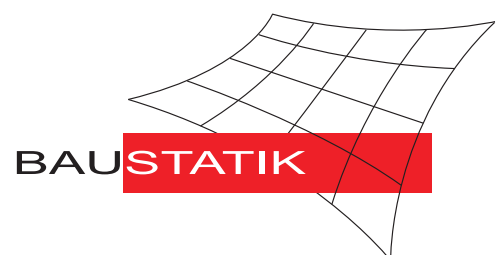


Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Institut für Baustatik

Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung

Alexander Butz



Nichtlineare Formulierung piezoelektrischer 3D-Stabstrukturen - Theorie und Finite-Element-Modellierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.–Ing. Alexander Butz

aus Germersheim

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Juli 2006

Hauptreferent: Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Korreferent: Prof. Dr.–Ing. R. Lammering

Karlsruhe 2006

Herausgeber:

Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Organisation und Verwaltung:

Institut für Baustatik
Universität Karlsruhe (TH)
Postfach 6980
76128 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608–2280
Telefax: (0721) 608–6015
E–mail: baustatik@bs.uni-karlsruhe.de

© 2006 Alexander Butz
Institut für Baustatik
Universität Karlsruhe (TH)
Kaiserstraße 12
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elektronischen Medien zu speichern.

ISBN 3-935322-10-0

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe, an dem ich im Rahmen des Graduiertenkollegs 786 „Mischfelder und Nichtlineare Wechselwirkungen“ beschäftigt war.

Dem Hauptreferenten und Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wagner gilt mein besonderer Dank für seine fachkundige und wissenschaftliche Betreuung. Die ausgesprochen angenehme Atmosphäre am Institut und die hervorragende Ausstattung trugen maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Mein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. R. Lammering für die Übernahme des Korreferates und die vielen wertvollen Anregungen zu dieser Arbeit.

Dank gilt auch allen Kollegen und Mitarbeitern des Instituts, die mit konstruktiven Diskussionen, zahlreichen Anregungen und einem sehr kollegialen Arbeitsklima meine Arbeit unterstützten. Hierbei möchte ich insbesondere Herrn Dr.-Ing. S. Klinkel hervorheben, und mich für die interessanten fachlichen Diskussionen, die vielen wertvollen Hinweise in wissenschaftlichen Fragestellungen und für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit bedanken.

Schließlich danke ich meiner Frau Melanie für ihre verständnisvolle Unterstützung und Geduld in den letzten Jahren.

Karlsruhe, im Juli 2006

Alexander Butz

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Finite-Element-Modellierung von dreidimensionalen piezoelektrischen Stabstrukturen. Hierbei werden sowohl geometrisch als auch materiell bedingte Nichtlinearitäten berücksichtigt und eine erweiterte Beschreibung des Querschnitts eingeführt.

Die Stabformulierung basiert auf den Annahmen der Kinematik nach Timoshenko, die durch drei zusätzliche Verwölbungsanteile des Querschnitts infolge Torsion, Querkraft und piezoelektrisch induzierter Schubdeformation ergänzt wird. Durch die Beschreibung endlicher Rotationen können neben Stabilitätsuntersuchungen auch Probleme behandelt werden, bei denen große Deformationen oder Starrkörperbewegungen auftreten. Zur Erfassung der elektromechanischen Koppeffekte werden die neun mechanischen Freiheitsgrade um fünf elektrische Freiheitsgrade erweitert. Dies ermöglicht eine hinreichend genaue Approximation des elektrischen Potentials sowohl in der Querschnittsebene als auch in Richtung der Stabachse.

Die Bestimmung der Wölbfunktionen erfolgt durch die näherungsweise Lösung der Gleichgewichtsbedingung in der Querschnittsebene mit der Methode der Finiten Elemente. Zu diesem Zweck wird der Querschnitt entsprechend diskretisiert. Dieses Vorgehen erlaubt die Definition von beliebigen Querschnittsgeometrien, sowie die Berücksichtigung unterschiedlicher Materialien. Somit ist es möglich, geschichtete Stabstrukturen zu modellieren, die beim Einsatz von piezoelektrischen Werkstoffen sehr häufig vorzufinden sind. Die auf diese Weise bestimmten Wölbfunktionen werden an diskreten Stellen ausgewertet und in der Stabformulierung bei der Integration des Querschnitts berücksichtigt.

Zur Erfassung der in dieser Arbeit betrachteten nichtlinearen Materialeigenschaften wird das skalare Preisach-Modell verwendet. Hierbei handelt es sich um ein mathematisches Modell zur allgemeinen Beschreibung von Hysterese-Phänomenen. Aus der Anwendung auf piezoelektrische Werkstoffe resultiert hieraus ein Verfahren zur phänomenologischen Beschreibung von ferroelektrischen Hysterese-Effekten. Durch die Vorgabe, dass die irreversible Polarisation parallel zum elektrischen Feldvektor orientiert ist, folgt daraus eine uniaxiale, dreidimensionale Formulierung des nichtlinearen Materialmodells.

Abstract

Within this thesis a finite element formulation for the efficient computation of three-dimensional piezoelectric beam structures is introduced. It considers geometrically and material nonlinear effects, as well as an extended description of the cross section of the beam structure.

Based on the Timoshenko kinematics an eccentric beam formulation is derived which is extended by three additional warping functions of the cross section due to torsion, shear forces and piezoelectrically induced shear deformations. By the consideration of finite rotations, the presented beam formulation is suited to analyze stability problems, large deformations and rigid body motions. To account for the electromechanical coupling effects, the nine mechanical degrees of freedom are extended by five electrical ones. This provides a sufficiently accurate approximation of the electric potential which is assumed to be linear in the direction of the beam axis and quadratic within the cross section.

The warping functions are computed by solving a two-dimensional in-plane equilibrium condition approximately. For this purpose, the cross section of the beam is modeled using the finite element method. Thus it is also possible to define arbitrary shapes and consider different materials within the cross section. Furthermore, this method allows to model layered beam structures which are typical for piezoelectric applications. The resulting warping functions and the discretized shape are considered in the beam formulation within the integration of the cross section.

To account for the material nonlinearities which arise in ferroelectric materials at high electric fields, the scalar Preisach model is used. This is a pure mathematical model for the general description of hysteresis phenomena. Its application to piezoelectric materials leads to a phenomenological model for ferroelectric hysteresis effects. From the constraint that the irreversible polarization is assumed to be parallel to the electric field vector follows an uniaxial, three-dimensional formulation of the constitutive model.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Problemstellung	2
1.2	Stand der Forschung	3
1.3	Ziele und inhaltliche Gliederung der Arbeit	6
2	Grundgleichungen der Elektromechanik	9
2.1	Grundlagen der Kontinuumsmechanik	9
2.1.1	Geometrie und Deformation	9
2.1.2	Mechanische Spannungen	11
2.2	Grundlegende Beziehungen der Elektrostatik	12
2.2.1	Maxwell-Gleichungen	12
2.2.2	Elektrostatik der Punktladungen	13
2.2.3	Makroskopische Elektrostatik im Dielektrikum	15
2.2.4	Elektrische Größen in materieller Formulierung	16
2.3	Stofffreie Bilanzgleichungen elektroelastisch deformierbarer Körper	17
2.4	Schwache Form des Gleichgewichts	21
2.5	Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts	21
3	Piezoelektrische Materialeigenschaften	23
3.1	Einführung	23
3.2	Ursache der piezoelektrischen Materialeigenschaften	24
3.3	Nichtlineares piezoelektrisches Materialverhalten	28
3.3.1	Ferroelektrische Hysterese	28
3.3.2	Ferroelastische Hysterese	31
3.3.3	Elektromechanisch gekoppelte Belastung	34
3.4	Konstitutive Beziehungen für piezoelektrische Werkstoffe	35
3.4.1	Thermodynamische Motivation des linearen Stoffgesetzes .	35
3.4.2	Nichtlineares Stoffgesetz	38
3.5	Piezoelektrisches Stoffgesetz der Stabtheorie	39

4	Beschreibung ferroelektrischer Hysterese mit dem Preisach-Modell	42
4.1	Beschreibung des klassischen Preisach-Modells	43
4.1.1	Mathematische Formulierung	43
4.1.2	Numerische Implementierung	47
4.2	Anwendung des Preisach-Modells auf ferroelektrische Hysterese .	50
4.3	Diskussion der Parameter der gewählten Preisach-Funktion	54
5	Querschnittsbeschreibung und Ermittlung der Wölbfunktionen	57
5.1	Ermittlung der Querschnittsverwölbungen	58
5.1.1	Betrachtung des Gleichgewichts	60
5.1.2	Randwertproblem und Stoffgesetz	60
5.1.3	Schwache Form des Randwertproblems	65
5.1.4	Finite-Element-Approximation	66
5.2	Numerische Beispiele	70
5.2.1	Querschnitt eines Mikrosensors	70
5.2.2	Vergleich der Schubdeformation infolge Querkraft und piezoelektrischer Aktivierung	72
6	Piezoelektrische Stabformulierung	75
6.1	Kinematik	76
6.2	Elektrische Feldgrößen	80
6.3	Schwache Form des Gleichgewichts	82
6.3.1	Virtuelle Verzerrungen	83
6.3.2	Virtuelles elektrisches Feld	83
6.3.3	Virtuelle innere Arbeit	84
6.3.4	Virtuelle äußere Arbeit	85
6.4	Linearisierung	88
6.4.1	Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit	88
6.4.2	Linearisierung der virtuellen äußeren Arbeit	91
6.5	Berücksichtigung des nichtlinearen Stoffgesetzes	92
6.6	Finite-Element-Formulierung	94
6.7	Berücksichtigung von dynamischen Problemen	102

7	Numerische Beispiele	104
7.1	Einfache Elementtests	105
7.1.1	Piezoelektrischer Biegestab	105
7.1.2	Belastung durch elektrische Oberflächenladungen	109
7.1.3	Kragarm mit Endmoment	112
7.2	Nichtlineares Materialmodell	116
7.2.1	1D-Beispiel	116
7.2.2	Beliebige Orientierung des elektrischen Feldes	121
7.3	Piezoelektrischer Trimorph	123
7.4	Schubaktoren	126
7.4.1	Querschubaktor	127
7.4.2	Torsionsaktor	130
7.5	Piezoelektrischer Schalter	134
7.6	Helical Spring	140
7.7	Dynamische Untersuchung eines Halbrings	147
8	Zusammenfassung und Ausblick	151
A	Materialdaten	155
A.1	Materialdaten zu Beispiel 5.2.1	155
A.2	Materialdaten zu Beispiel 7.1.1 und 7.1.2	155
A.3	Materialdaten zu Beispiel 7.1.3 und 7.5	156
A.4	Materialdaten zu Beispiel 7.2.1 und 7.2.2	156
A.5	Materialdaten zu Beispiel 7.3	157
A.6	Materialdaten zu Beispiel 5.2.2, 7.4.1 und 7.4.2	158
A.7	Materialdaten zu Beispiel 7.6	158
A.8	Materialdaten zu Beispiel 7.7	158
	Literaturverzeichnis	159

1 Einleitung

Die ständig wachsenden Anforderungen bei der Entwicklung neuer Produkte erfordern in stark technologisch orientierten Branchen wie z.B. im Automobil- und Maschinenbau, in der Luft- und Raumfahrt oder in der Medizintechnik leistungsfähige und für die jeweilige Anwendung optimierte Werkstoffe. Hierbei erfahren sogenannte intelligente Materialien die auch unter der Bezeichnung *smart materials* bekannt sind, eine zunehmende Bedeutung. Nach SMITH [145] sind darunter Werkstoffe zu verstehen, welche die Fähigkeit besitzen, elektrische, magnetische oder thermische Energie in mechanische Energie umzuwandeln. In Abhängigkeit von der Richtung, in der diese Energieumwandlung stattfindet, können solche Materialien sowohl Aktor- als auch Sensorfunktionen übernehmen, und bieten auf diese Weise neue Möglichkeiten in der Entwicklung und Optimierung von technologisch hochwertigen Anwendungen.

Als *smart materials* gelten unter anderem piezoelektrische, elektro- und magnetostruktive Materialien, elektro- und magnetorheologische Flüssigkeiten und Formgedächtnislegierungen. Dabei werden jeweils unterschiedliche physikalische Effekte ausgenutzt, siehe z.B. SMITH [145] oder TANI et al. [155].

Werden solche intelligenten Materialien in Form von Aktoren und Sensoren zusammen mit einer elektrischen Steuerung in eine passive Tragstruktur integriert, so entsteht eine *adaptive Struktur*. Im englischen Sprachraum ist in diesem Fall die Bezeichnung *smart structures* bzw. *smart material systems* üblich. Mit Hilfe von adaptiven Strukturen können neue Produkte dahingehend optimiert werden, dass sie leichter, präziser, leistungsfähiger und weniger komplex sind. Weiterhin können intelligente Strukturen ihr Verhalten selbststeuernd und in kurzer Zeit an wechselnde Betriebs- und Umweltbedingungen anpassen [36, 81].

Die Betrachtung von intelligenten Materialien, die in solchen *smart structures* zum Einsatz kommen, beschränkt sich in dieser Arbeit ausschließlich auf piezoelektrische Werkstoffe. Sie besitzen die Eigenschaft, elektrische in mechanische Energie zu transformieren, und umgekehrt.

Beim Einsatz als Aktor wird das piezoelektrische Material durch das Anlegen einer elektrischen Spannung gezielt deformiert, wodurch sich bewegliche Bauteile wie z.B. Stellglieder und Ventile [25, 81, 122] oder aktive Dämpfungen zur Vibrationskontrolle [121, 152, 154] realisieren lassen. Die kompakte Bauweise, die effiziente Energieausnutzung, die Reaktionsschnelligkeit sowie die präzise Steuerung machen piezoelektrische Aktoren hierbei für sehr unterschiedliche Anwendungen attraktiv [122].

Im Sensorbetrieb entstehen durch die Deformation des Materials elektrische Spannungen, deren Auswertung Informationen über den Zustand der Struktur liefern,

und damit die Bestimmung von mechanischen Größen, wie z.B. Verschiebungen, Dehnungen oder Beschleunigungen ermöglichen. In Abhängigkeit von der Ausführung des Sensors kann ein sehr großer Messbereich abgedeckt werden, z.B. lassen sich Kräfte in einer Größenordnung von Millinewton bis Kilonewton messen, Verschiebungen können mit einer Genauigkeit von bis zu einem Mikrometer erfasst werden [161].

1.1 Motivation und Problemstellung

In der Entwicklungsphase und bei der Optimierung von piezoelektrischen Aktoren und Sensoren sind numerische Modelle ein effizientes Werkzeug, um Zeit und Kosten einzusparen. Hierbei hat sich die Methode der finiten Elemente (FEM) als ein geeignetes Verfahren etabliert. Trotz der zunehmenden Leistungsfähigkeit moderner Computersysteme ist sowohl bei der Modellierung als auch bei der Berechnung einer Struktur ein effizientes Vorgehen von wirtschaftlichem Interesse. Hierbei muss abgewägt werden zwischen der benötigten Genauigkeit der Ergebnisse und den spezifischen Eigenschaften der Struktur, wie z.B. die Geometrie, das physikalische Verhalten oder die einwirkende Beanspruchung. Zur Lösung dieses Problems kommen bei der numerischen Modellbildung sogenannte Strukturelemente zum Einsatz.

Die Entwicklung von piezoelektrischen Strukturelementen hat vor etwa zwei Jahrzehnten eingesetzt. Die Modellierung von dünnen, flächenhaften Strukturen erfolgt je nach Anforderung mit Platten- oder Schalenelementen [10, 90, 97, 153, 154], die an dieser Stelle jedoch nicht weiter diskutiert werden. Der Fokus dieser Arbeit liegt in der effizienten Modellierung von piezoelektrischen Stabstrukturen mit Hilfe einer entsprechenden Stabformulierung. Zwei typische Anwendungen sind in Abbildung 1.1 dargestellt.

Bei der genaueren Untersuchung der existierenden Formulierungen für piezoelektrische Stabstrukturen ist festzustellen, dass die aus der Finite-Element-Methode

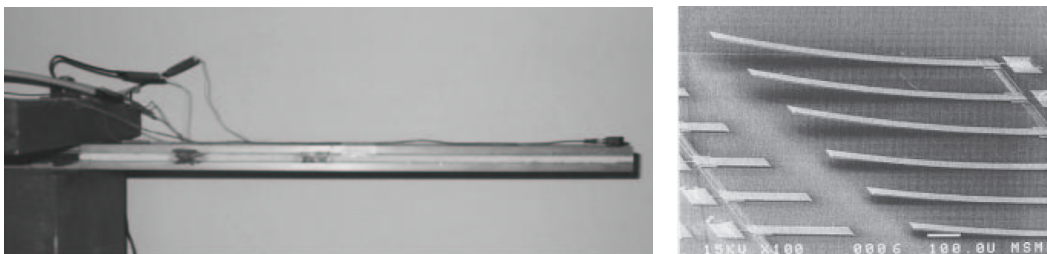


Abb. 1.1: Typische Stabstrukturen mit piezoelektrischen Komponenten. Shear-Actuator [12] (links) und Beschleunigungssensoren [45] (rechts).

bekannten Möglichkeiten bei weitem noch nicht ausgeschöpft sind. Vor allem aktuellere Entwicklungen bei piezoelektrischen Aktoren [12, 125] erfordern eine erweiterte Formulierung, um ein Werkzeug bereitzustellen, das flexibel einsetzbar ist und gleichzeitig einen möglichst geringen numerischen Aufwand erfordert. In diesem Zusammenhang sind vor allem die vier folgenden Gesichtspunkte zu nennen, die im Rahmen einer piezoelektrischen Stabformulierung bisher unzureichend behandelt wurden:

- dreidimensionale Formulierung der Stabkinematik,
- Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten,
- nichtlineares Stoffgesetz,
- Erfassung beliebiger Querschnittsgeometrien sowie Berücksichtigung von unterschiedlichen Materialien.

Eine detaillierte Diskussion der hier aufgeführten Aspekte erfolgt im nächsten Abschnitt.

1.2 **Stand der Forschung**

Die ersten Arbeiten in denen piezoelektrische Finite-Element-Formulierungen behandelt werden, gehen auf den Anfang der achtziger Jahre zurück, siehe z.B. ALLIK & HUGHES [5] oder ALLIK et al. [6]. Eine Übersicht über die sich anschließende Entwicklung verschiedener Finite-Element-Formulierungen für piezoelektrische Strukturen ist bei BENJEDDOU [18] ausführlich dargestellt.

Analytische Modelle

Für die Untersuchung von piezoelektrischen Stabstrukturen sind in der Literatur häufig analytische Lösungen angegeben, siehe z.B. [40, 103, 140, 146, 169, 176]. Dies geht in der Regel mit starken Vereinfachungen der zugrunde liegenden Annahmen einher, wie z.B. mit der Reduktion auf ein zweidimensionales Problem, eine vorgegebene Querschnittsgeometrie oder ein vereinfachtes Stoffgesetz mit festgelegter Polarisationsrichtung des piezoelektrischen Materials. Dementsprechend ist der Anwendungsbereich in dem solche Modelle eingesetzt werden können lediglich für sehr einfache Spezialfälle gerechtfertigt. Komplexere Probleme bei denen u.a. materielle oder geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt werden müssen, sind damit nur unter sehr großem Aufwand, oder nur unzureichend zu erfassen.

Räumliche piezoelektrische Stabformulierung

Für die Modellierung von klassischen Biegeaktoren reicht eine zweidimensionale Stabformulierung in der Regel aus. Werden jedoch Werkstoffe mit anisotropen Materialeigenschaften verwendet, so ist auch bei diesen Strukturen sorgfältig zu prüfen, ob eine zweidimensionale Betrachtung ausreichend ist, siehe hierzu auch Beispiel 7.3.

Moderne Aktoren besitzen häufig einen deutlich komplexeren Aufbau, wie z.B. die *Helical Spring*, die aus einem spiralförmig gewundenen Streifen aus piezoelektrischem Material besteht [125, 126]. Zur numerischen Behandlung von solchen Strukturen ist eine dreidimensionale Betrachtung unerlässlich.

Anwendungen, bei denen Torsionsbeanspruchungen auftreten, sind ebenfalls nur mit einer dreidimensionalen Modellierung der Struktur zu erfassen. Dies gilt vorwiegend für Aktor-Anwendungen, bei denen durch ein elektrisches Feld eine Verdrehung des Stabes erreicht wird [19].

In der Literatur befassen sich nur wenige Arbeiten mit dreidimensionalen Formulierungen für piezoelektrische Stabstrukturen. JIAO & ZHANG [82] untersuchen einen spiralförmigen Aktor mit Hilfe eines vereinfachten, analytischen Modells. Eine Formulierung mit reduzierter Kinematik wird von ALDRAIHEM und WETHERHOLD [4] benutzt, die damit die Koppelung zwischen Torsion und Biegung um eine Stabachse untersuchen. In der Arbeit von GANAPATHI et al. [56] wird eine dreidimensionale Stabformulierung vorgestellt, die Torsionsprobleme einschließlich Querschnittsverwölbung berücksichtigt, die jedoch auf rechteckförmige Querschnitte beschränkt ist.

Geometrische Nichtlinearitäten

Der Einfluss geometrischer Nichtlinearitäten wird bei piezoelektrischen Stabformulierungen bisher vorwiegend bei der Untersuchung von Stabilitätsproblemen berücksichtigt. In den Arbeiten von HU et al. [69] bzw. MUKHERJEE & CHAUDHURI [118] wird der piezoelektrische Effekt ausgenutzt, um die Knicklast von stabförmigen Strukturen zu erhöhen. Für die dabei angenommenen, einfachen Geometrien werden geschlossene Lösungen angegeben.

Neben der Erfassung von Stabilitätsproblemen müssen die geometrischen Nichtlinearitäten auch bei großen Deformationen berücksichtigt werden. MUKHERJEE & CHAUDHURI [119] stellen eine zweidimensionale Finite-Element-Formulierung mit moderaten Rotationen vor und untersuchen den Einfluss der geometrischen Nichtlinearitäten auf die elektrischen Feldgrößen. CHRÓSCIELEWSKI et al. [37] verwenden ein geometrisch nichtlineares 2D-Bernoulli-Stabelement zur Untersuchung von dynamischen Problemen.

Stabformulierungen, die das Auftreten von Starrkörper-Rotationen berücksichtigen, können z.B. bei der Untersuchung von Helikopter-Rotorblättern [26] oder bei Gyroskopen [84, 174] von Interesse sein.

Nichtlineares Materialverhalten

Aus der für piezoelektrische Werkstoffe typischen Kristallstruktur resultieren nichtlineare Materialeigenschaften, die ausgeprägte ferroelektrische und ferroelastische Hysterese-Effekte zur Folge haben. Zur Modellierung dieser nichtlinearen Materialeigenschaften sind in der Literatur einige Veröffentlichungen zu finden, in denen unterschiedliche Ansätze verfolgt werden.

Mikroskopisch motivierte Modelle werden u.a. bei CHEN & LYNCH [34], HWANG et al. [73] oder HUBER & FLECK [70] vorgestellt. Hierbei werden die Umklapp-Prozesse einzelner Kristallkörner bei der Modellierung mit in Betracht gezogen. Zu den phänomenologischen Modellen, die das Material auf makroskopischer Ebene betrachten, und die auf thermodynamischen Prinzipien basieren, gehören u. a. die Arbeiten von BASSIOUNY et al. [14], KAMLAH & TSAKMAKIS [86], KLINKEL [88], LANDIS [99] oder McMEEKING & LANDIS [114]. Eine ausführliche Übersicht hierzu ist in der Arbeit von KAMLAH [85] zu finden.

Einen weiteren Ansatz stellt das Preisach-Modell dar. Hierbei handelt es sich ebenfalls um ein phänomenologisches Modell, bei dem jedoch keine thermodynamischen Annahmen zugrunde liegen, siehe z.B. BUTZ & KLINKEL [27], HWANG et al. [74], PASCO & BERRY [124] oder SIMCOVICS et al. [143].

In dieser Zusammenfassung wird deutlich, dass einige Modelle existieren, die zur Modellierung der nichtlinearen Materialeigenschaften von piezoelektrischen Werkstoffen geeignet sind. Arbeiten, welche die Implementierung nichtlinearer Stoffgesetze in eine Finite-Element-Formulierung für Stabstrukturen behandeln, sind jedoch sehr wenige bekannt. Hier sei auf die Veröffentlichungen von BUTZ & KLINKEL [27, 28] verwiesen.

Beschreibung des Querschnitts

Die Verwendung von piezoelektrischen Werkstoffen als Aktor oder als Sensor ist in der Regel an eine passive Tragstruktur gebunden. Bei stabförmigen Bauteilen resultiert daraus sehr häufig ein geschichteter Aufbau in Richtung einer der Querschnittsachsen. Eine genaue Vorhersage über das Verhalten der Struktur ist nur dann möglich, wenn die mechanischen und elektrischen Eigenschaften der einzelnen Materialsichten bei der Modellbildung hinreichend berücksichtigt werden. SARAVANOS & HEYLIGER [134] klassifizieren die in der Literatur beschriebenen

Laminat-Theorien anhand der getroffenen Annahmen bezüglich der Kinematik und der Behandlung des elektrischen Potentials. Die einfachsten Modelle betrachten die aus dem piezoelektrischen Effekt resultierenden Dehnungen als zusätzliche Dehnungsanteile im Rahmen einer rein mechanischen Formulierung (*induced strain models*). Elektrische Freiheitsgrade werden hierbei nicht berücksichtigt. Verbesserte Formulierungen enthalten das elektrische Potential als zusätzlichen Freiheitsgrad. Die Kinematik beruht hierbei auf der Annahme, dass sich der geschichtete Querschnitt in gleiche Weise deformiert wie eine einzige, homogene Materialschicht (*single-layer models*). Bei den in der Literatur als *discrete-layer* oder *layerwise piezoelectric laminate theories* bekannten Formulierungen beschreiben die Kinematik und das elektrische Potential einen abschnittsweise stetigen Verlauf in Dickenrichtung. Mit diesem Ansatz können die Effekte, die durch die Schichtung des Querschnitts entstehen, zwar gut modelliert werden, jedoch steigt damit auch der numerische Aufwand.

Ein modifiziertes Modell wird z.B. von CHEE et al. [33] vorgeschlagen. Hierbei wird die Kinematik eines *single-layer* Modells verbessert, indem ein kubischer Verschiebungsansatz über die Höhe angenommen wird.

1.3 Ziele und inhaltliche Gliederung der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit besteht in der Entwicklung einer leistungsfähigen und effizienten Finite-Element-Formulierung zur Modellierung von piezoelektrischen Stabstrukturen. Die wesentlichen Gesichtspunkte und neuen Aspekte, die sich aus dieser Forderung ergeben, und die in dieser Arbeit behandelt werden, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Es wird eine dreidimensionale, exzentrische Stabformulierung entwickelt, die auf den Annahmen der Timoshenko-Stabtheorie basiert, und zusätzlich die Verwölbung des Querschnitts infolge Torsion, Querkraft bzw. piezoelektrischer Schubdeformation berücksichtigt. Durch die Beschreibung von endlichen Rotationen des Querschnitts können mit dieser Formulierung Stabilitätsprobleme, große Deformationen sowie Starrkörperbewegungen betrachtet werden.

Zur Erfassung der elektromechanischen Koppeleffekte werden die neun mechanischen Freiheitsgrade um fünf elektrische Freiheitsgrade erweitert, die eine hinreichend genaue Beschreibung des elektrischen Potentials ermöglichen. Weiterhin werden die elektrischen Oberflächenladungen als Belastungsgröße in der entwickelten Formulierung mit berücksichtigt.

- Die Beschreibung des Querschnitts erfolgt mit der Methode der Finiten

Elemente. Damit können Querschnitte mit komplexer Geometrie und mit unterschiedlichen Materialien in dem numerischen Modell erfasst werden. Aus der zweidimensionalen Finite-Element-Formulierung des Querschnitts lassen sich die entsprechenden Wölbfunktionen bestimmen, die in der Stabformulierung als zusätzliche Kinematiken eingehen. Im Gegensatz zu rein mechanischen Stabformulierungen tritt hier die piezoelektrisch induzierte Schubdeformation als zusätzlicher Verwölbungslastfall auf.

Die Berücksichtigung von Wölbfunktionen als zusätzliche kinematische Größe stellt bei der Modellierung von geschichteten Strukturen eine Alternative dar zu den in diesem Fall häufig eingesetzten *discrete layer models*, siehe Abschnitt 1.2.

- Das in der Stabformulierung implementierte Stoffgesetz resultiert aus der Kondensation der Materialtensoren eines piezoelektrischen Kontinuums. Hierbei wird im Rahmen der Stabtheorie die Annahme eines ebenen Spannungszustandes vorausgesetzt. Die Polarisationsrichtung des piezoelektrischen Materials kann beliebig orientiert sein.
- Materielle Nichtlinearitäten werden mit dem skalaren Preisach-Modell abgebildet. Aus diesem Modell resultiert ein Parameter zur Beschreibung der nichtlinearen ferroelektrischen Effekte. Dies ermöglicht eine uniaxiale, dreidimensionale Formulierung der irreversiblen Zustandsgrößen.

Die vorliegende Arbeit ist in folgende Abschnitte gegliedert:

In **Kapitel 2** werden die wesentlichen Beziehungen der Kontinuumsmechanik und der elektrostatischen Feldtheorie zusammengefasst. Sie dienen als Grundlage für die weitere Behandlung von elektromechanisch gekoppelten Feldproblemen. Weiterhin wird in diesem Abschnitt die schwache Form des Gleichgewichts sowie deren Linearisierung in allgemeiner, stoffunabhängiger Darstellung für elektromechanisch gekoppelte Probleme entwickelt.

Kapitel 3 behandelt die Materialeigenschaften von piezoelektrischen Keramiken. Ausgehend von dem Aufbau der Kristallstruktur dieser Werkstoffe werden sowohl die linearen als auch die nichtlinearen Materialeigenschaften qualitativ anhand eines eindimensionalen Modells diskutiert.

Weiterhin wird ein lineares Stoffgesetz für piezoelektrische Kontinua motiviert, das anschließend auf eine nichtlineare Formulierung erweitert wird.

Kapitel 4 beschreibt das skalare Preisach-Modell, das in dieser Arbeit verwendet wird, um die materiellen Nichtlinearitäten bei piezoelektrischen Werkstoffen abzubilden. Hierzu wird das Preisach-Modell und dessen numerische Implementierung zunächst in einer allgemeinen Darstellung vorgestellt. Anschließend erfolgt

die Spezifizierung der entsprechenden Parameter zur Behandlung piezoelektrischer Werkstoffe, sowie die Aufbereitung für die spätere Implementierung in die Stabformulierung.

Kapitel 5 behandelt die Beschreibung des Stabquerschnitts. Hierbei wird die schwache Form des Gleichgewichts für die Lastfälle Torsion, Querkraft und piezoelektrisch induzierte Schubdeformation als zweidimensionales Problem formuliert und mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst. Die daraus resultierenden Querschnittsverwölbungen werden in der Stabformulierung als zusätzliche Kinematiken berücksichtigt.

In **Kapitel 6** wird die piezoelektrische Stabformulierung behandelt. Zunächst erfolgt die Aufbereitung der schwachen Form des Gleichgewichts sowie deren Linearisierung. Hierbei werden die speziellen Ansätze für die Kinematik und das elektrische Potential berücksichtigt, die sich aus der zugrunde liegenden Stabformulierung ergeben. Zur näherungsweisen Lösung der schwachen Form des Gleichgewichts wird anschließend eine Finite-Element-Approximation der Stabformulierung entwickelt. Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Betrachtung von dynamischen Problemstellungen im Rahmen der hier vorgestellten Formulierung.

In **Kapitel 7** wird die Leistungsfähigkeit der entwickelten Elementformulierung anhand verschiedener numerischer Beispiele untersucht.

In **Kapitel 8** sind die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Weiterhin werden in diesem Abschnitt Fragestellungen diskutiert, die im Rahmen weiterer Forschungsarbeiten untersucht werden könnten.

2 Grundgleichungen der Elektromechanik

In diesem Kapitel werden zunächst die wesentlichen Beziehungen der Kontinuumsmechanik und der elektrostatischen Feldtheorie dargestellt. Sie bilden die Grundlage für die Behandlung der elektromechanisch gekoppelten Problemstellungen, die im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden.

Anschließend folgt die Darstellung der Bilanzgleichungen für elastische Dielektrika. Hierbei ist eine Erweiterung der bekannten Erhaltungssätze aus der Kontinuumsmechanik erforderlich, um die auftretenden elektrischen Volumenkräfte entsprechend zu berücksichtigen.

Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Arbeit folgt die schwache Form des Gleichgewichts für elektromechanisch gekoppelte Probleme in einer allgemeinen, stofffreien Darstellung. Im Hinblick auf die später folgende Anwendung der Finite-Element-Methode wird die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts zum Abschluss dieses Kapitels behandelt.

2.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Beziehungen der Kontinuumsmechanik zusammengefasst. Für eine ausführliche Behandlung dieses Themas wird an dieser Stelle auf die Literatur von ERINGEN [46], GURTIN [66] oder TRUESDELL & NOLL [162] verwiesen.

2.1.1 Geometrie und Deformation

In der Kontinuumsmechanik ist ein Körper \mathcal{B} als eine zusammenhängende Menge materieller Punkte \mathcal{M} definiert. Für jeden Zeitpunkt t ($-\infty < t < \infty$) nimmt der Körper eine bestimmte Konfiguration ein, die durch die Abbildung der materiellen Punkte \mathcal{M} in den euklidischen Vektorraum bestimmt ist.

Die Abbildung zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird als Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 bezeichnet, zum Zeitpunkt $t > t_0$ als Momentankonfiguration \mathcal{B}_t . Die Position der materiellen Punkte in der Referenzkonfiguration sind durch die Lagrangeschen bzw. materiellen Koordinaten \mathbf{X} bestimmt, in der Momentankonfiguration durch die Eulerschen bzw. räumlichen Koordinaten \mathbf{x} . Die Differenz $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ entspricht der Verschiebung \mathbf{u} eines materiellen Punktes zum Zeitpunkt t . Die stetige und bijektive Abbildung Φ stellt den funktionalen Zusammenhang zwischen den materiellen und den räumlichen Koordinaten eines Punktes her

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{X}, t) \qquad \mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad . \quad (2.1)$$

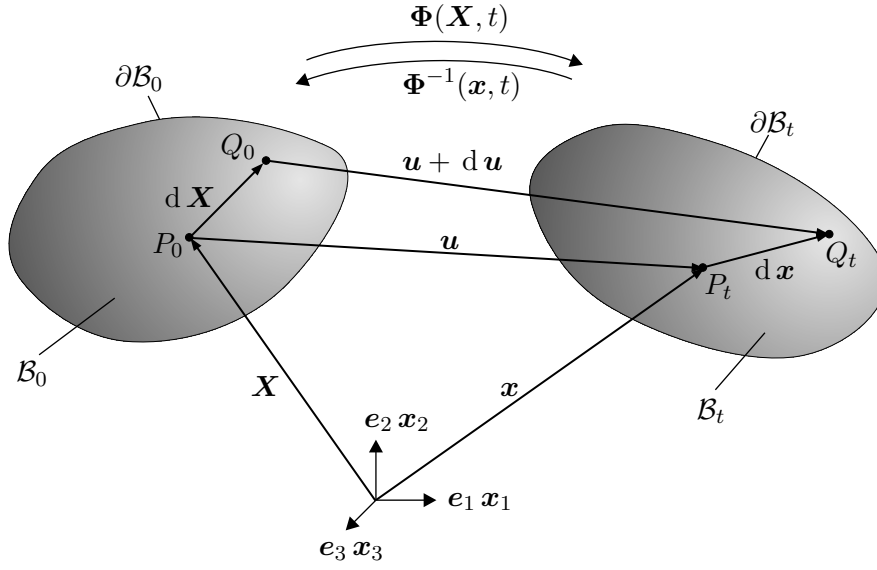


Abb. 2.1: Referenz- und Momentankonfiguration eines beliebigen Körpers \mathcal{B} .

Damit beschreibt die Funktion Φ die Deformation des Körpers beim Übergang von der Referenz- in die Momentankonfiguration, wie in Abbildung 2.1 dargestellt ist.

Zur Untersuchung von Deformationsprozessen wird der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} definiert

$$\mathbf{F} := \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} \quad , \quad (2.2)$$

der als eine lineare Abbildung des differentiellen Linienelements $d\mathbf{X}$ auf das differentielle Linienelement $d\mathbf{x}$ interpretiert werden kann

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad . \quad (2.3)$$

Um die Bijektivität dieser Abbildung zu gewährleisten, muss auch die Umkehrung der Beziehung (2.3) in der Form

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

existieren. Als Bedingung für die Existenz des inversen Tensors \mathbf{F}^{-1} und der Undurchdringbarkeit des Körpers \mathcal{B} wird gefordert, dass die Jacobi-Funktionaldeterminante J größer als Null ist

$$J := \det \mathbf{F} > 0 \quad . \quad (2.5)$$

Die Transformation von Flächenelementen von der Referenz- in die Momentankonfiguration erfolgt mit der Nanson-Formel

$$\mathbf{n} da = \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^T)^{-1} \mathbf{N} dA \quad , \quad (2.6)$$

wobei \mathbf{n} bzw. \mathbf{N} den nach außen gerichteten Normalenvektoren auf die Flächen da bzw. dA der Referenz- bzw. Momentankonfiguration entsprechen. Für die Transformation von Volumenelementen gilt die Beziehung

$$dv = \det \mathbf{F} dV \quad . \quad (2.7)$$

Als ein weiteres Verzerrungsmaß ist neben dem Deformationsgradienten der Greensche Verzerrungstensor \mathbf{E} definiert

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad . \quad (2.8)$$

Dieser Tensor besitzt gegenüber dem Deformationsgradienten \mathbf{F} den Vorteil, dass er symmetrisch ist, während im allgemeinen Fall $\mathbf{F}^T \neq \mathbf{F}$ gilt. Weiterhin kann gezeigt werden, dass \mathbf{E} sowohl rotationsinvariant als auch richtungstreu ist.

Mit der Definition des Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} := \text{Grad } \mathbf{u}$ und der Verschiebung $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ lässt sich der Greensche Verzerrungstensor in der Form

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (2.9)$$

darstellen. Eine verallgemeinerte Definition von Verzerrungsmaßen ist z.B. bei OGDEN [123] angegeben, aus der neben dem Greenschen Verzerrungstensor weitere rotationsinvariante Verzerrungstensoren folgen, die in Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter diskutiert werden.

2.1.2 Mechanische Spannungen

Mit dem Eulerschen Schnittprinzip können die Kräfte \mathbf{f} im Inneren eines Körpers durch einen gedachten Schnitt freigelegt werden. Für den mechanischen Spannungsvektor \mathbf{t} , der in der Schnittfläche wirkt, gilt die Beziehung

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad . \quad (2.10)$$

Der Spannungsvektor ist folglich abhängig von der Ausrichtung des Flächenelements da und damit von dessen Normalenvektor \mathbf{n} . Mit dem Cauchy-Theorem wird der Spannungsvektor als eine lineare Abbildung des Normalenvektors über die Beziehung

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{auf} \quad \partial_t \mathcal{B}_t \quad (2.11)$$

interpretiert. Der hierbei auftretende Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist in der Momentankonfiguration definiert und aus diesem Grund auch als der „wahre Spannungstensor“ bekannt. Aus der Transformation des vektoriiellen Flächenelements $\mathbf{n} da$ in die Referenzkonfiguration folgt der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{P} := \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad , \quad (2.12)$$

mit dem der Spannungsvektor \mathbf{t}_0 in materieller Formulierung dargestellt werden kann als

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \mathbf{N} \quad \text{auf} \quad \partial_t \mathcal{B}_0 \quad . \quad (2.13)$$

Während der Cauchy-Spannungstensor symmetrisch ist, geht diese Eigenschaft bei der Transformation auf den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor verloren. Um auch in der Referenzkonfiguration einen symmetrischen Spannungstensor bereitzustellen, wird durch eine weitere Transformation der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor definiert

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad , \quad (2.14)$$

der eine reine Rechengröße darstellt, und dessen Komponenten physikalisch nicht interpretierbar sind.

2.2 Grundlegende Beziehungen der Elektrostatik

Zur Beschreibung von elektromechanisch gekoppelten Problemstellungen ist neben den kontinuumsmechanischen Beziehungen auch die elektromagnetische Feldtheorie zu berücksichtigen, die in diesem Abschnitt für den quasi-statischen Fall diskutiert wird. Eine detaillierte Behandlung dieses Themas ist unter anderem in den Lehrbüchern von GREINER [60], JACKSON [79] oder LANDAU & LIFSHITZ [98] gegeben.

2.2.1 Maxwell-Gleichungen

Die Erhaltungssätze der elektromagnetischen Feldtheorie sind in den sogenannten Maxwell-Gleichungen zusammengefasst, siehe z.B. ERINGEN & MAUGIN [48] oder GROT [62]. Sie lauten in differentieller Schreibweise

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}} &= \vec{\mathbf{j}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad , \\ \operatorname{div} \vec{\mathbf{D}} &= \bar{\rho} & \operatorname{div} \vec{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit dem elektrischen bzw. magnetischen Feld $\vec{\mathbf{E}}$ und $\vec{\mathbf{H}}$, der elektrischen bzw. magnetischen Flussdichte $\vec{\mathbf{D}}$ bzw. $\vec{\mathbf{B}}$, der elektrischen Stromdichte $\vec{\mathbf{j}}$, sowie der Volumenladungsdichte $\bar{\rho}$.

Mit den Maxwell-Gleichungen ist es möglich, die physikalischen Vorgänge innerhalb von elektromagnetischen Feldern vollständig zu beschreiben. Die Beziehungen in Gl. (2.15) stellen ein System von gekoppelten, partiellen Differentialgleichungen dar und führen im allgemeinen Fall zu sehr komplexen Formulierungen.

Bei der Betrachtung von piezoelektrischen Problemstellungen lassen sich die Maxwell-Gleichungen durch Berücksichtigung der folgenden Annahmen jedoch maßgeblich vereinfachen. Beim Einsatz von piezoelektrischen Materialien in Aktoren oder Sensoren liegen die materiellen Geschwindigkeiten in der Regel unterhalb der Schallgeschwindigkeit und damit weit unterhalb der Geschwindigkeit von Lichtwellen. Die zeitlichen Änderungen des elektrischen Feldes sind in diesem Fall vernachlässigbar, siehe MAUGIN [112] oder NELSON [120]. Die elektromagnetische Feldtheorie vereinfacht sich damit auf ein quasi-statisches Problem, in dem das elektrische und das magnetische Feld nicht mehr miteinander gekoppelt sind. Die magnetischen Felder sind für die Behandlung von piezoelektrischen Problemen zu vernachlässigen, da die verwendeten Materialien nicht magnetisierbar sind. Weiterhin können die piezoelektrischen Werkstoffe als Nichtleiter betrachtet werden. Mit diesen Annahmen reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen (2.15) auf die sogenannte *Maxwell-Faraday Theorie der Elektrostatik*, die durch die beiden Beziehungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \bar{\rho} \qquad (2.16)$$

beschrieben wird, siehe z.B. ERINGEN [47] oder TOUPIN [160].

2.2.2 Elektrostatik der Punktladungen

Die Existenz von elektrischen Ladungen ist ein grundlegendes Postulat der Physik. Eine Ladung q kann positiv oder negativ sein, innerhalb eines abgeschlossenen Systems bleibt die Ladung immer erhalten. Die Kraft \mathbf{F}_e , die zwei ruhende Ladungen q_1 und q_2 aufeinander ausüben, wird durch das Coulombsche Gesetz beschrieben

$$\mathbf{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^2} \mathbf{e}_{1-2} \quad , \qquad (2.17)$$

mit dem normierten Richtungsvektor \mathbf{e}_{1-2} , der die Verbindungslinie zwischen beiden Ladungen darstellt. Die Größe ϵ_0 entspricht der *Dielektrizitätskonstante des Vakuums* und besitzt den Wert $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ A s/V m}$.

Ausgehend von der Kraft \mathbf{F}_e , die eine Ladung q_1 auf eine hinreichend kleine Probeladung q ausübt, kann die elektrische Feldstärke \vec{E} motiviert werden. Die Normierung der Kraft bezüglich der Ladung q führt auf die Definition

$$\vec{E} := \frac{\mathbf{F}_e}{q} \quad . \qquad (2.18)$$

Durch die Betrachtung der Arbeit, die geleistet werden muss, um eine Probeladung q in einem elektrischen Feld von der Stelle \mathbf{x}_1 nach \mathbf{x}_2 zu verschieben, kann \vec{E} als das Gradientenfeld der Potentialfunktion ϕ dargestellt werden [79]

$$\vec{E} = - \operatorname{grad} \phi \quad , \qquad (2.19)$$

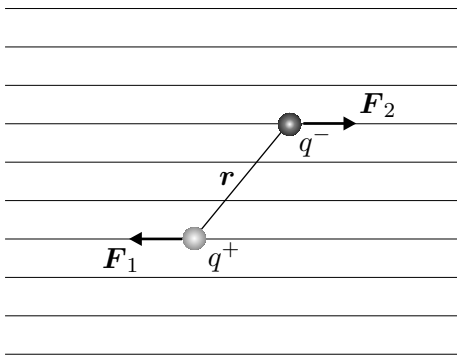


Abb. 2.2: Dipol in einem homogenen elektrischen Feld [58]. In diesem Fall gilt $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\|$.

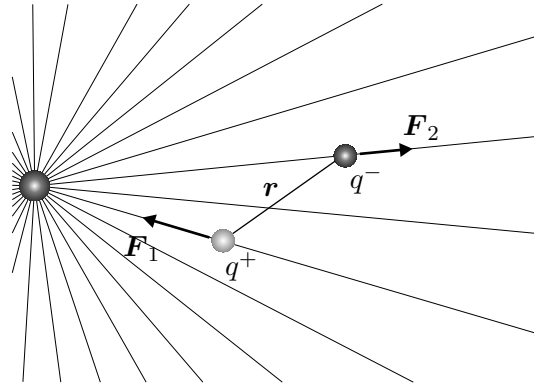


Abb. 2.3: Dipol in einem heterogenen elektrischen Feld einer Punktladung [58]. Hier gilt $\|\mathbf{F}_1\| \neq \|\mathbf{F}_2\|$.

wobei ϕ als das *elektrische Potential* bezeichnet wird. Die Potentialdifferenz $\phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2)$ zweier Punkte \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 im Raum ist unter dem Begriff *elektrische Spannung* bekannt. Da die Rotation eines Gradientenfeldes immer gleich Null ist, folgt aus Gl. (2.19) die bereits bekannte Beziehung nach Gl. (2.16). Anschaulich bedeutet diese Aussage, dass in der Elektrostatik keine in sich geschlossenen Feldlinien existieren. Die positiven bzw. negativen elektrischen Ladungen sind die Quellen bzw. Senken des elektrischen Feldes.

Als ein Sonderfall bei der Behandlung von Punktladungen kann der elektrische Dipol angesehen werden, der durch ein Paar benachbarter Ladungen q mit unterschiedlichen Vorzeichen gebildet wird. Jedem Dipol kann ein Dipolmoment $\vec{\mathbf{p}}$ zugeordnet werden, für das gilt

$$\vec{\mathbf{p}} = q \mathbf{r} \quad , \quad (2.20)$$

wobei \mathbf{r} den Vektor von der negativen zur positiven Ladung beschreibt. Befindet sich ein Dipol in einem homogenen elektrischen Feld, so entsteht, wie in Abbildung 2.2 dargestellt ist, ein Drehmoment der Größe

$$\vec{\mathbf{m}}_{Dipol} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \quad . \quad (2.21)$$

In einem nicht homogenen elektrischen Feld wirkt neben einem Drehmoment zusätzlich eine resultierende Kraft auf den Dipol, da in diesem Fall die auf die Ladungen wirkenden Kräfte nicht mehr im Gleichgewicht stehen, siehe Abbildung 2.3.

2.2.3 Makroskopische Elektrostatik im Dielektrikum

Die in Abschnitt 2.2.2 erläuterten Beziehungen können bei der Betrachtung einzelner Punktladungen, z.B. im atomaren Bereich oder bei Ionen in Kristallgittern, direkt angewendet werden. Bei Problemstellungen in makroskopischen Dimensionen, wie sie in den folgenden Kapiteln ausschließlich behandelt werden, ist eine Berücksichtigung der einzelnen Ladungen nicht sinnvoll. Besonders die sehr große Anzahl von Teilchen und die aus ihrer Eigenschwingung resultierende, auf atomarer Ebene zeitlich nicht konstante Ladungsverteilung ist hierbei problematisch. Aus diesem Grund wird im Weiteren ein makroskopisches Modell behandelt, wobei angenommen wird, dass die Eigenschaften einzelner Teilchen innerhalb des Kontinuums gemittelt oder verschmiert sind. Der Übergang von der Betrachtung einzelner Ladungen hin zu einem makroskopischen Modell ist z.B. den Lehrbüchern von GREINER [60] oder JACKSON [79] zu entnehmen. Hieraus resultieren die beiden Beziehungen

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\bar{\rho}}{\epsilon_0} \quad . \quad (2.22)$$

Wenn innerhalb eines Dielektrikums keine zusätzlichen Ladungen vorhanden sind, befindet es sich in einem elektrisch neutralen Zustand. In diesem Fall ergibt eine Integration der Volumenladungsdichte $\bar{\rho}$ über den gesamten Körper

$$\int_{\mathcal{B}} \bar{\rho} \, dV = 0 \quad . \quad (2.23)$$

In lokaler Form kann Gl. (2.23) als die Divergenz des Vektors \vec{P} dargestellt werden, der als Polarisationsvektor bezeichnet wird

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \vec{P} \quad , \quad (2.24)$$

und der außerhalb des Dielektrikums die Größe Null besitzt [98]. Der Polarisationsvektor bestimmt außer der Volumenladungsdichte auch die Dichte der Ladungen auf der Oberfläche eines Körpers. Diese Oberflächenladungsdichte $\bar{\sigma}$ folgt aus der Polarisation über die Beziehung

$$\bar{\sigma} = \vec{P} \cdot \mathbf{n} \quad . \quad (2.25)$$

Im Gegensatz zur Gesamtladung des Körpers nach Gl. (2.23) muss die Polarisation nicht verschwinden. Physikalisch kann der Polarisationsvektor als das auf die Volumeneinheit des Dielektrikums bezogene Dipolmoment interpretiert werden. Die Beziehungen (2.22) und (2.24) lassen sich zusammenfassen

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad , \quad (2.26)$$

wobei der Vektor \vec{D} als die dielektrische Verschiebung bezeichnet wird. Zur Berücksichtigung von zusätzlichen, in den Körper eingebrachten Ladungen wird Gl. (2.26) erweitert

$$\operatorname{div} \vec{D} = \bar{\rho}_{ext} \quad . \quad (2.27)$$

Die Größe $\bar{\rho}_{ext}$ entspricht hierbei der Volumendichte dieser externen Ladungen.

2.2.4 Darstellung der elektrischen Größen in materieller Formulierung

Die Darstellung der elektrischen Größen kann, analog zu den mechanischen Größen in Abschnitt 2.1.1, in der Momentan- oder in der Referenzkonfiguration erfolgen. Hierzu transformieren LAX & NELSON [102] die Maxwell-Gleichungen von der räumlichen in die materielle Darstellung.

Ausgehend von der integralen Form der Maxwell-Gleichungen und unter Berücksichtigung von Gl. (2.2), (2.6) und (2.7) ergeben sich für die Größen der quasi-statischen Maxwell-Faraday Theorie die folgenden Transformationsbeziehungen

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \det \mathbf{F} \vec{E} \\ \vec{D}_0 &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^T \vec{D} \\ \vec{P}_0 &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^T \vec{P} \\ \bar{\rho}_0 &= \det \mathbf{F} \bar{\rho} \quad . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Größen \vec{E}_0 , \vec{D}_0 , \vec{P}_0 bzw. $\bar{\rho}_0$ entsprechen hierbei dem elektrischen Feld, der dielektrischen Verschiebung, der Polarisierung bzw. der Volumenladungsdichte in der Referenzkonfiguration.

2.3 Stofffreie Bilanzgleichungen elektroelastisch deformierbarer Körper

Die allgemeine Formulierung der integralen Bilanzaussagen kann in folgender Darstellung erfolgen

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \alpha \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \Sigma \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \Gamma \, da \quad , \quad (2.29)$$

die auch als das Reynoldssches Transporttheorem bekannt ist, siehe z.B. ALTENBACH [8] oder GURTIN [66]. Die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe α entspricht dem Zuwachs Σ innerhalb des Körpers und dem Zuwachs Γ , der über die Oberfläche des Körpers stattfindet. Weiterhin muss die Aussage nach Gl. (2.29) auch für jeden Teilbereich des Körpers erfüllt sein.

Durch die Bestimmung der Größen α , Σ und Γ werden in diesem Abschnitt die entsprechenden Bilanzaussagen für Masse, Impuls und Drehimpuls eines elastischen Dielektrikums behandelt. Hierzu ist es erforderlich, die aus der Kontinuumsmechanik bekannten Bilanzgleichungen zu erweitern. Die Ladungen in einem dielektrischen Körper sind nicht frei beweglich, sondern an bestimmte Träger gebunden [60]. Dies hat zur Folge, dass Kräfte, die eigentlich nur auf die elektrischen Ladungen wirken, zusätzliche Wechselwirkungen mit mechanischen Größen hervorrufen. Somit lassen sich elektrische Volumenkräfte \vec{f} und Volumenmomente \vec{m} motivieren, die durch die beiden Beziehungen

$$\vec{f} = \bar{\rho} \vec{E} + \text{grad } \vec{E} \cdot \vec{P} \quad \text{und} \quad \vec{m} = \vec{P} \times \vec{E} \quad (2.30)$$

beschrieben werden [2, 85]. Die Volumenkraft \vec{f} ist in der Literatur auch unter dem Namen *ponderomotorische Kraft* bekannt, siehe z.B. [60, 98]. Eine detaillierte Behandlung elastischer Dielektrika ist in den grundlegenden Arbeiten von ERINGEN [47], TIERSTEN [158] und TOUPIN [160] zu finden, in denen auch die elektrisch induzierten Zusatzterme aus Gl. (2.30) diskutiert werden.

Anstatt die Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik durch zusätzliche Anteile zu erweitern [1, 2, 115], besteht eine alternative Vorgehensweise darin, von einer allgemeinen Formulierung auszugehen, in der die Wechselwirkungen zwischen einem Kontinuum und den elektromagnetischen Feldgrößen enthalten sind. Diese kann dann sukzessive auf das Problem eines elastischen Dielektrikums vereinfacht werden, wie z.B. bei ERINGEN & MAUGIN [48] oder GROT [62] dargestellt wird.

Erhaltung der Masse

Es wird postuliert, dass die Masse m eines Körpers während des Deformationsprozesses eine invariante Größe ist. Ein Austausch von Masse durch die Oberfläche oder ein Massezuwachs im Inneren des Körpers ist damit ausgeschlossen. Mit der Definition der Massendichte $\rho = dm/dv$ folgt aus Gl. (2.29) für die Bilanz der Masse

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \, dv = 0 \quad . \quad (2.31)$$

Unter Berücksichtigung der Transformationsregel für Volumenelemente nach Gl. (2.7) und der zeitlichen Ableitung der Jacobi-Determinante $\det \mathbf{F} = \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} (\det \mathbf{F})$ kann die Beziehung (2.31) in der lokalen Form dargestellt werden

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad , \quad (2.32)$$

die nach Euler und d'Alembert als Kontinuitätsbedingung bezeichnet wird.

Erhaltung des Impulses

Der Impuls bzw. die Bewegungsgröße \mathbf{I} eines Körpers ist eine Erhaltungsgröße und ist definiert als

$$\mathbf{I} := \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad . \quad (2.33)$$

Der Satz von der Erhaltung des Impulses sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Resultierenden der auf den Körper einwirkenden Kräfte ist. Die Terme Σ und Γ aus der allgemeinen Bilanzaussage nach Gl. (2.1) können hier als die Volumenkräfte $\rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}$ und als die Oberflächenspannungen \mathbf{t} identifiziert werden. Daraus folgt die Formulierung des Impulserhaltungssatzes in räumlicher Darstellung

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} (\rho \mathbf{b} + \vec{\mathbf{f}}) \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \, da \quad . \quad (2.34)$$

Im Gegensatz zu einer rein mechanischen Betrachtung tritt bei einem dielektrischen Kontinuum der Anteil $\vec{\mathbf{f}}$ als zusätzliche Größe auf. Durch die Anwendung des Divergenz-Theorems und dem Cauchy-Theorem nach Gl. (2.11) kann aus Gl. (2.34) die lokale Form des Impulserhaltungssatzes gewonnen werden

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho (\mathbf{b} - \ddot{\mathbf{x}}) + \vec{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_t \quad , \quad (2.35)$$

die unter Vernachlässigung der elektrischen Volumenkraft \vec{f} auch als die erste Cauchysche Bewegungsgleichung bekannt ist. Die Transformation der Beziehung (2.35) in die Referenzkonfiguration

$$\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 (\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) + \vec{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}_0 \quad , \quad (2.36)$$

überführt die lokale Impulsbilanz in die materielle Darstellung. Die Formulierung der Volumenkraft \vec{f}_0 bezüglich der Referenzkonfiguration erfolgt unter Berücksichtigung der Beziehungen (2.30) und (2.28).

Erhaltung des Drehimpulses

Der Drehimpuls \mathbf{L} eines mit der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ bewegten Körpers bezüglich eines festen Raumpunktes \mathbf{x}_0 ist eine weitere Erhaltungsgröße und lautet in räumlicher Darstellung

$$\mathbf{L} := \int_{\mathcal{B}_t} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \rho \dot{\mathbf{x}} \, dv \quad . \quad (2.37)$$

Mit der Definition des Spannungsvektors \mathbf{t} durch den Cauchyschen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ nach Gl. (2.11) und der Abkürzung $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ folgt die Drehimpulsbilanz eines elastischen Dielektrikums

$$\int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{x}} \, dv = \int_{\mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{b} + \vec{f}) + \vec{m} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \, da \quad . \quad (2.38)$$

Die zusätzlichen Beiträge aus der elektrischen Volumenkraft und des Volumenmoments sind hierbei deutlich erkennbar. Die aus der Kontinuumsmechanik bekannten Transformationen der Beziehung (2.38) führen unter Berücksichtigung der Impulsbilanz (2.36) auf die lokale Form der Drehimpulserhaltung

$$\mathbf{1} \times (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^M) = \mathbf{0} \quad . \quad (2.39)$$

Neben den Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist nun zusätzlich der Maxwell-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}^M = \vec{\mathbf{P}} \otimes \vec{\mathbf{E}}$ zu berücksichtigen, der aus dem elektrischen Volumenmoment \vec{m} herrührt [173]. Nach MCMEEKING & LANDIS [115] muss zwar der resultierende Spannungstensor aus der Summe $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^M$ symmetrisch sein, dies gilt im Falle eines elastischen Dielektrikums jedoch nicht mehr unbedingt für den Cauchy-Spannungstensor. Damit wird ein wesentlicher Unterschied zu einer rein mechanischen Betrachtung eines Kontinuums deutlich.

Sind das elektrische Feld und der Polarisationsvektor gleich orientiert, dann gilt $\vec{m} = \vec{\mathbf{P}} \times \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0}$. Aus Gl. (2.39) resultiert somit für diesen speziellen Fall ein Cauchy-Spannungstensor mit symmetrischen Eigenschaften.

Mechanischer Anteil	Elektrischer Anteil
freie Feldgröße	
Verschiebung \mathbf{u}	Potential ϕ
Verzerrung $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H})$	Elektrisches Feld $\vec{\mathbf{E}}_0 = -\text{Grad } \phi$
Impulssatz $\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 (\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ in \mathcal{B}_0	Gaußsches Gesetz $\text{Div } \vec{\mathbf{D}}_0 - \bar{\rho}_0 = 0$ in \mathcal{B}_0
Randbedingungen	
$\mathbf{P} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{t}_0 = \mathbf{0}$ auf $\partial_t \mathcal{B}_0$ $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ auf $\partial_u \mathcal{B}_0$	$\vec{\mathbf{D}}_0 \cdot \mathbf{N} - \bar{\sigma}_0 = 0$ auf $\partial_\sigma \mathcal{B}_0$ $\phi = \bar{\phi}$ auf $\partial_\phi \mathcal{B}_0$

Tab. 2.1: Zusammenfassung der wesentlichen Beziehungen eines elastischen Dielektrikums in materieller Darstellung.

Die Berücksichtigung dieser zusätzlichen Anteile $\vec{\mathbf{f}}$ und $\vec{\mathbf{m}}$ führt zu einer wesentlich komplexeren Theorie, als es bei einer reinen kontinuumsmechanischen Betrachtung der Fall ist. Im Hinblick auf die später folgende Modellierung von piezoelektrischen Materialien ist deshalb zu diskutieren, wie groß der Einfluss dieser beiden Anteile $\vec{\mathbf{f}}$ und $\vec{\mathbf{m}}$ ist. Hierzu führt KAMLAH [85] in seiner Arbeit eine Abschätzung durch, über die Größe der zu erwartenden mechanischen Spannungen infolge der elektrisch induzierten Zusatzterme. Aus dieser Abschätzung kann gefolgert werden, dass die zusätzlichen mechanischen Spannungen im Vergleich zu denjenigen, die in technischen Anwendungen auftreten, klein und folglich vernachlässigbar sind.

Mit dieser Annahme entsprechen die Bilanzsätze eines elastischen Dielektrikums denjenigen eines mechanischen Kontinuums. Die wesentlichen Beziehungen, die für die weitere Betrachtung von piezoelektrischen Problemstellungen zugrundegelegt werden, sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird ausschließlich die materielle Formulierung verwendet. Zur Vereinfachung der Notation werden deshalb die Bezeichnungen $\vec{\mathbf{E}}_0$, $\vec{\mathbf{D}}_0$ und $\vec{\mathbf{P}}_0$ für die folgenden Betrachtungen durch $\vec{\mathbf{E}}$, $\vec{\mathbf{D}}$ und $\vec{\mathbf{P}}$ ersetzt.

2.4 Schwache Form des Gleichgewichts

Zur Lösung des in Tabelle 2.3 zusammengefassten Systems von Feldgleichungen wird das Prinzip der virtuellen Arbeit verwendet, das auch als die schwache Formulierung der lokalen Gleichgewichtsaussagen bekannt ist. Der Vorteil bei dessen Anwendung besteht darin, dass keine weiteren Annahmen vorausgesetzt werden, insbesondere ist die Existenz einer Potentialfunktion nicht erforderlich. Damit ist dieses Vorgehen allgemein anwendbar, unter anderem auch bei inelastischem Materialverhalten [172].

Die schwache Form des Gleichgewichts bezüglich der Referenzkonfiguration folgt aus den lokalen Formen des Impulssatzes und des Gaußschen Gesetzes durch Multiplikation mit den Testfunktionen $\delta \mathbf{u}$ bzw. $\delta \phi$ und der anschließenden Integration über das Volumen des Körpers \mathcal{B}_0

$$\int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div } \mathbf{P} + \rho_0(\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{u}})) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} (\text{Div } \vec{\mathbf{D}} - \bar{\rho}_0) \delta \phi \, dV = 0 \quad . \quad (2.40)$$

Die partielle Integration von Gl. (2.40) und die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes führt nach weiteren Umformungen und unter Berücksichtigung der Randbedingungen auf die schwache Form des Gleichgewichts

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \phi, \delta \phi) &= \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} - \vec{\mathbf{D}} \cdot \delta \vec{\mathbf{E}} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 (\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\rho}_0 \delta \phi \, dV - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \bar{\sigma}_0 \delta \phi \, dA = 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

in einer allgemeinen, stoffunabhängigen Formulierung. Die in dieser Arbeit behandelten piezoelektrischen Koppeffekte werden durch ein geeignetes Stoffgesetz für die Größen \mathbf{S} und $\vec{\mathbf{D}}$ berücksichtigt, das in Abschnitt 3.4 motiviert wird.

Aus dem linearen Stoffgesetz nach Gl. (3.15) folgt so z.B. die bekannte Darstellung der schwachen Form des Gleichgewichts, die u.a. auch bei ALLIK & HUGHES [5] oder BENJEDDOU [18] diskutiert wird.

2.5 Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

Zur näherungsweisen Lösung der in Gl. (2.41) dargestellten schwachen Form des Gleichgewichts wird die Methode der Finiten Elemente verwendet, siehe Abschnitt 6.6. Das daraus resultierende, nichtlineare Gleichungssystem muss mit ei-

nem entsprechenden Algorithmus iterativ gelöst werden. Hierzu wird das Newton-Raphson-Verfahren verwendet, das in der Nähe der gesuchten Lösung ein quadratisches Konvergenzverhalten besitzt.

Bei dieser Methode ergibt sich eine verbesserte Lösung durch eine Taylorreihenentwicklung an der Stelle einer bereits gegebenen Näherungslösung. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Beziehung (2.41) liefert die Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts, die mit Hilfe der Richtungsableitung bestimmt werden kann [172]. Eine ausführliche Behandlung dieses Themas in der Literatur ist unter anderem in den Arbeiten von HUGHES & PISTER [72], MARDEN & HUGHES [108] oder WRIGGERS [171, 172] zu finden.

Im Rahmen der elektromechanisch gekoppelten Theorie sind bei der Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts zwei Richtungsableitungen $D_u G \cdot \Delta \mathbf{u}$ und $D_\phi G \Delta \phi$ nach den Verschiebungen \mathbf{u} bzw. dem elektrischen Potential ϕ zu berücksichtigen

$$\text{Lin}[G(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \phi + \Delta \phi, \delta \phi)] = G + D_u G \cdot \Delta \mathbf{u} + D_\phi G \Delta \phi \quad . \quad (2.42)$$

Diese werden mit Hilfe der Gateaux-Ableitung bestimmt, und können in folgender Weise formuliert werden

$$\begin{aligned} D_u G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \phi, \delta \phi) \cdot \Delta \mathbf{u} &= \left. \frac{d}{d\alpha} G(\mathbf{u} + \alpha \Delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \phi, \delta \phi) \right|_{\alpha=0} \\ D_\phi G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \phi, \delta \phi) \Delta \phi &= \left. \frac{d}{d\alpha} G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \phi + \alpha \Delta \phi, \delta \phi) \right|_{\alpha=0} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Aus der Anwendung der beiden Gateaux-Ableitungen auf die schwache Form des Gleichgewichts nach der Beziehung (2.41) ergeben sich die linearisierten Anteile, die sich in der Form

$$\begin{aligned} D_u G \cdot \Delta \mathbf{u} + D_\phi G \Delta \phi &= \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{S} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta \vec{\mathbf{D}} \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \Delta \delta \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \Delta \delta \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \, dV \end{aligned} \quad (2.44)$$

zusammenfassen lassen.

3 Piezoelektrische Materialeigenschaften

3.1 Einführung

Unter Piezoelektrizität lässt sich allgemein die elektromechanische Wechselwirkung zwischen dem mechanischen und dem elektrischen Zustand eines Materials verstehen. Hierbei können zwei Effekte beobachtet werden.

Bei dem sogenannten *direkten piezoelektrischen Effekt* bewirkt eine mechanische Spannung eine Änderung des Polarisationszustandes innerhalb des Materials. Dieses Verhalten wird im Bereich der Sensorik ausgenutzt, indem die Deformation eines Körpers in ein messbares elektrisches Signal umgewandelt wird.

Der *inverse piezoelektrische Effekt* verursacht dagegen eine Deformation infolge eines aufgetragenen elektrischen Feldes. Durch die Ausnutzung dieser Eigenschaft können Strukturen durch eine elektrische Ansteuerung gezielt verformt werden, und eignen sich somit für Anwendungen in der Aktorik.

Als Entdecker des direkten piezoelektrischen Effekts gelten die Brüder Pierre und Jacques CURIE, die diesen Effekt im Jahr 1880 für die natürlich vorkommenden Turmalin-Einkristalle wissenschaftlich beschrieben [41]. Ein Jahr später wurde auch der von LIPPMANN [105] vorhergesagte inverse piezoelektrische Effekt experimentell bestätigt. Einen großen Beitrag zum Verständnis der Piezoelektrizität leistete VOIGT [165], der im Jahr 1910 in seinem „Lehrbuch der Kristallphysik“ die piezoelektrischen Koeffizienten für alle 32 Kristallklassen qualitativ bestimmte.

Lange Zeit waren nur bestimmte Einkristalle als Werkstoffe mit piezoelektrischen Eigenschaften bekannt, z.B. Quarz, Turmalin oder Lithiumniobat. Von diesen ist vor allem Quarz nach wie vor von technischer Bedeutung und wird in Anwendungen wie z.B. Oszillatoren, Filtern oder Sensoren eingesetzt.

Die Eigenschaften der ersten piezoelektrischen Keramik aus Bariumtitanat wurden 1947 von CHERRY & ADLER [35] beschrieben. Daran anschließend folgte die Entwicklung der inzwischen weit verbreiteten Blei-Zirkonat-Titanat Keramiken, die unter der Bezeichnung PZT-Keramiken bekannt sind. Diese Werkstoffe zeichnen sich durch einen stark ausgeprägten piezoelektrischen Effekt, moderate Herstellungskosten und hohe Curie-Temperaturen aus. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Materialeigenschaften durch das Mischungsverhältnis der Komponenten angepasst werden können, wodurch sich eine bessere Abstimmung des Materials auf die jeweilige Anwendung erzielen lässt.

KAWAI [87] entdeckte 1969, dass bei dem Kunststoff PVDF (Polyvinylidenfluorid) nach entsprechenden Bearbeitungsverfahren piezoelektrische Eigenschaften nachzuweisen sind. Die Vorteile dieses Materials liegen in seiner hohen Elastizität

und in seiner geringen Dicke ($6 - 9 \mu\text{m}$), die es erlaubt, dünne piezoelektrische Folien herzustellen.

Weitere Ausführungen über die historischen Entwicklungen auf dem Gebiet piezoelektrischer Materialien sind den ausführlichen Einleitungen von CADY [29], JAFFE et al. [80] und SMITH [145], sowie dem Aufsatz von MASON [110] zu entnehmen.

3.2 Ursache der piezoelektrischen Materialeigenschaften

In diesem Abschnitt werden die physikalischen Ursachen, durch welche die piezoelektrischen Materialeigenschaften hervorgerufen werden, qualitativ diskutiert. Dabei beschränkt sich die Betrachtung auf piezoelektrische Keramiken.

Piezokeramiken sind kristalline Werkstoffe, in denen die positiven und negativen Ionen in einem regelmäßigen Kristallgitter angeordnet sind. Die kleinste Einheit dieses Gitters ist die sogenannte Elementar- oder Einheitszelle, aus deren periodischer Anordnung die Kristallstruktur des Materials aufgebaut werden kann.

Infolge der Anordnung der Ionen innerhalb einer Einheitszelle kann ein positiver und ein negativer Ladungsschwerpunkt definiert werden. Lassen sich die Ladungsschwerpunkte durch ein äußeres elektrisches Feld verschieben, dann ist dieses Material polarisierbar. Wenn sich die Ladungsschwerpunkte bereits ohne elektrische Belastung an verschiedenen Positionen innerhalb der Einheitszelle befinden, dann wird dies als spontane Polarisation bezeichnet. Für Kristalle, die eine solche Eigenschaft besitzen, wird ein Polarisationsvektor \vec{P}_s vom negativen zum positiven Ladungsschwerpunkt vereinbart.

Die Einheitszelle eines Barium-Titanat-Kristalls ist in Abbildung 3.1 in zwei verschiedenen Phasen dargestellt. Entscheidend für die piezoelektrischen Eigenschaften des Materials ist dabei die Lage der Ladungsschwerpunkte zueinander. In der sogenannten paraelektrischen Phase liegt ein kubisches Kristallgitter vor. Hier besitzen alle Seiten des Kristallgitters die gleiche Länge a , und die Ladungsschwerpunkte fallen zusammen, da sich das Titan-Ion im Zentrum der Einheitszelle befindet. Eine spontane Polarisation tritt nicht auf. In dieser Phase, die sich oberhalb der sogenannten Curie-Temperatur einstellt, ist kein piezoelektrischer Effekt zu beobachten. Unterhalb der Curie-Temperatur wandert das Titan-Ion vom Zentrum der Einheitszelle in Richtung einer der sechs Flächenmittelpunkte. Dabei wechselt die Kristallstruktur von der kubischen in die tetragonale Phase, die auch als ferroelektrische Phase bezeichnet wird. Aus Abbildung 3.1 wird ersichtlich, dass die Ladungsschwerpunkte in dieser Phase nicht mehr zusammenfallen, und eine spontane Polarisation und somit ein elektrischer Dipol entsteht. Weiterhin wird bei dieser Phasenumwandlung das Kristallgitter verzerrt. Die Sei-

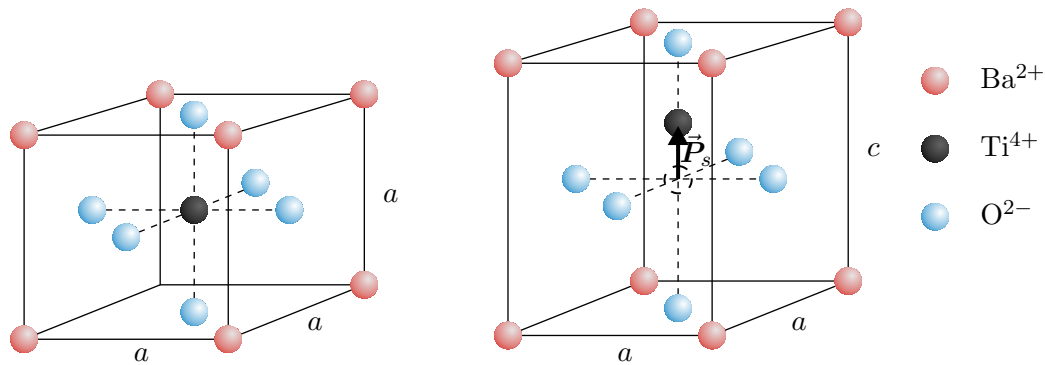


Abb. 3.1: Einheitszelle eines Barium-Titanat-Kristalls. Links ist die paraelektrische Phase und rechts die ferroelektrische Phase dargestellt.

te c , parallel zum Polarisationsvektor der Einheitszelle, verlängert sich bei diesem Vorgang um ca. 1 % [85]. Die Einheitszelle besitzt nun eine ausgezeichnete Richtung, die im Weiteren als *Polarisationsrichtung* bezeichnet wird. In dieser Phase weist das Material piezoelektrische Eigenschaften auf.

Basierend auf diesen grundlegenden Betrachtungen einer Einheitszelle können nun die beiden Begriffe *Ferroelektrizität* und *Piezoelektrizität* präzisiert werden, siehe auch JAFFE et al. [80] oder WEISSMANTEL [170].

Ferroelektrische Materialien besitzen innerhalb eines bestimmten Temperaturbereichs eine spontane Polarisation, deren Richtung durch ein äußeres elektrisches Feld umgekehrt werden kann [76]. Hierbei ist anzumerken, dass diese Umkehrung nicht immer praktisch durchführbar ist, z.B. kann in dem Kristall ein elektrischer Durchschlag erfolgen, bevor die zur Umpolung erforderliche elektrische Feldstärke erreicht wird. Eine ausführliche Beschreibung der Eigenschaften solcher Werkstoffe ist bei WEISSMANTEL [170] zu finden.

Bei piezoelektrischen Materialien führt eine mechanische Spannung zu einer Verschiebung der Ladungsschwerpunkte und damit zu einer Änderung des Polarisationszustandes. Durch ein äußeres elektrisches Feld werden die Ladungsschwerpunkte ebenfalls verschoben, was zu einer Deformation des Körpers führt. Dieses Verhalten tritt nur bei Materialien auf, deren Kristalle kein Symmetriezentrum aufweisen.

Hierbei ist anzumerken, dass Ferroelektrika in der ferroelektrischen Phase grundsätzlich piezoelektrisch sind, jedoch sind nicht alle Kristalle, die ein piezoelektrisches Verhalten aufweisen, auch ferroelektrisch. Um bei den Keramiken die piezoelektrischen Eigenschaften technisch nutzen zu können, müssen die Werkstoffe auch ferroelektrisch sein, denn nur dann kann die Polarisationsrichtung durch einen sogenannten *Polungsvorgang* so beeinflusst werden, dass ein makroskopisch nutzbarer Effekt auftritt [67].

Nach diesen Erläuterungen der piezoelektrischen Eigenschaften auf mikroskopischer Ebene erfolgt nun der Wechsel hin zu einer makroskopischen Betrachtung. Eine ferroelektrische Keramik ist ein Polykristall der aus Körnern besteht, die wiederum in einzelne Domänen aufgeteilt werden können. Nach WEISSMANTEL & HAMANN [170] kann eine Domäne in einem Festkörper allgemein als ein physikalisch abgrenzbares Raumgebiet betrachtet werden, in dem eine den Zustand des Festkörpers charakterisierende vektorielle Größe überall den gleichen Wert besitzt. Auf einen ferroelektrischen Werkstoff bezogen, ist eine Domäne ein Bereich innerhalb eines Kristallkorns, in dem die Richtungsvektoren der spontanen Polarisierung der Einheitszellen gleich orientiert sind.

Beim Übergang von der para- in die ferroelektrische Phase, wie er beim Abkühlen der Keramik nach dem Herstellungsprozess stattfindet, erfolgt eine willkürliche Ausrichtung der einzelnen Domänen, so dass das Material bei makroskopischer Betrachtung keine piezoelektrischen Eigenschaften besitzt. Durch das Anlegen eines starken elektrischen Feldes kann die Polarisationsrichtung der Domänen beeinflusst werden, indem die Dipole durch Umklapp-Prozesse ihre Polarisationsrichtung ändern, und sich möglichst parallel zu dem äußeren elektrischen Feld ausrichten. Bei diesem Vorgang drehen sich jedoch nicht die Domänen selbst, sondern bestimmte Atome des Kristallgitters wechseln ihre Position. Dabei können sich die Grenzen zwischen den Domänen verschieben oder ganz verschwinden. Dieser Vorgang ist schematisch in Abbildung 3.2 dargestellt. In diesem Zustand sind in der Keramik auch auf makroskopischer Ebene piezoelektrische Eigenschaften feststellbar, die technisch genutzt werden können. Dieser Vorgang, bei dem ein starkes äußeres elektrisches Feld die spontane Polarisierung der Domänen ausrichtet, wird als *Polung* der Keramik bezeichnet. Die Feldstärke, ab der diese Umklapp-Vorgänge einsetzen, entspricht der *Koerzitiv-Feldstärke* \vec{E}^c .

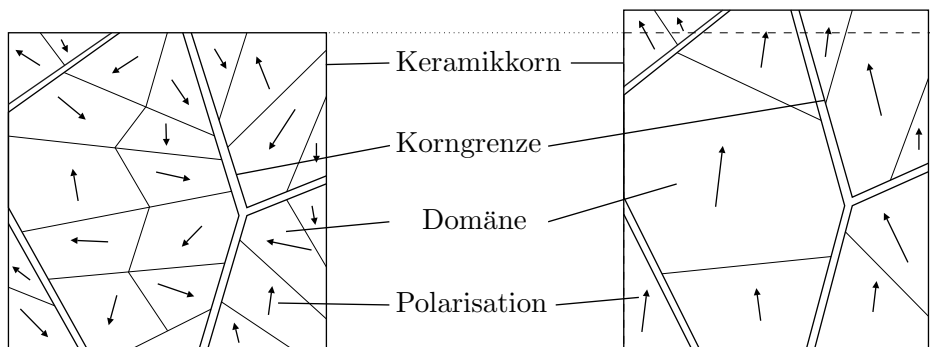


Abb. 3.2: Domänenstruktur einer piezoelektrischen Keramik vor und nach dem Polungsvorgang nach [81]. Deutlich erkennbar ist die dabei auftretenden Änderung der Geometrie.

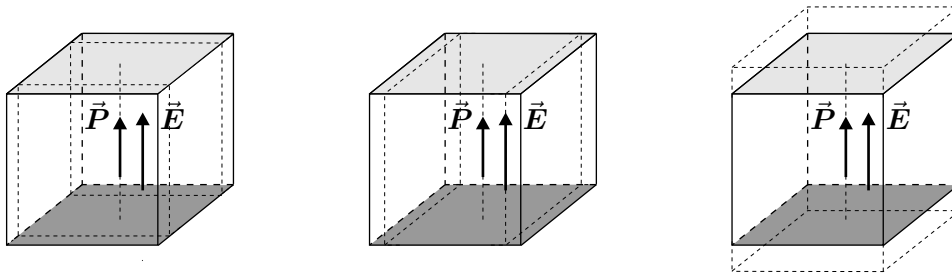


Abb. 3.3: Verzerrungen einer PZT-Keramik bei einer Belastung durch ein äußeres elektrisches Feld parallel zur Polarisationsrichtung [136].

Durch eine Erwärmung über die Curie-Temperatur kann eine gepolte Keramik thermisch depolarisiert werden. Wie beim Herstellungsprozess findet hier während der Abkühlung der Keramik ein Übergang von der paraelektrischen in die ferroelektrische Phase statt, bei dem sich die Domänen ohne bevorzugte Orientierung ausrichten, was zu einem Verlust der makroskopischen Piezoelektrizität führt.

Durch den Polungsvorgang verliert die Keramik ihre isotropen Eigenschaften. Sie besitzt nun mit der Polarisationsrichtung eine ausgezeichnete Orientierung, und damit eine transversale Isotropie in diese Richtung. Dies wird dadurch deutlich, dass sich infolge einer elektrischen Belastung unterschiedliche Verzerrungszustände einstellen, die von der Richtung des elektrischen Felds bezüglich der Polarisationsrichtung abhängen. Die Abbildungen 3.3 und 3.4 illustrieren diese Richtungsabhängigkeit für eine Keramik aus Bariumtitanat.

Wenn die Polarisationsrichtung und das elektrische Feld parallel und gleich orientiert sind, dann erfolgt eine positive Dehnung in Richtung der Polarisationsachse und eine Stauchung in den beiden dazu senkrechten Richtungen. Die in Abbildung 3.3 dargestellten Verzerrungen treten somit gleichzeitig auf.

Wirkt das elektrische Feld dagegen senkrecht zur Polarisationsrichtung, dann stellt sich ein reiner Schubverzerrungszustand ein. In Abbildung 3.4 sind die ent-

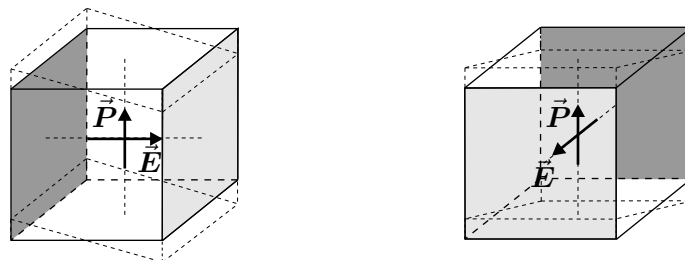


Abb. 3.4: Verzerrungen einer PZT-Keramik bei der Belastung durch zwei verschiedene äußere elektrische Felder, die jeweils senkrecht zur Polarisationsrichtung wirken [136].

sprechenden Deformationen infolge zweier verschiedener elektrischer Felder illustriert. Die dargestellten Verzerrungseffekte gelten außer für Bariumtitanat auch für PZT-Keramiken, da diese ebenfalls eine Perowskit-Kristallstruktur [170] besitzen.

3.3 Nichtlineares piezoelektrisches Materialverhalten

In diesem Abschnitt werden die ferroelektrischen und ferroelastischen Hystereseeffekte diskutiert, die bei piezoelektrischen Keramiken unter hoher elektrischer oder mechanischer Belastung auftreten. Im Rahmen einer möglichst einfachen Darstellung erfolgt hier eine qualitative Betrachtung anhand eines einachsigen Modells. An dieser Stelle sei auf die Arbeiten von KAMLAH [85], SMITH [145] und ZHOU [177] hingewiesen, in denen das nichtlineare Materialverhalten im Detail behandelt wird.

3.3.1 Ferroelektrische Hysterese

Zunächst werden die Hysteresen untersucht, die infolge eines äußeren elektrischen Feldes auftreten. Es wird angenommen, dass die Keramik vor der Belastung keine makroskopische Polarisation besitzt, d.h. der Ausgangszustand des Materials entspricht dem direkt nach der Herstellung oder dem nach einer thermischen Depolarisation.

Dielektrische Hysterese

Bei der dielektrischen Hysterese wird der Polarisationszustand \vec{P} infolge eines äußeren elektrischen Feldes \vec{E} betrachtet. In Abbildung 3.5 ist eine idealisierte dielektrische Hysterese-Kurve dargestellt. Wird ein elektrisches Feld an eine ungepolte Keramik angelegt, so erfolgt zunächst eine reversible Polarisation des Materials, wobei sich ein linearer Zusammenhang zwischen der Belastung und der Polarisation einstellt. In Abbildung 3.5 ist diese lineare Beziehung am Beginn der gestrichelten Neukurve erkennbar. Wird das elektrische Feld weiter gesteigert, beginnen die Umklapp-Vorgänge der Domänen, die Linearität zwischen \vec{E} und \vec{P} geht verloren. Je weiter sich der Wert des elektrischen Feldes an den der Koerzitivfeldstärke annähert, umso mehr Domänen ändern ihre Orientierung, und umso steiler wird die Hysterese-Kurve. Wird die Belastung darüber hinaus gesteigert, klingen die Umklapp-Prozesse wieder ab, bis sich schließlich alle Domänen entsprechend ausgerichtet haben. Bei einer weiteren Erhöhung der Belastung stellt

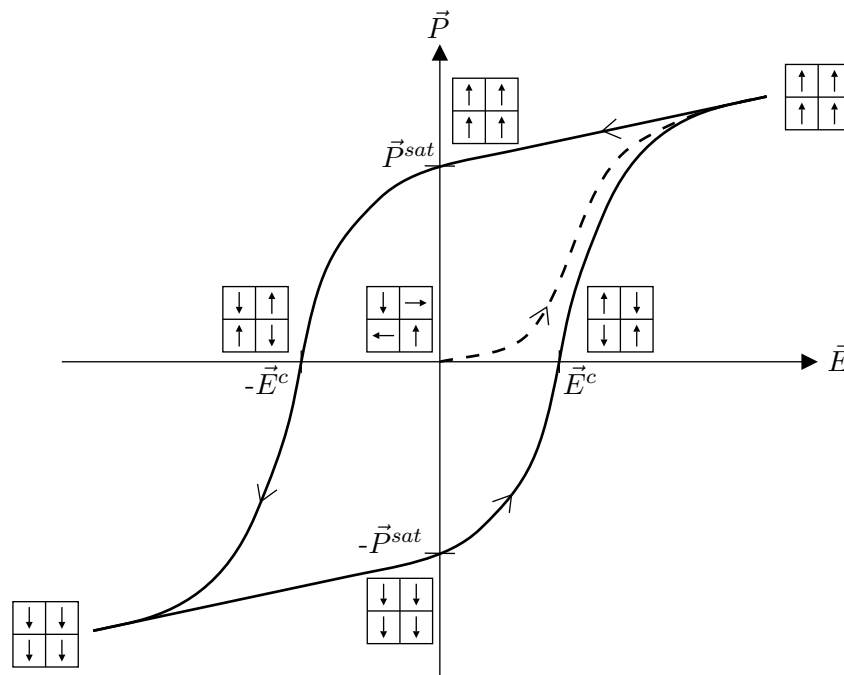


Abb. 3.5: Bei der dielektrischen Hysterese wird die Polarisation der Keramik über die Belastung mit einem äußeren elektrischen Feld betrachtet. Die gestrichelte Linie entspricht der Erstbelastung des ungepolten Materials.

sich wieder ein linearer Verlauf der Hysterese-Kurve ein, da nach dem abgeschlossenen Polungsprozess nur noch reversible Polarisationswirkungen aufgrund von Ladungsverschiebungen stattfinden. Bei einer vollständigen Entlastung der Keramik verschwindet der reversible Anteil der Polarisation \vec{P}^r , der remanente oder irreversible Anteil \vec{P}^i infolge der Polung der Keramik bleibt erhalten. Wenn das elektrische Feld während des Polungsvorgangs stark genug war, um eine vollständige Ausrichtung aller Domänen zu bewirken, dann ist der Wert der verbleibenden remanenten Polarisation gleich der Sättigungspolarisation \vec{P}^{sat} , die als Maximalwert der remanenten Polarisation betrachtet werden kann.

Wird nach der Entlastung ein elektrisches Feld mit entgegengesetztem Vorzeichen aufgebracht, so wechselt die Polarisationsrichtung der Domänen bei Erreichen des negativen Wertes der Koerzitiv-Feldstärke das Vorzeichen ihrer Orientierung. Die Hysterese-Kurve schneidet dabei die horizontale Achse. Dies bedeutet anschaulich, dass während des Umklapp-Vorgangs ein Zustand vorliegt, bei dem sich die Polarisationszustände der einzelnen Domänen gegenseitig aufheben. Bei ausreichend großer elektrischer Feldstärke werden sich alle Domänen in Richtung der Belastung orientieren. Nach der Entlastung besitzt die Keramik wieder eine Sättigungspolarisation, in diesem Fall jedoch mit einem negativen Vorzeichen.

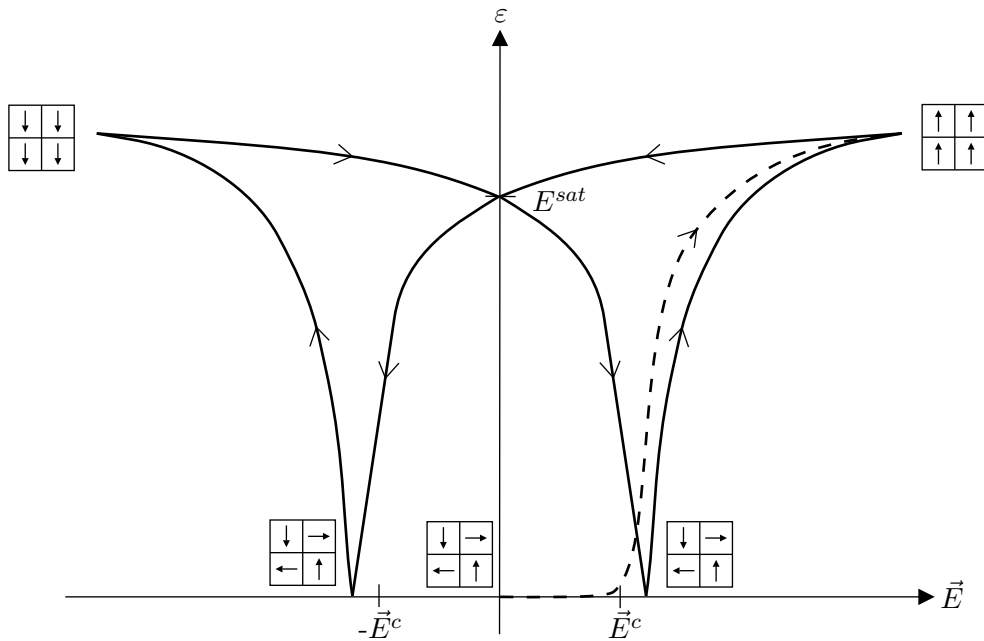


Abb. 3.6: Bei der Schmetterlings-Hysterese wird die Dehnung ε der Keramik über die Belastung mit einem äußeren elektrischen Feld betrachtet. Die gestrichelte Linie entspricht der Erstbelastung des ungepolten Materials.

Schmetterlings-Hysterese

Bei der Schmetterlings-Hysterese werden die auftretenden Dehnungen infolge des elektrischen Feldes betrachtet, die in direktem Zusammenhang mit dem Polungszustand einer Keramik stehen. In der Abbildung 3.6 ist die Dehnung einer Keramik bei der Belastung mit einem äußeren elektrischen Feld dargestellt. Dabei wird nur die Dehnung in Richtung der Belastung diskutiert, und unter Berücksichtigung der uniaxialen Betrachtung vereinfacht mit ε bezeichnet. Als Ausgangszustand wird, wie zuvor bei der dielektrischen Hysterese, eine komplett depolarisierte piezoelektrische Keramik angenommen.

Solange die angelegte elektrische Feldstärke hinreichend klein ist, ist keine Dehnung feststellbar, was in der Abbildung 3.6 anhand der gestrichelten Neukurve deutlich wird. Dies ist mit der willkürlichen Ausrichtung der Domänen in diesem Zustand zu erklären, deren Dehnungen sich im Mittel wieder aufheben. Sobald die Belastung die Koerzitiv-Feldstärke erreicht hat, beginnt die Ausrichtung der Domänen. Dabei orientieren sich die Einheitszellen mit ihrer c -Achse in Richtung des elektrischen Feldes, was zu einer Verlängerung der Keramik führt. Mit zunehmender Belastung werden sich immer mehr Domänen entsprechend ausrichten, bis eine komplette Polung des Keramik erreicht ist. An diesem Punkt kann die zu beobachtende Dehnung in zwei Komponenten aufgeteilt werden.

Der erste Anteil entspricht der remanenten bzw. irreversiblen Dehnung E^i , welche durch die Umklapp-Prozesse der Domänen entsteht, siehe Abbildung 3.2, und die auch nach der Entlastung nicht verschwindet. Durch die gleichzeitige Messung der Dehnungen in Longitudinal- und in Transversalrichtung konnten HWANG et al. [74] zeigen, dass es sich hierbei um volumentreue Änderungen des Verzerrungszustandes handelt.

Der zweite Anteil besteht aus der reversiblen Dehnung, die mit der Verschiebung der Ladungsschwerpunkte in der nun gepolten Keramik erklärt werden kann. Bei einer vollständigen Polung des Materials verbleibt nach der Entlastung die Sättigungsdehnung E^{sat} , siehe Abbildung 3.6, die der maximal möglichen remanenten Dehnung entspricht.

Durch die anschließende Belastung mit einem negativen elektrischen Feld beginnt die Neuorientierung der Domänen. Der Grad der remanenten Dehnung verringert sich hierbei bis auf ein Minimum. Nach dem Durchschreiten des Minimums nimmt die remanente Dehnung wieder zu, bis schließlich eine vollständige Ausrichtung der Domänen erreicht ist.

In der Abbildung 3.6 ist die Symmetrie der Hysterese bezüglich der vertikalen Achse klar zu erkennen, d.h. zwei entgegengesetzte irreversible Polarisationszustände bewirken den gleichen Dehnungszustand. Die remanente Dehnung einer piezoelektrischen Keramik ist immer positiv, denn entscheidend ist die Ausrichtung der Domänen und nicht die Orientierung der Polarisation.

3.3.2 Ferroelastische Hysterese

Neben den ferroelektrischen Hysteresen, die infolge einer elektrische Belastung auftreten, können durch hohe mechanische Beanspruchungen der Keramik auch ferroelastische Hysteresen beobachtet werden.

In Abbildung 3.7 sind die Spannungs-Dehnungs-Diagramme einer unpolarisierten Keramik dargestellt, die mit einer Zug- bzw. Druckspannung belastet wird. Bei einer geringen mechanischen Beanspruchung stellt sich für beide Fälle ein linear-elastischer Zusammenhang ein. Bei Erreichen einer mechanischen Grenzbelastung, die in Analogie zur Koerzitiv-Feldstärke als Koerzitiv-Spannung σ^c bezeichnet wird, werden Umklapp-Prozesse in der Keramik initiiert, wobei zwischen Zug- und Druckbeanspruchung unterschieden werden muss.

Bei einer Zugbelastung der Keramik richten sich die Domänen so aus, dass die c -Achsen der Einheitszellen möglichst parallel zur Spannungsrichtung liegen. Dabei ist die Polarisationsrichtung nicht festgelegt, so dass sich die Polarisation der einzelnen Domänen auf makroskopischer Ebene aufhebt und sich damit in der Keramik ein nicht polarisierter Zustand einstellt. Diesem in Abbildung 3.7 idealisiert dargestellten Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Linie steht bei praktischen

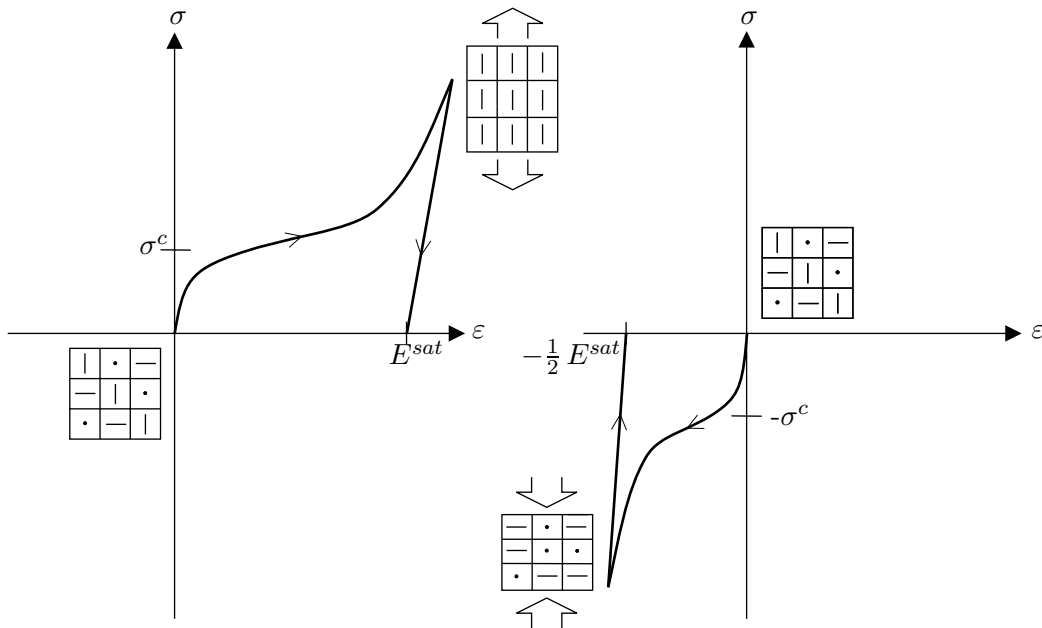


Abb. 3.7: Spannungs-Dehnungs-Diagramm einer unpolarisierten Keramik infolge Zugspannung (links) und Druckspannung (rechts). Die Orientierung der c -Achsen wird vereinfacht dargestellt.

Zugversuchen jedoch das spröde Materialverhalten der Keramik gegenüber, welches dazu führt, dass die Probe oft bereits vor Erreichen der maximalen Dehnung zerstört wird.

Eine ausreichend große Druckbelastung bewirkt, dass sich die c -Achsen der Einheitszellen senkrecht zu der Richtung der mechanischen Spannung orientieren. Auch in diesem Fall ist die Richtung der Polarisation bei den Umklapp-Vorgängen nicht festgelegt, so dass sich hier wiederum ein nicht polarisierter Zustand in der Keramik einstellt.

In Abbildung 3.7 fällt auf, dass der Betrag der remanenten Dehnung bei einer aufbrachten Zugspannung etwa doppelt so groß ist wie bei einer Druckbelastung, siehe hierzu auch LANDIS [100]. Diese Unsymmetrie, die von FETT et al. [51] experimentell untersucht wurde, kann anschaulich interpretiert werden. Hierzu wird angenommen, dass in einer thermisch depolarisierten Keramik die Orientierung der Domänen gleichmäßig verteilt ist. Eine Aufteilung auf die drei Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems ergibt, dass jeweils ein Drittel der c -Achsen in Richtung einer Koordinatenachse orientiert ist. Da sich bei einer Zugbeanspruchung die c -Achsen parallel zur Spannungsrichtung ausrichten, können hier zwei Drittel der Domänen durch Umklapp-Prozesse einen Beitrag zur remanenten Dehnung liefern. Bei einer Druckbelastung klappen die Domänen senkrecht zur Spannungsrichtung, was bedeutet, dass nur ein Drittel der Domänen dazu

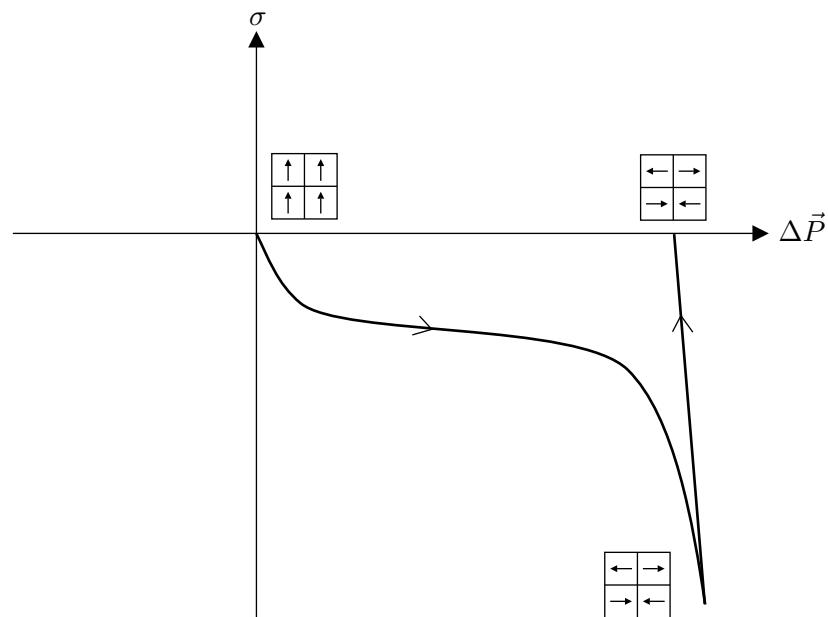


Abb. 3.8: Mechanische Depolarisation einer gepolten Keramik, die mit einer Druckspannung parallel zur Polarisationsrichtung belastet wird.

beitragen kann. Entsprechend Abbildung 3.7 ergibt sich damit ein Verhältnis der remanenten Dehnungen bei Zug- und Druckbelastung von zwei zu eins.

Mechanische Depolarisation

Im Unterschied zum vorangegangenen Abschnitt wird nun eine gepolte Keramik betrachtet, die mit einer mechanischen Druckspannung parallel zur Polarisationsrichtung belastet ist. Der qualitative Verlauf des Spannungs-Dehnungs-Diagramms entspricht in diesem Fall dem einer ungepolten Keramik, wie in Abbildung 3.7 bereits dargestellt wurde. Bei hinreichend kleiner Belastung kann ein linear-elastisches Materialverhalten beobachtet werden, welches bei Erreichen der Koerzitivspannung durch die mechanisch induzierten Umklapp-Prozesse seine Linearität verliert. Allerdings ist zu erkennen, dass die remanente Dehnung bei einer gepolten Keramik deutlich größer ist als bei einer ungepolten Keramik, siehe KAMLAH [85]. Diese Tatsache kann damit erklärt werden, dass bei einer gepolten Keramik alle Domänen senkrecht zur Spannungsrichtung umklappen können, und damit mehr Domänen einen Beitrag zur remanenten Dehnung liefern, als dies bei der ungepolten Keramik der Fall ist.

In Abbildung 3.8 ist die Änderung der Polarisation $\Delta \vec{P}$ bei zunehmender Druckspannung σ dargestellt. Auch hier zeigt sich ein linearer Zusammenhang, solange die Belastung klein ist. Bei einer Steigerung der Druckspannung setzen die

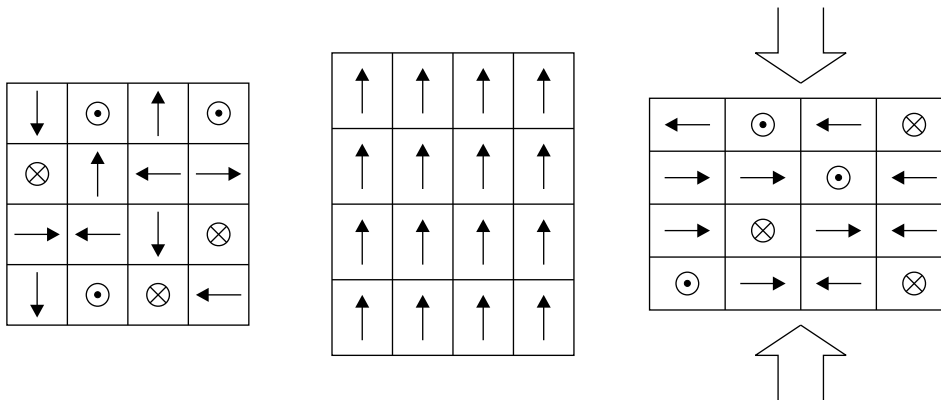


Abb. 3.9: Unterschiedliche Dehnungszustände bei einer thermisch depolarisierten Keramik (links), nach deren Polung (Mitte) und der darauf folgenden mechanischen Depolarisation (rechts) [137].

Umklapp-Prozesse ein, wobei sich die Domänen senkrecht zur Belastungsrichtung ausrichten. Da hierbei keine Orientierung in eine bestimmte Richtung stattfindet, führt dies zu einer Abnahme der remanenten Polarisation in der Keramik. In diesem Zusammenhang wird deshalb auch von einer mechanischen Depolarisation der Keramik gesprochen. Nach LANDIS [101] kann eine piezoelektrische Keramik jedoch nicht vollständig mechanisch depolarisiert werden, auch nach der Entlastung verbleibt ein gewisser Anteil der remanenten Polarisation innerhalb des Materials.

Ein weiterer Effekt ist ebenfalls bei der mechanischen Depolarisation einer zuvor gepolten Probe zu beobachten. Wird, wie in Abbildung 3.9 dargestellt ist, eine ungepolte Keramik zunächst durch ein elektrisches Feld gepolt, und anschließend durch eine Druckspannung depolarisiert, so besitzt die Keramik sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand keine makroskopische Polarisation, jedoch verschieden große Dehnungen. Folglich ist in diesem Fall keine eindeutige Zuordnung zwischen dem Dehnungs- und dem Polarisationszustand des Materials möglich.

3.3.3 Elektromechanisch gekoppelte Belastung

Die Beschreibung der Hysteresephänomene aus den beiden vorangegangenen Abschnitten beschränken sich jeweils auf rein elektrische oder rein mechanische Belastungsgeschichten. Treten nun elektrische und mechanische Beanspruchungen gleichzeitig auf, dann können die ferroelektrischen und die ferroelastischen Domänenprozesse nicht mehr getrennt voneinander betrachtet werden.

FANG [50], LYNCH [107] und ZHOU [177] untersuchen in ihren Arbeiten den Einfluss einer zusätzlichen mechanischen Druckspannung auf die dielektrische Hyste-

rese und auf die Schmetterlingshysterese einer piezoelektrischen Keramik. Dabei zeigt sich, dass sich die Hysteresen mit steigender Druckspannung zunehmend schwächer ausbilden. Dies kann damit erklärt werden, dass eine solche mechanische Belastung eine Ausrichtung der Domänen parallel zum elektrischen Feld erschwert. Infolge dieser Behinderung der Umklapp-Prozesse stellt sich auf makroskopischer Ebene eine geringere remanente Polarisierung, sowie eine kleinere remanente Dehnung ein, was weniger deutlich ausgebildete Hysterese-Kurven zur Folge hat.

In analoger Weise wird auch der Einfluss eines vorhandenen elektrischen Feldes auf den Vorgang der mechanischen Depolarisation ersichtlich, siehe hierzu SCHÄUFELE [137] und ZHOU [177]. Ein elektrisches Feld, das in gleicher Richtung auf eine Keramik wirkt, wie die remanente Polarisierung, führt im Vergleich zum unbelasteten Zustand zu einer Erhöhung der Koerzitiv-Spannung σ^c . Die Ausrichtung der Domänen wird also stabilisiert. Dagegen führt ein entgegengesetztes elektrisches Feld dazu, dass die Umklapp-Prozesse früher als im unbelasteten Zustand einsetzen, die Koerzitiv-Feldstärke σ^c wird in diesem Fall verringert. Dabei ist der Zusammenhang zwischen der elektrischen Feldstärke und dem Wert der Koerzitiv-Spannung näherungsweise linear, wie SCHÄUFELE & HÄRDTL [138] durch experimentelle Untersuchungen an PZT-Keramiken zeigen konnten.

3.4 Konstitutive Beziehungen für piezoelektrische Werkstoffe

Nachdem die Eigenschaften der piezoelektrischen Werkstoffe in den vorangegangenen Abschnitten qualitativ diskutiert wurden, wird nun ein Stoffgesetz entwickelt, um dieses Materialverhalten entsprechend abzubilden. Hierbei erfolgt zunächst eine Darstellung der linearen konstitutiven Beziehungen, die sich aus der Betrachtung der thermodynamischen Grundgleichungen ergeben. Anschließend wird diskutiert, wie dieses lineare Stoffgesetz erweitert werden kann, um damit Nichtlinearitäten infolge von ferroelektrischen Domänenprozessen zu erfassen.

3.4.1 Thermodynamische Motivation des linearen Stoffgesetzes

Die konstitutiven Gleichungen für lineare Piezoelektrizität lassen sich mit Hilfe der thermodynamischen Grundgleichungen motivieren. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik

$$dU = dQ + dW \quad (3.1)$$

sagt aus, dass die Änderung der inneren Energie dU in einem Volumen gleich der Wärmeänderung dQ und der an diesem Volumen verrichteten Arbeit dW

ist. Die Arbeit beinhaltet bei der hier zu untersuchenden Problemstellung einen mechanischen und einen elektrischen Anteil

$$dW = \mathbf{S} : d\mathbf{E} + \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{D}} \quad . \quad (3.2)$$

Mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik $dQ = \theta d\sigma$ wird die Änderung der Wärme in Relation zur Temperatur θ und der Änderung der Entropie σ betrachtet. Mit dieser Beziehung und unter Berücksichtigung von Gl. (3.2) kann der erste Hauptsatz der Thermodynamik nach Gl. (3.1) umgeformt werden

$$dU = \theta d\sigma + \mathbf{S} : d\mathbf{E} + \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{D}} \quad . \quad (3.3)$$

Als thermodynamische Potentialfunktion wird nun die elektrische Enthalpie H eingeführt, für die gilt

$$H = U - \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \quad . \quad (3.4)$$

Die differentielle Form der elektrischen Enthalpie lautet

$$dH = dU - \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{E}} \quad , \quad (3.5)$$

die mit Gl. (3.3) und der Voraussetzung, dass nur isotherme Vorgänge behandelt werden, in den Ausdruck

$$dH = \mathbf{S} : d\mathbf{E} - \vec{\mathbf{D}} \cdot d\vec{\mathbf{E}} \quad (3.6)$$

überführt wird. Die elektrische Enthalpie $H = H(\mathbf{E}, \vec{\mathbf{E}})$ ist folglich eine Funktion der Verzerrungen und des elektrischen Feldes. Dieser funktionale Zusammenhang führt auf die allgemeine Darstellung der differentiellen Formulierung von H

$$dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} : d\mathbf{E} + \frac{\partial H}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \cdot d\vec{\mathbf{E}} \quad . \quad (3.7)$$

Aus dem Gleichsetzen von Gl. (3.6) und Gl. (3.7) resultiert die Beziehung

$$\left(\mathbf{S} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} \right) : d\mathbf{E} + \left(-\vec{\mathbf{D}} - \frac{\partial H}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \right) \cdot \vec{\mathbf{E}} = 0 \quad , \quad (3.8)$$

die für beliebige Werte von $d\mathbf{E}$ bzw. $d\vec{\mathbf{E}}$ gelten muss. Aus den beiden in Klammern stehenden Ausdrücken folgt der Zusammenhang zwischen der elektrischen Enthalpie H und den mechanischen Spannungen \mathbf{S} bzw. den dielektrischen Verschiebungen $\vec{\mathbf{D}}$

$$\mathbf{S} = \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\vec{\mathbf{E}}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{\mathbf{D}} = - \left. \frac{\partial H}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \right|_{\mathbf{E}} \quad . \quad (3.9)$$

Zur Bestimmung eines geeigneten Ansatzes für die elektrische Enthalpie wird eine Taylorreihe für H nach den beiden unabhängigen Variablen \mathbf{E} und $\vec{\mathbf{E}}$ entwickelt, siehe IKEDA [77] oder MAUGIN et al. [111]. Unter Berücksichtigung eines linearen Materialverhaltens und mit der Annahme, dass der Ausgangszustand belastungsfrei ist, resultiert aus der Taylorreihe der folgende Ansatz

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E} \partial \vec{\mathbf{E}}} \cdot \vec{\mathbf{E}} + \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial \vec{\mathbf{E}} \partial \vec{\mathbf{E}}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad . \quad (3.10)$$

Die partiellen Ableitungen von H in Gl. (3.10) können als Materialtensoren identifiziert werden, die wie folgt definiert sind

$$\mathbf{C} := \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\vec{\mathbf{E}}} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{e} := -\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{E} \partial \vec{\mathbf{E}}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{E}} = -\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \quad (3.12)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} := -\frac{\partial^2 H}{\partial \vec{\mathbf{E}} \partial \vec{\mathbf{E}}} = \left. \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \right|_{\mathbf{E}} \quad . \quad (3.13)$$

Hierbei ist \mathbf{C} der vierstufige Elastizitätstensor, \mathbf{e} ist der dreistufige piezoelektrische Tensor, und $\boldsymbol{\epsilon}$ ist der zweistufige Tensor der elektrischen Permittivität. Die Potentialfunktion kann nun unter Berücksichtigung der Beziehungen (3.11) - (3.13) in folgender Form dargestellt werden

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{E} : \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \frac{1}{2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad . \quad (3.14)$$

Durch die Anwendung von Gl. (3.14) in den Definitionen (3.9) für die mechanische Spannung \mathbf{S} und für die dielektrischen Verschiebungen $\vec{\mathbf{D}}$ resultieren die beiden Ausdrücke

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{C} : \mathbf{E} - \mathbf{e} \cdot \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{D}} &= \mathbf{e}^T : \mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon} \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad , \end{aligned} \quad (3.15)$$

die den konstitutiven Gleichungen für ein lineares piezoelektrisches Material unter Vernachlässigung von thermischen Einflüssen entsprechen. In diesem Fall fungieren die Verzerrungen \mathbf{E} und das elektrische Feld $\vec{\mathbf{E}}$ als freie Variablen, während die mechanischen Spannungen \mathbf{S} und die dielektrischen Verschiebungen $\vec{\mathbf{D}}$ die abhängigen Größen darstellen. Durch die Verwendung von anderen thermodynamischen Potentialfunktionen anstelle der elektrischen Enthalpie H folgen die konstitutiven Gleichungen in einer gleichwertigen Form, jedoch ergeben sich andere Zuordnungen zwischen den freien und den abhängigen Größen. Die entsprechenden Zusammenhänge werden von IKEDA [77] und von ROSEN et al. [131] detailliert dargestellt.

3.4.2 Nichtlineares Stoffgesetz

Zur Berücksichtigung von nichtlinearen Materialeigenschaften kann die Taylorreihenentwicklung nach Gl. (3.10) um zusätzliche Terme höherer Ordnung erweitert werden, siehe z.B. HALL [67], JOSHI [83] oder LAMMERING et al. [96]. Daraus resultieren weitere Materialparameter, deren Werte zusätzlich zu bestimmen sind. Dieses Vorgehen wird z.B. zur analytischen Betrachtung der Nichtlinearitäten von α -Quarz verwendet. Entsprechende Materialparameter höherer Ordnung sind bei MAUGIN [111] aufgeführt. Bei der Charakterisierung von piezoelektrischen Keramiken bestehen jedoch Schwierigkeiten, die entsprechenden höherwertigen Materialparameter zu identifizieren, so dass dieses Verfahren hier eine untergeordnete Rolle spielt, siehe SIMKOVICS [142].

Die Alternative zu dieser Vorgehensweise, die auch in dieser Arbeit weiter verfolgt wird, besteht darin, das nichtlineare Materialverhalten durch belastungsabhängige Modifikationen der linearen Materialparameter abzubilden. Dies hat zur Konsequenz, dass die Materialtensoren \mathbb{C} , \mathbf{e} und ϵ im nichtlinearen Fall nicht mehr konstant sind, sondern im allgemeinen Fall Funktionen der freien Variablen \mathbf{E} und $\vec{\mathbf{E}}$ darstellen.

Das Stoffgesetz kann unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.3 diskutierten, irreversiblen Anteile formuliert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbb{C}(\vec{\mathbf{E}}) : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) - \mathbf{e}(\vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{P}}^i(\vec{\mathbf{E}}) &= \mathbf{e}(\vec{\mathbf{E}})^T : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \epsilon(\vec{\mathbf{E}}) \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Im Hinblick auf das Materialmodell, das im nächsten Kapitel behandelt wird, und das auf ferroelektrische Hysteresen beschränkt ist, wird hier bereits vereinfacht angenommen, dass die Materialtensoren ausschließlich eine funktionale Abhängigkeit von der freien Variable $\vec{\mathbf{E}}$ besitzen. Da weiterhin ein Zusammenhang zwischen der Größe $\vec{\mathbf{E}}$ und der irreversiblen Polarisation $\vec{\mathbf{P}}^i$ besteht, können die Beziehungen aus Gl. (3.16) alternativ in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbb{C}(\vec{\mathbf{P}}^i) : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) - \mathbf{e}(\vec{\mathbf{P}}^i) \cdot \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{P}}^i &= \mathbf{e}(\vec{\mathbf{P}}^i)^T : (\mathbf{E} - \mathbf{E}^i) + \epsilon(\vec{\mathbf{P}}^i) \cdot \vec{\mathbf{E}} \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

dargestellt werden. Die Modifikation der konstitutiven Gleichungen erfolgt in dieser Arbeit mit dem *skalaren Preisach-Modell*, das im nächsten Kapitel ausführlich behandelt wird.

Das in praktischen Anwendungen genutzte, lineare piezoelektrische Stoffgesetz nach Gl. (3.15) entspricht einer Linearisierung der nichtlinearen Materialtensoren am Arbeitspunkt der Hysterese. Dieser liegt im Schnittpunkt der Hysterese-Kurve mit der vertikalen Achse, und entspricht bei einem vollständig gepolten

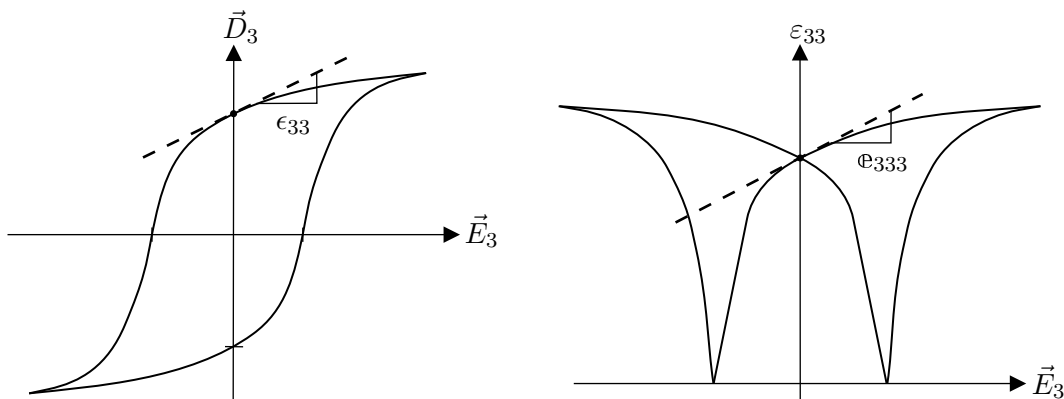


Abb. 3.10: Die gestrichelten Linien an den beiden Hysterese-Kurven verdeutlichen die linearen konstitutiven Beziehungen, die bei entsprechend kleinen Belastungen als hinreichend genau betrachtet werden können.

Material den Sättigungswerten der Größen \vec{P}^i bzw. E^i . In Abbildung 3.10 sind die entsprechenden Linearisierungen der dielektrischen Hysterese und der Schmetterlingshysterese dargestellt. Mit den in den beiden Diagrammen aufgetragenen Größen entsprechen die Steigungen der Tangenten den linearen Materialparametern ϵ_{33} und e_{333} .

Neben den hier behandelten materiellen Nichtlinearitäten, die bei hohen elektrischen bzw. mechanischen Belastungen auftreten, können bei piezoelektrischen Werkstoffen weitere nichtlineare Effekte beobachtet werden. Hier sind u. a. die Temperatur und die Belastungsfrequenz [67], Geschwindigkeitseffekte [85, 137] sowie Alterungsprozesse [42, 106] zu beachten, die im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt werden.

3.5 Piezoelektrisches Stoffgesetz der Stabtheorie

Die Annahme eines ebenen Spannungszustandes im Rahmen der Stabtheorie erfordert eine entsprechende Modifikation des dreidimensionalen Stoffgesetzes nach Gl. (3.17). Bevor dies im Detail diskutiert wird, erfolgt zur Vereinfachung der Notation ein Wechsel von der Tensor- in die Matrixschreibweise.

Zu diesem Zweck werden die Symmetrieeigenschaften des 2. Piola-Kirchoffschen Spannungstensors \mathbf{S} und des Greenschen Verzerrungstensors \mathbf{E} ausgenutzt. Somit lassen sich unter Beibehaltung der Notation beide Größen als Vektoren darstellen

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2 E_{12}, 2 E_{23}, 2 E_{31}]^T \\ \mathbf{S} &= [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{23}, S_{31}]^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

Für die vier- bzw. dreistufigen Materialtensoren \mathbf{C} und \mathbf{e} ergeben sich durch die Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften folgende Transformationen in die Matrix-Schreibweise

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{pq} \quad \text{bzw.} \quad e_{ikl} = e_{ip} \quad , \quad (3.19)$$

wobei die Indizierung der einzelnen Komponenten durch die Zuordnung nach Tabelle 3.1 festgelegt wird, siehe z.B. THIERSTEN [157]. Der zweistufige Tensor der elektrischen Permittivität ϵ ist von dieser Transformation nicht betroffen.

Das wesentliche geometrische Merkmal einer stabförmigen Struktur besteht darin, dass eine Abmessung L bedeutend größer ist, als die beiden anderen Abmessungen b und h . Infolge dieser speziellen Geometrie wird in der Stabtheorie ein vereinfachter, ebener Spannungszustand angenommen, in dem die Komponenten $[S_{22}, S_{33}, S_{23}]^T$ gleich Null sind. Hierbei ist die Koordinate ξ_1 in Richtung der Stabachse orientiert, die Koordinaten ξ_2 und ξ_3 spannen die Querschnittsebene auf, siehe auch Abbildung 6.1.

Da sich die innere Arbeit eines Systems durch diese Annahme nicht ändern darf, ist eine Anpassung des Stoffgesetzes nach Gl. (3.17) durch eine statische Kondensation erforderlich. Hierzu werden die konstitutiven Beziehungen in der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_b \\ \mathbf{S}_k \\ \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{P}}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_b & \mathbf{C}_{bk} & -\mathbf{e}_b \\ \mathbf{C}_{bk}^T & \mathbf{C}_k & -\mathbf{e}_k \\ \mathbf{e}_b^T & \mathbf{e}_k^T & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_b \\ \mathbf{E}_k \\ \vec{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

zusammengefasst. Dabei erfolgt eine Aufspaltung der mechanischen Größen \mathbf{S} und \mathbf{E} , und der Materialtensoren \mathbf{C} und \mathbf{e} . Die Spaltenmatrix $\mathbf{S}_b = [S_{11}, S_{12}, S_{13}]^T$ enthält diejenigen Spannungskomponenten, welche in einer Stabformulierung auftreten, während in dem Vektor $\mathbf{S}_k = [S_{22}, S_{33}, S_{23}]^T$ die vernachlässigbaren Spannungskomponenten zusammengefasst sind. Die Verzerrungen werden entsprechend in $\mathbf{E}_b = [E_{11}, 2 E_{12}, 2 E_{13}]^T$ bzw. $\mathbf{E}_k = [E_{22}, E_{33}, 2 E_{23}]^T$ aufgeteilt.

Mit der Annahme $\mathbf{S}_k = \mathbf{0}$ kann die zweite Zeile in Gl. (3.20) nach \mathbf{E}_k aufgelöst, und in die beiden verbleibenden Gleichungen eingesetzt werden. Die daraus folgende Elimination der Verzerrungskomponente \mathbf{E}_k aus den konstitutiven Gleichungen

ij oder kl	11	22	33	12 oder 21	23 oder 32	13 oder 31
p oder q	1	2	3	4	5	6

Tab. 3.1: Zuordnung der Indizes bei Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften.

chungen führt auf ein modifiziertes piezoelektrische Stoffgesetz in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_b &= (\mathbf{C}_b - \mathbf{C}_{bk} \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{C}_{bk}^T) \mathbf{E}_b - (\mathbf{e}_b - \mathbf{C}_{bk} \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{e}_k) \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{P}}^i &= (\mathbf{e}_b^T - \mathbf{e}_k^T \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{C}_{bk}^T) \mathbf{E}_b + (\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{e}_k^T \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{e}_k) \vec{\mathbf{E}} \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aus den Beziehungen nach Gl. (3.21) folgen die Definitionen der kondensierten Materialmatrizen $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{C}} &:= \mathbf{C}_b - \mathbf{C}_{bk} \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{C}_{bk}^T \\ \tilde{\mathbf{e}} &:= \mathbf{e}_b - \mathbf{C}_{bk} \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{e}_k \\ \tilde{\mathbf{e}}^T &:= \mathbf{e}_b^T - \mathbf{e}_k^T \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{C}_{bk}^T \\ \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &:= \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{e}_k^T \mathbf{C}_k^{-1} \mathbf{e}_k \quad , \end{aligned} \quad (3.22)$$

die in dem Stoffgesetz der piezoelektrischen Stabformulierung in Kapitel 5 und 6 berücksichtigt werden.

Mit Hilfe der statischen Kondensation lassen sich somit die Spannungskomponenten \mathbf{S}_k aus dem Stoffgesetz eliminieren. Die entsprechenden Verzerrungsanteile \mathbf{E}_k sind dagegen ungleich Null und können aus dem Stoffgesetz zurückgerechnet werden, siehe Beispiel 7.2.1. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der klassischen Annahme der Stabtheorie, die eine konstante Form des Querschnitts und somit $\mathbf{E}_k = \mathbf{0}$ voraussetzt, siehe Abschnitt 6.1. Dieses Problem lässt auch auf andere Strukturen wie z.B. Platten und Schalen übertragen, und kann bei Bedarf durch das Einführen zusätzlicher Freiheitsgrade behoben werden.

4 Beschreibung ferroelektrischer Hysteresen mit dem Preisach-Modell

Das Preisach-Modell wurde im Jahr 1935 von seinem Namensgeber F. PREISACH [128] entwickelt, um damit Hysterese-Effekte in magnetischen Werkstoffen phänomenologisch zu beschreiben. In den sechziger Jahren diskutierte EVERETT [49] dieses Modell, um damit Adsorptions-Vorgänge abzubilden. Dabei stellte er fest, dass die grundlegende Idee dieses Modells nicht auf Magnetisierungsphänomene beschränkt ist. In den achtziger Jahren konnte der Mathematiker KRASNOSEL'SKII [94] zeigen, dass das Preisach-Modell ein allgemeines, grundlegendes mathematisches Modell zur Beschreibung von Hysterese-Phänomenen beinhaltet, welches komplett von physikalischen Interpretationen separiert werden kann. Diese Erkenntnis hat es ermöglicht, das Preisach-Modell als Werkzeug zur Beschreibung von unterschiedlichen Hysterese-Phänomenen zu etablieren, wie z.B. bei der Magnetostriktion [22, 129] oder der Supraleitung [53]. Eine allgemeine und ausführliche Behandlung des Preisach-Modells ist bei MAYERGOYZ [113] oder bei SMITH [145] zu finden.

Während sich das Preisach-Modell bereits seit längerer Zeit zur Modellierung von magnetischen Hysteresen bewährt hat, wurde die erste Publikation, in der das ferroelektrische Verhalten mit dem Preisach-Modell abgebildet wird, von SREERAN et al. [149] erst im Jahr 1993 veröffentlicht. In der Arbeit von HUGHES & WEN [71] zeigt der Vergleich mit Versuchsdaten, dass das Preisach-Modell geeignet ist, um die wesentlichen Hysterese-Eigenschaften einer piezoelektrischen Keramik abzubilden. PASCO & BERRY [124] sowie YU et al. [175] nutzen das Preisach-Modell in einem uni-axialen Ansatz zur Modellierung der dielektrischen Hysterese. In der Arbeit von SIMKOVICS et al. [143] werden materielle Nichtlinearitäten bei Anwendungen mit hochfrequenten Schwingungen mit dem Preisach-Modell berücksichtigt. Durch die Modifizierung des klassischen Preisach-Modells können FREEMAN & JOSHI [52] zwei Eingangsgrößen berücksichtigen, und mit gewissen Einschränkungen sowohl ferroelektrisches, als auch ferroelastisches Materialverhalten abbilden.

Die Vorteile des Preisach-Modells bestehen in der einfachen Implementierung in einen Finite-Element-Algorithmus, bei der auch die Belastungsgeschichte berücksichtigt wird. Die nichtlineare Berechnung erfordert nur wenige Iterationsschritte, die eine hohe numerische Stabilität besitzen. Der wichtigste Parameter dieses Modells ist die Preisach-Funktion, siehe Abschnitt 4.1.1, für deren Bestimmung entsprechende Identifikations-Prozeduren zur Verfügung stehen [38, 78, 113]. Neben der Preisach-Funktion sind nur noch eine geringe Anzahl weiterer, physikalisch interpretierbarer Parameter erforderlich, um eine Hysterese komplett zu be-

schreiben. Nachteilig wirkt sich bei dem klassischen Preisach-Modell aus, dass nur eine skalare Eingangsgröße betrachtet werden kann. Hierzu werden von MAYERGOYZ [113] verschiedene Möglichkeiten vorgeschlagen, um diese Einschränkung zu beheben.

4.1 Beschreibung des klassischen Preisach-Modells

4.1.1 Mathematische Formulierung

Zur Wahrung des allgemeinen Charakters des Preisach-Modells wird in diesem Abschnitt zunächst die allgemeine Formulierung nach MAYERGOYZ [113] benutzt, die dann in Kapitel 4.2 für die Betrachtung von ferroelektrischen Hysteresen spezifiziert wird.

Die grundlegende Idee des Preisach-Modells besteht in der Annahme, dass eine Hysterese-Kurve durch die Superposition von unendlich vielen Elementarhysteresen $\gamma_{\alpha\beta}$ beschrieben werden kann. Jeder dieser Operatoren $\gamma_{\alpha\beta}$ entspricht hierbei einer einfachen rechteckigen Schleife eines Input-Output-Diagramms wie es in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Die Ausgangsgröße $\gamma_{\alpha\beta}(u)$ einer Elementarhysterese kann nur die beiden Werte $+1$ oder -1 annehmen. Wird die Eingangsgröße $u(t)$ monoton gesteigert, dann durchläuft die Elementarhysterese den Pfad $ABCDE$. Dabei entspricht α dem sogenannten *up-switching*-Wert, bei dem die Ausgangsgröße ihren Wert von -1 nach $+1$ ändert. Bei der monotonen Verminderung von $u(t)$ wird der obere Pfad $EDFBA$ der Hysterese durchlaufen, hier entspricht β , dem *down-switching*-Wert, bei dem die Ausgangsgröße von $+1$ nach -1 wechselt.

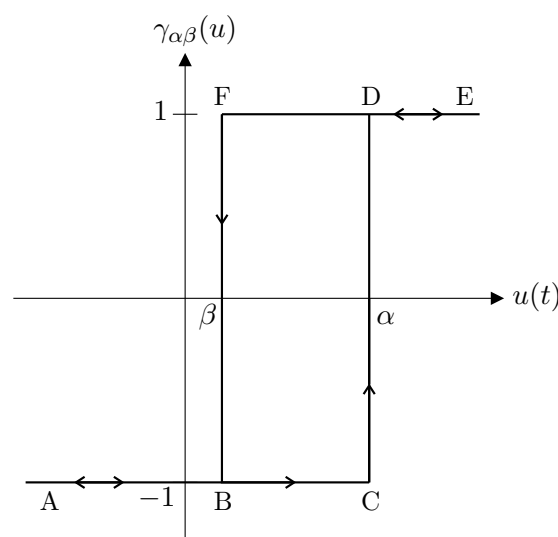


Abb. 4.1: Input-Output-Diagramm einer Elementarhysterese.

Die einzelnen Elementarhysterese unterscheiden sich darin, dass sie verschiedene Werte für die Größen α bzw. β besitzen. Dabei können sowohl α als auch β positiv oder negativ sein, es muss jedoch gelten $\alpha \geq \beta$.

Die globale Ausgangsgröße $f(t)$ für einen bestimmten Eingangswert von $u(t)$ wird durch die Superposition der Ausgangsgrößen aller Elementarhysterese berechnet. Dies erfolgt durch die Integration

$$f(t) = \iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha\beta}(u(t)) \, d\alpha \, d\beta \quad (4.1)$$

über die Ausgangsgrößen aller Operatoren $\gamma_{\alpha\beta}(u(t))$. Der Ausdruck $\mu(\alpha, \beta)$ wird als die *Preisach-Funktion* bezeichnet, und entspricht einem Wichtungsfaktor für die einzelnen Operatoren. Für die Integration von $\mu(\alpha, \beta)$ über alle Elementarhysterese muss die Bedingung

$$\iint_{\alpha \geq \beta} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = 1 \quad (4.2)$$

erfüllt sein. Daraus folgt die Eigenschaft der *Sättigung* des Preisach-Modells. Die resultierende globale Ausgangsgröße $f(t)$ bei positiver Sättigung f^+ , d.h. wenn für alle Elementarhysterese gilt $\gamma_{\alpha\beta} = +1$, ist gleich dem negativen Wert der resultierende Ausgangsgröße bei negativer Sättigung f^-

$$f^+ = -f^- \quad (4.3)$$

Die grundlegende Funktionsweise des Preisach-Modells kann mit Hilfe einer geometrischen Interpretation verdeutlicht werden. Hierzu wird die Preisach-Halbebene mit $\alpha \geq \beta$ eingeführt, wobei auf der horizontalen Achse die Werte für β und auf der vertikalen Achse die Werte für α aufgetragen werden. Mit der Normierung der Eingangsgröße gilt $-1 \leq \alpha \leq 1$ und $-1 \leq \beta \leq \alpha$, woraus sich das in Abbildung 4.2 grau unterlegte Dreieck als Definitionsbereich \mathcal{S} der Elementarhysterese ergibt. Die Preisach-Funktion kann unter Berücksichtigung des Gebietes \mathcal{S} in der Form

$$\mu(\alpha, \beta) = \begin{cases} \mu(\alpha, \beta) & ; \text{für } -1 \leq \alpha \leq 1, \quad -1 \leq \beta \leq \alpha \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases} \quad (4.4)$$

definiert werden. Innerhalb von \mathcal{S} wird nun jedem Punkt derjenige Operator $\gamma_{\alpha\beta}$ zugeordnet, dessen α - und β -Werte den Koordinaten des jeweiligen Punktes entsprechen. Zur Veranschaulichung dieser Zuordnung sind in Abbildung 4.2 drei Elementarhysterese mit den jeweiligen Positionen in der Preisach-Ebene dargestellt.

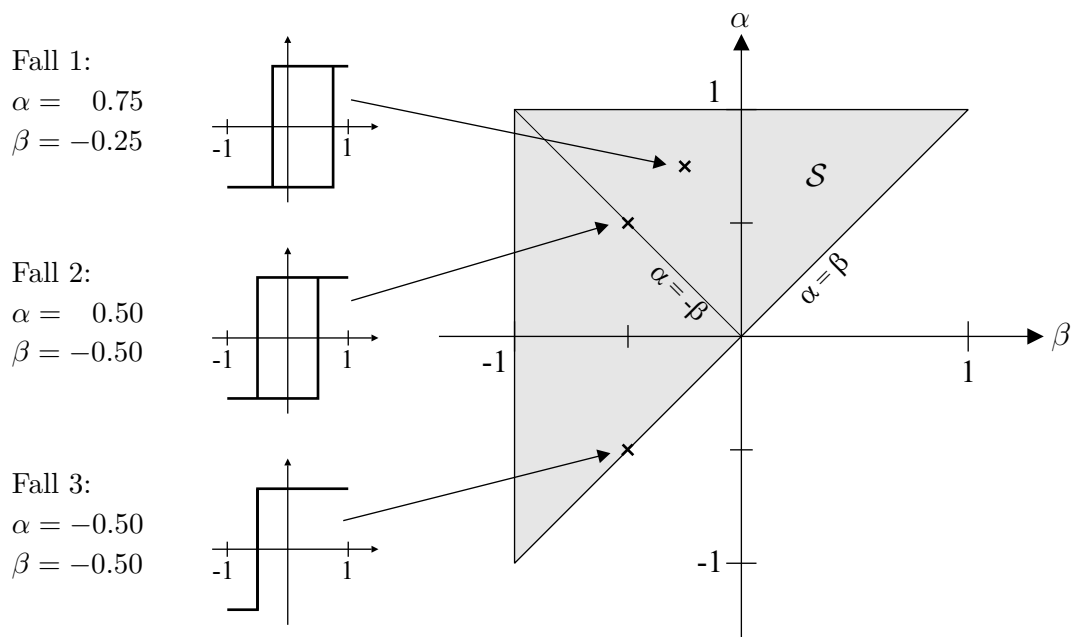


Abb. 4.2: Positionierung der Elementarhystereseen in der Preisach-Ebene.

Die Preisach-Funktion $\mu(\alpha, \beta)$, die als Wichtungsfaktor der einzelnen Hystereseen dient, kann ebenfalls in der Preisach-Ebene als Funktion der Koordinaten α und β dargestellt werden. In Abbildung 4.3 ist hierfür eine beliebige Wichtungsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ über die Koordinaten α und β aufgetragen. Hieraus wird ersichtlich, dass die Wichtungsfunktion den einzelnen Elementarhystereseen über die Koordinaten α und β eindeutig zugeordnet werden kann.

Unter Berücksichtigung der Preisach-Funktion aus Abbildung 4.3 hat z.B. der

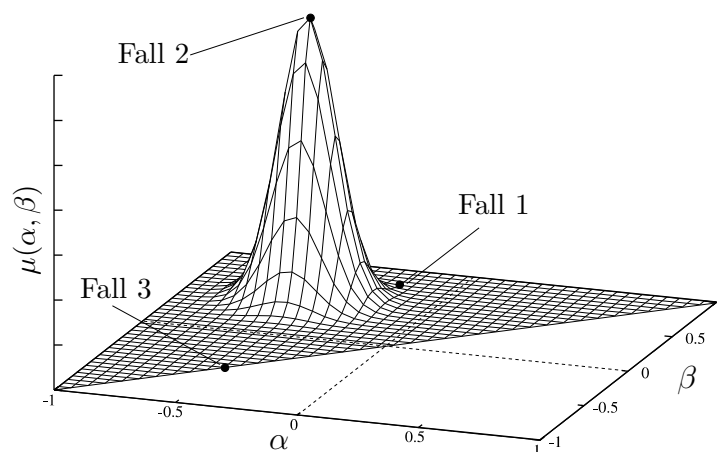


Abb. 4.3: Darstellung einer beliebigen Wichtungsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ in der Preisach-Ebene und Zuordnung zu den Elementarhystereseen aus Abbildung 4.2.

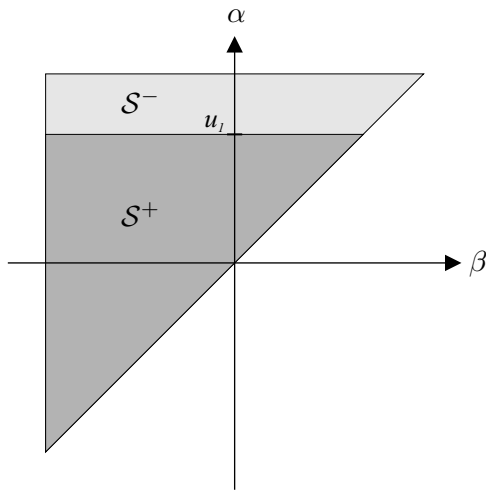


Abb. 4.4: Steigerung der Eingangsgröße auf den Wert u_1 .

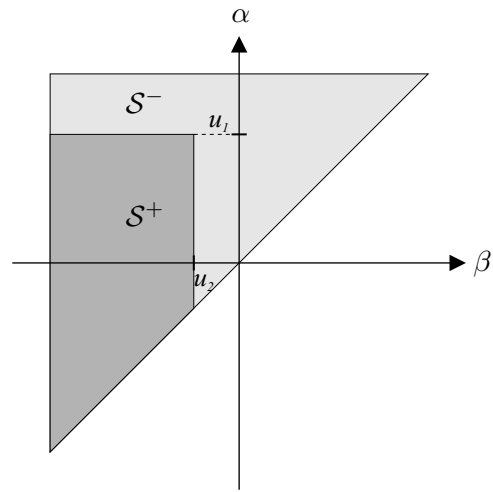


Abb. 4.5: Verminderung der Eingangsgröße auf den Wert u_2 .

Ausgangswert $\gamma_{\alpha\beta}$ der Hysterese mit $\alpha = \beta = -0.5$ aus Abbildung 4.2 eine Wichtung von Null, und somit keinen Einfluss auf die Berechnung des globalen Wertes $f(t)$ nach Gl. (4.1). Dagegen besitzt der Ausgangswert des Operators mit $\alpha = -\beta = 0.5$ aufgrund seiner starken Wichtung eine relativ große Bedeutung bei der Berechnung von $f(t)$.

Im Weiteren wird die Behandlung der Eingangsgröße $u(t)$ in der Preisach-Halbebene erläutert. Hierbei wird als Ausgangssituation angenommen, dass die Ausgangswerte aller Operatoren $\gamma_{\alpha\beta}$ gleich -1 sind. Wird nun die Eingangsgröße $u(t)$ auf den Wert u_1 gesteigert, so ändern alle Elementarhysterese, deren α -Wert kleiner als u_1 ist, ihren Ausgangswert auf $+1$. Damit wird der Definitionsbereich \mathcal{S} in die beiden Abschnitte \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- unterteilt, in denen für alle darin enthaltenen Operatoren gilt $\gamma_{\alpha\beta} = +1$ bzw. $\gamma_{\alpha\beta} = -1$, siehe Abbildung 4.4. Ein steigender Eingangswert wird im Preisach-Diagramm folglich als eine Linie dargestellt, die sich parallel zur horizontalen Achse bewegt, und welche die Grenze zwischen \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- definiert. Wird die Eingangsgröße von u_1 nach u_2 verringert, dann ändern alle Elementarhysterese, deren β -Wert größer als u_2 ist, ihren Ausgangswert auf -1 . Aus Abbildung 4.5 geht hervor, dass ein fallendes Eingangssignal als eine Linie zwischen \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- interpretiert wird, die parallel zur vertikalen Achse wandert. Eine erneute Steigerung von $u(t)$ auf den Wert u_3 mit $u_3 < u_1$ und die anschließende Verminderung auf u_4 mit $u_4 > u_2$ führt auf das in Abbildung 4.6 dargestellte Preisach-Diagramm.

Die sich abwechselnden lokalen Extremwerte der steigenden bzw. fallenden Eingangsgröße führen zu einer treppenförmigen Trennlinie zwischen \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- . Dabei stellt eine horizontale Linie immer ein lokales Maximum M_k bei steigendem

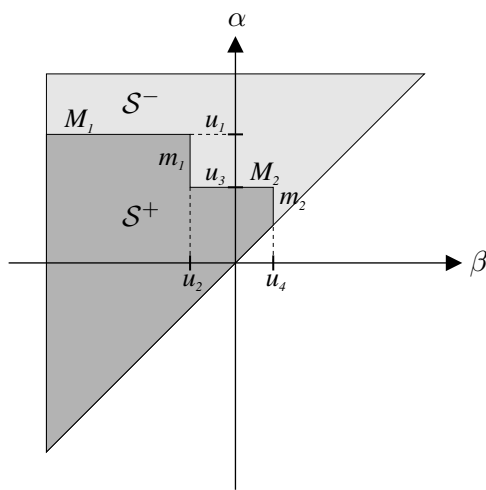


Abb. 4.6: Preisach-Diagramm nach der Verminderung der Eingangsgröße auf u_4 .

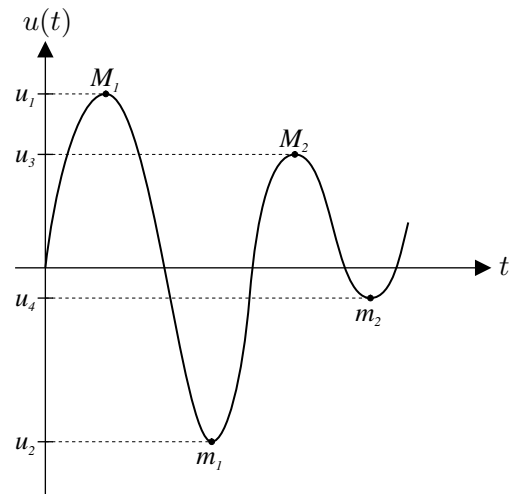


Abb. 4.7: Belastungsgeschichte mit den lokalen Extremwerten $u_1 - u_4$.

Eingangswert dar, eine vertikale Linie entspricht dagegen einem lokalen Minimum m_k bei fallendem Eingangswert.

Damit besitzt das Preisach-Modell die für nichtlineare Materialmodelle wichtige Eigenschaft, die Belastungsgeschichte zu speichern, und diese bei der Berechnung des aktuellen Ausgangswertes zu berücksichtigen. In den Abbildungen 4.6 und 4.7 ist ein möglicher Verlauf der Belastung mit dem zugehörigen Preisach-Diagramm dargestellt.

Eine weitere Eigenschaft des Preisach-Modells ist die sogenannte *wiping-out property*. Sie sagt aus, dass jedes aktuelle, relative Maximum eines steigenden Eingangswertes im Preisach-Diagramm all jene Stufen auslöscht, deren α -Werte kleiner sind als dieses aktuelle Maximum. Diese Eigenschaft ist in Abbildung 4.8 illustriert. Entsprechend gilt auch, dass jedes aktuelle Minimum eines fallenden Eingangswertes all jene Stufen auslöscht, deren β -Werte größer sind als dieses Minimum, siehe Abbildung 4.9.

4.1.2 Numerische Implementierung

Basierend auf den zuvor diskutierten Eigenschaften des Preisach-Modells wird in diesem Abschnitt die entsprechende numerische Umsetzung behandelt. Sie bildet die Grundlage für die später folgende Implementierung in die Finite-Element-Formulierung.

Durch die Unterteilung des Definitionsbereichs \mathcal{S} in die Gebiete \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- kann

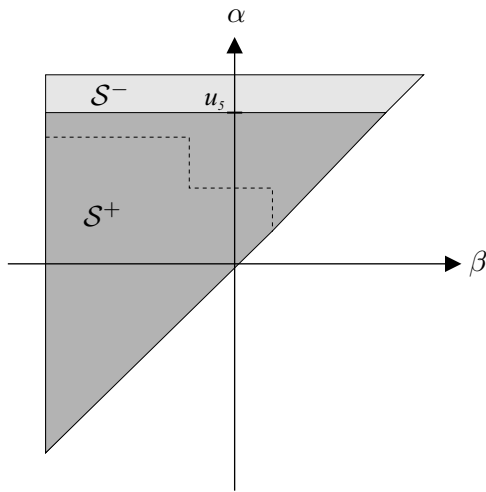


Abb. 4.8: Preisach-Diagramm nach der Erhöhung der Eingangsgröße auf den Wert u_5 , der größer ist als alle vorherigen lokalen Maxima.

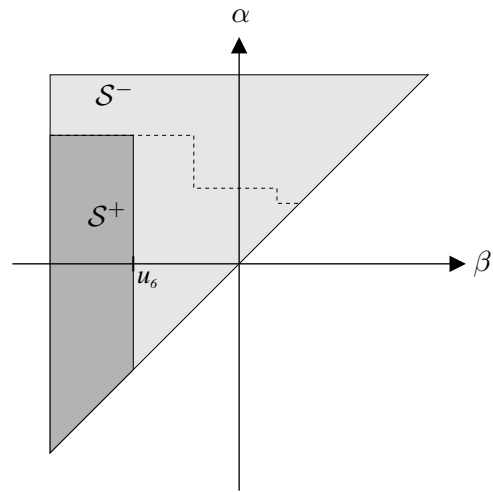


Abb. 4.9: Preisach-Diagramm nach der Verminderung der Eingangsgröße auf den Wert u_6 , der kleiner ist als alle vorherigen lokalen Minima.

das Integral zur Bestimmung von $f(t)$ nach Gl. (4.1) in die Form

$$f(t) = \iint_{\mathcal{S}^+(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta - \iint_{\mathcal{S}^-(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad (4.5)$$

überführt werden. Der resultierende globale Ausgangswert $f(t)$ entspricht damit der Differenz der beiden Integrale über die Gebiete \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- des Preisach-Diagramms. Mit der Beziehung

$$F(\alpha', \beta') = \iint_{\mathcal{T}(\alpha', \beta')} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad (4.6)$$

wird die *Everett-Funktion* $F(\alpha', \beta')$ definiert. Sie entspricht dem Integral von $\mu(\alpha, \beta)$ über die Dreiecksfläche \mathcal{T} mit der Eck-Koordinate (α', β') , wie aus Abbildung 4.10 hervorgeht. Für die Integration über den gesamten Definitionsbereich $\mathcal{T}(\alpha_0, \beta_0) = \mathcal{S}$ gilt entsprechend zu Gl. (4.2)

$$F(\alpha_0, \beta_0) = \iint_{\mathcal{T}(\alpha_0, \beta_0)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = 1 \quad . \quad (4.7)$$

Aus dem vorangegangenen Abschnitt ist bekannt, dass aus der Belastungsgeschichte eine treppenförmige Trennlinie zwischen den Gebieten \mathcal{S}^+ und \mathcal{S}^- resultiert, wodurch das Gebiet \mathcal{S}^+ in eine endliche Anzahl von n trapezförmigen

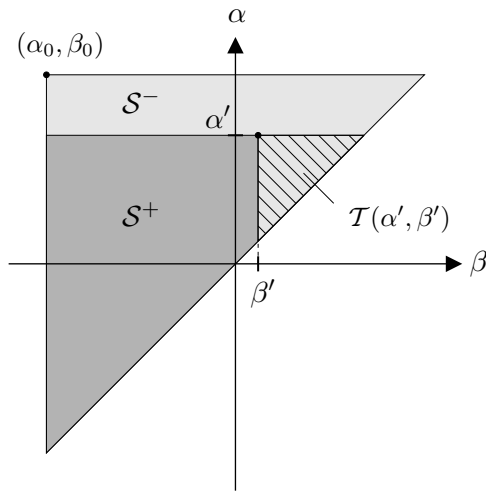


Abb. 4.10: Definition der Dreiecksfläche $T(\alpha', \beta')$ in der Preisach-Ebene.

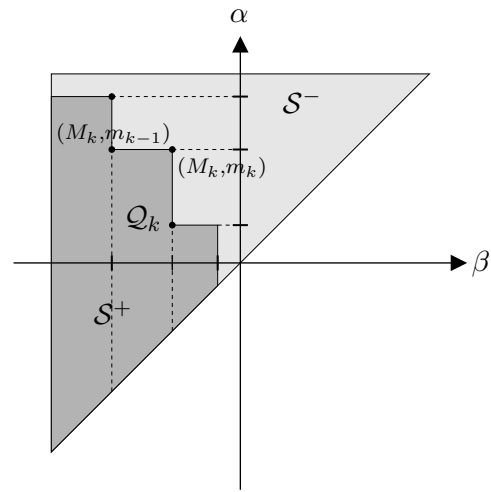


Abb. 4.11: Aufteilung von S^+ in eine endliche Anzahl von trapezförmigen Flächen Q_k .

Flächen Q_k unterteilt werden kann. Die Berechnung des Integrals von $\mu(\alpha, \beta)$ über das Gebiet S^+ lässt sich damit in eine Summe von n Integralen über die Trapezflächen Q_k , $k = 1 \dots n$ überführen

$$\iint_{S^+} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = \sum_{k=1}^n \iint_{Q_k} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad , \quad (4.8)$$

wie in Abbildung 4.11 dargestellt ist. Durch die Betrachtung einer solchen Trapezfläche Q_k als Differenz zweier Dreiecke kann das Integral über Q_k auf der rechten Seite von Gl. (4.8) aus der Differenz zweier Everett-Funktionen bestimmt werden

$$\iint_{Q_k} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = \iint_{T(M_k, m_{k-1})} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta - \iint_{T(M_k, m_k)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad . \quad (4.9)$$

Diese lassen sich mit der Definition nach Gl. (4.6) vereinfachend in folgender Form angeben

$$\iint_{Q_k} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta = F(M_k, m_{k-1}) - F(M_k, m_k) \quad . \quad (4.10)$$

Zur Berechnung des globalen Ausgangswertes $f(t)$ wird die Beziehung (4.5) durch Addition und Subtraktion des Integrals über \mathcal{S}^+ erweitert

$$\begin{aligned}
 f(t) = & \iint_{\mathcal{S}^+(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta - \iint_{\mathcal{S}^-(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \\
 & + \iint_{\mathcal{S}^+(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta - \iint_{\mathcal{S}^+(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad , \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

und durch zusammenfassen des ersten und dritten Terms sowie des zweiten und vierten Terms in die folgende Darstellung umgeformt

$$f(t) = - \iint_{\mathcal{S}} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta + 2 \iint_{\mathcal{S}^+(t)} \mu(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta \quad . \quad (4.12)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (4.7), (4.8) und (4.10) kann die Gleichung (4.12) in eine für die numerischen Berechnung geeignete Form überführt werden

$$f(t) = -F(\alpha_0, \beta_0) + 2 \sum_{k=1}^n (F(M_k, m_{k-1}) - F(M_k, m_k)) \quad . \quad (4.13)$$

Zur Bestimmung des globalen Ausgangswertes $f(t)$ ist es folglich möglich, die Integration nach Gl. (4.5) durch eine Summe von Differenzen der Everett-Funktion nach Gl. (4.13) zu ersetzen.

Für eine effiziente Berechnung von $f(t)$ nach Gl. (4.13) wird die Everett-Funktion einmal zur Beginn der Berechnung für definierte Stützstellen ausgewertet. Die Bestimmung von $F(\alpha, \beta)$ an der jeweils aktuellen Position (α, β) in der Preisach-Ebene erfolgt durch eine lineare Interpolation der Werte an den Stützstellen.

4.2 Anwendung des Preisach-Modells auf ferroelektrische Hysterese

Nachdem im vorangegangenen Abschnitt die wesentlichen Beziehungen des Preisach-Modells in allgemeiner Form behandelt wurden, folgt nun dessen Anwendung zur Beschreibung von Hystereseerscheinungen bei piezoelektrischen Werkstoffen. Im Hinblick auf die Implementierung des Materialmodells in eine Stabformulierung werden folgenden Annahmen getroffen:

- Die Richtung der irreversiblen Polarisation ist beliebig, aber fest und entspricht der des von außen aufgebracht, elektrischen Feldes. Der Wert der

irreversiblen Polarisation wird mit Hilfe der skalaren Ausgangsgröße $f(t)$ des Preisach-Modells bestimmt. Aufgrund dieser Annahme werden nur noch Änderungen der Polarisationsrichtung um 180 Grad zugelassen.

- Es werden nur jene Komponenten der irreversiblen Verzerrungen berücksichtigt, die im Rahmen der Stabtheorie auftreten.
- Ferroelastische Hystereseerscheinungen werden nicht behandelt.

Das daraus resultierende Materialmodell lässt sich folglich als eine uniaxiale, dreidimensionale Formulierung für ferroelektrische Hysteresen charakterisieren. Hierbei kennzeichnet der Begriff *uniaxial* die Annahme, dass sich die irreversible Polarisation nur in Richtung einer vorgegebenen, festen Achse ändern kann, während der Ausdruck *dreidimensional* verdeutlicht, dass die Orientierung dieser Achse frei wählbar ist.

Bei der Formulierung des Preisach-Modells zur Beschreibung von ferroelektrischen Hysteresen resultiert die Eingangsgröße $u(t)$ aus dem elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, das in Richtung der vorgegebenen Polarisationsrichtung wirkt und bezüglich der Sättigungsfeldstärke \vec{E}^{sat} normiert ist. Der normierte Richtungsvektor der irreversiblen Polarisation wird mit e^P bezeichnet. Die *up*- und *down-switching*-Werte α und β einer Elementarhysterese können mit bestimmten Einschränkungen als die Koerzitivfeldstärken einer Einheitszelle interpretiert werden, bei der die Richtung der spontanen Polarisation um 180 Grad umklappt. Die Ausgangsgröße $\gamma_{\alpha\beta}(u(t))$ entspricht im Rahmen dieser Betrachtung der normierten spontanen Polarisation einer Einheitszelle.

Auch wenn durch diese Zuordnungen bestimmte Analogien zwischen einer Elementarhysterese und einer Einheitszelle auftreten, sollte das Preisach-Modell nicht als ein mikromechanisches Modell verstanden werden. Dagegen sprechen zwei wesentliche Gründe. Zunächst besitzen die Elementarhysteresen weder eine räumliche Ausdehnung, noch eine definierte Position im Raum, so dass sich keine Zuordnung zu einer bestimmten Einheitszelle vornehmen lässt. Der zweite Unterschied besteht darin, dass fast alle Elementarhysteresen des Preisach-Modells asymmetrisch sind, d.h. die Beträge der Eingangsgröße, die einen *up*- bzw. *down-switching*-Vorgang hervorrufen, sind unterschiedlich groß. Dagegen ist bei einer Einheitszelle eines ferroelektrischen Materials der Betrag des elektrischen Feldes, der eine Richtungsänderung der spontanen Polarisation um 180 Grad hervorruft, für beide Richtungen in der Regel gleich groß.

Die Teilbereiche \mathcal{S}^+ bzw. \mathcal{S}^- des Preisach-Diagramms repräsentieren jeweils die Anteile der Elementarhysteresen, die positiv bzw. negativ polarisiert sind. Der globale Ausgangswert $f(t)$ entspricht damit der relativen, irreversiblen Polarisation

$\vec{P}^{i,rel}$ des Materials, wobei gilt $-1 \leq \vec{P}^{i,rel} \leq 1$. Der Betrag von $P^{i,rel}$ beschreibt den Anteil des piezoelektrischen Materials, der eine makroskopische Polarisation aufweist, wobei das Vorzeichen die zugehörige Orientierung bestimmt. Der absolute Wert der remanenten Polarisation folgt durch die Multiplikation von $\vec{P}^{i,rel}$ mit der Sättigungspolarisation

$$\vec{P}^i = \vec{P}^{sat} \vec{P}^{i,rel} \quad , \quad (4.14)$$

der Polarisationsvektor \vec{P}^i ergibt sich durch die Einbeziehung der Polarisationsrichtung, die durch den Einheitsvektor e^P definiert ist.

$$\vec{P}^i = \vec{P}^i e^P \quad . \quad (4.15)$$

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erläutert wurde, sind die Umklapp-Mechanismen der Domänen als volumentreue Vorgänge zu betrachten. Wird ausschließlich ferroelektrisches Verhalten berücksichtigt, dann können die irreversible Dehnungen E^i als Funktion der irreversiblen Polarisation dargestellt werden. KAMLAH [85] bzw. MCMEEKING & LANDIS [114] geben für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall die Beziehung

$$E^i = \frac{3}{2} E^{sat} \frac{\|\vec{P}^i\|}{\vec{P}^{sat}} (\vec{e}^P \otimes \vec{e}^P - \frac{1}{3} \mathbf{I}) \quad (4.16)$$

zur Bestimmung von E^i an, wobei \mathbf{I} dem Identitätstensor entspricht. Da in der Stabtheorie nur die Anteile $E_b^i = [E_{11}^i, 2 E_{12}^i, 2 E_{13}^i]^T$ des Verzerrungstensors berücksichtigt werden, vereinfacht sich diese Beziehung zu

$$E_b^i = E^{sat} \vec{P}^{i,rel} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} e_1^P e_1^P - \frac{1}{2} \\ 3 e_1^P e_2^P \\ 3 e_1^P e_3^P \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{P}^{i,rel} = \frac{\|\vec{P}^i\|}{\vec{P}^{sat}} \quad (4.17)$$

und den Komponenten e_i^P , $i = 1...3$ des Richtungsvektors e^P . Aus der Gleichung (4.17) wird deutlich, dass im Rahmen der Stabtheorie lediglich die Komponente E_{11}^i einen Anteil an irreversiblen Verzerrungen liefert, solange die Polarisationsrichtung parallel zu einem Basisvektor festgelegt wird.

Durch die beliebige Orientierung der Polarisationsrichtung ist es erforderlich, die piezoelektrische Koppelmatrix \mathfrak{e} bezüglich der gewählten Richtung zu bestimmen. Unter Berücksichtigung von [85] wird zunächst der dreistufige Tensor \mathfrak{e}_{kij} unter Verwendung der Indexschreibweise transformiert

$$\begin{aligned} \mathfrak{e}_{kij} &= \vec{P}^{i,rel} \left(\mathfrak{e}_{\parallel} e_i^P e_j^P e_k^P \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{e}_{\perp} (\delta_{ij} - e_i^P e_j^P) e_k^P \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{e}_{=} \frac{1}{2} [(\delta_{ki} - e_k^P e_i^P) e_j^P + (\delta_{kj} - e_k^P e_j^P) e_i^P] \right) \quad . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Konstanten e_{\parallel} , e_{\perp} und $e_{=}$ können bei einem vollständig in 3-Richtung polarisierten Material mit den Einträgen e_{333} , e_{311} und e_{131} des piezoelektrischen Tensors identifiziert werden. Mit dem Faktor $\vec{P}^{i,rel}$ wird bereits der aktuelle Wert der remanenten Polarisation bei der Bestimmung von e_{ijk} berücksichtigt.

Durch die Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften und unter Berücksichtigung der Zuordnung nach Tabelle 3.1 wird der Tensor e_{ijk} in die piezoelektrische Matrix \mathfrak{e} überführt. Die anschließende Kondensation von \mathfrak{e} nach Gl. (3.22) liefert die in der Stabformulierung benötigte Matrix $\tilde{\mathfrak{e}}$.

Infolge der irreversiblen Polarisation besitzen auch die Tensoren \mathbb{C}_{ijkl} und ϵ_{ij} transversal isotrope Materialeigenschaften, die in Richtung von \vec{P}^i transformiert werden müssen. Im Gegensatz zur piezoelektrischen Matrix ist es in diesem Fall ausreichend, anstelle der tensoriellen Größen die entsprechenden Materialmatrizen \mathbb{C} und ϵ zu betrachten. Die Transformationen für die Elastizitäts- bzw. die Permittivitätsmatrix sind durch die Beziehungen

$$\mathbb{C}^P = \mathbf{T}^T \mathbb{C} \mathbf{T} \qquad \epsilon^P = \mathbf{T}_{\epsilon}^T \epsilon \mathbf{T}_{\epsilon} \quad (4.19)$$

gegeben, wobei die entsprechenden Rotationsmatrizen \mathbf{T} bzw. \mathbf{T}_{ϵ} in folgender Weise definiert sind

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} (t_{11})^2 & (t_{12})^2 & (t_{13})^2 & t_{11} t_{12} & t_{12} t_{13} & t_{11} t_{13} \\ (t_{21})^2 & (t_{22})^2 & (t_{23})^2 & t_{21} t_{22} & t_{22} t_{23} & t_{21} t_{23} \\ (t_{31})^2 & (t_{32})^2 & (t_{33})^2 & t_{31} t_{32} & t_{32} t_{33} & t_{31} t_{33} \\ 2 t_{11} t_{21} & 2 t_{12} t_{22} & 2 t_{13} t_{23} & t_{11} t_{22} + t_{12} t_{21} & t_{12} t_{23} + t_{13} t_{22} & t_{11} t_{23} + t_{13} t_{21} \\ 2 t_{21} t_{31} & 2 t_{22} t_{32} & 2 t_{23} t_{33} & t_{21} t_{32} + t_{22} t_{31} & t_{22} t_{33} + t_{23} t_{32} & t_{21} t_{33} + t_{23} t_{31} \\ 2 t_{11} t_{31} & 2 t_{12} t_{32} & 2 t_{13} t_{33} & t_{11} t_{32} + t_{12} t_{31} & t_{12} t_{33} + t_{13} t_{32} & t_{11} t_{33} + t_{13} t_{31} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

bzw.

$$\mathbf{T}_{\epsilon} = \begin{bmatrix} (t_{11})^2 & (t_{12})^2 & (t_{13})^2 \\ (t_{21})^2 & (t_{22})^2 & (t_{23})^2 \\ (t_{31})^2 & (t_{32})^2 & (t_{33})^2 \end{bmatrix} . \quad (4.21)$$

Die Einträge $t_{ik} = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_k^P$ ergeben sich aus dem Skalarprodukt der orthonormierten Basisvektoren \mathbf{t}_i der Größen \mathbb{C} bzw. ϵ und der Basisvektoren \mathbf{t}_k^P bezüglich der Orientierung des Polarisationsvektors \mathbf{e}^P .

Im Rahmen dieser Arbeit wird vereinfacht angenommen, dass die Materialmatrizen \mathbb{C} und ϵ unabhängig vom aktuellen Polarisationszustand eine transversale Isotropie bezüglich der Polarisationsrichtung besitzen. Damit wird vernachlässigt, dass das Material im ungepolten Zustand isotrope Eigenschaften besitzt, und sich erst durch den Polungsvorgang ein transversal isotropes Materialverhalten einstellt.

4.3 Diskussion der Parameter der gewählten Preisach-Funktion

Ein Vorteil des Preisach-Modells besteht darin, dass die Preisach-Funktion $\mu(\alpha, \beta)$ als wichtigster Materialparameter direkt aus experimentellen Daten gewonnen werden kann. Da im Rahmen dieser Arbeit keine Versuchsdaten zur Auswertung zur Verfügung stehen, wird auf eine Erläuterung der entsprechenden Vorgehensweise an dieser Stelle verzichtet, und auf die Arbeiten von CARDELLI et al. [31], IYER & SHIRLEY [78] und MAYERGOYZ [113] verwiesen, in denen verschiedene Algorithmen zur Identifikation von $\mu(\alpha, \beta)$ diskutiert werden.

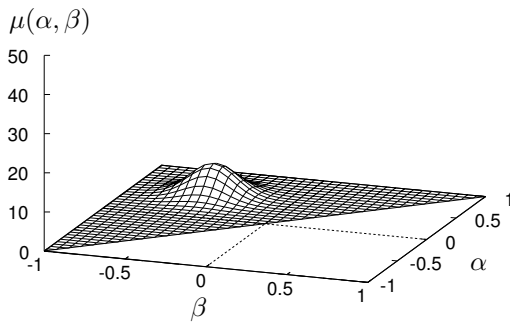
Als Alternative wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit eine analytische Verteilungsfunktion verwendet, die durch die Modifikation der zugehörigen Parameter auf das jeweilige Problem angepasst werden kann. Hierzu wird die von BARKER et al. [13] eingeführte, und um einen Parameter erweiterte Funktion

$$\mu(\alpha, \beta) = c e^{[-f_\alpha (\alpha + \beta - y_\alpha - y_\beta)^2 - f_\beta (\beta - \alpha + y_\alpha - y_\beta)^2]} \quad (4.22)$$

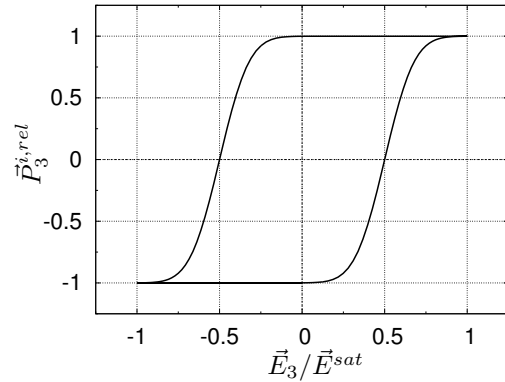
vorgeschlagen. Die Beziehung (4.22) stellt eine glockenförmige Verteilungsfunktion dar, die mit den fünf Parametern c , f_α , f_β , y_α und y_β beschrieben wird.

- Die Parameter f_α und f_β bestimmen den Wert des Maximums und damit auch die Steigung von $\mu(\alpha, \beta)$.
- Da in Abhängigkeit von f_α und f_β das Integral nach Gl. (4.1) unterschiedliche Werte annimmt, wird der Parameter c als Skalierungsfaktor eingeführt, um zu gewährleisten, dass die Beziehung (4.2) erfüllt ist.
- Mit Parametern y_α und y_β wird die Position des Maximalwertes von $\mu(\alpha, \beta)$ innerhalb der Preisach-Ebene festgelegt.

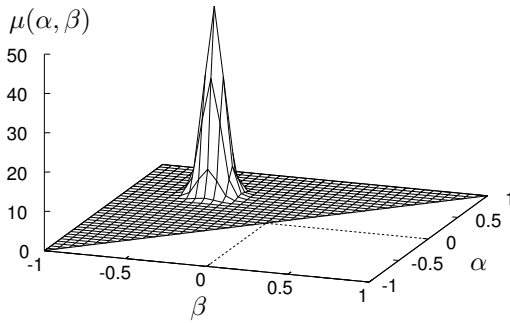
Der Einfluss der Parameter auf die Form der Verteilungsfunktion und der daraus resultierende Verlauf der relativen irreversiblen Polarisation $\vec{P}^{i,rel}$ ist in Abbildung 4.12 anhand von drei verschiedenen Parameter-Kombinationen dargestellt. Der Vergleich von Abbildung 12(a) mit Abbildung 12(c) zeigt, dass ein größerer Wert für die Parameter f_α und f_β zu einer steileren Verteilungsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ führt. Entsprechend schneller vollzieht sich der Wechsel zwischen den beiden Sättigungszuständen -1 und $+1$ der irreversiblen Polarisation, wie anhand der Abbildungen 12(b) und 12(d) erkennbar ist. Die Modifikation des Parameters y_α in Abbildung 12(e) führt zu einer Vergrößerung der Koerzitivfeldstärke beim Wechsel von einem negativen zu einem positiven Polarisationszustand. Dagegen bleibt der Wert der Koerzitivfeldstärke beim Übergang in umgekehrter Richtung unverändert, wie aus der Abbildung 12(f) deutlich wird.



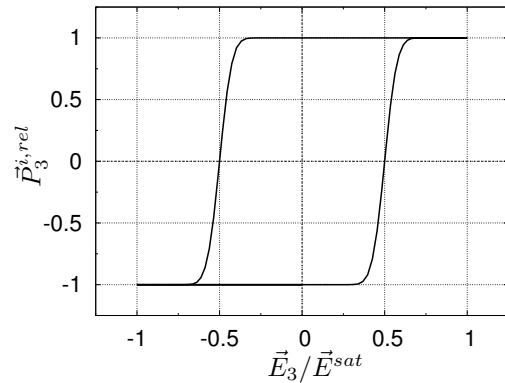
(a) Preisach-Funktion 1 mit den Parametern $c = \frac{25}{\pi}$, $f_\alpha = f_\beta = 12.5$, $y_\alpha = -y_\beta = 0.5$



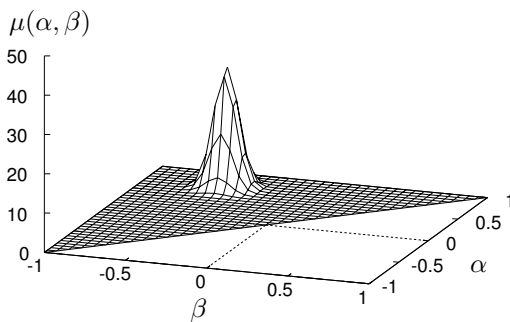
(b) $\vec{P}_3^{i,rel}$ aus der Preisach-Funktion 1



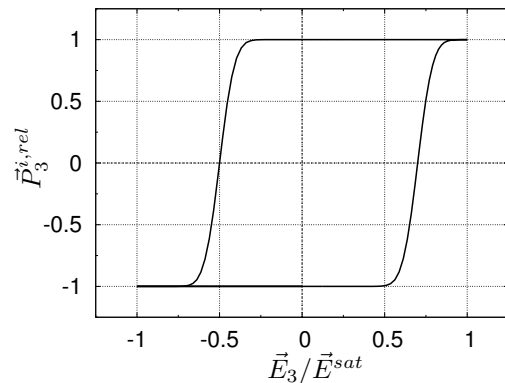
(c) Preisach-Funktion 2 mit den Parametern $c = \frac{200}{\pi}$, $f_\alpha = f_\beta = 100.0$, $y_\alpha = -y_\beta = 0.5$



(d) $\vec{P}_3^{i,rel}$ aus der Preisach-Funktion 2



(e) Preisach-Funktion 3 mit den Parametern $c = \frac{100}{\pi}$, $f_\alpha = f_\beta = 50.0$, $y_\alpha = 0.7$, $y_\beta = -0.5$



(f) $\vec{P}_3^{i,rel}$ aus der Preisach-Funktion 3

Abb. 4.12: Einfluss der Parameter auf die Form der Preisach-Funktion und auf den Verlauf der irreversiblen Polarisation $\vec{P}_3^{i,rel}$.

Diese Beispiele zeigen, dass die vorgeschlagene Verteilungsfunktion aus Gleichung (4.22) den typischen Verlauf der irreversiblen Polarisierung bei ferroelektrischen Hysterese darstellen kann. Durch die Variation der eingeführten Parameter ist es möglich, experimentell gewonnene Hysterese-Kurven mit dem Preisach-Modell abzubilden.

5 Querschnittsbeschreibung und Ermittlung der Wölbfunktionen

Ein wesentlicher Bestandteil einer Stabformulierung besteht in der dem Problem angemessenen Beschreibung des Querschnitts. Im einfachsten Fall ist hierbei dessen Charakterisierung durch die integralen Querschnittsgrößen ausreichend. Bei komplexeren Problemstellungen, können sich darüber hinausgehende Forderungen an die Beschreibung des Querschnitts ergeben, die durch ein geeignetes Verfahren erfasst werden müssen. Hierzu stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung, die z.B. von SAUER [135] diskutiert werden.

Im Rahmen der im nächsten Kapitel folgenden, piezoelektrischen Stabformulierung hat sich die Beschreibung des Querschnitts mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente als geeignet erwiesen, da mit diesem Verfahren die folgenden Anforderungen berücksichtigt werden können:

- Piezoelektrische Stabstrukturen besitzen in der Regel Querschnitte, die aus mehreren verschiedenen Materialien bestehen. In Abhängigkeit von den betrachteten Anwendungen sind hierbei Querschnittsgeometrien von unterschiedlicher Komplexität abzubilden. Bei der Integration des Querschnitts sind diese beiden wesentlichen Parameter - Material und Geometrie - entsprechend zu berücksichtigen.
- Die klassische Annahme eines konstanten Schubspannungsverlaufes innerhalb des Querschnitts im Rahmen der Timoshenko-Theorie führt durch die elektromechanische Kopplung zu Fehlern bei der Rückrechnung der dielektrischen Verschiebungen \vec{D} . Aus diesem Grund wird die Verwölbung des Querschnitts infolge von Querkraftbeanspruchungen ermittelt, aus der der genaue Schubspannungsverlauf im Querschnitt bestimmt werden kann. Ein Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass durch die Integration der exakten Schubspannungen über den Querschnitt kein zusätzlicher Schubkorrekturfaktor benötigt wird.
- Die Berücksichtigung der Schubverwölbung ist weiterhin bei der Modellierung von sogenannten *Shear-Actuators* [19] von großer Bedeutung. Durch eine elektrisch induzierte Schubdeformation des piezoelektrischen Materials verdrehen sich die einzelnen Querschnittbereiche unterschiedlich stark, wie auch bei BENJEDDOU [20] gezeigt wird. Eine Modellierung dieser Aktoren unter der Annahme ebener Querschnitte würde zu einer Versteifung der Struktur und damit zu unbrauchbaren Berechnungsergebnissen führen, wie in Abschnitt 7.4.1 gezeigt wird.

- Zur korrekten Erfassung des Torsionsverhaltens der Stabstruktur ist die Bestimmung der Torsionsverwölbung sowie der daraus folgenden Torsionskennwerte des Querschnitts erforderlich.
- Die Diskretisierung des Querschnitts mit finiten Elementen ist ebenfalls geeignet, um materielle Nichtlinearitäten zu erfassen, da für jedes Element die benötigten Parameter aus dem Preisach-Modell gespeichert werden können. Aus dem Stoffgesetz resultierende, nichtlineare Spannungsverteilungen in der Querschnittsebene lassen sich durch eine ausreichend genaue Diskretisierung ebenfalls erfassen.

Bedingt durch die Anforderungen, die an die piezoelektrische Stabformulierung gestellt werden, ist es erforderlich, mehrere Querschnittsverwölbungen zu berücksichtigen, die jeweils einem Belastungsfall zuzuordnen sind. Zu diesem Zweck wird jede Querschnittsverwölbung in die beiden Anteile ω_i und α_i aufgespalten. Hierbei beschreibt die Wölbfunktion ω_i die Form des verwölbten Querschnitts, die ausschließlich von dessen Geometrie abhängt, und unabhängig von der Stabformulierung bestimmt werden kann. Der skalare Parameter α_i bestimmt die Amplitude der Verwölbung und ist somit eine Funktion der äußeren Belastung des Stabes.

Die Werte jeder Wölbfunktion ω_i werden an den Knoten des diskretisierten Querschnitts gespeichert und später in der Stabformulierung bei der Integration über die Querschnittsfläche berücksichtigt, siehe Abschnitt 6.4.1. Bei einer materiell linearen Berechnung ist es hierbei ausreichend, die Querschnittsintegration nur einmal durchzuführen, und die daraus resultierenden Ergebnisse zu speichern. Da der Querschnitt für jedes Stabelement als konstant angenommen wird, ist bei der Integration in Stabrichtung keine Interpolation der Querschnittseigenschaften zwischen den Elementknoten erforderlich. Der zugehörige skalare Parameter α_i ist zunächst unbekannt und geht als zusätzlicher Freiheitsgrad in die Stabformulierung mit ein.

5.1 Ermittlung der Querschnittsverwölbungen infolge Torsion, Querkraft und piezoelektrisch induzierter Schubdeformation

Die grundlegenden Beziehungen der Saint-Venantschen Torsion und der Schubbeanspruchung infolge Querkraftbelastung können den Lehrbüchern von SOKOLNIKOFF [148], TIMOSHENKO & GOODIER [159], KOLLBRUNNER [92] oder FRIEMANN [54] entnommen werden. Hierin wird deutlich, dass eine geschlossene

Lösung, mit der sich die Verwölbung und damit die Schubspannungsverteilung innerhalb eines Querschnitts bestimmen lassen, nur für wenige, einfache Querschnittsgeometrien existiert. Eine Alternative stellt die numerische Berechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elementen dar, die eine näherungsweise Lösung des Problems erlaubt.

Hierzu wird von HERRMANN [68] eine Finite-Element-Formulierung vorgestellt, die auf dem Prinzip des Minimums der potentiellen Energie basiert. KRAHULA & LAUTERBACH [93] berücksichtigen in ihrer Arbeit ein orthotropes Materialverhalten, während KLINKEL & GOVINDJEE [89] eine Formulierung präsentieren, mit der eine Koppelung zwischen Torsion und Biegung bei anisotropen Materialien erfasst werden kann. Die Berücksichtigung von elasto-plastischem Materialverhalten wird bei WAGNER & GRUTTMANN [167] diskutiert.

Finite-Element-Formulierungen, welche die Schubspannungsverteilung in Querschnitten infolge von Querkraftbeanspruchungen behandeln, sind u.a. in den Arbeiten von GANAPATHI et al. [55], GRUTTMANN et al. [64] oder MASON & HERRMANN [109] zu finden.

Nach einer allgemeinen Gleichgewichtsbetrachtung im Rahmen der Stabtheorie werden die Gleichgewichts- und Randbedingungen für die Lastfälle

- Torsion,
- Querkraftbeanspruchung durch die Belastung Q_2 und Q_3 und
- elektrisch induzierte Schubdeformation in Richtung der Querschnittsachsen

getrennt voneinander behandelt. Die sich daran anschließende Formulierung des Variationsproblems und dessen Lösung mit Hilfe der Finite-Element-Methode erfolgt in einer einheitlichen Darstellung gemeinsam für alle Lastfälle.

Zur Bestimmung der Wölbfunktionen des Querschnitts wird im Folgenden ein linear-elastisches Materialverhalten sowie eine geometrisch lineare Kinematik vorausgesetzt.

Die Ermittlung der Querschnittsverwölbung infolge der Lastfälle Torsion bzw. Querkraft sind typische Problemstellungen aus der Mechanik und werden in der Literatur in den zuvor genannten Arbeiten ausführlich behandelt. Dagegen ist die Einführung einer Wölbfunktion zur Berücksichtigung von piezoelektrisch induzierten Schubdeformationen ein neuer Aspekt, der im Rahmen dieser Arbeit diskutiert wird.

5.1.1 Betrachtung des Gleichgewichts

Die Formulierung des Gleichgewichts an einem beliebigen, belastungsfreien Teilkörper führt auf die Bedingungsgleichungen

$$S_{11,1} + S_{12,2} + S_{13,3} = 0 \quad (5.1a)$$

$$S_{22,2} + S_{23,3} + S_{12,1} = 0 \quad (5.1b)$$

$$S_{33,3} + S_{13,1} + S_{23,2} = 0 \quad , \quad (5.1c)$$

siehe z.B. FRIEMANN [54]. Durch die Annahmen aus der Stabtheorie, in der die Spannungskomponenten $\mathbf{S}_k = [S_{22}, S_{33}, S_{23}]^T = \mathbf{0}$ vernachlässigt werden, vereinfachen sich die Ausdrücke in Gl. (5.1) zu

$$S_{11,1} + S_{12,2} + S_{13,3} = 0 \quad (5.2a)$$

$$S_{12,1} = 0 \quad (5.2b)$$

$$S_{13,1} = 0 \quad . \quad (5.2c)$$

Aus Gl. (5.2b) und (5.2c) folgt, dass die Schubspannungen S_{12} bzw. S_{13} und damit die Querkraftbeanspruchungen Q_2 bzw. Q_3 in Stablängsrichtung konstant sein müssen [64].

5.1.2 Randwertproblem und Stoffgesetz

Aus den Beziehungen nach Gl. (5.2) wird eine Formulierung zur Bestimmung der Querschnittsverwölbung für die Belastungsfälle Torsion, Querkraft und piezoelektrisch induzierte Schubdeformation entwickelt. Hierzu wird im Folgenden ein beliebiger, prismatischer Querschnitt Ω mit der Berandung $\partial\Omega$ betrachtet, wie in Abbildung 5.1 dargestellt ist. Die ξ_1 -Koordinate zeigt in Richtung der Stabachse, die Koordinaten ξ_2 und ξ_3 liegen in der Querschnittsebene. Die Querschnittskordinaten bezüglich des Schwerpunktes S werden mit $\bar{\xi}_2$ und $\bar{\xi}_3$ bezeichnet.

Torsion

Zur Ermittlung der Wölbfunktion ω_1 wird die Saint-Venantsche Torsionstheorie zugrunde gelegt. Hierbei wird angenommen, dass keine Spannungen S_{11} in Stablängsrichtung auftreten, siehe z.B. [54, 92]. Die Beziehung (5.2a) vereinfacht sich damit zu

$$S_{12,2} + S_{13,3} = 0 \quad . \quad (5.3)$$

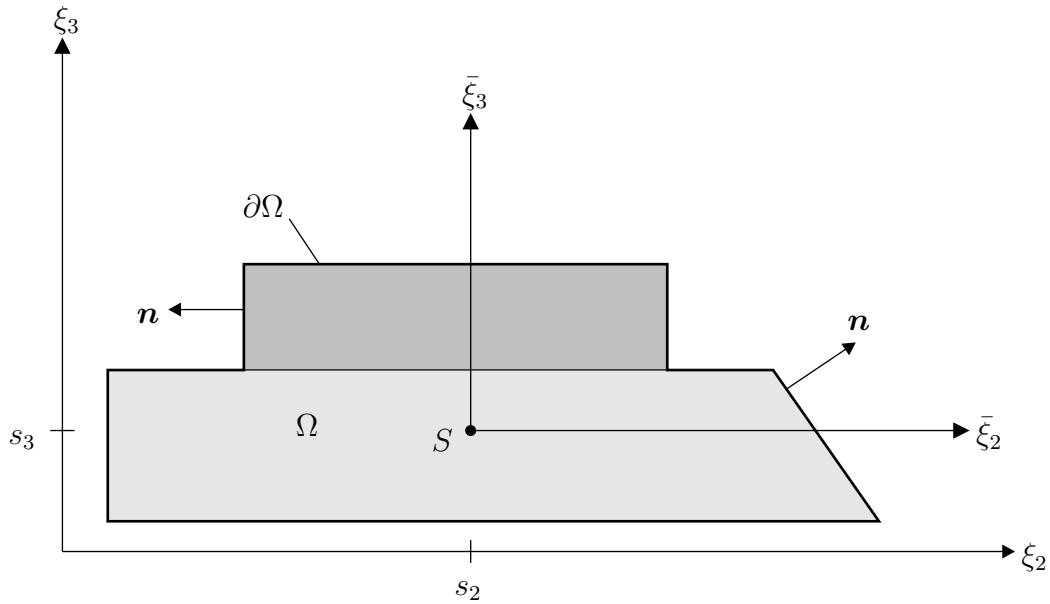


Abb. 5.1: Allgemeiner Querschnitt.

Da der Stab an den Rändern des unbelasteten Querschnitts spannungsfrei ist, müssen die Schubspannungen parallel zum Rand verlaufen. Daher gilt die Randbedingung

$$S_{12} n_2 + S_{13} n_3 = 0 \quad , \quad (5.4)$$

wobei $\mathbf{n} = [n_2, n_3]^T$ den nach außen gerichteten Normalenvektor der Berandung $\partial\Omega$ des Gebietes Ω bezeichnet, siehe Abbildung 5.1. Damit kann das Randwertproblem für einen Querschnitt mit Torsionsbelastung formuliert werden

$$\begin{aligned} S_{12,2} + S_{13,3} &= 0 & \text{in } \Omega \\ S_{12} n_2 + S_{13} n_3 &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \quad . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Unter der Voraussetzung einer geometrisch linearen Kinematik gilt für das Verschiebungsfeld

$$u_1 = \omega_1 \quad u_2 = -\varphi_1 \xi_3 \quad u_3 = \varphi_1 \xi_2 \quad , \quad (5.6)$$

wobei mit φ_1 die Verdrehung der ξ_1 -Achse definiert wird. Aus den partiellen Ableitungen des Verschiebungsfeldes ergeben sich die beiden Verzerrungen E_{12} und E_{13}

$$\begin{bmatrix} 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1,2} + u_{2,1} \\ u_{1,3} + u_{3,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\xi_3 \varphi_{1,1} + \omega_{1,2} \\ \xi_2 \varphi_{1,1} + \omega_{1,3} \end{bmatrix} \quad . \quad (5.7)$$

In dem die Verwindung $\varphi_{1,1}$ gleich eins gesetzt wird, kann das Stoffgesetz für den Lastfall Torsion formuliert werden

$$\begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,2} - \xi_3 \\ \omega_{1,3} + \xi_2 \end{bmatrix} , \quad (5.8)$$

das auch anisotrope Materialeigenschaften berücksichtigt. Alle weiteren Spannungen sind im Rahmen der Saint-Venantschen Torsionstheorie gleich Null anzunehmen. Anschaulich wird somit durch die Vorgabe der Verwindung $\varphi_{1,1}$ eine Einheitsverdrehung um die Stabachse aufgebracht, zu der die entsprechende Querschnittsverwölbung zu bestimmen ist.

Querkraft

Im Gegensatz zur Saint-Venantschen Torsion sind die Normalspannungen S_{11} bei einer Querkraftbelastung ungleich Null. Aus der Stabtheorie kann eine Beziehung zwischen den auftretenden Normalspannungen S_{11} und der äußeren Belastung durch die Biegemomente M_2 und M_3 angegeben werden, siehe z.B. GRUTTMANN et al. [64]

$$S_{11} = \frac{M_2 I_{33} + M_3 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} \bar{\xi}_3 - \frac{M_3 I_{22} + M_2 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} \bar{\xi}_2 , \quad (5.9)$$

wobei die Flächenmomente 2. Ordnung definiert sind als

$$I_{22} = \int_{\Omega} \bar{\xi}_3^2 \, dA \quad I_{33} = \int_{\Omega} \bar{\xi}_2^2 \, dA \quad I_{23} = \int_{\Omega} \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 \, dA \quad . \quad (5.10)$$

Die Ableitung von Gl. (5.9) nach der Koordinate ξ_1 und die Berücksichtigung der Beziehungen zwischen den Biegemomenten und den Querkraften $M_{2,1} = Q_3$ bzw. $M_{3,1} = -Q_2$ führt auf den Ausdruck

$$S_{11,1} = \frac{Q_2 I_{22} - Q_3 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} \bar{\xi}_2 + \frac{Q_3 I_{33} - Q_2 I_{23}}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} \bar{\xi}_3 , \quad (5.11)$$

für den die verkürzte Schreibweise

$$S_{11,1} = f(\xi_2, \xi_3) = a_2 \bar{\xi}_2 + a_3 \bar{\xi}_3 \quad (5.12)$$

eingeführt wird. Durch Einsetzen von Gl. (5.12) in Gl. (5.2a) folgt die Gleichgewichtsbedingung in der ξ_2 - ξ_3 -Ebene

$$S_{12,2} + S_{13,3} + f(\xi_2, \xi_3) = 0 \quad . \quad (5.13)$$

Indem die Komponente $S_{11,1}$ durch den Ausdruck $f(\xi_2, \xi_3)$ ersetzt wird, kann damit die Beziehung (5.2a) auf das ebene Problem in Gl. (5.13) reduziert werden.

Da in den Belastungsterm $f(\xi_2, \xi_3)$ beide Querkräfte Q_2 und Q_3 eingehen, resultiert daraus eine Verwölbungsfunktion infolge beider Belastungsanteile. Im Hinblick auf die Stabformulierung ist es günstiger, getrennte Wölbfunktionen ω_2 infolge Q_2 bzw. ω_3 infolge Q_3 einzuführen. Hierzu wird der Belastungsterm entsprechend aufgespalten

$$\begin{aligned} \omega_2 : \quad f(\xi_2, \xi_3) &= f_2(\xi_2, \xi_3) = \frac{I_{22} \bar{\xi}_2 - I_{23} \bar{\xi}_3}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} Q_2 \\ \omega_3 : \quad f(\xi_2, \xi_3) &= f_3(\xi_2, \xi_3) = \frac{I_{33} \bar{\xi}_3 - I_{23} \bar{\xi}_2}{I_{22} I_{33} - I_{23}^2} Q_3 \quad . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung (5.13) und der Randbedingung (5.4) lautet das Randwertproblem

$$\begin{aligned} S_{12,2} + S_{13,3} + f_i(\xi_2, \xi_3) &= 0 \quad \text{in } \Omega, \quad i = 2, 3 \\ S_{12} n_2 + S_{13} n_3 &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die Verzerrungen ergeben sich aus den entsprechenden Ableitungen der jeweiligen Querschnittsverwölbung ω_2 bzw. ω_3

$$\begin{bmatrix} 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{i,2} \\ \omega_{i,3} \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 2, 3 \quad , \quad (5.16)$$

wobei die Verwölbungen sowohl die eigentlichen, d.h. nichtkonstanten Wölbanteile, als auch die Rotation des Querschnitts beinhalten, siehe Abbildung 5.2. Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen für die Verzerrungen folgt das Stoffgesetz

$$\begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{i,2} \\ \omega_{i,3} \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 2, 3 \quad , \quad (5.17)$$

das für beide Wölbfunktionen ω_2 bzw. ω_3 in gleicher Weise gilt.

Piezelektrisch induzierte Schubdeformation

Die Bestimmung der Wölbfunktion, die sich durch die elektrisch induzierte Schubverzerrung der piezelektrischen Materialschicht einstellt, wurde in der Literatur bisher noch nicht behandelt. Eine Berücksichtigung der hierbei auftretenden Querschnittsverwölbungen ist bei der Modellierung von sogenannten *Shear-Actuators* jedoch unerlässlich, wie in Abschnitt 7.4 anhand zweier Beispiele gezeigt wird. Ein elektrisches Feld senkrecht zur Polarisationsrichtung des piezelek-

trischen Materials führt zu einem reinen Schubverzerrungszustand, wie bereits in Abbildung 3.4 dargestellt wurde. In diesem Fall sind die Normalspannungen S_{11} gleich Null, womit aus der allgemeinen Gleichgewichtsbeziehung nach Gl. (5.2) und mit den Randbedingungen das aus dem Lastfall Torsion bereits bekannte Randwertproblem folgt

$$\begin{aligned} S_{12,2} + S_{13,3} &= 0 & \text{in } \Omega \\ S_{12} n_2 + S_{13} n_3 &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die allgemeine Kinematik der Stabformulierung lautet in diesem Fall

$$\begin{bmatrix} 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{2,1} - \varphi_3 + \omega_{i,2} \\ u_{3,1} + \varphi_2 + \omega_{i,3} \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 4, 5 \quad (5.19)$$

Bei einem reinen Schubverzerrungszustand gilt für die Komponenten $u_{2,1} = -\varphi_3$ bzw. $u_{3,1} = \varphi_2$. Die Verzerrungsanteile $u_{2,1} - \varphi_3$ bzw. $u_{3,1} + \varphi_2$ lassen sich somit zu jeweils einem Schubwinkel zusammenfassen, der als Belastungsterm in der piezoelektrischen Materialschicht vorgegeben wird. Analog zum Torsionsproblem kann dieser Lastfall durch einen Einheits-Schubwinkel in der kinematischen Beziehung berücksichtigt werden, womit sich die Verzerrungen in der Form

$$\begin{bmatrix} 2 E_{12} \\ 2 E_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \omega_{i,2} \\ 1 + \omega_{i,3} \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 4, 5 \quad (5.20)$$

ergeben. Im Gegensatz zu den betrachteten Lastfällen Torsion und Querkraft wirkt die Belastung in diesem Fall lediglich auf die piezoelektrische Materialschicht des Querschnitts. Da die geometrische Kompatibilität innerhalb des Querschnitts gewährleistet sein muss, treten auch in den unbelasteten Bereichen entsprechende Verwölbungen auf. Das linear-elastische Stoffgesetz lautet für diesen Belastungsfall

$$\begin{bmatrix} S_{12} \\ S_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{22} & \tilde{C}_{23} \\ \tilde{C}_{32} & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \omega_{i,2} \\ 1 + \omega_{i,3} \end{bmatrix} \quad \text{mit } i = 4, 5 \quad (5.21)$$

In Abschnitt 5.2.2 wird die Querschnittsverwölbung infolge einer piezoelektrischen Schubdeformation anhand eines Beispiels im Detail diskutiert.

5.1.3 Schwache Form des Randwertproblems

Aus den zuvor beschriebenen Belastungsfällen folgen fünf zu bestimmende Wölb-
funktionen:

- ω_1 infolge Torsion
- ω_2 und ω_3 infolge der Querkraftbelastungen Q_2 bzw. Q_3
- ω_4 und ω_5 infolge der piezoelektrisch induzierten Schubdeformation in Rich-
tung der Querschnittskordinaten ξ_2 bzw. ξ_3 .

Aufgrund der großen Ähnlichkeit zwischen den Randwertproblemen nach
Gl. (5.5), (5.15) und (5.18), lassen sie sich in einer einheitlichen Darstellung in
der Form

$$\begin{aligned} S_{12,2} + S_{13,3} + f_i(\xi_2, \xi_3) &= 0 & \text{in } \Omega, & \text{ mit } i = 1..5 \\ S_{12} n_2 + S_{13} n_3 &= 0 & \text{auf } \partial\Omega & . \end{aligned} \quad (5.22)$$

zusammenfassen. Der Index i kennzeichnet den entsprechenden Belastungsfall.
Die rechte Seite $f_i(\xi_2, \xi_3)$ ist für die Fälle Torsion und piezoelektrische Schubde-
formation gleich Null

$$f_1(\xi_2, \xi_3) = 0 \quad f_4(\xi_2, \xi_3) = 0 \quad f_5(\xi_2, \xi_3) = 0 \quad . \quad (5.23)$$

Die schwache Form des Randwertproblems nach Gl. (5.22) folgt aus der Wichtung
der Differentialgleichung mit der Testfunktion $\delta\omega_i \in \mathcal{V}$, welche die Bedingung

$$\mathcal{V} = \{\delta\omega_i \in H^1(\Omega), \delta\omega_i = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \quad , \quad (5.24)$$

erfüllen muss. Die anschließende Integration über das Gebiet Ω

$$\int_{\Omega} (S_{12,2} + S_{13,3} + f_i(\xi_2, \xi_3)) \delta\omega_i \, dA = 0 \quad (5.25)$$

führt nach weiteren Umformungen mittels partieller Integration und des Gauß-
schen Integralsatzes auf die schwache Form des vereinheitlichten Randwertpro-
blems aus Gl. (5.22)

$$\int_{\Omega} S_{12} \delta\omega_{i,2} + S_{13} \delta\omega_{i,3} - f_i(\xi_2, \xi_3) \delta\omega_i \, dA = 0 \quad . \quad (5.26)$$

Durch die Berücksichtigung der entsprechenden Stoffgesetze für Torsion (5.8),
Querkraft (5.17) und piezoelektrisch induzierte Schubdeformation (5.21) können

nun die schwachen Formen des Gleichgewichts zur Bestimmung der fünf Wölb-
funktionen spezifiziert werden

Verwölbung ω_1 :

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\omega_{1,2} \\ \delta\omega_{1,3} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{1,2} \\ \omega_{1,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\xi_3 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \right) dA = 0 \quad (5.27)$$

Verwölbung ω_2 :

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\omega_{2,2} \\ \delta\omega_{2,3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{2,2} \\ \omega_{2,3} \end{bmatrix} - \delta\omega_2 f_2(\xi_2, \xi_3) dA = 0 \quad (5.28)$$

Verwölbung ω_3 :

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\omega_{3,2} \\ \delta\omega_{3,3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{3,2} \\ \omega_{3,3} \end{bmatrix} - \delta\omega_3 f_3(\xi_2, \xi_3) dA = 0 \quad (5.29)$$

Verwölbung ω_4 :

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\omega_{4,2} \\ \delta\omega_{4,3} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{4,2} \\ \omega_{4,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) dA = 0 \quad (5.30)$$

Verwölbung ω_5 :

$$\int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\omega_{5,2} \\ \delta\omega_{5,3} \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{5,2} \\ \omega_{5,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbb{C}}_{22} & \tilde{\mathbb{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbb{C}}_{32} & \tilde{\mathbb{C}}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) dA = 0 \quad (5.31)$$

Die Lösung der Gleichungen (5.27) - (5.31) erfolgt näherungsweise mit der Me-
thode der finiten Elemente.

5.1.4 Finite-Element-Approximation

Für die Approximation der Geometrie $\mathbf{x} = [\xi_2, \xi_3]^T$, der Wölbfunktionen ω_i und
der Testfunktionen $\delta\omega_i$ werden die gleichen Ansätze gewählt

$$\mathbf{x}^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I \quad \omega_i^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \omega_{iI} \quad \delta\omega_i^h = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \delta\omega_{iI} \quad (5.32)$$

Der Index nel beschreibt die Anzahl der Knoten I pro Element. ξ und η entsprechen den natürlichen Koordinaten einer isoparametrischen Elementformulierung, wobei gilt $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$. Die approximierten Ableitungen der Wölbfunktion und der Testfunktion folgen aus den Beziehungen

$$\begin{bmatrix} \omega_{i,2} \\ \omega_{i,3} \end{bmatrix}^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \omega_{iI} \quad \begin{bmatrix} \delta\omega_{i,2} \\ \delta\omega_{i,3} \end{bmatrix}^h = \sum_{I=1}^{nel} \mathbf{B}_I \delta\omega_{iI} \quad , \quad (5.33)$$

mit der Matrix $\mathbf{B}_I = [N_{I,2}, N_{I,3}]^T$. Die Berücksichtigung dieser Approximationen in der jeweiligen schwachen Form nach Gl. (5.27) - (5.31) liefert

$$G(\omega_i^h, \delta\omega_i^h) = \bigcup_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta\omega_{iI} (\mathbf{K}_{iIK}^e \omega_{iI} - \mathbf{P}_{iI}^e) = 0 \quad , \quad (5.34)$$

siehe [64], wobei der Operator \bigcup den Zusammenbau der Steifigkeitsmatrix und des Lastvektors über alle Elemente symbolisiert. Im Rahmen dieser Arbeit wurden hierbei Vier-Knoten-Elemente mit bilinearen Ansatzfunktionen verwendet.

Während die Elementsteifigkeitsmatrizen \mathbf{K}_{iIK}^e für alle fünf Verwölbungen gleich sind

$$\mathbf{K}_{iIK}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_I^T \tilde{\mathbf{C}}_{QS} \mathbf{B}_K \, dA \quad , \quad (5.35)$$

müssen die Elementlastvektoren \mathbf{P}_{iIK}^e für jeden der fünf Belastungsfälle ω_i separat aufgestellt werden

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1I}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_I^T \tilde{\mathbf{C}}_{QS} N_I \begin{bmatrix} -\xi_{3I} \\ \xi_{2I} \end{bmatrix} \, dA \\ \mathbf{P}_{2I}^e &= \int_{\Omega^e} N_I f_2(\xi_{2I}, \xi_{3I}) \, dA \\ \mathbf{P}_{3I}^e &= \int_{\Omega^e} N_I f_3(\xi_{2I}, \xi_{3I}) \, dA \\ \mathbf{P}_{4I}^e &= \int_{\Omega^e} N_{I,2} \tilde{\mathbf{C}}_{22} + N_{I,3} \tilde{\mathbf{C}}_{32} \, dA \\ \mathbf{P}_{5I}^e &= \int_{\Omega^e} N_{I,2} \tilde{\mathbf{C}}_{23} + N_{I,3} \tilde{\mathbf{C}}_{33} \, dA \quad . \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}_{QS}$ entspricht einer reduzierten $\tilde{\mathbf{C}}$ -Matrix, in welcher die Einträge

$$\tilde{\mathbf{C}}_{QS} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{22} & \tilde{\mathbf{C}}_{23} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{32} & \tilde{\mathbf{C}}_{33} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

zusammengefasst sind. Da für jedes Element unterschiedliche Materialparameter definiert werden können, lässt sich somit z.B. auch eine Schichtungen von mehreren Werkstoffen innerhalb des Querschnitts erfassen.

Aus dem Zusammenbau nach Gl. (5.34) folgt für jeden Belastungsfall i ein lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{P}_i \quad , \quad (5.38)$$

dessen Lösung die Querschnittsverwölbung ω_i mit $i = 1..5$ für die Knoten des diskretisierten Querschnitts liefert. Hierbei ist die Randbedingung $\omega_{iI} = 0$ eines beliebigen Knotens I zu berücksichtigen, siehe GRUTTMANN et al. [64]. Je nachdem, an welchem Knoten die Verwölbung gleich Null gesetzt wird, unterscheiden sich die resultierenden Wölbfunktionen ω_i um jeweils einen konstanten Betrag. Um diesen Einfluss der Randbedingung zu eliminieren, erfolgt eine Transformation der Verwölbungen ω_i , die sich aus der Lösung von Gl. (5.38) ergeben

$$\bar{\omega}_i = \omega_i - \frac{1}{A} \int_{\Omega} \omega_i \, dA \quad \text{mit} \quad \int_{\Omega} \bar{\omega}_i \, dA = 0 \quad , \quad (5.39)$$

wobei die Größen $\bar{\omega}_i$ als die jeweiligen Einheitsverwölbungen definiert werden. Diese Umformung lässt sich als eine Verschiebung der Bezugsfläche deuten, von der aus die Wölbordinaten gemessen werden, so dass sich jeweils gleich große positive und negative Anteile der Wölbfläche einstellen [54]. Bei ROIK et al. [130] wird diese Transformation als die 1. Normierung bezeichnet.

Die so gewonnenen Einheitsverwölbungen lassen sich aufteilen in eine Rotation der Querschnittsebene und einen nichtlinearen Anteil $\bar{\omega}_i$, der die reine Verwölbung beschreibt, wie in Abbildung 5.2 veranschaulicht ist.

Da die Querschnittsrotationen in der Stabformulierung durch entsprechende Freiheitsgrade bereits berücksichtigt werden, erfolgt eine Modifikation der Einheitsverwölbungen $\bar{\omega}_i$ mit dem Ziel, die darin enthaltenen Rotationsanteile zu eliminieren.

Zur Ermittlung des Anteils der Querschnittsrotation an der Verwölbung $\bar{\omega}_i$ wird eine Ebene $E = a \bar{\xi}_2 + b \bar{\xi}_3 + c$ in den verwölbten Querschnitt projiziert, die einen minimalen Abstand zu der Funktion $\bar{\omega}_i$ besitzen soll. Um die Kompatibilität zur Stabkinematik nach Gl. (6.3) zu gewährleisten, muss der Schwerpunkt des Querschnitts in dieser Ebene liegen. Dieser Forderung wird erfüllt, indem der konstante Anteil c bei der Definition von E zu Null gesetzt wird.

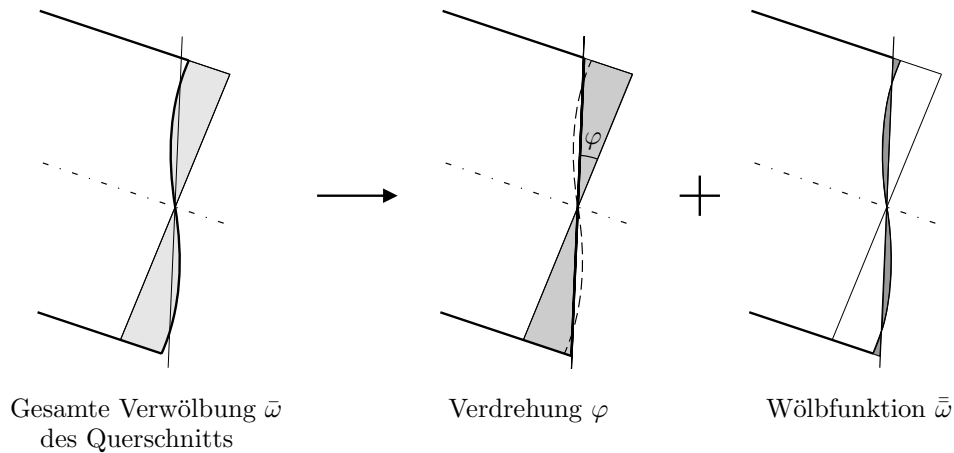


Abb. 5.2: Aufteilung der Querschnittsverwölbung $\bar{\omega}$ in eine reine Verdrehung φ des Querschnitts und in eine Wölbfunktion $\bar{\omega}$.

Die Bestimmung von E kann als Minimierungsproblem formuliert werden, das für jede Wölbfunktion $\bar{\omega}_i$ ausgewertet werden muss. Es lautet in allgemeiner Form

$$\Pi = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\bar{\omega}_i(\xi_2, \xi_3) - E_i(\xi_2, \xi_3))^2 dA \Rightarrow \min. \quad , \quad (5.40)$$

wobei die beiden Parameter a_i und b_i der Ebene E_i die unbekanntenen Größen darstellen. Aus dem Minimierungsproblem folgen die Bestimmungsgleichungen der Parameter a_i und b_i

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{I_{33} \int_{\Omega} \bar{\omega}_i \bar{\xi}_3 dA - I_{23} \int_{\Omega} \bar{\omega}_i \bar{\xi}_2 dA}{I_{33} I_{22} - I_{23}^2} \\ b_i &= \frac{I_{22} \int_{\Omega} \bar{\omega}_i \bar{\xi}_2 dA - I_{23} \int_{\Omega} \bar{\omega}_i \bar{\xi}_3 dA}{I_{33} I_{22} - I_{23}^2} . \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die Werte von a_i und b_i entsprechen der Rotation der Ebene E_i um die $\bar{\xi}_2$ - bzw. $\bar{\xi}_3$ -Achse des Querschnitts. Die Ermittlung von $\bar{\omega}_i$ ergibt sich nach der Beziehung

$$\bar{\omega}_i(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) = \bar{\omega}_i(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3) - (a_i \bar{\xi}_2 + b_i \bar{\xi}_3) \quad . \quad (5.42)$$

Für die Querschnittsverwölbung $\bar{\omega}_1$ infolge Torsion ist die Transformation nach Gl. (5.42) nicht erforderlich. Da in diesem Lastfall nur Rotationen um die ξ_1 -Achse auftreten, sind die beiden Parameter a_1 und b_1 gleich Null. Um die Notation einheitlich weiterzuführen, wird für den Lastfall Torsion trotzdem die Wölbfunktion $\bar{\omega}_1$ definiert, wobei gilt $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1$.

5.2 Numerische Beispiele

Die Anwendung der vorgestellten Formulierung wird anhand der beiden folgenden Beispiele illustriert. Dabei liegt der Schwerpunkt der Betrachtung im ersten Beispiel in der Ermittlung der Schubspannungsverteilung bei einem geschichteten Querschnitt. Das zweite Beispiel veranschaulicht die Unterschiede zwischen den Verwölbungen $\bar{\omega}_3$ und $\bar{\omega}_5$, die sich infolge einer Querkraftbelastung bzw. einer piezoelektrisch induzierten Schubdeformation einstellen.

5.2.1 Querschnitt eines Mikrosensors

Während bei makroskopischen Bauteilen der Einfluss bestimmter Materialschichten wie z.B. der Leitungsschicht oder der Klebeschicht aufgrund ihrer geringen Dicke in der Regel vernachlässigt werden kann, ist dies bei mikroelektromechanischen Bauteilen, sogenannten *MEMS* [139] nicht der Fall. Hier können diese Schichten Abmessungen erreichen, die in der gleichen Größenordnung liegen wie die der piezoelektrischen Schicht oder des Trägermaterials [44].

Ein typischer lagenweiser Aufbau eines Stabquerschnitts ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Tragschicht besteht aus Silizium, als piezoelektrisches Material wird Zinkoxid verwendet. Weiterhin wird eine Passivierungsschicht aus Siliziumnitrid und eine Leitungsschicht aus Platin bei der Modellierung berücksichtigt.

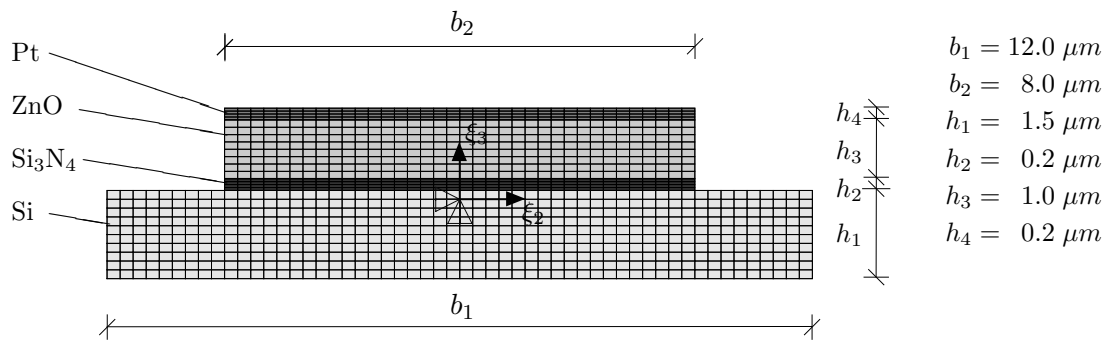


Abb. 5.3: Finite-Element-Diskretisierung des Querschnitts eines Mikrosensors.

Die in der Berechnung verwendeten Materialparameter nach DEVOE & PISANO [44] sowie die Diskretisierung der jeweiligen Schichten sind in Tabelle 5.1 angegeben.

Die aus der Finite-Element-Berechnung resultierenden Schubspannungen, sowie die Verteilung des Schubflusses, die sich durch das Aufbringen einer Einheits-Torsionsverdrehung einstellen, sind in Abbildung 5.4 dargestellt. Es ist deutlich

Materialschicht	E-Modul [GPa]	Querdehnung [-]	Diskretisierung $b \times h$
Platin, Pt	250	0.25	36×4
Zinkoxid, ZnO	siehe Anhang A.1		36×8
Siliziumnitrid, Si_3N_4	290	0.28	36×4
Silizium, Si	162	0.23	54×10

Tab. 5.1: Verwendete Materialparameter [44, 139] und Diskretisierung der jeweiligen Materialschicht.

zu erkennen, dass die Spannungsverteilung im Querschnitt durch dessen geschichteten Aufbau beeinflusst wird. Auffällig sind die hohen Spannungswerte innerhalb der Platinschicht. Sie lassen sich durch deren Lage am äußeren Rand des Querschnitts und mit dem hohen Schubmodul des Materials erklären. Der Übergang zu der Zinkoxid-Schicht ist an der abrupten Verminderung der Schubspannung gut zu erkennen.

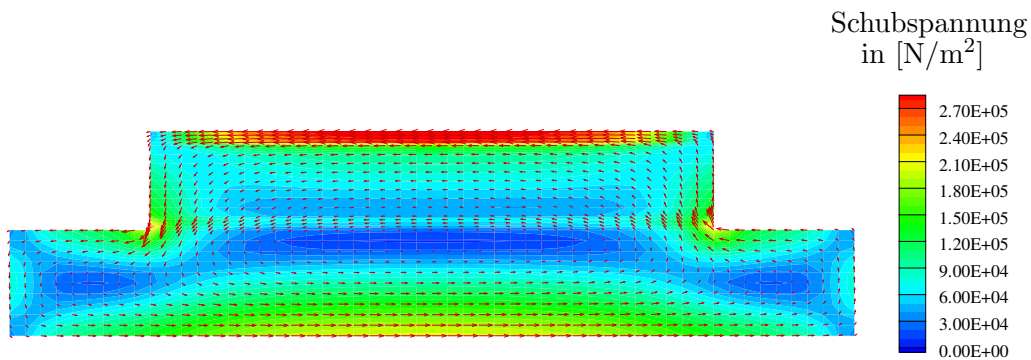


Abb. 5.4: Schubspannungen und Schubfluss infolge einer Einheits-Torsionsbelastung.

Die resultierenden Schubspannungen sowie die entsprechende Schubfluss-Verteilung bei einer Querkraftbelastung $Q_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N}$ sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Bei dieser Beanspruchung ist der Einfluss der unterschiedlichen Materialschichten weniger deutlich. Es stellt sich eine relativ gleichmäßige Spannungsverteilung ein, die zu den Rändern hin kleiner wird. Lediglich an den beiden einspringenden Ecken des Querschnitts treten hohe Schubspannungen infolge von Singularitäten auf.

In beiden Belastungsfällen verläuft der Schubfluss praktisch parallel zur Berandung des Querschnitts, was zeigt, dass die Randbedingungen nach Gl. (5.4) eingehalten werden.

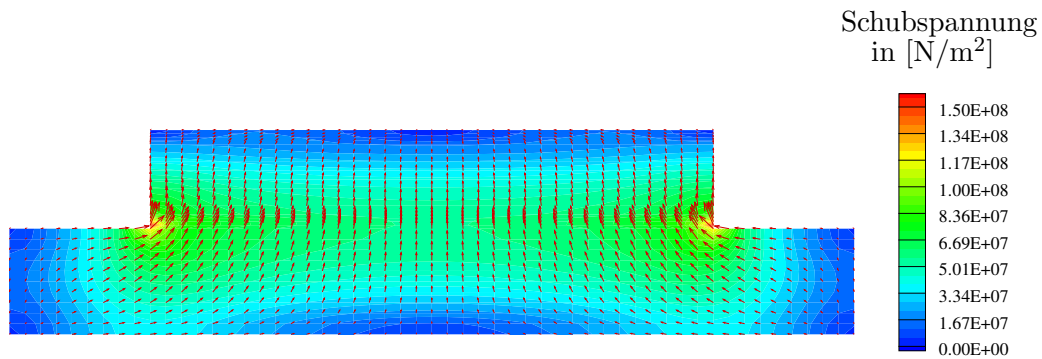


Abb. 5.5: Schubspannungen und Schubflussverlauf infolge einer Querkraftbelastung der Größe $1 \cdot 10^{-3} N$.

5.2.2 Vergleich der Schubdeformation infolge Querkraft und piezoelektrischer Aktivierung

Bereits in Abschnitt 5.1 wurde diskutiert, dass bei der Ermittlung der Querschnittsverwölbung zu unterscheiden ist, ob als Beanspruchung eine elektrisch induzierter Schubverformung oder eine Querkraftbelastung infolge äußerer Einwirkungen vorliegt. Die Unterschiede, die sich zwischen diesen beiden Beanspruchungen ergeben, werden anhand dieses Beispiels illustriert.

Der in Abbildung 5.6 dargestellte Rechteckquerschnitt nach BENJEDDOU [20] besteht aus zwei Aluminiumschichten und einer piezoelektrischen PZT-5H-Schicht, die in ξ_1 -Richtung und damit senkrecht zur Querschnittsebene gepolt ist. Für

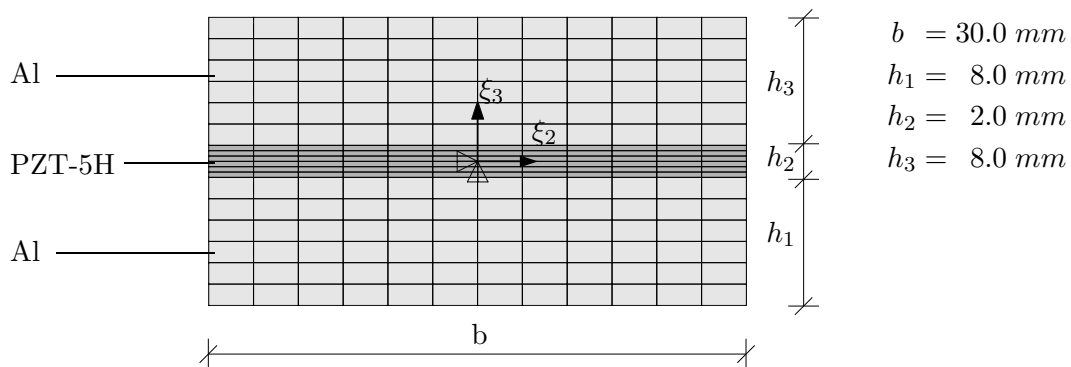


Abb. 5.6: Geometrie und Abmessungen des betrachteten Querschnitts.

das Aluminium-Material wird ein Elastizitätsmodul von $E = 70.3 \text{ GPa}$ und eine Querdehnungszahl von $\nu = 0.345$ angenommen. Die Daten für die PZT-5H-Keramik sind im Anhang A.6 angegeben. Für die Finite-Element-Berechnung wird jede Schicht mit 12×6 Elementen diskretisiert.

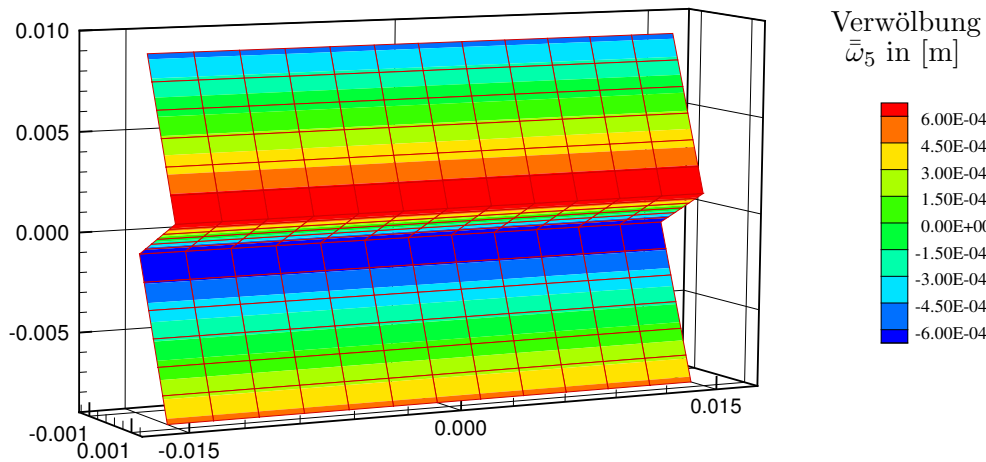


Abb. 5.7: Querschnittsverwölbung $\bar{\omega}_5$ infolge Schub-Aktivierung in der piezoelektrischen Materialschicht.

Ein elektrisches Feld \vec{E}_3 verursacht infolge der vorgegebenen Polarisationsrichtung eine Schubdeformation des Querschnitts. Dieser Lastfall wird durch das Aufbringen einer Einheits-Verdrehung um die ξ_2 -Achse in der PZT-5H-Schicht abgebildet.

Die Abbildung 5.7 zeigt die ermittelte Verwölbung $\bar{\omega}_5$ infolge der Schubdeformation des piezoelektrischen Materials. Der stufenförmige Verlauf von $\bar{\omega}_5$ in ξ_3 -Richtung ist deutlich erkennbar. Die minimalen und maximalen Werte von $\bar{\omega}_5$ treten an der Ober- bzw. Unterseite der PZT-5H Schicht auf.

In Abbildung 5.8 ist die Verwölbung $\bar{\omega}_3$ des Querschnitts bei einer Querkraft-

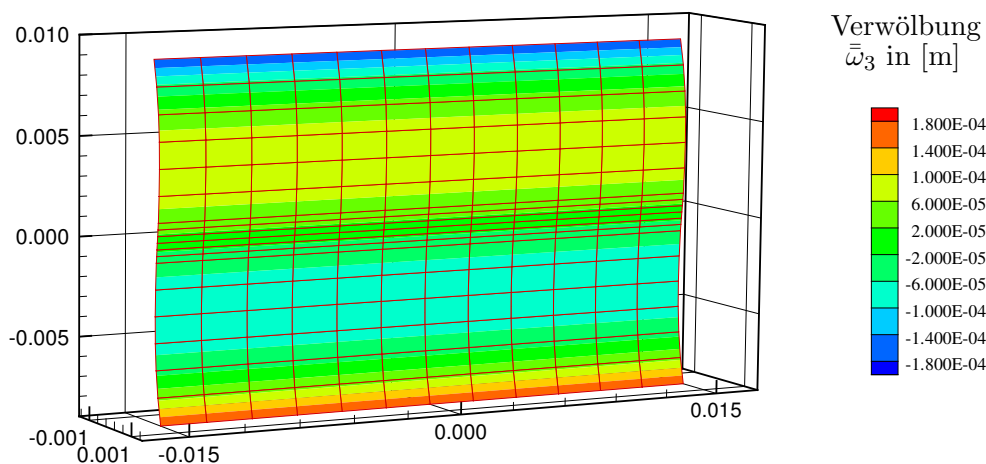


Abb. 5.8: Querschnittsverwölbung $\bar{\omega}_3$ infolge einer Querkraftbelastung Q_3 .

belastung Q_3 dargestellt. Um einen quantitativen Vergleich von $\bar{\omega}_3$ mit $\bar{\omega}_5$ zu ermöglichen, ist der Wert von Q_3 so gewählt, dass er der mechanischen Beanspruchung entspricht, die eine Schubverzerrung der Größe Eins in der piezoelektrischen Schicht hervorrufen würde. Dieser Wert lässt sich bei der vorliegenden Geometrie aus der Beziehung

$$Q_3 = \int_{\Omega} S_{13} \, dA = \int_{\Omega} 2 \tilde{C}_{33} E_{13} \, dA = \int_{\Omega} 2 \tilde{C}_{33} 1 \, dA \quad (5.43)$$

bestimmen. Mit einer Querschnittsfläche der PZT-5H-Schicht von $6 \cdot 10^{-5} \, m^2$ und einem Schubmodul von $\tilde{C}_{33} = 23.3 \, GPa$ ergibt sich eine Querkraft von $Q_3 = 1.398 \cdot 10^6 \, N$.

Die daraus resultierende Verwölbung zeigt den für Rechteckquerschnitte typischen S-förmigen Verlauf. Der Einfluss der verschiedenen Materialschichten besitzt hier eine untergeordnete Bedeutung, da beide Werkstoffe einen ähnlichen Wert für den Parameter \tilde{C}_{33} besitzen.

Der Vergleich von $\bar{\omega}_3$ mit $\bar{\omega}_5$ zeigt, dass der Anteil der reinen Querschnittsverwölbung bei der piezoelektrisch aktivierten Schubdeformation signifikant größer ist. Dies geht auch aus den beiden Abbildungen 5.7 und 5.8 hervor, in denen die Verwölbungen jeweils im gleichen Maßstab dargestellt sind. Da in den Grafiken nur die Anteile $\bar{\omega}_3$ bzw. $\bar{\omega}_5$ berücksichtigt werden, lässt sich daraus jedoch keine Aussage über die Verformung der gesamten Stabstruktur ableiten.

6 Piezoelektrische Stabformulierung

In diesem Kapitel wird eine dreidimensionale Stabformulierung zur Behandlung von elektromechanisch gekoppelten Problemen vorgestellt. Die wesentlichen Aspekte dieser Formulierungen sind hierbei die Berücksichtigung von endlichen Rotationen, sowie die Implementierung eines nichtlinearen Materialmodells für piezoelektrische Werkstoffe. Weiterhin werden Querschnittsverwölbungen infolge Torsion, Querkraft und piezoelektrisch induzierten Schubverzerrungen betrachtet.

Obwohl durch den piezoelektrischen Effekt selbst nur kleine Deformationen erreicht werden können, ist die Abbildung von endlichen Rotationen etwa bei Anwendungen von Interesse, bei denen die Starrkörperbewegungen einer Stabstruktur zu berücksichtigen sind. Im Sensorbetrieb können damit z.B. stabförmige Bauteile überwacht werden, bei denen große Verformungen auftreten.

In der Literatur sind zahlreiche Veröffentlichungen zu finden, in denen rein mechanische Stabformulierungen mit endlichen Rotationen beschrieben sind. In diesem Zusammenhang sind die Arbeiten von BATHE & BOLOURCHI [16], GRUTTMANN et al. [63, 65], IBRAHIMBEGOVIC [75] und SIMO & VU-QUOC [144] zu nennen. Wesentliche Unterschiede zwischen diesen Formulierungen bestehen dabei in den verwendeten Verzerrungsmaßen, der Anzahl der Freiheitsgrade und in der Behandlung der Rotationen.

Piezoelektrische Stabformulierungen, in denen geometrische Nichtlinearitäten unter Berücksichtigung von moderaten Rotationen behandelt werden, sind vorwiegend in der jüngeren Literatur anzutreffen, wie z.B. in den Arbeiten von BUTZ & KLINKEL [27] oder MUKHERJEE & CHAUDHURI [119]. Stabilitätsprobleme bei piezoelektrischen Stabstrukturen werden z.B. von HU et al. [69] und von MUKHERJEE & CHAUDHURI [118] untersucht. Entsprechende Formulierungen mit finiten Rotationen sind bislang nicht zu finden.

Die Berücksichtigung von nichtlinearen, piezoelektrischen Materialmodellen innerhalb von Stabformulierungen wurde in der Literatur bisher kaum diskutiert. Lediglich ZHOU & CHATTOPADHYAY [178] betrachten in ihrer Arbeit ein Modell zur Abbildung von ferroelektrischen Hysteresen im Rahmen einer Bernoulli-Stabtheorie.

Die hier vorgestellte Stabformulierung basiert auf den Arbeiten von SAUER [135] bzw. GRUTTMANN et al. [63, 65]. Darin wird eine Finite-Element-Formulierung für ein dreidimensionales Stabelement vorgestellt, wobei unter anderem endliche Rotationen, eine beliebige Querschnittsgeometrie, die Verwölbung des Querschnitts infolge Torsion und elastoplastisches Materialverhalten berücksichtigt werden. Zur Modellierung von piezoelektrischen Stabstrukturen ist es erforderlich, diese Formulierung entsprechend zu erweitern bzw. zu modifizieren, um sie den

in Abschnitt 1.3 genannten Anforderungen anzupassen. Die wesentlichen Änderungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Erweiterung des Stabmodells zur Berücksichtigung der elektrischen Feldgrößen.
- Implementierung des Preisach-Modells zur Abbildung der materiellen Nichtlinearitäten, die aus den ferroelektrischen Werkstoffeigenschaften resultieren. Elastoplastisches Materialverhalten wird dagegen nicht weiter betrachtet.
- Erweiterung der Stabkinematik um zwei weitere Freiheitsgrade. Auf diese Weise lassen sich neben den Querschnittsverwölbungen infolge Torsion zwei zusätzliche Verwölbungsanteile berücksichtigen, die sich aus Querkraftbelastungen bzw. aus piezoelektrisch induzierten Schubdeformationen ergeben.

6.1 Kinematik

Zur Formulierung des Stabmodells werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Die dreidimensionale Stabkinematik wird mit Hilfe der Timoshenko-Theorie beschrieben, die durch drei zusätzliche Wölbfreiheitsgrade erweitert wird.
- Die Form des Querschnitts verändert sich durch die Deformation des Stabes nicht.
- Es werden dickwandige Querschnitte betrachtet.
- Die mechanischen Belastungen wirken richtungstreu. Die elektrischen Belastungen nach Abschnitt 6.2 werden bezüglich der lokalen Stabachsen definiert.

In Abbildung 6.1 ist ein allgemeiner Stab der Länge L in der Referenz- sowie in der Momentankonfiguration dargestellt. Zur Beschreibung eines beliebigen Punktes in der Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 wird ein orthogonales Koordinatensystem \mathbf{A}_i mit den Koordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) eingeführt. Im undeformierten Zustand liegt der Basisvektor \mathbf{A}_1 tangential an der Stabkoordinate $S = \xi_1 \in [0, L]$, die Querschnittsebene wird von den beiden Basisvektoren \mathbf{A}_2 und \mathbf{A}_3 aufgespannt. Das in der Momentankonfiguration \mathcal{B}_t definierte Koordinatensystem \mathbf{a}_i besitzt ebenfalls orthogonale Basisvektoren. Infolge der Stabkinematik nach der Timoshenko-Theorie muss der Basisvektor \mathbf{a}_1 jedoch nicht mehr tangential an S anliegen.

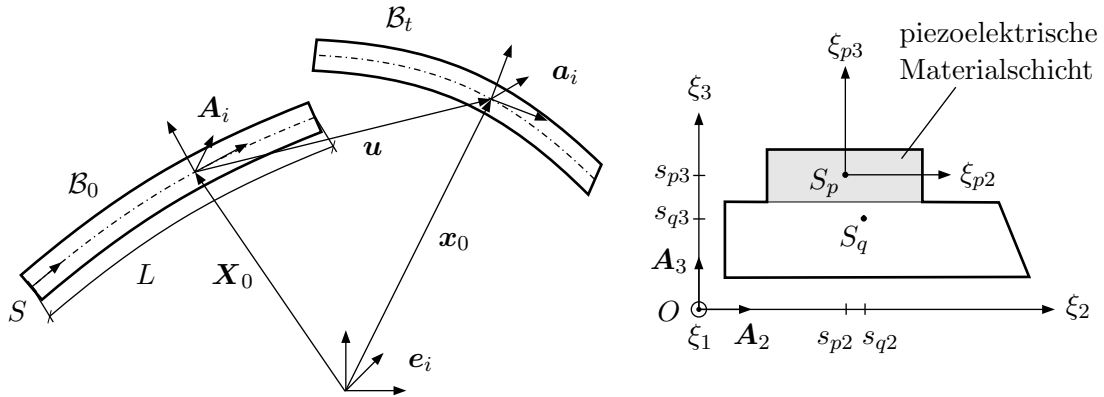


Abb. 6.1: Allgemeines Stabmodell.

Der Ursprung O der Koordinatensysteme \mathbf{A}_i bzw. \mathbf{a}_i liegt auf einer frei wählbaren Referenzlinie des Stabes, die nicht mit dem Schwerpunkt oder dem Schubmittelpunkt übereinstimmen muss. Die Größe S_q definiert den Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts, S_p entspricht dem Schwerpunkt der piezoelektrischen Materialschicht.

Die Vektoren \mathbf{X}_0 und \mathbf{x}_0 definieren einen beliebigen Punkt auf der Referenzlinie des Stabes in der Referenz- bzw. der Momentankonfiguration. Seine Verschiebung \mathbf{u} ist durch die Beziehung $\mathbf{u} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_0$ gegeben.

Ausgehend von dem globalen kartesischen Koordinatensystem \mathbf{e}_i folgen die Basisvektoren \mathbf{A}_i bzw. \mathbf{a}_i der jeweiligen Konfiguration aus den orthogonalen Transformationen

$$\mathbf{A}_i(S) = \mathbf{R}_0(S) \mathbf{e}_i \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{a}_i(S, t) = \mathbf{R}(S, t) \mathbf{e}_i \quad . \quad (6.1)$$

Die Rotationstensoren $\mathbf{R}_0(S)$ und $\mathbf{R}(S, t)$ sind Elemente der eigentlich orthogonalen $SO(3)$ -Gruppe, die auch als spezielle orthogonale Gruppe oder LIE-Gruppe bezeichnet wird. Für ein Element \mathbf{R} dieser Gruppe gilt

$$SO(3) = \{\mathbf{R} : \mathcal{R}^3 \Rightarrow \mathcal{R}^3 \mid \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \quad \text{und} \quad \det \mathbf{R} = +1\} \quad . \quad (6.2)$$

Die Beschreibung von endlichen Rotationen kann durch verschiedene Verfahren erfolgen, wie z.B. Eulerwinkel, Kardanwinkel oder Quaternionen. Diese sind in der Literatur ausführlich dargestellt, etwa in den Arbeiten von ARGYRIS [9], GÉRADIN & RIXEN [57] oder STUELPNAGEL [150].

Bei dem Konzept, das hier weiter verfolgt wird, erfolgt die Beschreibung der Rotation durch die Drehung um eine Achse im Raum. Diese Achse kann hierbei durch einen Pseudovektor $\boldsymbol{\omega}$ repräsentiert werden, dessen Orientierung der Richtung der Drehachse entspricht. Der Betrag des Vektors $\|\boldsymbol{\omega}\|$ bestimmt die Größe des

Drehwinkels. Die Bestimmung des Rotationstensors \mathbf{R} erfolgt bei diesem Verfahren mit der Rodrigues-Formel, die z.B. bei BAŞAR & WEICHERT [11] detailliert behandelt wird.

Ein beliebiger Punkt des Stabes kann in der Momentan- und in der Referenzkonfiguration durch die Ortsvektoren \mathbf{X} bzw. \mathbf{x} eindeutig bestimmt werden

$$\mathbf{X}(\xi_2, \xi_3, S) = \mathbf{X}_0(S) + \xi_2 \mathbf{A}_2(S) + \xi_3 \mathbf{A}_3(S)$$

$$\mathbf{x}(\xi_2, \xi_3, S, t) = \mathbf{x}_0(S, t) + \xi_2 \mathbf{a}_2(S, t) + \xi_3 \mathbf{a}_3(S, t) + [\tilde{\boldsymbol{\omega}}(\xi_2, \xi_3) \cdot \boldsymbol{\alpha}(S, t)] \mathbf{a}_1(S, t) \quad . \quad (6.3)$$

Der Vektor $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ beinhaltet die Werte von drei Wölbfunktionen an der Stelle der Querschnittskordinaten (ξ_2, ξ_3) . Welche Wölbfunktionen hierbei zu berücksichtigen sind, ergibt sich aus der jeweiligen Belastung des Systems. Findet z.B. eine Beanspruchung infolge einer äußeren mechanischen Belastung statt, dann ist $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3]$ sinnvoll, bei einer elektrisch induzierten Schubdeformation sollten dagegen die Wölbfunktionen $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = [\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_4, \bar{\omega}_5]$ in Betracht gezogen werden. Die Bedeutung der jeweiligen Funktionen $\bar{\omega}_1$ bis $\bar{\omega}_5$ ist in Abschnitt 5.1.3 beschrieben. Jede Wölbfunktion wird mit jeweils einem Skalierungsfaktor α_i , $i=1..3$ multipliziert, die in dem Vektor $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$ zusammengefasst sind. Der Basisvektor \mathbf{a}_1 wird bei der Betrachtung der Querschnittsverwölbung als abschnittsweise konstant angenommen [64].

Es ist prinzipiell auch denkbar, alle fünf Wölbfunktionen $\bar{\omega}_1$ bis $\bar{\omega}_5$ gleichzeitig in der Stabformulierung zu berücksichtigen. Dagegen spricht jedoch, dass die Verwölbungsanteile infolge Querkraft und infolge elektrischer Schubdeformation aus unterschiedlichen Belastungen resultieren und daher in der Regel nicht zusammen auftreten. Weiterhin erfordert diese Maßnahme bei der Finite-Element-Approximation zwei weitere Freiheitsgrade pro Knoten, was die Effizienz der Formulierung vermindern würde.

Ausgehend von der Definition der Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} können die Tangentenvektoren $\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i}$ und $\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}$ bestimmt werden, für die sich die folgenden Beziehungen ergeben

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 &= \mathbf{X}'_0 + \xi_2 \mathbf{A}'_2 + \xi_3 \mathbf{A}'_3 & \mathbf{g}_1 &= \mathbf{x}'_0 + \xi_2 \mathbf{a}'_2 + \xi_3 \mathbf{a}'_3 + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{G}_2 &= \mathbf{A}_2 & \mathbf{g}_2 &= \mathbf{a}_2 + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{,2} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{G}_3 &= \mathbf{A}_3 & \mathbf{g}_3 &= \mathbf{a}_3 + (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{,3} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \mathbf{a}_1 \quad . \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dabei entspricht der Ausdruck $(\cdot)'$ der Ableitung nach der Stabkoordinate S . Die in Gl. (6.4) auftretenden Ableitungen der Basisvektoren werden mit Hilfe der Rotationstensoren bestimmt

$$\mathbf{A}'_i = \mathbf{R}'_0 \mathbf{R}_0^T \mathbf{A}_i \quad \mathbf{a}'_i = \mathbf{R}' \mathbf{R}^T \mathbf{a}_i \quad . \quad (6.5)$$

Die Tensorprodukte $\mathbf{R}'_0 \mathbf{R}_0^T$ bzw. $\mathbf{R}' \mathbf{R}^T$ ergeben jeweils einen schiefssymmetrischen Tensor. Damit lassen sich die Beziehungen in Gl. (6.5) alternativ in der Form

$$\mathbf{A}'_i = \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{A}_i \qquad \mathbf{a}'_i = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_i \qquad (6.6)$$

darstellen, worin $\boldsymbol{\theta}_0$ und $\boldsymbol{\theta}$ den axialen Vektoren von $\mathbf{R}'_0 \mathbf{R}_0^T$ bzw. $\mathbf{R}' \mathbf{R}^T$ entsprechen.

Da in dieser Arbeit zwar große Verformungen aber nur kleine Verzerrungen betrachtet werden, lässt sich der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor \mathbf{E} über die Tangentenvektoren bestimmen [63, 135]

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,i} \cdot \mathbf{x}_{,j} - \mathbf{X}_{,i} \cdot \mathbf{X}_{,j}) = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \quad . \qquad (6.7)$$

Im Rahmen der Stabtheorie kann der aus Gl. (6.7) resultierende Verzerrungstensor auf den Vektor $\mathbf{E}_b = [E_{11}, 2 E_{12}, 2 E_{13}]^T$ vereinfacht, und in folgender Weise dargestellt werden

$$\mathbf{E}_b = \widehat{\mathbf{A}}(\xi_2, \xi_3) \widehat{\mathbf{E}}(S) \quad . \qquad (6.8)$$

In der mechanischen Transformationsmatrix $\widehat{\mathbf{A}}$ sind die von den Querschnittskordinaten ξ_2 und ξ_3 abhängigen Größen zusammengefasst

$$\widehat{\mathbf{A}}(\xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & -\xi_2 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\omega}_1 & \tilde{\omega}_2 & \tilde{\omega}_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\xi_3 & 0 & 0 & \tilde{\omega}_{1,2} & \tilde{\omega}_{2,2} & \tilde{\omega}_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \xi_2 & 0 & 0 & \tilde{\omega}_{1,3} & \tilde{\omega}_{2,3} & \tilde{\omega}_{3,3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \qquad (6.9)$$

Der Vektor der Stabverzerrungen $\widehat{\mathbf{E}}$ ist eine Funktion der Stabkoordinate S

$$\widehat{\mathbf{E}}(S) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0 \\ \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}' \end{bmatrix} . \qquad (6.10)$$

Aufgrund der Annahme, dass nur kleine Verzerrungen auftreten, und damit die Terme aus Produkten höherer Ordnung von $\xi_2, \xi_3, \tilde{\omega}_i, \alpha_i, \alpha'_i$ vernachlässigt werden können [135], ergeben sich für die Verzerrungsmaße $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\kappa}$ die Beziehungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{x}'_0 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{a}'_3 \\ \mathbf{x}'_0 \cdot \mathbf{a}'_2 \end{bmatrix} . \qquad (6.11)$$

Die Größen $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ und $\boldsymbol{\kappa}_0$ folgen aus Gl. (6.11), indem die Basisvektoren der Momentankonfiguration durch diejenigen der Referenzkonfiguration ersetzt werden.

6.2 Elektrische Feldgrößen

Neben der Kinematik muss im Rahmen einer elektromechanisch gekoppelten Stabformulierung auch eine Beschreibung der elektrischen Feldgrößen ϕ und \vec{E} erfolgen. Hierbei ist ein geeigneter Polynomansatz für das elektrische Potential in ξ_2 - und in ξ_3 -Richtung erforderlich, um die elektrischen Feldgrößen in der Querschnittsebene hinreichend genau zu erfassen.

Die Wahl dieses Ansatzes wird in der Literatur in mehreren Arbeiten diskutiert. Aus diesen geht hervor, dass die Approximation mit einem linearen Polynomansatz für ϕ in ξ_2 - und in ξ_3 -Richtung unzureichend ist, siehe hierzu z.B. ALTAY & DÖKMECI [7], KROMMER & IRSCHIK [95] oder WANG & QUEK [168, 169].

Der Anteil von ϕ aus höherer Polynomordnung ist auf die elektromechanische Kopplung zwischen den Verzerrungen und dem elektrischen Feld zurückzuführen. Da er nicht direkt aus einer äußeren elektrischen Belastung folgt, wird er in der Literatur auch als *induced potential* bezeichnet [18]. In Abhängigkeit von den resultierenden Verzerrungen kann hieraus eine nichtlineare Verteilung des elektrischen Potentials innerhalb des Querschnitts resultieren. So zeigen z.B. WANG & QUEK [169] durch eine analytische Betrachtung, dass sich bei einer reinen Biegebeanspruchung des Stabes und unter Berücksichtigung bestimmter Randbedingungen ein quadratischer Verlauf von ϕ über den Querschnitt einstellt.

Zur hinreichend genauen Erfassung von Biegezuständen in der piezoelektrischen Materialschicht wird daher das elektrische Potential mit dem folgenden, quadratischen Polynomansatz approximiert

$$\phi(\xi_2, \xi_3, S) = c_1(S) + c_2(S) \xi_{p2} + c_3(S) \xi_{p3} + c_4(S) \left(\frac{b_p^2}{4} - \xi_{p2}^2 \right) + c_5(S) \left(\frac{h_p^2}{4} - \xi_{p3}^2 \right). \quad (6.12)$$

Die Größen b_p und h_p entsprechen dabei der Höhe und der Breite der piezoelektrischen Materialschicht innerhalb des Querschnitts. Die Koordinaten ξ_{p2} und ξ_{p3} beziehen sich auf das Koordinatensystem, dessen Ursprung mit dem Schwerpunkt der piezoelektrischen Materialschicht zusammenfällt, wie in Abbildung 6.1 dargestellt ist. Dabei gilt $\xi_{p2} = \xi_2 - s_{p2}$ bzw. $\xi_{p3} = \xi_3 - s_{p3}$. Der Ansatz für die quadratischen Terme in Gl. (6.12) ist dabei so gewählt, dass diese an den Rändern der piezoelektrischen Schicht zu Null werden. Die fünf Anteile, aus denen nach Gl. (6.12) das elektrische Potential approximiert wird, sind in Abbildung 6.2 illustriert.

Durch diese Approximation des elektrischen Potentials ist die Geometrie der piezoelektrischen Materialschicht auf einen rechteckigen Querschnitt beschränkt. Weiterhin ermöglicht dieser Ansatz nur eine begrenzte Erfassung des induzierten Potentials infolge der Querschnittsverwölbung. Dieser Anteil der elektromechani-

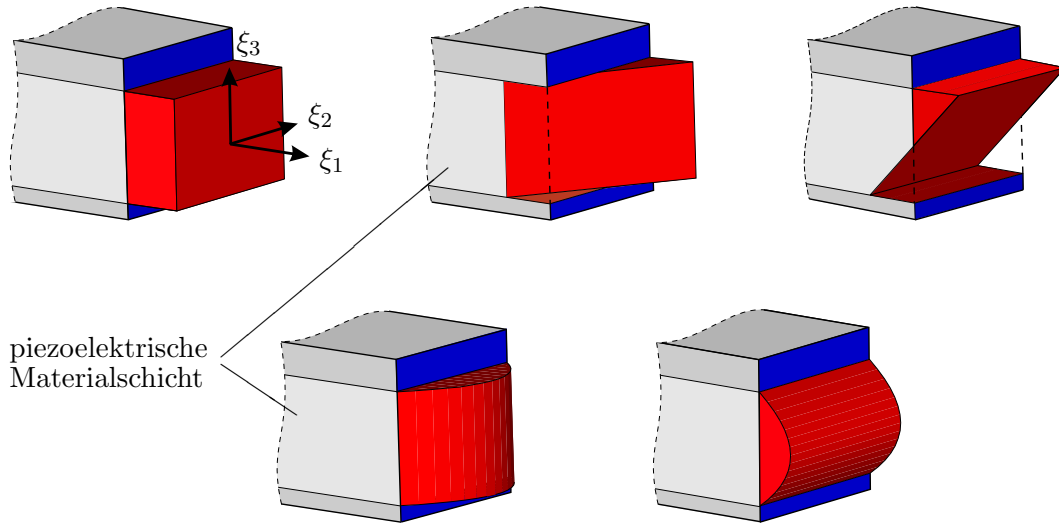


Abb. 6.2: Darstellung des konstanten, der beiden linearen und der beiden quadratischen Anteile zur Approximation des elektrischen Potentials ϕ nach Gl. (6.12).

schen Kopplung ist jedoch in der Regel verhältnismäßig klein und kann deshalb vernachlässigt werden.

Die Koeffizienten c_1 bis c_5 sind zunächst nicht bekannt und entsprechen den elektrischen Freiheitsgraden der Stabformulierung. Aus Gl. (6.12) wird ersichtlich, dass die Größen c_1 bis c_5 verschiedene Einheiten besitzen und damit auch die zugehörigen Freiheitsgrade physikalisch unterschiedlich interpretiert werden müssen. Während c_1 den konstanten Anteil des Potentials angibt, beschreiben c_2 und c_3 den linear veränderlichen Anteil von ϕ in ξ_2 bzw. ξ_3 Richtung, und entsprechen somit den konstanten Anteilen von \vec{E}_2 und \vec{E}_3 in der piezoelektrischen Schicht, jedoch mit negativem Vorzeichen. Die Anteile c_4 und c_5 können als die Gradienten des elektrischen Feldes in ξ_2 bzw. ξ_3 Richtung interpretiert werden.

Mit der Beziehung $\vec{E} = -\text{Grad } \phi$ resultiert aus dem Potentialansatz nach Gl. (6.12) der elektrische Feldvektor \vec{E} . Analog zu den Verzerrungen aus Abschnitt 6.1 erfolgt hier eine Aufteilung von $\vec{E} = [\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3]^T$ in der Form

$$\vec{E} = \bar{A}(\xi_2, \xi_3) \bar{\vec{E}}(S) \quad . \quad (6.13)$$

Der Vektor $\bar{\vec{E}}$ beinhaltet hierbei die elektrischen Feldgrößen der Stabformulierung

$$\bar{\vec{E}}(S) = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{bmatrix} \quad . \quad (6.14)$$

Die Vektoren $\Phi = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5]^T$ und $\Phi' = [c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, c'_5]^T$ enthalten die Koeffizienten des Potentialansatzes aus Gl. (6.12) bzw. deren Ableitungen nach der Stabkoordinate S .

Für die elektrische Transformationsmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ als Funktion von ξ_{p2} und ξ_{p3} gilt

$$\bar{\mathbf{A}} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi_{p2} & \xi_{p3} & \left(\frac{b_p^2}{4} - \xi_{p2}^2\right) & \left(\frac{h_p^2}{4} - \xi_{p3}^2\right) \\ 0 & 1 & 0 & -2\xi_{p2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\xi_{p3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

Die Formulierungen von ϕ und $\vec{\mathbf{E}}$ nach Gl. (6.12) bzw. (6.13) beziehen sich auf das lokale Koordinatensystem des Stabes, wodurch sich das Aufbringen bzw. das Abgreifen von elektrischen Feldgrößen sehr einfach gestaltet. Da bei den hier betrachteten Stabstrukturen die Elektroden fest mit der piezoelektrischen Materialschicht verbunden sind, bleibt die relative Lage zueinander auch im verformten Zustand annähernd unverändert. Entsprechend bleibt auch die Richtung der elektrischen Feldgrößen bezüglich der Stabachse erhalten, was mit einer lokalen Formulierung einfach erfasst werden kann.

6.3 Schwache Form des Gleichgewichts

Die schwache Form des Gleichgewichts der piezoelektrischen Stabformulierung resultiert aus der entsprechenden Kontinuumsformulierung nach Gl. (2.41), indem nur noch diejenigen Spannungs- und Verzerrungskomponenten aus der Stabtheorie betrachtet werden

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}, \Phi, \delta\Phi) &= \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E}_b^T \mathbf{S}_b \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}}^T \vec{\mathbf{D}} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\rho}_0 \delta \phi \, dV - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA - \int_{\partial_\sigma \mathcal{B}_0} \bar{\sigma}_0 \delta \phi \, dA = 0 \quad . \end{aligned} \quad (6.16)$$

Hierbei beinhalten die beiden ersten Integrale in Gl. (6.16) die virtuelle innere Arbeit der mechanischen bzw. elektrischen Größen. Die beiden folgenden Integrale entsprechen den auf den Stab wirkenden, virtuellen Volumenkräften. Zunächst werden nur die statischen Anteile berücksichtigt, eine Erweiterung um die zeitabhängigen Größen wird in Abschnitt 6.7 diskutiert. Die beiden letzten Ausdrücke in Gl. (6.16) repräsentieren die virtuellen äußeren Arbeiten infolge von Oberflächenlasten bzw. Oberflächenladungen.

Durch die Berücksichtigung des kondensierten Stoffgesetzes nach Gl. (3.21) wird gewährleistet, dass die schwache Form der Stabtheorie in Gl. (6.16) energetisch gleichwertig zur Beziehung (2.41) ist. In den folgenden Abschnitten werden die entsprechenden virtuellen Größen bestimmt, die zur Auswertung von Gl. (6.16) erforderlich sind.

6.3.1 Virtuelle Verzerrungen

Aus der Kinematik der Stabformulierung resultieren die mechanischen Freiheitsgrade $\mathbf{v} = [\mathbf{u}, \mathbf{R}, \boldsymbol{\alpha}]^T$, die aus der Verschiebung \mathbf{u} der Referenzachse, dem Rotationstensor $\mathbf{R} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{e}_i$ und den Skalierungsfaktoren $\boldsymbol{\alpha}$ der Wölbfunktionen bestehen [65]. Die virtuellen Stabkinematiken sind definiert als

$$\mathcal{V}_v = \{ \delta \mathbf{v} = [\delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\alpha}]^T : [0, L] \rightarrow \mathcal{R}^3 \mid \delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_u \mathcal{B} \} , \quad (6.17)$$

wobei auf dem Rand $\partial_u \mathcal{B}$ die Verschiebungen bzw. Verdrehungen vorgegeben sind. Der axiale Vektor $\delta \mathbf{w}$ folgt aus der Beziehung $\delta \mathbf{a}_i = \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{a}_i = \delta \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{a}_i$. Die im Rahmen der Stabformulierung auftretenden Stabverzerrungen sind in dem Vektor $\delta \widehat{\mathbf{E}}$ zusammengefasst

$$\delta \widehat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \\ \delta \boldsymbol{\kappa} \\ \delta \boldsymbol{\alpha} \\ \delta \boldsymbol{\alpha}' \end{bmatrix} , \quad (6.18)$$

wobei für die virtuellen Verzerrungen $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ und Krümmungen $\delta \boldsymbol{\kappa}$ die Beziehungen

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{u}' \\ \mathbf{a}_2 \cdot \delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad \delta \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \cdot \delta \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}'_3 \cdot \delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{a}'_3 \\ \mathbf{a}'_2 \cdot \delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \delta \mathbf{a}'_2 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

gelten. Die Variation der Skalierungsfaktoren und deren Ableitung nach S sind mit den beiden Vektoren

$$\delta \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \delta \alpha_1 \\ \delta \alpha_2 \\ \delta \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \delta \boldsymbol{\alpha}' = \begin{bmatrix} \delta \alpha'_1 \\ \delta \alpha'_2 \\ \delta \alpha'_3 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

gegeben. Die virtuellen Größen $\delta \mathbf{E}_b$ und $\delta \widehat{\mathbf{E}}$ können unter Berücksichtigung der mechanischen Transformationsmatrix $\widehat{\mathbf{A}}$ aus Gl. (6.9) folgendermaßen ineinander überführt werden

$$\delta \mathbf{E}_b = \widehat{\mathbf{A}} \delta \widehat{\mathbf{E}} . \quad (6.21)$$

6.3.2 Virtuelles elektrisches Feld

Die Freiwerte zur Beschreibung der elektrischen Feldgrößen sind in dem Vektor $\boldsymbol{\Phi}$ zusammengefasst. Das virtuelle elektrische Potential ist in dem Funktionsraum

$$\mathcal{V}_\phi = \{ \delta \boldsymbol{\Phi} : [0, L] \rightarrow \mathcal{R}^3 \mid \delta \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \text{ auf } \partial_\phi \mathcal{B} \} \quad (6.22)$$

definiert, wobei das Potential auf dem Rand $\partial_\phi \mathcal{B}$ vorgegeben ist. Für das virtuelle elektrische Feld gilt

$$\delta \vec{\mathbf{E}} = - \text{Grad } \delta \phi \quad , \quad (6.23)$$

wobei sich $\delta \phi$ aus Gl. (6.12) bestimmen lässt. Die Auswertung von Gl. (6.23) führt auf die Beziehung zwischen den virtuellen Größen des elektrischen Feldes und dem elektrischen Feldvektor der Stabformulierung

$$\delta \vec{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{A}} \delta \vec{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \delta \vec{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \delta \Phi \\ \delta \Phi' \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

und den beiden Vektoren

$$\delta \Phi = [\delta c_1, \delta c_2, \delta c_3, \delta c_4, \delta c_5]^T \quad \text{und} \quad \delta \Phi' = [\delta c'_1, \delta c'_2, \delta c'_3, \delta c'_4, \delta c'_5]^T . \quad (6.25)$$

6.3.3 Virtuelle innere Arbeit

Die virtuelle innere Arbeit, die aus der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gl. (6.16) hervorgeht, besteht sowohl aus einem mechanischen, als auch aus einem elektrischen Anteil

$$G_{int}(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}, \Phi, \delta \Phi) = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E}_b^T \mathbf{S}_b \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}}^T \vec{\mathbf{D}} \, dV \quad . \quad (6.26)$$

Die Überführung in eine Darstellung bezüglich der Größen $\delta \hat{\mathbf{E}}^T$ bzw. $\delta \vec{\mathbf{E}}^T$ der Stabformulierung erfolgt mit den Transformationsbeziehungen aus Gl. (6.21) und Gl. (6.24)

$$G_{int}(\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}, \Phi, \delta \Phi) = \int_S \delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{S}} \, dS - \int_S \delta \vec{\mathbf{E}}^T \vec{\mathbf{D}} \, dS \quad . \quad (6.27)$$

Die zu dem Verzerrungsmaß $\delta \hat{\mathbf{E}}$ arbeitskonformen Schnittgrößen $\hat{\mathbf{S}}$ und die zu dem elektrischen Feld $\delta \vec{\mathbf{E}}$ arbeitskonformen dielektrischen Verschiebungen $\vec{\mathbf{D}}$ können aus der jeweiligen Querschnittsintegration bestimmt werden.

Die Schnittgrößen $\hat{\mathbf{S}}$ folgen aus einer Integration über die Querschnittsfläche

$$\hat{\mathbf{S}} = \int_A \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{S}_b \, dA = \int_A \begin{bmatrix} S_{11} \mathbf{e}_1 + S_{12} \mathbf{e}_2 + S_{13} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{W}_d (S_{11} \mathbf{e}_1 + S_{12} \mathbf{e}_2 + S_{13} \mathbf{e}_3) \\ \tilde{\omega}_{,2} S_{12} + \tilde{\omega}_{,3} S_{13} \\ \tilde{\omega} S_{11} \end{bmatrix}_{[12 \times 1]} \, dA \quad (6.28)$$

mit $\mathbf{W}_d = \text{skew } \mathbf{d}$ und dem axialen Vektor $\mathbf{d} = [0, \xi_2, \xi_3]^T$. Die Komponenten des Schnittgrößenvektors $\hat{\mathbf{S}}$ lassen sich als die bekannten Größen aus der Stabtheorie identifizieren

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} N \\ Q_2 \\ Q_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ N_{\tilde{\omega}_1} \\ N_{\tilde{\omega}_2} \\ N_{\tilde{\omega}_3} \\ M_{\tilde{\omega}_1} \\ M_{\tilde{\omega}_2} \\ M_{\tilde{\omega}_3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Normalkraft} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Querkräfte} \\ \text{Torsionsmoment} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Biegemomente} \\ \text{sekundäres Torsionsmoment} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{sekundäres Wölbmoment} \\ \text{Bimoment} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Bimoment aus Verwölbung} \end{array} \quad . \quad (6.29)$$

Aus den Wölbfunktionen $\tilde{\omega}_2$ und $\tilde{\omega}_3$ ergeben sich hierbei die zusätzlichen Schnittgrößen $N_{\tilde{\omega}_2}$, $N_{\tilde{\omega}_3}$, $M_{\tilde{\omega}_2}$ und $M_{\tilde{\omega}_3}$, die in der Formulierung mit zu berücksichtigen sind.

In analoger Weise folgen die arbeitskonformen Größen zum elektrischen Feld der Stabformulierung $\vec{\mathbf{E}}$ aus dem Querschnittsintegral

$$\vec{\mathbf{D}} = \int_A \bar{\mathbf{A}}^T \vec{\mathbf{D}} \, dA = \int_A - \begin{bmatrix} \vec{D}_2 \mathbf{e}_2 + \vec{D}_3 \mathbf{e}_3 \\ -2 \xi_{p2} \vec{D}_2 \\ -2 \xi_{p3} \vec{D}_3 \\ \Phi \vec{D}_1 \end{bmatrix}_{[10 \times 1]} \, dA \quad . \quad (6.30)$$

Im Gegensatz zu den mechanischen Anteilen ist in diesem Fall keine anschauliche Interpretation der Komponenten des resultierenden Vektors $\vec{\mathbf{D}}$ bekannt. Er stellt somit eine reine Rechengröße dar.

6.3.4 Virtuelle äußere Arbeit

Die Bestimmung der virtuellen Größen aus Gl. (6.16) bezüglich der Stabformulierung wird mit der Auswertung der externen virtuellen Arbeiten komplettiert. Die mechanischen und die elektrischen Anteile werden hierbei getrennt voneinander behandelt.

Mechanischer Teil

Die mechanischen Anteile der externen virtuellen Arbeit sind mit der schwachen Form des Gleichgewichts nach Gl. (6.16) gegeben. Die entsprechenden Volumenkraft und die auf der Oberfläche wirkenden Kräfte werden in dem Lastvektor $\hat{\mathbf{p}}$ zusammengefasst.

$$G_{ext}^{mech}(\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}) = - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dV - \int_{\partial_t \mathcal{B}_0} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{u} \, dA = - \int_S \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{x}_p \, dS. \quad (6.31)$$

Unter Berücksichtigung der definierten Anforderungen an die Stabformulierung nach Abschnitt 1.3 wird angenommen, dass der Lastangriffspunkt in der Querschnittsebene auf der Bezugsachse liegt. Im Vergleich zu [65] vereinfacht sich damit der Ortsvektor \mathbf{r}_p des Lastangriffspunktes bezüglich der Referenzachse auf den Ausdruck

$$\mathbf{r}_p = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \mathbf{a}_1 \quad (6.32)$$

mit $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_p = \tilde{\boldsymbol{\omega}}(0, 0)$. Der Ortsvektor \mathbf{x}_p des Lastangriffspunktes und dessen Variation $\delta\mathbf{x}_p$ sind durch die Beziehungen

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_p = \mathbf{x}_0 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \mathbf{a}_1 \quad (6.33)$$

$$\delta\mathbf{x}_p = \delta\mathbf{x}_0 + (\delta\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \mathbf{a}_1 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \delta\mathbf{a}_1 \quad (6.34)$$

gegeben. Der mechanische Anteil der externen virtuellen Arbeit aus der Beziehung (6.31) lässt sich damit umformen

$$\int_S \hat{\mathbf{p}} \cdot \delta\mathbf{x}_p \, dS = \int_S \hat{\mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{v} \, dS \quad , \quad (6.35)$$

wobei der Vektor $\hat{\mathbf{q}}$ die Stabbelastung und damit die arbeitskonforme Größe zu den virtuellen Stabkinematiken $\delta\mathbf{v}$ darstellt, und in folgender Weise definiert ist

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{\mathbf{m}} \\ \hat{\mathbf{p}}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ (\mathbf{r}_p \times \hat{\mathbf{p}}) \\ (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{a}_1) \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \end{bmatrix} . \quad (6.36)$$

Elektrischer Teil

In diesem Abschnitt werden die elektrischen Anteile G_{ext}^{elec} der virtuellen äußeren Arbeit behandelt, die sich aus den Volumenladungen $\bar{\rho}_0$ und den Oberflächenladungen $\bar{\sigma}_0$ ergeben

$$G_{ext}^{elec}(\Phi, \delta\Phi) = \int_{\mathcal{B}_0} \bar{\rho}_0 \delta\phi \, dV - \int_{\partial_{\bar{\sigma}} \mathcal{B}_0} \bar{\sigma}_0 \delta\phi \, dA \quad . \quad (6.37)$$

Die Variation des elektrischen Potentials $\delta\phi$ wird mit dem Vektor $\bar{\mathbf{a}}$ in die Form

$$\delta\phi(\xi_{p2}, \xi_{p3}, S) = \bar{\mathbf{a}}(\xi_{p2}, \xi_{p3}) \cdot \delta\Phi(S) \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi_{p2} \\ \xi_{p3} \\ \left(\frac{b_p^2}{4} - \xi_{p2}^2\right) \\ \left(\frac{h_p^2}{4} - \xi_{p3}^2\right) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

überführt, wodurch eine Trennung der elektrischen Freiheitsgrade c_1 bis c_5 von den Koordinaten ξ_2 bzw. ξ_3 erreicht wird. Damit lassen sich die zum virtuellen elektrischen Potentialvektor $\delta\Phi$ arbeitskonformen Größen $\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\rho}}$ und $\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\sigma}}$ formulieren

$$G_{ext}^{elec} = \int_S \delta\Phi^T \left(\underbrace{\int_{h_p b_p} \bar{\rho}_0 \bar{\mathbf{a}} \, d\xi_2 \, d\xi_3}_{\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\rho}}} \right) dS - \int_S \delta\Phi^T \left(\underbrace{\oint_s \bar{\sigma}_0 \bar{\mathbf{a}} \, ds}_{\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\sigma}}} \right) dS \quad , \quad (6.39)$$

die sich aus der Bestimmung der beiden Integrale in Gl. (6.37) ergeben. Der Ausdruck $\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\rho}}$ beinhaltet hierbei das Integral der Volumenladungen über die Querschnittsfläche des Stabes, während die Größe $\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\sigma}}$ das Linienintegral s der Oberflächenladungen $\bar{\sigma}_0$ berücksichtigt.

Zur Verdeutlichung des in Beziehung (6.39) auftretenden Ringintegrals ist in Abbildung 6.3 der rechteckförmige Querschnitt einer piezoelektrischen Materialschicht illustriert. Auf den Oberflächen dieser Schicht wirken die elektrischen Ladungen $\bar{\sigma}_i$, wobei angenommen wird, dass jede Seite des Querschnitts komplett

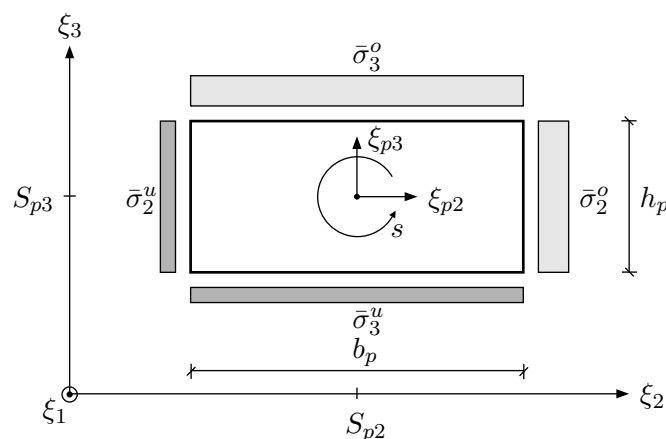


Abb. 6.3: Darstellung der Oberflächenladungen $\bar{\sigma}_i$, die bei der Formulierung des elektrischen Lastvektors zu berücksichtigen sind.

mit einer Elektrode bedeckt ist. Aus der Auswertung des Ringintegrals folgt mit den elektrischen Oberflächenladungen die Belastungsgröße

$$\bar{\mathbf{q}}_{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} (\bar{\sigma}_3^o + \bar{\sigma}_3^u) b_p & + & (\bar{\sigma}_2^o + \bar{\sigma}_2^u) h_p \\ 0 & + & \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_2^o - \bar{\sigma}_2^u) h_p b_p \\ \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_3^o - \bar{\sigma}_3^u) h_p b_p & + & 0 \\ \frac{1}{6}(\bar{\sigma}_3^o + \bar{\sigma}_3^u) b_p^3 & + & 0 \\ 0 & + & \frac{1}{6}(\bar{\sigma}_2^o + \bar{\sigma}_2^u) h_p^3 \end{bmatrix}, \quad (6.40)$$

die in entsprechende Komponente aufgeteilt ist, um sie den jeweiligen Freiheitsgraden c_1 bis c_5 des elektrischen Potentials zuzuordnen. Der elektrische Anteil der virtuellen äußeren Arbeit G_{ext}^{elec} bezüglich der Größe $\delta\Phi$ ist somit in der Form

$$G_{ext}^{elec} = \int_S \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta\Phi \, dS \quad (6.41)$$

gegeben, wobei in dem Vektor $\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}}_{\bar{\rho}} + \bar{\mathbf{q}}_{\bar{\sigma}}$ die Streckenlasten aus den Volumen- und Oberflächenladungen zusammengefasst sind.

6.4 Linearisierung

Die linearisierte Form der virtuellen Arbeit ergibt sich aus der Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts nach Abschnitt 2.5. Aus der Anwendung auf die Stabformulierung folgt daraus

$$\text{Lin}[G(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}, \delta\mathbf{v}, \Phi + \Delta\Phi, \delta\Phi)] = G + [D_v G \cdot \Delta\mathbf{v} + D_\Phi G \Delta\Phi] \quad . \quad (6.42)$$

6.4.1 Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit

Die Linearisierung der virtuellen inneren Arbeiten ergibt sich aus der Beziehung (6.42) entsprechend als

$$\begin{aligned} [D_v G \cdot \Delta\mathbf{v} + D_\Phi G \Delta\Phi]_{int} &= \int_{\mathcal{B}_0} \delta\mathbf{E}_b \cdot \Delta\mathbf{S}_b \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \delta\vec{\mathbf{E}} \cdot \Delta\vec{\mathbf{D}} \, dV \\ &+ \int_{\mathcal{B}_0} \Delta\delta\mathbf{E}_b \cdot \mathbf{S}_b \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \Delta\delta\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \, dV \quad . \end{aligned} \quad (6.43)$$

Sie lässt sich unter Berücksichtigung des nichtlinearen Stoffgesetzes nach Beziehung (3.17) in folgender Weise darstellen

$$\begin{aligned}
[D_v G \cdot \Delta \mathbf{v} + D_\Phi G \Delta \Phi]_{int} &= \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{E}_b \cdot (\tilde{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{E}_b - \tilde{\mathbf{e}} \Delta \vec{\mathbf{E}}) dV \\
&\quad - \int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}} \cdot (\tilde{\mathbf{e}}^T \Delta \mathbf{E}_b + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} \Delta \vec{\mathbf{E}} + \Delta \vec{\mathbf{P}}^i) dV \\
&\quad + \int_{\mathcal{B}_0} \Delta \delta \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{S}_b dV - \int_{\mathcal{B}_0} \Delta \delta \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} dV \quad .
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Zur Auswertung der Integrale in Gl. (6.44) müssen die linearisierten bzw. die linearisierten virtuellen Größen der Verzerrungen und des elektrischen Feldes bestimmt werden.

Linearisierung der Verzerrungen

Die Linearisierung einer Größe entspricht formal der entsprechenden Variation, wobei das Variationssymbol δ durch das Linearisierungssymbol Δ ausgetauscht wird [172]. Wriggers S. 322 Auf diese Weise kann die Linearisierung der Stabverzerrungen $\Delta \hat{\mathbf{E}} = [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \boldsymbol{\kappa}, \Delta \boldsymbol{\alpha}, \Delta \boldsymbol{\alpha}']$ mit den Einträgen

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \mathbf{u}' \\ \mathbf{a}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \quad \Delta \boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}'_1 \cdot \Delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta} \cdot \Delta \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}'_3 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \mathbf{a}'_3 \\ \mathbf{a}'_2 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \mathbf{a}'_2 \end{bmatrix} \tag{6.45}$$

angegeben werden. Entsprechend gilt für die linearisierten Verzerrungsgrößen $\Delta \mathbf{E}_b$ und $\Delta \vec{\mathbf{E}}$ die Transformationsbeziehung

$$\Delta \mathbf{E}_b = \hat{\mathbf{A}} \Delta \vec{\mathbf{E}} \quad . \tag{6.46}$$

Die linearisierten virtuellen Stabverzerrungen $\Delta \delta \hat{\mathbf{E}} = [\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \delta \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$ sind mit den Ausdrücken

$$\begin{aligned}
\Delta \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' \\ \delta \mathbf{a}_2 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \delta \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{a}_2 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_2 \\ \delta \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \delta \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{a}_3 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \\
\Delta \delta \boldsymbol{\kappa} &= \begin{bmatrix} \delta \mathbf{a}'_2 \cdot \Delta \mathbf{a}_3 + \delta \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}_3 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_2 + \mathbf{a}'_2 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}_3 \\ \delta \mathbf{a}'_3 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \delta \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{a}'_3 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_3 \\ \delta \mathbf{a}'_2 \cdot \Delta \mathbf{u}' + \delta \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{a}'_2 + \mathbf{x}'_0 \cdot \Delta \delta \mathbf{a}'_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.47}$$

gegeben. Die Darstellung des Eintrags $\Delta \delta \kappa_1$ folgt aus der virtuellen Größe $\delta \kappa_1$ aus Gl. (6.19) durch die Umformung $\delta \kappa_1 = \delta(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{a}_1) = \delta(\mathbf{a}'_2 \cdot \mathbf{a}_3)$.

Linearisierung des elektrischen Feldes

Die Linearisierung des elektrischen Feldvektors der Stabformulierung lautet

$$\Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}} = \begin{bmatrix} \Delta \Phi \\ \Delta \Phi' \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \Delta \Phi &= [\Delta c_1, \Delta c_2, \Delta c_3, \Delta c_4, \Delta c_5]^T \\ \Delta \Phi' &= [\Delta c'_1, \Delta c'_2, \Delta c'_3, \Delta c'_4, \Delta c'_5]^T \end{aligned} . \quad (6.48)$$

Mit Hilfe der elektrischen Transformationsmatrix $\bar{\mathbf{A}}$ erfolgt die Überführung von $\Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}$ in die Größe $\Delta \vec{\mathbf{E}}$ in bekannter Weise

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{A}} \Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}} . \quad (6.49)$$

Die Linearisierung des virtuellen elektrischen Feldvektors der Stabformulierung ist gleich Null

$$\Delta \delta \vec{\mathbf{E}} = \mathbf{0} . \quad (6.50)$$

Damit vereinfacht sich die Beziehung (6.44), da das Integral $\int_B \Delta \delta \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{D}} \, dV$ nicht weiter berücksichtigt werden muss.

Darstellung der Querschnittsintegrale

Unter Einbeziehung der Transformationsbeziehungen der Verzerrungen nach Gl. (6.21) und (6.46) sowie der elektrischen Feldgrößen nach Gl. (6.24) und (6.49) lässt sich Gl. (6.44) in folgender Form darstellen

$$\begin{aligned} [D_v G \cdot \Delta \mathbf{v} + D_\Phi G \Delta \Phi]_{int} &= \int_{B_0} (\delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{A}} \Delta \hat{\mathbf{E}} - \delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{A}} \Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}) \, dV \\ &\quad - \int_{B_0} (\delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}^T \bar{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{e}}^T \hat{\mathbf{A}} \Delta \hat{\mathbf{E}} + \delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}^T \bar{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{A}} \Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}} + \Delta \vec{\mathbf{P}}^i) \, dV \\ &\quad + \int_{B_0} \Delta \delta \mathbf{E}_b \mathbf{S}_b \, dV . \end{aligned} \quad (6.51)$$

Aus dieser Formulierung kann das Integral über das Volumen des Stabes aufgeteilt werden in eine Integration über den Querschnitt und in eine Integration über die Stablänge dS

$$\begin{aligned} [D_v G \cdot \Delta \mathbf{v} + D_\Phi G \Delta \Phi]_{int} &= \int_S (\delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{D}} \Delta \hat{\mathbf{E}} - \delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{D}} \Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}) \, dS \\ &\quad + \int_S (\delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}^T \hat{\mathbf{D}}^T \Delta \hat{\mathbf{E}} + \delta \vec{\bar{\mathbf{E}}} \bar{\mathbf{D}} \Delta \vec{\bar{\mathbf{E}}}) \, dS \\ &\quad + \int_S \Delta \delta \hat{\mathbf{E}}^T \hat{\mathbf{S}} \, dS . \end{aligned} \quad (6.52)$$

Die in Gl. (6.52) auftretenden Matrizen $\hat{\mathbf{D}}, \hat{\bar{\mathbf{D}}}$ und $\bar{\mathbf{D}}$ entsprechen den Integralen über die Querschnittsfläche dA des Stabes

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{D}} &= \int_A \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{A}} dA \\ \hat{\bar{\mathbf{D}}} &= \int_A \hat{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{e}} \bar{\mathbf{A}} dA \\ \bar{\mathbf{D}} &= \int_A \bar{\mathbf{A}}^T (\tilde{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\epsilon}^{Pol}) \bar{\mathbf{A}} dA \quad .\end{aligned}\tag{6.53}$$

Es ist ersichtlich, dass bei dieser Integration sowohl die Materialeigenschaften als auch die Form des Querschnitts berücksichtigt werden. Die in der Matrix $\hat{\mathbf{D}}$ enthaltenen Einträge können folglich als die bekannten mechanischen Querschnittswerte aus der Stabtheorie identifiziert werden [135].

Die bisher noch nicht definierten Größen $\Delta \vec{\mathbf{P}}^i$ und $\boldsymbol{\epsilon}^{Pol}$ resultieren aus dem nicht-linearen Materialmodell. Die Linearisierung der irreversiblen Polarisation führt auf den Tensor $\boldsymbol{\epsilon}^{Pol}$, der als zusätzlicher Anteil der elektrischen Permittivität berücksichtigt wird. Die Bestimmung von $\boldsymbol{\epsilon}^{Pol}$ wird in Abschnitt 6.5 im Detail behandelt.

6.4.2 Linearisierung der virtuellen äußeren Arbeit

Die linearisierten Anteile der mechanischen und elektrischen virtuellen äußeren Arbeit folgen aus den beiden Beziehungen (6.31) und (6.41)

$$[\mathbf{D}_v G \cdot \Delta \mathbf{v} + \mathbf{D}_\Phi G \Delta \Phi]_{ext} = - \int_S \hat{\mathbf{p}} \cdot \Delta \delta \mathbf{x}_p + \bar{\mathbf{q}} \cdot \Delta \delta \Phi dS \quad ,\tag{6.54}$$

mit den entsprechenden Größen

$$\begin{aligned}\Delta \delta \mathbf{x}_p &= (\delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \Delta \mathbf{a}_1 + (\Delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \delta \mathbf{a}_1 + (\boldsymbol{\alpha} \cdot \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p) \Delta \delta \mathbf{a}_1 \\ \Delta \delta \Phi &= 0\end{aligned}\tag{6.55}$$

Damit sind jetzt alle Größen verfügbar, die für eine numerische Behandlung der dargestellten Formulierung mit der Methode der Finiten Elemente erforderlich sind. Die entsprechende Umsetzung wird in Abschnitt 6.6 erläutert.

6.5 Berücksichtigung des nichtlinearen Stoffgesetzes

Durch das nichtlineare Stoffgesetz nach Gl. (3.17) ist in der linearisierten Form der inneren virtuellen Arbeit nach Gl. (6.44) zusätzlich das Integral

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}}^T \Delta \vec{\mathbf{P}}^i \, dV \quad (6.56)$$

zu berücksichtigen. Da die irreversible Polarisation eine Funktion des elektrischen Feldes ist, führt die Auswertung des Terms $\Delta \vec{\mathbf{P}}^i$ auf die Beziehung

$$\int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}}^T \Delta \vec{\mathbf{P}}^i \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \delta \vec{\mathbf{E}}^T \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}^i}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \Delta \vec{\mathbf{E}} \, dV \quad . \quad (6.57)$$

Die partielle Ableitung der irreversiblen Polarisation $\vec{\mathbf{P}}^i$ nach dem elektrischen Feld ergibt einen Tensor zweiter Stufe, der als der linearisierte Anteil der elektrischen Permittivität interpretiert werden kann

$$\epsilon^{Pol} := \frac{\partial \vec{\mathbf{P}}^i}{\partial \vec{\mathbf{E}}} \quad . \quad (6.58)$$

Im Gegensatz zu [28], worin die irreversible Polarisation in Form eines zusätzlichen Belastungsterms berücksichtigt wird, führt diese Formulierung zu einer nichtlinearen Komponente in der elektrischen Steifigkeitsmatrix. Der Vorteil bei diesem Vorgehen besteht in der einfachen Implementierung im Rahmen der Finite-Element-Formulierung.

Innerhalb der numerischen Berechnung erfolgt die Auswertung der partiellen Ableitungen in Gl. (6.58) vereinfacht mit dem Differenzen-Quotienten bezüglich des letzten Iterationsschritts. Zu Beginn der Berechnung sind entsprechende Startparameter vorzugeben, welche das Material im unbelasteten Zustand definieren.

Durch die Bestimmung der partiellen Ableitung mit dem Differenzen-Quotienten wird zwar keine konsistente Linearisierung der irreversiblen Polarisation erreicht, der Vorteil dieses Verfahrens besteht jedoch seinem geringen numerischen Aufwand und dem guten Konvergenzverhalten, wie in Beispiel 7.2.1 gezeigt wird. Die Bestimmung der entsprechenden Größen innerhalb eines Lastschrittes ist in Tafel 6.1 dargestellt.

Weiterhin sind die aus dem nichtlinearen Materialmodell resultierenden, irreversiblen Verzerrungen zu berücksichtigen. Der für das Stoffgesetz relevante reversible Anteil folgt aus der Beziehung

$$\mathbf{E}_b = \mathbf{E}_b^{ges} - \mathbf{E}_b^i \quad , \quad (6.59)$$

wobei sich die irreversible Größe \mathbf{E}_b^i nach Gl. (4.17) bestimmen lässt.

letzter Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt t , Belastung $\vec{E}(t)$	
Lastinkrement $\Delta \vec{E} \rightarrow \vec{E}^{(t+1)} = \vec{E}^{(t)} + \Delta \vec{E}$	
Start der Iteration: $k = k + 1$	
Preisach-Modell:	$\vec{P}^{i(k)} = \vec{P}^i(\vec{E}^{(t+1)}, M_i, m_i)$ <p style="text-align: right;">mit M_i, m_i als lokale Extremwerte von \vec{E} nach Abschnitt 4.1.1</p>
Materialparameter:	$\tilde{\mathbf{e}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{e}}(\vec{P}^{i(k)})$ $\tilde{\mathbf{C}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{C}}(\vec{P}^{i(k)})$ $\tilde{\epsilon}^{(k)} = \tilde{\epsilon}(\vec{P}^{i(k)})$
Linearisierung	$\epsilon^{Pol(k)} = \partial \vec{P}^{i(k)} / \partial \vec{E}^{(t+1)}$
irreversible Verzerrungen:	$\mathbf{E}_b^{i(k)} = \mathbf{E}_b^i(\vec{P}^{i(k)}) \quad \text{nach Gl. (4.17)}$
Stoffgesetz	$\mathbf{S}_b^{(k)} = \tilde{\mathbf{C}}^{(k)} (\mathbf{E}_b^{ges(k)} - \mathbf{E}_b^{i(k)}) - \tilde{\mathbf{e}}^{(k)} \vec{E}^{(t+1)}$ $\vec{D}^{(k)} = \tilde{\mathbf{e}}^{(k)T} (\mathbf{E}_b^{ges(k)} - \mathbf{E}_b^{i(k)}) + (\tilde{\epsilon} + \epsilon^{Pol(k)}) \vec{E}^{(t+1)}$
Ende Iteration	

Tafel 6.1: Algorithmus zur Berücksichtigung des nichtlinearen Stoffgesetzes.

Die Materialtensoren $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{e}}$ und $\tilde{\epsilon}$ besitzen eine funktionale Abhängigkeit von der irreversiblen Polarisation, die entsprechend zu beachten ist. Hierzu wird die piezoelektrische Matrix nach Gl. (4.18) bezüglich der irreversiblen Polarisation aus dem letzten Gleichgewichtszustand transformiert. Die entsprechenden Umformungen der Elastizitäts- und der Permittivitätsmatrix folgen aus der Beziehung (4.19). Während der Iteration innerhalb eines Lastschrittes ergeben sich damit konstante Werte für $\tilde{\mathbf{C}}$ und $\tilde{\mathbf{e}}$. Aufgrund des Anteils ϵ^P gilt dies nicht für die elektrische Permittivität ϵ .

6.6 Finite-Element-Formulierung

Die zuvor formulierte, schwache Form des Gleichgewichts kann nun mit der Methode der Finiten Elemente näherungsweise gelöst werden. In diesem Abschnitt wird die dafür erforderliche Finite-Element-Approximation behandelt. Für einen vertiefenden Einblick in diese Verfahren sei z.B. auf die Lehrbücher von BATHÉ [15], COOK et al. [39], WRIGGERS [172] oder ZIENKIEWICZ & TAYLOR [179] verwiesen.

Das grundlegende Vorgehen bei der Finite-Element-Methode besteht darin, dass die betrachtete Struktur Ω zunächst in eine endliche Anzahl von $numel$ Teilgebieten Ω_e zerlegt wird

$$\Omega^h = \bigcup_{e=1}^{numel} \Omega_e \quad . \quad (6.60)$$

Die Eigenschaften dieser einzelnen Teilgebiete, die als finite Elemente bezeichnet werden, sind durch Parameter definiert, die von der jeweiligen Elementformulierung abhängen. Der obere Index h kennzeichnet hierbei die approximierten Größen.

Innerhalb eines Elements werden dessen Eigenschaften zwischen den Werten der Elementknoten interpoliert. Hierzu dienen die Interpolationsfunktionen, die auch als Form- oder Ansatzfunktionen bekannt sind. Mit der allgemeinen Darstellung

$$N_I(\xi) = \prod_{i=1}^{k+1} \frac{\xi_i - \xi}{\xi_i - \xi_I} \quad i \neq I, \quad I = 1, \dots, numel \quad (6.61)$$

lässt sich für einen beliebigen Knoten I das entsprechende Lagrangesche Interpolationspolynom $N_I(\xi)$ von k -ter Ordnung erzeugen. Mit der Koordinate ξ wird für jedes Stabelement ein eigenes Koordinatensystem parallel zur Stabkoordinate S definiert, wobei gilt $-1 \leq \xi \leq 1$. In dieser Arbeit wird ein Stabelement mit jeweils zwei Knoten diskretisiert. Die daraus resultierenden, linearen Interpolationsfunktionen $N_1(\xi)$ und $N_2(\xi)$ der beiden Knoten sowie die zugehörigen Ableitungen nach ξ lassen sich aus Gl. (6.61) direkt angeben

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= \frac{1}{2}(1 - \xi) & N_2(\xi) &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\ N_1' &= -\frac{1}{2} & N_2' &= \frac{1}{2} \quad . \end{aligned} \quad (6.62)$$

Unter Berücksichtigung der verwendeten isoparametrischen Elementformulierung werden für die Geometrie und die Freiheitsgrade eines Elements die gleichen Formfunktionen verwendet. Die approximierten Größen der Ortsvektoren \mathbf{X}_0 und

\mathbf{x}_0 , der Skalierungsfaktoren $\boldsymbol{\alpha}$, des elektrischen Potentials und den zugehörigen Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_0^h &= \sum_{I=1}^2 \mathbf{X}_{0I} N_I(\xi) & \mathbf{X}'_0^h &= \sum_{I=1}^2 \mathbf{X}_{0I} N'_I(\xi) \\
\mathbf{x}_0^h &= \sum_{I=1}^2 (\mathbf{X}_{0I} + \mathbf{u}_I) N_I(\xi) & \mathbf{x}'_0^h &= \sum_{I=1}^2 (\mathbf{X}_{0I} + \mathbf{u}_I) N'_I(\xi) \\
\boldsymbol{\alpha}^h &= \sum_{I=1}^2 \boldsymbol{\alpha}_I N_I(\xi) & \boldsymbol{\alpha}'^h &= \sum_{I=1}^2 \boldsymbol{\alpha}_I N'_I(\xi) \\
\Phi^h &= \sum_{I=1}^2 \Phi_I N_I(\xi) & \Phi'^h &= \sum_{I=1}^2 \Phi_I N'_I(\xi) \quad .
\end{aligned} \tag{6.63}$$

Die Basisvektoren \mathbf{A}_m und \mathbf{a}_m werden innerhalb eines Elements in gleicher Weise aus den Knotenwerten interpoliert. Damit behalten die Basissysteme ihre Orthogonalität lediglich an den Knoten, innerhalb eines Elements geht diese Eigenschaft verloren. Nach [65] werden die Berechnungsergebnisse dadurch jedoch nicht beeinträchtigt

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_m^h &= \sum_{I=1}^2 \mathbf{A}_{mI} N_I(\xi) & \mathbf{A}'_m^h &= \sum_{I=1}^2 \mathbf{A}_{mI} N'_I(\xi) \\
\mathbf{a}_m^h &= \sum_{I=1}^2 \mathbf{a}_{mI} N_I(\xi) & \mathbf{a}'_m^h &= \sum_{I=1}^2 \mathbf{a}_{mI} N'_I(\xi) \quad .
\end{aligned} \tag{6.64}$$

Die Basisvektoren \mathbf{A}_{mI} der Referenzkonfiguration können aus der Geometrie des Finite-Element-Netzes bestimmt werden. Zur Ermittlung der Basisvektoren \mathbf{a}_{mI} in der Momentankonfiguration nach Gl. (6.1) muss der Rotationstensor \mathbf{R}_I bekannt sein, der aus der Rodrigues-Formel folgt. Durch drei unabhängige Parameter, die in dem Pseudovektor $\boldsymbol{\omega}$ zusammengefasst sind, lässt sich eine endliche Rotation mit Hilfe der Rodrigues-Formel darstellen

$$\mathbf{R}_I = \mathbf{a}_{mI} \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{1} + \frac{\sin \omega_I}{\omega_I} \boldsymbol{\Omega}_I + \frac{1 - \cos \omega_I}{\omega_I^2} \boldsymbol{\Omega}_I^2 \quad . \tag{6.65}$$

Der Betrag $\omega_I = \|\boldsymbol{\omega}_I\| = \sqrt{\omega_{1I}^2 + \omega_{2I}^2 + \omega_{3I}^2}$ des Pseudovektors $\boldsymbol{\omega}$ entspricht der Größe der Rotation. Für den schiefssymmetrischen Tensor $\boldsymbol{\Omega}_I$ mit dem axialen Vektor $\boldsymbol{\omega}$ gilt die Beziehung $\boldsymbol{\Omega}_I \mathbf{h} = \boldsymbol{\omega}_I \times \mathbf{h}$ für alle Vektoren $\mathbf{h} \in \mathcal{R}^3$

$$\boldsymbol{\Omega}_I = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{3I} & \omega_{2I} \\ \omega_{3I} & 0 & -\omega_{1I} \\ -\omega_{2I} & \omega_{1I} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega}_I = \begin{bmatrix} \omega_{1I} \\ \omega_{2I} \\ \omega_{3I} \end{bmatrix} \quad . \tag{6.66}$$

Für den Update des Rotationstensors existieren verschiedene Strategien. Beim multiplikativen Update folgt der aktuelle Rotationstensor \mathbf{R}^k aus dem Rotationsinkrement $\Delta\mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\omega})$ und dem Rotationstensor \mathbf{R}^{k-1} des letzten Iterationsschritts $\mathbf{R}^k = \Delta\mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}^{k-1}$. Dieses Verfahren ist zwar frei von Singularitäten, erfordert jedoch zusätzlichen Speicherplatz für \mathbf{R}^{k-1} und führt im nicht auskonvergierten Gleichgewichtszustand zu einer geometrischen Steifigkeitsmatrix, die nicht symmetrisch ist.

Beim additiven Update entsprechend den Beziehungen (6.65) und (6.66) ergibt sich \mathbf{R}^k aus dem Rotationstensor des totalen Rotationsvektors $\boldsymbol{\omega}$ bezüglich der Basis der Referenzkonfiguration $\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}) \mathbf{R}_0$. Dieses Verfahren führt zwar zu symmetrischen Elementsteifigkeitsmatrizen, ist jedoch nur im Bereich $0 \leq \omega_I < 2\pi$ frei von Singularitäten.

Basierend auf der Arbeit von SAUER [135] wird hier eine Formulierung verwendet, welche die Vorteile der beiden vorherigen Verfahren vereint. Während der Iteration innerhalb eines Lastschrittes erfolgt hierbei ein additiver Update des Rotationsvektors bezüglich des letzten Gleichgewichtszustands $\boldsymbol{\omega}^k = \boldsymbol{\omega}^{k-1} + \Delta\boldsymbol{\omega}$ mit $\boldsymbol{\omega}^{k=1} = 0$. Der aktuelle Rotationstensor folgt aus einem multiplikativen Update $\mathbf{R}^k = \mathbf{R}(\boldsymbol{\omega}^k) \mathbf{R}_E$, wobei sich der Rotationstensor \mathbf{R}_E auf den letzten Gleichgewichtszustand bezieht. Wenn im letzten Iterationsschritt k_G der neue Gleichgewichtszustand erreicht ist, wird der Tensor \mathbf{R}_E mit der Zuordnung $\mathbf{R}_E = \mathbf{R}^{k_G}$ aktualisiert.

Eine Übersicht der hier diskutierten Vorgehensweisen ist bei MENZEL et al. [116] dargestellt. In der Arbeit von BETSCH et al. [24] erfolgt eine ausführliche Diskussion von additiven und multiplikativen Update-Strategien im Rahmen von numerischen Berechnungsverfahren.

Die Approximation der virtuellen Größen sowie deren Ableitung nach der Koordinate ξ wird für die Verschiebungen, den Skalierungsvektor $\boldsymbol{\alpha}$, die Basisvektoren in der Momentankonfiguration sowie für den elektrischen Potentialvektor durchgeführt

$$\begin{aligned}
\delta\mathbf{u}^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\mathbf{u}_I N_I(\xi) & \delta\mathbf{u}'^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\mathbf{u}_I N'_I(\xi) \\
\delta\boldsymbol{\alpha}^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\boldsymbol{\alpha}_I N_I(\xi) & \delta\boldsymbol{\alpha}'^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\boldsymbol{\alpha}_I N'_I(\xi) \\
\delta\mathbf{a}_m^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\mathbf{a}_{mI} N_I(\xi) & \delta\mathbf{a}_m'^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\mathbf{a}_{mI} N'_I(\xi) \\
\delta\Phi^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\Phi_I N_I(\xi) & \delta\Phi'^h &= \sum_{I=1}^2 \delta\Phi_I N'_I(\xi) \quad .
\end{aligned} \tag{6.67}$$

Die in gleicher Weise erfolgende Approximation des linearisierten, virtuellen Basisvektors $\Delta\delta\mathbf{a}_m$ lautet

$$\Delta\delta\mathbf{a}_m^h = \sum_{I=1}^2 \Delta\delta\mathbf{a}_{mI} N_I(\xi) \quad \Delta\delta\mathbf{a}_m'^h = \sum_{I=1}^2 \Delta\delta\mathbf{a}_{mI} N_I'(\xi) \quad . \quad (6.68)$$

Die Bestimmung der virtuellen Basisvektoren $\delta\mathbf{a}_{mI}$ sowie deren linearisierte Form $\Delta\delta\mathbf{a}_{mI}$ erfordert umfangreiche mathematische Umformungen, von denen im Rahmen dieser Arbeit nur die Ergebnisse dargestellt werden. Die ausführlichen Herleitungen der entsprechenden Beziehungen werden in [65] bzw. [135] behandelt. Für die virtuellen Basisvektoren $\delta\mathbf{a}_{mI}$ kann die Beziehung

$$\delta\mathbf{a}_{mI} = \delta\mathbf{R}_I \mathbf{R}_I^T \mathbf{a}_{mI} = \delta\boldsymbol{\omega}_I \times \mathbf{a}_{mI} = \mathbf{W}_{mI}^T \delta\boldsymbol{\omega}_I \quad (6.69)$$

angegeben werden, womit ebenfalls gilt $\mathbf{W}_{mI} = \text{skew}(\mathbf{a}_{mI})^T$. Der Zusammenhang zwischen den Größen $\delta\boldsymbol{\omega}_I$ und $\delta\boldsymbol{\omega}_I$ ergibt sich durch die Matrix \mathbf{H}_I

$$\delta\boldsymbol{\omega}_I = \mathbf{H}_I \delta\boldsymbol{\omega}_I \quad \text{mit} \quad \mathbf{H}_I = \mathbf{1} + \hat{c}_1 \boldsymbol{\Omega} + \hat{c}_2 \boldsymbol{\Omega}^2 \quad (6.70)$$

und die beiden Konstanten

$$\hat{c}_1 = \frac{1 - \cos \omega_I}{\omega_I^2} \quad \text{und} \quad \hat{c}_2 = \frac{\omega_I - \sin \omega_I}{\omega_I^2} \quad . \quad (6.71)$$

Das Skalarprodukt der linearisierten, virtuellen Basisvektoren $\Delta\delta\mathbf{a}_m$ mit einem beliebigen Vektor $\mathbf{h} \in \mathcal{R}^3$ bzw. der entsprechenden Ableitung $\Delta\delta\mathbf{a}_m'$ kann durch die beiden Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \cdot \Delta\delta\mathbf{a}_m^h &= \sum_{I=1}^2 N_I \delta\boldsymbol{\omega}_I \cdot \mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h}) \Delta\boldsymbol{\omega}_I \\ \mathbf{h} \cdot \Delta\delta\mathbf{a}_m'^h &= \sum_{I=1}^2 N_I' \delta\boldsymbol{\omega}_I \cdot \mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h}) \Delta\boldsymbol{\omega}_I \end{aligned} \quad (6.72)$$

approximiert werden. Für die in Gl. (6.72) auftretende Matrix $\mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h})$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{a}_{mI}, \mathbf{h}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{mI} \otimes \mathbf{h} + \mathbf{h} \otimes \mathbf{a}_{mI}) - (\mathbf{a}_{mI} \cdot \mathbf{h}) \mathbf{1} \\ &\quad - \hat{c}_3 \left[\frac{1}{2}(\mathbf{b}_{mI} \otimes \boldsymbol{\omega}_I + \boldsymbol{\omega}_I \otimes \mathbf{b}_{mI}) - (\mathbf{b}_{mI} \cdot \boldsymbol{\omega}_I) \mathbf{1} \right] \\ &\quad + \hat{c}_4 (\mathbf{b}_{mI} \cdot \boldsymbol{\omega}_I) \boldsymbol{\Omega}_I^2 \end{aligned} \quad (6.73)$$

mit den Konstanten

$$\hat{c}_3 = \frac{2 \cos \omega_I + \omega_I \sin \omega_I - 2}{\omega_I^2 (\cos \omega_I - 1)} \quad \text{und} \quad \hat{c}_4 = \frac{4 \cos \omega_I + \omega_I \sin \omega_I + \omega_I^2 - 4}{2 \omega_I^4 (\cos \omega_I - 1)} \quad . \quad (6.74)$$

Die Approximation der virtuellen Verzerrungen $\delta \hat{\mathbf{E}}^h$ folgt aus den virtuellen Stabkinematiken der Elementknoten $\delta \mathbf{v}_I = [\delta \mathbf{u}_I, \delta \mathbf{w}_I, \delta \boldsymbol{\alpha}_I]^T$ und der $\hat{\mathbf{B}}$ -Matrix

$$\delta \hat{\mathbf{E}}^h = \sum_{I=1}^2 \hat{\mathbf{B}}_I \delta \mathbf{v}_I \quad (6.75)$$

$$\text{mit } \hat{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0^T N'_I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_2^T N'_I & \mathbf{b}_{2I}^T(\mathbf{x}'_0) N'_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_3^T N'_I & \mathbf{b}_{3I}^T(\mathbf{x}'_0) N'_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_{2I}^T(\mathbf{a}_3) N'_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}'_3{}^T N'_I & \mathbf{b}'_3{}^T(\mathbf{x}'_0) N'_I + \mathbf{b}'_3{}^T(\mathbf{x}'_0) N'_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}'_2{}^T N'_I & \mathbf{b}'_2{}^T(\mathbf{x}'_0) N'_I + \mathbf{b}'_2{}^T(\mathbf{x}'_0) N'_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{3 \times 3} N'_I \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{3 \times 3} N'_I \end{bmatrix}_{[12 \times 9]} \quad (6.76)$$

Der Vektor \mathbf{b}_{mI} und dessen Ableitung nach der Stabkoordinate sind in der Form

$$\mathbf{b}_{mI}(\mathbf{h}) = \mathbf{a}_{mI} \times \mathbf{h} \quad \mathbf{b}'_{mI}(\mathbf{h}) = \mathbf{a}'_{mI} \times \mathbf{h} \quad (6.77)$$

definiert. Entsprechend zu Gl. (6.75) kann die Beziehung zwischen dem approximierten virtuellen elektrischen Feld $\bar{\bar{\mathbf{E}}}^h$ und dem virtuellen elektrischen Potentialvektor $\delta \bar{\Phi}_I$ formuliert werden

$$\delta \bar{\bar{\mathbf{E}}}^h = \sum_{I=1}^2 \bar{\mathbf{B}}_I \delta \bar{\Phi}_I \quad \text{mit } \bar{\mathbf{B}}_I = \begin{bmatrix} N_I \mathbf{1}_{5 \times 5} \\ N'_I \mathbf{1}_{5 \times 5} \end{bmatrix}_{[10 \times 5]} \quad (6.78)$$

Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

Durch die Berücksichtigung der Approximationen nach Gl. (6.75) und (6.78), sowie den Transformationen nach Gl. (6.21), (6.24), (6.46) und (6.49) in dem linearisierten Randwertproblem aus Gl. (6.42) folgt die Beziehung

$$\text{Lin}[G(\mathbf{v}^h, \delta \mathbf{v}^h, \boldsymbol{\Phi}^h, \delta \boldsymbol{\Phi}^h)] = \bigcup_{e=1}^{\text{numel}} \sum_{I=1}^2 \sum_{K=1}^2 \delta \mathbf{d}_I^{eT} (\mathbf{f}_I^e + \mathbf{K}_{TIK}^e \Delta \mathbf{d}_K^e) \quad (6.79)$$

In den Vektoren $\delta \mathbf{d}_I^e$ und $\Delta \mathbf{d}_I^e$ sind die virtuellen bzw. die linearisierten Knotenfreiwerte der Stabformulierung auf Elementebene zusammengefasst

$$\delta \mathbf{d}_I^e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_I^e \\ \delta \boldsymbol{\Phi}_I^e \end{bmatrix} \quad \Delta \mathbf{d}_I^e = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_I^e \\ \Delta \boldsymbol{\Phi}_I^e \end{bmatrix} \quad (6.80)$$

Der Knotenlastvektor \mathbf{f}_I^e enthält sowohl die mechanischen als auch die elektrischen Belastungsgrößen $\hat{\mathbf{f}}_I$ bzw. $\bar{\mathbf{f}}_I$ in der Form

$$\mathbf{f}_I^e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_I \\ \bar{\mathbf{f}}_I \end{bmatrix}_{[14 \times 1]} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{f}}_I &= \int_S \hat{\mathbf{B}}_I^T \hat{\mathbf{S}} - N_I \hat{\mathbf{q}} \, dS \\ \bar{\mathbf{f}}_I &= \int_S \bar{\mathbf{B}}_I^T \bar{\mathbf{D}} + N_I \bar{\mathbf{q}} \, dS \end{aligned} \quad (6.81)$$

Die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{TIK}^e kann in vier Teilmatrizen untergliedert werden, die den mechanischen, den gekoppelten und den elektrischen Anteilen der Elementsteifigkeit entsprechen

$$\mathbf{K}_{TIK}^e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{TIK} & -\hat{\mathbf{K}}_{TIK} \\ \hat{\mathbf{K}}_{TIK}^T & \bar{\mathbf{K}}_{TIK} \end{bmatrix}_{[14 \times 14]} \quad (6.82)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die beiden Einträge auf der Nebendiagonalen von \mathbf{K}_{TIK}^e ein unterschiedliches Vorzeichen besitzen, was eine unsymmetrische tangentielle Steifigkeitsmatrix zur Folge hat. Die jeweiligen Teilmatrizen aus Gl. (6.82) ergeben sich aus der Auswertung der Integrale

$$\hat{\mathbf{K}}_{TIK} = \int_S \hat{\mathbf{B}}_I^T \hat{\mathbf{D}} \hat{\mathbf{B}}_K + \hat{\mathbf{G}}_{IK} + \hat{\mathbf{P}}_{IK} \, dS \quad (6.83)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{TIK}^T = \int_S \hat{\mathbf{B}}_I^T \hat{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}_K \, dS \quad (6.84)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{TIK} = \int_S \bar{\mathbf{B}}_I^T \bar{\mathbf{D}} \bar{\mathbf{B}}_K \, dS \quad (6.85)$$

Die Definition der Querschnittsmatrizen $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ und $\bar{\mathbf{D}}$ ist in Gl. (6.53) angegeben. Im Falle einer materiell linearen Berechnung ist es hierbei ausreichend, die Querschnittsintegration nur einmal durchzuführen, und die daraus resultierenden Ergebnisse zu speichern. Besonders bei Problemstellungen, die eine hohe Diskretisierung des Querschnitts erfordern, kann mit diesem Vorgehen die Effizienz der Berechnung maßgeblich gesteigert werden.

Eine weitere Verbesserung der Effizienz kann durch eine selektive Integration der einzelnen Elemente eines Querschnitts erreicht werden. Aufgrund der quadratischen Anteile der Koordinaten ξ_2 und ξ_3 in der Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ treten in dem Ausdruck $\bar{\mathbf{D}}$ Polynome vierter Ordnung auf. Zur exakten numerischen Integration eines Querschnittselements mit piezoelektrischem Material sind somit 3×3 Gaußpunkte erforderlich. Bei rein mechanischen Materialien entspricht die Matrix $\bar{\mathbf{A}}$ einer Nullmatrix. In diesem Fall muss nur der Ausdruck $\hat{\mathbf{D}}$ integriert werden, im dem

höchstens quadratische Polynome auftreten. Somit ist eine Integration mit 2×2 Gaußpunkten ausreichend.

Beim Aufbau der mechanischen Elementsteifigkeitsmatrix nach Gl. (6.83) sind weiterhin die beiden Anteile $\hat{\mathbf{G}}_{IK}$ und $\hat{\mathbf{P}}_{IK}$ zu berücksichtigen, die aus der Linearisierung der virtuellen inneren bzw. äußeren Arbeit resultieren.

Die sogenannte geometrische Matrix $\hat{\mathbf{G}}_{IK}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen den Stabschnittgrößen $\hat{\mathbf{S}}$ und den geometrischen Größen \mathbf{x}'_0 , \mathbf{a}_{mI} und \mathbf{a}'_{mI} . Sie ist definiert als

$$\hat{\mathbf{G}}_{IK} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{IK}^{uu} & \mathbf{G}_{IK}^{uw} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{IK}^{wu} & \mathbf{G}_{IK}^{ww} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{[9 \times 9]}, \quad (6.86)$$

wobei für die Untermatrizen die folgenden Beziehungen gelten

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{IK}^{uu} &= N'_I N'_K \mathbf{1}_{3 \times 3} N^1 \\ \mathbf{G}_{IK}^{uw} &= N'_I N_K \hat{\mathbf{W}}_{qK}^T + N'_I N'_K \hat{\mathbf{W}}_{mK}^T + N'_I N_K \hat{\mathbf{W}}_{mK}'^T \\ \mathbf{G}_{IK}^{wu} &= N_I N'_K \hat{\mathbf{W}}_{qI} + N'_I N'_K \hat{\mathbf{W}}_{mI} + N_I N'_K \hat{\mathbf{W}}_{mI}' \\ \mathbf{G}_{IK}^{ww} &= N'_I N_K \mathbf{M}_{IK}^{23} + N_I N'_K \mathbf{M}_{IK}^{32} + N_I N_K \mathbf{M}'_{IK} + (N_I \mathbf{M}_{qI} + N'_I \mathbf{M}_{mI}) \delta_{IK} . \end{aligned} \quad (6.87)$$

Die darin enthaltenen Ausdrücke lassen sich in der Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}_{qI}^T &= \mathbf{W}_{2I} Q_2 + \mathbf{W}_{3I} Q_3 \\ \hat{\mathbf{W}}_{mI}^T &= \mathbf{W}_{3I} M_2 + \mathbf{W}_{2I} M_3 \\ \hat{\mathbf{W}}_{mI}'^T &= \mathbf{W}'_{3I} M_2 + \mathbf{W}'_{2I} M_3 \\ \mathbf{M}_{IK}^{23} &= \mathbf{W}_{2I} \mathbf{W}_{3K}^T M_1 \\ \mathbf{M}_{IK}^{32} &= \mathbf{W}_{3I} \mathbf{W}_{2K}^T M_1 \\ \mathbf{M}'_{IK} &= (\mathbf{W}'_{2I} \mathbf{W}_{3K}^T + \mathbf{W}_{3I} \mathbf{W}'_{2K}^T) M_1 \\ \mathbf{M}_{qI} &= \mathbf{M}_{2I}(\mathbf{x}'_0) Q_2 + \mathbf{M}_{3I}(\mathbf{x}'_0) Q_3 + \mathbf{M}_{3I}(\mathbf{a}'_2) M_1 \\ \mathbf{M}_{mI} &= \mathbf{M}_{2I}(\mathbf{a}_3) M_1 + \mathbf{M}_{3I}(\mathbf{x}'_0) M_2 + \mathbf{M}_{2I}(\mathbf{x}'_0) M_3 \end{aligned} \quad (6.88)$$

angeben, mit den abkürzenden Schreibweisen

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{iI} &= \text{skew}(\mathbf{a}_{iI})^T \\ \mathbf{W}'_{iI} &= \text{skew}(\mathbf{a}'_{iI})^T \\ \mathbf{M}_{iI}(\mathbf{h}) &= \mathbf{M}(\mathbf{a}_{iI}, \mathbf{h}) . \end{aligned} \quad (6.89)$$

Die Linearisierung des Lastvektors führt auf den Anteil $\hat{\mathbf{P}}_{IK}$, der bei der mechanischen Elementsteifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_{TIK}$ berücksichtigt werden muss. Aufgrund der Annahme, dass der Angriffspunkt einer äußeren Belastung keinen Hebelarm bezüglich der Stabachse besitzt, treten in der Matrix \mathbf{P}_{IK}^e nur noch die Anteile infolge der Verwölbung des Querschnitts auf

$$\hat{\mathbf{P}}_{IK} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_{IK}^{w\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{IK}^{\alpha w} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{[9 \times 9]}, \quad (6.90)$$

wobei für die Untermatrizen gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{IK}^{w\alpha} &= -N_I N_K \mathbf{W}_{1I} \hat{\mathbf{p}} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p^T \\ \mathbf{P}_{IK}^{\alpha w} &= -N_I N_K \tilde{\boldsymbol{\omega}}_p \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{W}_{1K}^T \end{aligned} \quad (6.91)$$

Für den Fall, dass die Verwölbung der Schwerpunktkoordinate des Querschnitts gleich Null ist $\tilde{\boldsymbol{\omega}}(0,0) = \mathbf{0}$, entfällt der komplette Anteil \mathbf{P}_{IK} .

Die Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen über die Stablänge S nach Gl. (6.83) - (6.85) erfordert im Rahmen einer elektromechanisch gekoppelten Formulierung eine detaillierte Betrachtung. Bei rein mechanischen Stabformulierungen wird hierfür häufig eine reduzierte Integration angewendet. Dieses Vorgehen hat die beiden Vorteile, dass es einen geringeren numerischen Aufwand erfordert, und dass damit eine Versteifung der Struktur infolge von *shear-locking*-Effekten vermieden werden kann.

Bei einer Finite-Element-Approximation mit zwei Knoten pro Stabelement werden die Integrale über die Stablänge bei einer reduzierten Integration nur noch an einer Stützstelle in der Elementmitte ausgewertet. Mit diesem Verfahren ist es jedoch nicht mehr möglich, den elektrischen Anteil der Elementsteifigkeitsmatrix exakt zu integrieren, was zu ungenauen Berechnungsergebnissen führt.

Aus diesem Grund wird bei der numerischen Integration die tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix aufgeteilt, und die Anteile $\hat{\mathbf{K}}_{TIK}$ und $\hat{\bar{\mathbf{K}}}_{TIK}$ mit einem, und der Anteil $\bar{\mathbf{K}}_{TIK}$ mit zwei Gaußpunkten in Stablängsrichtung integriert.

Durch die Einführung des axialen Vektors $\boldsymbol{\omega}$ zur Beschreibung der unabhängigen Rotationsparameter ist eine weitere Transformation der mechanischen Größen erforderlich, mit welcher die unbekannt Knotendrehwinkel \mathbf{w} durch $\boldsymbol{\omega}$ ersetzt werden

$$\begin{aligned} \text{Lin}[G(\mathbf{v}^{*h}, \delta \mathbf{v}^{*h}, \boldsymbol{\Phi}^h, \delta \boldsymbol{\Phi}^h)] = \\ \bigcup_{e=1}^{numel} \sum_{I=1}^2 \sum_{K=1}^2 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{v}_I^* \\ \delta \boldsymbol{\Phi}_I \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{f}}_I^* \\ \hat{\mathbf{f}}_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{TIK}^* & -\hat{\bar{\mathbf{K}}}_{TIK}^* \\ \hat{\bar{\mathbf{K}}}_{TIK}^* & \bar{\mathbf{K}}_{TIK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{v}_K^* \\ \Delta \boldsymbol{\Phi}_K \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (6.92)$$

Die transformierten Größen folgen aus den Beziehungen

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{K}}_{TIK}^* &= \mathbf{T}_I^T \hat{\mathbf{K}}_{TIK} \mathbf{T}_K & \hat{\mathbf{f}}_I^* &= \mathbf{T}_I^T \mathbf{f}_I \\ \hat{\hat{\mathbf{K}}}_{TIK}^* &= \mathbf{T}_I^T \hat{\hat{\mathbf{K}}}_{TIK} & \delta \mathbf{v}_I^* &= [\delta \mathbf{u}_I, \delta \boldsymbol{\omega}_I, \delta \boldsymbol{\alpha}_I]^T \\ \hat{\hat{\mathbf{K}}}_{TIK}^{*T} &= \hat{\hat{\mathbf{K}}}_{TIK}^T \mathbf{T}_K & \Delta \mathbf{v}_K^* &= [\Delta \mathbf{u}_K, \Delta \boldsymbol{\omega}_K, \Delta \boldsymbol{\alpha}_K]^T\end{aligned}\quad (6.93)$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_I = \text{diag}[\mathbf{1}, \mathbf{H}_I, \mathbf{1}] \quad , \quad (6.94)$$

wobei die Matrix \mathbf{H}_I bereits in Gl. (6.70) angegeben ist. In den Arbeiten [65, 135] wird als Alternative die Möglichkeit diskutiert, die inkrementellen Knotendrehwinkel $\Delta \boldsymbol{\omega}$ als unbekannte Freiheitsgrade zu verwenden. Bei dieser Vorgehensweise entfällt die Transformation nach Gl. (6.92), allerdings ist in diesem Fall zusätzlicher Speicherplatz erforderlich.

6.7 Berücksichtigung von dynamischen Problemen

Bei dynamischen Problemstellungen ist die Volumenkraft \mathbf{b} um die zeitabhängigen Anteile in der Form

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 - d_0 \dot{\mathbf{u}} - \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \quad (6.95)$$

zu erweitern. Hierbei beschreiben die Vektoren $\dot{\mathbf{u}}$ und $\ddot{\mathbf{u}}$ die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung eines Punktes \mathbf{x} . Die Größe d_0 entspricht der Dämpfungskonstanten. Die schwache Form des Gleichgewichts lässt sich unter Berücksichtigung dieser zusätzlichen Anteile in der folgenden Weise darstellen

$$G^{dyn} = G + \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{u}^T d_0 \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{u}^T \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \, dV \quad , \quad (6.96)$$

wobei der Ausdruck G bereits in Gl. (6.16) definiert ist. Die Transformationsbeziehung zwischen den virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ und den virtuellen Stabkinematomen folgt mit

$$\delta \mathbf{u} = \hat{\mathbf{a}} \delta \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{a}} = [\mathbf{1}_{[3 \times 3]}, \text{skew } \mathbf{d}, \mathbf{e}_1 \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T]_{[3 \times 9]} \quad . \quad (6.97)$$

Entsprechend gelten für die zeitlichen Ableitungen des Vektors \mathbf{u} die Beziehungen

$$\dot{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{v}} \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{a}} \ddot{\mathbf{v}} \quad . \quad (6.98)$$

Mit diesen Transformationen kann die schwache Form des Gleichgewichts aus Gl. (6.96) umgeformt werden

$$G^{dyn} = G + \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{a}}^T d_0 \hat{\mathbf{a}} \dot{\mathbf{v}} \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \delta \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{a}}^T \rho_0 \hat{\mathbf{a}} \ddot{\mathbf{v}} \, dV \quad . \quad (6.99)$$

Unter Berücksichtigung der Finite-Element-Approximationen nach der Beziehung (6.67) lässt sich nun die Dämpfungsmatrix \mathbf{D}^e bzw. die Massenmatrix \mathbf{M}^e eines Stabelements definieren

$$\mathbf{D}_{IK}^e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{D}}_{IK} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M}_{IK}^e = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{IK} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (6.100)$$

wobei für die beiden Untermatrizen gilt

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}_{IK} &= \int_S N_I \iint_A \hat{\mathbf{a}}^T d_0 \mathbf{a} \, dA \, N_K \, dS \\ \hat{\mathbf{M}}_{IK} &= \int_S N_I \iint_A \hat{\mathbf{a}}^T \rho_0 \mathbf{a} \, dA \, N_K \, dS \quad . \end{aligned} \quad (6.101)$$

Die Matrizen \mathbf{D}_{IK}^e und \mathbf{M}_{IK}^e sind damit ausschließlich mit den mechanischen Freiheitsgraden gekoppelt. Die in der Stabformulierung auftretenden Rotationsfreiheitsgrade werden durch die Approximationen nach Gl. (6.98) in den Matrizen \mathbf{D}_{IK}^e und \mathbf{M}_{IK}^e berücksichtigt. Nach dem Zusammenbau über alle Elemente

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{f}^e & \mathbf{D} &= \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{D}^e & \mathbf{M} &= \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{M}^e \\ \dot{\mathbf{d}} &= \bigcup_{e=1}^{numel} \dot{\mathbf{d}}^e & \ddot{\mathbf{d}} &= \bigcup_{e=1}^{numel} \ddot{\mathbf{d}}^e \end{aligned} \quad (6.102)$$

kann der Residuumsvektor \mathbf{R} in folgender Weise definiert werden

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad . \quad (6.103)$$

Dabei enthalten die Elementvektoren $\dot{\mathbf{d}}^e = [\dot{\mathbf{v}}, \mathbf{0}]^T$ und $\ddot{\mathbf{d}}^e = [\ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{0}]^T$ die Zeitableitungen der mechanischen Freiheitsgrade. Die Zeitableitungen der elektrischen Freiheitsgrade werden gleich Null angenommen.

Die Zeitintegration erfolgt mit dem *Newmark*-Verfahren [15, 172], wobei die Standardparameter $\beta = 0.25$ und $\gamma = 0.5$ verwendet werden. Eine detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens unter Berücksichtigung einer elektromechanisch gekoppelten Formulierung ist der Arbeit von SIMKOVICS [142] zu entnehmen.

Mit der Berücksichtigung von dynamischen Problemstellungen ist die Finite-Element-Approximation vollständig. Die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Stabformulierung wird in dem folgenden Kapitel anhand von verschiedenen Beispielen demonstriert.

7 Numerische Beispiele

In diesem Kapitel wird die Leistungsfähigkeit der entwickelten Elementformulierung anhand von unterschiedlichen numerischen Beispielen untersucht. Zu diesem Zweck wurde die Elementformulierung in eine modifizierte Version der Finite-Element-Software *FEAP* [156] implementiert.

Zunächst erfolgt die Durchführung einiger Elementtests, um auf diese Weise bestimmte Eigenschaften der Stabformulierung gezielt zu betrachten. Hierzu gehören der quadratische Ansatz des elektrischen Potentials, der Einfluss, der aus der Kondensation des Stoffgesetzes resultiert, sowie die Berücksichtigung der elektrischen Oberflächenladungen als Belastungsgrößen. Das nichtlineare Materialmodell wird anhand zweier Beispiele verifiziert, wobei unter anderem die beliebige Orientierung der irreversiblen Polarisierung und geschichtsabhängige Belastungen diskutiert werden. In einem weiteren Beispiel erfolgt der Vergleich mit numerischen Ergebnissen aus der Literatur, um auf diese Weise die Leistungsfähigkeit des entwickelten Elements im Vergleich zu anderen Balkenformulierungen einzuordnen. Der Einfluss der piezoelektrisch induzierten Schubverwölbung auf die Ergebnisse der numerischen Berechnung wird bei der Untersuchung zweier Shear-Mode-Aktoren deutlich. Weitere Beispiele illustrieren die Leistungsfähigkeit der Elementformulierung bei der Modellierung von dreidimensionalen Strukturen und bei der Behandlung von geometrisch nichtlinearen und dynamischen Problemstellungen.

Bei den numerischen Beispielen werden in Abhängigkeit vom betrachteten Problem nicht immer alle 14 Knotenfreiheitsgrade bei der Berechnung berücksichtigt. Im Sinne einer kurzen und eindeutigen Bezeichnung sind in Tabelle 7.1 die entsprechenden Abkürzungen zur Charakterisierung der Element-Eigenschaften angegeben, die sich aus dem Blockieren bestimmter Freiheitsgrade ergeben.

So sagt z.B. die Bezeichnung *Stab-W0E5* aus, dass alle Verwölbungsfreiheits-

Querschnittsverwölbung	W0: wird nicht berücksichtigt W1: infolge Torsion W_Q3 : infolge Torsion und Querkraft W_P3 : infolge Torsion und piezoelektrischer Schubdeformation
Approximation des elektrischen Potentials	E0 wird nicht berücksichtigt E3 linearer Potentialansatz E5 quadratischer Potentialansatz

Tab. 7.1: Definierte Abkürzungen zur Charakterisierung der Element-Eigenschaften.

grade gehalten sind, und ein quadratischer Ansatz des elektrischen Potentials berücksichtigt wird. Die Angabe *Stab-W0E0* bezeichnet eine rein mechanische Formulierung mit einer Kinematik entsprechend der Timoshenko-Stabtheorie.

Zur besseren Veranschaulichung der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung ist der deformierte Stab in einigen Beispielen als dreidimensionale Struktur dargestellt. Diese resultiert aus einer Nachlaufrechnung, in der aus dem Stabelement und der Geometrie des Querschnitts ein dreidimensionaler Körper generiert wird.

7.1 Einfache Elementtests

7.1.1 Piezoelektrischer Biegestab

In diesem Beispiel werden die beiden folgenden, grundlegenden Eigenschaften der Stabformulierung untersucht:

- Quadratischer Ansatz des elektrischen Potentials.
- Berücksichtigung der Querdehnung bei der elektromechanischen Kopplung durch die Kondensation des Stoffgesetzes.

Zu diesem Zweck wird das in Abbildung 7.1 dargestellte System betrachtet. Es besteht aus einem piezoelektrischen Stab, der an beiden Enden gelenkig gelagert ist, und mit zwei Endmomenten M belastet wird. Das piezoelektrische Material ist in ξ_3 -Richtung gepolt.

Bei der vorgegebenen Belastung treten in dem Stab lediglich die Verzerrungen E_{11} und ein elektrisches Feld \vec{E}_3 auf. Beide Größen sind in Richtung der Stabachse

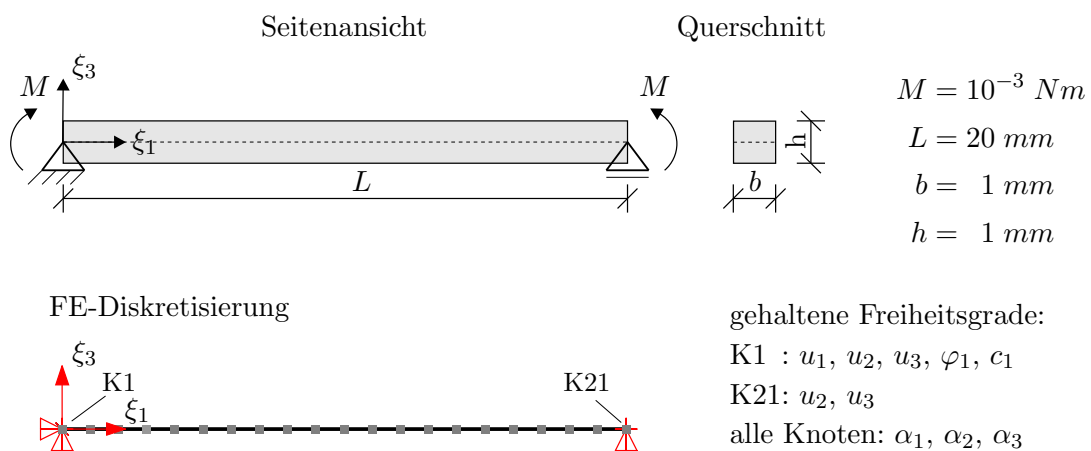


Abb. 7.1: Geometrie, Belastung und Finite-Element-Diskretisierung des Systems.

konstant. Aus diesem Grund ist dieses System sehr gut zur gezielten Untersuchung bestimmter Eigenschaften der entwickelten Elementformulierung geeignet.

Quadratischer Potentialansatz

Die Bedeutung von Termen höherer Ordnung zur korrekten Abbildung des elektrischen Potentials wurde bereits in Abschnitt 6.2 diskutiert. Dieses Beispiel soll diesen Einfluss verdeutlichen, und zeigen, dass das elektrische Potential bei einem reinen Biegezustand mit der entwickelten Stabformulierung korrekt bestimmt wird.

Für das in Abbildung 7.1 dargestellte System wird von WANG & QUEK [169] eine analytische Lösung angegeben. Hierzu erfolgt die Vereinfachung auf eine zweidimensionale Betrachtung. Für diesen Fall kann das elektrische Potential mit der Beziehung

$$\phi(\xi_1, \bar{\xi}_3) = \frac{e_{31} \varepsilon_{Rand}}{\epsilon_{33}} \left(\frac{\bar{\xi}_3^2}{h} - \bar{\xi}_3 \right) \quad (7.1)$$

beschrieben werden, wobei ε_{Rand} die Dehnung der Randfaser des Stabes bezeichnet. Im Gegensatz zu Abbildung 7.1 ist die Koordinate $\bar{\xi}_3$ in Gl. (7.1) bezüglich der Unterkante des Querschnitts definiert. Weiterhin ist zu beachten, dass der Einfluss der Querdehnung hierbei nicht berücksichtigt wird.

Um diese Vereinfachungen des analytischen Modells in der numerischen Berechnung entsprechend zu erfassen, wird in diesem Fall keine Kondensation des dreidimensionalen Stoffgesetzes nach Gl. (3.22) durchgeführt. Stattdessen werden die folgenden, in [169] angegebenen Werkstoffkonstanten verwendet: Elastizitätsmodul $E = 78.5 \text{ GPa}$, piezoelektrischer Koppelmodul $e_{13} = -4.1 \text{ C/m}^2$ und elektrische Permittivität $\epsilon_{33} = 5.84 \cdot 10^{-9} \text{ F/m}$.

Die Diskretisierung des Systems sowie die entsprechenden Randbedingungen sind in Abbildung 7.1 dargestellt. Aus der numerischen Berechnung resultiert eine Durchbiegung des Stabes in Feldmitte von $u_3(\frac{\xi_1}{L} = 0.5) = 7.371 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen des Systems folgt die Dehnung der Randfaser $\varepsilon_{Rand}(\xi_3 = \frac{h}{2}) = 7.371 \cdot 10^{-5}$, die bei der vorliegenden Belastung in Stablängsrichtung konstant ist. Mit den angegebenen Materialkonstanten kann nun die Beziehung (7.1) ausgewertet werden. Die sich daraus ergebenden Werte für das elektrische Potential in ξ_3 -Richtung sind in Abbildung 7.2 aufgetragen. Die Ergebnisse aus der numerischen Berechnung stimmen mit der analytischen Lösung sehr gut überein, der quadratische Verlauf des elektrischen Potentials ist deutlich erkennbar.

Wird in der numerischen Berechnung dagegen nur ein linearer Ansatz des elektrischen Potentials über die Querschnittshöhe berücksichtigt, so ergeben sich deutliche Abweichungen zu den vorherigen Ergebnissen. Mit einem linearen Ansatz des

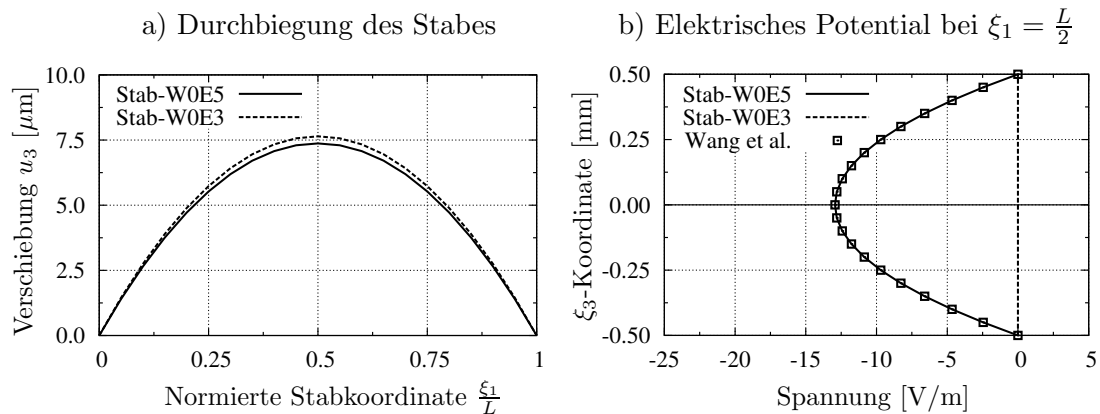


Abb. 7.2: Vergleich der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung mit linearem bzw. quadratischem Potentialansatz ohne Berücksichtigung der Querdehnung. Darstellung der Verschiebung u_3 über die Stablänge und Verlauf des elektrischen Potentials in ξ_3 -Richtung an der Stelle $\xi_1 = \frac{L}{2}$.

Potentials kann sich kein Normalspannungszustand S_{11} einstellen, der im Gleichgewicht zur äußeren Belastung steht, siehe Abschnitt 6.2. Daraus resultiert ein elektrisches Potential der Größe Null, wie auch aus Abbildung 7.2b zu entnehmen ist. Dies führt zu einer Erhöhung des Anteils der inneren mechanischen Arbeit, was eine größere Verschiebung u_3 zur Folge hat. Die Abweichung der Verschiebung u_3 in der Stabmitte bezüglich der Berechnung mit einem quadratischen Potentialansatz beträgt in diesem Fall 3.7 %. Durch die Berücksichtigung des kondensierten Stoffgesetzes ergeben sich jedoch deutlich größerer Abweichungen, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird.

Berücksichtigung des kondensierten Stoffgesetzes

Durch die Kondensation des dreidimensionalen Stoffgesetzes wird die Querdehnung des Materials in der Stabformulierung berücksichtigt, die nach Gl. (3.22) auch die elektromechanische Kopplung beeinflusst. Der Unterschied, der sich im Vergleich zu der vorangegangenen numerischen Berechnungen ohne Querdehnung ergibt, wird in diesem Abschnitt diskutiert.

Es wird wieder das System aus Abbildung 7.1 betrachtet, als Material wird eine PZT-4-Keramik nach Anhang A.2 verwendet. In Abbildung 7.3 ist die Verschiebung des Stabes in ξ_3 -Richtung sowie der Verlauf des elektrischen Potentials über die Stabhöhe dargestellt. Daraus wird deutlich, dass die Verschiebung u_3 bei Berücksichtigung der Querdehnung ν abnimmt. Obwohl in diesem Fall die Verzerrungen E_{11} kleiner sind, nimmt das elektrische Potential zu. Diese Steigerung kann damit erklärt werden, dass durch die Kondensation des Stoffgesetzes

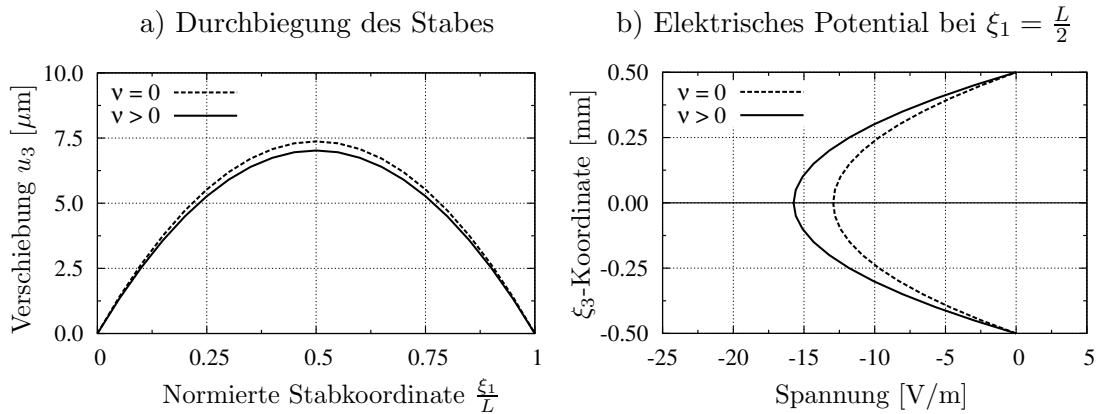


Abb. 7.3: Vergleich der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung (Stab-W0E5) mit bzw. ohne Berücksichtigung der Querdehnung bei quadratischem Potentialansatz. Darstellung der Verschiebung u_3 über die Stablänge und Verlauf des elektrischen Potentials in ξ_3 -Richtung an der Stelle $\xi_1 = \frac{L}{2}$.

der hier maßgebliche Koppelfaktor \tilde{e}_{13} größer ist als der nicht kondensierte Wert e_{13} . Anschaulich wird somit berücksichtigt, dass eine mechanische Spannung S_{11} eine Dehnung E_{33} hervorruft, die über den Koeffizienten e_{33} einen zusätzlichen Beitrag zu dem elektrischen Feld in ξ_3 -Richtung leistet.

Abschließend ist in Abbildung 7.4 der Einfluss des quadratischen Potentialansatzes bei Berücksichtigung des kondensierten Stoffgesetzes dargestellt. In diesem Fall ist der Unterschied zwischen der maximalen Durchbiegung deutlich größer

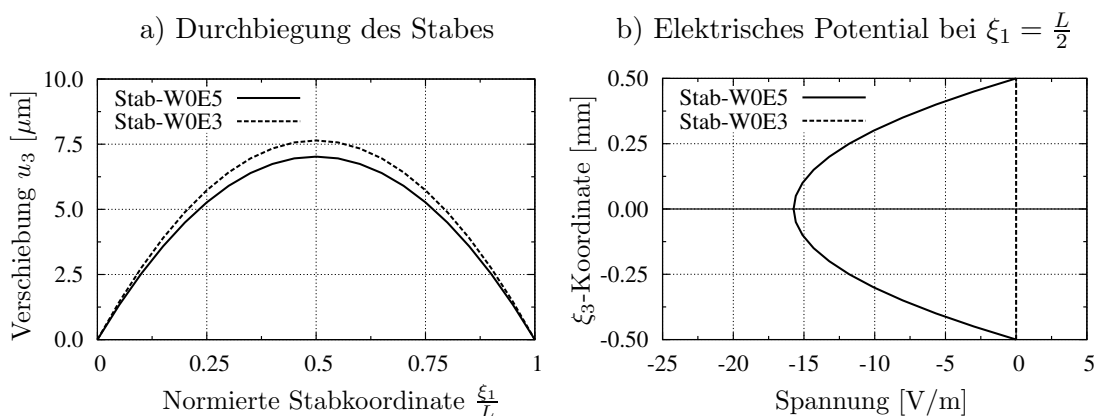


Abb. 7.4: Vergleich der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung mit linearem bzw. quadratischem Potentialansatz bei Berücksichtigung des kondensierten Stoffgesetzes. Darstellung der Verschiebung u_3 über die Stablänge und Verlauf des elektrischen Potentials in ξ_3 -Richtung an der Stelle $\xi_1 = \frac{L}{2}$.

als in Abbildung 7.2. Die Abweichung beträgt hier 8.8 %. Der Grund hierfür besteht darin, dass die innere elektrische Arbeit einen größeren Anteil an der gesamten inneren Arbeit besitzt, und damit entsprechend weniger Arbeit für die Deformation des Stabes zu Verfügung steht.

Die Betrachtungen an diesem einfachen System zeigen deutlich, dass im Falle eines piezoelektrischen Vollquerschnitts sowohl die Querdehnung als auch der quadratische Ansatz des elektrischen Potentials einen nicht zu unterschätzenden Einfluss auf die Berechnungsergebnisse besitzen, und dass beide Einflüsse mit der vorgestellten Stabformulierung entsprechend berücksichtigt werden können.

Bei der Untersuchung von geschichteten Strukturen mit vergleichsweise dünnen piezoelektrischen Materialschichten treten die beschriebenen Effekte allerdings weniger stark in Erscheinung.

7.1.2 Belastung durch elektrische Oberflächenladungen

Zur Erfassung von Oberflächenladungen ist es erforderlich, die auf der Berandung des Stabes wirkende Belastung auf die Elementknoten zu projizieren. Die zu diesem Zweck entwickelte Vorgehensweise wird in Kapitel 6.3.4 erläutert. Anhand der beiden Beispiele in diesem Abschnitt wird untersucht, ob die Stabformulierung diese Belastung korrekt abbilden kann.

Elektrische Oberflächenladung an der Stirnseite eines Stabes

Zunächst wird eine Oberflächenladung $\bar{\sigma}$ an der Stirnseite eines Stabes aufgebracht. Die Geometrie und Belastung des untersuchten Systems sind aus der Abbildung 7.5 zu entnehmen. Der Stab besteht aus einer in ξ_1 -Richtung gepolten

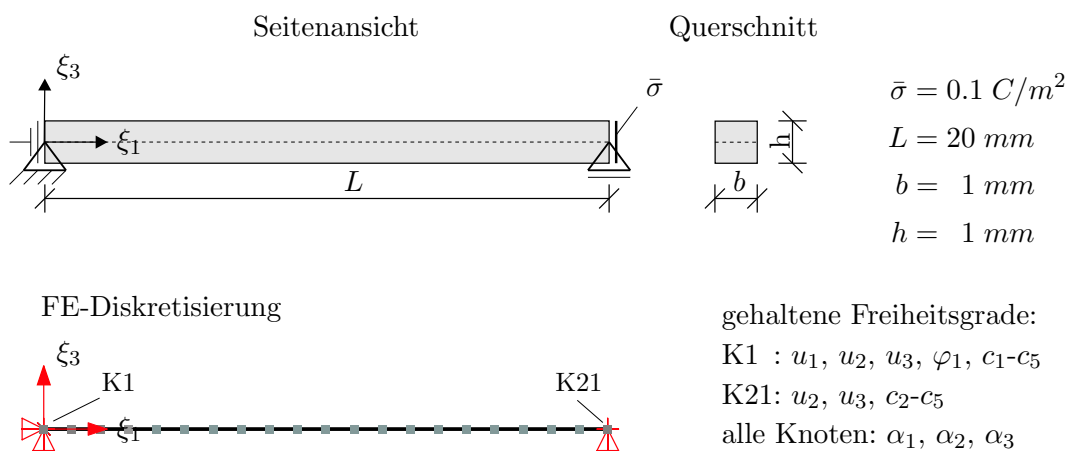


Abb. 7.5: Geometrie, Belastung und Finite-Element-Diskretisierung des Systems.

PZT-4 Keramik. Die entsprechenden Materialparameter sind im Anhang A.2 angegeben. Die Oberflächenladung beträgt 0.1 C/m^2 . Unter Berücksichtigung der Querschnittsfläche des Stab von $1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$ ergibt sich der elektrische Lastvektor des Knotens 21 zu $\bar{\mathbf{f}}_{21} = [1 \cdot 10^{-7}, 0, 0, 0, 0]^T$.

Infolge der Belastung stellt sich ein lineares elektrisches Feld in Richtung der Stabachse ein, das innerhalb der Querschnittsebene einen konstanten Wert besitzt. Da das elektrische Feld parallel zur Polarisationsrichtung der piezoelektrischen Keramik wirkt, ist eine Dehnung des Stabes in ξ_1 -Richtung zu erwarten.

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung sind in Abbildung 7.6 dargestellt. Sowohl die Verschiebungen, als auch das elektrische Potential besitzen erwartungsgemäß einen linearen Verlauf in Richtung der Stabachse und jeweils konstante Werte in der Querschnittsebene. Die maximale Werte beider Größen treten an der Stelle $\xi_1 = L$ auf und betragen $u_1 = -4.911 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ bzw. $\phi = 2.175 \cdot 10^5 \text{ V}$.

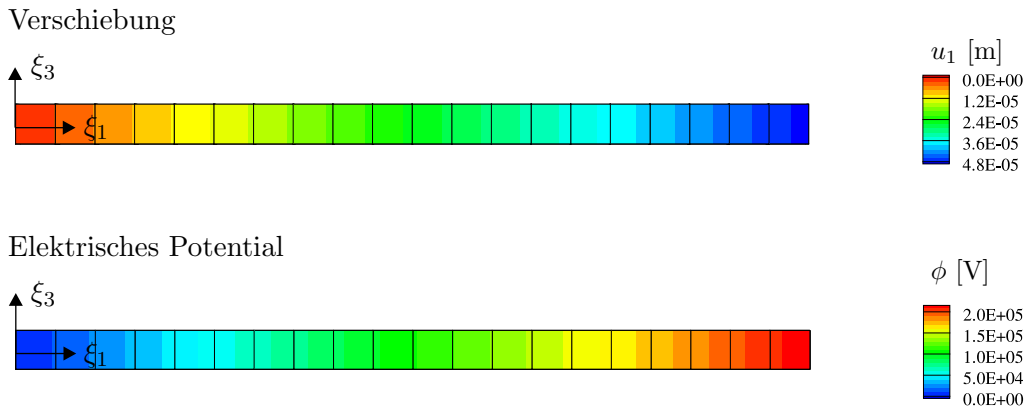


Abb. 7.6: Verschiebung u_1 und elektrisches Potential infolge der gegebenen Belastung.

Elektrische Oberflächenladung parallel zur Stabachse

In diesem Fall wird eine Oberflächenladung $\bar{\sigma} = 0.01 \text{ C/m}^2$ entsprechend Abbildung 7.7 parallel zur Stabachse an den Rändern $\xi_3 = h/2$ und $\xi_3 = -h/2$ aufgebracht. Hierbei ist zu beachten, dass nur der Bereich zwischen $0.25 L < \xi_1 < 0.75 L$ belastet wird. Unter Berücksichtigung von Gl. (6.41) ergeben sich für die Knotenlasten infolge der Oberflächenladung die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \text{K6 und K16 :} \quad & \bar{\mathbf{f}}_I = [0, 0, 0.5 \cdot 10^{-11}, 0, 0]^T \\ \text{K7 bis K15 :} \quad & \bar{\mathbf{f}}_I = [0, 0, 1.0 \cdot 10^{-11}, 0, 0]^T \quad . \end{aligned}$$

Die hier verwendete PZT-4 Keramik ist in ξ_3 -Richtung gepolt und entspricht dem Material aus Beispiel 7.1.1.

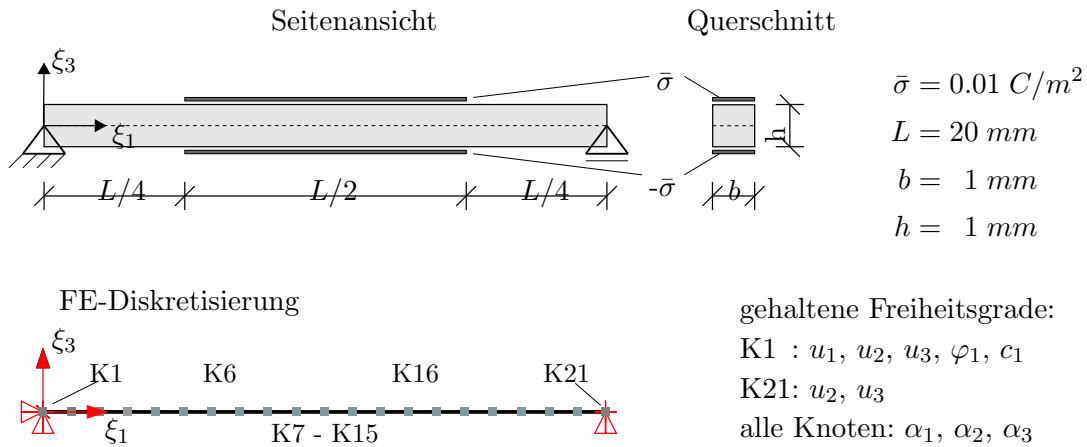


Abb. 7.7: Geometrie, Belastung und Finite-Element-Diskretisierung des Systems.

Die aufgebrachte Belastung hat eine Potentialdifferenz zwischen der Ober- und der Unterseite des Stabes zur Folge, aus der ein elektrisches Feld in ξ_3 -Richtung resultiert. Aufgrund der Polarisationsrichtung der Keramik ergibt sich daraus eine Verschiebung des Stabes in ξ_1 -Richtung.

In Abbildung 7.8 sind die aus der numerischen Berechnung folgenden Verschiebungen u_1 sowie das elektrische Potential ϕ dargestellt. Der belastete Abschnitt des Stabes ist durch den Verlauf des elektrischen Potentials deutlich zu erkennen. In der Mitte des Stabes besitzt das daraus resultierende elektrische Feld \vec{E}_3 einen Wert von $1.516 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Die maximale Verschiebung u_1 tritt an der Stelle $\xi_1 = L$ auf und beträgt $1.478 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

Aus diesen beiden Beispielen wird deutlich, dass mit der entwickelten Stabformulierung eine Belastung infolge von elektrischen Oberflächenladungen modelliert werden kann.

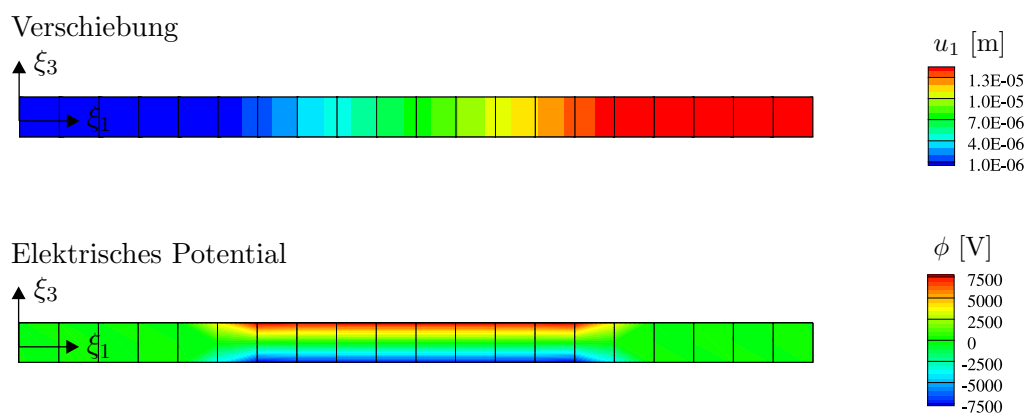


Abb. 7.8: Verschiebung u_1 und elektrisches Potential infolge der gegebenen Belastung.

7.1.3 Kragarm mit Endmoment

In diesem Beispiel wird untersucht, ob mit der entwickelten Stabformulierung die elektrischen Feldgrößen auch bei großen Rotationen korrekt abgebildet werden. Hierzu wird ein Kragarm betrachtet, der mit einem Endmoment belastet ist. Die Behandlung dieses Problems unter rein mechanischen Gesichtspunkten ist in der Literatur in mehreren Arbeiten zu finden, siehe z.B. IBRAHIMBEGOVIĆ [75] oder SIMO & VU-QUOC [144]. In der folgenden Berechnung werden zusätzlich die elektrischen Feldgrößen berücksichtigt, die aufgrund einer zweiten, piezoelektrischen Materialschicht auftreten.

Die Geometrie des Systems sowie die Belastung sind in Abbildung 7.9 dargestellt. Der Kragarm besteht aus einem Aluminium-Trägermaterial mit einem Elastizitätsmodul von $E = 70.3 \text{ GPa}$ und einer Querdehnung $\nu = 0.345$. Die darüber liegende Schicht besteht aus einer PZT-4-Keramik, die in ξ_3 -Richtung gepolt ist. Die Materialdaten sind in Anhang A.3 zusammengestellt.

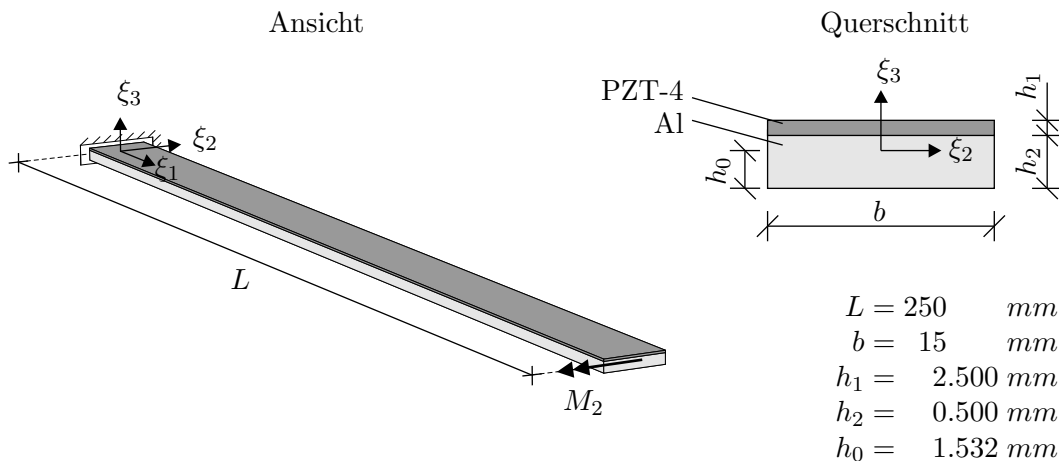


Abb. 7.9: Geometrie und Belastung des Kragarms.

Als Belastung wird ein Moment M_2 am Ende des Kragarms aufgebracht. Entsprechend der analytischen Lösung, die z.B. bei IBRAHIMBEGOVIĆ [75] angegeben ist, wird der Wert des Moments mit $M_2 = 2\pi EI/L$ so gewählt, dass sich im deformierten Zustand ein geschlossener Kreis ergibt. Bei der Bestimmung des Parameters EI sind hierbei die unterschiedlichen Elastizitätsmodule der beiden Materialschichten des Kragarms zu berücksichtigen. Aus der Betrachtung eines Ersatzquerschnittes und mit $E_{PZT4} = 81.3 \text{ GPa}$ folgt für den Kragarm eine effektive Biegesteifigkeit von $(EI)_{eff} = 2.503 \text{ Nm}^2$. Für das Biegemoment M_2 resultiert daraus ein Wert von 62.915 Nm .

Um die Struktur im deformierten Zustand ausreichend genau zu modellieren, wird

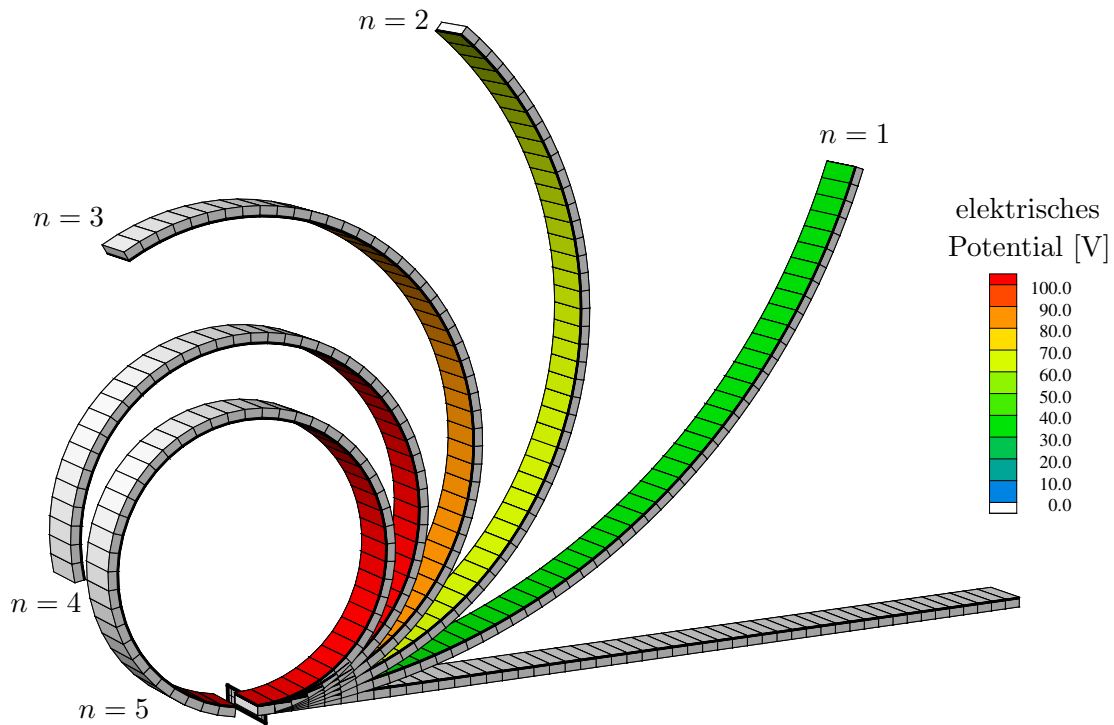


Abb. 7.10: Deformierte Struktur, dargestellt für jeden der fünf Lastschritte n .

der Kragarm mit 50 Stabelementen diskretisiert. An der Einspannung sind alle mechanischen sowie der elektrische Freiheitsgrad c_1 gehalten. Weiterhin werden die Freiheitsgrade α_1 , α_2 und α_3 an allen weiteren Elementknoten gehalten, da bei der vorliegenden Belastung keine Querschnittsverwölbungen zu erwarten sind.

In der numerischen Berechnung wird das Endmoment in fünf gleich großen Lastschritten aufgebracht, die dabei auftretenden Verformungen sind in der Abbildung 7.10 dargestellt. Bei voller Belastung beträgt die Verdrehung des Kragarmendes $\varphi_2(\xi_1 = L) = -6.126 \text{ rad}$. Dementsprechend ist in Abbildung 7.10 erkennbar, dass der Kragarm bei dem Lastschritt $n = 5$ keinen vollständig geschlossenen Kreis beschreibt. Diese Abweichung vom theoretischen Wert $\varphi_2(\xi_1 = L) = 2\pi$ lässt sich mit dem elektromechanischen Koppeleffekt in der PZT-4-Schicht erklären. Ein Teil der äußeren Arbeit aus dem aufbrachten Biegemoment wird hierbei in innere elektrische Arbeit umgewandelt, und steht somit nicht mehr für die Deformation der Struktur zur Verfügung. Werden bei der numerischen Berechnung nur die mechanischen Freiheitsgrade berücksichtigt, so resultiert eine Verdrehung am Kragarmende von $\varphi_2 = -6.306 \text{ rad}$. Dieser Wert entspricht recht genau der analytischen Lösung, die Abweichung beträgt lediglich 0.35 %.

Aus der vorgegebenen Belastung folgt ein in Stablängsrichtung konstanter Ver-

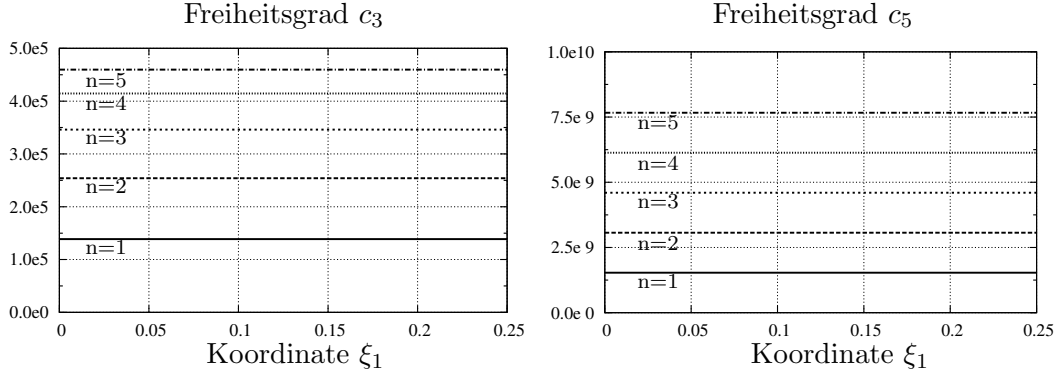


Abb. 7.11: Verlauf der elektrischen Knotenfreiheitsgrade c_3 und c_5 über die Stablänge für alle n Lastschritte (Stab-W0E5).

zerrungszustand. Das elektrische Potential, das sich durch die elektromechanische Kopplung einstellt, ist proportional zur Verzerrungskomponente E_{11} und muss demzufolge ebenfalls einen konstanten Verlauf in Stablängsrichtung besitzen. Zu diesem Zweck ist in Abbildung 7.10 der Verlauf des elektrischen Potentials an der Oberseite der piezoelektrischen Schicht dargestellt. Der für jeden Lastschritt jeweils konstante Wert von ϕ in Stablängsrichtung ist hierbei erkennbar.

Deutlicher geht dies aus den beiden Diagrammen in Abbildung 7.11 hervor. Darin sind die Werte der elektrischen Freiheitsgrade c_3 und c_5 über die Stablänge für alle fünf Lastschritte aufgetragen. Da die elektrischen Freiheitsgrade bezüglich der lokalen Stabachse formuliert sind, ergeben sich hierbei unabhängig von der Querschnittsrotation jeweils konstante Werte.

Aufgrund des hier vorliegenden, in ξ_1 -Richtung konstanten Verlaufes der Verzerrungen E_{11} und des elektrischen Feldes \vec{E}_3 ist es möglich, die mechanischen und elektrischen Anteile an der inneren Arbeit quantitativ zu bestimmen. Allgemein gilt für die innere Arbeit eines piezoelektrischen Stabes

$$W^{int} = \int_V (\mathbf{S}_b^T \mathbf{E}_b + \vec{\mathbf{D}}^T \vec{\mathbf{E}}) dV \quad . \quad (7.2)$$

Diese Beziehung lässt sich für die hier vorliegende Belastung vereinfachen

$$W^{int} = bL \int_{\xi_3} \underbrace{(E_{11} \tilde{\mathbf{C}}_{11}^{Alu} E_{11} + E_{11} \tilde{\mathbf{C}}_{11}^{PZT4} E_{11})}_{W_{mech}^{int}} + \underbrace{E_{11} \tilde{\mathbf{e}}_{13} \vec{E}_3}_{W_{elec}^{int}} d\xi_3 \quad , \quad (7.3)$$

wobei zu beachten ist, dass die dielektrischen Verschiebungen $\vec{\mathbf{D}}$ in diesem Fall gleich Null sind. Da sowohl die Verzerrungen E_{11} , als auch das elektrische Feld \vec{E}_3 einen linearen Verlauf in ξ_3 -Richtung beschreiben, kann das Integral aus Gl. (7.3)

analytisch ausgewertet werden. Die daraus resultierende innere Arbeit teilt sich in die mechanischen bzw. elektrischen Anteile in folgender Weise auf

$$\begin{aligned}W_{mech}^{int} &= 374.50 \text{ Nm} \\W_{elc}^{int} &= 10.55 \text{ Nm} \quad .\end{aligned}$$

Daraus wird deutlich, dass der Beitrag von W_{elc}^{int} an der gesamten inneren Arbeit ist mit 2.7 % relativ gering ist. Die äußere Arbeit des als Belastung aufgebrauchten Moments M_2 folgt aus der Beziehung

$$W^{ext} = M_2 \varphi_2 = 384.90 \text{ Nm}, \quad (7.4)$$

und stimmt damit fast exakt mit der inneren Arbeit W^{int} überein, die einen Wert von 385.05 Nm besitzt.

Damit zeigt dieses Beispiel, dass die Stabformulierung geeignet ist, um die elektrischen Feldgrößen auch bei großen Rotationen des Querschnitts korrekt abzubilden.

7.2 Nichtlineares Materialmodell

7.2.1 1D-Beispiel

Zunächst wird ein einfaches, 1D-Beispiel untersucht, das bereits von KAMLAH [85] diskutiert wurde. Zu diesem Zweck erfolgt die Betrachtung des in Abbildung 7.12 dargestellten Systems. Es besteht aus einer quaderförmigen, piezoelektrischen Keramik, die sich in einem nicht polarisierten Ausgangszustand befindet. Die Abmessungen des Probekörpers sowie die Materialdaten zur Beschreibung der nichtlinearen Materialeigenschaften sind ebenfalls in dieser Abbildung angegeben. Die linearen Materialkennwerte der gepolten Keramik nach [85] sind in Anhang A.4 zusammengefasst. Als Belastung wird ein quasistatisches elektrisches Feld in ξ_3 -Richtung aufgebracht, dessen Verlauf aus Abbildung 7.12 zu entnehmen ist. Für die numerische Berechnung ist es ausreichend, dieses System mit einem Stabelement in ξ_1 -Richtung, und mit einem Element über den Querschnitt zu diskretisieren. An der Koordinate $\xi_1 = 0$ werden alle mechanischen Freiheitsgrade festgehalten. Querschnittsverwölbungen treten in diesem Beispiel nicht auf.

Die Ergebnisse der numerischen Berechnung mit dem Stab-W0E3 sind in den Abbildungen 7.13 bzw. 7.14 dargestellt. Aufgrund der hohen elektrischen Feldstärke treten hierbei die typischen ferroelektrischen Hysteresen auf. Sowohl die dielek-

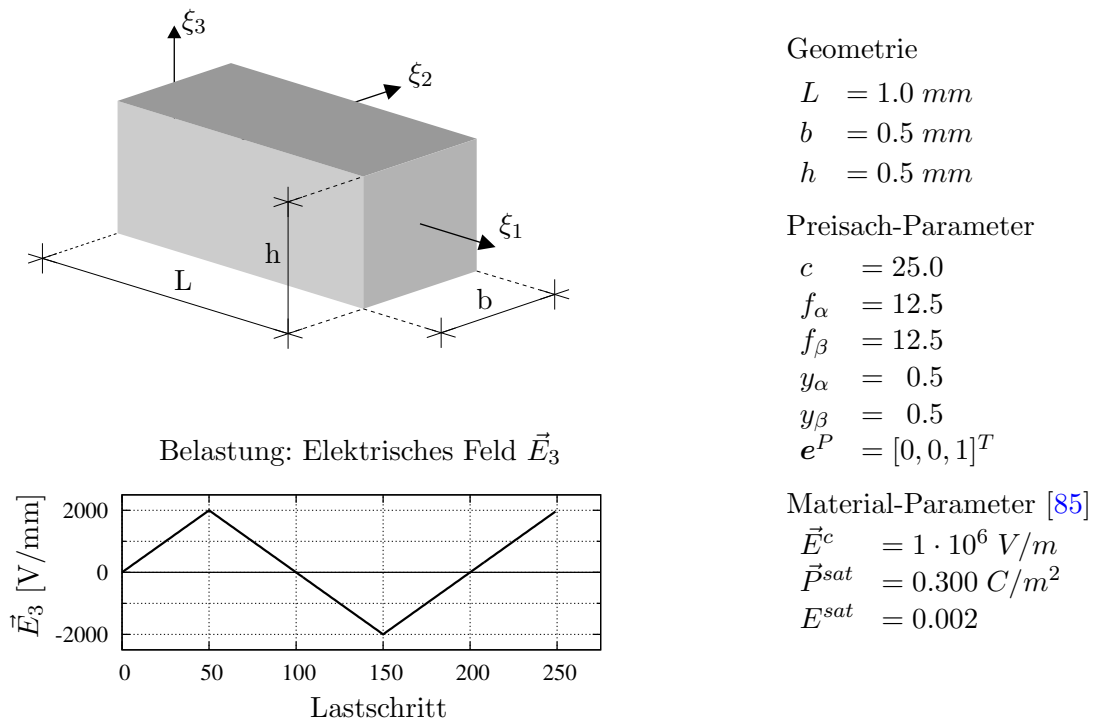


Abb. 7.12: System und Belastung des untersuchten Systems.

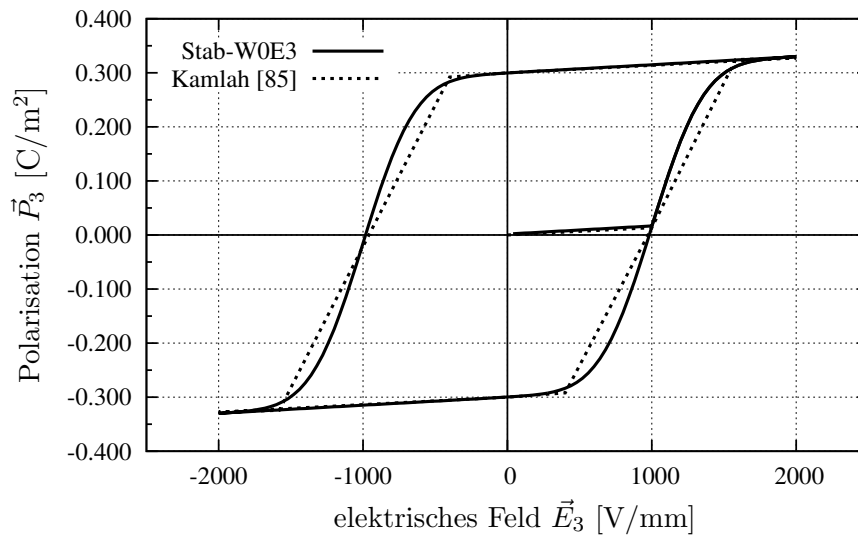


Abb. 7.13: Dielektrische Hysterese.

trische Hysterese, als auch die Schmetterlingshysterese besitzen den in Kapitel 3 diskutierten Verlauf.

Der Vergleich der Ergebnisse mit den Werten nach KAMLAH [85] ergibt eine sehr gute Übereinstimmung. Die auftretenden Abweichungen sind mit unterschiedlichen Ansätzen zur Bestimmung der irreversiblen Polarisation innerhalb des jeweiligen Materialmodells zu erklären.

In der Abbildung 7.14 sind sowohl die Verzerrungen E_{11} als auch E_{33} über das elektrische Feld aufgetragen. Hierbei ist zu beachten, dass sich nur die Verzer-

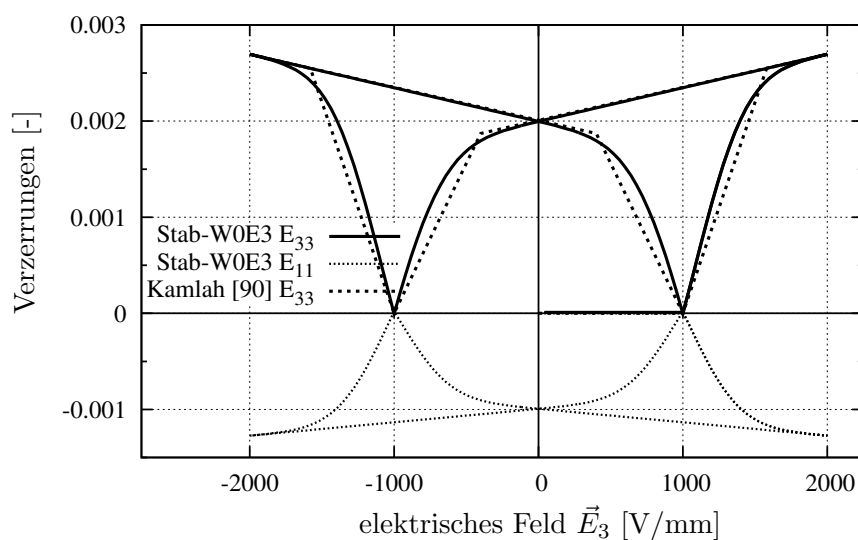


Abb. 7.14: Schmetterlings-Hysterese.

ung E_{11} direkt aus der Stabformulierung bestimmen lassen. Um einen Vergleich mit den Ergebnissen aus der Literatur zu ermöglichen, müssen die Verzerrungen E_{33} unter Berücksichtigung des Stoffgesetzes aus der Beziehung (3.17)₁ ermittelt werden.

Wird eine piezoelektrische Keramik wie in diesem Beispiel in ξ_3 -Richtung gepolt, so treten dabei positive Verzerrungen in ξ_3 -Richtung, und negative Verzerrungen in ξ_1 -Richtung auf. Aufgrund der in Abschnitt 4.2 getroffenen Annahme, dass die irreversiblen Verzerrungen volumentreu sind, ist der Sättigungswert der irreversiblen Verzerrungen in ξ_3 -Richtung doppelt so groß, als in ξ_1 -Richtung. Aus Abbildung 7.14 wird ersichtlich, dass das hier verwendete nichtlineare Materialmodell diese beiden Effekte korrekt wiedergibt.

Untersuchung des Konvergenzverhaltens

Da es sich bei diesem Beispiel um ein nichtlineares Problem handelt, erfolgt die Lösung iterativ mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens. Die hierbei gewählte Vorgehensweise wurde bereits in Abschnitt 6.5 erläutert.

Als ein wichtiges Kriterium zur Beurteilung des Materialmodells dient hierbei das Konvergenzverhalten der nichtlinearen Berechnung, das für dieses Beispiel im Detail untersucht wird. Zu diesem Zweck wird die Konvergenz des globalen Residuums für zwei verschiedene Lastschritte betrachtet, die in Abbildung 7.15 veranschaulicht sind. Fall 1 betrachtet den Lastschritt von $\vec{E}_3 = 600 \text{ V/mm}$ nach

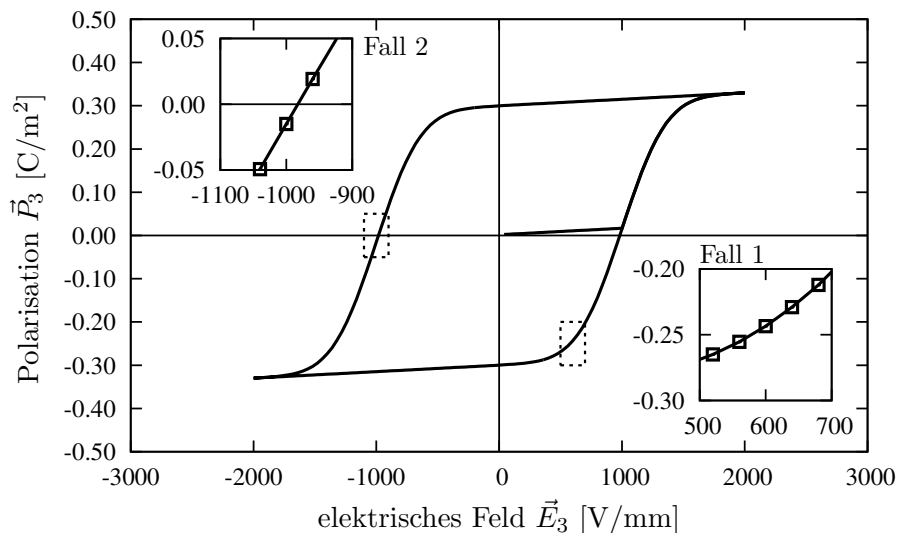


Abb. 7.15: Darstellung der beiden Lastschritte, an denen das Konvergenzverhalten des nichtlinearen Materialmodells untersucht wird. Die gestrichelten Rechtecke entsprechen jeweils dem vergrößerten Bereich der Hysterese-Kurve.

Iteration	Fall 1: Lastschritt-Nr. 230 \vec{E}_3 von 600 auf 640 [V/mm]	Fall 2: Lastschritt-Nr. 124 \vec{E}_3 von -960 auf -1000 [V/mm]
1	$4.8 \cdot 10^0$	$2.7 \cdot 10^1$
2	$8.5 \cdot 10^1$	$2.2 \cdot 10^2$
3	$5.4 \cdot 10^{-3}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$
4	$3.2 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$

Tab. 7.2: Betrachtung des Residuums der beiden definierten Lastschritte. Die Lastschritt-Nr. bezieht sich hierbei auf das Diagramm in Abbildung 7.12.

$\vec{E}_3 = 640 \text{ V/mm}$. Dies entspricht einem Belastungsniveau, an dem das nichtlineare Verhalten gerade einsetzt. In Fall 2 wird der Lastschritt von $\vec{E}_3 = -960 \text{ V/mm}$ nach $\vec{E}_3 = -1000 \text{ V/mm}$ untersucht, da hier der größte Gradient der irreversiblen Polarisation auftritt.

Die Werte des Residuums sind für die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte in Tabelle 7.2 zusammengefasst. Daraus wird ersichtlich, dass beide Lastschritte das Gleichgewicht innerhalb von vier Iterationsschritten erreichen. Obwohl das nichtlineare Materialmodell ohne konsistente Linearisierung implementiert wurde, zeigt es für dieses Beispiel in beiden betrachteten Fällen ein sehr gutes Konvergenzverhalten.

Belastungsgeschichte

Zum Abschluss dieses Beispiels wird das Verhalten des nichtlinearen Materialmodells bei einer geschichtsabhängigen Belastung untersucht. Zu diesem Zweck wird der in Abbildung 7.16 dargestellte Belastungsverlauf auf das System aus Abbildung 7.12 aufgebracht. Hierbei verringert sich der Maximalwert der Amplitude in jedem Belastungszyklus um 250 V/mm . Durch die Verminderung der elektrischen

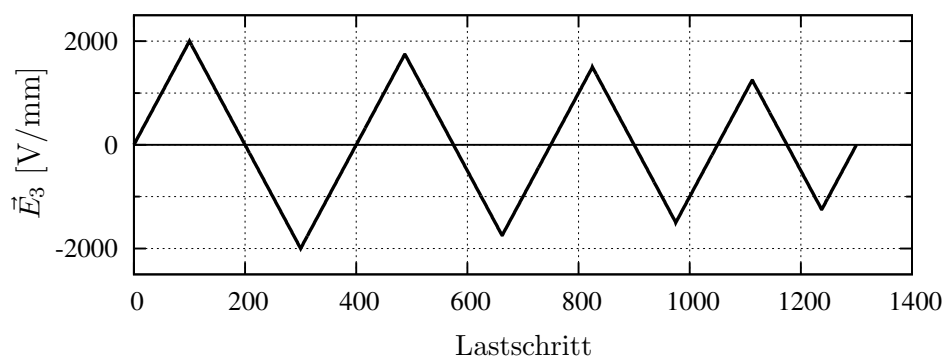


Abb. 7.16: Belastungsverlauf in Abhängigkeit vom aktuellen Lastschritt.

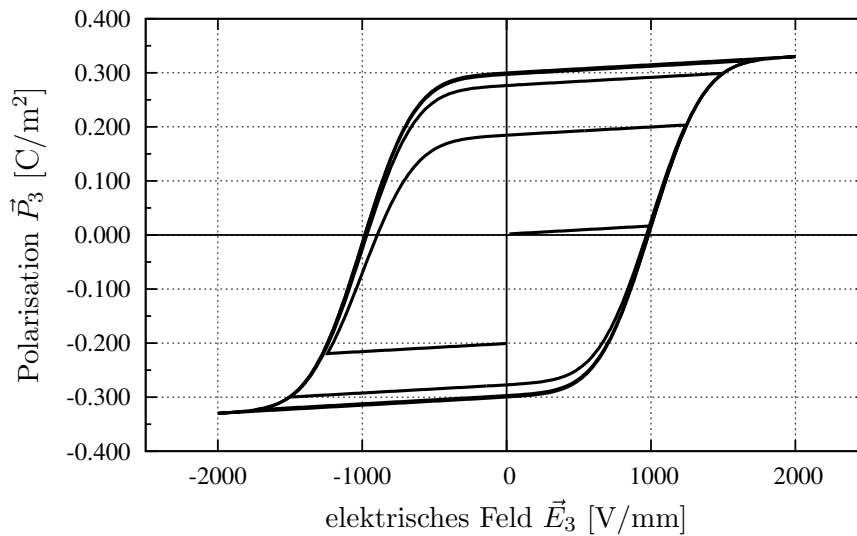


Abb. 7.17: Verlauf der dielektrischen Hysterese, die aus der Belastung nach Abbildung 7.16 resultiert.

Feldstärke \vec{E}_3 erreicht die irreversible Polarisation in den späteren Belastungszyklen nicht mehr den Sättigungswert. Daraus resultieren entsprechend geringere Werte für die Polarisation \vec{P}_3 und für die Verzerrungen E_{11} . Dies wird aus der Betrachtung der ferroelektrischen Hysteresen in den Abbildungen 7.17 und 7.18 deutlich. Infolge der abnehmenden Belastung bilden sich nun kleinere Hysterese-Schleifen aus, die in der Literatur auch als *minor loops* bekannt sind.

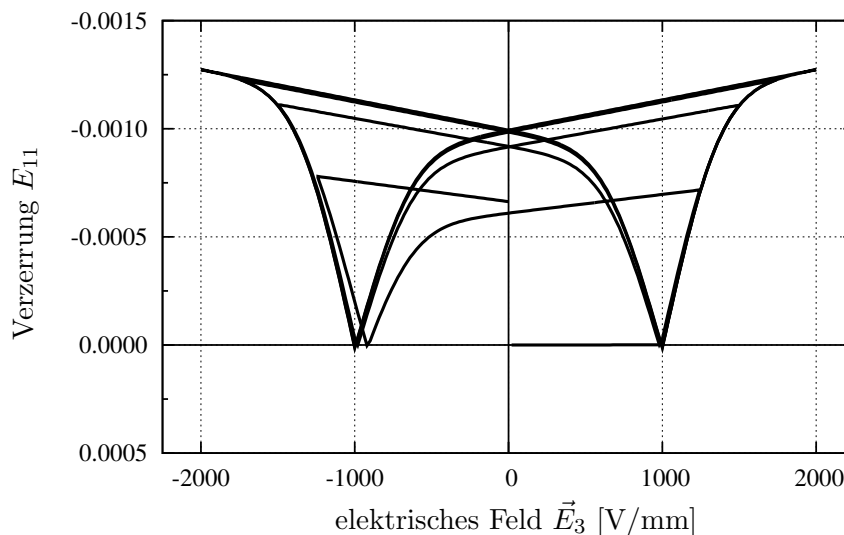


Abb. 7.18: Schmetterlings-Hysterese der Stabverzerrung E_{11} , die aus der Belastung nach Abbildung 7.16 resultiert.

7.2.2 Beliebige Orientierung des elektrischen Feldes

Die uniaxiale, dreidimensionale Formulierung des nichtlinearen Stoffgesetzes erlaubt die Belastung mit einem beliebig orientierten elektrischen Feld. Diese Eigenschaft wird in diesem Beispiel betrachtet.

Die Geometrie und die Materialdaten sind mit denen aus Beispiel 7.2.1 identisch. Als Belastung wird ein elektrisches Feld senkrecht zur Stabachse aufgebracht, dessen Richtung um den Winkel $\alpha = 30$ Grad um die ξ_1 -Achse bezüglich der ξ_1 - ξ_2 -Ebene gedreht ist. In der Abbildung 7.19 ist die Richtung parallel zum elektrischen Feld als dunkelgraue Ebene dargestellt. Im Rahmen der Stabformulierung wird diese Belastung realisiert, indem die elektrischen Freiheitsgrade c_2 und c_3 in einem Verhältnis von $\sqrt{3} : 1$ vorgegeben, und mit einem entsprechenden Faktor auf den Wert des aktuellen Lastschrittes skaliert werden.

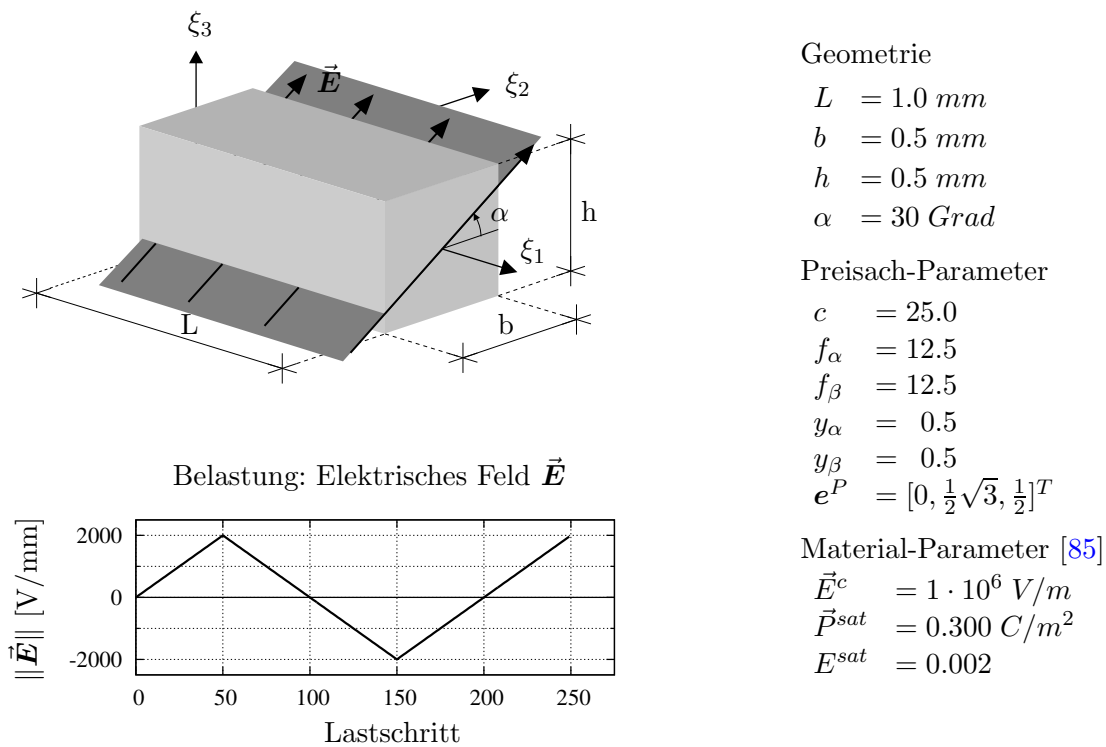


Abb. 7.19: System und Belastung des untersuchten Systems.

In Abbildung 7.20 sind die Projektionen der dielektrischen Hysterese in ξ_2 - und in ξ_3 -Richtung dargestellt. Aufgrund der Größe des Winkels α ist die Polarisierung in ξ_2 -Richtung deutlicher ausgeprägt, als in ξ_3 -Richtung. Die Sättigungswerte der irreversiblen Polarisierung in Richtung der beiden Koordinatenachsen ξ_2 und ξ_3

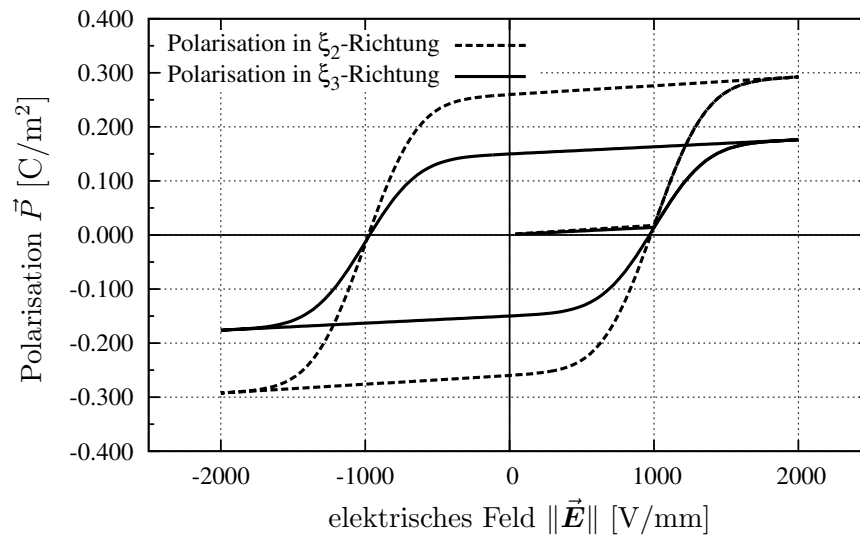


Abb. 7.20: Dielektrische Hysterese bei einer Belastung durch ein elektrisches Feld mit dem Richtungsvektor $\mathbf{e}^P = [0, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}]^T$. Die daraus resultierende Polarisation ist hier aufgeteilt in Richtung der beiden Koordinatenachsen ξ_2 und ξ_3 .

betragen $\vec{P}_2^{sat} = 0.260 \text{ C/m}^2$ bzw. $\vec{P}_3^{sat} = 0.150 \text{ C/m}^2$. In Richtung von \mathbf{e}^P ergibt sich daraus ein Wert \vec{P}^{sat} von 0.300 C/m^2 und entspricht damit der in Polarisationsrichtung vorgegebenen Größe.

7.3 Piezoelektrischer Trimorph

Der in diesem Beispiel betrachtete Kragarm wurde bereits mehrfach in der Literatur mit unterschiedlichen numerischen Modellen untersucht. SARAVANOS & HEYLIGER [133] verwenden hierbei eine sogenannte *discrete layer*-Laminat-Theorie [134], siehe auch Abschnitt 1.2. Dagegen benutzen CHEE et al. [33] eine *single layer*-Laminat-Theorie, die durch einen kubischen Ansatz für die Verschiebungen über die Querschnittshöhe verbessert wird.

Der untersuchte Kragarm ist in Abbildung 7.21 dargestellt. Er besteht aus einer Graphit/Epoxy-Tragschicht, auf der eine PZT-4-Keramik mittels einer Klebeschicht aufgebracht ist. Die Fasern des unidirektionalen Graphit/Epoxy-Materials sind in diesem Fall in ξ_1 -Richtung orientiert. Als Belastung wirkt an der Kragarmspitze eine Kraft von 1000 N in ξ_3 -Richtung.

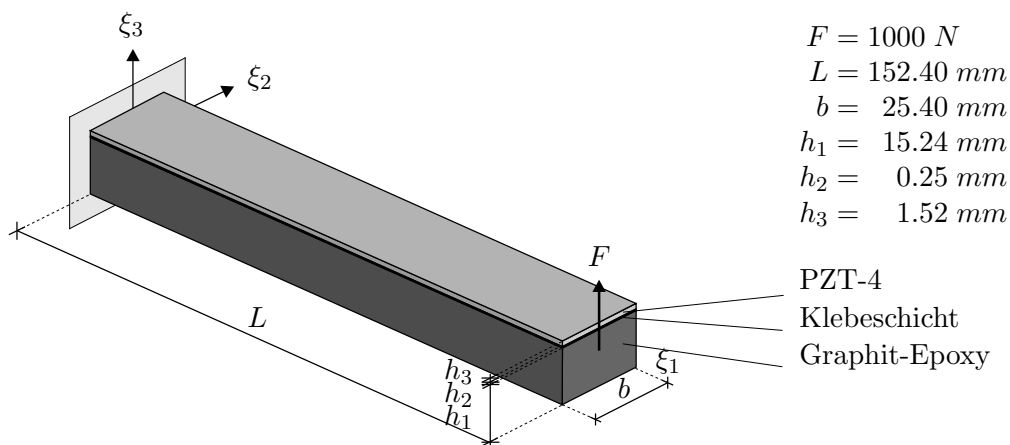


Abb. 7.21: Geometrie und Belastung des Kragarms.

Für die numerische Berechnung wird der Kragarm entsprechend der Vorgabe von SARAVANOS & HEYLIGER [133] mit 25 Elementen diskretisiert. An der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade, sowie der Knotenfreiwert c_1 gehalten. Die Diskretisierung der einzelnen Schichten des Querschnitts, sowie die zugehörigen Materialdaten sind in Tabelle 7.3 zusammengefasst.

In Abbildung 7.22 sind die aus der Berechnung resultierenden Verschiebungen u_3 sowie die Potentialdifferenz in ξ_3 -Richtung in der PZT-4-Schicht über die normierte Stablänge aufgetragen. Der Vergleich der Verschiebung $u_3(\xi_1, \xi_3 = 0)$ zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Werten von CHEE et al. [33]. Die Ergebnisse von SARAVANOS & HEYLIGER [133] liegen etwas höher. Die Resultate aus der numerischen Berechnung mit einem piezoelektrischen Volumenelement nach LINNEMANN & KLINKEL [104] entsprechen ebenfalls sehr gut den Ergebnissen,

Materialschicht	E-Modul [GPa]	Querdehnung [-]	Diskretisierung $b \times h$
Graphit/Epoxy	siehe Anhang A.5		16×20
Klebeschicht	$E = 6.90$	0.40	16×4
PZT-4	siehe Anhang A.5		16×10

Tab. 7.3: Verwendete Materialparameter und Diskretisierung der Materialschichten des Querschnitts.

die mit der entwickelten Stabformulierung erzielt werden.

Beim Vergleich der elektrischen Potentialdifferenz, die sich in der PZT-4-Schicht in ξ_3 -Richtung einstellt, treten deutliche Abweichungen zwischen den Ergebnissen der einzelnen Elementformulierungen auf. Als Ursache für die im Vergleich zu den Stabformulierungen aus der Literatur zu geringen Werte des elektrischen Potentials ist die Kondensation des Stoffgesetzes nach Gl. (3.22) in Betracht zu ziehen. Daraus resultiert eine modifizierte Permittivitätsmatrix $\tilde{\epsilon}$, aus der sich für die elektrischen Feldgrößen geringere Werte ergeben. Wird in der numerischen Berechnung der Tensor ϵ nicht kondensiert, dann stimmt das daraus resultierende Potential gut mit den Werten von CHEE et al. [33] überein. Der in Abbildung 7.22b erkennbare Knick im Verlauf der Potentialdifferenz wird durch das Festhalten der Wölbfreiheitsgrade an der Einspannung verursacht. Ein ähnlicher Effekt wird auch von SARAVANOS & HEYLIGER [133] beschrieben.

Die signifikanten Unterschiede, die im Vergleich zu den Berechnungen mit dem Volumenelement auftreten, können im Rahmen dieser Arbeit nicht schlüssig erklärt werden. An dieser Stelle sind weitere Untersuchungen erforderlich, um die Ursache für diese Differenzen zu klären. Hierbei ist anzumerken, dass dieser Effekt auf Sensoranwendungen beschränkt ist. Da beim Einsatz als Aktor das elektrische

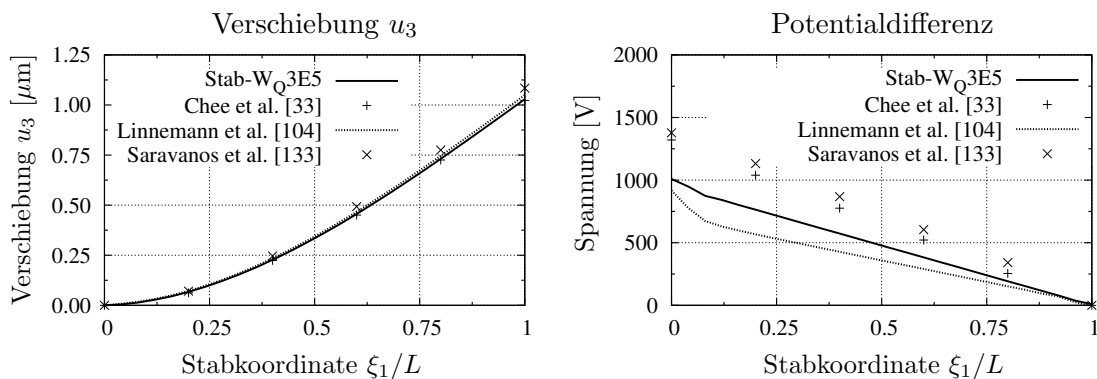


Abb. 7.22: Darstellung der Verschiebung des Kragarms in ξ_3 -Richtung und der Potentialdifferenz innerhalb der piezoelektrischen Materialschicht.

Potential bzw. das elektrische Feld vorgegeben wird, treten in diesem Fall keine signifikanten Unterschiede auf.

Drehung der Faserrichtung

Im zweiten Teil dieses Beispiels wird das System aus Abbildung 7.21 dahingehend modifiziert, dass die Orientierung der Graphit/Epoxy-Materialschicht in der ξ_1 - ξ_2 -Ebene um 20 Grad um die ξ_3 -Achse gedreht wird. Damit ist die Ausrichtung der Fasern nicht mehr parallel zur Stabachse, was zu anisotropen Materialeigenschaften bezüglich der ξ_1 -Richtung führt.

Der Vergleich der Verschiebungen $u_3(\xi_1, \xi_3 = 0)$ in Abbildung 7.23 zeigt deutliche Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus der entwickelten Stabformulierung und den Werten aus der Literatur. Infolge der Orientierung der Graphit/Epoxy-Schicht tritt zusätzlich zu der Verschiebung in ξ_3 -Richtung eine Verschiebung in ξ_2 -Richtung, sowie eine Verdrehungen des Stabes um die Längsachse auf. Das von CHEE et al. [33] entwickelte, zweidimensionale Stabmodell kann die hier auftretende Kinematik nur unzureichend abbilden, wodurch die auftretenden Verschiebungen deutlich unterschätzt werden.

Wird das in dieser Arbeit entwickelte Stabelement durch das Festhalten der entsprechenden Freiheitsgrade ($u_2, \varphi_1, \varphi_3, \alpha_1, \alpha_2, c_2, c_4$) auf ein zweidimensionales Modell vereinfacht, dann stimmen die daraus resultierenden Verschiebungen sehr gut mit den Werten von CHEE et al. [33] überein, wie auch aus Abbildung 7.23 ersichtlich ist. Damit wird deutlich, dass die großen Unterschiede in den Verschiebungen auf die reduzierte Kinematik einer zweidimensionalen Formulierung zurückzuführen sind.

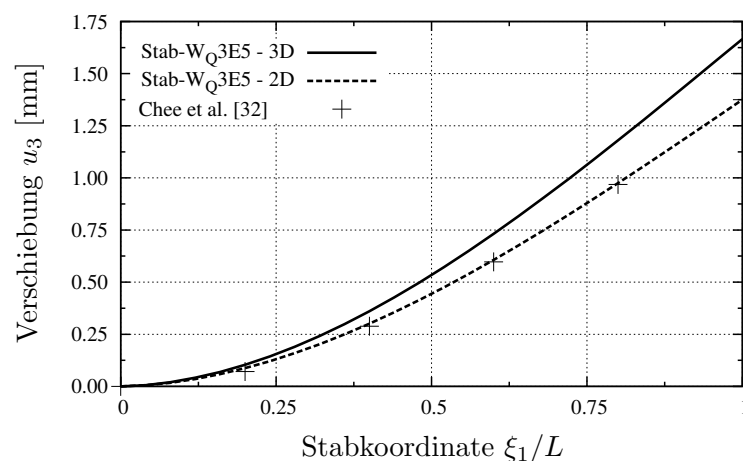


Abb. 7.23: Vergleich der Verschiebungen in ξ_3 -Richtung. Die Faserorientierung der Graphit/Epoxy-Schicht ist in diesem Fall um 20 Grad um die ξ_3 -Achse gedreht.

7.4 Schubaktoren

Eine Auslenkung senkrecht zur Stabachse kann bei stabförmigen Aktoren durch zwei unterschiedliche Mechanismen erreicht werden.

Bei dem *extension actuation mechanism* wird durch die Ausdehnung einer exzentrisch angeordneten piezoelektrischen Materialschicht ein Biegemoment induziert, das eine entsprechende Biegeverformung der Struktur zur Folge hat, siehe Abbildung 7.24a. Die optimale Position der piezoelektrischen Aktorschichten befindet sich hierbei an den Oberflächen, da bei dieser Anordnung die maximale Exzentrizität gegeben ist. Diese Bauform birgt jedoch einige Nachteile. Durch die exponierte Lage des piezoelektrischen Materials können diese leicht beschädigt werden. Weiterhin ist zu beachten, dass bei einer Biegeverformung die größten Normalspannungen an den äußeren Fasern eines Stabes und damit innerhalb der piezoelektrischen Schicht auftreten. Dies ist aufgrund der spröden Materialeigenschaften von piezoelektrischen Keramiken kritisch zu bewerten.

Als Alternative wird in der Arbeit von SUN & ZHANG [151] der sogenannte *shear actuation mechanism* vorgeschlagen, der in der Literatur zunehmend an Beachtung gewinnt, siehe z.B. [3, 12, 19, 91]. In diesem Fall befindet sich das piezoelektrische Material innerhalb der Struktur und ist parallel zur Stabachse gepolt, wie in Abbildung 7.24b dargestellt ist. Ein elektrisches Feldes senkrecht zur Polarisationsrichtung verursacht eine Schubverzerrung in der piezoelektrischen Materialschicht, die eine Verschiebung des Stabes senkrecht zu Längsachse bewirkt. Die hierbei entstehenden mechanischen Spannungen sind geringer als bei der Anwendung des *extension actuation mechanism*, was sich unter anderem günstig auf den Verbund zwischen den Materialschichten auswirkt. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die elektromechanische Kopplung über den hierbei genutzten

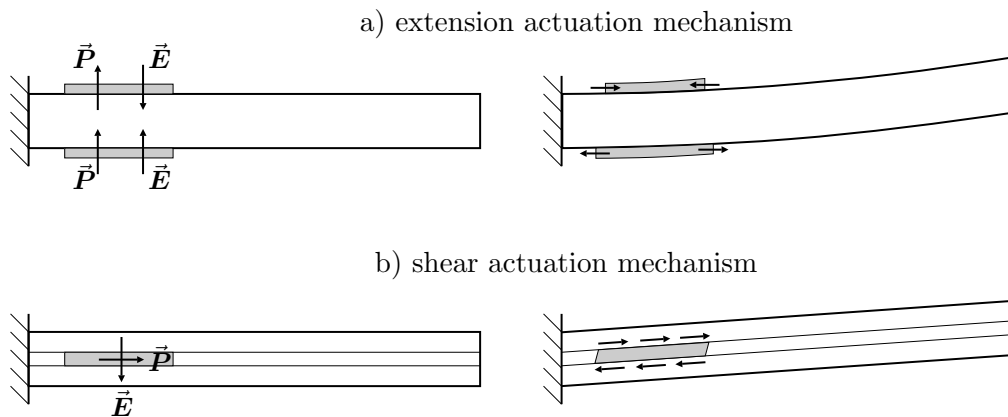


Abb. 7.24: Darstellung der beiden unterschiedlichen Aktor-Funktionsweisen [20].

e_{15} -Materialkoeffizienten bei den meisten piezoelektrischen Werkstoffen größer ist, als der beim *extension actuation mechanism* berücksichtigte e_{13} -Effekt [59].

7.4.1 Querschubaktor

In diesem ersten Beispiel wird der von SUN & ZHANG [151] vorgeschlagene *Shear-Actuator* behandelt. In der Literatur sind mehrere Arbeiten zu finden, in denen dieser Aktor analytisch [3, 176], numerisch [20, 21] oder in modifizierter Form experimentell [12] untersucht wird. Dadurch stehen mehrere Referenzergebnisse zur Verfügung, die eine Einordnung der hier gewonnenen Ergebnisse ermöglichen.

Die Geometrie des untersuchten Querschubaktors ist in Abbildung 7.25 dargestellt. Die beiden äußeren Schichten des Aktors bestehen aus Aluminium mit einem Elastizitätsmodul von $E = 70.3 \text{ GPa}$ und einer Querdehnzahl $\nu = 0.345$. In der Mitte befindet sich eine piezoelektrische PZT-5H Schicht, die in ξ_1 -Richtung gepolt ist. Die entsprechenden Materialdaten sind dem Anhang A.6 zu entnehmen. Als Belastung wird eine Spannung von 20 V in ξ_3 -Richtung an die piezoelektrische Materialschicht angelegt.

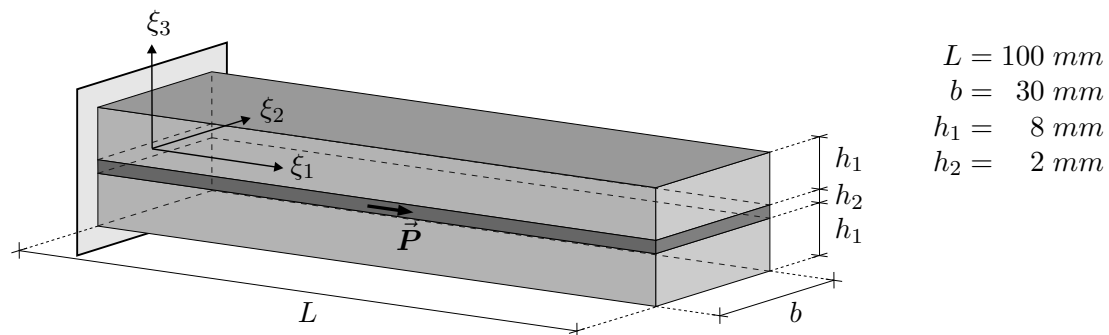


Abb. 7.25: Geometrie des untersuchten Querschubaktors.

Für die Finite-Element-Berechnung wird die Struktur mit 20 Stabelementen diskretisiert, siehe Abbildung 7.26. An der Einspannung werden alle mechanischen, sowie der elektrische Freiheitsgrad c_1 gehalten. Die Belastung wird im Rahmen der Stabformulierung durch ein elektrisches Feld der Größe $1 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ in ξ_3 -Richtung realisiert. Hierzu wird für den Freiheitsgrad c_3 der Wert $-1 \cdot 10^4$ für alle Knoten vorgegeben.

Die Diskretisierung des Querschnitts erfolgt für jede Schicht mit 12×6 Elementen und entspricht somit der Abbildung 5.6 des Beispiels 5.2.2. Die in diesem Beispiel auftretende, piezoelektrisch induzierte Schubdeformation wird mit der entsprechenden Wölbfunktion berücksichtigt. Der zugehörige Einheitszustand ist in Abbildung 5.7 dargestellt.

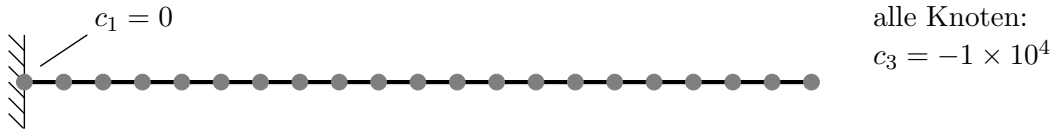


Abb. 7.26: Diskretisierung des Aktors mit 20 Stabelementen. An der Einspannung sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten.

Die obere Darstellung in Abbildung 7.27 zeigt den deformierten Aktor in der Seitenansicht. Die Schubverzerrung der piezoelektrischen Schicht führt dazu, dass sich die Querschnittsebenen der einzelnen Schichten gegeneinander verdrehen, wie deutlich zu erkennen ist. Die Verschiebungen in ξ_1 -Richtung gehen aus der unteren Darstellung in Abbildung 7.27 hervor, die größten Werte ergeben sich demnach in den beiden Grenzbereichen zwischen den verschiedenen Materialschichten. Die Randstörung an der Einspannung kann damit erklärt werden, dass an dieser Stelle alle mechanischen Freiheitsgrade festgehalten sind, und somit auch keine Querschnittsverwölbung auftreten kann.

Für die Anwendung solcher Aktoren stellt die erreichbare Auslenkung senkrecht zur Stabachse ein wesentliches Kriterium dar. Im Diagramm in Abbildung 7.28 sind daher die Verschiebungen des Aktors in ξ_3 -Richtung über die Stablänge aufgetragen. Im Gegensatz zu biegebeanspruchten Stäben stellt sich hierbei eine lineare Biegelinie ein, die für diese Art von Aktoren typisch ist [127].

Der Vergleich der Verschiebungen der Stabformulierung mit der numerischen Lösung nach BENJEDDOU et al. [20] bzw. der analytischen Lösung nach ZHANG

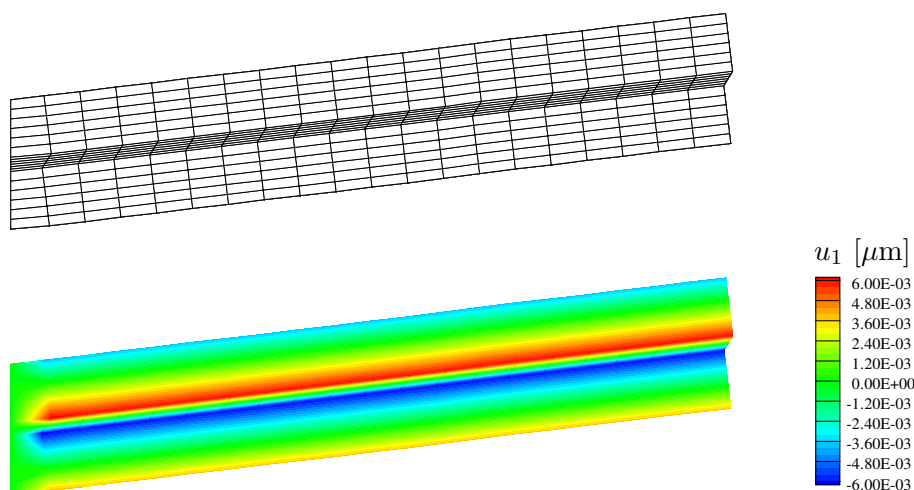


Abb. 7.27: Darstellung der deformierten Stabstruktur und der Verschiebung in ξ_1 -Richtung. Der Skalierungsfaktor der Verwölbung beträgt $1 \cdot 10^5$.

& SUN [176] zeigt eine sehr gute Übereinstimmung der Resultate. Dabei erfolgt in beiden Arbeiten eine Modellierung der einzelnen Materialschichten im Rahmen einer geschichteten Stabformulierung. Für die äußeren beiden Schichten wird hierbei die Stabtheorie nach Bernoulli-Euler zugrunde gelegt, bei der piezoelektrischen Schicht werden die Annahmen nach der Timoshenko-Theorie berücksichtigt. Bei der in dieser Arbeit entwickelten Stabformulierung ist diese geschichtete Modellierung nicht erforderlich. Diese wird durch die Einführung der Wölbfunktion, die sich durch die piezoelektrisch induzierte Schubdeformation einstellt, bereits erfasst.

Wird der Einfluss der Querschnittsverwölbung vernachlässigt (Stab-W0E5), dann ergeben sich Verschiebungen, die etwa um den Faktor 1.5 zu klein sind, siehe Abbildung 7.28. Daraus wird deutlich, dass eine Stabformulierung nach der Timoshenko-Theorie, die ein Ebenbleiben des Querschnitts voraussetzt, nicht ausreicht, um die piezoelektrische Schubaktivierung hinreichend genau abzubilden.

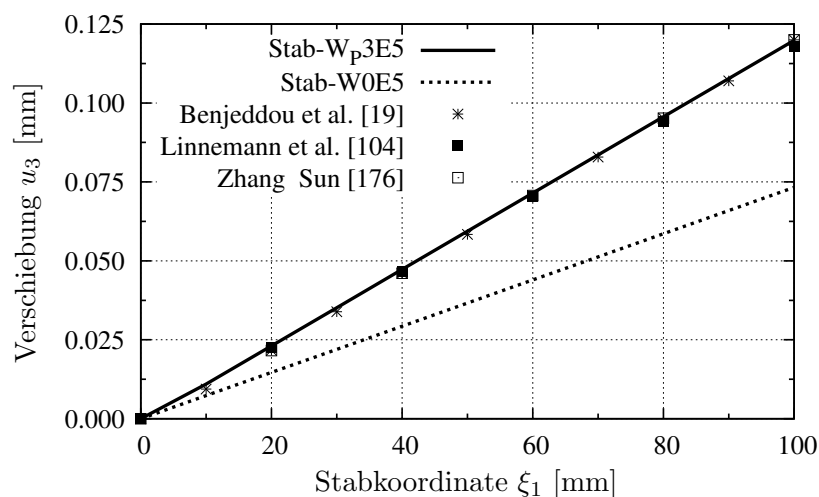


Abb. 7.28: Vergleich der Verschiebung u_3 mit Ergebnissen aus der Literatur.

Abschließend werden die Ergebnisse der Stabformulierung mit den Resultaten einer Finite-Element-Berechnung mit einem Acht-Knoten Volumenelement nach LINNEMANN & KLINKEL [104] verglichen. Bei einer Diskretisierung mit $20 \times 6 \times 12$ Elementen pro Materialschicht stimmen die betrachteten Verschiebungen u_3 sehr gut überein, wie auch aus Abbildung 7.28 hervorgeht.

7.4.2 Torsionsaktor

Durch die Ausnutzung der piezoelektrisch induzierten Schubverwölbung ist es möglich, eine Verdrehung des Stabes um seine Längsachse zu erreichen. Diese Torsionsverformung der Struktur kann in Form eines *Torsionsaktors* ausgenutzt werden.

Hierzu wird das in Abbildung 7.29 dargestellte System betrachtet. Der Stab besteht aus zwei piezoelektrischen PZT-5H Schichten, die Materialparameter sind in Anhang A.6 angegeben. Die obere Schicht ist in ξ_1 -Richtung gepolt, die untere entgegengesetzt in $-\xi_1$ -Richtung. Als Belastung wird ein elektrisches Potential von 1000 V bei $\xi_2 = -b/2$ über die gesamte Höhe des Kragarms angelegt. Dies entspricht einem elektrischen Feld \vec{E}_2 der Größe $-5 \cdot 10^5\text{ V/m}$. Aufgrund der gegebenen Belastung, die senkrecht zur Polarisationsrichtung wirkt, wird in den beiden Materialschichten eine Schubverzerrung in ξ_2 -Richtung bzw. in $-\xi_2$ -Richtung induziert, die eine Torsion in dem Kragarm hervorrufen.

Die Modellierung des Systems aus Abbildung 7.29 erfolgt mit 20 Stabelementen. An der Einspannung sind alle mechanischen, sowie der elektrische Freiheitsgrad c_1 gehalten. Die Belastung wird durch die Vorgabe des Wertes für $c_2 = 5 \cdot 10^5$ an allen Knoten aufgebracht.

Da in diesem Beispiel die Verwölbung des Querschnitts eine wichtige Rolle spielt, wird der Querschnitt mit 10×10 Elementen pro Materialschicht diskretisiert, siehe Abbildung 7.30. Weiterhin sind in dieser Abbildung die Wölbfunktionen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_4$ dargestellt. Dabei wird die Ähnlichkeit zwischen den beiden Wölbfunktionen deutlich. Aus dem Verlauf der Wölbfunktion $\bar{\omega}_4$ lässt sich erkennen, dass die induzierte Schubverzerrung eine gleichmäßige Verwölbung in den oberen und unteren Bereichen des Querschnitts hervorruft. Diese geht im mittleren Bereich

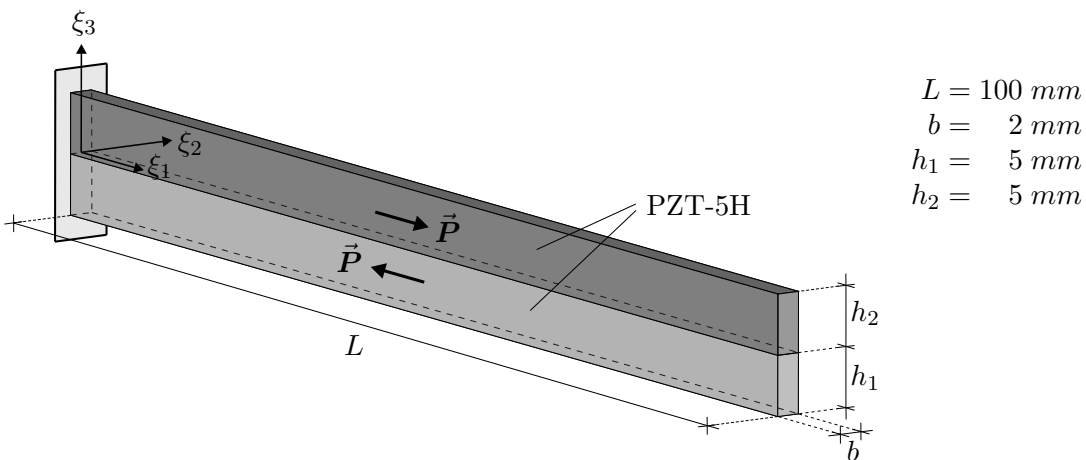


Abb. 7.29: Geometrie des Torsionsaktors.

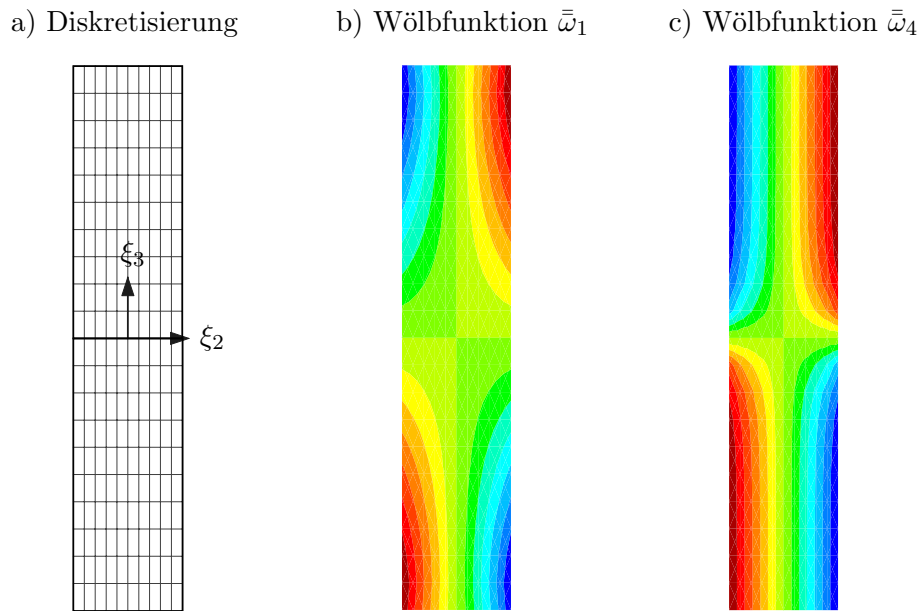


Abb. 7.30: Diskretisierung des Stabquerschnitts mit 10×10 Elementen pro Materialschicht sowie die qualitative Darstellung der Wölbfunktionen $\bar{\omega}_1$ und $\bar{\omega}_4$.

des Querschnitts verloren, da hier die geometrische Kompatibilität der beiden Materialschichten erfüllt sein muss.

In Abbildung 7.31 ist die aus der numerischen Berechnung folgende, deformierte Stabstruktur dargestellt. Die Stabverdrehung um die ξ_1 -Achse ist deutlich erkennbar. In der vergrößerten Darstellung der Kragarmspitze wird die Verwölbung des Querschnitts ersichtlich. Der Farbverlauf illustriert die Verschiebung in ξ_1 -Richtung. Hierbei sind an der Einspannung des Stabes Randstörungen zu bemerken, die jedoch schnell abklingen, und sich eine gleichmäßige Querschnittsverwölbung einstellt.

Eine genauere Betrachtung der numerischen Ergebnisse zeigt, dass neben dem Freiheitsgrad α_2 auch der Freiheitsgrad α_1 ungleich Null ist. Folglich wird die piezoelektrisch induzierte Verwölbung $\alpha_2 \bar{\omega}_4$ durch eine Torsionsverwölbung $\alpha_1 \bar{\omega}_1$ überlagert, die sich infolge der Verdrehung des Stabes einstellt.

Da dieses Beispiel in der Literatur bisher noch nicht behandelt wurde, erfolgt die Verifikation der Berechnungsergebnisse durch den Vergleich mit einer Finite-Element-Berechnung, die mit einem piezoelektrischen Volumenelement nach LINNEMANN & KLINKEL [104] durchgeführt wurde. Hierzu werden die Verschiebungen des Punktes A , der in Abbildung 7.31 definiert ist, in Richtung der drei Koordinatenachsen miteinander verglichen. Während diese bei dem Volumenelement durch die Verschiebung des entsprechenden Knotens direkt angegeben werden können, ist bei dem Stabelement eine Berechnung nach Gl. (6.3) unter

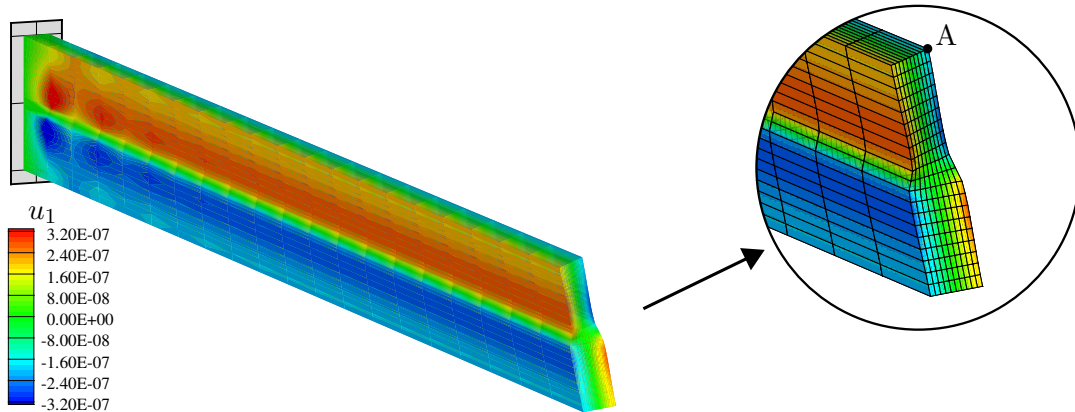


Abb. 7.31: Deformierte Struktur und Detailansicht. Die Verschiebungen u_2 und u_3 sind mit dem Faktor 50 skaliert, die Verschiebung u_1 mit dem Faktor 2000.

Berücksichtigung der Verdrehung φ_1 und den beiden Querschnittsverwölbungen $\alpha_1 \bar{\omega}_1(\xi_2^A, \xi_3^A)$ und $\alpha_2 \bar{\omega}_4(\xi_2^A, \xi_3^A)$ erforderlich. Die Ergebnisse aus beiden Berechnungen sind in der Tabelle 7.4 zusammengefasst. Aus der Stabformulierung resultieren hierbei die folgenden Werte für die zur Verschiebungsberechnung relevanten Freiheitsgrade: $\varphi_1 = 4.3689 \times 10^{-3} \text{ rad}$, $\alpha_1 = 4.2117 \times 10^{-2}$, $\alpha_2 = -3.6956 \times 10^{-4}$. Beide Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung, die maximale Abweichung bezüglich der Resultate aus der Berechnung nach [104] tritt bei der Verschiebung u_3 auf und beträgt etwa 2%. Die Abweichung bei den Verschiebungen u_1 und u_2 liegt deutlich darunter. Um in beiden Fällen eine ähnliche Diskretisierung zu gewährleisten, wurde der Kragarm in der Vergleichsberechnung in 20 Volumenelemente in ξ_1 -Richtung und in jeweils 10 Elemente in ξ_2 - und ξ_3 -Richtung pro Materialschicht unterteilt.

Dieses Beispiel zeigt sehr deutlich die Effizienz der entwickelten Stabformulierung. Die resultierenden Verschiebungen sind mit Berechnungsergebnissen des dreidimensionalen Volumenelements vergleichbar, obwohl der numerische Aufwand bedeutend geringer ist.

Verschiebung	Stabformulierung [mm]	Volumenelement [104] [mm]	Abweichung bzgl. [104] in [%]
u_1	-2.029×10^{-7}	-2.022×10^{-7}	0.35
u_2	-2.184×10^{-5}	-2.180×10^{-5}	0.18
u_3	4.369×10^{-6}	4.281×10^{-6}	2.06

Tab. 7.4: Vergleich der Verschiebungen des Punktes A mit den Koordinaten (100,1,5) bei einer Diskretisierung des Querschnitts mit 10×10 Elementen pro Materialschicht.

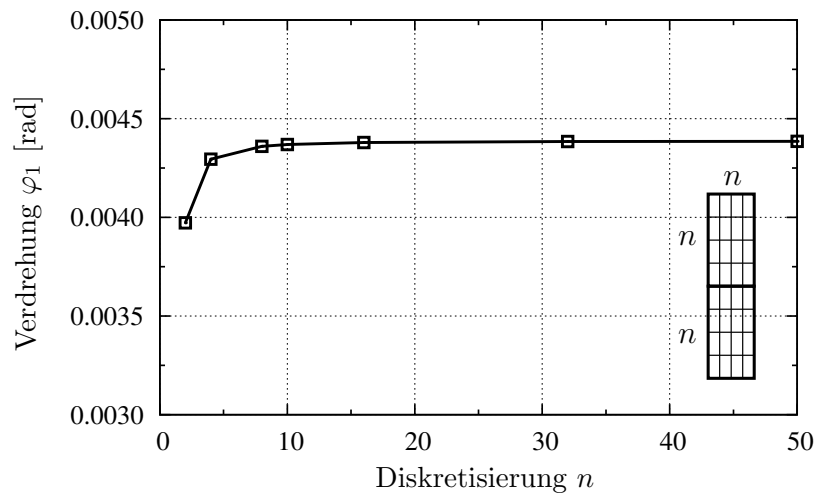


Abb. 7.32: Konvergenz der Verdrehung φ_1 an der Stelle $\xi_1 = L$ in Abhängigkeit von der Diskretisierung n des Querschnitts.

Zum Abschluss dieses Beispiels wird das Konvergenzverhalten der Stabformulierung in Abhängigkeit von der Querschnittsdiskretisierung untersucht. Hierfür ist in Diagramm 7.32 die Verdrehung φ_1 des Kragarms an der Stelle $\xi_1 = L$ in Abhängigkeit von der Diskretisierung n des Querschnitts aufgetragen. Der Parameter n bezeichnet hierbei die Anzahl der Elemente in ξ_2 - bzw. ξ_3 -Richtung pro Materialschicht. Aus dem Diagramm 7.32 wird die gute Konvergenz des Elements deutlich. Ab einer Diskretisierung mit 10×10 Elementen sind keine wesentlichen Änderungen der Verdrehung φ_1 mehr feststellbar.

7.5 Piezoelektrischer Schalter

Die Eigenschaften von piezoelektrischen Werkstoffen lassen sich zur Konstruktion von Schaltelementen ausnutzen. Da die hierbei erreichbaren Deformationen in der Regel sehr klein sind, werden solche Bauteile unter anderem in mikroelektromechanischen Systemen, sogenannten MEMS eingesetzt [139]. Eine Übersicht über mögliche Anwendungsgebiete ist bei BELL [17] zu finden, konkrete Anwendungen sind z.B. bei GROSS et al. [61] oder bei SMITS et al. [147] erläutert.

In diesem Beispiel wird das Ausknicken einer schlanken Stabstruktur zur Modellierung eines piezoelektrischen Schalters genutzt. Durch die Verschiebung senkrecht zur Stabachse werden hierbei die beiden Schaltzustände *an* und *aus* realisiert. Ein ähnliches Prinzip wird auch in der Arbeit von DEBÉDA et al. [43] beschrieben. Bei dieser Anwendung wird durch die seitliche Auslenkung eines beidseitig gehaltenen Stabes eine Blende in einer Glasfaserleitung gesteuert. Durch die Vorkrümmung der Struktur wird hierbei eine Vergrößerung der maximalen Auslenkung erreicht.

Der Aufbau des hier betrachteten Schalters ist der Abbildung 7.33 zu entnehmen. Er besteht aus einer Silizium-Tragschicht, auf der eine Lage aus PZT-4-Material, sowie eine Platin-Elektrode aufgebracht sind. Die Materialparameter sind in Tabelle 7.5 angegeben. Eine elektrische Spannung wird in ξ_3 -Richtung so angelegt, dass sie in der piezoelektrischen Materialschicht eine positive Deh-

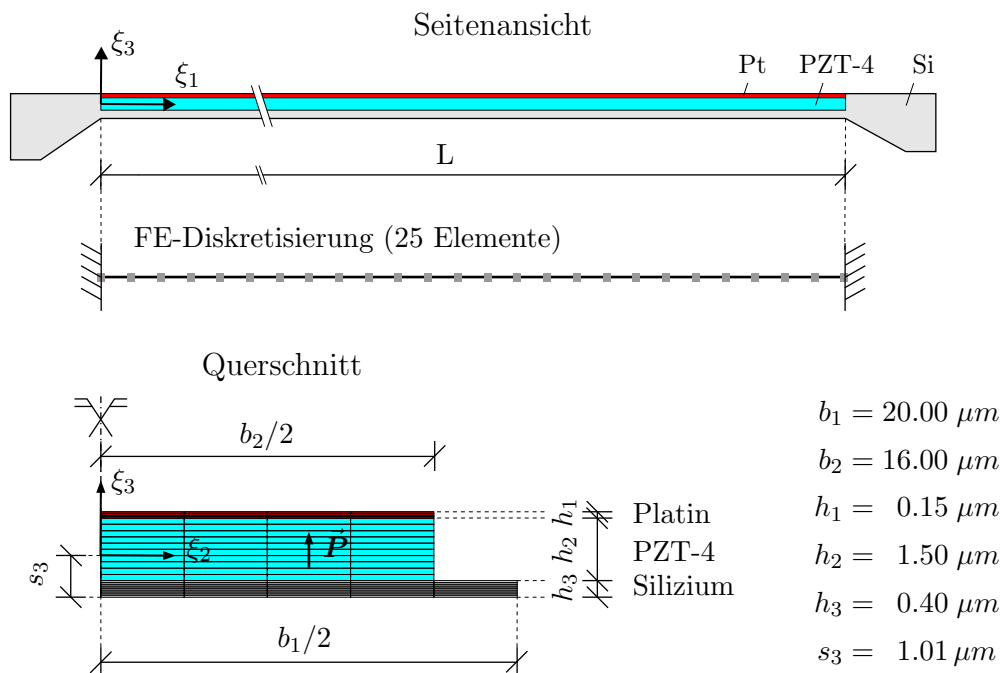


Abb. 7.33: Geometrie des untersuchten piezoelektrischen Schalters.

Materialschicht	E-Modul [GPa]	Querdehnung [-]	Diskretisierung $b \times h$
Platin, Pt	250	0.25	8×4
PZT-4	siehe Anhang A.3		8×10
Silizium, Si	162	0.23	10×8

Tab. 7.5: Materialparameter und Diskretisierung der jeweiligen Materialschicht.

nung in ξ_1 -Richtung hervorruft. Da eine entsprechende Verlängerung aufgrund der Randbedingungen nicht möglich ist, folgt aus der Belastung eine Druckspannung im piezoelektrischen Material. Durch den geschichteten Aufbau der Struktur ist bereits eine geringe Exzentrizität der PZT-4-Schicht vorgegeben, so dass neben der Normalkraft auch ein Biegemoment M_2 um die ξ_2 -Achse auftritt. Die damit einhergehende Verschiebung des Stabes in ξ_3 -Richtung kann zum Öffnen und Schließen des Schalters benutzt werden.

Die Länge L der untersuchten Struktur variiert zwischen 500 und 700 μm , die Gesamthöhe beträgt 2.05 μm , die Breite und die Höhe der einzelnen Materialschichten sind in Abbildung 7.33 definiert. Die gewählten Abmessungen liegen damit in der typischen Größenordnung solcher Bauteile, wie sie in der Literatur angegeben sind, siehe z.B. [45, 132]. Die Lage der Schwerachse $S(s_2, s_3)$ innerhalb des Querschnitts wurde unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Elastizitätsmodule der einzelnen Materialschichten ermittelt. Sie befindet sich bei $s_3 = 1.01 \mu\text{m}$ bezüglich der Unterkante der Siliziumschicht.

Da in diesem Beispiel auch die Verteilung der mechanischen Spannungen innerhalb des Querschnitts von Bedeutung ist, wird dieser entsprechend fein diskretisiert, wie aus Abbildung 7.33 und aus Tabelle 7.5 hervorgeht.

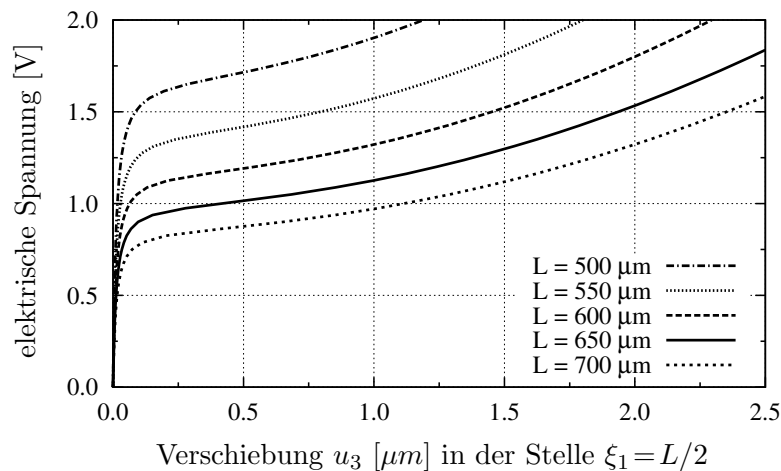


Abb. 7.34: Last-Verschiebungskurve bei unterschiedlichen Stablängen L .

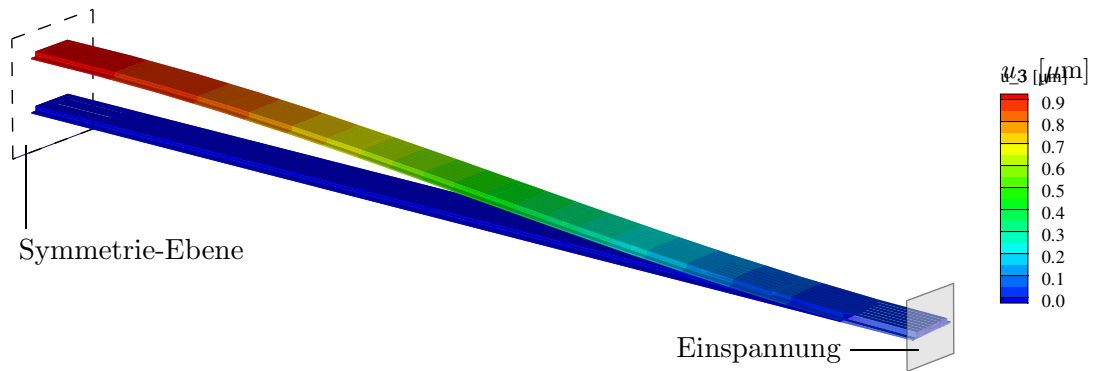


Abb. 7.35: Darstellung einer Hälfte des Schalters mit $L = 650 \mu\text{m}$ im Ausgangszustand und bei einer Belastung mit $U = 1.2 \text{ V}$, Verformung 20-fach überhöht.

Als Belastung wird eine elektrische Spannung in ξ_3 -Richtung mit einer Größe von $0-2 \text{ V}$ angelegt. Im Rahmen der Stabformulierung wird diese Belastung durch die Vorgabe des Freiheitsgrades c_3 modelliert, dessen Wert von 0 auf $1.33 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ gesteigert wird.

In Abbildung 7.34 ist die Last-Verschiebungskurve für unterschiedliche Schalterlängen L dargestellt. Zur Bestimmung der Verschiebungen an der Stelle $\xi_1 = L/2$ wird das System hierbei mit 26 Elementen diskretisiert. Das geometrisch nichtlineare Verhalten ist deutlich erkennbar. Aufgrund der exzentrischen Lage der piezoelektrischen Materialschicht tritt jedoch kein Verzweigungsproblem auf, sondern es findet ein stetiger Übergang in den nachkritischen Bereich statt. Erwartungsgemäß beginnt dieser Übergang bei zunehmender Stablänge bei im-

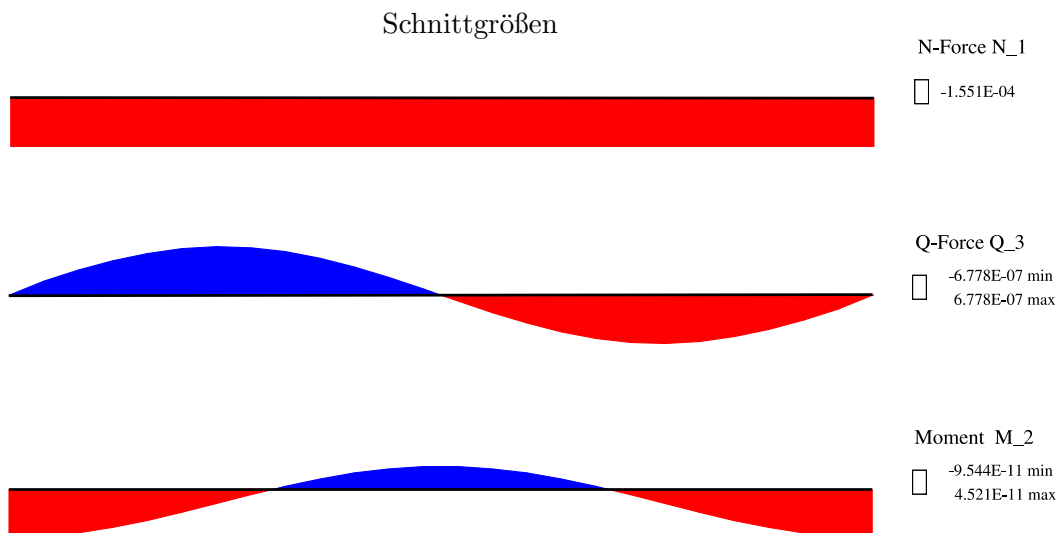


Abb. 7.36: Verlauf der resultierenden Schnittgrößen nach Gl. (6.29) bei einer Stablänge von $L=650 \mu\text{m}$ und einer Belastung mit $U = 1.2 \text{ V}$.

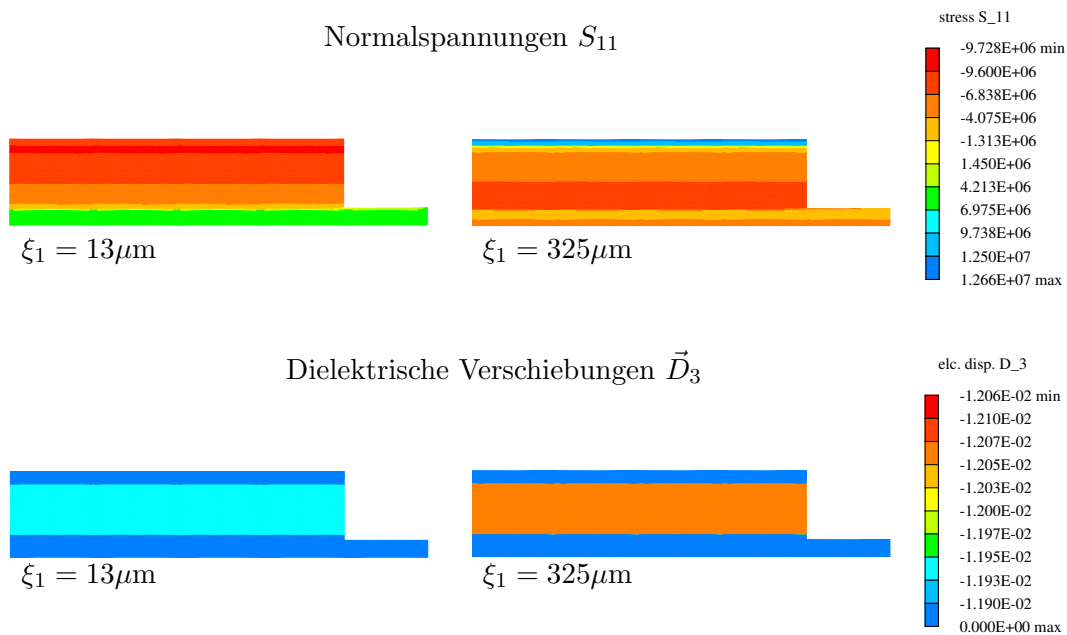


Abb. 7.37: Verteilung der Normalspannungen S_{11} und der dielektrischen Verschiebungen \vec{D}_3 im Querschnitt bei den Stabkoordinaten $\xi_1 = 13 \mu\text{m}$ bzw. $\xi_1 = 325 \mu\text{m}$.

mer kleineren Belastung. Die Darstellung des halben Systems im deformierten Zustand ist in Abbildung 7.35 illustriert.

Neben dem einfachen Aufbau des Schalters besteht ein weiterer Vorteil darin, dass nach dem Überschreiten der kritischen Last bereits geringe Änderungen der elektrischen Spannung ausreichen, um vergleichsweise große Verschiebungen hervorzurufen.

Im weiteren wird der Schalter mit der Länge $L = 650 \mu\text{m}$ im Detail untersucht. Die Schnittgrößen, die bei diesem System aus einer elektrischen Spannung von $U = 1.2 \text{ V}$ resultieren, sind in Abbildung 7.36 dargestellt. Die extremalen Momente treten an der Einspannung, sowie in der Feldmitte des Stabes auf.

Die Verteilung der Normalspannungen S_{11} und der dielektrischen Verschiebungen \vec{D}_3 im Querschnitt wird dementsprechend im Gaußpunkt des ersten bzw. des 13. Stabelements betrachtet. Aus Abbildung 7.37 wird deutlich, dass sich infolge des geschichteten Aufbaus des Schalters kein linearer Normalspannungsverlauf in ξ_3 -Richtung einstellt. Die gegensätzliche Krümmung des Stabes bei $\xi_1 = 13 \mu\text{m}$ und $\xi_1 = 325 \mu\text{m}$ wird ebenfalls aus Abbildung 7.37 ersichtlich, da die Zugfaser ihre Lage innerhalb Querschnitts entsprechend wechselt.

Weiterhin ist zu überprüfen, ob die auftretenden Druckspannungen in der piezoelektrischen Materialsicht Werte erreichen, die eine mechanische Depolarisation hervorrufen können. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 3.3.2 beschriebenen Me-

chanismus wirkt die Normalspannung S_{11} in diesem Fall zwar senkrecht zur Polarisationsrichtung, nach CAO & EVANS [30] bzw. SCHÄUFELE [137] sind jedoch auch hierbei Depolarisationseffekte zu beobachten. Aus Abbildung 7.37 ist zu entnehmen, dass die maximalen Druckspannungen eine Größe von knapp 10 MPa erreichen. Die von SCHÄUFELE [137] angegebene Grenzbelastung von 50 MPa liegt deutlich höher, so dass eine mechanische Depolarisation der Keramik nicht zu erwarten ist.

Berücksichtigung des nichtlinearen Stoffgesetzes

Aufgrund der Orientierung des elektrischen Feldes entgegen der Polarisationsrichtung können bei einer hinreichend großen Belastung des Schalters Domänenprozesse einsetzen, die ein materiell nichtlineares Verhalten zur Folge haben. Die Unterschiede, die sich dadurch im Vergleich zu einer materiell linearen Berechnung ergeben, werden in diesem Abschnitt diskutiert.

Das hierfür untersuchte System entspricht dem aus Abbildung 7.33, die Länge des Schalters beträgt $650 \mu\text{m}$. Die linearen Materialdaten sind in Tabelle 7.5 angegeben, die nichtlinearen Materialeigenschaften werden durch die Parameter aus Tabelle 7.6 beschrieben. Zu Beginn der numerischen Berechnung ist das piezoelektrische Material vollständig in ξ_3 -Richtung gepolt, wobei vorausgesetzt wird, dass die irreversiblen Verzerrungen aus dem Polungsvorgang gleich Null sind. Damit wird gewährleistet, dass die Struktur im Ausgangszustand frei von mechanischen Spannungen ist.

\vec{E}^c	E^{sat}	\vec{P}^{sat}	c	f_α	f_β	y_α	y_β
[V/m]	[-]	[C/m ²]	[-]	[-]	[-]	[-]	[-]
$1.3 \cdot 10^6$	0.002	0.300	50.0	25.0	25.0	0.50	-0.50

Tab. 7.6: Nichtlineare Materialparameter.

Aus der geometrisch und materiell nichtlinearen Berechnung folgt die in Abbildung 7.38 dargestellte Last-Verschiebungskurve, in der die Verschiebungen u_3 an der Stelle $\xi_1 = L/2$ aufgetragen sind. Zum Vergleich sind die entsprechenden Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt, d.h. bei Berücksichtigung des linearen Stoffgesetzes, ebenfalls in das Diagramm eingetragen.

Bis zu einer elektrischen Spannung von etwa einem Volt liefern beide numerische Berechnungen die gleichen Verschiebungen. Bei weiter zunehmender Belastung treten Domänenprozesse in der piezoelektrischen Materialschicht auf, aus denen die zunehmende Abweichung zwischen beiden Last-Verschiebungs-Kurven resultiert. Hierbei treten zwei gegensätzlich wirkende Mechanismen auf. Infolge der

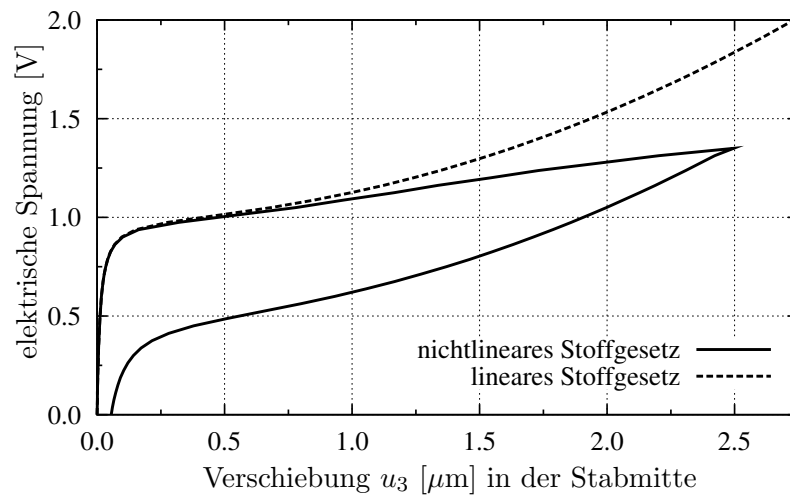


Abb. 7.38: Einfluss des nichtlinearen Stoffgesetzes auf die Last-Verschiebungskurve für den Freiheitsgrad u_3 an der Stelle $\xi_1 = L/2$.

Depolarisation des piezoelektrischen Materials vermindert sich der elektromechanische Koppeffekt. Dies hat zur Folge, dass die Verschiebungen bei gleich großer elektrischen Feldstärke kleiner sind, als bei einer materiell linearen Berechnung. Die Last-Verschiebungskurve aus der Berechnung mit dem nichtlinearen Stoffgesetz sollte folglich oberhalb der linearen Referenzkurve verlaufen.

Weiterhin ist der Einfluss der irreversiblen Verzerrungen zu beachten. Unter der Voraussetzung, dass der Schalter vor der Belastung frei von mechanischen Spannungen ist, treten bei der Depolarisation des piezoelektrischen Materials positive, irreversible Dehnungen in ξ_1 -Richtung auf. Diese haben zur Folge, dass bereits eine deutlich kleinere Belastung ausreicht, um die gleiche Verschiebung u_3 zu erreichen. Aus Abbildung 7.38 wird deutlich, dass dieser Effekt das nichtlineare Materialverhalten dominiert, da die Last-Verschiebungs-Kurve aus der nichtlinearen Berechnung unterhalb der linearen Referenzkurve liegt.

Bei der maximalen elektrischen Spannung von $U = 1.35 \text{ V}$ ist die irreversible Polarisation \vec{P}_3^i bereits auf einen Wert von 0.29 C/m^2 gesunken und die irreversible Verzerrung E_{11}^i auf den Wert von $3.2 \cdot 10^{-5}$ angewachsen. Dementsprechend bleibt bei auch vollständiger Entlastung des Systems ein Teil der Verschiebungen in ξ_3 -Richtung erhalten, wie aus Abbildung 7.38 deutlich hervorgeht.

7.6 Helical Spring

Ein Nachteil von piezoelektrischen Aktoren besteht darin, dass sich damit nur geringe Verschiebungen realisieren lassen. Aus diesem Grund existieren unterschiedliche Konzepte, um eine Vergrößerung der maximalen Verschiebung zu erreichen. Eine Übersicht hierzu ist in der Arbeit von NIEZRECKI et al. [122] zusammengefasst.

PEARCE et al. [126] stellen zu diesem Zweck einen schraubenförmig gedrehten, piezoelektrischen Aktor vor, der in Abbildung 7.39 dargestellt ist. Damit lassen sich sowohl Verschiebungen in Längsrichtung, als auch eine Verdrehung um die Längsachse des Aktors realisieren. Der Querschnitt besteht in radialer Richtung aus zwei gleich gepolten, piezoelektrischen Materialschichten, auf die ein elektrisches Feld mit entgegengesetzten Vorzeichen aufgebracht wird. Aus den daraus folgenden, gegensätzlichen Verzerrungen der beiden Materialschichten ergibt sich die resultierende Deformation des Systems. Das Funktionsprinzip entspricht somit dem eines parallel geschalteten, piezoelektrischen Bimorphs [127]. Spiralförmige Aktoren, die auf der Aktivierung der Schubverformungen basieren, werden bei JIAO & ZHANG [82] behandelt. Mögliche Einsatzbereiche solcher Aktoren sind z.B. in der Luftfahrt zur Steuerung von Bremsklappen [164] oder in modernen Lautsprechersystemen [166] zu finden.

Der hier betrachtete Aktor wurde bereits von PEARCE et al. [126] analytisch und experimentell untersucht. Die Geometrie des betrachteten Systems ist in

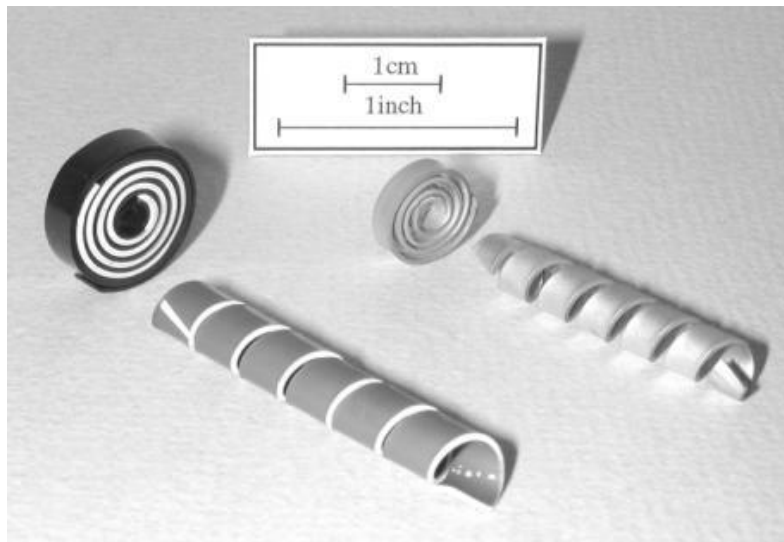


Abb. 7.39: Typische spiral- und schraubenförmige Aktoren aus piezoelektrischem Material vor (links) und nach der Sinterung (rechts) [126].

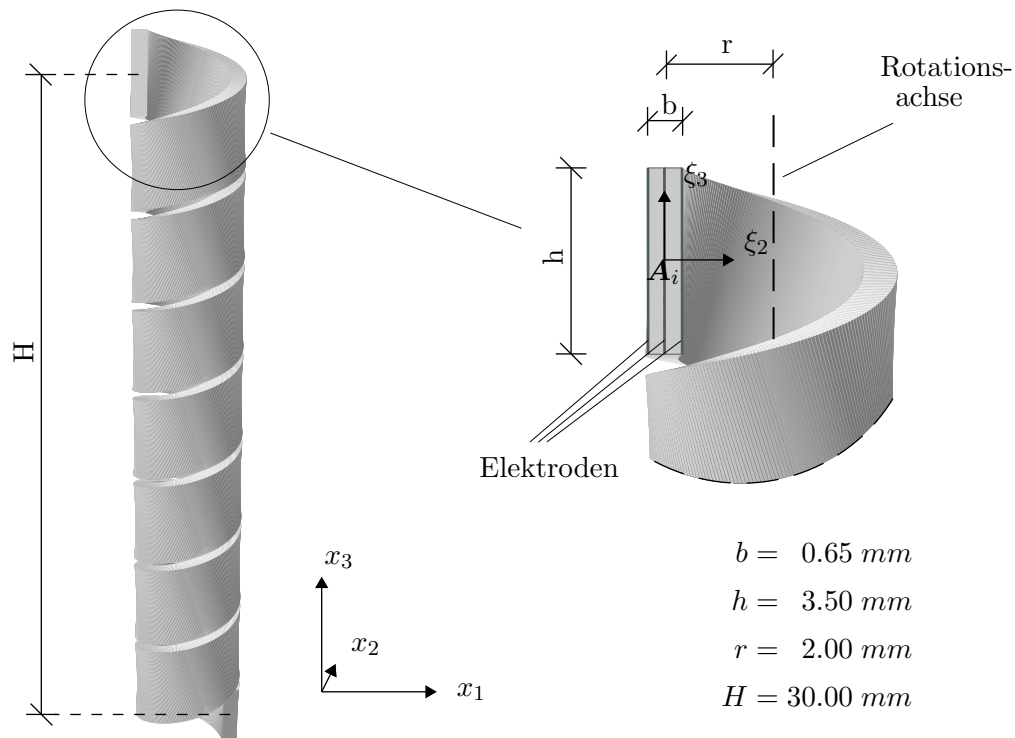


Abb. 7.40: Geometrie des untersuchten Aktors.

Abbildung 7.40 dargestellt. Der piezoelektrische Streifen besitzt eine Breite $b = 0.65 \text{ mm}$, eine Höhe $h = 3.5 \text{ mm}$ sowie eine Gesamtlänge von 100 mm . Er wird zu einer Spirale mit 7.5 Windungen aufgerollt. Da die Höhe H der Spirale nicht genau angegeben ist, wird $H = 30 \text{ mm}$ angenommen. Der Radius r bezüglich der Mittelfläche des piezoelektrischen Streifens beträgt 2.0 mm . Als Material wird eine PZT-5H-Keramik verwendet, die in Richtung der lokalen ξ_2 -Achse mit negativem Vorzeichen gepolt ist. Die Materialdaten sind in Anhang A.7 angegeben.

Zur Aufbringung des elektrischen Feldes sind an beiden Seiten und in der Mitte des Querschnitts Elektroden angebracht, wie auch der Abbildung 7.40 zu entnehmen ist. Die beiden außen liegenden Elektroden sind miteinander verbunden, an der mittleren Elektrode wird das Potential vorgegeben. Durch diese Anordnung tritt in den beiden piezoelektrischen Schichten die gleiche Feldstärke auf, jedoch mit entgegengesetzten Vorzeichen.

Bei der numerischen Modellierung des Aktors ist zu beachten, dass für ein Stabelement nur die Freiheitsgrade c_1 bis c_5 zur Verfügung stehen, um eine elektrische Belastung aufzubringen. Zwei unterschiedliche elektrische Belastungen innerhalb eines Querschnitts können folglich nicht modelliert werden. Diese Einschränkung lässt sich durch die Nutzung der exzentrischen Formulierung des Stabelements

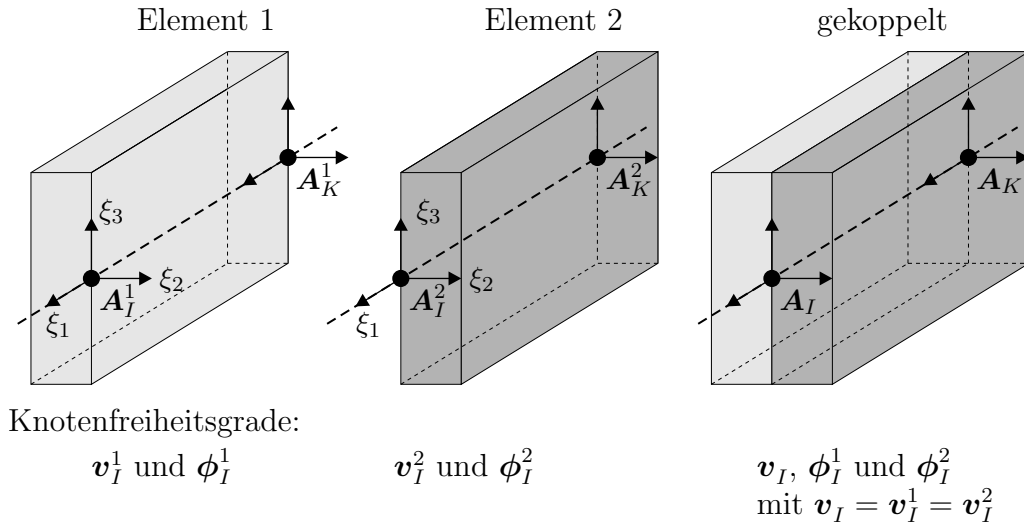


Abb. 7.41: Berücksichtigung von mehreren elektrischen Belastungen innerhalb des Querschnitts durch die Kopplung zweier Stabelemente.

umgehen. Zu diesem Zweck wird die Struktur in ξ_2 -Richtung mit zwei Stabelementen modelliert, denen jeweils eine piezoelektrische Schicht zugewiesen wird, siehe Abbildung 7.41. Die Knoten der beiden Elemente müssen hierbei die gleichen globalen Koordinaten besitzen, was eine exzentrische Anordnung der Querschnitte erfordert. Auf diese Weise kann für jedes piezoelektrische Material eine unabhängige elektrische Belastung definiert werden. Um zu gewährleisten, dass die Kinematik beider Elemente gleich ist, werden ihre mechanischen Freiheitsgrade in der numerischen Berechnung miteinander gekoppelt. Der Nachteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass die Verwölbung des Gesamtquerschnitts nicht erfasst werden kann.

Für die numerische Berechnung wird zunächst eine Konvergenzuntersuchung zur Bestimmung der erforderlichen Anzahl an Stabelementen durchgeführt. Zu diesem Zweck wird die Endverschiebung u_3^E des Aktors in die globale x_3 -Richtung, sowie die Endverdrehung φ_3^E um die Rotationsachse in Anhängigkeit von der Diskretisierung betrachtet, siehe Abbildung 7.42. Am Knoten K_1 sind alle mechanischen Freiheitsgrade gehalten. Da eine numerische Voruntersuchung ergeben hat, dass in diesem Beispiel keine Verwölbungen des Querschnitts auftreten, werden die Wölbfreiheitsgrade α_1 bis α_3 an allen Knoten gehalten. Der Querschnitt wird für jede Materialschicht mit einem Element diskretisiert. Als Belastung wird ein elektrisches Feld der Größe $\vec{E}_2 = 500 \text{ V/mm}$ in lokaler ξ_2 -Richtung des Stabes vorgegeben.

In Abbildung 7.43 sind die Ergebnisse der Konvergenzuntersuchung dargestellt. Daraus geht hervor, dass eine Diskretisierung des Aktors mit 225 Stabelementen

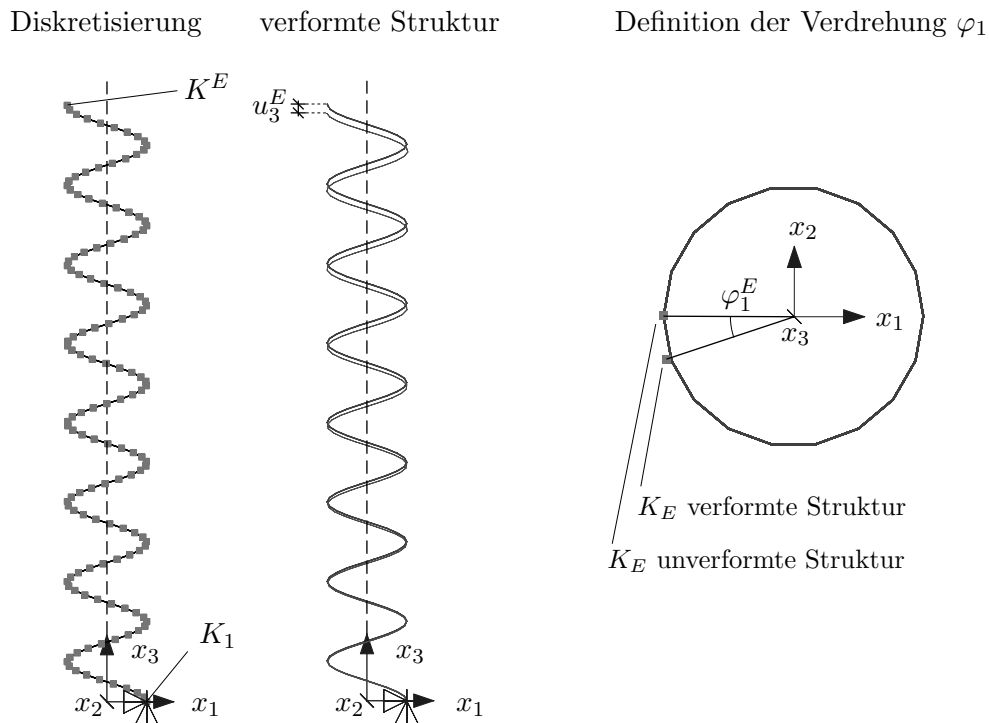


Abb. 7.42: Diskretisierung des Aktors mit 135 Elementen, sowie die Definition der Endverschiebung u_3^E und der Endverdrehung φ_3^E .

hinreichend genaue Ergebnisse liefert. Für den auskonvergierten Zustand ergibt sich für die Endverschiebung ein Wert $u_3^E = -0.0381 \text{ mm}$, die Endverdrehung φ_3^E beträgt -3.291 Grad . Die deformierte Struktur ist in Abbildung 7.44 dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass die aufgebrauchte Belastung eine Verkürzung in Richtung der Längsachse des Aktors, sowie eine Vergrößerung des Radius am

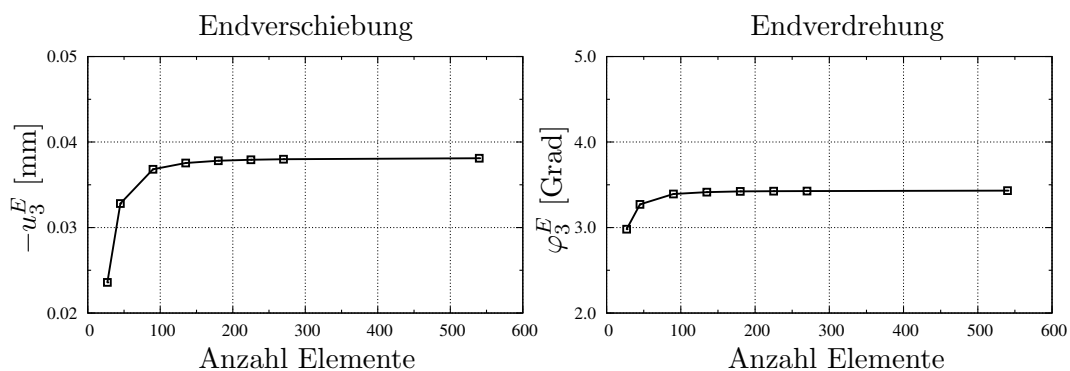


Abb. 7.43: Untersuchung des Konvergenzverhaltens anhand der Endverschiebung u_3^E und der Endverdrehung φ_3^E (Stab-W0E3).

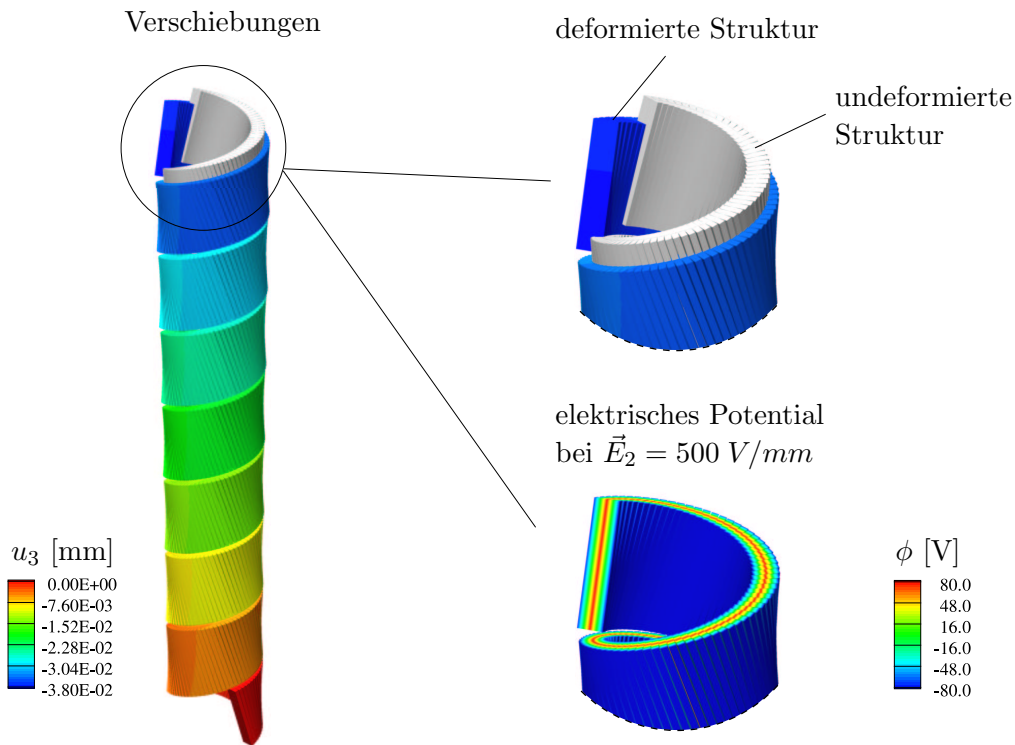


Abb. 7.44: Darstellung der Verformung (10-fach überhöht) des Aktors und Verteilung des Potentials infolge eines elektrischen Feldes \vec{E}_2 der Größe 500 V/mm .

freien Ende zur Folge hat. Im Anschluss an die Konvergenzuntersuchung werden die Ergebnisse aus der numerischen Berechnung mit der analytischen Lösung und den experimentellen Daten aus der Literatur [126] verglichen. Hierzu wird die Endverdrehung φ_3^E bei verschiedenen großen Belastungen betrachtet.

Die Ergebnisse aus der numerischen Berechnung mit dem Stabelement sind in Abbildung 7.45 dargestellt und zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Aufgrund der regelmäßigen Geometrie und der gleichförmigen Belastung ergibt sich eine lineare Beziehung zwischen dem elektrischen Feld und der Endverdrehung φ_3^E . Der Einfluss des quadratischen Ansatzes ist in diesem Beispiel verhältnismäßig klein, nimmt jedoch mit steigendem elektrischen Feld zu. Aus Abbildung 7.45 ist weiterhin ersichtlich, dass diese Ergebnisse signifikant von den experimentell ermittelten Daten abweichen. Nach PEARCE [126] können die Versuchswerte mit der Beziehung

$$\varphi_3^E = a \vec{E}_2 + b (\vec{E}_2)^2 \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} a &= 8.23 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{mm}/\text{V} \\ b &= 9.83 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{mm}^2/\text{V}^2 \end{aligned} \quad (7.5)$$

approximiert werden. Hieraus wird deutlich, dass kein linearer Zusammenhang mehr zwischen der Belastung und der Verdrehung besteht. Ein ähnliches Ver-

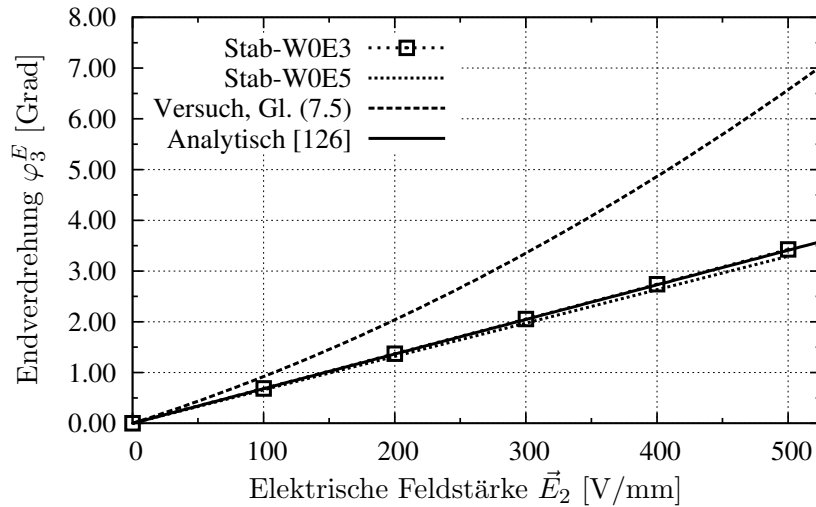


Abb. 7.45: Vergleich der Ergebnisse bei Berücksichtigung eines linearen Stoffgesetzes mit den nach Gl. (7.5) approximierten experimentellen Daten.

halten wird auch von MOHAMMADI et al. [117] bei der Untersuchung eines spiralförmigen Aktors aus PZT-5H-Material beobachtet. In diesem Fall tritt ebenfalls eine nichtlineare Last-Verschiebungskurve einschließlich Hysterese-Effekte auf. Die Autoren führen dieses Verhalten auf die charakteristischen nichtlinearen Werkstoffeigenschaften von Weich-PZT-Keramiken zurück, zu denen auch das hier betrachtete PZT-5H-Material gehört.

Folglich ist nun auch in diesem Beispiel zu prüfen, ob materielle Nichtlinearitäten einen entsprechenden Einfluss auf die Last-Verschiebungskurve haben. Zu diesem Zweck wird das bereits betrachtete System unter Berücksichtigung des nichtlinearen Stoffgesetzes untersucht. Die hierbei verwendeten nichtlinearen Materialparameter sind in Tabelle 7.7 zusammengefasst.

\vec{E}^c [V/m]	\vec{P}^{sat} [C/m ²]	E^{sat} [-]	c [-]	f_α [-]	f_β [-]	y_α [-]	y_β [-]
$0.65 \cdot 10^6$	0.330	0.00125	16.0756	8.0	8.0	0.50	-0.50

Tab. 7.7: Nichtlineare Materialparameter für PZT-5H. Die Werte für \vec{E}^c und \vec{P}^{sat} entsprechen den Herstellerangaben [23].

Aus Abbildung 7.46 wird deutlich, dass der qualitative Verlauf der Last-Verschiebungskurve mit dem nichtlinearen Materialmodell gut erfasst werden kann. Die hierbei auftretenden Abweichungen lassen sich damit erklären, dass die vorgeschlagene Verteilungsfunktion $\mu(\alpha, \beta)$ des Preisach-Modells nach Gl. (4.22) die Hysterese des hier verwendeten Materials nicht exakt wiedergibt. Durch die

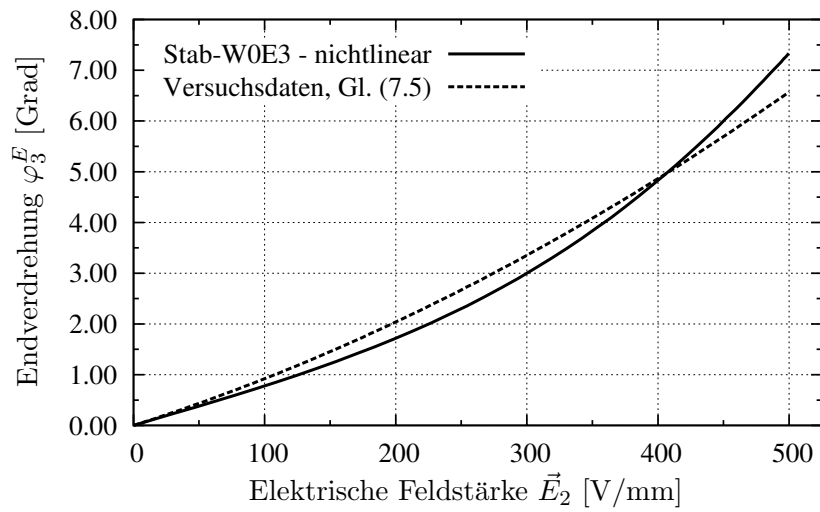


Abb. 7.46: Vergleich der Ergebnisse aus der nichtlinearen numerischen Berechnung mit den Versuchsdaten von PEARCE et al. [126].

Verwendung einer Verteilungsfunktion, die der PZT-5H-Keramik angepasst ist, sind weitere Verbesserungen der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung zu erwarten.

7.7 Dynamische Untersuchung eines Halbrings

Zur Untersuchung der dynamischen Eigenschaften der Stabformulierung wird der in Abbildung 7.47 dargestellte Halbring betrachtet. Hierbei handelt es sich um ein Beispiel, dass bereits mehrfach in der Literatur mit verschiedenen Schalenformulierungen untersucht wurde, siehe hierzu KLINKEL & WAGNER [90], SZE et al. [154] und TZOU & YE [163].

Das System besteht aus einem halbkreisförmigen Stahlring ($E = 68.95 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$) mit einem inneren Radius r_i von 318.310 mm . Auf beiden Seiten des Rings befindet sich jeweils eine piezoelektrische Materialschicht mit einer Stärke von 0.254 mm , die entsprechenden Materialdaten sind dem Anhang A.8 zu entnehmen. Der Halbring ist an der Stelle $x_1 = -r_i$ eingespannt. Die Systemlinie verläuft halbkreisförmig mit einem Radius von 321.739 mm und liegt somit im Schwerpunkt des jeweils betrachteten Querschnitts.

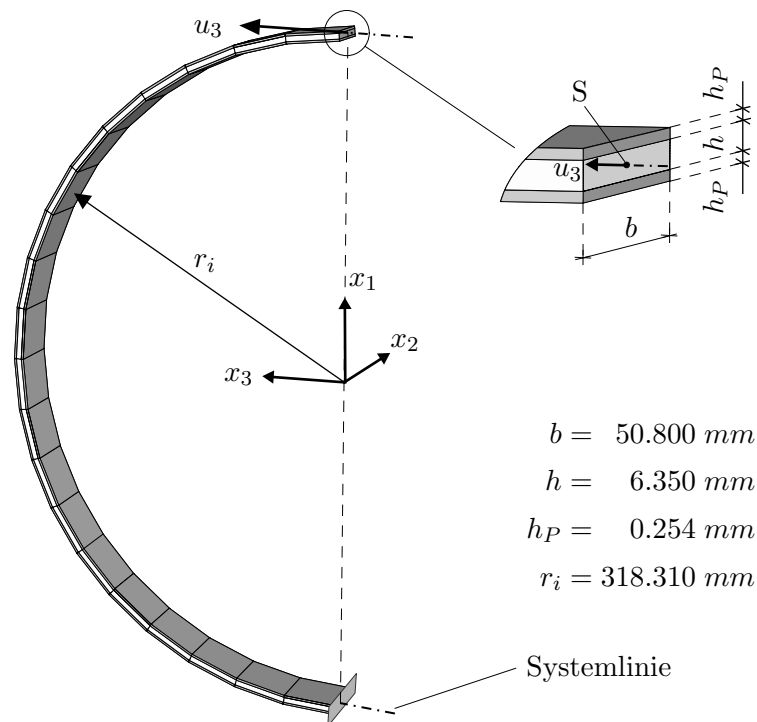


Abb. 7.47: Geometrie des untersuchten Halbrings.

Zunächst wird eine Eigenwertuntersuchung des Stahlrings ohne Berücksichtigung der piezoelektrischen Materialschichten durchgeführt. Die Eigenwerte $f_i = \omega_i / (2\pi)$ folgen hierbei aus der Lösung des Problems $(\mathbf{K} - \omega_i \mathbf{M}) \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$. In der Tabelle 7.8 sind die entsprechenden Ergebnisse aus der numerischen Berechnung sowie die Daten aus der Literatur zusammengefasst. Im Rahmen der Stabfor-

Elementformulierung	Diskretisierung Umfang×Breite×Höhe	Eigenwerte [1/s]		
		f_1	f_2	f_3
SZE et al. [154]	$10 \times 1 \times 1$	3.6822	5.8278	11.838
	$20 \times 2 \times 1$	3.6810	5.8041	11.691
KLINKEL & WAGNER [90]	$10 \times 1 \times 1$	3.6832	5.8352	11.843
	$20 \times 1 \times 1$	3.6727	5.8071	11.660
Stab-W0E0	$10 \times 1 \times 1$	3.7176	10.8065	11.950
	$20 \times 1 \times 1$	3.6729	10.6595	11.653
Stab-W _Q 3E0	$10 \times 20 \times 10$	3.7176	5.3110	11.950
	$20 \times 2 \times 1$	3.6728	5.3537	11.651
	$20 \times 20 \times 10$	3.6729	5.2319	11.653

Tab. 7.8: Vergleich der Eigenwertanalyse der Stabformulierung mit Ergebnissen aus der Literatur.

mulierung werden zwei Fälle betrachtet, um auf diese Weise den Einfluss der Querschnittsverwölbung zu untersuchen.

Im Vergleich zu den Schalenformulierungen werden die Eigenfrequenzen f_1 und f_3 bei der Diskretisierung mit zehn Elementen in Umfangsrichtung um etwa ein Prozent überschätzt. Bei einer Diskretisierung mit 20 Elementen stimmen die Ergebnisse dagegen sehr gut überein. Die zugehörigen Eigenformen sind in Abbildung 7.48 illustriert.

Auffällig sind Abweichungen bei der Eigenfrequenz f_2 . Ohne Berücksichtigung der Querschnittsverwölbung ist der entsprechende Eigenwert erheblich zu

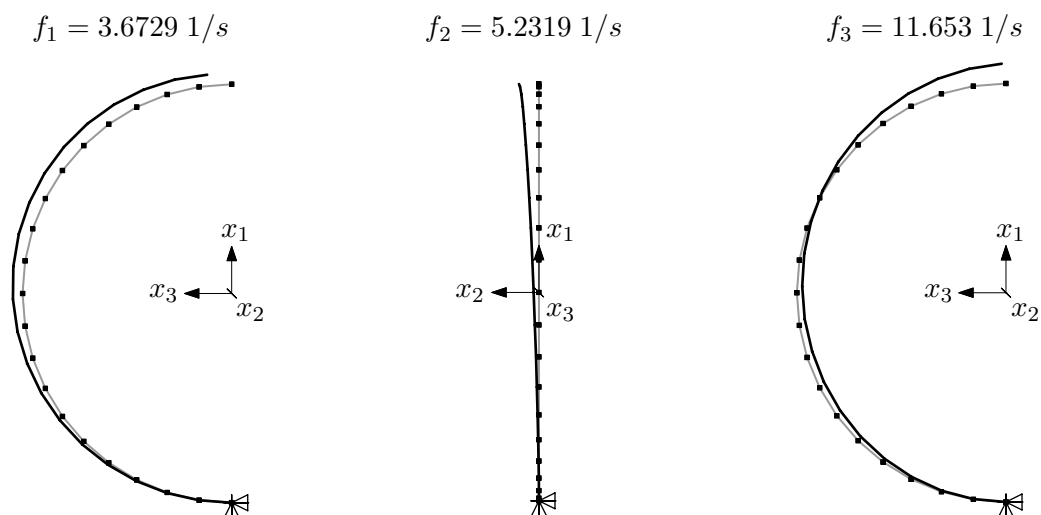


Abb. 7.48: Darstellung der Eigenformen zu den Eigenwerten f_1 , f_2 und f_3 bei einer Diskretisierung mit $20 \times 20 \times 10$ Elementen (Stab-W_Q3E0).

groß. Durch die Einbeziehung der Querschnittsverwölbung wird die zweite Eigenfrequenz deutlich besser getroffen. Im Vergleich zu den Referenzlösungen ist sie jedoch noch immer um etwa acht Prozent zu klein. Dies lässt die Vermutung zu, dass der Eigenwert f_2 mit der entwickelten Stabformulierung nur unzureichend erfasst werden kann. Als Ursache ist hierfür die im Vergleich zu den Schalenformulierungen vereinfachte Kinematik des Stabelements anzunehmen.

Im Weiteren wird das dynamische Verhalten der Stabformulierung bei großen Deformationen der Struktur betrachtet. Zu diesem Zweck wird nach [90] ein elektrisches Potential der Größe $\phi(t) = 450 \cos(2\pi f t)$ mit $f = 3.9566 \text{ 1/s}$ an der äußeren PZT-Schicht vorgegeben. Die dynamische Berechnung erfolgt mit dem Newmark-Verfahren unter Verwendung der Standard-Parameter $\beta = 0.25$ und $\gamma = 0.50$. Die Zeitschrittweite beträgt hierbei $1.75 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.

Der Vergleich der Ergebnisse aus der numerischen Berechnung mit den Daten von KLINKEL & WAGNER [90] ist in der Abbildung 7.49 dargestellt. Darin ist die Verschiebung u_3 des freien Endes des Halbrings (siehe Abbildung 7.47) über die Zeit aufgetragen. Die Ergebnisse zeigen zu Beginn der Berechnung eine sehr gute Übereinstimmung. Die Abweichungen, die sich mit fortlaufender Dauer der Berechnung einstellen, können unter anderem darauf zurückzuführen sein, dass sich die in Abbildung 7.49 aufgetragenen Verschiebungen nicht exakt auf den gleichen

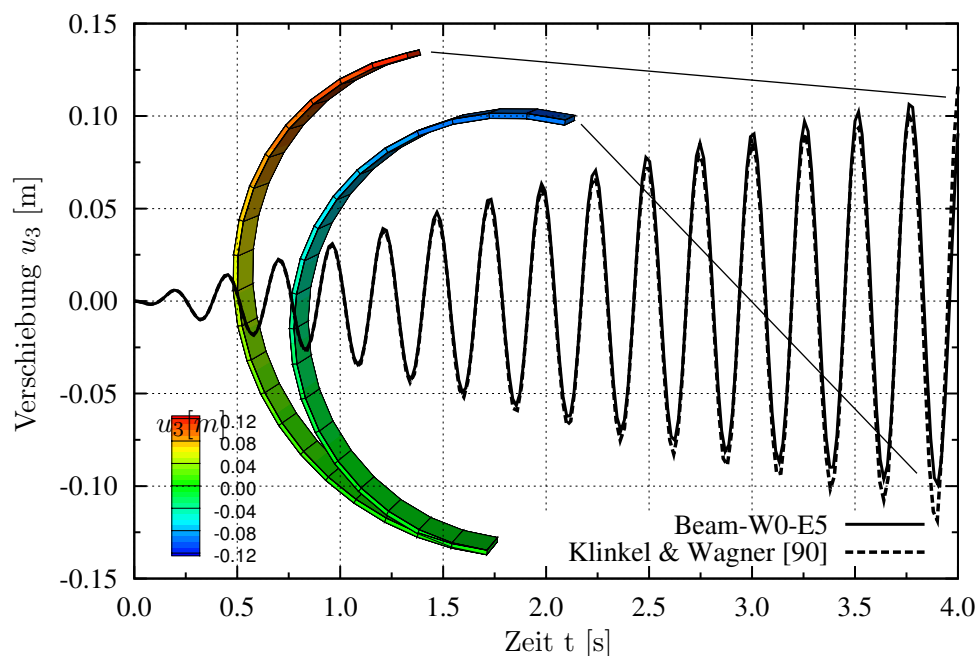


Abb. 7.49: Vergleich der Ergebnisse aus der dynamischen Berechnung mit den Resultaten von KLINKEL & WAGNER [90].

Punkt im Querschnitt beziehen. In der Stabformulierung wird der Schwerpunkt S betrachtet, während bei [90] die Verschiebung des unteren Eckpunktes dargestellt ist. Dies kann vor allem bei größeren Deformationen zu Abweichungen führen.

Dieses Beispiel zeigt, dass es mit der entwickelten Stabformulierung möglich ist, dynamische Probleme mit großen Verschiebungen abzubilden. Die Resultate sind für den hier betrachteten Fall mit denen der Schalenformulierung von KLINKEL & WAGNER [90] weitgehend vergleichbar.

8 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird eine piezoelektrische, dreidimensionale Stabformulierung entwickelt, die sowohl geometrische als auch materielle Nichtlinearitäten beinhaltet. Die maßgeblichen Eigenschaften der Finite-Element-Formulierung lassen sich in drei Punkte zusammenfassen:

- **Stabformulierung**

Die dreidimensionale, exzentrische Stabformulierung basiert auf den Annahmen der Kinematik nach Timoshenko, die zusätzlich die Verwölbung des Querschnitts infolge Torsion, Querkraft und piezoelektrischer Schubdeformation berücksichtigt. Durch die Beschreibung von endlichen Rotationen des Querschnitts können mit dieser Formulierung Stabilitätsprobleme, große Deformationen sowie Starrkörperbewegungen behandelt werden.

Zur Erfassung der elektromechanischen Koppeleffekte werden die neun mechanischen Freiheitsgrade um fünf elektrische Freiheitsgrade erweitert. Dies ermöglicht eine hinreichend genaue Beschreibung des elektrischen Potentials sowohl in Richtung der Stabachse als auch in der Querschnittsebene. Weiterhin lassen sich mit der entwickelten Formulierung die Oberflächenladungen als äußere elektrische Belastung berücksichtigen. Hierzu werden die auf dem Rand des Stabes wirkenden Größen durch eine geeignete Umformung auf die Referenzlinie des Stabes projiziert und den elektrischen Freiheitsgraden der Elementknoten entsprechend zugeordnet.

- **Querschnitt**

Die Beschreibung des Querschnitts erfolgt mit der Methode der Finiten Elemente. Mit diesem Verfahren können sowohl eine allgemeine Form sowie unterschiedliche Materialien innerhalb des Querschnitts berücksichtigt werden. Die Beschränkung der piezoelektrischen Materialschicht auf eine rechteckförmige Geometrie resultiert ausschließlich aus dem gewählten Ansatz zur Approximation des elektrischen Potentials.

Aus der zweidimensionalen Finite-Element-Approximation des Querschnitts lassen sich die jeweiligen Wölbfunktionen bestimmen, die sich infolge der Belastungen aus Torsion, Querkraft und piezoelektrischer Schubdeformation ergeben. Die auf diese Weise ermittelten Wölbfunktionen werden an diskreten Stellen des Querschnitts ausgewertet und durch die numerische Integration über die Querschnittsfläche in der Stabformulierung berücksichtigt.

Ein neuer Aspekt, der im Rahmen dieser Arbeit vorgestellt wird, ist die Berücksichtigung von piezoelektrisch induzierten Schubverformungen des

Querschnitts mit Hilfe einer geeigneten Wölbfunktion. Die numerischen Beispiele zeigen, dass mit diesem Verfahren sehr gute Ergebnisse erzielt werden können. In den betrachteten Fällen sind diese mit den Resultaten aus Berechnungen mit finiten Volumenelementen vergleichbar.

- **Materialmodell**

Zur Abbildung der materiellen Nichtlinearitäten, die in piezoelektrischen Werkstoffen in Form von ferroelektrischen Hysteresen auftreten, wird das skalare Preisach-Modell verwendet. Hierbei handelt es sich um ein allgemeines, mathematisches Modell zur Beschreibung von Hysterese-Phänomenen. Aus der Anwendung auf piezoelektrische Werkstoffe resultiert daraus eine phänomenologische Beschreibung der ferroelektrischen Hysteresen.

Das skalare Preisach-Modell stellt einen Parameter zur Beschreibung der nichtlinearen Zustandsgrößen bereit. Durch die Vorgabe der Polarisationsrichtung, die hierbei parallel zum resultierenden elektrischen Feld angenommen wird, ergibt sich daraus eine uniaxiale, dreidimensionale Formulierung des nichtlinearen Materialmodells. Obwohl im Rahmen dieser Arbeit keine konsistente Linearisierung des Stoffgesetzes vorgenommen wird, zeigt das Materialmodell sehr gute Konvergenzeigenschaften.

Die durchgeführten numerischen Tests demonstrieren die Zuverlässigkeit der entwickelten Elementformulierung. Der Vergleich mit analytischen Lösungen bzw. mit Resultaten die mit anderen Elementformulierungen erzielt wurden, bestätigt die Richtigkeit der gewonnenen Berechnungsergebnisse. Weiterhin wurde deutlich, dass die Effizienz der Stabformulierung nicht allein auf die numerische Berechnung des Problems beschränkt ist, sondern auch bei der vorhergehenden Modellierung und bei der nachfolgenden Auswertung der Ergebnisse zum Tragen kommt.

Im Rahmen weiterer Forschungsarbeiten ist zu untersuchen, ob eine hinreichend genaue Approximation des elektrischen Feldes auch bei einer beliebigen Geometrie der piezoelektrischen Materialschicht erreichbar ist. Damit ließen sich dann auch solche piezoelektrische Stabstrukturen betrachten, die mit der bisherigen Formulierung nur unzureichend modelliert werden können, wie z.B. Stäbe mit röhrenförmigen Querschnitten [141].

Weitere Forschungsaktivitäten betreffen mögliche Verbesserungen des nichtlinearen Materialmodells. Hierbei ist z.B. zu untersuchen, ob eine Erweiterung des skalaren Preisach-Modells auf das von MAYERGOYZ [113] beschriebene Vektor-Preisach-Modell geeignet ist, um ein dreidimensionales, nichtlineares Materialmodell für piezoelektrische Werkstoffe zu entwickeln. Damit wäre die Erfassung von Domänenprozessen möglich, die nicht auf eine vorgegebene Richtung beschränkt sind.

Weiterhin ist zu untersuchen, ob das Preisach-Modell genutzt werden kann, um neben den ferroelektrischen auch ferroelastische Hysterese-Effekte zu modellieren. In diesem Zusammenhang ist die Berücksichtigung der fehlenden „Eins-zu-Eins“-Zuordnung zwischen der irreversiblen Polarisation und den irreversiblen Verzerrungen von zentraler Bedeutung. Als ein möglicher Ansatzpunkt ist hierbei die Arbeit von FREEMAN & JOSHI [52] zu nennen. Die Untersuchung von ferroelastischen Hysterese-Effekten ist z.B. bei Stabstrukturen mit exzentrisch angeordneten piezoelektrischen Materialschichten von Interesse. Die infolge von Biegebeanspruchungen auftretenden hohen Normalspannungen an der Randfaser des Stabes können hierbei zur mechanischen Depolarisation des piezoelektrischen Materials führen. Mit einem Materialmodell, das ferroelastische Hysterese-Effekte abbilden kann, lassen sich solche Vorgänge vorhersagen und entsprechend berücksichtigen.

A Materialdaten

Die Anordnung der Einträge in den Materialmatrizen entspricht der in Abschnitt 3.4 angegebenen Reihenfolge. Die jeweiligen Matrizen sind in den folgenden Einheiten notiert: \mathbb{C} in [GPa], \mathbf{e} in [C/m²] und ϵ in [C²/Nm²].

A.1 Materialdaten zu Beispiel 5.2.1

Material: Zinkoxid [139]

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 209.7 & 121.1 & 105.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 121.1 & 209.7 & 105.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 105.1 & 105.1 & 210.9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 44.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 42.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 42.5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & -0.573 \\ 0.00 & 0.00 & -0.573 \\ 0.00 & 0.00 & 1.320 \\ 0.00 & 0.00 & 0.000 \\ 0.00 & -0.48 & 0.000 \\ -0.48 & 0.00 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 8.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 8.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 9.00 \end{bmatrix} \cdot 10^{-11}$$

A.2 Materialdaten zu Beispiel 7.1.1 und 7.1.2

Material: PZT-4, polarisiert in ξ_3 -Richtung [169], fehlende Einträge wurden ergänzt und sind durch Unterstreichung markiert.

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 132.0 & 73.0 & 71.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 73.0 & \underline{132.0} & \underline{71.0} & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 71.0 & \underline{71.0} & 115.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \underline{25.6} & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \underline{25.6} & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \underline{30.6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -4.1 \\ 0.0 & 0.0 & -4.1 \\ 0.0 & 0.0 & \underline{12.0} \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.5 & 0.0 \\ 10.5 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 7.08 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & \underline{7.08} & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 5.84 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$$

Material: PZT-4, polarisiert in ξ_1 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 115.0 & 71.0 & 71.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 71.0 & 132.0 & 73.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 71.0 & 73.0 & 132.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 30.6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 12.0 & 0.0 & 0.0 \\ -4.1 & 0.0 & 0.0 \\ -4.1 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 10.5 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 5.84 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 7.08 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 7.08 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$$

A.3 Materialdaten zu Beispiel 7.1.3 und 7.5

Material: PZT-4, polarisiert in ξ_3 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 138.5 & 77.4 & 73.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 77.4 & 138.5 & 73.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 73.6 & 73.6 & 114.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 30.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 5.2 \\ 0.0 & 0.0 & 5.2 \\ 0.0 & 0.0 & -15.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -12.7 & 0.0 \\ -12.7 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1.31 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.31 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.15 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

A.4 Materialdaten zu Beispiel 7.2.1 und 7.2.2

Material: PZT-Keramik [85], polarisiert in ξ_3 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 128.4 & 69.1 & 69.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 69.1 & 128.4 & 69.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 69.1 & 69.1 & 128.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 29.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 29.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 29.6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 & -3.46 \\ 0.00 & 0.00 & -3.46 \\ 0.00 & 0.00 & 25.58 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 15.41 & 0.00 \\ 15.41 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.50 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.50 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

A.5 Materialdaten zu Beispiel 7.3

Material: PZT-4 [32], polarisiert in ξ_3 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 138.5 & 77.4 & 73.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 77.4 & 138.5 & 73.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 73.6 & 73.6 & 114.7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 30.6 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 25.6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & -5.2 \\ 0.0 & 0.0 & -5.2 \\ 0.0 & 0.0 & 15.1 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 12.7 & 0.0 \\ 12.7 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1.31 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.31 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.15 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

Material: Graphit-Epoxy, Orientierung der Fasern in ξ_1 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 134.86 & 5.16 & 5.16 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 5.16 & 14.36 & 7.14 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 5.16 & 7.14 & 14.36 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.65 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 3.61 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 5.65 \end{bmatrix}$$

Material: Graphit-Epoxy, Orientierung der Fasern um 20 Grad gedreht

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 108.8 & 17.2 & 5.4 & -33.7 & 0.0 & 0.0 \\ 17.2 & 16.4 & 6.9 & -5.0 & 0.0 & 0.0 \\ 5.4 & 6.9 & 14.4 & 0.6 & 0.0 & 0.0 \\ -33.7 & -5.0 & 0.6 & 17.7 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.8 & -0.7 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.7 & 5.4 \end{bmatrix}$$

A.6 Materialdaten zu Beispiel 5.2.2, 7.4.1 und 7.4.2

Material: PZT-5H [20], polarisiert in ξ_1 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 126.0 & 84.1 & 84.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 84.1 & 126.0 & 79.5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 84.1 & 79.5 & 126.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 23.3 & 0.0 & 0.0 \\ -6.5 & 0.0 & 0.0 \\ -6.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 17.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 17.0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1.30 & 0.000 & 0.000 \\ 0.00 & 1.503 & 0.000 \\ 0.00 & 0.000 & 1.503 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

A.7 Materialdaten zu Beispiel 7.6

Material: PZT-5H [23], negativ polarisiert in ξ_2 -Richtung

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 126.0 & 79.5 & 84.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 79.5 & 126.0 & 84.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 84.1 & 84.1 & 117.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 23.0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.0 & 6.55 & 0.0 \\ 0.0 & 6.55 & 0.0 \\ 0.0 & -23.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.00 & 0.0 \\ 0.0 & 0.00 & 0.0 \\ 0.0 & 0.00 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 2.77 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.77 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.01 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8}$$

A.8 Materialdaten zu Beispiel 7.7

PZT-Keramik [153]: $\rho = 7750 \text{ kg/m}^3$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 84.81 & 36.35 & 36.35 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 36.35 & 84.81 & 36.35 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 36.35 & 36.35 & 84.81 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 24.23 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 24.23 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 24.23 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 21.677 \\ 0.0 & 0.0 & 21.677 \\ 0.0 & 0.0 & 12.955 \\ 0.0 & 0.0 & 0.000 \\ 0.0 & 0.0 & 0.000 \\ 0.0 & 0.0 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 1.65 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.65 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.65 \end{bmatrix}$$

Literatur

- [1] AHMAD, S.N. / UPADHYAY, C.S. / VENKATESAN, C.: *Linear and Nonlinear Analysis of a Smart Beam Using General Electrothermoelastic Formulation*. AIAA Journal 42(4) (2004), S. 840–849.
- [2] AHMAD, S.N. / UPADHYAY, C.S. / VENKATESAN, C.: *Electro-thermo-elastic Formulation for the Analysis of Smart Structures*. Smart Materials and Structures 15(2) (2006), S. 401–416.
- [3] ALDRAIHEM, O.J. / KHDEIR, A.A.: *Smart Beams with Extension and Thickness-Shear Piezoelectric Actuators*. Smart Materials and Structures 9(1) (2000), S. 1–9.
- [4] ALDRAIHEM, O.J. / WETHERHOLD, R.C.: *Mechanics and Control of Coupled Bending and Twisting Vibration of Laminated Beams*. Smart Materials and Structures 6(2) (1997), S. 123–133.
- [5] ALLIK, H. / HUGHES, T.J.R.: *Finite Element Method for Piezoelectric Vibration*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 2 (1970), S. 151–157.
- [6] ALLIK, H. / WEBMAN, K.M. / HUNT, J.T.: *Vibrational Response of Sonar Transducers Using Piezoelectric Finite Elements*. The Journal of the Acoustic Society of America 56(6) (1974), S. 1782–1791.
- [7] ALTAY, G.A. / DÖKMECI, M.C.: *Some Comments on the Higher Order Theories of Piezoelectric, Piezothermoelastic and Thermopiezoelectric Rods and Shells*. International Journal of Solids and Structures 40(18) (2003), S. 4699–4706.
- [8] ALTENBACH, J. / ALTENBACH, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1994.
- [9] ARGYRIS, J.H.: *An Excursion into Large Rotations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 32(1) (1982), S. 85–155.
- [10] AURICCHIO, F. / BISEGMA, P. / LOVADINA, C.: *Finite Element Approximation of Piezoelectric Plates*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 50(6) (2001), S. 1469–1499.
- [11] BAŞAR, Y. / WEICHERT, D.: *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2000.
- [12] BAILLARGEON, B.P. / VEL, S.S.: *Active Vibration Suppression of Sandwich Beams using Piezoelectric Shear Actuators: Experiments and Numerical Simulations*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 16(6) (2005), S. 517–530.

- [13] BARKER, J.A. / SCHREIBER, D.E. / HUTH, B.G. / EVERETT, D.H.: *Magnetic Hysteresis and Minor Loops: Models and Experiments*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A. 386(1791) (1983), S. 251–261.
- [14] BASSIOUNY, E. / GHALEB, A.F. / MAUGIN, G.A.: *Thermodynamical Formulation for Coupled Electromechanical Hysteresis Effects - I. Basic Equations*. International Journal of Engineering Science 26(12) (1988), S. 1279–1295.
- [15] BATHE, K.-J.: *Finite-Element-Method*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2. Auflage, 2002.
- [16] BATHE, K.-J. / BOLOURCHI, S.: *Large Displacement Analysis of Three-Dimensional Beam Structures*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 14 (1979), S. 961–986.
- [17] BELL, D.J. / LU, T.J. / FLECK, N.A. / SPEARING, S.M.: *MEMS Actuators and Sensors: Observations on Their Performance and Selection for Purpose*. Journal of Micromechanics and Microengineering 15(7) (2005), S. S153–S164.
- [18] BENJEDDOU, A.: *Advances in Piezoelectric Finite Element Modeling of Adaptive Structural Elements: A Survey*. Computers & Structures 76 (2000), S. 347–363.
- [19] BENJEDDOU, A.: *Use of Shear-Mode Piezoceramics in Smart Structures Applications: Achievements and Perspectives*. In: *Second Eccomas Thematic Conference on Smart Structures and Materials*, ECCOMAS, 2005.
- [20] BENJEDDOU, A. / TRINDADE, M.A. / OHAYON, R.: *A Unified Beam Finite Element Model for Extension and Shear Piezoelectric Actuation Mechanisms*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 8(12) (1997), S. 1012–1025.
- [21] BENJEDDOU, A. / TRINDADE, M.A. / OHAYON, R.: *New Shear Actuated Smart Structure Beam Finite Element*. AIAA Journal 37(3) (1999), S. 378–383.
- [22] BERGQVIST, A. / ENGDAHL, G.: *A Stress-dependent Magnetic Preisach Hysteresis Model*. IEEE Transactions on Magnetics 27(6) (1991), S. 4796–4798.
- [23] BERLINCOURT, D. / KRUEGER, H.H.A.: *Morgan Electro Ceramics Technical Publication TP-226. Properties of Piezoelectric Ceramics*. <http://www.morganelectroceramics.com/>.
- [24] BETSCH, P. / MENZEL, A. / STEIN, E.: *On the Parametrization of Finite Rotations in Computational Mechanics. A Classification of Concepts with Application to Smooth Shells*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 155(3-4) (1998), S. 273–305.
- [25] BREI, D. / BERNER, N.T. / ALEXANDER, P.W.: *Modeling and Study of the Quasi-Static Behaviour of Piezoceramic Telescopic Actuation Architectures*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 12(5) (2001), S. 303–313.

-
- [26] BROCKMANN, T.H. / LAMMERING, R.: *Finite Beam Elements for Rotating Piezoelectric Fiber Composite Structures*. In: BATHE, K.J., (HRSG.), *Computational Fluid and Solid Mechanics*, S. 145–148, Amsterdam, 2003 Elsevier.
- [27] BUTZ, A. / KLINKEL, S.: *A Finite Element Formulation for the Nonlinear Analysis of Piezoelectric Three-Dimensional Beam Structures*. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics* 5(1) (2005), S. 383–384.
- [28] BUTZ, A. / KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A Nonlinear Piezoelectric 3D-Beam Finite Element Formulation*. In: BATHE, K.J., (HRSG.), *Computational Fluid and Solid Mechanics*, S. 121–126, 2005.
- [29] CADY, W.G.: *Piezoelectricity*. McGraw-Hill Inc., New York, 1. Auflage, 1946.
- [30] CAO, H. / EVANS, A.G.: *Nonlinear Deformation of Ferroelectric Ceramics*. *Journal of the American Ceramic Society* 76(4) (1993), S. 890–896.
- [31] CARDELLI, E. / DELLA TORRE, E. / BAN, G.: *Experimental Determination of Preisach Distribution Functions in Magnetic Cores*. *Physica B* 275 (2000), S. 262–269.
- [32] CHEE, C.: *Static Shape Control of Laminated Composite Plate Smart Structure Using Piezoelectric Actuators*. Dissertation, The University of Sydney, Department of Aeronautical Engineering, 2000.
- [33] CHEE, C. / TONG, L. / STEVEN, G.: *A Mixed Model for Composite Beams with Piezoelectric Actuators and Sensors*. *Smart Materials and Structures* 8(3) (1999), S. 417–432.
- [34] CHEN, W. / LYNCH, C.S.: *A Micro-Electro-Mechanical Model for Polarisation Switching of Ferroelectric Materials*. *Acta Materialia* 46(15) (1998), S. 5303–5311.
- [35] CHERRY, W.L. / ADLER, R.: *Piezoelectric Effect in Polycrystalline Barium Titanate*. *Physical Review* 72(10) (1947), S. 981–982.
- [36] CHOPRA, I.: *Review of State of Art of Smart Structures and Integrated Systems*. *AIAA Journal* 40(11) (2002), S. 2145–2187.
- [37] CHRÓSCIELEWSKI, J. / KŁOSOWSKI, P. / SCHMIDT, R.: *Modelling and FE-Analysis of Large Deflection Shape and Vibration Control of Structures via Piezoelectric Layers*. In: GABBERT, U., (HRSG.), *Smart Mechanical Systems - Adaptionics*, S. 53–61, Düsseldorf, 1997 VDI Verlag.
- [38] CIMA, L. / LABOURE, E.: *Characterization and Model of Ferroelectrics Based on Experimental Preisach Density*. *Review of Scientific Instruments* 73(10) (2002), S. 3546–3552.

- [39] COOK, R.D. / MALKUS, D.S. / PLESHA, M.E.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiles & Sons, New York, 3. Auflage, 1989.
- [40] CRAWLEY, E.F. / DE LUIS, J.: *Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures*. AIAA Journal 25(10) (1987), S. 1373–1385.
- [41] CURIE, J. / CURIE, P.: *Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées*. Bulletin de la Société Mineralogique de France 3 (1880), S. 90–93.
- [42] DAMJANOVIC, D.: *Ferroelectric, Dielectric and Piezoelectric Properties of Ferroelectric Thin Films and Ceramics*. Reports on Progress in Physics 61(9) (1998), S. 1267–1324.
- [43] DEBÉDA, H. / v. FREIHDOLD, T. / MOHR, J. / WALLRABE, U. / WENGELINK, J.: *Development of Miniaturized Piezoelectric Actuators for Optical Applications Realized Using LIGA Technology*. Journal of Microelectromechanical Systems 8(3) (1999), S. 258–263.
- [44] DEVOE, D.L. / PISANO, A.P.: *Modeling and Optimal Design of Piezoelectric Cantilever Microactuators*. Journal of Microelectromechanical Systems 6(3) (1997), S. 266–270.
- [45] DEVOE, D.L. / PISANO, A.P.: *Surface Micromachined Piezoelectric Accelerometers (PiXLs)*. Journal of Microelectromechanical Systems 10(2) (2001), S. 180–186.
- [46] ERINGEN, A.C.: *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, 1962.
- [47] ERINGEN, A.C.: *On the Foundations of Electroelastostatics*. International Journal of Engineering Science 1(1) (1963), S. 127–153.
- [48] ERINGEN, A.C. / MAUGIN, G.A.: *Electrodynamics of Continua*. Band I—Foundations and Solid Media, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [49] EVERETT, D.H.: *A General Approach to Hysteresis Part 4. An Alternative Formulation of the Domain Model*. Transactions of the Faraday Society 51 (1955), S. 1551–1557.
- [50] FANG, D. / LI, C.: *Nonlinear Electric-mechanical Behavior of a Soft PZT-51 Ferroelectric Ceramic*. Journal of Materials Science 34(16) (1999), S. 4001–4010.
- [51] FETT, T. / MÜLLER, S. / MUNZ, D. / THUN, G.: *Nonsymmetry in the Deformation Behaviour of PZT*. Journal of Materials Science Letters 17(4) (1998), S. 261–265.

-
- [52] FREEMAN, A.R. / JOSHI, S.P.: *Numerical Modeling of PZT Nonlinear Electro-mechanical Behaviour*. In: VARADAN, V.V. / CHANDRA, J., (HRSG.), *Proceedings of SPIE – Volume 2715: Smart Structures and Materials 1996*, S. 602–613, 1996.
- [53] FRIEDMANN, G. / LIU, L. / KOUVEL, J.S.: *Experimental Testing of Applicability of the Preisach Hysteresis Model to Superconductors*. *Journal of Applied Physics* 75(10) (1994), S. 5683–5685.
- [54] FRIEMANN, H.: *Schub und Torsion in geraden Stäben*. Werner-Verlag, Düsseldorf, 2. Auflage, 1993.
- [55] GANAPATHI, M. / PATEL, B.P. / POLIT, O. / TOURATIER, M.: *A C^1 Finite Element Including Transverse Shear and Torsion Warping for Rectangular Sandwich Beams*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45(1) (1999), S. 47–75.
- [56] GANAPATHI, M. / PATEL, B.P. / TOURATIER, M.: *Refined Finite Element for Piezoelectric Laminated Composite Beams*. *Smart Materials and Structures* 13(4) (2004), S. N57–N67.
- [57] GÉRADIN, M. / RIXEN, D.: *Parametrization of Finite Rotations in Computational Dynamics: A Review*. *Revue européenne des éléments finis* 4 (1995), S. 251–281.
- [58] GERTHSEN, C.: *Physik*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 19. Auflage, 1995.
- [59] GLAZOUNOV, A.E. / ZHANG, Q.M. / KIM, C.: *Piezoelectric Actuator Generating Torsional Displacement from Piezoelectric d_{15} Shear Response*. *Applied Physics Letters* 72(20) (1998), S. 2526–2528.
- [60] GREINER, W.: *Klassische Elektrodynamik*. Band 3, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main/Thun, 5. Auflage, 1991.
- [61] GROSS, S.J. / TADIGADAPA, S. / JACKSON, T.N. / TROILER-MCKINSTRY, S. / ZHANG, Q.Q.: *Lead-Zirconate-Titanate-Based Piezoelectric Micromachined Switch*. *Applied Physics Letters* 83(1) (2003), S. 174–176.
- [62] GROT, R.A.: *Relativistic Continuum Physics: Electromagnetic Interactions*. In: ERINGEN, C., (HRSG.), *Continuum Physics*, Band III - Mixtures and EM Field Theories, , S. 129–219, Academic Press, New York, 1976.
- [63] GRUTTMANN, F. / SAUER, R. / WAGNER, W.: *A Geometrical Nonlinear Eccentric 3D-Beam Element with Arbitrary Cross-Sections*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 160(3–4) (1998), S. 383–400.

- [64] GRUTTMANN, F. / SAUER, R. / WAGNER, W.: *Shear Stresses in Prismatic Beams with Arbitray Cross-Sections*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 45(7) (1999), S. 865–889.
- [65] GRUTTMANN, F. / SAUER, R. / WAGNER, W.: *Theory and Numerics of Three-Dimensional Beams with Elastoplastic Material Behaviour*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(12) (2000), S. 1675–1702.
- [66] GURTIN, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press, Mathematics in Science and Engineering, New York, 1981.
- [67] HALL, D.A.: *Review Nonlinearity in Piezoelectric Ceramics*. Journal of Materials Science 36(19) (2001), S. 4575–4601.
- [68] HERRMANN, L.R.: *Elastic Torsional Analysis of General Prismatic Beams*. Journal of Engineering Mechanics Division ASCE 91 (1965), S. 11–19.
- [69] HU, Y.T. / YANG, J.S. / JIANG, Q.: *Characterisation of Electroelastic Beams under Biasing Fields with Applications in Buckling Analysis*. Archive of Applied Mechanics 72 (2002), S. 439–450.
- [70] HUBER, J.E. / FLECK, N.A.: *Multi-axial Electric Switching of a Ferroelectric: Theory vesus Experiment*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 49 (2001), S. 785–811.
- [71] HUGHES, D. / WEN, J.T.: *Preisach Modelling of Piezoceramic and Shape Memory Alloy Hysteresis*. Smart Materials and Structures 6(3) (1997), S. 287–300.
- [72] HUGHES, T.J.R. / PISTER, K.S.: *Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures*. Computers & Structures 8(3–4) (1978), S. 391–397.
- [73] HWANG, S.C. / HUBER, J.E. / McMEEKING, R.M. / FLECK, N.A.: *The Simulation of Switching in Polycrystalline Ferroelectric Ceramics*. Acta Metallurgica et Materialia 84(3) (1998), S. 1530–1540.
- [74] HWANG, S.C. / LYNCH, C.S. / McMEEKING, R.M.: *Ferroelectric/Ferroelastic Interactions and a Polarisation Switching Model*. Acta Metallurgica et Materialia 43(5) (1995), S. 2073–2084.
- [75] IBRAHIMBEGOVIĆ, A.: *Computational Aspects of Vector-Like Parametrization of Three-Dimensional Finite Rotations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 38 (1995), S. 3653–3673.
- [76] *IEEE Stanard Definitions of Primary Ferroelectric Terms*. 1986.
- [77] IKEDA, T.: *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, New York, 1990.

-
- [78] IYER, R.V. / SHIRLEY, M.E.: *Hysteresis Parameter Identification With Limited Experimental Data*. IEEE Transactions on Magnetics 40(5) (2004), S. 3227–3239.
- [79] JACKSON, J.D.: *Classical electrodynamics*. Band XVII, Wiley, New York, 1962.
- [80] JAFFE, B. / COOK, W.R. / JAFFE, H.: *Piezoelectric Ceramics*. Academic Press, 1971.
- [81] JENDRITZA, D.J.: *Technischer Einsatz Neuer Aktoren*. expert verlag, 2. Auflage, 1997.
- [82] JIAO, B.L. / ZHANG, J.D.: *Torsional Modes in Piezo Helical Springs*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control 46(1) (1999), S. 147–151.
- [83] JOSHI, S.P.: *Non-linear Constitutive Relation for Piezoceramic Materials*. Smart Materials and Structures 1(1) (1992), S. 80–83.
- [84] KAGAWA, Y. / TSUCHIYA, T. / KAWASHIMA, T.: *Finite Element Simulation of Piezoelectric Vibrator Gyroscopes*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control 43(4) (1996), S. 509–518.
- [85] KAMLAH, M.: *Ferroelectric and Ferroelastic Piezoceramics - Modeling of Electro-mechanical Hysteresis Phenomena*. Continuum Mechanics and Thermodynamics 13 (2001), S. 219–268.
- [86] KAMLAH, M. / TSAKMARKIS, C.: *Phenomenological Modeling of the Non-linear Electromechanical Coupling in Ferroelectrics*. International Journal of Solids and Structures 36 (1999), S. 669–695.
- [87] KAWAI, H.: *The Piezoelectricity of Poly(Vinylidene Fluoride)*. Japanese Journal of Applied Physics 8(7) (1969), S. 975–976.
- [88] KLINKEL, S.: *A thermodynamic consistent 1D model for ferroelastic and ferroelectric hysteresis effects in piezoceramics*. Communications in Numerical Methods in Engineering 22(7) (2006), S. 727–739.
- [89] KLINKEL, S. / GOVINDJEE, S.: *Anisotropic Bending-Torsion Coupling for Warping in a Non-Linear Beam*. Computational Mechanics 31(1) (2003), S. 78–87.
- [90] KLINKEL, S. / WAGNER, W.: *A Geometrically Non-linear Piezoelectric Solid Shell Element Based on a Mixed Multi-field Variational Formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 65(3) (2006), S. 349–382.
- [91] KOGANEZAWA, S. / UEMATSU, Y. / YAMADA, T.: *Dual-Stage Actuator System for Magnetic Disk Drives Using a Shear Mode Piezoelectric Microactuator*. IEEE Transactions on Magnetics 35(2) (1999), S. 988–992.

- [92] KOLLBRUNNER, C.F. / BASLER, K.: *Torsion*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.
- [93] KRAHULA, J.L. / LAUTERBACH, G.F.: *A Finite Element Solution for Saint-Venant Torsion*. ASME Journal 7 (1969), S. 2200–2203.
- [94] KRASNOSEL'SKII, M.A. / POKROVSKIĬ, A.V.: *Systems with Hysteresis*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1989.
- [95] KROMMER, M. / IRSCHIK, H.: *An Electromechanically Coupled Theory for Piezoelectric Beams taking into Account the Charge Equations of Electrostatics*. Acta Mechanica 154 (2002), S. 141–158.
- [96] LAMMERING, R. / MESECKE-RISCHMANN, S.: *Finite Element Analysis of Piezoelectric Structures with Nonlinear Material Behavior*. In: *AMAS Workshop on Smart Materials and Structures Smart'03*, S. 43–50, Jadwisin, September 2-5, 2003.
- [97] LAMMERING, R. / MESECKE-RISCHMANN, S.: *Multi-field Variational Formulations and Related Finite Elements for Piezoelectric Shells*. Smart Materials and Structures 12 (2003), S. 904–913.
- [98] LANDAU, L.D. / LIFSCHITZ, E.M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Band VIII, Akademie-Verlag, Berlin, 1967.
- [99] LANDIS, C.M.: *Fully Coupled, Multi-axial, Symmetric Constitutive Laws for Polycrystalline Ferroelectric Ceramics*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 50 (2002), S. 127–152.
- [100] LANDIS, C.M.: *On the Strain Saturation Conditions for Polycrystalline Ferroelastic Materials*. Journal of Applied Mechanics 70(4) (2003), S. 470–478.
- [101] LANDIS, C.M.: *Non-Linear Constitutive Modeling of Ferroelectrics*. Current Opinion in Solid State and Material Science 8(1) (2004), S. 59–69.
- [102] LAX, M. / NELSON, D.F.: *Maxwell Equations in Material Form*. Physical Review B 13(4) (1976), S. 1777–1784.
- [103] LIM, C.W. / HE, L.H.: *Three-dimensional Exact Solutions for the Electromechanical Response of Triple-layer Piezoelectric Actuators*. Smart Materials and Structures 13(5) (2004), S. 1050–1058.
- [104] LINNEMANN, K. / KLINKEL, S.: *A Mixed Finite Element Formulation for Piezoelectric Materials*. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 5(1) (2005), S. 425–426.
- [105] LIPPMANN, G.: *Sur le principe de la conservation de l'électricité*. Journal de Physique 10 (1881), S. 381–394.

-
- [106] LUPASCU, D.C.: *Fatigue in Ferroelectric Ceramics and Related Issues*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [107] LYNCH, C.S.: *The Effect of Uniaxial Stress on the Electro-Mechanical Response of 8/65/35 PLZT*. Acta Materialia 44(10) (1996), S. 4137–4148.
- [108] MARSDEN, J.E. / HUGHES, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1983.
- [109] MASON, W.E. / HERRMANN, L.R.: *Elastic Shear Analysis of General Prismatic Beams*. Journal of Engineering Mechanics Division 94 (1968), S. 965–983.
- [110] MASON, W.P.: *Piezoelectricity, its History and Applications*. The Journal of the Acoustical Society of America 70(6) (1981), S. 1561–1566.
- [111] MAUGIN, G.A.: *Nonlinear electromechanical effects and applications*. Series in Theoretical and Applied Mechanics. World Scientific, Singapore, 1985.
- [112] MAUGIN, G.A.: *Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids*. North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford/Tokyo, 1988.
- [113] MAYERGOYZ, I.D.: *Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications*. Elsevier Series in Electromagnetism Elsevier, 2003.
- [114] McMEEKING, R.M. / LANDIS, C.M.: *A Phenomenological Multiaxial Constitutive Law for Switching in Polycrystalline Ferroelectric Ceramics*. International Journal of Engineering Science 40 (2002), S. 1553–1577.
- [115] McMEEKING, R.M. / LANDIS, C.M.: *Electrostatic Forces and Stored Energy for Deformable Dielectric Materials*. Journal of Applied Mechanics 72(4) (2005), S. 581–590.
- [116] MENZEL, A. / BETSCH, P. / STEINMANN, P. / STEIN, E.: *Konzepte der Numerik endlicher Rotationen*. Technische Mechanik 24(1) (2004), S. 61–66.
- [117] MOHAMMADI, F. / KHOLKIN, A.L. / JADIDIAN, B. / SAFRI, A.: *High-displacement Spiral Piezoelectric Actuators*. Applied Physics Letters 75(16) (1999), S. 2488–2490.
- [118] MUKHERJEE, M. / CHAUDHURI, A.S.: *Active Control of Dynamic Instability of Piezolaminated Imperfect Columns*. Smart Materials and Structures 11(6) (2002), S. 874–879.
- [119] MUKHERJEE, M. / CHAUDHURI, A.S.: *Piezolaminated Beams with Large Deformations*. International Journal of Solids and Structures 39 (2002), S. 4567–4582.
- [120] NELSON, D.F. / LAX, M.: *Linear Elasticity and Piezoelectricity in Pyroelectrics*. Physical Review B 13(4) (1976), S. 1785–1796.

- [121] NGUYEN, Q. / TONG, L.: *Modal Shape Control of Smart Composite Plates Using Piezoelectric Actuators*. In: *Sixth World Congress on Computational Mechanics, WCCM VI*, Beijing, China, 2004 Tsinghua University Press & Springer-Verlag.
- [122] NIEZRECKI, C. / BREI, D. / BALAKRISHNAN, S / MOSKALIK, A.: *Piezoelectric Actuation: State of the Art*. *The Shock and Vibration Digest* 33(4) (2001), S. 269–280.
- [123] OGDEN, R.W.: *Non-linear elastic deformations*. Halsted Press, New York, 1984.
- [124] PASCO, Y. / BERRY, A.: *A Hybrid/Numerical Model of Piezoelectric Stack Actuators Using a Macroscopic Nonlinear Theory of Ferroelectricity and a Preisach Model of Hysteresis*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 15(5) (2004), S. 375–386.
- [125] PEARCE, D.H. / HOOLEY, A. / BUTTON, T.W.: *On Piezoelectric Super-Helix Actuators*. *Sensors and Actuators A* 100 (2002), S. 281–286.
- [126] PEARCE, D.H. / SEFFEN, K.A. / BUTTON, T.W.: *Net Shape Formed Spiral and Helical Piezoelectric Actuators*. *Journal of Materials Science* 37 (2002), S. 3117–3122.
- [127] POIZAT, C. / BENJEDDOU, A.: *On Analytical and Numerical Modelling of Piezoelectric Bimorphs*. In: TOPPING, B.V.H. / MOTA SOARES, C.A., (HRSG.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Structures Technology*, Stirling, Scotland, 2004 Civil-Comp. Press.
- [128] PREISACH, F.: *Über die magnetische Nachwirkung*. *Zeitschrift für Physik* 94 (1935), S. 277–302.
- [129] RESTORFF, J.A. / SAVAGE, H.T. / CLARK, A.E. / WUN-FOGLE, M.: *Preisach Modeling of Hysteresis in Terfenol*. *Journal of Applied Physics* 67(9) (1990), S. 5016–5018.
- [130] ROIK, K.H. / CARL, J. / LINDNER, J.: *Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe*. Ernst & Sohn, Berlin/München/Düsseldorf, 1972.
- [131] ROSEN, C.Z. / HIREMATH, B.V. / NEWNHAM, R., (HRSG.) *Piezoelectricity*. American Institute of Physics, New York, 1992.
- [132] SAIF, M.T.A.: *On a Tunable Bistable MEMS-Theory and Experiment*. *Journal of Microelectromechanical Systems* 9(2) (2000), S. 157–170.
- [133] SARAVANOS, D.A. / HEYLIGER, P.R.: *Coupled Layerwise Analysis of Composite Beams with Embedded Piezoelectric Sensors and Actuators*. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 6(3) (1995), S. 350–363.

-
- [134] SARAVANOS, D.A. / HEYLIGER, P.R.: *Mechanics and Computational Models for Laminated Piezoelectric Beams, Plates, and Shells*. Applied Mechanics Reviews 52(10) (1999), S. 305–320.
- [135] SAUER, R.: *Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), Institut für Baustatik, 1998 Bericht Nr. 4.
- [136] SCHINKÖTHE, W. / HARTRAMPH, R. / HERMANN, M.: *Aktorik in der Feinwerktechnik II*. Vorlesungsskript, Institut für Konstruktion und Fertigung in der Feinwerktechnik, Universität Stuttgart, 2004.
- [137] SCHÄUFELE, A.: *Ferroelastische Eigenschaften von Blei-Zirkonat-Titanat-Keramiken*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 1996 Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 5, Nr. 445.
- [138] SCHÄUFELE, A. / K.H., HÄRDTL: *Ferroelastic Properties of Lead Zirconate Titanate Ceramics*. Journal of the American Ceramic Society 79(10) (1996), S. 2637–2640.
- [139] SENTURIA, S.D.: *Microsystem Design*. Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/ London, 2001.
- [140] SHI, Z.F. / CHEN, Y.: *Functionally Graded Piezoelectric Cantilever Beam under Load*. Archive of Applied Mechanics 74 (2004), S. 237–247.
- [141] SHIAH, Y.C. / HUANG, C.-H. / HUANG, J.H.: *Static Electromechanical Response of Piezoelectric Tubes as Sensors and Actuators*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 17(2) (2006), S. 133–143.
- [142] SIMKOVICS, R.: *Nichtlineares piezoelektrisches Finites-Elemente-Verfahren zur Modellierung piezokeramischer Aktoren*. Dissertation, Erlangen-Nürnberg, 2002 Fortschritt-Berichte VDI : Reihe 21, Elektrotechnik ; 334.
- [143] SIMKOVICS, R. / LANDES, H. / KALTENBACHER, M. / HOFFELNER, J. / LERCH, R.: *Finite Element Analysis of Hysteresis Effects in Piezoelectric Transducers*. In: *Proc. SPIE Vol. 3984, p. 33-44, Smart Structures and Materials 2000: Mathematics and Control in Smart Structures, Vasundara V. Varadan; Ed.*, S. 33–44, Juni 2000.
- [144] SIMO, J.C. / VU-QUOC, L.: *A Three-Dimensional Finite-Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 58(1) (1986), S. 79–116.
- [145] SMITH, R.C.: *Smart Material Systems: Model Development*. Frontiers in Applied Mathematics SIAM, New York, 1. Auflage, 2005.

- [146] SMITS, J.G. / CHOI, W.: *The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control 38(3) (1991), S. 256–270.
- [147] SMITS, J.G. / FUJIMOTO, K. / KLEPTSYN, V.F.: *Microelectromechanical Flexure PZT Actuated Optical Scanner: Static and Resonance Behavior*. Journal of Micromechanics and Microengineering 15(6) (2005), S. 1285–1293.
- [148] SOKOLNIKOFF, I.S.: *Mathematical Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 1956.
- [149] SREERAN, P. / SALVADY, G. / NAGANATHAN, N.G.: *Hysteresis Prediction for a Piezoceramic Material System*. In: *Proc. 1993 ASME Winter Annual Meeting (New Orleans, LA)*, S. 35–42, 1993.
- [150] STUELPNAGEL, J.: *On the Parametrization of the Three-Dimensional Rotation Group*. SIAM Review 6(4) (1964), S. 422–430.
- [151] SUN, C.T. / ZHANG, X.D.: *Use of Thickness-shear Mode in Adaptive Sandwich Structures*. Smart Materials and Structures 4(3) (1995), S. 202–206.
- [152] SUNAR, M. / HYDER, S.J. / YILBAS, B.S.: *Robust Design of Piezoelectric Actuators for Structural Control*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (2001), S. 6257–6270.
- [153] SZE, K.Y. / YAO, L.Q.: *A Hybrid Stress ANS Solid-Shell Element and its Generalization for Smart Structure Modelling. Part I – Solid-Shell Element Formulation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(4) (2000), S. 545–564.
- [154] SZE, K.Y. / YAO, L.Q. / YI, S.: *A Hybrid Stress ANS Solid-Shell Element and its Generalization for Smart Structure Modelling. Part II – Smart Structure Modelling*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 48(4) (2000), S. 565–582.
- [155] TANI, J. / TAKAGI, T. / QIU, J.: *Intelligent Material Systems: Application of Functional Materials*. Applied Mechanics Reviews 51(8) (1998), S. 505–521.
- [156] TAYLOR, R.L.: *FEAP Manual*. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/>, 2003.
- [157] TIERSTEN, H.F.: *Linear Piezoelectric Plate Vibrations*. Plenum Press, New York, 1. Auflage, 1969.
- [158] TIERSTEN, H.F.: *On the Nonlinear Equations of Thermoelastoelectricity*. International Journal of Engineering Science 9(7) (1971), S. 587–604.
- [159] TIMOSHENKO, S.P. / GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York, 3. Auflage, 1970.

-
- [160] TOUPIN, R.A.: *The Elastic Dielectric*. Journal of Rational Mechanical Analysis 5(6) (1956), S. 849–915.
- [161] TRESSLER, J.F. / ALKOY, S. / NEWNHAM, R.E.: *Piezoelectric Sensors and Sensor Materials*. Journal of Electroceramics 2(4) (1998), S. 257–272.
- [162] TRUESDELL, C. / NOLL, W.: *The Nonlinear Field Theories of Mechanics*. Band Handbuch der Physik III/3, Edited by S. Flügge, Springer-Verlag, 1965.
- [163] TZOU, H.S. / YE, R.: *Analysis of Piezoelastic Structures with Laminated Piezoelectric Triangle Shell Elements*. AIAA Journal 1 (1996), S. 110–115.
- [164] VASILESCU, R. / DANCILA, S.: *Modeling and Analysis of Active Flap Using Coiled Bender Piezoelectric Actuators*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 15(9–10) (2004), S. 783–792.
- [165] VOIGT, W.: *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner-Verlag, Leipzig/ Berlin, Nachdruck der 1. Auflage, 1928.
- [166] WAGNER, M. / ROOSEN, A. / OOSTRA, H. / HÖPPNER, R. / MOYA, DE, M.: *Novel Low Voltage Piezoactuators for High Displacements*. Journal of Electroceramics 14 (2005), S. 231–238.
- [167] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *Finite Element Analysis of Saint-Venant Torsion Problem with Exact Integration of the Elastic-Plastic Constitutive Equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 190 (2001), S. 3831–3848.
- [168] WANG, Q. / QUEK, T.: *Flexural Vibration Analysis of Sandwich Beam Coupled with Piezoelectric Actuator*. Smart Materials and Structures 9(1) (2000), S. 103–109.
- [169] WANG, Q. / QUEK, T.: *A Model for the Analysis of Beams with Embedded Piezoelectric Layers*. Journal of Intelligent Material Systems and Structures 13(1) (2002), S. 61–70.
- [170] WEISSMANTEL, C. / HAMANN, C.: *Grundlagen der Festkörperphysik*. Johann Ambrosius Barth Verlag, Heidelberg/Leipzig, 4. Auflage, 1995.
- [171] WRIGGERS, P.: *Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode*. Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, 1988 Bericht-Nr. F 88/4.
- [172] WRIGGERS, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2001.
- [173] YANG, J.: *An Introduction to the Theory of Piezoelectricity*. Springer-Verlag, 2005.

- [174] YANG, J.S. / FANG, H.Y.: *Analysis of a Rotating Elastic Beam with Piezoelectric Films as an Angular Rate Sensor*. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control 49(6) (2002), S. 798–804.
- [175] YU, Y. / NAGANATHAN, N. / DUKKIPATI, R.: *Preisach Modeling of Hysteresis for Piezoceramic Actuator System*. Mechanism and Machine Theory 37 (2002), S. 49–59.
- [176] ZHANG, X.D. / SUN, C.T.: *Formulation of an Adaptive Sandwich Beam*. Smart Materials and Structures 5(6) (1996), S. 814–823.
- [177] ZHOU, D.: *Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), 2003.
- [178] ZHOU, X. / CHATTOPADHYAY, A.: *Hysteresis Behaviour and Modeling of Piezoceramic Actuators*. Journal of Applied Mechanics 68 (2001), S. 270–277.
- [179] ZIENKIEWICZ, O.C. / TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method*. Band 1-3, John Wiley & Sons, 5. Auflage, 2000.

Berichte des Instituts für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH)

Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.
- 63/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengeralten, Dissertation, Artur Deninger, 1963.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahiclul Alum, 1964.

- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 0/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, J. Hanisch, 1975.
- 1/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Dissertation, Helmut Rubin, 1976.
- 2/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 3/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 4/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 5/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.
- 6/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.
- 7/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 8/89 : Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 9/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.

- 10/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 11/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 12/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalenträgwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarmann, 1991.
- 13/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalenträgwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 3-935322-02-X.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalenträgerwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 3-935322-03-8.
- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 3-935322-04-6.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 3-935322-05-4.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 3-935322-06-2.
- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 3-935322-07-0.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 3-935322-09-7.

Lebenslauf

Name: Alexander Butz

Geburtsdatum: 30.09.1975 in Germersheim am Rhein

1986-1995 Schulausbildung
Goethe-Gymnasium Germersheim
Abitur

1995-1996 Grundwehrdienst

1996-2002 Bauingenieur-Studium
Universität Karlsruhe (TH)
Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau

2002 Diplom

2002-2005 Promotions-Stipendiat im Graduiertenkolleg 786
„Mischfelder und Nichtlineare Wechselwirkungen“
am Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)

2005-2006 Wissenschaftlicher Mitarbeiter
Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)

