

# Modellierung mehrfach gestufter, teleskopierbarer, spielbehafteter Maschinenelemente

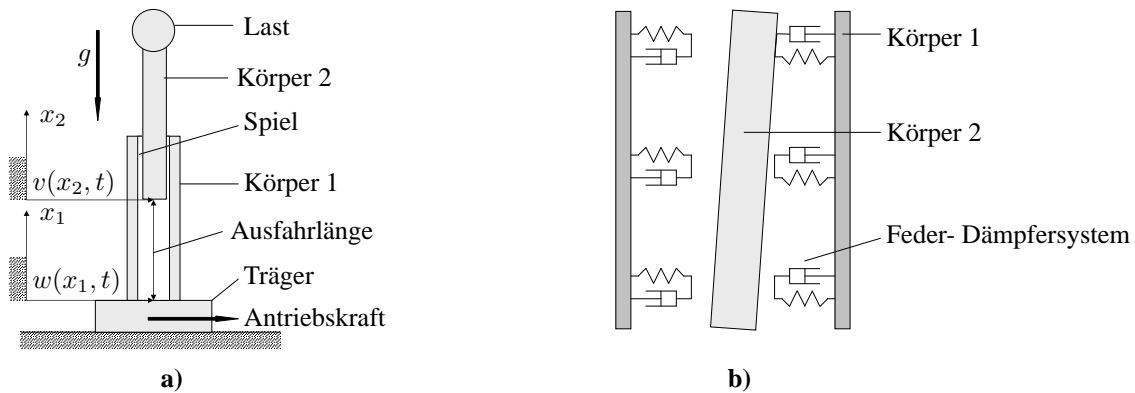
Pierre Barthels\* und Jörg Wauer

Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Germany

Gestufte, spielbehaftete, teleskopartig gegeneinander verschiebbare Maschinenelemente werden durch die Bewegung in der Ebene senkrecht zur Teleskopierrichtung zu Transversalschwingungen angeregt. Diese Schwingungen führen in technischen Anwendungen zu einer Reduzierung der Leistungsfähigkeit und zu Sicherheitsproblemen. Die Entwicklung von Maßnahmen zur Schwingungsunterdrückung ist deshalb besonders wichtig. Ein erster Schritt dazu ist die Modellbildung und das Studium der entstehenden Schwingungen. Aus Sicht der Mechanik handelt es sich bei der Modellierung um nichtlineare Feldprobleme mit variabler Geometrie der betreffenden Festkörpersysteme. Materielle Begrenzungen einzelner Komponenten verschieben sich beim Teleskopieren entlang der Begrenzungen anderer Bauteile und definieren so komplizierte Rand- bzw. Übergangsbedingungen. Das Spiel führt zu nichtlinearen Effekten.

© 2004 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

## 1 Modellbeschreibung



**Abb. 1** a) Modell eines Systems mit zwei gestuften, spielbehafteten, teleskopartig gegeneinander verschiebbaren Maschinenelementen, b) Kontaktformulierung durch diskrete Feder- Dämpfersysteme.

Das in **Abb. 1a** dargestellte Modell eines Teleskops besteht aus zwei flexiblen Körpern, welche über ein gewisses Spiel verschiebbar gegeneinander gelagert sind. Körper 1 ist an einem starren Trägerfahrzeug befestigt, am Körper 2 ist eine Last angebracht. Am Trägerfahrzeug wirkt eine Antriebskraft, die das System anregt. Die Bewegung wird durch die beiden Absolutkoordinaten  $w(x_1, t)$  und  $v(x_2, t)$  beschrieben. Das Modell wird durch die folgenden Parameter definiert: Längen  $l_{1,2}$ , Querschnittsflächen  $A_{1,2}$ , Flächenmomente  $I_{1,2}$ , Dichte  $\rho$ , Elastizitätsmodul  $E$  der beiden flexiblen Körper, Massen der Last  $m_L$  und des Trägerfahrzeuges  $m_T$  und Ausfahrlänge  $l_A(t)$ . Der Kontakt zwischen den flexiblen Körpern wird, wie in **Abb. 1b** angedeutet, durch diskrete Feder- Dämpfersysteme über eine Ortsbedingung (vgl. [1]) formuliert und durch eine vorgegebene Anzahl an Kontaktpunkten, das Spiel  $l_S$  sowie eine Federsteifigkeit  $c$  und eine Dämpferkonstante  $d$  definiert.

## 2 Bewegungsgleichungen und Diskretisierung

Werden die flexiblen Körper als Euler-Bernoulli-Balken ( $A_{1,2} = konst.$ ) modelliert, so lassen sich für den Spezialfall, dass die Balken nur an den beiden Punkten  $x_1 = l_1$  und  $x_2 = 0$  kontaktieren können, folgende Bewegungsgleichungen anschreiben:

$$EI_1 \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} w(x_1, t) + \rho A_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(x_1, t) + \rho A_1 g \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} w(x_1, t) \cdot (l_1 - x_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} w(x_1, t) \right] + m_L g \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} w(x_1, t) =$$

$$\delta(x_1) \left( F - m_T \frac{d^2}{dt^2} w(0, t) \right) + \delta(x_1 - l_A(t)) \left( F_K(\xi_1(t)) + \frac{d}{dt} \xi_1(t) \cdot D_K(\xi_1(t)) \right) \quad (1)$$

$$+ \delta(x_1 - l_1) \left( F_K(\xi_2(t)) + \frac{d}{dt} \xi_2(t) \cdot D_K(\xi_2(t)) \right),$$

\* Corresponding author: e-mail: barthels@itm.uni-karlsruhe.de

$$\begin{aligned}
EI_2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} v(x_2, t) + \rho A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} v(x_2, t) + \rho A_2 g \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v(x_2, t) \cdot (l_2 - x_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} v(x_2, t) \right] + m_L g \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} v(x_2, t) = \\
\delta(x_2 - l_2) \left( m_L g \frac{\partial}{\partial x_2} v(x_2, t) - m_L \frac{d^2}{dt^2} v(l_2, t) \right) - \delta(x_2) \left( F_K(\xi_1(t)) + \frac{d}{dt} \xi_1(t) \cdot D_K(\xi_1(t)) \right) \\
- \delta(x_2 - (l_1 - l_A(t))) \left( F_K(\xi_2(t)) + \frac{d}{dt} \xi_2(t) \cdot D_K(\xi_2(t)) \right). \quad (2)
\end{aligned}$$

In Gl. (1) und (2) stehen  $F_K(\xi(t))$ ,  $D_K(\xi(t))$  und  $\xi(t)$  für

$$F_K(\xi(t)) = c \left[ \xi(t) - \frac{1}{2} \left( \xi(t) + \frac{l_S}{2} \right) \text{sign} \left( \xi(t) + \frac{l_S}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( \xi(t) - \frac{l_S}{2} \right) \text{sign} \left( \xi(t) - \frac{l_S}{2} \right) \right], \quad (3)$$

$$D_K(\xi(t)) = d \left[ 1 - \frac{1}{2} \text{sign} \left( \xi(t) + \frac{l_S}{2} \right) + \frac{1}{2} \text{sign} \left( \xi(t) - \frac{l_S}{2} \right) \right], \quad (4)$$

$$\xi_1(t) = v(0, t) - w(l_A(t), t), \quad \xi_2(t) = v((l_1 - l_A(t)), t) - w(l_1, t). \quad (5)$$

Durch das Aufprägen diskreter Kräfte über Dirac-Impulse als Flächenlast erhält man ein System mit homogenen Randbedingungen. Diese führen zu den gemischten Ritz-Ansätzen

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) \left( \cos(\lambda_i x_1) + \frac{\cos(\lambda_i l_1)}{\cosh(\lambda_i l_1)} \cosh(\lambda_i x_1) \right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
v(x_2, t) &= u_{N+1}(t) + u_{N+2}(t) x_2 \\
&+ \sum_{i=3}^N u_{N+i}(t) \left( \cosh(\kappa_i x_2) + \cos(\kappa_i x_2) - \frac{\cosh(\kappa_i l_2) - \cos(\kappa_i l_2)}{\sinh(\kappa_i l_2) - \sin(\kappa_i l_2)} (\sinh(\kappa_i x_2) + \sin(\kappa_i x_2)) \right). \quad (7)
\end{aligned}$$

Die Diskretisierung erfolgt durch das Galerkin-Verfahren und führt zu einem System von Differentialgleichungen der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, t). \quad (8)$$

### 3 Konvergenz und Verifizierung des Modells

Das vorgestellte Modell wird durch Vergleichsrechnungen auf Konvergenz untersucht. Bei tieffrequenter Anregung ist eine Anzahl von  $N = 4$  Ansatzfunktionen pro Koordinate ausreichend. Im Spezialfall ohne Spiel werden gute Ergebnisse für  $N = 3$  erzielt. Die Verifizierung des Modells erfolgt über eine Vergleichsrechnung mit dem kommerziellen Softwarepaket ADAMS für den Fall  $l_S = g = 0$  und  $l_A = \text{konst.}$  Ein Vergleich der an einem Prüfstand des Instituts für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe gemessenen Eigenwerte mit denen eines entsprechenden Modells zeigt eine geringe Abweichung von durchschnittlich 1.4%.

### 4 Fazit

Die vorgestellte Methode zur Herleitung der Bewegungsgleichungen von gestuften, spielbehafteten, teleskopartig gegeneinander verschiebbaren Maschinenelementen kann in dem kommerziellen Softwarepaket Maple programmiert werden und eignet sich durch eine einfache und schnelle Handhabung sehr gut für Parameterstudien. Die Ausgabe der gewöhnlichen Differentialgleichungen in semisymbolischer Form ermöglicht eine plattformunabhängige Bearbeitung, und der direkte Zugriff auf die Systemgleichungen erlaubt die Anwendung bewährter regelungstechnischer Verfahren zur Schwingungsreduzierung.

**Danksagung** Unser Dank gilt der DFG für die finanzielle Unterstützung.

### Literatur

- [1] B. Waltersberger, R. Keppler, J. Wauer. *Stoßsimulation mittels einseitiger Feder-Dämpfer Kontakte*. PAMM 2004 im Druck.