

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik  
Bd. 3

Martin G. Cichon

**Zum Einfluß stochastischer  
Anregungen auf mechanische  
Systeme**



---

universitätsverlag karlsruhe



Martin G. Cichon

**Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische Systeme**

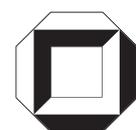
**Universität Karlsruhe (TH)**

**Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik**

Band 3

# **Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische Systeme**

von  
Martin G. Cichon



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Maschinenbau, 2005

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2006  
Print on Demand

ISSN 1614-3914  
ISBN 3-86644-003-0



# **Zum Einfluß stochastischer Anregungen auf mechanische Systeme**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau

der Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Martin Georg Cichon**

aus Ehingen (Donau)

Tag der mündlichen Prüfung

Hauptreferent:

Korreferent:

11. Februar 2005

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wedig

Prof. Dr.-Ing. A. Ams

# Kurzfassung

Dynamische Systeme sind durch die Angabe des Zeitverlaufs ihrer Zustandsvariablen vollständig beschreibbar. Diese Form ist jedoch für eine mathematische Bearbeitung ungeeignet. Die Datenmenge reduziert sich um ein vielfaches und eine mathematische Behandlung wird ermöglicht, wenn zur Beschreibung der dynamischen Systeme charakteristische Größen herangezogen werden. Im Falle linearer deterministischer Systeme sind dies unter anderen die Eigenwerte und Eigenvektoren. Ergodische stochastische Systeme können durch die Angabe der stationären Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten vollständig beschrieben werden.

Nichtlineare dynamische Systeme können in ihrem Stabilitätsverhalten Verzweigungen aufweisen, an denen neue stabile oder instabile Zustände auftreten oder ausgelöscht werden. Mit einem dynamischen und einem phänomenologischen Ansatz können Bifurkationen in stochastischen Systemen untersucht werden. In dieser Arbeit werden mit der phänomenologischen Herangehensweise durch eine Untersuchung der Verteilungsdichten die Bifurkationen in stochastischen dynamischen Systemen beschrieben. In Anlehnung an die Begriffe stochastische Separatrix, stochastischer Attraktor und stochastischer Repellor aus dem dynamischen Ansatz werden diese auf den phänomenologischen Ansatz übertragen.

Es werden lineare und nichtlineare Filter zur Anregung der Systeme vorgestellt, die das Systemverhalten und dessen mathematische Behandlung maßgeblich beeinflussen. Die Verteilungsdichten erfüllen die FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung, die jedoch nur in Ausnahmefällen analytisch gelöst werden kann. Als Näherungslösung wird ein Mehrparameteransatz vorgestellt, Monte-Carlo-Simulationen approximieren die Lösung numerisch. In der Anwendung wird u.a. ein gefesselter Eisenbahnratsatz und ein Losradpaar untersucht.

# Abstract

## **On the influence of stochastic excitations to mechanical systems**

Stochastic ergodic dynamical systems may be described by giving the steady state probability density of their state variables. The knowledge on the stability behaviour of the system is of high significance. In nonlinear dynamical systems bifurcations may occur, that means stability changes and new stable or unstable states appear. To describe stochastic bifurcations the terms stochastic separatrix, stochastic attractor and stochastic repeller are established in phenomenologic sense inspired by the definitions in dynamical sense.

The probability densities fulfil the FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW Equation, which may be solved only in some special cases. A multi parametric ansatz is established to approximate the solution analytically. Monte-Carlo methods give numeric approximations. The methods are applied e.g. to the lateral running behaviour of a conventional railway wheelset and to a wheelset with independently rotating wheels.

# Аннотация

## О влиянии стохастического возбуждения на механические системы

Стохастические эргодические системы могут быть описаны заданием равновесной плотности вероятности их переменных состояния. При этом очень важно знать свойства устойчивости системы. В нелинейных механических системах могут иметь место бифуркации, что означает смену устойчивости и появление новых устойчивых или неустойчивых состояний. Для описания стохастических бифуркаций феноменологически вводятся термины "стохастическая сепаратриса", "стохастический аттрактор" и "стохастический репеллер", по образцу соответствующих определений в динамике.

Плотности вероятности удовлетворяют уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова, которое можно решить только в специальных случаях. Для построения аналитического приближения решений предложен многопараметрический подход. Численные приближения получены с помощью методов Монте-Карло. Эти методы применяются, в частности, для анализа бокового движения обычной колёсной пары и колёсной пары с независимо вращающимися колёсами.

*Für Irina und Valentin Philipp*

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. W. Wedig danke ich besonders für die Anregung zu dieser Arbeit, die wissenschaftliche Förderung, die stets vorhandene Diskussionsbereitschaft und für die Übernahme des Hauptreferates.

Für die freundliche Übernahme des Korreferates gebührt mein ganz besonderer Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. A. Ams vom Institut für Mechanik und Fluidodynamik der TU Bergakademie Freiberg. Dem Vorsitzenden des Prüfungsausschusses, Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Gabi vom Fachgebiet Strömungsmaschinen der Universität Karlsruhe (TH) gilt ebenfalls mein Dank.

Mein aufrichtiger Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. J. Wauer für die kritische Durchsicht des Manuskriptes. Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Wittenburg, Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Seemann und Herrn Prof. Dr.-Ing. C. Proppe für ihr Interesse an meiner Arbeit.

Allen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Technische Mechanik will ich hiermit meinen Dank für interessante und abwechslungsreiche Gespräche und für die angenehme Atmosphäre am Institut danken. Herrn Prof. J.-L. Bauchat und Herrn Prof. G. Kugel der École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers danke ich für die angenehme partnerschaftliche Zusammenarbeit im deutsch-französischen Studiengang, der durch Frau Hornik die langjährige Konstanz und die menschliche Note erhält.

Meinen Eltern, die mir durch ihre Redlichkeit und Strebsamkeit immer Vorbild waren, die mir Heimat und Geborgenheit aber auch Freiheit und Interesse für Neues gaben, danke ich von tiefstem Herzen, ebenso gilt der Dank meinen Geschwistern.

Für die Geduld und Entbehrungen, die meine Frau Irina und mein Sohn Valentin während der letzten Monate aufbrachten und für ihre unendliche Motivation und ihr Verständnis, das sie mir entgegenbrachten, danke ich zutiefst.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen stochastischer dynamischer Systeme</b>	<b>3</b>
2.1	Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe . . . . .	4
2.1.1	Zufallsvariable . . . . .	5
2.1.2	Momente . . . . .	7
2.2	Stochastische Prozesse . . . . .	9
2.2.1	Momente stochastischer Prozesse . . . . .	10
2.2.2	Normalverteilte Prozesse . . . . .	11
2.2.3	Stationäre Prozesse . . . . .	11
2.2.4	Ergodische Eigenschaft stationärer Prozesse . . . . .	13
2.2.5	Beschreibung im Frequenzbereich . . . . .	13
2.2.6	Weißes Rauschen . . . . .	14
2.2.7	Wiener-Prozeß . . . . .	15
2.2.8	Markow-Prozesse . . . . .	17
2.2.9	Fokker-Planck-Kolmogorow-Gleichung . . . . .	17
2.2.10	Stochastische Differentialgleichungen . . . . .	22
2.3	Stabilität und Bifurkationen . . . . .	25
2.3.1	Stabilität . . . . .	25
2.3.2	Bifurkationen . . . . .	28
2.4	Anregungsmodelle . . . . .	33
2.4.1	Filter mit Nichtlinearität im Diffusionsterm . . . . .	33
2.4.2	Filter mit Nichtlinearität im Driftterm . . . . .	36
2.4.3	Lineare Filtersysteme . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Lösungsverfahren</b>	<b>41</b>
3.1	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	41
3.2	Lösung der Fokker-Planck-Kolmogorow-Gleichung . . . . .	44
3.3	Mehrparametrische Approximation . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Heugabel-Bifurkation unter Rauschanregung</b>	<b>48</b>
4.1	Weißes Rauschanregung . . . . .	48
4.1.1	Multiplikative Anregung . . . . .	49
4.1.2	Additive Anregung . . . . .	52
4.2	Gefilterte Rauschanregung . . . . .	54
4.2.1	Vierparametrische Approximation . . . . .	54
4.2.2	Zweiparametrische Approximation um linearisierte Ruhelagen . . . . .	56

<b>5</b>	<b>Oszillator unter multiplikativer Anregung</b>	<b>60</b>
5.1	Vierparametrische Approximation . . . . .	61
5.2	Reihenentwicklung . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Querdynamik eines Kraftfahrzeuges</b>	<b>68</b>
6.1	Einspurmodell . . . . .	68
6.2	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	72
6.3	Lösung der Fokker-Planck-Kolmogorow-Gleichung . . . . .	74
6.4	Vergleich von Simulation und analytischer Lösung . . . . .	76
<b>7</b>	<b>Querdynamik eines Eisenbahnradsatzes</b>	<b>79</b>
7.1	Radsatzmodell . . . . .	80
7.2	Gleismodell . . . . .	80
7.3	Berührgeometrie . . . . .	84
7.4	Systemgleichungen . . . . .	86
7.5	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	89
7.6	Losradpaar . . . . .	94
7.7	Losradpaar . . . . .	96
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>99</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Alle in der Natur und in der Technik ablaufenden Prozesse sind zufälligen, das heißt aus deterministischer Sicht unvorhersagbaren, Einflüssen unterworfen, so daß eine deterministische Beschreibung zwar häufig wesentliche Aussagen zum Systemverhalten treffen, aber eben die Auswirkungen der stochastischen Einflüsse nicht darlegen kann. Diese Einflüsse können externer Natur (wie beispielsweise äußere Kraft- oder Weganregungen, schwankende elektromagnetische Felder, statistisch verteilte Elektrizitätskonstanten) oder interner Natur wie zum Beispiel inhomogene Werkstoffeigenschaften oder veränderliche Eigenschaften der mechanischen Koppellemente sein. Im Bereich der Elektrotechnik waren die Ingenieure schon sehr früh gezwungen, sich mit der Thematik der Verrauschung elektrischer Signale auseinanderzusetzen, so daß der Begriff der stochastischen Erregung oft auch als *Rauschanregung* oder einfach als *Rauschen* bezeichnet wird. Heute kommen leistungsfähige Berechnungsmethoden in der Finanzwirtschaft, in der Physik sowie in der Selbstorganisation der Evolutionstheorie ohne stochastische Betrachtungsweisen nicht mehr aus.

In der Technischen Mechanik findet man äußere stochastische Anregungen in Form von Krafterregungen durch aerodynamische Effekte bei Turbulenz wie etwa beim Auftreten von Seitenwind auf Kraftfahrzeuge, Flugzeuge oder Gebäude, in Form von Weganregungen durch Fahrbahnunebenheiten oder Gleislagefehler bei Kraft- und Schienenfahrzeugen, bei meerestechnischen Anlagen durch die Wellenbewegungen und bei Gebäuden durch tektonische Bewegungen der Erdkruste. Stochastische Parametererregungen können beispielsweise die linearen oder nichtlinearen Feder- und Dämpferkonstanten beeinflussen. Mechanische Schwingungssysteme, die stochastischen Anregungen unterworfen werden, führen daher in der Systemantwort sogenannte Zufallsschwingungen oder stochastische Schwingungen aus. Trotz der stochastischen Systemantwort gibt es deterministische Charakteristika, die die Systemdynamik beschreiben.

Als Ursprung der Untersuchung der Zufallsbewegungen kann die 1827 von dem schottischen Botaniker ROBERT BROWN unter dem Mikroskop beobachtete regellose Bewegung von Blütenpollen in einem Wassertropfen angesehen werden [13]. Die aus dieser Bewegung gefolgerte Annahme, daß es sich bei den Blütenpollen um Lebewesen handle, bestätigte sich nicht, nachdem er auch bei wissentlich unbelebten Rußpartikeln und Staubkörnern die gleichen regellosen Bewegungen beobachtete. Erst im Jahre 1905 wurde diese sogenann-

te BROWNSche Molekularbewegung<sup>1</sup> durch ALBERT EINSTEIN [21] und fast zeitgleich im Jahre 1906 durch MARIAN VON SMOLUCHOWSKI [88] mit Hilfe statistischer Methoden untersucht [53]. EINSTEINS Untersuchungen können als Sonderfall des Masse-Feder-Dämpfer-Systems mit vernachlässigbar kleiner Masse und Federkonstante betrachtet werden. Hierbei ist das Medium, welches das masselose Teilchen umgibt, sowohl für die anregenden als auch für die dissipativen Kräfte verantwortlich.

In der vorliegenden Arbeit werden Ergebnisse aus der Untersuchung stochastischer nichtlinearer Systeme aufgezeigt. Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie bereitgestellt. Danach wird im dritten Kapitel auf Lösungsverfahren zur Bestimmung stationärer Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten eingegangen. Durch die Angabe der Verteilungsdichte sind die stochastischen Prozesse eindeutig bestimmt. Eine Beschränkung auf stetige MARKOW-Prozesse und unter Beachtung des ITÔ-Kalküls gilt die fundamentale FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung. Ihre Lösungen sind die gesuchten Verteilungsdichten. Analytische Lösungen sind nur für spezielle Problemstellungen angebar, in allen anderen Fällen müssen die Lösungen approximiert werden. In Abhängigkeit des zu untersuchenden Systems, insbesondere in Abhängigkeit der Komplexität, gibt es bevorzugte Methoden. Vorgestellt wird die Herleitung schwacher Lösungen der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung aus Reihenentwicklungen. Als neues Verfahren werden mehrparametrische Approximationen eingeführt. Numerisch erhält man Näherungen der Verteilungsdichten durch Monte-Carlo-Simulation.

Im vierten Kapitel wird ein verzweigender Diffusionsprozeß zunächst auf den Einfluß additiven und multiplikativen weißen Rauschens untersucht. Mit einem phänomenologischen Ansatz wird die Änderung der Bifurkationscharakteristik durch das Rauschen aufgezeigt. In einem zweiten Schritt erfolgt die Anregung durch multiplikatives gefiltertes Rauschen. Das fünfte Kapitel erweitert die Fragestellung auf die Betrachtung eines nichtlinearen Oszillators mit multiplikativem Rauschterm.

Die letzten beiden Kapitel behandeln erstmals ausgewählte mechanische Systeme aus der Fahrzeugtechnik unter stochastischen Anregungen. Das Fahr- und Lenkverhalten eines Kraftfahrzeugs unter Seitenwindeinwirkung wird beispielhaft mit den verwendeten Methoden statistisch vorhergesagt. Am Beispiel des wichtigsten Bauteils eines Schienenfahrzeugs, dem Eisenbahnradatz, wird gezeigt, wie sich stochastische Gleislagefehler auf das dynamische Verhalten auswirken. Die eingeführte nichtlineare Geometriebeziehung zwischen Rad und Schiene beruht nicht auf den sonst häufig verwendeten Kreisprofilen. Für ein Losradpaar wird eine plausible Erklärung für den im Betrieb beobachtbaren einseitigen Spurkranzverschleiß gegeben. Die Ergebnisse sollen zu weiteren Arbeiten in der stochastischen Fahrzeugdynamik und angrenzenden Gebieten anregen.

---

<sup>1</sup>EINSTEIN selbst schreibt hierzu jedoch: „Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten ‚BROWNSchen Molekularbewegung‘ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.“[21].

## Kapitel 2

# Grundlagen stochastischer dynamischer Systeme

Die Behandlung schwingungsfähiger mechanischer Systeme unter dem Einfluß zufälliger Größen erfordert eine Einführung in grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, was unter dem Oberbegriff Stochastik<sup>1</sup> zusammengefaßt wird. Erste Motivation, sich mit Wahrscheinlichkeitsrechnung zu befassen, waren Würfelspiele von der Antike bis ins Mittelalter mit Astragali (Fußgelenkknochen der Hinterbeine von Huftieren), später mit echten Würfeln. So ist das in DANTE ALIGHIERIS *Göttlicher Komödie* besungene 3-Würfel-Problem *gioco della zara* sowie weitere bekannte Würfelspiele des CHEVALIER DE MÉRÉ 1654 durch BLAISE PASCAL wahrscheinlichkeitstheoretisch gelöst worden, der wiederum in einem Briefwechsel mit PIERRE DE FERMAT den Grundstein zur Wahrscheinlichkeitsrechnung legte. Die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie beruht auf Arbeiten von ANDREJ NIKOLAJEWITSCH KOLMOGOROW<sup>2</sup> in den dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts [44], [45].

In diesem Kapitel werden die Grundlagen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden, im wesentlichen auf der Basis der Arbeiten von HEINRICH und HENNIG [30], SAGIROW [83] und ARNOLD [5] erarbeitet. Auf mathematische Exaktheit wird aufgrund des einführenden Charakters und der Übersichtlichkeit verzichtet. Nähere Einzelheiten sind in der Literatur, beispielsweise [14], [19], [27], [53] und [81] zu finden.

---

<sup>1</sup>Der Begriff *Stochastik* wiederum stammt aus dem dem Griechischen entlehnten Untertitel *sive Stochasticae* (von griech. στοιχάζεσθαι - mutmaßen, vermuten) der von JAKOB BERNOULLI verfassten *Ars Conjectandi*, was so viel wie *Die Kunst, Vermutungen anzustellen* heißt [9], [33].

<sup>2</sup>In der gesamten Arbeit werden die ursprünglich nicht in lateinischer Schrift geschriebenen Namen wie in [34] und wie in der Duden-Transkription [20] geschrieben, zum Beispiel Андрей Николаевич Колмогоров - *Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow* anstelle der englischen Transliteration *Andrey Nikolaevich Kolmogorov*. Im Literaturverzeichnis jedoch wird die Schreibweise wie in der jeweiligen Veröffentlichung angegeben verwendet, beispielsweise *Kolmogoroff* in [44] oder *Kolmogorov* in [46].

## 2.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundbegriffe

Grundsätzlich beschäftigt sich die Stochastik nicht nur mit reiner Theorie, sondern immer auch mit einem konkreten Versuch, dessen Durchführung man *Pfad*, *Realisierung* oder *Trajektorie* nennt. Der mögliche Versuchsausgang wird *Elementarereignis* genannt und mit kleinen Buchstaben bezeichnet, z.B.  $\omega$ . Die Elementarereignisse sind *Elemente* der mit Großbuchstaben bezeichneten *Mengen*, etwa  $\omega \in \Omega$ , und im Fall durch den Zufall beeinflusster Elementarereignisse stellt  $\Omega$  den *Stichprobenraum* dar. Ein Ereignis  $E$  kann aus mehreren Elementarereignissen  $\omega$  bestehen, daher ist  $E \subseteq \Omega$ . Besonders hervorzuhebende Ereignisse sind das unmögliche Ereignis  $\emptyset$  und das sichere Ereignis  $\Omega$ . Das *Komplement* von  $E$ , mit  $\bar{E}$  bezeichnet, sind alle Elemente von  $\Omega$ , die nicht zu  $E$  gehören.

Eine Menge von (Teil-) Mengen wird *Klasse* genannt und mit großen Skriptbuchstaben bezeichnet, z.B.  $\mathcal{A}$ . Eine Klasse  $\mathcal{A}$  heißt *Sigma-Algebra* auf  $\Omega$ , wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $E_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{E}_j \in \mathcal{A}$
- $E_j \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_j E_j \in \mathcal{A}$ ,

das heißt, eine Sigma-Algebra ist abgeschlossen bezüglich der Mengenoperationen. Genügt nun eine auf  $\mathcal{A}$  definierte Funktion  $P$  den drei KOLMOGOROWSchen Axiomen

- $0 \leq P(E) \leq 1 \quad \forall \quad E \in \mathcal{A}$ , (Nichtnegativität),
- $P(\Omega) = 1$ , (Normiertheit),
- $P(\bigcup_j E_j) = \sum_j P(E_j) \quad \forall \quad E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$ , ( $\sigma$ -Additivität),

so heißt sie *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf  $\mathcal{A}$  und  $P(E)$  heißt *Wahrscheinlichkeit* des Ereignisses  $E$ . Damit ist die mathematische Beschreibung der Realisierung vollständig und die drei Größen werden als *Wahrscheinlichkeitsraum*  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  des betrachteten Versuches bezeichnet.

Man spricht von *bedingter Wahrscheinlichkeit*, wenn die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Ereignisses  $E_2$  unter der Bedingung, daß das Ereignis  $E_1$  eintritt und definiert dies durch

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}, \quad \text{für } P(E_1) \neq 0. \quad (2.1)$$

Die Ereignisse  $E_1$  und  $E_2$  sind genau dann *unabhängig*, wenn

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) \quad \text{das heißt} \quad P(E_2|E_1) = P(E_2) \quad (2.2)$$

gilt. Für  $n$  Ereignisse erhält man vollständige Unabhängigkeit genau dann, wenn für jedes Teilsystem

$$P(E_{j_1} \cap E_{j_2} \cap \dots \cap E_{j_k}) = P(E_{j_1}) \cdot P(E_{j_2}) \cdots P(E_{j_k}), \quad k = 2, 3, \dots, n) \quad (2.3)$$

gilt.

### 2.1.1 Zufallsvariable

Bei den meisten physikalischen oder ingenieurtechnischen Anwendungen stellt das Ergebnis eines Zufallsexperiments einen Zahlenwert dar, wie beispielsweise den Durchmesser eines Werkstückes oder die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges. Selbst bei Zufallsvariablen, die diese Eigenschaft nicht aufweisen, kann man den zugehörigen Elementarereignissen Zahlenwerte zuweisen, z.B. beim Münzwurf 0 = "Kopf", 1 = "Zahl". Jedem Zufallsexperiment kann eine reelle Zufallsvariable  $X$  zugewiesen werden, die vom Ausgang des Experiments, also vom Elementarereignis  $\omega$ , abhängig ist, wobei die Zufallsvariable  $X(\omega)$  diskret oder im Falle eines überabzählbaren Stichprobenraumes  $\Omega$  kontinuierlich sein kann. Erweitert man diese Definition sinngemäß auf vektorielle Größen  $\mathbf{X}(\omega)^T = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ , so werden Gleichungen und Ungleichungen komponentenweise aufgefaßt. Die reellwertige Vektorfunktion  $\mathbf{X}(\omega)$  bildet dann den Stichprobenraum  $\Omega$  auf den  $n$ -dimensionalen EUKLIDISCHEN Raum  $\mathbb{R}^n$  ab.

Die einfachste Möglichkeit, eine diskrete Zufallsvariable  $X(\omega)$  zu beschreiben, ist ihr die zugehörige Wahrscheinlichkeit zu jedem diskreten Wert  $x_i$  zuzuteilen, d.h. die Wahrscheinlichkeit  $P$ , daß die Zufallsvariable  $X$  den Wert  $x_i$  annimmt:  $P_X(x_i)$  ist die sogenannte *Wahrscheinlichkeitsfunktion*. Da die Wahrscheinlichkeit, daß eine stetige Zufallsvariable einen ganz bestimmten Wert annimmt, verschwindet, ist es im Hinblick auf stetige Zufallsvariablen und auf den späteren Gebrauch jedoch sinnvoll eine alternative Darstellung zu benutzen, die als *Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion* oder *Verteilungsfunktion*  $F_X(x)$  bezeichnet wird. Diese ist definiert als die Wahrscheinlichkeit, daß die Zufallsvariable  $X(\omega)$  einen Wert kleiner oder gleich  $x$  annimmt:

$$F_X(x) = P(X(\omega) \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P_X(x_i). \quad (2.4)$$

Die Verteilungsfunktion ist offensichtlich monoton wachsend mit den Eigenschaften:

$$F_X(b) - F_X(a) = P(a < X(\omega) \leq b), \quad (2.5)$$

$$F_X(a) \leq F_X(b), \quad a < b, \quad (2.6)$$

$$F_X(-\infty) = 0, \quad F_X(+\infty) = 1. \quad (2.7)$$

Der Verteilungsfunktion hängt der oben beschriebene Mangel bezüglich Anwendbarkeit auf stetige Zufallsvariablen nicht an, und so ist für eine im Intervall  $(-\infty, \infty)$  differenzierbare Verteilungsfunktion  $F_X(x)$  die *Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte* oder kurz *Verteilungsdichte*, definiert durch

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \quad (2.8)$$

mit den sich aus (2.4) bis (2.7) ergebenden Eigenschaften

$$p_X(x) \geq 0, \quad (2.9)$$

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b p_X(x) dx, \quad a < b, \quad (2.10)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1, \quad (2.11)$$

die häufig als Normierungsbedingung herangezogen wird. Verteilungsfunktion und Verteilungsdichte sind ineinander überführbar und beschreiben eine Zufallsvariable vollständig in ihren statistischen Eigenschaften.

Bei der Untersuchung zweier Zufallsvariablen  $X_1(\omega)$  und  $X_2(\omega)$  kann jede für sich wie oben beschrieben untersucht werden, wobei allerdings keine Aussage über deren Zusammenhang untereinander getroffen werden kann. Diese zusätzliche Information erhält man aus der gemeinsamen Verteilungsfunktion

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = P[(X_1(\omega) \leq x_1) \cap (X_2(\omega) \leq x_2)], \quad (2.12)$$

welche die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, daß  $X_1(\omega) \leq x_1$  und gleichzeitig  $X_2(\omega) \leq x_2$  ist. Im Grenzübergang  $x_1 \rightarrow \pm\infty$  bzw.  $x_2 \rightarrow \pm\infty$  erhält man aus (2.12) die sogenannten *Randverteilungsfunktionen* mit den Eigenschaften

$$F_{X_1 X_2}(-\infty, x_2) = F_{X_1 X_2}(x_1, -\infty) = 0 \quad (2.13)$$

$$F_{X_1 X_2}(\infty, \infty) = 1 \quad (2.14)$$

$$F_{X_1 X_2}(x_1, \infty) = F_{X_1}(x_1) \quad (2.15)$$

$$F_{X_1 X_2}(\infty, x_2) = F_{X_2}(x_2). \quad (2.16)$$

Analog zu (2.2) erhält man aus (2.12) die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen, wenn

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \quad (2.17)$$

gilt. Wie bei einer einzelnen stetigen Zufallsvariablen ist die gemeinsame (hier zweidimensionale) Verteilungsdichte definiert durch die nichtnegative Funktion

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1 X_2}(x_1, x_2). \quad (2.18)$$

Die Normierungsbedingung lautet hierbei

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1. \quad (2.19)$$

Umgekehrt erhält man auch hierfür die Beziehung

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} p_{X_1 X_2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1. \quad (2.20)$$

Aus (2.15) und (2.20) ergibt sich

$$F_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1 X_2}(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \quad (2.21)$$

und weiter mit  $F_X(x) = \int_{-\infty}^x p_X(y) dy$  aus (2.8) die Tatsache, daß die Verteilungsdichte einer der beiden Zufallsvariablen durch partielle Integration der gemeinsamen Verteilungsdichte über den gesamten Definitionsbereich der anderen Zufallsvariablen gegeben ist:

$$p_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_2. \quad (2.22)$$

Natürlich gelten (2.12) bis (2.22) sinngemäß auch für gemeinsame Verteilungsfunktionen und gemeinsame Verteilungsdichten mit mehr als zwei Zufallsvariablen.

Wie mit (2.1) in der Mengenalgebra, existiert hier eine gemeinsame bedingte Verteilungsdichte

$$p_{X_1 X_2}(x_1 | x_2) = \frac{p_{X_1 X_2}(x_1, x_2)}{p_{X_2}(x_2)} \quad (2.23)$$

für  $p_{X_2}(x_2) > 0$ , welche die Wahrscheinlichkeit für  $\{x_1 < X_1(\omega) \leq x_1 + dx_1\}$  unter der Bedingung  $\{x_2 < X_2(\omega) \leq x_2 + dx_2\}$  darstellt.

Zwei Zufallsvariablen sind dann unabhängig, wenn für die bedingte Verteilungsdichte

$$p_{X_1 X_2}(x_1 | x_2) = p_{X_1}(x_1) \quad (2.24)$$

gilt. Mit (2.23) folgt daraus für unabhängige Zufallsvariablen

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1) p_{X_2}(x_2). \quad (2.25)$$

Im Fall einer vorzunehmenden Koordinatentransformation zweier Zufallsvariablen  $X_1(\omega)$  und  $X_2(\omega)$  auf die Zufallsvariablen  $Y_1(\omega)$  und  $Y_2(\omega)$  nach der Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, X_2), & X_1 &= h_1(Y_1, Y_2) \\ Y_2 &= g_2(X_1, X_2), & X_2 &= h_2(Y_1, Y_2) \end{aligned} \quad (2.26)$$

gilt offenbar für die gemeinsame Verteilungsdichte der transformierten Zufallsvariablen  $Y_1(\omega)$  und  $Y_2(\omega)$ , daß gleiche Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten

$$\int_H p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_G p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{X} = (X_1, X_2)^T, \quad \mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T. \quad (2.27)$$

Die Transformation überführt die linke Seite von (2.27) in  $\int_G p_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) |J| d\mathbf{y}$  und damit gilt

$$p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) \cdot |J|. \quad (2.28)$$

Hierin ist  $J = \det \frac{\partial(\mathbf{h}(\mathbf{y}))}{\partial(\mathbf{y})}$  die JACOBI-Determinante.

## 2.1.2 Momente

Häufig ist die vollständige Beschreibung von Zufallsvariablen mit Hilfe ihrer gemeinsamen Verteilungsdichten nicht oder nur mit hohem Aufwand möglich, so daß zur Charakterisierung die Momente der Verteilungsdichte herangezogen werden, ähnlich wie die Trägheitsmomente einen Körper einfacher beschreiben als eine Dichteverteilung seiner Masse.

Existiert ein  $n$ -dimensionaler Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  und seine  $n$ -dimensionale Verteilungsdichte  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  und ist  $g(\mathbf{X})$  eine Funktion der Zufallsvariablen, so ist die mathematische Erwartung oder der *Erwartungswert* der Funktion  $g(\mathbf{X})$  definiert durch

$$E[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{X}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (2.29)$$

Vektorielle Größen werden komponentenweise ausgeführt, d.h.

$$E[g(\mathbf{X})] = (E[g(X_1)], \dots, E[g(X_n)])^T. \quad (2.30)$$

Für spezielle Funktionen  $g(\mathbf{X}) = X_1^{\alpha_1} \cdot X_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot X_n^{\alpha_n}$  nennt man die nach (2.29) gebildeten Erwartungswerte von  $g(\mathbf{X})$  *Momente* ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ )-ter Ordnung.

So ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X(\omega)$  das Moment erster Ordnung

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) \, dx \quad (2.31)$$

und wird auch als Mittelwert  $m_X$  bezeichnet. Ein Maß für die Streuung um den Mittelwert ist die *Varianz*<sup>3</sup>  $\sigma_X^2$  oder das zentrale Moment zweiter Ordnung  $\mu_{X^2}$

$$\sigma_X^2 = \mu_{X^2} = E[(X - m_X)^2], \quad (2.32)$$

dessen positive Quadratwurzel  $\sigma_X$  als *Standardabweichung* bezeichnet wird.

Für eine zweidimensionale Zufallsvariable  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$  lauten die Mittelwerte

$$m_{X_1} = E[X_1] \quad \text{und} \quad m_{X_2} = E[X_2], \quad (2.33)$$

die Momente zweiter Ordnung oder quadratischen Mittelwerte

$$m_{X_1^2} = E[X_1^2] \quad \text{und} \quad m_{X_2^2} = E[X_2^2], \quad (2.34)$$

das als *Korrelation* bezeichnete gemischte Moment der Ordnung (1+1)

$$m_{X_1 X_2} = E[X_1 X_2], \quad (2.35)$$

die analog zu (2.32) zentralen Momente zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \mu_{X_1^2} &= E[(X_1 - m_{X_1})^2] \\ \mu_{X_2^2} &= E[(X_2 - m_{X_2})^2] \end{aligned} \quad (2.36)$$

sowie das gemischte zentrale Moment der Ordnung (1+1)

$$\mu_{X_1 X_2} = E[(X_1 - m_{X_1})(X_2 - m_{X_2})] = \sigma_{X_1 X_2}, \quad (2.37)$$

<sup>3</sup>Im Bereich der Nachrichten- und Elektrotechnik wird für die Streuung  $\sigma$  häufig der Begriff Effektivwert oder RMS (von engl. root mean square) verwendet.

das die Kovarianz  $\text{cov}_{X_1 X_2}$  der Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  angibt, um die wichtigsten zu nennen. Die normierte Kovarianz ist der *Korrelationskoeffizient* von  $X_1$  und  $X_2$

$$\varrho_{X_1 X_2} = \frac{\sigma_{X_1 X_2}}{\sigma_{X_1} \sigma_{X_2}} \quad (2.38)$$

mit  $|\varrho_{X_1 X_2}| \leq 1$ .  $X_1$  und  $X_2$  sind unkorreliert, d.h. sie sind statistisch linear unabhängig, wenn

$$\varrho_{X_1 X_2} = 0. \quad (2.39)$$

Aus (2.37) bis (2.39) ergibt sich, daß Unkorreliertheit der Zufallsvariablen notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung für statistische Unabhängigkeit der Zufallsvariablen ist. Für normalverteilte Zufallsvariablen (siehe Abschnitt 2.2.2) gilt jedoch, daß unkorrelierte Zufallsvariablen auch unabhängig sind [12].

## 2.2 Stochastische Prozesse

Die im vorigen Kapitel beschriebene Zufallsvariable stellt das Ergebnis eines Zufallsexperimentes dar, das nicht von weiteren Parametern wie beispielsweise von Zeit- oder Raumkoordinaten abhängt. Sind die Zufallsgrößen jedoch Funktionen weiterer Parameter, so nennt man diese Zufallsfunktionen im Falle einer Zeitabhängigkeit *stochastische Prozesse*, im Falle einer Abhängigkeit von den Ortskoordinaten *Zufallsfelder* und bei einer kombinierten Abhängigkeit *Zufallsfeldprozesse*<sup>4</sup>, oder ebenfalls nur kurz *stochastische Prozesse*. Der Stichprobenraum  $\Omega$  eines stochastischen Prozesses wird Zustandsraum genannt. Ein stochastischer (Vektor-) Prozeß wird durch den Index  $t$  gekennzeichnet,  $X_t(\omega)$  bzw.  $\mathbf{X}_t(\omega)$ , ein Zufallsfeld durch den Index  $s$ ,  $X_s(\omega)$  bzw.  $\mathbf{X}_s(\omega)$ , wobei allerdings in eindeutigen Fällen sowohl der Wahrscheinlichkeitsparameter  $\omega$  als auch später der Index  $t$  bzw.  $s$  weggelassen wird.

Besteht die Menge  $\{t | t \in T\}$  aus abzählbar vielen Elementen, so handelt es sich um einen stochastischen Prozeß mit diskreter Zeit, auch Map genannt, ist  $T$  ein Intervall, so spricht man von einem stochastischen Prozeß mit kontinuierlicher Zeit. Besteht der Zustandsraum  $\Omega$  aus einer abzählbaren Menge, so handelt es sich um einen diskreten stochastischen Prozeß (z.B. POISSON-Prozeß), ist  $\Omega$  ein Intervall, so ist es ein stetiger stochastischer Prozeß (z.B. GAUSS-Prozeß). Diskrete stochastische Prozesse und stetige stochastische Prozesse können jeweils mit kontinuierlicher oder diskreter Zeit existieren. In dieser Arbeit werden ausschließlich stetige Prozesse mit kontinuierlicher Zeit betrachtet.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden die Ausdrücke nur noch mit dem Parameter  $t$  angeschrieben. Dieser steht dabei nicht notwendig nur für die Zeit. Beobachtet man einen stochastischen Prozeß über den Zeitraum  $T$ , so erhält man eine Schar reeller Funktionen  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t \in T$ , sogenannte Trajektorien bzw. Zeitschriebe des stochastischen Prozesses  $\mathbf{X}_t$ .

Im allgemeinen wird die Verteilungsdichte eines stochastischen Prozesses  $\mathbf{X}_t$  von der Zeit abhängen und zu einem festen Zeitpunkt lautet sie  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ . Betrachtet man zu mehreren Zeitpunkten  $t_i$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  eine entsprechende Menge von Zufallsvariablen  $X_i = X(t_i)$

<sup>4</sup>CHINTSCHIN definierte in [38] einen stochastischen Prozeß noch als einparametrische Schar von Zufallsvariablen, mehrparametrische Feldprozesse kamen erst später in die Betrachtung.

mit der gemeinsamen Verteilungsfunktion

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \quad (2.40)$$

und im Falle der zukünftig immer vorausgesetzten Existenz der  $n$ -dimensionalen Verteilungsdichte mit

$$p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n), \quad (2.41)$$

so ist dadurch ein Zufallsprozeß  $\mathbf{X}_t$  definiert. Die gemeinsame Verteilungsfunktion erfüllt für  $m \leq n$  die Verträglichkeitsbedingung

$$F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, \dots, t_n) = F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) \quad (2.42)$$

und die Symmetriebedingung, d.h. sie ist invariant gegenüber einer Vertauschung der Indizes  $1, \dots, m$ .

In der Praxis ist meistens nicht die den stochastischen Prozeß kennzeichnende Menge der Zufallsgrößen gegeben, sondern eine Menge von Verteilungen, die die Symmetrie- und Verträglichkeitsbedingung erfüllen. Die Äquivalenz beider Konzepte geht aus dem Fundamentalsatz von KOLMOGOROW [5] hervor und damit ist die Möglichkeit gegeben, stochastische Prozesse durch ihre Verteilungsfunktionen oder Verteilungsdichten vollständig zu beschreiben.

## 2.2.1 Momente stochastischer Prozesse

Analog zur Definition der Erwartungswerte einer Zufallsvariablen werden sie auch zur Beschreibung stochastischer Prozesse herangezogen, die im allgemeinen Funktionen der Zeit sind. Ist  $g(\mathbf{X}_t)$  eine Funktion  $g$  des stochastischen Vektorprozesses  $\mathbf{X}_t$ , so ist deren Erwartungswert

$$E[g(\mathbf{X}_t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{X}_t) p_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (2.43)$$

Für spezielle Funktionen  $g(\mathbf{X}_t) = X_{t_1}^{\alpha_1} \cdot X_{t_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot X_{t_n}^{\alpha_n}$  nennt man die nach (2.43) gebildeten Erwartungswerte von  $g(\mathbf{X}_t)$  Momente  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$ -ter Ordnung. (2.30) bis (2.39) gelten entsprechend. Aus (2.35) erhält man für zwei stochastische Prozesse  $X_{t_1}$  und  $Y_{t_2}$  das als Korrelationsfunktion  $R_{XY}(t_1, t_2)$  bezeichnete gemischte Moment zweiter Ordnung

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X_{t_1} Y_{t_2}] \quad (2.44)$$

und aus (2.37) das als Kovarianzfunktion  $\text{cov}_{XY}(t_1, t_2)$  bezeichnete gemischte zentrale Moment zweiter Ordnung

$$\text{cov}_{XY}(t_1, t_2) = E[(X_{t_1} - m_X(t_1))(Y_{t_2} - m_Y(t_2))]. \quad (2.45)$$

Handelt es sich bei  $X_t$  und  $Y_t$  um verschiedene Prozesse, so nennt man (2.44) Kreuzkorrelationsfunktion und (2.45) Kreuzkovarianzfunktion, wird dagegen nur ein Prozeß zu verschiedenen Zeitpunkten betrachtet, so wird aus (2.44) die Autokorrelationsfunktion  $R_{XX}(t_1, t_2)$  und

aus (2.45) die Autokovarianzfunktion  $\text{cov}_{XX}(t_1, t_2)$ , und für  $t_1 = t_2 = t$  die zeitabhängige Varianz  $\sigma_X^2(t)$ .

Für Vektorprozesse  $\mathbf{X}_t$  und  $\mathbf{Y}_t$  gleicher Dimension erhält man an Stelle von (2.44) die Korrelationsfunktionsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2) = E[\mathbf{X}_{t_1} \mathbf{Y}_{t_2}^T] = \mathbf{R}_{\mathbf{YX}}^T(t_2, t_1) \quad (2.46)$$

und an Stelle von (2.45) die Kovarianzfunktionsmatrix

$$\mathbf{C}_{\mathbf{XY}}(t_1, t_2) = E[(\mathbf{X}_{t_1} - \mathbf{m}_{\mathbf{X}}(t_1))(\mathbf{Y}_{t_2} - \mathbf{m}_{\mathbf{Y}}(t_2))^T] = \mathbf{C}_{\mathbf{YX}}^T(t_2, t_1). \quad (2.47)$$

Für mittelwertfreie Prozesse, die man durch eine einfache Transformation  $Y_t = X_t - m_X(t)$  erhält, sind Kovarianzfunktion und Korrelationsfunktion gleich

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \text{cov}_{XY}(t_1, t_2). \quad (2.48)$$

## 2.2.2 Normalverteilte Prozesse

Ein  $n$ -dimensionaler stochastischer Prozeß  $\mathbf{X}_t = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})^T$  heißt GAUSSScher oder normalverteilter Prozeß, wenn seine  $n$ -dimensionale gemeinsame Verteilungsdichte durch

$$p_n(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})\right) \quad (2.49)$$

gegeben ist, wobei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = (m_{x_1}(t_1), \dots, m_{x_n}(t_n))^T$ , die Elemente  $c_{ij}$  der  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{C}$  die Kovarianzen  $\text{cov}_{X_i X_j}(t_i, t_j)$  sind und  $\mathbf{C}$  nicht singulär ist. Ein normalverteilter Prozeß ist damit vollständig durch die Mittelwertfunktionen  $m_X(t_i)$  und durch die Kovarianzen  $\text{cov}_{X_i X_j}(t_i, t_j)$  oder durch die Verteilungsdichtefunktionen erster und zweiter Ordnung charakterisiert. Es sei angemerkt, daß ein GAUSSScher Prozeß unter einer linearen Transformation normalverteilt bleibt, das heißt die GAUSSSche Eigenschaft bleibt erhalten.

Normalverteilte Prozesse haben in der Praxis eine große Bedeutung, auf die in Kapitel 5 eingegangen wird.

## 2.2.3 Stationäre Prozesse

Zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  gibt es ein Maß

$$f \mapsto \int_{\Omega} f \, dP. \quad (2.50)$$

Darauf aufbauend heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  *f*-invariant, falls

$$P(E) = P(f^{-1}(E)) \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad (2.51)$$

gilt. Im Rahmen technischer Fragestellungen bezieht sich der Integralbegriff (2.50) fast immer auf die Zeit  $t$ , oder er ist auf die Zeit  $t$  übertragbar. Als Beispiel sei die vertikale Anregung aus Fahrbahnunebenheiten auf ein mit konstanter Geschwindigkeit darüber fahrendes

Fahrzeug genannt. Der Integralbegriff zum Wahrscheinlichkeitsmaß der Fahrbahnhöhe ist zweckmäßigerweise auf den Weg bezogen. Über die konstante Fahrgeschwindigkeit kann die Fragestellung leicht vom Weg- in den Zeitbereich transformiert werden. Da im Folgenden immer von  $t$ -invarianten Maßen die Rede sein wird, werden sie nur kurz *invariante Maße* genannt.

Für MARKOW-Prozesse (siehe Abschnitt 2.2.8) ist ein *stationäres Wahrscheinlichkeitsmaß* definiert, wenn

$$P(E) = \int_X P(x \in E) p(dx) \quad (2.52)$$

für alle meßbaren Mengen  $E$  gilt [84]. In [17] sind Bedingungen genannt, unter welchen  $\sigma$ -meßbare invariante Maße die Existenz eines stationären Maßes nach sich ziehen. Dies trifft insbesondere für MARKOWsche Prozesse mit GAUSS'schem weißen Rauschen zu.

Ein Prozeß  $X_t$  wird *streng stationär* oder *stationär im engeren Sinne* genannt, wenn

$$p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = p_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1 - t_0, \dots, t_n - t_0) \quad (2.53)$$

für alle endlichen  $t_0$  erfüllt wird, d.h. wenn seine Verteilungsdichten invariant gegenüber einer Verschiebung des Nullpunktes des Parameters  $t$  sind. Gelegentlich wird auch von *streng homogenen* Prozessen gesprochen [53]. Für  $n = \{1, 2\}$ ,  $t_0 = t_1$  und  $\tau = t_2 - t_1$  folgt aus (2.53)

$$p_{X_1}(x_1, t_1) = p_{X_1}(x_1, 0) = p_{X_1}(x_1) \quad (2.54)$$

$$p_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2, 0, t_2 - t_1) = p_{X_1 X_2}(x_1, x_2, \tau), \quad (2.55)$$

das heißt in streng stationären Prozessen ist die Dichtefunktion erster Ordnung unabhängig von der Zeit und die Dichtefunktion zweiter Ordnung hängt nur von der betrachteten Zeitdifferenz ab. Damit ergeben sich für streng stationäre Prozesse die notwendigen, aber nicht hinreichenden Bedingungen

$$m_X = E[X_t] = \text{const.} \quad (2.56)$$

$$\text{cov}_{XX}(\tau) = E[(X_{t+\tau} - m_X)(X_t - m_X)] \quad (2.57)$$

$$R_{XX}(\tau) = E[X_{t+\tau} X_t]. \quad (2.58)$$

Allerdings sind (2.56) und (2.57) oder (2.58) notwendige und hinreichende Bedingungen für Prozesse, die als schwach stationär bezeichnet werden. Schwache Stationarität trifft allerdings keine Aussage über das Zeitverhalten der Verteilungsdichten (2.54) und (2.55). Aufgrund von (2.49) sind schwach stationäre normalverteilte Prozesse allerdings auch stationär im engeren Sinne.

Ein schwach stationärer Prozeß im Sinne von (2.56) bis (2.58) ist nach [38] stetig, wenn  $R(+0) = 1$ , damit ist dann auch  $R(t)$  eine stetige Funktion, denn für  $\Delta t \rightarrow 0$  ist nach der SCHWARZschen Ungleichung

$$\begin{aligned} |R(t + \Delta t) - R(t)| &= |E[x_0 x_{t+\Delta t}] - E[x_0 x_t]| = |E[x_0(x_{t+\Delta t} - x_t)]| \\ &\leq \sqrt{E[x^2] E[(x_{t+\Delta t} - x_t)^2]} = \sqrt{E[(x_{\Delta t} - x_0)^2]} = \sqrt{2} \sqrt{1 - R(\Delta t)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

### 2.2.4 Ergodische Eigenschaft stationärer Prozesse

In (2.31) wurde die mathematische Erwartung einer Funktion  $g(X_t)$  definiert als Mittelung aller Funktionswerte zu einem festen Zeitpunkt, die mit der Wahrscheinlichkeit ihres Parameters gewichtet werden, das heißt es wird die gesamte Schar oder das gesamte Ensemble der Funktionswerte betrachtet, daher spricht man von einem Scharmittelwert oder Ensemblemittelwert.

Daneben kann man zeitliche Mittelwerte  $\overline{g(X_t)}$  der Funktion  $g(X_t)$  betrachten

$$\overline{g(X)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(X_{t+\tau}) d\tau, \quad (2.59)$$

wobei für  $X_{t+\tau}$  jede Realisierung des Prozesses  $X$  zugelassen werden soll. Ein Prozeß  $X_t$  heißt ergodisch bezüglich einer Funktion  $g(X_t)$ , wenn sein Scharmittelwert (2.31) seinem Zeitmittelwert (2.59) mit Wahrscheinlichkeit eins gleicht

$$\overline{g(X_t)} = E[g(X_t)]. \quad (2.60)$$

Ergodizität setzt damit Stationarität voraus, sie ist umgekehrt jedoch keine notwendige Konsequenz daraus. Die wichtigsten Fälle sind Ergodizität im Mittel ( $g(X_t) = X_t$ ), Ergodizität im Quadratmittel ( $g(X_t) = X_t^2$ ) und Ergodizität in Korrelation ( $g(X_t) = X_t X_{t+\tau}$ ). Eine hinreichende Bedingung für Ergodizität im Mittel eines stationären GAUSSschen Prozesses ist

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \text{cov}_{XX}(\tau) = 0. \quad (2.61)$$

Weitere Ergodizitätskriterien sind in [30] und [75] zu finden, die allerdings immer eine analytische Kenntnis des Prozesses voraussetzen.

In der Praxis wird Ergodizität bei stationären Prozessen im Sinne von (2.60) vorausgesetzt, solange sich kein Widerspruch ergibt. Der Hauptnutzen besteht darin, daß bei ergodischen Prozessen die Untersuchung lediglich einer Realisierung über einen hinreichend langen, aber endlichen Zeitraum genügt, um Aussagen über Mittelwert, Autokorrelation und Verteilungsdichte zu treffen.

### 2.2.5 Beschreibung im Frequenzbereich

Die Autokorrelationsfunktion (2.58) wurde zur Beschreibung technischer Probleme erstmals 1922 in [91] durch TAYLOR benutzt. Hierauf aufbauend definiert die GREEN-KUBO-Formel [48] für schwach stationäre Prozesse den Diffusionskoeffizienten

$$B_{XX} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) d\tau, \quad (2.62)$$

und die WIENER-CHINTSCHIN-Relationen die reelle und gerade Spektraldichte als FOURIER-Transformierte der Autokorrelationsfunktion

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (2.63)$$

sowie deren Umkehrung

$$R_{XX}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\tau) e^{+i\omega\tau} d\tau \quad (2.64)$$

mit der Eigenschaft

$$R_{XX}(0) = E[X_t^2] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega. \quad (2.65)$$

Hierin stellt  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $i$  die imaginäre Einheit dar. Die Spektraldichte beschreibt demnach die Zusammensetzung des Quadratmittelwertes des Prozesses aus den Frequenzanteilen aller schmalen Frequenzbänder  $d\omega$ . Für zwei mindestens schwach stationäre Prozesse  $X_t$  und  $Y_t$  mit der Kreuzkorrelationsfunktion (2.44) ist die im allgemeinen komplexe Kreuzspektraldichte definiert als

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (2.66)$$

## 2.2.6 Weißes Rauschen

Es wird ein stochastischer Prozeß  $\xi_t(c)$  mit der Autokorrelationsfunktion

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{c}{2} e^{-c|\tau|} \quad (2.67)$$

und den damit gegebenen Eigenschaften

$$B_{\xi\xi} = 1 \quad (2.68)$$

und

$$\lim_{c \rightarrow \infty} R_{\xi\xi}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau \neq 0 \\ \infty & \text{für } \tau = 0 \end{cases} \quad (2.69)$$

betrachtet. Hierbei entartet (2.67) im Grenzwert für unendlich großen Parameter  $c$  zur DIRACSchen  $\delta$ -Funktion, die eine verallgemeinerte Funktion im Sinne der Distributionentheorie darstellt

$$R_{\xi\xi}(\tau) = \delta(\tau), \quad (2.70)$$

und die zugehörige Spektraldichte (2.63) wird zu

$$S_{\xi\xi}(\omega) = 1, \quad (2.71)$$

das heißt, alle Frequenzen sind in diesem absolut zufälligen Prozeß mit der gleichen Intensität vorhanden und er stellt damit eine in physikalischen Prozessen nicht vorkommende, aber sehr nützliche Idealisierung dar.

Der Begriff „Rauschen“ stammt aus der Elektrotechnik, wo zunächst bei der Wandlung elektrischer und akustischer Signale akustisches Rauschen als Störung der Signale wahrgenommen wurde, später wurde allgemein ein breitbandiges Signal mit zufälligem Amplitudenverlauf mit Rauschen bezeichnet. Es ist schwierig, unterschiedliche Rauschtypen zu klassifizieren. Hierbei behilft man sich mit dem Farbspektrum des Lichtes, wo Wellenlängen resp. Frequenzen Farben zugeordnet werden [58]. Der Attributwert „weiß“ versinnbildlicht die gleiche Intensität aller Frequenzen wie beim weißen sichtbaren Licht. In Tabelle 2.1 sind Proportionalitätsfaktoren der Spektraldichten in Bezug auf die Frequenzen den entsprechenden Farben zugeordnet.

Farbe	Proportionalitätsfaktor
violett	$f^2$
blau	$f$
weiß	1
rosa	$\frac{1}{f}$
rot/braun	$\frac{1}{f^2}$
schwarz	0

Tabelle 2.1: Klassifizierung des Rauschens durch Farben.

### 2.2.7 Wiener-Prozeß

Der WIENER-Vektorprozeß<sup>5</sup>  $\mathbf{W}_t$  ist ein GAUSSScher Prozeß mit mittelwertfreien unabhängigen Inkrementen, mit dem Anfangswert  $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$  mit Wahrscheinlichkeit eins und mit der symmetrischen Kovarianzmatrix

$$E[\mathbf{W}_t \mathbf{W}_t^T] = \mathbf{C}_w t. \quad (2.72)$$

Im allgemeinen Fall sind die Komponenten des WIENER-Vektorprozesses also korreliert. Ist  $\mathbf{C}_w$  die Einheitsmatrix  $\mathbf{I}$ , so erhält man den normierten WIENER-Prozeß mit unabhängigen Komponenten. Jeden nicht normierten WIENER-Prozeß  $\mathbf{W}_t$  mit der allgemeinen Eigenschaft (2.72) kann man in einen normierten WIENER-Prozesses  $\mathbf{V}_t$  mit der Transformation

$$\mathbf{W}_t = \sqrt{\mathbf{C}_w} \mathbf{V}_t, \text{ mit } \sqrt{\mathbf{C}_w} \sqrt{\mathbf{C}_w}^T = \mathbf{C}_w \quad (2.73)$$

überführen, so daß  $E[\mathbf{V}_t \mathbf{V}_t^T] = \mathbf{I}t$ .

Beispielhaft werden die Eigenschaften anhand des skalaren WIENER-Prozesses aufgezeigt, wie die Martingaleigenschaft

$$E[W_t | W_{t-1} = w_{t-1}] = w_{t-1}, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.74)$$

das heißt, der Erwartungswert für den Zustand  $t$  ist gleich dem unmittelbar zuvor erreichten Zustand  $(t - 1)$  selbst (Mittelwertfreiheit der Zuwächse), und die Vereinfachung der Autokorrelationsfunktion führt zu

$$E[W_{t+\tau} W_t] = E[(W_{t+\tau} - W_t + W_t)(W_t - W_0)] =$$

<sup>5</sup>FELLER nannte den Prozeß der BROWNSchen Bewegung in [22] WIENER-BACHELIER-Prozeß, es hat sich aber die kürzere Bezeichnung WIENER-Prozeß durchgesetzt.

$$\begin{aligned}
&= E[(W_{t+\tau} - W_t)(W_t - W_0)] + E[W_t(W_t - W_0)] = \\
&= E[(W_{t+\tau} - W_t)] \cdot E[(W_t - W_0)] + E[W_t^2] = E[W_t^2] = t,
\end{aligned} \tag{2.75}$$

das heißt

$$R_{WW}(t, s) = E[W_t W_s] = \min(t, s). \tag{2.76}$$

Desweiteren ist der WIENER-Prozeß mit Wahrscheinlichkeit 1 stetig, nirgends differenzierbar und in jedem endlichen Intervall von unbeschränkter Variation und somit existiert der Prozeß  $\dot{W}_t = dW/dt$  nicht im Sinne der klassischen Analysis. Die Autokorrelationsfunktion des Prozesses  $\dot{W}_t$  ist gegeben durch

$$R_{\dot{W}\dot{W}} = \frac{\partial^2 R_{WW}}{\partial t \partial s} \tag{2.77}$$

und man erhält mit der Sprungfunktion

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \tag{2.78}$$

die Autokorrelationsfunktion des WIENER-Prozesses

$$R_{WW}(t, s) = t - (t - s) \cdot 1(t - s), \quad s < t. \tag{2.79}$$

(2.79) und die Differentiationsregel für generalisierte Funktionen  $d1(t)/dt = \delta(t)$  in (2.77) eingesetzt führt auf

$$R_{\dot{W}\dot{W}}(t, s) = 2\delta(t - s) + (t - s) \frac{d\delta(t - s)}{d(t - s)}. \tag{2.80}$$

Mit einer weiteren Differentiationsregel für verallgemeinerte Funktionen  $d\delta(t)/dt = -\delta(t)$  und für  $\tau = t - s$  erhält man schließlich

$$R_{\dot{W}\dot{W}}(\tau) = \delta(\tau), \tag{2.81}$$

was der Definition des weißen Rauschens (2.70) entspricht. Die Beziehung

$$\xi_t = \frac{dW_t}{dt}, \tag{2.82}$$

deren Differentiation im Sinne verallgemeinerter Funktionen zu verstehen ist, wird wegen der Nichtdifferenzierbarkeit des WIENER-Prozesses und der glättenden Wirkung der Integration in Integralschreibweise dargestellt

$$W_t = \int_0^t \xi_x ds, \tag{2.83}$$

hierfür bedarf es aber noch der Einführung stochastischer Integrale in Abschnitt 2.2.10. Aus (2.72) und (2.76) folgt die wichtige Beziehung

$$(dW_t)^2 = dt. \tag{2.84}$$

### 2.2.8 Markow-Prozesse

Ein stetiger stochastischer Prozeß  $\mathbf{X}_t$  heißt  $d$ -dimensionaler stetiger MARKOW-Prozeß, wenn die bedingten Verteilungsdichten die MARKOW-Eigenschaft

$$p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}, \dots, \mathbf{x}_0; t_{n-1}, \dots, t_0) = p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}; t_{n-1}), t_0 < t_1 < \dots < t_n \quad (2.85)$$

mit  $\mathbf{x}_n = (x_{1,n}, \dots, x_{d,n})^T$

für alle  $n \geq 0$  erfüllt. Das bedeutet, daß die Zukunft  $t_n$  des MARKOW-Prozesses lediglich durch den Zustand der Gegenwart  $t_{n-1}$  beeinflußt wird, nicht jedoch durch die Vergangenheit  $t_{n-k}$ ,  $k > 1$ . Die bedingte Verteilungsdichte  $p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}; t_{n-1})$  heißt Übergangsdichte des MARKOW-Prozesses  $\mathbf{X}_t$ . Aufgrund der MARKOW-Eigenschaft läßt sich jede gemeinsame Verteilungsdichte eines MARKOW-Prozesses durch eine Anfangsverteilungsdichte und die Übergangsdichten darstellen

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \dots, \mathbf{x}_0; t_n, \dots, t_0) &= \\ &= p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n; t_n | \mathbf{x}_{n-1}; t_{n-1}) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_{n-1}; t_{n-1} | \mathbf{x}_{n-2}; t_{n-2}) \cdots p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_1; t_1 | \mathbf{x}_0; t_0) p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0; t_0) \end{aligned} \quad (2.86)$$

oder

$$p(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}; s) = \frac{p(\mathbf{x}, \mathbf{y}; t, s)}{p(\mathbf{y}, s)}, t > s. \quad (2.87)$$

Damit ist ein MARKOW-Prozeß vollständig durch die zugehörige Verteilungsdichte zweiter Ordnung beschrieben. Wichtiges Beispiel für stochastische Prozesse mit MARKOW-Eigenschaft ist die BROWNSche Bewegung bzw. der WIENER-Prozeß (2.83).

### 2.2.9 Fokker-Planck-Kolmogorow-Gleichung

Die Übergangsdichten (2.86) erfüllen die relativ plausible SMOLUCHOWSKI-CHAPMAN-KOLMOGOROW-Gleichung SCK

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \quad \text{mit } t_1 < t_2 < t_3, \quad (2.88)$$

die erstmals in einer Form für eine nach dem Parameter homogene Übergangsdichte von BACHELIER in [8] für Aktienkurse später von SMOLUCHOWSKI in [89] erweitert und von CHAPMAN in [15] verallgemeinert wurde. KOLMOGOROW setzt diese Gleichung als fundamentale Gleichung in [45] voraus. Die SCK sagt aus, daß die Wahrscheinlichkeit für einen Übergang vom Zustand  $x_1$  zum Zeitpunkt  $t_1$  zum Zustand  $x_3$  zum Zeitpunkt  $t_3$  gleich groß ist wie die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglicher Realisierungen über alle möglichen Zwischenzustände  $x_2$  zum Zeitpunkt  $t_2$ . In Abbildung 2.1 wird dies durch drei beispielhafte Trajektorien veranschaulicht.

Das physikalische Diffusionsproblem wurde erstmalig von FICK in [23] quantitativ durch das erste FICKSche Gesetz beschrieben

$$D = -B \nabla \varrho, \quad (2.89)$$

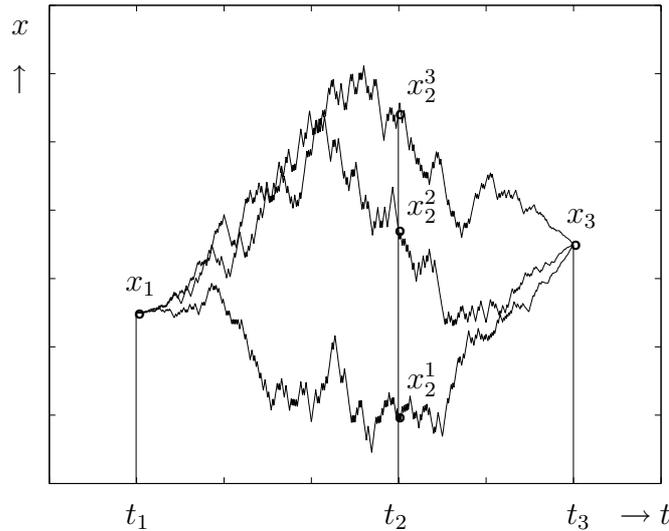


Abbildung 2.1: Drei mögliche Realisierungen, um vom Zustand  $x_1(t_1)$  zum Zustand  $x_3(t_3)$  zu kommen.

worin  $D$  die Diffusionsstromdichte (Teilchenfluß),  $\nabla_\rho$  den Gradienten der Teilchendichte und  $B$  den Diffusionskoeffizienten (2.62) darstellen. Damit ist  $D$  proportional zum Diffusionskoeffizienten. Im folgenden sind Diffusionsprozesse spezielle MARKOW-Prozesse mit stetigen Realisierungen zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Beschreibung physikalischer Diffusionsprozesse, die beispielsweise Teilchenbewegungen (BROWNSche Bewegung) in Strömungen abbilden. Damit wird es möglich, technische Systeme zu beschreiben, auf die weißes Rauschen einwirkt. Folgende Annahmen für Diffusionsprozesse erscheinen daher gerechtfertigt:

1. Große Zuwächse in kurzen Zeiten sind nicht wahrscheinlich.
2. Die mittlere Geschwindigkeit (Drift) des Prozesses ist identisch mit der deterministischen Geschwindigkeit  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  der Strömung.
3. Die Kovarianzmatrix der Inkremente ist proportional zu ihrer Zeitdifferenz mit einem Matrixfaktor  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ .

Diese Annahmen sind hinreichend, um partielle Differentialgleichungen für die Übergangsdichte  $p(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, s)$  herzuleiten. Der einfacheren Darstellung wegen wird hier der eindimensionale Fall behandelt. Hierzu wird die SCK (2.88) mit  $p(x_1, t_1)$  multipliziert

$$p(x_3, t_3) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2) dx_2. \tag{2.90}$$

Mit  $t_3 = t + \tau$ ,  $t_2 = t$ ,  $x_3 = (x - \zeta) + \zeta$  und  $x_2 = (x - \zeta)$  folgt

$$p(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x - \zeta, t) p(x, t + \tau | x - \zeta, t) d\zeta. \tag{2.91}$$

Entwickelt man die beiden Faktoren des Integranden in TAYLOR-Reihen um die Stelle  $\zeta = 0$ , so erhält man

$$\begin{aligned} p(x - \zeta, t) &= p(x, t) - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \zeta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \zeta^2 - + \dots \\ p(x, t + \tau | x - \zeta, t) &= p(x + \zeta, t + \tau | x, t) - \frac{\partial p(x + \zeta, t + \tau | x, t)}{\partial x} \zeta \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x + \zeta, t + \tau | x, t)}{\partial x^2} \zeta^2 - + \dots \end{aligned}$$

und nach Ausmultiplizieren und Integration die folgenden Summanden:

$$\begin{aligned} p(x, t) \underbrace{\int p(x + \zeta, t + \tau | x, t) d\zeta}_{=1} &= p(x, t) \\ p(x, t) \int \zeta \frac{\partial p(x + \zeta, t + \tau | x, t)}{\partial x} d\zeta &= p(x, t) \frac{\partial E[\zeta]}{\partial x} \\ p(x, t) \int \frac{1}{2} \zeta^2 \frac{\partial^2 p(x + \zeta, t + \tau | x, t)}{\partial x^2} d\zeta &= p(x, t) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E[\zeta^2]}{\partial x^2} \\ \int \zeta p(x + \zeta, t + \tau | x, t) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} d\zeta &= \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} E[\zeta] \\ \int \zeta^2 \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \frac{\partial p(x + \zeta, t + \tau | x, t)}{\partial x} d\zeta &= \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \frac{\partial E[\zeta^2]}{\partial x} \\ \int \frac{1}{2} \zeta^3 \frac{\partial^2 p(x + \zeta, t + \tau | x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} d\zeta &= \frac{1}{2} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \frac{\partial^2 E[\zeta^3]}{\partial x^2} \\ \int \frac{1}{2} \zeta^2 p(x + \zeta, t + \tau | x, t) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} d\zeta &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} E[\zeta^2] \\ &\vdots \end{aligned}$$

Hierin sind die Momente  $E[\zeta^k]$  über  $p(x + \zeta, t + \tau | x, t)$  von  $x$  abhängig. Gleichung (2.91) wird damit umgeschrieben zu

$$\begin{aligned} p(x, t + \tau) - p(x, t) &= -p(x, t) \frac{\partial E[\zeta]}{\partial x} - \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} E[\zeta] + p(x, t) \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E[\zeta^2]}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \frac{\partial E[\zeta^2]}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} E[\zeta^2] \dots \quad (2.92) \end{aligned}$$

Der Grenzübergang für  $\tau \rightarrow 0$  überführt Gleichung (2.92) in die KRAMERS-MOYAL-Entwicklung [63]

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (a_n(x) p(x, t)) \quad (2.93)$$

$$\text{mit } a_n(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \int \zeta^n p(x + \zeta, t + \tau | x, t) d\zeta = \lim_{\tau \rightarrow 0} E[\zeta^n] \tau^{-1} \quad (2.94)$$

Um letztendlich Lösungen für die Verteilungsdichte  $p(x, t)$  angeben zu können, ist die KRAMERS-MOYAL-Entwicklung (2.93) mit ihrer unendlichen Anzahl an Gliedern nicht brauchbar, daher muß ein geeignetes Abbruchkriterium für die Entwicklung gefunden werden. Das

PAWULA Theorem [68] leistet hier für bestimmte Fälle Hilfe, es besagt, daß wenn die in (2.94) definierten  $a_n(x)$  für alle  $n$  existieren und ein  $a_n(x) = 0$  mit geradem  $n$  existiert, dann sind alle  $a_n(x) = 0$  für  $n \geq 3$ . Dies soll hier für den eindimensionalen Fall gezeigt werden. Der Beweis in verallgemeinerter Form ist in [69] zu finden.

Gleichung (2.94) kann umgeschrieben werden in

$$a_n(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int \zeta^{\frac{n-1}{2}} \zeta^{\frac{n+1}{2}} p(x + \zeta, t + \tau | x, t) d\zeta. \quad (2.95)$$

Für ungerades  $n$  und  $n \geq 3$  erhält man aus (2.95) mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int \zeta^{\frac{n-1}{2}} \zeta^{\frac{n+1}{2}} p d\zeta \int \zeta^{\frac{n-1}{2}} \zeta^{\frac{n+1}{2}} p d\zeta &\leq \int \zeta^{\frac{n-1}{2}} \zeta^{\frac{n-1}{2}} p d\zeta \int \zeta^{\frac{n+1}{2}} \zeta^{\frac{n+1}{2}} p d\zeta \\ a_n(x)^2 &\leq a_{n-1}(x) a_{n+1}(x) \\ &n \text{ ungerade, } n \geq 3. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Auf die gleiche Art und Weise folgt

$$a_n(x)^2 \leq a_{n-2}(x) a_{n+2}(x) \quad n \text{ gerade, } n \geq 3. \quad (2.97)$$

Setzt man nun nacheinander  $n = r - 1$ ,  $n = r + 1$  in (2.96) und  $n = r - 2$ ,  $n = r + 2$  in (2.97) ein, wobei  $r$  geradzahlig ist, erhält man

$$a_{r-2}(x)^2 \leq a_{r-4}(x) a_r(x), \quad r \geq 6 \quad (2.98)$$

$$a_{r-1}(x)^2 \leq a_{r-2}(x) a_r(x), \quad r \geq 4 \quad (2.99)$$

$$a_{r+1}(x)^2 \leq a_r(x) a_{r+2}(x), \quad r \geq 2 \quad (2.100)$$

$$a_{r+2}(x)^2 \leq a_r(x) a_{r+4}(x), \quad r \geq 2. \quad (2.101)$$

Wenn  $a_n(x) < \infty$  für alle  $n$  und wenn  $a_r(x) = 0$  für ein gerades  $r \geq 6$  ist, dann zeigen die Gleichungen (2.98) bis (2.101), daß  $a_{r-2}(x)$ ,  $a_{r-1}(x)$ ,  $a_{r+1}(x)$  und  $a_{r+2}(x)$  Null sein müssen. Nach wiederholter Anwendung dieser Argumentation folgt, daß  $a_n(x) = 0$  für alle  $n \geq r$  (für  $r \geq 6$ ). Geht man in die andere Richtung und nimmt die Definitionsbereiche von  $r$  in (2.98) bis (2.101) zur Kenntnis, so folgt, daß  $a_n(x) = 0$  für alle  $n \geq 3$ . Die Definitionsbereiche von  $r$  in (2.98) bis (2.101) sind in den Definitionsbereichen von  $n$  in (2.96) und (2.97) begründet. Da in der KRAMERS-MOYAL-Entwicklung (2.93)  $n \geq 1$  ist, muß in (2.96) und (2.97)  $n \geq 3$  definiert werden.

Das heißt, wenn ein  $a_n(x) = 0$  mit geradem  $n$  existiert, stellt die nach dem zweiten Glied abgebrochene KRAMERS-MOYAL-Entwicklung keine Näherung dar, sondern eine exakte Lösung. Dies ist der Fall bei dynamischen Systemen mit GAUSSSchem weißen Rauschen  $\xi_t$  mit den Eigenschaften Stetigkeit, Mittelwertfreiheit  $E[\xi_t] = 0$  und Delta-Korreliertheit  $E[\xi_t \xi_{t+\tau}] = \delta_{t,t+\tau}$ .

Die KRAMERS-MOYAL-Entwicklung wird damit zur FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung (FPK-Gleichung)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (a_1(x, t) p(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (a_2(x, t) p(x, t)), \quad (2.102)$$

wobei die  $a_n$  gemäß Gleichung (2.94) für  $n = 1$  den Driftfaktor und für  $n = 2$  den Diffusionskoeffizienten (2.62) als Proportionalitätsfaktor der Kovarianzfunktion für den eindimensionalen Prozeß darstellen.

Insbesondere bleibt bei unstetigen Rauschprozessen wie beispielsweise beim POISSONSchen Rauschprozeß die unendliche Anzahl an Reihengliedern der KRAMERS-MOYAL-Entwicklung erhalten, die FPK-Gleichung stellt dann lediglich eine Näherung dar, deren Lösung dann unter Umständen negative und damit nicht sinnvolle Verteilungsdichten liefert.

Im allgemeinen mehrdimensionalen Fall lautet die FPK-Gleichung, die auch KOLMOGOROWSche Vorwärtsgleichung oder nur FOKKER-PLANCK-Gleichung genannt wird, dann

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] = 0 \quad (2.103)$$

und die KOLMOGOROWSche Rückwärtsgleichung

$$\frac{\partial p(\mathbf{y}, s)}{\partial s} + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{y}, s) \frac{\partial p(\mathbf{y}, s)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{y}, s) \frac{\partial^2 p(\mathbf{y}, s)}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad (2.104)$$

mit  $t > s$ , wobei  $f_i$  und  $b_{ij}$  die Komponenten des oben genannten Driftvektors  $\mathbf{f}$  und der Diffusionsmatrix  $\mathbf{B}$  sind. Führt man den FOKKER-PLANCK-Operator  $\mathcal{L}_{FP}$  mit

$$\mathcal{L}_{FP} p(\mathbf{x}, t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] \quad (2.105)$$

ein, so kann man mit Hilfe des in der HILBERTraumtheorie bekannten Konzeptes der linearen adjungierten Operatoren beide Gleichungen (2.103) und (2.104) ineinander überführen [25], wobei ein zu einem Operator  $A$  adjungierter Operator  $A^\dagger$  definiert ist durch

$$E[A\varphi(y) \cdot \psi(y)] = E[\varphi(y) \cdot A^\dagger\psi(y)] \quad (2.106)$$

und hieraus ergibt sich dann

$$\mathcal{L}_{FP}^\dagger p(\mathbf{y}, s) = - \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{y}, s) \frac{\partial p(\mathbf{y}, s)}{\partial y_i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{y}, s) \frac{\partial^2 p(\mathbf{y}, s)}{\partial y_i \partial y_j} \quad (2.107)$$

Die Gleichungen (2.103) und (2.104) werden dann zu

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathcal{L}_{FP} p(\mathbf{x}, t) \quad \text{und} \quad \frac{\partial p(\mathbf{y}, s)}{\partial s} = \mathcal{L}_{FP}^\dagger p(\mathbf{y}, s). \quad (2.108)$$

$\mathcal{L}_{FP}$  ist linear und im allgemeinen nicht selbstadjungiert, das heißt  $\mathcal{L}_{FP} \neq \mathcal{L}_{FP}^\dagger$ .

Die KOLMOGOROWSchen Gleichungen für den WIENER Prozeß erhält man aus den Gleichungen (2.103) und (2.104) mit  $n = 1$ ,  $f_1 = 0$ ,  $b_{11} = 1$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (2.110)$$

Die Lösung ist durch die GAUSSsche Dichteverteilung

$$p(x, y; t, s) = \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}}}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \quad (2.111)$$

gegeben.

### 2.2.10 Stochastische Differentialgleichungen

Die mathematische Beschreibung stochastischer dynamischer Systeme erfolgt durch Differentialgleichungen  $d$ -dimensionaler stochastischer Prozesse  $\mathbf{X}_t$  mit zufälligen Parametern oder kurz stochastischen Differentialgleichungen der Form

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t, \quad \mathbf{X}_{t_0} = \mathbf{x}_0 \quad (2.112)$$

mit dem  $d$ -dimensionalen Driftvektor  $\mathbf{f}$ , der  $d \times m$  Matrix  $\mathbf{G}$  und dem  $m$ -dimensionalen WIENER Vektorprozeß  $\mathbf{W}_t$ . Ebenso wie (2.82) im klassischen Sinne nicht existiert und lediglich als gewohnte Abkürzung für (2.83) dient, ist (2.112) als abkürzende Schreibweise der Integralgleichung

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t_0} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{X}_s)ds + \int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s)d\mathbf{W}_s, \quad \mathbf{X}_{t_0} = \mathbf{x}_0 \quad (2.113)$$

aufzufassen. Hierin stellt das rechte Integral ein sogenanntes stochastisches Integral dar, das erst noch der Einführung bedarf.

Aufgrund der schon in Abschnitt 2.2.7 erwähnten glättenden Eigenschaft des Integrals ist der Gebrauch verallgemeinerter stochastischer Prozesse zur Beschreibung stochastischer Integrale nicht notwendig, so daß das stochastische Integral

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) d\mathbf{W}_s \quad (2.114)$$

als gewöhnliche Zufallsgröße aufgefaßt werden kann. Ist die Matrix  $\mathbf{G}$  nicht von den Zufallsgrößen  $\mathbf{X}_t$  abhängig, so kann das stochastische Integral als gewöhnliches RIEMANN-STIELTJES-Integral behandelt werden. Ist jedoch  $\mathbf{G}$  einem Zufallsprozeß unterworfen und damit ähnlich irregulär wie  $\mathbf{W}_t$ , so führt die Anwendung der klassischen Regel der partiellen Integration im Falle von  $G = W_t$ ,  $d = m = 1$  auf

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2), \quad (2.115)$$

was die Konvergenz der RIEMANN-STIELTJES-Summe

$$S_n = \sum_{i=1}^n W_{\tau_i} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) \quad (2.116)$$

bei feiner werdender Zerlegung und beliebiger Wahl der Zwischenpunkte  $\tau_i$  voraussetzt. Es kann jedoch gezeigt werden, daß die Konvergenz der Summe  $\{S_n\}$  von der Wahl der  $\tau_i$  abhängt und deshalb ist es notwendig, die  $\tau_i$  so festzulegen, daß das zugehörige Integral sinnvolle und erwünschte Eigenschaften besitzt. Gleichung (2.115) und (2.116) werden nur für eine bestimmte Wahl der Zwischenpunkte erfüllt, und zwar nur für  $\tau_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i-1})$ . ITÔ legte mit  $\tau_i = t_{i-1}$  die Zwischenpunkte an die linke Grenze des Zeitintervalls, womit (2.115) und (2.116) nicht erfüllt werden. Das sogenannte ITÔ-Integral ist aus diesem Grunde eine nichtvorgreifende Funktion und es besitzt als Funktion der oberen Grenze die Martingaleigenschaft (2.74) wie der WIENER Prozeß. Von weiterer vorteilhafter Bedeutung ist der verschwindende Mittelwert

$$E \left[ \int_{t_0}^t \mathbf{G}_t d\mathbf{W}_t \right] = 0 \quad (2.117)$$

und die einfache Kovarianzmatrix

$$E \left[ \left( \int_{t_0}^t \mathbf{G}_t d\mathbf{W}_t \right) \cdot \left( \int_{t_0}^t \mathbf{G}_t d\mathbf{W}_t \right)^T \right] = \int_{t_0}^t E[\mathbf{G}_t \mathbf{G}_t^T] dt. \quad (2.118)$$

Nachteilig an der Definition des stochastischen Integrals im Sinne ITÔs ist, daß der klassische Kalkül beim Umgang mit ITÔ Integralen und Differentialen nicht mehr anwendbar ist, was sich aus der Nichterfüllung von (2.115) und (2.116) ergibt. Mit dem Satz von ITÔ wird daher der ITÔ-Kalkül eingeführt. Für einen durch (2.112) definierten  $d$ -dimensionalen stochastischen Prozeß  $\mathbf{X}_t$  ist das Differential des  $k$ -dimensionalen Prozesses  $\mathbf{U}_t = \mathbf{U}(t, \mathbf{X}_t)$  mit stetigen partiellen Ableitungen  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}}$  und  $\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}^2}$  gegeben durch

$$d\mathbf{U} = \left( \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{G}_i \mathbf{G}_j^T \right) dt + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G} d\mathbf{W}_t. \quad (2.119)$$

Eine Erwartungswertbildung über Gleichung (2.119) führt auf

$$E[\dot{\mathbf{U}}] = E[\mathcal{L}_{FP}^\dagger \mathbf{U}], \quad (2.120)$$

worin  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger$  den zum FOKKER-PLANCK-Operator  $\mathcal{L}_{FP}$  adjungierten Operator nach (2.107) darstellt.

STRATONOWITSCH fällt seine Wahl für die Zwischenpunkte  $\tau_i$  in (2.116) auf die Mitte des Zeitintervalls, so daß  $\tau_i = \frac{1}{2}(t_i + t_{i-1})$  und damit wie oben bereits beschrieben (2.115) und (2.116) erfüllt werden. Zur besseren Unterscheidbarkeit gegenüber dem ITÔ Integral ist die Schreibweise für das STRATONOWITSCH Integral

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) \circ d\mathbf{W}_s \quad (2.121)$$

weit verbreitet. Der Vorteil, daß die Regeln des klassischen Kalküls formal angewendet werden können, zieht jedoch nach sich, daß die einfachen Formeln (2.117) und (2.118) und die Martingaleigenschaft verschwinden. Ebenso ist die Lösung von (2.113) nicht mehr durch einen Diffusionsprozess mit Driftvektor  $\mathbf{f}$  und Diffusionsmatrix  $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$  gegeben.

Beide Definitionen für das stochastische Integral lassen sich mit

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) \circ d\mathbf{W}_s = \int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) d\mathbf{W}_s + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) \right)_{\cdot j} \mathbf{G}_{kj}(x, \mathbf{X}_s) ds \quad (2.122)$$

bzw.

$$\int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) d\mathbf{W}_s = \int_{t_0}^t \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) \circ d\mathbf{W}_s - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) \right)_{\cdot j} \mathbf{G}_{kj}(x, \mathbf{X}_s) ds \quad (2.123)$$

ineinander überführen, worin

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d \int_{t_0}^t \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) \right)_{\cdot j} \mathbf{G}_{kj}(x, \mathbf{X}_s) ds \quad (2.124)$$

den sogenannten Korrekturterm nach WONG-ZAKAI [102] darstellt. Wann welche Definition zu verwenden ist, kann nicht immer eindeutig gesagt werden. Es ist aber sinnvoll, wenn zunächst  $W_t$  als physikalisch realisierbarer glatter Prozeß angesehen wird, die Definition nach STRATONOWITSCH zu nehmen, das System in klassischer Weise zu lösen und im Ergebnis dann den Übergang zum weißen Rauschen zu vollziehen. Wird der Grenzübergang zum weißen Rauschen vor Auswertung des Integrals durchgeführt, nimmt man in der Regel die ITÔsche Integraldefinition. Für den Fall additiven Rauschens mit  $\mathbf{G}(s, \mathbf{X}_s) = \mathbf{G}(s)$  verschwindet der Korrekturterm (2.124) aufgrund der partiellen Ableitung und damit unterscheiden sich dann beide Definitionen nicht.

Den in dieser Arbeit angeführten Beispielen liegt die folgende Vorgehensweise zugrunde. Zunächst schreibt man die Zustandsform der Bewegungsdifferentialgleichungen des dynamischen Systems in physikalischem Sinne als gewöhnliches Differentialgleichungssystem mit zufälligen Parametern an

$$\dot{\mathbf{X}}_t = \mathbf{h}(t, \mathbf{X}_t) + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t) \boldsymbol{\xi}_t, \quad (2.125)$$

das dann rein formal in die Differentialform eines STRATONOWITSCH-Gleichungssystems umgewandelt wird

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{h}(t, \mathbf{X}_t) dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t) \circ d\mathbf{W}_t. \quad (2.126)$$

Hieraus erhält man anschließend mit (2.122) das zugehörige ITÔ-Gleichungssystem

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t) dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t) d\mathbf{W}_t \quad (2.127)$$

mit

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t) = \mathbf{h}(t, \mathbf{X}_t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^d \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_k} \mathbf{G}_{kj}. \quad (2.128)$$

## 2.3 Stabilität und Bifurkationen

### 2.3.1 Stabilität

Der Begriff der Stabilität hat im Lauf der Geschichte immer wieder Veränderungen und eine ständige Entwicklung erfahren, so daß man nicht von Stabilität an sich sprechen kann, sondern immer vor dem Hintergrund einer bestimmten Definition des Stabilitätsbegriffs, der sich wiederum an den Methoden zur Untersuchung der Stabilität orientiert. Es sind hierbei grundsätzlich drei Methoden beziehungsweise Begriffsdefinitionen zu unterscheiden. Die chronologisch zuerst verfolgte Methode ist eine kinematische, die aus dem Ablauf einer gestörten Bewegung auf die Stabilität des ungestörten Zustandes schließt. Sie war von ARISTOTELES ausgehend bis zur Zeit GALILEIS in Gebrauch und wurde während eines Zwischenspiels von etwa zwei Jahrhunderten durch die sogenannte geometrische Methode fast vollständig verdrängt. Eine weitere Methode ist die energetische Methode, die im wesentlichen darauf beruht, daß das Gesamtpotential eines statischen konservativen Systems für einen stabilen Gleichgewichtszustand minimal ist.

Allen Definitionen gemeinsam ist, daß ein zunächst ungestörter Zustand eines Systems, dessen Stabilität untersucht werden soll, festgelegt wird und sein Verhalten nach einer Störung betrachtet wird. Definiert man den ungestörten Zustand über bestimmte Normen, so kennzeichnet das Verhalten dieser Normen nach Aufbringen der Störung die Stabilität des ungestörten Systems. Zur Beschreibung des Normverhaltens wird ein Maß für die Störung und eines für die Norm festgelegt. Überschreitet die Störung das ihr zugeordnete Maß nicht, so nennt man den ungestörten Zustand stabil, wenn die durch die Störung beeinflusste Norm das ihrerseits zugeordnete Maß ebenfalls nicht überschreitet, im anderen Fall heißt der Zustand instabil.

Viele heutige Arbeiten im Bereich der kinetischen Stabilitätstheorie stützen sich auf den Stabilitätsbegriff im Sinne LJAPUNOWS, der den modernen Konzepten angehört. Hierbei werden von allen möglichen Störungen nur die Störungen der Anfangsbedingungen in Betracht gezogen. Ausgangspunkt ist das System nichtlinearer im allgemeinen inhomogener Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.129)$$

dessen Lösung  $\mathbf{x}_0(t) = (x_{i0}(t))$  als ungestörte Bewegung auf Stabilität untersucht werden soll. Insbesondere wird  $\mathbf{x}_0 = const.$  nicht ausgeschlossen. Mit der Störung  $\Delta \mathbf{x}(t)$  erhält man die gestörte Bewegung oder den Störansatz

$$x_i(t) = x_{i0}(t) + \Delta x_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.130)$$

der umgestellt und nach dem Parameter  $t$  differenziert zu den in allen Fällen homogenen und gewöhnlich nichtlinearen Störungsgleichungen oder auch Variationsgleichungen

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{i0} &= f_i(x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2, \dots, x_{n0} + \Delta x_n, t) \\ &\quad - f_i(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}, t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.131)$$

führt. Die Störungsdifferentialgleichungen sind die Grundlage der sogenannten ersten Methode von LJAPUNOW. Gleichung (2.131) besitzt die triviale Lösung

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = 0. \quad (2.132)$$

Im Sonderfall linearer Störungsgleichungen erhält man eine homogene Zustandsgleichung der Form

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{x} \quad (2.133)$$

mit der im allgemeinen zeitvarianten Systemmatrix  $\mathbf{A}$ . Bei der Untersuchung einer Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_0 = \text{const}$  sind die Koeffizienten konstant und damit ist  $\mathbf{A}$  zeitinvariant. Mit dem Parameter  $\lambda$  und dem  $(n, 1)$ -Konstantenvektor  $\mathbf{r}$  führt der Exponentialansatz

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{r} \exp(\lambda t) \quad (2.134)$$

auf das Eigenwertproblem

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.135)$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0, \quad (2.136)$$

die  $n$  Lösungen (komplexe Eigenwerte  $\lambda_i$ ) mit zugehörigen komplexen Rechtseigenvektoren  $\mathbf{r}_i$  besitzt. Die linke Seite von (2.136) heißt charakteristisches Polynom, welches vom Grade  $n$  ist. Da die Eigenwerte  $\lambda_i$  negative beziehungsweise positive Realteile aufweisen können, was als Maß für die Dämpfung beziehungsweise Anfachung interpretiert werden kann, entscheidet das Vorzeichen der Realteile über die Stabilität des Systems. Die Imaginärteile der Eigenwerte entsprechen dann den gedämpften Eigenkreisfrequenzen. Die LJAPUNOWschen Stabilitätskriterien für lineare Störungsgleichungen mit konstanten Koeffizienten besagen:

- Die ungestörte Gleichgewichtslage  $\mathbf{x}_0$  ist asymptotisch stabil, wenn alle Realteile der Lösungen von (2.136) negativ sind.
- $\mathbf{x}_0$  ist instabil, wenn mindestens ein Eigenwert einen positiven Realteil besitzt.
- Schwache Stabilität ist möglich, wenn kein Eigenwert einen positiven Realteil besitzt aber mindestens ein Eigenwert mit verschwindendem Realteil existiert.

Bei der Untersuchung linearer Systeme mit periodischen Koeffizienten treten an die Stelle der charakteristischen Exponenten die aus der FLOQUET-Theorie entstammenden charakteristischen Multiplikatoren, die ein Maß dafür sind, wie sich die Amplitude nach Durchlauf einer Periode ändert.

Das Auftreten beliebiger (zeitvarianter) Koeffizienten verkompliziert die Untersuchung auf Stabilität sehr und es können keine allgemeinen Stabilitätskriterien aufgestellt werden. Im Sinne des Bisherigen spricht man dann von *charakteristischen Zahlen*.

Im allgemeinen wird jedoch (2.129) auf nichtlineare Störungsgleichungen (2.131) führen, die offenbar viel schwieriger zu handhaben sind. Zwei grundsätzliche Vorgehensweisen sind hierbei zu unterscheiden. Die naheliegende ist, die Gleichungen (2.129) zu linearisieren und somit die Störungsgleichungen der ersten Näherung mit den oben beschriebenen Methoden zu analysieren. Die zweite Methode besteht darin, die nichtlinearen Störungsgleichungen über die Bestimmung von Zwischenintegralen der Differentialgleichungen zu untersuchen.

Die zweite oder direkte Methode von LJAPUNOW geht auch wieder von (2.131) aus, ist jedoch nicht bestrebt, diese zu lösen, sondern verwendet Vergleichsfunktionen bestimmter

Eigenschaften in der Umgebung der eigentlichen Lösung. Die Schwierigkeit, Variationsgleichungen zu lösen, wird also mit der Schwierigkeit, Vergleichsfunktionen zu finden, erkaufte. Im einfachsten skalaren Fall von (2.129) mit

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \quad (2.137)$$

kann auf die Stabilität der Gleichgewichtslage  $\dot{x} = 0$  aus der Existenz einer Funktion  $v = v(x)$  mit den folgenden Eigenschaften geschlossen werden:

1.  $v(x)$  ist positiv definit, d.h.

$$v(x) > 0 \quad \text{für } x \neq 0, \quad v(0) = 0 \quad (2.138)$$

2. die Ableitung von  $v(x)$  entlang der Trajektorien  $x = x(t)$  des Systems (2.137) ist wenigstens negativ semidefinit, d.h.

$$\dot{v}(x) = \frac{\partial v}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial v}{\partial x} f(x) \leq 0. \quad (2.139)$$

Funktionen mit diesen beiden Eigenschaften werden LJAPUNOW-Funktionen genannt.

Im nichtautonomen Fall

$$\dot{x} = f(t, x) \quad , \quad f(t, 0) = 0 \quad (2.140)$$

dienen als LJAPUNOW-Funktionen Funktionen  $v = v(t, x)$  mit der Ableitung

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t, x), \quad (2.141)$$

die gewisse zusätzliche Forderungen erfüllen.

Für ein tieferes Verständnis sei auf die Literatur wie beispielsweise [29], [51] und [57] verwiesen.

Aufgrund der unterschiedlichen Definitionen stochastischer Konvergenz und der unterschiedlichen Möglichkeiten, einen stochastischen Prozeß zu beschreiben, können verschiedene Definitionen für stochastische Stabilität angegeben werden. In [47] ist ausgehend vom Stabilitätsbegriff von LJAPUNOW für deterministische Systeme ein Überblick über unterschiedliche Definitionen für *Stabilität im Mittel*, *Stabilität in Wahrscheinlichkeit* und *fast sichere Stabilität* zu finden.

Die Gleichgewichtslösung  $\dot{\mathbf{X}}_t = 0$  der stochastischen Differentialgleichung

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}_t)dt + \mathbf{G}(t, \mathbf{X}_t)d\mathbf{W}_t \quad (2.142)$$

heißt stabil im  $p$ -ten Mittel oder  $p$ -stabil mit ( $p > 0$ ), wenn für ein gegebenes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß mit

$$|\mathbf{X}_0| < \delta \quad (2.143)$$

die Beziehung

$$E[\sup_{t \geq t_0} |\mathbf{X}_t(\mathbf{X}_0)|^p] < \varepsilon \quad (2.144)$$

erfüllt wird. Hierbei beinhaltet Gleichung (2.144) für  $p = r$  auch alle Gleichungen mit  $p = q$  für  $q < r$ . Für lineare Systeme genügt damit Stabilität im Quadratmittel ( $p = 2$ ) nachzuweisen, was auf ein rein deterministisches Problem führt.

Die Gleichgewichtslösung heißt schwach stabil in Wahrscheinlichkeit, wenn für gegebene  $\varepsilon_1 > 0$  und  $\varepsilon_2 > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, so daß mit (2.143) die Beziehung

$$P(|\mathbf{X}_t(\mathbf{X}_0)| > \varepsilon_1) < \varepsilon_2 \quad (2.145)$$

erfüllt wird. Die Gleichgewichtslösung heißt stabil in Wahrscheinlichkeit, wenn (2.145) ersetzt wird durch

$$P(\sup_{t \geq t_0} |\mathbf{X}_t(\mathbf{X}_0)| > \varepsilon_1) < \varepsilon_2 \quad (2.146)$$

Die Stabilität in Wahrscheinlichkeit ist bequem im Gebrauch in der stochastischen LJAPUNOW-Theorie. Mit Hilfe des adjungierten FOKKER-PLANCK-Operators  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger$  (2.106) und einer LJAPUNOW-Funktion  $v(t, x)$  erhält man die Bedingungen für die Stabilität in Wahrscheinlichkeit durch die Diskussion der Definitheit von  $v$  und  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger v$ . Offensichtlich ersetzt in der Untersuchung stochastischer Systeme  $\mathcal{L}_{FP}^\dagger v$  die Ableitung  $\dot{v}$  (2.141), die im deterministischen Fall benutzt wird.

Fast sichere Stabilität oder Stabilität mit Wahrscheinlichkeit 1 liegt vor, wenn

$$P\left(\lim_{|\mathbf{x}_0| \rightarrow \mathbf{0}} \sup_{t \geq t_0} |\mathbf{X}_t(\mathbf{X}_0)| = 0\right) = 1. \quad (2.147)$$

Damit ist die fast sichere Stabilität stochastischer dynamischer Systeme äquivalent zur deterministischen Stabilität fast aller Realisierungen und sie entspricht ihr für verschwindenden Diffusionsterm.

### 2.3.2 Bifurkationen

In deterministischen Systemen sind Bifurkationen besondere Punkte, an denen sich das Systemverhalten qualitativ in Abhängigkeit von Parametereigenschaften ändert, insbesondere ändert sich das Stabilitätsverhalten stationärer Lösungen eines dynamischen Systems bei stetiger Änderung eines Parameters. Insofern wird auch von Lösungsverzweigungen gesprochen. So beschreibt in diesem Zusammenhang JACOBI 1834 in [35] das Pänomen zweier Lösungen, die für einen bestimmten Grenzwert (Bifurkationspunkt) des Parameters zusammen fallen, während der Ausdruck *Bifurcation* 1885 durch POINCARÉ in [70] eingeführt wird.

Ein Punkt heißt *Fixpunkt* von  $f$ , wenn gilt  $f(y) = y$ . Zur Beschreibung von Bifurkationen betrachte man eine Trajektorie (Orbit). Ein Punkt  $y_n$  ist dann ein Fixpunkt, wenn der nächste erzeugte Punkt  $y_{n+1}$  wieder den selben Wert hat wie  $y_n$ , das heißt aus

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y \quad (2.148)$$

folgt für einen Fixpunkt die Bedingung  $\Delta y = 0$ . Im Zeitbereich gilt mit dem Zeitschritt  $\Delta t$

$$\Delta y = f(y)\Delta t \quad (2.149)$$

und für  $\Delta t \rightarrow 0$  schließlich

$$\dot{y} = f(y), \quad (2.150)$$

so daß die Fixpunkte  $y_0$  auch über die Bedingung  $\dot{y} = 0$  gefunden werden können.

Ein Fixpunkt  $y$  heißt *Attraktor*, wenn für alle Startwerte  $x$  aus der Umgebung  $U_\delta(y)$  der Grenzwert der Trajektorie  $y$  ist. Attraktoren sind also stabile Fixpunkte. Umgekehrt spricht man von einem *Repellor*, wenn es keine noch so kleine Umgebung  $U_\delta(y)$  gibt, die die Bedingung für den Attraktor erfüllt. Damit sind Repelloren instabile Fixpunkte. *Sattelpunkte* können beim Einführen einer weiteren Dimension entstehen. Ist ein Fixpunkt in einer Ebene ein Attraktor, in der dazu senkrechten Ebene jedoch ein Repellor, so handelt es sich um einen Sattelpunkt. Existieren mehrere Attraktoren, so werden deren Einzugsgebiete (Bassins) durch eine *Separatrix* getrennt, die ein Repellor ist. Der Weg aus einem Punkt im Bassin in den zugehörigen Attraktor wird *Transiente* genannt, der Wechsel von einem Attraktor in einen anderen Attraktor mit Überquerung der Separatrix heißt *Phasenübergang*.

Zur Bestimmung der Art der Fixpunkte wird das dynamische System (2.150) im Fixpunkt  $y_0$  für kleine Auslenkungen linearisiert. Es ergibt sich eine Gleichung der Form (2.133), worin  $\mathbf{A}$  die JACOBI-Matrix im Fixpunkt darstellt. Lokale Stabilität liegt vor, wenn keiner der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  einen positiven Realteil besitzt. Eine genauere Klassifizierung ist nach folgendem Schema möglich:

Art des Fixpunktes	Bedingungen
stabiler Fokus	$\text{sp } \mathbf{A} < 0, \det \mathbf{A} > 0, (\text{sp } \mathbf{A})^2 < 4 \det \mathbf{A}$
instabiler Fokus	$\text{sp } \mathbf{A} > 0, \det \mathbf{A} > 0, (\text{sp } \mathbf{A})^2 < 4 \det \mathbf{A}$
stabiler Knoten	$\text{sp } \mathbf{A} < 0, \det \mathbf{A} > 0, (\text{sp } \mathbf{A})^2 > 4 \det \mathbf{A}$
instabiler Knoten	$\text{sp } \mathbf{A} > 0, \det \mathbf{A} > 0, (\text{sp } \mathbf{A})^2 > 4 \det \mathbf{A}$
Sattelpunkt	$\det \mathbf{A} < 0$

Tabelle 2.2: Stabilitätseigenschaften der Fixpunkte und zugehörige Bedingungen.

Die plötzliche Änderung des Verhaltens (Attraktor/Repellor), das Verschwinden und das Entstehen von Fixpunkten durch die stetige Änderung eines Systemparameters kennzeichnet also den Bifurkationspunkt. Der maßgebliche Parameter wird als Bifurkationsparameter bezeichnet. Bei lokalen Bifurkationen handelt es sich um Kollisionen von Attraktoren, Repelloren und Sattelpunkten, die durch die Änderung des Bifurkationsparameters auftreten und die über die Eigenwerte erkannt werden können. Damit kennzeichnet eine Änderung der Stabilität der Fixpunkte (stabil  $\rightarrow$  instabil, instabil  $\rightarrow$  stabil) ebenfalls den Bifurkationspunkt. Bei globalen Bifurkationen, die im weiteren nicht betrachtet werden, kollidieren nicht die Attraktoren, Repelloren und Sattelpunkte selbst, sondern deren Einzugs- beziehungsweise Abstoßungsgebiete, so daß sich das globale Verhalten ändert. Globale Bifurkationen können nicht über die Eigenwerte berechnet werden.

Man unterscheidet *katastrophische (catastrophic)* Bifurkationen von *subtilen (subtle)* Bifurkationen. Bei katastrophischen Bifurkationen führt eine minimale Änderung des Bifurkationsparameters zu einer sehr großen Änderung des Systemverhaltens. Das ist beispielsweise der Fall, wenn im Bifurkationspunkt ein Attraktor verschwindet oder zumindest nicht stetig fortgesetzt wird. Die subtilen Bifurkationen kommen seltener vor, man erkennt sie im Bifurkationsdiagramm daran, daß Attraktoren nicht einfach verschwinden, sondern zumindest eine stetige Fortsetzung in einem anderen Zweig haben.

Bei eindimensionalen, autonomen Differentialgleichungen

$$\dot{y} = f(y, \mu) \quad (2.151)$$

treten folgende wichtige Arten von Bifurkationen [101] auf, deren Bifurkationsdiagramme in den Abbildungen 2.2 bis 2.4 ersichtlich sind:

1. *Tangenten-Bifurkation* (auch: regulärer Umkehrpunkt, limit point, saddle-node, nose oder knee):  $\frac{\partial \mu}{\partial y}$  wechselt am kritischen Punkt  $(\mu_0, y_0)$  sein Vorzeichen, ein instabiler Sattelpunkt geht dabei in einen stabilen Knoten über, oder umgekehrt (deshalb auch Sattel-Knoten-Bifurkation). Superkritisches Verhalten tritt für  $\frac{f_{yy}(\mu_0, y_0)}{f_{\mu}(\mu_0, y_0)} < 0$ , subkritisches Verhalten tritt für  $\frac{f_{yy}(\mu_0, y_0)}{f_{\mu}(\mu_0, y_0)} > 0$  auf.

Beispiele:

I. superkritisch:

$$\dot{y} = \mu - y^2$$

Fixpunkte bei  $y_0^{(1),(2)} = \pm\sqrt{\mu}$  für  $\mu > 0$

II. subkritisch:

$$\dot{y} = \mu + y^2$$

Fixpunkte bei  $y_0^{(1),(2)} = \pm\sqrt{-\mu}$  für  $\mu < 0$

Das Stabilitätsverhalten der Fixpunkte ist jeweils über das obige Schema gegeben.

2. *Transkritische Bifurkation*: Zwei Fixpunkte schneiden sich im Bifurkationspunkt, wobei sie ihre Stabilität austauschen. Superkritisches Verhalten tritt für  $\frac{f_{yy}(\mu_0, y_0)}{f_{\mu y}(\mu_0, y_0)} < 0$ , subkritisches Verhalten tritt für  $\frac{f_{yy}(\mu_0, y_0)}{f_{\mu y}(\mu_0, y_0)} > 0$  auf.

Beispiele:

I. superkritisch:

$$\dot{y} = \mu y - y^2$$

Die Fixpunkte sind mit  $y_0^{(1)} = 0$  und  $y_0^{(2)} = \mu$  gegeben.

II. subkritisch:

$$\dot{y} = \mu y + y^2$$

Die Fixpunkte sind mit  $y_0^{(1)} = 0$  und  $y_0^{(2)} = -\mu$  gegeben.

3. *Heugabel-Bifurkation (pitchfork bifurcation)*: Superkritisches Verhalten tritt für  $\frac{f_{yyy}(\mu_0, y_0)}{f_{\mu y}(\mu_0, y_0)} < 0$ , subkritisches Verhalten tritt für  $\frac{f_{yyy}(\mu_0, y_0)}{f_{\mu y}(\mu_0, y_0)} > 0$  auf.

Beispiele:

I. Ein stabiler Fixpunkt geht in zwei stabile und einen instabilen Fixpunkt über (*superkritische Bifurkation*):

$$\dot{y} = \mu y - y^3$$

oder:

II. Ein instabiler Fixpunkt geht in zwei instabile und einen stabilen Fixpunkt über (*subkritische Bifurkation*):

$$\dot{y} = \mu y + y^3$$

Die wichtigste Bifurkation für höherdimensionale Systeme von Differentialgleichungen ist die HOPF-Bifurkation, bei der ein stabiler Grenzzyklus von einem Fixpunkt abzweigt. Sie

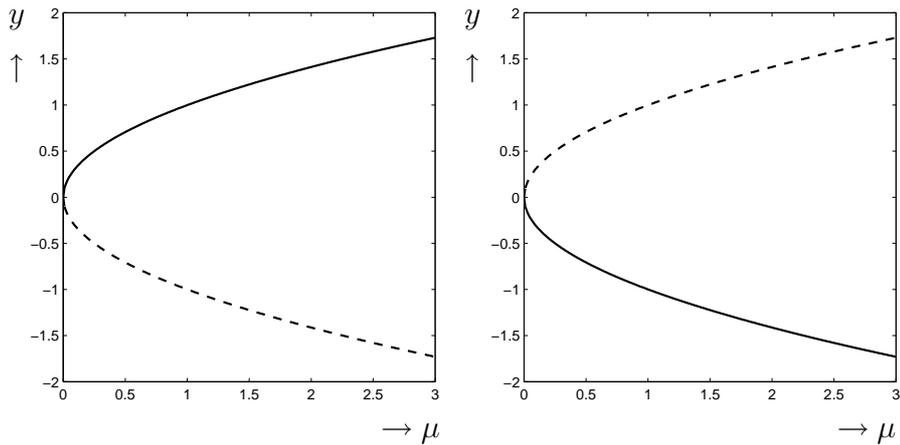


Abbildung 2.2: Bifurkationsdiagramme. Links superkritische, rechts subkritische Tangentebifurkation. Stabile Äste sind durchgezogen, instabile Äste sind strichliert dargestellt.

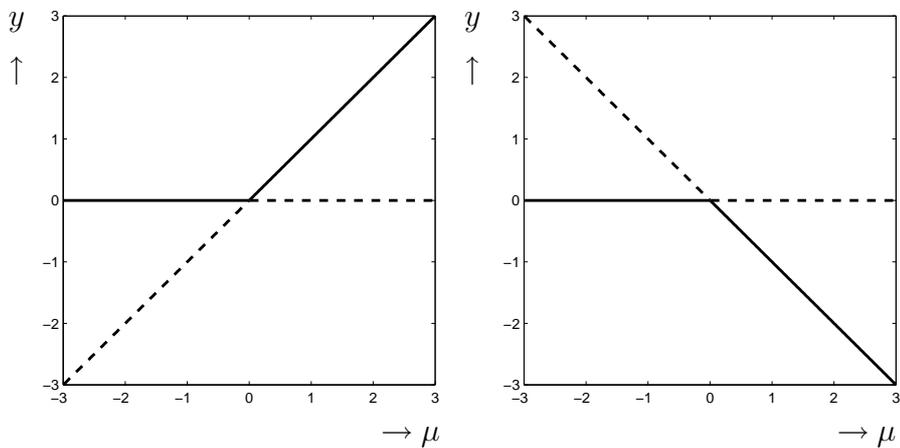


Abbildung 2.3: Bifurkationsdiagramme. Links superkritische, rechts subkritische transkritische Bifurkation. Stabile Äste sind durchgezogen, instabile Äste sind strichliert dargestellt.

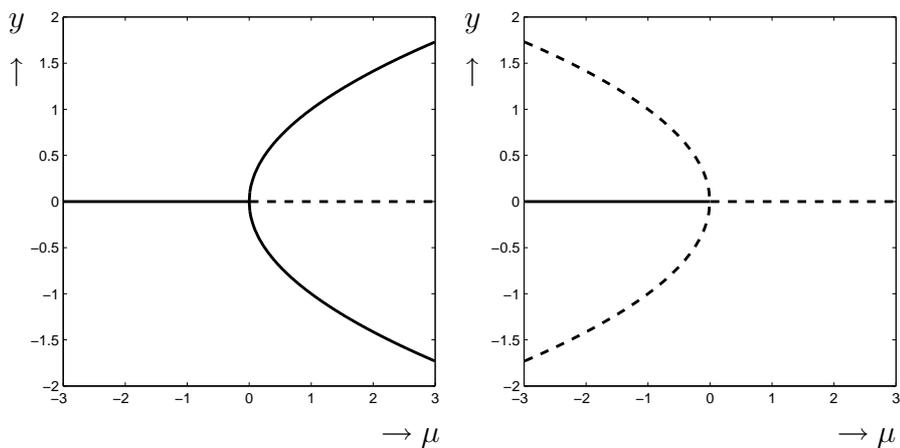


Abbildung 2.4: Bifurkationsdiagramme. Links superkritische, rechts subkritische Heugabelbifurkation. Stabile Äste sind durchgezogen, instabile Äste sind strichliert dargestellt.

entspricht in Polarkoordinaten einer Heugabel-Bifurkation des Radialanteils. Die Begriffe super- und subkritisch gelten analog für die HOPF-Bifurkation und es existieren ebenfalls mathematische Bedingungen dafür, den Typ zu bestimmen. Allerdings werden hierfür die Koeffizienten der dritten Näherung der nichtlinearen Koeffizienten benötigt. Mit einer Transformation auf Polarkoordinaten kann man diese Fragestellung in der Amplitude auf das eindimensionale Problem der Heugabel-Bifurkation zurückführen während die Winkelkoordinate mit konstanter Winkelgeschwindigkeit keine Bifurkation aufweist.

Bei der Untersuchung des Verzweigungsverhaltens nichtlinearer stochastischer dynamischer Systeme unterscheidet man zwei unterschiedliche Herangehensweisen. In [7] werden die Begriffe *D-Bifurkation* und *P-Bifurkation* eingeführt. Sie stehen für den *dynamischen* und für den *phänomenologischen* Ansatz, wobei in der vorliegenden Arbeit die P-Bifurkation in Betracht gezogen wird.

Die D-Bifurkation betrachtet den Stabilitätsverlust invarianter Maße und das Entstehen neuer invarianter Maße bei Veränderung des Bifurkationsparameters. Der dynamische Ansatz ist daher unter dem Blickwinkel, daß ein invariantes Maß das stochastische Analogon eines Fixpunktes ist, eine Verallgemeinerung der deterministischen Bifurkationstheorie. Die Stabilität invarianter Maße wird durch LJAPUNOW-Exponenten beschrieben, die mit dem multiplikativen Ergodentheorem [67] gegeben sind, siehe zum Beispiel in [28], [87] und [98]. Die Behandlung des zur D-Bifurkation gehörenden stochastischen Attraktors und der stochastischen Separatrix ist in [41] und in [71] zu finden.

Der phänomenologische Ansatz untersucht qualitative Änderungen der Dichteverteilungen stationärer Maße, die durch eine Änderung des Bifurkationsparameters hervorgerufen werden. Hierzu zählt die Entstehung, Vermehrung und Auslöschung von Spitzen wie auch von Tälern der Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte in Abhängigkeit des Systemparameters. Allerdings besteht kein Zusammenhang zwischen der P-Bifurkation und der über LJAPUNOW-Exponenten beschriebenen stochastischen Stabilität [7]. Stationäre Maße und ihr qualitatives Verhalten spielen jedoch in den Anwendungen eine wichtige Rolle. So wird in der stochastischen Strukturmechanik ein stationäres Maß als Antwort eines mechanischen Systems auf eine stationäre stochastische Anregung bezeichnet [54].

Die analytischen Aussagen über die stochastischen Attraktoren und Separatrizen bei der Untersuchung einer D-Bifurkation sind dann ebenfalls nicht mehr uneingeschränkt auf die Struktur einer P-Bifurkation übertragbar. Es ist somit wünschenswert, Kriterien zu finden, die eine phänomenologische Untersuchung an bekannte Begriffe anlehnt. Lediglich die Umschreibung für einen Punkt auf einer stochastischen Separatrix kann übernommen werden. Für diese Punkte gilt, daß die Wahrscheinlichkeit, mit dem nächsten Zuwachs in einem der beiden angrenzenden Bassins zu landen, jeweils 0,5 betragen muß. Aufschlußreiche Informationen können über die Extremwerte in der stationären Verteilungsdichte erlangt werden. Es erscheint daher sinnvoll, die relativen Maxima als stochastische P-Attraktoren und die relativen Minima als stochastische P-Repelloren oder gegebenenfalls als stochastische P-Separatrizen zu bezeichnen, womit ein Analogon zum deterministischen Fall und zur D-Bifurkation geschaffen werden kann.

## 2.4 Anregungsmodelle

Die regellose Schwingungsanregung physikalischer dynamischer Systeme kann als stationärer stochastischer Prozeß aufgefaßt werden, der einerseits durch Meßdaten, andererseits durch statistische Größen vollständig charakterisiert werden kann. Um Simulationen dynamischer Systeme durchführen zu können, werden jedoch Trajektorien der Anregungsprozesse benötigt, die es zu erzeugen gilt. Eine ausschließliche Verwendung von Meßdaten ermöglicht keine allgemeine Untersuchung, da einerseits viel Speicherplatz und Übertragungsbandbreite benötigt wird und andererseits immer nur Meßdaten verwendet werden können, die tatsächlich vorliegen. Es ist daher im Sinne allgemeiner Untersuchungen, daß konstruktive Verfahren zur Verfügung stehen, mit welchen künstlich stochastische Prozesse erzeugt werden können, die bestimmten gewünschten physikalischen Anforderungen entsprechen. Damit ist zusätzlich eine exakte Wiederholbarkeit der Simulation sowie das einfache Variieren ausgewählter Parameter gewährleistet.

Das weiße Rauschen beziehungsweise der WIENER Prozeß stellen keine physikalisch realisierbaren Prozesse dar, da sie von unbeschränkter Variation sind und für ihre Verwirklichung eine unendlich große Leistung erforderlich wäre. Die herausragende Stellung des WIENER Prozesses, die sich zunächst aus mathematischer Notwendigkeit ergab, bleibt dennoch bestehen, da es sich um einen Grenzprozeß handelt, aus dem neue Prozesse mit gewünschten statistischen Eigenschaften durch Herausfilterung unerwünschter Frequenzen mittels Gewichtung der Amplituden erzeugt werden können. Zudem stellt er eine ideale Grundlage zur Charakterisierung und zum Vergleich dynamischer Systeme dar. Im mathematischen Modell geschieht die Filterung durch mindestens eine zusätzliche Gleichung, die den gefilterten Prozeß beschreibt.

Viele technisch relevante Anregungsprozesse weisen Tiefpaßcharakter auf. Sie entsprechen dem in Tabelle 2.1 aufgeführten roten Rauschen, dessen spektrale Leistungsdichte umgekehrt proportional zum Quadrat der Frequenzen ist. Da die Rauschleistung in realisierbaren Prozessen begrenzt ist, flacht die Leistungsdichtekurve im Bereich niedriger Frequenzen ab.

### 2.4.1 Filter mit Nichtlinearität im Diffusionsterm

Das folgende nichtlineare Filter

$$\dot{Z}_t = -\omega_g Z_t + \sqrt{a^2 - Z_t^2} \sigma \xi_t \quad (2.152)$$

mit der Nichtlinearität im Diffusionsterm weist bei der Eck- oder Grenzfrequenz  $\omega_g$  einen Knick im Schaubild der spektralen Leistungsdichte auf, so daß Frequenzen oberhalb  $\omega_g$  mit steigender Frequenz herausgefiltert werden, siehe Abbildung 2.5.

Die zugehörige ITÔ-Gleichung

$$dZ_t = (-\omega_g Z_t - \frac{1}{2} \sigma^2 Z_t) dt + \sqrt{a^2 - Z_t^2} \sigma dW_t \quad (2.153)$$

führt auf die FPK-Gleichung

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ - \left( \omega_g + \frac{\sigma^2}{2} \right) z p(z, t) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z^2} [(a^2 - z^2) \sigma^2 p(z, t)] , \quad (2.154)$$

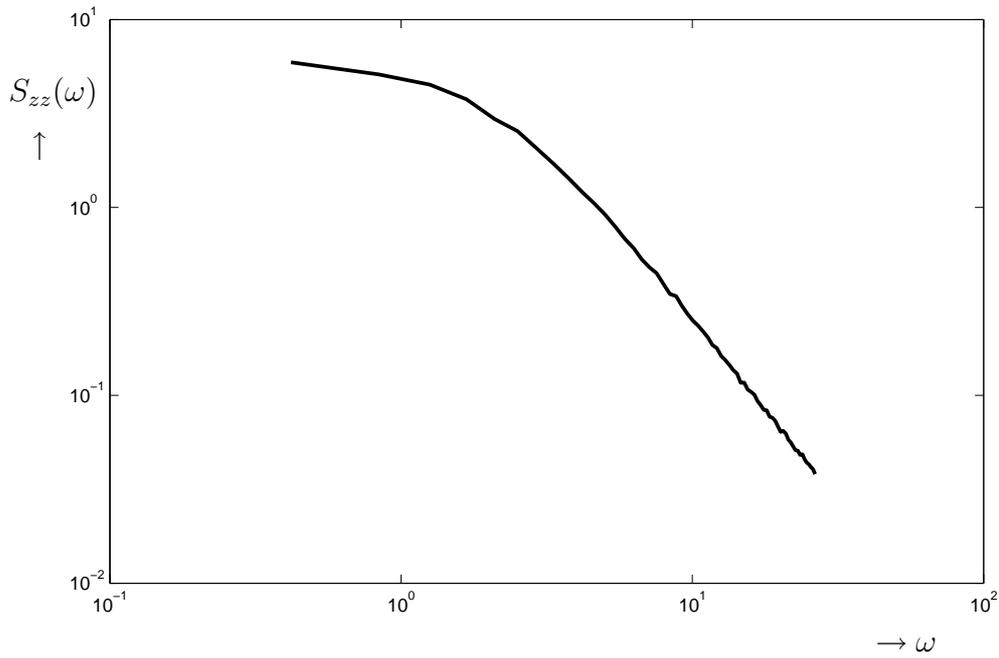


Abbildung 2.5: Spektraldichte  $S_{zz}(\omega)$  für das Filter nach Gleichung (2.152).

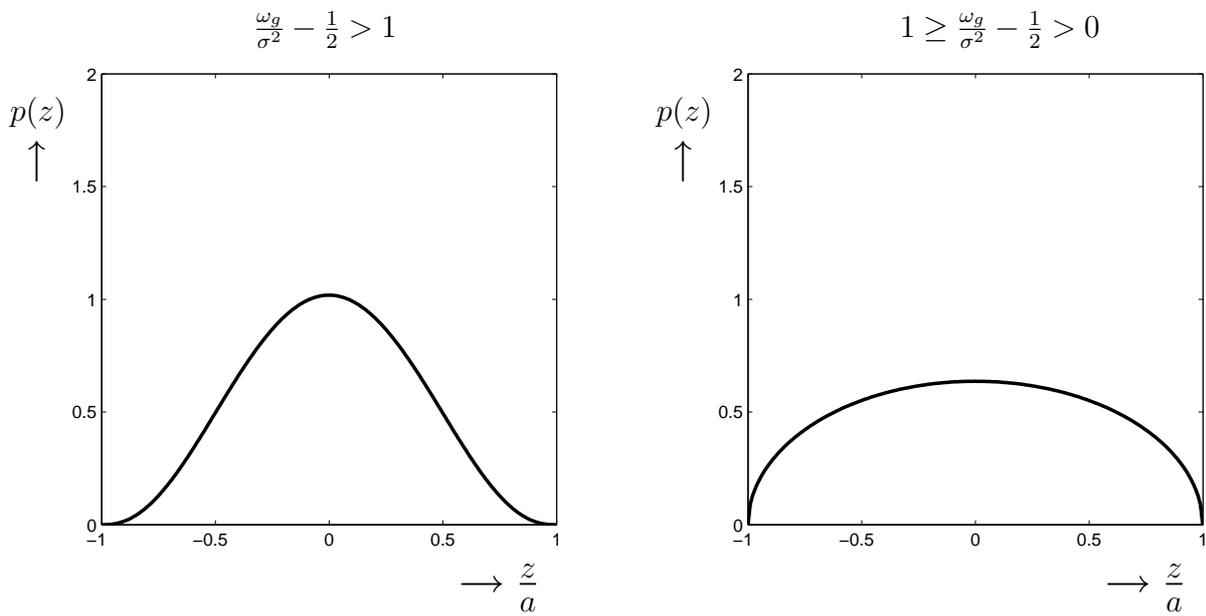


Abbildung 2.6: Verteilungsdichten  $p(z)$  für das Filter nach Gleichung (2.152). Bei diesen Parameterwerten verschwindet die Verteilungsdichte an den Rändern.

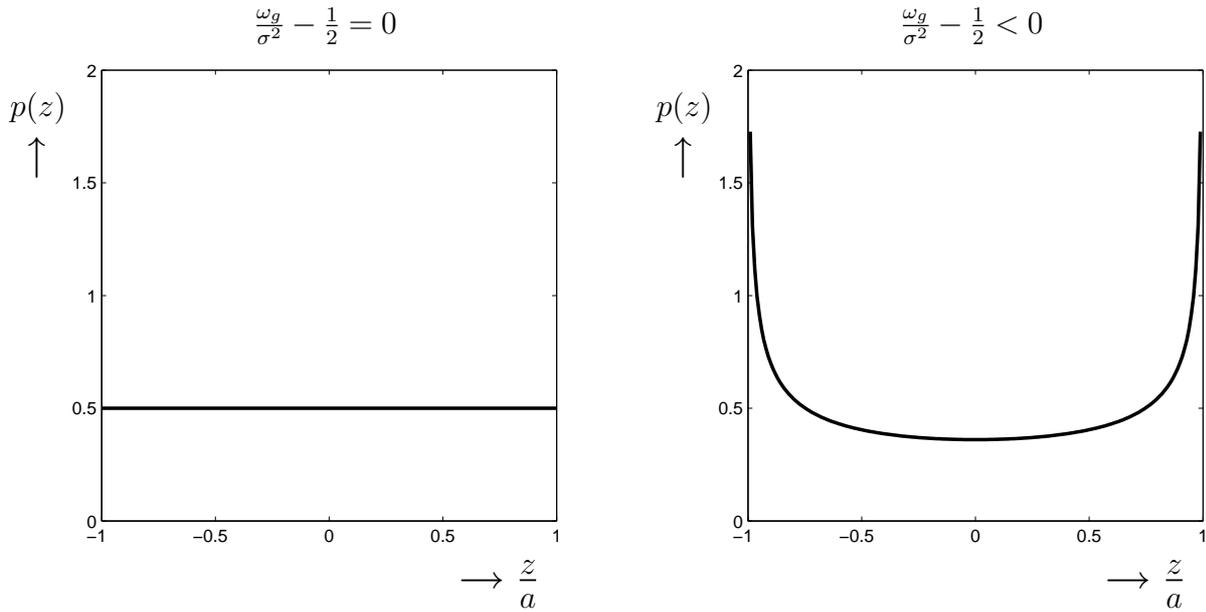


Abbildung 2.7: Verteilungsdichten  $p(z)$  für das Filter nach Gleichung (2.152) mit Gleichverteilung (links) und singulärem Rand (rechts).

die im stationären Fall die Lösung

$$p(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\omega_g}{\sigma^2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} a^{\frac{2\omega_g}{\sigma^2}} \Gamma\left(\frac{\omega_g}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)} (a^2 - z^2)^{\left(\frac{\omega_g}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)}, \quad z \in [-a, a] \quad (2.155)$$

besitzt. Hierin bedeutet  $\Gamma(\cdot)$  die sogenannte Gamma-Funktion, die auch als EULERSches Integral zweiter Gattung bezeichnet wird:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}^+ \quad (2.156)$$

beziehungsweise

$$\Gamma(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{xu} e^{-e^u} du \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}_0^+. \quad (2.157)$$

Bildlich ausgedrückt ist die Gamma-Funktion eine Verallgemeinerung der nur für natürliche Zahlen definierten Fakultät. Für den Sonderfall  $n \in \mathbb{N}^+$  gilt dann  $\Gamma(n) = (n - 1)!$  [56].

Die Amplitude des Filters (2.152) ist auf das Intervall  $[-a, a]$  begrenzt und über  $\omega_g$  und  $\sigma$  lassen sich drei grundsätzlich unterschiedliche Verteilungsdichten erzeugen. Für  $\frac{\omega_g}{\sigma^2} - \frac{1}{2} > 0$  verschwindet die Verteilungsdichte für Amplituden an den Rändern des Intervalls  $[-a, a]$ , während für  $\frac{\omega_g}{\sigma^2} - \frac{1}{2} < 0$  die Verteilungsdichte für Amplituden des Betrages  $a$  singulär wird. Im Fall  $\frac{\omega_g}{\sigma^2} - \frac{1}{2} = 0$  erhält man eine Gleichverteilung über das gesamte Intervall. In Abbildung 2.6 und 2.7 sind für die drei Fälle die Verteilungsdichten über der normierten Amplitude aufgetragen. Für Parameterwerte  $\frac{\omega_g}{\sigma^2} > \frac{3}{2}$  ergeben sich zusätzlich zwei Wendepunkte in der Verteilungsdichte an der Stelle  $z = \pm a \sigma (2\omega_g - 2\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}$ , so daß eine Glockenkurve entsteht, die jedoch im Gegensatz zur GAUSSschen Glockenkurve nicht asymptotisch verläuft, sondern an den Rändern  $z = -a$  und  $z = a$  tatsächlich verschwindet.

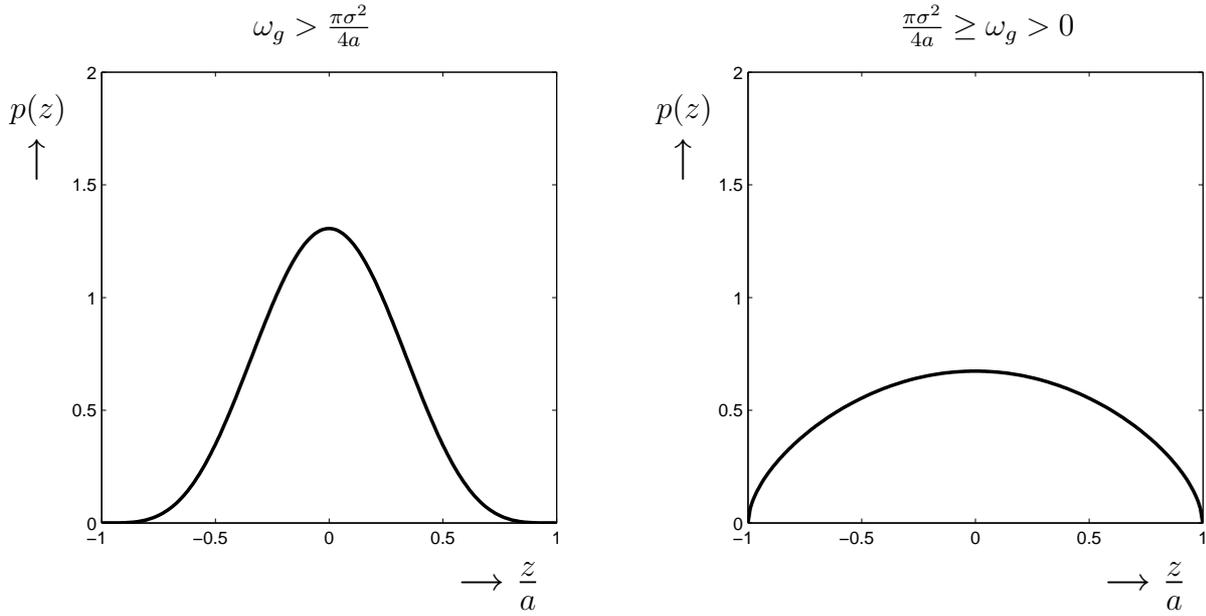


Abbildung 2.8: Verteilungsdichten  $p(z)$  für das Filter nach Gleichung (2.158). Bei diesen Parameterwerten verschwindet die Verteilungsdichte an den Rändern.

### 2.4.2 Filter mit Nichtlinearität im Driftterm

Das folgende Filter

$$\dot{Z}_t = -\omega_g \tan\left(\frac{\pi}{2a} z\right) + \sigma \xi_t \tag{2.158}$$

besitzt die Nichtlinearität im Driftterm, so daß der Korrekturterm nach WONG-ZAKAI verschwindet und die ITÔ-Gleichung mit der STRATONOWITSCH-Gleichung identisch ist

$$dZ_t = -\omega_g \tan\left(\frac{\pi}{2a} z\right) dt + \sigma dW_t, \tag{2.159}$$

und damit die zugehörige FPK-Gleichung wie folgt aufgestellt werden kann

$$\frac{\partial p(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\omega_g \tan\left(\frac{\pi}{2a} z\right) p(z, t) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\sigma^2 p(z, t)] = 0. \tag{2.160}$$

Sie besitzt im stationären Fall die Lösung

$$p(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2a\omega_g}{\pi\sigma^2} + 1\right)}{2a \Gamma\left(\frac{2a\omega_g}{\pi\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2a} z\right)^{\frac{4a\omega_g}{\pi\sigma^2}}, \quad z \in [-a, a]. \tag{2.161}$$

Die Nichtlinearität im Driftterm führt zu Schwierigkeiten in der Bildung der Korrelationsfunktion. Auch hier gibt es für verschiedene Parameterwerte von  $\omega_g$  drei grundsätzlich unterschiedliche Verteilungsdichten, wie die Abbildungen 2.8 und 2.9 zeigen. Für  $\omega_g > \frac{\pi\sigma^2}{4a}$  existieren zwei Wendepunkte im Graphen der Verteilungsdichte an den Stellen

$$z = \frac{\pm 2a}{\pi} \arctan\left(\frac{\pi\sigma}{\sqrt{\pi(4a\omega_g - \pi\sigma^2)}}\right). \tag{2.162}$$

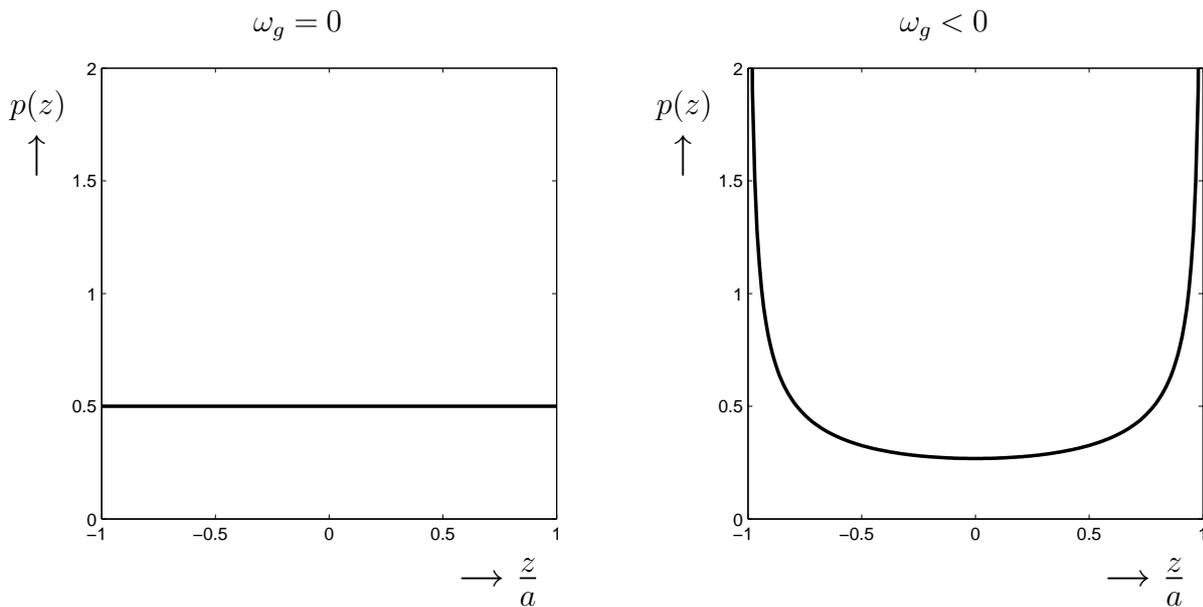


Abbildung 2.9: Verteilungsdichten  $p(z)$  für das Filter nach Gleichung (2.158) mit Gleichverteilung (links) und singulärem Rand (rechts).

Für  $\omega_g = 0$  liegt eine Gleichverteilung für  $z$  im Intervall  $[-a, a]$  vor, während für negatives  $\omega_g$  die Verteilungsdichte an den Intervallrändern singulär wird. Die Spektraldichte ist in Abbildung 2.10 angegeben. In beiden Filtern verursachen die Parameter mit der Singularität in der Verteilungsdichte numerische Schwierigkeiten.

### 2.4.3 Lineare Filtersysteme

Das lineare Tiefpaßfilter

$$\dot{Z}_t = -\omega_g Z_t + \sigma \xi_t \quad (2.163)$$

besitzt die Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte

$$p(z) = \frac{\sqrt{\omega_g} \exp\left(-\frac{\omega_g z^2}{\sigma^2}\right)}{\sigma \sqrt{\pi}}, \quad (2.164)$$

dessen Graph in Abbildung 2.11 zu sehen ist. Den Tiefpaßcharakter veranschaulicht Abbildung 2.12.

Eine Möglichkeit, Trajektorien stochastischer Prozesse mit vorgegebener Leistungsspektraldichte zu erzeugen, ist in klassischer Weise durch die Synthese harmonischer Funktionen mit Zufallskomponenten von SHINOZUKA [86] und RICE [78] entwickelt worden. Nachteilig hierbei ist die große Zahl notwendiger harmonischer Funktionen und damit verbunden eine große Zahl an Parametern, um befriedigende Näherungen zu erhalten. Außerdem werden hierdurch nur Signale mit einem dichten Linienspektrum und nicht mit einem kontinuierlichen Spektrum erhalten. Das von WEDIG [96] vorgeschlagene Verfahren zur Erzeugung

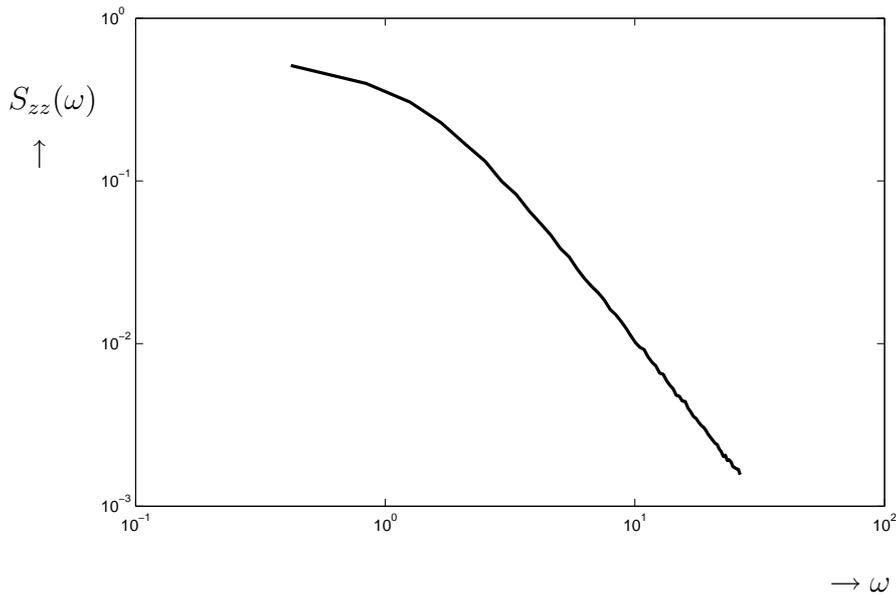


Abbildung 2.10: Spektraldichte  $S_{zz}(\omega)$  für das Filter nach Gleichung (2.158).

stationärer Prozesse vermeidet diese Nachteile. Demnach liefert ein lineares dynamisches System unter GAUSSscher weißer Rauschanregung im stationären Zustand den gesuchten Prozeß. Eine Anpassung der Systemparameter gestattet es, eine vorgegebene Leistungsspektraldichte fast beliebig zu approximieren. Dieses Verfahren wurde in [2] weiterentwickelt.

Üblicherweise werden die Spektraldichten doppelt logarithmisch aufgetragen, so daß es sinnvoll ist, die zu approximierende Leistungsspektraldichte durch eine stetige, in doppelt logarithmischem Sinne stückweise lineare Kennlinie als Vorgabespektrum  $S_y^v(\omega)$  anzunähern. Bei geeigneter Wahl der Frequenzstützstellen  $\omega_i$  und der zugehörigen Intensitäten  $X_i$  kann unter Einhaltung gewisser Randbedingungen fast jede Leistungsspektraldichte beliebig genau beschrieben werden.

$$S_y^v(\omega) = X_i \left( \frac{\omega}{\omega_i} \right)^{\alpha_i} \quad \text{für } \omega_i \leq \omega < \omega_{i+1}$$

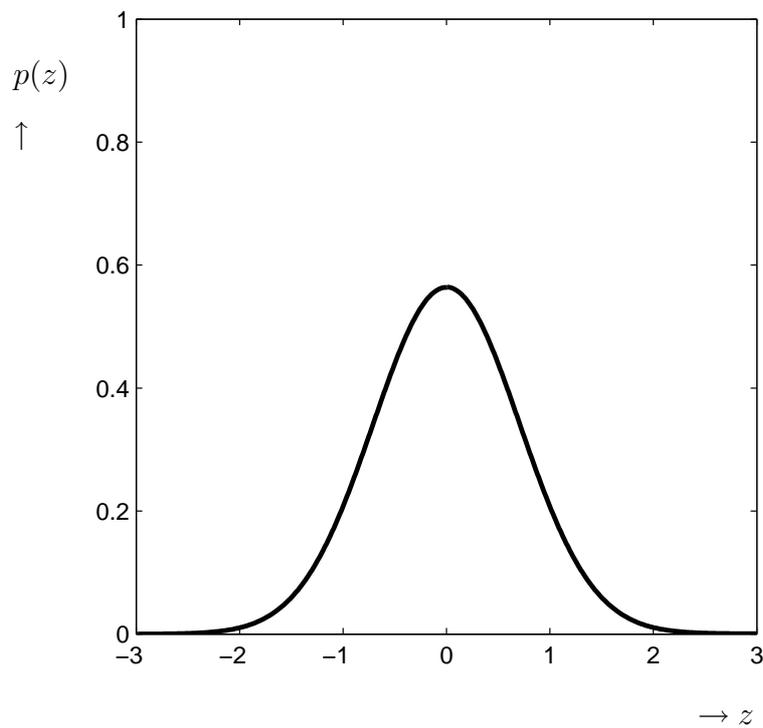
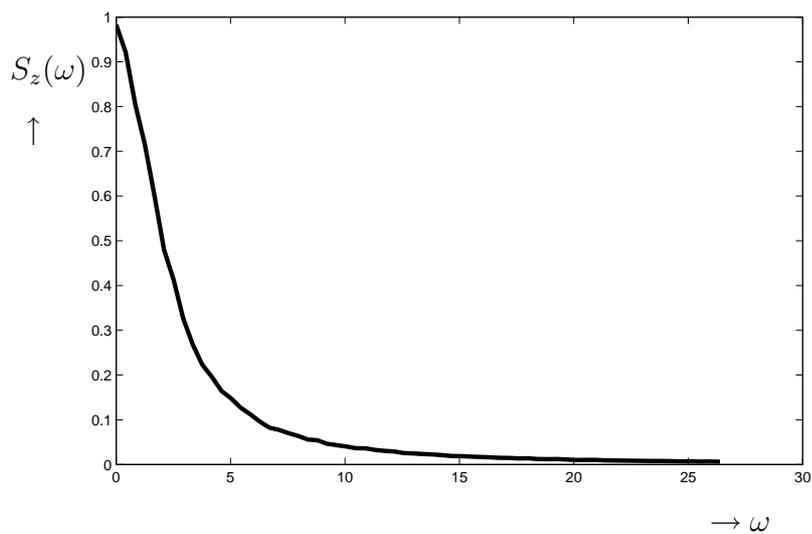
$$X_i \geq 0; \alpha_i = \frac{\log(X_{i+1}/X_i)}{\log(\omega_{i+1}/\omega_i)}; \quad i = 0, 1, \dots, k \quad (2.165)$$

$$\omega_0 = 0; \omega_{k+1} = \infty; \alpha_0 \geq 0; \alpha_k \leq -2.$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen (2.64) und (2.65) erfordern eine Beschränkung der Steigungen  $\alpha_0$  am Anfang und  $\alpha_k$  im Auslauf des Spektrums in der angegebenen Weise.

Die Generierung des gesuchten Prozesses erfolgt durch ein lineares dynamisches System  $n$ -ter Ordnung, das durch einen GAUSSschen weißen Rauschprozeß  $\xi_t$  gemäß Abschnitt 2.2.6 angeregt wird. Dadurch erhält man aufgrund der Transformationseigenschaft linearer Systeme ein normalverteiltes, im allgemeinen farbiges Ausgangssignal  $Y_t$

$$Y_t = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \frac{d^i Z_t}{dt^i} \quad (2.166)$$

Abbildung 2.11: Verteilungsdichte von (2.163) für  $\omega_g = \sigma = 1$ .Abbildung 2.12: Spektrale Leistungsdichte von (2.163) für  $\omega_g = \sigma = 1$ .

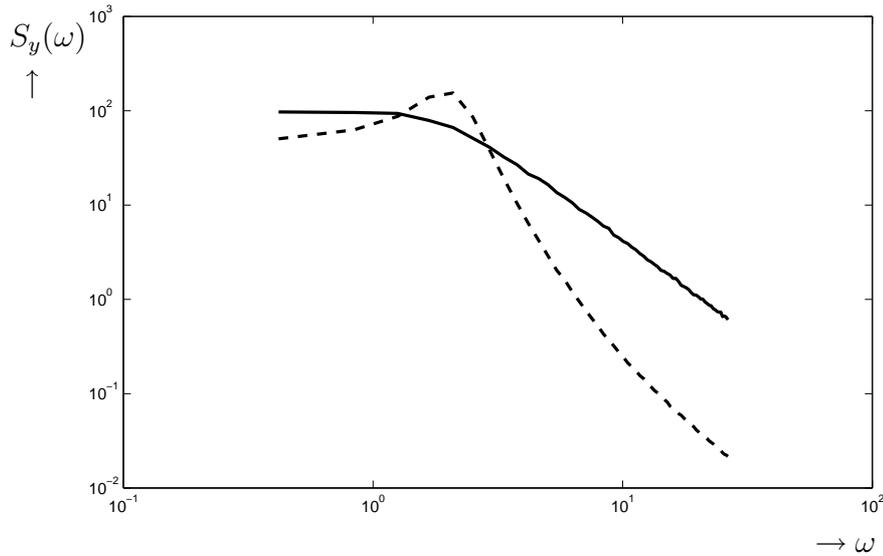


Abbildung 2.13: Spektraldichten  $S_y(\omega)$  für unterschiedliche Systemparameter nach (2.168). Gemeinsame Parameter:  $a_1 = 1, a_2 = 10, b_0 = 3$ . Durchgezogene Linie:  $a_0 = 0, 1, b_1 = 20$ . Strichlierte Linie:  $a_0 = 0, 15, b_1 = 1$ .

mit dem Zwischenprozeß  $Z_t$  aus

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i Z_t}{dt^i} = \xi_t, \quad a_n \neq 0. \tag{2.167}$$

Das lineare dynamische System (2.166) mit dem Zwischenprozeß  $Z_t$  gemäß (2.167) liefert einen Prozeß  $Y_t$  am Systemausgang mit der Leistungsspektraldichte

$$S_y(\omega) = \frac{b_0^2 + (b_1^2 - 2b_0b_2)\omega^2 + \dots + b_{n-1}^2\omega^{2n-2}}{a_0^2 + (a_1^2 - 2a_0a_2)\omega^2 + \dots + a_n^2\omega^{2n}}. \tag{2.168}$$

Eine direkte Anpassung von (2.168) an das Vorgabespektrum  $S_y^v(\omega)$  führt auf ein praktisch kaum lösbares Optimierungsproblem. Die zu bestimmenden Systemparameter können jedoch auf lineare Weise ermittelt werden, indem der Korrelationsdifferentialoperator des Systems an die Vorgabe angepaßt wird [97]. Dadurch können die homogenen Parameter  $a_i$  linear berechnet werden. Die verbleibenden inhomogenen Parameter  $b_i$  ergeben sich durch Abstimmung der Systemkorrelationsfunktion auf die entsprechenden Anfangswerte der Vorgabekorrelationsfunktion. Mit diesem Verfahren erhält man suboptimale Lösungen, die jedoch in den meisten Fällen befriedigen. Eine höhere Approximationsgüte wird durch ein nichtlineares Verfahren erreicht, das in [2] vorgestellt wird. Der Rechenaufwand erhöht sich aber stark. Abbildung 2.13 zeigt beispielhaft zwei unterschiedliche Spektraldichten eines linearen Filters zweiter Ordnung, das sich in den Systemparametern unterscheidet.

# Kapitel 3

## Lösungsverfahren

Die Lösung  $\mathbf{X}_t$  einer stochastischen Differentialgleichung (2.112) beziehungsweise (2.113) ist zunächst aufgrund des stochastischen Charakters nicht im klassischen Sinn interpretierbar, vielmehr bedarf es einer durch den in Abschnitt 2.2 erwähnten Fundamentalsatz von KOLMOGOROW legitimierten Beschreibung des invarianten resp. stationären Maßes der Verteilungsdichte des stochastischen Prozesses. Zwei grundsätzliche Methoden werden hierbei unterschieden, und zwar die numerische und die analytische Beschreibung.

### 3.1 Monte-Carlo-Simulation

Bei der Monte-Carlo-Simulation wird eine Lösungstrajektorie durch numerische Integration der stochastischen Differentialgleichung erzeugt. Unter der Annahme von Ergodizität (2.60) für den Prozeß  $\mathbf{X}_t$  bezüglich einer zu definierenden Funktion  $g(\mathbf{X}_t)$  ist es nun möglich, aus einer hinreichend langen Beobachtung die Verteilungsdichte  $p_{\mathbf{X}}(x)$  zu ermitteln. Für jeden Zeitschritt wird der erhaltene Ereignisvektor nach einem festzulegenden Raster diskretisiert und nach einer Summation über alle Zeitschritte einer statistischen Auswertung unterzogen, wodurch die Häufigkeitsverteilung für den Ereignisvektor erhalten wird. Für den skalaren Fall, der komponentenweise auf Gleichungssysteme angewendet wird, erhält man bei  $n$  Zeitschritten mit  $n(x_i) = |\{x | x_i \leq x \leq x_i + \Delta x_i\}|$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{n(x_i)}{n} = P(x_i \leq x \leq x_i + \Delta x_i). \quad (3.1)$$

Darin bedeutet  $|\{\cdot\}|$  die Mächtigkeit oder Kardinalität einer Menge und gibt somit die Anzahl der Elemente an. Bei langer Simulationsdauer  $T$ , hinreichend kleinen Zeitschritten  $\Delta t$  und ebenso hinreichend kleinen  $\Delta x_i$  erhält man mit  $n = \frac{T}{\Delta t}$

$$p_X(x_i) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n(x_i)}{\Delta x_i n} \right). \quad (3.2)$$

Um die stochastischen Elemente bei der Erzeugung der Trajektorie zu berücksichtigen, werden Folgen von Zufallszahlen benötigt. Physikalische Methoden scheiden für die digitale Simulation aus Praktikabilitätsgründen aus. Daher wurden rekursive Methoden entwickelt, um

Folgen zufälliger und möglichst unkorrelierter Zufallszahlen mit großer Periode und möglichst gleichmäßiger Verteilung im Intervall  $[0, 1[$  zu erzeugen. Einer der ersten Algorithmen war der sogenannte Middle-Square-Generator VON NEUMANNs, der in den frühen vierziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts entwickelt wurde [65]. Ihm haftet jedoch der Fehler an, daß er sich schon nach einer kurzen Folge wiederholt. Generell haftet dieser Fehler natürlich allen algorithmisch erzeugten Zufallszahlen an<sup>1</sup>, so daß man von Pseudozufallszahlen spricht. Es kann daher nur versucht werden, die Periodenlänge so groß wie möglich zu halten. Andere Pseudozufallszahlengeneratoren, die zwar besser sind als der Middle-Square-Generator, aber immer noch nicht richtig befriedigend sind die FIBONACCI- und Schieberegistergeneratoren.

Die heute meistens eingesetzten Pseudozufallszahlengeneratoren sind auf LEHMER zurückgehende lineare Kongruenzgeneratoren [49] der Form<sup>2</sup>

$$x_i \bmod m = a \cdot x_{i-1} + b, \text{ mit Anfangswert } x_0; \{x_0, a, b\} \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^+, \quad (3.3)$$

oder als Äquivalenz geschrieben

$$x_i \equiv a \cdot x_{i-1} + b \pmod{m}, \text{ mit Anfangswert } x_0; \{x_0, a, b\} \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^+, \quad (3.4)$$

wobei die maximale Periodenlänge  $m$  dann erreicht wird, wenn die Parameter  $a$ ,  $b$  und  $m$  den Bedingungen des Satzes von KNUTH genügen:

1.  $\text{ggT}(m, b) = 1$  (ggT - größter gemeinsamer Teiler)
2.  $a \equiv 1 \pmod{p}$  für alle Primteiler  $p$  von  $m$
3.  $a \equiv 1 \pmod{4}$ , falls 4 ein Teiler von  $m$  ist.

Für ein tiefergehendes Verständnis sei auf die Literatur wie beispielsweise [1] oder [50] verwiesen.

Die mit (3.4) erzeugten Pseudozufallszahlen sind im Intervall  $[0, 1[$  annähernd gleichverteilt. Aus zwei solcher statistisch unabhängigen Zufallszahlenfolgen  $U_n$  und  $V_n$  lassen sich mit Hilfe einer BOX-MULLER-Transformation [10]

$$\begin{aligned} R_{1n} &= \sqrt{-2 \ln U_n} \cos(2\pi V_n) \\ R_{2n} &= \sqrt{-2 \ln U_n} \sin(2\pi V_n) \end{aligned} \quad (3.5)$$

zwei standardnormalverteilte Zufallszahlenfolgen  $R_{1n}$  und  $R_{2n}$  erzeugen. Numerisch robuster und schneller [39] ist die Polarform [43] der BOX-MULLER-Transformation, die als Polar-MARSAGLIA-Transformation [59] bezeichnet wird

$$\left. \begin{aligned} R_{1n} &= (2U_n - 1) \sqrt{-\frac{2 \ln W_n}{W_n}} \\ R_{2n} &= (2V_n - 1) \sqrt{-\frac{2 \ln W_n}{W_n}} \end{aligned} \right| \text{ mit } W_n = (2U_n - 1)^2 + (2V_n - 1)^2 \leq 1. \quad (3.6)$$

<sup>1</sup>J. VON NEUMANN wird bspw. zitiert in D. E. Knuth: The Art of Computer Programming, Vol. 2, 1968: „Anyone who considers arithmetical methods of producing random numbers is, of course, in a state of sin“.

<sup>2</sup>In der Zahlentheorie heißen zwei Zahlen  $a$  und  $b$  kongruent modulo  $m$ , mit  $\{a, b\} \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}^+$ , wenn  $m$  die Differenz  $(a - b)$  teilt.

Die Bedingung  $(2U_n - 1)^2 + (2V_n - 1)^2 \leq 1$  wird entsprechend dem Flächenverhältnis eines Viertelkreises zum Quadrat dessen Radius' mit einer Wahrscheinlichkeit von  $\pi/4 \approx 0,79$  erfüllt, wobei die zu großen Werte von  $W_n$  einfach verworfen werden.

Um verschiedene Diskretisierungsverfahren einschätzen und vergleichen zu können, bedarf es einer Quantifizierung ihrer Konvergenzrate. Nach [39] heißt eine allgemeine zeitdiskrete Approximation  $X^{\Delta t}(T)$  stark konvergent mit Ordnung  $\gamma > 0$  zur Zeit  $T$ , wenn eine positive Konstante  $C$ , die nicht von  $\Delta t$  abhängt, existiert, so daß

$$E[|X_T - X_T^{\Delta t}|] \leq C \cdot (\Delta t)^\gamma \quad (3.7)$$

gilt. Man spricht von schwacher Konvergenz der Ordnung  $\beta$ , wenn

$$|E[g(X_t)] - E[g(X_T^{\Delta t})]| \leq C \cdot (\Delta t)^\beta \quad (3.8)$$

erfüllt ist.

Die Diskretisierung des stochastischen Differentialgleichungssystems wurde nach der Methode von MARUYAMA [60] vorgenommen, die ein explizites stochastisches EULER-Verfahren darstellt, in welchem der Differentialquotient durch einen Differenzenquotienten ersetzt wird. Damit wird die stochastische Differentialgleichung (2.112) zu

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{X}_n) \Delta t_n + \mathbf{G}(t_n, \mathbf{X}_n) \Delta \mathbf{W}_n \quad (3.9)$$

mit den Differenzen

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} ds \quad (3.10)$$

und

$$\Delta \mathbf{W}_n = \mathbf{W}_{t_{n+1}} - \mathbf{W}_{t_n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\mathbf{W}_s \quad (3.11)$$

mit Anfangswerten  $\mathbf{X}_0$ . Wegen der nicht vorgreifenden Eigenschaft des expliziten EULER-Verfahrens wird das stochastische Integral an der unteren Integrationsgrenze ausgewertet, so daß als Grundlage zur Diskretisierung in diesem Falle eine ITÔ-Gleichung dienen muß. Aufgrund der Eigenschaft (2.84) gilt für das normierte WIENER-Inkrement

$$\Delta \mathbf{W}_{t_n} = \mathbf{R}_n \sqrt{\Delta t_n}. \quad (3.12)$$

Somit erhält man aus der stochastischen Differentialgleichung (2.127) bzw. (2.128)

$$\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{X}_n) \Delta t + \mathbf{G}(t_n, \mathbf{X}_n) \mathbf{R}_n \sqrt{\Delta t}. \quad (3.13)$$

Das stochastische EULER-Verfahren ist mit  $\gamma = 0,5$  stark konvergent und mit  $\beta = 1$  schwach konvergent. Weitere Verfahren zur Diskretisierung sind in [39] zu finden.

Der große Vorteil numerischer Verfahren (insbesondere des Verfahrens nach EULER-MARUYAMA) gegenüber analytischen Methoden ist die einfache und schnelle Anwendbarkeit auf unterschiedliche Systemgleichungen. Ein weiterer Vorteil liegt darin, daß als Anregungsgrößen neben numerisch erzeugten Prozessen auch gemessene Trajektorien verwendet werden können. Der Nachteil der benötigten Simulationsdauer schwand mit jeder Generation neuer und schnellerer Rechner, so daß er schon heute kaum mehr ins Gewicht fällt. Allerdings wird bei jeder Änderung der Parameter eine neue Simulation nötig. Die Ergebnisse analytischer Methoden erlauben dagegen rasch durchführbare Parametervariationen und eine Diskussion der Verteilungsdichtefunktionen.

### 3.2 Lösung der Fokker-Planck-Kolmogorow-Gleichung

Mit Hilfe der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung (FPK-Gleichung) (2.103) wird eine lineare elliptische (deterministische) partielle Differentialgleichung für das stochastische Problem (2.127) angegeben, deren Lösung  $p(\mathbf{x}, t)$  den stochastischen Prozeß  $\mathbf{X}_t$  gemäß (2.41) vollständig definiert. Für stationäre Prozesse vereinfacht sich (2.103) zu

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t)] = 0. \quad (3.14)$$

Da die Koeffizienten im allgemeinen nicht konstant sind, ist es nur für äußerst wenige Spezialfälle möglich, die gesuchte Verteilungsdichte in analytisch geschlossener Form anzugeben.

Ein mögliches Näherungsverfahren zur Berechnung „schwacher Lösungen“ der FPK-Gleichung beruht auf der Reihenentwicklung der gesuchten Verteilungsdichte in orthogonale Funktionen. Eine Lösung  $p(\mathbf{x}, t)$  der FPK-Gleichung wird „starke Lösung“ genannt, wenn  $p(\mathbf{x}, t)$  im Definitionsbereich zweimal stetig differenzierbar ist und der Gradient von  $p(\mathbf{x}, t)$  stetig auf dem Rand fortgesetzt werden kann. Der Lösungsbegriff kann jedoch erweitert werden, so daß auch Funktionen, die nicht die vollen Anforderungen an die Differenzierbarkeit erfüllen, als Lösungen zugelassen werden können. Diese Lösungen, die dann schwächere Anforderungen, wie beispielsweise die physikalische Annahme des Prinzips der geringsten Arbeit, erfüllen, werden „schwache Lösungen“ genannt. Starke Lösungen sind immer auch schwache Lösungen, die Umkehrung gilt natürlich nicht generell. Daß es sinnvoll und notwendig ist, den Begriff der schwachen Lösung einzuführen, zeigt unter anderem das Beispiel der Saite mit knickförmiger Anfangsgestalt als Lösung der eindimensionalen Wellengleichung.

Zur Definition schwacher Lösungen wurde mit der Entwicklung eines verallgemeinerten Funktionsbegriffs und der damit ermöglichten Einführung verallgemeinerter Ableitungen [26] das Hindernis der Differenzierbarkeit überwunden. Ein anderer Weg zur Definition schwacher Lösungen, auch LERAY-HOPF-Lösungen genannt, vermeidet das Problem der Differenzierbarkeit und führt über die Verwendung von adjungierten Differentialoperatoren und Testfunktionen [52], [31].

Sei  $\mathcal{L}$  ein linearer Differentialoperator auf einem Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Eine Funktion  $u$  heißt schwache Lösung der Differentialgleichung  $\mathcal{L}u = 0$ , wenn

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}u)\varphi \, d^n x = \int_{\Omega} u(\mathcal{L}^\dagger \varphi) \, d^n x = 0 \quad (3.15)$$

für alle Testfunktionen  $\varphi$  gilt. Im Falle stationärer stochastischer Prozesse wird (3.15) mit dem FOKKER-PLANCK-Operator als linearem Operator  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{FP}$  und mit der Verteilungsdichte als Lösung  $u = p(\mathbf{x})$  wegen (2.108) erfüllt. Das heißt, daß alle Lösungen der stationären FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung (3.14) zumindest schwache Lösungen sind.

Mit einer geeigneten Koordinatentransformation gemäß [36] wird somit die Verteilungsdichte  $p(u_1, \dots, u_{2d-1})$  in

$$p(u_1, \dots, u_{2d-1}) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_{2d-1}=-\infty}^{\infty} c_{k_1, \dots, k_{2d-1}} f_{i_1}(u_1) \cdots f_{i_{2d-1}}(u_{2d-1}) \quad (3.16)$$

entwickelt. Eine geeignete Wahl der Ansatzfunktionen  $f_{i_1}(u_1) \cdots f_{i_{2d-1}}(u_{2d-1})$  ist hierbei von großer Wichtigkeit. Aufgrund unterschiedlicher Periodizität werden in  $\varphi_1$ -Richtung  $2\pi$ -periodische und in allen anderen Richtungen  $\pi$ -periodische Funktionen eingesetzt. Wegen Gleichung (2.28) gilt für die Verteilungsdichte in transformierten Koordinaten

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{u}) \cdot |J| \quad , \quad \mathbf{u} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{d-1}, a_1, \dots, a_d)^T. \quad (3.17)$$

Die Entwicklung der Verteilungsdichte in Amplitudenrichtung erfolgt mit Polynomen

$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n e_{nk} a^k, \quad (3.18)$$

die die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_c^d P_n(a) P_m(a) g(a) da = c_m \delta_{nm} = \begin{cases} c_m & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases} \quad (3.19)$$

mit der Gewichtsfunktion  $g(a)$  auf dem Intervall  $[c, d]$  erfüllen müssen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann mit  $e_{00} = 1$  normiert werden, dann wird (3.19) zur Orthonormalitätsbedingung mit  $c_m = 1$ . Über eine stochastische Mittelwertbildung in den Winkeln läßt sich aus der verbleibenden FPK-Gleichung eine Lösung für die nullte Näherung der Randverteilungsdichte  $p_0(a)$  der Amplituden angeben, die als Gewichtsfunktion  $g(\mathbf{a})$  in (3.19) eingesetzt wird. Damit läßt sich die gesuchte Näherung der Verteilungsdichte  $p(a)$  in die unendliche Reihe

$$p(a) = p_0(a) \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(a) \quad (3.20)$$

entwickeln. Hierin sind die Wichtungskoeffizienten

$$C_n = \int_0^{+\infty} P_n(a) p(a) da \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.21)$$

und mit (3.18) und der beschriebenen Normierung ergibt sich

$$C_0 = 1, \quad C_n = \sum_{k=0}^n e_{nk} m_k \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (3.22)$$

worin  $m_k$  das Moment der Ordnung  $k$  von  $p(a)$  ist

$$m_k = \int_0^{+\infty} a^k p(a) da \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.23)$$

Ist  $p(a)$  als Ergebnis einer experimentellen Schwingungsanalyse in Form von Zahlentabellen oder graphisch vorhanden, so kann mit den o.g. Mitteln eine analytische Näherung für die Verteilungsdichte angegeben werden, um die Meßdaten für weitere Rechnungen nutzbar zu

machen. Wird jedoch eine theoretische Schwingungsanalyse durchgeführt, so sind die  $k$ -ten Momente (3.23) näherungsweise durch

$$m_k \approx \int_0^{+\infty} a^k p_0(a) da \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.24)$$

zu berechnen. Zur Bestimmung der  $e_{nk}$  für (3.22) wird über die Orthonormalitätsbeziehung (3.19) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} P_0(a) P_n(a) p_0(a) da &= 0 \\ \int_0^{\infty} P_1(a) P_n(a) p_0(a) da &= 0 \\ \int_0^{\infty} P_2(a) P_n(a) p_0(a) da &= 0 \\ &\vdots \\ \int_0^{\infty} P_n(a) P_n(a) p_0(a) da &= 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n e_{00} a^0 e_{nk} a^k \right] p_0(a) da &= 0 \\ \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n e_{10} a^0 e_{nk} a^k + \sum_{k=0}^n e_{11} a^1 e_{nk} a^k \right] p_0(a) da &= 0 \\ \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^n e_{20} a^0 e_{nk} a^k + \sum_{k=0}^n e_{21} a^1 e_{nk} a^k + \sum_{k=0}^n e_{22} a^2 e_{nk} a^k \right] p_0(a) da &= 0 \\ &\vdots \\ \underbrace{\int_0^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=0}^n e_{nm} a^m e_{nk} a^k + \sum_{k=0}^n e_{nn} a^n e_{nk} a^k \right] p_0(a) da}_{=0} &= 1 \end{aligned} \quad (3.26)$$

aufgestellt und vereinfacht zu

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} [e_{00} a^0 e_{n0} a^0 + e_{00} a^0 e_{n1} a^1 + e_{00} a^0 e_{n2} a^2 + \dots + e_{00} a^0 e_{nn} a^n] p_0(a) da &= 0 \\ \int_0^{\infty} [e_{11} a^1 e_{n0} a^0 + e_{11} a^1 e_{n1} a^1 + e_{11} a^1 e_{n2} a^2 + \dots + e_{11} a^1 e_{nn} a^n] p_0(a) da &= 0 \\ &\vdots \\ \int_0^{\infty} [e_{nn} a^n e_{n0} a^0 + e_{nn} a^n e_{n1} a^1 + e_{nn} a^n e_{n2} a^2 + \dots + e_{nn} a^n e_{nn} a^n] p_0(a) da &= 1 \end{aligned} \quad (3.27)$$

beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_n & \cdots & \cdots & m_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{n0} \\ e_{n1} \\ \vdots \\ e_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{e_{nn}} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

worin  $e_{mn}$  frei wählbar ist.

Von Vorteil bei diesem Verfahren ist, daß die Näherungslösung analytisch vorliegt und deswegen Parametervariationen leicht durchgeführt werden können. Auf der anderen Seite gibt es allerdings Nachteile, so ist die Ermittlung einer geeigneten Koordinatentransformation sowie der orthogonalen Polynome sehr stark von den zu untersuchenden Systemgleichungen abhängig und zeitaufwendig. Zudem kann es vorkommen, daß in den Randbereichen der so erhaltenen Näherungen für die Verteilungsdichten negative Werte auftreten, die definitionsgemäß nach dem ersten KOLMOGOROWschen Axiom ausgeschlossen sind. Bei komplexeren Systemen ist nicht nur die Aufstellung der Ansatzfunktionen schwieriger, es kommt noch hinzu, daß die Randbedingungen in manchen Fällen aus Monte-Carlo-Simulationen gewonnen werden müssen [94].

### 3.3 Mehrparametrische Approximation

Ein stochastischer Prozeß ist durch die Angabe seiner Verteilungsdichte vollständig beschrieben. Wie schon in Abschnitt 2.2.1 bemerkt, kann der Prozeß näherungsweise durch die Angabe der Momente der Verteilungsdichte charakterisiert werden. Normalverteilte Prozesse sind sogar durch die Angabe lediglich des Mittelwertvektors  $\mathbf{m}_x$  und durch die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  gegeben. Bei linearen Systemen bleibt die GAUSS'sche Eigenschaft eines Eingangssignals erhalten, so daß auch das Ausgangssignal normalverteilt ist. Nichtlineare Systeme „verzerren“ die Verteilungsdichte, häufig aber kann bei einem GAUSS'schen Eingangssignal ein GAUSS-ähnliches Ausgangssignal erwartet werden, was natürlich von der Nichtlinearität des Systems abhängt.

Die Ansatzfunktion für die Verteilungsdichte wird also auf der Basis einer Normalverteilung oder einer anderen Verteilung, die der vermuteten Lösung nahe kommt, angenommen. Hierin werden an geeigneter Stelle noch zusätzlich freie Parameter eingefügt, die an die Momente angepaßt werden. Weitere Bedingungen, wie beispielsweise ein Übergang zu exakten Lösungen für bestimmte Parameter, können ebenso durch freie Parameter erfüllt werden. Es ist jedoch nicht immer ganz einfach, geeignete Ansatzfunktionen hierfür zu finden, was einiges an Erfahrung erfordert. Einige Möglichkeiten hierzu werden in den Beispielsrechnungen beschrieben.

## Kapitel 4

# Heugabel-Bifurkation unter Rauschanregung

### 4.1 Weiße Rauschanregung

Betrachtet werde das dynamische System erster Ordnung

$$\dot{x} = (\mu - \gamma x^2)x, \quad \gamma > 0, \quad (4.1)$$

welches die Fixpunkte  $x_0 = 0 \forall \mu$ , sowie  $x_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}$  und  $x_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} \forall \mu > 0$  besitzt. Die Vorzeichen der Eigenwerte der JACOBI-Matrix geben nun in Abhängigkeit von  $\mu$  an, daß  $x_0$  für  $\mu < 0$  sowie  $x_1$  und  $x_2$  für  $\mu > 0$  Attraktoren sind. Allerdings ändert sich das Vorzeichen von  $x_0$  mit wachsendem Parameter  $\mu$ , so daß aus dem Attraktor bei  $\mu = 0$  ein Repellor wird. Im Bifurkationspunkt dieser als superkritische Heugabel- oder Pitchfork-Bifurkation bezeichneten Verzweigung wird ein stabiler Fixpunkt instabil, gleichzeitig entstehen zwei stabile Äste von Fixpunkten, die im Bifurkationspunkt beginnen. Es handelt sich daher um eine subtile Bifurkation, siehe Abbildung 4.1.

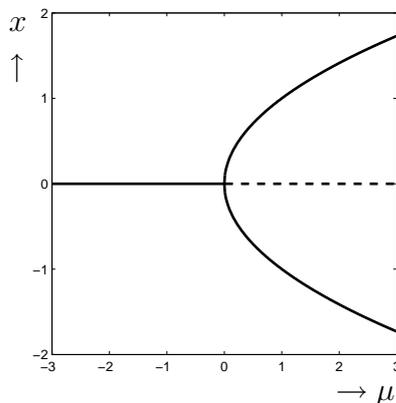


Abbildung 4.1: Fixpunkte des Systems (4.1) für  $\gamma = 1$ . Stabile Fixpunkte (durchgezogen) und instabile Fixpunkte (strichliert).

### 4.1.1 Multiplikative Anregung

Im folgenden wird nun der Einfluß einer weißen GAUSSschen Rauschanregung untersucht, die auf den Bifurkationsparameter additiv, im ganzen jedoch multiplikativ auf die Zustandsvariable einwirkt. Das System wird durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{x} = ((\mu + \sigma\xi_t) - \gamma x^2) x, \quad \gamma > 0 \quad (4.2)$$

beschrieben, worin  $\xi_t$  das weiße Rauschen und  $\sigma$  dessen Intensität symbolisieren. Formal erhält man daraus die stochastische STRATONOWITSCH-Differentialgleichung

$$dX_t = (\mu X_t - \gamma X_t^3) dt + \sigma X_t \circ dW_t \quad (4.3)$$

mit  $\xi_t = \dot{W}_t$  sowie die stochastische ITÔ-Differentialgleichung

$$dX_t = \left( \mu X_t + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t - \gamma X_t^3 \right) dt + \sigma X_t dW_t, \quad (4.4)$$

die sich formal durch den WONG-ZAKAI-Zusatzterm unterscheidet. Die zugehörige FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\mu x + \frac{1}{2} \sigma^2 x - \gamma x^3) p(x,t) \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 \sigma^2 p(x,t)] = 0 \quad (4.5)$$

liefert für den stationären Fall  $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0$  sowie mit der Ausstrahlungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx < \infty \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = 0 \quad (4.6)$$

und mit der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (4.7)$$

die Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte

$$p(x) = \frac{\left(\frac{\gamma}{\sigma^2}\right)^{\frac{\mu}{\sigma^2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\sigma^2}\right)} |x|^{\left(\frac{2\mu}{\sigma^2}-1\right)} \exp\left(-\frac{\gamma}{\sigma^2} x^2\right), \quad \mu > 0 \quad (4.8)$$

und für  $\mu \leq 0$

$$p(x) = \delta(x) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \delta(x) = \infty & \text{für } x = 0 \\ \delta(x) = 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

wodurch der stochastische Prozeß  $X_t$  aus (4.4) vollständig beschrieben ist.

Ausgehend von (4.4) erhält man gemäß (3.13) die Berechnungsvorschrift für die Monte-Carlo-Simulation zu

$$X_{n+1} = X_n + \left( \mu X_n + \frac{1}{2} \sigma^2 X_n - \gamma X_n^3 \right) \Delta t + \sigma X_n R_n \sqrt{\Delta t}, \quad (4.10)$$

wobei die Trajektorie für festes  $\sigma$ ,  $\gamma$  und  $\mu$  in  $X$  für eine genügend groß zu wählende Anzahl an Rechenschritten erzeugt wird. Die Ergebnisse nach (4.8) und nach (4.10) sind in Abbildung 4.2 graphisch dargestellt.

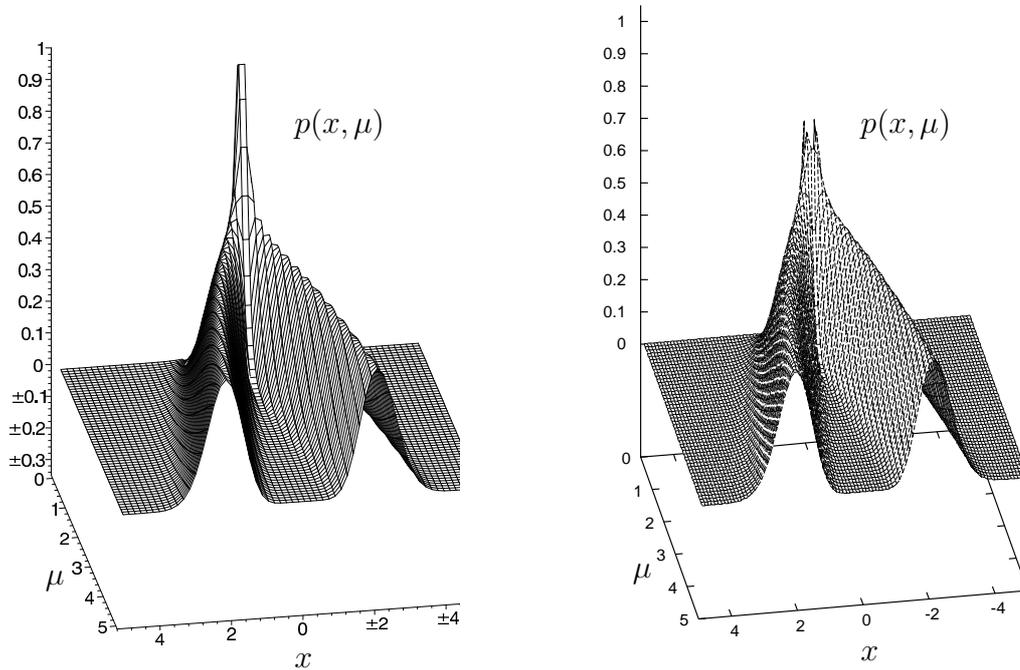


Abbildung 4.2: Verteilungsdichten von (4.2) für  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = 1$ : Analytische Lösung links und Monte-Carlo-Simulation rechts.

Es ist aus Abbildung 4.2 ersichtlich, daß sich erst für größere  $\mu$  die Verteilungsdichtemaxima in die beiden Zweige aufteilen, während für  $\mu \lesssim 1$  noch ein scheinbar gemeinsames Gebiet mit einem Maximum besteht. Die analytische Lösung (4.8) zeigt, daß die Verteilungsdichte für  $x < 0$  und für  $x > 0$  durch die stochastische P-Separatrix  $x = 0$  getrennt ist, da diese durch eine verschwindende Verteilungsdichte gekennzeichnet ist. Für festes  $\mu > \sigma^2/2$  liegen die beiden Maxima der Verteilungsdichte an der Stelle  $x = \pm \sqrt{\frac{2\mu - \sigma^2}{2\gamma}}$  und decktdecken sich somit nicht mit den Attraktoren des entsprechenden deterministischen Systems, obwohl die Rauschanregung mittelwertfrei ist. In Abbildung 4.3 ist die Verteilungsdichte für drei verschiedene  $\mu$  aufgetragen. Werden die Punkte maximaler Verteilungsdichte wie in Abschnitt 2.3.2 vorgeschlagen als P-Attraktoren und die Punkte mit verschwindender Verteilungsdichte als P-Repelloren aufgefaßt, so erhält man das Bifurkationsdiagramm in Abbildung 4.4, welches gegenüber demjenigen aus Abbildung 4.1 verschoben ist.

Für die Verteilungsfunktion ergibt sich für jedes  $\mu > 0$  bei  $x = 0$  ein Sattelpunkt (nicht im Sinne des Zusammentreffens eines Attraktors und eines Repellers im  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , sondern im Sinne der Analysis) und die Verteilungsdichte verschwindet für keine noch so kleine Umgebung von  $x = 0$ . Es verschwindet zwar die Verteilungsdichte für  $x = 0$ , aber die Wahrscheinlichkeit bleibt für jedes Intervall in der Umgebung positiv.

Hieraus ergibt sich das folgende Problem bei der Monte-Carlo-Simulation: Für kleine positive  $\mu$ -Werte befindet sich im analogen deterministischen System der Attraktor in der Nähe

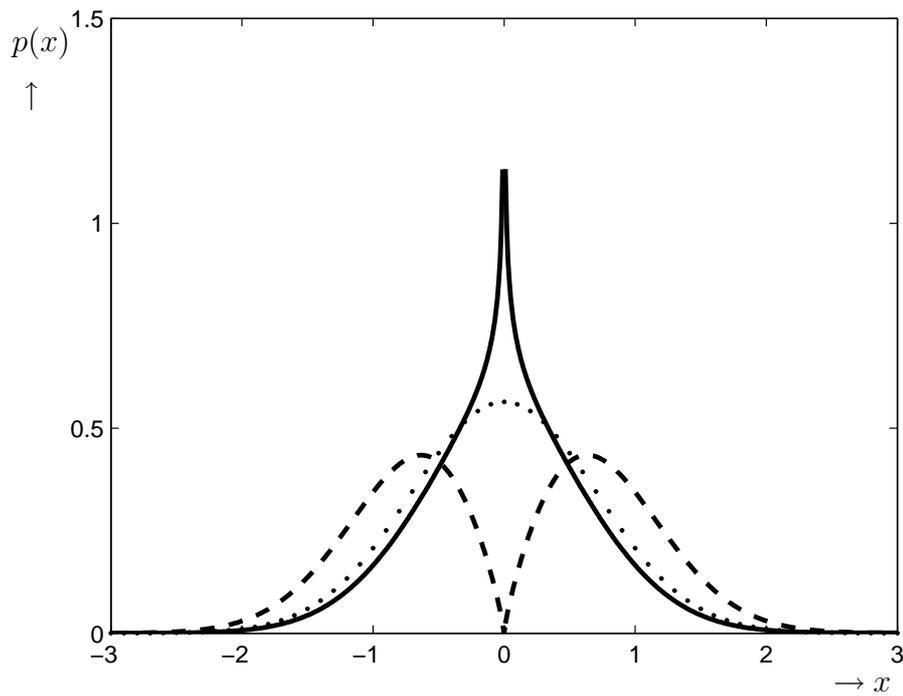


Abbildung 4.3: Dichten für  $\mu = 0,4$ ,  $\mu = 0,5$  (punktiert), und  $\mu = 0,9$  (strichliert).

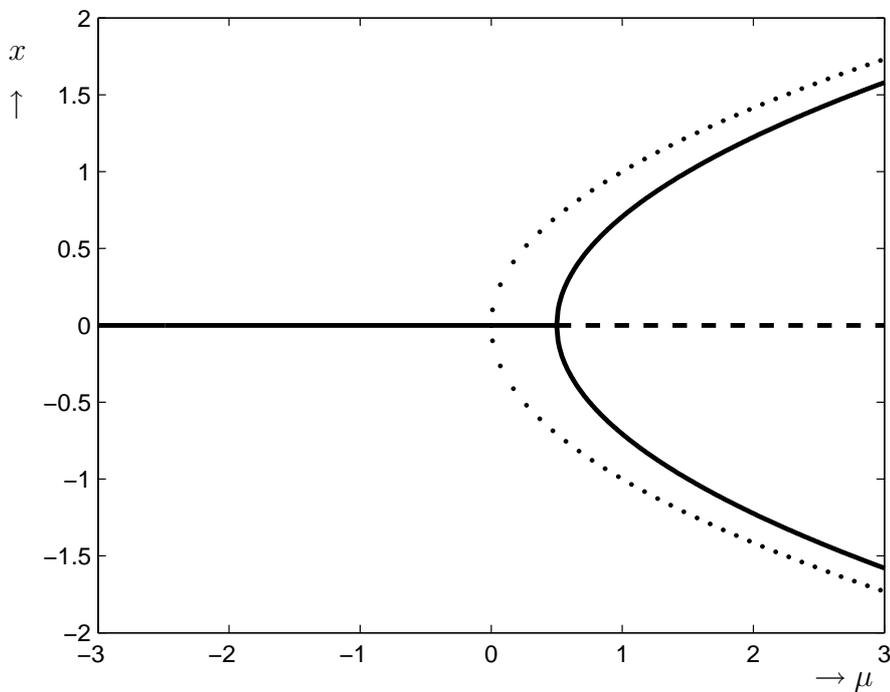


Abbildung 4.4: Stochastische P-Attraktoren (durchgezogen) und P-Repelloren (strichliert) für das System nach Gleichung (4.2) sowie die Fixpunkte der beiden stabilen Äste (punktiert) des deterministischen Systems (4.1).

der Separatrix. Hier entspricht die Trajektorie mit beliebigem Ausgangspunkt im Bassin eines Attraktors der zugehörigen Transienten. Das heißt, mit jedem Inkrement kommt die Trajektorie dem Attraktor näher. Durch den zusätzlichen Rauschprozeß im stochastischen Fall kann jedoch die Trajektorie in Abhängigkeit von der Richtung des Zufallsinkrements auch zeitweise gegen die Transiente wachsen. Je näher man sich am Bifurkationspunkt befindet, desto häufiger kann somit auch ein Phasenübergang in das benachbarte Bassin stattfinden. Je weiter die Attraktoren voneinander entfernt liegen, umso größere Zufallsinkremente sind notwendig, um die Separatrix zu überspringen. Die Zufallsinkremente wachsen mit der Intensität des Rauschprozesses.

Schließlich ist bei endlicher Simulationsdauer zu beobachten, daß für größere Bifurkationsparameter nur noch ein Zweig der beiden P-Attraktoren mit positiver Verteilungsdichte abgebildet wird. Dies liegt daran, daß zwar betragsmäßig große, sogar unbeschränkte Zufallsinkremente im weißen Rauschprozeß möglich sind, diese jedoch entsprechend der GAUSS-Verteilung statistisch gesehen immer seltener vorkommen, je größer sie sind. Dieser aus der endlichen Simulationsdauer der Monte-Carlo-Simulation entstehende Fehler kann hier beseitigt werden, indem mehrere Trajektorien mit abwechselnd in den beiden Bassins liegenden Anfangspunkten erzeugt werden oder indem alternierend nach einer gewissen Simulationsdauer ein Wert betragsgleich in das andere Bassin verlegt wird.

#### 4.1.2 Additive Anregung

Wird das System (4.1) additiv durch weißes Rauschen gestört, so ergibt sich die Systemgleichung zu

$$\dot{x} = (\mu - \gamma x^2)x + \sigma \xi_t, \quad \gamma > 0, \quad (4.11)$$

deren zugehörige stochastische Differentialgleichungen nach STRATONOWITSCH und nach ITÔ sich aufgrund des rein additiven Charakters der Rauschanregung formal gleichen

$$dX_t = (\mu X_t - \gamma X_t^3) dt + \sigma \circ dW_t \quad (4.12)$$

$$dX_t = (\mu X_t - \gamma X_t^3) dt + \sigma dW_t. \quad (4.13)$$

Die Lösung der stationären FPK-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\gamma x^3 - \mu x) p(x)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 p(x)] = 0 \quad (4.14)$$

führt auf die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichte

$$p(x) = p_0 \exp\left(\frac{\mu}{\sigma^2} x^2 - \frac{\gamma}{2\sigma^2} x^4\right) \quad (4.15)$$

mit dem Normierungskoeffizienten

$$p_0 = \left[ \sqrt[4]{\frac{\mu^2}{4\gamma^2}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mu^2}{4\gamma\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\mu^2}{4\gamma\sigma^2}\right) \right]^{-1} > 0 \quad \forall \sigma, \mu, \gamma, \quad (4.16)$$

worin  $K_\nu(\cdot)$  die modifizierte BESSELSche Funktion zweiter Art der Ordnung  $\nu$  ist. Die dreidimensionale graphische Darstellung der Verteilungsdichte (4.15) über der Systemvariablen  $x$  und dem Bifurkationsparameter  $\mu$  bereitet wegen der im Nenner stehenden BESSELFunktion numerische Schwierigkeiten bei der Bildung des Normierungsfaktors  $p_0$ . Eine

zweidimensionale Darstellung der Verteilungsdichten für jeweils feste  $\mu$  ist aufgrund anderer Algorithmen in der verwendeten kommerziellen Software möglich, siehe hierzu Abbildung 4.5. Für die Monte-Carlo-Simulation mit

$$X_{n+1} = X_n + (\mu X_n - \gamma X_n^3) \Delta t + \sigma R_n \sqrt{\Delta t} \quad (4.17)$$

gilt das für die multiplikative Anregung oben Beschriebene sinngemäß.

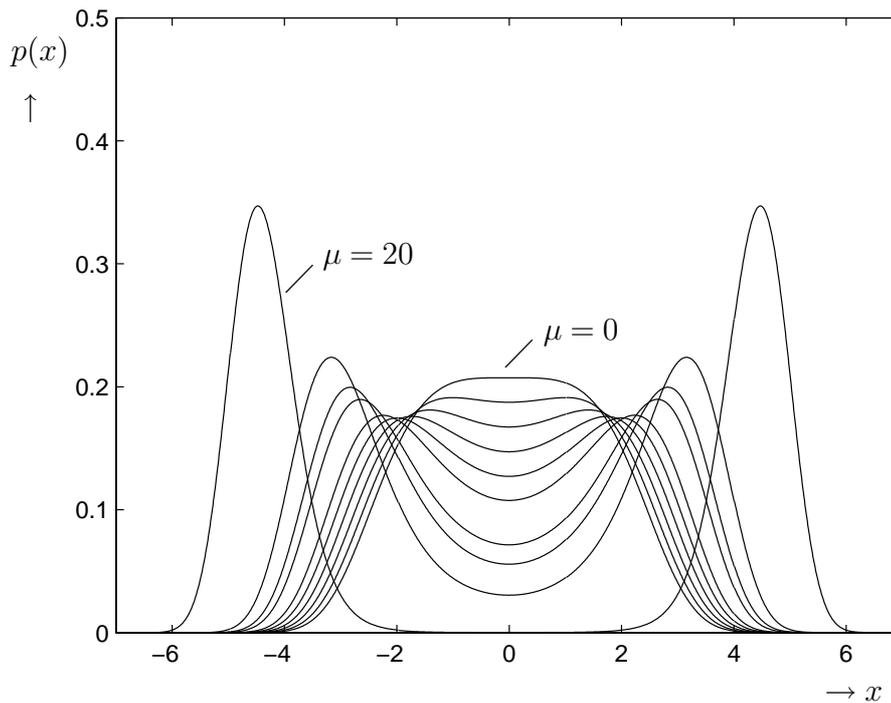


Abbildung 4.5: Verteilungsdichten für  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 20$ .

Eine Diskussion der Verteilungsdichte (4.15) in Verbindung mit der Normierungskonstanten (4.16) führt auf folgende wichtige Ergebnisse:

1. Für  $\mu_0 = 0$  existiert in  $p(x)$  nur ein Extremum, und zwar in  $x_0 = 0$ . Wegen

$$p_{xx}(x_0, \mu_0) = p_{xxx}(x_0, \mu_0) = 0$$

kann mit

$$\lim_{x, \mu \rightarrow 0} p_{xxxx}(x, \mu) = -\frac{12 \sqrt[4]{2\gamma^5} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi \sqrt{\sigma^5}} < 0 \quad \text{für } \gamma > 0, \sigma > 0$$

gezeigt werden, daß es sich dabei um ein absolutes Maximum der Verteilungsdichte mit dem Wert

$$p_{\max}(x_0) = \frac{\sqrt[4]{2\gamma} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\pi \sqrt{\sigma}} \quad (4.18)$$

handelt.

2. Für alle  $\mu > 0$  existieren zwei absolute Maxima an den Stellen  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu/\gamma}$  und ein relatives Minimum an der Stelle  $x_0 = 0$ . Im Gegensatz zum multiplikativ angeregten System (4.2) liegen die Extrema der Verteilungsdichte hier also an den gleichen Stellen wie die Attraktoren und Repellen beim ungestörten deterministischen System (4.1). Die Maxima besitzen den Wert

$$p_{\max}(x_{1,2}) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\mu}} \frac{\exp\left(\frac{\mu^2}{4\sigma^2\gamma}\right)}{K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mu^2}{4\sigma^2\gamma}\right)} \quad (4.19)$$

und das Minimum besitzt den Wert

$$p_{\min}(x_0) = \sqrt{\frac{2\gamma}{\mu}} \frac{\exp\left(-\frac{\mu^2}{4\sigma^2\gamma}\right)}{K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\mu^2}{4\sigma^2\gamma}\right)}. \quad (4.20)$$

3. Bemerkenswert ist, daß hier das Minimum (4.20) für kein  $\mu$  verschwindet. Man könnte hier von einem *Tunnel* sprechen, der es ermöglicht, von einem Bassin in das andere zu gelangen.

## 4.2 Gefilterte Rauschanregung

Unter Verwendung der Filtergleichung (2.163) und bei multiplikativem Einfluß des farbigen Rauschens auf den linearen Anteil in (4.1) ergibt sich das untersuchte System zu

$$\dot{x} = ((\mu + \sigma z)) - \gamma x^2) x \quad (4.21)$$

$$\dot{z} = -\omega_g z + \sigma \xi_t. \quad (4.22)$$

Hierfür ist keine analytische Lösung angebar, so daß die Lösung approximiert werden muß.

### 4.2.1 Vierparametrische Approximation

In diesem Abschnitt wird das letzte in Kapitel 3 kurz angesprochene Verfahren an einem Beispiel erläutert. Die Form der Ansatzfunktion baut auf der Lösung (4.8) für das multiplikativ weiß angeregte System (4.2) auf und wurde mit der Filtervariablen  $z$  erweitert.

Für  $\gamma = 1$  lautet das untersuchte System stochastischer Differentialgleichungen

$$dX_t = -(X_t^2 - (\mu + Z_t)) X_t dt \quad (4.23)$$

$$dZ_t = -\omega_g Z_t dt + \sigma dW_t. \quad (4.24)$$

Unter der Annahme, daß die Prozesse stationär sind, gilt für alle einfachen, höheren und gemischten Momente Stationarität. Für deren Ableitung nach der Zeit gilt daher

$$\dot{E}[\cdot] = 0. \quad (4.25)$$

Die Momente ergeben sich über das allgemeine gemischte Differential für  $f(x, z)$  aus der TAYLOR-Formel

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial x \partial z} dx dz + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (dz)^2 + \dots \quad (4.26)$$

und mit der Eigenschaft  $(dW_t)^2 = dt$  aus (2.84) ergibt sich unter Vernachlässigung aller Potenzen größer als eins von  $dt$

$$\begin{aligned} d(X_t^p Z_t^q) &= -pX_t^{p-1} Z_t^q [X_t^2 - (\mu + Z_t)] dt + qX_t^p Z_t^{q-1} (-\omega_g Z_t dt + \sigma dW_t) \\ &\quad + \frac{1}{4} p(p-1)q(q-1) X_t^{2p-2} Z_t^{2q-2} \sigma^2 dt, \end{aligned} \quad (4.27)$$

so daß für das Gleichungssystem (4.23) und (4.24) aus (4.25)

$$-pE[X_t^{p+2} Z_t^q] + (p\mu - q\omega_g)E[X_t^p Z_t^q] + pE[X_t^p Z_t^{q+1}] + \frac{\sigma^2}{2} q(q-1)E[X_t^p Z_t^{q-2}] = 0 \quad (4.28)$$

folgt. Mit dem Ansatz

$$p(x, z) = C|x|^\alpha \exp(-\beta x^2 - \varepsilon z^2 - \delta|x|z), \quad \alpha, \beta, \delta, \varepsilon > 0 \quad (4.29)$$

ergeben sich die Randverteilungsdichten

$$p(x) = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}} C|x|^\alpha \exp\left(-\beta x^2 + \frac{\delta^2}{4\varepsilon}|x|^2\right) \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} p(z) &= C\beta^{-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}} \exp(-z^2\varepsilon) \cdot \\ &\quad \cdot \left[ \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\delta^2 z^2}{4\beta}\right) - \frac{\delta z}{\sqrt{\beta}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(\frac{\alpha}{2} + 1, \frac{3}{2}, \frac{\delta^2 z^2}{4\beta}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.31)$$

mit der hypergeometrischen Funktion [56]

$${}_jF_m([n_1, \dots, n_j]; [d_1, \dots, d_m]; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\prod_{i=1}^j \frac{\Gamma(n_i+k)}{\Gamma(n_i)}}{\prod_{i=1}^m \frac{\Gamma(d_i+k)}{\Gamma(d_i)}} \frac{z^k}{k!} \right]. \quad (4.32)$$

Aus der Normierungsbedingung ergibt sich

$$C = \frac{\varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}} \left(\beta\varepsilon - \frac{\delta^2}{4}\right)^{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\right)} \quad (4.33)$$

und die allgemeinen Momente bis zur Ordnung drei in  $z$  lauten

$$E[x^m] = \frac{C\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+1+\alpha}{2}\right)}{\sqrt{\varepsilon} a_1^{\frac{m+1+\alpha}{2}}} \quad (4.34)$$

$$E[x^m z] = -\frac{C\delta\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+2+\alpha}{2}\right)}{2\varepsilon^{\frac{3}{2}} a_1^{\frac{m+2+\alpha}{2}}} \quad (4.35)$$

$$E[x^m z^2] = \frac{C\delta^2\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+3+\alpha}{2}\right)}{4\varepsilon^{\frac{5}{2}} a_1^{\frac{m+3+\alpha}{2}}} + \frac{C\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+1+\alpha}{2}\right)}{2\varepsilon^{\frac{3}{2}} a_1^{\frac{m+1+\alpha}{2}}} \quad (4.36)$$

$$E[x^m z^3] = -\frac{C\delta^3\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+4+\alpha}{2}\right)}{8\varepsilon^{\frac{7}{2}} a_1^{\frac{m+4+\alpha}{2}}} - \frac{3C\delta\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m+1+\alpha}{2}\right)}{4\varepsilon^{\frac{5}{2}} a_1^{\frac{m+1+\alpha}{2}}} \quad (4.37)$$

mit

$$a_1 = \beta - \frac{\delta^2}{4\varepsilon}, \quad \beta > \frac{\delta^2}{4\varepsilon}. \quad (4.38)$$

Einsetzen von (4.34) bis (4.37) in (4.28) für vier verschiedene Kombinationen von  $p$  und  $q$  ergibt die Parameter  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  und  $\varepsilon$ , die mit dem Ansatz (4.29) zur gesuchten Approximation führen.

## 4.2.2 Zweiparametrische Approximation um linearisierte Ruhelagen

Das nichtlineare dynamische System

$$\dot{x} = ((\mu + \sigma z)) - \gamma x^2) x \quad (4.39)$$

$$\dot{z} = -\omega_g z + \omega_g \xi_t. \quad (4.40)$$

wird für  $\sigma = 0$  um die Ruhelage

$$x_0 = \sqrt{\mu/\gamma} \quad (4.41)$$

linear approximiert, wobei aus Symmetriegründen lediglich eine Untersuchung und Betrachtung des positiven Astes erfolgt. Dazu wird mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$x = y + \sqrt{\mu/\gamma} \quad (4.42)$$

das neue System

$$dy = \sigma \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} z dt - (2\mu + 3\sqrt{\mu\gamma} y + \gamma y^2 - \sigma z) y dt \quad (4.43)$$

$$dz = -\omega_g z dt + \omega_g dW_t \quad (4.44)$$

zunächst mittelwertfrei gemacht, um danach den statistischen Linearisierungsparameter  $\bar{\sigma}$  einzuführen

$$dy = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} z dt - 2\mu y dt \quad (4.45)$$

$$dz = -\omega_g z dt + \omega_g dW_t. \quad (4.46)$$

Wegen (4.42) und (2.164) müssen die linearen beziehungsweise ersten einfachen Momente verschwinden und es gilt

$$0 = \bar{\sigma} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} E[z] - 2\mu E[y] \quad (4.47)$$

$$0 = -\omega_g E[z], \quad (4.48)$$

woraus sofort

$$E[z] = E[y] = 0 \quad (4.49)$$

folgt. Die Momente zweiter Ordnung

$$dz^2 = 2z dz + \omega_g^2 dt \quad (4.50)$$

$$d(yz) = y dz + z dy \quad (4.51)$$

$$dy^2 = 2y dy \quad (4.52)$$

führen auf

$$E[z^2] = \frac{1}{2}\omega_g \quad (4.53)$$

$$E[yz] = \frac{\omega_g \bar{\sigma}}{2(\omega_g + 2\mu)} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} \quad (4.54)$$

$$E[y^2] = \frac{\bar{\sigma}^2 \omega_g}{4\gamma(\omega_g + 2\mu)}. \quad (4.55)$$

Mit dem Normalverteilungsansatz in  $y$  und  $z$

$$p(y, z) = \frac{C}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta} (\sigma_{zz}y^2 - 2\sigma_{yz}yz + \sigma_{yy}z^2) \right] \quad (4.56)$$

$$\text{mit } \Delta = \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{yz}^2, \quad \sigma_{yz} = \frac{\omega_g \bar{\sigma}}{2(\omega_g + 2\mu)} \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\omega_g \bar{\sigma}^2}{4\gamma(\omega_g + 2\mu)} \quad (4.57)$$

wird die Mittelwertverschiebung in  $x$  durch den zu bestimmenden Parameter  $\alpha$  realisiert. Der zweiparametrische Ansatz erhält damit die Form

$$p(x, z) = \frac{C}{2\pi\sqrt{\Delta}} x^\alpha \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta} (\sigma_{zz}x^2 - 2\sigma_{yz}xz + \sigma_{yy}z^2) \right] \quad (4.58)$$

mit der Randverteilungsdichte für das linearisierte Problem

$$\bar{p}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z) dz = \frac{C}{2\pi\sqrt{\sigma_{yy}}} x^\alpha \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_{yy}} \right). \quad (4.59)$$

Aus dem logarithmischen Differential  $1/x dx = d \ln x$  ergibt sich mit Hilfe der Erwartungswerte

$$E[x^0] = \frac{C}{2\sqrt{2\pi\sigma_{yy}}} (2\sigma_{yy})^{\frac{\alpha+1}{2}} \Gamma \left( \frac{\alpha+1}{2} \right) \quad (4.60)$$

$$E[x^2] = \frac{C}{2\sqrt{2\pi\sigma_{yy}}} (2\sigma_{yy})^{\frac{\alpha+3}{2}} \Gamma \left( \frac{\alpha+3}{2} \right) \quad (4.61)$$

und mit der Bestimmungsgleichung für Stationarität

$$\gamma E[x^2] = \mu E[x^0] \quad (4.62)$$

der Parameter für die Mittelwertverschiebung zu

$$\alpha = \frac{\mu}{\gamma\sigma_{yy}} - 1. \quad (4.63)$$

Der mit der statistischen Linearisierung (4.45) eingeführte Parameter  $\bar{\sigma}$  wird durch Anpassung der Randverteilungsdichte  $\bar{p}(x)$  (4.59) an die bekannte Randverteilungsdichte (4.8) für das durch weißes Rauschen angeregte System (4.2) bestimmt, wobei die Normierungskonstanten dabei keine Rolle spielen:

$$\lim_{\omega_g \rightarrow \infty} \bar{p}(x) = \lim_{\omega_g \rightarrow \infty} \left[ x^{\left(\frac{\mu}{\gamma\sigma_{yy}} - 1\right)} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma_{yy}} \right) \right] \stackrel{!}{=} x^{\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - 1\right)} \exp \left( -\frac{\gamma}{\sigma^2} x^2 \right) \quad (4.64)$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma} = 2\sigma^2. \quad (4.65)$$

Eine Diskussion der Randverteilungsdichte  $\bar{p}(x)$  ergibt im Unterschied zu (4.41) das Maximum der Dichte an der Stelle

$$x_{\bar{p},max} = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma} - \sigma_{yy}}, \quad (4.66)$$

weshalb der Normalverteilungsansatz (4.58) um den Mittelwert  $m_z$  in  $z$  wie folgt erweitert wird:

$$p(x, z) = \frac{C}{2\pi\sqrt{\Delta}} x^\alpha \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta} (\sigma_{zz}x^2 - 2\sigma_{yz}x(z - m_z) + \sigma_{yy}(z - m_z)^2) \right]. \quad (4.67)$$

Die Mittelwertfreiheit des Filterprozesses (4.40) ist durch (2.164) gegeben, so daß die Bedingung  $E[z] = 0$  auf

$$m_z = -\frac{\sqrt{2}\sigma_{yz} \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)}{\sqrt{\sigma_{yy}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} \quad (4.68)$$

führt. Mit der Angabe der Normierungskonstanten

$$C = \frac{2\sqrt{2\pi\sigma_{yy}}}{(2\sigma_{yy})^{\frac{\alpha+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)} \quad (4.69)$$

sind somit alle Koeffizienten des Näherungsansatzes (4.67) bestimmt. Die beschriebene gestufte Vorgehensweise ist gerechtfertigt, da der Ansatz (4.67) im Gegensatz zu den zunächst gewählten Schritten zu größeren Schwierigkeiten führt, wenn er gleich zu Beginn der Untersuchung verwendet wird.

In Abbildung 4.6 und 4.7 sind für zwei Parametersätze die Höhenliniendiagramme der Verteilungsdichte dargestellt. Links ist jeweils die analytische Näherung nach (4.67) und rechts das Ergebnis der Monte-Carlo-Simulation dargestellt. Für die Monte-Carlo-Simulation wurden die Gleichungen (4.39) und (4.40) wie folgt diskretisiert:

$$x_{n+1} = x_n + ((\mu + \sigma z_n)) - \gamma x_n^2) x_n \Delta t \quad (4.70)$$

$$z_{n+1} = z_n - \omega_g z_n \Delta t + \omega_g R_n \sqrt{\Delta t}. \quad (4.71)$$

Während in Abbildung 4.6 mit  $\gamma = 1$  die Bifurkation noch nicht stattgefunden hat, sind in Abbildung 4.7 mit  $\gamma = 2$  die Gebiete schon sichtbar durch die bei  $x = 0$  liegende P-Separatrix getrennt.

Grundsätzliche Effekte sind in der analytischen Näherung erkennbar, wenn die Monte-Carlo-Simulation als Referenz herangezogen wird, wobei selbige ebenfalls ein Näherungsverfahren darstellt. Insbesondere sind für große Filtereckfrequenzen  $\omega_g$  gute Ergebnisse mit (4.67) zu erzielen, da für diesen Fall die Parameter an die exakte Lösung angepaßt wurden.

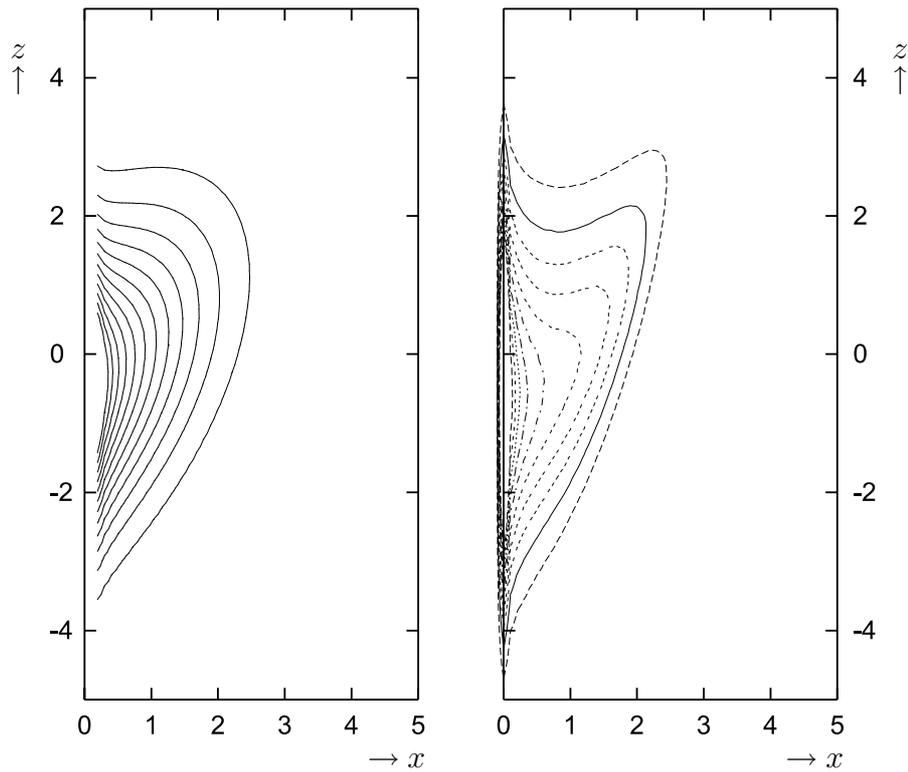


Abbildung 4.6: Höhenliniendiagramm für  $\gamma = 1$ ,  $\sigma = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\omega_g = 5$ . Links analytische Näherung nach (4.67), rechts Monte-Carlo-Simulation

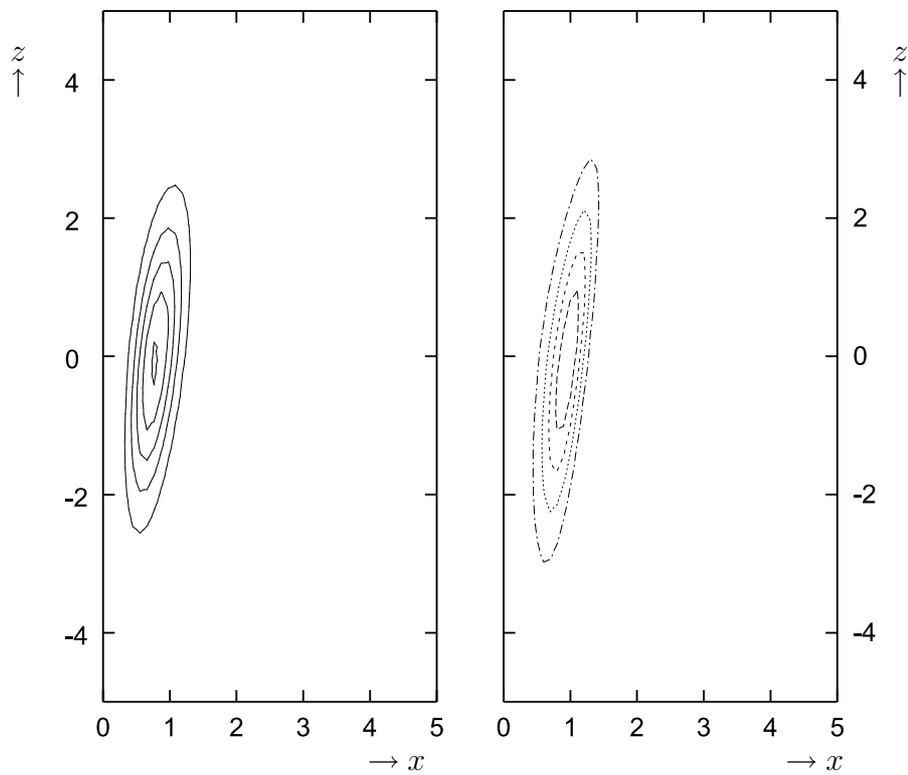


Abbildung 4.7: Höhenliniendiagramm für  $\gamma = 2$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 2$ ,  $\omega_g = 5$ . Links analytische Näherung nach (4.67), rechts Monte-Carlo-Simulation

## Kapitel 5

# Oszillator unter multiplikativer Anregung

Im folgenden Abschnitt wird das Verhalten eines weiß parametererregten Oszillators mit VAN DER POL'schem und RAYLEIGH'schem Dämpfungsterm untersucht. Das System wird durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2D\omega_1(x^2 + \frac{1}{\omega_1^2}\dot{x}^2 - \gamma^2)\dot{x} + \omega_1(\omega_1 + \sqrt{\omega_1}\sigma\xi_t)x = 0 \quad (5.1)$$

beschrieben, worin  $\xi_t$  wieder das GAUSS'sche weiße Rauschen symbolisiert. Äquivalent dazu ist die Schreibweise als Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\dot{x}_1 = \omega_1 x_2 \quad (5.2)$$

$$\dot{x}_2 = -2D\omega_1(x_1^2 + x_2^2 - \gamma^2)x_2 - (\omega_1 + \sqrt{\omega_1}\sigma\xi_t)x_1 \quad (5.3)$$

mit  $x = x_1$  und  $\dot{x} = \omega_1 x_2$ . Das zugehörige stochastische Differentialgleichungssystem nach ITÔ ergibt sich zu

$$dX_{1,t} = \omega_1 X_{2,t} dt \quad (5.4)$$

$$dX_{2,t} = -2D\omega_1(X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 - \gamma^2)X_{2,t} dt - \omega_1 X_{1,t} dt - \sigma\sqrt{\omega_1} X_{1,t} dW_t. \quad (5.5)$$

Eine Transformation auf Polarkoordinaten gemäß [36] führt mit

$$X_{1,t} = A_t \cos \Psi_t; \quad X_{2,t} = A_t \sin \Psi_t \quad (5.6)$$

$$A_t = \sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2}; \quad \Psi_t = \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}}, \quad X_{1,t} > 0; \quad \Psi_t = \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} + \pi, \quad X_{1,t} < 0 \quad (5.7)$$

unter Berücksichtigung von (2.84) auf die Differentiale

$$dA_t = \frac{\partial A_t}{\partial X_{1,t}} dX_{1,t} + \frac{\partial A_t}{\partial X_{2,t}} dX_{2,t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A_t}{\partial X_{2,t}^2} \omega_1 \sigma^2 X_{1,t}^2 dt \quad (5.8)$$

$$d\Psi_t = \frac{\partial \Psi_t}{\partial X_{1,t}} dX_{1,t} + \frac{\partial \Psi_t}{\partial X_{2,t}} dX_{2,t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi_t}{\partial X_{2,t}^2} \omega_1 \sigma^2 X_{1,t}^2 dt. \quad (5.9)$$

Daraus ergibt sich das transformierte stochastische DGL-System

$$dA_t = A_t \left( -2D\omega_1 \sin^2 \Psi_t (A_t^2 - \gamma^2) dt - \sigma \sqrt{\omega_1} \sin \Psi_t \cos \Psi_t dW_t + \frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 \cos^4 \Psi_t dt \right) \quad (5.10)$$

$$d\Psi = -\omega_1 dt - 2D\omega_1 (A_t^2 - \gamma^2) \sin \Psi_t \cos \Psi_t dt - \sigma^2 \sqrt{\omega_1} \sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t dt. \quad (5.11)$$

Eine lineare Stabilitätsanalyse führt für das unverrauschte System in der Amplitude auf die Fixpunkte  $a_0 = 0$ ,  $a_{1/2} = \pm \sqrt{\gamma^2}$ , wobei für  $\gamma \neq 0$   $a_0$  instabil ist und  $a_{1/2}$  stabil sind. In  $\gamma = 0$  findet die Bifurkation statt.

## 5.1 Vierparametrische Approximation

Im Näherungsansatz

$$p(a, \psi) = C a^{1+\alpha} (1 + c \cos(2\psi) + s \sin(2\psi)) \exp(-\beta a^2) \quad (5.12)$$

ist die Amplitude  $a$  vom Winkel  $\psi$  entkoppelt. Die darin enthaltenen vier Parameter werden über Momentengleichungen der stochastischen Differentiale

$$d(\ln A_t) = (-2D\omega_1 (A_t^2 - \gamma^2) \sin^2 \Psi_t + \frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 \cos^4 \Psi_t - \frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 \sin^2 \Psi_t \cos^2 \Psi_t) dt - \sigma \sqrt{\omega_1} \sin \Psi_t \cos \Psi_t dW_t \quad (5.13)$$

$$d(\sin(2\Psi_t)) = -2\omega_1 (1 + 2D(A_t^2 - \gamma^2) \sin \Psi_t \cos \Psi_t + \sigma^2 \sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t) \cos(2\Psi_t) dt - 2\omega_1 \sigma^2 \sin(2\Psi_t) \cos^4 \Psi_t dt - 2\sigma \sqrt{\omega_1} \cos^2 \Psi_t \cos(2\Psi_t) dW_t \quad (5.14)$$

$$d(\cos(2\Psi_t)) = 2\omega_1 (1 + 2D(A_t^2 - \gamma^2) \sin \Psi_t \cos \Psi_t + \sigma^2 \sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t) \sin(2\Psi_t) dt - 2\omega_1 \sigma^2 \cos(2\Psi_t) \cos^4 \Psi_t dt + 2\sigma \sqrt{\omega_1} \cos^2 \Psi_t \sin(2\Psi_t) dW_t \quad (5.15)$$

und (5.10) angeglichen, wobei wieder die Stationarität der Momente  $\dot{E}(\cdot) = 0$  genutzt wird. Es folgt damit

$$0 = 2D E[A_t (A_t^2 - \gamma^2) \sin^2 \Psi_t] - \frac{1}{2} \sigma^2 E[A_t \cos^4 \Psi_t] \quad (5.16)$$

$$0 = 2D E[(A_t^2 - \gamma^2) \sin^2 \Psi_t] - \frac{1}{2} \sigma^2 E[\cos^4 \Psi_t] + \frac{1}{2} \sigma^2 E[\sin^2 \Psi_t \cos^2 \Psi_t] \quad (5.17)$$

$$0 = 2D E[(A_t^2 - \gamma^2) \sin \Psi_t \cos \Psi_t \cos(2\Psi_t)] + \sigma^2 E[\sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t \cos(2\Psi_t)] + E[\cos(2\Psi_t)] + \sigma^2 E[\cos^4 \Psi_t \sin(2\Psi_t)] \quad (5.18)$$

$$0 = 2D E[(A_t^2 - \gamma^2) \sin \Psi_t \cos \Psi_t \sin(2\Psi_t)] + \sigma^2 E[\sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t \sin(2\Psi_t)] + E[\sin(2\Psi_t)] - \sigma^2 E[\cos^4 \Psi_t \cos(2\Psi_t)], \quad (5.19)$$

und über die Normierungsbedingung ergibt sich

$$C = \frac{2\beta^{\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)}}{\pi \Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)}. \quad (5.20)$$

Zur Auswertung der Momentengleichungen (5.16) bis (5.19) werden über die Randverteilungsdichten

$$p(\psi) = \frac{1}{\pi} (1 + c \cos(2\psi) + s \sin(2\psi)) \quad (5.21)$$

$$p(a) = \frac{2\beta^{\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)} a^{1+\alpha} \exp(-\beta a^2) \quad (5.22)$$

zunächst die benötigten Momente ermittelt:

$$E[\cos^4 \Psi_t] = \frac{1}{8} (3 + 2c) \quad (5.23)$$

$$E[\sin^2 \Psi_t] = \frac{1}{4} (2 - c) \quad (5.24)$$

$$E[\sin^2 \Psi_t \cos^2 \Psi_t] = \frac{1}{8} \quad (5.25)$$

$$E[\sin \Psi_t \cos \Psi_t \cos(2\Psi_t)] = 0 \quad (5.26)$$

$$E[\cos^2 \Psi_t \cos(2\Psi_t)] = \frac{1}{4} (1 + c) \quad (5.27)$$

$$E[\sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t \cos(2\Psi_t)] = \frac{1}{32} s \quad (5.28)$$

$$E[\cos^4 \Psi_t \sin(2\Psi_t)] = \frac{5}{32} s \quad (5.29)$$

$$E[\sin \Psi_t \cos \Psi_t \sin(2\Psi_t)] = \frac{1}{4} \quad (5.30)$$

$$E[\cos^2 \Psi_t \sin(2\Psi_t)] = \frac{1}{4} s \quad (5.31)$$

$$E[\cos(2\Psi_t)] = \frac{1}{2} c \quad (5.32)$$

$$E[\sin(2\Psi_t)] = \frac{1}{2} s \quad (5.33)$$

$$E[\sin \Psi_t \cos^3 \Psi_t \sin(2\Psi_t)] = \frac{1}{32} (4 + c) \quad (5.34)$$

$$E[\cos(2\Psi_t) \cos^4 \Psi_t] = \frac{1}{32} (8 + 7c) \quad (5.35)$$

$$E[A_t^k] = \frac{\beta^{\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{2+k+\alpha}{2}\right)}{\beta^{\left(\frac{2+k+\alpha}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{2+\alpha}{2}\right)}. \quad (5.36)$$

Die Funktionalgleichung

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (5.37)$$

ermöglicht die Beziehung

$$\frac{E[A_t^{k+2}]}{E[A_t^k]} = \frac{2 + k + \alpha}{2\beta}. \quad (5.38)$$

Aus (5.16) bis (5.19) folgt

$$0 = \frac{2 - c}{4} \left( \frac{3 + \alpha}{2\beta} - \gamma^2 \right) - \frac{\sigma^2(3 + 2c)}{32D} \quad (5.39)$$

$$0 = \frac{2-c}{4} \left( \frac{2+\alpha}{2\beta} - \gamma^2 \right) - \frac{\sigma^2(1+c)}{16D} \quad (5.40)$$

$$0 = \frac{1}{2}c + \frac{3}{16}\sigma^2 s \quad (5.41)$$

$$0 = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}D \left( \frac{2+\alpha}{2\beta} - \gamma^2 \right) - \frac{\sigma^2(2+3c)}{16}, \quad (5.42)$$

und daraus ergeben sich die vier Parameter zu

$$\alpha = (2\sigma^2 - 8D\gamma^2)\Phi + \frac{16D\gamma^2}{\sigma^2} \quad (5.43)$$

$$\beta = \frac{8D}{\sigma^2} - 4D\Phi \quad (5.44)$$

$$c = \sigma^2\Phi \quad (5.45)$$

$$s = -\frac{8}{3}\Phi \quad (5.46)$$

mit der Abkürzung

$$\Phi = \frac{3\sigma^4 + 64 - \sqrt{63\sigma^8 + 768\sigma^4 + 4096}}{\sigma^2(9\sigma^4 + 64)}. \quad (5.47)$$

Bei der Rücktransformation ist wieder Gleichung (2.28) zu berücksichtigen, und es gilt

$$p(x_1, x_2) = -\frac{1}{a}p(\psi(x_1, x_2), a(x_1, x_2)), \quad (5.48)$$

so daß sich die gesuchte Näherung mit den oben eingeführten Abkürzungen ergibt:

$$p(x_1, x_2) = C(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha}{2}} \exp(-\beta(x_1^2 + x_2^2)) \left( 1 + c \left( \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right) + s \left( \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right). \quad (5.49)$$

In Abbildung 5.1 ist eine Monte-Carlo-Simulation der Näherung (5.49) gegenübergestellt, Abbildung 5.2 gibt dasselbe Ergebnis als Höhenlinienschaubild wieder. Für  $\gamma = 0$  ergibt sich das Höhenliniendiagramm aus der Approximation (5.49) nach Abbildung 5.3. Die FOURIER-Glieder verhindern hier die Bildung von nur einer Verteilungsdichtespitze, da der gewählte Ansatz das oszillatorische Verhalten voraussetzte.

## 5.2 Reihenentwicklung

Um das in Abschnitt 3.2 beschriebene Verfahren zur Berechnung schwacher Näherungslösungen der FPK-Gleichung anwenden zu können, soll hier am Beispiel des Oszillators (5.1) eine mögliche Gewichtsfunktion für Gleichung (3.20) hergeleitet werden. An die Gewichtsfunktion werden folgende Forderungen gestellt:

1. Sie soll der gesuchten Lösung (hier: Verteilungsdichte) möglichst nahe kommen.
2. Sie sollte so einfach sein, daß Gewichtsfunktionen  $P$  gefunden werden können, die die Orthogonalitätsbedingung (3.19) erfüllen.

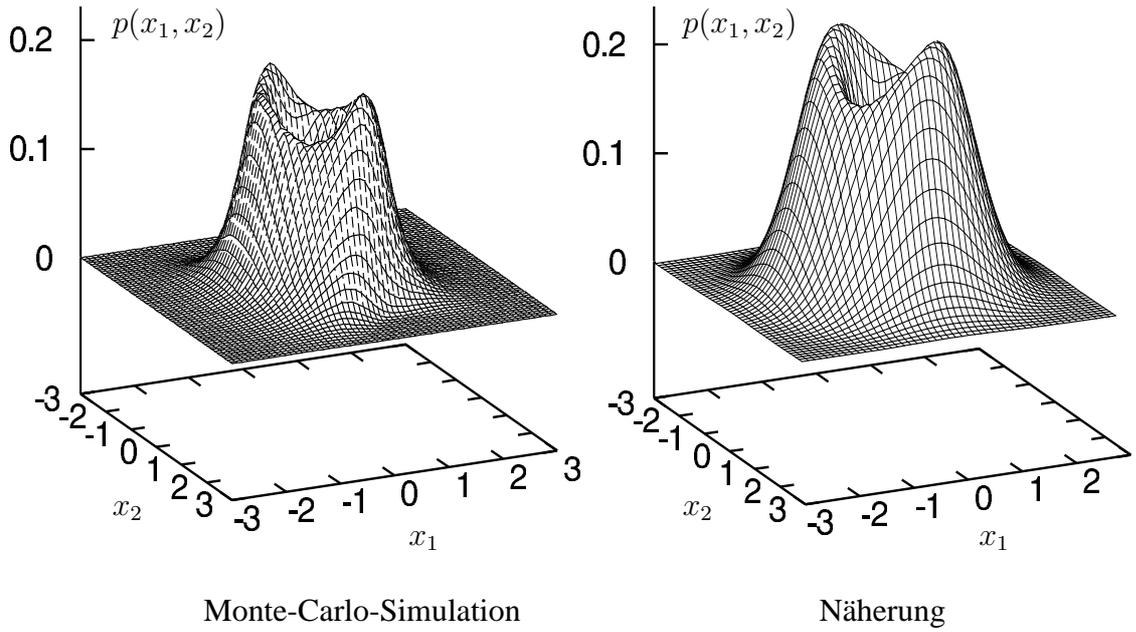


Abbildung 5.1: Verteilungsdichte für Oszillator mit  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $D = 0, 1$ .

Der Näherungsansatz (5.12) ist in der Amplitude vom Typ  $x^\alpha e^{-x^2}$ . In [85] wird gezeigt, daß sich verallgemeinerte LAGUERRE-Polynome

$$\mathcal{L}_n^{(\alpha)}(u) = \frac{1}{n!} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[ (-1)^k \binom{n}{k} u^k \prod_{i=k+1}^n (\alpha + i) \right] \right\} \quad \text{mit} \quad \prod_{i=n+1}^n (\alpha + i) = 1, \alpha > -1 \quad (5.50)$$

bei Gewichtsfunktionen vom Typ  $x^\alpha e^{-x}$  bewährt haben. Es wird daher die Transformation

$$U_t = \frac{8D}{\sigma^2} \sqrt{X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2}; \quad \Psi_t = \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}}, \quad X_{1,t} > 0; \quad \Psi_t = \arctan \frac{X_{2,t}}{X_{1,t}} + \pi, \quad X_{1,t} < 0 \quad (5.51)$$

eingeführt, die mit dem Differential

$$dU_t = \frac{\partial U_t}{\partial X_{1,t}} dX_{1,t} + \frac{\partial U_t}{\partial X_{2,t}} dX_{2,t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U_t}{\partial X_{2,t}^2} \omega_1 \sigma^2 X_{1,t}^2 dt \quad (5.52)$$

$$= (4D\gamma^2 \omega_1 \sin^2 \Psi_t - \frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 \sin^2 \Psi_t U_t + \omega_1 \sigma^2 \cos^2 \Psi_t) U_t dt - 2\sigma \sqrt{\omega_1} \sin \Psi_t \cos \Psi_t U_t dW_t \quad (5.53)$$

zur stationären FPK-Gleichung in Amplitudenrichtung führt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left[ (4D\gamma^2 \omega_1 \sin^2 \psi u - \frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 \sin^2 \psi u^2 + \omega_1 \sigma^2 \cos^2 \psi u) p(u) \right] = \\ = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} [4\omega_1 \sigma^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi u^2 p(u)] . \end{aligned} \quad (5.54)$$

Eine stochastische Mittelwertbildung mit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi \cos^2 \psi d\psi = \frac{1}{8} \quad (5.55)$$

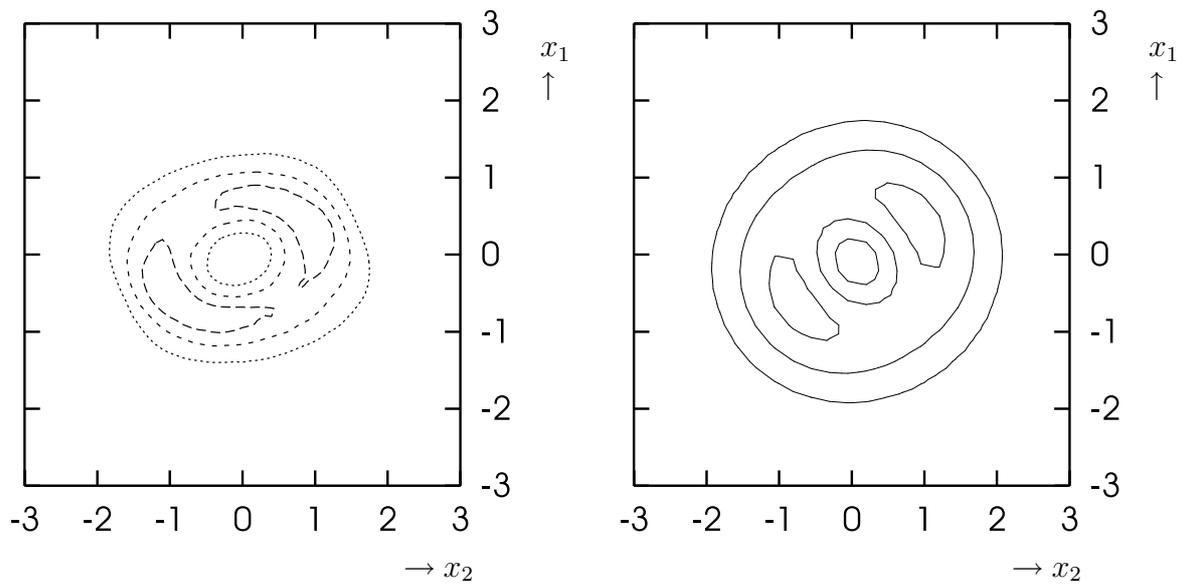


Abbildung 5.2: Verteilungsdichte für Oszillator mit  $\sigma = 1$ ,  $D = 0,1$  und  $\gamma = 1$ . Höhenlinien für die Monte-Carlo-Simulation links und für die vierparametrische Approximation rechts.

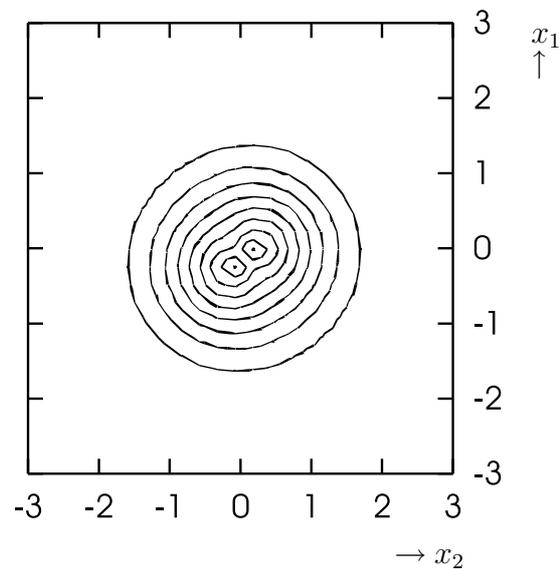


Abbildung 5.3: Höhenlinien der Verteilungsdichte von (5.49) für  $\sigma = 1$ ,  $D = 0,1$  und  $\gamma = 0$ .

sowie die Ausstrahlungs- und die Normierungsbedingung führen auf die Gewichtsfunktion

$$p_0(u) = \frac{u^{\left(\frac{8D\gamma^2}{\sigma^2}\right)}}{\Gamma\left(\frac{8D\gamma^2}{\sigma^2} + 1\right)} \exp(-u) \quad (5.56)$$

beziehungsweise

$$p_0(u) = \frac{u^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \exp(-u), \quad \text{mit } \alpha = \frac{8D\gamma^2}{\sigma^2} \quad (5.57)$$

vom gewünschten Typ  $x^\alpha e^{-x}$ . Mit (5.50) sind die  $e_{nk}$  in (3.18) zu

$$e_{nk} = \frac{1}{n!} (-1)^k \binom{n}{k} \prod_{i=k+1}^n (\alpha + i) \quad (5.58)$$

gegeben, und zusammen mit den angenäherten Momenten (3.24)

$$m_k = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha+k} e^{-u} du = (\alpha + 1)_k \quad (5.59)$$

lassen sich die Wichtungskoeffizienten  $C_n$  in (3.21) bestimmen. In (5.59) bezeichnet das POCHHAMMER-Symbol  $(\alpha + 1)_k$  die Relation

$$(\alpha + 1)_k = \frac{\Gamma(\alpha + 1 + k)}{\Gamma(\alpha + 1)} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ a(a+1)\dots(a+k-1) & \text{für } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (5.60)$$

Die zugehörige FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung lautet

$$A_1 p_{\psi\psi} + A_2 p_{\psi u} + A_3 p_{uu} + B_1 p_\psi + b_2 p_u + Cp = 0 \quad (5.61)$$

mit den Abkürzungen

$$A_1 = -\frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 \cos^4 \psi \quad (5.62)$$

$$A_2 = -2\omega_1 \sigma^2 u \sin \psi \cos^3 \psi \quad (5.63)$$

$$A_3 = -2\omega_1 \sigma^2 u^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \quad (5.64)$$

$$B_1 = -\omega_1 - 2D\omega_1 \gamma^2 \left(\frac{u}{\alpha} - 1\right) \sin \psi \cos \psi + \omega_1 \sigma^2 \sin \psi \cos^3 \psi \quad (5.65)$$

$$B_2 = -4D\omega_1 \gamma^2 \left(\frac{u}{\alpha} - 1\right) u \sin^2 \psi + \omega_1 u \sigma^2 \cos^2 \psi \quad (5.66)$$

$$C = -2D\omega_1 \gamma^2 \left(\frac{u}{\alpha} - 1\right) - \omega_1 \sigma^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \omega_1 \sigma^2 u \sin^2 \psi + \omega_1 \sigma^2 \cos^2 \psi - \omega_1 \sigma^2 \cos^4 \psi. \quad (5.67)$$

Nach Entwicklung des Winkels  $\psi$  in eine FOURIER-Reihe wird der Ansatz

$$p(\psi, u) = P_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (c_{nk} \cos(2n\psi) + s_{nk} \sin(2n\psi)) (C_k u^\alpha e^{-u} \mathcal{L}_k^{(\alpha)}(u)) \quad (5.68)$$

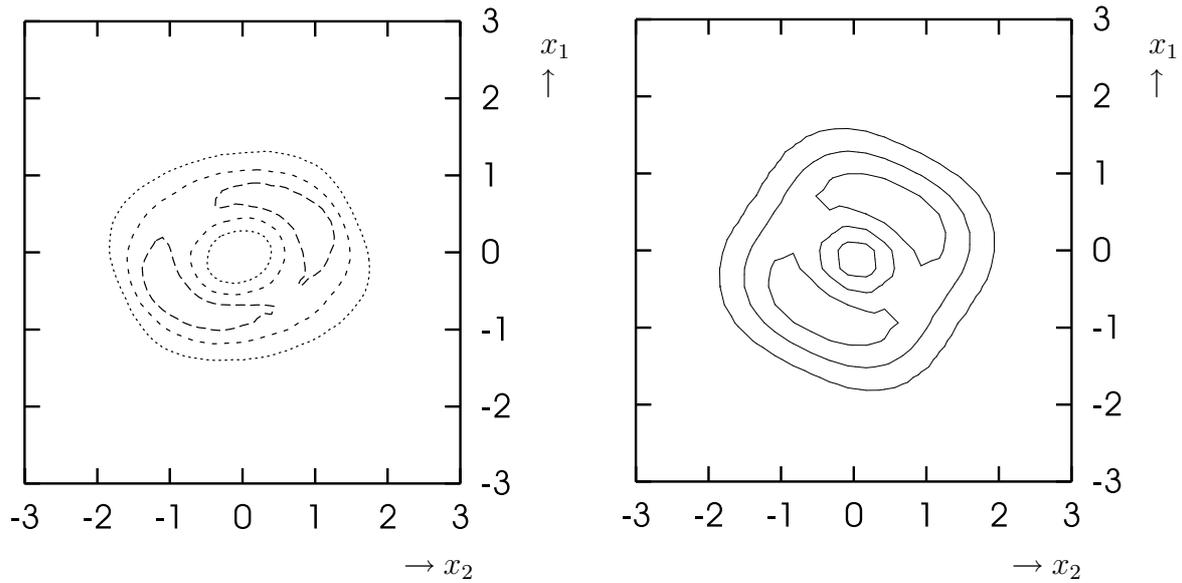


Abbildung 5.4: Verteilungsdichte für Oszillator mit  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $D = 0, 1$ . Höhenlinien für die Monte-Carlo-Simulation links und für die Reihenentwicklung rechts.

in (5.61) eingesetzt und durch einen Koeffizientenvergleich werden die  $c_{nk}$  und  $s_{nk}$  bestimmt. Bei der Rücktransformation ist wieder (3.17) zu beachten. Beispielhaft ist ein Ergebnis für eine Entwicklung lediglich bis zum zweiten Glied in Abbildung 5.4 dargestellt, um die Verbesserung in der Form gegenüber der vierparametrischen Approximation aufzuzeigen. In [94] ist eine Herleitung angepaßter Polynome für die Amplitudenrichtung angegeben, so daß die Koordinatentransformation nicht an die in [85] gegebenen Polynome angepaßt zu werden braucht.

## Kapitel 6

# Querdynamik eines Kraftfahrzeuges

Auf dem Gebiet der Dynamik der Kraftfahrzeuge sind in der Berechnung des Systemverhaltens sowohl in der Theorie als auch in der Praxis große Fortschritte erzielt worden. Insbesondere die Vertikaldynamik wurde und wird intensiv erforscht. Aktive Elemente in den Fahrwerkskonstruktionen erfordern Regelungen, die auf immer genaueren mechanischen Modellen und deren mathematischen Umsetzungen basieren. Im Hinblick auf intelligente Fahrerassistenzsysteme gewinnt auch die Untersuchung des Querdynamikverhaltens seit geraumer Zeit an Wichtigkeit [62]. Stochastische Methoden bei der Untersuchung des dynamischen Verhaltens der Kraftfahrzeuge werden jedoch weitaus seltener angewendet als die Methoden für deterministische Systeme, wobei sich dann die meisten Untersuchungen auf die Vertikaldynamik konzentrieren, wie [3], [61], [80], [93], und [99].

### 6.1 Einspurmodell

Zur Untersuchung der grundsätzlichen Effekte wird das sogenannte Einspurmodell nach RIEKERT und SCHUNCK [79] auch heute noch verwendet [55]. Das lineare Einspurmodell in Abbildung 6.1 liegt auch den in diesem Kapitel betrachteten Untersuchungen zugrunde. Zwei große Aspekte der Querdynamik sind der Lenkwinkelinfluß und das Seitenwindverhalten, wo auch neuere Untersuchungen ihr Augenmerk kaum auf stochastische Einflüsse richten [95], [103]. In diesem Kapitel wird das Verhalten eines Kraftfahrzeuges unter stochastisch modelliertem Seitenwind dargestellt, wobei noch weitere Untersuchungen zu stochastischen Einflüssen auf das Lenkverhalten bei Geradeaus- und Kreisfahrt in [11] behandelt werden.

Bei Personenkraftwagen weist die Statistik sehr wenige Unfälle aus, die durch Seitenwind verursacht wurden, insofern ist das Seitenwindverhalten eher ein Komfort- und Handhabungsmerkmal für Kraftfahrzeuge. In einem makroskopischen Ansatz wird die Seitenwindgeschwindigkeit  $w_y$  als Superposition eines konstanten Anteils  $w_{y0}$  und eines stochastischen Anteils  $w_{yZ}$  angenommen. Der stochastische Anteil wird vereinfachend durch weißes Rauschen  $\xi_t$  mit der Intensität  $\sigma$  ausgedrückt. Dies ist für Winduntersuchungen eine gängige Beschreibung [4], [90]. Anders ausgedrückt ist die Seitenwindgeschwindigkeit  $w_y$  als normalverteilter Prozeß mit Mittelwert  $w_{y0}$  und Standardabweichung  $\sigma$  modelliert

$$w_y = w_{y0} + \sigma \xi_t. \quad (6.1)$$

Betrachtet wird ein Fahrzeug bei Geradeausfahrt unter der Einwirkung von Seitenwind (6.1). Die Luftkraft

$$F_{Lq} = c_y A \frac{\rho}{2} v_r^2 \quad (6.2)$$

greift am Fahrzeug im Druckmittelpunkt  $DP$  an und kann für kleine Anströmwinkel  $\tau_L$  bis 20° zu

$$F_{Lq} = k_y v_r^2 \tau_L \quad (6.3)$$

berechnet werden. Hierin ist  $c_y$  der dimensionslose Widerstandsbeiwert,  $A$  die Anströmfläche,  $\rho$  die Luftdichte,  $v_r$  die resultierende Anströmgeschwindigkeit und  $k_y$  der Seitenluftbeiwert

$$k_y = c_{ylin} A \frac{\rho}{2} \quad (6.4)$$

für den im Anströmwinkel linearisierten Widerstandsbeiwert. Eine ausführliche Herleitung der Aerodynamik der Kraftfahrzeuge ist in [62] zu finden. Dort wird gezeigt, daß für kleine Anströmwinkel  $\tau_L$  sowie  $\psi \ll 1$ ,  $\beta \ll 1$  und  $\frac{w_y}{v} \leq 0,36$  die Beziehung

$$v_r^2 \tau_L \approx v^2 \beta - v w_y \quad (6.5)$$

in guter Näherung für Geradeausfahrt angenommen werden kann. Für kleine Winkel  $\delta$ ,  $\alpha_v$ ,  $\alpha_h$ ,  $\beta$  und kleine Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\beta}$  und unter Berücksichtigung der Seitenwindkraft  $F_{Lq}$  ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$m v \dot{\beta} + (m v^2 + c_{\alpha v} l_v - c_{\alpha h} l_h) \frac{\dot{\psi}}{v} + (c_{\alpha v} + c_{\alpha h}) \beta = c_{\alpha v} \delta + k_y v w_y \quad (6.6)$$

$$J \ddot{\psi} + (c_{\alpha v} l_v^2 + c_{\alpha h} l_h^2) \frac{\dot{\psi}}{v} + (c_{\alpha v} l_v - c_{\alpha h} l_h) \beta = c_{\alpha v} l_v \delta + e_{SP} k_y v w_y. \quad (6.7)$$

Die hierin enthaltenen  $c_{\alpha v}$  und  $c_{\alpha h}$  sind sogenannte Schräglauftiefigkeiten vorne und hinten, die den linearen Zusammenhang zwischen Querkraftschlußkraft und Querschlepp über den Schräglaufwinkel angeben. Die Größe  $e_{SP}$  bezeichnet den Abstand zwischen Schwerpunkt  $S$  und Druckmittelpunkt  $DP$ , wobei  $e_{SP}$  positiv ist, wenn der Druckmittelpunkt in Fahrtrichtung vor dem Schwerpunkt liegt.

Die Zustandsform der Gleichungen (6.6) und (6.7)

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \ddot{\psi} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \delta + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e_{SP} \end{pmatrix} k_y v w_y \quad (6.8)$$

führt über die charakteristische Gleichung

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \lambda [\lambda^2 + 2D_f \lambda + \omega_0^2] \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.9)$$

mit

$$2D_f = -(a_{33} + a_{22}) = \frac{m(c_{\alpha v} l_v^2 + c_{\alpha h} l_h^2) + J(c_{\alpha v} + c_{\alpha h})}{J m v} \quad (6.10)$$

$$\omega_0^2 = (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) = \frac{c_{\alpha v} c_{\alpha h} l^2 + m v^2 (c_{\alpha h} l_h - c_{\alpha v} l_v)}{J m v^2} \quad (6.11)$$

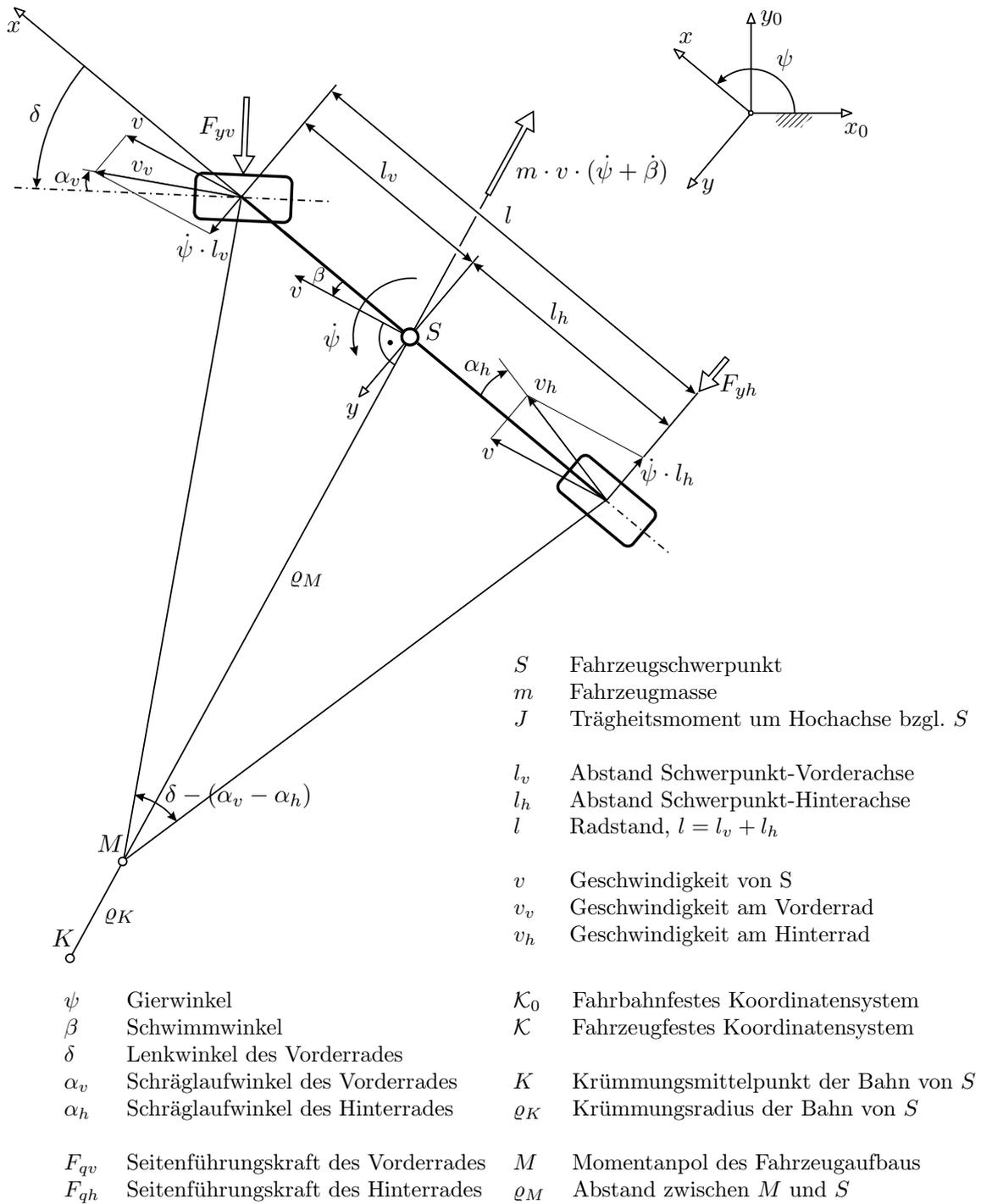


Abbildung 6.1: Allgemeiner Bewegungszustand des linearen Einspurmodells

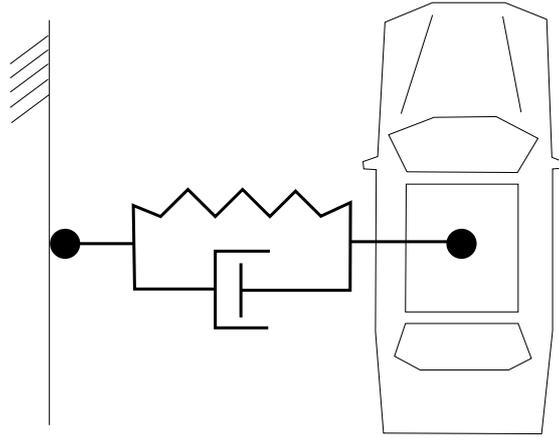


Abbildung 6.2: Sky-Hook-Modell als einfachstes Fahrermodell

zu einem Eigenwert  $\lambda_1$  gleich Null. Damit für ein lineares System schwache Stabilität gegeben ist, müssen die verbliebenen Eigenwerte negative Realteile aufweisen. Dies ist der Fall, wenn die charakteristischen Koeffizienten die HURWITZ-Bedingungen

$$-(a_{33} + a_{22}) > 0 \quad (6.12)$$

$$(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) > 0 \quad (6.13)$$

erfüllen. Die Bedingung (6.12) wird für reale Fahrzeugparameter stets eingehalten. Die Bedingung (6.13) wird jedoch für mögliche Fahrzeugparameter mit

$$c_{\alpha h} l_h > c_{\alpha v} l_v \quad (6.14)$$

ab der kritischen Fahrgeschwindigkeit

$$v_{krit} = \sqrt{\frac{c_{\alpha v} c_{\alpha h} l^2}{m(c_{\alpha h} l_h - c_{\alpha v} l_v)}} \quad (6.15)$$

verletzt. Fahrzeuge, für deren Parameter (6.14) gilt, nennt man übersteuernd, da sie bei stationärer Kreisfahrt einen geringeren Lenkwinkelschlag benötigen als in der rein kinematischen Betrachtung der ACKERMANN-Geometrie.

Da die Bewegungsgleichungen aus nichtlinearen Zusammenhängen linearisiert wurden, ist das Fahrzeug ohne Fahrereinwirkung instabil. Schon kleinste Einflüsse lassen das Fahrzeug vom Kurs abdriften. Daher sind die Untersuchungen nur sinnvoll, wenn das System als geschlossener Regelkreis betrachtet wird. Im einfachsten Fall kann die Fahrerreaktion durch eine im Soll-Kurs mitbewegte Feder nach dem Sky-Hook-Prinzip realisiert werden [82].

Für die weiteren Untersuchungen wurde das in [62] ausführlich beschriebene Modell eines idealen Fahrers verwendet und mit dem Einfluß stochastischen Seitenwindes erweitert. Es beruht darauf, daß ein virtueller, mit dem Fahrzeug fest verbundener, Punkt  $P$ , der um die sogenannte Vorausschaulänge  $l_P$  vor der Vorderachse liegt, entlang des gewünschten Kurses folgen soll. Für Geradeausfahrt verschwindet die Krümmung der Bahnkurve von  $P$ . Die Bewegungsgleichungen (6.6) und (6.7) können deshalb nach einigen Rechnungen zu einer Bewegungsgleichung

$$\ddot{\psi} + 2D\omega_1 \dot{\psi} + \omega_1^2 \psi = \sigma b w_y \quad (6.16)$$

mit

$$\omega_1^2 = \frac{c_{\alpha h} l}{J + m l_v (l_v + l_P)} \quad (6.17)$$

$$D = \frac{l + l_P}{2v} \omega_1 \quad (6.18)$$

$$b = \frac{k_y v (e_{SP} - l_v)}{J + m l_v (l_v + l_P)} \quad (6.19)$$

zusammengefaßt werden. Zur Bestimmung der Vorausschaulänge  $l_P$  wird angenommen, daß der Fahrer im Schwerpunkt  $S$  des Fahrzeuges sitzt, so daß die zur Verfügung stehende Vorausschauzeit oder Antizipationszeit durch

$$T_A = \frac{l_v + l_P}{v} \quad (6.20)$$

definiert ist. Theoretische Untersuchungen [62] liefern für die Antizipationszeit

$$T_A = \frac{2D_f}{\omega_0}, \quad (6.21)$$

was durch Experimente verifiziert wurde. Daraus ergibt sich die Vorausschaulänge

$$l_P = v \frac{2D_f}{\omega_0} - l_v \quad (6.22)$$

als Fahrzeugkonstante. Für positive  $l_P$  erfüllen die zu (6.16) gehörenden charakteristischen Koeffizienten die HURWITZ-Bedingungen.

## 6.2 Monte-Carlo-Simulation

Nach dem in Abschnitt 2.2.10 beschriebenen Verfahren erhält man aus (6.16) das stochastische ITÔ-Differentialgleichungssystem

$$d\Psi_{1,t} = \Psi_{2,t} dt \quad (6.23)$$

$$d\Psi_{2,t} = -\omega_1^2 \Psi_{1,t} dt - 2D\omega_1 \Psi_{2,t} dt + b w_{y0} dt + b \sigma dW_t. \quad (6.24)$$

Dieses wird nach dem in Kapitel 3 beschriebenen EULER-MARUYAMA-Verfahren für die Monte-Carlo-Simulation wie folgt diskretisiert:

$$\Psi_{1,n+1} = \Psi_{1,n} + \Psi_{2,n} \Delta t \quad (6.25)$$

$$\Psi_{2,n+1} = \Psi_{2,n} - \omega_1^2 \Psi_{1,n} \Delta t - 2D\omega_1 \Psi_{2,n} \Delta t + b w_{y0} \Delta t + b \sigma R_n \sqrt{\Delta t}. \quad (6.26)$$

Die Verteilungsdichten  $p(\psi_1, \psi_2)$  der Schwerpunkte zweier Fahrzeuge mit den gemeinsamen Parametern

$$\begin{aligned} v = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad m = 867,7 \text{ kg}, \quad J = 1146,0 \text{ kg m}^2, \quad l_v = 1,1 \text{ m}, \quad l_h = 1,3 \text{ m}, \\ \sigma = 0,3 \quad c_{\alpha v} = 47000,0 \frac{\text{N}}{\text{rad}}, \quad c_{\alpha h} = 60000,0 \frac{\text{N}}{\text{rad}}, \quad k_y = 2,56 \frac{\text{kg}}{\text{m}}, \quad w_{y0} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

sind in den Abbildungen 6.3 und 6.4 als Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulationen dargestellt. Beide Fahrzeuge unterscheiden sich lediglich in der Lage des Druckmittelpunktes in Bezug auf den Fahrzeugschwerpunkt, was mit  $e_{SP} > 0$  (Druckmittelpunkt vor dem Schwerpunkt) oder  $e_{SP} < 0$  (Druckmittelpunkt hinter dem Schwerpunkt) ausgedrückt wird. In [11] sind weitere Untersuchungen zum Lenkkomfort und zu den auftretenden Querbeschleunigungen im Fahrzeugschwerpunkt mittels Monte-Carlo-Simulation durchgeführt worden.

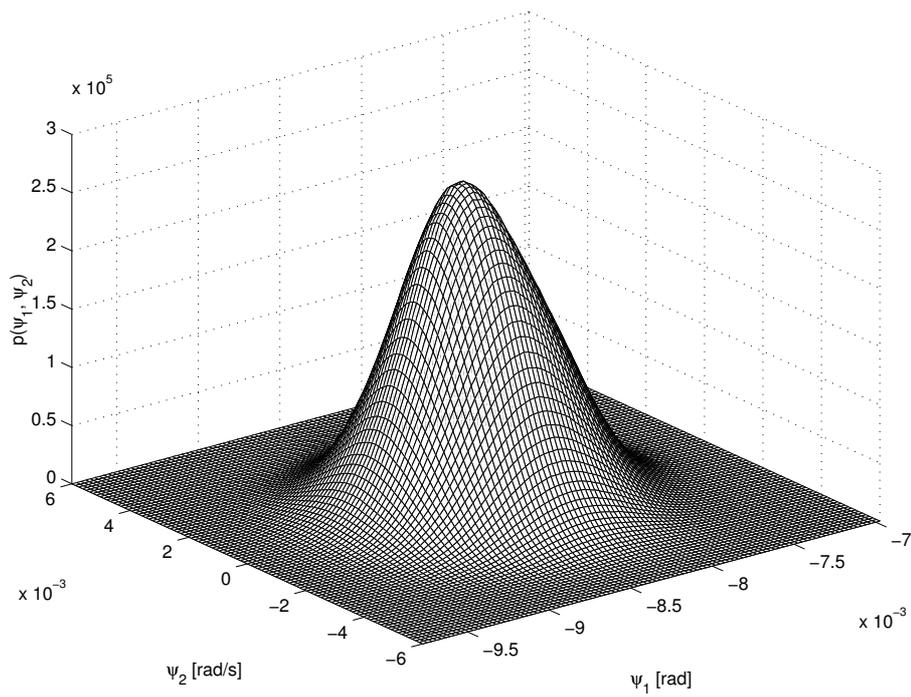


Abbildung 6.3: Verteilungsdichte  $p(\psi_1, \psi_2)$  für ein Fahrzeug mit  $e_{SP} < 0$  durch Monte-Carlo-Simulation

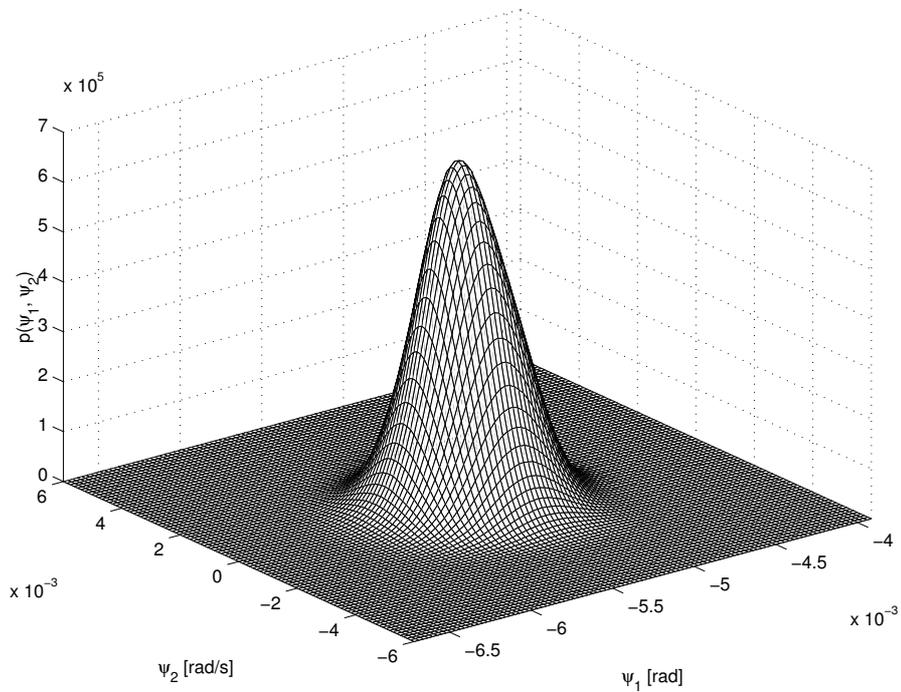


Abbildung 6.4: Verteilungsdichte  $p(\psi_1, \psi_2)$  für ein Fahrzeug mit  $e_{SP} > 0$  durch Monte-Carlo-Simulation

### 6.3 Lösung der Fokker-Planck-Kolmogorow-Gleichung

Die zum stochastischen ITÔ-Differentialgleichungssystem (6.23) und (6.24) gehörige FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung lautet für den stationären Fall

$$\frac{\partial}{\partial \psi_1} [\psi_2 p(\psi_1, \psi_2)] - \frac{\partial}{\partial \psi_2} [(\omega_1^2 \psi_1 + 2D\omega_1 \psi_2 - bw_{y0}) p(\psi_1, \psi_2)] - \frac{1}{2} \sigma^2 b^2 \frac{\partial^2 p(\psi_1, \psi_2)}{\partial \psi_2^2} = 0. \quad (6.28)$$

Ein schwach stationärer Prozeß ist orthogonal zu seiner Zeitableitung [53], das heißt es gilt

$$E[\Psi_{1,t} \Psi_{2,t}] = 0, \quad (6.29)$$

und somit sind  $\Psi_{1,t}$  und  $\Psi_{2,t}$  unkorreliert. Unkorrelierte GAUSS'sche Prozesse sind aber auch unabhängig. Da bei linearen Systemen der GAUSS'sche Charakter des Eingangssignals für das Ausgangssignal erhalten bleibt, ist die gemeinsame Verteilungsdichte aus den Randverteilungsdichten einfach angebar:

$$p(\psi_1, \psi_2) = p(\psi_1) p(\psi_2). \quad (6.30)$$

Gleichung (6.28) wird damit zu

$$\begin{aligned} & [\psi_2 p_2(\psi_2)] p_1'(\psi_1) \\ & - \left[ \frac{1}{2} \sigma^2 b^2 p_2''(\psi_2) + (\omega_1^2 \psi_1 + 2D\omega_1 \psi_2 - bw_{y0}) p_2'(\psi_2) + 2D\omega_1 p_2(\psi_2) \right] p_1(\psi_1) = 0, \end{aligned} \quad (6.31)$$

und mit der Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1(\psi_1) d\psi_1 = 1, \quad (6.32)$$

der Symmetriebedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_1'(\psi_1) d\psi_1 = 0, \quad (6.33)$$

sowie mit dem Mittelwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_1 p_1(\psi_1) d\psi_1 = \frac{bw_{y0}}{\omega_1^2} \quad (6.34)$$

erhält man nach uneigentlicher Integration von (6.31) die gewöhnliche Differentialgleichung in  $p_2$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 b^2 p_2''(\psi_2) + 2D\omega_1 \psi_2 p_2'(\psi_2) + 2D\omega_1 p_2(\psi_2) = 0. \quad (6.35)$$

Mit einem mittelwertfreien Normalverteilungsansatz und nach Normierung lautet die Lösung für die Randverteilungsdichte von  $\psi_2$

$$p_2(\psi_2) = \sqrt{\frac{2D\omega_1}{\pi \sigma^2 b^2}} \exp\left(-\frac{2D\omega_1}{\sigma^2 b^2} \psi_2^2\right). \quad (6.36)$$

Wird (6.31) zunächst durch Einsetzen von (6.35) vereinfacht und danach (6.36) sowie deren

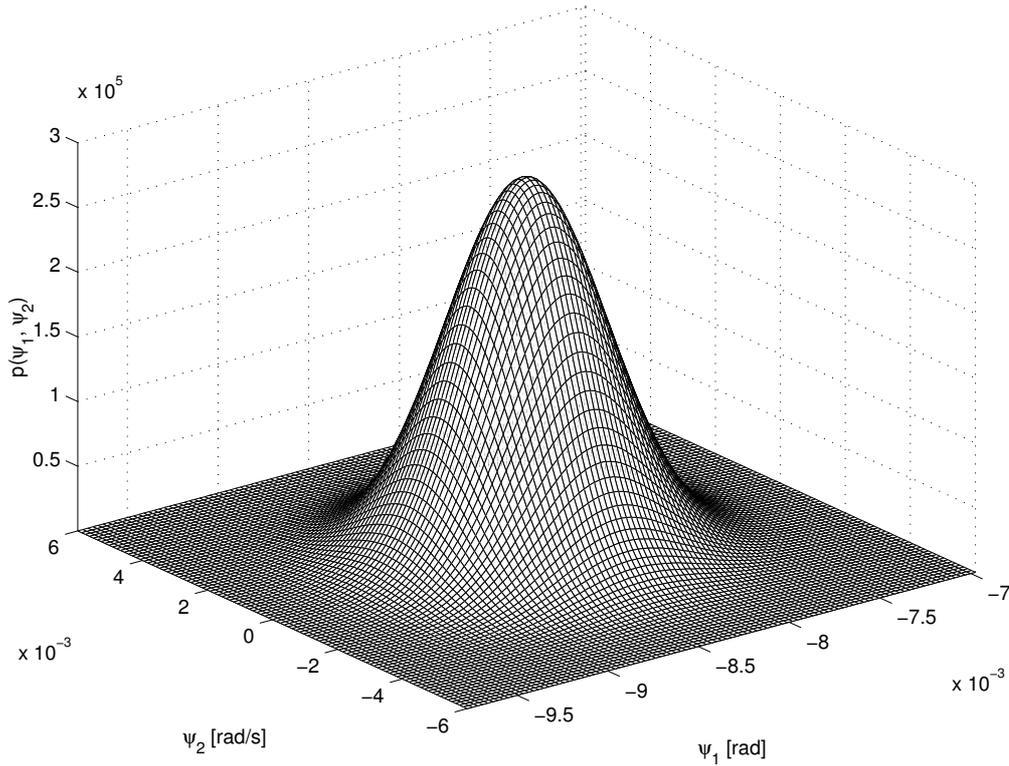


Abbildung 6.5: Verteilungsdichte  $p(\psi_1, \psi_2)$  für ein Fahrzeug mit  $e_{SP} < 0$  durch Lösung der FPK-Gleichung

Ableitung in (6.31) eingesetzt, ergibt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $p_1$

$$p_1'(\psi_1) + \frac{4D\omega_1}{\sigma^2 b^2} (\omega_1^2 \psi_1 - b w_{y0}) p_1(\psi_1) = 0, \quad (6.37)$$

deren Lösung die Randverteilungsdichte von  $\psi_1$  mit

$$p_1(\psi_1) = \sqrt{\frac{2D\omega_1^3}{\pi\sigma^2 b^2}} \exp\left(-\frac{2D\omega_1}{\sigma^2 b^2} (\omega_1^2 \psi_1^2 - 2b w_{y0} \psi_1 + \frac{w_{y0}^2 b^2}{\omega_1^2})\right) \quad (6.38)$$

ist. Die gemeinsame Verteilungsdichte als Lösung der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung lautet somit

$$p(\psi_1, \psi_2) = \frac{2D\omega_1^2}{\pi\sigma^2 b^2} \exp\left(-\frac{2D\omega_1}{\sigma^2 b^2} (\omega_1^2 \psi_1^2 + \psi_2^2 - 2b w_{y0} \psi_1 + \frac{w_{y0}^2 b^2}{\omega_1^2})\right). \quad (6.39)$$

Nach Einsetzen der Lösung (6.39) in (6.28) wird die FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung identisch erfüllt, so daß die Lösung der Verteilungsdichte für das linearisierte Einspurmodell exakt ist. Für den gleichen Parametersatz wie bei der Monte-Carlo-Simulation ist die Verteilungsdichte nach (6.39) in Abbildung 6.5 dargestellt.

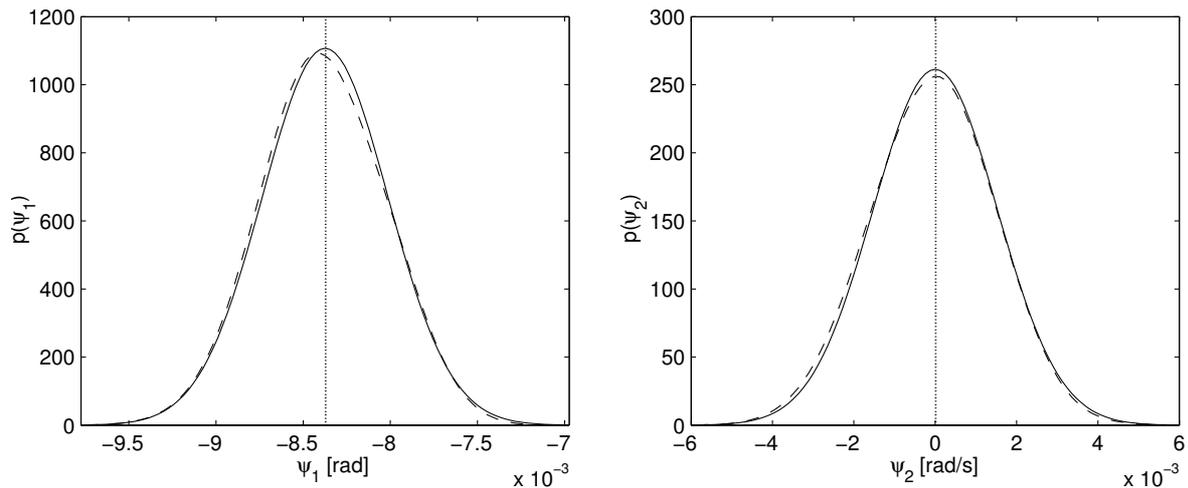


Abbildung 6.6: Randverteilungsdichten  $p(\psi_1)$  und  $p(\psi_2)$  im Vergleich: Monte-Carlo-Simulation (strichliert) und Lösung der FPK-Gleichung (durchgezogene Linien).

## 6.4 Vergleich von Simulation und analytischer Lösung

Eine bessere graphische Vergleichsmöglichkeit zwischen der Monte-Carlo-Simulation und der analytischen Lösung ist sowohl durch das Übereinanderlegen der Randverteilungsdichten in Abbildung 6.6 als auch durch das Übereinanderlegen von Schnitten durch die gemeinsame Verteilungsdichte in Abbildung 6.7 gegeben.

Über eine numerisch durchgeführte Fehlerbetrachtung ergibt sich der absolute wahre Fehler durch eine Subtraktion der diskretisierten exakten Verteilungsdichte nach Gleichung (6.39) von den durch die Monte-Carlo-Simulation ermittelten Näherungswerten, der für die Beispielrechnung in Abbildung 6.8 abgebildet ist. Der wahre relative Fehler ist dann das Verhältnis aus absolutem wahren Fehler zum exakten Wert. In Abbildung 6.9 ist aus Übersichtlichkeitsgründen der Betrag des relativen wahren Fehlers über den gesamten Simulationsbereich aufgetragen. Es fällt auf, daß der relative wahre Fehler an den Simulationsrändern bis zu 100% beträgt. Dies ist einerseits auf die methodenbedingt begrenzte Simulationsdauer und andererseits vor allem auf die BOX-MULLER-Transformation (3.5) beziehungsweise deren Polarform (3.6) zurückzuführen. Die Singularität des Logarithmus an der Stelle Null führt zu numerischen Schwierigkeiten, da kleine Ungenauigkeiten der in der Nähe von Null liegenden Pseudozufallszahlen zu großen Differenzen in den transformierten Zahlen führen. Die Ungenauigkeiten liegen in der begrenzten Länge der Mantisse der Zufallszahlen. Und genau dieser Bereich stellt die Ränder der Simulation dar.

Es ist jedoch offensichtlich, daß bei kleinen Werten in der Verteilungsdichte der absolute Fehler und bei großen Werten in der Verteilungsdichte der relative Fehler aussagekräftiger ist. Im Hinblick darauf wurde in Abbildung 6.10 ein verkleinerter Ausschnitt in der Nähe des Verteilungsdichtemaximums wiedergegeben, wo auch der absolute wahre Fehler betragsmäßig am größten ist. Der relative wahre Fehler beträgt in diesem Bereich höchstens 12%, wobei die Monte-Carlo-Simulation hier geringere Dichten ergibt als die Lösung der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung.

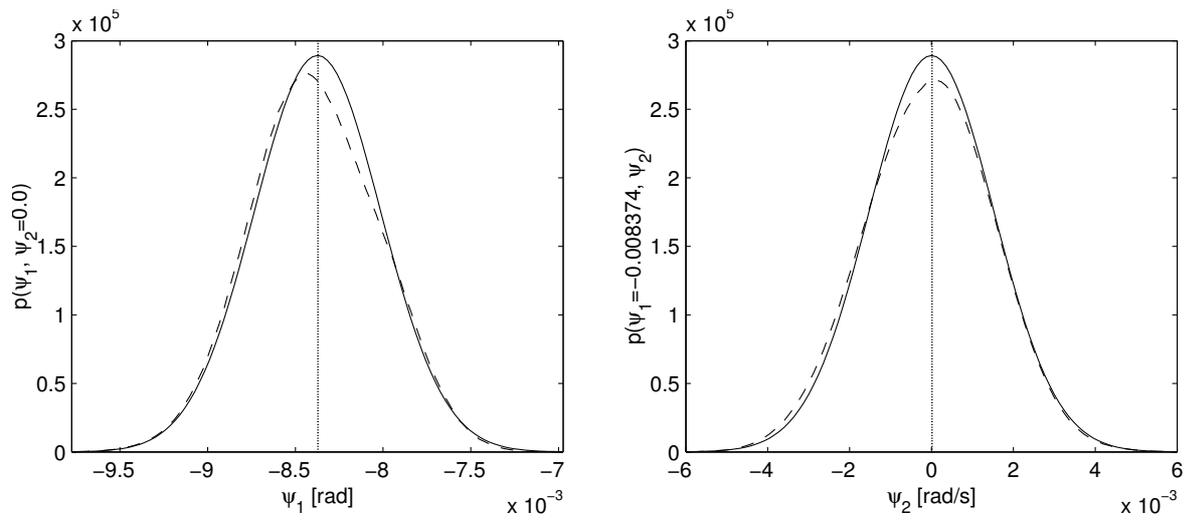


Abbildung 6.7: Schnitt durch die gemeinsame Verteilungsdichte: links  $p(\psi_1, \psi_2 = 0)$  und rechts  $p(\psi_2)$  im Vergleich: Monte-Carlo-Simulation (strichliert) und Lösung der FPK-Gleichung (durchgezogene Linien).

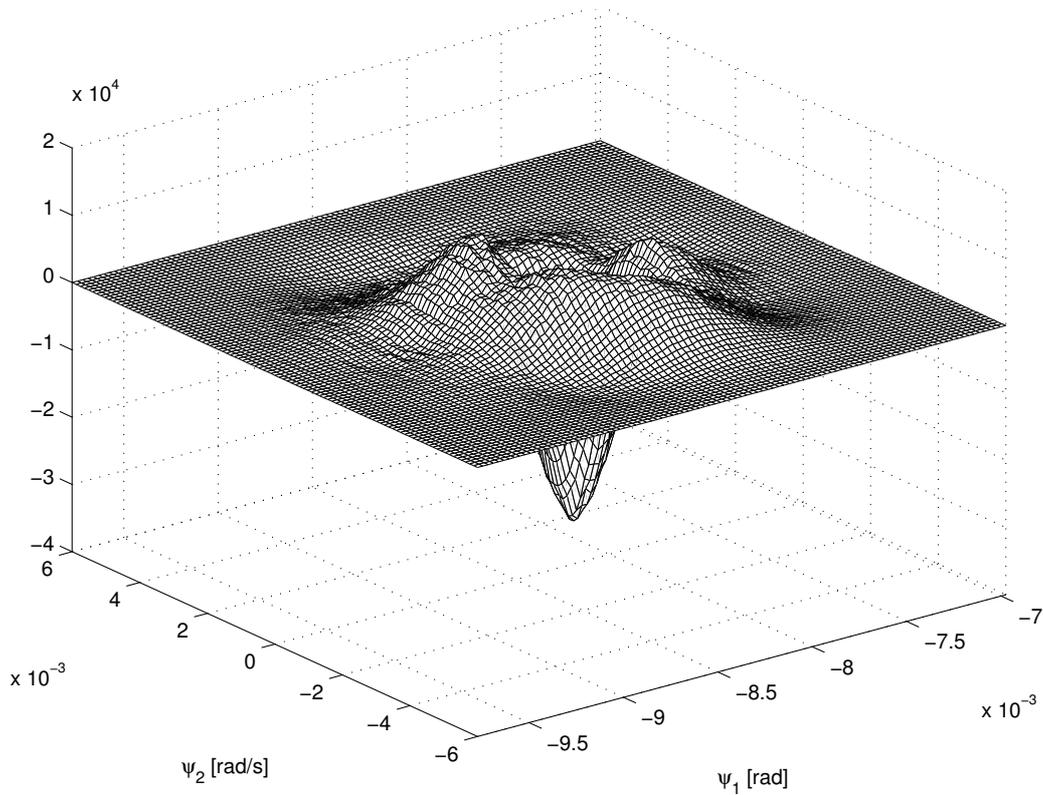


Abbildung 6.8: Absoluter wahrer Fehler

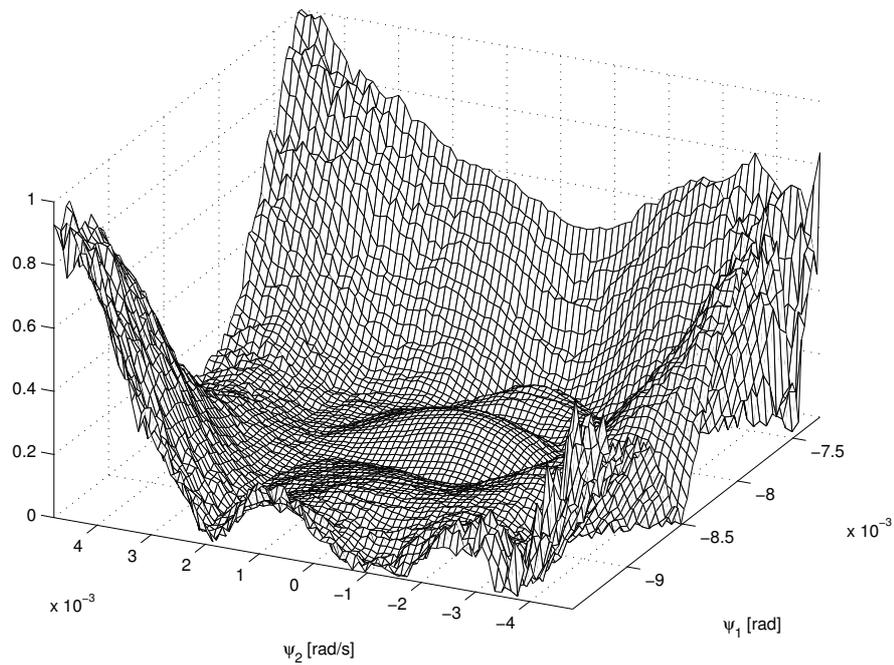


Abbildung 6.9: Relativer wahrer Fehler über dem gesamten Simulationsbereich

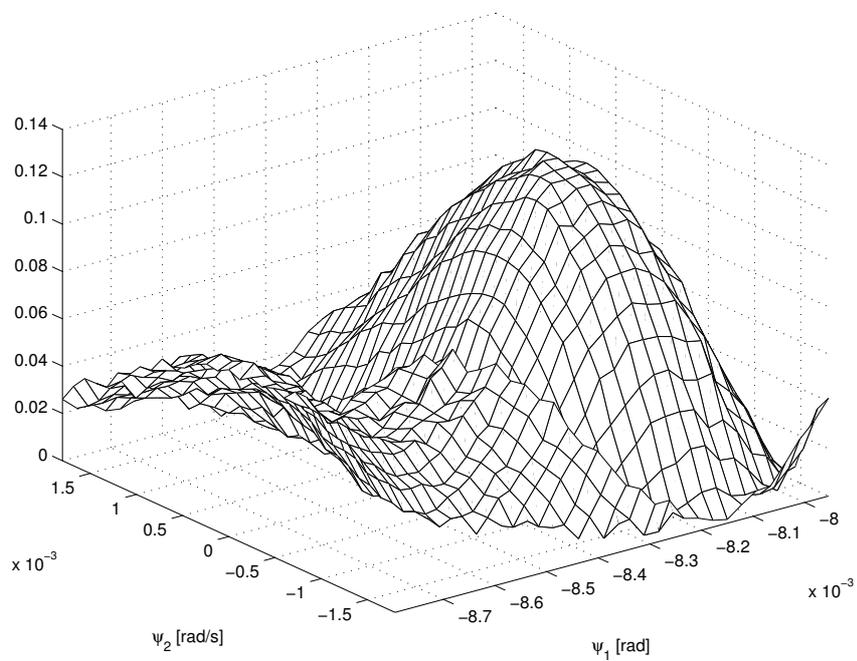


Abbildung 6.10: Relativer wahrer Fehler über einem Teilbereich der Simulation

## Kapitel 7

# Querdynamik eines Eisenbahnratsatzes

Als systemkennzeichnendes Bauteil des Rad-Schiene-Systems spielt der Eisenbahnratsatz in der Systemdynamik der Eisenbahnfahrzeuge aufgrund seiner außerordentlich hohen Beanspruchung und seiner absoluten Sicherheitsrelevanz eine zentrale Rolle. Ihm kommen die Aufgaben Tragen, Führen und Antreiben beziehungsweise Bremsen zu. Die Querdynamik beschäftigt sich mit dem Führen des Ratsatzes innerhalb des vorgegebenen Spurspiels im Gleis. Wie alle technischen Gebilde ist auch die Geometrie des Ratsatzes und die Lage des Gleises nicht frei von Abweichungen zu einem definierten Sollzustand. Das in diesem Kapitel hinsichtlich der Querdynamik in Betracht gezogene vereinfachte Ratsatz-Gleis-Modell berücksichtigt lediglich Gleisquerlagefehler.

Vor etwa 150 Jahren wurden die ersten theoretischen Untersuchungen zum Ratsatzlauf durch REDTENBACHER veröffentlicht [76], wo geometrische Bedingungen für zwangloses kinematisches Abrollen eines Ratsatzes im Kreisbogen formuliert sind. Später gab KLINGEL in [40] die aufgrund kegeliger Radlaufflächen und kinematischen Abrollens hervorgerufene Wellenlänge

$$L_{\text{Klingel}} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0 b}{\delta_0}} \quad (7.1)$$

des sogenannten Sinuslaufs eines ungefesselten Ratsatzes auf gerader Bahn an, die als Lösung der von REDTENBACHER aufgestellten Bedingungen angesehen werden kann. Darin bedeutet  $r_0$  den Rollradius,  $b$  den Abstand der Radaufstandspunkte zur Ratsatzmittenebene und  $\delta_0$  den Kegelwinkel des Radprofils. Es muß dabei hervorgehoben werden, daß unter einem Ratsatz im allgemeinen zwei fest auf einer starren Ratsatzwelle sitzende Radscheiben zu verstehen sind. Sind die beiden Radscheiben gegeneinander drehbar angeordnet, so spricht man von einem *Losratsatz* oder *Losradpaar*.

Erst Anfang bis Mitte des 20. Jahrhunderts wurden auch dynamische Effekte in die Betrachtung einbezogen und zunächst parallel mit den Untersuchungen zur Kinematik, später alleine weitergeführt. Ein ausführlicher Abriß über die Geschichte dieser Entwicklungen ist in [42] und [100] zu finden.

## 7.1 Radsatzmodell

Um die Charakteristik der Querdynamik eines Eisenbahnradsatzes zu untersuchen, wurde vom Einfluß fahrzeugspezifischer Parameter und der besonderen nichtlinearen Kontaktmechanik des Radsatzes auf einem beliebig profilierten Gleis abgesehen. Vielmehr genügt das Radsatzmodell in Abbildung 7.1 den folgenden Eigenschaften:

- Der Radsatz wird als Starrkörper betrachtet.
- Profilierte Räder, so daß bei Radsatzquerverschiebung Profilseitenkräfte entstehen
- Die Radprofile des rechten und linken Radsatzes sind zur vertikalen Schwerachse des Radsatzes symmetrisch.
- Die Lage der Berührungspunkte zwischen Radsatz und Schienen ist allein durch die Querauslenkung des Radsatzes gegenüber dem Gleis und durch das Radprofil bestimmt. Dies entspricht einer Schneidenlagerung.
- Es tritt keine Zweipunktberührung auf.
- Für die Berechnung der Kontaktkräfte gilt die lineare Theorie nach KALKER.
- Der Radsatz ist antriebslos und ungebremst.
- Die Vertikaldynamik bleibt außerhalb der Betrachtung, so daß eine konstante Radnormalkraft vorausgesetzt wird.
- Symmetrische Fesselung mittels linearer Federelemente an ein im Sollkurs mitbewegtes Referenzsystem nach dem Sky-Hook-Prinzip. Damit gleichbedeutend ist ein an die Umgebung gefesselter Radsatz, der auf einem Rollprüfstand läuft.
- Einfluß einer stochastischen Querkraft aus aerodynamischen Turbulenzen oder aus Seitenwind kann berücksichtigt werden.

Damit besitzt der Radsatz die vier Freiheitsgrade *Zucken*, *Nicken*, *Schieben*, *Gieren*: Längslage  $x$ , Nickwinkel  $\varphi$ , Querlage  $y$  und Gierwinkel  $\psi$ . Der Nickwinkelfreiheitsgrad ist die Abweichung der Winkelgeschwindigkeit von der als konstant angesehenen Drehbewegung aus der Fortbewegung und nicht die absolute Drehung. Das Zucken und Nicken wird auch *symmetrische* Bewegung, das Schieben und Gieren *antimetrische* Bewegung genannt.

## 7.2 Gleismodell

Um das dynamische Verhalten eines auf einem Gleis rollenden Radsatzes zu untersuchen, benötigt man neben dem mechanischen Modell für den Radsatz auch eine Modellierung für das Gleis. Der Radsatz wird einerseits durch Gleislagefehler, die sich als Störungen auf den Radsatzlauf auswirken, angeregt. Andererseits beeinflussen die statischen und dynamischen Kräfte des Radsatzes die Gleislage. In dieser Untersuchung wird das Gleis jedoch als starr vorausgesetzt. Diese Voraussetzung ist im Hinblick auf das verwendete Starrköperradsatzmodell sinnvoll, da die Gleisbewegungen hinsichtlich der Radsatzbewegungen klein sind.

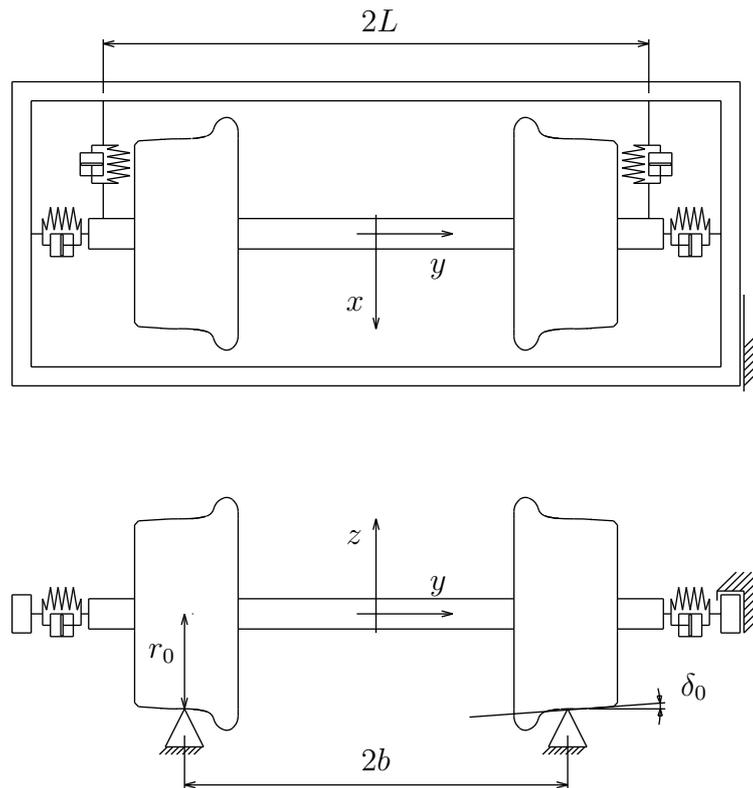


Abbildung 7.1: Modell des Radsatzes auf dem Rollprüfstand

Die Gleisgeometrie ist durch die räumliche Lage der beiden Fahrschienen bestimmt. Als Gleislagefehler bezeichnet man die Abweichung der tatsächlichen Gleislage von der theoretischen Sollgleislage entlang der Strecke. Die Beschreibung der Gleislage findet also im Wegbereich statt. Durch die vier Größen  $y_L(x)$ ,  $z_L(x)$ ,  $y_R(x)$  und  $z_R(x)$  ist die Lage der beiden Schienen in jedem Streckenabschnitt  $x$  festgelegt. Zweckmäßigerweise werden diese Daten in einem mit dem Ursprung in der Sollgleislage mitbewegten Koordinatensystem angegeben. Man unterscheidet vier Gleislagefehler: den Querlagefehler  $y_G$ , den Querhöhenfehler  $z_L - z_R$ , den Spurweitenfehler  $y_L - y_R$  und den Längshöhenfehler  $z_G$  (Abbildung 7.2).

Neben der Gleislage wirken sich noch Unregelmäßigkeiten in der Schieneneinbauneigung als Anregung für den Radsatz aus. In Europa sind die Schienen je nach Land mit einer nominalen Neigung von 1 : 40 oder 1 : 20 zur Gleismitte hin eingebaut. Weiteren Einfluß hat die Schienenkopfform, die nicht nur durch Fertigungsungenauigkeiten, sondern vor allem durch Verschleiß einer ständigen Änderung unterworfen ist.

Die Gleisgeometrie realer Gleise wird durch Messungen ermittelt, so daß man die räumliche Lage der Fahrschienen als Datensatz im Wegbereich erhält. Um die Datenmenge zu vermindern und um die Gleislage verschiedener Strecken miteinander vergleichen zu können, werden die Daten über eine Fourieranalyse vom Weg- in den Frequenzbereich transformiert. In der Literatur sind diese Daten häufig als *spektrale Unebenheitsleistungsdichte*  $\Phi(\Omega)$  mit der Wegfrequenz  $\Omega$  [24]. Um ein Spektrum  $S_y(\Omega)$  zu erhalten, das mit der hier verwendeten Definition (2.63) verträglich ist, muß die Unebenheitsleistungsdichte  $\Phi(\Omega)$  mit dem Faktor

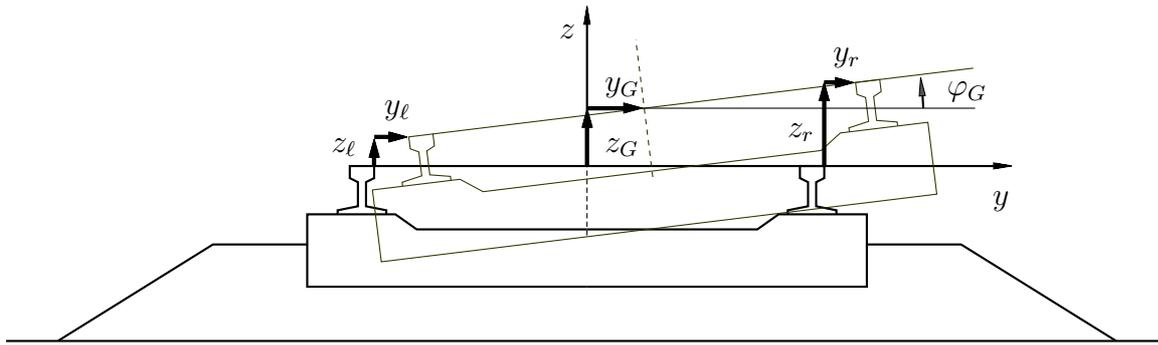


Abbildung 7.2: Mögliche Gleislagefehler

$\pi$  normiert werden:

$$S_y(\Omega) = \pi\Phi(\Omega). \quad (7.2)$$

Eine Sammlung von Unebenheitsleistungsdichtespektren  $\Phi_y(\Omega)$  der Gleislängslage und der Gleisquerlage verschiedener Eisenbahnstrecken ist ebenfalls in [24] zu finden. Darin streuen die Daten um bis zu zwei Zehnerpotenzen. Um Aussagen über die Güte der Gleislage treffen zu können, wird die obere Begrenzung des Streubandes als schlechtes Gleis definiert. Sinngemäß entspricht die untere Begrenzung dem besten Gleis. Nach [74] lassen sich die spektralen Unebenheitsleistungsdichten in Abhängigkeit der Wegkreisfrequenz in der Form

$$\Phi(\Omega) = \frac{\alpha}{\left(\beta + \frac{\Omega}{2\pi}\right)^3} \quad (7.3)$$

darstellen. Der Beiwert  $\alpha$  wird *Unebenheit*, der Beiwert  $\beta$  wird *Welligkeit* genannt. Tabelle 7.1 enthält empirisch ermittelte Beiwerte für Gleise schlechtesten, durchschnittlichen und besten Gleislage.

Gleislage	Zustand	Unebenheit $\alpha$	Welligkeit $\beta$
Längshöhenlage	schlechteste	$9,39 \cdot 10^{-1}$	$6,89 \cdot 10^{-2}$
	durchschnittliche	$1,31 \cdot 10^{-2}$	$2,94 \cdot 10^{-2}$
	beste	$1,90 \cdot 10^{-4}$	$9,71 \cdot 10^{-3}$
Querlage	schlechteste	$2,74 \cdot 10^{-1}$	$3,13 \cdot 10^{-2}$
	durchschnittliche	$1,33 \cdot 10^{-2}$	$2,33 \cdot 10^{-2}$
	beste	$6,33 \cdot 10^{-4}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$
Spurweite	schlechteste	$1,64 \cdot 10^{-1}$	$5,35 \cdot 10^{-2}$
	durchschnittliche	$4,68 \cdot 10^{-2}$	$7,96 \cdot 10^{-2}$
	beste	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$1,12 \cdot 10^{-1}$
Querhöhenlage	schlechteste	$2,16 \cdot 10^{-8}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$
	durchschnittliche	$2,87 \cdot 10^{-9}$	$3,17 \cdot 10^{-3}$
	beste	$4,07 \cdot 10^{-10}$	$5,57 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 7.1: Unebenheits- und Welligkeitsbeiwerte für Gleichung (7.3) [24].

Abbildung 7.3 zeigt die beiden Grenzen und die Form für realitätsnahe Leistungsdichtespektren auf Grundlage von Gleichung (7.3), und in Abbildung 7.4 sind gemessene Leistungsdichtespektren abgebildet. Offensichtlich weisen diese die Anregung als rotes Rauschen aus.

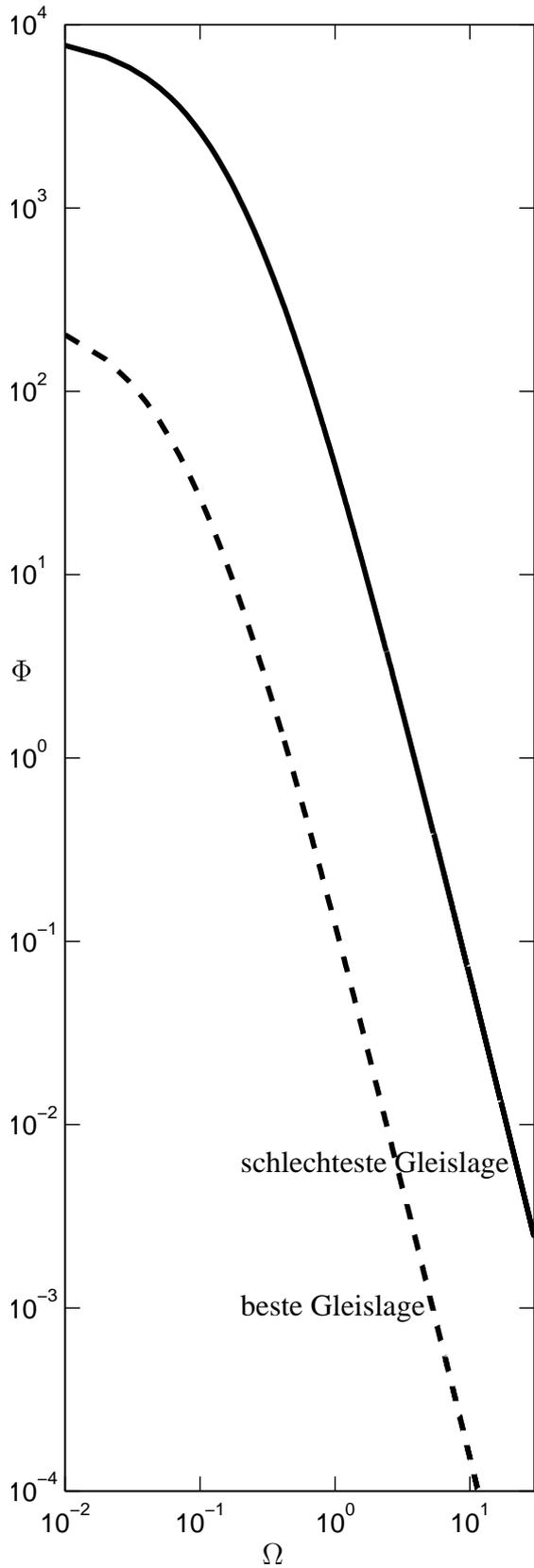


Abbildung 7.3: Nach Gleichung (7.3) ermittelte Grenzen für Leistungsdichtespektren der Gleisquerlage.

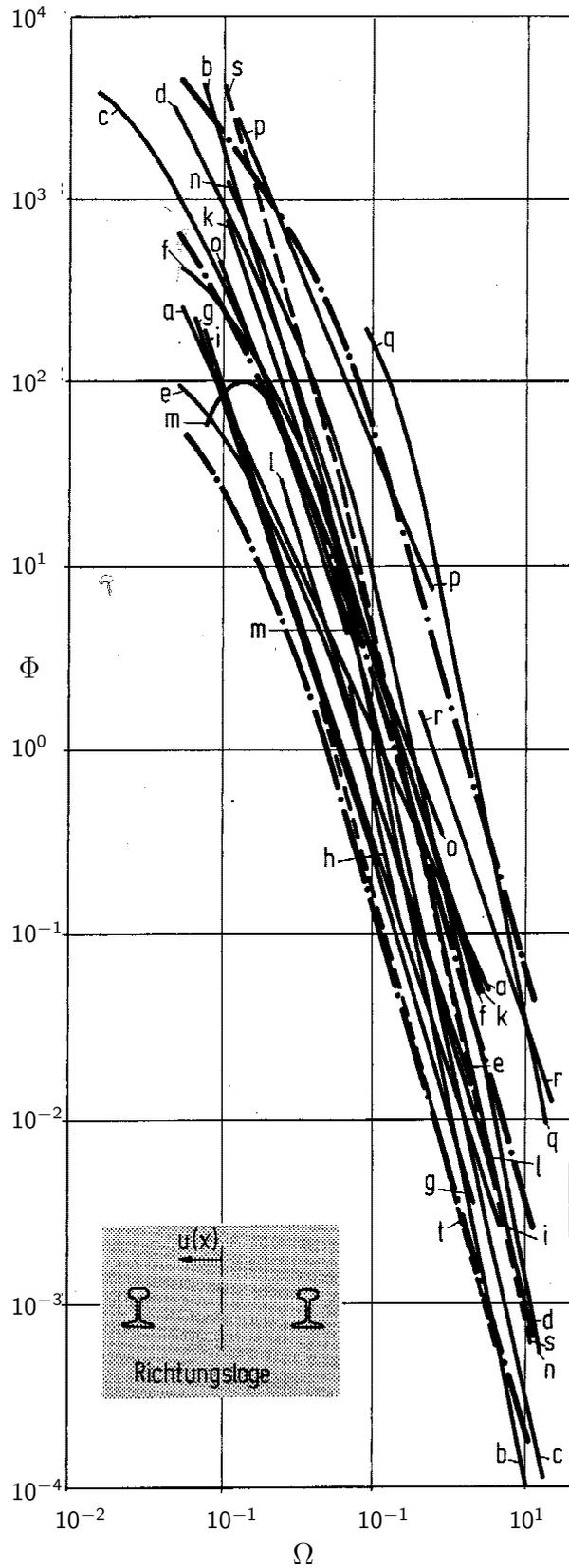


Abbildung 7.4: Leistungsdichtespektren der Gleisquerlage aus Messungen nach [24].

Um für Simulationen geeignete Wegtrajektorien nach dem in Abschnitt 2.4 beschriebenen Verfahren aus [2] zu erzeugen, wird ein Leistungsdichtespektrum durch eine in doppelt logarithmischem Sinne stückweise lineare Funktion vorgegeben. Nach Bestimmung der Parameter  $a_i$  und  $b_i$  wird die Wegtrajektorie  $Y_s$  durch die Rekursionsgleichung

$$Y_{s,k} = \mathbf{b}^T \mathbf{Z}_s \quad (7.4)$$

$$\mathbf{Z}_{s,k+1} = \exp(\mathbf{A}\Delta s)\mathbf{Z}_{s,k} + \mathbf{p}_n R_k \sqrt{\Delta s} \quad (7.5)$$

diskretisiert. Darin ist  $\mathbf{A}$  die Systemmatrix der homogenen Parameter  $a_i$ ,  $\mathbf{b}$  ist der Vektor der inhomogenen Parameter  $b_i$ ,  $\mathbf{p}_n$  ist die letzte Spalte der Matrix  $\mathbf{A}^{-1}(\exp(\mathbf{A}\Delta s) - \mathbf{I})$  und  $R_k$  ist eine standardnormalverteilte Pseudozufallszahl unter der Intensität  $\sigma$ . Analog zum Zeitbereich wird für die Wegtrajektorie der WIENER-Prozeß aus der Pseudozufallszahl und dem Weginkrement  $\sqrt{\Delta s}$  gebildet.

### 7.3 Berührgeometrie

Die Untersuchung bezieht sich auf ein ebenes und gerades Gleis. In der Realität weist die Geometrie der Berührung von Rad und Schiene nicht nur nichtlineares, sondern auch unstehtiges Verhalten auf [64]. Der jedem momentanen Berührungspunkt zwischen Rad und Schiene zugeordnete Radius heißt Rollradius. Die Rollradiendifferenz zwischen linkem und rechtem Berührungspunkt weist bei stetiger Querverschiebung des Radsatzes mehrere Unstetigkeitsstellen auf, die nicht nur in der Berechnung, sondern auch im täglichen Betrieb durch erhöhten Verschleiß Schwierigkeiten bereiten. In Abbildung 7.5 zeigt die durchgezogene Linie die Rollradiendifferenzfunktion für die Profilverpaarung zwischen einem Rad mit dem Radprofil der Bezeichnung *ORE S 1002* und einem Schienenkopfprofil der Bezeichnung *UIC 60* bei einer Schieneneinbauneigung von 1 : 40. Das sind reale Profile im Neuzustand, wie sie bei den meisten europäischen Bahnen eingesetzt werden.

In [66] wird ein verbessertes Schienenkopfprofil *60E2verb* vorgeschlagen, das im Zusammenspiel mit dem erwähnten Radprofil eine stetige und differenzierbare Rollradiendifferenzfunktion aufweist.

Damit die beiden Radprofile symmetrisch zur Schwerachse verlaufen, muß es sich bei der Rollradiendifferenzfunktion um eine ungerade Funktion handeln. Sie soll daher im folgenden mit

$$\Delta r = \sum_{i=0}^n a_{2i+1} y^{2i+1} \quad (7.6)$$

für  $n = 2$  beschrieben werden.

Anhand von Abbildung 7.6 werden die Zusammenhänge zwischen der Radsatzquerverschiebung  $y$  und der resultierenden Schwerpunktanhebung  $z$  erläutert. Es gilt für kleine Auslenkungen gegenüber den Radsatzmaßen

$$y = b - r_r \sin \varphi + y_r \cos \varphi - b \cos \varphi \quad (7.7)$$

$$y = -b - r_\ell \sin \varphi + y_\ell \cos \varphi + b \cos \varphi \quad (7.8)$$

$$z = -r_0 + r_\ell \cos \varphi + y_\ell \sin \varphi + b \sin \varphi \quad (7.9)$$

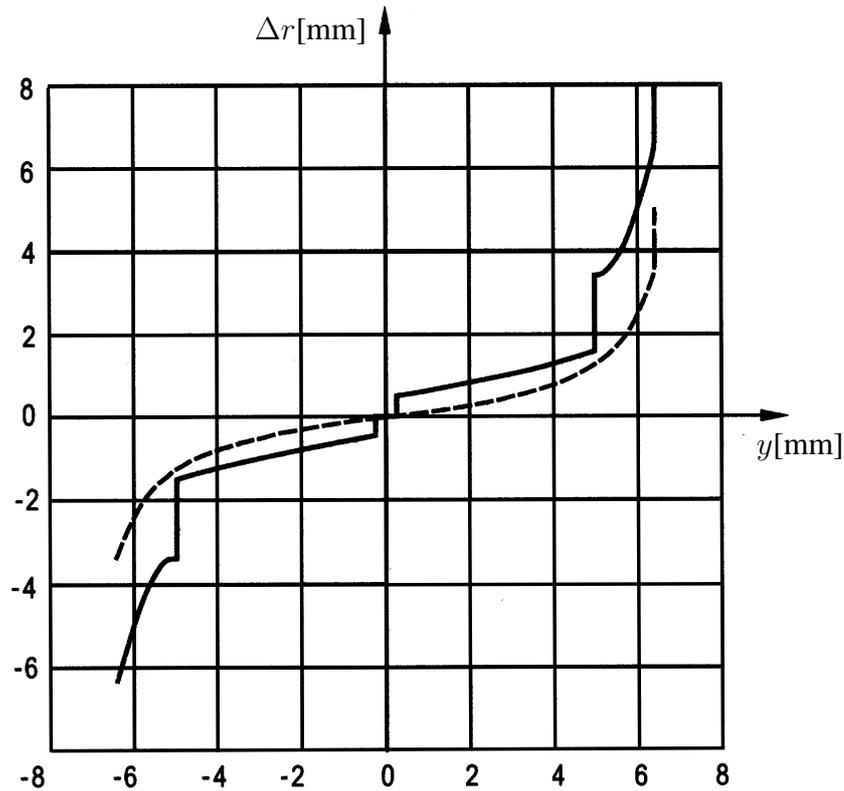


Abbildung 7.5: Rollradiendifferenz als Funktion der Radsatzquerverschiebung. Profilpaarung jeweils ORE S 1002 mit UIC 60 (durchgezogen) sowie mit 60E2verb (strichliert).

und nach Linearisierung der Sinus- und Cosinusanteile

$$y = y_r - r_r \varphi \quad (7.10)$$

$$y = y_\ell - r_\ell \varphi \quad (7.11)$$

$$z = y_\ell \varphi + r_\ell - r_0 + b \varphi. \quad (7.12)$$

Für die Rollradiendifferenzfunktion gilt mit (7.6) und nach Linearisierung

$$\Delta r = r_r - r_\ell = a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 \quad (7.13)$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{2b + |y_\ell| - |y_r|} (r_r - r_\ell) \quad (7.14)$$

$$\varphi = \frac{1}{2b} (a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5). \quad (7.15)$$

Die Näherung

$$r_\ell = r_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 a_i y^i \quad (7.16)$$

führt schließlich auf

$$z = b_2 y^2 + b_4 y^4 + b_6 y^6, \quad \text{mit } b_i = \frac{1}{2} \left( \frac{a_{i-1}}{b} - a_i \right), \quad i = 2, 4, 6. \quad (7.17)$$

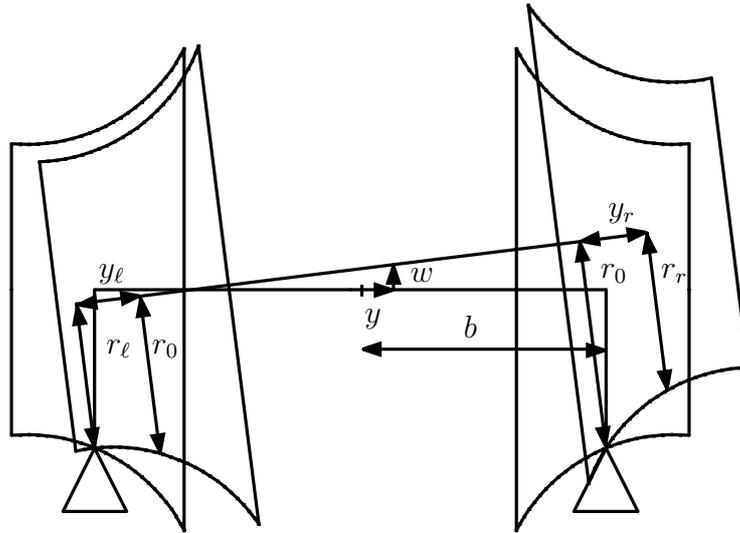


Abbildung 7.6: Berührgeometrie bei Radsatzquerauslenkung

Die potentielle Energie des freien Radsatzes ist damit als Funktion der Querverschiebung  $y$  darstellbar. Über die LAGRANGESchen Gleichungen zweiter Art erhält die resultierende Profelseitenkraft die Form

$$F_P(y) = \gamma_1 y + \gamma_2 y^3 + \gamma_3 y^5. \quad (7.18)$$

Mit einer geeigneten Wahl der  $a_i$  können damit in Grenzen auch verschlissene oder andere freie Profilverbindungen beschrieben werden, sofern sie die eingangs erwähnten Bedingungen erfüllen. Insbesondere sind auch geänderte Schieneneinbauneigungen sowie unterschiedliche Spurweiten und Spurspiele mit den damit verbundenen äquivalenten Konizitäten definierbar. Die äquivalente Konizität ist ein in der Praxis häufig gebrauchtes Maß. Sie gibt denjenigen Kegelwinkel  $\delta_0$  an, welcher gemäß der Klingelformel (7.1) die selbe Wellenlänge ergibt wie der zu beschreibende Radsatz mit Hohlprofilen im schlupffreien Lauf besitzt. Dieser Wert ist sehr stark abhängig von den Rad/Schiene-Parametern Spurweite, Schieneneinbauneigung und Kopfprofil.

## 7.4 Systemgleichungen

Über die Aufstellung der Bewegungsgleichungen für die Querauslenkung und die Gierbewegung existieren mehrere Arbeiten, zum Beispiel [72] und [77]. Die Untersuchungen wurden auf Basis der Gleichungen für einen freien Radsatzlauf nach POPP und SCHIEHLEN [72]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} = 0 \quad (7.19)$$

mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (7.20)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\frac{f_{22}}{v_0} & 0 \\ 0 & 2\frac{b^2 f_{11} + f_{33}}{v_0} \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{f_{23}}{v_0} - J_2\frac{\delta_0 v_0}{br_0} \\ -2\frac{f_{23}}{v_0} + J_2\frac{\delta_0 v_0}{br_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.22)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2\frac{q_0\delta_0}{b} & f_{11}\frac{b\delta_0}{r_0} - f_{22} \\ f_{11}\frac{a\delta_0}{r_0} - f_{22} & 2f_{23} \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & -f_{11}\frac{b\delta_0}{r_0} - f_{22} \\ f_{11}\frac{b\delta_0}{r_0} + f_{22} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

und den generalisierten Koordinaten

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} y \\ \psi \end{pmatrix} \quad (7.25)$$

durchgeföhrt. Grundsätzlich ist die beschriebene antimetrische Bewegung (Quer- und Gierbewegung) mit der symmetrischen Bewegung (Längs- und Rollbewegung) gekoppelt. Für kleine Schwingungsamplituden können diese jedoch getrennt voneinander betrachtet werden [77]. Da die symmetrische Bewegung durch Spurweitenänderungen und die antimetrische Bewegung durch Gleisquerlagefehler hervorgerufen wird, ist die in der Modellbildung getroffene alleinige Betrachtung der Querlagefehler für die Untersuchung der Lateraldynamik ausreichend. Mit der Einführung der nichtlinearen Profilseitenkräfte (7.18), der Ergänzung der Feder- und Dämpfungsglieder  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $d_x$  und  $d_y$  in den Koppellementen, sowie unter Berücksichtigung stochastischer Gleisquerlagefehler  $Y_t$  und einer generalisierten stochastischen Querkraft  $\mathbf{P}_t$  wird (7.19) erweitert. Das Gleichungssystem lautet damit

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{N})\mathbf{q} + \mathbf{F}_{P,t} = \mathbf{F}_{Y_t} + \mathbf{P}_t, \quad (7.26)$$

mit den neuen Größen

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\frac{f_{22}}{v_0} + 2d_y & 0 \\ 0 & 2\frac{b^2 f_{11} + f_{33}}{v_0} + 2d_x L^2 \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2\frac{q_0\delta_0}{b} + 2c_y & f_{11}\frac{b\delta_0}{r_0} - f_{22} \\ f_{11}\frac{b\delta_0}{r_0} - f_{22} & 2f_{23} + 2c_x L^2 \end{pmatrix} \quad (7.28)$$

$$\mathbf{F}_{P,t} = \begin{pmatrix} \gamma_0(y - Y_t) + \gamma_1(y - Y_t)^3 + \gamma_2(y - Y_t)^5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} \sigma_y P_{t1} \\ \sigma_\psi P_{t2} \end{pmatrix} \quad (7.29)$$

$$\mathbf{F}_{Y_t} = \begin{pmatrix} 2\frac{f_{22}}{v_0} \\ -2\frac{f_{23}}{v_0} + J_2\frac{\delta_0 v_0}{br_0} \end{pmatrix} \dot{Y}_t + \begin{pmatrix} 2\frac{q_0\delta_0}{b} \\ 2\frac{f_{11}b\delta_0}{r_0} \end{pmatrix} Y_t. \quad (7.30)$$

Die Gleislage ist darin als stochastischer Prozeß  $Y_t$  enthalten. Für die generalisierten Seitenwindkräfte wurden die stochastischen Prozesse  $P_{t1}$  und  $P_{t2}$  eingeföhrt. Drehmomente des Typs  $P_{t2}$  treten beispielsweise bei einer Zugbegegnung auf und greifen am Fahrzeugaufbau an. Bei der Simulation des Verhaltens eines einzelnen Radsatzes kann darauf verzichtet werden. Die Parameter  $\gamma_i$  beschreiben die Geometrie des Rad/Schiene-Kontaktes. Durch eine geeignete Wahl lassen sich viele Profilverpaarungen, die die Bedingung der Stetigkeit und Symmetrie der Rollradiendifferenzfunktion erfüllen, annähern.

In der linearen Theorie mit kegeligen Rädern, ohne Spurkränze und ohne stochastische Anteile existiert eine sogenannte *lineare kritische Geschwindigkeit*. Unterhalb der linearen kritischen Geschwindigkeit klingen kleine Störungen ab und der Radsatz verhält sich in Querichtung wie ein gedämpfter Schwinger. Bei Erreichen der kritischen Geschwindigkeit tritt

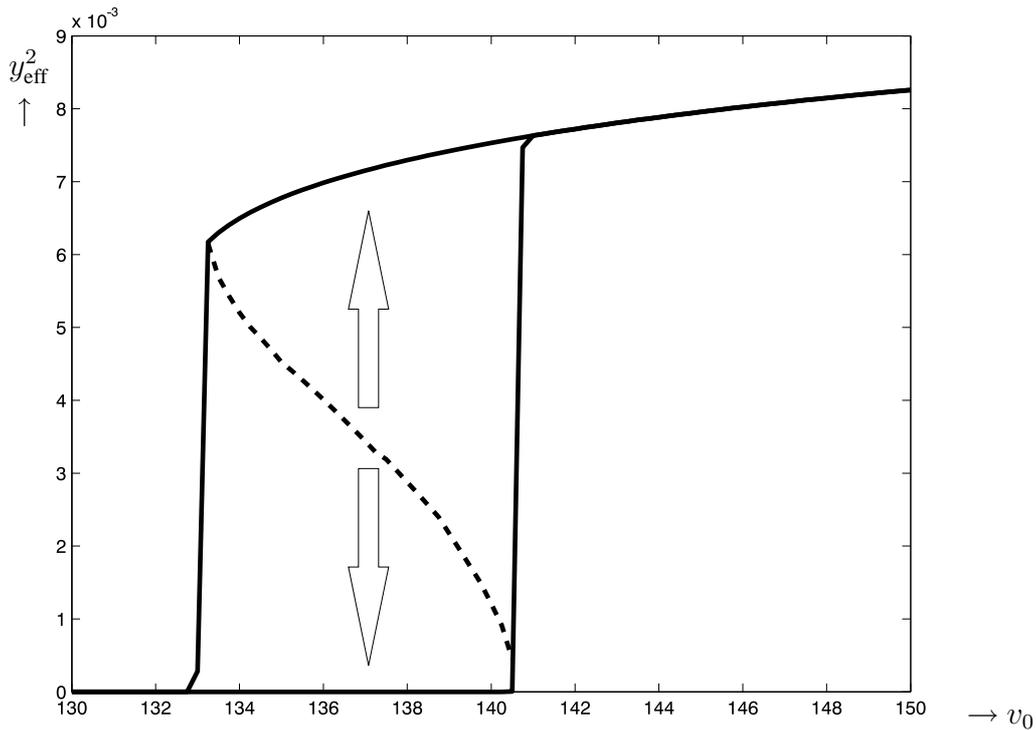


Abbildung 7.7: Bifurkationsdiagramm für einen Radsatz auf nahezu perfektem Gleis

Selbsterregung ein und die Querschwingamplitude wächst über alle Grenzen [32]. In der Realität bleibt die Amplitude wegen des nichtlinearen Radprofils beschränkt. Es handelt sich somit um eine HOPF-Bifurkation. Die Fahrgeschwindigkeit  $v_0$  repräsentiert den Bifurkationsparameter.

Das beschriebene Verhalten ist für einen gefesselten rollenden Radsatz zu beobachten, bei dem die Geschwindigkeit stetig immer weiter erhöht wird. Wird jedoch die Fahrgeschwindigkeit von einem Wert, der jenseits der linearen kritischen Geschwindigkeit liegt, stetig vermindert, so behält der Radsatz auch nach Unterschreiten der linearen kritischen Geschwindigkeit das oszillierende Verhalten. Erst nach weiterer Verminderung der Geschwindigkeit weist das System beim Unterschreiten der sogenannten *nichtlinearen kritischen Geschwindigkeit* das gedämpfte Verhalten auf und weicht in die Gleichgewichtslage zurück [92]. Eine Tangenten-Bifurkation wurde durchschritten.

In Abbildung 7.7 ist die Amplitude der Lateralbewegung über der Fahrgeschwindigkeit aufgetragen. Das beschriebene Verhalten ist mit den durchgezogenen Linien gekennzeichnet. Zwischen der nichtlinearen und der linearen kritischen Geschwindigkeit koexistieren zwei Attraktoren, deren Bassins durch die strichlierte Separatrix getrennt sind. Die abgebildeten Bifurkationen sind die beiden ersten auftretenden Bifurkationen. Für größere Bifurkationsparameter können weitere, auch viel stärker verzweigte Bifurkationsdiagramme entstehen. Im Rahmen der hier behandelten technischen Fragestellung interessieren jedoch nur die beiden ersten Bifurkationspunkte.

## 7.5 Monte-Carlo-Simulation

Zunächst wird das System (7.26) für ein gestörtes Gleis ohne stochastische Querkraftanregung untersucht. Es gilt somit  $\mathbf{P}_t \equiv 0$ . Die numerische Simulation findet im Zeitbereich statt, daher muß der Anregungsprozeß  $Y_t$  aus der Wegtrajektorie  $Y_s$  nach (7.4) mit geeigneten Parametern  $a_i$  und  $b_i$  über die Beziehungen

$$ds = v_0 dt \quad (7.31)$$

$$dW_s = \sqrt{v_0} dW_t \quad (7.32)$$

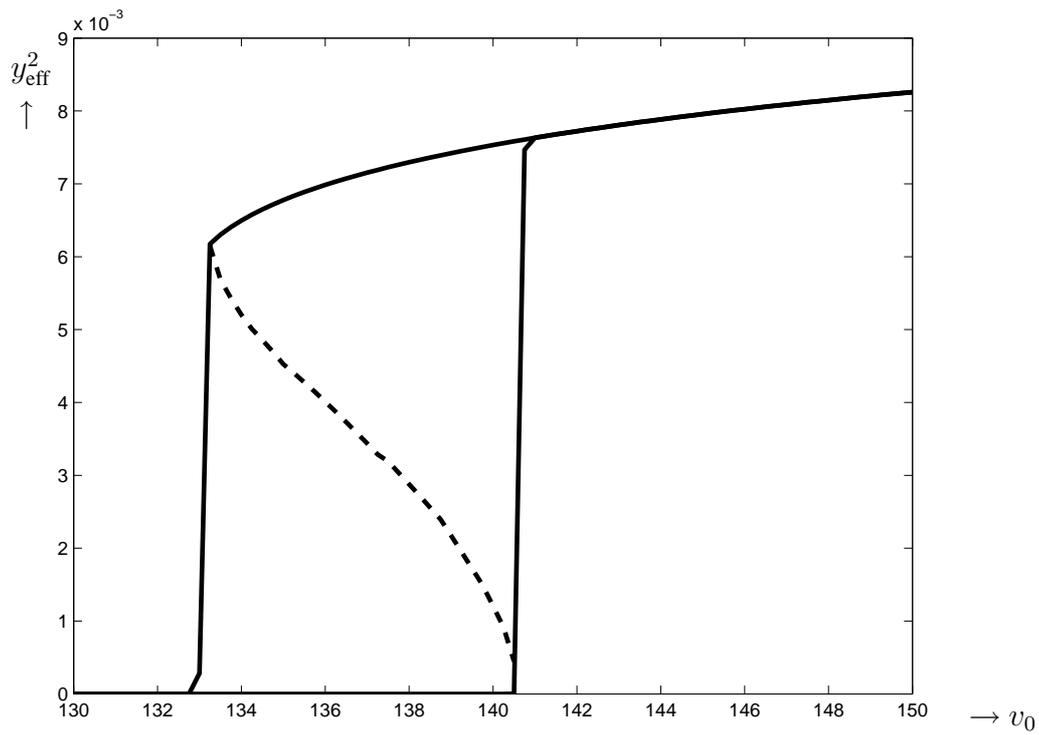
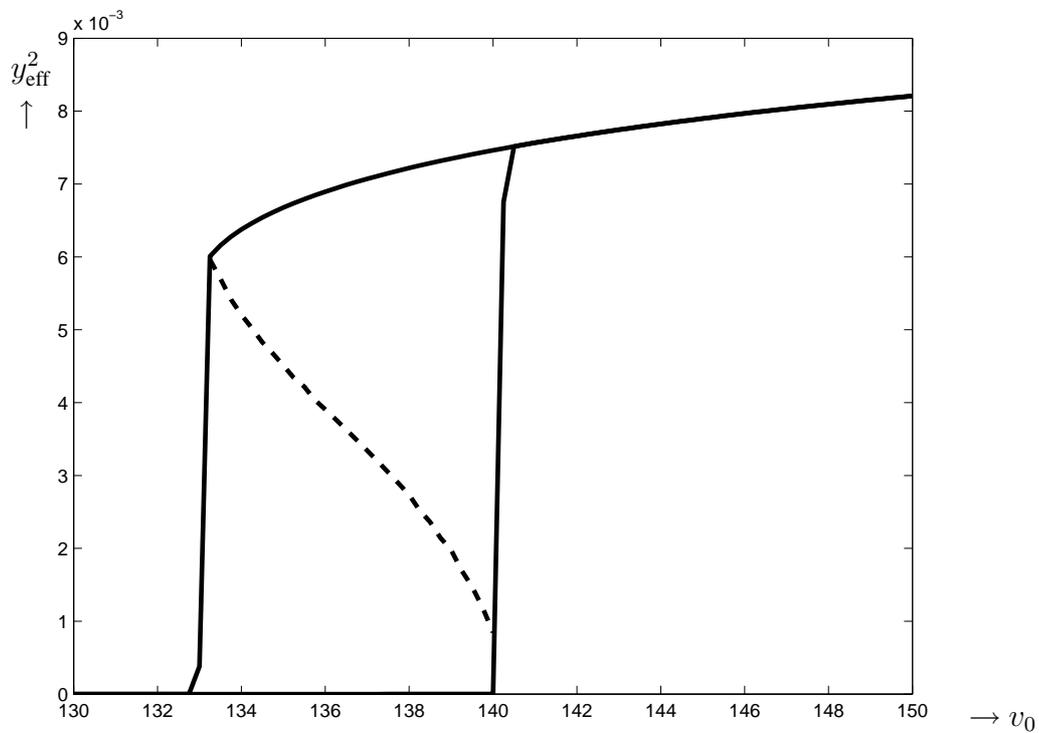
erzeugt werden. Ebenso wurden Simulationen durchgeführt, bei welchen der Prozeß  $Y_t$  durch das amplitudenbegrenzende Filter (2.158) erzeugt wurde. Qualitativ zeigen die Ergebnisse ähnliches Verhalten. Der Vorteil der zweiten Methode besteht darin, daß insbesondere der Intensitätsparameter  $\sigma$  ohne Rücksicht auf reale Rauschanregungen variiert werden kann. Man erhält einen tieferen Einblick in das Eigenverhalten des Systems. Aus diesem Grunde beruhen die folgenden Ergebnisse auf dem Anregungsmodell (2.158).

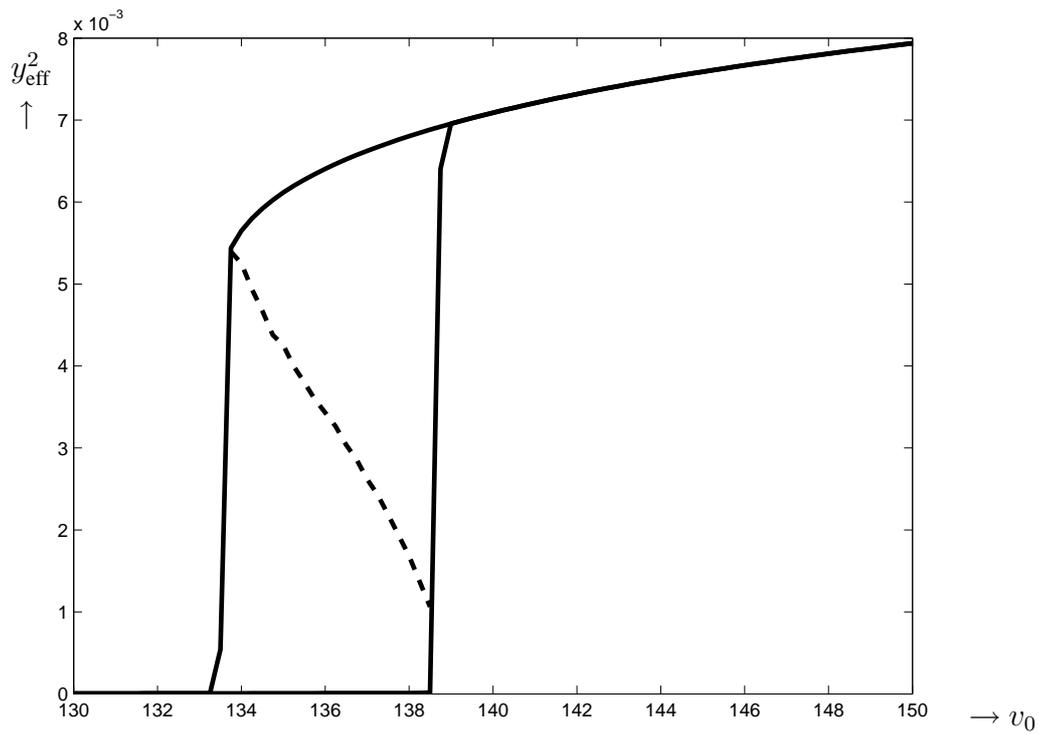
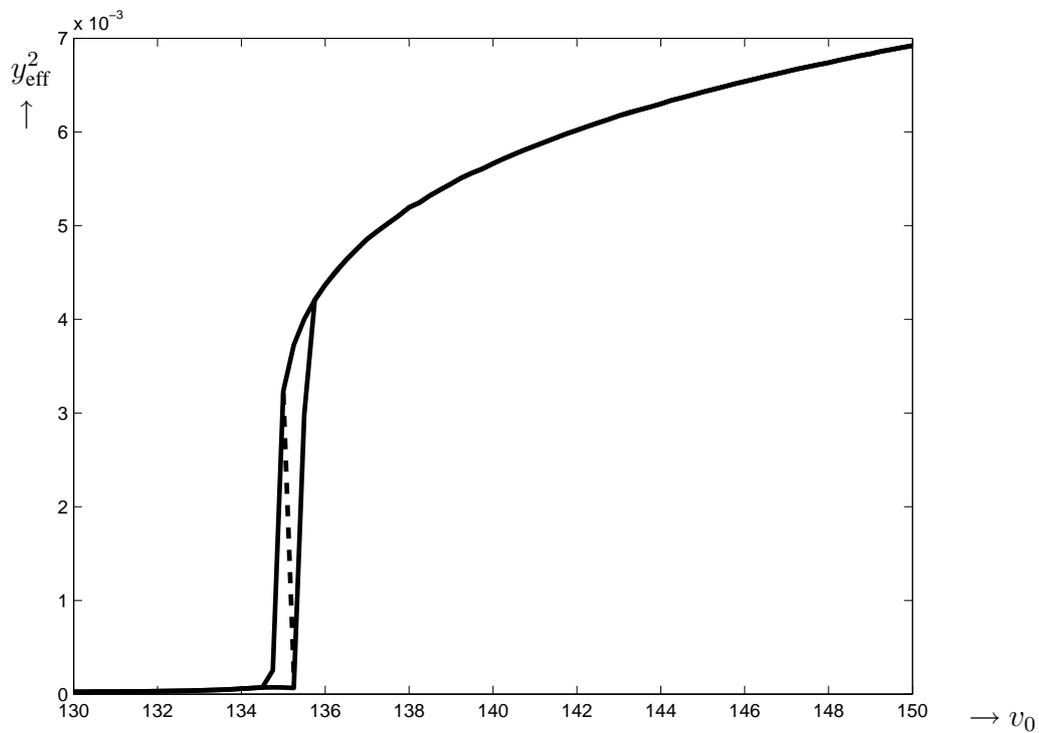
Die Vorwärtsgeschwindigkeit  $v_0$  stellt in den Simulationen den veränderlichen Parameter dar. Die Simulationsgleichungen wurden wieder nach dem in Abschnitt 3.1 beschriebenen EULER-Verfahren diskretisiert. Zur Erzeugung der normalverteilten Pseudozufallszahlen wurde die Polar-MARSAGLIA-Methode (3.6) verwendet. Die Systemparameter für den Radsatz sind soweit möglich [73] entnommen:

$$\begin{array}{llllll} r_0 = 0,46 \text{ m}, & J_2 = 100 \text{ kg m}^2, & J_2 = 881 \text{ kg m}^2, & m = 1612 \text{ kg}, & \delta_0 = 0,13 \text{ rad}, & \\ d_y = 0 \frac{\text{kg}}{\text{s}}, & b = 0,75 \text{ m}, & L = 1,0 \text{ m} & c_x = 4,0 \text{ MN}, & c_y = 4,0 \text{ MN}, & \\ d_x = 0 \frac{\text{kg}}{\text{s}}, & f_{11} = 13,7 \text{ MN}, & f_{22} = 11,1 \text{ MN}, & f_{23} = 0 \text{ MN}, & f_{33} = 0 \text{ MN}, & \\ \gamma_0 = 0 \frac{\text{MN}}{\text{m}}, & \gamma_1 = 1,6 \cdot 10^5 \frac{\text{MN}}{\text{m}^3}, & \gamma_2 = 1,4 \cdot 10^{10} \frac{\text{MN}}{\text{m}^5} & q_0 = 56,1 \text{ kN}, & & \end{array}$$

In den folgenden Abbildungen 7.8 bis 7.12 sind die Effektivwerte der lateralen Amplitude  $y$  über der Fahrgeschwindigkeit  $v_0$  als Ergebnisse der Simulationen aufgetragen. Die Effektivwerte entsprechen den quadratischen Mittelwerten (Root-Mean-Square oder RMS). Für jeden Geschwindigkeitsschritt wurden  $10^8$  Simulationen mit Zeitschritten  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$  s durchgeführt, dies entspricht einer Fahrtdauer von 1000 s je Geschwindigkeitsschritt. Hierfür wurden in der Simulation auf einem Rechner mit Intel Pentium<sup>®</sup> 4 Prozessor und 2,26 GHz Taktfrequenz knapp 157 Sekunden benötigt. Ein Rechner mit AMD Athlon<sup>®</sup> 64 3200+ Prozessor benötigte für die gleiche Rechnung 103 Sekunden.

Die P-Separatrix zwischen den beiden kritischen Geschwindigkeiten trennt die Bassins für die oszillierende Bewegung und für die Gleichgewichtsruhelage. Sie wurde durch Variation der Anfangsauslenkung iteriert. Je nachdem, zu welchem P-Attraktor die Trajektorie wandert, zählt die Anfangsamplitude zum entsprechenden Bassin. Die P-Separatrix erhält bei der Betrachtung der Durchfahrt durch eine Weiche praktische Bedeutung. Beim Überrollvorgang der Flügelschiene und des anschließenden Herzstückes tritt eine Unstetigkeit in der Berührgeometrie auf. Diese kommt einer plötzlichen Querverrückung und gleichzeitigen Spurweitenverringern gleich. Springt der Berührungspunkt durch die Unstetigkeit von einem Bassin in das benachbarte, so kann auch bei geringen Rauschintensitäten und größerem Abstand vom Bifurkationspunkt ein Phasenübergang stattfinden.

Abbildung 7.8: Bifurkationsdiagramm für einen Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 0$ .Abbildung 7.9: Bifurkationsdiagramm für einen Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 2$ .

Abbildung 7.10: Bifurkationsdiagramm für einen Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 5$ .Abbildung 7.11: Bifurkationsdiagramm für einen Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 10$ .

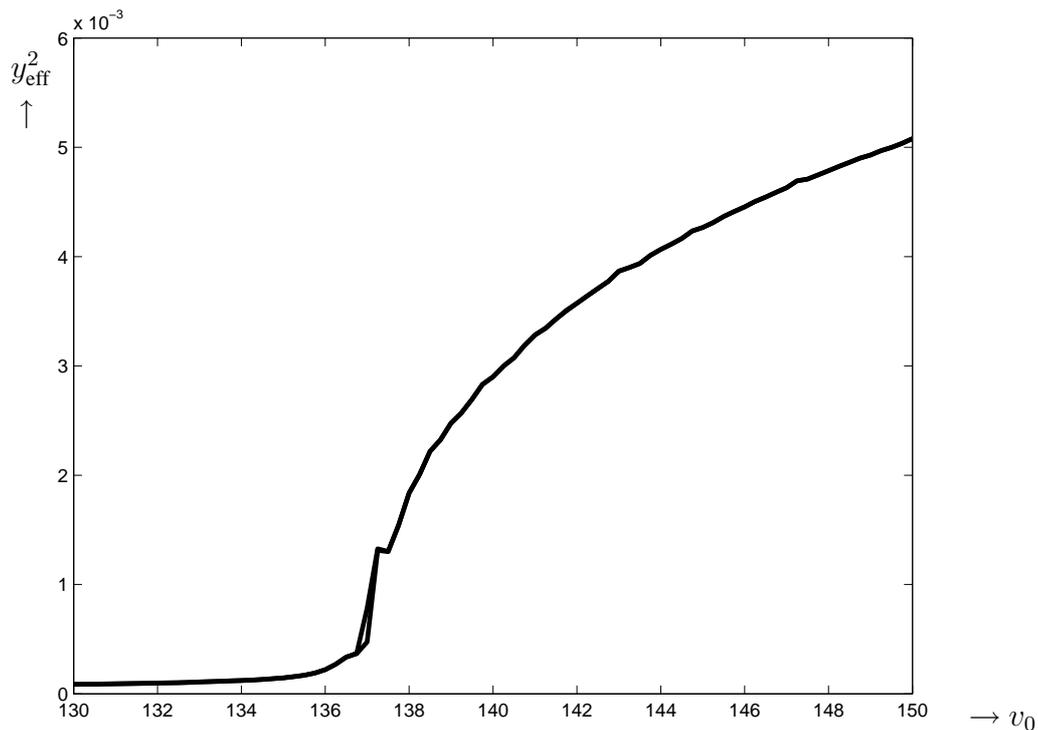


Abbildung 7.12: Bifurkationsdiagramm für einen Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 15$ .

Es ist zu beobachten, daß mit wachsender Rauschintensität die lineare kritische Geschwindigkeit sinkt und die nichtlineare kritische Geschwindigkeit leicht ansteigt. Das Verschieben des Bifurkationspunktes der Tangenten-Bifurkation nach rechts ist wie auch schon für die stochastische Heugabel-Bifurkation in Kapitel 4 erklärbar. In der Nähe des Bifurkationspunktes können die Inkremente des Rauschterms die Separatrix überqueren. Ist der Bifurkationsparameter weiter vom Bifurkationspunkt entfernt, so bedarf es größerer Zufallsinkremente, um zu einem Phasenübergang zu gelangen.

In den Abbildungen 7.13 und 7.14 sind für die starke Anregung  $\sigma = 15$  die Contourplots der Verteilungsdichte im Phasenraum zu sehen. Die Ergebnisse sind für die Fahrgeschwindigkeiten  $v_0 = 136$  m/s, 138 m/s, 140 m/s und 142 m/s dargestellt. In den vier Bildern wird die in Abbildung 7.12 enthaltene Information veranschaulicht. Bei  $v_0 = 136$  m/s ist die Verteilungsdichte über der Zentralposition dominant. Bei 138 m/s hat sich bereits der Grenzzyklus ausgebildet (Abbildung 7.13) und vergrößert seine Amplitude für weiter steigende Fahrgeschwindigkeiten  $v_0$  in Abbildung 7.14.

Des weiteren werden noch die Simulationsergebnisse als Verteilungsdichten über dem  $y, \dot{y}$ -Phasenraum für einen Radsatz dargestellt, der nicht durch Gleislagefehler, sondern durch eine stochastische Seitenkraft gestört wird. Es gilt somit  $Y_t \equiv 0$ . Der Seitenwindeinfluß  $P_{t1}$  wird wieder wie im vorangegangenen Kapitel als GAUSSsches weißes Rauschen modelliert,  $P_{t2}$  entfällt.

In Abbildung 7.15 sind die Verteilungsdichten für vier unterschiedliche Geschwindigkeitszustände zu sehen. Bei ungestörter Bewegung unterhalb der linearen kritischen Geschwindigkeit ist die Verteilungsdichte im Ursprung des  $y, \dot{y}$ -Schaubildes singular. Die stochastische Kraftanregung bewirkt, daß die Verteilungsdichte streut, das Maximum bleibt im Ursprung

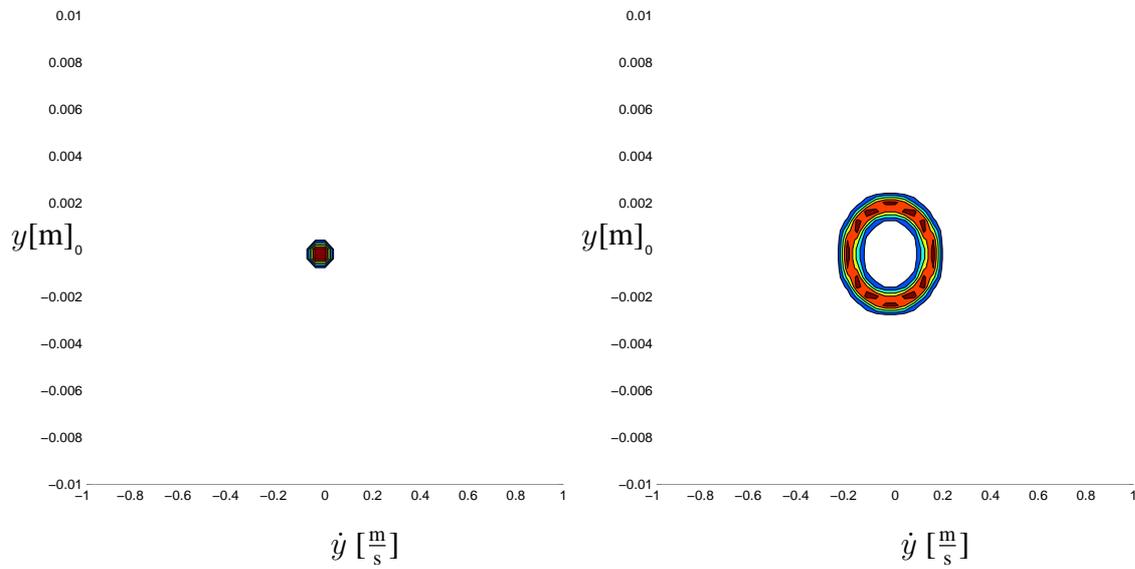


Abbildung 7.13: Höhenlinien der Verteilungsdichte für den Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 15$  bei  $136 \frac{m}{s}$  (links) und  $138 \frac{m}{s}$  (rechts).

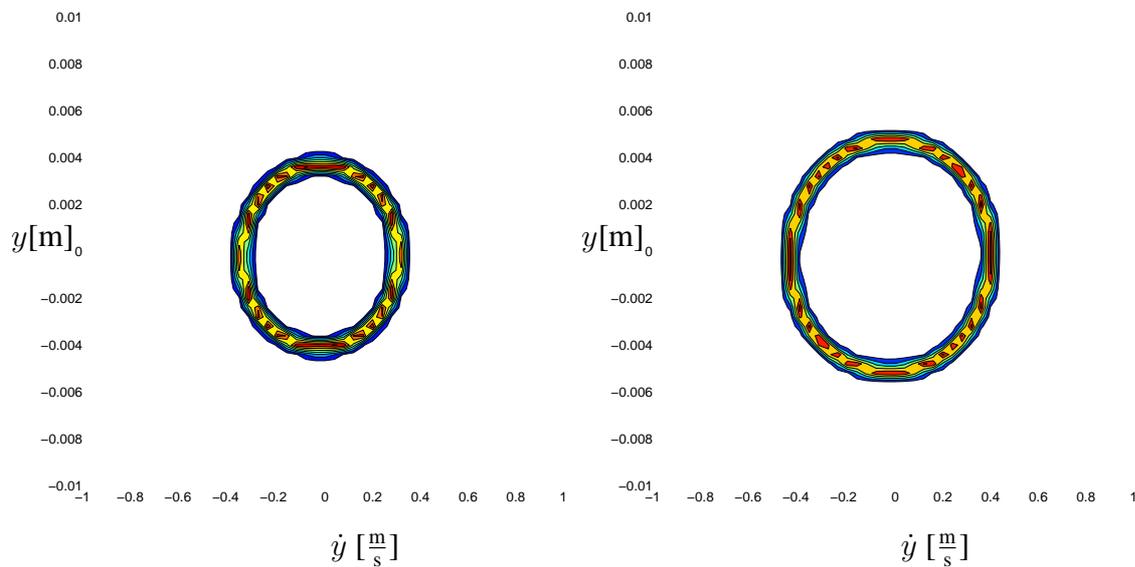


Abbildung 7.14: Höhenlinien der Verteilungsdichte für den Radsatz mit Anregungsintensität  $\sigma = 15$  bei  $140 \frac{m}{s}$  (links) und  $142 \frac{m}{s}$  (rechts).

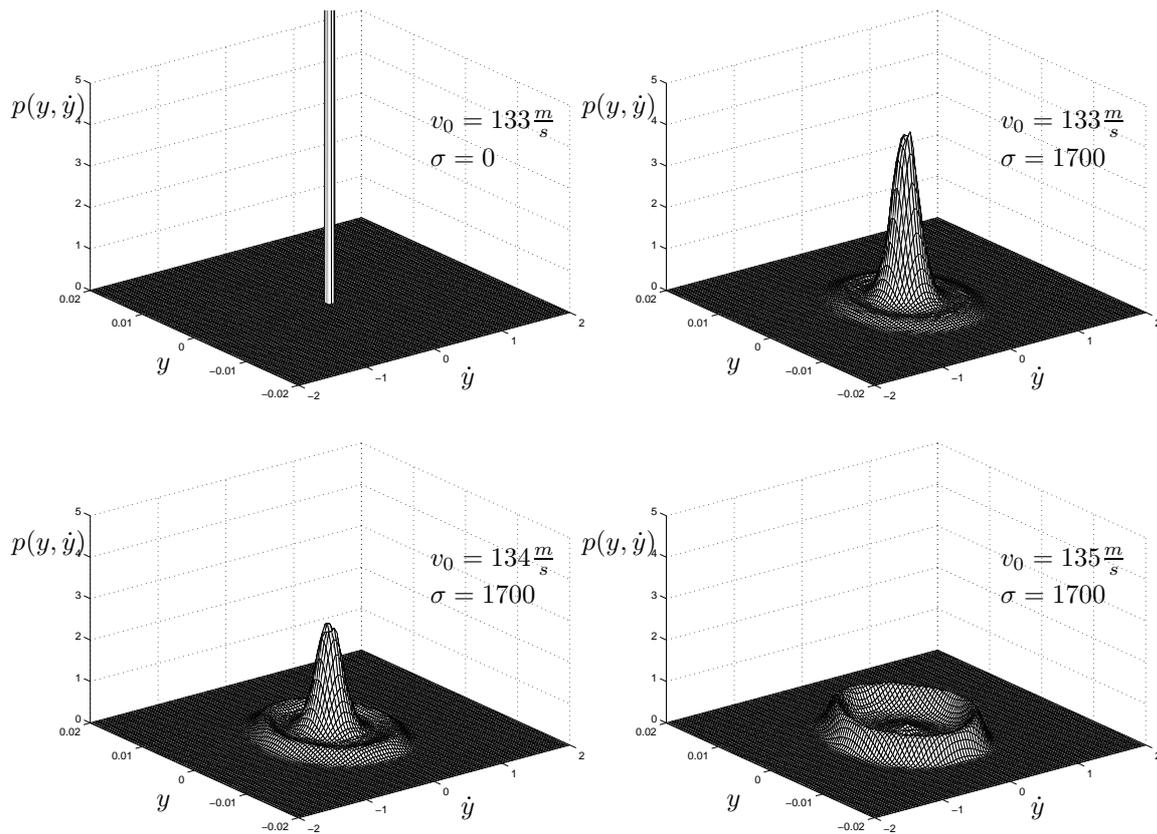


Abbildung 7.15: Verteilungsdichten unter deterministischer ( $\sigma = 0$  und stochastischer ( $\sigma > 0$ ) Querkraftanregung für ansteigende Fahrgeschwindigkeit.

des Phasenraumes. Mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit erhebt sich ein Krater um den zentralen Kegel. Die gestreute Zentralposition des Radsatzes wird also zeitweise durch eine oszillatorische Bewegung abgelöst. Eine weitere Steigerung der Geschwindigkeit führt schließlich dazu, daß die oszillatorische Bewegung gehäuft auftritt, während die Zentralposition immer unwahrscheinlicher wird.

## 7.6 Losradpaar

Die für das Radsatzmodell getroffenen Voraussetzungen gelten für das Losradpaar entsprechend. Das mechanische Modell hierfür ist aus Abbildung 7.18 ersichtlich. Kennzeichnend für das Losradpaar ist, daß sich beide Räder gegeneinander frei drehen können, ähnlich wie bei Kraftfahrzeugen. Dadurch vergrößert sich die Zahl der Freiheitsgrade um eins. Diese kleine Änderung der Geometrie führt jedoch zu einem völlig anderen dynamischen Verhalten. Das ungefesselte Losradpaar ist selbst bei Stillstand instabil, es fällt unter einer Drehung um die vertikale Achse und einer entgegengesetzten Drehbewegung beider Radscheiben zwischen die Schienen. Aus diesem Grunde ist selbst für kleine Geschwindigkeiten eine Ankopplung an den mitbewegten Rahmen zwingend erforderlich.

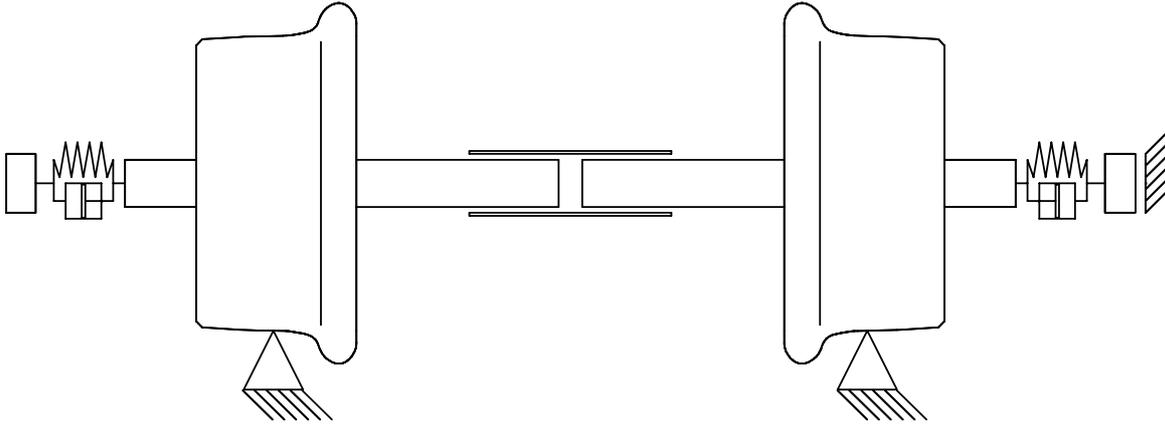


Abbildung 7.16: Modell des Losradpaares.

Während die Bedingungen für die Berührgeometrie aus Abschnitt 7.3 weiterhin gelten, ändern sich die Bewegungsgleichungen signifikant [16]. Sie lauten nun

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F}_{P,t} = \mathbf{F}_{Y_t} + \mathbf{P}_t \quad (7.33)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} y \\ \psi \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\frac{f_{22}}{v_0} + 2d_y & 0 \\ 0 & 2d_x L^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} \sigma_y P_{t1} \\ \sigma_\psi P_{t2} \end{pmatrix} \quad (7.35)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{f_{23}}{v_0} - J_2 \frac{\delta_0 v_0}{br_0} \\ -2\frac{f_{23}}{v_0} + J_2 \frac{\delta_0 v_0}{br_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2\frac{q_0 \delta_0}{b} + 2c_y & 0 \\ 0 & 2f_{23} + 2c_x L^2 \end{pmatrix} \quad (7.37)$$

$$\mathbf{F}_{P,t} = \begin{pmatrix} \gamma_0(y - Y_t) + \gamma_1(y - Y_t)^3 + \gamma_2(y - Y_t)^5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.38)$$

$$\mathbf{F}_{Y_t} = \begin{pmatrix} 2\frac{f_{22}}{v_0} \\ -2\frac{f_{23}}{v_0} + J_2 \frac{\delta_0 v_0}{br_0} \end{pmatrix} \dot{Y}_t + \begin{pmatrix} 2\frac{q_0 \delta_0}{b} \\ 0 \end{pmatrix} Y_t. \quad (7.39)$$

Die Simulationsergebnisse bis zu Geschwindigkeiten von  $v_0 = 200$  m/s (720 km/h) zeigen die in Abbildung 7.19 veranschaulichte Verteilungsdichte beim Auftreten einer stochastischen Seitenkraft  $P_{t1}$ . Es ist ersichtlich, daß das Losradpaar kein selbsterregtes Schwingungsverhalten aufweist. Im praxisrelevanten Bereich existiert also keine kritische Geschwindigkeit, was vorteilhaft ist. Allerdings verläßt das Radpaar schon bei geringsten Seitenkraftstörungen die Zentralposition zugunsten einer ausgelenkten Lage. Bei Losradfahrwerken, die vornehmlich bei Stadt- und Straßenbahnen anzutreffen sind, wird im Betrieb tatsächlich eine einseitige Abnutzung der Spurkränze festgestellt. Umfangreiche weitere Forschungen sind nötig, um Aussagen darüber treffen zu können, wie groß die tatsächliche Häufigkeit für das Auftreten der möglichen Verteilungsdichten ist. Daraus ließe sich dann Datenmaterial für Verschleißberechnungen erstellen. Hierzu sind allerdings andere, nichtstationäre Modelle für das Seitenwindverhalten erforderlich.

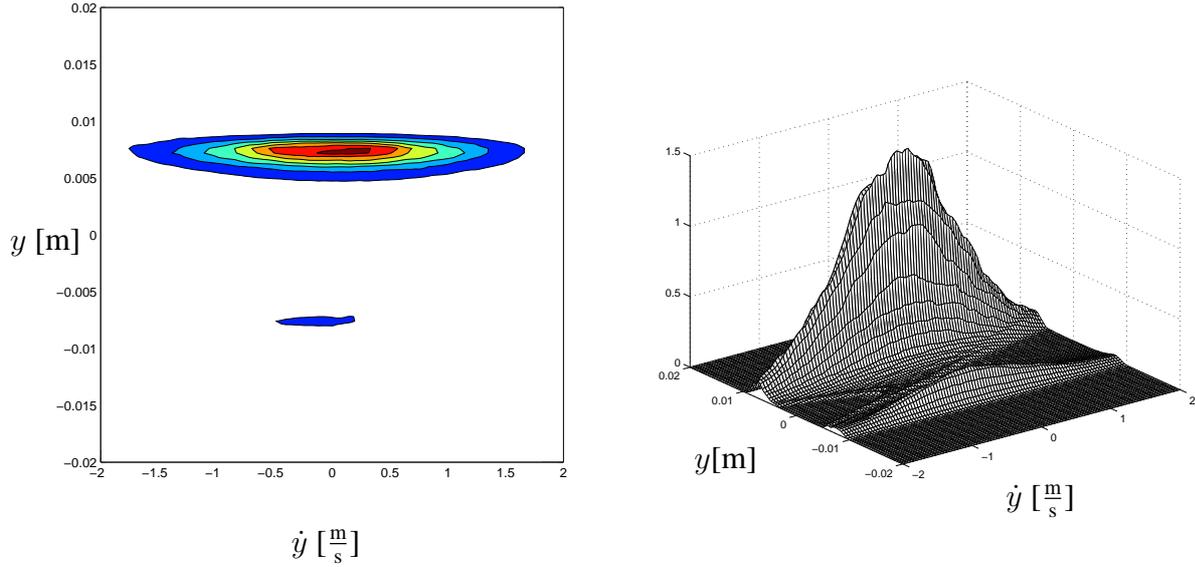


Abbildung 7.17: Verteilungsdichte für das Losradpaar aufgrund einer stochastischen Querkrafteinwirkung.

## 7.7 Losradpaar

Die für das Radsatzmodell getroffenen Voraussetzungen gelten für das Losradpaar entsprechend. Das mechanische Modell hierfür ist aus Abbildung 7.18 ersichtlich. Kennzeichnend für das Losradpaar ist, daß sich beide Räder gegeneinander frei drehen können, ähnlich wie bei Kraftfahrzeugen. Dadurch vergrößert sich die Zahl der Freiheitsgrade um eins. Diese kleine Änderung der Geometrie führt jedoch zu einem völlig anderen dynamischen Verhalten. Das ungefesselte Losradpaar ist selbst bei Stillstand instabil, es fällt unter einer Drehung um die vertikale Achse und einer entgegengesetzten Drehbewegung beider Radscheiben zwischen die Schienen. Aus diesem Grunde ist selbst für kleine Geschwindigkeiten eine Ankopplung an den mitbewegten Rahmen zwingend erforderlich.

Während die Bedingungen für die Berührgeometrie aus Abschnitt 7.3 weiterhin gelten, ändern sich die Bewegungsgleichungen signifikant [16]. Sie lauten nun

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{F}_{P,t} = \mathbf{F}_{Y,t} + \mathbf{P}_t \quad (7.40)$$

mit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} y \\ \psi \end{pmatrix} \quad (7.41)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2\frac{f_{22}}{v_0} + 2d_y & 0 \\ 0 & 2d_x L^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_t = \begin{pmatrix} \sigma_y P_{t1} \\ \sigma_\psi P_{t2} \end{pmatrix} \quad (7.42)$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 2\frac{f_{23}}{v_0} - J_2 \frac{\delta_0 v_0}{b r_0} \\ -2\frac{f_{23}}{v_0} + J_2 \frac{\delta_0 v_0}{b r_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.43)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2\frac{q_0 \delta_0}{b} + 2c_y & 0 \\ 0 & 2f_{23} + 2c_x L^2 \end{pmatrix} \quad (7.44)$$

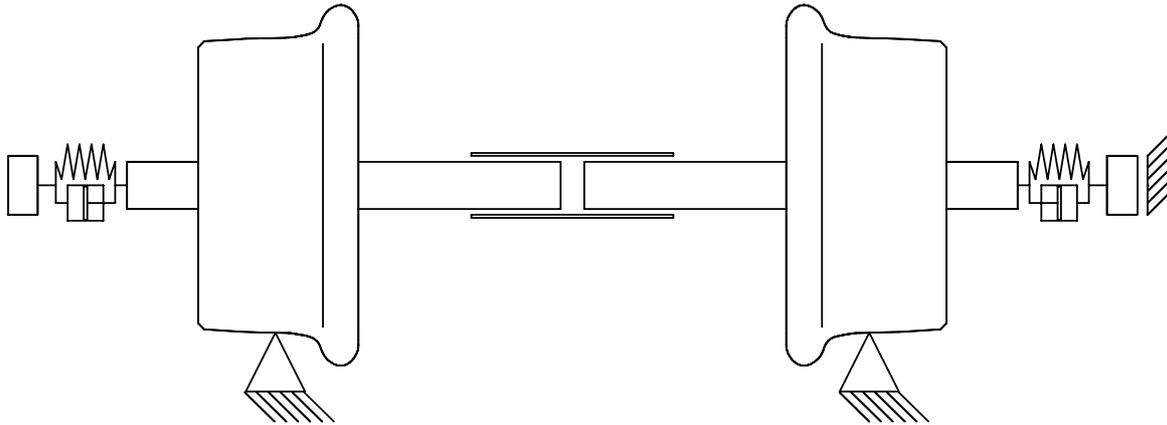


Abbildung 7.18: Modell des Losradpaares.

$$\mathbf{F}_{P,t} = \begin{pmatrix} \gamma_0(y - Y_t) + \gamma_1(y - Y_t)^3 + \gamma_2(y - Y_t)^5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.45)$$

$$\mathbf{F}_{Y_t} = \begin{pmatrix} 2 \frac{f_{22}}{v_0} \\ -2 \frac{f_{23}}{v_0} + J_2 \frac{\delta_0 v_0}{b r_0} \end{pmatrix} \dot{Y}_t + \begin{pmatrix} 2 \frac{q_0 \delta_0}{b} \\ 0 \end{pmatrix} Y_t. \quad (7.46)$$

Die Simulationsergebnisse bis zu Geschwindigkeiten von  $v_0 = 200$  m/s (720 km/h) zeigen die in Abbildung 7.19 veranschaulichte Verteilungsdichte beim Auftreten einer stochastischen Seitenkraft  $P_{t1}$ . Es ist ersichtlich, daß das Losradpaar kein selbsterregtes Schwingungsverhalten aufweist. Im praxisrelevanten Bereich existiert also keine kritische Geschwindigkeit, was vorteilhaft ist. Allerdings verläßt das Radpaar schon bei geringsten Seitenkraftstörungen die Zentralposition zugunsten einer ausgelenkten Lage. Bei Losradfahrwerken, die vornehmlich bei Stadt- und Straßenbahnen anzutreffen sind, wird im Betrieb tatsächlich eine einseitige Abnutzung der Spurkränze festgestellt. Umfangreiche weitere Forschungen sind nötig, um Aussagen darüber treffen zu können, wie groß die tatsächliche Häufigkeit für das Auftreten der möglichen Verteilungsdichten ist. Daraus ließe sich dann Datenmaterial für Verschleißberechnungen erstellen. Hierzu sind allerdings andere, nichtstationäre Modelle für das Seitenwindverhalten erforderlich.

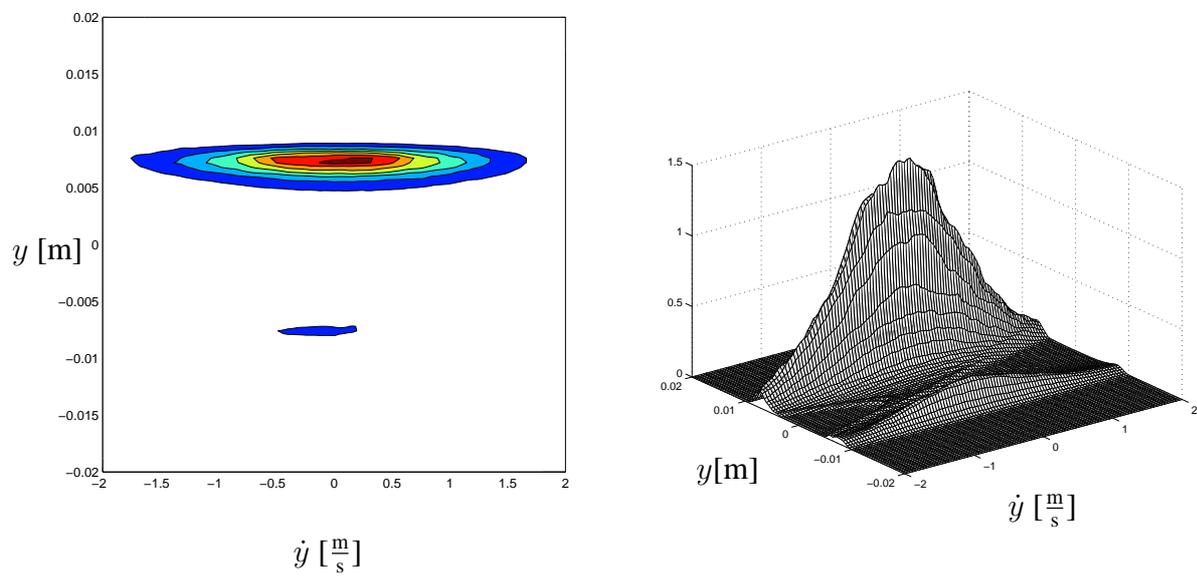


Abbildung 7.19: Verteilungsdichte für das Losradpaar aufgrund einer stochastischen Querkrafteinwirkung.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung

Bei der Untersuchung vieler technischer Systeme treten Fragestellungen zum dynamischen Verhalten auf. Um Aussagen über die Auswirkungen der auftretenden Schwingungen treffen zu können, müssen diese zunächst erkannt und charakterisiert werden. Ist eine Schädigung der Bauteile oder sogar die Sicherheit von Menschen in Gefahr, sind genaue Kenntnisse über das jeweilige System erforderlich, um kritische Zustände vermeiden zu können. Es existieren viele Methoden, das Systemverhalten vorauszuberechnen.

Vor der Anwendung der mathematischen Methoden steht jedoch die Modellbildung. In der ersten Abstraktionsstufe wird das mechanische Modell durch Vereinfachungen der Geometrie und mechanischer Kenngrößen geschaffen. Die Übertragung in das mathematische Modell kann nur unter Verwendung der gegebenen mathematischen Hilfsmittel stattfinden, was wiederum eine Abstraktion nach sich zieht. Im allgemeinen weisen die realen technischen Systeme nichtlineares Zeitverhalten auf. Es gilt damit nicht mehr das Superpositionsprinzip, das bequem und hilfreich in der Anwendung ist. Oftmals ist es möglich und notwendig, nichtlineare Systeme in der Nähe des Arbeitspunktes zu linearisieren und vereinfachende Annahmen zu treffen. Dieses Vorgehen muß bewußt und begründet betrieben werden.

Lineare Systeme haben deterministischen Charakter, das heißt ihr Zeitverhalten ist genau vorhersagbar, indem mit den klassischen mathematischen Methoden Lösungen für das zugehörige mathematische Modell angegeben werden. Nichtlineare Systeme können Lösungsverzweigungen aufweisen. Nach der Methode der Untersuchung unterscheidet man dynamische (D-) und phänomenologische (P-) Bifurkationen. Im Falle einer Zunahme von Lösungen werden durch die nichtlinearen Methoden im allgemeinen keine Aussagen darüber getroffen, welche der berechneten Lösungen tatsächlich eintreten. Dennoch nennt man auch nichtlineare Systeme deterministisch, solange keine vom Zufall beeinflussten Größen enthalten sind. Sind diese vorhanden, so handelt es sich um stochastische Systeme, die durch statistische Größen beschrieben werden. Damit werden wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden erforderlich.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse mechanischer Systeme unter dem Einfluß zufälliger Größen. Nach der einleitenden Motivation werden im Grundlagenkapitel die benötigten wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundbegriffe eingeführt. Das Ziel ist es, durch die Angabe von Wahrscheinlichkeitsverteilungsdichten der Zustandsvariablen die statistischen Eigenschaften zu beschreiben. Die Zufallsgrößen in den untersuchten Systemen

werden auf stationäre ergodische MARKOW-Prozesse eingeschränkt.

Im dritten Kapitel werden Modelle zur additiven und multiplikativen stochastischen Anregung vorgestellt. Durch Filterung des idealisierten weißen Rauschprozesses werden Prozesse geschaffen, die an gewünschte Eigenschaften angepaßt werden können. Zur Bestimmung der Verteilungsdichten werden zwei grundsätzliche Verfahren verwendet, deren Ausgangspunkt die stochastischen Differentialgleichungen nach ITÔ sind. Die Monte-Carlo-Simulation ist eine direkte Methode, bei der die Lösungstrajektorien (Realisierungen) durch numerische Integration der Systemgleichungen erzeugt werden. Wird Stationarität und Ergodizität vorausgesetzt, so erhält man die diskretisierten Verteilungsdichten als Häufigkeitsverteilungen durch eine statistische Auswertung. Um den Voraussetzungen zu genügen, bedarf es einer genügend langen Integrationszeit im Sinne häufiger Integrationssschritte.

Wegen der vorausgesetzten MARKOW-Eigenschaft der stochastischen Prozesse sind diese durch deren Übergangswahrscheinlichkeitsdichte vollständig beschrieben. Die gesuchten Verteilungsdichten des stochastischen Problems sind deshalb Lösungen der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung. Diese ist eine partielle Differentialgleichung mit nicht-konstanten Koeffizienten. Deren Lösung ist nur auf einige Spezialfälle begrenzt, so daß Näherungsverfahren eingesetzt werden müssen. Eines der Näherungsverfahren beruht darauf, daß nach einer Koordinatentransformation auf Polarkoordinaten zunächst der Amplitudenprozeß vom Winkelprozeß entkoppelt wird, so daß die Randverteilungsdichte für die Amplitudenrichtung analytisch angebar ist. Unter der Annahme, daß die Form der Näherung der Lösung nahe kommt, kann man nun eine geeignete Koordinatentransformation finden, die der Gewichtsfunktion bekannter orthogonaler Funktionen entspricht. Im Verbund mit der Reihenentwicklung des Winkelprozesses im Sinne GALERKINS erhält man schwache Lösungen der FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROW-Gleichung (FPK-Gleichung) als gesuchte Verteilungsdichten. Eine andere Möglichkeit, Näherungslösungen zu erhalten, liegt darin, in die Ansatzfunktion an geeigneter Stelle freie Parameter einzufügen. Die Ansatzfunktion muß ebenfalls schon der gesuchten Verteilungsdichte ähnlich sein. Die freien Parameter werden dann an bekannte Bedingungen höherer Momente angepaßt.

Das vierte Kapitel befaßt sich mit der Untersuchung der P-Bifurkation eines verzweigenden Diffusionsprozesses. Zunächst wird die Wirkung von multiplikativem GAUSSSchen weißen Rauschen auf eine Heugabel-Bifurkation untersucht. Im Gegensatz zum später untersuchten additiven Problem wird gezeigt, daß sich die Extrema in den über dem Bifurkationsparameter aufgetragenen Verteilungsdichten nicht mit den Attraktoren und Repellen des unverrauschten Systems decken. In beiden Fällen jedoch wird der Bifurkationspunkt zugunsten eines größeren Bifurkationsparameters gestreut. Für beide Störungstypen wird die Verteilungsdichte durch Lösung der FPK-Gleichung und durch Monte-Carlo-Simulation angegeben. Für gefiltertes, amplitudenbegrenztes Rauschen wird die Verteilungsdichte als Näherung durch eine zweiparametrische Approximation und durch Monte-Carlo-Simulation bestimmt und verglichen.

Kapitel fünf vergleicht im wesentlichen die Methode der Reihenentwicklung mit derjenigen eines vierparametrischen Ansatzes in Bezug auf einen Oszillator mit VAN DER POLSchem und RAYLEIGHSchem Dämpfungsterm. Eine Entwicklung bis zum zweiten Reihenglied zeigt schon eine bessere Form der Verteilungsdichte als der vierparametrische Ansatz, wobei als Vergleichsmaß das Ergebnis der numerischen Simulation herangezogen wurde.

Die Kapitel sechs und sieben gehen auf vereinfachte, aber durchaus übliche, fahrzeugtechnische Systeme ein. Zunächst wird das Querdynamikverhalten eines Kraftfahrzeuges in Kapitel sechs untersucht. Beim Kraftfahrzeugproblem wirkt die Anregung in Form eines stochastisch modellierten Seitenwindes. Aufgrund der Ergebnisse lassen sich die Eigenschaften des Fahrzeuges bezüglich Seitenwind charakterisieren. Unter Zugrundelegung des linearen Einspurmodelles und normalverteilter Windkräfte wird die Lösung analytisch angegeben. Eine Fehlerbetrachtung wird in Bezug auf die numerische Simulation durchgeführt.

Das siebte Kapitel behandelt das laterale dynamische Verhalten eines gefesselten Eisenbahnradsatzes und eines Losradpaares. Aufgrund der nichtlinearen Berührgeometrie zwischen Rad und Schiene entsteht für den Eisenbahnradsatz ein gekoppeltes dynamisches Problem zwischen dem seitlichen Schieben und der Gierbewegung. Mit der Fahrgeschwindigkeit als Systemparameter tritt ab einer kritischen Geschwindigkeit Selbsterregung ein. Die Untersuchung zweier Bifurkationspunkte ergab, daß diese sich unter dem Einfluß stochastischer Seitenkräfte annähern. Für das Radpaar existieren diese kritischen Werte innerhalb des technisch relevanten Bereichs nicht. Dafür treten andere Probleme auf, die sich im einseitigen Verschleiß der Radprofile äußern. Dieses Phänomen ist aus der Praxis bekannt und verhindert die breite Einführung von Losradpaaren bei Eisenbahnen. Eine der Differenzwinkelgeschwindigkeit proportionale Drehdämpfung zwischen den beiden Radscheiben könnte beide Probleme beseitigen. Es ist anzunehmen, daß die kritische Geschwindigkeit erhöht und das einseitige Anlaufen an den Spurkranz unterbleiben würde. Die Untersuchungen hierzu sind noch nicht abgeschlossen.

Mit der vorliegenden Arbeit wird ein Beitrag zur Vorhersage des Verhaltens mechanischer Systeme unter zufälligen Einflüssen geleistet. Theoretische Methoden wurden auf technische Systeme übertragen. Dabei zeigte sich, daß sich nicht nur die Modellbildung des mechanischen Systems, sondern auch die Abstraktion der anregenden Größen auf die Lösbarkeit beträchtlich auswirkt. Während für einen hohen Abstraktionsgrad analytische Methoden vor allem wegen ihrer allgemeinen Aussagekraft positiv hervortreten, gewinnen numerische Methoden für die Untersuchung komplexer Systeme an Bedeutung. Die Rechenzeit tritt dann gegenüber dem Aufwand zur Herleitung der Ansatzfunktionen in den Hintergrund. Es bietet sich zusätzlich die Möglichkeit, gemessene Gleislagendaten in die Anregungstrajektorie aufzunehmen. Damit ließen sich dann konkrete Streckenabschnitte oder Weichendurchfahrten betrachten. Bis heute werden Weichendurchfahrten dynamisch nicht simuliert [18].

An den Beispielen Kraftfahrzeug und Radsatz ist leicht einsehbar, daß hier nur Teilaspekte realer technischer Gebilde beleuchtet wurden, um grundlegende Charakteristika des Verhaltens darzustellen und um die Übersichtlichkeit und Vergleichbarkeit der Methoden untereinander zu veranschaulichen. Die Ergebnisse könnten als Grundlage für weitere Arbeiten auf dem Gebiet der Verschleißforschung im Rad/Schiene-Kontakt dienen. Außerdem laufen derzeit noch Arbeiten zur Erweiterung der Modelle auf ganze Eisenbahnfahrzeuge, was die Komplexität erhöht.

# Literaturverzeichnis

- [1] Afflerbach, L., Lehn, J., (Hrsg.), Zufallszahlen und Simulationen, Teubner, Stuttgart, 1986
- [2] Ammon, D., Approximation und Generierung stationärer stochastischer Prozesse mittels linearer dynamischer Systeme, Dissertation Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 1989
- [3] Ammon, D., Modellbildung und Systementwicklung in der Fahrzeugdynamik, Teubner, Stuttgart, 1997
- [4] Argyriadis, K., Gill, L., Schwartz, S., Loads for Offshore Wind Turbines; The 2nd Edition of the GL Wind Guideline, Germanischer Lloyd, Hamburg, 2004
- [5] Arnold, L., Stochastische Differentialgleichungen, Oldenbourg, München, Wien, 1973
- [6] Arnold, L., Random Dynamical Systems, Springer, Berlin, 1998
- [7] Arnold, L., Sri Namachchivaya, N., Schenk-Hoppé, K. R., Toward an understanding of Stochastic Hopf Bifurcation: A Case Study, Int. Journ. of Bifurcation and Chaos 6: 1947–1975, 1996
- [8] Bachelier, L., Théorie de la Spéculation, Ann. Scient. de l'École Norm. Supér. 3<sup>e</sup> Série, 17: 21–86, 1900
- [9] Bernoulli, J., Ars Conjectandi, Basel 1713, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 107, Harri Deutsch, Thun, Frankfurt a.M. 1999
- [10] Box, G. E. P., Muller, M. E., A Note on the Generation of Random Normal Deviates, Ann. Math. Stat. 29: 610–611, 1958
- [11] Boyaci, A., Untersuchung zur Querdynamik von Kraftfahrzeugen unter stochastischer Anregung, Studienarbeit Universität Karlsruhe (unveröffentlicht), 2004
- [12] Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Taschenbuch der Mathematik, Teubner, Leipzig, 1989
- [13] Brown, R., A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies, Philosophical Magazine N. S. 4: 161–173, 1828
- [14] Bunke, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, Akademie-Verlag, Berlin, 1972

- [15] Chapman, S., On the Brownian Displacements and Thermal Diffusion of Grains Suspended in a Non-Uniform Fluid, *Proceed. Royal Soc. A* 119: 34–60, 1928
- [16] Cichon, M., Wedig, W., Influence of Stochastic Excitations on the Lateral Running Behaviour of a Railway Wheelset, *Proceedings of the 6th International Conference on Railway Bogies and Running Gears BOGIE 2004*, Budapest, 2005
- [17] Crauel, H., Flandoli, F., Attractors for Random Dynamical Systems, *Probability Theory and Related Fields* 100: 365–393, 1994
- [18] DB Systemtechnik Minden, fernmündliche Mitteilung von Herrn Höppe, 18.08.2004
- [19] Doob, J., *Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1953
- [20] Duden, *Die deutsche Rechtschreibung*, 22. Auflage, Bibliographisches Institut, Mannheim, 2000
- [21] Einstein, A., Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* 17: 549–560, 1905
- [22] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley, New York, 1957
- [23] Fick, A., Über Diffusion, *Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie* 94: 59–86, 1855
- [24] Frederich, F., Die Gleislage – aus fahrzeugtechnischer Sicht, *ZEV-Glas. Ann.* 108: 355–362, 1984
- [25] Gardiner, C. W., *Handbook of Stochastic Methods: For Physics Chemistry and the Natural Sciences*, Springer, Berlin, 2004
- [26] Gelfand, I. M., Schilow, G.E., *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I–III*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964
- [27] Gichmann, I., Skorochod, A., *Stochastische Differentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1972
- [28] Griesbaum, R., *Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer Parametererregung*, Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 1999
- [29] Hahn, W., *Stability of Motion*, Springer, Berlin, 1967
- [30] Heinrich, W., Hennig, K., *Zufallsschwingungen mechanischer Systeme*, Akademie-Verlag, Berlin, 1977
- [31] Hopf, E., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachrichten* 4: 213–231, 1951
- [32] Huilgol, R. R., Hopf-Friedrichs Bifurcation and the Hunting of a Railway Axle, *Quarterly of Applied Mathematics* 36: 85–94, 1978
- [33] Ineichen, R., Würfel, Zufall und Wahrscheinlichkeit, *Magdeburger Wissenschaftsjournal* 2/2002: 39–46, 2002

- [34] International Statistical Institute, Multilingual Glossary of Statistical Terms, <http://www.cbs.nl/isi/glossary.htm> (19.08.2004)
- [35] Jacobi, C. G. J., Über die Figur des Gleichgewichts, Poggendorffs Annalen der Physik und Chemie 33: 229–233, 1834
- [36] Karch, G., Zur Stabilität linearer, stochastisch parametererregter Schwingungssysteme, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1992
- [37] Kendall, M. G., Buckland, W. R., A Dictionary of Statistical Terms, Oliver and Boyd, Edinburgh, 1960
- [38] Khintchine, A., Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse, Math. Ann. 109: 604–615, 1934
- [39] Kloeden, P. E., Platen, E., Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin, 1992
- [40] Klingel, W., Über den Lauf von Eisenbahnwagen auf gerader Bahn, Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens 20: 113–123, 1883
- [41] Klosek-Dygas, M. M. et al., Diffusion Theory of Multidimensional Activated Rate Processes: The Role of Anisotropy, J. Chem. Phys. 90: 1141–1148, 1989
- [42] Knothe, K., Böhm, F., History of Stability of Railway and Road Vehicles, Vehicle System Dynamics 31: 283–323, 1999
- [43] Knuth, D. E., The Art of Computer Programming, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981
- [44] Kolmogoroff, A. N., Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, Berlin 1933
- [45] Kolmogoroff, A. N., Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104: 415–458, 1931
- [46] Kolmogorov, A. N., Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publ., 1956
- [47] Kozin, F., A Survey of Stability of Stochastic Systems, Automatica, 5: 95–112, 1969
- [48] Kubo, R., Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems, J. Phys. Soc. Japan 12: 570–586, 1957
- [49] Lehmer, D. H., Mathematical Methods in Large-Scale Computing Units, Ann. Comput. Lab. Harvard U. 26: 141–146, 1951
- [50] Lehn, J., Neunzert, H., (Hrsg.), Random Numbers and Simulation, J. Comp. Appl. Math. 31, 1990
- [51] Leipholz, H., Stabilitätstheorie, Teubner, Stuttgart, 1968
- [52] Leray, J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta Math. 63: 193–248, 1934
- [53] Lin, Y. K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, New York, 1967

- [54] Lin, Y. K., Cai, G. Q., Probabilistic Structural Dynamics: Advanced Theory and Applications, McGraw-Hill, New York, 1995
- [55] Lugner, P., Plöchl, M., Modelling in Vehicle Dynamics of Automobiles, Z. Angew. Math. Mech. 84: 219–236, 2004
- [56] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R. P., Formulas and Theorems For The Special Functions of Mathematical Physics, Springer, Berlin, 1966
- [57] Malkin, J. G., Theorie der Stabilität einer Bewegung, Oldenbourg, München, 1959
- [58] Mancini, R., (Hrsg.), Op Amps For Everyone, Texas Instruments, Dallas, 2002
- [59] Marsaglia, G., Bray, T. A., A Convenient Method for Generating Normal Variables, SIAM Review 6: 260–264, 1964
- [60] Maruyama, G., Continuous Markov Processes and Stochastic Equations, Rend. Circolo Math. Palermo, 4: 48–90, 1955
- [61] Mitschke, M., Klingner, B., Braun, H., Zulässige Amplituden und Wellenlängen herausragender Unebenheitsanteile: Einfluß von Einzelhindernissen und Periodizitäten auf Fahrkomfort, Straßen-, Fahrzeug- und Ladegutbeanspruchung sowie Fahrsicherheit, Bundesminister für Verkehr, Abt. Straßenbau, Bonn-Bad Godesberg, 1995
- [62] Mitschke, M., Wallentowitz, H., Dynamik der Kraftfahrzeuge, Springer, Berlin, 2004
- [63] Moyal, J. E., Stochastic Processes and Statistical Physics, J. Roy. Stat. Soc. B11: 150–210, 1949
- [64] Müller, R., Die Problematik der Berührgeometrie Rad/Schiene. ZEV+DET Glasers Annalen 119: 86–99, 1995
- [65] Neumann, J. v., On the Principles of Large Scale Computing Machines, Reprint einer unveröffentlichten Vorlesung vom 15.05.1946 in Ann. Hist. Comp. 3: 263–273, 1982
- [66] Nicklisch, D., Kontaktflächen zwischen Schiene und Rad, Offenlegungsschrift DE 100 43 940 A 1, Deutsches Patent- und Markenamt, 2000 und europäische Patentanmeldung EP 1 091 044 A 1, Europäisches Patentamt, Paris, 2001
- [67] Оселедец, В. И., Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем, Труды Московского математического общества 19: 179–210, 1968  
Oseledets, W. I., Ein multiplikatives Ergodentheorem. Charakteristische Ljapunow-Kennzahlen dynamischer Systeme [russ.], Arbeiten der Moskauer Mathematischen Gesellschaft 19: 179–210, 1968
- [68] Pawula, R. F., Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planck Equation, Physical Review 162: 186–188, 1967
- [69] Pawula, R. F., Generalizations and Extensions of the Fokker-Planck-Kolmogorov Equations, IEEE Trans. Inform. Theory 13: 33–41, 1967
- [70] Poincaré, H., Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta Mathematica 7: 259–380, 1885

- [71] Pollak, E., Berezhkovskii, A. M., Schuss, Z., Activated Rate Processes: A Relation Between Hamiltonian and Stochastic Theories, *J. Chem. Phys.* 100: 334–339, 1994
- [72] Popp, K., Schiehlen, W., *Fahrzeugdynamik*, Teubner, Stuttgart, 1993
- [73] Popp, K., Parametric Excitation of a Wheelset, *Z. Angew. Math. u. Mech.* 77: 169–270, 1997
- [74] Prud'homme, A., La voie, *Rév. Gen. Chemins de Fer* 89: 56–67, 1970
- [75] Pugachev, V. S., *Theory of Random Functions and its Applications*, Pergamon Press, 1965
- [76] Redtenbacher, F., *Die Gesetze des Lokomotivbaus*, Bassermann, Mannheim, 1855
- [77] Renger, A., Theorie der Bewegung eines Radsatzes auf geradem Gleis mit stochastischen Gleislagefehlern, *Z. Angew. Math. u. Mech.* 62: 141–169, 1982
- [78] Rice, S. O., Mathematical Analysis of Random Noise, *Bell System Techn. J.* 23: 282–332, 1944 und 24: 46–156, 1945
- [79] Riekert, P., Schunck, T. E., Zur Fahrmechanik des gummibereiften Kraftfahrzeugs, *Ingenieur Archiv* 11: 210–224, 1940
- [80] Rill, G., *Instationäre Fahrzeugschwingungen bei stochastischer Erregung*, Dissertation, Universität Stuttgart, 1983
- [81] Risken, H., *The Fokker-Planck-Equation*, Springer, Berlin, 1964
- [82] Rossetter, E. J., Gerdes, J. C., A Study of Lateral Vehicle Control Under a 'Virtual' Force Framework, *International Symposium on Advanced Vehicle Control*, Hiroshima, Japan, 2002
- [83] Sagirow, P., *Stochastische Systeme*, Manuskript zur Vorlesung, Stuttgart, 1970
- [84] Schenk-Hoppé, K. R., Bifurcations of the Randomly Perturbed Logistic Map, *Discussion Paper No. 353*, Dept. of Economics, University of Bielefeld, 1997
- [85] Schoutens, W., *Stochastic Processes and Orthogonal Polynomials*, Springer, Berlin, 2000
- [86] Shinozuka, M., Simulation of Multivibrate and Multidimensional Random Processes, *J. Acoust. Soc. Am.* 49: 357–368, 1971
- [87] Simon, M., *Zur Stabilität dynamischer Systeme mit stochastischer Anregung*, Dissertation Universität Karlsruhe (TH), 2004
- [88] Smoluchowski, M. v., Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen, *Ann. Phys.* 21: 756–780, 1906
- [89] Smoluchowski, M. v., Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegung unter Einfluß äußerer Kräfte, *Bull. Acad. Sci. Cracovie Mat.-nat. Kl. A*: 418–434, 1913
- [90] Sura, P., Stochastic Analysis of Southern and Pacific Ocean Sea Surface Winds, *Journal of The Atmospheric Sciences* 60: 654–666, 2003

- [91] Taylor, G.I., Diffusion by Continuous Movements, Proc. London Math. Soc. 20: 196–212, 1922
- [92] True, H., On the Theory of Nonlinear Dynamics and its Applications in Vehicle System Dynamics, Vehicle System Dynamics 31: 393–421, 1999
- [93] vom Scheidt, J., Fellenberg, B., Wöhrle, U., Analyse und Simulation stochastischer Schwingungssysteme, Teubner, Stuttgart, 1994
- [94] von Wagner, U., Zur Berechnung stationärer Verteilungsdichten nichtlinearer stochastisch erregter Systeme, Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1998
- [95] Wagner, A., Ein Verfahren zur Vorhersage und Bewertung der Fahrerreaktion bei Seitenwind, Dissertation, Universität Stuttgart, 2003
- [96] Wedig, W., Parameter Estimation and Process Identification, in: Neunzert, H. (Hrsg.), The Road-Vehicle-System and Related Mathematics, 212–230, Teubner, Stuttgart, 1985
- [97] Wedig, W., Stochastische Schwingungen – Simulation, Schätzung und Stabilität, Z. Angew. Math. u. Mech. 67: T34–T42, 1987
- [98] Wedig, W., Lyapunov Exponents of Stochastic Systems and Related Bifurcation Problems, Stochastic Structural Dynamics – Progress in Theory and Applications, ed. by T. S. Ariaratnam, I. G. Schuëller and I. Elishakoff, 315–327, Elsevier, London, 1988
- [99] Wedig, W., Dynamics of Half-Car Models Under Stochastic Road Excitations, Proceedings of IMECE'03, IMECE2003-55638, Washington, D. C., 2003
- [100] Wickens, A. H., The Dynamics of Railway Vehicles – From Stephenson to Carter, Proc. Instn. Mech. Engrs. Part F 212: 209–217, 1998
- [101] Wiggins, S., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer, Berlin, 1990
- [102] Wong, E., Zakai, M., On the Relation Between Ordinary and Stochastic Differential Equations, Int. J. Eng. Sci. 3: 213–229, 1965
- [103] Zhengqi, G., Yufeng, L., Seemann, W., The Performance of a Vehicle with Four-Wheel Steering Control in Crosswind, Int. J. of Vehicle Autonomous Systems 1: 256–269, 2003

