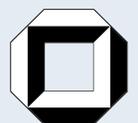


---

Matthias Hahn

**Verfahren zur Metallartefakt-  
reduktion und Segmentierung  
in der medizinischen  
Computertomographie**





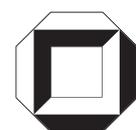
Matthias Hahn

**Verfahren zur Metallartefaktreduktion und Segmentierung  
in der medizinischen Computertomographie**



# **Verfahren zur Metallartefaktreduktion und Segmentierung in der medizinischen Computertomographie**

von  
Matthias Hahn



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Informatik, 2005

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2006  
Print on Demand

ISBN 3-86644-001-4



# Verfahren zur Metallartefaktreduktion und Segmentierung in der medizinischen Computertomographie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

der Fakultät für Informatik  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

**genehmigte**

**Dissertation**

von

**Matthias Hahn**

aus St.-Georgen / Schwarzwald

Tag der mündlichen Prüfung: 13.12.2005

Erster Gutachter: Prof. Dr. Rüdiger Dillmann

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Beyerer

Ich danke dem HERRN von  
ganzem Herzen.

---

*Psalm 9,2*

## Dank

An erster Stelle gilt mein Dank Professor Thomas Beth, der diese Arbeit angeregt und betreut hat, die Fertigstellung jedoch nicht mehr selbst erleben konnte, da er am 17.08.2005 im Alter von nur 55 Jahren aus dem Leben gerufen wurde. Professor Rüdiger Dillmann möchte ich danken, dass er sich bereit erklärt hat, die weitere Betreuung zu übernehmen. Ebenso danke ich Professor Jürgen Beyerer für die Übernahme des Korreferats. Bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft bedanke ich mich für die Einrichtung des Sonderforschungsbereiches 414 „Informationstechnik in der Medizin – Rechner- und sensorgestützte Chirurgie“ (Projekt „Q1: Aufbereitung medizinischer Daten“) sowie des Schwerpunktprojekts 1124 „Medizinische Navigation und Robotik“ (Projekt: „Computergestützte Planung und Navigation neurochirurgischer Eingriffe an der Wirbelsäule“), die die Ausrichtung meiner Arbeit geprägt haben. Für viele interessante Diskussionen, hilfreiche Anregungen und die Bereitstellung radiologischer Daten danke ich Dr. habil. Hartmut Friedburg. Den Radiologen aus der „Radiologischen Gemeinschaftspraxis im Zeppelinzentrum“ in Karlsruhe, der Radiologischen Universitätsklinik in Heidelberg, dem Städtischen Klinikum in Karlsruhe sowie dem Diakonissenkrankenhaus in Karlsruhe, die an der in dieser Arbeit beschriebenen Auswertung teilgenommen haben, danke ich für ihre Bereitschaft und die aufgewendete Zeit. Bei allen Kollegen am Institut für Algorithmen und Kognitive Systeme, insbesondere bei den (ehemaligen) Kollegen Ingo Boesnach, Martin Haimerl und Jörg Moldenhauer aus der Arbeitsgruppe „Medizinische Bildverarbeitung“ möchte ich mich für ihr offenes Ohr, ihre konstruktive Kritik und ihre Unterstützung meiner Arbeit bedanken. An alle (ehemaligen) Kollegen ergeht ein Dank für die vielfachen „Kuchenspenden“, die den Arbeitsalltag versüßten. Vielen Dank an Andreas Heinemann für die Versorgung mit CT-Daten. Für das Korrekturlesen von kleineren und größeren Abschnitten der entstehenden Dissertation und die vielen hilfreichen Anmerkungen bedanke ich mich bei Ingo Boesnach, Dr. Otto W. Hahn, Susanne Hahn, Prof. Gerhard Hübner, Thomas Kreitschmann, Esther Krutsche, Reinhard Merk, Jörg Moldenhauer, Peter Möller, Wilhelm Möller und Dr. Wolfram Stein. Ein ganz besonderes Dankeschön ergeht an meine nun fast zwei Monate alte Tochter Annika, dass sie mich in den letzten Nächten immer wieder schlafen ließ. Meiner Familie und meinen Freunden danke ich für ihre Geduld mit mir und ihr Verständnis in den letzten Jahren. Abschließend sage ich *Multas Gratias Susannae uxori carissimae*.



# Inhaltsverzeichnis

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 Bildgewinnung und Artefakte in der Röntgen-CT</b>               | <b>5</b>  |
| 1.1 Aufbau eines Computertomographen . . . . .                       | 5         |
| 1.2 Spiralcomputertomographie . . . . .                              | 7         |
| 1.3 Modellierung des Aufnahmeprozesses . . . . .                     | 8         |
| 1.4 Rekonstruktionsverfahren . . . . .                               | 10        |
| 1.4.1 Filterung im Frequenzraum . . . . .                            | 12        |
| 1.4.2 Faltung im Radonraum . . . . .                                 | 13        |
| 1.4.3 Alternative Berechnung im Radonraum . . . . .                  | 14        |
| 1.4.4 Berechnung im Diskreten . . . . .                              | 15        |
| 1.5 Impulsantwort der gefilterten Rückprojektion . . . . .           | 15        |
| 1.5.1 Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters . . . . .             | 16        |
| 1.5.2 Impulsantwort der Rückprojektion . . . . .                     | 17        |
| 1.6 Metallsinusoiden . . . . .                                       | 18        |
| 1.7 Darstellung und Speicherung von Rekonstruktionsbildern . . . . . | 20        |
| 1.7.1 Hounsfield-Einheiten . . . . .                                 | 21        |
| 1.7.2 Speicherung . . . . .  | 21        |
| 1.8 Artefakte . . . . .  | 22        |
| 1.8.1 Rauschartefakte . . . . .                                      | 24        |
| 1.8.2 Strahlauvhärtungsartefakte . . . . .                           | 27        |
| 1.8.3 Streustrahlartefakte . . . . .                                 | 33        |
| 1.8.4 Teilvolumenartefakte . . . . .                                 | 34        |
| 1.8.5 Abtastungsartefakte . . . . .                                  | 34        |
| 1.8.6 Bewegungsartefakte . . . . .                                   | 35        |
| 1.9 Zusammenfassung . . . . .  | 35        |
| <b>2 Reduktion von Metallartefakten in CT-Schnittbildern</b>         | <b>37</b> |
| 2.1 Stand der Technik . . . . .                                      | 38        |
| 2.1.1 Direkte Verfahren . . . . .                                    | 39        |
| 2.1.2 Iterative Verfahren . . . . .                                  | 45        |
| 2.2 Segmentierung von Metallsinusoiden . . . . .                     | 46        |
| 2.2.1 Bisherige Verfahren . . . . .                                  | 46        |
| 2.2.2 Verbessertes Verfahren . . . . .                               | 49        |
| 2.3 Pseudorohdaten . . . . .   | 52        |
| 2.3.1 Berechnung von Pseudorohdaten . . . . .                        | 53        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.3.2    | Clipping . . . . .   | 54         |
| 2.3.3    | Artefaktbehaftete Rekonstruktionsbilder . . . . .                  | 54         |
| 2.3.4    | Metall außerhalb des gespeicherten CT-Bildes . . . . .             | 63         |
| 2.4      | Segmentierung von Metallsinusoiden in den Pseudorohdaten . . . . . | 64         |
| 2.4.1    | Bestimmung inhomogener Regionen . . . . .                          | 66         |
| 2.4.2    | Texturanalyse . . . . .  | 69         |
| 2.4.3    | Waveletanalyse . . . . .   | 70         |
| 2.5      | Neues Verfahren zur Metallartefaktreduktion (RFMAR) . . . . .      | 84         |
| 2.5.1    | Tiefpassfilterung . . . . .  | 85         |
| 2.5.2    | Konvexe Kombinationen . . . . .                                    | 90         |
| 2.6      | Maße zur Bewertung radiologischer Bilder . . . . .                 | 94         |
| 2.6.1    | Technische Bildqualität . . . . .                                  | 94         |
| 2.6.2    | Diagnostische Bildqualität . . . . .                               | 99         |
| 2.7      | Bewertung der technischen Bildqualität von RFMAR . . . . .         | 99         |
| 2.7.1    | Bildverbesserung eines artefaktbehafteten Bildes . . . . .         | 100        |
| 2.7.2    | Auswirkungen auf das Rekonstruktionsbild . . . . .                 | 106        |
| 2.8      | Anwendung von RFMAR auf radiologische CT-Datensätze . . . . .      | 110        |
| 2.9      | Auswertung der Artefaktreduktion durch Radiologen . . . . .        | 133        |
| 2.10     | Kontraindikationen . . . . .                                       | 136        |
| 2.11     | Klassifikation rauschartefaktbehafteter Bilder . . . . .           | 136        |
| 2.12     | Zusammenfassung . . . . .  | 140        |
| <b>3</b> | <b>Segmentierung medizinischer Daten</b>                           | <b>143</b> |
| 3.1      | Verfahren zur Segmentierung von Halswirbeln . . . . .              | 143        |
| 3.1.1    | Ballonmodell . . . . .   | 145        |
| 3.1.2    | Krümmungsanalyse . . . . .   | 149        |
| 3.1.3    | Bestimmung der Trennebenen . . . . .                               | 152        |
| 3.1.4    | Wirbelsegmentierung . . . . .                                      | 153        |
| 3.1.5    | Metallartefakte . . . . .  | 155        |
| 3.2      | Wirbelsegmentierung in MRT-Datensätzen . . . . .                   | 155        |
| 3.3      | Zusammenfassung . . . . .  | 157        |
| <b>4</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                                | <b>159</b> |
| <b>A</b> | <b>Grundlagen</b>  | <b>161</b> |
| A.1      | Definitionen . . . . .   | 161        |
| A.1.1    | Inverse und schlecht gestellte Probleme . . . . .                  | 161        |
| A.1.2    | Konvexe Kombinationen, Mengen, Hüllen und Funktionen . . . . .     | 161        |
| A.1.3    | Zusammenhang einer Menge . . . . .                                 | 162        |
| A.1.4    | Faltungen . . . . .  | 162        |
| A.1.5    | Grundlagen aus der Systemtheorie . . . . .                         | 163        |
| A.2      | Grundlagen der Wavelettransformation . . . . .                     | 165        |
| A.3      | Mathematische Morphologie . . . . .                                | 168        |

|                              |            |
|------------------------------|------------|
| <b>Notationsverzeichnis</b>  | <b>171</b> |
| <b>Abkürzungsverzeichnis</b> | <b>177</b> |
| <b>Literaturverzeichnis</b>  | <b>179</b> |
| <b>Index</b>                 | <b>197</b> |



# Einleitung

Die Computertomographie (CT) ist seit einigen Jahren ein Standardverfahren zur Gewinnung tomographischer Aufnahmen in der medizinischen Diagnostik sowie der Chirurgie. So werden beispielsweise Unfallverletzte häufig vor einer Operation im CT untersucht. Metalle, wie beispielsweise Zahnfüllungen, die sich im Aufnahmebereich befinden, führen häufig zu starken *Metallartefakten*, insbesondere auch zu *Rauschartefakten*, die sich in vielen Fällen über das ganze Bild erstrecken und dadurch eine diagnostische Auswertung sowie die weitere Bildverarbeitung oft erheblich erschweren oder gar unmöglich machen.

In der Vergangenheit wurden verschiedene Verfahren zur Reduktion von Rauschartefakten beschrieben. Diese setzen voraus, dass die Rohdaten verfügbar sind oder dass das artefaktverursachende Metall vollständig im Rekonstruktionsbild enthalten ist. In der Praxis ist in vielen Fällen keine von beiden Voraussetzungen erfüllt und deshalb keines der bestehenden Verfahren anwendbar. Im Rahmen dieser Arbeit wurde *RFMAR*<sup>1</sup>, ein Verfahren zur automatischen Reduktion von Rauschartefakten, entwickelt. Dieses basiert ausschließlich auf den Rekonstruktionsbildern und erfordert nicht, dass die artefaktverursachenden Metalle im Bild vorhanden sind. Die Rekonstruktionsbilder müssen dabei nicht im DICOM<sup>2</sup>-Format vorliegen. Prinzipiell ist es sogar möglich, RFMAR auf alte, artefaktbehaftete CT-Bilder, die von Röntgenfolie digitalisiert wurden, anzuwenden.

Zentraler Inhalt des ersten Kapitels ist die für die Beschreibung von RFMAR wichtige Modellierung der CT-Bildgewinnung, das heißt der Aufnahme von Rohdaten und die Rekonstruktion von Schnittbildern aus diesen Daten, unter besonderer Berücksichtigung der in diesem Prozess hervorgerufenen Artefakte. Dabei wird davon ausgegangen, dass zur Rekonstruktion das Standardverfahren in der CT, die *gefilterte Rückprojektion*, verwendet wird. Da sich die gefilterte Rückprojektion aus linearen Operatoren zusammensetzt, ist es möglich, die Metallartefakte einheitlich anhand von Impulsantworten der gefilterten Rückprojektion zu beschreiben. Dieser aus der Systemtheorie her bekannte Ansatz wird hier zum ersten Mal zur Beschreibung von Metallartefakten genutzt. Eine wichtige Teilmenge der Rohdaten, in der besonders starke Störungen der Daten festzustellen sind, stellen die *Metallsinusoiden* dar. Die Untersuchungen einiger geometrischer Eigenschaften dieser Menge erleichtert im weiteren Verlauf der Arbeit das Verständnis von RFMAR.

---

<sup>1</sup>RohdatenFreies MetallArtefaktReduktionsverfahren

<sup>2</sup>DICOM (Digital Imaging and COmmunications in Medicine): Standard zur Speicherung und Übertragung medizinischer Bilddaten [24, 141].

Das zweite Kapitel beginnt mit einem Überblick über bisherige Verfahren zur Metallartefaktreduktion. Ein weiterer wichtiger Bestandteil bildet die Analyse von *Pseudorohdaten*, die durch virtuelle Tomographie von Rekonstruktionsbildern gewonnen werden. Diese bilden die Grundlage für RFMAR. Durch geeignete Modifikationen und eine anschließende gefilterte Rückprojektion dieser Daten wird die Rauschartefaktreduktion von RFMAR realisiert. Deshalb geht die Analyse der Pseudorohdaten insbesondere der Frage nach, wie Störungen in den ursprünglichen Rohdaten in die Pseudorohdaten abgebildet werden. Besonders wichtig für eine erfolgreiche Rauschartefaktreduktion mit RFMAR ist die Segmentierung der Metallsinusoide in den Pseudorohdaten. Es wird gezeigt, dass sich herkömmliche Methoden zur Segmentierung von Metallsinusoiden in den Rohdaten im Allgemeinen nicht dafür eignen. Deshalb werden neue Verfahren entwickelt und analysiert. Unter diesen erzielt die Waveletanalyse das beste Resultat. Im Anschluss an die Segmentierungsverfahren wird RFMAR beschrieben und analysiert. Die Bewertung der erzielten Bildqualität geschieht einerseits anhand verschiedener Vergleichsmaße, von denen eines im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, andererseits durch eine Darstellung etlicher CT-Bilder vor und nach Artefaktkorrektur, die zusätzlich zum größten Teil auch von einer Gruppe Radiologen ausgewertet wurden. Hierbei stieß RFMAR durchweg auf gute bis sehr gute Resonanz. Im Weiteren wird ein schnelles texturbasiertes Verfahren vorgestellt, mit dem sich zuverlässig rauschartefaktbehaftete CT-Bilder klassifizieren lassen. Dadurch ist es möglich, automatisch viele Bilder zu untersuchen und auf die artefaktbehafteten RFMAR anzuwenden.

Die *Segmentierung* medizinischer Daten spielt im zweiten Kapitel bereits eine wichtige Rolle und ist zentrales Thema des dritten Kapitels, in dem ein neues Verfahren zur dreidimensionalen Segmentierung von Halswirbeln aus CT-Volumendaten beschrieben wird. Der Ansatz beruht darauf, einen virtuellen Ballon in Form eines Feder-Masse-Modells in den Wirbelkanal einzusetzen und diesen iterativ zu dilatieren. Er approximiert eine differenzierbare 2-Mannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$ , deren Oberflächenkrümmung effizient abgeschätzt werden kann. Anhand der Oberflächenkrümmung lassen sich elliptische Regionen auf dem Ballon detektieren, die den Zwischenwirbelbereichen entsprechen. Deren Position wird zur Bestimmung von Trennebenen verwendet. Diese wiederum ermöglichen eine Segmentierung der Wirbel durch *Region Growing*. Einsatzmöglichkeiten des Verfahrens ergeben sich in der Diagnostik, der Therapie oder auch der Planung von chirurgischen Eingriffen. Besonders interessant ist das Verfahren dadurch, dass es sich mit nur geringen Modifikationen auch für Magnetresonanztomographie(MRT)-Daten eignet. Ein großes Problem für den Einsatz der Ballon-basierten Wirbelsegmentierung bei CT-Daten stellen Metallartefakte dar. Durch eine Rauschartefaktreduktion durch RFMAR lassen sich diese jedoch so reduzieren, dass das Ballonverfahren erfolgreich eingesetzt werden kann.

## Allgemeine Bemerkungen

In dieser Arbeit werden bei Grauwertdarstellungen, soweit nichts anderes angegeben, Werte niedriger Intensität dunkel und Werte hoher Intensität hell dargestellt. Die Laufzeit von Algorithmen bezieht sich auf einen Intel Pentium 4-PC mit 2,5 GHz und 2 GByte RAM unter Windows XP Professional SP 2. Die Algorithmen in den ersten beiden Kapiteln wurden unter Matlab Version 7, R14 ausgeführt. Im dritten Kapitel kamen Java 2 und Java3D 1.3.1 zum Einsatz. Zur Hervorhebung von Programmcode vom übrigen Text wird ein Schreibmaschinenfont verwendet.



# 1 Bildgewinnung und Artefakte in der Röntgen-CT

In den 1970er Jahren, ungefähr 80 Jahre nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen durch Wilhelm Conrad Röntgen [169], gelang es Godfrey N. Hounsfield [87] basierend auf Arbeiten des Physikers Allan McLeod Cormack [28, 29] einen ersten Röntgen-Computertomographen (CT<sup>1</sup>) zur Erzeugung von Patientenschnittbildern zu entwickeln. Moderne CTs ermöglichen schnelle tomographische<sup>2</sup> Aufnahmen des Körperinneren in hoher submillimetrischer Auflösung. Mittlerweile ist die CT ein Standardverfahren, ohne deren Einsatz viele Bereiche der Medizin nicht mehr denkbar wären.

CT-Bilder werden durch Rekonstruktionsverfahren aus Messwerten berechnet, die während der CT-Aufnahmen gewonnen werden. Die Berechnung von *Rekonstruktionsbildern* ist jedoch ein *schlecht gestelltes Problem* (vgl. Def. A.2) und deshalb empfindlich gegenüber Rauschen und anderen Störungen in den Messwerten [123, 139, 167]. Dies äußert sich durch *Artefakte*, die die *Rekonstruktionsbilder* zum Teil erheblich beeinträchtigen. Befindet sich Metall, wie beispielsweise Amalgamfüllungen, im Messbereich, ergeben sich meist besonders starke *Metallartefakte*.

Die Ausprägung der Artefakte ist abhängig vom verwendeten Rekonstruktionsverfahren. In der medizinischen Radiologie wird dazu in der Regel die *gefilterte Rückprojektion* [20, Kap. 5.3], [86], [89, Kap. 3.6] verwendet. Deshalb wird in dieser Arbeit hauptsächlich dieses Verfahren beschrieben<sup>3</sup> und anhand von Impulsantworten analysiert. Dies dient im Folgenden der Beschreibung von Metallartefakten.

## 1.1 Aufbau eines Computertomographen

Die CT-Aufnahme findet in der *Abtasteinheit (Gantry)* statt. Zur Tomographie eines Patienten wird dieser auf einem *Patiententisch* in der Abtasteinheit des CT positioniert (s. Abb. 1.1). Durch eine schmale Blende gelangen Röntgenstrahlen einer

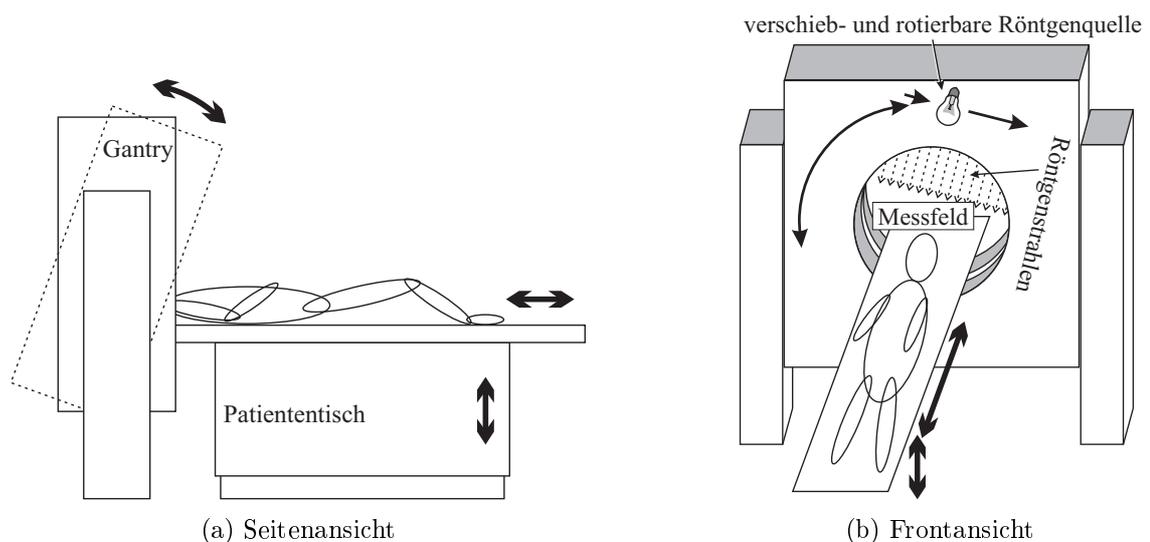
---

<sup>1</sup>Die Abkürzung *CT* wird als Abkürzung im Weiteren sowohl für *Röntgen-Computertomographie* als auch für *Röntgen-Computertomograph* verwendet.

<sup>2</sup>griech.: ὁ τόμος = abgeschnittenes Stück

<sup>3</sup>Weitere Rekonstruktionsverfahren findet man in [18, 20, 40, 82, 102, 108, 114, 145, 160, 164, 173, 175, 201, 223, 224].

rotierenden Röhre in das *Messfeld*, durchdringen den Patienten und treffen mit abgeschwächter Intensität auf der gegenüberliegenden Seite auf Detektoren, die die verbleibenden Intensitäten in verschiedenen diskreten *Winkelstellungen* der Röntgenröhre messen. Durch Kippung der Abtasteinheit (*Gantry Tilt*) wird die Aufnahmeebene festgelegt. Der Aufbau der Abtasteinheit hat sich im Lauf der Zeit viermal grundlegend geändert. Im Folgenden werden die vier CT-Generationen kurz beschrieben. Ausführliche Beschreibungen findet man in [20, 89, 138].



**Abbildung 1.1:** Schematischer Aufbau eines Computertomographen der ersten Generation.

Bei Tomographen der *ersten Generation* ist die Röntgenquelle mit einem nadelförmigen Strahlaustritt versehen. Auf der gegenüberliegenden Seite befindet sich ein einziger Detektor. In jeder Winkelstellung werden mehrere Messungen durchgeführt, zwischen denen die Röntgenröhre und der Detektor parallel zueinander so verschoben werden, dass das gesamte Messfeld an äquidistanten Positionen abgetastet wird. Dieser Aufbau wird *Parallelstrahlgeometrie* genannt.

Seit den Tomographen der *zweiten Generation* wird eine Röntgenröhre mit fächerförmigem Strahlaustritt verwendet. Auf der gegenüberliegenden Seite wird anstelle eines einzelnen Detektors ein Detektorarray verwendet. Dadurch lassen sich gleichzeitig mehrere Werte messen. Wie bei Tomographen der ersten Generation werden in jeder Winkelstellung mehrere Messungen durchgeführt, zwischen denen die Röntgenröhre und das Detektorarray parallel zueinander verschoben werden.

In den heute üblichen Tomographen der *dritten* und *vierten Generation* kann im Vergleich zu Tomographen der zweiten Generation durch Einsatz eines stärker gespreizten Fächers von Röntgenstrahlen ein viel größerer Bereich des Messfeldes abgetastet werden. In jeder Winkelstellung wird nur eine einzige Aufnahme gemacht. Die Röntgenröhre rotiert dazu kontinuierlich um den Patienten, während in festen

Zeitabständen die Detektoren ausgelesen werden. Die Detektoren befinden sich bei Tomographen der dritten Generation auf einem Detektorfeld, das zusammen mit der Röntgenröhre um das Messfeld rotiert und bei Tomographen der vierten Generation auf einem feststehenden Ring um das Messfeld<sup>4</sup>. Man nennt die Aufnahmegeometrie dieser Tomographen *Fächerstrahlgeometrie*.

Zur Rekonstruktion von CT-Aufnahmen, die in einer Fächerstrahlgeometrie aufgenommen wurden, ist die genaue Kenntnis aller geometrischen Parameter, wie der Öffnungswinkel des Fächerstrahls oder die Abstände zwischen der Röntgenröhre und dem Drehzentrum beziehungsweise den Detektoren, erforderlich. Häufig variieren geometrische Parameter sogar zwischen unterschiedlichen Tomographen des gleichen Herstellers. Durch Umsortieren der Röntgenstrahlen (*Rebinning*) [20, Kap. 6.6.1] lassen sich diese Geometrien jedoch auf die eine geräteunabhängige Parallelstrahlgeometrie zurückführen<sup>5</sup>, in der sich sowohl die Modellierung der CT-Aufnahme als auch die Beschreibung von Rekonstruktionsverfahren besonders gut darstellen lassen. Aus diesem Grund wird im Weiteren von einer Parallelstrahlgeometrie ausgegangen. Jeder einzelne Röntgenstrahl  $\rho_{l,\theta}$  wird dabei wie in Abbildung 1.2 dargestellt durch das Tupel  $(l, \theta)$  adressiert, wobei  $l$  die kollineare Verschiebung und  $\theta$  die Winkelstellung beschreibt.

## 1.2 Spiralcomputertomographie

Das *Spiral-CT*-Aufnahmeverfahren wurde erstmals 1989 von KALENDER UND VOCK [105, 205] vorgestellt<sup>6</sup>. Es ermöglicht in vergleichsweise kurzer Zeit einen großen Körperbereich aufzunehmen. Innerhalb des aufgenommenen Bereichs lassen sich parallele Schnittbilder in beliebigen Positionen rekonstruieren. Die Spiral-CT hat sich mittlerweile als Standardverfahren in der Radiologie etabliert, mit dem auch alle in dieser Arbeit verwendeten radiologischen Aufnahmen erstellt wurden.

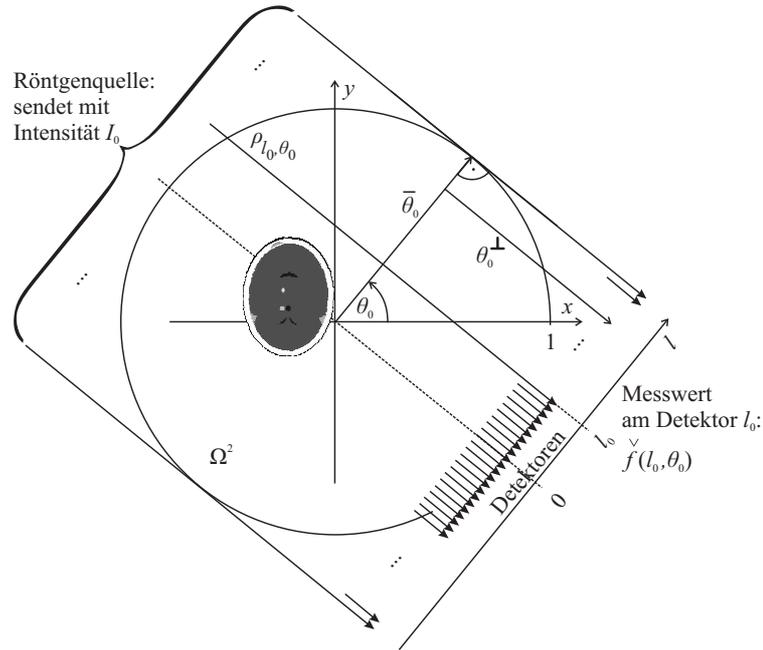
Bei der Spiral-CT wird der Patiententisch während der Aufnahme mit konstanter Geschwindigkeit unter der Abtasteinheit hindurchbewegt. Dadurch beschreibt die Röntgenröhre eine schraubenförmige Kurve um den Patienten. Mit Hilfe von Interpolationsverfahren, die in [20, 103, 138] beschrieben werden, und anschließendem Rebinning lassen sich daraus Messdaten in Parallelstrahlgeometrie und beliebiger Position innerhalb der Schraubenlinie gewinnen.

---

<sup>4</sup>Bei Fächerstrahltomographen wird nur ein kreisscheibenförmiger Teilbereich im Zentrum des Messfeldes (*scan field of view*) ausreichend abgetastet und daraus ein CT-Bild rekonstruiert [143]. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass der Patient jeweils komplett innerhalb dieser Kreisscheibe und damit in allen Winkelstellungen vollständig innerhalb des Fächers liegt.

<sup>5</sup>Heutige Tomographen sind zum Teil als *Mehrzeiler-CT* ausgeführt, d. h. sie besitzen mehrere Detektorzeilen bzw. eine Detektormatrix. Die daraus resultierenden Messdaten lassen sich jedoch nicht auf zweidimensionale Geometrien übertragen [20, Kap. 7.4]. Rekonstruktionsverfahren für Mehrzeiler-CT findet man in [20]. Sie sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

<sup>6</sup>Siehe auch [103, Kap. 3].



**Abbildung 1.2:** Parallelstrahlgeometrie. Der Röntgenstrahl  $\rho_{l_0, \theta_0}$  wurde exemplarisch hervorgehoben.

### 1.3 Modellierung des Aufnahmeprozesses

Zur Modellierung des Aufnahmeprozesses wird zunächst davon ausgegangen, dass die Röntgenstrahlen monochromatisch sind, das heißt eine einzige Frequenz aufweisen, und sich geradlinig ausbreiten. Zunächst wird nur ein einziger Röntgenstrahl betrachtet, der von der Röntgenquelle an Position  $\mathbf{p}_0$  durch das Gewebe dringt und zum Detektor an Position  $\mathbf{p}_1$  gelangt.

Die Intensität des Röntgenstrahls an der Position  $\mathbf{p}_\lambda$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  wird mit  $I_\lambda$  bezeichnet, wobei  $I_0$  die Ausgangsintensität an der Röntgenröhre und  $I_1$  die Intensität am Detektor darstellt.

Ist die Intensität  $I_\lambda$  in  $\mathbf{p}_\lambda$  bekannt, so ergibt sich die Intensität  $I_{\lambda+\Delta\lambda}$  in  $\mathbf{p}_{\lambda+\Delta\lambda}$  mit einem infinitesimalen  $\Delta\lambda$  zu

$$I_{\lambda+\Delta\lambda} = I_\lambda - \mu_\lambda \Delta\lambda I_\lambda. \quad (1.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor  $\mu_\lambda$  wird Schwächungskoeffizient des Gewebes in  $\mathbf{p}_\lambda$  genannt. Er ist gewebespezifisch und hauptsächlich durch die Ordnungszahl der Atome und die Dichte des Gewebes bestimmt (vgl. [42, Kap. 1.2]). Für Schwächungskoeffizienten außerhalb des Strahlengangs wird definiert

$$\forall \lambda \notin [0, 1] : \mu_\lambda = 0.$$

Eine Grenzwertbildung in (1.1) führt zu

$$\frac{dI}{d\lambda} = -\mu_\lambda I_\lambda \quad (1.2)$$

mit der Lösung

$$I_\lambda = I_0 e^{-\int_0^\lambda \mu_\sigma d\sigma}. \quad (1.3)$$

Daraus bestimmt sich der *Projektionswert*  $\check{\mu}$  folgendermaßen:

$$\check{\mu} := \ln \frac{I_0}{I_1} = \int_0^1 \mu_\sigma d\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_\sigma d\sigma. \quad (1.4)$$

Bei der CT-Aufnahme werden die Projektionswerte  $\check{\mu}(l, \theta)$  entlang der Geraden

$$\rho_{l,\theta} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \bar{\theta} \rangle = l\} \quad (1.5)$$

bestimmt, wobei  $(l, \theta) \in (-1, 1) \times [0, 2\pi)$  und  $\bar{\theta} := (\cos \theta, \sin \theta)^t \in S^1$  (vgl. Abb. 1.2).

Sei  $\theta^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)^t \in S^1$  ein Vektor, der senkrecht auf  $\bar{\theta}$  steht. Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  wird durch

$$\mathcal{R}f(l, \theta) := \int_{-\infty}^{\infty} f(l\bar{\theta} + t\theta^\perp) dt \quad (1.6)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta\left(\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \bar{\theta} \right\rangle - l\right) dx dy \quad (1.7)$$

mit  $l \in \mathbb{R}$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$  ein Operator definiert, der nach JOHANN RADON [162] *Radontransformation* genannt wird. Die Funktion  $\check{f} := \mathcal{R}f$  wird *Radontransformierte* beziehungsweise *Sinogramm* von  $f$  genannt. Aufgrund (1.4) stellt die Radontransformation ein geeignetes Modell für die CT-Aufnahme der Schwächungskoeffizienten  $\mu$  des Gewebes im Strahlengang dar. Die im CT tatsächlich gemessenen *Rohdaten*  $\check{\mu}$  stellen im Wesentlichen eine Abtastung des Sinogrammes  $\mathcal{R}\mu$  bezüglich  $\theta$  und  $l$  dar. Im Weiteren werden jedoch auch diese als Radontransformierte beziehungsweise Sinogramm bezeichnet.

Aus (1.6) ergibt sich die Symmetriebedingung

$$\check{f}(l, \theta) = \check{f}(-l, -\theta). \quad (1.8)$$

Somit ist die Radontransformation durch die Projektionswerte in  $[0, \pi)$  bereits eindeutig bestimmt. Für die auf diesen Bereich eingeschränkte Radontransformierte sowie deren diskrete Approximationen werden im Weiteren die Bezeichnungen wie oben verwendet. Weitere Eigenschaften der Radontransformation sind in Tabelle 1.1 zusammengefasst. Für detailliertere Darstellungen sowie Verallgemeinerungen sei auf [10, 20, 79, 80, 82, 93, 102, 126, 127, 138, 139, 157, 162, 164, 186, 201] verwiesen. Die Rekonstruktion von CT-Bildern erfolgt anhand numerischer Verfahren zur Berechnung der inversen Radontransformation  $\mathcal{R}^{-1}$ .

|              |  |
|--------------|--|
| Linearität   | $[\mathcal{R}\{\alpha g + \beta h\}] = \alpha [\mathcal{R}g] + \beta [\mathcal{R}h]$               |
| Verschiebung | $[\mathcal{R}f(x - a, y - b)](l, \theta) = \check{f}(l - (a \cos \theta + b \sin \theta), \theta)$ |
| Rotation     | $[\mathcal{R}g(r, \phi)](l, \theta) = [\mathcal{R}g(r, \phi - \phi_0)](l, \theta - \phi_0)$        |
| Faltung      | $[\mathcal{R}\{g * h\}] = [\mathcal{R}g] *_l [\mathcal{R}h]$                                       |

**Tabelle 1.1:** Eigenschaften der Radontransformation. Es gilt  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Die Angabe der Rotationseigenschaft erfolgt für Polarkoordinaten.

## 1.4 Rekonstruktionsverfahren

Sowohl die im CT gemessenen Rohdaten  $\check{f}$  als auch das rekonstruierte Bild  $f$  können in der Praxis nicht kontinuierlich sondern nur diskret sein. Deshalb lässt sich das diskrete  $\check{f}$  als lineares Gleichungssystem  $\check{f} = Rf$  darstellen, wobei  $R$  derjenige lineare Operator ist, der die Radontransformation des diskretisierten Urbildes  $f$  beschreibt. Die Gewichte in  $R$  berücksichtigen die von Röntgenstrahlen endlicher Breite durchleuchteten Flächen der einzelnen Pixel in  $f$  [66, 112]. Dabei können unterschiedliche Pixelgeometrien als Grundlage dienen [39, Kap. 4]. Das *Rekonstruktionsbild*  $\tilde{f}$  bestimmt sich anhand der Pseudoinversen  $R^+$  [195] zu  $\tilde{f} \approx R^+ \check{f}$  [20, 167]. Diese Lösung minimiert den Fehler  $\tilde{f} = \arg \min \|Rf - \check{f}\|_2$ . Die Lösung des Gleichungssystems kann anhand der Singulärwertzerlegung von  $R$  erfolgen [20, Kap. 5.12]. Im Allgemeinen sind die auftretenden Matrizen jedoch so groß, dass eine direkte Berechnung nicht praktikabel ist und deshalb iterativ Näherungslösungen bestimmt werden<sup>7</sup>. Dies ist jedoch sehr zeitintensiv [71, Kap. 5.2.4], weshalb die *iterativen Verfahren* bislang kaum praktische Relevanz für die CT haben und deshalb in diesem Rahmen nicht näher beleuchtet werden. Für detaillierte Beschreibungen sei auf [20, 39, 66, 95–97, 101, 102, 123, 139, 140, 224] verwiesen.

Der folgende Satz ist die Grundlage für das *Fourierrekonstruktionsverfahren* [138, Kap. 5.4]. Im Folgenden wird er zur Herleitung der gefilterten Rückprojektion verwendet.

**Satz 1.1 (Fourier-Scheiben-Theorem)** *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\check{f}(t\bar{\theta})$  für alle  $\bar{\theta} \in S^1$  proportional zu den fouriertransformierten Projektionswerten  $\mathcal{F}(f(\cdot, \theta))$  so, dass*

$$[\mathcal{F}_{l \rightarrow \omega} \check{f}](\omega, \theta) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega \bar{\theta}). \quad \square$$

<sup>7</sup>Aufgrund der Schlechtgestelltheit des Problems ist selbst bei entsprechender Rechnerkapazität ein Regularisierungsverfahren vorzuziehen [167].

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_{l \rightarrow \omega} \check{f}](\omega, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(l, \theta) e^{-il\omega} dl \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \bar{\theta} \rangle - l) dx dy \right] e^{-il\omega} dl \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i\omega \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \bar{\theta} \rangle} dx dy \\
&= \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega \bar{\theta})
\end{aligned} \tag{1.9}$$

■

Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ . Dann gilt unter Verwendung von Polarkoordinaten aufgrund  $f = \mathcal{F}^{-1} \hat{f}$  und Satz 1.1 (vgl. [20, 82, 158, 201]):

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= \frac{1}{2(2\pi)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega \bar{\theta}) e^{i\omega \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \bar{\theta} \rangle} \omega d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| \hat{f}(\omega \bar{\theta}) e^{i\omega \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \bar{\theta} \rangle} d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\omega| [\mathcal{F}_{l \rightarrow \omega} \check{f}](\omega, \theta) e^{i\omega \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \bar{\theta} \rangle} d\omega d\theta \\
&= \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^* \mathcal{F}_{\omega \rightarrow l}^{-1} |\omega| [\mathcal{F}_{l \rightarrow \omega} \check{f}](\omega, \theta).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Hierbei bezeichne  $\mathcal{R}^*$  den wie folgt definierten adjungierten Operator von  $\mathcal{R}$ :

$$[\mathcal{R}^* g](x, y) := \int_0^{\pi} g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta =: \int_0^{\pi} g(\sigma_{(x,y)}(\theta), \theta) d\theta. \tag{1.11}$$

Dieser Operator wird *Rückprojektionsoperator* genannt [158], die Kurven

$$\sigma_{(x,y)} : \theta \mapsto x \cos \theta + y \sin \theta, \quad \theta \in [0, \pi) \tag{1.12}$$

werden im Weiteren als *Sinusoid* bezeichnet.

### 1.4.1 Filterung im Frequenzraum

Die *gefilterte Rückprojektion* ergibt sich nach (1.10) durch Filterung der Radontransformierten entlang der Spalten mit dem Filter  $|\omega|$  und einer anschließenden Rückprojektion<sup>8</sup>.

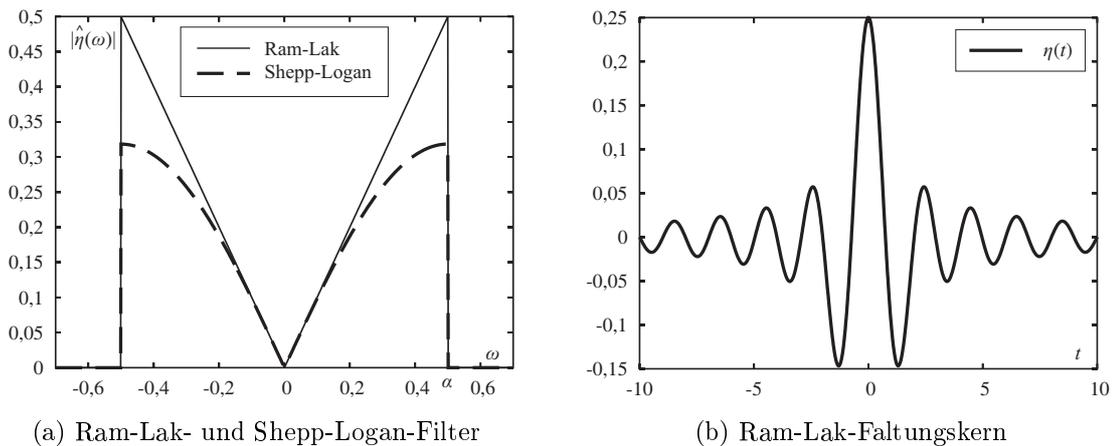
Aufgrund der diskreten Abtastung des Bildes  $f$  weisen die Rohdaten eine Maximalfrequenz  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  mit  $0 \leq |\omega| \leq \alpha$  auf. Aus diesem Grund kann man anstelle des unbegrenzten Filters  $|\omega|$  in (1.10) ein gefensterter *Rekonstruktionsfilter*  $\hat{\eta}$  verwenden. Dazu bieten sich verschiedene Fenster an [147, 148, 161]. Eine Fensterung mit dem idealen Tiefpass ergibt

$$\hat{\eta}(\omega) = |\omega| \Pi\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right) = \alpha \left( \Pi\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \right). \quad (1.13)$$

Dieses Filter wird nach seinen Erfindern Ramachandran und Lakshminarayanan *Ram-Lak-Filter* [20, Kap. 6.1.1] oder auch *Rampenfilter* [39, 86, 163, 201] genannt. Da hochfrequentes Rauschen durch dieses Filter verstärkt wird, werden in der Praxis üblicherweise Filter verwendet, bei denen hohe Frequenzen weniger stark gewichtet werden. Das heißt, sie gehen aus dem Ram-Lak-Filter durch eine zusätzliche Tiefpassfilterung hervor. Ein häufig verwendetes Filter ist das folgende *Shepp-Logan-Filter* [181]:

$$\hat{\eta}(\omega) = |\omega| \Pi\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right). \quad (1.14)$$

Dieses Filter wird, soweit nicht anders angegeben, auch in dieser Arbeit zur Rekonstruktion verwendet. Eine Beschreibung weiterer gebräuchlicher Rekonstruktionsfilter findet sich in [20, Kap. 6], [93, Kap. 10.6], [166, 173]. Eine Darstellung des Ram-Lak- und des Shepp-Logan-Filters findet sich für  $\alpha = 0,5$  in Abbildung 1.3.



**Abbildung 1.3:** Rekonstruktionsfilter und Faltungskern.

<sup>8</sup>Eine Fortsetzung der gefilterten Rückprojektion von  $\mathcal{RS}$  auf  $\mathcal{RL}^1$  beziehungsweise  $\mathcal{RL}^2$  ist unter bestimmten Voraussetzungen möglich [126], [139, Th. II 1.6].

### 1.4.2 Faltung im Radonraum

Sei  $\eta := \mathcal{F}^{-1}\hat{\eta}$  für ein bandbegrenzt Filter  $\hat{\eta}$ . Aufgrund des Faltungstheorems gilt:

$$f \approx \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^* \mathcal{F}^{-1} \hat{\eta} \mathcal{F} \check{f} \quad (1.15)$$

$$\approx \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}^* \eta *_l \check{f}. \quad (1.16)$$

Somit lässt sich die gefilterte Rückprojektion auch als Faltung mit dem Rekonstruktionsfaltungskern  $\eta$  berechnen [40, Kap. 6.4]. Dieser ergibt sich für das Ram-Lak-Filter nach (1.13) und der Potenzformel  $\sin^2 x = 1/2(1 - \cos 2x)$  [17] aufgrund der Linearität der Fouriertransformation zu

$$\begin{aligned} \eta(t) &= \alpha \mathcal{F}^{-1} \left( \Pi\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right) - \Lambda\left(\frac{\omega}{\alpha}\right) \right) (t) \\ &= \alpha^2 (2 \operatorname{sinc}(2\alpha t) - \operatorname{sinc}^2(\alpha t)) \\ &= \frac{\alpha \sin(2\alpha\pi t)}{\pi t} - \frac{1 - \cos(2\alpha\pi t)}{2(\pi t)^2}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Der zu dem Ram-Lak-Filter (s. Abb. 1.3(a)) korrespondierende Faltungskern ist in Abbildung 1.3(b) dargestellt. Durch Glättung dieses Faltungskernes ergeben sich die für die CT gebräuchlichen Rekonstruktionsfaltungskerne. Einen Überblick über Rekonstruktionsfaltungskerne bieten [20, 22, 138].

Aufgrund (1.17) gelten für Rekonstruktionsfaltungskerne  $\eta$  folgende asymptotische Beschränkungen nach oben und unten für  $|t| \rightarrow \infty$ :

$$\eta = O\left(\frac{\alpha}{\pi t}\right) \quad (1.18)$$

$$= \Omega\left(-\frac{\alpha}{\pi t}\right). \quad (1.19)$$

Für  $|t| \rightarrow 0$  lassen sich die Rekonstruktionsfaltungskerne  $\eta$  abschätzen durch:

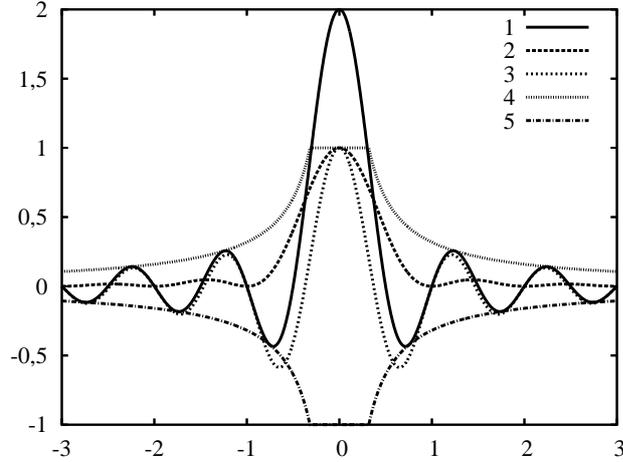
$$-\alpha < \eta \leq \alpha. \quad (1.20)$$

Insgesamt lässt sich das Abklingen der Intensitäten in den Rekonstruktionsfaltungskernen durch  $-\min\{\alpha, |\alpha/\pi t|\} \leq \eta \leq \min\{\alpha, |\alpha/\pi t|\}$  beschreiben, wie in Abbildung 1.4 für  $\alpha = 1$  dargestellt ist.

Für alle Rekonstruktionsfaltungskerne  $\eta$  gilt:

**Lemma 1.1** *Der Mittelwert des Faltungskernes  $\eta$  verschwindet.* □

**Beweis:** Nach Konstruktion gilt für den Mittelwert  $\bar{\eta} = \beta \hat{\eta}(0) = 0$ . ■



**Abbildung 1.4:** Abschätzung des Intensitätsverlaufs des zum Ram-Lak-Filter korrespondierenden Faltungskerns für  $\alpha = 1$ . Die Intensitäten anderer Rekonstruktionsfaltungskerne klingen aufgrund der Glättung noch schneller ab. 1:  $t \mapsto 2 \operatorname{sinc}(2t)$ , 2:  $t \mapsto \operatorname{sinc}^2(t)$ , 3:  $t \mapsto 2 \operatorname{sinc}(2t) - \operatorname{sinc}^2(t)$ , 4:  $t \mapsto \min\{1, |1/\pi t|\}$ , 5:  $t \mapsto -\min\{1, |1/\pi t|\}$

### 1.4.3 Alternative Berechnung im Radonraum

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung der gefilterten Rückprojektion ergibt sich durch die folgende Zerlegung des Filters  $\hat{\eta}$ :

$$|\omega| = \left(\frac{1}{i} \operatorname{sgn}(\omega)\right) (\omega). \quad (1.21)$$

Sei nun  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Für den *Differentialoperator*  $\mathcal{D}$  [173] mit

$$[\mathcal{D}g](t) = \frac{\partial}{\partial x} g = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \quad (1.22)$$

und den *Hilbertoperator*  $\mathcal{H}$  [139] mit

$$[\mathcal{H}g](t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y)}{t-y} dy = \frac{1}{\pi t} *_l g(t) \quad (1.23)$$

gelten nach [15, 139]

$$[\mathcal{F}(\mathcal{D}g)](\omega) = (i\omega) \hat{g}(\omega) \quad (1.24)$$

und

$$[\mathcal{F}(\mathcal{H}g)](\omega) = \frac{1}{i} \operatorname{sgn}(\omega) \hat{g}(\omega). \quad (1.25)$$

Hierbei ist das Integral in (1.23) als Cauchy'scher Hauptwert gemäß

$$[\mathcal{H}\check{f}](l, \theta) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{l-\epsilon} \frac{\check{f}(y, \theta)}{l-y} dy + \int_{l+\epsilon}^{\infty} \frac{\check{f}(y, \theta)}{l-y} dy \right\}$$

zu interpretieren [82, Kap. 8]. Aus (1.21), (1.24) und (1.25) folgt

$$\mathcal{F}^{-1}|\omega| = \eta = \mathcal{H}\mathcal{D}. \quad (1.26)$$

Sowohl der Differential- als auch der Hilbertoperator lassen sich als Faltungskerne realisieren (vgl. etwa [147]).

#### 1.4.4 Berechnung im Diskreten

In der Praxis stellen die Sinogramme diskrete und keine kontinuierlichen Funktionen dar. Des Weiteren werden die kontinuierlichen durch diskrete Operatoren approximiert [20, 82, 173]. Ausführliche Untersuchungen zu den Genauigkeiten der diskreten Rekonstruktion findet man in [6, 40, 50, 51, 82, 86, 120, 123, 139, 173, 203]. Die Fehler sind bei ausreichender Abtastung des Sinogramms und geeignetem Rekonstruktionsfilter gering [82, Kap. 16.4], [123, Kap. 6.3], [139]. Es wird deshalb im Weiteren weder zwischen kontinuierlichen und diskreten Operatoren noch zwischen kontinuierlichen und diskreten Bildern  $L^1(\mathbb{R}^2)$ ,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  beziehungsweise  $l^1(\mathbb{Z}^2)$  explizit unterschieden.

Seien  $\#\theta \in \mathbb{N}$ ,  $\#l \in \mathbb{N}$ ,  $\#\eta \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Aufnahmewinkel und der Detektoren sowie die die Länge des diskreten Rekonstruktionsfaltungskerns und  $n \times n$  die Größe des Rekonstruktionsbildes, dann beträgt der Aufwand für die Filterung im Frequenzraum  $O(\#\theta\#l \log \#l)$  und der Aufwand für die Faltung im Radonraum  $O(\#\theta\#l\#\eta)$ . Die Weglängen der Sinusoide, über die bei der Rückprojektion integriert wird, liegen in  $O(\#\theta\#l)$ . Für jedes Pixel des Rekonstruktionsbildes findet eine Integration über einen Sinusoid statt. Somit ergibt sich ein Gesamtaufwand von  $O(n^2\#\theta\#l)$  für die Rückprojektion. Die grundlegende Berechnung erfolgt mit Algorithmus 1.1. Hierbei berechne die Funktion  $\text{interpoliere}(\check{f}, 1, \theta)$  einen Funktionswert von  $\check{f}$  an der Stelle  $(l, \theta)$  durch geeignete Interpolation.

Allgemeine Beschreibungen zur Implementierung der gefilterten Rückprojektion findet man in [20, 59, 139, 167, 173, 174, 201]. In dieser Arbeit wird die gefilterte Rückprojektion mit der Matlab-Implementierung `iradon` [131] berechnet. Deren Laufzeit beträgt für Sinogramme der Größe  $729 \times 1.024$ , die in dieser Arbeit bei radiologischen CT-Daten Verwendung finden, ungefähr 130 Sekunden. Das Verhalten der gefilterten Rückprojektion und insbesondere Artefakte lassen sich anhand von Impulsantworten der gefilterten Rückprojektion beschreiben. Diese werden im folgenden Abschnitt untersucht.

## 1.5 Impulsantwort der gefilterten Rückprojektion

Im Folgenden wird für  $(l, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi)$  die Impulsantwort  $\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0, \theta_0}$  eines  $\delta$ -Impulses

$$\delta_{l_0, \theta_0}(l, \theta) = \delta(l - l_0)\delta(\theta - \theta_0) \quad (1.27)$$

**Algorithmus 1.1** Gefilterte Rückprojektion

Eingabe:  $\check{f} : \{0, \dots, \#l\} \times \{0, \dots, \#\theta\} \rightarrow \mathbb{R}$  Sinogramm  
 Ausgabe:  $\tilde{f} : \mathbb{Z}^2 \supset \text{Def}(\tilde{f}) \rightarrow \mathbb{R}$  Rekonstruktionsbild

---

```

1  /* Filterung im Radon- oder im Frequenzraum */
2  foreach s ∈ {0, ..., #θ} do
3      filtere(f(·, s));
4  od
5  /* Initialisierung eines Akkumulators als Nullmatrix */
6  akkumulator ← newdouble[#l, #θ]
7  /* Rückprojektion */
8  foreach (x, y) ∈ Def(f̃) do
9      for s ← 0, ..., #θ do
10         akkumulator[x, y] ← akkumulator[x, y] +
11                               interpoliere(f, x cos s + y sin s, s);
12     od
13 od

```

---

an der Stelle  $(l_0, \theta_0)$  im Sinogramm untersucht. Dazu wird zunächst die Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters analysiert und daraus die Impulsantwort der gefilterten Rückprojektion abgeleitet.

### 1.5.1 Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters

Die Impulsantwort eines Rekonstruktionsfilters  $\hat{\eta}$  entspricht offenbar dessen Rekonstruktionsfaltungskern  $\eta = \mathcal{F}^{-1}\hat{\eta}$  (vgl. Kap. 1.4.2). Alle Filter  $\hat{\eta}$  leiten sich aus dem Rampenfilter  $|\omega|$  ab und sind deshalb wie dieses reellwertige gerade Funktionen und damit insbesondere achsensymmetrisch bezüglich des Ursprungs. Somit sind auch die Rekonstruktionsfaltungskerne  $\eta$  symmetrisch bezüglich des Ursprungs [15], [122, Kap. 4.1]. Die Faltungskerne sind zunächst nichtlokal<sup>9,10</sup>. Dies liegt daran, dass das Rampenfilter  $|\omega|$  in  $\omega = 0$  nicht differenzierbar ist [145]. Für die Entstehung von Rauschartefakten spielen jedoch die Extrema des jeweiligen Faltungskernes, insbesondere das Maximum bei  $t = 0$  und die rechts und links daneben liegenden Minima, die wesentliche Rolle. Die Antwort des Rekonstruktionsfilters auf einen Impuls  $\delta_{l_0, \theta_0}(l, \theta)$  ist folglich der Rekonstruktionsfaltungskern  $\eta$  an der Stelle  $l_0$  entlang der Spalte  $\theta_0$ .

<sup>9</sup>Nichtlokalität bedeutet in diesem Fall, dass der Träger ein relativ großes Intervall überdeckt.

<sup>10</sup>Die Nichtlokalität spiegelt sich auch in der Nichtlokalität des Hilbertoperators in (1.26) wider, die sich aus (1.23) ergibt (vgl. [15, 146]).

## 1.5.2 Impulsantwort der Rückprojektion

Die Impulsantwort des Rekonstruktionsfilters, das heißt der Rekonstruktionsfaltungskern, lässt sich als Linearkombination

$$\int_{\mathbb{R}} \eta(s, \rho) \delta_{s, \rho} ds \quad (1.28)$$

einzelner Impulse auffassen. Da die Rückprojektion ein linearer Operator ist [173] können somit die Impulsantworten der gefilterten Rückprojektion wie folgt durch die Antworten der Rückprojektion auf die Linearkombination der einzelnen Impulse in (1.28) darstellen.

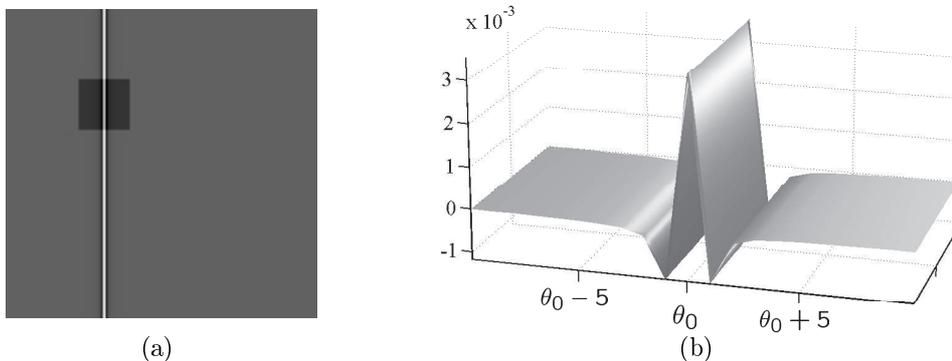
Sei wie in (1.5)  $\rho_{l, \theta} \subset \mathbb{R}^2$  eine Gerade im Ortsraum für  $(l, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, \pi)$ . Nach (1.11) gilt nun für die Rückprojektion eines Impulses  $\delta_{l_0, \theta_0}$

$$\mathcal{R}^* \delta_{l_0, \theta_0} = \chi_{\rho_{l_0, \theta_0}} \quad (1.29)$$

und damit anhand (1.16), (1.28) und (1.29) für die Impulsantwort  $\mathcal{R}^{-1} \delta_{l_0, \theta_0}$  der gefilterten Rückprojektion

$$\mathcal{R}^{-1} \delta_{l_0, \theta_0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} \eta(l - l_0) \chi_{\rho_{l, \theta_0}} dl. \quad (1.30)$$

Die Impulsantworten der gefilterten Rückprojektion ergeben sich also durch Linearkombinationen der Funktionen  $\chi_{\rho_{l, \theta_0}}$ , wobei die Gewichte proportional zu dem Rekonstruktionsfaltungskern gewählt werden. Als Beispiel wird in Abbildung 1.5 die Antwort auf einen Impuls  $\delta_{l_0, \theta_0}$  bei der gefilterten Rückprojektion dargestellt. In der 3D-Oberflächendarstellung (Abb. 1.5(b)) ist die Kontur des zugrundeliegenden Rekonstruktionsfaltungskerns deutlich zu erkennen.



**Abbildung 1.5:** (a) Impulsantwort  $\mathcal{R}^{-1} \delta_{l_0, \theta_0}$  im Rekonstruktionsbild. (b) 3D-Oberflächendarstellung des markierten Ausschnitts in (a). Rekonstruktionsfilter: Shepp-Logan.

Es sei hier noch angemerkt, dass sich die Impulsantworten unterschiedlicher Rekonstruktionsverfahren im Allgemeinen unterscheiden. Je nach Rekonstruktionsverfahren ergeben sich deshalb unterschiedliche Defektbilder. Diese Arbeit beschränkt sich jedoch auf die Analyse der gefilterten Rückprojektion, die standardmäßig in der Radiologie verwendet wird.

## 1.6 Metallsinusoide

Die Teilmenge der *Metallsinusoide* innerhalb eines Sinogramms spielt eine wichtige Rolle für die Entstehung von *Metallartefakten*. Das sind häufig besonders stark ausgeprägte Artefakte, die durch Metall im Strahlengang hervorgerufen werden. Eine Beschreibung dieser Artefakte findet sich im Abschnitt 1.8.

In vielen bisherigen Verfahren zur Reduktion von Metallartefakten werden alle Pixelintensitäten innerhalb der Metallsinusoide modifiziert. Das Ziel dabei ist es, einen Rohdatensatz zu erzeugen, aus dem ein Rekonstruktionsbild resultiert, das weniger Artefakte als das Rekonstruktionsbild der ursprünglichen Rohdaten enthält. Ein wesentlicher Schritt besteht darin, die Metallsinusoide zu bestimmen. Im Folgenden werden nach einer formalen Definition wichtige Eigenschaften der Metallsinusoide beschrieben.

**Definition 1.1 (Metallsinusoide)** Sei  $f$  ein Bild, das Metall enthält<sup>11</sup>, dann wird die Menge der Sinusoide  $\text{Tr}(\mathcal{R}\chi_{\text{Metall}(f)})$  *Metallsinusoide*<sup>12</sup> genannt.  $\square$

**Definition 1.2 (Lineare Separierbarkeit)** Eine Menge  $A \in \mathbb{R}^2$  wird *linear separierbar* genannt (vgl. [11, Kap. 3.2]), wenn es eine Gerade  $g : \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle = d$  mit  $g \cap A = \emptyset$  gibt, so dass die Schnittmengen von  $A$  mit den durch  $g$  definierten Halbebenen nicht leer sind, das heißt  $A \cap \{\mathbf{x} | \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle > d\} \neq \emptyset$  und  $A \cap \{\mathbf{x} | \langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle < d\} \neq \emptyset$ .  $\square$

**Satz 1.2 (Konvexe Hülle)** Für ein Bild  $f$ , das ein Metall  $M \subset \text{Def}(f)$  enthält, wird durch die Menge der Metallsinusoide

$$\sigma_M := \bigcup_{\mathbf{p} \in M} \sigma_{\mathbf{p}} = \bigcup_{\mathbf{p} \in M} \{\langle \mathbf{p}, (\cos \theta, \sin \theta)^t \rangle | \theta \in [0, \pi)\} \quad (1.31)$$

auf  $\mathfrak{P}\text{Def}(f)$  eine Äquivalenzrelation festgelegt gemäß

$$A \sim_{\sigma} B \Leftrightarrow \sigma_A = \sigma_B, \quad A, B \in \mathfrak{P}\text{Def}(f).$$

Es gilt außerdem für nicht linear separierbare, kompakte Mengen  $A, B \in \mathfrak{P}\text{Def}(f)$ :

$$A \sim_{\sigma} B \Leftrightarrow A \sim_{\text{kH}} B \Leftrightarrow \text{kH}(A) = \text{kH}(B),$$

<sup>11</sup>Damit ist gemeint, dass diejenige Körperschicht, die durch  $f$  repräsentiert wird, Metall enthält.

<sup>12</sup>In der Literatur wird hierfür auch der Begriff *Metallschatten* beziehungsweise *shadow* verwendet (vgl. [101, 135, 213]).

wobei  $kH(A)$  beziehungsweise  $kH(B)$  die konvexen Hüllen der Mengen  $A$  und  $B$  bezeichnet.  $\square$

**Beweis:** Es ist leicht zu sehen, dass  $\sim_\sigma$  und  $\sim_{kH}$  Äquivalenzrelationen sind. Zu zeigen bleibt, dass die Sinusoide zweier nicht linear separierbarer, kompakter Mengen  $A$  und  $B$  genau dann identisch sind, wenn ihre konvexen Hüllen  $kH(A)$  und  $kH(B)$  identisch sind.

Der Rand jeder konvexen Menge wird nach Definition durch ein konvexes Polygon beschrieben, wobei die Anzahl der Ecken auch unendlich sein kann. Seien  $V \in \mathfrak{P}\text{Def}(f)$  die Ecken des konvexen Polygons, das den Rand der konvexen Hülle von  $A$  bildet. Es gilt  $V \subset \partial A$ , weil nach Definition die  $kH(A)$  die kleinste konvexe Menge ist, die  $A$  enthält.

Bei der Radontransformation gibt es in jeder Projektionsrichtung  $\theta$  einen Strahl  $\rho_{l_-, \theta}$  mit minimaler  $l$ -Koordinate  $l_-$  und einen Strahl  $\rho_{l_+, \theta}$  mit maximaler  $l$ -Koordinate  $l_+$ , die  $A$  jeweils in  $V$  schneiden. Da  $A$  nicht linear separierbar ist, wird die Menge auch von allen  $\rho_{l, \theta}$  mit  $l \in (l_-, l_+)$  geschnitten. Die Intervalle  $[l_-, l_+]$  sind offensichtlich genau diejenigen Intervalle, auf die auch die konvexe Hülle bei der Radontransformation jeweils projiziert wird.

Enthält  $A$  jedoch einen linear separierbaren Punkt, unterscheidet sich in mindestens einem Winkel  $\theta$  die Projektion dieser Menge auf eine Hyperebene senkrecht zu  $\rho_{\cdot, \theta}$  von der Projektion der konvexen Hülle  $kH(A)$  auf diese Hyperebene.  $\blacksquare$

**Korollar 1.1** *Alle nicht linear separierbaren Metalle, deren konvexe Hülle identisch ist, sind bezüglich ihrer Metallsinusoiden äquivalent.*  $\square$

Aufgrund Korollar 1.1 werden der weiteren Betrachtung von Metallsinusoiden ausschließlich konvexe Objekte zugrunde gelegt.

**Korollar 1.2 (Zusammenhang von Metallsinusoiden)** *Sei  $M \subseteq \text{Def}(f)$  eine konvexe, kompakte und nicht linear separierbare Menge von Koordinaten eines Metalls innerhalb eines Bildes  $f$ . Dann ist die Menge der Metallsinusoiden  $\sigma_M$  einfach zusammenhängend (s. Def. A.7), das heißt anschaulich „ohne Löcher“.*  $\square$

**Beweis:** Aus dem Beweis zu Satz 1.2 geht hervor, dass die Radontransformation die Menge  $M$  in jedem Winkel  $\theta$  auf genau ein Intervall innerhalb der Spalte  $\theta$  projiziert. Jeder Punkt  $\mathbf{p} \in M$  wird bei der Radontransformation auf die Sinusoide  $\sigma_{\mathbf{p}}$  abgebildet [224], wobei die Bezeichnung wie in (1.12) gewählt ist. Somit sind die einzelnen Intervalle entlang der  $\theta$ -Achse zusammenhängend.  $\blacksquare$

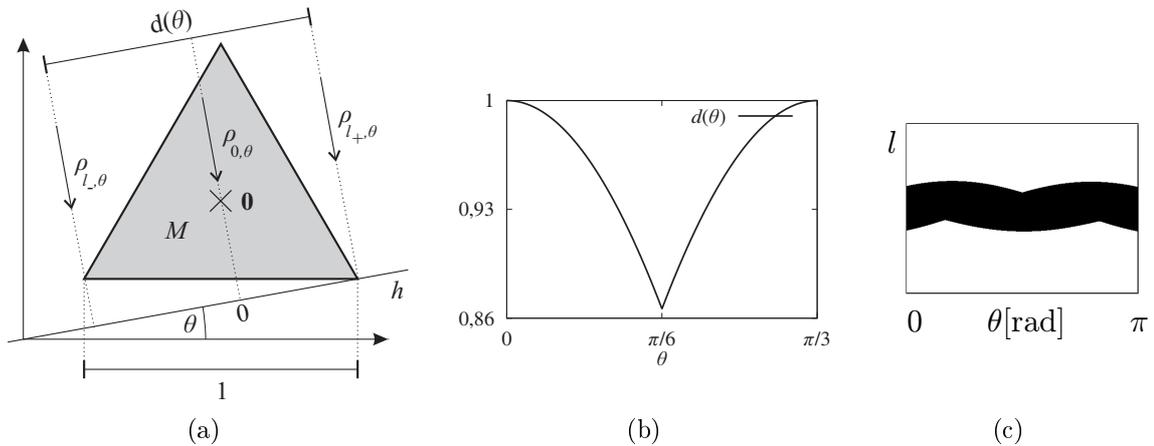
**Bemerkung 1.1 (Glattheit der Randkurven)** *Sei  $M \subseteq \text{Def}(f)$  ein kompaktes und konvexes Metall<sup>13</sup> innerhalb eines Bildes  $f$ . Die Metallsinusoiden  $\sigma_M$  ergeben sich*

<sup>13</sup>Damit ist gemeint: Die Menge der Koordinaten des Metalls sei kompakt und konvex.

als Vereinigung  $\cup \sigma_{\mathbf{p}}$  einzelner Sinusoide  $\sigma_{\mathbf{p}}$ ,  $\mathbf{p} \in M$ , die jeweils offensichtlich glatte Kurven sind. Die obere beziehungsweise untere Randkurve, das heißt die Kurven der maximalen beziehungsweise minimalen  $l$ -Koordinaten entlang der  $\theta$ -Achse, sind jedoch nicht notwendigerweise glatt. Dies sieht man etwa an den Sinusoiden eines gleichseitigen Dreiecks (vgl. Abb. 1.6(a)). Die Sinusoide überdecken in jeder Spalte  $\theta$  ein Intervall. Für die Länge  $d(\theta)$  des jeweiligen Intervalls in der Spalte  $\theta$  gilt für  $\theta \in [0, \pi/3]$

$$d(\theta) = \begin{cases} \cos(\theta), & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{6} \\ \cos \theta - \frac{\pi}{3}, & \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases} . \quad (1.32)$$

Offensichtlich ist  $d$  in  $\theta = \pi/6$  nicht differenzierbar (vgl. Abb. 1.6(b)). Die Sinusoide bilden nach Korollar 1.2 eine zusammenhängende Menge, die sich aus den einzelnen Intervallen zusammensetzt. An der Stelle  $\pi/6$  können daher die obere und die untere Randkurve nicht beide gleichzeitig glatt sein. Sei etwa die obere Randkurve glatt, so ergibt sich die untere Randkurve aus der Addition einer glatten Kurve mit der Kurve  $d(\theta)$ , die in  $\pi/6$  nicht glatt ist. Diese Stelle ist neben zwei weiteren nicht glatten Stellen deutlich in Abbildung 1.6(c) zu erkennen.  $\square$



**Abbildung 1.6:** Der Rand der Menge der Metallsinusoide ist nicht notwendigerweise glatt. (a) Gleichseitiges Dreieck, (b) Funktion der Intervalllängen  $d(\theta)$  für  $0 \leq \theta \leq \pi/3$ . (c) Sinusoide des Dreiecks.

## 1.7 Darstellung und Speicherung von Rekonstruktionsbildern

Eine wichtige Eigenschaft computertomographischer Bilder ist die Normierung der Pixelintensitäten in Form von *Hounsfield-Einheiten* (*HU*). Diese ermöglicht eine Zuordnung der Pixel zu bestimmten Gewebearten und dadurch beispielsweise anhand

einer Schwellwertsegmentierung die Extraktion von Knochengewebe aus den Bilddaten. Die Speicherung von Rekonstruktionsbildern stellt eine mögliche Quelle zusätzlicher Artefakte dar. Bei der Entwicklung von Verfahren zur Artefaktreduktion anhand von Rekonstruktionsbildern sollte insbesondere das im Folgenden beschriebene, bei der Speicherung üblicherweise stattfindende *Clipping* beachtet werden (vgl. Kap. 2.3).

### 1.7.1 Hounsfield-Einheiten

Die Schwächungskoeffizienten  $\mu(x, y)$  im rekonstruierten Bild werden in der Radiologie wie folgt auf *Hounsfield-Einheiten* (HU)  $\mu_{\text{HU}}$  abgebildet:

$$\mu_{\text{HU}}(x, y) = 1.000 \frac{\mu(x, y) - \mu_{\text{H}_2\text{O}}}{\mu_{\text{H}_2\text{O}}} \text{HU}. \quad (1.33)$$

Hierbei bezeichne  $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$  den Schwächungskoeffizienten, der sich bei Rekonstruktion von Wasser ergibt. Die Hounsfield-Einheiten ermöglichen den direkten Vergleich verschiedener CT-Bilder. In Abbildung 1.7 finden sich die Werte für typische Gewebearten. Die HU vieler Weichteile liegen im Bereich zwischen 0 HU und 100 HU, wodurch eine Differenzierung der einzelnen Gewebe anhand der HU erschwert wird. Knochengewebe unterscheidet sich jedoch aufgrund seiner hohen Dichte gut von anderem Gewebe. Für eine Schwellwertsegmentierung von Knochengewebe eignet sich ein Schwellwert  $T$  von  $T \approx 300$  HU.

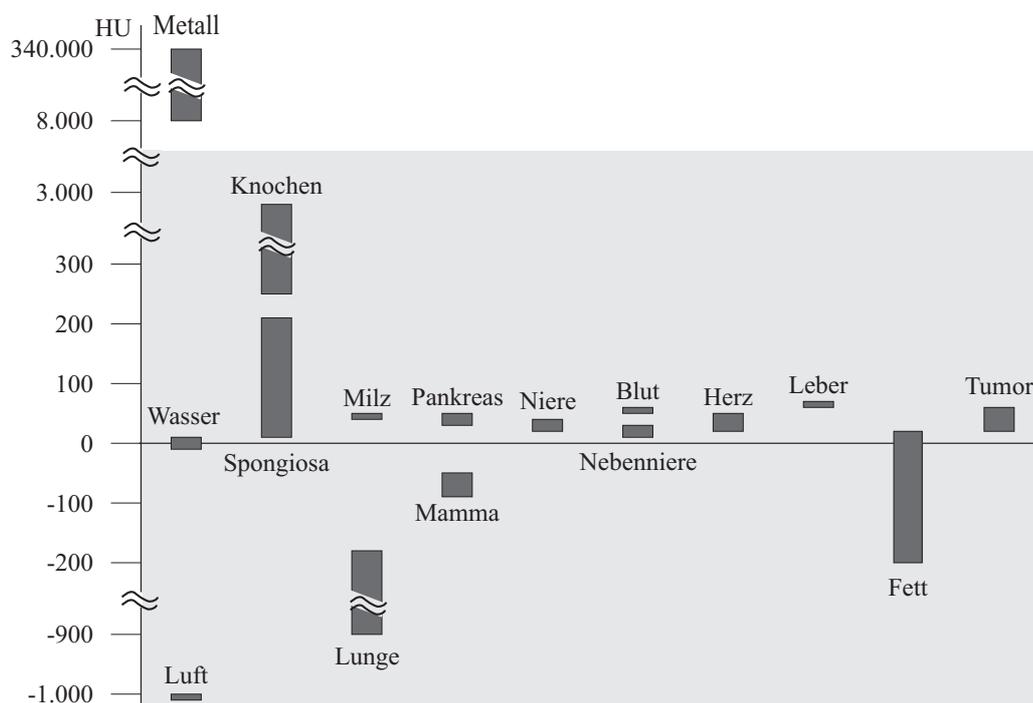
### 1.7.2 Speicherung

Zur Speicherung werden die Hounsfield-Einheiten üblicherweise in das *DICOM*<sup>14</sup>-Format übertragen. Genauere Angaben dazu sind in [24, 141] zu finden. Für die Speicherung von CT-Daten schreibt DICOM eine Grauwertaufösung  $a$  zwischen 12 Bit und 16 Bit vor [141, Teil 3, C.8.2.1.1.5]. Durch die beiden DICOM-Parameter *Rescale Intercept*  $b$  und *Rescale Slope*  $m$  [141, Teil 3, Tabelle C.8-3] werden die Hounsfield-Einheiten auf folgende Werte abgebildet:

$$\mu_{\text{HU}}(x, y) \mapsto \begin{cases} 0, & \mu_{\text{HU}}(x, y) < b \\ \left\lfloor \frac{\mu_{\text{HU}}(x, y) - b}{m} \right\rfloor, & b \leq \mu_{\text{HU}}(x, y) \leq 2^a - b - 1 \\ 2^a - 1, & \mu_{\text{HU}}(x, y) \geq 2^a - b \end{cases}. \quad (1.34)$$

Häufig setzen CT-Hersteller diese Parameter fest auf  $a = 12$ ,  $b = -1.024$  und  $m = 1$  (vgl. [59, Kap. 2.2.7]). Daraus resultiert ein darstellbarer Wertebereich von

<sup>14</sup>DICOM (Digital Imaging and COmmunications in Medicine): Standard zur Speicherung und Übertragung medizinischer Bilddaten [24, 141].



**Abbildung 1.7:** Hounsfield-Einheiten verschiedener Gewebetypen sowie von Metall. Die Wertebereiche sind aus [20, 113, 138, 213] zusammengestellt.

–1.024 HU bis 3.071 HU. Im Folgenden wird, soweit nicht anders angegeben, von diesem Wertebereich ausgegangen.

Die Hounsfield-Einheiten von Metallen, wie beispielsweise Zahnfüllungen, liegen im Bereich von 8.000 HU bis 340.000 HU [113, 213] und damit über 3.071 HU. Aufgrund von Artefakten unterschreiten die Pixelintensitäten teilweise auch –1.024 HU. Durch *Clipping* werden alle Werte, die außerhalb des Wertebereichs liegen auf den nähergelegenen Grenzwert –1.024 HU beziehungsweise 3.071 HU abgebildet. Das Clipping wird in Kapitel 2.3 im Hinblick auf die Artefaktreduktion nochmals gesondert betrachtet.

Im Folgenden wird bei Abbildungen von CT-Bildern der dargestellte Grauwertbereich, wie in der Radiologie üblich, in Form eines Grauwertfensters angegeben, das durch die Parameter  $Z$  und  $B$  festgelegt wird. Dabei werden alle HU innerhalb des Fensters  $[Z - \lfloor B/2 \rfloor, Z + \lfloor B/2 \rfloor]$  dargestellt, HU außerhalb des Fensters werden durch Clipping auf  $Z - \lfloor B/2 \rfloor$  beziehungsweise  $Z + \lfloor B/2 \rfloor$  gesetzt.

## 1.8 Artefakte

Häufig treten in CT-Rekonstruktionsbildern Artefakte auf, die zum Teil eine diagnostische Auswertung oder eine direkte Weiterverarbeitung erheblich erschweren oder

ganz unmöglich machen. In diesem Abschnitt werden verschiedene Arten von Artefakten beschrieben. Dabei wird besonderer Wert auf diejenigen Artefakte gelegt, die darauf zurückzuführen sind, dass sich Metall im Messbereich befindet.

Die meisten Artefakte liegen in fehlerhaften und modellunverträglichen Rohdaten begründet. Diese können als additive Überlagerung  $\check{f}_r = \check{f} + \check{\mathfrak{f}}$  der korrekten Rohdaten  $\check{f}$  mit einem von  $\check{f}$  abhängigen *Defektsinogramm*  $\check{\mathfrak{f}}$  interpretiert werden. Aufgrund der Linearität von  $\mathcal{R}^{-1}$  gilt dann

$$\tilde{f}_r := \mathcal{R}^{-1}\check{f}_r = \mathcal{R}^{-1}(\check{f} + \check{\mathfrak{f}}) = \tilde{f} + \mathcal{R}^{-1}\check{\mathfrak{f}} =: \tilde{f} + \tilde{\mathfrak{f}}. \quad (1.35)$$

Hierbei bezeichne  $\tilde{f} \approx f$  das artefaktfreie Rekonstruktionsbild<sup>15</sup> und  $\tilde{\mathfrak{f}}$  das additive *Defektbild*. Dieses beschreibt den Artefaktanteil im Bild vollständig und kann somit zur Artefaktanalyse herangezogen werden.

Das Defektsinogramm setzt sich im Allgemeinen aus den Defektmatrizen unterschiedlicher Artefakte zusammen. Aufgrund der Linearität von  $\mathcal{R}^{-1}$  kann wie im Folgenden jeder Artefakttyp für sich alleine betrachtet werden.

Nach den ihnen zugrunde liegenden Störursachen unterscheidet man

- Rauschartefakte,
- Strahlaufhärtingsartefakte,
- Streustrahlartefakte,
- Teilvolumenartefakte,
- Abtastungsartefakte und
- Bewegungsartefakte.

Für die Bildqualität spielen häufig die Rausch- und Strahlaufhärtingsartefakte die wichtigste Rolle [39, Kap. 3.4]. Neben diesen Artefakten können in Rekonstruktionsbildern weitere weniger bedeutende Artefakte auftreten, die etwa in [20, Kap. 8], [89, Kap. 7], [143] und [229] beschrieben sind.

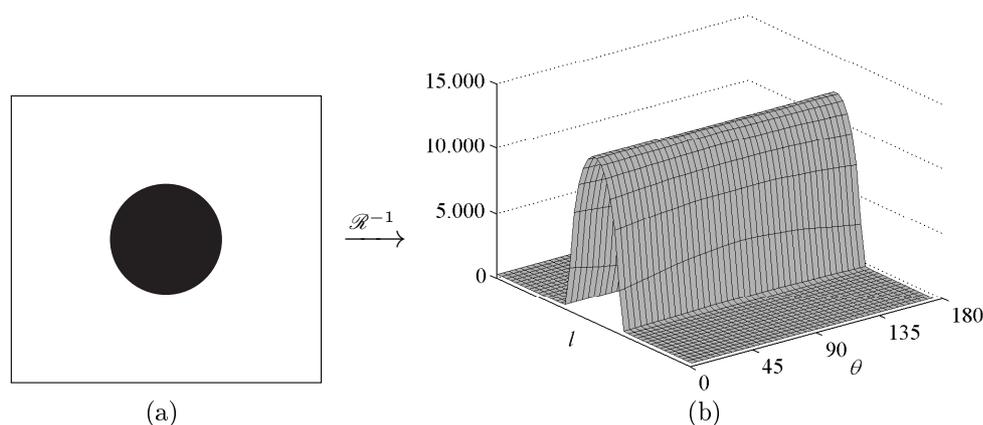
Für die meisten Artefakte gilt, dass eine stärkere Abschwächung der Röntgenstrahlen bei der CT-Aufnahme zu größeren Störungen in den Rohdaten führt. Deshalb ergeben sich besonders starke Artefakte im Rekonstruktionsbild, wenn sich Metall im Strahlengang befindet. Diese Artefakte werden unter dem Terminus *Metallartefakte* zusammengefasst. Das Metall wird *artefaktverursachendes Metall* genannt.

In den folgenden Unterabschnitten werden die erwähnten Artefakttypen beschrieben. Dabei wird ein besonderes Gewicht auf die Rausch- und Strahlaufhärtingsartefakte gelegt, da diese das Bild am meisten stören [39, Kap. 3.4]. Die Beschreibung dieser

<sup>15</sup>Im Diskreten sind Rechen- und Interpolationsungenauigkeiten unvermeidlich. Deshalb ist im Allgemeinen  $\tilde{f} \neq f$ . Die daraus resultierenden Fehler werden hier jedoch nicht zu den Artefakten gezählt.

Artefakte findet, anders als bei sonstigen Beschreibungen, anhand der Impulsantworten einzelner  $\delta$ -Impulse statt. Dieser Ansatz ermöglicht auf einfache Art unter anderem auch eine Analyse von Algorithmen zur Reduktion von Rausch- und Strahlauhfärtungsartefakten im nächsten Kapitel.

Zur Simulation von Rausch- und Strahlauhfärtungsartefakten dient das in Abbildung 1.8 dargestellte Kreisscheibenphantom  $k$ . Die Kreisscheibe hat einen Durchmesser von 50 Pixel und liegt in der Mitte eines Bildes der Größe  $128 \times 128$  Pixel. Der Grauwert innerhalb der Kreisscheibe ist 255, das restliche Bild hat den Grauwert 0. Als Rekonstruktionsfilter wird das Ram-Lak-Filter verwendet. Die Berechnung der Rohdaten findet unter Matlab mit dem Befehl `radon` statt. Für ein CT-Bild der Größe  $512 \times 512$  dauert die Berechnung der Radontransformation mit 1.024 Projektionswinkeln, wie sie in dieser Arbeit verwendet wird, ungefähr 25 Sekunden.



**Abbildung 1.8:** (a) Kreisscheibenphantom  $k$  (invertiert). (b) Sinogramm  $\tilde{k} = \mathcal{R}k$ .

### 1.8.1 Rauschartefakte

Das Signal-Rausch-Verhältnis ( $SNR$ ) im Sinogramm ist zunächst von der Röhrenspannung, der Röntgendosis, der Aufnahmedauer beziehungsweise alternativ der Anzahl der Aufnahmen und dem Rekonstruktionsfilter  $\hat{\eta}$  abhängig [20, Kap. 8]. Aufgrund technischer Rahmenbedingungen und der Strahlenbelastung für den Patienten sind die Aufnahmeparameter jedoch nicht beliebig zu variieren. Je stärker der Tiefpasscharakter des gewählten Filters ist, desto schwächer sind die Rauschartefakte. Gleichzeitig nimmt aber auch die Bildschärfe ab.

Rauschartefakte haben ihre Ursache in der statistischen Natur des Röntgenaufnahmeprozesses der CT. Dabei überlagert sich das Rauschen der Röntgenquanten mit

dem Eigenrauschen des Messsystems [20, Kap. 8], [88], [138, Kap. 5.3.2.2]. Das Eigenrauschen ist signalunabhängig, das Quantenrauschen hingegen nimmt mit sinkender Signalintensität zu [138].

Die an den Detektoren gemessene Röntgenstrahlung hängt von der Anzahl der pro Zeiteinheit auftreffenden Photonen ab und ist Poisson-verteilt [20, Kap. 2.4], [82, Kap. 3.1], [88]. Das Signalrauschen lässt sich aus der Standardabweichung der Poissonverteilung abschätzen, die sich nach [17] zu

$$\sigma(\bar{I}_1(l, \theta)) = \sqrt{\bar{I}_1(l, \theta)}$$

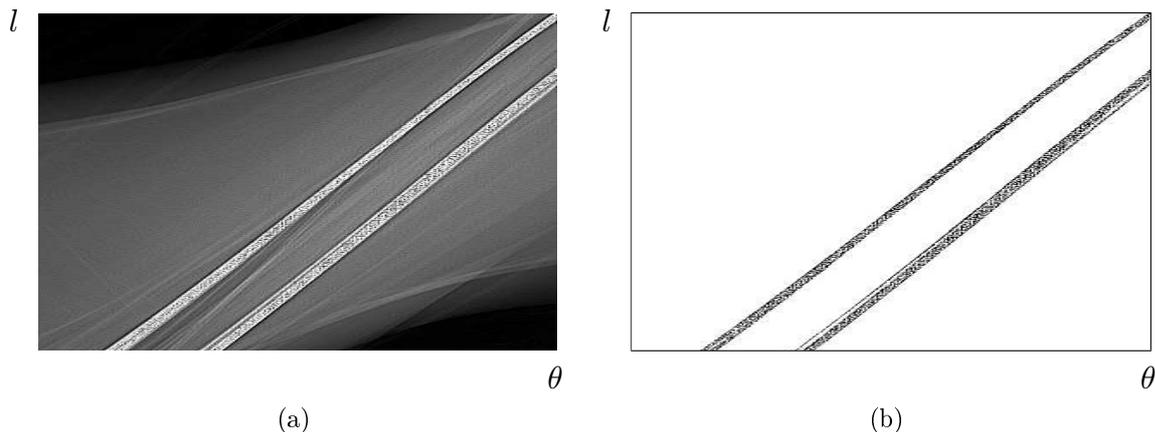
ergibt. Hierbei stellt  $\bar{I}_1(l, \theta)$  die mittlere Intensität dar, die am Detektor  $l$  in der Winkelstellung  $\theta$  des Aufnahmesystems gemessen wird. Daraus lässt sich, wie in [20, Kap. 8.7.1] hergeleitet wird, die signalabhängige Rauschvarianz der Rohdaten abschätzen durch

$$\sigma^2(\check{f}(l, \theta)) = 1/\bar{I}_1.$$

Mit (1.4) erhält man:

$$\sigma^2(\check{f}(l, \theta)) = \frac{1}{\bar{I}_1(l, \theta)} = \frac{1}{\bar{I}_0} e^{\check{f}(l, \theta)}, \quad (1.36)$$

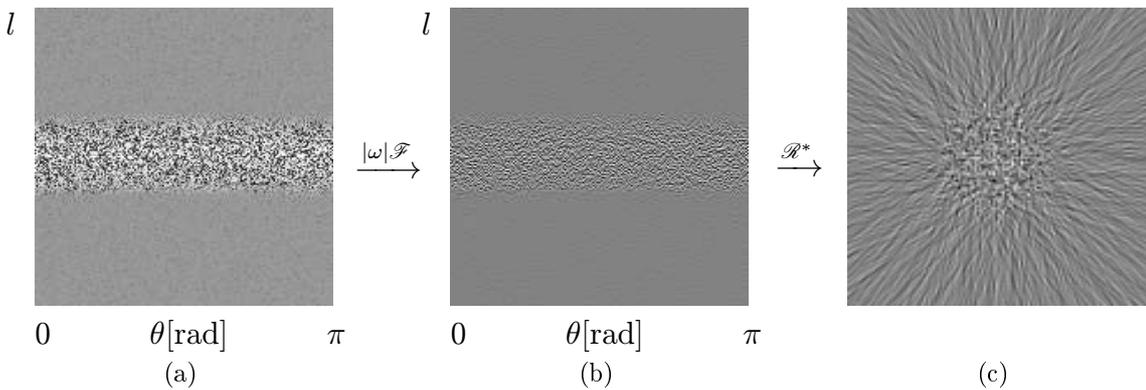
wobei  $\bar{I}_0$  die mittlere Intensität des Röntgenstrahls bei Strahlaustritt und  $\check{f}(l, \theta)$  den Erwartungswert im Sinogramm an der Stelle  $(l, \theta)$  bezeichnet. Das Quantenrauschen überträgt sich demnach in ein Rauschen im Radonraum, dessen Varianz exponentiell mit der Intensität der Projektionswerte  $\check{f}$  zunimmt (vgl. [88]). In Abbildung 1.9(b) ist ein Ausschnitt eines Rohdatensatzes dargestellt, in dem innerhalb der Metallsinusoide ein verstärktes Rauschen zu erkennen ist.



**Abbildung 1.9:** Rauschen innerhalb der Metallsinusoide. (a) Ausschnitt aus den Rohdaten eines Fächerstrahltomographen. Die hellen Streifen stellen die Metallsinusoide dar. (b) Invertierte Darstellung der Metallsinusoide. Zur Darstellung wurden beide Bilder entlang der  $l$ -Achse gestaucht. Außerdem wurde die Schärfe künstlich erhöht.

Das Defektsinogramm eines verrauschten Sinogramms ergibt sich aus der Differenz zu dessen unverrauschten Sinogramm. Somit weist das Defektsinogramm eine hohe Varianz innerhalb der Metallsinusoide auf. Jedes Pixel im Defektsinogramm wird auf ein Defektbild abgebildet, das bis auf Skalierung, Rotation und Translation der Impulsantwort  $\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0,\theta_0}$  in Abbildung 1.5 entspricht. Das gesamte Defektbild setzt sich additiv aus den einzelnen Impulsantworten zusammen. Weil deren Skalierungen proportional zu den Intensitäten der korrespondierenden Defektpixel sind, wird das Defektbild von den Impulsantworten von Pixeln innerhalb der Metallsinusoide dominiert. Da die Geraden maximaler Intensität jeweils ein artefaktverursachendes Metall schneiden, ergeben sich im Defektbild strahlenkranzförmige Artefakte, die von den Metallregionen ausgehen. Aufgrund der Überlagerung von Impulsantworten sind die Intensitäten entlang der einzelnen Strahlen jedoch nicht konstant.

In Abbildung 1.10 ist eine Simulation von Rauschartefakten dargestellt. Diese ergibt sich durch ein normalverteiltes Rauschen dessen Varianz exponentiell mit den Pixelintensitäten im Sinogramm  $\tilde{k}$  (Abb. 1.8(b)) steigt. Ein zusätzliches signalunabhängiges Eigenrauschen des Systems wird durch ein Rauschen geringer Varianz in den Sinogrammregionen außerhalb der Metallsinusoide simuliert. Aus der Differenz des verrauschten und unverrauschten Rohdatensatzes ergibt sich das in Abbildung 1.10(a) dargestellte Defektsinogramm. Durch die Filterung mit  $\hat{\eta}$  wird hochfrequentes Rauschen verstärkt (Abb. 1.10(b)). Nach Rückprojektion ergibt sich das in Abbildung 1.10(c) dargestellte Defektbild. Die Artefakte breiten sich strahlenkranzförmig von der Mitte des Defektbildes, das heißt von dem Träger  $\text{Tr}(k)$  des Kreisphantoms, über das ganze Defektbild aus.



**Abbildung 1.10:** Rauschartefakte am Kreisscheibenphantom  $k$ . (a) Intensitätsabhängiges Rauschen auf den Rohdaten, (b) Filterung mit einem Ram-Lak-Filter und (c) Rekonstruktionsbild.

Aus den aufgeführten Gründen ergeben sich in der medizinischen CT bei Aufnahmen von Schnitten, die Metall enthalten, häufig starke Rauschartefakte. Dies ist in Abbildung 1.11(a) exemplarisch anhand eines Bildes aus der radiologischen Praxis dargestellt. Im oberen Teil dieses Bildes ist ein Teil des Kiefers mit Zahnfüllungen

zu erkennen. Von dort ziehen sich Rauschartefakte strahlenförmig über das ganze Bild. Zum Vergleich ist in Abbildung 1.11(b) eine parallele Schicht, die kaum Artefakte enthält, abgebildet. Beide Bilder sind in den Abbildungen 1.11(c) beziehungsweise 1.11(d) nochmals in einer anderen Grauwertfensterung dargestellt, in der die Artefakte noch deutlicher zu erkennen sind. Das Grauwertfenster wird durch den mittleren Grauwert  $Z$  und die Breite  $B$  des Fensters angegeben. Eine ausführlichere Beschreibung der Parameter findet sich in Abschnitt 1.7 am Schluss des Kapitels.

Der Modellierung von CT-Aufnahmen in Abschnitt 1.8.2 liegt die Annahme zugrunde, dass die Röntgenröhre monochromatische Strahlung emittiert. Dies trifft jedoch in der Praxis nicht zu. Polychromatische Spektren typischer Röntgenröhren sind beispielsweise [20, Kap. 2] und [59, Kap. 2] zu entnehmen.

### 1.8.2 Strahlaufhärtingsartefakte

In der Praxis wird aus finanziellen und fertigungstechnischen Gründen, anders als in Kapitel bei der Modellierung einer CT-Aufnahme angenommen, polychromatische Röntgenstrahlung verwendet. Die einzelnen Frequenzen der Strahlung werden im Gewebe unterschiedlich stark geschwächt. Strahlen hoher Frequenz, sogenannte *harte Strahlen* werden weniger stark geschwächt als Strahlen niedriger Frequenz. Dadurch ergibt sich eine relative Zunahme hoher Frequenzen bei der Durchdringung des Gewebes durch die Röntgenstrahlen<sup>16</sup>. Der Effekt ist desto stärker, je länger der Weg ist, den die Röntgenstrahlen durch das Gewebe zurücklegen, beziehungsweise je dichter das Gewebe ist. Es ist nun festzustellen, dass je härter ein Röntgenstrahl ist, desto geringer seine weitere Schwächung ausfällt. Die gemäß (1.4) logarithmierten Rohdaten unterschätzen aus diesem Grund die Messwerte, die sich bei monochromatischer Strahlung ergeben würden. *Strahlaufhärtingsartefakte* sind eine Folge dieses Effekts. Sie lassen sich in *Cupping-* und streifenförmige Artefakte unterteilen, die im Folgenden beschrieben werden.

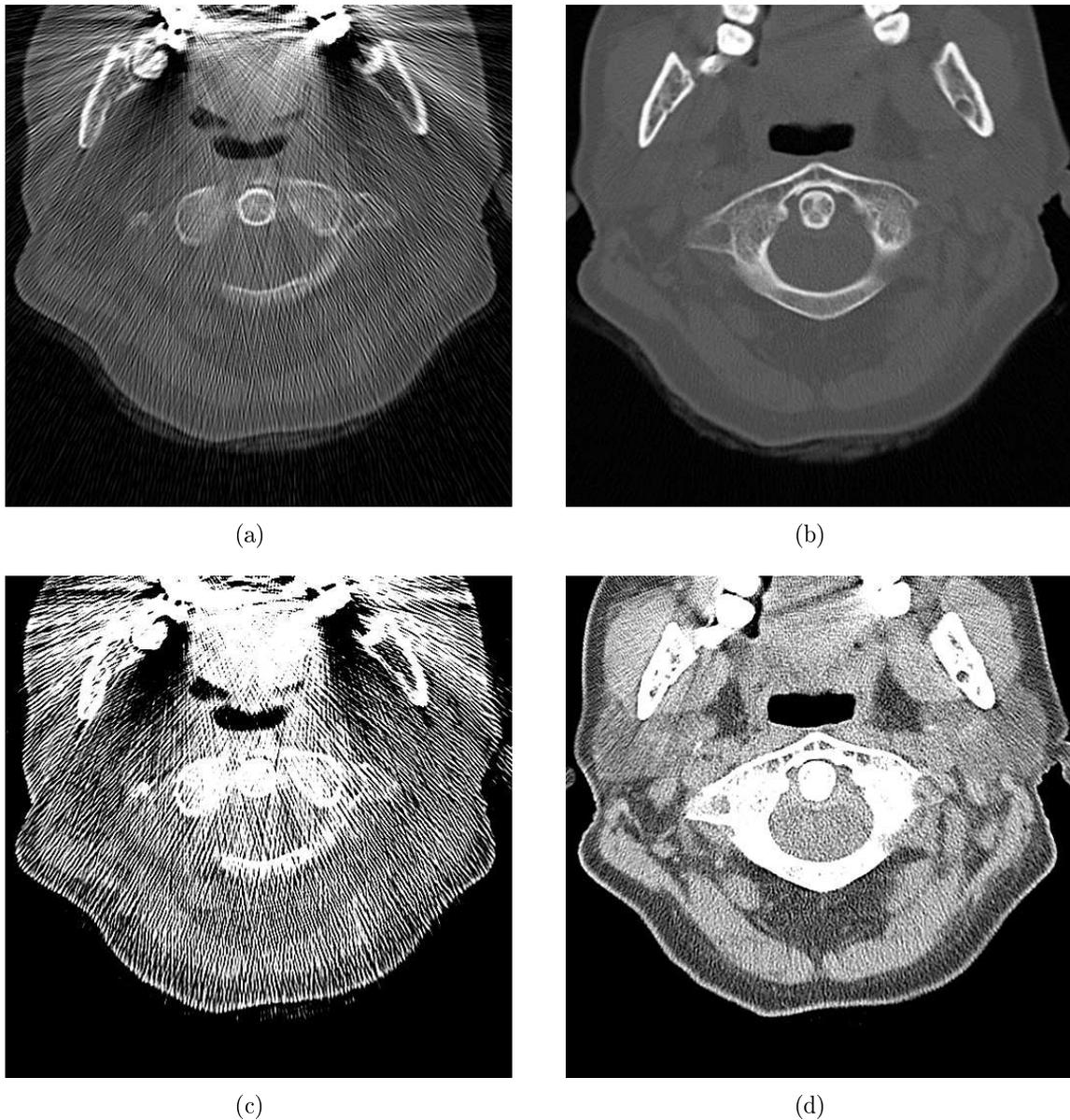
#### Cupping-Artefakte

Cupping<sup>17</sup>-Artefakte beschreiben den Effekt, dass aufgrund von Strahlaufhärtung konvexe Bereiche homogener Dichte nach der Rekonstruktion vom Rand zum Inneren hin abnehmende Intensitäten aufweisen.

Prinzipiell treten Cupping-Artefakte bei jedem Gewebe auf. Standardmäßig wird jedoch in jedem CT eine *Linearisierung* der Messwerte bezüglich Wasser durchgeführt, das heißt, die Werte werden so verändert, dass bei einer CT-Aufnahme eines Wasserphantoms in einem dünnwandigen Gefäß ein homogenes Bild aus der Rekonstruktion

<sup>16</sup>Dieser Effekt wird als *Strahlaufhärtung* bezeichnet.

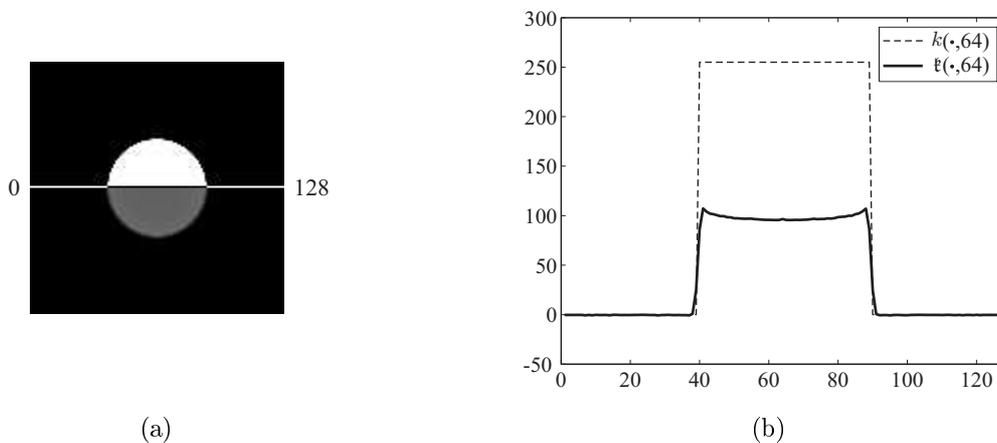
<sup>17</sup>engl.: cupping = das Tiefziehen, das Schröpfen; schröpfend



**Abbildung 1.11:** Rausch- und Strahlauhfärtungsartefakte im Bereich des Atlas (C1). (a) Artefaktbehaftete und (b) nahezu artefaktfreie Schicht parallel zu (a) im Abstand von 7,5 mm nach kranial. Ventral befindet sich jeweils ein Stück des Kiefers mit Zähnen, die Füllungen enthalten. In (a) überlagern ausgehend von den Zahnfüllungen hochfrequente Rauschartefakte strahlenförmig das Bild. Sowohl die beiden dunklen Abschattungen unterhalb der Zahnfüllungen, als auch die hellen Bereiche zwischen linker und rechter Kieferseite stellen Strahlauhfärtungsartefakte dar. Die Bildgröße beträgt jeweils  $512 \times 512$  Pixel.  $Z = 476$ ,  $B = 3000$ . (c), (d) wie (a), (b), jedoch  $Z = -24$ ,  $B = 400$ .

resultiert. Da der menschliche Körper zu über 80% aus Wasser besteht, werden dadurch die meisten Gewebe ohne sichtbare Cupping-Artefakte abgebildet [59, Kap. 3]. Cupping-Artefakte treten jedoch bei Gewebe hoher Dichte beziehungsweise besonders bei Metall auf.

Zur Simulation von Cupping-Artefakten wird auf das Sinogramm  $\check{k}$  des Kreisscheibenphantoms die Transformation  $(l, \theta) \mapsto (\check{k}(l, \theta))^{0,9}$  angewandt. Das resultierende Sinogramm wird als Defektsinogramm  $\mathfrak{k}$  interpretiert, dessen Werte unterproportional mit der Wegstrecke des Röntgenstrahls durch  $M$  wachsen. Das Rekonstruktionsbild ist in Abbildung 1.13 dargestellt. Da alle Spalten, das heißt alle Projektionen im Sinogramm, identisch sind, ist das zugehörige Rekonstruktionsbild rotationssymmetrisch. In Abbildung 1.12(b) sind die Intensitätsprofile des ursprünglichen Kreises  $k$  und des Defektbildes  $\mathfrak{k}$  entlang der in Abbildung 1.12(a) dargestellten Linie durch den Mittelpunkt von  $k$  beziehungsweise  $\mathfrak{k}$  aufgetragen. Darin ist deutlich eine Intensitätsabnahme der Werte  $\mathfrak{k}(\cdot, 64)$  vom Rand  $\mathfrak{k}(40, 64)$  beziehungsweise  $\mathfrak{k}(89, 64)$  des Defektbildes zur Mitte, das heißt nach  $\mathfrak{k}(64, 64)$  hin, zu erkennen. Für Punkte  $\mathbf{x} \notin M$  gilt  $\mathfrak{k}(\mathbf{x}) = 0$ . Eine Ausnahme bilden die Übergänge vom Rand des Defektbildes zum Bildhintergrund, das heißt zu Pixeln aus  $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} \notin M\}$ , die hier geglättet sind. Diese Glättung hängt von der numerischen Berechnung des Sinogramms und der anschließenden diskreten gefilterten Rückprojektion ab. Sie ist insbesondere unabhängig von der Strahlauvhärtung und tritt in ähnlicher Weise auch bei der Rekonstruktion von  $\check{k}$  auf.



**Abbildung 1.12:** Simulation von Cupping-Artefakten anhand des Kreisphantoms  $k$ . (a) Obere Hälfte: Kreisphantom  $k$ , untere Hälfte: Defektbild  $\mathfrak{k}$ . (b) Intensitätsprofile durch  $k$  und  $\mathfrak{k}$  entlang der in (a) dargestellten Linie.

### Streifenförmige Artefakte

Befinden sich im Messfeld mehrere Metalle oder werden die Röntgenstrahlen aufgrund inhomogener Dichten aus unterschiedlichen Richtungen unterschiedlich stark

aufgehärtet, resultieren daraus in Teilmengen der Metallsinusoide überproportional hohe *Intensitätsdämpfungen*. Dies führt zu Artefakten im Rekonstruktionsbild, die sich im Gegensatz zu den Cupping-Artefakten auch auf Bereiche außerhalb der Metallregionen erstrecken. Derartige Artefakte sind beispielsweise in Abbildung 1.11(a) in Verlängerung der beiden Seiten des Kiefernboogens in Form von schattenartigen Abdunklungen zu sehen.

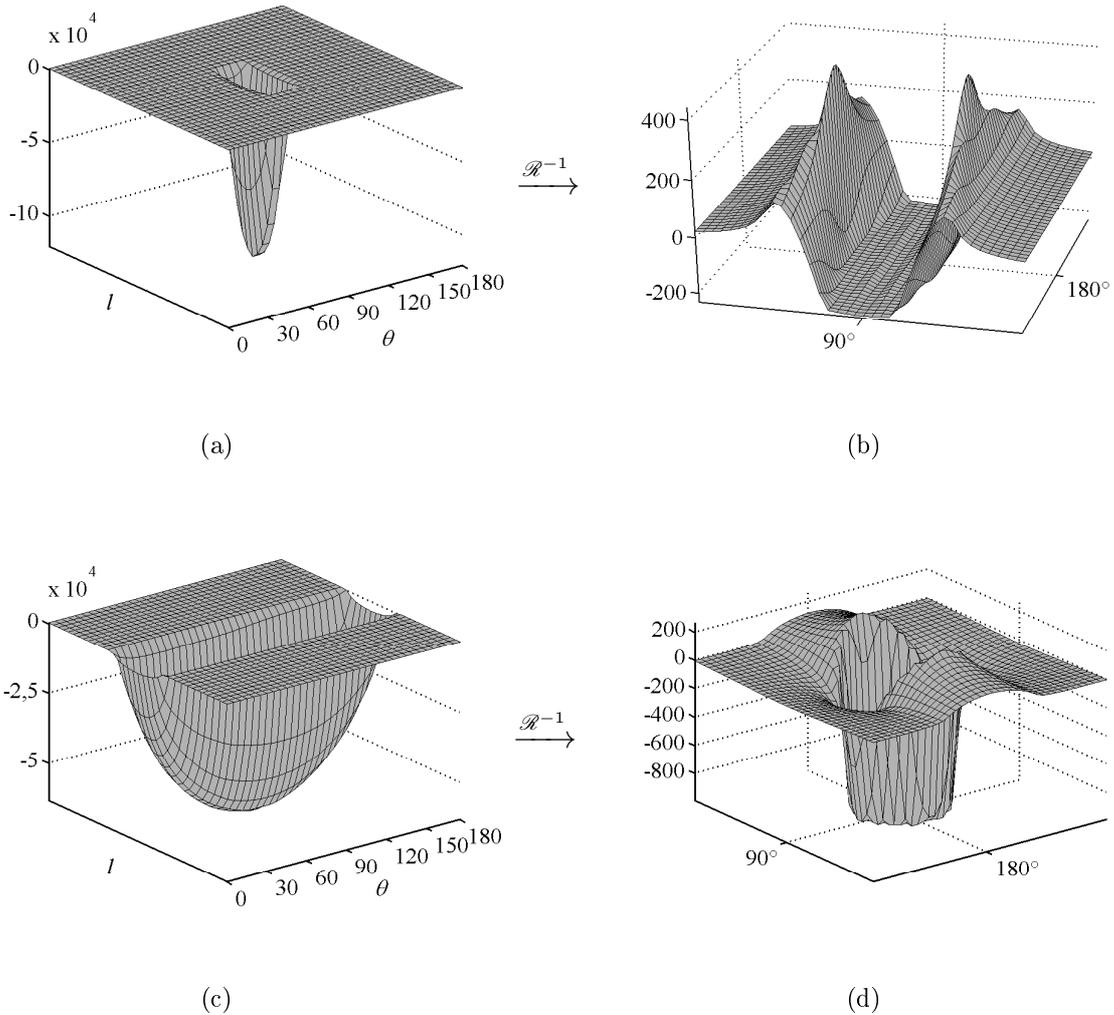
Zur Simulation wird das Sinogramm  $\check{k}$  des Kreisscheibenphantoms  $k$  verwendet. Die Menge  $\text{Tr}(k)$  wird ebenfalls als Metall identifiziert. Es befinde sich im Messfeld jedoch ein zweites Stück Metall, das zu einer überproportional starken Strahlaufhärtung der Messwerte in einem bestimmten Winkelbereich des Sinogramms führe. Sei  $f$  das Bild, das durch additive Überlagerung von  $k$  mit dem zweiten Metall entsteht,  $\check{f}$  das zugehörige Sinogramm und  $\check{\check{f}}$  das Defektbild aufgrund von Strahlaufhärtung. Zur Simulation wird  $\check{\check{f}}$  aus  $\check{f}$  in Abhängigkeit zum Projektionswinkel  $\theta$  folgendermaßen berechnet:

$$\check{\check{f}}(l, \theta) := \begin{cases} -\alpha \check{f}(l, \theta) \sqrt{1 - \left(\frac{\theta - \phi}{\beta}\right)^2}, & \left|\frac{\theta - \phi}{\beta}\right| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, \phi \in [0, \pi). \quad (1.37)$$

Die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  dienen zur Variation der Intensität beziehungsweise des Winkelbereichs der Intensitätsdämpfungen. Die Skalierung durch  $\alpha$  ist aufgrund der Linearität der inversen Radontransformation nicht entscheidend für die Ausprägung sondern nur für die Intensität der Artefakte im Rekonstruktionsbild. Die Ausprägung wird hingegen durch den Parameter  $\beta$  maßgeblich bestimmt. Anhand des Parameters  $\phi$  lässt sich das Zentrum der Intensitätsdämpfungen und damit die Orientierung der Artefakte im Rekonstruktionsbild variieren. In Abbildung 1.13 werden exemplarisch für unterschiedliche Parameter  $\beta$  zwei Defektsinogramme mit den jeweils korrespondierenden Defektbildern dargestellt.

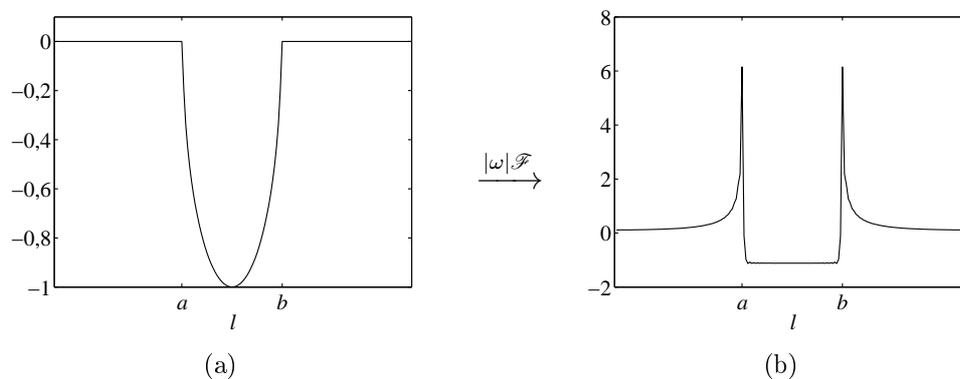
Das in Abbildung 1.13(a) dargestellte Defektsinogramm tritt typischerweise auf, wenn sich zwei Metalle im Messbereich befinden. Innerhalb eines kleinen Winkelbereichs, in dem die Röntgenstrahlen beide Metalle durchdringen, werden im Sinogramm die Metallsinusoide überproportional gedämpft. Im Rekonstruktionsbild resultiert dabei, wie in Abbildung 1.13(b) dargestellt, ein Streifen niedriger Intensität, der beide Metalle schneidet und sich über das ganze Rekonstruktionsbild erstreckt.

Die Erklärung dieser streifenförmigen Artefakte findet wieder anhand der Impulsantworten der gefilterten Rückprojektion statt. Dazu wird zunächst angenommen, dass nur eine einzige Spalte des Sinogramms von der Intensitätsdämpfung betroffen ist. Das Defektsinogramm enthält somit nur in dieser Spalte Defektpixel und ist ansonsten Null. Das Defektbild ergibt sich durch die Überlagerung der Impulsantworten der einzelnen Defektpixel. Da die Winkelkoordinaten aller Defektpixel identisch sind, liegen alle Impulsantworten parallel im Defektbild. Die Intensitäten im Rekonstruktionsbild senkrecht zu dieser Parallelschar entsprechen bis auf Skalierung der



**Abbildung 1.13:** Simulation von Strahlaufhärtungsartefakten gemäß (1.37), wobei die Winkelangabe hier in Grad erfolgt. (a) Defektsinogramm mit den Parametern  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 10$ ,  $\phi = 90^\circ$ . (b) Rekonstruktionsbild. Zum Vergleich mit (a) sind die Projektionswinkel  $90^\circ$  und  $180^\circ$  eingezeichnet. (c) Defektsinogramm mit den Parametern  $\alpha = 5$ ,  $\beta = 90$ ,  $\phi = 90^\circ$ . (d) Rekonstruktionsbild. Zur Rekonstruktion in (b) und (d) wurde das Ram-Lak-Filter verwendet.

Antwort des Defektsinogramms auf den Rekonstruktionsfilter innerhalb der betreffenden Spalte. Zur Anschauung wird in Abbildung 1.14 das Ergebnis der Filterung einer Halbellipse, die sich durch Dämpfung und Invertierung gemäß (1.37) aus  $\check{k}$  ergibt, mit dem Ram-Lak-Filter dargestellt. An den eingezeichneten Punkten  $a$  und  $b$ , das heißt am Rand des Trägers der Halbellipse, ergeben sich bei der gefilterten Halbellipse jeweils Flanken hoher Intensitäten, die mit zunehmendem Abstand zu  $a$  beziehungsweise  $b$  zu Null abfallen. Innerhalb des Intervalls  $(a, b)$  sind die Werte negativ. Daraus resultiert der für streifenförmige Strahlaufhärtingsartefakte typische Streifen niedriger Intensität.



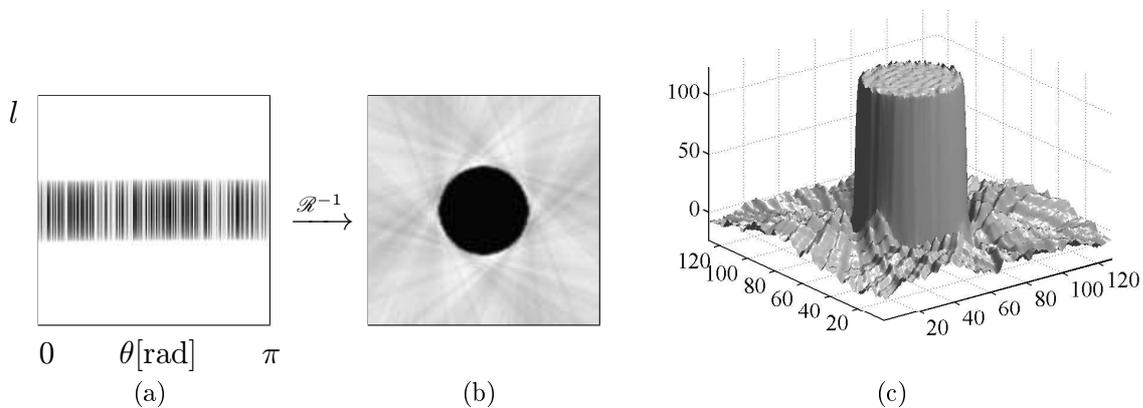
**Abbildung 1.14:** Filterung einer Halbellipse mit dem Ram-Lak-Filter. (a) Halbellipse und (b) Filterergebnis

Sind im Sinogramm mehrere zusammenhängende Spalten von der Intensitätsdämpfung betroffen, ergeben sich im Rekonstruktionsbild vom Metall strahlenkranzförmig ausgehende Parallelenscharen, die den zu den Spalten im Sinogramm korrespondierenden Winkelbereich überdecken. Jede dieser Parallelenscharen weist das in Abbildung 1.14(b) dargestellte Intensitätsprofil auf. Mit zunehmendem Abstand zum Metall unterscheiden sich die sich überlagernden Intensitäten der Parallelenscharen aufgrund der Auffächerung immer stärker. Da nach Lemma 1.1 der Mittelwert eines Rekonstruktionsfilters Null ergibt, führen die Überlagerungen der Parallelenscharen mit zunehmendem Abstand zu  $M$  zu einer additiven Überlagerung unterschiedlicher Intensitäten und dadurch zu einer immer stärkeren Reduktion bis hin zum vollständigen Verschwinden der Strahlaufhärtingsartefakte.

Je größer der Winkelbereich ist, in dem die Intensitätsdämpfung stattfindet, desto schneller verjüngt sich der Streifen negativer Intensität und desto mehr weitet sich der Streifen positiver Intensität auf. In dem in Abbildung 1.13(c) dargestellten Extremfall beeinflusst die Intensitätsdämpfung das ganze Sinogramm. Die Streifen negativer Intensität liegen in diesem Fall nahezu vollständig innerhalb von  $M$ , während sich der Streifen positiver Intensität über das ganze Bild erstreckt.

Häufig wechselnde Intensitätsschwankungen im Sinogramm innerhalb der Metallsinusoide führen nicht zwangsläufig zu starken Artefakten im Rekonstruktionsbild. Dies

wird in Abbildung 1.15 anhand einer Simulation demonstriert. Aus dem Sinogramm  $\check{k}$  des Kreisscheibenphantoms wird das in Abbildung 1.15(a) dargestellte Sinogramm durch Multiplikation der einzelnen Spalten mit gleichverteilten zufällig gewählten Gewichten aus  $(0, 1)$  gewonnen. In den Rekonstruktionsbildern (Abb. 1.15(b) und 1.15(c)) ist zu erkennen, dass sich die Strahlauhärtungsartefakte gegenseitig fast vollständig auslöschen und deshalb nur wenig ins Gewicht fallen. Die Intensitäten der rekonstruierten Kreisscheibe fallen jedoch um mehr als die Hälfte zu niedrig aus.



**Abbildung 1.15:** (a) Sinogramm  $\check{k}$  spaltenweise jeweils mit einer zufälligen Zahl aus  $[0, 1]$  multipliziert (invertiert dargestellt). (b) Rekonstruktionsbild (invertiert dargestellt). (c) Rekonstruktionsbild.

### 1.8.3 Streustrahlartefakte

Die Schwächung von Röntgenstrahlen im Gewebe wird nicht allein durch Absorption, sondern auch Streuung verursacht [138, Kap. 4.2]. Diese führt zu einer Ablenkung von Röntgenquanten aus ihrer geradlinigen Bahn. Diese ist mitunter so stark ausgeprägt, dass einzelne Photonen nicht auf dem korrekten Detektor und zum Teil auf einem falschen Detektor auftreffen [39, Kap. 3.4.4]. An dem korrekten Detektor wird somit eine zu geringe Intensität und bei anderen Detektoren eventuell eine zu hohe Intensität gemessen. Dies führt zunächst zu einer Glättung der Messwerte und damit zu einer Reduzierung der Bildschärfe [39]. Im Defektsinogramm ergeben sich gemäß (1.4) die Werte  $\ln I_1 - \ln(I_1 + \Delta I)$ , wobei  $\Delta I$  die Intensität aufgrund der Streustrahlung darstellt, die als nahezu konstant betrachtet werden kann. Mit kleiner werdender Intensität  $I_1$ , sinkt überproportional der korrespondierende Wert im Sinogramm. Bei der Rekonstruktion ergeben sich Streustrahlartefakte, die den Strahlauhärtungsartefakten ähneln [39]. Weitere Details sowie Reduktionsverfahren findet man in [101, Kap. 7].

### 1.8.4 Teilvolumenartefakte

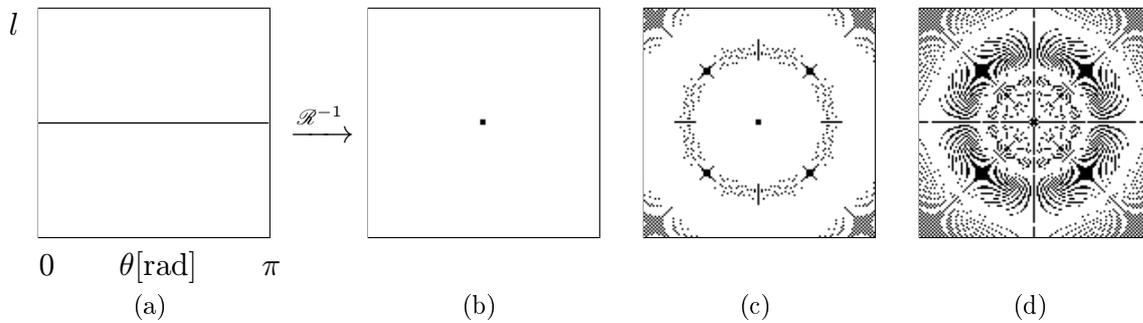
In der Praxis haben sowohl die Röntgenquelle als auch die Detektoren nichtverschwindende Abmessungen. Der gemessene Projektionswert in (1.3) ergibt sich somit als Mittelung der Intensitäten von Röntgenstrahlen, die auf den Detektor auftreffen. Sobald diese Intensitäten sich unterscheiden, wird durch die Logarithmierung gemäß (1.4) der korrekte Projektionswert unterschätzt [63]. Dies führt in den Rekonstruktionsbildern vor allem an Gewebegrenzen zu Defektgeraden negativer Intensität.

### 1.8.5 Abtastungsartefakte

Trotz der hohen Auflösung heutiger Tomographen sind *Abtastungsartefakte* in CT-Bildern immer vorhanden [39, Kap. 3.4.6]. Sie können sowohl durch den diskreten Aufnahmeprozess als auch durch die diskrete gefilterte Rückprojektion hervorgerufen werden. Als Beispiel für ein mögliches Erscheinungsbild dient folgende Simulation. Sei  $f = \delta_{0,0}$  ein Bild im Messbereich. Dann ergibt sich das korrespondierende kontinuierliche Sinogramm zu  $\check{f}(l, \theta) := \delta(l)$  (s. Abb. 1.16(a)). Die Anzahl der Detektoren wird in dieser Simulation konstant auf 185 gesetzt, die Anzahl der Winkelschritte jedoch variiert. Das Sinogramm wird zunächst mit 180 Winkelschritten abgetastet und darauf die gefilterte Rückprojektion angewandt. Mit der verwendeten Matlab-Implementierung ergeben sich Artefakte wie in den Binärbildern in Abbildungen 1.16(b) bis 1.16(d) dargestellt. Diese Bilder sind Schwellwertsegmentierungen aller Werte, die 1%, 0,1% beziehungsweise 0,01% der Maximalintensität übersteigen. Der Punkt maximaler Intensität befindet sich an der korrekten Stelle  $(0, 0)$ . Um diesen Punkt herum liegen Punkte mit geringerer Intensität. Sie resultieren aus dem Rekonstruktionsverfahren, das zu einer geringen Glättung führt (s. Abb. 1.16(b)). Abtastungsartefakte weisen in diesem Fall Intensitäten von weniger als 1% der Maximalintensität auf (s. Abb. 1.16(c) und 1.16(d)). Je größer die Anzahl der Projektionswinkel gewählt wird, desto geringer sind die Intensitäten auftretender Artefakte. Bei einer Anzahl von 1.024 Projektionswinkeln beispielsweise liegt die maximale Intensität der Abtastungsartefakte bei 0,008% der Maximalintensität des Rekonstruktionsbildes an der Stelle  $(0, 0)$ . Alle obigen Angaben beziehen sich auf ein Rekonstruktionsbild der Größe  $128 \times 128$ . Je nach Größe des Rekonstruktionsbildes ergeben sich unterschiedliche Werte. Für ein Rekonstruktionsbild der in der medizinischen CT typischen Größe von  $512 \times 512$  Pixel liegt bei einer Anzahl von 1.024 Projektionswinkeln die maximale Intensität der Abtastungsartefakte bei 0,032% der Intensität an der Stelle  $(0, 0)$ .

Generell haben Abtastungsartefakte eine relativ geringe Intensität und sind im Vergleich zu den Störungen durch andere Artefakte häufig vernachlässigbar [20, 39].

Deshalb werden sie im weiteren Verlauf der Arbeit nicht berücksichtigt. Für ausführliche Beschreibungen sei etwa auf [32], [33], [39, Kap. 3.4.6], [49], [89, Kap. 7], [102, Kap. 5.1] und [213, Kap. 3.6] verwiesen.



**Abbildung 1.16:** Abtastungsartefakte (invertierte Darstellung).

(a) Sinogramm  $\check{f}(l, \theta) := \delta(l)$ . (b)-(d) Binärbilder: alle Werte, die in (b) mindestens 1%, in (c) mindestens 0,1% und in (d) mindestens 0,01% der Maximalintensität aufweisen, sind dunkel dargestellt.

### 1.8.6 Bewegungsartefakte

Bewegungsartefakte werden durch Patientenbewegungen während der CT-Aufnahme hervorgerufen. Bewegt sich dadurch während der Aufnahme das Gewebe im Messfeld, stellen die Rohdaten nicht die Radontransformation des Gewebes dar. Deshalb ergeben sich bei der Rekonstruktion artefaktbehaftete Bilder. Eingehende Untersuchungen dieser Artefakte findet man in [20, Kap. 8.5.3], [89, Kap. 7.6.1], Verfahren zur Reduktion spezieller Bewegungsartefakte in [34, 154, 168, 224].

Weitere Bewegungsartefakte können in Sekundärrekonstruktionen<sup>18</sup> auftreten, wenn aufgrund von Patientenbewegungen einzelne CT-Schnittbilder gegeneinander verschoben sind [20, Kap. 8.6.3].

## 1.9 Zusammenfassung

Die CT-Aufnahme lässt sich durch den linearen Radonoperator modellieren. Rauschen im Aufnahmeprozess und andere Effekte führen zu teilweise erheblichen Intensitätsveränderungen in den gemessenen Rohdaten im Vergleich zu denjenigen, die sich bei dem modellierten Aufnahmeprozess ergäben. Befindet sich Metall im Messbereich, ergeben sich im Allgemeinen besonders starke Störungen in den Rohdaten. Dies führt zu Metallartefakten in den Rekonstruktionsbildern und damit häufig zu einer starken Qualitätsminderung des gesamten Bildes.

<sup>18</sup>Unter einer *Sekundärrekonstruktion* versteht man numerisch aus einer Anzahl aufeinanderfolgender paralleler CT-Schnittbilder erzeugte beziehungsweise rekonstruierte Daten, beispielsweise Schnittbilder, die nicht parallel zur Aufnahmeebene verlaufen, oder 3D-Visualisierungen.

Die Kenntnis der Artefakte, ihrer Entstehung und Ausprägung ist wichtig für die Entwicklung von Artefaktreduktionsverfahren. Unter Kenntnis des physikalischen Aufnahmeprozesses und der daraus resultierenden Störungen in den Metallsinusoiden der Rohdaten lassen sich Metallartefakte anhand von Impulsantworten der gefilterten Rückprojektion einheitlich beschreiben. Die Modellierungen in diesem Kapitel bilden eine wesentliche theoretische Grundlage für RFMAR, das im folgenden Kapitel beschrieben wird.

## 2 Reduktion von Metallartefakten in CT-Schnittbildern

Trotz geschickter Wahl der Aufnahmeparameter sind CT-Bilder, in deren Messfeld sich Metall befindet, häufig von starken Artefakten überlagert. Dazu gehören auch die durch Metalle hervorgerufenen Rauschartefakte (s. Kap. 1). Sie beeinträchtigen und erschweren die diagnostische Auswertung sowie die weitere Bildverarbeitung häufig erheblich.

Algorithmen zur Reduktion von Artefakten ermöglichen in vielen dieser Fälle eine erhebliche Verbesserung der Bildqualität. Damit die artefaktreduzierten Rekonstruktionsbilder problemlos in die radiologische Verarbeitungskette integriert werden können, sollen die Algorithmen möglichst

- keine neuen Artefakte verursachen,
- die Schärfe im Bild nicht signifikant verändern,
- anatomische Strukturen erhalten und
- Gewebestrukturen auf korrekte Hounsfield-Einheiten abbilden, das heißt insbesondere Gewebe identischer Dichte auf identische Werte abbilden.

Im Folgenden wird zunächst ein Überblick bisheriger Verfahren zur Reduktion von Metallartefakten gegeben. Diese setzen voraus, dass die Rohdaten verfügbar sind, oder zumindest alle artefaktverursachenden Metalle vollständig im Rekonstruktionsbild enthalten sind. Im Allgemeinen sind die Rohdaten jedoch nicht verfügbar, sei es dass sie nicht mit abgespeichert werden oder dass das Datenformat nicht bekannt ist. In den CT-Bildern wird in der Regel nur ein diagnostisch relevanter Ausschnitt des vollständig rekonstruierten Bildes abgespeichert. Dadurch sind häufig artefaktverursachende Metalle nicht oder nur unvollständig im abgespeicherten CT-Bild enthalten. Aus diesen Gründen sind die bisherigen Verfahren in der Praxis vielfach nicht anwendbar.

In diesem Kapitel wird ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes neues Verfahren vorgestellt, das sich zur Reduktion von starken Rauschartefakten eignet, wenn die ursprünglichen Rohdaten nicht verfügbar sind. Dabei ist es nicht erforderlich, dass die artefaktverursachenden Metalle im CT-Bild liegen. Das Verfahren benötigt keine Benutzerinteraktion und läuft vollautomatisch ab. Es ist invariant gegenüber pixelweise affinen Wertebereichstransformationen  $x \mapsto ax + b$  für konstante  $a \in \mathbb{R} \setminus 0$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Deshalb werden keine Hounsfield-Einheiten benötigt. Wie anhand eines

Beispiels demonstriert wird, ist eine Artefaktreduktion damit auch bei nachträglich digitalisierten CT-Bildern möglich. Aufgrund der genannten Eigenschaften ist durch dieses Verfahren in vielen Anwendungsfällen in der Praxis überhaupt erst eine Metallartefaktreduktion möglich.

Während in den meisten Verfahren die Metallartefaktreduktion durch Modifikation und anschließende Rekonstruktion der ursprünglichen Rohdaten erzielt wird, geschieht die Artefaktreduktion hier durch Modifikation und Rückprojektion von *Pseudorohdaten*, die aus dem CT-Bild zuvor berechnet werden. Durch eine ausführliche Analyse der Pseudorohdaten wird dieses Vorgehen gerechtfertigt. Ergebnisse der Analyse werden im Weiteren benötigt, um das im Anschluss beschriebene Verfahren zur Segmentierung von Metallsinusoiden anhand einer Waveletanalyse zu erläutern. Diese Segmentierung ist ein wesentlicher Bestandteil in dem Artefaktreduktionsverfahren.

Anhand von Simulationen, zahlreichen Beispielen aus der radiologischen Praxis und Auswertungen, die an drei Kliniken und einer Radiologischen Praxis von insgesamt 14 Radiologen durchgeführt wurden, wird die Leistungsfähigkeit des Verfahrens demonstriert.

## 2.1 Stand der Technik

Sei  $f$  ein Bild,  $\check{f}_r$  dessen artefaktbehaftetes Sinogramm,  $\tilde{f}_r = \mathcal{R}^{-1}\check{f}_r$  das daraus resultierende Rekonstruktionsbild und  $M \subset \text{Def}(\check{f}_r)$  die Menge der Metallsinusoiden. Während Metallartefakte häufig das gesamte Rekonstruktionsbild beeinflussen, sind die korrespondierenden Defektpixel in den Rohdaten  $\check{f}_r$  auf die Teilmenge  $M$  lokalisiert. In den meisten Verfahren zur Metallartefaktreduktion wird diese daher durch eine Modifikation der Rohdaten und eine anschließende gefilterte Rückprojektion dieser Daten erreicht<sup>1</sup>. Das modifizierte Sinogramm  $\check{f}'_r$  unterscheidet sich dabei von  $\check{f}_r$  hauptsächlich oder ausschließlich innerhalb der Metallsinusoiden. Die Modifikation des Sinogramms wird entweder *direkt* in einem Schritt oder in einem *iterativen* Verfahren durchgeführt. Es folgt nun eine genauere Beschreibung der Verfahren. Hierbei wird im Folgenden zunächst davon ausgegangen, dass  $M$  bekannt ist.

<sup>1</sup>SOLTANIAN-ZADEH ET AL [188] beschreiben ein rein bildbasiertes Verfahren zur Reduktion von Artefakten. Anhand eines Differenzbildes zwischen dem originalen und einem tiefpassgefilterten Rekonstruktionsbild wird das Defektbild geschätzt und von dem originalen Rekonstruktionsbild abgezogen. Für die Schätzung ist jedoch anatomisches Wissen erforderlich.

### 2.1.1 Direkte Verfahren

Eine Möglichkeit zur Bestimmung des modifizierten Sinogramms  $\check{f}'_r$  besteht darin, die Werte  $\check{f}'_r|_M$  innerhalb der Metallsinusoide anhand von Werten  $\check{f}_r|_{M^c}$  außerhalb der Metallsinusoide zu interpolieren und die Werte außerhalb der Metallsinusoide beizubehalten, das heißt  $\check{f}'_r|_{M^c} := \check{f}_r|_{M^c}$ . Im Gegensatz zu den Interpolationsverfahren werden bei den *adaptiven Filterverfahren* auch die Pixelintensitäten innerhalb der Metallsinusoide zur Berechnung des modifizierten Sinogramms berücksichtigt. Das *Mergingverfahren* stellt eine Kombination aus beiden Verfahren dar. Findet bei der adaptiven Filterung eine Glättung der Intensitäten  $\check{f}_r|_M$  statt, so wird bei der *lokal funktionalen Anpassung* durch Wertebereichstransformationen innerhalb der Metallsinusoide die Varianz der Intensitäten gezielt reduziert. Anders als bei den obigen Verfahren werden bei der *lokalen* und *externen Tomographie* nicht die Rohdaten modifiziert, sondern veränderte Rekonstruktionsalgorithmen verwendet.

#### Interpolationsverfahren

Erste Interpolationsverfahren zur Metallartefaktreduktion wurden in den 1980er Jahren vorgestellt [64, 137]. Das im Folgenden vorgestellte Verfahren der *linearen Interpolation* wurde in verschiedenen Modifikationen immer wieder verwendet [104, 113, 224] und gelangte nicht zuletzt durch seinen zeitweise kommerziellen Einsatz unter dem Namen *Metal Artifact Reduction (MAR)* [213, Kap. 4.1] besondere Bedeutung. Bei der linearen Interpolation werden in jeder Spalte des Sinogramms  $\check{f}_r$  diejenigen Intervalle  $I_i := [l_i, l_{i+1}]$  ermittelt, die von den Metallsinusoiden überdeckt werden. Die Pixelintensitäten innerhalb dieser Intervalle bestimmen sich daraufhin durch lineare Interpolation zwischen den Werten  $\check{f}_r(l_i - 1, \theta)$  und  $\check{f}_r(l_{i+1} + 1, \theta)$ , das heißt für  $l \in I_i$ :

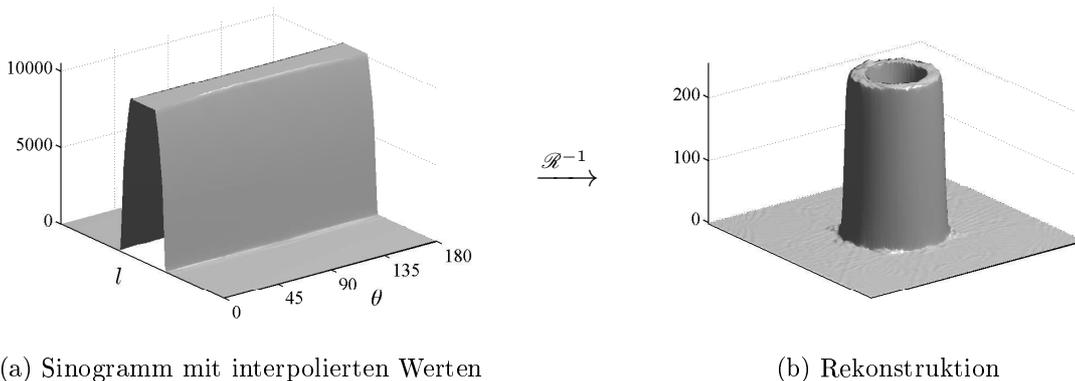
$$\check{f}'_r(l, \theta) = \frac{(l_{i+1} - l)\check{f}_r(l_i, \theta) + (l - l_i)\check{f}_r(l_{i+1}, \theta)}{l_{i+1} - l_i}. \quad (2.1)$$

Außerhalb der Intervalle werden die Intensitäten beibehalten. Bei anderen Interpolationsverfahren wird darauf geachtet, dass die Übergänge zwischen den interpolierten Werten und den Werten außerhalb der Intervalle glatt sind. In einem Vergleich verschiedener Interpolationsverfahren stellte KACHELRIESS [101, Kap. 4.2] jedoch keine signifikanten Unterschiede in der Qualität der Bilder, die nach Anwendung der einzelnen Verfahren rekonstruiert wurden.

Innerhalb der Metallsinusoide sind die Pixelintensitäten in den Rohdaten im Allgemeinen sehr verrauscht. Durch die spaltenweise durchgeführten Interpolationen verschwindet das Rauschen innerhalb der Intervalle  $I_i$ . Dadurch wird im Rekonstruktionsbild außerhalb der Metalle das Rauschen stark reduziert. Neben der Reduktion von Rauschartefakten findet im Allgemeinen auch eine Reduktion von Strahlaufhärtungsartefakten statt, da die artefaktverursachenden strahlaufhärtungsbedingten

Intensitätsschwankungen entlang der  $\theta$ -Achse durch die Interpolationen auf das Niveau der Pixel in der Umgebung der Metallsinusoide reduziert werden. GLOVER UND PELC [64] weisen jedoch darauf hin, dass dabei neue Artefakte hervorgerufen werden können, da außer den Metallsinusoide auch die Werte der Sinusoide anderer Objekte in der Schnittmenge mit  $M$  verändert werden. Dies wiederum führt zu künstlich hervorgerufenen Strahlaufhärtungsartefakten bei diesen Objekten. Glover und Pelc schlagen vor, zur Verringerung derartiger Artefakte die Interpolationen nicht entlang der Spalten, sondern möglichst senkrecht zu den Metallsinusoide durchzuführen. WATZKE [213, Kap. 5.2] hingegen bestimmt die Sinusoide nichtmetallischer Objekte hoher Dichte und führt die Interpolationen in  $M$  nach Möglichkeit entlang dieser Sinusoide durch.

Weitere Artefakte können innerhalb der Metalle auftreten, da die interpolierten Werte die korrekten Werte üblicherweise stark unterschätzen. Dies wird in Abbildung 2.1 exemplarisch am Sinogramm des Kreisscheibenphantoms dargestellt, bei dem die zentralen Projektionswerte durch lineare Interpolation berechnet werden. Im resultierenden Rekonstruktionsbild (vgl. Abb. 2.1(b)) sind in der Mitte starke Cuppingartefakte zu erkennen. Dies wird in [177, 226, 227] verhindert, indem den modifizierten Pixelintensitäten zusätzliche Intensitäten aufaddiert werden, die sich wie folgt bestimmen: In einem ersten Schritt werden im artefaktbehafteten Rekonstruktionsbild die Metalle segmentiert. Anschließend werden alle diese Bereiche auf einen konstanten metalltypischen Hounsfieldwert, alle anderen auf Null gesetzt. Aus der Radontransformation dieses Bildes ergeben sich nun die zu addierenden Pixelintensitäten. Alternativ können im rekonstruierten Bild die Metalle durch die Metalle im artefaktbehafteten Rekonstruktionsbild ersetzt werden.



**Abbildung 2.1:** Cupping-Artefakte im Rekonstruktionsbild nach linearer Interpolation im Sinogramm. Der Simulation liegt das Sinogramm  $\tilde{k}$  zugrunde, in dem Pixelintensitäten, die über einem gewissen Schwellwert liegen, durch lineare Interpolationen entlang der Spalten ersetzt werden.

Um die innerhalb der Metallsinusoide enthaltene Information nicht vollständig zu verlieren, werden bei einigen Verfahren nicht ausschließlich Interpolationen verwendet.

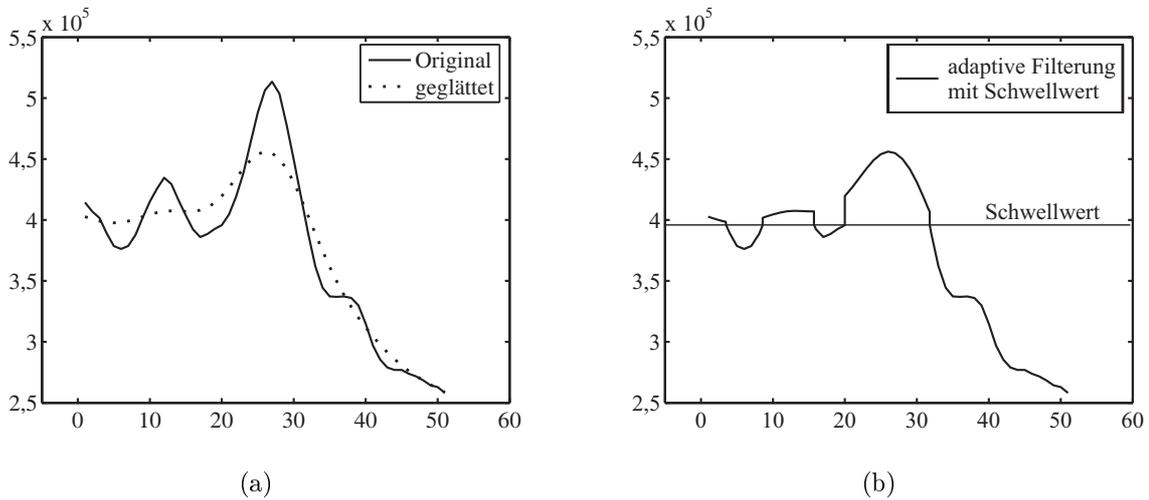
ZHAO ET AL [226, 227] etwa führen in jeder Sinogrammspalte eine Waveletzerlegung des wie oben beschriebenen additiv überlagerten interpolierten Sinogramms sowie der Rohdaten durch. Aus beiden Zerlegungen wird durch Interpolationen zwischen den korrespondierenden Detailkoeffizienten eine neue Waveletzerlegung erstellt. Das modifizierte Sinogramm  $\check{f}'_r$  ergibt sich daraus durch Waveletrekonstruktionen der einzelnen Spalten.

### Adaptive Filterverfahren

Durch die Wahl eines geeigneten Rekonstruktionsfilters  $\hat{\eta}$  lassen sich, wie in Kapitel 1.8 beschrieben, Rauschartefakte bei gleichzeitiger Abnahme der Bildschärfe reduzieren. Bei der *adaptiven Filterung* werden Filter mit lokal variierendem Durchlassbereich eingesetzt. Die daraus resultierenden Rekonstruktionsbilder weisen unterschiedlich scharfe Bildbereiche auf. Je stärker die Sinogrammintensitäten in den korrespondierenden Sinusoiden geglättet sind, desto unschärfer ist der korrespondierende Teilbereich des Rekonstruktionsbildes.

HSIEH [88] verwendet dazu spezielle Mittelwertfilter, nämlich *trimmed mean filter* [165], deren Längen proportional zur Signalintensität der Messdaten variiert werden. Mit der Filterlänge variiert aber auch die Stärke der lokalen Glättung im Sinogramm. WATZKE, KACHELRIESS UND KALENDER [100, 101, 213] verwenden ein- oder mehrdimensionale Rechteck-, Dreieck- oder Gaußfilter variabler Größe, in den neueren Veröffentlichungen nur noch Dreieck- und Rechteck- [213] beziehungsweise ausschließlich Dreieckfilter [100]. Eindimensionale Filterungen finden jeweils entlang der Spalten statt. Bei zweidimensionalen Filtern werden für die Filterung jeweils auch benachbarte Spalten berücksichtigt. Dabei gilt es jedoch zu bedenken, dass ein Pixel  $(l, \theta + \epsilon)$ , der in der Umgebung eines Pixels  $(l, \theta)$  im Sinogramm liegt, mit den Projektionsgeraden  $\rho_{l, \theta + \epsilon}$  und  $\rho_{l, \theta}$  korrespondieren. Mit zunehmendem Abstand zu ihrem Schnittpunkt entfernen sich die Geraden offensichtlich immer weiter voneinander. Deshalb kann bereits bei geringem Winkelabstand  $\epsilon$  die Korrelation der beiden Werte im Sinogramm gering sein. Dieses Problem wird in [100, 101, 213] jedoch nicht angesprochen. Dreidimensionale Filter werden zur adaptiven Filterung der Rohdaten von Spiral-CT-Volumendaten verwendet. Die Größe der ein- sowie der mehrdimensionalen Filter wird, wie bei Hsieh, in Abhängigkeit zu den Pixelintensitäten bestimmt. Dies entspricht einer Schätzung des Rauschens anhand der lokalen Pixelintensitäten. Um nicht das gesamte Sinogramm zu glätten, wird in [101] ein Schwellwert anhand statistischer Eigenschaften des Sinogramms gewählt. Nur diejenigen Pixel, deren Intensität diesen Schwellwert übersteigt, werden gefiltert. Die anschließende Filterung wird mit Filtern lokal variierender Länge durchgeführt. In [100, 213] wird der Schwellwert so bestimmt, dass ungefähr 5% der Pixel im Sinogramm gefiltert werden, beginnend mit den Pixeln maximaler Intensität. Anstatt Filter variabler Größe zu verwenden, wird in [100] alternativ ein Filter konstanter Größe zur Filterung aller Pixel über einem bestimmten Schwellwert verwendet. Besonders

bei diesem Verfahren können durch den harten Schwellwert an den Übergängen zwischen ungefilterten und gefilterten Bereichen neue Artefakte hervorgerufen werden, da sich an diesen Stellen eine geringere Glattheit beziehungsweise eine Unstetigkeit ergeben kann. Dies führt bei der gefilterten Rückprojektion zu Defektpixeln im gefilterten Sinogramm und dadurch zu Rauschartefakten im rekonstruierten CT-Bild. Der beschriebene Effekt wird in Abbildung 2.2 anhand eines Ausschnittes einer Sinogrammsspalte demonstriert. In Abbildung 2.2(a) ist das originale und das mit einem Tiefpassfenster geglättete Signal dargestellt. Abbildung 2.2(b) stellt das zusammengesetzte Signal dar, das sich bei dem eingezeichneten Schwellwert ergibt. An den Übergängen zwischen gefilterten und ungefilterten Signalausschnitten ergeben sich Unstetigkeitsstellen.



**Abbildung 2.2:** (a) Ausschnitt aus einer Sinogrammsspalte. (b) Adaptive Filterung mit Schwellwert. An den Übergangsstellen zwischen gefilterten und ungefilterten Bereichen ergeben sich Unstetigkeitsstellen.

WATZKE [213, Kap. 5.1] führt in einem weiteren adaptiven Verfahren Glättung ausschließlich innerhalb der Metallsinusoide durch. Die Filtergröße variiert auch bei diesem Verfahren mit den Pixelintensitäten. Die Metallsinusoide werden durch den Träger  $\text{Tr}(\mathcal{R}_{\chi_{\text{Metall}}}(\tilde{f}))$  bestimmt, der sich anhand der Segmentierung von Metall in einem vorläufigen Rekonstruktionsbild  $\tilde{f}$  anschließender Tomographie dieser Menge ergibt. Wie bei den oben beschriebenen Verfahren können im Bereich der Übergänge zwischen gefilterten und ungefilterten Sinogrammdaten, das heißt in diesem Fall an den Übergängen zwischen den Bereichen innerhalb und außerhalb der Metallsinusoide durch verringerte Glattheit Defektpixel und daraus neue Rauschartefakte hervorgerufen werden.

## Mergingverfahren

WATZKE [213, Kap. 7.2], [214, 216] stellt fest, dass die Rekonstruktionsbilder, die mit dem Verfahren der linearen Interpolation erzeugt werden in der Nähe der Metalle bessere Reduktionsergebnisse erzielen als adaptive Filtermethoden, während diese in größerer Entfernung zu den Metallen besser abschneiden als die Interpolationsverfahren<sup>2</sup>. Watzke kombiniert deshalb beide Verfahren zu dem *Mergingverfahren*. Dazu werden zunächst zwei Rekonstruktionsbilder, einerseits mit linearer Interpolation, andererseits mit adaptiver Filterung erstellt. Aus diesen beiden Bildern wird das Ergebnisbild durch pixelweise Konvexkombination zwischen den beiden Rekonstruktionsbildern berechnet, wobei die einzelnen Gewichte in Abhängigkeit der Abstände zwischen den einzelnen Pixeln und Pixel innerhalb der Metalle bestimmt werden.

## Lokal funktionale Anpassungen

In [71, Kap. 5.4] werden alternative sinogrammbasierte Verfahren vorgestellt, bei denen die Pixelintensitäten im Sinogramm nichtlinear durch „gezielte lokale funktionale Anpassungen“ in Abhängigkeit zum jeweils minimalen Abstand der Pixelkoordinaten zu den Metallsinusoïden gedämpft werden. Am stärksten werden dabei die Intensitäten von Pixeln innerhalb der Metallsinusoïde gedämpft. Dadurch sinkt die Rauschvarianz innerhalb der Metallsinusoïde, wodurch im daraus resultierenden Rekonstruktionsbild Rauschartefakte gegenüber dem ursprünglichen Rekonstruktionsbild reduziert werden. Sinusoïde, die die Metallsinusoïde schneiden, werden jedoch innerhalb der Schnittmenge überproportional gedämpft. Das führt, wie auch bei interpolationsbasierten Verfahren, zu Artefakten, die den Strahlaufhärtungsartefakten ähneln und im Rekonstruktionsbild selbst in großer Entfernung zu dem Metall auftreten können. Die Pixelintensitäten in den resultierenden Rekonstruktionsbildern stehen in keinem linearen Zusammenhang zu den Hounsfield-Einheiten, weshalb sich diese Bilder nur bedingt diagnostisch verwerten lassen.

## Lokale Tomographie

Bei den im Kapitel 1.4 beschriebenen Rekonstruktionsverfahren wurde davon ausgegangen, dass die Rohdaten  $\check{f}$  eines Bildes  $f$  vollständig verfügbar sind. Es gibt jedoch Anwendungen, in denen nur ein Teil der Rohdaten vorhanden ist. Dies kommt beispielsweise dann vor, wenn nur Röntgenstrahlen, die durch eine Kreisscheibe im

---

<sup>2</sup>Diese Annahme ist nur bedingt richtig. Innerhalb der konvexen Menge des Metalls sind die bei der linearen Interpolation gewonnenen Werte im Allgemeinen fehlerhaft. Strahlaufhärtungsartefakte in der Nähe der Metalle können zwar reduziert werden, es können jedoch, wie oben beschrieben, auch korrekte Strukturen „wegkorrigiert“ werden.

Inneren des Messbereichs gehen, verwendet werden, um die Strahlendosis zu verringern und dadurch die Strahlenbelastung des Patienten zu reduzieren. Die gemessenen Rohdaten liegen somit im Sinogramm innerhalb der Sinusoide, die sich durch Radontransformation jener Kreisscheibe ergeben. Man bezeichnet diese Daten als *abgeschnittene Projektionsdaten*<sup>3</sup> [117]. Eine Rekonstruktion von  $f$  aus diesen eingeschränkten Rohdaten wird *inneres Problem* genannt. Es zeigt sich, dass nicht einmal die Werte innerhalb der Kreisscheibe eindeutig rekonstruiert werden können<sup>4</sup> [50, 117, 128], [139, Kap. VI.4], [146].

Unstetigkeiten in  $f$ , das heißt Intensitätssprünge beziehungsweise *Singularitäten*, lassen sich häufig als Gewebegrenzen identifizieren und können, wenn sie innerhalb der Kreisscheibe liegen, stabil lokalisiert werden [50, 125, 155]. Dazu eignet sich die *Lambda Tomographie* [185], eine gefilterte Rückprojektion jedoch mit  $\hat{\eta}(\omega) = |\omega|^2$ , was der Anwendung eines negierten *Laplaceoperators* entspricht [50, 52]. Im Gegensatz zu  $\hat{\eta}(\omega) = |\omega|$  ist dieses Filter lokal, das heißt, der zugehörige lokale Faltungskern hat nur sehr wenige nichtverschwindende Werte [54]. Das Rekonstruktionsbild weist Singularitäten an den gleichen Stellen auf. Im Vergleich zum ursprünglichen Bild  $f$  heben diese sich durch ihre hohe Intensität besonders stark von glatten Bildbereichen ab [50, 185]. Dadurch werden auch eventuelle Rauschartefakte verstärkt. Regionen konstanter Intensität in  $f$  werden auf glatte, ausgehend von den Singularitäten fallende Intensitätsverläufe ähnlich denen bei Cupping-Artefakten abgebildet. Zur Reduzierung dieses Cupping-Effekts wird in der *lokalen Tomographie* [7, 50, 52–55, 164] dem in beschriebener Weise erhaltenen Rekonstruktionsbild das Rekonstruktionsbild einer geeignet gewichteten (ungefilterte) Rückprojektion additiv überlagert. Da diese offensichtlich ebenfalls lokal ist, ist das gesamte Rekonstruktionsverfahren lokal.

HAIMERL [71, Kap. 5.4] schlägt eine Kombination von lokal funktionaler Anpassung und anschließender in diesem Fall auf das gesamte Bild angewandte lokalen Tomographie vor. Durch die lokal funktionale Anpassung wird die Rauschvarianz innerhalb der Metallsinusoide, wie oben beschrieben, gesenkt. Da der Faltungskern  $h_{|\omega|^2}$  der anschließenden lokalen Tomographie viel lokaler ist als der Ram-Lak- oder Shepp-Logan-Faltungskern, beeinflussen Defektpixel nach Faltung mit diesem Kern einen kleineren Bereich. Dadurch werden weniger Pixel im Rekonstruktionsbild von Rauschartefakten überlagert. Rauschartefakte werden jedoch aufgrund des lokalen Faltungskernes schärfer abgebildet und stören deshalb das Bild desto mehr. Artefakte, die durch die lokal funktionale Anpassung neu hervorgerufen werden, erscheinen auch in dem Rekonstruktionsbild einer anschließenden Rückprojektion. Weiterhin entsprechen die rekonstruierten Werte, wie auch bei der rein lokal funktionalen Anpassung, nicht den Hounsfieldwerten.

<sup>3</sup>engl.: *truncated projections*

<sup>4</sup>Dies gilt zumindest für den in dieser Arbeit ausschließlich betrachteten Fall der zweidimensionalen Radontransformation.

## Externe Tomographie

Das *externe Problem* beschreibt die Rekonstruktion aus den Daten, die komplementär zu denen des inneren Problems sind. Das heißt, es sind in diesem Fall alle Rohdaten außerhalb der Sinusoide einer Kreisscheibe innerhalb eines Bildes  $f$  gegeben. Die Daten werden *Lochprojektion*<sup>5</sup> [117] genannt. Ein Verfahren zur Rekonstruktion von  $f$  außerhalb der Kreisscheibe wird als *externe Tomographie* [154] bezeichnet. Im Gegensatz zum inneren Problem ist das externe Problem eindeutig lösbar<sup>6</sup> [117], [139, Kap. VI.3]. Es ist jedoch ein sehr schlecht gestelltes Problem und deshalb besonders empfindlich gegenüber Störungen in den Messdaten [139]. Trotzdem kann es beispielsweise zur Reduktion von Strahlaufhärtungsartefakten sinnvoll sein, Rekonstruktionen mit externen Tomographieverfahren unter Auslassung der besonders gestörten Daten innerhalb der Metallsinusoide zu berechnen [154]. Für ausführliche Beschreibung externer Rekonstruktionsverfahren sei auf [118, 119, 139, 153–156, 158, 159] verwiesen.

### 2.1.2 Iterative Verfahren

Sei wie in Kapitel 1.4  $Rf = \check{f}$  ein Gleichungssystem, das die Radontransformation des Bildes  $f$  beschreibt. Bleiben diejenigen Gleichungen unberücksichtigt, die Messwerte innerhalb der Metallsinusoide beschreiben, so ergibt sich durch das Optimierungsverfahren ein Sinogramm, in dem Sinusoide konsistent über den Bereich der Metallsinusoide fortgesetzt werden. Dies entspricht dem externen Problem, das in diesem Fall auf einem diskreten Pixelraster formuliert wird. Eine bekannte iterative Methode zur Lösung des Gleichungssystems stellt die *Algebraic Reconstruction Technique (ART)* [66, 82] dar. In einem Vergleich dieser Methode mit der oben beschriebenen linearen Interpolationsmethode stellt KACHELRIESS [101] fest, dass ART bei deutlich höherem Rechenaufwand keine signifikant höhere Bildqualität erzielt. In einem weiteren Vergleich wird in [101] das Verfahren von MEDOFF ET AL [135] untersucht. Dieses liefert bei komplexen Geometrien der Metalle zum Teil sehr schlechte Ergebnisse.

Neben algebraischen Methoden eignen sich auch statistische Verfahren zur iterativen Lösung des externen Problems. Mit der *Expectation Maximization (EM)* Methode [41] wird iterativ eine Maximum-Likelihood-Schätzung bei unvollständigen Daten durchgeführt [144]. Dieses Verfahren wird in [187, 207] zur Artefaktreduktion eingesetzt. In einem Vergleich zwischen EM und ART in [207] wird gezeigt, dass bei gleicher Iterationszahl EM mehr Rauschen aufweist als ART.

In den oben beschriebenen Verfahren werden die gemessenen Intensitäten innerhalb der Metallsinusoide durch geschätzte Intensitäten ersetzt. Einen anderen Ansatz ver-

<sup>5</sup>engl.: *hollow projections*

<sup>6</sup>Dies gilt jedoch nur für die Radontransformation von Funktionen  $f \in \mathcal{S}$  [139, Kap. II.3].

folgen [39, 45, 59, 99, 133, 197]<sup>7</sup>, bei denen eine Anpassung der Rohdaten an das verwendete Modell unter Einbeziehung physikalischer Randbedingungen unter Verwendung aller Messdaten durchgeführt wird. Ein typischer Fall ist dabei die Reduktion von Strahlaufhärtungsartefakten. Ist das Röntgenspektrum der zur CT-Aufnahme verwendeten Röntgenröhre bekannt, so ist eine Linearisierung der Rohdaten auf das monochromatische Modell möglich. Hierzu werden in einem ersten Rekonstruktionsbild die Metalle und eventuell verschiedene Gewebe anhand ihrer HU segmentiert und diese numerisch sowohl mit einer monochromatischen als auch mit einer polychromatischen Röntgenröhre, die das Röntgenspektrum der tatsächlichen Röntgenröhre aufweist, tomographiert. Aus der Differenz dieser beiden Sinogramme wird ein Korrektursinogramm und daraus anhand der gefilterten Rückprojektion ein Korrekturbild erstellt, das auf das initiale Rekonstruktionsbild addiert wird. Das Verfahren wird iteriert, bis die einzelnen Einträge des Korrektursinogramms eine vorgegebene Schranke unterschreiten. Sind alle artefaktverursachenden Metalle im Rekonstruktionsbild enthalten, lässt sich das Verfahren auch ohne die ursprünglichen Rohdaten anwenden, indem an deren Stelle numerisch berechnete Rohdaten verwendet werden [59, Kap. 4.1], [133].

Mit iterativen Verfahren wird zum Teil eine sehr gute Artefaktreduktion erzielt. Da diese Verfahren jedoch im Allgemeinen einen sehr hohen Rechenaufwand aufweisen (vgl. [39]), scheiden sie für eine routinemäßige Bildaufbereitung aus.

## 2.2 Segmentierung von Metallsinusoiden

Bei der Beschreibung etlicher Artefaktreduktionsverfahren wurde implizit die Kenntnis der Metallsinusoide vorausgesetzt. Im Folgenden werden die gängigen Verfahren zur Segmentierung der Metallsinusoide vorgestellt. Im Anschluss daran werden Methoden zur Verbesserung der Segmentierungsergebnisse bei einem häufig verwendeten Verfahren beschrieben. Auch das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Verfahren zur Metallartefaktreduktion benötigt die segmentierten Metallsinusoide. Wie später gezeigt wird, eignet sich hierfür jedoch keines der im Folgenden vorgestellten Verfahren. Neue Verfahren mussten dafür entwickelt werden, die Im Kapitel 2.4 vorgestellt werden. Das hier beschriebene verbesserte Segmentierungsverfahren dient in der weiteren Arbeit als „Orientierungshilfe“ im Sinogramm.

### 2.2.1 Bisherige Verfahren

In [224] werden die Metallsinusoide durch eine Schwellwertsegmentierung im Radonraum bestimmt. Der Schwellwert muss hierbei manuell vorgegeben werden. Innerhalb

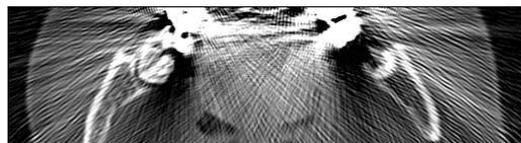
---

<sup>7</sup>Diese Verfahren wurden zum Teil nicht zur Korrektur von Metallartefakten entwickelt, lassen sich jedoch für diesen Anwendungsfall übertragen.

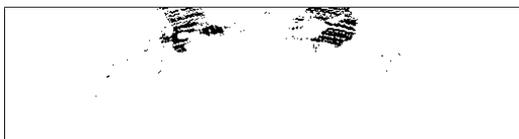
der Metallsinusoiden variieren die Intensitäten jedoch üblicherweise stark aufgrund der nichtkonstanten Werte in der Radontransformation eines (konstanten) Metalls (vgl. Abb. 1.8(b)) und der Überlagerung mit anderen Sinusoiden. Deshalb ist es schwierig, einen geeigneten Schwellwert in den Rohdaten zu finden.

Aus der Abbildung 1.7 ist zu entnehmen, dass im Rekonstruktionsbild die Hounsfield-Einheiten von Metall diejenigen von Körpergewebe weit übertreffen und deshalb in einem artefaktfreien Rekonstruktionsbild im Allgemeinen sehr gut segmentiert werden können. Selbst in einem artefaktbehafteten Rekonstruktionsbild ist häufig eine grobe Segmentierung des Metalls möglich. Aus dieser Segmentierung ergeben sich die Metallsinusoiden gemäß Definition 1.1. Diese Methode wird in vielen Artefaktreduktionsverfahren zur Bestimmung der Metallsinusoiden angewandt. KACHELRIESS [101, Kap. 4.1] segmentiert die Metalle im Rekonstruktionsbild anhand einer automatischen Schwellwertsegmentierung bei einem Schwellwert  $T$  von  $T = 3.071$  HU. Dies entspricht üblicherweise dem maximalen Wert, der im DICOM-Format gespeichert wird (s. Kap. 1.7). In Abbildung 2.3(b) ist ein Ausschnitt des bei diesem Schwellwert segmentierten CT-Schnittbildes der Abbildung 1.11(a) dargestellt. Aufgrund der Rausch- und Strahlaufhärtungsartefakte enthält die segmentierte Menge sowohl falsch positiv segmentierte Pixel als auch falsch negativ nicht segmentierte Pixel. Im Abschnitt 2.2.2 wird beschrieben, wie durch Einsatz von Filtern die Anzahl der falsch positiv segmentierten Pixel außerhalb und die Anzahl der falsch negativ nicht segmentierten Pixel innerhalb der konvexen Hüllen der Metalle reduziert werden kann.

Wird der Schwellwert niedriger gewählt, nimmt einerseits die Anzahl der falsch negativ nicht segmentierten Pixel ab, andererseits aber auch die Anzahl der falsch positiv segmentierten Pixel zu. Bei einem Schwellwert  $T = 3.000$  HU, der in [101] als Alternative zu  $T = 3.071$  HU vorgeschlagen wird, ergibt sich die in Abbildung 2.3(c) dargestellte Menge.



(a) Ausschnitt aus Abbildung 1.11(a)



(b) Schwellwertsegmentierung bei 3.071 HU



(c) Schwellwertsegmentierung bei 3.000 HU

**Abbildung 2.3:** Schwellwertsegmentierung von Metallen innerhalb eines Bildausschnittes von Abbildung 1.11(a).

Zwei alternative Methoden zur Segmentierung von Metallen werden in [71, Kap. 5.4.1] vorgeschlagen. Dazu werden abgeänderte Rekonstruktionsbilder berechnet, die nach

Möglichkeit weniger, oder zumindest für die Segmentierung weniger gravierende Artefakte aufweisen als das ursprüngliche Rekonstruktionsbild.

Bei der ersten Methode werden zur Berechnung des Rekonstruktionsbildes zunächst die Rohdaten  $\tilde{f}_r$  pixelweise durch die Abbildung

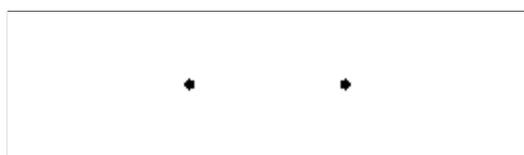
$$\tau_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(x)|x|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.2)$$

modifiziert und darauf anschließend die gefilterte Rückprojektion durchgeführt.

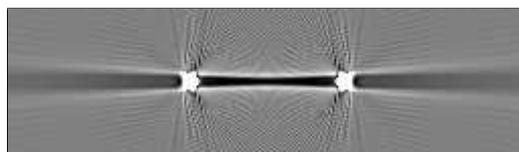
Bei der zweiten Methode ergibt sich das Rekonstruktionsbild durch eine modifizierte Rückprojektion der Rohdaten. Während bei der Rückprojektion (1.11) Integrale entlang von Sinusoiden gebildet werden, werden hier stattdessen jeweils die Minima entlang der Sinusoide bestimmt.

In beiden Verfahren werden Rauschartefakte reduziert. Bei der ersten Methode geschieht dies durch die überproportionale Dämpfung hoher Intensitäten, durch die auch die hohe Rauschvarianz innerhalb der Metallsinusoide überproportional sinkt, bei der zweiten Methode hauptsächlich dadurch, dass aufgrund der Minimumbildung Artefakte aufgrund des Rauschens zumeist lokal wirken.

Bei der ersten Methode ergeben sich durch die Dämpfung Artefakte, die den Strahlauhfärtungsartefakten entsprechen, das heißt Cupping-Effekte innerhalb der Metalle und Störungen ausgehend von den Metallen (s. Abb. 1.12). In beiden Verfahren werden aufgrund der nichtlinearen Modifikationen Werte  $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$ , die im Urbild  $f$  identisch sind, im Allgemeinen auf unterschiedliche Werte im Rekonstruktionsbild abgebildet. Dies wird an einem Beispiel in Abbildung 2.5 verdeutlicht. Auf die genaue Realisierung der Segmentierung wird in [71] nicht eingegangen.

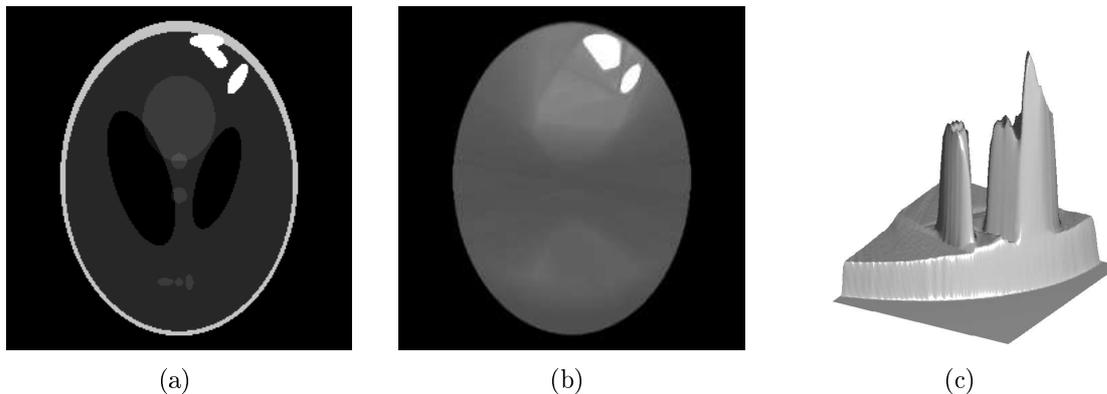


(a) Original (invertiert dargestellt)



(b) Rekonstruktion

**Abbildung 2.4:** Aus dem Bild (a) wird anhand der Radontransformation ein Sinogramm berechnet. Die Intensitäten werden in diesem Bild mit  $\tau_{0,5}$  transformiert und daraus das Bild (b) rekonstruiert. In diesem Bild sind Strahlauhfärtungsartefakte und geringe Abtastungsartefakte zu erkennen.



**Abbildung 2.5:** Modifizierte Rückprojektion: (a) Kontrastverstärktes Shepp-Logan-Kopfphantom in das zusätzlich Metalle, das heißt Regionen hoher Intensität, gesetzt wurden. (b) Ergebnisbild der modifizierten Rückprojektion. Innerhalb der konvexen Hüllen der ursprünglichen Metalle sind die Intensitäten erhöht. (c) 3D-Oberflächendarstellung eines Ausschnittes von (b) (Blickrichtung: von rechts oben auf das Rekonstruktionsbild).

### 2.2.2 Verbessertes Verfahren

Häufig findet die Segmentierung der Metallsinusoide statt, indem, wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben, zunächst die Metalle im CT-Bild segmentiert, anschließend in den Radonraum transformiert werden und dort die Metallsinusoide mit der Indikatorfunktion identifiziert werden. Da die Segmentierung im Allgemeinen im artefaktbehafteten CT-Bild durchgeführt wird, führt die Schwellwertsegmentierung dort unter Umständen auch zu falsch segmentierten Pixeln. Daraus resultieren, je nach ihrer Lage innerhalb des CT-Bildes, fehlerhafte Metallsinusoide. Ziel der im Folgenden beschriebenen Bildverarbeitungsmethoden ist, die Segmentierung im CT-Bild geeignet zu modifizieren, um möglichst korrekte Metallsinusoide zu erhalten. Die derart gewonnenen Metallsinusoide dienen im Weiteren der „Orientierung“ im Sinogramm und werden als *Referenz-Metallsinusoide* bezeichnet.

In der folgenden Beschreibung seien  $f : (\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n) \rightarrow \{-1.024, \dots, 3.071\}$ <sup>8</sup> ein CT-Rekonstruktionsbild und  $M_T := \{(x, y) | f(x, y) \geq T\}$  die Menge der unter dem Schwellwert  $T$  segmentierten Pixel. Wir vergleichen zunächst die Resultate der Segmentierungen mit den Schwellwerten  $T = 3.071$  HU und  $T = 3.000$  HU, die im letzten Abschnitt genannt wurden. Es zeigt sich, dass sich eine Segmentierung mit dem höheren Schwellwert besser zur anschließenden Bestimmung der Metallsinusoide eignet. Das Segmentierungsergebnis mit diesem Schwellwert lässt sich jedoch noch weiter verbessern, wie im Weiteren gezeigt wird.

<sup>8</sup>Dies entspricht, wie in Kapitel 1.7 beschrieben wird, dem üblichen Wertebereich von CT-Bildern.

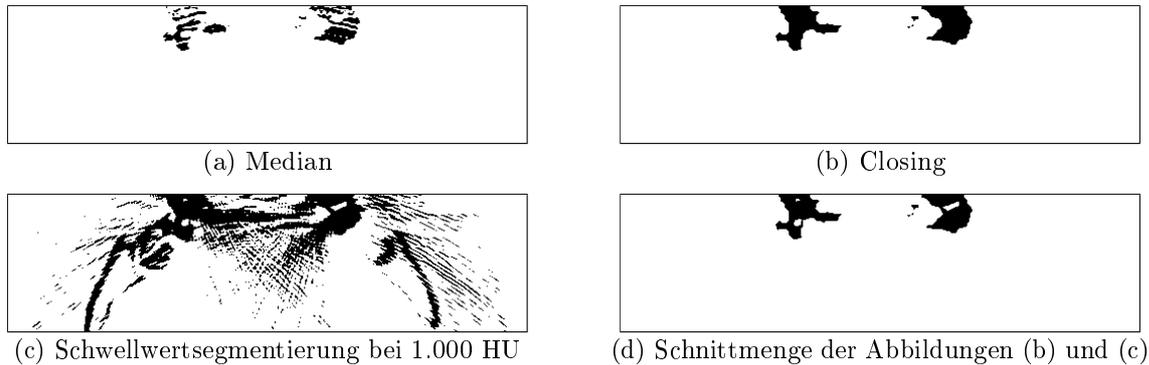
Rauschartefakte sind additive Überlagerungen von *Defektgeraden* jeweils konstanter Intensität (s. Kap. 1.8), die die artefaktverursachenden Metalle im Rekonstruktionsbild schneiden. Deshalb ist dort die Dichte der Defektgeraden, das heißt die Anzahl der Defektgeraden pro Fläche, am größten. Die Intensitäten der Defektgeraden variieren mit dem Rauschen innerhalb der Metallsinusoide. Aufgrund der hohen Dichte der Defektgeraden innerhalb der artefaktverursachenden Metalle ist dort die Varianz der Pixelintensitäten, die sich durch die Überlagerungen ergibt, besonders hoch. Deshalb liegen zum Teil die Intensitäten  $\tilde{f}_r(x, y)$  einzelner Pixel  $(x, y) \in \chi_{\text{Metall}}(f)$  weit unter den korrekten Werten  $\tilde{f}(x, y)$ , manchmal sogar unter 3.071 HU. Pixel dieser Intensität werden bei einer Schwellwertsegmentierung mit  $T = 3.071$  HU nicht segmentiert; deshalb ergeben sich die im letzten Abschnitt beschriebenen artefaktbedingten Löcher innerhalb der segmentierten Metallregionen (vgl. Abb. 2.3(b)).

Je kleiner  $T$  gewählt wird, desto mehr artefaktbedingte Löcher verschwinden. Andererseits nimmt, je niedriger  $T$  gewählt wird, die Menge derjenigen Pixel zu, deren Intensität aufgrund additiver Überlagerung mit Defektgeraden den Schwellwert  $T$  übersteigt. Während die artefaktbedingten Löcher, das heißt, die falsch negativ segmentierten Pixel sich im Allgemeinen innerhalb der konvexen Hülle der einzelnen nicht linear separierbaren Metallregionen befinden und deshalb nach Korollar 1.1 häufig die Menge der Metallsinusoide überhaupt nicht beeinflussen, bilden die falsch positiv segmentierten Pixel üblicherweise eine Menge von jeweils wenigen zusammenhängenden Pixeln, die zumeist außerhalb jener konvexen Hüllen liegen und deshalb zu einer veränderten Menge der Metallsinusoide führen. Aus diesem Grund ist der Schwellwert  $T = 3.071$  HU einem niedrigeren Schwellwert vorzuziehen.

Durch den Einsatz des *Medianfilters* lassen sich vereinzelte Störpixel unter Beibehaltung der Bildschärfe, das heißt insbesondere ohne Glättung von Kanten, entfernen [65, Kap. 4.3], [142]. Dadurch eignet sich dieses Filter zur Entfernung kleiner isolierter Pixelmengen, die unter  $T = 3.071$  HU falsch positiv segmentiert werden. In diesem Fall wird ein Medianfilter der Größe  $5 \times 5$  auf das segmentierte Bild

$$\chi_{\{\mathbf{p} \in \text{Def}(f) | f(\mathbf{p}) \geq T\}}$$

angewandt. Das Ergebnis dieser Filterung auf das segmentierte Bild (Abb. 2.3(b)) ist in Abbildung 2.6(a) dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die meisten der falsch positiv segmentierten Pixel außerhalb der konvexen Hüllen der Zahnfüllungen nach der Filterung entfernt sind. Es ist möglich, dass nicht linear separierbare metallische Bereiche nach Anwendung des Medianfilters linear separierbar sind. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn sich ein nicht linear separierbares Metall aus zwei linear separierbaren Teilmengen zusammensetzt und einem schmalen Band von Pixeln, das diese Mengen verbindet. Diese Linie kann bei der Medianfilterung entfernt werden und die Menge der Pixel dadurch in linear separierbare Teilmengen aufgeteilt werden.

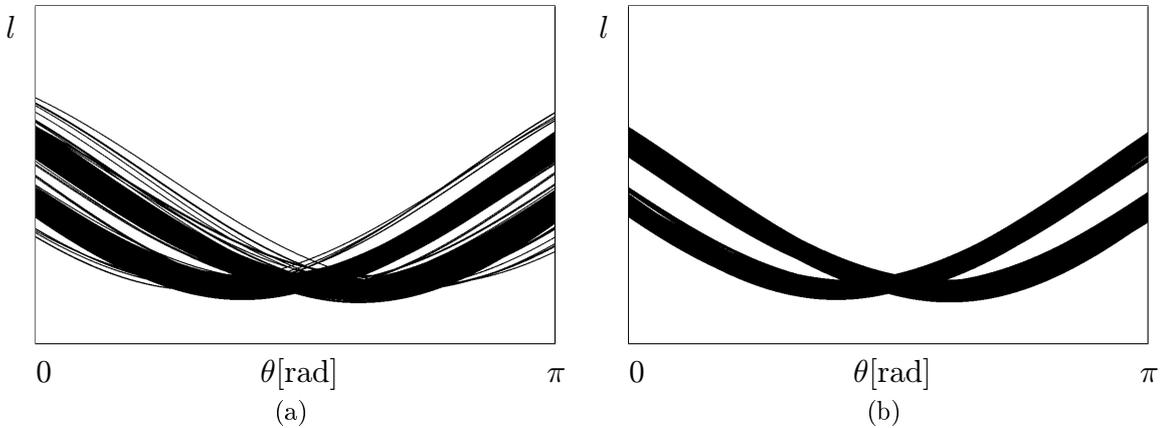


**Abbildung 2.6:** Verbesserte Schwellwertsegmentierung durch geeignete Filterung der segmentierten Metalle in Abbildung 1.11(a). Nacheinander wird auf dieses Bild (a) ein Medianoperator und (b) ein Closing-Operator angewendet. Der Schnitt dieser Menge mit (c) dem Binärbild aus der Segmentierung des ursprünglichen Sinogramms mit dem Schwellwert  $T = 1.000 \text{ HU}$  ergibt (d) die Referenz-Metallsinusoïde.

Zur Fusionierung dieser Mengen wird der morphologische *Closing*-Operator (s. Anh. A.3) verwendet. Löcher, das heißt falsch negativ segmentierte Bereiche, die kleiner als das Strukturelement sind, werden dabei geschlossen [76]. Eine konvexe Menge von Pixeln ist, wie im Anhang gezeigt wird (s. Korollar A.2), invariant gegenüber dem Closing-Operator. Dies gilt somit auch für die konvexen Hüllen nicht linear separierbarer Teilmengen und damit für die einzelnen Metalle, wenn der minimale Abstand zwischen je zwei Mengen größer als das Strukturelement ist. Es wird hier ein kreisförmiges Strukturelement mit einem Durchmesser von 11 Pixeln verwendet. Das Ergebnis des Closing auf die mediangefilterte Menge von Abbildung 2.6(a) ist in Abbildung 2.6(b) dargestellt.

Es wird nun eine weitere Schwellwertsegmentierung auf dem ursprünglichen Rekonstruktionsbild durchgeführt, in diesem Fall jedoch bei einem niedrigen Schwellwert von  $T = 1.000 \text{ HU}$ . Von Pixeln, die bei diesem Schwellwert nicht segmentiert werden, kann angenommen werden, dass sie nichtmetallisch sind. Durch Bildung der Schnittmenge zwischen dieser und der durch Closing gewonnenen Menge werden somit Pixel aus der letztgenannten Menge entfernt, die mit hoher Wahrscheinlichkeit nichtmetallisch sind. Insbesondere kann erreicht werden, dass linear separierbare Mengen, die durch Closing falsch verschmolzen wurden, wieder getrennt werden, was wiederum die Metallsinusoïde beeinflusst. Diese Menge ist für das betrachtete CT-Bild in Abbildung 2.6(d) dargestellt. Zwar sind die hauptsächlich aufgrund von Strahlhärtungsartefakten falsch positiv segmentierten Pixel in unmittelbarer Umgebung der Zähne zum Teil nicht vollständig entfernt, im Vergleich zu dem ursprünglich bei  $T = 3.071 \text{ HU}$  segmentierten Bild (s. Abb. 2.3(c)) enthält diese Menge aber insgesamt weniger falsch positiv segmentierte Pixel außerhalb der konvexen Hüllen der Metalle. Dies betrifft vor allem die aufgrund von Rauschartefakten falsch positiv segmentierten Pixel. Somit stellt das beschriebene Verfahren eine Verbesserung der Segmentierung

dar. Dies wird besonders im Vergleich der aus den jeweiligen Mengen resultierenden Metallsinusoide deutlich. Diese sind für des betrachtete CT-Bild in Abbildung 2.7 dargestellt. Da die Metalle auf jeder Seite des Kiefers im Rekonstruktionsbild jeweils eine zusammenhängende Menge bilden (s. Abb. 1.11(a)), können sich die korrekten Metallsinusoide in jeder Spalte des Sinogramms nach Korollar 1.2 aus höchstens zwei nichtzusammenhängenden Intervallen zusammensetzen. Während sich die Metallsinusoide in Abbildung 2.7(a), die aus der ursprünglichen Segmentierung resultieren in allen Spalten aus mehr als zwei nicht zusammenhängenden Intervallen zusammensetzen, setzen sich die Metallsinusoide in Abbildung 2.7(b), die sich aus der verbesserten Segmentierung ergeben, nur in einem geringen Winkelbereich um  $0^\circ$  aus mehr als zwei nicht zusammenhängenden Intervallen zusammen.



**Abbildung 2.7:** (a) Metallsinusoide des schwellwertsegmentierten Rekonstruktionsbildes aus Abbildung 2.3(b) (invertiert dargestellt). (b) Metallsinusoide wie in (a), jedoch nach verbesserter Segmentierung aus Abbildung 2.6(d) (invertiert dargestellt).

## 2.3 Pseudorohdaten

Stehen die Rohdaten  $\check{f}_r$  zur Verfügung, ist es, wie oben beschrieben, sinnvoll, die Metallartefaktreduktion in den Rohdaten durchzuführen, weil dort die artefaktverursachenden Defektpixel lokal innerhalb der Metallsinusoide liegen. Häufig stehen die Rohdaten jedoch nicht zur Verfügung, etwa weil sie nicht abgespeichert wurden oder das proprietäre Format der Rohdaten nicht bekannt ist. In diesem Fall lassen sich aus einem Rekonstruktionsbild numerisch *Pseudorohdaten*<sup>9</sup>  $\check{\check{f}} := \mathcal{R}\check{f}$  bestimmen. Bei dem im Rahmen dieser Arbeit neu entwickelten Verfahren zur Reduktion von Metallartefakten findet die Artefaktreduktion in den Pseudorohdaten statt. Um dieses Vorgehen zu rechtfertigen, ist eine Analyse der Pseudorohdaten notwendig, insbesondere

<sup>9</sup>FUCHS [59] verwendet hierfür den Begriff *Pseudoprojektionen* (engl.: *mock projections*).

im Hinblick auf Unterschiede, die sich zwischen den ursprünglichen Rohdaten und den Pseudorohdaten ergeben können, beispielsweise durch

- Clipping,
- Artefakte und
- einer Abspeicherung eines Teilausschnittes (einer ROI<sup>10</sup>) und nicht des gesamten Rekonstruktionsbildes.

### 2.3.1 Berechnung von Pseudorohdaten

Die numerische Bestimmung der Pseudorohdaten  $\check{f} = \mathcal{R}\tilde{f}$  eines Rekonstruktionsbildes  $\check{f}$  erfolgt hier in der Parallelstrahlgeometrie, das heißt durch Berechnung von  $\mathcal{R}f$ . Dazu eignen sich Strahlverfolgungsalgorithmen<sup>11</sup>, bei denen Pixelwerte entlang von Geraden summiert werden [39, Kap. 3], [59, Kap. 4.1.4], [98], [133], [213, Anh. C]. Werte an Zwischenpixelpositionen lassen sich durch Interpolationen bestimmen. Für ein Bild der Größe  $n \times n$  müssen für jeden Detektor in jedem Aufnahmewinkel  $O(n)$  Summationen durchgeführt werden. Bei  $\#\theta$  Aufnahmewinkeln und  $\#l$  Detektoren ergibt dies einen Gesamtaufwand von  $O(n\#l\#\theta)$ .

Die Radontransformation ist Bestandteil verschiedener Softwarepakete, beispielsweise *IDL* [91], *ImpactIR* [204], *Matlab* [131], *RECLBL* [90], *SNARK93* [19], *TomAS* [225] und [202]. In dieser Arbeit wird die Matlab-Implementierung `radon` verwendet, bei der der Mittelpunkt von  $\check{f}$  als Drehzentrum der virtuellen Röntgenröhre verwendet wird<sup>12</sup>.

Die Größe der in dieser Arbeit verwendeten radiologischen CT-Bilder beträgt in der Regel  $512 \times 512$  Pixel. Zur Bestimmung der Pseudorohdaten dieser Bilder wird als Kompromiss zwischen Abtastungsartefakten (vgl. Kap. 1.8.5) und Laufzeit im Folgenden eine Anzahl von 1.024 Projektionswinkeln verwendet. Die Laufzeit von `radon` bei einem Bild dieser Größe beträgt ungefähr 1 Minute. Für die Anzahl der Abtastwerte unter jedem Projektionswinkel wird der Standardwert von `radon` verwendet, der etwas mehr als die Länge der Diagonalen beträgt. Für CT-Bilder mit der üblichen Kantenlänge von 512 Pixel sind dies 729 Abtastwerte.

In Abbildung 2.8 werden die Pseudorohdaten zu dem Datensatz in Abbildung 1.11(a) dargestellt. Diese Abbildung dient im Weiteren der Beschreibung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Artefaktreduktionsverfahrens. In der Nähe der Referenz-Metallsinusoide weisen die Pseudorohdaten ein hohes Rauschen auf<sup>13</sup> (s. Abb. 2.8(b)). Die Teilmenge des Sinogramms, in der die Pixel deutlich erkennbar stark verrauscht

<sup>10</sup>Region Of Interest

<sup>11</sup>Weitere Verfahren werden etwa in [9, 35] beschrieben.

<sup>12</sup>Für weitere Details sei auf [131, Image Processing Toolbox] verwiesen.

<sup>13</sup>Die Textur des Rauschens ist vor allem von der Abtastung bei der numerischen Radontransformation abhängig.

sind, ist nicht deckungsgleich mit den Referenz-Metallsinusoiden. Ungefähr in den Winkelbereichen von  $\theta \in [0,2; 0,4] \cup [0,6; 0,8]$  ist in der Abbildung unterhalb der Referenz-Metallsinusoide Rauschen zu erkennen. Dies deutet auf artefaktverursachende Metalle hin, die sich außerhalb des Rekonstruktionsbildes befinden. Innerhalb der Referenz-Metallsinusoide sind unterschiedlich stark verrauschte Regionen unterscheiden. Das Ziel der im Folgenden beschriebenen Verfahren ist, die besonders stark verrauschten Teilmengen eines Sinogramms zu segmentieren. Diese liegen im Allgemeinen nahe bei den Referenz-Metallsinusoiden, weshalb sich diese zur Abschätzung der ungefähren Lage eignen.

### 2.3.2 Clipping

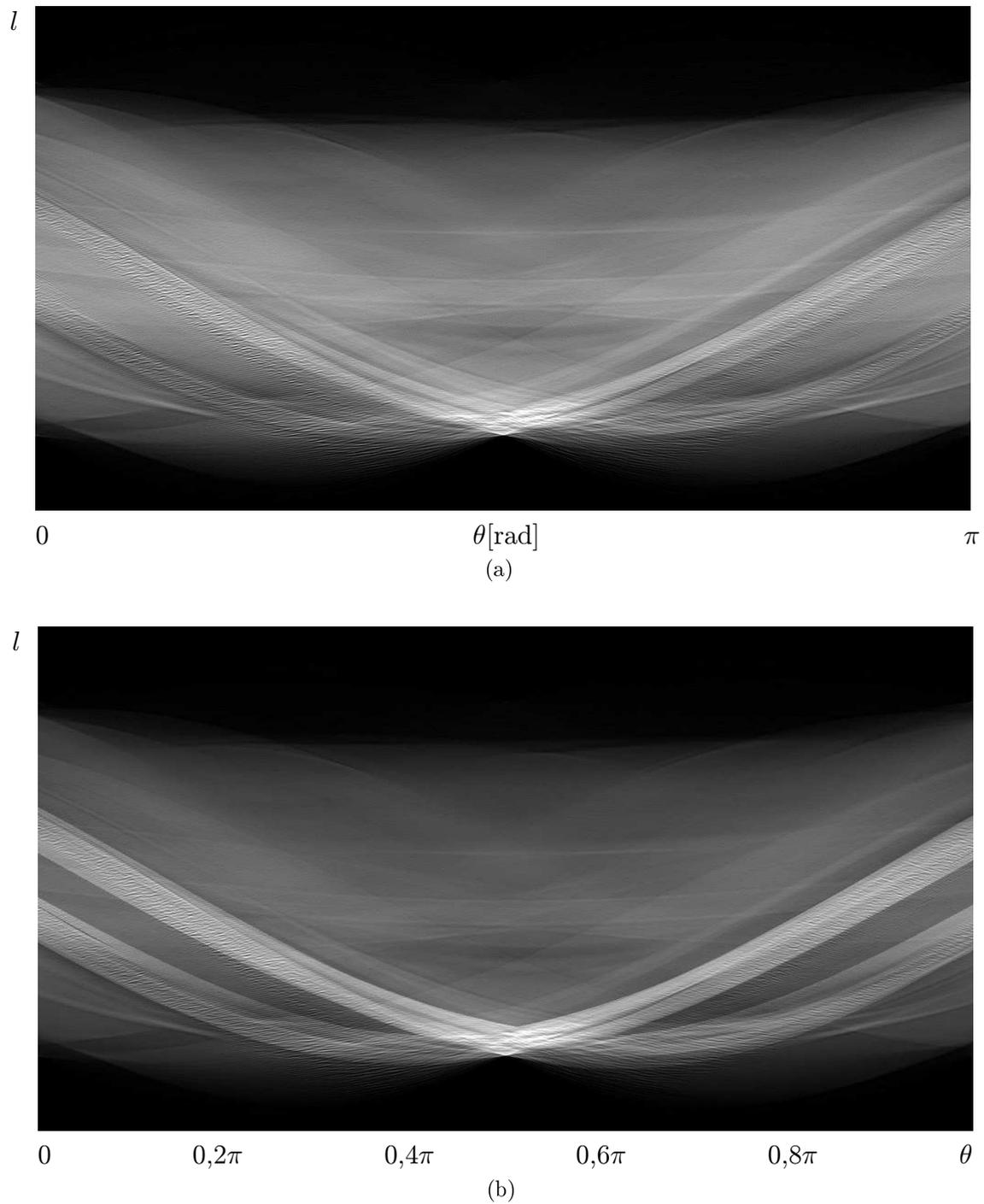
Der Abbildung 1.7 ist zu entnehmen, dass Hounsfield-Einheiten von Metallen bei 8.000 HU beginnen. Häufig findet bei der Speicherung von Rekonstruktionsbildern jedoch ein Clipping auf den Wertebereich  $\{-1.024, \dots, 3.071\}$  statt, so dass im Rekonstruktionsbild alle Metalle den Wert 3.071 HU aufweisen (vgl. Kap. 1.7.2 und 2.2). Daraus ergeben sich in den Pseudorohdaten deutlich reduzierte Intensitäten innerhalb der Metallsinusoide. Dies bedeutet, dass Verfahren zur Segmentierung von Metallsinusoiden anhand der Intensität im Sinogramm im Allgemeinen zu falschen Ergebnissen führen. Dies wird exemplarisch in Abbildung 2.9 anhand einer Schwellwertsegmentierung der Pseudorohdaten aus Abbildung 2.8 dargestellt. In der Abbildung ist zu erkennen, dass in den Pseudorohdaten ein großer Teil der Pixel innerhalb der Metallsinusoide eine vergleichsweise geringe Intensität aufweist.

Die Hounsfield-Einheiten von Körpergewebe liegen innerhalb  $[-1.024, 3.071]$  und werden deshalb durch Clipping nicht verändert. Zum Teil liegen aufgrund von Überlagerungen mit Artefakten Pixelwerte von Körpergewebe außerhalb des Clipping-Intervalls. In diesem Fall kann wichtige Information über das Gewebe beim Clipping verloren gehen. Dies betrifft vor allem Bildregionen, die von massiven Strahlhärtungsartefakten überlagert sind und dadurch außerhalb des Clipping-Intervalls liegen. In diesem Fall können Artefaktreduktionsverfahren, die auf Rohdaten basieren, deutlich bessere Ergebnisse erzielen als Verfahren, die Pseudorohdaten verwenden.

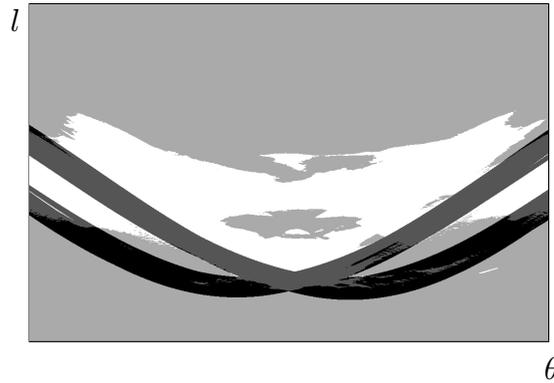
### 2.3.3 Artefaktbehaftete Rekonstruktionsbilder

Aus der Radontransformierten  $\tilde{f}$  eines Bildes  $f$  lässt sich  $f$  durch Berechnung der inversen Radontransformation eindeutig bestimmen (s. Kap. 1.4). Die Pseudorohdaten des Rekonstruktionsbildes entsprechen in diesem Fall offensichtlich exakt den ursprünglichen Rohdaten<sup>14</sup>. Werden die Rohdaten jedoch aufgrund von Rauschen

<sup>14</sup>Im Diskreten gilt dies bis auf geringe Diskretisierungsfehler [98].



**Abbildung 2.8:** (a) Pseudorohdaten zu dem Datensatz in Abbildung 1.11(a). (b) Überlagerung von (a) mit den Metallsinusoiden der verbesserten Schwellwertsegmentierung aus Abbildung 2.7. Die Struktur des Rauschens ist abhängig von der Abtastung. Zur Darstellung der Bilder wurde die Bildschärfe künstlich erhöht.



**Abbildung 2.9:** Schwelwertsegmentierung bei 50% der Maximalintensität in den Pseudorohdaten aus Abbildung 2.8 (weiß) überlagert mit den Referenz-Metallsinusoiden (schwarz). Nur ungefähr die Hälfte der Referenz-Metallsinusoide liegen in der Menge der segmentierten Pixel. Diese befinden sich zum größten Teil oberhalb der Referenz-Metallsinusoide im Sinogramm.

oder anderen Ursachen von einem Defektsinogramm überlagert, so stellt das resultierende Sinogramm im Allgemeinen keine Radontransformierte dar<sup>15</sup>. Im Diskreten lassen sich leicht Beispiele konstruieren, in denen die gestörten Rohdaten  $\check{f}_r$  kein Urbild besitzen. Sei beispielsweise  $f$  ein Bild der Größe  $1 \times 1$  mit  $f = 0$  und  $\check{f} = Rf$  dessen Sinogramm unter unterschiedlichen Aufnahmewinkeln. Dessen Werte sind offensichtlich konstant Null. Enthält nun das Sinogramm an genau einem Pixel einen Defekt, das heißt einen nichtverschwindenden Wert, besitzt das zugehörige Gleichungssystem keine Lösung. Somit existiert auch kein Urbild zu diesem Sinogramm.

Ein wichtiges Kriterium für eine erfolgreiche Artefaktreduktion in den Rohdaten stellt eine gute Lokalisierung der Defektpixel dar. Deshalb werden im Folgenden die Bilder von Artefakten in den Pseudorohdaten betrachtet. Dabei wird direkt an das Kapitel 1.8 angeknüpft. Während dort die Defektbilder  $\mathcal{R}^{-1}\check{f}$  analysiert werden, findet im Folgenden eine Untersuchung der Pseudorohdaten

$$\check{f}_r = \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\check{f}$$

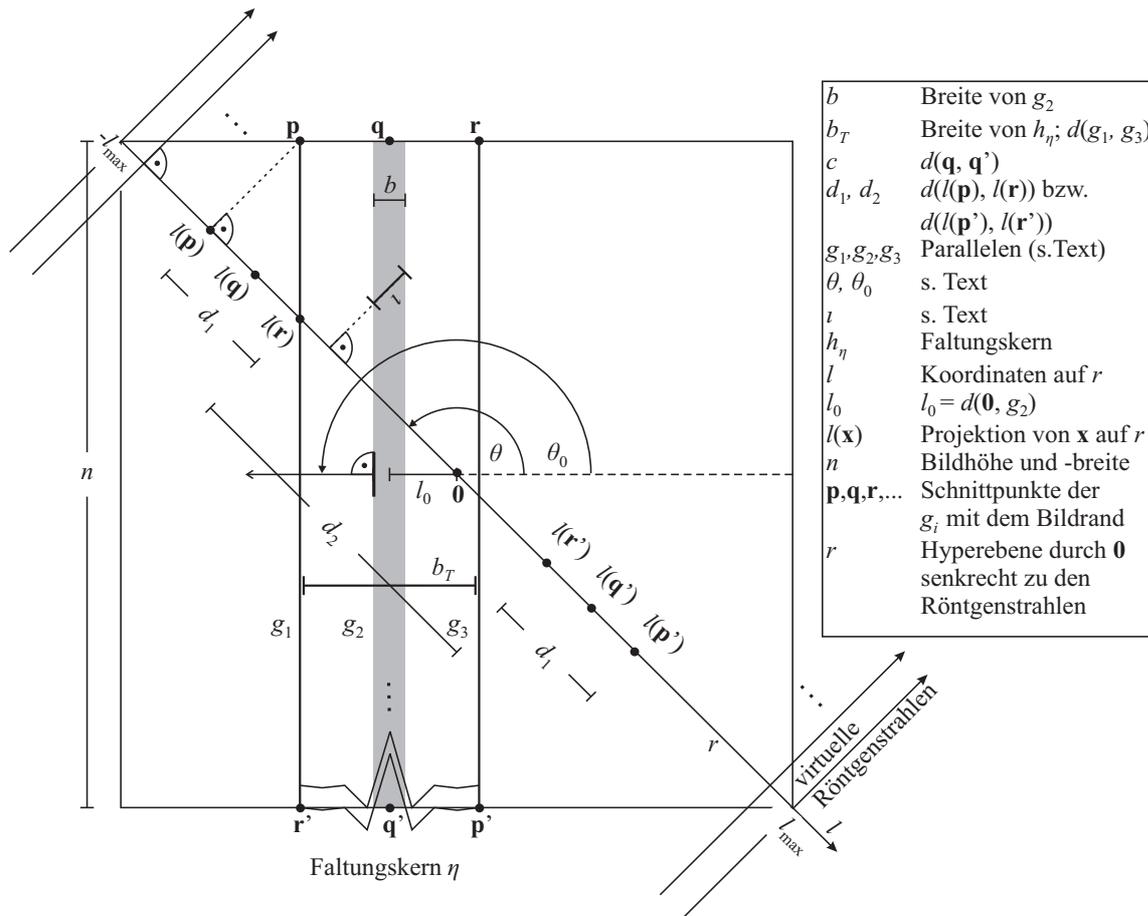
statt. Aufgrund der Linearität der Radontransformation gilt für die Pseudorohdaten

$$\check{f}_r = \check{f} + \check{f} = \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\check{f} + \check{f} = \check{f} + \check{f}. \quad (2.3)$$

Ein Defektsinogramm setzt sich wiederum aus einzelnen Defektpixeln zusammen. Deshalb genügt es, das Bild  $\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0, \theta_0}$  eines einzelnen Impulses, das heißt die Radontransformierte des Defektbildes  $\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0, \theta_0}$ , zu betrachten. Dazu ist in Abbildung 2.10 ein Defektbild der Größe  $n \times n$  skizziert. Die Intensitäten entlang der Geraden

<sup>15</sup>Dies folgt aus [126, Fußnote 1].

$g_2 = \rho_{l_0, \theta_0}$  sind konstant und entsprechen dem skalierten Maximum des Rekonstruktionsfaltungskernes  $\eta$  (vgl. Kap. 1.5). In der Abbildung wurde  $\theta_0 = 0$  gewählt<sup>16</sup>. Die Breite  $b$  stellt die Ausdehnung von  $g_2$  im diskreten Bild dar, die für  $\theta_0 = 0$  genau 1 Pixel beträgt. Die beiden Geraden  $g_1$  und  $g_3$  liegen parallel zu  $g_2$  und begrenzen die Menge  $T$ , in der  $\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0, \theta_0}$  nicht vollständig verschwindet. Je nach verwendetem Faltungskern  $\eta$  bei der gefilterten Rückprojektion  $\mathcal{R}^*\eta * \delta_{l_0, \theta_0}$  variiert der Abstand  $b'$  zwischen  $g_1$  und  $g_3$ .



**Abbildung 2.10:** Numerische Tomographie des Defektbildes  $\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0, \theta_0}$ . Die Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.

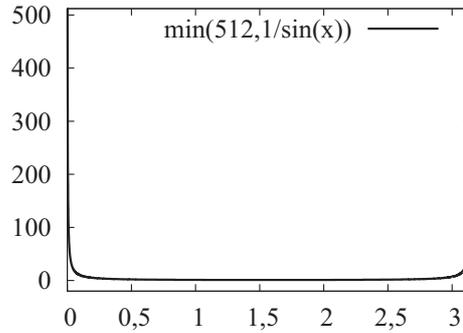
Sei  $g$  eine Approximation der Gerade  $\bar{g} : \bar{\theta}_0 \mathbf{x} = l_0$  im diskreten Pixelraster des Rekonstruktionsbildes. Die Breite und Länge von  $g$  im Pixelraster wird mit  $b$  beziehungsweise  $c$  bezeichnet. Sei weiterhin  $\chi_g$  die Indikatorfunktion der Pixelmenge von  $g$  im Rekonstruktionsbild. Es wird nun die Radontransformierte  $\check{\chi}_g$  betrachtet. Der Einfachheit halber erfolgt die Darstellung im Kontinuierlichen. Die Menge  $g$  wird dabei als Parallelschar der Breite  $b$  aufgefasst, wobei die Länge der middle-

<sup>16</sup>Anstelle des Winkels  $\theta_0 = 0$  wird hier aus zeichentechnischen Gründen ein Winkel von  $\pi$  dargestellt.

ren Parallele  $c$  betrage. Die Radontransformierte lässt sich in der Spalte  $\theta_0$  durch  $\check{\chi}_g(l, \theta_0) = c\delta(l - l_0)$  abschätzen. Der Intensitätsverlauf<sup>17</sup> entlang der  $\theta$ -Achse ist proportional zu der Strecke  $\iota$ , die die virtuellen Röntgenstrahlen im Winkel  $\theta$  durch  $g$  zurücklegen und folgt somit der Funktion

$$\iota : (\theta - \theta_0) \mapsto \min\left\{c, \frac{b}{\sin(\theta - \theta_0)}\right\}, \quad (2.4)$$

die in Abbildung 2.11 für  $\theta_0 = 0$ ,  $b = 1$  und  $c = 512$  dargestellt ist. Die Länge  $c$  ist jeweils von der Länge der Strecken, die die Geraden  $g_2$  im Rekonstruktionsbild zurücklegen, abhängig. Dies hängt vor allem von der Größe des Rekonstruktionsbildes und außerdem von der Lage der Geraden im Rekonstruktionsbild ab. Je länger  $c$  und insbesondere je größer das Rekonstruktionsbild ist, desto dominanter wird demzufolge die Intensität  $\iota$  an der Stelle  $\theta = \theta_0$ . Für  $c = 512$  beträgt  $\iota$  bereits nach  $0,2^\circ$  nur noch 65% und nach  $1^\circ$  nur noch 12% der Intensität  $\iota[0]$ .



**Abbildung 2.11:** Intensitätsverlauf der Pseudorohdaten  $\check{\chi}_g$  entlang der  $\theta$ -Achse gemäß (2.4), wobei  $\theta_0 = 0$ ,  $b = 1$  und  $c = 512$ .

Mit der Abnahme der Intensitäten entlang der  $\theta$ -Achse im Radonraum geht eine Aufweitung des Impulses  $\delta_{l_0, \theta_0}$  einher, die durch

$$(\theta - \theta_0) \mapsto \max\{b, c \sin(\theta - \theta_0)\} \quad (2.5)$$

abgeschätzt wird. Die Pseudorohdaten  $\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0, \theta_0}$  ergeben sich nun aus der Überlagerung der Sinogramme aller Parallelen innerhalb von  $T$ , deren Bild im Folgenden anhand der Abbildung 2.10 eingehender untersucht wird.

Sei  $b_T = d(g_1, g_3)$  die Breite von  $T$ , das heißt die maximale Distanz zwischen zwei nichtverschwindenden Koeffizienten im Faltungskern  $\eta$ . In der Abbildung 2.10 ist eine Momentaufnahme der numerischen Tomographie dargestellt, in der sich die Sendempfangseinheit des virtuellen Parallelstrahltomographen in einem Winkel  $\theta$  befindet. Sei  $\mathbf{x}$  ein Pixel im Rekonstruktionsbild und  $l(\mathbf{x})$  die  $l$ -Koordinate der Projektion von  $\mathbf{x}$  auf die Gerade  $r : \lambda\bar{\theta}$ ,  $l \in \mathbb{R}$  (s. Abb. 2.10). Wir betrachten nun die Spalte

<sup>17</sup>Im Kontinuierlichen gilt  $\check{\chi}_{\bar{g}}(l, \theta) = c\delta_{l_0, \theta_0}$ , da für  $(l, \theta) \neq (l_0, \theta_0)$  die Schnittmengen der Integrationsgeraden  $\rho_{l, \theta}$  mit  $\bar{g}$  jeweils das Maß Null haben.

$[\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0,\theta_0}](l, \theta)$ ,  $l \in [-l_{\max}, l_{\max}]$ . Diese lässt sich im Allgemeinen in die folgenden fünf Intervalle unterteilen<sup>18</sup>:

- $I_1 := [-l_{\max}, l(\mathbf{p})]$ ,
- $I_2 := [l(\mathbf{p}), l(\mathbf{r})]$ ,
- $I_3 := [l(\mathbf{r}), l(\mathbf{r}')] ]$ ,
- $I_4 := (l(\mathbf{r}'), l(\mathbf{p}')] ]$  und
- $I_5 := (l(\mathbf{p}'), l_{\max}]$ .

Da außerhalb von  $T$  alle Pixelintensitäten verschwinden, gilt

$$\forall l \in I_1 \cup I_5 : [\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0,\theta_0}](l, \theta) = 0.$$

Weiterhin ergibt sich aus Lemma 1.1

$$\forall l \in I_3 : [\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0,\theta_0}](l, \theta) = 0$$

sowie

$$\theta = \theta_0 \Rightarrow [\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0,\theta_0}](\cdot, \theta) = 0,$$

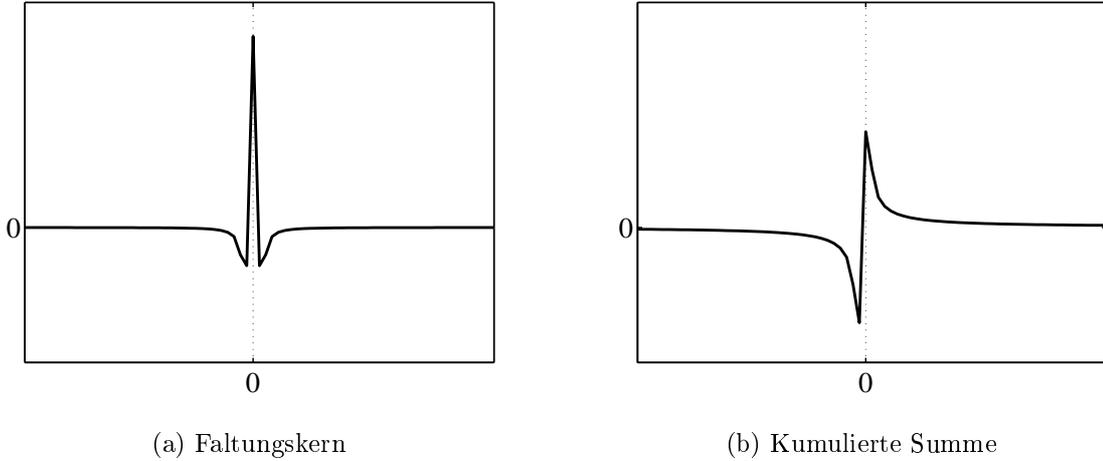
falls  $T$  vollständig im Rekonstruktionsbild liegt. Ist  $\theta^\perp = \theta_0$ , dann sind  $I_2$  und  $I_4$  identisch und die Projektionswerte entsprechen den Werten des Faltungskerns  $\eta$  bis auf einen Skalierungsfaktor, der abhängig von der Länge von  $g_2$  innerhalb des Rekonstruktionsbildes ist<sup>19</sup>. Somit enthalten die Pseudorohdaten an der Stelle  $(l_0, \theta_0)$  statt eines Impulses den Faltungskern  $\eta$  entlang der Spalte.

Für  $l \in I_2$  ergeben sich die Projektionswerte aus der skalierten und auf die Strecke  $d_1$  dilatierten Integralfunktion  $t \mapsto \int_{-\infty}^t \eta(t) dt$  beziehungsweise im Diskreten aus der kumulierten Summe  $k \mapsto \sum_{-\infty}^k \eta[i]$ . Dies ist für einen typischen Rekonstruktionsfaltungskern in Abbildung 2.12 dargestellt. Die Nulldurchgänge zwischen dem Maximum  $\eta[0]$  des Faltungskerns und den beiden Minima liegen je nach Faltungskern bei ungefähr  $|t| = 1$  (vgl. [20, Kap. 6.1.3]). An diesen Stellen tritt jeweils ein Vorzeichenwechsel von  $\eta$  auf, so dass die Integralfunktion beziehungsweise die kumulierte Summe dort sein Minimum ( $k < 0$ ) beziehungsweise sein Maximum ( $k > 0$ ) annimmt<sup>20</sup>. Die Projektionswerte für  $l \in I_4$ , ergeben sich aus den an der Achse  $k = 0$  gespiegelten Werten der kumulierten Summe. Sofern  $I_2 \neq I_4$  und  $I_2 \cap I_3 \neq \emptyset$ , ergeben sich die Projektionswerte aus der kumulierten Summe für  $k \leq k_{\max}$ ,  $k_{\max} > 0$  beziehungsweise den an der Achse  $k = 0$  gespiegelten Werten.

<sup>18</sup>Je nach der Breite  $b_T$  und dem Aufnahmewinkel  $\theta$  überdecken sich zum Teil Intervalle oder es entfallen Intervalle.

<sup>19</sup>Im Allgemeinen können sich die Längen, die die Parallelen innerhalb von  $T$  im Rekonstruktionsbild aufweisen, unterscheiden. In diesem Fall entsprechen die Projektionswerte näherungsweise dem skalierten Faltungskern.

<sup>20</sup>Im Diskreten sind die Extrema der kumulierten Summe um  $1/2$  Pixel nach links verschoben. Dies lässt sich durch die Asymmetrie der Rückwärtsdifferenz  $n \mapsto a[n] - a[n-1]$  erklären, durch die die Integralfunktion auf den Faltungskern abgebildet wird.



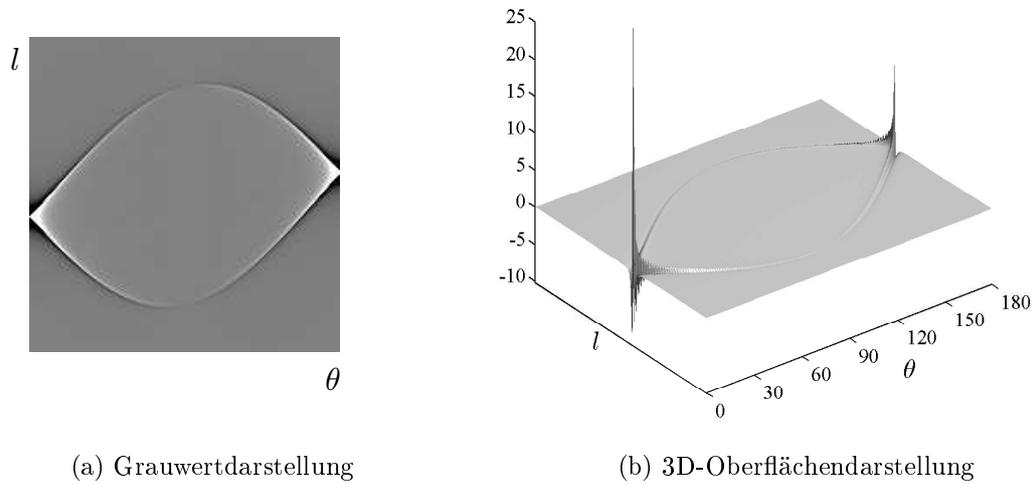
**Abbildung 2.12:** Typischer Faltungskern  $\eta$  sowie die kumulierte Summe  $k \mapsto \sum_{-\infty}^k \eta[i]$ . Für die Achsen beider Abbildungen wurden identische Skalierungen gewählt.

Aufgrund der nichtverschwindenden Projektionswerte für  $l \in I_2 \cup I_4$  weisen die Pseudorohdaten auch für  $\theta \neq \theta_0$  nichtverschwindende Intensitäten auf. Der Intensitätsverlauf für die Extrema entlang der  $\theta$ -Achse kann durch (2.4) abgeschätzt werden, weil die Extrema nahe bei  $l(\mathbf{q})$  beziehungsweise  $l(\mathbf{q}')$  liegen. Ebenso lassen sich die Abstände  $d(l(\mathbf{q}), l(\mathbf{q}'))$  anhand (2.5) abschätzen, während die Abstände  $d(l(\mathbf{p}), l(\mathbf{r}))$  beziehungsweise  $d(l(\mathbf{p}'), l(\mathbf{r}'))$  sich zu

$$(\theta - \theta_0) \mapsto b_T |\cos(\theta - \theta_0)| \quad (2.6)$$

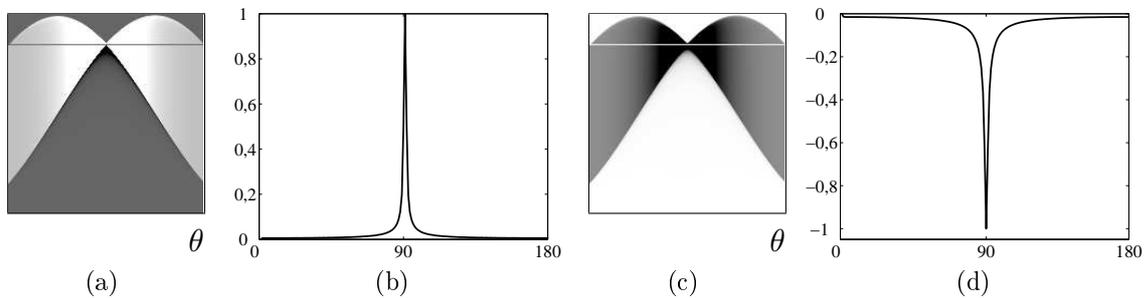
ergeben und somit für  $\theta = \theta_0$  ihr Maximum annehmen. Zur Veranschaulichung der obigen Untersuchungen sind in Abbildung 2.13 die Pseudorohdaten  $\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\alpha\delta_{l_0,0}$  für ein  $\alpha > 0$  dargestellt. In dem Schaubild ist deutlich das Maximum an der Stelle  $(l_0, 0)$  zu erkennen. In den ersten Spalten sowie aufgrund der Symmetrieeigenschaft (1.8) in den letzten Spalten ist  $\eta$  mit skalierten Werten zu erkennen. Die deutlich erkennbaren sinusoidalen Kurven werden durch die Extrema beschrieben.

Liegt  $g_2$  in der Nähe des Randes  $\partial\text{Def}(\tilde{f})$ , so befindet sich, anders als bei der bisherigen Betrachtung, nur eine Teilmenge von  $T$ , beispielsweise die Parallelen zwischen  $g_2$  und  $g_3$  im Rekonstruktionsbild (vgl. Abb. 2.10). Die Integrale über die Geraden  $\rho_{l,\theta}$ , die diesen Teil von  $T$  schneiden, verschwinden im Allgemeinen nicht. Als Beispiel sind in Abbildung 2.14 Pseudorohdaten dargestellt, die sich für  $g_2 \parallel \rho_{l,\pi/2}$  ergeben. Abbildung 2.14(a) resultiert aus einem Rekonstruktionsbild, in dem  $g_2$  direkt am Rand liegt, Abbildung 2.14(c) aus einem Rekonstruktionsbild, in dem  $g_2$  gerade nicht mehr enthalten ist. Die nichtverschwindenden Projektionswerte dieser Abbildungen sind, abgesehen von den schwarz dargestellten negativen Intensitäten in Abbildung 2.14(a) für  $\theta \approx 90^\circ$ , in den einzelnen Spalten nahezu identisch und entsprechen offensichtlich



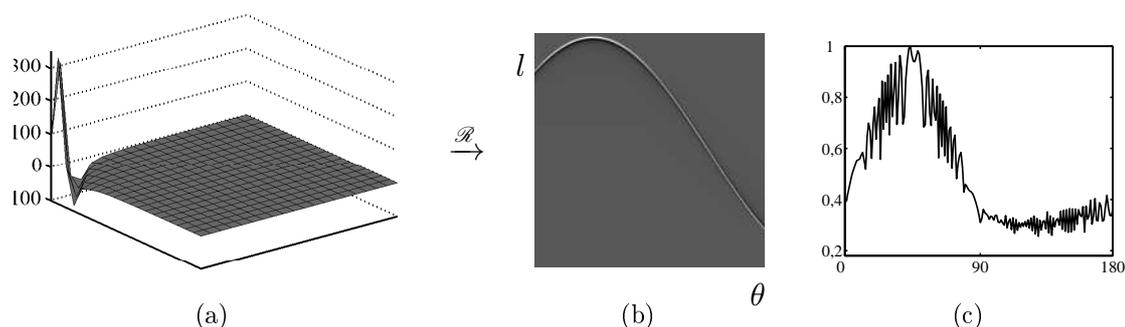
**Abbildung 2.13:** Pseudorohdaten  $\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\alpha\delta_{l_0,0}$ ,  $\alpha > 0$ . Die Intensität  $\tilde{f}(l_0,0)$  beträgt in diesem Fall ungefähr 30% der ursprünglichen Intensität.

den Maxima beziehungsweise Minima in Abbildung 2.13, was auch in den Abbildungen 2.14(b) und 2.14(d) deutlich wird.



**Abbildung 2.14:** Pseudorohdaten für  $g_2$  parallel zu  $\rho_{l,\pi/2}$ . (a) Gerade  $g_2$  noch im Rekonstruktionsbild enthalten. (b) Intensitätsprofil entlang der in (a) dargestellten Linie (Skalierung mit  $1/(\text{Maximum des Intensitätsprofils})$ ). (c) Gerade  $g_2$  außerhalb vom Rekonstruktionsbild. (d) Intensitätsprofil entlang der in (c) dargestellten Linie (Skalierung mit  $1/(|\text{Minimum des Intensitätsprofils}|)$ ).

Liegt  $g_2$  in einer Ecke des Rekonstruktionsbildes, ist also  $g_2 \cap \text{Def}(\tilde{f})$  punktförmig, sind die Pseudorohdaten im Wesentlichen in den Sinusoiden dieses Punktes nichtverschwindend. Dies wird in Abbildung 2.15 exemplarisch dargestellt. Die maximalen und minimalen Intensitäten entlang der  $\theta$ -Achse in den Pseudorohdaten variieren in diesem Fall weniger als in den obigen Fällen. Da diese Extrema aufgrund des kurzen Integrationswegs über  $g_2$  jedoch vergleichsweise gering sind, spielt dieser Fall eine untergeordnete Rolle und wird nicht näher betrachtet.

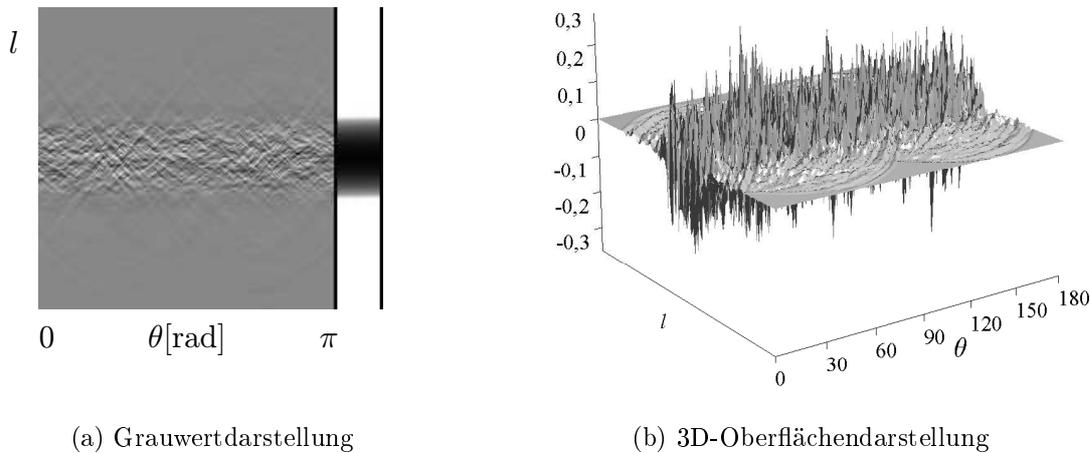


**Abbildung 2.15:** (a) Die Gerade  $g_2$  schneidet das Rekonstruktionsbild in einer Ecke links in der Abbildung. (b) Pseudorohdaten. (c) Maxima in den Spalten der Pseudorohdaten entlang der  $\theta$ -Achse (Skalierung mit  $1/(\text{Maximum der Maxima})$ ).

Wir betrachten nun die Varianz der Defektpixel in den Pseudorohdaten. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ . Dann ergibt sich für die Intensität der lineare Zusammenhang

$$\tilde{f}(l_0, \theta_0) = \mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\alpha\delta_{l_0,0} = \alpha\mathcal{R}\mathcal{R}^{-1}\delta_{l_0,0}.$$

Andererseits hängt die Intensität auch linear von der Länge  $c$  der Schnittmenge zwischen dem Rekonstruktionsbild und der Geraden  $g_2$  ab, die in diesem Fall  $\rho_{l_0, \theta_0}$  entspricht. Aufgrund dieser Linearitäten wird die Varianz zwischen den Intensitäten der Defektpixel in den Pseudorohdaten gegenüber der Varianz der korrespondierenden Intensitäten in den ursprünglichen Rohdaten skaliert. Dadurch wird aber der Charakter des Rauschens nicht verändert. Das bedeutet, dass auch die Pseudorohdaten eine exponentielle Zunahme der Rauschvarianz mit steigender Intensität der unverrauschten Rohdaten  $\tilde{f}$  aufweisen (vgl. Kap. 1.8). Da sich anstelle der ursprünglichen Impulse entlang der Spalten jeweils die Rekonstruktionsfaltungskerne  $\eta$  befinden, werden hohe Frequenzen verstärkt und das Rauschen in vertikaler Richtung tritt in den Pseudorohdaten im Vergleich zu den Rohdaten deutlicher hervor. In horizontaler Richtung hingegen ist das Defektbild aufgrund der nichtverschwindenden Ausdehnung, die die Impulsantworten von Defektpixeln entlang der  $\theta$ -Achse aufweisen (s. Abb. 2.13), geglättet. Zur Veranschaulichung wird aus  $\check{k}$  ein Defektsinogramm erstellt, wie in Kapitel 1.8 zur Erstellung von Abbildung 1.10(a) beschrieben, jedoch so, dass  $(l, \theta) \notin \text{Tr}(\check{k}) : \check{f}_r(l, \theta) = 0$ . Die Menge  $\text{Tr}(\check{k})$  wird als die Menge der Metallsinusoide interpretiert. Aus diesem Defektsinogramm wird ein Rekonstruktionsbild erzeugt und daraus die in Abbildung 2.16 dargestellten Pseudorohdaten. Zum Vergleich wurde in Abbildung 2.16(a) ein Ausschnitt des Sinogramms  $\check{k}$  angefügt. Man kann deutlich sehen, dass die Varianz der Rauschintensitäten innerhalb der Metallsinusoide am größten ist. Außerhalb der Metallsinusoide verschwindet das Defektsinogramm in den Pseudorohdaten fast vollständig.



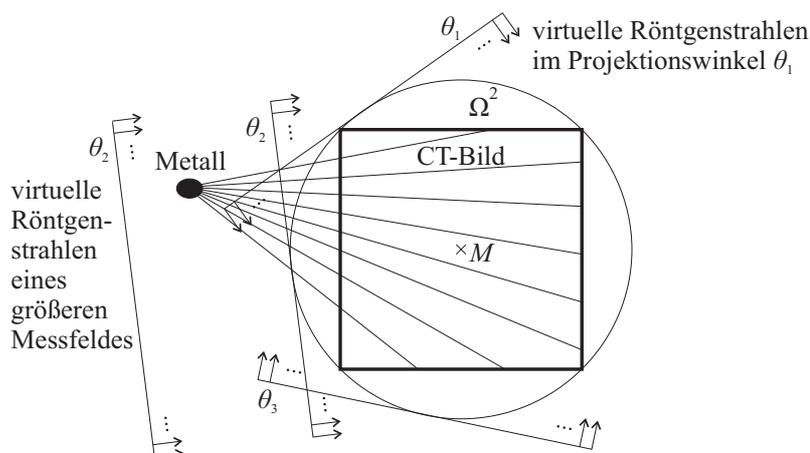
**Abbildung 2.16:** Pseudorohdaten  $\check{\check{f}}$ . Die Simulation eines Defektsinogramms  $\check{\check{f}}$  geschieht anhand des Sinogramms  $\check{k}$  des Kreisscheibenphantoms. Zum Vergleich ist rechts in (a) ein Ausschnitt von  $\check{k}$  abgebildet. Innerhalb der Menge  $\text{Tr}(\check{k})$  wird in  $\check{\check{f}}$  ein normalverteiltes Rauschen erzeugt, dessen Varianz exponentiell mit den Intensitäten in  $\check{k}$  wächst. Außerhalb von  $\text{Tr}(\check{k})$  beträgt  $\check{\check{f}}$  Null. Der Wertebereich von  $\check{\check{f}}$  ist  $[-0,6; 0,5]$ . Aus  $\check{\check{f}}$  wird ein Rekonstruktionsbild der Größe  $128 \times 128$  Pixel und daraus  $\check{\check{f}}$  bestimmt.

### 2.3.4 Metall außerhalb des gespeicherten CT-Bildes

In den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass alle Metalle, die zu Metallsinusoiden in den Rohdaten korrespondieren, im CT-Bild  $\tilde{f}_r$  enthalten sind. Dieses enthält jedoch häufig nur eine ROI des Rekonstruktionsbildes [89, Kap. 3.6.3] und damit im Allgemeinen nicht alle oder sogar gar keine Pixel des Metalls. In der Abbildung 1.11(a) sind zum Beispiel nur wenige Zähne zu sehen. Offensichtlich können jedoch auch von Zahnfüllungen, die nicht im CT-Bild enthalten sind, Artefakte herrühren, die das CT-Bild überlagern. Es wird nun das Bild dieser Artefakte in den Pseudorohdaten untersucht. Dabei wird davon ausgegangen, dass aufgrund der Metalle insbesondere auch Rauschartefakte hervorgerufen werden.

In Abbildung 2.17 ist ein artefaktbehaftetes CT-Bild  $\tilde{f}_r$  skizziert, bei dem das artefaktverursachende Metall nicht enthalten ist. Von dem Metall breiten sich Rauschartefakte über das ganze Bild aus. Die eingezeichneten Geraden symbolisieren jeweils die zentrale Gerade  $g_2$  maximaler Intensität (vgl. Abb. 2.10). Sei  $M$  der Mittelpunkt von  $\text{Def}(\tilde{f}_r)$ . Man kann sich nun  $\tilde{f}_r$  eingebettet in ein kreisscheibenförmiges Messfeld  $\Omega^2$  mit Mittelpunkt  $M$  vorstellen so, dass  $\text{Def}(\tilde{f}_r) \subset \Omega^2$  und die Werte außerhalb  $\text{Def}(\tilde{f}_r)$  verschwinden (s. Abb. 2.17).

Sei nun der Radius des Messfeldes so groß, dass die Pixel der artefaktverursachenden Metalle innerhalb des Messfeldes liegen, die Breite der Röntgenquelle jedoch unverändert (Abb. 2.17 links). Nehmen wir an, die Pixelintensitäten außerhalb des



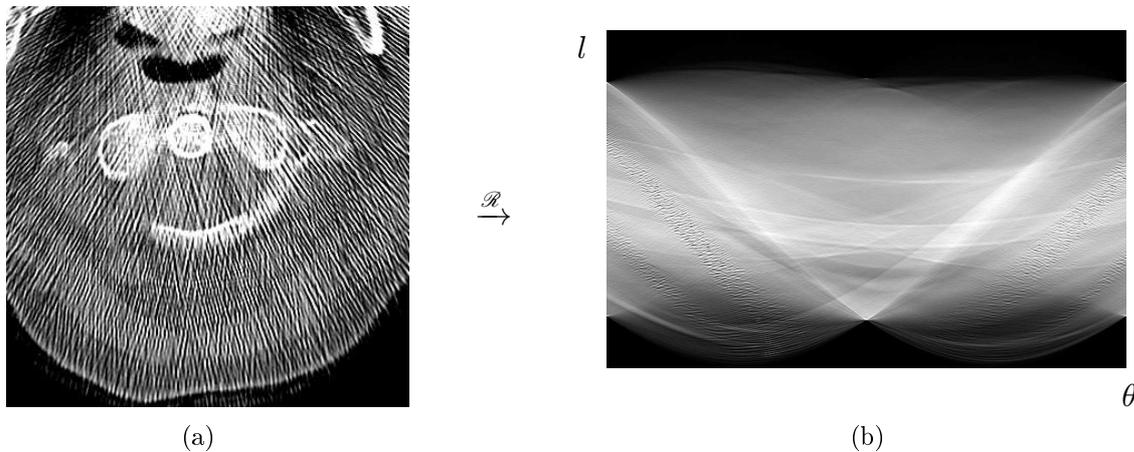
**Abbildung 2.17:** Berechnung der Pseudorohdaten eines artefaktbehafteten CT-Bildes (dick umrandetes Quadrat). Das artefaktverursachende Metall liegt außerhalb des Bildes.

CT-Bildes sind nicht verschwindend, sondern enthalten im gesamten Messfeld die aus den ursprünglichen Rohdaten rekonstruierten Werte. Dann sind die Metallsinusoide in den Pseudorohdaten innerhalb des Winkelbereichs, in dem das Metall von der Parallelenschar der virtuellen Röntgenstrahlen überdeckt wird, enthalten. Im übrigen Sinogramm verschwinden die Metallsinusoide. Aufgrund der Rauschartefakte im Messfeld resultiert Rauschen innerhalb der Metallsinusoide in den Pseudorohdaten (vgl. Kap. 1.8). Sind nun die Intensitäten im Messfeld außerhalb des CT-Bildes Null, reduziert sich zwar der Mittelwert innerhalb der Metallsinusoide, die Varianz der Intensitäten steigt jedoch auch hier exponentiell mit der Intensität der unverrauschten Rohdaten  $\tilde{f}$ . Dies gilt, weil die Intensitäten der „Strahlen“ im Wesentlichen unabhängig von der Lage des Metalls sind. Die Intensitäten in den Metallsinusoide der Pseudorohdaten sind somit nicht in erster Linie von der Lage des Metalls, sondern von der Länge der einzelnen „Strahlen“ im Bild abhängig.

In Abbildung 2.18 ist ein Ausschnitt aus Abbildung 1.11(a) dargestellt, der kein Metall enthält. In den korrespondierenden Pseudorohdaten sind die Metallsinusoide deutlich anhand der hochfrequenten Rauschtextur zu erkennen, obwohl die Sinusoide anderer Objekte höhere Intensitäten aufweisen.

## 2.4 Segmentierung von Metallsinusoiden in den Pseudorohdaten

Sei  $\tilde{f}_r$  ein wie im letzten Abschnitt beschriebenes artefaktbehaftetes CT-Bild für das gilt:



**Abbildung 2.18:** (a) Ausschnitt aus Abbildung 1.11(a) so, dass alle artefaktverursachenden Metalle außerhalb des Bildes sind.  $Z = 76$ ,  $B = 1000$ . (b) Pseudorohdaten zu (a). Die Metallsinusoiden zeichnen sich durch ihre Textur, jedoch nicht durch hohe Intensität aus.

- Der Definitionsbereich ist im Allgemeinen nur eine Teilmenge des ursprünglichen Messfeldes. Deshalb sind häufig die artefaktverursachenden Metalle nur teilweise oder gar nicht im CT-Bild enthalten.
- Enthält das Bild Metalle, so sind üblicherweise dort die Pixelintensitäten durch Clipping reduziert.

Um anhand der Pseudorohdaten  $\tilde{f}_r$  eine Metallartefaktreduktion durchführen zu können, ist es entscheidend, die Metallsinusoiden beziehungsweise die Teilmengen der Pseudorohdaten, in denen das Defektsinogramm eine hohe Rauschvarianz aufweist, möglichst gut abzuschätzen. Alle bisherigen Verfahren zur Segmentierung der Metallsinusoiden liefern unbefriedigende Ergebnisse, wenn die Metalle nicht vollständig in  $\tilde{f}_r$  enthalten sind, und scheitern völlig, wenn die Metalle nicht in  $\tilde{f}_r$  enthalten sind (vgl. Kap. 2.2, [214], [215]). Es wird im Folgenden davon ausgegangen, dass  $\tilde{f}_r$  von Rauschartefakten überlagert ist. Diese führen zu Rauschen besonders hoher Varianz innerhalb der Metallsinusoiden, unabhängig von Clipping sowie davon, ob das Metall im Bild enthalten ist (vgl. Kap. 2.3). Aufgrund der strahlenkranzförmigen Rauschartefakte ergeben sich im Sinogramm besonders ausgeprägte lokale Extrema, da die Integrationen bei der Radontransformation entlang von Geraden und damit insbesondere auch entlang der einzelnen kollinearen Punkte der Strahlen durchgeführt werden<sup>21</sup>. Strahlenkranzförmige Strukturen kommen in menschlichem Gewebe nicht vor, so dass sich die Defektpixel durch ihre Intensität gut vom übrigen Sinogramm abheben. Das besonders starke Rauschen innerhalb der Metallsinusoiden eignet sich somit als Signatur zur Segmentierung der Metallsinusoiden beziehungsweise der

<sup>21</sup>Aus diesem Grund eignet sich die Radontransformation sehr gut zur Detektion von kollinearen Punkten selbst in verrauschten Bildern (s. [201]).

Teilmengen, die eine besonders hohe Rauschvarianz aufweisen. Diese werden im Folgenden der Einfachheit halber auch als Metallsinusoide bezeichnet. Es werden dazu drei Ansätze untersucht:

- eine Bestimmung inhomogener Regionen mittels Quadtree-Zerlegung,
- eine Texturanalyse mit Haralick'schen Texturmerkmalen sowie
- eine Wavelet-basierte Signalanalyse.

Um die Ergebnisse vergleichen zu können, werden die Verfahren jeweils auf die in Abbildung 2.8 dargestellten Pseudorohdaten angewandt und dem segmentierten Sinogramm die Referenz-Metallsinusoide aus Abbildung 2.6(d) überlagert. Das Wavelet-basierte Verfahren eignet sich am besten zur Segmentierung der Metallsinusoide, weshalb dieses Verfahren im Weiteren verwendet wird.

### 2.4.1 Bestimmung inhomogener Regionen

Im Folgenden wird angenommen, dass das Bild quadratisch ist und eine Kantenlänge von  $n_0 := 2^n$  besitzt. Für ein Bild beliebiger Größe wird dies durch Einbettung in eine quadratische Nullmatrix erreicht. Durch das Rauschen hoher Varianz zeichnen sich Metallsinusoide gegenüber dem restlichen Sinogramm als besonders inhomogene Regionen aus. Mit der *Quadtree*-Darstellung lässt sich das Sinogramm in eine Menge disjunkter rechteckiger homogener Regionen unterschiedlicher Größe zerlegen. Dadurch eignet sich diese Darstellung zur Segmentierung sowohl der homogenen als auch der inhomogenen Bildregionen<sup>22</sup> [65, Kap. 7.4.3], [67, Kap. 16], [116, Kap. 4.4.3].

Bei der Quadtree-Zerlegung wird eine Baumstruktur erzeugt, in der die Blätter mit homogenen Teilmengen des Bildes korrespondieren. Zur Erzeugung des Baumes wird das Bild solange rekursiv in vier Quadranten unterteilt, bis die betrachtete Teilmenge des Bildes einem gegebenen Homogenitätskriterium genügen oder die Kantenlänge 1 haben. Dieses Vorgehen wird im Algorithmus 2.1 skizziert. Anhand der Blatttiefen lassen sich Aussagen über die Homogenität der betreffenden Region treffen. Je tiefer das Blatt ist, desto geringer ist die Homogenität der betreffenden Region. Sei  $v(m)$  der Aufwand zur Bestimmung der Homogenität in einem quadratischen Bild mit Kantenlänge  $m$ . Dann beträgt der Aufwand zur Berechnung der Quadtree-Zerlegung im schlechtesten Fall  $O(\sum_{k=0}^n 4^k v(n/2^k))$ . Da jedes Pixel betrachtet werden muss gilt  $v(m) \in \Omega(m^2)$ . Somit beträgt der Aufwand für die Quadtree-Zerlegung  $O(v(n_0) \ln n_0)$ .

<sup>22</sup>Weitere Anwendungen der Quadtree-Zerlegung, wie beispielsweise Verfahren zur Bildkompression, findet man etwa in [93, 94, 116, 178, 222].

---

**Algorithmus 2.1** Quadtree-Zerlegung eines Bildes

---

Eingabe:  $f : \mathbb{N}_{2^n} \times \mathbb{N}_{2^n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$     Eingabebild  
          kriterium                                    Homogenitätskriterium  
Ausgabe: qt    Quadtree-Zerlegung von  $f$

---

```
1  function qtdecomp(bild, kriterium) begin
2      if erfüllt(bild, kriterium) then
3          füge_blatt_in_qt(bild, qt);
4      else
5          /* zerlege Bild in 4 Quadranten */
6          zerlege(bild);
7          foreach quadrant do
8              qtdecomp(quadrant, kriterium);
9          od
10     endif
11 end
12
13 qt ← new(leerer_baum);
14 /* starte Zerlegung */
15 qtdecomp(f, kriterium);
```

---

In Abbildung 2.19(a) wird auf den Pseudorohdaten aus Abbildung 2.8 eine Quadtree-Zerlegung durchgeführt und die homogenen Regionen der Kantenlänge 1, 2 und 4 dargestellt. Dabei wird folgendes Homogenitätskriterium angewandt:

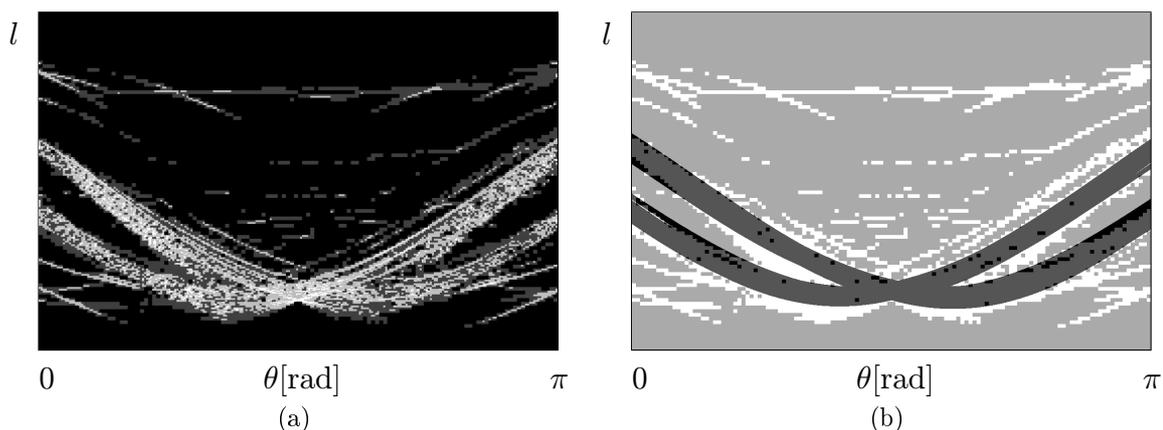
$$\max_{\mathbf{p} \in P} \{\check{f}_r(\mathbf{p})\} - \min_{\mathbf{p} \in P} \{\check{f}_r(\mathbf{p})\} < T.$$

Hierbei bezeichne  $P$  die Pixel im jeweiligen Sinogrammausschnitt und

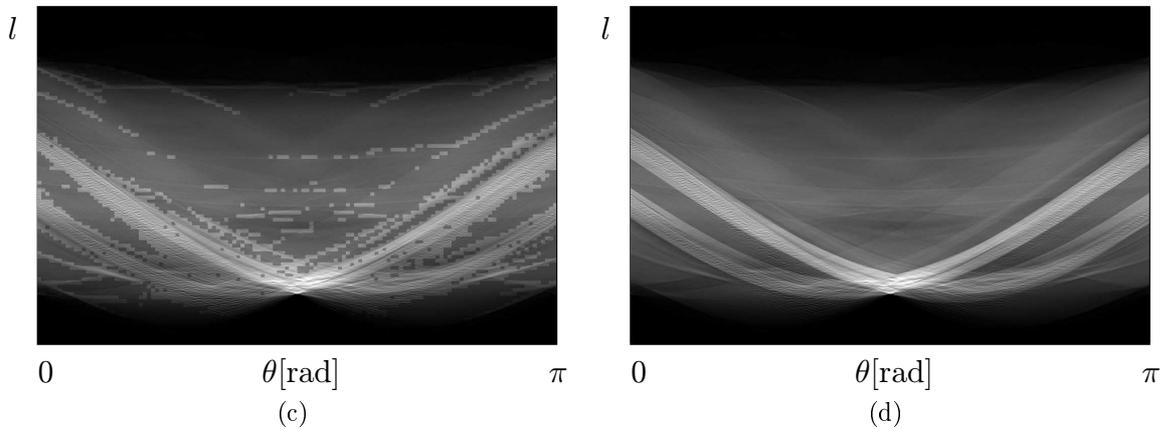
$$T := 0,04(\max(\check{f}_r) - \min(\check{f}_r))$$

einen Schwellwert. Mit diesem Homogenitätskriterium dauert die Quadtree-Zerlegung 3,5 s in der Matlab-Implementierung `qtdecomp`.

Die in Abbildung 2.19(a) dargestellten Regionen werden nun als Metallsinusoiden interpretiert. Diese sind, überlagert mit den Referenz-Metallsinusoiden, in Abbildung 2.19(b) dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Referenz-Metallsinusoiden zum größten Teil segmentiert werden. Darüber hinaus werden auch andere stark verrauschte Bereiche beispielsweise zwischen den beiden Ästen der Referenz-Metallsinusoiden segmentiert. Zum Vergleich sind in Abbildung 2.19(c) und 2.19(d) die durch die Quadtree-Zerlegung bestimmten Metallsinusoiden und die Referenz-Metallsinusoiden dem Sinogramm überlagert dargestellt. Bei der Quadtree-Zerlegung werden auch einige Übergänge zwischen homogenen Bereichen segmentiert. Dieser Effekt ist abhängig von der gewählten Einbettung des Sinogramms in eine Nullmatrix mit Kanten, deren Länge einer Zweierpotenz entspricht und kann durch die Berechnung der Schnittmengen der Quadtree-Zerlegungen bei unterschiedlichen Einbettungen vermindert werden.



**Abbildung 2.19:** (a) Quadtree-Zerlegung der Pseudorohdaten aus Abbildung 2.8: Die Unterbäume der Größe  $1 \times 1$  (weiß),  $2 \times 2$  (hellgrau) und  $4 \times 4$  (dunkelgrau) repräsentieren die inhomogenen Bereiche des Sinogramms. (b) Überlagerung aller Unterbäume (weiß) mit den Metallsinusoiden aus Abbildung 2.7. (wird fortgesetzt)



**Abbildung 2.19:** (Fortsetzung) (c) Sinogramm überlagert mit segmentierter Menge. (d) Zum Vergleich: Sinogramm überlagert mit Referenz-Metallsinusoide (wie Abbildung 2.8(b)).

## 2.4.2 Texturanalyse

Das erhöhte Rauschen innerhalb der Metallsinusoide lässt sich als Textur der Metallsinusoide interpretieren. Diese wird im Folgenden mittels *Cooccurrence-Matrizen* (siehe [73, Kap. 5.1.1]) bestimmt. Es folgt hier nur eine knappe Beschreibung der Bestimmung von Texturen anhand dieser Matrix. Für weitergehende Informationen zu diesen und anderen Texturanalyseverfahren sei auf Lehrbücher zur Bildverarbeitung, etwa [4, 65, 68, 73, 93, 94, 116, 151, 206] verwiesen.

Sei zuerst  $f : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow G$  ein Grauwertbild mit der Grauwertmenge  $G$  und  $\mathbf{v} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ein Vektor mit ganzzahligen Komponenten. Weiterhin sei  $(c_{\mathbf{v}})$  das zweidimensionale Grauwert histogramm der absoluten Häufigkeiten mit den Einträgen

$$c_{\mathbf{v}}(k, l) := \sum_{(i,j) \in G \times G} \delta(f(i, j) - k) \delta(f((i, j) + \mathbf{v}) - l). \quad (2.7)$$

Die Cooccurrence-Matrix  $C_{\mathbf{v}}$  von  $f$  ergibt sich daraus durch Normierung zu:

$$C_{\mathbf{v}} : G \times G \rightarrow [0, 1], \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{\sum_{(i,j) \in G \times G} c_{\mathbf{v}}(i, j)} (c_{\mathbf{v}}). \quad (2.8)$$

Basierend auf der Cooccurrence-Matrix wurden von Haralick *et al.* mehrere Texturmerkmale definiert [73, Kap. 5.1.1], [74], [116, Kap. 6.2.3], [151, Kap. 16.6.5], [200, Kap. 8]. Eines dieser Texturmerkmale ist die *Lokale Homogenität* beziehungsweise *Inverse Difference Moment (IDM)*:

$$\text{IDM}_{\mathbf{v}} : (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow G) \rightarrow (0, 1], \quad f \mapsto \sum_{(k,l) \in G \times G} \frac{C_{\mathbf{v}}(k, l)}{1 + (k - l)^2}. \quad (2.9)$$

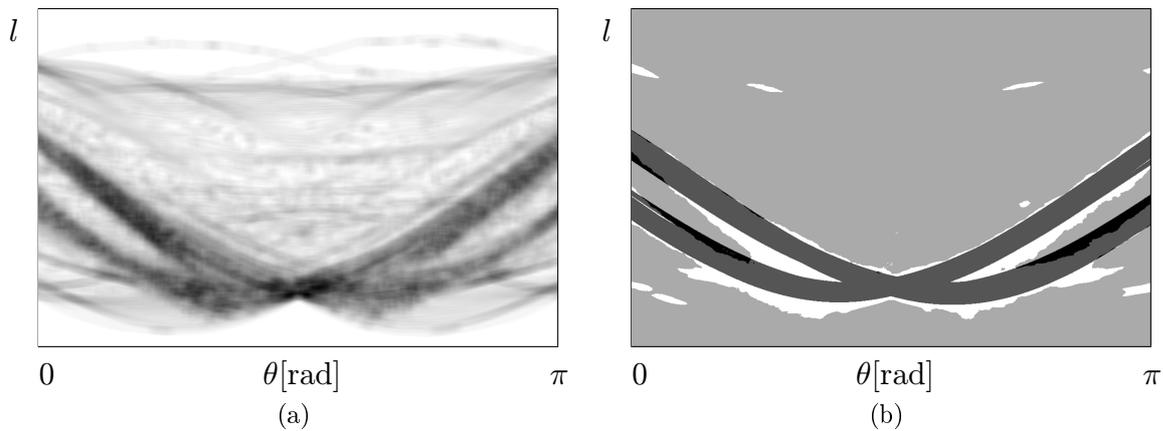
Hierbei gilt: Je dichter die Einträge von  $C_{\mathbf{v}}$  in der Nähe der Hauptdiagonalen liegen, desto homogener ist  $f$  und desto größer wird offensichtlich auch IDM. Ist  $f$  völlig homogen, so enthält  $C_{\mathbf{v}}$  nur einen einzigen Eintrag auf der Hauptdiagonalen und IDM nimmt den Wert Eins an. Der Aufwand zur Berechnung der Cooccurrence-Matrix eines Bildes der Größe  $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$  und  $|G|$  Graustufen beträgt  $O(mn + |G|^2)$ .

Das Texturmerkmal IDM wird im Folgenden zur Analyse der lokalen Textur im Sinogramm verwendet. Dazu wird das Texturmerkmal für jedes Pixel aus einer Pixelumgebung von  $21 \times 21$  Pixel bestimmt. Um den Rand des Sinogramms nicht gesondert betrachten zu müssen, wird das Sinogramm links und rechts gemäß der Symmetriebedingung (1.8) zyklisch fortgesetzt, wobei die Spalten jeweils an der  $\theta$ -Achse gespiegelt werden. Nach oben und unten wird das Sinogramm durch Nulleinträge ergänzt. Insgesamt werden so viele Spalten und Zeilen hinzugefügt, dass zu jedem Pixel des Sinogramms eine genügend große Umgebung zur Berechnung der Cooccurrence-Matrix vorhanden ist. Zur Berechnung eines weitgehend richtungsunabhängigen Texturmaßes werden vier Cooccurrence-Matrizen  $C_{\mathbf{v}}$ , mit  $\mathbf{v} = (1, 0)^t$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1)^t$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1)^t$  und  $\mathbf{v} = (-1, 1)^t$  bestimmt und daraus durch pixelweise Mittelung eine Matrix  $P$  errechnet (vgl. [116]). Im Weiteren wird anhand dieser Matrizen das Texturmerkmal IDM ermittelt.

Sinogramme haben im Allgemeinen ein sehr großes Intensitätsspektrum. Das führt einerseits zu hohem Speicher- und Rechenaufwand zur Berechnung von  $P$  und andererseits zu dünn besetzten Matrizen  $P$ , die keine sinnvollen statistischen Aussagen ermöglichen [151]. Deshalb geschieht die Berechnung der Texturmerkmale auf Basis eines auf 64 Graustufen quantisierten Sinogramms. In Abbildung 2.20(a) wird das aus dem Sinogramm in Abbildung 2.8 berechnete Texturbild gezeigt. Die Berechnung dauert 10 Minuten. Bei einem Schwellwert von 0,81 ergibt sich das in Abbildung 2.20(b) hell dargestellte Bild. Zur Vergleichbarkeit mit Abbildung 2.19(b) wurden die Referenz-Metallsinusoide überlagert. Zwischen der Quadtree-Segmentierung in Abbildung 2.19(b) und dem Texturbild in Abbildung 2.20(b) sind große Ähnlichkeiten zu erkennen, wobei das Texturbild weniger segmentierte Pixel in großer Entfernung zu den Referenz-Metallsinusoide aufweist und daher insgesamt ein besseres Ergebnis liefert.

### 2.4.3 Waveletanalyse

Innerhalb der Metallsinusoide sind aufgrund des Rauschens mit hoher Varianz hochfrequente Intensitätssprünge mit häufig großer Amplitude innerhalb der Spalten zu erwarten. Zur Detektion derartiger Bereiche eignen sich Waveletanalysen der einzelnen Spalten. Die Wavelettransformation wird im Folgenden als bekannt vorausgesetzt. Grundlegende Definitionen und Eigenschaften finden sich im Anhang A.2.



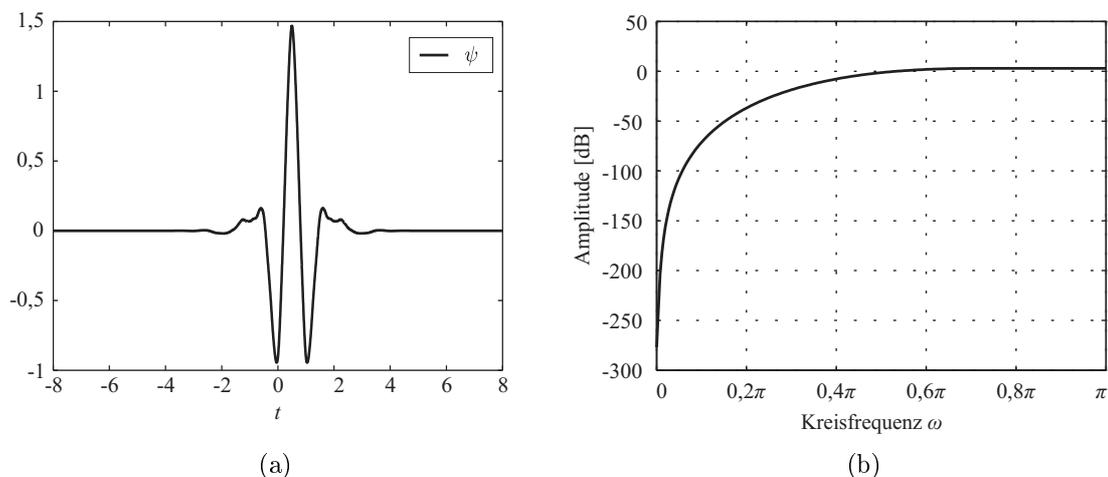
**Abbildung 2.20:** (a) Texturmerkmal IDM (invertierte Darstellung). (b) Schwellwertsegmentierung von (a), überlagert mit den Metallsinusoiden aus Abbildung 2.7.

### Wahl des Wavelets

Für ein Wavelet mit  $p$  verschwindenden Momenten verschwinden  $\hat{\psi}(\omega)$  und die ersten  $p - 1$  Ableitungen für  $\omega = 0$  [129, Kap. 7.2]. Daraus folgt, dass der Mittelwert von  $\psi$  verschwindet und die Amplituden von  $\hat{\psi}$  für niederfrequente  $\omega$  desto geringer sind, je größer  $p$  ist [145]. Je höher die Anzahl verschwindender Momente eines Wavelets  $\psi$  ist, desto stärker werden also bei der Waveletzerlegung die niedrigen Frequenzanteile unterdrückt. Damit die hochfrequenten Rauschbereiche sich deutlich von der Umgebung abheben, wird in dieser Arbeit ein Wavelet mit 6 verschwindenden Momenten gewählt.

Ein weiteres Auswahlkriterium ist die Symmetrie von  $\psi$ . Ist  $\psi$  symmetrisch bezüglich  $t = t_0$ , das heißt  $\psi(t - t_0)$  ist gerade beziehungsweise ungerade, weist es eine lineare Phase auf [147, Kap. 5.7.3]. Diese ist eine wichtige Eigenschaft, um die Segmentierung exakt durchführen zu können. Zur effizienten Berechnung der Wavelettransformation muss  $\psi$  einen kompakten Träger haben. Orthogonale Wavelets können nicht gleichzeitig symmetrisch sein und einen kompakten Träger besitzen, biorthogonale Wavelets hingegen können beide Eigenschaften erfüllen [36, Kap. 8]. Aus diesem Grund wird im Folgenden ein symmetrisches biorthogonales Spline-Wavelet mit 6 verschwindenden Momenten gewählt, dessen Konstruktion in [36, Kap. 8.3] beschrieben ist<sup>23</sup>. Dieses wird im Weiteren mit  $\psi$ , der dazu korrespondierende *Wavelet-Faltungskern* (vgl. Anh. A.2) mit  $g_\psi$  bezeichnet. In Abbildung 2.21 ist das Wavelet und die Übertragungsfunktion von  $g_\psi$  dargestellt. Daraus geht die Dämpfung tiefer Frequenzen deutlich hervor.

<sup>23</sup>Dieses Wavelet trägt in Matlab die Bezeichnung `bior6.8`.



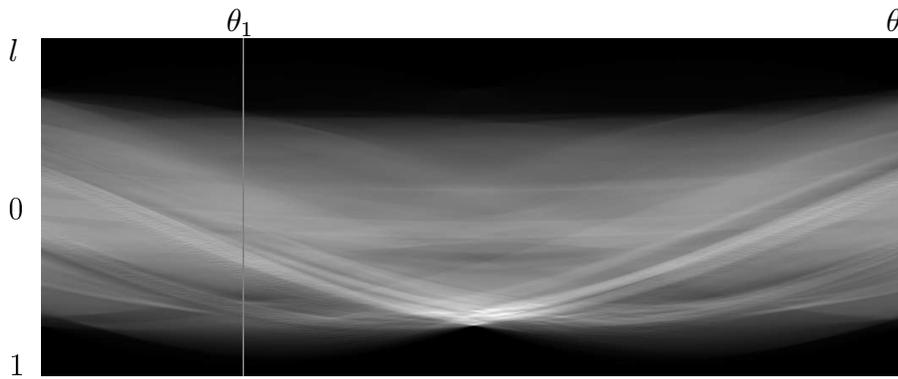
**Abbildung 2.21:** (a) Biorthogonales Spline-Wavelet  $\psi$ . (b) Übertragungsfunktion des Wavelet-Faltungskernes  $g_\psi$ .

### Faltung mit dem Wavelet-Faltungskern

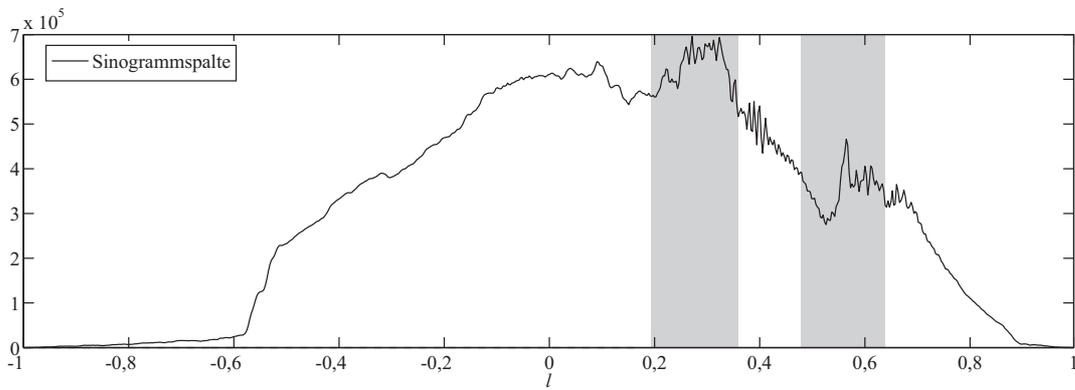
In Abschnitt 2.3 wurde gezeigt, dass die Pseudorohdaten ein besonders hochfrequentes Rauschen entlang der Spalten aufweisen. Deshalb resultiert aus jeweils entlang der Spalten durchgeführten Waveletzerlegungen das beste Segmentierungsergebnis. In Abbildung 2.22 wird exemplarisch aus den Pseudorohdaten der Abbildung 2.22(a) eine Spalte ausgewählt (Abb. 2.22(a) und 2.22(b)) und darauf eine kontinuierliche Waveletzerlegung durchgeführt. Diese wird in Abbildung 2.22(c) dargestellt, wobei helle Bildbereiche mit betragsmäßig hohen Intensitäten korrespondieren. Zur besseren Darstellung werden außerdem die Intensitätsprofile für die Skalen  $b = 1$ ,  $b = 3$ ,  $b = 5$ ,  $b = 7$  und  $b = 10$  in den Abbildungen 2.22(d) bis 2.22(h) exemplarisch gezeigt. Die in den Pseudorohdaten messbare Rauschfrequenz ist unter anderem von der Abtastung des Rekonstruktionsbildes abhängig. Aus den Intensitätsprofilen ist zu erkennen, dass für die gewählte Abtastung mit 720 Detektoren für ein Bild der Größe  $512 \times 512$  die Metallsinusoide unter  $b = 3$  besonders gut vom restlichen Sinogramm getrennt wird<sup>24</sup>. Da jedoch auch für  $b = 1$  eine sehr gute Trennung möglich ist, wird aus Effizienzgründen ausschließlich die feinste Skalierungsstufe verwendet. Die Berechnung der Detailkoeffizienten erfolgt über eine Faltung mit  $g_\psi[i]$ . Damit der Faltungskern keine Phase hat, werden die Koeffizienten so gewählt, dass  $g_\psi[i] = g_\psi[-i]$ . Die entsprechenden Koeffizienten sind in Tabelle 2.1 aufgelistet.

Der Aufwand zur Berechnung der Faltung ist linear in der Bildgröße. Für Sinogramme der Größe  $729 \times 1.024$  dauert die Faltung 0,1 Sekunden. Damit ist dieses Verfahren das schnellste der drei untersuchten Verfahren. Das Resultat der Faltung der Pseudorohdaten in Abbildung 2.8 wird in Abbildung 2.23 dargestellt. In der Nähe der

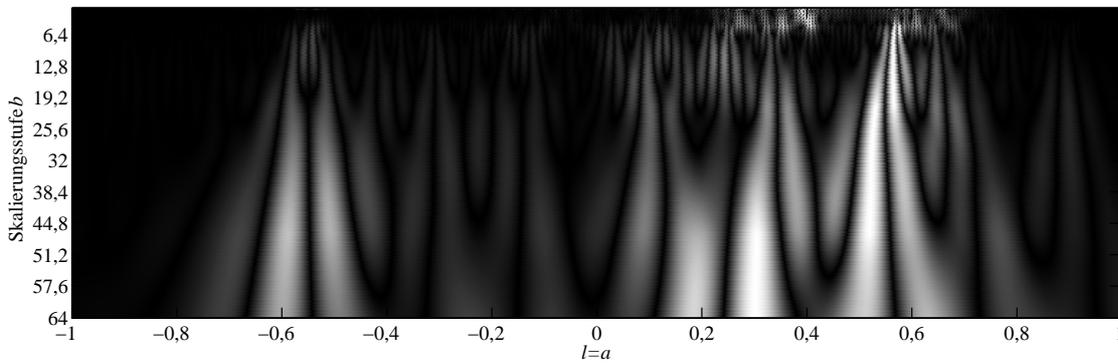
<sup>24</sup>Vergleiche dazu etwa die Intensitäten in den Abbildungen 2.22(d) und 2.22(e).



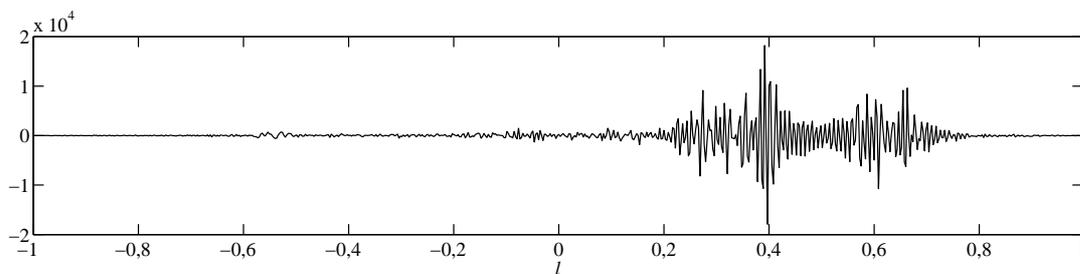
(a) Sinogramm mit hervorgehobener Sinogrammspalte  $\check{f}_r(\cdot, \theta_1)$



(b) Intensitätsprofil der ausgewählten Sinogrammspalte  $\check{f}_r(\cdot, \theta_1)$ . Grau hinterlegte Bereiche: Referenz-Metallsinusoid.

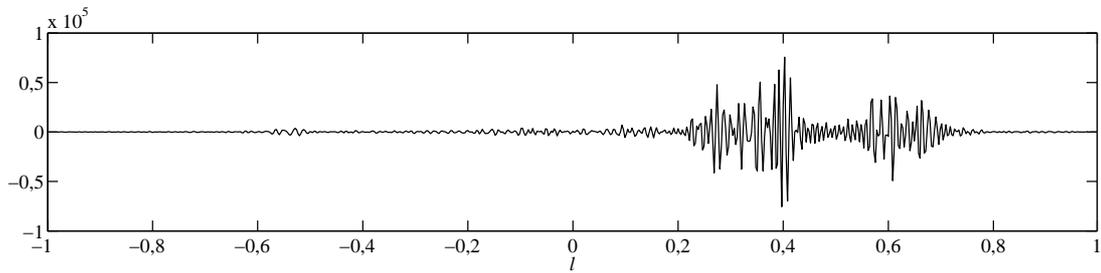
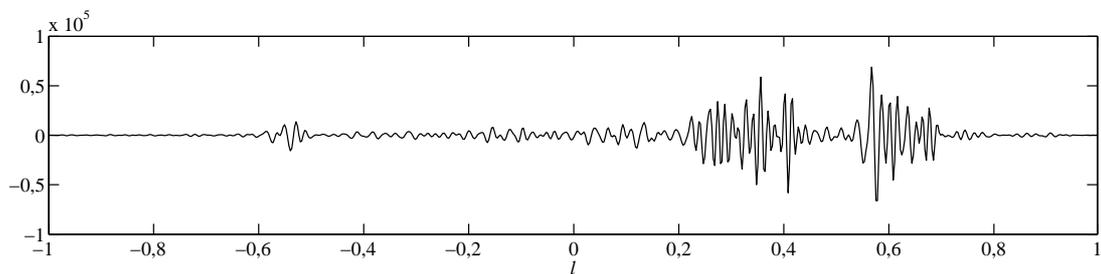
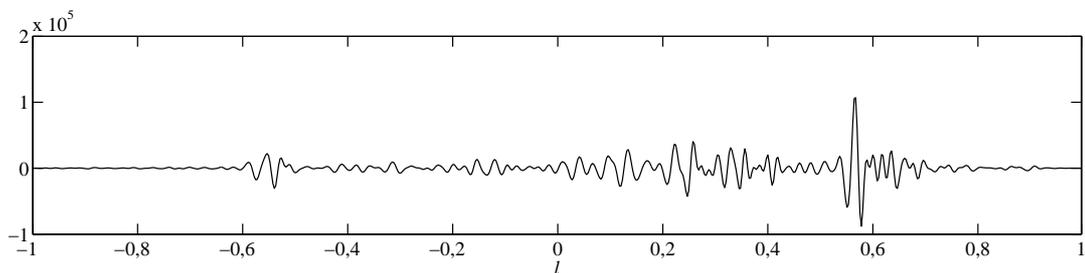
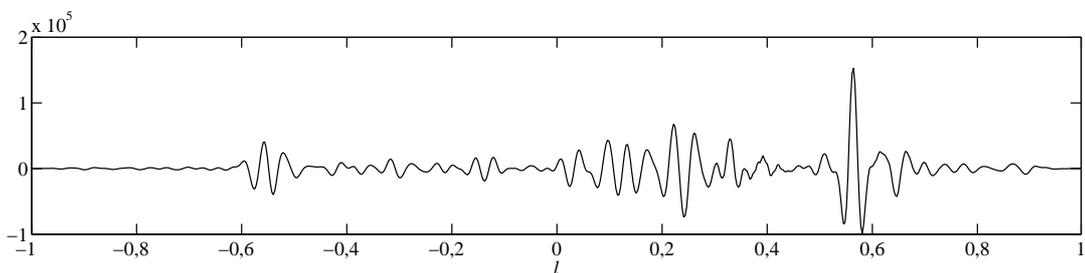


(c) Kontinuierliche Wavelettransformation  $\mathcal{W}_\psi \check{f}_r(\cdot, \theta_1)$  mit  $\psi = \text{bior6.8}$



(d) Intensitätsprofil aus (c):  $[\mathcal{W}_\psi \check{f}_r(\cdot, \theta_1)](\cdot, 1)$

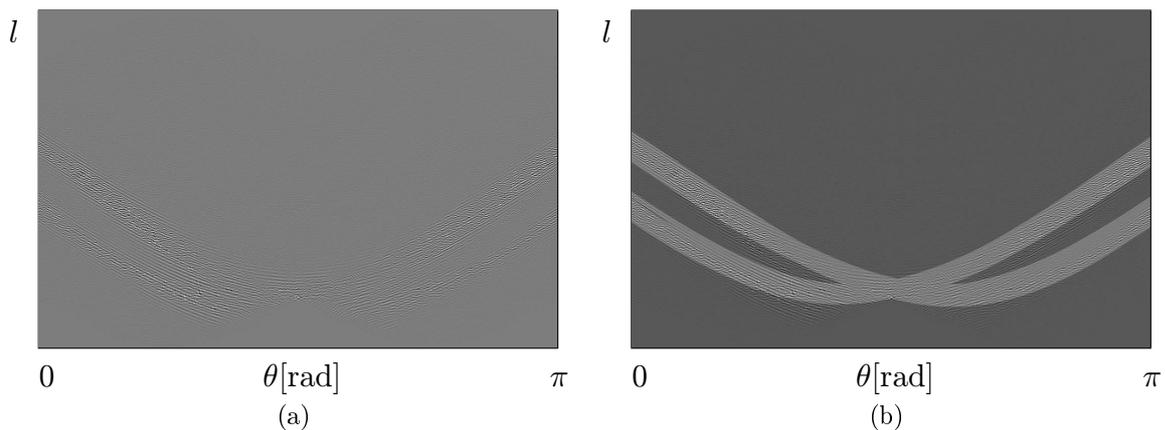
**Abbildung 2.22:** Waveletanalyse einer Sinogrammspalte (Fortsetzung auf nächster Seite).

(e) Intensitätsprofil aus (c):  $[\mathcal{W}_\psi \check{f}_r(\cdot, \theta_1)](\cdot, 3)$ (f) Intensitätsprofil aus (c):  $[\mathcal{W}_\psi \check{f}_r(\cdot, \theta_1)](\cdot, 5)$ (g) Intensitätsprofil aus (c):  $[\mathcal{W}_\psi \check{f}_r(\cdot, \theta_1)](\cdot, 7)$ (h) Intensitätsprofil aus (c):  $[\mathcal{W}_\psi \check{f}_r(\cdot, \theta_1)](\cdot, 10)$ **Abbildung 2.22:** (Fortsetzung) Waveletanalyse einer Sinogrammsspalte.

| $i$     | $g_\psi[i]$ |
|---------|-------------|
| 0       | 0,75891     |
| $\pm 1$ | -0,41785    |
| $\pm 2$ | -0,040368   |
| $\pm 3$ | 0,078722    |
| $\pm 4$ | 0,014468    |
| $\pm 5$ | -0,014426   |

**Tabelle 2.1:** Koeffizienten des Faltungskernes  $g_\psi$ .

Referenz-Metallsinusoiden ist die Menge der Pixel mit betragsmäßig hoher Intensität ähnlich wie die Segmentierungsergebnisse durch die beiden anderen Verfahren in diesem Bereich. Im Gegensatz zu der Quadtree-Zerlegung und der Texturanalyse liefert die Waveletanalyse nur im Bereich der Metallsinusoiden hohe Intensitäten und ist aus diesem Grund den anderen beiden Verfahren vorzuziehen. Im Folgenden wird ein Verfahren zur automatischen Segmentierung der Metallsinusoiden aus dem Bild der gefalteten Pseudorohdaten vorgestellt.



**Abbildung 2.23:** (a) Mit  $g_\psi$  gefaltete Pseudorohdaten (Schärfe künstlich erhöht). (b) Gefaltete Pseudorohdaten überlagert mit den Metallsinusoiden aus Abbildung 2.7.

### Segmentierung der Metallsinusoiden

Da das Vorzeichen der gefalteten Pseudorohdaten für die Segmentierung keine Rolle spielt, werden im Folgenden, anders als in Abbildung 2.23 dargestellt, die betragsmäßigen Intensitäten

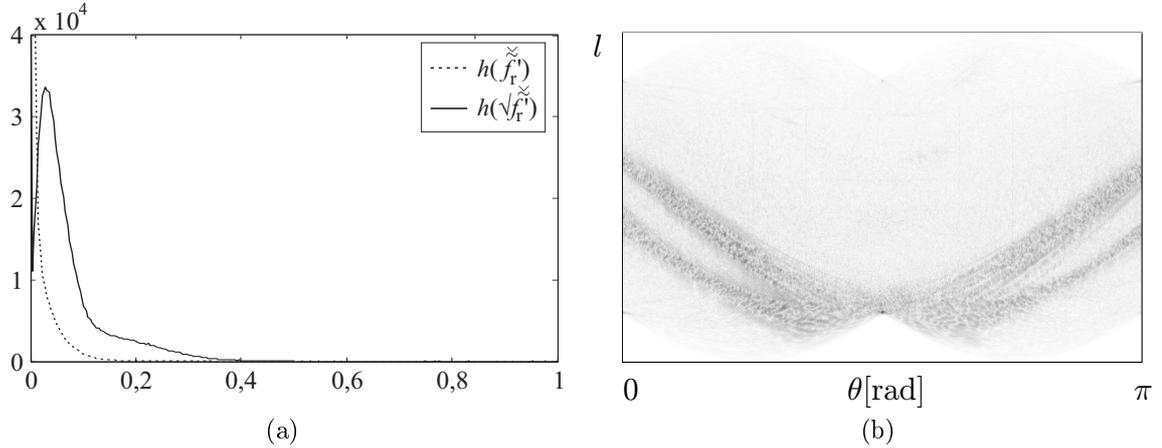
$$\tilde{f}'_r := |\tilde{f}_r *_l g_\psi|$$

betrachtet. Das Histogramm des auf diese Weise modifizierten Sinogramms ist in Abbildung 2.24(a) zu sehen. Die Grauwerte sind hierbei auf das Intervall  $[0, 1]$  ab-

gebildet. Dieses Histogramm ist unimodal und eignet sich deshalb für eine eventuelle Klassifizierung. Das Ziel im Folgenden ist es, durch geeignete Modifikation von  $\check{f}'_r$  ein Sinogramm zu erhalten, aus dem anhand seines Histogramms eine automatische Trennung der Metallsinusoide von dem restlichen Sinogramm möglich ist.

Sei  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann bezeichne im Folgenden  $g(\check{f}'_r)$  die pixelweise Auswertung des Sinogramms unter  $g$ . Sei weiter  $h$  das Histogramm einer Funktion.

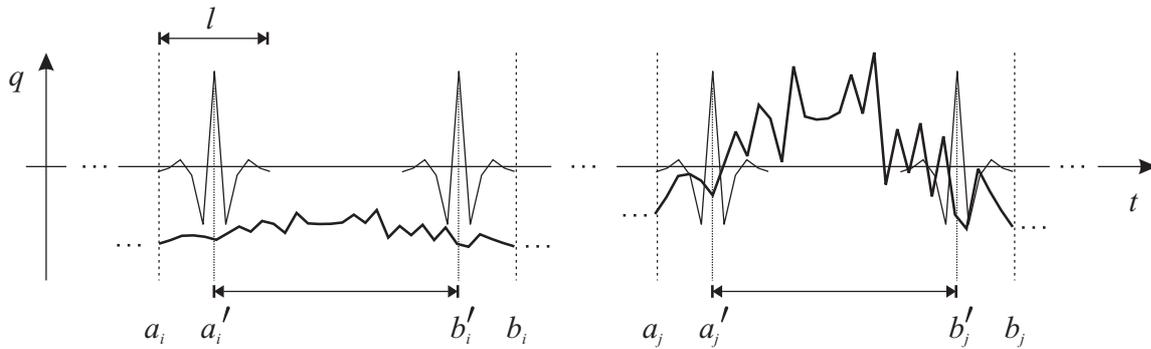
Das in Abbildung 2.24(b) dargestellte Sinogramm  $h(\sqrt{\check{f}'_r})$  hat bereits einen bimodalen Charakter (vgl. Abb. 2.24(a)). Die beiden Moden repräsentieren jedoch die Pixel mit der Intensität Null von Pixeln mit nichtverschwindender Intensität. Wie im Folgenden gezeigt wird, eignet sich zur Segmentierung das Histogramm  $h(\ln(\check{f}'_r))$ . Dies ergibt sich aus den Eigenschaften der Faltung und der Rauschvarianz in den Pseudorohdaten  $\check{f}_r$ .



**Abbildung 2.24:** (a) Grauwert-Histogramme  $h(\check{f}'_r)$  und  $h(\sqrt{\check{f}'_r})$  der absoluten Häufigkeiten nach Quantisierung auf 256 Graustufen im Intervall  $[0, 1]$ . Darstellung des Wertebereichs  $[0, 40.000]$ . Die Werte an der Stelle Null betragen  $h(\check{f}'_r)[0] = 364.590$  und  $h(\sqrt{\check{f}'_r})[0] = 72.050$ . (b) Sinogramm  $\sqrt{\check{f}'_r}$  (invertierte Darstellung).

Sei  $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Spalte des Sinogramms  $\check{f}_r$ , die mit  $g_\psi$  gefaltet wird. Um keine gesonderte Behandlung der Ränder durchführen zu müssen, wird das gefaltete Signal nur innerhalb des Teilintervalls  $[a', b'] := [a + 5, b - 5]$  betrachtet, in dem sich Effekte an den Rändern nicht auf das Ergebnis der Faltung auswirken. Die Faltung ist linear, folglich gilt  $(\alpha q) * g = \alpha(q * g)$ . Da  $\psi$  sechs verschwindende Momente hat und damit orthogonal zu Polynomen fünften Grades ist, verschwindet bei der Faltung mit  $g_\psi$  der Mittelwert. Des Weiteren werden niedrigfrequente Signalanteile stark gedämpft (vgl. Abb. 2.21(b)). Dies wird in Abbildung 2.25 an einem Beispiel verdeutlicht. Die Abbildung stellt ein Signal  $q$  dar, das sich in zwei Teilintervallen  $[a_i, b_i]$  und  $[a_j, b_j]$  durch einen konstanten Versatz und eine Skalierung unterscheidet.

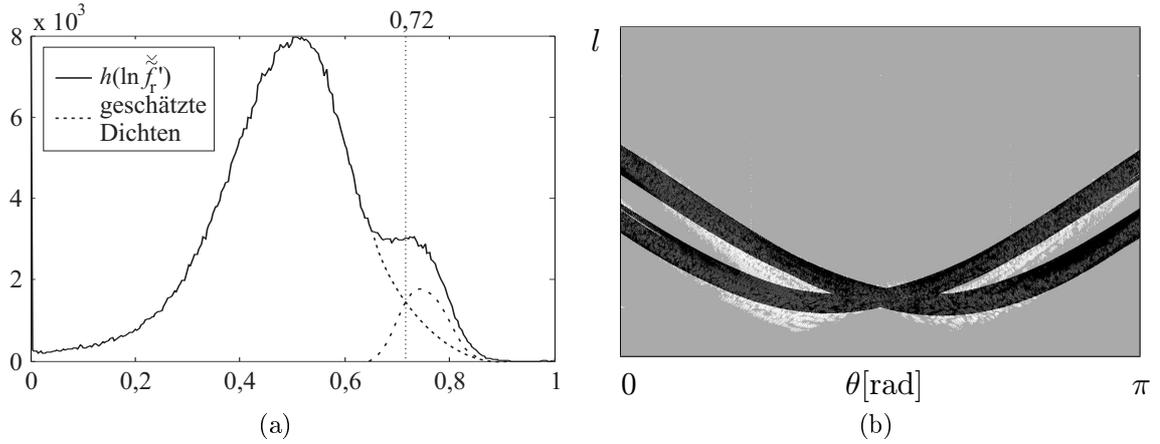
Nach Faltung unterscheiden sich dann die Intensitäten in  $[a'_i, b'_i]$  von den Intensitäten in  $[a'_j, b'_j]$  nur durch den Skalierungsfaktor.



**Abbildung 2.25:** Faltung einer Funktion  $q$  mit  $g_\psi$ . An vier Positionen ist ein typischer Faltungskern dünn eingezeichnet.

Aus der in Abbildung 2.21(b) dargestellten Übertragungsfunktion von  $g_\psi$  ist zu entnehmen, dass hohe Frequenzen bei der Faltung nahezu unverändert bleiben. Die Amplitude des gefilterten Signals hängt für lokale Signalabschnitte hoher Frequenz also nur von der Amplitude des Signals ab. Das bedeutet aber, dass die Varianz des hochfrequenten Rauschens die Intensität des gefalteten Signals maßgeblich beeinflusst. Da diese exponentiell mit der Intensität des unverrauschten Sinogramms  $\tilde{f}$  wächst, ergibt sich somit eine exponentielle Intensitätszunahme in den gefalteten Pseudorohdaten von den Bereichen außerhalb der Metallsinusoide hin zu den Bereichen innerhalb der Metallsinusoide. Das führt im Histogramm zu einer Streckung der Dichte, die mit den Pixeln innerhalb der Metallsinusoide korrespondiert. So liegt beispielsweise der manuell ermittelte Schwellwert zur Trennung der Metallsinusoide vom restlichen Sinogramm im Histogramm  $h(\tilde{f}_r)$  bei 0,03.

Das Histogramm  $h(\ln(\tilde{f}'_r + 1))$  wird in Abbildung 2.26(a) dargestellt. Dieses weist aber auch nur die beiden Moden, nämlich 0 und das restliche Histogramm, auf. Zwischen 0,5 und 1 ist jedoch ein Plateau zu erkennen, das sich, wie skizziert, aus einer Überlagerung von zwei Dichten ergeben kann. Eine Schwellwertsegmentierung mit  $T = 0,72$ , das heißt an dem Schnittpunkt der beiden skizzierten Dichten, führt zu dem in Abbildung 2.26(b) dargestellten Segmentierungsergebnis. Dieses deckt sich weitgehend mit der Menge betragsmäßig hoher Intensitäten in Abbildung 2.23. Dies ist ein Indiz für die Existenz eines dritten Modus.



**Abbildung 2.26:** (a) Grauwert histogramm  $h(\ln(\check{f}_r' + 1))$ . Es wird nur der Wertebereich  $[0, 8.000]$  dargestellt. An der Stelle Null beträgt der Wert des Histogramms  $69.612$ . Die manuell geschätzten Dichten für die nichtverschwindenden Werte im Sinogramm außerhalb der Sinusoide und die Werte innerhalb der Sinusoide sind gestrichelt dargestellt. (b) Segmentierung des Sinogramms  $\ln(\check{f}_r' + 1)$  bei  $T = 0,72$ .

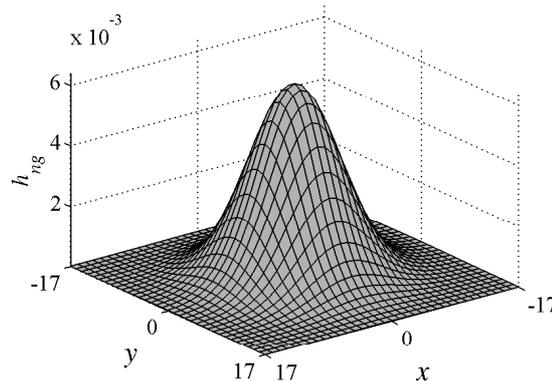
Um die Segmentierung robust anhand des Histogramms durchführen zu können, ist es sinnvoll, die gefalteten Pseudorohdaten  $\check{f}_r'$  vor der Logarithmierung zu glätten um die Varianz der Intensitäten von Pixeln aus den einzelnen Moden und damit den Überlappungsbereich der Moden zu reduzieren. In diesem Fall wird aus den Werten des geglätteten Sinogramms kein Rekonstruktionsbild erzeugt. Vielmehr stehen hier die geometrischen Eigenschaften des Zusammenhanges der Sinusoide in  $l$ - und  $\theta$ -Richtung (s. Kap. 1.6) im Vordergrund. Deshalb wird trotz der in Kapitel 2.1.1 angestellten Überlegung zur Verwendung zweidimensionaler Faltungskerns zur Glättung in Sinogrammen ein zweidimensionaler Faltungskern verwendet. Es hat sich gezeigt, dass sich der normierte zweidimensionale rotationssymmetrische Gauß-Faltungskern  $h_{\text{ng}}^n$  der Größe  $n \times n$  und der Standardabweichung  $\sigma$  sehr gut für diese Anwendung eignet<sup>25</sup>. Seine Koeffizienten ergeben sich wie folgt:

$$h_{\text{ng}}^n(i, j) = \frac{h_{\text{g}}(i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor)}{\sum_{0 \leq i, j \leq n} h_{\text{g}}(i, j)}, \quad h_{\text{g}}(i, j) = e^{-\frac{i^2 + j^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.10)$$

Für die Standardabweichung wurde experimentell ein Wert von fünf Pixeln ermittelt und die Größe des Faltungskerns mit  $35 \times 35$  Pixeln so gewählt, dass 99,9% der Gesamtintensität der zweidimensionalen Gaußdichte im Faltungskern enthalten ist. Die maximale Intensität am Rand des Faltungskerns beträgt nach der Normierung  $1,97 \cdot 10^{-5}$  und damit ungefähr 0,3% des globalen Maximums. Der normierte

<sup>25</sup>Der Faltungskern wurde für Sinogramme der in dieser Arbeit hauptsächlich verwendeten Größe von  $1.024 \times 768$  Pixel getestet. Für Sinogramme abweichender Ausmaße muss gegebenenfalls eine Anpassung der Filtergröße und -geometrie durchgeführt werden.

Faltungskern wird in Abbildung 2.27 dargestellt. Damit die Faltung am Rand des Sinogramms ohne Ausnahmebehandlung erfolgen kann, wird das Sinogramm vor der Faltung, wie bei der Bestimmung des Texturmaßes IDM (s. Kap. 2.4.2), nach oben und unten durch Nulleinträge, nach links und rechts durch zyklische Fortsetzung mit den an der  $\theta$ -Achse gespiegelten Spalten ergänzt.



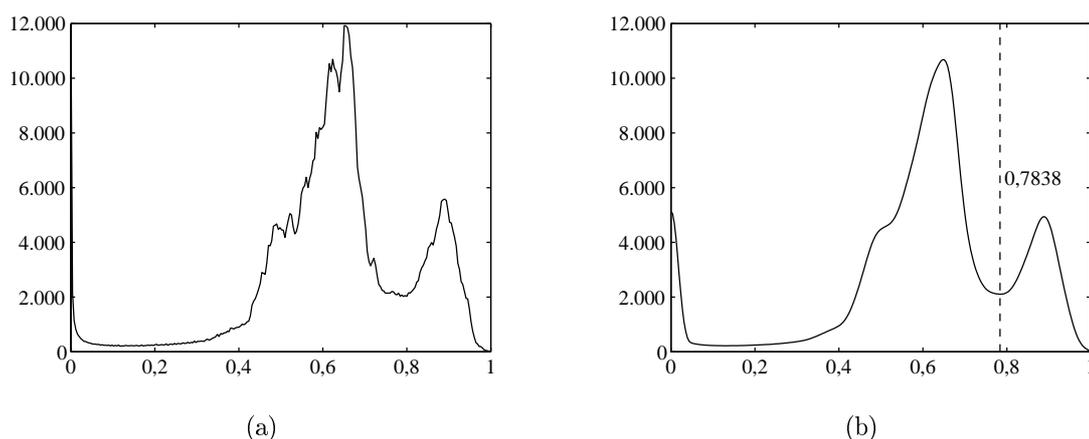
**Abbildung 2.27:** Gauß-Faltungskern. Fenstergröße:  $35 \times 35$  Pixel, Standardabweichung: 5 Pixel.

In Abbildung 2.28(a) wird das Histogramm des geglätteten und logarithmierten Sinogramms  $\tilde{f}'_r$  dargestellt. In diesem Histogramm sind die drei Moden sehr gut unterscheidbar. Es gibt zahlreiche Möglichkeiten zur Bestimmung eines Schwellwerts anhand des Histogramms [41, 62, 176, 189]. In dieser Arbeit wird der Schwellwert nach dem „MINIMUM“-Verfahren von Prewitt und Mendelsohn bestimmt [62]. Dabei wird der minimale Wert zwischen den beiden Maxima des zweiten und dritten Modus gewählt. Es wird hierbei davon ausgegangen, dass die Anzahl der Pixel innerhalb der Metallsinusoide geringer ist als die Anzahl der restlichen Pixel und deshalb das Maximum im Histogramm von der Grauwertverteilung der Sinogrammintensitäten außerhalb der Metallsinusoide eingenommen wird. Zur Bestimmung des gesuchten Minimums wird das Histogramm von rechts nach links durchlaufen und das am weitesten rechts gelegene Maximum bestimmt. Entspricht dieses dem globalen Maximum, ist die Anzahl der Pixel innerhalb der Metallsinusoide zu gering, um einen Schwellwert anhand des Sinogramms zu bestimmen. In diesem Fall wird eine Warnmeldung ausgegeben und der Schwellwert konstant bei dem empirisch ermittelten Wert  $T = 0,85$  gewählt<sup>26</sup>. Als Beispiel ist in Abbildung 2.29(a) ein nahezu artefaktfreier Datensatz dargestellt. Das erste Maximum  $T = 0,53$  im geglätteten Histogramm (s. Abb. 2.29(b)) entspricht dem globalen Maximum. Bei diesem Schwellwert wird der größte Teil des Sinogramms segmentiert (s. Abb. 2.29(c)). Eine Artefaktreduktion mit dem im Kapitel 2.5 vorgestellten neuen Verfahren *RF*-

<sup>26</sup>Bei allen untersuchten CT-Daten, in denen dieser Fall auftrat, führte die Modifikation der Pseudorohdaten innerhalb der bei  $T = 0,85$  segmentierten Menge mit dem weiter unten beschriebenen Verfahren zu einer Reduktion der Metallartefakte.

*MAR* liefert ein sehr unscharfes Bild (s. Abb. 2.29(e)). Die Wahl des Schwellwertes  $T = 0,85$  führt zur Segmentierung der in Abbildung 2.29(d) Menge. In diesem Fall liefert RFMAR ein Bild, das sich nur unwesentlich vom originalen Bild unterscheidet (s. Abb. 2.29(f)).

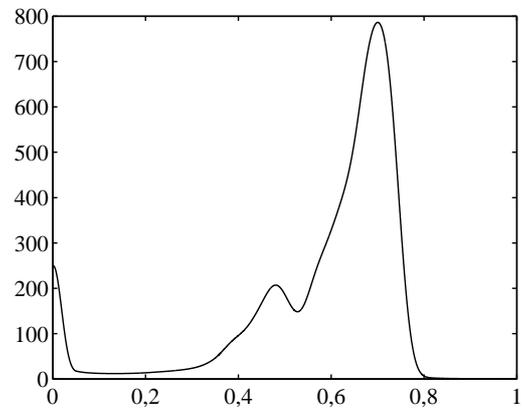
Liegt das Maximum rechts von dem globalen Maximum, wird der Schwellwert an der Stelle des Minimums zwischen diesem und dem globalen Maximum gewählt. Eine Glättung des Histogramms mit einem Blackmanfenster (s. Kap. 2.5, [147]) entfernt die hochfrequenten Anteile des Histogrammverlaufs und vereinfacht dadurch die Bestimmung der Extrema. Die Länge des verwendeten Blackmanfenster beträgt hierbei 10% der im Histogramm betrachteten Grauwerte. In Abbildung 2.28(b) wird das geglättete Histogramm mit dem daraus automatisch bestimmten Schwellwert  $T = 0,7838$  dargestellt. Eine Schwellwertsegmentierung des geglätteten und logarithmierten Sinogramms  $\tilde{f}'_r$  mit diesem Wert führt zu dem in Abbildung 2.30 dargestellten Ergebnis.



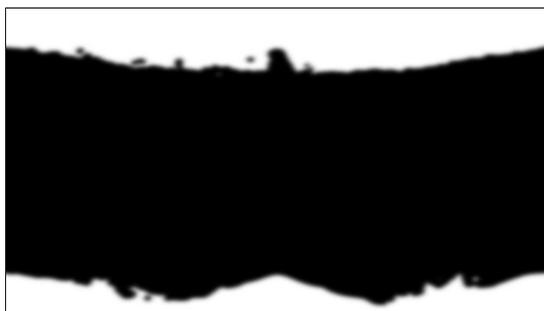
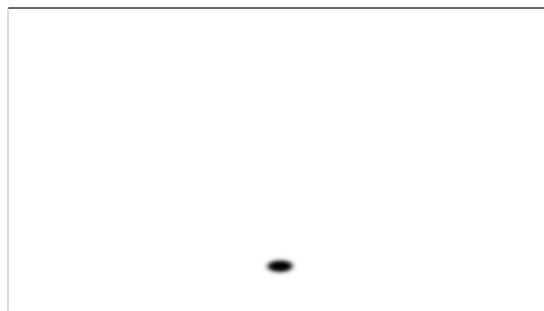
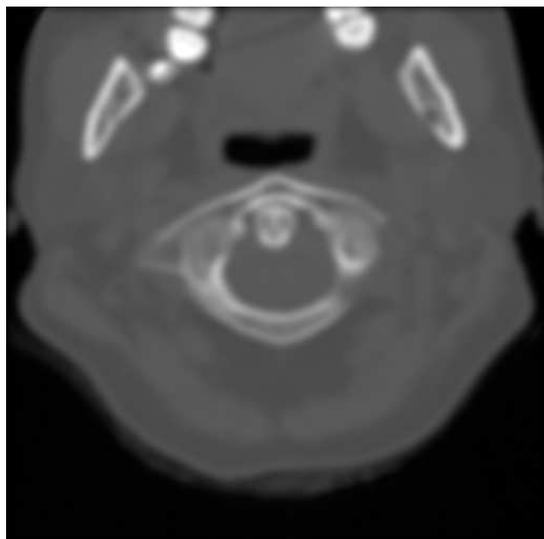
**Abbildung 2.28:** (a) Histogramm nach Glättung und Logarithmierung des Sinogramms  $\tilde{f}'_r$ . (b) Geglättetes Histogramm. Zwischen dem zweiten und dritten Maximum wurde automatisch ein Schwellwert von 0,7838 bestimmt.

Die Intensitäten der gefalteten Pseudorohdaten  $\tilde{f}'_r$  werden als `double`-Werte gespeichert und müssen daher vor Erstellung des Histogramms quantisiert werden. In der Abbildung 2.31 werden die errechneten Schwellwerte in Abhängigkeit von der Anzahl der Quantisierungsstufen aufgetragen. Betrachtet werden hierbei die Ergebnisse für 300 bis 10.000 Quantisierungsstufen. Die ermittelten Schwellwerte streuen um einen festen Wert. Mit zunehmender Anzahl von Quantisierungsstufen nimmt die Streuung ab. In dieser Arbeit werden 5.000 Quantisierungsstufen zur Erstellung des Histogramms verwendet.

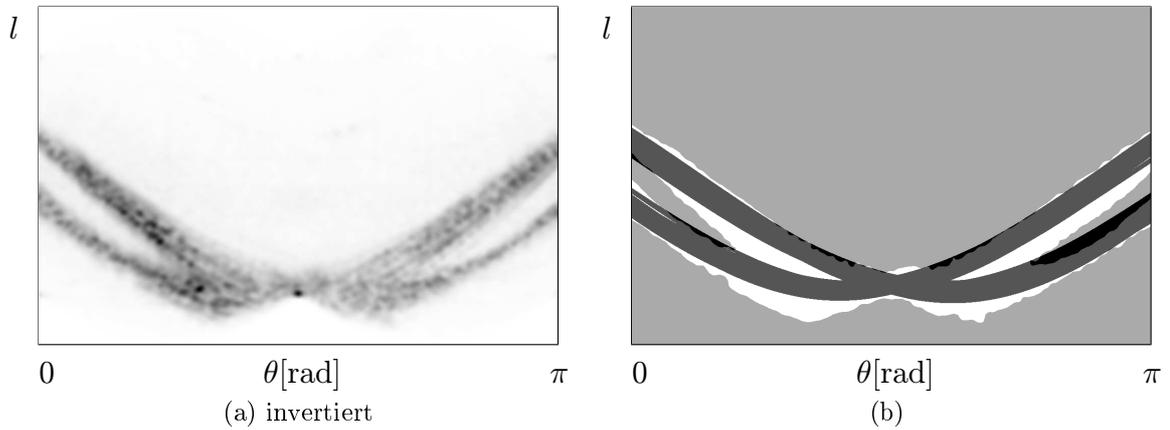
In Abbildung 2.32 werden einerseits die Referenz-Metallsinusoide zu dem artefakt-behafteten CT-Bild aus Abbildung 1.11(a) sowie andererseits die anhand der be-

(a)  $Z = 476, B = 3000$ 

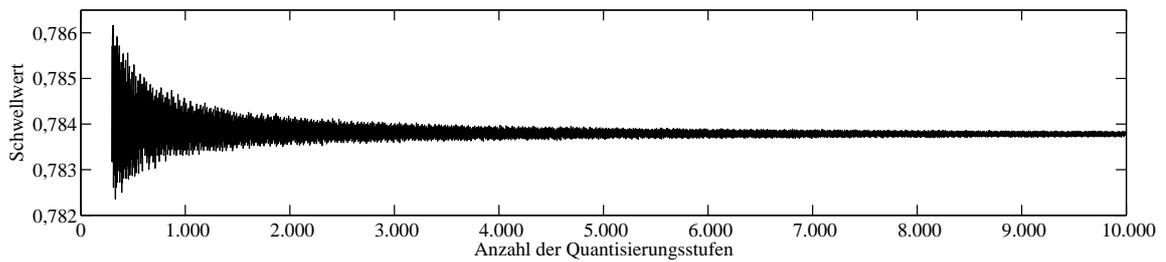
(b)

(c)  $T = 0,53$ (d)  $T = 0,85$ (e)  $Z = 476, B = 3000$ (f)  $Z = 476, B = 3000$ 

**Abbildung 2.29:** (a) Original. (b) Geglättetes Histogramm. (c) Schwellwertsegmentierung bei  $T = 0,53$ . (d) Schwellwertsegmentierung bei  $T = 0,85$ . (e) Artefakt-reduziertes Bild mit  $T = 0,53$ . (f) Artefaktreduziertes Bild mit  $T = 0,85$ .

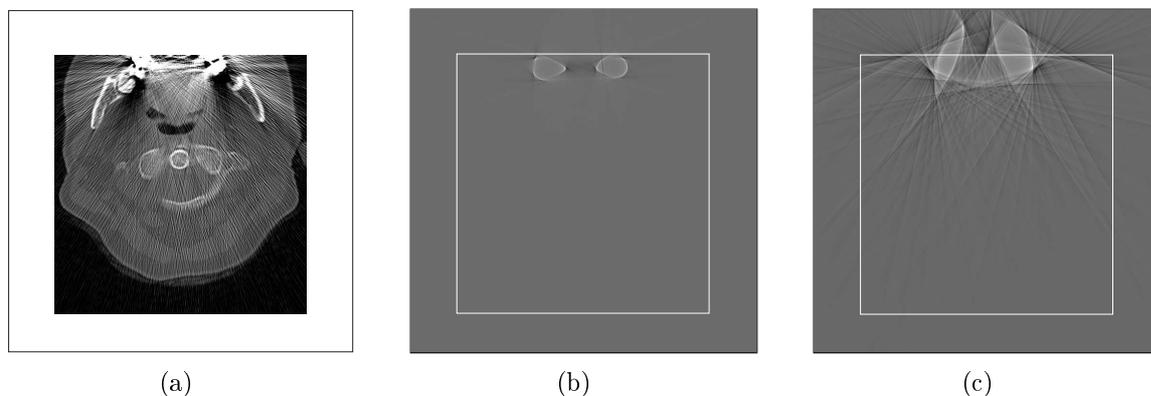


**Abbildung 2.30:** (a) Sinogramm  $\tilde{f}_r^l$ , geglättet mit Gaußfaltungskern. (b) Automatisch segmentierte Metallsinusoid überlagert mit Referenz-Metallsinusoiden.



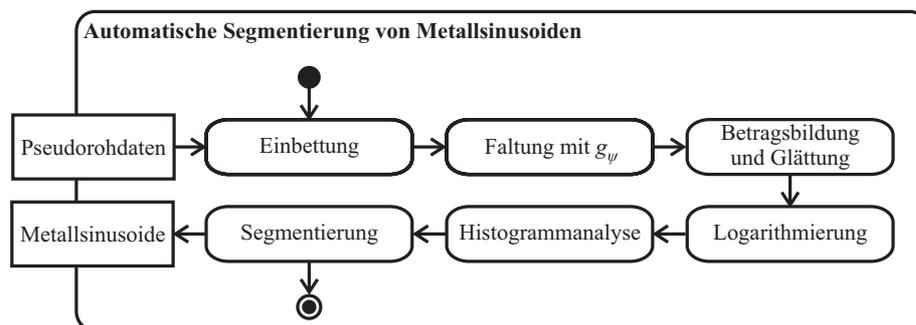
**Abbildung 2.31:** Errechnete Schwellwerte in Abhängigkeit zur Anzahl der Quantisierungsstufen.

schriebenen Waveletanalyse segmentierten Metallsinusoide rekonstruiert. Dabei wird ein größerer Bildausschnitt rekonstruiert als das ursprüngliche CT-Bild, wie in Abbildung 2.32(a) dargestellt. Während die rekonstruierten Referenz-Metallsinusoide erwartungsgemäß innerhalb des ursprünglichen CT-Bildes liegen (s. Abb. 2.32(b)), erstrecken sich die rekonstruierten segmentierten Metallsinusoide deutlich auf Bereiche außerhalb des ursprünglichen CT-Bildes (s. Abb. 2.32(c)), die offensichtlich artefaktverursachende Metalle außerhalb der ROI enthalten.



**Abbildung 2.32:** Rekonstruktion der Referenz-Metallsinusoide (b) sowie der mit der Waveletanalyse segmentierten Metallsinusoide (c) in dem in (a) dargestellten Ausschnitt. Der weiße Rahmen in (b) und (c) entspricht der Position des ursprünglichen CT-Bildes.

Die einzelnen Schritte des beschriebenen Verfahrens zur automatischen Segmentierung der Metallsinusoide werden in dem Aktivitätsdiagramm in Abbildung 2.33 zusammengefasst dargestellt. Der Gesamtaufwand steigt linear mit der Bildgröße. Für Sinogramme der Größe  $729 \times 1.024$  ergibt sich eine Laufzeit von insgesamt 0,2 Sekunden. Die Intensität von Defektpixeln in den Pseudorohdaten aufgrund von Rauscharakterfakten ist unter anderem von der Strecke, die die korrespondierenden Artefaktstrahlen im Rekonstruktionsbild zurücklegen. Eine Normierung der Pseudorohdaten bezüglich der Längen der zugehörigen Geradenabschnitte im Rekonstruktionsbild könnte somit zu noch exakteren Segmentierungsergebnissen führen. Für den Einsatz bei dem im Folgenden beschriebenen neuen Verfahren zur Metallartefaktreduktion resultieren indes bereits mit dem beschriebenen Vorgehen sehr gute Ergebnisse, so dass eine derartige Normierung im Rahmen dieser Arbeit nicht näher untersucht wird.



**Abbildung 2.33:** Aktivitätsdiagramm für das beschriebene Verfahren zur automatischen Segmentierung von Metallsinusoiden.

## 2.5 Neues Verfahren zur Metallartefaktreduktion (RFMAR)

Herkömmliche Verfahren zur Reduktion von Metallartefakten setzen voraus, dass die Rohdaten verfügbar sind, oder zumindest alle artefaktverursachenden Metalle vollständig im Rekonstruktionsbild enthalten sind. In der Praxis ist jedoch häufig keine der beiden Annahmen erfüllt und deshalb eine Artefaktreduktion mit bisherigen Verfahren nicht möglich. Eine Anwendung dieser Verfahren auf Pseudorohdaten anstelle der ursprünglichen Rohdaten scheitert häufig an der Segmentierung der Metallsinusoiden beziehungsweise an der Schätzung des Rauschens. Eine Schätzung des Rauschens beispielsweise anhand der Pixelintensitäten wie bei der adaptiven Filterung führt häufig zu völlig falschen Ergebnissen, wie im Kapitel 2.3 in der Abbildung 2.9 eindrücklich gezeigt wird.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein neues Verfahren entwickelt, das

- automatisch abläuft,
- die ursprünglichen Rohdaten nicht benötigt,
- robust gegenüber Clipping im Rekonstruktionsbild sowie
- robust gegenüber im Rekonstruktionsbild unvollständig abgebildeter Metalle ist.

Durch dieses Verfahren ist es in vielen Anwendungsfällen aus der Praxis überhaupt erst möglich, eine Reduktion von Metallartefakten durchzuführen. Die zweite der aufgeführten Eigenschaften gibt dem Verfahren seinen Namen *Rohdatenfreies Metallartefaktreduktionsverfahren (RFMAR)*. Aufgrund der im Allgemeinen sehr hohen Laufzeit iterativer Verfahren (vgl. Kap. 2.1.2) wird RFMAR aus Effizienzgründen als direktes Verfahren realisiert.

RFMAR wurde speziell zur Reduktion von Rauschartefakten entwickelt. Während viele Metallartefakte CT-Bilder hauptsächlich in einem lokalen Bereich um die Metalle stören, ergeben sich durch Rauschartefakte im Allgemeinen globale Störungen des gesamten Bildes. Selbst Bildbereiche, die weit von den Metallen entfernt liegen, sind dadurch zum Teil so stark gestört, dass eine Weiterverarbeitung schwer oder gar nicht möglich ist. Eine Reduktion der Rauschartefakte führt deshalb im Allgemeinen zu einer Verbesserung des gesamten Bildes.

Bei der Rekonstruktion von CT-Bildern mit der gefilterten Rückprojektion ist die Wahl des Rekonstruktionsfilters entscheidend für die Qualität des Rekonstruktionsbildes. Je stärker hohe Frequenzen gefiltert werden, desto geringer wirken sich Rauschartefakte auf das Bild aus. Gleichzeitig sinkt jedoch auch die Bildschärfe (vgl. Kap. 1.4). Durch gezielte lokale Filterung lassen sich hingegen Rekonstruktionsbilder mit nahezu unveränderter Bildschärfe erzeugen, in denen ein Großteil der Rauschartefakte entfernt ist. Dieser Ansatz wird bei RFMAR verfolgt. Hierzu wird ein stark tiefpassgefilterter Pseudorohdatensatz erzeugt und pixelweise konvex mit den unveränderten Pseudorohdaten kombiniert. Die Gewichte der Konvexkombination bestimmen sich hierbei anhand der automatisch segmentierten Metallsinusoide. Im Folgenden wird zunächst das verwendete Tiefpassfilter und darauf die Realisierung der Konvexkombinationen beschrieben.

### 2.5.1 Tiefpassfilterung

In Kapitel 2.4.3 wurde exemplarisch gezeigt, dass das Rauschen im Defektsinogramm entlang der Spalten besonders dominant in den hohen Frequenzen ist. Zur effektiven Unterdrückung dieses Rauschens wird ein Filter benötigt, das hohe Frequenzen besonders stark dämpft. Das *Blackmanfenster* ist ein in der Signalverarbeitung bekanntes FIR-Filter<sup>27</sup>, das sich besonders gut zur Dämpfung hoher Frequenzen eignet [106]. Der diskrete Blackmanfaltungskern der Länge  $n$  ergibt sich nach [106, Kap. 5.3.3], [147, Kap. 7.2], [151, Kap. 9.4.3] zu

$$h_{\text{bm}}^n[i] := \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos\left(2\pi\frac{i}{n-1}\right) + 0,08 \cos\left(4\pi\frac{i}{n-1}\right), & 0 \leq i < n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Wie im Folgenden gezeigt wird, ist es wichtig, dass der Faltungskern eine ungerade Länge hat und normiert ist. Weist der Faltungskern eine nichtverschwindende Phase auf, findet eine Verschiebung in den Sinogrammspalten statt, die zur Verletzung der Symmetriebedingung (1.8) führt. Daraus resultieren Artefakte im Rekonstruktionsbild. Ist der Faltungskern  $h$  symmetrisch mit  $h[n] = h[-n]$ , weist er keine Phase auf (vgl. [122, Kap. 4.1], [147, Kap. 5.7.3]). Dazu muss offensichtlich die Länge des Faltungskernes ungerade sein. Eine Änderung der mittleren Intensitäten der gefilterten

<sup>27</sup> *Finite impulse response (FIR)*-Filter haben einen korrespondierenden Faltungskern endlicher Länge.

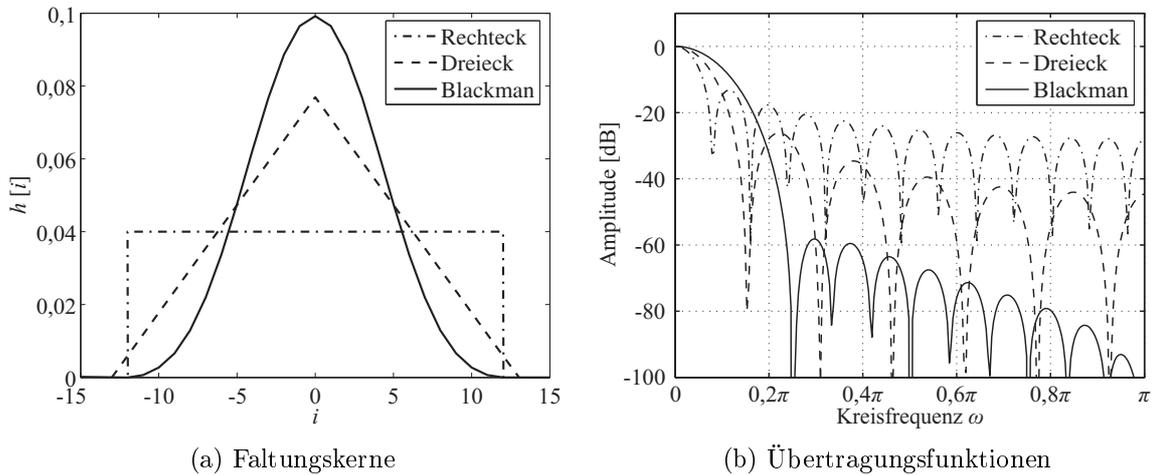
gegenüber den ursprünglichen Pseudorohdaten führt, da die gefilterte Rückprojektion linear ist, zu einer Veränderung der mittleren Hounsfield-Einheiten im gleichen Verhältnis. Da für die medizinische Diagnostik die absoluten Hounsfield-Einheiten eine wichtige Rolle spielen, muss für eine Invarianz der Mittelwerte gesorgt werden. Dies wird mit einem normierten Faltungskern  $h$  mit  $\sum h[i] = 1$  erreicht, denn dann gilt für die Faltung mit einem Signal  $s$

$$N \cdot \bar{s} = \sum s[i] = \sum s[i]e^0 = \hat{s}[0] = \hat{s}[0]\hat{h}[0] = N \cdot \overline{s * h}.$$

Das in dieser Art erzeugte symmetrische und normierte Blackmanfenster wird im Weiteren als  $h_{\text{bmn}}^n$  bezeichnet. Seine Koeffizienten ergeben wie folgt:

$$h_{\text{bmn}}^n[i] := \frac{h_{\text{bm}}^n[i + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]}{\sum_j h_{\text{bm}}^n[j]}.$$

In Abbildung 2.34 wird exemplarisch der normierte Faltungskern  $h_{\text{bmn}}^{25}$  sowie das Amplitudenspektrum seiner Übertragungsfunktion dargestellt. Zum Vergleich werden Das Rechteckfenster  $\Pi^{25}$  und das Dreieckfenster  $\Lambda^{25}$ , zwei häufig verwendete Fenster, die zum Beispiel auch zur adaptiven Filterung in [100, 213] eingesetzt werden (vgl. Kap. 2.1.1), zusammen mit ihrem Amplitudenspektren dargestellt. Im Vergleich zu diesen beiden Fenstern zeigt das Blackmanfenster die beste Dämpfung für hohe Frequenzen.



**Abbildung 2.34:** (a) Faltungskerne  $\Pi^{25}$ ,  $\Lambda^{25}$ ,  $h_{\text{bmn}}^{25}$ . (b) Korrespondierende Amplitudenspektren (logarithmiert).

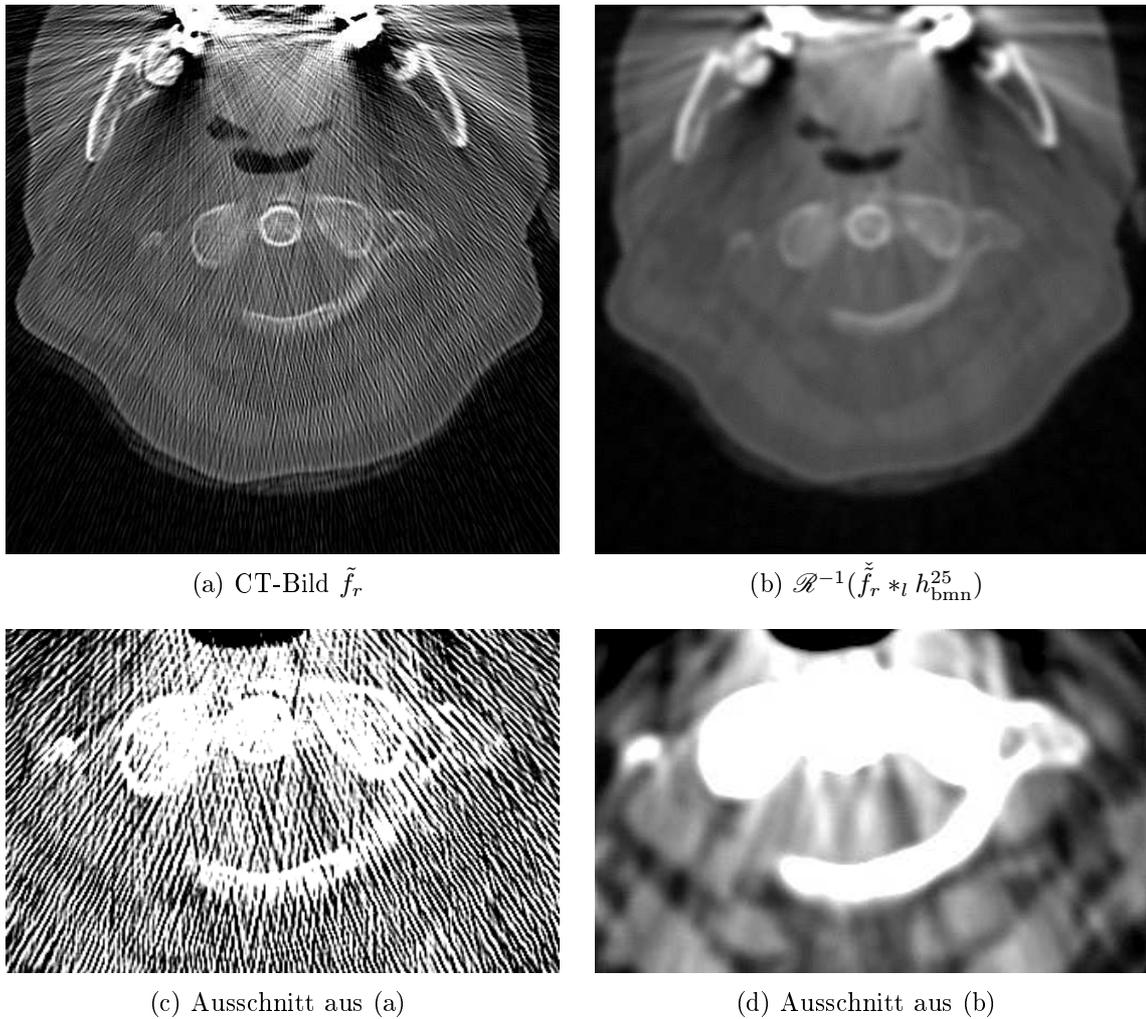
Wie später gezeigt wird, setzt sich der modifizierte Pseudorohdatensatz im Wesentlichen innerhalb der Metallsinusoide aus den geglätteten und außerhalb aus den unveränderten Pseudorohdaten zusammen. Eine starke Glättung der Pseudorohdaten kann

dort im Vergleich zu den unveränderten Pseudorohdaten zu einer signifikanten Änderung der mittleren Intensitäten innerhalb der Metallsinusoide führen. Sinusoide, die im modifizierten Sinogramm sowohl innerhalb als auch außerhalb der Metallsinusoide verlaufen, erfahren dadurch eine lokale Veränderung der mittleren Intensitäten im Bereich der Metallsinusoide. Dies wiederum führt zu Artefakten, die den Strahlaufhärtungsartefakten ähneln. Um diese Artefakte so gering wie möglich zu halten, ist es notwendig, die Pseudorohdaten möglichst wenig zu glätten. In Abbildung 2.34(b) ist zu erkennen, dass der Blackmanfaltungskern aufgrund eines größeren Übergangsbereiches zwischen Durchlass- und Sperrbereich tiefe Frequenzen weniger dämpft und dadurch weniger stark glättet als Rechteck- und Dreieckkerne gleicher Länge. Dies ist ein weiterer Grund für die Verwendung des Blackmanfensters anstelle der beiden anderen Fenster. Durch Änderung der Fensterlänge lässt sich der Tiefpasscharakter des Blackmanfensters verändern. Zur Bestimmung einer optimalen Fensterlänge wurde das stark mit Rauschartefakten behaftete CT-Bild aus Abbildung 1.11(a) herangezogen und dessen Pseudorohdaten entlang der Spalten mit unterschiedlich langen Blackmanfenstern geglättet. Bei einer minimalen Länge von  $n = 25$  waren nahezu keine Rauschartefakte mehr im Rekonstruktionsbild zu erkennen. Das dabei rekonstruierte Bild wird in Abbildung 2.35 zusammen mit dem ursprünglichen Rekonstruktionsbild jeweils in zwei unterschiedlichen Grauwertfensterungen dargestellt. Im geglätteten Rekonstruktionsbild sind noch einige niederfrequente strahlenförmige Artefakte erkennbar<sup>28</sup>, die den Bildeindruck jedoch weit weniger stören als die hochfrequenten Rauschartefakte in dem ursprünglichen CT-Bild. Strukturen in den Weichteilen, die im ursprünglichen CT-Bild in Abbildung 2.35(c) schlecht oder gar nicht erkennbar sind, treten im geglätteten Bild in Abbildung 2.35(d) deutlich hervor. Zum Vergleich der Pseudorohdaten wird in den Abbildungen 2.35(e) und 2.35(f) jeweils der identische Ausschnitt von den ungeglätteten und den geglätteten Pseudorohdaten dargestellt. Während das Rauschen innerhalb der Metallsinusoide weitgehend verschwindet, bleiben die groben Strukturen weiterhin erhalten. Dies ist besonders gut anhand der in Abbildung 2.35(g) dargestellten Intensitätsverläufe einer Sinogrammspalte vor und nach der Glättung<sup>29</sup> sichtbar. Der Faltungskern  $h_{\text{bmn}}^{25}$  wird im Weiteren generell zur Glättung der Pseudorohdaten verwendet<sup>30</sup>. In den untersuchten Datensätzen konnten hiermit sehr gute Erfolge verzeichnet werden, wie in Kapitel 2.9 in einer Auswertung von mehreren Radiologen gezeigt wird.

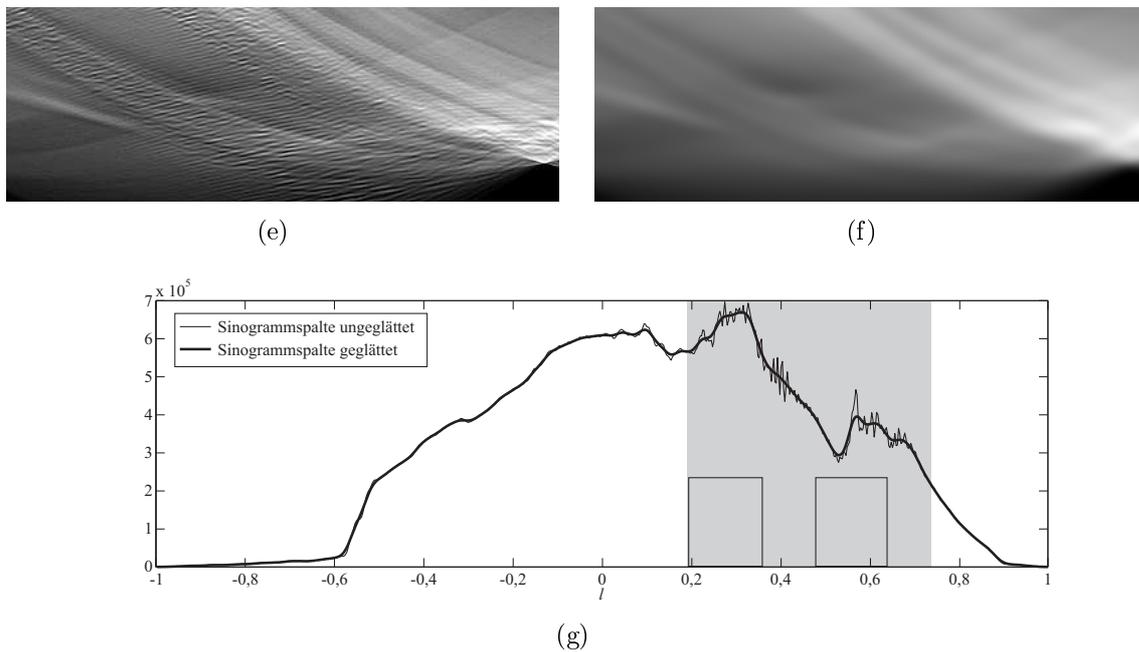
<sup>28</sup>Hierbei handelt es sich vermutlich zumindest teilweise um Strahlaufhärtungsartefakte.

<sup>29</sup>Während die Standardabweichung zwischen den ungefilterten und den gefilterten Pseudorohdaten innerhalb der Metallsinusoide 12.744 beträgt, liegt sie außerhalb nur bei 4.058.

<sup>30</sup>Für einen Einsatz von RFMAR als interaktive Applikation wäre eine Parametrisierung der Fenstergröße möglich.



**Abbildung 2.35:** Tiefpassfilterung von Pseudorohdaten mit  $h_{bmn}^{25}$ . (a) Artefaktbehaftetes CT-Bild (identisch mit Abbildung 1.11(a)). (b) Rekonstruktionsbild nach Glättung mit  $h_{bmn}^{25}$  (künstlich erhöhte Bildschärfe). (a) und (b):  $Z = 476$ ,  $B = 3.000$ . (c) Ausschnitt aus (a), jedoch mit Grauwertfenster  $Z = -24$ ,  $B = 400$ . (d) Glättung mit Dreiecksfenster. Ausschnitt und Grauwertfenster wie in (c). (c) und (d): künstlich erhöhte Bildschärfe. (Fortsetzung auf nächster Seite)



**Abbildung 2.35:** (Fortsetzung) (e) Ausschnitt der Pseudorohdaten  $\tilde{f}_r$ . (f) Ausschnitt der geglätteten Pseudorohdaten  $\tilde{f}_r *_{l} h_{\text{bmn}}^{25}$ . (e) und (f): künstlich erhöhte Bildschärfe. (g) Ursprüngliche und geglättete Sinogrammspalte wie in Abbildung 2.22. Der durch die Waveletanalyse segmentierte Bereich ist grau hinterlegt, die Positionen der Referenz-Metallsinusoide sind als Rechtecke eingezeichnet.

## 2.5.2 Konvexe Kombinationen

Zur Reduktion von Rauschartefakten wird ein modifizierter Pseudorohdatensatz mit Hilfe pixelweiser konvexer Kombinationen zwischen den unveränderten und den geglätteten Pseudorohdaten erzeugt und daraus das artefaktreduzierte CT-Bild rekonstruiert. Das heißt, das modifizierte Sinogramm  $\tilde{f}'_r$  ergibt sich zu:

$$\tilde{f}'_r(l, \theta) = (1 - w_{\tilde{f}}(l, \theta))\tilde{f} + w_{\tilde{f}}(l, \theta)(\tilde{f} *_l h_{\text{bmm}}^{25}). \quad (2.12)$$

Hierbei bezeichnet  $w_{\tilde{f}}$  die Gewichtsfunktion in Abhängigkeit zum Sinogramm  $\tilde{f}$ . Für den im Weiteren ausschließlich betrachteten Fall diskreter Sinogramme wird  $w_{\tilde{f}}$  als Matrix  $W_{\tilde{f}} := (w_{\tilde{f}}(l, \theta))$  interpretiert, die *Gewichtsmatrix* genannt wird. Diese bestimmt entscheidend die Qualität des artefaktreduzierten Bildes. Kriterien für die Wahl der Matrixelemente beziehungsweise Gewichte ergeben sich aus den Forderungen, die im Folgenden aufgestellt werden. Im Anschluss daran wird der Aufbau der Gewichtsmatrix beschrieben. Eine ausführliche Analyse der technischen und diagnostischen Bildqualität von RFMAR folgt in den Kapiteln 2.7 und 2.9.

### Forderungen an RFMAR

Die Praxistauglichkeit eines Artefaktreduktionsverfahrens hängt davon ab, ob

- im artefaktreduzierten Rekonstruktionsbild die Bildschärfe nahezu unverändert gegenüber der Schärfe im ursprünglichen CT-Bild ist,
- alle Rauschartefakte entfernt sind,
- keine neuen Artefakte entstehen und
- die Hounsfield-Einheiten der einzelnen Gewebe korrekt sind.

Idealerweise gilt dies im gesamten Rekonstruktionsbild. Häufig genügt jedoch schon eine Erfüllung in wesentlichen Teilen des Bildes. Dies wird für RFMAR gefordert, wobei alle Bereiche außerhalb von Metallen, jeweils zuzüglich einem schmalen Umgebungsbereich, zu den wesentlichen Bereichen gezählt werden.

### Wahl der Gewichte

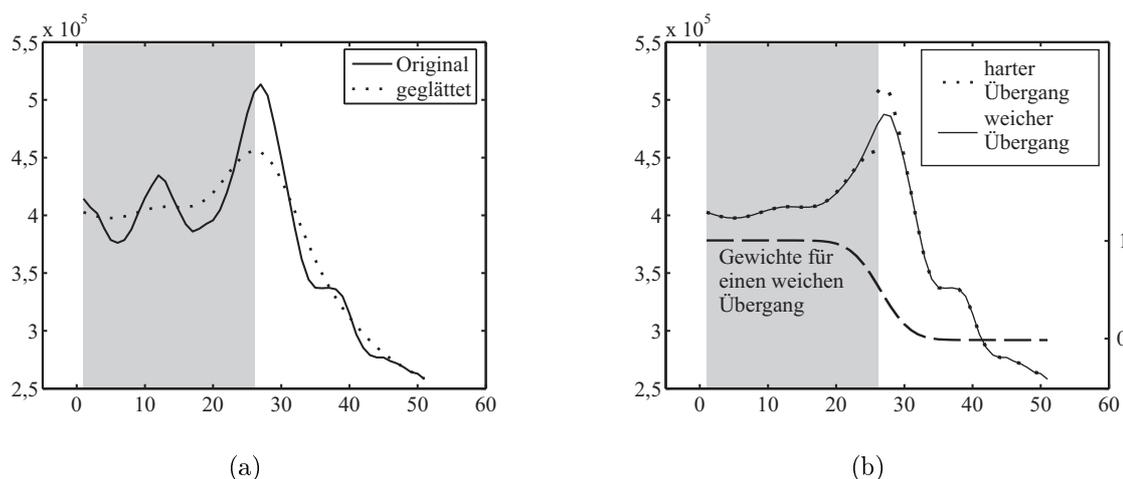
Es wird zunächst von einem Rohdatensatz ausgegangen, der bis auf ein Defektpixel artefaktfrei ist. Dieses Defektpixel führt zu Rauschartefakten im Rekonstruktionsbild (vgl. Kap. 1.8). Die Gewichtsmatrix  $W_{\tilde{f}}$  habe lauter Nulleinträge bis auf eine Umgebung des Defektpixels mit Einseinträgen innerhalb der Spalte, in der das Defektpixel liegt. Das modifizierte Sinogramm  $\tilde{f}'_r$  ist daraufhin in der Umgebung des

Defektpixels geglättet. Dadurch weist die Umgebung des Defektpixels weniger hohe Frequenzen auf. Dies wiederum führt zu einer Antwort geringerer Intensität auf das Rekonstruktionsfilter und damit zu einer Reduktion der Rauschartefakte im artefaktreduzierten Rekonstruktionsbild. Durch Variation der Gewichte zwischen Null und Eins lassen sich die Werte im modifizierten Sinogramm kontinuierlich zwischen den ursprünglichen und den geglätteten Werten verändern. Bei genauerer Betrachtung zeigt sich, dass bei dem beschriebenen Verfahren auch neue Artefakte entstehen können. Aus der folgenden Analyse derartiger Artefakte ergeben sich wichtige Kriterien für eine geeignete Wahl der Gewichte, um neue Artefakte möglichst zu vermeiden.

Zunächst wird der Übergang zwischen Eins- und Nulleinträgen in  $W_{\tilde{f}}$  innerhalb einer Spalte betrachtet. Dazu wird der bereits in Abbildung 2.2 dargestellte exemplarische Ausschnitt einer Sinogrammspalte ein weiteres Mal herangezogen. In Abbildung 2.36(a) ist dieser nochmals abgebildet. Die durchgezogene Linie stellt den ursprünglichen und die gepunktete Linie den geglätteten Ausschnitt dar. Zusätzlich ist ein Teil des Schaubilds grau hinterlegt. Dieser Bereich repräsentiert einen Ausschnitt der Gewichtsmatrix, in dem die Gewichte Eins betragen. In dem sich rechts ab dem Abszissenwert 27 daran anschließenden Bereich habe  $W_{\tilde{f}}$  Nulleinträge. Unter Verwendung der beschriebenen Gewichte setzt sich das modifizierte Sinogramm im grau hinterlegten Bereich aus dem geglätteten und sonst aus dem unveränderten Sinogramm zusammen. Das Resultat ist in Abbildung 2.36(b) als gepunktete Linie dargestellt. Am Übergang ergibt sich ein deutlicher Sprung. Dieser wiederum führt, wie in Kapitel 1.8 beschrieben, zu neuen Rauschartefakten. Derartige Sprünge treten offensichtlich immer dann auf, wenn das ursprüngliche und das geglättete Sinogramm an der Übergangsstelle differieren. Sie lassen sich jedoch vermeiden, indem statt eines harten Übergangs zwischen den Gewichten Eins und Null ein weicher Übergang verwendet wird, wie es beispielsweise in Abbildung 2.36(b) als gestrichelte Linie dargestellt ist. Die Achsenbeschriftung für die Gewichtsfunktion befindet sich an der rechten Seite des Schaubilds. Die Gewichte ergeben sich in diesem Fall durch Glättung des harten Übergangs mit einem Gauß-Faltungskern. Das daraus resultierende modifizierte Sinogramm ist im Schaubild mit einer durchgezogenen Linie dargestellt. Es weist im Übergangsbereich keinen Sprung auf und führt somit zu keinen neuen Rauschartefakten.

Wenn ein Sinusoid im modifizierten Sinogramm in einigen Spalten geglättet und in anderen nicht geglättet wird, treten Strahlaufhärtingsartefakte auf (s. Kap. 1.8). Dies lässt sich nicht vermeiden, solange das Sinogramm nicht vollständig geglättet wird. Durch eine möglichst vollständige Glättung innerhalb der Metallsinusoide werden jedoch zumindest neue, von den Metallen ausgehende Strahlaufhärtingsartefakte vermieden. Aus diesem Grund ist es auch wichtig, dass die Werte innerhalb der Metallsinusoide in der Gewichtsmatrix sich höchstens geringfügig verändern. Dies bedeutet insbesondere, dass die Gewichte nicht kontinuierlich mit der beispielsweise anhand einer Waveletanalyse ermittelten Rauschintensität variiert werden sollen.

Die Bestimmung der Metallsinusoide erfolgt anhand der in Kapitel 2.4.3 beschriebenen Waveletanalyse. Eventuell vorhandene kleine Löcher in der segmentierten Menge werden durch eine morphologische Dilatation (s. Anh. A.3) geschlossen. Als Strukturelement  $B$  dient eine Kreisscheibe mit einem Radius von 5 Pixeln. Die Indikatorfunktion der dilatierten Menge wird als initiale Gewichtsmatrix verwendet, die anschließend mit dem Gauß-Faltungskern  $h_{ng}$  geglättet<sup>31</sup> wird, um Sprungstellen an den Übergängen zu vermeiden. Durch die Glättung reduzieren sich aber auch die Gewichte am Rand der Menge, wodurch der Anteil ungeglätteter Sinogrammdaten zunimmt. Die Kombination aus Dilatation und anschließender Glättung sorgt dafür, dass die Gewichte am Rand der segmentierten Menge nicht zu klein werden. So beträgt beispielsweise das Gewicht nach der Glättung am Rand waagrecht verlaufender Metallsinusoide ohne vorherige Dilatation 0,46. Wird die Menge vor der Glättung morphologisch dilatiert, so ergibt sich an der gleichen Stelle ein Wert von 0,82. Um die Faltung auch an den Rändern des Sinogramms durchführen zu können, wird dieses durch das Hinzufügen von Nullzeilen und gespiegelten Spalten, wie bei der in Kapitel 2.4 beschriebenen Faltung dargestellt, erweitert.



**Abbildung 2.36:** (a) Ausschnitt aus einer Sinogrammspalte. (b) Überlagerung des geglätteten (grau markierter Bereich) und des ungeglätteten Sinogrammausschnittes aus (a) mit hartem und weichem Übergang zwischen den Gewichten Eins und Null (Achsenbeschriftung für Gewichte mit weichem Übergang am rechten Bildrand).

Zusammenfassend bestimmt sich die Gewichtsmatrix  $W_{\check{f}}$  also folgendermaßen:

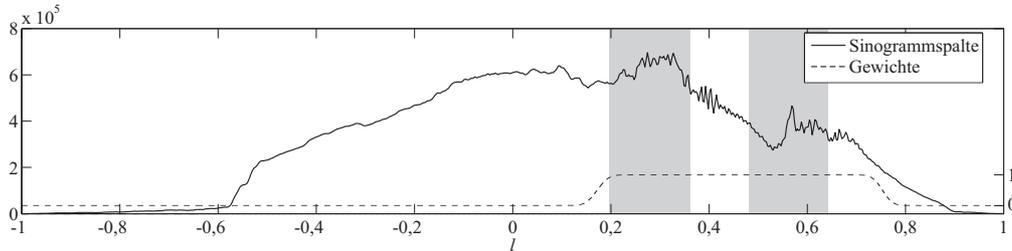
$$W_{\check{f}} = \chi_{M_{\oplus}} * h_{ng}. \quad (2.13)$$

Hierbei bezeichnet  $M_{\oplus}$  die mit dem Strukturelement  $B$  dilatierte Menge der Metallsinusoide, das heißt

$$M_{\oplus} := \text{Metallsinusoide}(\check{f}) \oplus B. \quad (2.14)$$

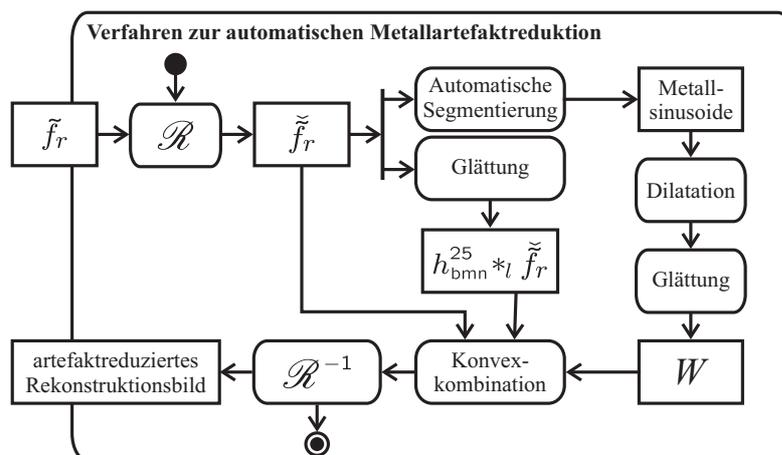
<sup>31</sup>In Abbildung 2.27 im Kapitel 2.4.3 wird der Faltungskern abgebildet.

Für die in den Abbildungen 2.22 und 2.35 dargestellte Sinogrammsspalte ergeben sich die in Abbildung 2.37 dargestellten Gewichte.



**Abbildung 2.37:** Gewichtsmaske nach Glättung (Achsenbeschriftung an rechter Seite).

Die Dilatation und Glättung haben jeweils für ein Sinogramm der Größe  $\#l\#\theta$  einen Aufwand von  $O(\#l\#\theta)$ . Für ein Sinogramm mit der in dieser Arbeit im Allgemeinen verwendeten Größe von  $1.024 \times 729$  Pixel dauern diese beiden Operationen zusammen 1,4 Sekunden. Zusammen mit der automatischen Segmentierung ergibt sich für die Erstellung der Gewichtsmaske aus den Pseudorohdaten ein Zeitaufwand von insgesamt 1,6 Sekunden. Bei der Matlab-Implementierung dominiert der Zeitaufwand für die gefilterte Rückprojektion mit 130 Sekunden den Gesamtaufwand gefolgt von der Radontransformation, die im Schnitt 25 Sekunden benötigt. Die Zeit für die automatische Segmentierung und Modifikation der Pseudorohdaten ist im Vergleich dazu verschwindend klein. Zum Abschluss dieses Abschnittes wird der gesamte Ablauf von RFMAR nochmals in Abbildung 2.38 in Form eines Aktivitätsdiagramms graphisch dargestellt.



**Abbildung 2.38:** Aktivitätsdiagramm für RFMAR.

## 2.6 Maße zur Bewertung radiologischer Bilder

Für die weitere Untersuchung von RFMAR werden Maße zur Bewertung der Qualität der artefaktreduzierten Bilder benötigt. Bei der Betrachtung radiologischer Bilder ist grundsätzlich die *technische Bildqualität* von der *diagnostischen* zu unterscheiden [150]. Während die technische Bildqualität anhand von Bildmerkmalen bestimmt wird, ist für die diagnostische Bildqualität die Sichtbarkeit diagnostisch relevanter Strukturen entscheidend. Unabhängig von der technischen Qualität ist in einem Bild die diagnostische Qualität dann hoch, wenn anhand des Bildes korrekte Diagnosen gestellt werden. Je mehr die Diagnose in einem Bild erschwert wird, desto geringer ist die diagnostische Bildqualität. Im Folgenden werden Methoden zur Bestimmung der technischen und der diagnostischen Bildqualität beschrieben. Insbesondere werden hierbei auch die technischen Qualitätsmaße *normierter mittlerer quadratischer Fehler (NMQF)*, *adaptiertes Strukturvergleichsmaß (ASSIM)* sowie  $M_{SVD}$  beschrieben, die in Kapitel 2.7 verwendet werden.

### 2.6.1 Technische Bildqualität

Qualitätsmaße zur Bewertung der technischen Bildqualität lassen sich in referenzfreie und vergleichende Maße untergliedern. Referenzfreie Qualitätsmaße<sup>32</sup> bestimmen sich direkt aus einem Bild anhand inhärenter Bildeigenschaften. Derartige Maße ließen sich ideal zur Bewertung eines Artefaktreduktionsverfahrens verwenden: zu einer ausreichend großen Menge unterschiedlicher artefaktbehafteter Bilder wird die Qualität vor und nach Anwendung der Artefaktreduktion gemessen und miteinander verglichen. Obwohl es für einen menschlichen Betrachter im Allgemeinen keine Schwierigkeit bedeutet, die Qualität eines Bildes referenzfrei zu beurteilen, ist es schwierig, objektive referenzfreie Maße zu definieren [211]. Aus diesem Grund geschieht eine Bewertung von Bildverarbeitungsverfahren üblicherweise anhand vergleichender Maße<sup>33</sup>. Hierbei werden Unterschiede zu einem Referenzbild gemessen und bewertet, wobei angenommen wird, dass die Bildqualität desto höher bewertet wird, je kleiner die ermittelten Unterschiede sind. Als Maße wurden dazu in der Vergangenheit häufig der *(normierte) mittlere quadratische Fehler (NMQF/MQF)*<sup>34,35</sup> oder das *Peak Signal to Noise Ratio (PSNR)* verwendet [31, 47, 48, 149], [151, Anh. 3]. Diese Maße lassen sich zwar effizient berechnen, geben jedoch nur sehr ungenau die Art der Fehler an und sind vor allem sehr schlecht mit dem menschlichen visuellen Wahrnehmungssystem (MVS)<sup>36</sup> korreliert [3, 30, 182, 210]. Aktuelle Maße, wie  $M_{SVD}$  [182, 183] und *Mean Structural Similarity (MSSIM)* [208, 210, 228] erreichen eine

<sup>32</sup>im Englischen: *no-reference quality assessment* [183, 210, 211]

<sup>33</sup>im Englischen: *full-reference quality assessment* [183, 210]

<sup>34</sup>im Englischen: (normalized) mean square error (NMSE/MSE)

<sup>35</sup>Zur Bewertung von Kompressionsverfahren bei verlustbehaftetem Speichern medizinischer Daten ist NMQF als Maß von der FDA (U.S. Food and Drug Administration) zugelassen [46].

<sup>36</sup>im Englischen: human visual system (HVS)

gute Übereinstimmung mit subjektiven Bewertungen und weisen dadurch eine hohe Korrelation mit dem MVS auf. Sowohl  $M_{\text{SVD}}$  als auch MSSIM ergeben sich durch Mittelung von Qualitätsmaßen, die jeweils auf Bildausschnitten bestimmt werden. Beide eignen sich zur Visualisierung der Bildgüte.

Sei im Folgenden  $f$  das originale und  $f'$  das daraus durch Metallartefaktreduktion hervorgehende Bild mit  $\text{Def}(f) = \text{Def}(f')$ . Sei weiterhin  $P := \{\mathbf{p}_i\}_{i \in I} \subseteq \text{Def}(f)$  die Menge der Pixel, deren Intensitäten  $f(\mathbf{p}_i)$  und  $f'(\mathbf{p}_i)$  in die Berechnung der jeweiligen Maße einfließen. In dieser Arbeit gilt  $P = \text{Def}(f)$ .

### Normierter mittlerer quadratischer Fehler

Der mittlere quadratische Fehler (MQF) ist eines der bekanntesten objektiven Maße mit

$$\text{MQF}(f, f', P) := \frac{1}{|P|} \sum_{\mathbf{p} \in P} |f'(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})|^2. \quad (2.15)$$

MQF ist jedoch sehr schlecht mit dem MVS korreliert. Besser eignet sich NMQF, der folgendermaßen definiert ist [48]:

$$\text{NMQF}(f, f', P) := \frac{1}{\sum_{\mathbf{p} \in P} |f(\mathbf{p})|^2} \sum_{\mathbf{p} \in P} |f'(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p})|^2 \quad (2.16)$$

und bei dem im Gegensatz zu MQF die Bildintensitäten in der Gewichtung berücksichtigt werden. Unterschiede bei Pixeln geringer Intensität werden dadurch stärker gewichtet als bei hoher Intensität. Das Maß ist dadurch jedoch unsymmetrisch. NMQF nimmt sein Minimum  $\text{NMQF} = 0$  für  $f|_P = f'|_P$  ein. Nach oben ist das Maß unbeschränkt.

### Mittlere strukturelle Ähnlichkeit

Bei NMQF werden nur einzelne Pixel miteinander verglichen. Für das MVS spielen jedoch größere, zusammenhängende Bildbereiche eine große Rolle. In dem von WANG ET AL [209, 210] vorgeschlagenen Maß *structural similarity (SSIM)* werden deshalb Veränderung von „Strukturen“, das heißt von Intensitätsverläufen auf Pixelumgebungen, berücksichtigt. Zusätzlich fließen der Kontrast und die Bildhelligkeit in die Bewertung ein.

Sei  $U$  eine Umgebung von  $(0, 0)$  in der diskreten Topologie von  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Für jedes Pixel  $\mathbf{p} \in P$  wird SSIM in der Pixelumgebung  $U(\mathbf{p}) := \{\mathbf{p} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$  bestimmt. Für Pixel  $\mathbf{p}$ , die in der Nähe des Bildrandes liegen so, dass  $U(\mathbf{p}) \cap \text{Def}(f) \neq \emptyset$ , wird kein Ähnlichkeitsmaß bestimmt. Jedem Pixel  $\mathbf{u}$  in der Umgebung  $U$  wird ein Gewicht  $\alpha_{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}_0^+$  zugeordnet. WANG ET AL [209, 210] verwenden die Umgebung  $U = \{\mathbf{u} : \|\mathbf{u}\|_{\infty} \leq 5\}$ . Die Gewichte werden durch die Werte der zweidimensionalen

rotationssymmetrischen Gaußglockenfunktion mit Standardabweichung 1,5 an den Pixelpositionen der Pixel  $\mathbf{u} \in U$  bestimmt. Seien  $X := f|_{U(\mathbf{p})}$  und  $Y := f'|_{U(\mathbf{p})}$  die Pixelintensitäten von  $f$  beziehungsweise  $f'$  in der Umgebung eines Pixels  $\mathbf{p}$  und  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$  die gewichteten Mittelwerte,  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  die gewichteten Standardabweichungen sowie  $\sigma_{xy}$  die gewichtete Kovarianz für  $x \in X$  und  $y \in Y$ . Hieraus werden das Strukturmaß

$$s(X, Y) = \frac{2\sigma_{xy} + C_2}{2\sigma_x\sigma_y + C_2}, \quad (2.17)$$

das Kontrastmaß

$$k(X, Y) = \frac{2\sigma_x\sigma_y + C_2}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2} \quad (2.18)$$

sowie das Helligkeitsmaß

$$h(X, Y) = \frac{2\bar{x}\bar{y} + C_1}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + C_1} \quad (2.19)$$

berechnet und damit SSIM bestimmt zu

$$\text{SSIM}(X, Y) = s(X, Y) k(X, Y) h(X, Y) = \frac{(2\bar{x}\bar{y} + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)}. \quad (2.20)$$

Hierbei sorgen die Konstanten  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$  dafür, dass der Nenner nicht verschwindet und somit keine Singularitäten auftreten. Es werden hier die Standardwerte  $C_1 = 6,5$  sowie  $C_2 = 58,5$  verwendet [208]. Zur Visualisierung werden die SSIM-Werte der einzelnen Pixel als Grauwerte dargestellt.

Die mittlere strukturelle Ähnlichkeit (MSSIM) ergibt sich als Mittelwert über die SSIM-Wert aller Pixel, das heißt

$$\text{MSSIM}(f, f', P) = \frac{1}{|P|} \sum_{\mathbf{p} \in P} \text{SSIM}(f, f', \mathbf{p}). \quad (2.21)$$

Sie weist folgende Eigenschaften auf [210]:

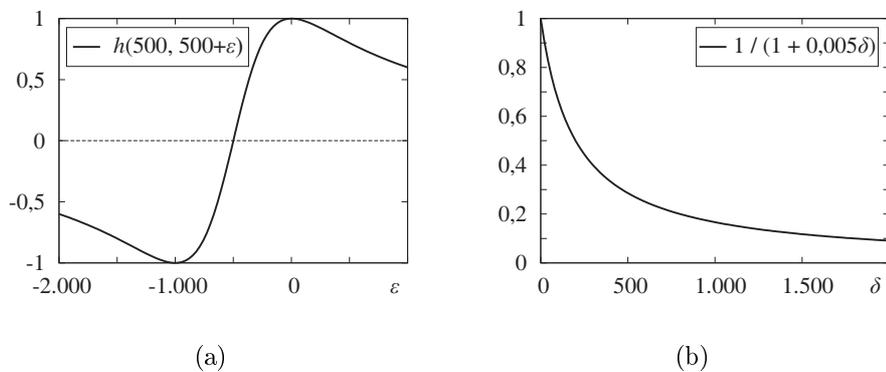
1. Symmetrie:  $\text{MSSIM}(f, f', P) = \text{MSSIM}(f', f, P)$
2. Beschränktheit:  $\text{MSSIM}(f, f', P) \leq 1$
3. Eindeutiges Maximum:  $\text{MSSIM}(f, f', P) = 1 \Leftrightarrow f|_P = f'|_P$ .

Untersuchungen in [209, 210] zeigen, dass MSSIM eine starke Korrelation mit dem MVS aufweist<sup>37</sup>. Die Berechnung in dieser Arbeit erfolgt mit den Standardwerten in der freien Matlab-Implementierung von WANG [208]. Detaillierte Beschreibungen des Verfahrens sowie Analysen seiner Leistungsfähigkeit sind [210] zu entnehmen.

<sup>37</sup>MSSIM wird deshalb mittlerweile auch zur Bewertung von Video-Codern verwendet [228].

### Adaptiertes Strukturvergleichsmaß

Für positive Bildwerte ist das in (2.19) ausgedrückte Maß  $h$  für den Helligkeitsunterschied dem Weber'schen Gesetz der Wahrnehmungsphysiologie [217] „qualitativ konsistent“ [209]. Das Weber'sche Gesetz drückt aus, dass ein menschlicher Beobachter nicht absolute sondern relative Unterschiede in der Signalintensität registriert. Treten jedoch wie bei CT-Bildern üblich negative Bildintensitäten auf, stellt das Intensitätsmaß  $h$  in (2.19) kein sinnvolles Maß dar, wie in Abbildung 2.39(a) exemplarisch anhand der Kurve  $h(500, 500+\epsilon)$  verdeutlicht wird. Diese nimmt für  $\epsilon = -1.000$  ein Minimum ein, das weder physikalisch vom Bildgewinnungsprozess her betrachtet noch physiologisch zu rechtfertigen ist.



**Abbildung 2.39:** (a) Das Maß  $h$  in (2.19) eignet sich nicht zur Bewertung von Helligkeitsunterschieden bei negativen Bildwerten ( $\epsilon < -500$ ). (b) Hierzu eignet sich das in (2.22) definierte alternative Maß  $h'_\alpha$ . In der Abbildung wird  $\delta := |\bar{x} - \bar{y}|$  verwendet.

Während für das MVS die absoluten Bildintensitäten eine untergeordnete Rolle spielen, können in der Radiologie bereits Unterschiede von wenigen HU zu den korrekten Werten die Diagnose verfälschen, da die Korrespondenzen zwischen den Werten und dem Gewebe nicht mehr korrekt ist. Um dieser Tatsache Rechnung zu tragen wird das Strukturmaß SSIM durch Verwendung des Helligkeitsmaßes  $h'$  mit

$$h'_\alpha(X, Y) := \frac{1}{1 + \alpha|\bar{x} - \bar{y}|} \quad (2.22)$$

für die Verwendung bei medizinischen CT-Bildern adaptiert. Diese Funktion liefert offensichtlich auch für negative Bildwerte ein sinnvolles Maß. Der Skalierungsfaktor  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  dient der Anpassung für verschiedene Dynamikbereiche. In dieser Arbeit wird  $\alpha = 0,005$  verwendet. In Abbildung 2.39(b) ist  $h'_\alpha(x, x + \delta)$  für  $\alpha = 0,005$  dargestellt. Die Funktion  $h'_\alpha$  ist beschränkt durch  $0 \leq h'_\alpha \leq 1$ . Für das Maximum  $h'_\alpha(X, Y) = 1$  gilt  $h'_\alpha(X, Y) = 1 \Leftrightarrow X = Y$ . Mit zunehmender Differenz konvergiert  $h'_\alpha$  zu dem Wert Null.

Aus  $h'_\alpha$  ergibt sich mit den Bezeichnungen wie oben das für die Bewertung von CT-Bildern adaptierte Maß  $ASSIM$ <sup>38</sup> wie folgt:

$$ASSIM(X, Y) = s(X, Y) k(X, Y) h'_\alpha(X, Y) = \frac{(2\sigma_{xy} + C)}{(1 + \alpha|\bar{x} - \bar{y}|)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C)}. \quad (2.23)$$

Die Konstante  $C \in \mathbb{R}^+$  sorgt wie  $C_2$  in (2.20) dafür, dass der Nenner nicht verschwindet und somit keine Singularitäten auftreten. In dieser Arbeit wird  $C = C_2 = 58,5$  verwendet.

Bei der Bestimmung von MSSIM, dem Mittelwert aus den SSIM-Werten, werden negative SSIM-Werte, das heißt negativ korrelierte Bildbereiche, genauso gewichtet wie positive. Negativ korrelierte Bildbereiche mit einem betragsmäßig hohen SSIM-Wert sind jedoch besser zu interpretieren als positiv korrelierte Werte mit einem geringen SSIM-Wert. In dieser Arbeit wird deshalb als Gesamtmaß der Mittelwert aus den Beträgen der einzelnen ASSIM-Werte bestimmt. Dieses Maß wird im Weiteren  $MASSIM$  bezeichnet. Offensichtlich ist  $MASSIM$  wie auch  $MSSIM$  symmetrisch und beschränkt. Da die Konstante  $C$  nicht verschwindet, gilt  $-1 < ASSIM(X, Y) \leq 1$  und somit  $MASSIM(f, f') = 1 \Leftrightarrow f = f'$ .

### Qualitätsmaß mittels Singulärwertzerlegung

SHNAYDERMAN ET AL [182, 183] stellen ein weiteres Qualitätsmaß vor, bei dem das MVS berücksichtigt wird. Dieses Maß  $M_{SVD}$  bestimmt sich, wie auch  $MSSIM$  und  $MASSIM$ , als Mittelwert über Maße, die in Teilbildern bestimmt werden. Dazu werden das Original sowie das modifizierte Bild in Blöcke der Größe  $8 \times 8$  Pixel aufgeteilt und in beiden Bildern identisch durchnummeriert. Diese Blöcke werden als Matrizen interpretiert, auf jeder dieser Matrizen wird eine Singulärwertzerlegung durchgeführt und die Singulärwerte werden jeweils der Größe nach geordnet. Seien  $s_0 > s_1 > \dots > s_7$  die Singulärwerte des  $i$ -ten Blockes im Originalbild sowie  $s'_0 > s'_1 > \dots > s'_7$  die Singulärwerte im  $i$ -ten Block des modifizierten Bildes. Der Unterschied  $D_i$  zwischen den beiden Blöcken bestimmt sich daraus wie folgt:

$$D_i := \sqrt{\sum_{i=0}^7 (s_i - s'_i)^2}. \quad (2.24)$$

Sei  $\tilde{D}$  der Median der Werte  $D_i$  und  $n$  die Anzahl der Blöcke. Damit ergibt sich das Maß  $M_{SVD}$  zu

$$M_{SVD}(f, f') := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n |D_i - \tilde{D}|. \quad (2.25)$$

Für identische Bilder  $f$  und  $f'$  verschwindet  $M_{SVD}$ . Je größer der gemessene Wert ist, desto stärker differieren die Bilder.

<sup>38</sup>Adapted Structural Similarity

## 2.6.2 Diagnostische Bildqualität

Eine Bestimmung der diagnostischen Bildqualität kann subjektiv durch Vergabe von absoluten oder relativen Maßzahlen in vorgegebenen Skalen erfolgen<sup>39</sup> oder durch diagnostische Tests auf Basis der Befunde, die anhand modifizierter Bilder gestellt wurden. Dies geschieht häufig mit Hilfe der *receiver operating characteristic (ROC)*<sup>40</sup> [14, 31, 43, 78, 172]. Zur Durchführung wird ein *Goldstandard* benötigt, der die diagnostische Wirklichkeit widerspiegelt<sup>41</sup>, im Allgemeinen jedoch schwer zu erstellen ist [31, 115]. Die diagnostische Bildqualität modifizierter Bilder hängt stark von der diagnostischen Fragestellung, aber auch von individuellen Sehgewohnheiten ab. Deshalb kann es kein optimales universelles Qualitätsmaß zur Bestimmung der diagnostischen Bildqualität geben. Aufgrund der Vielfalt diagnostischer Fragestellungen ist eine Bewertung der diagnostischen Bildqualität nicht für allgemeine sondern nur für gezielt ausgewählte Fragestellungen sinnvoll realisierbar (vgl. [46]). Im Rahmen dieser Arbeit sind derartige Auswertungen nicht durchführbar. Es fand jedoch eine Auswertung verschiedener Datensätze durch mehrere Radiologen an unterschiedlichen Standorten statt, die in Kapitel 2.9 vorgestellt wird. Aufgrund der durchweg positiven Bewertungen der Radiologen ist davon auszugehen, dass RFMAR eine hohe diagnostische Relevanz sowie eine hohe diagnostische Bildqualität aufweist.

## 2.7 Bewertung der technischen Bildqualität von RFMAR

Im Folgenden wird RFMAR mit Hilfe der in Kapitel 2.6 beschriebenen Maße untersucht. In einem ersten Schritt wird ein CT-Bilderpaar, bestehend aus einem artefaktbehafteten und einem artefaktfreien CT-Bild, erzeugt und die Bildverbesserung gemessen, die durch RFMAR gegenüber dem artefaktbehafteten Bild erzielt wird. Im Weiteren wird RFMAR an virtuellen Phantombildern angewandt, um zu untersuchen, welche neuen Artefakte dabei hervorgerufen werden. Da kein herkömmliches Verfahren die in Kapitel 2.5 gestellten Forderungen erfüllt, fällt ein Vergleich von RFMAR mit anderen Verfahren schwer. Unter Verwendung der mittels Waveletanalyse automatisch segmentierten Metallsinusoide lassen sich jedoch zumindest Interpolationsverfahren wie beispielsweise die lineare Interpolation problemlos anwenden<sup>42</sup> und bieten dadurch eine Vergleichsmöglichkeit. Im Weiteren wird in

<sup>39</sup>Gebäuchliche Skalen sind [47] zu entnehmen.

<sup>40</sup>Ein Diagramm, bei dem der falsch positive Anteil (=1-Spezifität) gegen die Sensitivität aufgetragen wird.

<sup>41</sup>Unter gewissen Randbedingungen lassen sich auch ohne Goldstandard aussagekräftige Vergleiche der diagnostischen Bildqualität des ursprünglichen und des modifizierten Bildes durchführen [85].

<sup>42</sup>Andere Verfahren wie beispielsweise die adaptive Filterung lassen sich zwar prinzipiell auch auf Pseudorohdaten anwenden, geben aber dort, wie oben gezeigt wurde, im Allgemeinen keinen Sinn, da sie speziell auf den Einsatz für die Rohdaten abgestimmt sind.

der beschriebenen Art die lineare Interpolation als Vergleich zu RFMAR verwendet.

### 2.7.1 Bildverbesserung eines artefaktbehafteten Bildes

Sei  $\tilde{f}_r$  ein CT-Bild, das Metallartefakte enthält,  $f$  das korrespondierende artefaktfreie Bild, das als Goldstandard betrachtet wird, sowie  $\tilde{f}'$  ein korrespondierendes artefakt-reduziertes Rekonstruktionsbild. Anhand der in Kapitel 2.6 beschriebenen vergleichenden Maße lassen sich nun die Bilder  $f$  und  $\tilde{f}_r$  sowie  $f$  und  $\tilde{f}'$  vergleichen. Durch das Artefaktreduktionsverfahren wurde dann eine Verbesserung gegenüber  $\tilde{f}_r$  erzielt, wenn  $\tilde{f}'$  dem Goldstandard  $f$  stärker ähnelt als  $\tilde{f}_r$  diesem ähnelt. Je ähnlicher  $\tilde{f}'$  dem Bild  $f$  ist, desto besser ist das Ergebnis der Artefaktreduktion. Ein Artefaktreduktionsverfahren, das in diesem Sinn im Allgemeinen zu besseren Ergebnissen führt als ein anderes Verfahren, ist demzufolge dem anderen Verfahren in Bezug auf die verwendeten Qualitätsmaße vorzuziehen. In der Regel ist der Goldstandard unbekannt und damit die beschriebene Methode zur Analyse von RFMAR nicht verwendbar. In diesem Fall hilft eine künstliche Erzeugung von Bildpaaren  $f$  und  $\tilde{f}_r$ . Im Folgenden werden zwei unterschiedliche Vorgehensweisen beschrieben: Zunächst durch Aufnahme eines Phantoms im CT ohne und mit appliziertem Metall und als weitere Möglichkeit durch Simulation von Metallartefakten.

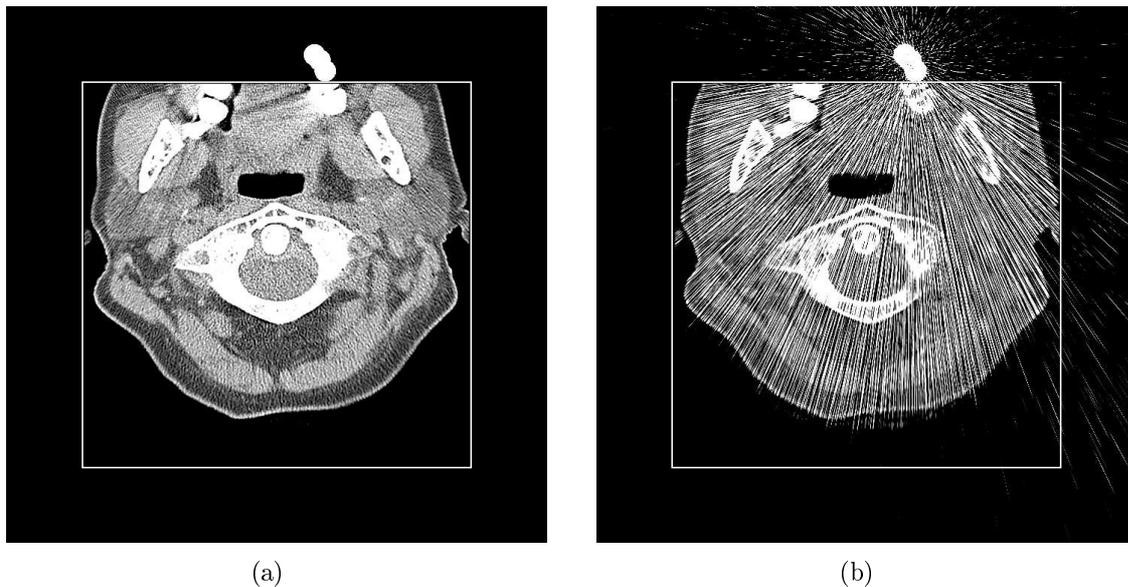
#### Aufnahme eines Phantoms

Durch die CT-Aufnahme eines Phantoms, das kein Metall enthält, lässt sich ein Goldstandard definieren. Die korrespondierenden Artefaktbilder ergeben sich durch eine zweite CT-Aufnahme des Phantoms in identischer Schichtung, jedoch mit appliziertem Metall. Befindet sich hierbei das Metall außerhalb der ROI, ergeben sich Bildpaare, die bis auf die Artefakte identisch sind und sich deshalb sehr gut zur beschriebenen Analyse eignen. Da jedoch zur Metallartefaktreduktion im Allgemeinen, insbesondere auch bei RFMAR, nichtlineare Verfahren eingesetzt werden, gilt nicht mehr länger das Superpositionsprinzip. Somit genügt auch nicht die Analyse der Impulsantwort beziehungsweise eines einfach aufgebauten Phantoms. Für eine aussagekräftige Analyse ist es vielmehr notwendig, möglichst exakt die Anatomie nachzubilden. In dieser Arbeit wird zur Generierung von Bildpaaren  $f$  und  $\tilde{f}_r$  ein anderes Verfahren verwendet, das im Folgenden beschrieben wird.

#### Simulation von Metallartefakten

Als Alternative zu der oben beschriebenen Methode bietet sich folgendes Verfahren an: Ein (nahezu) artefaktfreies CT-Bild wird als Goldstandard herangezogen. Das

korrespondierende Artefaktbild erhält man durch das künstliche Hinzufügen simulierter Artefakte. Auf diese Art lassen sich schnell und einfach Bildpaare zu unterschiedlichen Körperbereichen erzeugen. Bei der Erzeugung der Artefaktbilder lassen sich gezielt unterschiedliche Artefakte simulieren. RFMAR wurde zur Reduktion von starken Rauschartefakten entwickelt, die sich global über das Bild ziehen. Zur Simulation von Rauschartefakten wird als Goldstandard das in Abbildung 2.40(a) innerhalb des Quadrats dargestellte Bild aus Abbildung 2.29(a) verwendet. Dieses wird in eine Nullmatrix eingebettet und in der Verlängerung des Unterkiefers nach frontal einige Pixel mit metalltypischen Werten von 8.000 HU eingefügt. Diese repräsentieren Metall und sind in der Abbildung außerhalb des weißen Quadrats zu erkennen. Innerhalb der Metallsinusoide dieser „metallischen“ Pixel wird das Sinogramm verrauscht. Hierbei wird wie auch in Kapitel 1.8 ein additives normalverteiltes mittelwertfreies Rauschen und einer exponentiell mit den Pixelintensitäten im Sinogramm wachsenden Varianz verwendet. Aus diesem Sinogramm ergibt sich nach gefilterter Rückprojektion das in Abbildung 2.40(b) dargestellte Bild. Wie bei der Speicherung von CT-Bildern üblich, werden die Werte durch Clipping bei -1.024 HU sowie bei 3.071 HU abgeschnitten. Als ROI dient der Bildausschnitt des Goldstandards, so dass die artefaktverursachenden virtuellen Metalle außerhalb der ROI liegen.



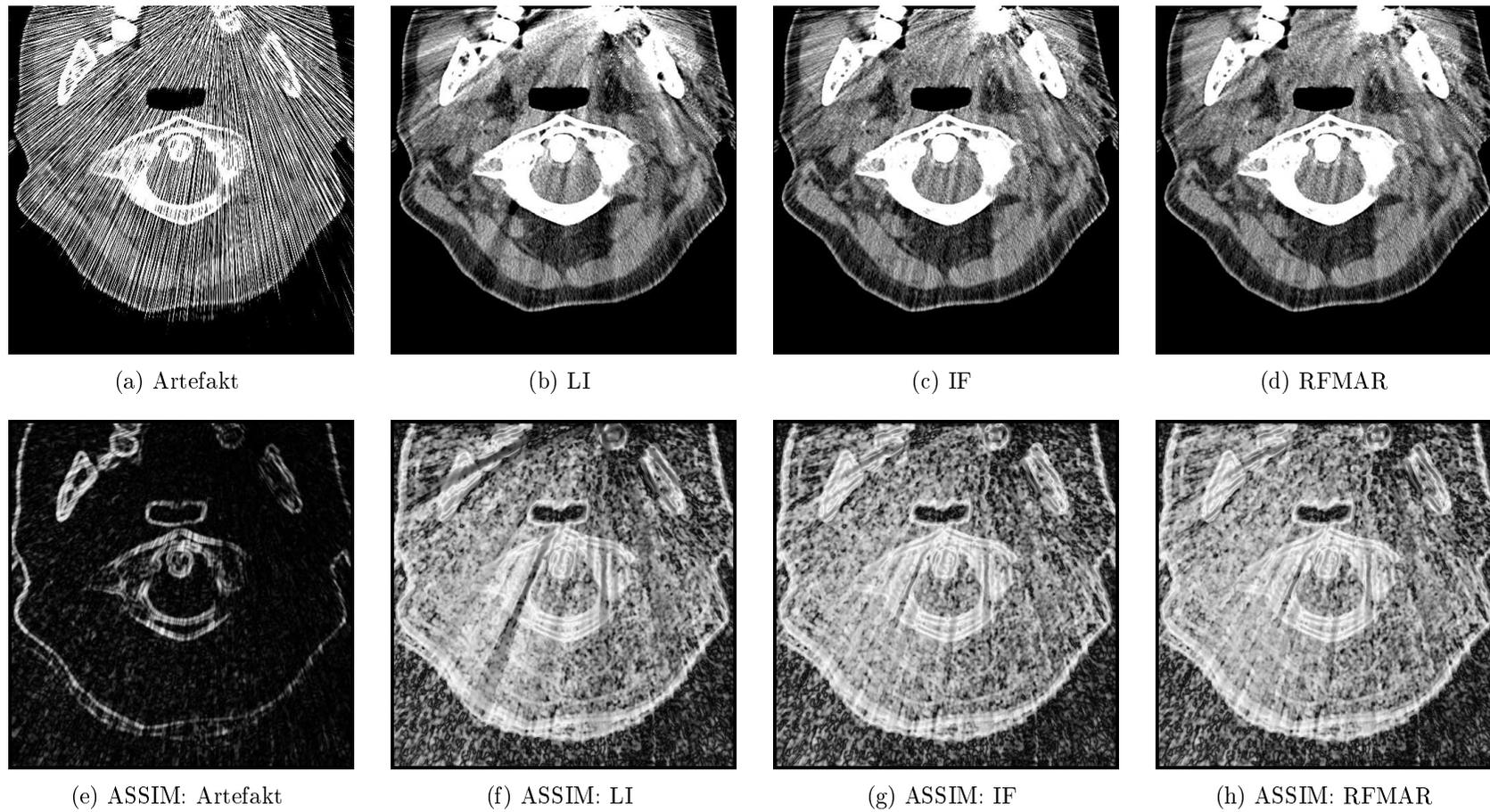
**Abbildung 2.40:** (a) Goldstandard (innerhalb des weißen Rahmens) mit appliziertem Metall (weiße Pixel außerhalb des Rahmens). (b) Aus gezielt verrauschtem Sinogramm rekonstruiertes Artefaktbild.  $Z = -24$ ,  $B = 400$ .

Das endgültige Artefaktbild ist in Abbildung 2.41(a) dargestellt. Durch die Artefakte ist das Bild global gestört. Etliche Strukturen sind darin nur schlecht oder gar nicht zu erkennen. Dies gilt in besonderem Maß für die rechte Bildhälfte unterhalb des virtuellen Metalls. Anhand der in Kapitel 2.4.3 beschriebenen Waveletanalyse werden die Metallsinusoide segmentiert. Entlang dieser Sinusoide wird die Lineare

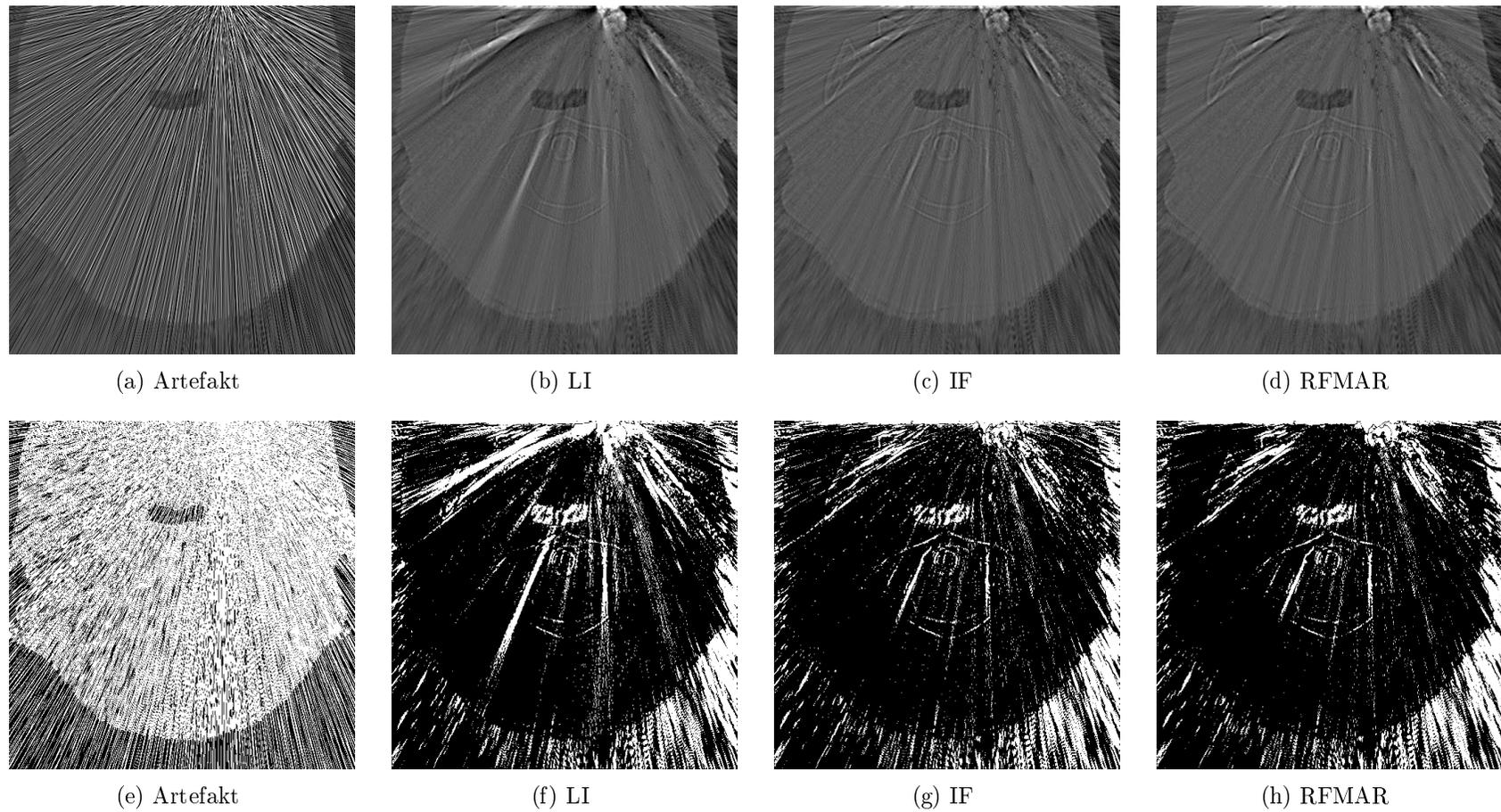
Interpolation (LI) durchgeführt. Des Weiteren wird die Indikatorfunktion der Metallsinusoide als Gewichtsmatrix verwendet und damit gemäß (2.12) die modifizierten Pseudorohdaten bestimmt (IF). Als dritte Methode wird RFMAR angewandt. Die Rekonstruktionsergebnisse sind in den Abbildungen 2.41(b) bis 2.41(d), die numerischen Vergleichsmaße NMQF, MASSIM und  $M_{\text{SVD}}$  in Tabelle 2.2 zu sehen. Die Berechnung hierfür erfolgt zwischen dem Goldstandard und den rekonstruierten Bildern. Durch alle drei Methoden wird eine deutliche Reduktion der Rauschartefakte erzielt. Dieses Ergebnis spiegelt sich in der Tabelle aber auch in den graphischen Darstellung von ASSIM in den Abbildungen 2.41(e) bis 2.41(h) wider. Während in Abbildung 2.41(e) das Bild bis auf die Knochenregionen sehr dunkel ist und damit dort überall eine geringe Qualität aufweist, sind die Abbildungen 2.41(f) bis 2.41(h) auch im Bereich der Weichteile sehr hell. Im Vergleich zu IF und RFMAR verbleiben bei LI am wenigsten Rauschartefakte im Rekonstruktionsbild. Trotzdem weist LI die schlechtesten Qualitätsmaße auf, da bei LI mehr neue Artefakte hervorgerufen werden und zum Teil größere Abweichungen der Hounsfield-Einheiten auftreten als bei den anderen beiden Methoden. Dies lässt sich sowohl in den Differenzbildern zwischen dem Goldstandard und den einzelnen Rekonstruktionsbildern in Abbildung 2.42 als auch und in den ausgewählten Bildausschnitten in Abbildung 2.43 erkennen. Bei den Bildausschnitten wird anstelle des Artefaktbildes in der ersten Spalte der Goldstandard abgebildet. So ist bei LI beispielsweise in der ersten Zeile der Abbildung 2.43 unterhalb des Backenzahnes eine Abdunklung und zwischen dem Kieferknochen und dem Backenzahn eine scheinbare knöcherne Verbindung zu erkennen. In der zweiten Zeile zieht sich bei LI links unterhalb des Halswirbels ein dunkler Streifen durch das Weichgewebe. In der letzten Zeile schließlich ist die spongiöse Struktur im Inneren des Kieferknochens gegenüber dem Goldstandard verändert. Die beschriebenen Artefakte treffen alle nicht oder nicht in dem Maß für IF und RFMAR zu. Zwischen IF und RFMAR lassen sich visuell nur schwer Unterschiede erkennen. Unter zwei von drei Qualitätsmaßen wird RFMAR jedoch besser als IF, unter  $M_{\text{SVD}}$  nur geringfügig schlechter als IF bewertet. Dieses Resultat spricht für die bei RFMAR durchgeführte Dilatation und Glättung der Gewichtsmatrix.

| Maß              | Wertebereich     | besser | Artefaktbild | LI       | IF       | RFMAR    |
|------------------|------------------|--------|--------------|----------|----------|----------|
| NMQF             | $\mathbb{R}_0^+$ | ↓      | 0,1617       | 0,0113   | 0,0080   | 0,0077   |
| MASSIM           | [0, 1]           | ↑      | 0,0917       | 0,4968   | 0,5054   | 0,5255   |
| $M_{\text{SVD}}$ | $\mathbb{R}_0^+$ | ↓      | 930,2395     | 287,6266 | 219,0369 | 220,4749 |

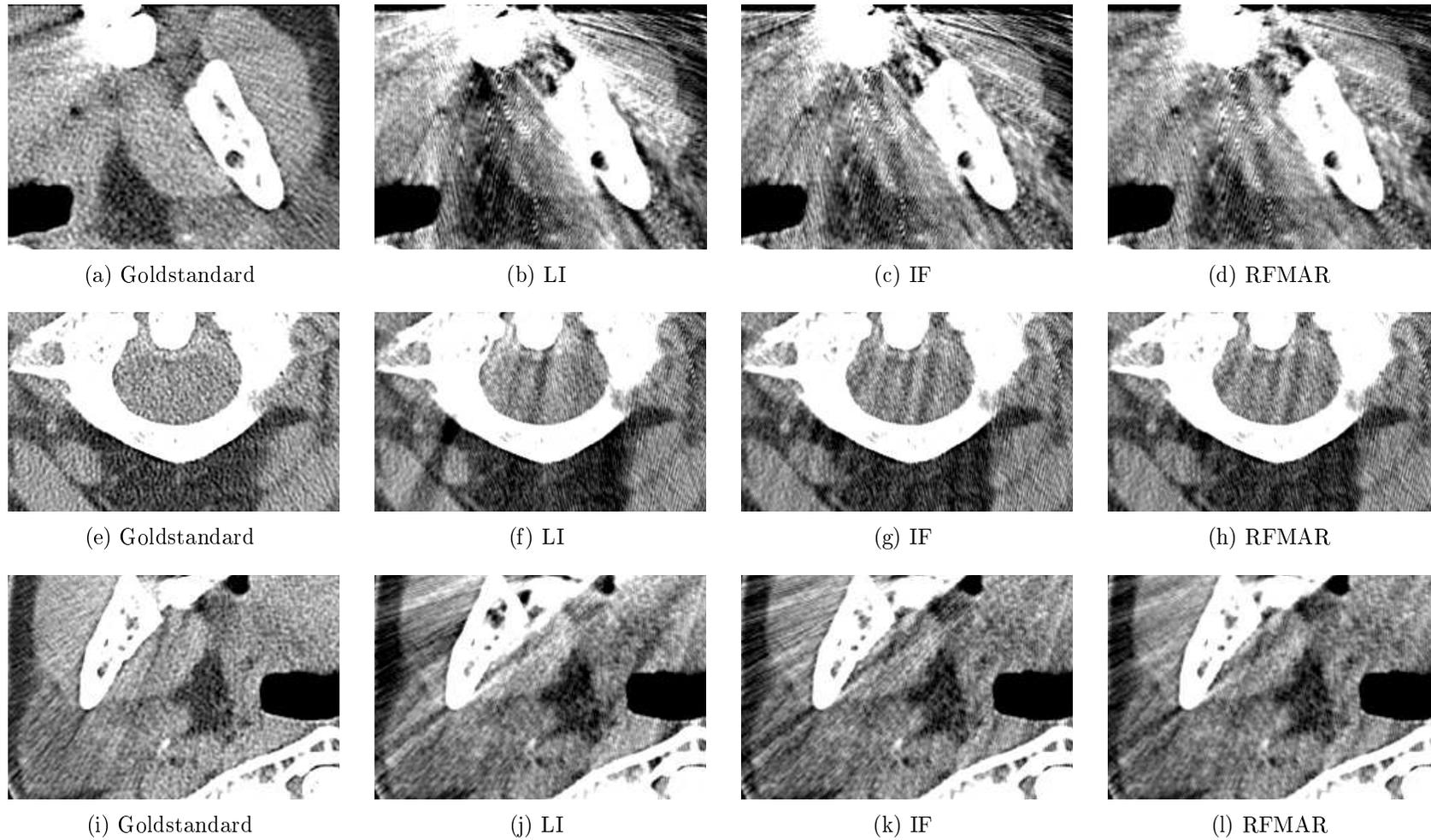
**Tabelle 2.2:** Vergleich zwischen dem Goldstandard (Abb. 2.40(a)) und dem künstlich erzeugten Artefaktbild, sowie zwischen den mit LI, IF und RFMAR artefaktreduzierten Bildern. Die jeweils besten Werte sind grau hervorgehoben



**Abbildung 2.41:** (a) Artefaktbild. (b)-(d) Artefaktreduzierte Bilder. (a)-(d)  $Z = -24$ ,  $B = 400$ . (e)-(h) Graphische Darstellung der ASSIM-Werte zwischen dem Goldstandard und den Bildern in (a)-(d).



**Abbildung 2.42:** (a)-(d) Darstellung der Differenzen zwischen dem Goldstandard und den Abbildungen 2.41(a) bis 2.41(d) im Wertebereich  $[-500, 1.000]$  HU. (e)-(h) Schwellwertsegmentierung der Bilder (a)-(d). Die Stellen, die einen Differenzbetrag von mehr als 100 HU zum Goldstandard aufweisen, sind weiß abgebildet.



**Abbildung 2.43:** Ausgewählte Bildausschnitte zum Vergleich zwischen Goldstandard und artefaktreduzierten Bildern.  $Z = -24$ ,  $B = 400$

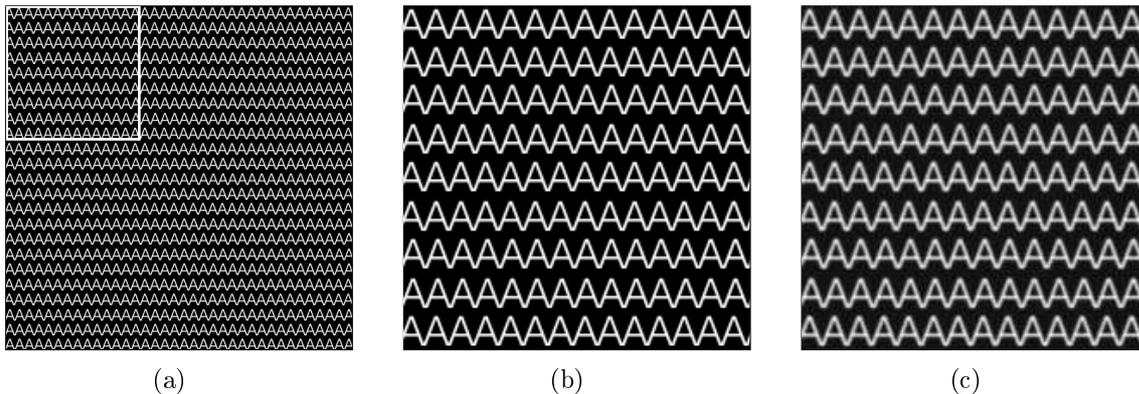
## 2.7.2 Auswirkungen auf das Rekonstruktionsbild

Nachdem im vorigen Abschnitt die Artefaktreduktion an einem artefaktbehafteten Bild qualitativ untersucht wurde, werden im Folgenden Auswirkungen von RFMAR bei der Anwendung auf ein artefaktfreies Sinogramm analysiert. Da ein derartiges Sinogramm im Allgemeinen keine besonders ausgeprägt verrauschten Bereiche aufweist, kann keine Segmentierung von „Metallsinusoiden“ anhand der Waveletanalyse durchgeführt werden. Deshalb wird hier für die Durchführung von RFMAR exemplarisch diejenige Gewichtsmatrix verwendet, die sich aus den Pseudorohdaten des artefaktbehafteten CT-Bildes in Abbildung 1.11(a) ergibt. Dabei werden anhand zweier virtueller Phantome insbesondere Auswirkungen auf die Bildschärfe sowie strukturelle Veränderungen im Rekonstruktionsbild betrachtet.

### Bildschärfe

Zur Untersuchung von Veränderungen der Bildschärfe aufgrund der Anwendung von RFMAR wird das in Abbildung 2.44 dargestellte Phantombild verwendet, das eine sehr kontrastreiche Textur, die sich gleichmäßig über das ganze Bild erstreckt, aufweist. Das weiße Quadrat in Abbildung 2.44(a) stellt den in Abbildung 2.44(b) abgebildeten Ausschnitt dar. Die Bildgröße beträgt  $512 \times 512$  Pixel. Die Werte liegen zwischen dem Null im Bildhintergrund und dem maximalen Grauwert 255. Das Bild verliert schon allein unter der verwendeten Radontransformation und Rekonstruktion mit einem Shepp-Logan-Rekonstruktionsfilter an Schärfe, wie in der Ausschnittsvergrößerung in Abbildung 2.44(c) zu erkennen ist. Je nach Auflösung des virtuellen CT-Scanners, dem Rekonstruktionsfilter sowie den verwendeten Implementierungen für die Radontransformation und die gefilterte Rückprojektion ergeben sich hier andere Resultate. Die Unschärfe aufgrund der Transformationen wird im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht untersucht. Als Goldstandard wird das rekonstruierte, das heißt geglättete Bild verwendet.

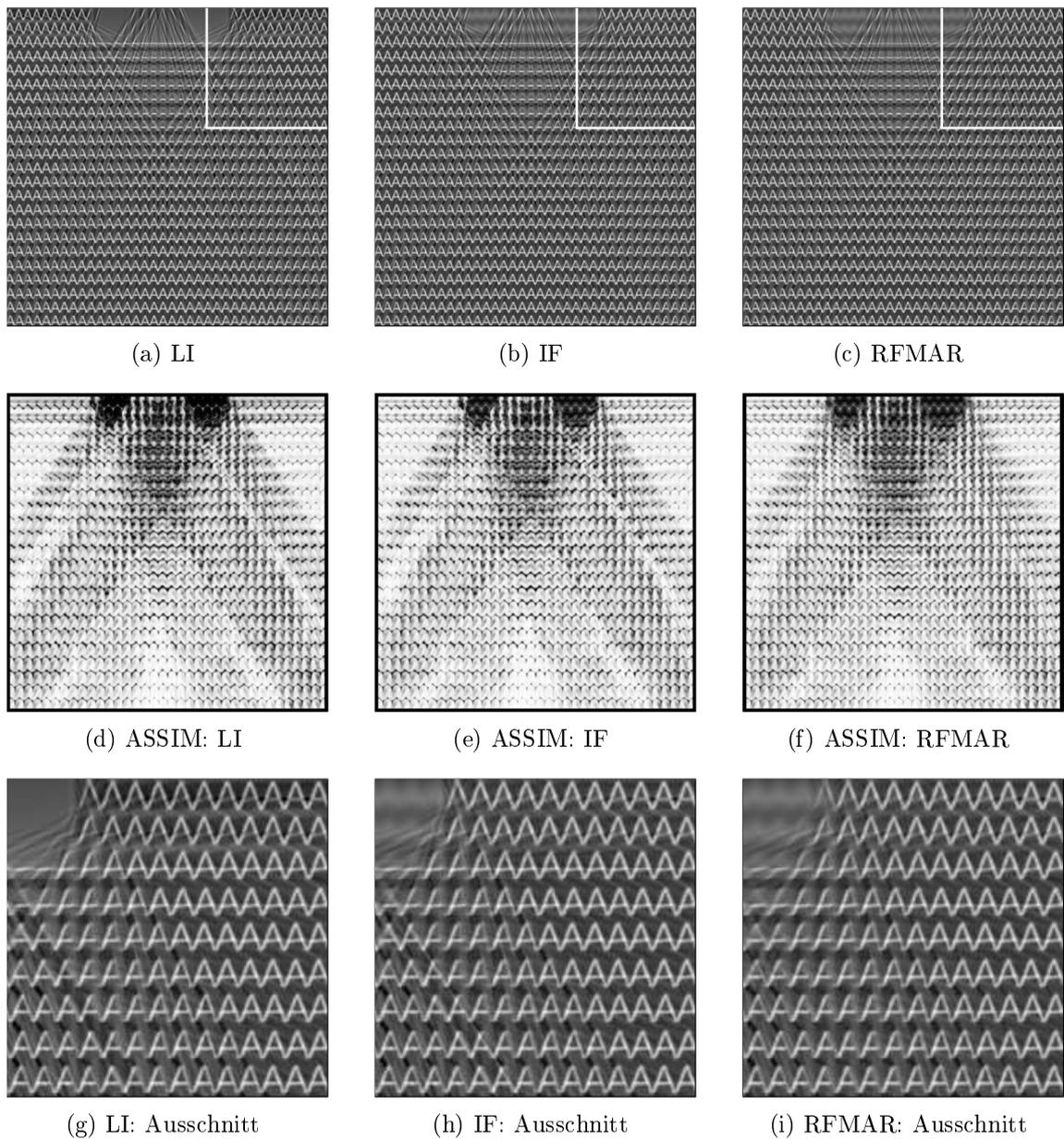
Wie auch im vorausgehenden Abschnitt werden im Folgenden LI, IF und RFMAR entlang der „Metallsinusoiden“ durchgeführt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 2.45(a), 2.45(b) und 2.45(c) dargestellt. Ein Punkt im Sinogramm korrespondiert mit einer Gerade im Ortsraum. Punkte innerhalb der Metallsinusoiden korrespondieren mit denjenigen Geraden, die strahlenkranzförmig von den Metallen im Bild ausgehen. Das Symbol „A“ setzt sich aus drei Geradenabschnitten zusammen. Überall dort, wo einer der drei Geradenabschnitte in Richtung der „Metalle“ zeigt, weisen die Rekonstruktionsbilder aller drei Verfahren eine schlechte Qualität auf, da dort jeweils der entsprechende Geradenabschnitt entfernt beziehungsweise verändert ist. Anhand der graphischen ASSIM-Darstellungen in den Abbildungen 2.45(d) bis 2.45(f) zeichnen sich diese Bereiche durch dunkle Streifen, ausgehend von den „Metallen“ am oberen Bildrand, aus. Kollineare Strukturen, die in die Richtung der Metalle weisen, werden folglich von allen drei Verfahren geglättet beziehungsweise entfernt.



**Abbildung 2.44:** (a) Texturbild. Das weiße Quadrat zeigt den Ausschnitt von (b) und (c) an. (b) Ausschnittsvergrößerung der linken oberen Ecke von (a). (c) Texturbild nach Rekonstruktion der Pseudorohdaten. Ausschnittsvergrößerung wie in (b).

Andere Strukturen hingegen werden nur geringfügig verändert. So sind beispielsweise in den Ausschnittsbildern, die in Abbildungen 2.45(g) bis 2.45(i) dargestellt sind, am oberen Bildrand rechts neben dem „Metall“ die beiden Schenkel des Symbols „A“ deutlich zu erkennen, während die Querverbindung fast vollständig verschwunden ist. Zwei Zeilen weiter unten weisen die Querverbindungen nicht mehr zu den Metallen und sind klar zu erkennen. Innerhalb der „Metalle“ werden Strukturen aus allen Richtungen geglättet beziehungsweise unterdrückt, wodurch in diesen Regionen die Rekonstruktionsbilder eine besonders geringe Qualität haben. In den ASSIM-Bildern sind diese Bereiche am dunkelsten. Ein Stück „Metall“ ist jeweils links oben in den Ausschnittsbildern zu erkennen. In diesem Bereich ist keine Struktur mehr zu erkennen. Eine visuelle Unterscheidung der Bildqualitäten der drei Verfahren fällt auch bei diesem Phantombild schwer. Eine Hilfe bieten wieder die numerischen Werte, die in Tabelle 2.3 aufgelistet sind. LI wird wieder am schlechtesten bewertet, wohingegen in diesem Fall IF unter allen drei Maßen besser als RFMAR bewertet wird. Aufgrund der harten Übergänge zwischen den geglätteten und den ungeglätteten Pixelwerten ergeben sich jedoch bei IF neue Artefaktstrukturen, die bei RFMAR nicht vorhanden sind. Beispielsweise ist in Abbildung 2.45(h) beginnend von der Mitte des linken Bildrandes bis ungefähr zur Mitte des unteren Bildrandes ein Streifen zu erkennen, der im Goldstandard offensichtlich nicht vorhanden ist. Dieser Streifen ist auch bei LI, nicht aber bei RFMAR nicht zu erkennen. Aus diesem Grund ist auch in diesem Fall ein Einsatz von RFMAR sinnvoll.

Aufgrund der Linearität der gefilterten Rückprojektion lassen sich die beiden Terme in (2.12) getrennt rekonstruieren und anschließend pixelweise addieren, wie es in Abbildung 2.46 für das artefaktbehaftete CT-Bild aus Abbildung 1.11(a) dargestellt wird. In diesem Fall wird ein Bildausschnitt, der größer als das ursprüngliche CT-Bild ist, rekonstruiert. Bei dieser Zerlegung fällt auf, dass bis auf die lokalen

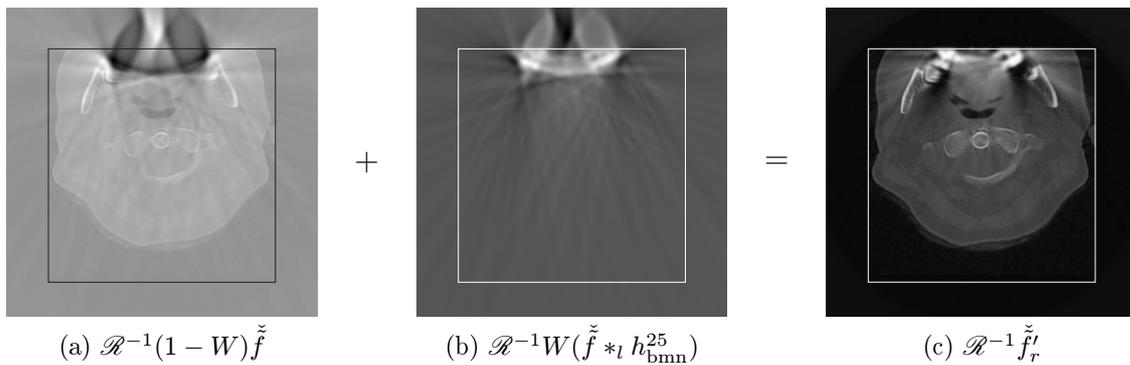


**Abbildung 2.45:** (a)-(c) „Artefaktreduzierte“ Bilder. (d)-(f) ASSIM-Darstellungen.  
(g)-(i) Ausschnittsvergrößerungen der linken oberen Ecken von (a)-(c).  
Dargestellter Grauwertbereich in (a)-(c) sowie (g)-(i)  $[-90, 270]$ .

| Maß              | Wertebereich     | besser | LI      | IF      | RFMAR   |
|------------------|------------------|--------|---------|---------|---------|
| NMQF             | $\mathbb{R}_0^+$ | ↓      | 0,1492  | 0,1248  | 0,1325  |
| MASSIM           | $[0, 1]$         | ↑      | 0,7292  | 0,7491  | 0,7373  |
| $M_{\text{SVD}}$ | $\mathbb{R}_0^+$ | ↓      | 63,1464 | 53,4082 | 57,6874 |

**Tabelle 2.3:** Numerisch ermittelte Vergleichsmaße zwischen Abbildung 2.44(c) und den rekonstruierten Bildern.

Bereiche um die Metalle nahezu alle Strukturen in dem „scharfen“ Teilbild in Abbildung 2.46(a) vorhanden sind. Das ist ein Beispiel dafür, dass die oben beschriebene Reduktion der Schärfe außerhalb der Metalle in medizinischen CT-Bildern kaum zu erkennen ist und somit die Rekonstruktionsbilder wie gefordert außerhalb der Metalle nur einen geringen oder gar keinen sichtbaren Verlust an Schärfe aufweisen.



**Abbildung 2.46:** Anwendung von RFMAR auf Abbildung 1.11(a) unter Ausnutzung der Linearität bei der gefilterten Rückprojektion.

### Artefaktstrukturen

Als zweites virtuelles Phantombild wird die in Abbildung 2.47(a) dargestellte Kreisscheibe verwendet. In Abbildung 2.47(b) sind die Sinusoide der Kreisscheibe hell und die verwendeten „Metallsinusoide“ dunkel in einem gemeinsamen Sinogramm dargestellt. Bei der linearen Interpolation resultiert das in Abbildung 2.47(c) dargestellte Sinogramm. Aufgrund der darin erkenntlichen starken Veränderungen gegenüber dem korrekten Sinogramm sind erhebliche Artefakte zu erwarten. In Abbildung 2.47(d) werden die Beträge der pixelweise Differenzen zwischen dem Rekonstruktionsbild und dem Goldstandard dargestellt. Je dunkler die Graustufe eines Pixels ist, desto größer ist an dieser Stelle der Differenzbetrag. Es lassen sich in diesem Bild sowie in der graphischen ASSIM-Darstellung in in Abbildung 2.47(g) erwartungsgemäß starke Artefakte erkennen. Auch in IF und RFMAR ergeben sich Artefakte, jedoch in visuell gut erkennbarem abnehmbarem Maß. Die numerischen Werte sind in Tabelle 2.4

aufgeführt. Sowohl unter MASSIM als auch unter  $M_{\text{SVM}}$  wird RFMAR am besten bewertet.

| Maß              | Wertebereich     | besser | LI       | IF      | RFMAR   |
|------------------|------------------|--------|----------|---------|---------|
| NMQF             | $\mathbb{R}_0^+$ | ↓      | 0,1091   | 0,0082  | 0,0087  |
| MASSIM           | [0, 1]           | ↑      | 0,7789   | 0,9028  | 0,9409  |
| $M_{\text{SVD}}$ | $\mathbb{R}_0^+$ | ↓      | 218,7142 | 30,9550 | 24,5758 |

**Tabelle 2.4:** Numerisch ermittelte Vergleichsmaße zwischen dem (rekonstruierten) Kreisscheibenphantom aus Abbildung 2.47(a) und den „artefaktreduzierten“ Bildern.

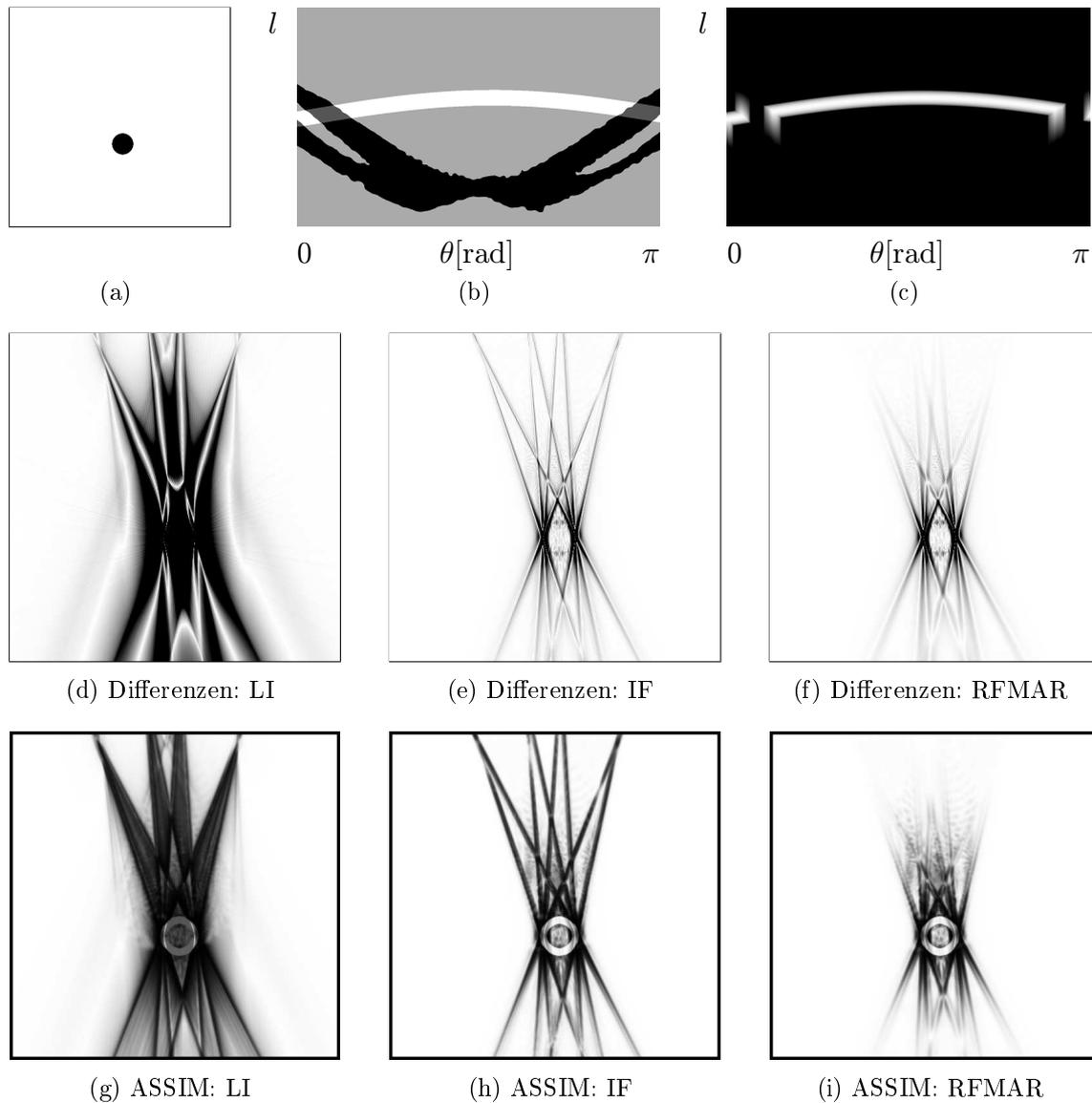
In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass RFMAR Artefakte effektiv reduziert und dabei nahezu im gesamten Bild eine hohe Schärfe erhalten bleibt. Neue Artefakte können auch bei RFMAR nicht vollständig vermieden werden, fallen jedoch im Vergleich zu IF und insbesondere zu LI in dem untersuchten Phantom relativ gering aus. Im nächsten Kapitel wird anhand mehrerer Beispieldatensätze aus der radiologischen Praxis Praxistauglichkeit von RFMAR untersucht.

## 2.8 Anwendung von RFMAR auf radiologische CT-Datensätze

Um die Praxistauglichkeit von RFMAR zu untersuchen, werden in diesem Abschnitt verschiedene stark artefaktbehaftete CT-Datensätze (DS 1 ... DS 22) zusammen mit den daraus durch RFMAR gewonnenen artefaktreduzierten Bildern dargestellt. Außer DS 13 (Abb. 2.51(q)) und DS 22 (Abb. 2.52) wurden alle Datensätze freundlicherweise von der „Radiologischen Gemeinschaftspraxis im Zeppelinzentrum“ in Karlsruhe im DICOM-Format zur Verfügung gestellt. DS 13 entstammt einer institutsinternen Bilddatenbank [170] und DS 22 wurde freundlicherweise von der Firma med3D in Heidelberg [134] zur Verfügung gestellt. Beide Datensätze liegen im TIFF-Format vor. Bis auf DS 13 liegen alle Datensätze als Axialschnitte aus dem Kopf-Hals-Bereich beziehungsweise der Umgebung des Kniegelenks (DS 14 ... 19) vor. DS 13 liegt als Frontalschnitt des Kopfes vor.

Im Folgenden werden einige auffällige Merkmale der artefaktreduzierten Bilder anhand der abgebildeten Datensätze beschrieben. Eine Auswertung der Datensätze DS 1 bis DS 20 findet in Kapitel 2.9 statt. Zunächst wird in Abbildung 2.48 das Artefaktbild aus Abbildung 1.11(a) betrachtet. An diesem Datensatz werden exemplarisch zum Vergleich verschiedene Artefaktreduktionsverfahren durchgeführt. Im Einzelnen sind dies:

- LI 1: Lineare Interpolation entlang der Referenz-Metallsinusoide (s. Abb. 2.6(d)).



**Abbildung 2.47:** (a) Virtuelles Kreisscheibenphantom (invertiert dargestellt). (b) Sinusoide der Kreisscheibe (hell) und „Metallsinusoide“ dunkel. (c) Pseudorohdaten nach Anwendung der linearen Interpolation. (d)-(f) Beträge der Differenzen zwischen den artefaktreduzierten Bildern und der (rekonstruierten) Kreisscheibe (invertierte Darstellung). (g)-(i) ASSIM-Darstellungen.

- LI 2: Lineare Interpolation entlang der Metallsinusoide, die sich durch die Waveletanalyse ergeben (s. Abb. 2.30(b)).
- K KU 1: Pixelweise konvexe Kombinationen. Als Gewichtsmatrix dient die Indikatorfunktion der Referenz-Metallsinusoide.
- K KU 2: Pixelweise konvexe Kombinationen. Als Gewichtsmatrix dient die Indikatorfunktion der Metallsinusoide, die sich durch die Quadtree-Zerlegung bestimmt (s. Abb. 2.19(b)).
- K K 1: Pixelweise konvexe Kombinationen. Als Gewichtsmatrix dient die dilatierte und geglättete Indikatorfunktion der Metallsinusoide, die sich durch die Quadtree-Zerlegung bestimmt.
- K K 2: Pixelweise konvexe Kombinationen. Als Gewichtsmatrix dient die dilatierte und geglättete Indikatorfunktion der Metallsinusoide, die sich durch Texturanalyse mit dem Texturmaß IDM bestimmt (s. Abb. 2.20(b)).
- RFMAR.

In Abbildung 2.49 werden in anderer Fensterung zu jedem der dargestellten Bilder jeweils der identische Bildausschnitt gezeigt. Schließlich werden in Abbildung 2.50 zu jedem Rekonstruktionsbild identische Ausschnitte aus den jeweiligen modifizierten Pseudorohdaten dargestellt.

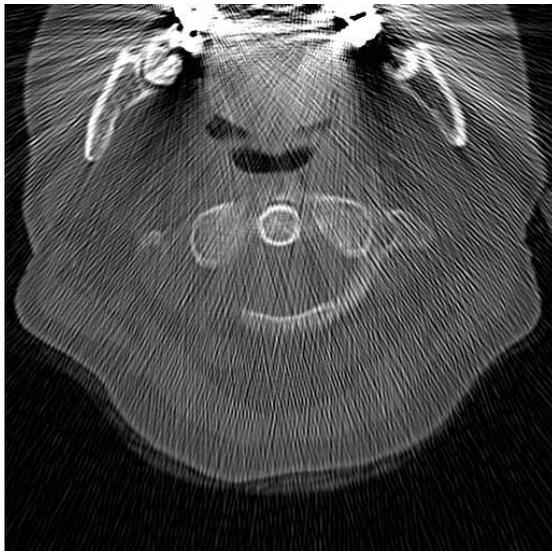
Im Vergleich zwischen LI und RFMAR ist festzustellen, dass bei LI die Strahlaufhärtungsartefakte, die sich als dunkle Abschattungen unterhalb des rechten sowie des linken Backenzahnes abzeichnen, im Gegensatz zu RFMAR zum Teil reduziert werden. Andererseits ergeben sich teilweise erhebliche Artefakte vor allem im Bereich der Metalle, aber auch im übrigen Bild, beispielsweise am Kieferknochen rechts oben im Bild, die bei RFMAR nicht oder nicht so ausgeprägt auftreten. Die Rekonstruktionen LI 1 und K KU 1 sowie deren modifizierte Sinogramme demonstrieren deutlich, dass die Referenz-Metallsinusoide nicht die Metallsinusoide aller artefaktverursachenden Metalle abdecken. In beiden Bildern sind jeweils noch etliche Rauschartefakte vorhanden. K K 2 und RFMAR haben große Ähnlichkeiten. Unterschiede sind beispielsweise am Kieferknochen rechts oben im Bild zu erkennen. In diesem Bereich ist K K 2 etwas stärker geglättet als RFMAR. Zwischen K KU 2 und K K 1 sind vor allem in den Ausschnittsdarstellungen signifikante Unterschiede zu erkennen. Aufgrund der bei K K 1 durchgeführten Glättung der Gewichtsmatrix ergeben sich dort weit weniger Artefakte.

Der nächste Datensatz (s. Abb. 2.51(a) und 2.51(b)) kommt in der Auswertungstabelle in Kapitel 2.9 zweimal vor und erhält aus diesem Grund die Bezeichnungen DS 2 und DS 8. Wie aus den beiden Abbildungen gut zu erkennen ist, kommen offensichtlich in Abhängigkeit zur gewählten Fensterung unterschiedliche Aspekte des Bildes zur Geltung. Während sich beispielsweise in Abbildung 2.51(a) die Zähne sehr gut abzeichnen, sind Weichgewebestrukturen nur schlecht zu erkennen. In den weiteren Datensätzen ist die Fensterung jeweils möglichst so gewählt, dass die Reduktion der

Rauschartefakte besonders gut zu erkennen ist. DS 3 ist so stark von Rauschartefakten überlagert, dass in dem Artefaktbild außer Knochenkonturen fast nichts mehr zu erkennen ist. Insbesondere gehen Konturen im Bereich der Weichgewebe nahezu vollständig im Rauschen unter, die nach Anwendung von RFMAR deutlich zu erkennen sind. Da sich die Metalle in der linken oberen Bildecke beziehungsweise links oben außerhalb des Bildes befinden, liegen die „Artefaktstrahlen“ nur in einem eingeschränkten Winkelbereich, was sich in der Gewichtsmatrix niederschlägt. DS 13 sowie DS 22 liegen nur im TIFF-Format mit 256 Graustufen vor. Trotzdem bringt RFMAR auch für diese Datensätze deutliche Verbesserungen, wie für DS 13 auch der Auswertung durch Radiologen in Kapitel 2.9 zu entnehmen ist. Diese Datensätze verdeutlichen, dass RFMAR invariant gegenüber einer Skalierung der Intensitäten im Rekonstruktionsbild mit einem konstanten Faktor ist. Ein weiteres Beispiel dafür ist in Abbildung 2.53 gegeben. Für dieses Bild wurde DS 1 mit einem Laserdrucker unter einer Auflösung von 600 dpi auf handelsübliches weißes Kopierpapier ausgedruckt. Die Größe des ausgedruckten Bildes betrug  $7,5 \times 7,5 \text{ cm}^2$ . Anschließend wurde der in Abbildung 2.53(a) schwarz eingerahmte Bereich mit 200 dpi eingescannt und darauf RFMAR angewandt. Durch die Waveletanalyse werden die Metallsinusoide sehr gut detektiert, wie durch die Ähnlichkeit der Abbildungen 2.53(d) und 2.30(b) zu erkennen ist. Die vier schwarzen Kreisscheiben<sup>43</sup> ergeben sich durch den harten und damit hochfrequenten Übergang zwischen den weißen Bildrändern und dem eigentlichen Bild, weshalb diese nach Anwendung von RFMAR stark geglättet sind. Das Beispiel macht deutlich, dass es mit RFMAR prinzipiell möglich ist, CT-Bilder, die beispielsweise nur noch auf Röntgenfolie vorliegen, im Anschluss an eine Digitalisierung mit RFMAR zu bearbeiten und signifikant zu verbessern. In Abbildung 2.52 ist ein Datensatz dargestellt, der eine künstliche Struktur enthält, die dem Patienten appliziert wurde. Die kreisförmigen Strukturen, die im Artefaktbild sehr gestört sind, lassen sich nach Anwendung von RFMAR deutlich mit hoher Bildschärfe erkennen. Das Artefaktbild in Abbildung 2.54 ist ein Bildausschnitt von DS 1. Dieser Ausschnitt wurde so gewählt, dass garantiert keine Metalle im Bild liegen. Durch die Waveletanalyse werden die im Sinogramm enthaltenen Metallsinusoide sehr gut segmentiert (s. Abb 2.54(c)). Die Anwendung von RFMAR liefert auch in diesem Fall eine sehr gute Reduktion der Rauschartefakte.

---

<sup>43</sup>Aufgrund der Symmetrie im Sinogramm sind die vier Halbkreise, von denen jeweils zwei am rechten und linken Rand zu finden sind, als zwei Vollkreise zu betrachten.



(a) Original



(b) LI 1: Referenz-Metallsinusoide

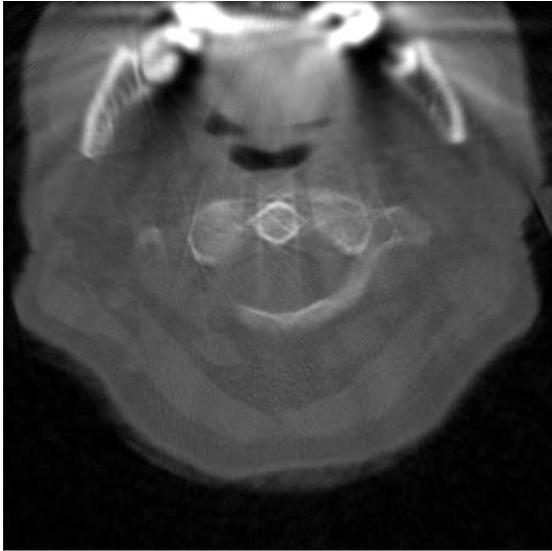


(c) LI 2: Waveletanalyse



(d) KKU 1: Referenz-Metallsinusoide

**Abbildung 2.48:** DS 1: (a) Artefaktbild. (b)-(h) Artefaktreduzierte Bilder, die sich im Artefaktreduktionsverfahren und in den verwendeten Metallsinusoiden unterscheiden.  $Z = 476$ ,  $B = 3000$ . (Fortsetzung auf nächster Seite)



(e) KKU 2: Quadtree-Zerlegung



(f) KK 1: Quadtree-Zerlegung

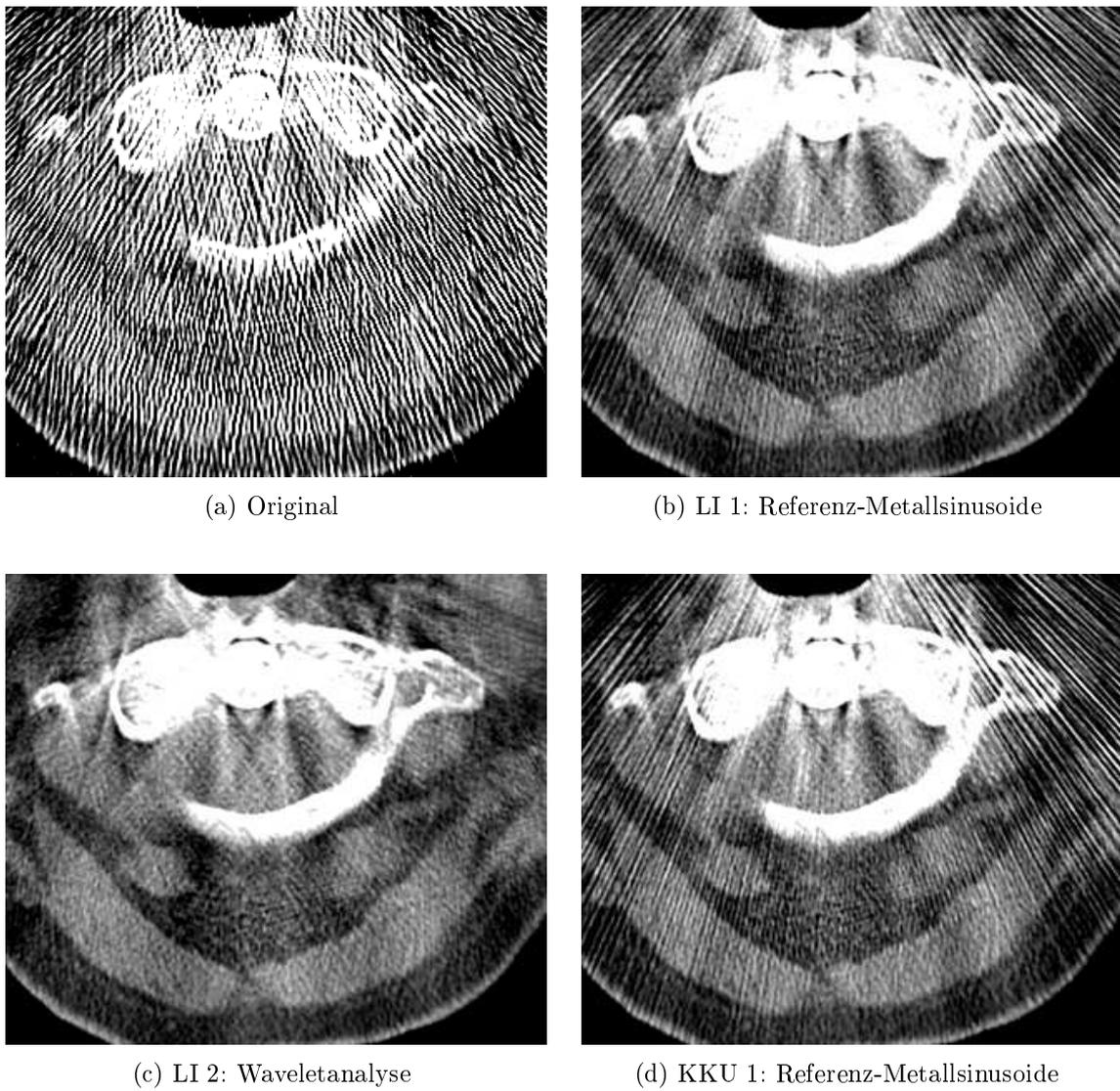


(g) KK 2: Texturanalyse (IDM)

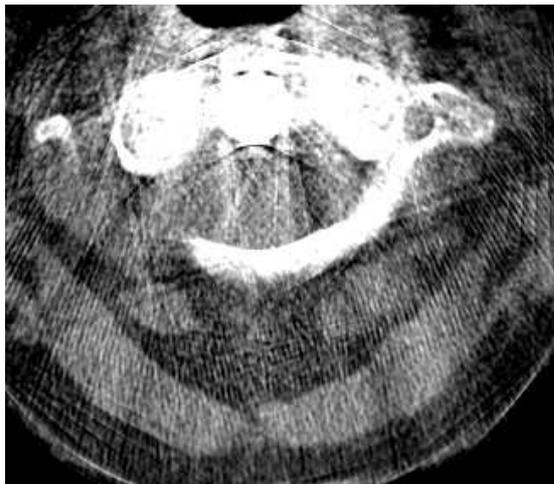


(h) RFMAR

**Abbildung 2.48:** (Fortsetzung) Weitere Rekonstruktionsbilder nach Modifikation der Pseudorohdaten.



**Abbildung 2.49:** DS 1: Ausschnitte aus den Rekonstruktionsbildern der Abbildung 2.48, jedoch mit Grauwertfenster  $Z = 26$ ,  $B = 500$ . (Fortsetzung auf nächster Seite)



(e) KKU 2: Quadtree-Zerlegung



(f) KK 1: Quadtree-Zerlegung

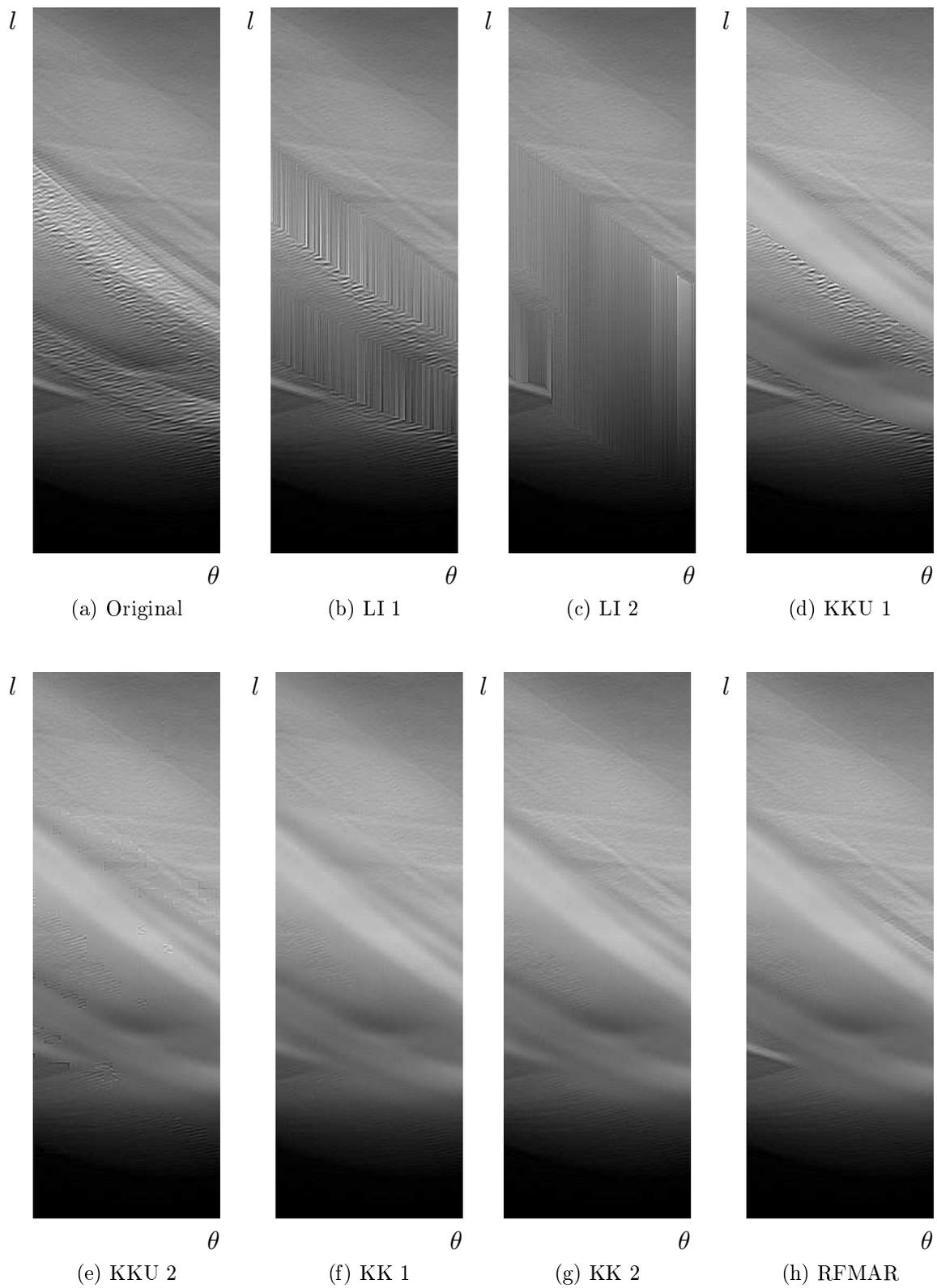


(g) KK 2: Texturanalyse (IDM)

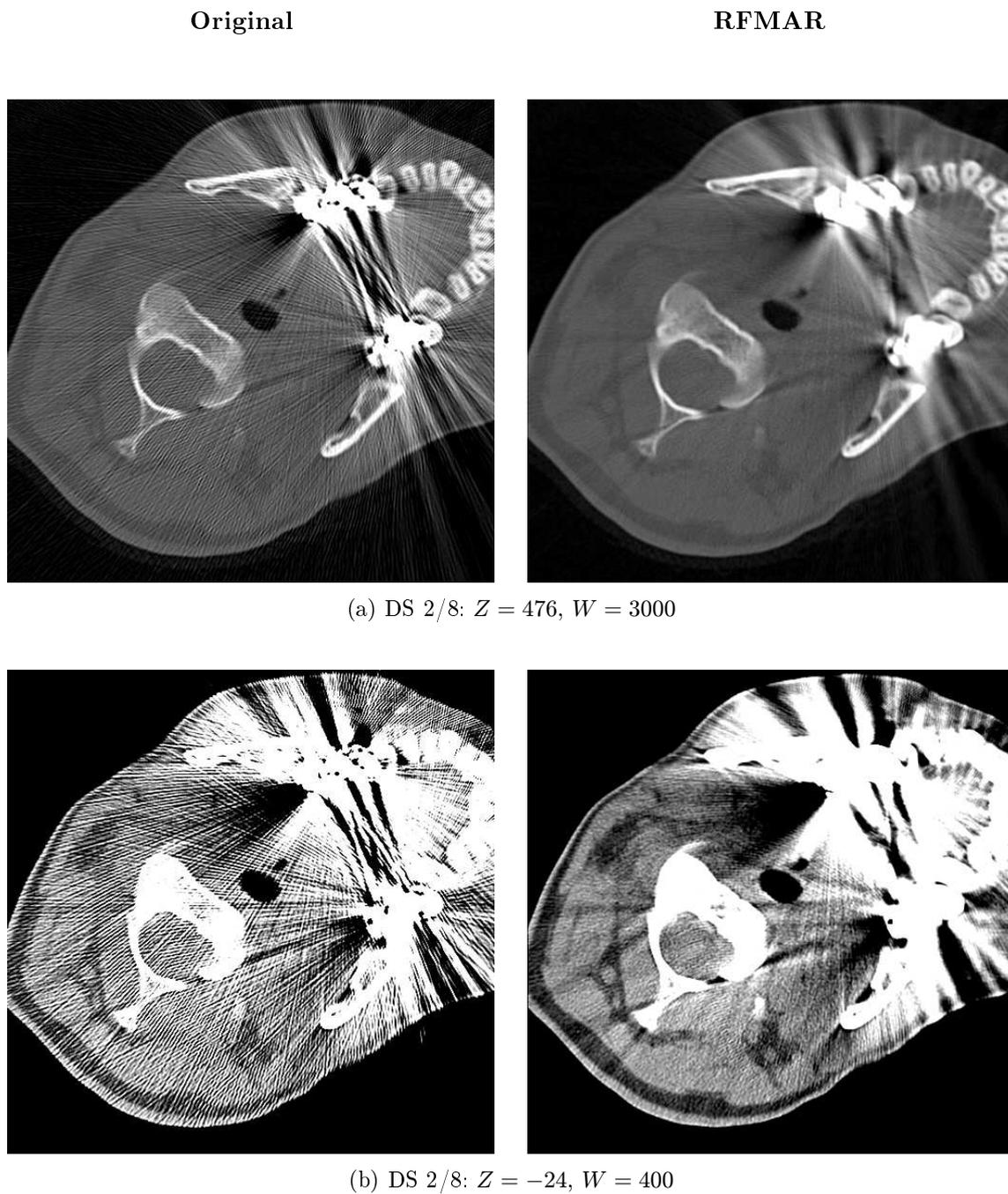


(h) RFMAR

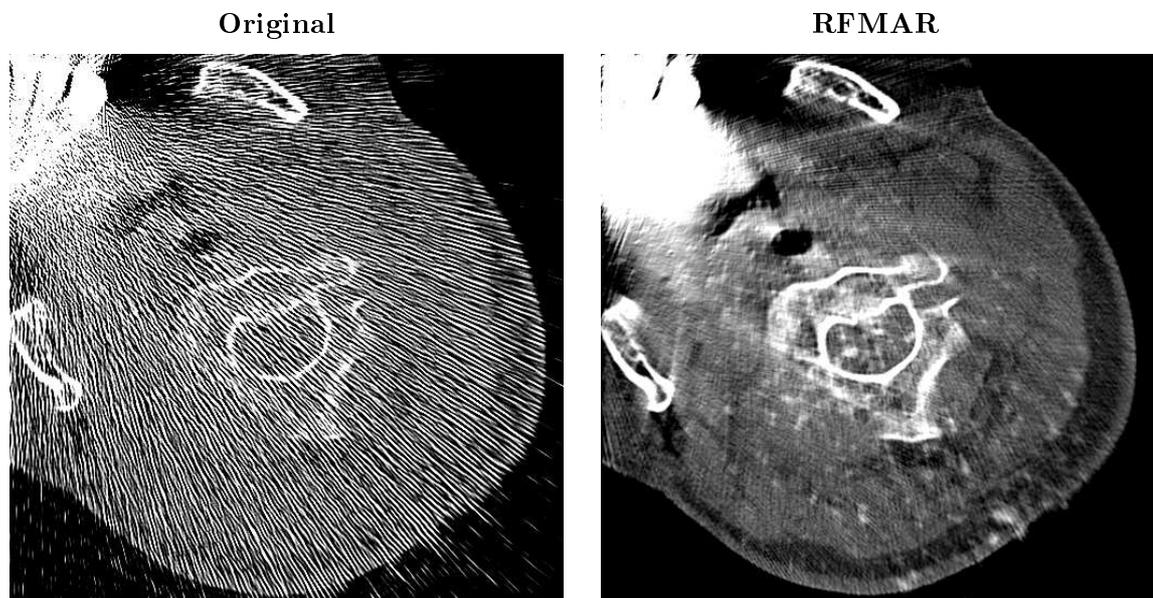
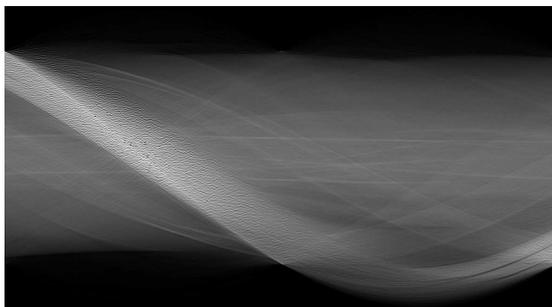
**Abbildung 2.49:** (Fortsetzung) Ausschnitte aus den Rekonstruktionsbildern der Abbildung 2.48.



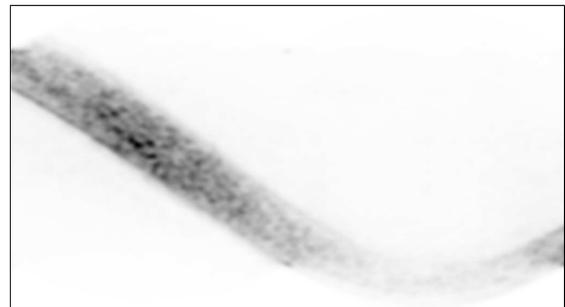
**Abbildung 2.50:** Ausschnitte der Sinogramme zu den Rekonstruktionsbildern in Abbildung 2.48. Die Ausschnitte wurden um  $90^\circ$  gedreht und die Bildschärfe künstlich erhöht.



**Abbildung 2.51:** Axialschicht mit Halswirbel in der Bildmitte. Darstellung mit zwei unterschiedlichen Fensterungen. Der Datensatz erhält sowohl die Bezeichnung DS 2 als auch DS 8, da er zweimal in der Auswertungstabelle in Kapitel 2.9 vorkommt.

(c) DS 3:  $Z = 176$ ,  $W = 800$ 

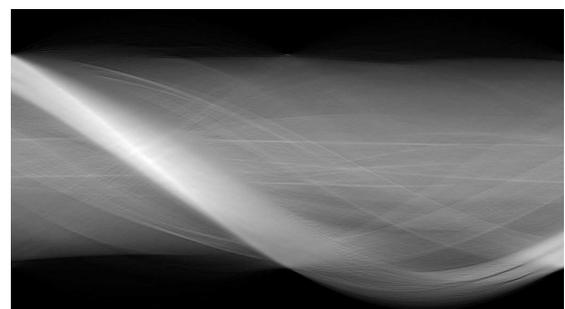
(d) Pseudoringdaten (Schärfe erhöht)



(e) Faltungsergebnis mit bior6.8 (invertiert)

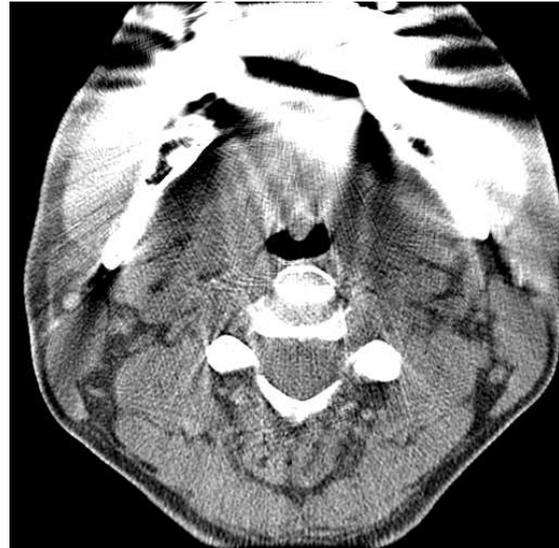
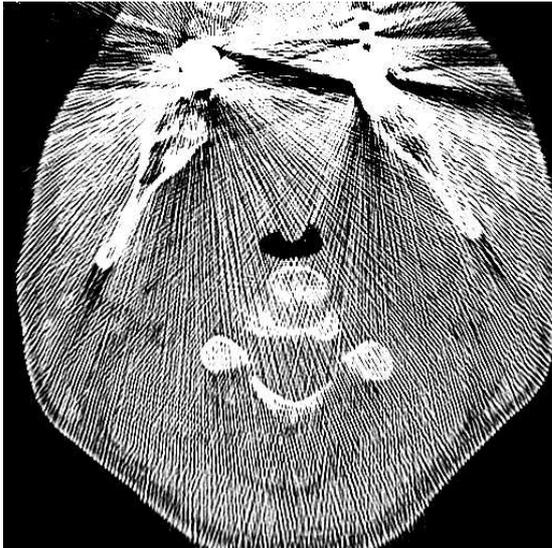


(f) Gewichtsmatrix (schwarz: 1, weiß: 0)

(g) Modifizierte Pseudoringdaten  
(Schärfe erhöht)**Abbildung 2.51:** Weiterer Beispieldatensatz.

Original

RFMAR



(h) DS 4:  $Z = -24$ ,  $W = 400$



(i) DS 5:  $Z = 176$ ,  $W = 800$

**Abbildung 2.51:** Weitere Beispieldatensätze.

Original

RFMAR

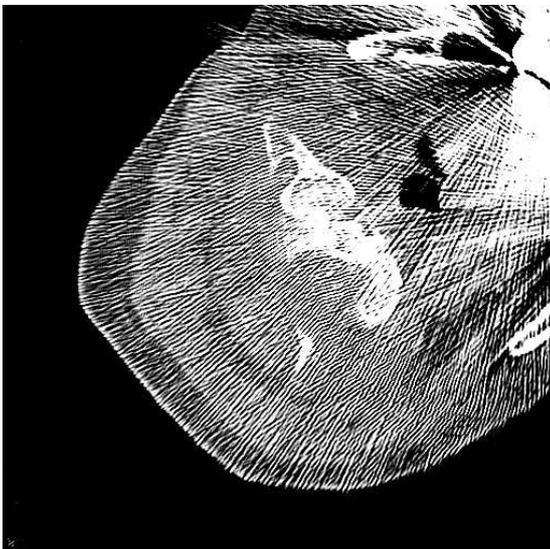
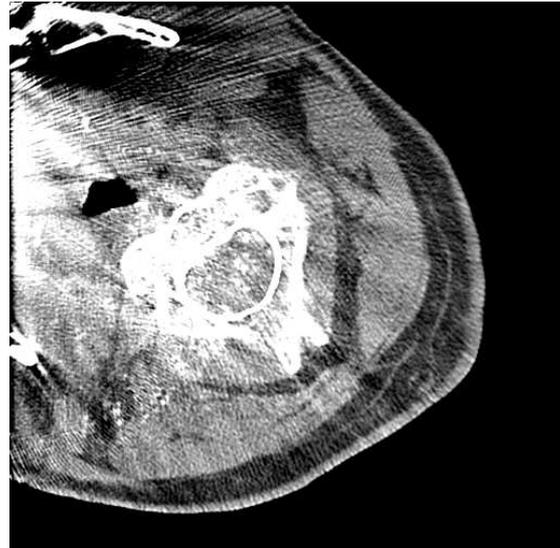
(j) DS 6:  $Z = 176$ ,  $W = 800$ (k) DS 7:  $Z = -24$ ,  $W = 400$ 

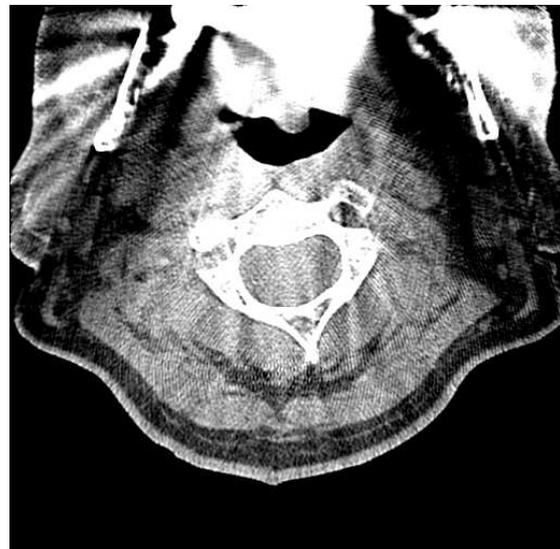
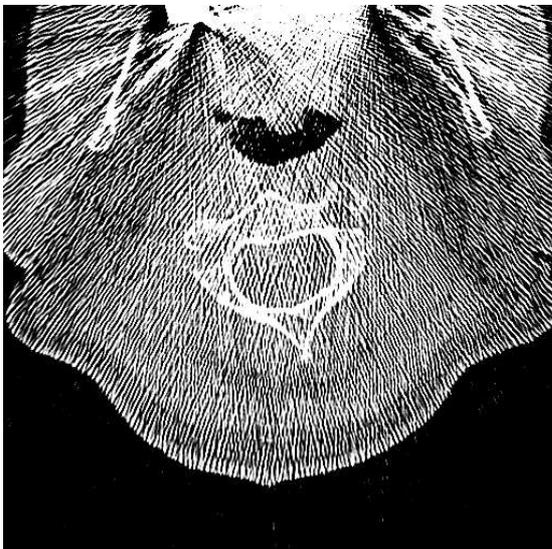
Abbildung 2.51: Weitere Beispieldatensätze.

Original

RFMAR

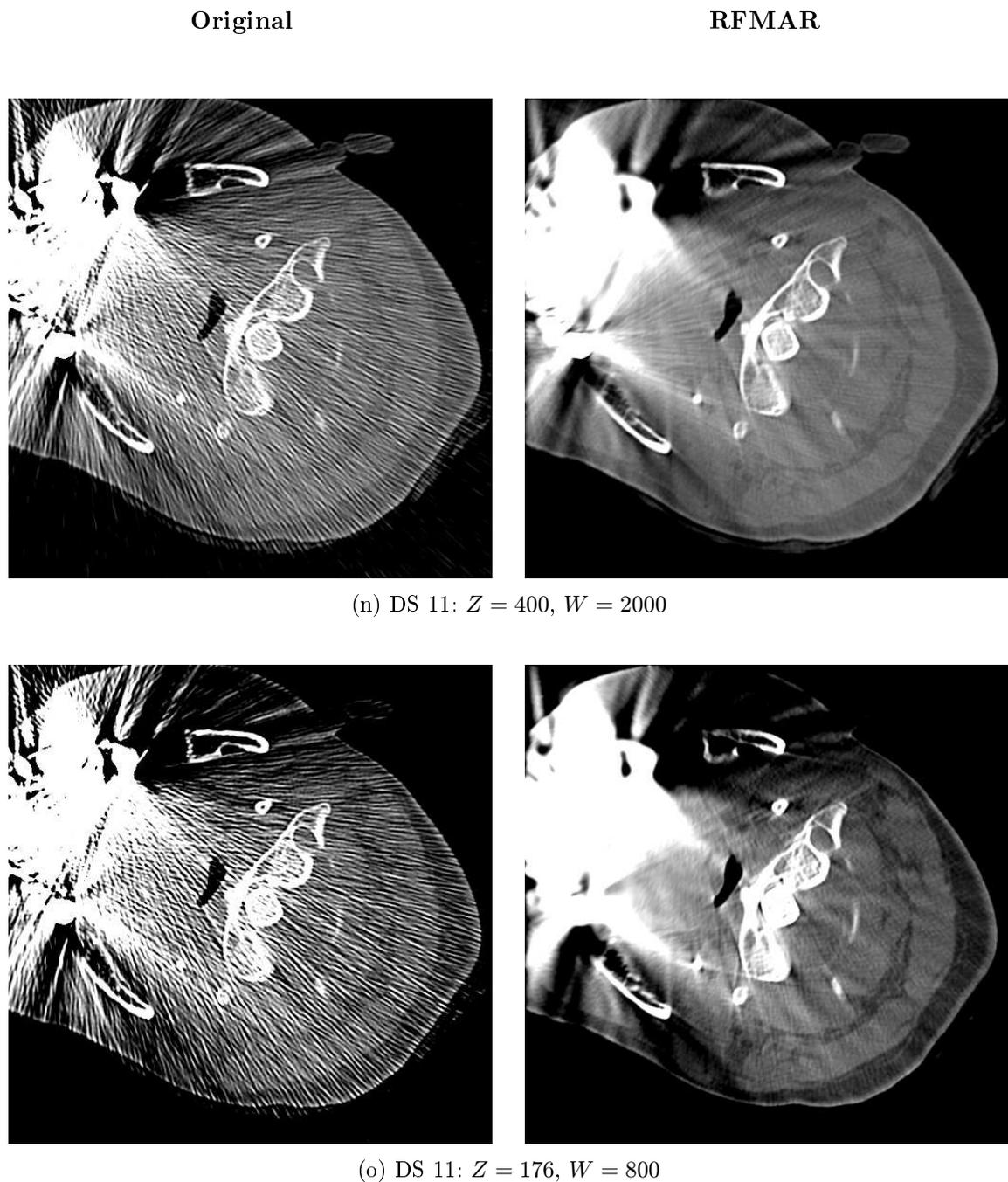


(l) DS 9:  $Z = -24$ ,  $W = 400$

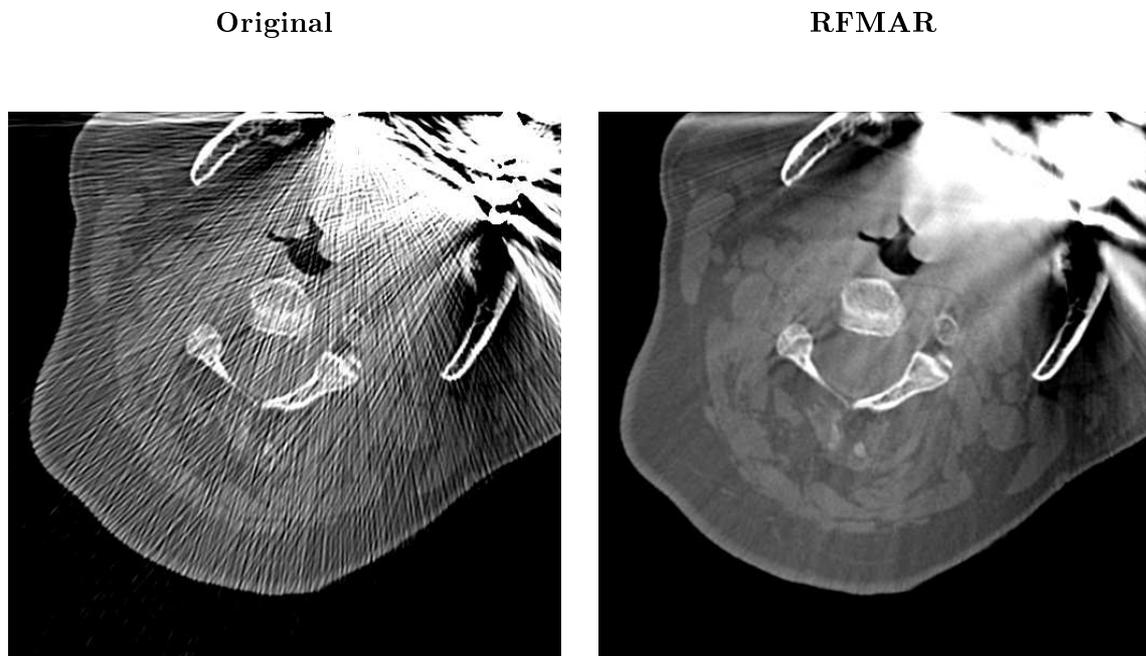


(m) DS 10:  $Z = -24$ ,  $W = 400$

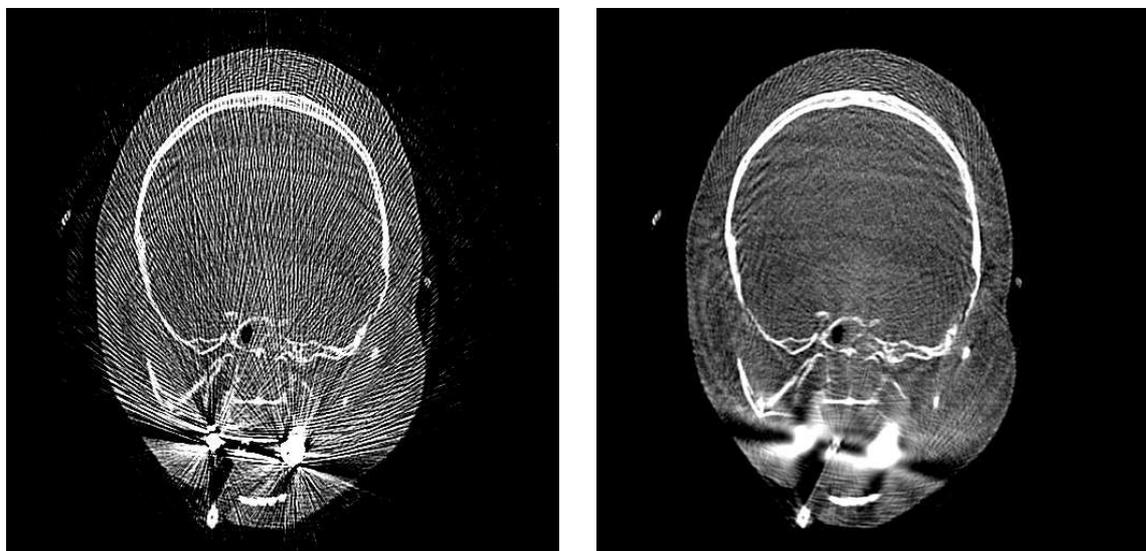
Abbildung 2.51: Weitere Beispieldatensätze.



**Abbildung 2.51:** Datensatz mit erstem Halswirbel (C1). In Kapitel 2.9 wird auf die beiden dargestellten Grauwertfensterungen gesondert eingegangen.



(p) DS 12:  $Z = 400$ ,  $W = 2000$



(q) DS 13: 256 Graustufen,  $Z = 75$ ,  $W = 90$

**Abbildung 2.51:** Weitere Beispieldatensätze. (q) Frontalschnitt des Schädels. Im unteren Bildbereich ist links und rechts jeweils die Metallfüllung eines Zahnes zu erkennen.

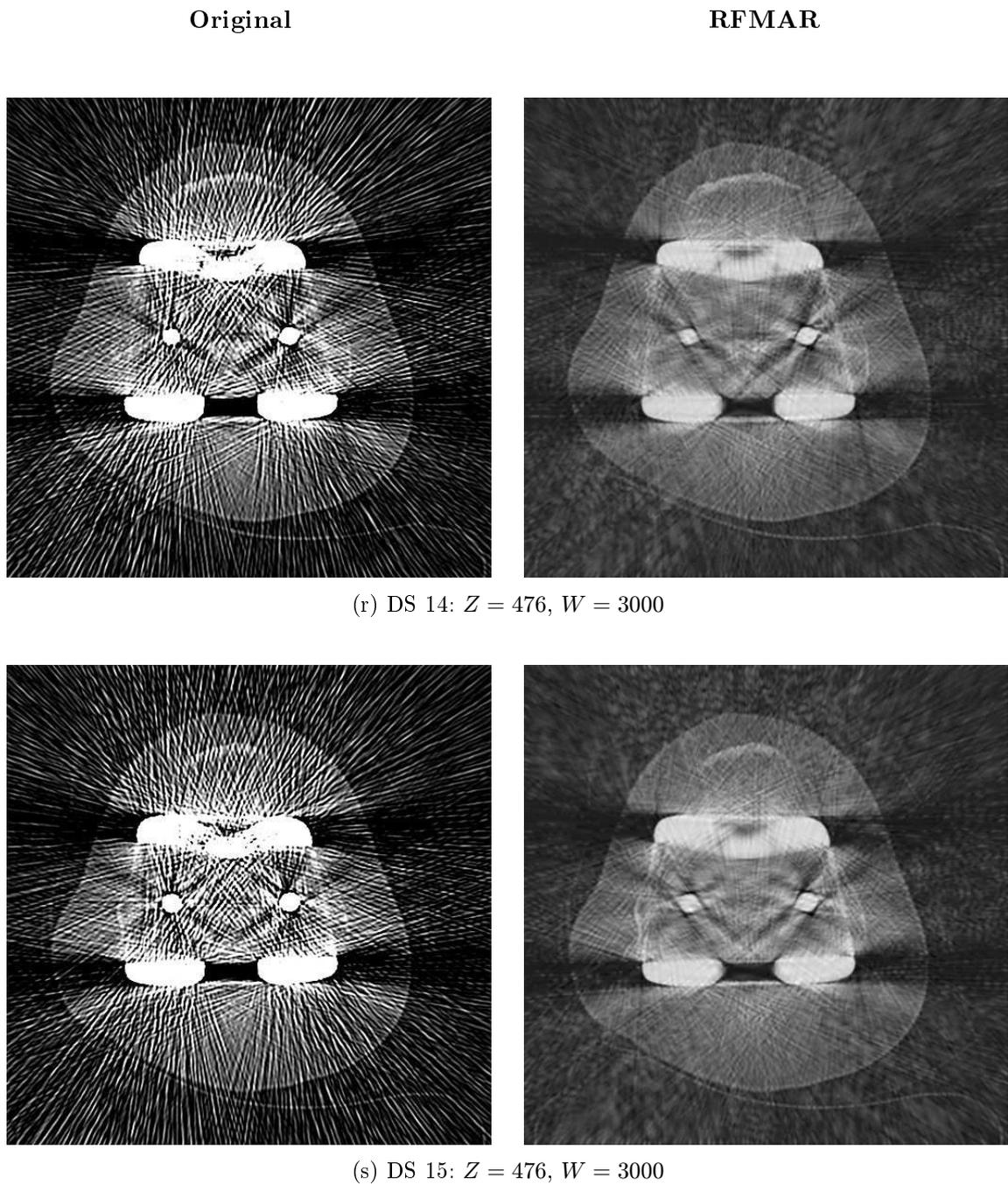
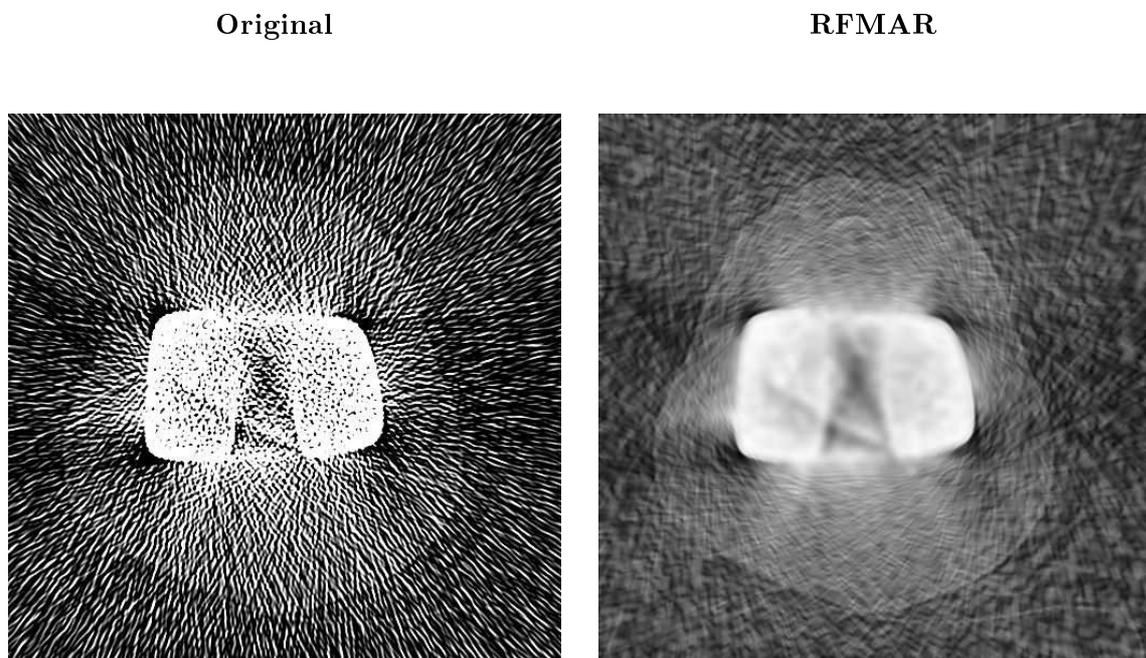
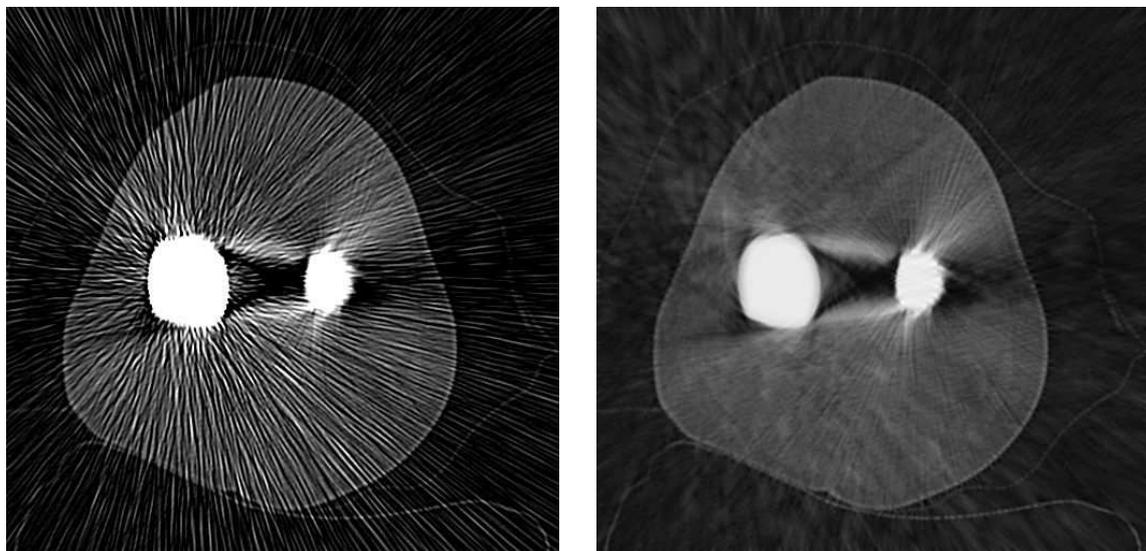
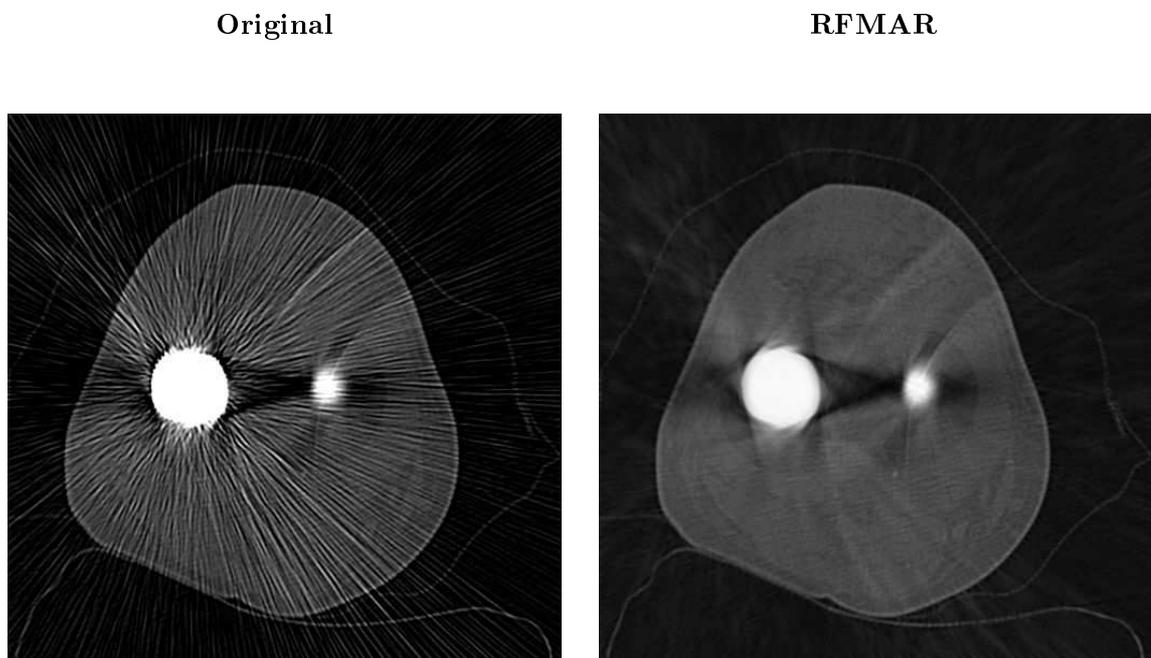
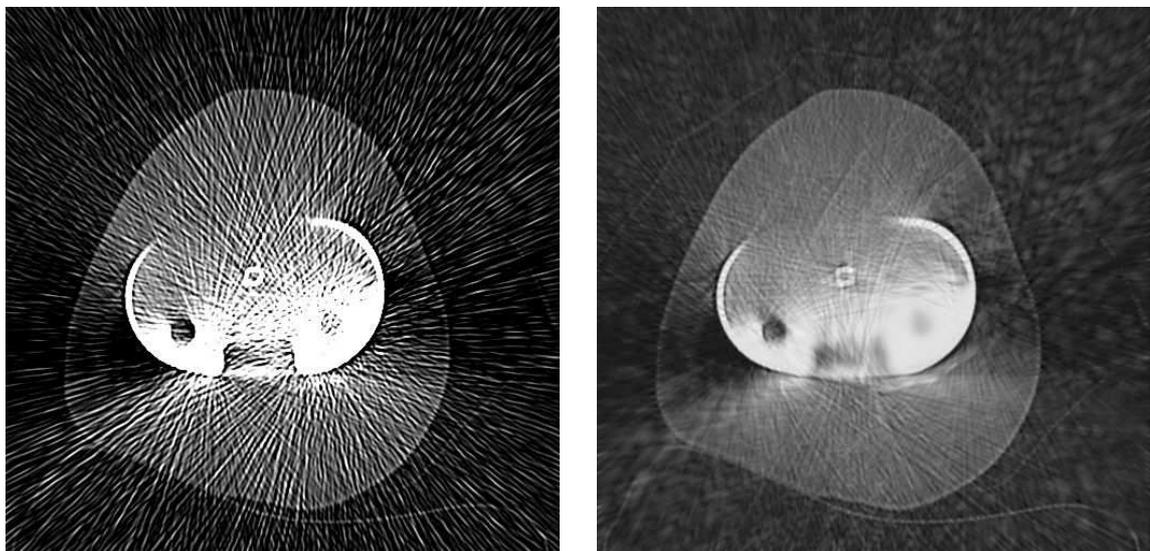


Abbildung 2.51: Schnittbilder durch das Knie bei einem künstlichen Kniegelenk.

(t) DS 16:  $Z = 476$ ,  $W = 3000$ (u) DS 17:  $Z = 476$ ,  $W = 3000$ **Abbildung 2.51:** Schnittbilder durch das Knie bei einem künstlichen Kniegelenk.

(v) DS 18:  $Z = 476$ ,  $W = 3000$ (w) DS 19:  $Z = 476$ ,  $W = 3000$ **Abbildung 2.51:** Schnittbilder durch das Knie bei einem künstlichen Kniegelenk.

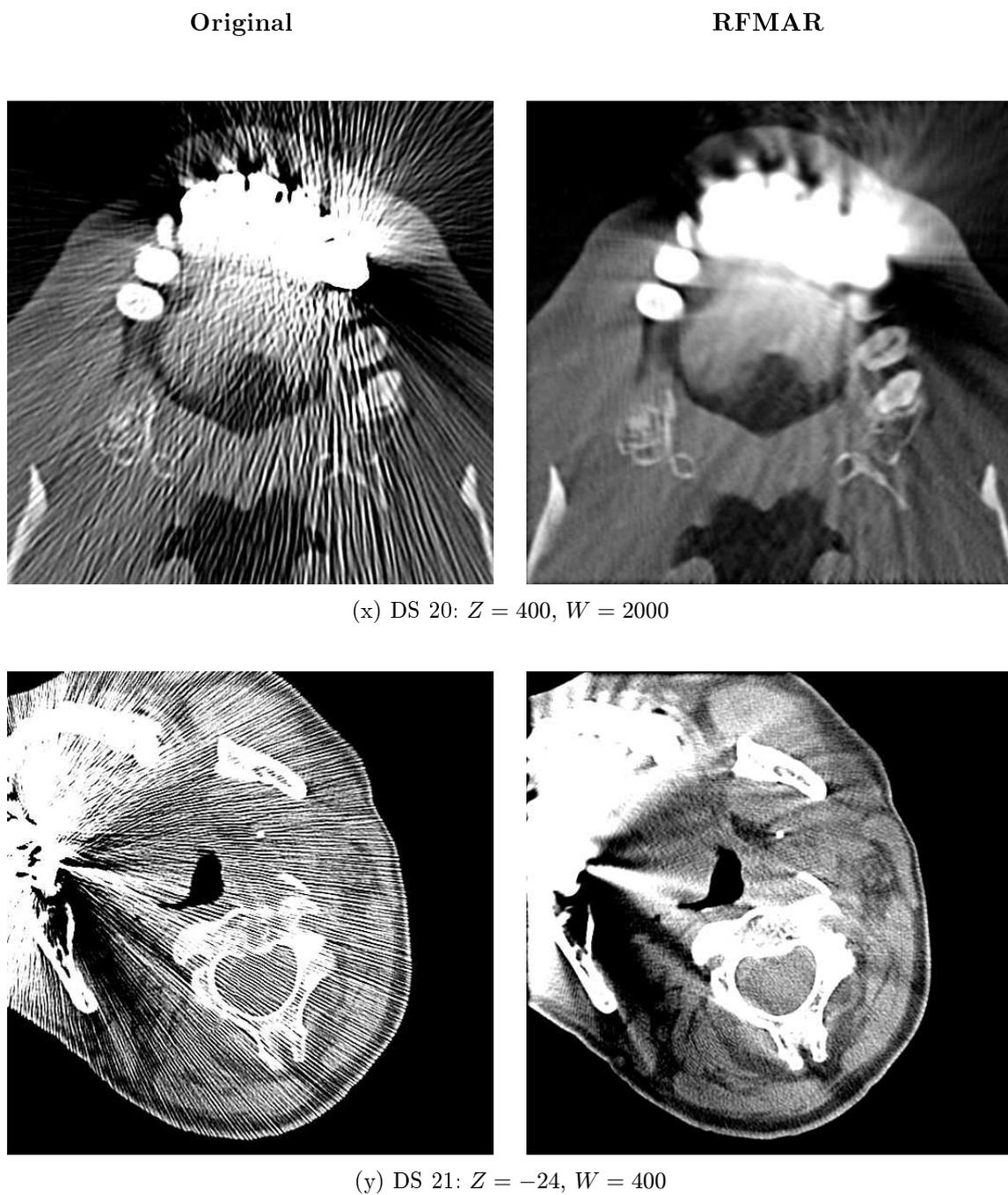
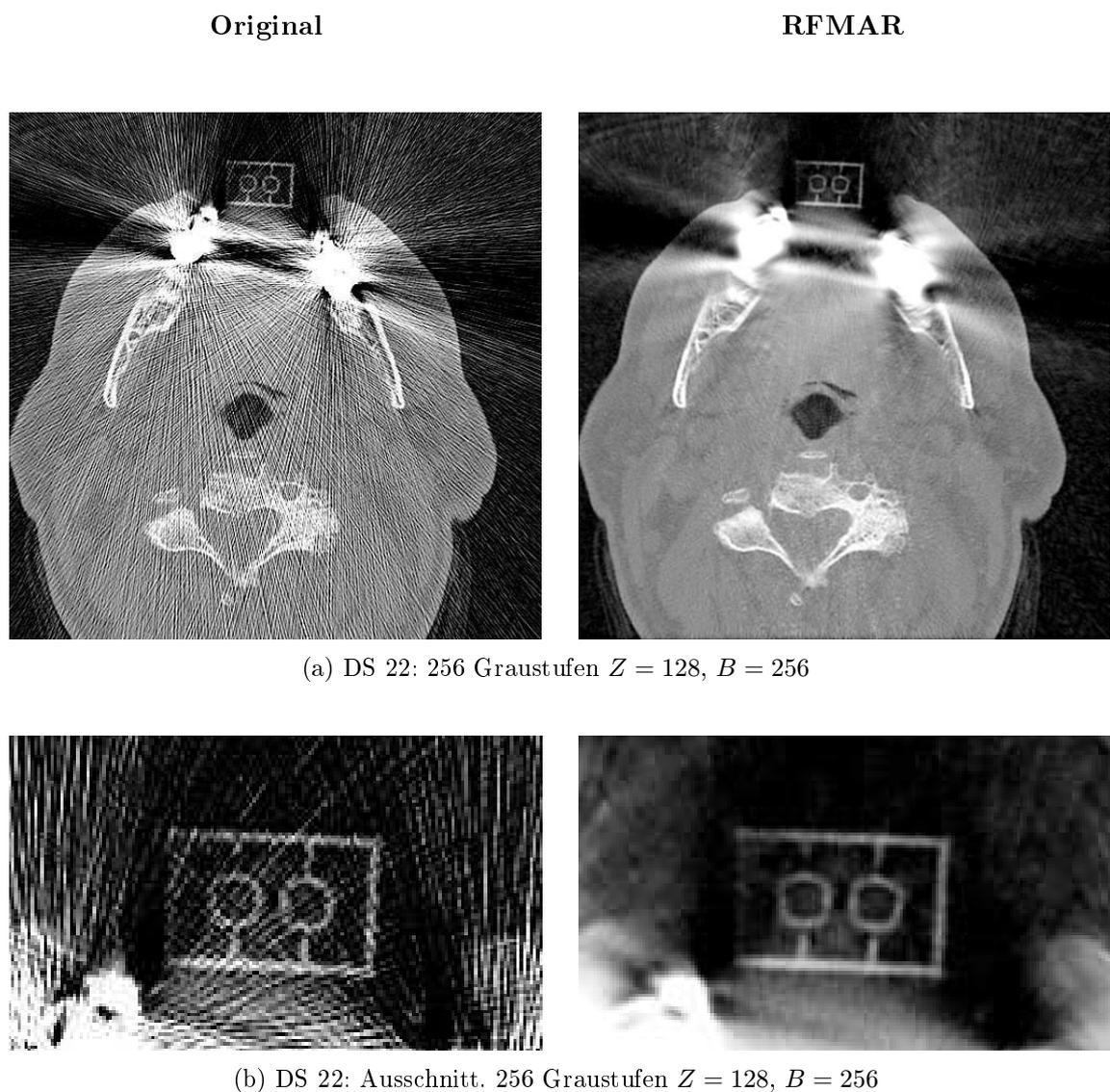
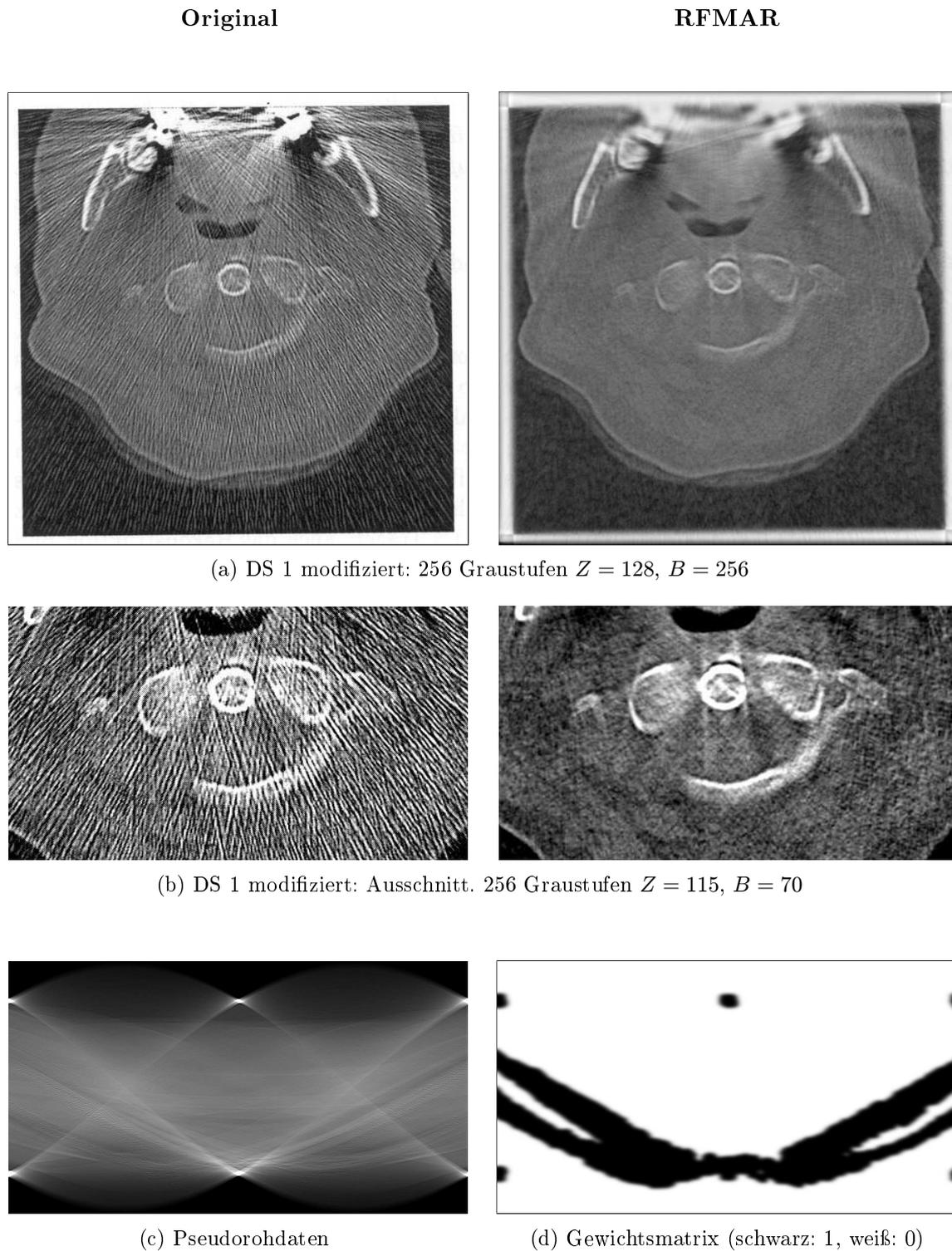


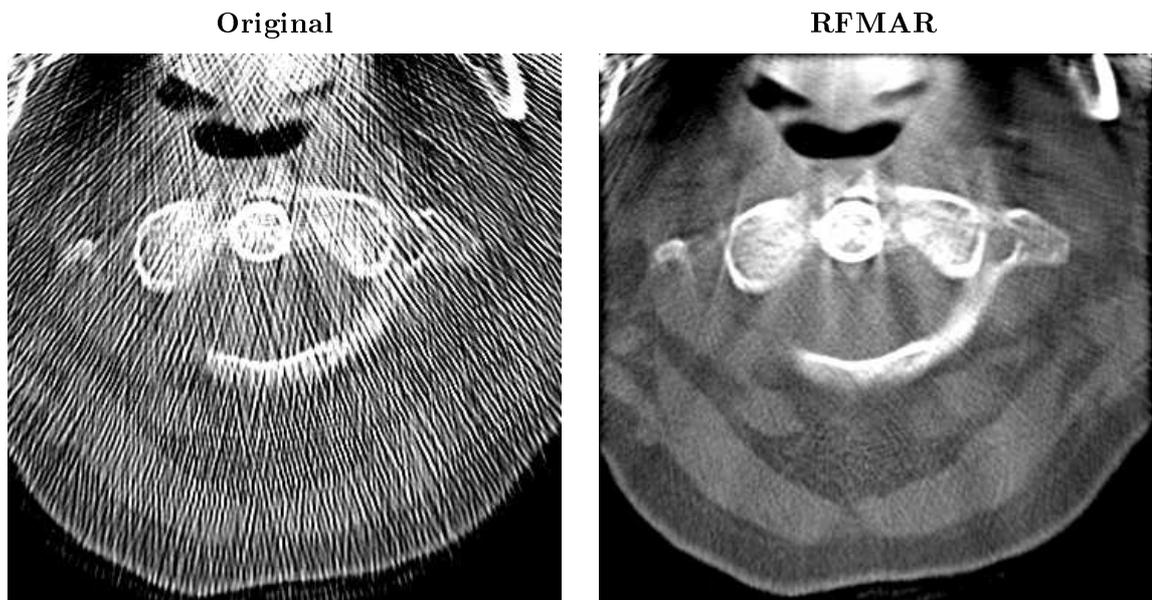
Abbildung 2.51: (x) Axialschnitt mit Kieferbogen oben im Bild.



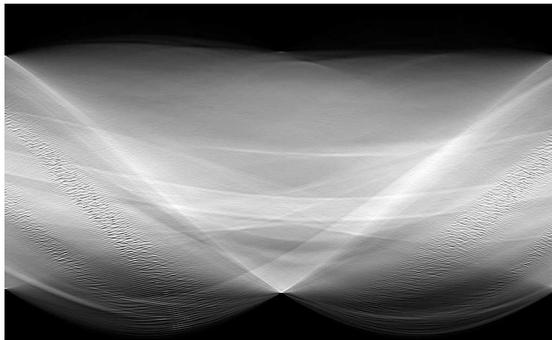
**Abbildung 2.52:** (a) Artefaktbehafteter CT-Datensatz aus einer kieferorthopädischen Anwendung mit freundlicher Genehmigung der Firma med3D [134]. Der Legostein im oberen Bildbereich dient der Referenzierung in einer medizinischen Anwendung. Nach Anwendung von RFMAR sind die im Artefaktbild stark gestörten Kreisstrukturen des Legosteins geschlossen und sehr gut zu erkennen. In allen Bildern wurde der Gammawert sowie der Kontrast künstlich erhöht.



**Abbildung 2.53:** Scan (200 dpi, 8 bit) eines Papierausdrucks von DS 1 (Abb. 1.11(a)) mit 600 dpi auf eine Größe von  $7,5 \times 7,5 \text{ cm}^2$ . Für die Radontransformation wurden 900 Projektionen berechnet. In (c) wurde die Schärfe künstlich erhöht. Die Signalspitzen im Sinogramm rühren von den weißen Rändern in (a) her. Sie treten bei ungefähr  $0^\circ$  und  $90^\circ$  auf.



(a) DS 1: Ausschnitt ohne Metalle.  $Z = 76$ ,  $B = 1000$ .



(b) Pseudorohdaten.



(c) Gewichtsmatrix (schwarz: 1, weiß: 0)

**Abbildung 2.54:** Ausschnitt. In (b) wurde zur besseren Darstellung die Bildschärfe künstlich erhöht.

## 2.9 Auswertung der Artefaktreduktion durch Radiologen

Die in Kapitel 2.8 dargestellten Datensätze DS 1 bis DS 20 wurden zur Auswertung an folgende Radiologen gegeben:

- PD Dr. med. H. Friedburg  
Radiologische Gemeinschaftspraxis im Zeppelinzentrum  
Zeppelinstraße 2  
76185 Karlsruhe
- PD Dr. med. Dr. rer. nat U. Mende  
Klinische Radiologie/Strahlentherapie  
Radiologische Universitätsklinik  
Im Neuenheimer Feld 400  
69120 Heidelberg
- Prof. Dr. med. P. Reimer  
Zentralinstitut für Bildgebende Diagnostik  
Städtisches Klinikum Karlsruhe  
Moltkestraße 90  
76133 Karlsruhe
- Prof. Dr. med. E. P. Strecker  
Abteilung für Radiologie und Nuklearmedizin  
Diakonissenkrankenhaus Karlsruhe  
Diakonissenstraße 28  
76199 Karlsruhe

Die benannten Radiologen haben ihrerseits die Datensätze an Kollegen beziehungsweise Mitarbeiter weitergeleitet, so dass die Daten von insgesamt 13 Radiologen ausgewertet wurden. Unter diesen haben vier Radiologen gemeinsam die Bilder ausgewertet. Insgesamt wurden somit zehn unterschiedliche Bewertungen abgegeben. Die Radiologen erhielten jeweils eine Powerpoint-Datei, in der die zwanzig Datensätze nacheinander abfolgten, jeweils das Original und an der selben Position in der nächsten Folie das artefaktreduzierte Bild, bis auf einen Datensatz, der weiter unten beschrieben wird, beide in identischer Fensterung. Die beschriebene Anordnung ermöglichte einen schnellen Vergleich zwischen dem Original und dem artefaktreduzierten Bild. Bei einigen Datensätzen wurden mehrere Fensterungen verwendet um einen besseren Gesamteindruck des Bildes zu ermöglichen. Für die Auswertung wurde den Radiologen eine Tabelle ausgehändigt, in die Bildveränderungen zwischen dem Original und dem artefaktreduzierten Bild anhand einer ganzzahligen Skala zwischen  $-3$  und  $3$  anzugeben waren. Die Bedeutung der einzelnen Werte ist der linken Spalte in Tabelle 2.5 zu entnehmen. Die Skala entspricht somit weitgehend der von

ESKICIOGLU [47] verwendeten Skala, die in der rechten Spalte der Tabelle erläutert wird.

| Skala | Skala in dieser Arbeit            | Skala nach ESKICIOGLU [47] |
|-------|-----------------------------------|----------------------------|
| -3    | Interpretation nicht mehr möglich | Much worse                 |
| -2    | Interpretation erschwert          | Worse                      |
| -1    | Bild optisch schlechter           | Slightly worse             |
| 0     | bringt nichts                     | Same                       |
| 1     | Bild optisch besser               | Slightly better            |
| 2     | Interpretation erleichtert        | Better                     |
| 3     | Interpretation erst jetzt möglich | Much better                |

**Tabelle 2.5:** Bewertungsskala

Die Auswertungsergebnisse sind in Tabelle 2.6 aufgelistet. Ein Datensatz besteht jeweils aus den mit identischem Grauwert hinterlegten Spalten. Jede Spalte steht für eine Grauwertfensterung. Für DS 1 lagen beispielsweise zwei unterschiedliche Grauwertfensterungen vor. Die Zeilen enthalten die Bewertungen der 10 Radiologen beziehungsweise des Radiologenteams<sup>44</sup>. Das Fragezeichen bei der Auswertung von Radiologe 2 in DS 14 gibt an, dass für diesen Datensatz keine Bewertung angegeben wurde. Die Dezimalbrüche in der letzten Zeile der Tabelle geben den im Durchschnitt abgegebenen Wert für den jeweiligen Datensatz an.

Je nach Grauwertfensterung ergeben sich zum Teil bei ein und demselben Datensatz unterschiedliche Bewertungen. Bei Radiologe 2 differieren die Werte für DS 2 sogar von 0 bis 2. Keiner der Radiologen wusste, dass DS 2 und DS 8 identisch sind. Es ist interessant, dass außer Radiologe 10 alle anderen die Datensätze unterschiedlich bewerten. Das verdeutlicht, wie schwierig eine subjektive Bewertung von CT-Bildern selbst für Radiologen ist, die täglich mit vielen CT-Bildern konfrontiert werden. Derselbe Datensatz kann eventuell durch den Eindruck anderer Datensätze plötzlich eine andere Bewertung erhalten. Eine weitere Besonderheit ist DS 11. Die Radiologen gingen davon aus, dass die Grauwertfensterung im Original und im artefaktreduzierten Bild jeweils identisch ist. Bei DS 11 wurden jedoch unterschiedliche Grauwertfensterungen gewählt. Als Artefaktbild wurde das Original in Abbildung 2.51(n), als artefaktreduziertes Bild hingegen das RFMAR-Bild in Abbildung 2.51(o). Interessant sind nun die unterschiedlichen Bewertungen der Radiologen. Von Radiologe 1 wurde das Bild mit dem höchsten Wert versehen, während Radiologe 3 und Radiologe 8 das Bild mit  $-1$  bewerteten. Es ist anzunehmen, dass die Radiologen, die DS 11 gut bewerteten, die darin sehr kontrastreichen Details in den Weichteilen hauptsächlich beurteilten, während diejenigen Radiologen, die eine schlechte Bewertung abgaben, die Tatsache bewerteten, dass das im Artefaktbild deutlich sichtbare Ohr in dem artefaktreduzierten Bild aufgrund der anderen Fensterung nicht mehr zu sehen ist. Die starke Varianz der Bewertungen in DS 11 ist ein Hinweis darauf, dass es für die

<sup>44</sup>Der Einfachheit halber wird das Team im Weiteren wie ein Radiologe betrachtet.

radiologische Qualität eines Bildes eine große Rolle spielt, was für Bildinhalte für den Radiologen wichtig sind.

|    | DS 1 | 2     | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8     | 9    | 10   |
|----|------|-------|------|------|------|------|------|-------|------|------|
| 1  | 2 1  | 2 2 2 | 3 3  | 3 3  | 3 3  | 2 2  | 3 3  | 1 1 1 | 3    | 3    |
| 2  | 2 3  | 1 2 0 | 1 1  | 1 1  | 2 2  | 2 2  | 1 0  | 0 1 0 | 0    | 1    |
| 3  | 2 3  | 2 2 2 | 3 3  | 2 3  | 3 3  | 2 3  | 2 1  | 1 2 2 | 3    | 2    |
| 4  | 1 1  | 1 1 1 | 1 1  | 2 2  | 1 1  | 1 1  | 1 1  | 1 1 2 | 1    | 1    |
| 5  | 1 1  | 1 1 1 | 1 1  | 2 2  | 1 2  | 1 1  | 1 2  | 1 1 2 | 2    | 1    |
| 6  | 1 1  | 1 1 1 | 1 1  | 2 2  | 1 1  | 1 1  | 1 0  | 2 1 1 | 1    | 1    |
| 7  | 2 2  | 3 3 3 | 2 2  | 3 3  | 3 3  | 3 3  | 1 1  | 1 1 1 | 0    | 1    |
| 8  | 1 2  | 0 1 1 | 2 2  | 1 2  | 2 2  | 1 1  | 1 0  | 1 1 1 | 1    | 2    |
| 9  | 1 2  | 2 2 1 | 1 1  | 2 2  | 2 1  | 1 1  | 2 1  | 0 1 1 | 1    | 1    |
| 10 | 2 2  | 2 2 2 | 2 2  | 2 2  | 2 2  | 2 2  | 2 2  | 2 2 2 | 2    | 2    |
|    | 1,65 | 1,53  | 1,70 | 2,10 | 2,00 | 1,65 | 1,30 | 1,17  | 1,40 | 1,50 |

|    | DS 11 | 12   | 13    | 14   | 15   | 16   | 17   | 18   | 19   | 20   |
|----|-------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1  | 3     | 2    | 2 2 2 | 1    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1 1  |
| 2  | 2     | 2    | 1 1 2 | ?    | 1    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1 1  |
| 3  | -1    | 1    | 1 1 1 | 1    | 1    | 2    | 1    | 1    | 1    | 1 1  |
| 4  | 1     | 2    | 1 1 1 | 0    | 0    | 0    | 1    | 1    | 1    | 1 1  |
| 5  | 1     | 1    | 1 2 2 | 1    | 1    | 0    | 0    | 1    | 1    | 1 1  |
| 6  | 1     | 2    | 1 1 1 | 0    | 1    | 0    | 1    | 2    | 1    | 1 1  |
| 7  | 0     | 3    | 1 1 1 | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 2 2  |
| 8  | -1    | 2    | 1 1 1 | 2    | 2    | 1    | 1    | 0    | 1    | 1 2  |
| 9  | 2     | 2    | 1 0 0 | 0    | 1    | 0    | 1    | 1    | 0    | 1 1  |
| 10 | 2     | 2    | 2 2 2 | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2    | 2 2  |
|    | 1,00  | 1,90 | 1,23  | 0,78 | 1,00 | 0,50 | 0,70 | 0,80 | 0,70 | 1,25 |

**Tabelle 2.6:** Auswertung der Datensätze DS 1 bis DS 20 von insgesamt 13 Radiologen, wobei vier Radiologen eine Gemeinschaftswertung abgaben.

Insgesamt zeichnet sich bei der Auswertung ein sehr positives Bild von RFMAR ab. Am schlechtesten schneidet das Kniebild DS 16 ab, das fast alle Radiologen mit 0 bewerteten. Außer bei DS 11 finden sich überhaupt keine negativen Bewertungen. Etliche Bilder werden von einzelnen Radiologen sogar mit 3 bewertet. Die Auswertung von nur 20 beziehungsweise 19 Datensätzen genügt zwar nicht für eine fundierte Aussage über die diagnostische Bildqualität von RFMAR, rechtfertigt jedoch aufgrund der durchweg guten Ergebnisse den praktischen Einsatz von RFMAR.

## 2.10 Kontraindikationen

RFMAR wurde für die Reduktion von Rauschartefakten konzipiert. Eine Anwendung von RFMAR auf artefaktbehaftete CT-Bilder, die nur wenige Rauschartefakte enthalten, kann zu einer starken Glättung des Bildes führen, wie exemplarisch in Abbildung 2.55 dargestellt wird. In Abbildung 2.55(a) sind von der Hüfte rechts im Bild ausgehende geringe Rauschartefakte zu erkennen. Das Rauschen im Bild ist insgesamt niedrig. Trotzdem weist ein Teil des Sinogramms eine höhere Rauschvarianz gemäß der Waveletanalyse auf, wie in der Gewichtsmatrix zu erkennen ist<sup>45</sup> (s. Abb. 2.55(c)). Im artefaktreduzierten Bild sind zwar die Rauschartefakte erfolgreich reduziert, insgesamt ist die Bildqualität aufgrund der starken Glättung jedoch schlechter als im Artefaktbild. Eine Anwendung von RFMAR empfiehlt sich also nicht in diesem Fall. Je stärker die Rauschartefakte im Artefaktbild sind, desto eher lohnt sich eine Anwendung von RFMAR. Im folgenden Abschnitt wird beschrieben, wie sich eine schnelle automatische Klassifikation stark artefaktbehafteter Bilder durchführen lässt.

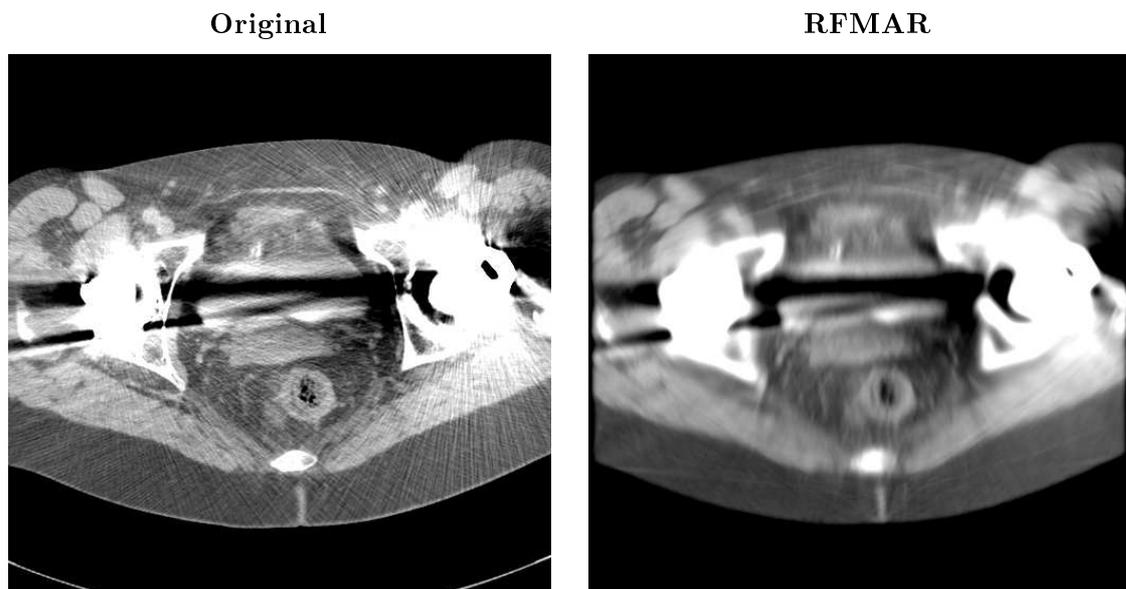
## 2.11 Klassifikation rauschartefaktbehafteter Bilder

Eine mögliche Anwendung von RFMAR ist die automatische Artefaktreduktion von CT-Volumendaten beispielsweise im Stapelbetrieb. Häufig sind nicht alle Schichten eines CT-Volumens stark artefaktbehaftet. Eine Anwendung von RFMAR auf Bilder, die nur wenige Rauschartefakte enthalten, kann jedoch zu schlechten Ergebnissen führen (vgl. Kap. 2.10). Es ist somit wünschenswert, automatisch diejenigen Schichten zu bestimmen, die stark von Rauschartefakten überlagert sind, um auf diese anschließend RFMAR anzuwenden. Das Klassifikationsverfahren sollte möglichst effizient sein und dabei eine hohe Trefferquote erzielen. Im Folgenden wird ein solches Verfahren vorgestellt. Die Grundidee bei diesem Verfahren ist, dass sich medizinische CT-Bilder in der Regel aus verschiedenen annähernd homogenen Objekten zusammensetzen. Ein Differenzbild  $\Delta$  der pixelweise Differenzbeträge zwischen dem ursprünglichen Bild  $f$  und dem geringfügig um  $\mathbf{v} := (v_x, v_y)$  in der Bildebene verschobenen CT-Bild, das heißt

$$\Delta(x, y) := |(f(x, y)) - (f(x - v_x, y - v_y))|, \quad (2.26)$$

liefert vor allem an den Gewebeübergängen hohe Werte. Innerhalb der „homogenen“ Objekte ergeben sich nur geringe Differenzen. Ist das CT-Bild jedoch von Rauschartefakten überlagert, ergeben sich an vielen Stellen im Differenzbild hohe

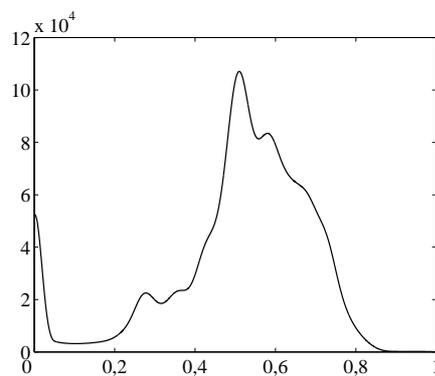
<sup>45</sup>Die sechs senkrechten Streifen in der Gewichtsmatrix sind auf den virtuellen Aufnahmeprozess zurückzuführen. Diese Bereiche werden aufgrund des geringen Rauschens im Sinogramm in diesem Fall auch segmentiert.

(a)  $Z = -24, B = 400$ 

(b) Pseudorohdaten



(c) Gewichtsmatrix(schwarz:1, weiß:0)



(d) Geglättetes Histogramm

**Abbildung 2.55:** Artefaktbehafteter Axialschnitt auf Höhe der Hüften. Links und rechts im Bild befindet sich je ein künstliches Hüftgelenk.

Werte, da die Artefaktstrukturen der Rauschartefakte nicht parallel liegen, sondern sich radial von den Metallen ausbreiten. Als Maß eignet sich das von HARALICK ET AL [74] vorgeschlagene Maß *Kontrast (CON)*, das auf der in Kapitel 2.4.2 definierten Cooccurrence-Matrix  $C_{\mathbf{v}}$  beruht und folgendermaßen definiert ist:

$$\text{CON}_{\mathbf{v}} : (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{(k,l) \in G \times G} (k-l)^2 C_{\mathbf{v}}(k,l). \quad (2.27)$$

Je größer  $\text{CON}_{\mathbf{v}}(f)$ , desto höher ist der Haralick-Kontrast und desto höher ist auch die Wahrscheinlichkeit, dass Rauschartefakte im Bild vorhanden sind. Im Gegensatz zu Kapitel 2.4.2, in dem die lokalen Eigenschaften des Sinogramms im Mittelpunkt standen, wird hier ein globales Maß für das gesamte Bild berechnet. Dadurch kann die Berechnung auch sehr effizient erfolgen. Hierfür ist es jedoch zusätzlich erforderlich, die Anzahl von Graustufen möglichst gering zu halten, da der Aufwand quadratisch mit der Anzahl der verwendeten Graustufen steigt. Eine weitere Effizienzsteigerung ergibt sich dadurch, dass die Cooccurrence-Matrix nur anhand einer Teilmenge des Bildes bestimmt wird. Dies wird dadurch erreicht, dass in  $x$ - sowie in  $y$ -Richtung nur jedes  $n$ -te Bildpunktpaar in die Berechnung der Cooccurrence-Matrix einfließt. Im Folgenden wird anhand eines CT-Volumens die Abhängigkeit des Haralick-Kontrasts von den beschriebenen Parametern, das heißt der Anzahl Graustufen  $|G|$  im Bild und von  $n$  sowie dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{v}$ , untersucht. Um dabei die Haralick-Kontraste besser vergleichen zu können, die sich bei der Wahl unterschiedlicher Grauwerte ergeben, wird im Weiteren folgende abgeänderte Form des Haralick-Kontrasts verwendet:

$$\text{CON}_{\mathbf{v}} : (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \rightarrow G) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \sum_{(k,l) \in G \times G} \left( \frac{k-l}{|G|} \right)^2 C_{\mathbf{v}}(k,l). \quad (2.28)$$

Der Volumendatensatz besteht aus einem Stapel von 42 aufeinanderfolgenden Axialschichten im DICOM-Format aus dem Bereich der oberen Halswirbelsäule. Die Schichten 32 bis 38 weisen hohe Rauschartefakte auf, in den übrigen Schichten sind keine oder nur geringe Artefakte vorhanden. In Abbildung 2.56 wird jeweils einer der Parameter variiert:

In Abbildung 2.56(a) wird die Anzahl der Grauwerte variiert, auf die jeweils die Intensitäten in den Bildern abgebildet werden. Die Schrittweite liegt jeweils fest bei  $n = 16$ , für den Verschiebungsvektor wurden die vier Vektoren  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$  und  $(-1, 1)$  mit den Orientierungen  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $135^\circ$  gewählt, das heißt bis auf Symmetrie der Cooccurrence-Matrix alle Vektoren mit  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$ . Die vier resultierenden Cooccurrence-Matrizen wurden pixelweise addiert und gemittelt mit der Anzahl der Vektoren, um eine bessere Vergleichbarkeit der Werte zu erzielen. Die maximale Anzahl von Graustufen entspricht mit 4.096 Werten dem ganzzahligen Wertebereich der CT-Bilder. Getestet werden alle Zweierpotenzen von 16 bis 4.096. Die Schichten 32 bis 38 lassen sich schon bei 16 Graustufen erstaunlich gut von den restlichen Schichten unterscheiden. Für  $|G| \in \{32, 64, 128, 256\}$  sind die Kurven nahezu identisch. Im

Vergleich zu der Kurve von  $|G| = 16$  sind bei diesen Kurven die minimalen Abstände zwischen Werten der beiden Klassen größer, wodurch sich eine stabilere Klassifikation ergibt. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die nächstgrößere Anzahl von Graustufen, das heißt  $|G| = 32$ , gewählt.

In Abbildung 2.56(b) werden die Schrittweiten variiert. Da die Varianz der Kontraste innerhalb der Klasse der nicht oder nur geringfügig artefaktbehafteten Schichten für  $|G| = 512$  geringer ist als für  $|G| = 32$ , wird hier für die Darstellung  $|G| = 512$  gewählt. Der Verschiebungsvektor wird wie für Abbildung 2.56(a) gewählt. Prinzipiell eignen sich alle Werte zur Klassifikation. Für  $n > 16$  nehmen jedoch die Werteschwankungen zwischen den einzelnen Schichten deutlich zu und damit die Stabilität der darauf basierenden Klassifikation ab, weshalb  $n = 16$  gewählt wird.

Aus Abbildung 2.56(c) ist ersichtlich, dass die Werte geringfügig von der Richtung abhängen. Die Parameter in diesem Schaubild sind  $|G| = 512$ ,  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$  und  $n = 16$ . Um ein möglichst richtungsunabhängiges Maß zu erhalten, wird wie beschrieben eine Mittelung für die Cooccurrence-Matrizen für die vier Richtungen durchgeführt.

Im vierten Schaubild, in Abbildung 2.56(d), werden die Schrittweiten variiert, so dass  $\|\mathbf{v}\|_\infty \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Es findet hierbei jeweils eine Mittelung für die Cooccurrence-Matrizen aus den vier oben aufgeführten Orientierungen der Verschiebungsvektoren statt. Die beiden anderen Parameter sind  $|G| = 512$  und  $n = 16$ . Für  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$  ist im Vergleich zu längeren Verschiebungsvektoren der minimale Abstand der Kontrastwerte von den Schichten aus den beiden Klassen am geringsten. Da aber auch die Varianz der Kontrastintensitäten in der Klasse der Schichten mit keinen oder nur wenigen Artefakten am geringsten ist, wird  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$  gewählt. Zusammenfassend werden die Parameter  $|G| = 32$ ,  $n = 16$ ,  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$  verwendet und die Cooccurrence-Matrix für die vier aufgeführten Orientierungen der Verschiebungsvektoren gemittelt. Für die Klassifizierung wurde basierend auf Abbildung 2.56(a) der Schwellwert  $T_{\text{CON}} = 0,003$  bestimmt. CT-Bilder, deren Haralick-Kontrast diesen Wert überschreitet, werden als artefaktbehaftet klassifiziert, ansonsten als artefaktfrei oder mit nur geringen Rauschartefakten behaftet. Sowohl für das in Abbildung 2.55(a) dargestellte als auch für das als Goldstandard verwendete Bild in Abbildung 2.29(a) beziehungsweise Abbildung 2.40(a) liegen die Haralick-Kontraste mit  $\text{CON} = 0,0016$  beziehungsweise  $\text{CON} = 0,0008$  wie erwartet unter dem Schwellwert  $T_{\text{CON}}$ . Für die in Kapitel 2.8 dargestellten Artefaktbilder sind die Werte in Tabelle 2.7 aufgelistet. Erwartungsgemäß liegen diese über  $T_{\text{CON}}$ . Für die sehr stark artefaktbehafteten Bilder DS 3 und DS 14 bis DS 16 ergeben sich besonders hohe Werte. Der Zeitaufwand für die Bestimmung des Haralick-Kontrasts inklusive der Skalierung der Bildintensitäten auf 32 Grauwerte beträgt für ein Bild der Größe  $512 \times 512$  Pixel 0,06 s. Das Verfahren wurde im Rahmen der Arbeit zur Klassifizierung und bei entsprechender Klassifikation zur Artefaktreduktion durch RFMAR von CT-Bildern bei etlichen Volumendatensätzen verwendet. Im Allgemeinen wurden die artefaktbehafteten Schichten wie

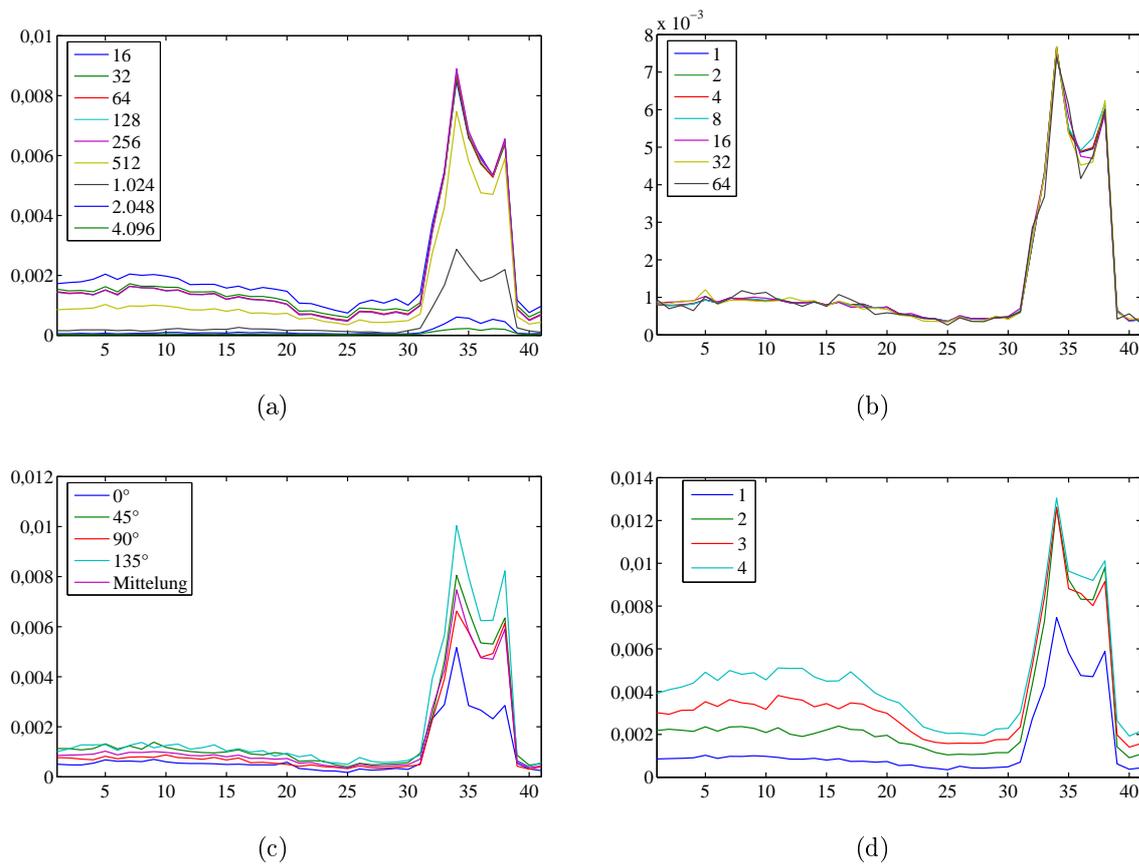
beispielsweise bei dem Datensatz in Abbildung 2.56 korrekt klassifiziert. Einige wenige nahezu artefaktfreien Bilder wurden fälschlicherweise als in die Klasse der artefaktbehafteten Bilder eingeordnet. In diesen Fällen wurde durch das in Kapitel 2.4.3 beschriebene Verfahren zur Segmentierung der Metallsinusoide (vgl. Abb. 2.29) immer eine zu starke Glättung durch RFMAR verhindert. Das Klassifikationsverfahren hat sich somit als schnell und robust erwiesen und eignet sich dadurch für den beschriebenen Einsatz.

|     |        |        |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| DS  | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      |
| CON | 0,0086 | 0,0231 | 0,1024 | 0,0330 | 0,0373 | 0,0392 | 0,0174 |
| DS  | 9      | 10     | 11     | 12     | 13     | 14     | 15     |
| CON | 0,0415 | 0,0419 | 0,0231 | 0,0188 | 0,0153 | 0,1148 | 0,1187 |
| DS  | 16     | 17     | 18     | 19     | 20     | 21     | 22     |
| CON | 0,2041 | 0,0390 | 0,0133 | 0,0891 | 0,0458 | 0,0037 | 0,0804 |

**Tabelle 2.7:** Haralick-Kontraste für die Artefaktbilder aus Kapitel 2.8.

## 2.12 Zusammenfassung

Herkömmliche Verfahren zur Reduktion von Rauschartefakten versagen in vielen praktischen Fällen, wenn die Rohdaten nicht vorhanden sind und die artefaktverursachenden Metalle außerhalb der Rekonstruktionsbilder liegen. RFMAR ist ein neues Verfahren, das entwickelt wurde, um bei Rekonstruktionsbildern in den genannten Fällen Rauschartefakte zu reduzieren. Dazu werden zunächst durch numerische Tomographie auf den Rekonstruktionsbildern Pseudorohdaten erzeugt. In einer Analyse wurden die Bilder von Defektpixeln der ursprünglichen Rohdaten in den Pseudorohdaten untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass trotz der Unterschiede zwischen Defektpixeln und deren Bildern eine effektive Rauschartefaktreduktion durch eine Modifikation der Pseudorohdaten möglich ist. Diese erfolgt durch pixelweise konvexe Kombinationen zwischen den unveränderten und den geglätteten Pseudorohdaten. Die Gewichte dafür werden aus der Indikatorfunktion der Metallsinusoide bestimmt, die mit einer Waveletanalyse in den Pseudorohdaten segmentiert werden. Durch die Wahl der dilatierten und geglätteten Indikatorfunktion als Gewichtsmatrix werden neue Artefakte vermieden, die sich bei Verwendung der Indikatorfunktion als Gewichtsmatrix ergeben würden. Die hohe Leistungsfähigkeit und Praxistauglichkeit von RFMAR werden nicht zuletzt durch die positive Resonanz mehrerer Radiologen bestätigt.



**Abbildung 2.56:** Haralick-Kontrast aufgetragen über den CT-Schichten. Die Schichten 32 bis 38 enthalten starke Rauschartefakte. (a) Variation der Graustufenanzahl bei  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$ ,  $n = 16$ . (b) Variation der Schrittweiten bei  $|G| = 512$ ,  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$ . (c) Variation der Orientierung des Verschiebungsvektors bei  $|G| = 512$ ,  $n = 16$  und  $\|\mathbf{v}\|_\infty = 1$ . (d) Variation der Länge des Verschiebungsvektors bei  $|G| = 512$  und  $n = 16$ . Für alle Schaubilder außer (c) wird eine gemittelte Cooccurrence-Matrix bestimmt, die sich aus den vier Cooccurrence-Matrizen für Orientierungen des Verschiebungsvektors in  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $135^\circ$  ergibt.



## 3 Segmentierung medizinischer Daten

Eine „vollständige und überdeckungsfreie“ Zerlegung eines Bildes wird *Segmentierung* genannt [200]. Sie „fasst benachbarte Bildpunkte zusammen, die einem bestimmten Homogenitätskriterium genügen“ [116]. Dabei grenzt sie „verschiedene diagnostisch oder therapeutisch relevante Bildobjekte“ voneinander ab und schafft dadurch eine Grundlage „für eine weitergehende Analyse, Vermessung und 3D-Visualisierung“ [73]. Aufgrund der Vielzahl möglicher Anwendungen gibt es eine sehr große Zahl verschiedener Segmentierungsverfahren. Einige, wie die Schwellwertsegmentierung, histogramm- und texturbasierte Segmentierungen sowie die Segmentierung homogener Bereiche anhand von Quadrees, werden im Kapitel 2 beschrieben. Eine umfassende Beschreibung würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Für eine vertiefende Behandlung der Thematik sei daher auf entsprechende Fachliteratur, beispielsweise [37, 38, 57, 58, 65, 73, 75, 94, 116, 192, 200, 220], verwiesen. Wesentlicher Inhalt dieses Kapitels ist ein neu entwickeltes Verfahren zur automatischen 3D-Segmentierung von Halswirbeln [70], das im Weiteren beschrieben wird. Dieses Verfahren stellt gleichzeitig eine Anwendung für RFMAR dar. Nach Anwendung von RFMAR lässt sich das Verfahren auch bei artefaktbehafteten Datensätzen einsetzen. Die Implementierung findet in Java / Java3D ohne Verwendung zusätzlicher Bibliotheken statt. Alternativ wäre die Verwendung von Standardbibliotheken zur Bildsegmentierung und -visualisierung denkbar, beispielsweise von ITK und VTK [110, 111].

### 3.1 Verfahren zur Segmentierung von Halswirbeln

Die Wirbelsäule ist ein wichtiges Körperorgan und nimmt eine zentrale Stellung für die Biomechanik sowie das vegetative und sensomotorische System des Menschen ein. Einerseits stabilisiert sie den Körper und ermöglicht den aufrechten Gang. Andererseits verlaufen durch sie ein Großteil der vegetativen sowie der sensomotorischen Signale. Aufgrund von Bandscheibenvorfällen, degenerativen Erkrankungen wie beispielsweise Osteoporose, Wirbelneoplasie oder Unfallverletzungen kann dieses empfindliche System gestört und eventuell stark eingeschränkt werden.

Für die Diagnostik, die Therapie oder auch die Planung von chirurgischen Eingriffen stellt die Segmentierung einzelner Wirbel aus tomographischen CT-Bildern häufig

einen wichtigen Vorverarbeitungsschritt dar. Die Segmentierung der kompletten Wirbelsäule anhand von CT-Daten lässt sich durch eine einfache Schwellwertsegmentierung realisieren. Die Segmentierung einzelner Wirbel hingegen erfordert eine Trennung der in gelenkigen Verbindungen stehenden Wirbel im Volumendatensatz. Diese scheinen im Volumendatensatz an etlichen Stellen miteinander verschmolzen zu sein, wie beispielsweise innerhalb der in Abbildung 3.2 grau umrandeten Regionen. Eine Möglichkeit zur Trennung von Wirbeln stellt die manuelle Abgrenzung der Wirbel voneinander dar. So wird etwa in einem Segmentierungsverfahren von KANG ET AL. [221], in einer anderen, aber von der Problemstellung vergleichbaren Anwendung, zur Trennung des Oberschenkelhalses und der Hüftpfanne vom Anwender interaktiv eine Trennfläche angegeben. Im Bereich der Halswirbelsäule stellt die Trennung aufgrund flacher Wirbel, geringer Distanzen zwischen den einzelnen Wirbeln und relativ komplexen Wirbeloberflächen ein besonders schwieriges Problem dar. Im Weiteren wird ein Verfahren zur automatischen Trennung der Halswirbel vorgestellt. Die Trennung erfolgt hierbei entlang von Hyperebenen, deren Positionen und Orientierungen automatisch ermittelt werden. Das Verfahren ermöglicht somit keine exakte Trennung der Wirbel entlang anatomischer Grenzen. Für etliche Anwendungen, beispielsweise für die Registrierung einzelner Wirbel zwischen den Volumendaten in verschiedenen Rotationsstellungen des Halses [69], genügt jedoch die resultierende Wirbelsegmentierung. Wird eine exaktere Segmentierung benötigt, so kann dies beispielsweise wie in [61] anhand aktiver Modelle erfolgen. Hierzu werden jedoch gute initiale Positionierungen der einzelnen Wirbelmodelle benötigt. In [61] erfolgt dies interaktiv. Durch eine vorherige Wirbelsegmentierung mit dem im Folgenden beschriebenen Verfahren lässt sich dieser Schritt automatisieren.

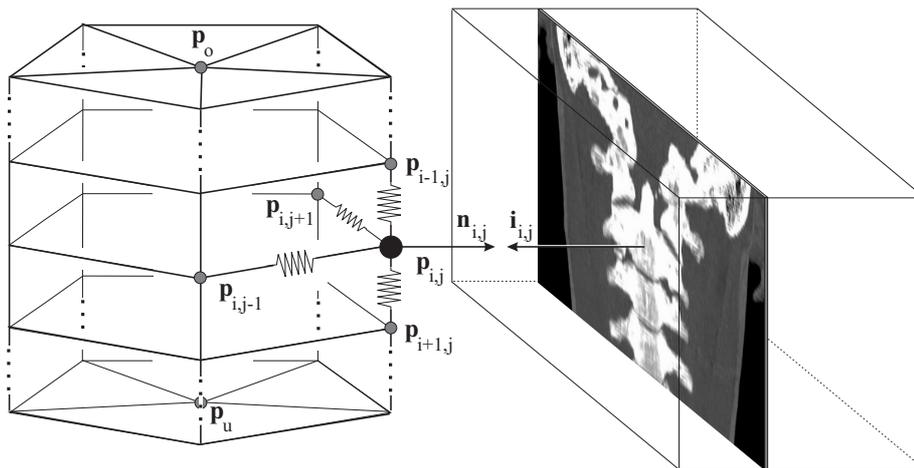
Das Verfahren macht sich den Aufbau der Wirbelsäule zunutze. Sowohl das Rückenmark im Wirbelkanal, im Inneren der Wirbelsäule, als auch die umliegenden Gewebe haben geringe Hounsfield-Einheiten, so dass bei einer Schwellwertsegmentierung der Knochen die Wirbelsäule als innen hohles Organ mit Öffnungen nach außen im Bereich der Bandscheibenfächer erscheint. Die Idee des Verfahrens besteht darin, in den Hohlkörper einen virtuellen Ballon zu setzen und diesen anschließend so zu dilatieren, dass er aus den Zwischenwirbelbereichen austritt. Die Ausbuchtungen im Bereich der Bandscheibenfächer stellen sich als zusammenhängende elliptische Bereiche auf der Ballonoberfläche dar, die sich durch Analyse der Oberflächenkrümmung bestimmen lassen. Durch die Verwendung des Ballons wird das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales Problem zurückgeführt, das sich effizient berechnen lässt.

Im Gegensatz zur CT lassen sich Knochen in Magnetresonanztomographie(MRT)-Bildern nur schwierig segmentieren, da es in der MRT keine absoluten Gewebeintensitäten gibt und im Allgemeinen der Kontrast zwischen Knochen und Weichgewebe viel geringer als im CT ist. Trotzdem eignet sich auch hier das Ballon-basierte Segmentierungsverfahren, wie im Weiteren gezeigt wird.

### 3.1.1 Ballonmodell

Gegen Ende der 1980er Jahre stellten KASS ET AL. [107] *Snakes* für Anwendungen der Bildverarbeitung wie der Detektion von Linien vor. Snakes sind mathematische Kurven, die initial an einer Stelle im Bild positioniert werden und sich dynamisch aufgrund von Kräften im Bild bewegen, bis die Kräfte verschwinden. Die Kräfte können sich beispielsweise durch die Bildintensitäten entlang der Pixel, auf denen sich das Snake befindet, definieren. Das Konzept wurde wenig später auf *Ballons*, dreidimensionale *aktive Konturen*, erweitert [26, 27]. MCINERNEY ET AL. [132] geben einen Überblick über Anwendungen für aktive Konturen wie beispielsweise Ballons in der medizinischen Bildverarbeitung.

Ballons lassen sich unter anderem anhand von *Feder-Masse-Modellen* beschreiben [72, Kap. 7], [200, Kap.9.3.2]. Das dazu in dieser Arbeit verwendete Feder-Masse-Modell lehnt sich an das von STEIN [194] beschriebene Modell an. Der Ballon setzt sich aus  $m$  elastisch verbundenen  $n$ -Polygonen zusammen (s. Abb. 3.1). Die Polygone werden vertikal übereinander gestapelt, so dass der initiale Ballon das Gittermodell eines Zylinders beschreibt. Die Punkte  $\mathbf{p}_{i,j}^0$  repräsentieren Massepunkte, die in der Horizontalen innerhalb des  $n$ -Polygons mit den Massepunkten  $\mathbf{p}_{i,j-1}^0$  und  $\mathbf{p}_{i,j+1}^0$  durch Federn der Ruhelänge  $l_h$  verbunden sind. Zusätzlich besteht eine vertikale Verbindung durch Federn der Ruhelänge  $l_v$  mit den Punkten  $\mathbf{p}_{i-1,j}^0$  und  $\mathbf{p}_{i+1,j}^0$ , die zu dem darüberbeziehungsweise darunterliegenden Polygon gehören. Um den Ballon nach oben und unten zu schließen, werden zusätzlich die Punkte  $\mathbf{p}_o$  und  $\mathbf{p}_u$  definiert, die in der Mitte des obersten beziehungsweise des untersten Polygons liegen und durch Federn mit den Ecken dieser Polygone verbunden sind. Diese Punkte verändern nicht ihre Position während der Dilatation des Ballons.



**Abbildung 3.1:** Der Ballon links im Bild setzt sich aus elastisch verbundenen  $n$ -Polygonen (hier Pentagone) zusammen. Rechts im Bild ist ein Datenvolumen symbolisiert, in das exemplarisch eine Schnitt Ebene eingezeichnet wurde.

Die Dilatation erfolgt iterativ so, dass jeder Massepunkt zum Zeitpunkt  $t$  um den

Vektor

$$\mathbf{f}_{i,j}^t := w_f \cdot \xi_{i,j}^t \cdot (w_s \mathbf{s}_{i,j}^t + w_a \mathbf{a}_{i,j}^t + w_i \mathbf{i}_{i,j}^t), \quad w_f \geq 0, \quad 0 \leq w_s, w_a, w_i \leq 1 \quad (3.1)$$

zu dem Punkt  $\mathbf{p}_{i,j}^{t+1} := \mathbf{p}_{i,j}^t + \mathbf{f}_{i,j}^t$  verschoben wird. Die Funktion  $\xi_{i,j}^t$  beeinflusst hierbei die Form des Ballons während der Dilatation, die Vektoren  $\mathbf{s}_{i,j}^t$ ,  $\mathbf{a}_{i,j}^t$  und  $\mathbf{i}_{i,j}^t$  modellieren die Federkraft, eine Kraft aufgrund eines Luftdrucks im Inneren des Ballons sowie eine Kraft, die durch die Voxelintensitäten hervorgerufen wird. Die Faktoren  $w_f$ ,  $w_s$ ,  $w_a$ , und  $w_i$  sind konstante Gewichte, mit denen die Kräfte aufeinander abgestimmt werden.

Die Federkraft ergibt sich wie folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{i,j}^t := & d_v \cdot s(\mathbf{p}_{i,j}^t, \mathbf{p}_{i-1,j}^t, l_v) + d_v \cdot s(\mathbf{p}_{i,j}^t, \mathbf{p}_{i+1,j}^t, l_v) \\ & + d_h \cdot s(\mathbf{p}_{i,j}^t, \mathbf{p}_{i,j-1}^t, l_h) + d_h \cdot s(\mathbf{p}_{i,j}^t, \mathbf{p}_{i,j+1}^t, l_h), \quad 0 \leq d_v, d_h \leq 1, \quad l_v, l_h \geq 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

mit

$$s(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b, l) := (\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b) \cdot \max \left\{ 0, \frac{\|\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b\| - l}{\|\mathbf{p}_a - \mathbf{p}_b\|} \right\}. \quad (3.3)$$

Hierbei dienen die Gewichte  $d_v$  und  $d_h$  der Abstimmung der Federkräfte in vertikaler und horizontaler Richtung.

Die Dilatation des Ballons wird über eine konstante Kraft

$$\mathbf{a}_{i,j}^t := \alpha \mathbf{n}_{i,j}^t, \quad \alpha > 0 \quad (3.4)$$

gesteuert, der auf die Knoten in Richtung der jeweiligen Oberflächennormalen  $\mathbf{n}_{i,j}^t$  wirkt. Der Wert  $\alpha$  repräsentiert dabei den Luftdruck. Die Berechnung der  $\mathbf{n}_{i,j}^t$  erfolgt über das Kreuzprodukt, das heißt

$$\mathbf{n}_{i,j}^t := \frac{(\mathbf{p}_{i,j-1}^t - \mathbf{p}_{i,j+1}^t) \times (\mathbf{p}_{i-1,j}^t - \mathbf{p}_{i+1,j}^t)}{\|(\mathbf{p}_{i,j-1}^t - \mathbf{p}_{i,j+1}^t) \times (\mathbf{p}_{i-1,j}^t - \mathbf{p}_{i+1,j}^t)\|}. \quad (3.5)$$

Der Bildkraftvektor  $\mathbf{i}_{i,j}^t$  bestimmt sich durch die Voxelintensitäten an den Koordinaten der Massenpunkte. Für Massenpunkte auf Zwischenvoxelpositionen geschieht dies durch trilineare Interpolation. In dieser Arbeit wird  $\mathbf{i}_{i,j}^t$  folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{i}_{i,j}^t := -g_{\text{CT}}(\mathbf{p}_{i,j}) \cdot \mathbf{n}_{i,j}^t, \quad \text{mit} \quad g_{\text{CT}}(\mathbf{p}_{i,j}) := \begin{cases} 0, & f(\mathbf{p}_{i,j}) < g_0 \\ \frac{f(\mathbf{p}_{i,j}) - g_0}{g_1 - g_0}, & g_0 \leq f(\mathbf{p}_{i,j}) < g_1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Die Parameter  $g_0$  und  $g_1$  bezeichnen hierbei einen unteren und oberen Schwellwert, die für einen linearen Übergang zwischen der Bildkraft Null im Weichteilbereich und der Bildkraft Eins im Bereich der Knochen sorgen. Für CT-Bilder wird im Folgenden  $g_0 = 200$  HU sowie  $g_1 = 400$  HU gewählt.

Durch Variation der Gewichte  $w_s$ ,  $w_a$ , und  $w_i$  in (3.1) lassen sich die einzelnen Kräfte aufeinander abstimmen. Für CT-Daten wird in dieser Arbeit  $w_s = 0,3$ ,  $w_a = 0,45$  und  $w_i = 0,75$  verwendet. Durch  $w_f$  wird die Vektorlänge des resultierenden Kraftvektors beeinflusst. In dieser Arbeit wird  $w_f = 0,29$  gesetzt. Sobald der Ballon aus den Zwischenwirbelbereichen tritt, stehen die Normalenvektoren in den sich dabei ergebenden elliptischen und hyperbolischen Bereichen zum Teil fast senkrecht auf den Normalenvektoren in den dazwischenliegenden Bereichen. Es wird davon ausgegangen, dass der initiale Ballon so orientiert ist, dass er vertikal annähernd in Richtung des Wirbelkanals verläuft. Somit stehen die Normalenvektoren  $\mathbf{n}_{i,j}^t$  in den Zwischenbereichen nach Austritt aus dem Wirbelkanal auch zum Teil senkrecht auf den initialen Normalenvektoren  $\mathbf{n}_{i,j}^0$ . Um zu verhindern dass sich der Ballon in Richtung dieser Normalenvektoren ausdehnt, dabei beispielsweise die Wirbelbögen umschließt, und sich aufgrund der geringen Abstände zwischen den Wirbeln dabei selbst durchdringt, ist in (3.1) die Funktion  $\xi_{i,j}$  eingeführt. Sie wird in diesem Fall zu

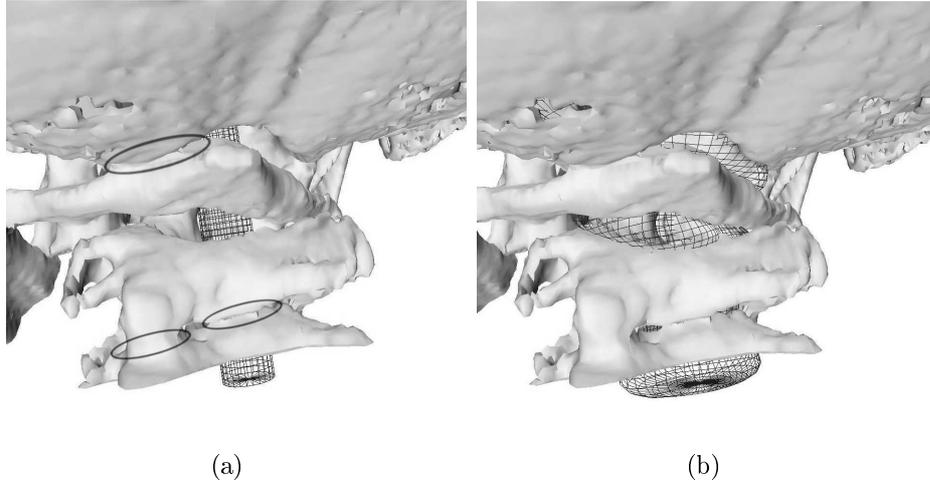
$$\xi_{i,j}^t := |\langle \mathbf{n}_{i,j}^t, \mathbf{n}_{i,j}^0 \rangle| \quad (3.7)$$

bestimmt. Stehen die beiden Normalenvektoren senkrecht aufeinander, nimmt das Skalarprodukt den Wert Null an und sorgt somit dafür, dass keine Ausdehnung des Ballons in dieser Richtung stattfinden kann. Die Dilatation des Ballons endet, wenn die maximale Länge aller Vektoren  $\mathbf{f}_{i,j}^t$  kleiner als eine vorgegebene Schwelle, in diesem Fall ein Viertel des Pixelabstands innerhalb der einzelnen CT-Schichten, beträgt oder eine maximale Anzahl von Iterationsschritten erreicht ist. Diese Anzahl wurde hier mit  $t = 300$  durch Experimente bestimmt. Der Rechenaufwand beträgt  $O(mnt)$ . Typischerweise dauert die Dilatation des Ballons ungefähr 15 Sekunden.

### Initialisierung des Ballons

Es wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass die grobe Lage des Patienten und damit auch die ungefähre Orientierung der Wirbelsäule bekannt ist. Unter diesen Voraussetzungen ist eine automatische Bestimmung der Lage des Wirbelkanals möglich (s. [16, 69]). In dieser Arbeit erfolgt die Positionierung des Ballons in den Wirbelkanal manuell. Für die betrachteten Datensätze war jeweils eine Initialisierung als zylindrischer Ballon, der vollständig im Wirbelkanal liegt, möglich. Ist dies beispielsweise bei der Untersuchung längerer Wirbelsäulenausschnitte in größeren Datenvolumen nicht möglich, so kann das Volumen in kleinere Teilausschnitte unterteilt werden, für die dann jeweils die eine entsprechende Initialisierung des Ballons als Zylinder im Wirbelkanal möglich ist. In Abbildung 3.2(a) wird exemplarisch anhand einer Oberflächenvisualisierung des schwellwertsegmentierten Knochengewebes in einem Volumendatensatz der im Wirbelkanal positionierte initiale Ballon als Drahtgittermodell dargestellt<sup>1</sup>. In Abbildung 3.2(b) ist der dilatierter Ballon abgebildet.

<sup>1</sup>Für die Extraktion der Knochenoberflächen als Dreiecksnetz wurde das *Marching Cubes*-Verfahren implementiert. Die dazu benötigte Tabelle basiert auf [12]. Zur Reduktion der Anzahl von Dreiecken wurde das bei WATT [212, 2.5.1] beschriebene Verfahren implementiert.



**Abbildung 3.2:** (a) Initialisierung des virtuellen Ballons im Wirbelkanal. Exemplarisch sind einige Regionen grau umrandet, an denen die Wirbel miteinander verschmolzen zu sein scheinen. (b) Dilatierter Ballon. In den Zwischenwirbelbereichen wölbt sich der Ballon nach außen. In den dargestellten Bildern sind ein Ausschnitt der Schädelbasis sowie die drei obersten Halswirbel von hinten zu sehen. Links im Bild ist jeweils ein Stück des Kieferknochens zu erkennen.

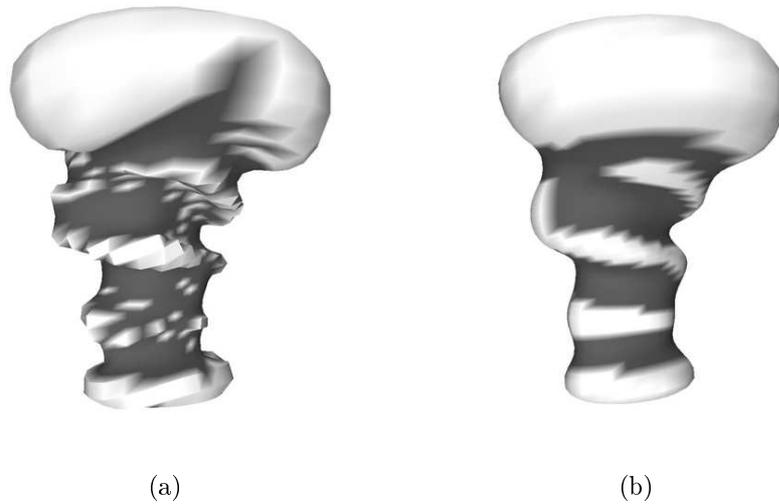
Der Ballon setzt sich aus  $m = 60$  regelmäßigen Polygonen mit  $n = 25$  Ecken zusammen. Der initiale Durchmesser beträgt in den hier untersuchten Datensätzen 1 cm. Der Datensatz, der der Abbildung zugrundeliegt, besteht aus 41 aufeinanderfolgenden CT-Schnittbildern. Die Pixelauflösung innerhalb der Schichten beträgt in  $x$ - und  $y$ -Richtung jeweils 0,29 mm, der Abstand zwischen den einzelnen Schichten 1,5 mm.

### Glättung der Ballonoberfläche

Die Oberfläche des dilatierten Ballons weist zunächst häufig eine hochfrequente Struktur auf, die aus vielen lokalen elliptischen und hyperbolischen Regionen (s. Def. 3.1) besteht, wie exemplarisch in Abbildung 3.3(a) dargestellt.

In dieser Abbildung sind elliptische Bereiche hell und hyperbolische dunkel dargestellt. Der Ballon eignet sich in dieser Gestalt noch nicht für eine Analyse der groben Ballonform. Dazu muss zunächst eine Glättung des Ballons durchgeführt werden. Durch Glättung der Ballonoberfläche tritt die grobe Form des Ballons deutlich hervor (s. Abb. 3.3(b)). Dies wird durch das im folgenden beschriebene  $\lambda|\mu$ -Verfahren von TAUBIN [198] erreicht. Zu jedem Punkt  $\mathbf{p}_{i,j}$  des Polygonnetzes wird der gemittelte Vektor

$$\mathbf{d}_{i,j} := \frac{1}{8} \sum_{(k,l) \in I_{i,j}} \mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{p}_{k,l}, \quad I_{i,j} := \{(k,l) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{Z} : \|(i,j) - (k,l)\|_\infty = 1\} \quad (3.8)$$



**Abbildung 3.3:** Visualisierung des dilatierten Ballons aus Abbildung 3.2. (a) Ungeglättete Ballonoberfläche. (b) Geglättete Ballonoberfläche nach 140 Iterationen des  $\lambda|\mu$ -Verfahrens.

bestimmt<sup>2</sup>. Der Punkt  $\mathbf{p}_{i,j}$  wird einmal um den mit  $\lambda$ , einmal um den mit  $\mu$  gewichteten Vektor  $\mathbf{d}_{i,j}$  verschoben, wie in Algorithmus 3.1 dargestellt wird. Die Gewichte werden mit unterschiedlichem Vorzeichen gewählt. Weitere Bedingungen für die Gewichte sind [198] zu entnehmen. Bei geeigneter Wahl der Gewichte ist gewährleistet, dass das Polygonnetz nicht durch die Glättung schrumpft (s. [198]). Dadurch bleibt die Krümmung der globalen Form erhalten während feine Strukturen verschwinden.

In dieser Arbeit werden die Gewichte  $\lambda = 0,330$  und  $\mu = -0,331$  wie in [198, Abb. 6] verwendet. Eine Anzahl von 140 Iterationen führte bei allen CT-Datensätzen zu Ballonoberflächen, auf denen sich die elliptischen Bereiche gut von den hyperbolischen Bereichen abtrennen lassen (vgl. Abb. 3.3(b)). Der Aufwand für die Glättung beträgt  $O(mn)$ . Die 140 Iterationsschritte für die Glättung benötigen typischerweise ungefähr 2 Sekunden.

### 3.1.2 Krümmungsanalyse

Streng mathematisch ist es nicht sinnvoll beziehungsweise nicht möglich *Krümmungen* auf der Oberfläche eines Polygonnetzes zu bestimmen, da die einzelnen Facetten des Netzes nicht gekrümmt sind und die Oberfläche an den Übergängen zwischen den einzelnen Facetten nicht differenzierbar ist. Falls der Ballon sich nicht selbst

<sup>2</sup>In (3.8) sind  $j = n$  beziehungsweise  $l = n$  gleichbedeutend mit  $j = 0$  beziehungsweise  $l = 0$ , sowie  $j = -1$  beziehungsweise  $l = -1$  gleichbedeutend mit  $j = n - 1$  beziehungsweise  $l = n - 1$  zu betrachten. Für  $i = 0$  entsprechen alle oberen Nachbarpunkte dem Punkt  $\mathbf{p}_o$  und für  $i = m - 1$  alle untere Nachbarpunkte dem Punkt  $\mathbf{p}_u$ .

**Algorithmus 3.1**  $\lambda|\mu$ -Verfahren

---

```

Eingabe:  polygonnetz  Ballon als Polygonnetz
          λ            Gewichtungsfaktor
          μ            Gewichtungsfaktor
          #iterationen  Anzahl der Iterationen
Ausgabe:  polygonnetz  geglätteter Ballon

1  foreach iteration ∈ {0,...,#iterationen-1} do
2      polygonnetz' ← polygonnetz
3      foreach Punkt p im Polygonnetz do
4          d ← bestimme gemittelten Vektor
5          p ← p' + λd
6      od
7      polygonnetz' ← polygonnetz
8      foreach Punkt p im Polygonnetz do
9          d ← bestimme gemittelten Vektor
10         p ← p' + μd
11     od
12 od

```

---

durchdringt, lässt sich dessen Polygonnetz als Approximation einer differenzierbaren zweidimensionalen Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  auffassen<sup>3</sup>. Auf einer solchen lassen sich offensichtlich Krümmungen bestimmen. Im Gegensatz zur Differentialgeometrie einer Kurve lassen sich für einen Punkt auf einer Fläche im Raum unterschiedliche Krümmungen definieren. Bei einer zweidimensionalen Fläche wird über die beiden *Hauptkrümmungen*  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  die *Gauß-Krümmung*

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad (3.9)$$

definiert<sup>4</sup>. Die Gauß-Krümmung ermöglicht eine Unterscheidung zwischen elliptischen und hyperbolischen Punkten auf der Fläche gemäß Definition 3.1.

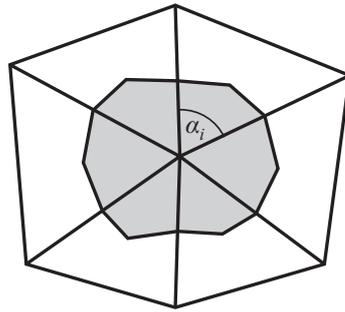
**Definition 3.1** Ein Punkt  $\mathbf{p}$  einer Fläche heißt

*elliptisch*, wenn  $K(\mathbf{p}) > 0$ ,  
*hyperbolisch*, wenn  $K(\mathbf{p}) < 0$ . □

Zur Bestimmung beziehungsweise Abschätzung der Gauß-Krümmungen auf Polygonnetzen existieren verschiedene Verfahren [44, 60, 136, 196]. In dieser Arbeit wird

<sup>3</sup>Es genügt hier, sich eine differenzierbare zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$  als Fläche im  $\mathbb{R}^3$  vorzustellen, die in jedem Punkt differenzierbar ist. Eine exakte Herleitung und Definition des Begriffes *Mannigfaltigkeit* würde den Rahmen des Buches sprengen. Es sei hierfür auf Standardlehrbücher der Differentialgeometrie, beispielsweise [109], verwiesen.

<sup>4</sup>Für eine detaillierte Beschreibung sei auf [109] verwiesen.



**Abbildung 3.4:** 1-Ring-Nachbarschaft einer Ecke im Dreiecksnetz. Baryzentrische Fläche grau eingefärbt.

das in [44] beschriebene Verfahren mit baryzentrischer Flächenabschätzung verwendet. Bei den Verfahren wird davon ausgegangen, dass das Polygonnetz als Dreiecksnetz vorliegt. Java3D wandelt bei Aufruf der Methode `NormalGenerator.generateNormals(giBalloon)` auf das `GeometryInfo`-Objekt `giBalloon`, das den Ballon repräsentiert, automatisch aus dem Polygongitter ein Dreiecksnetz<sup>5</sup>. Zur Bestimmung der Gauß-Krümmung an einem Punkt  $\mathbf{p}$  wird dessen 1-Ring-Nachbarschaft untersucht, die sich aus den an diesen Punkt angrenzenden Dreiecken zusammensetzt, wie in Abbildung 3.4 exemplarisch gezeigt wird. Der Winkel im Punkt  $\mathbf{p}$  des  $i$ -ten angrenzenden Dreiecks in der 1-Ring-Nachbarschaft wird mit  $\alpha_i$  bezeichnet. Aus dem Wert

$$\bar{K} := 2\pi - \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \quad (3.10)$$

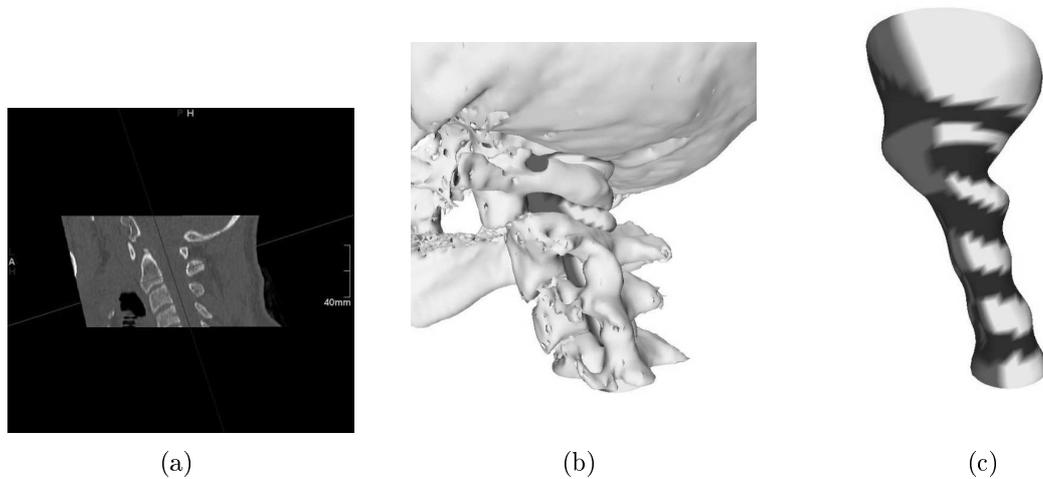
sowie dem baryzentrischen Flächeninhalt  $S$ , der einem Drittel der Gesamtfläche der angrenzenden Dreiecke entspricht [44], bestimmt sich die Gauß-Krümmung zu

$$K = \frac{\bar{K}}{S}. \quad (3.11)$$

Zur differentialgeometrischen Herleitung dieser Formel sei auf [44, 136] verwiesen. Der Aufwand zur Bestimmung der Krümmung liegt in  $O(mn)$ . Die Krümmungsanalyse des Ballons liegt typischerweise unter einer Sekunde.

In Abbildung 3.5(a) ist exemplarisch ein Sagittalschnitt des Wirbelkanals dargestellt. Der virtuelle Ballon tritt im Allgemeinen hauptsächlich dorsal, in Abbildung 3.5 rechts im Bild, aus dem Wirbelkanal. Aus diesem Grund wird die Krümmung nur im dorsalen Bereich des Ballons untersucht. Dieser lässt sich im Kopf-Hals-Bereich beispielsweise anhand der Rotationsstellung des Kopfes bestimmen, die sich aus Symmetriebetrachtungen der Schädelbasis automatisch abschätzen lässt [69]. In einem Winkelbereich von  $\pm 70^\circ$  zu der ermittelten Orientierung werden die zusammenhängenden elliptischen Regionen durch ein *Region Growing*-Verfahren, das sich an [56, Kap. 19.5.2] orientiert, segmentiert. Die Regionen sind hierbei nach oben und unten

<sup>5</sup>Beide Klassen befinden sich im Paket `com.sun.j3d.utils.geometry`.



**Abbildung 3.5:** (a) Sagittalschnitt durch die obere Halswirbelsäule (rechts: dorsal). (b) Volumenvisualisierung des Datensatzes aus (a) mit dilatiertem und geglätteten Ballon von lateral. (c) Freigestellter Ballon aus (b).

durch die hyperbolischen Bereiche und nach links und rechts durch den vorgegebenen Winkelbereich beschränkt. In Abbildung 3.5(b) und 3.5(c) ist rechts der betrachtete Winkelbereich durch ein helles Grau, die übrigen ellipsoiden Bereiche durch ein dunkleres Grau dargestellt.

### 3.1.3 Bestimmung der Trennebenen

Von den segmentierten Punkten werden die Mittelwerte der Koordinaten, das heißt die Massenschwerpunkte der einzelnen elliptischen Regionen, bestimmt und dienen als Referenzpunkte, durch die die einzelnen Trennebenen verlaufen. HAHN UND BETH [70] wählen die Trennebene parallel zu den Ebenen, in der die  $n$ -Polygone des initialen Ballons verlaufen. In Abbildung 3.6 werden in den drei Abbildungen auf der linken Seite die derart bestimmten Trennebenen an einem Beispieldatensatz dargestellt.

Anhand der Orientierung, in der sich die segmentierten elliptischen Bereiche im Raum befinden, lassen sich jedoch Trennebenen definieren, die der Lage der Wirbel besser angepasst sind. Zur Bestimmung der Orientierungen eignet sich wie folgt die *Hauptachsen- beziehungsweise Karhunen-Loève Transformation* [43, 92, 116, 199]. Seien  $\mathbf{p}_i, i \in I$  die Punkte in einer segmentierten elliptischen Region,  $\bar{\mathbf{p}}$  deren Massenschwerpunkt und  $S := \sum_{i \in I} (\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}})^t$  eine  $3 \times 3$ -Matrix. Die Hauptachsentransformation liefert nun die Eigenvektoren von  $S$  der Größe der Eigenwerte nach geordnet zurück [43]. Die Geraden, die durch den Massenschwerpunkt in Richtung

der Eigenvektoren verlaufen, werden *Hauptachsen* genannt<sup>6</sup>. Der Eigenvektor  $\mathbf{e}$  des größten Eigenwertes definiert diejenige Hauptachse, für die der mittlere quadratische Abstand zwischen den einzelnen Punkten und deren orthogonaler Projektion auf die Geraden minimal wird. Insofern stellt diese Hauptachse die beste Repräsentation der Punktwolke dar und wird zur Bestimmung der gesuchten Neigung der Trennebene verwendet.

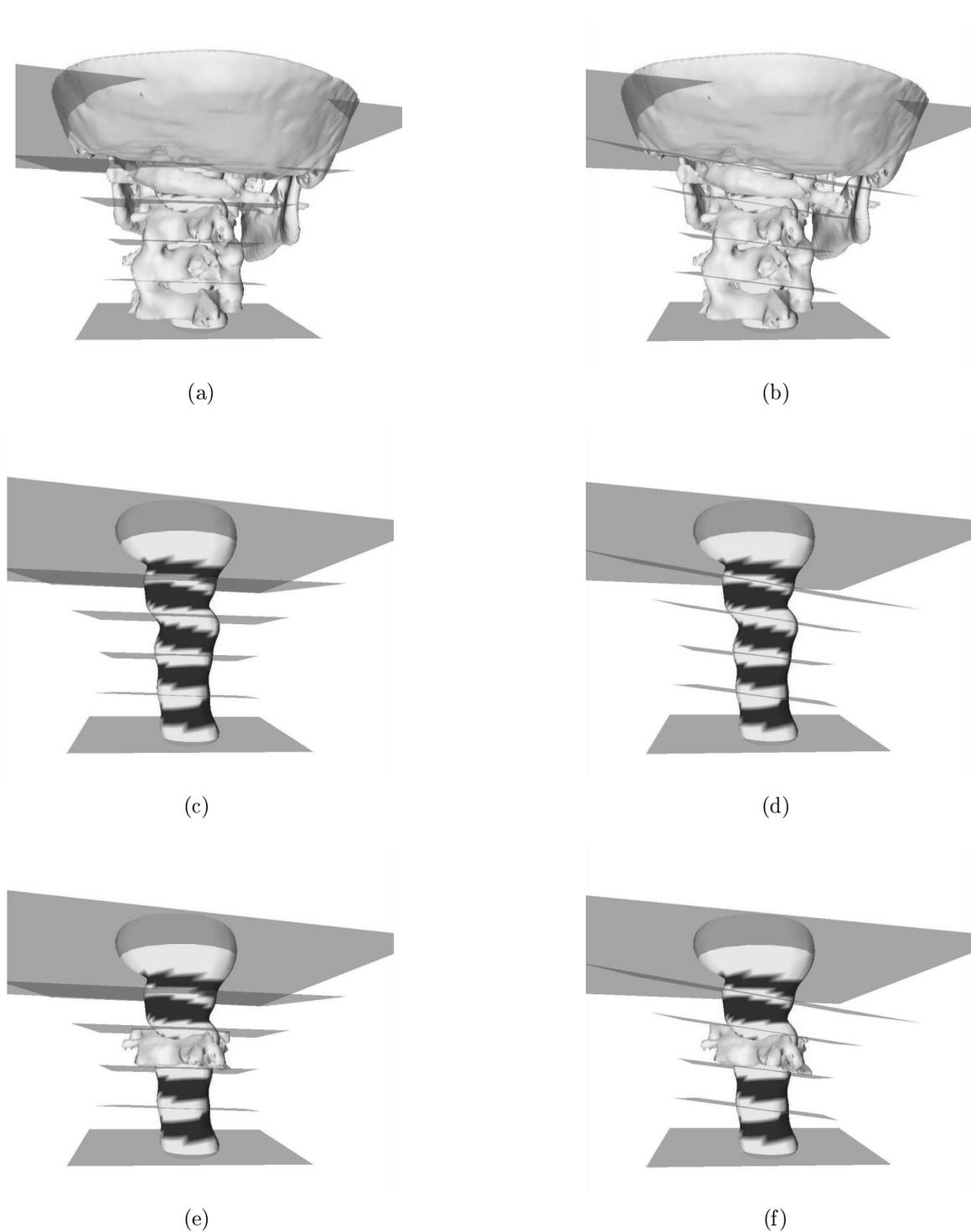
Anhand der Darstellungen des Ballons von der Seite (s. Abb. 3.5(c)) und mit Blick auf die segmentierten elliptischen Regionen (s. Abb. 3.6(c)) kann man sich ein Bild der Punktwolken dieser Regionen machen. Die gesuchte Hauptachse beschreibt die in Abbildung 3.6(c) zu erkennenden Neigungen der segmentierten Regionen. Die beiden anderen Hauptachsen sind sehr von der Stärke der Auswölbungen beziehungsweise von dem Winkelbereich, in dem die elliptischen Regionen untersucht werden, abhängig und eignen sich deshalb nicht für die Bestimmung der Ebenenneigung. Deshalb wird dazu nur die erste Hauptachse herangezogen. Die Trennebene wird nun jeweils so bestimmt, dass diese Hauptachse in der Ebene liegt. Die endgültige Festlegung der Trennebene erfolgt anhand der vertikalen Orientierung  $\mathbf{v}$  des initialen Ballons im Wirbelkanal so, dass die Trennebene senkrecht auf der durch  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{v}$  aufgespannten Ebene steht. Die geneigten Trennebenen sind in den Bildern auf der rechten Seite von Abbildung 3.6 zu erkennen. In den Abbildungen 3.6(e) und 3.6(f) ist jeweils ein segmentierter Halswirbel zum Vergleich dargestellt. Aufgrund der Ebenenkippungen entspricht der in Abbildung 3.6(f) segmentierte Wirbel besser dem tatsächlichen Wirbel als der in Abbildung 3.6(e) dargestellte.

### 3.1.4 Wirbelsegmentierung

Die Segmentierung der Wirbel wird durch ein dreidimensionales Region-Growing-Verfahren realisiert<sup>7</sup>. Für die Segmentierung der einzelnen Wirbel werden jeweils zwischen zwei Trennebenen, die den Wirbel nach oben und unten begrenzen, vom Wirbelkanal aus Suchstrahlen in Normalenrichtung des initialen Ballons ausgesandt. Die Stellen, an denen die Suchstrahlen auf Knochengewebe treffen, werden als Saatpunkte für das dreidimensionale Region Growing verwendet. Segmentiert wird alles Knochengewebe, das jeweils innerhalb von zwei Trennebenen liegt. Ein Beispiel für die Segmentierung eines Wirbels ist Abbildung 3.6(f) zu entnehmen. Das Segmentierungsverfahren wurde auf insgesamt elf unterschiedliche Datensätze angewandt, in denen die Wirbel erfolgreich segmentiert wurden.

<sup>6</sup>In der Physik spricht man von *Hauptträgheitsachsen*.

<sup>7</sup>Es wurde hierfür das zweidimensionale Verfahren von FOLEY ET AL. [56, Kap. 19.5.2] auf drei Dimensionen erweitert.



**Abbildung 3.6:** Wahl der Trennebenen. Auf der linken Seite: Ebenen parallel zur  $n$ -Polygonen des initialen Ballons. Auf der rechten Seite: Ebenenrichtung bestimmt anhand von Hauptachsentransformationen der segmentierten elliptischen Regionen. (a), (b) Trennebenen im Volumendatensatz. (c), (d) Trennebenen wie oben, jedoch am Ballon. (e), (f) Trennebenen wie oben, jedoch mit segmentiertem Wirbel.

### 3.1.5 Metallartefakte

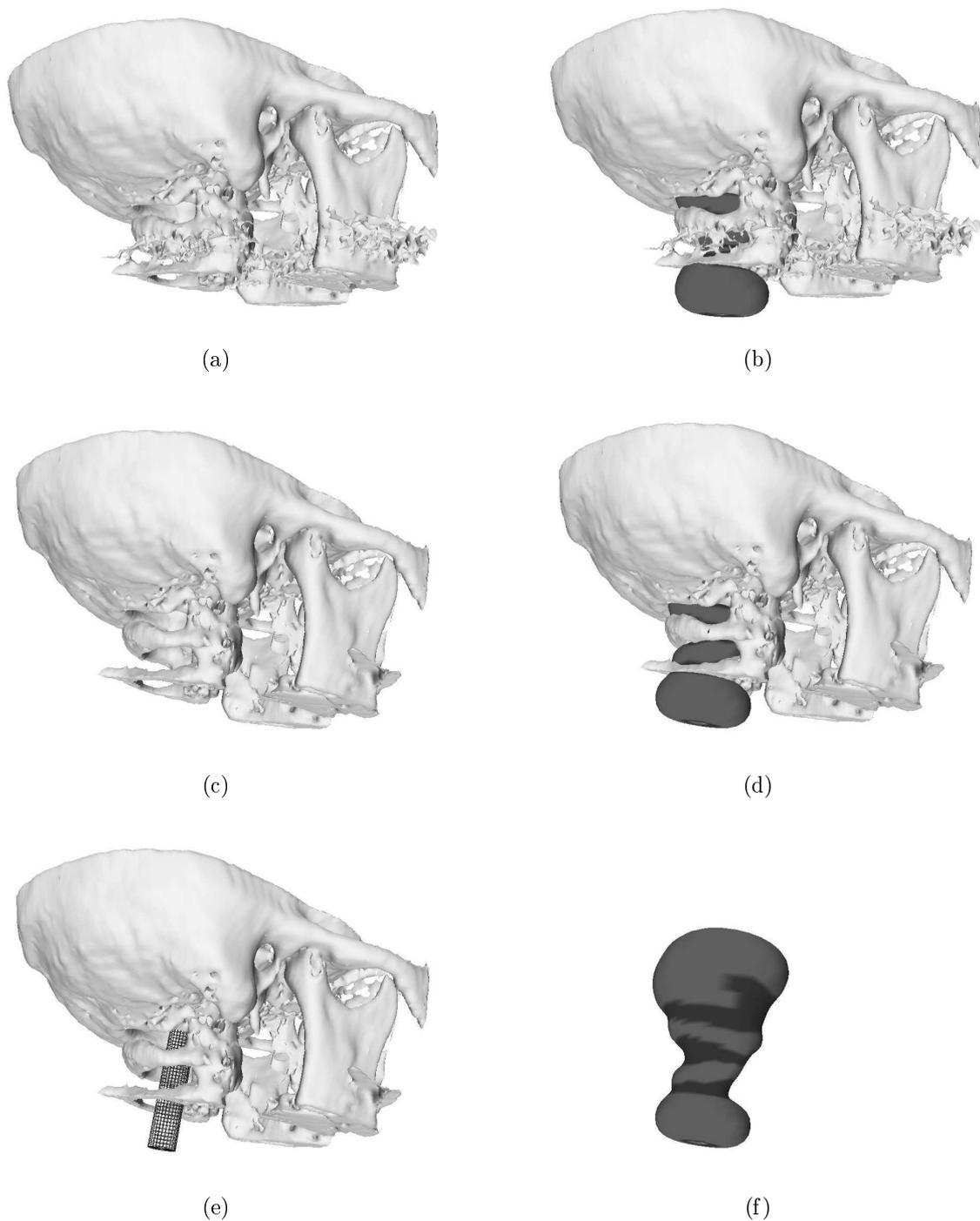
In Abbildung 3.7(a) ist die Oberflächenvisualisierung eines artefaktbehafteten Datensatzes dargestellt. Obwohl alle Artefaktstrukturen, die nicht mit den Polygonnetzen der Wirbel zusammenhängen, automatisch entfernt wurden, sind im Bild immer noch starke Artefakte zu erkennen. Aufgrund der vielen Artefakte im Wirbelkanal sind die Bildkräfte zu stark, so dass der Ballon nicht korrekt dilatiert (s. Abb. 3.7(b)). Nach automatischer Artefaktreduktion durch RFMAR ergibt sich der in Abbildung 3.7(c) dargestellte Datensatz, in dem der Ballon korrekt dilatiert. Das Ballonverfahren zur Wirbelsegmentierung stellt somit eine geeignete Anwendung für RFMAR dar.

## 3.2 Wirbelsegmentierung in MRT-Datensätzen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass das oben beschriebene Verfahren zur Wirbelsegmentierung auch bei Magnetresonanztomographie(MRT)-Datensätzen angewandt werden kann, um automatisch Trennebenen zwischen den einzelnen Wirbeln zu definieren.

Während bei der CT die Absorption von Röntgenstrahlen durch das Gewebe gemessen wird, findet bei der MRT eine Anregung der Protonen im Körper statt. Diese senden daraufhin ein messbares Signal aus. Bei geeigneter Realisierung lassen sich daraus tomographische Bilder rekonstruieren. MRT-Scanner bieten verschiedene MRT-Sequenzen an, durch die sich unterschiedliche Gewebe in gewissen Grenzen verschieden anregen lassen. Dadurch ergeben sich unterschiedliche Bildintensitäten für einzelne Gewebe. Die Beschreibung der MRT ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit. Eine Einführung in die Thematik bieten [42, 121, 138, 193]. Die physikalischen Grundlagen der magnetischen Kernresonanz findet man in [1].

Die MRT bietet gegenüber der CT zwei wesentliche Vorteile: Sie ist nach heutigem Wissensstand für den Menschen unschädlich, des Weiteren liefert sie einen sehr viel höheren Weichgewebekontrast als die CT. Nachteile gegenüber der CT ergeben sich unter anderem dadurch, dass die MRT keine absoluten Gewebewerte kennt. Je nach Aufnahmeparametern ergeben sich völlig unterschiedliche Kontraste. Für die Segmentierung von Knochen und damit auch von Wirbeln stellt sich das Problem, dass Knochengewebe aufgrund verhältnismäßig wenig eingelagerter Protonen signalschwach ist und häufig einen sehr schlechten Kontrast gegenüber verschiedenem Weichgewebe aufweist. Insbesondere ist es im Allgemeinen nicht möglich, über eine Schwellwertsegmentierung Knochengewebe im MRT zu segmentieren. Ebenso ist eine Oberflächenvisualisierung der Wirbel häufig nicht ohne Interaktion möglich.



**Abbildung 3.7:** Wirbelsegmentierung in artefaktbehafteten CT-Daten. (a), (b) Im artefaktbehafteten Datensatz ist eine korrekte Dilatation des Ballons häufig nicht möglich. (c) Datensatz wie in (a) nach Anwendung von RFMAR. (d) Im artefaktreduzierten Datensatz kann der Ballon korrekt dilatieren werden. (e) Initialisierung des Ballons. (f) Freigestellter dilatierter und geglätteter Ballon.

Zum Test des Verfahrens dient ein T2-gewichteter MRT-Datensatz<sup>8</sup> der oberen Halswirbelsäule. Durch die verwendete Sequenz ergibt sich ein guter Kontrast zwischen dem Rückenmark und dem Knochengewebe. Die Anpassung der Schichtintensitäten aufeinander erfolgte manuell durch Helligkeitsanpassungen in den besonders dunklen Schichten am Rand des Volumens. Automatische Verfahren zur Helligkeitsanpassung werden in [189, Kap. 2], [21, 184, 218] beschrieben und lassen sich bei Bedarf in die Software integrieren.

Um das Ballonverfahren in der MRT einsetzen zu können, muss vor allem der Bildkraftvektor  $\mathbf{i}_{i,j}^t$  an die jeweilige Sequenz angepasst werden. In diesem Fall wird der Vektor folgendermaßen definiert:

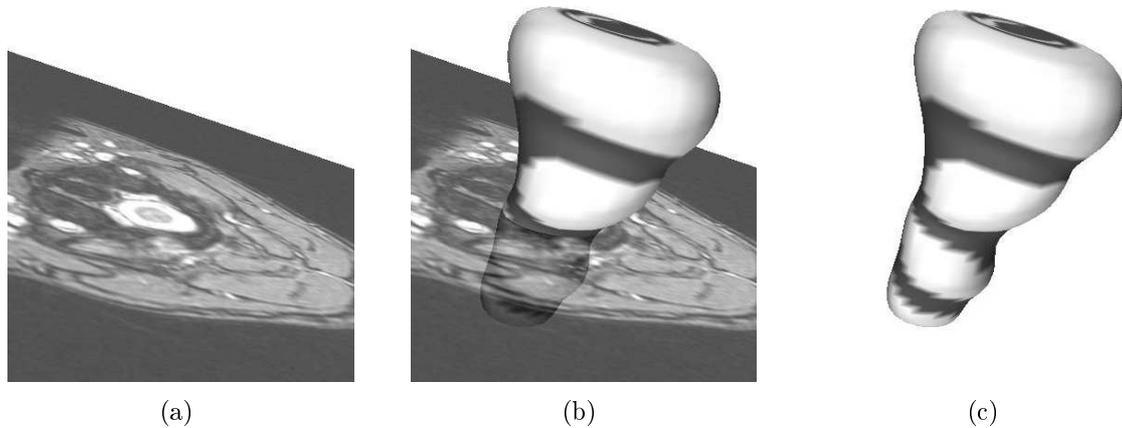
$$\mathbf{i}_{i,j}^t := -g_{\text{MRT}}(\mathbf{p}_{i,j}) \cdot \mathbf{n}_{i,j}^t, \quad \text{mit} \quad g_{\text{MRT}}(\mathbf{p}_{i,j}) := \begin{cases} 1, & f(\mathbf{p}_{i,j}) < g_0 \\ 1 - \frac{f(\mathbf{p}_{i,j}) - g_0}{g_1 - g_0}, & g_0 \leq f(\mathbf{p}_{i,j}) < g_1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.12)$$

mit  $g_0 = 60$  und  $g_1 = 100$ . Eine Abbildung des im Beispieldatensatzes dilatierten Ballons ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Da eine Oberflächenvisualisierung der Wirbel im MRT aufgrund des schlechten Kontrasts zwischen den Wirbeln und dem sie umgebenden Gewebe sich nur schwer realisieren lässt, wird hier nur ein ausgewähltes Schnittbild des Datensatzes dargestellt. In diesem Bild ist der oberste Halswirbel zu erkennen. Die Schicht liegt exakt in einer hyperbolischen Region des Ballons. Die anderen hyperbolischen Bereiche zeigen die Positionen der anderen Wirbel. Die Trennebenen können wie im CT gewählt werden. Die Anwendung von Region Growing zur Segmentierung der Wirbel ist in der MRT im Allgemeinen nicht möglich, da aufgrund ähnlicher oder gleicher Bildintensitäten umliegender Gewebe keine Beschränkung des Wirbels nach frontal, dorsal und lateral gewährleistet ist, weshalb Region Growing in der Regel zu einem „Auslaufen“ nach außen führen würde. Eine grobe Segmentierung der Wirbel lässt sich jedoch beispielsweise durch Ausschneiden zylindrischer Subvolumen um den Wirbelkanal realisieren, die nach oben und unten durch die Trennebenen beschränkt sind.

### 3.3 Zusammenfassung

Die automatische Trennung und Segmentierung von Wirbeln in tomographischen Volumendaten ist ein schwieriges Problem der Bildverarbeitung. Durch Analyse der Oberflächenkrümmung eines im Wirbelkanal dilatierten virtuellen Ballons lassen sich die einzelnen Wirbel effizient voneinander nach oben und unten abgrenzen. In der CT lassen sich die Wirbel durch Region Growing innerhalb der abgegrenzten Bereiche

<sup>8</sup>Die Aufnahme erfolgte auf einem Siemens Symphony MRT mit der Sequenz „me3d“ und den Aufnahmeparametern TE=24 ms, TR=47 ms.



**Abbildung 3.8:** Wirbeltrennung in der MRT. (a) Ausgewählte Schicht innerhalb eines MRT-Volumens. In der Mitte ist das Rückenmark als helle Fläche zu erkennen. Es wird vom obersten Halswirbel umgeben (rechts: dorsal). (b) Dilatierter, geglätteter Ballon mit transparent dargestellter Schicht aus (a). Der Wirbel liegt wie erwartet in einer hyperbolischen Region. (c) Ballon wie in (b), jedoch ohne MRT-Schicht.

segmentieren. Das Verfahren lässt sich mit geringen Modifikationen auch in der MRT anwenden.

Für CT-Datensätze liefert das Ballonverfahren eine gute Anwendung für RFMAR. Es wurde exemplarisch an einem Datensatz gezeigt, dass durch vorherige Artefaktreduktion anhand RFMAR ein Einsatz des Ballonverfahrens auch bei stark artefaktbehafteten CT-Datensätzen möglich ist.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

Metallartefakte stellen nach wie vor ein großes Problem in der medizinischen CT dar. Die diagnostische und technische Qualität der resultierenden Rekonstruktionsbilder ist insbesondere aufgrund von Rauschartefakten häufig sehr schlecht und schränkt dadurch eine direkte Weiterverarbeitung der Bilder stark ein.

Bisherige Verfahren zur Rauschartefaktreduktion versagen, wenn die Rohdaten nicht vorhanden waren oder sich das artefaktverursachende Metall nicht im Rekonstruktionsbild befindet. In dieser Arbeit wurde ein neues Verfahren entwickelt, das auch in diesen Fällen eingesetzt werden kann. Oft ist dadurch eine Artefaktreduktion überhaupt erst möglich. Das Verfahren stellt somit einen wesentlichen Fortschritt für die medizinische Diagnostik sowie die rechnerbasierte Verarbeitung von CT-Bildern dar. Dies zeigt sich auch durch die durchweg positive Resonanz verschiedener Radiologen, die das Verfahren bewerteten.

Die Laufzeit von RFMAR ist hauptsächlich von der Radontransformation sowie der gefilterten Rückprojektion abhängig. Durch Verwendung schnellerer Implementierungen dieser beiden Operatoren ist eine starke Reduktion der Rechenzeit von derzeit ungefähr 160 Sekunden pro Rekonstruktionsbild zu erwarten. Dadurch ließe sich das Verfahren auch beispielsweise in einer Unfallchirurgie zur echtzeitnahen Artefaktreduktion bei CT-Aufnahmen von Verletzungen im Bereich der Kopf-Hals-Gelenke einsetzen, die in vielen Fällen stark von Rauschartefakten überlagert sind.

Das neue Verfahren eignet sich ausschließlich zur Reduktion von Rauschartefakten. Eine zusätzliche Reduktion von Strahlaufhärungsartefakten ließe sich unter Umständen wie folgt erreichen [154, 159]: Mit Hilfe externer Tomographie ist eine eindeutige Rekonstruktion von CT-Bildern außerhalb der Metalle ohne Einbeziehung der Rohdaten innerhalb der Metallsinusoide möglich. Die externe Tomographie ist jedoch besonders empfindlich gegenüber Störungen der verwendeten Rohdaten außerhalb der Metallsinusoide und liefert deshalb im Allgemeinen schlechte Ergebnisse. Es ist jedoch möglich, dass sich aus einem Vergleich zwischen den durch RFMAR und den durch externe Tomographie gewonnenen Rekonstruktionsbildern die Ausprägung der Strahlaufhärungsartefakte abschätzen und sich dadurch eine Reduktion von Strahlaufhärungsartefakten erzielen lässt.

In einem weiteren Teil der Arbeit wird ein neues Verfahren zur automatischen Segmentierung von Halswirbeln in CT-Volumendatensätzen vorgestellt. Dies ist eine wichtige Aufgabenstellung in der Diagnostik von Störungen an der Halswirbelsäule,

der Chirurgie und der Orthopädie, beispielsweise bei Erkrankungen oder angeborenen beziehungsweise degenerativen Schäden der Halswirbelsäule. Eine Segmentierung von Knochengewebe stellt bei CT-Datensätzen im Allgemeinen kein Problem dar, da sich dieses anhand der Hounsfield-Einheiten gut von anderem Gewebe unterscheiden lässt. Die Segmentierung einzelner Halswirbel hingegen ist häufig schwierig, da die einzelnen Wirbel in den Gelenken eng mit den jeweils benachbarten Wirbeln verbunden sind und sie sich deshalb in den CT-Daten dort häufig schlecht oder gar nicht voneinander abgrenzen lassen.

In dem hier vorgestellten Verfahren wird ein Ballon in Form eines Feder-Masse-Modells virtuell in den Wirbelkanal eingesetzt und iterativ dilatiert. Dabei tritt er aus den Zwischenwirbelbereichen heraus, wobei die Ballonoberfläche dort eine ellip-tische und ansonsten eine hyperbolische Form annimmt. Durch Analyse der Oberflächenkrümmung lassen sich Ebenen zur Trennung und anschließenden Segmentierung der Wirbel definieren. Nach vorheriger Artefaktreduktion durch RFMAR lässt sich das Verfahren erfolgreich bei artefaktbehafteten CT-Datensätze einsetzen. Es wurde gezeigt, dass ein Einsatz auch für MRT-Daten möglich ist.

Es ist zu erwarten, dass das Ballonverfahren, möglicherweise mit geringen Modifi-kationen, auch für andere Abschnitte der Wirbelsäule einsetzbar ist. Bisher wurde das Verfahren jedoch nur auf Volumendatensätzen der Halswirbelsäule angewandt. In einer anschließenden Arbeit ließe sich der Einsatz auch für andere Wirbelsäulen-abschnitte testen.

Eine Erweiterung des Verfahrens ist etwa durch Kombination der von GHEBREAB [61] vorgestellten aktiven Wirbelmodelle vorstellbar. Bei diesem Verfahren ist zur Erzielung zufriedenstellender Segmentierungsergebnisse eine gute initiale manuelle Po-sitionierung der Wirbelmodelle erforderlich. Diese könnte durch das Ballonverfahren automatisch erfolgen.

# A Grundlagen

Dieser Anhang dient hauptsächlich der eindeutigen Festlegung verwendeter Sprechweisen. Auf Herleitung und Beweise wird zum großen Teil verzichtet und stattdessen auf entsprechende Fachliteratur verwiesen, in der diese zu finden sind.

## A.1 Definitionen

### A.1.1 Inverse und schlecht gestellte Probleme

**Definition A.1 (Inverses Problem [167])** Sei  $A : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen den beiden topologischen Räumen  $X$  und  $Y$ . Beim *direkten Problem* wird die Wirkung aus der Ursache berechnet, das heißt, es wird  $Ax$  für  $x \in X$  ermittelt. Wird hingegen zu der Wirkung  $y \in Y$  die Ursache  $x \in X$  berechnet, so dass  $Ax = y$ , spricht man vom *inversen Problem*.  $\square$

**Definition A.2 (Schlecht gestelltes Problem [123, 167])** Sei  $A : X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen den topologischen Räumen  $X$  und  $Y$ . Das Problem  $(A, X, Y)$  heißt *gut gestellt*<sup>1</sup>, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Die Gleichung  $Ax = y$  hat für jedes  $y \in Y$  eine Lösung.
2. Diese Lösung ist eindeutig bestimmt.
3. Die inverse Abbildung  $A^{-1} : Y \rightarrow X$  ist stetig, das heißt die Lösung  $x$  hängt stetig von den Daten ab.

Ist eine der Bedingungen verletzt, so heißt das Problem *schlecht gestellt*<sup>2</sup>.  $\square$

### A.1.2 Konvexe Kombinationen, Mengen, Hüllen und Funktionen

**Definition A.3 (Konvexe Kombination [84])** Eine Linearkombination  $\sum \alpha_i x_i$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  von Elementen  $x_i \in V$  eines reellen Vektorraums  $V$  heißt *konvexe Kombination*, wenn für die Gewichte  $\alpha_i$  gilt:  $\sum \alpha_i = 1$  und  $\alpha_i > 0$ .  $\square$

---

<sup>1</sup>engl.: well-posed

<sup>2</sup>engl.: ill-posed

**Definition A.4 (Konvexe Menge [84])** Eine Teilmenge  $M$  eines reellen Vektorraums  $V$  heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte aus  $M$  auch deren konvexe Kombination in  $M$  enthalten ist.  $\square$

**Definition A.5 (Konvexe Hülle [84])** Sei  $M$  Teilmenge eines reellen Vektorraumes  $V$ . Die *konvexe Hülle* von  $M$  ist die kleinste konvexe Menge, die  $M$  enthält, das heißt der Durchschnitt  $\bigcap_i K_i$  aller konvexen Mengen  $K_i \supseteq M$ . Sie entspricht der Menge aller konvexen Kombinationen der Elemente  $x_i \in M$ .  $\square$

**Definition A.6 (Konvexe Funktion [83])** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex in  $I$* , wenn für alle  $x, y \in I$  gilt:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Gilt für alle  $x, y \in I$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

so heißt die Funktion *streng konvex in  $I$* .  $\square$

**Bemerkung A.1 ([83])** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und  $f \in C^2(I \rightarrow \mathbb{R})$ . Dann gilt  $f$  ist

$$\begin{aligned} \text{konvex in } I, & \quad \Leftrightarrow \forall x \in I : f''(x) \geq 0, \\ \text{streng konvex in } I, & \quad \Leftrightarrow \forall x \in I : f''(x) > 0, \end{aligned}$$

$\square$

### A.1.3 Zusammenhang einer Menge

**Definition A.7 (Zusammenhang einer Menge [17])** Eine offene und zusammenhängende Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn der Rand  $\partial M$  zusammenhängend ist.  $\square$

### A.1.4 Faltungen

**Definition A.8 (kontinuierliche Faltung)** Für  $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert:

$$[f * g](t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x) dx. \quad (\text{A.1})$$

$\square$

**Definition A.9 (diskrete Faltung)** Für  $f, g \in \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  wird definiert:

$$f * g[n] := \sum_k f[k]g[n-k]. \quad (\text{A.2})$$

$\square$

## A.1.5 Grundlagen aus der Systemtheorie

### Dirac- und Kronecker- $\delta$

In der Theorie linearer kontinuierlicher Systeme spielt die im Folgenden definierte  $\delta$ -Distribution (vgl. [219]) beziehungsweise der *Dirac'sche  $\delta$ -Impuls* eine wichtige Rolle. Diese nimmt für diskrete Signale die Kronecker  $\delta$ -Funktion ein. Einige wichtige Eigenschaften der  $\delta$ -Distribution beziehungsweise des Kronecker- $\delta$  sind in Tabelle A.1 zusammengefasst.

**Definition A.10 (Dirac'scher  $\delta$ -Impuls)** Der Dirac'sche  $\delta$ -Impuls lässt sich als folgender Grenzwert auffassen (vgl. [15, Kap. 5]):

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right). \quad (\text{A.3})$$

□

**Definition A.11 (Kronecker  $\delta$ -Funktion)**

$$\delta : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & , \quad t = 0 \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

□

| Eigenschaft     | kontinuierlich   | diskret  |
|-----------------|--|--|
| Siebeigenschaft | $\int f(t)\delta(t-a) dt = f(a)$                               | $\sum f[t]\delta[t-a] = f[a]$                                  |
| Energie         | $\int \delta(t) dt = 1$  | $\sum \delta[t] = 1$   |
| Linearität      | $\alpha\delta(t) + \beta\delta(t) = (\alpha + \beta)\delta(t)$ | $\alpha\delta[t] + \beta\delta[t] = (\alpha + \beta)\delta[t]$ |
| Skalierung      | $\delta(\alpha t) = \frac{1}{ \alpha }\delta(t)$               |  |

**Tabelle A.1:** Eigenschaften des Dirac- beziehungsweise Kronecker- $\delta$ .

### Fouriertransformation

Zur Analyse der Frequenzen in einem Signal eignet sich die Frequenzerlegung mit Hilfe der Fouriertransformation. Die Kenntnis der Fouriertransformation und ihrer Eigenschaften wird in dieser Arbeit vorausgesetzt. Für Beschreibungen der zugrundeliegenden Theorie sei auf [8, 15, 219] verwiesen. Es gelten hier folgende Definitionen:

**Definition A.12 (Fouriertransformation)** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann wird die Abbildung  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$ , mit

$$[\mathcal{F}f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi} d\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Fouriertransformation genannt. Die Funktion  $\hat{f} := \mathcal{F}f$  heißt *Fouriertransformierte* von  $f$ . □

Die Invertierung der Fouriertransformation ergibt sich durch folgenden Satz.

**Satz A.1 (nach [219, Satz V.2.8])** Die Fouriertransformation ist eine Bijektion von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Der inverse Operator ist durch

$$[\mathcal{F}^{-1}f](x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{ix\xi} dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gegeben. □

**Beweis:** Ein Beweis findet sich in [219]. ■

**Definition A.13** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . Mit

$$[\mathcal{F}_{x \rightarrow \omega} f](\omega, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\omega} f(x, y) dx$$

wird die Abbildung bezeichnet, die sich bei Berechnung von Fouriertransformationen entlang einer Koordinatenachse ergeben. Entsprechend wird die inverse Abbildung folgendermaßen bezeichnet:

$$[\mathcal{F}_{x \rightarrow \omega}^{-1} f](x, y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\omega} f(\omega, y) d\omega. \quad \square$$

**Definition A.14 (diskrete Fouriertransformation)** Sei  $f \in l^1(\mathbb{N}_N, \mathbb{R})$  ein diskretes Signal und  $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ . Dann heißt

$$\hat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[l] \omega_N^{kn}$$

die *diskrete Fouriertransformation (DFT)* und

$$f[i] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] \omega_N^{-ki}$$

die *inverse DFT (IDFT)*. □

Die effiziente Berechnung der diskreten Fouriertransformation erfolgt anhand der *schnellen Fouriertransformation (FFT)* beziehungsweise der *inversen FFT (IFFT)*. Diese werden ausführlich in [8, 15, 147, 152] beschrieben.

## A.2 Grundlagen der Wavelettransformation

Ähnlich wie die Fouriertransformation eignet sich die *Wavelettransformation* zur Frequenzanalyse von Signalen. Während aus der Fouriertransformation eine Darstellung der Frequenzen des vollständigen Signals erfolgt, eignet sich die Wavelettransformation zu Frequenzanalyse von lokalen Signalausschnitten. Im folgenden Abschnitt wird ein Überblick über diejenigen Inhalte der Wavelettheorie gegeben, die für diese Arbeit wichtig sind. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf [36, 124, 129] verwiesen.

**Definition A.15 (Multi-Skalen-Analyse)** Eine aufsteigende Kette abgeschlossener Unterräume  $V_m \subset L^2(\mathbb{R})$

$$\{0\} \subset \cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R})$$

heißt *Multi-Skalen-Analyse* des  $L^2(\mathbb{R})$ , wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind [36]:

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}),$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\},$$

$$f(\cdot) \in V_m \Leftrightarrow f(2^m \cdot) \in V_0$$

und

$$\forall m \in \mathbb{Z} : f \in V_0 \Rightarrow f(\cdot - n) \in V_0.$$

Weiterhin muss eine Funktion  $\phi \in V_0$  existieren, aus der die Funktionenfamilie

$$\phi_{j,n} := 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - n), \quad j, n \in \mathbb{Z},$$

so abgeleitet wird, dass

$$\{\phi_{0,n} | n \in \mathbb{Z}\}$$

eine orthonormale Basis des  $V_0$  bildet. □

Die Funktion  $\phi \in V_0$  wird *Skalierungsfunktion* genannt.

Die orthogonalen Komplemente von  $V_j$  in  $V_{j-1}$  werden mit  $W_j$  bezeichnet. Das heißt,

$$V_{j-1} = W_j \oplus V_j, \quad V_j \perp W_j.$$

**Bemerkung A.2** Aus der Konstruktion ergibt sich

$$V_j = \bigoplus_{i \geq j+1} W_i$$

und damit

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \quad \square$$

Sei  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  eine Funktion mit kompaktem Träger. Erfüllt die Funktion die Zulässigkeitsbedingung

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \quad (\text{A.5})$$

wird sie *Wavelet* genannt [124], wobei  $\hat{\psi}$  die Fouriertransformierte des Wavelets bezeichnet.

Für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$  heißt

$$[\mathcal{W}_\psi f](a, b) = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{b}} \psi \left( \frac{t-a}{b} \right) \right\rangle \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi \left( \frac{t-a}{b} \right) dt \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} f * \psi \left( \frac{-t}{b} \right) \quad (\text{A.8})$$

die *Wavelettransformation* von  $f$  zum Wavelet  $\psi$  [129, Kap. 4.3], [124].

**Satz A.2 (nach [124])** *Zu jeder Multi-Skalen-Analyse existiert ein Wavelet  $\psi$ , aus dem durch Dilatation und Verschiebung die Funktionen  $\psi_{j,n}$  mit*

$$\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi \left( \frac{t - 2^j n}{2^j} \right), \quad (j, n) \in \mathbb{Z}^2$$

*hervorgehen. Diese Funktionen bilden eine Orthonormalbasis für den Raum  $W_j$ .  $\square$*

Sei  $a_0 \in l^2(\mathbb{Z})$  ein diskretes Signal. Sei weiterhin wie in Satz A.2 ein Wavelet durch eine Multi-Skalen-Analyse mit der Skalierungsfunktion  $\phi$  gegeben. Die Funktion

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0[n] \phi(t-n)$$

wird als diejenige kontinuierliche Funktion definiert, die sich durch eine Linearkombination der Basisfunktionen  $\phi(t-n)$  ergibt, wobei die Koeffizienten mit den diskreten Werten von  $a_0$  identifiziert werden. Da die Basisfunktionen  $\phi(t-n)$  orthonormal zueinander sind, gilt

$$a_0[n] = \langle f(t), \phi(t-n) \rangle = f * \phi(-n).$$

Somit stellt das Signal  $a_0$  ein gewichtetes Mittel beziehungsweise eine diskrete Approximation von  $f$  dar. Die *diskrete Wavelettransformation* von  $a_0$  ist bestimmt durch die *Detailkoeffizienten*

$$d_j[n] = \langle f, \psi_{j,n} \rangle,$$

das heißt durch die Koeffizienten der Projektionen von  $f$  auf die Räume  $W_j$ . Die Koeffizienten der Skalenräume  $V_j$ , die die grobe Struktur von  $f$  beinhalten, bestimmen sich entsprechend zu

$$a_j[n] = \langle f, \phi_{j,n} \rangle.$$

Diese Koeffizienten können gemäß folgendem Satz [129, Kap. 7.3.1] durch Faltungen zweier Faltungskerne mit den Koeffizienten  $a_j$  bestimmt werden.

**Satz A.3 (Mallat)**

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-2p]a_j[n] = a_j * h[-2p], \quad (\text{A.9})$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n-2p]a_j[n] = a_j * g[-2p]. \quad (\text{A.10})$$

□

Die Koeffizienten  $h[i]$  und  $g[i]$  bestimmen die Waveletzerlegung. Sind sie bekannt, so wird zur Berechnung der Wavelettransformation das Wavelet  $\psi$  nicht explizit benötigt. In dieser Arbeit wird für  $g[i]$  die Bezeichnung *Wavelet-Faltungskern* verwendet.

Aus den Koeffizienten in einer Skalierungsstufe  $j$  kann die ursprüngliche Funktion durch geeignete Faltungen mit den Faltungskernen  $h$  und  $g$  wieder rekonstruiert werden (siehe z. B. [36, 124, 129]). Das impliziert aber, dass das Wavelet nicht symmetrisch sein [36, Kap. 8.3] und somit keine lineare Phase haben kann [122, Kap. 4.1], [36, Kap. 8].

Wird jedoch bei der Multi-Skalen-Analyse nicht wie bislang ein *orthogonales Wavelet*, sondern ein *biorthogonales Wavelet* verwendet, kann dieses auch symmetrisch sein. In diesem Fall wird von den  $\psi_{j,n}$  nicht der Orthogonalraum  $W_j$  zu  $V_j$ , sondern zu einem Raum  $\tilde{V}_j$  aufgespannt. Der Orthogonalraum zu  $V_j$  wird entsprechend mit  $\tilde{W}_j$  bezeichnet. Die Wavelettransformation für biorthogonale Wavelets wird wie in Satz A.3 anhand von zwei Faltungskernen  $h$  und  $g$  berechnet. Für die Rekonstruktion der Funktion werden zwei andere Kerne  $\tilde{h}$  und  $\tilde{g}$  verwendet. Ausführliche Beschreibungen zu biorthogonalen Wavelets findet man in [25, 36, 124, 129].

Ein wichtiges Kriterium für die Wahl eines Wavelets spielt dessen Anzahl *verschwindender Momente*.

**Definition A.16 (Verschwindende Momente)** Eine Funktion  $\psi$  mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad 0 \leq k < n \quad (\text{A.11})$$

hat  $n$  *verschwindende Momente*. □

**Bemerkung A.3 (nach [129, Kap. 7.2])** Aus (A.11) folgt, dass ein Wavelet  $\psi$  mit  $n$  verschwindenden Momenten orthogonal zu allen Polynomen vom Grad  $n - 1$  ist. Ist eine Funktion  $f$  an der Stelle  $t$  lokal aus  $C^k$ , so kann sie in einer kleinen Umgebung von  $t$  gut durch ein Taylorpolynom vom Grad  $k$  approximiert werden. Wenn  $k < n$  gilt, dann ist  $\psi$  orthogonal zu diesem Taylorpolynom. Somit nehmen die Detailkoeffizienten  $|\langle f, \psi(j, n) \rangle|$  kleine Werte in Skalen hoher Auflösung ein.  $\square$

Folgender Satz stellt eine Beziehung zwischen einem Wavelet mit  $n$  verschwindenden Momenten und einem Differentialoperator her.

**Satz A.4 (nach [129, Kap. 6.1.2])** Ein Wavelet hat genau dann  $n$  verschwindende Momente, wenn es als  $n$ -te Ableitung einer Funktion  $\theta$  geschrieben werden kann, das heißt

$$\psi(t) = (-1)^n \frac{d^n \theta(t)}{dt^n}.$$

Für die Wavelettransformation einer Funktion  $f$  gilt dann

$$[\mathcal{W}_{a,b} f] = b^n \frac{d^n}{du^n} \left( f * \frac{1}{\sqrt{b}} \theta\left(-\frac{t}{b}\right) \right) (a). \quad \square$$

Somit kann ein Wavelet mit  $n$  verschwindenden Momenten als Differentialoperator  $n$ -ter Ordnung aufgefasst werden.

### A.3 Mathematische Morphologie

Die (mathematische) Morphologie<sup>3</sup> wurde ursprünglich zur Abschätzung von Eisen-vorkommen im Bergbau [179] entwickelt, jedoch schon bald im Kontext der Bildverarbeitung und -analyse verwendet [130, 180]. Bei der Morphologie werden Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  beziehungsweise des  $\mathbb{Z}^n$  und deren Veränderung durch Operatoren, die sich aus mengentheoretischen Operationen zusammensetzen, betrachtet. Anwendungen der Morphologie sind beispielsweise Rauschunterdrückung, Distanztransformation, Skelettierung, Bestimmung der Ränder oder der konvexen Hüllen von Teilmengen. Die Morphologie lässt sich auch für Graustufenbilder definieren [76, 189]. Anstelle der mengentheoretischen ist eine algebraische Darstellung der Morphologie anhand von Operatoren auf vollständigen Verbänden möglich [77, 171].

Es folgt nun eine knappe Darstellung der grundlegenden morphologischen Operatoren *Erosion*, *Dilatation*, *Opening* und *Closing* sowie einiger Eigenschaften dieser Operatoren nach [76, 189]. Ausführlichere Beschreibungen findet man neben der oben erwähnten Literatur in [93, Kap. 9], [151, Kap. 14], [116, Kap. 7.5], [65, Kap. 8.4].

<sup>3</sup>griech.: ἡ μορφή = Form, Gestalt

Seien  $F \subset \mathbb{R}^2$  und die als *Strukturelement* bezeichnete Menge  $B \subset \mathbb{R}^2$  kompakte Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ ,  $\check{B} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid -\mathbf{x} \in B\}$  das am Ursprung gespiegelte Strukturelement und  $B + \mathbf{h} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} - \mathbf{h} \in B\}$  die um  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$  verschobene Menge  $B$ . Dann lassen sich die oben genannten Operatoren wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \text{Erosion: } F \ominus B &:= \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \mid (B + \mathbf{h}) \subseteq F\} \\ \text{Dilatation: } F \oplus B &:= \{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \mid (\check{B} + \mathbf{h}) \cap F \neq \emptyset\} \\ \text{Opening: } F \circ B &:= (F \ominus B) \oplus B \\ \text{Closing: } F \bullet B &:= (F \oplus B) \ominus B \end{aligned}$$

Bei der Erosion werden Löcher  $L$  in  $F$  mit  $L \in F^{\complement}$  und  $\partial L \subset F$  vergrößert sowie Pixel am Rand von  $F$  entfernt. Die Dilatation stellt das Gegenstück der Erosion dar. Löcher, die kleiner als das Strukturelement sind, verschwinden und das Objekt dehnt sich aus. Die Kompositionen von Dilatation und Erosion beziehungsweise von Erosion und Dilatation werden Opening beziehungsweise Closing genannt. Für Opening und Closing gilt nach [76, 189]:

$$F \circ B = \cup \{B + \mathbf{h} \mid \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2 \wedge (B + \mathbf{h}) \subseteq F\} \quad (\text{A.12})$$

$$F \bullet B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \in (\check{B} + \mathbf{h}) \Rightarrow (\check{B} + \mathbf{h}) \cap F \neq \emptyset\} \quad (\text{A.13})$$

$$F \bullet B = (F^{\complement} \circ \check{B})^{\complement} \quad (\text{A.14})$$

$$F \bullet (B + \mathbf{h}) = F \bullet B \quad (\text{A.15})$$

$$(F \bullet B) \bullet B = F \bullet B \quad (\text{A.16})$$

$$F \subseteq F \bullet B \quad (\text{A.17})$$

$$F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_1 \bullet B \subseteq F_2 \bullet B \quad (\text{A.18})$$

Diese Eigenschaften ermöglichen eine anschauliche Interpretation von Opening und Closing. Das Opening ergibt sich für  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$  gemäß (A.12) als Vereinigung aller Mengen  $B + \mathbf{h}$ , die vollständig in  $F$  enthalten sind. Eine ähnliche Interpretation ist nach (A.14) auch für das Closing möglich.

**Satz A.5** *Sei  $K \subset \mathbb{R}^2$  eine kompakte konvexe Menge. Dann ist  $K$  invariant gegenüber dem Closing mit einem beliebigen kompakten Strukturelement  $B \subset \mathbb{R}^2$ , das heißt  $K \bullet B \subseteq K$ .*  $\square$

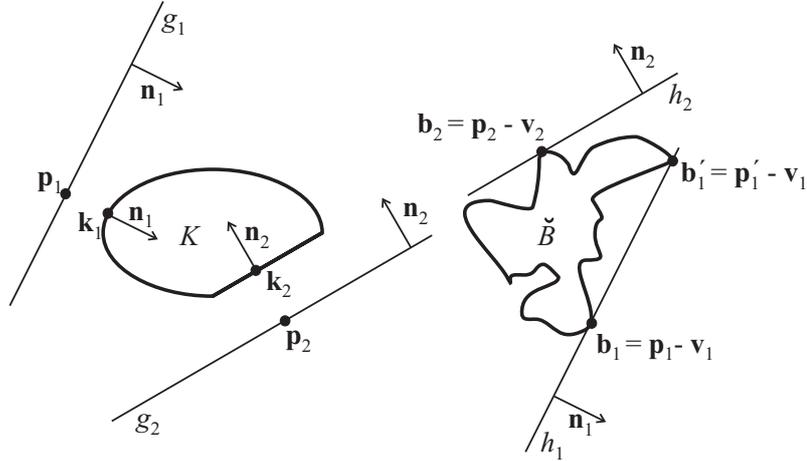
**Beweis:** Es wird gezeigt, dass es für alle Punkte  $\mathbf{p} \in K^{\complement}$  einen Vektor  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$  gibt, für den gilt:

1.  $\mathbf{p} \in (\check{B} + \mathbf{h})$  und
2.  $K \cap (\check{B} + \mathbf{h}) = \emptyset$ .

Aus (A.13) folgt, dass  $\mathbf{p} \notin K \bullet B$  und damit die Behauptung.

Es wird nun konstruktiv gezeigt, dass beide Bedingungen erfüllt sind. Aus der Konvexität von  $K$  folgt, dass es immer eine Gerade durch  $\mathbf{p}$  gibt, die  $K$  nicht schneidet.

Sei  $\mathbf{n}$  der ins Innere von  $K$  weisende Normalenvektor der Randkurve von  $K$  an der Stelle  $\mathbf{k} := \arg \min_{\mathbf{x} \in \partial K} \|\mathbf{p} - \mathbf{x}\|_2$  und  $g$  die durch  $g : \langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle = 0$  bestimmte Gerade (s. Abb. A.1).



**Abbildung A.1:** Darstellung einer konvexen Menge  $K$  und eines (gespiegelten) Strukturelements  $\check{B}$ . Zwei Punkte  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in K^{\text{G}}$  sind exemplarisch dargestellt. In Abhängigkeit zu  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}_2$  werden  $\mathbf{k}_1$  und  $\mathbf{k}_2$ , sowie  $\mathbf{n}_1$  und  $\mathbf{n}_2$  bestimmt. Daraus ergeben sich die Geraden  $g_1$  und  $g_2$  sowie die Parallelen  $h_1$  und  $h_2$ , die den Rand  $\partial \check{B}$  berühren.

Sei  $h$  diejenige Parallele zu  $g$  mit  $h \cap \partial \check{B} \neq \emptyset$  und  $h \cap \overset{\circ}{\check{B}} = \emptyset$ , für die der Ausdruck

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n} \rangle, \mathbf{x} \in h \quad (\text{A.19})$$

maximal wird. Da  $B$  und damit  $\check{B}$  eine kompakte Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$  ist, gibt es nach dem Lemma von Zorn [17] zu jeder Normalenrichtung  $\mathbf{n}$  mindestens ein Punkt  $\mathbf{b}$ , für den A.19 maximal wird. Dadurch ist  $\mathbf{h}$  eindeutig bestimmt.

Ein beliebiger Punkt  $\mathbf{b} \in h \cap \partial \check{B}$  wird nun als Referenzpunkt gewählt und damit  $\mathbf{v} := \mathbf{p} - \mathbf{b}$  bestimmt. Für  $\mathbf{v}$  gilt nach Konstruktion  $\mathbf{p} \in (\check{B} + \mathbf{v})$ . Es gilt aber auch  $K \cap (\check{B} + \mathbf{v}) = \emptyset$ , da nach Konstruktion  $K$  auf der positiven und  $\check{B} + \mathbf{v}$  auf der negativen Halbebene von  $g$  liegt. Somit sind für  $\mathbf{h} := \mathbf{v}$  die Bedingungen 1 und 2 erfüllt. ■

**Korollar A.1** Satz A.5 gilt auch für kompakte konvexe Teilmengen  $K \subset F$  beliebiger Mengen  $F \subset \mathbb{R}^2$ , wenn der minimale Abstand  $\min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \mid \mathbf{x} \in K, \mathbf{y} \in F \setminus K\}$  größer ist als der maximale Durchmesser  $\max\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B\}$  des kompakten Strukturelements  $B \subset \mathbb{R}^2$ . □

**Korollar A.2** Sei  $F \subset \mathbb{R}^2$  eine kompakte Menge,  $K = \text{kH}(F)$  deren konvexe Hülle und  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein kompaktes Strukturelement. Dann gilt:  $F \subseteq F \bullet B \subseteq K$ . □

**Beweis:** Die Inklusion  $F \subseteq F \bullet B$  ergibt sich nach (A.17). Da  $F \subseteq K$ , folgt nach (A.18)  $F \bullet B \subseteq K \bullet B$ . Aus Satz A.5 folgt  $K \bullet B \subseteq K$  und damit die Behauptung. ■

# Notationsverzeichnis

| Symbol   | Bedeutung  | Seite |
|--|--|-------|
| $\Theta, \beth$                                    | Multas gratias ago   |       |
| $l, \theta$  | Koordinaten im Sinogramm   | 7     |
| $\theta_0$   | Projektionswinkel  | 15    |
| $\overline{\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1}$              | Strecke von $\mathbf{p}_0$ nach $\mathbf{p}_1$   | 9     |
| $Z$  | Zentrum eines Grauwertfensters   | 22    |
| $B$  | Breite eines Grauwertfensters  | 22    |
| $T$  | Schwellwert (engl.: threshold)   | 47    |
| $l_{\max}$   | maximaler Index eines Detektorelements   | 59    |
| $\lfloor \cdot \rfloor$                            | Abrundungsfunktion:<br>$\lfloor x \rfloor = \{y \in \mathbb{Z} \mid \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1\}$ |       |
| $\lceil \cdot \rceil$                              | Aufrundungsfunktion:<br>$\lceil x \rceil = \{y \in \mathbb{Z} \mid \lceil x \rceil - 1 \leq x \leq \lceil x \rceil\}$      |       |
| $(\cdot, \cdot)$                                   | offenes Intervall  |       |
| $(\cdot, \cdot], [\cdot, \cdot)$                   | halboffene Intervalle  |       |
| $[\cdot, \cdot]$                                   | abgeschlossenes Intervall  |       |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$                     | Skalarprodukt  |       |
| $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$                     | Kreuzprodukt zwischen den Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$   | 146   |
| $\wedge$   | logisches Und  | 169   |
| $\omega$   | Kreisfrequenz $\omega := 2\pi f$   |       |
| dB   | Dezibel, hier: $\text{dB}(x) := 20 \log_{10} x$  |       |
| $\Delta$   | Differenz  | 136   |
| $\text{CON}_{\mathbf{a}}, \text{con}_{\mathbf{a}}$ | Kontrastparameter  | 138   |
| $T_{\text{CON}}$                                   | $T_{\text{CON}} := 0,003$ . Schwellwert zur Klassifizierung von CT-Bildern   | 139   |
| $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$                        | Euklidischer Abstand zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$  |       |
| $i$  | imaginäre Einheit  |       |
| $\sigma$   | Standardabweichung   |       |
| $\sigma^2$   | Varianz  |       |
| $\bar{x}$  | Mittelwert $\bar{x} = 1/n \sum x_i$ der Menge $\{x_i\}, i \in \mathbb{N}_n$  |       |
| $h(f)$   | Histogramm einer Funktion $f$  |       |
| $\kappa_1, \kappa_2$                               | Hauptkrümmungen einer Fläche   | 150   |

| Symbol                                | Bedeutung   | Seite |
|---------------------------------------|---|-------|
| <b>Mengen</b>                         |   |       |
| $\mathbb{N}$                          | Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$   |       |
| $\mathbb{N}_m$                        | $\mathbb{N}_m := \mathbb{N} \cap [0, m)$ für $m \in \mathbb{N}$   |       |
| $\mathbb{Z}$                          | Menge der ganzen Zahlen   |       |
| $\mathbb{R}$                          | Körper der reellen Zahlen   |       |
| $\mathbb{R}^+$                        | Positive reelle Zahlen: $\{x \in \mathbb{R}   x > 0\}$  |       |
| $\mathbb{R}_0^+$                      | Positive reelle Zahlen mit Null: $\{x \in \mathbb{R}   x \geq 0\}$  |       |
| $\mathbb{C}$                          | Körper der komplexen Zahlen   |       |
| $G$                                   | Grauwerte $G = \mathbb{N}_{ G -1}$  |       |
| $I$                                   | Indexmenge  |       |
| $\chi_T$                              | Indikatorfunktion beziehungsweise charakteristische Funktion der Menge $T \subset X$ ,                                      |       |
|                                       | $\chi_T : X \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ |       |
| $\chi_{\text{Metall}(f)}$             | Ortsbild $f'$ mit $f'(x, y) = 1$ für „Metallpixel“ $(x, y)$ und ansonsten $f'(x, y) = 0$                                    | 18    |
| $ M $                                 | Mächtigkeit der Menge $M$   |       |
| $\mathring{B}$                        | Inneres der Menge $B \subseteq M$ :   |       |
|                                       | $\mathring{B} := \bigcup_{U \text{ offen in } M, U \subseteq B} U$  |       |
| $\bar{B}$                             | Abgeschlossene Hülle der Menge $B \subseteq M$ :  |       |
|                                       | $\bar{B} := \bigcap_{U \text{ abgeschlossen in } M, U \supseteq B} U$   |       |
| $\partial B$                          | Rand der Menge $B \subseteq M$ : $\partial B := \bar{B} \setminus \mathring{B}$   |       |
| $\text{Def}(f)$                       | Definitionsmenge der Funktion $f$ . Stellt $f$ ein Bild dar, dann entspricht $\text{Def}(f)$ der Bildgröße                  |       |
| $\text{im}(f)$                        | Bildmenge von $f$   |       |
| $S^1$                                 | Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$   | 9     |
| $\rho_{l,\theta}$                     | Projektionsgerade   | 9     |
| $\sigma_{(x,y)}, \sigma_{\mathbf{p}}$ | Sinusoid des Punktes $(x, y)^t$ beziehungsweise eines Punktes $\mathbf{p}$ .  | 11    |
| $\sigma_M$                            | Menge aller Sinusoide der Punkte $(x, y)^t \in M$   | 18    |
| $\Omega^n$                            | Messfeld  | 63    |
| $\mathfrak{P}M$                       | Potenzmenge der Menge $M$   |       |
| $\emptyset$                           | leere Menge   |       |
| $M^c \subset O$                       | Komplement $O \setminus M$ der Menge $M$ in der Obermenge $O \supset M$ .   |       |

| Symbol         | Bedeutung  | Seite |
|----------------|--|-------|
| $\text{Tr}(f)$ | Träger der Funktion $f$ : abgeschlossene Hülle $\overline{\{x f(x) \neq 0\}}$ der Menge der Punkte, an denen die Funktion nicht verschwindet |       |
| $\text{kH}(M)$ | Konvexe Hülle der Menge $M \subset \mathbb{R}^d$   |       |
| $M_{\oplus}$   | Dilatierte Metallsinusoide   | 92    |

### Signale, Funktionen und Distributionen

|                                     |  |     |
|-------------------------------------|--|-----|
| $\check{f}$                         | Radontransformierte der Funktion $f$   | 9   |
| $\tilde{f}$                         | Artefaktfreies CT-Bild beziehungsweise Rekonstruktionsbild $\tilde{f} := \mathcal{R}^{-1}\check{f}$                              | 10  |
| $\hat{f}$                           | Fouriertransformierte der Funktion $f$   | 10  |
| $\hat{\eta}$                        | Rekonstruktionsfilter bei der gefilterten Rückprojektion   | 12  |
| $\eta$                              | Faltungskern $\mathcal{F}^{-1}\hat{\eta}$  | 13  |
| $\check{f}_r$                       | Rohdaten mit Störpixeln, insbesondere mit starkem Rauschen entlang der Metallsinusoide   | 23  |
| $\check{\check{f}}$                 | Defektsinogramm $\check{\check{f}} := \check{f}_r - \check{f}$   | 23  |
| $\tilde{\check{f}}_r$               | Artefaktbehaftetes CT-Bild beziehungsweise Rekonstruktionsbild $\tilde{\check{f}}_r := \mathcal{R}^{-1}\check{f}_r$              | 23  |
| $\tilde{\check{\check{f}}}$         | Defektbild $\tilde{\check{\check{f}}} := \tilde{\check{f}}_r - \tilde{\check{f}}$  | 23  |
| $\check{\check{\check{f}}}_r$       | Rauschartefaktbehaftete Pseudorohdaten $\check{\check{\check{f}}}_r := \mathcal{R}\tilde{\check{\check{f}}}$                     |     |
| $\check{\check{\check{f}}}$         | Hypothetische Pseudorohdaten ohne Defektpixel $\check{\check{\check{f}}} := \mathcal{R}\tilde{\check{\check{f}}}$                | 52  |
| $\tilde{\check{f}}'$                | Rekonstruktionsbild $\tilde{\check{f}}_r$ nach Anwendung eines Verfahrens zur Reduktion von Metallartefakten                     | 100 |
| $\check{\check{\check{\check{f}}}}$ | Defektpixel in den Pseudorohdaten $\check{\check{\check{\check{f}}}} := \check{\check{\check{f}}}_r - \check{\check{\check{f}}}$ |     |
| $\check{\check{f}}'_r$              | Modifizierte Rohdaten  |     |
| $\check{\check{\check{f}}}'_r$      | Modifizierte Pseudorohdaten  |     |
| $k$                                 | Kreisscheibenphantom   | 24  |
| $\check{k}$                         | Sinogramm des Kreisscheibenphantom $\check{k} = [\mathcal{R}k]$  |     |
| $\Lambda$                           | Dreieckfunktion $\Lambda(t) := \begin{cases} 1 -  t , &  t  \leq 1 \\ 0, &  t  > 1 \end{cases} = \Pi * \Pi$                      |     |
| $\Lambda^n$                         | normierte Dreieckfunktion der Länge $n$  |     |
| $\Pi$                               | Rechteckfunktion $\Pi(t) := \begin{cases} 1, &  t  \leq 1/2 \\ 0, &  t  > 1/2 \end{cases}$                                       |     |

| Symbol             | Bedeutung  | Seite |
|--------------------|--|-------|
| $\Pi^n$            | normierte Rechteckfunktion der Länge $n$   |       |
| $h_{\text{bm}}$    | Blackman-Faltungskern  | 85    |
| $h_{\text{bmn}}^n$ | normierter Blackman-Faltungskern der Länge $n$   | 85    |
| $\psi$             | Waveletfunktion beziehungsweise biorthogonales Spline-Wavelet mit sechs verschwindenden Momenten   | 166   |
| $\phi$             | Skalierungsfunktion  | 165   |
| $\text{sgn}$       | Signumfunktion $\text{sgn}(t) := \begin{cases} -1, & t < 0, \\ 0, & t = 0, \\ 1, & t > 0 \end{cases}$  |       |
| $\text{sinc}$      | Sinc-Funktion $\text{sinc}(t) := \begin{cases} \frac{\sin \pi t}{\pi t} & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$  |       |
| $s[i], s[i, j]$    | diskretes Signal, diskrete Funktion  |       |
| $\delta$           | Dirac-Delta beziehungsweise Kronecker-Delta  | 163   |
| $\delta_{i,j}$     | Sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und $(i, j) \in M$ .<br>Dann gilt $\delta_{i,j} : M \rightarrow \{0, 1\}$ , $(x, y) \mapsto \delta(x - i)\delta(y - j)$ | 15    |
| $f \circ g$        | Kompositum der Funktionen $f$ und $g$  |       |
| $k$                | Kontrastmaß  | 96    |
| $s$                | Strukturmaß  | 96    |
| $h$                | Helligkeitsmaß   | 96    |
| $v$                | Aufwand der Homogenitätsüberprüfung bei der Quadtree-Zerlegung   | 66    |
| $\xi_{i,j}$        | richtungsabhängige Gewichtsfunktion  | 147   |

## Operatoren

|                                     |  |    |
|-------------------------------------|--|----|
| $\mathcal{R}$                       | Radonoperator  | 9  |
| $\mathcal{R}^*$                     | Rückprojektionsoperator  | 11 |
| $\mathcal{F}$                       | Fourieroperator  | 10 |
| $\mathcal{F}_{x \rightarrow \nu} f$ | 1D-Fouriertransformationen entlang der $x$ -Koordinaten in einer $n$ -dimensionalen Funktion $f$ . |    |
| $\mathcal{W}_\psi$                  | Waveletoperator des Wavelets $\psi$ .  |    |
| $\mathcal{H}$                       | Hilbertoperator  | 14 |
| $\mathcal{D}$                       | Differentialoperator   | 14 |
| $*$                                 | Faltungsoperator   |    |
| $*_x$                               | 1D-Faltung in Richtung der $x$ -Koordinate   |    |

| Symbol        | Bedeutung  | Seite |
|---------------|--|-------|
| $\tau$        | Transformation auf den Intensitäten im Sinogramm | 29    |
| $\tau_\alpha$ | Transformation auf den Intensitäten im Sinogramm | ??    |
| $F \ominus B$ | Morphologische Erosion                           | 169   |
| $F \oplus B$  | Morphologische Dilatation                        | 169   |
| $F \circ B$   | Morphologisches Opening                          | 169   |
| $F \bullet B$ | Morphologisches Closing                          | 169   |

### Matrizen, Vektoren

|  |  |     |
|--|--|-----|
| $A, (a(i, j)), (a)$                    | verschiedene Darstellungen für eine Matrix   |     |
| $A^t$                                  | Transponierte Matrix   |     |
| $A^{-1}$                               | Inverse Matrix   |     |
| $\mathbf{0}$                           | Nullmatrix, das heißt Matrix $(a(i, j))$ mit $a(i, j) = 0$ passender Größe   |     |
| $\mathbf{1}$                           | Einsmatrix, das heißt Matrix $(a(i, j))$ mit $a(i, j) = 1$ passender Größe   |     |
| $A \cdot B$                            | Punktweise Multiplikation der Matrizen $A$ und $B$ . Es wird davon ausgegangen, dass die Größen der Matrizen identisch sind. |     |
| $R$                                    | Radontransformationsmatrix   | 10  |
| $C_v$                                  | Cooccurrence-Matrix  | 69  |
| $W := (w_{l,\theta})$                  | Gewichte für konvexe Kombinationen   | 90  |
| $\mathbf{x} = (\cdot, \dots, \cdot)^t$ | (Orts-) Vektoren, Pixel  |     |
| $\vec{\theta}$                         | $\vec{\theta} := (\cos \theta, \sin \theta)^t$   | 9   |
| $\theta^\perp$                         | $\theta^\perp := (-\sin \theta, \cos \theta)^t$  | 9   |
| $\mathbf{f}_{i,j}^t$                   | Kraftvektor, der die Dilatation des Ballons bestimmt   | 146 |
| $\mathbf{s}_{i,j}^t$                   | Federkraft   | 146 |
| $\mathbf{a}_{i,j}^t$                   | Kraft aufgrund von virtuellem Luftdruck  | 146 |
| $\mathbf{n}_{i,j}^t$                   | Normalenvektor   | 146 |
| $\mathbf{i}_{i,j}^t$                   | Bildkraft  | 146 |

### Vektorräume

|                  |   |     |
|------------------|---|-----|
| $V$              | Vektorraum  | 161 |
| $V_i \oplus V_j$ | Direkte Summe zweier Vektorräume $V_i$ und $V_j$ .                                    | 165 |
| $C^n(X)$         | Raum der $n$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf dem topologischen Raum $X$ |     |
| $C^\infty(X)$    | Raum der unendlich-fach differenzierbaren Funktionen auf dem topologischen Raum $X$   |     |

---

| Symbol           | Bedeutung  | Seite |
|------------------|--|-------|
| $\mathcal{S}(X)$ | Schwartz-Raum der schnell abfallenden $C^\infty(X)$ -<br>Funktionen  | 45    |
| $l^p$            | Banachraum der Folgen $x = (t_n)$ mit Norm   |       |
| $L^p(I)$         | Banachraum der (Äquivalenzklassen von) messbaren<br>Funktionen $f$ über $I$ mit Norm $\ f\ _p = (\int_I  f ^p d\lambda)^{1/p}$<br>$\ x\ _p = (\sum  t_n ^p)^{1/p}$ |       |

# Abkürzungsverzeichnis

| Bezeichnung | Bedeutung  | Seite |
|-------------|--|-------|
| ART         | Algebraisches Rekonstruktionsverfahren (engl.: Algebraic Reconstruction Technique)                               | 45    |
| ASSIM       | Adapted Structural Similarity  | 98    |
| CON         | Haralick'sches Texturmerkmal <i>CON</i> trast  | 138   |
| CT          | Computertomograph  |       |
| CT          | Computertomographie  |       |
| DICOM       | Digital Imaging and Communications in Medicine: Standard zur Speicherung und Übertragung medizinischer Bilddaten | 21    |
| DS          | Datensatz  | 110   |
| EM          | Expectation Maximization   | 45    |
| FDA         | U.S Food and Drug Administration   | 94    |
| FFT         | Schnelle Fouriertransformation (engl.: Fast Fourier Transform)   |       |
| FIR-Filter  | Filter mit einer Impulsantwort endlicher Länge (engl.: Finite Impulse Response Filter)                           |       |
| HU          | Hounsfield-Einheit (engl.: Hounsfield Unit)  | 20    |
| HVS         | Human Visual System: siehe MVS   |       |
| IDM         | Haralick'sches Texturmerkmal <i>Inverse Difference Moment</i>  | 69    |
| IF          | Methode zur Modifikation von Pseudorohdaten, die auf der <i>Indikatorfunktion</i> der Metallsinusoide basiert    | 102   |
| IFFT        | Inverse Schnelle Fouriertransformation (engl.: Inverse Fast Fourier Transform)                                   |       |
| LI          | Lineare Interpolation  | 102   |
| $M_{SVD}$   |  |       |
| MAR         | Metal Artifact Reduction   | 39    |
| MASSIM      |  |       |
| MQF         | Mittlerer Quadratischer Fehler   | 94    |

---

| Bezeichnung | Bedeutung   | Seite |
|-------------|---|-------|
| MRT         | Magnetresonanztomograph                                 |       |
| MRT         | Magnetresonanztomographie                               |       |
| MSE         | Mean Square Error: siehe MQF                            | 94    |
| MSSIM       | Mean Structural Similarity                              | 94    |
| MVS         | Menschliches Visuelles System                           |       |
| NMQF        | Normierter Mittlerer Quadratischer Fehler               | 94    |
| NMSE        | Normalized Mean Square Error: siehe NMQF                | 94    |
| PSNR        | Peak Signal to Noise Ratio                              |       |
| RFMAR       | Rohdatenfreies Metallartefaktreduktionsverfahren        | 84    |
| ROC         | Receiver Operating Characteristic                       | 99    |
| ROI         | Ausgewählter Bildausschnitt (engl.: Region Of Interest) |       |
| SNR         | Signal-Rausch-Verhältnis (engl.: Signal to Noise Ratio) | 24    |
| SSIM        | Structural Similarity                                   | 95    |
| SVD         | Singular Value Decomposition                            |       |
| TIFF        | Bilddatenformat (engl.: Tagged Image File Format)       | 110   |

---

# Literaturverzeichnis

- [1] ABRAGAM, A.: *Principles of Nuclear Magnetism*. Oxford University Press, 1989. – zitiert auf S. 155
- [2] ALDROUBI, Akram (Hrsg.) ; UNSER, Michael (Hrsg.): *Wavelets in Medicine and Biology*. CRC Press, 1996
- [3] AVCBAŞ, İsmail ; SANKUR, Bülent ; SAYOOD, Khalid: Statistical Evaluation of Image Quality Measures. In: *J Electronic Imaging* 11 (2002), Nr. 2, S. 206–223. – zitiert auf S. 94
- [4] BALLARD, Dana H. ; BROWN, Christopher M.: *Computer Vision*. Prentice Hall, 1982. – zitiert auf S. 69
- [5] BANKMAN, Isaac N. (Hrsg.): *Handbook of Medical Imaging: Processing and Analysis*. Academic Press, 2000 (Academic Press Series in Biomedical Engineering)
- [6] BEITING, Edward J.: Fiber-optic fan-beam absorption tomography. In: *Applied Optics* 31 (1992), Nr. 9, S. 1328–1343. – zitiert auf S. 15
- [7] BERENSTEIN, Carlos A. ; WALNUT, David F.: Wavelets and Local Tomography. In: [2], S. 231–261. – zitiert auf S. 44
- [8] BETH, Thomas: *Verfahren der schnellen Fourier-Transformation*. Teubner-Verlag, 1984. – zitiert auf S. 163, 164
- [9] BEYERER, Jürgen ; PUENTE LEÓN, Fernando: Die Radontransformation in der digitalen Bildverarbeitung. In: *at - Automatisierungstechnik* 50 (2002), Nr. 10, S. 472–480. – zitiert auf S. 53
- [10] BEYLKIN, Gregory: Discrete Radon Transform. In: *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* ASSP-35 (1987), Nr. 2, S. 162–172. – zitiert auf S. 9
- [11] BISHOP, Christopher M.: *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, 1998. – zitiert auf S. 18
- [12] BOURKE, Paul: *Polygonising a scalar field*. <http://astronomy.swin.edu.au/~pbourke/modelling/polygonise/>. – Online-Ressource, Abruf: 19.07.2005. – zitiert auf S. 147
- [13] BOVIK, Alan C. (Hrsg.): *Handbook of Image and Video Processing*. 2. Aufl. Academic Press, 2005. – erscheint im Juli 2005

- [14] BOWYER, Kevin W.: Validation of Medical Image Analysis Techniques. In: [189], S. 567–607. – zitiert auf S. 99
- [15] BRACEWELL, Ronald N.: *The Fourier transform and its applications*. 2. McGraw-Hill, 1986. – zitiert auf S. 14, 16, 163, 164
- [16] BRAUMANN, Ulf-Dietrich: Lokalisation des Spinalkanals in CT-Schichten anhand der Wirbelkörpersilhouette unter Nutzung lokaler Konturorientierung. In: HORSCH, Alexander (Hrsg.) ; LEHMANN, Thomas M. (Hrsg.): *Bildverarbeitung für die Medizin 2000*, Springer-Verlag, 2000 (Informatik aktuell), S. 346–350. – zitiert auf S. 147
- [17] BRONSTEIN, Ilja N. ; SEMENDJAJEV, Konstantin A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 25. Nauka, Teubner, Harri Deutsch, 1991. – zitiert auf S. 13, 25, 162, 170
- [18] BROOKS, Rodney A. ; DI CHIRO, Giovanni: Principles of Computer Assisted Tomography (CAT) in Radiographic and Radioisotopic Imaging. In: *Phys. Med. Biol.* 21 (1976), Nr. 5, S. 689–732. – zitiert auf S. 5
- [19] BROWNE, Jolyon A. ; HERMAN, Gabor T. ; ODHNER, Dewey: *SNARK93–A programming system for image reconstruction from projections*. Dept. Radiol., Univ. Pennsylvania, Tech. Rep. MIPG198. <http://mipgsun.mipg.upenn.edu/snark/>. Version: 1993. – zitiert auf S. 53
- [20] BUZUG, Thorsten M.: *Einführung in die Computertomographie – Mathematisch-physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion*. Springer-Verlag, 2004. – zitiert auf S. 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 22, 23, 24, 25, 27, 34, 35, 59
- [21] CARBALLIDO-GAMIO, Julio ; BELONGIE, Serge J. ; MAJUMDAR, Sharmila: Normalized Cuts in 3D for Spinal MRI Segmentation. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 23 (2004), Nr. 1, S. 36–44. – zitiert auf S. 157
- [22] CHANG, Tao ; HERMAN, Gabor T.: A Scientific Study of Filter Selection for a Fan-Beam Convolution Reconstruction Algorithm. In: *SIAM J. Appl. Math.* 39 (1980), Nr. 1, S. 83–105. – zitiert auf S. 13
- [23] CHUI, C. K. (Hrsg.): *Wavelets*. Bd. 2: *Wavelets: A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, 1992
- [24] CLUNIE, David: *David Clunie's Medical Image Format Site*. <http://www.dclunie.com/>. – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2005. – zitiert auf S. 1, 21
- [25] COHEN, Albert: Biorthogonal Wavelets. In: [23], S. 123–152. – zitiert auf S. 167
- [26] COHEN, L. D.: On active contour models and balloons. In: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding* 53 (1991), Nr. 2, S. 211–218. – zitiert auf S. 145

- [27] COHEN, Laurent D. ; COHEN, Isaac: Finite-Element Methods for Active Contour Models and Balloons for 2-D and 3-D Images. In: *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 15 (1993), Nr. 11, S. 1131–1147. – zitiert auf S. 145
- [28] CORMACK, Allan M.: Representation of a Function by its Line Integrals, with some Radiological Applications I. In: *J. Appl. Phys.* 34 (1963), S. 2722–2727. – zitiert auf S. 5
- [29] CORMACK, Allan M.: Representation of a Function by its Line Integrals, with some Radiological Applications II. In: *J. Appl. Phys.* 35 (1964), S. 2908–2913. – zitiert auf S. 5
- [30] COSMAN, Pamela C. ; GRAY, Robert M. ; OLSHEN, Richard A.: Evaluating quality of compressed medical images: SNR, subjective rating, and diagnostic accuracy. In: *Proceedings of the IEEE* 82 (1994), Nr. 6, S. 919–932. – zitiert auf S. 94
- [31] COSMAN, Pamela C. ; GRAY, Robert M. ; OLSHEN, Richard A.: Quality evaluation for compressed medical images: Fundamentals. In: [5], S. 803–819. – zitiert auf S. 94, 99
- [32] CRAWFORD, Carl R.: CT filtration aliasing artifacts. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 10 (1991), Nr. 1, S. 99–102. – zitiert auf S. 35
- [33] CRAWFORD, Carl R. ; KAK, Avinash C.: Aliasing artifacts in computerized tomography. In: *Applied optics* 21 (1979), Nr. 2, S. 128–141. – zitiert auf S. 35
- [34] CRAWFORD, Carl R. ; KING, Kevin F. ; RITCHIE, Cameron J. ; GODWIN, J. D.: Respiratory compensation in Projection Imaging Using a Magnification and Displacement Model. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 15 (1996), Nr. 3, S. 327–332. – zitiert auf S. 35
- [35] CRAWFORD, Carl R. ; LONN, Albert H. R.: Iterative Ct Reconstruction Using Reprojection. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 1990. Proceedings of the Twelfth Annual International Conference of the IEEE*, 1990, S. 368–369. – zitiert auf S. 53
- [36] DAUBECHIES, Ingrid: *Ten Lectures on Wavelets*. Soc for Industrial and Applied Math, 1992. – zitiert auf S. 71, 165, 167
- [37] DAVIES, E. R.: *Machine Vision – Theory, Algorithms, Practicalities*. 3. Auflage. Academic Press, 2004. – zitiert auf S. 143
- [38] DAWANT, Benoit M. ; ZIJDENBOS, Alex P.: Image Segmentation. In: [189], S. 71–127. – zitiert auf S. 143
- [39] DE MAN, Bruno: *Iterative Reconstruction for Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomography*, Katholieke Universiteit Leuven, Diss., 2001. – zitiert auf S. 10, 12, 23, 33, 34, 35, 46, 53

- 
- [40] DEANS, Stanley R.: *The Radon Transform and some of its Applications*. John Wiley & Sons, 1983. – zitiert auf S. 5, 13, 15
- [41] DEMPSTER, A. P. ; LAIRD, N. M. ; RUBIN, D. B.: Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm. In: *J. R. Stat. Soc. [Ser B]* 39 (1977), Nr. 1, S. 1–38. – zitiert auf S. 45, 79
- [42] DÖSSEL, Olaf: *Bildgebende Verfahren in der Medizin: Von der Technik zur medizinischen Anwendung*. Springer-Verlag, 2000. – zitiert auf S. 8, 155
- [43] DUDA, Richard O. ; HART, Peter E. ; STORK, David G.: *Pattern Classification*. 2. Auflage. John Wiley & Sons, 2001. – zitiert auf S. 99, 152
- [44] DYN, Nira ; HORMANN, Kai ; LEVIN, David ; KIM, Sun-Jeong: Optimizing 3D Triangulations Using Discrete Curvature Analysis. In: LYCHE, Tom (Hrsg.) ; SCHUMAKER, Larry L. (Hrsg.): *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Oslo 2000*. Vanderbilt University Press, 2001 (Innovations in Applied Mathematics), S. 135–146. – zitiert auf S. 150, 151
- [45] ELBAKRI, Idris A. ; FESSLER, Jeffrey A.: Statistical image reconstruction for polyenergetic X-ray computed tomography. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 21 (2002), Nr. 2, S. 89–99. – zitiert auf S. 46
- [46] ESKICIOGLU, Ahmet M.: Application of multi-dimensional measures to reconstructed medical images. In: *Optical Engineering* 3 (1996), S. 778–785. – zitiert auf S. 94, 99
- [47] ESKICIOGLU, Ahmet M.: Quality Measurement for Monochrome Compressed Images in the Past 25 Years. In: *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)* Bd. 4, 2000, S. 1907–1910. – zitiert auf S. 94, 99, 134
- [48] ESKICIOGLU, Ahmet M. ; FISHER, Paul S.: Image quality measures and their performance. In: *IEEE Trans. Commun.* 43 (1995), Nr. 12, S. 2959–2965. – zitiert auf S. 94, 95
- [49] FARIDANI, Adel: High-resolution computed tomography from efficient sampling. In: *Inverse Problems* (2000), Nr. 16, S. 635–650. – zitiert auf S. 35
- [50] FARIDANI, Adel: Introduction to the Mathematics of Computed Tomography. In: UHLMANN, G. (Hrsg.): *Inside Out: Inverse Problems and Applications* Bd. 47. Cambridge University Press, 2003, S. 1–46. – zitiert auf S. 15, 44
- [51] FARIDANI, Adel: Sampling Theory and Parallel-Beam Tomography. In: BENEDETTO, John J. (Hrsg.) ; ZAYED, Ahmed I. (Hrsg.): *Sampling, Wavelets, and Tomography*. Birkhäuser, 2004, S. 225–254. – zitiert auf S. 15

- [52] FARIDANI, Adel ; BUGLIONE, Kory A. ; HUABSOMBOON, Pallop ; IANCU, Ovidiu D. ; MCGRATH, Jeanette: Introduction to Local Tomography. In: QUINTO, Eric T. (Hrsg.) ; EHRENPREIS, Leon (Hrsg.) ; FARIDANI, Adel (Hrsg.): *Radon Transforms and Tomography* Bd. 278. American Mathematical Society, 2001, S. 29–47. – zitiert auf S. 44
- [53] FARIDANI, Adel ; FINCH, David V. ; RITMAN, Erik L. ; SMITH, Kennan T.: Local Tomography II. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 57 (1997), Nr. 4, S. 1095–1127. – zitiert auf S. 44
- [54] FARIDANI, Adel ; RITMAN, Eric L. ; SMITH, Kennan T.: Local Tomography. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 52 (1992), Nr. 2, S. 459–484. – zitiert auf S. 44
- [55] FARIDANI, Adel ; RITMAN, Eric L. ; SMITH, Kennan T.: Local Tomography. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 52 (1992), Nr. 4, S. 1193–1198. – zitiert auf S. 44
- [56] FOLEY, James D. ; VAN DAM, Andries ; FEINER, Steven K. ; HUGHES, John F.: *Computer Graphics: Principles and Practice*. korrigierte 2. Aufl. Addison-Wesley, 1992. – zitiert auf S. 151, 153
- [57] FREIXENET, J. ; MUÑOZ, X. ; RABA, D. ; MARTÍ, J. ; CUFÍ, X.: Yet another survey on image segmentation: region and boundary information integration. In: *Proc. ECCV 2002* Bd. 2352, Springer, 2002, S. 408–422. – zitiert auf S. 143
- [58] FU, K. S. ; MUI, J. K.: A survey on image segmentation. In: *Pattern Recognition* 13 (1981), Nr. 3–16. – zitiert auf S. 143
- [59] FUCHS, Theobald Otto J.: *Strahlauhärtungskorrekturen in der Computertomographie*, Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 1998. – zitiert auf S. 15, 21, 27, 29, 46, 52, 53
- [60] GATZKE, T. ; GRIMM, C.: Improved Curvature Estimation on Triangular Meshes. In: KOBELT, L. (Hrsg.) ; SCHRÖDER, P. (Hrsg.) ; HOPPE, H. (Hrsg.): *Eurographics Symposium on Geometry Processing (2003)*, 2003. – zitiert auf S. 150
- [61] GHEBREAB, Sennay: *Strings and Necklaces - On Learning and Browsing Medical Image Segmentations*, Universität Amsterdam, Diss., 2002. – zitiert auf S. 144, 160
- [62] GLASBEY, Chris A.: An Analysis of Histogram-Based Thresholding Algorithms. In: *CVGIP: Graphical Models and Image Processing* 55 (1993), Nr. 6, S. 532–537. – zitiert auf S. 79
- [63] GLOVER, Gary H. ; PELC, Norbert J.: Nonlinear partial volume artifacts in x-ray computed tomography. In: *Med. Phys.* 7 (1980), Nr. 3. – zitiert auf S. 34

- [64] GLOVER, Gary H. ; PELC, Norbert J.: An algorithm for the reduction of metal clip artifacts in CT reconstructions. In: *Med. Phys.* 8 (1981), Nr. 6, S. 799–807. – zitiert auf S. 39, 40
- [65] GONZALEZ, Rafael C. ; WOODS, Richard E.: *Digital Image Processing*. Addison-Wesley, 1993. – zitiert auf S. 50, 66, 69, 143, 168
- [66] GORDON, Richard: A tutorial on ART (Algebraic Reconstruction Technique). In: *IEEE Trans. Nucl. Sci.* NS-21 (1974), S. 78–93. – zitiert auf S. 10, 45
- [67] HABERÄCKER, Peter: *Digitale Bildverarbeitung*. 4te Auflage. Hanser, 1991. – zitiert auf S. 66
- [68] HABERÄCKER, Peter: *Praxis der digitalen Bildverarbeitung*. Hanser, 1995. – zitiert auf S. 69
- [69] HAHN, Matthias: New Approach to Evaluate Rotation of Cervical Vertebrae. In: [191], S. 1696–1704. – zitiert auf S. 144, 147, 151
- [70] HAHN, Matthias ; BETH, Thomas: Balloon-Based Vertebra Separation in CT Images. In: LONG, Rodney (Hrsg.) ; ANTANI, Sameer (Hrsg.) ; LEE, D. J. (Hrsg.): *Computer Based Medical Systems (CBMS 2004): 17th IEEE Symposium*, IEEE Computer Society Press, 2004, S. 310–315. – zitiert auf S. 143, 152
- [71] HAIMERL, Martin: *Modalitätsspezifische Aufbereitung medizinischer Bilddaten*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2002. – zitiert auf S. 10, 43, 44, 47, 48
- [72] HAMARNEH, Ghassan: *Towards Intelligent Deformable Models for Medical Image Analysis*, Department of Signals and Systems, School of Electrical and Computer Engineering, Chalmers University of Technology, Diss., 2001. – zitiert auf S. 145
- [73] HANDELS, Heinz: *Medizinische Bildverarbeitung*. Teubner, 2000. – zitiert auf S. 69, 143
- [74] HARALICK, Robert M. ; SHANMUGAM, K. ; DINSTEN, Its'hak: Textural Features for Image Classification. In: *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.* 3 (1974), S. 610–621. – zitiert auf S. 69, 138
- [75] HARALICK, Robert M. ; SHAPIRO, G.: Survey: image segmentation techniques. In: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 29 (1985), S. 100–132. – zitiert auf S. 143
- [76] HARALICK, Robert M. ; STERNBERG, Stanley R. ; ZHUANG, Xinhua: Image Analysis Using Mathematical Morphology. In: *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 9 (1987), Nr. 4, S. 532–550. – zitiert auf S. 51, 168, 169

- [77] HEIJMANS, Henk J. A. M.: *Morphological Image Operators*. Academic Press, 1994. – zitiert auf S. 168
- [78] HEINECKE, Achim ; HULTSCH, Ekhard ; REPGES, Rudolf: *Medizinische Biometrie*. Springer, 1992. – zitiert auf S. 99
- [79] HELGASON, Sigurður: The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassman manifolds. In: *Acta Mathematica* 113 (1965), S. 153–180. – zitiert auf S. 9
- [80] HELGASON, Sigurður: *The Radon Transform*. Birkhäuser, 1980 (Progress in Mathematics). – zitiert auf S. 9
- [81] HERMAN, Gabor T. (Hrsg.): *Topics in Applied Physics*. Bd. 32: *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Application*. Springer-Verlag, 1979
- [82] HERMAN, Gabor T.: *Image reconstruction from projections: the fundamentals of computerized tomography*. New York Academic Press, 1980. – zitiert auf S. 5, 9, 11, 15, 25, 45
- [83] HEUSER, Harro: *Analysis (Teil 1)*. 9. Auflage. Teubner, 1991. – zitiert auf S. 162
- [84] HEUSER, Harro: *Analysis (Teil 2)*. 6. Auflage. Teubner, 1991. – zitiert auf S. 161, 162
- [85] HOPPIN, John W. ; KUPINSKI, Matthew A. ; KASTIS, George A. ; CLARKSON, Eric ; BARRETT, Harrison H.: Objective comparison of quantitative imaging modalities without the use of a gold standard. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 21 (2002), Nr. 5, S. 441–449. – zitiert auf S. 99
- [86] HORBELT, Stefan ; LIEBLING, Michael ; UNSER, Michael: Filter Design for Filtered Back-Projection Guided by the Interpolation Model. In: [190], S. 806–813. – zitiert auf S. 5, 12, 15
- [87] HOUNSFIELD, Godfrey N.: Computerized transverse axial scanning (tomography). 1. Description of system. In: *Br. J. Radiol.* 46 (1973), S. 1016–1022. – zitiert auf S. 5
- [88] HSIEH, Jiang: Adaptive streak artifact reduction in computed tomography resulting from excessive x-ray photon noise. In: *Med. Phys.* 25 (1998), S. 2139–2147. – zitiert auf S. 25, 41
- [89] HSIEH, Jiang: *Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances*. Spie Press, 2003. – zitiert auf S. 5, 6, 23, 35, 63
- [90] HUESMAN, Ronald H. ; GULLBERG, Grant T. ; GREENBERG, W. L. ; BUDINGER, Thomas F.: *RECLBL library*. [http://cfi.lbl.gov/cfi\\_software.html](http://cfi.lbl.gov/cfi_software.html). – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2005. – zitiert auf S. 53

- 
- [91] *IDL – Interactive Data Language*. [http://www.creaso.com/english/12\\_swvis/11\\_idl/main.htm](http://www.creaso.com/english/12_swvis/11_idl/main.htm). – Online-Ressource, Abruf: 21.06.2005. – IDL Startseite. – zitiert auf S. 53
- [92] JACKSON, J. E.: *A User's Guide to Principal Components*. John Wiley & Sons, 1991. – zitiert auf S. 152
- [93] JAIN, Anil K.: *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, 1989. – zitiert auf S. 9, 12, 66, 69, 168
- [94] JÄHNE, Bernd: *Digitale Bildverarbeitung*. 4. Aufl. Springer-Verlag, 1997. – zitiert auf S. 66, 69, 143
- [95] JIANG, Ming ; WANG, Ge: Development of iterative algorithms for image reconstruction. In: *Journal of X-Ray Science and Technology* 10 (2002), S. 77–86. – zitiert auf S. 10
- [96] JIANG, Ming ; WANG, Ge: Convergence of the Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART). In: *IEEE Trans. Image Processing* 12 (2003), S. 957–961. – zitiert auf S. 10
- [97] JIANG, Ming ; WANG, Ge: Convergence studies on iterative algorithms for image reconstruction. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 22 (2003), S. 569–579. – zitiert auf S. 10
- [98] JOSEPH, Peter M.: An improved algorithm for reprojecting rays through pixel images. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 1 (1983), Nr. 3, S. 192–196. – zitiert auf S. 53, 54
- [99] JOSEPH, Peter M. ; RUTH, Christopher: A method for simultaneous correction of spectrum hardening artifacts in CT images containing both bone and iodine. In: *Med. Phys.* 24 (1997), Nr. 10. – zitiert auf S. 46
- [100] KACHELRIESS, Marc ; WATZKE, Oliver ; KALENDER, Willi A.: Generalized multi-dimensional adaptive filtering (MAF) for conventional and spiral single-slice, multi-slice and cone-beam CT. In: *Med. Phys.* 28 (2001), April, Nr. 4, S. 475–490. – zitiert auf S. 41, 86
- [101] KACHELRIESS, Marc: *Reduktion von Metall-Artefakten in der Röntgen-Computer-Tomographie*, Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 1998. – zitiert auf S. 10, 18, 33, 39, 41, 45, 47
- [102] KAK, Avinash C. ; SLANEY, Malcolm: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 2001. – <http://www.slaney.org/pct/pct-toc.html>. – zitiert auf S. 5, 9, 10, 35
- [103] KALENDER, Willi A.: *Computertomographie – Grundlagen, Gerätetechnologie, Bildqualität, Anwendungen*. Publicis MCD Verlag, 2000. – zitiert auf S. 7

- [104] KALENDER, Willi A. ; HEBEL, Robert ; EBERSBERGER, Johannes: Reduction of CT artifacts caused by metallic implants. In: *Radiology* 164 (1987), S. 576–577. – zitiert auf S. 39
- [105] KALENDER, Willi A. ; SEISSLER, W. ; VOCK, Peter: Single-Breathhold Spiral Volumetric CT by Continuous Patient Translation and Scanner Rotation. In: *Radiology* 173 (1989), Nr. 2, S. 414. – zitiert auf S. 7
- [106] KAMMEYER, Karl D. ; KROSCHER, Kristian: *Digitale Signalverarbeitung*. Teubner, 2002. – zitiert auf S. 85
- [107] KASS, Michael ; WITKIN, Andrew ; TERZOPOULOS, Demetri: Snakes: Active Contour Models. In: *Int. J. of Comp. Vision* (1988), S. 321–331. – zitiert auf S. 145
- [108] KATSEVICH, Alexander I. ; RAMM, Alexander G.: Pseudolocal Tomography. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 56 (1996), Nr. 1, S. 167–191. – zitiert auf S. 5
- [109] KÜHNEL, Wolfgang: *Differentialgeometrie: Kurven – Flächen – Mannigfaltigkeiten*. 2. Auflage. Vieweg, 2003. – zitiert auf S. 150
- [110] KITWARE INC. (Hrsg.): *NLM Insight Segmentation and Registration Toolkit*. <http://www.itk.org/>. – Online-Ressource, Abruf: 21.06.2005. – zitiert auf S. 143
- [111] KITWARE INC. (Hrsg.): *vtk – The Visualization Toolkit*. <http://www.vtk.org/>. – Online-Ressource, Abruf: 21.06.2005. – VTK Home Page. – zitiert auf S. 143
- [112] KLAVERKAMP, Willehad: *Tomographische Bildrekonstruktion mit direkten algebraischen Verfahren*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diss., 1991. – zitiert auf S. 10
- [113] KLOTZ, Ernst ; KALENDER, Willi A. ; SOKIRANSKI, Roman ; FELSENBURG, Dieter: Algorithms for reduction of CT artifacts caused by metallic implants. In: *SPIE Medical Imaging IV: PACS System Design and Evaluation* Bd. 1234, 1990, S. 642–650. – zitiert auf S. 22, 39
- [114] LA RIVIÈRE, P. J. ; PAN, X.: Spline-based Inverse Radon Transform in Two and Three Dimensions. In: *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 45 (1998), Nr. 4, S. 2224–2231. – zitiert auf S. 5
- [115] LEHMANN, Thomas M.: From Plastic to Gold: A Unified Classification Scheme for Reference Standards in Medical Image Processing. In: [190], S. 1819–1827. – zitiert auf S. 99
- [116] LEHMANN, Thomas M. ; OBERSCHELP, Walter ; PELIKAN, Erich ; REPGES, Rudolf: *Bildverarbeitung für die Medizin*. Springer-Verlag, 1997. – zitiert auf S. 66, 69, 70, 143, 152, 168

- [117] LEWITT, Robert M. ; BATES, Richard H. T.: Image reconstruction from projections: I: General theoretical considerations. In: *Optik* 50 (1978), Nr. 1, S. 19–33. – zitiert auf S. 44, 45
- [118] LEWITT, Robert M. ; BATES, Richard H. T.: Image reconstruction from projections: III: Projection completion methods (theory). In: *Optik* 50 (1978), Nr. 3, S. 189–204. – zitiert auf S. 45
- [119] LEWITT, Robert M. ; BATES, Richard H. T.: Image reconstruction from projections: IV: Projection completion methods (computational examples). In: *Optik* 50 (1978), Nr. 4, S. 286–295. – zitiert auf S. 45
- [120] LEWITT, Robert M. ; BATES, Richard H. T. ; PETERS, Terry M.: Image reconstruction from projections: II: Modified backprojection methods. In: *Optik* 50 (1978), Nr. 2, S. 85–109. – zitiert auf S. 15
- [121] LIANG, Zhi-Pei ; LAUTERBUR, Paul C.: *Principles of Magnetic Resonance Imaging: A Signal Processing Perspective*. IEEE Press, 2000. – zitiert auf S. 155
- [122] LIM, Jae S.: *Two-dimensional signal and image processing*. Prentice-Hall, 1990. – zitiert auf S. 16, 85, 167
- [123] LOUIS, Alfred K.: *Inverse und schlecht gestellt Probleme*. Teubner, 1989. – zitiert auf S. 5, 10, 15, 161
- [124] LOUIS, Alfred K. ; MAASS, Peter ; RIEDER, Andreas: *Wavelets*. Teubner-Verlag, 1994. – zitiert auf S. 165, 166, 167
- [125] LOUIS, Alfred K. ; RIEDER, Andreas: Incomplete Data problems in X-Ray Computerized Tomography. II. Truncated Projections and Region-of-Interest Tomography. In: *Numer. Math.* 56 (1989), S. 371–383. – zitiert auf S. 44
- [126] LUDWIG, Donald: The Radon transform on Euclidean space. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 19 (1966), S. 49–81. – zitiert auf S. 9, 12, 56
- [127] LUN, Daniel P. K. ; TAI-CHIU, Hsung ; SIU, W. C.: On the convolution property of a new discrete Radon transform and its efficient inversion algorithm. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 1995. ISCAS '95*. Bd. 3, 1995, S. 1892–1895. – zitiert auf S. 9
- [128] MAASS, Peter: The Interior Radon Transform. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 52 (1992), Nr. 3, S. 710–724. – zitiert auf S. 44
- [129] MALLAT, Stéphane: *A wavelet tour of signal processing*. 2te Auflage. Academic Press, 1999. – zitiert auf S. 71, 165, 166, 167, 168
- [130] MATHERON, Georges: *Random Sets and Integral Geometry*. J. Wiley & Sons Inc, 1975. – zitiert auf S. 168

- [131] *Matlab Documentation*. <http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/helpdesk.html>. – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2006. – Einstiegsseite zur Matlab-Dokumentation. – zitiert auf S. 15, 53
- [132] MCINERNEY, T. ; TERZOPOULOS, D.: Deformable Models in Medical Image Analysis: A Survey. In: *Medical Image Analysis 1* (1996), Nr. 2, S. 91–108. – zitiert auf S. 145
- [133] MEAGHER, J. M. ; MOTE, C. D. ; SKINNER, H. B.: CT image correction for beam hardening using simulated projection data. In: *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 37 (1990), Nr. 4, S. 1520–1524. – zitiert auf S. 46, 53
- [134] *med3D IMPLANTOLOGY*. <http://www.med3d.de/>. – Online-Ressource, Abruf: 12.08.2005. – zitiert auf S. 110, 130
- [135] MEDOFF, Barry P. ; BRODY, William R. ; NASSI, Menahem ; MACOVSKI, Albert: Iterative convolution backprojection algorithms for image reconstruction from limited data. In: *J. Opt. Soc. Am* 73 (1983), Nr. 11. – zitiert auf S. 18, 45
- [136] MEYER, Mark ; DESBRUN, Mathieu ; SCHRÖDER, Peter ; BARR, Alan H.: Discrete differential geometry operators for triangulated 2-manifolds. In: *Proceedings of the International Workshop on Visualization and Mathematics 2002 (Vismath 2002)*, 2002, S. 1–26. – zitiert auf S. 150, 151
- [137] MORIN, Richard L. ; REASIDE, David E.: A Pattern Recognition Method for the Removal of Streaking Artifact in Computed Tomography. In: *Radiology* (1981), S. 229–233. – zitiert auf S. 39
- [138] MORNEBURG, Heinz (Hrsg.): *Bildgebende Systeme für die medizinische Diagnostik*. 3. Auflage. Publicis MCD Verlag, 1995. – zitiert auf S. 6, 7, 9, 10, 13, 22, 25, 33, 155
- [139] NATTERER, Frank: *The Mathematics of Computerized Tomography*. Teubner, 1986. – zitiert auf S. 5, 9, 10, 12, 14, 15, 44, 45
- [140] NATTERER, Frank: Numerical Methods in Tomography. In: *Acta Numerica* 8 (1999), S. 107–141. – zitiert auf S. 10
- [141] NATIONAL ELECTRICAL MANUFACTURERS ASSOCIATION (NEMA) (Hrsg.): *DICOM – Digital Imaging and Communication in Medicine*. <http://medical.nema.org/dicom/2003.html>. – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2005. – DICOM Part 1 bis Part 8 sowie Part 10 bis Part 16 als PDF. – zitiert auf S. 1, 21
- [142] NODES, Thomas A. ; GALLAGHER, Neil C.: Median filters: Some modifications and their properties. In: *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* ASSP-30 (1982), Nr. 5, S. 739–746. – zitiert auf S. 50

- [143] OHNESORGE, Bernd ; FLOHR, Thomas ; SCHWARZ, K. ; HEIKEN, Jay P. ; BAE, Kyongtae T.: Efficient Correction for CT Image Artifacts caused by Objects extending Outside the Scan Field of View. In: *Med. Phys* 27 (2000), Nr. 1, S. 39–46. – zitiert auf S. 7, 23
- [144] OLLINGER, John M.: Iterative reconstruction-reprojection and the expectation-maximization algorithm. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 9 (1990), Nr. 1, S. 94–98. – zitiert auf S. 45
- [145] OLSON, Tim: Optimal Time-Frequency Projections for Localized Tomography. In: [2], S. 263–296. – zitiert auf S. 5, 16, 71
- [146] OLSON, Tim ; DESTEFANO, Joe: Wavelet Localization of the Radon Transform. In: *IEEE Trans. Signal Processing* 42 (1994), Nr. 8, S. 2055–2067. – zitiert auf S. 16, 44
- [147] OPPENHEIM, Alan V. ; SCHAFER, Roland W. ; BUCK, John R.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. Pearson Studium, 2004. – zitiert auf S. 12, 15, 71, 80, 85, 164
- [148] PAPOULIS, Athanasios: *Signal Analysis*. McGraw Hill, 1985. – zitiert auf S. 12
- [149] PERLMUTTER, Sharon M. ; COSMAN, Pamela C. ; TSENG, Chien-Wen ; OLSEN, Richard A. ; GRAY, Robert M. ; LI, King C. P. ; BERGIN, Colleen J.: Medical Image Compression and Vector Quantization. In: *Statistical Science* 13 (1998), Nr. 1, S. 30–53. – zitiert auf S. 94
- [150] POMMERT, Andreas ; HÖHNE, Karl H.: Evaluation of Image Quality in Medical Volume Visualization: The State of the Art. In: TAKEYOSHI DOHI, Ron K. (Hrsg.): *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention, Proc. MICCAI 2002, Part II* Bd. 2489, Springer, 2002, S. 598–605. – zitiert auf S. 94
- [151] PRATT, William K.: *Digital Image Processing*. 3. Auflage. John Wiley & Sons, 2001. – zitiert auf S. 69, 70, 85, 94, 168
- [152] PRESS, William H. ; FLANNERY, Brian P. ; TEUKOLSKY, Saul A. ; VETTERLING, William T.: *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 2002. – zitiert auf S. 164
- [153] QUINTO, Eric T.: Singular value decomposition and inversion methods for the exterior Radon transform and a spherical transform. In: *Journal of mathematical analysis and applications* 95 (1985), Nr. 437–448. – zitiert auf S. 45
- [154] QUINTO, Eric T.: Tomographic reconstructions from incomplete data-numerical inversion of the exterior Radon transform. In: *Inverse Problems* 4 (1988), Nr. 3, S. 867–876. – zitiert auf S. 35, 45, 159
- [155] QUINTO, Eric T.: Singularities of the X-Ray Transform and Limited Data Tomography in  $\mathbb{R}^2$  and  $\mathbb{R}^3$ . In: *SIAM J. Math. Anal.* 24 (1993), Nr. 5, S. 1215–1225. – zitiert auf S. 44, 45

- [156] QUINTO, Eric T.: Exterior and limited-angle tomography in non-destructive evaluation. In: *Inverse Problems* 14 (1998). – zitiert auf S. 45
- [157] QUINTO, Eric T.: Radon Transforms, Differential Equations, and Microlocal Analysis. In: QUINTO, Eric T. (Hrsg.) ; EHRENPREIS, Leon (Hrsg.) ; FARIDANI, Adel (Hrsg.) ; GONZALEZ, Fulton (Hrsg.) ; GRINBERG, Eric (Hrsg.): *Radon Transforms and Tomography* Bd. 278. American Mathematical Society, 2001, S. 57–68. – zitiert auf S. 9
- [158] QUINTO, Eric T.: *An Introduction to X-ray tomography and Radon transforms*. Version: 2005. <http://www.tufts.edu/~equinto/articles.html>. – Online-Ressource, Abruf: 26.09.2005. – zitiert auf S. 11, 45
- [159] QUINTO, Eric T.: *Local Algorithms in Exterior Tomography*. Version: 2005. <http://www.tufts.edu/~equinto/articles.html>. – Online-Ressource, Abruf: 26.09.2005. – zitiert auf S. 45, 159
- [160] QUINTO, Eric T. (Hrsg.) ; EHRENPREIS, Leon (Hrsg.) ; FARIDANI, Adel (Hrsg.) ; GONZALEZ, Fulton (Hrsg.) ; GRINBERG, Eric (Hrsg.): *Radon Transforms and Tomography*. Bd. 278. American Mathematical Society, 2001. – zitiert auf S. 5
- [161] RABINER, Lawrence R. ; GOLD, Bernard: *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Prentice Hall, 1975. – zitiert auf S. 12
- [162] RADON, Johann: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. In: *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, Math.-Phys. Kl.* 69 (1917), S. 262–277. – zitiert auf S. 9
- [163] RAMACHANDRAN, G. N. ; LAKSHMINARAYANAN, A. V.: Three-Dimensional Reconstruction from Radiographs and Electron Micrographs: Application of Convolutions Instead of Fourier Transforms. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 68 (1971), Nr. 9, S. 2236–2240. – zitiert auf S. 12
- [164] RAMM, Alexander G. ; KATSEVICH, Alexander I.: *The Radon Transform and Local Tomography*. CRC Press, 1996. – zitiert auf S. 5, 9, 44
- [165] RESTREPO, Alfredo ; BOVIK, Alan C.: Adaptive trimmed mean filters for image restoration. In: *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* 36 (1988), Nr. 8, S. 1326–1337. – zitiert auf S. 41
- [166] RIEDER, Andreas: Principles of Reconstruction Filter Design in 2D-Computerized Tomography. In: QUINTO, Eric T. (Hrsg.) ; EHRENPREIS, Leon (Hrsg.) ; FARIDANI, Adel (Hrsg.): *Radon Transforms and Tomography* Bd. 278. American Mathematical Society, 2001, S. 201–226. – zitiert auf S. 12
- [167] RIEDER, Andreas: *Keine Probleme mit inversen Problemen*. Vieweg & Sohn Verlag, 2003. – zitiert auf S. 5, 10, 15, 161

- [168] RITCHIE, Cameron J. ; CRAWFORD, Carl R. ; GODWIN, David ; KING, Kevin F. ; KIM, Yongmin: Correction of computed tomography motion artifacts using pixel-specific back-projection. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 15 (1996), Nr. 3, S. 333–342. – zitiert auf S. 35
- [169] RÖNTGEN, Wilhelm C.: *Ueber eine neue Art von Strahlen*. Würzburg : Sitzungsberichte der physik.-med. Gesellschaft zu Würzburg, 1896. – (Vorläufige Mittheilung.). – zitiert auf S. 5
- [170] ROHLFING, Torsten ; ZERFOWSKI, Detlef u. a.: Reduction of Metal Artifacts in Computed Tomographies for Planning and Simulation of Radiation Therapy. In: LEMKE, Heinz U. (Hrsg.) ; VANNIER, Michael W. (Hrsg.) ; INAMURA, Kiyonari (Hrsg.): *CAR '98, Computer Assisted Radiology and Surgery*, Elsevier Science, 1998, S. 57–62. – zitiert auf S. 110
- [171] RONSE, Christian ; HEIJMANS, Henk J. A. M.: A Lattice-Theoretical Framework for Annular Filters in Morphological Image Processing. In: *Appl. Algebra Eng. Commun. Comput.* 9 (1998), Nr. 1, S. 45–89. – zitiert auf S. 168
- [172] *Kurt Rossmann Laboratories for Radiologic Image Research*. [http://www-radiology.uchicago.edu/krl/roc\\_soft.htm](http://www-radiology.uchicago.edu/krl/roc_soft.htm). – Online-Ressource, Abruf: 29.06.2005. – Software zur ROC-Analyse sowie Literaturverweise. – zitiert auf S. 99
- [173] ROWLAND, Stuart W.: Computer Implementation of Image Reconstruction Formulas. In: [81],. – zitiert auf S. 5, 12, 14, 15, 17
- [174] SAHINER, Berkman ; YAGLE, Andrew E.: A Fast Algorithm for Backprojection with Linear Interpolation. In: *IEEE Trans. Image Processing* 2 (1993), Nr. 4, S. 547–550. – zitiert auf S. 15
- [175] SAHINER, Berkman ; YAGLE, Andrew E.: Region-of-interest tomography using exponential radial sampling. In: *IEEE Trans. Image Processing* 4 (1995), Nr. 8, S. 1120–1127. – zitiert auf S. 5
- [176] SAHOO, Prasanna K. ; SOLTANI, S. ; WONG, A. K. C. ; CHEN, Y. C.: A Survey of Thresholding Techniques. In: *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* 41 (1988), Nr. 2, S. 233–260. – zitiert auf S. 79
- [177] SAINT OLIVE, Celine ; KAUS, Michael R. ; PEKAR, Vladimir ; ECK, Kai ; SPIES, Lothar: Segmentation-aided adaptive filtering for metal artifact reduction in radio-therapeutic CT images. In: FITZPATRICK, J. M. (Hrsg.) ; SONKA, Milan (Hrsg.): *Medical Imaging 2004: Image Processing* Bd. 5370 SPIE–The International Society for Optical Engineering, SPIE, 2004, S. 1991–2002. – zitiert auf S. 40
- [178] SAMET, Hanan: A Tutorial on Quadtree Research. In: ROSENFELD, Azriel (Hrsg.): *Multiresolution Image Processing and Analysis*. Springer Verlag, 1984. – zitiert auf S. 66

- [179] SERRA, Jean: *Echantillonnage et estimation des phénomènes de transition minier*, Universität Nancy, Diss., 1967. – zitiert auf S. 168
- [180] SERRA, Jean: *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982. – zitiert auf S. 168
- [181] SHEPP, Larry A. ; LOGAN, B. F.: The Fourier Reconstruction of a Head Section. In: *IEEE Trans. Nucl. Sci.* 21 (1974), S. 21–43. – zitiert auf S. 12
- [182] SHNAYDERMAN, Aleksandr ; GUSEV, Alexander ; ESKICIOGLU, Ahmet M.: A multidimensional image quality measure using Singular Value Decomposition. In: *Proceedings of the SPIE Image Quality and System Performance Conference* Bd. 5294, 2004, S. 82–92. – zitiert auf S. 94, 98
- [183] SHNAYDERMAN, Aleksandr ; GUSEV, Alexander ; ESKICIOGLU, Ahmet M.: An SVD-Based Gray-Scale Image Quality Measure for Local and Global Assessment. In: *IEEE Trans. Image Processing* (2006). – vorab auf der Seite <http://www.sci.brooklyn.cuny.edu/~eskicioglu/papers/> elektronisch veröffentlicht. – zitiert auf S. 94, 98
- [184] SLED, John G. ; ZIJDENBOS, Alex P. ; EVANS, Alan C.: A nonparametric method for automatic correction of intensity nonuniformity in MRI data. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 17 (1998), Nr. 1, S. 87–97. – zitiert auf S. 157
- [185] SMITH, Kennan T. ; KEINERT, F.: Mathematical foundations of computed tomography. In: *Applied Optics* 24 (1985), Nr. 23, S. 3950–3957. – zitiert auf S. 44
- [186] SMITH, Kennan T. ; SOLOMON, Donald C. ; WAGNER, Sheldon L.: Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 83 (1977), S. 1227–1270. – zitiert auf S. 9
- [187] SNYDER, Donald L. ; O’SULLIVAN, Joseph A. ; WHITING, Bruce R. ; MURPHY, Ryan J. ; BENAC, Jasenca ; CATALDO, J. A. ; POLITTE, David G. ; WILLIAMSON, Jeffrey F.: Deblurring subject to nonnegativity constraints when known functions are present with application to object-constrained computerized tomography. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 20 (2001), Nr. 10, S. 1009–1017. – zitiert auf S. 45
- [188] SOLTANIAN-ZADEH, Hamid ; WINDHAM, Joe P. ; SOLTANIANZADEH, Jalal: CT artifact correction: An image processing approach. In: LOEW, Murray H. (Hrsg.) ; HANSON, Kenneth M. (Hrsg.): *Medical Imaging 1996: Image Processing* Bd. 2710 SPIE–The International Society for Optical Engineering, SPIE, 1996, S. 477–485. – zitiert auf S. 38

- [189] SONKA, Milan (Hrsg.) ; FITZPATRICK, J. M. (Hrsg.): *Handbook of Medical Imaging*. Bd. 2: Medical Image Processing and Analysis. SPIE – The International Society of Optical Engineering, 2000. – zitiert auf S. 79, 157, 168, 169
- [190] SONKA, Milan (Hrsg.) ; FITZPATRICK, J. M. (Hrsg.): *Medical Imaging 2002: Image Processing*. Bd. 4684. SPIE – The International Society of Optical Engineering, 2002 (Proceedings of SPIE)
- [191] SONKA, Milan (Hrsg.) ; HANSON, Kenneth M. (Hrsg.): *Medical Imaging 2001: Image Processing*. Bd. 4322. SPIE – The International Society of Optical Engineering, 2001 (Proceedings of SPIE)
- [192] SONKA, Milan ; HLAVAC, V. ; BOYLE, R.: *Image Processing, Analysis and Machine Vision*. PWS Publishers, 1998. – zitiert auf S. 143
- [193] STARK, David D. (Hrsg.) ; BRADLEY, William G. (Hrsg.): *Magnetic Resonance Imaging*. 3. C.V. Mosby, 1999. – zitiert auf S. 155
- [194] STEIN, Wolfram: *Computertomogramm-basierte 3D-Planung für die dentale Implantologie*, Universität Karlsruhe, Diss., 1999. – zitiert auf S. 145
- [195] STOER, Josef: *Numerische Mathematik 1*. 9. Auflage. Springer, 2005. – zitiert auf S. 10
- [196] STOKELY, Ernest M. ; WU, Shang Y.: Surface Parametrization and Curvature Measurement of Arbitrary 3-D Objects: Five Practical Methods. In: *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 14 (1992), Nr. 8, S. 833–840. – zitiert auf S. 150
- [197] STONESTROM, J. P. ; ALVAREZ, Robert E. ; MACOVSKI, Albert: A framework for spectral artifact corrections in X-ray CT. In: *IEEE Trans. Biomed. Eng.* BME-28 (1981), Nr. 2, S. 128–141. – zitiert auf S. 46
- [198] TAUBIN, Gabriel: Curve and Surface Smoothing Without Shrinkage. In: *Fifth International Conference on Computer Vision (ICCV'95)*, 1995. – zitiert auf S. 148, 149
- [199] THEODORIDIS, Sergios ; KOURTROUMBAS, Konstantinos: *Pattern Recognition*. 2. Auflage. Elsevier Academic Press, 2003. – zitiert auf S. 152
- [200] TÖNNIES, Klaus D.: *Grundlagen der Bildverarbeitung*. Pearson Studium, 2005. – zitiert auf S. 69, 143, 145
- [201] TOFT, Peter: *The Radon Transform - Theory and Implementation*, Technische Universität von Dänemark, Diss., 1996. – zitiert auf S. 5, 9, 11, 12, 15, 65
- [202] TOFT, Peter ; JENSEN, Jesper J. ; PHILIPSEN, Peter: *Software zur Berechnung von Radontransformationen und Rekonstruktionen*. <http://pto.linux.dk/PhD/>. – Online-Ressource, Abruf: 21.06.2005. – zitiert auf S. 53

- [203] TRETIAK, Oleh J.: The point-spread function for the convolutional algorithm. In: *Digest of Conference on Image Processing for 2-D and 3-D Reconstruction from Projections: Theory and Practice in Medicine and the Physical Sciences* Optical Society of America, 1975, S. ThA5-1–ThA5-3. – zitiert auf S. 15
- [204] *VAMP Verfahren und Apparate der Medizinischen Physik GmbH*. <http://www.vamp-gmbh.de>. – Online-Ressource, Abruf: 21.06.2005. – zitiert auf S. 53
- [205] VOCK, Peter ; JUNG, H. ; KALENDER, Willi A.: Single-breathhold spiral volumetric CT of the lung. In: *Radiology* 173 (1989), S. 400. – zitiert auf S. 7
- [206] WAHL, Friedrich M.: *Digitale Bildsignalverarbeitung*. Springer-Verlag, 1989. – zitiert auf S. 69
- [207] WANG, Ge ; SNYDER, Donald L. ; O’SULLIVAN, Joseph A. ; VANNIER, Michael W.: Iterative deblurring for CT metal artifact reduction. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 15 (1996), Nr. 5, S. 657–664. – zitiert auf S. 45
- [208] WANG, Zhou: *The SSIM Index for Image Quality Assessment*. <http://www.cns.nyu.edu/~lcv/ssim/>. – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2006. – zitiert auf S. 94, 96
- [209] WANG, Zhou ; BOVIK, Alan C. ; SIMONCELLI, Eero P.: Structural Approaches to Image Quality Assessment. Version: 2. Aufl., 2005. <http://www.cns.nyu.edu/~zwang/>. In: [13], . – Online-Ressource, Abruf: 04.07.2005. – erscheint im Juli 2005. – zitiert auf S. 95, 96, 97
- [210] WANG, Zhou ; BOVIK, Alan C. ; SHEIKH, Hamid R. ; SIMONCELLI, Eero P.: Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. In: *IEEE Trans. Image Processing* 13 (2004), Nr. 4, S. 600–612. – zitiert auf S. 94, 95, 96
- [211] WANG, Zhou ; SHEIKH, Hamid R. ; BOVIK, Alan C.: No-Reference Perceptual Quality Assessment of JPEG Compressed Images. In: *IEEE International Conference on Image Processing*, 2002, S. 477–480. – zitiert auf S. 94
- [212] WATT, Alan: *Computer Graphics*. Addison Wesley, 1999. – zitiert auf S. 147
- [213] WATZKE, Oliver: *Metallartefaktreduktion in der Computertomographie*, Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2001. – zitiert auf S. 18, 22, 35, 39, 40, 41, 42, 43, 53, 86
- [214] WATZKE, Oliver ; KALENDER, Willi A.: *Metal Artifact Reduction in Medical CT: Image-based vs. Rawdata-based Approaches*. Version: 2002. [http://www.imp.uni-erlangen.de/RSNA2002/Vortraege/Paper\\_653\\_-Dateien/frame.htm](http://www.imp.uni-erlangen.de/RSNA2002/Vortraege/Paper_653_-Dateien/frame.htm). – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2005. – Folien zu dem gleichnamigen Vortrag auf der RSNA 2002 [215]. – zitiert auf S. 43, 65

- [215] WATZKE, Oliver ; KALENDER, Willi A.: *Metal Artifact Reduction in Medical CT: Image-based vs. Rawdata-based Approaches*. Version:2002. [http://archive.rsna.org/index.cfm?ACTION=EVENT&em\\_id=3101872](http://archive.rsna.org/index.cfm?ACTION=EVENT&em_id=3101872). – Online-Ressource, Abruf: 20.06.2005. – Vortragskurzfassung – Folien [214]. – zitiert auf S. 65
- [216] WATZKE, Oliver ; KALENDER, Willi A.: A Pragmatic Approach to Metal Artefact Reduction in CT: Merging of Metal Artefact Reduced Images. In: *Eur. Radiol.* 14 (2004), Nr. 5, S. 849–856. – zitiert auf S. 43
- [217] WEBER, Ernst H.: Der Tastsinn und das Gemeingefühl. In: WAGNER, Rudolph (Hrsg.): *Handwörterbuch Physiologie* Bd. 3. Vieweg, 1846, S. 481–588. – zitiert auf S. 97
- [218] WELLS, William M. ; GRIMSON, L. ; ERIC, W. ; KIKINIS, Ron ; JOLESZ, Ferenc A.: Adaptive segmentation of MRI data. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 15 (1996), Nr. 4. – zitiert auf S. 157
- [219] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 5. Auflage. Springer, 2005. – zitiert auf S. 163, 164
- [220] XU, Chenyang ; PHAM, Dzung L. ; PRINCE, Jerry L.: Image Segmentation Using Deformable Models. In: [189], S. 129–174. – zitiert auf S. 143
- [221] YAN KANG, Willi A. K.: A New Accurate and Precise 3D Segmentation Method for Skeletal Structures in Volumetric CT Data. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 22 (2003), Nr. 5. – zitiert auf S. 144
- [222] ZAMPERONI, Piero: *Methoden der digitalen Bildsignalverarbeitung*. Vieweg, 1989. – zitiert auf S. 66
- [223] ZEITLER, E.: The Reconstruction of Objects from Their Projections. In: *Optik* 4 (1973), S. 396–415. – zitiert auf S. 5
- [224] ZERFOWSKI, Detlef: *Bildverbesserungsmethoden für die medizinische Diagnostik*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 1998. – zitiert auf S. 5, 10, 19, 35, 39, 46
- [225] ZERFOWSKI, Detlef ; ROHLFING, Torsten ; MENDE, Ulrich ; BETH, Thomas: TomAS - Tomographic Algorithms and Ultrasound Simulation. In: LEMKE, Heinz U. (Hrsg.) ; INAMURA, Kiyonari (Hrsg.) ; VANNIER, Michael W. (Hrsg.): *CAR '97*, Elsevier Science, 1997, S. 1017. – zitiert auf S. 53
- [226] ZHAO, Shiyong ; BAE, Kyongtae T. ; WHITING, Bruce ; WANG, Ge: A wavelet method for metal artifact reduction with multiple metallic objects in the field of view. In: *Journal of X-Ray Science and Technology* 10 (2002), S. 67–76. – zitiert auf S. 40, 41

- 
- [227] ZHAO, Shiyang ; ROBERTSON, Douglas D. ; WANG, Ge ; WHITING, Bruce ; BAE, Kyongtae T.: X-Ray CT Metal Artifact Reduction Using Wavelets: An Application for Imaging Total Hip Prostheses. In: *IEEE Trans. Med. Imag.* 19 (2000), Nr. 12, S. 1238–1247. – zitiert auf S. 40, 41
- [228] ZOTA, Volker: Kompressionist. In: *c't* (2005), Nr. 10, S. 146–157. – zitiert auf S. 94, 96
- [229] ZYLKA, Waldemar ; WISCHMANN, Hans-Aloys: On geometric distortions in CT images. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 1996. Bridging Disciplines for Biomedicine. Proceedings of the 18th Annual International Conference of the IEEE* Bd. 3, 1996, S. 1120–1121. – zitiert auf S. 23



# Index

## A

|                   |        |
|-------------------|--------|
| Abtasteinheit     | 5      |
| aktive Kontur     | 145    |
| ART               | 45     |
| Artefakt          | 5      |
| Abtastungs-       | 34     |
| Bewegungs-        | 35     |
| Cupping-          | 27     |
| Rausch-           | 24     |
| Streustrahl-      | 33     |
| Artefaktreduktion | 35, 38 |
| ASSIM             | 94, 98 |

## B

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| Ballon                        | 145 |
| baryzentrischer Flächeninhalt | 151 |
| Bildqualität                  |     |
| diagnostische                 | 94  |
| technische                    | 94  |

## C

|                     |         |
|---------------------|---------|
| C1                  | 124     |
| Clipping            | 22      |
| Closing             | 51, 168 |
| CON                 | 138     |
| Cooccurrence-Matrix | 69, 138 |
| Cormack, A. M.      | 5       |
| CT                  | 5       |
| CT-Volumen          | 144     |
| Cupping             | 27      |

## D

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| Defektbild                 | 23  |
| Defektsinogramm            | 23  |
| Detailkoeffizienten        | 166 |
| diagnostische Bildqualität | 94  |

|                     |              |
|---------------------|--------------|
| diagnostischer Test | 99           |
| DICOM               | 21, 47       |
| Dilatation          | 92, 145, 168 |
| Dreiecksnetz        | 147          |
| Durchlassbereich    | 87           |

## E

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Eigenvektor              | 152 |
| Eigenwert                | 152 |
| 1-Ring-Nachbarschaft     | 151 |
| elliptisch               | 144 |
| EM                       | 45  |
| Erosion                  | 168 |
| Expectation Maximization | 45  |
| externes Problem         | 45  |

## F

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| Fächerstrahlgeometrie    | 7   |
| Facette                  | 149 |
| Faltungskern             |     |
| Blackman                 | 85  |
| Faltungskern             |     |
| Gauß                     | 78  |
| Wavelet                  | 71  |
| FDA                      | 94  |
| Feder-Masse-Modell       | 145 |
| FFT                      | 164 |
| Filter                   |     |
| adaptives                | 41  |
| FIR                      | 85  |
| Rekonstruktions-         | 12  |
| Fourier-Scheiben-Theorem | 10  |
| Fourierrekonstruktion    | 10  |
| Fouriertransformation    | 164 |

## G

|        |   |
|--------|---|
| Gantry | 5 |
|--------|---|

- Gantry Tilt ..... 6  
 Gauß-Krümmung ..... 150  
 gefilterte Rückprojektion ..... 5, 12  
 gerade Funktion ..... 16  
 Gewichtsmatrix ..... 90  
 Goldstandard ..... 99  
 Grauerthistogramm ..... 69  
 gut gestelltes Problem ..... 161
- H**  
 Haralick'sches Texturmerkmal ..... 69  
 Haralick-Kontrast ..... 138  
 harte Strahlung ..... 27  
 Hauptachse ..... 152  
 Hauptachsentransformation ..... 152  
 Hauptkrümmung ..... 150  
 Histogramm ..... 69  
 Hounsfield, G. N. .... 5  
 Hounsfield-Einheit ..... 21  
 HU ..... 20  
 HVS ..... 94  
 hyperbolisch ..... 147
- I**  
 IDL ..... 53  
 IDM ..... 69  
 IF ..... 102  
 IFFT ..... 164  
 ImpactIR ..... 53  
 Impulsantwort ..... 5, 15, 17  
 Indikatorfunktion ..... 172  
 inneres Problem ..... 44  
 Intensitätsdämpfung ..... 30  
 Inverse Difference Moment ..... 69  
 ITK ..... 143
- J**  
 Java ..... 3, 143  
 Java3D ..... 3, 143
- K**  
 konvexe Hülle ..... 18, 162  
 konvexe Funktion ..... 162  
 konvexe Kombination ..... 161  
 konvexe Menge ..... 162
- Kreisscheibenphantom ..... 24  
 Krümmung ..... 149
- L**  
 $\lambda|\mu$ -Verfahren ..... 148  
 Lakshminarayanan, A. V. .... 12  
 LI ..... 102  
 lineare Interpolation ..... 39  
 Linearisierung ..... 27  
 Lokale Homogenität ..... 69  
 Lokale Tomographie ..... 43
- M**  
 $M_{\text{SVD}}$  ..... 94, 98  
 Magnetresonanztomographie . 144, 155  
 Mannigfaltigkeit ..... 150  
 MAR ..... 39  
 Marching Cubes ..... 147  
 MASSIM ..... 98  
 Matlab ..... 3  
 Medianfilter ..... 50  
 Mehrzeiler-CT ..... 7  
 Merging ..... 43  
 Messbereich ..... 5  
 Messfeld ..... 5  
 Metall  
     artefaktverursachendes ..... 23  
 Metallartefakt ..... 5, 18, 23  
 Metallartefaktreduktion ..... 38  
 Metallschatten ..... 18  
 Metallsinusoide ..... 18  
 MINIMUM ..... 79  
 Mock Projections ..... 52  
 monochromatisches Spektrum ..... 8  
 MQF ..... 94, 95  
 MRT ..... 144, 155  
 MRT-Sequenz ..... 155  
 MSE ..... 94  
 MSSIM ..... 95, 96  
 Multi-Skalen-Analyse ..... 165  
 MVS ..... 94
- N**  
 NMQF ..... 94  
 NMSE ..... 94

- Normalenvektor ..... 147
- O**
- Opening ..... 168
- Operator
- Differential- ..... 14
  - Fourier- ..... 10, 164
  - Hilbert- ..... 14
  - Laplace ..... 44
  - morphologischer ..... 168
  - Radon- ..... 9
  - Rückprojektions- ..... 11
- P**
- Parallelstrahlgeometrie ..... 6
- Patiententisch ..... 5
- Poissonverteilung ..... 25
- polychromatisches Spektrum ..... 27
- Polygonnetz ..... 148
- Projektion ..... 9
- Pseudoprojektion ..... 52
- Pseudorohdaten ..... 38, 52
- PSNR ..... 94
- Q**
- Quadtree ..... 66
- Qualitätsmaß ..... 94
- R**
- Radon, J. .... 9
- Radontransformation ..... 9
- Ram-Lak-Filter ..... 12
- Ramachandran, G. N. .... 12
- Rampenfilter ..... 12
- Rebinning ..... 7
- RECLBL ..... 53
- Referenz-Metallsinusoide ..... 49
- Region Growing ..... 151
- Rekonstruktionsbild ..... 5, 10
- Rekonstruktionsfilter ..... 12
- Ram-Lak ..... 12
  - Shepp-Logan ..... 12
- RFMAR ..... 79, 84
- ROC ..... 99
- Röntgen, W. C. .... 5
- ROI ..... 53
- Rückprojektion ..... 11
- Rückprojektion
- gefilterte ..... 5
- S**
- Saatpunkt ..... 153
- scan field of view ..... 7
- schlecht gestelltes Problem ..... 5, 161
- Schwächungskoeffizient ..... 8
- Segmentierung ..... 46, 64, 71, 75, 143
- histogrammbasiert ..... 78
  - Quadtree-basiert ..... 66
  - Region Growing ..... 151
  - Schwellwert- ..... 21, 47, 80
  - texturbasiert ..... 69
- Sekundärrekonstruktion ..... 35
- Sensitivität ..... 99
- Shepp-Logan-Filter ..... 12
- Signal-Rausch-Verhältnis ..... 24
- Singulärwertzerlegung ..... 98
- Singularität ..... 44
- Sinogramm ..... 9
- Sinusoid ..... 11
- Skalierungsfunktion ..... 165
- Snakes ..... 145
- SNARK93 ..... 53
- SNR ..... 24
- Sperrbereich ..... 87
- Spezifität ..... 99
- Spiral-CT ..... 7
- SSIM ..... 95, 96
- Strahlaufhärtung ..... 27
- Strahlengang ..... 8
- Streuung ..... 33
- Strukturelement ..... 169
- Superposition ..... 100
- T**
- technische Bildqualität ..... 94
- Tiefpass ..... 87
- TIFF ..... 110
- TomAS ..... 53
- Tomographie ..... 5

---

|                              |             |
|------------------------------|-------------|
| Externe .....                | 45          |
| Lambda .....                 | 44          |
| Lokale .....                 | 44          |
| Transformation               |             |
| Fourier- .....               | 164         |
| Hauptachsen- .....           | 152         |
| Karhunen-Loève .....         | 152         |
| Radon- .....                 | 9           |
| Wavelet- .....               | 70, 165     |
| <b>U</b>                     |             |
| Übergangsbereich .....       | 87          |
| <b>V</b>                     |             |
| Verschwindende Momente ..... | 167         |
| VTK .....                    | 143         |
| <b>W</b>                     |             |
| Wavelet .....                | 166         |
| biorthogonal .....           | 167         |
| biorthogonales .....         | 71          |
| Wavelet-Faltungskern .....   | 71, 72, 167 |
| Wavelettransformation .....  | 70, 165     |
| Weber'sches Gesetz .....     | 97          |
| Wirbelkanal .....            | 144         |
| Wirbelsäule .....            | 143         |
| <b>Z</b>                     |             |
| Zorn'sches Lemma .....       | 170         |

