PAMM · Proc. Appl. Math. Mech. **5**, 145–146 (2005) / **DOI** 10.1002/pamm.200510053

Minimalkoordinatendarstellung bei gyroskopischen Systemen mit einseitigen Bindungen

Bernd Waltersberger* und **Jörg Wauer**

Institut für Technische Mechanik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Germany

Systeme mit einseitigen Bindungen stellen bei gyroskopischen Systemen einen wichtigen Sonderfall dar, wie er z.B. bei durch Delamination geschädigten Rotoren aber auch bei auf einseitigen Stützen gelagerten durchströmten Rohren auftritt. Speziell bei gyroskopischen Systemen ist bereits das Auffinden einer stationären Lösung aufgrund zentrifugaler Effekte erschwert. Das Problem der stationären Lösung wird als Lineares Komplementaritätsproblem (LCP) formuliert, dessen Lösung Ausgangspunkt einer Minimalkoordinatendarstellung der Bewegungsgleichung ist.

1 Variationsformulierung

Beim Kontakt (Kontaktrand $\Gamma_c^{(1)}$ hier am Körper 1) zweier linear-elastischer Strukturen mit verteilten Parametern liefert das Prinzip von *d'Alembert/ Lagrange* in einem rotierenden Bezugssystem (Winkelgeschwindigkeit $\vec{\mathbf{\Omega}}$) nach Ortsdiskretisierung der Verschiebung $\vec{u}(\vec{x},t)$ durch einen gemischten *Ritz*-Ansatz den Ausdruck für die virtuelle Arbeit, der zusätzlich den Anteil der virtuellen Arbeit der Kontaktzwangskräfte (hier nur Normalkontaktspannung $\lambda_n(\vec{x},t) = \mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}}(\vec{x})\boldsymbol{\lambda}(t)$, nach Diskretisierung) enthält, vgl. [3]. Die generalisierten Beschleunigungen existieren dabei nach Ortsdiskretisierung wegen der dann stoßartig erfolgenden Kontaktzustandsänderung lediglich *fast immer*, vgl. [4]:

$$W_{\text{virt}} = \delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\left(-\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\vec{\Omega})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K}(\vec{\Omega})\mathbf{q} + \mathbf{f}(\vec{\Omega},t)\right) + \delta\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\overbrace{\left[\int_{\Gamma_c^{(1)}}(\mathbf{J}_g\mathbf{\Lambda}^{\mathrm{T}})\,d\Gamma\right]}^{\mathbf{J}}\boldsymbol{\lambda} \stackrel{!}{=} 0. \tag{1}$$

Hierbei stammt $\delta g = \mathbf{J}_g^{\mathrm{T}}(\vec{x},\mathbf{q})\delta\mathbf{q}$ aus der Variation einer Spaltfunktion $g(\vec{x},\vec{u})$. Zusammen mit der Kontaktrandspannung hat sie die *Signorini*-Kontaktbedingungen zu erfüllen, die sich nach Linearisierung und Diskretisierung durch stets positiv gewichtete Mittelung in folgender Form darstellen lassen:

$$\mathbf{W}_0\mathbf{q} + \mathbf{w}_0 \geq \mathbf{0},\ \mathbf{Y}\boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0},\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} + \mathbf{g}_0\right) = 0. \tag{2}$$

2 Stationäre Lösung

Zunächst wird die stationäre Lösung von (1,2) unter der oft zulässigen Voraussetzung untersucht, dass nach Diskretisierung die Spaltfunktion bei kleinen Verschiebungen linear von den generalisierten Koordinaten $\mathbf{q}$ abhängt. Dabei vereinfacht sich (1) zu $\mathbf{Kq} = \mathbf{f} + \mathbf{J}\boldsymbol{\lambda}$ und eine Elimination der generalisierten Koordinaten führt dann auf ein algebraisches Ungleichungssystem der Form

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{a} \geq \mathbf{0};\ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0};\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{b}) = 0, \tag{3}$$

das sich erst nach geeigneter Wahl der Gewichtsfunktionen in (2) (z.B. eine Gebietsabdeckung durch Funktionen mit disjunkten Trägern) mit $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{J}, \mathbf{a} = \mathbf{b}$ als LCP darstellen lässt. In diesem Falle hat die LCP-Matrix bei gyroskopischen Systemen die Gestalt $\mathbf{A} = \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{K_0} - \Omega^2\mathbf{M}^*\right)^{-1}\mathbf{J}$ und ist daher bei hinreichend großer Drehzahl Ω (bzw. Strömungsgeschwindigkeit bei durchströmten Kontinua) nicht mehr positiv definit, d.h. das LCP wird *nicht-konvex*. Eine eindeutige stationäre Lösung und schon ihre Existenz als solche sind somit nicht mehr sichergestellt, [1]. Dennoch zeigt sich an praktischen Beispielen, dass das nicht-konvexe LCP mit einem *Lemke*-Algorithmus durch Vorgabe einer Startbasis, vgl. [5], in den meisten Fällen gelöst werden kann. Allerdings wurde dies erst nach einer leichten Modifikation des Verfahrens erreicht, bei der ein Liniensuchverfahren implementiert wurde, das Ω als Homotopieparameter nutzt. An dieser Stelle ist noch die Beobachtung mitzuteilen, dass z.B. das iterative Newton-Verfahren *PATH* aus [2] zur Lösung des LCPs im nicht-konvexen Fall fast nie konvergiert, selbst bei Vorgabe eines sehr lösungsnahen Startwertes.

3 Minimalkoordinaten

Nach Lösung des LCPs kann entschieden werden, welche Bindungen aktiv sind. Bezeichnen die Spalten der $n \times m$ Matrix

$$\mathbf{J} = [\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_m] \tag{4}$$

* Corresponding author: e-mail: waltersberger@itm.uni-karlsruhe.de

die Gradienten aller überhaupt möglichen Bindungen (es wird stets vorausgesetzt, dass $\mathbf{J}$ vollen Rang hat, der Fall abhängiger Bindungen wird allein aus Platzgründen nicht diskutiert) und

$$\mathbf{J}'_0 = [\mathbf{n}'_1, \ldots, \mathbf{n}'_m] \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}'_0 = \mathbf{I}_{m\times m} \tag{5}$$

eine Pseudoinverse bzw. die Spalten von

$$\mathbf{B}_0 = [\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m}] \quad \text{mit} \quad \mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_0 = \mathbf{O} \tag{6}$$

eine Basis des Kerns von $\mathbf{J}$, so werden für die Jacobimatrix der aktiven Bindungen in (4) die Gradienten der nicht aktiven Bindungen gestrichen: $\mathbf{J}_A = [\mathbf{n}_2, \ldots, \mathbf{n}_m]$, z.B. $\mathbf{n}_1$ inaktiv. In Deskriptorform lauten die Bewegungsgleichungen dann

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{f} + \mathbf{J}_A\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{J}_A^{\mathrm{T}}\mathbf{q} + \mathbf{g}_A &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7}$$

und sie gelten solange, wie der Kontaktzustand unverändert bleibt. Die noch aktiven Bindungen schränken den Bewegungsraum gemäß

$$\dot{\mathbf{q}} = \underbrace{[\mathbf{B}_0, \mathbf{n}'_1]}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}} \tag{8}$$

ein, sodass mit (5) und (6) auch $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_A = \mathbf{0}$ gilt, womit die Zwangkskräfte zu eliminieren sind und die Minimalkoordinatendarstellung

$$\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{B}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{f} \tag{9}$$

der Bewegungsgleichung folg. Die reduzierten Matrizen des homogenen Anteils sind dann der Ausgangspunkt der üblichen Matrizeneigenwerttheorie, sodass im Rahmen der Diskretisierungsgenauigkeit die Stabilität der Ruhelage beurteilt werden kann.

Liegt eine stabile Ruhelage vor, so können Zwangsschwingungen mit der Anregung $\mathbf{f} = \hat{\mathbf{f}}e^{i\omega t}$ und der Antwort $\mathbf{z} = \hat{\mathbf{z}}e^{i\omega t}$ in der Nachbarschaft der Ruhelage untersucht werden:

$$\left(-\omega^2\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{B} + i\omega\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{B} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{B}\right)\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{f}}. \tag{10}$$

Diese lineare Theorie ist nur solange sinnvoll, wie die einseitigen Nebenbedingungen nicht verletzt werden. Daher sind in (7) die komplexen Zwangskraftamplituden $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = {\mathbf{J}'_A}^{\mathrm{T}}\left(\left(-\omega^2\mathbf{M}\mathbf{B} + i\omega\mathbf{G}\mathbf{B} + \mathbf{K}\mathbf{B}\right)\hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{f}}\right)$ ($\mathbf{J}'_A = [\mathbf{n}'_2, \ldots, \mathbf{n}'_m]$ durch Streichen von $\mathbf{n}'_1$ in (5) bei beispielsweise inaktiver Bindung mit Gradient $\mathbf{n}_1$) zu überprüfen bzw. ist sicherzustellen, dass die nicht aktiven Lagebegrenzungen während der Zwangsschwingung nicht berührt werden.

4 Kontaktzustandsänderung mit Stoß

Tritt im Laufe der Bewegung des Systems eine neue Bindung hinzu, so kann es aufgrund einer groben Ortsdiskretisierung erforderlich sein, dass bereits bestehende Bindungen zum selben Zeitpunkt gelöst werden müssen, damit gewährleistet ist, dass zumindest keine Zugimpulse an den Kontaktstellen übertragen werden. Die mit dem Stoß verbundenen Impulse $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ können wie in der Stoßtheorie für Starrkörpersysteme üblich berechnet werden, vgl. [4]. Hier werden sie über ein LCP

$$\mathbf{0} \leq \bar{\boldsymbol{\lambda}} \perp \underbrace{\left[\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}\right]}_{\mathbf{A}}\bar{\boldsymbol{\lambda}} + (1+\varepsilon)\,\mathbf{J}^{\mathrm{T}}\dot{\mathbf{q}}^{-} \geq \mathbf{0} \tag{11}$$

bestimmt, wobei $0 \leq \varepsilon \leq 1$ eine kinematische Newton-Stoßzahl ausdrückt.
Die LCP Matrix $\mathbf{A}$ ist nun positiv semidefinit, daher existiert immer eine Lösung, [1]. Über eine Impulsbilanz können nach Lösung des LCPs in $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ die generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}^{+}$ unmittelbar nach dem Stoß und die nun aktiven Bindungen berechnet werden. Mit der Vorgehensweise aus Abschnitt 3 sind erneut die zugehörigen Minimalkoordinaten zu berechnen.

Literatur

[1] R. W. Cottle, J. Pang, R. E. Stone. The Linear Complementarity Problem, Academic Press, 1992.
[2] M. C. Ferris. Complementarity Problems in GAMS and the PATH Solver, Technischer Bericht, Computer Science Department, University of Wisconsin, 1998.
[3] T. A. Laursen. Computational Contact and Impact Mechanics. Springer, 2003.
[4] J. J. Moreau. Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics. In: J. J. Moreau, P. D. Panagiotopoulos, Edts., Nonsmooth Mechanics and Applications, Springer, 1988.
[5] M. J. Miranda, P. L. Fackler. Applied Computational Economics and Finance. MIT Press, 2003.