

Stetige Selektionen linearer Funktionen in der nicht-differenzierbaren Morse-Theorie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften

(Dr. rer. pol.)

von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Wi.-Ing. Oliver Mayer

Tag der mündlichen Prüfung: 31.01.2006

Referent: Prof. Dr. Diethard Pallaschke

Korreferent: Prof. Dr. Klaus Neumann

Karlsruhe, 2006

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
1 Morse-Theorie	5
1.1 Begriffe und Definitionen	5
1.2 Morse-Theorie für differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R}^n	8
1.3 Morse-Theorie auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten	11
1.4 Nicht-differenzierbare Morse-Theorie	16
1.5 Generizitäts-Eigenschaft	28
2 Stetige Selektionen linearer Funktionen	30
2.1 Normalformen	30
2.2 Anzahl stetiger Selektionen	33
2.3 Abstiegs- und Anstiegskegel	35
2.4 Topologische Klassifikation für $n \leq 3$	38
2.5 Der Homotopietyp des Abstiegskegels	40
2.6 Projektion auf die Einheitssphäre S^{n-1}	56
2.7 Triangulierung der Mengen $S_-(f)$ und $S_+(f)$	60
2.8 Topologische Klassifikation für $n = 4$	63
2.9 Höhere Dimensionen	88
3 Fazit	93
A Mathematischer Anhang	95
A.1 Lineare Algebra	95
A.2 Kegel und Konvexe Mengen	96
A.3 Topologie	98
Literaturverzeichnis	105

Einleitung

In der klassischen Morse-Theorie werden untere Niveaumengen und kritische Punkte von differenzierbaren Funktionen untersucht. So besagt das zweite Morse-Lemma, daß eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebung eines nicht-degenerierten kritischen Punktes x_0 immer mit Hilfe einer Koordinatentransformation in die folgende Gestalt überführt werden kann:

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto f(x_0) - \sum_{j=1}^k y_j^2 + \sum_{j=k+1}^n y_j^2, \quad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit ist die in Jongen u. Pallaschke (1988) angegebene Erweiterung des zweiten Morse-Lemmas auf stückweise differenzierbare Funktionen, die sich als stetige Selektionen von C^2 -Funktionen darstellen lassen. Danach können, ebenfalls nach Einführung neuer Koordinaten, die Variablen so zerlegt werden, daß sich die Funktion in der Umgebung eines nicht-degenerierten kritischen Punktes als Summe einer stetigen Selektion von linearen Funktionen und einer quadratischen Funktion darstellen läßt. Der zweite Summand entspricht dem differenzierbaren Anteil der Funktion, während der erste Summand den nicht-differenzierbaren Anteil widerspiegelt. Gelingt es, die Struktur dieses nicht-differenzierbaren Anteils besser zu verstehen, so lassen sich daraus wertvolle Rückschlüsse auf das Verhalten stückweise differenzierbarer Funktionen in der Umgebung von nicht-degenerierten kritischen Punkten ziehen.

Aus diesem Grund wurden in Bartels, Kuntz, u. Scholtes (1995) stetige Selektionen linearer Funktionen im Detail untersucht. Ein wesentliches, dabei erzielttes Ergebnis ist eine topologische Klassifizierung aller für die Morse-Theorie relevanten stetigen Selektionen von bis zu vier linearen Funktionen.

In dieser Arbeit wird nun eine Verallgemeinerung der bisherigen Resultate entwickelt. Für stetige Selektionen von bis zu fünf linearen Funktionen wird gezeigt, daß ihr topologischer Typ eindeutig durch die Betti-Zahlen eines von der Funktion induzierten simplizialen Komplexes bestimmt ist. Mit Hilfe dieses Ergebnisses und eines Computer-Programms lassen sich im Falle von fünf Selektionsfunktionen genau 26 verschiedene topologische Typen innerhalb der 6894 stetigen Selektionen identifizieren. Diese Klassifikation war bisher unbekannt.

Die Anwendungsgebiete der Morse-Theorie sind zahlreich. Überall dort, wo es um das Auffinden kritischer Punkte geht, kann sie wichtige Informationen über die Struktur des Problems liefern. So konnten beispielsweise mit Hilfe der Morse-Theorie neue Lösungsansätze in der Parametrischen Optimierung entwickelt werden (siehe Guddat u. a. 1990). Eng damit verknüpft ist das Auffinden globaler Lösungen von Optimierungsproblemen. Ein vielversprechender Ansatz, der versucht, alle kritischen Punkte eines Optimierungsproblems nacheinander zu durchlaufen, basiert ebenfalls auf Methoden der Morse-Theorie (siehe Jongen u. Ruiz Jhones 2000). Auch in der Wirtschaftstheorie sind Anwendungen denkbar, so z. B. in der Gleichgewichtstheorie, wo viele Probleme als Suche nach kritischen Punkten geeigneter Funktionen darstellbar sind. In Smale (1973) wurde beispielsweise das Prinzip des Pareto-Optimums unter Zuhilfenahme der Morse-Theorie verallgemeinert. Da viele Optimierungsprobleme bei genauerer Betrachtung einen nicht-differenzierbaren Charakter aufweisen, ist es entsprechend wichtig, die Morse-Theorie auch für nicht-differenzierbare Funktionen weiterzuentwickeln.

Das erste Kapitel dieser Arbeit beginnt mit einigen grundlegenden Begriffen und Definitionen, um danach die wichtigsten Resultate der Morse-Theorie für differenzierbare Funktionen kurz vorzustellen. In Abschnitt 1.4 folgt die Einführung einiger wichtiger Konzepte der nicht-differenzierbaren Optimierung, um schließlich das oben erwähnte Resultat aus Jongen u. Pallaschke (1988) näher zu betrachten. Dabei wird unter anderem ersichtlich, welche wichtige Rolle die stetigen Selektionen linearer Funktionen im nicht-differenzierbaren Fall spielen.

Diese sind der Untersuchungsgegenstand des zweiten Kapitels. Zunächst werden die bereits erwähnten Ergebnisse aus Bartels, Kuntz, u. Scholtes (1995) ausführlich behandelt. Die daraus gewonnenen Erkenntnisse werden dann sukzessive und detailliert vertieft und münden in Abschnitt 2.8 im Beweis der oben beschriebenen Klassifikation für stetige Selektionen fünf linearer Funktionen. Um die kombinatorische Struktur des Problems auszunutzen, wird dabei auf Methoden der Algebraischen Topologie zurückgegriffen. Abschließend wird eine allgemeine Vermutung für die Klassifikation im Falle von mehr als fünf Selektionsfunktionen aufgestellt.

Am Ende der Arbeit befindet sich ein Anhang, der in kompakter Form einige grundlegende, für das Verständnis der übrigen Kapitel notwendigen mathematischen Begriffe und Sätze enthält. Eine vollständige Einführung in die entsprechenden Gebiete kann dort jedoch aus Platzgründen nicht gegeben werden. Anstatt dessen findet der Leser zahlreiche Literaturhinweise. Um die Lesbarkeit der Arbeit zu erhöhen wurden allerdings nicht alle Definitionen und Begriffe in den Anhang verschoben.

1 Morse-Theorie

1.1 Begriffe und Definitionen

Im folgenden sei \mathbb{R}^n der n -dimensionale euklidische Vektorraum. Ist nichts anderes angegeben, so besitzen dessen Elemente $x \in \mathbb{R}^n$ die folgende Darstellung als Spaltenvektor:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n .$$

Bei Bedarf werden jedoch auch Zeilenvektoren (x_1, \dots, x_n) als Elemente des \mathbb{R}^n betrachtet. Die Schreibweise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Standard-Skalarprodukt mit $\langle x, y \rangle = x^T y$ und $\| \cdot \|$ die euklidische Norm mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$ nennen wir eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ **differenzierbar** an der Stelle $x_0 \in M$, wenn eine lineare Funktion l existiert, so daß gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + l(x - x_0))}{\|x - x_0\|} = 0 .$$

Der eindeutig bestimmte Vektor $\nabla f(x_0)$, der die Gleichung

$$l(v) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

erfüllt, heißt der **Gradient** von f an der Stelle x_0 . Wenn f in einer Umgebung von x_0 differenzierbar ist und zusätzlich gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|\nabla f(x) - \nabla f(x_0)\| = 0 ,$$

dann sagen wir f ist **stetig differenzierbar** im Punkt x_0 . Die Funktion f heißt (stetig) differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt $x \in M$ (stetig) differenzierbar ist.

Der Gradient ist gerade gleich dem Vektor der partiellen Ableitungen, d. h.

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right)^T.$$

Daher wird der Begriff Gradient auch für (nicht notwendigerweise differenzierbare) Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ benutzt, die im entsprechenden Punkt nach allen Veränderlichen partiell differenzierbar sind.

Es gilt: Existieren zu einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sämtliche partiellen Ableitungen und sind diese in einem Punkt $x_0 \in M$ stetig, dann ist die Funktion im Punkt x_0 stetig differenzierbar.

Eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man k -mal stetig differenzierbar, falls alle ihre partiellen Ableitungen bis zur Ordnung k existieren und stetig sind. Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ bezeichne $C(M, \mathbb{R})$ die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf M . Ist M außerdem offen, so definiert man

- $C^k(M, \mathbb{R})$ als die Menge der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf M (für ganzzahliges $k \geq 1$),
- $C^0(M, \mathbb{R}) := C(M, \mathbb{R})$ und
- $C^\infty(M, \mathbb{R}) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} C^k(M, \mathbb{R})$, wobei $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \dots\}$.

Offensichtlich gilt $C^k(M, \mathbb{R}) \subseteq C^{k-1}(M, \mathbb{R})$ für alle $k \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$. Die Begriffe C^∞ und glatt werden synonym verwendet. Elemente von $C^k(M, \mathbb{R})$ werden auch kurz als **C^k -Funktion** bezeichnet. Entsprechende Bezeichnungen verwenden wir auch für vektorwertige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$, wenn alle Komponentenfunktionen f_1, \dots, f_m die jeweiligen Anforderungen erfüllen, also z. B. $C^k(M, \mathbb{R}^m)$.

Die Jacobi-Matrix einer vektorwertigen C^1 -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ sei mit

$$Df(x) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m(x) & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m(x) \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Für eine reellwertige C^1 -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, also den Spezialfall $m = 1$, ergibt sich demnach $Df(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x) \right) = \nabla f(x)^T$. Für die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$, auch Hesse-Matrix genannt, schreiben wir

dann $D^2f(x)$. Für C^2 -Funktionen ist $D^2f(x)$ eine symmetrische Matrix und hat somit n reelle Eigenwerte (siehe Theorem A.1.3).

1.1.1 Rang einer Abbildung:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^r -Abbildung, $r \geq 1$. Der **Rang der Abbildung f** in einem Punkt x_0 ist gleich dem Rang der Jacobi-Matrix $Df(x_0)$ im Punkt x_0 ; er wird mit **rank $_{x_0} f$** bezeichnet. Der Rang von f in x_0 ist gleich der Dimension des Bildes von \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m unter der linearen Abbildung $Df|_{x_0}$. Diese Definition impliziert $\text{rank}_{x_0} f \leq \min\{n, m\}$.

Alle Punkte x des Definitionsbereichs von f , für die $\text{rank}_x f = \min\{n, m\}$ gilt, nennt man **regulär** (auch **nicht-kritisch**, **nicht-singulär**). Die Punkte mit $\text{rank}_x f < \min\{n, m\}$ heißen dagegen **irregulär** (auch **kritisch**, **singulär**). Die Menge aller regulären Punkte einer Abbildung f ist offen in \mathbb{R}^n und kann leer sein.

1.1.2 Theorem Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung der Klasse C^r , $r \geq 1$, und $x_0 \in U$ ein regulärer Punkt von f . Dann existieren offene Umgebungen V von x_0 und W von $f(x_0)$, so daß f ein Homöomorphismus $V \xrightarrow{f} W$ und $f^{-1} \in C^r$ ist. □

1.1.3 Definition Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt f besitzt an der Stelle $\tilde{x} \in M$ ein **lokales Minimum**, falls eine \mathbb{R}^n -Umgebung \mathcal{O} von \tilde{x} existiert, so daß für alle $x \in M \cap \mathcal{O}$ stets $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ ist. Gilt $f(\tilde{x}) \leq f(x)$ sogar für alle $x \in M$, dann hat f an der Stelle \tilde{x} ein **globales Minimum**. Ein globales (bzw. lokales) **Maximum** von f ist definiert als globales (bzw. lokales) Minimum der Funktion $-f$. Globale (bzw. lokale) Minima und Maxima heißen auch globale (bzw. lokale) Extrema. Das Attribut „**strikt**“ wird hinzugefügt, wenn die jeweilige Bedingung für alle $x \neq \tilde{x}$ mit „ $<$ “ erfüllt ist.

Offensichtlich ist jedes globale Minimum (bzw. Maximum) auch ein lokales Minimum (bzw. Maximum). Notwendige bzw. hinreichende Bedingungen zum Auffinden lokaler Extremalstellen liefern die beiden folgenden wohlbekanntten Ergebnisse aus der Analysis.

1.1.4 Theorem (Notwendiges Optimalitätskriterium erster Ordnung)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in \tilde{x} nach allen Veränderlichen partiell differenzierbar. Hat f an der Stelle \tilde{x} ein lokales Extremum, dann ist $\nabla f(\tilde{x}) = 0$. □

Es kommen also nur die kritischen Punkte von f als Kandidaten für lokale Extremalstellen in Frage.

1.1.5 Theorem (Optimalitätskriterien zweiter Ordnung)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

- (a) Wenn f in \tilde{x} ein lokales Minimum hat, dann ist $Df(\tilde{x}) = 0$ und $D^2f(\tilde{x})$ positiv semi-definit.
- (b) Ist $Df(\tilde{x}) = 0$ und $D^2f(\tilde{x})$ positiv definit, dann hat f an der Stelle \tilde{x} ein striktes lokales Minimum. □

1.2 Morse-Theorie für differenzierbare Funktionen auf \mathbb{R}^n

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden nur die wichtigsten Ergebnisse der Morse-Theorie für differenzierbare Funktionen vorgestellt. Sie wurden entnommen aus Jongen u. a. (2000). Dort wird das Thema sehr umfassend behandelt und auch in einem bestimmten Sinn auf differenzierbare Funktionen unter Nebenbedingungen erweitert.

Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann bezeichnen wir die Menge

$$M^a := \{x \mid f(x) \leq a\}$$

als **untere Niveaumenge** von f zum Niveau a . Die Morse-Theorie beschäftigt sich u. a. mit der Frage, wie sich für festes f die geometrische Gestalt (genauer: der Homotopietyp) dieser unteren Niveaumengen bei Variation des Niveaus a verändert. So besagt das erste Morse-Lemma im wesentlichen, daß sich ausgehend von einem festen Niveau a der Homotopietyp der unteren Niveaumenge solange nicht verändert, wie kein neuer kritischer Punkt in die untere Niveaumenge aufgenommen wird.

1.2.1 Theorem (Erstes Morse-Lemma) *Es seien eine C^1 -Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und reelle Zahlen $a < b$ gegeben. Gilt $\inf\{\|Df(x)\| \mid x \in f^{-1}([a, b])\} > 0$, dann ist M^a ein starker Deformationsretrakt¹⁾ von M^b . □*

In der Literatur ist das erste Morse-Lemma häufig mit den ursprünglichen, etwas strengeren Voraussetzungen zu finden: anstatt $\inf\{\|Df(x)\| \mid x \in f^{-1}([a, b])\} > 0$ wird dort verlangt, daß M^b kompakt ist und $f^{-1}([a, b])$ keinen kritischen Punkt enthält.

¹⁾ siehe die Erläuterungen zum Thema Homotopietheorie in Abschnitt A.3 und speziell Definition A.3.13.

1.2.2 Beispiel Betrachtet wird die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Graph in Abbildung 1.1 zu sehen ist.

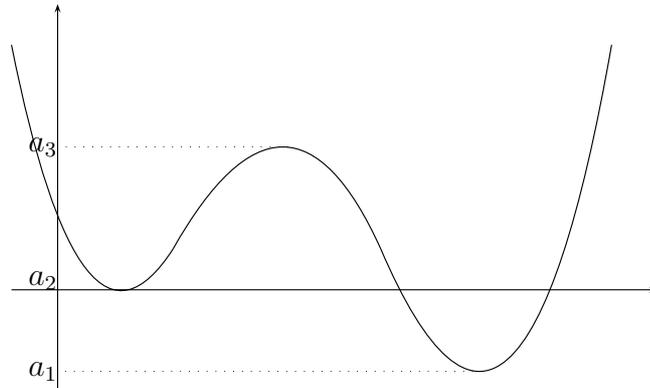


Abbildung 1.1: Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Es gibt drei kritische Niveaus a_1, a_2, a_3 (d. h. $f^{-1}(a_i)$ enthält einen kritischen Punkt). Für $\alpha < a_1$ ist die Niveaumenge M^α leer. Dies ändert sich erst beim Überschreiten des kritischen Niveaus a_1 . Gilt $a_1 < \beta < a_2$ ist die Niveaumenge M^β immer ein Intervall, ändert also ihren Homotopietyp in diesem Bereich nicht. Ist $a_2 < \gamma < a_3$, hat M^γ zwei Zusammenhangskomponenten. M^β kann also kein Deformationsretrakt von M^γ sein.

Ein ausführliches Beispiel für eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist in Jongen u. a. (2000) auf Seite 15 zu finden. \diamond

1.2.3 Definition Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und \tilde{x} ein kritischer Punkt von f . Dann heißt \tilde{x} **nicht-degenerierter** kritischer Punkt von f , wenn außerdem gilt:

$$D^2f(\tilde{x}) \text{ ist regulär .}$$

Ist dies erfüllt, wird die Anzahl der negativen Eigenwerte von $D^2f(\tilde{x})$ als **Index** von f an der Stelle \tilde{x} bezeichnet.

1.2.4 Definition Seien U und V offene Mengen des \mathbb{R}^n und $\Phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Dann heißt das Paar (U, Φ) lokales Koordinatensystem (des \mathbb{R}^n) und Φ alleine nennt man Koordinatentransformation. Sind darüberhinaus sowohl Φ als auch dessen Umkehrfunktion Φ^{-1} Funktionen der Klasse C^r , $r \geq 1$, dann heißt das Paar (U, Φ) lokales C^r -Koordinatensystem und Φ entsprechend C^r -Koordinatentransformation.

1.2.5 Theorem (Zweites Morse-Lemma) Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f . Dann existiert eine offene Umgebung U von \tilde{x} und eine lokale C^1 -Koordinatentransformation $\Phi : U \rightarrow V$ mit $\Phi(\tilde{x}) = 0$, so daß für alle $y \in V$ gilt:

$$f \circ \Phi^{-1}(y) = f(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^n y_i^2,$$

wobei k der Index von f an der Stelle \tilde{x} ist. □

In dieser Situation sagt man auch: f ist lokal topologisch äquivalent zu der Funktion $y \mapsto f(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^n y_i^2$ (siehe Definition 1.4.18).

Jede C^2 -Funktion hat somit lokal in der Umgebung eines nicht-degenerierten kritischen Punktes bis auf differenzierbare Koordinatentransformation und Addition einer Konstanten die Gestalt einer der Funktionen

$$g_k(y) = - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^n y_i^2.$$

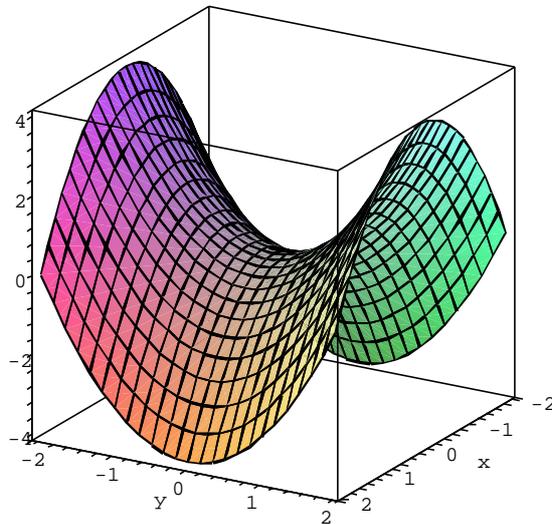
Ist \tilde{x} ein kritischer Punkt und hat der Index k an der Stelle \tilde{x} den Wert 0, so ist \tilde{x} offenbar ein lokales Minimum. Ist dagegen $k = n$, so liegt ein lokales Maximum vor. Für alle anderen Werte erhält man Sattelpunkte. Die Abbildung 1.2 on the following page zeigt den Graph der Funktion g_1 für $n = 2$.

Mit Hilfe dieser Erkenntnisse ist es auch möglich, eine Aussage zu beweisen, die beschreibt, wie sich die geometrische Gestalt der unteren Niveaumenge verändert, wenn ein nicht-degenerierter kritischer Punkt in diese aufgenommen wird. Um diese Aussage formulieren zu können, wird noch die folgende Bedingung C benötigt.

Bedingung C Es seien eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben. Die Funktion f erfüllt Bedingung C bezüglich des Intervalls $[a, b]$, falls für jede abgeschlossene Teilmenge S von $f^{-1}([a, b])$, welche keine kritischen Punkte enthält, $\inf\{\|Df(x)\| \mid x \in S\} > 0$ gilt.

1.2.6 Theorem Gegeben sei eine Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit nicht-degeneriertem kritischen Punkt \tilde{x} , sowie reelle Zahlen $a < b$ derart, daß f die Bedingung C bezüglich des Intervalls $[a, b]$ erfüllt, $a < f(\tilde{x}) < b$ gilt und $f^{-1}([a, b])$ außer \tilde{x} keine weiteren kritischen Punkte von f enthält. Ferner sei k der Index von f an der Stelle \tilde{x} . Dann existiert eine Menge \tilde{D}^k mit den Eigenschaften

- \tilde{D}^k ist homöomorph zum k -dimensionalen Einheitsball $D^k = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\}$,

Abbildung 1.2: Graph der Funktion $f(x, y) = -x^2 + y^2$

- $\partial \tilde{D}^k = \tilde{D}^k \cap f^{-1}(a)$,
- $\tilde{D}^k \subseteq f^{-1}([a, b])$,

so daß gilt:

$$f^{-1}((-\infty, a]) \cup \tilde{D}^k \text{ ist homotopieäquivalent zu } f^{-1}((-\infty, b]) .$$

□

1.3 Morse-Theorie für differenzierbare Funktionen auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Um weitergehende Resultate der Morse-Theorie zu betrachten, ist es notwendig, eine allgemeinere Klasse von Funktionen zugrunde zu legen, nämlich differenzierbare Funktionen, deren Definitionsbereich sog. Mannigfaltigkeiten sind. Dazu wird zunächst das Konzept der Mannigfaltigkeiten kurz vorgestellt.

1.3.1 Definition Ein Unterraum M des \mathbb{R}^n heißt k -dimensionale (topologische) **Mannigfaltigkeit**, falls jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung in M besitzt, welche homöomorph zur offenen Einheitskugel \mathring{D}^k des \mathbb{R}^k ist. D. h. zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene M -Umgebung U mit $p \in U$ und ein Homöomorphismus $\phi : U \rightarrow \mathring{D}^k$. Das Paar (U, ϕ) nennen wir dann ein lokales Koordinatensystem von M und ϕ eine lokale Koordinatentransformation.

In der mathematischen Literatur wird üblicherweise eine abstraktere Definition einer Mannigfaltigkeit verwendet, welche keinen Bezug auf einen die Mannigfaltigkeit umgebenden Raum (wie den \mathbb{R}^n in Definition 1.3.1) nimmt. Im Hinblick auf die Anwendung in der Optimierungstheorie ist es für unsere Zwecke jedoch ausreichend, sich auf solche Mannigfaltigkeiten zu beschränken, welche bereits von vornherein in den \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, eingebettet sind. Dadurch werden einige der folgenden Definitionen anschaulicher. Beispielsweise findet man in der Literatur die Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit meistens in einer allgemeineren bzw. abstrakteren Form. Bei den C^r -Mannigfaltigkeiten, wie sie im folgenden definiert werden, handelt es sich, in diesem abstrakteren Rahmen gesehen, um Untermannigfaltigkeiten des mit einer C^r -Struktur versehenen \mathbb{R}^n . Für weitere Details siehe z. B. Lee (2003).

Der Begriff der C^r -Funktion bzw. der r -fachen stetigen Differenzierbarkeit ($r \geq 0$) wurde bisher nur für Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ definiert, deren Urbildmenge M eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist. Die nächste Definition stellt eine im folgenden benötigte Erweiterung für beliebige Urbildmengen dar.

1.3.2 Definition Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^k$ beliebig.

- Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ nennen wir **C^r -Funktion**, falls es zu jedem $x \in X$ eine \mathbb{R}^n -offene Umgebung U von x und eine C^r -Abbildung $F : U \rightarrow Y$ gibt, so daß f und F auf $X \cap U$ übereinstimmen. Die Menge aller solcher C^r -Funktionen wird mit $C^r(X, Y)$ bezeichnet.
- Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt **C^r -Diffeomorphismus**, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} C^r -Funktionen sind. Die Mengen X und Y heißen dann C^r -diffeomorph.

1.3.3 Definition Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^n heißt k -dimensionale **C^r -Mannigfaltigkeit**, $r \geq 1$, falls jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung in M besitzt, welche C^r -diffeomorph zum offenen Einheitsball \mathring{D}^k des \mathbb{R}^k ist (kurz: M ist in jedem Punkt $x \in M$ lokal C^r -diffeomorph zu \mathbb{R}^k). Sind k und r aus dem Kontext ersichtlich oder nicht von Bedeutung, wird M auch nur **differenzierbare Mannigfaltigkeit** genannt.

Die Begriffe C^∞ und glatt werden hier ebenfalls synonym verwendet.

1.3.4 Definition und Satz Sei M eine k -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und ϕ eine C^r -Koordinatentransformation, deren Definitionsbereich p enthält. Dann ist die Jacobi-Matrix der Umkehrabbildung von ϕ an der Stelle $\phi(p)$ wohldefiniert und kann als lineare Abbildung $D\phi^{-1}|_{\phi(p)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ betrachtet werden. Das Bild $D\phi^{-1}|_{\phi(p)}(\mathbb{R}^k)$ dieser linearen Abbildung nennen wir **Tangentialraum** T_pM von M in p . Der Tangentialraum T_pM ist unabhängig von der Wahl der Koordinatentransformation ϕ und somit wohldefiniert. \square

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit hat also die nützliche Eigenschaft, daß sie sich an jeder Stelle linear approximieren läßt. T_pM ist nach Definition immer ein k -dimensionaler Untervektorraum des \mathbb{R}^n . Damit T_pM nun auch der geometrisch anschaulichen Vorstellung von einem Tangentialraum in p entspricht, wird noch in Gedanken eine Verschiebung von 0 nach p im \mathbb{R}^n durchgeführt.

Aufgrund des zumeist lokalen Charakters der Aussagen in Abschnitt 1.2 lassen sich diese problemlos auf differenzierbare Funktionen, welche auf Mannigfaltigkeiten definiert sind, übertragen. Dazu müssen zunächst einige Definitionen auf diese Klasse von Funktionen erweitert werden.

Sei M eine k -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion, $p \in M$ und (U, ϕ) ein Koordinatensystem von M mit $p \in U$. Die Funktion $\hat{f} := f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann eine Darstellung der Funktion f in lokalen Koordinaten. Da \hat{f} auf einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^k definiert ist, kann $D\hat{f}(\phi(p))$ gebildet und als lineare Funktion $D\hat{f}|_{\phi(p)} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet werden. Identifiziert man nun $x \in \mathbb{R}^k$ mit $D\phi^{-1}|_{\phi(p)}(x) \in T_pM$, so erhält man schließlich eine von f und p induzierte lineare Abbildung $f_* : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$. Es läßt sich zeigen, daß f_* unabhängig von der Wahl der Koordinatentransformation ϕ ist.

1.3.5 Definition Sei M eine k -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Ein Punkt $p \in M$ heißt **kritischer Punkt** von f , falls $f_*(T_pM) = 0$.

Wie man leicht sieht, ist $p \in M$ genau dann kritischer Punkt von f , wenn $D\hat{f}(\phi(p)) = 0$ bzw. $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_i}(\phi(p)) = 0$ für alle $i = 1, \dots, k$.

Ist $r \geq 2$ und f eine C^2 -Funktion, läßt sich aufbauend auf f_* in obiger Situation auch noch eine symmetrische Bilinearform $f_{**} : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definieren. Auch diese ist unabhängig von der Wahl der Koordinatentransformation ϕ und entspricht eindeutig einer Kongruenzklasse symmetrischer Matrizen (siehe Definition A.1.5). Bei gegebenem Koordinatensystem (U, ϕ) wird f_{**} durch die Hesse-Matrix $D^2 \hat{f}(p)$ repräsentiert. Nach Lemma A.1.6 stimmen die Eigenschaften Index, Coindex und folglich auch Regularität für alle solche Repräsentanten überein. Sie sind damit ebenfalls unabhängig von der Wahl der Koordinatentransformation ϕ und können direkt f_{**} zugeordnet werden. Dies führt zu der folgenden Definition.

1.3.6 Definition Sei M eine C^2 -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n , $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und p ein kritischer Punkt von f . Dann heißt p **nicht-degenerierter** kritischer Punkt von f , wenn außerdem für ein beliebiges Koordinatensystem (U, ϕ) mit $p \in U$ gilt: $D^2 \hat{f}(p)$ ist regulär, wobei $\hat{f} = f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$. Ist dies erfüllt, bezeichnet man die Anzahl der negativen Eigenwerte von $D^2 \hat{f}(p)$ als **Index** von f an der Stelle p .

Da $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^r -Funktion ist, gibt es nach Definition 1.3.2 zu $p \in M$ immer eine \mathbb{R}^n -offene Umgebung O von p und eine C^r -Funktion $\tilde{f} : O \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in O \cap M$. Diese Funktion \tilde{f} kann im Punkt p klassisch differenziert werden, was eine lineare Abbildung $D\tilde{f}|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ liefert. Man kann zeigen, daß die Einschränkung von $D\tilde{f}|_p$ auf $T_p M$ gerade die Funktion f_* ergibt und somit unabhängig von der Wahl einer Koordinatentransformation ϕ ist. Bezeichnen wir die rechtwinklige Projektion von $D\tilde{f}(p)$ auf $T_p M$ mit $Df_{\text{proj}}(p)$, so gilt daher:

$$D\tilde{f}|_p(x) = Df_{\text{proj}}(p) \cdot x = f_*(x) \quad \forall x \in T_p M .$$

Daraus folgt, daß p genau dann ein kritischer Punkt von f ist, falls $Df_{\text{proj}}(p) = 0$. Analog zu Abschnitt 1.2 wird deshalb folgende Bedingung C aufgestellt:

Bedingung C Sei M eine k -dimensionale C^r -Mannigfaltigkeit, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Funktion f erfüllt Bedingung C bezüglich des Intervalls $[a, b]$, falls für jede in M abgeschlossene Teilmenge S von $f^{-1}([a, b])$, welche keine kritischen Punkte enthält, $\inf\{\|Df_{\text{proj}}(x)\| \mid x \in S\} > 0$ gilt.

Die beiden Morse-Lemmata lauten in diesem Kontext nun wie folgt.

1.3.7 Theorem (Erstes Morse-Lemma) Sei M eine C^2 -Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^n und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Weiterhin seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ derart gegeben, daß $f^{-1}([a, b])$ keine kritischen Punkte enthält, f die Bedingung C bezüglich des Intervalls $[a, b]$ erfüllt und $f^{-1}([a, b])$ abgeschlossen in \mathbb{R}^n ist. Dann ist $M^a = f^{-1}((-\infty, a])$ ein starker Deformationsretrakt von $M^b = f^{-1}((-\infty, b])$.

1.3.8 Theorem (Zweites Morse-Lemma) Sei M eine q -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit, $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ und $\tilde{x} \in M$ ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f . Dann existiert eine offene Umgebung U von \tilde{x} in M und eine lokale C^1 -Koordinatentransformation $\Phi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^q$ von M mit $\Phi(\tilde{x}) = 0$, so daß für alle $y \in V$ gilt:

$$f \circ \Phi^{-1}(y) = f(\tilde{x}) - \sum_{i=1}^k y_i^2 + \sum_{i=k+1}^q y_i^2 ,$$

wobei k der Index von f an der Stelle \tilde{x} ist.

1.3.9 Theorem Seien eine q -dimensionale C^2 -Mannigfaltigkeit M , $f \in C^2(M, \mathbb{R})$, ein nicht-degenerierter kritischer Punkt \tilde{x} von f mit Index k sowie $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < f(\tilde{x}) < b$ derart gegeben, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $f^{-1}([a, b])$ enthält außer \tilde{x} keine weiteren kritischen Punkte von f ,
- f erfüllt die Bedingung C bezüglich des Intervalls $[a, b]$,
- $f^{-1}([a, b])$ ist abgeschlossen in \mathbb{R}^n .

Dann existiert eine Menge \tilde{D}^k mit den Eigenschaften

- \tilde{D}^k ist homöomorph zu D^k ,
- $\partial \tilde{D}^k = \tilde{D}^k \cap f^{-1}(a)$,
- $\tilde{D}^k \subseteq f^{-1}([a, b])$,

so daß gilt:

$$f^{-1}((-\infty, a]) \cup \tilde{D}^k \text{ ist homotopieäquivalent zu } f^{-1}((-\infty, b]) .$$

1.4 Nicht-differenzierbare Morse-Theorie

Soll die Morse-Theorie auf nicht-differenzierbare Funktionen erweitert werden, ist es sicherlich nötig sich auf eine bestimmte Klasse von Funktionen mit speziellen Eigenschaften zu beschränken. Dies wird zunächst die sehr allgemeine Klasse lokal Lipschitz-stetiger Funktionen sein, deren Definition in Kürze folgt.

Außerdem ist es notwendig, festzulegen, was überhaupt unter einem kritischen Punkt einer Funktion verstanden werden soll. Es gibt in der Literatur eine Vielzahl von Ansätzen zur Definition sogenannter Subdifferentialen. Dies sind Verallgemeinerungen des klassischen Differential-Begriffs auf bestimmte Klassen nicht-differenzierbarer Funktionen, die sich in ihren Eigenschaften oft erheblich unterscheiden (sowohl untereinander als auch vom klassischen Differential). Die im folgenden vorgestellten Ergebnisse verwenden ein Konzept zur Definition kritischer Punkte, welches auf dem Clarkeschen Subdifferential basiert. Dieses wird in der nicht-differenzierbaren Optimierung häufig angewendet.

Eine sehr ausführliche Darstellung einiger Ergebnisse der Morse-Theorie für nicht-differenzierbare Funktionen, eingebettet in den Kontext der nicht-differenzierbaren Optimierung, ist in Kuntz (1996) zu finden. Von dort wurden auch die meisten Definitionen und Theoreme dieses Abschnitts übernommen.

1.4.1 Definition Eine Funktion f heißt **sublinear**, wenn folgendes gilt:

- $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ für alle x_1, x_2 und
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle $\alpha \geq 0$.

1.4.2 Definition Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige gegebene Funktion. $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Approximation der Ordnung r** von f , falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \tilde{f}(x)}{\|x - x_0\|^r} = 0.$$

1.4.3 Definition f ist **lokal Lipschitz-stetig** an der Stelle x_0 , wenn eine Umgebung V von x_0 und eine Konstante L existieren, so daß

$$|f(y) - f(z)| \leq L\|y - z\|$$

für alle $y, z \in V$.

1.4.4 Bemerkung Eine lokal Lipschitz-stetige Funktion ist fast überall differenzierbar.

1.4.5 Definition $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist **richtungsdifferenzierbar** an der Stelle x_0 , wenn die **Richtungsableitung** im Punkt x_0 in Richtung g

$$f'(x_0; g) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{1}{t} (f(x_0 + t \cdot g) - f(x_0))$$

für alle Richtungen $g \in \mathbb{R}^n$ wohldefiniert ist.

1.4.6 Bemerkung Eine lokal Lipschitz-stetige Funktion ist nicht notwendigerweise richtungsdifferenzierbar.

1.4.7 Theorem Sei f eine lokal Lipschitz-stetige und richtungsdifferenzierbare Funktion. Dann ist die Funktion

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0; x - x_0)$$

eine Approximation erster Ordnung von f an der Stelle x_0 . □

1.4.8 Definition Wenn f richtungsdifferenzierbar an der Stelle x_0 und \tilde{f}_{x_0} eine Approximation erster Ordnung ist, dann heißt f **B-differenzierbar** an der Stelle x_0 . Die Richtungsableitung einer B-differenzierbaren Funktion heißt **B-Ableitung** von f an der Stelle x_0 .

1.4.9 Theorem Wenn f_1 und f_2 B-differenzierbar in x_0 bzw. $f_1(x_0)$ sind, dann ist $f_2 \circ f_1$ B-differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$(f_2 \circ f_1)'(x_0; v) = f_2'(f_1(x_0); f_1'(x_0; v)) . \quad \square$$

1.4.10 Definition und Satz (Subdifferential von Clarke)

Sei f eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Die **Clarkesche Richtungsableitung** ist definiert durch

$$f^\circ(x_0; g) = \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ \alpha \rightarrow 0+}} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha g) - f(x))$$

und existiert in diesem Fall immer. f° ist eine sublineare Funktion in der Richtung g , d. h. $f^\circ(x_0; g_1 + g_2) \leq f^\circ(x_0; g_1) + f^\circ(x_0; g_2)$ und $f^\circ(x_0; \alpha g) = \alpha f^\circ(x_0; g)$ gilt für alle g, g_1, g_2 und $\alpha \geq 0$.

Die eindeutig bestimmte kompakte konvexe Menge $\partial f(x_0)$, welche Träger der sublinearen Funktion $f^\circ(x_0; \cdot)$ ist, d. h. für die

$$f^\circ(x_0; g) = \max_{v \in \partial f(x_0)} \langle v, g \rangle$$

gilt, heißt das **Clarkesche Subdifferential** von f im Punkt x_0 .

Wenn die Funktion f in x_0 stetig differenzierbar ist, dann gilt:

$$\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\} .$$

Dies gilt nicht notwendigerweise im differenzierbaren Fall.

Es wurde gezeigt, daß das Clarkesche Subdifferential auf folgende einfache Art und Weise berechnet werden kann:

$$\partial f(x_0) = \text{conv}\{v \mid v = \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i), x_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} x_0\} . \quad \square$$

Es folgt die zu Beginn des Kapitels angekündigte Definition eines kritischen Punktes auf Basis des Clarkeschen Subdifferentials.

1.4.11 Definition Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion. Ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt ein **kritischer Punkt** von f falls $0 \in \partial f(x_0)$, wobei $\partial f(x_0)$ das Clarkesche Subdifferential von f im Punkt x_0 ist.

Damit ist zunächst einmal ein Rahmen geschaffen, innerhalb dessen man die Fragestellungen der Morse-Theorie auf nicht-differenzierbare Funktionen ausweiten kann. Das erste Morse-Lemma wurde von Agrachev, Pallaschke und Scholtes bereits erfolgreich auf die Klasse lokal Lipschitz-stetiger Funktionen erweitert.

1.4.12 Theorem (siehe Agrachev u. a. 1997, Proposition 1.2) Sei M eine differenzierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokal Lipschitz-stetige Funktion mit den unteren Niveaumengen $M^t = f^{-1}((-\infty, t])$. Angenommen M^β ist kompakt und $f^{-1}([\alpha, \beta])$ enthält keine kritischen Punkte von f . Dann existiert eine Lipschitz-stetige Abbildung $F : M^\beta \times [0, 1] \rightarrow M^\beta$, so daß gilt:

$$F(M^\beta, t) \subseteq M^{\beta+t(\alpha-\beta)} \quad \forall t \in [0, 1], \quad F|_{M^\alpha \times [0,1]} = \text{id} . \quad \square$$

Um eine dem zweiten Morse-Lemma (Theorem 1.2.5) vergleichbare Aussage über die Struktur nicht-differenzierbarer Funktionen in der Umgebung kritischer Punkte zu erhalten, ist es notwendig, die Klasse der betrachteten Funktionen ein wenig einzuschränken. Die im folgenden betrachteten sog. stückweise differenzierbaren Funktionen spielen eine wichtige Rolle in der nicht-differenzierbaren Optimierung.

1.4.13 Definition Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Ist die **Menge aktiver Indizes**

$$I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f(x) = f_i(x)\}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ nicht-leer, dann heißt f **stetige Selektion** der Funktionen f_1, \dots, f_m . In diesem Fall werden die Funktionen f_1, \dots, f_m Selektionsfunktionen genannt. Die Menge aller von f_1, \dots, f_m erzeugten stetigen Selektionen wird mit $CS(f_1, \dots, f_m)$ bezeichnet.

1.4.14 Definition Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **PC^r-Funktion**, $r \in \mathbb{N}$, wenn zu jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Umgebung V und eine endliche Menge $\{f_1, \dots, f_m\}$ von auf V definierten C^r -Funktionen existieren, so daß $f|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Selektion der Funktionen f_1, \dots, f_m ist.

1.4.15 Bemerkungen

- Für beliebiges $r \geq 1$ nennt man eine PC^r-Funktionen auch **stückweise differenzierbare Funktion**.
- Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt PC^r-Funktion, wenn jede ihrer Komponenten-Funktionen eine PC^r-Funktion ist.
- Die Klasse der PC^r-Funktionen ist bezüglich aller algebraischen Operationen sowie endlich vielen Maximum- und Minimum-Operationen abgeschlossen.
- Für lokale Betrachtungen bei stückweise differenzierbaren Funktion ist es aufgrund deren Definition im folgenden o. B. d. A. ausreichend, stetige Selektionen f von C^r -Funktionen f_1, \dots, f_m zu betrachten.

1.4.16 Theorem (Eigenschaften einer PC^r-Funktion f)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine PC^r-Funktion. Dann gilt:

- f ist lokal Lipschitz-stetig in jedem Punkt x . Das Subdifferential von Clarke ist die konvexe Hülle endlich vieler Punkte und gegeben durch

$$\partial f(x) = \text{conv}\{\nabla f_i(x) \mid i \in \hat{I}(x)\},$$

wobei $\hat{I}(x) = \{i \mid x \in \text{cl}(\text{int}\{x \mid f(x) = f_i(x)\})\}$ die Menge der **wesentlich aktiven Indizes** heißt.

- f ist richtungsdifferenzierbar in jedem Punkt x und die Richtungsableitung ist eine stetige Selektion der linearen Funktionen

$$g \mapsto \langle \nabla f_i(x), g \rangle \quad , i \in \hat{I}(x) .$$

- Die beiden ersten Eigenschaften implizieren, daß f in jedem Punkt B -differenzierbar ist. □

Die mittels $\hat{I}(x) = \{i \mid x \in \text{cl}(\text{int}\{x \mid f(x) = f_i(x)\})\}$ definierte Menge der wesentlich aktiven Indizes einer PC^r -Funktion f im Punkt x erfüllt anschaulich gesprochen den folgenden Zweck: Eine Funktion f_i gilt nur dann als wesentlich aktiv, wenn es keine Umgebung von x gibt, in der f als stetige Selektion ohne die Verwendung von f_i dargestellt werden kann. D. h. durch Beschränkung auf die wesentlich aktiven Funktionen entledigt man sich aller Selektionsfunktionen, die in einer hinreichend kleinen Umgebung von x überflüssig für die Darstellung von f als stetiger Selektion sind.

Die folgende Definition ist das PC^r -Analogon zu Definition 1.2.4.

1.4.17 Definition Seien U und V offene Mengen des \mathbb{R}^n und $\Phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus. Sind sowohl Φ als auch dessen Umkehrfunktion Φ^{-1} Funktionen der Klasse PC^r , $r \geq 1$, dann heißt das Paar (U, Φ) lokales PC^r -Koordinatensystem und Φ eine **PC^r -Koordinatentransformation**.

1.4.18 Definition Zwei stetige Funktionen $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißen **lokal topologisch äquivalent** in (x_0, y_0) , wenn ein lokales Koordinatensystem (U, Φ) mit $x_0 \in U$ und $\Phi(x_0) = y_0$ existiert, so daß gilt:

$$f(x) = g \circ \Phi(x) \quad \text{für alle } x \in U .$$

Sind x_0 und/oder y_0 aus dem Kontext ersichtlich, werden sie nicht unbedingt angegeben.

Ist Φ darüberhinaus eine Lipschitz-, PC^r -, C^r -Koordinatentransformation, dann bezeichnet man f und g als **lokal Lipschitz-, PC^r -, C^r -äquivalent** in (x_0, y_0) .

1.4.19 Theorem Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Selektion der C^r -Funktionen Φ_1, \dots, Φ_m mit $\Phi(x_0) = x_0$. Sind alle in der Menge

$$\partial\Phi(x_0) = \text{conv}\{D\Phi_i(x_0) \mid i \in \hat{I}(x_0)\}$$

enthaltenen Matrizen regulär, dann ist Φ eine lokale PC^r -Koordinatentransformation. $\partial\Phi(x_0)$ heißt die verallgemeinerte Jacobi-Matrix der Funktion Φ in x_0 . □

1.4.20 Bemerkung Die eigentliche Definition der verallgemeinerten Jacobi-Matrix ist gegeben durch $\partial\Phi(x_0) = \text{conv}\{V \mid V = \lim_{k \rightarrow \infty} D\Phi(x_k), x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_0\}$, stimmt aber unter den Voraussetzungen von Theorem 1.4.19 mit $\text{conv}\{D\Phi_i(x_0) \mid i \in \tilde{I}(x_0)\}$ überein.

1.4.21 Definition Seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

- Eine Funktion \tilde{f} heißt eine **qualitative Approximation** von f in x_0 , wenn \tilde{f} lokal topologisch äquivalent zu f an der Stelle x_0 ist.
- Sind \tilde{f} und f sogar lokal Lipschitz-, PC^r -, C^r -äquivalent, so nennt man \tilde{f} qualitative Lipschitz-, PC^r -, C^r -Approximation in x_0 .
- Ist \tilde{f} zusätzlich Approximation der Ordnung r , dann heißt \tilde{f} eine qualitative (Lipschitz-, PC^r -, C^r -) Approximation **der Ordnung r** .

Aufgrund der Definition des Gradienten einer differenzierbaren Funktion f ist

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

immer eine Approximation erster Ordnung von f . In einem kritischen Punkt x_0 gilt $\nabla f(x_0) = 0$ und folglich $\tilde{f}_{x_0}(x) = f(x_0)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Eine konstante Funktion ist aber nur zu sich selbst topologisch äquivalent. Daher ist (von dem trivialen Fall $f \equiv f(x_0)$ abgesehen) \tilde{f}_{x_0} in diesem Fall keine qualitative Approximation. Die folgende Aussage zeigt, daß \tilde{f}_{x_0} jedoch in allen nicht-kritischen Punkten qualitative Informationen liefert.

1.4.22 Theorem Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein nicht-kritischer Punkt von f , d. h. $\nabla f(x_0) \neq 0$. Dann ist

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

eine qualitative Approximation erster Ordnung von f in x_0 . □

Liegt eine PC^r -Funktion f vor und wird die lineare Funktion $\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$ durch die stetige Selektion linearer Funktionen $f'(x_0; x - x_0)$ (siehe Theorem 1.4.16) ersetzt, so erhält man ein analoges Resultat:

1.4.23 Theorem Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine PC^r -Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein nicht-kritischer Punkt von f . Dann ist

$$\tilde{f}_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0; x - x_0)$$

eine qualitative Approximation erster Ordnung von f in x_0 . □

Um entscheiden zu können, ob es sich bei einem kritischen Punkt einer stückweise differenzierbaren Funktion beispielsweise um ein lokales Minimum handelt, werden noch zusätzliche Informationen benötigt. Da bereits das zweite Morse-Lemma für differenzierbare Funktionen nur eine Aussage für nicht-degenerierte Punkte macht, ist außerdem zu erwarten, daß auch im stückweise differenzierbaren Fall eine entsprechend verallgemeinerte Nicht-Degeneriertheits-Bedingung vorausgesetzt werden muß.

1.4.24 Definition Sei f eine stetige Selektion der C^2 -Funktionen $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ein kritischer Punkt x_0 von f heißt **nicht-degeneriert**, wenn die zwei folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (ND1) Für alle $i \in \hat{I}(x_0)$ sind die Vektoren $\{\nabla f_j(x_0) \mid j \in \hat{I}(x_0) \setminus \{i\}\}$ linear unabhängig.
- (ND2) Die Hesse-Matrix $D_x^2 L(x_0, \hat{\lambda})$ der Funktion $x \mapsto L(x, \hat{\lambda})$ eingeschränkt auf den linearen Unterraum

$$T(x_0) = \{y \mid \nabla f_i(x_0)^T y = 0, i \in \hat{I}(x_0)\}$$

ist regulär, wobei

$$L(x, \lambda) = \sum_{i \in \hat{I}(x_0)} \lambda_i f_i(x)$$

und die reellen Zahlen $\hat{\lambda}_i$ so gewählt sind, daß gilt:

$$\sum_{i \in \hat{I}(x_0)} \hat{\lambda}_i \nabla f_i(x_0) = 0, \quad \sum_{i \in \hat{I}(x_0)} \hat{\lambda}_i = 1, \quad \hat{\lambda}_i \geq 0 \quad \forall i \in \hat{I}(x_0).$$

Die Anzahl der negativen Eigenwerte von $D_x^2 L(x_0, \hat{\lambda})$ eingeschränkt auf $T(x_0)$ wird als **quadratischer Index** des kritischen Punktes x_0 bezeichnet.

1.4.25 Bemerkungen

- Die Bedingung (ND1) ist äquivalent zur folgenden Aussage: Der Ursprung liegt im relativen Inneren des Clarkeschen Subdifferentials $\partial f(x_0)$ und die Vektoren $\nabla f_i(x_0)$, $i \in \hat{I}(x_0)$ sind affin unabhängig.
- Das Konzept der Einschränkung einer symmetrischen Matrix auf einen linearen Unterraum ist in Definition A.1.7 erklärt.
- Unter der Voraussetzung, daß (ND1) erfüllt ist, existieren immer eindeutige $\hat{\lambda}_i$, $i \in \hat{I}(x_0)$, welche die in (ND2) geforderten Eigenschaften erfüllen.

- $T(x_0)$ ist der Tangentialraum an die (in einer Umgebung von x_0 wohldefinierte) differenzierbare Mannigfaltigkeit $M := \{x \mid f(x) = f_i(x) \forall i \in \hat{I}(x_0)\}$ im Punkt x_0 und die Funktion $f|_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist offensichtlich differenzierbar. Daher ist (ND2) gerade äquivalent zur Nicht-Degeneriertheits-Bedingung für differenzierbare Funktionen angewandt auf die Funktion $f|_M$, da $L(\cdot, \hat{\lambda})$ auf M mit dieser übereinstimmt.

Das folgende Theorem aus Kuntz u. Scholtes (1995) zeigt, wie unter der Voraussetzung der Nicht-Degeneriertheit eine qualitative PC^1 -Approximation in einem kritischen Punkt gefunden werden kann.

1.4.26 Theorem Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Selektion der C^2 -Funktionen f_1, \dots, f_m und x_0 ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f . Dann ist

$$f_{x_0} : x \mapsto f(x_0) + f'(x_0; x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T \Pi_{T(x_0)}^T D_x^2 L(x_0, \hat{\lambda}) \Pi_{T(x_0)}(x - x_0)$$

eine qualitative PC^1 -Approximation erster Ordnung von f in x_0 , wobei $\Pi_{T(x_0)}$ die der orthogonalen Projektion auf den linearen Unterraum $T(x_0)$ entsprechende Matrix ist. \square

Dieses Resultat ist eine Erweiterung des zweiten Morse-Lemma auf stückweise differenzierbare Funktionen. Denn ist f selbst eine C^2 -Funktion, wird f_{x_0} gerade zur klassischen qualitativen Approximation erster Ordnung.

Das zweite Morse-Lemma für stückweise differenzierbare Funktionen wurde in etwas anderer Form bereits in Jongen u. Pallaschke (1988) bewiesen. Das besondere des vorangegangenen Theorems ist allerdings der Nachweis der PC^1 -Äquivalenz im Gegensatz zur topologischen Äquivalenz bei Jongen u. Pallaschke (1988):

1.4.27 Theorem (Nicht-differenzierbare Version des zweiten Morse-Lemmas)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Selektion der C^2 -Funktionen f_1, \dots, f_m . Dann gilt:

- Ist x_0 ein nicht-kritischer Punkt von f , dann sind f und $y \mapsto f(x_0) + y_1$ lokal topologisch äquivalent.
- Ist x_0 ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f , dann ist f lokal topologisch äquivalent zu einer Funktion der Form

$$y \mapsto f(x_0) + l(y_1, \dots, y_k) - \sum_{i=k+1}^{k+\mu} y_i^2 + \sum_{j=k+\mu+1}^n y_j^2, \quad (1.1)$$

wobei $k = |\hat{I}(x_0)| - 1$, μ der quadratische Index von f im Punkt x_0 und

$$l \in CS(y_1, \dots, y_k, -\sum_{i=1}^k y_i) \text{ ist.}$$

□

Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit die PC^1 -Äquivalenz nicht von Bedeutung ist und die Formulierung mittels der Standardfunktionen $y_i, -y_i^2, y_i^2$ und $-\sum_{i=1}^k y_i$ häufig nützlich ist, wird im folgenden immer auf diese ursprüngliche Form des zweiten Morse-Lemma für stückweise differenzierbare Funktionen verwiesen.

Die durch (1.1) gegebene Gestalt unterscheidet sich von derjenigen im differenzierbaren Fall nur durch den Term $l(y_1, \dots, y_k)$. Von dieser Funktion l weiß man, daß es sich um eine stetige Selektion der $(k+1)$ linearen Funktion $y_1, \dots, y_k, -\sum_{i=1}^k y_i$ handelt. Diese speziellen linearen Funktionen bezeichnen wir als die (linearen) Standard-Selektionsfunktionen.

Durch das zweite Morse-Lemma wird eine stückweise differenzierbare Funktion anschaulich gesprochen in zwei Bestandteile zerlegt:

- Ein differenzierbarer Anteil, der durch den Ausdruck

$$-\sum_{i=k+1}^{k+\mu} y_i^2 + \sum_{j=k+\mu+1}^n y_j^2$$

repräsentiert wird.

- Ein nicht-differenzierbarer Anteil, der durch die stetige Selektion $(k+1)$ linearer Funktionen l verkörpert wird.

Der differenzierbare Anteil ist aus der klassischen Morse-Theorie bereits hinreichend bekannt. Um die Struktur stückweise differenzierbarer Funktionen in der Umgebung von nicht-degenerierten kritischen Punkten zu verstehen, ist es also in erster Linie notwendig, stetige Selektionen linearer Funktionen näher zu untersuchen.

Es folgt ein Beispiel zur Anwendung des zweiten Morse-Lemma, welches auch die Aufteilung in differenzierbaren und nicht-differenzierbaren Anteil verdeutlicht. Es basiert auf einem Beispiel in Kuntz (1996), Seite 34f.

1.4.28 Beispiel Gegeben sei die stückweise differenzierbare Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \max\{x - 2y^2, -x + y^2\} = \max\{f_1(x, y), f_2(x, y)\}$$

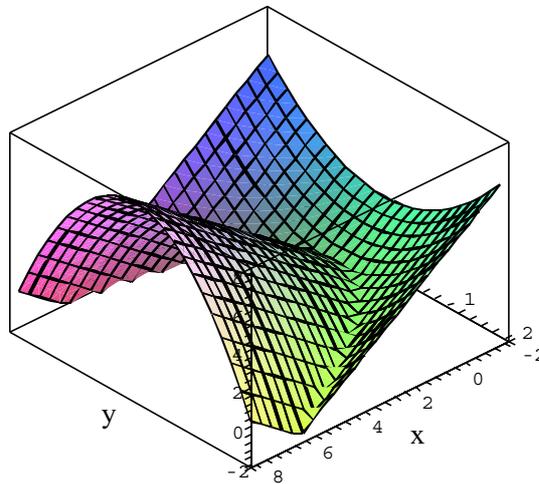


Abbildung 1.3: Graph der Funktion f

Nach dem Graph der Funktion zu urteilen, könnte der Ursprung kritischer Punkt von f sein. Durch Berechnen der Gradienten der Selektionsfunktionen im Ursprung und Bilden der konvexen Hülle aus diesen erhält man das Clarksche Subdifferential:

$$\partial f(0, 0) = \text{conv} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \ni 0.$$

Folglich ist $(0, 0)$ kritischer Punkt von f . Durch Überprüfen der Bedingungen (ND1) und (ND2) soll nun festgestellt werden, ob es sich um einen nicht-degenerierten kritischen Punkt handelt.

(ND1): Die Bedingung ist offensichtlich erfüllt, da die beiden Gradienten der Selektionsfunktionen ungleich dem Nullvektor sind.

(ND2): Zunächst werden die reellen Zahlen $\hat{\lambda}_i \geq 0$ bestimmt:

$$\hat{\lambda}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \hat{\lambda}_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2 = \frac{1}{2}.$$

Nun bestimmt man die Menge aller Punkte, in denen die Selektionsfunktionen übereinstimmen:

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x, y) = f_2(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{3}{2}y^2\}.$$

Der Tangentialraum an M im Punkt $(0, 0)$ ist offenbar:

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}.$$

Abbildung 1.4 zeigt links die Mengen M und T im \mathbb{R}^2 und rechts die Menge $\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in M\}$ mit der Menge T , wobei hier die Richtung der z -Achse vertauscht wurde.

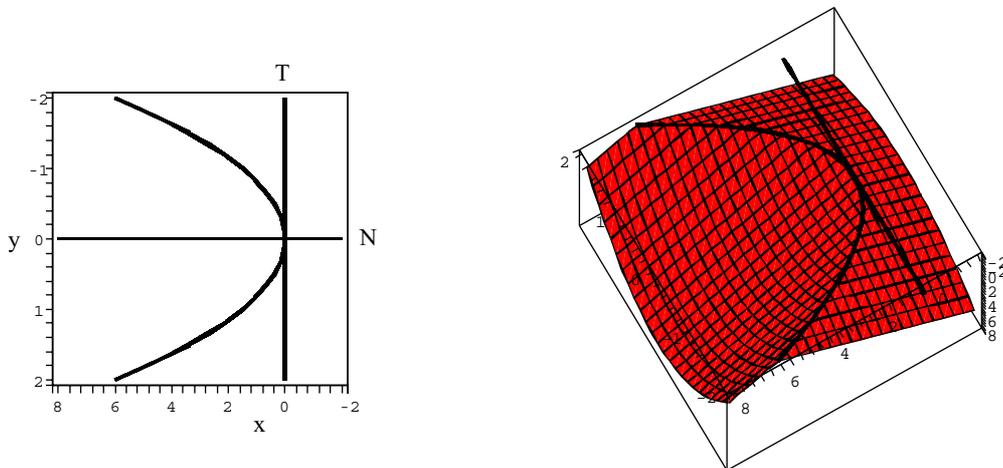


Abbildung 1.4: Mannigfaltigkeit M und Tangentialraum T

Die Funktion L mit festen $\hat{\lambda}_i$ ergibt sich zu:

$$L(x, y) = \hat{\lambda}_1 f_1(x, y) + \hat{\lambda}_2 f_2(x, y) = -\frac{1}{2}y^2.$$

L ist eine differenzierbare Funktion und stimmt auf M mit f überein. Weiter ist:

$$D^2L(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^2L(0, 0)|_T = -1.$$

$D^2L(0, 0)$ ist negativ definit auf T . Somit ist Bedingung (ND2) erfüllt und der quadratische Index ergibt sich zu $\mu = 1$.

Insgesamt erhält man: Der Punkt $(0, 0)$ ist ein nicht-degenerierter kritischer Punkt der Funktion f mit quadratischem Index 1. Anwendung des zweiten Morse-Lemma (Theorem 1.4.27) liefert:

f ist im Punkt $(0, 0)$ lokal topologisch äquivalent zu der Funktion

$$g(x, y) = l(x) - y^2,$$

wobei $l \in \text{CS}(x, -x)$.

Man erkennt leicht, daß für l nur die Funktion $l(x) = |x| = \max\{x, -x\}$ in Frage kommt und so ergibt sich:

$$g(x, y) = \max\{x, -x\} - y^2.$$

Abbildung 1.5 stellt die Graphen der Funktionen f und g abschließend gegenüber.

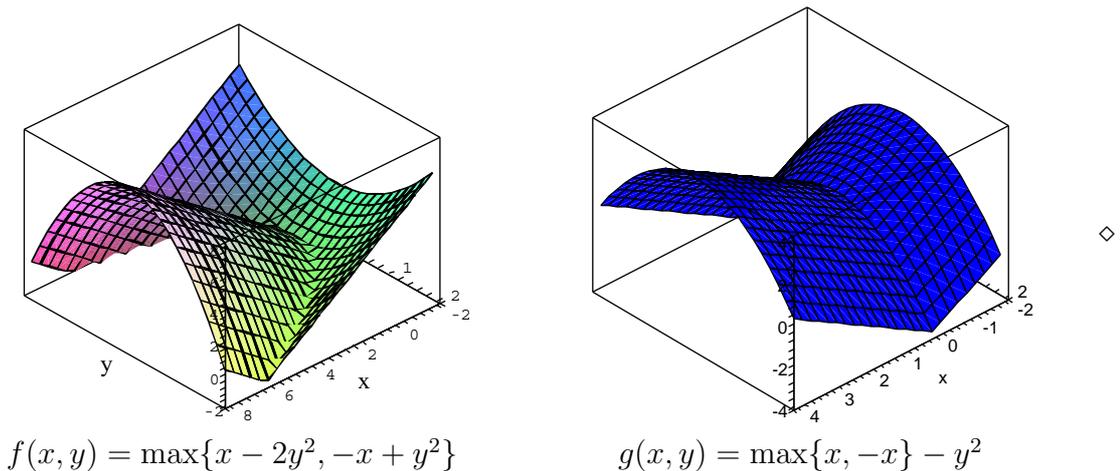


Abbildung 1.5: Die lokal topologisch äquivalenten Funktionen f und g

1.5 Generizitäts-Eigenschaft

Welcher Nutzen aus dem zweiten Morse-Lemma (sowohl im differenzierbaren als auch im nicht-differenzierbaren Fall) gezogen werden kann, hängt vor allem von folgender Frage ab, die bis zu diesem Punkt noch nicht angesprochen wurde: Wählt man zufällig einen kritischen Punkt einer zufällig bestimmten, den Voraussetzungen entsprechenden Funktion aus, liegt dann im allgemeinen ein nicht-degenerierter kritischer Punkt vor?

Diese Frage kann wie folgt mit „Ja.“ beantwortet werden. Es werde der Funktionenraum $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ betrachtet und mit der sog. starken C_s^2 -Topologie versehen (für eine Definition der C_s^2 -Topologie siehe z. B. Guddat, Guerra Vazquez, u. Jongen (1990)). Die C_s^2 -Topologie für den Funktionenraum $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m$ sei die Produkttopologie von

$$\underbrace{C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \cdots \times C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}_{m\text{-mal}},$$

wobei jeder Faktor mit der C_s^2 -Topologie versehen ist.

Von Interesse sind nun die Eigenschaften der folgenden Menge:

$$F^* = \left\{ (f_1, \dots, f_m) \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m \left| \begin{array}{l} \text{jeder kritische Punkt jeder stetigen} \\ \text{Selektion der Funktionen} \\ f_1, \dots, f_m \text{ ist nicht-degeneriert} \end{array} \right. \right\}.$$

Das folgende Theorem gibt eine Antwort auf die oben gestellte Frage (für Details siehe Jongen u. Pallaschke 1988, Seite 347)

1.5.1 Theorem *Die Menge F^* ist C_s^2 -offen und C_s^2 -dicht in $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m$.* □

Grob gesagt bedeutet dies folgendes: Ist f eine stetige Selektion von m C^2 -Funktionen, deren kritische Punkte alle nicht-degeneriert sind, dann existiert eine Umgebung von f (in $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m$ versehen mit der C_s^2 -Topologie), deren Elemente alle ebenfalls diese Bedingung erfüllen. Ist dagegen x_0 ein degenerierter kritischer Punkt einer stetigen Selektion f , dann findet man in jeder Umgebung von f eine Funktion deren kritischen Punkte alle nicht-degeneriert sind. Außerdem weiß man, daß die Nicht-Degeneriertheit für alle kritischen Punkte einer sehr mächtigen Klasse von Funktionen erfüllt ist.

Zusammenfassend erhält man: Die Nicht-Degeneriertheit ist stabil und sie stellt den **generischen Fall** dar (d. h. sie ist im allgemeinen erfüllt).

2 Stetige Selektionen linearer Funktionen

In Abschnitt 1.4 haben wir gesehen, daß die stetigen Selektionen linearer Funktionen den Teil der Struktur stückweise differenzierbarer Funktionen beschreiben, welcher diese von den differenzierbaren Funktionen unterscheidet. Als zweites Morse-Lemma für stückweise differenzierbare Funktionen liefert Theorem 1.4.27 eine Zerlegung solcher Funktionen in zwei Komponenten. Eine differenzierbare Komponente, gegeben durch den Ausdruck $-\sum_{i=k+1}^{k+\mu} y_i^2 + \sum_{j=k+\mu+1}^n y_j^2$, die durch den quadratischen Index μ vollständig charakterisiert ist, und eine nicht-differenzierbare Komponente l , von der man weiß, daß sie eine stetige Selektion der $(k+1)$ linearen Funktionen y_1, \dots, y_k und $-\sum_{i=1}^k y_i$ ist. Ob und wie diese zweite Komponente bei gegebenem k durch einen einfachen Index oder ähnliches charakterisiert werden kann, ist nicht offensichtlich. Dieser Frage wird daher im vorliegenden Kapitel nachgegangen.

Einen wichtigen Beitrag zu deren Beantwortung lieferten Bartels, Kuntz und Scholtes in der Arbeit Bartels u. a. (1995). Dort gelang es den Autoren für $k \leq 3$ eine vollständige Klassifikation aller stetigen Selektionen der oben angegebenen $(k+1)$ linearen Funktionen anzugeben. Dieses Ergebnis sowie einige wichtige Eigenschaften stetiger Selektionen linearer Funktionen werden im folgenden in Anlehnung an Bartels u. a. (1995) präsentiert. Danach folgt der wichtigste Abschnitt der vorliegenden Arbeit: die Herleitung einer vollständigen Klassifikation für den Fall $k = 4$. Diese war bisher unbekannt. Das Kapitel endet mit einem kurzen Ausblick auf den Fall $k = 5$ und einer Vermutung zur Klassifikation bei beliebigem k .

2.1 Normalformen

Führt man die Operationen „min“ und „max“ auf einer Menge $\{f_1, \dots, f_m\}$ reellwertiger Funktionen ein, so erhält man einen distributiven Verband (siehe Grätzer 1971). Daher läßt sich jede durch endlich viele min- und max-Operationen aus f_1, \dots, f_m erzeugte

Funktion in die folgenden zwei Normalformen transformieren:

$$\min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} f_j \quad (\text{min-max Normalform}),$$

$$\max_{i \in \{1, \dots, r\}} \min_{j \in M_i} f_j \quad (\text{max-min Normalform}).$$

Dabei gilt $N_i \not\subseteq N_j$ für $i \neq j$ und $M_i \not\subseteq M_j$ für $i \neq j$. Alle auf diese Art darstellbaren Funktionen heißen kurz: Funktionen vom max-min Typ.

Handelt es sich bei f_1, \dots, f_m um lineare Funktionen, so ist unmittelbar klar, daß jedes Element des entstehenden distributiven Verbandes eine stetige Selektion linearer Funktionen ist. Von grundlegender Bedeutung ist nun das folgende Theorem, welches besagt, daß umgekehrt jede stetige Selektion linearer Funktionen durch endlich viele min- und max-Operationen aus den Selektionsfunktionen erzeugt und folglich in den obigen Normalformen dargestellt werden kann. Für einen Beweis siehe Bartels u. a. (1995, Theorem 2.2).

2.1.1 Theorem Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ und $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_m^T x)$. Dann existieren

- (a) ein endliches System von Indextmengen $\{N_1, \dots, N_s\}$ mit $N_i \subseteq \{1, \dots, m\}$ und $N_i \not\subseteq N_j$ für $i \neq j$, so daß

$$f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x \quad (\text{min-max Normalform}),$$

- (b) und ein endliches System von Indextmengen $\{M_1, \dots, M_r\}$ mit $M_i \subseteq \{1, \dots, m\}$ und $M_i \not\subseteq M_j$ für $i \neq j$, so daß

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \min_{j \in M_i} a_j^T x \quad (\text{max-min Normalform}).$$

Sind darüberhinaus die Vektoren a_1, \dots, a_m affin unabhängig, so sind beide Normalformen eindeutig bestimmt. □

Aufgrund von Theorem 1.4.27 sind besonders stetige Selektionen der $k + 1$ linearen Funktionen $y_1, \dots, y_k, -\sum_{i=1}^k y_i$ interessant. Diese sind durch ihre Gradienten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben, welche offensichtlich affin unabhängig sind. Daher kann in diesem Fall immer von der Existenz eindeutiger Normalformen ausgegangen werden.

Unter Zuhilfenahme eines Teils der beim zweiten Morse-Lemma für stückweise differenzierbare Funktionen verwendeten Beweistechniken läßt sich auch das folgende Korollar beweisen (für Details siehe Bartels u. a. (1995, Corollary 2.3)).

2.1.2 Korollar *Sei f eine stetige Selektion der C^1 -Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Wenn die Gradienten der in $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ aktiven Funktionen*

$$\nabla f_i(\tilde{x}), i \in I(\tilde{x})$$

affin unabhängig sind, dann läßt sich f in einer Umgebung von \tilde{x} als Funktion vom max-min Typ aus den $f_i, i \in I(\tilde{x})$ darstellen. □

Mit Hilfe der Gesetze für distributive Verbände kann bei Bedarf die min-max Normalform in die max-min Normalform umgerechnet werden und umgekehrt. Insbesondere die Gültigkeit der folgenden Gleichungen hilft beim Bestimmen der Normalformen:

$$\begin{aligned} \max\{f_1, \min\{f_1, f_2\}\} &= f_1 \\ \min\{f_1, \max\{f_1, f_2\}\} &= f_1 \\ \max\{f_1, \min\{f_2, f_3\}\} &= \min\{\max\{f_1, f_2\}, \max\{f_1, f_3\}\} \\ \min\{f_1, \max\{f_2, f_3\}\} &= \max\{\min\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_3\}\} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Darstellung in Normalform ist die folgende Aussage relativ leicht zu beweisen.

2.1.3 Korollar *Jede stetige Selektion linearer Funktionen ist als Differenz von zwei konvexen stetigen Selektionen linearer Funktionen darstellbar.*

BEWEIS Sei f eine stetige Selektion linearer Funktionen. Nach Theorem 2.1.1 kann f in max-min Normalform geschrieben werden:

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \min_{j \in M_i} a_j^T x .$$

Dies läßt sich umformen zu

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} - \max_{j \in M_i} -a_j^T x = - \min_{i \in \{1, \dots, r\}} \max_{j \in M_i} -a_j^T x .$$

Nun benutzt man $\min\{y_1, \dots, y_m\} = \sum_{k=1}^m y_k - \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m y_k \right\}$ und erhält schließlich

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^r \max_{j \in M_k} -a_j^T x \right\} - \sum_{k=1}^r \max_{j \in M_k} -a_j^T x .$$

Da man aus linearen Funktionen durch beliebige endliche Anwendung der Operatoren „+“ und „max“ immer konvexe stetige Selektionen linearer Funktionen erhält, ist damit bereits die gesuchte Darstellung gefunden. \square

Aufgrund dieses Resultats kann auch jeder stetigen Selektion linearer Funktionen ein minimales Paar kompakter konvexer Mengen zugeordnet werden. Eine Klassifikation der stetigen Selektionen von vier linearen Funktionen auf Basis dieser minimalen Paare wurde in Grzybowski u. a. (2000) durchgeführt (siehe hierzu auch Pallaschke u. Urbański (2002, Abschnitt 12.2)).

2.1.4 Bemerkung Theorem 2.1.1 bleibt auch gültig, wenn von affinen anstatt linearen Selektionsfunktionen ausgegangen wird. Ein Beweis findet sich in Bartels u. a. (1995, Corollary 2.1).

2.2 Anzahl stetiger Selektionen

Geht man von affin unabhängigen Vektoren $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ aus, so ist nach Theorem 2.1.1 die min-max Normalform von stetigen Selektionen der linearen Funktionen $a_1^T x, \dots, a_m^T x$ eindeutig bestimmt. Daher kann die Anzahl aller verschiedenen stetigen Selektionen, die sich aus $a_1^T x, \dots, a_m^T x$ bilden lassen, bestimmt werden, indem man alle möglichen min-max Normalformen zählt. Dies wurde sowohl in Bartels u. a. (1995) als auch im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe eines selbst erstellten Computerprogramms durchgeführt und ergibt die Werte in Tabelle 2.1 on the next page.

Dabei zeigt die erste Spalte die Anzahl der affin unabhängigen linearen Selektionsfunktionen, die Spalte CS₁ die Anzahl aller möglichen stetigen Selektionen daraus und die Spalte CS₂ schließlich die Anzahl nur solcher stetiger Selektionen, bei denen alle m Selektionsfunktionen wesentlich aktiv sind.

Das auffälligste an diesen Ergebnissen ist, daß es schon bei einer relativ geringen Anzahl von linearen Selektionsfunktionen eine sehr große Menge verschiedener stetiger Selektionen gibt. Um diese zu klassifizieren, ist daher spätestens für $m \geq 5$ ein einfaches

m	$CS_1(m)$	$CS_2(m)$
1	1	1
2	4	2
3	18	9
4	166	114
5	7,579	6,894
6	7,828,352	7,785,062

Tabelle 2.1: Anzahl verschiedener stetiger Selektionen von m affin unabhängigen linearen Funktionen

Durchsehen aller stetigen Selektionen nicht mehr praktikabel. Vielmehr muß eine systematische Vorgehensweise gefunden werden.

Das zweite Morse-Lemma liefert zu jeder Funktion, die dessen Voraussetzungen erfüllt, eine zugehörige Funktion von besonders einfacher Gestalt, in welche sie lokal durch Anwendung einer Koordinatentransformation überführt werden kann. Dabei sind die stetigen Selektionen linearer Funktionen ein Bestandteil dieser besonders einfachen Gestalt. Daher ist es sinnvoll, die stetigen Selektionen linearer Funktionen daraufhin zu untersuchen, welche von ihnen durch eine Koordinatentransformation ineinander überführt werden können. Auf das Attribut „lokal“ kann dabei aus folgendem Grund verzichtet werden: Zunächst ist jede stetige Selektion linearer Funktionen positiv homogen¹⁾. Sind $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Selektionen linearer Funktionen, U und V offene Umgebungen des Ursprungs und $\phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus mit $\phi(0) = 0$ und $f_1 \circ \phi^{-1}(y) = f_2(y)$ für alle $y \in V$, so läßt sich ϕ aufgrund der positiven Homogenität von f_1 und f_2 immer zu einem Homöomorphismus $\tilde{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit denselben Eigenschaften erweitern. In dieser Situation sagen wir, f_1 und f_2 sind **topologisch äquivalent** oder auch f_1 und f_2 sind vom gleichen topologischen Typ. Die Relation „topologisch äquivalent“ ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation.

Das Ziel im folgenden wird es sein, ein einfaches Kriterium dafür zu finden, wann zwei gegebene stetige Selektionen linearer Funktionen topologisch äquivalent sind, sowie die Anzahl verschiedener topologischer Typen zu bestimmen.

¹⁾ $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt positiv homogen, wenn $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda > 0$.

Stellt man eine stetige Selektion linearer Funktionen in ihrer min-max Normalform dar, so sieht man unmittelbar, daß die positive Homogenität erfüllt ist.

2.3 Abstiegs- und Anstiegskegel

Zu einer gegebenen stetigen Selektion werden die zugehörigen Abstiegs- und Anstiegskegel wie folgt definiert.

2.3.1 Definition Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ positiv homogen. Dann heißt $K_-(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}$ **Abstiegskegel**²⁾ und $K_+(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$ **Anstiegskegel**²⁾ der Funktion f .

Wie die folgenden Ergebnisse aus Bartels u. a. (1995) zeigen, enthalten diese beiden Kegel alle notwendigen Informationen zur Bestimmung des topologischen Typs der zugrundeliegenden stetigen Selektion.

2.3.2 Theorem Sei $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{m_f}^T x)$ und $g \in \text{CS}(b_1^T x, \dots, b_{m_g}^T x)$. Falls

$$K_-(f) = K_-(g) \quad \text{und} \quad K_+(f) = K_+(g) ,$$

dann sind f und g topologisch äquivalent.

Ein Beweis findet sich in Bartels u. a. (1995, S. 394ff.).

2.3.3 Korollar Existiert ein stückweise linearer Homöomorphismus $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\phi(K_-(f)) = K_-(g) \quad \text{und} \quad \phi(K_+(f)) = K_+(g) ,$$

dann sind f und g topologisch äquivalent.

BEWEIS Wie bei Theorem 2.3.2 setzen wir voraus, daß $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{m_f}^T x)$ und $g \in \text{CS}(b_1^T x, \dots, b_{m_g}^T x)$. Außerdem sei ϕ eine stetige Selektion der linearen Funktionen $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, m_\phi\}$. Offensichtlich ist dann $g \circ \phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Selektion der linearen Funktionen $\{x \mapsto b_i^T \phi_j(x) \mid i \in \{1, \dots, m_g\}, j \in \{1, \dots, m_\phi\}\}$. Nun ist

$$K_-(g \circ \phi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(\phi(x)) < 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \in K_-(g)\} = K_-(f) ,$$

wobei die letzte Gleichheit aus $\phi(K_-(f)) = K_-(g)$ folgt. Analog ergibt sich

$$K_+(g \circ \phi) = K_+(f) ,$$

²⁾Der Begriff *Kegel* ist hier und im weiteren Verlauf dieses Kapitels im folgenden schwachen Sinne zu verstehen: In einem Kegel muß mit jedem Punkt x auch $\lambda \cdot x$ für alle $\lambda > 0$ enthalten sein. Insbesondere muß der Ursprung nicht unbedingt in einem Kegel enthalten sein, wohl aber in dessen abgeschlossener Hülle. Siehe auch Abschnitt A.2.

und mit Theorem 2.3.2 folgt, daß $g \circ \phi$ und f topologisch äquivalent sind. Weiterhin sind g und $g \circ \phi$ topologisch äquivalent, und so folgt insgesamt die topologische Äquivalenz von f und g . □

Die Voraussetzung, daß der Homöomorphismus ϕ stückweise linear sein muß, ist in diesem Beweis zwingend notwendig, damit die Funktion $g \circ \phi$ ebenfalls stückweise linear ist und somit Theorem 2.3.2 angewendet werden kann.

In Bartels u. a. (1995) wird die Vermutung geäußert, daß die Aussage von Korollar 2.3.3 auch gültig ist, wenn von ϕ nur vorausgesetzt wird, daß es sich um einen positiv homogenen Homöomorphismus handelt. Dies konnte allerdings bis jetzt noch nicht bewiesen werden.

Liegt eine Funktion $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_m^T x)$ vor derart, daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, m\}$ und der Ursprung ein kritischer Punkt ist, welcher die Regularitätsbedingung (ND1) erfüllt, dann folgt unmittelbar, daß $a_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Daher hat die Menge

$$K_0(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

keine inneren Punkte. Später wird außerdem gezeigt, daß $K_0(f) = \partial K_-(f) = \partial K_+(f)$ gilt (siehe Lemma 2.6.3). Ist nur der Abstiegskegel $K_-(f)$ bekannt, so erhält man den Anstiegskegel folglich durch die Beziehung $K_+(f) = \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}(K_-(f))$. Liegen solche Funktionen vor, müssen deshalb in Theorem 2.3.2 und Korollar 2.3.3 die Voraussetzungen nur noch für die Abstiegskegel $K_-(\cdot)$ gefordert werden.

Ist f eine stetige Selektion linearer Funktionen, und $\tilde{x} = 0$ ein nicht-kritischer Punkt von f , dann sagt das zweite Morse-Lemma (Theorem 1.4.27), daß f topologisch äquivalent zu einer linearen Funktion y_1 ist³⁾, da $f(0) = 0$. Zur Lösung der Aufgabe, alle verschiedenen topologischen Typen stetiger Selektionen linearer Funktionen zu bestimmen, sind daher solche Funktionen, bei denen $\tilde{x} = 0$ nicht-kritischer Punkt ist, von keinem weiteren Interesse. Es wird deshalb von stetigen Selektionen linearer Funktionen immer verlangt, daß der Ursprung kritischer Punkt ist.

Nach Theorem 1.4.27 ist eine stückweise C^2 -Funktion in der Umgebung eines nicht-degenerierten kritischen Punktes \tilde{x} lokal topologisch äquivalent zu einer Funktion der Form

$$f(\tilde{x}) + l(y_1, \dots, y_k) - \sum_{i=k+1}^{k+\mu} y_i^2 + \sum_{j=k+\mu+1}^n y_j^2,$$

³⁾Auf das Attribut „lokal“ kann aufgrund der positiven Homogenität von f verzichtet werden. Siehe auch Erläuterungen auf Seite 34.

wobei $l \in CS(y_1, \dots, y_k, -\sum_{i=1}^k y_i)$. Verlangt man von solch einer Funktion l , daß der Ursprung kritischer Punkt ist, impliziert dies, daß alle $k+1$ Selektionsfunktionen wesentlich aktiv sind⁴). Dieser kritische Punkt erfüllt dann auch immer die Regularitätsbedingung

(ND1), was an den zugehörigen Gradienten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$ leicht ablesbar

ist. Da das zweite Morse-Lemma bzw. die Funktionen $l \in CS(y_1, \dots, y_k, -\sum_{i=1}^k y_i)$ Ausgangspunkt unserer Bemühungen sind, wird die Bedingung (ND1) im folgenden auch bei Verwendung anderer Selektionsfunktionen immer vorausgesetzt. Dies erscheint auch aus dem Grunde sinnvoll, da nach Theorem 1.5.1 die Bedingung (ND1) im generischen Fall immer erfüllt ist. Das nächste Theorem liefert unter diesen Voraussetzungen eine weitere technische Vereinfachung.

2.3.4 Theorem Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in CS(a_1^T x, \dots, a_m^T x)$, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, m\}$ und der Ursprung ein kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt.

Dann ist f vollständig beschrieben durch sein Verhalten auf dem $(m-1)$ -dimensionalen Unterraum U , der von den Vektoren a_1, \dots, a_m aufgespannt wird.

BEWEIS Für alle $v \in U^\perp$ gilt: $a_i^T v = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$.

$$\Rightarrow f(u+v) = f(u) \quad \forall u \in U, \forall v \in U^\perp \quad \square$$

Somit kann o. B. d. A. immer $m = n + 1$ bzw. $n = m - 1$ vorausgesetzt werden. Ist die Voraussetzung $\hat{I}(0) = \{1, \dots, m\}$ nicht erfüllt, dann ist mindestens eine Selektionsfunktion überflüssig. Somit läßt sich durch Streichen der überflüssigen Funktionen die Anzahl der Selektionsfunktionen m und folglich auch die Dimension n so weit verringern, bis doch alle Selektionsfunktionen wesentlich aktiv sind. Daher kann auch $\hat{I}(0) = \{1, \dots, m\}$ o. B. d. A. immer vorausgesetzt werden.

Zusammengefaßt wollen wir **von jetzt an folgendes annehmen**:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f \in CS(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x) \tag{2.1}$$

$$\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\} \tag{2.2}$$

$$0 \text{ ist kritischer Punkt von } f \text{ und erfüllt (ND1)}. \tag{2.3}$$

Diese Voraussetzungen implizieren immer:

$$a_1, \dots, a_{n+1} \text{ sind affin unabhängig.} \tag{2.4}$$

⁴Dies folgt aus der Formel für das Clarkesche Subdifferential von stetigen Selektionen (siehe Theorem 1.4.16)

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels erfüllen daher alle stetigen Selektionen linearer Funktionen die Annahmen (2.1) bis (2.4), es sei denn, es wird ausdrücklich etwas anderes vorausgesetzt.

2.4 Topologische Klassifikation für $n \leq 3$

Aufgrund der Aussagen des vorherigen Abschnitts ist es theoretisch möglich, alleine anhand des Abstiegskegels einer stetigen Selektion linearer Funktionen, welche den Ursprung als kritischen Punkt hat und (ND1) erfüllt, deren topologischen Typ zu bestimmen. Versucht man nun, bestimmte Attribute des Abstiegskegels zu finden, welche den topologischen Typ der zugrundeliegenden Funktion bestimmen, so müssen diese bei Anwendung eines Homöomorphismus unverändert bleiben, da sich dabei der topologische Typ nicht verändert. Attribute mit dieser Eigenschaft nennt man **topologische Invarianten**. In Bartels u. a. (1995) gelingt es den Autoren in den Theoremen 3.2 und 3.3 mit Hilfe solch einer topologischen Invariante, nämlich der Anzahl der Zusammenhangskomponenten eines topologischen Raumes, eine einfache Methode zur Bestimmung des topologischen Typs von stetigen Selektionen linearer Funktionen zu finden, vorausgesetzt die Anzahl der Selektionsfunktionen ist kleiner oder gleich vier, was nach (2.1) gleichbedeutend ist mit $n \leq 3$.

2.4.1 Theorem Sei $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 ein kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Für $n \leq 3$ ist der topologische Typ von f durch das Paar ganzer Zahlen (p, q) eindeutig bestimmt, wobei

$$\begin{aligned} p &:= \#\{\text{Zusammenhangskomponenten von } K_-(f)\}^5), \\ q &:= \#\{\text{Zusammenhangskomponenten von } K_+(f)\}. \end{aligned}$$

Tabelle 2.2 on the following page zeigt die möglichen (p, q) -Kombinationen sowie die daraus resultierende Anzahl topologischer Typen für jede Dimension $n \leq 3$. □

2.4.2 Bemerkungen

- Scheinbar im Widerspruch zu vorhergehenden Erläuterungen taucht in der Definition des Zahlenpaares (p, q) nicht nur der Abstiegskegel $K_-(f)$ sondern auch der Anstiegskegel $K_+(f)$ auf. Tatsächlich aber könnte ohne Verwendung von $K_+(f)$ auch

$$q := \#\{\text{Zusammenhangskomponenten von } \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}(K_-(f))\}$$

⁵⁾Ist A eine endliche Menge so bezeichne $\#A$ die Anzahl der Elemente von A .

Dimension	mögliche (p, q)-Kombinationen	# topologischer Typen	$CS_2(n + 1)$
$n = 1$	(0, 1); (1, 0)	2	2
$n = 2$	(0, 1); (1, 0); (2, 2); (3, 3)	4	9
$n = 3$	(0, 1); (1, 0); (1, 1); (2, 2) (1, 2); (1, 3); (1, 4) (2, 1); (3, 1); (4, 1)	10	114

Tabelle 2.2: Topologische Typen von stetigen Selektionen $n + 1$ linearer Funktionen

geschrieben. Die Schreibweise mit $K_+(f)$ wird lediglich der besseren Anschaulichkeit und Lesbarkeit wegen verwendet.

- Genau genommen handelt es sich bei dem Zahlenpaar (p, q) um eine topologische Invariante des Raumpaars $(\mathbb{R}^n, K_-(f))$, welche bei Anwendung eines Homöomorphismus $\phi : (\mathbb{R}^n, K_-(f)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, K_-(g))$ unverändert bleibt (siehe hierzu auch Definition A.3.5).

Das später folgende Beispiel 2.5.8 wird zeigen, daß Theorem 2.4.1 für $n \geq 4$ nicht gilt.

Einer der Typen in Tabelle 2.2 stellt sich bei näherer Betrachtung als besonders interessant heraus, nämlich der Typ $(p, q) = (1, 1)$. Aus der Definition von p und q folgt, daß eine Funktion diesen Typs sowohl einen zusammenhängenden Ab- als auch einen zusammenhängenden Anstiegskegel hat. Diese Konstellation tritt erstmals in der Dimension $n = 3$ auf. Der Beweis von Theorem 2.4.1 liefert dazu das folgende überraschende Korollar.

2.4.3 Korollar Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen von Theorem 2.4.1 erfüllt und für die $(p, q) = (1, 1)$ gilt. Dann ist f linearisierbar, d. h. topologisch äquivalent zu einer linearen Funktion. \square

2.4.4 Beispiel Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \max\{\min\{x_1, x_2\}, \min\{x_2, x_3\}, \min\{x_3, -x_1 - x_2 - x_3\}\} \\ &= \min\{\max\{x_1, x_3\}, \max\{x_2, x_3\}, \max\{x_2, -x_1 - x_2 - x_3\}\}. \end{aligned}$$

f ist linearisierbar, obwohl der Ursprung ein nicht-degenerierter kritischer Punkt von f ist. \diamond

Das Auftreten solcher Funktionen ist ein bemerkenswerter Unterschied zum differenzierbaren Fall. Dort war nämlich jeder nicht-degenerierte kritische Punkt entweder ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt. Wie leicht zu sehen ist, bleibt die Eigenschaft eines Punktes, Maximum, Minimum oder Sattelpunkt einer Funktion zu sein, bei Anwendung einer lokalen Koordinatentransformation immer erhalten. Diese wünschenswerte Invarianz trifft aber, wie Beispiel 2.4.4 zeigt, auf den Begriff des nicht-degenerierten kritischen Punktes nicht zu. Denn bei der Funktion f dieses Beispiels ist der Ursprung nicht-degenerierter kritischer Punkt. Nach Korollar 2.4.3 ist f jedoch topologisch äquivalent zu einer linearen Funktion, welche offensichtlich nicht identisch Null ist, bei welcher also der Ursprung überhaupt kein kritischer Punkt ist. Daraus folgt außerdem, daß der Ursprung für die Funktion f weder Maximum, Minimum noch Sattelpunkt sein kann.

Aus theoretischer Sicht ist dies ein wenig unbefriedigend und deutet auf eine Schwäche des hier zur Definition kritischer Punkte verwendeten Clarkeschen Subdifferentials hin, zumindest bezüglich der vorliegenden Anwendung. Ein interessantes Gebiet für zukünftige Forschungstätigkeiten wird es daher sein, alternative Ansätze zur Definition kritischer Punkte im nicht-differenzierbaren Fall hinsichtlich ihrer Eignung zur Klassifikation von Funktionen zu untersuchen bzw. zu entwickeln.

2.5 Der Homotopietyp des Abstiegskegels

Im folgenden soll von den Ergebnissen in Abschnitt 2.4 ausgehend versucht werden, topologische Invarianten zu finden, welche den stetigen Selektionen linearer Funktionen zugeordnet werden können und den topologischen Typ solch einer Funktion eindeutig bestimmen. Wie bereits erläutert bietet es sich dazu an, den Abstiegskegel näher zu untersuchen.

Gegeben sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ mit $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$, so daß 0 ein kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Nach Theorem 2.1.1 existieren dann nicht-leere Teilmengen N_1, \dots, N_s von $\{1, \dots, n+1\}$ und es gilt:

$$f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x$$

$$i \neq j \Rightarrow N_i \not\subseteq N_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, s\}.$$

Der Abstiegskegel von f wurde wie folgt definiert:

$$K_-(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\}.$$

Basierend auf den Indexmengen N_i werden jetzt die folgenden Mengen betrachtet:

$$K_-^i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x < 0, j \in N_i\} \quad , i = 1, \dots, s .$$

Einige wichtige Eigenschaften dieser Mengen $K_-^i(f)$ sind im folgenden Lemma zusammengefaßt.

2.5.1 Lemma (Eigenschaften der Mengen $K_-^i(f)$)

- (a) $K_-(f) = \bigcup_{i=1}^s K_-^i(f)$
- (b) $K_-^i(f) \cap K_-^j(f) \neq \emptyset \iff N_i \cup N_j \neq \{1, \dots, n+1\}$
- (c) Alle $K_-^i(f)$ sind nicht-leer, es sei denn es ist $f(x) = f_{\max}(x) := \max_{j \in \{1, \dots, n+1\}} a_j^T x$.
- (d) Für $f \neq f_{\max}$ sind die $K_-^i(f)$ offene konvexe Kegel.
- (e) $\dim(\text{cl}(K_-^i(f)) \cap \text{cl}(K_-^j(f))) \in \{0, n\}$
- (f) $\dim(\text{cl}(K_-^i(f)) \cap \text{cl}(K_-^j(f))) = n \iff N_i \cup N_j \neq \{1, \dots, n+1\}$

BEWEIS

zu (a) Zunächst gilt aufgrund der Definition der $K_-^i(f)$:

$$x \in K_-^i(f) \iff a_j^T x < 0 \quad \forall j \in N_i .$$

Dies ist äquivalent zu $\max_{j \in N_i} a_j^T x < 0$, woraus sofort $f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x < 0$ folgt. Ist umgekehrt $x \in K_-(f)$, so muß ein $i \in \{1, \dots, s\}$ existieren mit $\max_{j \in N_i} a_j^T x < 0$ und durch obige Äquivalenzen ergibt sich $x \in K_-^i(f)$.

zu (b) Angenommen $x \in K_-^i(f) \cap K_-^j(f)$. Da der Ursprung ein kritischer Punkt von f ist, der (ND1) erfüllt, existieren aufgrund der Erläuterungen zu Definition 1.4.24 positive Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i = 0$ und $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Daraus folgt $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i^T x = 0$. Da $a_l^T x < 0$ für alle $l \in N_i \cup N_j$ gilt, muß somit ein Index $k \in \{1, \dots, n+1\}$ existieren mit $a_k^T x > 0$, woraus folgt: $k \notin N_i \cup N_j$. Gilt umgekehrt $N_i \cup N_j \neq \{1, \dots, n+1\}$, so wählt man einen Index k , der weder in N_i noch in N_j enthalten ist. Wegen (ND1) sind die Vektoren a_l , $l \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{k\}$ linear unabhängig und spannen somit den \mathbb{R}^n auf. Da-

her existiert ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $a_l^T x = -1$ für alle $l \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{k\}$ und damit ein Schnittpunkt von $K_-^i(f)$ und $K_-^j(f)$.

zu (c) Mit der für Aussage (b) verwendeten Argumentation folgt auch sofort, daß $K_-^i(f) \neq \emptyset \Leftrightarrow N_i \neq \{1, \dots, n+1\}$ gilt. Aufgrund der Eigenschaften der Indextmengen N_i kann der Fall $N_i = \{1, \dots, n+1\}$ aber nur einmal auftreten, und zwar als einzige Indexmenge der Funktion $f(x) = \max_{j \in \{1, \dots, n+1\}} a_j^T x$.

zu (d) Aufgrund ihrer Definition sind die $K_-^i(f)$ Schnittmengen von endlich vielen offenen Halbräumen und als solche offene konvexe Kegel oder aber leer, was aber wegen (c) und $f \neq f_{\max}$ nicht eintreten kann.

zu (e) 1. Fall: Es sei $K_-^i(f) \cap K_-^j(f) \neq \emptyset$. Dann ist $K_-^i(f) \cap K_-^j(f)$ nach (d) als Schnitt von ebensolchen ein offener konvexer Kegel. Weiterhin ergibt sich nach kurzer Überlegung $\text{cl}(K_-^i(f)) \cap \text{cl}(K_-^j(f)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_l^T x \leq 0, l \in N_i \cup N_j\} = \text{cl}(K_-^i(f) \cap K_-^j(f))$, welches deshalb ein n -dimensionaler konvexer Kegel ist.

2. Fall: Sei nun $K_-^i(f) \cap K_-^j(f) = \emptyset$. Nach (b) gilt dann $N_i \cup N_j = \{1, \dots, n+1\}$. Wählt man ein beliebiges $x \in \text{cl}(K_-^i(f)) \cap \text{cl}(K_-^j(f))$, so muß $a_l^T x \leq 0$ für alle $l \in N_i \cup N_j = \{1, \dots, n+1\}$ gelten. Wie im Beweis zu (b) existieren aber auch positive Konstanten λ_i mit $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i^T x = 0$. Insgesamt folgt $a_l^T x = 0$ für alle $l \in \{1, \dots, n+1\}$ und mit (ND1) schließlich $x = 0$. Also ist

$$\text{cl}(K_-^i(f)) \cap \text{cl}(K_-^j(f)) = \{0\} .$$

zu (f) Dies ergibt sich unmittelbar aus den Teilen (b) und (e). □

Natürlich können basierend auf der max-min Normalform

$$f(x) = \max_{i \in \{1, \dots, r\}} \min_{j \in M_i} a_j^T x$$

auch entsprechende Mengen

$$K_+^i(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_j^T x > 0, j \in M_i\} \quad , i = 1, \dots, r$$

definiert werden. Für diese gelten ganz analoge Eigenschaften wie für die Mengen $K_-^i(f)$.

2.5.2 Lemma (Eigenschaften der Mengen $K_+^i(f)$)

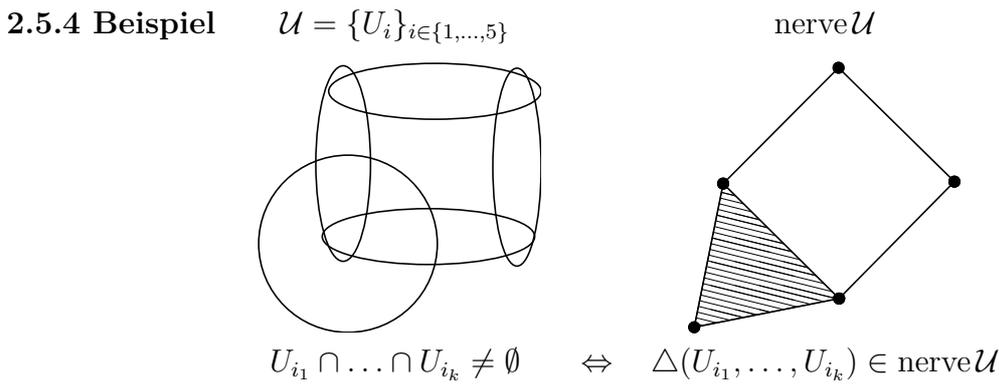
Alle Aussagen von Lemma 2.5.1 gelten in entsprechender Form auch für die Mengen $K_+^i(f)$. Dazu ersetzt man überall in Lemma 2.5.1 $K_-(f)$ durch $K_+(f)$, $K_-^\bullet(f)$ durch $K_+^\bullet(f)$, s durch r , N_\bullet durch M_\bullet und \max durch \min .

BEWEIS Analog zum Beweis von Lemma 2.5.1 □

Im folgenden benötigen wir noch das Konzept des **Nervs**, welches einem System von Mengen einen simplizialen Komplex⁶⁾ zuordnet.

2.5.3 Definition Sei $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ ein endliches System nicht-leerer Mengen. Dann ist **nerve \mathcal{U}** der simpliziale Komplex, dessen Simplizes alle nicht-leeren Teilmengen von \mathcal{U} sind, welche nicht-leeren Durchschnitt haben. Insbesondere sind die Mengen U_1, \dots, U_k gerade die Ecken von **nerve \mathcal{U}** .

Das folgende Beispiel soll den Begriff veranschaulichen.



Etwas weniger gebräuchlich, aber auf demselben Prinzip basierend, ist die Definition des Nervs eines simplizialen Komplexes. Dazu werden alle maximalen Simplizes⁶⁾ eines gegebenen simplizialen Komplexes als ein Mengensystem betrachtet und dann von diesem der oben definierter Nerv bestimmt. Die folgende Definition formuliert dies nochmal ohne auf den Begriff des Nervs eines Mengensystems zurückzugreifen.

2.5.5 Definition Sei \mathcal{K} ein endlicher simplizialer Komplex. Dann ist **nerve \mathcal{K}** der wie folgt definierte simpliziale Komplex: Die maximalen Simplizes von \mathcal{K} sind die Ecken von **nerve \mathcal{K}** . Eine Menge von Ecken ist Simplex von **nerve \mathcal{K}** wenn die entsprechenden maximalen Simplizes von \mathcal{K} nicht-leeren Durchschnitt haben.

⁶⁾siehe Definition A.3.17

Einen wichtigen Zusammenhang zwischen einem simplizialen Komplex und seinem Nerv liefert das folgende Theorem.

2.5.6 Theorem *Ist \mathcal{K} ein endlicher simplizialer Komplex, dann gilt: \mathcal{K} und nerve \mathcal{K} sind homotopieäquivalent. □*

Für einen Beweis dieser Aussage sowie eine detaillierte Betrachtung von Nerven simplizialer Komplexe sei auf Grünbaum (1970) verwiesen.

In Lemma 2.5.1 wurde gezeigt, daß sich gemäß $K_-(f) = \bigcup_{i=1}^s K_-^i(f)$ der Abstiegskegel aus offenen konvexen Kegeln zusammensetzt, welche außerdem die angenehme Eigenschaft besitzen, daß sich an den zugehörigen Mengen N_i relativ einfach ablesen läßt, ob sich zwei oder mehr dieser Kegel $K_-^i(f)$ schneiden oder nicht. Dies legt die Vermutung nahe, daß es topologische Eigenschaften des Abstiegskegels gibt, die alleine durch die Mengen N_i bestimmt sind. Das folgende Ergebnis bestätigt diese Vermutung sehr deutlich.

2.5.7 Theorem *Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ gegeben, so daß $\hat{I} = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 kritischer Punkt von f ist, der (ND1) erfüllt. Basierend auf der min-max Normalform $f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x$ sei $\bar{N}_i = \{1, \dots, n+1\} \setminus N_i$. Dann ist $K_-(f)$ vom gleichen Homotopietyp wie*

$$\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}.$$

BEWEIS Da 0 kritischer Punkt von f ist und (ND1) erfüllt, existiert für f eine eindeutige min-max Normalform (siehe Theorem 2.1.1). Weil führte den Begriff der **einfachen Überdeckung** ein (siehe Weil 1952) und zeigte unter anderem, daß der Nerv einer einfachen Überdeckung einer Mannigfaltigkeit X denselben Homotopietyp hat wie die Mannigfaltigkeit X selbst. Dabei ist eine einfache Überdeckung definiert als eine lokal endliche Überdeckung aus offenen Mengen mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jede Menge der Überdeckung, sowie jeder Durchschnitt von zwei oder mehr Mengen der Überdeckung differenzierbar zusammenziehbar ist.

Nach Lemma 2.5.1 sind alle $K_-^i(f)$ offen und konvex und für alle $I \subseteq \{1, \dots, s\}$ ist der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} K_-^i(f)$ entweder leer oder offen und konvex. Da jede offene konvexe Menge differenzierbar zusammenziehbar ist folgt: $\{K_-^i(f)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ ist einfache Überdeckung von $K_-(f)$.

Unter Verwendung des oben erwähnten Ergebnisses aus Weil (1952) ergibt sich: $K_-(f)$ ist homotopieäquivalent zu $\text{nerve}\{K_-^i(f)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$.

Schließlich folgt aus

$$K_-^i(f) \cap K_-^j(f) \neq \emptyset \stackrel{2.5.1}{\iff} N_i \cup N_j \neq \{1, \dots, n+1\} \iff \bar{N}_i \cap \bar{N}_j \neq \emptyset$$

daß $\text{nerve}\{K_-^i(f)\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ und $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ isomorph sind und somit die Behauptung. □

Mit Theorem 2.5.7 steht uns bereits ein sehr mächtiges Werkzeug zur Untersuchung stetiger Selektionen linearer Funktionen zur Verfügung. Sich den Abstiegskegel $K_-(f)$ selbst zu veranschaulichen, um daraus Erkenntnisse über die Funktion f zu ziehen, ist schon für $n = 3$ nur mit großem Aufwand möglich. Für $n \geq 4$ aber erweist sich diese Vorgehensweise als nicht mehr praktikabel. Im Vergleich dazu läßt sich jedoch $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ relativ leicht handhaben und sollte, da er denselben Homotopietyp wie $K_-(f)$ hat, zumindest einen Teil der zur Bestimmung des topologischen Typs von f notwendigen Informationen tragen.

Das folgende ausführliche Beispiel für $n = 4$ zeigt zum einen, daß die Aussage von Theorem 2.4.1 hier nicht gültig ist, und zum anderen, wie die Anwendung von Theorem 2.5.7 in diesem Fall weiterhelfen kann.

2.5.8 Beispiel

Gegeben seien zwei stetige Selektionen linearer Funktionen f und g im \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \min\{\max\{x_1, x_2, x_3\}, \max\{x_1, x_2, x_4\}, \\ &\quad \max\{x_1, x_2, -\sum_{i=1}^4 x_i\}, \max\{x_3, x_4, -\sum_{i=1}^4 x_i\}\} \\ g(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \min\{\max\{x_1, x_2\}, \max\{x_1, x_3\}, \max\{x_2, x_3, x_4, -\sum_{i=1}^4 x_i\}\} \end{aligned}$$

Für eine vereinfachte Darstellung werden die Vektoren $a_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $a_2 = (0, 1, 0, 0)^T$, $a_3 = (0, 0, 1, 0)^T$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)^T$, $a_5 = (-1, -1, -1, -1)^T$ eingeführt, so daß die Selektionsfunktionen durch $a_1^T x, \dots, a_5^T x$ gegeben sind. Zunächst wird für f und g jeweils das Zahlenpaar (p, q) aus Theorem 2.4.1 bestimmt.

- (a) Funktion f : Aus der gegebenen min-max Normalform können $s = 4$ und die Mengen N_i abgelesen werden:

$$N_1 = \{1, 2, 3\}, \quad N_2 = \{1, 2, 4\}, \quad N_3 = \{1, 2, 5\}, \quad N_4 = \{3, 4, 5\}.$$

Nach Lemma 2.5.1 (b)) kann man durch das Betrachten der Vereinigung verschiedener Indexmengen N_i feststellen, welche der Mengen $K_-^i(f)$ nicht-leeren Durch-

schnitt haben. So folgt z. B. aus $N_1 \cup N_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ daß $K_-^1(f) \cap K_-^4(f) = \emptyset$.
Damit erhält man:

$$K_-^1(f) \cap K_-^2(f) \neq \emptyset, K_-^1(f) \cap K_-^3(f) \neq \emptyset \text{ und } K_-^2(f) \cap K_-^3(f) \neq \emptyset .$$

Alle anderen Schnitte sind leer. Folglich besteht der Abstiegskegel $K_-(f)$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $\bigcup_{i=1}^3 K_-^i(f)$ und $K_-^4(f)$.

Mit Hilfe der Rechenregeln in einem distributiven Verband läßt sich aus der min-max Normalform auch die max-min Normalform von f bestimmen. Dies ergibt $r = 7$ und

$$M_i : \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4, 5\} .$$

Dieselbe Vorgehensweise wie oben, nun angewandt auf die Indexmengen M_i , ergibt:

$$K_+^i(f) \cap K_+^j(f) \neq \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 7\} .$$

Folglich besteht der Anstiegskegel $K_+(f)$ nur aus einer Zusammenhangskomponente.

Zusammengefaßt gilt für die Funktion $f: (p, q) = (2, 1)$.

(b) Funktion g : Die min-max Normalform liefert $s = 3$ und

$$N_i : \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3, 4, 5\} .$$

Dies ergibt: $K_-^1(g) \cap K_-^2(g) \neq \emptyset$ und alle anderen Schnitte sind leer. Daher hat $K_-(g)$ die zwei Zusammenhangskomponenten $K_-^1(g) \cup K_-^2(g)$ und $K_-^3(g)$.

Für die max-min Normalform von g gilt $r = 5$ und

$$M_i : \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\} .$$

Daraus erhält man:

$$K_+^i(g) \cap K_+^j(g) \neq \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \dots, 5\} .$$

Folglich besteht der Anstiegskegel $K_+(g)$ nur aus einer Zusammenhangskomponente.

Zusammengefaßt gilt für die Funktion $g: (p, q) = (2, 1)$.

Für beide Funktionen f und g gilt also $(p, q) = (2, 1)$. Wäre $n \leq 3$, so würde daraus mit Theorem 2.4.1 die topologische Äquivalenz der beiden Funktionen folgen. Doch da das Beispiel im \mathbb{R}^4 operiert, kann vorerst keine diesbezügliche Aussage gemacht werden. Jetzt kann man versuchen Theorem 2.5.7 auszunutzen. Dazu werden zunächst einmal für beide Funktionen der zugehörige $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ bestimmt:

(a) Funktion f : Die Mengen \bar{N}_i sind die Komplemente der Mengen N_i :

$$\bar{N}_1 = \{4, 5\}, \bar{N}_2 = \{3, 5\}, \bar{N}_3 = \{3, 4\}, \bar{N}_4 = \{1, 2\}.$$

Es gilt $\bar{N}_i \cap \bar{N}_j \neq \emptyset \Leftrightarrow K_-^i(f) \cap K_-^j(f) \neq \emptyset$ und daher wissen wir von oben bereits:

$$\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 \neq \emptyset, \bar{N}_1 \cap \bar{N}_3 \neq \emptyset, \bar{N}_2 \cap \bar{N}_3 \neq \emptyset.$$

Außerdem sieht man, daß 3 oder mehr der \bar{N}_i immer leeren Durchschnitt haben. Daraus folgt:

$$\mathcal{F} := \text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}} = \{\{\bar{N}_1\}, \{\bar{N}_2\}, \{\bar{N}_3\}, \{\bar{N}_4\}, \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}, \{\bar{N}_1, \bar{N}_3\}, \{\bar{N}_2, \bar{N}_3\}\}.$$

Abbildung 2.1 zeigt eine graphische Darstellung dieses simplizialen Komplexes.

(b) Funktion g :

$$\bar{N}_1 = \{3, 4, 5\}, \bar{N}_2 = \{2, 4, 5\}, \bar{N}_3 = \{1\}$$

Die Betrachtung möglicher Schnitte ergibt:

$$\mathcal{G} := \text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}} = \{\{\bar{N}_1\}, \{\bar{N}_2\}, \{\bar{N}_3\}, \{\bar{N}_1, \bar{N}_2\}\}.$$

Für eine graphische Darstellung siehe ebenfalls Abbildung 2.1.

Nach Theorem 2.5.7 gilt, daß \mathcal{F} homotopieäquivalent zum Abstiegskegel $K_-(f)$ ist und entsprechendes für \mathcal{G} .

Angenommen die Funktionen f und g seien vom gleichen topologischen Typ. Daraus folgt die Existenz eines Homöomorphismus $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft

$$f(\phi(y)) = g(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^4.$$

Dies impliziert

$$y \in K_-(g) \iff \phi(y) \in K_-(f).$$

Somit ist $\phi(K_-(g)) = K_-(f)$ und folglich sind $K_-(f)$ und $K_-(g)$ homöomorph. Zusam-

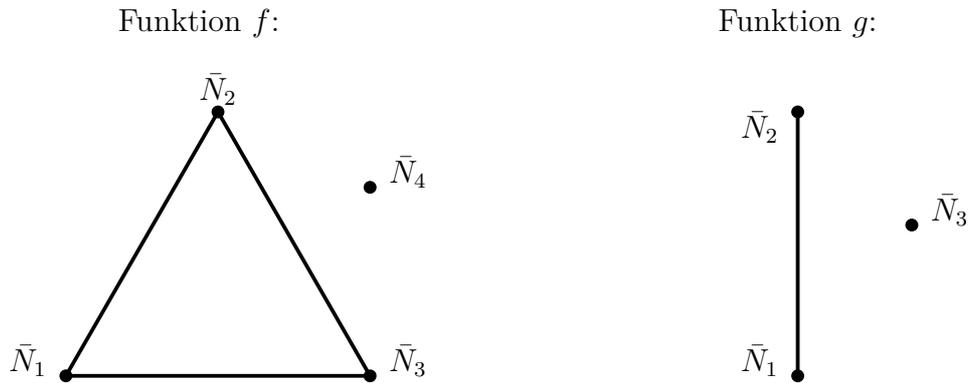


Abbildung 2.1: $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ der Funktionen f und g aus Beispiel 2.5.8

mengefaßt gelten folgende Beziehungen:

$$\mathcal{F} \simeq K_-(f) \cong K_-(g) \simeq \mathcal{G} \text{ } ^7).$$

Da die Homotopieäquivalenz von Räumen eine Äquivalenzrelation ist, folgt schließlich:

$$\mathcal{F} \simeq \mathcal{G} .$$

Beim Betrachten von Abbildung 2.1 sieht man jedoch sofort, daß \mathcal{F} und \mathcal{G} nicht homotopieäquivalent sind, da \mathcal{G} aus zwei zusammenziehbaren⁸⁾ Zusammenhangskomponenten besteht, \mathcal{F} aber eine zusammenziehbare und eine nicht-zusammenziehbare Zusammenhangskomponente besitzt.

Das bedeutet, die getroffene Annahme war falsch, d. h. f und g sind von unterschiedlichem topologischen Typ. Da für beide Funktionen $(p, q) = (2, 1)$ gilt, ist dies ein Beleg dafür, daß die Aussage von Theorem 2.4.1 für $n \geq 4$ im allgemeinen nicht gilt. Gleichzeitig zeigt dieses Beispiel aber auch, daß Theorem 2.5.7 bereits eine notwendige Bedingung für die topologische Äquivalenz von stetigen Selektionen beliebig vieler linearer Funktionen liefert. Dies wird später in Korollar 2.5.15 nach einer weiteren Vereinfachung nochmals explizit formuliert. \diamond

Die in diesem Beispiel als $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ aufgetretenen simplizialen Komplexe waren

⁷⁾Die Schreibweise $A \cong B$ bezeichne homöomorphe Räume A und B und die Schreibweise $C \simeq D$ homotopieäquivalente Räume C und D .

⁸⁾Ein topologischer Raum A heißt zusammenziehbar, wenn er denselben Homotopietyp hat wie ein Einpunktraum.

sehr einfach aufgebaut, so daß die Frage ihrer Homotopieäquivalenz leicht beantwortet werden konnte. Dies muß aber nicht immer so sein. Wie „kompliziert“ der simpliziale Komplex $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ für gegebene Dimension n werden kann, hängt hauptsächlich von der maximalen Anzahl seiner Ecken ab. Die Anzahl der Ecken von $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ ist aber gerade gleich der Anzahl s von Mengen N_i in der min-max Normalform. Ein Durchsehen aller möglichen stetigen Selektionen von fünf linearen Funktionen ergibt, daß in diesem Falle s maximal den Wert 10 annimmt. Eine Dimension höher beträgt dieser Wert bereits 20⁹⁾. Das mit diesen Werten verbundene Auftreten kompliziert aufgebauter simplizialer Komplexe schon bei relativ kleinem n ist ein Nachteil der Methode, stetige Selektionen linearer Funktionen anhand ihres $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ zu beurteilen, der im folgenden beseitigt werden soll.

Mit Δ^n sei das n -dimensionale Standardsimplex¹⁰⁾ bezeichnet. Dieses stellen wir uns im folgenden als simplizialen Komplex vor, dessen Ecken von 1 bis $(n + 1)$ durchnummeriert sind. Dann beschreibt jede nicht-leere Menge $I \subseteq \{1, \dots, n + 1\}$ genau einen Simplex von Δ^n , welcher die Dimension $(\#I - 1)$ hat. Sind mehrere solcher Teilmengen, nämlich I_1, \dots, I_k gegeben, so entsteht durch Vereinigung aller durch sie beschriebenen Simplizes und Hinzufügen aller echten Seiten dieser Simplizes ein neuer simplizialer Komplex. Diesen nennen wir den von I_1, \dots, I_k erzeugten simplizialen Komplex. Er ist ein Teilkomplex von Δ^n und formal gegeben durch $\{s \mid \exists i \in \{1, \dots, k\} : s \subseteq I_i\}$. Auf diese Weise läßt sich auch aus den Mengen $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ ein simplizialer Komplex erzeugen.

2.5.9 Definition Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ gegeben, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n + 1\}$ und 0 ein kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Deren eindeutige min-max Normalform habe die Gestalt

$$f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x .$$

Dann bezeichnen wir den von den Mengen $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ erzeugten simplizialen Komplex mit

$$\mathcal{N}(f)$$

und nennen ihn den **von f induzierten simplizialen Komplex**.

Das folgende Theorem erklärt den Sinn dieser Konstruktion.

2.5.10 Theorem *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2.5.7 gilt: $\mathcal{N}(f)$ hat denselben Homotopietyp wie $K_-(f)$.*

⁹⁾ Eine einfache Formel zur Berechnung des maximalen s für gegebene Dimension n ist in Korollar 2.5.14 zu finden.

¹⁰⁾ siehe Definition A.3.2

BEWEIS Zunächst zeigen wir, daß $\text{nerve } \mathcal{N}(f) = \text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$. Bei dieser Gleichheit ist zu beachten, daß links der Nerv eines simplizialen Komplexes und rechts der Nerv eines Mengensystems steht. Aus Theorem 2.1.1 weiß man, daß für die Mengen N_i in der min-max Normalform gilt: $i \neq j \Rightarrow N_i \not\subseteq N_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, s\}$. Mit der für beliebige Mengen $A, B \subseteq X$ geltenden Äquivalenz $A \subseteq B \Leftrightarrow (X \setminus B) \subseteq (X \setminus A)$ folgt:

$$i \neq j \Rightarrow \bar{N}_i \not\subseteq \bar{N}_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, s\}.$$

Betrachtet man dies im Zusammenhang mit der Konstruktion von $\mathcal{N}(f)$ aus den Mengen \bar{N}_i so ergibt sich folgendes: Die Mengen $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_s$ entsprechen gerade den maximalen Simplizes von $\mathcal{N}(f)$. Wie bei Definition 2.5.5 angemerkt, ist aber der Nerv eines simplizialen Komplexes nichts anderes als der Nerv seiner als Mengensystem aufgefaßten maximalen Simplizes. Also gilt gerade: $\text{nerve } \mathcal{N}(f) = \text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$.

Mit Theorem 2.5.6 und Theorem 2.5.7 erhält man die folgenden Kette von Homotopie-äquivalenzen:

$$\mathcal{N}(f) \simeq \text{nerve } \mathcal{N}(f) = \text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}} \simeq K_-(f),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Der simpliziale Komplex $\mathcal{N}(f)$ hat also dieselbe Beziehung zum Abstiegskegel $K_-(f)$ wie $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$. Das heißt in Beispiel 2.5.8 hätte man bei ansonsten gleicher Argumentation ebenso $\mathcal{N}(f)$ und $\mathcal{N}(g)$ bestimmen und vergleichen können. Damit ist aber auf den ersten Blick nichts neues gewonnen. Fassen wir jedoch die Eigenschaften von $\mathcal{N}(f)$ zusammen, wird schnell ersichtlich, daß diese Konstruktion einige wesentliche Vorteile mit sich bringt:

2.5.11 Korollar (Eigenschaften von $\mathcal{N}(f)$)

Unter denselben Voraussetzungen wie in Theorem 2.5.7 gilt:

- (a) $\mathcal{N}(f)$ ist Teilkomplex von Δ^n und hat als solcher höchstens $(n + 1)$ Ecken.
- (b) Die Mengen \bar{N}_i entsprechen den maximalen Simplizes von $\mathcal{N}(f)$.
- (c) Der Durchschnitt aller maximalen Simplizes von $\mathcal{N}(f)$ ist leer.

Sind die Vektoren a_1, \dots, a_{n+1} gleich den Gradienten der Standard-Selektionsfunktionen $x_1, \dots, x_n, -\sum_{i=1}^n x_i$ aus dem zweiten Morse-Lemma, so gilt umgekehrt:

- (d) Ist \mathcal{K} ein beliebiger Teilkomplex von Δ^n , dessen maximale Simplizes keine gemeinsame Ecke haben, so existiert eine eindeutig bestimmte stetige Selektion $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und der Ursprung kritischer Punkt von f ist, der (ND1) erfüllt, für welche gilt: $\mathcal{N}(f) = \mathcal{K}$.

BEWEIS

zu (a) Folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{N}(f)$.

zu (b) Dies wurde im Beweis von Theorem 2.5.10 bereits gezeigt.

zu (c) In Gleichung (2.2) wurde vorausgesetzt, daß im Ursprung alle Selektionsfunktionen wesentlich aktiv sind, da sonst die Dimension n des Definitionsbereichs der Funktion f verringert werden könnte. Daher gilt:

$$\bigcup_{i=1}^s N_i = \{1, \dots, n+1\}.$$

Durch beidseitige Komplementbildung und anschließendes Umformen mit Hilfe von $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \iff \{1, \dots, n+1\} \setminus \bigcup_{i=1}^s N_i &= \emptyset \\ \iff \bigcap_{i=1}^s \bar{N}_i &= \emptyset \end{aligned}$$

zu (d) Wir betrachten die maximalen Simplizes von \mathcal{K} . Diese sind durch eindeutig bestimmte Teilmengen K_1, \dots, K_l von $\{1, \dots, n+1\}$ beschrieben. Da es sich um maximale Simplizes handelt, gilt:

$$i \neq j \Rightarrow K_i \not\subseteq K_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, l\}. \quad (2.5)$$

Nach Voraussetzung haben die maximalen Simplizes keine gemeinsame Ecke:

$$\bigcap_{i=1}^l K_i = \emptyset.$$

Daraus folgt für die Komplemente $\bar{K}_i := \{1, \dots, n+1\} \setminus K_i$ wie im Beweis

zu (c):

$$\bigcup_{i=1}^l \bar{K}_i = \{1, \dots, n+1\}.$$

Gleichung (2.5) gilt ebenso für die Mengen \bar{K}_i (siehe Beweis von Theorem 2.5.10). Die gesuchte Funktion f ist somit eindeutig gegeben durch:

$$f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, l\}} \max_{j \in \bar{K}_i} a_j^T x.$$

Wegen $\bigcup_{i=1}^l \bar{K}_i = \{1, \dots, n+1\}$ folgt $\partial f(0) = \text{conv}\{a_1, \dots, a_{n+1}\} \ni 0$, womit der Ursprung kritischer Punkt von f ist und die Vektoren a_1, \dots, a_{n+1} erfüllen offensichtlich (ND1).

Aus der Konstruktion von f folgt unmittelbar: $\mathcal{N}(f) = \mathcal{K}$. □

2.5.12 Bemerkung Aufgrund der Dualität der beiden Normalformen sieht man leicht, daß Theorem 2.5.10 und Korollar 2.5.11 auch analog für den Anstiegskegel $K_+(f)$ und einen aus den Mengen M_j , $j \in \{1, \dots, r\}$ der max-min Normalform konstruierten simplizialen Komplex $\mathcal{M}(f)$ gelten.

Die maximale Anzahl s der Mengen N_i in der min-max Normalform konnten bisher nur für $n \leq 4$ durch direktes Inspizieren aller möglichen Funktionen ermittelt werden. Es folgt eine allgemeingültige Abschätzung für beliebiges n .

2.5.13 Theorem *Ein Teilkomplex \mathcal{K} des Standardsimplex Δ^n , $n \geq 1$ hat höchstens $\binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} = \frac{(n+1)!}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor! \lceil \frac{n+1}{2} \rceil!}$ ¹¹⁾ verschiedene maximale Simplizes.*

BEWEIS Wieder seien die Ecken von Δ^n mit $1, \dots, n+1$ bezeichnet und

$$\mathcal{K}_{\max} = \{K_1, \dots, K_l\}$$

sei die Menge der maximalen Simplizes des gegebenen Teilkomplexes \mathcal{K} . Wie bereits gesehen, ist \mathcal{K}_{\max} ein Mengensystem mit den Eigenschaften

$$K_i \subseteq \{1, \dots, n+1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, l\} \tag{2.6}$$

$$i \neq j \Rightarrow K_i \not\subseteq K_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, l\}. \tag{2.7}$$

¹¹⁾ $\lfloor x \rfloor$ ist definiert als die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x und entsprechend $\lceil x \rceil$ als die kleinste ganze Zahl größer oder gleich x .

Im folgenden wird von \mathcal{K} ausgehend ein weiterer Teilkomplex $\tilde{\mathcal{K}}$ konstruiert, für dessen maximale Simplizes $\tilde{\mathcal{K}}_{\max} = \{\tilde{K}_1, \dots, \tilde{K}_{\tilde{l}}\}$ gilt:

$$|\tilde{K}_i|^{12)} = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \quad \forall i \in \{1, \dots, \tilde{l}\}$$

und $\tilde{l} \geq l$.

Ist dies gezeigt, dann folgt unmittelbar

$$l \leq \tilde{l} \leq \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor},$$

da höchstens $\binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ verschiedene $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$ gebildet werden können (siehe z. B. Hartung u. a. 1991, Seite 96 unten).

Die Konstruktion von $\tilde{\mathcal{K}}_{\max}$ erfolgt in zwei Schritten. Im ersten Schritt wird gezeigt, daß aus \mathcal{K}_{\max} durch Streichen aller Mengen K_i mit mehr als $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Elementen und Hinzufügen geeigneter $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ -elementiger Mengen ein Mengensystem entsteht, welches keine Mengen mit mehr als $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Elementen enthält und mindestens so mächtig wie \mathcal{K}_{\max} ist. Im zweiten Schritt wird entsprechendes für die Mengen K_i mit weniger als $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Elementen gezeigt.

Schritt 1: O. B. d. A. gelte $k := |K_1| = \dots = |K_p| > |K_{p+1}| \geq \dots \geq |K_l|$ und $k > \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die Menge

$$\mathcal{L} := \{L \subseteq \{1, \dots, n+1\} \mid \exists i \in \{1, \dots, p\} : L \subseteq K_i \text{ und } |L| = k-1\}$$

aller $(k-1)$ -elementigen Teilmengen der Mengen K_1, \dots, K_p nicht weniger als p Elemente enthält. Es wird also behauptet:

$$q := |\mathcal{L}| \geq p.$$

Um dies zu zeigen werden die beiden folgenden elementaren Aussagen benutzt.

(TM1) Eine k -elementige Menge K hat genau

$$k$$

verschiedene $(k-1)$ -elementige Teilmengen.

¹²⁾Ist A eine endliche Menge so bezeichne $|A|$ die Anzahl der Elemente von A .

(TM2) Ist L eine beliebige $(k-1)$ -elementige Teilmenge von $\{1, \dots, n+1\}$, dann gibt es genau

$$n+1 - (k-1) = n - k + 2$$

k -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n+1\}$, welche L enthalten.

Wir schreiben $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_q\}$ und betrachten nun die Teilmengen-Relation zwischen L_1, \dots, L_q einerseits und K_1, \dots, K_p andererseits, also

$$R := \{(i, j) \in \{1, \dots, q\} \times \{1, \dots, p\} \mid L_i \subseteq K_j\}.$$

Aus (TM1) folgt unmittelbar $|R| = k \cdot p$. Betrachtet man ein einzelnes L_i , so weiß man nicht allgemein, in wievielen der K_1, \dots, K_p dieses enthalten ist. Aber (TM2) liefert dafür eine obere Schranke, womit durch Aufsummieren folgt: $|R| \leq (n - k + 2) \cdot q$.

Insgesamt erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned} (n - k + 2) \cdot q &\geq k \cdot p \\ \Rightarrow q &\geq \frac{k}{n - k + 2} \cdot p \end{aligned}$$

Behauptung: $k \geq n - k + 2$ bzw. $n - 2k + 2 \leq 0$.

Nach Voraussetzung gilt: $k > \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$

Fall 1: n ungerade $\Rightarrow k > \frac{n+1}{2} \Rightarrow k \geq \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2}$
 $\Rightarrow n - 2k + 2 \leq n - (n+3) + 2 = -1 < 0$.

Fall 2: n gerade $\Rightarrow k > \frac{n}{2} \Rightarrow k \geq \frac{n}{2} + 1 = \frac{n+2}{2}$
 $\Rightarrow n - 2k + 2 \leq n - (n+2) + 2 = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} q \geq p & \text{falls } n \text{ gerade und } k = \frac{n}{2} + 1 \\ q > p & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus $K_1, \dots, K_p \in \mathcal{K}_{\max}$ und (2.7) folgt, daß weder die Mengen L_1, \dots, L_q noch irgendwelche Teilmengen dieser in \mathcal{K}_{\max} enthalten sind. Daher entsteht aus \mathcal{K}_{\max} durch Entfernen von K_1, \dots, K_p und Hinzufügen von L_1, \dots, L_q ein neues System maximaler Simplizes, welches keine Mengen mit mehr als $(k-1)$ Elementen enthält und die Mächtigkeit $l - p + q \geq l$ hat.

Wiederholt man diesen Schritt, so entsteht nach endlich vielen Durchläufen ein System maximaler Simplexes, welches keine Mengen mit mehr als $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ Elementen enthält und eine Mächtigkeit von mindestens l hat.

Schritt 2: O. B. d. A. gelte $k := |K_1| = \dots = |K_p| < |K_{p+1}| \leq \dots \leq |K_l|$ und $k < \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$. Durch Bildung der Komplemente $\bar{K}_i := \{1, \dots, n+1\} \setminus K_i$ für $i \in \{1, \dots, l\}$ erhält man¹³⁾:

$$\bar{k} := n+1 - k = |\bar{K}_1| = \dots = |\bar{K}_p| > |\bar{K}_{p+1}| \geq \dots \geq |\bar{K}_l| \quad \text{und} \quad \bar{k} > \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$$

Anwendung von Schritt 1 und nochmalige Komplementbildung liefern dann ein System maximaler Simplexes, welches keine Mengen mit weniger als $(k+1)$ Mengen enthält und eine Mächtigkeit von mindestens l hat.

Nach endlich vielen Wiederholungen von Schritt 2 erhält man schließlich das gesuchte Mengensystem $\tilde{\mathcal{K}}_{\max}$. □

2.5.14 Korollar Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ in der min-max Normalform

$$f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x .$$

gegeben. Dann gilt

$$s \leq \binom{n+1}{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} .$$

Zu vorgegebenem n existiert immer solch eine Funktion f derart, daß die Abschätzung mit Gleichheit erfüllt ist. □

Das Problem, daß schon bei relativ kleinem n der nerve $\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ viele Ecken und damit einhergehend einen komplizierten Aufbau haben kann, wird durch die Verwendung von $\mathcal{N}(f)$ gelöst. So hat $\mathcal{N}(f)$ einer beliebigen stetigen Selektion von sechs Funktionen auch höchstens sechs Ecken, wohingegen $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ bis zu 20 Ecken haben kann.

Eigenschaft (d) in Korollar 2.5.11 ist sehr nützlich zur Bestimmung von Beispielfunktionen mit bestimmten Eigenschaften, da zu jedem homotopisch nicht-trivialen Teilkom-

¹³⁾Wie schon im Beweis von Theorem 2.5.10 gezeigt, bleibt Eigenschaft (2.7) bei der Komplementbildung erhalten.

plex¹⁴⁾ von Δ^n sofort eine passende Funktion f angegeben werden kann.¹⁵⁾ Bei Verwendung von $\text{nerve}\{\bar{N}_i\}_{i \in \{1, \dots, s\}}$ war dies nur bedingt möglich, da z. B. nur ein kleiner Bruchteil der simplizialen Komplexe mit bis zu 20 Ecken auch als Nerv einer stetigen Selektion von sechs linearen Funktionen vorkommt.

Am Ende von Beispiel 2.5.8 wurde mit Hilfe von Theorem 2.5.7 bereits ein notwendiges Kriterium für die topologische Äquivalenz zweier stetiger Selektionen linearer Funktionen konstruiert. Allgemein und unter Verwendung von $\mathcal{N}(f)$ formuliert lautet dies:

2.5.15 Korollar (Notwendiges Kriterium für topologische Äquivalenz)

Seien f und g zwei Funktionen, die den Voraussetzungen von Theorem 2.5.7 genügen. Falls f und g topologisch äquivalent sind, dann gilt:

$$\mathcal{N}(f) \simeq \mathcal{N}(g) .$$

BEWEIS Die am Ende von Beispiel 2.5.8 verwendete Argumentation kann völlig analog auf Dimension n und die Verwendung von $\mathcal{N}(\cdot)$ übertragen werden. \square

2.6 Projektion auf die Einheitskugel S^{n-1}

Der relativ einfache Aufbau des Abstiegskegels $K_-(f)$, wie er in Lemma 2.5.1 beschrieben ist, läßt die Vermutung zu, daß daraus noch weitere allgemeingültige Aussagen topologischer Natur über den Abstiegskegel gefolgert werden können. So legt zunächst die Kegeleigenschaft von $K_-(f)$ nahe, eine Projektion von $K_-(f)$ auf die Sphäre S^{n-1} zu betrachten, wodurch die Dimension um eins verringert wird.

2.6.1 Bemerkung Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ derart gegeben, daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt, so treten die beiden folgenden trivialen Spezialfälle auf¹⁶⁾:

- $f = f_{\max}$: $K_-(f) = \emptyset$, $K_+(f) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

¹⁴⁾ Teilkomplexe von Δ^n , deren maximalen Simplizes eine gemeinsame Ecke haben, sind offensichtlich zusammenziehbar. Daher bezeichnet man diese als homotopisch trivial.

¹⁵⁾ Es gibt auch homotopisch triviale Teilkomplexe von Δ^n , deren maximale Simplizes keine gemeinsame Ecke haben. Diese beinhalten mindestens vier Ecken und treten daher erst für $n \geq 3$ auf. Selbstverständlich kann auch für diese mit Hilfe von Korollar 2.5.11(d) eine passende Funktion f bestimmt werden. Hier soll allerdings betont werden, daß dies insbesondere für alle aus homotopischer Sicht interessanten Teilkomplexe von Δ^n möglich ist.

¹⁶⁾ Die entsprechenden Funktionen f_{\max} und f_{\min} sind definiert durch $f_{\max}(x) = \max_{i \in \{1, \dots, n+1\}} a_i^T x$ bzw. $f_{\min}(x) = \min_{i \in \{1, \dots, n+1\}} a_i^T x$.

- $f = f_{\min}$: $K_+(f) = \emptyset$, $K_-(f) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Bei allen folgenden Überlegungen zum Abstiegskegel $K_-(f)$ und verwandten Mengen sind auch immer, wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, diese beiden Spezialfälle berücksichtigt. Um dies zu nachvollziehen zu können, sind die folgenden Aussagen bzw. Vereinbarungen zu berücksichtigen:

- Nach Bemerkung A.3.16 ist jede Mannigfaltigkeit M auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand, für welche $\partial M = \emptyset$ gilt.
- Die leere Menge \emptyset ist eine Mannigfaltigkeit beliebiger Dimension und auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand beliebiger Dimension.
- Der Rand der leeren Menge ist die leere Menge.
- Die Euler-Charakteristik der leeren Menge ist 0.

2.6.2 Lemma *Sei f wie in Theorem 2.5.7 und die Abbildung $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ durch $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ gegeben. Dann ist $S_-(f) := r(K_-(f))$ starker Deformationsretrakt von $K_-(f)$ und offen in S^{n-1} . Entsprechendes gilt für $S_+(f) := r(K_+(f))$.*

BEWEIS Da $0 \notin K_-(f)$ ist $S_-(f)$ wohldefiniert. $r|_{K_-(f)} : K_-(f) \rightarrow S_-(f)$ ist wegen der Stetigkeit von r eine Retraktion. $H : K_-(f) \times [0, 1] \rightarrow K_-(f)$ mit $H(x, t) = \frac{x}{t + (1-t)\|x\|}$ ist offensichtlich stetig und es gilt:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \frac{x}{\|x\|} = r(x) & \forall x \in K_-(f), \\ H(x, 1) &= x = \text{id}_{K_-(f)}(x) & \forall x \in K_-(f), \\ H(x, t) &= \frac{x}{t + (1-t) \cdot 1} = x & \forall x \in S_-(f). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $S_-(f)$ starker Deformationsretrakt von $K_-(f)$ ist. Ist X eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so ist auch $\text{cone}(X) := \{\lambda \cdot x \mid x \in X, \lambda > 0\}$ offen. Wegen $r(\lambda \cdot x) = r(x)$ für $\lambda > 0$ gilt: $r(X) = \text{cone}(X) \cap S^{n-1}$. Somit ist $r(X)$ Element der Spurtopologie von S^{n-1} , also offen in S^{n-1} . Dies gilt folglich auch für die Menge $S_-(f)$. Der Beweis für $S_+(f)$ verläuft völlig analog. □

Als entsprechende Projektionen der Mengen $K_-^i(f)$ werden Mengen $S_-^i(f) := r(K_-^i(f))$ definiert. Zur besseren Lesbarkeit werden die abgeschlossenen Hüllen der Mengen K_+ , K_- , K_-^i , S_+ , S_- , S_-^i durch einfaches Hinzufügen eines Querstriches bezeichnet, also $\bar{K}_-(f) := \text{cl}(K_-(f))$ usw.

Als offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist $K_-(f)$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Desweiteren ist $S_-(f)$ eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, da es offene Teilmenge der im \mathbb{R}^n eingebetteten $(n-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit S^{n-1} ist.

Da die $K_-^i(f)$ Kegel sind, gilt $S_-^i(f) = r(K_-^i(f)) = S^{n-1} \cap K_-^i(f)$ und ebenso $\bar{S}_-^i(f) = S^{n-1} \cap \bar{K}_-^i(f)$. $\bar{S}_-^i(f)$ ist also der Schnitt der $(n-1)$ -dimensionalen Einheitskugel mit höchstens n , wegen (ND1) linear unabhängigen, abgeschlossenen Halbräumen und somit offensichtlich eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand¹⁷⁾. Werden diese zu $\bar{S}_-(f) = \bigcup_{i=1}^s \bar{S}_-^i(f)$ zusammengefügt, so ergibt sich dann wieder eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand, wenn es keine zwei Mengen $\bar{S}_-^i(f)$ und $\bar{S}_-^j(f)$ gibt, deren Durchschnitt nicht-leer ist, aber leeres Inneres in S^{n-1} hat. Genau dies kann jedoch nicht eintreten, denn: Es ist $X := \bar{S}_-^i(f) \cap \bar{S}_-^j(f) = S^{n-1} \cap (\bar{K}_-^i(f) \cap \bar{K}_-^j(f))$ und nach Lemma 2.5.1 (e) gilt: $\dim(\bar{K}_-^i(f) \cap \bar{K}_-^j(f)) \in \{0, n\}$. Im ersten Fall ist $\bar{K}_-^i(f) \cap \bar{K}_-^j(f) = \{0\}$ und somit $X = \emptyset$. Im zweiten Fall hat $\bar{K}_-^i(f) \cap \bar{K}_-^j(f)$ nicht-leeres Inneres und folglich hat X nicht-leeres Inneres in S^{n-1} . Also ist $\bar{S}_-(f)$ eine $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

Nun werden noch die Mengen

$$K_0(f) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\} \text{ und } S_0(f) := r(K_0(f) \setminus \{0\}) = S^{n-1} \cap K_0(f)$$

in die Überlegungen miteinbezogen. Wir wissen bereits, daß $K_0(f)$ keine inneren Punkte besitzt, da wegen (ND1) keine Selektionsfunktion identisch Null sein kann. Und aufgrund der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(0) = K_0(f)$ abgeschlossen. Seien nun $\tilde{x} \in K_0(f)$, $\tilde{x} \neq 0$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Angenommen es gilt $U_\epsilon(\tilde{x}) \cap K_+(f) = \emptyset$ ¹⁸⁾. Dies bedeutet, \tilde{x} ist lokales Maximum der Funktion f , woraus folgt:

$$0 \in \partial f(\tilde{x}) = \text{conv}\{a_i \mid i \in \hat{I}(\tilde{x})\}$$

Dies impliziert die lineare Abhängigkeit der Vektoren a_i , $i \in \hat{I}(\tilde{x})$. Wegen der Gültigkeit von (ND1) kann dies nur eintreten, wenn $\hat{I}(\tilde{x}) = \{1, \dots, n+1\}$ gilt, was aber ebenfalls aufgrund von (ND1) und $f(\tilde{x}) = 0$ sofort $\tilde{x} = 0$ ergibt. Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $\tilde{x} \neq 0$. Daher gilt:

$$U_\epsilon(\tilde{x}) \cap K_+(f) \neq \emptyset$$

und mit genau der gleichen Argumentation erhält man auch

$$U_\epsilon(\tilde{x}) \cap K_-(f) \neq \emptyset.$$

¹⁷⁾siehe Definition A.3.15

¹⁸⁾ $U_\epsilon(\tilde{x}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|\tilde{x} - x\| < \epsilon\}$ ist eine offene ϵ -Umgebung von \tilde{x} .

Das heißt, daß für alle $x \in K_0(f)$ mit $x \neq 0$ gilt:

$$x \in \partial K_-(f) \quad \text{und} \quad x \in \partial K_+(f) .$$

Der Ursprung selbst gehört genau dann zum Rand von $K_-(f)$ bzw. $K_+(f)$, wenn die entsprechende Menge nicht-leer ist. Dies folgt aus der Kegeleigenschaft dieser Mengen. Hier sind also nur die trivialen Spezialfälle $f = f_{\max}$ mit $K_-(f) = \emptyset$ und $f = f_{\min}$ mit $K_+(f) = \emptyset$ zu beachten.

Da umgekehrt aus $x \in \partial K_-(f)$ bzw. $x \in \partial K_+(f)$ wegen der Stetigkeit von f immer $f(x) = 0$ folgt, erhalten wir insgesamt für $f \notin \{f_{\max}, f_{\min}\}$:

$$\partial K_-(f) = \partial K_+(f) = K_0(f) .$$

Wird nun in dieser Gleichung aus jeder Menge die 0 herausgenommen und anschließend auf S^{n-1} projiziert, so erhält man wegen $r(\partial K_-(f) \setminus \{0\}) = \partial S_-(f)$ und $r(\partial K_+(f) \setminus \{0\}) = \partial S_+(f)$

$$\partial S_-(f) = \partial S_+(f) = S_0(f) ,$$

und wie leicht überprüft werden kann, ist diese Aussage sogar für f_{\max} und f_{\min} gültig.

Der Rand einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand ist eine $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand) (siehe Hatcher 2002, Seite 253, oben). Angewendet auf $S_-(f)$ und dessen Rand $S_0(f)$ folgt:

$S_0(f)$ ist eine $(n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei $f_S : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ die Einschränkung von f auf S^{n-1} , dann ist f_S offensichtlich stetig und deshalb ist $S_0(f) = f_S^{-1}(0)$ abgeschlossen. Wegen $S_0(f) \subseteq S^{n-1}$ ist $S_0(f)$ kompakt und damit eine geschlossene $(n-2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit¹⁹⁾.

Das folgende Lemma faßt die Überlegungen der letzten Seiten zusammen. Die noch hinzugefügten Aussagen (c) und (f) folgen mit $K_-(f) \cup K_+(f) \cup K_0(f) = \mathbb{R}^n$ direkt aus (b) bzw. (e).

2.6.3 Lemma *Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ gegeben, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt, dann gilt:*

(a) $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_+(f)$ sind $(n-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand.

¹⁹⁾ Eine Mannigfaltigkeit, die als topologischer Raum betrachtet kompakt ist, wird als geschlossen bezeichnet (siehe z. B. Hatcher 2002, Seite 231).

(b) $\partial S_-(f) = \partial S_+(f) = S_0(f)$.

(c) $S_+(f) = S^{n-1} \setminus \bar{S}_-(f)$, $S_-(f) = S^{n-1} \setminus \bar{S}_+(f)$.

(d) $S_0(f)$ ist eine geschlossene $(n - 2)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.

(e) Für $f \notin \{f_{\max}, f_{\min}\}$ gilt: $\partial K_-(f) = \partial K_+(f) = K_0(f)$.

Für $f = f_{\max}$ gilt: $\partial K_+(f) = K_0(f) = \{0\}$, $K_-(f) = \emptyset$.

Für $f = f_{\min}$ gilt: $\partial K_-(f) = K_0(f) = \{0\}$, $K_+(f) = \emptyset$.

(f) $K_+(f) = \mathbb{R}^n \setminus (\bar{K}_-(f) \cup \{0\})$, $K_-(f) = \mathbb{R}^n \setminus (\bar{K}_+(f) \cup \{0\})$. □

2.7 Triangulierung der Mengen $S_-(f)$ und $S_+(f)$

In Bartels u. a. (1995) wurde gezeigt, wie man anhand einer gegebenen stetigen Selektion linearer Funktionen den \mathbb{R}^n in simpliziale Kegel zerlegen kann. Aus dieser Zerlegung lassen sich simpliziale Komplexe erzeugen, deren Kegelhüllen²⁰⁾ gerade den Abstiegs- bzw. den Anstiegskegel ergeben. Dabei spielen die sogenannten Permutationskegel eine wichtige Rolle (siehe Bartels u. a. 1995, Seite 389, Definition 2.1 und folgender Absatz):

2.7.1 Definition und Satz Seien $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei π eine Permutation der Zahlen $1, \dots, m$. Dann heißt der konvexe Kegel

$$K_\pi = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_{\pi(1)}^T x \leq \dots \leq a_{\pi(m)}^T x\}$$

Permutationskegel zu π und es gilt:

- Ist $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_m^T x)$ dann existiert für alle Permutationen π ein $k \in \{1, \dots, m\}$ mit $f(x) = a_k^T x \quad \forall x \in K_\pi$.
- Sind die Vektoren a_1, \dots, a_m affin unabhängig, dann haben alle daraus gebildeten Permutationskegel die Dimension n . □

Aus den Permutationskegeln kann der sog. Morse-Fächer gebildet werden, ein vollständiger polyhedraler Fächer im \mathbb{R}^n . In Grzybowski, Pallaschke, u. Urbański (2004) werden dessen Eigenschaften näher untersucht.

²⁰⁾Einige der wichtigsten, in diesem Abschnitt benutzten Begriffe sind in Abschnitt A.2 erklärt.

Das folgende Ergebnis ist eine abgewandelte Variante der im Beweis von Theorem 3.1 in Bartels u. a. (1995) vorgestellten und bewiesenen Zerlegung des Anstiegskegels $K_+(f)$.

2.7.2 Lemma *Es sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^\top x, \dots, a_{n+1}^\top x)$ gegeben, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Dann kann \mathbb{R}^n so in Kegel K_i , $i \in \{1, \dots, t\}$ zerlegt werden, daß gilt:*

- (a) *Alle K_i sind simpliziale spitze Kegel und haben Dimension n .*
- (b) $\bigcup_{i=1}^t K_i = \mathbb{R}^n$.
- (c) *Für jedes $i \in \{1, \dots, t\}$ gilt entweder $K_i \subseteq \bar{K}_-(f)$ oder $K_i \subseteq \bar{K}_+(f)$.*
- (d) $\text{int}(K_i) \cap \text{int}(K_j) \neq \emptyset$ genau dann wenn $i = j$.
- (e) *Es existieren Indizes $j_1, \dots, j_t \in \{1, \dots, n+1\}$, so daß für alle $i \in \{1, \dots, t\}$ gilt:
 $f(x) = a_{j_i}^\top x \quad \forall x \in K_i$.*

BEWEIS Ausgangspunkt sind die Permutationskegel aus 2.7.1. Für jedes π werden nun

$$K_\pi^- := \text{cl}\{x \in K_\pi \mid f(x) < 0\}$$

$$K_\pi^+ := \text{cl}\{x \in K_\pi \mid f(x) > 0\}$$

gebildet. Offenbar ist K_π^- bzw. K_π^+ entweder leer oder ebenfalls ein konvexer n -dimensionaler Kegel, da f auf K_π linear ist. Nimmt man alle nicht-leeren K_π^- und K_π^+ so erhält man bereits eine Zerlegung des \mathbb{R}^n in Kegel, welche die Bedingungen (b)-(e) erfüllt. Sind darin noch nicht-spitze Kegel enthalten, so werden diese in endlich viele konvexe spitze n -dimensionale Kegel zerlegt (z. B. durch die von den Orthanten des \mathbb{R}^n vorgegebene Unterteilung). In einem weiteren Schritt trianguliert man die kompakte konvexe polyedrische Basis aller bis jetzt gebildeten Kegel. Die Kegelhülle der dabei entstehenden Simplizes liefert die gesuchte Zerlegung des \mathbb{R}^n , da nun auch Bedingung (a) erfüllt ist. \square

Ebenfalls in Anlehnung an Bartels u. a. (1995) werden nun mit Hilfe dieses Ergebnisses simpliziale Komplexe konstruiert, die homöomorph zu $\bar{S}_-(f)$, $\bar{S}_+(f)$ bzw. $S_0(f)$ sind.

2.7.3 Lemma *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.7.2 existieren endliche $(n-1)$ -dimensionale simpliziale Komplexe P , P_- und P_+ , sowie ein endlicher $(n-2)$ -dimensionaler simplizialer Komplex P_0 mit Realisierungen $|P|$, $|P_-|$, $|P_+|$ und $|P_0|$ im \mathbb{R}^n , so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- (a) P_- , P_+ und P_0 sind Teilkomplexe von P .
- (b) Alle Ecken von $|P|$ liegen auf der Einheitssphäre S^{n-1} .
- (c) $|P|$ ist homöomorph zu S^n .
- (d) $|P_-|$ ist homöomorph zu $\bar{S}_-(f)$ und $|P_+|$ ist homöomorph zu $\bar{S}_+(f)$.
- (e) $\bar{K}_-(f)$ ist die Kegelhülle von $|P_-|$ und $\bar{K}_+(f)$ die Kegelhülle von $|P_+|$.
- (f) $|P_0|$ ist homöomorph zu $S_0(f)$.

BEWEIS In der durch Lemma 2.7.2 gegebenen Zerlegung des \mathbb{R}^n können zu jedem darin enthaltenen Kegel K_i genau n linear unabhängige Vektoren der Länge 1 gefunden werden, deren konvexe Hülle den Kegel erzeugt, da die Kegel simplizial sind. Diese konvexe Hülle ist ein geometrisches $(n-1)$ -dimensionales Simplex. Die Vereinigung all dieser geometrischen Simplexe ergibt die geometrische Realisierung eines simplizialen Komplexes P . Dieser erfüllt nach Lemma 2.7.2 die geforderten Bedingungen.

Aufgrund von Eigenschaft (c) in Lemma 2.7.2 kann P folgendermaßen in P_- und P_+ zerlegt werden:

$$P_- := \{\sigma \in P \mid |\sigma| \subseteq \bar{K}_-(f)\}$$

$$P_+ := \{\sigma \in P \mid |\sigma| \subseteq \bar{K}_+(f)\}.$$

Offensichtlich ist die Projektion $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ eingeschränkt auf $|P_-|$ ein Homöomorphismus zwischen $|P_-|$ und $\bar{S}_-(f)$. Analoges gilt für $\bar{S}_+(f)$, womit die entsprechenden Bedingungen erfüllt sind. Daraus folgt mit Lemma 2.6.3 auch die Existenz von P_0 mit den geforderten Eigenschaften. □

2.8 Topologische Klassifikation für $n = 4$

In diesem Abschnitt wird die Untersuchung der topologischen Struktur des Abstiegskegels einer stetigen Selektion linearer Funktionen für den Spezialfall $n = 4$ vertieft. Mit den dabei gewonnenen Erkenntnissen wird es schließlich möglich sein, eine vollständige Klassifikation aller stetigen Selektionen von 5 linearen Funktionen anzugeben. Im folgenden sei immer $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$, so daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt.

Nach Lemma 2.6.3 ist $\bar{S}_-(f)$ im Falle $n = 4$ eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Dieser Rand ist gerade die geschlossene 2-dimensionale Mannigfaltigkeit $S_0(f)$.

Wegen Lemma 2.7.3 ist $\bar{S}_-(f)$ außerdem homöomorph zu einem endlichen $(n-1)$ -dimensionalen simplizialen Komplex und folglich ein endlicher $(n-1)$ -dimensionaler CW-Komplex. Von diesen ist bekannt, daß alle Homologiegruppen endlich erzeugt sind (d. h. $h_k(X) := \text{Rang } H_k(X) < \infty$ für alle k), und daß $H_k(X) = 0$ für $k > \dim X$ (siehe Lemma A.3.21). Daher kann in diesem Zusammenhang der Begriff der Euler-Charakteristik verwendet werden (siehe Definition A.3.22).

In Seifert u. Threlfall (1980), einem wichtigen Standardwerk zur Algebraischen Topologie, verstehen die Autoren unter einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit (mit Rand) eine wegzusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit (mit Rand) im hier verwendeten Sinne, welche zusätzlich ein endlicher CW-Komplex ist. Bei allen im folgenden aus Seifert u. Threlfall (1980) zitierten Aussagen ist daher zu beachten, daß sie auf Basis dieser engeren Definition einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit formuliert sind.

Nun ist $S_-(f)$ im allgemeinen nicht wegzusammenhängend, sondern besteht aus endlich vielen (Weg-)Zusammenhangskomponenten²¹⁾. Diese sind aufgrund der obigen Erläuterungen 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand im Sinne von Seifert u. Threlfall (1980). Der Rand einer solchen besteht aus einer oder mehreren geschlossenen Flächen²²⁾ (siehe Seifert u. Threlfall 1980, Seite 222, oben). Bei diesen handelt es sich folglich um Zusammenhangskomponenten von $S_0(f)$.

Die Einheitssphäre S^3 selbst ist eine orientierbare geschlossene 3-dimensionale Mannigfaltigkeit. Als 3-dimensionale Teilräume von S^3 sind die Zusammenhangskomponenten von $S_-(f)$ daher ebenfalls orientierbar. Es gilt der folgende Satz:

²¹⁾ Da die hier betrachteten Mengen alle in \mathbb{R}^n bzw. S^{n-1} eingebettet sind, sind die Eigenschaften zusammenhängend und wegzusammenhängend äquivalent.

²²⁾ 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten werden auch als Flächen bezeichnet

2.8.1 Theorem (siehe Seifert u. Threlfall 1980, Seite 222, Satz I)

Eine orientierbare 3-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand hat lauter orientierbare Randflächen. □

Also sind alle Zusammenhangskomponenten von $S_0(f)$ orientierbar. Im folgenden wird ausgenutzt, daß geschlossene Flächen bereits vollständig klassifiziert wurden.

2.8.2 Theorem (siehe Seifert u. Threlfall 1980, Seite 141, Hauptsatz der Flächentopologie)

Zwei geschlossene Flächen sind dann und nur dann homöomorph, wenn sie in Euler-Charakteristik und Orientierbarkeitscharakter übereinstimmen. Die allgemeinste orientierbare geschlossene Fläche ist die Kugel mit $p \geq 0$ Henkeln, die allgemeinste nicht-orientierbare geschlossene Fläche die Kugel mit $q \geq 1$ Kreuzhauben. □

Somit ist die i -te Zusammenhangskomponente von $S_0(f)$ homöomorph zu einer Kugel mit $p_i \geq 0$ Henkeln. Es folgen zwei weitere Aussagen über 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten mit Rand.

2.8.3 Theorem (siehe Seifert u. Threlfall 1980, Seite 223, (1) und Satz II)

Die Euler-Charakteristik einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit M mit Rand und die Euler-Charakteristik ihres Randes ∂M bestimmen einander umkehrbar eindeutig durch folgende Beziehung:

$$2 \cdot \mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(\partial M) \quad \square$$

2.8.4 Theorem (siehe Seifert u. Threlfall 1980, Seite 223, Satz IV)

Die erste Betti-Zahl²³⁾ einer orientierbaren 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Rand ist mindestens gleich der Summe der Henkelzahlen ihrer Randflächen. □

2.8.5 Korollar $S_0(f)$ ist entweder leer oder besteht aus $k \in \mathbb{N}$ Zusammenhangskomponenten $S_0(f)^1, \dots, S_0(f)^k$, so daß für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt: $S_0(f)^i$ ist eine Fläche vom Geschlecht p_i ²⁴⁾ ($0 \leq p_i < \infty$). Es gelten immer folgende Beziehungen:

$$\mathcal{X}(S_0(f)) = 2 \cdot \mathcal{X}(\bar{S}_-(f)) = 2 \cdot \mathcal{X}(\bar{S}_+(f)) , \quad (2.8)$$

$$h_1(\bar{S}_-(f)) \geq \sum_{i=1}^k p_i \quad , \quad h_1(\bar{S}_+(f)) \geq \sum_{i=1}^k p_i . \quad (2.9)$$

²³⁾siehe die Erläuterungen zur Homologietheorie in Abschnitt A.3.

²⁴⁾Ein topologischer Raum, der homöomorph zu einer Kugel mit p Henkeln ist, wird Fläche vom Geschlecht p genannt.

BEWEIS Zunächst wird gezeigt, daß die Theoreme 2.8.1, 2.8.3 und 2.8.4 auch für entsprechende Mannigfaltigkeiten mit endlich vielen Wegzusammenhangskomponenten gültig sind.

Bei Theorem 2.8.1 ist dies unmittelbar klar. Für die beiden anderen Theoreme bedient man sich der folgenden Aussage: Für die Homologiegruppen eines topologischen Raumes X mit den Wegzusammenhangskomponenten X_α gilt $H_n(X) \approx \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$ (siehe z. B. Hatcher 2002, Seite 109, Proposition 2.6).

Für topologische Räume, die ansonsten den Voraussetzungen der zu erweiternden Theoreme entsprechen, folgt hieraus:

$$h_n(X) = \sum_\alpha h_n(X_\alpha) .$$

Für die Euler-Charakteristik erhält man dann:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_\alpha h_n(X_\alpha) = \sum_\alpha \mathcal{X}(X_\alpha) ,$$

da in diesem Fall alle vorkommenden Summen endlich sind. Die Behauptung folgt durch Anwendung dieser beiden Gleichungen auf M und ∂M .

Die eigentlichen Aussagen des Korollars folgen direkt aus den gerade erweiterten Theoremen 2.8.1, 2.8.3 und 2.8.4 durch Anwendung auf $\bar{S}_-(f)$ (bzw. $\bar{S}_+(f)$) und dessen Rand $S_0(f)$, unter Einbeziehung von Lemma 2.6.3 und den Überlegungen der letzten Seiten. \square

2.8.6 Bemerkung Durch Umformen der Gleichungen (2.8) und (2.9) erhält man außerdem:

$$\mathcal{X}(\bar{S}_-(f)) = \mathcal{X}(\bar{S}_+(f)) \tag{2.10}$$

$$\sum_{i=1}^k p_i \leq \min\{h_1(\bar{S}_-(f)), h_1(\bar{S}_+(f))\} \tag{2.11}$$

2.8.7 Lemma Sind k und p_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ wie in Korollar 2.8.5 definiert, dann gilt für $f \notin \{f_{\min}, f_{\max}\}$:

$$k \geq \max\{h_0(\bar{S}_-(f)), h_0(\bar{S}_+(f))\} \tag{2.12}$$

$$k = \mathcal{X}(\bar{S}_-(f)) + \sum_{i=1}^k p_i = \mathcal{X}(\bar{S}_+(f)) + \sum_{i=1}^k p_i \tag{2.13}$$

BEWEIS Wegen $f \notin \{f_{\min}, f_{\max}\}$ ist sowohl $\bar{S}_-(f)$ als auch $\bar{S}_+(f)$ nicht-leer. Aufgrund von Lemma 2.6.3 folgt, daß jede Zusammenhangskomponente von $\bar{S}_-(f)$ mindestens eine Zusammenhangskomponente von $S_0(f)$ beinhaltet und diese nicht gleichzeitig Teilmenge einer weiteren Zusammenhangskomponente von $\bar{S}_-(f)$ sein kann.

Für einen beliebigen topologischen Raum X ist die 0-te Betti-Zahl $h_0(X)$ gerade gleich der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X (siehe z. B. Mayer 1989, Seite 127, Satz 2.28). Damit folgt:

$$k \geq h_0(\bar{S}_-(f)) .$$

Dieselbe Überlegung für $\bar{S}_+(f)$ liefert eine analoge Ungleichung, womit insgesamt die erste Behauptung folgt.

Die Euler-Charakteristik einer Fläche vom Geschlecht p ist gleich $2 - 2p$ (siehe Mayer 1989, Seite 222, Beispiel 3.4 (v)). Daher gilt:

$$\mathcal{X}(S_0(f)^i) = 2 - 2p_i \quad \forall i \in \{1, \dots, k\} .$$

Also ist

$$\mathcal{X}(S_0(f)) = \sum_{i=1}^k (2 - 2p_i) = 2(k - \sum_{i=1}^k p_i) ,$$

woraus mit Gleichung (2.8) folgt:

$$k = \mathcal{X}(\bar{S}_-(f)) + \sum_{i=1}^k p_i = \mathcal{X}(\bar{S}_+(f)) + \sum_{i=1}^k p_i .$$

□

Aufgrund des folgenden Resultats aus der Algebraischen Topologie muß bei Betrachtung der Homologiegruppen nicht zwischen $\bar{S}_-(f)$ und $S_-(f)$ unterschieden werden:

2.8.8 Theorem (siehe Spanier 1966, Seite 297, unten) Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ∂X . Dann ist $X \setminus \partial X$ ein schwacher Deformationsretrakt von X .

2.8.9 Bemerkung Der Begriff „schwacher Deformationsretrakt“ ist in Spanier (1966, Seite 30, 3. Absatz) wie folgt definiert: Ein Teilraum $A \subseteq X$ heißt schwacher Deformationsretrakt von X , wenn die Inklusion $i : A \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Aus Theorem 2.8.8 folgt somit unmittelbar auch $X \setminus \partial X \simeq X$.

2.8.10 Korollar *Es gilt folgende Kette von Homotopieäquivalenzen:*

$$\mathcal{N}(f) \simeq K_-(f) \simeq S_-(f) \simeq \bar{S}_-(f) \simeq \bar{K}_-(f).$$

Folglich sind für jedes $q \in \mathbb{N}_0$ die Homologiegruppen $H_q(\cdot)$ all dieser topologischen Räume zueinander isomorph.

BEWEIS Die Homotopieäquivalenzen folgen aus Theorem 2.5.10, Lemma 2.6.2, Lemma 2.6.3 und Bemerkung 2.8.9. Die zweite Aussage resultiert aus der Homotopieinvarianz der Homologiegruppen (siehe Theorem A.3.14). □

Um einen Zusammenhang zwischen den Homologiegruppen von $S_-(f)$ und $S_+(f)$ herzustellen, wird das folgende bekannte Theorem benutzt (siehe Hatcher 2002, Seite 254, Theorem 3.44).

2.8.11 Theorem (Alexander-Dualität)

Sei K ein kompakter, lokal zusammenziehbarer, nicht-leerer, echter Teilraum von S^n . Dann gilt:

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus K) \approx \tilde{H}^{n-q-1}(K) \quad \text{für alle } q.$$

2.8.12 Korollar *Durch die Homologiegruppen von $S_-(f)$ sind jene von $S_+(f)$ eindeutig bestimmt.*

BEWEIS Wegen Theorem 2.8.11 und Korollar 2.8.10 gilt:

$$\tilde{H}_q(S_+(f)) = \tilde{H}_q(S^n \setminus \bar{S}_-(f)) \approx \tilde{H}^{n-q-1}(\bar{S}_-(f)) \approx \tilde{H}^{n-q-1}(S_-(f))$$

Die Kohomologiegruppen eines Raumes X sind eindeutig durch dessen Homologiegruppen bestimmt (siehe Hatcher 2002, Seite 195, Theorem 3.2) und ebenso bestimmen sich (Ko-)Homologiegruppen H und reduzierte (Ko-)Homologiegruppen \tilde{H} gegenseitig, womit die Behauptung folgt. □

Mit Hilfe von Korollar 2.5.11(d) lassen sich systematisch alle möglichen Homologiegruppen, welche $S_-(f)$ jemals haben kann, bestimmen: Dazu werden alle den dort genannten Voraussetzungen entsprechenden Teilkomplexe des Δ^n untersucht und deren Homologiegruppen bestimmt. Dies wurde mit Hilfe eines eigens erstellten Computerprogramms²⁵⁾ für $n = 4$ durchgeführt, dessen Ergebnis in Tabelle 2.3 on page 69 zu sehen ist. Daß dabei die Homologiegruppen H_q für $q > 3$ alle Null sein müssen wurde bereits erwähnt. Außerdem ergab das Computerprogramm, daß alle möglichen Homologiegruppen torsionsfrei sind. Aus diesen Gründen sind alle vorkommenden Homologiegruppen eindeutig durch

²⁵⁾Zur Berechnung der Homologiegruppen von simplizialen Komplexen wurde das frei verfügbare Programmpaket „MOISE“ von R. Andrew Hicks verwendet.

ihre ersten 4 Bettizahlen beschrieben und daher in Tabelle 2.3 in dieser Form angegeben. Zur besseren Unterscheidung von anderen Objekten werden Bettizahlen h_0, \dots, h_q eines Raumes im folgenden in eckige Klammern gesetzt. In Tabelle 2.3 sind zusätzlich die jeweils zugehörigen Homologiegruppen von $S_+(f)$ ²⁶⁾ in derselben Art angegeben, welche nach Korollar 2.8.12 in jeder Zeile der Tabelle eindeutig bestimmt sind.

Die Homologiegruppen von $S_-(f)$ bzw. $S_+(f)$ sind somit immer durch eine Bettizahlen-Sequenz, welche aus der nachfolgenden 26-elementigen Menge stammt, gegeben.

$$\{ [1, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [1, 0, 0, 1], [1, 1, 0, 0], [1, 2, 0, 0], [1, 3, 0, 0], [1, 4, 0, 0], \\ [1, 5, 0, 0], [1, 6, 0, 0], [1, 0, 1, 0], [2, 0, 0, 0], [2, 0, 1, 0], [1, 1, 1, 0], [2, 1, 0, 0], \\ [1, 2, 1, 0], [2, 2, 0, 0], [1, 3, 1, 0], [2, 3, 0, 0], [1, 0, 2, 0], [3, 0, 0, 0], [1, 1, 2, 0], \\ [3, 1, 0, 0], [1, 0, 3, 0], [4, 0, 0, 0], [1, 0, 4, 0], [5, 0, 0, 0] \}$$

Im nächsten Schritt soll gezeigt werden, daß aus der Isomorphie der Homologiegruppen von $S_-(f)$ und $S_-(g)$ die Homöomorphie von $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_-(g)$ folgt. Im Beweis hierzu werden 17 Fälle betrachtet, deren laufende Nummer in der ersten Spalte von Tabelle 2.3 angegeben ist.

Zuvor wird noch ein Lemma, welches die topologische Struktur von $S_-(f)$ und $S_+(f)$ im Fall mehrerer Zusammenhangskomponenten einschränkt, benötigt.

2.8.13 Lemma *Sowohl $S_-(f)$ als auch $S_+(f)$ haben maximal eine nicht-zusammenziehbare Zusammenhangskomponente.*

BEWEIS Nach Theorem 2.5.10 und Korollar 2.5.11 hat $S_-(f)$ denselben Homotopietyp wie ein Teilkomplex des 4-dimensionalen Standardsimplex Δ^4 . Ein knotenminimaler simplizialer Komplex mit zwei nicht-zusammenziehbaren Zusammenhangskomponenten besteht offensichtlich aus der Vereinigung der 1-dimensionalen Skelette zweier disjunkter Kopien von Δ^2 . Dieser hat aber sechs Ecken und kann somit nicht als Teilkomplex in Δ^4 eingebettet werden, da Δ^4 nur fünf Ecken hat. Folglich hat jeder Teilkomplex des Δ^4 höchstens eine Zusammenhangskomponente, die nicht-zusammenziehbar ist. Für $S_+(f)$ verläuft der Beweis wegen Bemerkung 2.5.12 völlig analog. □

²⁶⁾ Diese lassen sich nach Bemerkung 2.5.12 ganz analog berechnen.

2 Stetige Selektionen linearer Funktionen

Fall Nr.	Bettizahlen $[h_i(S_-(f))]_{i=0,\dots,3}$	Bettizahlen $[h_i(S_+(f))]_{i=0,\dots,3}$	$N_i, i \in \{1, \dots, s\}$ einer Beispielfunktion $f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x$
1	[1, 0, 0, 0]	[1, 0, 0, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {2, 4, 5}
2	[0, 0, 0, 0]	[1, 0, 0, 1]	{1, 2, 3, 4, 5}
2	[1, 0, 0, 1]	[0, 0, 0, 0]	{1}, {2}, {3}, {4}, {5}
3	[1, 1, 0, 0]	[1, 1, 0, 0]	{1}, {2}, {3, 4, 5}
4	[1, 2, 0, 0]	[1, 2, 0, 0]	{1}, {2, 3}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}
5	[1, 3, 0, 0]	[1, 3, 0, 0]	{1}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}
6	[1, 4, 0, 0]	[1, 4, 0, 0]	{1, 2}, {3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}
7	[1, 5, 0, 0]	[1, 5, 0, 0]	{1, 2}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}
8	[1, 6, 0, 0]	[1, 6, 0, 0]	{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}
9	[1, 0, 1, 0]	[2, 0, 0, 0]	{1}, {2}, {3}, {4, 5}
9	[2, 0, 0, 0]	[1, 0, 1, 0]	{1}, {2, 3, 4, 5}
10	[2, 0, 1, 0]	[2, 0, 1, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3, 4, 5}
11	[1, 1, 1, 0]	[2, 1, 0, 0]	{1}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4, 5}
11	[2, 1, 0, 0]	[1, 1, 1, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}
12	[1, 2, 1, 0]	[2, 2, 0, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}
12	[2, 2, 0, 0]	[1, 2, 1, 0]	{1, 2}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}
13	[1, 3, 1, 0]	[2, 3, 0, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3, 4}, {2, 3, 5}, {2, 4, 5}, {3, 4, 5}
13	[2, 3, 0, 0]	[1, 3, 1, 0]	{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4}, {1, 3, 5}, {1, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}
14	[1, 0, 2, 0]	[3, 0, 0, 0]	{1}, {2}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}
14	[3, 0, 0, 0]	[1, 0, 2, 0]	{1, 2}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}
15	[1, 1, 2, 0]	[3, 1, 0, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4, 5}
15	[3, 1, 0, 0]	[1, 1, 2, 0]	{1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 2, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}
16	[1, 0, 3, 0]	[4, 0, 0, 0]	{1}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}
16	[4, 0, 0, 0]	[1, 0, 3, 0]	{1, 2, 3}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}
17	[1, 0, 4, 0]	[5, 0, 0, 0]	{1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 3}, {2, 4}, {2, 5}, {3, 4}, {3, 5}, {4, 5}
17	[5, 0, 0, 0]	[1, 0, 4, 0]	{1, 2, 3, 4}, {1, 2, 3, 5}, {1, 2, 4, 5}, {1, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5}

Tabelle 2.3: Alle auftretenden Bettizahlen von Ab- und Anstiegskegel für stetige Selektionen fünf linearer Funktionen

2.8.14 Theorem Seien $f, g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_5^T x)$ zwei Funktionen, so daß für beide gilt: $\hat{I}(0) = \{1, \dots, 5\}$ und 0 ist kritischer Punkt, der (ND1) erfüllt.

Gilt ferner

$$h_i(S_-(f)) = h_i(S_-(g)) \quad \forall i \in \{0, \dots, 3\}$$

oder

$$h_i(S_+(f)) = h_i(S_+(g)) \quad \forall i \in \{0, \dots, 3\}$$

dann folgt

$$\bar{S}_-(f) \cong \bar{S}_-(g) \quad \text{und} \quad \bar{S}_+(f) \cong \bar{S}_+(g).$$

BEWEIS Im folgenden werden nur Eigenschaften von $\bar{S}_-(f)$ bzw. $\bar{S}_+(f)$ benutzt, die für beide Mengen analog gelten. Daher ist es ausreichend, die 26 durch Tabelle 2.3 gegebenen Möglichkeiten in 17 Fällen zusammenzufassen und zwar derart, wie dies durch die Nummerierung in der ersten Tabellenspalte angezeigt ist. Dabei treten zwei Konstellationen auf (siehe Einträge in den Spalten 2 und 3 der Tabelle):

- Ein Fall besteht aus zwei Kombinationen von Homologiegruppen, die durch Vertauschen der Bettizahlen von $S_-(f)$ und $S_+(f)$ auseinander hervorgehen. Ist die Aussage des Lemmas für eine der beiden Kombinationen bewiesen, so folgt sie automatisch auch für die andere Kombination, indem im Beweis lediglich die Rollen von $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_+(f)$ vertauscht werden.
- Ein Fall besteht aus einer Kombination isomorpher Homologiegruppen. Ist hier die Aussage für $\bar{S}_-(f)$ bewiesen, so folgt der Beweis für $\bar{S}_+(f)$ ebenfalls durch Vertauschen von $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_+(f)$.

Ist im folgenden die zugrundeliegende Funktion beliebig, so verzichten wir der Übersichtlichkeit halber auf deren Angabe und schreiben lediglich \bar{S}_- und \bar{S}_+ . Dann bezeichnet S_0 die zugehörige Nullstellenmenge. k und p_i , $i \in \{1, \dots, k\}$ geben weiterhin die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von S_0 und das Geschlecht jeder Zusammenhangskomponente an.

Zur Vereinfachung wird im Beweis die folgende anschauliche Formulierung verwendet: Ist $D \subseteq \text{int}(M)$ eine abgeschlossene 3-Zelle, dann bezeichnen wir $\text{cl}(M \setminus D)$ als „Menge M mit Loch“. Allgemein soll „aus dem Inneren von M wird X herausgeschnitten“ die Bildung von $\text{cl}(M \setminus X)$ für ein abgeschlossenes $X \subseteq \text{int}(M)$ beschreiben.

Die folgenden Mengen werden sich als grundlegende Bausteine von \bar{S}_- bzw. \bar{S}_+ herausstellen:

- Der Einheitsball $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$. Homöomorphe Bilder von D^3 nennt man

3-Zellen. Die Homologiegruppen einer 3-Zelle sind durch die Bettizahlen $[h_i(D^3)]_{i=0,\dots,3} = [1, 0, 0, 0]$ bestimmt.

- Der Standard-Annulus $A^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0,5 \leq \|x\| \leq 1\}$, dessen homöomorphe Bilder als 3-Annuli bezeichnet werden. Die Homologiegruppen sind durch die Bettizahlen $[h_i(A^3)]_{i=0,\dots,3} = [1, 0, 1, 0]$ bestimmt.
- (Orientierbare) Henkelkörper vom Geschlecht h , die dadurch entstehen, daß man an eine 3-dimensionale Vollkugel h Vollhenkel ansetzt (Das Ansetzen eines Henkels bedeutet formal das Identifizieren zweier disjunkter 2-Zellen auf dem Rand der Vollkugel, so daß die Orientierbarkeit erhalten bleibt.). Der Rand eines Henkelkörpers vom Geschlecht h ist eine Fläche vom Geschlecht h . Die Homologiegruppen eines Henkelkörpers H_h vom Geschlecht h sind durch $[h_i(H_h)]_{i=0,\dots,3} = [1, h, 0, 0]$ bestimmt.

Annulus und Henkelkörper werden bei Bedarf noch dadurch modifiziert, daß man sie, wie oben beschrieben, mit Löchern versieht²⁷⁾. Ist X eine der aufgezählten Mengen, so gilt $h_2(X \text{ mit Loch}) = h_2(X) + 1$, während die übrigen Homologiegruppen unverändert bleiben. So hat beispielsweise ein Henkelkörper vom Geschlecht 3 mit zwei Löchern die Bettizahlen $[1, 3, 2, 0]$.

Bildet man in S^3 das Komplement eines Henkelkörpers vom Geschlecht h , dessen Henkel weder in sich noch untereinander verknotet sind, so ist die abgeschlossene Hülle davon wieder ein Henkelkörper vom Geschlecht h . Zwei Henkelkörper sind genau dann homöomorph, wenn sie gleiches Geschlecht haben (siehe Hempel 1976, Seite 15, Theorem 2.2). Wenn nun (eine Zusammenhangskomponente von) S_0 eine Fläche vom Geschlecht h ist, so kann dies aufgrund der systematischen Entstehung von $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_+(f)$ aus endlich vielen Projektionen von konvexen 4-dimensionalen Kegeln auf S^3 und der Homotopieäquivalenz von $\bar{S}_-(f)$ bzw. $\bar{S}_+(f)$ zu Teilkomplexen des Δ^4 mit den Eigenschaften von Korollar 2.5.11 nur dadurch zustande kommen, daß die abgeschlossenen Hüllen der Zusammenhangskomponenten von $S^3 \setminus S_0$ zwei Henkelkörper vom Geschlecht h ohne oben genannte Verknotungen sind. Diese beiden Henkelkörper bilden zusammen mit S_0 ein sogenanntes Heegaard-Splitting von S^3 (für eine Definition siehe z. B. Hempel 1976).

Aufgrund von Lemma 2.7.3 sind alle Zusammenhangskomponenten von \bar{S}_- und \bar{S}_+ homöomorph zu Teilkomplexen eines endlichen simplizialen Komplexes, der homöomorph zu S^3 ist. Daher können wir Sätze aus der p.l. Topologie²⁸⁾ auf sie anwenden. Ist z. B. bekannt, daß sowohl $\bar{S}_-(f)$ als auch $\bar{S}_-(g)$ aus demselben der obigen Bausteine durch das Herausschneiden derselben Anzahl von Löchern entsteht, so folgt ihre Homöomor-

²⁷⁾ Ein 3-Annulus ist bereits nichts anderes als eine 3-Zelle mit Loch, erhält aber hier der Übersichtlichkeit halber eine separate Bezeichnung.

²⁸⁾ p.l. ist eine Abkürzung für die englische Bezeichnung „piecewise linear“.

phie einfach durch mehrmaliges Anwenden von Theorem A.3.6. Daher wird im weiteren Verlauf für jeden Fall gezeigt, daß jede Zusammenhangskomponente von \bar{S}_- bzw. \bar{S}_+ eindeutig einem der obigen Bausteine mit einer bestimmten Zahl von Löchern entspricht, womit die Behauptung bewiesen ist.

Fall 1: ($S_- : [1, 0, 0, 0]$, $S_+ : [1, 0, 0, 0]$)

$$\sum_{i=1}^k p_i \stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{0, 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i : p_i = 0$$

$$k \stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i = 1 + 0 = 1$$

D. h. S_0 ist eine zusammenhängende geschlossene Fläche vom Geschlecht 0 und folglich homöomorph zur Einheitssphäre S^2 . Nun stellen wir uns die Sphäre S^3 als die Ein-Punkt-Kompaktifizierung des \mathbb{R}^3 vor, mit der eingebetteten 2-Sphäre S_0 , so daß diese nicht den Punkt ∞ enthält. Dann hat das Komplement von S_0 zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt und eine unbeschränkt²⁹⁾ ist. Die abgeschlossene Hülle der beschränkten Komponente ist offenbar eine 3-Zelle. Und es ist leicht zu erkennen, daß durch die Ein-Punkt-Kompaktifizierung auch die unbeschränkte Komponente zu einer 3-Zelle wird. Somit ist \bar{S}_- homöomorph zum (abgeschlossenen) Einheitsball D^3 . Hat man also zwei Funktionen f und g gegeben, deren Abstiegskegel die angegebenen Bettizahlen aufweisen, dann sind $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_-(g)$ homöomorph, da sie beide homöomorph zu D^3 sind.

Fall 2: ($S_- : [1, 0, 0, 1]$, $S_+ : [0, 0, 0, 0]$)

In diesem Fall ist nichts zu zeigen, da f_{\min} die einzige Funktion ist, für welche der Anstiegskegel leer ist, und entsprechend f_{\max} die einzige Funktion ist, für welche der Abstiegskegel leer ist.

²⁹⁾ Die Attribute beschränkt und unbeschränkt beziehen sich lediglich auf die anschauliche Darstellung im \mathbb{R}^3 vor der Ein-Punkt-Kompaktifizierung. Tatsächlich sind natürlich beide Komponenten als Teilmengen von S^3 beschränkt.

Fall 3: $(S_- : [1, 1, 0, 0], S_+ : [1, 1, 0, 0])$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i &\stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{1, 1\} = 1 \\ k &\stackrel{(2.12)}{\geq} \max\{h_0(S_-), h_0(S_+)\} = \max\{1, 1\} = 1 \\ k &\stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i \leq 0 + 1 = 1 \\ &\Rightarrow k = 1, p_1 = 1 \end{aligned}$$

Das bedeutet: S_0 ist eine Fläche vom Geschlecht 1, also ein Torus. Wie oben erläutert sind dann die abgeschlossenen Hülle der beiden Komponenten von $S^3 \setminus S_0$ Henkelkörper vom Geschlecht 1. Folglich ist \bar{S}_- immer ein Henkelkörper vom Geschlecht 1.

Fall 4: $(S_- : [1, 2, 0, 0], S_+ : [1, 2, 0, 0])$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i &\stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{2, 2\} = 2 \\ k &\stackrel{(2.12)}{\geq} \max\{h_0(S_-), h_0(S_+)\} = \max\{1, 1\} = 1 \\ k &\stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i \leq -1 + 2 = 1 \\ &\Rightarrow k = 1, p_1 = 2 \end{aligned}$$

Hier kann analog zu Fall 3 argumentiert werden, nur daß S_0 nun ein Doppeltorus (Fläche vom Geschlecht 2) und \bar{S}_- immer ein Henkelkörper vom Geschlecht 2 ist.

Fall 5: $(S_- : [1, 3, 0, 0], S_+ : [1, 3, 0, 0])$ Analog zu Fall 4 ergibt sich:

$$k = 1, p_1 = 3.$$

S_0 ist eine Fläche vom Geschlecht 3 und \bar{S}_- ein Henkelkörper vom Geschlecht 3.

Fall 6: $(S_- : [1, 4, 0, 0], S_+ : [1, 4, 0, 0])$ Analog zu Fall 4 ergibt sich:

$$k = 1, p_1 = 4.$$

S_0 ist eine Fläche vom Geschlecht 4 und \bar{S}_- ein Henkelkörper vom Geschlecht 4.

Fall 7: ($S_- : [1, 5, 0, 0]$, $S_+ : [1, 5, 0, 0]$) Analog zu Fall 4 ergibt sich:

$$k = 1, p_1 = 5.$$

S_0 ist eine Fläche vom Geschlecht 5 und \bar{S}_- ein Henkelkörper vom Geschlecht 5.

Fall 8: ($S_- : [1, 6, 0, 0]$, $S_+ : [1, 6, 0, 0]$) Analog zu Fall 4 ergibt sich:

$$k = 1, p_1 = 6.$$

S_0 ist eine Fläche vom Geschlecht 6 und \bar{S}_- ein Henkelkörper vom Geschlecht 6.

Fall 9: ($S_- : [1, 0, 1, 0]$, $S_+ : [2, 0, 0, 0]$)

$$\sum_{i=1}^k p_i \stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{0, 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i : p_i = 0$$

$$k \stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i = 2 + 0 = 2$$

$$\Rightarrow \quad k = 2, p_1 = p_2 = 0$$

Hier besteht S_0 aus zwei Zusammenhangskomponenten, die jeweils homöomorph zur Kugel S^2 sind. Wiederum wenden wir die Vorgehensweise von Fall 1 an. Die erste Komponente von S_0 teilt, wie wir dort gesehen haben, S^3 in zwei 3-Zellen. Daher spielt es keine Rolle, in welcher dieser beiden die zweite Komponente von S_0 liegt. Stellen wir uns vor, sie liege in der beschränkten 3-Zelle, so sieht man, daß nun insgesamt zwei 3-Zellen und ein 3-Annulus entstehen, wobei die 3-Zellen disjunkt sind und jeweils einen gemeinsamen Rand mit dem 3-Annulus haben.

An den gegebenen Bettizahlen kann man ablesen, daß \bar{S}_- immer der 3-Annulus ist und \bar{S}_+ gerade aus den beiden disjunkten 3-Zellen bestehen muß.

Fall 10: ($S_- : [2, 0, 1, 0]$, $S_+ : [2, 0, 1, 0]$)

$$\sum_{i=1}^k p_i \stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{0, 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i : p_i = 0$$

$$k \stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i = 3 + 0 = 3$$

$$\Rightarrow \quad k = 3, p_1 = p_2 = p_3 = 0$$

S_0 besteht aus drei 2-Sphären und die Konstruktion des vorigen Falls kann fortge-

setzt werden. Bezüglich der Lage der dritten 2-Sphäre müssen nun allerdings zwei Möglichkeiten unterschieden werden:

- (a) Innerhalb des 3-Annulus: Es entstehen insgesamt drei 3-Zellen und ein 3-Annulus mit einem Loch. Aufgrund der gegebenen 0-ten Bettizahlen muß \bar{S}_- oder \bar{S}_+ aus zwei der drei 3-Zellen bestehen, woraus folgt, daß die 2-te Bettizahl dieser Menge null wäre. Somit ergibt sich ein Widerspruch zu den vorgegebenen Bettizahlen. Diese Konstellation kann also hier nicht auftreten.
- (b) Innerhalb einer der 3-Zellen: Es entstehen zwei disjunkte 3-Zellen und zwei 3-Annuli, welche einen Rand gemeinsam haben und ihren jeweils anderen mit einer der beiden 3-Zellen teilen. Somit müssen sowohl \bar{S}_- als auch \bar{S}_+ jeweils aus einem der beiden 3-Annuli und der nicht mit ihm inzidenten 3-Zelle bestehen. Dies liefert die gegebenen Bettizahlen und ist eindeutig.

Fall 11: ($S_- : [1, 1, 1, 0]$, $S_+ : [2, 1, 0, 0]$)

$$\sum_{i=1}^k p_i \stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{1, 1\} = 1$$

$$k \stackrel{(2.12)}{\geq} \max\{h_0(S_-), h_0(S_+)\} = \max\{1, 2\} = 2$$

$$k \stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i \leq 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow k = 2, \text{ o. B. d. A. } p_1 = 1, p_2 = 0$$

D. h. S_0 besteht aus einem Torus und einer 2-Sphäre. Wie oben beschrieben teilt ein Torus S^3 in zwei Henkelkörper vom Geschlecht 1. Die Sphäre liegt in einem dieser Henkelkörper und so entstehen insgesamt eine 3-Zelle, ein Henkelkörper vom Geschlecht 1 und ein Henkelkörper vom Geschlecht 1 mit Loch. Dabei sind die beiden ersteren disjunkt und der letztere hat jeweils einen gemeinsamen Rand mit ihnen.

Aus den gegebenen Bettizahlen ergibt sich damit zwingend, daß \bar{S}_- der Henkelkörper vom Geschlecht 1 ist, aus dessen Inneren eine 3-Zelle entfernt wurde. Die Vereinigung der 3-Zelle mit dem unveränderten Henkelkörper ergibt \bar{S}_+ .

Fall 12: ($S_- : [1, 2, 1, 0]$, $S_+ : [2, 2, 0, 0]$)

$$\sum_{i=1}^k p_i \stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{2, 2\} = 2$$

$$k \stackrel{(2.12)}{\geq} \max\{h_0(S_-), h_0(S_+)\} = \max\{1, 2\} = 2$$

$$k \stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i \leq 0 + 2 = 2$$

$$\Rightarrow k = 2, \sum_{i=1}^k p_i = 2$$

(a) $p_1 = p_2 = 1$.

Dann bestünde S_0 aus zwei Tori. Der erste teilt S^3 wie in Fall 3 in zwei Henkelkörper vom Geschlecht 1. Der zweite schneidet aus einem der beiden noch einen weiteren Henkelkörper vom Geschlecht 1 aus. Dies ergibt zwei disjunkte Henkelkörper vom Geschlecht 1 und ein Henkelkörper vom Geschlecht 1, aus dessen Inneren ein ebensolcher ausgeschnitten wurde. Daraus folgt zwingend, daß \bar{S}_+ aus den beiden ersten besteht. Dies ist aber ein Widerspruch zu Lemma 2.8.13, da \bar{S}_+ somit zwei nicht-azyklische Zusammenhangskomponenten besäße. Diese Konstellation kann daher in diesem Fall nicht auftreten.

(b) O. B. d. A. $p_1 = 2, p_2 = 0$

S_0 besteht aus einem Doppeltorus, der wie in Fall 4 die Einheitssphäre S^3 in zwei Henkelkörper vom Geschlecht 2 aufteilt, und einer 2-Sphäre, die in einem der beiden Henkelkörper liegt. Somit entstehen eine 3-Zelle, ein Henkelkörper vom Geschlecht 2 und ein Henkelkörper vom Geschlecht 2 mit Loch. Da nur die beiden ersten disjunkt sind, müssen sie zusammen \bar{S}_+ bilden, und der letztere ist \bar{S}_- . Man erhält die vorgegebenen Bettizahlen.

Fall 13: ($S_- : [1, 3, 1, 0]$, $S_+ : [2, 3, 0, 0]$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i &\stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{3, 3\} = 3 \\ k &\stackrel{(2.12)}{\geq} \max\{h_0(S_-), h_0(S_+)\} = \max\{1, 2\} = 2 \\ k &\stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i \leq -1 + 3 = 2 \\ &\Rightarrow k = 2, \sum_{i=1}^k p_i = 3 \end{aligned}$$

(a) O. B. d. A. $p_1 = 2, p_2 = 1$

Ganz analog zu Fall 12 (a) erhält man einen Widerspruch zu Lemma 2.8.13, weshalb diese Konstellation hier nicht eintreten kann.

(b) O. B. d. A. $p_1 = 3, p_2 = 0$

Wie in Fall 12 (b) wird gefolgert: \bar{S}_- ist ein Henkelkörper vom Geschlecht 3, aus dessen Innerem eine 3-Zelle herausgeschnitten wurde und \bar{S}_+ ist die disjunkte Vereinigung einer 3-Zelle und eines Henkelkörpers vom Geschlecht 3. Dies entspricht den gegebenen Bettizahlen.

Fall 14: ($S_- : [1, 0, 2, 0]$, $S_+ : [3, 0, 0, 0]$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i &\stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{0, 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i : p_i = 0 \\ k &\stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i = 3 + 0 = 3 \\ &\Rightarrow k = 3, p_1 = p_2 = p_3 = 0 \end{aligned}$$

Genau wie in Fall 10 besteht S_0 aus drei 2-Sphären. Dort wurden zwei Konstellationen diskutiert, die nun mit den hier gegebenen Bettizahlen verglichen werden müssen. Es ist leicht zu sehen, daß (b) hier nicht vorkommen kann und mit (a) ergibt sich: \bar{S}_- ist ein 3-Annulus mit Loch und \bar{S}_+ besteht aus drei disjunkten 3-Zellen.

Fall 15: ($S_- : [1, 1, 2, 0]$, $S_+ : [3, 1, 0, 0]$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i &\stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{1, 1\} = 1 \\ k &\stackrel{(2.12)}{\geq} \max\{h_0(S_-), h_0(S_+)\} = \max\{1, 3\} = 3 \\ k &\stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i \leq 2 + 1 = 3 \\ \Rightarrow \quad k &= 3, \text{ o. B. d. A. } p_1 = 1, p_2 = p_3 = 0 \end{aligned}$$

S_0 besteht aus einem Torus und zwei 2-Sphären. Wir betrachten das Ergebnis von Fall 11 (3-Zelle, Henkelkörper vom Geschlecht 1 und Henkelkörper vom Geschlecht 1 mit Loch). Darin muß noch die zweite 2-Sphäre plaziert werden.

- (a) Im unveränderten Henkelkörper vom Geschlecht 1: Es entstehen zwei 3-Zellen und zwei Henkelkörper vom Geschlecht 1 mit Loch. Von diesen sind aber immer höchstens zwei disjunkt, weshalb nicht, wie gefordert, ein \bar{S}_+ mit drei Zusammenhangskomponenten gebildet werden kann. Diese Konstellation kann hier somit nicht auftreten.
- (b) In der 3-Zelle: Diese zerfällt dadurch in einen 3-Annulus und eine 3-Zelle, die beiden anderen Mengen bleiben unverändert. Wie in (a) sind aber auch hier keine drei Mengen disjunkt.
- (c) Im Henkelkörper vom Geschlecht 1 mit Loch: Man erhält zwei 3-Zellen, einen Henkelkörper vom Geschlecht 1 und einen Henkelkörper vom Geschlecht 1 mit zwei Löchern. Nur die drei ersteren sind disjunkt, müssen also \bar{S}_+ bilden und letzterer wird \bar{S}_- . Dies ergibt genau die vorgegebenen Bettizahlen.

Fall 16: ($S_- : [1, 0, 3, 0]$, $S_+ : [4, 0, 0, 0]$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k p_i &\stackrel{(2.11)}{\leq} \min\{h_1(S_-), h_1(S_+)\} = \min\{0, 0\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i : p_i = 0 \\ k &\stackrel{(2.13)}{=} \mathcal{X}(S_-) + \sum_{i=1}^k p_i = 4 + 0 = 4 \\ \Rightarrow \quad k &= 4, \quad p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 0 \end{aligned}$$

Es wird Fall 14 fortgesetzt. Man kann sich leicht überlegen, daß ein \bar{S}_+ mit vier azyklischen Zusammenhangskomponenten nur erhalten werden kann, indem man die vierte

2-Sphäre in den 3-Annulus mit Loch legt. \bar{S}_+ besteht dann aus vier disjunkten 3-Zellen und \bar{S}_- ist ein 3-Annulus aus dessen Inneren zwei disjunkte 3-Zellen herausgeschnitten wurden.

Fall 17: ($S_- : [1, 0, 4, 0]$, $S_+ : [5, 0, 0, 0]$) Analog zu Fall 16 erhält man:

$$\Rightarrow k = 5, p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0.$$

Unter Fortführung der Argumentation von Fall 16 ergibt sich: \bar{S}_+ besteht aus fünf disjunkten 3-Zellen und \bar{S}_- ist ein 3-Annulus aus dessen Inneren drei disjunkte 3-Zellen herausgeschnitten wurden. □

Dieses Ergebnis läßt vermuten, daß alleine durch die vier Bettizahlen von $\bar{S}_-(f)$ bzw. $\bar{S}_+(f)$ bereits der topologische Typ von f festgelegt sein könnte. Bevor wir beweisen, daß diese Vermutung tatsächlich richtig ist und damit eine vollständige Klassifikation stetiger Selektionen von fünf linearen Funktionen angegeben werden kann, muß noch ein Fall separat behandelt werden, da die später eingesetzte Beweistechnik bei diesem nicht unmittelbar anwendbar ist. Es handelt sich um den Fall 10 aus Tabelle 2.3.

2.8.15 Lemma *Es seien die Vektoren*

$$e_1, \dots, e_n, e_{n+1} = - \sum_{i=1}^n e_i$$

im \mathbb{R}^n gegeben, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor des \mathbb{R}^n bezeichne. Sei außerdem π eine beliebige Permutation der Zahlen $\{1, \dots, n+1\}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, für die gilt:

$$Ae_i = e_{\pi(i)}, \quad i \in \{1, \dots, n+1\}.$$

BEWEIS Da jeweils n der gegebenen Vektoren e_1, \dots, e_{n+1} linear unabhängig sind, ist bereits durch die Zuordnung

$$e_i \mapsto e_{\pi(i)}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

eine eindeutige lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmt. Es bleibt zu zeigen, daß auch gilt: $Ae_{n+1} = e_{\pi(n+1)}$.

(a) Ist $\pi(n+1) = n+1$ dann folgt:

$$Ae_{n+1} = A\left(- \sum_{i=1}^n e_i\right) = - \sum_{i=1}^n Ae_i = - \sum_{i=1}^n e_{\pi(i)} = - \sum_{i=1}^n e_i = e_{n+1} = e_{\pi(n+1)}.$$

(b) Ist $\pi(n+1) = k < n+1$ dann folgt:

$$Ae_{n+1} \stackrel{(s.o.)}{=} - \sum_{i=1}^n e_{\pi(i)} = -e_{n+1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n e_i = e_k = e_{\pi(n+1)} .$$

□

Nun wird gezeigt, daß stetige Selektionen der Standard-Selektionsfunktionen aus dem zweiten Morse-Lemma bei einer Permutation der Selektionsfunktionen in der min-max Normalform ihren topologischen Typ behalten.

2.8.16 Theorem *Es seien e_1, \dots, e_n die Einheitsvektoren des \mathbb{R}^n und $e_{n+1} = -\sum_{i=1}^n e_i$. Eine stetige Selektion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(e_1^T x, \dots, e_{n+1}^T x)$ sei durch ihre min-max Normalform*

$$f(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} e_j^T x$$

gegeben. Weiterhin sei π eine beliebige Permutation der Zahlen $\{1, \dots, n+1\}$.

Dann ist die durch

$$f^\pi(x) = \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} e_{\pi(j)}^T x$$

beschriebene Funktion f^π topologisch äquivalent zur Funktion f .

BEWEIS Nach Lemma 2.8.15 ist durch π eine eindeutige lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bestimmt mit $Ae_j = e_{\pi(j)}$ für alle $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Man erhält:

$$\begin{aligned} f^\pi(x) &= \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} e_{\pi(j)}^T x \\ &= \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} (Ae_j)^T x \\ &= \min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} e_j^T (A^T x) \\ &= f(A^T x) . \end{aligned}$$

Damit ist die topologische Äquivalenz von f^π und f gezeigt (mittels des linearen Homöomorphismus A^T). □

Dieses Ergebnis wird im nächsten Theorem benutzt, um zu beweisen, daß alle stetigen Selektionen linearer Funktionen, die dem Fall 10 zuzuordnen sind, topologisch äquivalent sind.

2.8.17 Theorem Seien $f, g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_5^T x)$ derart gegeben, daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, 5\}$ und 0 jeweils kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Ist die Liste der Bettizahlen h_0, \dots, h_3 der von den Funktionen induzierten simplizialen Komplexe für beide durch $[2, 0, 1, 0]$ gegeben, dann sind die Funktionen f und g topologisch äquivalent.

BEWEIS Das zweite Morse-Lemma (Theorem 1.4.27) liefert die Existenz zweier Funktionen

$$\tilde{f}, \tilde{g} \in \text{CS}(x_1, \dots, x_4, -\sum_{i=1}^4 x_i),$$

so daß \tilde{f} topologisch äquivalent zu f und \tilde{g} topologisch äquivalent zu g ist. Es wurde bereits gezeigt, daß die von topologisch äquivalenten Funktionen induzierten simplizialen Komplexe homotopieäquivalent sind (Korollar 2.5.15). Daher haben diese auch im Fall von \tilde{f} und \tilde{g} die Bettizahlen $[2, 0, 1, 0]$.

Durch Überprüfung aller möglichen stetigen Selektionen von fünf linearen Funktionen mit Hilfe eines Computerprogramms wurde festgestellt, daß es lediglich fünf verschiedene stetige Selektionen gibt, deren induzierter simplizialer Komplex diese Bettizahlen aufweist. Diese sind (angegeben sind die Mengen N_i der min-max Normalform):

- $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}$
- $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}$
- $\{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3, 5\}$
- $\{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}$.

Offensichtlich gehen diese fünf Funktionen durch Permutation der Selektionsfunktionen in der min-max Normalform auseinander hervor. Die Funktionen \tilde{f} und \tilde{g} sind deshalb aufgrund von Theorem 2.8.16 topologisch äquivalent. Dies impliziert: die Funktionen f und g sind topologisch äquivalent. □

Für alle anderen Fälle kann mit Hilfe von Theorem 2.8.14 ähnlich wie im Beweis des Klassifikations-Resultats in Bartels u. a. (1995, siehe Beweis zu Theorem 3.3 ab Seite 403) vorgegangen werden. So wird auch hier die sog. „topologische Hauptvermutung“ zum Einsatz kommen. Für Details zu dieser erstmals 1908 von Steinitz und Tietze formulierten Vermutung sei auf Ranicki (1996) und die dort genannte Literatur verwiesen. Auch die folgende Formulierung der Hauptvermutung und die anschließende Aussage zu ihrer Gültigkeit wurden von dort entnommen.

2.8.18 Hauptvermutung

Jeder Homöomorphismus $f : |K| \rightarrow |L|$ zwischen Polyedern ist homotop zur geometrischen Realisierung $|f'| : |K'| \rightarrow |L'|$ eines simplizialen Isomorphismus $f' : K' \rightarrow L'$, wobei K', L' simpliziale Unterteilungen von K, L sind. Insbesondere ist also jeder Homöomorphismus zwischen Polyedern homotop zu einem stückweise linearen Homöomorphismus.

2.8.19 Theorem (siehe Ranicki 1996, Seite 2, Mitte) *Die topologische Hauptvermutung ist wahr für die Dimensionen 2 und 3, im allgemeinen jedoch falsch.* □

2.8.20 Theorem (Vollständige Klassifikation für $n = 4$)

Sei $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_5^T x)$ derart, daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, 5\}$ und 0 kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Dann gilt:

Der topologische Typ von f ist vollständig bestimmt durch die ersten vier Bettizahlen des von der Funktion f induzierten simplizialen Komplexes $\mathcal{N}(f)$

$$h_q(\mathcal{N}(f)) \quad , q \in \{0, 1, 2, 3\} .$$

Es gibt genau 26 verschiedene topologische Typen stetiger Selektionen von fünf linearen Funktionen.

BEWEIS Aufgrund von Korollar 2.5.15 und Tabelle 2.3 muß nur noch gezeigt werden, daß zwei den Voraussetzungen entsprechende Funktionen f und g , für die

$$h_q(\mathcal{N}(f)) = h_q(\mathcal{N}(g)) \quad , q \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{*}$$

gilt, topologisch äquivalent sind.

Für zwei Klassen von Funktionen folgt die Behauptung bereits aus den folgenden Gründen, so daß diese Funktionen im weiteren Verlauf ausgeschlossen werden können:

- Die Funktionen f_{\min} und f_{\max} , da f_{\min} die einzige Funktion mit leerem Anstiegskegel und f_{\max} die einzige Funktion mit leerem Abstiegskegel ist. Aus $f \in \{f_{\min}, f_{\max}\}$ und (*) folgt daher unmittelbar $g = f$. Diese Situation entspricht dem Fall 2 im Beweis von Theorem 2.8.14.
- Alle Funktionen, die dem Fall 10 im Beweis von Theorem 2.8.14 zuzuordnen sind, da für diese bereits in Theorem 2.8.17 die topologische Äquivalenz bewiesen wurde.

Seien daher von nun an f und g zwei den Voraussetzungen des Theorems entsprechende Funktionen, welche Bedingung (*) erfüllen und nicht zu einer der beiden soeben betrachteten Klassen gehören (d. h. nicht Fall 2 oder Fall 10 in Tabelle 2.3 zugeordnet werden

können). Um die topologische Äquivalenz von f und g zu beweisen, wird im folgenden ein stückweise linearer Homöomorphismus $\theta : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit der Eigenschaft

$$\theta(K_-(f)) = K_-(g) \quad \text{und} \quad \theta(K_+(f)) = K_+(g)$$

konstruiert. Ist ein solcher gefunden, folgt mit Hilfe von Korollar 2.3.3 unmittelbar die Behauptung.

Nach Lemma 2.7.3 existiert zu jeder der beiden gegebenen Funktionen ein 3-dimensionaler simplizialer Komplex, der homöomorph zu S^3 ist, sowie drei Teilkomplexe von diesem, deren geometrische Realisierungen homöomorph zu den Mengen \bar{S}_- , \bar{S}_+ bzw. S_0 der jeweiligen Funktion sind. Die entsprechenden simplizialen Komplexe der Funktion f seien im folgenden mit F , F_- , F_+ und F_0 bezeichnet, die der Funktion g mit G usw.

Aus der Übereinstimmung der Bettizahlen (*) folgt nach Korollar 2.8.10 und Theorem 2.8.14, daß $|F_-|$ und $|G_-|$ homöomorph sind, $|F_+|$ und $|G_+|$ homöomorph sind und das Paar $|F_-|, |F_+|$ von der topologischen Gestalt her einem der in Theorem 2.8.14 betrachteten Fälle entspricht.

Die Konstruktion von θ erfolgt nun in zwei Schritten.

Schritt 1: Zunächst wird für alle an dieser Stelle relevanten Konstellationen gezeigt, daß jeder stückweise lineare Homöomorphismus $\phi_- : |F_-| \rightarrow |G_-|$ fortgesetzt werden kann zu einem Homöomorphismus $\phi : |F| \rightarrow |G|$, für den dann folglich gilt:

$$\phi(|F_-|) = |G_-| \quad \text{und} \quad \phi(|F_+|) = |G_+| .$$

Hat $|F_0|$ nur eine Zusammenhangskomponente, können lediglich zwei Fälle auftreten:

- (a) $|F_0|$ ist eine 2-Sphäre, d. h. es liegt die Situation von Fall 1 im Beweis zu Theorem 2.8.14 vor. Sowohl $|F_-|$ als auch $|F_+|$ sind 3-Zellen und ein Homöomorphismus $\phi_- : |F_-| \rightarrow |G_-|$ kann daher wegen Theorem A.3.4 auf $|F|$ fortgesetzt werden.
- (b) $|F_0|$ ist eine Fläche vom Geschlecht h , wobei $1 \leq h \leq 6$. Dies entspricht den Fällen 3 bis 8 im Beweis zu Theorem 2.8.14. $|F_-|$ und $|F_+|$ sind Henkelkörper vom Geschlecht h (und damit auch $|G_-|$ und $|G_+|$). Beide sind also homöomorph zu einem Standard-Henkelkörper HK_h , den wir uns als die im \mathbb{R}^3 liegende Einheits-Vollkugel D^3 vorstellen, welche auf folgende Art mit h Vollhenkeln versehen wurde: um die Schnittpunkte der Koordinatenachsen mit der Kugeloberfläche S^2 herum werden hinreichend kleine disjunkte Umgebungen gebildet. In h dieser sechs Umgebungen wird ein Vollhenkel an zwei disjunkte vollständig in der Umgebung liegende 2-Zellen mit kreisrundem Rand ohne Verknötungen angeklebt.

Dadurch erhalten wir $2h$ disjunkte auf S^2 liegende 2-Zellen $d_1, \tilde{d}_1, \dots, d_h, \tilde{d}_h$, wobei immer d_i und \tilde{d}_i zu demselben Henkel gehören. Sei $\psi : |F_+| \rightarrow \text{HK}_h$ ein Homöomorphismus dann betrachten wir die Mengen

$$c_i := \psi^{-1}(d_i) , \tilde{c}_i := \psi^{-1}(\tilde{d}_i) \quad , i \in \{1, \dots, h\} .$$

Dies sind ebenfalls 2-Zellen, da die Mengen d_i, \tilde{d}_i abgeschlossen in HK_h sind.

Die Ränder $\partial d_i, \partial \tilde{d}_i$ sind disjunkte Teilmengen des Randes von HK_h . Sie sind als singuläre 1-Simplizes aufgefaßt offensichtlich alle nullhomolog in $H_1(\text{HK}_h)$, gehören aber in $H_1(\partial \text{HK}_h)$ zu h verschiedenen Homologieklassen (ungleich Null), wobei immer ∂d_i und $\partial \tilde{d}_i$ homolog sind.

Wir definieren nun

$$s_i := \partial c_i = \psi^{-1}(\partial d_i) , \tilde{s}_i := \partial \tilde{c}_i = \psi^{-1}(\partial \tilde{d}_i) \quad , i \in \{1, \dots, h\} .$$

Diese sind 1-Sphären und disjunkte Teilmengen von $\partial |F_+| = |F_0|$ und damit auch von $|F_-|$. Da sie homöomorphe Bilder von ∂d_i bzw. $\partial \tilde{d}_i$ sind folgt, daß sie alle nullhomolog in $H_1(|F_+|)$ sind, aber in $H_1(|F_0|)$ zu h verschiedenen Homologieklassen (ungleich Null) gehören, wobei immer s_i und \tilde{s}_i homolog sind. Daraus folgt, daß $\{s_1, \dots, s_h\}$ und $\{\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_h\}$ jeweils ein Erzeugendensystem von $H_1(|F_-|)$ ist, da jeder nicht-nullhomologe Zyklus in $H_1(|F_0|)$ immer in genau einer der Homologiegruppen $H_1(|F_+|)$ oder $H_1(|F_-|)$ nullhomolog ist und in der anderen nicht.

Nun betrachten wir die Bilder der s_i und \tilde{s}_i bei Anwendung eines vorgegebenen Homöomorphismus $\phi_- : |F_-| \rightarrow |G_-|$, der ja auch $|F_0|$ homöomorph auf $|G_0|$ abbildet:

$$r_i := \phi_-(s_i) , \tilde{r}_i := \phi_-(\tilde{s}_i) \quad , i \in \{1, \dots, h\} .$$

Da die Abbildung ein Homöomorphismus ist, gilt auch für diese: Alle r_i und \tilde{r}_i sind disjunkte 1-Sphären. $\{r_1, \dots, r_h\}$ bzw. $\{\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_h\}$ ist jeweils ein Erzeugendensystem von $H_1(|G_-|)$. Sie gehören in $H_1(|G_0|)$ zu h verschiedenen Homologieklassen (ungleich Null), wobei immer r_i und \tilde{r}_i homolog sind. Daraus ergibt sich mit derselben Begründung wie oben, daß die r_i und \tilde{r}_i alle nullhomolog in $H_1(|G_+|)$ sind.

Dies impliziert die Existenz von disjunkten in $|G_+|$ enthaltenen 2-Zellen b_i und \tilde{b}_i , so daß gilt:

$$r_i = \partial b_i , \tilde{r}_i = \partial \tilde{b}_i \quad , i \in \{1, \dots, h\} .$$

(Überträgt man die Situation erneut in den Standard-Henkelkörper HK_h und

wieder zurück, so kann man sich leicht klar machen, daß man zu den disjunkten 1-Sphären r_i und \tilde{r}_i auch die entsprechenden 2-Zellen b_i und \tilde{b}_i disjunkt wählen kann.)

Nach Theorem A.3.4 kann der gegebene Homöomorphismus $\phi_- : |F_-| \rightarrow |G_-|$ daher zu einem Homöomorphismus

$$\phi_1 : |F_-| \cup \left(\bigcup_{i=1}^h c_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^h \tilde{c}_i \right) \rightarrow |G_-| \cup \left(\bigcup_{i=1}^h b_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^h \tilde{b}_i \right)$$

fortgesetzt werden.

Entfernt man vom Standard-Henkelkörper HK_h die 2-Zellen d_i und \tilde{d}_i für alle $i \in \{1, \dots, h\}$ sowie den gesamten Rand ∂HK_h , so bleiben gerade $(h+1)$ disjunkte offene Mengen übrig, die alle homöomorph zu \mathring{D}^3 (dem Inneren der Einheits-Vollkugel) sind. Daher bestehen auch

$$|F| \setminus \left(|F_-| \cup \left(\bigcup_{i=1}^h c_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^h \tilde{c}_i \right) \right) \quad \text{und} \quad |G| \setminus \left(|G_-| \cup \left(\bigcup_{i=1}^h b_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^h \tilde{b}_i \right) \right)$$

jeweils aus $(h+1)$ disjunkten, zu \mathring{D}^3 homöomorphen Mengen.

Mehrmalige Anwendung von Theorem A.3.4 liefert daher den gesuchten Homöomorphismus $\phi : |F| \rightarrow |G|$.

Besitzt $|F_0|$ mehr als eine Zusammenhangskomponente, so hat der Beweis von Theorem 2.8.14 gezeigt, daß höchstens eine davon eine Fläche vom Geschlecht h ($1 \leq h \leq 6$) ist und alle restlichen 2-Sphären sind. Es werden zwei Fälle unterschieden ($|F_0|$ habe $k \geq 2$ Zusammenhangskomponenten.):

- (a) $|F_-|$ oder $|F_+|$ hat nur eine Zusammenhangskomponente. O. B. d. A. sei dies $|F_-|$. Dann ist $|F_-|$ entweder eine 3-Zelle mit $(k-1)$ Löchern (siehe Fälle 9, 14, 16, 17)³⁰⁾ oder ein Henkelkörper mit $(k-1)$ Löchern (siehe Fälle 11, 12, 13, 15). Ein gegebener Homöomorphismus $\phi_- : |F_-| \rightarrow |G_-|$ wird dann in einem ersten Schritt wiederum mit Hilfe von Theorem A.3.4 auf die entsprechende Menge ohne Löcher fortgesetzt. Danach liegt einer der beiden obigen Fälle vor (wie bei der Betrachtung von $|F_0|$ mit nur einer Zusammenhangskomponente). Die dort beschriebene Vorgehensweise liefert in einem zweiten Schritt den gesuchten Homöomorphismus $\phi : |F| \rightarrow |G|$.

³⁰⁾Ein Annulus mit m Löchern ist gleich einer 3-Zelle mit $m+1$ Löchern.

- (b) Sowohl $|F_-|$ als auch $|F_+|$ haben mehr als eine Zusammenhangskomponente. Diese Konstellation tritt, wie man in Tabelle 2.3 leicht ablesen kann, jedoch nur auf, wenn Funktionen vorliegen, die dem Fall 10 im Beweis von Theorem 2.8.14 zuzuordnen sind. Solche Funktionen hatten wir in diesem Teil des Beweises jedoch ausgeschlossen.

Damit ist die Zwischenbehauptung für alle relevanten Fälle bewiesen.

Schritt 2: Da $|F_-|$ und $|G_-|$ homöomorphe geometrische Realisierungen 3-dimensionaler simplizialer Komplexe sind, liefert die Hauptvermutung einen stückweise linearen Homöomorphismus

$$\hat{\phi}_- : |F_-| \rightarrow |G_-| ,$$

sowie zugehörige, kombinatorisch äquivalente simpliziale Unterteilungen \hat{F}_- und \hat{G}_- von F_- bzw. G_- . Die 1-Skelette von \hat{F}_- und \hat{G}_- seien mit \hat{F}_-^1 und \hat{G}_-^1 bezeichnet.

Nach Schritt 1 existiert darüberhinaus eine Fortsetzung von $\hat{\phi}_-$ zu einem Homöomorphismus zwischen $|F|$ und $|G|$. Entfernt man nun aus $|F|$ und $|G|$ paarweise zunächst alle offenen 3-Simplizes und dann alle offenen 2-Simplizes von $|\hat{F}_-|$ bzw. $|\hat{G}_-|$, so sind auch die verbleibenden Mengen homöomorph, da aus der kombinatorischen Äquivalenz von \hat{F}_- und \hat{G}_- folgt, daß jeweils homöomorphe Mengen entfernt wurden.

Daraus folgt, daß $|F_+| \cup |\hat{F}_-^1|$ und $|G_+| \cup |\hat{G}_-^1|$ homöomorphe geometrische Realisierungen 3-dimensionaler simplizialer Komplexe sind. Eine weitere Anwendung der Hauptvermutung liefert einen stückweise linearen Homöomorphismus

$$\hat{\phi} : |F_+| \cup |\hat{F}_-^1| \rightarrow |G_+| \cup |\hat{G}_-^1| .$$

Da ein Homöomorphismus dimensionserhaltend ist, bildet dieser $|F_+|$ auf $|G_+|$ und $|\hat{F}_-^1|$ auf $|\hat{G}_-^1|$ ab. Deshalb kann $\hat{\phi}$ nun offensichtlich zu einem stückweise linearen Homöomorphismus ϕ zwischen $|F|$ und $|G|$ fortgesetzt werden, für welchen gilt:

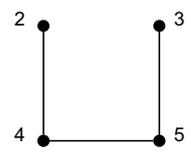
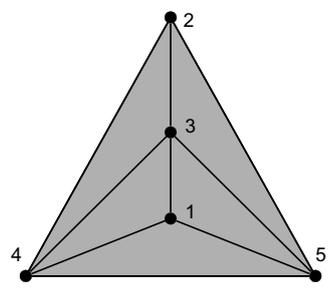
$$\phi(|F_-|) = |G_-| \quad \text{und} \quad \phi(|F_+|) = |G_+| .$$

Da nach Lemma 2.7.3 die abgeschlossenen Hüllen der Ab- und Anstiegskegel gerade die Kegelhüllen der entsprechenden simplizialen Komplexe $|F_-|, |F_+|, |G_-|$ und $|G_+|$ sind, läßt sich ϕ auf natürliche Weise zum gesuchten stückweise linearen Homöomorphismus θ auf \mathbb{R}^4 fortsetzen.

Da nun bewiesen ist, daß die vier Bettizahlen $h_0(\mathcal{N}(f)), \dots, h_3(\mathcal{N}(f))$ den topologischen Typ von f bestimmen, läßt sich die Anzahl verschiedener topologischer Typen einfach als die Anzahl der Zeilen in Tabelle 2.3 ablesen. Dies ergibt die Zahl 26. \square

Der Abschnitt wird mit einem kurzen Beispiel beendet.

2.8.21 Beispiel Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \text{CS}(x_1, x_2, x_3, x_4, -\sum_{i=1}^4 x_i)$ werden betrachtet. Diese sind in Normalform $\min_{i \in \{1, \dots, s\}} \max_{j \in N_i} a_j^T x$ gegeben

	Funktion f	Funktion g
N_i	$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 5\}$	$\{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}$
\bar{N}_i	$\{4, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 4\}$	$\{2, 3, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 3, 4\}$
$\mathcal{N}(\cdot)$		

Da offensichtlich bei beiden Funktionen der induzierte simpliziale Komplex zusammenziehbar ist, d. h. die Bettizahlen $[1, 0, 0, 0]$ hat, sind die Funktionen f und g nach Theorem 2.8.20 topologisch äquivalent.

Tatsächlich gibt es genau 780 stetige Selektionen fünf linearer Funktionen von diesem Typ. \diamond

2.9 Höhere Dimensionen

Eine direkte Erweiterung des Ergebnisses in Theorem 2.8.20, d. h. der Klassifikation stetiger Selektionen über die Bettizahlen des induzierten simplizialen Komplexes, auf höhere Dimensionen ist alleine schon wegen des folgenden Beispiels nicht möglich.

2.9.1 Beispiel Gegeben seien nun zwei stetige Selektionen sechs linearer Funktionen

$$f, g : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}, f, g \in \text{CS}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, -\sum_{i=1}^5 x_i).$$

	Funktion f	Funktion g
N_i	$\{3, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\},$ $\{1, 3, 5, 6\}, \{1, 2, 5, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}$	$\{3, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{1, 4, 5, 6\},$ $\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 4\}$
\bar{N}_i	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\},$ $\{3, 4\}, \{5\}$	$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\},$ $\{4, 6\}, \{5, 6\}$
$\mathcal{N}(\cdot)$		
$[h_q(\mathcal{N}(\cdot))]_{q=0,\dots,4}$	$[2, 2, 0, 0, 0]$	$[2, 2, 0, 0, 0]$

Die induzierten simplizialen Komplexe der Funktionen sind offenbar nicht homotopie-äquivalent, da der zu f gehörige eine azyklische Zusammenhangskomponente besitzt, der zu g gehörige jedoch nicht. Mit Korollar 2.5.15 folgt, daß f und g nicht topologisch äquivalent sein können. Trotzdem stimmen die entsprechenden Bettizahlen überein. \diamond

Der Ansatz den topologischen Typ einer stetigen Selektionen linearer Funktionen über Eigenschaften des von ihr induzierten simplizialen Komplexes zu bestimmen, wurde vor allem durch Theorem 2.5.10 motiviert, welches besagt, daß dieser homotopieäquivalent zum Abstiegskegel der Funktion ist. Betrachtet man nur die Bettizahlen des induzierten simplizialen Komplexes ist es daher gut vorstellbar, daß es Situationen gibt, in denen auf diese Weise in ihm enthaltene Informationen nicht „genutzt“ werden. Genau dies war im Beispiel 2.9.1 der Fall.

Da Theorem 2.8.14 für $n = 4$ impliziert, daß durch die Bettizahlen von $\mathcal{N}(f)$ dessen Homotopietyp eindeutig bestimmt ist, wurde mit Theorem 2.8.20 im Grunde gezeigt, daß die notwendige Bedingung aus Korollar 2.5.15 für $n = 4$ auch hinreichend ist für die topologische Äquivalenz zweier stetiger Selektionen. Das soeben betrachtete Beispiel zeigt lediglich, daß der Homotopietyp von $\mathcal{N}(f)$ für $n = 5$ nicht mehr allein durch seine Bettizahlen bestimmt ist. Dies legt meines Erachtens die folgende Vermutung für beliebige Dimension n nahe:

2.9.2 Vermutung Sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \text{CS}(a_1^T x, \dots, a_{n+1}^T x)$ derart gegeben, daß $\hat{I}(0) = \{1, \dots, n+1\}$ und 0 kritischer Punkt ist, der (ND1) erfüllt. Dann ist der topologische Typ von f vollständig bestimmt durch den Homotopietyp von $\mathcal{N}(f)$.

Diese Vermutung ist, wie oben erläutert, wahr für $n = 4$. Ferner läßt sich leicht nachweisen, daß sie für $n \leq 3$ mit den Ergebnissen von Bartels u. a. (1995) übereinstimmt, da die dort zur Klassifikation eingesetzten Indizes p und q den Homotopietyp des Abstiegskegels (bzw. von $\mathcal{N}(f)$) eindeutig bestimmen.

Mit Korollar 2.5.15 ist eine Richtung der Vermutung bereits bewiesen.

Ein möglicher Beweis für die verbleibende Richtung muß jedoch einen gänzlich anderen Aufbau haben, als die Beweise der Klassifikations-Resultate für $n \leq 4$. Gründe dafür sind:

- Sowohl in Bartels u. a. (1995) als auch in der vorliegenden Arbeit wurde die topologische Hauptvermutung eingesetzt. Diese ist jedoch in höheren Dimensionen im allgemeinen falsch.
- Im Beweis zu Theorem 2.8.14 konnten die 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_+(f)$ durch Bestimmung ihrer Ränder bis auf Homöomorphie beschrieben werden. Wesentliches Hilfsmittel war dabei die Existenz einer vollständigen Klassifikation aller geschlossenen Flächen (siehe: 2.8.2 Hauptsatz der Flächentopologie). Eine vollständige Klassifikation aller geschlossenen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist jedoch zum Zeitpunkt des Verfassens dieser Arbeit noch nicht bekannt. Dies ist ein offenes Problem der Topologie. Daher kann diese Technik im Falle $n \geq 5$ nicht angewendet werden.
- Nach Tabelle 2.1 existieren mehr als 7 Millionen verschiedene stetige Selektionen sechs linearer Funktionen. Dies ist zwar für einen allgemeinen Beweis irrelevant, erschwert jedoch beispielsweise die Bestimmung möglicher Typen auf Basis einer geäußerten Vermutung oder die Bestimmung aller Funktionen, die bestimmten Bedingungen genügen, enorm. Letztere Vorgehensweise führte im Beweis von Theorem 2.8.17 zum Ziel.

- Wäre die Vermutung bewiesen, bleibt die Frage zu klären: Wie bestimmt man bei gegebenem n alle möglichen Homotopieklassen von $\mathcal{N}(f)$ bzw. wieviele solcher Homotopieklassen gibt es?

In Bartels u. a. (1995) äußern die Autoren die Vermutung, daß bereits die Existenz eines positiv homogenen, nicht notwendigerweise stückweise linearen, Homöomorphismus $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\phi(K_-(f)) = K_-(g)$, $\phi(K_+(f)) = K_+(g)$ die topologische Äquivalenz zweier stetiger Selektionen linearer Funktionen f und g impliziert. Wäre diese Vermutung richtig, dann müßte zum Beweis der Vermutung 2.9.2 nur noch gezeigt werden, daß aus der Homotopieäquivalenz von $\bar{S}_-(f)$ und $\bar{S}_-(g)$ die Existenz eines Homöomorphismus $\psi : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ mit $\psi(\bar{S}_-(f)) = \bar{S}_-(g)$ folgt.

Mit dem zur Berechnung von Tabelle 2.3 erstellten Computerprogramm ist es mit einem gewöhnlichen Arbeitsplatzrechner noch möglich, alle möglichen Homologiegruppen von nicht-trivialen Teilkomplexen des Δ^5 zu berechnen. Aufgrund des Wissens um Beispiel 2.9.1 wurde dies so durchgeführt, daß für jeden Teilkomplex die Homologiegruppen jeder seiner Zusammenhangskomponenten berechnet wurden. Auf diese Weise lassen sich die beiden simplizialen Komplexe des Beispiels noch mit Mitteln der Homologietheorie unterscheiden. Tabelle 2.4 on the following page zeigt alle 99 mit Hilfe dieser Methode identifizierten Typen. Der Begriff „Typ“ steht an dieser Stelle nur für „anhand der Homologiegruppen der Zusammenhangskomponenten des induzierten simplizialen Komplexes unterscheidbare Typen stetiger Selektionen“. Ob es sich dabei bereits um die gesuchten topologischen Typen handelt, hängt vor allem von der Gültigkeit der Vermutung 2.9.2 für $n = 5$ ab.

Einige der aufgelisteten Typen verdienen besondere Aufmerksamkeit:

- Die Typen 14 und 49: Dies sind gerade die beiden Typen, welche in Beispiel 2.9.1 vorkommen und nicht allein anhand ihrer Bettzahlen auseinander gehalten werden können. Die Funktion f entspricht Typ 14 und die Funktion g Typ 49. Interessanterweise lassen sich die zugehörigen Anstiegskegel anhand ihrer Homologiegruppen überhaupt nicht unterscheiden. Ein Durchsuchen aller Typen ergibt, daß dies, abgesehen von den dazu dualen Typen 87 und 88, der einzige Fall ist, wo durch das Betrachten der Homologiegruppen jeder Zusammenhangskomponente ein zusätzlicher Typ identifiziert werden konnte.
- Der Typ 90: Dies ist der einzige Typ, welcher eine Homologiegruppe mit Torsion aufweist. Dies ist ein bemerkenswerter Unterschied zu den niedrigeren Dimensionen, wo alle Homologiegruppen torsionsfrei waren. Ein Beispiel für eine diesem Typ entsprechende Funktion ist:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \min \{ & \max\{x_1, x_2, x_3\}, \max\{x_1, x_2, x_4\}, \max\{x_1, x_3, x_5\}, \\
 & \max\{x_1, x_4, -\sum_{i=1}^5 x_i\}, \max\{x_1, x_5, -\sum_{i=1}^5 x_i\}, \max\{x_2, x_3, -\sum_{i=1}^5 x_i\}, \\
 & \max\{x_2, x_4, x_5\}, \max\{x_2, x_5, -\sum_{i=1}^5 x_i\}, \max\{x_3, x_4, x_5\}, \\
 & \max\{x_3, x_4, -\sum_{i=1}^5 x_i\} \}
 \end{aligned}$$

Die geometrische Realisierung des zugehörigen simplizialen Komplexes $\mathcal{N}(f)$ ist homöomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ und hat die Homologiegruppen:

$$H_0(\mathcal{N}(f)) \approx \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathcal{N}(f)) \approx \mathbb{Z}_2, \quad H_q(\mathcal{N}(f)) = 0 \quad \forall q \geq 2.$$

3 Fazit

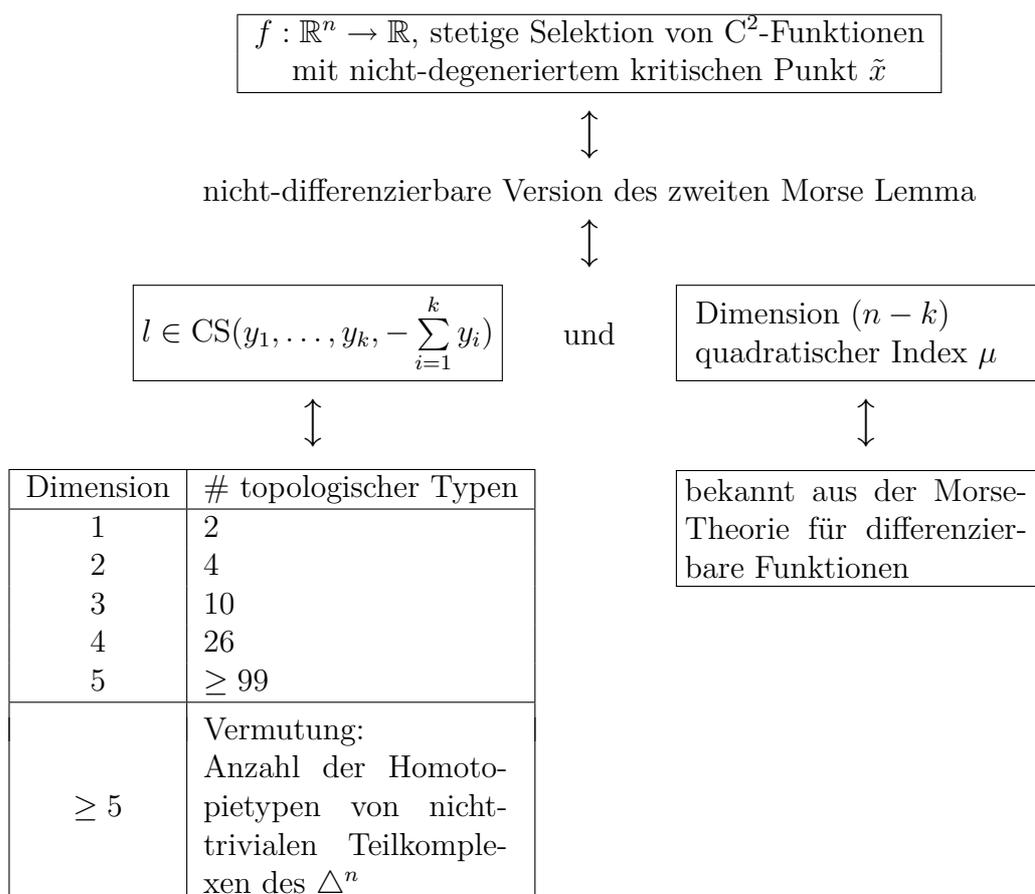


Abbildung 3.1: Klassifikation stetiger Selektionen von C^2 -Funktionen

Die nicht-differenzierbare Morse-Theorie untersucht wie in Abschnitt 1.4 beschrieben die Struktur stetiger Selektionen von C^2 -Funktionen in der Umgebung eines nicht-degenerierten kritischen Punktes. Das zweite Morse-Lemma für diese Funktionenklasse (Theorem 1.4.27) liefert eine Zerlegung der betrachteten Funktion in einen differenzierbaren Teil und einen nicht-differenzierbaren Teil durch geeignete Koordinatentransformation (siehe Abbildung 3.1).

Ist der Definitionsbereich \mathbb{R}^n wird der differenzierbare Teil durch seine Dimension ($n - k$) ($0 \leq k \leq n$) und den quadratischen Index

$$\mu \in \{0, \dots, n - k\}$$

beschrieben. Diese beiden Parameter stehen für eine Funktion der Gestalt

$$g(y_{k+1}, \dots, y_n) = - \sum_{i=k+1}^{k+\mu} y_i^2 + \sum_{j=k+\mu+1}^n y_j^2.$$

Solche Funktionen sind bereits aus der klassischen Morse-Theorie bekannt, wo gezeigt wurde, daß jede C^2 -Funktion in der Umgebung eines nicht-degenerierten kritischen Punktes durch geeignete Koordinatentransformation in diese Gestalt (mit $k = 0$) überführt werden kann. Ist der quadratische Index $\mu = 0$ so hat die Funktion g im Punkt $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$ ein lokales Minimum, für $\mu = n - k$ ein lokales Maximum und sonst einen Sattelpunkt.

Der nicht-differenzierbare Teil hat entsprechend einen k -dimensionalen Definitionsbereich und ist eine stetige Selektion der $(k + 1)$ linearen Standard-Selektionsfunktionen

$$y_1, \dots, y_k, - \sum_{i=1}^k y_i.$$

Solche Funktionen wurden in Kapitel 2 ausführlich untersucht. Nach Vorstellung eines Resultats aus Bartels u. a. (1995) zur Klassifikation dieser stetigen Selektionen für $k \leq 3$ gelang es dort, eine vollständige Klassifikation für den Fall $k = 4$ herzuleiten. Danach gibt es genau 26 verschiedene topologische Typen stetiger Selektionen von fünf linearen Funktionen. Im Einklang mit diesen Ergebnissen wurde darüberhinaus für beliebiges k die Vermutung aufgestellt, daß der topologische Typ einer stetigen Selektion linearer Funktionen eindeutig durch den Homotopietyp eines von ihr induzierten simplizialen Komplexes bestimmt ist.

Kombiniert man nun für $k = 0, \dots, n$ die topologische Klassifikation der stetigen Selektionen $(k + 1)$ linearer Funktionen (soweit bekannt) mit den jeweils möglichen quadratischen Indizes μ , so ergibt sich insgesamt eine Klassifikation aller auf \mathbb{R}^n definierten stetigen Selektionen von C^2 -Funktionen in der Umgebung nicht-degenerierter kritischer Punkte. Damit ist die lokale Struktur einer sehr allgemeinen Klasse nicht-differenzierbarer Funktionen im generischen Fall für derzeit $n \leq 4$ vollständig klassifiziert.

A Mathematischer Anhang

A.1 Lineare Algebra

A.1.1 Definition Die Vektoren $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ heißen **affin unabhängig**, wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} u_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_m \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig sind.

A.1.2 Definition Eine $n \times n$ -Matrix A heißt **diagonalähnlich** (diagonalisierbar), wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, d. h. es existiert eine $n \times n$ -Matrix U mit

$$U^{-1} \cdot A \cdot U = D .$$

A.1.3 Theorem Ist A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix, so gilt:

- A besitzt n reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, wobei k -fache Nullstellen von $\det(A - \lambda E) = 0$ k -fach gezählt werden.
- Den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ entsprechen n Eigenvektoren u_1, \dots, u_n , die eine ON-Basis des \mathbb{R}^n bilden.
- A ist diagonalähnlich, und zwar gilt mit $U = (u_1, \dots, u_n)$:

$$\underbrace{U^{-1}}_{=U^T} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

- $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

□

A.1.4 Definition Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix. Die Anzahl der negativen Eigenwerte von A wird mit **Index(A)** bezeichnet und die Anzahl der positiven Eigenwerte mit **Coindex(A)**.

A.1.5 Definition Zwei $n \times n$ -Matrizen A und B heißen **kongruent**, wenn eine reguläre $n \times n$ -Matrix Q existiert, so daß gilt:

$$Q^T \cdot A \cdot Q = B .$$

A.1.6 Lemma Zwei symmetrische Matrizen A, B sind kongruent, genau dann wenn $\text{Index}(A) = \text{Index}(B)$ und $\text{Coindex}(A) = \text{Coindex}(B)$. □

Für Details und Beweis der folgenden Aussage sei auf Jongen u. a. (2000, Abschnitt 2.5) verwiesen.

A.1.7 Definition und Satz (Einschränkung einer symmetrischen Matrix)

Sei A eine symmetrische $n \times n$ -Matrix und $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ein linearer Unterraum. Sei ferner V eine beliebige Matrix, deren Spalten eine Basis von T bilden. Dann gilt:

Die Anzahl der negativen Eigenwerte (der positiven Eigenwerte, sowie der Eigenwerte die gleich Null sind) von $V^T \cdot A \cdot V$ ist unabhängig von der Wahl von V .

Sie wird bezeichnet als die Anzahl der negativen Eigenwerte von A **eingeschränkt auf** L usw. Gibt es keine Eigenwerte die gleich Null sind, sagt man: A eingeschränkt auf L ist regulär. □

A.2 Kegel und Konvexe Mengen

A.2.1 Definition Eine Teilmenge K von \mathbb{R}^n heißt **Kegel**, wenn sie bezüglich positiver skalarer Multiplikation abgeschlossen ist, d. h. wenn gilt:

$$x \in K, \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda x \in K .$$

Ist M eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^n , dann nennen wir

$$\{\lambda x \mid x \in M, \lambda > 0\}$$

die **Kegelhülle** von M .

A.2.2 Definition x heißt eine **Konvexkombination** von $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^n$, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r, \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_r &= 1, \\ \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_r &\geq 0. \end{aligned}$$

Wird die Erfüllung der letzten Bedingung nicht gefordert, so heißt x **Affinkombination** von x_1, \dots, x_r .

A.2.3 Definition Die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvexe Hülle**

$$\text{conv } M$$

von M ; insbesondere ist $\text{conv } \emptyset = \emptyset$. Analog dazu nennt man die Menge aller Affinkombinationen von Elementen einer Menge M die **affine Hülle**

$$\text{aff } M$$

von M . Mit $\text{lin } M$ (**lineare Hülle**) wird der von M erzeugte lineare Raum bezeichnet. Dies ist der „kleinste“ lineare Raum, der M enthält.

Die konvexe Hülle einer endlichen Menge $M = \{x_1, \dots, x_r\}$ wird als **konvexes Polytop** bezeichnet. Sind x_1, \dots, x_r affin unabhängig, so nennt man

$$T_{r-1} := \text{conv}\{x_1, \dots, x_r\}$$

ein **$(r - 1)$ -Simplex** oder kurz **Simplex**.

Man sagt: $\text{aff } T_{r-1}$ und T_{r-1} haben **Dimension** $r - 1$.

A.2.4 Definition Ist C eine konvexe Menge, so nennt man

$$\dim C := \dim(\text{aff } C)$$

die **Dimension** von C . Es wird vereinbart: $\dim \emptyset = -1$.

A.2.5 Definition Man sagt, $x \in M \subseteq \mathbb{R}^n$ liegt im **relativen Inneren** von M (Bezeichnung: $x \in \text{relint } M$), wenn x im Inneren von M bezüglich $\text{aff } M$ liegt (d. h. es existiert eine offene Umgebung B in $\text{aff } M$, so daß $x \in B \subseteq M$). Ist $\text{aff } M = \mathbb{R}^n$, dann folgt: $\text{relint } M = \text{int } M$.

A.2.6 Definition Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$, dann heißt die Menge aller nicht-negativen Linearkombinationen

$$x = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_k y_k \quad , \quad y_1, \dots, y_k \in M \quad , \quad \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_k \geq 0$$

von Elementen aus M die **positive Hülle**

$$\sigma := \text{pos } M$$

von M bzw. der von M erzeugte **konvexe Kegel**. Es wird vereinbart: $\text{pos } \emptyset := \{0\}$. Für festes $u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$, ist die Menge $H := \{x \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$ eine Hyperebene. $H^+ := \{x \mid \langle x, u \rangle \geq \alpha\}$ und $H^- := \{x \mid \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$ heißen die durch H begrenzten Halbräume. Wenn $\alpha = 0$, $\sigma \subseteq H^+$ und $H \cap \sigma = \{0\}$ gilt, dann heißt der Kegel σ **spitz** (mit der Spitze 0).

Ist $M = \{x_1, \dots, x_k\}$ eine endliche Menge, nennt man

$$\sigma = \text{pos}\{x_1, \dots, x_k\}$$

einen **polyedrischen Kegel**. Sind darüberhinaus die Vektoren x_1, \dots, x_k linear unabhängig, dann heißt σ **simplizialer Kegel**.

A.3 Topologie

A.3.1 Definition Sei M ein topologischer Raum und $X \subseteq M$. Dann bezeichnen wir mit

- $\text{int}(X)$ das Innere von X in M ,
- $\text{cl}(X)$ die abgeschlossene Hülle von X in M ,
- ∂X den Rand von X in M .

A.3.2 Definition Häufig benutzte Teilmengen des k -dimensionalen euklidischen Vektorraums \mathbb{R}^k :

- die k -dimensionale Einheitskugel (auch Einheitsball oder Vollkugel)

$$D^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| \leq 1\} ,$$

- deren Inneres, die k -dimensionale offene Einheitskugel

$$\overset{\circ}{D}^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| < 1\} = \text{int}(D^k),$$

- die $(k - 1)$ -dimensionale Einheitssphäre

$$S^{k-1} := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x\| = 1\} = \partial D^k.$$

- das $(k - 1)$ -dimensionale Standardsimplex

$$\Delta^{k-1} := \text{conv}\{e_1, \dots, e_k\},$$

wobei e_i der i -te Einheitsvektor des \mathbb{R}^k ist.

Die von der euklidischen Metrik auf \mathbb{R}^n induzierte Topologie heißt Standardtopologie des \mathbb{R}^n . Sie ist stets gemeint, wenn von \mathbb{R}^n als topologischem Raum gesprochen wird. Teilmengen des \mathbb{R}^n tragen, wenn nichts anderes gesagt wird, die Spurtopologie (auch: Relativtopologie).

A.3.3 Definition Ein topologischer Raum X heißt

- **n -Zelle** wenn er zu D^n homöomorph ist bzw.
- **n -Sphäre**, wenn er zu S^n homöomorph ist.

Ist die Dimension nicht von Bedeutung, sagt man auch kurz: X ist eine **Zelle** bzw. eine **Sphäre**.

A.3.4 Theorem (siehe Christenson u. Voxman 1977, Seite 450, 17.A.12 und 17.A.13) Sind C und C' n -Zellen und ist $h : \partial C \rightarrow \partial C'$ ein Homöomorphismus, dann kann h zu einem Homöomorphismus zwischen C und C' fortgesetzt werden.

A.3.5 Definition Ein **Raumpaar** (X, A) besteht aus einem topologischen Raum X und einem Teilraum $A \subseteq X$. Eine **stetige Abbildung** $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Wenn f ein Homöomorphismus von X auf Y ist und $f(A) = B$ gilt, so heißt f ein **Homöomorphismus von Paaren** und man schreibt $f : (X, A) \cong (Y, B)$.

Es folgt ein Theorem, welches in Abschnitt 2.8 verwendet wird. Zur Theorie der p.l. Topologie sei auf Rourke u. Sanderson (1972) und Hempel (1976) verwiesen.

A.3.6 Theorem (siehe Hempel 1976, Seite 7, Theorem 1.5)

Wenn M eine $p. l. n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit ist, C_1 und C_2 $p. l. n$ -Zellen (als $p. l.$ Untermannigfaltigkeiten) in $\text{int}(M)$ sind und X eine beliebige abgeschlossene Teilmenge von M ist, so daß $C_1 \cup C_2$ in einer Zusammenhangskomponente von $M \setminus X$ liegt, dann existiert eine $p. l.$ Isotopie $\phi : M \times [0, 1] \rightarrow M$ für die gilt: $\phi_0 = \text{id}_M$, $\phi_t|_X = \text{id}_X$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\phi_1(C_1) = C_2$.

Homotopietheorie

A.3.7 Definition Es seien X und Y topologische Räume. Eine **Homotopie** von X nach Y ist eine Schar $h_t : X \rightarrow Y$ von Abbildungen, wobei der Parameter t das Einheitsintervall $I = [0, 1]$ durchläuft, so daß folgende Bedingung erfüllt ist: die Funktion $H : X \times I \rightarrow Y$, $H(x, t) = h_t(x)$, ist stetig (dabei trägt $X \times I$ die Produkttopologie). Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen **homotop**, Bezeichnung $f \simeq g : X \rightarrow Y$, wenn es eine Homotopie $h_t : X \rightarrow Y$ mit $h_0 = f$ und $h_1 = g$ gibt. Die Schar h_t oder die zugehörige Abbildung H heißt dann eine **Homotopie von f nach g** ; man schreibt dafür $h_t : f \simeq g$ oder $H : f \simeq g$.

A.3.8 Definition Eine Abbildung $c : X \rightarrow Y$ heißt **konstant**, wenn $c(X) = \{y_0\}$ ein Punkt in Y ist, wenn also $c(x) = y_0$ für alle $x \in X$ gilt. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **nullhomotop**, wenn f homotop ist zu einer konstanten Abbildung. Ein Raum X heißt **zusammenziehbar**, wenn die identische Abbildung auf X , $\text{id}_X : x \mapsto x$ für alle $x \in X$, nullhomotop ist.

A.3.9 Definition Es seien $f, g : X \rightarrow Y$ stetige Abbildungen, die auf dem Teilraum $A \subseteq X$ übereinstimmen, also $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$. Dann heißen f und g **homotop relativ A** , Bezeichnung $f \simeq g : X \rightarrow Y \text{ rel } A$, wenn es eine Homotopie $h_t : X \rightarrow Y$ von f nach g gibt mit $h_t(a) = f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$ und alle $t \in I$. Die Punkte $f(a) = g(a)$ werden also während der Homotopie nicht bewegt, die Homotopie ist auf A **stationär**.

A.3.10 Definition $A \subseteq X$ heißt **Retrakt** von X , wenn es eine **Retraktion** $r : X \rightarrow A$ gibt, das ist eine stetige Abbildung mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$.

A.3.11 Definition Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt eine **Homotopieäquivalenz**, Bezeichnung $f : X \simeq Y$, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$; jede solche Abbildung g heißt ein **Homotopie-Inverses** von f . Zwei Räume X und Y sind vom **gleichen Homotopietyp**, Bezeichnung $X \simeq Y$, wenn es eine Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$ gibt.

A.3.12 Bemerkung Homöomorphismen sind Homotopieäquivalenzen; homöomorphe Räume sind daher vom gleichen Homotopietyp.

A.3.13 Definition $A \subseteq X$ heißt **Deformationsretrakt von X** , wenn es eine Homotopie $h_t : X \rightarrow X$ gibt mit $h_0 = \text{id}_X$, $h_1(X) = A$ und $h_1(a) = a$ für alle $a \in A$; gilt darüber hinaus noch $h_t(a) = a$ für alle $a \in A$ und $t \in I$, so heißt A ein **starker Deformationsretrakt von X** .

Homologietheorie

Eine in sich abgeschlossene Einführung in die Homologietheorie würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es sei deshalb auf die folgende Literatur zur Algebraischen Topologie verwiesen: Fulton (1995), Mayer (1989), Rotman (1998) und Spanier (1966)

Folgende Bezeichnungen werden hier verwendet (X sei ein topologischer Raum):

- $H_q(X)$ für die q -te Homologiegruppe von X ($q \in \mathbb{N}_0$),
- $\tilde{H}_q(X)$ für die reduzierte q -te Homologiegruppe von X ($q \in \mathbb{N}_0$),
- $h_q(X) := \text{Rang } H_q(X)$ für die q -te Bettizahl von X ($q \in \mathbb{N}_0$).

In Abschnitt 2.8 wird häufig Gebrauch von der Homotopieinvarianz der Homologiegruppen gemacht (siehe z. B. Hatcher 2002, Seite 111, Corollary 2.11):

A.3.14 Theorem *Sind X und Y homotopieäquivalente topologische Räume, dann haben sie isomorphe Homologiegruppen, d. h.*

$$H_q(X) \approx H_q(Y) \quad \text{für alle } q \in \mathbb{N}_0 .$$

Mannigfaltigkeiten (mit Rand)

Topologische Mannigfaltigkeiten wurden bereits in Definition 1.3.1 eingeführt.

A.3.15 Definition Ein Unterraum M des \mathbb{R}^n heißt k -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, falls jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung in M besitzt, welche homöomorph zur offenen Einheitskugel \mathring{D}^k oder zur Halbkugel $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathring{D}^k \mid x_1 \geq 0\}$ ist. Das Innere von M , $\text{int}(M)$, besteht aus allen Punkten, welche eine Umgebung besitzen, die homöomorph zu \mathring{D}^k ist. Der Rand von M ist definiert als $\partial M = M \setminus \text{int}(M)$.

A.3.16 Bemerkung Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so ist der Fall $\partial M = \emptyset$ durch Definition A.3.15 nicht ausgeschlossen. Folglich ist jede Mannigfaltigkeit auch Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Begriff „Mannigfaltigkeit mit Rand“ ist also eine Verallgemeinerung des Begriffs „Mannigfaltigkeit“.

Nähere Ausführungen zu Mannigfaltigkeiten (mit und ohne Rand) sind u. a. in Christenson u. Voxman (1977) sowie Seifert u. Threlfall (1980) zu finden. Speziell mit 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten beschäftigen sich Hempel (1976), Johannson (1995) und Matveev (2003).

Simpliziale Komplexe

Es folgen nur die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften. Weitere Details können beispielsweise in Spanier (1966) oder Hatcher (2002) gefunden werden.

A.3.17 Definition Ein **simplizialer Komplex** K besteht aus einer Menge $\{v\}$ von Ecken und einer Menge $\{s\}$ von endlichen nichtleeren Teilmengen von $\{v\}$, genannt **Simplizes**, so daß gilt:

- a) Jede Menge die aus genau einer Ecke besteht ist ein Simplex.
- b) Jede nichtleere Teilmenge eines Simplex ist ein Simplex.

Ein Simplex s , das genau $q + 1$ Ecken enthält, heißt **q -Simplex**; man sagt auch die **Dimension** von s ist q , Bezeichnung $\dim s = q$. Gilt $s' \subseteq s$, dann heißt s' eine **Seite** von s , Bezeichnung $s' \leq s$, und gilt außerdem $s' \neq s$, dann heißt s' **eigentliche Seite** von s , Bezeichnung $s' < s$. Gilt $s' \leq s$ und ist s' ein p -Simplex, dann heißt s' **p -Seite** von s .

Ein Simplex s , das nicht eigentliche Seite irgendeines Simplex $s' \in K$ ist, heißt **maximales Simplex** (auch: Facette) von K .

A.3.18 Bemerkung Aus Bedingung a) folgt, daß die 0-Simplizes von K bijektiv den Ecken von K entsprechen. Aus Bedingung b) folgt, daß jedes Simplex durch seine 0-Seiten festgelegt ist. Deshalb kann man K mit der Menge seiner Simplizes gleichsetzen und jede Ecke von K mit dem zugehörigen 0-Simplex identifizieren.

A.3.19 Definition Sei K ein simplizialer Komplex. Dann ist das **q -dimensionale Gerüst K^q** von K definiert als der simpliziale Komplex, der aus allen p -Simplizes von K mit $p \leq q$ besteht, d.h. $K^q = \{s \in K \mid \dim s \leq q\}$.

A.3.20 Definition Ist K ein simplizialer Komplex so ist seine **Dimension**, Bezeichnung $\dim K$, definiert als

- -1 falls $K = \emptyset$,
- n falls K ein n -Simplex aber kein $(n + 1)$ -Simplex enthält,
- ∞ falls K n -Simplizes enthält für alle $n \geq 0$.

Somit gilt: $\dim K = \sup\{\dim s \mid s \in K\}$.

K heißt **endlich**, wenn er nur endlich viele Simplizes enthält.

CW-Komplexe

Für die Definition von CW-Komplexen und weitere Details siehe z. B. Hatcher (2002) oder Mayer (1989).

A.3.21 Lemma (siehe Hatcher 2002, Seite 137, Lemma 2.34) Ist X ein CW-Komplex, dann gilt:

- (a) $H_k(X^n, X^{n-1})$ ist Null für $k \neq n$ und frei abelsch für $k = n$, mit einer Basis, welche in einer Eins-zu-Eins-Beziehung zu den n -Zellen von X steht.
- (b) $H_k(X^n) = 0$ für $k > n$. Wenn X endlich-dimensional ist, gilt insbesondere $H_k(X) = 0$ für $k > \dim X$.
- (c) Die Inklusion $i : X^n \rightarrow X$ induziert einen Isomorphismus $i_* : H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ falls $k < n$.

A.3.22 Definition Sei X ein CW-Komplex. Dann ist die Euler-Charakteristik $\mathcal{X}(X)$ definiert durch:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n c_n ,$$

wobei c_n die Anzahl der n -Zellen von X ist.

A.3.23 Theorem Sei X ein CW-Komplex. Dann gilt:

$$\mathcal{X}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (-1)^n \text{Rang } H_n(X) .$$

Literaturverzeichnis

Agrachev u. a. 1997

AGRACHEV, A. A. ; PALLASCHKE, D. ; SCHOLTES, S.: On Morse theory for piecewise smooth functions. In: *J. Dynam. Control Systems* 3 (1997), Nr. 4, S. 449–469. – ISSN 1079–2724

Bartels u. a. 1995

BARTELS, Sven G. ; KUNTZ, Ludwig ; SCHOLTES, Stefan: Continuous selections of linear functions and nonsmooth critical point theory. In: *Nonlinear Anal.* 24 (1995), Nr. 3, S. 385–407. – ISSN 0362–546X

Christenson u. Voxman 1977

CHRISTENSON, Charles O. ; VOXMAN, William L.: *Aspects of topology*. Dekker, 1977. – ISBN 0–8247–6331–9

Fulton 1995

FULTON, William: *Algebraic topology*. Springer, 1995. – ISBN 3–540–94327–7, 0–387–94327–7, 3–540–94326–9, 0–387–94326–9

Grätzer 1971

GRÄTZER, George: *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*. San Francisco, Calif.: W. H. Freeman and Co., 1971. – xv+212 S

Grünbaum 1970

GRÜNBAUM, Branko: Nerves of simplicial complexes. In: *Aequationes Math.* 4 (1970), S. 63–73. – ISSN 0001–9054

Grzybowski u. a. 2000

GRZYBOWSKI, J. ; PALLASCHKE, D. ; URBAŃSKI, R.: Minimal pairs representing selections of four linear functions in \mathbb{R}^3 . In: *J. Convex Anal.* 7 (2000), Nr. 2, S. 445–452. – ISSN 0944–6532

Grzybowski u. a. 2004

GRZYBOWSKI, J. ; PALLASCHKE, D. ; URBAŃSKI, R.: A geometric representation of the Morse fan. In: *J. Global Optim.* 30 (2004), Nr. 2-3, S. 319–333. – ISSN 0925–5001

Guddat u. a. 1990

GUDDAT, J. ; GUERRA VAZQUEZ, F. ; JONGEN, H. T.: *Parametric optimization: singularities, pathfollowing and jumps*. Stuttgart: B. G. Teubner, 1990. – viii+191 S. – ISBN 3-519-02112-9

Hartung u. a. 1991

HARTUNG, Joachim ; ELPELT, Bärbel ; KLÖSENER, Karl-Heinz: *Statistik*. 8., durchges. Aufl. Oldenbourg, 1991. – ISBN 3-486-22055-1

Hatcher 2002

HATCHER, Allen: *Algebraic topology*. 1. publ. Cambridge Univ. Press, 2002. – ISBN 0-521-79160-X, 0-521-79540-0 (pbk.)

Hempel 1976

HEMPEL, John: *3-manifolds*. Princeton Univ. Press, 1976. – ISBN 0-691-08178-6, 0-691-08183-2

Johannson 1995

JOHANNSON, Klaus: *Topology and combinatorics of 3-manifolds*. Springer, 1995. – ISBN 3-540-59063-3, 0-387-59063-3

Jongen u. Ruiz Jhones 2000

JONGEN, H. T. ; RUIZ JHONES, A.: Nonlinear optimization: on the min-max digraph and global smoothing. 410 (2000), S. 119–135

Jongen u. a. 2000

JONGEN, Hubertus T. ; JONKER, Peter ; TWILT, Frank: *Nonconvex Optimization and its Applications*. Bd. 47: *Nonlinear optimization in finite dimensions*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – x+510 S. – Morse theory, Chebyshev approximation, transversality, flows, parametric aspects. – ISBN 0-7923-6561-5

Jongen u. Pallaschke 1988

JONGEN, Hubertus T. ; PALLASCHKE, Diethard: On linearization and continuous selections of functions. In: *Optimization* 19 (1988), Nr. 3, S. 343–353. – ISSN 0233-1934

Kuntz 1996

KUNTZ, Ludwig: *Topological aspects of nonsmooth optimization*. LIT, 1996. – ISBN 3-8258-3048-9

Kuntz u. Scholtes 1995

KUNTZ, Ludwig ; SCHOLTES, Stefan: Qualitative aspects of the local approximation of a piecewise differentiable function. In: *Nonlinear Anal.* 25 (1995), Nr. 2, S. 197–215. – ISSN 0362-546X

Lee 2003

LEE, John M.: *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2003. – ISBN 0–387–95495–3, 0–387–95448–1

Matveev 2003

MATVEEV, Sergei V.: *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*. Springer, 2003. – ISBN 3–540–44171–9

Mayer 1989

MAYER, Karl H.: *Algebraische Topologie*. Birkhäuser, 1989. – ISBN 3–7643–2229–2

Pallaschke u. Urbański 2002

PALLASCHKE, Diethard ; URBAŃSKI, Ryszard: *Mathematics and its Applications*. Bd. 548: *Pairs of compact convex sets*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – xii+295 S. – ISBN 1–4020–0938–0

Ranicki 1996

RANICKI, A. A.: On the Hauptvermutung. In: *The Hauptvermutung book* Bd. 1. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996, S. 3–31

Rotman 1998

ROTMAN, Joseph J.: *An introduction to algebraic topology*. 4. corr. pr. Springer, 1998. – ISBN 0–387–96678–1, 3–540–96678–1

Rourke u. Sanderson 1972

ROURKE, Colin P. ; SANDERSON, Brian J.: *Introduction to piecewise-linear topology*. Springer, 1972. – ISBN 3–540–05800–1, 0–387–05800–1

Seifert u. Threlfall 1980

SEIFERT, Herbert ; THRELFALL, William: *Lehrbuch der Topologie*. 2., textually unaltered ed. New York: Chelsea Publ. Co., 1980. – ISBN 0–8284–0031–8

Smale 1973

In: SMALE, Steve: *Global analysis and economics. I. Pareto optimum and a generalization of Morse theory*. New York: Academic Press, 1973, S. 531–544

Spanier 1966

SPANIER, Edwin H.: *Algebraic topology*. McGraw-Hill, 1966. – ISBN 0–07–059883–5

Weil 1952

WEIL, André: Sur les théorèmes de de Rham. In: *Comment. Math. Helv.* 26 (1952), S. 119–145. – ISSN 0010–2571