

Lars Michael Hoffmann

Schnittmengen inhomogener Poissonprozesse



Lars Michael Hoffmann

Schnittdichten inhomogener Poissonprozesse

Schnittdichten inhomogener Poissonprozesse

von
Lars Michael Hoffmann



universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Mathematik, 2006

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2006
Print on Demand

ISBN-13: 978-3-86644-049-4
ISBN-10: 3-86644-049-9

Schnittdichten inhomogener Poissonprozesse

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe (TH) genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. oec. Lars Michael Hoffmann
aus Wuppertal

Tag der mündlichen Prüfung: 05. Juli 2006

Referent: Prof. Dr. Wolfgang Weil
Korreferent: Prof. Dr. Günter Last

Karlsruhe

2006

Danksagungen

In erster Linie möchte ich mich bei Mama, Papa und meiner Schwester Katrin für die jahrelange Unterstützung bedanken. Dasselbe gilt für alle meine Freunde, von denen ich besonders Carmen, Frank, Katrin, Karsten, Marc, Markus, Matthias und Thomas hervorheben möchte.

Dank schulde ich außerdem Prof. Dr. Wolfgang Weil für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit, Prof. Dr. Günter Last für die Übernahme des Korreferats und meinen ganzen Kollegen für ihre ständige Hilfsbereitschaft. Mehr als besondere Erwähnung verdienen dabei Volker Baumstark, Matthias Heveling, André Mundt und Andreas Weber, die jeweils Teile dieser Arbeit Korrektur gelesen haben.

Nicht vergessen sollte ich außerdem Dr. Markus Kiderlen, der mir während meines Aufenthaltes in Aarhus mehr als hilfreich zur Seite stand.

Einleitung

Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts galt die Physik als Leitwissenschaft, und ihre Erkenntnisse inspirierten nach nicht allzu langer Zeit Schriftsteller dazu, sich mit dem neu gewonnenen Weltbild in ihren Werken auseinanderzusetzen. Der bedeutendste Roman, für den dies gilt, ist vermutlich Thomas Manns *Der Zauberberg*. In ihm finden sich lange Passagen, die sich sowohl mit der Relativitätstheorie als auch der Quantenmechanik auseinandersetzen.

In den letzten Jahren ist die Physik, zumindest was das öffentliche Interesse an den Forschungsergebnissen angeht, immer stärker von der Biologie in den Hintergrund gedrängt worden. Insbesondere die aktuellen Resultate aus der Genforschung finden eine große Resonanz in den Medien und werden vermehrt in literarische Werke eingearbeitet. Am meisten (und heftigsten) wurde dabei wohl über die beiden Romane *Elementarteilchen* und *Die Möglichkeit einer Insel* von Michel Houellebecq diskutiert, deren pessimistische Darstellung der westlichen Gesellschaft und des wissenschaftlichen Fortschritts geradezu zum Widerspruch herausfordert.

Im Gegensatz dazu tut sich die abstrakte Ideenwelt der Mathematik, wohl auch weil sie nie wirklich im Mittelpunkt des öffentlichen Interesses stand, immer noch recht schwer, die Phantasie der Literaten zu beflügeln. Umso erstaunlicher mutet es an, dass gerade der Poissonprozess in einem der großen Romane des zwanzigsten Jahrhunderts, Thomas Pynchons *Die Enden der Parabel*, zumindest Erwähnung findet.

Wir werden an dieser Stelle nicht den von vorne herein zum Scheitern verurteilten Versuch unternehmen, den Inhalt dieses Mammutwerkes auch nur umreißen zu wollen. Die Handlung setzt jedoch kurz vor Ende des Zweiten Weltkriegs in London ein, das gerade schwer unter Angriffen durch deutsche V2-Raketen zu leiden hat. Und während langsam die einzelnen Hauptakteure vorgestellt werden, stößt man nach etwa neunzig Seiten auf folgende Stelle

[...] Sie hat's beinahe begriffen, hat fast verstanden, was seine Poisson-Verteilung bedeutet, aber sie kann den Zusammenhang nicht herstellen, kann ihre eigene, täglich erkämpfte Ruhe nicht zu den nackten Zahlen in Beziehung setzen. [...]

und zwei Absätze später

[...] Tatsächlich verteilen sich die Raketen genauso über London, wie es die Poissonsche Gleichung in den Lehrbüchern vorhersagt. Je mehr Daten eingehen, desto mehr steht Roger wie ein Prophet da. [...]

Sogar noch eine der wichtigsten Eigenschaften eines stationären Poissonprozesses wird erwähnt:

[...] „Jedes Quadrat hat die gleiche Chance, erneut getroffen zu werden. Die Einschläge häufen sich nirgends. Die mittlere Dichte bleibt konstant.“ ... „Aber was ist mit den

Quadraten, die schon mehrere Treffer abbekommen haben? Ich meine-“
 „Tut mir leid. [...] Es spielt nicht die geringste Rolle, wie viele schon auf einem bestimmten Planquadrat niedergegangen sind, die Wahrscheinlichkeit ändert sich deshalb nicht. Jeder Einschlag ist von allen anderen völlig unabhängig. [...]

Es würde zu weit führen, nun darauf einzugehen, welche zentralen Motive aus Pynchons Werk sich in obiger Beschreibung widerspiegeln. Es sollte nur nicht unerwähnt bleiben, dass der Poissonprozess als ein Modell für zufällige räumliche Phänomene bis in die Weltliteratur vorgedrungen ist.

In den verschiedensten naturwissenschaftlichen Gebieten, unter anderem den Materialwissenschaften, der Biologie und Medizin aber auch der Geologie und den Forstwissenschaften, gibt es Problemstellungen, für deren systematische Lösung Modelle von zufälligen räumlichen Strukturen ein probates Mittel darzustellen scheinen.

Eine zentrale Rolle nehmen dabei Poissonprozesse, sei es auf dem \mathbb{R}^d oder komplexeren Räumen, und von ihnen abgeleitete Boolesche Modelle ein. Neben der Brownschen Bewegung ist der Poissonprozess sicher einer der Grundpfeiler stochastischer Modellierung und insbesondere als gewöhnlicher Punktprozess im \mathbb{R}^d dementsprechend ausführlich analysiert worden.

Eventuell abgesehen von den Problemstellungen aus der Forstwissenschaft müssen für eine adäquate mathematische Beschreibung der Phänomene in den gerade erwähnten Fachrichtungen nicht nur zufällige Punktmuster im 2- oder 3-dimensionalen Raum sondern tatsächlich wesentlich kompliziertere geometrische Gebilde modelliert werden. Aus diesem Grund sind selbstverständlich auch Poissonprozesse wie auch immer gearteter konvexer Mengen interessante Studienobjekte.

Dank der vielfältigen Hilfsmittel aus der Konvex- und Integralgeometrie können an der Anwendung Interessierte inzwischen bei stationären (Poisson-)Prozessen konvexer Körper und ihren Vereinigungsmengen, den stationären Booleschen Modellen mit konvexen Körnern, auf ein reichhaltiges Reservoir an Formeln und Werkzeugen zurückgreifen. Die in den letzten Jahren begonnene Übertragung dieser Resultate auf inhomogene Prozesse ist noch weit davon entfernt, abgeschlossen zu sein, und die vorliegende Arbeit versucht nun, einen kleinen Teil dieser Lücken zu schließen.

Ihr Aufbau ist dabei wie folgt: Im ersten Kapitel werden grundlegende Definitionen und Sätze aus der Konvex-, Integral- und Stochastischen Geometrie wiederholt, und im Anschluß daran leiten wir in Kapitel 2 eine translative Integralformel für Hausdorff-Maße her, die wir im weiteren Verlauf an einigen Stellen benötigen werden.

Schon bekannte Zusammenhänge zwischen verschiedenen geometrischen Größen eines stationären Prozesses konvexer Partikel und zu diesem Prozess assoziierten Körpern werden wir in Kapitel 3 kurz zusammenfassen. Darüber hinaus soll ein cursorischer Überblick über eine Arbeit von Schneider zu translationsregulären Ebenenprozessen gegeben werden. Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist es, die im dritten Kapitel dargestellten Resultate auf nicht-stationäre Prozesse konvexer Partikel zu übertragen.

In Kapitel 4 wird deshalb zunächst für nicht-stationäre Prozesse eine Klasse von assoziierten Maßen eingeführt. Ein einzelnes Maß aus dieser Menge lässt sich als Verteilung der äußeren Normaleneinheitsvektoren der Partikel des Prozesses in einem festen Punkt im Raum interpretieren. Danach wird in Analogie zu einem Ergebnis von Schneider für Ebenenprozesse gezeigt, dass bestimmte Partikelprozesse genau dann stationär und isotrop sind, wenn diese Normalenmaße alle rotationsinvariant sind.

Im fünften Kapitel analysieren wir verschiedene Schnittprozesse, die durch die Ränder der Partikel eines Poissonprozesses induziert werden. Dabei werden wir Mittelwerte dieser Prozesse als geometrische Funktionale von konvexen Körpern beschreiben, die wir mit Hilfe der in Kapitel 4 eingeführten Maße definieren können.

Abschließend werden in den letzten beiden Kapiteln die sowohl für translationsreguläre Ebenenprozesse als auch nicht-stationäre Partikelprozesse vorliegenden Ergebnisse dadurch zusammengeführt, dass entsprechende Resultate für Zylinderprozesse bewiesen werden.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlegende Definitionen und Sätze	17
1.1	Grundlagen aus der Konvexen Geometrie	17
1.2	Grundlagen aus der Integralgeometrie	26
1.3	Grundlagen aus der Stochastischen Geometrie	30
2	Eine translative Integralformel für Hausdorff-Maße	39
2.1	Motivation	39
2.2	Grundlegende Definitionen und Sätze aus der geometrischen Maßtheorie	40
2.3	Die translative Integralformel	43
2.4	Zur Struktur des Randes eines konvexen Körpers	46
3	Konvexe Körper in der Stochastischen Geometrie	51
3.1	Stationäre Partikelprozesse	51
3.2	Translationsreguläre Ebenenprozesse	53
3.3	Ausblick	57
4	Verallgemeinerte lokale mittlere Normalenmaße	59
4.1	Definitionen und Bezeichnungen	59
4.2	Charakterisierung der schwachen Isotropie und schwachen Stationarität	62
4.3	Stationäre Prozesse von Kugeln	76
5	Schnittdichten und assoziierte Körper	81
5.1	Schnittdichten inhomogener Partikelprozesse I	81
5.2	Schnittdichten inhomogener Partikelprozesse II	95
5.3	Schnitte mit affinen Unterräumen	101
5.4	Das mittlere sichtbare Volumen	103
5.5	Eine Verallgemeinerung der Schnittdichten	111

6	Quermaßdichten inhomogener Zylinderprozesse	115
6.1	Motivation	115
6.2	Definitionen	116
6.3	Eine translative Integralformel für Zylinder	117
6.4	Quermaßdichten für Zylinderprozesse	124
6.5	Quermaßdichten für Boolesche Modelle	130
7	Assoziierte Maße und Schnittdichten inhomogener Zylinderprozesse	133
7.1	Assoziierte Maße	133
7.2	Schnittdichten inhomogener Zylinderprozesse I	141
7.3	Schnittdichten inhomogener Zylinderprozesse II	143
	Literaturverzeichnis	149

Kapitel 1

Grundlegende Definitionen und Sätze

Im folgenden Kapitel sollen die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Konvex-, Integral- und Stochastischen Geometrie wiederholt werden, die wir im weiteren Verlauf immer wieder benötigen werden. Die verwendeten Bezeichnungen orientieren sich an den Büchern von Schneider und Weil über Integral- beziehungsweise Stochastische Geometrie ([33] beziehungsweise [34]) und dem Buch von Schneider über konvexe Körper ([29]).

1.1 Grundlagen aus der Konvexen Geometrie

Im Folgenden bezeichne $d \geq 1$ immer eine natürliche Zahl. Wie immer sollen \mathbb{N} und \mathbb{R}^d die natürlichen Zahlen beziehungsweise die Menge der d -Tupel aus reellen Zahlen darstellen. Hierbei werden wir die Elemente von \mathbb{R}^d sowohl als Tupel als auch als Spaltenvektoren schreiben, und sie sowohl mit Punkten als auch mit Vektoren identifizieren. Desweiteren sei λ_d das d -dimensionale Lebesgue-Maß.

Ist E ein topologischer Raum, so bezeichne $\mathcal{B}(E)$ die von den offenen Mengen erzeugte Borel- σ -Algebra. Für $X \subseteq E$ wollen wir außerdem kurz $X^c := E \setminus X$ für das Komplement von X schreiben. Es sei \mathcal{C} die Menge aller kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d , \mathcal{K} bezeichne die Menge der konvexen Körper, also jene kompakten Mengen, die zusätzlich noch konvex sind. Wir definieren außerdem $\mathcal{C}' := \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ als Menge aller nichtleeren, kompakten Teilmengen des \mathbb{R}^d und analog $\mathcal{K}' := \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ als Menge aller nichtleeren konvexen Körper.

Für $x = (x_1, \dots, x_d)$ und $y = (y_1, \dots, y_d)$ aus \mathbb{R}^d bezeichne

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^d x_i y_i$$

das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Unter B^d verstehen wir die abgeschlossene Einheitskugel, unter S^{d-1} die Einheitskugel im \mathbb{R}^d . Das Volumen beziehungsweise die Oberfläche der Einheitskugel im \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir mit κ_k beziehungsweise σ_k . Desweiteren setzen wir $\kappa_0 = 1$.

Unter SO_d verstehen wir die Menge aller linearen Abbildungen $\vartheta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, welche das Skalarprodukt und die Orientierung erhalten. Üblicherweise nennt man eine solche Abbildung *eigentliche Drehung*. Wie wir aus der linearen Algebra wissen, ist die Gruppe (SO_d, \circ) isomorph zur Gruppe der orthogonalen (d, d) -Matrizen mit Determinante Eins (versehen mit der üblichen Matrixmultiplikation). Letztere Gruppe können wir mit einer Teilmenge des \mathbb{R}^{d^2} identifizieren. Bezüglich der induzierten Topologie ist die Menge der orthogonalen (d, d) -Matrizen mit Determinante Eins kompakt. Der Gruppenisomorphismus ermöglicht es uns, diese Topologie auf SO_d zu übertragen.

Die Menge aller Bewegungen, das heißt aller orientierungstreuen, abstandserhaltenden affinen Abbildungen, G_d des \mathbb{R}^d kann man analog als eine Teilmenge des $\mathbb{R}^{d(d+1)}$ ansehen und ebenfalls mit einer Topologie versehen. Als wichtigste Eigenschaften ergeben sich dabei:

Satz 1 SO_d ist ein kompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis, G_d ist ein lokalkompakter topologischer Raum mit abzählbarer Basis und die Operation von SO_d beziehungsweise G_d auf \mathbb{R}^d ist stetig.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Sätzen 1.1.2 und 1.1.3 in [33]. □

ν bezeichne das eindeutig bestimmte invariante Maß auf SO_d mit $\nu(SO_d) = 1$, wie es zum Beispiel in Abschnitt 1.2 von [33] definiert wird.

Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ seien $\text{cl } A$, $\text{int } A$ und $\text{bd } A$ der Abschluß, das Innere und der Rand von A ; analog sollen $\text{rel cl } A$, $\text{rel int } A$ und $\text{rel bd } A$ den relativen Abschluß, das relative Innere und den relativen Rand von A bezeichnen. Die lineare, affine und konvexe Hülle von A kürzen wir mit $[A]$, $\text{aff } A$ und $\text{conv } A$ ab; $\dim A := \dim \text{aff } A$ heißt Dimension von A .

Sind A und B zwei Teilmengen des \mathbb{R}^d und $\alpha \in \mathbb{R}$, so verstehen wir unter der *Minkowski-Summe* (kurz: Summe) von A und B die Menge

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

und unter der Skalierung von A um den Faktor α die Menge

$$\alpha A := \{\alpha a \mid a \in A\}.$$

Wir schreiben $z + A$ statt $\{z\} + A$. $A + rB^d$ wird auch Parallelmenge von A genannt.

Sind C_1 und C_2 zwei beliebige Elemente aus \mathcal{C}' , so wird durch

$$\begin{aligned} d(C_1, C_2) &:= \max\left(\max_{x_1 \in C_1} \left(\min_{x_2 \in C_2} \|x_1 - x_2\|\right), \max_{x_2 \in C_2} \left(\min_{x_1 \in C_1} \|x_1 - x_2\|\right)\right) \\ &= \inf\{\epsilon > 0 \mid C_1 \subseteq C_2 + \epsilon B^d, C_2 \subseteq C_1 + \epsilon B^d\} \end{aligned}$$

der *Hausdorff-Abstand* von C_1 und C_2 definiert.

Setzt man zusätzlich $d(\emptyset, C) := d(C, \emptyset) := \infty$ für $C \in \mathcal{C}'$ und $d(\emptyset, \emptyset) := 0$, so wird der Hausdorff-Abstand nach Satz 3.1.2 aus dem Skript von Weil zur Konvexen Geometrie ([43]) zu einer Metrik auf \mathcal{C} und erzeugt die sogenannte *Hausdorff-Topologie*. Mit dieser sei \mathcal{C} immer versehen, wenn von topologischen Begriffen gesprochen und nichts anderes festgelegt wird. Auf \mathcal{C}' , \mathcal{K} und \mathcal{K}' benutzen wir die durch \mathcal{C} induzierte Spurtopologie. Der Raum \mathcal{K} hat folgende Eigenschaften:

Satz 2 *Der Raum der konvexen Körper \mathcal{K} , versehen mit der Hausdorff-Metrik, ist vollständig. Die Menge der konvexen Polytope ist eine dichte Teilmenge von \mathcal{K} .*

Beweis: Der erste Teil der Aussage folgt mit Satz 14.4 aus dem Buch von Leichtweis ([20]), der zweite ergibt sich mittels Theorem 1.8.13 aus [29]. \square

Bemerkung: Eine wichtige Beweismethode wird durch Satz 2 ermöglicht: Es sei F ein reelles Funktional über \mathcal{K} ,

$$F : K \mapsto \mathbb{R},$$

das stetig von K abhängt. Dann lassen sich Eigenschaften von F herleiten, indem man sie zunächst für Polytope nachweist und danach durch Approximation auf beliebige konvexe Körper überträgt.

Als nächstes wollen wir eine der grundlegenden Formeln in der Konvexen Geometrie angeben, die sogenannte *lokale Steinerformel*. Es sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper. Mit $p_K(x)$ wollen wir die *metrische Projektion* eines Punktes $x \in \mathbb{R}^d$ auf den konvexen Körper K bezeichnen. $p_K(x)$ ist also der eindeutig bestimmte Punkt in K , in dem das Minimum $\min_{y \in K} \|x - y\|$ angenommen wird. Mit

$$u_K(x) := \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|} \in S^{d-1}$$

soll für alle $x \in \mathbb{R}^d \setminus K$ die *Projektionsrichtung* abgekürzt werden.

Beide Bezeichnungen brauchen wir, um für einen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}'$ seine *lokale Parallelmenge* $M_\delta(K, \eta)$ zu definieren. Sei $\delta > 0$ und η eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$, dann ist $M_\delta(K, \eta)$ als

$$M_\delta(K, \eta) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < \|x - p_K(x)\| < \delta, (p_K(x), u_K(x)) \in \eta\}$$

definiert. Da sowohl p_K als auch u_K auf $\mathbb{R}^d \setminus K$ stetig sind, handelt es sich bei $M_\delta(K, \eta)$ um eine Borelmenge.

Beispiel: Sind $A \subseteq \text{bd } K$ und $B \subseteq S^{d-1}$ Borelmengen, so ist $M_\delta(K, A \times B)$ die Menge aller Punkte $x \in (K + \delta(\text{int } B^d)) \setminus K$, deren metrische Projektion in A und die zugehörige Projektionsrichtung in B liegen.

$\mu_\delta(K, \eta) := \lambda_d(M_\delta(K, \eta))$ nennen wir das *lokale Parallelvolumen* von K . Für festes δ und K ist $\mu_\delta(K, \cdot)$ ein Maß auf $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$. Es gilt:

Satz 3 *Seien $K_j, j \in \mathbb{N}$, und K Elemente in \mathcal{K} mit $K_j \rightarrow K$ für $j \rightarrow \infty$. Dann gilt: $\mu_\delta(K_j, \cdot)$ konvergiert schwach gegen $\mu_\delta(K, \cdot)$ für $j \rightarrow \infty$.*

Beweis: Die Behauptung ergibt sich direkt aus Satz 4.1.1 in [29]. \square

Bemerkung: Die Stetigkeit von Maßen beziehe sich hier und im Folgenden immer auf die schwache Topologie.

Ist P ein Polytop, so gilt für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $B \in \mathcal{B}(S^{d-1})$

$$\mu_\delta(P, A \times B) = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \delta^{d-m} \binom{d}{m} \Xi_m(P, A \times B), \quad (*)$$

wobei die positiven, endlichen Maße $\Xi_0(P, \cdot), \dots, \Xi_{d-1}(P, \cdot)$ über $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ durch

$$\binom{d-1}{m} \Xi_m(P, A \times B) := \sum_{F \in \mathcal{F}_m(P)} \lambda_m(F \cap A) \omega_{d-m-1}(B \cap N(P, F))$$

gegeben sind. ω_k bezeichnet das normierte k -dimensionale sphärische Lebesgue-Maß, $\mathcal{F}_k(F)$ die Familie der k -dimensionalen Seiten von F und $N(P, F)$ den äußeren Normalenkegel von P in F . Für eine Seite F von P ist $N(P, F)$ damit die Menge aller äußeren Normalenvektoren von Stützhyperebenen an P in einem beliebigen Punkt x aus dem relativen Inneren von F . Eine Herleitung findet sich in [29] auf Seite 200ff. Die Darstellung (*) läßt sich von Polytopen auf ganz \mathcal{K} übertragen, und wir erhalten:

Satz 4 *Es sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper. Dann existieren positive, endliche Maße $\Xi_0(K, \cdot), \dots, \Xi_{d-1}(K, \cdot)$ über $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ derart, dass*

$$\mu_\delta(K, \cdot) = \frac{1}{d} \sum_{m=0}^{d-1} \delta^{d-m} \binom{d}{m} \Xi_m(K, \cdot)$$

gilt.

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 4.2.1 in [29]. □

Die Maße $\Xi_0(K, \cdot), \dots, \Xi_{d-1}(K, \cdot)$ über $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ heißen *Stützmaße* und die Abbildung

$$K \mapsto \Xi_j(K, \cdot)$$

ist schwach stetig für $j = 0, \dots, d-1$.

Bemerkung: Nach Definition der schwachen Konvergenz – sie findet sich beispielsweise im Buch von Kallenberg über Wahrscheinlichkeitstheorie ([15]) auf Seite 65 – bedeutet dies, dass für jede beschränkte und stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ und $k = 0, \dots, d-1$ gilt

$$K_j \rightarrow K \implies \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(x, u) \Xi_k(K_j, dx \times du) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(x, u) \Xi_k(K, dx \times du).$$

Diese Maße werden wir nun dazu benutzen, weitere Funktionen auf \mathcal{K} zu definieren. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass $\Xi_j(\emptyset, \cdot) = 0$ für $j = 0, \dots, d-1$ gilt.

Für $j = 1, \dots, d-1$ und $K \in \mathcal{K}$ nennen wir $S_j(K, \cdot) := \Xi_j(K, \mathbb{R}^d \times \cdot)$ das *j -te Oberflächenmaß* von K . Die wichtigsten Eigenschaften werden in folgendem Satz zusammengefaßt:

Satz 5 *Für alle $j = 1, \dots, d-1$ und alle $K \in \mathcal{K}$ gilt:*

a) $S_j(K, \cdot)$ ist translationsinvariant, also

$$S_j(K + x, \cdot) = S_j(K, \cdot)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

b) $S_j(K, \cdot)$ ist rotationskovariant, das heißt

$$S_j(\vartheta K, \vartheta A) = S_j(K, A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\vartheta \in SO_d$.

c) $S_j(K, \cdot)$ ist homogen vom Grad j , sprich

$$S_j(\alpha K, \cdot) = \alpha^j S_j(K, \cdot)$$

für alle $\alpha > 0$.

Beweis: Alle Eigenschaften ergeben sich aus Satz 3.5.3 in [43]. □

Das Maß $S_{d-1}(K, \cdot)$ verdient darüber hinaus wegen des sogenannten Existenzsatzes von Minkowski zusätzliche Beachtung. Bevor wir diesen aber zitieren, ergänzen wir erst noch weitere Eigenschaften von $S_{d-1}(K, \cdot)$.

Satz 6 Seien K, L volldimensionale konvexe Körper.

$$S_{d-1}(K, \cdot) = S_{d-1}(L, \cdot)$$

gilt genau dann, wenn K und L Translate voneinander sind.

Beweis: Die Behauptung entspricht Satz 3.5.5 in [43]. □

Wir nennen ein konvexen Körper K *zentralsymmetrisch*, wenn ein $x \in \mathbb{R}^d$ existiert mit

$$K - x = -(K - x).$$

Ein Maß μ auf S^{d-1} heißt *gerade*, falls $\mu(A) = \mu(-A)$ für alle Borelmengen $A \subseteq S^{d-1}$ gilt. Als einfache Folgerung aus dem letzten Satz ergibt sich das nächste Korollar.

Korollar 1 Ein volldimensionaler konvexer Körper K ist genau dann zentralsymmetrisch, wenn $S_{d-1}(K, \cdot)$ ein gerades Maß ist.

Ein Maß μ auf S^{d-1} heißt *zentriert*, falls

$$\int_{S^{d-1}} u \mu(du) = 0$$

gilt. Ist $\mu(S^{d-1}) < \infty$, so nennen wir μ *volldimensional*, wenn kein Unterraum $L \subseteq \mathbb{R}^d$ existiert mit $\dim L < d$ und $\mu(S^{d-1} \cap L) = \mu(S^{d-1})$.

Den Abschluß unserer Betrachtungen über Oberflächenmaße eines konvexen Körpers bildet der folgende Satz, der eine Beziehung zwischen den volldimensionalen, endlichen und zentrierten Borelmaßen auf S^{d-1} und den Oberflächenmaßen konvexer Körper herstellt – der bereits erwähnte *Existenzsatz von Minkowski*.

Satz 7 Ist μ ein zentriertes, endliches und volldimensionales Borelmaß auf S^{d-1} , so existiert ein (bis auf Translation) eindeutiger konvexer Körper K mit $\dim K = d$ und

$$S_{d-1}(K, \cdot) = \mu(\cdot).$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus Satz 3.5.8 in [43]. □

Die Projektion des j -ten Stützmaßes, $j = 0, \dots, d-1$, auf seine erste Koordinate nennen wir j -tes Krümmungsmaß. Dieses wird in der Regel mit $C_j(K, \cdot)$ bezeichnet. Hervorzuheben ist hierbei das $(d-1)$ -te Krümmungsmaß $C_{d-1}(K, \cdot)$, da wir später an einigen Stellen die für volldimensionale konvexe Körper $K \in \mathcal{K}$ geltende Beziehung

$$C_{d-1}(K, \cdot) = \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd } K \cap \cdot)$$

ausnutzen wollen. Dabei bezeichnet \mathcal{H}^{d-1} das $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß, von dem wir erst im nächsten Kapitel eine genaue Definition angeben wollen.

Eine ebenso wichtige Rolle spielt im weiteren Verlauf allerdings eine Umnormierung von C_j , die wie folgt definiert ist:

$$\Phi_j(K, \cdot) := \binom{d}{j} \frac{1}{d \kappa_{d-j}} C_j(K, \cdot) = \binom{d}{j} \frac{1}{d \kappa_{d-j}} \Xi_j(K, \cdot \times S^{d-1}).$$

Bei $\Phi_j(K, \cdot)$ sprechen wir allerdings ebenfalls vom j -ten Krümmungsmaß. Wenn später die inneren Volumina konvexer Körper näher betrachtet werden, die eng mit den Krümmungsmaßen zusammenhängen, werden wir einen Grund dafür sehen, warum diese Umnormierung durchgeführt wird.

Aus der zuvor erwähnten Darstellung der Maße Ξ_j erhält man, dass das j -te Krümmungsmaß für ein Polytop P die Form

$$\Phi_j(P, A) = \sum_{F \in \mathcal{F}_j(P)} \gamma(F, P) \lambda_j(A \cap F)$$

hat. Dabei bezeichnet $\gamma(F, P)$ den *äußeren Winkel* von P an der Seite F .

Es seien F^\perp der Orthogonalraum zum Richtungsraum von $\text{aff } F$ und $\omega^{(F^\perp)}$ das sphärische Lebesgue-Maß auf F^\perp . Ist $\dim F^\perp = k$, so handelt es sich bei $\omega^{(F^\perp)}$ um das Maß ω_k im Raum F^\perp . Der äußere Winkel wird dann folgendermaßen definiert:

$$\gamma(F, P) := \frac{\omega^{(F^\perp)}(N(P, F) \cap S^{d-1})}{\omega^{(F^\perp)}(F^\perp \cap S^{d-1})}.$$

Für volldimensionale Polytope setzt man in der Regel außerdem $\gamma(P, P) := 1$. Die Darstellung der Krümmungsmaße für ein Polytop P läßt sich leicht auf den Fall $j = d$ übertragen, der sich bei einer anderen Herleitung automatisch ergibt. Deshalb definieren wir noch ergänzend

$$\Phi_d(K, \cdot) := \lambda_d(K \cap \cdot).$$

Wie schon bei den Oberflächenmaßen wollen wir auch hier die wichtigsten Eigenschaften der Krümmungsmaße in einem Satz zusammenfassen.

Satz 8 Für $j = 0, \dots, d$ und $K \in \mathcal{K}$ gilt:

a) Φ_j ist bewegungskovariant, das heißt für jede Bewegung g und jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt

$$\Phi_j(gK, gA) = \Phi_j(K, A).$$

b) Φ_j ist homogen vom Grad j . Für alle $\alpha > 0$ und jede Borelmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt also

$$\Phi_j(\alpha K, \alpha A) = \alpha^j \Phi_j(K, A).$$

c) $\Phi_j(K, \cdot)$ ist lokal erklärt. Für jede offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ und alle $L \in \mathcal{K}$ mit

$$K \cap A = L \cap A$$

gilt also $\Phi_j(K, B) = \Phi_j(L, B)$ für jede Borelmenge $B \subseteq A$.

d) Φ_j ist additiv. Sind K_1 und K_2 aus \mathcal{K} mit $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$, so gilt

$$\Phi_j(K_1 \cup K_2, \cdot) + \Phi_j(K_1 \cap K_2, \cdot) = \Phi_j(K_1, \cdot) + \Phi_j(K_2, \cdot).$$

Beweis: Alle Eigenschaften ergeben sich aus Satz 2.3.5 in [33]. □

Neben den maßwertigen Funktionen auf \mathcal{K} , die wir bisher kennengelernt haben, benötigen wir im weiteren Verlauf noch weitere, diesmal aber reellwertige Funktionale auf den konvexen Körpern, die sogenannten inneren Volumina. Sie hängen eng mit den Krümmungsmaßen zusammen.

Das j -te innere Volumen V_j eines konvexen Körpers K ist für $j = 0, \dots, d$ definiert als

$$V_j(K) := \Phi_j(K, \mathbb{R}^d).$$

Einige innere Volumina haben eine einfache geometrische Deutung: $V_d(K)$ ist das Volumen von K , $V_{d-1}(K)$ entspricht der halben Oberfläche und $V_1(K)$ ist bis auf einen Faktor, der von der Dimension d abhängt, die mittlere Breite von K . $V_0(K)$ ist gleich Eins für alle nichtleeren konvexen Körper K und heißt auch *Euler-Charakteristik* von \mathcal{K} .

Auch hier werden die wichtigsten Eigenschaften wieder in einem Satz zusammengestellt.

Satz 9 Für $j = 0, \dots, d$ und $K \in \mathcal{K}$ gilt:

a) V_j hängt stetig von K ab.

b) V_j ist bewegungsinvariant, das heißt für alle $K \in \mathcal{K}$ und jede Bewegung g gilt $V_j(gK) = V_j(K)$.

c) V_j ist positiv, sprich $V_j(K) \geq 0$ für alle $K \in \mathcal{K}$.

d) V_j ist monoton. Sind K_1 und K_2 konvexe Körper mit $K_1 \subseteq K_2$, so gilt $V_j(K_1) \leq V_j(K_2)$.

e) V_j ist additiv, das heißt $V_j(K_1 \cup K_2) + V_j(K_1 \cap K_2) = V_j(K_1) + V_j(K_2)$ für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ mit $K_1 \cup K_2 \in \mathcal{K}$.

f) V_j ist homogen vom Grad j , das heißt $V_j(\alpha K) = \alpha^j V_j(K)$ für alle $K \in \mathcal{K}$ und alle $\alpha > 0$.

g) V_j ist dimensionsunabhängig. Ist $\dim K = k < d$ und $V_j^{(k)}(K)$ das in der affinen Hülle von K gebildete j -te innere Volumen von K , so gilt

$$V_j^{(k)}(K) = V_j(K)$$

für $j = 0, \dots, k$. Außerdem ist $V_j(K) = 0$ für $j = k + 1, \dots, d$.

Beweis: Abgesehen von (d) ergeben sich diese Eigenschaften alle aus der Definition von V_j als Gesamtmasse des Krümmungsmaßes Φ_j . (d) ergibt sich aus Satz 3.3.4 in [43]. Eigenschaft (g) ergibt sich dabei aus der speziellen Normierung von Φ_j , was vielleicht verdeutlicht, warum diese durchgeführt wird. \square

Der Polarkörper K° eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$ ist definiert als die Menge

$$K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ für alle } y \in K\}.$$

Das Produkt der Volumina von K und K° läßt sich gemäß der *Blaschke-Santaló-Ungleichung* wie folgt nach oben abschätzen:

Satz 10 *Es sei $K \in \mathcal{K}$. Dann gilt*

$$V_d(K) V_d(K^\circ) \leq \kappa_d^2$$

mit Gleichheit genau dann, wenn K ein Ellipsoid ist.

Beweis: Eine Herleitung dieser Aussage findet sich auf Seite 419f in [29]. \square

Wie wir zuvor gesehen haben, ist ein volldimensionaler konvexer Körper bis auf Translation durch sein Oberflächenmaß festgelegt. Eine weitere Möglichkeit, einen konvexen Körper eindeutig zu charakterisieren, bietet seine sogenannte Stützfunktion. Ist $K \neq \emptyset$ ein konvexer Körper, so nennt man die Funktion $h_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_K(x) := \max_{y \in K} \langle x, y \rangle,$$

die *Stützfunktion* von K .

Später wird es nötig sein, konvexe Körper zu „zentrieren“, und zu diesem Zweck benötigt man ein „Zentrum“, von dem man dann fordern kann, dass es im Ursprung liegt. Neben dem Umkugelmittelpunkt ist der sogenannte *Steinerpunkt* $s(K)$ eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}'$ eine weitere mögliche Wahl. Er ist definiert als

$$s(K) := \frac{1}{\kappa_d} \int_{S^{d-1}} h_K(u) u \omega_{d-1}(du),$$

und hat unter anderem folgende Eigenschaften:

$$s(K + x) = s(K) + x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $K \in \mathcal{K}'$ und $s(K) \in \text{rel int } K$ für alle $K \in \mathcal{K}'$. Beweise der hier aufgeführten Eigenschaften finden sich auf Seite 42f in [29]. Die Tatsache, dass der Steinerpunkt eines volldimensionalen Körpers K immer in dessen Inneren liegt, werden wir später an verschiedenen Stellen ausnutzen. Im Folgenden bezeichne außerdem

$$\mathcal{K}_0 := \{K \in \mathcal{K}' \mid s(K) = 0\}$$

die Menge aller konvexen Körper mit Steinerpunkt im Ursprung.

Wir nennen eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ *positiv homogen (vom Grad 1)*, falls für alle $\alpha \geq 0$ gilt: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Insbesondere ist eine positiv homogene Funktion eindeutig durch ihre Werte auf S^{d-1} festgelegt. Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir die Menge

$$\text{epi } f := \{(x, \alpha) \mid x \in \mathbb{R}^d, \alpha \in \mathbb{R}, f(x) \leq \alpha\} \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$$

den Epigraphen von f . f heißt abgeschlossen beziehungsweise konvex, wenn $\text{epi } f$ abgeschlossen beziehungsweise konvex ist.

Die Stützfunktion eines konvexen Körpers ist stetig auf ganz \mathbb{R}^d , und die gewünschte Charakterisierungseigenschaft ergibt sich aus folgendem Satz:

Satz 11 *Sei $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv homogene und konvexe Funktion (damit ist h automatisch abgeschlossen). Dann existiert genau ein konvexer Körper K mit*

$$h_K = h.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 2.3.2 in [43]. □

Bemerkung: Später werden wir auch oft $h(K, x)$ statt $h_K(x)$ für $K \in \mathcal{K}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ schreiben.

Sei $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung von der Einheitssphäre in die reellen Zahlen. Dann können wir f homogen auf ganz \mathbb{R}^d fortsetzen, in dem wir

$$f(x) := \begin{cases} \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

für $x \in \mathbb{R}^d$ definieren. Eine Funktion $f : S^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen beziehungsweise konvex, falls ihre homogene Fortsetzung auf \mathbb{R}^d abgeschlossen beziehungsweise konvex ist. Wie die Bezeichnung nahelegt, folgt aus der Definition bereits, dass die homogene Fortsetzung positiv homogen ist.

Sei nun $K \in \mathcal{K}$ und $u \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren mittels

$$v(K, u) := \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle v, u \rangle| S_{d-1}(K, dv)$$

eine Funktion $v(K, \cdot)$ auf \mathbb{R}^d . Da $|\langle v, \cdot \rangle|$ für jeden (festen) Vektor v aus der Einheitssphäre eine positiv homogene und konvexe Funktion ist, hat $v(K, \cdot)$ als positive Kombination solcher Funktionen ebenfalls diese Eigenschaften. Es existiert also ein eindeutig bestimmter konvexer Körper ΠK , für den

$$h_{\Pi K}(\cdot) = v(K, \cdot).$$

gilt. Dieser Körper ΠK heißt *Projektionenkörper* von K . Die Bezeichnung „Projektionenkörper“ wurde gewählt, da

$$v(K, u) = V_{d-1}(K|u^\perp)$$

für alle $u \in S^{d-1}$ und alle $K \in \mathcal{K}$ gilt. Der Funktionswert von $v(K, \cdot)$ an der Stelle $u \in S^{d-1}$ entspricht also gerade dem Volumen der Projektion von K auf die Hyperebene u^\perp .

Es sei μ ein endliches, positives Borelmaß auf S^{d-1} . Dann erfüllt die Funktion

$$\begin{aligned} h : S^{d-1} &\rightarrow [0, \infty) \\ u &\mapsto \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \mu(du) \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von Satz 11; es existiert also ein konvexe Körper $Z \in \mathcal{K}$ mit Stützfunktion h . Konvexe Körper, deren Stützfunktion von dieser Form ist, nennen wir auch *Zonoide*. Für ein Zonoid $Z \in \mathcal{K}$ kann eine inverse Blaschke-Santaló-Ungleichung gezeigt werden. Es gilt:

Satz 12 *Es sei $Z \in \mathcal{K}$ ein Zonoid. Dann gilt*

$$V_d(Z) V_d(Z^\circ) \geq \frac{4^d}{d!}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn Z ein Parallelepiped ist.

Beweis: Die Ungleichung findet sich auf Seite 427 in [29]. □

Eine Zusammenstellung weiterer wichtiger Eigenschaften dieser bedeutenden Klasse konvexer Körper findet sich in dem Übersichtsartikel von Goodey und Weil über Zonoide im „Handbook of Convex Geometry“ ([8]). Insbesondere benötigen wir später folgenden Zusammenhang zwischen den inneren Volumina eines Zonoids Z und seinem *erzeugenden Maß* μ :

Satz 13 *Es sei μ ein endliches positives Borelmaß auf S^{d-1} und Z das Zonoid mit Stützfunktion*

$$\begin{aligned} h : S^{d-1} &\rightarrow [0, \infty) \\ u &\mapsto \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \mu(du). \end{aligned}$$

Für $j = 0, \dots, d$ gilt dann

$$V_j(Z) = \frac{2^j}{j!} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_j)| \mu(du_1) \dots \mu(du_j).$$

Dabei bezeichne $|\det(u_1, \dots, u_j)|$ das j -dimensionale Volumen des von $u_1, \dots, u_j \in S^{d-1}$ aufgespannten Parallelepipeds.

Beweis: Die Aussage entspricht Satz 2.5 aus [8]. □

1.2 Grundlagen aus der Integralgeometrie

In diesem Abschnitt wollen wir Formeln aus der Integralgeometrie zusammenstellen, die uns in späteren Kapiteln die Arbeit mit den Krümmungsmaßen erleichtern werden. Dazu führen wir

gleich zu Beginn die sogenannten gemischten Maße ein, die eine Verallgemeinerung der einfachen Krümmungsmaße darstellen. Eine umfassende Darstellung mit weiteren integralgeometrischen Formeln findet sich in den beiden Artikeln von Weil über gemischte Maße ([39] und [42]).

Von entscheidender Bedeutung ist in diesem Zusammenhang der folgende Satz:

Satz 14 *Es seien $j \in \{0, \dots, d\}$ und $k \in \{1, \dots, d\}$ fest gewählt. Dann gibt es für alle konvexen Körper K_1, \dots, K_k und alle $m_1, \dots, m_k \in \{j, \dots, d\}$ mit $m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j$ eindeutig bestimmte Maße $\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k, \cdot)$ auf $(\mathbb{R}^d)^k$, sodass*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_j(K_1 \cap (K_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + x_k), B_1 \cap (B_2 + x_2) \cap \dots \cap (B_k + x_k)) \lambda_d(dx_2) \dots \lambda_d(dx_k) \\ &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k, B_1 \times \dots \times B_k) \end{aligned}$$

für alle Borelmengen $B_1, \dots, B_k \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.1 in [39]. □

Die Maße $\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k, \cdot)$ heißen die *j-ten gemischten Maße* (manchmal auch: gemischte Krümmungsmaße) der konvexen Körper K_1, \dots, K_k . Für den Fall $k = 1$ ergibt sich offensichtlich $\Phi_j^{(j)}(K, \cdot) = \Phi_j(K, \cdot)$ für alle $K \in \mathcal{K}$.

Analog zu den inneren Volumina definieren wir die sogenannten *gemischten Funktionale*

$$V_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k) := \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k, \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d)$$

der konvexen Körper K_1, \dots, K_k als Gesamtmasse der gemischten Maße.

Wie zuvor können auch die gemischten Maße beziehungsweise Funktionale für Polytope P_1, \dots, P_k explizit angegeben werden. Dafür benötigen wir allerdings noch einige neue Bezeichnungen. Sei F_i eine Seite von P_i für $i = 1, \dots, k$, und es gelte

$$\sum_{i=1}^k \dim F_i \geq (k-1)d.$$

Den *gemeinsamen äußeren Winkel* $\gamma(F_1, \dots, F_k; P_1, \dots, P_k)$ definieren wir dann als

$$\begin{aligned} \gamma(F_1, \dots, F_k; P_1, \dots, P_k) := \\ \gamma(F_1 \cap (F_2 + x_2) \cap \dots \cap (F_k + x_k), P_1 \cap (P_2 + x_2) \cap \dots \cap (P_k + x_k)), \end{aligned}$$

wobei $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ so gewählt werden, dass $F_1, (F_2 + x_2), \dots, (F_k + x_k)$ relativ innere Punkte gemeinsam haben. Der gemeinsame äußere Winkel hängt nicht von der Wahl der x_2, \dots, x_k ab.

Sei L ein linearer Unterraum des \mathbb{R}^d . Für Unterräume L_1, \dots, L_k mit

$$\sum_{i=1}^k \dim L_i = m \leq d$$

wählen wir nun eine Orthonormalbasis in jedem Raum L_i , $i = 1, \dots, k$, und bezeichnen mit $|\det(L_1, \dots, L_k)|$ das m -dimensionale Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Parallelepipeds.

Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichne $L(A)$ den Richtungsraum der affinen Hülle von A . Sind A_1, \dots, A_k beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^d mit

$$\sum_{i=1}^k \dim L(A_i) \leq d,$$

so definieren wir

$$|\det(A_1, \dots, A_k)| := |\det(L(A_1), \dots, L(A_k))|.$$

Für lineare Unterräume L_1, \dots, L_k mit

$$\sum_{i=1}^k \dim L_i \geq (k-1)d$$

definieren wir nun die *Determinante* $[L_1, \dots, L_k]$ als

$$[L_1, \dots, L_k] := |\det(L_1^\perp, \dots, L_k^\perp)|.$$

$[L_1, \dots, L_k]$ hängt nur von den Unterräumen L_1, \dots, L_k ab und nicht von der speziellen Wahl der Orthonormalbasen, und es gilt folgende Rechenregel (siehe zum Beispiel Proposition 2.1 in [42]):

$$[L_1, \dots, L_k] = [L_1, \dots, L_{k-1}][L_1 \cup \dots \cup L_{k-1}, L_k].$$

Eine analoge Rechenregel gilt auch für $|\det(\cdot)|$. Sind A_1, \dots, A_k beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^d mit

$$\sum_{i=1}^k \dim L(A_i) \geq (k-1)d,$$

so definieren wir

$$[A_1, \dots, A_k] := [L(A_1), \dots, L(A_k)].$$

Seien j, k, m_1, \dots, m_k wie in Satz 14 und P_1, \dots, P_k Polytope. Dann gilt nach Formel (2) und Theorem 3.1 aus [39]

$$\begin{aligned} \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(P_1, \dots, P_k; \cdot) = \\ \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1}(P_1)} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k}(P_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; P_1, \dots, P_k) [F_1, \dots, F_k] \lambda_{F_1}(\cdot) \cdots \lambda_{F_k}(\cdot). \end{aligned}$$

Für eine Seite F bezeichne dabei λ_F das auf F eingeschränkte Lebesgue-Maß. Später werden wir außerdem für einen affinen Unterraum E mit λ_E das auf E eingeschränkte Lebesgue-Maß bezeichnen. Die gemischten Funktionale ergeben sich damit als

$$\begin{aligned} V_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(P_1, \dots, P_k) = \\ \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1}(P_1)} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k}(P_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; P_1, \dots, P_k) [F_1, \dots, F_k] V_{m_1}(F_1) \cdots V_{m_k}(F_k). \end{aligned}$$

Die wichtigsten Eigenschaften der gemischten Maße wollen wir wieder in einem Satz zusammenfassen.

Satz 15 Seien $j \in \{0, \dots, d\}$ und $k \in \{1, \dots, d\}$, $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ und $m_1, \dots, m_k \in \{j, \dots, d\}$ mit $m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j$. Desweiteren seien $B_1, \dots, B_k \subseteq \mathbb{R}^d$ Borelmengen. Dann gilt:

a) Es seien $\alpha > 0$ und $L \in \mathcal{K}$ mit $K_1 \cup L \in \mathcal{K}$. Dann gilt

$$\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(\alpha K_1, \dots, K_k; \alpha B_1 \times \dots \times B_k) = \alpha^{m_1} \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k)$$

und

$$\begin{aligned} & \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 \cup L, K_2, \dots, K_k; \alpha B_1 \times \dots \times B_k) \\ &= \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) + \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(L, K_2, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) \\ & \quad - \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 \cap L, K_2, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k). \end{aligned}$$

b) $\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$ ist ein endliches Maß auf $(\mathbb{R}^d)^k$, dessen Träger in $S_1 \times \dots \times S_k$ liegt. Es gilt $S_i = K_i$, falls $m_i = d$ und $S_i = \text{bd } K_i$, falls $m_i < d$ ist, für $i = 1, \dots, k$.

c) $\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$ hängt stetig von (K_1, \dots, K_k) ab.

d) Für jede Permutation (i_1, \dots, i_k) von $(1, \dots, k)$ gilt

$$\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) = \Phi_{m_{i_1}, \dots, m_{i_k}}^{(j)}(K_{i_1}, \dots, K_{i_k}; B_{i_1} \times \dots \times B_{i_k})$$

e) Sind L_1, \dots, L_k konvexe Körper mit $B_i \subseteq \text{int } L_i$ für $i = 1, \dots, k$, so gilt

$$\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 \cap L_1, \dots, K_k \cap L_k; B_1 \times \dots \times B_k) = \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k)$$

Beweis: (a), (b) und (c) ergeben sich direkt aus Theorem 3.1 in [39], (d) folgt aus Korollar 3.2 in [39] und (e) findet sich in der Dissertation von Fallert ([3]) in Satz 12. \square

Der nächste Satz ergibt sich aus der definierenden Gleichung der gemischten Maße.

Satz 16 Seien $j \in \{0, \dots, d\}$, $k \in \{1, \dots, d\}$ und $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$. Weiter sei $g : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} g(x_1, x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_k) \Phi_j(K_1 \cap (K_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + x_k); dx_1) \lambda_d(dx_2) \dots \lambda_d(dx_k) \\ &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \int_{(\mathbb{R}^d)^k} g(x_1, \dots, x_k) \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, x_k)) \end{aligned}$$

Beweis: Die obige Gleichung entspricht Formel (17) aus [3]. \square

In einem späteren Kapitel benötigen wir außerdem das folgende Resultat:

Satz 17 Seien $j \in \{0, \dots, d\}$ und $k \in \{2, \dots, d\}$, $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ und $m_1, \dots, m_{k-1} \in \{j, \dots, d\}$ mit $m_1 + \dots + m_{k-1} = (k-2)d + j$. Dann gilt

$$\Phi_{m_1, \dots, m_{k-1}, d}^{(j)}(K_1, \dots, K_{k-1}, K_k; \cdot) = \Phi_{m_1, \dots, m_{k-1}}^{(j)}(K_1, \dots, K_{k-1}; \cdot) \otimes \lambda_d(K_k \cap \cdot).$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 3.1 in [42]. \square

Bevor wir auch diesen Teil über die Grundlagen aus der Integralgeometrie abschließen können, soll noch ein letztes Resultat aus einem Artikel von Goodey und Weil über gemischte Maße ([9]) angegeben werden.

Für einen Normalenvektor $u \in S^{d-1}$ bezeichne u^- den abgeschlossenen Halbraum im \mathbb{R}^d mit äußerer Normale u durch den Nullpunkt. $\beta(u)$ sei eine Borelmenge im Rand u^\perp von u^- mit $\lambda_{u^\perp}(\beta(u)) = 1$. Dann gilt:

Satz 18 Sei $j \in \{0, \dots, d\}$. Für $K_1, \dots, K_{d-j} \in \mathcal{K}$ und jede messbare Funktion

$$g : (\mathbb{R}^d)^{d-j} \rightarrow [0, \infty)$$

gilt

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbb{R}^d)^{d-j}} g(x_1, \dots, x_{d-j}) \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(j)}(K_1, \dots, K_{d-j}; d(x_1, \dots, x_{d-j})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} g(x_1, \dots, x_{d-j}) \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(j)}(u_1^-, \dots, u_{d-j}^-; \beta(u_1), \dots, \beta(u_{d-j})) \times \\ & \quad \Xi_{d-1}(K_{d-j}, dx_{d-j} \times du_{d-j}) \dots \Xi_{d-1}(K_1, dx_1 \times du_1). \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 1 in [9]. Dabei erlaubt es die lokale Erklärtheit der gemischten Maße, ihre Definition auf beliebige abgeschlossen konvexe Mengen auszudehnen. \square

1.3 Grundlagen aus der Stochastischen Geometrie

In diesem Abschnitt geht es darum, zufällige abgeschlossene Mengen zu definieren und allgemeine Punktprozesse einzuführen. Die Grundlagen der Theorie zufälliger abgeschlossener Mengen wurden zum ersten Mal umfassend im mittlerweile klassischen Buch von Matheron ([21]) dargestellt, wir orientieren uns aber an der Darstellung im Buch von Schneider und Weil zur Stochastischen Geometrie ([34]).

$\mathcal{F} := \{F \subseteq \mathbb{R}^d \mid F \text{ abgeschlossen}\}$ sei die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^d , entsprechend bezeichne \mathcal{G} die Mengen der offenen Teilmengen des \mathbb{R}^d . Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ des \mathbb{R}^d sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^A &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A = \emptyset\}, \\ \mathcal{F}_A &:= \{F \in \mathcal{F} \mid F \cap A \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ und $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbb{R}^d$ definieren wir außerdem

$$\mathcal{F}_{A_1, \dots, A_k}^A := \mathcal{F}^A \cap \mathcal{F}_{A_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{A_k}.$$

Sollte der Fall $k = 0$ auftreten, so ist damit \mathcal{F}^A gemeint.

Das System $\{\mathcal{F}_{G_1, \dots, G_k}^C \mid C \in \mathcal{C}, G_1, \dots, G_k \in \mathcal{G}, k = 0, 1, 2, \dots\}$ ist Basis einer Topologie auf \mathcal{F} . Diese Topologie bezeichnen wir als *Topologie der abgeschlossenen Konvergenz*. Ausgestattet mit ihr ist \mathcal{F} ein kompakter Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis. $\mathcal{F}' := \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ wird durch die induzierte Spurtopologie zu einem lokalkompakten Raum. Die zugehörige Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ hat beispielsweise $\{\mathcal{F}_C \mid C \in \mathcal{C}\}$ als Erzeugendensystem. Beweise für diese Aussagen finden sich in Kapitel 1 von [34].

Die Messbarkeit der üblichen Mengenoperation wird in den folgenden Kapiteln wichtig sein. Es gilt nämlich:

Satz 19 *Die Abbildungen*

$$a) \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (F_1, F_2) \mapsto F_1 \cup F_2$$

$$b) \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, F \mapsto F^* := (-1) \cdot F$$

$$c) [0, \infty) \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (\alpha, F) \mapsto \alpha F$$

$$d) G_d \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (g, F) \mapsto gF$$

$$e) \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (F_1, F_2) \mapsto F_1 \cap F_2$$

$$f) \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, F \mapsto \text{bd } F$$

$$g) \mathcal{C} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, (C, F) \mapsto C + F$$

sind messbar.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Korollar 1.1.3 und Satz 1.1.6 in [34]. □

Bemerkung: Für a), b), c), d) und g) gilt sogar, dass sie stetig sind.

Da \mathcal{F} eine abzählbare Basis besitzt, ist Stetigkeit nach Satz 5.4 aus [26] äquivalent zur Folgenstetigkeit. In \mathcal{F} gibt es hierfür zwei Kriterien.

Satz 20 *Sei (F_j) eine Folge in \mathcal{F} und $F \in \mathcal{F}$. Dann sind äquivalent:*

$$a) F_j \rightarrow F \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

b) *Es gilt:*

$$b1) \text{ Aus } G \cap F \neq \emptyset, G \in \mathcal{G}, \text{ folgt } G \cap F_j \neq \emptyset \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N}.$$

$$b2) \text{ Aus } C \cap F = \emptyset, C \in \mathcal{C}, \text{ folgt } C \cap F_j = \emptyset \text{ für fast alle } j \in \mathbb{N}.$$

c) *Es gilt:*

$$c1) \text{ Für jedes } x \in F \text{ existieren für fast alle } j \in \mathbb{N} \text{ Punkte } x_j \in F_j \text{ mit } x_j \rightarrow x \text{ für } j \rightarrow \infty.$$

$$c2) \text{ Für jede Teilfolge } (F_{j_k}) \text{ und jede konvergente Folge } (x_{j_k}), x_{j_k} \in F_{j_k}, \text{ folgt } \lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} \in F.$$

Beweis: Die obige Äquivalenz gilt nach Satz 1.1.2 in [34]. \square

Auf dem Raum \mathcal{C} der kompakten Mengen und dem Teilraum $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ haben wir nun einerseits die Spurtopologie von \mathcal{F} und andererseits die Hausdorff-Topologie definiert. Beide hängen wie folgt zusammen:

Satz 21 *Auf \mathcal{C} ist die Hausdorff-Topologie echt feiner als die Spurtopologie von \mathcal{F} . Auf Teilmengen von \mathcal{C} der Form*

$$\{C \in \mathcal{C} \mid C \subseteq D\}, D \in \mathcal{C},$$

stimmen sie jedoch überein.

\mathcal{C} ist eine Borelmenge in \mathcal{F} . Die von $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ induzierte Spur- σ -Algebra auf \mathcal{C} stimmt mit der Borel- σ -Algebra bezüglich der Hausdorff-Topologie überein. \mathcal{K} ist eine abgeschlossene Teilmenge von \mathcal{F} .

Beweis: Die Aussage entspricht Satz 1.2.1 in [34]. \square

Unter einer *zufälligen abgeschlossenen Menge* Z verstehen wir nun eine messbare Abbildung

$$Z : \Omega \rightarrow \mathcal{F},$$

wobei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sein soll.

Bemerkung: Im Buch von Schneider und Weil ([34]), an dem sich auch diese Übersicht orientiert, nimmt die Darstellung der engen Verbindung von Konvex- und Integralgeometrie zur Theorie der zufälligen abgeschlossenen Mengen eine zentrale Rolle ein. Mit anderen Bereichen dieser Theorie wie zum Beispiel Grenzwertsätzen für Summen oder Vereinigungen zufälliger abgeschlossener Mengen beschäftigt sich das Buch von Molchanov ([23]) und ist deshalb für die vorliegende Arbeit nicht von entscheidender Bedeutung. Um kurz den Bogen zu den in der Einleitung erwähnten Anwendungen zu schlagen, sei auch noch auf das stärker durch praktische Problemstellungen motivierte Buch von Torquato ([36]) verwiesen, in dem ein Schwerpunkt auf der Berechnung und dem Schätzen physikalischer Eigenschaften verschiedenster „Medien“ durch zufällige Mengen liegt.

Das Bildmaß $\mathbb{P}_Z := Z \circ \mathbb{P}$ nennen wir die *Verteilung* von Z . Ist $g \in G_d$ eine Bewegung und Z eine zufällige abgeschlossene Menge, so sei

$$\begin{aligned} gZ : \Omega &\rightarrow \mathcal{F} \\ \omega &\mapsto (gZ)(\omega) := g(Z(\omega)) \end{aligned}$$

die *bewegte Menge* gZ . Z heißt *stationär*, wenn $\mathbb{P}_{t+Z} = \mathbb{P}_Z$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ ist. Z heißt *isotrop*, falls $\mathbb{P}_{\vartheta Z} = \mathbb{P}_Z$ für jede eigentliche Drehung $\vartheta \in SO_d$ gilt.

Da es sich bei einer Realisierung einer zufälligen abgeschlossenen Menge Z immer nur um eine einzelne Menge $F \in \mathcal{F}$ handelt, führen wir Punktprozesse ein. Diese ermöglichen es uns nämlich, mit abzählbaren Kollektionen abgeschlossener Mengen zu arbeiten. Für $F \in \mathcal{F}$ sei δ_F das Punkt- oder Dirac-Maß in F . Ein *Zählmaß* η sei im Folgenden eine endliche oder abzählbar unendliche Summe von Punktmaßen, also

$$\eta := \sum_{i=1}^k \delta_{F_i}, \quad k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\},$$

mit $F_i \in \mathcal{F}$ für $i = 1, \dots, k$. Für $k = 0$ sei $\eta \equiv 0$ das Nullmaß. Ein Zählmaß heißt *lokalendlich*, falls $\eta(M) < \infty$ für alle kompakten $M \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ gilt. Diese Definition überträgt sich analog auf beliebige Maße.

Mit \mathbf{N} wollen wir die Menge aller lokalendlichen Zählmaße bezeichnen. Unter \mathbf{N}_e verstehen wir die Teilmenge der *einfachen* lokalendlichen Zählmaße. \mathbf{N}_e ist also definiert als

$$\mathbf{N}_e := \{\eta \in \mathbf{N} \mid \eta(\{F\}) \leq 1 \text{ für alle } F \in \mathcal{F}\}.$$

\mathcal{N} sei die kleinste σ -Algebra auf \mathbf{N} , für die alle Abbildungen

$$\begin{aligned} \Phi_A : \mathbf{N} &\rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \eta &\mapsto \eta(A), \end{aligned}$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, messbar sind.

\mathcal{F}_{le} bezeichne die Menge aller lokalendlichen Teilmengen von \mathcal{F} . Eine Teilmenge M von \mathcal{F} heißt lokalendlich, falls $M \cap C$ für jede kompakte Menge $C \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ nur aus endlich vielen Elementen besteht. Mit η ist auch sein *Träger*

$$\text{supp } \eta := \{F \in \mathcal{F} \mid \eta(\{F\}) \geq 1\}$$

lokalendlich.

Bemerkung: Den Träger $\text{supp } \mathbb{Q}$ eines beliebigen Maß \mathbb{Q} auf einem topologischen Raum definieren wir allgemeiner als die kleinste abgeschlossene Menge F mit der Eigenschaft $\mathbb{Q}(F^c) = 0$ (siehe zum Beispiel Seite 9 in [15]).

Es gilt:

Satz 22 *Es ist $\mathbf{N}_e \in \mathcal{N}$ und $\mathcal{F}_{le} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Die Abbildung*

$$\begin{aligned} i : \mathbf{N} &\rightarrow \mathcal{F} \\ \eta &\mapsto \text{supp } \eta \end{aligned}$$

ist messbar. Es ist $i(\mathbf{N}) = \mathcal{F}_{le}$, und die Einschränkung $i_e : \mathbf{N}_e \rightarrow \mathcal{F}_{le}$ auf \mathbf{N}_e hat die Eigenschaft, bijektiv zu sein. Ebenso wie ihre Inverse i_e^{-1} ist die Abbildung i_e ebenfalls messbar. Für die Spur- σ -Algebren \mathcal{N}_e von \mathcal{N} auf \mathbf{N}_e und $\mathcal{B}(\mathcal{F})_{le}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ auf \mathcal{F}_{le} gilt $\mathcal{N}_e = i_e^{-1}(\mathcal{B}(\mathcal{F})_{le})$ und $\mathcal{B}(\mathcal{F})_{le} = i_e(\mathcal{N}_e)$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.2 in [34]. □

Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so nennen wir eine messbare Abbildung

$$X : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$$

einen *Punktprozess* (abgeschlossener Mengen).

Bemerkung: Punktprozesse führen wir somit als zufällige Maße ein, deren Theorie ausführlich im Buch von Kallenberg ([14]) behandelt wird.

Das Bildmaß $\mathbb{P}_X = X \circ \mathbb{P}$ nennen wir *Verteilung* von X . Wir sprechen von einem *Prozess kompakter Partikel*, falls das zufällige Maß X fast sicher auf \mathcal{C}' konzentriert ist. Ist X auf \mathcal{K}' konzentriert, so heißt X ein *Prozess konvexer Partikel* oder kurz *Partikelprozess*. Noch spezieller nennen wir X einen *gewöhnlichen Punktprozess*, wenn

$$\mathbb{P}_X[\{\sum_{i=1}^k \delta_{\{x_i\}} \mid x_i \in \mathbb{R}^d \text{ für } i = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}\}] = 1$$

ist.

Bemerkung: Eine ausführliche Untersuchung gewöhnlicher Punktprozesse stellt zum Beispiel die Monographie von König und Schmidt ([19]) dar.

Schließlich sprechen wir von einem *einfachen* Punktprozess X , wenn $\mathbb{P}_X[\mathbb{N}_e] = 1$ gilt.

Für ein Zählmaß

$$\eta = \sum_{i=1}^k \delta_{F_i} \in \mathbb{N}$$

und $g \in G_d$ sei das Maß $g\eta$ durch

$$g\eta := \sum_{i=1}^k \delta_{gF_i}$$

gegeben. Ist X ein Punktprozess, so verstehen wir unter gX den Prozess

$$\begin{aligned} gX : \Omega &\rightarrow \mathbb{N} \\ \omega &\mapsto (gY)(\omega) := g(Y(\omega)). \end{aligned}$$

Wir nennen nun X *stationär*, falls $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{t+X}$ für alle $t \in \mathbb{R}^d$ gilt, und *isotrop*, wenn $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{\vartheta X}$ für jede eigentlich Drehung $\vartheta \in SO_d$ ist.

Da man ein einfaches Zählmaß η mit seinem Träger identifizieren kann, schreiben wir häufig auch $F \in \eta$ statt $F \in \text{supp } \eta$. Wie in der Stochastik üblich werden wir im Folgenden oft X statt $X(\omega)$ schreiben, wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass es um eine Realisierung von X geht.

Eine wichtige Möglichkeit, Informationen über einen Punktprozess X zu erhalten, bieten die sogenannten Momentenmaße. Es sei $m \in \mathbb{N}$ eine beliebige natürliche Zahl, dann verstehen wir unter dem *m -ten Momentenmaß* $\Theta^{(m)}$ beziehungsweise dem *m -ten faktoriellen Momentenmaß* $\Lambda^{(m)}$ die auf $\mathcal{F}^m := \mathcal{F} \times \dots \times \mathcal{F}$ definierten Borelmaße

$$\begin{aligned} \Theta^{(m)}(B_1 \times \dots \times B_m) &:= \mathbb{E}X(B_1) \dots X(B_m) \\ \Lambda^{(m)}(B_1 \times \dots \times B_m) &:= \mathbb{E}(X \otimes \dots \otimes X)((B_1 \times \dots \times B_m) \cap \mathcal{F}_{\neq}^m) \\ &= \Theta^{(m)}((B_1 \times \dots \times B_m) \cap \mathcal{F}_{\neq}^m), \end{aligned}$$

wobei $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ Borelmengen sein sollen und \mathcal{F}_{\neq}^m wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{F}_{\neq}^m := \{(F_1, \dots, F_m) \in \mathcal{F}^m \mid F_i \neq F_j, i \neq j\}.$$

Das erste Momentenmaß wird allgemein als *Intensitätsmaß* $\Theta := \Theta^{(1)}$ bezeichnet. Wir nennen einen Punktprozess X *schwach stationär* beziehungsweise *schwach isotrop*, falls sein Intensitätsmaß Θ translations- beziehungsweise rotationsinvariant (letzteres bedeutet invariant unter eigentlichen Drehungen) ist. Obwohl jede Realisierung eines Punktprozesses X ein lokalendliches Maß ist, müssen sowohl $\Theta^{(m)}$ als auch $\Lambda^{(m)}$ diese Eigenschaft nicht haben. Dabei ist Θ lokalendlich, falls $\Theta(\mathcal{F}_C) < \infty$ für alle $C \in \mathcal{C}$ gilt.

Jedes Intensitätsmaß Θ in dieser Arbeit sei als lokalendlich und vom Nullmaß verschieden vorausgesetzt.

Es sei $X^m := X \otimes \dots \otimes X$, und X_{\neq}^m der Prozess X^m eingeschränkt auf \mathcal{F}_{\neq}^m . Der *Satz von Campbell* eröffnet die Möglichkeit, mit Hilfe der Momentenmaße wichtige Erwartungswerte zu berechnen.

Satz 23 *Es seien $m \in \mathbb{N}$, X ein einfacher Punktprozess auf \mathcal{F} und $f : \mathcal{F}^m \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Abbildung. Dann sind auch*

$$\sum_{(F_1, \dots, F_m) \in X^m} f(F_1, \dots, F_m)$$

sowie

$$\sum_{(F_1, \dots, F_m) \in X_{\neq}^m} f(F_1, \dots, F_m)$$

messbar, und es gilt

$$\mathbb{E} \sum_{(F_1, \dots, F_m) \in X^m} f(F_1, \dots, F_m) = \mathbb{E} \int_{\mathcal{F}^m} f dX^m = \int_{\mathcal{F}^m} f d\Theta^{(m)}$$

sowie

$$\mathbb{E} \sum_{(F_1, \dots, F_m) \in X_{\neq}^m} f(F_1, \dots, F_m) = \mathbb{E} \int_{\mathcal{F}^m} f dX_{\neq}^m = \int_{\mathcal{F}^m} f d\Lambda^{(m)},$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Korollar 3.1.6 in [34]. □

Ist der Punktprozess X nicht notwendigerweise einfach, so können wir eventuell auftretende Vielfachheit berücksichtigen, indem wir

$$\mathbb{E} \sum_{F \in X} f(F)$$

durch

$$\mathbb{E} \sum_{F \in X} f(F) X(\{F\})$$

ersetzen. In diesem Fall lässt sich für $m = 1$ der Satz von Campbell übertragen, und wir erhalten

$$\mathbb{E} \sum_{F \in X} f(F) X(\{F\}) = \mathbb{E} \int_{\mathcal{F}} f(F) dX = \int_{\mathcal{F}} f d\Theta.$$

In der Regel ist die Verteilung eines Punktprozesses nicht durch sein Intensitätsmaß bestimmt. Das wichtigste Beispiel für einen Punktprozess, der sogenannte Poissonprozess, bildet hiervon aber eine

Ausnahme. Ein einfacher Punktprozess X heißt *Poissonprozess*, falls

$$\mathbb{P}[X(M) = k] = e^{-\Theta(M)} \frac{\Theta(M)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

für alle $M \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ mit $\Theta(M) < \infty$ gilt.

Man kann sich weiterhin fragen, zu welchen Maßen Θ auf $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ ein Poissonprozess mit entsprechendem Intensitätsmaß existiert. Die Antwort darauf gibt der folgende Satz:

Satz 24 *Zu jedem lokalendlichen Maß Θ auf \mathcal{F} mit $\Theta(\{F\}) = 0$ für alle $F \in \mathcal{F}$ (in diesem Fall heißt Θ atomfrei) gibt es genau einen Poissonprozess mit Intensitätsmaß Θ .*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 3.2.2 in [34].

Folgendes Resultat werden wir in einem späteren Kapitel noch benötigen:

Satz 25 *Sei X ein Poissonprozess auf \mathcal{F} mit Intensitätsmaß Θ . Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:*

$$\Lambda^{(m)} = \Theta^m (:= \Theta \otimes \cdots \otimes \Theta).$$

Beweis: Obige Gleichung gilt nach Satz 3.2.3 (c) in [34]. □

Bemerkung: Eine ausführliche Untersuchung der Poissonprozesse auf \mathbb{R}^d findet sich im Buch von Kingman ([18]).

Da wir nun den Begriff des Poissonprozesses kennen, können wir auch das wichtigste Beispiel einer zufälligen abgeschlossenen Menge angeben, das sogenannte *Boolesche Modell*. Es ist das mit Abstand am besten analysierte Modell zufälliger Mengen, was man zum Beispiel in den Büchern von Molchanov ([22]), Mücklich und Ohser ([25]) oder Stoyan, Kendall und Mecke ([35]) sehen kann.

Nach Satz 3.5.3 aus [34] ist die Vereinigungsmenge eines jeden Punktprozesses X in \mathcal{F}'

$$Z_X := \bigcup_{F \in X} F$$

eine zufällige abgeschlossene Menge. Wir nennen Z_X ein Boolesches Modell, falls X ein Poissonprozess ist. Sollte X auf \mathcal{K}' konzentriert sein, so heißt Z_X auch ein Boolesches Modell mit konvexen Körnern. Eine ausführliche Analyse dieser Modelle findet sich in Kapitel 4.4 von [34].

Später werden wir Erwartungswerte für Boolesche Modelle berechnen wollen. Wie uns der nächste Satz verrät, können wir dies mit Hilfe des Intensitätsmaßes des zu Grunde liegenden Poissonprozesses tun, falls er auf konvexen Körpern konzentriert ist.

Satz 26 *Es sei X ein Poissonprozess mit Intensitätsmaß*

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + K) f(K, x) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}'),$$

wobei die Abbildung $f : \mathcal{K} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ messbar, $f(K, \cdot)$ lokalintegrierbar für jedes $K \in \mathcal{K}$ und \mathbb{P}_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}_0 sein sollen. Weiter sei Z_X das von X erzeugte Boolesche Modell und $K_0 \in \mathcal{K}$ ein beliebiger konvexer Körper. Für $j = 0, \dots, d$ gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \Phi_j(Z_X \cap K_0, \cdot) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_j(K_0 \cap K_1 + x_1 \cap \dots \cap K_k + x_k, \cdot) f(K_1, x_1) \times \\ &\dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k). \end{aligned}$$

Beweis: Dieser Satz ergibt sich, wenn man Theorem 1 aus [41] auf die Krümmungsmaße anwendet. In den Abschnitten 2.3 und 2.4 von [33] und Lemma 2.1 in [4] wird gezeigt, dass letztere die Voraussetzungen des Theorems erfüllen. \square

Die Eigenschaften, die das Intensitätsmaß des Prozesses X in den Voraussetzungen des letzten Satzes haben soll, werden uns im Laufe dieser Arbeit noch häufiger begegnen. Man kann sich nun fragen, inwieweit diese Forderung eine Einschränkung darstellt. Nach Satz 35 in [3] besitzt das Intensitätsmaß Θ eines jeden Prozesses konvexer Partikel X folgende Darstellung

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} \rho(K, \{x \in \mathbb{R}^d \mid x + K \in \mathcal{A}\}) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}').$$

\mathbb{P}_0 ist dabei ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}_0 , und die σ -endlichen Borelmaße $\rho(K, \cdot)$ hängen messbar von K ab. In den Voraussetzungen von Satz 26 fordert man also lediglich, dass die Maße $\rho(K, \cdot)$ für \mathbb{P}_0 -fast alle K absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes sind. Man beachte, dass die Darstellung von Θ nur eindeutig ist, wenn die $\rho(K, \cdot) = \rho(\cdot)$ nicht von K abhängen.

Bemerkung: Nach Satz 4.2.2 in [34] (er gilt analog, wenn der Umkugelmittelpunkt durch den Steinerpunkt ersetzt wird) ist X genau dann stationär, wenn sein Intensitätsmaß Θ von der Form

$$\Theta(\mathcal{A}) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + K) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}'),$$

ist. Dabei ist \mathbb{P}_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}_0 und $\gamma > 0$ eine Konstante. Sowohl γ als auch \mathbb{P}_0 sind eindeutig bestimmt.

Für $k \in \{0, \dots, d\}$ bezeichne \mathcal{E}_k^d die Menge aller k -dimensionalen affinen Unterräume des \mathbb{R}^d (im Folgenden auch Menge der k -Ebenen genannt) und \mathcal{L}_k^d die Menge der linearen, k -dimensionalen Unterräume. Nun wollen wir auf \mathcal{E}_k^d und \mathcal{L}_k^d eine Topologie definieren. Zu diesem Zweck versehen wir \mathcal{E}_k^d und \mathcal{L}_k^d mit den Finaltopologien bezüglich der Abbildungen

$$\begin{aligned} \gamma_k : G_d &\rightarrow \mathcal{E}_k^d \\ g &\mapsto gL \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \beta_k : SO_d &\rightarrow \mathcal{L}_k^d, \\ \vartheta &\mapsto \vartheta L, \end{aligned}$$

wobei $L \in \mathcal{L}_k^d$ ein fester Unterraum ist. Die Topologien sind von der konkreten Wahl des Unterraums L unabhängig. Wie man im ersten Kapitel von [34] nachlesen kann, stimmen diese beiden Topologien mit der Spurtopologie der Topologie der abgeschlossen Konvergenz überein.

Hinweis: Die Topologien auf den Räumen SO_d und G_d wurden im ersten Abschnitt dieses Kapitels eingeführt.

Unter einem k -Ebenenprozess im \mathbb{R}^d verstehen wir für $k \in \{0, \dots, d-1\}$ einen Punktprozess in \mathcal{E}_k^d , also einen Punktprozess in \mathcal{F}' mit $\Theta(\mathcal{F}' \setminus \mathcal{E}_k^d) = 0$. Im Fall $k = 1$ sprechen wir von einem Geradenprozess, im Fall $k = d-1$ von einem Hyperebenenprozess.

Für einen Unterraum $E \in \mathcal{E}^d$ bezeichnet λ_E das Lebesgue-Maß auf E . Gilt $\dim E = 0$, so sei $\lambda_E := \delta_{\{0\}}$ das Dirac-Maß an der Stelle 0. Später werden wir noch folgendes Resultat benötigen:

Satz 27 *Sei Θ ein lokalendliches, translationsinvariantes Maß über \mathcal{E}_k^d . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes, endliches Maß Θ_0 über \mathcal{L}_k^d mit*

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int \int_{\mathcal{L}_k^d L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(x + L) \lambda_{L^\perp}(dx) \Theta_0(dL)$$

für jede Borelmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}_k^d$.

Beweis: Die Behauptung entspricht gerade Satz 4.1.1 in [34]. □

Kapitel 2

Eine translative Integralformel für Hausdorff-Maße

2.1 Motivation

In den folgenden Kapiteln wollen wir einen Poissonprozess X auf \mathbb{R}^d untersuchen, dessen Intensitätsmaß Θ die Form

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int \int_{\mathcal{K}_0 \times \mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + K) f(K, x) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}'),$$

hat. Dabei sollen die Abbildung $f : \mathcal{K} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ messbar, $f(K, \cdot)$ lokalintegrierbar für festes $K \in \mathcal{K}$ und \mathbb{P}_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}_0 sein.

Ein Schwerpunkt liegt in diesem Zusammenhang auf der Analyse einer Klasse von zu X assoziierten Maßen, die wie folgt eingeführt werden: Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $j, k \in \{1, \dots, d\}$. Wir definieren das Borelmaß $\nu'_{j,k}$ auf \mathbb{R}^d durch

$$\nu'_{j,k}(B) := \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B \cap \text{bd} K_1 \cap \dots \cap \text{bd} K_k).$$

Nach Anwendung des Satzes von Campbell benötigen wir eine translative Integralformel für Krümmungsmaße, wie wir sie im einführenden Abschnitt zur Integralgeometrie mittels der gemischten Maße angegeben haben, um die Maße $\nu'_{j,k}$ weiter analysieren zu können.

Wie wir später sehen werden, ist neben den $\nu'_{j,k}$ noch eine weitere Klasse von Maßen interessant. Es sei $k \in \{0, \dots, d\}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist durch ν_k mit

$$\nu_k(B) := \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd} K_1 \cap \dots \cap \text{bd} K_k \cap B)$$

ebenfalls ein Borelmaß auf \mathbb{R}^d gegeben. Nach dem Satz von Campbell lässt sich ν_k nun folgender-

maßen schreiben:

$$\begin{aligned} \nu_k(B) &= \int_{\mathcal{K}'} \dots \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd}K_1 \cap \dots \cap \text{bd}K_k \cap B) \Lambda^{(m)}(d(K_1, \dots, K_k)) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd}K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd}K_k + x_k \cap B) \times \\ &\quad f(K_1, x_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k). \end{aligned}$$

Um mit den inneren Integralen bezüglich des Lebesgue-Maßes weiterarbeiten zu können, benötigen wir nun translative Integralformeln für die Hausdorff-Maße \mathcal{H}^{d-k} , die wir in diesem Kapitel herleiten wollen. Das entsprechende Resultat stellt dabei eine Erweiterung von Theorem 3 aus dem Artikel von Wieacker über eine translative Integralformel für Hausdorff-rektifizierbare Mengen ([45]) dar und wird ganz ähnlich bewiesen.

2.2 Grundlegende Definitionen und Sätze aus der geometrischen Maßtheorie

Das wichtigste Hilfsmittel beim Beweis der benötigten translativen Integralformel wird die sogenannte „General Area-Coarea Formula“ von H. Federer sein. Um diese zu formulieren, benötigen wir einige Begriffe aus der geometrischen Maßtheorie, die in diesem Abschnitt eingeführt werden sollen. Bei den verwendeten Bezeichnungen orientieren wir uns dabei am klassischen Buch von Federer über geometrische Maßtheorie ([6]) und der deutlich zugänglicheren Einführung von Morgan in dieses Thema ([22]).

Es sei S eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^d . Wir definieren den *Durchmesser* von S als

$$\text{diam } S := \sup \{ \|x - y\| \mid x, y \in S \}.$$

Weiter sei $0 \leq m \leq d$ eine natürliche Zahl. Für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ des \mathbb{R}^d definieren wir ihr m -dimensionales äußeres Hausdorff-Maß $\mathcal{H}^m(A)$ als

$$\mathcal{H}^m(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf_{\substack{A \subseteq \cup S_j, \\ \text{diam } S_j \leq \delta}} \sum_j \kappa_m \left(\frac{\text{diam } S_j}{2} \right)^m.$$

Das Infimum wird dabei über alle abzählbaren Überdeckungen $\{S_j\}$ von A gebildet, bei denen jedes S_j einen Durchmesser von höchstens δ hat. Wie man auf Seite 8 in [22] nachlesen kann, hat \mathcal{H}^m alle Eigenschaften eines äußeren Maßes (siehe Seite 23 in [15] für eine Definition).

Wir definieren nun die Menge $\mathcal{A}(\mathcal{H}^m)$ als

$$\mathcal{A}(\mathcal{H}^m) := \{ A \subseteq \mathbb{R}^d \mid \mathcal{H}^m(A \cap E) + \mathcal{H}^m(A^c \cap E) = \mathcal{H}^m(E) \text{ für alle } E \subseteq \mathbb{R}^d \}.$$

Nach Theorem 2.1 in [15] ist $\mathcal{A}(\mathcal{H}^m)$ eine σ -Algebra und $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}(\mathcal{H}^m), \mathcal{H}^m)$ ein Maßraum. Eine Menge $B \in \mathcal{A}(\mathcal{H}^m)$ nennen wir \mathcal{H}^m -messbare Menge. Auf Seite 8 in [22] kann man außerdem nachlesen, dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{H}^m)$ gilt.

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige Teilmenge des \mathbb{R}^d und $a \in A$ ein Punkt aus A . Für $1 \leq m \leq d$ definieren wir die *obere* und *untere m -dimensionale Dichte* $\Theta^{*m}(A, a)$ und $\Theta_*^m(A, a)$ von A an der Stelle a als

$$\Theta^{*m}(A, a) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(A \cap (a + rB^d))}{\kappa_m r^m}$$

beziehungsweise

$$\Theta_*^m(A, a) := \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^m(A \cap (a + rB^d))}{\kappa_m r^m}.$$

Falls die obere und untere Dichte von A an der Stelle a den gleichen Wert annehmen, so nennen wir ihren gemeinsamen Wert die *m -dimensionale Dichte* $\Theta^m(A, a)$ von A an der Stelle a .

Weiter sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Wir sagen, dass f an der Stelle a den *approximativen Grenzwert* („approximate limit“) y besitzt, falls für alle $\epsilon > 0$ die d -dimensionale Dichte der Menge

$$\mathbb{R}^d \setminus \{x \in A \mid \|f(x) - y\| < \epsilon\}$$

an der Stelle a den Wert 0 hat. Wir schreiben

$$y = \text{ap} \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Die Funktion f heißt *approximativ stetig* („approximate continuous“) an der Stelle a , falls

$$f(a) = \text{ap} \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

ist, und *approximativ differenzierbar* („approximately differentiable“) an der Stelle a , falls eine lineare Funktion $L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, sodass

$$\text{ap} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{\|x - a\|} = 0$$

ist. Wir schreiben

$$L = \text{ap} Df(a).$$

Ist f an der Stelle a approximativ differenzierbar, so definieren wir die *approximative k -dimensionale Jakobische von f an der Stelle a* („approximate Jacobian“), kurz $\text{ap} J_k f(a)$, als das maximale k -dimensionale Volumen des Bildes eines k -dimensionalen Einheitswürfels unter der Abbildung $\text{ap} Df(a)$.

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen. Eine Funktion $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *Lipschitz-Funktion*, falls es eine Konstante $L > 0$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^m$ gilt.

Wir nennen eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^d$ des \mathbb{R}^d im Folgenden *(\mathcal{H}^m, m) -rektifizierbar*, falls $\mathcal{H}^m(E) < \infty$ ist und \mathcal{H}^m -fast ganz E in der Vereinigung der Bilder von höchstens abzählbar vielen Lipschitz-Funktionen von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R}^d liegt.

Ist eine Menge (\mathcal{H}^m, m) -rektifizierbar und \mathcal{H}^m -messbar, so bezeichnen wir sie als *m-dimensionale rektifizierbare Menge*.

Nun haben wir alle Begriffe und Schreibweisen zusammen, um die „General Area-Coarea Formula“ angeben zu können:

Satz 28 *Es seien $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $k \geq l$, W eine m -dimensionale rektifizierbare Teilmenge des \mathbb{R}^d , Z eine k -dimensionale rektifizierbare Teilmenge des \mathbb{R}^l und f eine Lipschitz-Funktion von W nach Z . Dann gilt*

$$\int_W \text{ap } J_k f(x) \mathcal{H}^m(dx) = \int_Z \mathcal{H}^{m-k}(f^{-1}(\{z\})) \mathcal{H}^k(dz).$$

Allgemeiner ist für jede \mathcal{H}^m -integrierbare Funktion g auf W sogar die Gleichung

$$\int_W g(x) \text{ap } J_k f(x) \mathcal{H}^m(dx) = \int_Z \int_{f^{-1}(\{z\})} g(y) \mathcal{H}^{m-k}(dy) \mathcal{H}^k(dz).$$

gültig.

Beweis: Die Aussagen finden sich in Theorem 3.2.22 aus [6]. □

Es seien $m \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $a \in \mathbb{R}^d$ und $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Wir definieren den *Tangentenkegel* von E in a als

$$\text{Tan}(E, a) := \left\{ \alpha x \mid \alpha \in [0, \infty), x \in \bigcap_{\epsilon > 0} \text{cl} \left\{ \frac{x-a}{\|x-a\|} \mid x \in E, 0 < \|x-a\| < \epsilon \right\} \right\}.$$

Der *approximative Kegel der Tangentenvektoren* („approximate tangent cone“) von E in a ist dann durch

$$\text{Tan}^m(E, a) := \bigcap_{S \subseteq \mathbb{R}^d, \Theta^m(E \setminus S, a) = 0} \text{Tan}(S, a)$$

gegeben. Die Menge der *approximativen Normalenvektoren* („approximate normal vectors“) von E in a wird als

$$\text{Nor}^m(E, a) := \{u \in \mathbb{R}^d \mid \langle u, v \rangle \leq 0 \text{ für alle } v \in \text{Tan}^m(E, a)\}$$

definiert. Rektifizierbare Mengen haben folgende Eigenschaften:

Satz 29 *Es sei W eine m -dimensionale rektifizierbare Teilmenge des \mathbb{R}^d . Für \mathcal{H}^m -fast alle Punkte $a \in W$ gilt:*

- a) $\Theta^m(W, a) = 1$ und
- b) $\text{Tan}^m(E, a)$ ist ein m -dimensionaler Unterraum.

Falls f eine Lipschitz-Funktion von W nach \mathbb{R}^n ist, so ist f \mathcal{H}^m -fast überall approximativ differenzierbar.

Beweis: Die Behauptung entspricht Theorem 3.2.19 aus [6]. □

2.3 Die translative Integralformel

Es seien $1 \leq m < d$ eine natürliche Zahl, $M_0, \dots, M_m \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n_0, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. Desweiteren definieren wir $n := n_0 + \dots + n_m$. Wie Wieacker in [45] sagen wir, dass die Paare $(M_0, n_0), \dots, (M_m, n_m)$ Bedingung (I) genügen, falls folgende drei Voraussetzungen erfüllt sind:

- a) Für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:
 - i) $1 \leq n_i < d$.
 - ii) M_i ist \mathcal{H}^{n_i} -messbar und (\mathcal{H}^{n_i}, n_i) -rektifizierbar.
- b) $M_0 \times \dots \times M_m$ ist (\mathcal{H}^n, n) -rektifizierbar und \mathcal{H}^n -messbar.
- c) $\mathcal{H}^n \llcorner (M_0 \times \dots \times M_m) = (\mathcal{H}^{n_0} \llcorner M_0) \otimes \dots \otimes (\mathcal{H}^{n_m} \llcorner M_m)$.

Dabei bezeichnen wir für $k \in \mathbb{N}$ und $B \subseteq \mathbb{R}^d$ die Einschränkung von \mathcal{H}^k auf B mit $\mathcal{H}^k \llcorner B$.

Im Beweis von Satz 31 werden wir auf folgendes Resultat zurückgreifen:

Satz 30 *Es seien $1 \leq m < d$ eine natürliche Zahl, $M_0, \dots, M_m \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n_0, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. Desweiteren definieren wir $n := n_0 + \dots + n_m$. Die Paare $(M_0, n_0), \dots, (M_m, n_m)$ sollen Bedingung (I) genügen, und es gelte $n > md$. Außerdem seien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $W \subseteq \mathbb{R}^d$ ein $((m+1)d - n)$ -dimensionaler Würfel mit $\mathcal{H}^{d(m+1)-n}(A) = 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}^{n-md}(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)) \\ &= \beta(d, n - md) \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^0(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m) \cap (\rho W + x_{m+1})) \times \\ & \quad \lambda_d(dx_{m+1}) \nu(d\rho) \end{aligned}$$

für eine Konstante $\beta(d, n - md)$, die nur von d und $n - md$ abhängt.

Beweis: Die Behauptung entspricht Formel (3) in [45] (und ist eine Folgerung aus der Lemma 6.1 in [5]). \square

Folgende translative Integralformel für Hausdorff-Maße werden wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit an verschiedenen Stellen benötigen:

Satz 31 *Es seien $1 \leq m < d$ eine natürliche Zahl, $M_0, \dots, M_m \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n_0, \dots, n_m \in \mathbb{N}$. Die Paare $(M_0, n_0), \dots, (M_m, n_m)$ sollen Bedingung (I) genügen, und es gelte $n \geq md$. Weiter seien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und die Abbildung $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ für $i = 1, \dots, m$ messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{n-md}(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)) f_1(x_1) \dots f_m(x_m) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m) \\ &= \int_{M_0} \dots \int_{M_m} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))| \times \\ & \quad \mathcal{H}^{n_m}(dt_m) \dots \mathcal{H}^{n_0}(dt_0). \end{aligned}$$

Erinnerung: Sind L_1, \dots, L_k lineare Unterräume des \mathbb{R}^d mit $\dim L_1 + \dots + \dim L_k = m$ und $m \leq d$, so wählen wir in jedem der L_i eine Orthonormalbasis. $|\det(L_1, \dots, L_k)|$ bezeichnet dann das m -dimensionale Volumen des Parallelepipeds, dass von diesen m Vektoren aufgespannt wird.

Bemerkung: Die Messbarkeit der Abbildung

$$(t_1, \dots, t_m) \mapsto |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))|$$

wird in [45] auf Seite 241 gezeigt. Die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \mathcal{H}^{n-md}(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m))$$

ist nach Anwendung von Satz 30 messbar, da für $n = md$ die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto \mathcal{H}^0(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)),$$

nach der Herleitung auf Seite 239 in [45] diese Eigenschaft hat.

Beweis: Sei zunächst $n = md$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g: M_0 \times \dots \times M_m &\rightarrow \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \\ (x_0, \dots, x_m) &\mapsto (x_0 - x_1, \dots, x_0 - x_m) \end{aligned}$$

ist Lipschitz-stetig (vergleiche Seite 239 in [45]). Weiter ist wegen (I) die Menge $M_0 \times \dots \times M_m$ sowohl (\mathcal{H}^n, n) -rektifizierbar als auch \mathcal{H}^n -messbar. Damit hat aber die Menge $g(M_0 \times \dots \times M_m)$ diese Eigenschaften.

Außerdem ist

$$\begin{aligned} (t_0, \dots, t_m) &\in g^{-1}(\{(x_1, \dots, x_m)\}) \\ \Leftrightarrow t_0 - t_1 &= x_1, \dots, t_0 - t_m = x_m \\ \Leftrightarrow M_0 \ni t_0 = x_1 + t_1 &\in M_1 + x_1, \dots, M_0 \ni t_0 = x_m + t_m \in M_m + x_m. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt also

$$\mathcal{H}^0(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)) = \int_{g^{-1}(\{(x_1, \dots, x_m)\})} 1_B(t_0) \mathcal{H}^0(d(t_0, \dots, t_m)).$$

Hier bezeichnet \mathcal{H}^0 das nulldimensionale Hausdorff-Maß sowohl im \mathbb{R}^d als auch im $(\mathbb{R}^d)^{m+1}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{n-md}(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)) f_1(x_1) \dots f_m(x_m) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \int_{g^{-1}(\{(x_1, \dots, x_m)\})} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) \mathcal{H}^0(d(t_0, \dots, t_m)) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m). \end{aligned}$$

Für $i = 0, \dots, m$ bezeichne P_i die Abbildung

$$\begin{aligned} P_i : M_0 \times \dots \times M_m &\rightarrow M_i \\ (t_0, \dots, t_m) &\mapsto t_i. \end{aligned}$$

Nach Satz 28 und weil $(M_0, n_0), \dots, (M_m, n_m)$ Bedingung (I) genügen, können wir wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \int_{g^{-1}(\{(x_1, \dots, x_m)\})} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) \mathcal{H}^0(d(t_0, \dots, t_m)) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m) \\ &= \int_{M_0 \times \dots \times M_m} 1_B(P_0(t)) f_1(P_0(t) - P_1(t)) \dots f_m(P_0(t) - P_m(t)) (\text{ap } J_n g)(t) \mathcal{H}^n(dt) \\ &= \int_{M_0} \dots \int_{M_m} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))| \times \\ &\quad \mathcal{H}^{n_m}(dt_m) \dots \mathcal{H}^{n_0}(dt_0). \end{aligned}$$

Dabei folgt aus dem Beweis von Theorem 3 auf Seite 240f in [45], dass

$$(\text{ap } J_n g)(t) = |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))|$$

gilt.

Seien nun $n > md$, W ein $((m+1)d - n)$ -dimensionaler Würfel im \mathbb{R}^d mit $\mathcal{H}^{(m+1)d-n}(W) = 1$. Dann ergibt sich aus Satz 30 für ein $\beta = \beta(d, n - md)$ (erste Umformung) und dem schon bewiesenen Fall $n = md$ (zweite Umformung)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{n-md}(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)) f_1(x_1) \dots f_m(x_m) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \beta \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^0(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m) \cap t + \rho W) f_1(x_1) \dots f_m(x_m) \times \\ &\quad \lambda_d(dt) \nu(d\rho) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m) \\ &= \beta \int_{SO_d} \int_{M_0} \dots \int_{M_m} \int_{\rho W} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) \times \\ &\quad |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m), \text{Nor}^{(m+1)d-n}(\rho W, t_{m+1}))| \mathcal{H}^{n_m}(dt_m) \times \\ &\quad \dots \mathcal{H}^{n_0}(dt_0) \mathcal{H}^{(m+1)d-n}(dt_{m+1}) \nu(d\rho). \end{aligned}$$

Ab jetzt bezeichne $L := W^\perp$. Dann gilt wegen der bekannten Rechenregeln für die Stellgröße $|\det(\cdot)|$:

$$\begin{aligned} &\beta \int_{SO_d} |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m), \text{Nor}^{(m+1)d-n}(\rho W, t_{m+1}))| \nu(d\rho) \\ &= |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))| \beta \int_{SO_d} |\det(L^\perp, \rho L)| \nu(d\rho), \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{n-md}(B \cap M_0 \cap (M_1 + x_1) \cap \dots \cap (M_m + x_m)) f_1(x_1) \dots f_m(x_m) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_m) \\
&= \int_{M_0} \dots \int_{M_m} f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))| \times \\
&\quad \mathcal{H}^{n_m}(dt_m) \dots \mathcal{H}^{n_0}(dt_0) \cdot \beta \int_{SO_d} |\det(L^\perp, \rho L)| \nu(d\rho) \\
&= \int_{M_0} \dots \int_{M_m} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \dots f_m(t_0 - t_m) |\det(\text{Nor}^{n_0}(M_0, t_0), \dots, \text{Nor}^{n_m}(M_m, t_m))| \times \\
&\quad \mathcal{H}^{n_m}(dt_m) \dots \mathcal{H}^{n_0}(dt_0).
\end{aligned}$$

Nach Formel (4) auf Seite 241 in [45] gilt nämlich

$$\beta \int_{SO_d} [L^\perp, \rho L] \nu(d\rho) = 1,$$

und der Satz ist bewiesen. \square

2.4 Zur Struktur des Randes eines konvexen Körpers

Da wir die soeben bewiesene Integralformel vor allem dann benötigen, wenn wir es mit den Rändern konvexer Körper zu tun haben, wollen wir sie auch noch kurz für diese formulieren. Außerdem brauchen wir in den kommenden Kapiteln noch einige Aussage über die Struktur des Randes eines konvexen Körpers, die wir hier ebenfalls zusammenstellen wollen.

Es seien $r \in \{0, \dots, d-1\}$, $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit inneren Punkten und x ein Punkt auf dem Rand von K . $N(K, x)$ bezeichne die Menge aller äußeren Normalenvektoren von Stützhyperebenen an K in x vereinigt mit dem Nullvektor. Wir nennen $N(K, x)$ analog zu $N(K, F)$ den Normalenkegel von K in x . x heißt ein *r-singulären Punkt* von K , wenn $\dim N(K, x) \geq d-r$ ist. Einen $(d-2)$ -singulären Punkt nennen wir auch *singulär*. Falls die Stützhyperebene an K in x eindeutig ist, heißt x *regulär*. Die Menge aller regulären Randpunkte eines konvexen Körpers K soll im Folgenden mit $\text{reg } K$ bezeichnet werden, die aller singulären mit $\text{sing } K$. Es gilt:

Satz 32 *Sei $K \in \mathcal{K}$ und $r \in \{0, \dots, d-1\}$. Die Menge aller r-singulären Punkte von K kann mit abzählbar vielen kompakten Mengen überdeckt werden, deren r-dimensionales Hausdorff-Maß endlich ist.*

Beweis: Die Behauptung entspricht Satz 2.2.4 in [29]. \square

Bemerkung: Hieraus folgt nun unter anderem, daß die Menge aller singulären Punkte eines konvexen Körpers K das $(d-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß Null hat.

Auf der Menge aller regulären Punkte von K definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma_K : \text{reg } K &\rightarrow S^{d-1} \\ x &\mapsto \sigma_K(x), \end{aligned}$$

wobei $\sigma_K(x)$ der eindeutig bestimmte äußere Normaleneinheitsvektor an K im Punkt x ist. Es sei $u_0 \in S^{d-1}$ fest. Wir setzen σ_K zu einer Abbildung auf ganz $\text{bd } K$ fort, indem wir für alle $x \in \text{bd } K \setminus \text{reg } K$ noch $\sigma_K(x) := u_0$ setzen.

Gleich benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 33 *Sei K ein konvexer Körper und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Hat K innere Punkte, so gilt*

$$C_{d-1}(K, B) = \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \text{bd } K).$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Theorem 4.2.5 in [29]. □

Bemerkung: Ist $\dim K = d-1$, so gilt die obige Gleichung, falls auf der rechten Seite das Hausdorff-Maß noch um den Faktor 2 ergänzt wird.

Satz 34 *Es seien $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit inneren Punkten und $f : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine nichtnegative, messbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(x, u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, \sigma_K(x)) C_{d-1}(K, dx).$$

Beweis: Es sei $\eta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$. Aus Lemma 2.1 in der Arbeit von Weil über mittlere Formen zufälliger Mengen ([40]) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} 1_\eta(x, u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) = \int_{\text{bd } K} 1_\eta(x, \sigma_K(x)) \mathcal{H}^{d-1}(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_\eta(x, \sigma_K(x)) C_{d-1}(dx).$$

Die allgemeine Aussage folgt dann durch Approximation mit Elementarfunktionen und dem Satz von der monotonen Konvergenz, und wir haben den Satz bewiesen. □

Es sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper und $u \in S^{d-1}$ ein Einheitsvektor. Wir nennen u einen *regulären Normalenvektor von K* , falls $\dim F(K, u) = 0$ gilt, und andernfalls *singulär*. Dabei bezeichnet $F(K, u)$ die Stützmenge an K mit äußerer Normalen u . Die Menge aller regulären normalen Vektoren von K wollen wir mit $\text{regn } K$ bezeichnen.

Ein Vektor $u \in S^{d-1}$ ist genau dann ein singulärer Normalenvektor, wenn $F(K, u)$ eine Strecke enthält. Wir nennen einen konvexen Körper K *strikt konvex*, wenn sein Rand $\text{bd } K$ keine Strecke enthält, und *relativ strikt konvex*, wenn er in $\text{aff } K$ strikt konvex ist. Weiter gilt:

Satz 35 Die Menge aller singulären äußeren Normalenvektoren eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}$ hat das sphärische Lebesgue-Maß Null.

Beweis: Die Behauptung folgt aus Theorem 2.2.9 in [29]. □

Auf der Menge der regulären Normalenvektoren definieren wir nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau_K : \text{regn } K &\rightarrow \text{bd } K \\ x &\mapsto \tau_K(x), \end{aligned}$$

wobei $\tau_K(x)$ der eindeutig bestimmte Randpunkt von K mit äußerer Normalen u ist. Es sei $x_0 \in \text{bd } K$ fest. Wir setzen τ_K zu einer Abbildung auf ganz S^{d-1} fort, indem wir für alle $u \in S^{d-1} \setminus \text{regn } K$ noch $\tau_K(u) := x_0$ definieren.

Damit sind wir mit der Zusammenstellung wichtiger Eigenschaften des Randes eines konvexen Körpers fertig und wenden uns nun der Formulierung von Satz 31 für die Ränder konvexer Körper zu. Es seien $m \in \{1, \dots, d-1\}$ und $K_0, \dots, K_m \in \mathcal{K}$ volldimensionale konvexe Körper, das heißt $\dim K_i = d$ für $i = 0, \dots, m$. Wir definieren

$$M_i := \text{bd } K_i \quad \text{und} \quad n_i := d - 1$$

für $i = 0, \dots, m$. Man überlegt sich leicht, dass für $i = 0, \dots, m$ gilt: M_i ist eine Borelmenge und M_i ist $(\mathcal{H}^{d-1}, d-1)$ -rektifizierbar. Aus Theorem 3.2.23 in [6] folgt dann, dass die Paare $(M_0, n_0), \dots, (M_m, n_m)$ der Bedingung (I) genügen.

Bemerkung: Aus Theorem 1.4.1 in [48] ergibt sich außerdem, dass

$$\text{bd } K_0 \cap \text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k$$

für λ_{kd} -fast alle $(x_1, \dots, x_k) \in (\mathbb{R}^d)^k$ eine $(\mathcal{H}^{d-(k+1)}, d-(k+1))$ -rektifizierbare Menge ist.

Es seien $K \in \mathcal{K}$ ein volldimensionaler konvexer Körper und $x \in \text{bd } K$. Eine Orthonormalbasis von $\text{Nor}^{d-1}(\text{bd } K, x)$ kann man in diesem Fall folgendermaßen bestimmen: Für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \text{bd } K$ ist die äußere Normale $\sigma_K(x)$ an K in x eindeutig bestimmt. Nach Definition der äußeren Normalen gilt dann

$$\langle y - x, \sigma_K(x) \rangle \leq 0$$

für alle $y \in K$. Also liegt $\sigma_K(x)$ nach Definition in $\text{Nor}^{d-1}(\text{bd } K, x)$. Nach Satz 29 gilt

$$\dim \text{Tan}^{d-1}(\text{bd } K, x) = d - 1$$

für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \text{bd } K$. Da $\text{Tan}^{d-1}(\text{bd } K, x)$ in diesem Fall ein linearer Unterraum ist, ergibt sich insgesamt für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \text{bd } K$

$$\dim \text{Nor}^{d-1}(\text{bd } K, x) = 1.$$

Damit ist $\sigma_K(x)$ für \mathcal{H}^{d-1} -fast alle $x \in \text{bd } K$ eine Orthonormalbasis von $\text{Nor}^{d-1}(\text{bd } K, x)$. Aus Satz 31 erhält man damit:

Satz 36 *Es seien $k \in \{1, \dots, d-1\}$, $K_0, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ volldimensionale konvexe Körper, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und die Abbildung $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ für $i = 1, \dots, k$ messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-(k+1)}(B \cap \text{bd } K_0 \cap \text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k) f_1(x_1) \cdots f_k(x_k) \times \\ & \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \\ = & \int_{\text{bd } K_0} \dots \int_{\text{bd } K_k} 1_B(t_0) f_1(t_0 - t_1) \cdots f_k(t_0 - t_k) |\det(\sigma_{K_0}(t_0), \dots, \sigma_{K_k}(t_k))| \times \\ & \mathcal{H}^{d-1}(dt_k) \dots \mathcal{H}^{d-1}(dt_0). \end{aligned}$$

Kapitel 3

Konvexe Körper in der Stochastischen Geometrie

Die Untersuchung, deren Ergebnisse in dieser Arbeit vorgestellt werden, begann mit dem Versuch, verschiedene Resultate von Schneider für translationsreguläre Ebenenprozesse auf instationäre Partikelprozesse zu übertragen. In diesem Kapitel soll deshalb zum einen die entsprechende Veröffentlichung von Schneider kurz zusammengefasst werden; zum anderen wird ein kurzer Überblick über schon bekannte Ergebnisse für stationäre Prozesse konvexer Partikel und ihrer Booleschen Modelle gegeben, die im Folgenden auf inhomogene Partikelprozesse ausgedehnt werden sollen.

Es sei daran erinnert, dass Θ als lokalendlich und vom Nullmaß verschieden vorausgesetzt ist.

3.1 Stationäre Partikelprozesse

Es hat sich in der Stochastischen Geometrie als sehr fruchtbar herausgestellt, stationären Partikelprozessen verschiedene konvexer Körper zuzuordnen. Die Analyse ihrer geometrischen Eigenschaften lässt nämlich Rückschlüsse auf den zu Grunde liegenden Prozess zu. Die zwei wichtigsten Vertreter dieser sogenannten assoziierten Körper wollen wir im Folgenden vorstellen, wobei sich die nun aufgeführten und noch viele weitere Ergebnisse in Abschnitt 4.5 von [34] finden. Sie gehen im wesentlichen auf Arbeiten von Wieacker ([45], [46] und [47]) zurück.

Es sei X ein stationärer Prozess konvexer Körper. Sein Intensitätsmaß hat dann die folgende Darstellung:

$$\Theta(\mathcal{A}) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + K) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}').$$

Üblicherweise heißt $\gamma \in (0, \infty)$ die *Intensität von X* und \mathbb{P}_0 *Formverteilung*. Sowohl γ als auch \mathbb{P}_0 sind durch Θ eindeutig bestimmt (siehe Satz 4.2.2 in [34]).

Unter einigen kleinen Zusatzforderungen an X , die technischer Natur sind und hier nicht erwähnt

werden sollen, erfüllt das durch

$$\bar{S}_{d-1}(X, A) := \gamma \int_{\mathcal{K}_0} S_{d-1}(K, A) \mathbb{P}_0(dK), \quad A \in \mathcal{B}(S^{d-1}),$$

definierte Borelmaß auf S^{d-1} die Voraussetzungen des Existenzsatzes von Minkowski. Es existiert also ein eindeutig bestimmter konvexer Körper $B(X) \in \mathcal{K}_0$ mit Oberflächenmaß $\bar{S}_{d-1}(X, \cdot)$. Er wird in der Regel als *Blaschke-Körper von X* bezeichnet. Eine Herleitung dieser Aussagen findet sich auf den Seiten 156 bis 158 in [34].

Eine kurze Rechnung (siehe Seite 156 in [34]) zeigt, dass außerdem für eine beliebige Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(B) = 1$ folgende Gleichung erfüllt ist:

$$\bar{S}_{d-1}(X, A) = \mathbb{E} \sum_{K \in X} \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{B}(S^{d-1}).$$

Man kann also (nach Normierung) das Oberflächenmaß von $B(X)$ als Verteilung des Normalenvektors in einem typischen Randpunkt von X interpretieren. Deswegen wird $\bar{S}_{d-1}(X, \cdot)$ auch oft als *mittleres Normalenmaß von X* bezeichnet.

Bemerkung: Für Anwendungen ist es manchmal wichtig, das mittlere Normalenmaß $\bar{S}_{d-1}(X, \cdot)$ mit Hilfe einzelner Realisierungen eines Prozesses zu schätzen. Der Artikel von Schneider über mittlere Normalenmaße stationärer Prozesse ([30]) beschäftigt sich zum Beispiel mit der Frage, wie sich dieses Maß durch Schnitte mit Unterräumen bestimmen lässt.

Den Projektionskörper $\Pi(X) := \Pi B(X)$ des Blaschke-Körpers nennt man oft *assoziiertes Zonoid von X* . Seine Stützfunktion ist durch

$$h(\Pi(X), u) = \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| S_{d-1}(B(X), dv), \quad u \in S^{d-1},$$

gegeben. Es ist

$$\mathbb{E} \sum_{K \in X} \mathcal{H}^0([0, u] \cap \text{bd } K) = 2 \cdot h(\Pi(X), u), \quad u \in S^{d-1}.$$

Der Wert der Stützfunktion von $\Pi(X)$ an der Stelle $u \in S^{d-1}$ entspricht also der mittleren Anzahl von Punkten, in denen die Strecke mit Endpunkten 0 und u die Ränder der Partikel von X trifft. Dies ist nichts anderes als die Intensität des stationären Punktprozesses, der durch den Schnitt der Randflächen von X mit der Gerade $[u]$ entsteht. Auf den Seiten 158 und 159 in [34] kann man einen Beweis dieser Aussagen nachlesen.

Für den Rest des Abschnitts sei X als Poissonprozess vorausgesetzt.

Auch der Polarkörper $\Pi(X)^\circ$ des assoziierten Zonoids,

$$\Pi(X)^\circ := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle y, x \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in \Pi(X)\},$$

lässt sich mit der Geometrie von X in Zusammenhang bringen. Es bezeichne Z das von X erzeugte Boolesche Modell. Wir definieren für jede Realisierung von Z die Menge

$$S_0(Z) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid [0, x] \cap Z = \emptyset\}$$

als den von 0 aus sichtbaren Bereich außerhalb von Z und den bedingten Erwartungswert

$$\bar{V}_s(Z) := \mathbb{E}(\lambda_d(S_0(Z)) \mid 0 \notin Z)$$

als das mittlere sichtbare Volumen von Z . Wir setzen hierbei voraus, dass $\mathbb{P}(0 \notin Z) > 0$ ist. Dann gilt

$$\bar{V}_s(Z) = d!V_d(\Pi(X)^\circ),$$

das mittlere sichtbare Volumen ist also proportional zum Volumen des Polarkörpers von $\Pi(X)$.

Unter der *Schnittpunktdichte* γ_d von X versteht man die mittlere Anzahl von Punkten in einer Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d(B) = 1$, die sich als Schnittpunkte der Ränder von je d verschiedenen Körpern von X ergeben. Man kann nun nachrechnen, dass sich das Volumen von $\Pi(X)$ wegen

$$V_d(\Pi(X)) = \frac{1}{d!} \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_d) \in X_d^\neq} \mathcal{H}^0(B \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_d),$$

als Schnittpunktdichte γ_d von X interpretieren lässt. Aus der Ungleichung von Blaschke-Santaló und ihrer Inversen (siehe Satz 10 beziehungsweise Satz 12) ergibt sich dann die Ungleichungskette

$$4^d \leq \gamma_d \bar{V}_s(Z) \leq d! \kappa_d^2.$$

Einen Beweis dieser Zusammenhänge findet man in [34] auf den Seiten 160 bis 165.

3.2 Translationsreguläre Ebenenprozesse

Die zuvor zusammengestellten Ergebnisse stellten jedoch nicht die erste Anwendung von Ergebnissen der Konvexgeometrie auf räumliche Prozesse dar. Schon in [21] werden die geometrischen Eigenschaften eines stationären Hyperebenenprozessen mittels eines assoziierten Zonoids (bei Matheron noch „Steinerkompaktum“) analysiert.

Bei den Resultaten, die in diesem Abschnitt zusammengestellt werden sollen, konzentrieren wir uns aber auf eine Arbeit von Schneider über instationäre Poissonsche Hyperebenenprozesse und die von ihnen induzierten Mosaik ([31]). Die wichtigsten Ergebnisse aus dem zweiten und dritten Abschnitt dieser Untersuchung sollen im Folgenden wiederholt werden. Dabei geht es zum einen um die Charakterisierung von Stationarität und Isotropie der Prozesse durch Invarianzeigenschaften von assoziierten Maßen und zum anderen um den Zusammenhang von Schnittdichten eines Poissonschen Hyperebenenprozesses zu geometrischen Funktionalen von assoziierten Zonoiden.

Ein k -Ebenenprozess X heißt *translationsregulär*, falls sein Intensitätsmaß absolutstetig bezüglich eines translationsinvarianten, lokalendlichen Maßes μ auf \mathcal{E}_k^d ist. Es gilt also

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{E}_k^d} 1_{\mathcal{A}}(E) \eta(E) \mu(dE), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_k^d),$$

für eine nichtnegative, messbare und μ -integrierbare Funktion η auf \mathcal{E}_k^d . Wendet man Satz 27 auf μ an, so ergibt sich, dass sich das Intensitätsmaß Θ von X in der Form

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int \int_{\mathcal{L}_k^d L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(L+x) \eta(L+x) \lambda_{L^\perp}(dx) \Phi(dL), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_k^d),$$

schreiben lässt, wobei Φ ein endliches Maß auf \mathcal{L}_k^d bezeichnet. Falls η eine stetige Version besitzt, heißt X *translationsregulär mit stetiger Dichte*.

Bemerkung: Die nun folgenden Ergebnisse (bis einschließlich Satz 37) und ihre Beweise finden sich alle auf den Seiten 141 bis 143 in [31].

Für eine feste Menge $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_k^d)$ betrachten wir nun das folgende Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$:

$$B \mapsto \mathbb{E} \sum_{E \in \mathcal{E}_k^d} X(\{E\}) 1_{\mathcal{A}}(E^0) \lambda_E(B).$$

Dabei bezeichnet E^0 den Richtungsraum einer affinen k -Ebene E .

Man kann nachrechnen (siehe Seite 141f in [31]), dass dieses Maß für jedes $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_k^d)$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt und eine Version dieser Dichte für $\mathcal{A} = \mathcal{L}_k^d$ durch

$$\gamma(z) := \int_{\mathcal{L}_k^d} \eta(L+z) \Phi(dL), \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

gegeben ist. Die Funktion γ nennt man auch *Intensitätsfunktion* des Prozesses X . Anschaulich kann man γ dabei folgendermaßen interpretieren: Je größer der Wert von γ in einem Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ist, desto mehr Ebenen von X gehen im Mittel durch B .

Desweiteren ordnen wir jedem Punkt $z \in \mathbb{R}^d$ ein Maß $\varphi(z, \cdot)$ auf \mathcal{L}_k^d zu, welches wir wie folgt definieren:

$$\varphi(z, \mathcal{A}) := \int_{\mathcal{A}} \eta(L+z) \Phi(dL), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_k^d).$$

Man nennt $\varphi(z, \cdot)$ auch *Richtungsmaß von X an der Stelle z* , und für alle Punkte $z \in \mathbb{R}^d$ mit der Eigenschaft $0 < \varphi(z, \mathcal{L}_k^d) < \infty$ kann man die *Richtungsverteilung von X in z* als

$$\mathbb{P}_0(z, \cdot) := \frac{1}{\varphi(z, \mathcal{L}_k^d)} \varphi(z, \cdot)$$

definieren. Für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ ist $\varphi(z, \cdot)$ eindeutig bestimmt, und hängt nicht von μ und η ab. Weiterhin gilt, dass

$$\mathbb{E} \sum_{E \in \mathcal{E}_k^d} X(\{E\}) 1_{\mathcal{A}}(E^0) \lambda_E(B) = \int_B \varphi(z, \mathcal{A}) \lambda_d(dz)$$

für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_k^d)$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt. Ist X schwach stationär, so hängt $\varphi(z, \cdot)$ nicht von z ab; falls X außerdem schwach isotrop sein sollte, so ist $\varphi(z, \cdot) = \varphi$ rotationsinvariant. Nach Theorem 1 aus [31] gilt aber auch folgende Umkehrung:

Satz 37 *Es seien $k \in \{1, \dots, d-1\}$ und X ein translationsregulärer k -Ebenenprozess mit stetiger Dichte. Dann gilt: Ist $\varphi(z, \cdot)$ rotationsinvariant für alle $z \in \mathbb{R}^d$, so ist X schwach stationär und schwach isotrop.*

Beweisidee: Aus der Stetigkeit von η folgt die Stetigkeit von γ . Desweiteren ist das rotationsinvariante Maß ν_k auf \mathcal{L}_k^d abgesehen von Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig bestimmt. Also gilt $\varphi(z, \cdot) = \gamma(z) \nu_k(\cdot)$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$. Daraus ergibt sich

$$\frac{\varphi(z, \cdot)}{\gamma(z)} = \frac{\varphi(y, \cdot)}{\gamma(y)}$$

für alle $y, z \in \mathbb{R}^d$ mit $\gamma(z) > 0$ und $\gamma(y) > 0$. Seien nun $y, z \in \mathbb{R}^d$ fest mit dieser Eigenschaft. Aus der Definition von $\varphi(z, \cdot)$, der Stetigkeit von η und $\text{supp } \nu_k = \mathcal{L}_k^d$ folgt

$$\frac{\eta(L+z)}{\gamma(z)} = \frac{\eta(L+y)}{\gamma(y)}$$

für alle $L \in \mathcal{L}_k^d$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ finden sich nun ein $L \in \mathcal{L}_k^d$ mit $\eta(L+z) > 0$ und ein $y_n \in (y + \frac{1}{n}B^d)$ mit $L+z = L+y_n$. Daraus folgt $\gamma(z) = \gamma(y_n)$, und mit der Stetigkeit von γ ergibt sich $\gamma(z) = \gamma(y)$. Nun erhält man sofort, dass γ konstant auf ganz \mathbb{R}^d ist. Die Behauptung erhält man durch Einsetzen dieses Ergebnisses in die beiden abgesetzten Gleichungen und aus der Definition von Θ . Der vollständige Beweis findet sich auf Seite 142 und 143 in [31]. \square

Um zu zeigen, dass γ konstant ist, nutzt man die geometrische Struktur der linearen Unterräume entscheidend aus. Deshalb lässt sich dieser Beweis auch nicht auf Prozesse konvexer Körper übertragen, für die wir im nächsten Kapitel ein analoges Resultat zeigen wollen.

Bemerkung: Alle Resultate, die in diesem Abschnitts noch erwähnt werden, finden sich einschließlich ihrer Beweise auf den Seiten 145 bis 148 in [31].

Neben der Charakterisierung von Stationarität und Isotropie translationsregulärer k -Ebenenprozesse durch assoziierte Maße werden in [31] auch Poissonsche Hyperebenenprozesse und die von ihnen induzierten Schnittprozesse untersucht.

Es sei X ein translationsregulärer Poissonscher Hyperebenenprozess mit Intensitätsmaß

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int \int_{\mathcal{L}_k^d L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(L+x) \eta(L+x) \lambda_{L^\perp}(dx) \Phi(dL), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_k^d),$$

wobei $\eta : \mathcal{E}_{d-1}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine lokalintegrierbare Dichte und Φ ein endliches Maß auf \mathcal{L}_k^d sein sollen.

Für $k \in \{1, \dots, d\}$ bezeichne X_k den Schnittprozess von X der Ordnung k . Er ist gegeben durch

$$X_k(\mathcal{E}) := \frac{1}{k!} \sum_{(H_1, \dots, H_k) \in X_\neq^k} f_{\mathcal{E}}(H_1, \dots, H_k),$$

wobei $\mathcal{E} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_{d-k}^d)$ sei und $f_{\mathcal{E}}(H_1, \dots, H_k) := 1$ für $H_1 \cap \dots \cap H_k \in \mathcal{E}$ gesetzt wird. Andernfalls ist $f_{\mathcal{E}} = 0$.

Bemerkung: Eine ausführliche Analyse des stationären Falls findet sich auf Seite 118ff in [34].

X_k ist ein einfacher $(d - k)$ -Ebenenprozess. Man erhält ihn, indem man in jeder Realisierung von X den Schnitt von je k Hyperebenen bildet, deren äußere Normalen linear unabhängig sind. Da X ein Poissonprozess ist, gilt $\Lambda^{(m)} = \Theta^m$, und auf Seite 119 in [34] kann man nachlesen, dass das Intensitätsmaß Θ_k von X_k durch

$$\Theta_k(\mathcal{A}) = \frac{1}{k!} \int_{\mathcal{E}_{d-1}^d} \dots \int_{\mathcal{E}_{d-1}^d} f_{\mathcal{A}}(H_1 \cap \dots \cap H_k) \Theta(dH_1) \dots \Theta(dH_k), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_{d-k}^d),$$

gegeben ist. X_k ist ebenfalls translationsregulär und seine Intensitätsfunktion γ_k ergibt sich nach einigem Rechnen (siehe Seite 146f in [31]) für $z \in \mathbb{R}^d$ als

$$\gamma_k(z) = \frac{1}{k!} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} [u_1^\perp, \dots, u_k^\perp] \tilde{\varphi}_z(du_1) \dots \tilde{\varphi}_z(du_k).$$

Bei $\tilde{\varphi}(z)$ handelt es sich um ein gerades Borelmaß auf S^{d-1} , welches eng mit Φ zusammenhängt. Dabei geht ein, dass Φ durch

$$\tilde{\Phi}(A) := \frac{1}{2} \Phi(\{H \in \mathcal{L}_{d-1}^d \mid H = u^\perp \text{ mit } u \in A\}), \quad A \in \mathcal{B}(S^{d-1}),$$

ein Borelmaß auf S^{d-1} induziert. Die genaue Definition von $\tilde{\varphi}(z)$ findet sich auf Seite 146 in [31]. Die Funktion

$$h_z(x) := \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle x, v \rangle| \tilde{\varphi}_z(dv), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

ist für jedes $z \in \mathbb{R}^d$ Stützfunktion eines Zonoids $\Pi(X, z)$, das wir *lokales assoziiertes Zonoid von X in z* nennen. Für $k = 1, \dots, d$ gilt nach der Formel für die inneren Volumina von Zonoiden

$$V_k(\Pi(X, z)) = \frac{1}{k!} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} [u_1^\perp, \dots, u_k^\perp] \tilde{\varphi}_z(du_1) \dots \tilde{\varphi}_z(du_k),$$

woraus sofort

$$\gamma_k(z) = V_k(\Pi(X, z))$$

folgt. Zusammen mit Satz 37 ergibt sich daraus:

Satz 38 *Sei X ein translationsregulärer Poisson-Hyperebenenprozess in \mathbb{R}^d . Sei $k \in \{2, \dots, d\}$ und X_k der Schnittprozess der Ordnung k . Desweiteren bezeichne γ_k seine Intensitätsfunktion. Dann gilt*

$$\gamma_k(z) \leq \frac{\binom{d}{k} \kappa_{d-1}^k}{d^k \kappa_{d-k} \kappa_d^{k-1}} \gamma(z)^k \quad (*)$$

für fast alle $z \in \mathbb{R}^d$.

Besitzt X eine stetige Dichte und gilt in () Gleichheit für fast alle $z \in \mathbb{R}^d$, so ist X stationär und isotrop.*

Beweis: Die Aussage entspricht Satz 2 in [31]. □

3.3 Ausblick

Die in den letzten beiden Abschnitten zusammengefaßten Resultate sollen in den nächsten Kapiteln verallgemeinert werden.

Zunächst werden wir für einen nicht-stationären Prozess konvexer Partikel X eine Klasse von Maßen definieren – sie werden im nächsten Kapitel als lokale mittlere Normalenmaße bezeichnet –, deren Rotationsinvarianz ebenfalls gleichbedeutend mit der schwachen Stationarität und schwachen Isotropie des zu Grunde liegenden Prozesses ist. Dieses Resultat stellt eine Übertragung des entsprechenden Ergebnisses von Schneider für translationsreguläre k -Ebenenprozesse dar.

Danach betrachten wir den durch die Ränder von X induzierten Hyperflächenprozess, und benutzen diesen, um für X zwei Arten von Schnittdichten zu definieren. Wie bei Schneider lassen sich diese Dichten jeweils als Funktionale von zu X assoziierten Körpern interpretieren, und wir können diesen Zusammenhang nutzen, um ebenfalls Ungleichungen für die Schnittdichten herzuleiten.

Die auftretenden Körper fallen bei Stationarität von X mit dem im ersten Abschnitt erwähnten Blaschke-Körper beziehungsweise assoziierten Zonoid zusammen. Deshalb werden wir auch im instationären Fall versuchen, Zusammenhänge zwischen diesen Klassen von konvexen Körpern und geometrischen Eigenschaften von X zu finden.

Im siebten Kapitel werden wir dann zum Abschluss die in dieser Arbeit für instationäre Partikelprozesse hergeleiteten Ergebnisse mit den Resultaten von Schneider zusammenzuführen, indem wir Verallgemeinerungen der jeweiligen Sätze für Zylinder zeigen. Zu diesem Zweck benötigen wir translative Integralformeln für Zylinder, die wir im vorletzten Kapitel herleiten werden. Darüber hinaus werden wir letztere dazu benutzen, Quermaßdichten für Zylinderprozesse und die von ihnen induzierten Booleschen Modelle zu berechnen.

Kapitel 4

Verallgemeinerte lokale mittlere Normalenmaße

Als erstes werden wir die verallgemeinerten mittleren Normalenmaße einführen und ihre geometrische Bedeutung veranschaulichen. Danach sollen mit ihrer Hilfe Invarianzeigenschaften von Prozessen konvexer Partikel charakterisiert werden.

Es sei daran erinnert, dass Θ als lokalendlich und vom Nullmaß verschieden vorausgesetzt ist.

4.1 Definitionen und Bezeichnungen

Wir nennen einen Partikelprozess X *translationsregulär*, wenn sein Intensitätsmaß Θ von der Form

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + K) f(K, x) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}'),$$

ist. Dabei seien $f : \mathcal{K} \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Abbildung mit der Eigenschaft, dass $f(K, \cdot)$ für festes $K \in \mathcal{K}$ lokalintegrierbar ist, und \mathbb{P}_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}_0 . Die Abbildung f und das Maß \mathbb{P}_0 sind nicht eindeutig durch Θ festgelegt.

X heißt *translationsregulär mit stetiger Dichte*, falls $f(K, x) = f(x)$ für alle $K \in \mathcal{K}$ und $x \in \mathbb{R}^d$ mit einer stetigen Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gilt. Da $\Theta \not\equiv 0$ vorausgesetzt ist, sind in diesem Fall sowohl f als auch \mathbb{P}_0 eindeutig durch Θ bestimmt.

Einen translationsregulären Poissonprozess X mit stetiger Dichte kann man sich wie folgt vorstellen: Zunächst werden im \mathbb{R}^d Punkte gemäß eines instationären Poissonschen *Punktprozesses* Φ mit Dichte f verteilt. Für jeden Punkt $x \in \Phi$ wird danach unabhängig von Φ und den anderen Punkten ein zufälliger konvexer Körper K_x mit Verteilung \mathbb{P}_0 bestimmt. Der Partikelprozess $\sum_{x \in \Phi} \delta_{x+K_x}$ hat dann dieselbe Verteilung wie X .

Insbesondere sind schwach stationäre Partikelprozesse, also Prozesse mit $f \equiv \gamma$ für ein festes $\gamma \in (0, \infty)$, translationsregulär mit stetiger Dichte.

Falls \mathbb{P}_0 auf volldimensionalen konvexen Körpern konzentriert ist, also

$$\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K} \mid K \text{ besitzt innere Punkte}\}) = 1$$

gilt, so nennen wir X auf volldimensionalen Körpern konzentriert.

Es sei X ein translationsregulärer Partikelprozess. Für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ definieren wir

$$\mu_z(A, \mathcal{A}) := \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK).$$

Die folgende Rechnung verdeutlicht, wie wir μ_z interpretieren können: Es seien $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ Borelmengen, B sei außerdem beschränkt. Eine Möglichkeit, die „Verteilung“ der Normalenvektoren konvexer Körper aus der Menge \mathcal{A} zu untersuchen, deren zugehörige Randpunkte in B liegen, besteht im Betrachten des Erwartungswertes

$$\mathbb{E} \sum_{K \in X} 1_{\mathcal{A}}(K - s(K)) \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A)).$$

Die Messbarkeit der Abbildung

$$K \mapsto \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A))$$

wird auf Seite 156f in [34] hergeleitet.

Bemerkung: Setzen wir $\mathcal{A} = \mathcal{K}_0$ und $A = S^{d-1}$, so erhalten wir

$$\mathbb{E} \sum_{K \in X} 1_{\mathcal{K}_0}(K - s(K)) \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A)) = 2 \mathbb{E} \sum_{K \in X} \Phi_{d-1}(K, B).$$

Dieses Maß wurde bereits von Fallert in [3] beziehungsweise [4] untersucht, und später werden wir auf einige seiner Ergebnisse zurückgreifen.

Mit Hilfe von Satz 34 überlegt man sich, dass für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ gilt

$$\mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A)) = \Xi_{d-1}(K, B \times A).$$

Es sei $\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) > 0$. Aus Proposition 4.10 in der Arbeit von Hug und Last über Stützmaße und Kontaktverteilungen ([12]) ergibt sich dann mit $\mathbb{Q}_0(\cdot) := \frac{1}{\mathbb{P}_0(\mathcal{A})} \mathbb{P}_0(\cdot \cap \mathcal{A})$ die Darstellung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{K \in X} 1_{\mathcal{A}}(K - s(K)) \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Xi_{d-1}(dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) \lambda_d(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \mu_z(A, \mathcal{A}) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Falls $\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) = 0$ ist, gilt diese Gleichung offensichtlich auch.

Ist $0 < \mu_z(S^{d-1}, \mathcal{A}) < \infty$, so könnte man das auf Gesamtmasse Eins normierte Maß

$$\mu_z(S^{d-1}, \mathcal{A})^{-1} \cdot \mu_z(\cdot, \mathcal{A})$$

als die Verteilung der äußeren Normalenvektoren der konvexen Partikel des Prozesses X im Punkt z interpretieren. Dabei werden jedoch nur konvexe Körper berücksichtigt, die zu \mathcal{A} gehören.

Bemerkung: Es sei X außerdem ein *Poissonprozess* und Z das zugehörige Boolesche Modell. Wir definieren $\bar{p}(z) := \mathbb{P}(z \in Z)$, $z \in \mathbb{R}^d$, als die Volumendichte von Z , und Ξ_{d-1}^+ bezeichne die Fortsetzung von Ξ_{d-1} auf den erweiterten Konvexring (siehe Abschnitt 3 in [12]). Aus Theorem 4.11 in [12] ergibt sich, dass das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definierte Maß

$$\mathbb{E} \Xi_{d-1}^+(Z, \cdot \times A)$$

für jedes $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ absolutstetig bezüglich λ_d ist, und eine Version der Dichte durch

$$z \mapsto (1 - \bar{p}(z)) \mu_z(A, \mathcal{K}_0)$$

gegeben ist. Insbesondere können wir $(1 - \bar{p}(z)) \mu_z(\cdot, \mathcal{K}_0)$ damit als das mittlere Normalenmaß von Z in z interpretieren.

Nun wollen wir einige wichtige Eigenschaften der μ_z in folgendem Satz zusammenfassen:

Satz 39 *Es sei X ein translationsregulärer Partikelprozess. Für $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ sei*

$$\mu_z(A, \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK).$$

Dann gilt: Die Mengenfunktion

$$\mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}(\mathcal{K}_0) \rightarrow [0, \infty), (A, \mathcal{A}) \mapsto \mu_z(A, \mathcal{A})$$

lässt sich zu einem Maß auf $\mathcal{B}(S^{d-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ fortsetzen. Das Maß μ_z ist für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ sowohl endlich als auch eindeutig durch das Intensitätsmaß Θ von X bestimmt.

Bemerkung: Wir nennen μ_z das *verallgemeinerte lokale mittlere Normalenmaße des Prozesses X an der Stelle z* . Besitzt X eine stetige Dichte, so sind f und \mathbb{P}_0 eindeutig durch Θ bestimmt, und damit auch μ_z für jedes $z \in \mathbb{R}^d$.

Beweis: Die erste Aussage des Satzes ergibt sich sofort aus der Darstellung von μ_z als

$$\mu_z(A, \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A \times \mathcal{A}}(\sigma_K(x), K) f(K, z - x) C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK).$$

Zuvor hatten wir außerdem folgende Gleichung hergeleitet:

$$\mathbb{E} \sum_{K \in X} 1_{\mathcal{A}}(K - s(K)) \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(A)) \quad (*)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Xi_{d-1}(dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) \lambda_d(dz)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \mu_z(A, \mathcal{A}) \lambda_d(dz).$$

Nach Theorem 4.2 in [4] gilt

$$\mathbb{E} \sum_{K \in X} 1_{\mathcal{K}_0}(K - s(K)) \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \sigma_K^{-1}(S^{d-1})) = \mathbb{E} \sum_{K \in X} C_{d-1}(K, B) < \infty$$

für jede beschränkte Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Wegen (*) ist also $\mu_z(S^{d-1}, \mathcal{K}_0) < \infty$ für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$. Nach dem Eindeutigkeitsatz für Maße (siehe zum Beispiel Satz 1.14 in [10]) ist für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ die Fortsetzung von μ_z auf $\mathcal{B}(S^{d-1}) \times \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ damit eindeutig.

Da $\mathcal{B}(S^{d-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ ein abzählbares, durchschnittsstabiles Erzeugendensystem besitzt, ist μ_z durch (*) für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ eindeutig bestimmt, hängt also nicht von der konkreten Wahl von f und \mathbb{P}_0 ab. \square

Bemerkung: Wir schreiben auch $\mu_z(A \times \mathcal{A})$ statt $\mu_z(A, \mathcal{A})$.

Später werden wir, ohne dies jedesmal explizit zu erwähnen, ausnutzen, dass das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ definierte Maß

$$\mathcal{A} \mapsto \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x, K) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK)$$

σ -endlich ist. Dies ist wegen folgender Überlegung richtig: Sei $\mathcal{K}_0^{(n)} := \{K \in \mathcal{K}_0 \mid K \subseteq nB^d\}$. Dann gilt für die Mengen $\mathcal{A}_n := \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0^{(n)}$ nämlich

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}_n}(x, K) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) &= 2 \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{K}_0^{(n)}}(K) V_{d-1}(K) \mathbb{P}_0(dK) \\ &\leq 2 V_{d-1}(nB^d) \\ &< \infty, \end{aligned}$$

und $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}_0$ für $n \rightarrow \infty$.

4.2 Charakterisierung der schwachen Isotropie und schwachen Stationarität

Es sei X ein translationsregulärer Prozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Das wichtigste Ergebnis dieses Abschnitts zeigt, dass X genau dann schwach stationär und schwach isotrop ist, wenn die verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaße μ_z für alle $z \in \mathbb{R}^d$ rotationsinvariant sind. Es stellt eine Übertragung des entsprechenden Resultats von Schneider für k -Ebenenprozesse (Theorem 1 in [31]) auf Prozesse konvexer Partikel dar.

Zunächst wollen wir aber die Rotationsinvarianz der Formverteilung \mathbb{P}_0 beziehungsweise die schwache Stationarität von X durch Invarianzeigenschaften der μ_z charakterisieren. Die dabei auftretenden Bedingungen an die mittleren Normalenmaße sind allerdings wenig anschaulich. Jedoch tauchen in beiden Beweisen jeweils Ideen auf, die bei der Herleitung des Hauptresultats wieder aufgegriffen werden.

Da wir sie in diesem Abschnitt an verschiedenen Stellen benötigen werden, wollen wir noch folgende Abbildung einführen: Für eine Rotation $\vartheta \in SO_d$ wollen wir die Abbildung

$$K \mapsto \vartheta K$$

von \mathcal{K} nach \mathcal{K} ebenfalls mit ϑ bezeichnen.

Satz 40 *Es sei X ein translationsregulärer Partikelprozess mit stetiger Dichte. Desweiteren sei $\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}\}) = 1$. Dann gilt: \mathbb{P}_0 ist genau dann rotationsinvariant, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt*

$$\mu_z(S^{d-1}, \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK). \quad (1)$$

Bemerkung: Gleichung (1) besagt, dass sich die Projektionen $\mu_z(S^{d-1}, \cdot)$ der verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaße von X nicht ändern, wenn wir seine Formverteilung durch $\vartheta \circ \mathbb{P}_0$ ersetzen.

Beweis: Da im Fall $d = 1$ die Gruppe SO_d aus einem Element, der Identität, besteht, gilt die Behauptung offensichtlich. Sei also $d \geq 2$.

Sei zunächst \mathbb{P}_0 rotationsinvariant. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $\vartheta \in SO_d$

$$\begin{aligned} \mu_z(S^{d-1}, \mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(\vartheta K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK). \end{aligned}$$

Der Beweis der „Gegenrichtung“ erfolgt in zwei Schritten. Zuerst zeigen wir, dass das Maß \mathbb{P}_0 absolutstetig bezüglich jedem der Maße $\vartheta \circ \mathbb{P}_0$, $\vartheta \in SO_d$, ist. Danach rechnen wir nach, dass die entsprechenden Dichten \mathbb{P}_0 -fast sicher den Wert eins haben.

Sei also nun (1) erfüllt. Für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_z(S^{d-1}, \mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK) \\ &\stackrel{\text{Rotationskovarianz von } \Xi_{d-1}}{=} \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-\vartheta x) \Xi_{d-1}(\vartheta^{-1}K, dx \times S^{d-1}) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-\vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $T := \{z \in \mathbb{R}^d \mid f(z) > 0\}$ nichtleer. Damit existiert ein $r > 0$ mit der Eigenschaft, dass $T \cap rB^d \neq \emptyset$ ist. Wir setzen nun $r(n) := r + n$ und betrachten ein beliebiges $x \in nB^d$. Dann gilt für alle $t \in (T \cap rB^d)$: $t + x \in r(n)B^d$. Daraus folgt

$$\int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \geq \int_{x+(T \cap rB^d)} f(z - x) \lambda_d(dz) = \int_{T \cap rB^d} f(z) \lambda_d(dz) > 0.$$

Wir haben also gezeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $r(n) \in [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) > 0 \quad (!)$$

für alle $K \in \mathcal{K}_0^{(n)} := \{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}, K \subseteq nB^d\}$. Auf dieses Resultat werden wir auch in anderen Beweisen zurückgreifen.

Da $f \not\equiv 0$ und stetig sein soll, gilt für alle $\vartheta \in SO_d$ und alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$

$$\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathbb{P}_0(\vartheta\mathcal{A}) = 0.$$

Begründung: Existiert ein $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ mit $\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) > 0$, aber $\mathbb{P}_0(\vartheta\mathcal{A}) = 0$, so wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{P}_0(\mathcal{A} \cap \mathcal{K}_0^{(n)}) > 0$ und $r(n)$ wie in (!). Dann gilt

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) = 0,$$

weil $\mathbb{P}_0(\vartheta\mathcal{A}) = 0$ ist, aber

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) > 0.$$

Wegen (1) müsste jedoch Gleichheit gelten. Die Umkehrung ergibt sich analog.

Also besitzt \mathbb{P}_0 für alle $\vartheta \in SO_d$ eine Dichte bezüglich $\vartheta \circ \mathbb{P}_0$; das heisst, es existiert für jedes $\vartheta \in SO_d$ eine nichtnegative, messbare Funktion $\eta_\vartheta : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_0} g(K) \mathbb{P}_0(dK) &= \int_{\mathcal{K}_0} g(K) \eta_\vartheta(K) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} g(\vartheta K) \eta_\vartheta(\vartheta K) \mathbb{P}_0(dK) \end{aligned}$$

für alle messbaren Abbildungen $g : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty)$.

Es sei nun $\vartheta \in SO_d$ fest. Aus

$$\begin{aligned} &\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \end{aligned}$$

fur alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ ergibt sich fur alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\
& \stackrel{(1)}{=} \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\
& = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta K) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(\vartheta K, dx \times S^{d-1}) \eta_{\vartheta}(\vartheta K) \mathbb{P}_0(dK) \\
& = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \eta_{\vartheta}(\vartheta K) \mathbb{P}_0(dK).
\end{aligned}$$

Damit gilt fur \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0^{(n)}$

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1})}_{>0} = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \eta_{\vartheta}(\vartheta K),$$

also $\eta_{\vartheta}(\vartheta K) = 1$. Da dies fur alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\eta_{\vartheta}(\vartheta K) = 1$ fur \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$. Daraus ergibt sich fur alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \mathbb{P}_0(dK) \\
&= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta K) \eta_{\vartheta}(\vartheta K) \mathbb{P}_0(dK) \\
&= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K) \mathbb{P}_0(dK) \\
&= \mathbb{P}_0(\vartheta^{-1}\mathcal{A}).
\end{aligned}$$

Da $\vartheta \in SO_d$ beliebig war, ist \mathbb{P}_0 rotationsinvariant, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Aus dem Beweis des letzten Satzes erhalt man sofort das folgende Korollar:

Korollar 2 *Es sei X ein translationsregularer Partikelprozess mit stetiger Dichte. Desweiteren sei $\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}\}) = 1$ sowie $f(z) > 0$ fur alle $z \in \mathbb{R}^d$. Dann gilt: \mathbb{P}_0 ist genau dann rotationsinvariant, wenn ein $z_0 \in \mathbb{R}^d$ existiert, sodass fur alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt*

$$\mu_{z_0}(S^{d-1}, \mathcal{A}) = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z_0 - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK).$$

Beweis: Wie im Beweis des letzten Satzes zeigt man, dass

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z_0 - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK) \\
& = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z_0 - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \mathbb{P}_0(dK)
\end{aligned}$$

für alle $\vartheta \in SO_d$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ gilt und dass \mathbb{P}_0 für jedes $\vartheta \in SO_d$ absolutstetig bezüglich $\vartheta \circ \mathbb{P}_0$ ist. Daraus ergibt sich ebenfalls wie im Beweis von Satz 40 die Gleichung

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z_0 - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z_0 - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \eta_{\vartheta}(\vartheta K)$$

für festes $\vartheta \in SO_d$ und \mathbb{P}_0 -fast alle K . Aus den Voraussetzungen resultiert

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z_0 - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) > 0,$$

und wir erhalten $\eta_{\vartheta}(\vartheta K) = 1$ für \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$. Die eigentliche Behauptung zeigt man nun ebenfalls wie zuvor. \square

Ganz ähnlich lässt sich auch die Stationarität von X charakterisieren.

Satz 41 *Es seien $d \geq 2$ und X ein translationsregulärer Partikelprozess mit stetiger Dichte. Weiter existiere ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, der strikt konvex ist. Dann gilt: X ist genau dann schwach stationär, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt*

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) = \mu_z(A, \mathcal{A}). \quad (2)$$

Bemerkungen:

- a) Gleichung (2) besagt, dass sich das verallgemeinerte lokale mittlere Normalenmaß an der Stelle z nicht ändert, wenn wir f um z „in Richtung“ ϑ drehen.
- b) Ist $d = 1$, so besteht SO_1 nur aus der Identität, Gleichung (2) würde also von jedem Partikelprozess erfüllt. Man könnte jedoch hoffen, die schwache Stationarität zum Beispiel zu charakterisieren, indem man für alle $z \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(S^0)$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ fordert, dass

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z + x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) = \mu_z(A, -\mathcal{A})$$

ist. Leider erfüllt jeder Prozess X , dessen Formverteilung \mathbb{P}_0 auf einer Strecke $[-a, a]$, $a \in (0, \infty)$, konzentriert und dessen Dichte f von Periode $2a$ ist, diese Gleichung. Sie ist nämlich gleichbedeutend mit

$$1_{\mathcal{A}}(-1) f(z + a) + 1_{\mathcal{A}}(1) f(z - a) = 1_{\mathcal{A}}(1) f(z + a) + 1_{\mathcal{A}}(-1) f(z - a)$$

und wegen der Voraussetzung an f für alle $A \in \mathcal{B}(S^0)$ erfüllt.

Beweis: Ist der Prozess X schwach stationär, also sein Intensitätsmaß von der Form

$$\Theta(\mathcal{A}) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + K) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}^d),$$

mit eindeutig bestimmten $\gamma > 0$ und \mathbb{P}_0 , so gilt

$$\mu_z(A, \mathcal{A}) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) S_{d-1}(K, A) \mathbb{P}_0(dK)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$. X erfüllt also Gleichung (2) für alle $z \in \mathbb{R}^d$.

Es gelte (2). Wir müssen zeigen, dass f eine konstante Funktion ist. Die Beweisidee lässt sich wie folgt zusammenfassen: Zunächst leiten wir aus (2) eine analoge Gleichung her, die allerdings für jeden festen konvexen Körper in $\text{supp } \mathbb{P}_0$ gilt. Diese Gleichung können wir dann auf den nach Voraussetzung vorhandenen strikt konvexen Körper anwenden und erhalten, dass f für ein $r > 0$ auf der Menge $z + rS^{d-1}$ für jedes $z \in \mathbb{R}^d$ konstant ist. Daraus folgt, dass f konstant auf ganz \mathbb{R}^d ist.

Ausgeschrieben bedeutet (2) für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, $A \in S^{d-1}$ und $\vartheta \in SO_d$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - \vartheta x) 1_A(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - x) 1_A(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \mathbb{P}_0(dK). \end{aligned}$$

Mit den üblichen Approximationsargumenten aus der Maß- und Integrationstheorie folgt daraus aber für alle messbaren Abbildungen $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - \vartheta x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \mathbb{P}_0(dK) \end{aligned}$$

ist. Nun sei $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige (und damit auch beschränkte) Funktion. Da obige Gleichung für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ gelten soll und die Abbildung

$$K \mapsto \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - \vartheta x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du)$$

nach dem Portmanteau-Theorem (siehe zum Beispiel Satz 19.1 in [10]) stetig ist für beliebiges $\vartheta \in SO_d$, gilt somit für alle $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, $z \in \mathbb{R}^d$ und alle $\vartheta \in SO_d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z - \vartheta x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z - x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du).$$

Wenden wir Satz 34 auf beide Seiten der Gleichung an, so erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z - \vartheta x) g(\sigma_K(x)) C_{d-1}(K, dx) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z - x) g(\sigma_K(x)) C_{d-1}(K, dx). \quad (*)$$

Ist nun $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ strikt konvex, so besitzen keine zwei Punkte aus dem Rand dieselbe äußere Normale. Für ein $x \in \text{reg } K$ gilt deshalb

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \text{reg } K : \|\sigma_K(x) - \sigma_K(y)\| < \delta \implies \|x - y\| < \epsilon. \quad (**)$$

Erinnerung: Die Menge $\text{reg } K$ hat die Eigenschaft

$$\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd } K \setminus \text{reg } K) = 0.$$

Es seien $z \in \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in \text{reg } K$ fest. Annahme: Es existiert $\vartheta \in SO_d$ mit

$$f(z - \vartheta x_0) > f(z - x_0).$$

Da f stetig ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $f(z - \vartheta y) > f(z - y)$ für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit $\|y - x_0\| < \epsilon$. Wir wählen nun $\delta > 0$ wie in (***) und definieren

$$g(u) := 1 - \frac{1}{\delta} \|u - \sigma_K(x_0)\|$$

für alle $u \in (\sigma_K(x_0) + \delta B^d) \cap S^{d-1}$ und $g(u) := 0$ sonst. g ist stetig und beschränkt.

Es sei $S := (\sigma_K(x_0) + \delta(\text{int } B^d)) \cap S^{d-1}$. Dann gilt

$$f(z - \vartheta x) g(\sigma_K(x)) \geq f(z - x) g(\sigma_K(x))$$

für alle $x \in \text{bd } K$ und sogar

$$f(z - \vartheta x) g(\sigma_K(x)) > f(z - x) g(\sigma_K(x)) \quad (***)$$

für alle $x \in \text{reg } K \cap \sigma_K^{-1}(S)$.

Da σ_K stetig auf $\text{reg } K$ ist (siehe Seite 78 in [29]), existiert ein $\epsilon' > 0$ mit der Eigenschaft

$$\sigma_K(\text{reg } K \cap (x_0 + \epsilon' B^d)) \subseteq S,$$

und $\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd } K \cap (x_0 + \epsilon' B^d)) = \mathcal{H}^{d-1}(\text{reg } K \cap (x_0 + \epsilon' B^d)) > 0$. Also gilt $C_{d-1}(K, \sigma_K^{-1}(S)) = \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd } K \cap \sigma_K^{-1}(S)) > 0$. Kombiniert mit (***) ergibt dies einen Widerspruch zu Gleichung (*).

Somit f ist konstant auf $z + \|x_0\|S^{d-1}$. Wir erhalten daraus zunächst, dass $f(z' + 2\|x_0\|u) = f(z')$ für alle $u \in S^{d-1}$ und $z' \in \mathbb{R}^d$ erfüllt ist. Für $z', z'' \in \mathbb{R}^d$ mit $\|z' - z''\| \leq 2\|x_0\|$ gilt $(z' + \|x_0\|S^{d-1}) \cap (z'' + \|x_0\|S^{d-1}) \neq \emptyset$, also muss $f(z') = f(z'')$ sein. Es folgt sofort, dass f konstant auf \mathbb{R}^d ist, und wir haben die Behauptung gezeigt. \square

Aus dem letzten Satz ergibt sich folgendes Korollar für Poissonprozesse:

Korollar 3 *Es seien $d \geq 2$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte. Weiter existiere ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, der strikt konvex ist. Dann gilt: X ist genau dann stationär, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt*

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z - \vartheta x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) = \mu_z(A, \mathcal{A}).$$

Beweis: Die Aussage folgt aus Satz 41 und der Tatsache, dass ein Poissonprozess eindeutig durch sein Intensitätsmaß bestimmt ist. \square

Bemerkung: Es sei $K \in \mathcal{K}$. Ein Randpunkt $x \in \text{bd } K$ heißt *Extremalpunkt* von K , falls aus $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ mit $\alpha \in (0, 1)$ und $y, z \in K$ immer $x = y = z$ folgt. Der Punkt x liegt also nicht im Inneren einer Strecke $s \subseteq K$. Die Menge aller Extremalpunkte von K bezeichnet man auch mit $\text{ext } K$. Wie man sich anhand des Beweises einfach überlegt, gilt Satz 41 analog, falls ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ mit $\text{reg } K \cap \text{ext } K \neq \emptyset$ existiert.

Satz 42 *Es seien $d = 2$ und X ein translationsregulärer Partikelprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann gilt: X ist genau dann schwach stationär, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{B}(S^1)$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_2$ gilt*

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^2} f(z - \vartheta x) \Xi_1(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) = \mu_z(A, \mathcal{A}).$$

Für Poissonprozesse ergibt sich daraus unmittelbar:

Korollar 4 *Es seien $d = 2$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann gilt: X ist genau dann stationär, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathcal{B}(S^1)$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_2$ gilt*

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^2} f(z - \vartheta x) \Xi_1(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) = \mu_z(A, \mathcal{A}).$$

Beweis von Satz 42: Nach der letzten Bemerkung müssen wir uns nur noch um konvexe Körper mit der folgenden Eigenschaft kümmern: Jedes $x \in \text{reg } K$ liegt im relativen Inneren einer Strecke $s \subseteq \text{bd } K$.

Es sei also $x_0 \in \text{reg } K$ und $s \subseteq \text{bd } K$ die Strecke maximaler Länge mit $x_0 \in s$. Weiter bezeichne $u_0 \in S^{d-1}$ die äußere Normale von K in x_0 . Wie man an ihrer Herleitung sieht, muss auch unter den Voraussetzung dieses Satzes Gleichung (*) aus dem Beweis von Satz 41 für alle $\vartheta \in SO_2$ und stetigen Abbildungen $g : S^1 \rightarrow [0, \infty)$ gelten. Definiert man g ebenfalls wie in diesem Beweis (man muss lediglich $\sigma_K(x_0)$ durch u_0 ersetzen) und lässt δ gegen Null gehen, so ergibt sich aus (*) und der Wahl von s , dass

$$\int_s f(z - x) \mathcal{H}^1(dx) = \int_s f(z - \vartheta x) \mathcal{H}^1(dx)$$

für alle $\vartheta \in SO_2$ und $z \in \mathbb{R}^2$ gelten muss.

Wir wissen, dass $0 \in \text{int } K$ ist. Sei r der (geometrische) Abstand von 0 zu s . Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass dieser Abstand in der Mitte von s realisiert wird. Wie wir gleich sehen werden, ändert sich die folgende Argumentation andernfalls nur unwesentlich.

Nach Voraussetzung gilt für jedes $z \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{z+\vartheta(-s)} f(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) = c(z)$$

für alle $\vartheta \in SO_2$ und ein $c(z) > 0$. Damit gilt aber auch für alle $z' \in (z + 2rS^1)$

$$\int_{z'+\vartheta(-s)} f(x) \mathcal{H}^1(dx) = c(z),$$

da für jedes dieser z' zwei Rotationen $\vartheta, \vartheta' \in SO_2$ mit

$$z + \vartheta(-s) = z' + \vartheta'(-s)$$

existieren. Falls der Abstand von s zu 0 *nicht* in der Mitte von s realisiert wird, existiert offensichtlich ein $r' \in (0, r)$, sodass für alle $z' \in (z + 2r'S^1)$ dieselbe Gleichung erfüllt ist.

Ist $y \in (z + rB^2)$, so gilt $(y + 2rS^1) \cap (z + 2rS^1) \neq \emptyset$. Aus der eben durchgeführten Überlegung folgt dann

$$\int_{y+\vartheta(-s)} f(x) \mathcal{H}^1(dx) = c(z).$$

Damit ergibt sich aber

$$\int_{y+\vartheta(-s)} f(x) \mathcal{H}^1(dx) = c(0).$$

für jedes $\vartheta \in SO_2$ und $y \in \mathbb{R}^d$. Also gilt für jede Bewegungen $g \in G_d$

$$\int_{g(-s)} f(x) \mathcal{H}^1(dx) = c$$

für ein festes $c > 0$.

Es sei l die Länge von s . Aus der soeben nachgewiesenen Eigenschaft ergibt sich aber wegen

$$\int_0^l f(z + \alpha u) d\alpha = c$$

für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und $u \in S^1$, dass f für alle $z \in \mathbb{R}^2$ und jede Richtung $u \in S^1$ die Gleichung

$$f(z) = f(z + lu)$$

erfüllt. Wie am Ende von Beweis 41 kann man nun zeigen, dass f konstant auf ganz \mathbb{R}^2 ist, und der Satz ist bewiesen. \square

Bemerkung: Der letzte Schritt im vorhergehenden Beweis ist eng verwandt mit einer klassischen Fragestellung aus der Integralgeometrie. Im Jahre 1929 wies Dimitrie Pompeiu auf das folgende Problem hin, dass in der Literatur inzwischen als Pompeiu-Problem (siehe [50] für eine Übersicht) bekannt ist: Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_{g(D)} f(x) \lambda_d(dx) = 0$$

für alle $g \in G_d$. Für welche Mengen D folgt daraus, dass f identisch Null sein muss? Brown, Schreiber und Taylor wiesen für $d = 2$ die Richtigkeit der Aussage für konvexe Mengen mit wenigstens einer „Ecke“ nach (siehe [1]). Es wird allgemein angenommen, dass diese Aussage auch für $d \geq 3$ richtig ist. Andererseits wird zum Beispiel auf Seite 187 in [50] gezeigt, dass aus

$$\int_{g(rB^2)} f(x) \lambda_d(dx) = 0$$

für alle $g \in G_2$ nicht $f \equiv 0$ folgt, falls r eine Nullstelle der Besselfunktion J_1 (siehe Abschnitt 4 in [49] für eine Definition) ist. Auch diese Aussage lässt sich wieder auf Dimensionen größer gleich drei übertragen.

Zum Abschluß soll nun eine Invarianzeigenschaft der verallgemeinerten lokalen mittleren Normalmaße angegeben werden, die sowohl die schwache Stationarität als auch die schwache Isotropie charakterisiert.

Satz 43 *Es seien $d \geq 2$ und X ein translationsregulärer Partikelprozess mit stetiger Dichte. Desweiteren sei $\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}\}) = 1$, und es existiere ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, der strikt konvex ist. Dann gilt: X ist genau dann schwach stationär und schwach isotrop, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt*

$$\mu_z(\vartheta A, \vartheta \mathcal{A}) = \mu_z(A, \mathcal{A}). \quad (3)$$

Bemerkungen:

- a) Es sei X ein schwach stationärer, translationsregulärer Partikelprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen konvexen Körpern konzentriert ist. Aus der Eindeutigkeit von f und \mathbb{P}_0 ergibt sich, dass in diesem Fall die schwache Isotropie von X gleichbedeutend mit der Rotationsinvarianz der Formverteilung \mathbb{P}_0 ist. Damit ergibt sich aus den Sätzen 40, 41 und 43

$$X \text{ erfüllt (1) und (2)} \quad \iff \quad X \text{ erfüllt (3)}.$$

Allerdings scheint ein direkter Beweis dieser Äquivalenz nicht möglich zu sein.

- b) Falls $d = 1$ ist, besteht SO_1 nur aus der Identität, also ist Gleichung (3) wieder trivialerweise erfüllt. Es ist wiederum nicht offensichtlich, wie eine andere Charakterisierung der schwachen Stationarität und schwachen Isotropie erfolgen könnte. Ein Prozess X , der auf einer Strecke der Länge l konzentriert und dessen Dichte gerade periodisch von Länge l ist, erfüllt nämlich für alle $z \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(S^0)$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ die Gleichung

$$\mu_z(-A, -\mathcal{A}) = \mu_z(A, \mathcal{A}).$$

Beweis: Ist X schwach stationär und schwach isotrop, so gilt $f \equiv \gamma$ für ein eindeutig bestimmtes $\gamma > 0$, und die ebenfalls eindeutig bestimmte Formverteilung \mathbb{P}_0 ist rotationsinvariant. Somit ist

$$\mu_z(A, \mathcal{A}) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) S_{d-1}(K, A) \mathbb{P}_0(dK)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, und man rechnet leicht nach, dass (3) gilt.

Um die Umkehrung zu zeigen, werden wir folgendermaßen vorgehen: Es ist leicht einzusehen, dass \mathbb{P}_0 wieder absolutstetig bezüglich jedes Maßes $\vartheta \circ \mathbb{P}_0$ ist. Dies und die Tatsache, dass ein Körper aus dem Träger von \mathbb{P}_0 strikt konvex ist, nutzen wir aus, um zu zeigen, dass f für jedes $z \in \mathbb{R}^d$ auf der Menge $z + rS^{d-1}$ für ein von z unabhängiges $r > 0$ festgelegt ist, sobald wir $f(z)$ kennen. Daraus können wir dann wiederum folgern, dass f konstant zunächst auf $z + rS^{d-1}$ und somit auf ganz \mathbb{R}^d ist. Daraus ergibt sich dann relativ schnell die Behauptung.

Ausgeschrieben bedeutet (3)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times \vartheta A) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) \end{aligned}$$

Setzen wir zunächst $A = S^{d-1}$. Wie im Beweis von Satz 40 überlegt man sich, dass für alle $\vartheta \in SO_d$ und alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$

$$\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathbb{P}_0(\vartheta\mathcal{A}) = 0$$

gilt, also für alle $\vartheta \in SO_d$ eine Funktion $\eta_\vartheta : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{K}_0$ existiert mit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_0} g(K) \mathbb{P}_0(dK) &= \int_{\mathcal{K}_0} g(K) \eta_\vartheta(K) (\vartheta \circ \mathbb{P}_0)(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} g(\vartheta K) \eta_\vartheta(\vartheta K) \mathbb{P}_0(dK) \end{aligned}$$

für alle messbaren Abbildungen $g : \mathcal{K}_0 \rightarrow [0, \infty)$.

Aus (3) erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times \vartheta A) \mathbb{P}_0(dK) \\ & \stackrel{(3)}{=} \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta^{-1}K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(\vartheta^{-1}K, dx \times A) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\vartheta\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-\vartheta^{-1}x) \Xi_{d-1}(K, dx \times \vartheta A) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) \mathbb{P}_0(dK). \end{aligned}$$

Damit gilt für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$, $\vartheta \in SO_d$ und \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z-\vartheta^{-1}x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A). \quad (*)$$

Definieren wir wie zuvor $\mathcal{K}_0^{(n)} := \{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}, K \subseteq nB^d\}$ wie zuvor, so existiert nach (!) aus dem Beweis von Satz 40 für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $r(n) \in [0, \infty)$, sodass sowohl

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z-\vartheta^{-1}x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) > 0$$

als auch

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z-x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) > 0$$

für alle $K \in \mathcal{K}_0^{(n)}$ gilt.

Da (*) für alle $z \in \mathbb{R}^d$ gilt, ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0^{(n)}$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta^{-1}x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}), \end{aligned}$$

was sich zu

$$\eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = \frac{\overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1})}^{>0}}{\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta^{-1}x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1})}_{>0}}.$$

umformen läßt.

Für festes $z \in \mathbb{R}^d$ und $\vartheta \in SO_d$ sind sowohl die Abbildung

$$x \mapsto f(z - x)$$

als auch

$$x \mapsto f(z - \vartheta^{-1}x)$$

stetig, und für alle $z \in r(n)B^d$ und $x \in \text{bd } K$ mit $K \in \mathcal{K}_0^{(n)}$ gilt

$$f(z - x) \leq \max_{y \in (r(n)+n)B^d} f(y) < \infty \quad \text{und} \quad f(z - \vartheta^{-1}x) \leq \max_{y \in (r(n)+n)B^d} f(y) < \infty.$$

Damit sind die Abbildungen

$$x \mapsto \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \quad \text{und} \quad x \mapsto \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta^{-1}x) \lambda_d(dz)$$

nach Ü 4.6 in [10] für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig. Daraus ergibt sich sofort die Stetigkeit der Abbildungen

$$K \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1})$$

und

$$K \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z - \vartheta^{-1}x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1})$$

auf $\mathcal{K}_0^{(n)}$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, stimmt also η_{ϑ} wegen obiger Gleichung für \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$ mit einer stetigen Funktion überein; wir können also annehmen, dass eine Version von η_{ϑ} eine stetige Funktion auf \mathcal{K}_0 ist.

Daraus folgt nun aber wie im Beweis von Satz 41, dass für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\vartheta \in SO_d$, alle stetigen $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ und alle $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - \vartheta^{-1}x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(z - x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du).$$

Sei nun $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ und K strikt konvex. Dann erhält man aus obiger Gleichung ebenfalls wie im Beweis von Satz 41

$$f(z - \vartheta^{-1}x) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = f(z - x)$$

für alle $\vartheta \in SO_d$ und $x \in \text{reg } K$. Da f stetig ist und $\text{reg } K$ dicht in $\text{bd } K$ liegt, muss obige Gleichung aber ebenfalls für alle $x \in \text{bd } K$ gelten.

Sei nun $\vartheta \in SO_d$ derart, dass ein $u \in S^{d-1}$ existiert mit $\vartheta^{-1}u = u$. Dann gibt es ein $x \in \text{bd } K$ mit $x = \alpha u$ für ein $\alpha \in (0, \infty)$. Also ist $\vartheta^{-1}x = x$. Da $f \not\equiv 0$ ist, finden wir ein $z \in \mathbb{R}^d$, sodass $f(z - x) > 0$ ist. Daraus ergibt sich aber

$$f(z - \vartheta^{-1}x) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = f(z - x) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = f(z - x);$$

also ist $\eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = 1$.

Sei nun $x \in \text{bd } K$ fest. Ist $d \geq 3$, so gibt es für alle $y \in \|x\| S^{d-1}$ ein $\vartheta \in SO_d$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

- i) $\vartheta^{-1}y = x$.
- ii) Es gibt ein $u \in S^{d-1}$ mit $\vartheta^{-1}u = u$, also ist $\eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = 1$.

Daraus folgt nun

$$f(z - y) = f(z - \vartheta^{-1}x) = f(z - \vartheta^{-1}x) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = f(z - x).$$

Damit ist f konstant auf $z + \|x\| S^{d-1}$. Für alle $z' \in \mathbb{R}^d$ und alle Richtungen $u \in S^{-1}$ ergibt sich damit $f(z') = f(z' + \|x\|u - \|x\|u) = f(z' + 2\|x\|u)$. Anders formuliert bedeutet dies für alle $z \in \mathbb{R}^d$, dass

$$f(z) = f(y) \quad (+)$$

für alle $y \in (z + 2\|x\|S^{d-1})$ ist. Es seien nun $z, z' \in \mathbb{R}^d$ mit $\|z - z'\| \leq \|x\|$. Dann gilt offensichtlich $(z + 2\|x\|S^{d-1}) \cap (z' + 2\|x\|S^{d-1}) \neq \emptyset$, und aus (+) folgt $f(z) = f(z')$. Wie man sich leicht überlegt, muss f damit konstant auf \mathbb{R}^d sein.

Hat f diese Eigenschaft, so ergibt sich aus (*) mit $A = S^{d-1}$ sofort $\eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = 1$ für jedes $\vartheta \in SO_d$ und \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$. Dies impliziert, wie im Beweis von Satz 40 gezeigt wurde, die Rotationsinvarianz von \mathbb{P}_0 . Damit ist X also schwach stationär und schwach isotrop, und die Behauptung ist für $d \geq 3$ bewiesen.

Sei also $d = 2$. Ist ein $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ strikt konvex, so gilt wie schon zuvor

$$f(z - \vartheta^{-1}x) \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}K) = f(z - x) \quad (**)$$

für alle $\vartheta \in SO_2$, $z \in \mathbb{R}^2$ und $x \in \text{bd } K$.

Seien nun $u \in S^1$ und $z \in \mathbb{R}^d$ fest. Es sei $x = x(u)$, $x' = x'(u) \in \text{bd } K$ jeweils der Punkt aus dem Rand von K , der auf der Halbgerade $\{\alpha u \mid \alpha \geq 0\}$ beziehungsweise $\{\alpha u \mid \alpha \leq 0\}$ liegt. Weiter definieren wir $S := \{x(u) - x'(u) \mid u \in S^{d-1}\}$. Setzen wir $z' := z + (x' - x)$, so gilt

$$z - x = z' - x'.$$

Wenn wir ϑ als Drehung um 180 Grad wählen, ergibt sich aus Gleichung (**), dass $f(z + x) = f(z' + x')$ ist. Damit ist f in Richtung $u \in S^{d-1}$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ periodisch mit Periodenlänge $\|(z + x) - (z' + x')\| = 2\|x - x'\|$.

Da $u \in S^1$ beliebig war, ergibt sich sofort, dass f für alle $z \in \mathbb{R}^2$ auf der Menge $z + 2S$ konstant ist. Wie im Fall $d \geq 3$ zeigt man, dass f konstant auf ganz \mathbb{R}^2 ist, und wie zuvor ergibt sich daraus auch die schwache Isotropie, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Das letzte Resultat lässt sich auch etwas anders formulieren:

Korollar 5 *Seien $d \geq 2$ und X ein translationsregulärer Partikelprozess mit stetiger Dichte. Desweiteren sei $\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}\}) = 1$, und es existiere ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, der strikt konvex ist. Dann gilt: Sind die verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaße μ_z , $z \in \mathbb{R}^d$, alle rotationsinvariant, so ist X schwach stationär und schwach isotrop.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $C \in \mathcal{B}(S^{d-1}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ die Gleichung

$$\mu_z(\vartheta C) = \mu_z(C)$$

erfüllt. Sind $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ beliebige Borelmengen, und setzen wir $C = A \times \mathcal{A}$, so ergibt sich daraus natürlich

$$\mu_z(\vartheta A, \vartheta \mathcal{A}) = \mu_z(\vartheta(A \times \mathcal{A})) = \mu_z(A \times \mathcal{A}) = \mu_z(A, \mathcal{A}).$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 43 erfüllt, und es folgt die Behauptung. \square

Für Poissonprozesse ergibt sich daraus:

Korollar 6 *Seien $d \geq 2$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte. Desweiteren sei $\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}\}) = 1$, und es existiere ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, der strikt konvex ist. Weiter existiere ein konvexer Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, der strikt konvex ist. Dann gilt: Sind die verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaße μ_z , $z \in \mathbb{R}^d$, alle rotationsinvariant, so ist X stationär und isotrop.*

Bemerkung: Offen ist noch die Frage, ob die Sätze 41 und 43 auch für Partikelprozesse gelten, deren Formverteilung \mathbb{P}_0 keinen strikt konvexen Körper im Träger enthält. Dieser Fall lässt sich mit den zuvor angewendeten Methoden auf den ersten Blick nicht behandeln. Ein Gegenbeispiel konnte bisher aber auch nicht gefunden werden.

Beispiel: Es sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ stetig, $W_m := [-m, m] \times \cdots \times [-m, m] \times [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}]$ ein Würfel, \mathbb{Q} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf SO_d und $\mathbb{P}_0^{(m)}$ das Bildmaß von \mathbb{Q} unter der Abbildung

$$\vartheta \mapsto \vartheta W_m.$$

$\mathbb{P}_0^{(m)}$ ist dann auf der Menge $\mathcal{M}_m := \{\vartheta W_m \mid \vartheta \in SO_d\}$ konzentriert.

Für $m \rightarrow \infty$ haben wir nun $W_m \rightarrow [e_d]^\perp$ in der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz und jedes Element aus \mathcal{M}_m konvergiert damit bezüglich der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz gegen ein Element aus der Menge \mathcal{L}_{d-1}^d .

Es sei nun $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ symmetrisch. Ist f gutartig genug (beispielsweise eine Schwartzfunktion), so gilt für $m \rightarrow \infty$ ebenfalls

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{K}_0}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) \rightarrow \int_{\mathcal{L}_{d-1}^d} 1_{\{|u|^\perp \mid u \in A\}}(L) 2 \cdot \int_L f(z-x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \Phi(dL).$$

Dabei ist Φ das Bildmaß von \mathbb{Q} unter der Abbildung $\vartheta \mapsto \vartheta L_0$, wobei $L_0 \in \mathcal{L}_{d-1}^d$ ein fester Unterraum ist.

Den letzten Ausdruck können wir als Richtungsmaß $\varphi(z, \cdot)$ eines translationsregulären Hyperebenenprozesses mit stetiger Dichte auffassen. Aus Bedingung (3) wird dann gerade die Forderung, dass $\varphi(z, \cdot)$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$ rotationsinvariant ist. Und wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, ist dieser Hyperebenenprozess nach Theorem 1 aus [31] somit schwach stationär und schwach isotrop.

Dieses Beispiel zeigt also, dass Satz 43 eine Übertragung des Ergebnisses von Schneider für k -Ebenenprozesse auf Prozesse konvexer Partikel ist. Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden wir dann beide Resultate zu einem gemeinsamen Resultat für Zylinderprozesse vereinigen.

4.3 Stationäre Prozesse von Kugeln

Bei den Maßen $\mu_z(\cdot, \mathcal{A})$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, handelt es sich um Borelmaße auf S^{d-1} . Da wir uns in diesem Kapitel für die Beziehung zwischen Invarianzen von μ_z und Eigenschaften des zu Grunde liegenden Partikelprozesses interessieren, ist es nur natürlich zu fragen, für welche Prozesse die Maße μ_z gerade dem sphärischen Lebesgue-Maß entsprechen. Dabei gilt:

Satz 44 *Es seien $d \geq 2$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte. Desweiteren sei $\mathbb{P}_0(\{K \in \mathcal{K}_0 \mid \dim K \in \{d-1, d\}\}) = 1$ und $K = -K$ für alle $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ (X ist auf zentralsymmetrischen Körpern konzentriert). Dann gilt: X ist genau dann ein stationärer Prozess von Kugeln, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\vartheta \in SO_d$ gilt*

$$\mu_z(\vartheta A, \mathcal{A}) = \mu_z(A, \mathcal{A}).$$

Beweis: Es seien X ein stationärer Prozess von Kugeln, $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\vartheta \in SO_d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu_z(A, \mathcal{A}) &= \gamma \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathcal{A}}(rB^d) S_{d-1}(rB^d, A) \tilde{\mathbb{P}}_0(dr) \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathcal{A}}(rB^d) r^{d-1} \omega_{d-1}(A) \tilde{\mathbb{P}}_0(dr). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\tilde{\mathbb{P}}_0(M) := \mathbb{P}_0(\{rB^d \mid r \in M\})$, $M \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, die von \mathbb{P}_0 induzierte Verteilung auf \mathbb{R} . Da $\omega_{d-1}(\vartheta A) = \omega_{d-1}(A)$ gilt, ist für X die Aussage des Satzes offensichtlich richtig.

Das Vorgehen bei der Rückrichtung ähnelt dem im Beweis des letzten Satzes. Zunächst überlegen wir uns, dass obige Gleichung nur dann erfüllt sein kann, wenn das Oberflächenmaß eines jeden Körpers in $\text{supp } \mathbb{P}_0$ absolutstetig bezüglich des sphärischen Lebesgue-Maßes ist. Dies erlaubt es uns, die Voraussetzung des Satzes in einer anderen Form zu schreiben. Mittels dieser können wir dann zeigen, dass die Funktionswerte von f auf der Menge $z + S^{d-1}$ festgelegt sind, sobald wir einen dieser Werte kennen. Daraus folgern wir die Konstanz von f auf dem Rand eines konvexen Körpers, den wir beliebig plazieren dürfen, und wir erhalten, dass f eine konstante Funktion sein muss. Es ergibt sich daraus, dass jeder Körper im Träger von \mathbb{P}_0 eine Kugel ist.

Nach Voraussetzung gilt

$$\int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK) = \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times \vartheta A) \mathbb{P}_0(dK)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\vartheta \in SO_d$.

Daraus ergibt sich wie schon in den Beweisen zuvor für jede messbare Abbildung $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) g(\vartheta^{-1}u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \quad (*)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$.

Nun sei $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ abgeschlossen und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir definieren $g_\epsilon : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ wie folgt:

$$g_\epsilon(u) := 1$$

für alle $u \in A$,

$$g_\epsilon(u) := 0$$

für alle $u \in (A + \epsilon B^d)^c$ und

$$g_\epsilon(u) := 1 - \frac{1}{\epsilon} \inf_{v \in A} \|u - v\|$$

für alle $u \in (A + \epsilon B^d) \setminus A$. Wie man sich leicht überlegt, ist g_ϵ eine stetige Funktion, und für $\epsilon \rightarrow 0$ konvergiert $g_\epsilon(u) \rightarrow 1_A(u)$ für alle $u \in S^{d-1}$. Aus Gleichung (*) erhält man damit nach Anwendung des Satzes von der dominierten Konvergenz, dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq S^{d-1}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times \vartheta A)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ gilt.

Sei nun $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ fest. Dann muss nach dem bekannten Eindeutigkeitsatz für Maße (siehe zum Beispiel Lemma 1.17 in [15]) für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ gelten

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) = c(z) \omega_{d-1}(A). \quad (**)$$

Dabei ist

$$c(z) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}).$$

Nun wählen wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq n \cdot B^d$ und $r(n)$ wie in (!) im Beweis von Satz 40. Analog zur Herleitung von (***) ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{r(n)B^d} f(z-x) \lambda_d(dz) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) = c' \omega_{d-1}(A)$$

für ein $c' > 0$. Weiter gilt

$$\alpha := \min_{x \in \text{bd } K} \int_{r(n)B^d} f(z-x) \lambda_d(dz) > 0,$$

und wir erhalten

$$\alpha S_{d-1}(K, A) \leq c(z) \omega_{d-1}(A)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Damit ist $S_{d-1}(K, \cdot)$ absolutstetig bezüglich ω_{d-1} , und es existiert eine Funktion $g(K, \cdot)$ auf S^{d-1} mit der Eigenschaft, dass

$$S_{d-1}(K, A) = \int_{S^{d-1}} 1_A(u) g(K, u) \omega_{d-1}(du)$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ ist. Insbesondere muss damit $\dim K = d$ gelten.

Wie zuvor seien $\text{regn } K$ beziehungsweise $\text{singn } K$ die Menge aller regulären beziehungsweise die Menge aller singulären äußeren Normalenvektoren von K . Weiter sei τ_K wie in Kapitel 2 die Abbildung, die jeden regulären äußeren Normalenvektor u auf den eindeutig bestimmten Randpunkt x von K mit äußerer Normale u abbildet.

Wir wissen, dass $\text{singn } K$ das sphärische Lebesgue-Maß Null hat, woraus sich sofort

$$S_{d-1}(K, \text{singn } K) = 0$$

ergibt. Daraus folgt nun, dass für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und alle $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$

$$\Xi_{d-1}(K, B \times A) = \Xi_{d-1}(K, B \times (\text{regn } K \cap A)) \quad (***)$$

gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 0 &\leq \Xi_{d-1}(K, B \times (\text{singn } K \cap A)) \\ &\leq \Xi_{d-1}(K, \mathbb{R}^d \times (\text{singn } K \cap A)) \\ &= S_{d-1}(K, (\text{singn } K \cap A)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Seien nun $B \subseteq \text{bd } K$ und $A \subseteq \text{regn } K$ Borelmengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mu_\delta(K, B \times A) &:= \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < d(K, \{x\}) \leq \delta, p_K(x) \in B, u_K(x) \in A\}) \\
&= \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < d(K, \{x\}) \leq \delta, \tau_K(u_K(x)) \in B, u_K(x) \in A\}) \\
&= \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < d(K, \{x\}) \leq \delta, u_K(x) \in \tau_K^{-1}(B) \cap A\}) \\
&= \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d \mid 0 < d(K, \{x\}) \leq \delta, p_K(x) \in \mathbb{R}^d, u_K(x) \in \tau_K^{-1}(B) \cap A\}).
\end{aligned}$$

Aus den jeweiligen Definitionen ergibt sich damit durch Koeffizientenvergleich

$$\Xi_{d-1}(K, B \times A) = S_{d-1}(K, \tau_K^{-1}(B) \cap A),$$

und zusammen mit (***) folgt daraus, dass für alle $B \in \mathcal{B}(R^d)$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$

$$\Xi_{d-1}(K, B \times A) = S_{d-1}(K, \tau_K^{-1}(B) \cap A)$$

erfüllt ist. Wie im Beweis von Satz 34 erhalten wir außerdem für alle messbaren Abbildungen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$, $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ die Darstellung

$$\int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} f(x) g(u) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) = \int_{S^{d-1}} f(\tau_K(u)) g(u) S_{d-1}(K, du).$$

Deswegen gilt für $B := \text{bd } K \setminus \tau_K(S^{d-1})$ auch

$$0 = \int_{S^{d-1}} 1_B(\tau_K(u)) S_{d-1}(K, du) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} 1_B(x) C_{d-1}(K, dx) = \int_{\text{bd } K} 1_B(x) \mathcal{H}^{d-1}(dx),$$

also $\mathcal{H}^{d-1}(B) = 0$. Nun ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) &= \int_{S^{d-1}} 1_A(u) f(z - \tau_K(u)) S_{d-1}(K, du) \\
&= \int_{S^{d-1}} 1_A(u) f(z - \tau_K(u)) g(K, u) \omega_{d-1}(du) \\
&= c(z) \omega_{d-1}(A)
\end{aligned}$$

für alle $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Daraus folgt aber, dass für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$

$$f(z - \tau_K(u)) g(K, u) = c(z) \quad (***)$$

ist. Da K zentralsymmetrisch ist, gilt für alle $u \in S^{d-1}$ sowohl

$$\tau_K(u) = -\tau_K(-u)$$

als auch

$$g(K, u) = g(K, -u).$$

Seien $u \in S^{d-1}$ und $z' = z - 2\tau_K(u)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} c(z') &= f(z' - \tau_K(-u)) g(K, -u) \\ &= f(z - 2\tau_K(u) - \tau_K(-u)) g(K, u) \\ &= f(z - \tau_K(u)) g(K, u) \\ &= c(z). \end{aligned}$$

Weil dies für ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ gilt, ist c für alle $z \in \mathbb{R}^d$ konstant auf $z - 2(\text{bd } K \cap B^c)$. Aus der Stetigkeit von f folgt die Stetigkeit der Abbildung

$$\begin{aligned} c : \mathbb{R}^d &\rightarrow [0, \infty) \\ z &\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times S^{d-1}) \end{aligned}$$

mit Ü 4.6 in [10]. Damit muss c für alle $z \in \mathbb{R}^d$ auf ganz $z - 2 \text{bd } K$ konstant sein, weil B^c dicht in $\text{bd } K$ liegt. Wie zuvor im Beweis von 41 oder 43 ergibt sich, dass c auf ganz \mathbb{R}^d konstant ist. Da für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ aber

$$f(z - \tau_K(u)) g(K, u) = c$$

gilt, ist auch f konstant auf \mathbb{R}^d und $g(K, \cdot)$ konstant auf S^{d-1} . Also ist K eine Kugel.

Da dies für jeden konvexen Körper $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ gelten muss, ist X ein stätionärer Prozess von Kugeln, da X als Poissonprozess eindeutig durch sein Intensitätsmaß bestimmt ist. \square

Bemerkungen:

- a) Es sei $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit ausreichend regulärem Rand und $m \in S^{d-1}$ ein beliebiger Einheitsvektor. Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto e^{\langle x, m \rangle}$$

erfüllt Gleichung (***) für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $u \in S^{d-1}$, wenn wir

$$c(z) := f(z)$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und

$$g(K, u) := e^{\langle \tau_K(u), m \rangle}$$

für alle $u \in S^{d-1}$ setzen. Aus Gleichung (***) folgt also im allgemeinen nicht, dass f und $g(K, \cdot)$ konstant sind. Allerdings ist das durch

$$\int_{S^{d-1}} 1_{(\cdot)}(u) g(K, u) \omega_{d-1}(du)$$

definierte Maß kein Stützmaß eines konvexen Körpers. Der allgemeine Fall ist somit noch offen, kann aber mit den verwendeten Techniken wohl nicht behandelt werden.

- b) Der Beweis funktioniert immer noch, wenn lediglich ein $K \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ zentralsymmetrisch ist.

Kapitel 5

Schnittsdichten und assoziierte Körper

Nachdem wir im vorherigen Kapitel Stationarität und Isotropie einer großen Klasse inhomogener Partikelprozesse mit Invarianzeigenschaften assoziierter Maße in Verbindung gebracht haben, sollen nun zwei verschiedene Arten von Schnittsdichten in Verbindung mit Funktionalen assoziierter Körper gebracht werden.

Es sei daran erinnert, dass Θ als lokalendlich und vom Nullmaß verschieden vorausgesetzt ist.

5.1 Schnittsdichten inhomogener Partikelprozesse I

Spezialfälle der Resultate aus diesem Abschnitt finden sich bereits in in Kapitel 3 von [11].

Es seien X ein translationregulärer Poissonprozess, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $j, k \in \{1, \dots, d\}$. Wir betrachten nun das durch

$$\nu'_{j,k}(B) := \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k)$$

definierte Maß $\nu'_{j,k}$ auf \mathbb{R}^d .

Damit die Definition des Maßes $\nu'_{j,k}$ überhaupt sinnvoll ist (und wir später den Satz von Campbell anwenden können), müssen wir zunächst folgenden Satz beweisen:

Satz 45 *Seien $j, k \in \{1, \dots, d\}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Dann ist die Abbildung*

$$(K_1, \dots, K_k) \mapsto \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k)$$

von \mathcal{K}^k nach \mathbb{R} messbar.

Für den Beweis bietet es sich an, folgendes Ergebnis auszunutzen:

Satz 46 *Seien X und T lokalkompakte Räume mit abzählbaren Basen. $\mathcal{B}(X)$ beziehungsweise $\mathcal{B}(T)$ bezeichne jeweils die σ -Algebra der Borelmengen in X beziehungsweise T .*

$$\Psi : T \times \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

sei eine Abbildung derart, dass $\Psi(t, \cdot)$ für jedes $t \in T$ ein Borelmaß ist. Außerdem sei für jede stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger die Abbildung

$$t \mapsto \int_X f(x) \Psi(t, dx)$$

$\mathcal{B}(T)$ -messbar. Dann ist für jede nichtnegative, messbare Funktion $g : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$ die Abbildung

$$t \mapsto \int_X g(t, x) \Psi(t, dx)$$

messbar.

Beweis: Die Aussage entspricht Hilfssatz 7.2.2 in [33]. \square

Beweis von Satz 45: Wir wollen den letzten Satz anwenden und setzen deshalb $T := \mathcal{K}^k := \mathcal{K} \times \dots \times \mathcal{K}$ und $X := \mathbb{R}^d$; als Abbildung Ψ wählen wir

$$\begin{aligned} \Phi_{d-j} : \mathcal{K}^k \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (K_1, \dots, K_k, B) &\mapsto \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B). \end{aligned}$$

Ist $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung mit kompakten Träger, so folgt die Messbarkeit von

$$(K_1, \dots, K_k) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, dx),$$

weil sowohl $(K_1, \dots, K_k) \mapsto (K_1 \cap \dots \cap K_k)$ als auch $K \mapsto \Phi_{d-j}(K, A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beliebig, diese Eigenschaft haben. Man beachte, dass $\Phi_{d-j}(K, \cdot)$ für jedes $K \in \mathcal{K}$ ein endliches Maß ist.

\mathcal{K}^k und \mathbb{R}^d sind beide lokalkompakt mit abzählbarer Basis, und $\Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, \cdot)$ ist ein Borelmaß für alle $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$. Also ist nach Satz 46 die Abbildung

$$(K_1, \dots, K_k) \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} g(K_1, \dots, K_k, x) \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, dx)$$

messbar für alle nichtnegativen, messbaren Funktionen $g : \mathcal{K}^k \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Da die Abbildungen

$$\begin{aligned} K &\mapsto \text{bd } K, K \in \mathcal{K}, \\ (F, x) &\mapsto 1_F(x), F \in \mathcal{F}, \\ x &\mapsto 1_B(x), x \in \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

für beliebige $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ alle messbar sind, können wir g wie folgt wählen:

$$\begin{aligned} g : \mathcal{K}^k \times \mathbb{R}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (K_1, \dots, K_k, x) &\mapsto 1_{\text{bd } K_1}(x) \cdots 1_{\text{bd } K_k}(x) 1_B(x). \end{aligned}$$

Somit ist die Abbildung

$$\begin{aligned} (K_1, \dots, K_k) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\text{bd } K_1}(x) \cdots 1_{\text{bd } K_k}(x) 1_B(x) \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, dx) \\ &= \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k) \end{aligned}$$

messbar, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Außerdem besitzen die Maße $\nu'_{j,k}$ noch folgende Eigenschaft:

Satz 47 Die Maße $\nu'_{j,k}$ sind lokalendlich (und damit auch σ -endlich).

Beweis: Es sei $r \in [0, \infty)$ beliebig. Dann existiert nach Satz 32 in [3] eine Konstante $c_{d-j,d}$, sodass

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, rB^d \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k) \\
& \leq c_{d-j,d} r^{d-j} \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} 1_{\mathcal{F}_{rB^d}}(K_1 \cap \dots \cap K_k) \\
& \leq c_{d-j,d} r^{d-j} \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} 1_{\mathcal{F}_{rB^d}}(K_1) \dots 1_{\mathcal{F}_{rB^d}}(K_k) \\
& = c_{d-j,d} r^{d-j} \Theta(\mathcal{F}_{rB^d})^k \\
& < \infty
\end{aligned}$$

erfüllt ist. Die letzte Ungleichung gilt, da wir von dem Intensitätsmaß Θ immer vorausgesetzt haben, dass es lokalendlich ist. \square

Außerdem können wir zeigen, dass jedes der Maße $\nu'_{j,k}$ absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes ist, und eine Version der Dichte angeben.

Satz 48 Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess. Dann besitzt $\nu'_{j,k}$ für alle $j, k \in \{1, \dots, d\}$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version dieser Dichte ist durch $\gamma'_{j,k} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gegeben. Für $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir dabei

a)

$$\begin{aligned}
\gamma'_{k,k}(z) & := \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \dots f(K_k, z - x_k) \times \\
& \quad \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k),
\end{aligned}$$

falls $j = k$ ist,

b) $\gamma'_{j,k}(z) := 0$, falls $j < k$ ist,

c) und

$$\begin{aligned}
\gamma'_{j,k}(z) & := \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = d-j, \\ m_1 + \dots + m_k = kd-j}}^{d-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \dots f(K_k, z - x_k) \times \\
& \quad \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k),
\end{aligned}$$

falls $j > k$ ist.

Bemerkung: Wir nennen $\gamma'_{k,k}(z)$ die k -te Schnittdichte des Prozesses X im Punkt $z \in \mathbb{R}^d$. Die erste Schnittdichte wird später noch eine Sonderrolle spielen und bekommt deswegen eine weitere Bezeichnung als

$$\gamma'(z) := \gamma'_{1,1}(z).$$

Beweis: Nach dem Satz von Campbell gilt

$$\begin{aligned} \nu'_{j,k}(B) &= \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k) \\ &= \int_{\mathcal{K}'} \dots \int_{\mathcal{K}'} \Phi_{d-j}(K_1 \cap \dots \cap K_k, B \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k) \Lambda^{(m)}(d(K_1, \dots, K_k)). \end{aligned}$$

Da es sich bei X um einen Poissonprozess handelt, haben wir $\Lambda^{(m)} = \Theta^m$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \nu'_{j,k}(B) &= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \times \\ &\quad \left. \begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{d-j}(K_1 + x_1 \cap \dots \cap K_k + x_k, B \cap \text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k) \times \\ &f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_k) \times \end{aligned} \right\} (*) \\ &\quad \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k). \end{aligned}$$

In einer kleinen Nebenrechnung nehmen wir nun die inneren Integrale etwas genauer unter die Lupe:

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{d-j}(K_1 \cap K_2 - x_1 + x_2 \cap \dots \cap K_k - x_1 + x_k, B - x_1 \cap \text{bd } K_1 \cap \times \\ &\quad \text{bd } K_2 - x_1 + x_2 \cap \dots \cap \text{bd } K_k - x_1 + x_k) f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_k) \dots f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_{d-j}(K_1 \cap K_2 + x_2 \cap \dots \cap K_k + x_k, B - x_1 \cap \text{bd } K_1 \cap \text{bd } K_2 + x_2 \cap \dots \times \\ &\quad \cap \text{bd } K_k + x_k) f(K_k, x_1 + x_k) \lambda_d(dx_k) \dots f(K_2, x_1 + x_2) \lambda_d(dx_2) f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B-x_1}(y) 1_{\text{bd } K_1}(y) 1_{\text{bd } K_2}(y-x_2) \dots 1_{\text{bd } K_k}(y-x_k) \Phi_{d-j}(K_1 \cap K_2 + x_2 \cap \dots \times \\ &\quad \cap K_k + x_k, dy) f(K_k, x_1 + x_k) \lambda_d(dx_k) \dots f(K_2, x_1 + x_2) \lambda_d(dx_2) f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1). \end{aligned}$$

Hier können wir nun Satz 16 anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = d-j, \\ m_1 + \dots + m_k = kd-j}} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} 1_{B-x_1}(y) 1_{\text{bd } K_1}(y) 1_{\text{bd } K_2}(x_2) \dots 1_{\text{bd } K_k}(x_k) f(K_2, y + x_1 - x_2) \times \\ &\quad \dots f(K_k, y + x_1 - x_k) \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_k, d(y, x_2, \dots, x_k)) f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1) \end{aligned}$$

Nach Änderung der Integrationsreihenfolge und der Variablentransformation $y + x_1 \rightsquigarrow z$ ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_B(y + x_1) f(K_2, y + x_1 - x_2) \cdots f(K_k, y + x_1 - x_k) f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) f(K_1, z - y) f(K_2, z - x_2) \cdots f(K_k, z - x_k) \lambda_d(dz).$$

Wir schreiben wieder x_1 statt y und bekommen schließlich

$$\nu'_{j,k}(B) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = d-j, \\ m_1 + \dots + m_k = kd-j}}^d \int_{(\mathbb{R}^d)^k} 1_{\text{bd } K_1}(x_1) \cdots 1_{\text{bd } K_k}(x_k) f(K_1, z - x_1) \times$$

$$\cdots f(K_k, z - x_k) \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \cdots \mathbb{P}_0(dK_k) \lambda_d(dz).$$

Unsere Schnittdichte $\gamma'_{j,k}(z)$ hat also die vorläufige Form

$$\gamma'_{j,k}(z) = \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = d-j, \\ m_1 + \dots + m_k = kd-j}}^d \int_{(\mathbb{R}^d)^k} 1_{\text{bd } K_1}(x_1) \cdots 1_{\text{bd } K_k}(x_k) f(K_1, z - x_1) \cdots f(K_k, z - x_k)$$

$$\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \cdots \mathbb{P}_0(dK_k).$$

Da die Summe $m_1 + \dots + m_k$ immer den Wert $kd - j$ haben soll, gilt es nun drei Fälle zu unterscheiden. Betrachten wir zunächst den Fall $j = k$, also $m_1 + \dots + m_k = k(d - 1)$. Abgesehen von der Situation $m_1 = \dots = m_k = (d - 1)$, muß immer ein $i \in \{1, \dots, k\}$ existieren mit $m_i = d$. Da $\lambda_d(\text{bd } K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}$ ist, hat $\gamma'_{k,k}(z)$ wegen Satz 17 die Form

$$\gamma'_{k,k}(z) = \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \cdots f(K_k, z - x_k) \times$$

$$\Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \cdots \mathbb{P}_0(dK_k).$$

Sei jetzt $j < k$, also $m_1 + \dots + m_k > k(d - 1)$. Dann muss immer ein $i \in \{1, \dots, k\}$ existieren mit $m_i = d$. Da $\lambda_d(\text{bd } K) = 0$ für alle $K \in \mathcal{K}$ ist, gilt nach Satz 17 damit $\gamma'_{j,k}(z) = 0$.

Abschließend gilt es noch den Fall $j > k$ mit $m_1 + \dots + m_k < k(d - 1)$ zu betrachten. Wie schon zuvor sind alle Summanden Null, in denen eines der m_i gleich d ist, und wir erhalten

$$\gamma'_{j,k}(z) = \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = d-j, \\ m_1 + \dots + m_k = kd-j}}^{d-1} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \cdots f(K_k, z - x_k) \times$$

$$\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \cdots \mathbb{P}_0(dK_k).$$

Damit ist der Satz bewiesen. \square

Im Folgenden wollen wir uns nun auf den Fall $j = k$ beschränken. Wie schon in [31] soll jetzt für jedes $z \in \mathbb{R}^d$ ein konvexer Körper definiert werden, von dem ein Funktional in enger Verbindung mit $\gamma'_{k,k}(z)$ steht. Aus diesem Grund kehren wir zu den verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaßen zurück und definieren für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}^d$ ein Borel-Maß μ_z auf S^{d-1} als

$$\mu_z(A) := \mu_z(A, \mathcal{K}_0) := \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK), \quad A \in \mathcal{B}(S^{d-1}).$$

Bemerkung: Nach Satz 39 ist μ_z für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ sowohl endlich als auch eindeutig durch das Intensitätsmaß von X bestimmt.

Ist μ_z endlich, volldimensional und gilt

$$\int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} u f(K, z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times du) \mathbb{P}_0(dK) = 0,$$

so erfüllt μ_z alle Voraussetzungen des Existenzsatzes von Minkowski. In diesem Fall existiert ein eindeutig bestimmter konvexer Körper $B(X, z) \in \mathcal{K}_0$ mit

$$S_{d-1}(B(X, z), \cdot) = \mu_z(\cdot).$$

Wir nennen $B(X, z)$ den *lokalen Blaschke-Körper* von X im Punkt $z \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung: Die Endlichkeit der Maße μ_z kann *auf ganz* \mathbb{R}^d zum Beispiel durch folgende zusätzliche Forderung an X sichergestellt werden:

$$\int_{\mathcal{K}_0} \max_{x \in K} f(K, z - x) V_j(K) \mathbb{P}_0(dK) < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $j = 0, \dots, d$. Daraus ergibt sich insbesondere für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} \mu_z(S^{d-1}) &= \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK) \\ &\leq c \int_{\mathcal{K}_0} \max_{x \in K} f(K, z - x) V_{d-1}(K) \mathbb{P}_0(dK) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Diese zusätzliche Bedingung an X zu stellen, ist nicht ungewöhnlich. Zum Beispiel müssen die Poissonprozesse, deren Boolesche Modelle in [9] untersucht werden, sie erfüllen.

Beispiel: Ist X ein stationärer Partikelprozess, gilt also $f \equiv \gamma$ für ein $\gamma > 0$, so haben wir

$$\mu_z(\cdot) = \gamma \int_{\mathcal{K}_0} S_{d-1}(K, \cdot) \mathbb{P}_0(dK).$$

Offensichtlich hängt μ_z nicht von z ab und entspricht in diesem Fall dem mittleren Normalenmaß $\bar{S}_{d-1}(X, \cdot)$ von X . Existiert der lokale Blaschke-Körper, so ist er unabhängig von $z \in \mathbb{R}^d$. Er stimmt dann mit dem Blaschke-Körper $B(X)$ des Prozesses X überein, den wir in Kapitel 3 kennengelernt haben. Weitere Ausführungen finden sich auf Seite 156ff in [34].

Für jeden Punkt $z \in \mathbb{R}^d$, an dem das Maß μ_z zentriert, endlich und volldimensional ist, können wir einen Zusammenhang zwischen dem lokalen Blaschke-Körper $B(X, z)$ und den Schnittdichten $\gamma'_{k,k}(z)$, $k = 1, \dots, d$, herstellen. Es gilt:

Satz 49 *Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess. Existiert der lokale Blaschke-Körper $B(X, z)$ an der Stelle $z \in \mathbb{R}^d$, so gilt*

$$V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, z), \dots, B(X, z)) = \gamma'_{k,k}(z)$$

für alle $k = 1, \dots, d$.

Bemerkung: Insbesondere gilt für derartige z somit

$$\gamma'(z) = V_{d-1}(B(X, z)).$$

Beweis: Es sei $z \in \mathbb{R}^d$, und $B(X, z)$ existiere. Aus Satz 18 folgt für $k = 1, \dots, d$:

$$\begin{aligned} & V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, z), \dots, B(X, z)) \\ = & \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, z), \dots, B(X, z), \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d) \\ = & \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(u_1^-, \dots, u_k^-, \beta(u_1), \dots, \beta(u_k)) \Xi_{d-1}(B(X, z), dx_k \times du_k) \dots \times \\ & \Xi_{d-1}(B(X, z), dx_1 \times du_1) \\ = & \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(u_1^-, \dots, u_k^-, \beta(u_1), \dots, \beta(u_k)) S_{d-1}(B(X, z), du_k) \dots S_{d-1}(B(X, z), du_1) \\ = & \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} \dots \int_{\mathbb{R}^d \times S^{d-1}} \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(u_1^-, \dots, u_k^-, \beta(u_1), \dots, \beta(u_k)) f(K_1, z - x_1) \times \\ & \dots f(K_k, z - x_k) \Xi_{d-1}(K_k, dx_k \times du_k) \dots \Xi_{d-1}(K_1, dx_1 \times du_1) \mathbb{P}_0(dK_k) \dots \mathbb{P}_0(dK_1) \\ = & \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \dots f(K_k, z - x_k) \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \times \\ & \mathbb{P}_0(dK_k) \dots \mathbb{P}_0(dK_1). \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich der letzten Zeile mit der Definition von $\gamma'_{k,k}(z)$ erhalten wir

$$\gamma'_{k,k}(z) = V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, z), \dots, B(X, z))$$

für alle $k \in \{1, \dots, d\}$, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Dieser Zusammenhang soll nun dazu ausgenutzt werden, die k -ten Schnittdichten für $k = 2, \dots, d$ durch $\gamma'(z)$ nach oben abzuschätzen.

Satz 50 *Es seien X ein translationsregulärer Poissonprozess und $z \in \mathbb{R}^d$ derart, dass $B(X, z)$ existiere. Dann gilt*

$$\gamma'_{k,k}(z) \leq 2^k \frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k}{d^k} \gamma'(z)^k.$$

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Ist K ein konvexer Körper mit $\dim K = d$, so erfüllt das Maß

$$\frac{1}{2}(S_{d-1}(K, \cdot) + S_{d-1}(-K, \cdot))$$

die Voraussetzungen des Existenzsatzes von Minkowski. Damit existiert ein konvexer Körper \tilde{K} mit der Eigenschaft

$$S_{d-1}(\tilde{K}, \cdot) = \frac{1}{2}(S_{d-1}(K, \cdot) + S_{d-1}(-K, \cdot)).$$

Da für alle $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ die Gleichung $S_{d-1}(-K, A) = S_{d-1}(K, -A)$ erfüllt ist, handelt es sich bei $S_{d-1}(\tilde{K}, \cdot)$ um ein gerades Maß; \tilde{K} ist also zentralsymmetrisch. Zwischen den gemischten Funktionalen von K und \tilde{K} besteht dabei folgende Beziehung:

Satz 51 *Für einen volldimensionalen konvexen Körper K gilt*

$$V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K, \dots, K) \leq 2^k V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(\tilde{K}, \dots, \tilde{K}).$$

Im Beweis soll der folgende Sachverhalt ausgenutzt werden:

Satz 52 *Es seien $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $K_1, \dots, K_{d-j} \in \mathcal{K}$ zentralsymmetrisch. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & V_{d-1, \dots, d-1}^{(j)}(K_1, \dots, K_{d-j}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{d-j} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_{d-j})| S_{d-1}(K_1, du_1) \dots S_{d-1}(K_{d-j}, du_{d-j}). \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage findet sich auf Seite 183 in [42]. □

Beweis von Satz 51: Wir zeigen die Gültigkeit der Ungleichung zunächst für ein Polytop P und übertragen dieses Ergebnis dann auf beliebige volldimensionale Körper K .

Sei also $P \in \mathcal{K}$ ein Polytop mit $\dim P = d$. Wie wir aus dem ersten Kapitel wissen, hat das gemischte Funktional $V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(P, \dots, P)$ in diesem Fall die Form

$$\begin{aligned} V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(P, \dots, P) &= \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} [F_1, \dots, F_k] \times \\ &\quad \gamma(F_1, \dots, F_k; P, \dots, P) \lambda_{F_1}(F_1) \dots \lambda_{F_k}(F_k). \end{aligned}$$

Nutzen wir aus, daß der gemeinsame äußere Winkel $\gamma(F_1, \dots, F_k; P, \dots, P)$ bei volldimensionalen Körpern nach Definition immer einen Wert zwischen Null und Eins annimmt, so erhalten wir

$$V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(P, \dots, P) \leq \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} |\det(u(F_1), \dots, u(F_k))| \lambda_{F_1}(F_1) \dots \lambda_{F_k}(F_k). \quad (*)$$

Dabei bezeichnet für $k \in \{1, \dots, d\}$ und beliebige Einheitsvektoren v_1, \dots, v_k

$$|\det(v_1, \dots, v_k)| := [v_1^\perp, \dots, v_k^\perp]$$

die Determinante von $v_1^\perp, \dots, v_k^\perp$. Die rechte Seite der Ungleichung ändert sich nicht, falls wir

$$\sum_{F_i \in \mathcal{F}_{d-1}(P)}$$

für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ durch

$$\sum_{F_i \in \mathcal{F}_{d-1}(-P)}$$

ersetzen. Eine Tatsache, die wir bald verwenden werden und mit $(**)$ bezeichnen wollen.

Für ein Polytop P hat das $(d-1)$ -Stützmaß die Form

$$\Xi_{d-1}(P, \cdot \times \cdot) = \sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_F(\cdot) \otimes \delta_{u(F)}(\cdot).$$

Folglich läßt sich Ungleichung $(*)$ auch in der Form

$$\begin{aligned} V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(P, \dots, P) &\leq \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_k)| \\ &\quad \Xi_{d-1}(P, \mathbb{R}^d \times du_1) \dots \Xi_{d-1}(P, \mathbb{R}^d \times du_1) \\ &= \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_k)| S_{d-1}(P, du_1) \dots S_{d-1}(P, du_k) \\ &= \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_k)| S_{d-1}(\tilde{P}, du_1) \dots S_{d-1}(\tilde{P}, du_k) \end{aligned}$$

schreiben. Die letzte Gleichung ergibt sich aus $(**)$ und der Definition von \tilde{P} . Mit Hilfe von Satz 52 erhalten wir nun

$$\begin{aligned} V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(P, \dots, P) &\leq \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_k)| S_{d-1}(\tilde{P}, du_1) \dots S_{d-1}(\tilde{P}, du_k) \\ &= 2^k V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(\tilde{P}, \dots, \tilde{P}). \end{aligned}$$

Sowohl $V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K, \dots, K)$ als auch \tilde{K} hängen für volldimensionale K stetig von K ab, also gilt diese Ungleichung für beliebige volldimensionale konvexe Körper. \square

Außerdem benötigen wir noch folgende Identität:

Satz 53 Sei $j \in \{0, \dots, d-1\}$ und $K \in \mathcal{K}$ zentralsymmetrisch. Dann gilt

$$V_{d-1, \dots, d-1}^{(j)}(K, \dots, K) = \frac{d!}{2^{d-j} j! \kappa_j} V_{d-j}(\Pi K).$$

ΠK bezeichnet den Projektionskörper von K .

Beweis: Die Aussage entspricht Korollar 4.3 in [39]. \square

Nun haben wir alle Hilfsaussagen zusammengestellt, die wir für den Beweis von Satz 50 benötigen.

Beweis von Satz 50: Für einen beliebigen konvexen Körper K haben wir wegen Satz 51 und 53

$$V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K, \dots, K) \leq \frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} V_k(\Pi \tilde{K}).$$

Wie wir uns zuerst überlegen wollen, gilt außerdem

$$V_{d-1}(K) = \frac{d}{2 \kappa_{d-1}} V_1(\Pi \tilde{K}).$$

Es ist nämlich $V_1(\Pi K) = V_1(\Pi \tilde{K})$, da nach ihrer Definition die Stützfunktion von $\Pi \tilde{K}$ durch

$$\begin{aligned} h_{\Pi \tilde{K}}(u) &= \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle v, u \rangle| S_{d-1}(\tilde{K}, dv) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle v, u \rangle| S_{d-1}(K, dv) + \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle v, u \rangle| S_{d-1}(-K, dv) \right) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\Pi K}(u) + h_{\Pi K}(u)) \\ &= h_{\Pi K}(u) \end{aligned}$$

gegeben ist. Für $V_1(\Pi K)$ gilt nun

$$\begin{aligned} V_1(\Pi K) &= \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} h_{\Pi K}(u) \omega_{d-1}(du) \\ &= \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| S_{d-1}(K, dv) \omega_{d-1}(du) \\ &= \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \omega_{d-1}(du) S_{d-1}(K, dv) \\ &= \frac{\kappa_{d-1}}{d} \int_{S^{d-1}} 1 S_{d-1}(K, dv) \\ &= \frac{2\kappa_{d-1}}{d} V_{d-1}(K), \end{aligned}$$

womit der gewünschte Zusammenhang von $V_{d-1}(K)$ und $V_1(\Pi \tilde{K})$ bewiesen wäre.

In [34] findet sich als Formel (7.28) für die inneren Volumina eines beliebigen konvexen Körpers K außerdem folgende Ungleichung für $k, j \in \{1, \dots, d\}$ und $k > j$:

$$\left(\frac{\kappa_{d-j}}{\binom{d}{j}} V_j(K) \right)^k \geq \kappa_d^{k-j} \left(\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}} V_k(K) \right)^j.$$

Für $j = 1$ und $k > 1$ folgt daraus

$$V_k(K) \leq \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} V_1(K)^k.$$

Dies wollen wir nun auf die Schnittdichten anwenden und erhalten für $k \in \{2, \dots, d\}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \gamma'_{k,k}(z) &= V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, z), \dots, B(X, z)) \\ &\leq \frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} V_k(\Pi \tilde{B}(X, z)) \\ &\leq \frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} (V_1(\Pi \tilde{B}(X, z)))^k \\ &= 2^k \frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k}{d^k} (\gamma'(z))^k. \end{aligned}$$

□

Sollte $B(X, z)$ zentralsymmetrisch sein, so ergibt sich für unsere Schnittdichten folgende Verschärfung:

Satz 54 *Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess. Existiert $B(X, z)$ und ist $B(X, z)$ zentralsymmetrisch für ein $z \in \mathbb{R}^d$, so gilt*

$$\gamma'_{k,k}(z) \leq \left(\frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_{d-k}} \right)^2 \frac{k!}{\kappa_d^{k-1}} (\gamma'(z))^k.$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn $B(X, z)$ eine Kugel ist.

Beweis: Ist $B(X, z)$ zentralsymmetrisch, so steht uns nach Satz 53 die Gleichung

$$\gamma'_{k,k}(z) = V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, z), \dots, B(X, z)) = \frac{d!}{2^k (d-k)! \kappa_{d-k}} V_k(\Pi B(X, z))$$

zur Verfügung. Für unsere Schnittdichten ergibt sich damit analog zum letzten Beweis die Ungleichung

$$\begin{aligned} \gamma'_{k,k}(z) &\leq \frac{d!}{2^k (d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} (V_1(\Pi B(X, z)))^k \\ &= \frac{d!}{2^k (d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \left(\frac{2^{(d-1)! \kappa_{d-1}}}{d!} \right)^k (\gamma(z))^k \\ &= \left(\frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_{d-k}} \right)^2 \frac{k!}{\kappa_d^{k-1}} (\gamma(z))^k \end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, für die $B(X, z)$ zentralsymmetrisch ist.

In der Ungleichung (7.28) aus [34], die wir im letzten Beweis auf die inneren Volumina konvexer Körper angewandt haben, gilt Gleichheit dann und nur dann, wenn es sich bei dem konvexen Körper K um eine Kugel handelt. Ein Beweis dafür findet sich in [29] auf Seite 334f.

Somit gilt Gleichheit in der hergeleiteten Ungleichung genau dann, wenn $\Pi B(X, z)$ eine Kugel ist.

Es seien $u \in S^{d-1}$ und $r \in (0, \infty)$. Für jedes $\vartheta \in SO_d$ ergeben sich aus der Rotationsinvarianz von $S_{d-1}(rB^d, \cdot) = r^{d-1} \omega_{d-1}(\cdot)$ die Gleichungen

$$h(\Pi r B^d, u) = r^{d-1} \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \omega_{d-1}(dv) = r^{d-1} \int_{S^{d-1}} |\langle \vartheta u, v \rangle| \omega_{d-1}(dv) = h(\Pi r B^d, \vartheta u).$$

Somit ist $h(\Pi r B^d, \cdot)$ konstant auf S^{d-1} , der Projektionskörper einer Kugel also wieder eine Kugel. Andererseits ist die Abbildung

$$K \mapsto \Pi K$$

auf den zentralsymmetrischen Körpern injektiv (siehe Seite 129 im Buch von Gardner ([7]) über geometrische Tomographie), und es folgt, dass Gleichheit genau dann vorliegt, wenn $B(X, z)$ eine Kugel ist. \square

Zum Abschluss wollen wir zeigen, dass eine gröbere Abschätzung als Satz 50 für alle $z \in \mathbb{R}^d$ gilt. Dafür benötigen wir folgende integralgeometrische Ungleichung:

Satz 55 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$, $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ konvexe Körper und für $i = 1, \dots, k$ die Abbildungen $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ messbar. Dann gilt*

$$\int_{(\mathbb{R}^d)^k} f_1(x_1) \dots f_k(x_k) \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \leq 2^k \prod_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} f_i(x_i) \Phi_{d-1}(K_i, dx_i).$$

Beweis: Es seien $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beliebige Borelmengen und $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{K}$ Polytope. Aus der speziellen Darstellung von $\Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}$ für Polytope ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(P_1, \dots, P_k; A_1 \times \dots \times A_k) &= \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P_k)} [F_1, \dots, F_k] \times \\ &\quad \gamma(F_1, \dots, F_k; P_1, \dots, P_k) \lambda_{F_1}(A_1) \dots \lambda_{F_k}(A_k) \\ &\leq \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P_k)} \lambda_{F_1}(A_1) \dots \lambda_{F_k}(A_k) \\ &= 2^k \prod_{i=1}^k \Phi_{d-1}(P_i, A_i). \end{aligned}$$

Da sowohl $\Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}$ als auch Φ_{d-1} schwach stetig von den jeweiligen konvexen Körpern abhängt, folgt durch Approximation mit Polytopen für beliebige $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ und $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k; A_1 \times \dots \times A_k) \leq 2^k \prod_{i=1}^k \Phi_{d-1}(K_i, A_i).$$

Es seien nun weiter $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}$, $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ beliebige konvexe Körper sowie $\alpha_{j_i} \geq 0$ und

$A_{j_i} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ für jedes $j_i \in \{1, \dots, m_i\}$ und $i = 1, \dots, k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \prod_{i=1}^k \left(\sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_{j_i} 1_{A_{j_i}}(x_i) \right) \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, d_k)) \\
&= \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_k=1}^{m_k} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_k} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} \prod_{i=1}^k 1_{A_{j_i}}(x_i) \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, d_k)) \\
&\leq 2^k \sum_{j_1=1}^{m_1} \cdots \sum_{j_k=1}^{m_k} \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_k} \prod_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} 1_{A_{j_i}}(x_i) \Phi_{d-1}(K_i, dx_i) \\
&= 2^k \prod_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j_i=1}^{m_i} \alpha_{j_i} 1_{A_{j_i}}(x_i) \Phi_{d-1}(K_i, dx_i).
\end{aligned}$$

Wir haben die Behauptung also für Elementarfunktionen gezeigt. Der allgemeine Fall folgt dann mit Hilfe der üblichen Approximationsargumente aus der Maß- und Integrationstheorie, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Angewendet auf unsere Schnittdichten liefert dies:

Satz 56 *Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und alle $k \in \{1, \dots, d\}$ die Ungleichung*

$$\gamma'_{k,k}(z) \leq (2\gamma'(z))^k.$$

Beweis: Sei $k \in \{1, \dots, d\}$. Für $z \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned}
\gamma'_{k,k}(z) &= \int_{\mathcal{K}_0} \cdots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \cdots f(K_k, z - x_k) \times \\
&\quad \Phi_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \cdots \mathbb{P}_0(dK_k) \\
&\leq 2^k \prod_{i=1}^k \int_{\mathcal{K}_0} \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_i, z - x_i) \Phi_{d-1}(K_i; dx_i) \mathbb{P}_0(dK_i) \\
&= (2\gamma(z))^k.
\end{aligned}$$

\square

Diese Abschätzung ist gröber als die Ungleichung aus Satz 50, da wir zeigen können:

Satz 57

$$\frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k}{d^k} \leq 1.$$

Beweis: Rufen wir uns den Beweis von Satz 51 in Erinnerung. Dort haben wir die Gleichung

$$\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} |\det(u(F_1), \dots, u(F_k))| \lambda_{F_1}(F_1) \cdots \lambda_{F_k}(F_k) = 2^k V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(\tilde{P}, \dots, \tilde{P})$$

für volldimensionale Polytope P hergeleitet. Wir sehen nun, daß sich die linke Seite auch durch

$$\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_{F_1}(F_1) \cdots \lambda_{F_k}(F_k)$$

nach oben abschätzen läßt, da

$$0 \leq |\det(u(F_1), \dots, u(F_k))| \leq 1$$

immer erfüllt ist. Es gilt

$$\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \cdots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_{F_1}(F_1) \cdots \lambda_{F_k}(F_k) = \left(\sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_{F_1}(F_1) \right) \cdots \left(\sum_{F_k \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_{F_k}(F_k) \right).$$

Vergleicht man nun

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_F(F),$$

was nichts anderes als eine Formel für die Oberfläche von P ist, mit der Darstellung des $(d-1)$ -ten inneren Volumens für Polytope, so ergibt sich

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)} \lambda_F(F) = 2V_{d-1}(P),$$

da $\gamma(F, P) = \frac{1}{2}$ für alle $F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)$ ist.

Nutzen wir wiederum die Stetigkeit aller beteiligten Funktionale aus, so erhalten wir

$$V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(\tilde{K}, \dots, \tilde{K}) \leq V_{d-1}(K)^k$$

für beliebige volldimensionale konvexe Körper K .

Dem Beweis von Satz 54 entnimmt man, dass für $K = B^{d-1}$ gilt

$$\begin{aligned} V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B^{d-1}, \dots, B^{d-1}) &= \frac{d!}{2^k (d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} V_1(\Pi B^{d-1})^k \\ &= \frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k}{d^k} V_{d-1}(B^{d-1})^k. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man die Identität $\tilde{B}^{d-1} = B^{d-1}$, so folgt aus $V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(\tilde{K}, \dots, \tilde{K}) \leq V_{d-1}(K)^k$ die Ungleichung

$$\frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k}{d^k} V_{d-1}(B^{d-1})^k \leq V_{d-1}(B^{d-1})^k$$

und damit

$$\frac{d!}{(d-k)! \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \frac{\kappa_{d-1}^k}{d^k} \leq 1.$$

□

Schärfere Abschätzungen für die in diesem Abschnitt behandelten Schnittdichten liegen im Moment nicht vor, da entsprechende Ungleichungen für die gemischten Maße beziehungsweise die gemischten Funktionale noch fehlen. Zwar ist bekannt, dass diese Abschätzungen existieren müssen; da

aber die Extremalfälle vermutlich für (eventuell reguläre) Simplexes eintreten, passen die gesuchten Ungleichungen gut zu einer ganzen Reihe klassischer noch ungelöster Probleme aus der Konvexgeometrie.

Ein Nachteil der Maße $\nu'_{k,k}$ besteht darin, dass sich ihre Dichten bezüglich des Lebesgue-Maßes nur dann in einen Zusammenhang mit gemischten Funktionalen konvexer Körper bringen lassen, wenn der lokale Blaschke-Körper existiert. Die Klasse der Partikelprozesse, für die dies auf ganz \mathbb{R}^d gilt, ist jedoch noch nicht genau charakterisiert. Bekannt ist lediglich, dass sie auch nicht-stationäre Prozesse enthält. Im zweiten Kapitel von [11] findet sich ein entsprechendes Beispiel.

5.2 Schnittdichten inhomogener Partikelprozesse II

Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess. Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und $k \in \{1, \dots, d\}$ definieren wir ein Maß ν_k durch

$$\nu_k(B) = \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k \cap B).$$

Den Unterschied zwischen den Maßen $\nu'_{j,k}$ und ν_k erkennt man am besten im Fall $j = k = d$. Der Schnitt von d verschiedenen Rändern konvexer Körper besteht im allgemeinen nur aus einzelnen Punkten, und sowohl $\nu'_{d,d}$ als auch ν_d „zählen“ die Anzahl dieser Schnittpunkte. Während ν_d aber diese Punkte einfach zählt, gewichtet $\nu'_{d,d}$ einen Punkt mit dem gemeinsamen äußeren Winkel der Körper K_1, \dots, K_d , in deren Schnitt er liegt.

Bemerkung: Wegen $\mathcal{H}^{d-1}(\text{bd } K \cap \cdot) = C_{d-1}(K, \cdot) = 2\Phi_{d-1}(K, \cdot)$ gilt $\nu_1(\cdot) = 2\nu'_{1,1}(\cdot)$.

Bevor wir den nächsten Satz formulieren, sei kurz daran erinnert, dass wir in Kapitel 2 eine \mathcal{H}^{d-k} -messbare und \mathcal{H}^{d-k} -rektifizierbare Menge auch als $(d-k)$ -dimensionale rektifizierbare Menge bezeichnet haben. Um mit den Maßen ν_k sinnvoll arbeiten zu können, benötigen wir folgende Aussage:

Satz 58 Seien $k \in \{1, \dots, d\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und

$\mathcal{M} := \{(K'_1, \dots, K'_k) \in \mathcal{K}^k \mid \text{bd } K'_1 \cap \dots \cap \text{bd } K'_k \text{ ist eine } (d-k)\text{-dimensionale rektifizierbare Menge}\}.$

Dann ist die Abbildung

$$(K_1, \dots, K_k) \mapsto \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k \cap B) \cdot 1_{\mathcal{M}}(K_1, \dots, K_k)$$

von \mathcal{K}^k nach \mathbb{R} messbar.

Beweis: \mathcal{M} ist nach Korollar 2.1.4 aus [48] eine messbare Menge. Die Behauptung folgt dann aus der Messbarkeit der Abbildungen $K \mapsto \text{bd } K$, $K \in \mathcal{K}$, und $(F_1, F_2) \mapsto F_1 \cap F_2$, $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, (siehe Satz 19) sowie Korollar 2.1.4 aus [48]. \square

Bemerkung: Es seien \mathcal{M} wie im letzten Satz und $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}_0$ mit $\dim K_i = d$ für $i = 1, \dots, k$. Aus Theorem 1.4.1 in [48] folgt, dass $\text{bd } (x_1 + K_1) \cap \dots \cap \text{bd } (x_k + K_k)$ für λ_{kd} -fast alle $(x_1, \dots, x_k) \in$

\mathbb{R}^{kd} nicht nur \mathcal{H}^{d-k} -messbar sondern auch \mathcal{H}^{d-k} -rektifizierbar ist. Aus dem Satz von Campbell ergibt sich, weil X ein Poissonprozess ist,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} 1_{\mathcal{M}^c}(K_1, \dots, K_k) &= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{M}^c}(x_1 + K_1, \dots, x_k + K_k) \times \\ & f(K_1, x_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\text{bd}(x_1 + K_1) \cap \dots \cap \text{bd}(x_k + K_k)$ fast sicher für alle $(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k$ eine $(d-k)$ -dimensionale rektifizierbare Menge.

Insbesondere gilt deshalb für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Gleichung

$$\nu_k(B) = \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd} K_1 \cap \dots \cap \text{bd} K_k \cap B) 1_{\mathcal{M}}(K_1, \dots, K_k).$$

Wir zeigen nun:

Satz 59 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann besitzt das Borelmaß ν_k eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version dieser Dichte ist durch $\gamma_k : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gegeben. Dabei definieren wir für $z \in \mathbb{R}^d$*

$$\begin{aligned} \gamma_k(z) &:= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} |\det(\sigma_{K_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_k}(x_k))| f(K, z - x_1) \dots \times \\ & f(K, z - x_k) C_{d-1}(K_1, dx_1) \dots C_{d-1}(K_k, dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k). \end{aligned}$$

Bemerkung: Aus $\nu_1(\cdot) = 2\nu'_{1,1}(\cdot)$ folgt für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ sofort $\gamma_1(z) = \gamma_{1,1}(z)$. Man nennt γ_1 beziehungsweise $\gamma'_{1,1}$ in der Regel *Oberflächen-* beziehungsweise *(d-1)-te Quermaßdichte* von X . Für nicht-stationäre Partikelprozesse wurden sie von Fallert in [4] eingeführt. Weiterhin bezeichnet man γ_d in der Regel als *Schnittpunktdichte* von X .

Beweis: Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Wegen der an Satz 58 anschließenden Bemerkung können wir $\nu_k(B)$ schreiben als

$$\nu_k(B) = \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd} K_1 \cap \dots \cap \text{bd} K_k \cap B) 1_{\mathcal{M}}(K_1, \dots, K_k).$$

Weil X ein Poissonprozess ist, ergibt sich aus Satz 58 und dem Satz von Campbell

$$\begin{aligned}
\nu_k(B) &= \int_{\mathcal{K}'} \dots \int_{\mathcal{K}'} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k \cap B) 1_{\mathcal{M}}(K_1, \dots, K_k) \Lambda^{(m)}(d(K_1, \dots, K_k)) \\
&= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k \cap B) \times \\
&\quad 1_{\mathcal{M}}(K_1 + x_1, \dots, K_k + x_k) f(K_1, x_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \times \\
&\quad \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k) \\
&= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k \cap B) f(K_1, x_1) \dots \times \\
&\quad f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k).
\end{aligned}$$

Wie wir gleich nachrechnen werden, gilt für die inneren Integrale

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k \cap B) f(K_1, x_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\text{bd } K_1} \dots \int_{\text{bd } K_k} |\det(\sigma_{K_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_k}(t_k))| f(K_1, z - t_1) \dots f(K_k, z - t_k) \mathcal{H}^{d-1}(dt_1) \times \\
&\quad \dots \mathcal{H}^{d-1}(dt_k) \lambda_d(dz).
\end{aligned}$$

Nach Anwendung des Satzes von Fubini, Satz 36 und einer einfachen Koordinatentransformation ergibt sich nämlich

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 + x_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k + x_k \cap B) f(K_1, x_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 \cap \text{bd } K_2 + x_2 - x_1 \dots \cap \text{bd } K_k + x_k - x_1 \cap B - x_1) \times \\
&\quad f(K_1, x_1) \dots f(K_k, x_k) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_k) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd } K_1 \cap \text{bd } K_2 + x_2 \dots \cap \text{bd } K_k + x_k \cap B - x_1) \times \\
&\quad f(K_1, x_1) f(K_2, x_2 + x_1) \dots f(K_k, x_k + x_1) \lambda_d(dx_k) \dots \lambda_d(dx_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\text{bd } K_1} \dots \int_{\text{bd } K_k} 1_{B-x_1}(t_1) f(K_2, t_1 - t_2 + x_1) \cdots f(K_k, t_1 - t_k + x_1) \times \\
&\quad |\det(\sigma_{K_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_k}(t_k))| \mathcal{H}^{d-1}(dt_k) \dots \mathcal{H}^{d-1}(dt_1) f(K_1, x_1) \lambda_d(dx_1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\text{bd } K_1} \dots \int_{\text{bd } K_k} |\det(\sigma_{K_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_k}(t_k))| f(K_1, z - t_1) \cdots \times \\
&\quad f(K_k, z - t_k) \mathcal{H}^{d-1}(dt_k) \dots \mathcal{H}^{d-1}(dt_1) \lambda_d(dz).
\end{aligned}$$

Durch erneute Anwendung des Satzes von Fubini ergibt sich dann, dass ν_k für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt, und eine Version dieser Dichte durch $\gamma_k : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist. Für $z \in \mathbb{R}^d$ setzen wir dabei

$$\begin{aligned}
\gamma_k(z) &:= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\text{bd } K_1} \dots \int_{\text{bd } K_k} |\det(\sigma_{K_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_k}(t_k))| f(K, z - t_1) \cdots \times \\
&\quad f(K, z - t_k) \mathcal{H}^{d-1}(dt_k) \dots \mathcal{H}^{d-1}(dt_1) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k) \\
&= \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} |\det(\sigma_{K_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_k}(x_k))| f(K, z - x_1) \cdots \times \\
&\quad f(K, z - x_k) C_{d-1}(K_1, dx_1) \dots C_{d-1}(K_k, dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k).
\end{aligned}$$

Hier geht ein, dass $C_{d-1}(K, \cdot) = \mathcal{H}^{d-1}(\text{bd } K \cap \cdot)$ ist, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Für einen beliebigen Punkt $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir wie im letzten Abschnitt ein zu X gehörendes Borelmaß μ_z durch

$$\mu_z(A) := \mu_z(A, \mathcal{K}_0) = \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(dK), \quad A \in \mathcal{B}(S^{d-1}).$$

Bemerkung: Wegen Satz 39 ist μ_z für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ endlich und eindeutig durch das Intensitätsmaß von X bestimmt.

Es habe das Maß μ_z diese beiden Eigenschaften. Wir wissen wegen Satz 34, dass wir es auch in der Form

$$\mu_z(A) = \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\text{bd } K} 1_A(\sigma_K(x)) f(K, z - x) C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK)$$

schreiben können, und wir definieren in diesem Fall das *lokale assoziierte Zonoid* $\Pi(X, z)$ von X in z durch seine Stützfunktion

$$h(\Pi(X, z), u) := \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \mu_z(dv).$$

Bemerkung: Für die Definition von $\Pi(X, z)$ spielt nur der gerade Anteil von μ_z eine Rolle. Falls X stationär ist, stimmt $\frac{1}{2}\Pi(X, z)$ für jedes $z \in \mathbb{R}^d$ mit dem assoziierten Zonoid von X überein.

Es gilt:

Satz 60 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann gilt für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$*

$$\gamma_k(z) = \frac{k!}{2^k} V_k(\Pi(X, z)).$$

Beweis: Für $j = 0, \dots, d$ und λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\begin{aligned} & V_j(\Pi(X, z)) \\ &= \frac{2^j}{j!} \int_{S^{d-1}} \dots \int_{S^{d-1}} |\det(u_1, \dots, u_j)| \mu_z(du_1) \dots \mu_z(du_j) \\ &= \frac{2^j}{j!} \int_{\mathcal{K}_0} \dots \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} |\det(\sigma_{K_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_k}(x_k))| f(K, z - x_1) \dots \times \\ & \quad f(K, z - x_k) C_{d-1}(K_1, dx_1) \dots C_{d-1}(K_k, dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k). \end{aligned}$$

Dies entspricht der Definition von γ_k , die wir in Satz 59 angegeben haben. \square

Wie schon im letzten Abschnitt lässt sich dieser Zusammenhang zwischen Schnittdichten und konvexen Körpern nun wieder verwenden, um die k -Schnittdichten für $k = 2, \dots, d$ durch $\gamma := \gamma_1$ nach oben abzuschätzen. Es gelten nämlich folgende Ungleichungen:

Satz 61 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$ und X ein translationsregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann gilt für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ die Ungleichung*

$$\gamma_k(z) \leq \frac{k! \kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \gamma_1(z)^k.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\Pi(X, z)$ eine Kugel ist.

Bemerkung: Für einen stationären Poissonprozess konvexer Körper folgt die obige Ungleichung schon aus Korollar 2 in [47].

Beweis: Nach Ungleichung (7.28) aus [34] gilt für alle $K \in \mathcal{K}^d$ und alle $1 < k \leq d$ die Ungleichung

$$\left(\frac{\kappa_{d-1}}{d} V_1(K) \right)^k \geq \kappa_d^{k-1} \frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}} V_k(K),$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn K eine Kugel ist. Angewendet auf die Schnittdichten erhalten wir daraus für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \gamma_k(z) &= \frac{k!}{2^k} V_k(\Pi(X, z)) \\ &\leq \frac{k!}{2^k} \frac{\kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} V_1(\Pi(X, z))^k \\ &= \frac{k! \kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \gamma_1(z)^k, \end{aligned}$$

und wir haben den Satz bewiesen. □

Beispiel: Es seien eine Funktion f durch

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^d &\rightarrow [0, \infty) \\ (x_1, \dots, x_d) &\mapsto 1 + \sin(2\pi(x_1 + \dots + x_d)) \end{aligned}$$

und ein konvexer Körper W durch

$$W := \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$$

gegeben. Weiter bezeichne ν das eindeutig bestimmte invariante Wahrscheinlichkeitsmaß auf SO_d . Dann definieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P}_0 auf \mathcal{K}_0 durch

$$\mathbb{P}_0(\mathcal{A}) := \nu(\{\vartheta \in SO_d \mid \vartheta W \in \mathcal{A}\}), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0).$$

Also ist \mathbb{P}_0 das Bildmaß von ν unter der Abbildung

$$\begin{aligned} SO_d &\rightarrow \mathcal{K}_0 \\ \vartheta &\mapsto \vartheta W. \end{aligned}$$

X bezeichne den Poissonprozess mit Intensitätsmaß

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{A}}(x + \vartheta K) f(\vartheta^{-1}x) \lambda_d(dx) \nu(d\vartheta), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0).$$

Die Formverteilung von X ist dann durch \mathbb{P}_0 gegeben.

Für $z \in \mathbb{R}^d$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_z(A) &= \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(\sigma_{\vartheta W}(x)) f(\vartheta^{-1}(z - x)) C_{d-1}(\vartheta W, dx) \nu(d\vartheta) \\ &= \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(\vartheta \sigma_W(x)) f(\vartheta^{-1}z - x) C_{d-1}(W, dx) \nu(d\vartheta) \\ &= \int_{SO_d} \sum_{i=1}^d (\delta_{e_i}(\vartheta^{-1}A) + \delta_{-e_i}(\vartheta^{-1}A)) \nu(d\vartheta). \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt aus der Rotationskovarianz von $C_{d-1}(W, \cdot)$ und die dritte Gleichung aus der Definition von f und W . $\{e_1, \dots, e_d\}$ bezeichne dabei die Standardbasis des \mathbb{R}^d . Aus der Invarianz des Maßes ν erhalten wir

$$\mu_z(A) = \mu_z(\varrho A)$$

für alle $\varrho \in SO_d$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $z \in \mathbb{R}^d$. Da außerdem für alle $z \in \mathbb{R}^{d-1}$ die Gleichung $\mu_z(S^{d-1}) = 2d$ erfüllt ist, ergibt sich aus der Eindeutigkeit des sphärischen Lebesgue-Maßes, dass $\mu_z = 2d\omega_{d-1}$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$ sein muss. Damit ist $\Pi(X, z)$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$ eine Kugel und X ein nicht-stationärer Prozess, für den

$$\gamma_k(z) = \frac{k! \kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \gamma_1(z)^k$$

für alle $k \in \{1, \dots, d\}$ auf ganz \mathbb{R}^d gilt.

Bemerkungen:

- a) Man kann auch einen stationären, nicht-isotropen Prozess mit derselben Eigenschaft konstruieren.
- b) Für die verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaße $\mu_z(A, \mathcal{A})$ von X mit $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ gilt

$$\mu_z(A, \mathcal{A}) = \int_{SO_d} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta W) \sum_{i=1}^d (\delta_{e_i}(\vartheta^{-1}A) + \delta_{-e_i}(\vartheta^{-1}A)) \nu(d\vartheta).$$

Aus der Invarianz von ν ergibt sich also ebenfalls

$$\mu_z(\varrho A, \varrho \mathcal{A}) = \mu_z(A, \mathcal{A})$$

für alle $\varrho \in SO_d$. An diesem Beispiel sieht man somit, dass eine Verallgemeinerung von Satz 43 auf beliebige translationsreguläre Partikelprozesse, die auf volldimensionalen Körpern konzentriert sind, nicht möglich ist.

5.3 Schnitte mit affinen Unterräumen

Wie wir in Kapitel 3 gesehen haben, steht das assoziierte Zonoid eines stationären Partikelprozesses X in engem Zusammenhang mit verschiedenen geometrischen Größen. Der Wert seiner Stützfunktion an der Stelle $u \in S^{d-1}$ läßt sich beispielsweise als Intensität des stationären Punktprozesses interpretieren, der durch X auf der Geraden $\{\alpha u \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ induziert wird. Ein analoges Resultat soll nun auch für nicht-stationäre Partikelprozesse gezeigt werden.

Es sei X ein translationsregulärer Partikelprozess, der auf volldimensionalen konvexen Körpern konzentriert ist. Weiter seien $1 \leq k \leq d$ und $z \in \mathbb{R}^d$. Weiter sei $L \in \mathcal{L}_k^d$ ein k -dimensionaler linearer Unterraum des \mathbb{R}^d . Wir interessieren uns nun für das mittlere $(k-1)$ -te Hausdorff-Maß des Schnittes der Ränder der Partikel von X mit $z + L$ in einer beliebigen Borelmenge $B \subseteq \mathcal{B}(L + z)$. Dazu betrachten wir das Maß

$$\nu_{L+z}(B) := \mathbb{E} \sum_{K \in X} \mathcal{H}^{k-1}(B \cap (z + L) \cap \text{bd } K), \quad B \in \mathcal{B}(L + z).$$

Bemerkungen:

- a) Es sei $K \in \mathcal{K}_0$ mit $\dim K = d$. Aus Theorem 1.4.1 in [48] folgt, dass $(z + L) \cap (x + \text{bd } K)$ für λ_d -fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ nicht nur \mathcal{H}^{k-1} -messbar sondern auch \mathcal{H}^{k-1} -rektifizierbar ist. Hat eine Menge diese beiden Eigenschaften, so haben wir sie in Kapitel 2 auch $(k-1)$ -dimensionale rektifizierbare Menge genannt. Definieren wir

$$\mathcal{M} := \{K' \in \mathcal{K} \mid (z + L) \cap \text{bd } K' \text{ ist eine } (k-1)\text{-dimensionale rektifizierbare Menge}\},$$

so erhalten wir aus dem Satz von Campbell

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{K \in X} 1_{\mathcal{M}^c}(K) &= \int \int_{\mathcal{K}_0 \mathbb{R}^d} 1_{\mathcal{M}}(x + K) f(K, x) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit ist $(z + L) \cap \text{bd } K$ fast sicher für alle $K \in X$ sowohl \mathcal{H}^{k-1} -messbar als auch \mathcal{H}^{k-1} -rektifizierbar.

Insbesondere ist also

$$\nu_{L+z}(B) = \mathbb{E} \sum_{K \in X} \mathcal{H}^{k-1}(B \cap (z + L) \cap \text{bd } K) 1_{\mathcal{M}}(K).$$

b) Die Messbarkeit der Abbildung

$$K \mapsto \mathcal{H}^{k-1}(B \cap (z + L) \cap \text{bd } K) 1_{\mathcal{M}}(K)$$

von \mathcal{K} nach \mathbb{R} zeigt man mit Satz 19 und Korollar 2.1.4 aus [48].

Beispiel: Ist $k = 1$, so entspricht $\nu_{L+z}(B)$ gerade der mittleren Anzahl von Schnittpunkten der Geraden $z + L$ mit der Menge

$$\bigcup_{K \in X} \text{bd } K,$$

die in B liegen. Ist X stationär und $\lambda_{L+z}(B) = 1$, so handelt es sich bei $\nu_{L+z}(B)$ um die Intensität des stationären Punktprozesses, der entsteht, wenn wir die Geraden $L + z$ mit obiger Menge schneiden. Aufgrund der Stationarität ist sie unabhängig von z .

Wir zeigen nun:

Satz 62 *Es seien $k \in \{1, \dots, d-1\}$, $z \in \mathbb{R}^d$ und X ein translationsregulärer Partikelprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Weiter seien $L \in \mathcal{L}_k^d$ und $\{v_1, \dots, v_{d-k}\} \subseteq S^{d-1}$ eine Orthonormalbasis von L^\perp . Dann ist ν_{L+z} absolutstetig bezüglich λ_{L+z} , dem Lebesgue-Maß auf $L + z$, und eine Version der Dichte ist durch $\gamma_{L+z} : L + z \rightarrow [0, \infty)$ gegeben. Dabei definieren wir für $y \in L + z$*

$$\gamma_{L+z}(y) := \int_{S^{d-1}} |\det(u, v_1, \dots, v_{d-k})| \mu_y(du).$$

Beweis: Aus dem Satz von Campbell folgt nach einem ähnlichen Zwischenschritt wie am Anfang des Beweises von Satz 59

$$\nu_{L+z}(B) = \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{k-1}(B \cap (L + z) \cap \text{bd } K + x) f(K, x) \lambda_d(dx) \mathbb{P}_0(dK). \quad (*)$$

Es seien zunächst $B \in \mathcal{B}(L + z)$ beschränkt und $W \subseteq L$ ein Würfel mit $B \subseteq \text{int } W + z$. Dann gilt

$$\mathcal{H}^{k-1}(B \cap L + z \cap \text{bd } K + x) = \mathcal{H}^{k-1}(B \cap W + z \cap \text{bd } K + x).$$

Auf das innere Integral in (*) können wir Satz 31 anwenden. Mit $m = 1$, $M_0 = z + W$, $n_0 = k$, $M_1 = \text{bd } K$ und $n_1 = d - 1$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{k-1}(B \cap (z + W) \cap \text{bd } K + x) f(K, x) \lambda_d(dx) \\ &= \int_{z+W} \int_{\text{bd } K} 1_B(y) |\det([\sigma_K(x)], W^\perp)| f(K, y - x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \mathcal{H}_k(dy) \\ &= \int_{z+L} 1_B(y) \int_{\text{bd } K} |\det(\sigma_K(x), v_1, \dots, v_{d-k})| f(K, y - x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \lambda_{L+z}(dy). \end{aligned}$$

Nach Anwendung des Satzes von Fubini folgt mit der Definition von μ_y die Gleichung

$$\nu_{L+z}(B) = \int_{z+L} 1_B(y) \int_{S^{d-1}} |\det(u, v_1, \dots, v_{d-k})| \mu_y(du) \lambda_{L+z}(dy).$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz überträgt sich diese Gleichung auf beliebige Borelmengen, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Bemerkung: Es seien $k = 1$ und $L := \{su \mid s \in \mathbb{R}\}$ für ein $u \in S^{d-1}$. In diesem Fall ergibt sich für λ_{d-1} -fast alle $z \in [u^\perp]$ und λ_1 -fast alle $s \in \mathbb{R}$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \gamma_{L+z}(z + su) &= \int_{S^{d-1}} |\det(v, v_1, \dots, v_{d-1})| \mu_{z+su}(dv) \\ &= \int_{S^{d-1}} |\langle v, u \rangle| \mu_{z+su}(dv) \\ &= h(\Pi(X, z + su), u) \end{aligned}$$

Dies ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden Resultates aus Kapitel 3 für stationäre Partikelprozesse.

5.4 Das mittlere sichtbare Volumen

Im dritten Kapitel haben wir gesehen, dass das mittlere sichtbare Volumen eines stationären Poissonprozesses proportional zum Volumen des Polarkörpers des assoziierten Zonoids ist. Außerdem läßt sich das Produkt von mittlerem sichtbarem Volumen und Schnittpunktdichte durch die Blaschke-Santaló-Ungleichung und ihre Inverse sowohl nach oben als auch nach unten abschätzen. Diese Ergebnisse sollen im Folgenden ebenfalls auf nicht-stationäre Poissonprozesse übertragen werden.

Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen konvexen Körpern konzentriert ist. Außerdem gelte im gesamten Abschnitt

$$\int_{\mathcal{K}_0} \max_{x \in (z-K)} f(x) V_j(K) \mathbb{P}_0(dK) < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $j = 0, \dots, d$.

Bemerkung: In diesem Fall ist μ_z für jedes $z \in \mathbb{R}^d$ endlich und eindeutig durch das Intensitätsmaß von X bestimmt.

Es sei $Z := Z_X$ das von X erzeugte Boolesche Modell und $u \in S^{d-1}$. Für $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir den Abstand von z zu Z in Richtung u als

$$d_{[0,u]}(z, Z) := \inf\{t \geq 0 \mid (z + [0, tu]) \cap Z \neq \emptyset\},$$

wobei wir $\inf \emptyset := \infty$ setzen. Dabei sei wie üblich

$$[0, u] := \text{conv} \{0, u\}$$

die Strecke zwischen 0 und u .

Liegt $z \notin Z$, so ist der von z aus sichtbare Bereich außerhalb von Z , kurz $S_z(Z)$, eine sternförmige Menge, und sein Volumen kann durch

$$V_d(S_z(Z)) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} d_{[0,u]}(z, Z)^d \omega_{d-1}(du)$$

berechnet werden. Die Definition einer sternförmigen Menge und die Formel für ihr Volumen finden sich auf Seite 416f in [29]. Das mittlere, vom Punkt $z \in \mathbb{R}^d$ aus sichtbare Volumen außerhalb von Z , kurz $\bar{V}_s(Z, z)$, ist dann

$$\begin{aligned} \bar{V}_s(Z, z) &= \mathbb{E}(V_d(S_z(Z)) \mid z \notin Z) \\ &= \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \mathbb{E}(d_{[0,u]}(z, Z)^d \mid z \notin Z) \omega_{d-1}(du). \end{aligned}$$

Es gilt:

Satz 63 *Es seien X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist, Z das von ihm erzeugte Boolesche Modell und $v \in S^{d-1}$. Weiter gelte*

$$\int_{\mathcal{K}_0} \max_{x \in (z-K)} f(x) V_j(K) \mathbb{P}_0(dK) < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $j = 0, \dots, d$ sowie für \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$, dass sie keine zu $[0, v]$ parallele Strecke im Rand enthalten. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(d_{[0,v]}(z, Z) \leq t \mid z \notin Z) \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_0^t \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\{x \in \text{bd } K \mid \langle v, \sigma_K(x) \rangle < 0\}} f(z + sv - x) \langle v, -\sigma_K(x) \rangle C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK) \lambda_1(ds)\right\}. \end{aligned}$$

Weiter ist genau dann

$$\int_{\mathcal{K}_0} \int_{\{x \in \text{bd } K \mid \langle v, \sigma_K(x) \rangle < 0\}} f(z + sv - x) \langle v, -\sigma_K(x) \rangle C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK) = \frac{1}{2} h(\Pi(X, z + sv), v),$$

wenn v senkrecht auf dem Schwerpunkt von μ_{z+sv} steht.

Beweis: Aus Bemerkung 3.1 in der Arbeit von Hug, Last und Weil über die verallgemeinerte Kontakverteilung inhomogener Boolescher Modelle ([13]) ergibt sich für die bedingte Verteilung von $d_{[0,v]}(z, Z)$ der Ausdruck

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(d_{[0,v]}(z, Z) \leq t \mid z \notin Z) = \\ &1 - \exp\left\{\sum_{j=0}^{d-1} \binom{d-1}{j} t^{d-1-j} \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(z + ty + x) \Theta_{j,d-j}(-K, [0, v]; dx \times dy) \mathbb{P}_0(dK)\right\}. \end{aligned}$$

Die dabei auftretenden relativen Stützmaße $\Theta_{j,d-j}$ werden sowohl von Kiderlen in Kapitel 2 seiner Dissertation über Schnittmittelungen und äquivariante Endomorphismen ([16]) als auch von Kiderlen und Weil in Abschnitt 5 von [17] behandelt.

Bevor wir mit dem Beweis fortfahren, benötigen wir noch folgende Definition: Zwei Polytope $L, M \in \mathcal{K}$ sind in *relativer allgemeiner Lage* (siehe Seite 16 in [16] für eine allgemeine Definition dieses Begriffs), wenn für alle $u \in S^{d-1}$ gilt

$$\dim(L + M)(u) = \dim L(u) + \dim M(u).$$

Für $K \in \mathcal{K}$ bezeichnet dabei $K(u) := K \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u \rangle = h(K, u)\}$ die *Stützmenge an K mit äußerer Normalen u* . Insbesondere sind also $K \in \mathcal{K}$ und $[0, u]$ in allgemeiner Lage, wenn K keine zu u parallele Strecke in seinem Rand hat.

Nach Formel (5.5) auf Seite 320 in [17] haben die relativen Stützmaße für Polytope $L, M \in \mathcal{K}$ in relativer allgemeiner Lage folgende Form:

$$\binom{d-1}{j} \Theta_{j,d-j}(L, M; \cdot) := \sum_{F \in \mathcal{F}_j(L)} \sum_{G \in \mathcal{F}_{d-1-j}(M)} [F, G] h(M, u(F + G, L + M)) \lambda_F \otimes \lambda_G.$$

Hier bezeichnet $u(F + G, L + M)$ die äußere Normale der $(d-1)$ -Seite $F + G$ des Polytops $L + M$.

Da die Maße $\Theta_{j,d-j}(L, M; \cdot \times \cdot)$ schwach stetig von L und M abhängen, ergibt sich mittels Approximation durch Polytope für beliebige konvexe Körper, dass

$$\Theta_{j,d-j}(K, [0, v]; \cdot \times \cdot) \equiv 0 \quad \text{für } j = 0, \dots, d-3$$

ist. Für Polytope K gilt außerdem, dass $h([0, v], u(F + [0, v], K + [0, v])) = 0$ für alle $F \in \mathcal{F}_{d-2}(K)$ ist, da $u(F + [0, v], K + [0, v]) = v^\perp$ gilt. Also ist

$$\Theta_{d-2,2}(K, [0, v]; \cdot \times \cdot) \equiv 0.$$

Auch dieses Ergebnis überträgt sich auf beliebige konvexe Körper $K \in \mathcal{K}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(d_{[0,v]}(z, Z) \leq t \mid z \notin Z) \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_0^t \int_{K_0} \int_{\text{bd}(-K) \times \text{bd}[0,v]} f(z + sy + x) \Theta_{d-1,1}(-K, [0, v]; dx \times dy) \mathbb{P}_0(dK) \lambda_1(ds)\right\}. \end{aligned}$$

Aus $h([0, v], \cdot) = \max\{\langle v, \cdot \rangle, 0\}$ folgt, dass der Gradient von $h([0, v], \cdot)$ für $x \in \mathbb{R}^d$ durch

$$\nabla h([0, v], \cdot)(x) = \begin{cases} v, & \text{falls } \langle x, v \rangle > 0 \\ 0, & \text{falls } \langle x, v \rangle < 0 \end{cases}$$

gegeben ist. Sollte $\langle x, v \rangle = 0$ sein, so ist $h([0, v], x)$ nicht definiert. Zusammen mit Formel (5.9) aus [17] (siehe Lemma 2.5 in [16]) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(d_{[0,v]}(z, Z) \leq t \mid z \notin Z) \\ &= 1 - \exp\left\{-\int_0^t \int_{K_0} \int_{\{x \in \text{bd} K \mid \langle u, \sigma_K(x) \rangle < 0\}} f(z + sv - x) \langle v, -\sigma_K(x) \rangle C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK) \lambda_1(ds)\right\} \end{aligned}$$

Für ein beliebiges Borelmaß μ auf S^{d-1} und festes $v \in S^{d-1}$ gilt

$$\frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\langle v, u \rangle| \mu(du) = \int_{\{u \in S^{d-1} | \langle u, v \rangle < 0\}} \langle v, -u \rangle \mu(du) \iff \int_{S^{d-1}} \langle v, u \rangle \mu(du) = 0,$$

und wir haben den Satz bewiesen. \square

Bevor wir nun versuchen, unsere Resultate für das mittlere sichtbare Volumen zu formulieren, müssen wir zunächst einige abkürzende Schreibweisen einführen. Deshalb definieren wir für festes $z_0 \in \mathbb{R}^d$ und $u \in S^{d-1}$ die Abbildungen

$$H_{z_0, u}(t) := \int_0^t \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\{x \in \text{bd } K | \langle u, \sigma_K(x) \rangle < 0\}} f(z_0 + su - x) \langle u, -\sigma_K(x) \rangle C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK) \lambda_1(ds),$$

$$t \in [0, \infty),$$

und

$$h_{z_0, u}(t) := \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\{x \in \text{bd } K | \langle u, \sigma_K(x) \rangle < 0\}} f(z_0 + tu - x) \langle u, -\sigma_K(x) \rangle C_{d-1}(K, dx) \mathbb{P}_0(dK), \quad t \in [0, \infty).$$

Nach Satz 7.18 in [10] besitzt das durch die Verteilungsfunktion

$$t \mapsto 1 - e^{-H_{z_0, u}(t)}, \quad t \in [0, \infty),$$

auf $[0, \infty)$ definierte Wahrscheinlichkeitsmaß eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, die durch

$$t \mapsto h_{z_0, u}(t) e^{-H_{z_0, u}(t)}, \quad t \in [0, \infty),$$

gegeben ist. Damit ergibt sich aus Satz 63

$$\mathbb{E}(d_{[0, u]}(z_0, Z)^d | z \notin Z) = \int_0^\infty t^d h_{z_0, u}(t) e^{-H_{z_0, u}(t)} \lambda_1(dt).$$

Weiterhin gilt für alle $u \in S^{d-1}$ und alle $t \geq 0$ sowohl

$$h_{z_0, u}(t) < h(\Pi(X, z + tu), u)$$

als auch

$$h_{z_0, u}(t) = \frac{1}{2} h(\Pi(X, z + tu), u) \iff \int_{S^{d-1}} v \mu_{z+tu}(dv) \perp u.$$

Nun lässt sich folgender Zusammenhang zwischen dem mittleren sichtbaren Volumen und den assoziierten Zonoiden herleiten:

Satz 64 *Es seien X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist, und Z das von X erzeugte Boolesche Modell. Weiter gelte*

$$\int_{\mathcal{K}_0} \max_{x \in (z-K)} f(x) V_j(K) \mathbb{P}_0(dK) < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $j = 0, \dots, d$ sowie für ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$, dass \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$ keine zu $[0, u]$ parallele Strecke im Rand enthalten. Es seien $z_0 \in \mathbb{R}^d$ und μ_{z_0} zentriert. Weiter seien ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ die Bedingungen

a) $h_{z_0,u}(t) > 0$ für λ_1 -fast alle $t \geq 0$,

b) $h_{z_0,u}$ ist stetig differenzierbar und

c) für $j = 1, \dots, d$ existiere ein $a_j \in [0, \infty)$, so dass für alle $b \geq a_j$ das Integral

$$\int_0^b t^{d-j} \frac{h'_{z_0,u}(t)}{h_{z_0,u}(t)^{j+1}} e^{-H_{z_0,u}(t)} \lambda_1(dt) \geq 0$$

ist,

erfüllt. Dann gilt

$$\bar{V}_s(Z, z_0) \geq 2^d d! V_d(\Pi(X, z_0)^\circ).$$

Bemerkungen:

a) Die zusätzliche Bedingung an \mathbb{P}_0 ist zum Beispiel dann erfüllt, wenn das Maß auf strikt konvexen Körpern konzentriert ist.

b) Ist X stationär, so gilt für alle $z_0 \in \mathbb{R}^d$, $u \in S^{d-1}$ und $t \in [0, \infty)$ sowohl

$$H_{z_0,u}(t) = 1 - e^{-th(\Pi(X), u)} \quad \text{als auch} \quad h_{z_0,u}(t) = h(\Pi(X), u).$$

Die Bedingungen a), b) und c) in Satz 64 sind also alle erfüllt. Wie man an der Herleitung auf Seite 160f in [34] sieht, kann man in diesem Fall auf die Bedingung verzichten, dass \mathbb{P}_0 -fast alle $K \in \mathcal{K}_0$ keine zu $[0, u]$ parallele Strecke im Rand enthalten.

c) Gleichheit gilt zum Beispiel dann, wenn $H_{z_0,u}$ linear für ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ ist. Dies ist bei einem stationären Prozess der Fall.

d) Erinnerung: Es sei $K \in \mathcal{K}_0$ beliebig. Der Polarkörper K° von K ist definiert als

$$K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \text{ für alle } y \in K\},$$

und es gilt

$$\lambda_d(K^\circ) = \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} h(K, u)^{-d} \omega_{d-1}(du).$$

Beweis: Da $u \in S^{d-1}$ zunächst fest ist, schreiben wir im Folgenden kurz H beziehungsweise h statt $H_{z_0,u}$ und $h_{z_0,u}$. H ist invertierbar, da es nach Voraussetzung streng monoton wachsend ist. Damit ergibt sich aus Abschnitt 10.7 in [37] über die Ableitung der Umkehrfunktion und Abschnitt 11.3

in [37] über die partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(d_{[0,u]}(z, Z)^d \mid z \notin Z) &= \int_0^\infty t^d h(t) e^{-H(t)} \lambda_1(dt) \\
&\stackrel{t=H^{-1}(\log s)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^d h(H^{-1}(-\log s)) \underbrace{(H^{-1})'(-\log s)}_{=\frac{1}{h(H^{-1}(-\log s))}} \lambda_1(ds) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^d \lambda_1(ds) \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} [s H^{-1}(-\log s)^d]_{s=x}^{s=1}}_{\geq 0} \\
&\quad + d \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^{d-1} (H^{-1})'(-\log s) \lambda_1(ds) \\
&\geq d \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^{d-1} (H^{-1})'(-\log s) \lambda_1(ds).
\end{aligned}$$

Da aus Bedingung c) folgt, dass ein $x_0 \in (0, 1)$ mit der Eigenschaft

$$\int_x^1 H^{-1}(-\log s)^{d-j} (H^{-1})'(-\log s)^{j-1} (H^{-1})''(-\log s) \lambda_1(ds) \geq 0$$

für alle $x \leq x_0$ und $j = 1, \dots, d$ existiert, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(d_{[0,u]}(z, Z)^d \mid z \notin Z) &\geq d \lim_{x \rightarrow 0} [s H^{-1}(-\log s)^{d-1} (H^{-1})'(-\log s)]_{s=x}^{s=1} \\
&\quad + d(d-1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^{d-2} (H^{-1})'(-\log s)^2 \lambda_1(ds) \\
&\quad + d \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^{d-1} (H^{-1})''(-\log s)^2 \lambda_1(ds)}_{\geq 0 \text{ wegen c)}} \\
&\geq d(d-1) \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 H^{-1}(-\log s)^{d-2} (H^{-1})'(-\log s)^2 \lambda_1(ds) \\
&\quad \vdots \quad (\text{Wiederholung des letzten Schrittes}) \\
&\geq d! \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 (H^{-1})'(-\log s)^d \lambda_1(ds).
\end{aligned}$$

Wegen c) gilt außerdem

$$\begin{aligned}
d! \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 (H^{-1})'(-\log s)^d \lambda_1(ds) &= d! \lim_{x \rightarrow 0} [s (H^{-1})'(-\log s)^d]_{s=x}^{s=1} \\
&\quad + d! \underbrace{d \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 (H^{-1})'(-\log s)^{d-1} (H^{-1})''(-\log s) \lambda_1(ds)}_{\geq 0 \text{ wegen c)}} \\
&\geq d! (H^{-1})'(0)^d \\
&= d! \left(\frac{1}{h(0)}\right)^d \\
&= d! \left(\frac{2}{h(\Pi_z, u)}\right)^d.
\end{aligned}$$

Für das sichtbare Volumen ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\bar{V}_s(Z, z_0) &= \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \mathbb{E}(d_{[0,u]}(z_0, Z)^d \mid z_0 \notin Z) \omega_{d-1}(du) \\
&\geq 2^d d! \frac{1}{d} \int_{S^{d-1}} \left(\frac{1}{h(\Pi_{z_0}, u)}\right)^d \omega_{d-1}(du) \\
&= 2^d d! V_d(\Pi(X, z_0)^\circ),
\end{aligned}$$

und wir haben den Satz bewiesen. \square

Bemerkung: Lassen wir in Satz 64 die Bedingung weg, dass μ_{z_0} zentriert ist, so erhalten wir mit denselben Methoden die Abschätzung $\bar{V}_s(Z, z_0) > d! V_d(\Pi(X, z_0)^\circ)$.

Beispiel: Es sei X ein Poissonprozess mit $\mathbb{P}_0 = \delta_{B^d}$ und $f(x) = e^{\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Weiter sei $z_0 = 0$. Dann gilt sowohl

$$\int_{S^{d-1}} v \mu_0(dv) = \int_{S^{d-1}} v e^{\|v\|^2} \omega_{d-1}(dv) = 0$$

als auch für beliebiges $u \in S^{d-1}$ und $t \in [0, \infty)$ die Abschätzung

$$h_u(t) = \int_{\{v \in S^{d-1} \mid \langle u, v \rangle > 0\}} e^{\|tu+v\|^2} \langle u, v \rangle \omega_{d-1}(dv) > 0,$$

und nach [10], 4.9 und Ü 4.6, ist h_u stetig differenzierbar. Wegen

$$\|tu + v\|^2 = t^2 \|u\|^2 + 2t \underbrace{\langle u, v \rangle}_{> 0} + \|v\|^2 \stackrel{u, v \in S^{d-1}}{=} t^2 + 2t \langle u, v \rangle + 1$$

gilt für die Ableitung

$$h'_u(t) = \int_{\{v \in S^{d-1} \mid \langle u, v \rangle > 0\}} (2t + 2\langle u, v \rangle) e^{\|tu+v\|^2} \langle u, v \rangle \omega_{d-1}(dv) \geq 0.$$

Damit erfüllt X an der Stelle $z_0 = 0$ die Voraussetzung des letzten Satzes, und das mittlere sichtbare Volumen kann nach unten abgeschätzt werden.

Korollar 7 *Es seien $z_0 \in \mathbb{R}^d$, X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist, und Z das von X erzeugte Boolesche Modell. Sind alle Voraussetzungen von Satz 64 erfüllt, so gilt*

$$\bar{V}_s(Z, z_0) \gamma_d(z_0) \geq d! 4^d.$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich direkt aus der inversen Blaschke-Santaló-Ungleichung für Zonoide (siehe Satz 12), Satz 64 und den Ergebnissen für die Schnittdichten aus dem letzten Abschnitt. Die Ungleichung besagt nämlich, dass für ein beliebiges Zonoid $K \in \mathcal{K}_0$ gilt

$$\lambda_d(K) \lambda_d(K^\circ) \geq \frac{4^d}{d!}.$$

In unserem Fall ergibt sich damit

$$\bar{V}_s(Z, z_0) \gamma_d(z_0) \geq 2^d d! V_d(\Pi(X, z_0)^\circ) \frac{d!}{2^d} V_d(\Pi(X, z_0)) \geq d! 4^d,$$

und wir haben das Korollar bewiesen. □

In anderen Fällen ist eine Abschätzung des sichtbaren Volumens nach oben möglich:

Satz 65 *Es seien $z_0 \in \mathbb{R}^d$, X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist, und Z das von X erzeugte Boolesche Modell. Weiter seien alle Voraussetzungen von Satz 64 erfüllt, wobei c) durch folgende Bedingung c*) ersetzt wird: Für $j = 1, \dots, d$ existiere ein $a_j \in [0, \infty)$, so dass für alle $b \geq a_j$ das Integral*

$$\int_0^b t^{d-j} \frac{h'_{z_0, u}(t)}{h_{z_0, u}(t)^{j+1}} e^{-H_{z_0, u}(t)} \lambda_1(dt) \leq 0$$

ist. Dann gilt

$$\bar{V}_s(Z, z_0) \leq 2^d d! V_d(\Pi(X, z_0)^\circ).$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 64. □

Bemerkung: Auch hier gilt Gleichheit beispielsweise dann, wenn $H_{z_0, u}$ linear für ω_{d-1} -fast alle $u \in S^{d-1}$ ist. Stationäre Poissonprozesse erfüllen diese Bedingung ebenso wie a), b) und c*).

Beispiel: Es sei X ein Poissonprozess mit $\mathbb{P}_0 = \delta_{B^d}$ und $f(x) = e^{-\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^d$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Weiter sei $z_0 = 0$. Dann gilt

$$\int_{S^{d-1}} u \mu_0(du) = \int_{S^{d-1}} u e^{-\|u\|^2} \omega_{d-1}(du) = 0,$$

μ_0 ist also zentriert. Desweiteren ist für beliebiges $u \in S^{d-1}$ und $t \in [0, \infty)$

$$h_u(t) = \int_{\{v \in S^{d-1} | \langle u, v \rangle > 0\}} e^{-\|tu+v\|^2} \langle u, v \rangle \omega_{d-1}(dv) > 0.$$

Nach [10], 4.9 und Ü 4.6, ist h_u außerdem stetig differenzierbar. Wegen

$$\|tu + v\|^2 = t^2 \|u\|^2 + 2t \underbrace{\langle u, v \rangle}_{>0} + \|v\|^2 \stackrel{u, v \in S^{d-1}}{=} t^2 + 2t \langle u, v \rangle + 1$$

gilt für die Ableitung

$$h'_u(t) = - \int_{\{v \in S^{d-1} | \langle u, v \rangle > 0\}} (2t + 2\langle u, v \rangle) e^{-\|tu+v\|^2} \langle u, v \rangle \omega_{d-1}(dv) \leq 0.$$

Damit erfüllt X an der Stelle $z_0 = 0$ die Voraussetzung des letzten Satzes, und das mittlere sichtbare Volumen kann nach oben abgeschätzt werden.

Korollar 8 *Es seien $z_0 \in \mathbb{R}^d$, X ein translationsregulärer Poissonprozess mit stetiger Dichte, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist, und Z das von X erzeugte Boolesche Modell. Weiter seien alle Voraussetzungen von Satz 65 erfüllt. Dann gilt*

$$\bar{V}_s(Z, z_0) \gamma_d(z_0) \leq (d! \kappa_d)^2.$$

Beweis: Die Aussage ergibt sich aus Satz 65, den Ergebnissen für die Schnittdichten aus dem letzten Abschnitt und der Blaschke-Santaló-Ungleichung (siehe Satz 10). Sie besagt, dass für einen beliebigen konvexen Körper $K \in \mathcal{K}_0$ gilt

$$\lambda_d(K) \lambda_d(K^\circ) \leq \kappa_d^2.$$

□

Bemerkung: Es sei X ein stationärer Poissonprozess und Z das von X erzeugte Boolesche Modell. Aus den letzten beiden Korollaren erhalten wir dann die beiden Ungleichungen

$$d! 4^d \leq \bar{V}_s(Z, z_0) \gamma_d(z_0) \leq (d! \kappa_d)^2,$$

die wir schon in Kapitel 3 erwähnt hatten. Dabei hängen $\bar{V}_s(Z, z_0)$ und $\gamma_d(z_0)$ nicht von $z_0 \in \mathbb{R}^d$ ab. Die in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchungen verallgemeinern also die schon bekannten Resultate für stationäre Poissonprozesse.

5.5 Eine Verallgemeinerung der Schnittdichten

Die Definition der Maße $\nu'_{k,k}$ und ν_k , $k \in \{1, \dots, d\}$, werden wir im Folgenden erweitern und sehen, dass die veränderten Maße zu den verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaßen in enger

Beziehung stehen.

Messbarkeitsfragen behandelt man wie in den Abschnitten 2 und 3.

Es sei X ein translationsregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $k \in \{1, \dots, d\}$ und $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ definieren wir ein Maß $\nu_k(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \cdot)$ durch

$$\begin{aligned} \nu_k(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, B) &:= \\ \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} & 1_{\mathcal{A}_1}(K_1 - s(K_1)) \dots 1_{\mathcal{A}_k}(K_k - s(K_k)) \mathcal{H}^{d-k}(\text{bd}K_1 \cap \dots \cap \text{bd}K_k \cap B). \end{aligned}$$

Bemerkung: Wählen wir speziell $\mathcal{A}_1 = \dots = \mathcal{A}_k = \mathcal{K}_0$, so ergibt sich gerade das Maß ν_k aus Abschnitt 3.

Analog zur Herleitung in Abschnitt 3 erhalten wir folgende Aussage:

Satz 66 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und X ein translationregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann besitzt das Maß $\nu_k(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \cdot)$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version $\gamma_k(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \cdot)$ dieser Dichte ist für $z \in \mathbb{R}^d$ durch*

$$\begin{aligned} \gamma_k(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, z) &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}_1}(K_1) \dots \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}_k}(K_k) \int_{\text{bd}K_1} \dots \int_{\text{bd}K_k} |\det(\sigma_{K_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_k}(t_k))| \times \\ & f(K_1, z - t_1) \dots f(K_k, z - t_k) \mathcal{H}^{d-1}(dt_k) \dots \mathcal{H}^{d-1}(dt_1) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}_1}(K_1) \dots \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}_k}(K_k) \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} |\det(\sigma_{K_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_k}(x_k))| \times \\ & f(K_1, z - x_1) \dots f(K_k, z - x_k) C_{d-1}(K_1, dx_1) \dots C_{d-1}(K_k, dx_k) \mathbb{P}_0(dK_1) \times \\ & \dots \mathbb{P}_0(dK_k) \end{aligned}$$

gegeben.

Es seien $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $z \in \mathbb{R}^d$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \nu_k(\mathcal{A}, \cdot) &:= \nu_k(\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}, \cdot), \\ \gamma_k(\mathcal{A}, z) &:= \gamma_k(\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}, z) \end{aligned}$$

und ein Zonoid $\Pi(X, \mathcal{A}, z)$ durch seine Stützfunktion

$$h(\Pi(X, \mathcal{A}, z), u) := \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \mu_z(\mathcal{A}, dv), \quad u \in S^{d-1},$$

falls μ_z endlich ist. Wie in Abschnitt 3 kann man nun folgenden Satz zeigen:

Satz 67 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$ und X ein translationregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann gilt für alle $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$*

$$\gamma_k(\mathcal{A}, z) = \frac{k!}{2^k} V_k(\Pi(X, \mathcal{A}, z))$$

und

$$\gamma_k(\mathcal{A}, z) \leq \frac{k! \kappa_{d-1}^k \binom{d}{k}}{d^k \kappa_d^{k-1} \kappa_{d-k}} \gamma_1(\mathcal{A}, z)^k.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\Pi(X, \mathcal{A}, z)$ eine Kugel ist.

Selbstverständlich können wir ebenfalls die Maße $\nu'_{k,k}$ verallgemeinern, indem wir für $k \in \{1, \dots, d\}$ und $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ ein Maß $\nu'_{k,k}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \cdot)$ durch

$$\nu'_{k,k}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, B) :=$$

$$\mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} 1_{\mathcal{A}_1}(K_1 - s(K_1)) \dots 1_{\mathcal{A}_k}(K_k - s(K_k)) \Phi_{d-k}(K_1 \cap \dots \cap K_k; \text{bd}K_1 \cap \dots \cap \text{bd}K_k \cap B),$$

$B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, definieren. Wie in Abschnitt 2 dieses Kapitels zeigt man:

Satz 68 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und X ein translationregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann besitzt $\nu'_{k,k}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \cdot)$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version $\gamma'_{k,k}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \cdot)$ dieser Dichte ist für $z \in \mathbb{R}^d$ durch*

$$\begin{aligned} \gamma'_{k,k}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, z) &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}_1}(K_1) \dots \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}_k}(K_k) \int_{(\mathbb{R}^d)^k} f(K_1, z - x_1) \dots f(K_k, z - x_k) \times \\ &\quad \Phi_{d-k}^{(d-k)}(K_1, \dots, K_k, d(x_1, \dots, x_k)) \mathbb{P}_0(dK_1) \dots \mathbb{P}_0(dK_k). \end{aligned}$$

gegeben.

Definieren wir für $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und $z \in \mathbb{R}^d$

$$\nu'_{k,k}(\mathcal{A}, \cdot) := \nu'_{k,k}(\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}, B)$$

und

$$\gamma'_{k,k}(\mathcal{A}, z) := \gamma_k(\mathcal{A}, \dots, \mathcal{A}, z),$$

so lässt sich auch in diesem Fall wieder ein Zusammenhang zwischen diesen Schnittdichten und den gemischten Funktionalen eines konvexen Körpers herleiten. Erfüllt nämlich das Maß $\mu_z(\mathcal{A}, \cdot)$ für ein $z \in \mathbb{R}^d$ die Voraussetzungen des Existenzsatzes von Minkowski, so existiert ein eindeutig bestimmter konvexer Körper $B(X, \mathcal{A}, z) \in \mathcal{K}_0$ mit $(d-1)$ -tem Oberflächenmaß $\mu_z(\mathcal{A}, \cdot)$.

Wie im zweiten Abschnitt dieses Kapitels beweist man:

Satz 69 *Es seien $k \in \{1, \dots, d\}$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ und X ein translationregulärer Poissonprozess, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Dann gilt*

$$\gamma'_{k,k}(\mathcal{A}, z) = V_{d-1, \dots, d-1}^{(d-k)}(B(X, \mathcal{A}, z), \dots, B(X, \mathcal{A}, z))$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, an denen $B(X, \mathcal{A}, z)$ existiert, und

$$\gamma'_{k,k}(\mathcal{A}, z) < (2\gamma'_{1,1}(\mathcal{A}, z))^k$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$.

Bemerkung: Die anderen Ungleichungen, die in Abschnitt 2 gezeigt werden, lassen sich ebenfalls übertragen.

In den letzten beiden Kapiteln haben wir sowohl Theorem 1 als auch Formel (15) aus [31] auf Prozesse konvexer Partikel übertragen. In Theorem 2 aus [31] werden beide Aussagen zusammengeführt, und man erhält die Aussage, dass alle Schnittdichten eines translationsregulären Hyperebenenpoissonprozesses mit stetiger Dichte genau dann auf ganz \mathbb{R}^d proportional zueinander sind, wenn der Prozess stationär und isotrop ist.

Um ein entsprechendes Resultat für Poissonprozesse konvexer Partikel zu erhalten, müsste man Satz 67 beziehungsweise 69 mit Satz 43 oder 44 aus dem letzten Kapitel verbinden können.

Mangels entsprechender Ungleichungen für die gemischten Funktionale konvexer Körper ist in Satz 69 noch keine Charakterisierung des Gleichheitsfalles möglich und damit auch keine Antwort auf die Frage, für welche Klasse von Prozessen er vorliegt.

Die in Satz 67 auftretenden Schnittdichten $\gamma_k(\mathcal{A}, \cdot)$ hängen nur vom geraden Anteil der Maße $\mu_z(\cdot, \mathcal{A})$ ab. Deshalb ist Gleichheit für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_0)$ in diesem Fall gleichbedeutend damit, dass der gerade Anteil von $\mu_z(\cdot, \mathcal{A})$ ein rotationsinvariantes Maß ist. Ob und welche Rückschlüsse dann auf den zu Grunde liegenden Prozess möglich sind, ist noch offen. Aber Satz 44 legt die Vermutung nahe, dass Gleichheit nur für stationäre Prozesse von Kugeln gelten kann.

Kapitel 6

Quermaßdichten inhomogener Zylinderprozesse

6.1 Motivation

Unser letztes Ziel ist es, die bisher hergeleiteten Resultate auf Zylinderprozesse zu übertragen und so die Ergebnisse für Hyperebenenprozesse von Schneider aus [31] und für Prozesse konvexer Partikel aus den letzten beiden Kapiteln zusammenzuführen. Erinnern wir uns deshalb zunächst noch einmal an die Definition der Maße $\nu'_{k,k}$, nämlich

$$\nu'_{k,k}(\cdot) := \mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{d-k}(K_1 \cap \dots \cap K_k, \cdot \cap \text{bd } K_1 \cap \dots \cap \text{bd } K_k).$$

Für Poissonprozesse konvexer Partikel X haben wir mittels des Satzes von Campbell und translativer Integralformeln für die Maße Φ_{d-j} gezeigt, dass $\nu'_{k,k}$ eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzt, und eine Version dieser Dichte angegeben.

Die in dieser Arbeit bisher nur für konvexe Körper definierten Krümmungsmaße lassen sich, da sie lokal erklärt sind, sehr einfach auf Zylinder übertragen (siehe Abschnitt 4.3 in [33]). Die von uns benötigten translativen Integralformeln (Verallgemeinerungen der Ergebnisse aus dem Abschnitt über Integralgeometrie im ersten Kapitel) finden sich in der Literatur allerdings noch nicht in ausreichend allgemeiner Form.

Eine entsprechende Formel für den Spezialfall eines einzelnen Zylinders wird in einer Arbeit von Schneider und Weil über translative und kinematische Integralformeln für Krümmungsmaße ([32]) gezeigt. Die Herleitung in diesem Kapitel folgt dem Beweis von Theorem 2 in [32].

Danach werden wir diese integralgeometrischen Formeln dazu benutzen, gemischte Quermaßdichten für inhomogene Zylinderprozesse und die von ihnen abgeleiteten Booleschen Modelle zu berechnen. Zum einen führen wir dadurch analoge Resultate von Fallert für nicht-stationäre Partikel- und Ebenenprozesse aus [3] zusammen und verallgemeinern zum anderen Ergebnisse von Davy für stationäre und isotrope Zylinderprozesse aus [2].

Der Übertragung unserer bisherigen Resultate auf Zylinderprozesse ist dann das letzte Kapitel gewidmet.

6.2 Definitionen

Zunächst sollen die Begriffe Zylinder und Zylinderprozess definiert werden; die Bezeichnungen und Schreibweisen orientieren sich an einer Arbeit von Weil über Punktprozesse von Zylindern, Partikeln und Ebenen ([38]).

Es seien also $d \geq 2$ eine natürliche Zahl und $q \in \{0, \dots, d-1\}$. Im Zusammenhang mit den q -Ebenenprozessen haben wir die folgenden Bezeichnungen eingeführt, die wir auch hier weiter verwenden wollen: \mathcal{L}_q^d bezeichne die Menge aller q -dimensionalen *linearen* Unterräume des \mathbb{R}^d und \mathcal{E}_q^d die Klasse aller q -dimensionalen *affinen* Unterräume des \mathbb{R}^d .

Unter einem *Zylinder* Z mit Basis $K \in \mathcal{K}$ und Richtungsraum $L \in \mathcal{L}_q^d$ verstehen wir nun die Minkowski-Summe

$$Z = K + L,$$

wobei $K \subseteq L^\perp$ sein soll. Mit \mathcal{Z}_q^d beziehungsweise $\mathcal{Z}_{q,0}^d$ soll im Folgenden die Menge aller Zylinder mit q -dimensionalem Richtungsraum beziehungsweise die Menge aller Zylinder mit q -dimensionalem Richtungsraum und Basis $K \in \mathcal{K}$ mit Steinerpunkt $s(K) = 0$ bezeichnet werden. Wir versehen beide Mengen mit der durch die Topologie der abgeschlossenen Konvergenz induzierten Spurtopologie.

Folgende Aussage werden wir später einmal benötigen:

Satz 70 *Konvergieren $(K_i + L_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{Z}_{q,0}^d$ gegen $K + L \in \mathcal{Z}_{q,0}^d$ in der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz, so konvergiert K_i gegen K bezüglich der Hausdorff-Metrik und L_i gegen L in der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz.*

Beweis: Es sei $(K_i + L_i) \subseteq \mathcal{Z}_{q,0}^d$ eine Folge von Zylindern mit $K_i + L_i \rightarrow K + L \in \mathcal{Z}_{q,0}^d$. \mathcal{L}_q^d ist kompakt und metrisierbar (nach Satz 10.13 in [26]), also existiert eine konvergente Teilfolge (L_{i_m}) mit Grenzwert L' . Falls $L' \neq L$ ist, existiert ein $u \in S^{d-1}$, sodass $\alpha u \in L' \setminus L$ liegt für alle $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es sei nun $\alpha \neq 0$ fest. Dann existiert eine Folge (l_{i_m}) mit $l_{i_m} \in L_{i_m}$ und $l_{i_m} \rightarrow \alpha u$. Da nach Voraussetzung $0 \in K_{i_m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt, muss $\alpha u \in K + L$ ebenfalls erfüllt sein. Insbesondere existieren $0 \neq k \in K$ und $l \in L$ mit $u = k + l$. Weil die entsprechenden Darstellungen wegen $K \perp L$ eindeutig sind, ergibt sich daraus $\alpha u = \alpha k + \alpha l$. Damit muss aber $\alpha k \in K$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten, was einen Widerspruch zur Kompaktheit von K darstellt. Also gilt $L' = L$.

Annahme: (K_{i_m}) konvergiert nicht gegen K in der Hausdorff-Metrik. Dann sind zwei Situationen möglich:

- a) Es existieren ein $\epsilon > 0$ und eine Folge (k_{i_n}) mit $k_{i_n} \in K_{i_n}$, $d(\{k_{i_n}\}, K) \geq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(i_n) \subseteq (i_m)$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass k_{i_n} gegen ein k konvergiert. Für alle $u \in S^{d-1} \cap L$ existiert eine Folge (l_{i_n}) mit $l_{i_n} \in L_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, und $l_{i_n} \rightarrow u$. Daraus folgt, dass $\langle u, k \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle l_{i_n}, k_{i_n} \rangle = 0$ gilt. Also ist $k \in L^\perp$. Da andererseits aber $k \in K + L$ ebenfalls gelten muss, folgt $k \in K$ im Widerspruch zur Konstruktion von k .
- b) Es existieren ein $\epsilon > 0$ und ein $k \in K$ mit $d(\{k\}, K_{i_n}) \geq \epsilon$ für eine Teilfolge $(i_n) \subseteq i_m$. Dann gibt es ebenfalls Folgen $(k_{i_n}), (l_{i_n})$ mit $k_{i_n} \in K_{i_n}$, $l_{i_n} \in L_{i_n}$, $k_{i_n} \rightarrow k' \in L^\perp$, $l_{i_n} \rightarrow l' \in L$ und $k_{i_n} + l_{i_n} \rightarrow k$. Aus $k' + l' = k \Leftrightarrow l' = k - k' \in L^\perp$, folgt $l' = 0$ und $k = k'$ im Widerspruch zur Wahl von k .

Damit konvergiert K_{i_m} in der Hausdorff-Metrik gegen K .

Es sei nun $\epsilon > 0$ fest. Falls eine Teilfolge (i_j) mit $d(K_{i_j}, K) \geq \epsilon$, $j \in \mathbb{N}$, existiert, können wir wegen der Kompaktheit von \mathcal{L}_q^d ohne Einschränkung annehmen, dass L_{i_j} gegen L konvergiert. Daraus folgt aber, dass K_{i_j} gegen K in der Hausdorff-Metrik konvergiert, und wir erhalten einen Widerspruch zur Wahl der K_{i_j} . Also konvergiert die Folge K_i in der Hausdorff-Metrik gegen K .

Annahme: L_i konvergiert nicht gegen L in der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz. Dann sind zwei Situationen möglich:

- a) Es existieren ein $\epsilon > 0$, ein $l \in L$ und eine Teilfolge (L_{i_m}) mit $(l + \epsilon B^d) \cap L_{i_m} = \emptyset$. Da wir aber ohne Einschränkung annehmen dürfen, dass die Folge (L_{i_m}) gegen L konvergiert, erhalten wir sofort einen Widerspruch.
- b) Es existiert eine Folge (l_{i_m}) mit $l_{i_m} \in L_{i_m}$, $m \in \mathbb{N}$, und $l_{i_m} \rightarrow l' \notin L$. Weil wieder ohne Einschränkung (L_{i_m}) als gegen L konvergierend vorausgesetzt werden kann, erhalten wir ebenfalls einen Widerspruch.

Also konvergiert L_i gegen L in der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz. Die umgekehrte Richtung der Äquivalenz gilt wegen Satz 19 g), und wir haben den Satz bewiesen. \square

Es seien $d \geq 2$ und $q \in \{0, \dots, d-1\}$. Da \mathcal{Z}_q^d eine messbare Teilmenge von \mathcal{F} ist, können wir einen Punktprozess X auf \mathcal{Z}_q^d als einen Punktprozess auf \mathcal{F} definieren, dessen Intensitätsmaß Θ auf dem mit der Spur- σ -Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{Z}_q^d)$ versehenen Raum \mathcal{Z}_q^d konzentriert ist. Einen solchen Punktprozess X nennen wir einen q -Zylinderprozess beziehungsweise einfach *Zylinderprozess*.

6.3 Eine translative Integralformel für Zylinder

Weil es sich bei einem Zylinder Z um eine abgeschlossene konvexe Menge handelt, lassen sich die Krümmungsmaße $\Phi_0(Z, \cdot), \dots, \Phi_d(Z, \cdot)$ auch für ihn definieren. Dabei geht man wie folgt vor: Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine beschränkte Borelmenge und $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit $B \subseteq \text{int } K$. Für $j = 0, \dots, d$ setzen wir nun

$$\Phi_j(Z, B) := \Phi_j(Z \cap K, B).$$

Da die Krümmungsmaße lokal erklärt sind, ist diese Definition unabhängig von der konkreten Wahl von K . Aus dem Maß-Fortsetzungssatz folgt, dass sich die so definierte Mengenfunktion zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen lässt. Die Eindeutigkeit dieser Fortsetzung ergibt sich aus dem Eindeutigkeitsatz für Maße.

Rekapitulieren wir zunächst die schon bekannten Ergebnisse aus [32]. Wir sagen, dass zwei polyedrische Mengen K und K' *in allgemeiner Lage* sind, falls für alle $k, m \in \{0, \dots, d\}$, jede k -Seite F von K und jede m -Seite F' von K' gilt, dass $L(F) \cap L(F')$ höchstens die Dimension $\max\{0, k + m - d\}$ hat.

Es seien $q \in \{0, \dots, d-1\}$, $L \in \mathcal{L}_q^d$ und $K \in \mathcal{K}$ mit der Eigenschaft $K \subseteq L^\perp$. Weiter seien $K' \in \mathcal{K}$ derart, dass $K + L$ und K' in allgemeiner Lage sind, und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $B' \in \mathcal{B}(L^\perp)$ Borelmengen. Sind K und K' Polytope, so definieren wir für $k \in \{0, \dots, d\}$ und $j \in \{0, \dots, k\}$ Maße $\Phi_{L_q, k}^{(j)}(K', K; \cdot)$

auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{B}(L^\perp)$ durch

$$\Phi_{L,q,k}^{(j)}(K', K; B \times B') := \sum_{F' \in \mathcal{F}_k(K')} \sum_{F \in \mathcal{F}_{d+j-k-q}(K)} \gamma(F', F + L_q; K', K + L_q) [F', F + L_q] \lambda_{F'}(B) \lambda_F(B').$$

Man beachte, dass sich für $q = 0$ die schon bekannte Definition der gemischten Maße von K' und K ergibt. Für $q = d$ sowie $j = 0$ entspricht obige Definition der des k -ten Krümmungsmaßes von K' .

Die so eingeführten Maße lassen sich per Approximation auf beliebige konvexe Körper ausdehnen (siehe Seite 74f in [32]), und es gilt:

Satz 71 *Es seien $q \in \{0, \dots, d-1\}$, $L \in \mathcal{L}_q^d$ und $K \in \mathcal{K}$ mit der Eigenschaft $K \subseteq L^\perp$. Weiter seien $K' \in \mathcal{K}$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $B' \in \mathcal{B}(L^\perp)$ Borelmengen. Dann gilt für $j = 0, \dots, d$ die Formel*

$$\int_{L^\perp} \Phi_j(K' \cap (K + L + x), B \cap (B' + L + x)) \lambda_{d-q}(dx) =$$

a)

$$\Phi_j(K', B) \Phi_{d-q}(K, B') + \sum_{k=j+1}^{d-1} \Phi_{L,k}^{(j)}(K', K; B \times B') + \Phi_d(K', B) \Phi_{j-q}(K, B'),$$

falls $j \in \{q, \dots, d\}$ ist, und

b)

$$\Phi_j(K', B) \Phi_{d-q}(K, B') + \sum_{k=j+1}^{d-j-q} \Phi_{L,k}^{(j)}(K', K; B \times B'),$$

falls $j \in \{0, \dots, q-1\}$ ist.

Beweis: Die Behauptung wird in [32] auf Seite 74f bewiesen. □

Später werden wir dieses Resultat in etwas anderer Form benötigen, die wir nun herleiten wollen. Wir erhalten aus dem letzten Satz nämlich

Korollar 9 *Es seien $q \in \{0, \dots, d\}$, $L \in \mathcal{L}_q^d$ und $K_0, K \in \mathcal{K}^d$ mit $K \subseteq L^\perp$. Dann gilt für alle $g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ und $h : L^\perp \rightarrow [0, \infty)$ messbar*

$$\int_{L^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x_0) h((x_0 - p_L(x_0)) - x_1) \Phi_j(K_0 \cap (K + L + x); dx_0) \lambda_{L^\perp}(dx_1) =$$

a)

$$\sum_{k=j}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} g(x_0) h(x_1) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K; d(x_0, x_1)),$$

falls $j \in \{q, \dots, d\}$ ist, und

b)

$$\sum_{k=j}^{d+j-q} \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} g(x_0) h(x_1) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K; d(x_0, x_1)),$$

falls $j \in \{0, \dots, q-1\}$ ist.

Beweis: Nach dem letzten Satz gilt für alle Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $B' \in \mathcal{B}(L^\perp)$ und alle $j \in \{q, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned} & \int_{L^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B \cap (B' + L + x_1)}(x_0) \Phi_j(K_0 \cap (K + L + x_1); dx_0) \lambda_{L^\perp}(dx_1) \\ &= \sum_{k=j}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} 1_{B \times B'}(x_0, x_1) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K; d(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

Außerdem haben wir für alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $x_1 \in L^\perp$ die Identität

$$1_{B \cap (B' + L + x_2)}(x_0) = 1_{B \times B'}(x_0, (x_0 - p_L(x_0)) - x_1).$$

Kombiniert man die letzten beiden Aussagen, so erhält man

$$\begin{aligned} & \int_{L^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_{B \times B'}(x_0, (x_0 - p_L(x_0)) - x_1) \Phi_j(K_0 \cap (K + L + x_1); dx_0) \lambda_{L^\perp}(dx_1) \\ &= \sum_{k=j}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} 1_{B \times B'}(x_0, x_1) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K; d(x_0, x_1)) \\ &= \sum_{k=j}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} 1_B(x_0) 1_{B'}(x_1) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K; d(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

Wir haben die Behauptung also für Borelmengen gezeigt. Mit den üblichen Approximationsargumenten aus der Maß- und Integraltheorie ergibt sich daraus Teil a) der Behauptung. Ganz analog geht man für $j \in \{0, \dots, q-1\}$ vor. \square

Diese beiden Ergebnisse sollen nun auf mehr als einen Zylinder ausgedehnt werden. Dank des Satzes von der monotonen Konvergenz genügt es dabei, die entsprechenden Aussagen für beschränkte Borelmengen zu zeigen. In diesem Fall können wir aber aufgrund der lokalen Erklärtheit der Krümmungsmaße auf die schon bekannten Resultate für konvexe Körper zurückgreifen.

Satz 72 *Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \dots, d\}$. Weiter seien $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{L}^d$ mit $\dim L_i = q_i$ für $i = 1, \dots, k$ und $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ mit $K_1 \subseteq L_1^\perp, \dots, K_k \subseteq L_k^\perp$. Für Borelmengen $B'_1, B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $B'_1 \subseteq L_1, B_1 \subseteq L_1^\perp, \dots, B_k \subseteq L_k^\perp$ gilt dann*

$$\begin{aligned} & \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_2^\perp} \Phi_j((K_1 + L_1) \cap (K_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); (B_1 \times B'_1) \cap \dots \\ & \quad (B_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap (B_k + L_k + x_k)) \lambda_{L_2^\perp}(dx_2) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k) \\ &= \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k=j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d+j}} \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) \lambda_{L_1}(B'_1). \end{aligned}$$

Für $m_1, \dots, m_k \in \{j, \dots, d\}$ mit $m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j$ ist

$$\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$$

ein endliches Borelmaß auf $\mathcal{B}(L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp)$. Es hängt schwach stetig von K_1, \dots, K_k ab und ist für Polytope von der Form

$$\begin{aligned} & \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) = \\ & \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1 - q_1}(K_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k - q_k}(K_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k) \times \\ & [F_1 + L_1, \dots, F_k + L_k] \lambda_{F_1}(B_1) \dots \lambda_{F_k}(B_k). \end{aligned}$$

Bemerkung: Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, definieren wir

$$\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot) := 0,$$

falls $m_i < q_i$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt.

Beweis: Es seien $(K_1^{(n)}), \dots, (K_k^{(n)})$ Folgen mit $K_i^{(n)} \rightarrow K_i$ für $n \rightarrow \infty$, $K_i^{(n)} \subseteq L_i^\perp$ für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, k$. Indem man zunächst zwischen beschränkten und unbeschränkten Mengen unterscheidet, erhält man aus Theorem 3.1 (b) und Korollar 3.4 in [39], dass für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq (\mathbb{R}^d)^k$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1^{(n)} + L_1, \dots, K_k^{(n)} + L_k; A) \leq \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; A).$$

Nach dem Portmanteau-Theorem (siehe Satz 19.1 in [10]) hängt $\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; \cdot)$ also schwach stetig von K_1, \dots, K_k ab.

Es seien nun $B_1, \dots, B_k, B'_1, \dots, B'_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkten Borelmengen mit $B_1 \subseteq L_1^\perp, \dots, B_k \subseteq L_k^\perp$ und $B'_1 \subseteq L_1, \dots, B'_k \subseteq L_k$ und $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ Polytope.

Wir definieren

$$\begin{aligned} & \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) := \\ & \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1 - q_1}(K_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k - q_k}(K_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k) \times \\ & [F_1 + L_1, \dots, F_k + L_k] \lambda_{F_1}(B_1) \dots \lambda_{F_k}(B_k). \end{aligned}$$

Nach dem Fortsetzungs- und Eindeutigkeitsatz für Maße lässt sich diese Mengenfunktion in eindeutiger Weise zu einem Maß auf $\mathcal{B}(L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp)$ fortsetzen.

Da die gemischten Maße lokal definiert sind, können wir L_1, \dots, L_k durch Quader $W_1 \subseteq L_1, \dots,$

$W_k \subseteq L_k$ mit $\dim W_i = q_i$ und $B'_i \subseteq \text{int } W_i$ für $i = 1, \dots, k$ ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned}
& \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; (B_1 \times B'_1) \times \dots \times (B_k \times B'_k)) \\
&= \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1}(K_1 + W_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k}(K_k + W_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; K_1 + W_1, \dots, K_k + W_k) \times \\
& \quad [F_1, \dots, F_k] \lambda_{F_1}(B_1 \times B'_1) \dots \lambda_{F_k}(B_k \times B'_k) \\
&= \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1 - q_1}(K_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k - q_k}(K_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; K_1 + W_1, \dots, K_k + W_k) \times \\
& \quad [F_1 + L_1, \dots, F_k + L_k] \lambda_{F_1}(B_1) \dots \lambda_{F_k}(B_k) \lambda_{W_1}(B'_1) \dots \lambda_{W_k}(B'_k) \\
&= \sum_{F_1 \in \mathcal{F}_{m_1 - q_1}(K_1)} \dots \sum_{F_k \in \mathcal{F}_{m_k - q_k}(K_k)} \gamma(F_1, \dots, F_k; K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k) \times \\
& \quad [F_1 + L_1, \dots, F_k + L_k] \lambda_{F_1}(B_1) \dots \lambda_{F_k}(B_k) \lambda_{L_1}(B'_1) \dots \lambda_{L_k}(B'_k).
\end{aligned}$$

Für beschränkten Borelmengen B'_1, \dots, B'_k gilt damit

$$\begin{aligned}
& \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; (\cdot \times B'_1) \times \dots \times (\cdot \times B'_k)) \quad (*) \\
&= \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot) \lambda_{L_1}(B'_1) \dots \lambda_{L_k}(B'_k)
\end{aligned}$$

für ein eindeutig bestimmtes endliches Borelmaß

$$\Phi_{m_1, L_1; m_2, L_2; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$$

auf $\mathcal{B}(L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp)$. Durch Approximation überträgt sich die Darstellung (*) auf beliebige konvexe Körper; für $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}$ mit $K_1 \subseteq L_1^\perp, \dots, K_k \subseteq L_k^\perp$ existieren also endliche Maße

$$\Phi_{m_1; m_2, L_2; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$$

auf $\mathcal{B}(L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp)$, welche die Gleichung

$$\begin{aligned}
& \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; (\cdot \times B'_1) \times \dots \times (\cdot \times B'_k)) \\
&= \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot) \lambda_{L_1}(B'_1) \dots \lambda_{L_k}(B'_k)
\end{aligned}$$

erfüllen. Da $\Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; \cdot)$ schwach stetig von K_1, \dots, K_k abhängt, gilt dies auch für $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$.

Nun wollen wir noch die Integralformel beweisen. Es seien zunächst alle beteiligten Borelmengen beschränkt und zusätzlich gelte $\lambda_{L_i}(B'_i) = 1$ für $i = 2, \dots, k$. Dann ergeben sich aus den entsprechenden translativen Integralformeln für konvexe Körper, indem wir zunächst wieder L_1, \dots, L_k

durch geeignete Würfel ersetzen, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_j((K_1 + L_1) \cap (K_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); (B_1 \times B'_1) \cap \times \\
& ((B_2 \times B'_2) + x_2) \cap \dots \cap ((B_k \times B'_k) + x_k)) \lambda_d(dx_2) \dots \lambda_d(dx_k) \\
= & \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1 + L_1, \dots, K_k + L_k; (B_1 \times B'_1) \times \dots \times (B_k \times B'_k)) \\
= & \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) \lambda_{L_1}(B'_1).
\end{aligned}$$

Auf Seite 75 in [32] findet sich folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_j((K_1 + x) \cap K_2 + L_2, (B_1 + x) \cap (B_2 \times B'_2)) \lambda_d(dx) \\
= & \int_{L_2^\perp} \Phi_j(K_1 \cap (K_2 + L_2 + x), B_1 \cap (B_2 + L_2 + x)) \lambda_{d-q}(dx).
\end{aligned}$$

Da alle Borelmengen als beschränkt vorausgesetzt sind, liefert ihre wiederholte Anwendung

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \Phi_j((K_1 + L_1) \cap (K_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); (B_1 \times B'_1) \cap \times \\
& ((B_2 \times B'_2) + x_2) \cap \dots \cap ((B_k \times B'_k) + x_k)) \lambda_d(dx_2) \dots \lambda_d(dx_k) \\
= & \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_2^\perp} \Phi_j((K_1 + L_1) \cap (K_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); (B_1 \times B'_1) \cap \times \\
& ((B_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap ((B_k + L_k + x_k))) \lambda_{L_2^\perp}(dx_2) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k).
\end{aligned}$$

Führen wir zusammen, was wir bisher gezeigt haben, so erhalten wir für beschränkte Borelmengen

$$\begin{aligned}
& \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_2^\perp} \Phi_j((K_1 + L_1) \cap (K_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); (B_1 \times B'_1) \cap \times \\
& ((B_2 + L_2 + x_2) \cap \dots \cap ((B_k + L_k + x_k))) \lambda_{L_2^\perp}(dx_2) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k) \\
= & \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; B_1 \times \dots \times B_k) \lambda_{L_1}(B'_1).
\end{aligned}$$

Aus dem Satz von der monoton Konvergenz folgt die Behauptung für beliebige Borelmengen. \square

Später werden wir den letzten Satz in folgender Version benötigen:

Korollar 10 *Es seien $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \dots, d\}$. Weiter seien $L_1, \dots, L_k \in \mathcal{L}^d$ und $K_0, K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}^d$ mit $K_1 \subseteq L_1^\perp, \dots, K_k \subseteq L_k^\perp$. Für beliebige messbare Abbildungen*

$$g : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty) \quad \text{und} \quad h_i : L_i^\perp \rightarrow [0, \infty),$$

$i = 1, \dots, k$, gilt dann

$$\begin{aligned} & \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} g(x_0) h_1((x_0 - p_{L_1}(x_0)) - x_1) \dots h_k((x_0 - p_{L_k}(x_0)) - x_k) \times \\ & \Phi_j(K_0 \cap (K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); dx_0) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k) \\ &= \sum_{\substack{m_0, \dots, m_k = j, \\ m_0 + \dots + m_k = kd + j}}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp} g(x_0) h_1(x_1) \dots h_k(x_k) \times \\ & \Phi_{m_0, \{0\}; m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_0, \dots, K_k; d(x_0, \dots, x_k)). \end{aligned}$$

Beweis: Diese Aussage beweist man genauso wie Korollar 9. \square

Bemerkung: Im Folgenden schreiben wir immer

$$\Phi_{m_0; m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_0, \dots, K_k; \cdot)$$

statt $\Phi_{m_0, \{0\}; m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_0, \dots, K_k; \cdot)$.

Mit der Darstellung für Polytope kann man folgende einfache Rechenregeln und Eigenschaften der gemischten Maße beweisen, die sich dank der schwachen Stetigkeit auf beliebige konvexe Körper übertragen lassen:

a)

$$\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_{k-1}, L_{k-1}; d, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot) = \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_{k-1}, L_{k-1}}^{(j)}(K_1, \dots, K_{k-1}; \cdot) \otimes \Phi_{d, L_k}^{(d)}(K_k, \cdot),$$

wobei $\Phi_{d, L_k}^{(d)}(K_k, \cdot)$ durch

$$\Phi_{d, L_k}^{(d)}(K, \cdot) = \lambda_{K_k}(\cdot)$$

gegeben ist, falls $\dim K = d - \dim L_k$ ist. Andernfalls gilt $\Phi_{d, L_k}^{(d)}(K, \cdot) \equiv 0$.

b)

$$\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot) = 0,$$

falls $m_i < q_i$ ist für ein $i \in \{1, \dots, k\}$.

- c) Das Maß $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$ ist in der i -ten Komponente auf dem relativen Rand von K_i konzentriert, wenn $m_i \in \{0, \dots, d-1\}$ ist.
- d) Die Maße $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$ sind symmetrisch, das heißt für jede Permutation (i_1, \dots, i_k) von $(1, \dots, k)$ gilt

$$\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot) = \Phi_{m_{i_1}, L_{i_1}; \dots; m_{i_k}, L_{i_k}}^{(j)}(K_{i_1}, \dots, K_{i_k}; \cdot).$$

Bemerkung: Die gemischten Maße konvexer Körper sind von Weil beziehungsweise Goodey und Weil ausführlich in [39], [42] und [9] untersucht worden. Für die Ergebnisse aus diesen Arbeiten müsste nun überprüft werden, ob und wie sie auf die gemischten Maße von Zylindern übertragen werden können.

Im weiteren Verlauf wären an mindestens drei Stellen entsprechende Resultate nützlich, um die dort präsentierten Ergebnisse abzurunden. Allerdings würde die (sehr technische) Herleitung der benötigten Formeln diese Arbeit zu umfangreichen machen, weshalb wir (zumindest für den Moment) darauf verzichten.

6.4 Quermaßdichten für Zylinderprozesse

Neben der Berechnung von Dichten für die Maße $\nu'_{k,k}$ können wir die nun vorliegenden translationalen Integralformeln auch dazu verwenden, verschiedene Quermaßdichten für Zylinderprozesse zu berechnen.

Es sei daran erinnert, dass Θ als lokalendlich und vom Nullmaß verschieden vorausgesetzt ist.

Ein Zylinderprozess X heißt *translationsregulär*, wenn sein Intensitätsmaß die Gestalt

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(K + L + x) f(K + L, x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_q^d),$$

für ein festes $q \in \{0, \dots, d-1\}$ hat. Dabei seien $f : \mathcal{Z}_{q,0}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Abbildung, $f(K + L, \cdot)$ für jedes $K + L \in \mathcal{Z}_{q,0}^d$ lokalintegrierbar und \mathbb{P}_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{Z}_{q,0}^d$.

Es gilt:

Satz 73 *Es seien $j \in \{0, \dots, d\}$, $q \in \{0, \dots, d-1\}$ und X ein translationsregulärer q -Zylinderprozess. Dann besitzt das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definierte Maß*

$$B \mapsto \mathbb{E} \sum_{Z \in X} \Phi_j(Z, B)$$

eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version dieser Dichte ist gegeben durch

$$z \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } j \in \{0, \dots, q-1\}, \\ \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} f(K + L, (z - p_L(z)) - x) \Phi_{j-q}(K, dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)), & \text{falls } j \in \{q, \dots, d\}. \end{cases}$$

Bemerkungen:

- a) Aufgrund der lokalen Definiertheit der Krümmungsmaße Φ_j läßt sich der Beweis von Satz 47 auf das Maß

$$B \mapsto \mathbb{E} \sum_{Z \in X} \Phi_j(Z, B)$$

übertragen. Es ist also lokal- und damit auch σ -endlich. Insbesondere ist damit auch die Abbildung

$$z \mapsto \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} f(K + L, (z - p_L(z)) - x) \Phi_{j-q}(K, dx) \mathbb{P}_0(d(K + L))$$

für $q \in \{q, \dots, d\}$ lokalintegrierbar.

- b) Für $q = 0$ ist X ein Partikelprozess konvexer Körper. Nach Theorem 4.2 in [4] besitzt das Maß

$$B \mapsto \mathbb{E} \sum_{K \in X} \Phi_j(K, B)$$

dann eine Dichte bezüglich λ_d , und eine Version dieser Dichte ist durch

$$z \mapsto \int_{\mathcal{K}_0} \int_{\mathbb{R}^d} f(K, z - x) \Phi_j(K, dx) \mathbb{P}_0(dK)$$

gegeben. Ist andererseits \mathbb{P}_0 auf der Menge \mathcal{L}_q^d konzentriert, X also ein q -Ebenenprozess, so gilt nach Satz 46 aus [3] für das Maß

$$B \mapsto \mathbb{E} \sum_{E \in X} \Phi_j(E, B) :$$

Es ist absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes auf \mathbb{R}^d , und eine Version der Dichte ist durch

$$z \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } j \neq q \text{ ist,} \\ \int_{\mathcal{L}_q^d} f(L, z - p_L(z)) \mathbb{P}_0(dL), & \text{falls } j = q \text{ ist,} \end{cases}$$

gegeben. Der letzte Satz führt diese beiden Resultate somit zu einer einzigen Aussage für Zylinderprozesse zusammen.

- c) Ist X ein stationärer Zylinderprozess mit Intensität $\gamma > 0$, so erhalten wir für $j = q$

$$\mathbb{E} \sum_{E \in X} \Phi_q(E, B) = \gamma \lambda_d(B).$$

Dies besagt auch Theorem 4.2 in [38]; der letzte Satz verallgemeinert also auch dieses Ergebnis.

Beweis: Es sei zunächst $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $K_0 \in \mathcal{K}^d$ derart, dass $B \subseteq \text{int } K_0$ ist. Aus dem Satz von Campbell ergibt sich für $\mathbb{E} \sum_{Z \in X} \Phi_j(Z, B)$ dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{Z \in X} \Phi_j(Z, B) &= \int_{\mathbb{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} \Phi_j(K + L + x; B) f(K + L, x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} \Phi_j(K_0 \cap K + L + x; B) f(L, x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_{q,0}^d} \underbrace{\int_{L^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(y) f(K + L, x) \Phi_j(K_0 \cap K + L + x; dy) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L))}_{(*)}. \end{aligned}$$

Aus Korollar 9 folgen für (*), falls $j \in \{q, \dots, d\}$ ist, die Gleichungen

$$\begin{aligned} (*) &= \int_{L^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(y) f(K + L, -((y - p_L(y)) - x) + (y - p_L(y))) \times \\ &\quad \Phi_j(K_0 \cap K + L + x; dy) \lambda_{L^\perp}(dx) \\ &= \sum_{k=j}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} 1_B(y) f(K + L, (y - p_L(y)) - x) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K, d(y, x)) \\ &\stackrel{B \subseteq \text{int } K_0}{=} \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{L^\perp} f(K + L, (z - p_L(z)) - x) \Phi_{j-q}(K, dx) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Ist $j \in \{0, \dots, q-1\}$, so erhält man

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{k=j}^{d+j-q} \int_{\mathbb{R}^d \times L^\perp} 1_B(y) f(K + L, (y - p_L(y)) - x) \Phi_{L,k}^{(j)}(K_0, K, d(y, x)) \\ &\stackrel{B \subseteq \text{int } K_0}{=} 0. \end{aligned}$$

Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung liefert die Behauptung für beschränkte Borelmengen. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz lässt sich die Aussage auf beliebige Borelmengen übertragen, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Unser nächstes Ziel besteht darin, die Quermaßdichten eines Booleschen Modells von Zylindern zu berechnen. Das wesentliche Hilfsmittel bei Berechnung dieser Quermaßdichten ist Satz 26. Die in diesem Zusammenhang auszuwertenden Ausdrücke sind von der Form

$$\mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(K_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_k; B),$$

wobei X der zu Grunde liegende translationsreguläre Poissonsche Zylinderprozess, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ eine beschränkte Borelmenge und $K_0 \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper mit der Eigenschaft $B \subseteq \text{int } K_0$ sind.

Weil X ein Poissonprozess ist, ergibt sich aus dem Satz von Campbell

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(Z_1 \cap \dots \cap Z_k; B) \\
&= \mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(K_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_k; B) \\
&= \int_{Z_{q,0}^d} \dots \int_{Z_{q,0}^d} \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \Phi_j(K_0 \cap (K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); B) f(K_1 + L_1, x_1) \dots \times \\
& \quad f(K_k + L_k, x_k) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k) \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)).
\end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst die inneren Integrale. Wenden wir Korollar 10 auf sie an, so wird aus

$$\begin{aligned}
& \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \Phi_j(K_0 \cap (K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); B) f(K_1 + L_1, x_1) \dots \times \\
& \quad f(K_k + L_k, x_k) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k)
\end{aligned}$$

zunächst

$$\begin{aligned}
& \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x_0) f(K_1 + L_1, -((x_0 - p_{L_k}(x_0)) - x_1) + (x_0 - p_{L_k}(x_0))) \times \\
& \quad \dots f(K_k + L_k, -((x_0 - p_{L_k}(x_0)) - x_k) + (x_0 - p_{L_k}(x_0))) \times \\
& \quad \Phi_j(K_0 \cap (K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); dx_0) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{m_0, \dots, m_k = j, \\ m_0 + \dots + m_k = kd + j}}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp} 1_B(x_0) f(K_1 + L_1, (x_0 - p_{L_k}(x_0)) - x_1) \times \\
& \quad \dots f(K_k + L_k, (x_0 - p_{L_k}(x_0)) - x_k) \Phi_{m_0; m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_0, \dots, K_k; d(x_0, \dots, x_k)).
\end{aligned}$$

Da

$$\Phi_{m_0; m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_0, \dots, K_k; \cdot)$$

in der ersten Komponente für $0 \leq m_0 < d$ auf $\text{bd } K_0$ konzentriert ist, sind wegen $B \subseteq \text{int } K_0$ in obiger Summe nur die Summanden mit $m_0 = d$ von Null verschieden. Anwendung der Rechenregel für $m_0 = d$ (siehe Bemerkung a) nach Korollar 10) und Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung

liefern

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(K_0 \cap Z_1 \cap \dots \cap Z_k; B) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp} f(K_1 + L_1, (z - p_{L_k}(z)) - x_1) \times \\
&\quad \dots f(K_k + L_k, (z - p_{L_k}(z)) - x_k) \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, x_k)) \times \\
&\quad \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)) \lambda_d(dz)
\end{aligned}$$

für beschränkte Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Aus dem Satzes von der monotonen Konvergenz erhalten wir dann:

Satz 74 *Es seien $j \in \{0, \dots, d\}$, $q \in \{0, \dots, d-1\}$ und X ein translationsregulärer Poissonscher q -Zylinderprozess. Dann besitzt das auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definierte Maß*

$$B \mapsto \mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(Z_1 \cap \dots \cap Z_k; B)$$

eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version dieser Dichte ist für $z \in \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
z \mapsto & \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp} f(K_1 + L_1, (z - p_{L_k}(z)) - x_1) \times \\
& \dots f(K_k + L_k, (z - p_{L_k}(z)) - x_k) \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, x_k)) \times \\
& \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)).
\end{aligned}$$

Bemerkungen:

a) Wegen des obigen Satzes wollen wir folgende abkürzende Schreibweise einführen:

$$\begin{aligned}
& D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z_1, \dots, z_k) := \\
& \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp} f(K_1 + L_1, (z_1 - p_{L_k}(z_1)) - x_1) \times \\
& \dots f(K_k + L_k, (z_k - p_{L_k}(z_k)) - x_k) \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, x_k)) \times \\
& \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)).
\end{aligned}$$

Die Rechenregeln für die gemischten Maße $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$ (siehe Bemerkungen nach Korollar 10) übertragen sich entsprechend auf $D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z_1, \dots, z_k)$. Es gilt also

$$D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z_1, \dots, z_k) = 0,$$

falls $m_i < q$ ist für ein $i \in \{1, \dots, k\}$, und

$$D_{m_1; \dots; m_{k-1}; d}^{(j)}(X, z_1, \dots, z_k) = D_{m_1; \dots; m_{k-1}}^{(j)}(X, z_1, \dots, z_k) D_d^{(d)}(X, z_k).$$

b) In Satz 39 aus [3] wird für einen Poissonprozess X konvexer Partikel gezeigt, dass die Maße

$$\mathbb{E} \sum_{(K_1, \dots, K_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; \cdot)$$

absolutstetig bezüglich des Lebesgue-Maßes sind. Die Dichten heißen j -te gemischte Quermaßdichten von X . Es ist zu erwarten, dass für einen Poissonschen Zylinderprozess X und die Maße

$$\mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(Z_1, \dots, Z_k; \cdot)$$

ein analoges Resultat gilt, da sich die benötigten translativen Integralformeln für die Maße $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(Z_1, \dots, Z_k; \cdot)$ durch eine Übertragung der Beweise von Theorem 3.1 und Korollar 3.5 aus [39] zeigen lassen sollten. Sie werden allerdings in dieser Arbeit nicht weiter benötigt, weshalb wir darauf verzichten, sie herzuleiten. Es ist aber zu erwarten, dass eine Version der jeweils auftretenden Dichten für $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}^d$ durch

$$D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z_1, \dots, z_k)$$

gegeben ist.

c) Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ mit $B \subseteq rB^d$ für ein $r \geq 0$. Nach Lemma 2.1 in [4] gilt

$$\mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(Z_1 \cap \dots \cap Z_k; B) \leq c_{j,d} \cdot r \cdot (\Theta(\mathcal{F}_{rB^d}))^k < \infty.$$

Dabei geht ein, dass X ein Poissonprozess mit lokalendlichem Intensitätsmaß ist. Die Konstante $c_{j,d}$ hängt nur von j und d ab. Das Borelmaß

$$A \mapsto \mathbb{E} \sum_{(Z_1, \dots, Z_k) \in X_{\neq}^k} \Phi_j(Z_1 \cap \dots \cap Z_k; A)$$

auf \mathbb{R}^d ist also lokal- und σ -endlich. Insbesondere muss damit auch die Funktion

$$z \mapsto D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z, \dots, z)$$

lokalintegrierbar sein.

6.5 Quermaßdichten für Boolesche Modelle

Satz 74 wollen wir jetzt dazu benutzen, um Quermaßdichten für Boolesche Modelle herzuleiten.

Es sei nun X ein translationsregulärer Poissonscher Zylinderprozess, Z das zugehörige Boolesche Modell, $K_0 \in \mathcal{K}^d$ und $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt mit $B \subseteq \text{int } K_0$. Wegen Satz 26 gilt für $j = 0, \dots, d$ dann

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \Phi_j(K_0 \cap Z, B) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x_0) f(K_1 + L_1, x_1) \dots f(K_k + L_k, x_k) \times \\ & \quad \Phi_j(K_0 \cap (K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); dx_0) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k) \times \\ & \quad \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)). \end{aligned}$$

Mit Korollar 10 erhalten wir für die einzelnen Summanden

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_k^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(x_0) f(K_1 + L_1, x_1) \dots f(K_k + L_k, x_k) \times \\ & \quad \Phi_j(K_0 \cap (K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap (K_k + L_k + x_k); dx_0) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_k^\perp}(dx_k) \times \\ & \quad \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_1^\perp \times \dots \times L_k^\perp} f(K_1 + L_1, (z - p_{L_1}(z)) - x_1) \dots \times \\ & \quad f(K_k + L_k, (z - p_{L_k}(z)) - x_k) \Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}(K_1, \dots, K_k; d(x_1, \dots, x_k)) \times \\ & \quad \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_k + L_k)) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Mit den im letzten Abschnitt eingeführten Abkürzung kann man den ganzen Ausdruck umschreiben zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \Phi_j(Z \cap K_0, B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k = j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d + j}}^d D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z, \dots, z) \right) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Abbildungen

$$z \mapsto D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z, \dots, z)$$

lokalintegrierbar sind. Deswegen dürfen nach dem Satz von der dominierten Konvergenz Integration und Summation vertauscht werden. Aus den Rechenregeln für gemischte Quermaßdichten erhält man weiter für $j \in \{0, \dots, d-1\}$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\Phi_j(Z \cap K_0, B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \times \\ & \quad \left(\sum_{k=1}^{d-j} \left(\sum_{\substack{m_1, \dots, m_k=j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d+j}}^{d-1} D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z, \dots, z) \right) \cdot \left(\sum_{l=k}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l!} \binom{l}{l-k} (D_d^{(d)}(X, z))^{l-k} \right) \right) \times \\ & \quad \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\Phi_j(Z \cap K_0, B) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) e^{-D_d^{(d)}(X, z)} \left(\sum_{k=1}^{d-j} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k=j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d+j}}^{d-1} D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z, \dots, z) \right) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Falls $j = d$ ist, so erhält man ganz analog

$$\mathbb{E}\Phi_d(Z \cap K_0, B) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) (1 - e^{-D_d^{(d)}(X, z)}) \lambda_d(dz).$$

Nach Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz folgt

Satz 75 *Es seien $j \in \{0, \dots, d\}$, $q \in \{0, \dots, d-1\}$, X ein translationsregulärer Poissonscher q -Zylinderprozess und Z das von X induzierte Boolesche Modell. Dann besitzt das Maß*

$$\mathbb{E}\Phi_j(Z, B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version $D_j(Z, \cdot)$ dieser Dichte ist für $z \in \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$\text{a) } z \mapsto e^{-D_d^{(d)}(X, z)} \cdot \left(\sum_{k=1}^{d-j} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \sum_{\substack{m_1, \dots, m_k=j, \\ m_1 + \dots + m_k = (k-1)d+j}}^{d-1} D_{m_1, \dots, m_k}^{(j)}(X, z, \dots, z) \right),$$

falls $j \in \{0, \dots, d-1\}$ ist, und

$$\text{b) } z \mapsto 1 - e^{-D_d^{(d)}(X, z)},$$

falls $j = d$ ist.

Bemerkungen:

- a) Die Herleitung orientiert sich an der Rechnung auf Seite 178f in [4].
- b) Ist Z das Boolesche Modell eines stationären und isotropen Poissonschen Zylinderprozesses, so lassen sich die in obigem Satz angegebenen Quermaßdichten noch weiter umformen. Dazu benötigt man allerdings eine translative Integral- beziehungsweise Rotationsformel für die gemischten Maße $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_k, L_k}^{(j)}$. Die Rotationsformel sollte sich analog zum Beweis von Theorem 4.3 in [42] aus der Darstellung für Polytope herleiten lassen. Da wir sie im weiteren Verlauf nicht benötigen, verzichten wir darauf, sie in dieser Arbeit zu beweisen.
- Die entsprechenden Formeln für die Quermaßdichten finden sich jedoch (in anderer Notation) in Abschnitt 7.5 (siehe insbesondere Theorem 7.7 und Seite 83f) der Dissertation von Davy ([2]). Der letzte Satz verallgemeinert also diese Ergebnisse.
- c) Für $q = 0$ ist X ein Partikelprozess konvexer Körper. In diesem Fall entspricht die Aussage des letzten Satzes gerade Theorem 4.6 in [4], das wir somit verallgemeinert haben.

Beispiel: Wählen wir $d = 2$, so ist $q = 1$ der einzig interessante Fall. Hier gilt

$$\begin{aligned} D_2(Z, z) &= 1 - e^{-D_2^{(2)}(X, z)}, \\ D_1(Z, z) &= e^{-D_2^{(2)}(X, z)} D_1^{(1)}(X, z), \\ D_0(Z, z) &= e^{-D_2^{(2)}(X, z)} \left(-\frac{1}{2} D_{1,1}^{(0)}(X, z)\right). \end{aligned}$$

Die weiter vereinfachten Formeln für das Boolesche Modell eines stationären und isotropen Poissonschen Zylinderprozesses finden sich (in anderer Notation) in Tabelle 7.3 auf Seite 84 in [2].

Kapitel 7

Assoziierte Maße und Schnittdichten inhomogener Zylinderprozesse

Es sei daran erinnert, dass Θ als lokalendlich und vom Nullmaß verschieden vorausgesetzt ist.

7.1 Assoziierte Maße

In diesem Abschnitt sollen Theorem 1 aus [31] und Satz 43 zu einem entsprechenden Resultat für Zylinderprozesse zusammengeführt werden.

Es seien $d \geq 2$ eine natürliche Zahl und $q \in \{0, \dots, d-1\}$. Wir nennen einen q -Zylinderprozess X translationregulär mit stetiger Dichte, falls sein Intensitätsmaß von der Form

$$\Theta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{Z}_0^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(K + L + x) f(L + x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_q^d),$$

ist. Dabei seien $f : \mathcal{E}_q^d \rightarrow [0, \infty)$ stetig und \mathbb{P}_0 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{Z}_{q,0}^d$. In diesem Fall sind f und \mathbb{P}_0 durch Θ nicht eindeutig bestimmt.

Existiert außerdem ein $k \in \{0, \dots, d-q\}$ mit

$$\mathbb{P}_0(\{K + L \mid K + L \in \mathcal{Z}_{q,0}^d, \dim K = k\}) = 1,$$

so sagen wir, dass X auf Zylindern mit k -dimensionaler Basis konzentriert ist. Ist speziell $k = d-q$, so nennen wir X auf volldimensionalen Zylindern konzentriert.

Es seien $q \in \{0, \dots, d-1\}$, $k \in \{0, \dots, d-q\}$ und X ein translationsregulärer q -Zylinderprozess mit stetiger Dichte, der auf Zylindern mit k -dimensionaler Basis konzentriert ist. Wir nehmen zunächst an, dass $k > 0$ ist. Für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ definieren wir wie im vierten Kapitel

$$\mu_z(\mathcal{A}, A) := \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K + L) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)).$$

Hierbei bezeichne $\tilde{\sigma}_K(x)$ die \mathcal{H}^{k-1} -fast überall eindeutig bestimmt äußere Normale in $x \in \text{rel bd } K$ an K aus der Menge $L(K) \cap S^{d-1}$. Es gilt:

Satz 76 *Es seien $q \in \{0, \dots, d-1\}$, $k \in \{1, \dots, d-q\}$ und X ein translationsregulärer q -Zylinderprozess mit stetiger Dichte, der auf Zylindern mit k -dimensionaler Basis konzentriert ist. Weiter seien $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Wir definieren*

$$\mu_z(\mathcal{A}, A) := \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L+z-x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)).$$

Dann gilt: Die Mengenfunktion

$$\mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d) \times \mathcal{B}(S^{d-1}) \rightarrow [0, \infty), (\mathcal{A}, A) \mapsto \mu_z(\mathcal{A}, A)$$

lässt sich zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d) \times \mathcal{B}(S^{d-1})$ fortsetzen. Das Maß μ_z ist für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ sowohl endlich als auch eindeutig durch das Intensitätsmaß Θ von X bestimmt.

Bemerkung: Wir nennen μ_z das verallgemeinerte lokale mittlere Normalenmaß von X an der Stelle z .

Beweis: Es seien $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$ und $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Für jede beschränkte Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{(K+L) \in X} 1_{\mathcal{A}}(K+L-s(K)) \mathcal{H}^{q+k-1}(B \cap (\tilde{\sigma}_K^{-1}(A) + L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \mathcal{H}^{q+k-1}(B \cap (\tilde{\sigma}_{K+x}^{-1}(A) + L)) f(L+x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \mathcal{H}^{k-1}(B \cap (\tilde{\sigma}_{K+x}^{-1}(A))) \mathcal{H}^q(B \cap L) f(L+x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt wegen $\tilde{\sigma}_{K+x}^{-1}(A) \perp L$ aus Theorem 3.2.23 in [6]. Es ergibt sich weiter

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{L^\perp} \int_{\text{rel bd } K} 1_{B-x}(z) 1_A(\tilde{\sigma}_K(z)) \mathcal{H}^{k-1}(dz) \int_L 1_B(y) \lambda_L(dy) f(L+x) \lambda_{L^\perp}(dx) \times \\ & \quad \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{L^\perp} \int_L \int_{\text{rel bd } K} 1_B(z+x+y) 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L+x) \mathcal{H}^{k-1}(dz) \lambda_L(dy) \lambda_{L^\perp}(dx) \times \\ & \quad \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(z)) f(L+z-x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \lambda_d(dz) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \mu_z(\mathcal{A}, A) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Damit ist $\mu_z(\mathcal{A}, A)$ für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ eindeutig durch Θ bestimmt.

Es sei B weiterhin eine beschränkte Borelmenge. Dann gilt außerdem

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{(K+L) \in X} 1_{\mathcal{Z}_{q,0}^d}(K+L-s(K)) \mathcal{H}^{q+k-1}(B \cap (\tilde{\sigma}_K^{-1}(S^{d-1}) + L)) \\ &= \mathbb{E} \sum_{(K+L) \in X} \mathcal{H}^{q+k-1}(B \cap (\text{rel bd } K + L)) \\ &= c \mathbb{E} \sum_{(K+L) \in X} \Phi_{q+k-1}(K+L, B) \end{aligned}$$

für eine Konstante c , die nur von d und $q+k$ abhängt. Aus Theorem 4.2 in [4] folgt nun wieder, dass $\mu_z(\mathcal{A}, A) < \infty$ für λ_d -alle $z \in \mathbb{R}^d$ gilt.

Die Behauptungen des Satzes ergeben sich nun wie im Beweis von Satz 39. \square

Ein Prozess volldimensionaler konvexer Körper ergibt sich als Spezialfall, wenn $q=0$ und $k=d$ ist. Dann ist $\mu_z(\mathcal{A}, \cdot)$ für $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu_z(\mathcal{A}, A) &= \int_{\mathcal{Z}_{0,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L+z-x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\text{bd } K} 1_A(\sigma_K(x)) f(z-x) \mathcal{H}^{d-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K)) \\ &= \int_{\mathcal{K}_0} 1_{\mathcal{A}}(K) \int_{\mathbb{R}^d} f(z-x) \Xi_{d-1}(K, dx \times A) \mathbb{P}_0(d(K)), \end{aligned}$$

was gerade unserer Definition aus Abschnitt 4.1 entspricht.

Es sei nun noch $k=0$, X also ein translationsregulärer q -Ebenenprozess mit stetiger Dichte. Obige Definition kann man nun folgendermaßen übertragen: Für $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir

$$\mu_z(\mathcal{A}) := \int_{\mathcal{L}_q^d} 1_{\mathcal{A}}(L) f(z+L) \mathbb{P}_0(dL), \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_q^d).$$

μ_z entspricht dann gerade dem Richtungsmaß $\varphi(z, \cdot)$ von X an der Stelle $z \in \mathbb{R}^d$, das wir zuvor schon in Kapitel 3 im Abschnitt über die Arbeit von Schneider zu translationsregulären k -Ebenenprozessen ([31]) betrachtet hatten. Auch in diesem Fall hängt μ_z für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ nicht von der konkreten Wahl von f und \mathbb{P}_0 ab.

Wir wollen nun folgende Verallgemeinerung von Satz 43 beweisen:

Satz 77 *Es seien $d \geq 2$, $q \in \{0, \dots, d-1\}$, $k \in \{0, \dots, d-q\}$ und X ein translationsregulärer q -Zylinderprozess mit stetiger Dichte, der auf Zylindern mit k -dimensionaler Basis konzentriert ist. Desweiteren existiere ein $K+L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ mit relativ strikt konvexer Basis K . Dann gilt: X ist genau dann schwach stationär und schwach isotrop, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$, $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ und $\vartheta \in SO_d$ die Gleichung*

$$\mu_z(\vartheta \mathcal{A}, \vartheta A) = \mu_z(\mathcal{A}, A) \quad (*)$$

erfüllt ist.

Im Beweis werden wir auf folgendes Resultat zurückgreifen:

Satz 78 *Es seien $k \in \{0, \dots, d\}$, $K \in \mathcal{K}_0$ und $(K_i) \subseteq \mathcal{K}_0$ eine Folge mit $\dim K = \dim K_i = k$ für $i \in \mathbb{N}$ und $K_i \rightarrow K$. Für jede stetige Funktion $h : S^{d-1} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\text{rel bd } K_i} h(\tilde{\sigma}_{K_i}(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) = \int_{\text{rel bd } K} h(\tilde{\sigma}_K(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx).$$

Beweis: Für $k = 0$ ist die Aussage offensichtlich richtig, da in diesem Fall $K_i = K = \{0\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Ist $k = d$, so folgt die Aussage aus Satz 34 und der Stetigkeit der Abbildung

$$K \mapsto \Xi_{d-1}(K, \cdot).$$

Es sei also $k \in \{1, \dots, d-1\}$. Gilt $K_i \subseteq \text{aff } K$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$, so folgt die Aussage aus dem Fall $k = d$. Andernfalls existiert wegen $\dim K = \dim K_i = k$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ ein $\vartheta_i \in SO_d$ mit $\vartheta_i K_i \subseteq \text{aff } K$. Es sei ϑ_i so gewählt, dass $d(\vartheta_i K_i, K)$ minimal ist. Dann konvergiert $\vartheta_i K_i$ offensichtlich gegen K , und es gilt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\text{rel bd } \vartheta_i K_i} h(\tilde{\sigma}_{\vartheta_i K_i}(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) = \int_{\text{rel bd } K} h(\tilde{\sigma}_K(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx). \quad (+)$$

Andererseits strebt auch $d(\vartheta_i K_i, K_i)$ gegen Null, und es ist wegen der Stetigkeit von h anschaulich klar, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\max_{x \in \text{rel bd } K_i} |h(\tilde{\sigma}_{K_i}(x), x) - h(\tilde{\sigma}_{\vartheta_i K_i}(\vartheta_i x), \vartheta_i x)| \leq \epsilon$$

für alle $i \geq i_0$ gilt. Also existiert für alle $\epsilon > 0$ auch ein $i_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \int_{\text{rel bd } \vartheta_i K_i} h(\tilde{\sigma}_{\vartheta_i K_i}(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) - \epsilon &\leq \int_{\text{rel bd } K_i} h(\tilde{\sigma}_{K_i}(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \\ &\leq \int_{\text{rel bd } \vartheta_i K_i} h(\tilde{\sigma}_{\vartheta_i K_i}(x), x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) + \epsilon \end{aligned}$$

für alle $i \geq i_1$. Zusammen mit (+) folgt daraus die Behauptung. \square

Beweis von Satz 77: Ist X schwach stationär und schwach isotrop, rechnet man leicht nach, dass (*) wie gefordert gilt. Folglich beweisen wir jetzt die andere Richtung der Äquivalenz.

Ist $k = 0$, so ergibt sich gerade die Aussage für translationsreguläre q -Ebenenprozesse aus [31]. Für den Beweis können wir also annehmen, dass $k \in \{1, \dots, d-q\}$ ist. Den Fall $q = 0$ behandelt man wie Beweis von Satz 43. Es gelte also $1 \leq q \leq d-1$ und zunächst $k \geq 2$.

Es sei $z \in \mathbb{R}^d$ fest. Wir überlegen uns zunächst, dass die Abbildung

$$K + L \mapsto \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx)$$

von $\mathcal{Z}_{q,0}^d$ nach $[0, \infty)$ für stetige Funktionen $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ ebenfalls stetig ist.

Es seien also $K + L \in \mathcal{Z}_{q,0}^d$ fest und $(K_i + L_i)$ eine Folge in $\mathcal{Z}_{q,0}^d$, die gegen $K + L$ konvergiert. Nach Satz 70 konvergiert dann K_i in der Hausdorff-Metrik gegen K und L_i in der Topologie der abgeschlossenen Konvergenz gegen L .

Annahme: Es existieren ein $\epsilon > 0$, eine Teilfolge (i_n) und Punkte $x_{i_n} \in \text{rel bd } K_{i_n}$ mit

$$|f(L_{i_n} + z - x_{i_n}) - f(L + z - x_{i_n})| \geq \epsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass x_{i_n} gegen ein $x \in K$ konvergiert. Dann konvergieren aber sowohl $L_{i_n} - x_{i_n}$ als auch $L - x_{i_n}$ gegen $L - x$, und wir erhalten einen Widerspruch zur Stetigkeit von f . Damit existiert aber für alle $\epsilon > 0$ ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$\max_{x \in \text{rel bd } K_i} |f(L_{i_n} + z - x) - f(L + z - x)| < \epsilon$$

für alle $i \geq i_0$. Daraus ergibt sich sofort für alle $\epsilon' > 0$ die Existenz eines $i'_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \geq i'_0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\text{rel bd } K_i} g(\tilde{\sigma}_{K_i}(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) - \epsilon' &\leq \int_{\text{rel bd } K_i} g(\tilde{\sigma}_{K_i}(x)) f(L_i + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \\ &\leq \int_{\text{rel bd } K_i} g(\tilde{\sigma}_{K_i}(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) + \epsilon'. \end{aligned}$$

richtig ist. Da K_i in der Hausdorff-Metrik gegen K konvergiert, gilt für die stetigen Funktionen f und g außerdem wegen des letzten Satzes

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\text{rel bd } K_i} g(\tilde{\sigma}_{K_i}(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) = \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx).$$

Damit ergibt sich für beliebiges $\epsilon' > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) - \epsilon' &\leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_{\text{rel bd } K_i} g(\tilde{\sigma}_{K_i}(x)) f(L_i + z - x) \times \\ &\quad \mathcal{H}^{k-1}(dx) \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \int_{\text{rel bd } K_i} g(\tilde{\sigma}_{K_i}(x)) f(L_i + z - x) \times \\ &\quad \mathcal{H}^{k-1}(dx) \\ &\leq \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) + \epsilon', \end{aligned}$$

und es folgt die Stetigkeit der untersuchten Abbildung.

Wie in den Beweisen von Satz 40 und 43 überlegt man sich mit $A = S^{d-1}$, dass wegen (*) das Maß \mathbb{P}_0 für jedes $\vartheta \in SO_d$ absolutstetig bezüglich $\vartheta \circ \mathbb{P}_0$ sein muss und eine *stetige* Version der

Dichte existiert. Ebenso überlegt man sich leicht, dass wegen (*) aus $K + L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ sofort $\vartheta(K + L) \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ für alle $\vartheta \in SO_d$ folgt.

Nach Voraussetzung gilt für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$, $A \in S^{d-1}$ und $\vartheta \in SO_d$

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\vartheta\mathcal{A}}(K + L) \int_{\text{rel bd } K} 1_{\vartheta A}(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)) \\
& \stackrel{(*)}{=} \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K + L) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)) \\
& = \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta^{-1}(K + L)) \int_{\text{rel bd }(\vartheta^{-1}K)} 1_{\vartheta^{-1}A}(\tilde{\sigma}_{\vartheta K}(x)) f(\vartheta^{-1}L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \times \\
& \quad \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}(K + L)) \mathbb{P}_0(d(K + L)) \\
& = \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\vartheta\mathcal{A}}((K + L)) \int_{\text{rel bd } K} 1_{\vartheta A}(\tilde{\sigma}_K(x)) f(\vartheta^{-1}L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \times \\
& \quad \eta_{\vartheta^{-1}}(\vartheta^{-1}(K + L)) \mathbb{P}_0(d(K + L)).
\end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K + L) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L)) \quad (**) \\
& = \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}((K + L)) \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\tilde{\sigma}_K(x)) f(\vartheta L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \times \\
& \quad \eta_{\vartheta}(\vartheta(K + L)) \mathbb{P}_0(d(K + L)).
\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$, $A \in S^{d-1}$ und $\vartheta \in SO_d$. Wie im Beweis von Satz 41 überlegt man sich, dass deshalb für alle $K + L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, $z \in \mathbb{R}^d$, $\vartheta \in SO_d$ und stetigen Abbildungen $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) = \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(\vartheta L + z - x) \mathcal{H}^{k-1}(dx) \eta_{\vartheta}(\vartheta(K + L)).$$

gilt.

Da ein $K + L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ mit relativ strikt konvexer Basis K existiert und $\dim K > 1$ ist, zeigt man zunächst mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 43, dass für alle $z \in \mathbb{R}^d$ und $L \in \mathcal{L}_q^d$

$$f(L + z) = f(L)$$

gilt. Man beachte hierbei, dass L senkrecht auf K steht, sich also jede eigentliche Drehung in L^\perp zu einer eigentlichen Drehung auf dem \mathbb{R}^d fortsetzen lässt, die L auf sich selbst abbildet.

Wählt man nun $A = S^{d-1}$ und $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d)$ beliebig, so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) f(L) V_{k-1}(K) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K+L) f(\vartheta L) \eta_{\vartheta}(\vartheta(K+L)) V_{k-1}(K) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\vartheta^{-1}\mathcal{A}}(K+L) f(L) V_{k-1}(K) \mathbb{P}_0(d(K+L)), \end{aligned}$$

da V_{k-1} rotationsinvariant ist. Somit gilt für \mathbb{P}_0 -fast alle $K+L \in \mathcal{Z}_{q,0}^d$

$$f(\vartheta L) \eta_{\vartheta}(\vartheta(K+L)) = f(L).$$

Sei $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}_q^d)$ und $\vartheta \in SO_d$. Aus

$$\begin{aligned} \Theta(\vartheta\mathcal{A}) &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\vartheta\mathcal{A}}(K+L+x) f(L+x) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}(\vartheta^{-1}(K+L+x)) f(L) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}((K+L+\vartheta^{-1}x)) f(\vartheta L) \eta_{\vartheta}(\vartheta(K+L)) \lambda_{(\vartheta L)^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L^\perp} 1_{\mathcal{A}}((K+L+x)) f(L) \lambda_{L^\perp}(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \Theta(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

erhält man Rotationsinvarianz, und analog zeigt man auch die Translationsinvarianz von Θ .

Sei nun $k=1$ und ohne Einschränkung $q=d-1$ (für $q \in \{1, \dots, d-2\}$ argumentiert man ganz analog). Wie zuvor gibt es für alle $\vartheta \in SO_d$ eine Abbildung $\eta_{\vartheta} : \mathcal{Z}_{d-1,0}^d \rightarrow [0, \infty)$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{\text{rel bd } K} 1_{\mathcal{A}}(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L+z-x) \mathcal{H}^0(dx) \mathbb{P}_0(d(K+L)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} 1_{\mathcal{A}}(K+L) \int_{\text{rel bd } K} 1_{\mathcal{A}}(\tilde{\sigma}_K(x)) f(\vartheta L+z-x) \mathcal{H}^0(dx) \eta_{\vartheta}(\vartheta(K+L)) \\ & \quad \mathbb{P}_0(d(K+L)). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich wieder für alle $K+L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, $z \in \mathbb{R}^d$, stetigen $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ und $\vartheta \in SO_d$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(L+z-x) \mathcal{H}^0(dx) &= \int_{\text{rel bd } K} g(\tilde{\sigma}_K(x)) f(\vartheta L+z-x) \times \quad (***) \\ & \quad \mathcal{H}^0(dx) \eta_{\vartheta}(\vartheta(K+L)). \end{aligned}$$

Es sei der Zylinder $K + L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$. Bei K handelt es sich um eine zum Ursprung symmetrische Strecke in L^\perp . Es bezeichne $l = l(K) := \frac{1}{2}V_1(K)$, und $u = u(K) \in S^{d-1}$ sei durch $L^\perp = [u]$ gegeben. Insbesondere gilt also $K = [-lu, lu]$.

Weiter sei $\vartheta \in SO_d$ derart, dass $\vartheta L = L$ und $\vartheta u = -u$ gelte. Aus Gleichung (***) ergibt sich dann mit $g \equiv 1$

$$f(z + L + lu) + f(z + L - lu) = \eta_\vartheta(\vartheta(K + L)) (f(z + L + lu) + f(z + L - lu)),$$

also

$$\eta_\vartheta(\vartheta(K + L)) = 1.$$

Dabei haben wir z so gewählt, dass $f(z + L + lu) + f(z + L - lu) > 0$ ist. Wählen in der gleichen Situation statt $g \equiv 1$ eine stetige Abbildung $g : S^{d-1} \rightarrow [0, \infty)$ mit $g(u) = 1$ und $g(-u) = 0$, so erhalten wir wegen $\eta_\vartheta(\vartheta(K + L)) = 1$ dann

$$f(z + L + lu) = f(z + L - lu). \quad (***)$$

Damit ist $f(L + \cdot)$ periodisch mit Periodenlänge $2l$.

Kombiniert man (***) mit (**), so ergeben sich bei geeigneter Wahl von $g - g$ stetig mit $g(u) = g(\vartheta u) = 1$, $g(-u) = g(-\vartheta u) = 0$ – für ein beliebiges $\vartheta \in SO_d$ und alle $z \in \mathbb{R}^d$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_\vartheta(\vartheta(K + L)) f(z + 2lu + \vartheta(L + lu)) &= f(z + 2lu + (L + lu)) \\ &= f(z + L + lu) \\ &= \eta_\vartheta(\vartheta(K + L)) f(z + \vartheta(L + lu)), \end{aligned}$$

also

$$f(z + 2lu + \vartheta(L + lu)) = f(z + \vartheta(L + lu)) \quad (+)$$

Für alle $\alpha \in [0, 2]$ existiert offensichtlich ein $\vartheta \in SO_d$ mit $2lu + \vartheta L = \alpha \vartheta u + \vartheta L$. Setzt man dieses ϑ in (+) ein, so erhält man

$$f(z + l \vartheta u + \alpha \vartheta u + \vartheta L) = f(z + l \vartheta u + \vartheta L).$$

Wählen wir außerdem $z' = z + l \vartheta u$ und ersetzen $K + L$ durch $\vartheta^{-1}(K + L) \in \text{supp } \mathbb{P}_0$, so ergibt sich

$$f(z + \alpha u + L) = f(z + L).$$

Da dies für alle $\alpha \in [0, 2]$ gilt, kann f nur von L abhängen. Wie zuvor zeigt man dann die Translations- und Rotationsinvarianz von Θ , und wir haben den Satz bewiesen. \square

Bemerkung: Der vorliegende Satz stellt eine Verallgemeinerung sowohl von Theorem 1 aus [31] als auch Satz 43 dar. Das Ergebnis von Schneider ergibt sich für $k = 0$, das in dieser Arbeit schon gezeigte Resultat für Partikelprozesse konvexer Körper für $q = 0$ und $k = d$.

Ist $k > 0$, so können wir μ_z wie auch schon in Kapitel 4 als Borelmaß auf $\mathcal{Z}_{q,0}^d \times S^{d-1}$ auffassen. Aus dem letzten Satz ergibt sich dann:

Korollar 11 *Es seien $d \geq 2$, $q \in \{0, \dots, d\}$, $k \in \{0, \dots, d - q\}$ und X ein translationsregulärer q -Zylinderprozess mit stetiger Dichte, der auf Zylindern mit k -dimensionaler Basis konzentriert ist. Desweiteren existiere ein $K + L \in \text{supp } \mathbb{P}_0$ mit relativ strikt konvexer Basis K . Dann gilt: X ist genau dann schwach stationär und schwach isotrop, wenn für alle $z \in \mathbb{R}^d$ das auf $\mathcal{B}(\mathcal{Z}_{q,0}^d) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ definierte Maß μ_z rotationsinvariant ist.*

7.2 Schnittdichten inhomogener Zylinderprozesse I

In Kapitel 5 haben wir Schnittprozesse untersucht, die durch die Ränder der Partikel eines inhomogenen Prozesse mit konvexen Körnern induziert wurden. Die dort erzielten Ergebnisse wollen wir nun in den nächsten beiden Abschnitten auf Zylinderprozesse übertragen.

Es seien $d \geq 2$, $q \in \{0, \dots, d - 1\}$, $j \in \{1, \dots, d\}$ und X ein translationsregulärer Poissonscher q -Zylinderprozess. Wir definieren ein Borelmaß ν'_j auf \mathbb{R}^d für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ durch

$$\nu'_j(B) := \mathbb{E} \sum_{(K_1+L_1, \dots, K_j+L_j) \in X_{\neq}^j} \Phi_{d-j}((K_1 + L_1) \cap \dots \cap (K_j + L_j); B \cap \text{bd}(K_1 + L_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j)).$$

Das Maß ν'_j hat folgende Eigenschaft:

Satz 79 *Es seien $j \in \{1, \dots, d\}$, $q \in \{0, \dots, d - 1\}$ und X ein translationsregulärer Poissonscher q -Zylinderprozess. Dann besitzt das Maß ν'_j eine Dichte bezüglich des Lebesgues-Maßes, und eine Version dieser Dichte ist durch $\gamma'_j : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gegeben. Für $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir dabei*

$$\begin{aligned} \gamma'_j(z) &:= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_1^\perp \times \dots \times L_j^\perp} f(K_1 + L_1, (z - p_{L_1}(z)) - x_1) \dots f(K_j + L_j, (z - p_{L_j}(z)) - x_1) \times \\ &\quad \Phi_{d-1, L_1; \dots; d-1, L_j}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_j; d(x_1, \dots, d_{x_j})) \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_j + L_j)). \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Messbarkeit der der Abbildung

$$(K_1 + L_1, \dots, K_j + L_j) \mapsto \Phi_{d-j}((K_1 + L_1) \cap \dots \cap (K_j + L_j); B \cap \text{bd}(K_1 + L_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j))$$

kann man für festes $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ wie in Kapitel 5 mit Satz 46 zeigen.

Beweis: Es sei $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Nach dem Satz von Campbell gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sum_{(K_1+L_1, \dots, K_j+L_j) \in X_{\neq}^j} \Phi_{d-j}((K_1+L_1) \cap \dots \cap (K_j+L_j); B \cap \text{bd}(K_1+L_1) \cap \dots \times \\
& \cap \text{bd}(K_j+L_j)) \\
= & \int_{\mathbb{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathbb{Z}_{q,0}^d} \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \Phi_{d-j}((K_1+L_1+x_1) \cap \dots \cap (K_j+L_j+x_j); B \cap \text{bd}(K_1+L_1+x_1) \cap \dots \times \\
& \dots \cap \text{bd}(K_j+L_j+x_j)) f(K_1+L_1, x_1) \dots f(K_j+L_j, x_j) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \times \\
& \mathbb{P}_0(d(K_1+L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_j+L_j)).
\end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, dass B beschränkt ist, und wählen $K_0 \in \mathcal{K}$ mit $\dim K_0 = d$ und $B \subseteq \text{int} K_0$. Für die inneren Integrale ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \Phi_{d-j}((K_1+L_1+x_1) \cap \dots \cap (K_j+L_j+x_j); B \cap \text{bd}(K_1+L_1+x_1) \cap \dots \times \\
& \cap \text{bd}(K_j+L_j+x_j)) f(K_1+L_1, x_1) \dots f(K_j+L_j, x_j) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \\
= & \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \Phi_{d-j}(K_0 \cap (K_1+L_1+x_1) \cap \dots \cap (K_j+L_j+x_j); B \cap \text{bd}(K_1+L_1+x_1) \cap \dots \times \\
& \cap \text{bd}(K_j+L_j+x_j)) f(K_1+L_1, x_1) \dots f(K_j+L_j, x_j) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \\
= & \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x_0) \mathbf{1}_{\text{bd}(K_1+L_1)}(x_0-x_1) \dots \mathbf{1}_{\text{bd}(K_j+L_j)}(x_0-x_j) \Phi_{d-j}(K_0 \cap (K_1+L_1+x_1) \times \\
& \cap \dots \cap (K_j+L_j+x_j); dx_0) f(K_1+L_1, x_1) \dots f(K_j+L_j, x_j) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \\
= & \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_B(x_0) \mathbf{1}_{\text{rel bd } K_1}((x_0-p_{L_1}(x_0))-x_1) \dots \mathbf{1}_{\text{rel bd } K_j}((x_0-p_{L_j}(x_0))-x_j) \times \\
& f(K_1+L_1, (x_0-p_{L_1}(x_0))-((x_0-p_{L_1}(x_0))-x_1)) \dots \times \\
& f(K_j+L_j, (x_0-p_{L_j}(x_0))-((x_0-p_{L_j}(x_0))-x_j)) \times \\
& \Phi_{d-j}(K_0 \cap (K_1+L_1+x_1) \cap \dots \cap (K_j+L_j+x_j); dx_0) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j).
\end{aligned}$$

Mit Korollar 10 läßt sich dies weiter umformen, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \dots &= \sum_{\substack{m_0, \dots, m_j = d-j, \\ m_0 + \dots + m_j = jd + (d-j)}}^d \int_{\mathbb{R}^d \times L_1^\perp \times \dots \times L_j^\perp} 1_B(x_0) 1_{\text{rel bd } K_1}(x_1) \dots 1_{\text{rel bd } K_j}(x_j) \times \\ & f(K_1 + L_1, (x_0 - p_{L_1}(x_0)) - x_1) \dots f(K_j + L_j, (x_0 - p_{L_j}(x_0)) - x_j) \times \\ & \Phi_{m_0; m_1, L_1; \dots; m_j, L_j}^{(d-j)}(K_0, K_1, \dots, K_j; d(x_0, \dots, x_j)). \end{aligned}$$

Da $B \subseteq \text{int } K_0$ ist, ergibt sich aus den Rechenregeln für die gemischten Maße, dass $m_0 = d$ sein muss. Wie im Beweis von Satz 48 überlegt man sich, dass nur das gemischte Maß mit $m_i = d - 1$ für $i = 1, \dots, j$ einen Beitrag leistet, und insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{L_1^\perp \times \dots \times L_j^\perp} f(K_1 + L_1, (z - p_{L_1}(z)) - x_1) \dots f(K_j + L_j, (z - p_{L_j}(z)) - x_j) \times \\ & \Phi_{d-1, L_1; \dots; d-1, L_j}^{(d-j)}(K_1, \dots, K_j; d(x_1, \dots, x_j)) \lambda_d(dz). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die durch den Satz von Campbell hergeleitete Darstellung ein, so ergibt sich aus dem Satz von Fubini die Behauptung für beschränkte Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Die eigentliche Aussage erhalten wir dann mittels des Satzes von der monotonen Konvergenz. \square

Bemerkung: Um analog zu Satz 49 die hier berechneten Schnittdichten in Verbindung mit Funktionalen von zu X assoziierten konvexen Körpern zu bringen, wäre eine Übertragung von Satz 18 auf die Maße $\Phi_{m_1, L_1; \dots; m_j, L_j}^{(d-j)}$ nötig; er war in Kapitel 5 das zentrale Hilfsmittel beim Beweis dieses Zusammenhangs. Allerdings würde seine Herleitung die vorliegende Arbeit zu umfangreich machen, weshalb wir an dieser Stelle darauf verzichten.

7.3 Schnittdichten inhomogener Zylinderprozesse II

Es seien X ein translationsregulärer Poissonscher Zylinderprozess, der auf volldimensionalen Zylindern konzentriert ist, und $j \in \{1, \dots, d\}$. Wir wollen zeigen, dass die durch

$$\nu_j(B) := \mathbb{E} \sum_{(K_1 + L_1, \dots, K_j + L_j) \in X_\neq^j} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + L_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j)), \quad B \in \mathcal{B}(R^d),$$

definierten Maße ν_j eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes besitzen.

Bemerkung: Um den Satz von Campbell anzuwenden und Messbarkeitsaussagen zeigen zu können, muss man wie in Abschnitt 5.2 vorgehen. Satz 19 sowie Korollar 1.3.1 und 2.1.4 aus [48] kann man analog anwenden.

Es gilt:

Satz 80 Es seien $j \in \{1, \dots, d\}$, $q \in \{0, \dots, d-1\}$ und X ein translationsregulärer Poissonscher q -Zylinderprozess, der auf volldimensionalen Zylindern konzentriert ist. Dann besitzt das Maß ν_j eine Dichte bezüglich des Lebesgue-Maßes, und eine Version dieser Dichte ist durch $\gamma_j : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ gegeben. Für $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir dabei

$$\begin{aligned} \gamma_j(z) &:= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{\text{rel bd } K_1} \dots \int_{\text{rel bd } K_j} [\sigma_{K_1+L_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_j+L_j}(x_j)] \times \\ & f(K_1 + L_1, (z - p_{L_1}(z)) - x_1) \dots f(K_j + L_j, (z - p_{L_j}(z)) - x_j) \times \\ & \mathcal{H}^{d-q-1}(dx_j) \dots \mathcal{H}^{d-q-1}(dx_1) \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \end{aligned}$$

gegeben.

Bemerkung: Es seien $L \in \mathcal{L}_q^d$ und $K \in \mathcal{K}$ mit $\dim K = d - q$ und $K \subseteq L^\perp$. Dann ist

$$\tilde{\sigma}_K(x) = \sigma_{K+L}(x)$$

für \mathcal{H}^{d-q-1} -fast alle $x \in \text{rel bd } K$.

Beweis: Es sei zunächst $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ beschränkt. Da X ein Poissonprozess ist ergibt sich nach einem Zwischenschritt wie am Anfang des Beweises von Satz 59 mit dem Satz von Campbell

$$\begin{aligned} \nu_j(B) &= \int_{\mathcal{Z}_q^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_q^d} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + L_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j)) \Theta(d(K_1 + L_1)) \dots \times \\ & \Theta(d(K_j + L_j)) \\ &= \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \dots \int_{\mathcal{Z}_{q,0}^d} \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j + x_j)) \times \\ & f(K_1 + L_1, x_1) \dots f(K_j + L_j, x_j) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \times \\ & \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_j + L_j)). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns zunächst für die inneren Integrale. Bevor wir diese weiter umformen können, benötigen wir allerdings folgende Vorüberlegung: Es seien $L_1, \dots, L_j \in \mathcal{L}^d$ und $K_1, \dots, K_d \in \mathcal{K}^d$ mit $K_1 \subseteq L_1^\perp, \dots, K_j \subseteq L_j^\perp$. Für $i = 1, \dots, j$ seien die Funktionen $f_i : L_i^\perp \rightarrow \mathbb{R}^d$ messbar. Außerdem seien $W_1, \dots, W_j \in \mathcal{K}^d$ derart, dass $W_1 \subseteq L_1, \dots, W_j \subseteq L_j$ und

$$B \cap K_1 + L_1 + x_1 = B \cap K_1 + \text{int } W_1 + x_1 \text{ für alle } x_1 \in L_1^\perp$$

⋮

$$B \cap K_j + L_j + x_j = B \cap K_j + \text{int } W_j + x_j \text{ für alle } x_j \in L_j^\perp$$

gilt. Man beachte, dass B als beschränkt vorausgesetzt ist. Dann ergibt sich nach Aufspaltung der Integrationen über \mathbb{R}^d in Integrationen über L und L^\perp

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + W_1 + x_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + W_j + x_j)) f_1(x_1 - p_{L_1}(x_1)) \dots \times \\
& f_j(x_j - p_{L_j}(x_j)) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_j) \\
= & \lambda_{L_1}(W_1) \dots \lambda_{L_j}(W_j) \times \\
& \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j + x_j)) f_1(x_1) \dots f_j(x_j) \times \\
& \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j).
\end{aligned}$$

Andererseits ist nach Satz 31 folgende Umformung möglich:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + W_1 + x_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + W_j + x_j)) f_1(x_1 - p_{L_1}(x_1)) \dots \times \\
& f_j(x_j - p_{L_j}(x_j)) \lambda_d(dx_1) \dots \lambda_d(dx_j) \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^{d-j}(B - x_1 \cap \text{bd}(K_1 + W_1) \cap \text{bd}(K_2 + W_2 + x_2) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + W_j + x_j)) \times \\
& f_2(x_2 + x_1 - p_{L_2}(x_2 + x_1)) \dots f_j(x_j + x_1 - p_{L_j}(x_j + x_1)) \lambda_d(dx_j) \dots \lambda_d(dx_2) \times \\
& f_1(x_1 - p_{L_1}(x_1)) \lambda_d(dx_1) \\
= & \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\text{bd } K_1 + W_1} \dots \int_{\text{bd } K_j + W_j} 1_{B-x_1}(t_1) f_2(t_1 - t_2 + x_1 - p_{L_1}(t_1 - t_2 + x_1)) \dots \times \\
& f_j(t_1 - t_j + x_1 - p_{L_j}(t_1 - t_j + x_1)) [\sigma_{K_1+W_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_j+W_j}(t_j)] \mathcal{H}^{d-1}(dt_j) \dots \times \\
& \mathcal{H}^{d-1}(dt_1) f_1(x_1 - p_{L_1}(x_1)) \lambda_d(dx_1) \\
= & \lambda_{L_1}(W_1) \dots \lambda_{L_j}(W_j) \times \\
& \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\text{rel bd } K_1} \dots \int_{\text{rel bd } K_j} 1_{B-x_1}(t_1) f_2(t_1 - t_2 + x_1 - p_{L_1}(t_1 - t_2 + x_1)) \dots \times \\
& f_j(t_1 - t_j + x_1 - p_{L_j}(t_1 - t_j + x_1)) [\sigma_{K_1+L_1}(t_1), \dots, \sigma_{K_j+L_j}(t_j)] \mathcal{H}^{d-q_1-1}(dt_j) \dots \times \\
& \mathcal{H}^{d-q_j-1}(dt_1) f_1(x_1 - p_{L_1}(x_1)) \lambda_d(dx_1).
\end{aligned}$$

Setzt man die Ergebnisse beider Umformungen gleich, so erhalten wir nach der üblichen Transfor-

mation der Integrationsvariablen

$$\begin{aligned}
& \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j + x_j)) f_1(x_1) \dots f_j(x_j) \times \\
& \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{\text{rel bd } K_1} \dots \int_{\text{rel bd } K_j} f_1((z - p_{L_1}(z)) - x_1) \dots f_j((z - p_{L_j}(z)) - x_j) \times \\
& \quad [\sigma_{K_1+L_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_j+L_j}(x_j)] \mathcal{H}^{d-q_1-1}(dt_j) \dots \mathcal{H}^{d-q_j-1}(dt_1) \lambda_d(dx_1).
\end{aligned}$$

Für die mittels des Satzes von Campbell gewonnene Darstellung des Maß ν_j ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\nu_j(B) &= \int_{Z_{q,0}^d} \dots \int_{Z_{q,0}^d} \int_{L_j^\perp} \dots \int_{L_1^\perp} \mathcal{H}^{d-j}(B \cap \text{bd}(K_1 + L_1 + x_1) \cap \dots \cap \text{bd}(K_j + L_j + x_j)) \times \\
& \quad f(K_1 + L_1, x_1) \dots f(K_j + L_j, x_j) \lambda_{L_1^\perp}(dx_1) \dots \lambda_{L_j^\perp}(dx_j) \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \times \\
& \quad \mathbb{P}_0(d(K_j + L_j)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} 1_B(z) \int_{Z_{q,0}^d} \dots \int_{Z_{q,0}^d} \int_{\text{rel bd } K_1} \dots \int_{\text{rel bd } K_j} [\sigma_{K_1+L_1}(x_1), \dots, \sigma_{K_j+L_j}(x_j)] \times \\
& \quad f(K_1 + L_1, (z - p_{L_1}(z)) - x_1) \dots f(K_j + L_j, (z - p_{L_j}(z)) - x_j) \mathcal{H}^{d-q-1}(dx_j) \dots \times \\
& \quad \mathcal{H}^{d-q-1}(dx_1) \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \dots \mathbb{P}_0(d(K_1 + L_1)) \lambda_d(dz).
\end{aligned}$$

Diese Darstellung für beschränkte Borelmengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ überträgt sich durch den Satz von der monotonen Konvergenz auf beliebige Borelmengen, und wir haben den Satz bewiesen. \square

Für alle $z \in \mathbb{R}^d$ definieren wir mittels des verallgemeinerten lokalen mittleren Normalenmaßes für $A \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ durch

$$\begin{aligned}
\mu_z(A) &:= \mu_z(Z_{q,0}^d, A) \\
&= \int_{Z_{q,0}^d} \int_{\text{rel bd } K} 1_A(\sigma_{K+L}(x)) f(K + L, (z - p_L(z)) - x) \mathcal{H}^{d-q-1}(dx) \mathbb{P}_0(d(K + L))
\end{aligned}$$

ein zu X assoziiertes Borelmaß auf der Einheitssphäre S^{d-1} . Es ist für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ sowohl eindeutig durch das Intensitätsmaß von X bestimmt als auch endlich. Wir können dieses Maß somit dazu benutzen, für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ ein zu X assoziiertes Zonoid $\Pi(X, z)$ mittels seiner Stützfunktion

$$h(\Pi(X, z), u) := \int_{S^{d-1}} |\langle u, v \rangle| \mu_z(dv), u \in S^{d-1},$$

zu definieren. Wie für Prozesse konvexer Partikel zeigt man:

Satz 81 *Es seien $j \in \{1, \dots, d\}$, $q \in \{0, \dots, d-1\}$ und X ein translationsregulärer Poissonscher q -Zylinderprozess, der auf volldimensionalen Zylindern konzentriert ist. Dann gilt für λ_d -fast alle $z \in \mathbb{R}^d$ sowohl*

$$\gamma_j(z) = \frac{j!}{2^j} V_j(\Pi(X, z))$$

als auch

$$\gamma_j(z) \leq \frac{\kappa_{d-1}^j \binom{d}{j}}{d \kappa_d^{j-1} j! \kappa_{d-j}} \gamma_1(z)^j.$$

Gleichheit gilt hierbei genau dann, wenn $\Pi(X, z)$ eine Kugel ist.

Bemerkungen:

- a) Die Aussagen von Satz 59 und Satz 61 ergeben sich für $q = 0$.
- b) Gleichung (15) und Theorem 2 aus [31] ergeben sich zunächst nicht für $q = d-1$, da wir einen Poissonscher Zylinderprozess voraussetzen, der auf volldimensionalen Körpern konzentriert ist. Die enge Beziehung zwischen dem letzten Satz und diesen Resultaten von Schneider ist aber offensichtlich; zumal sich die Beweise der letzten beiden Sätze direkt auf den Fall, dass Z ein Hyperebenenprozess ist, übertragen lassen.

Für Prozesse von q -Ebenen mit $q < d-1$ gibt es kein kanonisches Vorgehen, um ein assoziiertes Zonoid zu definieren. Wohl auch aus diesem Grund beweist Schneider beide Ergebnisse nur für Poissonsche Hyperebenenprozesse, und es ist nicht offensichtlich, wie sie zu einem Resultat für Zylinderprozesse verallgemeinert werden könnten.

Literaturverzeichnis

- [1] Brown, L.; Schreiber, B. M.; Taylor, B. A.: *Spectral Synthesis and the Pompeiu Problem*
Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23**, S. 125-154, 1973
- [2] Davy, P.: *Stereology - A Statistical Viewpoint*
Dissertation, Australian National University, Canberra, 1978
- [3] Fallert, H.: *Intensitätsmaße und Quermaßdichten für (nicht-stationäre) zufällige Mengen und geometrische Punktprozesse*
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 1992
- [4] Fallert, H.: *Quermaßdichten für Punktprozesse konvexer Körper und Boolesche Modelle*
Math. Nachr. **181**, S. 165-184, 1996
- [5] Federer, H.: *Some Integralgeometric Theorems*
Trans. Amer. Math. Soc. **77**, S. 238-261, 1954
- [6] Federer, H.: *Geometric Measure Theory*
Springer, Berlin, 1969
- [7] Gardner, R. J.: *Geometric Tomography*
Cambridge University Press, Cambridge, 1995
- [8] Goodey, P.; Weil, W.: *Zonoids and Generalisations*
in *Handbook of Convex Geometry*, edited by Gruber, P. M.; Wills, J. M.; North-Holland, Amsterdam, 1993
- [9] Goodey, P.; Weil, W.: *Representations of Mixed Measures with Applications to Boolean Models*
Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **70**, S. 325-346, 2002
- [10] Henze, N.: *Stochastik II*
Vorlesungsskript, Karlsruhe, 1997
- [11] Hoffmann, L. M.: *Lokale Blaschke-Körper und Schnittdichten konvexer Partikelprozesse*
Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 2003
- [12] Hug, D.; Last, G.: *On Support Measures In Minkowski Spaces And Contact Distributions in Stochastic Geometry*
Ann. Prob. **28**, S. 796-850, 2000
- [13] Hug, D.; Last, G.; Weil, W.: *Generalized Contact Distributions of Inhomogeneous Boolean Models*
Adv. Appl. Prob. **34**, S. 21-47, 2002

- [14] Kallenberg, O.: *Random Measures*
Academic Press, London, 1983
- [15] Kallenberg, O.: *Foundations of Modern Probability*
2. Auflage, Springer, New York, 2002
- [16] Kiderlen, M.: *Schnittmittlungen und äquivariante Endomorphismen konvexer Körper*
Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 1999
- [17] Kiderlen, M.; Weil, W.: *Measure-Valued Valuations and Mixed Curvature Measures of Convex Bodies*
Geom. Dedicata **76**, S. 291-329, 1999
- [18] Kingman, J. F. C.: *Poisson Processes*
Clarendon Press, Oxford, 1993
- [19] König, D.; Schmidt, V.: *Zufällige Punktprozesse*
Teubner, Stuttgart, 1992
- [20] Leichtweiß, K.: *Konvexe Mengen*
Springer, Berlin, 1980
- [21] Matheron, G.: *Random Sets and Integral Geometry*
Wiley, New York, 1975
- [22] Molchanov, I.: *Statistics of the Boolean Model for Practitioners and Mathematicians*
Wiley, Chichester, 1997
- [23] Molchanov, I.: *Theory of Random Sets*
Springer, London, 2005
- [24] Morgan, F.: *Geometric Measure Theory*
3. Auflage, Academic Press, San Diego, 2000
- [25] Mücklich, F.; Ohser, J.: *Statistical Analysis of Microstructures in Material Science*
Wiley, New York, 2000
- [26] v. Querenburg, B.: *Mengentheoretische Topologie*
Springer, Berlin, 2001
- [27] Santalo, L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*
Addison-Wesley, Reading, Ma., 1976
- [28] Schneider, R.: *Geometric Inequalities for Poisson Processes of Convex Bodies and Cylinders*
Res. Math. **11**, S. 165-185, 1987
- [29] Schneider, R.: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*
Cambridge University Press, Cambridge, 1993
- [30] Schneider, R.: *On the Mean Normal Measures of a Particle Process*
Adv. Appl. Prob. **33**, S. 25-38, 2001

- [31] Schneider, R.: *Non-Stationary Poisson Hyperplanes and Their Induced Tessellations*
Adv. Appl. Prob. **35**, S. 139-158, 2003
- [32] Schneider R.; Weil, W.: *Translative and Kinematic Integral Formulae for Curvature Measures*
Math. Nachr. **129**, S. 76-80, 1985
- [33] Schneider, R.; Weil, W.: *Integralgeometrie*
Teubner, Stuttgart 1992
- [34] Schneider, R.; Weil, W.: *Stochastische Geometrie*
Teubner, Stuttgart 2000
- [35] Stoyan, D.; Kendall, W. S.; Mecke, J.: *Stochastic Geometry and Its Applications*
2. Auflage, Wiley, Chichester, 1995
- [36] Torquato, S.: *Random Heterogeneous Materials: Microstructure and Macroscopic Properties*
Springer, New York, 2002
- [37] Walter, W.: *Analysis 1*
5. Auflage, Springer, Berlin, 1999
- [38] Weil, W.: *Point Processes of Cylinders, Particles and Flats*
Act. Appl. Math. **9**, S. 103-136, 1987
- [39] Weil, W.: *Iterations of Translative Integral Formulae and Non-Isotropic Poisson Processes of Particles*
Math. Z. **205**, S. 531-549, 1990
- [40] Weil, W.: *Mean Bodies Associated With Random Closed Sets*
Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **50**, S. 387-312, 1997
- [41] Weil, W.: *Densities of Mixed Volumes for Boolean Models*
Adv. Appl. Prob. **33**, S. 39-60, 2001
- [42] Weil, W.: *Mixed Measures and Functionals of Translative Integral Geometry*
Math. Nachr. **223**, S.161-184, 2001
- [43] Weil, W.: *A Course on Convex Geometry*
Vorlesungsskript, Karlsruhe, 2003
- [44] Weil, W.; Wieacker, J. A.: *Densities for Stationary Random Sets and Point Processes*
Adv. Appl. Prob. **16**, S. 324-346, 1984
- [45] Wieacker, J. A.: *Translative Poincaré Formulae for Hausdorff Rectifiable Sets*
Geometriae Dedicata **16**, S. 231-248, 1984
- [46] Wieacker, J. A.: *Intersections of Random Hypersurfaces and Visibility*
Probab. Theory Relat. Fields **71**, S. 405-433, 1986
- [47] Wieacker, J. A.: *Geometric Inequalities for Random Surfaces*
Math. Nachr. **142**, S. 73-106, 1989

- [48] Zähle, M.: *Random Processes of Hausdorff Rectifiable Closed Sets*
Math. Nachr. **108**, S. 49-72, 1982
- [49] Zalcman, L.: *Offbeat Integral Geometry*
Amer. Math. Monthly **87**, S. 161-175, 1980
- [50] Zalcman, L.: *A Bibliographic Survey of the Pompeiu Problem*
NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **365**, S. 185-194, 1992

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Lars Michael Hoffmann
Geburtsdatum: 3. Dezember 1977
Geburtsort: Wuppertal
Eltern: Barbara und Egon Hoffmann

Schulbildung

Juli 1984 - Juni 1988 Grundschule Degerfelden
Juli 1988 - Juni 1997 Gymnasium Rheinfelden
Juni 1997 Abitur

Grundwehrdienst

Juli 1997 - September 1997 Grundausbildung in Todtnau-Fahl
Oktober 1997 - September 1998 Grundwehrdienst bei der TrÜbPIK Heuberg in Stetten a. k. M.

Studium

Oktober 1998 - März 2004 Studium der Wirtschaftsmathematik, Universität Karlsruhe (TH)
September 2000 Vordiplom in Mathematik
Oktober 2001 - September 2002 Auslandsjahr an der Dublin City University, Dublin, Irland

Dezember 2003 Diplomarbeit über
„Lokale Blaschke Körper und
Schnittsdichten konvexer Partikelprozesse“
Februar 2004 Diplom in Wirtschaftsmathematik, Universität Karlsruhe (TH)

Berufstätigkeit

seit April 2004 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der
Universität Karlsruhe (TH)
August 2005 - Oktober 2005 Forschungsaufenthalt an der „Marie Curie Training Site for
Advanced Medical Imaging and Spatial Statistics“ der
Universität Aarhus in Dänemark

„... and that should conclusively prove that I had the idea for 'Jurassic Park' first!“

ISBN-13: 978-3-86644-049-4

ISBN-10: 3-86644-049-9

www.uvka.de