten Zug/Druck-Bereiches mit Hilfe dreier gekoppelter Drucker-Prager-Fließflächen erfolgen. Während die ersten beiden Fließbedingungen f_1 und f_2 das Materialverhalten der entsprechenden Bereiche widerspiegeln, dient die dritte Bedingung f_3 ausschließlich der numerischen Stabilität im Falle eines annähernd hydrostatischen Zugzustandes. Die Drucker-Prager-Fließbedingung stellt eine Erweiterung des klassischen von Mises-Fließkriteriums, VON MISES [157], um einen hydrostatischen Spannungsterm dar. Jener hydrostatische Anteil kann nach CHEN [37] als Coulombsche Reibung interpretiert werden, die sich in Abhängigkeit vom aktuellen hydrostatischen Druck unterschiedlich stark einstellt. Folglich ist diese Fließbedingung, deren Schnitt in der Deviatorebene kreisförmig und daher algorithmisch sehr gut zu beschreiben ist, als Versagenskriterium für alle Materialien mit ausgeprägter innerer Reibung wie beispielsweise Granulate, Fels aber auch Beton geeignet. Als grundlegende Veröffentlichungen seien die Arbeiten von DRUCKER [58] sowie DRUCKER & PRAGER [60] genannt.

In allgemeiner Form lassen sich die drei Drucker-Prager-Fließbedingung f_i als

$$f_i = |\mathbf{S}^D| + \xi_i I_1 - q_i \leq 0 \quad \text{mit} \quad |\mathbf{S}^D| = \sqrt{\mathbf{S}^D : \mathbf{S}^D} = \sqrt{2 J_2} \quad (4.1)$$

darstellen, wobei $i = 1, 2, 3$ gilt und J_2 die zweite Spannungsinvariante bildet. In (4.1) ist ξ_i ein skalarer Faktor, der den Öffnungswinkel der kegelförmigen Fließfläche definiert, und q_i die bereits in (3.2) eingeführte Ver- und Entfestigungsfunktion, welche im vorliegenden Fall skalarwertig ist. Die erste Spannungsinvariante

$$I_1 = \mathbf{S} : \mathbf{1} = \text{tr } \mathbf{S} \quad (4.2)$$

ergibt sich aus den Gesamtspannungen \mathbf{S} und dem zweistufigen Einheitstensor $\mathbf{1}$. Mit letzterem und dem vierstufigen Einheitstensor \mathbb{I} ist es möglich einen Projektionstensor \mathbb{P} zu bilden, der \mathbf{S} additiv in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil aufspaltet

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}^H + \mathbf{S}^D = \mathbf{S}^H + \mathbb{P} : \mathbf{S} \\ &= \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : \mathbf{S} + \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right] : \mathbf{S} \quad . \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für die weiteren Herleitungen sei an dieser Stelle auf den Zusammenhang $\mathbb{P} : \mathbb{P} = \mathbb{P}$ hingewiesen; bei den verwendeten tensorielle Größen wird unter Ausnutzung der Symmetrie eine vereinfachte matrizenartige Schreibweise gewählt. Der zweistufige Spannungstensor läßt sich beispielsweise als $\mathbf{S} = [S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{12} \ S_{13} \ S_{23}]^T$ darstellen, vierstufige Tensoren haben dann die Gestalt einer quadratischen Matrix.

4.2.2 Approximation der Ver- und Entfestigung

Zur numerischen Umsetzung der in Abschnitt 2.1 beschriebenen Reiß- und Versagenscharakteristik von Beton im Rahmen der Plastizitätstheorie ist eine entsprechende Ver- und Entfestigungsfunktion zu formulieren. Dies erfolgt aufgrund des sehr unterschiedlichen Zug- und Druckverhaltens getrennt für beide Fälle. Da im Rahmen einer verschmierten Betrachtung der Reißentwicklung die Größen der einzelnen Reißbreiten w mittels einer internen plastischen Variablen über den entsprechenden Querschnittsbereich verteilt wird, soll im folgenden analog zur bisherigen Darstellung der Plastizität nicht mehr die Bezeichnung w , sondern korrekterweise nur noch die skalare Größe α verwendet werden.

Versagen infolge Zugbeanspruchung

Wie in Abb. 2.1 a) zu erkennen ist und an entsprechender Stelle ausführlich beschrieben wurde, zeigt sich bei eindimensionalen Zugversuchen bis zum Erreichen der zentrischen Zugfestigkeit f_{ctm} über weite Bereiche ein linearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Gesamtdehnungen. Erst ab Überschreitung der Grenzspannung stellt sich ein stark nichtlinearer Verlauf ein. Vereinfacht soll bei den weiteren Ausführungen für den Zugzustand nur die Nichtlinearität der Entfestigung in die Formulierung eingehen. Der Vorbruchbereich wird als linearelastisch angenommen. Da das Versagen infolge von Zugbeanspruchung nur der ersten der drei Drucker-Prager-Fließbedingungen zugeschrieben werden soll, sind die entsprechenden Größen mit dem Index 1 gekennzeichnet, um eventuelle Verwechslungen zu vermeiden.

Zur Beschreibung des Verhaltens im Nachbruchbereich ist in der Literatur eine große Anzahl unterschiedlicher Ansätze zu finden, die einfachste Möglichkeit ist die Verwendung eines linearen Zusammenhangs zwischen der noch aufnehmbaren Spannung \bar{y}_1 und der Reißöffnung, ab der keine Zugspannungen mehr übertragen werden können (etwa 0.06 mm). Da hierbei besonders im Anfangsbereich die Spannungen deutlich überschätzt werden, schlagen PETERSON [170] und ROTS [183] ein bilineares Entfestigungsgesetz vor, welches in den CEB-FIP

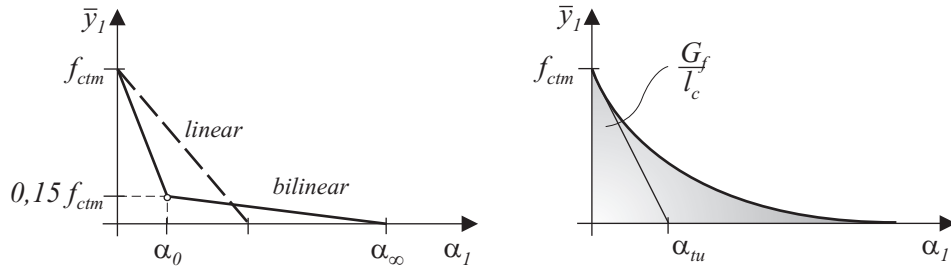


Abbildung 4.4: a) linearer, bilinearer und b) exponentieller Entfestigungsverlauf für Zugversagen

MODEL CODE [30] übernommen wurde, Abb. 4.4 a). Der Verlauf der bilinearen Entfestigungskurve ergibt sich unter Berücksichtigung der Bruchenergie G_f aus

$$\alpha_0 = 2 \frac{G_f}{f_{ctm}} - 0.15 \alpha_\infty \quad \text{wobei} \quad \alpha_\infty = \zeta_F \frac{G_f}{f_{ctm}} \quad . \quad (4.4)$$

Der Parameter ζ_F hängt vom Größtkorn des Zuschlags ab und nimmt Werte zwischen 5 und 8 an.

Eine wesentlich exaktere mathematische Beschreibung der Versagenkurve stellt der exponentielle Ansatz

$$\bar{y}_1(\alpha_1) = f_{ctm} \exp \left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_{tu}} \right] \quad \text{mit} \quad \alpha_{tu} = \frac{G_f}{l_c f_{ctm}} \quad (4.5)$$

von FEENSTRA [71] dar, siehe Abb. 4.4 b). Der für die Geometrie der Kurve notwendige Wert α_{tu} ergibt sich aus der Annahme, daß nach einer vollständigen Entfestigung die auf die charakteristische Länge l_c bezogene Energie G_f dissipiert wurde, was auf den integralen Zusammenhang

$$\frac{G_f}{l_c} = \int_0^\infty \bar{y}_1(\alpha_1) d\alpha_1 = f_{ctm} \alpha_{tu} \quad (4.6)$$

führt. Die Länge l_c wird dabei nach (2.10) bestimmt und führt so zu einer objektiven Formulierung, die die Lokalisierungseffekte der einzelnen Versagensbereiche ermöglicht.

Mit Kenntnis der Entwicklung von \bar{y}_1 kann die Entfestigungsfunktion der ersten Fließfläche f_1 mit dem Parameter η_1 als

$$q_1(\alpha_1) = \eta_1 \bar{y}_1 = \eta_1 f_{ctm} \exp \left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_{tu}} \right] \quad (4.7)$$

angegeben werden. Im Rahmen der späteren Kalibrierung der zusammengesetzten Fließfläche, Abschnitt 4.4.1, wird η_1 ermittelt.

Versagen infolge Druckbeanspruchung

Anders als im Falle eines Zugversagens zeigt der Werkstoff Beton unter Druckbeanspruchung bereits vor Erreichen der maximal aufnehmbaren Spannung f_{cm} ein ausgeprägtes nichtlineares Verhalten, welches ausführlich in Abschnitt 2.1.1 beschrieben wurde. Zur numerischen Erfassung dieses Phänomens schlagen FEENSTRA [71] und FEENSTRA & DE BORST [72] ab einer Spannung von $f_{cm}/3$ einen parabolischen Verfestigungsverlauf vor. Für den abfallenden, entfestigenden Verlauf, der sich nach der maximalen Druckfestigkeit einstellt, kommt ebenfalls

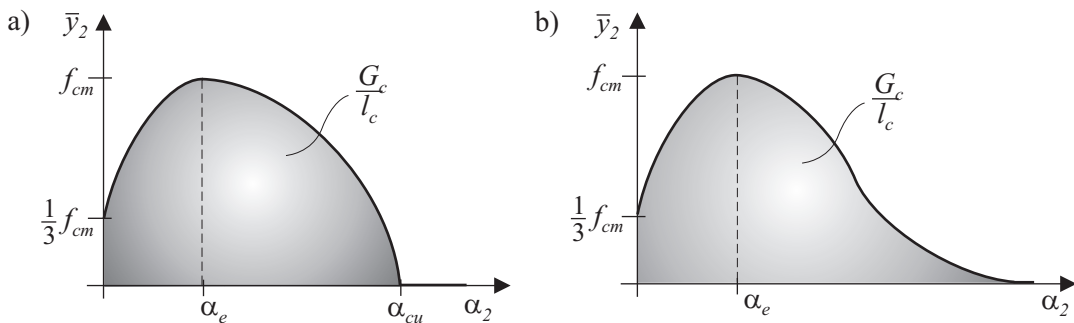


Abbildung 4.5: Ansätze für den Entfestigungsverlauf bei Druckbelastung

ein parabolischer Ansatz zum Tragen, Abb. 4.5 a). Es folgt somit für das zweite Drucker-Prager-Kriterium

$$\bar{y}_2(\alpha_2) = \begin{cases} \frac{f_{cm}}{3} \left[1 + 4 \frac{\alpha_2}{\alpha_e} - 2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_e} \right)^2 \right] & \text{für } \alpha_2 < \alpha_e \\ f_{cm} \left[1 - \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_e}{\alpha_{cu} - \alpha_e} \right)^2 \right] & \text{für } \alpha_e \leq \alpha_2 < \alpha_{cu} \end{cases} \quad (4.8)$$

Die Stelle $\alpha_2 = \alpha_e$, an der die Spannung f_{cm} erreicht wird, hängt dabei ausschließlich von elastischen Größen ab

$$\alpha_e = \frac{3 f_{cm}}{4 E} \quad (4.9)$$

Stellt sich eine plastische Vergleichsdehnung von α_{cu} ein, so ist mit Ansatz (4.8) die Bruchenergie G_c vollständig freigesetzt

$$\frac{G_c}{l_c} = \int_{\alpha_e}^{\alpha_{cu}} \bar{y}_2(\alpha_1) d\alpha_2 = \frac{2}{3} f_{cm} (\alpha_{cu} - \alpha_e) \quad , \quad (4.10)$$

womit sich α_{cu} in Abhängigkeit von l_c aus

$$\alpha_{cu} = \frac{3}{2} \frac{G_c}{l_c f_{cm}} + \alpha_e \quad (4.11)$$

ergibt. Bei Werten $\alpha_2 > \alpha_{cu}$ kann keine weitere Spannung mehr übertragen werden, es folgt $\bar{y}_2 = 0$.

Für eine bessere Anpassung des Modellverhaltens an die Ergebnisse experimenteller Versuche bei fortschreitender Entfestigung wird von LACKNER [129] und WINKLER [232] ein exponentiell quadratischer Verlauf

$$\bar{y}_2(\alpha_2) = f_{cm} \exp \left[-\frac{(\alpha_2 - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] \quad \text{für} \quad \alpha_e \leq \alpha_2 < \alpha_{cu} \quad (4.12)$$

eingeführt, Abb. 4.5 b). Der Wert von α_{cu} läßt sich über eine Integration mit den Grenzen α_e und ∞ aus

$$\alpha_{cu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{G_c}{l_c f_{cm}} \quad (4.13)$$

bestimmen. Zusätzlich wird die Größe von α_e modifiziert

$$\alpha_e = 0.0022 - \frac{f_{cm}}{E} \quad , \quad (4.14)$$

womit der Maximalwert von \bar{y}_2 für unterschiedliche Betonfestigkeiten tendenziell bei kleineren Rißöffnungsweiten erreicht wird als bei Verwendung von (4.9). Ein Vergleich der Resultate, die die Ansätze (4.8)₂ und (4.12) liefern, ist in Abschnitt 4.4.3 zu finden.

Für die weiteren Betrachtungen soll als Ver- und Entfestigungsfunktion der Fließfläche f_2

$$q_2 = \begin{cases} \eta_2 \frac{f_{cm}}{3} \left[1 + 4 \frac{\alpha_2}{\alpha_e} - 2 \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_e} \right)^2 \right] & \text{für} \quad \alpha_2 < \alpha_e \\ \eta_2 f_{cm} \exp \left[-\frac{(\alpha_2 - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] & \text{für} \quad \alpha_e \leq \alpha_2 < \alpha_{cu} \quad . \end{cases} \quad (4.15)$$

angesetzt werden, wobei sich die Grenzen α_e und α_{cu} nach (4.14) und (4.13) ermitteln. Der geometrische Parameter η_2 ist in ähnlicher Weise wie η_1 , (4.7), zu bestimmen.

4.2.3 Ansätze für zyklische Belastungen

Mit Verwendung eines elastoplastischen Materialmodells ist es möglich das Versagen von ganzen Betonstrukturen oder auch nur von einzelnen Teilbereichen der Konstruktion unter monotoner Belastung zu simulieren. Im Rahmen dieser numerischen Berechnungen stellt sich infolge der Lokalisierung des Materialversagens in den benachbarten Bereichen eine Entlastung ein. Wie bereits bei der Diskussion des Werkstoffverhaltens von Beton in Abschnitt 2 beschrieben, kommt es im Nachbruchbereich zu einer Degradation der elastischen Materialparameter. Eine Berücksichtigung dieser Änderung der Materialeigenschaften führt nach CRISFIELD [43] neben der genaueren Erfassung des Betonverhaltens auch zu einer Stabilisierung der verwendeten Algorithmen.

Mit der Annahme eines isotropen Werkstoffmodells wird vorausgesetzt, daß sich die Bildung der Mikrorisse gleichmäßig über alle Richtungen verteilt. Die isotrope Schädigung läßt sich folglich über einen skalaren Schädigungsparameter d beschreiben, welcher vom Degradationsgrad zum Zeitpunkt des Entlastungsbeginns abhängt, MAZARS [146]. Die ingenieurmäßige Abschätzung dieses Parameters kann nach CRISFIELD & WILLS [44] über die äquivalente Spannungs-

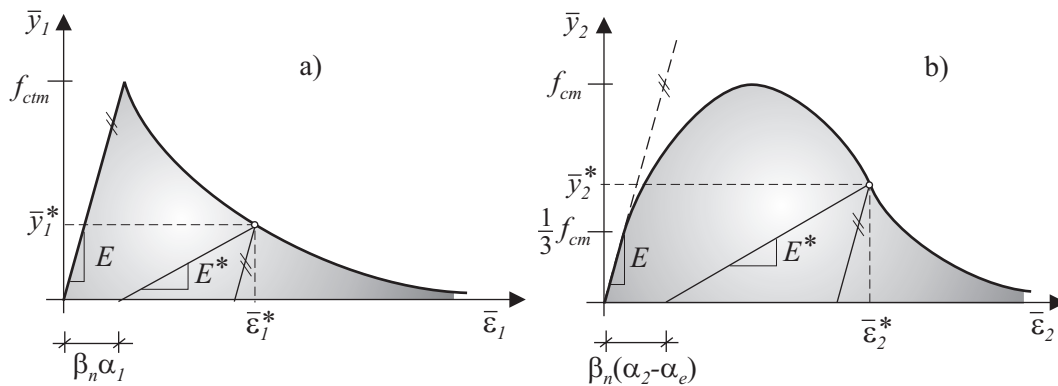


Abbildung 4.6: Degradation elastischer Materialkenngrößen bei a) Zug und b) Druck

Verzerrungs-Beziehung erfolgen, Abb. 4.6 a). Die äquivalenten Verzerrungen $\bar{\epsilon}_1$ lassen sich additiv in einen elastischen Anteil $\bar{\epsilon}_1^{el}$ und einen plastischen $\bar{\epsilon}_1^{pl}$ aufspalten, wobei sich letzterer über die Rate der plastischen Arbeiten definiert und somit der internen plastischen Variablen entspricht $\bar{\epsilon}_1^{pl} = \alpha_1$. Ausgehend von dem Zustand \bar{y}_1^* , $\bar{\epsilon}_1^*$ bei dem mit der Entlastung begonnen wird, ergibt sich

$$E^* = \frac{\bar{y}_1}{\bar{\epsilon}_1^{el} + (1 - \beta_n)\alpha_1} \quad , \quad (4.16)$$

wobei die nach vollständiger Entlastung verbleibende Restrißöffnung $\beta_n \alpha_1$, siehe (2.11), berücksichtigt wurde. Für jeden beliebigen Entfestigungszustand kann mit (4.16) der Schädigungsparameter als

$$d = 1 - \frac{E^*}{E} = 1 - \frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_1 + E(1 - \beta_n)\alpha_1} \quad (4.17)$$

angegeben werden. Die Ermittlung des skalare Schädigungsparameters mit (4.17) gilt unter der Annahme, daß sich der betrachtete Materialpunkt während der gesamten Entlastung degradiert linear elastisch verhält.

Die bisher dargestellten Zusammenhänge wurden für den Fall einer Entlastung unter Zugbeanspruchung getroffen, lassen sich aber im wesentlichen auch auf den Druckzustand übertragen, siehe Abb. 4.6 b). Da in diesem Fall die Degradation der elastischen Materialparameter nicht mit beginnendem Rißwachstum, sondern erst nach Überschreitung der maximalen Druckspannungen festzustellen ist, folgt d nach Modifikation von (4.17) aus

$$d = 1 - \frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_2 + E(1 - \beta_n)(\alpha_2 - \alpha_e)} \quad \text{für} \quad \alpha_2 \geq \alpha_e \quad . \quad (4.18)$$

Als nachteilig bei einer isotropen Beschreibung der Schädigung erweist sich, daß bei einer einaxialen Belastung auch die Richtungen quer zu dieser Haupttrichtung geschädigt werden. Kommt es nach einer Entlastung zu einer Beanspruchung rechtwinklig zu der ersten Belastungsrichtung, so können maximal die Spannungen aufgenommen werden, bei der im ersten Lastfall mit der Entlastung begonnen wurde. Das Material reagiert somit zu spröde, was zu einer Unterschätzung der Versagenslast führen kann. Da im Rahmen dieser Arbeit in erster Linie der Fall einer monotonen Belastungsrichtung angenommen wird, ist diese algorithmische Vereinfachung allerdings akzeptabel.

4.2.4 Numerische Stabilität für reinen Zug

Zur Vermeidung der numerischen Schwierigkeiten, die sich im Bereich der Kegelspitze von Fließfläche f_1 für nahezu hydrostatische Zugbeanspruchungen einstellen, sind in der Literatur unterschiedliche Vorgehensweisen zu finden. Basierend auf der Arbeit von PONTES et al. [172] und in Anlehnung an MENRATH [150] wird eine weitere Fließfläche f_3 eingeführt. Dieser sogenannte 'inverted cone' beschreibt kein wirkliches Materialverhalten sondern dient ausschließlich dazu die entsprechenden Versuchsspannungen auf die Fläche f_1 zu projizieren. Wie aus Abb. 4.7 zu entnehmen ist, ist die Fließfläche f_3 immer dann verletzt, wenn der Versuchszustand \mathbf{S}_{trial} innerhalb dieses Kegels liegt. Die somit resultierende invertierte

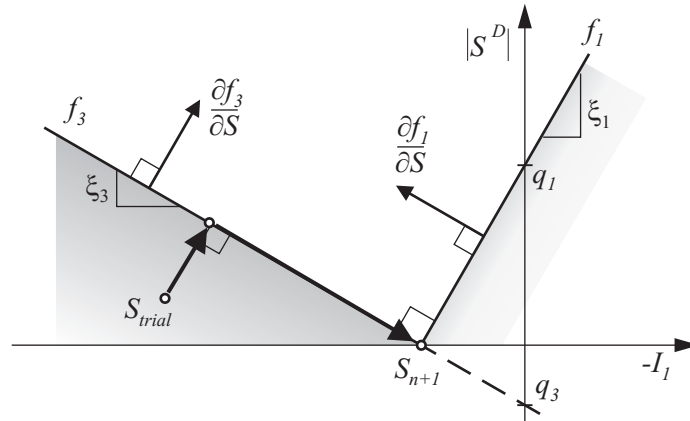


Abbildung 4.7: Rückprojektion auf die Kegelspitze von f_1

Projektionsrichtung bringt in den diskreten Kuhn-Tucker-Bedingungen (3.38) eine Änderung der Vorzeichen mit sich

$$\gamma_3 \leq 0 \quad , \quad f_3(\mathbf{S}_{n+1}, q_{3n+1}) \geq 0 \quad , \quad \gamma_3 f_3(\mathbf{S}_{n+1}, q_{3n+1}) = 0 \quad . \quad (4.19)$$

Da unabhängig von der Versuchsspannung \mathbf{S}_{trial} für die f_3 aktiv wird, immer auch $f_1 > 0$ gilt, stellt sich nach dem Projektionsalgorithmus für unstetig gekoppelte Fließflächen, Abschnitt 3.3.2, eine Projektion auf deren Verschneidungspunkt ein. Der endgültige Zustand \mathbf{S}_{n+1} liegt letztlich auf der Spitze des Fließkegels f_1 .

Die Drucker-Prager-Fließbedingung f_1 und der invertierte Kegel f_3 lassen sich nach (4.1) als

$$f_1 = |\mathbf{S}^D| + \xi_1 I_1 - q_1 \leq 0 \quad (4.20)$$

$$f_3 = |\mathbf{S}^D| + \xi_3 I_1 - q_3 \geq 0 \quad (4.21)$$

formulieren. Mit der Vorgabe, daß sich für beide Kriterien im hydrostatischen Fall $|\mathbf{S}^D| = 0$ derselbe Spannungszustand einstellt, folgt q_3 aus dem Auflösen von (4.20) nach der ersten Invarianten und einem anschließenden Einsetzen in (4.21)

$$I_1 = q_1 \frac{1}{\xi_1} \quad \longrightarrow \quad q_3 = q_1 \frac{\xi_3}{\xi_1} \quad . \quad (4.22)$$

Auf diese Weise kann gesichert werden, daß sich der Kegel f_3 entsprechend der Entfestigung von f_1 entlang der hydrostatischen Achse verschiebt. Da die Normalen beider Fließflächen orthogonal zueinander stehen, ergibt sich für deren

Gradienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{S}} : \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{S}} = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{S}} &= \frac{\mathbf{S}^D}{|\mathbf{S}^D|} + \xi_1 \mathbf{1} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \mathbf{S}} &= \frac{\mathbf{S}^D}{|\mathbf{S}^D|} + \xi_3 \mathbf{1} \end{aligned}, \quad (4.23)$$

womit als zweiter geometrischer Parameter

$$\xi_3 = -\frac{1}{\xi_1} (\mathbf{1} : \mathbf{1})^{-1} = -\frac{1}{3\xi_1} \quad (4.24)$$

folgt. Ein Einsetzen von q_3 und ξ_3 in die Fließbedingung des invertierten Kegels führt auf

$$f_3 = |\mathbf{S}^D| - \frac{1}{3\xi_1} I_1 + \frac{1}{3\xi_1^2} q_1 \geq 0, \quad (4.25)$$

die damit ausschließlich von Werten der Bedingung f_1 abhängig ist.

Eine andere Möglichkeit der Projektion im Bereich der Singularität des Drucker-Prager-Kriteriums ist in der Arbeit von HOFSTETTER & TAYLOR [96] zu finden. Bei diesem zweiteiligen Algorithmus, der dem Vorgehen eines 'tension cut-off' ähnelt, wird der Versuchszustand in einem ersten Schritt auf die hydrostatische Achse abgebildet, um dann auf die Kegelspitze verschoben zu werden. Nachteilig bei einem derartigen Vorgehen ist, daß sich für die entsprechenden Materialpunkte $\mathbb{C}^t = \mathbf{0}$ als konsistenter Tangentenmodul einstellt. Folglich ergibt sich eine stabile Lösung nur dann, wenn sich der hydrostatische Zugzustand auf einen sehr kleinen Teil der Gesamtstruktur beschränkt. Mit Blick auf seine begrenzte Einsetzbarkeit wird dieser Algorithmus im weiteren nicht berücksichtigt.

4.2.5 Projektionsalgorithmus für gekoppelte Fließbedingungen

Die numerische Beschreibung der drei unstetig gekoppelten Drucker-Prager-Fließflächen aus denen sich der Zug- und der Zug/Druck-Bereich des vorgestellten Betonmodells zusammensetzt erfolgt nach dem impliziten Algorithmus von SIMO et al. [200], [201]. Die Schwierigkeit, die sich im Rahmen der assoziierten 'non-smooth multisurface plasticity' stellt, liegt in der uneindeutigen Projektionsrichtung im Bereich der Verschneidungen, siehe Abb. 3.1 und die zugehörigen Erläuterungen. Gemäß Abschnitt 3.3.2 wird daher während der Rückskalierung zwischen aktiven und inaktiven Fließflächenteilen unterschieden.

Wird davon ausgegangen, daß innerhalb der Iteration z der m gekoppelten Fließbedingungen aktiv am plastischen Fließen beteiligt sind, so setzt sich die plastische Deformationsenergie W^{pl} additiv aus den z Anteilen der einzelnen Flächen

zusammen. Mit dieser Annahme hat die in (3.14) eingeführte Formänderungsenergiegedichte W_{0S} die Gestalt

$$W_{0S} = W^{el}(\mathbf{E}^{el}) + \sum_{i=1}^z W^{pl}(\alpha_i) \quad , \quad (4.26)$$

wobei α_i die allgemeine interne plastische Variable der i -ten Fließfläche bezeichnet. Nach dem Einsetzen von (4.26) in die Dissipationsungleichung (3.13) ergibt sich aus dem Prinzip vom Maximum der plastischen Dissipation (3.18) ein Optimierungsproblem, HILL [90], LUBLINER [140]. Aus den partiellen Ableitungen der zugehörigen Lagrangefunktion folgen analog zu Abschnitt 3.2 die kontinuierlichen Evolutionsgleichungen und die Erfüllung aller aktiven Fließflächen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{S}} : \quad \dot{\mathbf{E}}^{pl} = \sum_{i=1}^z \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{S}} \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} : \quad \dot{\alpha}_i = - \sum_{j=1}^z \lambda_j \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} : \quad f_i(\mathbf{S}, q_i) = 0 \quad , \quad (4.29)$$

vergleiche (3.21) bis (3.23). Die Entwicklungsgleichung der plastischen Verzerungen \mathbf{E}^{pl} entspricht dabei der von KOITER [114] eingeführten verallgemeinerten Fließregel (3.28). Für den Fall, daß die Ver- und Entfestigungsregeln der einzelnen Kriterien voneinander unabhängig sind, der plastische Parameter q_j also keinen Einfluß auf die Größe q_i der i -ten Fläche besitzt, läßt sich (4.28) als

$$\dot{\alpha}_i = -\lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \quad (4.30)$$

schreiben. Da für das hier vorgestellte numerischen Betonmodell ausschließlich zwei plastische Parameter – einer für Zug- und einer für Druckversagen – erforderlich sind und sich diese Phänomene gegenseitig nicht beeinflussen, HOFSTETTER & MANG [94], REINHARDT [178] und andere, kann eine Entkopplung vorausgesetzt werden, womit (4.30) gilt.

Besteht die zusammengesetzte Fließfläche – wie hier angenommen – aus mehreren Drucker-Prager-Fließbedingungen mit isotroper Ver- und Entfestigungsfunktion

$$f_i = |\mathbf{S}^D| + \xi_i \operatorname{tr} \mathbf{S} - q_i \quad \text{mit} \quad q_i = \eta_i \bar{y}_i \quad , \quad (4.31)$$

siehe (4.1), (4.7) und (4.15), so ergeben sich die Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}^D}{|\mathbf{S}^D|} + \xi_i \mathbf{1} \quad , \quad \frac{\partial f_i}{\partial q_i} = -1 \quad . \quad (4.32)$$

Bei Verwendung einer unbedingt stabilen impliziten Zeitintegration nach dem Euler-Rückwärtsverfahren, ORTIZ & POPOV [166] und KRIEG & KRIEG [122], Abschnitt 3.3.1, lassen sich die plastischen Zustandsgrößen des $n+1$ -ten Zeitschritts berechnen

$$\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_n^{pl} + \sum_{i=1}^z \gamma_i \left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} + \xi_i \mathbf{1} \right) \quad (4.33)$$

$$q_{i n+1} = q_{i n} + \gamma_i \quad . \quad (4.34)$$

Dabei gilt für die plastischen Parameter $\gamma_i = \lambda_i(t_{n+1} - t_n)$. Da im Rahmen des elastischen Prädiktorschrittes von einer rein elastischen Zunahme der Verzerrungen ausgegangen wird, lassen sich die Versuchswerte

$$\mathbf{S}_{trial} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}) \quad \text{und} \quad \alpha_{i trial} = \alpha_{i n} \quad (4.35)$$

definieren. Das Einsetzen von (4.33) in (4.35)₁ führt auf die Form

$$\mathbf{S}_{trial} = \mathbf{S}_{n+1} + \mathbb{C} : \sum_{i=1}^z \gamma_i \left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} + \xi_i \mathbf{1} \right) \quad , \quad (4.36)$$

aus der sich nach der Aufteilung des elastischen Moduls \mathbb{C} in deviatorische und hydrostatische Anteile

$$\mathbb{C} = 2G \left[\mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right] + K (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \quad (4.37)$$

die Spannungen \mathbf{S}_{n+1} aus

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{trial} - \sum_{i=1}^z \gamma_i \left(2G \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} + 3K \xi_i \mathbf{1} \right) \quad (4.38)$$

berechnen. Da $3K \xi_i \mathbf{1}$ rein hydrostatisch und $2G \mathbf{S}_{n+1}^D / |\mathbf{S}_{n+1}^D|$ rein deviatorisch ist und außerdem $|\mathbf{S}_{n+1}^D / |\mathbf{S}_{n+1}^D|| = \mathbf{1}$ gilt, ist es mit (4.38) möglich die Fließbedingungen als

$$f_{i\,n+1} = |\mathbf{S}_{trial}^D| - \sum_{j=1}^z \gamma_j 2G + \xi_i \operatorname{tr} \mathbf{S}_{trial} - \xi_i \sum_{j=1}^z \gamma_j 9K \xi_j - q_{i\,n+1} \quad (4.39)$$

zu schreiben. Wird bei der Formulierung von $q_{i\,n+1}$ der Zusammenhang $\alpha_{i\,n+1} = \alpha_{i\,n} + \gamma_i$ ausgenutzt, so hängen die Fließbedingungen (4.39) zum Zeitpunkt t_{n+1} ausschließlich von Prädiktorgrößen und den plastischen Parametern γ_i ab. Diese z unbekannt Parameter werden im Rahmen einer lokalen Newton-Iteration bestimmt. Während in Abschnitt 3.3.2 die Rückprojektion in allgemeiner Form beschrieben ist ('general return') und für die Projektion von f_4 benötigt wird, soll für die gekoppelten Drucker-Prager-Fließbedingungen ein sogenannter 'radial return' verwendet werden. Anwendbar ist der numerisch deutlich effizientere 'radial return' für Fließkriterien, bei denen sich die Richtung $\partial f_{n+1}/\partial \mathbf{S}_{n+1}$, Abb. 3.2, während der Iteration nicht ändert. Für den einfachen Fall eines zylindrischen von Mises-Fließkörpers mit isotroper Verfestigung, Abschnitt 7.1, ist dieser Algorithmus beispielsweise bei SIMO [194] und CHEN [37] zu finden.

Wie bereits erörtert wird bei gekoppelten Fließflächen zwischen aktiven und inaktiven Fließflächenteilen unterschieden, eine notwendige Projektion erfolgt ausschließlich auf die Aktiven. Um bei der algorithmischen Beschreibung eine entsprechende Unterscheidung zu ermöglichen, wird ein skalarer Faktor c_i eingeführt. Für aktive Bereiche ($\gamma_i > 0$) wird $c_i = 1$ gesetzt, $c_i = 0$ kennzeichnet die inaktiven Teile, für die sich ein Parameter $\gamma_i < 0$ einstellt. Es sei angemerkt, daß aufgrund der invertierten Projektionsrichtung von f_3 dort für die Entscheidung aktiv oder passiv das jeweils andere Vorzeichen gilt. Nach FEENSTRA [71] können die m gekoppelten Fließbedingungen in Abhängigkeit von c_i in einer modifizierten Form

$$\bar{f}_{i\,n+1} = c_i f_{i\,n+1} + (1 - c_i)\gamma_i \leq 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, m \quad (4.40)$$

geschrieben werden, wobei für $f_{i\,n+1}$ (4.39) verwendet wird – im vorliegenden Fall gilt $m = 3$. Die Einführung der abkürzenden Matrixschreibweisen

$$\mathbf{f}_{n+1} = [f_{1\,n+1} \ f_{2\,n+1} \ \dots \ f_{m\,n+1}]^T, \quad \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1 \ \gamma_2 \ \dots \ \gamma_m]^T \quad (4.41)$$

führt auf das Gleichungssystem

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{c}\mathbf{f}_{n+1} + \bar{\mathbf{c}}\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}, \quad (4.42)$$

wobei sich $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$ analog zu \mathbf{f}_{n+1} aus (4.40) zusammensetzt, \mathbf{c} und $\bar{\mathbf{c}}$ sind Diagonalmatrizen, welche die Größen c_i beziehungsweise $(c_i - 1)$ enthalten. Als einzige

Unbekannten in (4.42) verbleiben die Parameter γ_i , die iterativ aus der Linearisierung der Taylor-Reihenentwicklung

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\gamma}^{(k)}} \Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k+1)} = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

bestimmt werden können. Der Vektor $\Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k+1)}$, der die Zuwächse $\Delta \gamma_i^{(k+1)}$ enthält, ist nach Invertierung aus

$$\Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k+1)} = - \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\gamma}^{(k)}} \right]^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)} \quad (4.44)$$

ermittelbar. Die Komponenten von $\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)} / \partial \gamma_j^{(k)}$ lassen sich allgemein mit

$$\frac{\partial \bar{f}_{in+1}^{(k)}}{\partial \gamma_j^{(k)}} = c_i \frac{\partial f_{in+1}^{(k)}}{\partial \gamma_j^{(k)}} + \delta_{ij}(1 - c_i) \quad \text{wobei} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4.45)$$

angeben. Bei der Bildung der Ableitungen von f_{in+1} , (4.39), ist $\alpha_{in+1} = \alpha_{in} + \gamma_i$ in den jeweiligen Ver- und Entfestigungsfunktionen (4.7) und (4.15) zu berücksichtigen. Anhand des resultierenden $\gamma_i^{(k+1)}$ wird eine erneute Einteilung in aktive und inaktive Fließflächenteile möglich, so daß bisher aktive Flächen f_i gegebenenfalls für den nächsten Iterationsschritt mit $c_i = 0$ deaktiviert werden und somit nicht weiter an der Projektion beteiligt sind.

Um mit Hilfe von $\boldsymbol{\gamma}^{(k+1)} = \boldsymbol{\gamma}^{(k)} + \Delta \boldsymbol{\gamma}^{(k+1)}$ den Wert von $\mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)}$ für einen weiteren Iterationsschritt bestimmen zu können, wird zunächst (4.38) mit dem Projektionstensor \mathbb{P} multipliziert

$$\mathbf{S}_{n+1}^D = \mathbf{S}_{trial}^D - \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i 2G \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} \quad (4.46)$$

Eine Erweiterung von \mathbf{S}_{n+1}^D und \mathbf{S}_{trial}^D um $|\mathbf{S}_{n+1}^D|/|\mathbf{S}_{n+1}^D|$ beziehungsweise $|\mathbf{S}_{trial}^D|/|\mathbf{S}_{trial}^D|$ führt nach einem Zusammenfassen gleicher Größen auf

$$\left[|\mathbf{S}_{n+1}^D| + \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i 2G \right] \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} = |\mathbf{S}_{trial}^D| \frac{\mathbf{S}_{trial}^D}{|\mathbf{S}_{trial}^D|} \quad (4.47)$$

Da diese Beziehung nur erfüllt werden kann, wenn die Normalenrichtungen identisch sind, muß

$$\frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} = \frac{\mathbf{S}_{trial}^D}{|\mathbf{S}_{trial}^D|} \quad \text{und somit} \quad |\mathbf{S}_{n+1}^D| = |\mathbf{S}_{trial}^D| - \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i 2G \quad (4.48)$$

gelten. Unter Ausnutzung von (4.48)₁ ergeben sich die Spannungen für den $k+1$ -ten Schritt mit (4.38) aus

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{S}_{trial} - \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i^{(k+1)} \left(2G \frac{\mathbf{S}_{trial}^D}{|\mathbf{S}_{trial}^D|} + 3K \xi_i \mathbf{1} \right) . \quad (4.49)$$

Der aktuelle Wert für $q_{in+1}^{(k+1)}$ folgt direkt aus (4.34). Sobald $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k+1)}$ eine gesetzte Toleranz unterschreitet und damit alle Fließbedingungen erfüllt sind, endet die Iteration, die Werte des Zeitschritts t_{n+1} sind gefunden.

Tafel 4.1 faßt die wesentlichen Punkte des Projektionsalgorithmus für gekoppelte Drucker-Prager-Fließflächen zusammen.

4.2.6 Tangentenmodul der zusammengesetzten Fließfläche

Nach Abschluß des Projektionsverfahrens wird die Ermittlung des konsistenten elastoplastischen Tangentenmoduls $\mathbb{C}_{n+1}^t = d\mathbf{S}_{n+1}/d\mathbf{E}_{n+1}$ für die weitere Berechnung notwendig. Wie bereits ausführlich in Abschnitt 3.3.3 beschrieben, ist dieser konsistent zum verwendeten Projektionalgorithmus formulierte Modul für die Bestimmung der Verschiebungsinkremente des nächsten Lastschritts erforderlich. Die konsistente Herleitung ermöglicht im Rahmen der verwendeten Newton-Raphson-Iteration eine quadratische Konvergenz gegen die gesuchte Lösung. Im Gegensatz zur bisherigen allgemeinen Herleitung nach SIMO et al. [201],[194] oder HOFSTETTER & MANG [94] läßt sich für den Fall gekoppelter Drucker-Prager-Fließflächen eine algorithmisch einfachere Formulierung für \mathbb{C}_{n+1}^t finden, was im folgenden dargestellt werden soll.

Ausgehend von (4.49) kann der Spannungstensor \mathbf{S}_{n+1} aus

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}) - \mathbb{C} : \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i \frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad (4.50)$$

ermittelt werden, wobei über alle aktiv beteiligten Fließflächen mit $c_i = 1$ aufsummiert wird. Als totales Differential ergibt sich mit dem modifizierten elastischen Modul

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{\Xi}_{n+1} : & \left[d\mathbf{E}_{n+1} - \sum_{i=1}^m c_i d\gamma_i \frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i \sum_{j=1}^m c_j \frac{\partial^2 f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{jn+1}} dq_{jn+1} \right] . \end{aligned} \quad (4.52)$$

Da sich für die verwendeten Fließbedingungen

$$f_{in+1} = |\mathbf{S}_{n+1}^D| + \xi_i \operatorname{tr} \mathbf{S}_{n+1} - q_{in+1} \quad (4.53)$$

als Ableitungen nach den Spannungen und den plastischen Parametern

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} &= \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} + \xi_i \mathbf{1} & \frac{\partial f_i}{\partial q_{in+1}} &= -1 \\ \frac{\partial^2 f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} &= \frac{1}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} [\mathbb{P} - \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1}] & \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_{in+1}^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{in+1}} &= \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_{in+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.54)$$

einstellen, verschwindet der letzte Summand in (4.52). Wie zu erkennen ist, hängt die zweite Ableitung von f_{in+1} nach den Spannungen nur vom Projektionstensor \mathbb{P} und von der Richtung $\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^D/|\mathbf{S}_{n+1}^D|$ ab und ist somit für alle Fließbedingungen konstant. (4.52) und (4.51) vereinfachen sich dementsprechend zu

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{\Xi}_{n+1} : \left[d\mathbf{E}_{n+1} - \sum_{i=1}^m c_i d\gamma_i \frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \right] \quad (4.55)$$

$$\mathbf{\Xi}_{n+1} = \left[\mathbb{C}^{-1} + [\mathbb{P} - \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1}] \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i \right]^{-1} . \quad (4.56)$$

Werden die Gradienten der Fließflächen in einer Matrix

$$\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{S}_{n+1}} = \left[c_1 \frac{\partial f_{1n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad c_2 \frac{\partial f_{2n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad \dots \quad c_m \frac{\partial f_{mn+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \right] \quad (4.57)$$

zusammengefaßt, so kann (4.55) nach RIGGS & POWELL [180] in allgemeiner Form als

$$d\mathbf{S}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1} : [d\mathbf{E}_{n+1} - \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} d\boldsymbol{\gamma}] \quad (4.58)$$

geschrieben werden. Im weiteren wird es notwendig, die in (4.58) enthaltene differentielle Größe $d\boldsymbol{\gamma} = [d\gamma_1 \ d\gamma_2 \ \dots \ d\gamma_m]^T$ in Abhängigkeit von $d\mathbf{E}_{n+1}$ oder $d\mathbf{S}_{n+1}$ auszudrücken, womit eine Formulierung des Tangentenmoduls möglich wird.

Im plastischen Fall ergibt sich aus der Konsistenzbedingung

$$d\bar{f}_{in+1} = c_i \left[\frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : d\mathbf{S}_{n+1} + \frac{\partial f_{in+1}}{\partial q_{in+1}} dq_{in+1} \right] + (1 - c_i) d\gamma_{in+1} = 0 \quad (4.59)$$

als totale Ableitung der modifizierten Fließbedingung (4.40). Über den Zusammenhang $d\gamma_i = c_i dq_i$ kann diese für alle Fließflächen in Matrixschreibweise als

$$d\bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T d\mathbf{S}_{n+1} + [\mathbf{c}\bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}} + \bar{\mathbf{c}}] d\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

angegeben werden, wobei sich analog zu (4.57) die Gradientenmatrix $\bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}}$ aus

$$\bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}} = \begin{bmatrix} c_1 \frac{\partial f_{1n+1}}{\partial q_{1n+1}} & c_2 \frac{\partial f_{2n+1}}{\partial q_{2n+1}} & \dots & c_m \frac{\partial f_{mn+1}}{\partial q_{mn+1}} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

zusammensetzt. Mit der Einführung von $\boldsymbol{\Theta}_{n+1} = -[\mathbf{c}\bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}} + \bar{\mathbf{c}}]$ folgt aus (4.60)

$$d\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\Theta}_{n+1}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T d\mathbf{S}_{n+1} \quad , \quad (4.62)$$

so daß sich (4.58) in der Form

$$\left[\bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1}^{-1} + \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} \boldsymbol{\Theta}_{n+1}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T \right] d\mathbf{S}_{n+1} = d\mathbf{E}_{n+1} \quad (4.63)$$

schreiben läßt. Erfolgt die Invertierung unter Zuhilfenahme der Sherman-Morrison-Formel, SHERMAN & MORRISON [193] oder in ihrer Anwendung bei ZURMÜHL & FALK [243], FEENSTRA [71], kann der konsistente elastoplastische Tangentenmodul \mathbb{C}_{n+1}^t in Matrixschreibweise bestimmt werden

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{n+1}^t &= \frac{d\mathbf{S}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}} \\ &= \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1} - \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} \left[\bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} + \boldsymbol{\Theta}_{n+1} \right]^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T \bar{\boldsymbol{\Xi}}_{n+1} . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Die Ähnlichkeit zum kontinuierlichen Modul \mathbb{C}^{ep} nach (3.34) ist offensichtlich. Nachdem nun alle wesentlichen Größen für den Lastschritt t_{n+1} bekannt sind, wird eine Modifikation der Belastung und ein weiterer Lastschritt möglich.

In kurzer Form sind in Tafel 4.2 die wesentlichen Beziehungen, die für die Bildung des konsistenten Tangentenmoduls der gekoppelten Drucker-Prager-Flächen erforderlich sind, zusammengestellt.

<p>Konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul für zusammengesetzte Fließkegel</p> $\mathbb{C}_{n+1}^t = \Xi_{n+1} - \Xi_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} \left[\bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T \Xi_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} + \Theta_{n+1} \right]^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}^T \Xi_{n+1}$ <p>mit algorithmischen Moduln</p> $\Xi_{n+1} = \left[\mathbb{C}^{-1} + \sum_{i=1}^m c_i \gamma_i \frac{\partial^2 f_{i n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} \right]^{-1} \quad \text{und} \quad \Theta_{n+1} = - \left[\mathbf{c} \bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}} + \bar{\mathbf{c}} \right]$ <p>$\bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}}$ und $\bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}}$ enthalten die Differentiale</p> $\bar{\mathbf{F}}_{S_{n+1}} = \begin{bmatrix} c_1 \frac{\partial f_{1 n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & c_2 \frac{\partial f_{2 n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} & \dots & c_m \frac{\partial f_{m n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \end{bmatrix}$ $\bar{\mathbf{F}}_{q_{n+1}} = \begin{bmatrix} c_1 \frac{\partial f_{1 n+1}}{\partial q_{1 n+1}} & c_2 \frac{\partial f_{2 n+1}}{\partial q_{2 n+1}} & \dots & c_m \frac{\partial f_{m n+1}}{\partial q_{m n+1}} \end{bmatrix}$ <p>Ableitungen von $f_{i n+1}$ nach \mathbf{S}_{n+1} und $q_{i n+1}$ ergeben sich aus (4.54).</p>
--

Tafel 4.2: Konsistenter Tangentenmodul für gekoppelte Drucker-Prager-Flächen

4.3 Formulierung des reinen Druckbereiches

Für die Beschreibung des Betonverhaltens unter reiner Druckbeanspruchung, vor allem im Falle von nahezu hydrostatischen Drücken, kommt eine kugelförmige Fließfläche zum Einsatz. Wie bereits ausführlich in Abschnitt 4.1 dargestellt, liegt darin die Parallele der verwendeten Formulierung zu der Gruppe der 'cap-models', DIMAGGIO & SANDLER [53], SANDLER & RUBIN [184] und andere. Bei dieser Art von Modellen bildet eine in der Regel elliptische Kappe den Abschluß des Druckbereiches. Da die Kugel als eine geometrische Sonderform des Ellipsoids aufgefaßt werden kann, ähnelt das algorithmische Vorgehen dem der 'cap-models', siehe beispielsweise SIMO et al. [199] oder HOFSTETTER et al. [95].

4.3.1 Vorstellung der kugelförmigen Fließfläche

Die zur Beschreibung des dreiaxialen Druckes eingeführte kugelförmige Fließfläche läßt sich im allgemeinen Spannungsraum durch die deviatorischen Spannungen \mathbf{S}^D und die hydrostatische Komponente $\text{tr } \mathbf{S} = I_1$ mittels

$$f_4 = \sqrt{|\mathbf{S}^D|^2 + \frac{1}{9} [\text{tr } \mathbf{S} - L(\alpha_4)]^2} - R(\alpha_4) \leq 0 \quad (4.65)$$

beschreiben, MENRATH [150]. Dabei stellen $R(\alpha_4)$ und $L(\alpha_4)$ Radius sowie Mittelpunkt der Kugel dar. Aufgrund des stetigen, tangentialen Übergangs, der sich bei einer späteren Kopplung der kegelförmigen Fließflächen aus Abschnitt 4.2 und der Kugel einstellen soll, ergeben sich Mittelpunkt und Radius in Abhängigkeit von der internen plastischen Variablen α_4 aus

$$L(\alpha_4) = - \left[\sqrt{54} \xi_2 + 2 \right] \zeta_2 q_4(\alpha_4) \quad , \quad R(\alpha_4) = \sqrt{\frac{2}{3} + 6 \xi_2^2 \zeta_2 q_4(\alpha_4)} \quad . \quad (4.66)$$

Die geometrischen Parameter ξ_2 und ζ_2 des Fließkriteriums f_2 werden bei der späteren Anpassung der zusammengesetzten Fließfläche an experimentelle Ergebnisse bestimmt. Um die Stetigkeit dieser gekoppelten Fließfläche gewährleisten zu können, ist ein identisches Ver- und Entfestigungsverhalten des Drucker-Prager-Kegels f_2 und der Kugel f_4 zwingend notwendig, womit in Anlehnung an (4.15)

$$q_4(\alpha_4) = \begin{cases} \eta_2 \frac{f_{cm}}{3} \left[1 + 4 \frac{\alpha_4}{\alpha_e} - 2 \left(\frac{\alpha_4}{\alpha_e} \right)^2 \right] & \text{für } \alpha_4 < \alpha_e \\ \eta_2 f_{cm} \exp \left[- \frac{(\alpha_4 - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] & \text{für } \alpha_e \leq \alpha_4 < \alpha_{cu} \end{cases} \quad (4.67)$$

gelten muß. Die Grenzen α_e und α_{cu} ermitteln sich dabei nach (4.14) und (4.13) aus

$$\alpha_e = 0.0022 - \frac{f_{cm}}{E} \quad , \quad \alpha_{cu} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{G_c}{l_c f_{cm}} \quad . \quad (4.68)$$

Im Hinblick auf eine übersichtliche Darstellung wird der Zusammenhang $\alpha_4 = \alpha_2$ im weiteren nicht beachtet. Abb. 4.8 zeigt die kugelförmige Fließfläche in einer um 1/3 skalierten Invariantendarstellung, aus welcher der Zusammenhang zwischen der Evolution von Radius und Mittelpunkt zu entnehmen ist. Beide geometrischen

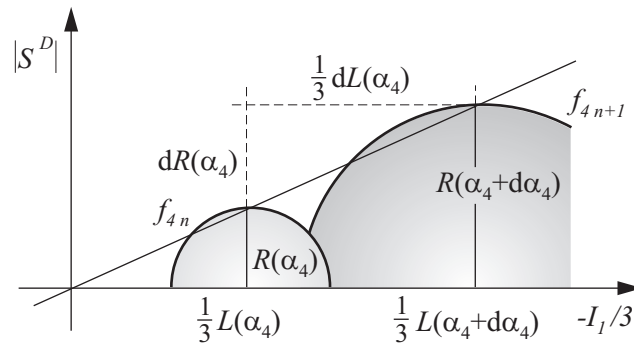


Abbildung 4.8: Evolution der kugelförmigen Fließfläche f_4

Größen sind so miteinander gekoppelt, daß sich der Kugelmittelpunkt bei einer Veränderung des Radius entlang der hydrostatischen Achse verschiebt. Nach dem Strahlensatz ist dieses Verhalten charakterisiert durch

$$\frac{dL(\alpha_4)}{dR(\alpha_4)} = \frac{L(\alpha_4 + d\alpha_4)}{R(\alpha_4 + d\alpha_4)} = \frac{L(\alpha_4)}{R(\alpha_4)} = \hat{k} \quad . \quad (4.69)$$

4.3.2 Projektionsalgorithmus der Kugel

Für die Bestimmung des Spannungszustandes und der plastischen Größen, die sich für eine beliebige mehrachsiale Druckbelastung einstellen, wird auch für die kugelförmige Fließfläche das in Abschnitt 3.3.2 vorgestellte unbedingt stabile Projektionsverfahren nach SIMO & HUGHES [198], HOFSTETTER & MANG [94] und anderen verwendet. Dieses kam bereits bei der algorithmischen Beschreibung der gekoppelten Drucker-Prager-Kegel zum Einsatz, Abschnitt 4.2.5, und soll im folgenden für die Fließbedingung (4.65) aufbereitet werden.

Ausgehend von der Dissipationsungleichung (3.13), die sich über eine thermodynamische Betrachtung der Plastizitätstheorie herleiten läßt, Abschnitt 3.2, und der Formänderungsenergiedichte (3.14) lassen sich nach dem Prinzip der maximalen Dissipation die Evolutionsgleichungen der plastischen Größen \mathbf{E}^{pl} und α_4 formulieren, siehe (3.21) und (3.22). Bei Verwendung einer numerischen Zeitintegration nach dem impliziten Euler-Rückwärtsverfahren, ORTIZ & POPOV [166], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241], Abschnitt 3.3.1, ergeben sich die Evolutionsgleichungen in diskreter Form

$$\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_n^{pl} + \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad (4.70)$$

$$\alpha_{4n+1} = \alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} \quad , \quad (4.71)$$

wobei für den plastischen Parameter $\gamma_4 = \lambda_4 (t_{n+1} - t_n)$ gilt. Als Ableitung der Fließbedingung (4.65) nach den Spannungen wird

$$\frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] \mathbf{1}}{\sqrt{|\mathbf{S}_{n+1}^D|^2 + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}]^2}} \quad (4.72)$$

verwendet, die Ableitung nach q_{4n+1} ergibt sich aus

$$\frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} = - \frac{\frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] L'_{n+1}}{\sqrt{|\mathbf{S}_{n+1}^D|^2 + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}]^2}} - R'_{n+1} \quad . \quad (4.73)$$

Für eine übersichtlichere Darstellung wurde in (4.73) die abkürzende Schreibweise

$$L'_{n+1} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial q_{4n+1}} = - \left[\sqrt{54} \xi_2 + 2 \right] \zeta_2 \quad \text{und} \quad R'_{n+1} = \frac{\partial R_{n+1}}{\partial q_{4n+1}} = \sqrt{\frac{2}{3} + 6 \xi_2^2} \zeta_2 \quad (4.74)$$

gewählt.

Wie bereits ausführlich erörtert wird im Rahmen des Prädiktor-Korrektor Verfahrens von einem ersten elastisch angenommenen Versuchszustand ausgegangen, der dann auf die Fließfläche f_{4n+1} zurückprojiziert wird. Als Versuchswerte für die plastische Variable α_{4n+1} wird die Größe α_{4n} des letzten Gleichgewichtszustandes verwendet, für die Spannungen ergibt sich nach (3.39)

$$\mathbf{S}_{trial} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}) = \mathbf{S}_{n+1} + \mathbb{C} : \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad . \quad (4.75)$$

Mit der Aufspaltung der Spannungen \mathbf{S}_{n+1} in einen deviatorischen und einen hydrostatischen Anteil gemäß (4.3) lassen sich die Versuchsspannungen als

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{trial} &= \mathbf{S}_{n+1} : \mathbb{P} + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{1} + \mathbb{C} : \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\ &= \mathbf{S}_{n+1} : \mathbb{P} + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{1} + \gamma_4 \left[2G \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{R_{n+1}} + \frac{1}{3} K [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] \mathbf{1} \frac{1}{R_{n+1}} \right] \end{aligned} \quad (4.76)$$

schreiben. Dabei wurde zum einen der Zusammenhang (4.37) ausgenutzt, zum anderen die Beziehung

$$R_{n+1} = \sqrt{|\mathbf{S}_{n+1}^D|^2 + \frac{1}{9} [\text{tr } \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}]^2} \quad , \quad (4.77)$$

die mit Erfüllung der Fließbedingung (4.65) im plastischen Fall, $f_{4n+1} = 0$, gilt. Somit ergeben sich als deviatorische Komponente der Versuchsspannungen

$$\mathbf{S}_{trial}^D = \mathbf{S}_{n+1}^D \left[1 + \gamma_4 \frac{2G}{R_{n+1}} \right] \quad (4.78)$$

und als skalare hydrostatische Größe

$$\text{tr } \mathbf{S}_{trial} = \text{tr } \mathbf{S}_{n+1} + \gamma_4 \frac{K}{R_{n+1}} [\text{tr } \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] \quad , \quad (4.79)$$

was die Darstellung der Spannungen \mathbf{S}_{n+1} in der Form

$$\mathbf{S}_{n+1}^D = \frac{R_{n+1}}{R_{n+1} + \gamma_4 2G} \mathbf{S}_{trial}^D \quad (4.80)$$

$$\text{tr } \mathbf{S}_{n+1} = \frac{R_{n+1}}{R_{n+1} + \gamma_4 K} \left[\text{tr } \mathbf{S}_{trial} + \gamma_4 K \frac{L_{n+1}}{R_{n+1}} \right] \quad (4.81)$$

ermöglicht. Eine Erweiterung von \mathbf{S}_{n+1}^D und \mathbf{S}_{trial}^D in (4.80) um die entsprechenden Beträge liefert

$$|\mathbf{S}_{n+1}^D| \frac{\mathbf{S}_{n+1}^D}{|\mathbf{S}_{n+1}^D|} = \frac{R_{n+1}}{R_{n+1} + \gamma_4 2G} |\mathbf{S}_{trial}^D| \frac{\mathbf{S}_{trial}^D}{|\mathbf{S}_{trial}^D|} \quad (4.82)$$

woraus mit $\mathbf{N}_{(\cdot)} = \mathbf{S}_{(\cdot)}^D / |\mathbf{S}_{(\cdot)}^D|$ die Zusammenhänge

$$\mathbf{N}_{n+1} = \mathbf{N}_{trial} \quad \text{und} \quad |\mathbf{S}_{n+1}^D| = |\mathbf{S}_{trial}^D| \frac{R_{n+1}}{R_{n+1} + \gamma_4 2G} \quad (4.83)$$

folgen. Das Einsetzen von (4.81) in den Ausdruck $[\text{tr } \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}]$ liefert

$$[\text{tr } \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] = \frac{R_{n+1}}{R_{n+1} + \gamma_4 K} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}] \quad , \quad (4.84)$$

so daß sich die Fließbedingung mit (4.83)₂ in Abhängigkeit von den Versuchsspannungen schreiben läßt

$$f_{4trial} = \sqrt{\left(\frac{R_{n+1}}{\omega_G}\right)^2 |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 + \frac{1}{9} \left(\frac{R_{n+1}}{\omega_K}\right)^2 [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2} - R_{n+1} \quad . \quad (4.85)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde dabei $\omega_G = R_{n+1} + \gamma_4 2G$ und $\omega_K = R_{n+1} + \gamma_4 K$ eingeführt. Als einzige unbekannte Größen des Zeitschritts t_{n+1} verbleiben somit γ_4 und q_{4n+1} , letztere geht über den Radius und den Mittelpunkt (4.66) in die Fließbedingung ein. Für eine iterative Ermittlung dieser beiden Größen wird die Ver- und Entfestigungsfunktion (4.67) genauer betrachtet. Unter Ausnutzung der Evolutionsgleichung (4.71) ist die Einführung einer Funktion $h_{4n+1}(q_{4n+1}, \gamma_4)$ möglich

$$h_{4n+1} = \begin{cases} q_{4n+1} - \frac{f_{cm}}{3} \left[1 + 4 \frac{\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}}}{\alpha_e} - 2 \left(\frac{\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}}}{\alpha_e} \right)^2 \right] \\ q_{4n+1} - f_{cm} \exp \left[- \frac{(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] \end{cases} , \quad (4.86)$$

für die sich mit Abschluß der Projektion – wenn also die Werte für t_{n+1} bestimmt sind – $h_{4n+1} = 0$ einstellt. Die obere Beziehung von (4.86) gilt für den Fall $\alpha_n - \gamma_4 \partial f_{4n+1} / \partial q_{4n+1} < \alpha_e$, die untere für $\alpha_e < \alpha_n - \gamma_4 \partial f_{4n+1} / \partial q_{4n+1} < \alpha_{cu}$ mit α_e und α_{cu} nach (4.68). Um im Rahmen der Iteration keine Abhängigkeit von den noch unbekanntem Spannungen \mathbf{S}_{n+1} zu erlangen, ist es sinnvoll für die Ableitung $\partial f_{4n+1} / \partial q_{4n+1}$ die mit den Versuchsspannungen gebildete Fließbedingung (4.85) zu verwenden. Es ergibt sich somit das Differential

$$\frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} = \frac{\Omega}{f_{4n+1} + R_{n+1}} - R'_{n+1} \quad , \quad (4.87)$$

wobei für die skalare Größe Ω

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{R_{n+1} R'_{n+1} \gamma_4 2G}{\omega_G^3} |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 + \frac{1}{9} \frac{R_{n+1} R'_{n+1} \gamma_4 K}{\omega_K^3} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2 \\ & - \frac{1}{9} \left(\frac{R_{n+1}}{\omega_K} \right)^2 [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}] L'_{n+1} \end{aligned} \quad (4.88)$$

gilt. Als Ableitungen R'_{n+1} und L'_{n+1} sind diejenigen aus (4.74) anzusetzen.

Da am Projektionsende zusätzlich zu $h_{4n+1} = 0$ auch $f_{4n+1} = 0$ gilt, bieten sich (4.85) und (4.86) für eine Newton-Iteration an. Die Linearisierung der entsprechenden Taylor-Reihenentwicklungen führt auf das Gleichungssystem

$$f_{4n+1}^{(k+1)} = f_{4n+1}^{(k)} + \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_4^{(k)}} \Delta \gamma_4^{(k+1)} + \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}} \Delta q_{4n+1}^{(k+1)} = 0 \quad (4.89)$$

$$h_{4n+1}^{(k+1)} = h_{4n+1}^{(k)} + \frac{\partial h_{4n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_4^{(k)}} \Delta \gamma_4^{(k+1)} + \frac{\partial h_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}} \Delta q_{4n+1}^{(k+1)} = 0 \quad , \quad (4.90)$$

das sich in Matrixschreibweise in der Form

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_4^{(k)}} & \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial h_{4n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_4^{(k)}} & \frac{\partial h_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \gamma_4^{(k+1)} \\ \Delta q_{4n+1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_{4n+1}^{(k)} \\ h_{4n+1}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4.91)$$

darstellen läßt. Aus der Multiplikation mit der Inversen der ersten Matrix können die Zuwächse $\Delta \gamma_4^{(k+1)}$ und $\Delta q_{4n+1}^{(k+1)}$ bestimmt werden, womit sich für den nächsten Iterationsschritt

$$\gamma_4^{(k+1)} = \gamma_4^{(k)} + \Delta \gamma_4^{(k+1)} \quad \text{und} \quad q_{4n+1}^{(k+1)} = q_{4n+1}^{(k)} + \Delta q_{4n+1}^{(k+1)} \quad (4.92)$$

ergeben. Sind die Residuen (4.89) und (4.90) kleiner als ein gewählter Toleranzwert, ist die Iteration abgeschlossen. Die plastischen Verzerrungen \mathbf{E}_{n+1}^{pl} und die plastische Variable α_{4n+1} können mittels (4.70) und (4.71) berechnet werden, die Spannungen folgen über $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^D + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{1}$ aus (4.80) und (4.81).

In zusammengefaßter Form ist das Projektionsverfahren für die kugelförmige Fließfläche in Tafel 4.3 zu finden.

Im weiteren sollen die im Rahmen der Taylor-Reihenentwicklungen (4.89) und (4.90) verwendeten Ableitungen genauer verifiziert werden. Als Ableitung der Fließbedingung (4.85) nach dem plastischen Parameter γ_4 ergibt sich

$$\frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \gamma_4} = - \frac{\frac{R_{n+1} 2G}{\omega_G^3} |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 + \frac{1}{9} \frac{R_{n+1} K}{\omega_K^3} [\text{tr} \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2}{\sqrt{\frac{1}{\omega_G^2} |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 + \frac{1}{9 \omega_K^2} [\text{tr} \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2}} \quad . \quad (4.93)$$

Startwerte: $\gamma_4^{(k)} = 0, \quad \alpha_{4n+1}^{(k)} = \alpha_{4n}, \quad q_{4n+1}^{(k)} = q_{4n}$
 Versuchsspannungen: $\mathbf{S}_{trial} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}), \quad \mathbf{S}_{trial}^D = \mathbf{S}_{trial} : \mathbb{P}$

1. Auswahl von $h_{4n+1}^{(k)}$

$$\alpha_{4n+1}^{(k)} \begin{cases} < \alpha_e & \longrightarrow h_{4n+1}^{(k)} \text{ nach (4.86)}_1 \\ \geq \alpha_e & \longrightarrow h_{4n+1}^{(k)} \text{ nach (4.86)}_2 \end{cases}$$

2. Abfrage der Residuen

$$\left. \begin{array}{l} f_{4n+1}^{(k)}(q_{4n+1}^{(k)}, \gamma_4^{(k)}) \leq \text{Tol.} \\ h_{4n+1}^{(k)}(q_{4n+1}^{(k)}, \gamma_4^{(k)}) \leq \text{Tol.} \end{array} \right\} \longrightarrow \boxed{\text{Iterationsende}}$$

3. Bestimmung der Zuwächse $\Delta\gamma_4^{(k+1)}$ und $\Delta q_{4n+1}^{(k+1)}$ mit (4.91)

$$\begin{bmatrix} \Delta\gamma_4^{(k+1)} \\ \Delta q_{4n+1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_4^{(k)}} & \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}} \\ \frac{\partial h_{4n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_4^{(k)}} & \frac{\partial h_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{4n+1}^{(k)} \\ h_{4n+1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

4. Aktualisierung der notwendigen Werte

$$\gamma_4^{(k+1)} = \gamma_4^{(k)} + \Delta\gamma_4^{(k+1)}, \quad q_{4n+1}^{(k+1)} = q_{4n+1}^{(k)} + \Delta q_{4n+1}^{(k+1)}$$

$$\alpha_{4n+1}^{(k+1)} = \alpha_{4n}^{(k)} - \gamma_4^{(k)} \frac{\partial f_{4n+1}^{(k)}}{\partial q_{4n+1}^{(k)}}$$

5. Gehe zu 1. mit $(k) = (k + 1)$

Nachlauf: $\gamma_4 = \gamma_4^{(k+1)}, \quad \alpha_{4n+1} = \alpha_{4n+1}^{(k+1)}, \quad q_{4n+1} = q_{4n+1}^{(k+1)}$

$$\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1}^D + \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{S}_{n+1} \mathbf{1} \text{ mit (4.80) und (4.81), } \mathbf{E}_{n+1}^{pl} \text{ aus (4.70)}$$

Tafel 4.3: Projektionsalgorithmus für kugelförmige Fließfläche

Im Falle daß $\alpha_n - \gamma_4 \partial f_{4n+1} / \partial q_{4n+1} < \alpha_e$ ist, lauten die ersten Ableitungen der Funktion h_{4n+1}

$$\frac{\partial h_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} = 1 + \frac{4}{3} \gamma_4 \frac{f_{cm}}{\alpha_e} \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}^2} \left[1 - \frac{1}{\alpha_e} \left(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} \right) \right] \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial h_{4n+1}}{\partial \gamma_4} = \frac{4}{3} \frac{f_{cm}}{\alpha_e} \left(\frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} + \gamma_4 \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1} \partial \gamma_4} \right) \left[1 - \frac{1}{\alpha_e} \left(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} \right) \right], \quad (4.95)$$

für eine entfestigendes Materialverhalten, $\alpha_e < \alpha_n - \gamma_4 \partial f_{4n+1} / \partial q_{4n+1} < \alpha_{cu}$, sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} &= 1 - 2 \frac{f_{cm}}{\alpha_e^2} \gamma_4 \left(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} - \alpha_e \right) \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}^2} \\ &\cdot \exp \left[- \frac{(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{4n+1}}{\partial \gamma_4} &= -2 \frac{f_{cm}}{\alpha_e^2} \left(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} - \alpha_e \right) \left(\frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} + \gamma_4 \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1} \partial \gamma_4} \right) \\ &\cdot \exp \left[- \frac{(\alpha_{4n} - \gamma_4 \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] \end{aligned} \quad (4.97)$$

anzunehmen. Die in (4.94) bis (4.97) notwendigen zweiten Ableitungen der Fließbedingung folgen aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}^2} &= \\ &\left[R_{n+1}'^2 \gamma_4 2G \frac{\omega_G - 3R_{n+1}}{\omega_G^4} |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 - \frac{4}{9} \frac{R_{n+1} R_{n+1}' \gamma_4 K}{\omega_K^3} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}] L_{n+1}' \right. \\ &+ \frac{1}{9} R_{n+1}'^2 \gamma_4 K \frac{\omega_K - 3R_{n+1}}{\omega_K^4} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2 \\ &\left. + \frac{1}{9} \left(\frac{R_{n+1}}{\omega_K} \right)^2 L_{n+1}'^2 \right] \frac{1}{f_{4n+1} - R_{n+1}} - \frac{\Omega^2}{(f_{4n+1} - R_{n+1})^{2/3}} \end{aligned} \quad (4.98)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1} \partial \gamma_4} = & \\
& \left[R_{n+1} R'_{n+1} 2G \frac{\omega_G - \gamma_4 6G}{\omega_G^4} |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 + \frac{2 R_{n+1}^2 K}{9 \omega_K^3} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}] L'_{n+1} \right. \\
& \left. + \frac{1}{9} R_{n+1} R'_{n+1} K \frac{\omega_K - \gamma_4 3K}{\omega_K^4} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2 \right] \frac{1}{f_{4n+1} - R_{n+1}} \\
& + \Omega \frac{\frac{R_{n+1}^2 2G}{\omega_G^3} |\mathbf{S}_{trial}^D|^2 + \frac{1}{9} \frac{R_{n+1}^2}{\omega_K^3} [\text{tr } \mathbf{S}_{trial} - L_{n+1}]^2}{(f_{4n+1} - R_{n+1})^{2/3}}, \tag{4.99}
\end{aligned}$$

womit alle für den Prädiktor-Korrektor Algorithmus der Kugel erforderlichen Ableitungen bekannt sind.

4.3.3 Algorithmisch konsistenter Tangentenmodul

Bevor ein erneuter Lastschritt aufgebracht und das zugehörige Strukturverhalten numerisch simuliert werden kann, ist die Bestimmung des konsistenten elastoplastischen Tangentenmoduls $\mathbb{C}_{n+1}^t = d\mathbf{S}_{n+1}/d\mathbf{E}_{n+1}$ erforderlich. Für die kugelförmige Fließfläche erfolgt dies in der allgemeinen Form, die von SIMO et al. [201],[194] oder HOFSTETTER & MANG [94] vorgestellt und in Abschnitt 3.3.3 ausführlich beschrieben wurde. Mit dem dort hergeleiteten algorithmischen Modul

$$\mathbb{E}_{4n+1} = \left[\mathbb{C}^{-1} + \gamma_4 \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} \right]^{-1} \tag{4.100}$$

läßt sich analog zu (3.68) eine Koeffizientenmatrix \mathbf{Z}_{4n+1} bilden, die den Zusammenhang zwischen den differentiellen Größen $d\gamma_4$ beziehungsweise $\gamma_4 dq_{4n+1}$ und den totalen Verzerrungsänderungen $d\mathbf{E}_{n+1}$ herstellt. Die Komponenten dieser Matrix ergeben sich entsprechend (3.69) aus

$$\begin{aligned}
z_{11} &= \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathbf{\Xi}_{4n+1} : \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \\
z_{12} &= \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathbf{\Xi}_{4n+1} : \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{4n+1}} - \frac{1}{\gamma_4} \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} \\
z_{21} &= z_{12} \\
z_{22} &= \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathbf{\Xi}_{4n+1} : \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{4n+1}} - \frac{1}{\gamma_4} \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}^2} - \frac{1}{\gamma_4^2} H^{-1} \quad .
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Die Symmetrie von \mathbf{Z}_{4n+1} , die sich in $z_{21} = z_{12}$ widerspiegelt, stellt sich aufgrund des als assoziativ angenommenen Ver- und Entfestigungsverhaltens ein. Im allgemeinen Fall ist die Koeffizientenmatrix unsymmetrisch.

Werden die Komponenten von \mathbf{Z}_{4n+1}^{-1} mit z_{ij}^{-1} bezeichnet, so folgt der konsistente Tangentenmodul

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \frac{d \mathbf{S}_{n+1}}{d \mathbf{E}_{n+1}} = \mathbf{\Xi}_{4n+1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 z_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_{in+1} \otimes \bar{\mathbf{N}}_{jn+1} \tag{4.102}$$

gemäß (3.71), wobei die Werte von $\bar{\mathbf{N}}_{in+1}$ mit dem algorithmischen Modul und den Ableitungen der Fließbedingung analog (3.70) zu bilden sind.

Der in (4.101)₄ verwendete Verfestigungsmodul H , der sich über die plastische Deformationsenergie W^{pl} herleiten läßt, (3.31)₂, beschreibt den Zusammenhang $\dot{q}_{4n+1} = -H \dot{\alpha}_{4n+1}$. Er ergibt sich dementsprechend aus

$$H = - \frac{\partial q_{4n+1}}{\partial \alpha_{4n+1}} \tag{4.103}$$

und läßt sich für $\alpha_{4n+1} < \alpha_e$ aus (4.67)₁ ermitteln

$$H = - \frac{4}{3} \frac{f_{cm}}{\alpha_e} \left[1 - \frac{\alpha_{4n+1}}{\alpha_e} \right] \quad . \tag{4.104}$$

Nach Überschreiten der maximal aufnehmbaren Druckspannung f_{cm} bei $\alpha_{4n+1} = \alpha_e$ gilt für q_{4n+1} (4.67)₂, so daß H den Wert

$$H = -2f_{cm} \frac{\alpha_{4n+1} - \alpha_e}{\alpha_{cu}} \exp \left[- \frac{(\alpha_{4n+1} - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] \tag{4.105}$$

annimmt.

Da mit dem Abschluß der Projektion alle Zustandsgrößen des aktuellen Zeitschritts t_{n+1} bekannt sind, können die für die Bestimmung von \mathbb{C}_{n+1}^t notwendigen Differentiale mittels der Fließbedingung (4.65) gebildet werden. Die partiellen Ableitungen von f_4 nach den Spannungen und der Ver- und Entfestigungsfunktion waren bereits an früherer Stelle erforderlich und sind in (4.72) und (4.73) zu finden. Weiteres Differenzieren führt auf

$$\frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} = \frac{\mathbb{P} + \frac{1}{9} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}}{R_{n+1}} - \hat{\mathbf{N}}_{n+1} \otimes \left[\mathbf{S}_{n+1}^D + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] \mathbf{1} \right] \quad (4.106)$$

$$\frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}^2} = \frac{L'_{n+1}}{9R_{n+1}} - \frac{\left[\frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] (-L'_{n+1}) \right]^2}{\left[|\mathbf{S}_{n+1}^D|^2 + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}]^2 \right]^{3/2}} \quad (4.107)$$

und auf die gemischte Ableitung

$$\frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{4n+1}} = -\frac{L'_{n+1}}{9R_{n+1}} \mathbf{1} + \hat{\mathbf{N}}_{n+1} \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] L'_{n+1} \quad , \quad (4.108)$$

bei der die Ableitungsreihenfolge beliebig ist. In (4.106) und (4.108) wurde aus Gründen der Übersicht

$$\hat{\mathbf{N}}_{n+1} = \frac{\left[\mathbf{S}_{n+1}^D + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}] \mathbf{1} \right]}{\left[|\mathbf{S}_{n+1}^D|^2 + \frac{1}{9} [\text{tr} \mathbf{S}_{n+1} - L_{n+1}]^2 \right]^{3/2}} \quad (4.109)$$

gewählt.

In Tafel 4.4 sind die wesentlichen Beziehungen des konsistenten elastoplastischen Tangentenmoduls für die kugelförmige Fließfläche in knapper Form dargestellt.

4.3.4 Kopplung von Fließkegel und Kugel

Nachdem in den vorangegangenen Abschnitten das Projektionsverfahren und der Tangentenmodul für die kugelförmige Fließfläche f_4 hergeleitet wurden, ist diese Fläche mit den zusammengesetzten Kegeln f_1 bis f_3 zu koppeln. Im Gegensatz zur unstetigen Kopplung der einzelnen Drucker-Prager-Fließbedingungen soll sich die Kegelfläche f_2 tangential an die Kugel f_4 anschmiegen, Kugelradius R und Mittelpunkt L wurden dementsprechend in (4.66) gewählt. Um im Verlauf von irreversiblen Verformungen diesen glatten Übergang erhalten zu können, muß für

konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul für Fließbedingung f_4

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \frac{d\mathbf{S}_{n+1}}{d\mathbf{E}_{n+1}} = \mathbb{E}_{4n+1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 z_{ij}^{-1} \bar{\mathbf{N}}_{in+1} \otimes \bar{\mathbf{N}}_{jn+1}$$

mit algorithmischem Modul $\mathbb{E}_{4n+1} = \left[\mathbb{C}^{-1} + \gamma_4 \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}^2} \right]^{-1}$ und

$$\bar{\mathbf{N}}_{1n+1} = \mathbb{E}_{n+1} : \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} \quad , \quad \bar{\mathbf{N}}_{2n+1} = \mathbb{E}_{n+1} : \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{4n+1}}$$

z_{ij}^{-1} sind Komponenten der invertierten Koeffizientenmatrix \mathbf{Z}_{4n+1} mit

$$z_{11} = \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathbb{E}_{4n+1} : \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}}$$

$$z_{12} = \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathbb{E}_{4n+1} : \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{4n+1}} - \frac{1}{\gamma_4} \frac{\partial f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}} = z_{12}$$

$$z_{22} = \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1} \partial \mathbf{S}_{n+1}} : \mathbb{E}_{4n+1} : \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial \mathbf{S}_{n+1} \partial q_{4n+1}} - \frac{1}{\gamma_4} \frac{\partial^2 f_{4n+1}}{\partial q_{4n+1}^2} - \frac{1}{\gamma_4^2} H^{-1}$$

Ableitungen von f_{4n+1} nach (4.72), (4.73) und (4.106) bis (4.108)

$$H = \begin{cases} -\frac{4}{3} \frac{f_{cm}}{\alpha_e} \left[1 - \frac{\alpha_{4n+1}}{\alpha_e} \right] & \text{für } \alpha_{4n+1} < \alpha_e \\ -2f_{cm} \frac{\alpha_{4n+1} - \alpha_e}{\alpha_{cu}} \exp \left[-\frac{(\alpha_{4n+1} - \alpha_e)^2}{\alpha_{cu}^2} \right] & \text{für } \alpha_e \leq \alpha_{4n+1} < \alpha_{cu} \end{cases}$$

Tafel 4.4: konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul der Kugel

beide beteiligten Fließflächen dieselbe Ver- und Entfestigungsfunktion $q_2 = q_4$, (4.15) beziehungsweise (4.67) und dieselbe interne plastische Variable $\alpha_2 = \alpha_4$ gelten.

Während in Abschnitt 4.2.5 die drei kegelförmigen Fließflächen über den von SIMO et al. [200], [201] vorgeschlagenen Algorithmus gekoppelt wurden, erfolgt der tangentialer Anschluß der Kugel an die Gesamtfließfläche in Anlehnung an die Arbeit von PRAMONO & WILLAM [173]. Dieser Wechsel im algorithmischen Vorgehen ist notwendig, da sich – wie später gezeigt wird, Abb. 4.10 – bei der Projektion auf eine zusammengesetzte Kegel-Kugel-Fläche die Situation einstellen kann, daß zwar der neue Zustand für den Zeitschritt t_{n+1} gefunden, die kugelförmige Fließbedingung allerdings nicht erfüllt ist. Die Beschreibung eines solchen Verhaltens

ist mit dem Verfahren nach SIMO et al. [200], [201] nicht möglich.

Klassischerweise wird bei einem Vorgehen nach PRAMONO & WILLAM [173] zuerst auf die Fließfläche mit dem größten Einfluß auf den Versuchszustand projiziert. Sollte im Anschluß daran noch eine weitere Fließbedingung verletzt sein, wird die Projektion auf diese Fläche wiederholt. In gleicher Weise wird solange verfahren, bis alle Fließbedingungen erfüllt sind. Der Vorteil dieses rechenintensiven Algorithmus ist darin zu sehen, daß letztendlich auch Flächen am plastischen Fließen beteiligt sein können, die in einer ersten Abschätzung nicht aktiv zu sein scheinen.

Um im vorliegenden Fall zu entscheiden, welche der beiden Fließflächen f_2 oder f_4 den größten Einfluß auf den Versuchszustand hat, wird eine weitere kegelförmige Fläche

$$f_5 = |\mathbf{S}^D| + \xi_5 I_1 - q_5 \quad (4.110)$$

eingeführt. Die Parameter ξ_5 und q_5 dieser Fläche werden so gewählt, daß sie zum einen orthogonal auf der Drucker-Prager-Fläche f_2 steht und zum anderen ihre Spitze mit dem Mittelpunkt L von f_4 zusammenfällt. Somit kann erreicht werden, daß auf dem Kegel f_5 der Schnitkreis von Drucker-Prager-Fläche f_2 und Fließkugel f_4 liegt.

Mit der Vorgabe der Orthogonalität der beiden Flächen f_2 und f_5 muß das Produkt von deren Gradienten

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}^D}{|\mathbf{S}^D|} + \xi_2 \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f_5}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}^D}{|\mathbf{S}^D|} + \xi_5 \mathbf{1} \quad (4.111)$$

verschwinden, womit sich analog zu (4.24) der geometrische Parameter

$$\xi_5 = -\frac{1}{\xi_2} (\mathbf{1} : \mathbf{1})^{-1} = -\frac{1}{3\xi_2} \quad (4.112)$$

einstellt. Für die Ermittlung eines geeigneten Wertes q_5 , mit dem sich f_5 entlang der hydrostatischen Achse verschieben läßt, wird der hydrostatische Fall $|\mathbf{S}^D| = 0$ betrachtet. Da sich für diese Situation der Kugelmittelpunkt ergeben soll, folgt

$$I_1 = q_5 \frac{1}{\xi_5} = L \quad \longrightarrow \quad q_5 = -\frac{1}{3\xi_2} L \quad . \quad (4.113)$$

Unter Berücksichtigung von (4.112) und (4.113) kann die Fläche f_5 als

$$f_5 = |\mathbf{S}^D| + \frac{1}{3\xi_2} (1 - L) \quad (4.114)$$

formuliert werden. Entsprechend des Wertes, den f_5 für einen Spannungszustand annimmt, kann entschieden werden, ob der Kegel f_2 oder die Kugel f_4 den elastischen Bereich begrenzt. Der zusätzlich eingeführte Kegel übernimmt somit ausschließlich die Funktion einer Schaltfläche und spiegelt dementsprechend keinerlei Materialverhalten wider. Stellt sich $f_5 > 0$ ein, so wird der kugelförmige Teil der gekoppelten Fließfläche berücksichtigt, andernfalls ($f_5 \leq 0$) ist f_2 maßgebend, siehe Abb. 4.9. Im letzterem Fall ergibt sich die oben beschriebene Situation, daß

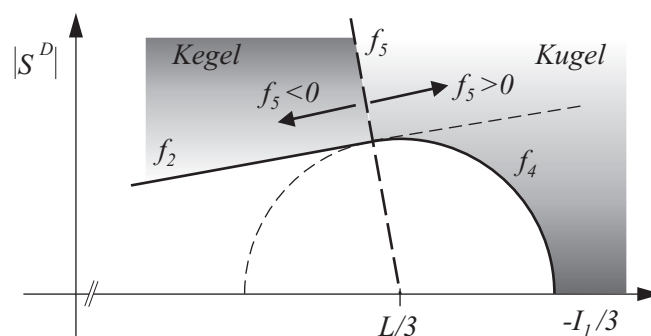


Abbildung 4.9: Auswahl der Projektionsfläche mittels Schaltfläche f_5

eine eventuell erforderliche Rückskalierung des Zustandes \mathbf{S}_{trial} abgeschlossen ist, obwohl für die Fließbedingung f_4 noch $f_4 > 0$ gilt.

Im Detail läßt sich der Projektionsalgorithmus bei einem verfestigenden Materialverhalten, also vor dem Erreichen der maximal aufnehmbaren Druckspannung, wie folgt beschreiben: Ist die kegelförmige Fließbedingung f_2 durch den Versuchszustand verletzt, so wird in einem ersten Schritt auf diese Fläche projiziert. Über die neuen plastischen Werte q_2 beziehungsweise α_2 und die zugehörige Mittelpunktslage L ergibt sich die aktualisierte Schaltfläche f_{5neu} . Ist diese erfüllt ($f_{5neu} < 0$) ist der Spannungszustand \mathbf{S}_{n+1}^a gefunden, Abb. 4.10. Andernfalls ist eine Skalierung auf die Kugel f_4 erforderlich, womit sich \mathbf{S}_{n+1}^b ergibt. Gilt für \mathbf{S}_{trial} allerdings $f_2 < 0$, so handelt es in Abhängigkeit von f_5 entweder um eine elastische Belastung oder \mathbf{S}_{n+1}^c liegt auf der Kugelfläche f_{4n+1} .

Befindet sich das Material im Zustand der Entfestigung, was eine Kontraktion der zusammengesetzten Fließfläche bedeutet, wird mit der Abfrage von f_5 begonnen. Stellt sich $f_5 > 0$ ein, so ist im Falle eines plastischen Zustandes, $f_4 > 0$, nur der kugelförmige Bereich aktiv. Ist andererseits $f_5 < 0$, so wird anfänglich auf f_2 projiziert. Mit dem neuen Mittelpunkt L ergibt sich f_{5neu} anhand der entschieden werden kann, ob eine weitere Projektion auf die Kugel erforderlich wird.

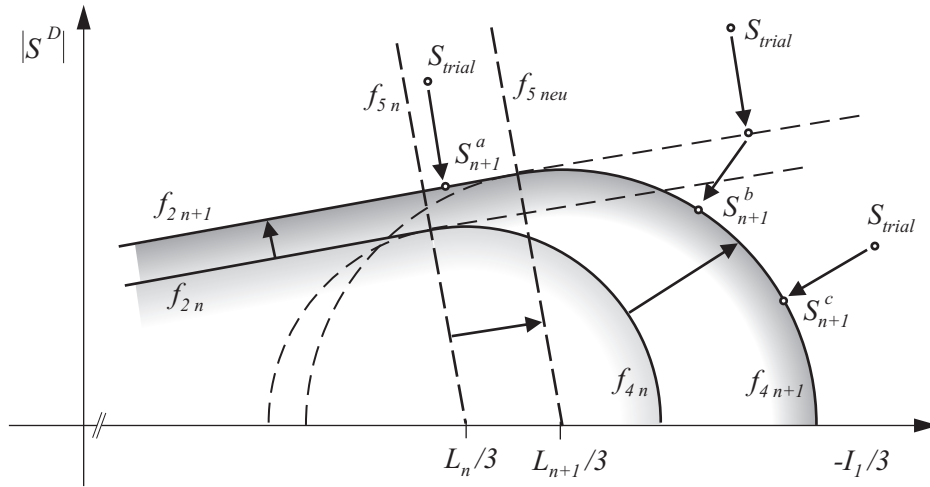


Abbildung 4.10: Projektionsalgorithmus im reinen Druckbereich

Bei der Kopplung der drei Drucker-Prager-Fließkegel war es möglich einen gemeinsamen konsistenten elastoplastischen Tangentenmodul \mathbb{C}_{n+1}^t zu formulieren, bei dem ausschließlich die aktiven Fließflächenteile über einen Faktor c_i miteinbezogen wurden, siehe Abschnitt 4.2.6. Dies ist im Rahmen der Anbindung einer kugelförmigen Fließfläche in einer entsprechenden Weise nicht möglich, da die algorithmische Form der einzelnen Tangenten (4.64) und (4.102) zu stark variiert. Mit Einführung einer Größe c^t , die für die letzte aktiv am Projektionsverfahren beteiligte Fließfläche auf 1 und für die übrigen auf 0 gesetzt wird, kann die Tangente als

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = c_{DP}^t \mathbb{C}_{DPn+1}^t + c_K^t \mathbb{C}_{Kn+1}^t \quad (4.115)$$

angegeben werden. Dabei ist für \mathbb{C}_{DPn+1}^t der Tangentenmodul der gekoppelten Fließkegel (4.64) zu verwenden, \mathbb{C}_{Kn+1}^t ist der konsistente Modul der Fließkugel (4.102).

4.4 Darstellung des Modellverhaltens

Nach der Entwicklung eines numerischen Modells zur Simulation von Betonversagen im allgemeinen Spannungsraum, ist ein Vergleich mit dem realen Materialverhalten unabdingbar. Zu diesem Zweck werden für einfache Probekörper die Versagensformen bei unterschiedlichen Spannungs kombinationen, sowie die Modellantworten auf zyklische Be- und Entlastung ermittelt.

4.4.1 Skalierung der zusammengesetzten Fließfläche

Um das zuvor entwickelte dreidimensionale Modell mit unterschiedlichem Druck- und Zugverhalten sinnvoll zur Simulation des Werkstoffs Beton einsetzen zu können, wird eine Skalierung der gekoppelten Fließfläche erforderlich. Diese Anpassung an bestehende Versuchsergebnisse erfolgt mit Hilfe der in den Drucker-Prager-Kriterien (4.1) eingeführten geometrischen Parameter ξ_i sowie über die Größen η_i . Letztere gehen in die Ver- und Entfestigungsfunktionen (4.7) beziehungsweise (4.15) der einzelnen Fließflächenteile ein. Als maßgebende Versuchsergebnisse für die Festlegung der einzelnen Größen wird die im biaxialen Spannungsraum aufgetragene Versagenskurve von KUPFER et al. [128], [127] herangezogen, welche in Abb. 2.6 a) dargestellt ist.

Die Parameter ξ_1 und η_1 der ersten Drucker-Prager-Teilfläche f_1 lassen sich in Anlehnung an MENRATH [150] mit Hilfe der eindimensionalen Zug- und Druckfestigkeit f_{ctm} und f_{cm} als

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta_1 f_{cm} - f_{ctm}}{\zeta_1 f_{cm} + f_{ctm}}, \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{2 \zeta_1 f_{cm}}{\zeta_1 f_{cm} + f_{ctm}} \quad (4.116)$$

definieren. Über den skalaren Faktor ζ_1 ist es möglich, die Abnahme der maximal aufnehmbaren Zugspannung in Querrichtung bei steigender Druckbeanspruchung zu beschreiben. In Abb. 4.11 ist ein Schnitt der zusammengesetzten Fließbedingung mit der normierten zweiaxialen Spannungsebene für $\sigma_3 = 0$ dargestellt. Wie zu erkennen ist, können die Ergebnisse von KUPFER et al. für den gemischten Zug/Druck-Bereich mit $\zeta_1 = 1.0$ im Mittel approximiert werden. Bei einer Wahl von $\zeta_1 = 3.0$ bildet f_1 eine hyperbolische Umhüllende der einzelnen Versuchsergebnisse.

Die exakte Geometrie der Teilfläche f_2 hängt ausschließlich von der Größe ζ_2 , die das Verhältnis zwischen der einaxialen und der zweiaxialen Druckfestigkeit beschreibt, ab und ist über

$$\xi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta_2 - 1}{2 \zeta_2 - 1} \quad \text{sowie} \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\zeta_2}{2 \zeta_2 - 1} \quad (4.117)$$

bestimmt. Ein Vergleich zwischen der elliptischen Schnittkurve von f_2 und den zweiaxialen Versagenspunkten läßt ζ_2 zwischen 1.16 und 1.20 als sinnvoll erscheinen, Abb. 4.11. Da bereits bei der Wahl von Mittelpunkt L und Radius R der kugelförmigen Fließfläche f_4 (4.65) die stetige Kopplung mit f_2 berücksichtigt wurde und die Gestalt von f_4 somit nur von den geometrischen Parametern ξ_2 und η_2 abhängt, ist die zusammengesetzte Fließbedingung für Beton über (4.116) und (4.117) vollständig definiert.

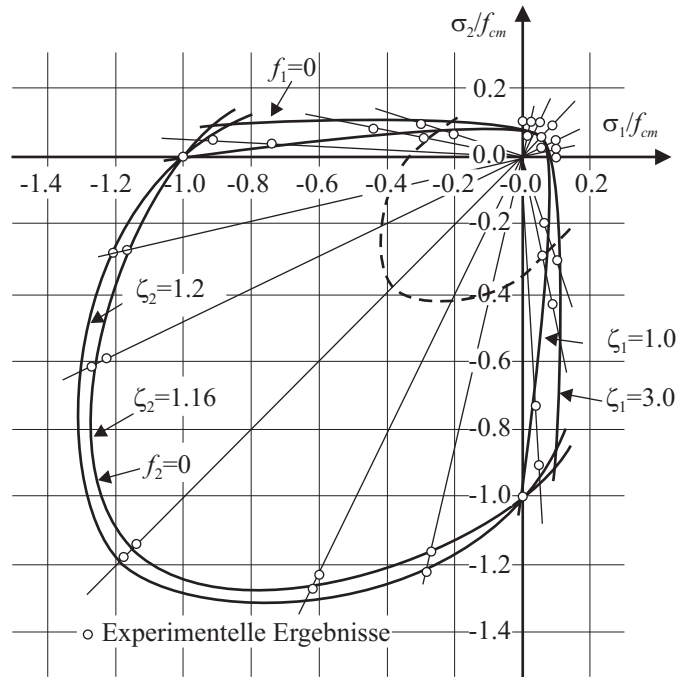


Abbildung 4.11: Schnitt der gekoppelten Fließbedingung und zweiaxiale Versagenspunkte nach Versuchen von KUPFER et al. [128]

4.4.2 Versagensformen für verschiedene Spannungskombinationen

Zur Darstellung des Modellverhaltens für unterschiedliche dreidimensionale Spannungszustände wird das einfache Beispiel eines würfelförmigen Versuchskörpers herangezogen, SCHÜTT & WAGNER [191]. Die Spannung, die in der ersten Richtung wirkt, wird zu $S_{11} = \sigma$ gesetzt, während die Richtungen senkrecht zu dieser mit $S_{22} = S_{33} = \vartheta \sigma$ belastet sind. Die Größe ϑ ist dabei als beliebiger skalarer Faktor zu verstehen. Da sich für den gewählten Belastungszustand keine Schubspannungen einstellen, lassen sich die erste Invariante I_1 und die Norm der deviatorischen Spannungsanteile $|\mathbf{S}^D|$ in Abhängigkeit von ϑ mit

$$I_1 = (1 + 2\vartheta) \sigma \quad , \quad |\mathbf{S}^D| = \sqrt{\frac{2}{3}} |(1 - \vartheta) \sigma| \quad (4.118)$$

angeben. Bei einer Steigerung der aufgetragenen Spannung σ wachsen die deviatorischen und die hydrostatischen Spannungsanteile im Verhältnis

$$\delta = \frac{|\mathbf{S}^D|}{I_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|1 - \vartheta|}{1 + 2\vartheta} \text{sign}(\sigma) \quad (4.119)$$

an, das in Abhängigkeit vom gewählten Faktor ϑ konstant bleibt.

Besonderes Augenmerk bei der Untersuchung verschiedener Spannungskombinationen sei auf die Stellen der Fließfläche gerichtet, an denen unterschiedliche Teilflächen zusammentreffen. Diese Punkte sind in Abb. 4.12 als P_2 , P_3 und P_4 markiert. Die ersten beiden definieren den Schnittpunkt der Drucker-Prager-

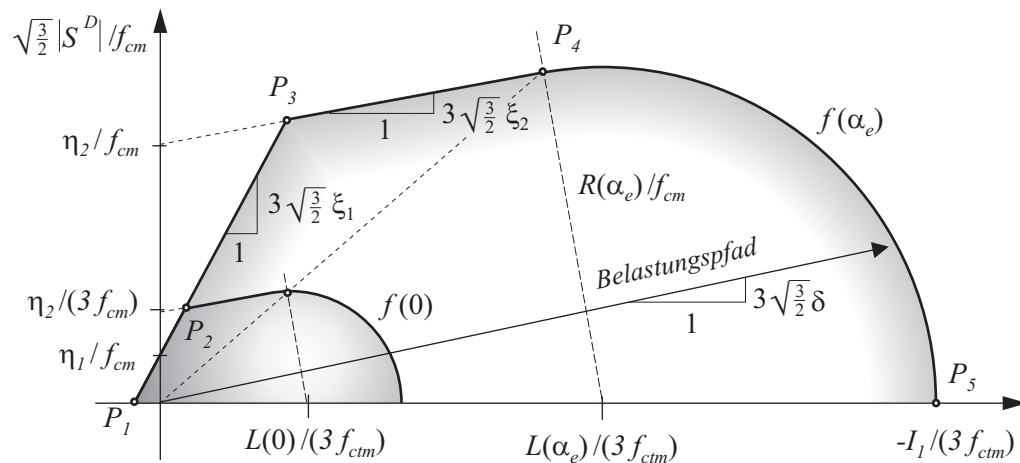


Abbildung 4.12: Geometrie der zusammengesetzte Fließfläche für Beton

Flächen f_1 und f_2 für das Ende des elastischen Verhaltens von f_2 beziehungsweise für die beginnende Entfestigung bei $\alpha_2 = \alpha_e$. In P_4 kommt es zum Wechsel von kegelförmiger Teilfläche f_2 zu kugelförmiger Fläche f_4 . Als weitere markante Punkte sind P_1 und P_5 eingeführt, für die sich der hydrostatische Zug- oder Druckzustand einstellt.

Wird im Rahmen des vorgeschlagenen Materialmodells von den Werten $\zeta_1 = 3.0$ und $\zeta_2 = 1.2$ sowie einem Festigkeitsverhältnis $f_{cm}/f_{ctm} = 10.0$ ausgegangen – was eine gute Näherung für die unterschiedlichen Betongüten darstellt – so lassen sich P_1 bis P_5 gemäß Tab. 4.1 angeben. Die Lage dieser speziellen Punkte folgt mit Hilfe geometrischer Überlegungen aus Abb. 4.12.

Zusätzlich zu den Koordinaten sind in Tab. 4.1 das Vorzeichen der aufzubringenden Belastung sowie die Größen des Faktors ϑ vermerkt, welche für das Erreichen des entsprechenden Punktes gewählt werden müssen. Unter der Annahme einer geometrisch linearen Berechnung, was für kleine Verzerrungen keine Einschränkung bedeutet, ergibt sich in der Invariantendarstellung ein linearer Belastungspfad mit der Steigung δ , (4.119). Die maximale Spannung σ_{max} , die auf den betrachteten Probekörper aufgebracht werden darf bevor das Materialversagen einsetzt, kann über

$$\sigma_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{|S^D|}{|1 - \vartheta|} = \frac{\eta_i f_i}{|1 - \vartheta|} \left[\frac{\xi_i}{\delta - \xi_i} + 1 \right] \quad \text{für } i = 1, 2 \quad (4.120)$$

Punkt	$\sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{S}^D $	I_1	$\sqrt{\frac{2}{3}} \delta$	σ	ϑ	$ \sigma_{max} $
P_1	0	$3\sigma_{max}$	0	+	1	$\frac{20}{29} f_{ctm}$
P_2	$\frac{13}{7} \sigma_{max} $	$-\frac{5}{7} \sigma_{max}$	$-\frac{13}{5}$	+	$-\frac{6}{7}$	$\frac{70}{43} f_{ctm}$
P_3	$\frac{21}{8} \sigma_{max} $	$-\frac{18}{8} \sigma_{max}$	$-\frac{7}{6}$	+	$-\frac{13}{8}$	$\frac{160}{43} f_{ctm}$
P_4	$\frac{3}{4} \sigma_{max} $	$-\frac{6}{4} \sigma_{max}$	$-\frac{1}{2}$	-	$\frac{1}{4}$	$\frac{8}{5} f_{cm}$
P_5	0	$-3\sigma_{max}$	0	-	1	$2.1809 f_{cm}$

Tabelle 4.1: Maßgebende Punkte der Fließfläche

ermittelt werden. Dieser Zusammenhang, der sich aus der Geometrie der Fließfläche ergibt, gilt nur für die kegelförmigen Teile der Gesamtfläche. Für den von der Kugel f_4 begrenzten Bereich ist es nicht möglich eine entsprechend einfache Beziehung aufzustellen.

Nachfolgend soll das unterschiedliche Verhalten der durch die Punkte P_1 bis P_5 begrenzten Bereich detailliert dargestellt werden. Da sich für das gewählte Beispiel eines perfekten Probekörpers unter allseitiger Belastung keine Lokalisierungseffekte einstellen, werden die Ergebnisse der einzelnen Berechnungen in Form von Spannungs-Dehnungs-Diagrammen aufbereitet. Um allgemeingültige Aussagen treffen zu können, wird dabei die Spannungsachse mit dem Kehrwert der einaxialen Zugfestigkeit f_{ctm} skaliert, so daß bei der Wahl der Materialparameter nur die Verhältnisse der einzelnen Größen entscheidend sind, nicht aber ihre absoluten Werte oder Einheiten. Es werden bei einem Elastizitätsmodul von $E = 1000$ und einer Querkontraktion $\nu = 0.0$ die Spannungen $f_{ctm} = 1.0$ und $f_{cm} = 10.0$ angenommen. Als Bruchenergien gehen $G_f = 0.01$ und $G_c = 1.00$ ein.

Der Zugbereich

Dieser erste Bereich wird durch den hydrostatischen Zugzustand und den Punkt P_2 begrenzt, was bei der Wahl einer positiven Spannung σ einen Wert von ϑ zwischen 1.0 und $-6/7$ ermöglicht. Der Sonderfall einer eindimensionalen Belastung bei $\vartheta = 0.0$ ist somit enthalten. Da für den Zugbereich nur die erste Drucker-Prager-Fläche aktiviert wird, ist das Materialversagen durch einen exponentiellen Entfestigungsverlauf gemäß (4.7) gekennzeichnet, siehe dazu das Spannungs-Dehnungs-Diagramm Abb. 4.13. Die maximal aufnehmbare Spannung $S_{11} = \sigma_{max}$

hängt dabei, wie zu vermuten war, von der Größe der orthogonal wirkenden

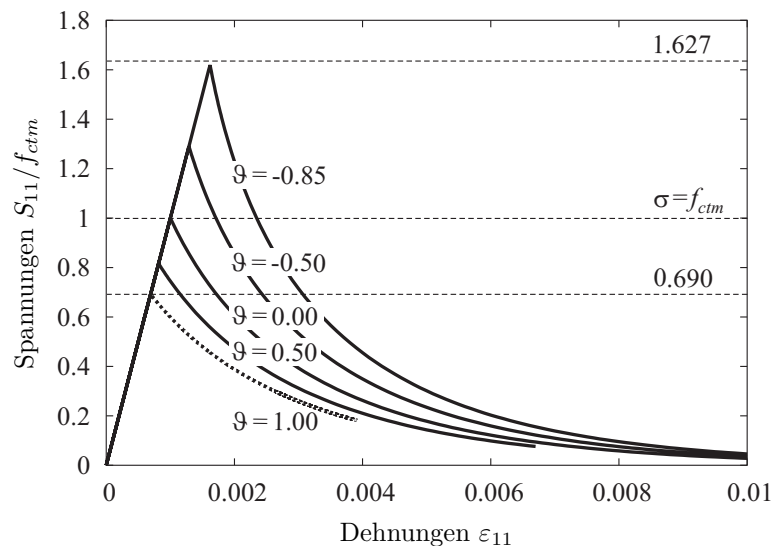


Abbildung 4.13: Normiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Zugbereiches

Spannungen ab. Für den Fall einer hydrostatischen Belastung, $\vartheta = 1.0$, wird als Maximalwert $0.690 f_{ctm}$ erreicht, was zwar unterhalb des für Beton zu erwartenden Wertes von $1.0 f_{ctm}$ liegt, STEMPNIEWSKI & EIBL [209], aber der mittels (4.120) berechneten Größe entspricht. Diese leichte Modellabweichung, die sich bereits in der zweidimensionalen Darstellung, Abb. 4.11, als Folge der hyperbolischen Schnittkurve von Fläche f_1 zeigte, muß bei der Wahl einer kegelförmigen Fließfläche für den Zugbereich als Nachteil in Kauf genommen werden. Kompensiert wird diese Unterschätzung der maximalen dreidimensionalen Zugfestigkeit bei der Berechnung von bewehrten Betonstrukturen, da dort die Aufnahme der Zugspannungen durch die Stahleinlagen dominiert wird. Eine Modifikation des numerischen Modells hinsichtlich des reinen Zugversagens für die genauere Beurteilung von unbewehrtem Beton findet sich in Abschnitt 5.

Bei einer quer zur Richtung von S_{11} aufgetragenen Druckspannung, die mit $\vartheta < 0.0$ erreicht wird, stellt sich eine Stabilisierung des Materials ein: Die aufnehmbare Zugspannung liegt oberhalb der einaxialen Zugfestigkeit und steigt bei Erreichen des Punktes P_2 auf deren 1.627 fachen Wert an, was in guter Näherung mit der in Tab. 4.1 angegebenen Größe übereinstimmt.

Der gemischte Zug/Druck-Bereich

Unter einer Belastung, für die das Verhältnis zwischen der positiven Spannung S_{11} und den orthogonal wirkenden $S_{22} = S_{33}$ im Bereich von $-6/7 \leq \vartheta \leq -13/8$ liegt,

sind sowohl die Fließbedingung f_1 als auch f_2 aktiv am plastischen Fließen beteiligt. Dementsprechend kommen neben der Entfestigungsfunktion q_1 nach (4.7) auch q_2 , welche die Ver- und Entfestigung unter Druckbeanspruchung beschreibt (4.15), zum Tragen. In Abb. 4.14 sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven für unterschiedliche Werte von ϑ dargestellt. Wird ein Belastungspfad gewählt, der jenseits des Punktes P_2 liegt, so beginnt sich die gesamte Fließfläche mittels der quadratischen Verfestigung von f_2 aufzuweiten, (4.15)₁. Wird im Rahmen dieser Expansion die Drucker-Prager-Bedingung f_1 verletzt, so setzt ein exponentielles Zugversagen ein, was sich in einem abrupten Abknicken des Kurvenverlaufes zeigt. Je größer der Betrag der wirkenden Druckbelastung gewählt wird, desto später tritt dieses Versagen ein. Die obere Grenze des gemischten Zug/Druck-Bereiches bildet der Punkt P_3 , an dem sich die Teilflächen f_1 und f_2 schneiden, sobald die maximale Ausdehnung der zusammengesetzten Fließfläche bei $\alpha_2 = \alpha_e$ erreicht wird. Ab dieser Spannungs-kombination ist bei weiter abnehmendem ϑ kein Versagen infolge Zugbeanspruchung mehr möglich, es stellt sich eine Entfestigung gemäß (4.15)₂ ein, was im weiteren gezeigt werden soll.

Der Druckbereich

Im dritten und letzten charakteristischen Bereich der Fließfläche wird das nicht-lineare Betonverhalten ausschließlich über die Ver- und Entfestigungsfunktion (4.15) des Druckzustandes beschrieben. Die Grenzen dieses Druckbereiches liegen zwischen den Punkten P_3 und P_5 , wobei letzterer den hydrostatischen Zu-

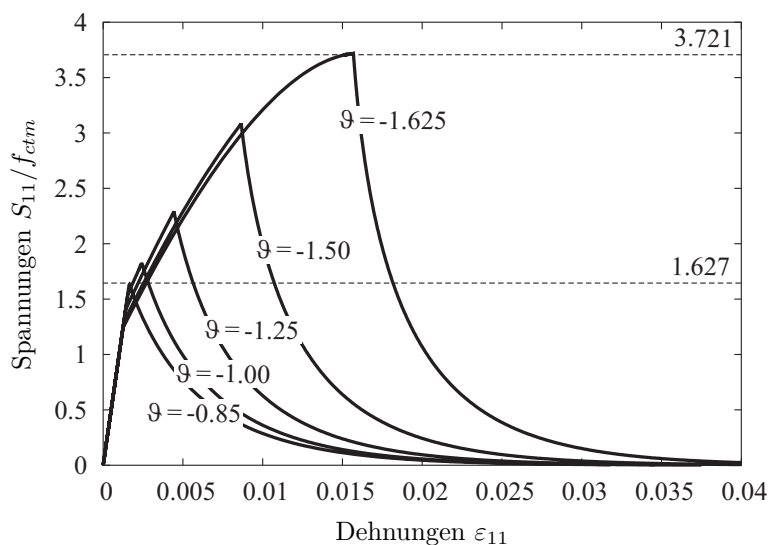


Abbildung 4.14: Normiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm des gemischten Zug/Druck-Bereiches

stand $S_{11} = S_{22} = S_{33}$ kennzeichnet. Bei der Wahl einer negativen Spannung σ ergeben sich mit (4.119) und Tab. 4.1 ϑ -Werte zwischen -0.05 und 1.0 , für welche die Fließbedingungen f_2 beziehungsweise f_4 über den gesamten Belastungsvorgang hinweg aktiviert bleiben. In Abb. 4.15 sind die Spannungs-Dehnungs-Kurven für unterschiedliche Belastungssituationen dargestellt, die im weiteren diskutiert werden sollen.

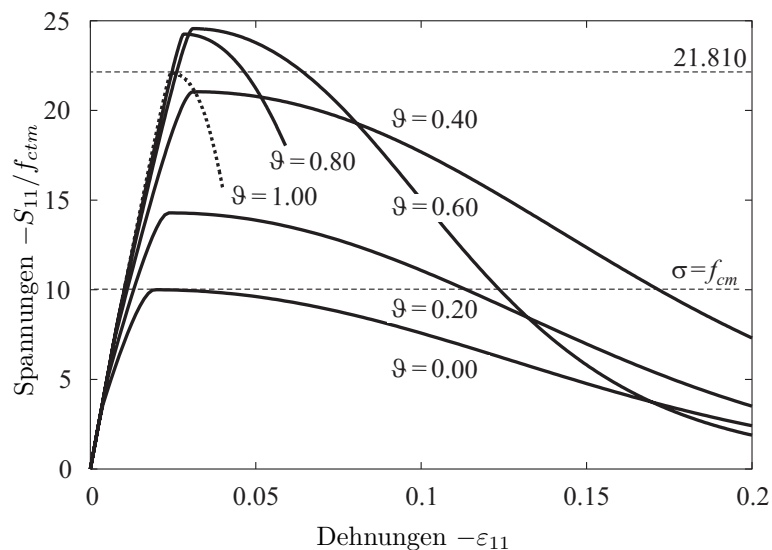


Abbildung 4.15: Normiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Druckbereiches

Wie zu vermuten war, ergibt sich bei der Betrachtung eines reinen Druckzustandes für den eindimensionalen Fall, $\vartheta = 0.0$, die geringste Belastbarkeit des Versuchskörpers. Mit Erreichen der einaxialen Druckfestigkeit $S_{11} = f_{cm}$ beginnt die stetige Entfestigung des Materialgefüges. Eine Erhöhung der quer zur ersten Spannungsrichtung wirkenden Druckbelastung führt dagegen – als Folge der stabilisierenden Umschnürungswirkung – zu einem größeren Tragvermögen, bis bei etwa $\vartheta = 0.60$ der Maximalwert von $2.457 f_{cm}$ beziehungsweise $24.57 f_{ctm}$ gefunden wird. Wie numerische Untersuchungen zeigen, ist eine Laststeigerung nicht möglich, vielmehr nimmt bei weiter zunehmenden seitlichen Drücken die maximale Größe von S_{11} ab. Für den hydrostatischen Druckzustand beginnt die Entfestigung bereits bei dem 2.182fachen Wert von f_{cm} , was annähernd mit den in Tab. 4.1 über die Geometrie der Fließfläche bestimmten Größe übereinstimmt und rund 89% der maximalen Druckspannung entspricht. Ein ähnliches Verhalten zeigt sich auch im Rahmen einer zweidimensionalen Belastung: Wie den experimentell ermittelten Versagenskurven von KUPFER et al. [128], Abb. 2.6, entnommen werden kann, stellt sich bei den Spannungen $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.16 f_{cm}$ das Betonversagen ein, wobei die maximal aufnehmbare Druckspannung $1.25 f_{cm}$ beträgt.

Ein Vergleich der einzelnen Spannungs-Dehnungs-Kurven läßt, neben den erwarteten qualitativ sehr ähnlichen Entfestigungsverläufen, einen stetig zunehmenden Gradienten der verfestigenden Kurvenäste erkennen. Infolge dieses Verhaltens nehmen mit dem Überschreiten von $\vartheta = 0.60$ die Verzerrungen ε_{11} , bei denen der Grenzwert α_e erreicht wird, ab, was auf ausgeprägte plastische Verformungen in allen drei Belastungsrichtungen schließen läßt.

Zusammenfassung

Im Rahmen des zwar einfachen aber trotz allem sehr aussagekräftigen Beispiels eines würfelförmigen Körpers unter dreiaxialer Belastung zeigen sich ausgesprochen gute Übereinstimmungen mit den Ergebnissen entsprechender experimenteller Versuche, die in Abschnitt 2.1.3 diskutiert wurden. Die charakteristischen Versagensformen der unterschiedlichen Bereiche lassen sich beispielsweise in den Arbeiten von VAN MIER [220] und VAN MIER & REINHARDT [221] wiederfinden, wo sie dem Versagen des Prüfkörpers durch Trennbruch, ausgeprägte Gleitflächen oder Zerstörung der Zementmatrix zugeordnet werden, siehe Abb. 2.7 b). Wie ein Vergleich mit den Spannungs-Dehnungs-Kurven aus Abb. 2.7 a) zeigt, spiegelt das numerische Materialmodell das von JAMET et al. [103] beobachtete Betonverhalten unter dreiaxialer Druckbeanspruchung deutlich wider.

Eine Zusammenfassung der unterschiedlichen Versagenscharakteristiken und eine Zuordnung zu den entsprechenden Bereichen der zusammengesetzten Fließfläche ist mit Abb. 4.16 gegeben. Auf eine Skalierung der Abszisse wird dort verzichtet

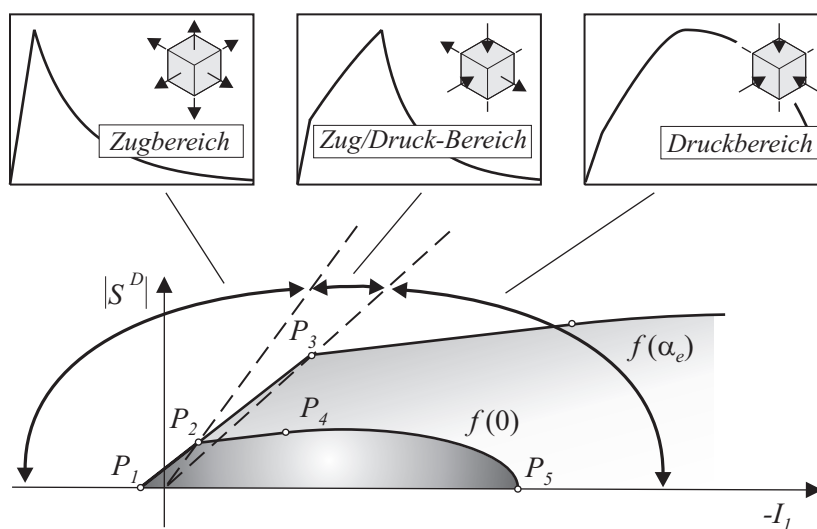


Abbildung 4.16: Charakteristische Bereiche der Fließfläche

um einen Eindruck von der tatsächlichen Gestalt der Fläche zu gewinnen.

4.4.3 Monotone sowie zyklische Be- und Entlastung

Vor der Darstellung der Modellantwort auf wiederholte Be- und Entlastungsvorgänge, erscheint es angebracht, das Verhalten der in diesem Abschnitt entwickelten Formulierungen mit experimentellen Daten zu vergleichen. Besonders aufschlußreich ist in diesem Zusammenhang die Gegenüberstellung der unterschiedlichen Ansätze zur Beschreibung des Betonversagens unter Druckbeanspruchung. Während die von FEENSTRA [71] und FEENSTRA & DE BORST [72] eingeführte Entfestigungsfunktion (4.8) von einem parabolischen Verlauf im Nachbruchbereich ausgeht, wurde für das vorliegende Materialmodell in Anlehnung an LACKNER [129] und WINKLER [232] eine exponentielle Formulierung gewählt, (4.12). Die Größe α_e , die den Wechsel von ver- zu entfestigendem Materialverhalten darstellt, ergibt sich für den parabolischen Ansatz nach (4.9), für den exponentiellen nach (4.14). Als Referenz für die numerische Untersuchung mit einem $300\text{ mm} \times 150\text{ mm} \times 150\text{ mm}$ Probekörper werden die im CEB-FIP Model Code [30] beziehungsweise bei REINHARDT [178] zu findenden Spannungs-Dehnungs-Verläufe herangezogen, welche sich im Rahmen von experimentellen

		C 20/25	C 40/50	C 80/95
E	$\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	28800	34500	42300
G_c	$\left[\frac{N}{\text{mm}}\right]$	18.0	21.0	23.0
f_{cm}	$\left[\frac{N}{\text{mm}^2}\right]$	28.0	48.0	88.0

Tabelle 4.2: Materialkennwerte der numerischen Berechnung

Druckversuchen für unterschiedliche Festigkeitsklassen ergeben. Die gewählten Materialparameter sind in Tab. 4.2 zusammengestellt, als Querkontraktion wurde einheitlich $\nu = 0.2$ angesetzt.

Für einen Beton C20/25 können bei Verwendung des Ansatzes von FEENSTRA [71] und FEENSTRA & DE BORST [72] die Versuchswerte bis zum Erreichen der maximalen Belastbarkeit und bei beginnender Entfestigung sehr gut approximiert werden. Wie in Abb. 4.17 zu erkennen ist, wird das Tragvermögen des Betons bei zunehmender Gefügauflockerung nur noch bedingt erfaßt. Ein deutlich anderes Bild zeigt sich bei Betonen höherer Festigkeitsklassen, hier sind die Scheitelpunkte von Versuchskurve und numerischer Simulation stark versetzt, was auf

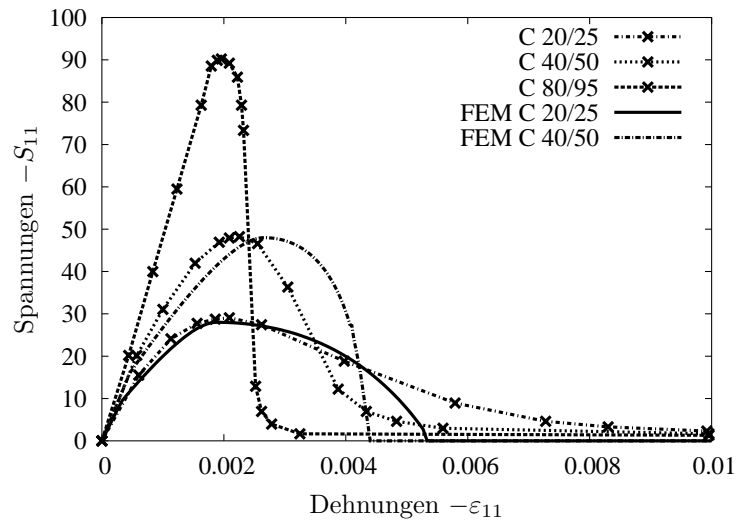


Abbildung 4.17: Vergleich von Versuchsergebnissen und parabolischer Entfestigungsfunktion (4.8) mit α_e nach (4.9)

einen nicht zutreffenden Wert von α_e hindeutet. Als Folge dieser Unzulänglichkeit kommt es im Vorbruchbereich zu einer Unterschätzung, nach Überschreiten des Maximalwertes zu einer starken Überschätzung der aufnehmbaren Spannungen. Für eine vorgegebene Belastung stellen sich somit zu große Verzerrungen ein. Da sich die Formulierungen (4.8) und (4.9) offensichtlich nur für Normalbetone, nicht aber für hochfeste eignen, wird auf die Berechnung mit einem C80/95 verzichtet.

Bei Verwendung der exponentiellen Entfestigungsfunktion (4.12) und einem α_e nach (4.14) ergeben sich unabhängig von der maximalen Druckfestigkeit des verwendeten Betones sehr gute Übereinstimmungen mit den Versuchskurven experimenteller Untersuchungen. Die in Abb. 4.18 zu erkennenden geringen Abweichungen, die sich für begrenzte Bereiche zeigen, können im Rahmen einer numerischen Simulation des Tragverhaltens von Betonstrukturen und der phänomenologischen Darstellung der Versagensmechanismen vernachlässigt werden. Ein Vergleich der Qualität der Ergebnisse, die die unterschiedlichen Formulierungen liefern, bestätigt die in Abschnitt 4.2.2 getroffenen Wahl des Ver- und Entfestigungsansatzes.

Wie bereits an anderer Stelle ausführlich beschreiben, kommt es im Nachbruchbereich zu einer fortschreitenden Schädigung des Materialgefüges, was im Kontext der Plastizitätstheorie durch einen Degradation der elastischen Materialparameter berücksichtigt werden kann. Um die Wirkungsweise der in Abschnitt 4.2.3 eingeführten Ansätze darstellen zu können, soll der zuvor gewählte Versuchskörper mehrfach be- und entlastet werden. Die Beurteilung der gewonnenen Ergebnisse erfolgt anhand von Spannungs-Dehnungs-Verläufen, welche den experimen-

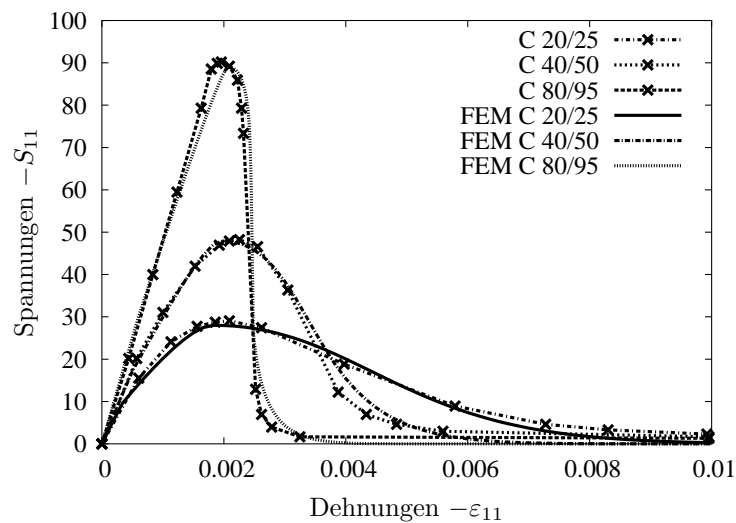


Abbildung 4.18: Vergleich von Versuchsergebnissen und exponentieller Entfestigungsfunktion (4.12) mit α_e nach (4.14)

tellen Untersuchungen von KARSAN & JIRSA [108], SINHA et al. [205] sowie REINHARDT [177] entnommen sind. Für den verwendeten Beton C20/25 werden neben den in Tab. 4.2 angegebenen Materialparametern die Zugfestigkeit $f_{ctm} = 2.2 \text{ N/mm}^2$ und die charakteristischen Bruchenergie $G_f = 0.080 \text{ N/mm}$ gewählt.

Ein Vergleich der in Abb. 4.19 dargestellten Ergebnisse belegt die gute Übereinstimmung des numerisch ermittelten Kurvenverlaufes mit den experimentell gewonnenen. Während bei einer zyklischen Druckbeanspruchung vor dem Errei-

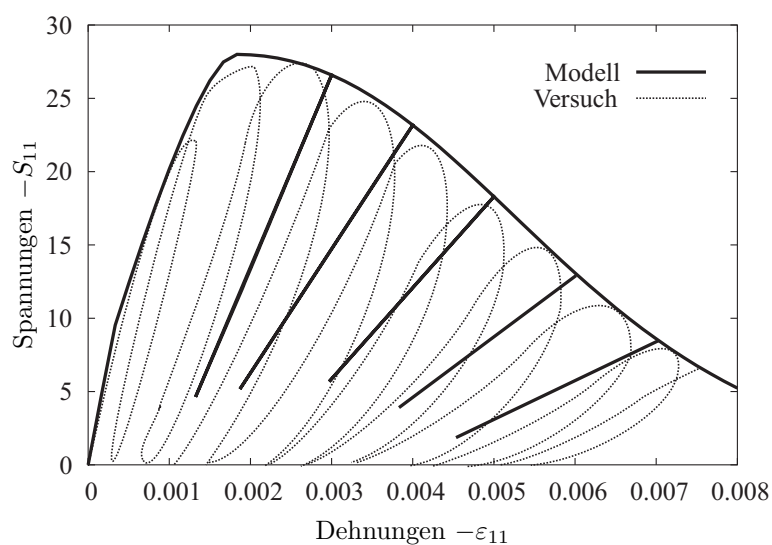


Abbildung 4.19: Zyklische Be- und Entlastung bei Druckbeanspruchung

chen der maximal aufnehmbaren Spannung keine Schädigung erkennbar ist, zeigt sich im Bereich fortschreitender Entfestigung eine zunehmende Degradation. Diese führt zu einer kontinuierlich abnehmenden Steigung der Ent- und Wiederbelastungspfade, welche die tatsächlichen Verläufe im Mittel approximieren. Da es sich bei den im weiteren untersuchten Problemstellungen um monoton belastete handelt und das degradierende Verhalten ausschließlich für die Beschreibung der Nachbarbereiche von Lokalisierungszonen verwendet wird, ist das vorgestellte Modell für eine detaillierte Erfassung der schleifenförmigen Kurvenverläufe nicht ausgelegt. Eine Erweiterung der Formulierung um entsprechende viskoelastische Anteile oder weitreichendere Ansätze der Schädigungstheorie ist prinzipiell möglich, im vorliegenden Fall allerdings nicht vorgesehen.

Eine ähnlich gute Übereinstimmung von Versuch und numerischer Simulation ist für wiederholte Entlastungsvorgänge unter Zugbeanspruchung festzustellen, siehe Abb. 4.20. Auch hier stellt sich mit zunehmender Auflockerung des Materi-

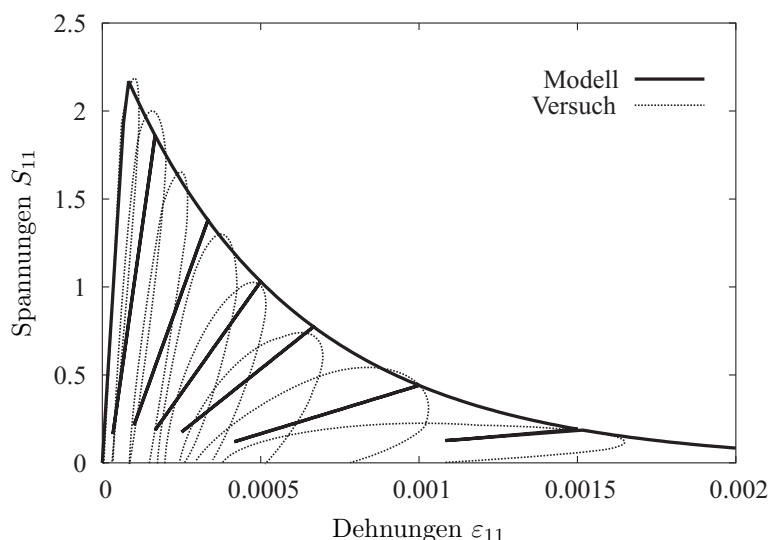


Abbildung 4.20: Zyklische Be- und Entlastung bei Zugbeanspruchung

algefüges eine Abnahme der elastischen Steifigkeit ein, welche bei Verwendung der Ansätze (4.16) beziehungsweise (4.17) die tatsächlichen Kurvenverläufe im Mittel erfüllen. Die Abweichungen, die sich im Bereich der maximalen Zugspannung feststellen lassen, folgen aus der Annahme eines linearelastischen Vorbruchverhaltens und werden im Hinblick auf ihren geringen Einfluß und den erhöhten algorithmischen Aufwand, den eine exaktere Beschreibung bedeuten würde, in Kauf genommen.

5 Alternative Modellformulierung

Für eine exakte Erfassung des Verhaltens von unbewehrtem Beton unter nahezu hydrostatischen Zugzuständen ist, wie die Diskussion in Abschnitt 4.4 gezeigt hat, ein Drucker-Prager-Kriterium nur bedingt geeignet. Um das bisher entwickelte Modell auch für diesen sehr speziellen Belastungsfall einsetzen zu können, soll es mittels eines dreidimensionalen Hauptspannungskriteriums modifiziert werden. Die Verwendung einer derartigen Fließbedingung ist beispielsweise bei zweidimensionalen Betonmodellen des Typs A zu finden, siehe Abb. 4.1, und kommt unter anderem in den Arbeiten von MESCHKE et al. [155], FEENSTRA [71], LOURENCO et al. [138], WEDEMEIER [228] und FEENSTRA & DE BORST [73] zur Anwendung.

Die Einführung dieser neuen Fließflächenform macht die Verwendung eines weiteren Projektionsalgorithmus erforderlich und es besteht die Notwendigkeit für jeden Iterationsschritt ein Eigenwertproblem zur Ermittlung der Hauptspannungen und deren Richtungen zu lösen. Infolge der somit deutlich aufwendigeren und rechenintensiveren Algorithmen soll es ausschließlich für die Berechnung von unbewehrten Strukturen, bei denen das mehrdimensionale Zugversagen maßgeblich wird, eingesetzt werden. Für in erster Linie druckbeanspruchte Bauteile oder beim Vorhandensein einer Zugbewehrung wird zur effizienten Berechnung weiterhin die bisher entwickelte Drucker-Prager-Formulierung eingesetzt.

5.1 Formulierung eines Hauptspannungskriteriums

Das bereits in den Anfängen der mathematischen Beschreibung von plastischen Vorgängen formulierte Zugspannungskriterium von Rankine basiert auf der Annahme, daß Materialversagen ab dem Moment eintritt, wenn in einer Hauptrichtung eine spezifische Grenzspannung überschritten wird. Es ist somit durch drei senkrecht zu den Hauptachsen stehende Ebenen gekennzeichnet. Dieses für spröde Werkstoffe sehr gut geeignete Kriterium kann im allgemeinen Spannungsraum über

$$f_R = 2\sqrt{3}J_2 \cos \theta + I_1 - 3\bar{y} \quad (5.1)$$

beschrieben werden, CHEN & HAN [38], MESCHKE [153] und andere, wobei \bar{y} die äquivalente eindimensionale Zugfestigkeit darstellt. Für den Lode-Winkel θ , der von der dritten Spannungsinvarianten I_3 abhängt, gilt

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3}{J_2^{2/3}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \theta \leq \pi/3 \quad . \quad (5.2)$$

Dieser Winkel, der auch bei der Formulierung kontinuierlicher Fließflächen des Typs D, Abb. 4.2, verwendet wird, siehe KRENK [121] oder ETSE & WILLAM [67], definiert für $\theta = 0^\circ$ den sogenannten Zugmeridian, für den Druckmeridian gilt $\theta = 60^\circ$.

Wie der Abb. 5.1, welche die dreidimensionale Rankine-Fließfläche als Schnitt mit der σ_1 - σ_2 -Ebene und im Hauptspannungsraum darstellt, zu entnehmen ist,

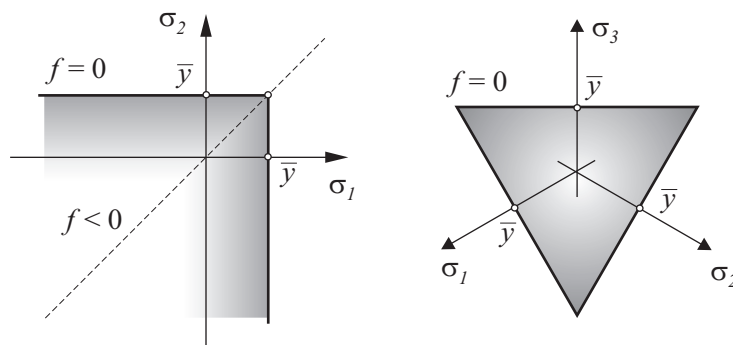


Abbildung 5.1: Rankine-Kriterium in zweidimensionaler Darstellung und als Deviatorschnitt

beschreibt (5.1) eine dreieckige Pyramide. Als problematisch erweisen sich bei dieser Flächenform die Unstetigkeiten an den Fließflächenkanten. Für den Fall, daß in zwei oder drei Hauptrichtungen dieselbe Spannung $\sigma_A = \sigma_B$ beziehungsweise $\sigma_A = \sigma_B = \sigma_C$ mit $A \neq B \neq C$ wirkt, ist der Gradient von f_R nicht mehr eindeutig definiert. Eine stabile Rückprojektion der elastischen Prädiktorspannungen auf die Fließfläche ist somit nicht möglich, wie bereits ausführlich in Abschnitt 3.2 erörtert wurde.

Zur Stabilisierung des Projektionsverfahrens schlägt FEENSTRA [71] eine Störung des algorithmischen Moduls Ξ , (3.65) beziehungsweise (3.56), vor, sobald sich in mindestens zwei Richtungen eine Versuchsspannung einstellt, die größer als die Zugfestigkeit \bar{y} ist. Mit Hilfe dieser Modifikation wird ein Zustand $\sigma_A = \sigma_B = \bar{y}$ erreicht, der dann über einen speziell zu ermittelnden Gradienten auf die Fließflächenkante skaliert wird.

Einen weitere Möglichkeit der numerischen Erfassung des Problems ergibt sich über eine Ausrundung der Unstetigkeitsstellen. In der Arbeit von PRAVIDA [174] wird beispielsweise ein skalarer Ausrundungsfaktor eingeführt, der die Größe der Ausrundung beschreibt und als Quadrat additiv in die Wurzel von (5.1) eingeht. Als nachteilige Folge dieses Vorgehens zeigt sich allerdings wie bei Verwendung eines Drucker-Prager-Kegels, daß die maximale Zugfestigkeit f_{ctm} im hydrostatischen Fall nicht erreicht werden kann. Desweiteren verbleibt bei vollständiger

Entfestigung unter allseitigem Zug, $\bar{y} = 0$, ein Druckspannungszustand, der physikalisch nicht zu erklären ist. Zur Unterbindung dieser Situation verschiebt WINKLER [232] die gesamte Fließfläche um die Größe der Ausrundung in die positiven Spannungsrichtungen. Wodurch sich bei vollständigem Materialversagen unter hydrostatischem Zug zwar $\sigma_A = 0$ für alle Richtungen einstellt, die Zugfestigkeit in den übrigen Fällen allerdings überschätzt wird.

Für die Modifikation des in Abschnitt 4 formulierten numerischen Betonmodells soll ein anderer Weg eingeschlagen werden, der sich als Konsequenz der bisherigen Algorithmen ergibt: Die Rankine-Fließbedingung wird nicht in einer geschlossenen dreidimensionalen Form angesetzt, sondern im Rahmen von unstehtig gekoppelten Fließflächen aus drei eindimensionalen Hauptspannungskriterien entwickelt. Mit der Anwendung des Algorithmus von SIMO et al. [200], [201], Abschnitt 4.2.5, lassen sich die bisher genannten Vorschläge zur Behandlung der Unstetigkeiten umgehen. Ein ähnliches Vorgehen ist in der Arbeit von LACKNER et al. [130] zu finden, die sich mit chemischer Korrosion von Spritzbeton auseinandersetzt.

Die drei eindimensionalen Zugspannungskriterien vom Rankine-Typ lassen sich als

$$f_{1A} = \sigma_A - q_1 \leq 0 \quad \text{mit} \quad A = 1, 2, 3 \quad (5.3)$$

schreiben, wobei der Index A die zur Hauptspannung σ_A gehörende Richtung angibt. Der erste Index 1 wird eingeführt, da die drei gekoppelten Fließbedingungen später den Drucker-Prager-Kegel f_1 ersetzen sollen. Anstelle der äquivalenten Zugspannung \bar{y} geht in (5.3) eine Entfestigungsfunktion q_1 ein, die die Reduktion der aufnehmbaren Zugspannungen nach Überschreitung des Maximalwertes f_{ctm} beschreibt. Während CRISFIELD & WILLS [44] für q_1 einen konstanten Wert beziehungsweise $q_1 = 0$ verwenden und somit eine Art 'tension cut-off' erzwingen, soll hier

$$q_1 = f_{ctm} \exp \left[-\frac{\alpha_1}{\alpha_{tu}} \right] \quad \text{mit} \quad \alpha_{tu} = \frac{G_f}{l_c f_{ctm}} \quad (5.4)$$

gelten, FEENSTRA [71]. Diese exponentielle Entfestigungsfunktion kam bereits in ähnlicher Form bei der Beschreibung des Zugbereiches mittels Drucker-Prager-Kegel f_1 zum Einsatz, (4.7). Dort war als Folge der verwendeten Fließbedingung ein zusätzlicher skalarer Faktor η_1 notwendig, (4.116)₂.

Da das Rankine-Kriterium für den Hauptspannungsraum definiert ist, soll im folgenden kurz auf den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen dreiaxialen

Spannungstensor, den Hauptspannungen sowie deren Basissysteme eingegangen werden: Für jeden beliebigen Tensor $\boldsymbol{\tau}$ läßt sich das zugehörige Eigenwertproblem

$$(\boldsymbol{\tau} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

aufstellen, welches mit der nichttrivialen Lösung $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ zu der charakteristischen Gleichung

$$\det(\boldsymbol{\tau} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad \longrightarrow \quad |\tau_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad (5.6)$$

führt. Bei Annahme einer orthonormierten dreiaxialen Basis folgen die drei Lösungen λ_A mit $A = 1, 2, 3$ über das Cayley-Hamilton-Theorem

$$\det(\boldsymbol{\tau} - \lambda \mathbf{1}) = -\lambda^3 + I_\tau \lambda^2 - II_\tau \lambda + III_\tau = 0 \quad (5.7)$$

in das die invarianten Größen I_τ , II_τ und III_τ eingehen. Aus den so gewonnenen Eigenwerten λ_A ergibt sich mit Hilfe der zugeordneten Eigenvektoren \mathbf{n}_A

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{A=1}^3 \lambda_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad . \quad (5.8)$$

Wird (5.8) auf den dreidimensionalen Spannungsraum übertragen, so folgt der Spannungstensor \mathbf{S} aus

$$\mathbf{S} = \sum_{A=1}^3 \sigma_A \mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A \quad , \quad (5.9)$$

wobei die normierten Richtungen \mathbf{n}_A die Basis der Hauptspannungen σ_A bilden. Allgemein werden die drei Hauptspannungen entsprechend ihrer Größe sortiert, so daß $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ gilt. Für einen umfassenden Einblick in diese Thematik sei auf die Werke von BAŞAR & WEICHERT [4] und STEIN & BARTHOLD [208] hingewiesen.

5.2 Projektionsalgorithmus für Rankine-Kriterium

Wie bereits angedeutet, soll die numerische Beschreibung der zusammengesetzten Rankine-Fließfläche mittels entsprechend SIMO et al. [200], [201] erfolgen. Im Rahmen der assoziierten 'multisurface plasticity' setzt sich die in (3.14) eingeführte Formänderungsenergiegedichte W_{0S} additiv aus dem elastischen Anteil $W^{el}(\mathbf{E}^{el})$

und der Summe der plastischen Deformationsenergien $W^{pl}(\alpha_{1A})$ aller z aktiv am Fließen beteiligten Flächen zusammen, (4.26). Gemäß Abschnitt 4.2.5 führt das Einsetzen von W_{0S} in die allgemeine Dissipationsungleichung (3.13) zu

$$\mathcal{D} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}^{pl} + \sum_{A=1}^z \frac{\partial W^{pl}}{\partial \alpha_{1A}} \dot{\alpha}_{1A} \geq 0 \quad , \quad (5.10)$$

was sich für den Hauptspannungsraum in der speziellen Form

$$\mathcal{D} = \sum_{A=1}^z \sigma_A \dot{\varepsilon}_A^{pl} + \sum_{A=1}^z q_{1A} \dot{\alpha}_{1A} = \sum_{A=1}^z \sigma_A \dot{\varepsilon}_A^{pl} + z q_1 \dot{\alpha}_1 \geq 0 \quad (5.11)$$

schreiben läßt. In (5.11) wurde die Annahme berücksichtigt, daß für alle drei gekoppelten Fließbedingungen (5.3) dieselbe plastische Variable $\alpha_{1A} = \alpha_1$ gilt. Für die Entfestigungsfunktionen folgt somit $q_{1A} = q_1$. Aus den Ableitungen der Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\tilde{\sigma}_A, \tilde{q}_1, \lambda_A) = - \sum_{A=1}^z \tilde{\sigma}_A \dot{\varepsilon}_A^{pl} + z \tilde{q}_1 \dot{\alpha}_1 + \sum_{A=1}^z \lambda_A f_{1A}(\tilde{\sigma}_A, \tilde{q}_1) \quad , \quad (5.12)$$

die sich über das Prinzip der maximalen Dissipation, (3.18), ergibt, lassen sich analog zu (4.27) bis (4.29) die Evolutionsgleichungen der unbekanntenen plastischen Größen $\dot{\varepsilon}_A^{pl}$ und $\dot{\alpha}_1$ bestimmen. Da das Rankine-Kriterium die sehr einfachen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_{1A}}{\partial q_1} = -1 \quad , \quad \frac{\partial f_{1A}}{\partial \sigma_B} = \begin{cases} 0 & \text{für } A \neq B \\ 1 & \text{für } A = B \end{cases} \quad (5.13)$$

besitzt, folgen die plastischen Evolutionsen

$$\dot{\varepsilon}_A^{pl} = \sum_{B=1}^z \lambda_B \frac{\partial f_{1B}}{\partial \sigma_A} = \lambda_A \quad (5.14)$$

$$\dot{\alpha}_1 = -\frac{1}{z} \sum_{A=1}^z \lambda_A \frac{\partial f_{1A}}{\partial q_1} = \frac{1}{z} \sum_{A=1}^z \lambda_A \quad (5.15)$$

als Summe über alle aktiven Fließflächen. Desweiteren gelten die Be- und Entlastungsbedingungen nach (3.38), welche die Kuhn-Tucker-Bedingungen des Optimierungsproblems (3.18) bilden.

Wird für die implizite Zeitintegration das in Abschnitt 3.3.1 ausführlich beschriebene Euler-Rückwärtsverfahren verwendet, so lassen sich mit den plastischen Parametern $\gamma_A = \lambda_A(t_{n+1} - t_n)$ die Zustandsgrößen

$$\varepsilon_{An+1}^{pl} = \varepsilon_{An}^{pl} + \gamma_A \quad , \quad \alpha_{1n+1} = \alpha_{1n} + \frac{1}{z} \sum_{A=1}^z \gamma_A \quad (5.16)$$

des $n+1$ -ten Zeitschritts berechnen.

Vor der Übertragung des zweiteiligen Projektionsverfahrens nach SIMO & HUGHES [198] auf die zusammengesetzte Rankine-Fläche, werden zur übersichtlicheren Darstellung die abkürzenden Matrixschreibweisen

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T \quad \text{beziehungsweise} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T \quad (5.17)$$

für die Hauptspannungen und -verzerrungen eingeführt. Für diese gilt mit dem elastischen Modul $\hat{\mathbb{C}}$ der Zusammenhang

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{wobei} \quad \hat{\mathbb{C}} = 2G \left[\hat{\mathbb{I}} - \frac{1}{3} (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) \right] + K (\hat{\mathbf{1}} \otimes \hat{\mathbf{1}}) \quad . \quad (5.18)$$

In (5.18) geht der im Hauptachsensystem vereinbarte Einheitsmatrix $\hat{\mathbf{1}}$ ein, die vierstufige Identität $\hat{\mathbb{I}}$ ist in Matrixnotation eine mit 1 besetzte Diagonalmatrix.

Mit der Einführung von (5.17) und (5.18) lassen sich die Versuchsspannungen des Zeitpunktes t_{n+1} in einem ersten elastischen Prädiktorschritt als

$$\boldsymbol{\sigma}_{trial} = \hat{\mathbb{C}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}) \quad (5.19)$$

schreiben. Für den Versuchswert der internen plastischen Größe wird der Wert des letzten Gleichgewichtszustandes $\alpha_{1trial} = \alpha_{1n}$ herangezogen. Erfüllen diese beiden Abschätzungen alle drei Fließbedingungen (5.3), so liegt ein elastischer Zustand vor. Andernfalls ist eine lokale Newton-Iteration erforderlich.

Mit Hilfe der Evolutionsgleichung (5.16)₁ ergeben sich als Spannungen des aktuellen Lastschritts

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{trial} - \hat{\mathbb{C}} \bar{\boldsymbol{\gamma}} \quad \text{mit} \quad \bar{\boldsymbol{\gamma}} = [c_{11}\gamma_1 \quad c_{12}\gamma_2 \quad c_{13}\gamma_3]^T \quad , \quad (5.20)$$

wobei der skalare Faktor c_{1A} die aktiven und inaktiven Fließflächenteile kennzeichnet. Ist ein Teilbereich mit $\gamma_A > 0$ aktiv an der Entstehung plastischer Verformungen beteiligt, so gilt $c_{1A} = 1$, ansonsten wird c_{1A} zu 0 gesetzt.

Über (5.16)₂ ist es möglich die skalare Entfestigungsfunktion als

$$q_{1n+1} = f_{ctm} \exp \left[-\frac{\alpha_{1n} + \frac{1}{z} \bar{\gamma} \hat{\mathbf{1}}}{\alpha_{tu}} \right] \quad (5.21)$$

anzugeben, so daß die Fließbedingungen in einer Form aufgestellt werden können, die als einzige unbekanntes Größen die plastischen Parameter γ_A enthalten

$$\mathbf{f}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{trial} - \hat{\mathbb{C}} \bar{\gamma} - \hat{\mathbf{1}} q_{1n+1} \quad . \quad (5.22)$$

Analog zu (5.17) sind dabei die drei Fließbedingungen f_{1A} in der Matrix \mathbf{f}_{n+1} zusammengefaßt.

Um eine stabile iterative Bestimmung von γ zu gewährleisten, wird (5.22) in Anlehnung an (4.42) in der modifizierten Form

$$\bar{\mathbf{f}}_{n+1} = \mathbf{c} \mathbf{f}_{n+1} + \bar{\mathbf{c}} \gamma = \mathbf{0} \quad , \quad (5.23)$$

geschrieben. Die Diagonalmatrizen \mathbf{c} und $\bar{\mathbf{c}}$ enthalten dabei die Größen c_{1A} sowie $(c_{1A} - 1)$. Über die Linearisierung der Taylor-Reihenentwicklung von (5.23), die der aus (4.43) entspricht, ergeben sich die Zuwächse $\Delta\gamma_A^{(k+1)}$ aus

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = - \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)}}{\partial \gamma^{(k)}} \right]^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)} \quad , \quad (5.24)$$

womit die plastischen Parameter $\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + \Delta\gamma^{(k+1)}$ für den nächsten Iterationsschritt bestimmt werden können. In Abhängigkeit von den Werten $\gamma_A^{(k+1)}$ ist die neuerliche Unterscheidung zwischen aktiven und inaktiven Fließflächenteile möglich, so daß gegebenenfalls die Zahl der an der Projektion beteiligten Flächen verringert werden kann. Unterschreiten die modifizierten Fließbedingungen (5.23) für die neuen $\gamma^{(k+1)}$ eine gewählte Toleranz, so ist die Iteration abgeschlossen, die Größen des aktuellen plastischen Lastschritts sind damit bekannt. Die Transformation der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ in das allgemeine Koordinatensystem erfolgt mit Hilfe von (5.9), die plastischen Verzerrungen können aus

$$\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S}_{n+1} \quad (5.25)$$

ermittelt werden. Da die interne plastische Variable α_1 im vorliegenden Fall der isotropen Entfestigung unabhängig von der gewählten Basis ist, ist für diese Größe keine Umrechnung erforderlich.

Die einzelnen Komponenten der Matrix $\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)} / \partial \boldsymbol{\gamma}^{(k)}$ lassen sich in Indexschreibweise als

$$\frac{\partial \bar{f}_{1An+1}^{(k)}}{\partial \gamma_B^{(k)}} = c_{1A} \left[c_{1B} \hat{\mathbb{C}}_{BA} + \frac{\partial q_{1n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_B^{(k)}} \right] + \delta_{AB}(1 - c_{1A}) \quad (5.26)$$

formulieren, wobei die Gradienten der Entfestigungsfunktion (5.21)

$$\frac{\partial q_{1n+1}^{(k)}}{\partial \gamma_B^{(k)}} = -\frac{1}{z} \frac{c_{1B}}{\alpha_{tu}} f_{ctm} \exp \left[-\frac{\alpha_{1n} + \frac{1}{z} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{(k)} : \hat{\mathbf{1}}}{\alpha_{tu}} \right] \quad (5.27)$$

zu berücksichtigen sind.

Es sei angemerkt, daß der entwickelte Projektionsalgorithmus nur gilt, wenn die Hauptrichtungen von $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ und $(\boldsymbol{\varepsilon}_{trial} - \boldsymbol{\gamma})$ identisch sind, was für den Fall eines Rankine-Kriteriums nach MESCHKE [153] und LACKNER et al. [130] gegeben ist.

Die wesentlichen Schritte und Zusammenhänge des Projektionsverfahrens der gekoppelten Rankine-Kriterien sind rezeptartig in Tafel 5.1 dargestellt.

5.3 Tangentenmodul für alternative Formulierung

Mit Abschluß des Projektionsverfahrens ist es für die weitere Strukturanalyse erforderlich den konsistenten elastoplastischen Tangentenmodul \mathbb{C}_{n+1}^t zu bestimmen. Dieser Modul bildet die Grundvoraussetzung für eine quadratische Konvergenz der globalen Iteration bei nichtlinearen Finite-Element-Berechnungen und ist definiert über

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \frac{d \mathbf{S}_{n+1}}{d \mathbf{E}_{n+1}} = \frac{d \mathbf{S}_{n+1}}{d \mathbf{E}_{trial}} : \frac{d \mathbf{E}_{trial}}{d \mathbf{E}_{n+1}} \quad (5.28)$$

Aufgrund der Beziehung $\mathbf{E}_{trial} = \mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl}$, (3.39), ergibt dabei das letzte Differential den vierstufigen Einheitstensor \mathbb{I} und entfällt somit. Anders als in Abschnitt 3.3.3, wo der Tangentenmodul in der von SIMO et al. [201],[194] vorgeschlagenen allgemeinen Form dargestellt ist, muß im folgenden die spezielle Definition der Rankine-Fließbedingung berücksichtigt werden. Da dieses Kriterium im Hauptspannungsraum definiert ist, ist der Zusammenhang zwischen den allgemeinen Spannungen \mathbf{S}_{n+1} und den Hauptspannungen $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ gemäß (5.9) zu berücksichtigen

suchswerten $d\varepsilon_{B_{n+1}}/d\varepsilon_{trial} = \mathbf{n}_B \otimes \mathbf{n}_B$, MESHKE [153], läßt sich dieser Ausdruck zu

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \sum_{A=1}^3 \sum_{B=1}^3 \hat{\mathbb{C}}_{AB}^t (\mathbf{n}_B \otimes \mathbf{n}_B) \otimes (\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A) + \sum_{A=1}^3 \sigma_{A_{n+1}} \frac{d(\mathbf{n}_A \otimes \mathbf{n}_A)}{d\varepsilon_{trial}} \quad , \quad (5.30)$$

vereinfachen. Dabei wurde der Tensor $\hat{\mathbb{C}}_{n+1}^t$ eingeführt, dessen Komponenten das Differential $\hat{\mathbb{C}}_{AB}^t = d\sigma_{A_{n+1}}/d\varepsilon_{B_{n+1}}$ bilden.

Es ist festzustellen, daß der elastoplastische Tangentenmodul (5.30) von seiner Gestalt her dem Materialtensor hyperelastischer Materialien für große Verzerrungen entspricht, KLINKEL [110], so daß er sich nach CHADWICK & OGDEN [33],[34] zu

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \hat{\mathbf{T}}_1 \hat{\mathbb{C}}_1 \hat{\mathbf{T}}_1 + \hat{\mathbf{T}}_2 \hat{\mathbb{C}}_2 \hat{\mathbf{T}}_2 \quad (5.31)$$

umformen läßt. Zur übersichtlicheren Darstellung wurden bei dieser Matrixschreibweise

$$\hat{\mathbb{C}}_1 = \hat{\mathbb{C}}_{n+1}^t = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\varepsilon_{n+1}} \quad , \quad \hat{\mathbb{C}}_2 = \text{diag} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} & \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} & \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \end{array} \right] \quad (5.32)$$

und für die Transformation zwischen den unterschiedlichen Koordinatensystemen

$$\hat{\mathbf{T}}_1 = [\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3]^T \quad (5.33)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_2 = [\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_2]^T \quad (5.34)$$

verwendet.

Zur Ermittlung des noch unbekanntenen elastoplastischen Tangentenmoduls des Hauptachsensystems $\hat{\mathbb{C}}_{n+1}^t$ werden die Spannungen des Zeitschritts t_{n+1} entsprechend (5.20) betrachtet

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}) - \hat{\mathbb{C}} \mathbf{c} \boldsymbol{\gamma} \quad , \quad (5.35)$$

womit sich das totale Differential

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \hat{\mathbb{C}} : d\varepsilon_{n+1} - \hat{\mathbb{C}} : \mathbf{c} d\boldsymbol{\gamma} \quad (5.36)$$

ergibt. Wie bereits bei der allgemeinen Darstellung der Plastizitätstheorie, Abschnitt 3, diskutiert, ist es erforderlich $d\gamma$ in Abhängigkeit von $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ auszudrücken, was mit

$$d\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \quad (5.37)$$

möglich wird. Mit Hilfe der Rechenregeln für implizite Funktionen läßt sich zudem die Ableitung der modifizierten Fließbedingungen (5.23) in der Form

$$\frac{d\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} + \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\gamma} : \frac{\partial\gamma}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{0} \quad (5.38)$$

schreiben. Aus der Multiplikation mit der Inversen von $\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}/\partial\gamma$ folgt somit

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = - \left[\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\gamma} \right]^{-1} \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (5.39)$$

Die Komponenten der inversen Matrix $[\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}/\partial\gamma]^{-1}$, die bereits im Rahmen des Projektionsverfahrens zur Berechnung des plastischen Parameters (5.24) erforderlich waren, sind in (5.26) angegeben.

Die zweite in (5.39) verwendete partielle Ableitung ergibt sich aus

$$\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}} : \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \mathbf{c} : \hat{\mathbb{C}} \quad (5.40)$$

Mit Kenntnis dieser Ableitung, die ausschließlich vom elastischen Modul $\hat{\mathbb{C}}$ und der Dioagonalmatrix \mathbf{c} abhängt, ist der Zusammenhang zwischen den Größen $d\gamma$ und $d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ gegeben. Nach dem Einsetzen in (5.36) berechnet sich für das Hauptachsensystem

$$\hat{\mathbb{C}}_{n+1}^t = \frac{d\sigma_{An+1}}{d\varepsilon_{Bn+1}} = \hat{\mathbb{C}} - \hat{\mathbb{C}} : \mathbf{c} \left[-\frac{\partial\bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial\gamma} \right]^{-1} \mathbf{c} : \hat{\mathbb{C}} \quad (5.41)$$

als elastoplastischer Tangentenmodul der zusammengesetzten Rankine-Fläche. Mit Hilfe von (5.31) kann dieser auf ein allgemeines kartesisches Koordinatensystem transformiert werden, so daß eine Kombination mit dem in Abschnitt 4 entwickelten numerischen Betonmodell vorgenommen werden kann.

Wie eine abschließende Betrachtung von Projektionsalgorithmus und Tangentenmodul \mathbb{C}_{n+1}^t zeigt, war es aufgrund der speziellen Gestalt der verwendeten Fließbedingungen möglich eine Formulierung zu finden, die wesentlich geschlossener und damit numerisch einfacher ist als die in Abschnitt 3 vorgestellte.

Konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul für Rankine-Kriterien

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \hat{\mathbf{T}}_1 \hat{\mathbb{C}}_1 \hat{\mathbf{T}}_1 + \hat{\mathbf{T}}_2 \hat{\mathbb{C}}_2 \hat{\mathbf{T}}_2$$

mit den Moduln im Hauptachsensystem

$$\hat{\mathbb{C}}_1 = \hat{\mathbb{C}} - \hat{\mathbb{C}} : \mathbf{c} \left[-\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}}{\partial \gamma} \right]^{-1} \mathbf{c} : \hat{\mathbb{C}} \quad , \quad \hat{\mathbb{C}}_2 = \text{diag} \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} & \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} & \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3} \end{bmatrix}$$

und der Transformation in den allgemeinen Spannungsraum

$$\hat{\mathbf{T}}_1 = [\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2 \quad \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3]^T$$

$$\hat{\mathbf{T}}_2 = [\mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_1 \quad \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_2]^T$$

Ableitungen von $\bar{\mathbf{f}}_{n+1}$ nach γ folgen aus (5.26).

Tafel 5.2: Konsistenter Tangentenmodul für gekoppelte Hauptspannungskriterien

5.4 Einbindung in das bestehende Betonmodell

Wie bereits bei der Einführung der Rankine-Fließbedingung (5.3) angedeutet, soll dieses den Drucker-Prager-Kegel f_1 des zuvor entwickelten Modells zur numerischen Beschreibung von Betonwerkstoffen ersetzen. Da sich das hier verwendete Hauptspannungskriterium aus insgesamt drei eindimensionalen Formulierungen zusammensetzt, stellen Unstetigkeitsstellen in der Fließfläche keine numerischen Schwierigkeiten mehr dar. Somit bedarf es für den Fall eines nahezu hydrostatischen Zugzustandes, der im Bereich der Spitze der Fließpyramide liegt, keiner speziellen Behandlung. Die Projektion des Versuchszustandes auf die aktuelle Fließfläche erfolgt in diesem Bereich nach den Regeln der Theorie unstetig zusammengesetzter Flächen. Folglich ist der im ersten Modell für die numerische Stabilität eingeführte Kegel f_3 , Abschnitt 4.2.4, der sogenannte 'inverted cone', nicht mehr erforderlich. Nach der Modifikation des bestehenden Modells setzt sich dieses nur noch aus den Rankine-Flächen f_{1A} (5.3), dem Drucker-Prager-Kegel f_2 (4.1) und der kugelförmigen Fließfläche f_4 (4.65) zusammen.

Infolge der unterschiedlichen Spannungsräume in denen das Rankine- und das Drucker-Prager-Kriterium definiert sind, wird auf eine Kopplung der Flächen f_{1A} und f_2 gemäß den Arbeiten von SIMO et al. [200], [201] verzichtet. Stattdessen werden die beiden Teilbereiche in Anlehnung an PRAMONO & WILLAM [173] zusammengefügt, was sich unter den gegebenen Bedingungen als algorithmisch

einfacher erweist. Wie schon in Abschnitt 4.2.4 ausführlich beschrieben, erfolgt die Projektion bei dieser Vorgehensweise erst auf die Fläche mit dem größten Einfluß auf den Versuchszustand, danach gegebenenfalls auf eine weitere.

Anders als beim stetigen Übergang von Kegel f_2 und Kugel f_4 kann im Rahmen der hier erforderlichen Kopplung auf die Einführung einer Schaltfläche zur Ermittlung der ersten aktiven Fläche verzichtet werden. Im Detail läßt sich der verwendete Projektionsalgorithmus, der in Abb. 5.2 schematisch dargestellt ist, folgendermaßen beschreiben: Die denkbar einfachste Situation stellt sich ein, wenn

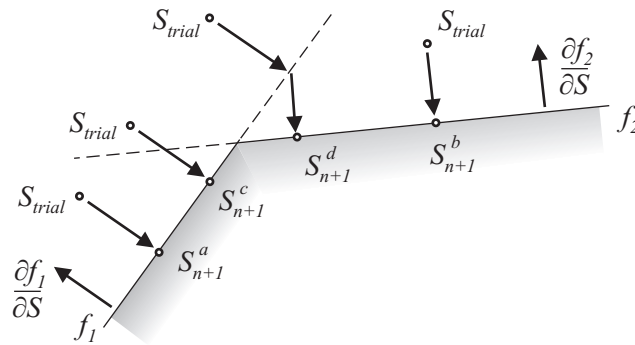


Abbildung 5.2: Projektion bei Kopplung von Rankine-Kriterium mit Drucker-Prager-Kegel

nur das Rankine-Kriterium verletzt ist, $f_1 > 0$ und $f_2 < 0$. In diesem Fall wird der Versuchszustand auf die zugehörige Rankine-Fläche projiziert und der neue Spannungszustand S_{n+1}^a ist gefunden. Ist dagegen ausschließlich die Drucker-Prager-Bedingung unerfüllt, $f_2 > 0$, erfolgt die Skalierung anfänglich auf f_2 , womit bei entfestigendem Materialverhalten – und für den in Abb. 5.2 dargestellten idealplastischen Fall – S_{n+1}^b ermittelt ist. Liegt dagegen bei $\alpha_2 < \alpha_e$ eine Verfestigung vor, muß f_1 erneut überprüft werden, da es im Falle einer gemischten Zug/Druck-Belastung zu einem Materialversagen infolge Zug kommen kann ohne daß die maximale Druckfestigkeit erreicht wurde, Abschnitt 4.4.2. Gilt für den elastischen Prädiktor $f_1 > 0$ und $f_2 > 0$, so wird anfänglich nur die Rankine-Fläche aktiviert. Befindet sich der Spannungszustand nach Ende der Projektion innerhalb des Kegels f_2 ist S_{n+1}^c die gesuchte Lösung, andernfalls ist eine weitere Skalierung auf f_2 notwendig um S_{n+1}^d zu bestimmen.

Ein Vergleich der elastoplastischen Tangentenmodule der beiden an der Verschneidung beteiligten Fließflächen (4.64) und (5.31) zeigt, wie zuvor bei der Kopplung von Kegel und Kugel, (4.115), starke Unterschiede hinsichtlich der algorithmischen Form. Aus diesem Grund wird auch hier für die Berechnung des nächstfolgenden Lastschritts der Tangentenmodul des zuletzt aktiven Fließflächenteils

verwendet. Zu diesem Zweck wird die Größe c^t eingeführt, die als Schalter zwischen aktiven $c^t = 1$ und inaktiven Bereichen $c^t = 0$ fungiert. Mit den Indizes R beziehungsweise DP , welche die beiden Teilflächen kennzeichnen, ergibt sich schließlich der konsistente Tangentenmodul

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = c_R^t \mathbb{C}_{Rn+1}^t + c_{DP}^t \mathbb{C}_{DPn+1}^t \quad . \quad (5.42)$$

Eine Darstellung des modifizierten Modells zur dreidimensionalen Beschreibung von Beton ist in Abb. 5.3 zu finden. Dieses zeigt den Schnitt der zusammengesetzten Flächen f_1 und f_2 in der normierten σ_1 - σ_2 -Ebene für den ebenen Span-

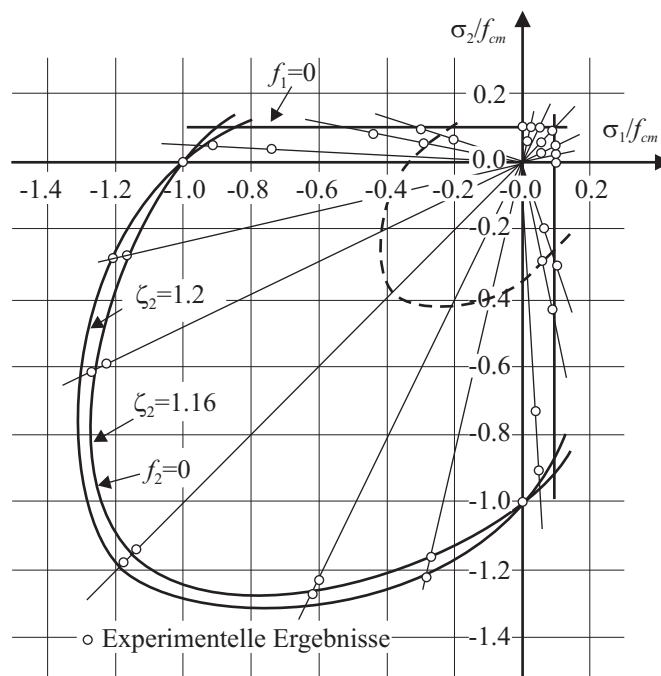


Abbildung 5.3: Schnitt der alternativen Modellformulierung und zweiaxiale Versagenspunkte nach Versuchen von KUPFER et al. [128]

nungszustand. Eine Betrachtung des reinen Zugbereiches läßt die hervorragende Übereinstimmung des zusammengesetzten Rankine-Kriteriums mit den experimentellen Ergebnissen von KUPFER et al. [128], [127] erkennen. Sowohl für den einaxialen als auch für den hydrostatischen Zugzustand kann die maximale Zugfestigkeit f_{ctm} erreicht werden, was im Falle einer geschlossenen dreidimensionalen Rankine-Bedingung mit Ausrundung nur wahlweise für eine der beiden Situation möglich wäre, PRAVIDA [174], WINKLER [232]. Ein Vergleich mit dem Verhalten des im ersten Modell verwendeten Drucker-Prager-Kegels, Abb. 4.11, macht die

Überlegenheit des Hauptspannungskriteriums im reinen Zugbereich deutlich, welche aus dem ungekrümmten Kurvenverlauf folgt. Gerade dieser charakteristische Verlauf ist es, der im gemischten Zug/Druck-Bereich Nachteile mit sich bringt: Die Verminderung der aufnehmbaren Zugspannungen bei steigendem Druck bleibt unberücksichtigt, was folglich zu einer Überschätzung des Tragvermögens führt. Anders verhält es sich bei Verwendung einer Drucker-Prager-Fläche deren hyperbolischer Verlauf über den Parameter ζ_1 den Erfordernissen angepaßt werden kann.

Werden diese Beobachtungen auf den dreidimensionalen Spannungsraum übertragen, so zeigt sich ein ähnliches Bild für die Approximation des realen Betonverhaltens: Das Rankine-Kriterium zeichnet sich durch eine dreieckige Deviatorfläche aus, Abb. 5.1, der Drucker-Prager-Kegel durch einen Kreis. Wie die Arbeiten von OTTOSEN [168] und CHEN [36] zeigen, ist bei reinem Zug ein Deviatorschnitt durch die dreiaxiale Betongrenzfläche näherungsweise dreieckig, Abb. 2.8. Mit zunehmender Druckbeanspruchung nimmt dieser annähernd kreisförmige Gestalt an.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß keine der beiden hergeleiteten Varianten der anderen generell vorzuziehen ist. Beide Modelle zeigen bei der Beschreibung des Zug- beziehungsweise Zug/Druck-Verhaltens unterschiedliche Stärken und ergänzen sich somit eher als daß sie konkurrieren. Soll beispielsweise das mehrdimensionale Zugversagen von unbewehrtem Beton untersucht werden, ist eine Verwendung des alternativen Rankine-Modells angebracht. Das in Abschnitt 4.2 entwickelte reine Drucker-Prager-Modell stellt aufgrund der algorithmisch wesentlich knapperen Formulierung unter anderem bei Stahlbetonstrukturen die effizientere Variante dar. Je nach gegebener Problemstellung ist somit eine entsprechende Auswahl zu treffen.

6 Finite-Element-Implementierung

Um die bisher entwickelten numerischen Modelle zur Beschreibung des dreidimensionalen Versagens von Beton im Rahmen der Finite-Element-Methode nutzen und auf reale Strukturen anwenden zu können, ist die Implementierung in eine entsprechende Programmumgebung erforderlich. Als Basis wird dabei das wissenschaftliche Finite-Element-Programm *FEAP*, TAYLOR [213], [214], verwendet, welches im wesentlichen auf den in ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241] zu findenden Formulierungen beruht.

6.1 Beschreibung des verwendeten Elementtyps

Die in den Abschnitten 4 und 5 vorgestellten Ansätze lassen sich aufgrund ihrer allgemeinen dreidimensionalen Form prinzipiell in jeden beliebigen Elementtyp implementieren. Bei der Verwendung einer ein- oder zweidimensionalen Elementformulierung ist eine Kondensation des Stoffgesetzes hinsichtlich der jeweiligen Gegebenheiten erforderlich. Zu finden sind entsprechende Ansätze beispielsweise bei DE BORST [51], der die Kondensation auf globaler Ebene berücksichtigt oder bei DVORKIN et al. [62] und KLINKEL & GOVINDJEE [111], welche eine lokale Iteration im Element vorschlagen.

Im Rahmen dieser Arbeit findet ein dreidimensionales Kontinuumselement, das auf einem Verschiebungsansatz beruht, Verwendung. Die Beschreibung der Elementgeometrie erfolgt über acht Knoten, denen jeweils drei Verschiebungsfreiheitsgrade zugeordnet sind. Ausgehend vom isoparametrischen Konzept, lassen sich für das gewählte Element sowohl Geometrie, als auch Zustandsgrößen über denselben Satz von trilinearen Ansatzfunktionen definieren. Zur Unterdrückung der numerischen Versteifungseffekte, die sich bei Verwendung eines Standardverschiebungsansatzes einstellen, wird der Greensche Verzerrungstensor im Rahmen einer 'enhanced assumed strain' (*EAS*) Formulierung erweitert, SIMO & RIFAI [202], SIMO & ARMERO [195]. Um das Kontinuumselement auch für beliebig dünne flächenorientierte Strukturen wie zum Beispiel Platten oder Schalen einsetzen zu können, erfolgt die Auswertung der Schubverzerrungen mit Hilfe von 'assumed natural strain' (*ANS*) Ansätzen gemäß DVORKIN & BATHE [61] und BETSCH & STEIN [17]. Hierfür ist die Einführung eines konvektiven Basissystems auf Elementebene erforderlich.

Die Vorteile, die sich aus der Verwendung eines Kontinuumselementes ergeben sind zum einen in der Möglichkeit der exakten Beschreibung der Topologie von Strukturen zu sehen, zum anderen in der sehr genauen Erfassung von Spannungs-

und Verzerrungszuständen in der Dickenrichtung. Es wird möglich, die oberflächenorientierten Geometriedaten, die beispielsweise CAD-Programme liefern, direkt für die Finite-Element-Diskretisierung zu verwenden, ohne sich – wie für zweidimensionale Formulierungen notwendig – die Lage der Mittel- oder Knotenebene berechnen zu müssen. Infolge der unabhängigen Knoten an Elementober- und unterseite lassen sich neben den Randbedingungen auch Kontaktbedingungen wie Haften und Reiben sehr genau an die tatsächlichen Gegebenheiten anpassen. Diese Vorteile zeigen sich unter anderem bei einer Beschreibung der Festhalterungen von tendenziell eher flächigen Tragwerken: Beispielsweise werden im Fall von Randeinspannungen, die bei Verwendung von Schalenelementen die Frage nach dem Grad der Rotationsbehinderung ('hard support' oder 'soft support') aufwerfen würde, ausschließlich die Verschiebungen übereinanderliegender Knoten festgehalten.

Auf eine detaillierte Diskussion der Schalentheorie und deren Abgrenzung gegenüber der hier verwendeten Kontinuumsformulierung soll im Rahmen dieser Arbeit verzichtet werden. Für einen vertiefenden Einblick in Ansätze inextensibler Formulierungen, die eine Dickenänderungen der Schale ausschließen, sei auf die Veröffentlichungen von SIMO & FOX [197], ARGYRIS [3] und SAUER [187] verwiesen. BETSCH et al. [16] stellen unterschiedliche Parametrisierungen des Schalendirektors und Definitionen der finiten Rotationen gegenüber. Bei extensiblen Schalenformulierungen, wie sie beispielsweise von SIMO et al. [203], SANSOUR [185], BÜCHTER et al. [28] und BETSCH et al. [15] eingeführt werden, lassen sich Kinematik und Spannungsverteilung in Dickenrichtung näherungsweise wiedergeben. Neueste Entwicklungen finden sich unter anderem in der Arbeit von WAGNER & GRUTTMANN [226] und den dort angegebenen Literaturstellen.

Da besonders bei größeren Bauteildicken, die häufig im Rahmen des Massivbaus anzutreffen sind, die Spannungen in Dickenrichtung einen wesentlichen Einfluß auf das Trag- und Versagensverhalten der Gesamtstruktur haben, ist folglich eine dreidimensionale Formulierung unumgänglich. Selbst komplexe Spannungs- und Verzerrungsverläufe in dieser Richtung lassen sich über eine bei Kontinuumsselementen sehr einfache Netzverfeinerung abbilden.

Die Implementierung der bisher entwickelten Materialmodelle erfolgt in ein von KLINKEL et al. [110], [112] vorgeschlagenes nichtlineares 8-Knoten-Kontinuumsselement, welches in speziellen Teilen modifiziert werden mußte.

6.2 Wesentliche kontinuumsmechanische Grundlagen

Im folgenden sollen die kontinuumsmechanischen Grundlagen, die im Rahmen der Finite-Element-Methode erforderlich sind, dargestellt werden. Diese Einführung

beschränkt sich dabei ausschließlich auf die wesentlichen Punkte und verzichtet auf eine detaillierte Herleitung der einzelnen Zusammenhänge. Für einen umfassenderen Einblick sei auf die Arbeiten von MALVERN [143], STEIN & BARTHOLD [208], BAŞAR & WEICHERT [4] sowie GURTIN [84] und auf das mathematisch sehr allgemein gehaltenen Lehrbuch von MARSDEN & HUGHES [144] verwiesen.

Jeder beliebige Körper läßt sich im dreidimensionalen Raum hinsichtlich seiner Geometrie und seiner Kinematik eindeutig beschreiben. Die Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 ist zum Zeitpunkt t_0 durch die materiellen Koordinaten \mathbf{X} , die auch Lagrange-Koordinaten genannt werden, definiert, Abb. 6.1. Üblicherweise wird die Oberfläche $\partial\mathcal{B}_0$ eines Körpers in einen belasteten Bereich $\partial_\sigma\mathcal{B}_0$ und einen frei

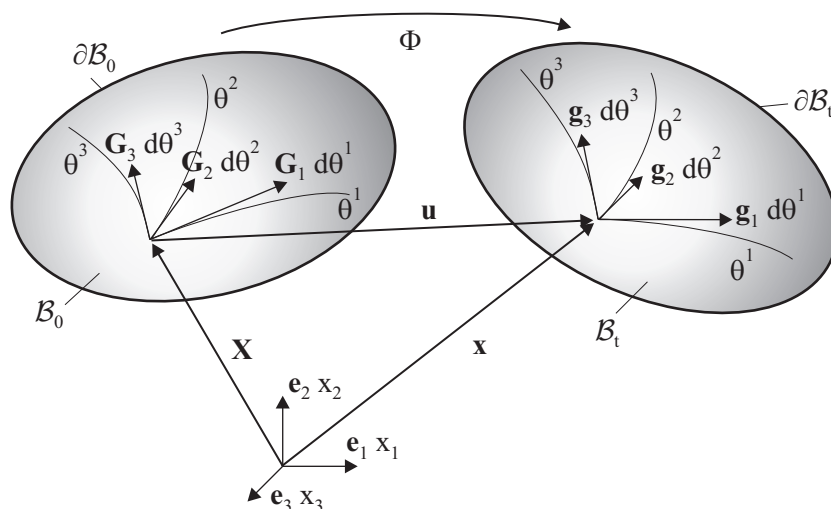


Abbildung 6.1: Referenz- und Momentankonfiguration des Körpers \mathcal{B}

verschieblichen $\partial_u\mathcal{B}_0$ mit $\partial\mathcal{B}_0 = \partial_\sigma\mathcal{B}_0 \cup \partial_u\mathcal{B}_0$ eingeteilt.

In der Momentankonfiguration erfolgt die Definition des Körpers \mathcal{B}_t , Oberfläche $\partial\mathcal{B}_t$, mit Hilfe der räumlichen beziehungsweise Eulerschen Koordinaten $\mathbf{x} = \mathbf{X} - \mathbf{u}$, wobei \mathbf{u} der zugehörige Verschiebungsvektor ist. Der funktionale Zusammenhang zwischen beiden Konfigurationen wird durch die Deformationsfunktion Φ beschrieben, die im allgemeinen nichtlinear ist.

Mit der Einführung von körperfesten Parameterlinien θ^i , $i = 1, 2, 3$, ist es möglich für jeden Punkt des Körpers ein konvekatives Koordinatensystem \mathbf{G} beziehungsweise \mathbf{g} zu definieren, dessen Basis die Tangentenvektoren von $\boldsymbol{\theta}$ bilden

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} \quad \text{sowie} \quad \mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} . \quad (6.1)$$

Mit Verwendung der zugeordneten kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i und \mathbf{g}^i , für die $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ beziehungsweise $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ gilt, ergeben sich als Metrikensoren der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad . \quad (6.2)$$

Die entsprechenden Metrikoeffizienten folgen aus $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ und $G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j$. Für die Basis \mathbf{g} der Momentankonfiguration gilt dieser Zusammenhang in äquivalenter Weise. Wird der in der Regel unsymmetrische Deformationsgradient

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad , \quad \mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \mathbf{X} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \quad , \quad (6.3)$$

der die linearisierte Abbildung Φ darstellt, eingeführt, so läßt sich die Beziehung zwischen den Konfigurationen über

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad \longrightarrow \quad \mathbf{g}_i = \mathbf{F} \mathbf{G}_i \quad , \quad \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_i \quad (6.4)$$

beschreiben. Es ist offensichtlich, daß \mathbf{F} nicht den gesamten Körper, sondern nur die von \mathbf{G} aufgespannte Tangentialebene abbildet. Für die Volumeninkremente ergibt sich $d v = \det \mathbf{F} d V$. Wird außerdem

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (6.5)$$

als symmetrisches und richtungsunabhängiges Verzerrungsmaß vereinbart, so ist es möglich, sowohl reine Starrkörperverdrehungen als auch -translationen abzubilden. Dieser zweistufige Tensor \mathbf{E} wird als Greenscher oder als Green-Lagrangescher Verzerrungstensor bezeichnet, die entsprechenden arbeitskonformen 2. Piola-Kirchhoff Spannungen \mathbf{S} können über

$$\mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-1} \quad (6.6)$$

aus dem Cauchy Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ermittelt werden. Letzterer stellt mit $\mathbf{t}_t = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ unter anderem den Zusammenhang zwischen den an der belasteten Oberfläche $\partial_\sigma \mathcal{B}_t$ eingepägten Spannungen \mathbf{t}_t und der Normalen \mathbf{n} der betreffenden Stelle dieser Oberfläche dar.

Über die bereits in Abschnitt 3.2 eingeführte Formänderungsenergiefunktion W_{0S} läßt sich das Prinzip vom Minimum des Potentials Π formulieren, wobei die potentielle Energie der eingepägten Lasten zu berücksichtigen ist. Werden ausschließlich konservative Lasten angenommen, was im vorliegenden Fall keine Einschränkung bedeutet, folgt für statische Probleme

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} [W_{0S}(\mathbf{E}) - \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} dA \longrightarrow \text{Minimum} \quad . \quad (6.7)$$

Dabei ist \mathbf{b}_0 die massenbezogene Beschleunigung, ρ_0 die Massendichte und \mathbf{t}_0 der Spannungsvektor an der Oberfläche. Es fällt auf, daß das erste Integral von (6.7) identisch zur linken Seite der Clausius-Duehm-Ungleichung für den allgemeinen Fall (3.12) ist, welche im Rahmen der thermodynamischen Betrachtung der Plastizitätstheorie von grundlegender Bedeutung war. Mit Hilfe der Richtungsableitung

$$\delta\Pi = D \Pi(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}) \right|_{\varepsilon=0} , \quad (6.8)$$

die auch Gateaux-Ableitung genannt wird, ist es möglich die erste Variation des Potentials zu bilden

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \left[\frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \delta\mathbf{E} - \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \right] dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \delta\mathbf{u} dA = 0 \quad , \quad (6.9)$$

aus welcher sich die gesuchte Größe \mathbf{u} iterativ bestimmen läßt. Als erste Variation des Greenschen Verzerrungstensors ist dabei

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{g}_i \cdot \delta\mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{mit} \quad \delta\mathbf{g}_i = \frac{\partial \delta\mathbf{u}}{\partial \theta^i} \quad (6.10)$$

anzunehmen. Wird der Zusammenhang $\partial W_{0S}/\partial \mathbf{E} = \mathbf{S}$, (3.16), berücksichtigt, ist (6.9) identisch mit der schwachen Form des Gleichgewichts, welches über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen aus der Impuls- und Drallbilanz bestimmt werden kann. Die Bezeichnung 'schwache Form' deutet an, daß das Gleichgewicht nur im integralen Mittel erfüllt ist, womit geringere Anforderungen an die Ableitungen der Spannungsfunktion gestellt werden. Die Kinematik und das Stoffgesetz sind im Rahmen der verwendeten Theorie exakt.

Für die iterative Ermittlung der unbekanntenen Verschiebungsfunktion \mathbf{u} , was im Rahmen einer Newton-Raphson-Iteration erfolgt, ist eine Linearisierung der ersten Variation (6.9) notwendig. Werden in der entsprechenden Taylor-Reihenentwicklung Terme höherer Ordnung vernachlässigt, so ergibt sich

$$L[\delta\Pi(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})] = \delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + D \delta\Pi(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \cdot \Delta\mathbf{u} = 0 \quad . \quad (6.11)$$

Unter Verwendung der Gateaux-Ableitung (6.8)

$$D \delta \Pi(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u} = \int_{\mathcal{B}_0} \left[\delta \mathbf{E} : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \mathbf{E}^2} : \Delta \mathbf{E} + \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \delta \mathbf{E} \right] dV \quad (6.12)$$

folgt schließlich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{B}_0} \left[\delta \mathbf{E} : \frac{\partial^2 W_{0S}}{\partial \mathbf{E}^2} : \Delta \mathbf{E} + \frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \Delta \delta \mathbf{E} \right] dV \\ &= - \int_{\mathcal{B}_0} \left[\frac{\partial W_{0S}}{\partial \mathbf{E}} : \delta \mathbf{E} - \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \right] dV + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{u} \, dA \quad . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die für (6.12) notwendige zweite Variation von \mathbf{E} lautet mit $\Delta \mathbf{g}_i = \partial \Delta \mathbf{u} / \partial \theta^i$

$$\Delta \delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{g}_i \cdot \Delta \mathbf{g}_j + \Delta \mathbf{g}_i \cdot \delta \mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad . \quad (6.14)$$

Im Hinblick auf die konsistente Linearisierung sei für einen vertieften Einblick auf die Arbeiten von HUGHES & PISTER [99], MARSDEN & HUGHES [144] sowie WRIGGERS [237] hingewiesen.

Während sich die in diesem Abschnitt dargestellten Formulierungen auf ein konvexes Koordinatensystem beziehen, erfolgt die globale Beschreibung des Strukturverhaltens in einer kartesischen Basis. Mit der Einführung von lokalen ortho-normierten Basisvektoren \mathbf{l}^i ergibt sich der Zusammenhang

$$\mathbf{E} = E_{ij} (\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) = \bar{E}_{ij} (\mathbf{l}^i \otimes \mathbf{l}^j) \quad \longrightarrow \quad \bar{E}_{kl} = (\mathbf{l}^k \cdot \mathbf{G}^i) E_{ij} (\mathbf{G}^j \cdot \mathbf{l}^l) \quad , \quad (6.15)$$

aus dem die Transformationsmatrix \mathbf{T}_E abgeleitet werden kann, siehe KLIN-KEL [110]. Die Umrechnung zwischen den unterschiedlichen Basen folgt somit aus

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}_E^{-1} \bar{\mathbf{E}} \quad , \quad \mathbb{C} = \mathbf{T}_E^T \bar{\mathbb{C}} \mathbf{T}_E \quad , \quad \mathbf{S} = \mathbf{T}_E \bar{\mathbf{S}} \quad , \quad (6.16)$$

wobei die kartesischen Größen mit einem Querstrich gekennzeichnet sind.

6.3 Finite-Element-Approximation

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die für die Finite-Element-Approximation notwendigen Beziehungen der Kontinuumsmechanik eingeführt wurden, soll im

weiteren deren Umsetzung erfolgen. Eine umfassende und detaillierte Darstellung der Vorgehensweise ist unter anderem in den Veröffentlichungen von ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241], BATHE [6], WRIGGERS [238], BETTEN [19] sowie BELYTCHKO et al. [14] zu finden.

Die wesentliche Idee der FE-Methode ist es das kontinuierliche Gebiet über endlich viele Teilgebiete – die finiten Elemente – zu diskretisieren. Dabei werden deren Eigenschaften mit Hilfe sogenannter Ansatzfunktionen, die sich aus den Lagrangeschen Interpolationspolynomen ableiten lassen, in die zugehörigen Elementknoten projiziert. Für das verwendete 8-Knoten-Kontinuumsselement lauten diese trilinearen Ansatzfunktionen

$$N_I = \frac{1}{8} (1 + \xi_I^1 \xi^1) (1 + \xi_I^2 \xi^2) (1 + \xi_I^3 \xi^3) \quad , \quad I = 1, \dots, 8 \quad . \quad (6.17)$$

Dabei sind ξ_I^1 , ξ_I^2 und ξ_I^3 mit $\xi_I^i = \pm 1$ die isoparametrischen Koordinaten der einzelnen Elementknoten, die nichtindizierten ξ^i diejenigen einer beliebigen Stelle innerhalb des Elementes. Die Geometrien von Referenz- und Ausgangskonfiguration lassen sich allgemein über

$$\mathbf{X}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{X}_I \quad \text{und} \quad \mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{x}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^h = \mathbf{X}^h + \mathbf{u}^h \quad (6.18)$$

aus den Ansatzfunktionen N_I ermitteln. Der Index h deutet dabei auf den Näherungscharakter der Größen hin. In (6.18) gibt nel ('nodes per element') die Anzahl der Elementknoten an, der Verschiebungsvektor \mathbf{u}^h folgt aus den einzelnen Knotenverschiebungen \mathbf{v}_I

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I \mathbf{v}_I \quad . \quad (6.19)$$

Mit Kenntnis der partiellen Ableitungen $N_{I,i} = \partial N_I / \partial \xi^i$ ist es möglich, die in (6.1) eingeführten konvektiven Basisvektoren zu approximieren

$$\mathbf{G}_i^h = \sum_{I=1}^{nel} N_{I,i} \mathbf{X}_I \quad , \quad \mathbf{g}_i^h = \sum_{I=1}^{nel} N_{I,i} \mathbf{x}_I \quad , \quad (6.20)$$

so daß die erste Variation des Greenschen Verzerrungstensors (6.10) auf Elementebene als

$$\delta \mathbf{E}^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta \mathbf{v}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T N_{I,1} \\ \mathbf{g}_2^T N_{I,2} \\ \mathbf{g}_3^T N_{I,3} \\ \mathbf{g}_2^T N_{I,1} + \mathbf{g}_1^T N_{I,2} \\ \mathbf{g}_3^T N_{I,1} + \mathbf{g}_1^T N_{I,3} \\ \mathbf{g}_3^T N_{I,2} + \mathbf{g}_2^T N_{I,3} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

dargestellt werden kann. Nach dem Einsetzen von (6.19) und (6.21) in (6.13) ist es möglich die linke und rechte Seite der linearisierten schwachen Form des Gleichgewichts auf Elementebene zu approximieren

$$\sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{K}_{TIK}^e \Delta \mathbf{v}_K \quad \text{und} \quad \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T [\mathbf{f}_{Iint}^e - \lambda \mathbf{f}_{Iext}^e] \quad . \quad (6.22)$$

In (6.22) wurde unter Berücksichtigung von $\partial W_{0S} / \partial \mathbf{E} = \mathbf{S}$ der interne und der externe Lastvektor

$$\mathbf{f}_{Iint}^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{S} \, dV \quad (6.23)$$

$$\mathbf{f}_{Iext}^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} N_I^T \rho_0 \mathbf{b}_0 \, dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0^e} N_I^T \mathbf{t}_0 \, dA \quad (6.24)$$

eingeführt. Der skalare Faktor λ stellt den Lastfaktor dar, welcher eine schrittweise Steigerung der aufgebrachten Belastung ermöglicht. Für die Elementsteifigkeit gilt mit $\partial^2 W_{0S} / \partial \mathbf{E}^2 = \mathbb{C}$

$$\mathbf{K}_{TIK}^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} [\mathbf{B}_I^T \mathbb{C} \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK}] \, dV \quad . \quad (6.25)$$

Die Komponenten der Matrizen $\mathbf{G}_{IK} = \text{diag}[G_{IK}, G_{IK}, G_{IK}]$ ergeben sich über den Ausdruck $\partial W_{0S} / \partial \mathbf{E} : \Delta \delta \mathbf{E}$ der zweiten Variation des Potentials

$$\mathbf{S} : \Delta \delta \mathbf{E}^h = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^T \mathbf{G}_{IK} \Delta \mathbf{v}_K \quad (6.26)$$

und lassen sich angeben als

$$\begin{aligned} G_{IK} = & S^{11} N_{I,1} N_{K,1} + S^{22} N_{I,2} N_{K,2} + S^{33} N_{I,3} N_{K,3} + S^{12} (N_{I,1} N_{K,2} + N_{I,2} N_{K,1}) \\ & + S^{13} (N_{I,1} N_{K,3} + N_{I,3} N_{K,1}) + S^{23} (N_{I,2} N_{K,3} + N_{I,3} N_{K,2}) \quad . \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Berechnung der in (6.23) bis (6.25) vorkommenden Integrale erfolgt mit Hilfe einer numerischen Integration nach Gauß. Bei dieser wird die zu integrierende Funktion an m diskreten Stützstellen, den sogenannten Gauß-Punkten, ausgewertet und die gewichtete Summe über alle Stützstellen gebildet. Das so ermittelte Integral ist für Polynome bis zum Grad $(2m - 1)$ exakt. Im vorliegenden Fall wird über $2 \times 2 \times 2$ Stützstellen mit den isoparametrischen Koordinaten $\xi^i = \pm 1/\sqrt{3}$ integriert, der zugehörige Wichtungsfaktor ist für alle Punkte $w_{GP} = 1$.

Aus dem Zusammenbau der $numel$ ('number of elements') Elemente zur Gesamtstruktur folgen die tangential Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T^h sowie das Residuum \mathbf{G}^h

$$\mathbf{K}_T^h = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{K}_T^e \quad \text{und} \quad \mathbf{G}^h = \bigcup_{e=1}^{numel} [\mathbf{f}_{int}^e - \lambda \mathbf{f}_{ext}^e] \quad , \quad (6.28)$$

womit sich das allgemeine Gleichungssystem in den Verschiebungen

$$\mathbf{K}_T^h \Delta \mathbf{v} + \mathbf{G}^h = \mathbf{0} \quad (6.29)$$

aufstellen läßt. Die Ermittlung des unbekanntes Verschiebungsincrementes $\Delta \mathbf{v}$, das auf die aktuelle Gleichgewichtslage führt, erfolgt iterativ. Mit Verwendung des Newton-Raphson-Verfahrens, siehe dazu (6.11), stellt sich dabei eine quadratische Konvergenz gegen die gesuchte Lösung ein, so daß nur wenige Iterationsschritte erforderlich sind. Für den Fall eines uneindeutigen Verlaufes des Lösungspfad, beispielsweise bei einer Last-Verschiebungs-Kurve, in der einem Lastfaktor λ unterschiedliche Verschiebungen zugeordnet sind, versagt die klassische Laststeuerung. Eine derartige Situation stellt sich unter anderem bei der Berechnung von Stabilitätsproblemen im überkritischen Bereich oder, wie im Rahmen dieser Arbeit, bei einer fortschreitenden Materialentfestigung ein. Zur Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems bietet sich dann ein Kurvenverfolgungsverfahren an, dessen Grundidee in der Erweiterung der Problemstellung um eine zusätzliche Zwangsbedingung liegt. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode ist unter anderem in der Veröffentlichung von WAGNER [225] zu finden, für einen umfassenden Überblick über unterschiedliche Iterationsverfahren sei auf WRIGGERS [238] verwiesen.

6.4 Verbesserung des Standardansatzes

Die bisher dargestellte Formulierung eines achtknotigen Kontinuumselementes mit Standardverschiebungsansätzen zeichnet sich zwar durch eine numerisch sehr einfache Beschreibung aus, ist aber nicht in der Lage das reale Strukturverhalten

abzubilden. Infolge der unzureichenden Verzerrungsapproximation treten falsche innere Zwänge und sogenannte parasitäre Spannungen auf, die zu numerischen Versteifungseffekten führen. Zur Unterdrückung dieser 'locking'-Phänomene sind in der Literatur eine große Anzahl unterschiedlicher Vorgehensweisen, wie zum Beispiel eine reduzierte Integration, hybride oder gemischte Variationsprinzipien und andere zu finden, ZIENKIEWICZ & TAYLOR [241], BELYTSCHKO [14] oder BATHE [6]. Im vorliegenden Fall kommt ein 'enhanced assumed strain'-Ansatz, sowie eine 'assumed natural strain'-Formulierung zur Anwendung, siehe KLINKEL et al. [112], [110].

6.4.1 'enhanced assumed strain'-Interpolation

Im Rahmen der *EAS*-Methode, die auf Arbeiten von SIMO & RIFAI [202] und als dreidimensionale Weiterentwicklung auf SIMO et al. [196] zurückgeht, werden die numerischen Versteifungseffekte durch eine Modifikation des Verschiebungs- und Verzerrungsfeldes reduziert. Erfolgt die Erweiterung auf Basis des Verzerrungstensors, einen Alternative wäre der Deformationsgradient \mathbf{F} , so ergibt sich

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^c + \tilde{\mathbf{E}} \quad . \quad (6.30)$$

Dabei bilden die Greenschen Verzerrungen (6.5) den kompatiblen Verzerrungstensor \mathbf{E}^c , als erweiterter Anteil $\tilde{\mathbf{E}}$ wird

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_{E_0} \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{M}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \boldsymbol{\alpha}^e \quad (6.31)$$

angesetzt. Die mit 0 indizierten Größen beziehen sich auf den Elementmittelpunkt und die dortige Basis \mathbf{G}_0 . Für eine Transformation in die Elementknoten wird neben den Determinanten von $\mathbf{J} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{e}_i$ und $\mathbf{J}_0 = \mathbf{G}_{0i} \otimes \mathbf{e}_i$ auch die Matrix \mathbf{T}_{E_0} , die analog zu derjenigen aus (6.16) gebildet wird, erforderlich. Die eigentliche Modifikation der Verzerrungen ergibt sich aus den unabhängigen internen Freiheitsgraden $\boldsymbol{\alpha}^e$ und der Interpolationsmatrix \mathbf{M} , wobei

$$\int_{\mathcal{B}_0^e} \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{M} \boldsymbol{\alpha}^e \, dV = 0 \quad (6.32)$$

gelten muß. Mit einer Matrix \mathbf{M}^{30} , die über insgesamt 30 Parameter nach KLINKEL & WAGNER [113], KLINKEL [110], oder ANDELFINGER & RAMM [2] verfügt, werden sämtliche Verzerrungskomponenten verbessert, so daß ein nahezu 'locking'-freies Kontinuumelement entsteht. In Verbindung mit einer speziellen

Auswertung der Schub- und Dickenverzerrungen, siehe Abschnitt 6.4.2, sind sieben Parameter ausreichend, VU-QUOC & TAN [224]

$$\mathbf{M}^7 = \begin{bmatrix} \xi^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^3 & \xi^1 \xi^3 & \xi^2 \xi^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi^1 & \xi^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Die Berücksichtigung des erweiterten Verzerrungsansatzes (6.30) bei der Formulierung des Potentials Π , (6.7), basiert auf einem Dreifeldfunktional vom Hu-Washizu Typ

$$\Pi(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{S}}) = \int_{\mathcal{B}_0} [W_{0S}(\mathbf{E}^C + \tilde{\mathbf{E}}) - \tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}}] dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \mathbf{u} dA \quad (6.34)$$

wobei \mathbf{u} , $\tilde{\mathbf{E}}$ und $\tilde{\mathbf{S}}$ voneinander unabhängige Größen darstellen. Die erste Variation von (6.34) sowie die für die iterative Lösung notwendige Linearisierung der schwachen Form erfolgt unter zweifacher Anwendung der Gateaux-Ableitung (6.8) analog zu (6.9) und (6.11). Die Darstellung der Variationen $\delta \mathbf{E}^h$ und $\Delta \delta \mathbf{E}^h$ des erweiterten Verzerrungstensors führt neben einem zusätzlichen Elementlastvektor

$$\mathbf{f}_{I\alpha}^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbf{S} dV \quad (6.35)$$

zu den Elementmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{T I \alpha}^e &= \int_{\mathcal{B}_0^e} \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbb{C} \mathbf{B}_I dV \\ \mathbf{K}_{T \alpha \alpha}^e &= \int_{\mathcal{B}_0^e} \tilde{\mathbf{M}}^T \mathbb{C} \tilde{\mathbf{M}} dV \end{aligned} \quad \text{wobei} \quad \tilde{\mathbf{M}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{T}_{E0} \mathbf{M}_0 \quad (6.36)$$

gilt. Mit (6.23) bis (6.25) lassen sich so die beiden Ausdrücke

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T^e & \mathbf{K}_{T\alpha}^{eT} \\ \mathbf{K}_{T\alpha}^e & \mathbf{K}_{T\alpha\alpha}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}^e \\ \Delta \boldsymbol{\alpha}^e \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_{int}^e + \lambda \mathbf{f}_{ext}^e \\ -\mathbf{f}_\alpha^e \end{bmatrix} \quad (6.37)$$

formulieren, welche nach dem globalen Zusammenbau im Gleichgewicht stehen. Da die hinzugefügten internen Freiheitsgrade $\boldsymbol{\alpha}^e$ diskontinuierlich über die Elementgrenzen interpoliert werden, können deren Inkremente auf Elementebene

kondensiert werden, so daß sich ein allgemeines Verschiebungsproblem entsprechend (6.29) ergibt.

Numerische Beispiele zeigen, daß es bei der Simulation des Verhaltens von unbewehrten Beton mit zunehmender Entfestigung und einer Interpolation mit 30 *EAS*-Parametern zu Instabilitäten kommt. Diese ergeben sich bei der lokalen Kondensation der unabhängigen Freiheitsgrade α^e und können durch die Wahl einer kleineren Lastschrittweite λ reduziert werden. Sehr viel geringer fallen diese Probleme bei der Verwendung von nur sieben Parametern und einer zusätzlichen *ANS*-Interpolation aus. Werden dagegen bewehrte Strukturen untersucht, so stellt sich infolge der Steifigkeitsanteile der Stahleinlagen eine Stabilisierung des Materialverhaltens ein, so daß die Nutzung von vollständig verbesserten Verzerrungen uneingeschränkt möglich ist.

6.4.2 'assumed natural strain'-Formulierungen

Anders als bei Verwendung einer *EAS*-Interpolation gestaltet sich die Reduktion von Versteifungseffekten mittels einer 'assumed natural strain'-Formulierung algorithmisch relativ einfach. Nach der *ANS*-Methode werden einzelne Verzerrungskomponenten nicht mehr in den Gauß-Punkten, sondern in sogenannten Kollokationspunkten ausgewertet und dann über das Element verteilt.

Erfolgt die Ermittlung der Schubverzerrungen E_{13}^M und E_{23}^M beispielsweise in den Punkten $M = A, B, C, D$, siehe Abb. 6.2 a), so ergeben sich nach der linearen Interpolation

$$\begin{bmatrix} 2 E_{13}^h \\ 2 E_{23}^h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \xi^2) E_{13}^B + (1 + \xi^2) E_{13}^D \\ (1 - \xi^1) E_{23}^A + (1 + \xi^1) E_{23}^C \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

keinerlei Schubversteifungen senkrecht zur ξ^1 - ξ^2 Ebene. Diese Form der Auswertung basiert auf der Veröffentlichung von DVORKIN & BATHE [61] und wurde beispielsweise von KLINKEL et al. [112] auf dreidimensionale Elemente übertragen.

Zur Vermeidung von parasitären Dickenverzerrungen, die sich für flächenorientierte Tragwerke unter Biegebeanspruchung zeigen, schlagen BETSCH & STEIN [17] die Wahl von vier Kollokationspunkten A_l in der Elementkanten vor, Abb. 6.2 b). Die dort ausgewerteten Verzerrungen E_{33}^L führen mit

$$E_{33}^h = \sum_L \frac{1}{4} (1 + \xi_L^1 \xi^1) (1 + \xi_L^2 \xi^2) E_{33}^L \quad , \quad L = A_1, A_2, A_3, A_4 \quad (6.39)$$

zu einer konstanten Dickenverzerrung, was für dünne Strukturen in guter Näherung exakt ist.

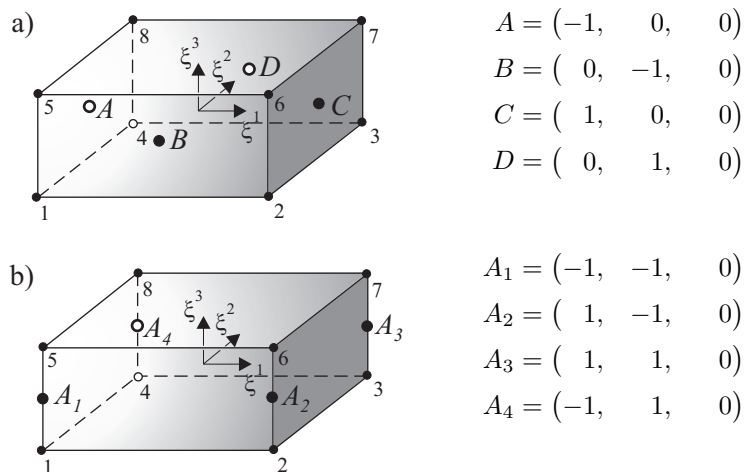


Abbildung 6.2: Lage der Kollokationspunkte zur Interpolation a) der Schubverzerrungen, b) der Dickenverzerrungen

Werden die im Rahmen der 'assumed natural strain'-Interpolation ermittelten Verzerrungen in der schwachen Form des Gleichgewichts (6.9) berücksichtigt, so zeigen sich ausschließlich bei der Variationen von \mathbf{E} Unterschiede zur Standardformulierung. Die modifizierte Matrix \mathbf{B}_I , (6.21)₂, läßt sich als

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1^T N_{I,1} \\ \mathbf{g}_2^T N_{I,2} \\ \sum_L \frac{1}{4} (1 + \xi_L^1 \xi^1)(1 + \xi_L^2 \xi^2) \mathbf{g}_3^{L^T} N_{I,3}^L \\ \mathbf{g}_2^T N_{I,1} + \mathbf{g}_1^T N_{I,2} \\ \frac{1}{2} \left[(1 - \xi^2)(\mathbf{g}_3^{B^T} N_{I,1}^B + \mathbf{g}_1^{B^T} N_{I,3}^B) + (1 + \xi^2)(\mathbf{g}_3^{D^T} N_{I,1}^D + \mathbf{g}_1^{D^T} N_{I,3}^D) \right] \\ \frac{1}{2} \left[(1 - \xi^1)(\mathbf{g}_3^{A^T} N_{I,2}^A + \mathbf{g}_2^{A^T} N_{I,3}^A) + (1 + \xi^1)(\mathbf{g}_3^{C^T} N_{I,2}^C + \mathbf{g}_2^{C^T} N_{I,3}^C) \right] \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

angeben, für die Komponenten von \mathbf{G}_{IK} ergibt sich

$$\begin{aligned} G_{IK} = & S^{11} N_{I,1} N_{K,1} + S^{22} N_{I,2} N_{K,2} + S^{33} \sum_L \frac{1}{4} (1 + \xi_L^1 \xi^1)(1 + \xi_L^2 \xi^2) N_{I,3}^L N_{K,3}^L \\ & + S^{12} (N_{I,1} N_{K,2} + N_{I,2} N_{K,1}) \\ & + S^{13} \frac{1}{2} \left[(1 - \xi^2) (N_{I,1}^B N_{K,3}^B + N_{I,3}^B N_{K,1}^B) + (1 + \xi^2) (N_{I,1}^D N_{K,3}^D + N_{I,3}^D N_{K,1}^D) \right] \\ & + S^{23} \frac{1}{2} \left[(1 - \xi^1) (N_{I,2}^A N_{K,3}^A + N_{I,3}^A N_{K,2}^A) + (1 + \xi^1) (N_{I,2}^C N_{K,3}^C + N_{I,3}^C N_{K,2}^C) \right] \end{aligned} \quad (6.41)$$

Die Orientierung, die das verwendete finite Element infolge der *ANS*-Ansätze bekommt, stellt in der praktischen Nutzung keinerlei Nachteil dar.

Da diese Art der Reduktion von Versteifungseffekten speziell für flächenorientierte Problem entwickelt wurde, erschließt sich in Verbindung mit einer *EAS*-Interpolation die Möglichkeit mittels Kontinuumselementen in effizienter Weise Platten- oder Schalenstrukturen zu berechnen, ohne die Genauigkeit bei der Abbildung von dreidimensionalen Spannungs- oder Verzerrungszuständen zu verlieren.

7 Stahl und Beton im Verbund

Wie in den vorhergehenden Abschnitten zu erkennen war, ist der Werkstoff Beton nur sehr begrenzt in der Lage Zugspannungen aufzunehmen, so daß er im praktischen Bauwesen in der Regel in Kombination mit anderen Materialien eingesetzt wird. Obwohl in den letzten Jahren umfangreiche Versuche unternommen wurden Textilien oder Faserverbundmaterialien als Bewehrung zu etablieren, siehe beispielsweise HEGGER et al. [88], ist Stahl immer noch das am häufigsten verwendete Bewehrungsmaterial. Eine ähnliche Dominanz des Werkstoffes Stahl ist im Verbundbau zu finden.

Bevor detailliert auf die Möglichkeiten eingegangen wird, die sich im Rahmen der Finite-Element-Methode zur Modellierung von Bewehrungen ergeben, ist es erforderlich ein Materialmodell für diesen zweiten Werkstoff einzuführen. Den Abschluß des Kapitels bildet die Formulierung eines 'interface'-Elementes, mit dessen Hilfe es möglich wird, den Anschlußbereich von Stahl-Verbundträgern numerisch abzubilden.

7.1 Materialeigenschaften und numerische Modellierung von Stahl

Das Verhalten von Stahl unter einaxialer Belastung zeichnet sich durch einen anfänglich nahezu linearelastischen Verlauf aus, ab Erreichen der charakteristischen Streckgrenze f_y stellen sich irreversible Verformungen ein. Wie das Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abb. 7.1 zeigt, bildet sich für naturharte

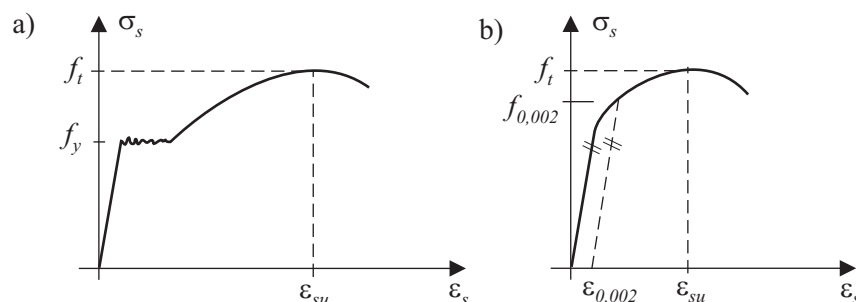


Abbildung 7.1: Spannungs-Dehnungs-Linien für a) naturharten und b) kaltverformten Stahl

Stähle ein ausgeprägtes Fließplateau aus. Weiter zunehmenden Verzerrungen führen zu einem erneuten Spannungsanstieg, bis die Zugfestigkeit f_t erreicht wird.

Bei kaltverformten Bewehrungsstählen, bei denen sich keine ausgeprägte Streckgrenze zeigt, wird als Fließgrenze diejenige Spannung gewählt, die sich bei einer plastischen Dehnung von 0.2% einstellt, DIN 18800–1 [55], DIN 1045–1 [54].

Üblicherweise kann sowohl für Zug- als auch für Druckbeanspruchung dasselbe Materialverhalten angenommen werden. Ist allerdings im Falle von Bewehrungsstahl keine ausreichende Sicherung gegen seitliches Ausknicken gewährleistet, so sind für den Druckzustand modifizierte Kennwerte anzusetzen, STEMPNIEWSKI & EIBL [209].

Bei einer zyklischen Belastung läßt sich für Stahl der Bauschinger-Effekt feststellen. Dies bedeutet, daß nach einer aufgebrachten plastischen Spannung $\sigma(t_1)$ für die entgegengesetzte Belastungsrichtung der irreversible Bereich bereits bei $|\sigma(t_2)| < |\sigma(t_1)|$ beginnt, CHEN [37], KAHN & HUANG [105] und andere. Da dieses Phänomen erst bei einer vollständigen Belastungsumkehr zum Tragen kommt wird es, trotz der einfachen mathematischen Beschreibung, im weiteren nicht berücksichtigt.

Für die numerische Formulierung des Stahlverhaltens im Rahmen der dreidimensionalen Plastizitätstheorie findet die klassische von Mises-Fließbedingung, die eine Sonderform des Drucker-Prager-Kriteriums (4.1) darstellt, Verwendung.

$$f = |\mathbf{S}^D| - \sqrt{\frac{2}{3}} q \leq 0 \quad \text{mit} \quad |\mathbf{S}^D| = \sqrt{2 J_2} \quad (7.1)$$

Da diese unabhängig von hydrostatischen Spannungsanteilen ist, wird sie häufig als J_2 -Plastizität bezeichnet. Um bei der Herleitung des Projektionsalgorithmus einige spezielle Zusammenhänge ausnutzen zu können, weicht die Berücksichtigung der Verfestigungsfunktion in (7.1) von der bisher gewählten Schreibweise ab. Es wird somit möglich einen deutlich kürzeren Algorithmus als den in Abschnitt 3 dargestellten zu formulieren. Zur Approximation des Stahlverhaltens jenseits der elastischen Grenze bietet sich mit

$$q = f_y + h\alpha + (y_\infty - f_y)(1 - \exp[-\delta\alpha]) \quad (7.2)$$

eine Kombination aus linearer und exponentieller Verfestigung an. Neben der Fließspannung f_y sind dafür die Parameter h , y_∞ und δ erforderlich.

Auf eine detaillierte Herleitung von Projektionsalgorithmus und konsistentem elastoplastischen Tangentenmodul \mathbb{C}_{n+1}^t soll im weiteren verzichtet werden. Sie ist in ausführlicher Form beispielsweise in den Büchern von SIMO [194] und SIMO & HUGHES [198] finden. Eine zusammenfassende Darstellung der für die von Mises-Fließbedingung wesentlichen Beziehungen ist Tafel 7.1 zu entnehmen.

<p>Versuchswerte: $\mathbf{S}_{trial} = \mathbb{C} : (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n^{pl})$, $\alpha_{trial} = \alpha_n$</p> <p>Fließbedingung: $f_{trial} = \mathbf{S}_{trial}^D - \sqrt{\frac{2}{3}} q_{trial}$ $q_{trial} = f_y + h\alpha_{trial} + (y_\infty - f_y) (1 - \exp[-\delta\alpha_{trial}])$</p> $f \begin{cases} \leq 0 & \longrightarrow \text{elast. Zustand} & [\cdot]_{n+1} = [\cdot]_{trial} \\ > 0 & \longrightarrow \text{plast. Zustand} \end{cases}$ <p>Startwerte Iteration: $\gamma^{(k)} = 0$, $\alpha_{n+1}^{(k)} = \alpha_n$</p> <p>1. Bestimmung des plastischen Parameters $\gamma^{(k+1)}$</p> $\Delta\gamma^{(k+1)} = -f_{n+1}^{(k)} \left[\frac{\partial f_{n+1}^{(k)}}{\partial \gamma^{(k)}} \right]^{-1}$ <p>2. Überprüfung der Fließbedingung</p> $f_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{S}_{trial}^D - \gamma^{(k+1)} 2G - \sqrt{\frac{2}{3}} q_{n+1}^{(k+1)} \leq \text{Tol.} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Iterationsende}}$ <p>3. Gehe zu 1. mit $(k) = (k + 1)$</p> <p>Nachlauf: $\gamma = \gamma^{(k+1)}$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma$ $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_{trial} - \gamma \mathbb{C} : \mathbf{N}_{trial}$, $\mathbf{N}_{trial} = \mathbf{S}_{trial}^D / \mathbf{S}_{trial}^D$ $\mathbf{E}_{n+1}^{pl} = \mathbf{E}_{n+1} - \gamma \mathbf{N}_{trial}$</p> <p>Tangentenmodul: $\mathbb{C}_{n+1}^t = K(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2G \xi_{n+1} \mathbb{P} - 2G \eta_{n+1} \mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1}$ $\xi_{n+1} = 1 - \gamma \frac{2G}{ \mathbf{S}_{trial}^D }$ $\eta_{n+1} = \frac{3G}{3G - (h + (y_\infty - f_y) \delta \exp[-\delta\alpha_{n+1}])} - \gamma \frac{2G}{ \mathbf{S}_{trial}^D }$</p>
--

Tafel 7.1: Projektionsverfahren und Tangentenmodul für das von Mises-Kriterium

7.2 Stahl als Bewehrung

7.2.1 Zusammenwirken von Stahl und Beton

Bei einer Kombination der Materialien Beton und Stahl zum Verbundwerkstoff Stahlbeton zeigen beide Einzelkomponenten annähernd dasselbe Verhalten wie

bei einem alleinigen Vorhandensein, so daß die bisher entwickelten Materialmodelle uneingeschränkt weiterverwendet werden können. Ausschlaggebend für die Eigenschaften von Stahlbeton ist folglich die Verbundwirkung und die Spannungsübertragung zwischen den beteiligten Komponenten.

Während sich im Falle einer Druckbeanspruchung keine wesentliche Verbundwirkung erkennen läßt, dominiert diese das Verhalten unter Zugbelastung. Tritt bei einem bewehrten Zugstab mit dem Überschreiten der maximalen Betonzugfestigkeit f_{ctm} der erste Riß ein, so erfolgt dort die Kraftübertragung ausschließlich über den Bewehrungsstab. Für diesen stellt sich im Bereich des Betonrisses eine Spannungskonzentration ein, welche mit zunehmendem Abstand von der Schadensstelle sukzessive geringer wird. Verantwortlich für diese Spannungsabnahme ist der Haft- und Scherverbund, über den die aufzunehmende Kraft anteilig in den Beton eingeleitet wird. Bei einer Laststeigerung stellen sich in der Nachbarschaft des ersten Risses weitere ein, bis ein stabiles Rißbild erreicht wird. In diesem stabilen Zustand ist die Breite der einzelnen Betonsäulen zwischen den Rissen nicht mehr ausreichend, um Spannungen aus der Bewehrung zu übertragen, die größer als die Zugfestigkeit f_{ctm} sind. Die zunehmenden Stahldehnungen, die sich mit weiter ansteigender Belastung ergeben, zeigen sich in der Aufweitung der bereits bestehenden Risse.

In Abb. 7.2 a) ist qualitativ das Spannungs-Dehnungs-Verhalten eines Stahlbetonzugstabes dargestellt. Es ist zu erkennen, daß sich die aufnehmbaren Spannungen additiv aus einem Betonanteil σ_c , einem Stahlanteil σ_s und einem Anteil σ_{ts} , der

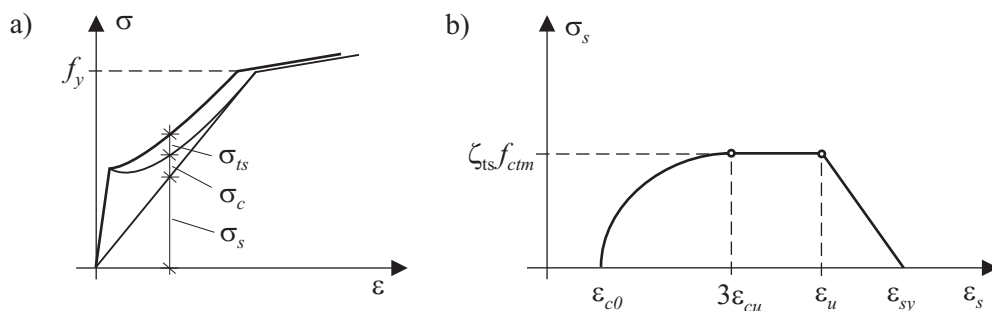


Abbildung 7.2: a) Spannungs-Dehnungs-Linien für Stahlbetonzugstab, b) 'tension stiffening'-Modell

sich aus der Interaktion zwischen beiden Komponenten ergibt, zusammensetzt. σ_{ts} wird im allgemeinen als 'tension stiffening' bezeichnet und folgt aus dem Mitwirken des Betons zwischen den Rissen. Je nach erreichtem Dehnungszustand variieren die Größen der einzelnen Summanden in Abhängigkeit von Betonfestigkeit f_{ctm} , Stabdurchmesser d_s und Bewehrungsgrad ρ_s , der den Quotienten von

Stahl- zu Betonquerschnitt darstellt. Umfangreiche experimentelle Untersuchungen im Hinblick auf die Verbundeigenschaften von Beton und Stahl sind in den Arbeiten von HARTL [87] beziehungsweise GÜNTHER & MEHLHORN [80] zu finden.

Prinzipiell ist es möglich den 'tension stiffening'-Effekt zwischen Beton und Bewehrungseinlage wahlweise durch eine entsprechende Modifikation auf Seiten des Betons oder auf Seiten des Bewehrungsstahls numerisch zu erfassen. Da diese Wechselwirkungen aber ausschließlich in Richtung der Bewehrungsführung auftreten und somit einen transversal-isotropen Charakter besitzen, erscheint letztere Variante bei einer diskreten Beschreibung der Stahleinlage geeigneter.

Zur Modellierung des 'tension stiffening' auf Basis der Bewehrung sind in der Literatur unterschiedliche Ansätze zu finden, beispielsweise bei KOLLEGER [115], HOFSTETTER & MANG [94], CEB-FIP MODEL CODE [30], DIN 1045-1 [54] oder aber CHEN [37], von denen allerdings die Mehrzahl auf eine Berücksichtigung der freigesetzten Bruchenergie G_f verzichten. Die Grundlage für die weitere Formulierung bilden die Arbeiten von MESCHKE et al. [156] und FEENSTRA [71].

Die zusätzliche Spannung σ_{ts} , die sich als Funktion der aktuellen Stahlverzerrung ergibt und in deren Richtung wirkt, kann entsprechend Abb. 7.2 b) approximiert werden. Mit dem Überschreiten der Betonzugfestigkeit f_{ctm} , was bei einer Verzerrung von

$$\varepsilon_{c0} = \frac{f_{ctm}}{E} \cos^2 \theta \quad (7.3)$$

angenommen wird, beginnt der versteifende Einfluß des Betons. Maßgebend für die Verzerrung ε_{c0} ist der Winkel θ zwischen der Hauptzugrichtung und der Bewehrungsorientierung. Während CERVENKA et al. [32] einen konstanten Spannungsanstieg bis zum Erreichen von

$$\varepsilon_{cu} = \frac{G_f^{rc}}{l_c f_{ctm}} \cos^2 \theta \quad \text{mit} \quad G_f^{rc} = G_f \left(1 + \frac{l_c}{l_s} \right) \quad (7.4)$$

und damit eine trilineare 'tension stiffening'-Funktion vorschlagen, erscheint im Bezug auf die Entfestigungsfunktion (4.7) des Betons ein parabelförmiger Verlauf zwischen ε_{c0} und $3\varepsilon_{cu}$ geeigneter. In die Ermittlung des Grenzwertes ε_{cu} geht neben der charakteristischen Elementlänge l_c , (2.10), auch der mittlere Rißabstand l_s ein. Bei weiter zunehmender Verzerrung stellt sich ein stabiler Rißzustand ein, in dem die Spannung, die zwischen Beton und Bewehrung übertragen werden kann, den Maximalwert von $\sigma_{ts} = \zeta_{ts} f_{ctm}$ erreicht. Nach FEENSTRA [71] kann als gute Näherung $\zeta_{ts} = 1$ angenommen werden.

Obwohl sich in den mehraxialen Versuchen von KOLLEGER [115] gezeigt hat, daß auch jenseits der Fließgrenze f_y der Bewehrung ein Mittragen des Betons stattfindet, sind bisher kaum gesicherte Daten bezüglich dieses Phänomens bekannt. Im folgenden wird daher auf eine detaillierte Beschreibung des 'tension-stiffening' bei plastizierender Bewehrung oberhalb von ε_{sy} verzichtet, es wird $\sigma_{ts} = 0$ angesetzt. Der lineare Abfall der Interaktionsspannung stellt sich in Abhängigkeit vom Elastizitätsmodul der Stahlbewehrung E_s bei

$$\varepsilon_u = \varepsilon_{sy} - \frac{\zeta_{ts} f_{ctm}}{\rho_{s,eff} E_s} \quad (7.5)$$

ein. Für den effektiven Bewehrungsgrad $\rho_{s,eff} = A_s/A_{c,eff}$ ist die effektive Betonzugfläche

$$A_{c,eff} = h_{eff} b \quad , \quad h_{eff} = \min \left[2.5 \left(c + \frac{d_{s,eq}}{2} \right) ; \frac{t_c}{2} \right] \quad (7.6)$$

erforderlich, die neben der Bauteilbreite b , der halben Bauteildicke t_c und der Betondeckung c auch vom äquivalenten Stabdurchmesser $d_{s,eq}$ abhängt. Ist die Struktur kreuzweise in den Richtungen p und q bewehrt, so beträgt $d_{s,eq}$

$$d_{s,eq} = \frac{d_{s,p} \rho_{s,p} + d_{s,q} \rho_{s,q}}{\rho_{s,p} + \rho_{s,q}} \quad . \quad (7.7)$$

Alternativ läßt sich der effektive Bewehrungsgrad mit Hilfe der Gleichgewichtsbeziehung $f_{ctm} A_{c,eff} = \sigma_s A_s$ über $\rho_{s,eff} = f_{ctm}/\sigma_s$ bestimmen, was im Rahmen einer numerischen Simulation bei Kenntnis von σ_s vorteilhaft ist.

Der mittlere Rißabstand l_s , der das Maß der Modifikation von G_f gemäß (7.4)₂ bestimmt, folgt nach CEB-FIP MODEL CODE [30] und DIN 1045-1 [54] für eine rechtwinklige Bewehrungsführung und orthogonale Risse aus

$$l_s = \frac{2}{3} l_{s,max} = \frac{2}{3} \left(2s_0 + \frac{d_s}{\alpha_s \rho_{s,eff}} \right) \approx \frac{2}{3} \frac{d_s}{3.6 \rho_{s,eff}} \quad . \quad (7.8)$$

Der Formbeiwert α_s beträgt für profilierten Bewehrungsstahl vier, die minimale Einbindelänge s_0 wird üblicherweise mit 25 mm angesetzt. Im Falle eines Zugstabes mit nur einem einzigen Bewehrungsstab wird in (7.8) ρ_s anstelle von $\rho_{s,eff}$ verwendet.

Stellen sich bei einer Hauptzugrichtung, die bezüglich den Richtungen p_i von $i = 1, \dots, n$ Bewehrungslagen die Winkel θ_i aufspannt, Risse ein, so ist der mittlere Abstand zwischen diesen

$$l_s = \frac{1}{a_x + a_y} \quad , \text{ wobei gilt} \quad \begin{aligned} a_x &= \max \left[\frac{|\cos \theta_i|}{l_{s,p_i}} \right] \\ a_y &= \max \left[\frac{|\sin \theta_i|}{l_{s,q_i}} \right] \end{aligned} \quad . \quad (7.9)$$

Die für die Übertragung der Schubkräfte innerhalb eines offenen Risses verantwortlichen Mechanismen, wie die Dübelwirkung der Bewehrung ('dowel action') und die Riverzahnung ('aggregate interlock'), STEMPNIEWSKI & EIBL [209] und REINHARDT [178], werden im weiteren nicht gesondert formuliert. Ihre Wirkungsweisen sind durch die dreidimensionale Diskretisierung der Bewehrungsstäbe, siehe Abschnitt 7.2.3, und die verschmierte bruchenergetische Betrachtung der Rißentwicklung teilweise impliziert.

7.2.2 Möglichkeiten der numerischen Beschreibung

Zur Modellierung von Stahlbetonstrukturen und deren numerische Simulation im Rahmen der Finite-Element-Methode haben sich drei unterschiedliche Vorgehensweisen etabliert, die sich sowohl in Diskretisierungs- und Rechenaufwand, als auch in der Genauigkeit der Ergebnisse stark unterscheiden. Je nach gestellten Anforderungen stehen für die Kombination der beiden Werkstoffe Beton und Bewehrungsstahl die diskrete ('discrete modelling'), die eingebettete ('embedded modelling') sowie die verschmierte Beschreibung ('distributed modelling') zur Verfügung. Im folgenden sollen diese Möglichkeiten kurz vorgestellt werden, eine weitaus detaillierte Darstellung ist in den Arbeiten von HOFSTETTER & MANG [94] und CHEN [36], [37] zu finden.

Bei der Wahl einer *diskreten Modellierung* wird jeder Bewehrungsstab durch ein einzelnes Stab- oder Balkenelement abgebildet, wobei letzteres speziell für die exakte Erfassung der Steifigkeit einer schräg zum Riß verlaufenden Bewehrung ('kinking') notwendig ist. Für die Approximation des reinen Betonquerschnittes kann mit Blick auf die zu untersuchende Struktur eine beliebige Elementgeometrie gewählt werden. Um die Verträglichkeit der Verschiebungen von Beton- und Bewehrungselement gewährleisten zu können, sind für beide Formulierungen Ansatzfunktionen derselben Ordnung erforderlich. Desweiteren müssen die Knoten des Stab- beziehungsweise Balkenelementes mit denen des Betonelementes übereinstimmen. Nur so ist es möglich dieselben Randbedingungen einzuhalten und den Verbund beider Materialien zu simulieren. Es ist offensichtlich, daß bei dieser Form der Modellierung die Bewehrungsführung einen wesentlichen Einfluß auf die Geometrie des Finite-Element-Netzes und dessen Feinheit ausübt.

Zur Erfassung des im vorherigen Abschnitt beschriebenen Verbundverhaltens zwischen Beton und der eingelegten Bewehrung, können diskrete oder kontinuierlichen Übergangselemente verwendet werden, NGO & SCORDELIS [161], MEHLHORN [148] und andere, siehe Abschnitt 7.3.2. Alternativ ist eine Modifikation des Stoffgesetzes der Bewehrung möglich, was zwar einen geringeren Diskretisierungsaufwand, aber auch Einbußen in der Genauigkeit mit sich bringt.

Auch im Rahmen einer *eingebetteten Modellierung* sind, wie schon bei der diskreten, zwei getrennte Elemente für Beton und Bewehrung erforderlich. Diese sind vom Elementtyp her identisch, der einzige Unterschied liegt darin, daß für die Abbildung der Bewehrung eine eindimensionale Stahlformulierung in ein mehrdimensionales isoparametrisches Element eingebettet wird. Da die Stahleinlagen nicht direkt den Randbedingungen des Betonelementes folgen müssen und somit beliebig in ihrer Orientierung sind, kann die Diskretisierung der Struktur ohne besondere Beachtung der Bewehrungsanordnung erfolgen. Während in einem ersten Schritt die gesamte Geometrie mit Betonelementen beschrieben wird, wird die Bewehrung in einem zweiten Schritt zusätzlich in das Finite-Element-Netz eingefügt. Als Folge der so bedingten Kopplung der jeweiligen Elementknoten ergibt sich ein vollständiger Verbund zwischen Beton und Bewehrung. Für die Berücksichtigung des 'tension-stiffening'-Effektes oder der Dübelwirkung des Bewehrungsstahl, müssen dessen konstitutive Beziehungen angepaßt werden.

Die letzte der drei klassischen Vorgehensweisen zur Beschreibung von bewehrten Betonstrukturen ist die *verschmierte Modellierung*. Diese beruht auf der Approximation einzelner Bewehrungslagen durch dünne Stahlschichten mit äquivalentem Querschnitt. Als Stoffgesetz kann beispielsweise eine eindimensionale elastoplastische Formulierung verwendet werden, welche entsprechend der Bewehrungsorientierung ausgerichtet wird. Bei einer kreuzweisen Armierung kann es unter Umständen sinnvoll sein anstelle zweier Schichten eine einzelne mit orthotropen Eigenschaften zu wählen. Die Berücksichtigung der Stahlschichten erfolgt innerhalb eines geschichteten zwei- oder dreidimensionalen Betonelementes ('multi-layer element'), so daß sich die Stahlverzerrungen direkt aus denen des Grundelementes ergeben. Dies hat – wie schon bei den anderen Modellierungsmöglichkeiten von Bewehrung – einen perfekten Verbund zur Folge. Über die Ansätze aus Abschnitt 7.2.1 kann eine wirklichkeitsnähere Erfassung der Verbundeigenschaften erreicht werden.

7.2.3 Diskrete Formulierung nach dem Rebar-Konzept

Das Rebar-Konzept, welches als eine Mischung aus diskreter und eingebetteter Modellierung angesehen werden kann, stellt eine interessante Alternative zur Ap-

proximation von Stahlbetonstrukturen dar. Es verbindet eine hohe Abbildungsgenauigkeit mit einem akzeptablen Diskretisierungsaufwand. Das ursprüngliche Anwendungsgebiet dieses Konzeptes waren mit Stahldrähten verstärkte Gummierkstoffe, die beispielsweise in der Reifenindustrie zum Einsatz kommen. Es läßt sich aber auch auf weitere Problemstellungen übertragen, wie unter anderem die Arbeiten von MESCHKE & HELNWEIN [154], GEBBEKEN [78], SPRENGER & WAGNER [206], TIKHOMIROV & STEIN [216] sowie HOHN [97] zeigen.

Die Grundidee des Rebar-Konzeptes liegt in der diskreten Erfassung der Eigenschaften von Matrix und Faser innerhalb eines einzigen Elementes. Dies wird über eine additive Zerlegung des Potentials auf Elementebene

$$\Pi^e = \Pi_{int,c}^e + \Pi_{int,s}^e + \Pi_{ext}^e \quad (7.10)$$

in den Anteil $\Pi_{int,c}^e$ des Matrixmaterials, das in diesem Zusammenhang der Beton darstellt, und einen Anteil $\Pi_{int,s}^e$ der Faser beziehungsweise des Bewehrungsstahls erreicht. Mit Einführung der Formänderungsenergiefunktionen $W_{0S,c}$ und $W_{0S,s}$ lassen sich diese in Anlehnung an (6.7) als

$$\Pi_{int,c}^e = \int_{\mathcal{B}_0^e} [W_{0S,c} - \rho_{0,c} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{\mathcal{B}_{0,s}^e} [W_{0S,c} - \rho_{0,c} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}] dV_s \quad (7.11)$$

$$\Pi_{int,s}^e = \int_{\mathcal{B}_{0,s}^e} [W_{0S,s} - \rho_{0,s} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{u}] dV_s \quad (7.12)$$

formulieren. Dabei ist zu erkennen, daß anfänglich von einem vollständig aus Beton bestehenden Element \mathcal{B}_0^e ausgegangen wird. Um bei der Einbettung der Bewehrung deren Volumenanteil $\mathcal{B}_{0,s}^e$ nicht doppelt zu berücksichtigen, wird jener zuvor aus dem Betonelement entfernt, siehe Abb. 7.3. Da dieser Austausch der Potentialanteile den exakten geometrischen Ort der Bewehrung berücksichtigt, ergibt sich eine diskrete Formulierung der Stahlbewehrung ohne daß weitere Freiheitsgrade oder eine entsprechend ausgerichtete Vernetzung erforderlich werden. Die Verzerrungen von Beton und Stahleinlage folgen unter der Annahme eines vollständigen Verbundes über die Ansatzfunktionen direkt aus dem Verschiebungsfeld des Elementes.

Die Berücksichtigung von (7.11) und (7.12) bei der ersten und zweiten Variation im Rahmen des Prinzips vom Minimum des Potentials gemäß den Abschnitten 6.2 und 6.3 führt auf die Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T^e = \mathbf{K}_{Tcc}^e - \sum_{i=1}^{ns} \mathbf{K}_{Tsc}^e + \sum_{i=1}^{ns} \mathbf{K}_{Tss}^e \quad , \quad (7.13)$$

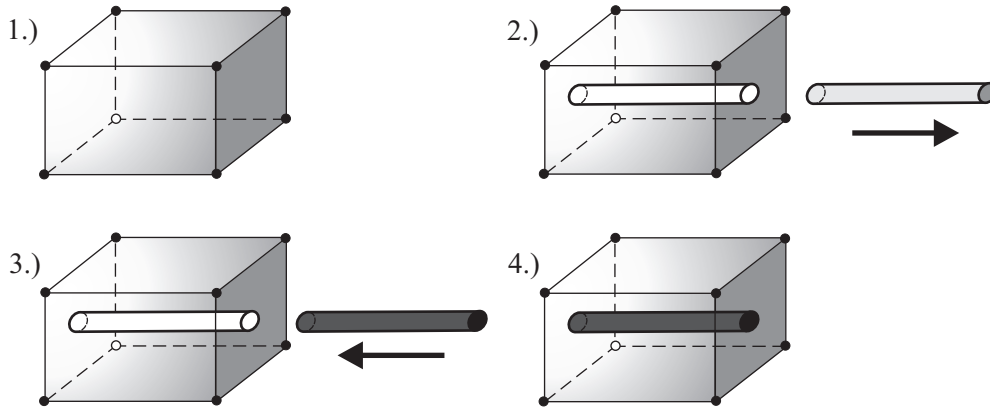


Abbildung 7.3: Einbettung eines Bewehrungsstabes nach dem Rebar-Prinzip

wobei über die ns Bewehrungsstäbe, die beliebig orientiert innerhalb des Elementes liegen können, summiert wird. Nach dem Zusammenbau aller Elemente der Gesamtstruktur läßt sich analog zu (6.29) das allgemeine Verschiebungsproblem

$$\mathbf{K}_T^h \Delta \mathbf{v} + \mathbf{G}^h = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \mathbf{G}^h = \bigcup_{e=1}^{numel} [\mathbf{f}_{int}^e - \lambda \mathbf{f}_{ext}^e] \quad (7.14)$$

formulieren. Als Komponenten der geometrisch nichtlinearen Steifigkeitsmatrix und des internen Lastvektors \mathbf{f}_{int}^e , welcher sich entsprechend (7.13) zusammensetzt, ergeben sich

$$\mathbf{K}_{TIK,cc}^e = \int_{B_0^e} [\mathbf{B}_I^T \mathbb{C}_c \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK,c}] dV \quad , \quad \mathbf{f}_{Iint,cc}^e = \int_{B_0^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{S}_c dV \quad (7.15)$$

$$\mathbf{K}_{TIK,sc}^e = \int_{B_{0,s}^e} [\mathbf{B}_I^T \mathbb{C}_c \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK,c}] dV_s \quad , \quad \mathbf{f}_{Iint,sc}^e = \int_{B_{0,s}^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{S}_c dV_s \quad (7.16)$$

$$\mathbf{K}_{TIK,ss}^e = \int_{B_{0,s}^e} [\mathbf{B}_I^T \mathbb{C}_s \mathbf{B}_K + \mathbf{G}_{IK,s}] dV_s \quad , \quad \mathbf{f}_{Iint,ss}^e = \int_{B_{0,s}^e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{S}_s dV_s \quad (7.17)$$

Die dafür notwendigen Material- und Spannungstensoren, welche auch bei der Bildung von $\mathbf{G}_{IK,c}$ und $\mathbf{G}_{IK,s}$ berücksichtigt werden müssen, resultieren aus den partiellen Ableitungen

$$\mathbf{S}_c = \frac{\partial W_{0S,c}}{\partial \mathbf{E}} \quad , \quad \mathbb{C}_c = \frac{\partial^2 W_{0S,c}}{\partial \mathbf{E}^2} \quad , \quad \mathbf{S}_s = \frac{\partial W_{0S,s}}{\partial \mathbf{E}} \quad , \quad \mathbb{C}_s = \frac{\partial^2 W_{0S,s}}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (7.18)$$

der entsprechenden Formänderungsenergiefunktionen. Mit Kenntnis der einzelnen Komponenten, die über eine numerische Gauß-Punkt-Integration mit insgesamt 8 Stützstellen ermittelt werden, folgen die zugehörigen Matrizen gemäß (6.22).

Aus den Formulierungen (7.11) und (7.12) beziehungsweise (7.15) bis (7.17) ist ersichtlich, daß im vorliegenden Fall die Bewehrung nicht als eindimensionaler Stab aufgefaßt wurde, sondern als ein dreidimensionales Kontinuum. Im Gegensatz zu den Arbeiten von SPRENGER & WAGNER [206] und HOHN [97] wird es so möglich, die dreidimensionalen Eigenschaften der Betonformulierung beim Herauslösen des Materials korrekt zu berücksichtigen. Desweiteren kann nur durch die Betrachtung der Bewehrung als Kontinuum deren Einfluß bei einer Belastung quer zur Bewehrungsrichtung wirklichkeitsnah erfaßt werden. Letzteres ermöglicht besonders bei größeren Stahlanteilen sehr genaue Ergebnisse für Biegebeanspruchungen infolge von Querkräften oder bei allgemeinen dreidimensionalen Belastungen.

Da auch das diskrete Volumen der Bewehrung die in Abschnitt 6.4 beschriebene starke Neigung zu numerischen Versteifungseffekten von trilinearen Standardverschiebungselementen zeigt, werden entsprechende Vorkehrungen erforderlich. Zur wirklichkeitsnahen Abbildung des Strukturverhaltens unter beliebiger biegeorientierter Belastung findet eine 'enhanced assumed strain' Interpolation Verwendung. Im Rahmen dieser Methode wird der Verzerrungstensor additiv durch einen Anteil $\tilde{\mathbf{E}}$, (6.31), erweitert

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^c + \tilde{\mathbf{E}} \quad , \quad (7.19)$$

wobei \mathbf{E}^c den kompatiblen Greenschen Verzerrungstensor darstellt. Die daraus herrührenden Modifikationen bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix und der Ermittlung der Elementverzerrungen lassen sich entsprechend Abschnitt 6.4.1 herleiten. Dabei ergeben sich die zusätzlichen Elementmatrizen $\mathbf{K}_{T I \alpha}^e$ und $\mathbf{K}_{T \alpha \alpha}^e$ sowie der Elementvektor $\mathbf{f}_{I \alpha}^e$ aus der Addition der einzelnen Volumenanteile von Beton und Bewehrung gemäß (7.13).

Um die Verträglichkeit der Verzerrungsinterpolation von Beton- und Bewehrungsvolumen gewährleisten zu können, wird auch für letzteres zusätzlich zur *EAS* Methode das 'assumed natural strain' Konzept, welches ausführlich in Abschnitt 6.4.2 dargestellt wurde, genutzt.

Für die Beschreibung der Stahlbewehrung kommt das in Abschnitt 7.1 entwickelte dreidimensionale von Mises-Kriterium zur Anwendung, so daß es bei der numerischen Simulation von Stahlbetonstrukturen möglich wird, deren Verhalten auch bei plastischen Verformungen der Bewehrung abzubilden.

Das Ziel der Formulierung nach dem Rebar-Konzept war es, ein in der Anwendung möglichst einfaches Element mit hoher Abbildungsgenauigkeit bereitzustellen.

len. Um dabei auch im Rahmen von Diskretisierung und eventueller Neuvernetzung von Strukturen eine effiziente Eingabe zu ermöglichen, ist es ausreichend den Anfangs- und Endpunkt eines Bewehrungsstabes global zu definieren. Im Rahmen einer Vorlaufrechnung werden die Elemente, welche von diesem Stab durchlaufen werden ermittelt und die jeweiligen isoparametrischen Ein- und Austrittskoordinaten bestimmt.

Parameterstudie zum Elementverhalten

Im Rahmen zweier einfacher Tests soll das Verhalten des entwickelten Rebar-Elementes überprüft und dargestellt werden. Da für diese Beispiele Materialparameter gewählt wurden, die keinen realen Werkstoff widerspiegeln, sondern nur einzelne Phänomene deutlich hervorheben sollen, werden im folgenden die Bezeichnungen Matrix und Faser, nicht aber Beton und Bewehrung verwendet.

In einem ersten Beispiel wird ein Würfel der Kantenlänge 2 mit einer zentrischen beziehungsweise mit vier gleichmäßig verteilten Fasern bei einer Zugbelastung $F = 4 \times 1$ untersucht, die Materialdaten sowie die Faseranordnung sind Abb. 7.4 zu entnehmen. Der Würfel ist in Zugrichtung gelagert, wobei sich ein

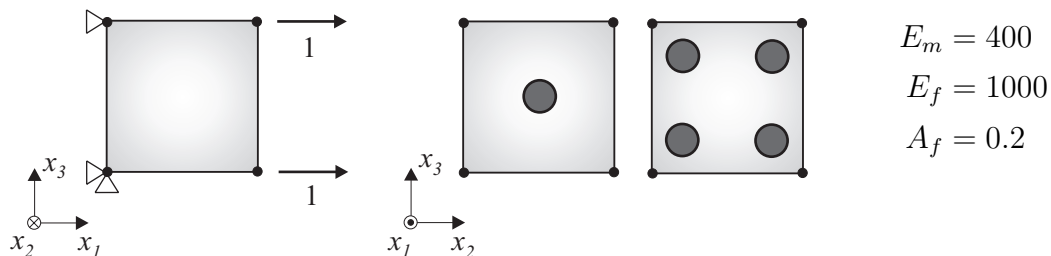


Abbildung 7.4: Würfel mit unterschiedlicher Faserbewehrung bei Zugbelastung

ebener Spannungszustand einstellen kann. Die Referenzwerte u_{ref} der analytischen Berechnung ergeben sich für n Fasern mit Hilfe des Quotienten der Elastizitätsmoduln über den ideellen Querschnitt

$$A_{id} = A_m + n \frac{E_f}{E_m} A_f \quad \text{mit} \quad A_{ges} = A_m + n A_f \quad . \quad (7.20)$$

Wie die Ergebnisse in Tab. 7.1 zeigen, liefert bereits ein einziges Rebar-Element die analytischen Verschiebungswerte, was für die Qualität der Formulierung spricht. Bei Verwendung einer eingebetteten Beschreibung stellen sich infolge der doppelten Berücksichtigung des Faservolumens kleinere Verschiebungen u_{eing} ein,

Fasern	$u_{analyt.}$	$u_{eingeb.}$	u_{Rebar}
0	$5.0000 \cdot 10^{-3}$	$5.0000 \cdot 10^{-3}$	$5.0000 \cdot 10^{-3}$
1	$4.6511 \cdot 10^{-3}$	$4.4445 \cdot 10^{-3}$	$4.6511 \cdot 10^{-3}$
4	$3.8462 \cdot 10^{-3}$	$3.3333 \cdot 10^{-3}$	$3.8462 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.1: Ergebnisse für verschiedene Faseranzahlen

im Rahmen einer diskreten Modellierung wäre eine wesentlich umfangreichere Diskretisierung erforderlich gewesen, siehe Abschnitt 7.2.2.

Nach diesem ersten elastischen Beispiel soll im Rahmen einer Parameterstudie das Elementverhalten beim Auftreten von plastischen Verformungen aufgezeigt werden. Zu diesem Zweck wird sowohl für Faser als auch für Matrix ein elastoplastisches von Mises-Material, (7.1), mit linearer Verfestigung angenom-

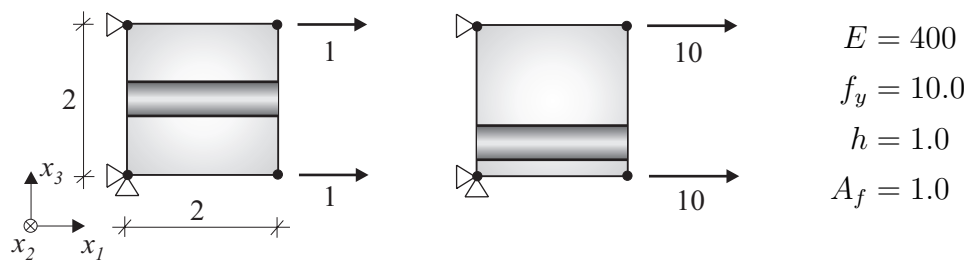


Abbildung 7.5: Würfel mit zentrischer und exzentrischer Faser in 2D-Darstellung

men. Ausgehend von identischen Materialkenngrößen und der zugehörigen Last-Verschiebung-Kurve, wird jeweils ein Parameter des Fasermaterials modifiziert. Für die ersten drei Berechnungen mit $F = 4 \times 1$ liegt die Faser zentrisch in der würfelförmigen Probe, für die letzte Untersuchung mit $F = 4 \times 10$ exzentrisch bei $h/4$, siehe Abb. 7.5.

Wird für das Verhältnis der Fließgrenzen von Matrix zu Faser $f_{y,m}/f_{y,f} = 1.25$ gewählt, so zeigt sich ein deutlich früheres Abknicken der Last-Verschiebungskurve als im Referenzfall, Abb. 7.6, was auf das beginnende plastische Fließen der Faser zurückzuführen ist. Da bei weiterer Laststeigerung die Matrix einen größeren Spannungsanteil aufnehmen muß als bei weiterhin elastischer Faser, treten schon für einen geringeren Lastfaktor plastische Matrixverformungen auf. Im weiteren zeigen sich parallele Kurvenverläufe.

Eine stärker verfestigende Faser mit $h_f = 50$ führt, wie zu erwarten war, zu einem

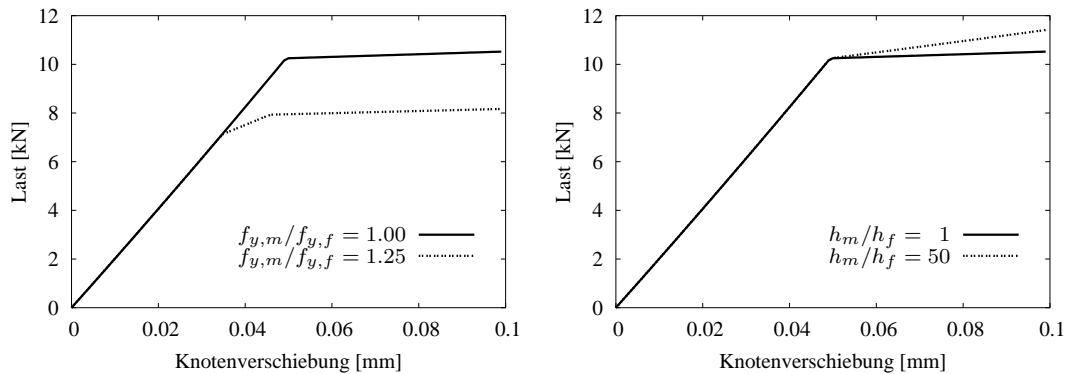


Abbildung 7.6: Modifikation von Fließgrenze $f_{y,f}$ und Verfestigung h_f

steileren Kurvenverlauf im plastischen Bereich als beim Ausgangsmaterial. Da die Verfestigung h keinen Einfluß auf das elastische Verhalten hat, ergeben sich bis zum Erreichen der Fließgrenze deckungsgleiche Graphen.

Sehr viel interessanter wirkt sich die Annahme einer mit $E_f = 800$ dehnsteiferen Faser aus. In diesem Fall entstehen wieder zwei Knicke im Kurvenverlauf, Abb. 7.7, da das Fasermaterial infolge der höheren Dehnsteifigkeit und der daraus

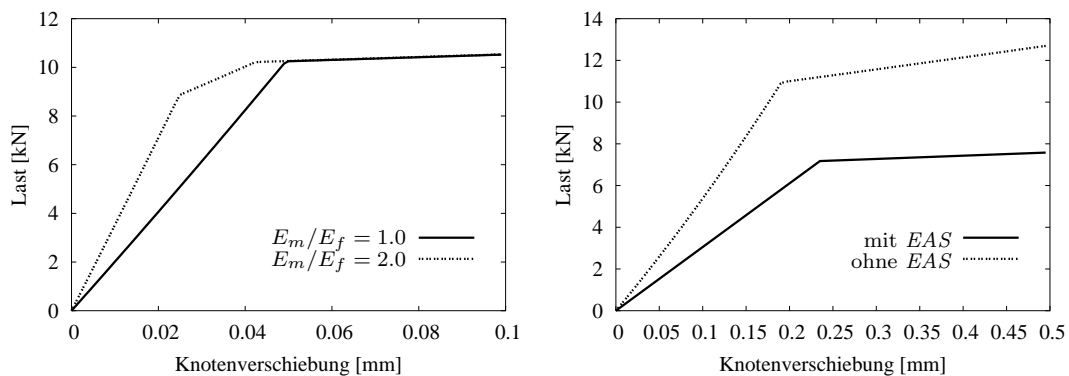


Abbildung 7.7: Unterschiedliche Dehnsteifigkeiten, mit/ohne EAS für Faser

resultierenden Spannungskonzentration schon vor der Matrix die elastische Grenze überschreitet. Für rein elastische Beanspruchung zeigt sich die Ertüchtigung des Versuchskörpers durch kleinere Verzerrungen, die sich bei gleichem Lastniveau einstellen. Als Folge der Unabhängigkeit der plastischen Verformungen vom gewählten E-Modul ist bei fortschreitendem Fließen kein Unterschied zur Referenzkurve zu erkennen.

In einer letzten Berechnung wird durch die exzentrische Lage der Faser mit $E_f = 800$ eine Biegung induziert. Während für die Faser sowohl mit als auch ohne

EAS-Interpolation gerechnet wird, bleibt diese für die Matrix in beiden Fällen aktiv. Ein Vergleich der Kurven zeigt deutlich die Unterschätzung der eintretenden Verschiebungen ohne Berücksichtigung von erweiterten Verzerrungsansätzen, was mit den numerischen Versteifungseffekten der Standardansätze zu begründen ist.

7.3 Stahlbeton-Verbundkonstruktionen

Mit dem Wunsch nach immer filigraneren und vor allem kostengünstigeren Konstruktionen nimmt der Anteil von Stahlbeton-Verbundkonstruktionen mehr und mehr zu. Der hauptsächliche Einsatzbereich ist dabei der Hochhaus- und Industriebau, wo neben eher klassischen Verbundträgern und -stützen auch innovative Verbund- und Flachdeckensysteme Verwendung finden, HANSWILLE [85].

Im Rahmen der weiteren Behandlung werden unter Verbundkonstruktionen Strukturen verstanden, die sich aus den schubfest miteinander verbundenen Werkstoffen Baustahl, in Form von Stahlprofilen, -rohren oder -fachwerken und Beton als Stahl- oder Spannbeton zusammensetzen. Streng genommen handelt es sich auch bei Stahlbeton um ein Verbundmaterial, was an dieser Stelle aber nicht weiter berücksichtigt werden soll, da es bereits ausführlich in Abschnitt 7.2 diskutiert wurde.

Die hohen Festigkeiten von Stahl im Zugbereich bei gleichzeitiger Abtragung der Druckspannungen über den Betonquerschnitt führt zu einem hohen Ausnutzungsgrad und damit kostengünstigem Einsatz der verwendeten Materialien. Da die Stahlkomponenten in der Regel die Funktion von Schalung und Rüstung übernehmen und eine umfangreiche Vorfertigung ermöglichen, ist ein schneller Baufortschritt gewährleistet.

Das Ziel der weiteren numerischen Modellbildung soll es sein, neben der möglichst wirklichkeitsnahen Erfassung des Tragverhaltens auch die Versagensmechanismen von Verbundstrukturen phänomenologisch abzubilden.

7.3.1 Modellierung des Verbundbereiches

Wird von Verbundträgern, die sich aus einem Stahlprofil und einer bewehrten oder unbewehrten Betonplatte zusammensetzen ausgegangen, Abb. 7.8, so ist als dritte Komponente ein geeignetes Verbundmittel zur Übertragung der Schubkräfte erforderlich. Entsprechend EC 4 [69] kommen hierfür verschiedene auf dem Obergurt des Profils aufgeschweißte Verdübelungen, wie beispielsweise Winkel-, Kopfbolzen- oder Blockdübel und Haken- oder Schlaufenanker in Frage. Da sich der Kopfbolzendübel im Vergleich zu den übrigen Verankerungstypen durch ein

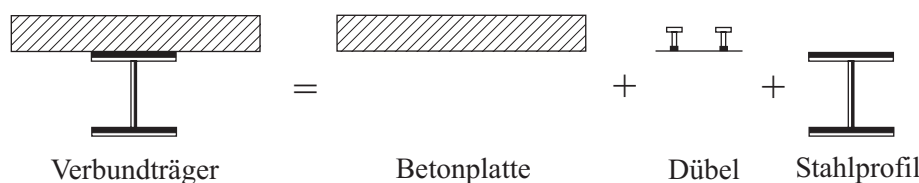


Abbildung 7.8: Prinzipieller Aufbau eines Verbundträgers

erwünschtes duktileres Tragverhalten und eine einfache Montage auszeichnet, findet dieser die häufigste Verwendung, ROIK et al. [181], BODE [20].

Zur Einsparung des statisch wenig wirksamen Obergurtes des Stahlprofils bieten sich liegende Kopfbolzen, die seitlich am Steg angeschweißt sind, an. Umfangreiche numerische und experimentelle Untersuchungen auf diesem Gebiet sind unter anderem in der Arbeit von KUHLMANN & BREUNINGER [125] dokumentiert.

Die Tragfähigkeit und die zugehörige Versagenscharakteristik der Verbundzone läßt sich experimentell im Rahmen sogenannter 'push-out'-Versuche bestimmen, welche für die Verwendung von Kopfbolzendübeln beispielsweise von OEHLERS [162], ROIK & BÜRKNER [182] oder HANSWILLE et al. [86] beschrieben werden. Die experimentell ermittelte Schubkraft, die sich aus diesen in Abmessung und Durchführung genormten Versuchen für den einzelnen Dübel ergibt, stimmt sehr gut mit den in EC 4 [69] angegebenen Bemessungswerten der maximalen Grenzscherkraft

$$P_{Rd} = \min \left\{ 0.8 f_u \frac{\pi d^2}{4} \frac{1}{1.25} \quad ; \quad 0.29 \xi d^2 \sqrt{f_{ck} E_{cm}} \frac{1}{1.25} \right\} \quad (7.21)$$

überein. Dabei ist neben der spezifischen Zugfestigkeit f_u des Dübels, dem mittleren Sekantenwert E_{cm} und der charakteristischen Zylinderdruckfestigkeit f_{ck} des Betons auch ein geometrischer Parameter ξ notwendig. Dieser geht in Abhängigkeit von Dübellänge h und -schaftdurchmesser d mit

$$\xi = \begin{cases} 0.2(h/d + 1) & \text{für } h/d < 4.0 \\ 1.0 & \text{für } h/d \geq 4.0 \end{cases} \quad (7.22)$$

in die Berechnung ein. Die erste Abschätzung in (7.21) beschreibt den Fall des Verbundversagens durch einen Schub/Zug-Bruch des Dübels; bei Herausreißen des Verbundmittels aus dem Betonkörper oder einer örtlichen Zerstörung der Zementmatrix am Dübelfuß wird der zweite Ausdruck maßgebend. Für die exakte Beschreibung der Verbund-Schlupf-Beziehung, die sich bei kontinuierlich zunehmender Belastung zwischen den einzelnen Komponenten einstellt, haben sich bisher weder allgemeingültige Rechenmodelle noch äquivalente Beziehungen

etabliert. Vielmehr kommen aus 'push-out'-Versuchen gewonnene Dübelkennlinien für den Zusammenhang von übertragener Scherkraft und zugehöriger Verformung zur Anwendung. Abb. 7.9 stellt exemplarisch die von ROIK et al. [181]

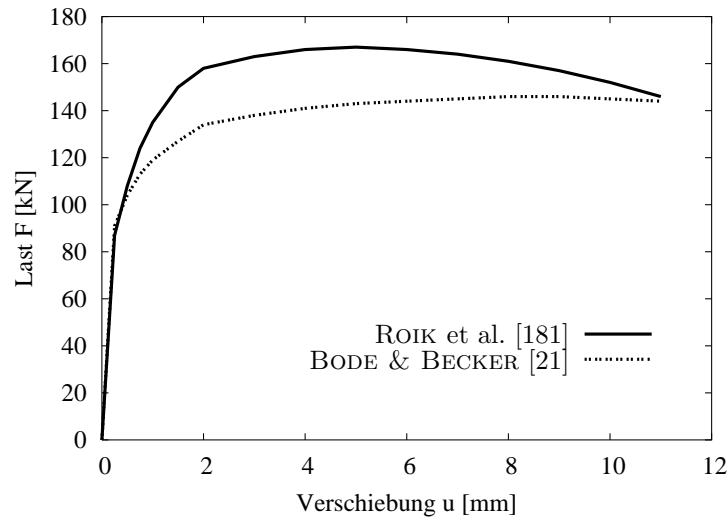


Abbildung 7.9: Last-Schlupf-Charakteristik für 'push-out'-Versuch

und BODE & BECKER [21] ermittelten Kennlinien für $\phi 22/100$ mm Kopfbolzendübel in einer Vollbetonplatte gegenüber. Die trotz gleicher Anfangssteifigkeit stark unterschiedlichen Kurvenverläufe führen BODE & BECKER auf Versuchsdurchführungen mit verschiedenen Belastungsgeschwindigkeiten zurück. Allgemein werden diese beiden Verläufe als oberer und unterer Grenzwert der Last-Schlupf-Beziehung angesehen.

Die numerische Modellierung des Verhaltens in der Verbundzone erfolgt in der Regel über Federmodelle, innerhalb derer entweder jeder Dübel diskret als Einzelfeder abgebildet oder gemeinsam mit den übrigen Dübeln gleichmäßig über den Verbundbereich verschmiert wird. Für einen ersten Überblick seien die Arbeiten von LUNGERSHAUSEN [142], ROTS [183], HOFSTETTER & MANG [94] sowie BODE & BECKER [21] genannt. In Abhängigkeit von der Wahl der Federsteifigkeiten, die sich aus Form, Abstand und Materialeigenschaften der verwendeten Verbundmittel ergeben, kann zum einen ein Versagen der Dübel, zum anderen das Nachgeben auf Seiten des Betons simuliert werden. Während sich die diskrete Beschreibung infolge des hohen Modellierungsaufwandes und der großen Zahl von Freiheitsgraden nur für die Untersuchung kleiner Detailbereiche eignet, ermöglicht eine verschmierte Betrachtung die Erfassung des Tragverhaltens komplexer Aufgabenstellungen.

Im weiteren soll von letztgenannter Möglichkeit der Approximation ausgegangen

werden, die im Rahmen der Finite-Element-Methode die Einführung von speziellen Zwischenelementen notwendig macht.

7.3.2 Elastoplastische 'interface'-Formulierung

Für die kinematische Beschreibung der Verbund-Schlupf-Beziehung, die sich im Bereich der Verbundfuge einstellt, bieten sich bei Nutzung finiter Elemente zwei unterschiedliche Formulierungen an. Zum einen ist es möglich die Interaktion der benachbarten Beton- und Stahlelemente über eine direkte Knoten-Knoten-Beziehung abzubilden, was zu sogenannten konzentrierten Zwischenelementen beziehungsweise 'lumped interface elements' führt und zum Beispiel in den Veröffentlichungen von NGO & SCORDELIS [161], SCHELLEKENS [188] und BODE et al. [22] zu finden ist. Zum anderen läßt sich die Wechselwirkung über das interpolierte Verschiebungsfeld kontinuierlicher Elemente beschreiben, ('continuous interface elements'). Letzteres wurde unter anderem bei KRAUS & WURZER [119] und ZHOU [239] Berücksichtigt. Mit der Verwendung einer kontinuierlichen Elementformulierung wird es über eine einfache Modifikation der Integrationspunkte möglich, zwischen den beiden unterschiedlichen Typen umzuschalten, siehe beispielsweise ROTS [183] oder MENRATH [150].

In ähnlicher Weise soll auch bei der folgenden Finite-Element-Approximation vorgegangen werden. Im Anschluß daran wird eine elastoplastische konstitutive Beziehung für die Last-Schlupf-Modellierung vorgestellt, die auf dem Coulombschen Reibungsgesetz beruht.

Finite-Element-Approximation des Verbundbereiches

Da die Verbundfuge zweier Kontinuums-elemente gemäß Abschnitt 6.3 einen infinitesimal dünnen Bereich darstellt, kann von zweidimensionalen kontinuierlichen 'interface'-Elementen mit einer Dicke von $d = 0$ ausgegangen werden. Um eine gegenseitige Verschiebung der insgesamt acht an das Zwischenelement anschließenden Knoten gewährleisten zu können, werden jeweils zwei Eckknoten mit anfänglich identischer Lage gewählt, siehe Abb. 7.10. Die Verschiebungsfelder $\underline{\mathbf{u}}^h$ und $\overline{\mathbf{u}}^h$ der unteren und oberen 'interface'-Oberfläche $\partial\mathcal{B}^{if}$ beziehungsweise $\partial\overline{\mathcal{B}}^{if}$ lassen sich mit

$$\underline{\mathbf{u}}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \underline{\mathbf{v}}_I \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{u}}^h = \sum_{I=1}^4 N_I \overline{\mathbf{v}}_I \quad (7.23)$$

aus den entsprechenden Knotenverschiebungen interpolieren, wobei die bilinearen Ansatzfunktionen $N_I = (1 + \xi_I^1 \xi^1)(1 + \xi_I^2 \xi^2)/4$ für die isoparametrischen Koor-

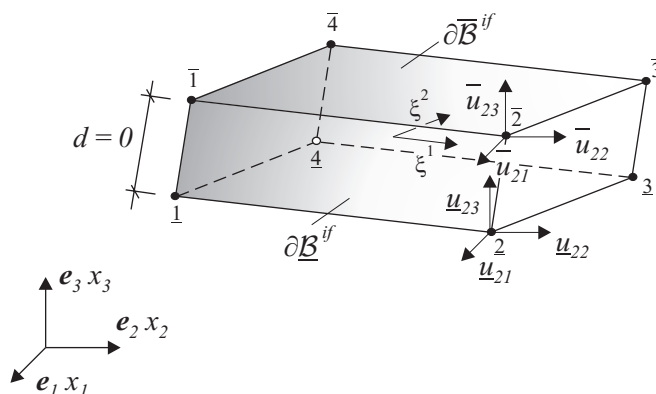


Abbildung 7.10: Zweidimensionales Zwischenelement

dinaten der jeweiligen Doppelknoten ausgewertet werden. Nach der Einführung von

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \hat{\mathbf{I}} & N_2 \hat{\mathbf{I}} & N_3 \hat{\mathbf{I}} & N_4 \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} \quad (7.24)$$

und $\hat{\mathbf{I}} = \text{diag} [1 \quad 1 \quad 1]$ wird es möglich (7.23) auf Elementebene in der kürzeren Matrizenform

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^e \\ \underline{\mathbf{u}}^e \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \underline{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{v}} &= [\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{v}_3 \quad \bar{v}_4]^T \\ \underline{\mathbf{v}} &= [\underline{v}_1 \quad \underline{v}_2 \quad \underline{v}_3 \quad \underline{v}_4]^T \end{aligned} \quad (7.25)$$

zusammenzufassen. Für die Darstellung der Wechselwirkungen innerhalb einer Verbundfuge sind ausschließlich die Relativverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}^e$ der beiden Flächen des Zwischenelementes erforderlich. Diese folgen aus

$$\hat{\mathbf{u}}^e = \bar{\mathbf{u}}^e - \underline{\mathbf{u}}^e = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^e \\ \underline{\mathbf{u}}^e \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

wobei \mathbf{L} die Form einer Zuordnungsmatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

besitzt. Über (7.25) läßt sich der Zusammenhang zwischen $\hat{\mathbf{u}}^e$ und den Knotenverschiebungen $\mathbf{v}^e = [\bar{\mathbf{v}} \quad \underline{\mathbf{v}}]^T$ als

$$\widehat{\mathbf{u}}^e = \mathbf{B}^{if} \mathbf{v}^e \quad \text{mit} \quad \mathbf{B}^{if} = \mathbf{LH} \quad (7.28)$$

angeben. An dieser Stelle sei auf die formale Ähnlichkeit von (7.28) und der ersten Variation des Verzerrungstensors auf Elementebene (6.21) hingewiesen. Dort verknüpft die Matrix \mathbf{B} die Inkremente von Verzerrungen und Knotenverschiebungen des Kontinuums-elementes über die Ableitungen der Ansatzfunktionen. Aus diesen Verzerrungsänderungen ergeben sich schlußendlich die entsprechenden Spannungsinkremente. Im Gegensatz dazu resultieren im Falle einer 'interface'-Formulierung auf Elementebene die Kräfte

$$\mathbf{t}^{if e} = \mathbb{C}^{if} : \widehat{\mathbf{u}}^e \quad (7.29)$$

als arbeitskonforme Größe der Verschiebungen $\widehat{\mathbf{u}}^e$. Die Matrix \mathbb{C}^{if} enthält dabei die nichtlinearen Steifigkeiten der 'interface'-Zone

$$\mathbb{C}^{if} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11}^{if} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_{22}^{if} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_{33}^{if} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{11}^{if} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_{11}^{if} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{C}_{33}^{if} \end{bmatrix}, \quad (7.30)$$

welche später detailliert betrachtet werden soll. Bei der Formulierung von \mathbb{C}^{if} wird von transversal-isotropen Eigenschaften ausgegangen, wobei sich die einzelnen Richtungen nicht gegenseitig beeinflussen. Da in der Literatur bisher noch keine hinreichenden Untersuchungen zum Interaktionsverhalten der einzelnen Kräfte innerhalb der Verbundfuge zu finden sind, erscheint diese Annahme als gerechtfertigt.

Analog zu den Herleitungen aus Abschnitt 6.2 läßt sich die erste Variation des Potentials für die 'interface'-Schicht als

$$\delta\Pi(\widehat{\mathbf{u}}, \delta\widehat{\mathbf{u}}) = \int_{\mathcal{B}_0^{if}} \mathbf{t}^{if} : \delta\widehat{\mathbf{u}} \, dA - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0^{if}} \mathbf{t}_0 \delta\widehat{\mathbf{u}} \, dA = 0 \quad (7.31)$$

angeben, welche identisch mit der schwachen Form der Gleichgewichtsaussage ist. Dabei ist als Folge des Kräftegleichgewichts $\bar{\mathbf{t}} = -\underline{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^{if}$ zwischen den gegenüberliegenden Flächen nur die Variation der Relativverschiebungen zu berücksichtigen:

$$\int_{\mathcal{B}_0^{if}} [\underline{\mathbf{t}} : \delta\underline{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{t}} : \delta\bar{\mathbf{u}}] \, dA = \int_{\mathcal{B}_0^{if}} \mathbf{t}^{if} : \delta\widehat{\mathbf{u}} \, dA \quad (7.32)$$

Zur iterativen Bestimmung der unbekanntenen Verschiebungsfunktion \mathbf{u} ist eine Linearisierung von (7.31) erforderlich, was auf das Gleichungssystem

$$\int_{\mathcal{B}_0^{if}} \left[\delta \hat{\mathbf{u}} : \frac{\partial \mathbf{t}^{if}}{\partial \hat{\mathbf{u}}} : \Delta \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{t}^{if} : \Delta \delta \hat{\mathbf{u}} \right] dA = - \int_{\mathcal{B}_0^{if}} \mathbf{t}^{if} : \delta \hat{\mathbf{u}} dA + \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0^{if}} \mathbf{t}_0 \delta \hat{\mathbf{u}} dA \quad (7.33)$$

führt, siehe dazu (6.13).

Im Rahmen einer diskreten Finite-Element-Betrachtung ergeben sich unter Berücksichtigung von $\delta \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}^{if} \delta \mathbf{v}$ aus (7.33) die Elementlastvektoren

$$\mathbf{f}_{I\,int}^{if\,e} = \int_{\mathcal{B}_0^{if\,e}} \mathbf{B}^{if\,T} \mathbf{t}^{if\,e} dA \quad , \quad \mathbf{f}_{I\,ext}^{if\,e} = - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0^{if\,e}} N_I^T \mathbf{t}_0 dA \quad (7.34)$$

in gleicher Weise wie (6.23) und (6.24). Die Komponenten der tangentialen Steifigkeitsmatrix eines 'interface'-Elementes sind formal identisch zu (6.25)

$$\mathbf{K}_{TIK}^{if\,e} = \int_{\mathcal{B}_0^{if\,e}} \left[\mathbf{B}_I^{if\,T} \mathbb{C} \mathbf{B}_K^{if} + \mathbf{G}_{IK}^{if} \right] dV \quad . \quad (7.35)$$

In dieser Beziehung wurde $\partial \mathbf{t}^{if} / \partial \hat{\mathbf{u}} = \mathbb{C}^{if}$ ausgenutzt, was direkt aus (7.29) folgt. Mit den Komponenten der Matrizen \mathbf{G}_{IK}^{if} , die sich wie im Abschnitt 6.3 dargestellt bilden, läßt sich nach dem Zusammenbau aller Elemente gemäß (6.28) das allgemeine Gleichungssystem in den Verschiebungen aufstellen:

$$\mathbf{K}_T^h \Delta \mathbf{v} + \mathbf{G}^h = \mathbf{0} \quad (7.36)$$

Für die Berechnung der integralen Größen (7.34) und (7.35) findet eine numerische Integration nach Gauß Verwendung. Klassischerweise werden dabei für bilineare Ansatzfunktionen 2×2 Stützstellen mit den isoparametrischen Koordinaten $\xi^i = \pm 1/\sqrt{3}$, $i = 1, 2$, genutzt.

Mit einer alternativen Wahl der Integrationspunkte bei $\xi^i = \pm 1$ ist der Übergang von einer kontinuierlichen Formulierung zu einem konzentrierten Zwischenelement möglich. Die Steifigkeiten der einzelnen Verbundmittel werden dann nicht mehr gleichmäßig über die gesamte Elementfläche verschmiert, sondern in den Knoten konzentriert. Die Knoten innerhalb einer Oberfläche des 'interface'-Elementes sind somit voneinander entkoppelt, wobei zwischen den jeweils gegenüberliegenden quasi eine Einzelfeder wirkt. Der Vorteil dieser konzentrierten Formulierung gegenüber der Verwendung tatsächlicher Federelemente ist, daß die aufwendige

Diskretisierung der Knoten-Knoten-Verbindung nicht mehr erforderlich wird und die Anzahl der notwendigen Elemente deutlich reduziert werden kann.

Wie numerische Untersuchungen von ROTS [183] und anderen gezeigt haben, liefern sowohl kontinuierliche als auch konzentrierte Zwischenelemente sehr gute Ergebnisse. Im Rahmen von Kontaktproblemen, bei denen über eine hohe Steifigkeit in Normalenrichtung ein Durchdringen der Berührflächen vermieden werden soll, sind die konzentrierten Elemente zu bevorzugen.

Nichtlineare Last-Schlupf-Modellierung

Grundlegend für die weitere Formulierung der nichtlinearen Zusammenhänge innerhalb des vom Zwischenelement abgebildeten Bereiches ist die Annahme einer additiven Aufteilung der Relativverschiebungen in einen elastischen und einen inelastischen Anteil

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{el} + \hat{\mathbf{u}}^{pl} \quad . \quad (7.37)$$

Diese auf dem fiktiven Reiß-Modell von HILLERBORG et al. [93], [91] beruhende Hypothese fand bereits bei der Beschreibung des Betonverhaltens in (2.3) Verwendung und ermöglicht somit die Entwicklung ähnlicher Algorithmen für eine Beschreibung im Rahmen der Plastizitätstheorie.

Mit der Zerlegung des Krafttensors \mathbf{t}^{if} in Komponenten in Schub- und Normalenrichtung

$$\mathbf{t}^{if} = \mathbf{t}^S + \mathbf{t}^N \quad \text{mit} \quad \mathbf{t}^S = \begin{bmatrix} t_1^{if} & t_2^{if} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{t}^N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_3^{if} \end{bmatrix}^T \quad (7.38)$$

läßt sich das Coulombsche Reibungsgesetz in Abhängigkeit von der Norm $|\mathbf{t}^S| = \sqrt{\mathbf{t}^S : \mathbf{t}^S}$ und dem Vektor $\bar{\mathbf{1}} = [0 \ 0 \ 1]^T$ in der Form

$$f_1 = |\mathbf{t}^S| + \xi_1 \mathbf{t}^{if} \bar{\mathbf{1}}^T - q_1 \leq 0 \quad (7.39)$$

schreiben, CHEN [37], MENRATH [150], SCHELLEKENS [188] und weitere. Dabei geht über $\xi_1 = \tan \varphi$ die innere Reibung φ , die eine Verzahnung der Bruch- beziehungsweise Reißfläche darstellt, ein. Die von der internen plastischen Variablen α abhängige Entfestigungsfunktion q_1 entspricht der Kohäsion

$$q_1 = c(\alpha) = c_0 \exp \left[-\frac{\alpha}{\alpha_u} \right] \quad \text{mit} \quad \alpha_u = \frac{G_f^{if}}{c_0}, \quad (7.40)$$

die in Anlehnung an das eindimensionale Zugversagen von Beton (4.5) als exponentielle Funktion gewählt wurde. Die im Verlauf der fortschreitenden Entfestigung des verschmierten Verbundbereiches freigesetzte Bruchenergie G_f^{if} und die maximale Kohäsion c_0 sind dabei Materialkonstanten, die anhand von Versuchskurven verifiziert werden müssen. Die Einführung einer charakteristischen Elementlänge l_c ist hier, anders als in (4.5)₂, aufgrund der infinitesimalen Dicke des 'interface'-Elementes nicht erforderlich.

Mit dem Ansatz (7.40) ergibt sich für den Entfestigungsmodul, der den Zusammenhang $\dot{q}_1 = -H \dot{\alpha}$, (3.50), beschreibt

$$H = -\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} = \frac{c_0}{\alpha_u} \exp\left[-\frac{\alpha}{\alpha_u}\right] \quad . \quad (7.41)$$

Alternativ sind in der Literatur lineare oder multilineare Formulierungen von H zu finden, beispielsweise bei HOHN [97], MENRATH [150], ZHOU [239], ROTS [183], die allerdings in der Regel zu einer deutlich höheren Anzahl erforderlicher Materialparameter führen. Für den multilinearen Fall, der sich aus insgesamt n Abschnitten zusammensetzt, wird von einer Funktion

$$q_1 = c(\alpha) = c_0^s + H_i \alpha \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n \quad (7.42)$$

ausgegangen. Dabei stellt c_0^s die Steifigkeit der Verbundfuge beim Erreichen der maximal übertragbaren Schubkraft dar, c_i^s sind die Werte der jeweiligen linear angenommenen Teilstücke der Verbund-Schlupf-Kurve. Über die Steigungen

$$h_i = \frac{c_i^s - c_{i-1}^s}{\widehat{u}_{11,i} - \widehat{u}_{11,i-1}} \quad (7.43)$$

läßt sich in Anlehnung an die Zusammenhänge der eindimensionalen Plastizitätstheorie, KAHN & HUANG [105], SIMO & HUGHES [198], der aktuelle Ver- und Entfestigungsmodul

$$H_i = \frac{h_1 h_i}{h_1 - h_i} \quad (7.44)$$

ermitteln, wobei als Anfangswert $h_1 = c_i^s / \widehat{u}_{11,1}$ anzusetzen ist.

Da die im allgemeinen Spannungsraum kegelförmige Fläche f_1 , (7.39), eine starke formale Ähnlichkeit mit der in Abschnitt 4.2.1 eingeführten Drucker-Prager-Fließbedingung f_1 besitzt, wird auch hier eine invertierte Fließbedingung

$$f_2 = |\mathbf{t}^S| + \xi_2 \mathbf{t}^{if} \bar{\mathbf{1}}^T - q_2 \geq 0 \quad (7.45)$$

zur Vermeidung numerischer Instabilitäten im Bereich der Kegelspitze herangezogen. Zum Tragen kommt (7.45) bei nahezu eindimensionalen Zugzuständen senkrecht zur 'interface'-Ebene, $|\mathbf{t}^S| \approx 0$. Ihre Funktionsweise ist analog zu Abb. 4.7 und den zugehörigen Erläuterungen.

Bei der Vorgabe von orthogonalen Flächen f_1 und f_2 folgt für deren Gradienten

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{t}^{if}} : \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{t}^{if}} = 0 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{t}^{if}} = \frac{\mathbf{t}^S}{|\mathbf{t}^S|} + \xi_i \bar{\mathbf{1}} \quad , \quad (7.46)$$

so daß sich der geometrische Parameter von f_2 zu $\xi_2 = -1/\xi_1$ ergibt. Für die Verfestigung q_2 muß außerdem $q_2 = q_1/(\xi_1)^2$ gelten.

Das im Rahmen der algorithmischen Beschreibung des nichtlinearen Verbund-Schlupf-Verhaltens erforderliche Projektionsverfahren beruht auf den Ansätzen der 'non-smooth multisurface plasticity' von SIMO et al. [200], [201] und kann direkt aus Abschnitt 4.2.5 abgeleitet werden.

Nach einer impliziten Euler-Rückwärts-Zeitintegration gemäß Abschnitt 3.3.1 lassen sich die Kuhn-Tucker-Bedingungen des Optimierungsproblems (3.18) in der diskreten Form

$$\gamma_i \geq 0 \quad , \quad f_i \leq 0 \quad , \quad \gamma_i f_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2 \quad (7.47)$$

darstellen, wobei für den invertierten Kegel f_2 jeweils die entgegengesetzten Vorzeichen gelten. Diese Beziehungen bilden die Be- und Entlastungsbedingungen der aktiv an der plastischen Deformation beteiligten Fließkriterien, für welche die skalaren Faktoren $c_i = 1$ eingeführt werden. Mit $c_i = 0$ sind inaktive Flächen gekennzeichnet.

Die Evolutionsgleichungen der assoziierten plastischen Größen $\hat{\mathbf{u}}^{pl}$ und q_i folgen aus den Ableitungen der Lagrange-Funktion (3.20) und lassen sich in Anlehnung an (4.27) beziehungsweise (4.28) als

$$\hat{\mathbf{u}}_{n+1}^{pl} = \hat{\mathbf{u}}_n^{pl} + \sum_{i=1}^2 c_i \gamma_i \left(\frac{\mathbf{t}_{n+1}^S}{|\mathbf{t}_{n+1}^S|} + \xi_i \bar{\mathbf{1}} \right) \quad (7.48)$$

$$q_{i\ n+1} = q_{i\ n} + c_i \gamma_i \quad (7.49)$$

schreiben. Dabei sind neben (7.46)₂ auch die partiellen Ableitungen $\partial f_i / \partial q_i = -1$ berücksichtigt.

Im Zuge eines ersten elastischen Prädiktorschrittes werden, wie bereits ausführlich in Abschnitt 3.3 diskutiert, die Versuchswerte

$$\mathbf{t}_{trial}^{if} = \mathbb{C}^{if} (\hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_n^{pl}) \quad \text{und} \quad \alpha_{trial} = \alpha_n \quad (7.50)$$

angenommen. Für den Fall, daß diese die Fließbedingungen nicht erfüllen, liegt ein plastisches Verhalten innerhalb der Verbundfuge vor. Die dort zum Zeitpunkt t_{n+1} wirkenden Kräfte folgen mit (7.50) und (7.30) aus

$$\mathbf{t}_{n+1}^{if} = \mathbf{t}_{trial}^{if} - \sum_{i=1}^2 c_i \gamma_i \left(\mathbb{C}_{11}^{if} \frac{\mathbf{t}_{n+1}^S}{|\mathbf{t}_{n+1}^S|} + \mathbb{C}_{33}^{if} \xi_i \bar{\mathbf{1}} \right), \quad (7.51)$$

so daß die Fließbedingungen, die sich in der modifizierten Form

$$\bar{f}_{i n+1} = c_i f_{i n+1} + (1 - c_i) \gamma_i \leq 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2 \quad (7.52)$$

darstellen lassen, bei Berücksichtigung von (7.49) nur noch von den unbekanntem plastischen Parametern γ_i abhängen. Diese Parameter können auf Basis einer lokalen Newton-Iteration über $\gamma^{(k+1)} = \gamma^{(k)} + \Delta\gamma^{(k+1)}$ ermittelt werden, wobei sich

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = - \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)}}{\partial \gamma^{(k)}} \right]^{-1} \bar{\mathbf{f}}_{n+1}^{(k)} \quad (7.53)$$

entsprechend (4.44) und (4.45) aus der linearisierten Taylor-Reihenentwicklung ergibt. Die verkürzten Matrixschreibweisen $\bar{\mathbf{f}} = [\bar{f}_{1 n+1} \quad \bar{f}_{2 n+1}]$ und $\gamma = [\gamma_1 \quad \gamma_2]$ fassen dabei die Werte der beiden Fließflächen zusammen. Wie schon an anderen Stellen gezeigt, sind im Rahmen eines Euler-Rückwärtsverfahrens die Richtungen von Versuchswerten $\mathbf{t}_{trial}^S/|\mathbf{t}_{trial}^S|$ und endgültigen Größen $\mathbf{t}_{n+1}^S/|\mathbf{t}_{n+1}^S|$ identisch, womit sich die Kräfte \mathbf{t}_{n+1}^{if} bei bekannten γ_i direkt aus (7.51) berechnen.

Während der elastoplastische Tangentenmodul im allgemeinen den Zusammenhang zwischen Verzerrungs- und Spannungsinkrementen darstellt, resultiert dieser für das hier entwickelte Zwischenelement mit $\mathbb{C}_{n+1}^t = d\mathbf{t}_{n+1}^{if}/d\hat{\mathbf{u}}_{n+1}$ aus den Relativverschiebungen und den übertragenen Kräften. Aufgrund der speziellen Form von (7.39) und (7.45) ist es nicht notwendig der algorithmisch sehr umfangreichen allgemeinen Herleitung aus Abschnitt 3.3.3 zu folgen, vielmehr finden die für die gekoppelten Drucker-Prager-Flächen ausgenutzten Beziehungen Verwendung. Im weiteren werden wegen dieser Ähnlichkeit nur die wesentlichen Schritte aufgeführt.

Ausgehend von den im Lastschritt $n + 1$ in der Verbundfuge wirkenden Reaktionskräften

$$\mathbf{t}_{n+1}^{if} = \mathbb{C}^{if} : (\hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \hat{\mathbf{u}}_n^{pl}) - \mathbb{C}^{if} : \sum_{i=1}^2 c_i \gamma_i \frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{t}_{n+1}^{if}} \quad (7.54)$$

ergibt sich mit der Einführung des modifizierten elastischen Moduls

$$\Xi_{n+1} = \left[\mathbb{C}^{if-1} + \sum_{i=1}^2 c_i \gamma_i \frac{\partial^2 f_{in+1}}{\partial \mathbf{t}_{n+1}^{if2}} \right]^{-1} \quad (7.55)$$

gemäß (4.51) das totale Differential

$$d \mathbf{t}_{n+1}^{if} = \Xi_{n+1} : \left[d \hat{\mathbf{u}}_{n+1} - \sum_{i=1}^2 c_i d \gamma_i \frac{\partial f_{in+1}}{\partial \mathbf{t}_{n+1}^{if}} \right] . \quad (7.56)$$

Wie zu erkennen ist, ist (7.56) unabhängig von den partiellen Ableitungen $\partial^2 f_{in+1} / \partial \mathbf{t}_{n+1}^{if} \partial q_{in+1}$ und damit auch von der differentiellen Größe $d \mathbf{q}_{in+1}$, was auf der Art der gewählten Entfestigungsfunktion beruht.

Nach einigen algebraischen Umformungen, die analog zu denen in Abschnitt 4.2.6 erfolgen, wird es möglich $d \gamma$ über

$$d \gamma = \Theta_{n+1}^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{tn+1}^T d \mathbf{t}_{n+1}^{if} \quad \text{mit} \quad \Theta_{n+1} = - [\mathbf{c} \bar{\mathbf{F}}_{qn+1} + \bar{\mathbf{c}}] \quad (7.57)$$

auszudrücken. Dabei enthalten die tensoriellen Größen $\bar{\mathbf{F}}_{tn+1}$ und $\bar{\mathbf{F}}_{qn+1}$, die denen aus (4.57) und (4.61) entsprechen, die partiellen Ableitungen der Fließbedingungen nach \mathbf{t}_{n+1}^{if} beziehungsweise q_{in+1} .

Eine Substitution von $d \gamma$ in (7.56) führt auf den konsistenten elastoplastischen Tangentenmodul der 'interface'-Formulierung in Matrixschreibweise

$$\mathbb{C}_{n+1}^t = \Xi_{n+1} - \Xi_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{tn+1} \left[\bar{\mathbf{F}}_{tn+1}^T \Xi_{n+1} \bar{\mathbf{F}}_{tn+1} + \Theta_{n+1} \right]^{-1} \bar{\mathbf{F}}_{tn+1}^T \Xi_{n+1} \quad , \quad (7.58)$$

so daß eine quadratische Konvergenz der globalen Newton-Raphson-Iteration gesichert ist.

Auf eine zusammenfassende Darstellung von Projektionsverfahren und Tangentenmodul wird im Gegensatz zu den bisherigen Abschnitten an dieser Stelle verzichtet. Infolge der starken Ähnlichkeit mit den Algorithmen der zusammengesetzten Drucker-Prager-Fließbedingungen zur Beschreibung des Betonverhaltens gelten die Tafeln 4.1 und 4.2 sinngemäß.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß das hier entwickelte Zwischenelement bei entsprechender Wahl der Materialkennwerte auch für die Modellierung eines Beton-Beton-Verbundes verwendet werden kann. Somit wird es möglich diskrete Risse innerhalb der Betonstruktur zu berechnen. Diese Vorgehensweise bietet sich an, wenn der spätere Rißverlauf bereits im Vorfeld abgeschätzt und bei der Vernetzung berücksichtigt werden kann, beispielsweise in Bereichen geometrischer Unstetigkeiten infolge sprunghafter Querschnittsänderungen oder bei gekerbten Probekörpern.

8 Numerische Beispiele

Während in Abschnitt 4.4 das Verhalten des entwickelten numerischen Materialmodells mit Hilfe eines einfachen Probekörpers dargestellt und mit dem realen Betonverhalten verglichen wurde, sollen im folgenden komplexere Systeme betrachtet werden. Im Anschluß an einen ersten Teil, der sich ausschließlich auf unbewehrte Strukturen beschränkt, wird in Abschnitt 8.2 das Zusammenwirken von Beton und Stahl untersucht.

Für die numerische Simulation des Tragverhaltens und der phänomenologischen Erfassung der einzelnen Versagensmechanismen des Betons im Rahmen einer verschiebungsgesteuerten Finite-Element-Berechnung kommt das in Abschnitt 6 beschriebene 8-Knoten-Kontinuumselement zum Einsatz.

Sofern nicht anders angegeben wird für alle Betonwerkstoffe eine einheitlichen Querdehnzahl von $\nu = 0.2$ angesetzt. Die weiteren erforderlichen Materialkennwerte sind für jedes Beispiel explizit aufgeführt.

8.1 Unbewehrte Betonbauteile

In der Regel wird das Versagens- und Nachbruchverhalten unbewehrter Strukturen von der Entwicklung einzelner oder mehrerer Zugrisse dominiert. Da es – wie an entsprechender Stelle bereits erörtert – bei einer Beschreibung des reinen Zugverhaltens über das Drucker-Prager-Kriterium im Falle von unbewehrten Strukturen zu einer leichten Unterschätzung des Tragvermögens kommen kann, wird für die ersten beiden Beispiele die algorithmisch aufwendigere Modellformulierung aus Abschnitt 5 verwendet. In einer dritten Untersuchung, bei welcher die exakte Richtung der Rißentwicklung bereits im Vorfeld bekannt ist, läßt sich das Versagen diskret über das in Abschnitt 7.3.2 eingeführte 'interface'-Element abbilden.

8.1.1 Imperfekter Zugstab

Im Rahmen der bruchmechanisch motivierten Beschreibung des Entfestigungsverhaltens nach Überschreiten der maximalen Zug- beziehungsweise Druckfestigkeit fand eine charakteristische Elementlänge l_c über die Größen α_{tu} und α_{cu} gemäß (4.5)₂ und (4.13) Verwendung. Mit Hilfe dieser Länge, die sich im dreidimensionalen Fall aus (2.10) ergibt, war die Formulierung eines verschmierten Rißmodells möglich, welches unabhängig von der gewählten Finite-Element-Diskretisierung ist.

Exemplarisch soll anhand eines imperfekten Zugstabes diese Objektivität des Verhaltens bei Zugbeanspruchung untersucht werden. Da sich die gewonnenen Ergebnisse direkt auf den Fall des Druckversagens übertragen lassen, kann auf eine entsprechende numerische Berechnung verzichtet werden.

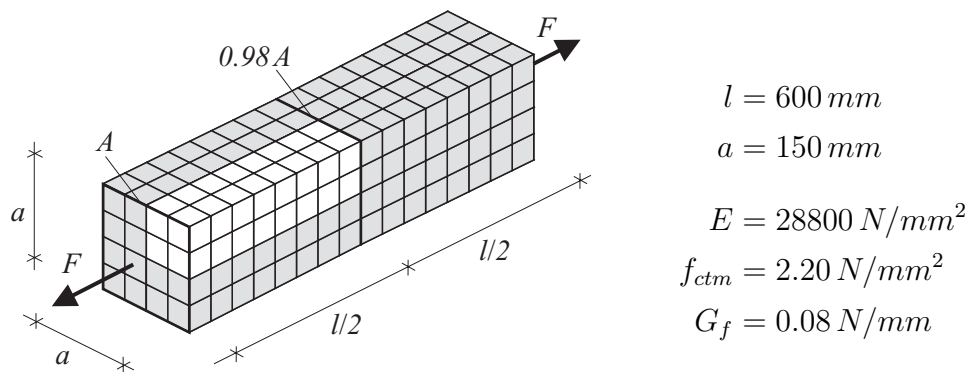


Abbildung 8.1: Imperfekter Zugstab, Geometrie- und Materialdaten

In Abb. 8.1 sind neben den wesentlichen Materialkonstanten des verwendeten Betons C20/25 auch die geometrischen Abmessungen des betrachteten Probekörpers dargestellt. Um das Versagen lokal zu induzieren, verjüngt sich der Zugstab zur Mitte hin linear auf die 0.98fache Querschnittsfläche. Unter Ausnutzung der mehrfachen Symmetrie erfolgt die Berechnung – bei entsprechender Wahl der Randbedingungen – an einem Achtel des Systems mit einer Netzfeinheit von $4 \times 1 \times 1$, $8 \times 2 \times 2$ sowie $16 \times 4 \times 4$ Elementen, die Belastung F wird stirnseitig als verteilte Flächenlast angesetzt.

Wie dem Last-Verschiebungs-Diagramm, Abb. 8.2, zu entnehmen ist, stellen sich für die drei unterschiedlichen Finite-Element-Netze nahezu deckungsgleiche Kurvenverläufe ein. Dieses Ergebnis läßt zwei wesentliche Schlüsse zu: Zum einen ist bereits die grobe $4 \times 1 \times 1$ -Diskretisierung ausreichend, um das Verhalten der untersuchten Probe wirklichkeitsgetreu darzustellen, so daß eine weitere Verfeinerung prinzipiell nicht mehr erforderlich wäre. Zum anderen zeigt sich die netzunabhängige Erfassung der örtlich begrenzt auftretenden Versagensphänomene. Das diese Objektivität des verschmierten Reißmodells auf einer Berücksichtigung der charakteristischen Elementlänge l_c beruht, bestätigt sich im folgenden.

In einem zweiten Rechendurchgang wird für alle drei Netze dieselbe Länge l_c angesetzt, so daß diese nicht mehr von den tatsächlichen Abmessungen des einzelnen finiten Elementes abhängt. Gewählt wird hierfür $l_c = 18.6248 \text{ mm}$, was im Mittel den charakteristischen Längen der $8 \times 2 \times 2$ -Diskretisierung entspricht. Für dieses Netz stellt sich annähernd die zuvor ermittelte korrekte Lösung ein und kann als Referenz verwendet werden.

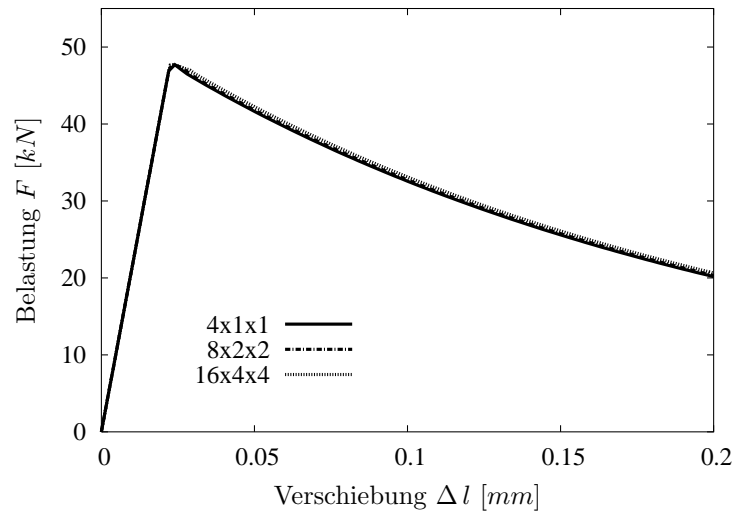


Abbildung 8.2: Imperfekter Zugstab bei Berücksichtigung der charakteristischen Elementlänge l_c

Nach dem Erreichen der maximalen Belastbarkeit von $F = 47.72 \text{ kN}$ ergeben sich für die unterschiedlich feinen Netze stark divergierende Last-Verschiebungskurven, wie Abb. 8.3 zu entnehmen ist. Für das grobe $4 \times 1 \times 1$ -Netz wird die tatsächliche Länge l_c unterschätzt, womit aus $(4.5)_2$ ein zu großer Wert für α_{tu} resultiert. Demzufolge ist für diesen Fall die Entfestigungsfunktion in Richtung der plastischen Vergleichsdehnungen, die den verschmierten Riößnungen entsprechen, gestreckt. Es wird ein wesentlich duktileres Materialverhalten impliziert, so daß sich im Nachbruchbereich bei gleicher Verschiebung Δl ein zu hohes

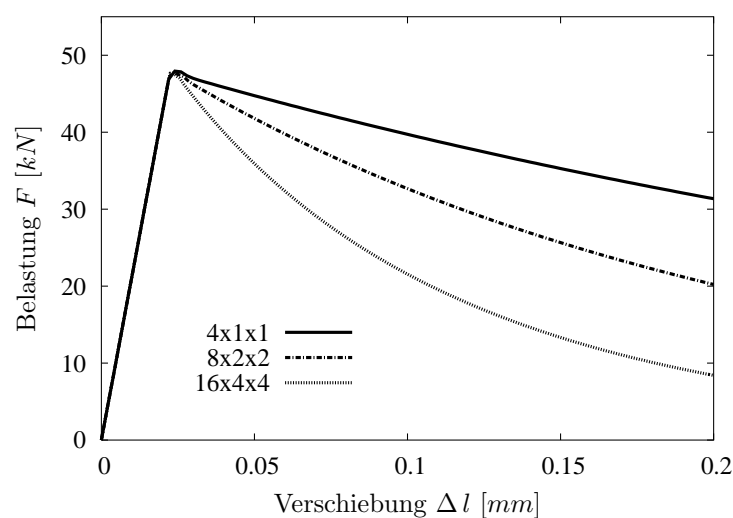


Abbildung 8.3: Imperfekter Zugstab ohne Berücksichtigung der charakteristischen Elementlänge l_c

Resttragvermögen ergibt. Das sprödere Versagen der $16 \times 4 \times 4$ Elemente, welches sich in einem zu stark abfallenden Kurvenast widerspiegelt, stellt sich auf Grund der gestauchten Funktion q_1 , (4.7), ein. Die Ursache für dieses Verhalten ist in dem zu groß angenommenen Wert der charakteristischen Elementlänge zu sehen.

Die Evolution der fortschreitenden Schädigung ist exemplarisch für die mittlere Netzdichte in Abb. 8.4 a) dargestellt. Wie für eine Verschiebung der belasteten Stirnflächen um jeweils $\Delta l = 0.04 \text{ mm}$ zu erkennen ist, beginnt die Entfestigung des Materials erwartungsgemäß im Bereich der Querschnittsschwächung. Die ma-

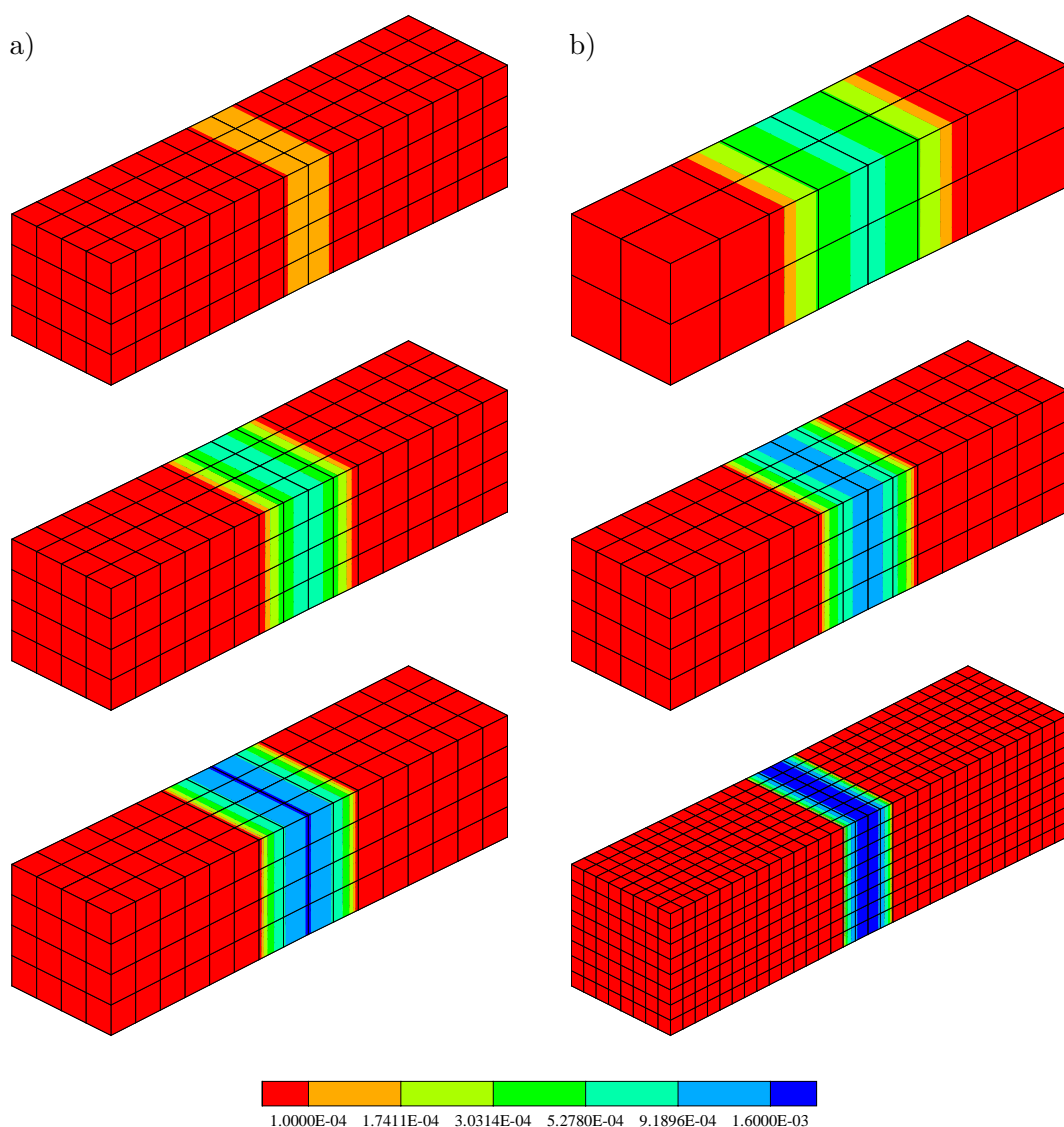


Abbildung 8.4: Plastische Vergleichsdehnungen a) mit Berücksichtigung von l_c für $\Delta l = 0.04 \text{ mm}$, $\Delta l = 0.10 \text{ mm}$, $\Delta l = 0.20 \text{ mm}$, b) mit konstanten l_c für unterschiedliche Diskretisierungen bei $\Delta l = 0.16 \text{ mm}$

ximale Ausdehnung der verschmierten Rizone, die sich über rund vier Elementschichten der Gesamtstruktur erstreckt, ist bereits bei $\Delta l = 0.10 \text{ mm}$ erreicht, so daß eine weitere verschiebungsgesteuerte Berechnung nur noch zu einem starken Anstieg der plastischen Vergleichsdehnungen in Probenmitte führt, wie sich für $\Delta l = 0.20 \text{ mm}$ zeigt. Diese Lokalisierung der Rißentwicklung in einer örtlich begrenzten imperfekten Zone entspricht dem im Rahmen von experimentellen Untersuchungen festgestellten und ausführlich in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Verhalten, siehe Abb. 2.1. Da sich für weiter zunehmende Verschiebungen Δl keine Änderung des phänomenologischen Verhaltens ergibt, wird auf eine Fortsetzung der numerischen Simulation verzichtet.

Die Auswirkungen, die eine elementunabhngige und damit beliebige Wahl der Länge l_c auf das entstehende Versagensbild hat, lassen sich in Abb. 8.4 b) erkennen. Für die drei verwendeten Diskretisierungen ergeben sich bei einer Verschiebung von $\Delta l = 0.16 \text{ mm}$ stark differierende Verteilungen der irreversiblen Verformungen. Als Folge des verwendeten Wertes von l_c entspricht das Ergebnis, welches sich für eine mittlere Netzfeinheit von $8 \times 2 \times 2$ Elementen einstellt, der zu erwartenden realen Schädigung und fungiert als Vergleichsbasis. Aufgrund der eingangs beschriebenen Überschätzung der Größe von α_{tu} ist beim groben $4 \times 1 \times 1$ -Netz der Maximalwert der plastischen Vergleichsdehnungen erheblich zu gering, so daß trotz der Entfestigung im imperfekten Querschnittsbereich noch eine Zugkraft übertragen werden kann, die mehr als 140% des tatsächlichen Wertes beträgt. In Anbetracht dieser hohen Belastung dehnt sich die Rißbildung bis in Bereiche aus, die im Referenzkörper noch unterhalb der Versagensgrenze liegen. Die geschädigte Zone nimmt letztlich etwa das doppelte der wirklichen Breite an.

Ein konträres Bild zeigt sich für das feinmaschige $16 \times 4 \times 4$ -Netz: Der stark gestauchte Verlauf der Entfestigungsfunktion q_1 bewirkt eine unverhältnismäßig starke lokale Konzentration der Schädigung. Da das Tragvermögen des verengten Querschnitts infolge der stark überschätzten Rißentwicklung mit zunehmender Verschiebung rapide absinkt, werden nur in der direkten Umgebung der ersten Schädigung die maximal aufnehmbaren Spannungen erreicht. Die Entwicklung eines zu schmalen Rißbandes und ein dementsprechend deutlich sprderes Materialverhalten sind die Folge. Bei einer Verschiebung von $\Delta l = 0.16 \text{ mm}$ beträgt die aufnehmbare Kraft der Zugprobe mit dieser Diskretisierung nur noch etwa die Hälfte des als realistisch angenommenen Wertes.

Zusammenfassend läßt sich anhand des numerischen Beispiels eines imperfekten Zugstabes die Invarianz der zuvor entwickelten Materialbeschreibung gegenüber einer Netzverfeinerung bestätigen. Diese Unabhängigkeit resultiert aus der Verwendung einer charakteristischen Elementlänge l_c , deren Funktionsweise anschaulich dargestellt werden konnte.

8.1.2 Unbewehrter Betonwinkel

Um die wirklichkeitsgetreue Abbildung der Rißentwicklung, die das vorgestellte Betonmodell ermöglicht, verifizieren zu können, soll im folgenden das Versagen eines unbewehrten Betonwinkels numerisch untersucht werden. Während der vertikale Schenkel des Winkels fest eingespannt ist, wird das horizontale Ende dergestalt belastet, daß sich an der Innenseite Zugspannungen einstellen. Infolge der starken lokalen Konzentration dieser Spannungen im Bereich der einspringenden Ecke, kommt es dort zu einer ausgeprägten Materialschädigung und einem Beginn des Rißwachstums. Da bereits mit dem Auftreten des ersten Risses die maximale Traglast erreicht ist, hängt die Versagenscharakteristik der gesamten Struktur maßgeblich vom Nachbruchverhalten des verwendeten Materials ab.

Aufgrund der großen Aussagekraft, die sich aus der klar definierten Schädigungszone und der Evolution nur eines einzelnen Makrorisses ergibt, hat sich der unbewehrte Betonwinkel in den letzten Jahren zu einem Standardbeispiel für die Überprüfung und Kalibrierung unterschiedlichster mathematischer Material- und Rißmodelle entwickelt. Für eine rein numerische Simulation konnten sich allerdings in der Literatur bisher noch keine einheitlichen Vereinbarungen bezüglich Geometrie, Belastungsform und gewählten Materialkennwerten etablieren.

Während beispielsweise LACKNER [129] und HUEMER [98] das sogenannten 'L-shaped panel' ausschließlich dazu verwenden, die Konvergenz von adaptiven Algorithmen zu überprüfen und dementsprechend günstige Parameter wählen, erscheint ein quantitativer Vergleich mit experimentellen Ergebnissen sehr viel sinnvoller. Für die in Abb. 8.5 dargestellte Form des Probekörpers ist in der Da-

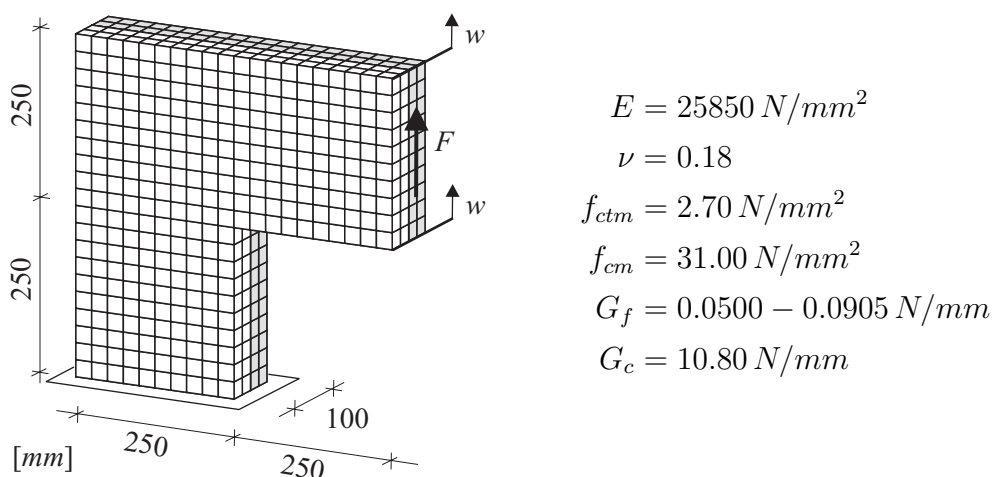


Abbildung 8.5: Unbewehrter Betonwinkel, Geometrie- und Materialdaten

tenbank des EUROPEAN RESEARCH NETWORK: IALAD [236] eine detaillierte Sammlung von Versuchsergebnissen sowie numerischen Vergleichsrechnungen mit verschiedenen Materialformulierungen zu finden. Die hinsichtlich Versuchsaufbau und -durchführung sehr umfangreiche Beschreibung der experimentellen Untersuchungen geht auf Arbeiten von WINKLER [232] und WINKLER et al. [233] zurück. Die dort gewonnenen Ergebnisse sollen im weiteren als Referenzwerte herangezogen werden.

Für die Finite-Element-Simulation werden die in Abb. 8.5 angegebenen Kennwerte des Versuchsmaterials verwendet, Diskussionsbedarf besteht allerdings bei der Größe der spezifischen Bruchenergie des Zugversagens. WINKLER [232] zufolge hat diese einen Wert von $G_f = 0.0650 \text{ N/mm}$. FEIST [74], FEIST et al. [76] und OLIVER et al. [164] verwenden für ihre numerischen Untersuchungen die Bruchenergie $G_f = 0.0905 \text{ N/mm}$ um eine bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen zu erhalten.

Im Rahmen einer ersten Studie wird das Verhalten des unbewehrten Winkels für verschiedene Energien untersucht. Mit dem Ansatz von Symmetrierandbedingungen ist es ausreichend nur die Hälfte des Systems zu diskretisieren. Es werden für das Netz 1 zwei Lagen mit jeweils 300 Kontinuumselementen verwendet. Zur Realisierung der festen Einspannung des Fußpunktes sind dort die vertikalen Verschiebungen behindert, die horizontalen Richtungen sind so gehalten, daß sich ein ebener Spannungszustand einstellen kann. Wie für dieses Beispiel allgemein üblich, siehe FEIST et al. [76], LACKNER [129], MENRATH [150] und andere, werden bei der verschiebungsgesteuerten Berechnung die Knoten der belasteten Stirnfläche gleichmäßig in vertikaler Richtung um insgesamt $w = 1.0 \text{ mm}$ nach oben verschoben. Die Belastung F ist als Flächenlast wirkend aufgebracht.

Wie den Last-Verschiebungs-Kurven in Abb. 8.6 zu entnehmen ist, wird bei Verwendung einer Bruchenergie von $G_f = 0.0650 \text{ N/mm}$ die im Versuch gemessene maximale Traglast von $F = 7.7 \text{ kN}$ um etwa 6% überschätzt. Diese Abweichung erscheint vertretbar, denn während bei einer numerischen Untersuchung von einer perfekten Struktur und einem isotropen, anfänglich vollständig ungeschädigten Material ausgegangen wird, lassen sich bei experimentellen Versuchen einzelne Störstellen oder leichte geometrische Imperfektionen kaum vermeiden. Dies zeigt sich auch in der relativ breiten Streuung der gewonnenen Ergebnisse, die der grau hinterlegte Bereich, welcher die Umhüllende aller im Versuch ermittelten Kurvenverläufe kennzeichnet, erkennen läßt. Erfolgt dagegen die Berechnung mit der von FEIST [74] und OLIVER et al. [164] bevorzugten Größe der Bruchenergie, so ergibt sich für die in den Abschnitten 4 und 5 entwickelte Materialformulierung eine Bruchlast F von mehr als 8.8 kN . Erheblich bessere Resultate liefert eine leichte Abminderung der zur Diskussion stehenden Größe auf $G_f = 0.0500 \text{ N/mm}$. Die

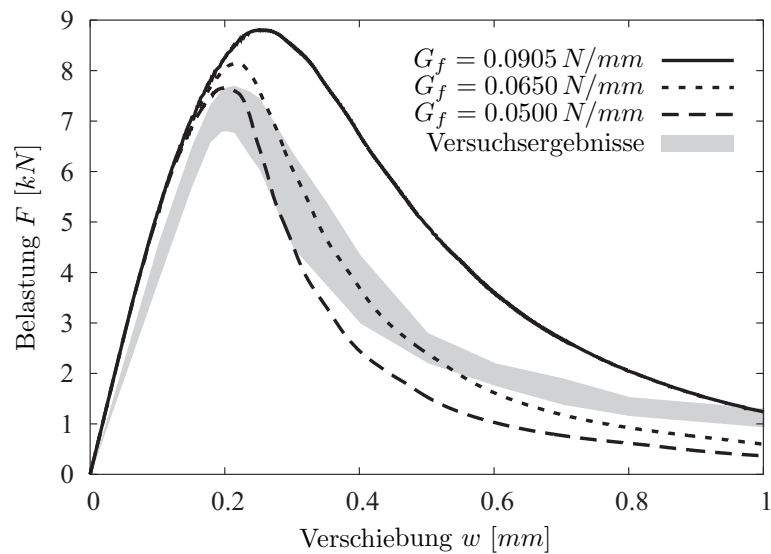


Abbildung 8.6: Berechnungen mit unterschiedlichen Bruchenergien im Vergleich zu Referenzlösungen und Versuchsergebnissen

im Rahmen der Finite-Element-Berechnung bestimmte Traglast stimmt nahezu exakt mit der im Versuch ermittelten Belastbarkeitsgrenze überein, so daß im folgenden die nach unten korrigierte Bruchenergie angesetzt wird.

Trotz des großen Einflusses, den die Wahl der Energie G_f auf die numerisch ermittelte Versagenslast hat, zeigt sich für alle Werte eine qualitativ gute Erfassung des Nachbruchverhaltens des untersuchten Betonwinkels – auf die leichte Diskrepanz im Vorbruchbereich wird an späterer Stelle detaillierter eingegangen.

Um die Qualität der Rißapproximation der verwendeten Materialformulierung beurteilen zu können, sind in Abb. 8.7 a) exemplarisch die Verläufe zweier typischer Einzelrisse, die sich in den Versuchen von WINKLER [232] eingestellt haben, abge-

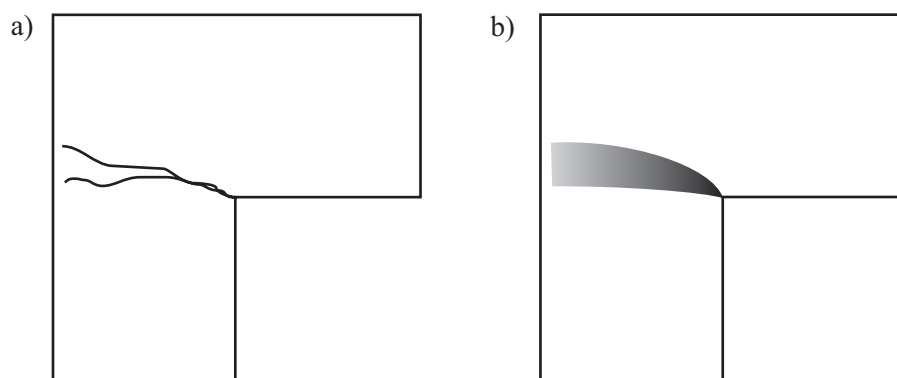


Abbildung 8.7: a) Zwei experimentell festgestellte Rißverläufe, b) Bereich aller aufgetretenen Risse nach Versuchen von WINKLER [232]

bildet. Nach einer anfänglichen Neigung von etwa 20° verläuft das Rißwachstum mit zunehmendem Abstand von der einspringenden Ecke des Betonwinkels tendenziell in horizontaler Richtung um gegen Ende wieder anzusteigen. Der Bereich aller in den Versuchsreihen festgestellter Macrorisse ist in Abb. 8.7b) dargestellt.

Ein ähnliches Bild zeigt sich bereits bei einer Berechnung mit der relativ groben Diskretisierung von Netz 1, siehe Abb. 8.8. Der Bereich der plastischen Vergleichsdehnungen, die den Grad der Entfestigung und damit auch die Lage des eintretenden Risses angeben, läßt schon bei einer Verschiebung der belasteten Stirnseite um $w = 0.30 \text{ mm}$ das Abknicken in die horizontale Lage erkennen. Daß die Evolution nicht exakt im Eckbereich beginnt, sondern in der Höhe der ersten Elementlage unterhalb dieser Ecke, ist eine Folge der verschmierten Rißapproximation. Im Rahmen dieser Formulierung ist das diskrete Aufreißen einer Elementfuge nicht möglich und kann nur durch eine Netzverfeinerung kompensiert werden. Bei einer Auslenkung von $w = 0.50 \text{ mm}$ sind nur noch etwa ein fünftel des aufreißenden Querschnitts ungeschädigt, mit Erreichen von $w = 1.00 \text{ mm}$ ist die inzwischen wieder leicht nach oben abknickende Zone, in der plastische Vergleichsdehnungen erkennbar sind, an der gegenüberliegenden Seite der Struktur angelangt. Es ist festzustellen, daß die Breite des entfestigenden Bereiches über den gesamten Belastungsweg nahezu konstant geblieben ist, was die Wirklichkeitsnähe der verwendeten Ansätze unterstreicht.

Eine deutlich ausgeprägtere Lokalisierung des Schädigungsprozesses stellt sich für Netz 2 ein, welches das untersuchte halbe System mit vier Lagen zu jeweils 1200 Elementen beschreibt, Abb. 8.8. Während die horizontale Länge des Rißbereiches nahezu identisch zu Netz 1 ist, beträgt die vertikale Ausdehnung nur etwa die Hälfte der zuvor ermittelten. Da für beide Netze dieselbe Energie dissipiert werden muß, ergeben sich innerhalb des schmalen Rißbandes, das die zwei auftretenden Knicke wesentlich besser erkennen läßt, deutlich größere Werte für α_1 . Ein Vergleich mit den realen von WINKLER [232] und WINKLER et al. [233] konstatierten Verläufen, Abb. 8.7, zeigt über die gesamte Versagenszone sehr gute Übereinstimmungen. Das von FEIST [74] beschriebene fehlende Vermögen vierknotiger Schalenelemente einen schräg verlaufenden Riß abzubilden, kann bei einer Verwendung von 8-Knoten-Kontinuumselementen nicht festgestellt werden.

Die Last-Verschiebungs-Kurven, welche aus einer Berechnung mit Netz 1 beziehungsweise Netz 2 für $G_f = 0.0500 \text{ N/mm}$ resultieren, Abb. 8.9, zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der experimentellen Versuche. An einen anfänglich starken Abfall der Belastbarkeit, der sich nach Überschreiten der Traglast einstellt, schließt sich bei fortschreitender Rißentwicklung nur noch eine geringe Reduktion der aufnehmbaren Last an. Das im Vergleich der beiden Lösungen anfänglich etwas duktilere Nachbruchverhalten von Netz 2 folgt aus

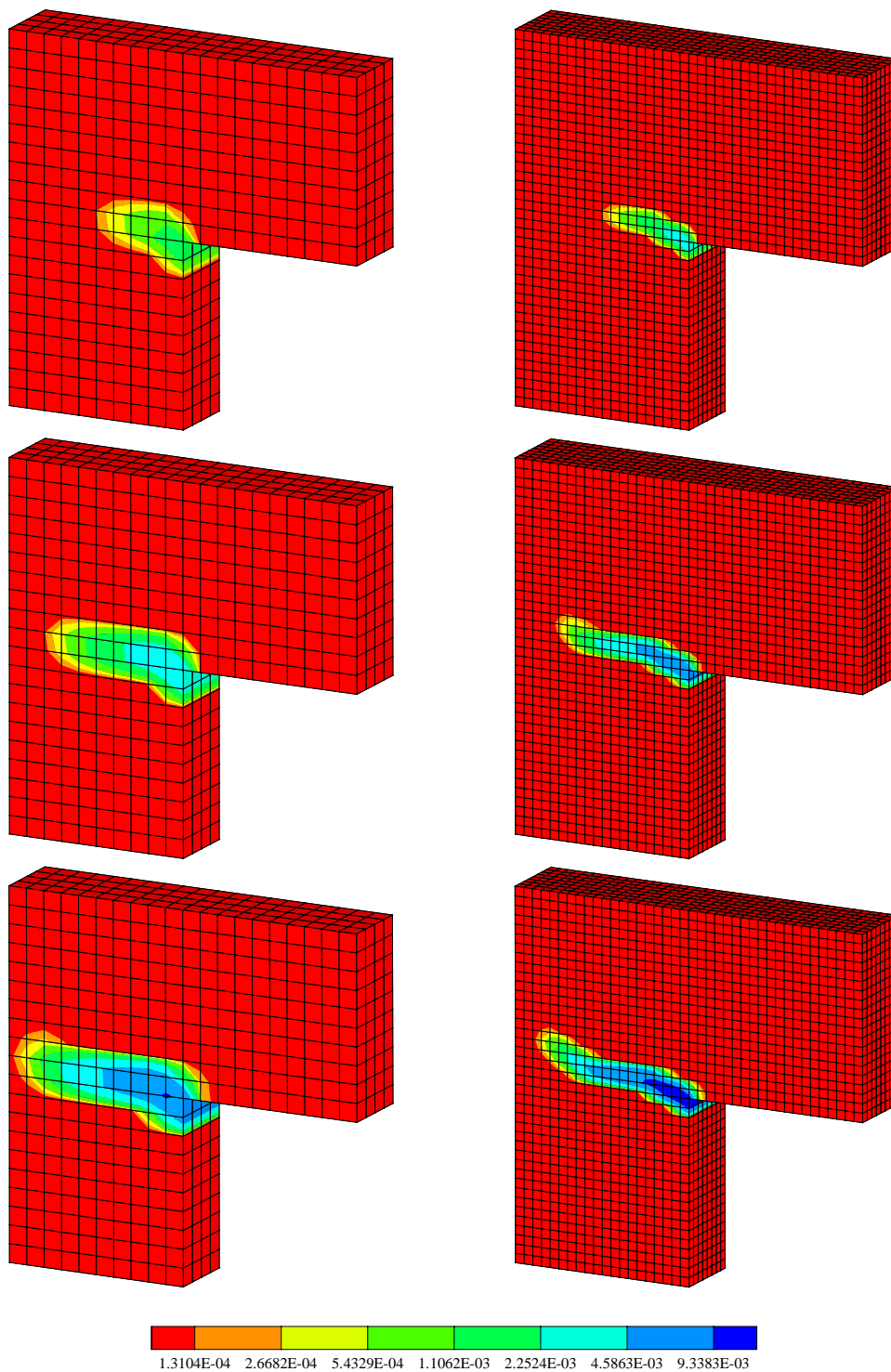


Abbildung 8.8: Plastische Vergleichsdehnungen α_1 für unterschiedliche Diskretisierungen bei $w = 0.30 \text{ mm}$, $w = 0.50 \text{ mm}$ und $w = 1.00 \text{ mm}$

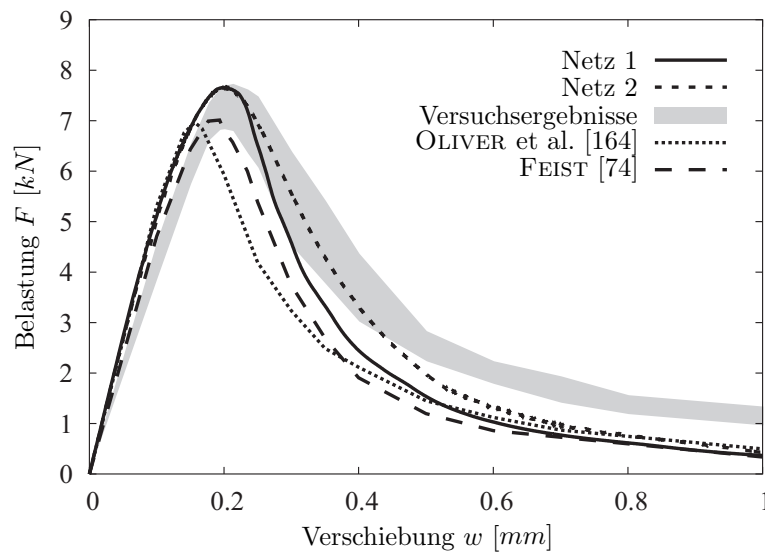


Abbildung 8.9: Unterschiedlich feine Netze im Vergleich zu Referenzlösungen und Versuchsergebnissen

der unterschiedlichen Approximation der Rilage. Aufgrund der groeren Diskretisierung ist die Position des entstehenden Risses bei Netz 1 etwas nach unten versetzt, woraus eine leichte Modifikation der betrachteten Struktur folgt. Mit zunehmender Schädigung verliert diese Abweichung weitestgehend ihre Bedeutung, es kommt zu einer erneuten Konvergenz der Kurven.

Die Betrachtung der Ergebnisse von FEIST [74] und OLIVER et al. [164] zeigt, daß von diesen, trotz einer Erhöhung der Bruchenergie um etwa 40%, nur der untere Wert der in Experimenten bestimmten Traglast erreicht werden kann. Das Versagensverhalten wird qualitativ gut wiedergegeben, wobei die Lösung von FEIST sich durch sprödere Materialeigenschaften auszeichnet. Beiden Arbeiten liegen isotrope Kontinuumsmodelle zugrunde, welche auf der Schädigungstheorie basieren und große Diskontinuitäten berücksichtigen, siehe Abschnitt 2.2.3. Für ihre numerischen Untersuchungen kommen zweidimensionale Schalen- oder Dreieckselemente zum Einsatz.

Einer in vertikaler Richtung 100fach überhöhten Darstellung der verformten Finite-Elemente-Netze 1 und 2 bei einer Verschiebung der belasteten Stirnfläche um $w = 1.00 \text{ mm}$ ist zu entnehmen, daß sich die auftretenden Verzerrungen nahezu vollständig auf das Rißband konzentrieren, siehe Abb. 8.10. Beginnend in der ersten Elementlage unterhalb der einspringenden Ecke verlagert sich die Dehnungskonzentration mit zunehmender Rißlänge in die darüberliegenden Schichten.

Wie schon bei der Diskussion des Last-Verschiebungs-Diagramms in Abb. 8.6 festgestellt werden konnte, zeigt sich sowohl für die eigene numerische Lösung als

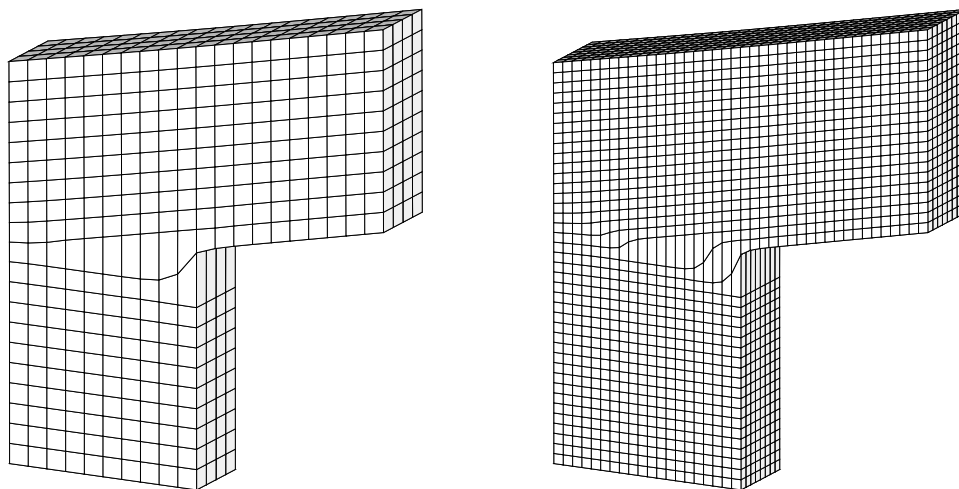


Abbildung 8.10: Finite-Element-Netze bei $w = 1.00 \text{ mm}$, vertikal 100 fach überhöht

auch für die von OLIVER et al. [164] im elastischen Vorbruchbereich ein zu steifes Verhalten. Dieses Phänomen, welches unabhängig von der Wahl der Bruchenergie ist, kann auch durch einen erhöhte Netzdichte oder die in Abschnitt 6.4 vorgestellten Interpolationen nicht unterdrückt werden, siehe Abb. 8.9. Aus welchem Grund die in den Arbeiten von FEIST [74], FEIST et al. [76] dargestellten Kurven den zu starken Anstieg nicht aufweisen, konnte nicht eindeutig geklärt werden. OLIVER et al. [164] führen dieses Kurvenverhalten auf Messfehler bei der Versuchsdurchführung zurück, welche sich aus einer ungewollten Starrkörperdrehung des Probekörpers ergeben. Infolge des Schlupfes der im Fußpunkt des Betonwinkels eingebrachten Stahlplatte, über die die Einspannung gewährleistet wird, siehe WINKLER [232], kommt es zu einer geringfügigen Rotation. Als Mittelpunkt der Drehung geben OLIVER et al. einen Punkt an, der zentrisch im vertikalen Schenkel 150 mm oberhalb der Einspannung liegt. Der Drehwinkel beträgt $\varphi = \Delta u / h_z$, wobei sich Größe von Δu aus der Differenz der im Versuch gemessenen und der numerisch ermittelten horizontalen Verschiebung des Punktes P bei Erreichen der maximalen Belastbarkeit ergibt, Abb. 8.11. $h_z = 350 \text{ mm}$ ist der Abstand zwischen Winkeloberkante und Drehpunkt. Über die Traglast F_T und den horizontalen Abstand zur belasteten Stirnfläche $h_x = 375 \text{ mm}$ läßt sich für jede beliebige Einwirkung F die korrigierte Verschiebung

$$w_{res} = w + \bar{w} \quad \text{mit} \quad \bar{w} = \frac{\varphi}{F_T} F h_x \quad (8.1)$$

angeben. In (8.1) wird dabei von kleinen Winkeln φ mit $\sin \varphi = \varphi$ und $\cos \varphi = 1.0$ ausgegangen.

Mit der im Versuch gemessenen horizontalen Verschiebung $u_{exp} = 1.366 \text{ mm}$ und

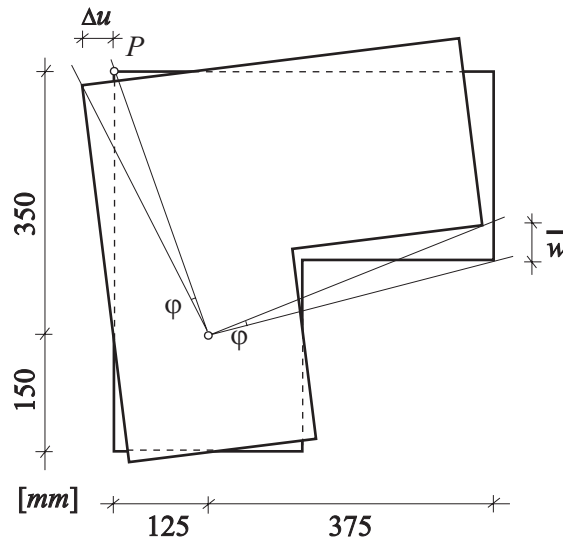


Abbildung 8.11: Starrkörperdrehung des unbewehrten Betonwinkels

dem daraus resultierenden Differenzwert $\Delta u = 0.149 \text{ mm}$ zeigen die korrigierten Last-Verschiebungs-Kurven der Netze 1 und 2 im elastischen Bereich eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Verläufen, siehe Abb. 8.12. Auch im Bereich des langsamen Aufreißens der Struktur führt die Berücksichtigung der Starrkörperrotation zu einer leichten Verbesserung der ohnehin schon sehr guten Approximation der Versuchsergebnisse.

Wie anhand des Beispiels des sogenannten 'L-shaped panel' gezeigt werden kann-

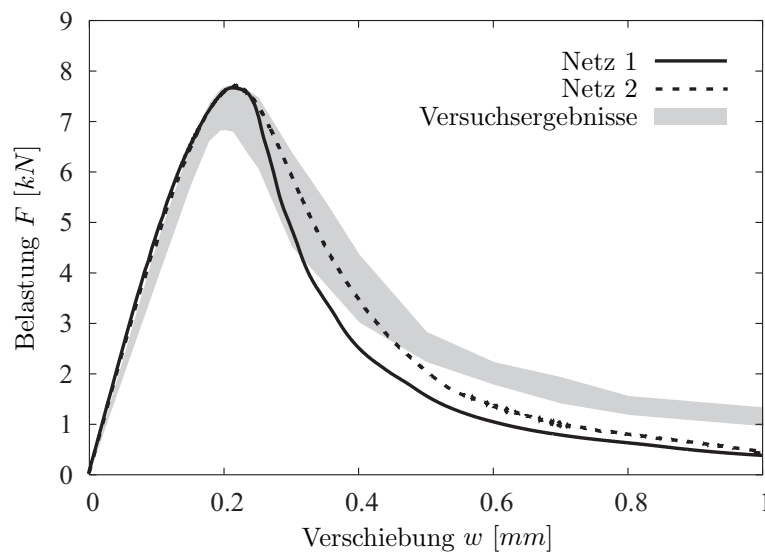


Abbildung 8.12: Ergebnisse der Netze 1 und 2 nach Korrektur gemäß OLIVER et al. [164]

te, ist das vorgestellte Materialmodell in der Lage das Versagen einer unbewehrten Struktur durch Auftreten eines einzelnen Risses, sowohl qualitativ als auch quantitativ nahezu exakt abzubilden. Nicht nur die Evolution des diskreten Macrorisses wird wirklichkeitsgetreu wiedergegeben, auch stimmen die im Rahmen einer Finite-Element-Berechnung gewonnenen Last-Verschiebungs-Kurven über weite Bereiche mit denen aus experimentellen Untersuchungen überein. Im Gegensatz zu den zweidimensionalen Simulationen von FEIST [74] und OLIVER et al. [164] ist es bei Verwendung der vorgeschlagenen Kontinuumsformulierung möglich, mit den in Versuchen bestimmten Materialkennwerten die maximale Belastbarkeit der Struktur in einer adäquaten Weise zu erfassen.

8.1.3 Keilspaltversuch

In den bisherigen Beispielen sollte zum einen die Objektivität der verwendeten bruchmechanischen Ansätze überprüft, zum anderen eine Struktur untersucht werden, für die der genaue Verlauf der entstehenden Versagenszonen nicht exakt bekannt war. Anders dagegen für den im folgenden numerisch simulierten Keilspaltversuch: für dieses System steht die Lage des späteren Zugrisses bereits im Vorfeld fest, so daß eine diskrete Beschreibung dieser Diskontinuität mit Hilfe der 'interface'-Formulierung aus Abschnitt 7.3.2 möglich wird.

Da der von LINSBAUER & TSCHEGG [136] und BRÜHWILER & WITTMANN [27] eingeführte Keilspaltversuch im Vergleich zum Biegeversuch ein geringeres Probenvolumen benötigt und versuchstechnisch wesentlich einfacher durchzuführen ist als direkte Zugversuche, wird dieser häufig zur Bestimmung bruchmechanischer Betonparameter verwendet. Im Rahmen des oft auch als 'wedge-splitting-test' bezeichneten Versuches wird ein geschlitzter Probekörper mit Hilfe eines Stahlkeils aufgespalten. Über Rollenlager ergeben sich infolge des vertikal belasteten Keils zwei horizontale Kräfte F , die quer zur späteren Rißrichtung wirken, Abb. 8.13. Der Versuchskörper steht entweder auf einem zentrisch positionierten Linienlager oder alternativ auf zweien, die in den Schwerachsen der entstehenden Teilkörper angeordnet sind. Bei letztgenannter Variante wird zum einen der Einfluß des Eigengewichtes der Probenhälften eliminiert, zum anderen wird der theoretische Rißweg, der in Probenmitte verläuft, nicht gestört. Bei Verwendung nur einer Auflagerung stellt sich am Endpunkt des zu erwartenden Risses ein mehrdimensionaler Spannungszustand ein, der den Riß aus seiner ursprünglichen Richtung ablenkt. Ausführliche Beschreibungen von experimentellen Untersuchungen mit verschiedenen Betonfestigkeiten und variierenden Probenabmessungen sind unter anderem in den Arbeiten von ISSA et al. [102] und TRUNK [219] zu finden. Neben den experimentell gewonnen Ergebnissen existiert eine große Anzahl nu-

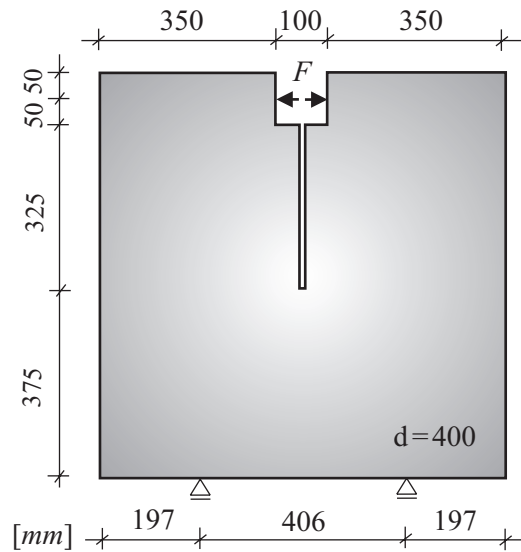
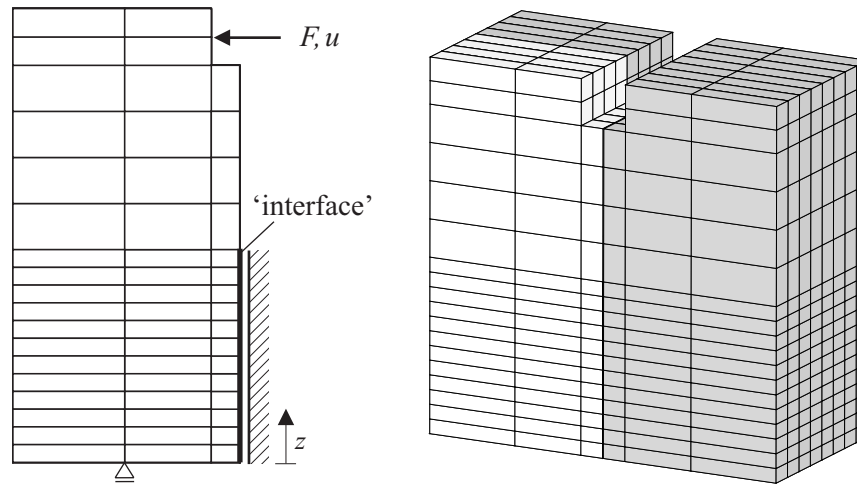


Abbildung 8.13: Geometrie des Keilspaltversuches nach TRUNK [219]

merischer Berechnungen, da sich dieses Beispiel als Folge der klar definierten Versagensform sehr gut zum Verifizieren von mathematischen Modell- und Materialformulierungen eignet. Während beispielsweise FERRARA & DI PRISCO [77] einen auf Invarianten beruhenden nichtlokalen Schädigungsansatz verwenden, führen KARIHALOO & XIAO [107] ihre Berechnung mit hybriden Rißelementen durch. Als numerische Referenzlösungen sollen im folgenden die Ergebnisse des von KERBER et al. [109] vorgeschlagenen plastischen Schädigungsmodells und diejenigen der Formulierung von FEIST [75] herangezogen werden. FEIST nutzt zur Darstellung des Versagens auf Elementebene eine diskontinuierliche Sprungfunktion.

Die Finite-Element-Diskretisierung erfolgt an einem Viertel des Systems mit insgesamt 256 Kontinuumelementen, wobei in den beiden Symmetrieebenen die entsprechenden Randbedingungen zu berücksichtigen sind. Da die Abbildung des entstehenden Einzelrisses nicht verschmiert, sondern in diskreter Form erfolgen soll, kann für die Kontinuumelemente ein linearelastisches Materialverhalten angenommen werden. Die Schädigung der Struktur konzentriert sich ausschließlich auf die 48 'interface'-Elemente, welche unterhalb der vorgesehenen Einkerbung in der Symmetrieebene angeordnet sind, Abb. 8.14. Zur Beschreibung der Entfestigung im Rahmen des Coulombschen Reibungsgesetzes wird für diese Zwischenelemente die bruchmechanisch motivierte exponentielle Funktion (7.40) herangezogen. Die dort zu findende interne plastische Variable α beschreibt, wie schon bei den verschmierten Formulierungen, den Grad der Schädigung. Als Materialparameter können die Kennwerte des von TRUNK [219] verwendeten Betons angesetzt werden. Die maximale Kohäsion c_0 entspricht dabei dem Wert der einaxialen



Beton:

$$E = 28300 \text{ N/mm}^2$$

'interface':

$$C_{11}^{if} = 11792 \text{ N/mm}^3 \quad G_f^{if} = 0.068 \text{ N/mm}^2$$

$$C_{22}^{if} = 11792 \text{ N/mm}^3 \quad c_0 = 2.43 \text{ N/mm}^2$$

$$C_{33}^{if} = 28300 \text{ N/mm}^3 \quad \varphi = 45^\circ$$

Abbildung 8.14: 2D-Ansicht des diskretisierten Systemviertels, Materialparameter

Zugfestigkeit f_{ctm} , die Steifigkeit senkrecht zur 'interface'-Fläche stimmt mit dem Elastizitätsmodul E überein, in den Rißfläche ist sie identisch zum Schubmodul $G = 0.5 E / (1 + \nu)$. In Anlehnung an die Arbeit von ROTS [183] wird für den Winkel φ der inneren Reibung 45° angesetzt.

In Abb. 8.15 sind der Last-Verschiebungs-Kurve der verschiebungsgesteuerten Berechnung die experimentell ermittelte und die numerischen Referenzlösungen gegenübergestellt. Aufgetragen ist dabei die gegenseitige horizontale Verschiebung der beiden Lastangriffspunkte. Mit Verwendung des 'interface'-Modells wird die Traglast von $F = 47.69 \text{ kN}$ bei einer Verschiebung von etwa $u = 0.30 \text{ mm}$ erreicht, was eine sehr gute Übereinstimmung mit dem im Versuch gemessenen Wert darstellt. Bei KERBER et al. [109] und FEIST [75] ist eine Steigerung der Belastung bis zu $u = 0.38 \text{ mm}$ möglich, wobei letzterer die tatsächliche Tragfähigkeit um etwa 5.0% unterschätzt. Für den Nachbruchbereich impliziert die Lösung von FEIST ein deutlich zu duktilen Verhalten, so daß beispielsweise bei $u = 1.0 \text{ mm}$ eine Resttragfähigkeit angenommen wird, die nahezu doppelt so groß ist wie die experimentell festgestellte. Das plastische Schädigungsmodell von KERBER et al. führt auf eine qualitativ gute Erfassung des Strukturverhaltens, wobei der resultierende Verlauf stets oberhalb der Ergebnisse von TRUNK liegt. Ein anderes Bild zeigt sich für die verwendete 'interface'-Modellierung: Über weite Strecken

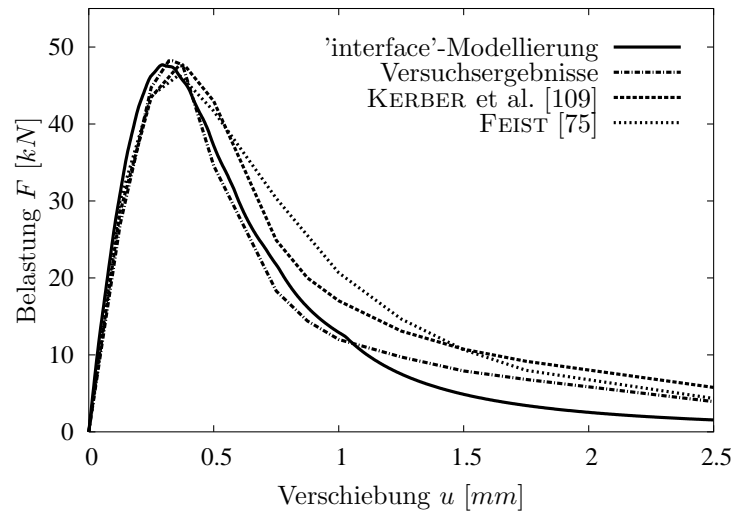


Abbildung 8.15: Keilspaltversuch, numerische Lösungen und Versuchsergebnisse von TRUNK [219]

liegen die experimentell bestimmte Last-Verschiebungs-Kurve und diejenige der Finite-Element-Berechnung eng beieinander, erst ab einer Verschiebung von rund $1,1 mm$ wird die tatsächliche Entfestigung überschätzt. Mit zunehmendem Aufreißen des Probekörpers verlaufen beide Kurven wieder nahezu parallel. Es kann festgestellt werden, daß die vorgeschlagene diskrete Ribformulierung in der Lage ist das reale Strukturverhalten sehr gut zu approximieren.

Um die Schädigungsevolution und damit auch die Ribentwicklung diskutieren zu können, sind in Abb. 8.16 die Normalspannungen t_3^{if} und die plastischen Vergleichsdehnungen α , welche sich in der aufreißenden Zone mit Erreichen der Traglast und am Ende der Berechnung bei $u = 2,50 mm$ einstellen, über die Höhe z

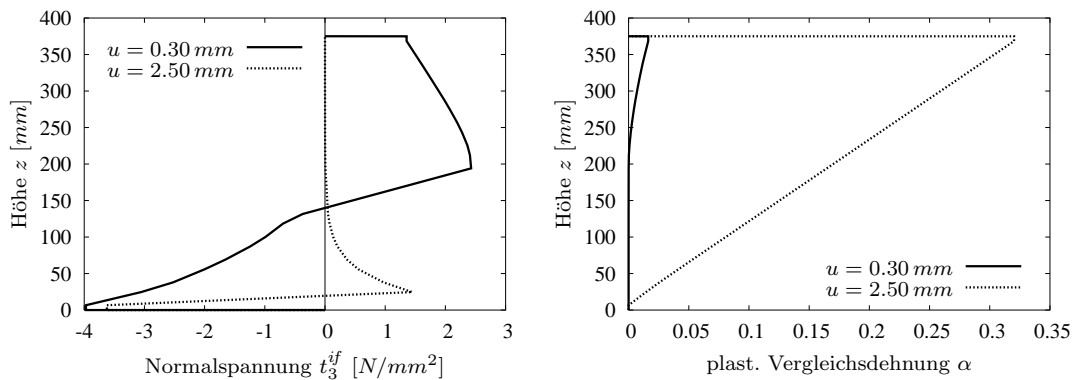


Abbildung 8.16: Verteilung von Normalspannungen und Vergleichsdehnungen im Ribbereich bei Erreichen der Traglast und am Ende der Berechnung

aufgetragen. Der dargestellte Schnitt befindet sich in der Symmetrieebene bei $d/2$. Wie zu erwarten war ergeben sich für $u = 0.30 \text{ mm}$ im unteren Teil Druckspannungen. Jenseits der Spannungsnulllinie bei einer Höhe von etwa 140 mm entsteht eine ausgeprägte Zugzone. Oberhalb von $z = 195 \text{ mm}$, wo die Zugfestigkeit des Betons erreicht wird, treten die ersten Materialschädigungen auf, wie sich zum einen aus den einsetzenden plastischen Vergleichsdehnungen und zum anderen aus der verminderten Fähigkeit der Spannungsübertragung ableiten läßt. Da für den Traglastzustand auch direkt unterhalb der Einkerbung noch keine vollständige Trennung der Rißflächen stattgefunden hat, stellen sich dort Normalspannungen von $t_3^{if} = 1.36 \text{ N/mm}^2$ ein. Diese Kraftübertragung, die aus Verzahnungen der Oberflächen herrührt, ist bei einer Verschiebung der Lastangriffspunkte von $u = 2.50 \text{ mm}$ nur noch in einem sehr begrenzten Maße möglich. Da nahezu der gesamte Querschnitt Schädigungen aufweist, beträgt der Maximalwert der Zugspannungen bei $z = 25 \text{ mm}$ nur noch 1.45 N/mm^2 . Mit zunehmender Höhe stellt sich ein exponentieller Abfall der Zugspannungen ein, so daß ab der Hälfte der Gesamthöhe nahezu keine Spannungen mehr wirken.

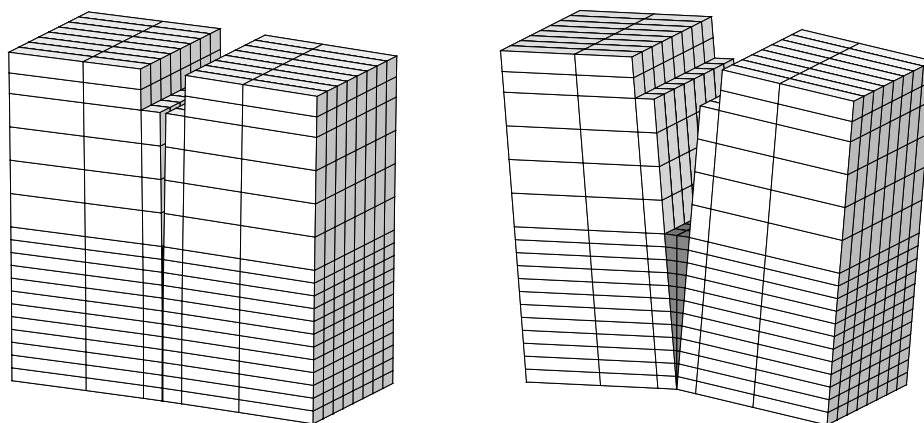


Abbildung 8.17: Strukturverformungen bei $u = 0.30 \text{ mm}$ und $u = 2.50 \text{ mm}$, 50 fach überhöht

Die Darstellung des deformierten Probekörpers mit 50 fach überhöhten Verschiebungen, Abb. 8.17, unterstreicht die bisherigen Beobachtungen. Während für den Traglastzustand fast keine Aufweitung der 'interface'-Schicht zu erkennen ist, kommt es bei einer Verschiebung von $u = 2.50 \text{ mm}$ zu einem regelrechten Aufklaffen der dunkel hinterlegten Zwischenelemente. Es ist der Abbildung zu entnehmen, daß sich der gerissene Bereich über den gesamten Querschnitt ausdehnt, wobei sich die beiden entstehenden Teilkörper um den Fußpunkt des Risses nach außen verdrehen.

Die sehr guten Übereinstimmungen von experimenteller Untersuchung und nume-

rischer Simulation des Keilspaltversuches zeigen, daß sich die in Abschnitt 7.3.2 entwickelte 'interface'-Formulierung auch für die Abbildung diskreter Risse eignet. Obwohl dieses Element ursprünglich für die Beschreibung des Verbund-Schlupf-Verhaltens von Kopfbolzenverbindungen eingeführt wurde, läßt es sich bei Verwendung einer exponentiellen Entfestigungsfunktion auch für reine Betonstrukturen, für welche die exakte Lage des entstehenden Makrorisses in Vorfeld bekannt ist, einsetzen. Ohne daß spezielle Materialkennwerte bestimmt werden müssen, wird das Versagensverhalten nahezu exakt wiedergegeben.

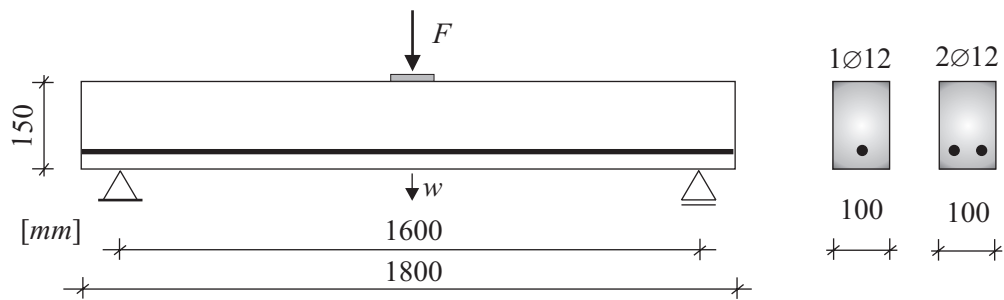
8.2 Untersuchung von Verbundstrukturen

Nachdem sich die bisherigen Beispiele ausschließlich auf unbewehrte Bauteile beschränkt haben, sollen im weiteren Verbundkonstruktionen untersucht werden. Im Falle, daß sich der Verbundcharakter aus einer Bewehrung des Betonquerschnittes ergibt, kommt das in Abschnitt 7.2.3 vorgestellte dreidimensionale Rebar-Konzept zur Anwendung. Die einzelnen Bewehrungsstäbe lassen sich somit in diskreter Form abbilden. Als Materialmodell wird für den Betonstahl – wie auch für alle weiteren Stahlbauteile – eine elastoplastische Beschreibung gewählt, welche auf dem von Mises-Kriterium basiert, Abschnitt 7.1. Unabhängig vom Einsatzbereich wird für sämtliche Stahlkomponenten von einer Querdehnung mit $\nu = 0.2$ ausgegangen.

8.2.1 Bewehrte Biegebalken

Als erste bewehrte Struktur soll das Tragverhalten zweier Biegebalken simuliert werden. Die in Abb. 8.18 zu findenden Geometriedaten entsprechen denen, welche KARIHALOO [106] für seine experimentellen Untersuchungen wählte. Im Rahmen dieser Versuche wurden zwei ausschließlich im Zugbereich bewehrte Einfeldträger durch eine in Trägermitte angesetzte Einzellast beansprucht. Für den ersten Träger, Balken 1, dessen Bewehrungsgrad ρ_s bei 0.75% liegt, konnte ein Versagen infolge Fließens des $1 \text{ } \phi 12 \text{ mm}$ festgestellt werden. Bei Balken 2, der über den doppelten Bewehrungsquerschnitt verfügte, $2 \text{ } \phi 12 \text{ mm}$, entwickelten sich zusätzlich zu der versagenden Zugzone einzelne Schubrisse. Desweiteren ließen sich in der Druckzone deutliche Auflockerungserscheinungen des Betongefüges erkennen.

Aufgrund der einfachen Finite-Element-Diskretisierung ist dieses System in einer Vielzahl von Veröffentlichungen als numerisches Beispiel zu finden. ORTIZ [165], BAŽANT & PRAT [10] und TIKHOMIROV & STEIN [216] nutzen für ihre Berechnungen unterschiedliche Schädigungsmodelle. Letztere beispielsweise bilden



Beton:

$$\begin{aligned}
 E &= 30000 \text{ N/mm}^2 \\
 f_{cm} &= 46.0 \text{ N/mm}^2 \\
 f_{ctm} &= 3.40 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

Betonstahl:

$$\begin{aligned}
 G_c &= 50.00 \text{ N/mm} & E_s &= 200000 \text{ N/mm}^2 \\
 G_f &= 0.05 \text{ N/mm} & f_y &= 463.0 \text{ N/mm}^2 \\
 h &= 1.30 \text{ N/mm}^2
 \end{aligned}$$

Abbildung 8.18: Versuchsbalken nach KARIHALOO [106], Geometrie und Materialdaten

in einer algorithmisch sehr umfangreichen Formulierung Zementmatrix, Zuschlag und Verbundbereich auf der Mesoebene ab, wofür sie insgesamt 26 Parameter verwenden, von denen sich nur ein kleiner Teil experimentell bestimmen läßt. SUANNO [210] nutzt für die Untersuchung der Balken ein elastoplastisches 'cap-model' mit skalarer Schädigungsbeschreibung, ein bruchmechanisch motivierter Ansatz für das Nachbruchverhalten ist bei MENRATH [150] zu finden.

Trotz der weiten Verbreitung dieses numerischen Tests besteht eine große Unstimmigkeit bei der Wahl der Materialkonstanten. Während beispielsweise ORTIZ [165] und SUANNO [210] die Kennwerte ihrer Modelle anhand der experimentellen Ergebnisse kalibrierten oder MENRATH [150] umfangreiche Parameterstudien bezüglich der zu wählenden Bruchenergie G_f durchführte, sollen im Rahmen der folgenden Untersuchung ausschließlich die von KARIHALOO [106] bestimmten Materialdaten angesetzt werden, siehe Abb. 8.18. Die Festlegung des Parameters h , der die Verfestigung der Bewehrung kennzeichnet, erfolgt in Anlehnung an TIKHOMIROV & STEIN [216]. Unter Ausnutzung der mehrfachen Symmetrie ist die Berechnung an einem Viertel des Gesamtsystems mit $36 \times 2 \times 6$ Elementen möglich. Für den einfach bewehrten Balken 1 ist dabei der halbe Stahlquerschnitt anzunehmen. Um der im Versuch eingesetzten $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ großen Lasteinleitungsplatte gerecht zu werden, wird F als äquivalente Flächenlast abgebildet.

Neben den von KARIHALOO [106] experimentell ermittelten Last-Verschiebungskurven werden die numerischen Ergebnisse von SUANNO [210] und MENRATH [150], deren Formulierungen – ähnlich wie das in Abschnitt 4 entwickelte Modell – von einer Beschreibung der Versagensphänomene auf Makroebene

ausgehen, herangezogen.

Wie bereits im Versuch zu beobachten war, stellt sich auch im Rahmen einer verschiebungsgesteuerten Berechnung mit dem gekoppelten Drucker-Prager-Kugel-Modell das Versagen von Balken 1 als Folge einer plastizierenden Bewehrung ein. Dieses Fließen des Betonstahls beginnt bei einer Belastung von $F = 23.1 \text{ kN}$, was mehr als 95% der experimentell ermittelten Tragfähigkeit entspricht und auf die sehr gute Approximation des Betonverhaltens schließen läßt. Die geringfügig bessere Annäherung der Traglast durch SUANNO erklärt sich aus dessen spezieller Wahl der Materialparameter, die – wie bereits erwähnt – nur bedingt mit denen des durchgeführten Versuches übereinstimmen. Obwohl MENRATH für seine Berechnung mit zweidimensionalen Elementen die Bruchenergie G_f auf das Vierfache der von KARIHALOO angegebenen Größe erhöht, unterschätzt er den Maximalwert um etwa 12%.

Gemäß KARIHALOO [106] und REINECK [176] wird die Tragfähigkeit des untersuchten Systems neben der Rißreibung und der Biegeeinspannung der Betonzähne maßgeblich von der Dübelwirkung der Längsbewehrung bestimmt. Während die ersten beiden Phänomene innerhalb der verschmierten Rißbetrachtung impliziert werden, wird letzteres modellbedingt nur teilweise abgebildet. Als Folge dieser unterschätzten Dübelwirkung wird die Steifigkeit des Balkens bei beginnendem Aufreißen der Zugzone als etwas zu gering angenommen, was sich im Vorbruchbereich in einer Abweichung von numerischer und experimentell ermittelter Last-Verschiebungs-Kurve bemerkbar macht, Abb. 8.19. Mit zunehmender Rißöffnung und eintretender irreversibler Verformung der Bewehrung verliert die Dübelwirkung ihren Einfluß, die Verläufe nähern sich wieder an.

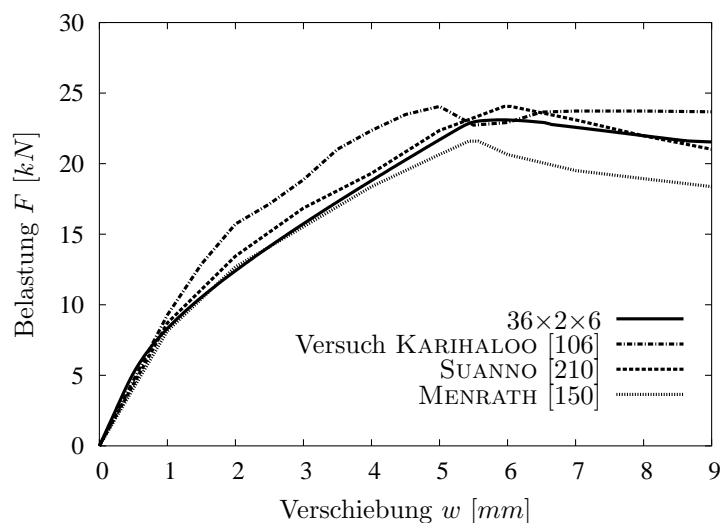


Abbildung 8.19: Balken 1, experimentelle und numerische Ergebnisse

Desweiteren ist zu erkennen, daß das im Versuch konstatierte Nachbruchverhalten von der verwendeten Materialformulierung qualitativ sehr gut wiedergegeben kann: Es stellt sich ein nahezu horizontaler Kurvenverlauf ein, welcher sich aus einer Verfestigung der plastizierenden Bewehrung bei gleichzeitig fortschreitender Rißentwicklung ergibt. Bei beiden Referenzkurven ist mit zunehmender Verschiebung eine deutliche Reduktion der Tragfähigkeit zu erkennen. Eine Erklärung für den kurzzeitigen Abfall der Versuchskurve nach Überschreiten der Traglast kann nicht gegeben werden.

Wie nach den bisherigen Beobachtungen des Balkens 1 zu erwarten war, erweist sich das numerisch bestimmte Last-Verschiebungs-Verhalten für den doppelt so stark bewehrten Balken 2 als zu duktil, Abb. 8.20. Im Gegensatz zum Versuchsbalken, den ein abruptes, sprödes Versagen kennzeichnet, stellt sich im Rahmen

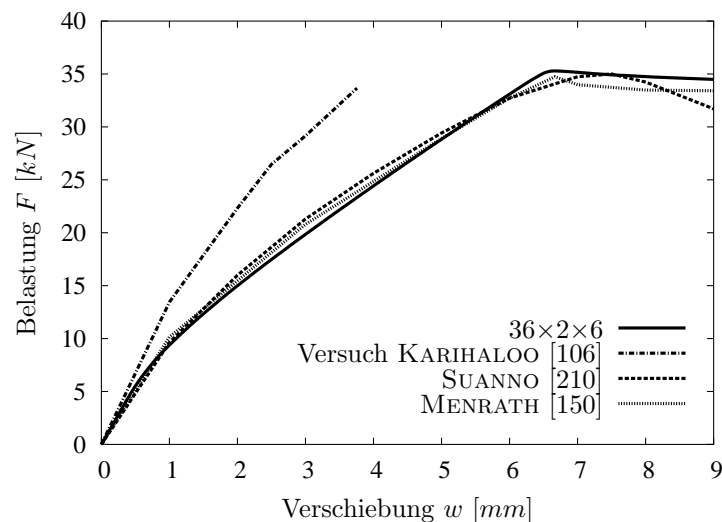


Abbildung 8.20: Balken 2, experimentelle und numerische Ergebnisse

der durchgeführten Berechnung nach dem Überschreiten der Maximallast von $F = 35.30 \text{ kN}$ nur ein leichter Kurvenabfall ein. Ein sehr ähnliches Verhalten zeigen auch die beiden numerischen Vergleichskurven. Während für das vorgestellte Modell die Traglast bei $w = 6.53 \text{ mm}$ erreicht ist, überschreitet die Kurve von SUANNO ihren Scheitelpunkt erst wesentlich später bei $w = 7.45 \text{ mm}$. Da selbst für die sehr detaillierte mesoskopische Untersuchung von TIKHOMIROV & STEIN [216] eine Steigerung der Belastung bis zu einer Verschiebung von etwa $w = 5.8 \text{ mm}$ möglich ist, bleibt fraglich, inwieweit das von KARIHALOO festgestellte Verhalten des Balkens 2 als allgemeingültig anzusehen ist.

Zur Diskussion der wesentlichen Versagensmechanismen, die sich auf Seiten des Betons einstellen, sollen für beide Balken die plastischen Vergleichsdehnungen,

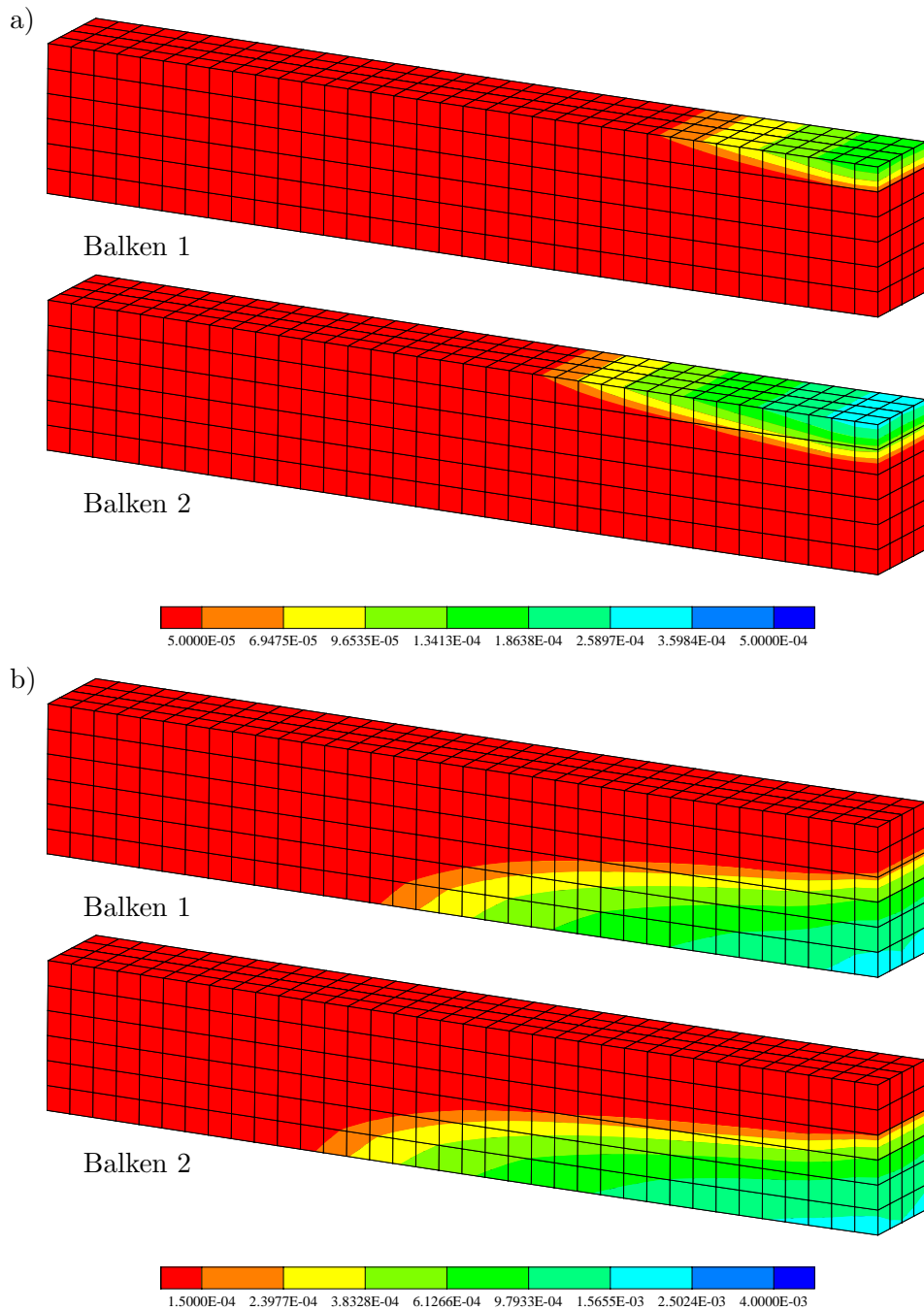


Abbildung 8.21: Plastische Vergleichsdehnungen bei Erreichen der maximalen Traglast, Balken 1: $w = 5.5 \text{ mm}$, Balken 2: $w = 6.5 \text{ mm}$ für a) Druck, b) Zug, nur linke Systemhälfte dargestellt

welche die Ausbreitung der geschädigten Bereiche widerspiegeln, gegenübergestellt werden. Aus Gründen der Symmetrie ist die Darstellung nur einer Systemhälfte ausreichend. Es zeigt sich in Abb. 8.21 b) sowohl für Balken 1, als auch für Balken 2 eine ausgeprägte Zone, in der es zu einer Evolution von Biegezugrissen kommt. Mit dem Erreichen der maximalen Belastbarkeit, was für den ersten Balken bei $w = 5.5 \text{ mm}$, für den zweiten bei etwa $w = 6.5 \text{ mm}$ der Fall ist, erstrecken sich die Zugschädigungen über rund $2/5$ beziehungsweise $3/4$ der Stützweite. Das schwächer bewehrte System läßt dabei eine geringfügig ausgeprägtere Rißkonzentration in Trägermitte erkennen. Infolge von Querkzugspannungen kommt es, wie in den Schnittfläche deutlich ersichtlich wird, vor allem im Bereich der unteren Außenkanten zu einer vermehrten Rißbildung. Während sich in der Druckzone des schwächer bewehrten Balken 1 nur in einem geringen Maße Entfestigungen einstellen, Abb. 8.21 a), zeigen sich bei Balken 2 ausgedehnte Gebiete, in denen es zu einer Auflockerung des Betongefüges kommt. Für diesen Balken ist im Traglastzustand nahezu der gesamte Mittelquerschnitt geschädigt, wie eine gemeinsame Betrachtung von Abb. 8.21 a) und b) erkennen läßt.

Mit weiter zunehmender Mitteldurchbiegung bleiben die Versagenszonen in ihrer Ausdehnung nahezu konstant, einzig die Größe der plastischen Vergleichsdehnungen und damit auch der Grad der Schädigung nehmen stark zu. Wie Abb. 8.22 für $w = 8.0 \text{ mm}$ zu entnehmen ist, bildet sich in Balkenmitte eine Lokalisierung der Zugrisse aus. Aufgrund der größeren Zugkräfte, die von den $2 \phi 12 \text{ mm}$ aufgenommen werden können, ist aus Gleichgewichtsgründen die Druckzone des Balkens 2 wesentlich stärker belastet als diejenige des ersten Balkens. Ein deutlich ausgeprägter Versagensbereich an der Balkenoberseite bei weniger starkem Aufreißen der Zugzone ist die Folge. Inwieweit sich zusätzlich zu den Biegerissen die im Versuch beobachteten vereinzelt Schubrisse entwickeln, kann bei Verwendung einer verschmierten Betrachtung nicht festgestellt werden, da diese keinen exakte Identifizierung der auftretenden Risse zuläßt.

Abschließend kann festgestellt werden, daß das entwickelte Betonmodell in Verbindung mit der Rebar-Formulierung aus Abschnitt 7.2.3 in der Lage ist die maximale Belastbarkeit einer Stahlbetonstruktur und die phänomenologischen Versagensmechanismen sehr gut zu approximieren. Einzig die Duktilität der betrachteten Konstruktion wird in diesem Beispiel modellbedingt überschätzt. Im Gegensatz zu anderen numerischen Beschreibungen, die in der Literatur zu finden sind, ist eine Anpassung der in experimentellen Untersuchungen ermittelten Materialparameter nicht erforderlich. Diese Kennwerte können direkt und ohne weitere Kalibrierung für die Finite-Element-Simulation verwendet werden.

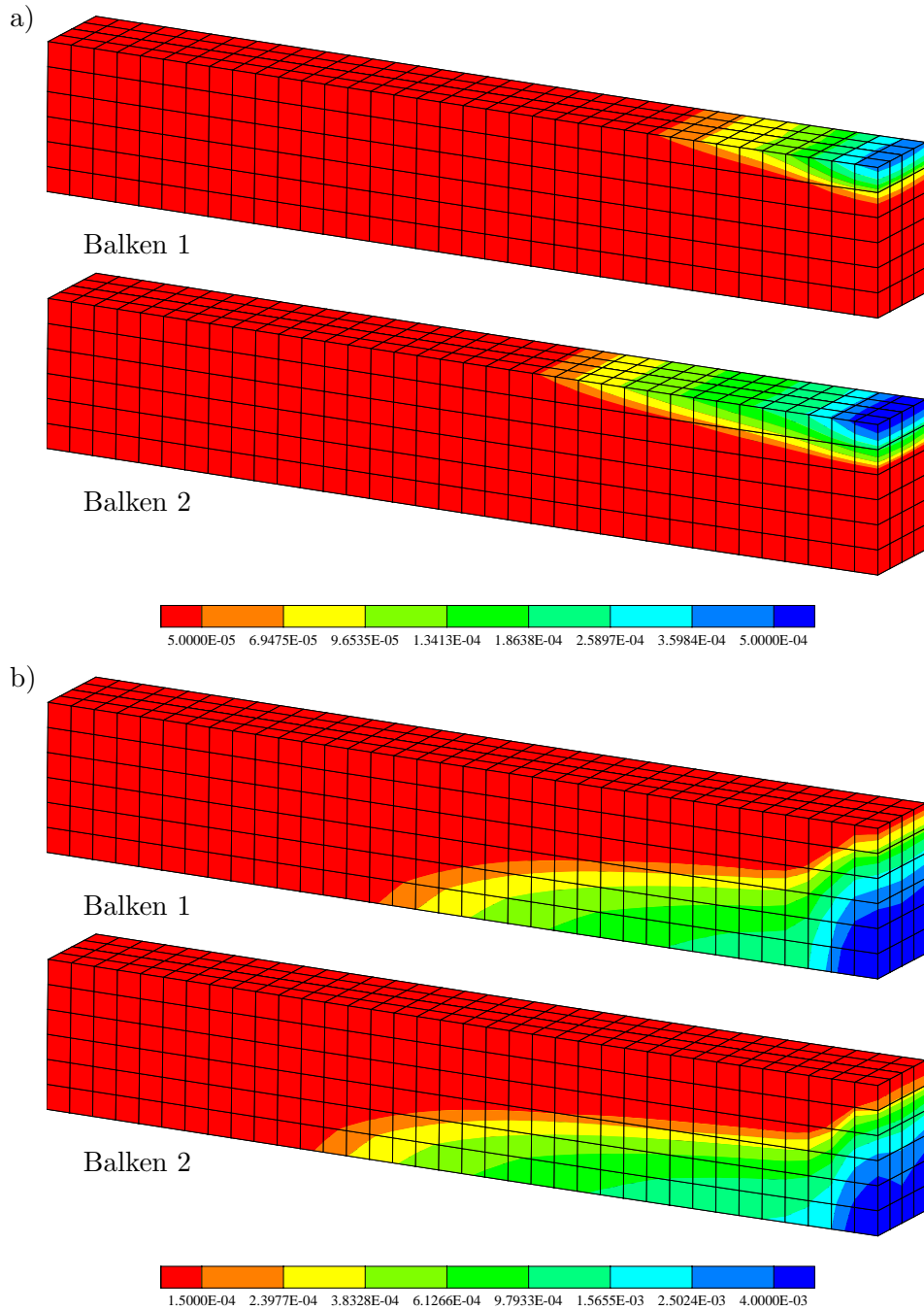
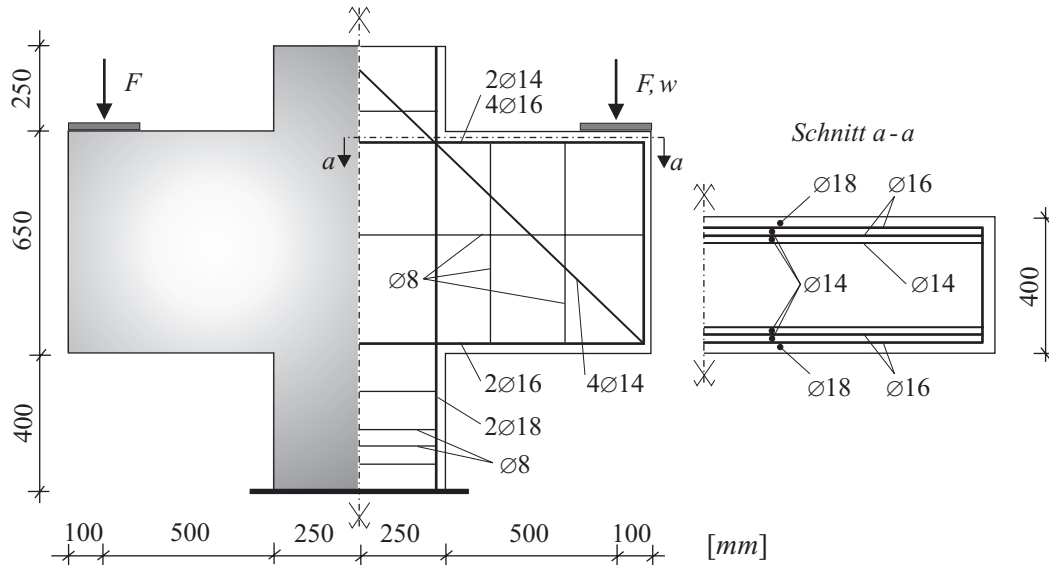


Abbildung 8.22: Ausdehnung des a) Zugversagens und b) Druckversagens bei $w = 8.0\text{ mm}$ für Balken 1 und Balken 2, nur linke Systemhälfte dargestellt

8.2.2 Gedrungene Stahlbetonkonsole

Als weiteres Beispiel soll das Tragverhalten einer gedrunenen Stahlbetonkonsole numerisch simuliert werden. Die Geometrie und die hier geringfügig vereinfacht angenommene Bewehrungsführung, Abb. 8.23, geht auf experimentelle Untersuchungen von MEHMEL & FREITAG [149] zurück, in deren Rahmen unter-



Beton:

$$\begin{aligned} E &= 21870 \text{ N/mm}^2 \\ f_{cm} &= 22.6 \text{ N/mm}^2 \\ f_{ctm} &= 2.30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Betonstahl:

$$\begin{aligned} G_c &= 50.00 \text{ N/mm} \\ G_f &= 0.43 \text{ N/mm} \\ E_s &= 206000 \text{ N/mm}^2 \\ f_y &= 430.0 \text{ N/mm}^2 \\ h &= 1.30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Abbildung 8.23: Gedrungene Stahlbetonkonsole, Geometrie, Bewehrungsführung und Materialdaten nach MEHMEL & FREITAG [149]

schiedliche Konsolenformen hinsichtlich ihrer Wirtschaftlichkeit variiert wurden. Die Lasteintragung bis zum Erreichen einer Traglast von $F = 933.0 \text{ kN}$ erfolgte symmetrisch über zwei $200 \text{ mm} \times 400 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$ große Stahlplatten. In der Veröffentlichung von MEHMEL & FREITAG werden detaillierte Angaben zu den entstehenden Ribbildern und den zugehörigen Versagensphänomenen gemacht, nicht aber zum Last-Verformungs-Verhalten der Konsole.

Trotz der im wesentlichen scheinbar ebenen Tragwirkung ist eine dreidimensionale Finite-Element-Modellierung unabdingbar. Wie sich schon in der Arbeit von KREJCI & MANG [120] zeigte, wird bei Verwendung von Scheiben- oder Schalenelementen die maximale Traglast der Struktur um etwa 40% unterschätzt, was

die Autoren auf eine fehlende Berücksichtigung des räumlichen Charakters des gedruckenen Bauteils zurückführen. Eine umfangreiche Diskussion der Ergebnisse aus Versuchen und numerischen Berechnungen mit unterschiedlichen dreidimensionalen Modellformulierungen ist bei EBERHARDTSTEINER et al. [63], MESCHKE [152] und HOFSTETTER & MANG [94] zu finden.

Unter Ausnutzung der zweifachen Symmetrie ist es ausreichend nur ein Viertel der Konsole mit vier Lagen aus jeweils 244 Kontinuumelementen zu diskretisiert. Die Darstellung der Bewehrung erfolgt unter Verwendung der Rebar-Ansätze aus Abschnitt 7.2.3. Neben den Angaben zu Geometrie und Bewehrungsführung sind Abb. 8.23 auch die angesetzten Materialparameter zu entnehmen. Für die Lasteinleitungsplatte, die als nahezu unverformbar angesehen werden kann, werden vereinfacht die Kennwerte des Betonstahls genutzt. Zur Simulation des Strukturverhaltens nach Überschreiten der maximalen Traglast, erfolgt die Berechnung verschiebungsgesteuert.

Als Referenzlösungen sollen die Last-Verschiebungs-Kurven von SUANNO [210] und TIKHOMIROV & STEIN [216] herangezogen werden, welche – wie bereits ausgeführt – ein elastoplastisches 'cap-model' mit skalarer Schädigung beziehungsweise eine mesoskopische Formulierung mit anisotroper Versagensbeschreibung und einer Approximation des Bewehrungsverbundes nach der Mikroflächentheorie verwenden. Die von MESCHKE [152] vorgeschlagene Kurve wurde über ein bruchmechanisches Grenzflächenmodell, das auf den Ansätzen der Plastizitätstheorie beruht, ermittelt. Bei allen drei Lösungen erfolgte die Diskretisierung mit Hilfe von achtknotigen Kontinuumelementen. Während SUANNO und MESCHKE bei ihren sehr groben 144-Element-Netzen die Bewehrung über Stabelemente abbilden, verwenden TIKHOMIROV & STEIN 1024 Rebar-Elemente.

Es zeigt sich, daß die im Versuch bestimmte Traglast von $F = 933.0 \text{ kN}$ mit dem gekoppelten Betonmodell aus Abschnitt 4 nahezu exakt wiedergegeben werden kann. Bei einer Absenkung der Lasteinleitungsplatte von $w = 2.76 \text{ mm}$ wird eine aufnehmbare Belastung von $F = 942.7 \text{ kN}$ erreicht, bei weiter zunehmenden vertikalen Verschiebungen stellt sich eine kontinuierliche Reduktion der Konsolensteifigkeit und damit ein geringer werdendes Tragvermögen ein. Da die Möglichkeit einer Gegenüberstellung von experimentellen Daten nicht gegeben ist, kann keine verbindliche Aussage über die Richtigkeit der gewonnenen Last-Verschiebungskurve getroffen werden. Ein Vergleich mit den phänomenologischen Beobachtungen im Versuch – auf die später detailliert eingegangen werden soll – und mit numerischen Ergebnissen spricht allerdings für die sehr gute Einschätzung des realen Tragverhaltens. Wie Abb. 8.24 erkennen läßt, zeigen die hier entwickelten Formulierungen im Anfangsbereich starke Übereinstimmungen mit der Lösung von TIKHOMIROV & STEIN. Erst bei einer Belastung von etwa $F = 800 \text{ kN}$ weist

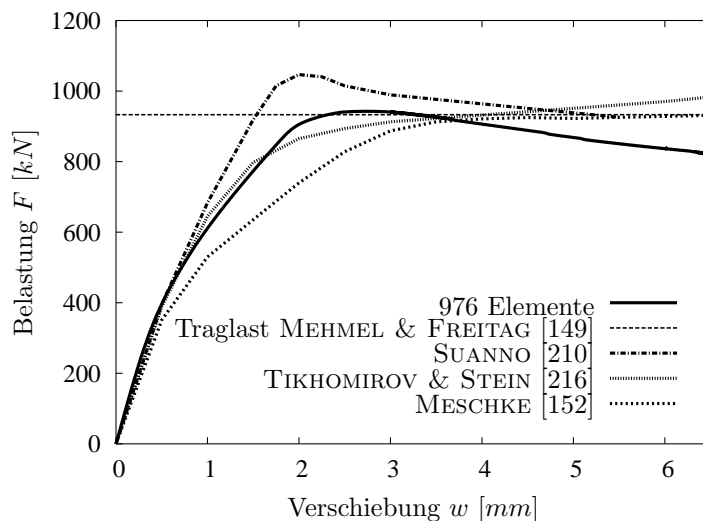


Abbildung 8.24: Bewehrte Konsole, experimentelle und numerische Ergebnisse

deren Mehrphasenmodell ein duktileres Verhalten auf, welches später in einen nahezu konstanten Anstieg des Kurvenverlaufes übergeht. Ein definierter Wert für die maximale Tragfähigkeit der Konsole ist für diese Referenz nicht zu erkennen. Nach einem sehr frühzeitigen Abknicken des von MESHKE vorgeschlagenen Verlaufes, nähert sich dieser asymptotisch an die im Versuch ermittelte Traglast an. Es stellt sich quasi ein idealplastisches Fließen der Gesamtstruktur ein. Ein gänzlich anderes Bild zeigt sich bei der von SUANNO durchgeführten Berechnung: an einen steilen, nahezu linearen Anstieg der Last-Verschiebungs-Kurve schließt sich im Bereich der Tragfähigkeitsgrenze ein relativ abrupter Übergang in einen konstanten Abfall des Kurvenastes an. Als maximale Belastbarkeit, die sich laut SUANNO infolge einer stark plastizierenden Zugbewehrung an der Konsolenoberseite bei $w = 2.0 \text{ mm}$ ergibt, wurde $F = 1046 \text{ kN}$ ermittelt, womit von diesem der Versuchswert um etwa 12% überschätzt wird.

Im weiteren sollen die während der numerischen Simulation festgestellten Versagensmechanismen beurteilt werden. In Abb. 8.25 sind die in den experimentellen Untersuchungen von MEHMEL & FREITAG [149] aufgetretenen Rißverteilungen für drei charakteristische Laststufen dargestellt, Abb. 8.26 zeigt die entsprechenden Schädigungsevolutionen, welche sich im Rahmen der mit dem Drucker-Prager-Kugel-Modell durchgeführten Berechnung ergaben. Zur besseren Identifizierung der lokalen Versagensformen wird dabei zwischen Schädigungen infolge Druck- und Zugbeanspruchung unterschieden. Als Folge der Verschiebungssteuerung lassen sich nur ähnliche Laststufen zum Vergleich heranziehen: $F = 302,9 \text{ kN}$ bei $w = 0.35 \text{ mm}$, $F = 701,9 \text{ kN}$ bei $w = 1.27 \text{ mm}$ und für den Traglastzustand $F = 942.7 \text{ kN}$ bei $w = 2.76 \text{ mm}$.

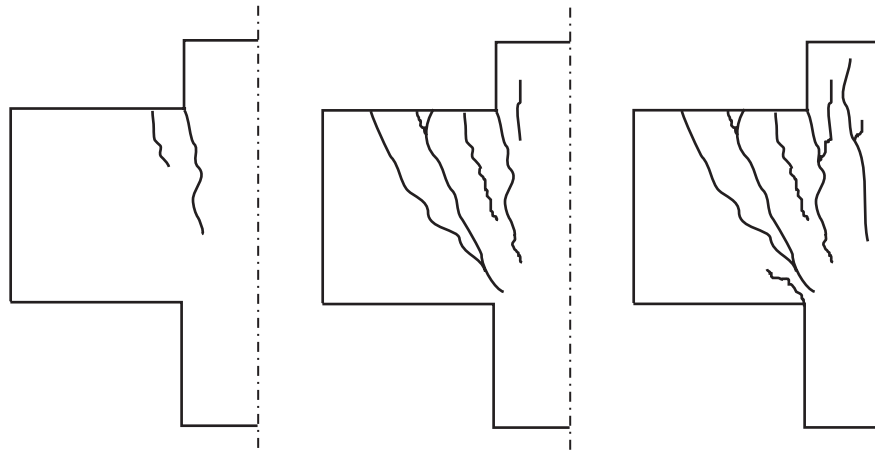


Abbildung 8.25: Rißverteilung bei Versuchen von MEHMEL & FREITAG [149] für $F = 300 \text{ kN}$, $F = 700 \text{ kN}$ und $F = 933 \text{ kN}$

Bereits bei der vergleichsweise geringen Belastung von $F = 300 \text{ kN}$ werden die Zugkräfte an der Konsolenoberseite weitestgehend von der Bewehrung abgetragen. Es sind im Anschlußbereich an die Stütze erste Risse zu erkennen. Die diagonale Druckstrebe, die sich zwischen der steifen Lasteinleitungsplatte und der unteren einspringenden Konsolenecke ausbildet, führt als Folge der hohen Druckspannungskonzentration im Eckbereich zu ersten Versagenserscheinungen. Bei einer weiteren Laststeigerung auf $F = 700 \text{ kN}$ kommt es mit beginnendem Plastizieren der oberen Bewehrungslagen und einer verringerten Reststeifigkeit des Betons zu einer starken Zunahme der Rißbildung in den zugbeanspruchten Teilen der Konsole. Auch in der Stütze ist das Überschreiten der Betonzugfestigkeit deutlich sichtbar, wobei sich die plastischen Vergleichsdehnungen hauptsächlich auf den Verankerungsbereich der oberen Konsolenbewehrung konzentrieren. Diese Akkumulation der Zugschädigung auf die nahe Umgebung der Bewehrung wird zum einen in der Symmetrieebene des Systems erkennbar, zum anderen an der oberen Konsolenfläche. Einhergehend mit der höheren Beanspruchung vergrößert sich in der unteren einspringenden Ecke die Ausdehnung der Druckentfestigung wesentlich, erste Schädigungen unterhalb der Lasteinleitungsplatte machen sich bemerkbar. Der Traglastzustand ist schlußendlich durch ein plastisches Fließen der diagonalen Zugbewehrung bei gleichzeitigem Versagen im unteren Teil der Druckstrebe charakterisiert. Sowohl im Versuch, als auch in der numerischen Berechnung ist mit Erreichen dieses Zustandes nahezu der gesamte Konsolenquerschnitt gerissen, während die Stütze beginnt in der oberen Hälfte aufzuspalten. Im unteren Stützteil sind starke Schädigungen als Folge der hohen vertikalen Auflagerreaktionen und der Krafteinleitung durch die untere Konsolenbewehrung, welche die Rolle einer Druckbewehrung übernimmt, auszumachen. Eine fortge-

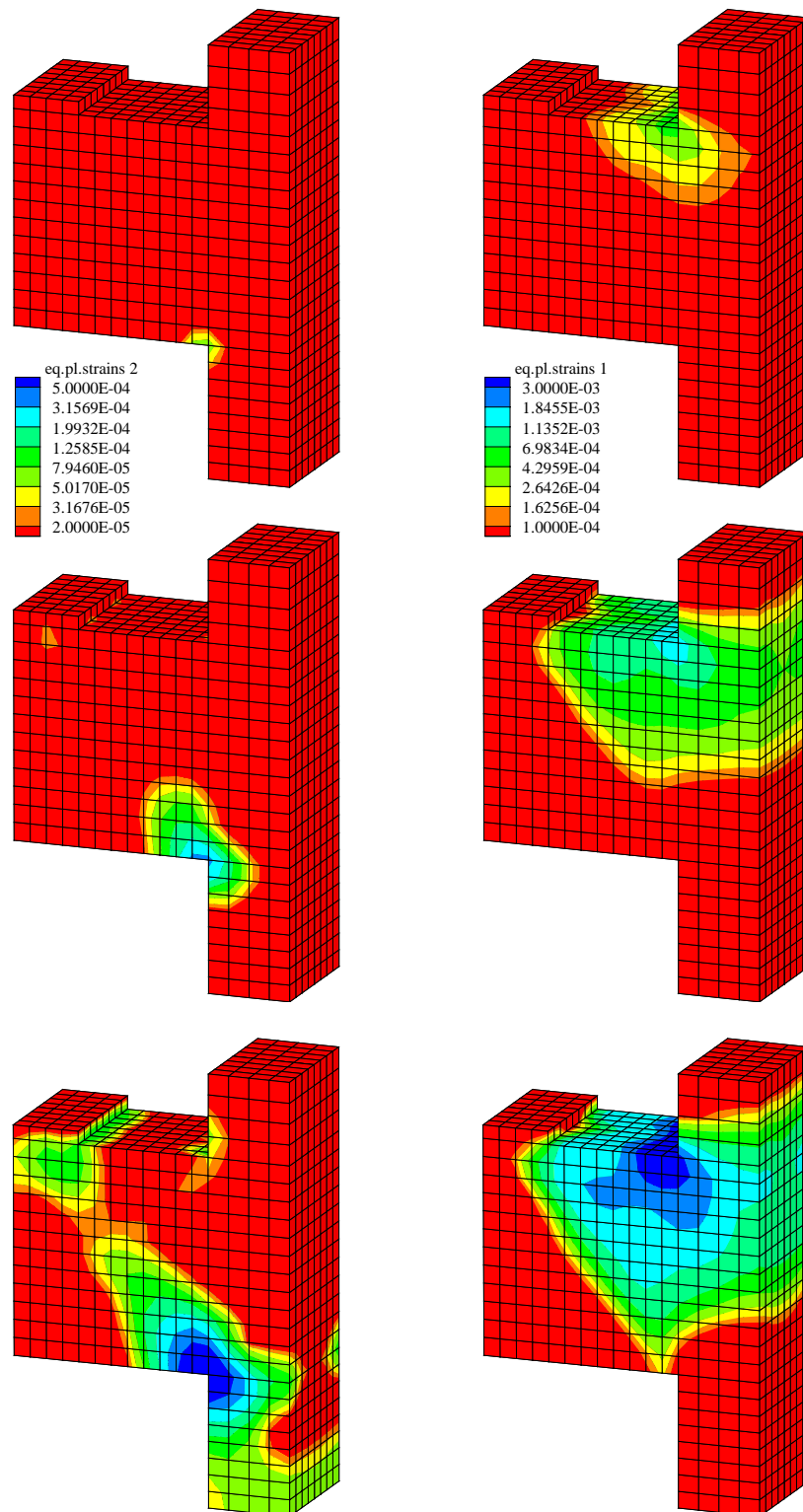


Abbildung 8.26: Schädigungsevolution infolge Druck- und Zugbeanspruchung bei $w = 0.35 \text{ mm}$, $w = 1.27 \text{ mm}$ und $w = 2.76 \text{ mm}$, nur linke Tragwerkshälfte dargestellt

setzte Steigerung der vertikalen Verschiebung führt zu keiner wesentlichen Änderung des Versagens- und Schädigungsbildes, einzig die Werte der plastischen Vergleichsdehnungen und damit die Rißweiten steigen an. Mit einem weiter zunehmenden Plastizieren des Bewehrungsstahls setzt eine langsame Reduktion der aufnehmbaren Belastbarkeit ein.

Ein Vergleich von Abb. 8.27, die das halbe System im Traglastzustand mit 50 fach überhöhten Verschiebungen darstellt, mit dem deformierten Finite-Element-Netz

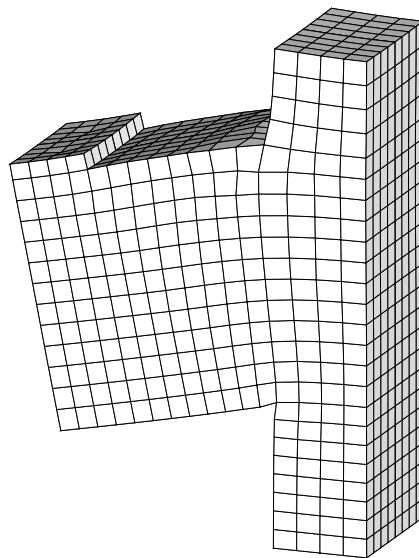


Abbildung 8.27: Linke Hälfte der deformierten Struktur beim Erreichen der Traglast, 50 fach überhöht

des unbewehrten Betonwinkels, Abb. 8.10, macht das unterschiedliche Versagensverhalten von bewehrten und unbewehrten Strukturen deutlich. Während sich bei fehlender Zugbewehrung in den hochbelasteten Zonen ein einzelner Makroriß einstellt – erkennbar durch die starken Deformationen nur einer Elementreihe –, bilden sich für bewehrte Querschnittsteile weite Bereiche mit einer Vielzahl kleinerer Risse aus. Das zur Modellierung der bewehrten Konsole verwendete regelmäßige Elementnetz behält dementsprechend auch mit Erreichen des Traglastzustandes seine charakteristische Gestalt. Nur für die beiden höchstbelasteten Zonen im Bereich der oberen und unteren einspringenden Ecke sind stärkere Elementdeformationen zu erkennen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß auch das komplexe Versagensverhalten der stark bewehrten Stahlbetonkonsole wirklichkeitsnah abgebildet werden kann. Sowohl die quantitative Approximation der im Versuch ermittelten Traglast, als auch die qualitative Erfassung der auftretenden dreidimensionalen Phänomene

sprechen für die Qualität der vorgeschlagenen Material- und Elementformulierungen.

8.2.3 'push-out'-Versuch für Kopfbolzendübel

Wie bereits in Abschnitt 7.3.1 erläutert, bietet sich der sogenannte 'push-out'-Versuch zur Ermittlung von Tragfähigkeit und Versagensverhalten einer Dübelverbindungen an. Umfangreiche Dokumentationen zu experimentellen Untersuchungen bei denen Kopfbolzendübel als Verbindungsmittel verwendet wurden, sind in den Arbeiten von OEHLERS [162], ROIK & BÜRKNER [182] und HANSWILLE et al. [86] zu finden.

Im folgenden soll der Standard-Abscherversuch aus dem EC 4 [69] numerisch simuliert werden, so daß die Wirkungsweise des entwickelten elastoplastischen Verbundmodells aus Abschnitt 7.3.2 verifiziert werden kann. Im Rahmen dieses Versuches wird ein mit Kopfbolzen bestücktes und kraftschlüssig mit zwei Betonkörpern verbundenes Stahlprofil belastet. Aus der vertikalen Verschiebung w der Profilunterkante und der Kraft F , die auf jedes der n Bolzenpaare wirkt, ergibt sich die Last-Schlupf-Charakteristik der Verbindung. Die Abmessungen der genormten Geometrie sind in Abb. 8.28 angegeben.

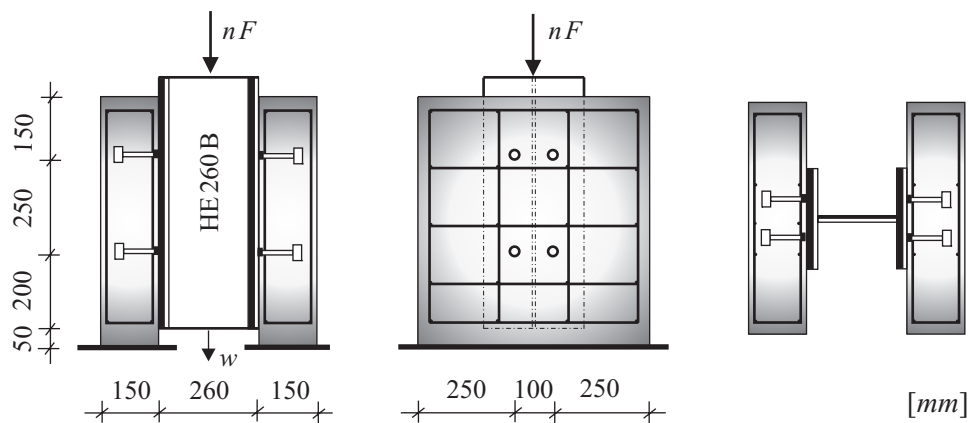


Abbildung 8.28: 'push-out'-Versuch, Versuchsanordnung gemäß EC 4 [69]

Um die Einleitung von Zugkräften in die Kopfbolzen zu vermeiden und somit eine reine Schubbeanspruchung dieser Bolzen zu erwirken, ist der Versuchskörper laut EC 4 quer zur Dübelachse horizontal zu verspannen. In den folgenden Berechnungen wird wahlweise die horizontale Verschiebung des unteren Betonkörperandes an der Außenseite gehalten, so daß die Funktionalität dieser geforderten Festhalterung beurteilt werden kann.

Unter Ausnutzung der zweifachen Symmetrie ist es ausreichend nur ein Viertel des Systems mit finiten Elementen zu diskretisieren; insgesamt werden dazu 396 Beton-, 104 Stahl- und 72 achtknotige 'interface'-Elemente genutzt, Abb. 8.29. Im Zuge der verschiebungsgesteuerten Berechnung senken sich die

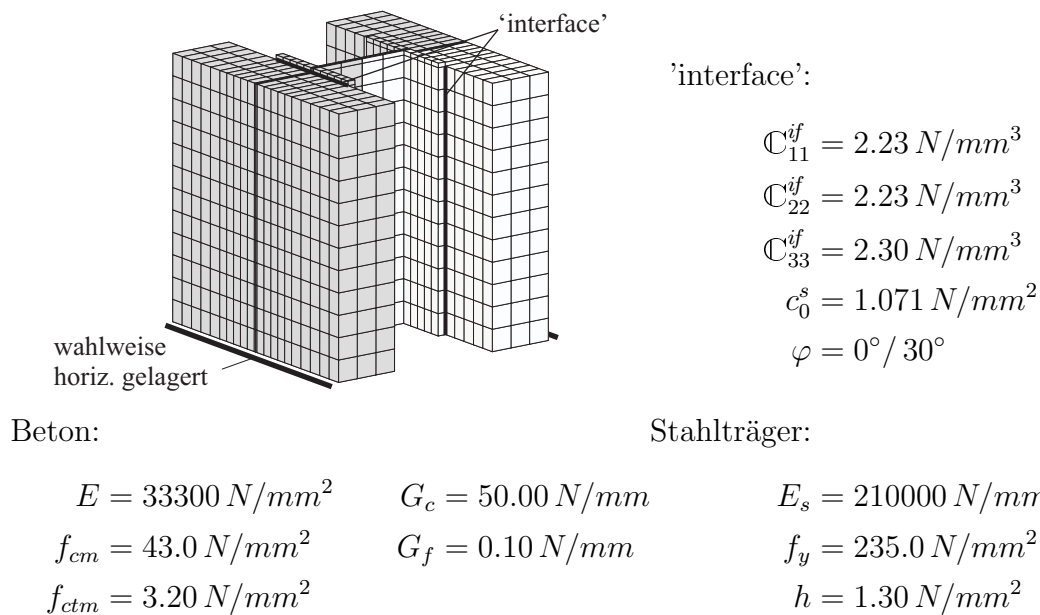


Abbildung 8.29: Finite-Element-Netz und Materialdaten

Elementknoten am oberen Rand des Stahlprofils um denselben Betrag ab. Bei Verwendung von Kopfbolzendübeln $\varnothing 22/100$ mit der Zugfestigkeit $f_u = 500 \text{ kN}$ und einem Beton C35/45 ergeben sich nach (7.21) nahezu identische Versagenslasten für einen Schub/Zug-Bruch der Bolzen und die Zerstörung des umgebenden Betonkörpers. Für das HE 260 B-Walzprofil werden die Materialparameter eines S 235 angesetzt.

Zur Beschreibung des Ver- und Entfestigungsverhaltens im Rahmen der elastoplastischen Verbundformulierung wird ein multilinearer Ansatz gemäß (7.42) gewählt. Zu diesem Zweck sind die Steifigkeiten, welche sich aus der Verbund-Schlupf-Charakteristik nach ROIK et al. [181] ergeben, über die gesamte Fläche des Kontaktbereiches, $600 \text{ mm} \times 260 \text{ mm}$, zu verschmieren. Die daraus resultierenden Werte von c_i^s sind in Tab. 8.1 aufgeführt, die ebenfalls verschmierten elastischen Größen C_{11}^{if} bis C_{33}^{if} sind in Abb. 8.29 zu finden. Als Folge der somit kontinuierlich erfolgenden Kraftübertragung zwischen Stahlprofil und Betonkörper stellen sich – anders als bei einer diskreten Abbildung der Bolzen – keine lokalen Bereiche mit ausgeprägten Spannungskonzentrationen ein. Auf eine Berücksichtigung der Bewehrung kann demnach verzichtet werden.

\hat{u}	[mm]	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	3.00	4.00
c_i^s	$[\frac{N}{mm^2}]$	0.558	0.692	0.795	0.865	0.962	1.013	1.045	1.064
\hat{u}	[mm]	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	
c_i^s	$[\frac{N}{mm^2}]$	1.071	1.064	1.051	1.032	1.006	0.974	0.936	

Tabelle 8.1: Verschmierte Steifigkeitswerte von Kopfbolzendübeln $\varnothing 22/100$ in Vollbetonplatten nach ROIK et al. [181]

Um eine bei diesem Versuch ungewollte Krafteinleitung, die aus der Reibung zwischen Stahlprofil und Betonoberfläche resultiert, zu vermeiden, wird von BODE & BECKER [21], ROIK & BÜRKNER [182] und EC 4 [69] das Einfetten der späteren Kontaktfläche vor dem Betonieren empfohlen. Für die numerische Berechnung ergibt sich dementsprechend $\varphi = 0^\circ$ als Reibungswinkel des Verbundmodells. Zur Darstellung des Einflusses dieser Größe auf das Tragverhalten der Struktur erfolgt eine weitere Untersuchung mit $\varphi = 30^\circ$, so daß insgesamt vier Varianten des 'push-out'-Versuches betrachtet werden: Während die Fälle A1 und A2 von einer fehlenden Reibung ausgehen, wird diese bei Fall B1 und B2 berücksichtigt. Die Zahl 1 zeigt die bereits erläuterte ungehinderte horizontale Verschiebung der Betonkörperaußenkante an, für 2 werden zusätzliche Randbedingungen gesetzt.

Vor einer detaillierteren Diskussion der gewonnenen Ergebnisse sei auf die sehr

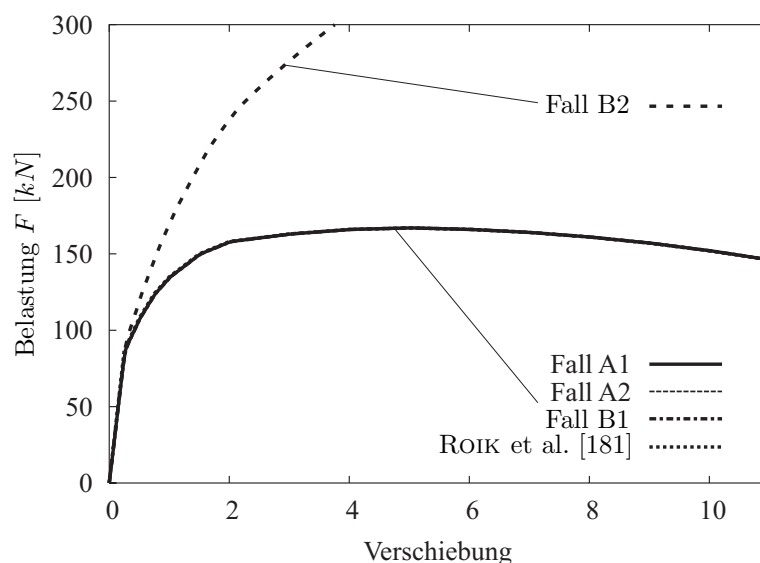


Abbildung 8.30: 'push-out'-Versuch, experimentelle und numerische Ergebnisse

gute Übereinstimmung der numerisch ermittelten Last-Verschiebungs-Kurven mit derjenigen der experimentellen Untersuchungen von ROIK et al. [181] hingewiesen, Abb. 8.30. Abgesehen von Fall B2, der ein deutlich steiferes Verhalten aufweist, verlaufen alle drei Kurven nahezu deckungsgleich mit der Referenz. Bei einer vertikalen Verschiebung von $w = 5.0 \text{ mm}$ ist mit $F = 166.97 \text{ kN}$ die maximale Tragfähigkeit der Kopfbolzenverbindung erreicht, analog zu den Versuchsergebnissen wird die Berechnung bei $w = 11.0 \text{ mm}$ und $F = 146.10 \text{ kN}$ beendet.

Die Verläufe der Schub- und der Normalkräfte, welche sich für die Fälle A1, A2 und B1 in der Verbundfuge ergeben, sind in Abb. 8.31 dargestellt. Für einen Schnitt, der in der Symmetrie-Ebene liegt, wird jeweils der Traglastzustand be-

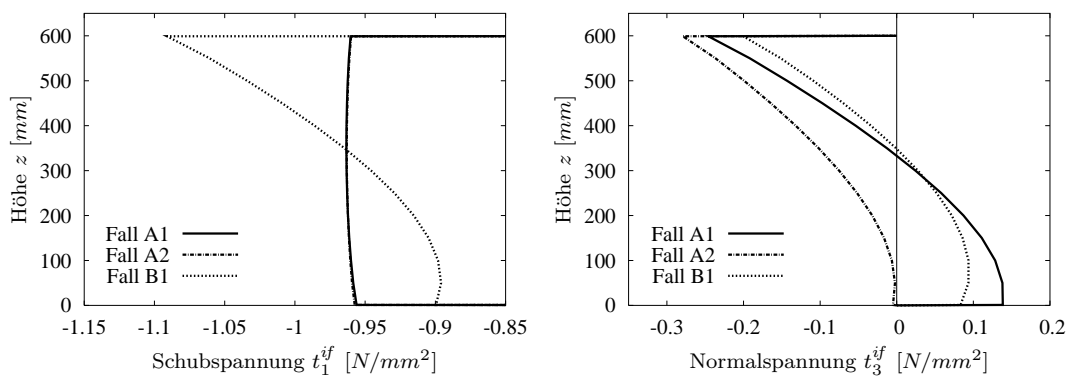


Abbildung 8.31: Verteilung von Schub- und Normalspannungen in der Verbundfuge

trachtet. Da diese Kräfte ähnlich wie die Materialkennwerte über den gesamten Kontaktbereich verschmiert sind, haben sie die Einheit einer Spannung.

Im Fall A1 erfolgt die Lastübertragung vom Stahlprofil auf den flankierenden Betonkörper durch eine nahezu konstante Schubspannung t_1^{if} . In Normalenrichtung ergibt sich eine über die Höhe der Verbundzone nichtlinear verteilte Spannung t_3^{if} , wobei sich wegen der für die Fuge exzentrisch wirkenden Belastung im oberen Teil Druck- im unteren Teil Zugspannungen ausbilden. Wie aus Abb. 8.33 zu ersehen ist, treten für den Fall A1 nur vertikale Strukturverformungen auf. Das Stahlprofil, welches hier nur am Viertel des Systems abgebildet ist, gleitet förmlich am Betonquerschnitt hinunter.

Während für den Fall A2 dieselbe Schubspannungsverteilung wie für die erste Berechnung folgt, entwickelt sich senkrecht zur Verbundfuge ausschließlich eine Druckzone, Zugbelastungen treten nicht auf. Die resultierende Druckkraft, deren Betrag gegenüber A1 deutlich ansteigt, steht in diesem Fall mit der horizontalen Auflagerreaktion am unteren Rand des Betonquerschnittes im Gleichgewicht. Da die Druckkomponenten über den Kontakt von Stahlflansch und Betonoberfläche

übertragen werden und eine Zugbeanspruchung fehlt, sind die einzelnen Kopfbolzendübel in Achsrichtung unbelastet. Wie im EC 4 gefordert, werden sie demnach bei Anbringung der zusätzlichen Festhalterung ausschließlich durch abscherende Schubkräfte beansprucht. Die bisher zu beobachtende unabhängige Evolution der einzelnen Kräfte in Quer- und Normalenrichtung war möglich, da bei der Wahl von $\varphi = 0^\circ$ kein funktionaler Zusammenhang der einzelnen Richtungen besteht. Auf eine Darstellung des verformten Systems bei Erreichen des Traglastzustandes kann für diesen Fall verzichtet werden. Die horizontale Festhalterung hat bei einer Vernachlässigung des Reibungswinkels keinen Einfluß auf das Verschiebungsverhalten, so daß sich keine Änderungen gegenüber Fall A1 ergeben.

Mit der Einführung eines Reibungswinkels $\varphi = 30^\circ$ ändert sich das Verhalten innerhalb des Verbundbereiches wesentlich, da nun die Schub- und Normalkräfte über das Coulombsche Reibungsgesetz miteinander gekoppelt sind. Sichtbar wird diese Interaktion bei der Betrachtung der Spannungen t_1^{if} , die für den Fall B1 nicht mehr konstant, sondern nichtlinear über die Höhe der Verbundfuge verteilt sind. Ihr Verlauf ist qualitativ identisch zu dem der Normalspannungen t_3^{if} , deren Ordinaten kleiner ausfallen als im Fall A1. Es stellen sich sowohl Druck- als auch Zugspannungen ein. Abb. 8.33 läßt deutlich die Veränderung im Verformungsverhalten erkennen, die eine Berücksichtigung der inneren Reibung mit sich bringt. Zusätzlich zu den vertikalen Verschiebungen kommt es zu einem Aufklaffen der Verbundfuge, der Betonkörper löst sich vom Stahlprofil und wandert nach außen. Wie der 10fach überhöhten Darstellung zu entnehmen ist, verschieben sich die beiden Oberflächen des 'interface'-Elementes so, daß sich gegenüber der Kontaktene der Reibungswinkel von $\varphi = 30^\circ$ ergibt.

Bedingt durch die Entwicklung von horizontalen Verschiebungen innerhalb der Verbundzone hat das Anbringen eines zusätzlichen Auflagers an der unteren Kante der seitlichen Betonteile einen gravierenden Einfluß auf die Belastbarkeit des

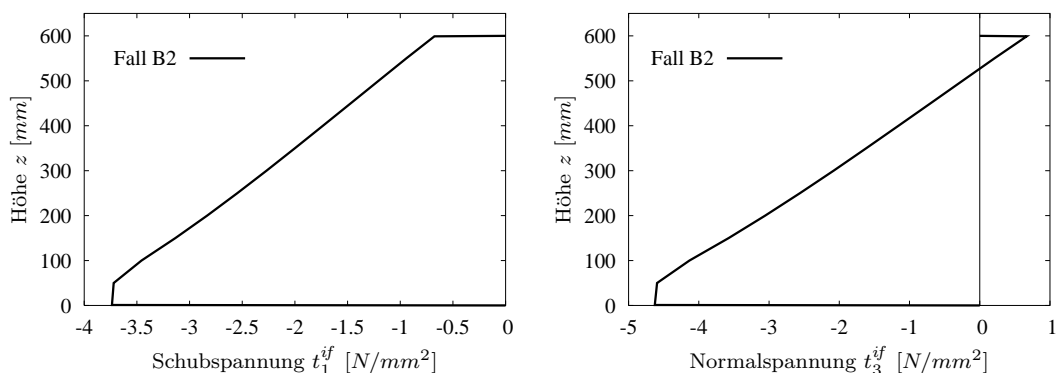


Abbildung 8.32: Schub- und Normalspannungen in der Verbundfuge für Fall B2

Versuchskörpers. Infolge der Klemmwirkung die sich aus der Verschiebungsbehinderung ergibt, bildet sich für den Fall B2 ein unverhältnismäßig stark belasteter Druckbereich im unteren Teil der Verbundfuge aus, Abb. 8.32. Das seitliche 'Kippen' des Betonquerschnittes führt desweiteren zu einer Zugbeanspruchung an der Systemoberkante. Der maximale Wert der in A2 ermittelten Druckspannung wird in diesem Fall um mehr als das 16 fache übertroffen, was eine stark gestiegene Schubspannung und damit letztlich auch eine wesentlich höhere aufnehmbare Kraft F mit sich bringt. Für eine vertikale Verschiebung des Stahlprofils von $w = 5.0\text{ mm}$ nimmt diese Kraft einen Betrag von 333.4 kN an, womit sie etwa doppelt so groß ist wie die im Experiment und in den bisherigen Berechnungen festgestellte Maximallast. Während für die Fälle A1, A2 und B1 der Traglastzustand durch ein Versagen des Verbundbereiches gekennzeichnet war, ist als Folge der stabilisierenden Querpressung die Übertragung einer nahezu beliebig großen Schubkraft möglich. Folglich wird für den Fall B2 ein Versagen von Stahlprofil oder Betonquerschnitt maßgebend werden.

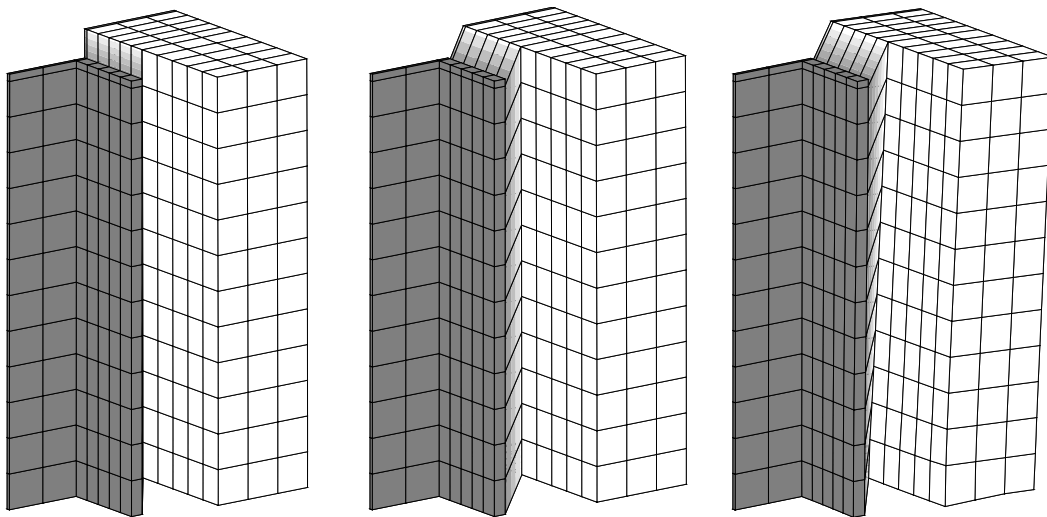


Abbildung 8.33: Strukturverformungen bei $w = 5.0\text{ mm}$ für die Fälle A1, B1 und B2, 10fach überhöht, nur Systemviertel dargestellt

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das vorgeschlagene numerische Verbundmodell in der Lage ist das globale Verhalten von Verbundstrukturen nahezu exakt abzubilden. Die Annahme, daß im Rahmen der multilinearen Beschreibung der irreversiblen Ver- und Entfestigung experimentell ermittelte Verbund-Schlupf-Charakteristiken verwendet werden können, wird somit bestätigt. Einzig der letzte untersuchte Fall, der nicht den Vorgaben des 'push-out'-Versuches entspricht, zeigt erhebliche Abweichungen von den übrigen Ergebnissen.

Eine wirklichkeitsnahe Approximation der lokalen Versagensphänomene, wie beispielsweise die in realen Versuchen festgestellten horizontalen Risse an den Außenflächen der Betonteile, ist mit dem verschmiert formulierten Zwischenelement nicht möglich. Hierfür wäre die exakte Abbildung der einzelnen Kopfbolzendübel erforderlich, was prinzipiell unter Verwendung des in Abschnitt 7.1 eingeführten von Mises-Kriteriums denkbar ist. Aufgrund des erheblichen Diskretisierungsaufwandes und der hohen Zahl an Freiheitsgraden sollte sich eine derartige numerische Untersuchung allerdings auf einzelne Detaillbereiche beschränken.

8.2.4 Stahlverbundträger mit Stegausschnitt

Den Abschluß der numerischen Beispiele bildet ein Verbundträger mit rechteckigem Stegausschnitt, wie er unter anderem im Hoch- und Industriebau zu finden ist. Besonders bei hochinstallierten Geschosßdecken in Stahlbetonverbundbauweise macht die wirtschaftliche Führung von Ver- und Entsorgungsleitungen sowie Klimakanälen die zum Teil sehr großen Öffnungen in den Stegen der Stahlprofile erforderlich. Diese Leitungsdurchführungen sind meist in Bereichen der Zwischen- und Endauflager zu finden, in denen hohe Querkkräfte zu übertragen sind. Als Folge des entstehenden gelochten Nettoquerschnitts kommt es zu einer deutlichen Schwächung der Biege- und Querkraftsteifigkeit, was einen wesentlichen Einfluß auf das Verformungsverhalten und die maximale Tragfähigkeit des gesamten Trägers hat.

Da in den bestehenden Normungen und Regelwerken nur im begrenzten Maße auf die sich so ergebenden Problematiken bei Konstruktion und Dimensionierung eingegangen wird, wurden unter anderem von BODE et al. [23] umfangreiche experimentelle Großversuche mit versteiften und unversteiften Trägern durchgeführt. Dabei wurden sowohl runde als auch rechteckige Stegöffnungen untersucht. Spezielle Rechenverfahren für eine überschlägige Handrechnung sind beispielsweise bei DARWIN [47] oder LANGE & KURZ [132] zu finden, für eine wirklichkeitsnahe Abbildung des zu erwartenden Tragverhaltens ist allerdings eine Finite-Element-

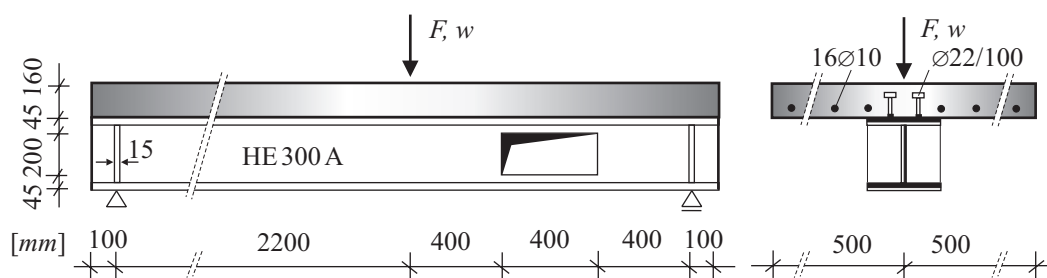
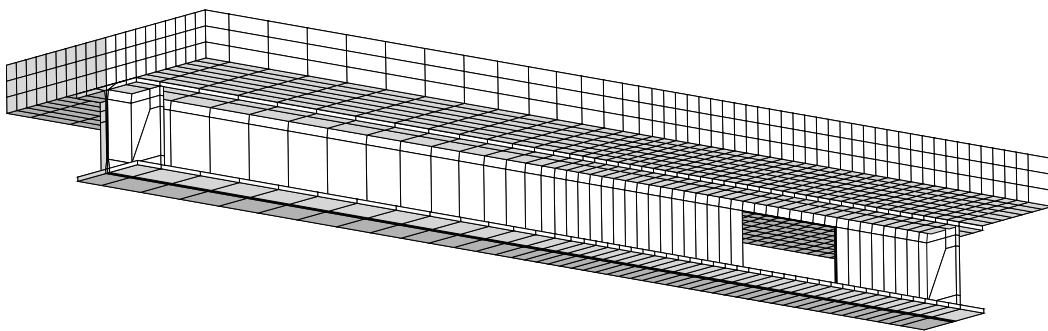


Abbildung 8.34: Stahlverbundträger mit Stegausschnitt nach BODE et al. [23]

Simulation mit entsprechenden Material- und Elementansätzen unabdingbar.

Im folgenden soll ein Verbundträger betrachtet werden, der sich aus einer bewehrten C35/45 Vollbetonplatte und einem HE 300 A-Walzprofil, welche mit Hilfe zweireihig angeordneten Kopfbolzendübel $\varnothing 22/100$ verbunden sind, zusammensetzt. Der Längsabstand der Dübel beträgt dabei $e = 100 \text{ mm}$; für das Stahlprofil werden die Materialkennwerte eines S 235 angesetzt. Mit der Wahl von $16 \varnothing 10 \text{ mm}$ aus S 500 ergibt sich ein Bewehrungsgrad von $\rho_s = 0.79\%$. Analog zum Versuch A2 von BODE et al. wird die rechteckige Stegöffnung, die eine Höhe von 200 mm hat und 400 mm breit ist, im Abstand von 400 mm vom rechten Auflager angeordnet. Weitere Angaben zur Geometrie des Einfeldträgers, zur Bewehrungsführung und zur Lasteinleitung können Abb. 8.34 entnommen werden. Eine Aufstellung aller



Beton:

$$\begin{aligned} E &= 36000 \text{ N/mm}^2 \\ f_{cm} &= 53.0 \text{ N/mm}^2 \\ f_{ctm} &= 3.80 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Bewehrung:

$$\begin{aligned} G_c &= 50.00 \text{ N/mm} \\ G_f &= 0.12 \text{ N/mm} \\ E_s &= 200000 \text{ N/mm}^2 \\ f_y &= 500.0 \text{ N/mm}^2 \\ h &= 1.30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

'interface':

$$\begin{aligned} C_{11}^{if} &= 11.133 \text{ N/mm}^3 \\ C_{22}^{if} &= 11.133 \text{ N/mm}^3 \\ C_{33}^{if} &= 84.279 \text{ N/mm}^3 \end{aligned}$$

Stahlträger:

$$\begin{aligned} c_0^s &= 9.733 \text{ N/mm}^2 \\ \varphi &= 0^\circ \\ E_s &= 210000 \text{ N/mm}^2 \\ f_y &= 235.0 \text{ N/mm}^2 \\ h &= 1.30 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Abbildung 8.35: Finite-Element-Netz in Untersicht und Materialdaten

Materialdaten und des zur Berechnung verwendeten Finite-Element-Netztes findet sich in Abb. 8.35. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften des Trägers ist es bei Berücksichtigung der entsprechenden Randbedingungen ausreichend nur eine Systemhälfte zu diskretisieren. Das Walzprofil läßt sich bei einer Approximation der Ausrundungen an den Übergängen von Steg und Flansch durch inhaltsgleiche Prismen mit insgesamt 288 Stahlelementen beschreiben, für die

Vollbetonplatte kommen 1440 der in Abschnitt 4 entwickelten Betonelemente zum Einsatz. Die diskrete Darstellung der einzelnen Bewehrungsstäbe erfolgt mit Hilfe der 3D-Rebar-Ansätze aus Abschnitt 7.2.3, wobei – wie auch für das Stahlprofil – von einem elastoplastischen von Mises-Material ausgegangen wird. Zur Simulation des Verbund-Schlupf-Verhaltens, das sich für den Bereich der Dübelverbindung zwischen dem HE 300 A und der Betonplatte feststellen läßt, werden 144 'interface'-Elemente mit einem multilinearen Ver- und Entfestigungsansatz nach (7.42) verwendet. Die dafür erforderlichen Steifigkeitswerte der Kopfbolzendübel, die über die jeweiligen zugeordneten Flächenanteile verschmiert werden, folgen aus den experimentellen Untersuchungen von BODE & BECKER [21] und sind in Tab. 8.2 zusammengestellt.

\hat{u}	[mm]	0.25	0.50	0.75	1.00	1.50	2.00	3.00	4.00
c_i^s	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	6.067	6.933	7.533	7.933	8.467	8.933	9.200	9.400
\hat{u}	[mm]	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	
c_i^s	$\left[\frac{N}{mm^2}\right]$	9.533	9.600	9.667	9.733	9.733	9.667	9.600	

Tabelle 8.2: Verschmierte Steifigkeitswerte von Kopfbolzendübeln $\phi 22/100$ in Vollbetonplatten nach BODE & BECKER [21]

Zur Beurteilung der Ergebnisse, die sich im Rahmen einer verschiebungsgesteuerten Berechnung nach dem Bogenlängenverfahren ergeben, werden neben den experimentellen Beobachtungen von BODE et al. [23] auch die numerischen Lösungen von MENRATH et al. [151] und HOHN [97] herangezogen. Während letzterer die Verbund-Schlupf-Charakteristik der Dübelverbindung mit Hilfe eines generalisierten Prandtl-Modells simuliert, basiert das Ergebnis von MENRATH et al. auf einem multilinearen Ansatz, welcher dem aus (7.42) ähnelt. In Abb. 8.36 sind die jeweiligen Last-Verschiebungs-Kurven gegenübergestellt. Aufgetragen ist dabei die vertikale Absenkung des Lasteinleitungspunktes in der Symmetrieebene des Systems. Es zeigt sich, daß alle drei numerisch ermittelten Kurven den qualitativen Verlauf der experimentellen Untersuchungen gut wiedergeben. Während das zweidimensionale Modell von MENRATH et al. – welches die im Versuch ermittelte Größe der maximalen Traglast von $F = 788 \text{ kN}$ sehr gut approximiert – die Steifigkeit des Systems deutlich überschätzt, liegen die anderen Kurven über weite Teile dicht beieinander. Erst ab einer Verschiebung von etwa 16.0 mm zeigt sich bei der Berechnung von HOHN eine zu groß angenommene Resttragfähigkeit

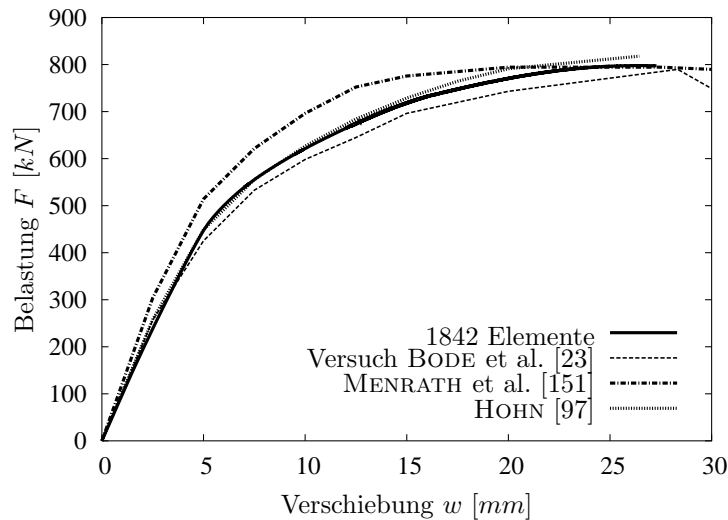


Abbildung 8.36: Stahlverbundträger mit Stegausschnitt, experimentelle und numerische Ergebnisse

der geschädigten Struktur. Anders für das im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagene Modell: Mit zunehmender Absenkung des Lastangriffspunktes nähert sich diese Kurve den Versuchsergebnissen weiter an, bis schließlich bei $w = 26.4 \text{ mm}$ eine maximale Belastbarkeit von $F = 797 \text{ kN}$ erreicht wird. Die festzustellenden geringen Abweichungen zu dem von BODE et al. beobachteten Verhalten erscheint mit Blick auf die generell auftretenden Differenzen zwischen experimentellen Versuchen und numerischer Simulation als vernachlässigbar.

Ein interessantes Bild zeigt sich bei der Betrachtung der Schädigungsevolutionen innerhalb der Betonplatte. In Abb. 8.37 ist zu erkennen, daß es – wie zu erwarten war – an der Stelle der maximalen Momentenbeanspruchung an der Unterseite der Platte zu einem Versagen infolge von Biegezugspannungen kommt. Dieser geschädigte Bereich, der sich gleichmäßig über die gesamte Plattenbreite erstreckt, dehnt sich einseitig in Richtung der Stegöffnung aus, was eine gute Übereinstimmung mit den von BODE et al. beschriebenen Rißbändern infolge hoher Schubspannungen darstellt. Bei weiter steigender Belastung nimmt der Grad der Schädigung in den Außenbereichen der Betonplatte zwar deutlich zu, nicht aber deren Expansion in Trägerlängsrichtung. Anders verhält es sich in direkter Umgebung der Verbundfuge, wo im Traglastzustand ausgeprägte Zugschädigungen an der Plattenunterseite zu erkennen sind. Wie sich in der Draufsicht feststellen läßt, erstrecken sich diese Zugrisse über die gesamten Plattendicke und bilden auf der Plattenoberseite ein breites Rißband vom rechten Rand bis etwa zur Trägermitte.

Das beobachtete Versagensverhalten läßt den Schluß zu, daß sich das Stahlprofil

gewissermaßen in die Betonplatte einhängt. Dieses führt in letzterer zu den hohen Spannungen in Dickenrichtung und damit zur Zugschädigung des Betons im Anschlußbereich beider Konstruktionselemente. Deutlich zu erkennen ist dieses

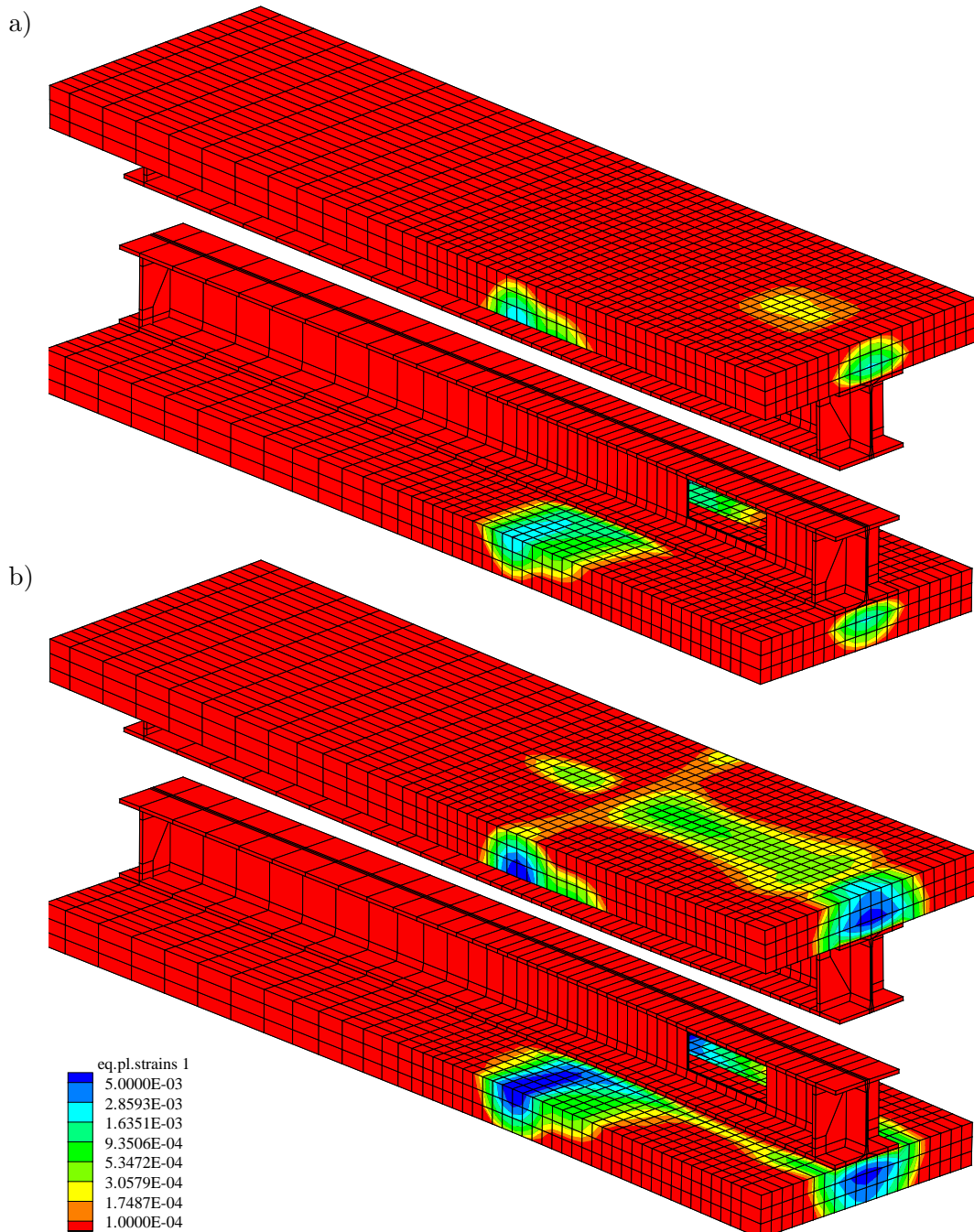


Abbildung 8.37: Plastische Vergleichsdehnungen für Zugversagen der Betonplatte a) bei $F = 597 \text{ kN}$ und b) im Traglastzustand, jeweils in Draufsicht und horizontal gespiegelt

Einhängen bei einer Betrachtung des 20-fach überhöhten deformierten Systems im Traglastzustand, Abb. 8.40. Während sich für das Stahlprofil im Bereich der Stegaussparung ein nahezu S-förmiger Verlauf einstellt, sind für die Betonplatte

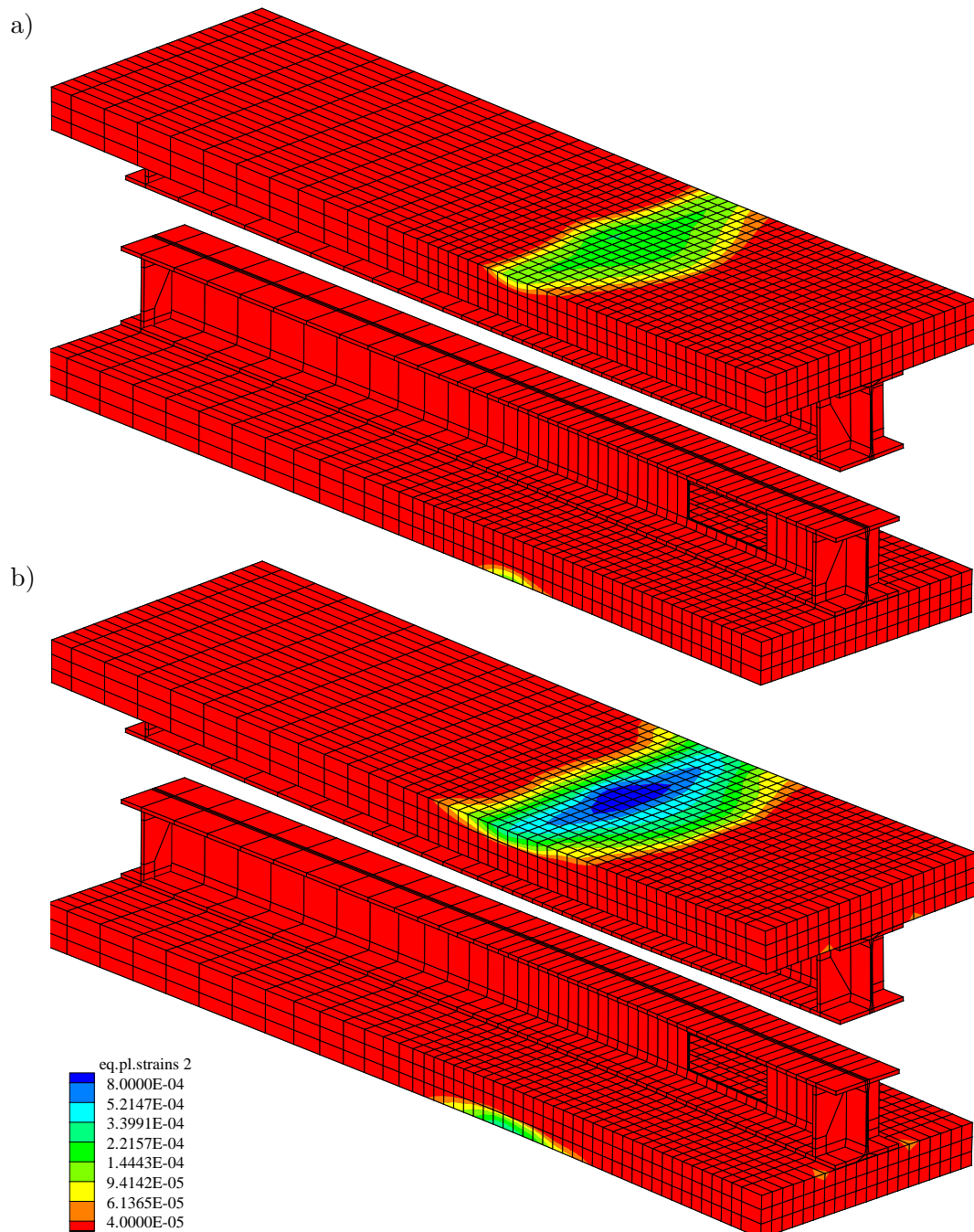


Abbildung 8.38: Plastische Vergleichsdehnungen für Druckversagen der Betonplatte a) bei $F = 597 \text{ kN}$, b) im Traglastzustand, jeweils in Draufsicht und horizontal gespiegelt

kaum Krümmungen wahrnehmbar. Die aus dem sehr unterschiedlichen Verformungsverhalten der Einzelkomponenten resultierenden hohen Beanspruchungen der Betonplatte werden auch am rechten Rand des Trägers deutlich: Es stellt sich ein starkes Abheben des Betonquerschnitts ein, was aufgrund der verdübelten Verbundfuge gravierende Quersugrisse in der Platte mit sich bringt, Abb. 8.37.

Während im Traglastzustand nahezu in der gesamten rechten Trägerhälfte Zugschädigungen festzustellen sind, konzentriert sich der Bereich des Versagens infolge einer Überschreitung der maximalen Druckfestigkeit ausschließlich auf die Stelle des maximalen Biegemomentes, Abb. 8.38. Das sich das Druckversagen nicht gleichmäßig über die gesamte Plattenbreite verteilt, sondern oberhalb des Stahlprofils am Intensität zunimmt, hängt direkt mit der ungleichförmigen Zugschädigung in diesem Querschnittsteil zusammen. Als Folge des weiten Aufreißen des Betons im Bereich der Verbundfuge ist hier die Höhe der möglichen Druckzone deutlich geringer als am Plattenrand.

Wie sich aus Abb. 8.39 ersehen läßt, treten auch im Steg des HE 300 A starke plastische Verformungen auf. Bei einer Belastung von $F = 520 \text{ kN}$ zeigt sich ein

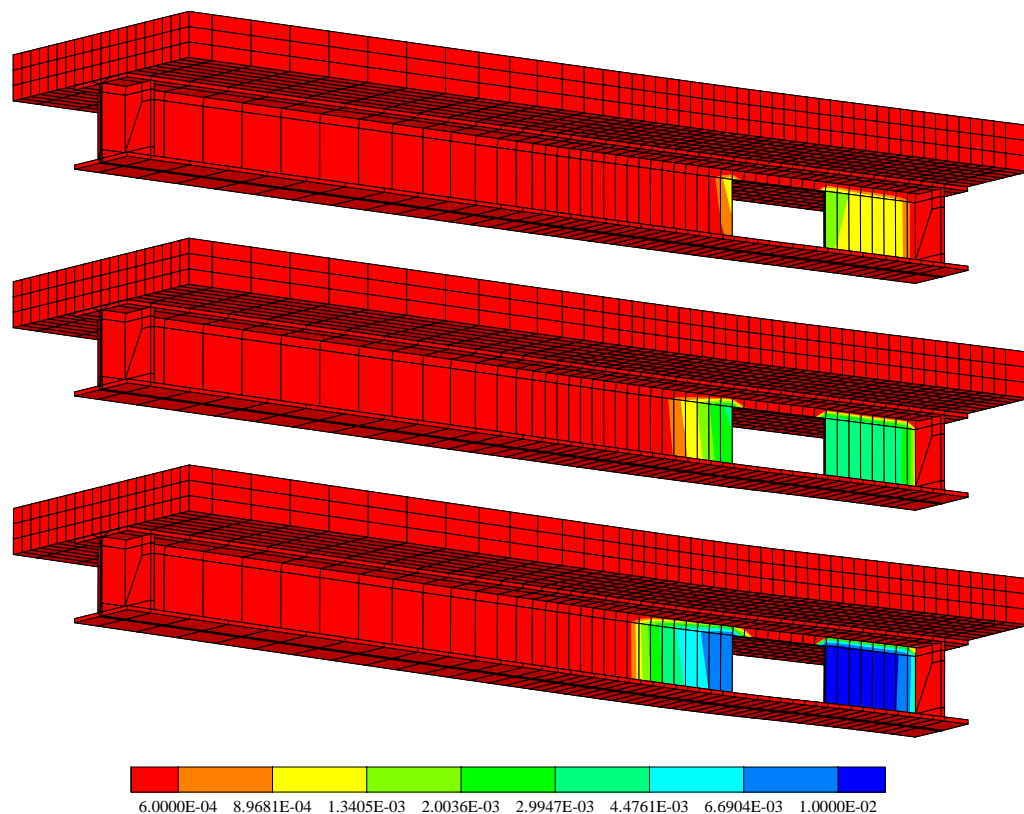


Abbildung 8.39: Plastische Vergleichsdehnungen des Stahlprofils bei $F = 520 \text{ kN}$, $F = 597 \text{ kN}$ und im Traglastzustand

erstes Plastizieren in der linken oberen Ecke der Stegöffnung. Im Bereich zwischen Aussparung und Auflager ist zu diesem Zeitpunkt die Fließgrenze des Materials bereits großflächig erreicht. Im Traglastzustand erstreckt sich die plastische Zone etwa bis an die Stelle der Lasteinleitung. Neben dem Steg lassen sich nun auch in den Ausrundungen am Übergang von Steg zu Flansch deutlich plastische Vergleichsdehnungen erkennen.

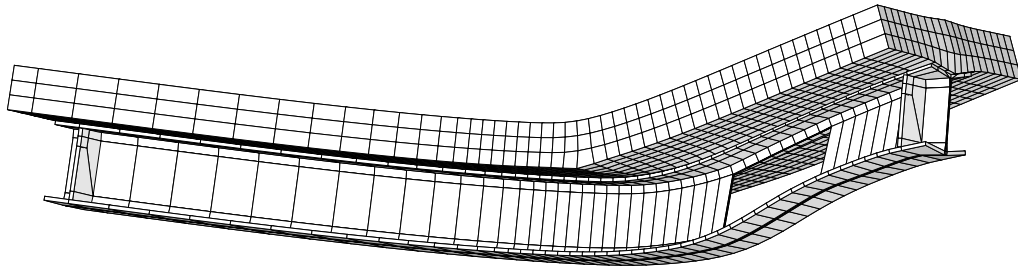


Abbildung 8.40: Deformierte Struktur im Traglastzustand, 20 fach überhöht

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß es über die Kombination aller im Rahmen dieser Arbeit hergeleiteten und entwickelten Materialmodelle und Elementformulierungen möglich wird, auch praxisnahe Systeme, die sich durch ein hochgradig nichtlineares und komplexes Versagensverhalten auszeichnen, wirklichkeitsgetreu numerisch zu simulieren. Dies zeigt sich vor allem bei einem Vergleich mit experimentell beobachteten Verformungscharakteristiken und Versagensphänomenen.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es ein dreidimensionales Versagensmodell für Beton zu formulieren, welches auf einer möglichst geringen Anzahl von einfach zu bestimmenden Parametern basiert. Mit der nichtglatten Kopplung mehrerer klassischer Fließbedingungen konnte über die Ansätze der 'non-smooth multisurface plasticity' ein effizientes numerisches Modell entwickelt werden, das für die Beschreibung des Vor- und Nachbruchverhaltens ausschließlich Materialparameter verwendet, die einschlägigen Normen und Regelwerken zu entnehmen sind. Unabhängig von der gewählten Betongüte sind einmalig zwei geometrische Parameter zu bestimmen, was mit Hilfe zweiaxialer Versagenskurven möglich wird. Sämtliche plastische Algorithmen wurden auf der Basis einer thermodynamischen Betrachtung hergeleitet und entwickelt, wobei innerhalb der Projektionsalgorithmen das implizite Euler-Rückwärtsverfahren genutzt wird. Mit der konsistenten Herleitung der elastoplastischen Tangentenmoduln und der Implementierung in ein leistungsstarkes 8-Knoten-Kontinuums-element ergibt sich somit eine Formulierung zur effiziente Berechnung von Betonstrukturen.

Aufgrund der verschmierten Betrachtung von Materialschädigung und Rißentwicklung können die entfestigenden Strukturbereiche weiterhin als Kontinuum angesehen werden, woraus sich Vorteile bei der Finite-Element-Implementierung ergeben. Es sind keine speziellen diskontinuierlichen Elemente erforderlich, auch kann auf eine das Rißwachstum begleitende Neuvernetzung verzichtet werden. Durch die Einführung einer charakteristischen Elementlänge sind die bruchmechanischen Effekte objektiv gegenüber einer Netzverfeinerung, wie im Rahmen eines numerischen Beispiels umfassend diskutiert wird.

Vergleiche mit experimentellen Druckversuchen zeigen, daß es bei der Wahl von parabolischer Ver- und exponentieller Entfestigung möglich ist, das reale Betonverhalten nahezu exakt abzubilden. Ähnlich gute Resultate liefert auch der exponentiell angenommene Spannungsabfall nach Überschreiten der maximalen Zugfestigkeit, sowie die Interaktion der einzelnen Schädigungsphänomene bei einer beliebigen mehraxilen Belastung. Im Fall einer zyklischen Be- und Entlastung kommt die Degradation der elastischen Materialparameter im Nachbruchbereich zum Tragen, mit der auch bei vollständiger Entlastung geringe Rißöffnungen und Gefügauflockerungen verbleiben.

Da sich für das entwickelte Drucker-Prager-Kugel-Modell eine leichte Unterschätzung der Betonfestigkeit unter dreiaxialen Zug ergibt, wird in einem modifizierten Modell ein dreidimensionales Hauptspannungskriterium zur Beschreibung des Zugbereiches eingeführt. Es läßt sich konstatieren, daß keine der beiden hergeleiteten Modellvarianten der anderen generell vorzuziehen ist. Beide Mo-

delle ergänzen sich eher als daß sie konkurrieren. Soll beispielsweise das mehrdimensionale Zugversagen von unbewehrtem Beton untersucht werden, ist eine Verwendung des alternativen Rankine-Modells angebracht. Das entwickelte reine Drucker-Prager-Modell stellt aufgrund der algorithmisch wesentlich knapperen Formulierung unter anderem bei Stahlbetonstrukturen die effizientere Variante dar. Je nach gegebener Problemstellung ist somit eine entsprechende Auswahl zu treffen.

Mit der Einführung einer dreidimensionalen Rebar-Formulierung wird es möglich einzelne Bewehrungsstäbe diskret aber ohne zusätzliche Freiheitsgrade zu berücksichtigen. Im Unterschied zu verschmierten oder eingebetteten Bewehrungsansätzen können so bei akzeptabler Rechenzeit beispielsweise auch die Spannungsänderungen in der direkten Umgebung der einzelnen Bewehrungsstäbe erfaßt werden.

Wie aus dem numerischen Beispiel eines Keilspaltversuches zu entnehmen ist, eignet sich das eingeführte 'interface'-Element nicht nur für die Approximation der Verbund-Schlupf-Beziehung innerhalb von Kopfbolzenverbindungen, sondern auch zur realitätsnahen Abbildung von einzelnen Makrorissen im Beton, sofern deren Verlauf im Vorfeld bekannt ist.

Generell kann festgestellt werden, daß sich im Rahmen der numerischen Untersuchungen von bewehrten und unbewehrten Strukturen, sowie Verbundkonstruktionen eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentell gewonnenen Ergebnissen ergibt. Im Vergleich mit anderen in der Literatur zu findenden makroskopischen Formulierungen zeigen die entwickelten dreidimensionalen Modelle deutlich ihre Stärken bei der wirklichkeitsnahen Erfassung der Versagensphänomene und der Approximation des Nachbruchverhaltens. Im Gegensatz zu den häufig verwendeten zweidimensionalen Ansätzen sind bei Nutzung der hier vorgeschlagenen Modelle keine Modifikationen oder Anpassungen der in Versuchen bestimmten Materialparameter erforderlich. Gegenüber Materialmodellen, die auf mesoskopischen oder mikroskopischen Ansätzen beruhen, lassen sich verständlicherweise einzelne Schwächen feststellen. Da für eine derart exakte Beschreibung des Werkstoffverhaltens – die aufgrund des hohen numerischen Aufwandes nur für die Untersuchung einzelner Detailpunkte wirtschaftlich ist – eine Vielzahl spezieller und schwerbestimmbarer Eingabeparameter erforderlich sind, werden diese leichten Abweichungen nicht als nachteilig angesehen. Die bereits aufgeführten Stärken der vorgestellten Formulierung, die ausschließlich in Normen und Regelwerken vertafelte Materialkennwerte verwendet, treten besonders bei der effizienten Berechnung größerer Strukturteile weit in den Vordergrund.

Um das Einsatzgebiet der hier vorgestellten Material- und Elementformulierungen noch breiter zu fassen, ergäben sich aus einer Einbeziehung zeitabhängiger

Ansätze interessante neue Aspekte. Es wäre somit beispielsweise möglich Phänomene wie Kriechen oder Schwinden in die Tragwerksuntersuchungen einzubeziehen, so daß Aussagen über das Langzeitverhalten belasteter Strukturen gemacht werden könnten. Gemäß den bisherigen Ansätzen werden die einzelnen Beanspruchungen als statischen Kurzzeitbelastungen angesehen. Alternativ wäre die Untersuchung von Bauteilen denkbar, die durch ein nachträgliches Aufkleben von Laminaten verstärkt werden. Nach entsprechenden Parameterstudien sollte eine Approximation der Klebefuge mit Hilfe des entwickelten 'interface'-Elementes problemlos möglich sein. Mit dem Austausch des für die Rebar-Faser verwendeten Stahlmodells durch eine Formulierung, die beispielsweise auf dem Tsai-Wu-Kriterium beruht, stünde ein geeignetes Modell zur Berechnung glasfaserbewehrter Betonbauteile, welche in jüngster Zeit vermehrt eingesetzt werden, zur Verfügung.

Literatur

- [1] AHMAD, S.H. / SHAH, S.P. / KHALOO, A.R.: *Orthotropic model of concrete for triaxial stresses*. ASCE J. Struct. Eng. 112 (1986), S. 165–181.
- [2] ANDELFINGER, U. / RAMM, E.: *EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements*. Int. J. Num. Meth. Eng. 36 (1993), S. 1311–1337.
- [3] ARGYRIS, J.H.: *An excursion into large rotations*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 32 (1982), S. 85–155.
- [4] BAŞAR, Y. / WEICHERT, D.W.: *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 2000.
- [5] BALMER, G.G.: *Shearing strength of concrete under high triaxial stress-computation of Mohr's envelope as a curve*. United States Department of the Interior, Structural Research Laboratory Report No. SP-23, 1949.
- [6] BATHE, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 2002.
- [7] BAŽANT, Z.P.: *Mechanics of distributed cracking*. Applied Mechanics Reviews ASME 39(5) (1986), S. 675–705.
- [8] BAŽANT, Z.P. / KIM, S.S.: *Plastic-fracture theory for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 105(EM3) (1979), S. 407–428.
- [9] BAŽANT, Z.P. / OH, B.H.: *Crack band theory for fracture of concrete*. Materials and Structures: research and testing 93(16) (1983), S. 155–177.
- [10] BAŽANT, Z.P. / PRAT, P.C.: *Microplane model for brittle-plastic materials – I. Theory, II. Verification*. J. Eng. Mech. 114(10) (1988), S. 1672–1702.
- [11] BAŽANT, Z.P. / SHIEH, C.L.: *Endochronic model for nonlinear triaxial behavior of concrete*. Nuclear Engineering and Design 47 (1978), S. 305–315.
- [12] BECKER, E. / BÜRGER, W.: *Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [13] BELYTSCHKO, T. / BLACK, T.: *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. Int. J. Num. Meth. Eng. 45 (1999), S. 601–620.
- [14] BELYTSCHKO, T. / LIU, W.K. / MORAN, B.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2002.
- [15] BETSCH, P. / GRUTTMANN, F. / STEIN, E.: *A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 130 (1996), S. 57–79.

- [16] BETSCH, P. / MEYER, L. / STEIN, E.: *On the parametrization of finite rotations in computational mechanics: A classification of concepts with application to smooth shells*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 155 (1996), S. 273–305.
- [17] BETSCH, P. / STEIN, E.: *An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a nonlinear 4-node shell element*. Commun. Num. Meth. Eng. 11 (1995), S. 899–909.
- [18] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1993.
- [19] BETTEN, J.: *Finite Elemente für Ingenieure Band 1 / Band 2*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1997/98.
- [20] BODE, H.: *Euro-Verbundbau: Konstruktion und Berechnung*. Werner Verlag, Düsseldorf, 1998.
- [21] BODE, H. / BECKER, J.: *Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlverbundträgern mit nachgiebiger Verbundfuge*. DFG-Forschungsbericht Bo 733/7–1, 1994.
- [22] BODE, H. / BECKER, J. / KRONENBERGER, H.J.: *Zur nichtlinearen Berechnung von Verbundträgern mit teilweiser Verdübelung*. Stahlbau 63(4) (1994), S. 268–272.
- [23] BODE, H. / STENGEL, J. / KÜNZEL, R.: *Stahlverbundträger mit großen Stegabschnitten*. Stahlbau 63(1/2) (1994), S. 6–14 / 41–48.
- [24] BONZEL, J.: *Über die Biegezugfestigkeit des Betons*. Beton 13 (1963), S. 179–182.
- [25] BONZEL, J.: *Über die Spaltzugfestigkeit des Betons*. Beton 14 (1964), S. 108–114.
- [26] BOUZAIENE, A. / MASSICOTTE, B.: *Hypoelastic tridimensional model for non-proportional loading of plain concrete*. J. Eng. Mech. 123(11) (1997), S. 1111–1120.
- [27] BRÜHWILER, E. / WITTMANN, F.H.: *The wedge splitting test, a new method of performing stable fracture mechanics tests*. Engineering Fracture Mechanics 35(1) (1990), S. 117–125.
- [28] BÜCHTER, N. / RAMM, E. / ROEHL, D.: *Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept*. Int. J. Num. Meth. Eng. 37 (1994), S. 2551–2568.
- [29] CAROL, I. / BAŽANT, Z.: *Damage and plasticity in microplane theory*. Int. J. of Sol. and Struc. 34(29) (1997), S. 3807–3835.
- [30] CEB-FIP: *Model Code 1990*. CEB–Comité Euro–International du Béton, Lausanne, Bulletin D’Information No.213/214 (May 1993).

-
- [31] CEDOLIN, L. / CRUTZEN, Y.J.R. / DEI POLI, S.: *Triaxial stress–strain relationship for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 103(EM3) (1977), S. 423–439.
- [32] CERVENKA, V. / PUKL, R. / ELIGEHAUSEN, R.: *Computer simulation of anchoring technique in reinforced beams*. In: BICANIC, N. / MANG, H.A., (HRSG.), *Computer Aided Analysis and Design Concrete Structures*, S. 1–19 Pineridge Press, Swansea, 1990.
- [33] CHADWICK, P. / OGDEN, R.W.: *On the definition of elastic material*. J. of Rat. Mech. and Anal. 44 (1971), S. 41–53.
- [34] CHADWICK, P. / OGDEN, R.W.: *A theorem of tensor calculus and its application to isotropic elasticity*. J. of Rat. Mech. and Anal. 44 (1971), S. 54–68.
- [35] CHEN, A.C.T. / CHEN, W.F.: *Constitutive relation for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE EM4 (1975), S. 465–481.
- [36] CHEN, W.F.: *Plasticity in reinforced concrete*. McGraw–Hill, New York, 1982.
- [37] CHEN, W.F.: *Constitutive equations for engineering materials*. Band 2: Plasticity and modeling, Elsevier, Amsterdam, 1994.
- [38] CHEN, W.F. / HAN, D.J.: *Plasticity for structural engineers*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [39] CHEN, W.F. / SALEEB, A.F.: *Constitutive equations for engineering materials*. Band 1: Elasticity and modeling, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.
- [40] COFER, W.: *Implementation of the nonlocal microplane concrete model within an explicit dynamic finite element program*. Applied Mechanics Reviews ASME 45(3) (1992), S. 132–139.
- [41] COLEMAN, B.D. / GURTIN, M.E.: *Thermodynamics with internal state variable*. Journal of Chemical Physics 47 (1967), S. 597–613.
- [42] COLEMAN, B.D. / NOLL, W.: *The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity*. Arch. Rational Mech. Anal. 13 (1963), S. 167–178.
- [43] CRISFIELD, M.A.: *Difficulties with current numerical models for reinforced concrete and some tentative solutions*. In: DAMJANIC, F., (HRSG.), *Computer Aided Analysis and Design Concrete Structures*, S. 331–358 Pineridge Press, Swansea, 1984.
- [44] CRISFIELD, M.A. / WILLS, J.: *Analysis of R/C panels using different concrete models*. J. Eng. Mech. 115(3) (1989), S. 578–597.

- [45] D'ADETTA, G.A. / KUN, F. / RAMM, E.: *On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials*. Granular Matter 4 (2002), S. 77–90.
- [46] DAHLBLOM, O. / OTTOSEN, N.S.: *Smearred crack analysis using generalized frictional models*. J. Eng. Mech. 116(1) (1990), S. 55–76.
- [47] DARWIN, D.: *Design of steel and composite beams with web openings*. Steel design guide series, Vol. 2, AISC, Chicago, 1991.
- [48] DARWIN, D. / PECKNOLD, D.A.: *Nonlinear biaxial stress–strain law for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division 103 (1977), S. 229–241.
- [49] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1982.
- [50] DE BORST, R.: *Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading – a unified approach*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 62 (1987), S. 89–110.
- [51] DE BORST, R.: *The zero-normal-stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity*. Commun. Appl. Num. Meth. 7 (1991), S. 29–33.
- [52] DE BORST, R. / NAUTA, P.: *Non-orthogonal cracks in a smearred finite element model*. Eng. Comp. 2 (1985), S. 35–46.
- [53] DIMAGGIO, F.L. / SANDLER, S.: *Material model for granular soils*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 97(EM3) (1971), S. 935–950.
- [54] DIN 1045–1: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung e.V. (Juli 2001).
- [55] DIN 18800–1: *Stahlbauten, Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung e.V. (November 1990).
- [56] DOUGILL, J.W.: *On stable progressively fracturing solids*. Journal of Applied Mathematics and Physics 27(4) (1976), S. 423–437.
- [57] DOUGILL, J.W. / RIDA, M.A.M.: *Further consideration of progressively fracturing solids*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 106(EM5) (1980), S. 1021–1038.
- [58] DRUCKER, D.C.: *Relation of experiments to mathematical theories of plasticity*. J. Appl. Mech. 16 (1949), S. 349–357.
- [59] DRUCKER, D.C.: *Some implications of work hardening and ideal plasticity*. Quart. of Appl. Math. 7 (1950), S. 411–418.
- [60] DRUCKER, D.C. / PRAGER, W.: *Soil mechanics and plastic analysis or limit design*. Quart. of Appl. Math. 10 (1952), S. 157–165.

- [61] DVORKIN, E. / BATHE, K.-J.: *A continuum based four-node shell element for general nonlinear analysis*. Eng. Comp. 1 (1984), S. 77–88.
- [62] DVORKIN, E. / PANTUSO, D. / REPETTO, E.: *A formulation of the MITC4 shell element for finite strain elasto-plastic analysis*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 125 (1995), S. 17–44.
- [63] EBERHARDTSTEINER, J. / HOFSTETTER, G. / MANG, H.A. / MESCHKE, G. / WALTER, H.: *Traglastanalyse von a) schlaff bewehrten, dickwandigen Konstruktionselementen und b) vorgespannten dünnwandigen Schalen aus Beton*. In: STEIN, E., (HRSG.), *Nichtlineare Berechnungen im konstruktiven Ingenieurbau*, S. 303–323 Springer, Berlin, 1989.
- [64] ECKARDT, S. / HÄFNER, S. / KÖNKE, C.: *Simulation of the fracture behaviour of concret using continuum damage models at the mesoscale*. In: NEITTAANMÄKI, P. / ROSSI, T. / KOROTOV, S. / ONATE, E. / PÉRIAUX, J. / KNÖRZER, D., (HRSG.), *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering CD-ROM*, 2004.
- [65] EHLERS, W.: *A single-surface yield function for geomaterials*. Arch. Appl. Mech. 65 (1995), S. 246–259.
- [66] EIBL, J. / IVANYI, G.: *Studie zum Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbeton*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 260, Ernst & Sohn, Berlin, 1976.
- [67] ETSE, G. / WILLAM, K.: *A fracture energy-based constitutive formulation for inelastic behavior of plain concrete*. J. Eng. Mech. 120(9) (1994), S. 1983–2011.
- [68] EUROCODE 2: *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*. Europäisches Komitee für Normung (Dezember 1991).
- [69] EUROCODE 4: *Bemessung und Konstruktion von Verbundtragwerken aus Stahl und Beton, Teil 1.1: Bemessungsregeln für den Hochbau*. Europäisches Komitee für Normung (Oktober 1992).
- [70] FAUST, T.: *Leichtbeton im Konstruktiven Ingenieurbau*. Ernst & Sohn, Berlin, 2003.
- [71] FEENSTRA, P.H.: *Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete*. Dissertation, Delft University of Technology, 1993.
- [72] FEENSTRA, P.H. / DE BORST, R.: *A plasticity model and algorithm for mode-I cracking in concrete*. Int. J. Num. Meth. Eng. 38 (1995), S. 2509–2529.
- [73] FEENSTRA, P.H. / DE BORST, R.: *A composite plasticity model for concrete*. Int. J. of Sol. and Struc. 33(5) (1996), S. 707–730.

- [74] FEIST, C.: *Contribution of numerical results to WP2/TG2 Test No.: 1.* <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss1/> (2002).
- [75] FEIST, C.: *Contribution of numerical results to WP2/TG2 Test No.: 2.* <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss2/> (2003).
- [76] FEIST, C. / KERBER, W. / LEHAR, H. / HOFSTETTER, G.: *A comparative study of numerical models for concrete cracking.* In: NEITTAANMÄKI, P. / ROSSI, T. / KOROTOV, S. / ONATE, E. / PÉRIAUX, J. / KNÖRZER, D., (HRSG.), *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering* CD-ROM, 2004.
- [77] FERRARA, L. / DI PRISCO, M.: *Mode I fracture behavior in concrete: nonlocal damage modelling.* *J. Eng. Mech.* 127(7) (2001), S. 678–692.
- [78] GEBBEKEN, N.: *Zur numerischen Behandlung des Tragverhaltens von Verbundkonstruktionen.* Technische Universität Hannover, 1994.
- [79] GERSTLE, K.H. / ASCHL, H. / LINSE, D. ET AL.: *Behaviour of concrete under multiaxial stress states.* *Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE* 106(EM6) (1980), S. 1383–1403.
- [80] GÜNTHER, G. / MEHLHORN, G.: *Zentrische Zugversuche an Stahlbetonkörpern zur Ermittlung des Betons zwischen den Rissen.* *Beton- und Stahlbetonbau* 86(3) (1991), S. 65–67.
- [81] GRASBERGER, S.: *Gekoppelte hygromechanische Materialmodellierung und numerische Simulation langzeitiger Degradation von Betonstrukturen.* Dissertation, Ruhr Universität Dortmund, Institut für Statik und Dynamik, 2002.
- [82] GUDEHUS, G.: *A comprehensive constitutive equation for granular materials.* *Soils and foundations, The Japanese Geotechnical Society* 36(1) (1996), S. 1–12.
- [83] GUO, z. / ZHOU, Y. / NECHVETAL, D.: *Auswertung von Versuchen zur mehrachsigen Betonfestigkeit, die an der Technischen Universität München durchgeführt wurden.* Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 447, S. 65–106, Beuth-Verlag, Berlin, 1995.
- [84] GURTIN, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics.* Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, New York, 1981.
- [85] HANSWILLE, G.: *Verbundtragwerke aus Stahl und Beton.* *Stahlbau* 67(7) (1998), S. 5.
- [86] HANSWILLE, G. / JOST, K. / SCHMITT, C. / TILLMICH, R.: *Experimentelle Untersuchungen zur Tragfähigkeit von Kopfbolzen mit großen Schaftdurchmessern.* *Stahlbau* 67(7) (1998), S. 555–560.

- [87] HARTL, G.: *Die Arbeitslinie eingebetteter Stähle bei Erst- und Kurzzeitbelastung*. Dissertation, Universität Innsbruck, 1977.
- [88] HEGGER, J. / SASSE, H.R. / WULFHORST, B.: *Textilbeton — Stand der Entwicklungen und Tendenzen*. In: MESKOURIS, K., (HRSG.), *Tagungsband Baustatik-Baupraxis 7*, S. 261–266 A.A. Balkema, Rotterdam, 1999.
- [89] HEILMANN, H.G. / HILSDORF, H. / FINSTERWALDER, K.: *Festigkeit und Verformung von Beton unter Zugbeanspruchungen*. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 203, Ernst & Sohn, Berlin, 1969.
- [90] HILL, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [91] HILLERBORG, A.: *Numerical Methods to simulate softening and fracture of concrete*. In: SIH, G.C. / DI TOMMASO, A., (HRSG.), *Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- [92] HILLERBORG, A.: *Results of three comparative test series for determining the fracture energy G_f of concrete*. Materials and Structures: research and testing 107(18) (1985), S. 403–413.
- [93] HILLERBORG, A. / MODERÉE, M. / PETERSSON, P.E.: *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elementes*. Cement and Concrete Research 6 (1976), S. 773–782.
- [94] HOFSTETTER, G. / MANG, H.A.: *Computational Mechanics of Concrete Structures*. Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden, 1995.
- [95] HOFSTETTER, G. / SIMO, J.C. / TAYLOR, R.L.: *A modified cap model: closest point solution algorithms*. Comput. & Struct. 46 (1993), S. 203–214.
- [96] HOFSTETTER, G. / TAYLOR, R.L.: *Treatment of the corner region for Drucker-Prager type plasticity*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 71(6) (1991), S. 589–581.
- [97] HOHN, B.: *Zur Theorie und Numerik des nichtlinearen Verhaltens von Verbundstrukturen*. Dissertation, Mitteilungen des Instituts für Statik der Universität Hannover, 54–04, 2004.
- [98] HUEMER, T.: *Automatische Vernetzung und adaptive nichtlineare statische Berechnung von Flächentragwerken mittels vierknotiger finiter Elemente*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1998.
- [99] HUGHES, T.J.R. / PISTER, K.S.: *Consistent linearization in mechanics of solids and structures*. Comput. & Struct. 8 (1978), S. 391–397.

- [100] HÄUSSLER-COMBE, U. / PRÖCHTEL, P.: *Ein dreiaxiales Stoffgesetz für Betone mit normaler und hoher Festigkeit*. Beton- und Stahlbetonbau 100(1) (2005), S. 52–62.
- [101] INGRAFFEA, A.R. / SAOUMA, V.: *Numerical modelling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete*. In: SIH, G.C. / DiTOMMASO, A., (HRSG.), *Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation* Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, 1985.
- [102] ISSA, M.A. / ISSA, M.A. / ISLAM, M.S. / CHUDNOVSKY, A.: *Size effects in concrete fracture: Part I, experimental setup and observations*. International Journal of Fracture 102 (2000), S. 1–24.
- [103] JAMET, P. / MILLARD, A. / NAHAS, G.: *Triaxial behaviour of a microconcrete – complete stress–strain curves for confirming pressures ranging from 0 to 100 MPa*. In: *Proceedings of RILEM–CEB Symposium on Concrete under Multiaxial Conditions*, S. 133–140 ISNA Toulouse, 1984.
- [104] JIRASEK, M. / BAŽANT, Z.P.: *Inelastic Analysis of Structures*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 2001.
- [105] KAHN, A.S. / HUANG, S.: *Continuum Theorie of Plasticity*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [106] KARIHALOO, B.L.: *Failure modes of longitudinally reinforced beams*. In: CARPINTREI, A., (HRSG.), *Application of fracture mechanics to reinforced concrete*, S. 523–546 Elsevier, London, 1992.
- [107] KARIHALOO, B.L. / XIAO, Q.Z.: *Higher order terms of crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen*. International Journal of Fracture 112 (2001), S. 127–137.
- [108] KARSAN, I.D. / JIRSA, J.O.: *Behavior of concrete under compressive loadings*. ASCE J. Struct. Div. 95 (1969), S. 2543–2563.
- [109] KERBER, W. / LEHAR, H. / FEIST, C.: *Contribution of numerical results to WP2/TG2 Test No.: 2*. <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss2/> (2005).
- [110] KLINKEL, S.: *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, Institut für Baustatik, 2000 Bericht-Nr. 7.
- [111] KLINKEL, S. / GOVINDJEE, S.: *Using finite strain 3D-material models in beam and shell elements*. Eng. Comp. 19(8) (2002), S. 902–921.
- [112] KLINKEL, S. / GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures*. Comput. & Struct. 71 (1999), S. 43–62.

-
- [113] KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method*. Int. J. Num. Meth. Eng. 40 (1997), S. 4529–4545.
- [114] KOITER, W.T.: *Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface*. Quart. of Appl. Mech. 11 (1953), S. 350–354.
- [115] KOLLEGGER, J.: *Ein Materialmodell zur Berechnung von Stahlbetonflächentragwerken*. Dissertation, Fachbereich Bauingenieurwesen der Gesamthochschule Kassel, 1988.
- [116] KOLYMBAS, D.: *A rate-dependent constitutive equation for soils*. Mechanics research communications 4 (1977), S. 367–372.
- [117] KOTSOVOS, M.D. / NEWMAN, J.B.: *Behaviour of concrete under multiaxial stress*. Journal of American Concrete Institut 74(9) (1977), S. 443–446.
- [118] KOTSOVOS, M.D. / NEWMAN, J.B.: *Generalized stress-strain relation for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 104(EM4) (1978), S. 845–856.
- [119] KRAUS, D. / WURZER, O.: *Nonlinear finite element analysis of concrete dowels*. Comput. & Struct. 64(5/6) (1997), S. 1271–1279.
- [120] KREJCI, H. / MANG, H.A.: *Zur Traglastberechnung von Stahlbetonkonstruktionen nach der Methode der Finiten Elemente*. Beton- und Stahlbetonbau 81(1) (1986), S. 15–21.
- [121] KRENK, S.: *Family of invariant stress surfaces*. J. Eng. Mech. 122(3) (1996), S. 201–208.
- [122] KRIEG, R.D. / KRIEG, B.D.: *Accuracies of numerical solutions methods for the elastic-perfect plasticity model*. Journal of Pressure Vessel Technology, ASME 99 (1977), S. 510–515.
- [123] KRÄTZIG, W.B. / MONTAG, U. / PETRYNA, Y.S.: *Schädigung, Dauerhaftigkeit und (Rest-)Nutzungsdauer von Tragwerken*. Bauingenieur 78(12) (2003), S. 553–561.
- [124] KRÄTZIG, W.B. / PÖLLING, R.: *An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum of material parameters*. Comput. & Struct. 82 (2004), S. 1201–1215.
- [125] KUHLMANN, U. / BREUNINGER, U.: *Längsschubbeanspruchung bei Verbundträgern mit liegenden Kopfbolzen im Hochbau*. Institut für Konstruktion und Entwurf I, Universität Stuttgart, Bericht Nr. 1999-3, 1999.

- [126] KUPFER, H.B.: *Das Verhalten von Beton unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 229, S. 1–105, Ernst & Sohn, Berlin, 1973.
- [127] KUPFER, H.B. / GERSTLE, K.H.: *Behaviour of concrete under biaxial stresses*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 99(EM4) (1973), S. 853–866.
- [128] KUPFER, H.B. / HILSDORF, H.K. / RÜSCH, H.: *Behaviour of concrete under biaxial stresses*. Proceedings, American Concrete Institute 66(8) (1969), S. 656–666.
- [129] LACKNER, R.: *Adaptive finite element analysis of reinforced concrete plates and shells*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1999.
- [130] LACKNER, R. / HELLMICH, CH. / MANG, H.A.: *Constitutive modeling of cementitious materials in the framework of chemoplasticity*. Int. J. Num. Meth. Eng. 53 (2002), S. 2357–2388.
- [131] LADE, P.V.: *Elasto–plastic stress–strain theory for cohesinless soil with curved yield surfaces*. Int. J. of Sol. and Struc. 13 (1977), S. 1019–1035.
- [132] LANGE, J. / KURZ, W.: *Verbundträger mit unausgesteiften Steganschnitten*. Stahlbau 59(4) (1990), S. 123–125.
- [133] LANGEHEINECKE, K. / JANY, P. / SAPPER, E.: *Thermodynamik für Ingenieure*. Vieweg, Wiesbaden, 2003.
- [134] LAWÖ, M.: *Optimierung im konstruktiven Ingenieurbau*. Vieweg, Wiesbaden, 1987.
- [135] LEMAITRE, J. / CHARBOCHE, J.L.: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [136] LINSBAUER, H.N. / TSCHEGG, E.K.: *Fracture energie determination of concrete with cube-like shaped specimens*. Zement und Beton 31 (1986), S. 38–40.
- [137] LIU, T.C. / NILSON, A.H. / SLATE, F.O.: *Stress strain response and fracture of concrete in uniaxial and biaxial compression*. American Concrete Institute Journal 69 (1972), S. 291–295.
- [138] LOURENCO, P.B. / DE BORST, R. / ROTS, J.G.: *A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials*. Int. J. Num. Meth. Eng. 40 (1997), S. 4033–4057.
- [139] LUBLINER, J.: *A plastic damage model for concrete*. Int. J. of Sol. and Struc. 25(3) (1989), S. 299–326.

-
- [140] LUBLINER, J.: *Plasticity Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1998.
- [141] LUENBERGER, D.G.: *Linear and Nonlinear Programming*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2003.
- [142] LUNGERSHAUSEN, H.: *Zur Schubtragfähigkeit von Kopfbolzendübeln*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, 1988 Bericht-Nr. 88-7.
- [143] MALVERN, L.E.: *Introduction of the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [144] MARSDEN, J.E. / HUGHES, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [145] MAUGIN, G.A.: *The Thermodynamics of Plasticity and Fracture*. Cambridge University Press, 1992.
- [146] MAZARS, J.: *Mechanical damage and fracture of concrete structures*. In: *Proceedings of ICF 5*, S. 1499–1506, Vol. 4, Cannes, France, 1981.
- [147] MAZARS, J.: *A model for unilateral elastic damageable material and its application to concrete*. In: WITTMENN, F.H., (HRSG.), *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, S. 61–71, Elsevier Science Publisher B.V., Amsterdam, 1986.
- [148] MEHLHORN, G.: *Some developments for finite element analysis of reinforced concrete structures*. In: BICANIC, N. / MANG, H.A., (HRSG.), *Computer Aided Analysis and Design Concrete Structures*, S. 1319–1336 Pineridge Press, Swansea, 1990.
- [149] MEHMEL, A. / FREITAG, W.: *Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen*. *Bauingenieur* 42(10) (1967), S. 362–369.
- [150] MENRATH, H.: *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, 1999 Bericht-Nr. 29(1999).
- [151] MENRATH, H. / HAUFE, A. / RAMM, E.: *Ein nichtlineares Materialmodell für FE-Analysen von Stahlverbundträgern*. *Stahlbau* 68(9) (1999), S. 703–712.
- [152] MESCHKE, G.: *Synthese aus konstitutivem Modellieren von Beton mittels dreiaxialer, elastoplastischer Werkstoffmodelle und Finite-Element-Analysen dickwandiger Stahlbetonkonstruktionen*. Dissertation, Technische Universität Wien, 1991.
- [153] MESCHKE, G.: *Consideration of aging of shotcrete in the context of a 3-D viscoplastic material model*. *Int. J. Num. Meth. Eng.* 39 (1996), S. 3123–3143.

- [154] MESCHKE, G. / HELNWEIN, P.: *Large-strain 3D-analysis of fibre-reinforced composites using rebar elements: hyperelastic formulation of cords*. Comp. Mech. 13 (1994), S. 241–254.
- [155] MESCHKE, G. / LACKNER, R. / MANG, H.A.: *An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete*. Int. J. Num. Meth. Eng. 42 (1998), S. 703–727.
- [156] MESCHKE, G. / MANG, H.A. / LACKNER, R.: *Recent accomplishments and future research directions in computational plasticity of reinforced concrete structures*. In: OWEN, D.R.J. / ONATE, E. / HINTON, E., (HRSG.), *Proc. Computational Plasticity, Fundamentals and Applications (Part 1)*, S. 119–144, CIMNE, Barcelona, Spain, 1997.
- [157] MISES, VON R.: *Mechanik der plastischen Formänderung von Metallen*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 8(3) (1928), S. 161–185.
- [158] MÜLLER, H.S. / MECHTCHERINE, V. / KESSLER-KRAMER, C.: *Bruchmechanische Eigenschaften von hochfestem Beton*. Beton- und Stahlbetonbau 97(9) (2004), S. 471–483.
- [159] MOËS, N. / DOLBOW, J. / BELYTSCHKO, T.: *A finite element method for crack growth without remeshing*. Int. J. Num. Meth. Eng. 46 (1999), S. 131–150.
- [160] NELISSEN, L.J.M.: *Biaxial testing of normal concrete*. Heron 18(2) (1972).
- [161] NGO, D. / SCORDELIS, A.C.: *Finite element analysis of reinforced concrete beams*. Journal of American Concrete Institut 64(14) (1967), S. 152–163.
- [162] OEHLERS, D.: *Statistical analysis of 125 push tests*. Department of Engineering, University of Warwick, CE 7, 1980.
- [163] OLIVER, J.: *A consistent characteristic length for smeared cracking models*. Int. J. Num. Meth. Eng. 28 (1989), S. 461–474.
- [164] OLIVER, J. / HUESPE, A.E. / BLANCO, S.: *Contribution to WP2/TG2, Test No.1: L-shaped panel*. <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss1/> (2002).
- [165] ORTIZ, M.: *An analytical study of the localized failure modes of concrete*. Mechanics of Materials 6(2) (1987), S. 159–174.
- [166] ORTIZ, M. / POPOV, E.P.: *Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations*. Int. J. Num. Meth. Eng. 21 (1985), S. 1561–1576.
- [167] ORTIZ, M. / SIMO, J.C.: *An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations*. Int. J. Num. Meth. Eng. 23 (1986), S. 353–366.
- [168] OTTOSEN, N.S.: *Constitutive model for short-time loading of concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE 105(EM1) (1979), S. 127–141.

- [169] OTTOSEN, N.S.: *Thermodynamic consequences of strain softening in tension*. J. Eng. Mech. 112(11) (1986), S. 1152–1164.
- [170] PETTERSON, P.E.: *Fracture energie of concrete: method of determination*. Cement and Concrete Research 10(1) (1980), S. 78–89.
- [171] PÖLLING, R.: *Eine praxisnahe, schädigungsorientierte Materialbeschreibung von Stahlbeton für Strukturanalysen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, 2000.
- [172] PONTES, I.D.S. / BORGES, L.A. / ZOUAIN, N. / LOPES, F.R.: *An approach to limit analysis with cone-shaped yield surfaces*. Int. J. Num. Meth. Eng. 40 (1997), S. 4011–4032.
- [173] PRAMONO, E. / WILLAM, K.J.: *Implicite integration of composite yield surfaces with corners*. Eng. Comp. 6 (1989), S. 186–197.
- [174] PRAVIDA, J.: *Zur nichtlinearen adaptiven Finite-Element-Analyse von Stahlbetonscheiben*. Dissertation, Technische Universität München, 1999.
- [175] RASHID, Y.R.: *Analysis of prestressed concrete pressure vessels*. Nuclear Engineering and Design 7 (1968), S. 334–344.
- [176] REINECK, K.H.: *Ein mechanisches Modell für das Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen ohne Stegbewehrung*. Bauingenieur 66 (1991), S. 323–332.
- [177] REINHARDT, H.W.: *Fracture mechanics of an elastic softening material like concrete*. Heron 29(2) (1984), S. 1–42.
- [178] REINHARDT, H.W.: *Beton*. In: EIBL, J., (HRSG.), *Beton-Kalender 2002 Teil I*, S. 1–152, Ernst & Sohn, Berlin, 2002.
- [179] REINHARDT, H.W. / CORNELISSEN, H.A.W. / HORDJIK, D.A.: *Tensile tests and fracture analysis of concrete*. ASCE J. Struct. Eng. 112 (1986), S. 2462–2477.
- [180] RIGGS, H.R. / POWELL, G.H.: *Tangent constitutive matrices for inelastic finite element analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng. 29 (1990), S. 1193–1203.
- [181] ROIK, K. / BERGMANN, R. / HAENSEL, J. / HANSWILLE, G.: *Verbundkonstruktionen – Bemessung auf der Grundlage des Eurocode 4, Teil 1*. In: EIBL, J., (HRSG.), *Beton-Kalender 1993 Teil I*, S. 551–680, Ernst & Sohn, Berlin, 1993.
- [182] ROIK, K. / BÜRKNER, K.E.: *Beiträge zur Tragfähigkeit von Kopfbolzendübeln in Verbundträgern mit Stahlprofilblechen*. Bauingenieur 56 (1981), S. 97–101.
- [183] ROTS, J.G.: *Computational Modelling of Concrete Fracture*. Dissertation, Technische Universität Delft, 1988.

- [184] SANDLER, I.S. / RUBIN, D.: *An algorithm and a modular subroutine for the cap model*. International journal for numerical and analytical methods in geomechanics 3 (1979), S. 173–186.
- [185] SANSOUR, C.: *A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of rotation tensor*. Arch. Appl. Mech. 65 (1995), S. 194–216.
- [186] SARGIN, M.: *Stress-strain-relationship for concrete and analysis of concrete sections*. Sold Mechanics Divisions, University of Waterloo, Ontario, 1971 Study No.4.
- [187] SAUER, R.: *Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Baustatik, 1998 Bericht Nr. 4.
- [188] SCHELLEKENS, J.C.J.: *Interface Elements in Finite Element Analysis*. Technische Universiteit Delft, 1990 Report No. 25-2-90-5-17.
- [189] SCHLEECH, W.: *Zur Ermittlung der Spaltzugfestigkeit des Betons*. Beton 28 (1978), S. 57–62.
- [190] SCHOLZ, U. / NECHVETAL, D. / ASCHL, H. / LINSE, D. / STÖCKL, S. / GRASSER, E. / KUPFER, H.: *Versuche zum Tragverhalten von Beton unter dreiachsiger Kurzzeitbeanspruchung*. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 447, S. 7–63, Beuth-Verlag, Berlin, 1995.
- [191] SCHÜTT, J. / WAGNER, W.: *A 3D-plasticity model for the description of concrete and its 3D-FE implementation*. In: BATHE, K.J., (HRSG.), *Computational Fluid and Solid Mechanics*, S. 632–636 Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 2003.
- [192] SHAH, S.P. / WINTER, G.: *Inelastic behavior and fracture of concrete*. American Concrete Institut, Special Publication SP-20 (1968), S. 5–28.
- [193] SHERMAN, K. / MORRISON, W.J.: *Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in a given row of the original matrix*. The Annals of Mathematical Statistics 21(1) (1950), S. 124–127.
- [194] SIMO, J.C.: *Numerical Analysis and Simulation of Plasticity*. In: CIARLET, P.G. / LIONS, J.L., (HRSG.), *Handbook of Numerical Analysis, Vol. VI*, S. 183–499, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 1998.
- [195] SIMO, J.C. / ARMERO, F.: *Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes*. Int. J. Num. Meth. Eng. 33 (1992), S. 1413–1449.

-
- [196] SIMO, J.C. / ARMERO, F. / TAYLOR, R.L.: *Improved version of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 110 (1993), S. 359–386.
- [197] SIMO, J.C. / FOX, D.D.: *On a stress resultant geometrically exact shell model, Part I: Formulation and optimal parametrization*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 72 (1989), S. 267–304.
- [198] SIMO, J.C. / HUGHES, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Band 7, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [199] SIMO, J.C. / JU, J.W. / PISTER, S.K. / TAYLOR, R.L.: *Assessment of cap model: consistent return algorithms and rate-dependent extension*. J. Eng. Mech. 114(2) (1988), S. 191–218.
- [200] SIMO, J.C. / KENNEDY, J.G. / GOVINDJEE, S.: *Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. loading/unloading conditions and numerical algorithms*. Int. J. Num. Meth. Eng. 26 (1988), S. 2161–2185.
- [201] SIMO, J.C. / KENNEDY, J.G. / GOVINDJEE, S. / HUGHES, T.R.J.: *Unconditionally convergent algorithms for non-smooth multisurface plasticity amenable to exact linearization*. In: NAKAZAWA, S. / WILLIAMS, K. / REBELLO, N., (HRSG.), *Advances in Inelastic Analysis, AMD-Vol. 88*, S. 87–95, ASME Press, New York, 1987.
- [202] SIMO, J.C. / RIFAI, M.S.: *A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes*. Int. J. Num. Meth. Eng. 29 (1990), S. 1595–1638.
- [203] SIMO, J.C. / RIFAI, M.S. / FOX, D.D.: *On a stress resultant geometrically exact shell model, Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 81 (1990), S. 91–126.
- [204] SIMO, J.C. / TAYLOR, R.L.: *Consistent Tangent Operator for Rate-Independent Elastoplasticity*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 48 (1985), S. 101–118.
- [205] SINHA, B.P. / GERSTLE, K.H. / TULIN, L.G.: *Stress-strain relations for concrete under cyclic loading*. American Concrete Institut Journal 61 (1964), S. 195–211.
- [206] SPRENGER, W. / WAGNER, W.: *On the formulation of geometrically nonlinear 3D-Rebar-elements using the enhanced assumed strain method*. Engineering Structures 21 (1999), S. 209–218.
- [207] STANKOVSKI, T. / GERSTLE, K.H.: *Simple formulation of concrete behavior under multiaxial load histories*. ACI Journal 82 (1985), S. 213–221.
- [208] STEIN, E. / BARTHOLD, F.J.: *Elastizitätstheorie*. In: MEHLHORN, G., (HRSG.), *Der Ingenieurbau*, Grundwissen, S. 165–428, Ernst & Sohn, Berlin, 1997.

- [209] STEMPNIEWSKI, L. / EIBL, J.: *Finite Elemente im Stahlbeton*. In: EIBL, J., (HRSG.), *Beton-Kalender 1996 Teil II*, S. 577–647, Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [210] SUANNO, R.L.M.: *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*. Dissertation, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, 1995 Bericht-Nr. 18(1995).
- [211] SUARIS, W. / FERNANDO, V.: *Ultrasonic pulse attenuation as a measure of damage growth during cyclic loading in concrete*. Journal of American Concrete Institut 84 (1987), S. 185–193.
- [212] SUIDAN, M. / SCHNOBRICH, W.C.: *Finite element analysis of reinforced concrete*. ASCE J. Struct. Div. 99(10) (1973), S. 2109–2122.
- [213] TAYLOR, R.L.: *FEAP – A finite element analysis program, version 7.5, theory manual*. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/theory.pdf> (2003).
- [214] TAYLOR, R.L.: *FEAP – A finite element analysis program, version 7.5, user manual*. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/manual.pdf> (2004).
- [215] THOMÉE, B. / SCHIKORA, K. / BLETZINGER, K.U.: *Material modelling of steel fiber reinforced concrete*. In: HOFSTETTER, G. / MESCHKE, G., (HRSG.), *EU-ROMECH Colloquium 460: Numerical Modelling of Concrete Cracking* CD-ROM, 2005.
- [216] TIKHOMIROV, D. / STEIN, E.: *Anisotrope Schädigungskonzepte für nichtlineare Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen*. Bauingenieur 74(1) (1999), S. 36–44.
- [217] TOUMI, A. / BASCOUL, A.: *Mode I crack propagation in concrete under fatigue: microscopic observations and modelling*. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 26(13) (2002), S. 1299–1312.
- [218] TRUESDELL, C. / NOLL, W.: *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Handbuch der Physik III/3, Springer, Berlin/Heidelberg, 1965.
- [219] TRUNK, B.G.: *Einfluß der Bauteilgröße auf die Bruchenergie von Beton*. Dissertation, ETH Zürich, 1999, <http://e-collection.ethbib.ethz.ch>.
- [220] VAN MIER, J.G.M.: *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions*. Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, 1984.
- [221] VAN MIER, J.G.M. / REINHARDT, H.W. / VAN DER VLUGT, B.W.: *Ergebnisse dreiaxial verformungsgesteuerter Belastungsversuche von Beton*. Bauingenieur 62 (1987), S. 353–361.
- [222] VECCHINO, F.J. / COLLINS, M.P.: *The response of reinforced concrete to inplane shear and normal stresses*. University of Toronto, 1982 Publication 82-03.

- [223] VONK, R.A.: *Softening of concrete loaded in compression*. Dissertation, Technische Universiteit Eindhoven, 1992.
- [224] VU-QUOC, L. / TAN, X.G.: *Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics*. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 192 (2003), S. 975–1016.
- [225] WAGNER, W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, F 91/1, 1991.
- [226] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A robust nonlinear mixed hybrid quadrilateral shell element*. Int. J. Num. Meth. Eng. 64 (2005), S. 635–666.
- [227] WEBER, H. / HULLMANN, H.: *Porenbeton Handbuch – Planen und Bauen mit System*. Bauverlag, Gütersloh, 2002.
- [228] WEDEMEIER, T.: *Beiträge zur Theorie und Numerik von Materialien mit innerer Reibung am Beispiel des Werkstoffes Beton*. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, F 90/5, 1990.
- [229] WILKINS, M.L.: *Calculation for elastic–plastic flow*. In: ADLER, B., (HRSG.), *Methods of Computational Physics 3*, Academic Press, New York, 1964.
- [230] WILLAM, K.J. / PRAMONO, E. / STURE, S.: *Fundamental aspects of strain–softening descriptions*. In: SHAH, S.P. / SWARTZ, S.E., (HRSG.), *International Conference on Fracture of Concrete and Rocks*, S. 142–157 Springer Verlag, New York, 1986.
- [231] WILLAM, K.J. / PRAMONO, E. / STURE, S.: *Fundamental issues of smeared crack models*. In: SHAH, S.P. / SWARTZ, S.E., (HRSG.), *International Conference on Fracture of Concrete and Rocks*, S. 192–207 Springer Verlag, New York, 1987.
- [232] WINKLER, B.J.: *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen*. Dissertation, Universität Innsbruck, 2001.
- [233] WINKLER, B.J. / NIEDERWANG, G. / HOFSTETTER, G.: *WP2/TG2 Test No.1: L-shaped panel*. <http://nw-ialad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/Ss1/> (2002).
- [234] WITTMANN, F.H.: *Grundlagen eines Modells zur Beschreibung charakteristischer Eigenschaften von Beton*. Deutscher Ausschluß für Stahlbeton, Heft 290, S. 43–101, Ernst & Sohn, Berlin, 1975.
- [235] WITTMANN, F.H.: *Deformation of concrete at variable moisture content*. In: BAŽANT, Z.P., (HRSG.), *Mechanics of geomaterials: rocks, concrete, soils*, S. 425–459, John Wiley and Sons, 1985.

-
- [236] WP 2 TG 2: *Continuum based material problems for dam concrete*. European Research Network: Integrity assessment of large concrete dams, <http://nwiad.uibk.ac.at/Wp2/Tg2/Se2/> (2005).
- [237] WRIGGERS, P.: *Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode*. Dissertation, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, F 88/4, 1988.
- [238] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2001.
- [239] ZHOU, D.: *Beitrag zum Tragverhalten und zur Entwicklung der Rechenmodelle von Verbundträgern mit Stegöffnung*. Dissertation, Universität Kaiserslautern, Fachbereich Architektur, Raum- und Umweltplanung, 1998.
- [240] ZHOU, Y.: *Über das Festigkeitsverhalten verschiedener Werkstoffe: Unter besonderer Berücksichtigung der Verhaltens von Beton*. Dissertation, Shaker Verlag, Aachen, 1995.
- [241] ZIENKIEWICZ, O.C. / TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method*. Band 1–3, Butterworth–Heinemann, Oxford/Woburn, 5. Auflage, 2000.
- [242] ZOHDI, T.I / WRIGGERS, P.: *A computational model for interfacial damage through microstructural cohesive zone relaxation*. The International Journal of Fracture/Letters in Micromechanics 101(3) (2000), S. L9–L14.
- [243] ZURMÜHL, R. / FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen 1*. Springer, Berlin/Heidelberg, 1997.