

NUMERISCHE SIMULATION VON MAGNETOKONVEKTION IN ZYLINDERN MIT INTERNEN WÄRMEQUELLEN

Zur Erlangung des akademischen Grades

eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau der

Universität Karlsruhe

genehmigte

Dissertation

von

Dipl.–Ing. Peter Back

aus St. Leon-Rot

Tag der mündlichen Prüfung: 07.02.2006

Hauptreferent: Prof. Dr. rer. nat. Claus Günther

Korreferenten: Prof. Prof. e. h. Dr.–Ing. Herbert Oertel
Prof. Dr.–Ing. Ulrich Müller

Inhalt

1	Einleitung	7
2	Grundgleichungen	9
2.1	Elektrodynamik	9
2.1.1	Elektrodynamische Gleichungen	9
2.1.2	Ohmsches Gesetz	9
2.2	Hydrodynamik	10
2.2.1	Kontinuitätsgleichung	10
2.2.2	Impulsgleichung	10
2.2.3	Energiegleichung	12
2.3	Vereinfachte Modellgleichungen	13
2.4	Dimensionslose Gleichungen und Kennzahlen	13
2.5	Induktionslose Approximation	17
2.5.1	Elektrische Randbedingungen	18
2.5.2	Hydrodynamische Rand- und Anfangsbedingungen	19
3	Numerische Verfahren	21
3.1	Zeitliche Diskretisierung	21
3.1.1	Zeitschrittverfahren erster Ordnung	21
3.1.2	Explizites 3-Zeitebenen-Verfahren	23
3.2	Örtliche Diskretisierung	24
3.2.1	Zentrale-Differenzen-Verfahren	24
3.2.2	Upwind-Verfahren	25
3.2.3	LECUSSO-Verfahren	26
3.2.4	Hybride-Verfahren	27
3.3	Rechengitter	27
3.4	Behandlung der Singularität bei $r = 0$	30
3.5	Fractional-Step-Verfahren	36

3.6	Lösung der Poissongleichungen	38
3.7	Lösungsalgorithmus	38
4	Grundlagen der Magnetokonvektion	41
4.1	Magnetohydrodynamik	41
4.2	Konvektionsströmungen mit internen Wärmequellen	42
5	Ergebnisse	45
5.1	Programmvalidierung	45
5.1.1	Stehender Zylinder mit internen Wärmequellen	45
5.1.2	Liegender Zylinder mit horizontalem Temperaturgradienten	50
5.1.3	Magnetokonvektion in liegenden Zylindern	53
5.1.3.1	Rechnungen ohne Magnetfeld	54
5.1.3.2	Magnetfeld in x -Richtung	54
5.1.3.3	Magnetfeld in y -Richtung	59
5.1.3.4	Magnetfeld in z -Richtung	63
5.1.4	Magnetokonvektion in stehenden Zylindern	67
5.1.4.1	Hydrodynamische Rechnungen	68
5.1.4.2	Horizontales Magnetfeld	70
5.1.5	Zusammenfassung der Validierung	73
5.2	Stehender Zylinder mit gekühltem Zylindermantel	75
5.2.1	Hydrodynamische Konvektion	76
5.2.2	Vertikales Magnetfeld	79
5.2.3	Horizontales Magnetfeld	81
5.3	Stehender Zylinder mit gekühlter oberer Stirnseite	95
5.3.1	Hydrodynamische Konvektion	96
5.3.1.1	Einfluss der Berandung am oberen Rand	96
5.3.1.2	Rotationssymmetrische Strömung	97
5.3.1.3	Dreidimensionale Berechnungen	99
5.3.2	Horizontales Magnetfeld	106
5.3.3	Vertikales Magnetfeld	111
6	Zusammenfassung und Ausblick	113

Anhang	114
A Aufbau des Rechenprogramms	115
A.1 Preprozessing	115
A.2 Numerische Lösung der Gleichungen	116
A.3 Postprozessing	117
Symbolverzeichnis	118
Literaturverzeichnis	119

Kapitel 1

Einleitung

Naturkonvektionsströmungen spielen in vielen Bereichen von Natur und Technik eine wichtige Rolle. Bei der Untersuchung von Naturkonvektionsströmungen stehen die auftretenden Strömungsmuster sowie der Wärmetransport von den warmen zu den kalten Rändern im Vordergrund. Geeignete dimensionslose Kennzahlen sowie Korrelationen zwischen diesen Kennzahlen erlauben hierbei die Übertragung von Ergebnissen auf ähnliche Aufgabenstellungen.

Während Naturkonvektionsströmungen mit aufgeprägten Temperaturen an horizontalen oder vertikalen Rändern schon lange untersucht werden, begann die Untersuchung von intern beheizten Konvektionsströmungen erst später. Erste Veröffentlichungen zu diesem Thema erschienen nach 1965 ([11], [50]). Danach wurden Naturkonvektionsströmungen mit internen Wärmequellen in Zusammenhang mit der Kerntechnik, der Plattentektonik ([58] und [85]) bis hin zur Astrophysik [99] untersucht. Interne Wärmequellen treten außerdem auch bei der Fermentierung oder bei chemischen Reaktionen, bei denen die Reaktionsrate annähernd unabhängig von der Temperatur ist, auf. In der Kerntechnik spielen intern beheizte Naturkonvektionsströmungen eine wichtige Rolle, weil dort mit Spaltprodukten versetzte Flüssigkeiten (meist Kühlmittel) auftreten [36]. Diese mehr oder minder homogen verteilten Spaltprodukte erzeugen eine interne Beheizung der Flüssigkeit. Bei diesen Aufgabenstellungen sind vor allem die Wärmeabfuhr an den gekühlten Bereichen, die auftretenden Strömungsmuster sowie Korrelationen vorrangig.

Strömungen von elektrisch leitenden Flüssigkeiten unter dem Einfluss von Magnetfeldern werden ebenfalls schon lange untersucht. Solche Fragen haben verstärkt Interesse gefunden, seit Projekte zur Fusionstechnologie in Gang gesetzt wurden. Hier wird ionisiertes Plasma mit Hilfe von starken Magnetfeldern stabil eingeschlossen [96]. Dabei müssen elektrisch leitende Kühlflüssigkeiten Bereiche mit starken Magnetfeldern durchqueren. Auch bei der Kristallzüchtung von Halbleiterkristallen aus der Schmelze werden Magnetfelder zur Strömungskontrolle eingesetzt. Werden diese Schmelzen induktiv beheizt, so liegen ebenfalls interne Wärmequellen vor. Damit ergibt sich die Aufgabe, Strömungen elektrisch leitender Fluide unter dem Einfluss von Magnetfeldern zu untersuchen. Hierbei ist insbesondere der Einfluss der Magnetfelder auf die Strömung und den Wärmeübergang im Vergleich mit der Situation ohne Magnetfeld von Interesse.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die beiden genannten Themenkreise verbunden. Daher werden dreidimensionale Naturkonvektionsströmungen elektrisch leitender Fluide mit homogenen internen Wärmequellen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in Zylindern numerisch untersucht. Die Prandtl-Zahlen liegen hierbei in einem für Flüssigmetalle typischen Bereich.

Die Berechnung von magnetohydrodynamischen Strömungen ist oft auf einfache Geometrien wie kartesische oder Zylinderkoordinaten beschränkt, da nur für diese der Einsatz schnell-

ler numerischer Methoden (z. B. Poisson-Löser) möglich ist. Mit diesen Methoden ergeben sich erheblich kürzere Rechenzeiten als beim Einsatz von kommerziellen Rechencodes mit unstrukturierten Gittern für allgemeine Geometrien. Deshalb wird im Rahmen dieser Arbeit ein speziell für Berechnungen in Zylindern konzipiertes Programm, welches die auftretenden Poisson-Gleichungen mit einem solchen schnellen Verfahren löst, entwickelt und validiert. Das Programm basiert auf einem versetzten Rechengitter in Zylinderkoordinaten. Bei diesem Gitter werden die Flussgrößen auf den Kontrollvolumenoberflächen gespeichert. Hierdurch werden die diskretisierten Erhaltungssätze für die elektrische Stromdichte und die Massenerhaltung exakt erfüllt. Zur räumlichen und zeitlichen Diskretisierung kommen Verfahren zweiter Ordnung zum Einsatz. Um die bei der Diskretisierung nach der Finite-Differenzen-Methode entstehenden Singularitäten bei $r = 0$ zu vermeiden, wird dort die Finite-Volumen-Methode angewendet. Das Rechenprogramm ist durch die Nachrechnung verschiedener Testrechnungen ausreichend validiert.

Anschließend werden Strömungsvorgänge ohne und mit Magnetfeldern in stehenden Zylindern mit internen Wärmequellen bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen untersucht. Die Magnetfelder wirken hierbei in horizontaler oder vertikaler Richtung. Die Wärmeabfuhr erfolgt entweder über den Zylindermantel oder über die obere Stirnseite des Zylinders. Hierbei wird insbesondere die Veränderung der Strömung unter dem Einfluss der Magnetfelder sowie der Einfluss der Magnetfelder auf den Wärmeübergang untersucht. Der Wärmeübergang wird durch zwei geeignet definierte Nußelt-Zahlen charakterisiert.

Kapitel 2

Grundgleichungen

2.1 Elektrodynamik

2.1.1 Elektrodynamische Gleichungen

Die elektrodynamischen Vorgänge in magnetohydrodynamischen Strömungen werden durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Diese lauten

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho_{el}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \left(\vec{j} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.4)$$

Das Induktionsgesetz nach Gleichung (2.1) beschreibt den Einfluss von zeitlichen Änderungen eines magnetischen Feldes \vec{B} auf das elektrische Feld \vec{E} . Die elektrische Ladungsdichte ρ_{el} ergibt sich mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ aus dem Gauß'schen Hüllenflusssatz nach Gleichung (2.2). Die Ampère-Maxwell'schen Gleichungen nach Gleichung (2.3) und (2.4) beschreiben die Induktion divergenzfreier magnetischer Felder mit der magnetischen Permeabilität μ und der elektrischen Stromdichte \vec{j} .

2.1.2 Ohmsches Gesetz

Das Ohmsche Gesetz beschreibt die Fähigkeit eines Materials, elektrische Ladungen unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes zu transportieren. Mit der elektrischen Leitfähigkeit σ ergibt sich das Ohmsche Gesetz zu

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2.5)$$

Diese Gleichung gilt für einen sich auf dem Fluid mitbewegenden Beobachter. Es bedarf deshalb einer Transformation vom Lagrange'schen auf das Eulersche Koordinatensystem. Für einen mit der Geschwindigkeit \vec{v} bewegten Leiter ergibt sich das Ohmsche Gesetz im Eulerschen Koordinatensystem zu [89]

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.6)$$

Unberücksichtigt ist in dieser Gleichung der Strombeschleunigungsterm, welcher die Trägheit freier Ladungen beschreibt. Weiterhin unberücksichtigt bleiben der Druck-Term und der Seebeck-Effekt. Der Druck-Term beschreibt die Elektronendiffusion aufgrund von Druckgradienten, der Seebeck-Effekt die Elektronendiffusion aufgrund von Temperaturgradienten.

2.2 Hydrodynamik

2.2.1 Kontinuitätsgleichung

Aus der Massenbilanz erhält man die Kontinuitätsgleichung. In vektorieller Schreibweise lautet diese in ihrer allgemeinen Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (2.7)$$

Für den Fall der inkompressiblen Strömung ($\rho = \text{const.}$) vereinfacht sich Gleichung (2.7) zu

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.8)$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Zylinderkoordinaten lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z) = 0. \quad (2.9)$$

2.2.2 Impulsgleichung

Die Impulsbilanz liefert für die reibungsbehaftete Strömung elektrisch leitender Fluide unter dem Einfluss von Magnetfeldern folgende nichtlineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \nabla \cdot (\bar{T}) + \rho \vec{g}, \quad (2.10)$$

wobei $\vec{j} \times \vec{B}$ die durch die elektromagnetischen Einflüsse ausgeübte Lorentzkraft \vec{F}_L beschreibt. Der Term $\rho \vec{g}$ berücksichtigt die Schwerkraft. Für ein inkompressibles newtonsches Fluid ergibt sich der Spannungstensor \bar{T} in Abhängigkeit der Geschwindigkeitsgradienten und der

dynamischen Viskosität η nach der Stokesschen Hypothese zu [2]

$$\bar{T} = \eta \nabla \vec{v}. \quad (2.11)$$

Die Behandlung des Auftriebsterms erfolgt durch die Boussinesq-Approximation. Bei der Boussinesq-Approximation wird die Dichte in allen Termen außer dem Auftriebsterm in der Impulsgleichung als konstant angenommen. Im Auftriebsterm werden ausschließlich temperaturbedingte Dichteänderungen berücksichtigt. Alle übrigen Stoffwerte sind konstant. Für die Dichte im Auftriebsterm ergibt sich somit [73]

$$\rho(T) = \rho_0 \left(1 - \beta(T - T_0) \right) \quad (2.12)$$

mit dem isobaren thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten β und der Referenzdichte ρ_0 , welche auf die Referenztemperatur T_0 bezogen ist.

Aus der Impulsbilanz ergibt sich mit dem Ansatz für den Spannungstensor nach Gleichung (2.11) sowie der Boussinesq-Approximation im Auftriebsterm die Navier-Stokes-Gleichung für ein inkompressibles Fluid mit Berücksichtigung der Lorentzkraft zu

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_0 (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} + \eta \Delta \vec{v} + \rho_0 \left(1 - \beta(T - T_0) \right) \vec{g} \quad (2.13)$$

bzw. in Komponentenschreibweise in Zylinderkoordinaten [104] in r -Richtung

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + (v_\varphi B_z - B_\varphi v_z) + \\ \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_r] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] + \rho_0 \left(1 - \beta(T - T_0) \right) g_r, \end{aligned} \quad (2.14)$$

in φ -Richtung

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + (v_z B_r - B_z v_r) + \\ \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r v_\varphi] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} \right] + \rho_0 \left(1 - \beta(T - T_0) \right) g_\varphi \end{aligned} \quad (2.15)$$

und in z -Richtung

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + (v_r B_\varphi - B_r v_\varphi) + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) g_z. \quad (2.16)$$

2.2.3 Energiegleichung

Die Energiegleichung ergibt sich aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik nach einigen Umformungen zu [44]

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla h = \lambda_{WL} \Delta T + S_T. \quad (2.17)$$

Hierbei stellt h die spezifische Enthalpie und λ_{WL} die Wärmeleitfähigkeit des Fluids dar. Im Quellterm S_T werden die internen Wärmequellen berücksichtigt. Dissipationseffekte, wie sie bei reibungsbehafteten Strömungen auftreten, spielen bei Naturkonvektionsströmungen nur eine untergeordnete Rolle und werden deshalb vernachlässigt [29]. Unbedeutend ist ebenfalls die durch die elektrischen Ströme hervorgerufene Joulesche Wärme (vgl. [5] und [63]), welche ebenfalls vernachlässigt wird.

Für ein inkompressibles Medium mit der konstanten spezifischen Wärmekapazität c_p berechnet sich die spezifische Enthalpie in Abhängigkeit der Temperatur T zu

$$h = c_p T. \quad (2.18)$$

Somit ergibt sich die Energiegleichung für ein inkompressibles Medium mit konstanter Wärmekapazität c_p zu

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \kappa \Delta T + \frac{1}{\rho_0 c_p} q. \quad (2.19)$$

Die Berücksichtigung der internen Wärmequellen erfolgt durch die Wärmequellendichte q . Die Temperaturleitzahl κ errechnet sich zu

$$\kappa = \frac{\lambda_{WL}}{\rho_0 c_p}. \quad (2.20)$$

In Zylinderkoordinaten lautet die Energiegleichung [104]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \kappa \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{\rho_0 c_p} q. \quad (2.21)$$

2.3 Vereinfachte Modellgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit werden flüssige Metalle als Fluide vorausgesetzt. Diese besitzen eine hohe elektrische Leitfähigkeit. Dadurch können elektrostatische Ladungen vernachlässigt werden. Es entfällt die Berechnung von Gleichung (2.2) und die Kraftwirkung des elektrischen Feldes \vec{E} kann in der Impulsgleichung vernachlässigt werden [17].

Die Vernachlässigung des Verschiebestromes ($\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$) nach Gleichung (2.3) ist aufgrund des schnellen Ladungsaustausches ebenfalls möglich, wenn ausschließlich Fluide mit hoher elektrischer Leitfähigkeit vorausgesetzt werden. Der entstehende Fehler ist von der Größenordnung $(v/c_0)^2$ [89]. Hierbei ist c_0 die Lichtgeschwindigkeit.

Setzt man ein zeitlich konstantes Magnetfeld voraus, so verschwindet in Gleichung (2.1) der Term $\partial \vec{B} / \partial t$. Somit verschwindet die Rotation des elektrischen Feldes. Deshalb kann das elektrische Feld \vec{E} durch den Gradienten des skalaren elektrischen Potentials Φ ersetzt werden

$$\vec{E} = -\nabla \Phi. \quad (2.22)$$

Dadurch ist Gleichung (2.1) identisch erfüllt. Im Allgemeinen ist die Annahme eines zeitlich konstanten Magnetfeldes nur bei sehr kleinen magnetischen Reynoldszahlen R_m im Rahmen der induktionslosen Approximation zulässig (vgl. Kapitel 2.5).

2.4 Dimensionslose Gleichungen und Kennzahlen

Mittels der nachfolgend aufgeführten Maßstabsfaktoren lassen sich die Grundgleichungen in eine dimensionslose Form überführen

$$M_v = v_0, \text{ mit } v_0 = \sqrt{\frac{g\beta a^3 q}{\lambda_{WL}}} \quad (2.23)$$

$$M_T = \frac{qa^2}{\lambda_{LW}} \quad (2.24)$$

$$M_p = v_0^2 \rho_0 \quad (2.25)$$

$$M_t = \frac{a}{v_0} \quad (2.26)$$

$$M_B = B_0 \quad (2.27)$$

$$M_j = \sigma v_0 B_0 \quad (2.28)$$

$$M_\Phi = av_0 B_0. \quad (2.29)$$

Hierbei wird die dimensionslose Größe ϕ^* aus der dimensionsbehafteten Größe ϕ nach folgender Beziehung abgeleitet

$$\phi^* = \frac{\phi}{M_\phi}. \quad (2.30)$$

Es ergibt sich unter Berücksichtigung der bereits getroffenen Annahmen und Voraussetzungen der folgende Satz Gleichungen:

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.31)$$

- Impulsgleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} (\vec{j} \times \vec{B}) + \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} \Delta \vec{v} + T \vec{k} \quad (2.32)$$

- Energiegleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW} Pr}} \Delta T + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW} Pr}} \quad (2.33)$$

- Ampère-Maxwellsche Gleichung

$$\nabla \times \vec{B} = R_m \vec{j} \quad (2.34)$$

- Ohmsches Gesetz

$$\vec{j} = -\nabla \Phi + \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.35)$$

- Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.36)$$

Bei diesen Gleichungen werden die dimensionsbehafteten Größen zu dimensionslosen Kennzahlen zusammengefasst. Mittels dieser dimensionslosen Kennzahlen ist es möglich, Lösungen auf eine ganze Klasse physikalisch ähnlicher Probleme zu übertragen [105]. Die für diese Arbeit wichtigen Kennzahlen sind zum einen die Hartmann-Zahl Ha , wobei Ha^2 das Verhältnis von den elektrodynamischen Kräften zur Reibungskraft darstellt

$$Ha = a B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}. \quad (2.37)$$

Hierbei ist a eine charakteristische Länge, B_0 das angelegte Magnetfeld und η die dynamische Viskosität. Die Hartmann-Zahl kann als Stärke des Magnetfeldes interpretiert werden.

Das Verhältnis des induzierten Magnetfeldes zum äußeren angelegten Magnetfeld wird gekennzeichnet durch die magnetische Reynoldszahl

$$R_m = \mu \sigma v_0 a. \quad (2.38)$$

Die Stärke einer durch äußere Temperaturgradienten erzeugten Naturkonvektionsströmung wird beschrieben durch die Rayleigh-Zahl

$$Ra = \frac{g \beta a^3 \Delta T}{\kappa \nu}. \quad (2.39)$$

Die Rayleigh-Zahl wird gebildet mit der Gravitationsbeschleunigung g , dem thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten β , der Temperaturleitfähigkeit κ , der kinematischen Viskosität ν , der charakteristischen Länge a sowie der charakteristischen Temperaturdifferenz ΔT .

Wird die Konvektionsströmung durch homogen verteilte interne Wärmequellen erzeugt, so dient zur Beschreibung der Stärke der Konvektion die Rayleigh-Zahl für interne Beheizung

$$Ra_{iW} = \frac{g \beta q a^5}{\nu \kappa \lambda_{WL}}. \quad (2.40)$$

Anstelle der charakteristischen Temperaturdifferenz taucht hier die Wärmequellendichte q auf. Beide Rayleigh-Zahlen repräsentieren das Verhältnis der Auftriebskraft zur Reibungskraft.

Die Prandtl-Zahl Pr beschreibt das Verhältnis der diffusiven Transportgeschwindigkeit des Impulses zur diffusiven Transportgeschwindigkeit der Temperatur. Die Prandtl-Zahl, welche eine Stoffkonstante darstellt, errechnet sich nach

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}. \quad (2.41)$$

Gelegentlich wird auch die Grashof-Zahl Gr verwendet, die das Verhältnis zwischen der Rayleigh-Zahl und der Prandtl-Zahl beschreibt

$$Gr = \frac{Ra}{Pr}. \quad (2.42)$$

Für ein gegebenes Fluid ist die Grashof-Zahl ebenfalls ein Maß für die Stärke der Konvektion.

Der Interaktionsparameter, auch Stuart-Zahl genannt, wird gebildet aus

$$N = \frac{\sigma a B_0^2}{\rho v_0} = Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} \quad (2.43)$$

und stellt das Verhältnis zwischen den elektrodynamischen Kräften zu den Trägheitskräften dar.

Als weitere Kennzahl dient die Nußelt-Zahl, welche das Verhältnis von der insgesamt übertra-

genen Wärmemenge Q zur durch Wärmeleitung übertragenen Wärmemenge Q_{WL} darstellt

$$Nu = \frac{Q}{Q_{WL}}. \quad (2.44)$$

Bei Naturkonvektionsströmungen mit internen Wärmequellen ist die Definition einer Nußelt-Zahl wie bei der durch äußere Temperaturgradienten erzeugten Naturkonvektionsströmung unter Umständen nicht sinnvoll. Im stationären Zustand liegt hier, unabhängig davon, ob Konvektion vorliegt oder ob es sich um reine Wärmeleitung handelt, immer ein Gleichgewicht zwischen der im Fluid erzeugten und der durch die Berandung abgeführten Wärme vor. Somit würde die nach Gleichung (2.44) definierte Nußelt-Zahl immer den Wert $Nu = 1$ annehmen. In der Literatur werden deshalb bei Naturkonvektionsströmungen mit internen Wärmequellen verschiedene Nußelt-Zahl Definitionen verwendet.

Für eine horizontale Fluidschicht der Dicke a mit homogen verteilten internen Wärmequellen und isothermen Berandungen oben und unten wird in [50] und [10] die Nußelt-Zahl am jeweiligen Rand mit der Wärmestromdichte Q , der Wärmeleitfähigkeit λ_{WL} , der maximalen Temperatur T_{max} in der Fluidschicht und der Wandtemperatur T_W nach folgender Gleichung berechnet

$$Nu = \frac{a Q}{(T_{max} - T_W)\lambda_{WL}}. \quad (2.45)$$

Dies hat zur Folge, dass bei kleiner werdendem T_{max} die Nußelt-Zahl größer wird. Somit stellt Nu den Faktor der Absenkung der maximalen Temperatur in der Fluidschicht, verglichen mit den Verhältnissen ohne Konvektion d. h. bei reiner Wärmeleitung, dar.

In [8] und [23] werden zwei Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 verwendet. Nu_1 stellt das Verhältnis zwischen der maximalen Temperatur im Falle der reinen Wärmeleitung $T_{max,WL}$ und der bei konvektivem Wärmeübergang auftretenden Maximaltemperatur T_{max} dar. Somit ergibt sich

$$Nu_1 = \frac{T_{max,WL}}{T_{max}}. \quad (2.46)$$

Nu_2 stellt das Verhältnis der mittleren Temperatur im Falle der reinen Wärmeleitung $T_{m,WL}$ zu der bei Konvektion vorliegenden mittleren Temperatur T_m dar. Somit ergibt sich Nu_2 zu

$$Nu_2 = \frac{T_{m,WL}}{T_m} = \frac{\int T_{WL} dV}{\int T dV}. \quad (2.47)$$

Die Nußelt-Zahl Definitionen Nu_1 und Nu_2 werden im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls angewendet. Gegenüber anderen Definitionen der Nußelt-Zahl besteht hier der Vorteil, dass die beiden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 unabhängig von der Geometrie des Rechengebietes und den Randbedingungen angewendet werden können. Hierbei wird die maximal auftretende Temperatur sowie die mittlere Temperatur bei stationärer Wärmeleitung entweder durch Integration der Energiegleichung unter Berücksichtigung der gewählten Randbedingungen, oder, wenn die Energiegleichung geschlossen nicht gelöst werden kann, durch eine numerische Berechnung ermittelt. Beide Nußelt-Zahlen nehmen bei reiner Wärmeleitung den Wert Eins

an und geben bei Konvektionsströmungen den Einfluss des konvektiven Wärmetransports im Verhältnis zur Wärmeleitung an.

2.5 Induktionslose Approximation

Bei den hier durchgeführten Berechnungen wird vorausgesetzt, dass das induzierte Magnetfeld gegenüber dem äußeren angelegten Magnetfeld sehr klein ist. In diesem Fall gilt $R_m \ll 1$. Somit kann das induzierte Magnetfeld vernachlässigt werden. Diese Vorgehensweise ist in [43] für Fusionsanlagen näher beschrieben. Dies hat zur Folge, dass das Magnetfeld bei der Berechnung vorgegeben werden kann und die Auswertung einer Gleichung zur Bestimmung des Magnetfeldes nicht erforderlich ist.

Der dimensionslose Satz Gleichungen zur Berechnung von Naturkonvektionsströmungen mit homogenen internen Wärmequellen unter Magnetfeldeinfluss lautet schließlich:

- Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.48)$$

- Impulsgleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} (\vec{j} \times \vec{B}) + \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} \Delta \vec{v} + T \vec{k} \quad (2.49)$$

- Energiegleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW} Pr}} \Delta T + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW} Pr}} \quad (2.50)$$

- Ohmsches Gesetz

$$\vec{j} = -\nabla \Phi + \vec{v} \times \vec{B} \quad (2.51)$$

- Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.52)$$

Hierbei handelt es sich im dreidimensionalen Fall um neun skalare, partielle, nichtlineare Differentialgleichungen. Da die Ladungserhaltung nach Gleichung (2.52) numerisch schwer zu behandeln ist, wird sie durch die folgende Poissongleichung ersetzt

$$\Delta \Phi = \nabla \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (2.53)$$

Diese Gleichung erhält man, wenn auf das Ohmsche Gesetz nach Gleichung (2.51) der Divergenzoperator angewendet und die Ladungserhaltung nach Gleichung (2.52) berücksichtigt wird.

Im Rahmen der Programmvalidierung werden z. T. Systeme mit externer Beheizung und Kühlung ohne interne Wärmequellen berechnet. Die hierbei verwendeten Gleichungen entsprechen den aufgeführten Gleichungen, wenn die Rayleigh-Zahl Ra_{iW} durch Ra ersetzt wird. Gleichzeitig entfällt der Quellterm in der Energiegleichung. Der Maßstabsfaktor für v_0 berechnet sich dann zu $M_v = v_0 = \sqrt{g \beta \Delta T a}$, während der Maßstabsfaktor für die Temperatur nun $M_T = \Delta T$ lautet.

Die bei der Herleitung der Differentialgleichungen getroffenen Annahmen und Voraussetzungen wurden in diesem Kapitel bereits behandelt, werden an dieser Stelle aber noch mal zusammengefasst:

- Das Fluid ist inkompressibel. Dichteänderungen werden nur im Auftriebsterm über die Boussinesq-Approximation berücksichtigt.
- Es handelt sich um ein Newtonsches Fluid. Der Spannungstensor ist proportional zum Geschwindigkeitsgradienten.
- Dissipationseffekte sowie die durch die elektrischen Ströme hervorgerufene Joulesche Wärme werden vernachlässigt.
- Das Fluid verfügt über eine hohe elektrische Leitfähigkeit. Elektrostatische Ladungen und Verschiebestrome werden vernachlässigt.
- Das äußere Magnetfeld ist zeitlich konstant.
- Wegen $R_m \ll 1$ ist das induzierte Magnetfeld im Vergleich zum angelegten Magnetfeld sehr klein und wird deshalb vernachlässigt (induktionslose Approximation).
- Die Elektronendiffusion aufgrund von Druck- und Temperaturgradienten wird vernachlässigt.
- Die Trägheit der freien Ladungen sowie der Stromfluss freier Ladungsträger aufgrund der Lorentzkraft wird vernachlässigt.

2.5.1 Elektrische Randbedingungen

Zur mathematischen Beschreibung der elektrischen Vorgänge sind außer dem Ohmschen Gesetz und der Ladungserhaltung Randbedingungen für das elektrische Potential Φ und die Stromdichte \vec{j} erforderlich.

Grundsätzlich muss bei der Formulierung der elektrischen Randbedingungen beachtet werden, dass die elektrischen Felder über das Fluidgebiet hinaus wirksam sind. Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich Kavitäten mit elektrisch isolierten Wänden betrachtet. Für diesen Fall lassen sich Ansätze zur Bestimmung von Strom und elektrischem Potential an der Fluid-Wand-Grenzfläche formulieren und somit Wand- und Außenfeldrechnungen vermeiden.

Bei elektrisch isolierten Wänden dringt kein Strom in die Wand ein, somit verschwindet die

Normalkomponente des Stromes an der Wand

$$\vec{j} \cdot \vec{n}|_{Wand} = 0. \quad (2.54)$$

Aus dem Ohmschen Gesetz ergibt sich aufgrund von Gleichung (2.54) mit der Haftbedingung eine homogene Neumann-Randbedingung für das elektrische Potential

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{Wand} = 0. \quad (2.55)$$

2.5.2 Hydrodynamische Rand- und Anfangsbedingungen

Zur mathematischen Beschreibung der Strömungsvorgänge sind außer den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie auch Randbedingungen für die Geschwindigkeit \vec{v} , die Temperatur T und den Druck p erforderlich.

Bei den hier betrachteten Kavitäten treten im Wesentlichen feste, stoffundurchlässige Wände auf. An diesen Rändern gilt deshalb die Haftbedingung

$$\vec{v}_{Wand} = 0. \quad (2.56)$$

Der konvektive Fluss an der Wand nimmt somit den Wert Null an. Der diffusive Fluss entspricht in diesem Falle der Wandschubspannung $\vec{\tau}_{Wand}$. Bei den hier betrachteten laminaren Strömungen ist die Wandschubspannung mit der zur Wand parallelen Geschwindigkeit \vec{v}_P verknüpft

$$\vec{\tau}_{Wand} = -\eta \left. \frac{\partial \vec{v}_P}{\partial n} \right|_{Wand}. \quad (2.57)$$

An einer freien Oberfläche nehmen die Geschwindigkeit normal zur Oberfläche sowie die Schubspannung den Wert Null an

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_{Oberfläche} = 0 \quad (2.58)$$

und

$$\left. \frac{\partial \vec{v}_P}{\partial n} \right|_{Oberfläche} = 0. \quad (2.59)$$

Wird die jeweilige Wand beheizt oder gekühlt, so wird die Wandtemperatur entsprechend vorgegeben

$$T_{Wand} = \text{const.} \quad (2.60)$$

Bei adiabaten Wänden erfolgt kein Wärmetransport durch die Wand. Hieraus resultiert für die Temperatur die homogene Neumann Randbedingung

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{Wand} = 0. \quad (2.61)$$

Die entkoppelte Berechnung der Impuls- und Kontinuitätsgleichung erfolgt durch das Fractional-Step-Verfahren (vgl. Kapitel 3.5). Dieses Verfahren erfordert für Strömungen in geschlossenen Behältern eine Randbedingung für den Druck, welche später erläutert wird.

Sowohl die Energie- als auch die Impulsgleichung beinhaltet einen instationären Term. Somit sind für die Temperatur T wie auch für die Geschwindigkeit \vec{v} Anfangsbedingungen erforderlich. Als Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit dient oft $\vec{v} = 0$. Die Rechnung wird somit aus der Ruhe gestartet. Die Temperatur kann ebenfalls gleich Null gesetzt werden. Es können jedoch auch Temperaturfelder, die z. B. die stationäre Wärmeleitgleichung erfüllen, als Anfangsbedingung für die Temperatur herangezogen werden. Liegen bereits Geschwindigkeits- und Temperaturprofile aus ähnlichen Aufgabenstellungen vor, so kann es sinnvoll sein, diese als Anfangsbedingungen einzusetzen, da hierdurch die Rechenzeit verkürzt werden kann. Generell ist zu beachten, dass aufgrund von Verzweigungsvorgängen, welche durch die Nichtlinearität des konvektiven Terms der Impulsgleichung hervorgerufen werden, die Lösung von der gewählten Anfangsbedingung abhängen kann [72].

Kapitel 3

Numerische Verfahren

3.1 Zeitliche Diskretisierung

Diskretisierung in der Zeit bedeutet, dass der kontinuierliche Verlauf der Transportgröße ϕ nur an diskreten Stützstellen der Zeitkoordinate berechnet wird. Die hier auftretenden Gleichungen mit Zeitableitungen sind parabolisch. Dies bedeutet, dass Ereignisse, die zu einem bestimmten Zeitpunkt eintreten, zeitlich weiter zurück liegende Ereignisse nicht mehr beeinflussen können. Bei der zeitlichen Diskretisierung wird zwischen der expliziten und impliziten Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung unterschieden. Bei der explizit diskretisierten Transportgleichung werden die nicht zeitabhängigen Terme der Transportgleichung mit der Transportgröße zum alten Zeitpunkt n gebildet. Dadurch erhält man für jeden Rechenpunkt eine explizite Gleichung, aus der die Transportgröße zum neuen Zeitpunkt $n + 1$ direkt berechnet werden kann. Bei der impliziten Diskretisierung der Transportgleichung werden alle nicht zeitabhängigen Terme aus den Werten der Transportgröße zum neuen Zeitpunkt gebildet. Dadurch wird berücksichtigt, dass sich die Transportgröße zum neuen Zeitpunkt nicht nur im Zellmittelpunkt der betrachteten Zelle verändern kann, sondern auch in den Zellmittelpunkten der die Zelle umgebenden Zellen [70]. Dies bedeutet, dass sich eine zum Zeitpunkt n auftretende punktförmige Störung zum Zeitpunkt $n + 1$ bereits über das gesamte Rechengebiet ausbreiten kann. Bei der expliziten Diskretisierung erfolgt die Ausbreitung der Störung zum Zeitpunkt $n + 1$ lediglich auf die benachbarten Gitterpunkte. Die implizite Diskretisierung führt auf ein Gleichungssystem, aus dem die Transportgröße zum neuen Zeitpunkt berechnet werden kann und erfordert somit einen wesentlich größeren Rechenaufwand zur Berechnung der Transportgröße ϕ im Vergleich zur expliziten Diskretisierung.

Aufgrund des geringeren Rechenaufwandes der expliziten Zeitschrittverfahren werden im Rahmen dieser Arbeit zwei explizite Zeitschrittverfahren implementiert. Diese werden nachfolgend erläutert.

3.1.1 Zeitschrittverfahren erster Ordnung

Zur Herleitung des Zeitschrittverfahrens erster Ordnung erfolgt die Diskretisierung der zeitlichen Ableitung der Transportgröße ϕ in den Zellmittelpunkten mittels einer Taylorreihenentwicklung zum alten Zeitpunkt n um den Zeitpunkt $n + 1$

$$\phi^n = \phi^{n+1} - \Delta t \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right]^{n+1} + \dots \quad (3.1)$$

Unter Vernachlässigung der Glieder zweiter und höherer Ordnung folgt

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]^{n+1} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + O(\Delta t). \quad (3.2)$$

Wird dieses Verfahren zur zeitlichen Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(\phi, t) \quad (3.3)$$

angewendet und alle Terme außer dem instationären Term zum Zeitpunkt n berechnet, so ergibt sich das explizite Zeitschrittverfahren erster Ordnung zu

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t f(\phi^n, t^n). \quad (3.4)$$

Das bedeutet, dass der Verlauf von ϕ durch einen stückweise linearen Verlauf über der Zeit angenähert wird. Durch den Abbruch der Taylorreihe nach dem ersten Glied wächst der (Abbruch-)Fehler der Approximation linear mit Δt an.

Zur Ermittlung der zeitlichen Ableitung der Transportgröße nach Gleichung (3.4) müssen nur die Werte für ϕ in allen Rechenpunkten zu den Zeitpunkten n und $n + 1$ gespeichert werden. Aus diesem Grund stellt die Näherung nach Gleichung (3.4), die auch unter dem Namen Euler-Vorwärts-Verfahren bekannt ist, eine weit verbreitete Methode zur Diskretisierung des instationären Terms dar.

Für das Euler-Vorwärts-Verfahren existieren allerdings mehrere Kriterien, die die maximale Zeitschrittweite Δt_{max} limitieren. Die Herleitung dieser Kriterien für das Euler-Vorwärts-Verfahren in Kombination mit dem Zentrale-Differenzen-Verfahren zur räumlichen Diskretisierung, angewandt auf die Konvektions-Diffusionsgleichung, findet sich in vielen Lehrbüchern (vgl. [7] und [26]). Eine wichtige Beschränkung bezüglich der maximalen Zeitschrittweite ergibt sich durch das CFL-Kriterium nach Courant, Friedrichs und Levi in Zylinderkoordinaten zu

$$\Delta t_{max, konv} \leq \left[\frac{|u|}{\Delta r} + \frac{1}{r} \frac{|v|}{\Delta \varphi} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]^{-1}. \quad (3.5)$$

Gleichung (3.5) kann physikalisch so gedeutet werden, dass die Entfernung, die eine Störung durch Konvektion innerhalb eines Zeitintervalls zurücklegen kann, geringer sein muss als der kleinste Abstand zweier Gitterpunkte [41].

Auch für diffusiv transportierte Störungen existiert ein ähnliches Kriterium. Hierbei wird die beim CFL-Kriterium verwendete Geschwindigkeit durch eine Diffusionsgeschwindigkeit ersetzt. Die Diffusionsgeschwindigkeit ergibt sich für die Impulsgleichung zu

$$\kappa_D = \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}}. \quad (3.6)$$

Für die Energiegleichung ergibt sich

$$\kappa_D = \frac{1}{\sqrt{Pr Ra_W}}. \quad (3.7)$$

Mit der Diffusionsgeschwindigkeit ergibt sich das diffusive Kriterium in Zylinderkoordinaten zu

$$\Delta t_{max,diff} \leq \frac{1}{2\kappa_D} \left[\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{-1}. \quad (3.8)$$

Sowohl das CFL-Kriterium nach Gleichung (3.5) als auch das diffusive Kriterium nach Gleichung (3.8) stellt eine starke Beschränkung der maximalen Zeitschrittweite Δt_{max} dar. Während die maximale Zeitschrittweite aufgrund des diffusiven Kriteriums bereits vor dem Start der Rechnung bestimmt werden kann, muss das CFL-Kriterium während der Rechnung ständig überwacht, und, falls notwendig, die Zeitschrittweite reduziert werden.

3.1.2 Explizites 3-Zeitebenen-Verfahren

Der Abbruchfehler erster Ordnung in der Zeit erweist sich beim Euler-Vorwärts-Verfahren als nachteilig, da der Abbruchfehler den zeitlichen Diskretisierungsfehler charakterisiert und das Verfahren somit nur von erster Ordnung genau ist. Es gibt mittlerweile sogar die Forderung, für die zeitliche und örtliche Diskretisierung Verfahren von mindestens zweiter Ordnung zu verwenden [55]. Deshalb wird neben dem Euler-Vorwärts-Verfahren noch ein explizites 3-Zeitebenen-Verfahren angewendet. Dieses Verfahren, auch Adams-Bashforth-Verfahren genannt, kann wie folgt dargestellt werden

$$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} \right]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) = f^{n+\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

Hierfür ist es erforderlich, dass f in Gleichung (3.9) zum Zeitpunkt $n + \frac{1}{2}$, d. h. $t + \frac{\Delta t}{2}$, bekannt ist. Um zu einem expliziten Verfahren zu gelangen, muss f für diesen Zeitpunkt extrapoliert werden. Diese Extrapolation erfolgt in der Form

$$f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1}. \quad (3.10)$$

Das Adams-Bashforth-Verfahren ergibt sich somit zu

$$\phi^{n+1} = \phi^n + \Delta t \left[\frac{3}{2}f^n - \frac{1}{2}f^{n-1} \right]. \quad (3.11)$$

Ein Nachteil dieses Verfahrens gegenüber dem Euler-Vorwärts-Verfahren ist der zusätzliche Speicherbedarf zur Speicherung der Transportgröße des vorletzten Zeitschrittes und der erhöhte Rechenaufwand.

Eine Untersuchung der Eigenschaften dieses Verfahrens findet sich in [60] und [64]. Dort sind auch die Stabilitätskriterien dieses Verfahrens angegeben. Für das konvektive Limit ergibt sich

$$\Delta t_{max,konv} \leq \frac{3}{4} \left[\frac{|u|}{\Delta r} + \frac{1}{r} \frac{|v|}{\Delta \varphi} + \frac{|w|}{\Delta z} \right]^{-1}. \quad (3.12)$$

Das diffusive Limit ist

$$\Delta t_{max,diff} \leq \frac{1}{4\kappa_D} \left[\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\Delta \varphi^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{-1}. \quad (3.13)$$

3.2 Örtliche Diskretisierung

3.2.1 Zentrale-Differenzen-Verfahren

Ein sehr weit verbreitetes Verfahren zur örtlichen Diskretisierung von Ableitungen ist das Zentrale-Differenzen-Verfahren. Die Approximation der ersten Ableitung ergibt sich zu

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta r} + O(\Delta r^2), \quad (3.14)$$

während für den Differenzenquotienten zur Approximation der zweiten Ableitung gilt

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta r^2} + O(\Delta r^2). \quad (3.15)$$

Das Verfahren ist zweiter Ordnung genau und wird im Rahmen dieser Arbeit zur räumlichen Diskretisierung der konvektiven und der diffusiven Terme der Energie- und Impulsgleichung für alle Koordinatenrichtungen sowie zur Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung genutzt.

Das Hauptproblem bei der räumlichen Diskretisierung stellt der konvektive Term in der Impuls- und Energiegleichung dar. Die Diskretisierung des konvektiven Terms erfolgt in Erhaltungsform (vgl. [74]). Die Erhaltungsform liefert gegenüber der Konvektionsform Ergebnisse mit höherer Genauigkeit. Weiterhin wird sichergestellt, dass keine Quell- oder Senkenterme für die Masse generiert werden. Dies ist bei der Konvektionsform auch dann möglich, wenn numerische Verfahren eingesetzt werden, die die diskrete Kontinuitätsgleichung erfüllen [31].

Für den konvektiven Term der Impulsgleichung in r -Richtung nach Gleichung (2.14)

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (3.16)$$

ergibt sich die Erhaltungsform zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(v_\varphi v_r)}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + \frac{\partial(v_z v_r)}{\partial z}. \quad (3.17)$$

Diese beiden Ausdrücke lassen sich ineinander überführen, wenn die inkompressible Impulsgleichung nach Gleichung (2.8) erfüllt ist. Wendet man die Produktregel der Differentiation auf die Erhaltungsform an, so kann dies leicht nachvollzogen werden. Bei den diskreten Gleichungen lässt sich die Erhaltungsform nicht mehr in die Konvektionsform überführen.

Das Zentrale-Differenzen-Verfahren, angewendet auf den konvektiven Term der Impulsgleichung in der r -Richtung in Erhaltungsform in Zylinderkoordinaten nach Gleichung (3.17), ergibt bei einem versetzten Maschengitter

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r \phi)}{\partial r} \right|_i = \frac{(r_i + \frac{\Delta r}{2}) v_{r,(i+\frac{i}{2})} \phi_{(i+\frac{i}{2})} - (r_i - \frac{\Delta r}{2}) v_{r,(i-\frac{i}{2})} \phi_{(i-\frac{i}{2})}}{r_i \Delta r} + O(\Delta r^2). \quad (3.18)$$

Die Größen bei $(i + \frac{1}{2})$ und $(i - \frac{1}{2})$ werden durch lineare Interpolation aus den benachbarten Stützstellen ermittelt.

Das Verhältnis von Konvektion und Diffusion wird beschrieben durch die Peclet-Zahl Pe . Bildet man die Peclet-Zahl mit dem Gitterabstand als charakteristischer Länge, so erhält man die Zell- oder Maschen-Peclet-Zahl für die r -Richtung

$$Pe_{\Delta r} = \frac{\rho v_r \Delta r}{\Gamma}. \quad (3.19)$$

Hierbei ist Γ der Diffusionskoeffizient. Analog existieren Peclet-Zahlen in φ - und z -Richtung. Bei der Impulsgleichung geht die Maschen-Peclet-Zahl in die Maschen-Reynolds-Zahl $Re_{\Delta r}$ über.

Das Zentrale-Differenzen-Verfahren liefert dann oszillationsfreie Lösungen, wenn für die Maschen-Peclet-Zahl gilt [78]

$$|Pe| \leq 2. \quad (3.20)$$

Ist dieses Kriterium nicht erfüllt, so kann dies zur Instabilität des Differenzenverfahrens führen, da dann das Beschränktheitsprinzip des Differenzenschemas nicht mehr erfüllt ist.

Da bei den meisten im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen die Maschen-Peclet-Zahl bei der gewählten Diskretisierung größer ist, werden nachfolgend weitere Verfahren beschrieben, bei denen diese Beschränkung nicht auftritt.

3.2.2 Upwind-Verfahren

Das Upwind-Verfahren stellt ein einfaches und stabiles Verfahren zur Diskretisierung des konvektiven Terms dar [19]. Bei diesem Verfahren werden einseitige Differenzen nach folgendem

Schema gebildet

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_i = \begin{cases} \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta r} + O(\Delta r) & \text{für } Re_{\Delta r} > 0 \\ \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta r} + O(\Delta r) & \text{für } Re_{\Delta r} < 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Wendet man das Upwind-Verfahren auf die Impulsgleichung in Erhaltungsform in Zylinderkoordinaten beim versetzten Gitter an, so ergibt sich

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r\phi)}{\partial r} \right|_i = \begin{cases} \frac{r_i v_{r,i} \phi_i - (r_i - \Delta r)v_{r,(i-1)}\phi_{(i-1)}}{r_i \Delta r} + O(\Delta r) & \text{für } Re_{\Delta r} > 0 \\ \frac{(r_i + \Delta r)v_{r,(i+1)}\phi_{(i+1)} - r_i v_{r,i} \phi_i}{r_i \Delta r} + O(\Delta r) & \text{für } Re_{\Delta r} < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Das Upwind-Verfahren wird durch einen Abbruchfehler erster Ordnung charakterisiert. Dadurch kann die Genauigkeit der Ergebnisse beeinträchtigt werden. Wird bei mehrdimensionalen Rechnungen das Rechengitter schräg angeströmt, so treten bei diesem Verfahren im Konvektionsterm Diskretisierungsfehler in der Größenordnung des Diffusionsterms auf (numerische Diffusion). Starke Gradienten werden abgeflacht und die Lösung kann völlig verschmieren [31].

Das Verfahren ist jedoch einfach zu implementieren und kann auch in Wandnähe eingesetzt werden, da immer nur ein stromauf gelegener Punkt benötigt wird. Die beim Zentrale-Differenzen-Verfahren vorliegende Beschränkung in der Maschen-Reynolds-Zahl ist bei diesem Verfahren nicht gegeben [82].

3.2.3 LECUSSO-Verfahren

Aufgrund der genannten Nachteile des Upwind-Verfahrens erster Ordnung wird ein weiteres Verfahren angewendet. Das LECUSSO-Verfahren (Locally Exact Consistent Upwind Scheme of Second Order) ist ein Upwind-Verfahren zweiter Ordnung (vgl. [32] und [33]). Wie beim Upwind-Verfahren erster Ordnung gibt es keine Beschränkung der Maschen-Peclet-Zahl.

Beim LECUSSO-Verfahren werden die Ableitungen durch folgende einseitige Differenzen berechnet

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial r} \right|_i = \begin{cases} \frac{1}{\Delta r} \left[\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2} + \lambda_i (-\phi_{i+1} + 3\phi_i - 3\phi_{i-1} - \phi_{i-2}) \right] & \text{für } Re_{\Delta r} > 0 \\ \frac{1}{\Delta r} \left[\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2} + \lambda_i (\phi_{i-1} - 3\phi_i + 3\phi_{i+1} - \phi_{i+2}) \right] & \text{für } Re_{\Delta r} < 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Hierbei liegen jeweils zwei Punkte stromaufwärts. Für ein versetztes Maschengitter, bei welchem die Ableitungen an den Zwischenstellen $i + \frac{1}{2}$ gebildet werden, ergibt sich der konvektive Term der Impulsgleichung in Erhaltungsform in r -Richtung

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r\phi)}{\partial r} \right|_i = \frac{(r_i + \frac{\Delta r}{2})v_{r,(i+\frac{i}{2})}\phi_{(i+\frac{i}{2})} - (r_i - \frac{\Delta r}{2})v_{r,(i-\frac{i}{2})}\phi_{(i-\frac{i}{2})}}{r_i \Delta r}. \quad (3.24)$$

Wie beim Zentrale-Differenzen-Verfahren wird v_r an den Zwischenstellen durch lineare Interpolation ermittelt. Die Transportgröße wird jedoch nach folgendem Schema errechnet

$$\begin{aligned}\phi_{(i+\frac{1}{2})} &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \lambda_{(i+\frac{1}{2})}(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) & \text{für } Re_{\Delta r, i+\frac{1}{2}} > 0 \\ \frac{1}{2}(\phi_{i+1} + \phi_i) - \lambda_{(i+\frac{1}{2})}(\phi_{i+2} + \phi_i - 2\phi_{i+1}) & \text{für } Re_{\Delta r, i+\frac{1}{2}} < 0 \end{cases} \\ \phi_{(i-\frac{1}{2})} &= \begin{cases} \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i-1}) - \lambda_{(i-\frac{1}{2})}(\phi_i + \phi_{i-2} - 2\phi_{i-1}) & \text{für } Re_{\Delta r, i-\frac{1}{2}} > 0 \\ \frac{1}{2}(\phi_i + \phi_{i-1}) - \lambda_{(i-\frac{1}{2})}(\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i) & \text{für } Re_{\Delta r, i-\frac{1}{2}} < 0, \end{cases}\end{aligned}\quad (3.25)$$

wobei sich der LECUSSO-Faktor λ errechnet aus

$$\lambda_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{e^{|Re_{\Delta r, i\pm\frac{1}{2}}|}}{|Re_{\Delta r, i\pm\frac{1}{2}}|} \cdot \frac{\frac{1}{2}|Re_{\Delta r, i\pm\frac{1}{2}}|(e^{|Re_{\Delta r, i\pm\frac{1}{2}}|} + 1) - (e^{|Re_{\Delta r, i\pm\frac{1}{2}}|} - 1)}{(e^{|Re_{\Delta r, i\pm\frac{1}{2}}|} - 1)^2}.\quad (3.26)$$

Das LECUSSO-Verfahren wurde streng genommen für stationäre Konvektions-Diffusionsgleichungen entwickelt. Es setzt eigentlich das Vorhandensein von physikalischer Diffusion voraus. Im Falle verschwindender Diffusion wird $Re \rightarrow \pm\infty$ und der Parameter λ in Gleichung (3.26) nimmt den Wert $\frac{1}{2}$ an. Dies entspricht einer rein einseitigen Näherung mit zwei Punkten stromaufwärts [9]. Für $\lambda = 0$ ergibt sich das Zentrale-Differenzen-Verfahren. Für $\lambda = \frac{1}{8}$ ergibt sich das QUICK-Verfahren (Quadratic Upsteam Interpolation for Convective Kinematics) nach [54] und für $\lambda = \frac{1}{6}$ das Verfahren nach [3].

Das LECUSSO-Verfahren kann als Zentrale-Differenzen-Verfahren interpretiert werden, welchem eine Diffusion höherer Ordnung hinzugefügt wird.

3.2.4 Hybride-Verfahren

Alle Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit werden mit hybriden Verfahren [91] durchgeführt. Dort, wo der Betrag der Maschen-Peclet-Zahl den Wert 2 nicht überschreitet, wird das Zentrale-Differenzen-Verfahren eingesetzt. Überall dort, wo dies nicht der Fall ist, wird je nach Programmeinstellung das Upwind-Verfahren erster Ordnung oder das LECUSSO-Verfahren eingesetzt. Hybride-Verfahren erfordern deshalb die Abfrage der Maschen-Peclet-Zahl für jeden Gitterpunkt, wodurch der Programmieraufwand vergrößert wird.

Bei allen in den folgenden Kapiteln beschriebenen Rechnungen wird das Zentrale-Differenzen-Verfahren mit dem LECUSSO-Verfahren kombiniert. Der große Vorteil dieses Verfahrens besteht darin, dass das Gesamtverfahren von zweiter Ordnung genau ist und nur dort wo notwendig numerische Diffusion einbringt, um Oszillationen zu verhindern.

3.3 Rechengitter

Die näherungsweise Berechnung der Lösung der Gleichungen erfolgt auf einem versetzten Rechengitter (engl. staggered grid) in Zylinderkoordinaten nach Abbildung 3.1. Ein solches Gitter wurde erstmals in [38] für Rechnungen in kartesischen Koordinaten angewendet. Das

Rechengitter ist gekennzeichnet durch äquidistante Stützstellen in r , φ und z -Richtung. Bei dieser Form des versetzten Rechengitters werden die skalaren Größen wie Druck, Temperatur und elektrisches Potential im Zentrum des jeweiligen Kontrollvolumens gespeichert. Vektorkomponenten wie Geschwindigkeit, elektrische Stromdichte, Magnetfeld und Gravitationsbeschleunigung stehen jeweils senkrecht auf der Berandung des Kontrollvolumens. Im dreidimensionalen Fall werden somit vier verschiedene Kontrollvolumina benötigt. Neben dem hier verwendeten Gitter existieren auch andere Arten von versetzten Rechengittern, welche teilweise überlappende Kontrollvolumina erfordern (vgl. [87] und [81]).

Die Verwendung eines versetzten Rechengitters erfordert einen höheren Aufwand als die Verwendung eines regulären Rechengitters, bei dem sowohl skalare als auch vektorielle Größen im Zellmittelpunkt gespeichert werden. So müssen bei der Diskretisierung der Impulsgleichungen bis zu acht Geschwindigkeiten aus benachbarten Stützstellen herangezogen werden. Auch die Formulierung der Randbedingungen ist mit höherem Aufwand verbunden. Die Verwendung eines versetzten Gitters verhindert jedoch unphysikalische Oszillationen des Druckfeldes, wie sie bei der Berechnung der Impulsgleichung für ein inkompressibles Fluid auf einem regulären Gitter auftreten können. Ein mittels eines regulären Gitters berechnetes, oszillierendes Druckfeld erfüllt dann trotzdem die Impulsgleichungen, da stets Druckgradienten und keine absoluten Drücke in den Impulsgleichungen auftreten [78].

Weiterhin liegen beim versetzten Rechengitter die Flussgrößen direkt an den Grenzen der Kontrollflächen. Die Flussgrößen sind somit dort verfügbar, wo sie für die Bilanzierung benötigt werden. Hierdurch werden die diskreten Erhaltungssätze für die elektrische Stromdichte und die Massenerhaltung exakt erfüllt.

Die räumliche Diskretisierung erfolgt durch die Finite-Differenzen-Methode. Bei $r = 0$ treten jedoch Singularitäten auf. Deshalb ist die Anwendung der Finite-Differenzen-Methode dort nicht möglich. Die Diskretisierung im Mittelpunkt erfolgt vielmehr, wie im folgenden Kapitel beschrieben, durch die Finite-Volumen-Methode.

Das Rechengitter ist gekennzeichnet durch die folgenden Dimensionen

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq R \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 &\leq z \leq H \end{aligned} \tag{3.27}$$

mit dem Radius R und der Zylinderhöhe H . Die Maschenweite in die jeweilige Raumrichtung errechnet sich aus der Anzahl der Gitterpunkte n zu

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{R}{n_r + \frac{1}{2}} \\ \Delta \varphi &= \frac{2\pi}{n_\varphi} \\ \Delta z &= \frac{H}{n_z + 1}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

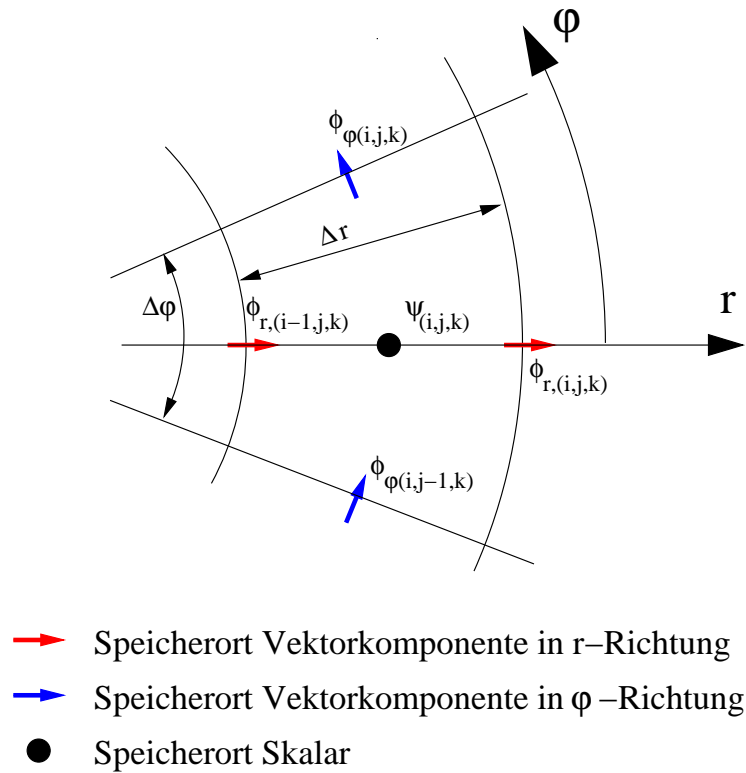


Bild 3.1: Versetztes Rechengitter für Zylindergeometrie, zweidimensional dargestellt für die Komponenten r und φ .

Die Koordinaten der diskreten Stützstellen, auf denen die Speicherung der Werte für die Variablen erfolgt, ergeben sich durch

$$\begin{aligned}
 \psi_{(i,j,k)} &= \psi \left[(i-1) \Delta r, (j-1) \Delta \varphi, \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta z \right] \\
 v_{r,(i,j,k)} &= v_r \left[\left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta r, (j-1) \Delta \varphi, \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta z \right] \\
 v_{\varphi,(i,j,k)} &= v_\varphi \left[i \Delta r, \left(j - \frac{1}{2}\right) \Delta \varphi, \left(k - \frac{1}{2}\right) \Delta z \right] \\
 v_{z,(i,j,k)} &= v_z \left[(i-1) \Delta r, (j-1) \Delta \varphi, k \Delta z \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

Bei $r = 0$ fallen die Stützstellen $\psi_{(1,\varphi,z)}$ zur Speicherung der skalaren Rechengrößen sowie der Geschwindigkeitskomponenten $v_{z,(1,j,k)}$ für gleiches k zusammen und sind somit nicht von j abhängig. Tatsächlich arbeitet das Rechenprogramm jeweils mit j Punkten. Dies bedeutet zwar einen leicht erhöhten Speicherbedarf, vereinfacht jedoch die Programmierung. Zur einfacheren Darstellung der Zusammenhänge bei $r = 0$ wird nachfolgend bei $\psi_{(1,\varphi,z)}$ und $v_{z,(1,j,k)}$ auf den Index j verzichtet.

3.4 Behandlung der Singularität bei $r = 0$

Im Innern des Zylinders bei $r = 0$ kann die Finite-Differenzen-Methode aufgrund der auftretenden Singularitäten in den Differentialgleichungen nicht angewendet werden. Gespeichert werden im Mittelpunkt sowohl skalare Transportgrößen wie die Temperatur sowie die z -Komponente vektorieller Größen. Vektorielle Transportgrößen in r -Richtung werden zwar nicht im Mittelpunkt gespeichert, doch auch hier treten bei der Berechnung der Differenzgleichungen für die nahe am Mittelpunkt liegenden Stützstellen Singularitäten auf. Hier fließen bei der Auswertung der Differenzgleichungen Werte aus dem Mittelpunkt ein. Die Gleichungen in Umfangsrichtung werden bei $r = 0$ nicht berechnet. Somit treten hier keine Singularitäten auf.

In [76] wird ein einfaches Mittelungsverfahren vorgeschlagen, mit dem die Singularitäten bei $r = 0$ vermieden werden können. Dieses Verfahren kann jedoch aufgrund der unterschiedlichen Gittertopologie (anstelle der skalaren Größen werden im Mittelpunkt vektorielle Größen in radialer Richtung gespeichert) nicht angewendet werden.

Hier werden zur Vermeidung der Singularitäten die Differentialgleichungen im Innern nicht durch die Finite-Differenzen-Methode, sondern durch die Finite-Volumen-Methode diskretisiert. Eine solche Darstellung für rein diffusive Gleichungen, wie die Poissongleichung, findet sich in [95]. Dieses Verfahren kann zur Behandlung der Energiegleichung verwendet werden. Für die Impulsgleichungen sind jedoch Ergänzungen, die in diesem Kapitel erläutert werden, erforderlich.

Zur Diskretisierung der Gleichungen nach der Finite-Volumen-Methode werden Kontrollvolumina definiert und die Differentialgleichungen anschließend über diese Kontrollvolumina integriert. In Abbildung 3.2 ist das Rechengitter im Innern dargestellt. Weiterhin ist das Kontrollvolumen zur Auswertung der Energie- und Kontinuitätsgleichung sowie das Kontrollvolumen zur Berechnung der Impulsgleichung in r -Richtung dargestellt.

Für die Energie- und Kontinuitätsgleichung wird ein zylinderförmiges Kontrollvolumen mit dem Radius $\Delta r/2$ und der Höhe Δz definiert. Ein solches Kontrollvolumen besitzt das Volumen

$$V_{KV} = \frac{1}{4} \Delta r^2 \pi \Delta z. \quad (3.30)$$

Die Kontinuitätsgleichung wird nun über dieses Kontrollvolumen integriert. Mit dem Gaußschen Integralsatz werden diese Volumenintegrale anschließend in Oberflächenintegrale umgewandelt

$$\frac{1}{V_{KV}} \int_{V_{KV}} \nabla \cdot \vec{v} \, dV = \frac{1}{V_{KV}} \int_{A_{KV}} \vec{v} \, d\vec{A} = 0. \quad (3.31)$$

Hierbei ist $d\vec{A}$ das mit dem auf dem Flächenelement senkrecht stehenden, vom Kontrollvolumen nach außen zeigenden Einheitsvektor multiplizierte Flächenelement dA . Die Oberfläche des zylinderförmigen Kontrollvolumens wird nun unterteilt in die obere und untere Stirnfläche sowie in n_φ Segmente am Zylindermantel. Geht man von einer homogenen Verteilung der Geschwindigkeit \vec{v} auf den jeweiligen Kontrollvolumenoberflächen aus, so lässt sich das

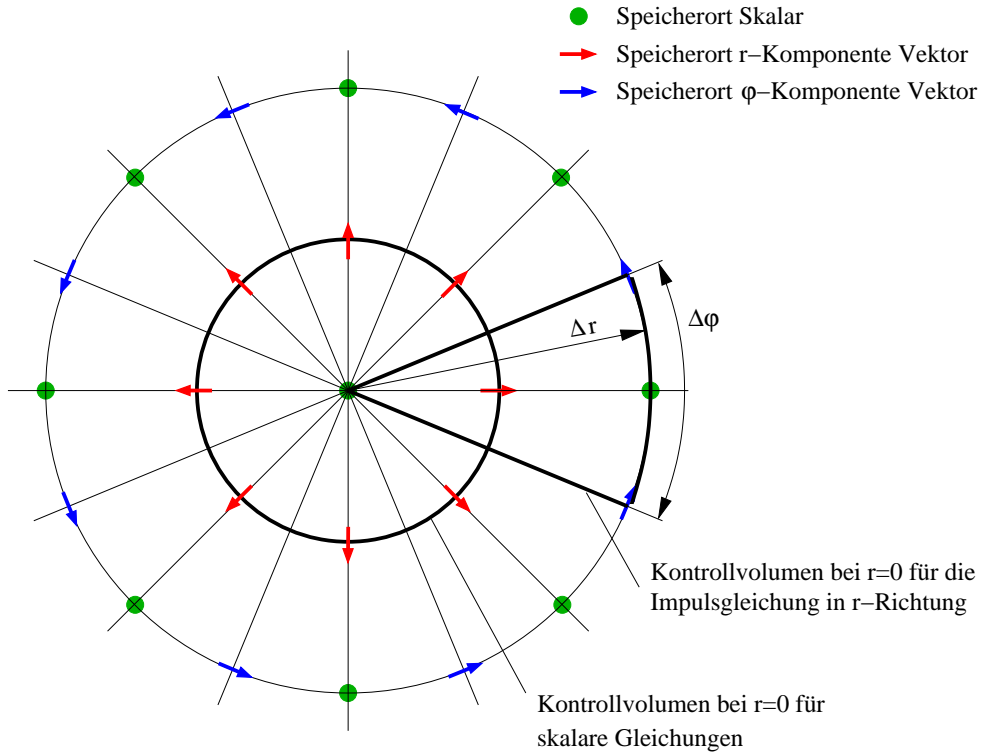


Bild 3.2: Rechengitter mit Kontrollvolumen für skalare Gleichungen und vektorielle Gleichungen in r -Richtung bei $r = 0$, zweidimensional dargestellt für die Komponenten r und φ .

Oberflächenintegral als Summe über die einzelnen Kontrollvolumenoberflächen auffassen

$$\frac{1}{V_{KV}} \int_{A_{KV}} \vec{v} d\vec{A} = \frac{1}{V_{KV}} \left[\sum_{j=1}^{j=n_\varphi} v_{r,(1,j,k)} A_r + [v_{z,(1,k)} - v_{z,(1,k-1)}] A_z \right] = 0. \quad (3.32)$$

Bei der Indizierung der Geschwindigkeiten v_r und v_z wird die in Gleichung (3.29) eingeführte Definition angewendet. A_r ist die Kontrollvolumenoberfläche am Umfang eines Kreissegmentes. Diese berechnet sich zu

$$A_r = \frac{\Delta r \pi \Delta z}{n_\varphi}. \quad (3.33)$$

Die Kontrollvolumenoberfläche A_z an der Stirnseite errechnet sich zu

$$A_z = \frac{\Delta r^2 \pi \Delta z}{4}. \quad (3.34)$$

Die diskretisierte Kontinuitätsgleichung bei $r = 0$ ergibt sich somit zu

$$\frac{4}{\Delta r n_\varphi} \sum_{j=1}^{j=n_\varphi} v_{r,(1,j,k)} + \frac{v_{z,(1,k)} - v_{z,(1,k-1)}}{\Delta z} = 0. \quad (3.35)$$

Es ist ersichtlich, dass alle in Gleichung (3.35) auftretenden Geschwindigkeiten an den jeweiligen Kontrollvolumenoberflächen vorliegen und somit keine Interpolation notwendig ist.

Die Herleitung des konvektiven und des diffusiven Terms der diskreten Energiegleichung bei $r = 0$ erfolgt analog zur Vorgehensweise bei der Herleitung der Kontinuitätsgleichung. Als Kontrollvolumen dient wieder das zur Diskretisierung der Kontinuitätsgleichung verwendete zylinderförmige Kontrollvolumen. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes liefert für den konvektiven Term

$$\frac{1}{V_{KV}} \int_{V_{KV}} \vec{v} \cdot \nabla T dV = \frac{1}{V_{KV}} \int_{A_{KV}} \vec{v} T d\vec{A}. \quad (3.36)$$

Die Umwandlung des Oberflächenintegrals in Summen über die einzelnen Oberflächenabschnitte des Kontrollvolumens ergibt für den konvektiven Term die folgende Differenzgleichung

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \nabla T|_{(1,k)} &= \frac{4}{\Delta r n_\varphi} \sum_{j=1}^{j=n_\varphi} T_{(1+\frac{1}{2},j,k)} v_{r,(1,j,k)} + \\ &\quad \frac{T_{(1,k+\frac{1}{2})} v_{z,(1,k+1)} - T_{(1,k-\frac{1}{2})} v_{z,(1,k)}}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Hierbei werden die Temperaturen $T_{(1+\frac{1}{2},j,k)}$ und $T_{(1,k\pm\frac{1}{2})}$ auf den Kontrollvolumenoberflächen entweder durch das Zentrale-Differenzen-Verfahren, durch ein Upwind-Verfahren oder durch das Hybrid-Verfahren aus den benachbarten Stützstellen berechnet. Die Temperaturen $T_{(1,k\pm\frac{1}{2})}$ liegen auf der Zylinderachse und sind somit unabhängig von φ . Daher wird hier der zweite Index nicht geschrieben. Die Geschwindigkeit \vec{v} auf den Kontrollvolumenoberflächen wird ausschließlich an den Stützstellen benötigt. Eine Interpolation der Geschwindigkeiten ist somit nicht notwendig. Der Differenzenquotient in z -Richtung unterscheidet sich nicht von einem mittels der Finite-Differenzen-Methode diskretisierten Term. Die Ableitung in r -Richtung kann interpretiert werden als die Mittelung von n_φ zentralen Differenzen bei $r = 0$.

Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf den diffusiven Term der Energiegleichung ergibt

$$\frac{1}{V_{KV}} \int_{V_{KV}} \Delta T dV = \frac{1}{V_{KV}} \int_{A_{KV}} \nabla T d\vec{A}, \quad (3.38)$$

wobei sich der Gradient der Temperatur ∇T an der Oberfläche des Kontrollvolumens berechnet durch

$$\nabla T = \left[\frac{\partial T}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \frac{\partial T}{\partial z} \right]. \quad (3.39)$$

Wie bei der Diskretisierung des konvektiven Terms wird das Oberflächenintegral im Weiteren als Summe über die zuvor definierten Oberflächenabschnitte des Kontrollvolumens interpretiert. Da der Gradient ∇T mit dem Flächennormalenvektor des jeweiligen Kontrollvolumen-

oberflächenabschnittes multipliziert wird, wird auf den Segmenten am Zylindermantel nur der Gradient in r -Richtung benötigt. Dieser ergibt sich zu

$$(\nabla T)_{r,(1,j,k)} = \frac{T_{(2,j,k)} - T_{(1,k)}}{\Delta r}. \quad (3.40)$$

An den Stirnseiten wird der Gradient ∇T in z -Richtung benötigt

$$(\nabla T)_{z,(j,k)} = \frac{T_{(1,k+1)} - T_{(1,k)}}{\Delta z}. \quad (3.41)$$

Nach weiteren Umformungen ergibt sich der diffusive Term bei $r = 0$ in diskreter Form zu

$$\Delta T \Big|_{(1,k)} = \frac{4}{\Delta r^2} \sum_{j=1}^{j=n_\varphi} [T_{(2,j,k)} - T_{(1,k)}] + \frac{T_{(1,k+1)} - 2 T_{(1,k)} + T_{(1,k-1)}}{\Delta z^2}. \quad (3.42)$$

Auch bei der Differenzgleichung des diffusiven Terms nach Gleichung 3.42 handelt es sich wieder um die Mittelung von n_φ zentralen Differenzen bei $r = 0$ sowie eines Differenzenquotienten in z -Richtung, der einem durch die Finite-Differenzen-Methode diskretisiertem Term gleicht.

Die Speicherung der r -Komponente der Geschwindigkeit erfolgt zwar nicht bei $r = 0$, jedoch treten auch bei der Diskretisierung der Impulsgleichungen durch die Finite-Differenzen-Methode an den Punkten $v_{r,(1,j,k)}$ Singularitäten auf. Aus diesem Grund erfolgt die Diskretisierung der Impulsgleichung in r -Richtung hier ebenfalls durch die Finite-Volumen-Methode.

Zur Diskretisierung der r -Komponente der Impulsgleichung um $r = 0$ werden n_φ Kontrollvolumen in Form von Kreissektoren definiert (vgl. Abbildung 3.2). Der Radius dieser Kreissektoren ist Δr . Das Volumen eines solchen Kontrollvolumens berechnet sich somit zu

$$V_{KV,r} = \frac{1}{n_\varphi} \Delta r^2 \pi \Delta z. \quad (3.43)$$

Die Auswertung der Oberflächenintegrale erfolgt über fünf Oberflächenabschnitte. Hierbei handelt es sich um die zwei Stirnseiten, die beiden Seitenflächen des Segmentes und dem Mantelstück des Kontrollvolumens. Die Oberfläche der Stirnseiten berechnet sich zu

$$A_z = \frac{\Delta r^2 \pi}{n_\varphi}. \quad (3.44)$$

Für die beiden Seitenflächen ergibt sich

$$A_\varphi = \Delta r \Delta z. \quad (3.45)$$

Schließlich berechnet sich die Oberfläche des Mantelstückes zu

$$A_r = \frac{2\pi \Delta r \Delta z}{n_\varphi}. \quad (3.46)$$

Wird der konvektive Term der Impulsgleichung in r -Richtung über das zuvor definierte Kontrollvolumen integriert und das Volumenintegral mit dem Gaußschen Integralsatz in ein Oberflächenintegral umgewandelt, so ergibt sich

$$\frac{1}{V_{KV,r}} \int_{V_{KV,r}} (v_r \cdot \nabla) \vec{v} \, dV = \frac{1}{V_{KV,r}} \int_{A_{KV,r}} v_r \vec{v} \, d\vec{A} - \frac{v_\varphi^2}{r}. \quad (3.47)$$

Hierbei stellt der letzte Term die so genannten Umverteilungsglieder dar. Diese setzen sich aus den Zentrifugalkräften sowie dem entsprechenden Spannungstensor zusammen. Da sie außerhalb der Ableitungen auftreten, müssen die Umverteilungsglieder als zusätzliche Quellterme berücksichtigt werden [87]. Wird das Oberflächenintegral nun wieder als Summe über die zuvor definierten Oberflächenabschnitte angenähert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (v_r \cdot \nabla) \vec{v} \Big|_{(1,j,k)} &= \frac{1}{V_{KV,r}} \left[\hat{v}_{r,(1+\frac{1}{2},j,k)} v_{r,(1+\frac{1}{2},j,k)} A_r + \right. \\ &\quad \left[\hat{v}_{r,(1,j+\frac{1}{2},k)} v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j,k)} - \hat{v}_{r,(1,j-\frac{1}{2},k)} v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j-1,k)} \right] A_\varphi + \\ &\quad \left[\hat{v}_{r,(1,j,k+\frac{1}{2})} v_{z,(1+\frac{1}{2},j,k)} - \hat{v}_{r,(1,j,k-\frac{1}{2})} v_{z,(1+\frac{1}{2},j,k-1)} \right] A_z \Big] - \\ &\quad \frac{2}{\Delta r} \left[\frac{1}{4} (v_{\varphi,(1,j,k)} + v_{\varphi,(2,j,k)} + v_{\varphi,(1,j-1,k)} + v_{\varphi,(2,j-1,k)}) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Nach dem Einsetzen der Gleichungen zur Berechnung des Volumens und der jeweiligen Oberflächen ergibt sich schließlich der konvektive Term der Impulsgleichung in r -Richtung zu

$$\begin{aligned} (v_r \cdot \nabla) \vec{v} \Big|_{(1,j,k)} &= \frac{2}{\Delta r} \left[\hat{v}_{r,(1+\frac{1}{2},j,k)} v_{r,(1+\frac{1}{2},j,k)} \right] + \\ &\quad \frac{n_\varphi}{\Delta r \pi} \left[\hat{v}_{r,(1,j+\frac{1}{2},k)} v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j,k)} - \hat{v}_{r,(1,j-\frac{1}{2},k)} v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j-1,k)} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\Delta z} \left[\hat{v}_{r,(1,j,k+\frac{1}{2})} v_{z,(1+\frac{1}{2},j,k)} - \hat{v}_{r,(1,j,k-\frac{1}{2})} v_{z,(1+\frac{1}{2},j,k-1)} \right] \\ &\quad \frac{2}{\Delta r} \left[\frac{1}{4} (v_{\varphi,(1,j,k)} + v_{\varphi,(2,j,k)} + v_{\varphi,(1,j-1,k)} + v_{\varphi,(2,j-1,k)}) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Hierbei wird \hat{v}_r auf den Kontrollvolumenoberflächen durch das Zentrale-Differenzen-Verfahren, durch ein Upwind-Verfahren oder durch das Hybrid-Verfahren errechnet. Zur Berechnung der Geschwindigkeiten $v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j,k)}$ und $v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j-1,k)}$ aus einer zentralen Differenz wird die jeweilige Umfangsgeschwindigkeit bei $r = 0$ benötigt. Da diese Geschwindigkeit bei $r = 0$ nicht durch die Auswertung der Impuls- und Kontinuitätsgleichung berechnet wird, ist folgende Interpolation zur Berechnung notwendig

$$v_{\varphi,(1,j,k)} = \frac{1}{2} \left[v_{\varphi,(2,j,k)} - v_{\varphi,(2,j+\frac{n_\varphi}{2},k)} \right]. \quad (3.50)$$

Der diffusive Term der Impulsgleichung in r -Richtung wird, ausgehend vom Oberflächenintegral, wieder über das zuvor definierte Kontrollvolumen hergeleitet

$$\frac{1}{V_{KV,r}} \int_{V_{KV,r}} \Delta v_r \, dV = \frac{1}{V_{KV,r}} \int_{A_{KV,r}} \nabla v_r \, d\vec{A} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right]. \quad (3.51)$$

Wie beim konvektiven Term treten auch beim diffusiven Term Umverteilungsglieder des Spannungstensors auf. Diese werden durch den letzten Term in Gleichung (3.51) repräsentiert (vgl. [87]). Der Gradient des Geschwindigkeitsvektors ergibt sich in Zylinderkoordinaten in r -Richtung zu

$$(\nabla v)_r = \left[\frac{\partial v_r}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r}, \frac{\partial v_r}{\partial z} \right]. \quad (3.52)$$

Wird der Gradient an den Kontrollvolumenoberflächen wie beim diffusiven Term der Energiegleichung diskretisiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta v_r \Big|_{(1,j,k)} &= \frac{1}{V_{KV,r}} \left[\frac{v_{r,(2,j,k)} - v_{r,(1,j,k)}}{\Delta r} A_r + \right. \\ &\quad \frac{2}{\Delta r} \left[\frac{v_{r,(1,j+1,k)} - v_{r,(1,j,k)}}{\Delta \varphi} - \frac{v_{r,(1,j+1,k)} - v_{r,(1,j,k)}}{\Delta \varphi} \right] A_\varphi - \\ &\quad \frac{2}{\Delta r} \left[v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j,k)} - v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j-1,k)} \right] A_\varphi - \\ &\quad \left. \left[v_{r,(1,j,k+1)} - 2v_{r,(1,j,k)} + v_{r,(1,j,k-1)} \right] A_z \right] - \\ &\quad \left[\frac{2}{\Delta r} \frac{v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j,k)} - v_{\varphi,(1+\frac{1}{2},j-1,k)}}{\Delta \varphi} + \frac{4v_{r,(1,j,k)}}{\Delta r} \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.43) bis (3.46) ergibt sich für den diffusiven Term der Impulsgleichung in r -Richtung der folgende Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta v_r \Big|_{(1,j,k)} &= \frac{1}{\Delta r^2} \left[2 v_{r,(2,j,k)} - 6 v_{r,(1,j,k)} \right] + \\ &\quad \frac{4}{\Delta \varphi^2 \Delta r^2} \left[v_{r,(1,j+1,k)} - 2v_{r,(1,j,k)} + v_{r,(1,j-1,k)} \right] - \\ &\quad \frac{8}{\Delta \varphi \Delta r^2} \left[v_{\varphi,(1,j+\frac{1}{2},k)} - v_{\varphi,(1,j-\frac{1}{2},k)} \right] + \\ &\quad \frac{1}{\Delta z^2} \left[v_{r,(1,j,k+1)} - 2v_{r,(1,j,k)} + v_{r,(1,j,k-1)} \right]. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Zur Berechnung der Impulsgleichung in z -Richtung kommen wieder zylinderförmige Kon-

trollvolumina wie zur Berechnung der Energie- und der Kontinuitätsgleichung zum Einsatz. Ähnlich wie bei der zuvor beschriebenen Herleitung des konvektiven Terms der Energiegleichung kann der konvektive Term der Impulsgleichung in z -Richtung hergeleitet werden. Für diesen Term ergibt sich der folgende Ausdruck

$$(v_z \cdot \nabla) \vec{v} \Big|_{(1,k)} = \frac{4}{\Delta r n_\varphi} \sum_{j=1}^{j=n_\varphi} v_{r,(1,j,k-\frac{1}{2})} \hat{v}_{z,(1+\frac{1}{2},j,k)} + \frac{\hat{v}_{z,(1,k+\frac{1}{2})} v_{z,(1,k+\frac{1}{2})} - \hat{v}_{z,(1,k-\frac{1}{2})} v_{z,(1,k-\frac{1}{2})}}{\Delta z}, \quad (3.55)$$

wobei \hat{v}_z auf den Kontrollvolumenoberflächen durch das gewählte Differenzenschema berechnet wird. Alle anderen Geschwindigkeiten werden durch zentrale Differenzen berechnet.

Der diffusive Term der Impulsgleichung in z -Richtung im Zentrum ergibt sich zu

$$\Delta v_z \Big|_{(1,k)} = \frac{4}{\Delta r^2 n_\varphi} \sum_{j=1}^{j=n_\varphi} [v_{z,(2,j,k)} - v_{z,(1,k)}] + \frac{v_{z,(1,k+1)} - 2v_{z,(1,k)} + v_{z,(1,k-1)}}{\Delta z^2}. \quad (3.56)$$

3.5 Fractional-Step-Verfahren

Die Transportgleichungen von Masse, Impuls und Energie stellen im allgemeinen Fall ein nichtlineares gekoppeltes System von Differentialgleichungen dar. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt die Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit dem Fractional-Step-Verfahren. Hierbei handelt es sich um ein entkoppeltes Berechnungsverfahren, welches erstmals in [18] angewendet wurde. Bei den entkoppelten Berechnungsverfahren werden die einzelnen Transportgleichungen getrennt voneinander berechnet und auf iterativem Weg eine Kopplung der Gleichungen erreicht.

Weiterhin liegt bei dem Gleichungssystem von Impuls- und Kontinuitätsgleichung im Falle der inkompressiblen Strömungen keine explizite Gleichung zur Berechnung des Druckfeldes vor. Das Druckfeld ist jedoch indirekt über die Kontinuitätsgleichung festgelegt. Hieraus wird eine Gleichung zur Korrektur des Druckfeldes abgeleitet.

Zur Herleitung des Fractional-Step-Verfahrens wird die Impulsgleichung in kontinuierlicher Form folgendermaßen dargestellt

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + Rest. \quad (3.57)$$

Im Rest sind hierbei der konvektive und der diffusive Term sowie Lorentz- und Auftriebskraft zusammengefasst.

Wird die Impulsgleichung nach Gleichung (3.57) mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren zeitlich explizit, der Druck jedoch implizit, d.h. zum Zeitpunkt $n + 1$ diskretisiert, so erhält man

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + Rest^n. \quad (3.58)$$

Wird nun eine temporäre Geschwindigkeit \vec{v}_{temp} nach folgender Gleichung definiert

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^{n+1} + \frac{1}{\rho} \Delta t \nabla p^{n+1} \quad (3.59)$$

und in die diskretisierte Impulsgleichung nach Gleichung (3.58) eingesetzt, so fällt der Druckterm heraus. Somit steht eine Bestimmungsgleichung für die temporäre Geschwindigkeit zur Verfügung

$$\vec{v}_{temp} = \vec{v}^n + \Delta t Rest^n. \quad (3.60)$$

Setzt man Gleichung (3.59) in die inkompressible Kontinuitätsgleichung ein, die sowohl zum Zeitpunkt n als auch $n + 1$ erfüllt sein muss, so erhält man eine Poissongleichung zur Bestimmung des Druckes

$$\Delta p^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}_{temp}. \quad (3.61)$$

Der Druck ist bei diesem Verfahren nicht mit der Dichte über eine Zustandsgleichung verknüpft und somit nicht im thermodynamischen Sinne zu interpretieren. Bei inkompressiblen Strömungen dient der Druck lediglich dazu, das Geschwindigkeitsfeld \vec{v}^{n+1} divergenzfrei zu halten.

Als Randbedingung für die temporäre Geschwindigkeit gilt die Haftbedingung. Für den Druck wird eine homogene Neumann Randbedingung in der Form

$$\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{Wand}^{n+1} = 0 \quad (3.62)$$

angewendet [53],[80].

Das Fractional-Step-Verfahren ist in der Geschwindigkeit von erster Ordnung bei Anwendung des Euler-Vorwärts-Verfahrens zur zeitlichen Diskretisierung der Impulsgleichung. Wird für die zeitliche Diskretisierung das Adams-Bashforth-Verfahren angewendet, so ist das Verfahren in der Geschwindigkeit von zweiter Ordnung genau. Unabhängig von der zeitlichen Diskretisierung der Impulsgleichung ist das Verfahren von erster Ordnung genau für den Druck [48]. Die Fehlerordnung des Verfahrens ist Gegenstand zahlreicher Veröffentlichungen [79], [75], da nach wie vor Uneinigkeit herrscht. Neuere Veröffentlichungen zeigen jedoch, dass die Fehlerordnung des Verfahrens bezüglich dem Druck bestenfalls von erster Ordnung ist [93].

3.6 Lösung der Poissongleichungen

Sowohl zur Berechnung des elektrischen Potentials als auch des Druckes muss jeweils eine Poissongleichung in Zylinderkoordinaten gelöst werden

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = f(r, \varphi, z). \quad (3.63)$$

Die Diskretisierung der Poissongleichung führt auf lineare Gleichungssysteme, welche für n Unbekannte n^2 Matrixelemente erfordern. Da der Rechenaufwand bei direkten impliziten Lösungsverfahren proportional n^3 wächst, sind ab einer gewissen Problemgröße nur noch iterative Algorithmen ökonomisch einsetzbar [35].

Das vorliegende Rechenprogramm verwendet zur Lösung der Poissongleichungen einen schnellen Löser für Zylindergeometrien von Sälinger [86]. Dieser Löser arbeitet nach dem Multigridverfahren.

3.7 Lösungsalgorithmus

Nachdem Rand- und Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeit und die Temperatur gesetzt sind, erfolgt die Berechnung der diskreten Gleichungen für jeden Zeitschritt. Als Anfangsbedingungen eignen sich z.B. Daten einer ähnlichen Aufgabenstellung. Liegen solche Daten nicht vor, kann auch aus dem Ruhezustand gestartet werden. Hierzu werden die Anfangsbedingungen gleich Null gesetzt.

Auch die Berechnung stationärer Aufgabenstellungen erfolgt, ausgehend von den Anfangsbedingungen, durch Fortschreiten in der Zeit, bis eine stationäre oder eingeschwungene Lösung in der gewünschten Genauigkeit vorliegt. Diese Vorgehensweise, welche auch Time-Marching-Verfahren genannt wird, hat sich in der numerischen Strömungsmechanik als zweckmäßig erwiesen, da aufgrund der Nichtlinearität der Impulsgleichungen mehrere stationäre Lösungen existieren können, von denen jedoch nur eine physikalisch sinnvoll ist [73].

Ausgehend vom Zeitpunkt n erfolgt die Berechnung der Differenzgleichungen zum Zeitpunkt $n + 1$ in der nachfolgend dargestellten Reihenfolge. Hierbei wird zur Darstellung der Gleichungen aufgrund der besseren Übersichtlichkeit meist eine kontinuierliche Schreibweise verwendet.

1. Bestimmung des elektrischen Potentials nach Gleichung (2.53)

$$\Delta \Phi^{n+1} = \nabla \cdot (\vec{v}^n \times \vec{B}). \quad (3.64)$$

2. Bestimmung der Stromdichte zum Zeitpunkt $n+1$ durch das Ohmsche Gesetz nach Gleichung (2.51)

$$\vec{j}^{n+1} = -\nabla \Phi^{n+1} + \vec{v}^n \times \vec{B}. \quad (3.65)$$

3. Lösen der Energiegleichung zur Bestimmung der Temperatur. Abhängig von der gewählten zeitlichen Diskretisierung erfolgt die Berechnung nach folgenden Gleichungen

(a) Euler-Verfahren

$$T^{n+1} = T^n + \Delta t \left[-\vec{v}^n \cdot \nabla T^n + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW}Pr}} \Delta T^n + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW}Pr}} \right] \quad (3.66)$$

(b) Adams-Bashforth-Verfahren

$$\begin{aligned} T^{n+1} = & T^n + \frac{3}{2} \Delta t \left[-\vec{v}^n \cdot \nabla T^n + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW}Pr}} \Delta T^n + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW}Pr}} \right] - \\ & \frac{1}{2} \Delta t \left[-\vec{v}^{n-1} \cdot \nabla T^{n-1} + \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW}Pr}} \Delta T^{n-1} + \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{Ra_{iW}Pr}} \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

4. Berechnung der temporären Geschwindigkeit

(a) Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} \vec{v}_{temp} = & \vec{v}^n + \Delta t \left[-(\vec{v}^n \cdot \nabla) \vec{v}^n + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} (\vec{j}^{n+1} \times \vec{B}) + \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} \Delta \vec{v}^n + T^n \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

(b) Adams-Bashforth-Verfahren

$$\begin{aligned} \vec{v}_{temp} = & \vec{v}^n + \frac{3}{2} \Delta t \left[-(\vec{v}^n \cdot \nabla) \vec{v}^n + Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} (\vec{j}^{n+1} \times \vec{B}) + \right. \\ & \left. \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} \Delta \vec{v}^n + T^n \vec{k} \right] - \frac{1}{2} \Delta t \left[-(\vec{v}^{n-1} \cdot \nabla) \vec{v}^{n-1} + \right. \\ & \left. Ha^2 \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} (\vec{j}^n \times \vec{B}) + \sqrt{\frac{Pr}{Ra_{iW}}} \Delta \vec{v}^{n-1} + T^{n-1} \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Hierbei wird bei der Berechnung des Terms $(\vec{j}^{n+1} \times \vec{B})$ die elektrische Stromdichte zum Zeitpunkt $n + 1$ eingesetzt, da diese durch Gleichung (3.65) bereits berechnet wurde.

5. Lösen einer Poissongleichung zur Bestimmung des Druckes

$$\Delta p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \vec{v}_{temp}. \quad (3.70)$$

6. Bestimmung der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $n + 1$ mittels temporärer Geschwindigkeit \vec{v}_{temp} und Druck aus Gleichung (3.70)

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}_{temp} - \Delta t \nabla p^{n+1}. \quad (3.71)$$

Hinweise und Erläuterungen zum Aufbau des Rechenprogrammes sowie der Implementierung des Lösungsalgorithmus finden sich im Anhang A.

Kapitel 4

Grundlagen der Magnetokonvektion

4.1 Magnetohydrodynamik

Die Magnetohydrodynamik beschreibt Strömungsvorgänge elektrisch leitender Fluide unter dem Einfluss von Magnetfeldern. Im bewegten Fluid werden elektrische Ströme induziert, die im Magnetfeld eine Lorentzkraft verursachen. Diese ist der Bewegungsrichtung des Fluids meist entgegengerichtet. Somit liegt eine Kopplung zwischen dem Geschwindigkeitsfeld \vec{v} und dem Magnetfeld \vec{B} vor [62]. Begründet wurde die Magnetohydrodynamik durch erste Veröffentlichungen von Hartmann [39] sowie Hartmann und Lazarus [40] im Jahre 1937. In den folgenden Jahrzehnten erschienen immer mehr Veröffentlichungen zum Thema Magnetohydrodynamik. Bei diesen Veröffentlichungen handelt es sich überwiegend um analytische Studien und experimentelle Untersuchungen. Erst seit Mitte der achtziger Jahre werden zunehmend mehrdimensionale magnetohydrodynamische Strömungen numerisch berechnet.

Die Erklärung für das Strömungsverhalten unter dem Einfluss von Magnetfeldern basiert auf der Vorstellung, dass die Strömungen, die beim Fehlen von Magnetfeldern vorliegen, durch die Magnetfelder und der aufgrund der gemeinsamen Anwesenheit von Strömung und Magnetfeld entstehenden elektrischen Ströme gedämpft werden. Es muss in jedem Einzelfall geprüft werden, ob diese Grundvorstellung korrekt ist oder ob die gefundene Lösung von diesem Schema abweicht. Häufig steht nicht der exakt ermittelte Wert für eine im Vergleich zur magnetfeldlosen Situation geänderte Geschwindigkeit oder Wärmeabfuhr im Vordergrund, sondern das Verständnis für die auftretende Strömungsform.

Ein wesentliches Merkmal magnetohydrodynamischer Strömungen ist das Auftreten von sehr dünnen Grenzschichten. Diese Grenzschichten bilden sich dann aus, wenn das Magnetfeld so stark ist, dass die Lorentzkräfte über den Einfluss der Trägheits- und der Reibungskräfte dominieren. In rechteckigen Kanalquerschnitten bilden sich an den so genannten Hartmannwänden, welche normal zum Magnetfeld ausgerichtet sind, sehr dünne Grenzschichten, die man als Hartmannschichten bezeichnet. Für die Dicke δ_H dieser Grenzschichten gilt nach [68]

$$\delta_H = O(Ha^{-1}). \quad (4.1)$$

An den parallel zum Magnetfeld ausgerichteten Seitenwänden bilden sich die Seitenschichten aus. Für die Grenzschichtdicke δ_S der Seitenschichten gilt der folgende Zusammenhang

$$\delta_S = O(Ha^{-1/2}). \quad (4.2)$$

Die Seitenschichten sind somit dicker und weisen geringere Geschwindigkeitsgradienten als die Hartmannschichten auf.

Die Untersuchung von Naturkonvektionsströmungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in Zylindergeometrien unterscheidet sich insofern von entsprechenden Problemen in Rechteckgeometrien, als hier die bei Rechteckgeometrien häufig auftretenden Hartmann- und Seitenschichten weniger auftreten können oder ganz fehlen. Bei voll eingelaufenen Strömungen in elektrisch isolierten zylindrischen Rohren skaliert die Dicke der Hartmannschicht mit der Wandnormalkomponente des Magnetfeldes nach Gleichung 4.1. An den Stellen an denen die Wandnormalkomponente verschwindet, bilden sich die sogenannten Robertsschichten aus. Für die Dicke der Robertsschichten ergibt sich

$$\delta_S = O(Ha^{-2/3}), \quad (4.3)$$

wobei für die Ausdehnung der Robertsschichten in Magnetfeldrichtung $O(Ha^{-1/3})$ gilt [83].

4.2 Konvektionsströmungen mit internen Wärmequellen

Erste Veröffentlichungen zu Naturkonvektionsströmungen mit internen Wärmequellen erschienen nach 1965 ([11], [50]). Anschließend wurden solche Strömungen in Zusammenhang mit der Kerntechnik [10], der Plattentektonik ([58] und [85]) sowie der Astrophysik [99] untersucht. In der Kerntechnik spielen intern beheizte Naturkonvektionsströmungen eine wichtige Rolle, da dort mit Spaltprodukten versetzte Flüssigkeiten auftreten. Diese mehr oder minder homogen verteilten Spaltprodukte erzeugen eine interne Beheizung der Flüssigkeit.

Eine Übersicht über den Kenntnisstand zu Naturkonvektionsströmungen mit internen Wärmequellen in unendlich ausgedehnten Schichten sowie kubischen und zylindrischen Behältnissen findet sich in [51]. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf den Strömungsmustern und dem Wärmeübergang bei einer Variation der Rayleigh- und Prandtl-Zahl.

Systeme mit horizontalem Temperaturgradienten (z. B. seitlich beheizte und gekühlte Kavität) ohne innere Wärmequellen und ohne Magnetfelder haben in der Regel durch die Lage von warmen und kalten Rändern eine strenge Vorgabe, wie die Wärme transportiert werden soll. Dies zeichnet Hauptströmungsrichtungen vor, in denen warmes Fluid von warmen Bereichen zu kalten Bereichen transportiert wird und umgekehrt, d.h. kaltes Fluid von einem oder mehreren kalten Bereichen zu warmen Bereichen fließt. Beim Vorhandensein (homogener) interner Wärmequellen ist die Situation etwas anders. Wärme wird überall erzeugt und kann auch von manchen Stellen nicht optimal abgeführt werden, d.h. der Zwang, die Strömung so einzurichten, dass Wärme von genau der warmen oder einer der warmen Stellen zur kalten Stelle fließen muss, ist weniger stark ausgeprägt. Das typische Beispiel ist die ebene, unendlich ausgedehnte horizontale Flüssigkeitsschicht mit homogener interner Beheizung, an der am oberen und unteren Rand die gleiche Temperatur anliegt. Dieses System wurde, zum Teil im Zusammenhang mit Sicherheitsuntersuchungen zur Kerntechnik [30], ausführlich untersucht.

In Abhängigkeit von einer geeignet definierten Rayleigh-Zahl Ra_{iW} für interne Beheizung

ergibt sich für den Wärmeübergang nach oben die folgende Proportionalität der Nußelt-Zahl

$$Nu_{oben} \sim Ra_{iW}^{\frac{1}{3}}, \quad (4.4)$$

während die Nußelt-Zahl für den Wärmeübergang nach unten die folgende Proportionalität besitzt

$$Nu_{unten} \sim Ra_{iW}^{0.1}. \quad (4.5)$$

Damit geht für nicht zu kleine Rayleigh-Zahlen Ra_{iW} ein Großteil der produzierten Wärme nach oben [10].

Bei zusätzlicher Präsenz von Magnetfeldern können beim oben genannten ersten Fall mit der externen Beheizung bei elektrisch leitenden Fluiden starke Behinderungen der Strömung ohne Magnetfeld auftreten (vgl. [5]). Bei den intern beheizten Konfigurationen kann sich der aufgewärmte Teil des Fluids unter Umständen besser einrichten (Fall der vorliegenden Arbeit) und Wärme in bezüglich des vom Magnetfeld ausgehenden Widerstandes günstigere Richtungen abtransportieren.

Nachfolgend sind einige Veröffentlichungen zum Thema der Konvektionsströmungen mit internen Wärmequellen aufgeführt. Hierbei werden im Wesentlichen Konvektionsströmungen in rechteckigen Geometrien erwähnt, da nur sehr wenige Veröffentlichungen zu Konvektionsströmungen mit internen Wärmequellen in Zylindern existieren.

Zweidimensionale numerische Berechnungen von Konvektionsströmungen in quadratischen Behältern mit homogenen internen Wärmequellen werden in [57] durchgeführt. Berechnungen werden hierbei für verschiedene Anstellwinkel durchgeführt. Der Schwerevektor verläuft bezogen auf die Seitenwände in einem Winkel zwischen 0° und 45° . Neben den auftretenden Strömungsmustern wird der Wärmeübergang an den vier isothermen Wänden in Abhängigkeit des Anstellwinkels untersucht. Neben stationären Strömungen treten bei größeren Rayleigh-Zahlen $Ra = 5 \times 10^4$ und $Ra = 10^5$ zeitlich periodische Strömungen auf. Im Wesentlichen konnten in [57] die zuvor in [52] experimentell gefundenen Ergebnisse durch numerische Berechnungen bestätigt werden. In [1] werden ebenfalls Konvektionsströmungen in zweidimensionalen quadratischen Rechengebieten numerisch untersucht. Hierbei liegt neben einer Beheizung durch interne Wärmequellen auch eine externe Beheizung vor.

In [8] werden zweidimensionale numerische Rechnungen für ein quadratisches Behältnis mit konstanten internen Wärmequellen durchgeführt. Die Seitenwände sind gekühlt, die obere und untere Wand ist adiabat. Das Fluid ist ein Flüssigmetall (Pb-17Li), für welches die Prandtl-Zahl $Pr = 0.0321$ beträgt. Durchgeführt werden Rechnungen im Bereich $Ra_{iW} = 10^4 - 10^8$. Bis $Ra_{iW} = 3 \times 10^5$ werden stationäre symmetrische Strömungen errechnet. Im Bereich $3 \times 10^5 < Ra_{iW} < 10^6$ tritt eine Gabelverzweigung mit einer räumlicher Brechung der Symmetrie auf. Periodische Strömungen ergeben sich für $10^6 < Ra_{iW} < 2 \times 10^6$, der Übergang zu instationärer Strömung liegt bei $2 \times 10^6 < Ra_{iW} < 3 \times 10^6$.

In [27] werden ebenfalls zweidimensionale numerische Rechnungen in einem quadratischen Behältnis bei gleichzeitiger Anwesenheit eines externen Temperaturgradienten und homogenen internen Wärmequellen durchgeführt. Hierbei ist eine der beiden vertikalen Seitenwände beheizt, die andere gekühlt. Die horizontalen Seitenwände sind isotherm. Die Rayleigh-Zahl für die interne Beheizung wird variiert im Bereich $10^9 \leq Ra_{iW} \leq 10^{10}$, während die Rayleigh-Zahl

für die externe Beheizung $Ra = 5 \times 10^7$ beträgt. Wird bei konstanter externer Beheizung die Stärke der internen Beheizung erhöht, so entsteht im oberen Bereich der beheizten Wand eine abwärts gerichtete Strömung. Bei genügend starker interner Beheizung wird ein Teil der Wärme im oberen Bereich der beheizten Wand abgeführt. Nur im unteren Bereich der beheizten Wand erfolgt ein Wärmetransport in das Fluid.

Einen Überblick über Konvektionsströmungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in geschlossenen Behältern und Kanälen gibt beispielsweise [67]. Ebenfalls gibt [22] in einem ersten Teil einen Überblick über intern beheizte Schichten und Behälter. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf Rechteckgeometrien. In einem zweiten Teil erfolgt eine Zusammenfassung des Kenntnisstandes zu Konvektionsströmungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern.

In [23] werden dreidimensionale magnetohydrodynamische Strömungen mit konstanten internen Wärmequellen in einem kubischen Behälter untersucht. Die Prandtl-Zahl beträgt $Pr = 0.0321$ (charakteristisch für Pb-17Li bei 573K). Die Rayleigh-Zahl liegt zwischen 10^5 und 10^7 , die Hartmann-Zahl zwischen 10^2 und 10^3 . Jeweils zwei gegenüberliegende vertikale Wände sind isotherm, alle andern Wände sind adiabat. Die elektrische Leitfähigkeit der Wände variiert zwischen null und unendlich. Das Magnetfeld liegt orthogonal zum Schwerevektor. Die Rechnungen werden mit dem kommerziellen Rechenprogramm CFX-4 [15] durchgeführt. Zur Berechnung der magnetohydrodynamischen Strömungen sind allerdings wesentliche Erweiterungen notwendig [22].

In Zusammenhang mit der Kristallzüchtung von Halbleiterkristallen mittels des Czochralski-Verfahrens werden in [42] und [56] Konvektionsströmungen elektrisch leitender Fluide in stehenden Zylindern unter dem Einfluss eines Magnetfeldes in axialer Richtung untersucht. Hierbei handelt es sich um extern beheizte Systeme. Zur Kristallzüchtung kommen ebenfalls horizontale Bridgman-Anordnungen zum Einsatz. In diesem Zusammenhang werden liegende Zylinder mit einer beheizten und einer gekühlten Stirnseite unter dem Einfluss von axialen Magnetfeldern untersucht [6].

Veröffentlichungen zu Strömungen elektrisch leitender Fluide mit internen Wärmequellen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in zylindrischen Geometrien sind nicht bekannt.

Kapitel 5

Ergebnisse

5.1 Programmvalidierung

Zunächst wurden einfache Testrechnungen durchgeführt, welche nicht ausführlich beschrieben werden. Hierbei handelt es sich um laminare isotherme Rohrströmungen, bei denen die Ausbildung des parabolischen Geschwindigkeitsprofils sowie der Druckabfall überprüft wurden. Wie in [34] beschrieben, wurde der diffusive Teil der Energiegleichung anhand von Wärmeleitproblemen, für die geschlossene Lösungen vorliegen, getestet. Der konvektive Wärmetransport wurde ebenfalls nach [34] mittels einer homogenen Kolbenströmung untersucht. Bei allen Testrechnungen wurden insbesondere die Ergebnisse bei $r = 0$ genau untersucht. Weiterhin wurden zweidimensionale Konvektionsströmungen in kreisförmigen Geometrien mit äußeren Temperaturgradienten nach [103] berechnet. Auch verschiedene in [65] dargestellte Ergebnisse zur Konvektion in von unten beheizten stehenden Zylindern wurden berechnet.

In einem zweiten Schritt werden die nachfolgend detailliert beschriebenen Testrechnungen durchgeführt. Hierbei werden Strömungsvorgänge mit internen Wärmequellen sowie Strömungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern untersucht. Die Ergebnisse werden mit experimentellen und numerischen Literaturdaten verglichen.

5.1.1 Stehender Zylinder mit internen Wärmequellen

In [47] werden Strömungsvorgänge in einem stehenden Zylinder mit konstanten internen Wärmequellen sowohl experimentell als auch numerisch untersucht. Der Zylinder besitzt ein Höhen-Durchmesser Verhältnis von $A = H/D = 1,315$. Berechnungen werden für drei verschiedene Grashof-Zahlen $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^3$, 3.5×10^5 und 2.78×10^6 bei einer Prandtl-Zahl von $Pr = 0.7$ durchgeführt. Die Grashof-Zahl für die interne Beheizung wird mit dem Durchmesser D des Zylinders als charakteristische Länge gebildet

$$Gr_{iW} = \frac{g\beta q D^5}{\lambda_{WL} \nu^2}. \quad (5.1)$$

In Abbildung 5.1 ist die Geometrie anhand einer Skizze dargestellt. Die beiden Stirnseiten sowie der Zylindermantel sind isotherm bei 25°C . Aufgrund der internen Wärmequellen heizt sich das Fluid auf. Dadurch entstehen Temperaturgradienten, die Dichteunterschiede bewirken. Die maximale Temperatur und somit die geringste Dichte entsteht im Innern des Zylinders. Dadurch strömt das Fluid dort aufwärts. An den Wänden kühlt sich das Fluid ab und

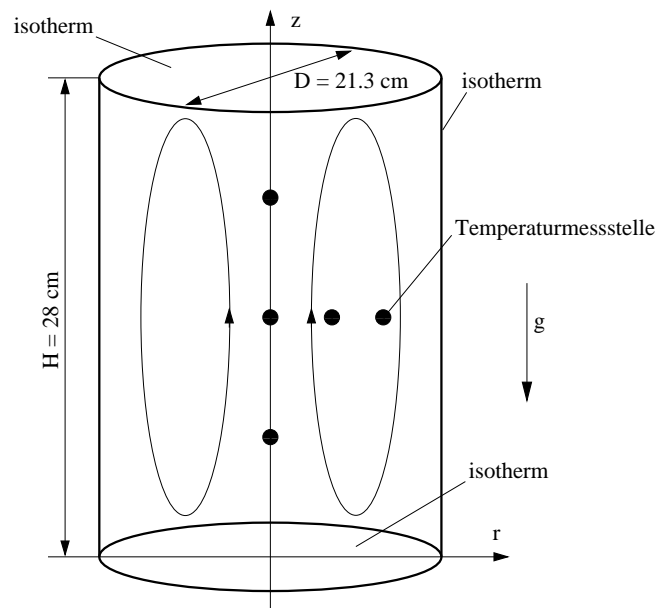


Bild 5.1: Stehender Zylinder mit homogenen internen Wärmequellen nach [47].

strömt abwärts. Wie in Abbildung 5.2 dargestellt, entsteht eine ringförmige Walze. Diese ist bei den untersuchten Grashof-Zahlen stationär und rotationssymmetrisch.

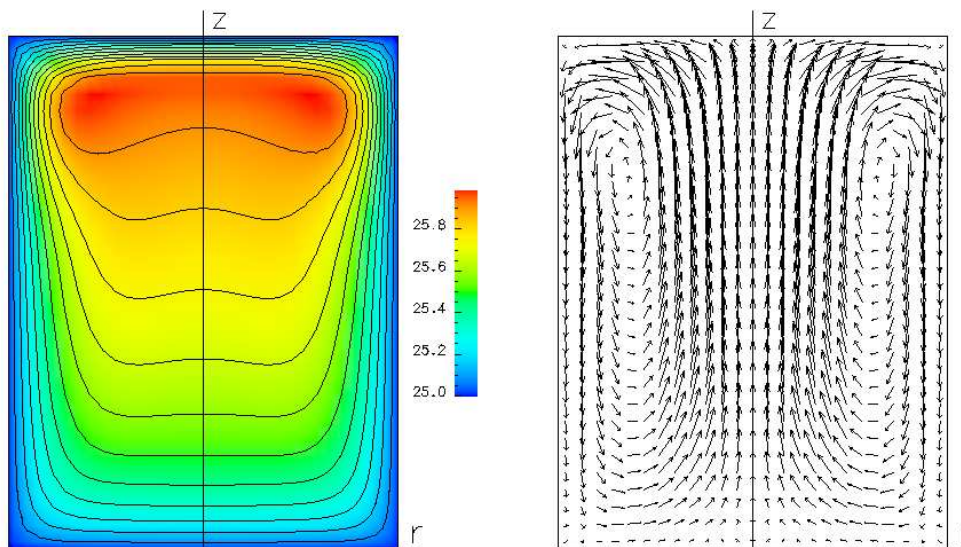


Bild 5.2: Temperaturprofil und Geschwindigkeitsvektoren in der rz -Ebene bei $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$.

Aufgrund der Rotationssymmetrie werden die Rechnungen in [47] auf einem zweidimensionalen Rechenggebiet in r - z -Richtung durchgeführt. Hierbei wird die Impulsgleichung in der Ψ - Ω -Formulierung (vgl. [84] und [80]) mit der Finite-Differenzen-Methode teilimplizit gelöst [46]. Zur Diskretisierung der konvektiven Terme wird ein Upwind-Verfahren erster Ordnung eingesetzt.

Die experimentellen Untersuchungen werden mit radioaktivem Tritiumgas durchgeführt. Durch eine Veränderung des Gasdruckes im Zylinder wird die Stärke der internen Wärmequellen va-

riert. Dadurch sind Untersuchungen für verschiedene Grashof-Zahlen möglich. Gemessen wird die Temperatur an 5 verschiedenen Stellen mit einer Genauigkeit von $\pm 0.06K$. Wie in Abbildung 5.1 dargestellt, befinden sich drei Mess-Stellen auf der Zylinderachse, zwei weitere in der horizontalen Mittelebene.

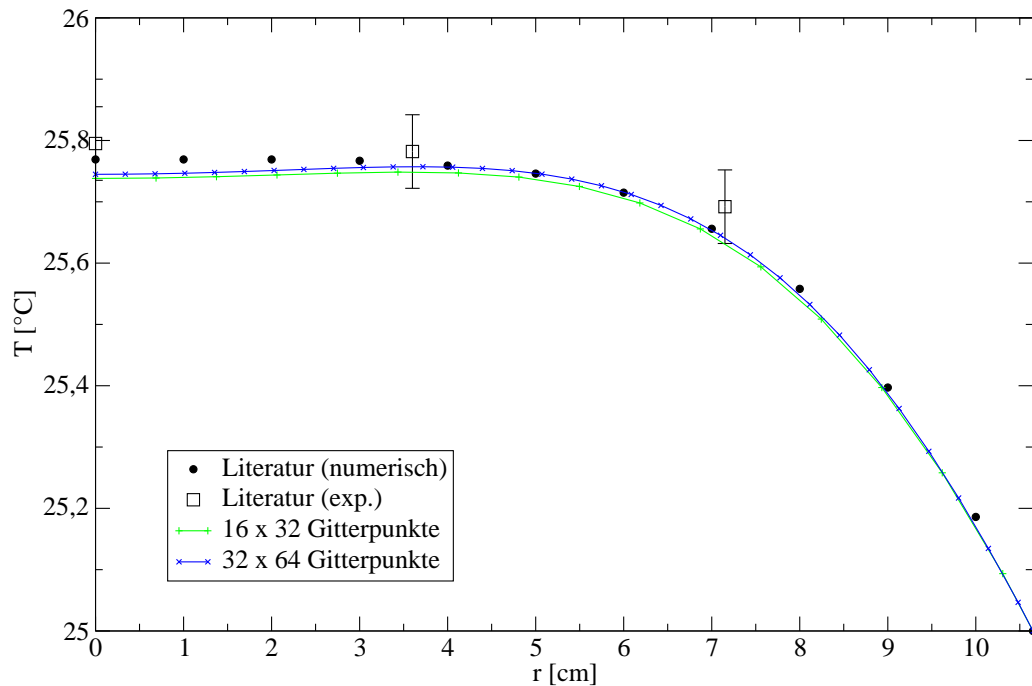


Bild 5.3: Temperaturverlauf in der horizontalen Mittelebene für $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$.

In Abbildung 5.3 ist der Temperaturverlauf in der horizontalen Mittelebene für eine Grashof-Zahl $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$ über den Radius dargestellt. Die errechneten Temperaturprofile stimmen am Rand sehr gut mit den Daten aus [47] überein. Im Innern des Zylinders werden jedoch niedrigere Temperaturen errechnet. Während in [47] ein nahezu konstantes Temperaturprofil im Innern vorliegt, ergibt sich bei den eigenen Rechnungen ein Geschwindigkeitsprofil mit einem Temperaturmaximum bei $r = 4$ cm. Im Vergleich zu den Messdaten liegen sowohl die errechneten Temperaturen aus [47], als auch die eigenen Rechnungen etwas niedriger, stimmen aber im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Messdaten überein.

Die Abweichung der errechneten Temperaturen bei $r = 0$ von den Daten in [47] zeigt sich ebenfalls in Abbildung 5.4. Die errechneten Temperaturen sind über die gesamte Höhe des Zylinders niedriger als in [47]. Wie in Abbildung 5.3 weicht auch das errechnete Temperaturprofil entlang der Zylinderachse von den Messwerten ab. Jedoch liegen die errechneten Temperaturen an allen Messpunkten innerhalb der Messtoleranz.

Rechnungen werden mit einer Auflösung von 16 Gitterpunkten in r -Richtung und 32 Punkten in z -Richtung durchgeführt. Danach wird die Auflösung in r -Richtung auf 32 Gitterpunkte und z -Richtung auf 64 Punkte erhöht. Die Abweichungen zwischen den beiden Rechenläufen sind sehr gering, deshalb kann davon ausgegangen werden, dass bereits bei einer Auflösung von 16 x 32 Punkten eine nahezu gitterunabhängige Lösung vorliegt.

Das Geschwindigkeitsprofil in der horizontalen Mittelebene nach Abbildung 5.5 zeigt in der Nähe des Zylindermantels eine gute Übereinstimmung mit den errechneten Daten aus [47]. Im Bereich $r < 4$ cm liegen die errechneten Geschwindigkeiten jedoch deutlich über den

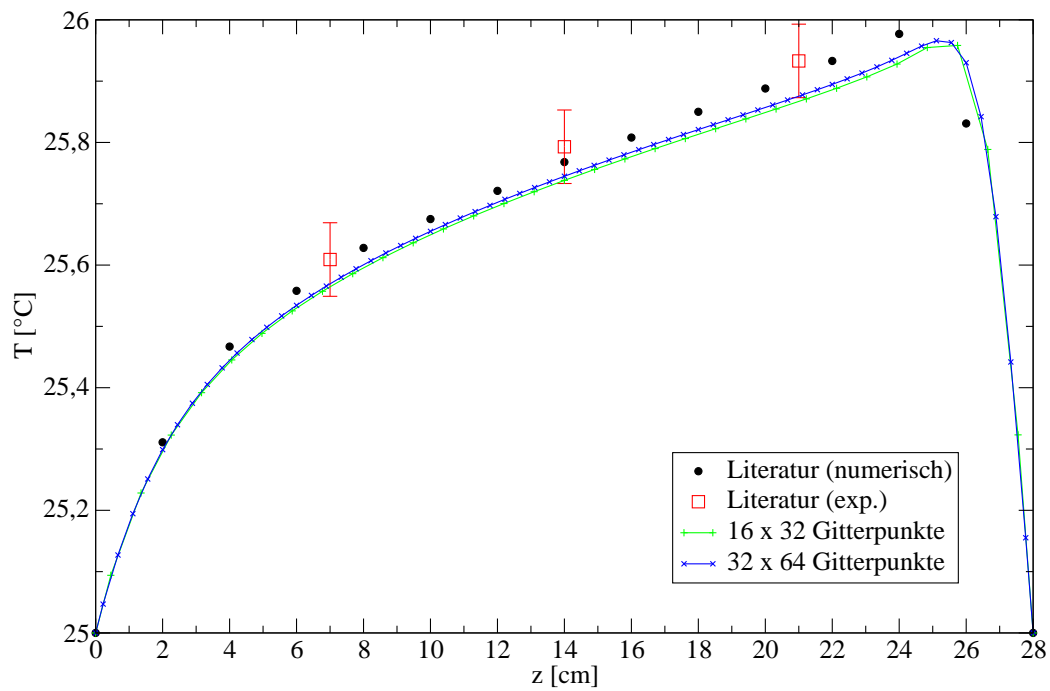


Bild 5.4: Temperaturverlauf bei $r = 0$ für $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$.

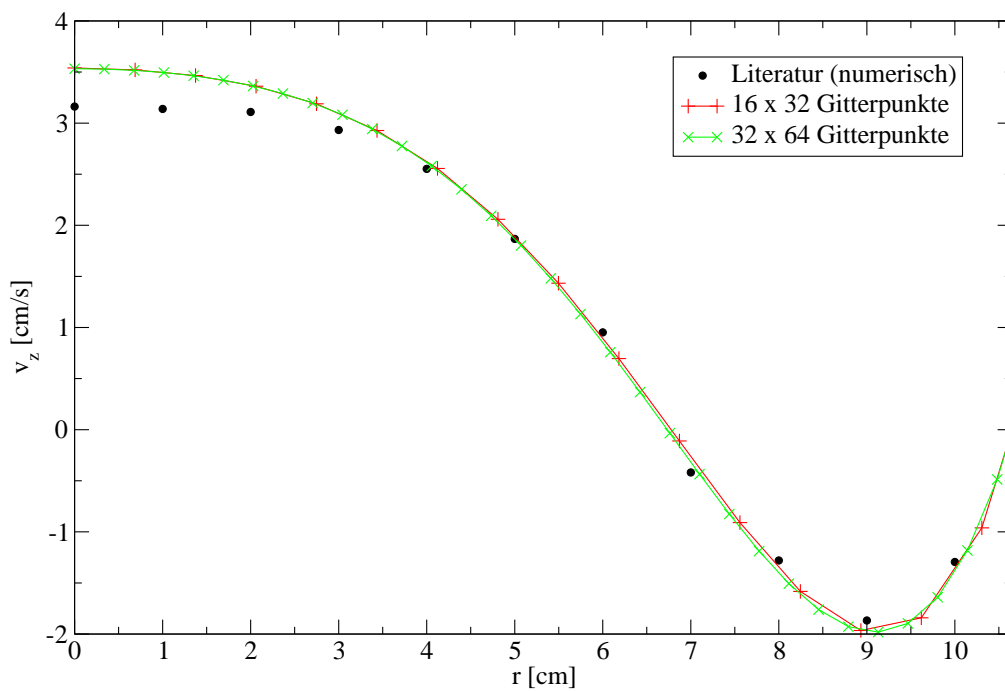


Bild 5.5: Geschwindigkeitsverteilung in der horizontalen Mittelebene für $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$.

Vergleichsdaten aus [47]. Zur Überprüfung des Geschwindigkeitsprofils wurde deshalb die Erfüllung der Kontinuitätsgleichung in der horizontalen Mittelebene geprüft. Die Bedingung

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} v_z r dr d\varphi = 0 \quad (5.2)$$

ist im Falle der eigenen Rechnung mit sehr guter Genauigkeit erfüllt. Die Daten aus [47] lassen vermuten, dass die Kontinuität hier nicht erfüllt ist. Die im Vergleich mit [47] höheren Strömungsgeschwindigkeiten aus der eigenen Rechnung erklären die niedrigeren Temperaturen im Innern des Zylinders. Durch die höhere Strömungsgeschwindigkeit ist die Verweildauer des Fluids im Innern des Zylinders kürzer und die durch die internen Wärmequellen zugeführte Energie und somit Temperatur bis zum Erreichen der oberen Berandung geringer.

Bei stationären Konvektionsströmungen mit internen Wärmequellen herrscht unter der Voraussetzung, dass keine Senken vorhanden sind, ein Gleichgewicht zwischen der durch die internen Wärmequellen erzeugten und der über die Berandung abgeführten Wärme

$$\int_V q dV = \int_A Q dA \quad (5.3)$$

mit

$$Q = -\lambda_{WL} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{Wand} \quad (5.4)$$

Während bei einer Aufgabenstellung mit externer Beheizung nur die Übereinstimmung der zu- und der abgeführten Wärmemenge überprüft werden kann, ist hier die exakte Bestimmung der produzierten Wärmemenge möglich. Die errechnete abgeführte Wärmemenge muss entsprechend Gleichung 5.3 dieser Wärmemenge entsprechen. Die Wärmeabfuhr erfolgt bei dieser Rechnung sowohl über den Zylindermantel als auch über die beiden Stirnseiten. Tabelle 5.1 zeigt die bei $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$ durch die internen Wärmequellen entstehende Wärmeleistung sowie die über die Berandungen abgeführten Wärmeleistungen. Der größte Anteil der Wärmeleistung (71%) wird über den Zylindermantel abgeführt. Über die obere Stirnseite werden 21% der Wärmeleistung abgeführt, während über die untere Stirnseite lediglich 8% der Wärmeleistung abgeführt wird. Die Wärmebilanz wird hierbei sehr präzise erfüllt, der relative Fehler ist kleiner $6,4 \times 10^{-9}$.

Interne Wärmequellen	Zylinder-mantel	Obere Stirnseite	Untere Stirnseite
0.78095	0.55061	0.16976	0.06058

Tabelle 5.1: Wärmebilanz für $Gr_{iW} = 2.78 \times 10^6$, alle Angaben in W.

5.1.2 Liegender Zylinder mit horizontalem Temperaturgradienten

In [88] werden Konvektionsströmungen in einem horizontalen Zylinder experimentell untersucht. Der Durchmesser des Zylinders ist $D = 0,02$ m, die Länge ist $L = 0,1$ m. Der Zylinder ist mit Stickstoff gefüllt. Die Prandtl-Zahl beträgt $Pr = 0.73$. Durch Änderung des Gasdruckes im Zylinder wird die Rayleigh-Zahl verändert. Eine Stirnseite ist gekühlt ($T_c = 300K$), die gegenüberliegende Stirnseite ist beheizt ($T_h = 362K$). Die Rayleigh-Zahl wird mit dem Radius R als charakteristischer Länge sowie der Temperaturdifferenz $T_h - T_c$ gebildet. Der Zylindermantel ist von einem evakuierten doppelwandigen Quarzglaszylinder umgeben. Da Quarzglas eine 50-mal größere Wärmeleitfähigkeit als Stickstoff besitzt, wird bei den Testrechnungen eine perfekt wärmeleitende Wand vorausgesetzt (vgl. [90] und [13]).

Durch eine LDA-Messung wird die vertikale Geschwindigkeit entlang der Mittelachse sowie die horizontale Geschwindigkeit in der vertikalen Mittelebene ermittelt. Diese Daten werden mit den berechneten Daten verglichen. Die Rayleigh-Zahlen betragen hierbei $Ra = 3580$, $Ra = 8860$ und $Ra = 18700$.

Abbildung 5.6 zeigt das vertikale Geschwindigkeitsprofil entlang der Mittelachse des Zylinders in der Nähe der kalten Stirnseite. Während die Lage des Geschwindigkeitsextremums der selbst berechneten Ergebnisse mit den experimentellen Daten gut übereinstimmt, liegt der Betrag der maximalen Geschwindigkeit der berechneten Geschwindigkeitsprofile bei allen Rayleigh-Zahlen etwas niedriger als bei den experimentellen Daten.

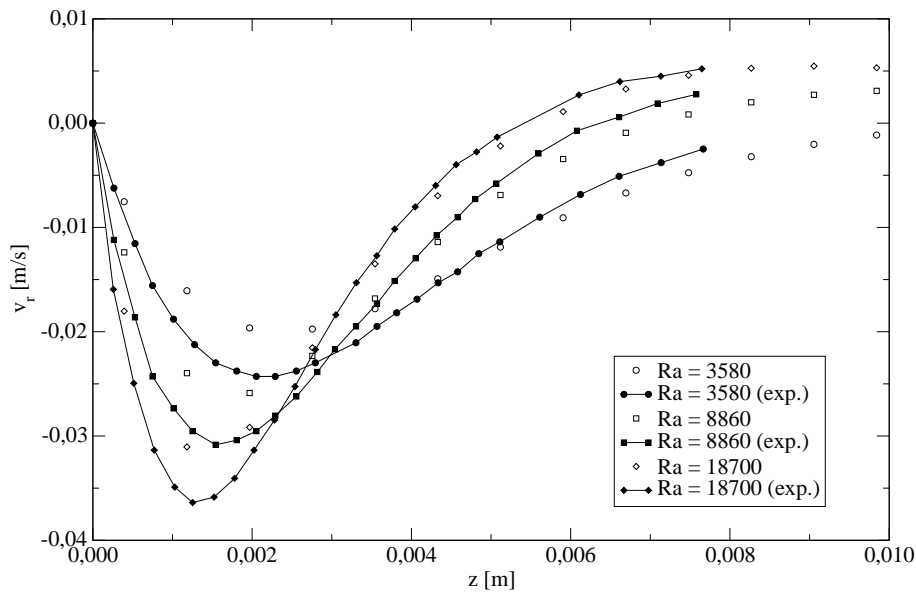


Bild 5.6: Vergleich der berechneten vertikalen Geschwindigkeitsprofile an der kalten Stirnseite mit den experimentellen Daten aus [88], ($\beta = \text{const.}$).

In Abbildung 5.7 ist die Geschwindigkeitsverteilung in axialer Richtung in der vertikalen Mittelebene dargestellt. Bei der kleinsten Rayleigh-Zahl stimmen die numerischen Daten sehr gut mit den experimentellen Daten überein. Bei den höheren Rayleigh-Zahlen ergibt sich jedoch eine zunehmende Abweichung zwischen den experimentellen und den numerischen Daten. Die maximale Abweichung liegt im Bereich von 10%.

Während bei den Experimenten von einer Temperaturabhängigkeit des thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten auszugehen ist, wird bei der Berechnung ein konstanter thermischer

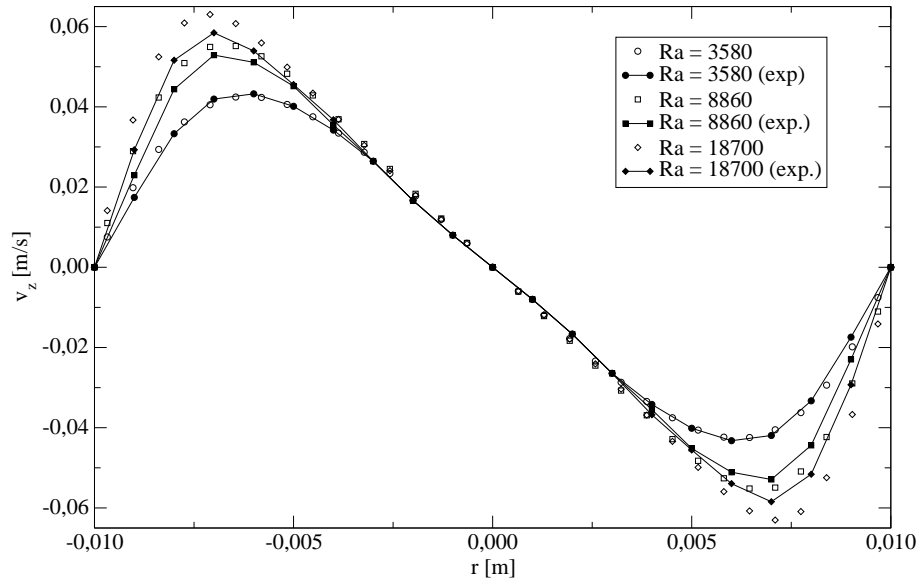


Bild 5.7: Vergleich der berechneten axialen Geschwindigkeitsprofile in der vertikalen Mittelebene mit den experimentellen Daten aus [88], ($\beta = \text{const.}$).

Volumenausdehnungskoeffizient nach

$$\beta = \frac{2}{T_c + T_h} \quad (5.5)$$

vorausgesetzt (vgl. [90] und [13]). Die in [13] dargestellten numerischen Ergebnisse, welche ebenfalls mit konstantem Volumenausdehnungskoeffizienten durchgeführt werden, zeigen Abweichungen im Vergleich zu den experimentellen Daten in einer ähnlichen Größenordnung und stimmen sehr gut mit den hier durchgeführten Berechnungen überein.

Die Abweichung des lokalen thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten im Vergleich zu dem nach Gleichung 5.5 ermittelten Wert liegt im Bereich von $\pm 10\%$. Um die Temperaturabhängigkeit des thermischen Volumenausdehnungskoeffizienten zu berücksichtigen, werden Berechnungen durchgeführt, bei denen der thermische Volumenausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit von der Temperatur nach

$$\beta(T) = \frac{1}{T} \quad (5.6)$$

berechnet wird. Abbildung 5.8 zeigt für diesen Fall wie zuvor die vertikale Geschwindigkeit an der kalten Stirnseite. Die berechneten Geschwindigkeitsprofile stimmen nun sehr viel besser mit den experimentell ermittelten Daten überein. Auch das axiale Geschwindigkeitsprofil in der vertikalen Mittelebene nach Abbildung 5.9 stimmt jetzt besser mit den experimentellen Daten überein. Die maximale Abweichung beträgt ca. 5%.

Zur Überprüfung der Gitterunabhängigkeit der Ergebnisse werden Berechnungen mit 128 Punkten in axialer Richtung durchgeführt und anschließend für die höchste Rayleigh-Zahl die Auflösung in axialer Richtung verdoppelt. Diese Methode wird auch bei den weiteren Testrechnungen sowie bei den Rechnungen in den nachfolgenden Kapiteln zur Überprüfung der Gitterunabhängigkeit der Ergebnisse angewandt. Wie aus den Abbildungen 5.8 und 5.9 zu

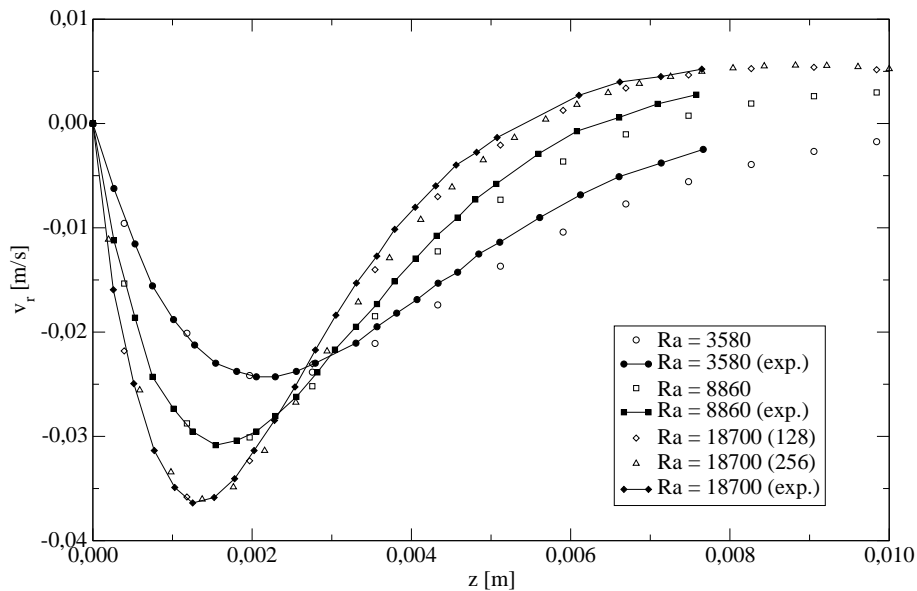


Bild 5.8: Vergleich der berechneten vertikalen Geschwindigkeitsprofile an der kalten Stirnseite mit den experimentellen Daten aus [88], ($\beta = 1/T$).

erkennen ist, liegt eine nahezu gitterunabhängige Lösung bereits bei einer Auflösung von 128 Punkten vor. Somit kann von einer im Rahmen der Unsicherheiten guten Übereinstimmung der berechneten Daten mit den experimentell ermittelten Geschwindigkeitsprofilen aus [88] ausgegangen werden.

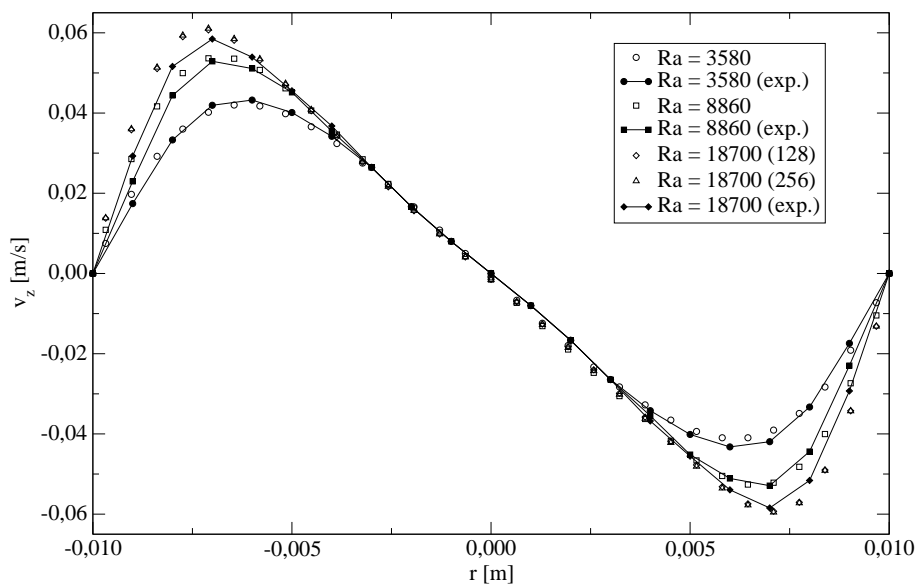


Bild 5.9: Vergleich der berechneten axialen Geschwindigkeitsprofile in der vertikalen Mittelebene mit den experimentellen Daten aus [88], ($\beta = 1/T$).

5.1.3 Magnetokonvektion in liegenden Zylindern

Im Folgenden wird der Einfluss von Magnetfeldern auf Naturkonvektionsströmungen in einem liegenden Zylinder mit einer beheizten und einer gekühlten Stirnseite untersucht und mit numerischen Ergebnissen aus [12] verglichen. Solche Systeme ergeben sich beim horizontalen Bridgman-Verfahren [59] zur Herstellung von Einkristallen.

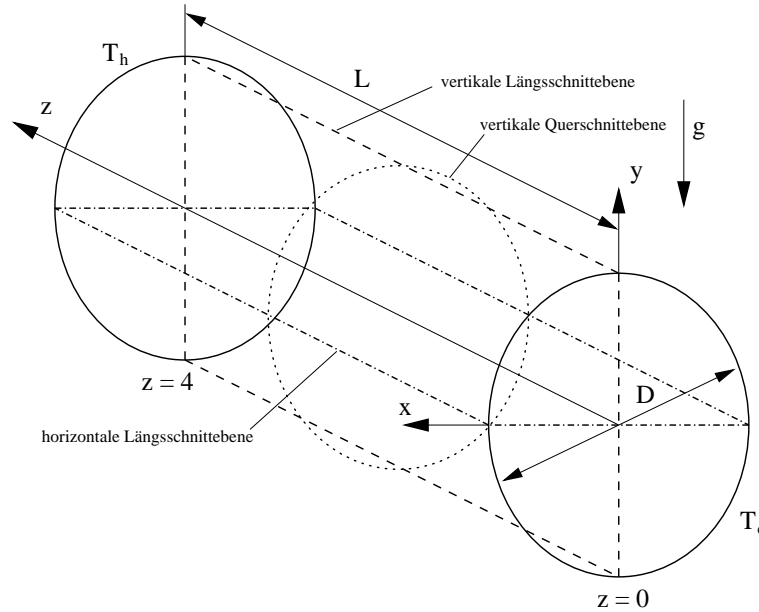


Bild 5.10: Liegender Zylinder mit horizontalem Temperaturgradienten unter dem Einfluss der Schwerkraft.

Die zylindrische Kavität nach Abbildung 5.10 hat ein Längen-Durchmesser Verhältnis $A = L/D = 4$. Hierbei ist der Durchmesser D auf eins normiert. Aufgrund der stirnseitig herrschenden Temperaturdifferenz bilden sich horizontale Temperaturgradienten aus, die eine laminare Konvektionsströmung erzeugen. Der Zylindermantel wird hierbei als adiabat angenommen. Sowohl die Stirnseiten als auch der Zylindermantel sind elektrisch isoliert. Die Rechnungen werden für Quecksilber mit einer Prandtl-Zahl $Pr = 0.026$ durchgeführt [20].

Zur Beschreibung der Richtung des Magnetfeldes wird ein in [12] festgelegtes kartesisches Koordinatensystem verwendet, welches in Abbildung 5.10 dargestellt ist. Berechnungen liegen vor für Strömungen ohne Magnetfeld sowie unter dem Einfluss von Magnetfeldern in x -, y - und z -Richtung. Die Hartmann-Zahl wird jeweils zwischen $Ha = 0$ und $Ha = 300$ variiert. Bei den Strömungen ohne Magnetfeld liegt die Grashof-Zahl bei $Gr = 1,5 \times 10^5$, bei den Strömungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern jeweils bei $Gr = 5 \times 10^4$. Die Grashof-Zahl ist mit dem Durchmesser D als charakteristischer Länge wie folgt definiert

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T D^4}{L \nu^2}. \quad (5.7)$$

Hierbei ist $\Delta T = T_h - T_c$ die Temperaturdifferenz zwischen der warmen Stirnseite bei $z = L = 4$ und der kalten Stirnseite bei $z = 0$.

Die Rechnungen in [12] werden mittels eines Spektralverfahrens durchgeführt. Hierzu wird der Zylinder in 5 Teilgebiete zerlegt, welche durch $9 \times 9 \times 27$ Kollokationspunkte diskretisiert

werden (vgl. [49] und [45]).

Neben den Rechnungen ohne Magnetfeld bei $Gr = 1,5 \times 10^5$ sind die Rechnungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in x -, y - und z -Richtung bei einer Hartmann-Zahl $Ha = 150$ sowie einer Grashof-Zahl $Gr = 5 \times 10^4$ ausführlich beschrieben. Deshalb werden für die nachfolgenden Testrechnungen die Grashof-Zahl und die Hartmann-Zahl entsprechend gewählt.

5.1.3.1 Rechnungen ohne Magnetfeld

Bei den untersuchten Grashof-Zahlen $Gr \leq 1,5 \times 10^5$ ergeben sich stationäre Strömungen, welche durch eine in horizontaler Richtung gestreckte Walze gekennzeichnet sind. An der warmen Wand strömt das Fluid aufwärts, fließt dann im oberen Teil des Zylinders in horizontaler Richtung zur kalten Wand und kühlt dort ab, um anschließend im unteren Teil des Zylinders zur warmen Wand zurückzuffließen.

Bei einer Grashof-Zahl $Gr = 1,5 \times 10^5$ entstehen in der horizontalen Längsschnittebene, dargestellt in Abbildung 5.13, Sekundärwirbel innerhalb der großen konvektiven Walze in der Nähe der Stirnseiten. Wie in Abbildung 5.11 dargestellt, sind diese Sekundärwirbel bei einer Grashof-Zahl $Gr = 5 \times 10^4$ noch nicht sichtbar. Die Sekundärwirbel innerhalb der Walze erzeugen die in der horizontalen Längsschnittebene auftretenden Wirbel, welche in Abbildung 5.14 für $Gr = 1,5 \times 10^5$ dargestellt sind. Diese Wirbel sind, wie in Abbildung 5.12 gezeigt, bereits bei $Gr = 5 \times 10^4$ ausgebildet.

Weiterhin entstehen in der horizontalen Längsschnittebene nach Abbildung 5.11 für $Gr = 5 \times 10^4$ und Abbildung 5.13 für $Gr = 1,5 \times 10^5$ Sekundärwirbel in der unteren Ecke an der warmen und in der oberen Ecke an der kalten Wand.

Aufgrund der niedrigen Prandtl-Zahl und der damit verbundenen guten Wärmeleitfähigkeit des Fluids weisen die in den Abbildungen 5.11 und 5.13 dargestellten vertikalen Temperaturprofile trotz der hohen Grashof-Zahlen nur mäßige Veränderungen gegenüber der horizontalen Temperaturschichtung bei reiner Wärmeleitung auf. Bei $Gr = 1,5 \times 10^5$ wird jedoch der stärkere Einfluss der Konvektion sichtbar. Hierbei nehmen die Isothermen in der vertikalen Querschnittebene im Zentrum des Zylinders einen linearen Verlauf an.

Die in den Abbildungen 5.13 und 5.14 dargestellten Geschwindigkeitsvektoren und Temperaturverteilungen sowie die beschriebenen Eigenschaften der Strömung bei einer Grashof-Zahl $Gr = 1,5 \times 10^5$ zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten aus [12].

5.1.3.2 Magnetfeld in x -Richtung

Wird ein Magnetfeld $\vec{B} = (B_0, 0, 0)$ in x -Richtung, d. h. in horizontaler Richtung und senkrecht zur Zylinderachse angelegt, so wird bei $Ha = 150$ und $Gr = 5 \times 10^4$ die Strömung im Vergleich zur Strömung ohne Magnetfeldeinfluss stark gedämpft und das Geschwindigkeitsprofil verändert.

In Abbildung 5.15 ist das Geschwindigkeitsprofil in der horizontalen Längsschnittebene durch Vektorpfeile dargestellt. An der kalten Stirnseite strömt das Fluid in einem schmalen Bereich abwärts, während an der warmen Stirnseite die Strömung aufwärts gerichtet ist.

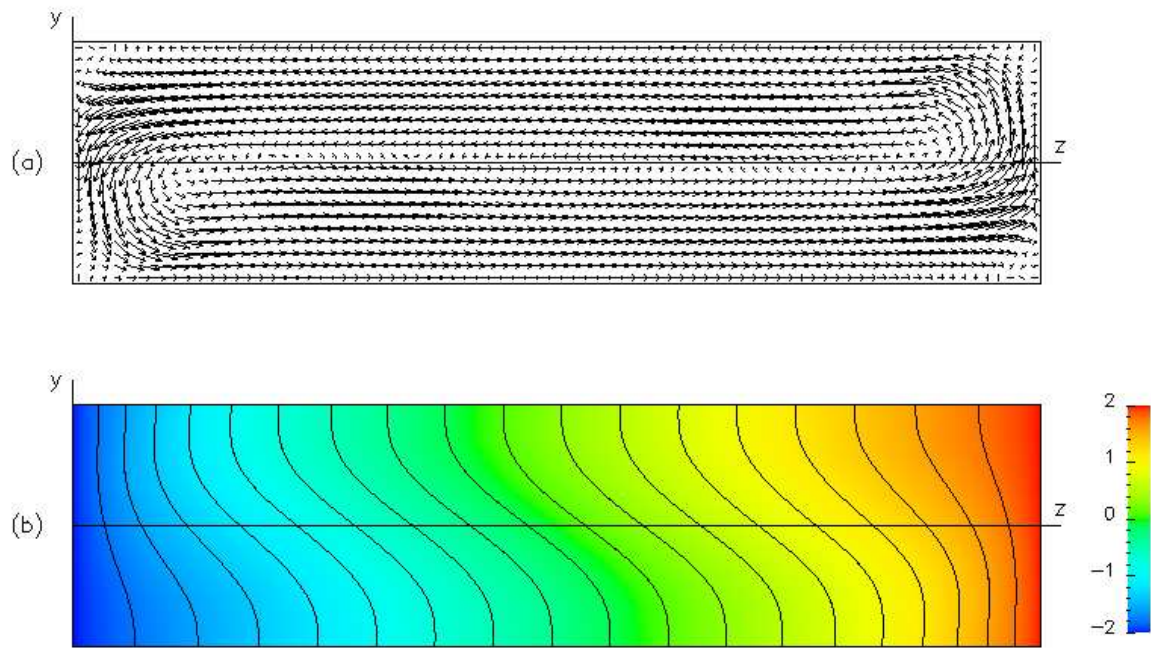


Bild 5.11: Geschwindigkeitsvektoren (a) und Temperaturverteilung (b) in der vertikalen Längsschnittebene für $Gr = 5 \times 10^4$.

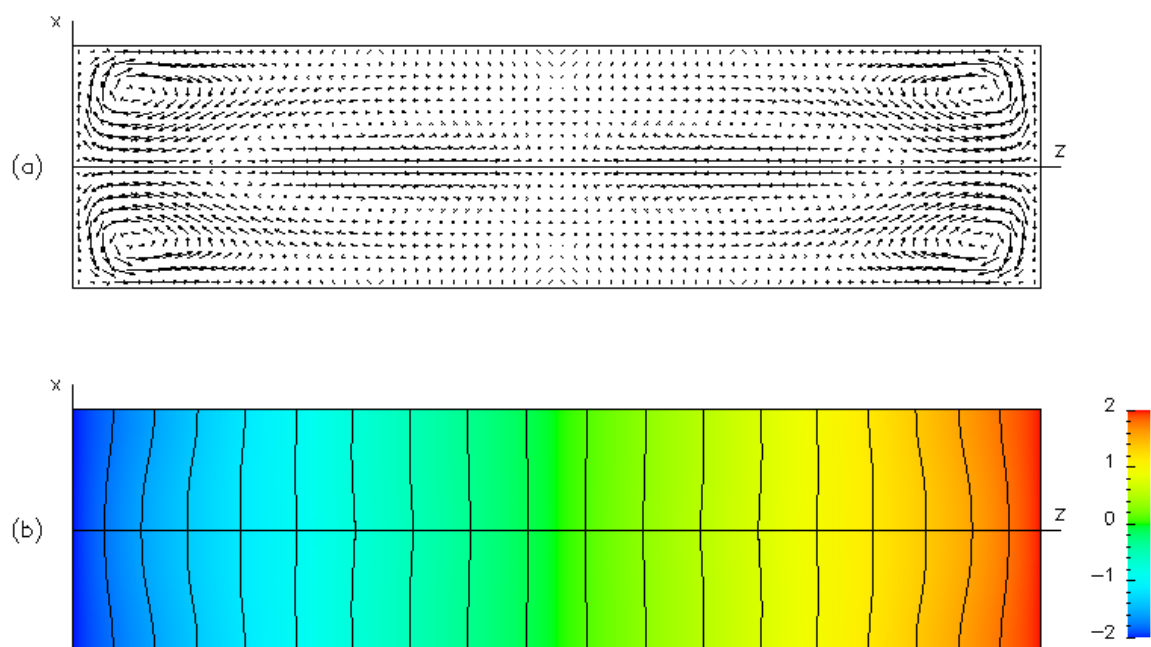


Bild 5.12: Geschwindigkeitsvektoren (a) und Temperaturverteilung (b) in der horizontalen Längsschnittebene für $Gr = 5 \times 10^4$.

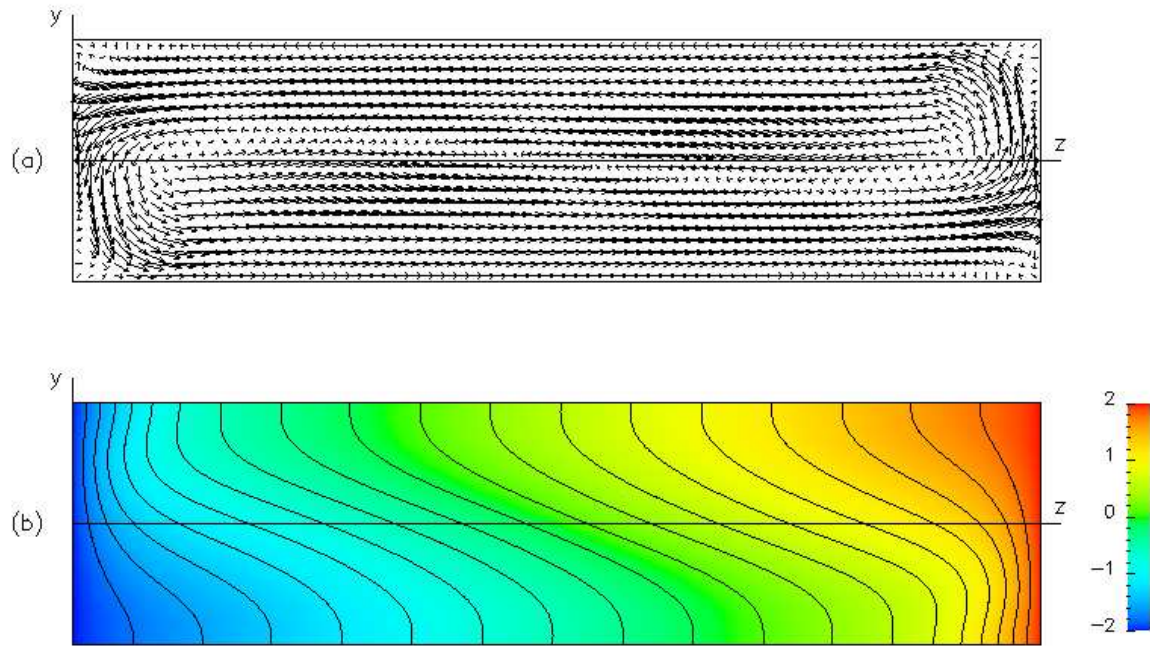


Bild 5.13: Geschwindigkeitsvektoren (a) und Temperaturverteilung (b) in der vertikalen Längsschnittebene für $Gr = 1.5 \times 10^5$.

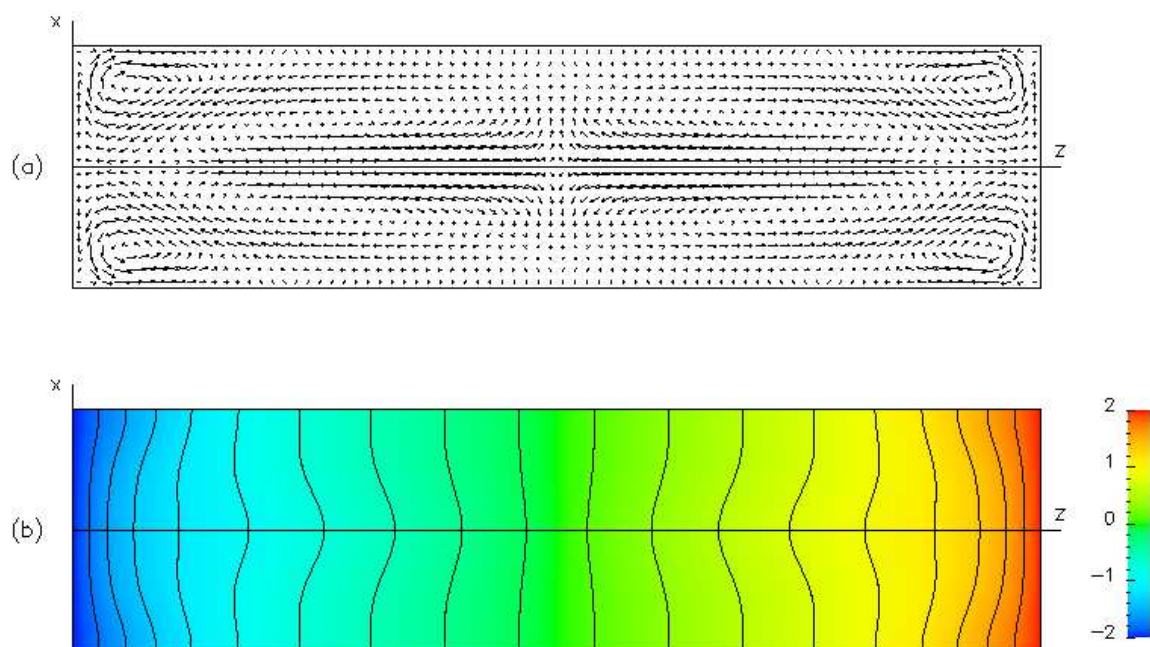


Bild 5.14: Geschwindigkeitsvektoren (a) und Temperaturverteilung (b) in der horizontalen Längsschnittebene für $Gr = 1.5 \times 10^5$.

Abbildung 5.16 stellt das Geschwindigkeitsprofil in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 2$ dar. Um das Geschwindigkeitsprofil besser zu visualisieren, ist gegenüber der Abbildung 5.15 die Perspektive geändert. In der oberen Hälfte des Querschnittes strömt das Fluid zur kalten, in der unteren Hälfte zur warmen Stirnseite. Es ist zu erkennen, dass das Geschwindigkeitsprofil quer zur Strömungsrichtung konstante Strömungsgeschwindigkeiten aufweist. In vertikaler Richtung ist das Geschwindigkeitsprofil in der Nähe des Kerns linear, geht dann aber in Wandnähe in ein quadratisches Profil über.

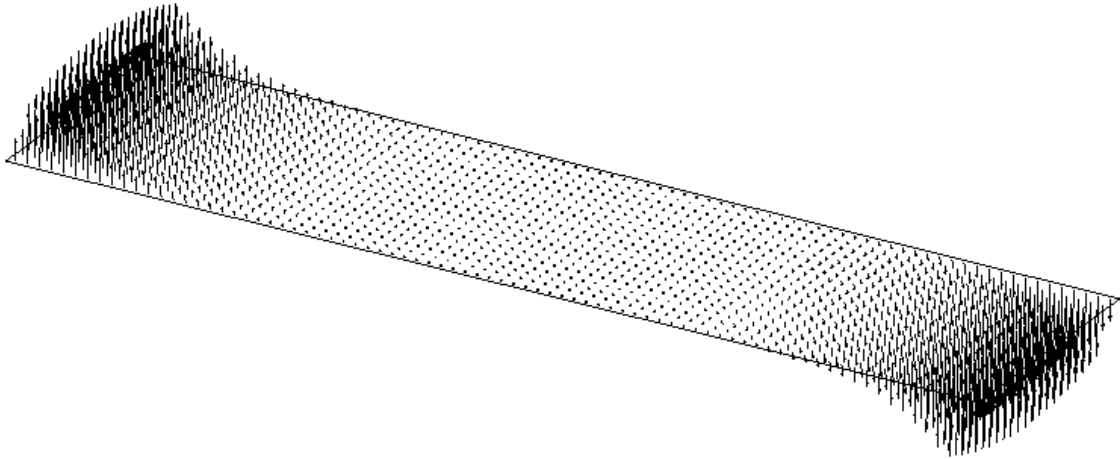


Bild 5.15: Geschwindigkeitsvektoren in der horizontalen Längsschnittebene für $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$.

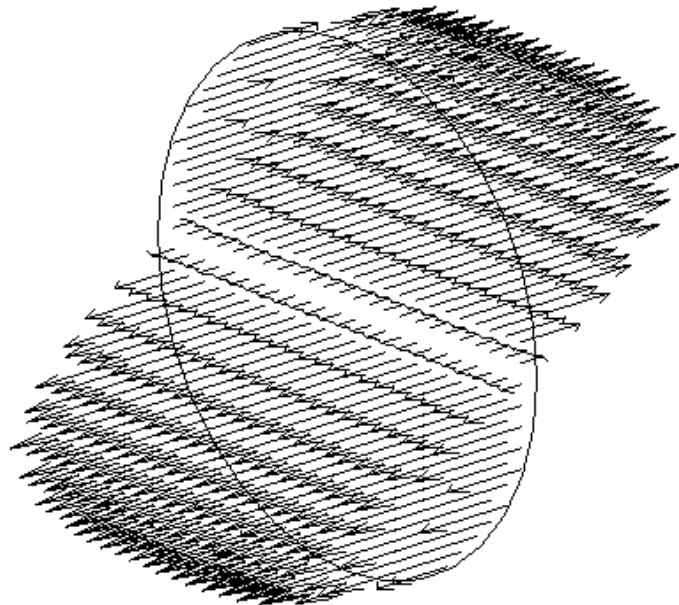


Bild 5.16: Horizontale Geschwindigkeitskomponente in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 2$ für $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$.

Durch das Magnetfeld werden dort elektrische Ströme induziert, wo eine achsparallele oder vertikale Strömungsrichtung vorliegt. Horizontale Geschwindigkeitskomponenten induzieren

elektrische Ströme in vertikaler Richtung. Dadurch werden sowohl oberhalb als auch unterhalb der horizontalen Mittelebene elektrische Ströme in Richtung der horizontalen Mittelebene induziert. Diese induzierten Ströme bewirken, dass im Bereich der horizontalen Längsschnittebene ein hohes elektrisches Potential entsteht. Das elektrische Potential ist in Abbildung 5.17 in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ dargestellt. Aufgrund des hohen elektrischen Potentials in der horizontalen Längsachse schließen sich die elektrischen Ströme, wie in Abbildung 5.18 dargestellt, in der vertikalen Querschnittebene. Während im Kern überall elektrische Ströme in Richtung der horizontalen Längsachse fließen, treten am Zylindermantel in einer dünnen Schicht starke, entgegengesetzt gerichtete Ströme auf. Dadurch ergeben sich vier entgegengesetzt rotierende, kreisförmige elektrische Ströme.

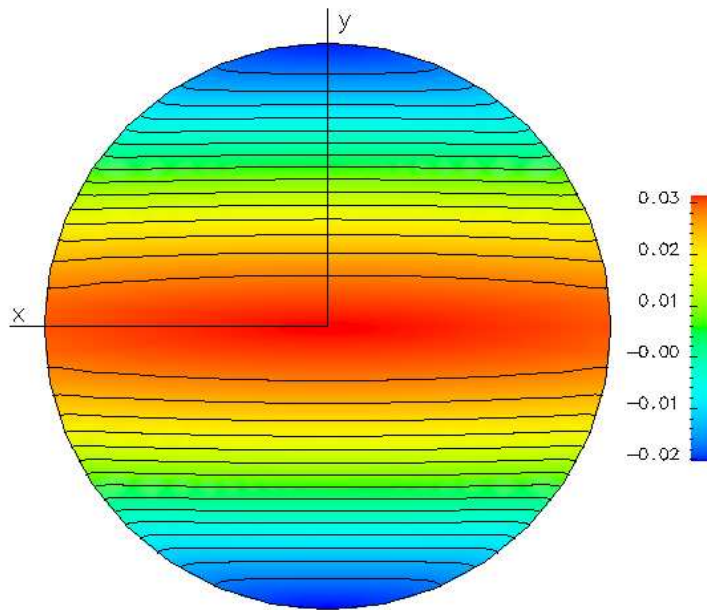


Bild 5.17: Das elektrische Potential in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ für $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$.

Die hierbei entstehenden Lorentzkräfte wirken im Innern der Strömung entgegen, während am Rand die Lorentzkräfte in Strömungsrichtung wirken. Dadurch wird die Geschwindigkeit im Kern stärker gedämpft als am Rand. In den vertikalen Querschnittebenen entsteht hierdurch das in Abbildung 5.15 gezeigte Geschwindigkeitsprofil, welches in x -Richtung konstante Strömungsgeschwindigkeiten aufweist. Gleichzeitig ist dieses Geschwindigkeitsprofil durch dünne Grenzschichten gekennzeichnet.

Die errechneten Ergebnisse für das elektrische Potential, den elektrischen Strom und der Geschwindigkeitsprofile in den dargestellten Abbildungen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten aus [12].

In [12] ist die maximale vertikale Geschwindigkeit $v_{y,max}$ im horizontalen Längsschnitt nach Abbildung 5.15 sowie die maximale horizontale Geschwindigkeit $v_{z,max}$ im vertikalen Querschnitt nach Abbildung 5.16 bei $z = 2$ angegeben. Tabelle 5.2 zeigt einen Vergleich dieser Geschwindigkeiten mit den Daten aus der eigenen Rechnung. Der Vergleich bestätigt die gute Übereinstimmung der eigenen Rechnung mit den Daten aus [12].

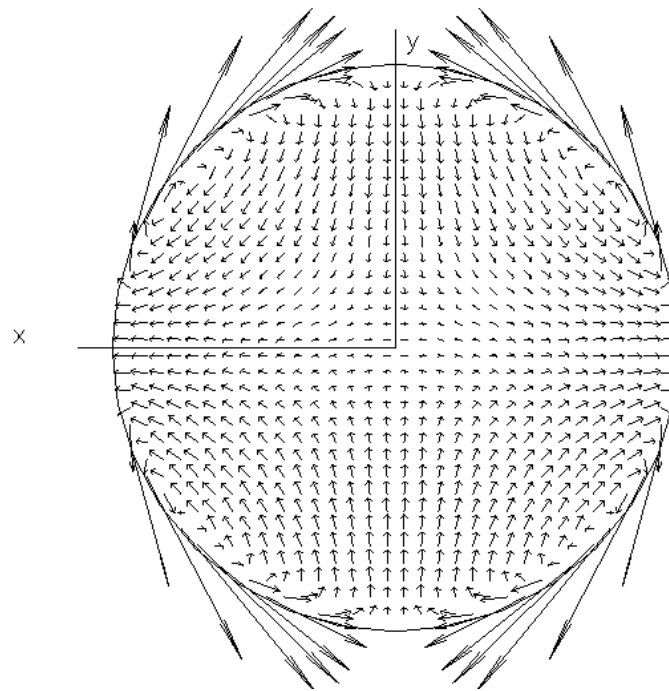


Bild 5.18: Der elektrische Strom in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ für $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$.

$\vec{B} = (B_x, 0, 0)$	$v_{y,max}$	$v_{z,max}$
Literatur	0.1225	0.1617
Eigene Rechnung	0.125	0.164
Abweichung	2.0 %	1.4 %

Tabelle 5.2: Vergleich der berechneten maximalen Geschwindigkeiten $v_{y,max}$ im horizontalen Längsschnitt und $v_{z,max}$ im vertikalen Querschnitt bei $z = 2$ mit den Literaturdaten aus [12] für $\vec{B} = (B_x, 0, 0)$, $Ha = 150$ und $Gr = 5 \times 10^4$.

5.1.3.3 Magnetfeld in y -Richtung

Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes in y -Richtung, d. h. vertikal und senkrecht zur Zylinderachse, geht das ohne Einfluss eines Magnetfeldes S-förmige horizontale Geschwindigkeitsprofil in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 2$, wie in Abbildung 5.20 dargestellt, in ein lineares Profil über. In horizontalen Schichten $y = \text{const.}$ liegt ein konstantes Geschwindigkeitsprofil mit sehr dünnen Wandgrenzschichten am Zylindermantel vor. Das in Abbildung 5.20 dargestellte Geschwindigkeitsprofil ist nahezu unabhängig von der z -Koordinate. Dies wird ebenfalls durch Abbildung 5.19 deutlich. Außer in sehr dünnen Schichten in der Nähe der Stirnseiten tritt keine Vertikalströmung auf. Auch hier sind die Abbildungen 5.20 und 5.19 zur besseren Visualisierung der Geschwindigkeitsprofile in verschiedenen Perspektiven dargestellt.

Die Ausbildung eines in vertikaler Richtung linearen Geschwindigkeitsprofils in der vertikalen Querschnittebene wird in [28] durch eine zweidimensionale analytische Betrachtung bestätigt.

Durch das Magnetfeld in y -Richtung werden elektrische Ströme dort induziert, wo horizontale

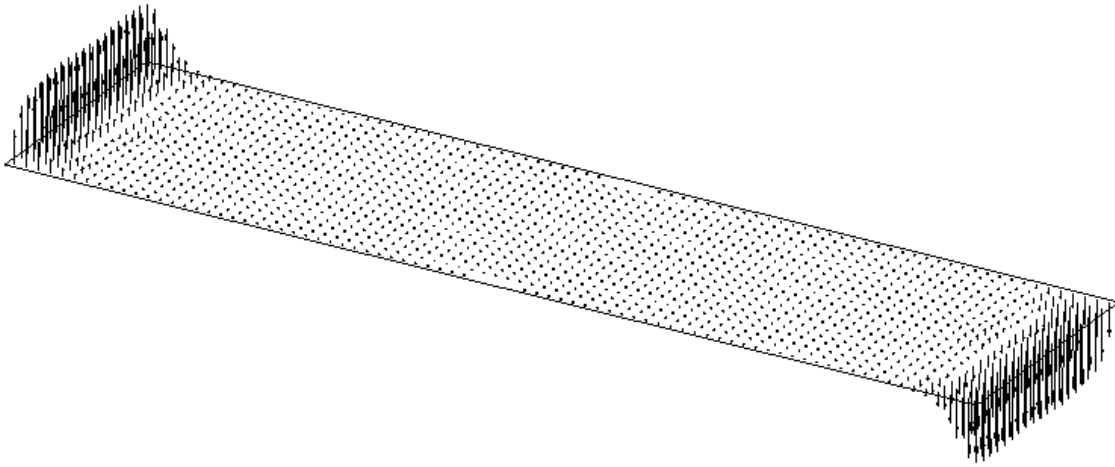


Bild 5.19: Geschwindigkeitsvektoren in der horizontalen Längsschnittebene für $\vec{B} = (0, B_y, 0)$.

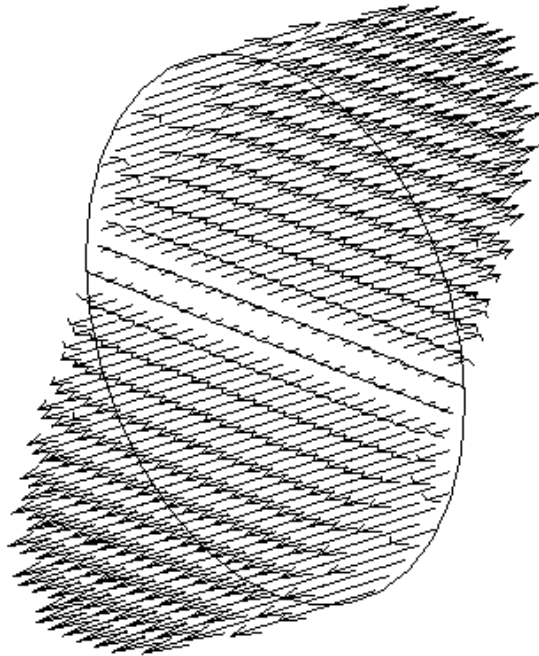


Bild 5.20: Geschwindigkeitsvektoren in der Querschnittebene bei $z = 2$ für $\vec{B} = (0, B_y, 0)$.

Geschwindigkeitskomponenten vorliegen. In der oberen Hälfte des Zylinders werden elektrische Ströme in positiver und in der unteren Hälfte in negativer x -Richtung induziert. Die induzierten elektrischen Ströme bewirken in den vertikalen Querschnittebenen ein elektrisches Potential, wie in Abbildung 5.22 dargestellt. Das elektrische Potential wiederum bewirkt, dass die induzierten elektrischen Ströme sich schließlich in vertikalen Querschnittebenen kreisförmig schließen können. Bedingt durch das in Abbildung 5.20 dargestellte lineare Geschwindigkeitsprofil in vertikaler Richtung steigen die elektrischen Ströme mit zunehmendem Abstand vom Mittelpunkt linear bis nahe an den Zylindermantel an.

Die stärkste Dämpfung übt die durch die elektrischen Ströme verursachte Lorentzkraft auf die Strömung in der vertikalen Längsschnittebene aus, da dort die Richtung des elektrischen Stromes senkrecht zum Magnetfeld verläuft. Je weiter man sich von dieser Ebene entfernt, desto mehr nimmt die horizontale Komponente des elektrischen Stromes ab. Hierdurch wird die Lorentzkraft und damit die dämpfende Wirkung auf die Strömung geringer. Dies erklärt die Ausbildung eines in vertikaler Richtung linearen Geschwindigkeitsprofils.

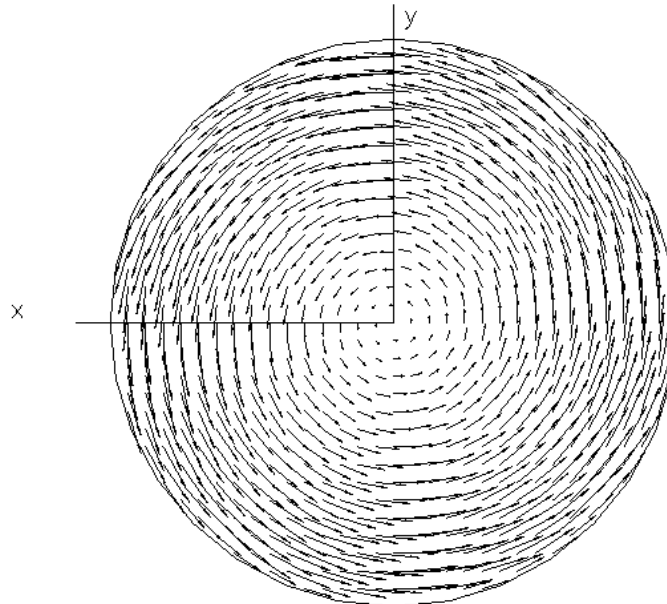


Bild 5.21: Der elektrische Strom in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ für $\vec{B} = (0, B_y, 0)$.

Auch hier zeigen die in den Abbildungen 5.19 bis 5.22 dargestellten errechneten Daten eine gute Übereinstimmung mit den Daten aus [12]. Weiterhin zeigt auch ein quantitativer Vergleich der maximalen Vertikal- und Horizontalgeschwindigkeiten in Tabelle 5.3 eine sehr gute Übereinstimmung mit den Daten aus der Literatur.

An dieser Stelle werden weiterhin experimentelle Untersuchungen von Konvektionsströmungen mit horizontalen Temperaturgradienten zur Programmvalidierung herangezogen. Neben experimentellen Untersuchungen rein hydrodynamischer Strömungen in Rechteckgeometrien (z. B. [92]) werden in [21] Konvektionsströmungen in einem Zylinder unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes experimentell untersucht. Es handelt sich hierbei um einen schlanken Zylinder mit dem Radius $R = 0,02$ m und der Länge $L = 0,4$ m. Das verwendete Fluid ist Quecksilber. An den Stirnseiten befinden sich Kupferplatten. Eine Stirnseite ist beheizt, die

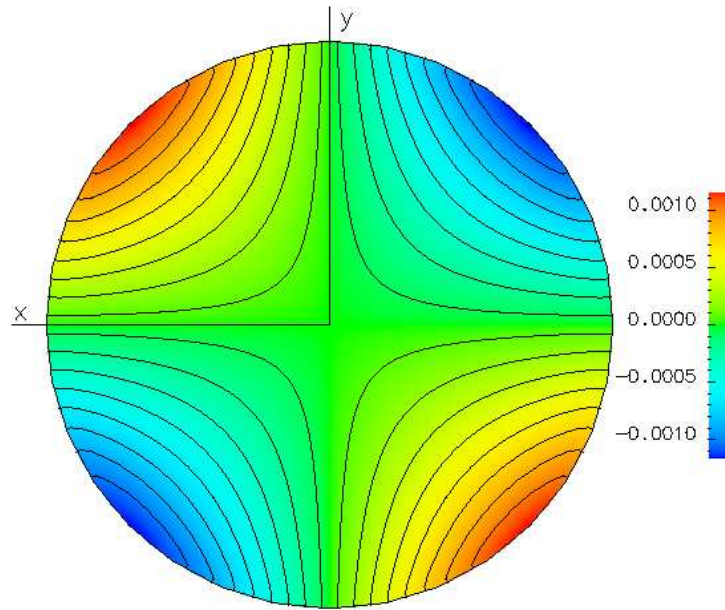


Bild 5.22: Das elektrische Potential in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ für $\vec{B} = (0, B_y, 0)$.

$\vec{B} = (0, B_y, 0)$	$v_{y,max}$	$v_{z,max}$
Literatur	0.0139	0.0086
Eigene Rechnung	0.0143	0.0088
Abweichung	2.8 %	2.3 %

Tabelle 5.3: Vergleich der berechneten maximalen Geschwindigkeiten $v_{y,max}$ im horizontalen Längsschnitt und $v_{z,max}$ im vertikalen Querschnitt bei $z = 2$ mit den Literaturdaten aus [12] für $\vec{B} = (0, B_y, 0)$, $Ha = 150$ und $Gr = 5 \times 10^4$.

gegenüberliegende Stirnseite ist gekühlt. Die Temperaturdifferenz zwischen der warmen und der kalten Stirnseite beträgt $T_2 - T_1 = 14,7K$. Der Zylindermantel besteht aus Glas. Zur Vermeidung eines unerwünschten Wärmetransports über den Zylindermantel ist dieser thermisch isoliert. Da die Wärmeleitfähigkeit von Quecksilber sehr viel größer ist als die Wärmeleitfähigkeit von Glas, wird bei den Berechnungen der Zylindermantel als adiabat angenommen. Die Kupferplatten an den Stirnseiten sind mit einer dünnen Teflonschicht versehen, alle Berandungen sind somit elektrisch isoliert. Am Zylindermantel befinden sich Temperaturmessstellen, mit denen die Temperaturverteilung gemessen wird. Die Rayleigh-Zahl ist wie folgt definiert:

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T R^4}{L \kappa \nu}. \quad (5.8)$$

Durchgeführt werden Experimente mit rein hydrodynamischen Strömungen bei einer Rayleigh-Zahl $Ra = 22600$. Bei dieser Rayleigh-Zahl ergibt sich im Experiment eine turbulente Strömung. Deshalb wird auf die Nachrechnung dieser Ergebnisse verzichtet.

Die ursprünglich turbulente Strömung wird jedoch bereits bei Hartmann-Zahlen $Ha > 10$ aufgrund der dämpfenden Wirkung des Magnetfeldes laminar.

Berechnungen werden bei einer Hartmann-Zahl $Ha = 53.3$ durchgeführt. Für diesen Fall ist in [21] die Temperaturverteilung am Zylindermantel in einem Winkel von 45° zur horizontalen Mittelebene sowie die Temperaturverteilung am Zylindermantel in der vertikalen Mittelebene angegeben. Einen Vergleich der experimentell ermittelten Temperatur am Zylindermantel ist in Abbildung 5.23 dargestellt. Während der Temperaturverlauf an der beheizten Stirnseite und im Zentrum gut übereinstimmt, ergeben sich im Bereich der gekühlten Wand Abweichungen. Auch bei der Temperaturverteilung am Zylindermantel in der vertikalen Mittelebene nach Abbildung 5.24 ergeben sich Abweichungen zwischen den experimentellen und den numerischen Daten. Für das Temperaturprofil am Zylindermantel ist in [21] eine analytische Lösung angegeben. Das analytische Temperaturprofil, welches ebenfalls in Abbildung 5.24 dargestellt ist, zeigt jedoch eine etwas größere maximale bzw. minimale Temperatur als das errechnete Temperaturprofil und weicht damit für die hier behandelte Hartmann-Zahl erheblich von dem gemessenen Profil ab.

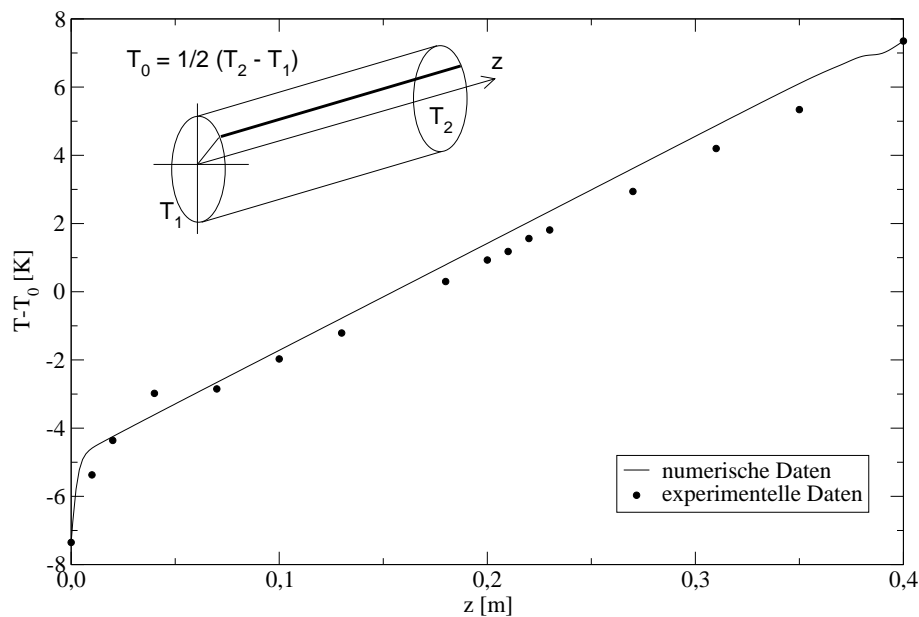


Bild 5.23: Vergleich des berechneten Temperaturprofils am Zylindermantel in einem Winkel von 45° zur horizontalen Mittelebene für $Ra = 22600$ und $Ha = 53,3$ mit den experimentellen Daten aus [21].

Eine Schwierigkeit besteht bezüglich der Auflösung der sehr dünnen Strömungsgrenzschichten an den Stirnseiten. Trotz einer Auflösung von 256 Gitterpunkten in axialer Richtung können diese, bedingt durch die große Länge des Zylinder, nur unzureichend aufgelöst werden. Eine weitere Erhöhung der Auflösung bzw. ein nichtäquidistantes Gitter mit einer feineren Auflösung an den Stirnseiten könnte an dieser Stelle bessere Ergebnisse liefern.

5.1.3.4 Magnetfeld in z -Richtung

Unter dem Einfluss eines achsparallelen Magnetfeldes ist in der horizontalen Längsschnittebene, wie in Abbildung 5.25 dargestellt, eine starke Abschwächung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente durch die Lorentzkräfte im Kern zu beobachten. Im Bereich des Zylindermantels (Seitenwände) treten die größten vertikalen Geschwindigkeiten auf. Geschwindigkeitsüberhöhungen sind ebenfalls beim horizontalen Geschwindigkeitsprofil in den vertikalen Quer-

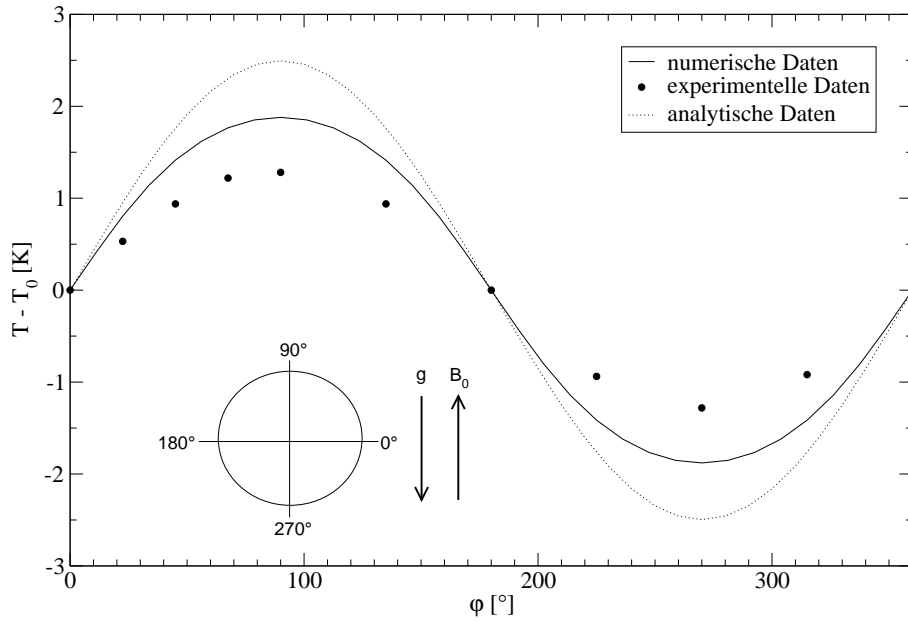


Bild 5.24: Vergleich des berechneten Temperaturprofils am Zylindermantel in der vertikalen Mittelebene für $Ra = 22600$ und $Ha = 53,3$ mit den experimentellen Daten aus [21].

schnitten $z = \text{const.}$ zu beobachten. Abbildung 5.26 zeigt ein solches Geschwindigkeitsprofil in der vertikalen Ebene $z = 2$. Im Gegensatz zum Geschwindigkeitsprofil in der horizontalen Längsschnittebene unter dem Einfluss des vertikalen Magnetfeldes nach Abbildung 5.19 treten beim hier betrachteten Fall in der gesamten horizontalen Mittelebene vertikale Geschwindigkeitskomponenten auf. Um eine bessere Visualisierung des Geschwindigkeitsfeldes zu ermöglichen, ist, wie in den beiden Kapiteln zuvor, bei der Abbildung 5.26 die Perspektive gegenüber der Abbildung 5.25 verändert.

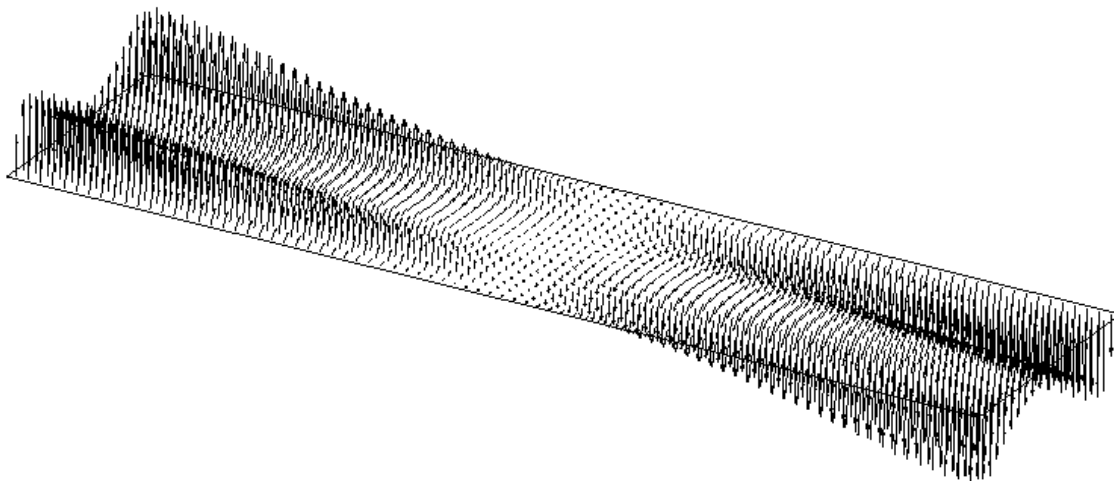


Bild 5.25: Geschwindigkeitsvektoren in der horizontalen Längsschnittebene für $\vec{B} = (0, 0, B_z)$.

Wie eingangs erwähnt, werden in der Nähe der Stirnseiten elektrische Ströme induziert, da dort große vertikale Geschwindigkeitskomponenten vorliegen. Durch die auftretenden Lorentzkräfte, welche entgegengesetzt zur Strömungsrichtung wirken, wird das Fluid am Aufsteigen an der warmen, bzw. Absteigen an der kalten Stirnseite gehemmt, wodurch auch an weiter

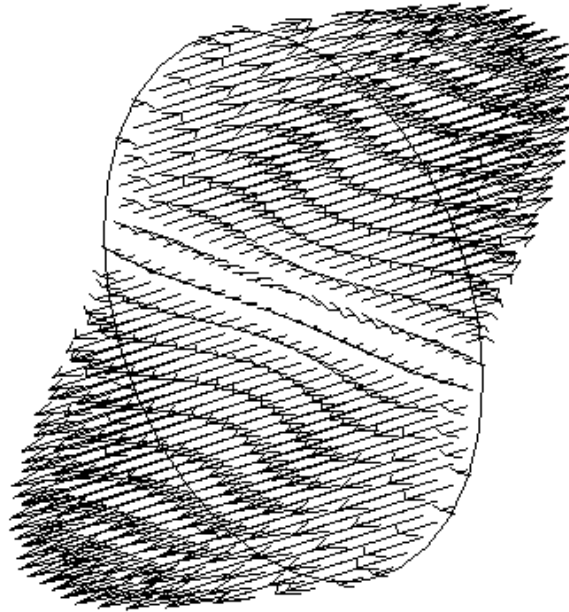


Bild 5.26: Geschwindigkeitsvektoren in der Querschnittebene bei $z = 2$ für $\vec{B} = (0, 0, B_z)$.

von den Stirnseiten entfernten vertikalen Querschnittebenen das Fluid in vertikaler Richtung strömt. Dadurch erklärt sich das in z -Richtung lineare Geschwindigkeitsprofil nach Abbildung 5.25.

An der kalten Stirnseite bei $z = 0$ strömt das Fluid abwärts und induziert einen elektrischen Strom in negativer x -Richtung, während an der heißen Stirnseite bei $z = 4$ durch das aufsteigende Fluid ein elektrischer Strom in positiver x -Richtung induziert wird. Aufgrund der induzierten Ströme ergibt sich in den jeweiligen vertikalen Querschnitten ein elektrisches Potential, wie in Abbildung 5.28 für $z = 0.5$ dargestellt. Das Potential weist in x -Richtung einen starken Gradienten auf. In Fließrichtung der induzierten elektrischen Ströme nimmt das elektrische Potential zu.

Die Schließung der elektrischen Ströme erfolgt in der Nähe der Stirnseiten im Wesentlichen durch zwei überlagerte, gegenläufig rotierende Walzen. Diese Walzen sind in Abbildung 5.27 in der vertikalen Ebene $z = 0.5$ dargestellt. Aus Abbildung 5.27 ist weiterhin zu ersehen, dass im Zentrum, d.h. in der Nähe der Zylinderachse, die größten elektrischen Ströme fließen. Dadurch lässt sich das Geschwindigkeitsprofil in der horizontalen Mittelebene mit der starken Abschwächung der vertikalen Geschwindigkeiten im Zentrum erklären.

Die elektrischen Ströme schließen sich in einem zweiten Pfad ebenfalls über die horizontale Längsschnittebene. In Abbildung 5.29 ist der elektrische Strom in der horizontalen Längsschnittebene sowie in drei vertikalen Querschnitten bei $z = 1$, $z = 2$ und $z = 3$ dargestellt. In den vertikalen Querschnittebenen bei $z = 1$ und $z = 3$ zeigt sich ein ähnlicher Stromfluss wie in Abbildung 5.27. In der Mitte des Zylinders bei $z = 2$ fließen die elektrischen Ströme ausschließlich in Achsrichtung. Dort werden keine elektrischen Ströme induziert, da die vertikale Geschwindigkeit $v_y = 0$ ist. Das elektrische Potential ist in dieser Ebene konstant.

Auch hier ist in Tabelle 5.4 ein quantitativer Vergleich der maximalen vertikalen und horizontalen Geschwindigkeit angegeben. Dieser Vergleich zeigt, dass eine sehr gute Übereinstimmung

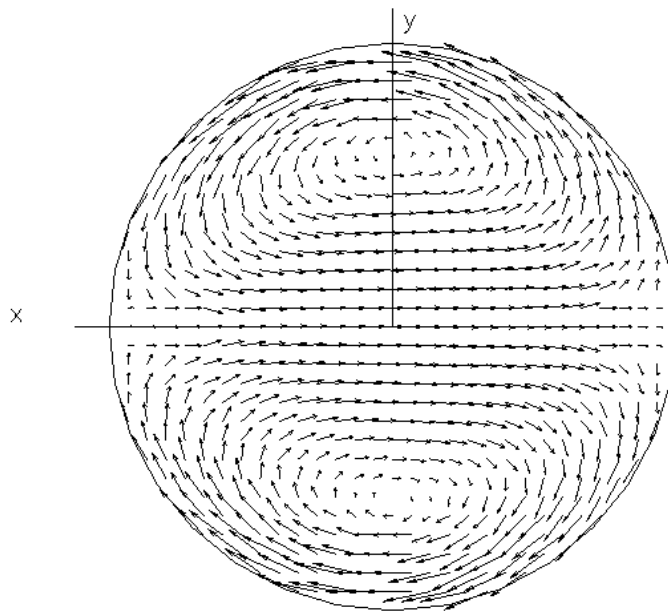


Bild 5.27: Der elektrische Strom in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ für $\vec{B} = (0, 0, B_z)$.

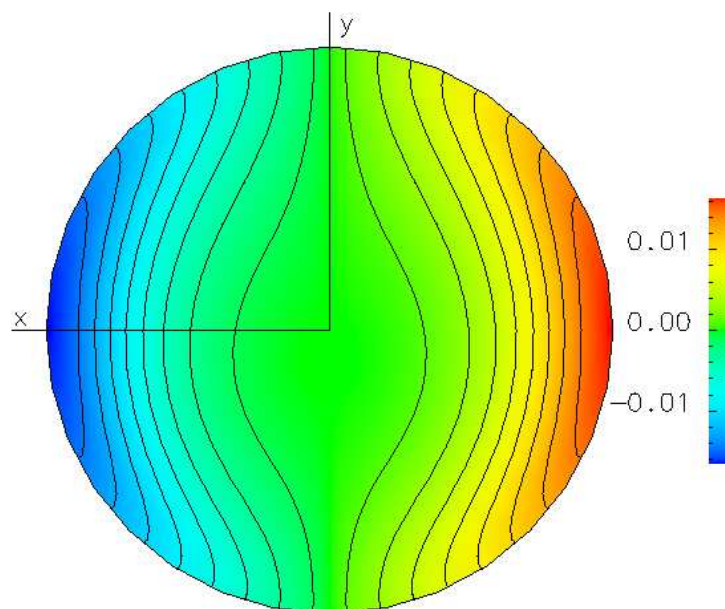


Bild 5.28: Das elektrische Potential in der vertikalen Querschnittebene bei $z = 0.5$ für $\vec{B} = (0, 0, B_z)$.

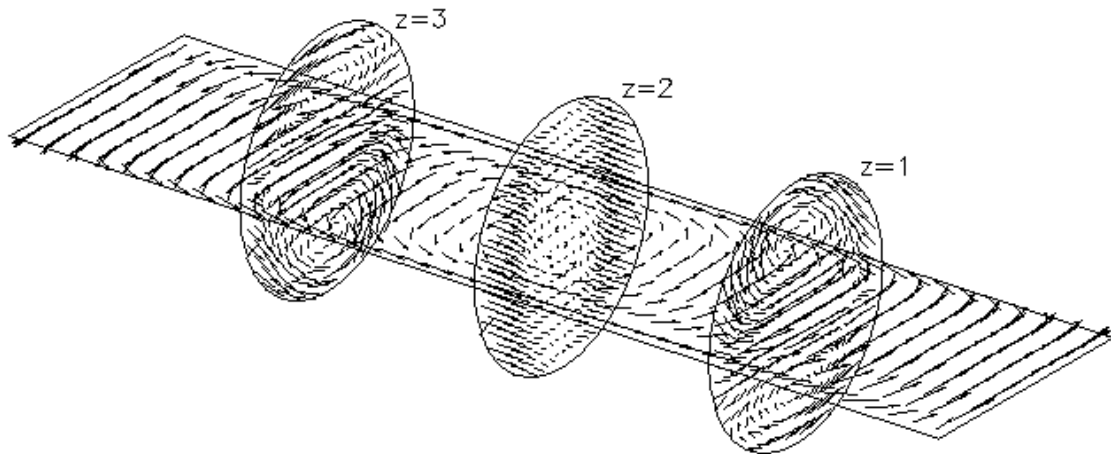


Bild 5.29: Der elektrische Strom in der horizontalen Längsschnittebene sowie in den vertikalen Querschnittebenen bei $z = 1$, $z = 2$ und $z = 3$ für $\vec{B} = (0, 0, B_z)$.

mit den in [12] angegebenen Daten vorliegt.

$\vec{B} = (0, 0, B_z)$	$v_{y,max}$	$v_{z,max}$
Literatur	0.078	0.3637
Eigene Rechnung	0.079	0.3702
Abweichung	1.3 %	1.7 %

Tabelle 5.4: Vergleich der berechneten maximalen Geschwindigkeiten $v_{y,max}$ im horizontalen Längsschnitt und $v_{z,max}$ im vertikalen Querschnitt bei $z = 2$ mit den Literaturdaten aus [12] für $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, $Ha = 150$ und $Gr = 5 \times 10^4$.

5.1.4 Magnetokonvektion in stehenden Zylindern

In [97] und [98] werden durch vertikale Temperaturgradienten erzeugte konvektive Instabilitäten in stehenden Zylindern numerisch untersucht. Der Zylindermantel ist hierbei in allen Fällen adiabat.

In [97] werden ausschließlich hydrodynamische Vorgänge untersucht, während in [98] der Einfluss von vertikalen und horizontalen Magnetfeldern untersucht wird. Hydrodynamische Rechnungen zu dieser Thematik finden sich z. B. auch in [14] und [69] sowie in [100]. Die dort gefundenen kritischen Grashof-Zahlen zeigen gute Übereinstimmung zu den in [97] berechneten Werten. Im folgenden werden verschiedene Ergebnisse für hydrodynamische Strömungen aus [97] sowie Strömungen unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes aus [98] nachgerechnet und die Ergebnisse diskutiert. Bei allen Berechnungen beträgt die Prandtl-Zahl $Pr = 1$.

5.1.4.1 Hydrodynamische Rechnungen

Die in [97] untersuchten Zylinder weisen verschiedene Höhen-Durchmesser-Verhältnisse $A = H/D$ auf. Insbesondere Zylinder mit Höhen-Durchmesser-Verhältnissen $A = 0.5$ und $A = 1$ werden ausführlich untersucht. Für diese Geometrien werden unter anderem Stabilitätsdiagramme angegeben.

Konvektion setzt ein, wenn die Temperaturdifferenz zwischen der oberen und unteren Stirnseite $\Delta T = T_h - T_c$ eine bestimmte kritische Temperaturdifferenz überschreitet. Diese kritische Temperaturdifferenz wird in dimensionsloser Formulierung durch die mit dem Durchmesser D und der Höhe H gebildete Grashof-Zahl

$$Gr = \frac{g \beta (T_h - T_c) D^4}{H \nu^2} \quad (5.9)$$

ausgedrückt. Abhängig von der Grashof-Zahl und dem Höhen-Durchmesser-Verhältnis A stellen sich verschiedene Strömungsmuster ein. Die wichtigsten Strömungsmuster werden dargestellt durch die Moden $m = 0$, $m = 1$ und $m = 2$. Mode $m = 0$ stellt eine rotationssymmetrische Strömung mit im Kern aufwärts und am Mantel abwärts strömendem Fluid dar. In Abbildung 5.30 ist Mode $m = 0$ im Zylinder mit $A = 1$ durch einen Isolinenplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene dargestellt. Hierbei kennzeichnen rote Bereiche aufwärts und blaue Bereiche abwärts strömendes Fluid. Ebenfalls dargestellt sind Vektorpfeile des Geschwindigkeitsfeldes in einer vertikalen Mittelebene. Die Grashof-Zahl beträgt hierbei $Gr = 11000$ und liegt somit etwas über der in [97] angegebenen kritischen Grashof-Zahl $Gr = 10752$. Für Mode $m = 0$ gibt es eine weitere Lösung, die sich aus einer Spiegelung um die horizontale Mittelebene ergibt. Das Fluid strömt dann im Innern abwärts und am Mantel nach oben.

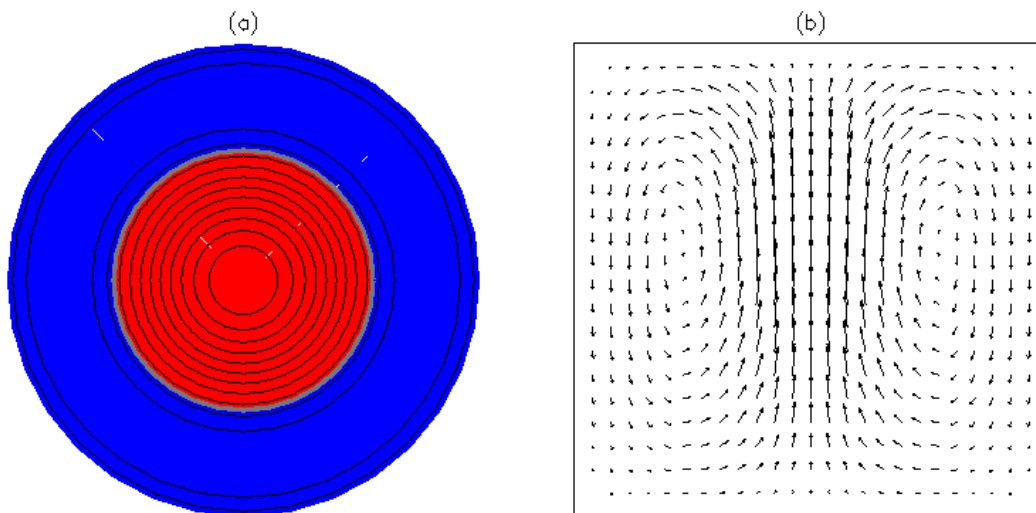


Bild 5.30: Mode $m = 0$ bei $Gr = 11000$ und $A = 1$. Isolinenplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) und Vektorplot in einer beliebigen vertikalen Mittelebene (b).

Bei Mode $m = 1$ strömt das Fluid in einer durch eine vertikale Mittelebene (Trennebene) getrennten Zylinderhälfte nach oben und bewegt sich in der gegenüberliegenden Zylinderhälfte

abwärts. Die Abbildung 5.31 zeigt den Mode $m = 1$ bei einer Grashof-Zahl von $Gr = 5000$. Dargestellt ist, wie in Abbildung 5.30, ein Isolinenplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene sowie das Geschwindigkeitsfeld durch Vektorpfeile in einer zur Trennebene senkrecht stehenden vertikalen Mittelebene. Die für diesen Mode für $A = 1$ in [97] angegebene kritische Grashof-Zahl ist $Gr_{krit} = 3696$. Mittels einer linearen Stabilitätsanalyse wird das Einsetzen der Konvektion im stehenden Zylinder für $A = 1$ in [69] mit $Gr_{krit} = 3610$ angegeben.

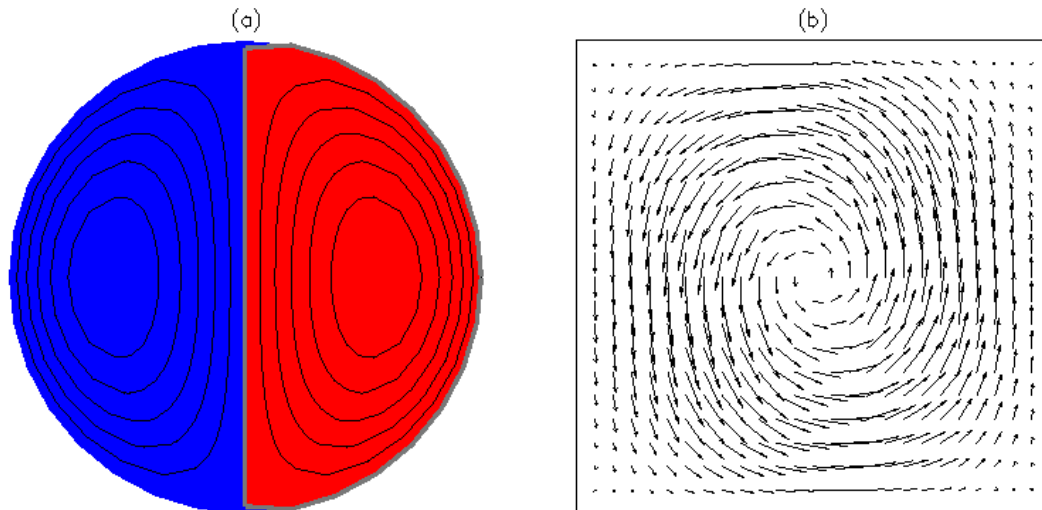


Bild 5.31: Mode $m = 1$ bei $Gr = 5000$ und $A = 1$. Isolinenplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) und Vektorplot in der vertikalen Mittelebene senkrecht zur Trennebene (b).

Bei Mode $m = 2$ steigt das Fluid in zwei diagonal gegenüberliegenden Kreissektoren auf und fällt in den beiden anderen Sektoren ab. Dieser Mode ist in Abbildung 5.32 für $A = 1$ bei einer Grashof-Zahl $Gr = 10000$ dargestellt. In diesem Fall liegt die in [97] angegebene kritische Grashof-Zahl bei $Gr_{krit} = 8939$. Für die Moden $m = 1$ und $m = 2$ ergeben sich unendlich viele Lösungen, die sich durch unterschiedliche Lagen der Trennebenen in Umfangsrichtung unterscheiden.

Bei $A = 1$ ist nach [97] Mode $m = 1$ ein stabiler Mode. Mode $m = 0$ und Mode $m = 2$ sind instabile Moden. Um Mode $m = 0$ und Mode $m = 2$ berechnen zu können, wird als Anfangsbedingung die Temperaturverteilung so gewählt, dass der jeweilige Mode begünstigt wird. Erwartungsgemäß stellt sich für die Moden $m = 0$ und $m = 2$ jeweils keine stationäre Lösung ein. Diese beiden Moden verschwinden nach kurzer Zeit zugunsten von Mode $m = 1$. Zur Berechnung der beiden instabilen Moden müssen deshalb für $A = 1$ zusätzliche Symmetriebedingungen vorgegeben werden.

Für $A = 0.5$ setzt nach [97] Konvektion mit dem rotationssymmetrischen Mode $m = 0$ bei $Gr = 35854$ ein. Erst bei Grashof-Zahlen $Gr > 40000$ wird Mode $m = 0$ durch Mode $m = 2$ abgelöst. Für $Gr = 40000$ sind in [97] numerische Daten für die maximal auftretende vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene sowie die Nußelt-Zahl am oberen bzw. unteren Rand angegeben. Diese Daten werden mit den Daten aus eigenen Rechnungen verglichen. Hierbei wird eine Auflösung von $32 \times 16 \times 63$ Gitterpunkten in r , φ und z -Richtung gewählt.

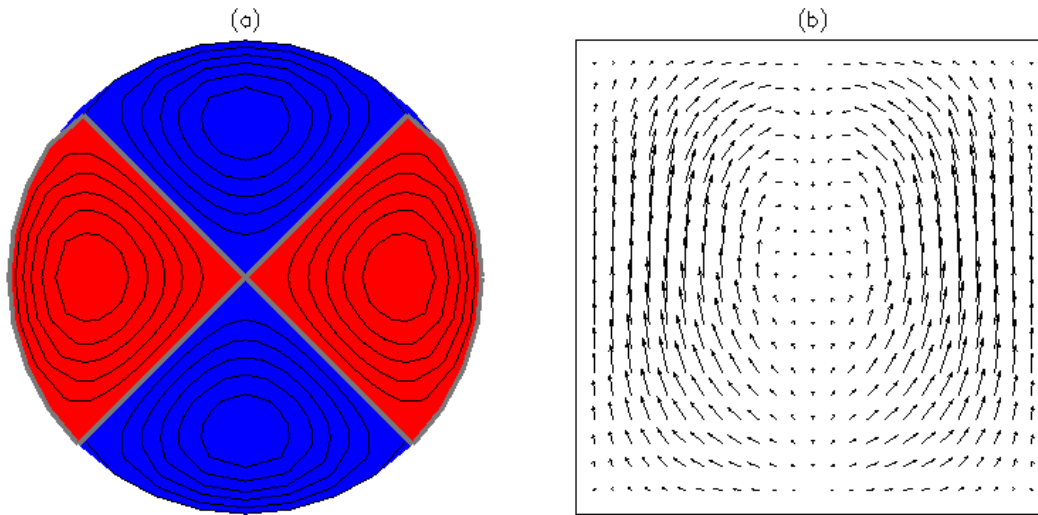


Bild 5.32: Mode $m = 2$ bei $Gr = 10000$ und $A = 1$. Isolinienplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) und Vektorplot in der vertikalen Mittelebene, welche die Sektoren mit aufsteigendem Fluid halbiert (b).

Die errechnete maximale vertikale Geschwindigkeit in der Mittelebene und die Nußelt-Zahl sind in Tabelle 5.5 dargestellt. Diese Daten stimmen sehr gut mit den Daten aus [97] überein.

	w_{max}	Nu
Literatur	0.3293×10^{-3}	1.0683
Eigene Rechnung	0.3341×10^{-3}	1.0704
Abweichung	1.4 %	0.2 %

Tabelle 5.5: Vergleich der berechneten maximalen vertikalen Geschwindigkeit w_{max} in der horizontalen Mittelebene sowie der Nußelt-Zahl mit den Literaturdaten aus [97] bei $Ra = 4 \times 10^4$, $Pr = 1$ und $A = 0.5$.

5.1.4.2 Horizontales Magnetfeld

Unter der Wirkung eines horizontalen Magnetfeldes verschwindet der im rein hydrodynamischen Fall auftretende Mode $m = 0$. Dies ist dadurch zu erklären, dass unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes die im rein hydrodynamischen Fall vorhandene Invarianz in Umfangsrichtung nicht mehr gegeben ist. Mode $m = 0$ wird in den neuen Mode $m = 02$ überführt, der durch zwei gegenläufig rotierende Walzen gekennzeichnet ist. Nach [98] liegt die Rotationsachse der Walzen bei $A = 0.5$ parallel zum Magnetfeld. Dieser Mode wird als Mode $m = 02_{\parallel}$ bezeichnet. Bei $A = 1$ hingegen liegt die Rotationsachse der Walzen orthogonal zum Magnetfeld. Der dort auftretenden Mode wird als Mode $m = 02_{\perp}$ bezeichnet. Die Umbildung in Mode $m = 02$ beginnt bereits bei niedrigen Hartmann-Zahlen $Ha \geq 5$.

In Abbildung 5.33 ist für $A = 0.5$ die Umbildung von Mode $m = 0$ anhand von Isolinien der

vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) sowie durch Vektorpfeile in der vertikalen Mittelebene (b) dargestellt. Aus Abbildung (a) ist zu erkennen, dass sich der Durchmesser des im Innern aufsteigenden Fluidkerns in Richtung des Magnetfeldes vergrößert. Die Geschwindigkeit des im Kern aufsteigenden Fluids ist hierbei deutlich größer als die Geschwindigkeit des am Zylindermantel abwärts strömenden Fluids (vgl. Abbildung 5.33 (b)). Die Grashof-Zahl beträgt $Gr = 40000$, die Hartmann-Zahl beträgt $Ha = 5$. Bei einer Grashof-Zahl $Gr = 40000$ liegt im rein hydrodynamischen Fall, wie im vorigen Kapitel gezeigt, Mode $m = 0$ stabil vor.

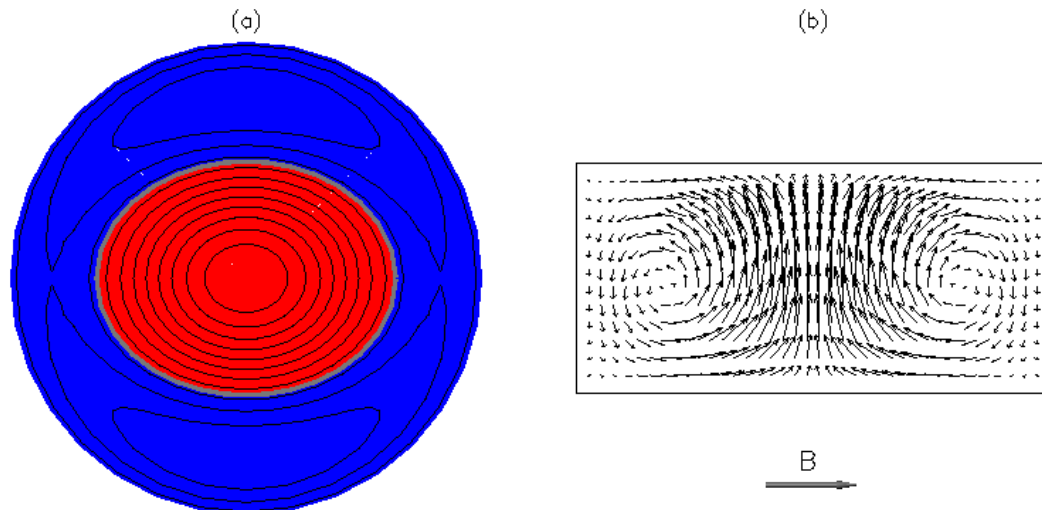


Bild 5.33: Mode $m = 02_{||}$ bei $Gr = 40000$, $Ha = 5$ und $A = 0.5$. Isolinesplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) und Vektorplot der Geschwindigkeit in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene (b).

Wird die Hartmann-Zahl auf $Ha = 15$ gesteigert, so ist, wie in Abbildung 5.34 zu erkennen, der Mode $m = 02$ bereits voll ausgebildet. Die Rotationsachsen der beiden Walzen liegen, wie in Abbildung (a) zu erkennen, parallel zum Magnetfeld. Abbildung (b), in welcher die Strömung in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene dargestellt ist, zeigt, dass diese Strömung über die gesamte Höhe des Zylinders ausgebildet ist.

Eine weitere Steigerung der Hartmann-Zahl auf $Ha = 30$ verändert, wie in Abbildung 5.35 dargestellt, die Struktur der Strömung im Vergleich zu $Ha = 15$ kaum. Im Gegensatz zu den Rechnungen bei $Ha = 5$ und $Ha = 15$, bei denen die Grashof-Zahl $Gr = 40000$ beträgt, wird bei $Ha = 30$ die Grashof-Zahl auf $Gr = 46000$ erhöht. Dies ist notwendig, da das Magnetfeld eine stabilisierende Wirkung besitzt, welche das Einsetzen der Konvektion zu höheren Grashof-Zahlen verschiebt. Bei allen Rechnungen wird als Anfangsbedingung eine hydrodynamische Strömung mit $Gr = 40000$ und Mode $m = 0$ gewählt.

Durch das horizontale Magnetfeld werden im Wesentlichen horizontale, zum Magnetfeld orthogonale elektrische Ströme induziert, da das Fluid überwiegend in vertikaler Richtung strömt. In Abbildung 5.36 sind die elektrischen Ströme in der horizontalen und in der zum Magnetfeld normalen vertikalen Mittelebene für $Gr = 40000$ und $Ha = 15$ dargestellt. Die elektrischen Ströme schließen sich in horizontalen Ebenen über zwei Wirbel im Bereich mit aufwärts strömendem Fluid sowie durch jeweils zwei Wirbel in den Bereichen mit abwärts fließendem Fluid. Weiterhin ist in Abbildung 5.36 das elektrische Potential in der horizontalen und in

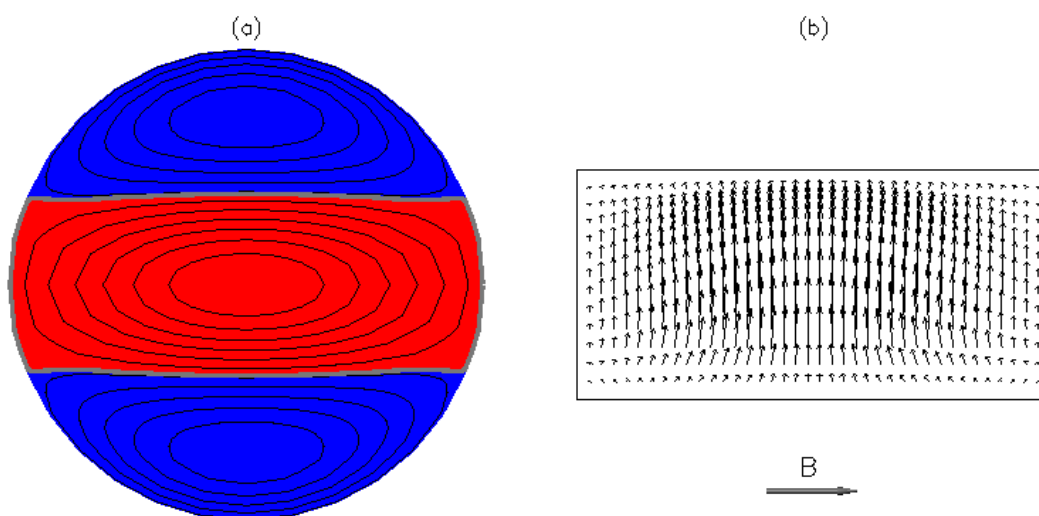


Bild 5.34: Mode $m = 02_{||}$ bei $Gr = 40000$, $Ha = 15$ und $A = 0.5$. Isolinenplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) und Vektorplot der Geschwindigkeit in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene (b).

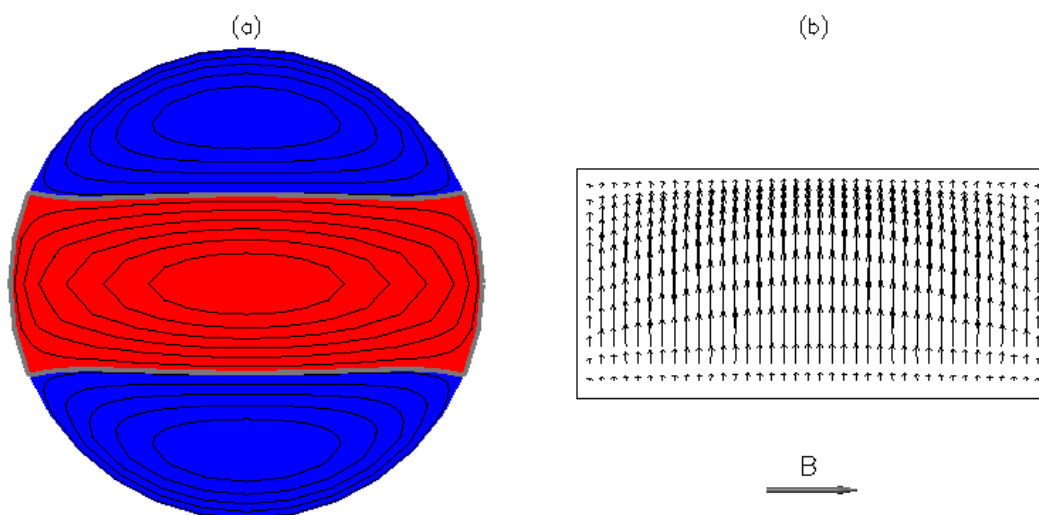


Bild 5.35: Mode $m = 02_{||}$ bei $Gr = 46000$, $Ha = 30$ und $A = 0.5$. Isolinenplot der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene (a) und Vektorplot der Geschwindigkeit in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene (b).

der vertikalen Mittelebene dargestellt. Das elektrische Potential besitzt Extremwerte an den Trennflächen zwischen aufwärts und abwärts strömendem Fluid. Dort, wo das elektrische Potential maximal ist, treffen die in horizontaler Richtung normal zum Magnetfeld nach außen fließenden induzierten elektrische Ströme auf die im Bereich mit abwärts strömendem Fluid induzierten, entgegengesetzt fließenden elektrischen Ströme aufeinander. Das elektrische Potential lenkt die Richtung der elektrischen Ströme in eine zum Magnetfeld parallele Richtung um. Hierdurch erklären sich die in den horizontalen Ebenen auftretenden Wirbelströme. Der elektrische Strom und das elektrische Potential nach Abbildung 5.36 stimmen mit den in [98] angegebenen Daten überein.

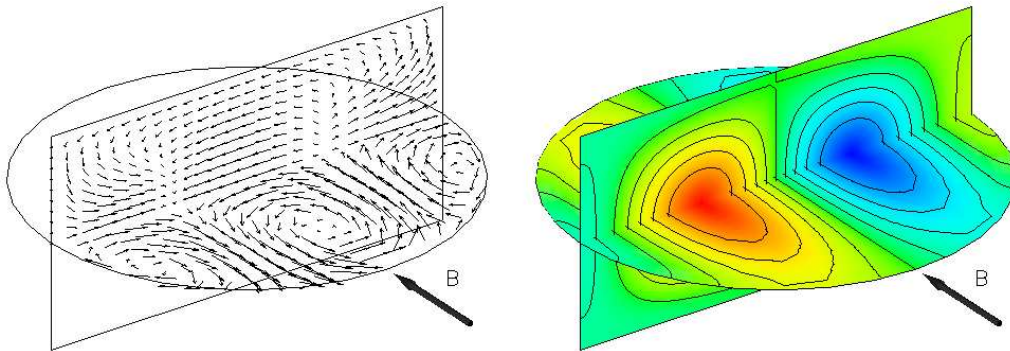


Bild 5.36: Mode $m = 02_{\parallel}$ bei $Gr = 40000$, $Ha = 15$ und $A = 0.5$. Elektrischer Strom und elektrisches Potential in der horizontalen Mittelebene und der zum Magnetfeld senkrechten vertikalen Mittelebene.

Wird das Höhen-Durchmesserverhältnis $A = 1$ gewählt, so wird bei den eigenen Rechnungen der Mode $m = 0$ nicht in den Mode $m = 02_{\perp}$ überführt. Aus Mode $m = 0$ entsteht unter dem Einfluss des horizontalen Magnetfeldes zunächst der Mode $m = 2$. Auch Mode $m = 2$ ist instabil und wird durch Mode $m = 1_{\perp}$ und schließlich durch Mode $m = 1_{\parallel}$ abgelöst. Mode $m = 1_{\perp}$ ist hierbei der in Abbildung 5.31 dargestellte Mode $m = 1$ mit einer senkrecht zum Magnetfeld ausgerichteten Rotationsachse. Bei Mode $m = 1_{\parallel}$ hingegen ist die Rotationsachse parallel zum Magnetfeld ausgerichtet.

Im Gegensatz zu $A = 0.5$ ist bei $A = 1$ der Mode $m = 0$ ein instabiler Mode. Dies ist vermutlich der Grund, weshalb das Auftreten von Mode $m = 02_{\perp}$ bei den eigenen Rechnungen für $A = 1$ nicht beobachtet wird. Das Auftreten der Moden $m = 2$, $m = 1_{\perp}$ und $m = 1_{\parallel}$ ist jedoch in Übereinstimmung mit den in [98] angegebenen Stabilitätskarten.

5.1.5 Zusammenfassung der Validierung

Mit dem vorliegenden Rechenprogramm wurden verschiedene Strömungsvorgänge berechnet und mit experimentellen, numerischen und analytischen Daten aus unterschiedlichen Veröffentlichungen verglichen. Hierbei wurden sowohl qualitative Vergleiche der berechneten Strömungen und Temperaturfelder als auch quantitative Vergleiche von Geschwindigkeiten, Temperaturen und Nußelt-Zahlen vorgenommen.

Da keine Veröffentlichung zu magnetohydrodynamischen Strömungen in Zylindern mit internen Wärmequellen vorliegt, konnten solche Strömungen im Rahmen der Validierung nicht

berechnet werden. Um sicherzustellen, dass das Rechenprogramm für solche Aufgabenstellungen dennoch richtige Ergebnisse liefert, werden hydrodynamische Strömungen mit internen Wärmequellen in einem stehenden Zylinder berechnet. In einem weiteren Schritt wird zur Validierung der Magneto hydrodynamik eine Konvektionsströmung in einem liegenden Zylinder mit einer beheizten und einer gekühlten Stirnseite bei einer für Flüssigmetalle typischen Prandtl-Zahl durchgeführt. Hierbei werden Berechnungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in verschiedenen Raumrichtungen durchgeführt. Ein weiteres Kapitel behandelt durch vertikale Temperaturgradienten erzeugte konvektive Instabilitäten mit und ohne Magnetfelder. Hierbei wird das Entstehen von verschiedenen Strömungsmustern sowie die Auswirkungen von Magnetfeldern auf diese Strömungsmuster untersucht. Alle Validierungsrechnungen haben stationären Charakter.

Die Ergebnisse der Testrechnungen zeigen, dass das Rechenprogramm sowohl für stehende als auch liegende Zylinder (d. h. der Schwerkraftvektor verläuft in Achsrichtung und normal zur Zylinderachse) mit verschiedenen Höhen-Durchmesser verhältnissen, bei Prandtl-Zahlen $Pr \ll 1$ und Hartmann-Zahlen im Bereich von $Ha < 150$ gute Ergebnisse liefert.

Es kann davon ausgegangen werden, dass das Rechenprogramm zur Berechnung der im Rahmen dieser Arbeit behandelten Aufgabenstellungen ausreichend validiert und somit geeignet ist.

Die in diesem Kapitel behandelten Aufgabenstellungen gehen zum Teil über die reine Validierung hinaus. Deshalb enthält dieses Kapitel bereits erste Ergebnisse zu Strömungen, insbesondere mit externer Beheizung, in stehenden und liegenden Zylindern unter dem Einfluss von Magnetfeldern.

5.2 Stehender Zylinder mit gekühltem Zylindermantel

Im folgenden werden durch konstante interne Wärmequellen erzeugte Konvektionsströmungen in einem stehenden Zylinder nach Abbildung 5.37 untersucht. Das Höhen-Durchmesserverhältnis des Zylinders beträgt $A = H/D = 1$. Die Stirnseiten sind adiabatisch, der Zylindermantel ist isotherm. Alle Rechnungen werden bei einer Prandtl-Zahl $Pr = 0.1$ durchgeführt. Berechnungen werden sowohl für den Fall rein hydrodynamischer Strömungen als auch unter dem Einfluss eines konstanten vertikalen oder horizontalen Magnetfeldes bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen durchgeführt. Alle Berandungen werden als elektrisch nichtleitend angenommen.

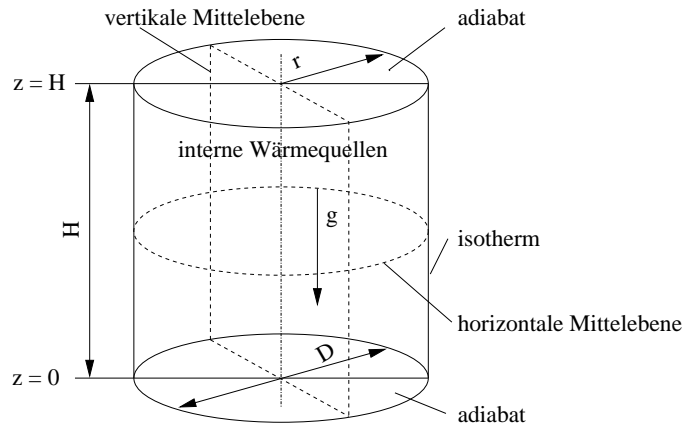


Bild 5.37: Stehender Zylinder mit internen Wärmequellen und gekühltem Zylindermantel.

Als charakteristische Länge dient der Durchmesser D des Zylinders. Hierdurch ergibt sich die Rayleigh-Zahl für die Beheizung durch interne Wärmequellen zu

$$Ra_{iW} = \frac{g\beta q D^5}{\kappa\nu\lambda_{WL}}. \quad (5.10)$$

Als Kennzahlen für den Wärmeübergang dienen die beiden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 (vgl. Kapitel 2.4). Zur Definition dieser beiden Nußelt-Zahlen ist die maximale Temperatur $T_{max,WL}$ sowie die mittlere Temperatur $T_{m,WL}$ bei reiner stationärer Wärmeleitung erforderlich. Aus der Integration der Energiegleichung ergibt sich mit den gewählten Randbedingungen und $D = 1$ das folgende, nur vom Radius r abhängige Temperaturprofil

$$T_{WL}(r) = -\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{16}. \quad (5.11)$$

Aus diesem Temperaturprofil ergibt sich die maximale Temperatur bei $r = 0$ zu

$$T_{max,WL} = \frac{1}{16}. \quad (5.12)$$

Weiterhin ergibt sich die mittlere Temperatur zu

$$T_{m,WL} = 8 \int_{r=0}^{r=\frac{1}{2}} r T_{WL}(r) dr = \frac{1}{32}. \quad (5.13)$$

Die Nußelt-Zahl Nu_1 , welche das Verhältnis zwischen der maximalen Temperatur im Falle der reinen Wärmeleitung $T_{max,WL}$ und der bei konvektivem Wärmeübergang auftretenden Maximaltemperatur T_{max} darstellt, berechnet sich somit zu

$$Nu_1 = \frac{1}{16} \frac{1}{T_{max}}. \quad (5.14)$$

Nu_2 stellt das Verhältnis der mittleren Temperatur im Falle der reinen Wärmeleitung $T_{m,WL}$ zu der bei Konvektion vorliegenden mittleren Temperatur T_m dar. Somit ergibt sich Nu_2 zu

$$Nu_2 = \frac{1}{32} \frac{1}{T_m}. \quad (5.15)$$

5.2.1 Hydrodynamische Konvektion

Im rein hydrodynamischen Fall erhält man bis zu einer bestimmten Rayleigh-Zahl Ra_{iW} eine rotationssymmetrische stationäre Strömung. Aufgrund der Aufheizung durch die internen Wärmequellen ist die Strömung im Innern des Zylinders aufwärts gerichtet. Am isothermen Zylindermantel kühlt sich das Fluid wieder ab, wodurch dort eine abwärts gerichtete Strömung entsteht.

Stationäre Lösungen existieren für $Ra_{iW} < 10^7$. Wird die Rayleigh-Zahl weiter erhöht, so werden instationäre Lösungen errechnet. Bei Rayleigh-Zahlen $Ra_{iW} < 10^4$ dominiert im Wesentlichen die Wärmeleitung, konvektiver Wärmetransport ist nur von geringer Bedeutung. Aus diesem Grund werden im folgenden die Ergebnisse für $Ra_{iW} = 10^4 - 10^6$ dargestellt.

In Abbildung 5.38 sind Geschwindigkeitsvektoren sowie die Temperaturverteilung in einer vertikalen Mittelebene für $Ra_{iW} = 10^4$, $Ra_{iW} = 10^5$ und $Ra_{iW} = 10^6$ dargestellt. Für $Ra_{iW} = 10^4$ ergibt sich ein nahezu horizontaler Temperaturgradient. Der Wärmetransport erfolgt fast ausschließlich durch Wärmeleitung, da es sich bei dem betrachteten Fluid mit $Pr = 0.1$ um einen sehr guten Wärmeleiter handelt. Der ringförmige Wirbel erstreckt sich über die gesamte Höhe des Zylinders. Bei $Ra_{iW} = 10^5$ ist der ringförmige Wirbel im oberen Bereich des Zylinders stärker ausgebildet. Anhand der Isothermen lässt sich erkennen, dass bei $Ra_{iW} = 10^5$ in der unteren Hälfte des Zylinders und in der Nähe des Zylindermantels im Wesentlichen noch ein horizontaler Temperaturgradient vorliegt. Dies zeigt, dass dort ein Großteil der Wärme durch Wärmeleitung abgeführt wird. Bei $Ra_{iW} = 10^6$ ist der Wirbel stärker ausgeprägt und noch weiter in den oberen Bereich des Zylinders verlagert. Ein Teil des im oberen Bereich an der Zylinderwand stark abgekühlten Fluids strömt bereits im Bereich der horizontalen Mittelebene wieder in den Kern. Hierdurch nehmen die Isothermen in diesem Bereich einen wellenförmigen Verlauf an.

Einen weiteren Einblick in das Strömungsmuster gibt Abbildung 5.39. Dargestellt ist ein Oberflächenplot der Trennoberfläche zwischen aufwärts und abwärts strömendem Fluid für $Ra_{iW} = 10^6$. Auf der Trennoberfläche ist die vertikale Geschwindigkeit $v_z = 0$. Innerhalb dieser Oberfläche strömt das Fluid nach oben, außerhalb nach unten. Im Bereich der horizontalen Mittelebene hat der aufwärts gerichtete Fluidkern eine Einschnürung. Nach unten erweitert sich der Fluidkern mit dem aufsteigenden Fluid kegelförmig, da kaltes Fluid radial nach innen strömt.

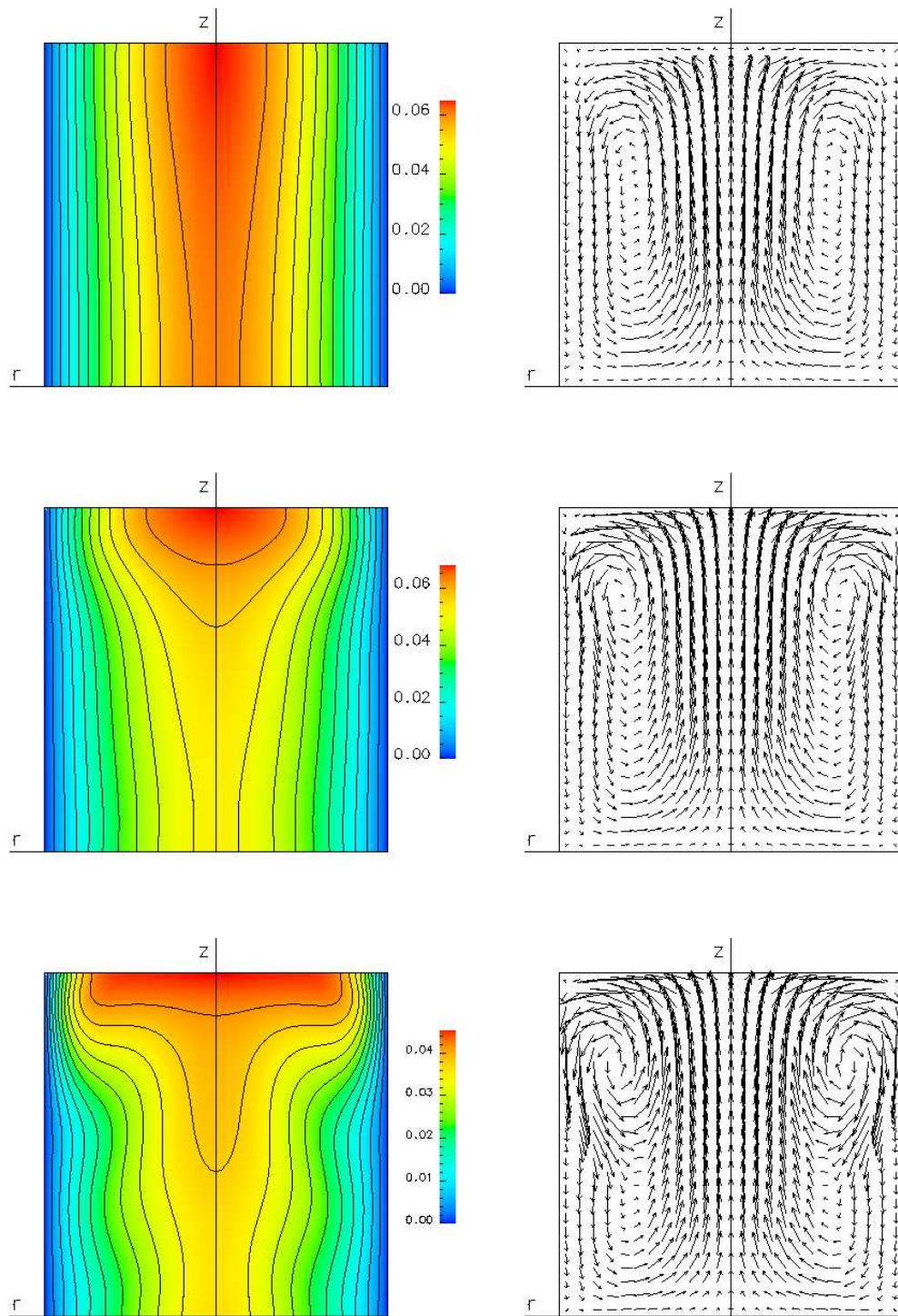


Bild 5.38: Isothermen und Geschwindigkeitsvektoren für $Ra_{iW} = 10^4$ (oben), $Ra_{iW} = 10^5$ (mitte) und $Ra_{iW} = 10^6$ (unten) für $Pr = 0.1$ und $Ha = 0$ in einer vertikalen Mittelebene.

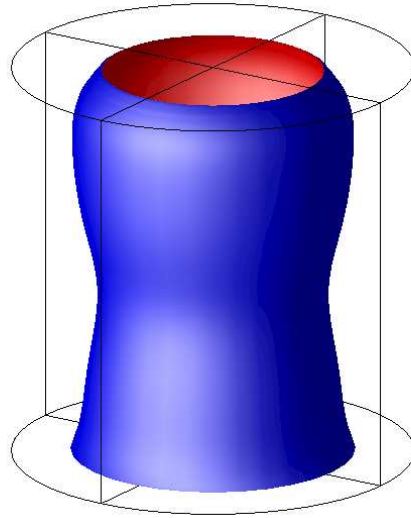


Bild 5.39: Oberflächenplot der Trennfläche zwischen aufwärts und abwärts strömendem Fluid ($v_z = 0$) für $Ra_{iW} = 10^6$ und $Pr = 0.1$.

Die beiden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 für diese Berechnungen sind in Tabelle 5.6 zusammengefasst. Für $Ra_{iW} = 10^4$ und 10^5 ergibt sich $Nu_1 < 1$. Dies bedeutet, dass die maximal auftretende Temperatur oberhalb der maximalen Temperatur bei reiner Wärmeleitung liegt. Dieser Effekt entsteht, da sich aufgrund der Konvektion im oberen Bereich des Zylinders heißes Fluid ansammelt und dort durch die interne Beheizung lokal hohe Temperaturen entstehen. Während bei $Ra_{iW} = 10^4$ aufgrund der geringen Bedeutung der Konvektion die Nußelt-Zahl $Nu_2 = 1$ beträgt, ergibt sich für $Ra_{iW} = 10^5$ $Nu_2 > 1$. Die mittlere Temperatur ist somit kleiner als die mittlere Temperatur bei reiner Wärmeleitung. Dies zeigt, dass Nu_1 besser die thermischen Verhältnisse beschreibt, Nu_2 dagegen besser als Maß für die Intensität der Konvektion geeignet ist. In [8] werden in quadratischen Kavitäten mit internen Wärmequellen bei isothermen Seitenwänden und genügend kleinen Rayleigh-Zahlen ebenfalls Temperaturen über denen der reinen Wärmeleitung berechnet. Wird die Rayleigh-Zahl auf $Ra_{iW} = 10^6$ erhöht, so liegt die maximale Temperatur deutlich unterhalb der maximalen Temperatur bei reiner Wärmeleitung ($Nu_1 > 1$). Auch Nu_2 steigt in diesem Falle stark an, was auf den deutlich intensivierten konvektiven Wärmeübergang hinweist.

Während also bei einer gewissen Stärke der durch die internen Wärmequellen erzeugten Konvektionsströmung die maximal auftretende Temperatur oberhalb der Temperatur bei reiner Wärmeleitung liegt, ist die mittlere Temperatur hierbei immer kleiner als die mittlere Temperatur bei reiner Wärmeleitung. Dies bedeutet, dass Bereiche mit hohen Temperaturen in ihrer räumlichen Ausdehnung sehr begrenzt sind.

	Nu_1	Nu_2
$Ra_{iW} = 10^4$	0.965	1.000
$Ra_{iW} = 10^5$	0.920	1.055
$Ra_{iW} = 10^6$	1.378	1.400

Tabelle 5.6: Vergleich der Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 für den rein hydrodynamischen Fall bei $Ra_{iW} = 10^4$, $Ra_{iW} = 10^5$ und $Ra_{iW} = 10^6$.

5.2.2 Vertikales Magnetfeld

Unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes (in Richtung der Zylinderachse) wird der rotationssymmetrische Charakter der zuvor behandelten rein hydrodynamischen Strömung nicht verändert. Elektrische Ströme werden dort induziert, wo horizontale Geschwindigkeitskomponenten vorliegen. Dies bedeutet, dass, wie in Abbildung 5.40 für $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 100$ dargestellt, nahe der stirnseitigen Berandungen jeweils kreisförmige elektrische Ströme induziert werden. Die elektrischen Ströme nehmen mit zunehmendem Abstand vom Zentrum zu, erreichen ein Maximum und werden dann wieder schwächer. In unmittelbarer Nähe des Zylindermantels werden keine elektrischen Ströme induziert, da dort die Radialkomponente der Geschwindigkeit verschwindet. Der maximale elektrische Strom tritt dort auf, wo die Radialgeschwindigkeit der Strömung am größten ist. Hierbei ist die Drehrichtung der elektrischen Ströme oben und unten gegenläufig. In der horizontalen Mittelebene werden keine Ströme induziert. Da sich die induzierten Ströme in horizontalen Ebenen schließen, entstehen keine elektrischen Potentialdifferenzen. Es herrscht also an jeder Stelle im Zylinder Potentialgleichheit und die elektrischen Ströme werden ausschließlich durch das induzierte elektrische Feld $\vec{v} \times \vec{B}$ angetrieben. Dies hat zur Folge, dass die Hartmannschichten elektrisch inaktiv sind.

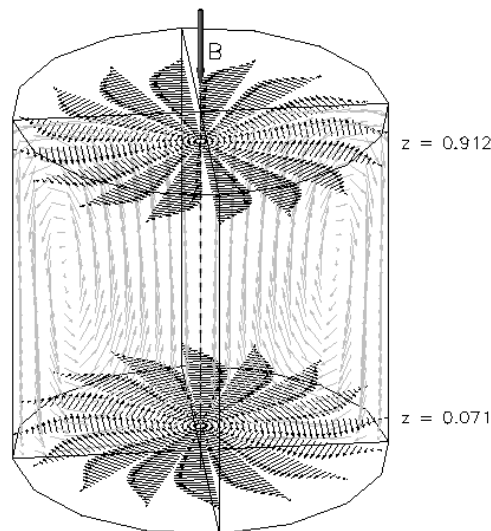


Bild 5.40: Elektrischer Strom (schwarz) und Geschwindigkeitsvektoren (grau) für $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 100$ unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes.

Die Strömung erfährt durch die Lorentzkräfte eine starke Dämpfung gegenüber dem rein hydrodynamischen Fall. In Abbildung 5.41 ist zu erkennen, dass bei $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 100$ im Vergleich zur rein hydrodynamischen Strömung nach Abbildung 5.38 das Wirbelzentrum deutlich in Richtung der horizontalen Mittelebene gewandert ist. Der Wirbel erstreckt sich jetzt über nahezu die gesamte Zylinderhöhe. Das Magnetfeld prägt der Strömung eine Symmetrie mit Bezug auf die horizontale Mittelebene auf. Dieser durch die Lorentzkräfte hervorgerufenen symmetrischen Eigenschaft ist jedoch immer noch die asymmetrische Konvektion überlagert. Die Temperaturverteilung weist unter dem Einfluss des vertikalen Magnetfeldes im Vergleich zur rein hydrodynamischen Strömung nach Abbildung 5.38 eine stärkere horizontale Schichtung auf und ähnelt nun stärker der Temperaturverteilung bei reiner Wärmeleitung.

Ein Vergleich der vertikalen Geschwindigkeiten in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} =$

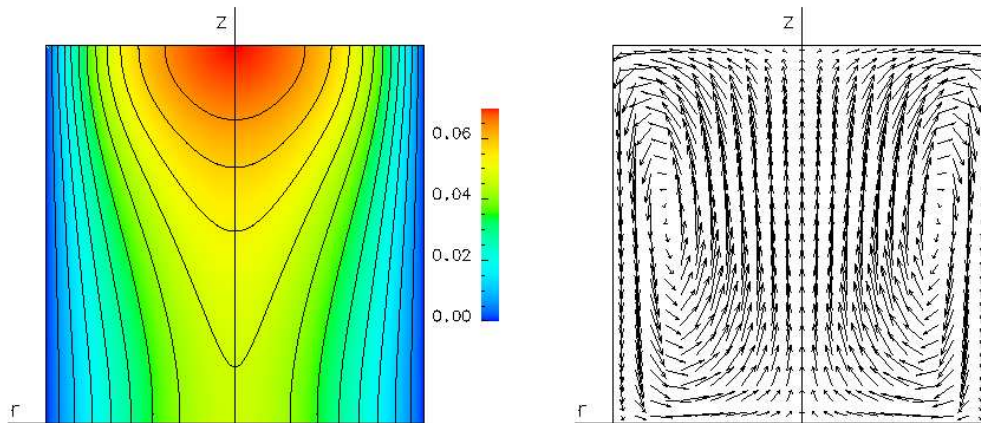


Bild 5.41: Isothermen und Geschwindigkeitsvektoren für $Ra_{iW} = 10^6$, $Ha = 100$ bei vertikalem Magnetfeld.

10^6 in Abbildung 5.42 macht die starke Dämpfung der Strömung unter dem Einfluss des vertikalen Magnetfeldes deutlich. Das Geschwindigkeitsprofil, bei der rein hydrodynamischen Strömung ein Grenzschichtprofil, wandelt sich bei steigender Hartmann-Zahl immer mehr in ein blockförmiges Profil. Dieses Blockprofil weist im Kern eine konstante Geschwindigkeit auf, während am Zylindermantel nur ein schmaler Bereich eine abwärts gerichtete Strömung aufweist. Die Grenzschichtdicke sowie der ringförmige Bereich, in dem eine abwärts gerichtete Strömung vorliegt, werden mit zunehmender Hartmann-Zahl immer kleiner. Während im rein hydrodynamischen Fall im Zentrum eine deutlich größere Geschwindigkeit als am Zylindermantel auftritt, ist unter dem Einfluss des vertikalen Magnetfeldes die am Zylindermantel auftretende Geschwindigkeit größer als die Geschwindigkeit im Zentrum.

Das zugehörige Temperaturprofil nach Abbildung 5.43 behält den parabolischen Charakter unabhängig von der Hartmann-Zahl bei. Bei $Ha = 500$ gleicht das Temperaturprofil nahezu dem Profil bei reiner Wärmeleitung. Dies unterstreicht die durch das vertikale Magnetfeld verursachte starke Dämpfung der Strömung.

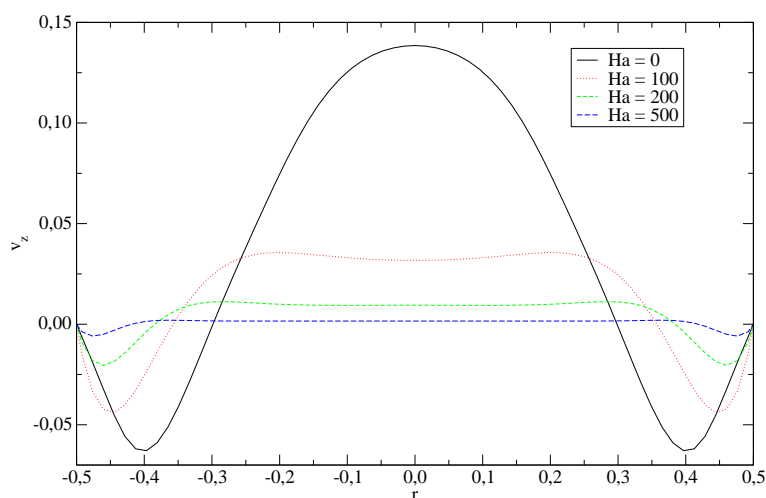


Bild 5.42: Vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 10^6$ unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes.

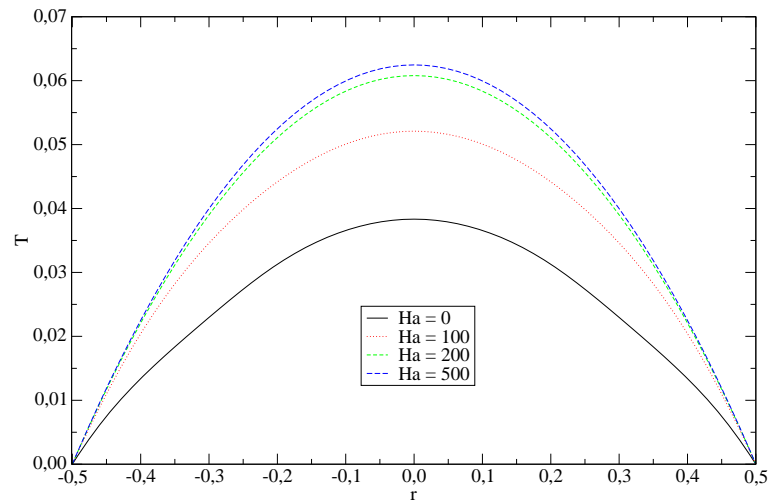


Bild 5.43: Temperaturverteilung in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 10^6$ unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes.

5.2.3 Horizontales Magnetfeld

Die Rechnungen mit horizontalem Magnetfeld stellen möglicherweise den interessantesten und komplexesten Fall dar, weil im Vergleich mit den Fällen ohne Magnetfeld oder mit achsparallelem vertikalem Magnetfeld die Achsensymmetrie verloren geht. In diesem Abschnitt werden zuerst die Auswirkungen des horizontalen Magnetfeldes auf die Strömung beschrieben. Danach erfolgt eine Analyse der Wärmeabfuhr und schließlich ein Vergleich mit dem vertikalen Magnetfeld.

Wirkt ein Magnetfeld in horizontaler Richtung, so bleibt bei sehr kleinen Hartmann-Zahlen $Ha < 10$ und $Ra_{iW} = 10^6$ die Struktur der rein hydrodynamischen Strömung erhalten. Wird die Hartmann-Zahl weiter erhöht, so dehnt sich der Kern mit dem aufsteigendem Fluid in der horizontalen Mittelebene normal zum Magnetfeld aus. In Abbildung 5.44 ist die Strömung in der horizontalen Mittelebene durch Isolinien der vertikalen Geschwindigkeit für $Ra_{iW} = 10^6$ für verschiedenen Hartmann-Zahlen dargestellt. Bereiche mit aufwärts strömendem Fluid sind rot, Bereiche mit abwärts strömendem Fluid sind blau gekennzeichnet. An der Trennlinie zwischen dem roten und dem blauen Bereich gilt $v_z = 0$. Bei $Ha = 10$ ist der aufsteigende Fluidkern noch nahezu kreisrund, während bei $Ha = 15$ bereits eine deutliche Ausdehnung quer zum Magnetfeld zu erkennen ist. Wird die Hartmann-Zahl auf $Ha = 20$ erhöht, so weist der aufsteigende Fluidkern einen rautenförmigen Querschnitt auf, da dieser sich nun auch in Richtung des Magnetfeldes ausdehnt. Bei einer Hartmann-Zahl $Ha = 30$ dehnt sich der aufsteigende Fluidkern noch weiter in Richtung des Magnetfeldes aus. Allerdings ist bei $Ha = 30$ der aufsteigende Fluidkern noch nicht bis an die Ränder ausgebildet. Auch ist der Charakter der bei niedrigeren Hartmann-Zahlen vorliegenden Strömung mit senkrecht zum Magnetfeld ausgedehntem Fluidkern noch sichtbar. Wird die Hartmann-Zahl weiter erhöht, so entstehen schließlich zwei gegenläufig rotierende Walzen. Die Rotationsachsen dieser Walzen sind in Richtung des Magnetfeldes ausgerichtet. Das Fluid strömt jetzt entlang der parallel zum Magnetfeld ausgerichteten vertikalen Mittelebene aufwärts. Abwärts strömendes Fluid befindet sich in von dieser Ebene weiter entfernt liegenden Bereichen in der Nähe des isothermen Zylindermantels. Die Rotationsachsen der Strömung verlaufen an der Trennlinie zwischen den roten und den blauen Bereichen. Deutlich zu erkennen ist, dass bei $Ha = 100$ die Rotationsachsen der beiden Walzen eine Krümmung aufweisen, während bei einer Hartmann-Zahl von

$Ha = 500$ die Rotationsachsen annähernd gerade verlaufen.

Isoflächenplots der Trennfläche zwischen aufsteigendem Fluid im Kern und absteigendem Fluid nach Abbildung 5.45 verdeutlichen die Veränderungen der Strömung durch das Magnetfeld. Bei $Ha = 20$ dehnt sich der Fluidkern im unteren Bereich in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene aus. Am Zylindermantel befindet sich jedoch immer noch absteigendes Fluid. Die obere Hälfte des Fluidkerns erfährt nur geringe Änderungen gegenüber dem rein hydrodynamischen Fall. Dort ist eine leichte Ausdehnung in der zum Magnetfeld senkrechten vertikalen Mittelebene zu beobachten. Die Ausdehnungen des Fluidkerns oben und unten erklären den in Abbildung 5.44 dargestellten rautenförmigen Querschnitt des Fluidkerns in der horizontalen Mittelebene bei $Ha = 20$. Dieser entsteht durch eine Überlagerung der Veränderungen des Fluidkerns in der oberen und unteren Hälfte des Zylinders. Wird die Hartmann-Zahl auf $Ha = 30$ erhöht, so dehnt sich der Fluidkern im unteren Bereich erstmals bis an den Zylindermantel aus. Auch in der oberen Hälfte des Zylinders dehnt sich der Fluidkern jetzt in der zum Magnetfeld parallelen Richtung aus. Eine weitere Erhöhung der Hartmann-Zahl auf $Ha = 40$ bewirkt eine weitere Ausdehnung des Fluidkerns in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene. Der Bereich, in dem am isothermen Zylindermantel Fluid nach oben steigt, ist jetzt gegenüber der Strömung bei $Ha = 30$ deutlich vergrößert. Bei $Ha = 100$ ist dieser Bereich nahezu über die gesamte Zylinderhöhe ausgeprägt. Lediglich in einem kleinen Bereich an der oberen Stirnwand behält die Trennfläche den Charakter der rein isothermen Strömung bei. Bei noch höheren Hartmann-Zahlen nimmt der Kern mit dem aufsteigendem Fluid schließlich einen rechteckförmigen Charakter an. Im untersuchten Parameterbereich $Ra_{iW} = 10^6 - 10^7$ und $Ha \leq 500$ stellen jeweils sowohl die zum Magnetfeld parallele, als auch die orthogonale vertikale Mittelebene Symmetrieebenen dar.

Abbildung 5.46 zeigt jeweils die Isothermen sowie Geschwindigkeitsvektoren für $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 10$, $Ha = 20$ und $Ha = 30$ sowohl in der zum Magnetfeld parallelen als auch in der zum Magnetfeld orthogonalen vertikalen Mittelebene. Die Isothermen in diesen beiden Ebenen besitzen in der unteren Hälfte des Zylinders im Wesentlichen einen horizontalen Temperaturgradienten. Hier ist, wie im rein hydrodynamischen Fall, der Wärmeübergang überwiegend durch radiale Wärmeleitung geprägt. Oberhalb der horizontalen Mittelebene besitzt das Temperaturfeld im Kern einen vertikalen Gradienten. In diesem Bereich ist konvektiver Wärmeübergang dominierend.

Während sich das Wirbelzentrum der Strömung in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Ebene, nahezu unabhängig von der Hartmann-Zahl, im oberen Bereich befindet, wandert das Wirbelzentrum in der zum Magnetfeld orthogonalen vertikalen Mittelebene mit zunehmender Hartmann-Zahl immer weiter nach unten. Bei $Ha = 30$ nimmt der Wirbel einen fast rechteckigen Charakter an und ist über die gesamte Ebene verteilt.

Der Wirbel in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene entsteht, weil das aufsteigende Fluid an der oberen Stirnseite wie im Fall der rein hydrodynamischen Strömung radial nach außen fließt, sich in der Nähe der oberen Stirnseite am Zylindermantel abkühlt und dadurch abwärts strömt. Sobald jedoch abwärts gerichtete Geschwindigkeitskomponenten auftreten, werden elektrische Ströme induziert. Die hierbei auftretenden Lorentzkräfte sind aufwärts gerichtet und dominieren bei höheren Hartmann-Zahlen gegenüber den hydrodynamischen Kräften. Dadurch gibt es im oberen Bereich des Zylinders auf der zum Magnetfeld parallelen Mittelebene nur einen kleinen Bereich, in dem das Fluid abwärts strömt. Wie im Falle der rein hydrodynamischen Strömung besitzt die Strömung bei $Ra_{iW} = 10^6$ bis $Ha = 100$ nahe an der oberen Berandung einen rotationssymmetrischen Charakter. Dies wird durch die

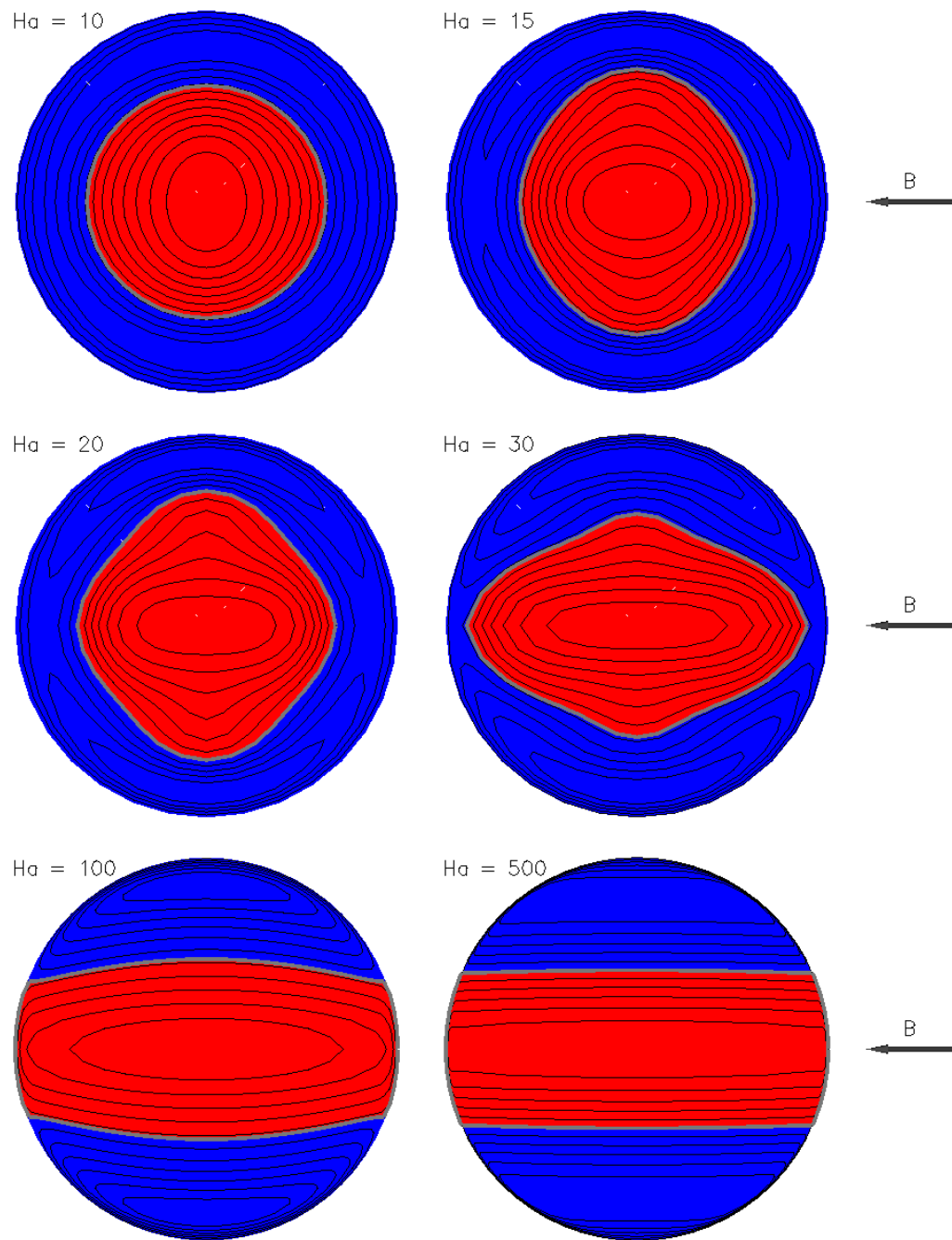


Bild 5.44: Vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene für $Ra = 10^6$ und $Ha = 10, 15, 20, 30, 100$ und 500 unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes. Rote Bereiche kennzeichnen aufsteigendes, blaue Bereiche absteigendes Fluid.

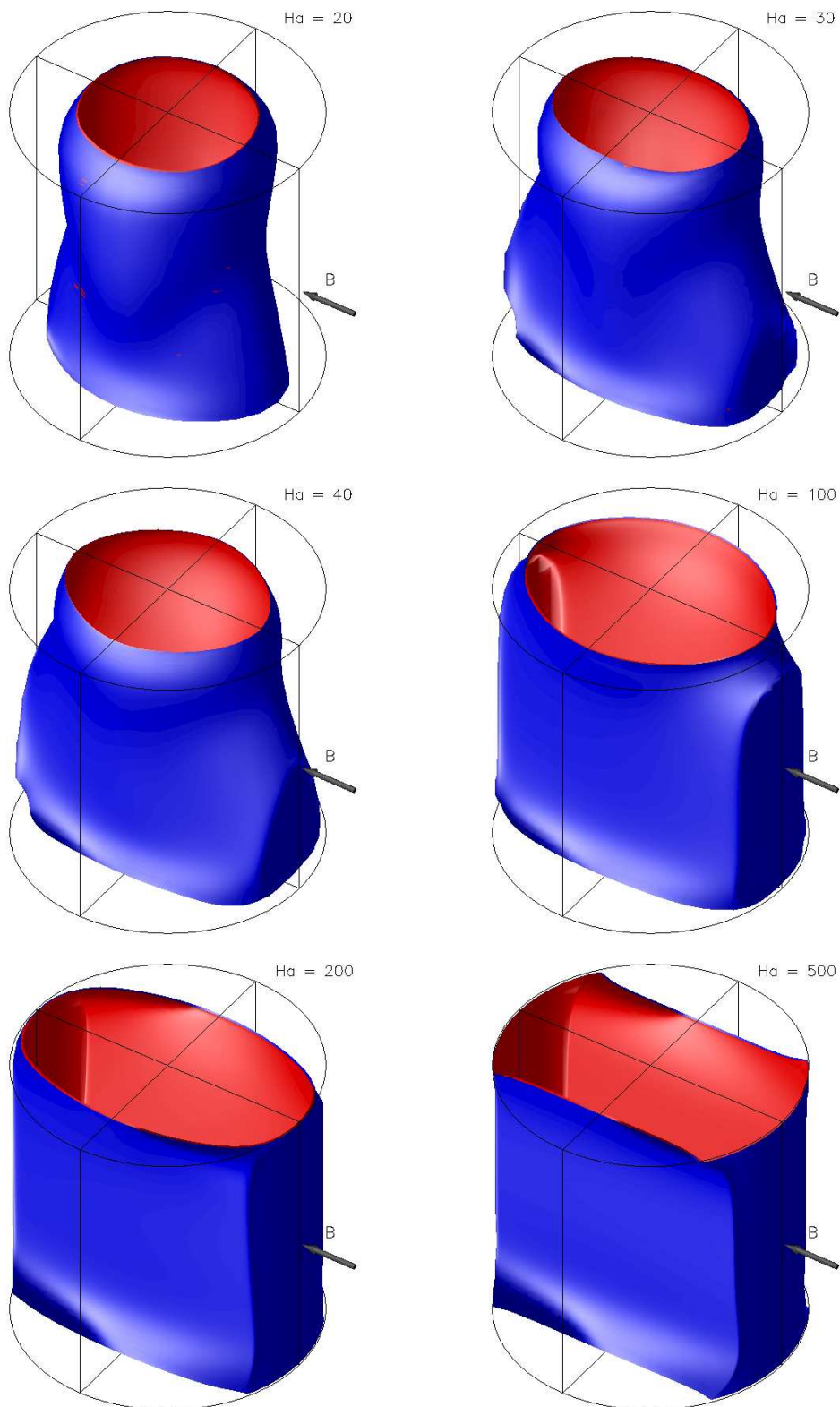


Bild 5.45: Oberflächenplot der Trennfläche zwischen aufwärts und abwärts strömendem Fluid ($v_z = 0$) für $Ra_{iW} = 10^6$ und $Pr = 0.1$. $Ha = 20, 30, 40, 100, 200$ und 500 .

in Abbildung 5.45 in der Nähe der oberen Stirnseite nahezu kreisrunde Trennfläche verdeutlicht.

Wird die Hartmann-Zahl auf $Ha = 100$ erhöht, so verschwindet, wie in Abbildung 5.47 dargestellt, der Wirbel in der zum Magnetfeld parallelen Ebene nahezu vollständig. Lediglich in der Nähe der oberen Stirnseite strömt das Fluid in einer dünnen Schicht vom Zentrum in Richtung des Zylindermantels. Am Zylindermantel strömt das Fluid jedoch über nahezu die gesamte Zylinderhöhe aufwärts. Eine weitere Erhöhung der Hartmann-Zahl auf $Ha = 200$ führt, wie in Abbildung 5.47 gezeigt, dazu, dass die bei $Ha = 100$ in der zum Magnetfeld parallelen Ebene am oberen Rand vorhandene, radial nach außen gerichtete Strömung nun vollständig unterdrückt wird. Während bei $Ha = 100$ in Abbildung 5.47 das Temperaturfeld durch konvektiven Wärmetransport noch deutlich von der Strömung beeinflusst wird, ist es bei $Ha = 200$ in Abbildung 5.48 weit weniger von der Strömung beeinflusst. Das inzwischen stark von der Wärmeleitung geprägte Temperaturfeld weist nun einen nahezu rotationssymmetrischen Charakter auf.

Im rein hydrodynamischen Fall ergibt sich bei einer Rayleigh-Zahl $Ra_{iW} = 10^7$ eine instationäre Lösung. Unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes ergibt sich bei dieser Rayleigh-Zahl bei einer Hartmann-Zahl $Ha = 100$ aufgrund der dämpfenden Wirkung des Magnetfeldes eine stationäre Lösung. Abbildung 5.49 zeigt wie bei den vorherigen Abbildungen sowohl das Geschwindigkeitsfeld als auch das Temperaturprofil für diese Strömung in zwei vertikalen Mittelebenen. Während bei $Ra_{iW} = 10^6$ in der parallel zum Magnetfeld ausgerichteten Ebene der Wirbel am oberen Rand nahezu vollständig unterdrückt ist, ist dieser bei $Ra_{iW} = 10^7$ deutlich sichtbar. Ein wesentlicher Unterschied zu den untersuchten Strömungen bei $Ra_{iW} = 10^6$ ergibt sich dadurch, dass jetzt die Strömungsgeschwindigkeiten in der unteren Hälfte des Zylinders in der orthogonal zum Magnetfeld ausgerichteten Ebene im Vergleich zu den Strömungsgeschwindigkeiten in der oberen Hälfte des Zylinder größere Werte annehmen. Weiterhin ist in dieser Ebene die Schichtdicke der am Zylindermantel abwärts gerichteten Strömung dünner. Damit verbunden ist die Verschiebung des Wirbelzentrums nach unten und außen. Durch den aufgrund der vergleichsweise großen Strömungsgeschwindigkeiten verstärkten konvektiven Wärmetransport in diesem Bereich bildet sich jeweils eine Strähne kalten Fluids, welche in der Nähe der unteren Stirnseite in der zum Magnetfeld orthogonalen Ebene radial nach innen strömt.

In Abbildung 5.50 sind die elektrischen Ströme sowie das elektrische Potential für $Ha = 10$, $Ha = 20$, $Ha = 30$ und $Ha = 100$ in der horizontalen Mittelebene dargestellt. Durch die im Wesentlichen vertikalen Geschwindigkeitskomponenten werden in der horizontalen Mittelebene unter der Einwirkung eines horizontalen Magnetfeldes horizontale Ströme normal zum Magnetfeld induziert. Die elektrischen Ströme schließen sich in der horizontalen Mittelebene durch zwei kreisförmige Wirbel. Die Rotationsachsen dieser Wirbel liegen in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene des Zylinders. Starke, der Strömungsrichtung entgegengesetzt wirkende Lorentzkräfte wirken im Kern und am Zylindermantel in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene. Somit wird das im Kern aufwärts strömende Fluid und das im Bereich der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene abwärts strömende Fluid durch die Lorentzkräfte gedämpft. Das im Bereich der zum Magnetfeld normalen vertikalen Ebene abwärts fließende Fluid erfährt keine Dämpfung durch die Lorentzkräfte, da hier die Richtung der elektrischen Ströme parallel zum Magnetfeld verläuft. Während sich die induzierten elektrischen Ströme unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes potentialfrei schließen, ergibt sich der Stromschluss unter der Einwirkung eines horizontalen Magnetfeldes erst durch die Überlagerung der induzierten elektrischen Ströme mit den durch die Potential-

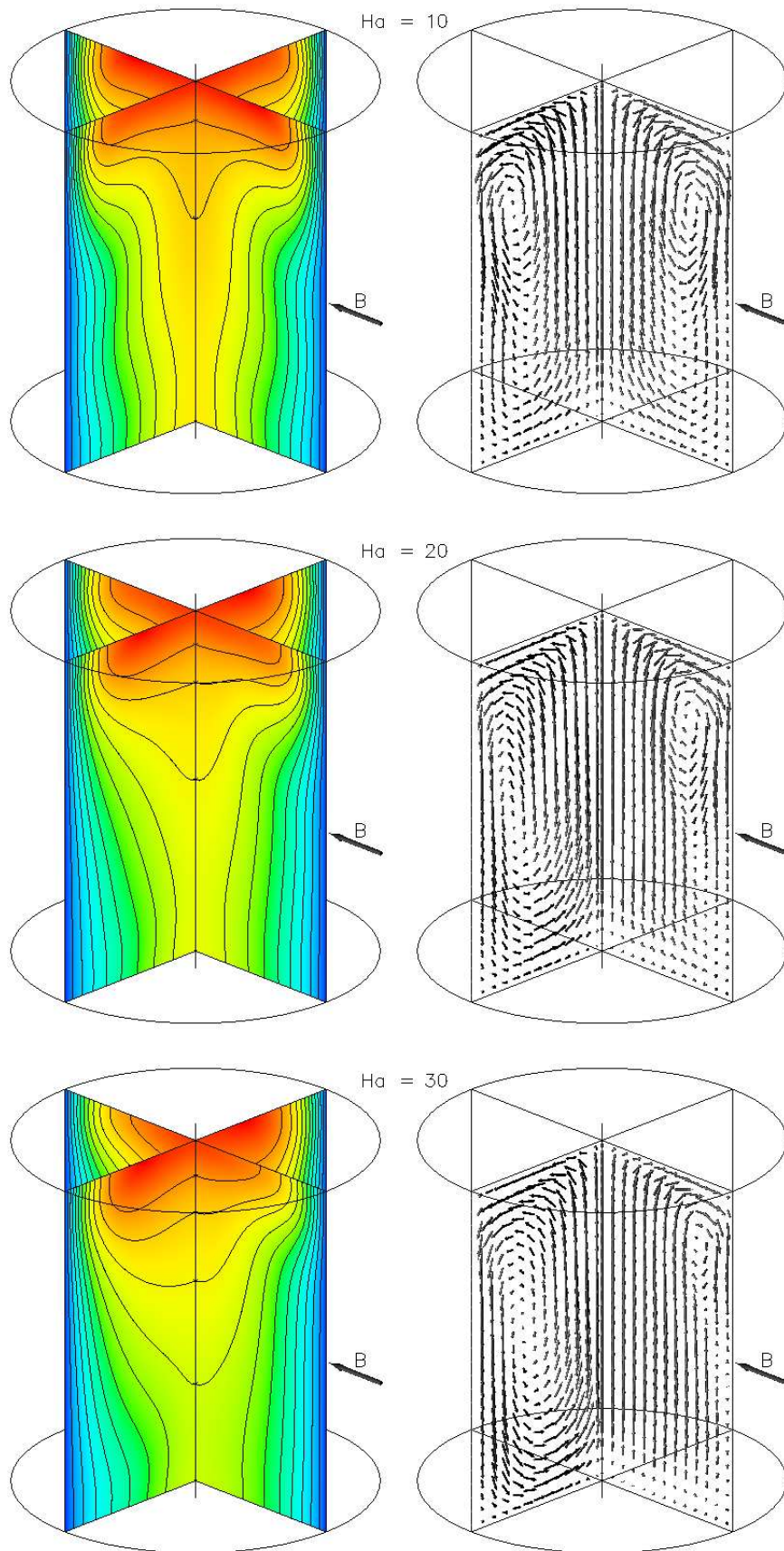


Bild 5.46: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 10$ (oben), $Ha = 20$ (mitte) und $Ha = 30$ (unten).

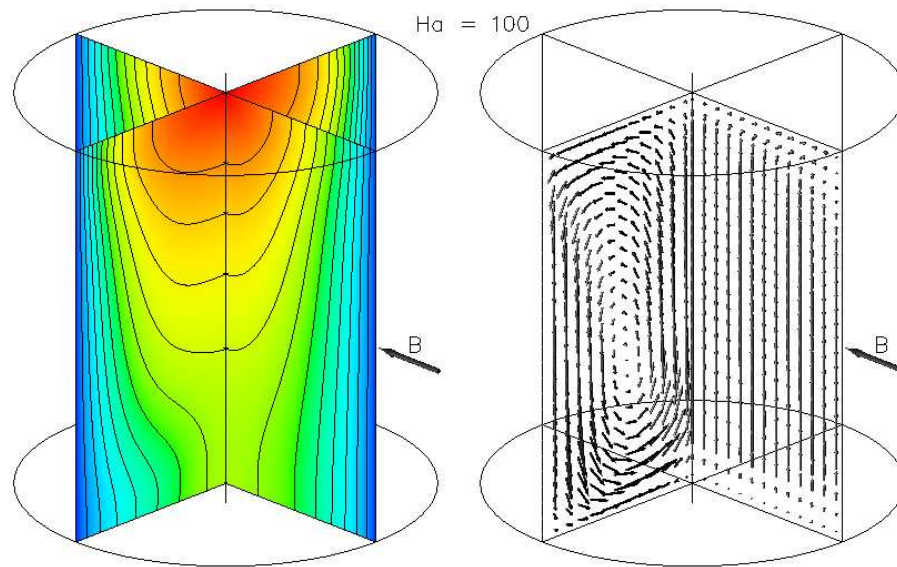


Bild 5.47: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 100$.

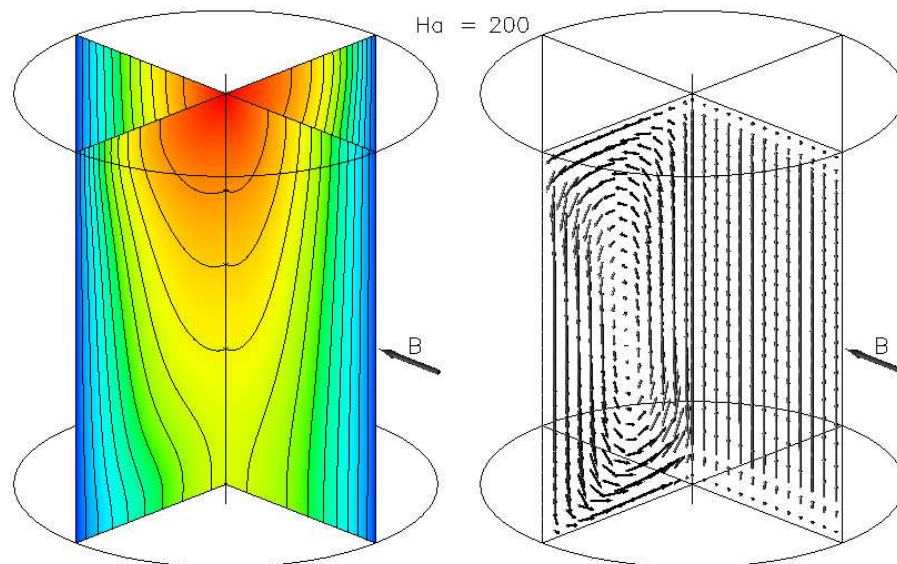


Bild 5.48: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 200$.

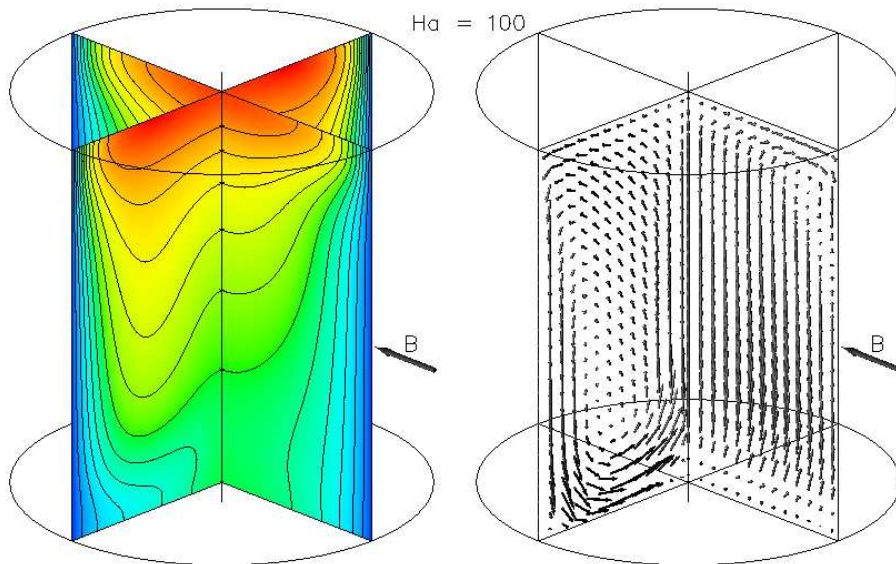


Bild 5.49: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 10^7$ und $Ha = 100$.

differenzen erzeugten elektrischen Strömen. Deshalb treten beim horizontalen Magnetfeld im Vergleich zum vertikalen Magnetfeld weniger starke elektrische Ströme auf, wodurch die Strömung unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes eine geringere Dämpfung erfährt.

Mit zunehmender Hartmann-Zahl werden die elektrischen Ströme in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene am Zylindermantel immer stärker. Dies ist dadurch bedingt, dass sich der Kern mit dem aufsteigenden Fluid in der zum Magnetfeld parallelen Richtung vergrößert. Dadurch werden die Schichten am Zylindermantel, in denen sich die elektrischen Ströme schließen, immer dünner. Bei kleinen Hartmann-Zahlen überwiegen in diesen Schichten die Auftriebskräfte. Bei größeren Hartmann-Zahlen dominieren die Lorentzkräfte gegenüber den Auftriebskräften. In diesem Fall strömt das Fluid in diesen Schichten, wie bereits erläutert, aufwärts.

Bei $Ha = 100$ hat sich der aufwärts strömende Fluidkern in der zum Magnetfeld parallelen Ebene bis an den Zylindermantel ausgedehnt (vgl. Abbildung 5.44). Im Kern des Zylinders werden durch das aufwärts strömende Fluid elektrische Ströme induziert. Diese Ströme erzeugen ein elektrisches Potential, welches mit zunehmender Entfernung von der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene in Richtung der elektrischen Ströme immer stärker wird. Dieses elektrische Potential bewirkt, dass sich die elektrischen Ströme in horizontalen Ebenen in der Grenzschicht am Zylindermantel schließen. Dort treten sehr hohe Ströme auf. Diese Ströme und die damit verbundenen starken Lorentzkräfte sind dafür verantwortlich, dass in diesen Bereichen trotz der Nähe zum isothermen Zylindermantel aufwärts gerichtete Strömungen auftreten. Die durch das abwärts fließende Fluid induzierten elektrischen Ströme schließen sich über vier weitere Wirbel in der Grenzschicht am Zylindermantel. Zur Verdeutlichung sind in Abbildung 5.51 das elektrische Potential und die elektrischen Ströme in der vertikalen Mittelebene anhand einer Prinzipskizze dargestellt.

In Abbildung 5.52 ist das elektrische Potential in der zum Magnetfeld normalen vertikalen Mittelebene dargestellt. Weiterhin sind die elektrischen Ströme in drei horizontalen Ebenen dargestellt. Die elektrischen Ströme schließen sich im Wesentlichen in diesen horizontalen

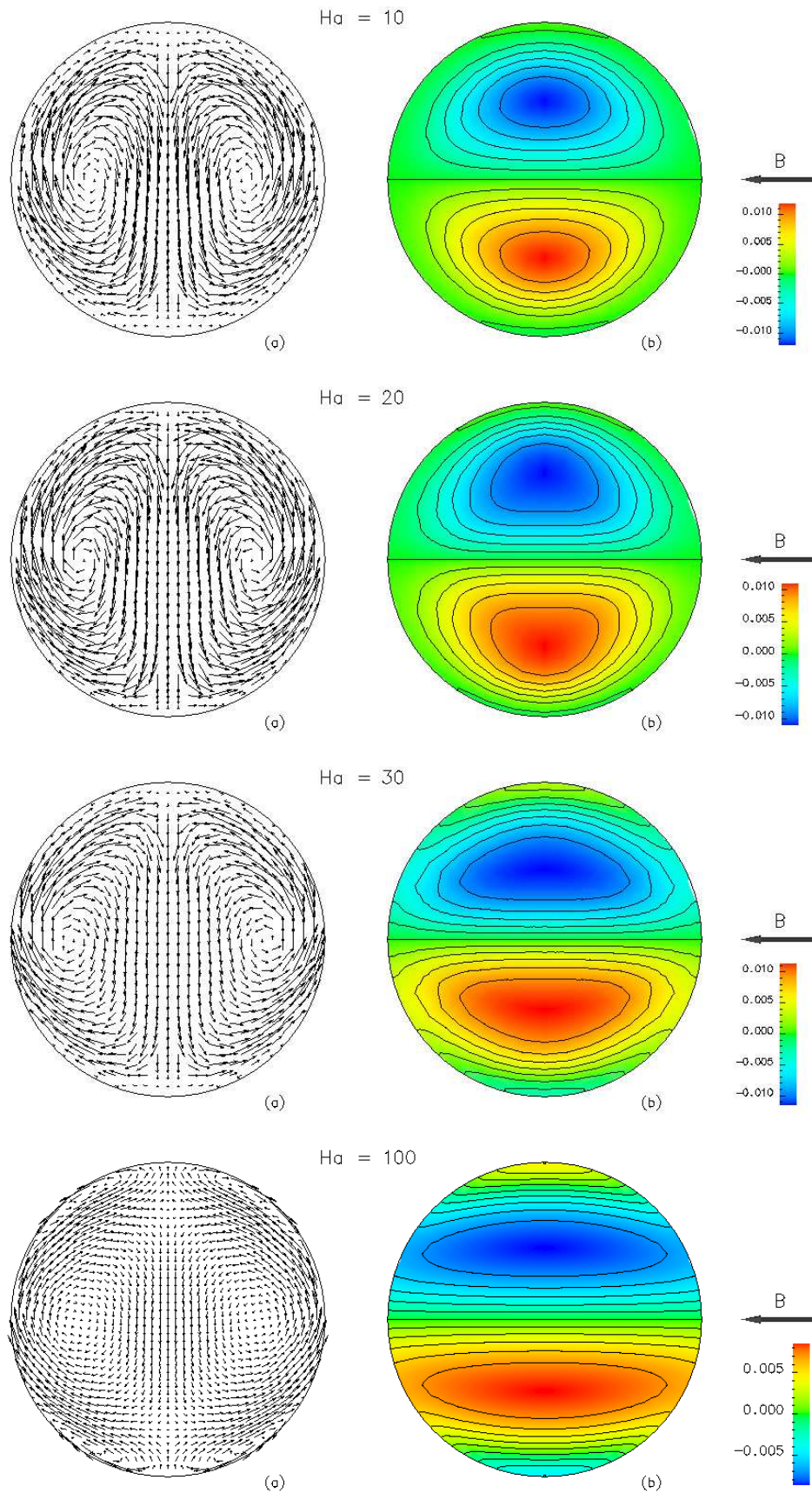


Bild 5.50: Elektrischer Strom (a) und elektrisches Potential (b) in der horizontalen Mittelebene für $Ra_{iW} = 10^6$ beim horizontalen Magnetfeld. $Ha = 10, 20, 30$ und 100 .

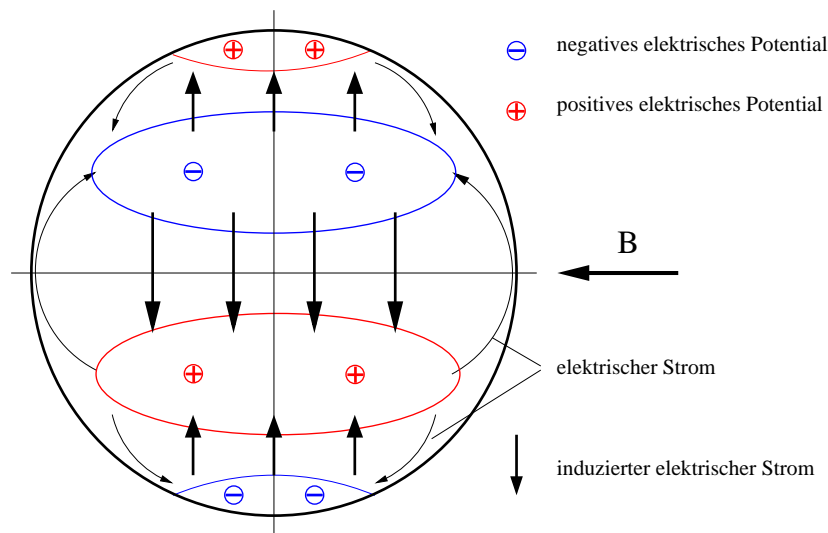


Bild 5.51: Schematische Darstellung der elektrischen Ströme und des elektrischen Potentials für $Ra_{iW} = 10^6$ und $Ha = 100$ in der horizontalen Mittelebene.

Ebenen. Die größten Potentialgradienten treten in der unteren Hälfte des Zylinders auf, da dort die größten vertikalen Geschwindigkeitskomponenten vorliegen. Hierdurch ergibt sich die Tendenz, dass sich der Fluidkern im unteren Bereich stärker in Richtung des Magnetfeldes ausdehnt und auch dort das Fluid zuerst am kalten Zylindermantel aufwärts strömt.

Das Geschwindigkeitsprofil in der horizontalen Mittelebene ist in Abbildung 5.53 (a) für $Ra_{iW} = 10^6$ in der zum Magnetfeld parallelen Richtung dargestellt. Mit steigender Hartmann-Zahl nimmt die Grenzschichtdicke der Hartmannschichten ab. Hier steht das Magnetfeld senkrecht zur Wandtangente, der Zylindermantel hat an dieser Stelle den Charakter einer Hartmannwand.

Die Abnahme der Grenzschichtdicke mit steigender Hartmann-Zahl ist beim in Abbildung 5.53 (b) dargestellten Geschwindigkeitsprofil normal zum horizontalen Magnetfeld bei steigenden Hartmann-Zahlen nicht zu beobachten. Hier stellt man eine Zunahme der Grenzschichtdicke fest. Obwohl an dieser Stelle der Wand die Wandtangente parallel zum Magnetfeld verläuft, stellt sich nicht der von Rechteckkanälen bekannte Effekt der abnehmenden Grenzschichtdicke an der Seitenschicht ein. Weiterhin ist zu beobachten, dass beim Geschwindigkeitsprofil normal zum Magnetfeld vergleichsweise große abwärts gerichtete Geschwindigkeiten auftreten. Diese liegen sogar leicht über den im Kern auftretenden maximalen aufwärts gerichteten Geschwindigkeiten. Bei $Ha = 30$ und $Ha = 100$ liegt die am Rand auftretende abwärts gerichtete maximale Geschwindigkeit sogar über der beim rein hydrodynamischen Fall auftretenden maximalen abwärts gerichteten Geschwindigkeit. Im rein hydrodynamischen Fall tritt die maximale Geschwindigkeit im Zentrum auf, während das am Zylindermantel abwärts strömende Fluid eine wesentlich geringere Geschwindigkeit aufweist. Unter dem Einfluss des horizontalen Magnetfeldes besitzt das am Zylindermantel abwärts strömende Fluid eine etwas größere Strömungsgeschwindigkeit als das im Innern aufwärts strömende Fluid. Dies lässt sich dadurch erklären, dass sich das Strömungsprofil unter dem Einfluss des Magnetfeldes verändert und das abwärts strömende Fluid nun nicht mehr über die gesamte Kreisringfläche, sondern nur noch über zwei Kreisabschnitte abwärts strömt. Wird die Hartmann-Zahl weiter erhöht, so wird durch die dämpfende Wirkung des Magnetfeldes die Geschwindigkeit geringer als beim rein hydrodynamischen Fall. Bei $Ha = 500$ entspricht die maximale Geschwindigkeit

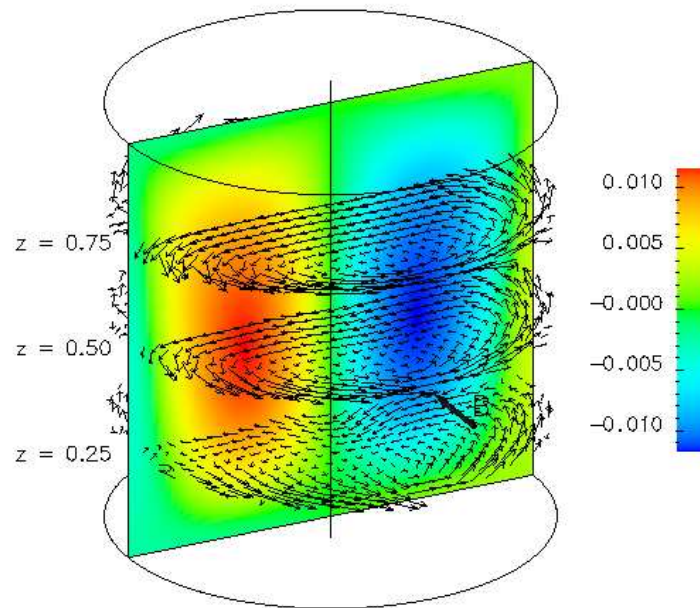


Bild 5.52: Elektrisches Potential und elektrischer Strom bei $Ra_{iW} = 10^7$ und $Ha = 100$ bei horizontalem Magnetfeld.

des aufsteigenden Fluids im Zentrum der maximalen Geschwindigkeit des abwärts strömenden Fluids am Rand.

Ein Vergleich der maximalen vertikalen Geschwindigkeit unter dem Einfluss des vertikalen und des horizontalen Magnetfeldes nach Abbildung 5.42 und 5.53 zeigt, dass bei gleicher Hartmann-Zahl beim horizontalen Magnetfeld wesentlich größere Maximalgeschwindigkeiten auftreten. Dies ist bedingt durch die, verglichen mit dem horizontalen Magnetfeld, stärkere Dämpfung eines vertikalen Magnetfeldes.

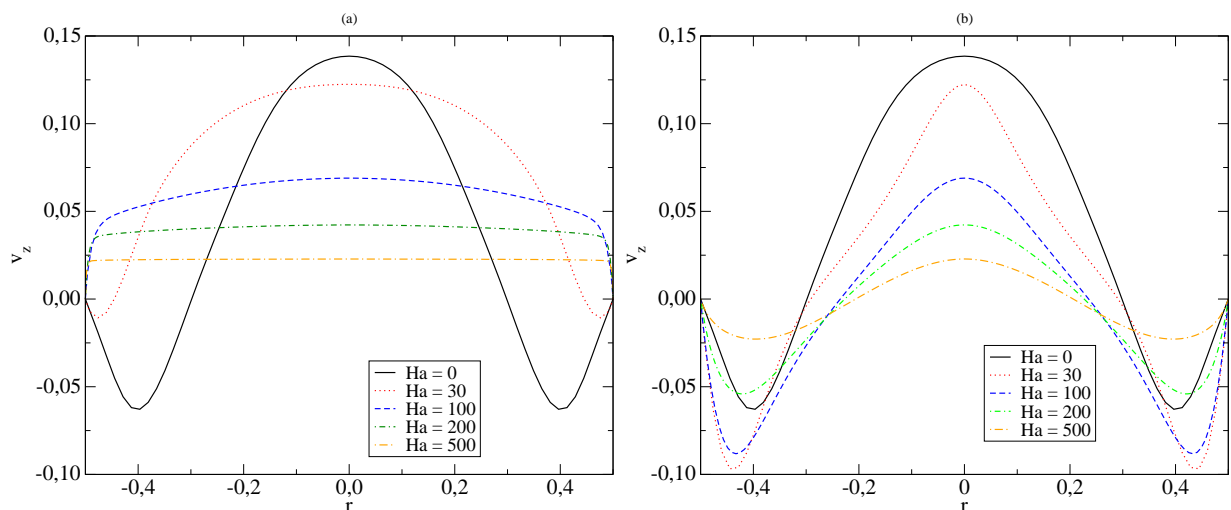


Bild 5.53: Vertikale Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene parallel (a) und normal (b) zum horizontalen Magnetfeld bei $Ra_{iW} = 10^6$.

Abbildung 5.54 zeigt einen Vergleich der Temperatur entlang der Zylinderachse für $Ra_{iW} =$

10^6 für das horizontale und das vertikale Magnetfeld bei verschiedenen Hartmann-Zahlen. Aufgrund der dämpfenden Wirkung des Magnetfeldes auf die Strömung wird mit steigenden Hartmann-Zahlen der konvektive Wärmeübergang verschlechtert. Dies zeigt sich insbesondere beim vertikalen Magnetfeld bei $Ha = 500$ an der geringen Temperaturänderung über der Höhe.

Ein horizontales Magnetfeld führt bei den untersuchten Hartmann-Zahlen $Ha = 100$ bis $Ha = 500$ sowie im Falle des vertikalen Magnetfeldes bei Hartmann-Zahlen $Ha = 100$ und $Ha = 200$ aufgrund der vertikalen Konvektion im oberen Bereich des Zylinders bei $r = 0$ zu Temperaturen, die überhalb der Maximaltemperatur bei reiner Wärmeleitung $T_{max,WL} = 0.625$ liegen. Dieser Effekt wird auch in [23] bei kubischen Behältnissen mit konstanten internen Wärmequellen unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes beobachtet ($Ra_{iW} = 10^5$, $Ha = 100$, $Pr = 0.0321$).

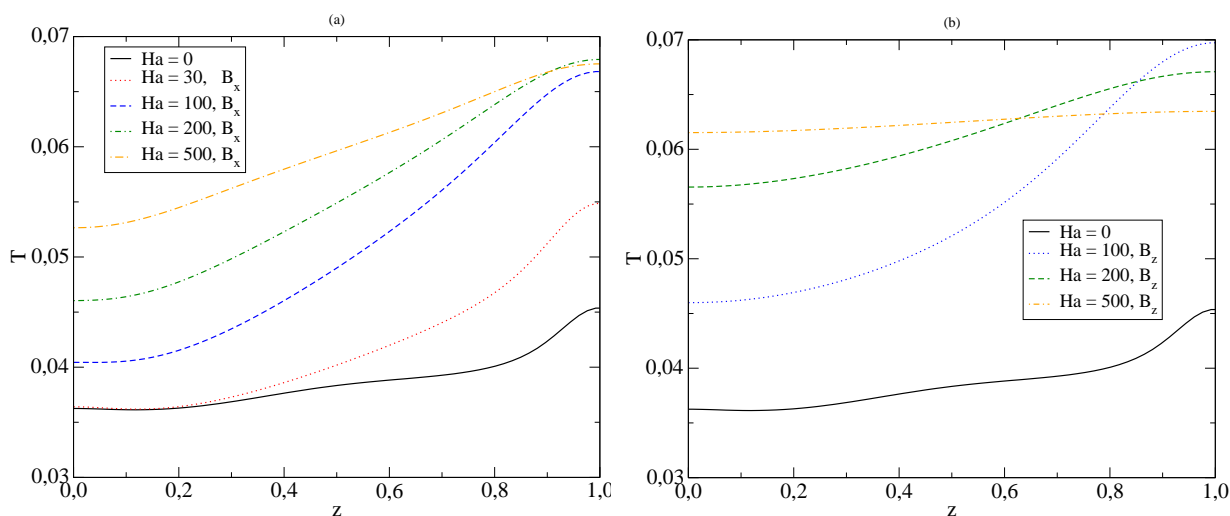


Bild 5.54: Temperaturverteilung auf der Zylinderachse ($r = 0$) unter dem Einfluss eines horizontalen (a) und eines vertikalen (b) Magnetfeldes für $Ra_{iW} = 10^6$.

In den Tabellen 5.7 und 5.8 sind die errechneten Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen Ra_{iW} bei $Ha = 100$ sowohl für das vertikale als auch für das horizontale Magnetfeld dargestellt. Ein Vergleich von Nu_1 mit der in Abbildung 5.54 dargestellten Temperaturverteilung auf der Zylinderachse zeigt, dass die jeweiligen Maximaltemperaturen bei allen Rechnungen auf der Zylinderachse bei $r = 0$ am oberen Rand auftreten.

Beim rein hydrodynamischen Fall ist nach Tabelle 5.6 die Nußelt-Zahl Nu_1 bei einer Rayleigh-Zahl $Ra_{iW} = 10^5$ am kleinsten. Folglich treten hier im Vergleich zur reinen Wärmeleitung die höchsten Temperaturen auf. Bei steigender Rayleigh-Zahl wird Nu_1 größer und die Maximaltemperaturen sinken unter die Maximaltemperaturen bei reiner Wärmeleitung. Unter dem Einfluss eines vertikalen oder horizontalen Magnetfeldes bei $Ha = 100$ erhält man die kleinste Nußelt-Zahl Nu_1 jeweils bei $Ra_{iW} = 10^6$. Dies bedeutet, dass das Auftreten der Maximaltemperaturen unter dem Einfluss des vertikalen und des horizontalen Magnetfeldes zu höheren Rayleigh-Zahlen verschoben wird.

Für das vertikale Magnetfeld ergeben sich für $Ra_{iW} = 10^6$ bei steigender Hartmann-Zahl nach Tabelle 5.9 Nußelt-Zahlen Nu_1 die immer näher bei 1, d.h. bei der reinen Wärmeleitung liegen. Diese Tendenz ist beim horizontalen Magnetfeld nicht zu erkennen. Nach Tabelle 5.10 bleibt für $Ra_{iW} = 10^6$ bei steigenden Hartmann-Zahlen Nu_1 nahezu konstant.

	Nu_1	Nu_2
$Ra_{iW} = 10^5$	0.970	1.000
$Ra_{iW} = 10^6$	0.896	1.087
$Ra_{iW} = 10^7$	1.376	1.675

Tabelle 5.7: Vergleich der Nußelt-Zahlen für den Fall des vertikalen Magnetfeldes in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl für $Ha = 100$.

	Nu_1	Nu_2
$Ra_{iW} = 10^5$	0.957	1.009
$Ra_{iW} = 10^6$	0.935	1.109
$Ra_{iW} = 10^7$	1.318	1.500

Tabelle 5.8: Vergleich der Nußelt-Zahlen für den Fall des horizontalen Magnetfeldes in Abhängigkeit der Rayleigh-Zahl für $Ha = 100$.

	Nu_1	Nu_2
$Ha = 100$	0.896	1.087
$Ha = 200$	0.932	1.013
$Ha = 500$	0.984	0.999

Tabelle 5.9: Vergleich der Nußelt-Zahlen für den Fall des vertikalen Magnetfeldes in Abhängigkeit der Hartmann-Zahl für $Ra_{iW} = 10^6$.

In Abbildung 5.55 sind die beiden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 über der Hartmann-Zahl für das horizontale Magnetfeld bei $Ra_{iW} = 10^6$ dargestellt. Bereits geringe Hartmann-Zahlen bewirken eine starke Abnahme von Nu_1 und Nu_2 . Wird die Hartmann-Zahl auf $Ha \approx 60$ erhöht, so wird $Nu_1 < 1$. Es treten höhere maximale Temperaturen als im Falle der reinen Wärmeleitung auf. Bei steigenden Hartmann-Zahlen strebt Nu_2 monoton gegen 1. Der Einfluss der Konvektion auf die Strömung nimmt also immer weiter ab. Nu_1 hingegen ist auch bei $Ha = 500$ noch deutlich kleiner als 1 und über einen weiten Bereich nahezu konstant. Dies ist dadurch begründet, dass bereits ein geringer konvektiver Einfluss ausreicht, um an der oberen Stirnseite eine Temperaturüberhöhung gegenüber dem Fall der reinen Wärmeleitung zu verursachen. Diese Maximaltemperatur ist in weiten Bereichen unabhängig von der Stärke der Konvektion, wobei die Stärke der Konvektion hier im Wesentlichen durch die Stärke des Magnetfeldes beeinflusst wird. Eine stärkere Konvektion bewirkt ebenfalls geringere minimale Temperaturen an der unteren Stirnseite. Hierdurch lässt sich erklären, dass Nu_2 , als Maß für die mittlere Temperatur, immer weiter abfällt. Im Bereich $0 \leq Ha < 100$ ergibt sich ein starker Rückgang von Nu_2 mit steigender Hartmann-Zahl. Dies ist dadurch begründet, dass sich in diesem Bereich das kalte, aufwärts strömende Fluid immer stärker an den Zylindermantel anlegt. Bei $Ha > 100$ ist die Umschichtung der Strömung nahezu abgeschlossen. Jetzt wirkt sich nur noch die stärkere Dämpfung des Magnetfeldes auf die Nußelt-Zahl Nu_2 aus.

	Nu_1	Nu_2
$Ha = 100$	0.935	1.109
$Ha = 200$	0.921	1.066
$Ha = 500$	0.923	1.027

Tabelle 5.10: Vergleich der Nußelt-Zahlen für den Fall des horizontalen Magnetfeldes in Abhängigkeit der Hartmann-Zahl für $Ra_{iW} = 10^6$.

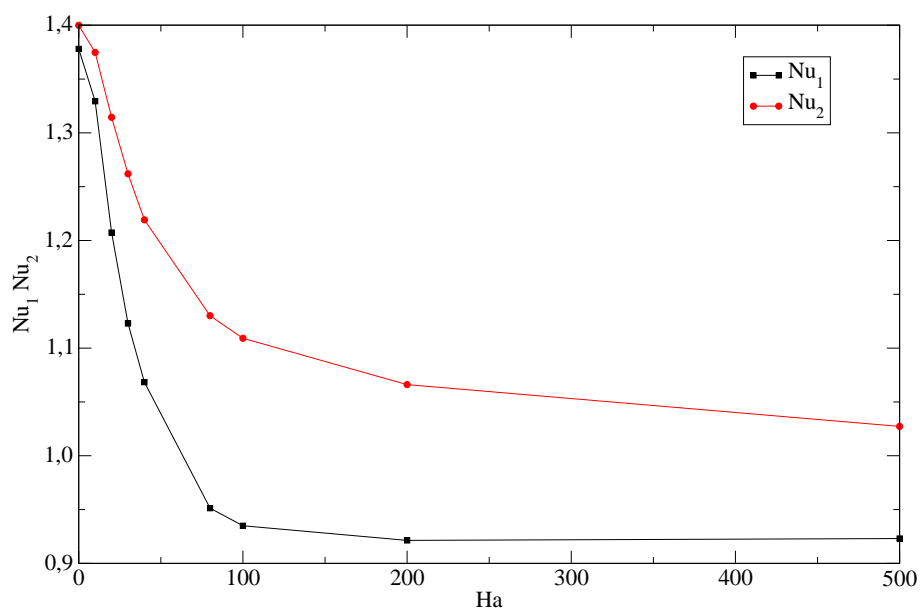


Bild 5.55: Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 als Funktion der Hartmann-Zahl beim horizontalen Magnetfeld bei $Ra_{iW} = 10^6$.

5.3 Stehender Zylinder mit gekühlter oberer Stirnseite

In diesem Kapitel werden durch homogene interne Wärmequellen erzeugte Konvektionsströmungen in einem oben gekühlten, stehenden Zylinder nach Abbildung 5.56 untersucht. Es werden rein hydrodynamische Strömungen als auch Strömungen unter dem Einfluss von horizontalen und vertikalen Magnetfeldern behandelt.

Eine solche Konfiguration ergibt sich beispielsweise beim hypothetischen Fall der Kristallzüchtung aus einem durch homogene interne Wärmequellen beheiztem Fluid nach dem Czochralski- oder Tiegelziehverfahren [24]. Hier soll eine Galliumschmelze untersucht werden. Für Gallium liegt die Prandtl-Zahl mit $Pr = 0.02$ [65] leicht höher als z. B. bei einer Siliziumschmelze, für welche $Pr = 0.013$ gilt [101].

Der Zylinder besitzt ein Höhen-Durchmesserverhältnis von $A = 1$. Der Zylindermantel und die untere Stirnseite sind adiabat. Durch die internen Wärmequellen, welche homogen verteilt sind, heizt sich das Fluid auf. Aufgrund der isothermen oberen Stirnseite ergibt sich eine instabile Temperaturschichtung, welche ab einer bestimmten kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_{iW,krit}$ eine Konvektionsströmung hervorruft.

Werden Berechnungen unter dem Einfluss von Magnetfeldern durchgeführt, so werden an allen Rändern stets elektrisch isolierte Berandungen angenommen. An der oberen Stirnseite kann eine feste Berandung, an welcher die Haftbedingung gilt, oder eine freie Oberfläche vorhanden sein. Dadurch kann im ersten Schritt untersucht werden, welchen Einfluss die Randbedingung an der oberen Stirnseite auf das Einsetzen der Konvektion hat.

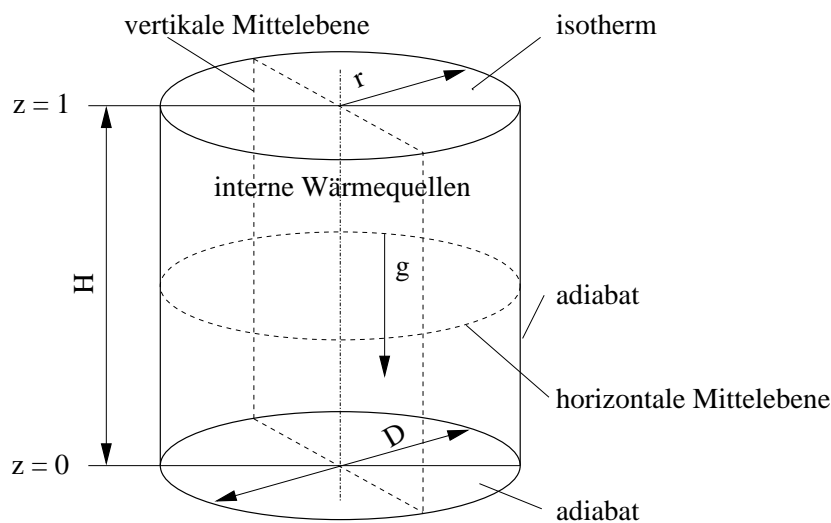


Bild 5.56: An der oberen Stirnseite gekühlter stehender Zylinder mit internen Wärmequellen.

Als charakteristische Größe dient der Durchmesser D des Zylinders. Somit ergibt sich die Rayleigh-Zahl Ra_{iW} für die interne Beheizung zu

$$Ra_{iW} = \frac{g \beta q D^5}{\kappa \nu \lambda_{WL}}. \quad (5.16)$$

Bei reiner Wärmeleitung ergibt sich mit den genannten thermischen Randbedingungen das folgende, vom Höhen-Durchmesserverhältnis A und z abhängige, dimensionslose quadratische

Temperaturprofil

$$T(z) = \frac{1}{2}(A^2 - z^2). \quad (5.17)$$

Die maximale Temperatur $T_{max,WL}$ ergibt sich bei reiner Wärmeleitung an der unteren Stirnseite zu

$$T_{max,WL} = \frac{1}{2}A^2. \quad (5.18)$$

Für die mittlere Temperatur $T_{m,WL}$ ergibt sich

$$T_{m,WL} = \frac{1}{H} \int_0^H T(z) dz = \frac{1}{3}A^2. \quad (5.19)$$

Somit errechnet sich die Nußelt-Zahl Nu_1 für dieses System zu

$$Nu_1 = \frac{1}{2} \frac{A^2}{T_{max}}, \quad (5.20)$$

während für Nu_2 die folgende Beziehung gilt

$$Nu_2 = \frac{1}{3} \frac{A^2}{T_m}. \quad (5.21)$$

5.3.1 Hydrodynamische Konvektion

Bei steigender interner Beheizung setzt ab einer bestimmten kritischen Rayleigh-Zahl für die interne Beheizung $Ra_{iW,krit}$ eine Konvektionsströmung ein. Hierbei treten unterschiedliche Strömungsmuster auf. Rotationssymmetrische Rechnungen entsprechen dem Mode $m = 0$. Hierbei handelt es sich um eine Strömung mit im Kern aufwärts oder abwärts strömendem Fluid. Dreidimensionale Berechnungen zeigen das Auftreten eines Strömungsmusters, welches durch eine horizontal verlaufende Rotationsachse gekennzeichnet ist. Diese Strömung wird als Mode $m = 1$ bezeichnet.

5.3.1.1 Einfluss der Berandung am oberen Rand

Zur Bestimmung der kritischen Rayleigh-Zahl $Ra_{iW,krit}$ für Mode $m = 0$ wird der Maximalwert der vertikalen Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene bei verschiedenen Rayleigh-Zahlen berechnet und auf $v_z = 0$ extrapoliert. Zur Gewährleistung einer rotations-symmetrischen Strömung werden zweidimensionale Berechnungen in r und z -Koordinaten durchgeführt. Der Einfluss der Randbedingung am oberen Rand ist in Abbildung 5.57 dargestellt. Hier wird die maximale vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene über der Rayleigh-Zahl Ra_{iW} für den Mode $m = 0$ mit im Kern aufwärts strömendem Fluid dargestellt. Berechnungen werden für eine freie Oberfläche am oberen Rand und für eine feste

Berandung, an der die Haftbedingung gilt, durchgeführt. Für einen Zylinder mit einer festen Berandung an der oberen Stirnseite ergibt sich die kritische Rayleigh-Zahl für den Mode $m = 0$ zu

$$Ra_{iW,krit} \approx 19700. \quad (5.22)$$

Wird am oberen Rand eine freie Oberfläche vorausgesetzt, so ergibt sich die kritische Rayleigh-Zahl für diesen Mode zu

$$Ra_{iW,krit} \approx 18200. \quad (5.23)$$

Durch die freie Oberfläche ergibt sich somit im Vergleich zur festen Berandung nur eine geringfügig niedrigere Rayleigh-Zahl. Somit wirkt die feste Berandung nur leicht stabilisierend. Alle weiteren Berechnungen werden deshalb mit einer festen Berandung am oberen Rand durchgeführt.

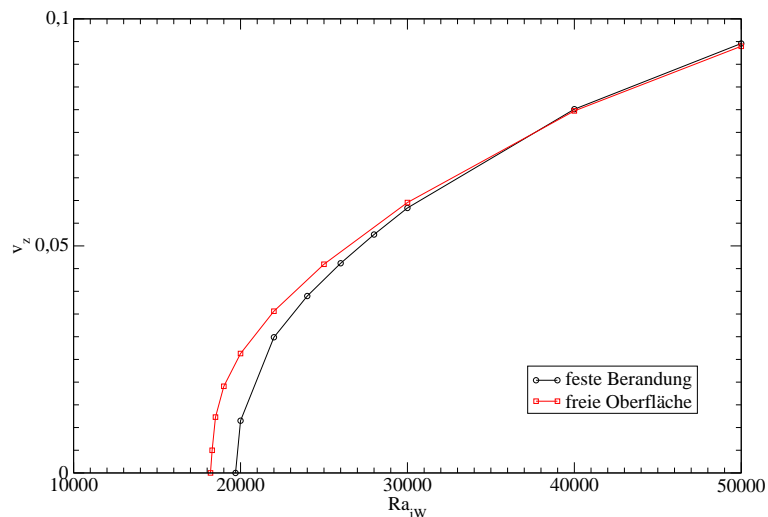


Bild 5.57: Einfluss der Randbedingung an der oberen Stirnseite auf die kritische Rayleigh-Zahl $Ra_{iW,krit}$ und die Entwicklung der maximalen vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene für den Mode $m = 0$.

5.3.1.2 Rotationssymmetrische Strömung

Betrachtet man durch einen linearen vertikalen Temperaturgradienten hervorgerufene Rayleigh-Bénard-Instabilitäten (vgl. [16], [66]) in stehenden Zylindern, so ergeben sich für Mode $m = 0$ zwei symmetrische Lösungen mit Bezug auf die horizontale Mittelebene. Bedingt durch die Symmetrie kann das Fluid im Kern entweder nach oben oder nach unten strömen. Diese Symmetrie ist im hier untersuchten Fall nicht gegeben, da im Falle der reinen Wärmeleitung kein lineares Temperaturprofil vorliegt. Vielmehr ergibt sich ein quadratisches Temperaturprofil nach Gleichung (5.17). Deshalb wird hier unterschieden zwischen dem Mode $m = 0_+$ mit im Kern nach oben strömendem Fluid und Mode $m = 0_-$, bei welchem das Fluid im Kern nach unten strömt.

Werden instationäre Berechnungen aus der Ruhe bei überkritischen Rayleigh-Zahlen durchgeführt, so stellt sich der Mode $m = 0_-$ ein. Eine solche Strömung ist in Abbildung 5.58 für $Ra_{iW} = 6 \times 10^4$ und $Ra_{iW} = 1.6 \times 10^5$ dargestellt. Bei $Ra_{iW} = 6 \times 10^4$ weist das Temperaturfeld, insbesondere im oberen Bereich, einen vertikalen Gradienten auf. Der Einfluss der Konvektion ist hier gering. Durch das im Kern des Zylinders abwärts strömende Fluid bildet sich an der unteren Stirnseite ein Staupunkt. Das Wirbelzentrum liegt sehr nahe an der unteren Stirnseite. Wird die Rayleigh-Zahl auf $Ra_{iW} = 1.6 \times 10^5$ erhöht, so ist der Wirbel stärker ausgeprägt und der Einfluss der Konvektion auf das Temperaturprofil wird deutlich stärker.

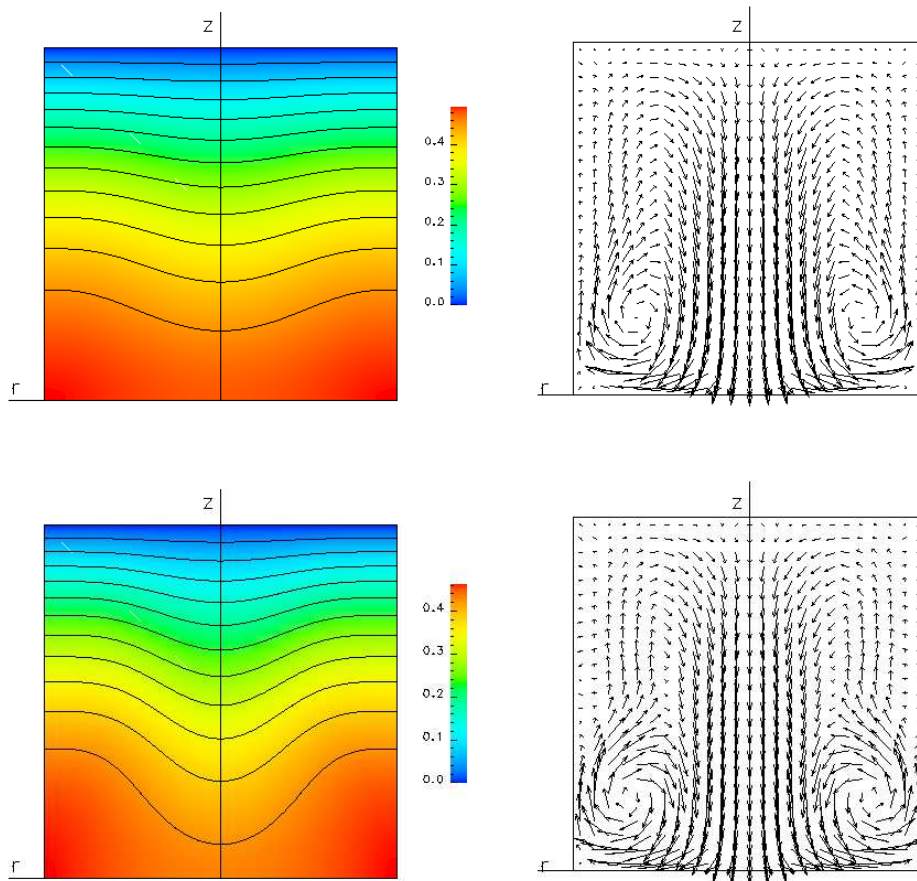


Bild 5.58: Isothermen und Geschwindigkeitsvektoren für den Mode $m = 0_-$ bei $Ra_{iW} = 6 \times 10^4$ (oben) $Ra_{iW} = 1.6 \times 10^5$ (unten) und $Pr = 0.02$ in einer vertikalen Mittelebene.

Wird die Rayleigh-Zahl weiter erhöht, so wird Mode $m = 0_-$ bei Rayleigh-Zahlen $Ra_{iW} > 2.4 \times 10^5$ durch Mode $m = 0_+$ abgelöst. Mode $m = 0_+$ entsteht auch, wenn bei niedrigeren Rayleigh-Zahlen die Anfangsbedingung so gewählt wird, dass Mode $m = 0_+$ begünstigt wird. In Abbildung 5.59 sind das Temperaturfeld sowie die Geschwindigkeitsvektoren für den Mode $m = 0_+$ für $Ra_{iW} = 6 \times 10^4$ und $Ra_{iW} = 1.6 \times 10^5$ dargestellt. Das Wirbelzentrum befindet sich nun sehr nahe an der oberen Stirnseite. Verglichen mit dem Mode $m = 0_-$ nach Abbildung 5.58 besitzt der Wirbel bei Mode $m = 0_+$ eine höhere Intensität.

Bei einer auf $Ra_{iW} = 1.6 \times 10^4$ erhöhten Rayleigh-Zahl ist der stärkere Einfluss der Konvektion auf das Temperaturprofil zu erkennen. Unabhängig von der Rayleigh-Zahl ist die Strömung im Wesentlichen in der oberen Hälfte des Zylinders ausgeprägt. In der unteren Hälfte des

Zylinders ist lediglich im Kern eine aufwärts gerichtete Strömung mit erhöhten Geschwindigkeiten zu erkennen. Die bei Mode $m = 0_+$ auftretenden maximalen Geschwindigkeiten in der horizontalen Mittelebene sind deutlich geringer als bei Mode $m = 0_-$.

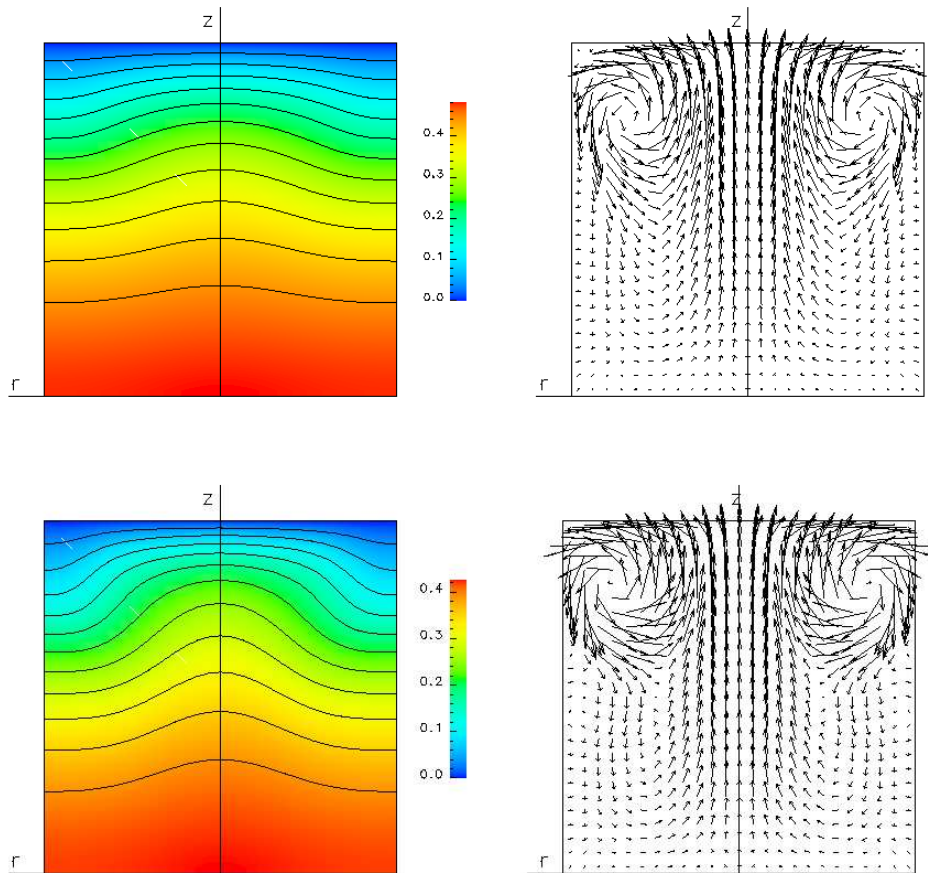


Bild 5.59: Isothermen und Geschwindigkeitsvektoren für den Mode $m = 0_+$ bei $Ra_{iW} = 6 \times 10^4$ (oben) und $Ra_{iW} = 1.6 \times 10^5$ (unten) und $Pr = 0.02$ in einer vertikalen Mittelebene.

5.3.1.3 Dreidimensionale Berechnungen

Zur Untersuchung von nicht rotationssymmetrischen Moden werden instationäre dreidimensionale Rechnungen durchgeführt. Hierbei wird eine Berechnung bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ aus der Ruhe gestartet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liegt eine homogene Temperaturverteilung vor, welche der Wandtemperatur an der oberen Stirnseite entspricht. Durch die internen Wärmequellen heizt sich das Fluid auf und es entsteht im oberen Bereich eine rotationssymmetrische Strömung, bei welcher im Innern des Zylinders das Fluid abwärts und außen am Zylindermantel aufwärts strömt. Diese Strömung ist vergleichbar mit dem Mode $m = 0_-$. Im weiteren Verlauf der Rechnung verstärkt sich diese Strömung und das Wirbelzentrum wandert immer weiter nach unten. Wie bei den rotationssymmetrischen Berechnungen liegt nun Mode $m = 0_-$ vor. Nach kurzer Zeit zerfällt Mode $m = 0_-$ und die Strömung verliert ihren rotationssymmetrischen Charakter. Schließlich stellt sich Mode $m = 1$ als stabiler Mode ein. Bei Mode $m = 1$ strömt das Fluid in einer durch eine vertikale Mittelebene geteilten Hälfte des Zylinders aufwärts und strömt in der anderen Zylinderhälfte abwärts. Hierbei treten in der horizontalen

Mittelebene deutlich größere vertikale Geschwindigkeiten als bei Mode $m = 0_-$ auf. Auch die Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 steigen im Vergleich zu Mode $m = 0_-$ deutlich an. Dies bedeutet eine Absenkung der maximalen und der mittleren Temperaturen im Vergleich zur Strömung mit Mode $m = 0_-$ und es ergibt sich ein verbesserter Wärmeübergang.

Rechnungen, bei welchen als Anfangsbedingung die Lösung für $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ dient, zeigen, dass bei einer schrittweise reduzierten Rayleigh-Zahl Ra_{iW} Mode $m = 1$ bis zu einer kritischen Rayleigh-Zahl von

$$Ra_{iW,krit} \approx 7000 \quad (5.24)$$

erhalten bleibt. Somit setzt im dreidimensionalen Fall Konvektion bei wesentlich niedrigeren Rayleigh-Zahlen ein als im Falle der zuvor untersuchten rotationssymmetrischen Strömungen mit Mode $m = 0$.

In Abbildung 5.60 ist das Temperaturprofil sowie das Geschwindigkeitsprofil für Mode $m = 1$ für $Ra_{iW} = 1 \times 10^4$, $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ und $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ in zwei vertikalen Mittelebenen, parallel und normal zur Rotationsachse der Strömung dargestellt. Bei $Ra_{iW} = 1 \times 10^4$ entsteht in der zur Rotationsachse parallelen Ebene ein vertikaler Temperaturgradient wie bei der reinen Wärmeleitung. Ein Einfluss der Konvektion auf das Temperaturprofil ist nur in der normal zur Rotationsachse der Strömung verlaufenden vertikalen Mittelebene in der Nähe der unteren Stirnseite zu erkennen. In dieser Ebene erstreckt sich der Wirbel über die gesamte Höhe des Zylinders. In der zur Rotationsachse parallelen Ebene gibt es eine Sekundärströmung. Hierbei strömt das Fluid im Bereich der oberen Stirnseite vom Kern nach außen, danach am Zylindermantel nach unten, um schließlich in der horizontalen Mittelebene in den Kern zurückzuströmen.

Wird die Rayleigh-Zahl auf $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ erhöht, so zeigt sich der deutlich stärkere Einfluss der Konvektion auf das Temperaturprofil. In der normal zur Rotationsachse des Wirbels verlaufenden Ebene entsteht in der unteren Hälfte des Zylinders ein Temperaturgradient in horizontaler Richtung. In der oberen Hälfte des Zylinders ist der Wärmeübergang weniger stark von der Konvektion geprägt, da dort größere Temperaturgradienten auftreten, welche für einen stärkeren Wärmetransport durch Wärmeleitung verantwortlich sind.

Bei einer auf $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ erhöhten Rayleigh-Zahl ist die Konvektion noch stärker ausgeprägt. Dies macht sich durch den bis oberhalb der horizontalen Mittelebene ausgeprägten horizontalen Temperaturgradienten bemerkbar. Im oberen Bereich ist der Wärmeübergang wie zuvor durch Wärmeleitung dominiert. Jetzt treten im Vergleich zur Strömung bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ noch stärkere Temperaturgradienten an der oberen Stirnseite auf.

In Abbildung 5.61 ist das Temperaturfeld durch Isolinien und das Geschwindigkeitsfeld durch Vektorpfeile in der zur Rotationsachse der Strömung normalen vertikalen Mittelebene für $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ dargestellt. Am Staupunkt an der oberen und der unteren Stirnseite bildet sich jeweils ein Sekundärwirbel aus. Die Sekundärströmung in der zur Rotationsachse des Wirbels parallelen vertikalen Mittelebene ist für $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ in Abbildung 5.62 dargestellt. In dieser Ebene treten vier Wirbel auf, durch welche jeweils warmes Fluid an der unteren Stirnseite und kaltes Fluid an der oberen Stirnseite vom Kern zum Zylindermantel fließt. Durch diese Sekundärströmung wird der starke Temperaturgradient an der oberen Stirnseite abgeschwächt. Während bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ die Strömung in der zur Rotationsachse der Strömung normalen vertikalen Mittelebene ein Strömungsfeld aufweist, bei welchem die

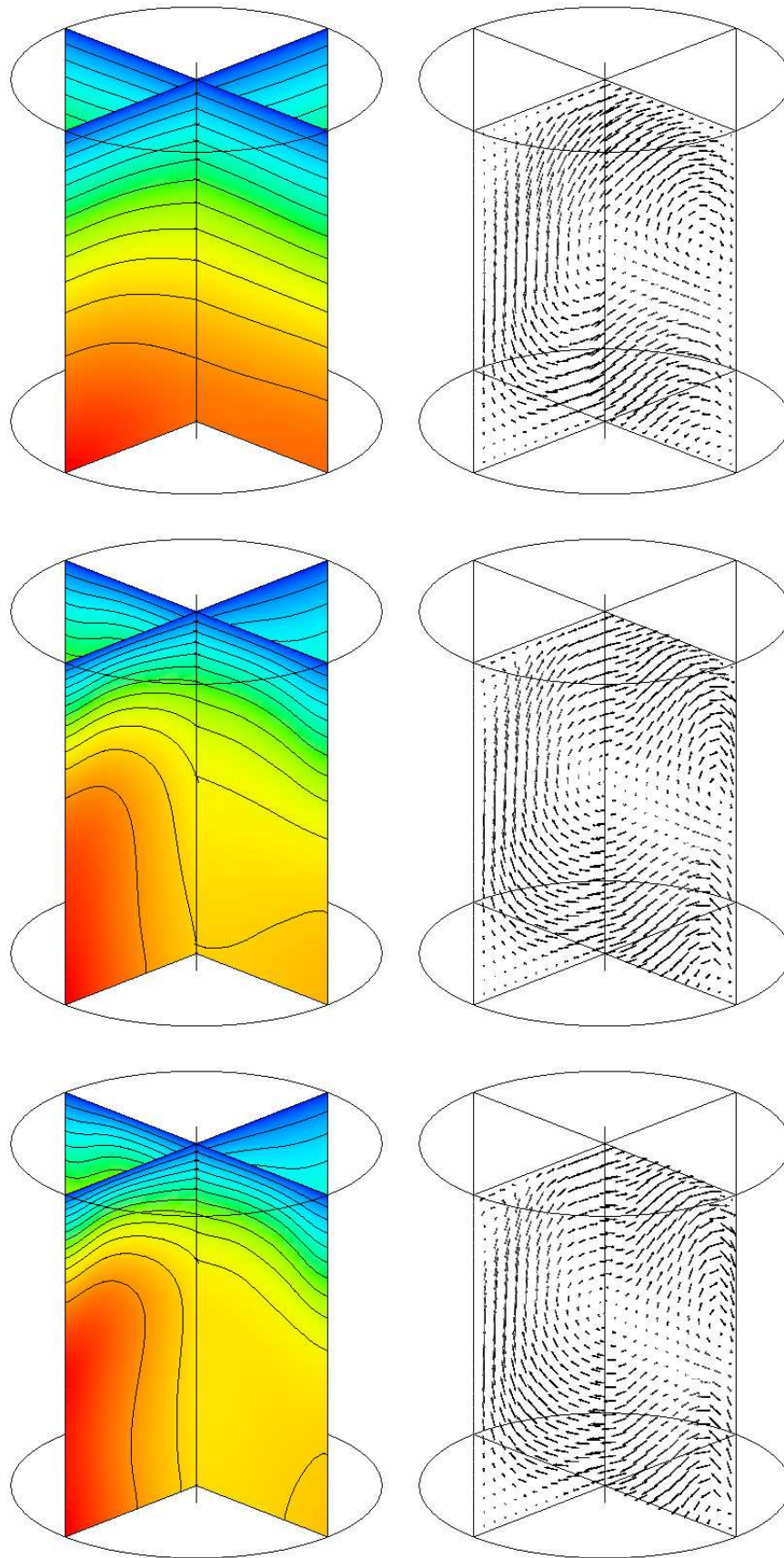


Bild 5.60: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren für Mode $m = 1$. $Ra_{iW} = 1 \times 10^4$ (oben), $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ (mitte) und $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ (unten).

Strömung überwiegend parallel zur jeweiligen Berandung verläuft, so neigt die Strömung bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ dazu, diagonal von den Stirnseiten wegzuströmen. Dies ist in Abbildung 5.63 dargestellt. Auch die in dieser Ebene an den Staupunkten an der oberen und unteren Stirnseite auftretenden Sekundärwirbel sind nun verstärkt. Abbildung 5.64 zeigt die bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ in der zur Rotationsachse des Wirbels parallelen vertikalen Mittelebene auftretenden Wirbel, welche nun einen stärkeren Effekt auf das Temperaturprofil in dieser Ebene besitzen. Neben den vier Sekundärwirbel ist zu erkennen, dass das Fluid im Bereich der Mittelachse jeweils von den Stirnseiten in Richtung der horizontalen Mittelebene strömt. Durch diese Strömung wird das Temperaturprofil ebenfalls beeinflusst. Auch hier ist eine leichte Abschwächung des vertikalen Temperaturgradienten zu erkennen.

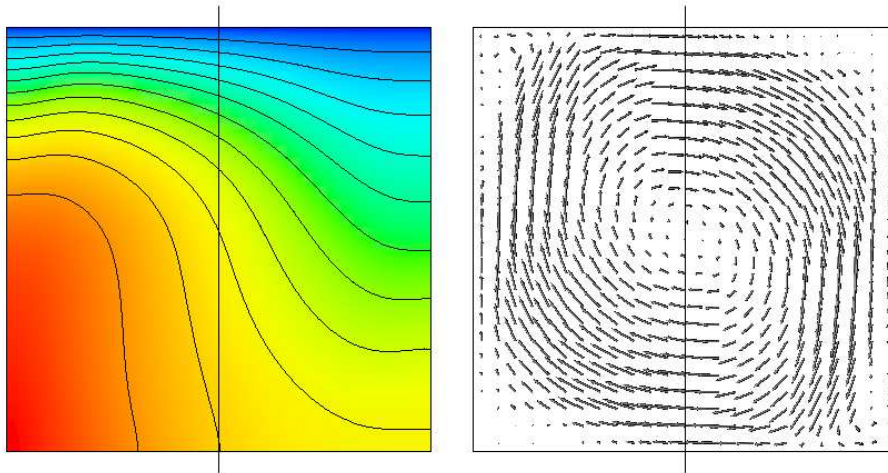


Bild 5.61: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ für Mode $m = 1$ in der zur Rotationsachse der Strömung normalen vertikalen Mittelebene.

Stationäre Lösungen ergeben sich für Mode $m = 1$ bis $Ra_{iW} \leq 10 \times 10^4$. Bei größeren Rayleigh-Zahlen ergibt sich eine zeitlich periodische Strömung. Hierbei bleibt der Mode $m = 1$ im untersuchten Parameterbereich erhalten. In Abbildung 5.65 ist für $Ra_{iW} = 13 \times 10^4$ die vertikale Geschwindigkeit v_z bei $r = 0.375$ und $z = 0.5$ in der zur Rotationsachse der Strömung normalen vertikalen Mittelebene sowie die Nußelt-Zahl Nu_2 über der Zeit dargestellt. Während die Schwankung bei der Geschwindigkeit etwa 10% beträgt, ist die Schwankung bei der Nußelt-Zahl um Größenordnungen kleiner.

In Abbildung 5.66 ist für $Ra_{iW} = 13 \times 10^4$ und $Pr = 0.02$ die Geschwindigkeitsverteilung der vertikalen Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene für verschiedene dimensionslose Zeiten t dargestellt. Hierbei kennzeichnen blaue Bereiche nach unten, rote Bereiche nach oben strömendes Fluid. Die oberen drei Bilder (1), (3) und (5) zeigen die Strömung jeweils für drei dimensionslose Zeitpunkte, an denen die vertikale Geschwindigkeit, welche in Abbildung 5.65 dargestellt ist, ein Maximum annimmt. Die unteren drei Bilder (2), (4) und (6) stellen analog die Strömung für dimensionslose Zeitpunkte, in denen die Strömungsgeschwindigkeit ein Minimum aufweist, dar. Wie die Bilder zeigen, verändert sich das Strömungsmuster jeweils beim Auftreten der minimalen und maximalen Geschwindigkeit, zeigt aber ebenfalls einen periodischen Charakter.

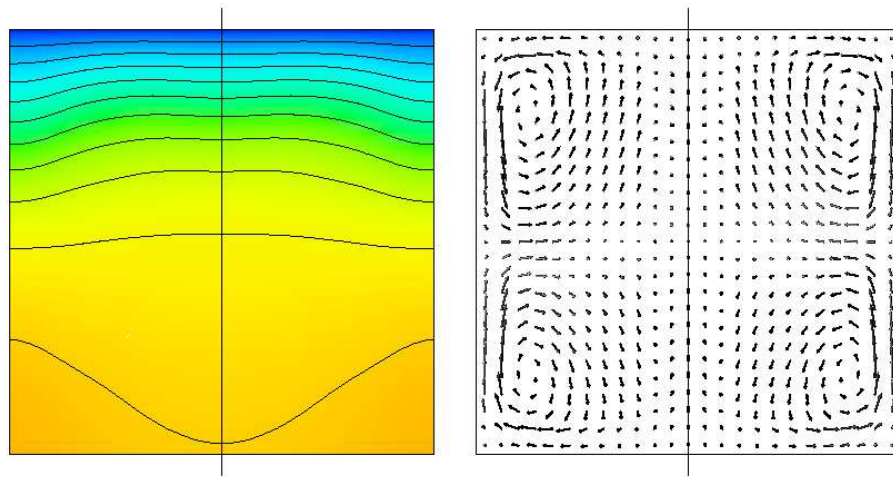


Bild 5.62: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ für Mode $m = 1$ in der zur Rotationsachse der Strömung parallelen vertikalen Mittelebene.

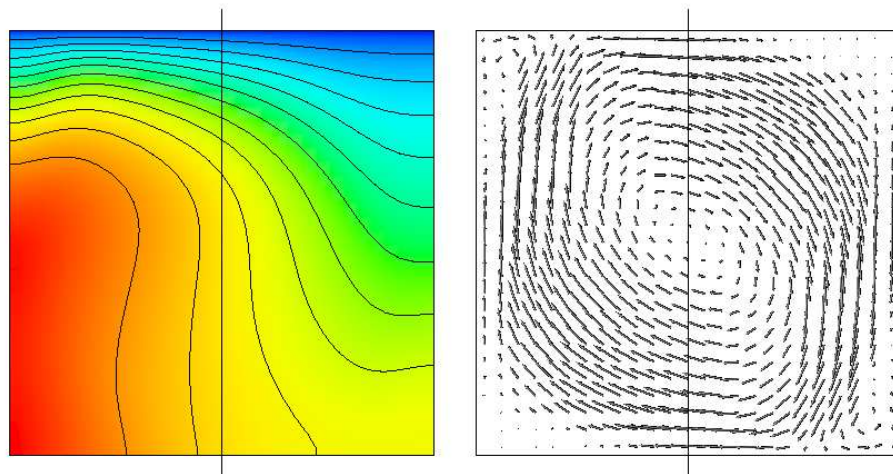


Bild 5.63: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ für Mode $m = 1$ in der zur Rotationsachse der Strömung normalen vertikalen Mittelebene.

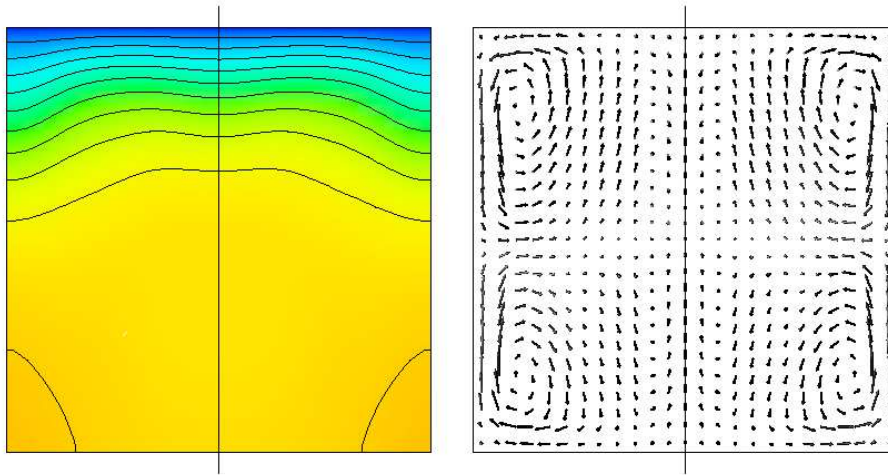


Bild 5.64: Temperaturverteilung und Geschwindigkeitsvektoren bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ für Mode $m = 1$ in der zur Rotationsachse der Strömung parallelen vertikalen Mittelebene.

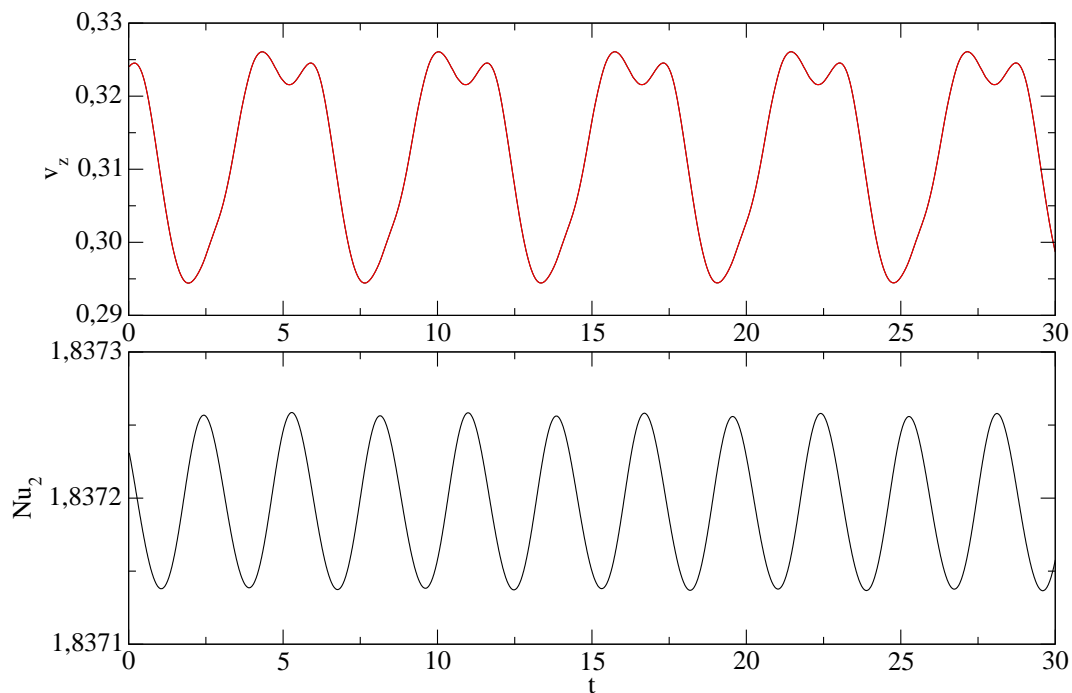


Bild 5.65: Vertikale Geschwindigkeit v_z bei $r = 0.375$ und $z = 0.5$ in der zur Rotationsachse des Wirbels normalen vertikalen Mittelebene (oben) und Nußelt-Zahl Nu_2 (unten) über der Zeit bei $Ra_{iW} = 13 \times 10^4$ und $Pr = 0.02$.

Im Gegensatz zu den stationären Strömungen bei Rayleigh-Zahlen $Ra_{iW} \leq 8 \times 10^4$, bei welchen die Trennfläche zwischen dem abwärts und dem aufwärts strömenden Fluid einer ebenen Fläche ähnelt, ist diese nun stark verzerrt und ändert die Form periodisch mit der Zeit. Die beiden in Abbildung 5.66 gezeigten Strömungsmuster besitzen einen unsymmetrischen Charakter in Bezug auf eine parallel oder normal zur Achse des Wirbels ausgerichtete vertikale Mittelebene.

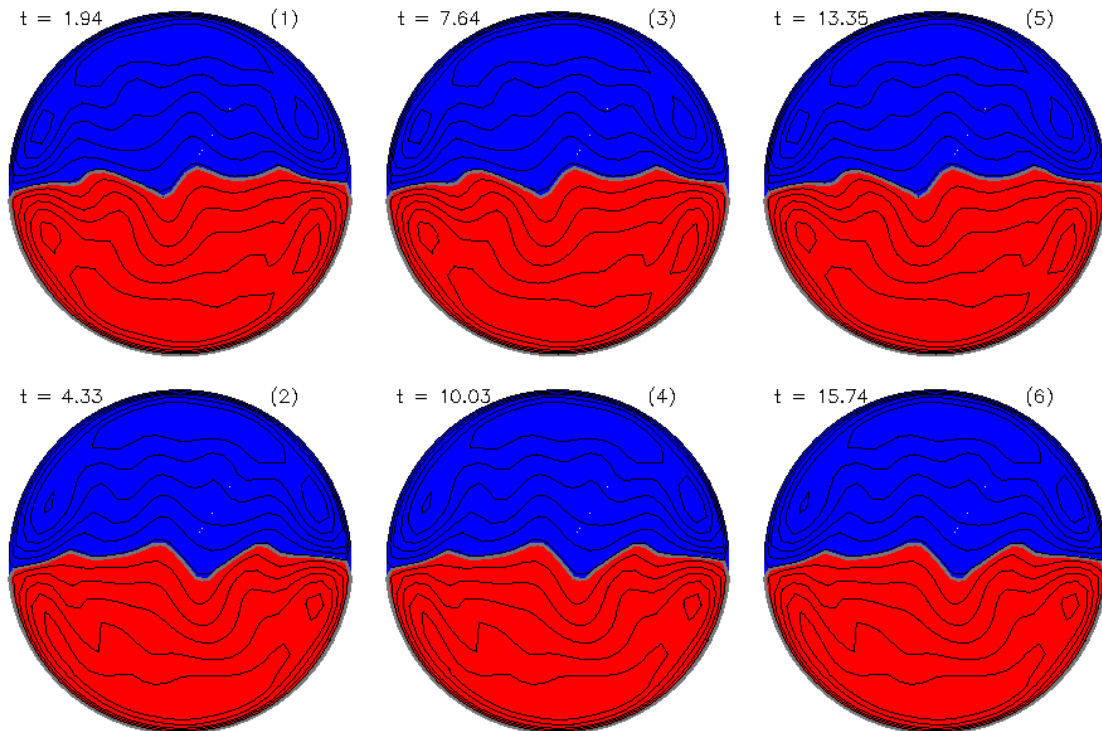


Bild 5.66: Vertikale Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 13 \times 10^4$ und $Pr = 0.02$ beim Auftreten der maximalen Geschwindigkeit in Abbildung 5.65 (Bilder (1),(3) und (5)) sowie beim Auftreten der minimalen Geschwindigkeit (Bilder (2),(4) und (6)). Rote Bereiche kennzeichnen nach oben strömendes Fluid, blaue Bereiche nach unten strömendes Fluid.

Abbildung 5.67 zeigt die beiden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 , dargestellt für die drei Moden $m = 0_+$, $m = 0_-$ und $m = 1$ über der Rayleigh-Zahl Ra_{iW} . Beide Nußelt-Zahlen steigen bei allen drei Moden über einen weiten Bereich linear mit der Rayleigh-Zahl an. Die größten Werte für die Nußelt-Zahlen treten bei Mode $m = 1$ auf. Somit ergibt sich bei Mode $m = 1$ im Vergleich zur reinen Wärmeleitung die stärkste Temperaturabsenkung. Da dieser Mode einen physikalisch stabilen Mode darstellt, kann man davon ausgehen, dass in der Realität die Strömungsform mit der besten Wärmeabfuhr angenommen wird. Bei Mode $m = 1$ ist nahe der kritischen Rayleigh-Zahl $Nu_1 < 1$. Dies bedeutet, dass die maximal auftretende Temperatur größer ist als bei der reinen Wärmeleitung. Da in diesem Bereich bereits $Nu_2 > 1$ ist, ist die mittlere Temperatur jedoch geringer als die mittlere Temperatur bei reiner Wärmeleitung. Bei den Moden $m = 0_+$, $m = 0_-$ nehmen die Nußelt-Zahlen wesentlich weniger stark zu als bei Mode $m = 1$. Bei den Moden $m = 0_+$ und $m = 1$ ergibt sich $Nu_1 < Nu_2$. Bei Mode $m = 0_+$ ist $Nu_1 > Nu_2$. Das Auftreten von Nußelt-Zahlen $Nu_1 < 1$ ist bei der durch die obere Stirnseite gekühlten Anordnung weit geringer ausgeprägt als bei der im vorigen Kapitel beschriebenen Anordnung mit gekühltem Zylindermantel.

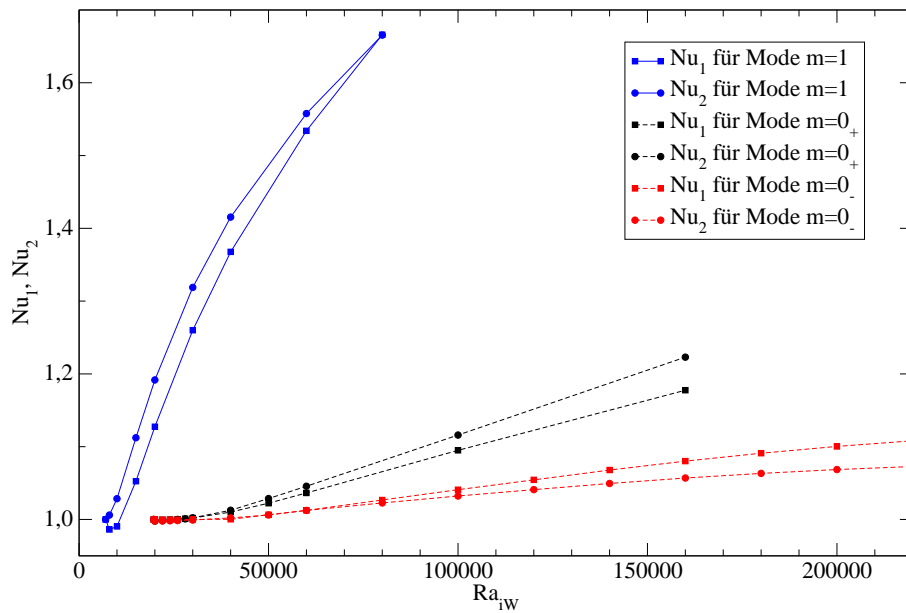


Bild 5.67: Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 als Funktion über der Rayleigh-Zahl Ra_{iW} für die Moden $m = 0_+$, $m = 0_-$ und $m = 1$.

Die Entwicklung der maximalen vertikalen Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene ist in Abbildung 5.68 dargestellt. Für Mode $m = 1$ wird v_z wesentlich größer als bei den beiden rotationssymmetrischen Moden. Dies erklärt die in Abbildung 5.67 gezeigte stärkere Zunahme der Nußelt-Zahlen bei diesem Mode. Bei höheren Rayleigh-Zahlen strebt die vertikale Geschwindigkeit asymptotisch gegen einen Maximalwert. Bei Mode $m = 0_-$ tritt eine höhere vertikale Geschwindigkeit auf als bei Mode $m = 0_+$. Trotz der geringeren vertikalen Geschwindigkeit sind, wie in Abbildung 5.67 gezeigt, die beiden Nußelt-Zahlen für den Mode $m = 0_+$ größer. Dies wird durch Abbildung 5.58 verdeutlicht. Bei Mode $m = 0_-$ ist das Fluid im oberen Teil des Zylinders überwiegend in Ruhe. Die Wärmeabfuhr erfolgt im Wesentlichen durch Wärmeleitung.

5.3.2 Horizontales Magnetfeld

Wirkt ein horizontales Magnetfeld ($Ha = 50$), so ist die Entstehung von zwei verschiedenen Moden möglich. Hierbei ist die Richtung des Magnetfeldes von Bedeutung. Wird bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ oder $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ als Anfangsbedingung die rein hydrodynamische Lösung für den Mode $m = 1$ gesetzt und ein parallel zur Rotationsachse der Strömung wirkendes Magnetfeld angelegt, so bleibt Mode $m = 1$ erhalten. In Abbildung 5.69 ist hierbei die vertikale Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene dargestellt, wobei rote Bereiche aufwärts und blaue Bereiche abwärts strömendes Fluid kennzeichnen. Wirkt das Magnetfeld zu Beginn der Rechnung jedoch normal zur Rotationsachse der Strömung, so wird Mode $m = 1$ durch Mode $m = 0_{\parallel}$ abgelöst. Das Fluid strömt nun, wie in Abbildung 5.70 dargestellt, im Bereich der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene nach oben und strömt in zwei Kreisabschnitten weiter außen am Zylindermantel wieder abwärts. Die Rotationsachsen der beiden Wirbel liegen parallel zum Magnetfeld. Eine Sensitivitätsanalyse zeigt jedoch, dass bereits Abweichungen des Magnetfeldes in der Größenordnung von 1° von der Normalenrichtung dazu führen, dass Mode $m = 1$ entsteht.

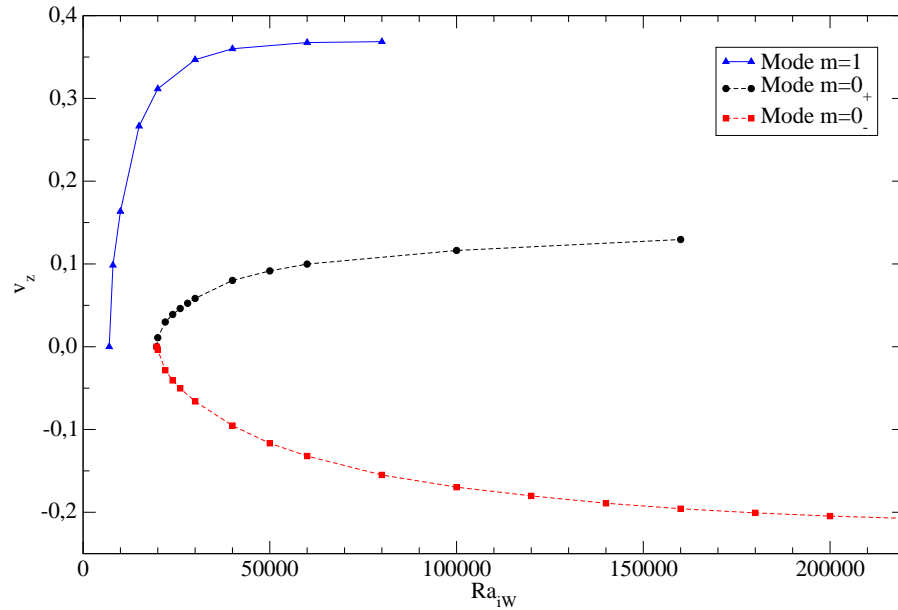


Bild 5.68: Maximale vertikale Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene als Funktion über der Rayleigh-Zahl Ra_{iW} für die Moden $m = 0_+$, $m = 0_-$ und $m = 1$.

In Tabelle 5.11 findet sich ein Vergleich der beiden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 für den rein hydrodynamischen Fall bei Mode $m = 1$ mit der magnetohydrodynamischen Strömung mit horizontalem Magnetfeld für Mode $m = 1$ und Mode $m = 02_{\parallel}$. Liegt Mode $m = 1$ vor, so verändert das Magnetfeld die im rein hydrodynamischen Fall vorliegenden Nußelt-Zahlen kaum. Nu_1 nimmt unter dem Einfluss des Magnetfeldes sogar einen leicht höheren Wert an. Dies bedeutet, dass die maximal auftretende Temperatur im Vergleich zum rein hydrodynamischen Fall etwas niedriger liegt. Beim Mode $m = 02_{\parallel}$ treten allerdings deutlich geringere Nußelt-Zahlen auf. Dieser Mode besitzt die Eigenschaft eines geringeren konvektiven Wärmetransports, wodurch sowohl die mittlere Fluidtemperatur als auch die Maximaltemperatur gegenüber dem Mode $m = 1$ deutlich erhöht ist.

	Nu_1	Nu_2
Mode $m = 1$, ohne Magnetfeld	1.666	1.665
Mode $m = 1$, $Ha = 50$	1.681	1.653
Mode $m = 02_{\parallel}$, $Ha = 50$	1.424	1.402

Tabelle 5.11: Vergleich der errechneten Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 für den rein hydrodynamischen Fall bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ und Mode $m = 1$ mit den Moden $m = 1$ und $m = 02_{\parallel}$ unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes bei $Ha = 50$.

Abbildungen 5.71 und 5.72 zeigen die vertikale Geschwindigkeit sowie die Temperatur in der horizontalen Mittelebene für die Strömung ohne Magnetfeld für den Mode $m = 1$ sowie für $Ha = 50$ für die Moden $m = 1$ und $m = 02_{\parallel}$, jeweils normal zur Rotationsachse der Strömung. Bei der rein hydrodynamischen Strömung mit Mode $m = 1$ liegt, wie in Abbildung 5.71 gezeigt, ein Geschwindigkeitsprofil mit einer dünnen Grenzschicht sowie einem nahezu linearen Verlauf im Innern des Zylinders vor. Bei $Ha = 50$ und Mode $m = 1$ ist das Geschwindig-

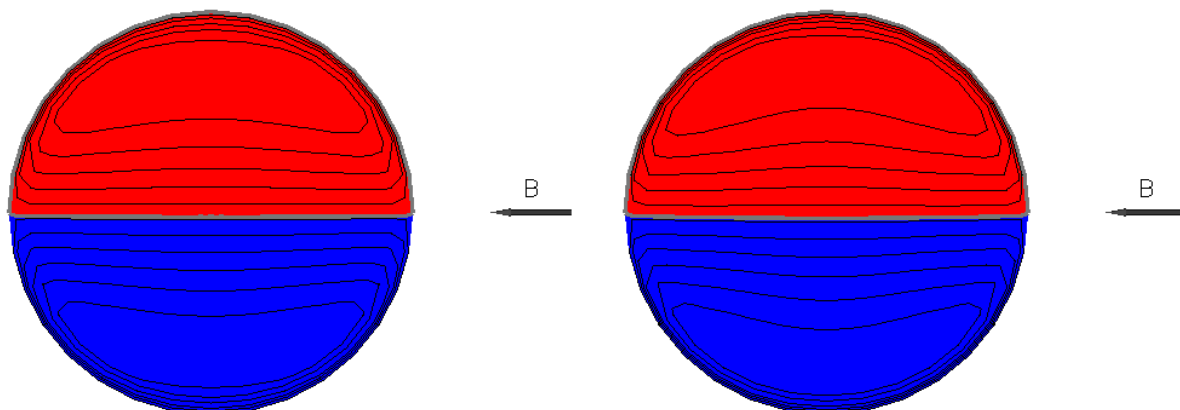


Bild 5.69: Isolinien der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene für den Mode $m = 1$ bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ (links) und $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ (rechts) bei horizontalem Magnetfeld, $Ha = 50$. Rote Bereiche kennzeichnen aufwärts strömendes, blaue Bereiche kennzeichnen abwärts strömendes Fluid.

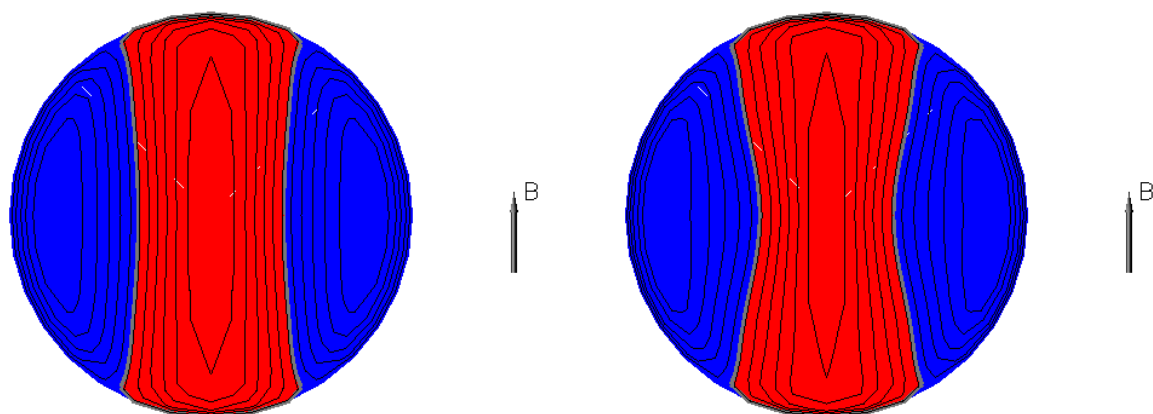


Bild 5.70: Isolinien der vertikalen Geschwindigkeit in der horizontalen Mittelebene für den Mode $m = 02_{\parallel}$ bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ (links) und $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ (rechts) bei horizontalem Magnetfeld, $Ha = 50$. Rote Bereiche kennzeichnen aufwärts strömendes, blaue Bereiche kennzeichnen abwärts strömendes Fluid.

keitsprofil im Vergleich zum rein hydrodynamischen Fall im Wesentlichen unverändert. Die maximale Geschwindigkeit ist nahezu gleich groß, allerdings ist das Geschwindigkeitsmaximum bzw. -minimum jetzt zur Mittelachse des Zylinders hin verschoben. Hierdurch wächst die Grenzschichtdicke an. Auch der lineare Verlauf im Innern ist nun nicht mehr gegeben. Der Vergleich der beiden Temperaturprofile in Abbildung 5.72 zeigt, dass diese nahezu übereinstimmen. Dies erklärt, warum die in Tabelle 5.11 gezeigten Nußelt-Zahlen zwischen der rein hydrodynamischen Strömung und der Strömung bei $Ha = 50$ bei Mode $m = 1$ nur sehr geringfügig differieren.

Das Geschwindigkeitsprofil für den Mode $m = 02$ und $Ha = 50$ besitzt ähnlich große maximale Geschwindigkeiten wie sie auch beim Mode $m = 1$ auftreten. Hierbei sind die maximal auftretenden Geschwindigkeiten des im Kern aufwärts und des am Mantel abwärts strömenden Fluids nahezu gleich. Auch das Temperaturprofil besitzt eine ähnliche Maximaltemperatur wie bei dem zuvor beschriebenen Mode $m = 1$. Das kalte, abwärts strömende Fluid ist jedoch deutlich wärmer als beim Mode $m = 1$. Hierdurch ergibt sich in diesem Querschnitt ein höherer Mittelwert der Temperatur, wodurch sich die bei diesem Mode geringere Nußelt-Zahl Nu_1 erklärt.

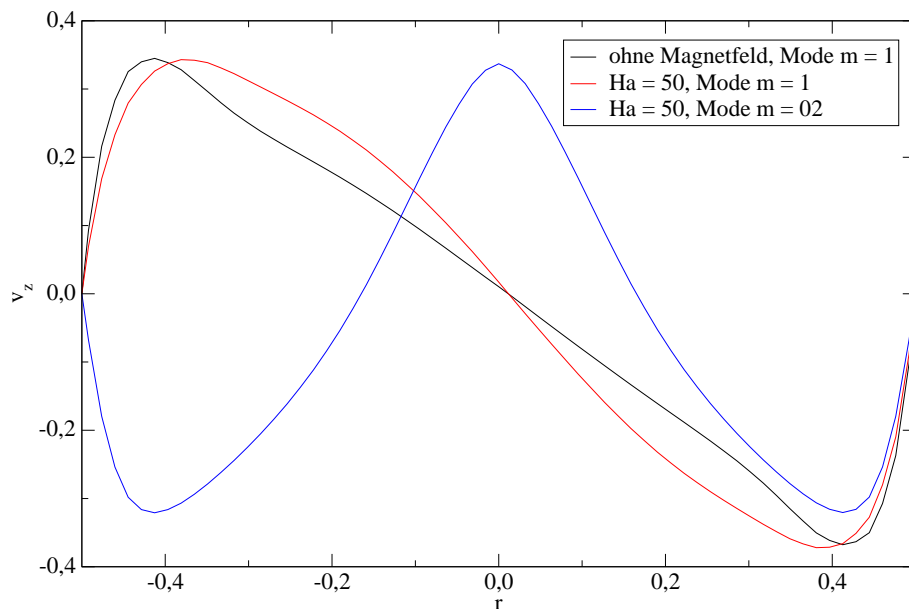


Bild 5.71: Vertikale Geschwindigkeit v_z in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ für den rein hydrodynamischen Fall bei Mode $m = 1$ sowie bei $Ha = 50$ für die Moden $m = 1$ und $m = 02_{||}$ jeweils normal zur Rotationsachse der Strömung.

In Abbildung 5.73 sind die bei Mode $m = 1$ bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ und $Ha = 50$ auftretenden elektrischen Ströme sowie das elektrische Potential in der zum Magnetfeld normal verlaufenden vertikalen Mittelebene und in der horizontalen Mittelebene dargestellt. Da die Rotationsachse der Strömung parallel zum Magnetfeld verläuft, werden elektrische Ströme induziert, welche radial in Bezug auf diese Rotationsachse verlaufen. Hierdurch entsteht ein elektrisches Potential, welches einen Gradienten in diese Richtung ausweist. Die elektrischen Ströme schließen sich in der horizontalen Mittelebene über dünne Schichten entlang des Zylindermantels. Ebenfalls erfolgt ein Stromfluss über die vertikale Mittelebene.

Für den Mode $m = 02_{||}$ sind die elektrischen Ströme sowie das elektrische Potential für $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ und $Ha = 50$ in Abbildung 5.74 dargestellt. Bei diesem Mode schließen sich die

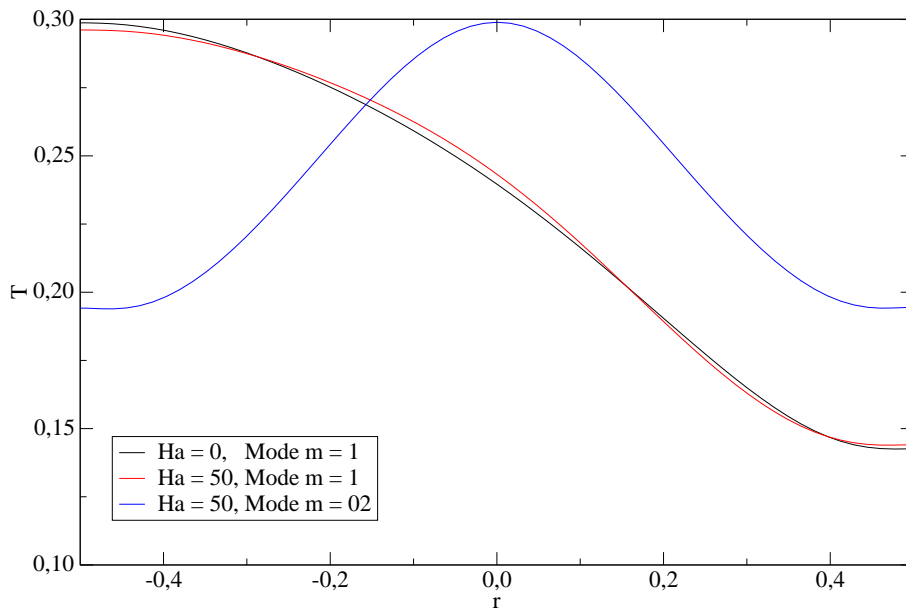


Bild 5.72: Temperatur in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ für den rein hydrodynamischen Fall bei Mode $m = 1$ sowie bei $Ha = 50$ für die Moden $m = 1$ und $m = 02_{||}$ jeweils normal zur Rotationsachse der Strömung.

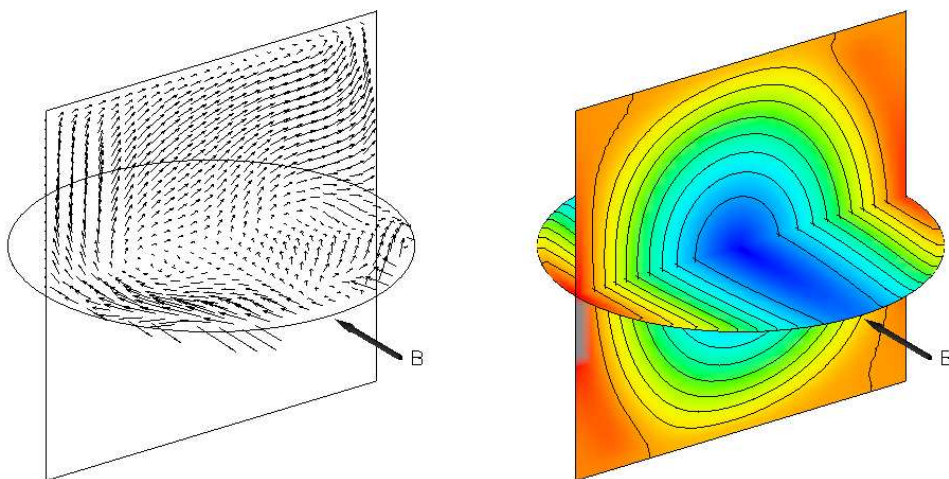


Bild 5.73: Elektrischer Strom und elektrisches Potential in der vertikalen Mittelebene normal zum Magnetfeld und in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$, $Ha = 50$ für den Mode $m = 1$.

elektrischen Ströme in horizontalen Ebenen über vier Wirbel, wobei die größten elektrischen Ströme jeweils nahe am Zylindermantel in einem Winkel von 45° zum Magnetfeld auftreten. Zusätzlich treten zwei kleinere Wirbel auf, durch welche sich die elektrischen Ströme über die Hartmannschichten schließen.

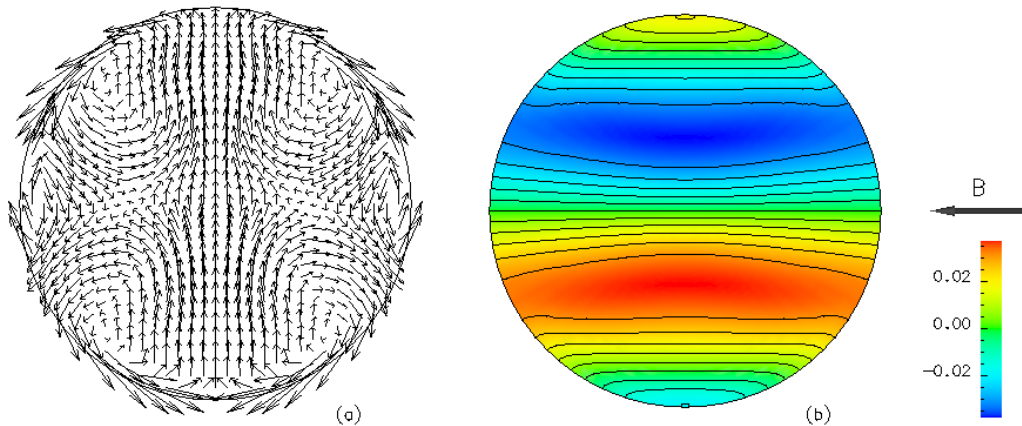


Bild 5.74: Elektrischer Strom (a) und elektrisches Potential (b) in der horizontalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$, $Ha = 50$ für den Mode $m = 02_{\parallel}$.

5.3.3 Vertikales Magnetfeld

Unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes erfährt die Strömung eine wesentlich stärkere Dämpfung als durch das horizontale Magnetfeld. Bei $Ra_{iW} = 4 \times 10^4$ und $Ha = 50$ wird aufgrund der starken Dämpfung, die das Magnetfeld auf die Strömung ausübt, die Konvektionsströmung unterdrückt. Dies bedeutet, dass die kritische Rayleigh-Zahl $Ra_{iW,krit} > 4 \times 10^4$ ist. Bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ und $Ha = 50$ bleibt der im rein hydrodynamischen Fall bei dieser Rayleigh-Zahl auftretende Mode $m = 1$ erhalten. Tabelle 5.12 zeigt einen Vergleich der hierbei auftretenden Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 mit den Nußelt-Zahlen im rein hydrodynamischen Fall. Die starke Absenkung der Nußelt-Zahlen unterstreicht die starke Dämpfung der Strömung durch ein vertikales Magnetfeld.

	Nu_1	Nu_2
Mode $m = 1$, ohne Magnetfeld	1.666	1.665
Mode $m = 1$, $Ha = 50$	1.155	1.224

Tabelle 5.12: Vergleich der errechneten Nußelt-Zahlen Nu_1 und Nu_2 bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ und Mode $m = 1$ für den rein hydrodynamischen Fall und unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes bei $Ha = 50$.

Die elektrischen Ströme schließen sich hierbei, wie in Abbildung 5.75 dargestellt, im Wesentlichen über die zur Rotationsachse der Strömung parallele vertikale Mittelebene. Das hierbei in dieser Ebene auftretende elektrische Potential ist in Abbildung 5.75 ebenfalls dargestellt. Elektrische Ströme werden unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes dort induziert, wo horizontale Geschwindigkeitskomponenten vorliegen. Diese treten in der Nähe der Stirnseiten auf. Die induzierten elektrischen Ströme fließen dann ebenfalls in horizontaler Richtung

normal zur Strömungsrichtung. Die Flussrichtung ist in der oberen und unteren Hälfte des Zylinders entgegengesetzt. Die Ströme können sich hierdurch, wie in der Abbildung gezeigt, durch einen Wirbel schließen. Hierbei treten sehr starke elektrische Ströme auf, welche die starke Dämpfung der Strömung hervorrufen. Die stärksten Potentialunterschiede treten jeweils an den Ecken der in Abbildung 5.75 dargestellten Ebene auf.

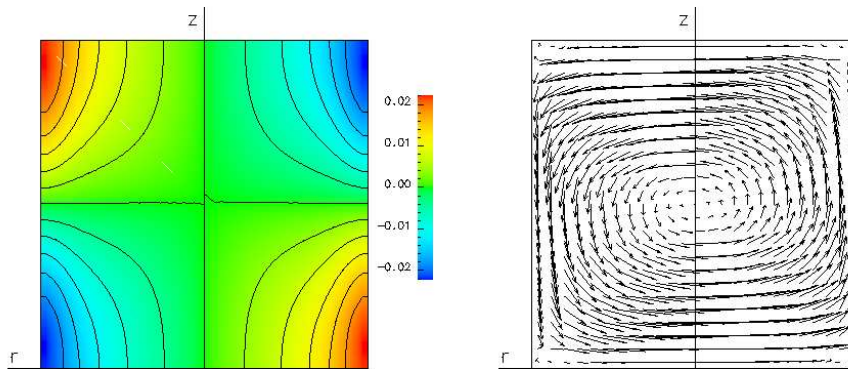


Bild 5.75: Elektrisches Potential und elektrischer Strom in der zur Rotationsachse des Wirbels parallelen vertikalen Mittelebene bei $Ra_{iW} = 8 \times 10^4$ und $Ha = 50$ unter dem Einfluss eines vertikalen Magnetfeldes.

Somit ist gezeigt, dass eine gezielte Beeinflussung einer durch interne Wärmequellen erzeugten Konvektionsströmung durch ein vertikales Magnetfeld möglich ist.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Rechenprogramm zur Berechnung von Konvektionsströmungen von elektrisch leitenden Fluiden mit internen Wärmequellen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in zylindrischen Geometrien entwickelt. Strömungen dieser Art treten bei technischen Problemen in verschiedenen Geometrien mit elektrisch leitenden Fluiden, welche hauptsächlich zur Wärmeabfuhr verwendet werden, auf, wenn ein Magnetfeld vorhanden ist und wenn aufgrund von radioaktiver Strahlung oder radioaktiven Bestandteilen im Fluid eine interne Beheizung auftritt.

Das Rechenprogramm arbeitet auf einem versetzten Maschengitter in Zylinderkoordinaten. Die Diskretisierung erfolgt durch die Finite-Differenzen-Methode. Zur Vermeidung von Singularitäten im Innern des Zylinders erfolgt die Diskretisierung dort mittels der Finite-Volumen-Methode. Zur Validierung des Programms wird eine Reihe von Testrechnungen durchgeführt. Hierbei werden sowohl rein hydrodynamische Rechnungen mit und ohne interne Wärmequellen, als auch Rechnungen mit aufgeprägten Temperaturdifferenzen unter dem Einfluss von Magnetfeldern in verschiedenen Raumrichtungen durchgeführt und mit experimentellen, numerischen und analytischen Daten verglichen.

Anschließend wird ein stehender Zylinder mit internen Wärmequellen bei rein hydrodynamischen Strömungen sowie bei Strömungen unter dem Einfluss von vertikalen und horizontalen Magnetfeldern untersucht. Die Wärmeabfuhr erfolgt an dem isothermen Zylindermantel. Insbesondere beim vertikalen Magnetfeld wird die Strömung stark gedämpft. Dadurch wird der konvektive Wärmetransport stark behindert. Dies ist mit einem Anstieg der maximalen und der mittleren Temperatur im Fluid verbunden. Die im rein hydrodynamischen Fall rotationsymmetrische Strömung behält unter dem Einfluss des vertikalen Magnetfeldes ihren rotationsymmetrischen Charakter bei, während beim horizontalen Magnetfeld ein Strömungsmuster entsteht, welches durch zwei Walzen mit jeweils horizontalen parallel zum Magnetfeld verlaufenden Achsen gekennzeichnet ist. Hierbei treten teilweise Geschwindigkeitsüberhöhungen gegenüber dem rein hydrodynamischen Fall auf. Bei dieser Anordnung treten in bestimmten Parameterbereichen an der oberen Stirnseite höhere Temperaturen als bei der reinen Wärmeleitung auf. Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes und der damit verbundenen dämpfenden Wirkung auf die Strömung wird dieser Effekt zu höheren Rayleigh-Zahlen hin verschoben.

Danach erfolgt die Untersuchung eines stehenden Zylinders mit einer gekühlten oberen Stirnseite. Bei dieser Anordnung ergibt sich eine instabile Temperaturschichtung, welche oberhalb einer kritischen Rayleigh-Zahl eine Konvektionsströmung hervorruft. Im Gegensatz zu der Anordnung, bei welcher die Wärmeabfuhr über den Zylindermantel erfolgt, tritt nun als bevorzugte Strömungsform ein Wirbel mit einer horizontal verlaufenden Walze auf. Unter dem Einfluss eines horizontalen Magnetfeldes ist die Entstehung von zwei verschiedenen

Strömungsmustern möglich. Dient als Anfangsbedingung die rein hydrodynamische Lösung und das Magnetfeld wirkt parallel zur Rotationsachse des Wirbels, so bleibt die Struktur der Strömung erhalten. Der Einfluss des Magnetfeldes auf die Strömung ist, gemessen an der Änderung der Nußelt-Zahlen, gering. Wirkt ein horizontales Magnetfeld jedoch orthogonal zur Rotationsachse der Strömung, so wird die ursprüngliche Strömungsform durch einen Doppelwirbel abgelöst. Jetzt strömt das Fluid in der zum Magnetfeld parallelen vertikalen Mittelebene aufwärts und strömt in zwei Kreisabschnitten wieder nach unten. Während die maximalen vertikalen Geschwindigkeiten bei beiden Moden eine ähnliche Größenordnung aufweisen, sind bei der Strömung mit dem Doppelwirbel die Nußelt-Zahlen deutlich reduziert. Somit ist sowohl die mittlere als auch die maximale Temperatur gegenüber dem rein hydrodynamischen Fall deutlich erhöht. Eine wesentliche stärkere Dämpfung der Strömung wird durch ein vertikales Magnetfeld erzielt. In diesem Fall bleibt der um eine horizontale Achse rotierende Wirbel erhalten. Die starke Dämpfung der Strömung durch das vertikale Magnetfeld macht sich durch die starke Absenkung der Nußelt-Zahlen sowie durch eine Erhöhung der kritischen Rayleigh-Zahl bemerkbar.

Das untersuchte Problem enthält eine Reihe freier Parameter wie Intensität der internen Wärmequellen, Stärke und Richtung des Magnetfeldes, Prandtl-Zahl, Strömungs-, thermische und elektrische Randbedingungen sowie Höhen-Durchmesser Verhältnis des Zylinders. Möglich ist auch die Durchführung von Berechnungen in Geometrien mit kreisring- oder kreissektorförmigem Querschnitt. Es ist somit eine große Anzahl von Aufgabenstellungen denkbar, welche mit dem vorliegenden Programmcode noch behandelt werden können. Die vorliegende Arbeit untersucht einige exemplarische Beispiele, um einen Zugang zu diesem Problembereich zu erhalten.

Zur Vertiefung des Verständnisses von Konvektionsströmungen bei niedrigen Prandtl-Zahlen mit und ohne interne Wärmequellen unter dem Einfluss von Magnetfeldern sind darüber hinaus die folgenden Erweiterungen im Rechenprogramm denkbar:

- Erweiterung zur Berechnung von elektrisch leitenden Berandungen (vgl. [22]).
- Erweiterung des Rechenprogramms zur Berechnung von Strömungen unter dem Einfluss eines rotierenden Magnetfeldes oder eines drehenden Systems unter dem Einfluss eines festen Magnetfeldes (vgl. [61] , [4]).
- Integration eines Turbulenzmodells, welches für die Berechnung turbulenter Konvektionsströmungen bei niedrigen Prandtl-Zahlen geeignet ist (vgl. [102]).
- Einsatz eines nichtäquidistanten Rechengitters zur Auflösung dünner Hartmannschichten insbesondere bei höheren Hartmann-Zahlen.
- Zerlegung des Rechengebietes in mehrere Gebiete. Hierdurch ist eine parallele Berechnung auf Parallelrechnern möglich. Die einzelnen Gebiete können hierbei unterschiedlich fein aufgelöst werden, wodurch eine Ausdehnung des Parameterbereiches hin zu höheren Hartmann-Zahlen möglich ist.

Da das Rechenprogramm als Funktionenbibliothek aufgebaut ist, kann hierbei teilweise auf bereits bestehende Programmteile zurückgegriffen werden. Die vorgeschlagenen Erweiterungen sind deshalb mit vertretbarem Aufwand umsetzbar.

Anhang A

Aufbau des Rechenprogramms

Das verwendete Rechenprogramm basiert auf der Programmiersprache C++. Die Unterprogramme sind objektorientiert, das Hauptprogramm ist strukturiert aufgebaut. Der Programmcode besteht aus einer Funktionenbibliothek für strömungsmechanische Problemstellungen. Hierdurch wird die Berechnung der auftretenden Gleichungen sowie das Pre- und Postprocessing ermöglicht. Die bereitgestellten Funktionen werden im Hauptprogramm entsprechend der Aufgabenstellung zusammen mit den Sprachelementen der Programmiersprache C++ [94] und [71] eingesetzt. Die Programmiersprache C++ erweist sich als sehr geeignet für Anwendungen im Bereich der numerischen Strömungsmechanik, da diese Sprache alle Eigenschaften besitzt, die eine Programmiersprache auch hinsichtlich der Parallelisierung von Programmen benötigt [37].

A.1 Preprozessing

Nach der Festlegung der Anzahl der Gitterpunkte in r , φ und z -Richtung werden die für die Berechnung erforderlichen Variablen definiert. Hierzu stehen verschiedene Datentypen zur Verfügung. Konstante Vektorfelder, die zum Programmstart definiert werden, werden durch den Datentyp

```
c_field <name> ();
```

repräsentiert. Dieser Datentyp wird zur Definition des Magnetfeldes und des Schwerevektors verwendet. Eine mittels `c_field` definierte Größe ist über die gesamte Rechenzeit konstant, kann jedoch auch nach jedem Zeitschritt mit neuen Werten belegt werden.

Skalare Variablen werden mit dem Datentyp

```
scalar <name> ();
```

behandelt. Dieser Datentyp eignet sich für die Temperatur, den Druck und das elektrische Potential.

Schließlich steht für vektorielle Variablen wie Geschwindigkeit \vec{v} oder elektrischen Strom \vec{j} der Datentyp

```
v_field <name> ();
```

zur Verfügung. Außer den Feldern zur Speicherung der jeweiligen Größen an den Rechenpunkten enthalten diese Datentypen alle zur Berechnung benötigten Informationen wie Randbedingungen und gewählte örtliche und zeitliche Diskretisierung. Weiterhin sind je nach gewählter zeitlicher Diskretisierung die Werte von ein oder zwei zurückliegenden Zeitschritten gespeichert. Ein solcher Datentyp wird in der objektorientierten Programmierung auch als abstrakter Datentyp bezeichnet, da seine interne Struktur für seinen Benutzer unwesentlich und unzugänglich ist [25].

Die Allokierung des erforderlichen Speicherplatzes erfolgt dynamisch, d. h. der benötigte Speicherplatz wird während der Laufzeit angefordert und bereitgestellt. Werden die Daten nicht mehr benötigt, so werden diese aus dem Speicher gelöscht. Hierdurch erreicht man einen sehr effizienten Umgang mit den Systemressourcen. Das Konzept der dynamischen Speicherverwaltung stellt darüber hinaus ein leistungsfähiges Konzept zur übersichtlichen Programmierung dar, weil die Mehrfachbelegung von Speicher durch verschiedene Programmteile vermieden wird.

Neben den Datentypen stehen vielfältige Funktionen zur Verfügung, mit denen alle im Rahmen des Preprozessing erforderlichen Daten erzeugt werden.

A.2 Numerische Lösung der Gleichungen

Alle zur Berechnung erforderlichen Funktionen befinden sich innerhalb einer mittels C++ erzeugten Schleife. Diese Schleife wird solange durchlaufen, bis ein Abbruchkriterium erfüllt, bzw. die gewünschte Anzahl von Zeitschritten abgearbeitet ist.

Zur Berechnung der Poissongleichung für das elektrische Potential nach Gleichung (2.22) wird zur Berechnung der induzierten elektrischen Ströme zuerst der Term $\vec{v} \times \vec{B}$ in allen drei Raumrichtungen ausgewertet. Das Ergebnis wird zwischengespeichert, da die Daten zur Berechnung der Stromdichte nochmals benötigt werden

```
j.set_initial_r(V.cross_r(B));
j.set_initial_p(V.cross_p(B));
j.set_initial_z(V.cross_z(B));
```

Anschließend wird die Poissongleichung für das elektrische Potential gelöst

```
PHI.poisson(j.div_j());
```

Danach kann mittels des Ohmschen Gesetzes der elektrische Strom berechnet werden. Dies wird mit den nachfolgend aufgeführten Programmzeilen getrennt für jede Raumrichtung durchgeführt

```
j.add_r(-PHI.grad_r());
j.add_p(-PHI.grad_p());
j.add_z(-PHI.grad_z());
```

Die Integration der Energie- und Impulsgleichung erfolgt mit der Funktion `integ`, die sowohl in der Klasse `scalar` als auch in `v_field` zur Verfügung steht

```
T.integ(sqrt(1/(Ra_iW*Pr))*T.div_grad() - T.div(V) + sqrt(1/(Ra_iW * Pr)));
```

```
V.integ_r(V.div_grad_r() - sqrt(Pr/Ra_iW) * V.div_r() +
          Ha2 * sqrt(Pr/Ra_iW) * j.cross_r(B) + T.delta_r(g));
V.integ_p(V.div_grad_p() - sqrt(Pr/Ra_iW) * V.div_p() +
          Ha2 * sqrt(Pr/Ra_iW) * j.cross_p(B) + T.delta_p(g));
V.integ_z(V.div_grad_z() - sqrt(Pr/Ra_iW) * V.div_z() +
          Ha2 * sqrt(Pr/Ra_iW) * j.cross_z(B) + T.delta_z(g));.
```

Zur Berechnung des konvektiven Terms steht die Funktion `div`, für die Berechnung des diffusiven Terms die Funktion `div_grad` zur Verfügung. Die Berechnung der Impulsgleichung erfolgt einzeln für jede Raumrichtung. Je nach Aufgabenstellung können die Terme in den Gleichungen modifiziert oder, wenn nicht benötigt, entfernt werden.

Zur Berechnung des Druckfeldes wird wieder eine Poissongleichung gelöst. Hierfür wird derselbe Programmteil genutzt, der zuvor für die Lösung der Poissongleichung für das elektrische Potential verwendet wurde

```
p.poisson(1/delta_t * V.div());.
```

Am Ende der Schleife müssen bei den Transportvariablen \vec{v} und T die Daten, welche während der Berechnung auf die Felder für $n + 1$ gespeichert werden, auf das Feld, welches zuvor die Daten zum Zeitpunkt n enthielt, umgespeichert werden. Somit stehen diese Daten zur Berechnung des neuen Zeitschrittes wieder zur Verfügung

```
T.umspeichern();
V.umspeichern(-delta_t*p.grad_r(),-delta_t*p.grad_p(),-delta_t*p.grad_z());.
```

A.3 Postprocessing

Die Funktionenbibliothek, repräsentiert durch die Klassen `c_field`, `scalar` und `v_field`, stellt auch für das Postprocessing umfangreiche Funktionen zur Verfügung. Es handelt sich hierbei um Funktionen zur Ausgabe ein-, zwei- und dreidimensionaler Datensätze, welche an beliebiger Stelle im Programm eingesetzt werden können. Die Visualisierung der Daten erfolgt mit dem Visualisierungsprogramm Data Explorer [77].

Symbolverzeichnis

Lateinische Buchstaben:

Symbol	Einheit ¹	Bedeutung
a	m	charakteristische Länge
A	-	Höhen-Durchmesserverhältniss bei Zylindern
\vec{B}	N/(Am)	magnetische Induktion
c_p	J/(kg K)	spezifische Wärmekapazität
c_0	m/s	Lichtgeschwindigkeit
D	m	Durchmesser
\vec{E}	V/m	elektrisches Feld
\vec{F}_L	N	Lorentzkraft
\vec{g}	m/s ²	Gravitationsbeschleunigung
Gr	-	Grashof-Zahl
H	m	Höhe
h	J/kg	Enthalpie
Ha	-	Hartmann-Zahl
\vec{j}	A/m ²	elektrische Stromdichte
\vec{k}	-	Einheitsvektor der Gravitationsbeschleunigung
L	m	Länge
M	(*)	Maßstabsfaktor
n	-	Anzahl der Gitterpunkte
\vec{n}	-	Einheitsvektor normal zur Wand
N	-	Interaktionsparameter
Nu	-	Nußelt-Zahl
Nu_1	-	mit maximaler Temperatur gebildete Nußelt-Zahl bei interner Beheizung
Nu_2	-	mit mittlerer Temperatur gebildete Nußelt-Zahl bei interner Beheizung
p	N/m ²	Druck
Pe	-	Peclet-Zahl
Pr	-	Prandtl-Zahl
q	W/m ³	Wärmequellendichte
Q	W/m ²	Wärmestromdichte
r, φ, z	m, -, m	Zylinderkoordinaten
R	m	Radius
R_m	-	magnetische Reynolds-Zahl
Ra	-	Rayleigh-Zahl
Re	-	Reynolds-Zahl
S	(*)	Quellterm
t	s	Zeit
\vec{t}	-	Einheitsvektor tangential zur Wand
T	K	Temperatur
\vec{T}	N/m ²	Spannungstensor
\vec{v}	m/s	Geschwindigkeitsvektor
x, y, z	m	kartesische Koordinaten

¹Die mit (*) gekennzeichneten Größen sind gleichungsabhängig

Griechische Buchstaben:

Symbol	Einheit	Bedeutung
β	$1/K$	Isobarer thermischer Volumenausdehnungskoeffizient
Γ	Ns/m^2	Diffusionskoeffizient
δ	m	Grenzschichtdicke
Δ	-	Inkrement
ϵ	$\text{As}/(\text{Vm})$	Dielektrizitätskonstante
κ	m^2/s	Temperaturleitfähigkeit
κ_D	(*)	allgemeine Diffusivität
λ	-	LECUSSO-Faktor
λ_{WL}	$\text{W}/(\text{mK})$	Wärmeleitfähigkeit
ϕ	(*)	allgemeine physikalische Größe
Φ	V	elektrisches Potential
Ψ	$1/\text{s}$	Stromfunktion
η	Ns/m^2	dynamische Viskosität
μ	-	magnetische Permeabilität
ν	m^2/s	kinematische Viskosität
ρ	kg/m^3	Dichte
ρ_{el}	C/m^3	elektrische Ladungsdichte
σ	$\text{A}/(\text{Vm})$	elektrische Leitfähigkeit
Ω	$1/\text{s}$	Wirbelstärke

Indizes:

Symbol	Bedeutung
diff	diffusiv
H	Größe in der Hartmannschicht
i,j,k	Zellindex in r, φ und z -Richtung
iW	interne Wärmequellen
konv	konvektiv
krit	kritische Größe
m	Mittelwert
max	Maximalwert
min	Minimalwert
r	Radialkomponente einer vektoriellen Größe bei Zylinderkoordinaten
S	Größe in der Seitenschicht
WL	Wärmeleitung
z	z -Komponente einer vektoriellen Größe
φ	Umfangskomponente einer vektoriellen Größe bei Zylinderkoordinaten
0	Bezugsgröße

Literatur

- [1] Acharya, S., Goldstein, R. J.: Natural Convection in an Externally Heated Vertical or Inclined Square Box Containing Internal Energy Sources, *Journal of Heat Transfer* 107, 855 - 866, 1985.
- [2] Acheson, D. J.: *Elementary of Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 1990.
- [3] Agarwal, R. K.: A Third Order Accurate Upwind Scheme for Navier Stokes Solutions in Three Dimensions, in K. N. Ghia et. al. (eds), *Computers in Flow Prediction and Fluid Dynamics Experiments*, ASME, Washington, 73-82, 1981.
- [4] Akamatsu, M., Higano, M.: Convective Mode and Electrical Field in Silicon Melts under Vertical, Horizontal and Rotating Magnetic Fields, *Numerical Heat Transfer Part A* 42, 33-54, 2002.
- [5] Alexandrova, S.: *Buoyant Convection in Cavities in a Strong Magnetic Field*. PhD Thesis, Coventry University, UK, 2001.
- [6] Alboussière, T., Garandet, J., Moreau, R.: Buoyancy-Driven Convection with a Uniform Magnetic Field. Part 1. Asymptotic Analysis, *Journal of Fluid Mechanics* 253, 545-563, 1993.
- [7] Anderson, D., Tannehill, J., Pletcher, R.: *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing, 1984.
- [8] Arcidiacono, S., Di Piazza, I., Ciofalo, M.: Low Prandtl Number Natural Convection in Volumetrically Heated Rectangular Enclosures. II. Square Cavity, $AR = 1$, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* 44, 537-550, 2001.
- [9] Atias, M., Wolfshtein, M., Israeli, M.: Efficiency of Navier-Stokes Solvers, *AIAA Journal* 15, 263-266, 1977.
- [10] Baker, L., Faw, R. E., Kulacki, F. A.: Post Accident Heat Removal I: Heat Transfer within an Internally Heated Non-Boiling Liquid Layer, *Nuclear Science and Engineering* 61(2), 222-230, 1978.
- [11] Barakat, H. A.: Transient Laminar Free Convection Heat and Mass Transfer in Two-Dimensional Closed Containers Containing Distributed Heat Source, *ASME Paper* 65-WA/HT-28, 1965.
- [12] Ben Hadid, H., Henry, D.: Numerical Simulation of Convective Three-Dimensional Flows in a Horizontal Cylinder under the Action of a Constant Magnetic Field, *Journal of Crystal Growth* 166, 436-445, 1996.
- [13] Bontoux, C., Smutek, C., Roux, B., Lacroix, J. M.: Three Dimensional Buoyancy-Driven Flows in Cylindrical Cavities with Differentially Heated Endwalls. Part 1. Horizontal Cylinders, *Journal of Fluid Mechanics* 169, 211-227, 1986.

- [14] Buell, J. C., Catton, I.: The Effect of Wall Conduction on the Stability of a Fluid in a Right Circular Cylinder Heated from below, *Journal of Heat Transfer* 105, 255-260, 1983.
- [15] CFX-4.2: Solver, CFX-International, Harwell Laboratories, UK, 1997.
- [16] Chandrasekhar, S.: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover Publications Inc., New York, 1961.
- [17] Chang, C., Lundgren, S.: Duct Flow in Magnetohydrodynamics, *ZAMP* Vol. XII, 100-114, 1961.
- [18] Chorin, A., J.: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equation, *Math. Comp.* 22, 745-762, 1968.
- [19] Courant, R., Isaacson, E., Rees, M.: On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences, *Comm. Pure Appl. Math.* 5, 243-255, 1952.
- [20] Davoust, L., Moreau, R. Bolcato, R., Alboussière, T., Neubrand A. C., Garandet, J. P.: Influence of a Vertical Magnetic Field on Convection in the Horizontal Bridgman Crystal Growth Configuration, *Magnetohydrodynamics* 31, 218-227, 1995.
- [21] Davoust, L.: Cowley, M. D., Moreau, R., Bolcato, R.: Buoyancy-Driven Convection with a Uniform Magnetic Field. Part 2. Experimental Investigation, *Journal of Fluid Mechanics* 400, 59-90, 1999.
- [22] Di Piazza, I.: Prediction of Free Convection in Liquid Metals with Internal Heat Generation and/or Magnetohydrodynamic Interactions, *Doctoral Thesis*, University of Palermo, 2000.
- [23] Di Piazza, I., Ciofalo, M.: MHD Free Convection in a Liquid-Metal Filled Cubic Enclosure. II. Internal Heating, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* 45, 1477-1492, 2002.
- [24] Dittmann, J., Gröger, H.-J.: *Handbuch der anwenderorientierten Mikroelektronik*, Vulkan-Verlag, Essen, 1985.
- [25] Engel R.: *Objektorientierte Programmierung*, Markt & Technik Verlag, 1990.
- [26] Fletcher, C. A.: *Computational Techniques for Fluid Dynamics. Fundamental and General Techniques*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [27] Fusegi, T., Hyun, J. M., Kuwahara, K.: Natural Convection in a Differentially Heated Square Cavity with Internal Heat Generation, *Numerical Heat Transfer Part B* 21, 215-229, 1992.
- [28] Garandet J. P., Alboussière T., Moreau R.: Buoyancy-Driven Convection in a Rectangular Enclosure with a Transverse Magnetic Field, *Int. Journal of Heat Mass Transfer* 35, 741-748, 1992.
- [29] Gershuni, G. Z.: Zhukhovitskii, E. M.: *Convective Stability of Incompressible Fluids*, Verlag Nauka, Moskau, 1972.
- [30] Glueckler, E. L., Baker, L.: Post-Accident Heat Removal in LMFBR's. *Proc. Symp. on the Thermal and Hydraulic Aspects of Nuclear Reactor Safety*, Vol. 2: Liquid Metal

- Fast Breeder Reactors, O. C. Jones, Jr. und S. G. Bankoff (eds), ASME, New York, 285-324, 1977.
- [31] Günther, C.: Vergleich verschiedener Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der 2-d-Konvektions-Diffusionsgleichung anhand eines Beispiels mit bekannter exakter Lösung, KfK-Bericht Nr. 4439, 1988.
- [32] Günther, C.: Fortgeschrittene Upwind-Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektion-Diffusionsgleichung, KfK-Bericht Nr. 4697, 1992.
- [33] Günther, C.: Fortgeschrittene Upwind-Differenzenverfahren zur numerischen Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung, Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe, 1992.
- [34] Günther, C.: Ein Rechenprogramm zur Berechnung von Naturkonvektionsströmungen in horizontalen runden Geometrien mit inneren Wärmequellen, Interner Bericht 32.21.04/A, Forschungszentrum Karlsruhe, 1998.
- [35] Gottwald, S., Kästner, H., Rudolph, H.: Meyers kleine Enzyklopädie der Mathematik, Meyers Lexikon Verlag, 1995.
- [36] Grötzbach, G., Wörner, M.: Direct Numerical and Large Eddy Simulations in Nuclear Applications, Int. Journal of Heat and Fluid Flow 20, 222-240, 1999.
- [37] Häuser, J., Simon, H. D.: Aerodynamic Simulation on Massively Parallel Systems, Parallel Computational Fluid Dynamics, 207-225, 1992.
- [38] Harlow, F. H., Welch, J. E.: Numerical Calculation of Time Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, Physics of Fluids 8(12), 2182-2189, 1965.
- [39] Hartmann, J.: HG-Dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-fysiske Meddelelser XV(6), 1-27, 1937.
- [40] Hartmann, J., Lazarus, F.: HG-Dynamics II. Experimental Investigations of the Flow of Mercury in a Homogeneous Magnetic Field, Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-fysiske Meddelelser XV(7), 1-28, 1937.
- [41] Hirsch, C.: Numerical Computation of Internal and External Flows. Fundamentals of Numerical Discretization, John Wiley & Sons, New York, Chichester, 2000.
- [42] Hjellming, L. N., Walker, J. S.: Melt Motion in a Czochralski Crystal Puller with an Axial Magnetic Field: Motion due to Buoyancy and Thermocapillarity, Journal of Fluid Mechanics 182, 335-368, 1987.
- [43] Hunt, J., Holroyd, R.: Applications of Laboratory and Theoretical MHD Duct Flow Studies in Fusion Reactor Technology, UKAEA-Report CLM-R 169, 1977.
- [44] Jischa, M.: Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch, Vieweg Verlag, 1982.
- [45] Karniadakis, G. E., Israeli, M., Orszag, S. A.: High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier-Stokes Equations, Journal of Computational Physics 97(2), 414-443, 1991.
- [46] Kee, R. J.: A Numerical Study of Natural Convection inside a Horizontal Cylinder with Asymmetric Boundary Conditions, PHD Thesis, University of California, Davis, 1974.

- [47] Kee, R. J. et. al.: Natural Convection of a Heat-Generating Fluid within Closed Vertical Cylinders and Spheres, *Journal of Heat Transfer* 98(1), 55-61, 1976.
- [48] Kim J., Moin, P.: Application of a Fractional-Step-Method to Incompressible Navier-Stokes Equations, Computational Fluid Dynamics Branch, NASA Ames Reserach Center, Moffett Field, California, 1984.
- [49] Korczak, K. Z., Patera, A. T.: An Isoparametric Spectral Element Method for Solution of the Navier-Stokes Equations in Complex Geometry, *Journal of Computational Physics* 62, 361-382, 1986.
- [50] Kulacki, F. A., Goldstein, R. J.: Thermal Convection in a Horizontal Fluid Layer with Uniform Volumetric Energy Sources, *Journal of Fluid Mechanics* 55, 271-287, 1972.
- [51] Kulacki, F. A., Richards, D. E.: Natural Convection in Plane Layers and Cavities with Volumetric Energy Sources, *Natural Convection: Fundamentals and Applications*, Kalac, S. et. al. (eds), 179-254, Hemisphere Publishing, 1985.
- [52] Lee, J.-H., Goldstein, R. J.: An Experimental Study on Natural Convection Heat Transfer in an Inclined Square Enclosure Containing Internal Energy Sources, *Journal of Heat Transfer* 110, 345-349, 1988.
- [53] Lenhart, L.: Magnetohydrodynamik in Rechteckgeometrien, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1994
- [54] Leonard, B. P.: A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation, *Comp. Methods in Appl. Mech. Eng.* 19, 59-98, 1979.
- [55] Leonard, B. P., Drummond, J. E.: Why You Should Not Use 'Hybrid', 'Power-Law' or Related Exponential Schemes for Convective Modelling - There Are Much Better Alternatives, *Int. Journal Num. Meth. in Fluids* 20, 421-442, 1995.
- [56] Ma, N., Walker, J. S.: Buoyant Convection During the Growth of Compound Semiconductors by the Liquid-Encapsulated Czochralski Process with an Axial Magnetic Field and with Nonaxissymmetric Temperature, *Journal Fluids Eng.* 118(8), 155-159, 1996.
- [57] May, H.-O.: A Numerical Study on Natural Convection in an Inclined Square Enclosure Containing Internal Heat Sources, *Int. Journal of Heat Mass Transfer* 34, 919 - 928, 1991.
- [58] McKenzie, D. P., Roberts, J. M., Weiss, N. O.: Convection in the Earth's Mantle: Towards a Numerical Simulation, *Journal of Fluid Mechanics* 62, 465 - 538, 1974.
- [59] Monberg, E.: Bridgman and Related Growth Techniques, *Handbook of Crystal Growth*, D. T. J. Hurle (ed), Elsevier Science 2, 52-97, 1994.
- [60] Mößner, R.: Dreidimensionale numerische Simulation von Naturkonvektionsströmungen unter dem Einfluß von Magnetfeldern, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1996.
- [61] Mößner, R., Gerbeth, G.: Buoyant Melt Flows under the Influence of Steady and Rotating Magnetic Fields, *Journal of Crystal Growth* 197, 341-354, 1999.
- [62] Moreau, M.: Magnetohydrodynamics, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1990.
- [63] Moreau, M.: The Fundamentals of MHD Related to Crystal Growth, *Prog. Crystal Growth and Charact.* 38, 161-194, 1999.

-
- [64] Mück, B.: Dreidimensionale numerische Untersuchung von Zwangskonvektionsströmungen in Rechteck-Kanälen unter dem Einfluß von Magnetfeldern, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1998.
- [65] Müller, G., Neumann, G., Weber, W.: Natural Convection in Vertical Bridgman Configurations, *Journal of Crystal Growth* 70, 78-93. 1984.
- [66] Müller, U., Ehrhard, P.: Freie Konvektion und Wärmeübertragung, C. F. Müller Verlag, 1999.
- [67] Müller, U., Bühler, L.: Magnetohydrodynamic Flows in Ducts and Cavities, Proceedings of the IUTAM 99 Summer School on Liquid Metal MHD, Udine, Italy, 1999.
- [68] Müller, U., Bühler, L.: Magnetofluidynamics in Channels and Containers, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- [69] Neumann, G.: Three-Dimensional Numerical Simulation of Buoyancy-Driven Convection in Vertical Cylinders Heated from below, *Journal of Fluid Mechanics* 214, 559-578, 1990.
- [70] Noll, B.: Numerische Strömungsmechanik, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [71] Nootz P., Morick, F.: C/C++ Referenz, Franzis-Verlag, 1999.
- [72] Oertel, H., Delfs, J.: Strömungsmechanische Instabilitäten, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [73] Oertel, H., Laurien, E.: Numerische Strömungsmechanik, Vieweg Verlag, 2003.
- [74] Oertel, H., Böhle, M.: Strömungsmechanik, Vieweg Verlag, 2004.
- [75] Orszag, S. A., Israeli, M., Deville, M. O.: Boundary Conditions for Incompressible Flows, *J. Sci. Comput.* 1, 75-111, 1986.
- [76] Ozoe, H., Keiji, T.: A Technique to Circumvent a Singularity at a Radial Center with Application for a Three-Dimensional Cylindrical System, *Numerical Heat Transfer Part B* 33, 355 - 365, 1998.
- [77] Opendx: Open Visualisation Data Explorer, Version 4.2.0, 2002.
- [78] Patankar, S. V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing, 1980.
- [79] Perot, J. B.: An Analysis of the Fractional Step Method, *Journal of Computational Physics* 108, 51-58, 1993
- [80] Peyret, R., Taylor, T.: Computational Methods for Fluid Flow, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [81] Reggio, M., Camarero R.: A Calculation Scheme for Three-Dimensional Viscous Incompressible Flows, *Journal of Fluids Eng.* 109, 345-352, 1987.
- [82] Roache, P. J.: Computational Fluid Dynamics, Academic Press Inc., Lexington, 1972.
- [83] Roberts, P. H.: An Introduction to Magnetohydrodynamics, The Whitefriars Press Ltd., London, 1967.

-
- [84] Rubin, S. G.: Incompressible Navier-Stokes and Parabolized Navier-Stokes Solution Procedures and Computational Techniques, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1982-04.
- [85] Runcorn, S. K.: Convection Currents in the Earth's Mantle, *Nature* 195, 1248-1250, 1962.
- [86] Sälinger, T.: MGCYLO - Lösung der Poissongleichung in dreidimensionalen Zylinderkoordinaten, Kernforschungszentrum Karlsruhe, 1990.
- [87] Schönung B.: Numerische Strömungsmechanik, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1990.
- [88] Schiroky, G. H.: Rosenberger, F., Free Convection of Gases in a Horizontal Cylinder with Differentially Heated End Walls, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer* 27, 587-598, 1984.
- [89] Shercliff, J. A.: A Textbook of Magnetohydrodynamics, Pergamon Press, Oxford 1965
- [90] Smutek, C., Schiroky, G. H., de Vahl Davis, G.: Three-Dimensional Convection in Horizontal Cylinders: Numerical Solutions and Comparison with Experimental and Analytical Results, *Numerical Heat Transfer* 8, 613-631, 1985.
- [91] Spalding, D. B.: A Novel Finite Difference Formulation for Differential Expressions Involving both First and Second Derivatives, *Int Journal Num. Meth. Eng.* 4, 551-559, 1972.
- [92] Srulijes, J. A.: Zellularkonvektion in Behältern mit horizontalen Temperaturgradienten, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1979.
- [93] Strikwerda, J. C., Lee, Y. S.: The Accuracy of the Fractional Step Method, *SIAM J. Numer. Anal.* 37(1), 37-47, 1999.
- [94] Stroustrup, B.: Die C++ Programmiersprache, Addison-Wesley Verlag, 1994.
- [95] Swarztrauber, P., Sweet, R.: Efficient FORTRAN Subprograms for the Solution of Elliptic Partial Differential Equations, Tech. Note TN/IA-109, National Center For Atmospheric Research, Bolder, Colorado, 1975
- [96] Toschi, R., Chazalon, M., Engelmann, F.: Next European Torus Objectives, General Requirements and Parameter Choises, *Fusion Technology* 14, 19-29, 1981.
- [97] Touihri, R., Ben Hadid, H., Henry, D.: On the Onset of Convective Instabilities in Cylindrical Cavities Heated from below. I. Pure Thermal Case, *Physics of Fluids* 11(8), 2078-2088, 1999.
- [98] Touihri, R., Ben Hadid, H., Henry, D.: On the Onset of Convective Instabilities in Cylindrical Cavities Heated from below. II. Effect of a Magnetic Field, *Physics of Fluids* 11(8), 2089-2100, 1999.
- [99] Tritton, D. J.: Internally Driven Heat Convection in the Atmosphere of Venus and in the Laboratory, *Nature* 257, 110 - 116, 1975.
- [100] Wanschura, M., Kuhlmann, H. C., Rath, H. J.: Three-Dimensional Instability of Axisymmetric Buoyant Convection in Cylinders Heated from below, *Journal of Fluid Mechanics* 326, 399-415, 1996.

-
- [101] Won, Y.C., Kakimoto, K., Ozoe, H.: Transient Three-Dimensional Flow Characteristics of Si Melt in a Czochralski Configuration under a Cusp-Shaped Magnetic Field, *Numerical Heat Transfer Part A* 36(6), 551-561, 1999.
- [102] Wörner, M.: Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium, *KfK-Bericht Nr. 5228*, 1994.
- [103] Xin, S., Le Quéré, P., Daube, O.: Natural Convection in a Differentially Heated Horizontal Cylinder: Effects of Prandtl Number on Flow Structure and Instability, *Physics of Fluids* 9(4), 1014-1033, 1997.
- [104] Yih, C. S.: *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1969.
- [105] Zierep, J.: *Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre*, G. Braun Verlag, Karlsruhe, 1991.