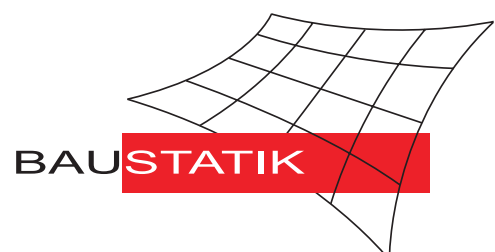


Universität Karlsruhe (TH) | Institut für Baustatik
Forschungsuniversität • gegründet 1825

Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand

Jochen Wüst



Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Jochen Wüst

aus Bietigheim

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juli 2006

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. W. Wagner

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger

Karlsruhe 2006

Herausgeber:

Prof. Dr.–Ing. habil. W. Wagner

Organisation und Verwaltung:

Institut für Baustatik
Universität Karlsruhe (TH)
Postfach 6980
76128 Karlsruhe

Telefon: (0721) 608–2280
Telefax: (0721) 608–6015
E–mail: baustatik@bs.uni-karlsruhe.de

© 2006 Jochen Wüst
Institut für Baustatik
Universität Karlsruhe (TH)
Kaiserstraße 12
76131 Karlsruhe

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Unter Angabe der Quelle ist es gestattet, dieses Heft ganz oder teilweise auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen oder in elektronischen Medien zu speichern.

Eine elektronische Ausgabe findet sich im elektronischen Volltextarchiv EVA der Universitätsbibliothek der Universität Karlsruhe (TH).

ISBN 3-935322-09-7

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Assistent am Institut für Baustatik der Universität Karlsruhe.

Mein erster Dank gilt deshalb dem Hauptreferenten und Institutsleiter Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Wagner für seine langjährige Unterstützung und fachkundige Betreuung sowie für die Möglichkeit, in einer ausgesprochen freundlichen und offenen Atmosphäre frei und ungehindert arbeiten zu können. Ohne dieses fruchtbare Klima wäre eine erfolgreiche Promotion nicht denkbar gewesen.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K.-U. Bletzinger danke ich neben seiner Bereitschaft zur Übernahme des Korreferats vor allem für sein Interesse an dieser Arbeit und für konstruktive Anregungen insbesondere im Bereich der Optimierung.

Allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts möchte ich meinen Dank aussprechen für einen familiären Geist, welcher aus einem Arbeitsplatz gleichsam Heimat und aus Kollegen dauerhafte Freunde werden ließ. Besonders hervorheben möchte ich Herrn Dr.-Ing. S. Klinkel, dem ich für die vielen konstruktiven Diskussionen danke, aus denen zahlreiche wertvolle Hinweise für diese Arbeit hervorgingen. Ebenso danke ich meinem ehemaligen Kollegen Herrn Dr.-Ing. J. Schütt für die unzähligen Fachgespräche und dafür, dass ich in vielerlei Hinsicht von seiner Vorreiterrolle profitieren durfte. Meiner früheren studentischen Mitarbeiterin und jetzigen Nachfolgerin Frau Dipl.-Ing. A. Brugger sei stellvertretend gedankt für die wichtigen Impulse, die von studentischer Seite beigesteuert wurden.

Für die zügige und dennoch gewissenhafte Durchsicht des Manuskripts möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. G. A. D'Addetta sowie Herrn Dr.-Ing. S. Schwarz bedanken. Beide standen mir stets mit Rat und Tat zur Seite.

Den unauffälligsten, gleichzeitig aber auch entscheidendsten Beitrag leisteten meine Eltern, bei denen ich über all die Jahre fest und jederzeit auf Hilfe und bedingungslosen Rückhalt bauen konnte. Ihnen danke ich besonders herzlich!

Schlussendlich gebührt meiner Partnerin Marlen ein ganz spezielles Dankeschön, da sie nicht zuletzt durch ihre unerschöpfliche Geduld und Rücksicht auf ihre Weise einen wesentlichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit hatte.

Karlsruhe, im Juli 2006

Jochen Wüst

Man kennt nicht die Last, die man noch nicht getragen hat.

Afrikanisches Sprichwort

Kurzfassung

Die Fließlinientheorie ist ein materiell nichtlineares Verfahren zur Traglastermittlung von Platten. In der vorliegenden Arbeit wird sie als alternativer Berechnungsansatz zur Fließzonentheorie in ein Finite-Element-Programm implementiert. Letztere zeichnet sich durch plastizierende Bereiche innerhalb der Plattenstruktur aus, welche von der Fließlinientheorie zu Linien zusammengefasst werden.

Zu beachten ist, dass sich die Herangehensweise deutlich von der herkömmlichen Finite-Element-Methode unterscheidet. Da die Fließlinientheorie als Berechnungsgrundlage die Vorgabe eines kinematisch zulässigen Mechanismus benötigt, ist die Betrachtung der Gesamtgeometrie der untersuchten Platte von großer Bedeutung. Der erste Schritt besteht deshalb in der Auffindung einer solchen Versagensfigur. Während diese Aufgabe bislang zumeist dem Anwender überlassen blieb, wird in der vorliegenden Arbeit ein neuartiger numerischer Algorithmus vorgestellt, der für polygonal berandete Platten alle zulässigen Fließlinienfiguren ermittelt. Damit ist eine objektive Behandlung dieses für die weitere Berechnung entscheidenden Vorgangs möglich.

Nach einer Triangulierung der zuvor entstandenen Teilplatten steht für die Traglastermittlung eine Vernetzung der Plattenfläche zur Verfügung, die es erlaubt, potenzielle Fließlinien abzubilden. Die starren Dreieckselemente dienen dabei zur Beschreibung der kinematischen Beziehungen und bieten die Grundlage für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Anhand der Elementbeziehungen wird ein Optimierungstableau zusammengebaut, von dem ausgehend die Traglast mittels einer Simplex-Optimierung berechnet wird. Gleichzeitig erhält man aus den Verschiebungen die zugehörige Versagensfigur.

Mit dem erneuten Einsatz von Optimierungsstrategien lässt sich die Geometrie der zugrunde liegenden Dreiecksvernetzung so lange verbessern, bis die erzielte Traglast minimal wird. Zu diesem Zweck kommen Suchalgorithmen oder Gradientenmethoden zum Einsatz. Die Wahl des Verfahrens und die Lösung des Problems werden von der Beschaffenheit der Zielfunktion bestimmt.

Bei der Gegenüberstellung von Fließlinientheorie und Fließzonentheorie im Rahmen der Finite-Element-Methode kann schließlich anhand von verschiedenen Beispielen gezeigt werden, dass die erzielten Traglastergebnisse in guter Näherung übereinstimmen. Auf diese Weise steht als Ergänzung und Alternative zur Fließzonentheorie ein Verfahren zur Verfügung, welches aus einem eigenständigen Ansatz heraus die Kontrolle von Berechnungsergebnissen ermöglicht.

Abstract

The yield-line theory is a materially non-linear method to determine the ultimate load of plates. In the present thesis it is implemented into a finite element program as an alternative solution to the yield-zone theory. The latter is characterized by plastified areas within the structure which are gathered into yield-lines by the yield-line theory.

Compared to the classical finite element method the approach of the yield-line theory is completely different. It requires the prediction of a kinematically admissible mechanism and it is important to consider the geometric structure of the entire plate. Thus the first step is to find such a failure mechanism. In the literature this task has been commonly left to the user. Therefore this thesis presents a new numerical algorithm to detect all admissible yield-line patterns for an arbitrary polygonal plate. In consequence it is possible to carry out this decisive process objectively.

In the next step the detected parts of the considered plate are triangulated. The rigid triangles allow the description of the kinematic relations of a pattern structure being able to map the conceivable yield-lines. They are also the basis for the application of the principle of virtual displacements. Accordingly, an optimization tableau is assembled by internal edge rotations and nodal displacements. The following calculation procedure yields the ultimate load of the plate for the given failure mechanism.

Afterwards the triangulated geometry is improved by another application of optimization strategies until the result of the ultimate load is minimal. For this task, search algorithms and gradient methods are used. The choice of the approach and the final solution are influenced by the character of the objective function.

Finally, the comparison between yield-line theory and yield-zone theory within a finite element program shows that the results are in good accordance. Thus in addition to the yield-zone theory an independent procedure acting as an alternative calculation method has been developed.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Geschichtliche Entwicklung und Motivation	1
1.2	Stand der Forschung und Ziele der Arbeit	2
1.3	Gliederung	4
2	Plattentheorie und Materialmodellierung	6
2.1	Theorie der Plattentragwerke	6
2.1.1	Kinematische Ansätze	7
2.1.2	Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement	8
2.1.3	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	10
2.1.4	Materialgleichungen	12
2.2	Materielle Nichtlinearität	14
2.2.1	Stahl und Beton als Werkstoffe	14
2.2.2	Fließzonen und Fließgelenke am Balken	15
2.2.3	Erweiterung auf Plattentragwerke	17
2.2.4	Fließbedingungen	17
2.2.5	Grenzwertsätze	20
2.2.6	Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen	21
3	Einführung in die Fließlinientheorie	23
3.1	Geometrische Grundlagen für Plattentragwerke	23
3.1.1	Fließlinien und Drehachsen	23
3.1.2	Versagensfiguren	25
3.2	Schnittgrößen an einer Teilplatte	26
3.2.1	Isotrope Platten	26
3.2.2	Orthotropie und Affinitätsgesetze	27
3.3	Berechnungsverfahren	31
3.3.1	Grenzgleichgewichtsmethode	31
3.3.2	Energiemethoden	34
3.4	Traglastminimierung	37

3.4.1	Maximalprinzip	37
3.4.2	Iterative Methode	38
3.4.3	Lokale Effekte	39
3.4.4	Konsequenzen für Optimierungsansätze	45
4	Optimierungsverfahren	46
4.1	Diskussion verschiedener Lösungsstrategien	46
4.1.1	Allgemeine Aufgabenstellung	46
4.1.2	Klassifizierung von Problemstellungen und Methoden	47
4.1.3	Wahl eines geeigneten Verfahrens	49
4.2	Lineare Programmierung	51
4.2.1	Normalform der linearen Programmierung	51
4.2.2	Basislösungen	52
4.2.3	Geometrische Interpretation der Degenerierung	54
4.2.4	Wechsel der Basis	56
4.2.5	Simplex-Algorithmus	56
4.3	Suchstrategien	58
4.3.1	Quadratische Interpolation	59
4.3.2	Direktes Suchverfahren	60
4.4	Gradientenverfahren	62
4.4.1	Methode des steilsten Abstiegs	62
4.4.2	Die konjugierte Gradientenmethode	64
4.4.3	Reduktion von Variablen und Gradienten	65
4.5	Evolutionäre Optimierung	66
4.5.1	Begriffsdefinitionen	67
4.5.2	Genetischer Algorithmus	69
5	Elementformulierung und Implementierung	71
5.1	Grundzüge der Finite-Element-Methode	71
5.1.1	Prinzipielles Vorgehen	71
5.1.2	Formulierung eines geschichteten Schalenelements	74

5.2	Traglastermittlung mit finiten Dreieckselementen	75
5.2.1	Statische und kinematische Elementbeziehungen	75
5.2.2	Formulierung der Zielfunktion	77
5.2.3	Zusammenbau eines Optimierungstableaus	78
5.2.4	Bestimmung des Lösungsvektors	80
5.3	Direkte Suchstrategie zur Geometrieverbesserung	81
5.4	Anwendung des Gradientenverfahrens	82
5.4.1	Ableitungsformulierungen	82
5.4.2	Statische Kondensation und Gradientenermittlung	86
5.4.3	Problematik der Diskontinuität	86
5.4.4	Modifizierter Optimierungsalgorithmus	88
5.5	Ansatz einer evolutionären Strategie	92
5.6	Diskussion der verschiedenen Optimierungsansätze	94
6	Numerische Geometriefindung	95
6.1	Bestimmung einer Anfangsgeometrie für Fließlinienfiguren	95
6.2	Algorithmus für polygonal berandete Platten	96
6.2.1	Beschreibung von Fließlinienfiguren	97
6.2.2	Kombinationsmöglichkeiten von Konfigurationen	99
6.2.3	Binäre Kodierung	101
6.2.4	Dekodierung zu einem Fließliniennetz	102
6.2.5	Betrachtung der individuellen Topologie	105
6.3	Triangulierung	106
7	Numerische Berechnungsbeispiele	108
7.1	Vergleichsgrundlagen	108
7.1.1	Materialparameter	108
7.1.2	Beispiel 1: Einachsig gespannter Plattenstreifen	109
7.2	Einfluss der Randlagerung bei Rechteckplatten	111
7.2.1	Beispiel 2: Isotrope Quadratplatte	112
7.2.2	Beispiel 3: Isotrope Rechteckplatten	114

7.2.3	Beispiel 4: Orthotrop bewehrte Rechteckplatte	117
7.3	Geometriebetrachtung und Netzgenerierung	119
7.3.1	Beispiel 5: Viereckplatte mit schrägem Rand	119
7.3.2	Beispiel 6: Variation der Plattengeometrie	123
7.4	Untersuchung lokaler Effekte	128
7.4.1	Beispiel 7: Plattenecke mit Wippe	128
7.4.2	Beispiel 8: Plattenecke mit Fächermechanismus	130
7.4.3	Beispiel 9: Quadratplatte mit Einzelstütze	133
7.5	Vergleich der Optimierungsansätze	137
7.5.1	Beispiel 10: Quadratplatte mit freiem Rand	138
7.5.2	Beispiel 11: Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen	143
7.6	Praxisorientierte Anwendung	150
7.6.1	Beispiel 12: Polygonale Hochbauplatte	150
7.7	Diskussion und Schlussfolgerungen	156
8	Zusammenfassung und Ausblick	159
	Literaturverzeichnis	162

1 Einleitung

1.1 Geschichtliche Entwicklung und Motivation

Die Erfindung des Eisenbetons im ausgehenden 19. Jahrhundert und dessen rasante Verbreitung in den darauf folgenden Jahrzehnten revolutionierte die bis dahin vorherrschenden traditionellen Bautechniken. An die Stelle der klassischen Geschossdecken aus Holz- oder auch Stahlträgern traten immer häufiger Eisenbetonplatten, deren Eigenschaft es war, Lasten nicht mehr nur einaxial, sondern über beide Richtungen der Plattenebene abzutragen. So erwiesen sich die herkömmlichen, hauptsächlich auf Erfahrung beruhenden Bemessungsregeln schon bald als unzureichend.

Ein kritischer Punkt bestand hierbei besonders in der Frage, welche Belastungen ein Tragwerk aushalten konnte, ehe es versagte. Um diesem Problem nachzugehen, wurden zu Beginn des 20. Jahrhunderts die ersten systematischen Versuchsreihen mit Balken und Platten aus Eisenbeton durchgeführt (MÖRSCH [99] und VON BACH & GRAF [145]). Im Falle der Balkentragwerke zeigte sich, dass das Prinzip der Fließgelenktheorie, mit dessen Hilfe sich eine obere Belastungsgrenze ermitteln lässt, zur Versagensbeschreibung eines eisenbewehrten Betonbalkens herangezogen werden konnte.

Die Versuchsplatten wiesen ebenfalls Risslinien auf, die als Fortsetzung solcher Fließgelenke in der Ebene interpretiert werden konnten. Neben der gleichzeitig aufkommenden Grenztragfähigkeitstheorie der Platten (KAZINCZY [74]) etablierte sich daher die Fließgelenk*linientheorie*, oder – im Zusammenhang mit dem Werkstoff Beton häufiger verwendet – Bruchlinientheorie. Der Begriff leitete sich dabei aus dem Versagemuster einer bewehrten Betonplatte ab, deren plastizierende Zonen sich in Rissen, den sogenannten Bruchlinien, konzentrierten. Unterstützt wurde dieser Effekt durch die Tatsache, dass in der damaligen Zeit zur Herstellung des ab etwa 1920 Stahlbeton genannten Baustoffes noch Rundstähle zum Einsatz kamen, deren Betonverbund deutlich schlechter war als der von Rippenstählen.

In den folgenden Jahren wurde die Bruchlinientheorie besonders in Dänemark von SUENSON [137] und INGERSLEV [60] weiterentwickelt. Schließlich war es JOHANSEN [64, 65, 66], der im Jahre 1943 mit seiner Dissertation die erste umfassende Abhandlung über die Bruchlinientheorie vorlegte und die Methode somit nachhaltig prägte. Dadurch beeinflusst, erschienen nach Ende des Zweiten Weltkrieges die Arbeiten von JONES & WOOD [71], PARK & GAMBLE [112] und WOOD [151], sowie in deutscher Sprache von SAWCZUK & JAEGER [124]. Gegenstand war hierbei vor allem die Präzisierung der analytischen Grundlagen in Bezug auf lokale

Einwirkungen wie Einzellasten oder dem Tragverhalten in den Plattenecken. Zu nennen sind in diesem Zusammenhang auch die Beiträge von HAASE [50, 51], SCHELLENBERGER [125] und WOLFENSBERGER [150].

Angesichts des Siegeszuges der Finite-Element-Methode trat die Bruchlinientheorie in den 60er Jahren mehr und mehr in den Hintergrund. Hinzu kam, dass sie in Deutschland baurechtlich nicht zugelassen war. Dementsprechend fand die Grundlagenforschung weiterhin im Ausland und schwerpunktmäßig in Skandinavien statt, unter anderem von NIELSEN [106, 107] aber auch KOWAL & SAWCZUK [79]. Hervorzuheben ist dabei vor allem die von HILLERBORG [54, 55] eingeführte Streifenmethode, die als untere Belastungsgrenze das Gegenstück zur Bruchlinientheorie darstellt.

Erst im Zuge einer einheitlichen europäischen Normung des EUROCODE 2 [32] wurde die Anwendung plastischer Bemessungsverfahren vor einigen Jahren auch in Deutschland wieder zugelassen und in die neue DIN 1045–1 [29] übernommen. Daraus begründet sich insbesondere von wissenschaftlicher Seite ein erhöhter Forschungsbedarf, um zeitgemäße Berechnungsmethoden zur Verfügung zu stellen. Gleiches gilt für das Versuchswesen, was beispielsweise in den Arbeiten von PARDEY [111], SIX [133] und STOLZE [136] zum Ausdruck kommt.

1.2 Stand der Forschung und Ziele der Arbeit

Die vorliegende Arbeit versteht sich in erster Linie als Beitrag zu einer numerischen Lösung der oben geschilderten Problemstellung. Da im Bereich des Stahlbaus ebenfalls Berechnungsverfahren auf der Grundlage der Plastizitätstheorie zulässig sind (DIN 18800 [30]), wird im Sinne einer gleichberechtigten Behandlung beider Disziplinen von nun an der im Stahlbau übliche Begriff der Fließlinientheorie verwendet.

Als Ausgangspunkt für die numerische Umsetzung der Fließlinientheorie ist neben GRIERSON & GLADWELL [46] besonders die Veröffentlichung von ANDERHEGGEN & KNÖPFEL [1] aus dem Jahre 1972 zu nennen. Darin wird auf der Basis der Finite-Element-Methode ein dreieckiges Plattenelement und die Formulierung seiner kinematischen Beziehungen vorgestellt. Dies ermöglicht die Beschreibung beliebiger Versagensmechanismen und damit die Berechnung der zugehörigen Traglast. Die entscheidende Verbindung zur Strukturoptimierung wird wenige Jahre später hergestellt, als MUNRO & DA FONSECA [101] zur Traglastermittlung die von DANTZIG [23] entwickelte Simplex-Methode vorschlugen. Berechnungsgrundlage ist hierbei ein vordefiniertes Dreiecksnetz, das in der Lage ist, einen kinematischen Mechanismus zu bilden.

Seit den 80er Jahren konzentriert sich die Forschung zunehmend auf eine rechnerorientierte Aufbereitung der Fließlinientheorie. So untersuchen BAUER & REDWOOD [6] eine Lösungsstrategie anhand der Gesamtstruktur einer Platte, während BALASUBRAMANYAM & KALYANARAMAN [4] auf eine Unterteilung in Dreiecksflächen setzen. Da die erzielten Traglastergebnisse von der gewählten Vernetzung abhängen, rückt schließlich immer mehr die Betrachtung der Netzgeometrie in den Vordergrund. Zu diesem Zweck wird erneut auf die Optimierung zurückgegriffen, die seit einigen Jahren immer häufiger Anwendung auf die verschiedenen Problemstellungen der Strukturmechanik findet, siehe beispielsweise BLETZINGER et al. [14] oder CHERKAEV [18].

Bis Mitte der 90er Jahre bilden sich im Hinblick auf die Optimierung von Fließliniennetzen im Wesentlichen zwei Strömungen heraus. JOHNSON [68, 69] und RAMSAY & JOHNSON [117, 118] schlagen ein zweistufiges Verfahren vor, das ausgehend von einem relativ feinen Dreiecksnetz zunächst die tatsächlich auftretenden Fließlinien ermittelt und die so entstandene Versagensfigur anschließend optimiert. Die Grundlage liefert das Verfahren einer direkten Suche nach HOOKE & JEEVES [57]. Im Gegensatz dazu verfolgen JENNINGS [62], JENNINGS et al. [63], MCKEOWN et al. [92] und THAVALINGAM et al. [140, 141] einen Ansatz auf der Basis der konjugierten Gradientenmethode nach FLETCHER & REEVES [36]; allerdings wird dabei die manuelle Vorgabe eines Dreiecksnetzes vorausgesetzt.

Die Schwierigkeit der Netzgenerierung zeigt sich auch in computergestützten Berechnungsprogrammen, bei denen die Auswahl eines Netzes häufig dem Benutzer überlassen bleibt (DICKENS & JONES [28] sowie IBELL et al. [59] und MIDDLETON [94]). Meist beschränkt sich die Betrachtung von Platten daher nur auf einfachere Plattengeometrien, wie beispielweise in FAMIYESIN et al. [33] und SHOEMAKER [129]. DENTON [26] stellt hingegen Kompatibilitätsbedingungen zusammen, um mit ihrer Hilfe auf numerischem Wege einen kinematischen Mechanismus bestimmen zu können. Eine geometrische Herangehensweise für konvexe Polygonplatten liefert LIU [88]; ebenso schlägt in jüngster Zeit KWAN [84] vor, das Problem durch die Rotation und Verschneidung von Ebenen zu lösen.

Gestützt auf die Finite-Element-Methode hat sich dieser Forschungszweig in den letzten Jahren verstärkt den Aspekten des Streifenverfahrens nach HILLERBORG [54] und der damit verbundenen unteren Grenzwertanalyse zugewandt. Genannt seien hierfür die Veröffentlichungen von DAMKILDE & KRENK [22], KRABbenhOFT & DAMKILDE [80], KRENK et al. [83] sowie MONOTTI [97] und OLSEN [109]. Gleichzeitig werden auch die klassischen finiten Elemente stetig erweitert und verbessert.

Um ergänzend dazu einen Beitrag zur Weiterentwicklung der Fließlinientheorie zu leisten, setzt sich die vorliegende Arbeit zunächst zur Aufgabe, sowohl die An-

wendung einer direkten Suchstrategie als auch die des konjugierten Gradientenverfahrens in ein Finite-Element-Programm (TAYLOR [138]) zu implementieren. Da das Problem einer numerischen Geometriefindung, welche der eigentlichen Berechnung vorausgeht, für beliebige Polygonplatten noch immer nicht befriedigend gelöst ist, soll ein wesentliches Ziel in der Erarbeitung und Umsetzung eines dafür geeigneten Algorithmus bestehen. Als theoretische Grundlage können aus dem Bereich der Kombinatorik Ansätze von BEGE & KÁSA [8] sowie DERSHOWITZ & ZAKS [27] herangezogen werden, die ursprünglich zur Beschreibung von Binärbäumen dienen und auch für die Triangulierung von Polygonen Verwendung finden (MOON & MOSER [98]). Schließlich soll das Verfahren der Fließlinientheorie anhand von numerischen Beispielen einem auf der Fließzonentheorie beruhenden Materialmodell gegenübergestellt werden, wie es üblicherweise in Finite-Element-Programmen Verwendung findet.

1.3 Gliederung

In **Kapitel 2** sind allgemeine Grundlagen zusammengetragen, auf denen sowohl die Fließlinientheorie als auch die Fließzonentheorie basieren. Ausgehend von der Plattentheorie werden die wichtigsten mechanischen Größen sowie statische und kinematische Beziehungen eingeführt. Neben der Herleitung von Berechnungsansätzen werden Annahmen zu Materialgesetzen und Fließbedingungen erläutert, welche insbesondere die Anwendung der Fließlinientheorie überhaupt erst ermöglichen.

Eine Berechnung mit Hilfe der Fließlinientheorie beruht auf der Vorgabe einer kinematisch zulässigen Versagensfigur. Daher sind geometrische Gesetzmäßigkeiten von zentraler Bedeutung. Darüber hinaus werden in **Kapitel 3** unterschiedliche Lagerungsbedingungen und deren Auswirkung auf ein versagendes Platten-tragwerk diskutiert. Nach der Erörterung materialbezogener Gesichtspunkte wie Isotropie und Anisotropie werden im Folgenden die Verfahren zur Traglastberechnung vorgestellt. Ein weiterer Aspekt sind lokale Einflüsse, beispielsweise in Form von fächerartigen Fließlinienstrukturen in den Plattenecken, die eine zusätzliche Reduzierung der Traglast bewirken können.

Es zeigt sich, dass die Suche nach einem Traglastminimum ein klassisches Optimierungsproblem darstellt. Aus diesem Grund setzt sich **Kapitel 4** zunächst mit der Diskussion und Einordnung verschiedener Optimierungsansätze auseinander. Anschließend werden gängige Algorithmen erörtert und Möglichkeiten zu ihrer Verwendung in Bezug auf die gegebene Problemstellung aufgezeigt.

Kapitel 5 markiert den Übergang von der theoretischen Aufbereitung der Grundlagen zum Themenblock der numerischen Implementierung. Neben dem struktu-

rellen Vergleich mit der Finite-Element-Methode ist vor allem die Anpassung der Optimierungsstrategien an die besonderen Erfordernisse der Fließlinientheorie von Interesse. Dabei kommen namentlich das direkte Suchverfahren sowie die konjugierte Gradientenmethode zur Anwendung. Es wird außerdem ein Ansatz auf der Basis evolutionärer Algorithmen vorgeschlagen.

Mit der noch immer aktuellen Problematik einer geeigneten Netzgenerierung befasst sich **Kapitel 6**. Zu diesem Zweck wird ein neuartiger Lösungsalgorithmus erarbeitet, der für beliebige, allseitig gelagerte Polygonplatten alle zulässigen Fließlinienkonfigurationen ermittelt. Die Lage der dazu benötigten Netzknoten wird über die Verkipfung von Ebenen bestimmt. Hierfür sind weitere geometrische Betrachtungen erforderlich, die auf den bereits in Kapitel 3 zusammengestellten Grundlagen aufbauen. Zuletzt wird noch auf die Triangulierung der zuvor erzeugten Teilflächen eingegangen.

Kapitel 7 veranschaulicht die theoretischen Zusammenhänge anhand von konkreten Beispielen. Es werden Vergleiche mit Berechnungen der Finite-Element-Methode auf der Basis der Fließzonentheorie sowie mit Ergebnissen aus der Literatur gezogen. Untersucht werden auch die Auswirkungen lokaler Effekte sowie die Charakteristiken der unterschiedlichen Optimierungsstrategien. Schließlich folgt eine kurze Zusammenfassung mit den wichtigsten Schlussfolgerungen aus den gezeigten Beispielen.

2 Plattentheorie und Materialmodellierung

Ausgehend von der Reissner-Mindlin-Plattentheorie werden die im Weiteren benötigten Größen und ihre Notation eingeführt. Essenziell sind auch die Vereinfachungen, mit deren Hilfe ein nichtlineares Materialverhalten beschrieben wird. In der Konsequenz leiten sich für die Fließlinientheorie wichtige Annahmen ab, die einerseits ihre Basis begründen und andererseits die Abgrenzung zur Fließzonentheorie bedeuten. Abschließend werden die Ansätze der später verwendeten Berechnungsmethoden hergeleitet.

Allgemeine Ausführungen zur Plattentheorie werden unter anderem in GIRKMANN [44] und TIMOSHENKO & WOINOWSKY-KRIEGER [142] beschrieben. Speziellere Darstellungen vor dem Hintergrund der Fließlinientheorie finden sich in KALISZKY [73], SAWCZUK & JAEGER [124] und WOOD [151]. Ferner wird auf Grundlagen aus der Kontinuumsmechanik zurückgegriffen, die beispielsweise in BAŞAR & WEICHERT [3], BETTEN [13] oder GROSS & SEELIG [47] nachzulesen sind. Im Bereich der Plastizität sei stellvertretend auf die Literatur von CHEN & HAN [17], FUNG [38], KREISSIG [82], NIELSEN [107] und PRAGER & HODGE [114] verwiesen.

2.1 Theorie der Plattentragwerke

Als Flächentragwerk weist eine Platte im Vergleich zu ihren Längenabmessungen ℓ_x und ℓ_y nur eine geringe Höhe h auf. Belastungen wirken senkrecht zur Systemebene und rufen in ihrer Wirkungsrichtung eine Verschiebung w hervor; dementsprechend treten entlang der beiden Flächenachsen x und y die Verdrehungen β_x und β_y auf. Abbildung 2.1 stellt die genannten Parameter dar und veranschaulicht ihre Beziehung zueinander.

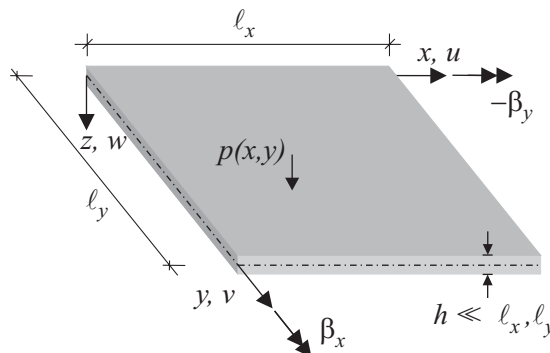


Abbildung 2.1: Plattentragwerk

2.1.1 Kinematische Ansätze

Unter dem Einfluss einer Durchbiegung w und der daraus resultierenden Lageänderung der beiden Punkte A und B sind die Schubverzerrungen γ_{xz} und – analog zu der hier betrachteten xz -Ebene – γ_{yz} anhand der Abbildung 2.2a direkt ersichtlich. Gemeinsam mit den Krümmungen $\boldsymbol{\kappa}$, welche sich aus den Ableitungen der Verdrehungen β_x und β_y definieren, erhält man

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

und weiter

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (2.2a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (2.2b)$$

Diese Formulierung entspricht der Plattentheorie von REISSNER [121] und MINDLIN [95]. Der ebene Querschnitt der Ausgangslage bleibt auch im verformten Zustand erhalten, nicht aber der rechte Winkel zur Plattenmittelfläche. Ist darüber hinaus auch diese Forderung zu erfüllen, wie es Abbildung 2.2b zeigt, so folgt dies der Kirchhoff-Love-Theorie. Hier verhält sich die Platte schubstarr und im Gegensatz zu den Gleichungen (2.2) ergibt sich nun

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.3a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.3b)$$

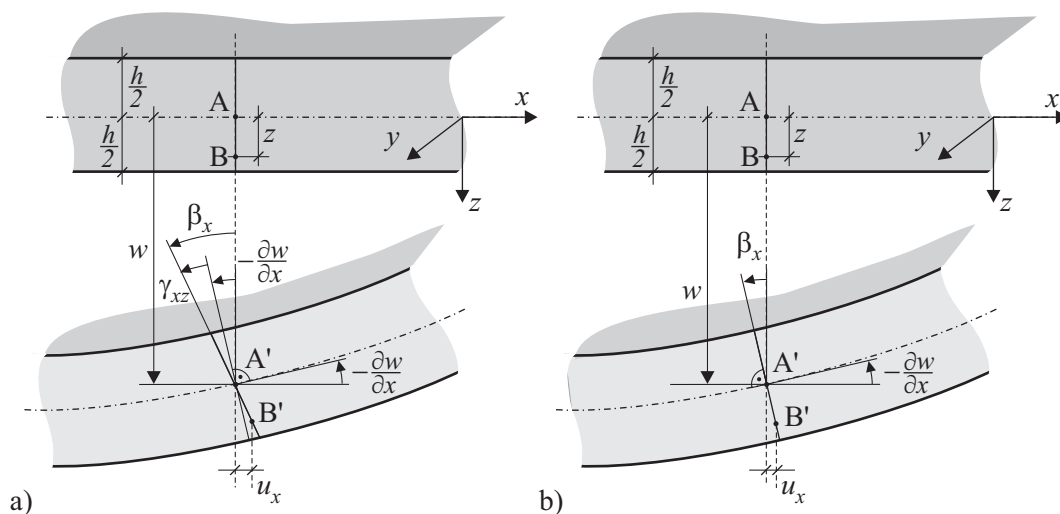


Abbildung 2.2: Querschnitt der verformten Platte in der xz -Ebene

a) nach der Reissner-Mindlin-Theorie

b) nach der Kirchhoff-Love-Theorie

Für die weiteren Betrachtungen soll jedoch die Reissner-Mindlin-Theorie als Grundlage dienen. Die kinematische Betrachtung aus (2.2) liefert schließlich den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

der mit Hilfe des Differentialoperators \mathbf{D} zusammengefasst werden kann zu

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement

Dem gegenüber stehen die Schnittgrößen \mathbf{S} , die sich aus den Normal- und Schubspannungen σ_x , σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, integriert über die Plattendicke h ergeben, vergleiche Abbildung 2.3. Dabei wird $\sigma_z = 0$ angenommen, womit sich das betrachtete Plattenelement im ebenen Spannungszustand befindet. Bezogen auf die

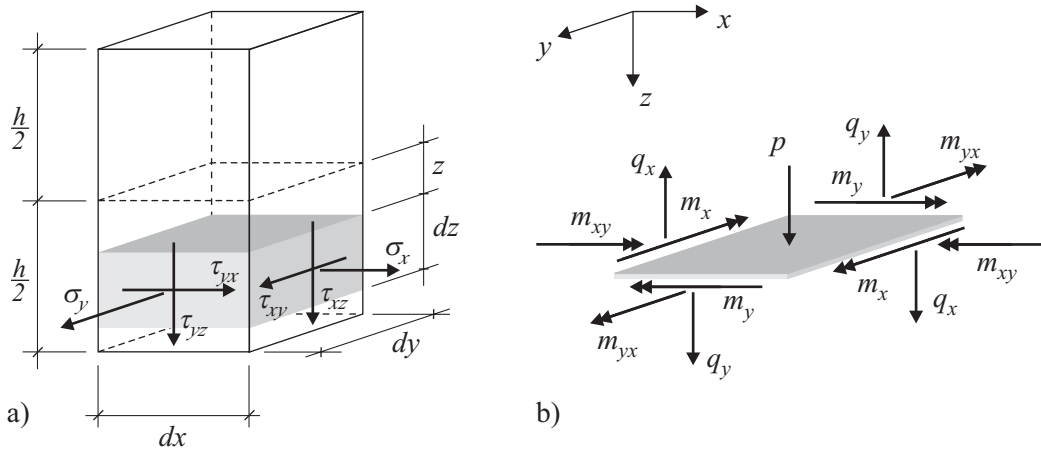


Abbildung 2.3: Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement

a) Spannungszustand

b) Schnittgrößen

Mittelfaser erhält man die Momente \mathbf{m} sowie die Querkräfte \mathbf{q} mit

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z \, dz, \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz; \quad (2.6b)$$

wegen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ist m_{xy} im Weiteren gleichbedeutend mit m_{yx} . Die Gleichgewichtsbedingungen der Platte liefern außerdem die Beziehungen

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p = 0, \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x = 0, \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y = 0. \quad (2.7c)$$

In Analogie zu den Darstellungen (2.4) und (2.5) folgt daraus

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ q_x \\ q_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

oder kurz

$$\mathbf{D}^T \mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{0} , \quad (2.9)$$

wobei \mathbf{D}^T der zu \mathbf{D} adjungierte Differentialoperator ist – nicht zu verwechseln mit einer gewöhnlichen transponierten Matrix.

2.1.3 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Unter Verwendung der Methode von Galerkin wird die Differentialgleichung mittels einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ in schwacher Form aufgestellt. Über den Integrationsbereich Ω ist dabei die Forderung

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{S} + \mathbf{p}) d\Omega = 0 \quad (2.10)$$

für beliebige $\delta \mathbf{u}$ zu erfüllen. Nach einer partiellen Integration werden die Testfunktionen als virtuelle Verschiebungen identifiziert. Abbildung 2.4 zeigt den Bereich Ω , an dessen Berandung $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_{\sigma} + \Gamma_{\sigma_{pl}}$ außerdem verschiedene Randbedingungen in Form von Schnittgrößen $\bar{\mathbf{t}}$ oder Verschiebungen $\bar{\mathbf{u}}$ eingearbeitet werden können.

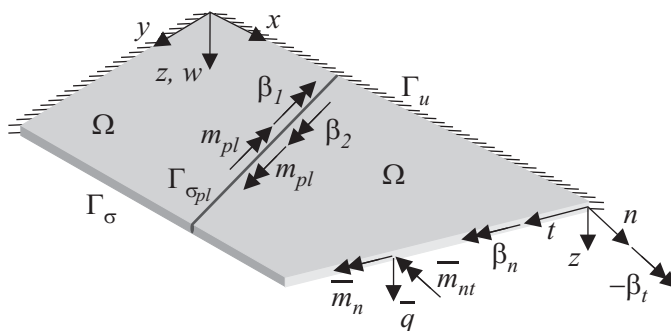


Abbildung 2.4: Integrationsbereich Ω und Berandung Γ

Von besonderem Interesse für die Fließlinientheorie ist das an der Diskontinuität $\Gamma_{\sigma_{pl}}$ einer Platte wirkende plastische Moment m_{pl} , das dort einen virtuellen Knickwinkel $\delta \theta = \delta \beta_2 - \delta \beta_1$ hervorruft. Angewendet auf die Gleichungen (2.7) mit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + p \right) \delta w + \right. \\ & \quad + \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - q_x \right) \delta \beta_x + \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - q_y \right) \delta \beta_y \right] d\Omega = 0 , \end{aligned} \quad (2.11)$$

liefert eine partielle Integration

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \left[q_x \left(\delta\beta_x + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) + q_y \left(\delta\beta_y + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + m_x \left(\frac{\partial(\delta\beta_x)}{\partial x} \right) + m_y \left(\frac{\partial(\delta\beta_y)}{\partial y} \right) + m_{xy} \left(\frac{\partial(\delta\beta_x)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\beta_y)}{\partial x} \right) \right] dA + \\
& + \int_{\Omega} p \delta w dA + \\
& - \oint_{\Gamma_{\sigma_{pl}}} [m_{pl} \delta\theta] ds + \oint_{\Gamma_{\sigma}} \left[(q_x n_x + q_y n_y) \delta w \right] ds + \\
& + \oint_{\Gamma_{\sigma}} \left[(m_x n_x + m_{xy} n_y) \delta\beta_x + (m_{xy} n_x + m_y n_y) \delta\beta_y \right] ds = 0 .
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dies führt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\kappa_x \\ \delta\kappa_y \\ 2\delta\kappa_{xy} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} dA - \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} dA - \int_{\Gamma_{\sigma_{pl}}} \delta\theta m_{pl} ds + \\
& + \int_{\Omega} \delta w p dA + \int_{\Gamma_{\sigma}} \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta\beta_n \\ \delta\beta_t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{m}_n \\ \bar{m}_{nt} \end{bmatrix} ds = 0 .
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Allgemeiner ausgedrückt, gilt

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} dA - \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{q} dA - \int_{\Gamma_{\sigma_{pl}}} \delta\theta m_{pl} ds + \\
& + \int_{\Omega} \delta w p dA + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

beziehungsweise

$$- \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{S} dA - \int_{\Gamma_{\sigma_{pl}}} \delta\theta m_{pl} ds + \int_{\Omega} \delta w p dA + \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 . \tag{2.15}$$

Hieraus wird deutlich, dass in die Formulierungen des Prinzips der virtuellen Verschiebungen keine Werkstoffgesetze eingehen.

2.1.4 Materialgleichungen

Neben den kinematischen Beziehungen und den Gleichgewichtsbedingungen werden zur Beschreibung eines Tragwerks Werkstoffgesetze benötigt. Mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν wird der Schubmodul

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.16)$$

definiert. Unter der Annahme eines linear-elastischen Verhaltens sowie des in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen ebenen Spannungszustandes gilt

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

und

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Die Übertragung auf Schnittgrößen erfolgt nun mit Hilfe von

$$\tilde{\mathbf{E}}_B = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

und

$$\tilde{\mathbf{E}}_S = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

durch Integration über die Plattendicke h . Es sind

$$\mathbf{m} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_B z^2 \boldsymbol{\kappa} dz = \tilde{\mathbf{E}}_B \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{E}_B \boldsymbol{\kappa}, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{q} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\tau} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{\mathbf{E}}_S \boldsymbol{\gamma} dz = \tilde{\mathbf{E}}_S \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E}_S \boldsymbol{\gamma} \quad (2.21b)$$

mit den Elastizitätsmatrizen für Biegung und Schub,

$$\mathbf{E}_B = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

und

$$\mathbf{E}_S = \kappa Gh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

Im Vergleich zu (2.19) und (2.20) führt die Integration dabei zu veränderten Koeffizienten. Aus dem Vorfaktor der Gleichung (2.22) wird die Plattenbiegesteifigkeit

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.24)$$

definiert. Außerdem kommt in (2.23) ein Schubkorrekturfaktor κ hinzu, der sich bei Rechteckquerschnitten zu $\kappa = \frac{5}{6}$ berechnet. Schließlich lassen sich die Gleichungen (2.21) zusammenfassen zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

beziehungsweise allgemein

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.26)$$

Damit liefert (2.15) ohne den Anteil auf der Fließlinie

$$\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{\Omega} \delta w p dA - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0. \quad (2.27)$$

Für den allgemeineren Fall der materiellen Nichtlinearität lässt sich diese Gleichung nicht direkt lösen und es muss im Rahmen einer iterativen Lösung die Linearisierung

$$\Delta\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \Delta\mathbf{S} dA \quad (2.28)$$

ermittelt werden. Neben der weiterhin gültigen geometrischen Linearität werden dabei richtungstreue Lasten vorausgesetzt. Es gilt die Beziehung

$$\Delta\delta\Pi = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_T \Delta\boldsymbol{\varepsilon} dA, \quad (2.29)$$

mit der elastoplastischen Tangente \mathbf{E}_T . Darüber hinaus sind für ein plastisches Materialverhalten Gültigkeitsgrenzen in Form von Fließbedingungen zu definieren.

2.2 Materielle Nichtlinearität

Für die Einführung der Plattentheorie konnte die Zuhilfenahme eines linearen Materialgesetzes noch genügen. Die Anwendung von Traglastverfahren setzt jedoch Werkstoffe voraus, die fähig sind zu plastizieren. Im Weiteren muss daher auch das Verhalten materieller Nichtlinearität modelliert werden. Die Frage nach der Zulässigkeit und Genauigkeit der Idealisierungen bleibt dann im Zuge ihrer Festlegung noch zu diskutieren.

2.2.1 Stahl und Beton als Werkstoffe

Im Bauwesen sind Stahl und Beton klassische Werkstoffe mit nichtlinearen Materialeigenschaften. Ihr einaxiales Spannungs-Dehnungs-Verhalten ist in Abbildung 2.5 qualitativ dargestellt. Betrachtet man zuerst den duktilen Stahl in Abbildung 2.5a, so erkennt man, dass der anfänglich linear-elastische Verlauf sowohl im Zug- als auch im Druckbereich allmählich in plastisches Fließen übergeht. Lässt man die anschließende Verfestigung außer Acht, so kann als erste Vereinfachung eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung angenommen werden, bei der eine plastische Fließspannung σ_{pl} nicht überschritten wird, vergleiche Abbildung 2.6. In der praktischen Anwendung von Stahlbeton werden die Zugspannungen der Stahlbewehrung zugewiesen. Jedoch ist aus Abbildung 2.5b ersichtlich, dass sich auch die Spannungs-Dehnungs-Linie im Druckbereich des Betons sehr ähnlich verhält. Insofern könnte die soeben gewählte Näherung auch zur Beschreibung von Beton herangezogen werden.

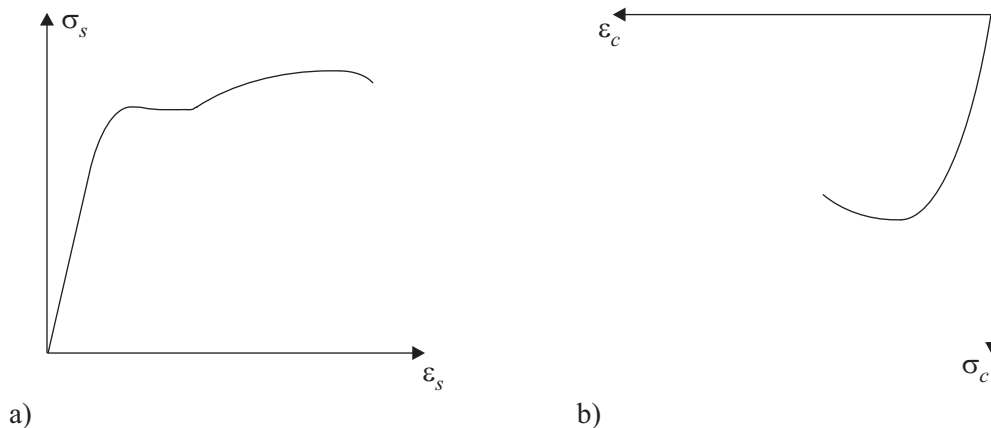


Abbildung 2.5: Einachsiges Spannungs-Dehnungs-Verhalten
a) von Stahl
b) von Beton

2.2.2 Fließzonen und Fließgelenke am Balken

Um das nichtlineare Verhalten des Materials weiter zu untersuchen, wird der Einfachheit halber zunächst ein Balken der Höhe h betrachtet. Dieser ist an einer Seite eingespannt und auf der anderen mit einem Biegemoment M belastet. Abbildung 2.6 zeigt nochmals die zuvor schon definierte Vereinfachung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufs und unterscheidet drei Bereiche, denen jeweils ein repräsentativer Spannungszustand am eingespannten Balkenquerschnitt zugeordnet ist.

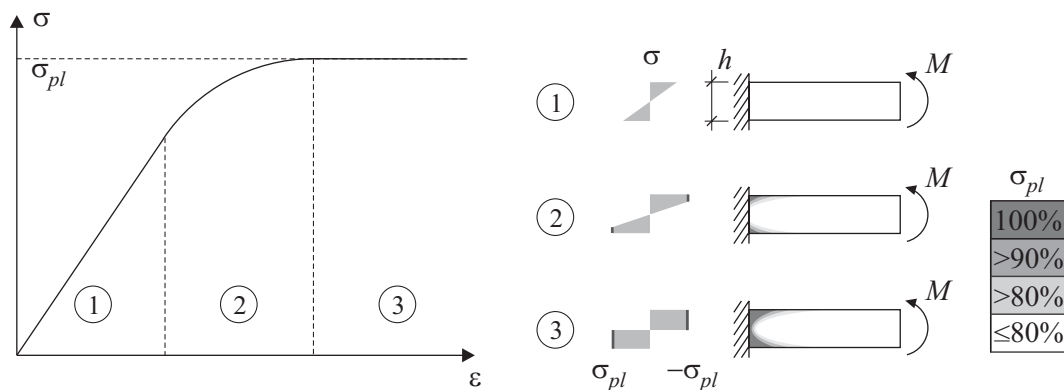


Abbildung 2.6: Spannungs-Dehnungs-Kurve und Fließzonen am Balkenquerschnitt

Im ersten Bereich liegen die Spannungen σ noch an allen Stellen des Einspannquerschnitts unterhalb der Fließspannung σ_{pl} . Es herrscht ein rein elastisches Materialverhalten. Wird die Belastung M nun immer weiter gesteigert, so werden die oberen und unteren Randschichten der Einspannung bereits so weit gestaucht beziehungsweise gedehnt, dass die Fließspannung dort erreicht ist. Auch die angrenzenden Zonen nähern sich diesem Zustand an. Im dritten Bereich ist schließlich der gesamte Querschnitt durchplastiziert und kein Punkt seiner Fläche ist mehr in der Lage, einer Dehnung oder Stauchung Widerstand entgegenzusetzen. Damit hat der Balken seine Tragfähigkeit verloren und es ist ein kinematischer Mechanismus entstanden. Dieser Vorgang kann auch anhand des einführenden Beispiels 1 in Kapitel 7 nachvollzogen werden.

Bei der Beschreibung dieses Verhaltens bezüglich der neutralen Mittelfaser des Balkens wird die Betrachtung einzelner Querschnittspunkte zugunsten einer zusammenfassenden Sichtweise aufgegeben. In der Konsequenz schrumpfen auch die Fließzonen zu sogenannten Fließgelenken zusammen. Das Materialverhalten bleibt hiervon freilich unbeeinflusst, sodass die Spannungs-Dehnungs-Beziehung durch eine identische Momenten-Krümmungs-Kurve ersetzt werden kann, siehe Abbildung 2.7.

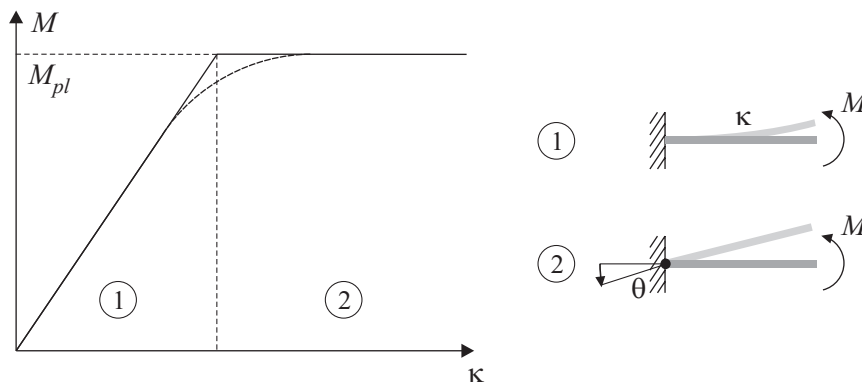


Abbildung 2.7: Momenten-Krümmungs-Beziehung und Fließgelenke im Balken

Da der genaue Vorgang des Plastizierens im Querschnitt jetzt nur noch eine untergeordnete Rolle spielt, kann im nächsten Schritt auch das Werkstoffgesetz angepasst werden. Idealerweise tritt nun sofort nach dem Verlassen des linear-elastischen Bereichs ein Fließgelenk ein, woraus ein bilinearer Kurvenverlauf resultiert. Gleichzeitig können sich die elastischen Verformungen außerhalb dieses Gelenkes wieder zurückbilden, da sich wiederum ein kinematischer Mechanismus einstellt. Die Krümmungen κ sind entsprechend im Verdrehwinkel θ zusammengefasst. Als letzte und tiefgreifendste Vereinfachung wird schließlich zu einer starr-idealplastischen Darstellung des Materialverhaltens übergegangen, wie sie [Abbildung 2.8](#) zeigt. Dies bedeutet, dass Fließgelenke schlagartig entstehen und das lineare Elastizitätsgesetz eine unendliche Steifigkeit aufweist. Deshalb ist eine solche Annahme nur zulässig, wenn auch in die späteren Berechnungen keine elastischen Ansätze, sondern nur die plastischen Momente $M_{pl,o}$ und $M_{pl,u}$ der Ober- und Unterseite einfließen.

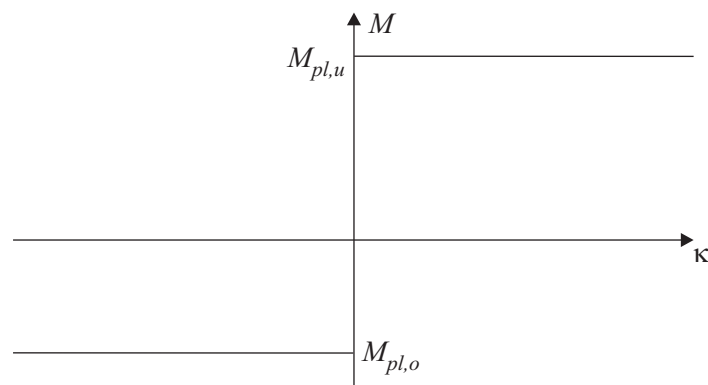


Abbildung 2.8: Starr-idealplastisches Materialverhalten

2.2.3 Erweiterung auf Plattentragwerke

Die Übertragung der vorgestellten Idealisierungen auf Platten ist aus geometrischer Sicht leicht nachvollziehbar. Genauso wie den Abmessungen eine Dimension hinzugefügt wird, entstehen aus den Fließgelenken Fließlinien, die über die Plattenebene verlaufen. Dementsprechend tritt an die Stelle der soeben hergeleiteten Fließgelenktheorie die Fließlinientheorie. Die zu Anfang eingeführte Fließzonen-theorie erweitert sich analog in die dritte Dimension, wie Abbildung 2.9 veranschaulicht.

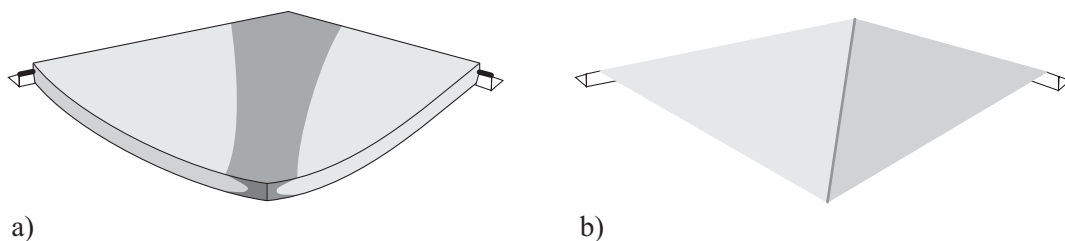


Abbildung 2.9: Plastizierendes Plattentragwerk

a) dreidimensionale Fließzone

b) Fließlinie

Während bei der Fließzonentheorie die elastischen Bereiche nach wie vor kontinuierlich in die plastischen Fließzonen übergehen, umschließen die Fließlinien vollkommen starre Teilplatten mit ebenen Flächen. Konsequenterweise begründet dies die Annahme, dass sich sämtliche inneren Arbeitsanteile in den Fließlinien konzentrieren und somit eine gesonderte Betrachtung der Teilplatten entfällt. Deshalb erübrigt sich auch jede Diskussion bezüglich der anzuwendenden Plattentheorie.

2.2.4 Fließbedingungen

Da die senkrecht zur Mittelfläche stehende Normalspannung σ_z vernachlässigt wird, befindet sich die Platte im ebenen Spannungszustand. Somit lassen sich die benötigten Fließbedingungen in einem nach den Hauptspannungen σ_I und σ_{II} orientierten Koordinatensystem darstellen. Häufig werden in der Fließzonentheorie die Formulierungen von Coulomb-Tresca oder Huber-von Mises-Hencky verwendet. Sie definieren die Funktion f zur Begrenzung des elastischen Bereiches isotroper Materialien auf unterschiedliche Weise. Während das Fließgesetz

nach Huber-von Mises-Hencky mit den Gleichungen

$$f = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_{pl} \quad (2.30a)$$

$$\text{oder } f = \sigma_I^2 - \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 = \sigma_{pl} \quad (2.30b)$$

einer Ellipse entspricht, beschreibt der Ausdruck

$$f = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|, |\sigma_I - \sigma_{II}|) = \sigma_{pl} \quad (2.31)$$

nach Coulomb-Tresca ein in die Ellipse eingepasstes Polygon.

Für die Fließlinientheorie wird hingegen die vereinfachte quadratische Fließbedingung gewählt. Demnach wird ein Plastizieren nur dann erreicht, wenn mindestens eine der Bedingungen

$$|\sigma_I| \leq \sigma_{pl} \quad \text{und} \quad |\sigma_{II}| \leq \sigma_{pl} \quad (2.32)$$

in Form einer Gleichung gegeben ist, oder umformuliert

$$f = \max(|\sigma_I|, |\sigma_{II}|) = \sigma_{pl} \quad (2.33)$$

gilt. Zum Vergleich zeigt Abbildung 2.10 die verschiedenen Varianten in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

Aufgrund der Überlegungen aus Abschnitt 2.2.2 kann die Fließspannung σ_{pl} direkt durch das plastische Moment m_{pl} ersetzt werden. Definiert man außerdem die dimensionslosen Größen

$$\bar{m}_I = \frac{m_I}{m_{pl}} \quad \text{und} \quad \bar{m}_{II} = \frac{m_{II}}{m_{pl}}, \quad (2.34)$$

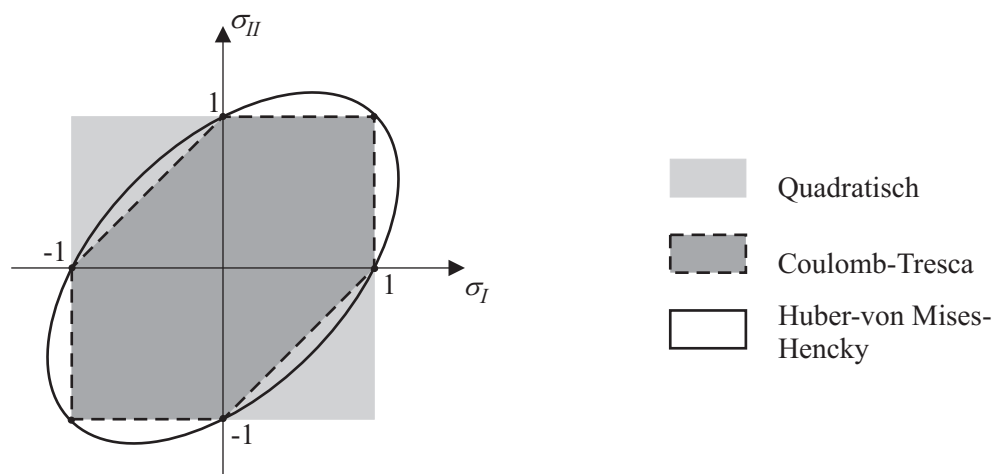


Abbildung 2.10: Fließbedingungen

welche die Hauptmomente auf das plastische Moment beziehen, so lässt sich die Fließbedingung aus Gleichung (2.33) umwandeln in

$$f = \max(|\bar{m}_I|, |\bar{m}_{II}|) = 1 . \quad (2.35)$$

Die bezogenen Hauptmomente \bar{m}_I und \bar{m}_{II} werden mit der Transformation

$$\bar{m}_{I,II} = \frac{1}{2}(\bar{m}_x + \bar{m}_y) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\bar{m}_x - \bar{m}_y)^2 + \bar{m}_{xy}^2} = \pm 1 \quad (2.36)$$

in die ebenfalls dimensionslosen Biege- und Torsionsmomente \bar{m}_x , \bar{m}_y und \bar{m}_{xy} übertragen. Damit kann die Funktion (2.35) äquivalent umformuliert werden zu

$$f_x = \bar{m}_x + \bar{m}_y - \bar{m}_x \bar{m}_y + \bar{m}_{xy}^2 \leq 1 , \quad (2.37a)$$

$$f_y = -\bar{m}_x - \bar{m}_y - \bar{m}_x \bar{m}_y + \bar{m}_{xy}^2 \leq 1 , \quad (2.37b)$$

vergleiche KALISZKY [73] und NIELSEN [107]. Auf diese Weise wird ein Volumen aus zwei elliptischen Körpern aufgespannt, wie es Abbildung 2.11a zeigt. Diese Fließfläche markiert die Punkte, an denen das Material zu plastizieren beginnt; der elastische Bereich liegt innerhalb dieser Begrenzung. Da definitionsgemäß keine Materialverfestigung stattfindet, sind Funktionswerte außerhalb der Fließfläche unzulässig.

Die zu untersuchenden Platten werden als hinreichend dünn betrachtet, sodass die Schubanteile τ_{xz} und τ_{yz} von vornherein entfallen. Weiter wird nun angenommen, dass auch die verbleibende Schubspannung τ_{xy} nicht in der Lage ist, den Grenzzustand der Traglast herbeizuführen. Aus diesem Grunde gehen auch die Drillmomente nicht in die Grenzzustandsgleichungen ein. Die Gleichungen zur

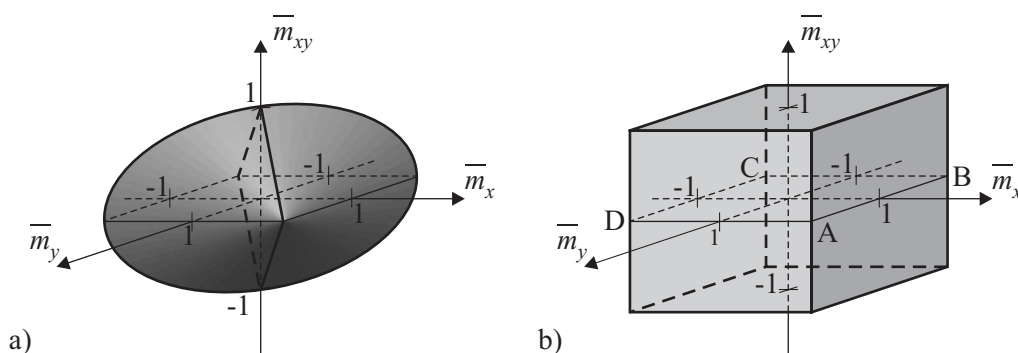


Abbildung 2.11: Dreidimensionale Fließfläche

a) elliptisch

b) vereinfacht

Beschreibung der Fließfläche vereinfachen sich zu

$$\bar{m}_x = \pm 1, \quad (2.38a)$$

$$\bar{m}_y = \pm 1. \quad (2.38b)$$

Damit das Tragwerk nicht infolge eines beliebigen Drillmoments versagt, wird zusätzlich die Definition $-1 \leq \bar{m}_{xy} \leq 1$ getroffen. So ergibt sich eine stark vereinfachte Fließfläche ohne Momenteninteraktion, wie sie in Abbildung 2.11b zu sehen ist. In der dargestellten Konstellation wird angenommen, dass das negative Fließmoment der Plattenoberseite und das positive der Unterseite in beiden Achsen gleich groß sind. Andernfalls – das heißt im Fall einer geringeren Aufnahmefähigkeit – würden die Flächen BC und CD beziehungsweise AB und AD entsprechend parallel nach innen versetzt.

2.2.5 Grenzwertsätze

Betrachtet man nochmals die Abbildung 2.10, so fällt auf, dass die Fließbedingungen nach Huber-von Mises-Hencky und Coulomb-Tresca im Wesentlichen innerhalb der Fläche der quadratischen Fließbedingung liegen. Demnach gilt bei Letzterer für einige Punkte des abgebildeten Koordinatensystems noch die Elastizitätstheorie, obwohl sie sich nach den realistischeren Fließgesetzen längst im Bereich der Plastizität befinden müssten. Dies legt nahe, dass diese Lösung die Realität auf Kosten der Sicherheit annähert und begründet die Schlussfolgerung, dass die Ergebnisse der Fließlinientheorie auf der unsicheren Seite liegen. Diese Eigenschaft bezüglich der ermittelten Traglast zeichnet die Verfahren des sogenannten oberen Grenzwertsatzes aus.

Oberer Grenzwertsatz – Kinematischer Satz

Ein Tragwerk versagt unter einer gegebenen äußeren Last, wenn die von ihr verrichtete Arbeit größer oder gleich der inneren Dissipationsarbeit ist, die ein beliebiger kinematisch zulässiger Fließmechanismus verrichtet.

Dem steht als Gegenstück der untere Grenzwertsatz gegenüber. Die auf ihm beruhenden Berechnungsmethoden – wie im Falle der Platten das Streifenverfahren nach HILLERBORG [54] – liefern Traglasten, die von der Struktur in jedem Fall abgetragen werden können.

Unterer Grenzwertsatz – Statischer Satz

Ein Tragwerk versagt unter einer gegebenen äußeren Last nicht, wenn dafür eine beliebige statisch zulässige Spannungsverteilung gefunden werden kann, die den Gleichgewichtsbedingungen genügt und die die Fließgrenze nicht überschreitet.

2.2.6 Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

Da gemäß dem oberen Grenzwertsatz ein kinematisches Berechnungsverfahren anzuwenden ist, bietet sich für diesen Zweck das Prinzip der virtuellen Verschiebungen an. Die notwendigen Grundgleichungen wurden bereits im Abschnitt 2.1.3 eingeführt, sodass nun eine Spezifizierung für die Anforderungen der Fließlinientheorie erfolgen kann.

Aufgrund des starren Verhaltens der Teilplatten treten sämtliche inneren Arbeiten in den Fließlinien auf, vergleiche Abschnitt 2.2.3. Analytisch betrachtet werden damit sowohl die virtuellen Krümmungen $\delta\kappa$ als auch die Verzerrungen $\delta\gamma$ innerhalb der eben bleibenden Flächen zu Null. In Gleichung (2.13) entfallen deshalb die ersten beiden Terme der linken Seite und es verbleibt als resultierende Arbeit

$$\int_{\Gamma_{\sigma_{pl}}} \delta\theta m_{pl} ds = \int_{\Omega} \delta w p dA . \quad (2.39)$$

Abbildung 2.12 zeigt in abstrahierter Form, wie sich die – mit dem Bereich Ω identische – Gesamtfläche A in mehrere Teilflächen mit dem jeweiligen Flächeninhalt A_i untergliedert. Demzufolge kann die rechte Seite der Gleichung (2.13) in eine Summe über die Anzahl i der Teilflächen überführt werden. Ebenso beschreibt $\Gamma_{\sigma_{pl}}$ ein Netz von k Fließlinien der Länge ℓ_k , welche die einzelnen Flächen gegeneinander abgrenzen. Auch hier kann also eine Summe gebildet werden. Unter der Annahme eines über die Länge konstanten plastischen Moments m_{pl} folgt

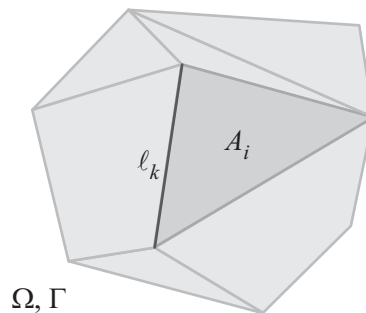


Abbildung 2.12: Teilflächen und Fließlinien

die Beziehung

$$\sum_k (m_{pl,k} \ell_k \delta\theta_k) = \sum_i \int_{A_i} p \delta w dA_i . \quad (2.40)$$

Aus dieser Formulierung geht hervor, dass einer Berechnung a priori ein kinematisch zulässiger Mechanismus zugrunde gelegt werden muss, der die Beiträge aus innerer und äußerer Arbeit beeinflusst. In Abhängigkeit des vorgegebenen plastischen Moments m_{pl} , das gegebenenfalls auch bereichsweise festgelegt werden kann, ermittelt sich die Traglast p , die den Versagensmechanismus hervorrufen würde. Umgekehrt lässt sich auch für eine gegebene Belastung das zur Abtragung notwendige plastische Grenzmoment m_{pl} bestimmen.

3 Einführung in die Fließlinientheorie

Nachdem die auf der Plattentheorie basierenden Hintergründe und die Auswirkungen materieller Nichtlinearität dargelegt worden sind, werden die daraus abgeleiteten Voraussetzungen für die Fließlinientheorie aufbereitet. Von großer Bedeutung sind dabei vor allem die geometrischen Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge, auf deren Basis anschließend einige einfachere Berechnungsansätze erläutert werden. Diese wesentlichen Grundlagen sind bereits von INGERSLEV [60] und JOHANSEN [66] erarbeitet worden. Für einführende Darstellungen zum Thema sei auf die Literatur von HAASE [51], JONES [70], PARK & GAMBLE [112], SAWCZUK & JAEGER [124] und WOOD [151] verwiesen.

3.1 Geometrische Grundlagen für Plattentragwerke

Um als Berechnungsgrundlage eine kinematisch mögliche Versagensgeometrie ermitteln zu können, müssen zuerst einige elementare Zusammenhänge analysiert werden, die einen kinematisch zulässigen Versagensmodus charakterisieren. So entstehen grundsätzlich nur Mechanismen, die von einem einzigen Bewegungsfreiheitsgrad abhängen. Sie werden außerdem stark von Randbedingungen wie gelagerten oder freien Rändern und Punktstützungen beeinflusst. Da die Rotationen der Teilplatten durch die zugehörigen Drehachsen bestimmt werden, ist insbesondere deren Lage und Wirkung auf die sich einstellenden Fließlinien von Interesse. Die Belastung sei gleichmäßig verteilt angenommen.

3.1.1 Fließlinien und Drehachsen

Die Fließzonen einer plastizierenden Platte werden in scharnierartigen Fließlinien konzentriert betrachtet, die bevorzugt in den stärker beanspruchten Bereichen liegen. Da sich die plastischen Formänderungen in diesen Fließlinien konzentrieren, werden die von ihnen umgrenzten Teilflächen als starre Flächen angenommen, für die eine weitergehende Betrachtung entfällt. Plastische Momente treten demzufolge ausschließlich in Fließlinien auf und werden über deren Länge als konstant angesehen. Beim Systemversagen rotieren die ebenen Teilplatten um Drehachsen, die bei linienförmig gelagerten Platten den Kanten entsprechen. Im Falle einer Punktstütze kann lediglich ausgesagt werden, dass die Drehachse über dieses Auflager verläuft; ihre genaue Richtung bleibt zunächst unbestimmt. Abgesehen von rotationssymmetrischen Beispielen wie randgelagerte Kreisplatten, müssen Fließlinien aus Geometrie Gründen gerade sein. In ihrem Verlauf treten also keine Knicke auf und an freien Rändern können sie aus der Platte herauslaufen. Auch

im Platteninneren sind Ablenkungen nur beim Zusammentreffen von mindestens drei Linien möglich. Je nachdem aus welcher Richtung Fließlinien aufeinander stoßen, erfordert es der kinematische Mechanismus, dass bezogen auf die neutrale Ebene der Platte entweder ihre Ober- oder Unterseite gestaucht wird, siehe Abbildung 3.1. Man unterscheidet dementsprechend in positive und negative Fließlinien. Aus der kinematischen Zulässigkeit folgt ebenso die Gesetzmäßigkeit, dass eine Fließlinie, die die Grenze zwischen zwei Teilplatten bildet, durch den Schnittpunkt ihrer beiden Drehachsen verlaufen muss. Dabei wird im Allgemeinen angenommen, dass die Plattenecke vertikal gehalten ist und nicht abheben kann. Beim Sonderfall paralleler Drehachsen liegt auch die zugehörige Fließlinie parallel.

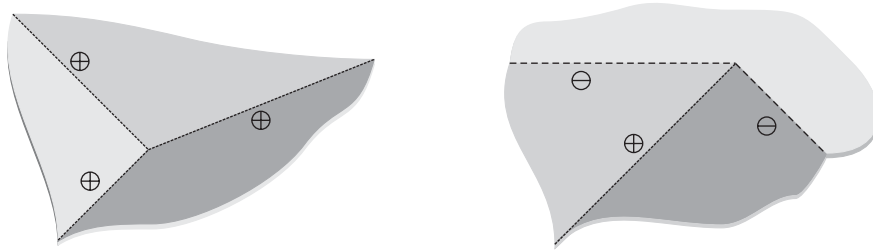


Abbildung 3.1: Zusammentreffen dreier Fließlinien

Betrachtet man sowohl die relativen Verdrehungen $\vec{\theta}$ einzelner Plattenteile untereinander als auch die absoluten Verdrehungen $\vec{\omega}$ der Teilebenen an ihrer Drehachse, so lassen sich diese Rotationen als Vektoren auffassen und somit vektoriell zerlegen oder addieren. Für kleine Winkel folgt die relative Rotation zweier Teilplatten i und j mit

$$\vec{\theta}_{ij} = \vec{\omega}_i - \vec{\omega}_j \quad (3.1)$$

aus den beiden Absolutverdrehungen, siehe Abbildung 3.2. Die Länge des Vektors entspricht dabei der Größe des Verdrehwinkels; die Richtung zeigt eine positive oder negative Fließlinie an. Treffen sich mehrere Fließlinien im Platteninneren, so lässt sich an jedem dieser Verzweigungspunkte eine Vektoraddition analog zu einem Krafteck durchführen. Für die Summe der einzelnen Verdrehungen gilt

$$\sum \vec{\theta}_{ij} = \vec{0}. \quad (3.2)$$

Im Gesamtbild führt dies zu einem Vektorpolygon, das, wenn es geschlossen ist, eine geometrisch mögliche Versagensfigur beschreibt.

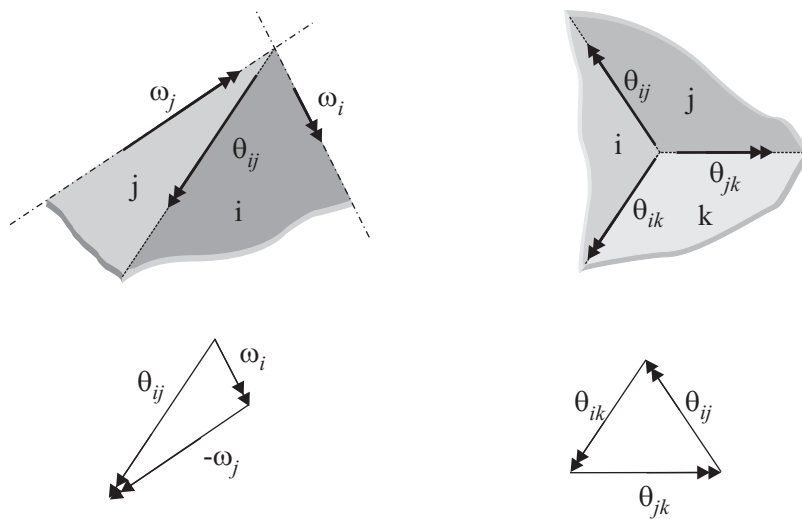


Abbildung 3.2: Vektorielle Addition von Verdrehwinkeln

3.1.2 Versagensfiguren

Sind alle vorgenannten Gesetzmäßigkeiten gegeben, so werden die Bedingungen für einen kinematisch zulässigen Mechanismus erfüllt. Abhängig von der Berandung der Platte und ihrer Lagerungsart können verschiedene Fließlinienfiguren auftreten, die in sich insofern variabel sind, als sich die Lage der einzelnen Verzweigungspunkte verschieben kann. Da die Fließlinien letztlich über die Verkipfung und Verschneidung der einzelnen Teilplatten bestimmt werden, sind ihre Neigungswinkel ein geeigneter Parameter zur Ermittlung von Versagensfiguren. In Abbildung 3.3 sind einige Beispiele von allseitig gelagerten Platten und Platten mit freien Rändern zu sehen. Abbildung 3.3a zeigt eine klassische, allseitig gelagerte Rechteckplatte mit ihrem charakteristischen Fließlinienverlauf. In den Abbildungen 3.3b und c ist jeweils der rechte beziehungsweise der untere Rand frei. Dies hat zur Folge, dass an dieser Stelle Fließlinien aus der Platte herauslaufen können. Im nächsten Schritt (Abbildung 3.3d) ist die Ecke einer Viereckplatte punktgestützt, während die beiden benachbarten Ränder frei sind. Die Richtung der durch diesen Punkt verlaufenden Drehachse eines Plattenbruchteils ist noch nicht festgelegt und wird durch denjenigen Mechanismus bestimmt, der zur minimalen Traglast führt. Schließlich verdeutlicht das Beispiel einer konkaven Plattengeometrie (Abbildung 3.3e), dass zusätzlich zu den bisher gezeigten positiven Fließlinien auch negative auftreten können, sodass sich in einer Betonplatte auch Zugrisse an der Plattenoberseite einstellen.

Sofern der Grad der Einspannung zweier benachbarter Kanten gleich ist, kann man in erster Näherung davon ausgehen, dass die dazwischenliegende Fließlinie

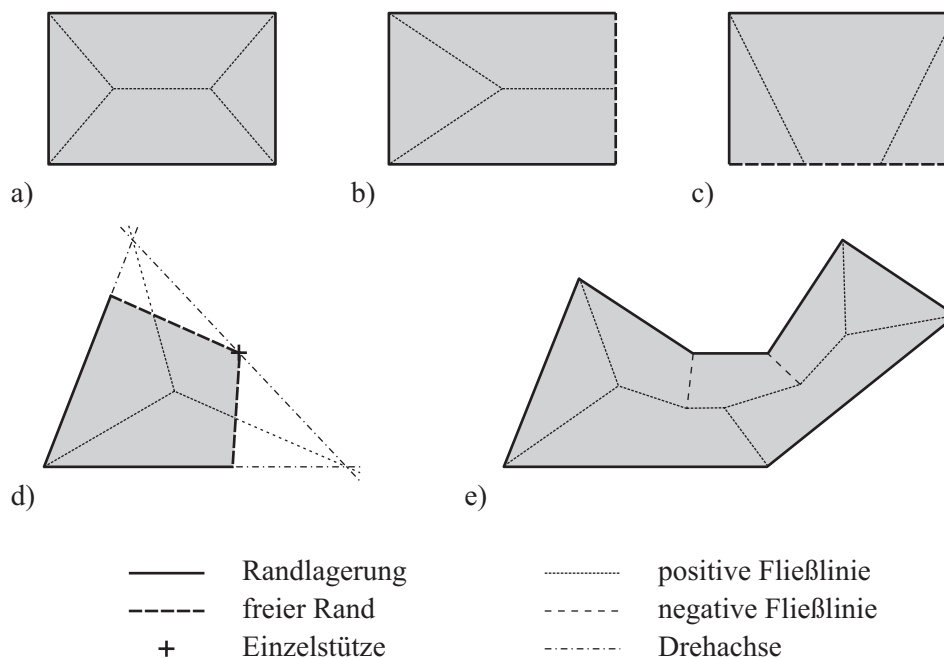


Abbildung 3.3: Versagensfiguren unterschiedlich gelagerter Platten

bei einer isotrop bewehrten Betonplatte eine Winkelhalbierende darstellt. Sollte eine der beiden Drehachsen jedoch stärker eingespannt sein, so vergrößert sich der Winkel zwischen ihr und der Fließlinie. Es gilt das Prinzip, dass Steifigkeiten Kräfte anziehen, wodurch die Lastezugsfläche größer wird.

3.2 Schnittgrößen an einer Teilplatte

Zur Untersuchung von Fließlinien, die schräg zu den Koordinatenachsen verlaufen, bedarf es der näheren Betrachtung der in einer Teilplatte wirkenden Kräfte. Dass das plastische Moment m_{pl} zur Fließspannung σ_{pl} äquivalent eingeführt werden kann, wurde im Abschnitt 2.2.4 gezeigt. Im Folgenden sollen die Schnittgrößen an einer isotrop bewehrten Betonplatte untersucht werden, um anschließend die Unterschiede einer orthotropen Bewehrungsführung in Richtung der Koordinatenachsen herauszuarbeiten. Die gezeigten Herleitungen gehen im Wesentlichen auf JOHANSEN [66] zurück und wurden von JONES [70] verallgemeinert und erweitert.

3.2.1 Isotrope Platten

Bei Stahlbetonplatten kann eine schräg zu den Bewehrungsrichtungen verlaufende Fließlinie in Form von infinitesimal kleinen Treppenstufen in Koordinatenrichtung

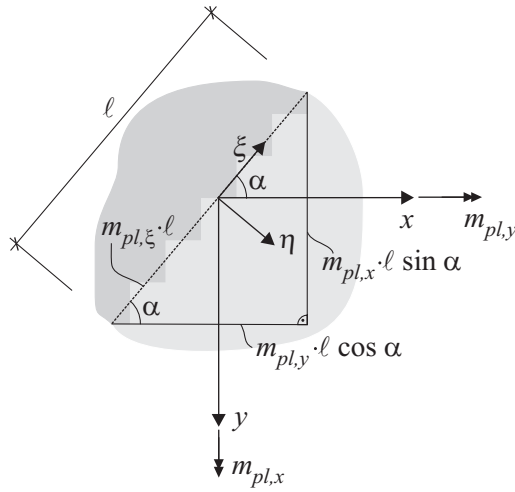


Abbildung 3.4: Schräg zu den Bewehrungsachsen verlaufende Fließlinie

angenommen werden, wie es Abbildung 3.4 zeigt.

Legt man ein um den Winkel α gedrehtes lokales Koordinatensystem der Richtungen ξ und η zugrunde, so ist das Biegemoment entlang der Fließlinie

$$m_{pl,\xi} = m_{pl,x} \sin^2 \alpha + m_{pl,y} \cos^2 \alpha . \quad (3.3)$$

Für Platten mit homogenen Materialeigenschaften oder auch isotroper Bewehrungsführung gilt

$$m_{pl,x} = m_{pl,y} = m_{pl} . \quad (3.4)$$

Aus den Gleichungen wird deutlich, dass der Winkel α im Falle eines für beide Bewehrungsrichtungen einheitlichen plastischen Moments unerheblich ist.

3.2.2 Orthotropie und Affinitätsgesetze

Bei unterschiedlichen plastischen Fließmomenten $m_{pl,x}$ und $m_{pl,y}$ werden Letztere über den Orthotropiekoeffizienten

$$\mu = \frac{m_{pl,y}}{m_{pl,x}} \quad (3.5)$$

auf den Wert der x -Richtung normiert, der als Referenzwert m_{pl} gewählt wird, sodass gilt

$$m_{pl,y} = \mu m_{pl,x} = \mu m_{pl} . \quad (3.6)$$

Die Gleichung (3.3) liefert damit

$$m_{pl,\xi} = m_{pl} (\sin^2 \alpha + \mu \cos^2 \alpha) . \quad (3.7)$$

Bisher wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass positive und negative Fließlinien den gleichen plastischen Grenzmomenten unterliegen. Wenn dies nicht der Fall ist und die oberen und unteren Bewehrungslagen unterschiedlich sind, definiert man für die Plattenoberseite – also für die negativen Fließlinien – mit den plastischen Biegemomenten $m'_{pl,x}$ und $m'_{pl,y}$ einen eigenen Koeffizienten

$$\mu' = \frac{m'_{pl,y}}{m'_{pl,x}}. \quad (3.8)$$

Zur einfacheren Behandlung orthotroper Problemstellungen wurden von JOHANSEN [66] in Abhängigkeit der Orthotropiekoeffizienten zwei Affinitätsgesetze formuliert, um mit Hilfe einer Verzerrung der Plattengeometrie quasi-isotrope Bedingungen herzustellen und die Gültigkeit der in Kapitel 2.2.2 idealisierten Materialeigenschaften aufrechtzuerhalten.

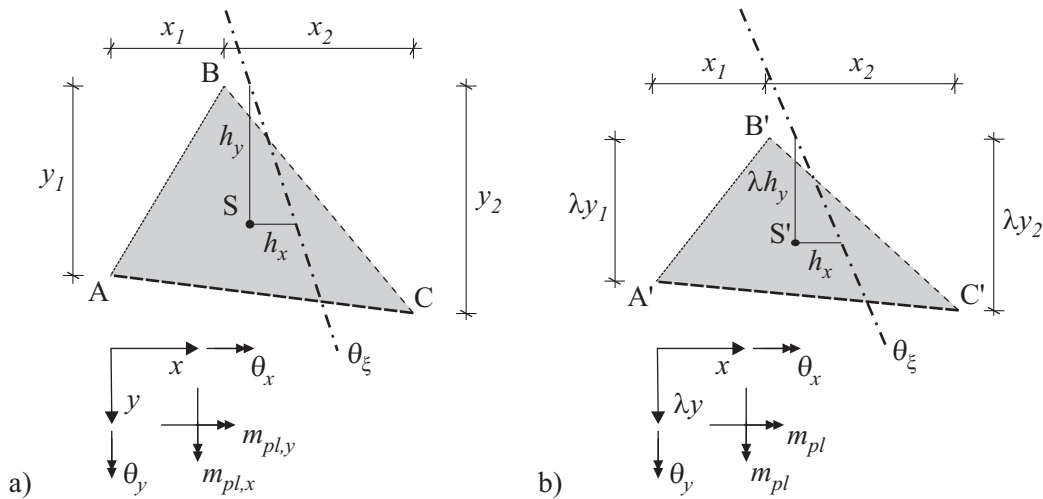


Abbildung 3.5: Dreieckiges Teilstück einer orthotropen Platte

- a) Ausgangszustand
- b) affine Verzerrung

In Abbildung 3.5a ist eine dreieckige Teilplatte dargestellt, die um die Drehachse θ_ξ rotiert und deren Kanten AB eine positive und BC eine negative Fließlinie bilden sollen. Die Kante AC sei frei. Die Resultierende der gleichmäßigen Belastung p je Flächeneinheit steht senkrecht zur Plattenebene im Schwerpunkt S. Dessen Abstand zur Drehachse sei h_x beziehungsweise h_y , je nach Koordinatenrichtung. Die vektorielle Zerlegung des virtuellen Drehwinkels δw , der durch eine virtuelle Vertikalverschiebung δw im Punkt S hervorgerufen wird, liefert

$$\delta\theta_x = \frac{\delta w}{h_y} \quad \text{und} \quad \delta\theta_y = \frac{\delta w}{h_x}. \quad (3.9)$$

Unter der vorläufigen Annahme von $\mu = \mu'$ folgt für die Summe der inneren Arbeitsanteile in der Teilplatte

$$\sum (m_{pl,\xi} \ell_\xi \delta\theta_\xi) = (m_{pl,x} y_1 + m'_{pl,x} y_2) \frac{\delta w}{h_x} + (m_{pl,y} x_1 + m'_{pl,y} x_2) \frac{\delta w}{h_y}, \quad (3.10a)$$

beziehungsweise

$$\sum (m_{pl,\xi} \ell_\xi \delta\theta_\xi) = (m_{pl} y_1 + m'_{pl} y_2) \frac{\delta w}{h_x} + \mu (m_{pl} x_1 + m'_{pl} x_2) \frac{\delta w}{h_y}. \quad (3.10b)$$

Für die Gesamtplatte ergibt sich mit Gleichung (2.40)

$$\begin{aligned} \sum \left[(m_{pl} y_1 + m'_{pl} y_2) \frac{\delta w}{h_x} + \mu (m_{pl} x_1 + m'_{pl} x_2) \frac{\delta w}{h_y} \right] &= \\ &= \sum \iint_{yx} p \delta w(x, y) \, dx dy. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dem soll nun eine in y -Richtung um den Faktor λ verzerrte Platte gegenübergestellt werden, siehe Abbildung 3.5b, die auf diese Weise isotrope Randbedingungen erhält. Die Versagensfigur bleibt qualitativ gleich, auch der Wert δw der virtuellen Durchsenkung ändert sich nicht. Mit diesen veränderten Bedingungen erhält man ausgehend von Gleichung (3.10b) auf gleichem Wege den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum \left[(m_{pl} \lambda y_1 + m'_{pl} \lambda y_2) \frac{\delta w}{h_x} + (m_{pl} x_1 + m'_{pl} x_2) \frac{\delta w}{\lambda h_y} \right] &= \\ &= \sum \iint_{yx} p \delta w(x, \lambda y) \, dx \lambda dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Da λ ein konstanter Faktor ist, kann er aus dem Integral der rechten Seite herausgezogen werden, sodass die Division durch λ

$$\begin{aligned} \sum \left[(m_{pl} y_1 + m'_{pl} y_2) \frac{\delta w}{h_x} + (m_{pl} x_1 + m'_{pl} x_2) \frac{\delta w}{\lambda^2 h_y} \right] &= \\ &= \sum \iint_{yx} p \delta w(x, y) \, dx dy \end{aligned} \quad (3.13)$$

ergibt. Die direkte Gegenüberstellung der Gleichungen (3.11) und (3.13) liefert den affinen Verzerrungsfaktor

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\mu}}. \quad (3.14)$$

Betrachtet man auf der unverzerrten Fläche ein infinitesimal kleines Flächenelement $dA = dx dy$, so erfährt seine Ausdehnung dy in y -Richtung die affine Verzerrung λdy . Eine Einzellast F , die darauf wirkt, ist damit ebenfalls einer Skalierung unterworfen, nämlich

$$F' = \frac{F}{\sqrt{\mu}} . \quad (3.15)$$

Gleichmäßig verteilte Flächenlasten p bleiben hingegen unbeeinflusst.

Die gezeigten Betrachtungen führen schließlich auf die beiden Affinitätsgesetze nach JOHANSEN [66], deren praktische Bedeutung anhand von Beispiel 4 in Kapitel 7 nachvollzogen werden kann.

Erstes Affinitätsgesetz

Bei einer orthotropen Platte mit den längenbezogenen plastischen Hauptmomenten m_{pl} und μm_{pl} für die untere und $-m'_{pl}$ sowie $-\mu m'_{pl}$ für die obere Bewehrungslage können m und $-m'$ mit Hilfe einer Transformation in eine entsprechende isotrope Platte ermittelt werden, sofern die Hauptschnitte dieselben sind, wenn also gilt $\mu = \mu'$. Die Ausdehnungen der isotropen Platte in Richtung von m_{pl} und m'_{pl} werden aus der orthotropen Platte mittels Division durch den Faktor $\sqrt{\mu}$ gewonnen. Die jeweilige Flächenlast bleibt gleich und auch die Fließlinienfigur ändert sich nicht.

Für den Fall eines unterschiedlichen Bewehrungsverhältnisses $\mu \neq \mu'$ in der oberen und der unteren Plattenschicht ergibt sich anstelle von Gleichung (3.11) der erweiterte Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum \left[(m_{pl} y_1 + m'_{pl} y_2) \frac{\delta w}{h_x} + (\mu m_{pl} x_1 + \mu' m'_{pl} x_2) \frac{\delta w}{h_y} \right] = \\ = \sum_i \iint_{yx} p \delta w(x, y) dx dy . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Wenn die Vektoren der beiden Kanten AB und BC zusammenfallen, sodass $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$, lautet der Affinitätsfaktor

$$\lambda = \sqrt{\frac{m_{pl} + m'_{pl}}{\mu m_{pl} + \mu' m'_{pl}}} . \quad (3.17)$$

Zweites Affinitätsgesetz

Wenn eine orthotrope Platte mit den längenbezogenen plastischen Hauptmomenten m_{pl} und μm_{pl} für die untere beziehungsweise $-m'_{pl}$ und $-\mu' m'_{pl}$ für die obere

Bewehrung vorliegt, bei der die Bedingung $\mu = \mu'$ zwar nicht mehr erfüllt ist, deren positives und negatives plastisches Moment aber durch denselben Vektor beschrieben werden kann, dann lässt sich diese wie im ersten Affinitätsgesetz durch

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu m_{pl} + \mu' m'_{pl}}{m_{pl} + m'_{pl}} \quad (3.18)$$

in eine isotrope Platte überführen, wobei $\tilde{\mu}$ den Faktor μ ersetzt. Die äußere Flächenlast bleibt abermals dieselbe und auch die Fließlinienfigur bleibt gleich.

3.3 Berechnungsverfahren

Nach der Betrachtung der geometrischen Gesichtspunkte sind die Traglasten der verschiedenen Versagensfiguren von Interesse. Im Wesentlichen unterscheidet man zwei Verfahren, die in den nachfolgenden Abschnitten eingeführt werden. Sie ermöglichen eine einfache Handrechnung, wobei der Einsatz der Methode von der vorliegenden Versagensgeometrie der Platte abhängt. Ausgangspunkt ist jeweils eine Platte mit konstantem Feldmoment m_{pl} , die gegebenenfalls über eine affine Verzerrung der Maßstäbe in einen isotropen Zustand überführt wurde. Die unterschiedlichen Einspanngrade der Plattenränder werden in den Rechenverfahren berücksichtigt.

3.3.1 Grenzgleichgewichtsmethode

Ein sehr einfaches aus der Fließlinientheorie abgeleitetes Berechnungsverfahren ist die Grenzgleichgewichtsmethode für isotrope Rechteckplatten. Neben der eigentlichen Traglast sind als weitere Unbekannte die Koordinaten der beiden Verzweigungspunkte zu ermitteln. Da aufgrund der speziellen Plattengeometrie jedoch eine Koordinate für beide Punkte gleich sein muss, vergleiche Abbildung 3.6, verbleiben insgesamt vier Unbekannte. Diese können für die vier Teilplatten über die Momentengleichgewichtsbedingungen der Drehachsen bestimmt werden.

Zunächst werden die Einspannmomente der vier Kanten über einen Faktor λ'_i mit dem plastischen Feldmoment ins Verhältnis gebracht, sodass gilt

$$m'_i = \lambda'_i m_{pl} . \quad (3.19)$$

Eine gelenkige Lagerung hat demnach den Faktor $\lambda'_i = 0$. Bei einer gleichmäßigen Flächenbelastung wird deren äußere Arbeit von ihrer Resultierenden im Flächenschwerpunkt und der zugehörigen Durchsenkung repräsentiert. Die inneren und

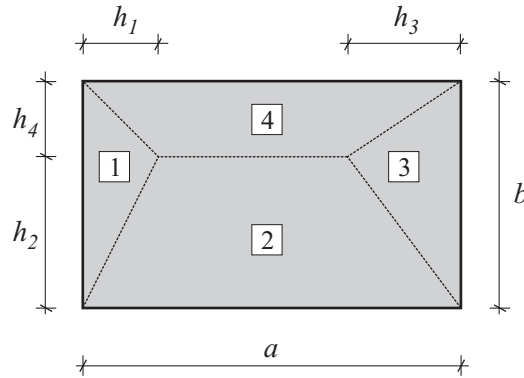


Abbildung 3.6: Isotrope Rechteckplatte

äußeren Arbeitsanteile der vier Teilplatten werden mit den Momentengleichgewichten der Drehachsen in allgemeiner Form aufgestellt, wobei sich die Kantenlängen und virtuellen Verdrehungen jeweils herauskürzen:

$$\boxed{1} \quad m_{pl} (1 + \lambda'_1) = \frac{1}{6} p h_1^2 \quad (3.20a)$$

$$\boxed{2} \quad m_{pl} (1 + \lambda'_2) = \frac{1}{6} p h_2^2 \left(3 - 2 \frac{h_1 + h_3}{a} \right) \quad (3.20b)$$

$$\boxed{3} \quad m_{pl} (1 + \lambda'_3) = \frac{1}{6} p h_3^2 \quad (3.20c)$$

$$\boxed{4} \quad m_{pl} (1 + \lambda'_4) = \frac{1}{6} p h_4^2 \left(3 - 2 \frac{h_1 + h_3}{a} \right) . \quad (3.20d)$$

Die bereits angesprochene Kopplung einer Verzweigungspunktcoordinate entspricht der Bedingung

$$b = h_2 + h_4 . \quad (3.21)$$

Aus den Gleichungen (3.20a) und (3.20c) folgt der Zusammenhang

$$h := \frac{h_1}{\sqrt{1 + \lambda'_1}} = \frac{h_3}{\sqrt{1 + \lambda'_3}} \quad (3.22)$$

sowie

$$\frac{b_r}{2} := \frac{h_2}{\sqrt{1 + \lambda'_2}} = \frac{h_4}{\sqrt{1 + \lambda'_4}} \quad (3.23)$$

aus (3.20b) und (3.20d).

Der Faktor b_r wird als reduzierte Seitenlänge bezeichnet und ergibt sich nach Erweiterung und Umformung aus Gleichung (3.23) zu

$$b_r = \frac{2b}{\sqrt{1 + \lambda'_2} + \sqrt{1 + \lambda'_4}} . \quad (3.24)$$

Für die andere Seite gilt analog

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + \lambda'_1} + \sqrt{1 + \lambda'_3}} . \quad (3.25)$$

Nach diesen Definitionen sind die reduzierten Seitenlängen einer naviergelagerten Platte mit $\lambda'_i = 0$ gleich den tatsächlichen Längen, also $a_r = a$ und $b_r = b$. Folglich beschreiben a_r und b_r im Falle einer eingespannten Randlagerung eine gleichwertige, gelenkig gelagerte Platte mit kürzeren Spannweiten, die dieselbe Traglast erbringt.

Eingesetzt in die Gleichung (3.20b) liefern (3.22) und (3.23) für eine Platte mit dem Seitenverhältnis $a \geq b$ als Traglast

$$p = \frac{24 m_{pl} a_r}{b_r^2 (3a_r - 4h)} . \quad (3.26)$$

Zusammen mit der Beziehung

$$p = \frac{6m_{pl}}{h^2} , \quad (3.27)$$

die aus den Gleichungen (3.20a) und (3.22) gewonnen wurde, bekommt man durch Gleichsetzen den Ausdruck

$$h = \frac{1}{2} b_r \left(-\frac{b_r}{a_r} \pm \sqrt{\left(\frac{b_r}{a_r}\right)^2 + 3} \right) . \quad (3.28)$$

Dieser führt wiederum mit Gleichung (3.27) auf einen Traglastwert von

$$p = \frac{24 m_{pl}}{b_r^2 \left(\sqrt{\frac{b_r^2}{a_r^2} + 3} - \frac{b_r}{a_r} \right)^2} , \quad (3.29)$$

der nur noch von den reduzierten Seitenlängen a_r und b_r abhängig ist.

Für das einfache Beispiel einer naviergelagerten Quadratplatte mit der Länge ℓ folgt also die Relation

$$p = 24 \frac{m_{pl}}{\ell^2} , \quad (3.30)$$

wohingegen eine allseitige Einspannung mit dem Stützmoment m_{pl} im gleichen Beispiel wegen $\lambda'_i = 0$ und somit $a_r = b_r = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$ mit

$$p = 48 \frac{m_{pl}}{\ell^2} \quad (3.31)$$

auf einen doppelt so großen Wert führt.

3.3.2 Energiemethoden

Im Gegensatz zum Grenzgleichgewichtsverfahren, das auf die vorgestellte Weise lediglich die Betrachtung von Rechteckplatten zulässt, sind die sogenannten Energiemethoden universell einsetzbar. Die Grundlage liefert das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, das im Abschnitt 2.1.3 bereits eingeführt wurde. Um dieses anwenden zu können, muss vor Beginn der Berechnung eine kinematisch zulässige Fließlinienfigur bestimmt werden. Im Zuge der virtuellen Auslenkung des kinematischen Systems legen die Lasten an jedem Punkt der Gesamtplatte in ihrer Wirkungsrichtung den Weg δw zurück. Die hervorgerufenen Verdrehungen entlang der Fließlinien verrichten dabei innere Arbeit.

Unter der Voraussetzung, dass auf alle Teilflächen i eine konstante Flächenlast p wirkt, kann die rechte Seite der Gleichung (2.40) vereinfacht werden, indem p jeweils zu einer Resultierenden F_i zusammengefasst wird. Diese wirkt auf den Flächenschwerpunkt S und legt die virtuelle Verschiebung δw_S zurück. Somit ist

$$\sum_i \int_{A_i} p \delta w dA_i = \sum_i (F_i \delta w_{S_i}) . \quad (3.32)$$

Dabei kommt die Annahme aus Abschnitt 2.2.3 zum Tragen, dass die Plattenteile innerhalb des Fließliniennetzes eine virtuelle Starrkörperverschiebung erfahren. Die von den äußeren Lasten verrichteten virtuellen Arbeiten werden schließlich über die Gesamtplatte aufsummiert. Auch auf der Seite der inneren Arbeit gehen nur die Biegemomente entlang der Fließlinie in die Rechnung mit ein.

Eine orthotrop bewehrte Stahlbetonplatte wird hier ebenfalls zunächst über eine affine Verzerrung der Längenverhältnisse in einen isotropen Zustand überführt. Mit einem einheitlichen plastischen Moment m_{pl} folgt aus Gleichung (2.40)

$$\sum_k (m_{pl} \ell_k \delta \theta_k) = \sum_i (F_i \delta w_{S_i}) \quad (3.33)$$

für alle Plattenteile i und alle Fließlinien k der Gesamtplatte.

Betrachtet man als Beispiel die in Abbildung 3.7 dargestellte isotrope Quadratplatte mit gleichmäßiger Flächenlast, so entsteht nach den geometrischen Gesetzmäßigkeiten die typische Versagensfigur, die nur von einem Freiheitsgrad abhängt, nämlich der Auslenkung δw des Punktes E .

Für jedes der vier gleich großen Plattenteile ergibt sich auf der Seite der äußeren Arbeit eine resultierende Belastung von $F = \frac{1}{4} p \ell^2$. Sie steht im Schwerpunkt der Dreiecksfläche und legt einen virtuellen Weg von $\delta w_S = \frac{1}{3} \delta w$ zurück. Somit liefert die virtuelle äußere Arbeit

$$\delta \Pi^a = 4 \left(\frac{1}{4} p \ell^2 \frac{1}{3} \delta w \right) = \frac{1}{3} p \ell^2 \delta w . \quad (3.34)$$

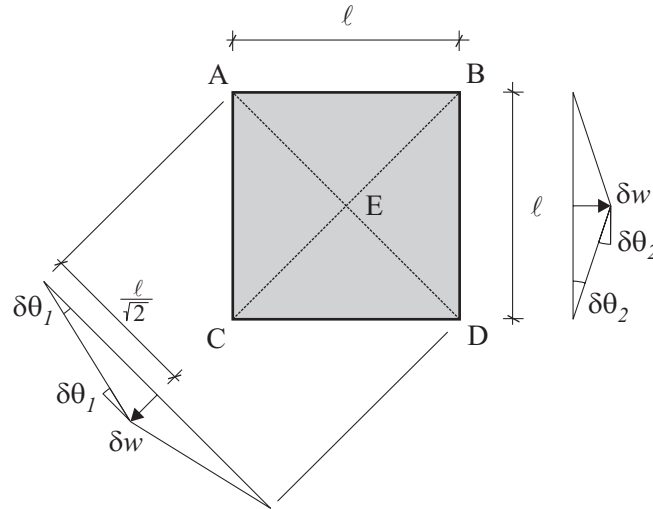


Abbildung 3.7: Quadratplatte unter gleichmäßiger Flächenlast

Im Falle einer allseitig gelenkigen Lagerung besitzen die vier Fließlinien im Inneren eine Länge von jeweils $\frac{1}{\sqrt{2}}\ell$. Bei einer gegenseitigen Verdrehung von $\delta\theta_1 = \frac{\sqrt{2}\delta w}{\ell}$ der Linien erbringt die virtuelle innere Arbeit den Beitrag

$$-\delta\Pi^i = 4 \left(m_{pl} 2\sqrt{2} \frac{\delta w}{\ell} \frac{1}{\sqrt{2}}\ell \right) = 8 m_{pl} \delta w . \quad (3.35)$$

Insgesamt ergibt sich eine Traglast von

$$p = 24 \frac{m_{pl}}{\ell^2} . \quad (3.36)$$

Dies entspricht dem Ergebnis der Grenzgleichgewichtsmethode, vergleiche (3.30), die mit einer geschlossenen Lösung für Rechteckplatten einen Sonderfall dieses Verfahrens darstellt.

Wenn die Platte mit einem aufnehmbaren Moment m_{pl} entlang ihrer Kanten eingespannt wird, kommen zur inneren Arbeit weitere vier Fließlinien von der Länge ℓ hinzu. Aus der Geometrie folgt an den Rotationsachsen die Verdrehung $\delta\theta_2 = \frac{2\delta w}{\ell}$. Die Versagenslast verdoppelt sich also und man erhält den Wert aus Gleichung (3.31). Dieser Zusammenhang zeigt sich auch bei der Betrachtung von Beispiel 2 in Kapitel 7.

Eine vereinfachte Behandlung kann durch die Abtreppung der Fließlinien erfolgen, wie sie schon in Abschnitt 3.2.1 gezeigt wurde. Auf diese Weise wird der schräg verlaufende Momentenvektor in die Richtung der Bewehrungsachsen zerlegt, die im vorliegenden Beispiel mit den Drehrichtungen identisch sind. Abbildung 3.8 zeigt für die eingespannte Quadratplatte, wie die aus Stufen zusammengesetzten Fließlinien auf die Plattenkanten projiziert werden. Dadurch kann die Kan-

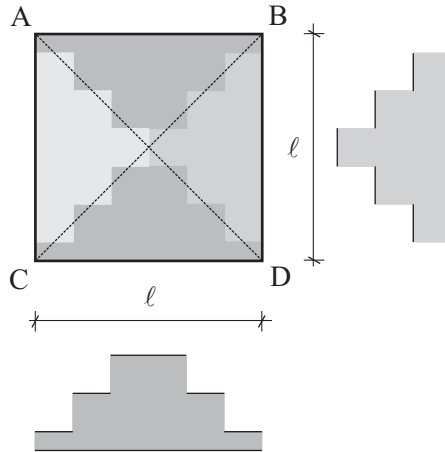


Abbildung 3.8: Quadratplatte mit abgetreppten Fließlinien

tenlänge ℓ zur Berechnung des inneren Arbeitsanteils doppelt angesetzt werden. Es folgt unter Verwendung des Winkels $\delta\theta_2$ aus Abbildung 3.7 für alle vier Seiten

$$-\delta\Pi^i = 4 \left(m_{pl} 2\ell \frac{2\delta w}{\ell} \right) = 16 m_{pl} \delta w . \quad (3.37)$$

Durch die zusätzlichen Beiträge in den Kanten steigt die virtuelle innere Arbeit an und es ergibt sich mit dem Arbeitssatz im Falle der Einspannung wiederum das schon bekannte Ergebnis nach Gleichung (3.31).

Im nächsten Schritt wird der vorgeführte Ansatz durch eine allgemeinere Betrachtung erweitert, die von AVELLAN & WERKLE [2] beschrieben wurde. Ausgehend von beliebig gerichteten Rotationsachsen zweier Plattenteile i und j mit den absoluten Winkelverdrehungen $\vec{\omega}_i$ und $\vec{\omega}_j$ folgt aus der Darstellung in Abbildung 3.9 für den inneren Arbeitsanteil der dazwischen liegenden Fließlinie mit der Länge ℓ_{AB}

$$\delta\Pi_{AB}^i = |m_{pl,y} \ell_{AB,x} (\delta\omega_{i,x} - \delta\omega_{j,x}) + m_{pl,x} \ell_{AB,y} (\delta\omega_{i,y} - \delta\omega_{j,y})| . \quad (3.38)$$

Aus den trigonometrischen Zusammenhängen und Gleichung (3.6) ergibt sich schließlich die allgemeine Form

$$\delta\Pi_{AB}^i = |m_{pl} \ell_{AB} (\mu \cos \alpha (\delta\omega_i \cos \gamma_i - \delta\omega_j \cos \gamma_j) + \sin \alpha (\delta\omega_i \sin \gamma_i - \delta\omega_j \sin \gamma_j))| . \quad (3.39)$$

Für Sonderfälle wie isotrope Platten oder parallele Drehachsen wird diese Gleichung entsprechend vereinfacht.

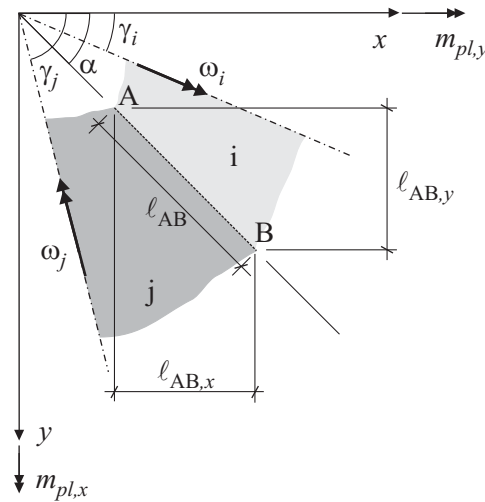


Abbildung 3.9: Fließlinien zwischen Plattenteilen mit beliebiger Drehrichtung

3.4 Traglastminimierung

Das Ziel einer jeden Berechnung mit Hilfe der Fließlinientheorie ist es, eine möglichst niedrige Traglast zu erzielen, was zugleich mit der Auffindung der realistischsten Versagensfigur einhergeht. Wie bereits festgestellt wurde, treten die maximal aufnehmbaren Momente m_{pl} innerhalb der Fließlinien auf. Deshalb stehen nun die Eigenschaften solcher Maxima im Blickpunkt sowie der Einfluss, den lokale Effekte – beispielsweise in den Plattenecken – darauf ausüben.

3.4.1 Maximalprinzip

Das Maximalprinzip der Fließlinientheorie besagt, dass die Fließlinienfigur von denjenigen Fließlinien ausgebildet wird, in denen das maximale Moment auftritt.

Die im reziproken Verhältnis zum plastischen Moment m_{pl} stehende gleichmäßig verteilte Flächenlast p ist dementsprechend die minimale Traglast. Sie hängt von verschiedenen geometrischen Parametern x_i ab und lässt sich allgemein als Funktion

$$p = f(x_1, \dots, x_n) \quad (3.40)$$

aus n verschiedenen Parametern angeben. Die Extremalbedingung fordert, dass die partielle Ableitung nach jedem Parameter zu Null wird,

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (3.41)$$

Wenn die unbekanntenen Größen nichtlinear in die Gleichung eingehen, was gewöhnlich der Fall ist, können sich mehrere Lösungen ergeben. Aus Gründen der Nicht-

linearität darf das aus der linearen Elastizitätstheorie bekannte Superpositionsgesetz nicht ohne Weiteres angewendet werden.

JOHANSEN [66] hat jedoch gezeigt, dass beim gleichzeitigen Auftreten mehrerer Lastfälle die Summe der zur Abtragung erforderlichen plastischen Momente der Einzellastfälle das für den Gesamtlastfall erforderliche plastische Moment nie unterschreitet:

$$\sum_i m_{pl,LF_i} \leq m_{pl,\Sigma(LF_i)} . \quad (3.42)$$

Es ist also bei der Ermittlung eines plastischen Moments möglich, die einwirkenden Lastfälle getrennt zu behandeln und dabei unterschiedliche Fließlinienfiguren zu verwenden. Voraussetzung ist allerdings, dass alle m_{pl,LF_i} das gleiche Vorzeichen besitzen.

3.4.2 Iterative Methode

Betrachtet man eine Traglastfunktion nach Gleichung (3.40), so ist ein Minimum genau dann gefunden, wenn die Bedingungen (3.41) erfüllt sind. Da es mehrere Lösungen geben kann, ist nicht sicher, ob es sich um das globale oder nur um ein lokales Traglastminimum handelt.

Praktisch lässt sich ein Minimum durch Variieren der Parameter x_i finden, die eine zulässige Fließlinienfigur charakterisieren. Ist ein Minimum erreicht, so ist die beste Versagensfigur gefunden, die sich mit dem gewählten Fließliniennetz erreichen lässt. Es besteht jedoch trotzdem noch die Möglichkeit, dass ein anders gewählter Versagensmechanismus zu einem tiefer gelegenen Traglastwert führen könnte. Aus dieser Schwierigkeit heraus ist es notwendig, verschiedene Fließlinienkonfigurationen zu untersuchen.

Bei der praktischen Anwendung der Iterationsmethode werden mit Gleichung (3.33) zunächst für alle Teilplatten die einzelnen Werte der Traglast berechnet. Diese werden anschließend gemittelt, da die Gesamtplatte letztlich ein einheitliches Ergebnis liefern muss. Aufgrund der Abweichung des jeweiligen Teilergebnisses zum arithmetischen Mittel wird die Fläche des entsprechenden Segments solange vergrößert oder verkleinert, bis alle Ergebnisse innerhalb eines gewissen Toleranzbereichs liegen. Es zeigt sich dabei, dass die Traglastfunktion in der Nähe des Minimums in der Regel sehr flach verläuft, sodass geringfügige Abweichungen der Parameter kaum einen Einfluss auf das Endergebnis haben. Umgekehrt bedeutet dies, dass die Lage der Verzweigungspunkte durchaus eine gewisse Toleranz besitzt.

Abbildung 3.10 macht das iterative Vorgehen anhand einer naviergelagerten Rechteckplatte deutlich. Ausgehend von einer sehr ungünstigen Annahme mit

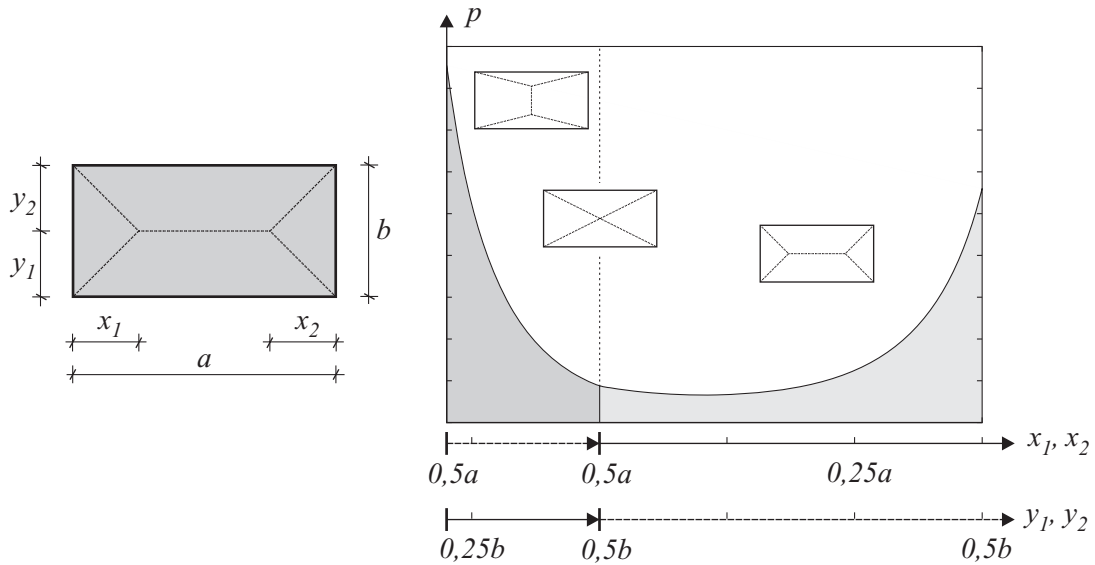


Abbildung 3.10: Variation einer Fließlinienfigur und qualitativer Verlauf der Traglast

hohem Traglastfaktor wechselt die Ausgangskonfiguration beim Zusammentreffen der beiden Verzweigungspunkte in eine andere und findet schließlich ein Minimum. Da es sich um ein symmetrisches Problem handelt, sind auf der Abszisse die jeweils gleichen Parameter der beiden Verzweigungspunkte zusammengefasst angetragen. Dass die Annahme eines konvexen Funktionsverlaufs berechtigt ist, wird in Abschnitt 6.2.1 gezeigt.

3.4.3 Lokale Effekte

Nachdem für die Gesamtplatte eine optimale Konfiguration gefunden wurde, kann das so erzielte Traglastminimum durch lokale Verfeinerungen noch weiter reduziert werden. Insbesondere in den Eckbereichen einer Platte ergeben sich große Abweichungen gegenüber dem tatsächlichen Verformungsverhalten. Dem kann mit einer Annäherung an die Realität durch sogenannte Wippen oder Fächer, wie sie in Abbildung 3.11 gezeigt sind, Rechnung getragen werden.

Zur Idealisierung eines Wippenmechanismus gibt es zwei Varianten, die in Abbildung 3.11b und c dargestellt sind. Bei beiden teilt sich die ursprüngliche Fließlinie in zwei Richtungen auf, die in den Punkten A beziehungsweise B auf die gelagerte Randkante treffen. Im Fall einer nichtverankerten Ecke (Abbildung 3.11b) bildet sich entlang der Verbindungsgeraden AB eine Drehachse aus, wovon sich die Bezeichnung Wippe ableitet. Gehaltene Ecken erzeugen zwischen A und B eine negative Fließlinie sowie eine neue dreieckige Teilplatte und eine ebenfalls dreieckige, waagerechte Restfläche (Abbildung 3.11c). Im Gegensatz zum Aus-

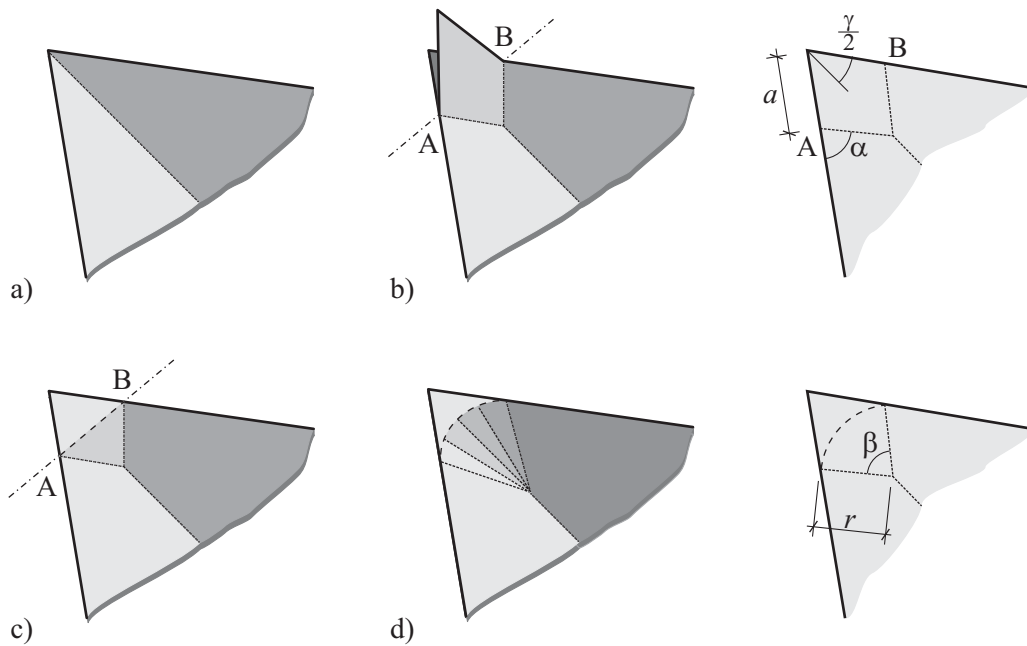


Abbildung 3.11: Wippen und Fächer in einer Plattenecke

gangszustand in Abbildung 3.11a, der lediglich vom Richtungswinkel der Fließlinie abhängig ist, werden Wippen durch den Abstand a und den Winkel α zwischen der jeweiligen Fließlinie und der zugehörigen Randkante charakterisiert. Solche Mechanismen wurden von JOHANSEN [67], HAASE [50] und WOOD [151] für achsensymmetrische Beispiele analytisch untersucht. Außerdem stellte JOHANSEN in Abhängigkeit des Eckwinkels $\gamma < 90^\circ$ die folgenden empirischen Verhältnisse der beiden Traglastfaktoren p_1 und p_2 zwischen einer Konstellation mit beziehungsweise ohne Verfeinerung auf:

$$\frac{p_1}{p_2} = \begin{cases} 0,9 \frac{\sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{3}}{\sin \frac{\gamma}{2} + 0,1} & \text{für } \gamma \leq 60^\circ \\ \frac{1}{8} \left(11 - 2 \sin \frac{\gamma}{2} \right) & \text{für } \gamma \geq 60^\circ . \end{cases} \quad (3.43)$$

Diese Ausdrücke erfassen die Reduzierung der erreichten Traglast durch die lokalen Eckeffekte relativ genau. Dennoch zeigt schon der Charakter der Gleichungen, dass es sich um Näherungslösungen handelt. Abbildung 3.12 verdeutlicht außerdem, dass eine Verfeinerung der Fließlinienfigur in den Ecken umso wahrscheinlicher wird, je spitzer der zwischen zwei gelagerten Kanten eingeschlossene Winkel ist.

Im Falle einer Fächerstruktur wird die ursprüngliche Fließlinie im Eckbereich in mehrere verzweigte Linien aufgespalten. Dabei verteilt sich auch der Rotati-

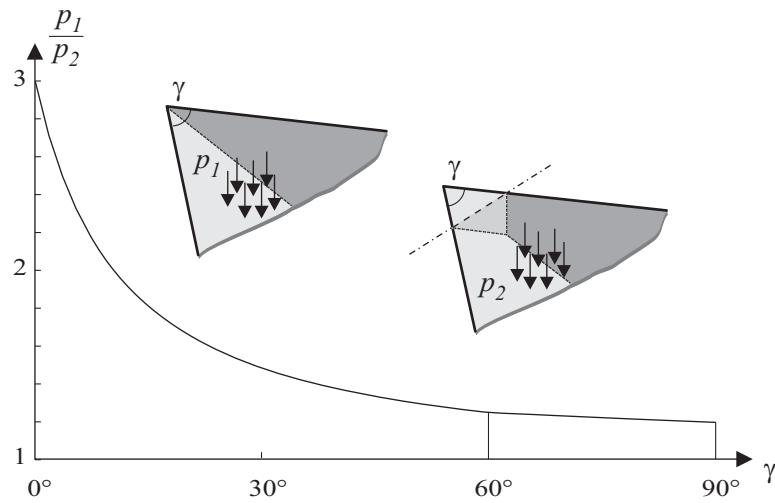


Abbildung 3.12: Verhältnis der Traglasten mit und ohne lokale Eckeffekte

onswinkel der benachbarten Teilplatten, sodass insgesamt ein realistischeres Abbild der dort befindlichen Fließzone erreicht wird. Gleichzeitig wird die negative Fließlinie vom Schnittpunkt der Kanten ins Platteninnere verschoben und ausgerundet, siehe Abbildung 3.11d. Auch die Fächermechanismen lassen sich mit Hilfe zweier Parameter ausdrücken. An die Stelle von Fließlinienwinkel α und Abstand a treten die Aufweitung β am Verzweigungspunkt und der Radius r des Fächers. Die genaue Anzahl der einzelnen Fächerlinien ist dabei nicht von Bedeutung, da weniger Linien im Gegenzug größere Rotationen erbringen müssen. Ein einzelnes infinitesimal kleines Fächerelement, wie in Abbildung 3.13 dargestellt, verrichtet einen inneren Arbeitsanteil von

$$-\delta\Pi^i = (m_{pl} + m'_{pl}) \frac{\delta w}{r} r d\beta = (m_{pl} + m'_{pl}) \delta w d\beta, \quad (3.44)$$

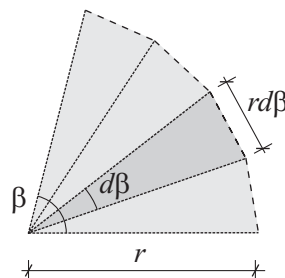


Abbildung 3.13: Infinitesimales Fächerelement

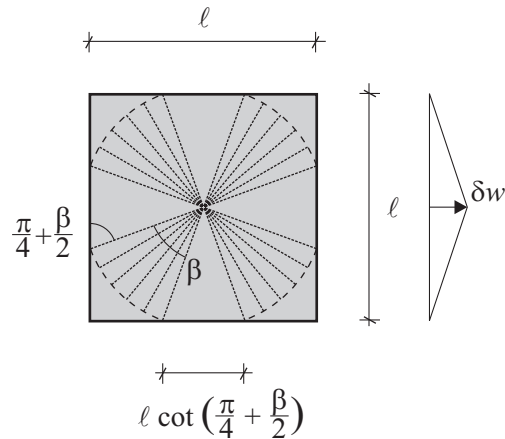


Abbildung 3.14: Gelenkig gelagerte Quadratplatte mit Fächermechanismus

was über den Winkel β den gesamten Beitrag

$$-\delta\Pi^i = \int_{\beta} (m_{pl} + m'_{pl}) \delta w d\beta = (m_{pl} + m'_{pl}) \beta \delta w \quad (3.45)$$

liefert.

Als Beispiel sei noch einmal die gelenkig gelagerte Quadratplatte aus Abschnitt 3.3.2 angeführt. Sie soll nun den in Abbildung 3.14 gezeigten, realistischen Versagensmechanismus aufweisen. Aus der Geometrie ergibt sich für jeden Radius

$$r = \frac{\ell}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right)}. \quad (3.46)$$

Unter der Annahme, dass die Platte lediglich eine untere Bewehrung besitzt, leisten die negativen Fließlinien entlang der Fächerbögen keinen Beitrag. Mit der Durchsenkung δw erbringen daher vier Fächer und vier Dreiecksflächen die virtuelle innere Arbeit

$$\begin{aligned} -\delta\Pi^i &= 4 \left(m_{pl} \beta \delta w + m_{pl} \ell \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \frac{2\delta w}{\ell} \right) = \\ &= 4 m_{pl} \beta \delta w + 8 m_{pl} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}\right) \delta w. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Die bei der äußeren Arbeit mitwirkende Fläche setzt sich aus den vier Fächerflächen mit jeweils $A = \frac{\beta}{2} r^2$ und den vier verbleibenden Dreiecksflächen zusam-

men. Es folgt bei einer Durchsenkung $\delta w_S = \frac{1}{3} \delta w$ aller Schwerpunkte

$$\begin{aligned} \delta \Pi^a &= 4 \left(p \frac{\beta}{2} \left(\frac{\ell}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)} \right)^2 \frac{1}{3} \delta w + p \frac{1}{4} \ell^2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \frac{1}{3} \delta w \right) = \\ &= p \left(\frac{\beta \ell^2}{6 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)} + \frac{1}{3} \ell^2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right) \right) \delta w \end{aligned} \quad (3.48)$$

als äußerer Arbeitsanteil. Daraus liefert die Arbeitsgleichung die erreichte Traglast

$$p = 24 \frac{m_{pl}}{\ell^2} \left(\frac{\beta + 2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)}{\frac{\beta}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)} + 2 \cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2} \right)} \right), \quad (3.49)$$

deren Minimum

$$p = 21,7 \frac{m_{pl}}{\ell^2} \quad (3.50)$$

bei einem Winkel $\beta = 30^\circ$ erreicht wird, wohingegen $\beta = 0^\circ$ den bereits bekannten Wert von $24 \frac{m_{pl}}{\ell^2}$ ergibt. Die Tatsache, dass dieser Koeffizient unter der Berücksichtigung von hyperbolischen Fächerverläufen noch weiter auf $21,4 \frac{m_{pl}}{\ell^2}$ reduziert werden kann, unterstreicht die Komplexität lokaler Einflüsse bereits in diesem einfachen Fall, siehe WOOD & JONES [152] und FOX [37]. MÖRSCH [99] fasst die Ergebnisse von zehn Plattenversuchen ohne obere Eckbewehrung zusammen, die von VON BACH & GRAF [145] durchgeführt wurden. Für die Bruchlast ergibt sich dabei ein Mittelwert von $p = 21,76 \frac{m_{pl}}{\ell^2}$, der dem Wert aus (3.50) sehr nahe kommt. Eine Reihe von nichtlinearen numerischen Berechnungen an Quadratplatten wird von PARDEY [111] diskutiert. Deren Mittelwert liegt mit $p = 23,31 \frac{m_{pl}}{\ell^2}$ jedoch näher an $24 \frac{m_{pl}}{\ell^2}$ und ist größer als die Ergebnisse der Fließlinientheorie mit Wippen oder Fächern. Der Grund liegt darin, dass bei letzteren die obere Eckbewehrung nicht berücksichtigt wird.

Ein weiterer Aspekt von lokalen Einflüssen sind punktuelle Einwirkungen wie Einzellasten oder Stützen. Verzweigungspunkte von Fließlinienfiguren stellen sich in der Regel unter solchen Singularitäten ein; auch der Verzweigungspunkt von Eckfächern kann durch eine entsprechend positionierte Einzellast erzwungen werden. Im Platteninneren können Punktlasten oder Einzelstützen insbesondere bei eingespannten Platten zu einem lokalen, kegelförmigen Durchstanzversagen mit radialen Fließlinien führen, siehe Beispiel 9 in Kapitel 7. Abbildung 3.15 zeigt einen Durchstanzkegel unter einer Einzellast mit radialen Fließlinien. Ihre genaue Anzahl ist wie beim Fächermechanismus unerheblich, da sich die entgegengesetzt gerichteten Rotationen $\delta \theta_i$ gegenseitig aufheben. Übrig bleibt die Verkipfung $\delta \omega_i = \frac{\delta w}{r}$ der einzelnen Bruchstücke i , die über den Gesamtumfang verschmiert

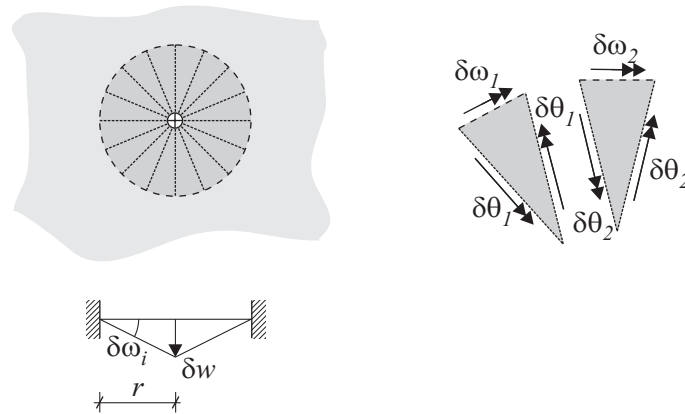


Abbildung 3.15: Durchstanzkegel einer Einzellast

werden können. Somit ergibt sich mit den Arbeitsanteilen

$$\delta\Pi^a = F \delta w , \quad (3.51a)$$

$$-\delta\Pi^i = (m_{pl} + m'_{pl}) 2\pi r \frac{\delta w}{r} \quad (3.51b)$$

für die Einzellast

$$F = 2\pi (m_{pl} + m'_{pl}) . \quad (3.52)$$

Die Gleichung verdeutlicht, dass der Wert der Einzellast unabhängig von allen Abmessungen ist. Es handelt sich daher zugleich um die maximal aufnehmbare Last F_u . Im Falle einheitlicher plastischer Momente ($m_{pl} = m'_{pl}$) erhält man schließlich $F_u = 6,28 m_{pl}$.

Bei Lasten auf freien Rändern hängt das Ergebnis von mehreren Einflussparametern ab. Beispielhaft soll ein Versagensmechanismus wie in [Abbildung 3.16](#) vorgeführt werden, bei dem ausgehend von einem Teilkreis in einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ tangentiale Fließlinien aus der Platte herauslaufen. Während der äußere Arbeitsanteil aus Gleichung [\(3.51a\)](#) gleich bleibt, beeinflussen die veränderten

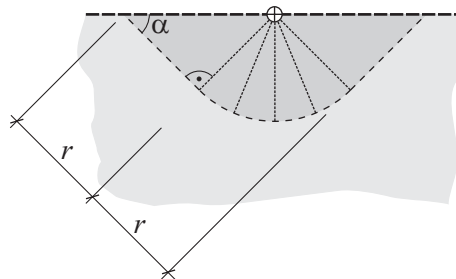


Abbildung 3.16: Einzellast auf einem freien Plattenrand

Längen der positiven und negativen Fließlinien die innere Arbeit und liefern

$$-\delta\Pi^i = \left(m_{pl} \left(\frac{\pi r}{2} \right) + m'_{pl} \left(\frac{\pi r}{2} + 2r \right) \right) \frac{\delta w}{r}. \quad (3.53)$$

Insgesamt folgt für den gewählten Mechanismus bei wiederum gleich großen plastischen Momenten eine maximale Traglast von $F_u = 5,14 m_{pl}$; verglichen mit dem Vollkreis also ein geringerer Wert.

3.4.4 Konsequenzen für Optimierungsansätze

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass das Iterationsverfahren in Verbindung mit Optimierungsmethoden für die Berechnung beliebig berandeter Platten am besten geeignet erscheint. Jedoch kann der Ausgangsmechanismus das Endergebnis entscheidend beeinflussen, weshalb schon vorab eine sorgfältige Wahl der realistischsten Konfiguration erfolgen muss. Um dies zu verallgemeinern, werden in der Literatur zumeist Ansätze gewählt, die von entsprechend feinen Netzstrukturen ausgehen (vergleiche RAMSAY & JOHNSON [118]), was aber im Gegenzug mit einem deutlich erhöhten Rechenaufwand verbunden ist.

Außerdem zeigt es sich, dass lokale Effekte bei der Suche nach einem Traglastminimum ein nicht triviales Problem darstellen. Allein dem Verhalten der Eckbereiche von versagenden Platten wurden in der Vergangenheit umfangreiche Abhandlungen gewidmet, beispielsweise von JOHANSEN [67], HAASE [51], SAWCZUK & JAEGER [124] mit analytischen Ansätzen, sowie in neuerer Zeit von THAVALINGAM et al. [140] in numerischer Herangehensweise. Aus diesen Gründen werden lokale Einflüsse bei der Betrachtung von komplizierteren Problemstellungen häufig außer Acht gelassen.

4 Optimierungungsverfahren

Die Suche nach einem Traglastminimum ist ein klassisches Optimierungsproblem. Deshalb wird zunächst ein Überblick zu den gängigen Lösungsmethoden und deren Anwendbarkeit für die vorliegenden Problemstellungen gegeben. Zur späteren Implementierung werden einige Algorithmen und Verfahren benötigt, die anschließend zusammengetragen werden. Einführende Darstellungen zum Thema Optimierung finden sich beispielsweise in BUNDAY [15], JARRE & STOER [61], JUNGnickel [72], KRABS [81], KÜNzi et al. [78] und LAWo [85]. Anwendungen der Strukturoptimierung werden insbesondere in ESCHENAUER et al. [31] sowie HAFTKA et al. [52] aufgezeigt. Aus der Fülle an weiterführenden Fachbüchern sei an dieser Stelle auf die Literatur von FLETCHER [34], GEIGER & KANZOW [39, 40], GERDES et al. [41], GILL & MURRAY [42], GILL et al. [43], LUNENBERGER [90, 91], sowie MINOUX [96], PAPAGEORGIOU [110], SPELLUCCI [134], VANDERBEI [144] und WEICKER [148] hingewiesen.

4.1 Diskussion verschiedener Lösungsstrategien

Im Bereich der Optimierung haben sich in den vergangenen Jahrzehnten der spezifischen Problematik entsprechend verschiedene Disziplinen und Methoden entwickelt. Eine exakte Klassifizierung ist jedoch schwierig, da sie nach unterschiedlichen Aspekten erfolgen kann. Dennoch ist vor der Entscheidung für ein geeignetes Verfahren das Verständnis der verschiedenen Herangehensweisen notwendig. Eine sehr umfangreiche Darstellung hierzu ist beispielsweise in LITTEr [87] zu finden.

4.1.1 Allgemeine Aufgabenstellung

Allen Ansätzen gemeinsam ist die Zielsetzung, für eine bestimmte Problemstellung die optimale Lösung zu finden. Mathematisch gesehen entspricht dies der sogenannten Zielfunktion Z mit

$$Z \equiv f(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

die von den Designvariablen \mathbf{x} bestimmt ist. Maximierung und Minimierung der Zielfunktion lassen sich durch Multiplikation mit -1 ineinander umwandeln. Sofern keine weiteren Randbedingungen gegeben sind, spricht man von einem unbeschränkten Problem. Demgegenüber stehen die beschränkten Probleme, bei denen zusätzlich zur Lösung der Zielfunktion noch eine oder mehrere Nebenbedingungen der Form

$$g(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (4.2)$$

erfüllt werden müssen.

Beispielhaft kann dies anhand eines zwischen zwei Punkten A und B zurückzulegenden Weges veranschaulicht werden. Idealerweise würde man die kürzeste Strecke wählen. Doch auch bei der Wahl der direktesten Verbindung sind möglicherweise noch weitere Fragestellungen entscheidend wie zum Beispiel die Art der Fortbewegung oder des erforderlichen Aufwandes.

Angesichts der oft großen Menge an Lösungsmöglichkeiten kann es sinnvoll sein, weitere einschränkende Annahmen zu treffen. Deshalb kommt die Nichtnegativitätsbedingung

$$x_i \geq 0 \quad (4.3)$$

für reellwertige ($x_i \in \mathbb{R}$) oder ganzzahlige ($x_i \in \mathbb{N}$) Variablen hinzu.

4.1.2 Klassifizierung von Problemstellungen und Methoden

Eine Klassifizierung der Optimierungsverfahren kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen. Die Unterscheidung in beschränkte und unbeschränkte Probleme wurde bereits angesprochen. Jedoch sind die Grenzen in Bezug auf die Berechnungsansätze fließend, da zur Behandlung der Nebenbedingungen meist wieder auf Methoden der unbeschränkten Optimierung zurückgegriffen wird. Sind im Zuge einer Mehrkriterienoptimierung gleich zwei oder mehrere Optima zu erzielen, so müssen entsprechend viele Zielfunktionen erfüllt werden. Demgegenüber bezeichnet man eine Funktion, die von mehreren Variablen x_i abhängt, als mehrdimensional. Schließlich wird abhängig vom Verlauf der Zielfunktion in lineare und nichtlineare Programmierung unterschieden, wobei die Bedeutung des Begriffs Programmierung im Sinne von Optimierung zu verstehen ist. Die Gleichungen (4.4) und Tabelle 4.1 zeigen eine vereinfachte Klassifizierung der jeweiligen Bezeichnungen.

Eine weitere Einteilung kann nach der Verfahrensart getroffen werden. Es gibt zum einen unterschiedliche Genauigkeitsansprüche an die Resultate. Während manchmal schon eine ungefähre Lösung mit Hilfe von heuristischen Näherungsverfahren oder Analogiebetrachtungen wie das Simulated Annealing (vergleiche KIRKPATRICK et al. [76]) ausreicht, erfüllen andere Optimierungsaufgaben mathematisch strengere Kriterien. Zu dieser Gruppe gehören neben den Penalty- und Barriere-Methoden sowie der dynamischen Programmierung (vergleiche BELLMAN [10] und BELLMAN & DREYFUS [11]) auch die kombinatorischen Verfahren und die mathematische Programmierung, die sich unter anderem in die lineare und nichtlineare Programmierung gliedert, siehe beispielsweise LOOTSMA [89]. Auf der anderen Seite kann es vorkommen, dass die gewünschte Zielsetzung gar

$$f_k(x_n^j) \rightarrow \min \quad (4.4a)$$

$$g_m(x_n^j) \leq 0 \quad (4.4b)$$

$$x_i \geq 0 \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{R} \quad (4.4c)$$

Einkriterienoptimierung	$k = 1$
Mehrkriterienoptimierung	$k > 1$
Eindimensionales Problem	$n = 1$
Mehrdimensionales Problem	$n > 1$
Lineare Programmierung	$j = 1$
Nichtlineare Programmierung	$j \in \mathbb{R}$
Unbeschränktes Problem	$m = 0$
Beschränktes Problem	$m \geq 1$

Tabelle 4.1: Klassifizierung von Problemstellungen

nicht genau umrissen werden kann. Ein aus der menschlichen Erfahrung bekanntes Beispiel für eine unscharfe Formulierung ist die im Wesentlichen von NEGOITA & RALESCU [104] begründete Fuzzy-Optimierung: Die Annäherung an ein Optimum wird hier nur über die Erhöhung oder Reduzierung der Parameterwerte erreicht, ohne eine quantitative Zielvorgabe.

Ein wesentlicher Aspekt sind auch die Algorithmen, die zur analytischen Auffindung der Extremstelle dienen. Sie richten sich nach dem Charakter der zu optimierenden Funktion. Für differenzierbare Funktionsverläufe bieten sich Abstiegsverfahren an, die je nach Grad der Ableitung in Verfahren erster und zweiter Ordnung unterschieden werden. Letztere kommen jedoch wegen der Schwierigkeit einer zweimaligen Differenziation eher selten oder nur in abgewandelter Form zur Anwendung. Häufiger finden sich Verfahren, die mit nur einer Ableitung auskommen. Weit verbreitet ist die Methode der konjugierten Gradienten nach FLETCHER & REEVES [36]. Handelt es sich allerdings um nicht stetige oder nur schwer differenzierbare Funktionen, so stehen für diese Fälle die direkten Suchmethoden zur Verfügung. Zu ihnen gehört das bekannte Simplex-Verfahren, das von DANTZIG [23] entwickelt und von NELDER & MEAD [105] für mehrdimensionale Probleme erweitert wurde.

Sind keine oder nur wenige der Zielgrößen bekannt oder wenn Rückwirkungen des Ergebnisses auf die Ausgangssituation zu erwarten sind, wird eine Sensitivitätsanalyse durchgeführt, vergleiche beispielsweise ROTTNER [123] und SCHWARZ [127]. Eine der Möglichkeiten besteht darin, durch Variieren der Parameter zu untersuchen, ob und in welchem Maße sie voneinander abhängen und

Zur qualitativen Veranschaulichung ist in Abbildung 4.1 der Funktionsverlauf der Traglast über zwei Verzweigungspunktkoordinaten x_1 und x_2 aufgetragen. Das Beispiel zeigt, dass zwei Talsenken durch eine Erhebung voneinander getrennt sind. Es stellt sich daher das Problem, einen geeigneten Ausgangspunkt so zu wählen, dass das am tiefsten gelegene Minimum gefunden wird.

Ein Lösungsansatz könnte darin bestehen, die Landschaft zu durchwandern und gegebenenfalls an geeigneten Stellen in die Nachbarregion zu wechseln. Dies führte zwar vom gewählten Standpunkt aus zum besten erreichbaren Minimum, würde aber noch nicht garantieren, dass tatsächlich alle Täler durchwandert werden. Besser wäre es, mit dem Wissen über die möglichen Versagensmechanismen eine Suche mit mehreren Ausgangspunkten zu starten, auch auf die Gefahr hin, dass sich zwei oder mehrere in derselben Region bewegen. Denkbar wäre es auch, verschiedene Konstellationen miteinander zu kreuzen, bis die günstigsten Eigenschaften in der bestmöglichen Kombination zum Traglastminimum führen. Aus Sicht der Optimierung stünde hierfür neben einer Lösung auf der Basis von Suchverfahren oder den Gradientenmethoden auch noch die Anwendung von Evolutionsstrategien zur Verfügung.

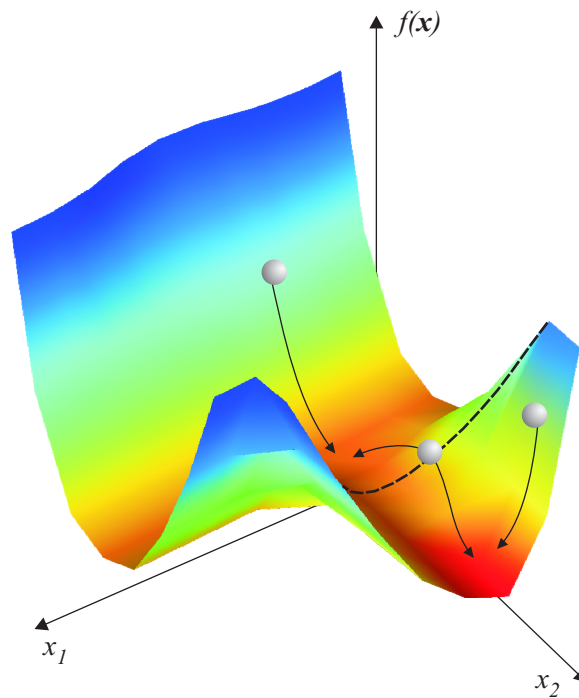


Abbildung 4.1: Qualitativer Verlauf einer Traglastfunktion

4.2 Lineare Programmierung

Die wichtigste Gruppe der Optimierungsverfahren ist die mathematische Programmierung. Sie beinhaltet unter anderem die lineare und die nichtlineare Programmierung, zu der auch das im Anschluss gezeigte Simplex-Verfahren zählt. Für die Probleme der Fließlinientheorie genügen jedoch die Formulierungen der linearen Programmierung, die im Folgenden dargestellt werden. Detailliertere Ausführungen finden sich beispielsweise in CHVÁTAL [19], LUENBERGER [91] und VANDERBEI [144].

4.2.1 Normalform der linearen Programmierung

Sind f und g_j lineare Funktionen der Optimierungsvariablen x_i , so spricht man von einer linearen Programmierung. Aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) folgt mit den Koeffizienten c_i und a_{ji} (mit $i = 1 \dots n$ und $j = 1 \dots m$) für Zielfunktion und Nebenbedingungen

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &\leq b_3 \\ \vdots &\quad \vdots \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \end{aligned} \quad (4.6b)$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{mit} \quad x_i \in \mathbb{R}. \quad (4.6c)$$

Trotz der Bedingung (4.6c) können die Variablen x_i auch negative Werte erzielen, indem man sie zunächst umschreibt in

$$x_i = x_{i1} - x_{i2} \quad \text{mit} \quad x_{i1}, x_{i2} \geq 0. \quad (4.7)$$

Zur besseren Handhabung werden die Ungleichungen (4.6b) nun mit Hilfe von Schlupfvariablen \bar{x}_j in Gleichungen umgewandelt. Dies führt auf die Standard-

oder Normalform

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n + \bar{x}_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n + \bar{x}_2 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n + \bar{x}_3 &= b_3 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n + \bar{x}_m &= b_m, \end{aligned} \quad (4.8b)$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{mit } x_i \in \mathbb{R}, \quad (4.8c)$$

$$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \geq 0 \quad \text{mit } \bar{x}_j \in \mathbb{R}. \quad (4.8d)$$

Wie die Optimierungsvariablen sind auch die Schlupfvariablen unbekannt. Für sie wird eine zusätzliche Nichtnegativitätsbedingung (4.8d) eingeführt, womit sich das Problem auf $n + m$ Unbekannte erweitert.

4.2.2 Basislösungen

Kompakter ausgedrückt folgt aus diesen Formulierungen

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.9b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad (4.9c)$$

mit den Vektoren \mathbf{c}^T und \mathbf{x} aus Zielfunktion und Optimierungsvariablen, sowie einer Koeffizientenmatrix \mathbf{A} aus den Nebenbedingungen. Es sind

$$\mathbf{c}^T = [c_1 \quad \dots \quad c_n \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad (4.10)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_m \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} setzt sich demnach aus m Zeilen und $n + m$ Spalten zusammen. Sofern \mathbf{A} den vollen Rang besitzt, existieren m linear unabhängige Spalten. Aus diesen wird durch Umgruppieren eine quadratische, nichtsinguläre Matrix \mathbf{A}_B gewonnen, die mit

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b} \quad (4.13)$$

die sogenannte Basislösung des Problems liefert. Die daraus ermittelten Werte \mathbf{x}_B bezeichnet man als Basisvariablen. Sie bilden einen Teilbereich des Vektors \mathbf{x} , dessen restliche Nichtbasisvariablen \mathbf{x}_N zu Null gesetzt werden. Auf diese Weise gliedern sich \mathbf{A} und \mathbf{x} in

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_B \quad \mathbf{A}_N] \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Anschaulich zeigt sich die Gesamtstruktur in einem sogenannten Simplex-Tableau wie es in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt ist. Möglich ist auch, dass \mathbf{A} mehr als m linear unabhängige Spalten besitzt. Die Einteilung in \mathbf{A}_B und \mathbf{A}_N ist dann nicht mehr eindeutig und es existieren mehrere Basislösungen.

Basisvariablen	Nichtbasisvariablen	
\mathbf{x}_B^T	\mathbf{x}_N^T	
\mathbf{c}_B^T	\mathbf{c}_N^T	= Z
\mathbf{A}_B Basisvektoren	\mathbf{A}_N Nichtbasisvektoren	= \mathbf{b}

Abbildung 4.2: Simplex-Tableau aus Basis- und Nichtbasisvariablen

Falls eine oder mehrere Basisvariablen zu Null werden, spricht man von einer degenerierten Lösung. In diesem Fall können die entsprechenden Elemente aus \mathbf{x}_B gegen Variablen aus dem Vektor der Nichtbasisvariablen \mathbf{x}_N getauscht werden. Analog werden die zugehörigen Spalten in \mathbf{A} umsortiert. Bislang wurde auf die Nichtnegativitätsbedingung (4.9c) noch keine Rücksicht genommen. Ein

Vektor \mathbf{x} , der diese Randbedingungen erfüllt, wird als zulässiger Vektor bezeichnet. Er liefert eine zulässige Basislösung, die gegebenenfalls auch eine zulässige degenerierte Basislösung sein kann. Sie ist optimal, wenn sie die Normalform der linearen Programmierung mit den Gleichungen (4.9a) bis (4.9c) erfüllt und den Minimalwert der Zielfunktion erreicht. Daher spricht man von einer zulässigen optimalen Basislösung. Ermittelt werden kann eine solche Lösung mit Hilfe der Simplex-Methode auf Grundlage des Fundamentaltheorems der linearen Programmierung, vergleiche LUENBERGER [91].

Fundamentaltheorem der linearen Programmierung

Liegt ein Problem der linearen Programmierung in der Normalform vor und besitzt die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} die Dimension $m \times (n + m)$ und den Rang m , so ist seine Lösung, sofern sie existiert und die Nichtnegativitätsbedingungen erfüllt, eine zulässige Basislösung. Überdies handelt es sich um eine optimale Basislösung, wenn die Lösung optimal ist.

Aus dieser Feststellung heraus lässt sich mit

$$\binom{n + m}{m} = \frac{(n + m)!}{m! n!} \quad (4.15)$$

eine Obergrenze der möglichen zulässigen Basislösungen angeben.

4.2.3 Geometrische Interpretation der Degenerierung

Aus geometrischer Sicht stellt die Zielfunktion bei n Variablen eine Hyperebene der Dimension $n - 1$ dar. Die Nebenbedingungen (4.9b) beschreiben als Lösungsmenge eine konvexe Punktmenge im n -dimensionalen Raum \mathbb{R}^n . Von drei Optimierungsvariablen wird demnach ein dreidimensionaler Lösungsraum \mathbb{R}^3 aufgespannt, worin die Zielfunktion eine Ebene ist. Die optimale Lösung wird durch Parallelverschiebung dieser Ebene bestimmt. Zur Veranschaulichung sei das folgende Beispiel mit zwei Nebenbedingungen gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\rightarrow \min \\ x_1 &+ 2x_3 \leq 3 \\ &+ x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 . \end{aligned}$$

Die Ungleichungen werden durch die Schlupfvariablen \bar{x}_1 und \bar{x}_2 in Gleichungen überführt:

$$\begin{aligned} x_1 &+ 2x_3 + \bar{x}_1 &= 3 \\ + x_2 + 2x_3 &+ \bar{x}_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Abbildung 4.3a zeigt die von den Nichtnegativitätsbedingungen umschlossene Lösungsmenge. Jede Fläche entspricht einer Variablen, die zu Null wird; an den schräg angeschnittenen Flächen sind dies die Schlupfvariablen. Die Ecken dieses Polyeders entstehen durch den Schnitt dreier Flächen und sind aus mathematischer Sicht Extremwerte, die jeweils eine Basislösung repräsentieren.

Ändert man die rechte Seite der ersten Ungleichung, so entsteht aus dem obigen Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\rightarrow \min \\ x_1 &+ 2x_3 &\leq 2 \\ + x_2 + 2x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Diese Formulierung liefert eine Lösungsmenge, die in Abbildung 4.3b dargestellt ist. Der Unterschied zum vorhergehenden Fall besteht nun darin, dass sich auf der

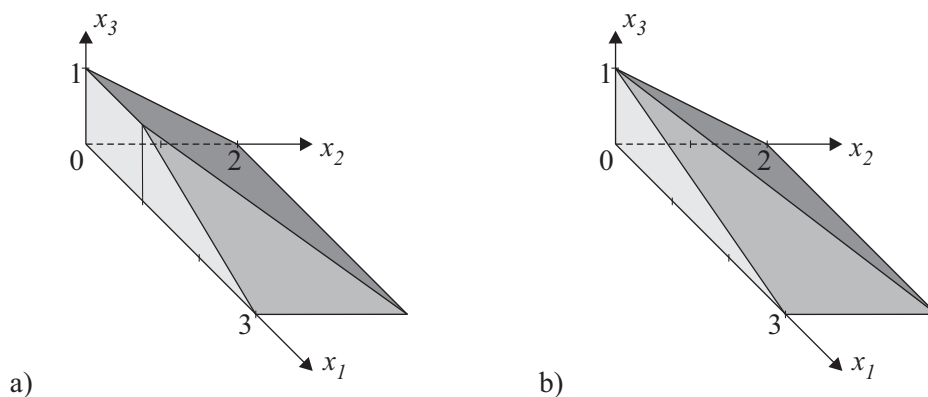


Abbildung 4.3: Beispiel: Nebenbedingungen definieren eine Lösungsmenge
a) nichtdegenerierte Basislösung
b) degenerierte Basislösung

x_3 -Achse gleich vier Flächen schneiden. Somit liegen zwei Punkte auf derselben Stelle, was einer degenerierten Basislösung entspricht. Auf diese Weise lässt sich die zu Null gewordene Basisvariable durch eine Nichtbasisvariable ersetzen, ohne dass irgendwelche Änderungen eintreten. Zur weiteren Veranschaulichung sei auf Beispiel 10 in Kapitel 7 verwiesen.

4.2.4 Wechsel der Basis

Wie das Beispiel im vorigen Abschnitt verdeutlichte, kann durch den Tausch von Basisvariablen und Nichtbasisvariablen eine neue zulässige Basislösung erzeugt werden. Unter der Annahme, dass eine nichtdegenerierte Lösung

$$\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0] \quad \text{mit} \quad x_1, \dots, x_m > 0 \quad (4.16)$$

vorliegt, soll nun ein Wechsel der Basis erzwungen werden. In der Darstellung

$$x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_m \mathbf{a}_m = \mathbf{b} \quad (4.17)$$

seien die Vektoren \mathbf{a}_i die zugehörigen Spalten aus der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} . Für $q > m$ ist \mathbf{a}_q ein Spaltenvektor, der mit Hilfe der bestehenden Basis beschrieben wird,

$$\mathbf{a}_q = \xi_1 \mathbf{a}_1 + \dots + \xi_m \mathbf{a}_m . \quad (4.18)$$

Die Differenz aus Gleichung (4.17) und (4.18), Letztere multipliziert mit einer Variablen $\varepsilon \geq 0$, liefert

$$(x_1 - \varepsilon \xi_1) \mathbf{a}_1 + \dots + (x_m - \varepsilon \xi_m) \mathbf{a}_m + \varepsilon \mathbf{a}_q = \mathbf{b} . \quad (4.19)$$

Es entsteht eine Linearkombination aus $m + 1$ Vektoren, wobei für $\varepsilon = 0$ die bestehende Basis erhalten bleibt. Für einen zunehmenden Faktor ε vergrößern oder verringern sich die Vektoren \mathbf{a} . Dabei verschwindet bei einem Wert von

$$\varepsilon = \min_i \left(\frac{x_i}{\xi_i} \right) \quad \text{für} \quad \xi_i > 0 \quad (4.20)$$

mit \mathbf{a}_i der Erste unter ihnen und wird durch \mathbf{a}_q ersetzt. Wenn dieses Minimum bei mehreren Indizes i gleichzeitig eintritt, ist die neue Lösung degeneriert und jeder neu entstandene Nullvektor ist ein Vektor, der die Basis verlässt.

4.2.5 Simplex-Algorithmus

Durch systematischen Basiswechsel kann der Wert der Zielfunktion bis zum Erreichen eines Minimums reduziert werden. Geometrisch liegt ein solches Minimum

auf einer Ecke des Lösungspolytops, vergleiche Abbildung 4.3 in Abschnitt 4.2.3. Daher entspricht die Suche nach dem Optimum einer Wanderung entlang seiner Kanten, geleitet von einer schrittweisen Verbesserung der Zielfunktion. Aus mathematischer Sicht bedeutet dies den Wechsel von einem bekannten zu einem geeigneten neuen Basisvektor; ein Vorgang, der auch als Simplex-Schritt bezeichnet wird.

Ausgehend von Gleichung (4.14) gilt

$$\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B = \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_N = \mathbf{0} . \quad (4.21)$$

Für die Komponenten des neu zu findenden Basisvektors \mathbf{y} folgt mit der bestehenden Koeffizientenmatrix die Einteilung

$$\mathbf{A}_B \mathbf{y}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{y}_N = \mathbf{b} \quad (4.22)$$

mit den zu \mathbf{A}_B beziehungsweise \mathbf{A}_N gehörigen Elementen \mathbf{y}_B und \mathbf{y}_N . Beide können über

$$\mathbf{y}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \mathbf{y}_N \quad (4.23)$$

direkt zueinander ins Verhältnis gesetzt werden. Die reduzierte Zielfunktion

$$\mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{y}_B + \mathbf{c}_N^T \mathbf{y}_N \quad (4.24)$$

ergibt sich damit zu

$$\mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} + (\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N) \mathbf{y}_N , \quad (4.25)$$

wobei der sogenannte reduzierte Kostenvektor

$$\bar{\mathbf{c}}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \quad (4.26)$$

ein Maß für den Einfluss sich verändernder Nichtbasisvariablen auf das Optimum ist. Bei jeder Iteration verringert sich so die Zielfunktion (4.24), wobei aufgrund der endlichen Zahl von Randpunkten der Lösungsmenge ein Abbruch garantiert ist. Eine Ausnahme ist der entartete Fall, bei dem $\mathbf{y}_B = \mathbf{0}$ vorliegt. Durch eine Neuaufteilung der Spalten der Matrix \mathbf{A} in \mathbf{A}_B und \mathbf{A}_N kann der Iterationsvorgang weitergeführt werden. Es besteht jedoch die Gefahr, dass die Lösung in einen endlosen Zyklus gerät, siehe FLETCHER [35].

Tafel 4.1 fasst das Vorgehen der Simplex-Methode nochmals zusammen.

1. Beginn der Iteration mit zulässiger Basislösung $\mathbf{x}_B \geq 0$ und $\mathbf{x}_N = 0$.
2. Berechne $\bar{\mathbf{c}}_N^T = \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N$.
3. Wenn $\bar{\mathbf{c}}_N^T > 0$, Stopp: Optimale Lösung ist \mathbf{x} ,
sonst wenn $\bar{\mathbf{c}}_N^T \geq 0$, Stopp: Lösung mehrdeutig.
4. Bestimme Spalten i und q für Basiswechsel, Gleichungen (4.18) bis (4.20).
5. Wenn $-\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{a}_q \geq 0$, Stopp: unbeschränkter zulässiger Bereich,
Lösung in ∞ .
6. Wenn $\mathbf{y}_B = 0$: Problem entartet, Abhilfemaßnahmen nötig.
7. Berechne neue Basisvariable, gehe zu Schritt 1.

Tafel 4.1: Simplex-Algorithmus

4.3 Suchstrategien

Eine weitere Möglichkeit zur sukzessiven Annäherung an ein Optimum der Zielfunktion ist die schrittweise Suche in Richtung verbesserter Ergebnisse. Bekannte eindimensionale Verfahren – häufig auch als Line-Search-Methoden bezeichnet – sind beispielsweise die Fibonacci-Suche und die Methode des Goldenen Schnitts. Das Prinzip des schrittweisen Vorgehens funktioniert jedoch auch im mehrdimensionalen Fall, siehe Abbildung 4.4. Ein Beispiel dafür ist die direkte Suchmethode nach HOOKE & JEEVES [57]. Der Vorteil dieser Verfahren ist, dass sie im Ge-

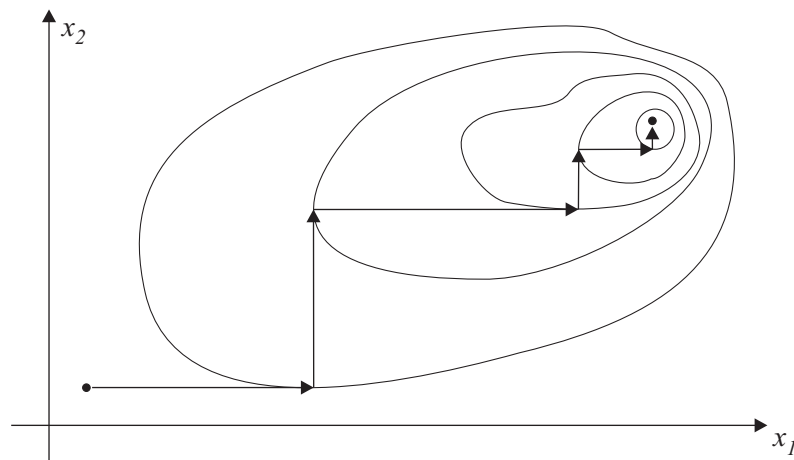


Abbildung 4.4: Zweidimensionale Suche

gensatz zu den Gradientenverfahren – siehe Abschnitt 4.4 – ableitungsfrei sind. In beiden Fällen besteht jedoch die Gefahr, dass die Suche in einem lokalen Minimum endet.

4.3.1 Quadratische Interpolation

Ein anderes Verfahren der eindimensionalen Optimierung ist die quadratische Interpolation. Sie basiert auf dem Gedanken, die Funktion $f(x)$ durch einen quadratischen Ansatz der Form $ax^2 + bx + c$ zu beschreiben, der das Funktionsminimum beinhaltet, das heißt zu Beginn ist mit

$$x_u < x_m < x_o \quad \text{und} \quad f(x_u) > f(x_m) < f(x_o) \quad (4.27)$$

ein nach unten und oben beschränktes Funktionsintervall gegeben.

Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$f(x_u) = ax_u^2 + bx_u + c = y_u \quad (4.28a)$$

$$f(x_m) = ax_m^2 + bx_m + c = y_m \quad (4.28b)$$

$$f(x_o) = ax_o^2 + bx_o + c = y_o \quad (4.28c)$$

mit der Bedingung

$$\frac{df(x_n)}{dx_n} = ax_n + b = 0 \quad (4.29)$$

für den Extremwert an der Stelle x_n führt auf die Beziehung

$$x_n = \frac{1}{2} \frac{y_u(x_m^2 - x_o^2) + y_m(x_o^2 - x_u^2) + y_o(x_u^2 - x_m^2)}{y_u(x_m - x_o) + y_m(x_o - x_u) + y_o(x_u - x_m)}. \quad (4.30)$$

Da dieser Ausdruck für kleiner werdende Intervalle ungeeignet ist, kann man ihn auf die äquivalente Form

$$x_n = \frac{x_u + x_o}{2} - \frac{1}{2} \frac{(y_u - y_o)(x_o - x_m)(x_m - x_u)}{y_u(x_m - x_o) + y_m(x_o - x_u) + y_o(x_u - x_m)} \quad (4.31)$$

bringen (MCKEOWN et al. [93]). Der erste Summand trägt hier den Hauptanteil bei, während der zweite lediglich eine Korrektur darstellt. Anschließend werden die Indizes neu definiert, indem die Variablen nach Tabelle 4.2 umsortiert werden. Der gesamte Algorithmus zur quadratischen Suche ist in Tafel 4.2 aufgeführt. Als Abbruchkriterium dient die Differenz aus x_n und x_m , die einen vordefinierten Toleranzwert ε unterschreitet:

$$|x_n - x_m| \leq \varepsilon. \quad (4.32)$$

	Bedingung	Sortierung
$x_n < x_m$	$f(x_n) < f(x_m)$	$x_u \quad x_n \quad x_m$
	$f(x_n) \geq f(x_m)$	$x_n \quad x_m \quad x_o$
$x_n = x_m$	$f(x_n) = f(x_m)$	$x_u \quad x_m \quad x_o$
$x_n > x_m$	$f(x_n) < f(x_m)$	$x_m \quad x_n \quad x_o$
	$f(x_n) \geq f(x_m)$	$x_u \quad x_m \quad x_n$

Tabelle 4.2: Definition der Indizes bei der quadratischen Suche

1. Definiere Intervall $[x_u, x_o]$ sowie innerhalb einen Punkt x_m , sodass $f(x_u) > f(x_m) < f(x_o)$.
2. Berechne x_n nach (4.31).
3. Wenn Abbruchkriterium erfüllt: Stopp, sonst: Wähle neues Intervall nach Tabelle 4.2, gehe zu Schritt 1.

Tafel 4.2: Algorithmus der quadratischen Suche

4.3.2 Direktes Suchverfahren

Die von HOOKE & JEEVES [57] vorgeschlagene Strategie der direkten Suche, auch Pattern-Search-Methode genannt, beruht auf der Idee, ausgehend von einem Startpunkt P_0 mit den Koordinaten \mathbf{x}_0 zunächst einige Tastschritte vorzunehmen, bevor der eigentliche Schritt in Richtung der verbesserten Lösung erfolgt. Beginnend mit der Suchrichtung x_1 wird entlang dem mit α_1 skalierten Einheitsvektor \mathbf{e}_1 ein benachbarter Basispunkt B_1 gesucht, für dessen Koordinaten \mathbf{x}_1^* der Wert der Zielfunktion ermittelt wird. Allgemein formuliert ist

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{x}_k + \alpha_i \mathbf{e}_i, \quad (4.33a)$$

und wenn auf diese Weise keine Minimierung erzielt werden kann, wird mit

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{x}_k - \alpha_i \mathbf{e}_i \quad (4.33b)$$

die entgegengesetzte Richtung eingeschlagen. Falls auch dieser Schritt nicht zum Erfolg führt, wird die nächste Koordinatenrichtung x_{i+1} untersucht. Die nach der Sondierung erreichte Stelle wird schließlich als Ausgangspunkt P_{k+1} für eine neue Reihe von Tastschritten gewählt. Sollte jedoch keine Verbesserung des Funktionswerts erzielt werden, so bleibt der bestehende Punkt P_k erhalten und die Suche

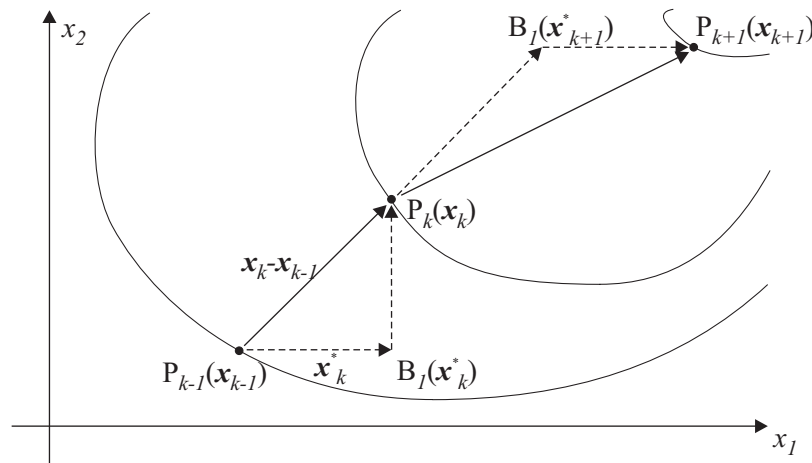


Abbildung 4.5: Suchvorgang des Verfahrens nach HOOKE & JEEVES [57]

beginnt erneut mit reduzierten Schrittweiten α_i . Sobald deren vorgegebene Toleranzwerte ε erreicht sind, endet der Algorithmus.

Die schon gewonnenen Informationen werden für die weiteren Suchschritte benutzt, indem der bisherige Richtungsvektor in die Suche mit eingeht. Vom aktuellen Punkt aus wird nun zunächst mit

$$\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{x}_k + (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) \quad (4.34)$$

ein erster Tastschritt in eine Richtung unternommen, die bereits eine Verringerung der Zielfunktion bewirkt hat. Der Fortschritt der Rasterpunkte P ist aus Abbildung 4.5 ersichtlich. Tafel 4.3 fasst den beschriebenen Ablauf nochmals zusammen.

1. Berechne Funktion $f(\mathbf{x}_0)$ am Startpunkt P_0 , definiere Schrittweiten $\alpha_i > 0$ und Toleranz ε . Setze $k = 0$, $i = 1$.
2. Tastschritt: Für jede Richtung x_i :
 - 2.1. Wenn $f(\mathbf{x}_k + \alpha_i \mathbf{e}_i) < f(\mathbf{x}_k)$: $\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{x}_k + \alpha_i \mathbf{e}_i$,
sonst wenn $f(\mathbf{x}_k - \alpha_i \mathbf{e}_i) < f(\mathbf{x}_k)$: $\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{x}_k - \alpha_i \mathbf{e}_i$,
sonst: $\mathbf{x}_{k+1}^* = \mathbf{x}_k$.
3. Wenn $f(\mathbf{x}_{k+1}^*) = f(\mathbf{x}_k)$: Reduziere α_i , gehe zu Schritt 2.
4. Rasterschritt: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1}^*$. Setze $k = k + 1$, gehe zu Schritt 2.

Tafel 4.3: Algorithmus nach HOOKE & JEEVES [57]

Um zu verhindern, dass lediglich ein lokales Optimum gefunden wird, sollte der Algorithmus bei nichtkonvexen Problemen mehrfach neu gestartet werden. Da somit die Schrittweite wieder auf den Anfangswert heraufgesetzt wird, kann eine örtliche Senke möglicherweise überwunden werden.

4.4 Gradientenverfahren

Eines der ältesten und verbreitetsten Verfahren sind die Abstiegsmethoden, auch Gradientenverfahren genannt. Sie gehören zur Gruppe der unbeschränkten Optimierungsaufgaben und werden in ein- und mehrdimensionale Probleme unterschieden. Es gibt eine Reihe von Varianten, denen jedoch allen die Suche nach der Richtung des größten Gefälles im stetig differenzierbaren Funktionsverlauf zugrunde liegt, siehe Abbildung 4.6. Nachdem eine Suchrichtung festgelegt wurde, stellt sich auch hier die Frage der Schrittweite, um die Länge des zurückzulegenden Weges vorzugeben. Zur Vertiefung sei auf die Literatur von GILL et al. [43], LUENBERGER [91], MCKEOWN et al. [93], sowie MINOUX [96] verwiesen.

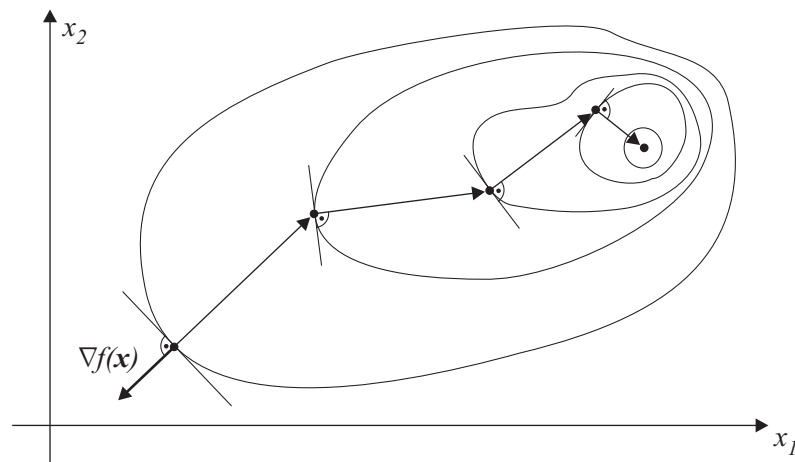


Abbildung 4.6: Verbesserungsschritte eines Gradientenverfahrens

4.4.1 Methode des steilsten Abstiegs

Der Gradient einer stetig differenzierbaren Funktion $f(\mathbf{x})$ ist in \mathbb{R}^n ein n -dimensionaler Spaltenvektor, bestehend aus den partiellen Ableitungen nach den Richtungen x_i . Man definiert

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \nabla f(\mathbf{x})^T = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (4.35)$$

als Gradientenvektor mit dem größten Anstieg, der entgegen der gewünschten Abstiegsrichtung orientiert ist. Mit \mathbf{g}_k erhält man iterativ den nächsten Lösungsvektor

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k . \quad (4.36)$$

Der Faktor α_k ist ein positiver Skalar, der die Funktion $f(\mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k)$ minimiert und die Schrittweite in Richtung des Gradienten festlegt. Abhängig von der Problemstellung wird schließlich noch ein geeignetes Abbruchkriterium gewählt, welches den Iterationsvorgang beendet. In MINOUX [96] werden dafür drei gängige Kriterien angegeben:

$$\max \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon , \quad (4.37a)$$

$$\|\mathbf{g}_k\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 < \varepsilon , \quad (4.37b)$$

$$\|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)\| < \varepsilon , \quad (4.37c)$$

mit $\varepsilon > 0$.

Den prinzipiellen Algorithmus erläutert Tafel 4.4.

1. Definiere Startvektor \mathbf{x}_0 . Setze $k = 0$.
2. Für jeden Iterationsschritt k :
 - 2.1. Ermittle $\alpha_k \geq 0$,
 - 2.2. berechne $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{g}_k$.
3. Wenn Abbruchkriterium erfüllt: Stopp,
sonst: Setze $k = k + 1$, gehe zu Schritt 2.

Tafel 4.4: Methode des steilsten Abstiegs

Die Bestimmung der Schrittweite α ist für die Konvergenz von großer Bedeutung. Sie muss eine ausreichende Abnahme des Funktionswerts gewährleisten und darf dabei weder zu groß noch zu klein gewählt werden. Nachdem die Entscheidung zugunsten eines Gradienten schon gefallen ist, stellt sich lediglich die Frage nach der Länge des in diese Richtung zurückzulegenden Weges. Es handelt sich also nur noch um ein eindimensionales Problem, das mit Hilfe einer Line-Search-Methode

zu lösen ist. Deshalb bietet sich für die Schrittweiteremittlung das in Abschnitt 4.3.1 gezeigte Verfahren der quadratischen Interpolation an. Da sich unter Verwendung der klassischen Abstiegsmethode bei vielen Problemen dennoch nur eine unbefriedigende Konvergenz einstellt, empfiehlt es sich, zusätzlich auch die Informationen der vorangegangenen Verbesserungsschritte zu verwenden.

4.4.2 Die konjugierte Gradientenmethode

Eine Verfeinerung der Methode des steilsten Abstiegs wurde von FLETCHER & REEVES [36] vorgestellt. Sie basiert auf der konjugierten Gradientenmethode nach HESTENES & STIEFEL [53] und kann für beliebige Funktionen angewendet werden, sofern sie die generellen Voraussetzungen für Gradientenverfahren erfüllen. Ein wesentlicher Vorteil besteht darin, dass das Verfahren deutlich schneller konvergiert als gewöhnliche Abstiegsmethoden, obwohl es mit relativ wenigen Informationen aus dem vorhergehenden Schritt auskommt und somit wenig Speicher benötigt.

Zu Beginn wird auch hier ein Gradient $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ nach Gleichung (4.35) berechnet, in dessen Umkehrrichtung der Vektor \mathbf{p}_0 definiert wird; die Bestimmung der Schrittweite α erfolgt ebenfalls analog. Im Gegensatz zur klassischen Abstiegsmethode fließen jedoch in die Gleichung

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k \quad (4.38)$$

mit den konjugierten Gradienten

$$\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{p}_i \quad (4.39)$$

die bisherigen Ergebnisse in die nachfolgenden Schritte mit ein. Dabei zeigt sich (BECKMAN [7]), dass alle Beiwerte β_i zu Null werden, mit Ausnahme des letzten, β_k . Demzufolge lässt sich der Ausdruck vereinfachen zu

$$\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_k \mathbf{p}_k . \quad (4.40)$$

Der Skalierungsfaktor

$$\beta_k = \frac{\|\mathbf{g}_{k+1}\|^2}{\|\mathbf{g}_k\|^2} = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k} \quad (4.41)$$

repräsentiert dabei die aktuellen Gradienten des Iterationsschritts.

Tafel 4.5 zeigt die einzelnen Schritte des Verfahrens. Gegebenenfalls können nach der Ermittlung der Gradienten zusätzliche Abbruchkriterien eingefügt werden,

1. Iterationsschritt 0:
 - 1.1. Definiere Startvektor \mathbf{x}_0 . Setze $k = 0$.
 - 1.2. Bestimme Ausgangsgradienten \mathbf{g}_0 ,
 - 1.3. setze $\mathbf{p}_0 := -\mathbf{g}_0$.
2. Iterationsschritt k :
 - 2.1. Ermittle α_k , sodass $\min(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k)$ erfüllt.
 - 2.2. Berechne (4.38) sowie (4.40) mit (4.41).
3. Wenn Abbruchkriterium erfüllt: Stopp,
sonst: Setze $k = k + 1$, gehe zu Schritt 2.

Tafel 4.5: Konjugierte Gradientenmethode nach FLETCHER & REEVES [36]

vergleiche Abschnitt 5.4.4. Eine Variante zum gezeigten Algorithmus wurde von POLAK & RIBIÈRE [113] vorgeschlagen. Der Unterschied besteht mit

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T (\mathbf{g}_{k+1} - \mathbf{g}_k)}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k} \quad (4.42)$$

lediglich in einer abgeänderten Ermittlung des skalaren Faktors. Wichtig ist jedoch die Feststellung, dass die globalen Konvergenzeigenschaften beider Methoden nur bei regelmäßigen Neustarts des Algorithmus gewährleistet bleiben.

4.4.3 Reduktion von Variablen und Gradienten

Steht für eine bestimmte Menge n von Lösungsvariablen \mathbf{x} eine geringere Anzahl t an Gleichheitsrestriktionen zur Verfügung (vergleiche Abschnitt 4.2.2 und Abbildung 4.2), so kann man die überschüssigen Variablen mit Hilfe dieser Nebenbedingungen eliminieren, um ein entsprechend konditioniertes, unbeschränktes Optimierungsproblem zu erhalten. Nach dem Reduktionsverfahren von WOLFE [149] wird die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} zunächst in zwei Bereiche

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \quad (4.43)$$

aufgeteilt, wobei \mathbf{A}_1 eine nichtsinguläre Matrix der Größe $t \times t$ ist. Weil sie auch Nichtbasisvektoren enthalten kann, stellt sie – im Gegensatz zu \mathbf{A}_B – nicht notwendigerweise eine reine Matrix aus Basisvektoren dar. Dennoch entspricht \mathbf{A}_1

zumeist den ersten t Spalten der Matrix \mathbf{A} , sofern diese geeignet sind. Generell ist aber eine beliebige Zusammenstellung von Matrixspalten zulässig (GILL et al. [43]). In entsprechender Weise werden die Lösungsvektoren gegliedert, so dass die Nebenbedingungen in der Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (4.44)$$

angegeben werden können. Da \mathbf{A}_1 so gewählt wurde, dass die zugehörige Inverse existiert, kann man Gleichung (4.44) nach n Variablen auflösen,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2) . \quad (4.45)$$

Damit besteht für \mathbf{x}_1 eine Abhängigkeit von den restlichen $n - t$ Variablen \mathbf{x}_2 . Das Gleichungssystem ist für jedes \mathbf{x}_2 automatisch erfüllt, wenn \mathbf{x}_1 nach (4.45) ermittelt wird. So auch für $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, was auf einen Vektor $\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{b}$ führt. Schließlich lässt sich für eine nach (4.43) aufgestellte Koeffizientenmatrix eine zu ihren Zeilen orthogonale Projektionsmatrix

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

mit n Zeilen und $n - t$ Spalten definieren. Letztere bilden eine Basis für Vektoren, die zu den Zeilen von \mathbf{A} orthogonal sind. Mit einem reduzierten Vektor \mathbf{p}_z der Größe $n - t$ folgt also

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{Z} \mathbf{p}_z . \quad (4.47)$$

Dieser kann wiederum über das Verhältnis

$$\mathbf{p}_z = -\mathbf{Z}^T \mathbf{g}_k \quad (4.48)$$

aus dem Gradienten \mathbf{g}_k gewonnen werden, sodass letztlich mit der Beziehung

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \mathbf{g}_k \quad (4.49)$$

ein neuer Abstiegsvektor bestimmt wird, vergleiche GILL et al. [43] und ROSEN [122].

4.5 Evolutionäre Optimierung

Eine besondere Sparte der Optimierung bilden die Verfahren auf Grundlage der natürlichen Evolution. Sie orientieren sich an der Entwicklung von Individuen mit

dem Ziel der Anpassung an bestimmte Gegebenheiten. Die Übertragung von Evolutionsstrategien auf technisch-physikalische Fragestellungen gehen auf RECHENBERG [119, 120] und SCHWEFEL [128] zurück. Während genetische Algorithmen für Optimierungsprobleme erstmals von DE JONG [24] eingesetzt wurden, zielten die Betrachtungen von HOLLAND [56] auf adaptive, lernfähige Systeme. In ihrer ursprünglichen Form beruhen die genetischen Algorithmen auf einer binären Kodierung und sind somit insbesondere für kombinatorische Untersuchungen geeignet. Ein weiterer Zweig ist die genetische Programmierung, welche die Entwicklung von optimalen Strategien als einfache Computerprogramme umfasst.

Spezielle Literatur zur evolutionären Optimierung findet sich bei GERDES et al. [41], GOLDBERG [45] und WEICKER [148].

4.5.1 Begriffsdefinitionen

Die Problematik der Optimierungsaufgabe in Zielfunktion und Suchraum ist auch für die evolutionären Strategien dieselbe wie für die schon beschriebenen klassischen Verfahren. Jedoch bedienen sich die Ansätze nun der Kombination verschiedener Strukturen und Eigenschaften, weswegen vorab einige Begriffe erläutert werden müssen, die aus der Biologie entlehnt wurden und die Eingang in die Terminologie der Optimierung gefunden haben.

Die kleinste Einheit der genetischen Information eines Individuums ist das Gen, das eine bestimmte Aussage zu dessen Eigenschaften beinhaltet, beispielsweise über seine Haarfarbe. Diese Aussage kann unterschiedliche Werte annehmen, die jeweils als Allel bezeichnet werden. Die Häufigkeit des Auftretens eines Allels ist die Genfrequenz. Die Summe aller Gene nennt man Genom, durch welches der Phänotyp, das äußere Erscheinungsbild des Individuums, bestimmt ist. In ihrer Gesamtheit bilden die Individuen eine Population, die gegebenenfalls in Arten unterteilt werden kann, falls sich nur bestimmte Gruppen von Individuen mit gemeinsamem Genpool paaren können.

Eine Evolution kann auf verschiedene Weise erfolgen. Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, dass sich einzelne Gene bei der Vererbung von einer Generation zur nächsten verändern, also mutieren, oder dass das genetische Material der Eltern in den Kindern rekombiniert wird. Auch eine Überlagerung beider Vorgänge ist denkbar. Werden Gensequenzen ab einem bestimmten Punkt einfach ausgetauscht, so spricht man von einem Crossover-Effekt. Abbildung 4.7 zeigt das Prinzip der Mutation (a) und einer Crossover-Rekombination (b). Damit es zu keinen unzulässigen Veränderungen kommt, dürfen nur einander entsprechende Teilabschnitte verändert oder ausgetauscht werden.

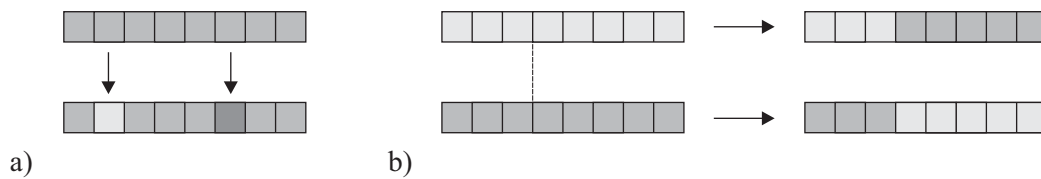


Abbildung 4.7: Vererbungsmechanismen

a) Mutation

b) Rekombination

Nachdem nun eine neue Generation von Individuen entstanden ist, wird ihre Tauglichkeit (Fitness) bewertet und gegebenenfalls eine Auswahl selektiert. Je nachdem, wieviele Individuen gepaart und auf welche Weise Gene vererbt werden, wieviele Kinder eine Paarung hervorbringt und ob die Eltern in der neuen Generation wieder zur Verfügung stehen, wird der Fortgang der Evolution beeinflusst. Ausgehend von einer Startpopulation liegt ihr jedoch immer der gleiche prinzipielle Zyklus zugrunde, der in [Abbildung 4.8](#) zu sehen ist.

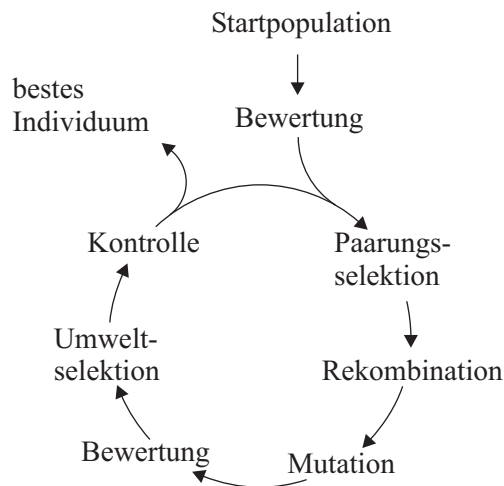


Abbildung 4.8: Evolutionärer Zyklus

Besonders bei kleinen Populationsgrößen ist bei der Simulation einer evolutionären Entwicklung das Aussterben von Allelen einzelner Gene zu beobachten. Dieser Effekt ist zufällig bedingt und wird als Gendrift bezeichnet, die eine Verarmung der Vielfalt in einer Population bewirkt. In der praktischen Anwendung kann dies zum Verschwinden von potenziellen Lösungsindividuen führen. Auf der anderen Seite können durch Zu- oder Abwanderung von Individuen die Genhäufigkeiten in der Population beeinflusst werden. Dieser Vorgang des Gen-

flusses sorgt in kleineren Populationen oft für eine wesentlich schnellere Evolution, da sich Neuerungen leichter durchsetzen. Insofern sind bei der Wahl der Populationsgröße μ unerwünschte Zufallseffekte und die Geschwindigkeit des Entwicklungsfortschritts gegeneinander abzuwägen.

4.5.2 Genetischer Algorithmus

Bei der numerischen Umsetzung genetischer Algorithmen wird der Suchraum Ω des eigentlichen Problems durch eine kodierte Beschreibung der Lösungskandidaten ersetzt. Letztere bilden den Genotyp G , während man die äußere Erscheinung als Phänotyp bezeichnet, der durch eine Dekodierungsfunktion aus G gewonnen wird. Mit Hilfe einer Bewertungsfunktion f wird die Güte des Phänotyps ermittelt, aus welcher wiederum Rückschlüsse auf die Selektion der Individuen gezogen werden können und die als Merkmal eines Individuums gespeichert wird. Abbildung 4.9 verdeutlicht den Zusammenhang.

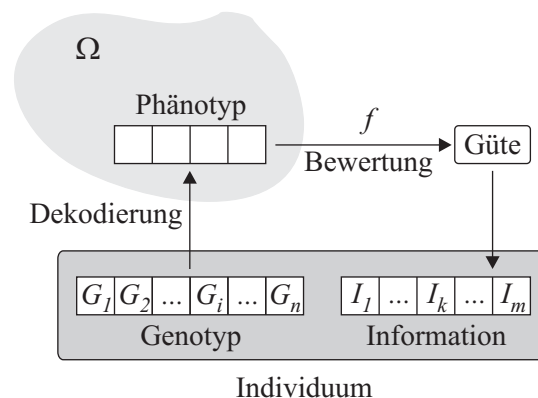


Abbildung 4.9: Kodierung des Suchraums

Wie schon in Abschnitt 4.5.1 angesprochen wurde, bietet bereits die Variation der Vererbungsregeln durch Mutation und Rekombination sowie das Verändern diverser Parameter wie beispielsweise der Anzahl an Crossover-Punkten viele Ansatzpunkte für die unterschiedlichsten evolutionären Strategien. Abhängig von der Problemstellung existiert – vergleiche WEICKER [148] – eine Fülle an Verfahren, auf deren Grundlage auch der in Tafel 4.6 dargestellte genetische Algorithmus erstellt wurde. Auf dieses Prinzip soll in Abschnitt 5.5 für die Entwicklung von Fließlinienfiguren wieder zurückgegriffen werden.

1. Definiere Zielfunktion f , Crossover-Wahrscheinlichkeit $0 < p_1 \leq 1$, Mutationswahrscheinlichkeit $0 < p_2 \leq 1$, Populationsgröße $\mu \in \mathbb{N}$, Kinderanzahl ν je Paarung und gegebenenfalls weitere Parameter
2. Setze $k = 0$. Erzeuge Population $P(k)$ der Größe μ .
3. Bewerte $P(k)$.
4. Für i von 1 bis $\frac{\mu}{\nu}$:
 - 4.1. Wähle Zufallszahlen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
 - 4.2. Bestimme Elternpaarung mit ν Individuen I_k für ν Kinder.
 - 4.2. Wenn $r_1 \leq p_1$: Rekombination von Gensequenzen der Eltern, sonst: keine Rekombination.
 - 4.3. Wenn $r_2 \leq p_2$: Mutation zulässiger Gene, sonst: keine Mutation.
5. Bewerte neu entstandene Individuen I_{k+1}
6. Selektiere Individuen aus alter und neuer Population zu $P(k+1)$. Solange Terminierungsbedingung nicht erfüllt:
Setze $k = k + 1$, gehe zu Schritt 2,
sonst: Stopp. Ausgabe bestes Individuum.

Tafel 4.6: Genetischer Algorithmus (GA)

5 Elementformulierung und Implementierung

Im ersten Teil dieses Kapitels wird in groben Zügen die Vorgehensweise der Finite-Element-Methode umrissen, um einen Vergleich zwischen der numerischen Umsetzung der Fließzonentheorie und der nachfolgend beschriebenen Implementierung der Fließlinientheorie zu schaffen. Dann werden die im Kapitel 4 zusammengetragenen Optimierungsansätze dahingehend spezifiziert, dass sie für die Traglastminimierung und der damit einhergehenden Verbesserung der Versagensgeometrie angewendet werden können. Ausgehend von einem finiten Dreieckselement kann auf der Basis des Simplex-Algorithmus die minimale Traglast für ein fest vorgegebenes Dreiecksnetz ermittelt werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Verbesserung der Knotenkoordinaten in der Plattenebene mit Hilfe der direkten Suche oder der konjugierten Gradientenmethode erreicht. Es steht jedoch als eigenständiger Ansatz auch noch die Suche eines Traglastminimums mit evolutionären Optimierungsalgorithmen zur Verfügung.

5.1 Grundzüge der Finite-Element-Methode

Dieser Abschnitt beschreibt als Vergleichsmodell zur Fließlinientheorie ein finites Schalenelement mit geschichtetem Aufbau, siehe GRUTTMANN & WAGNER [48, 49], WAGNER & GRUTTMANN [147] sowie WAGNER [146]. Im Rahmen der Finite-Element-Methode wird es in Kapitel 7 zur Durchführung von Referenzberechnungen auf der Grundlage der Fließzonentheorie dienen. Für eine weitergehende Vertiefung der Methode der finiten Elemente mit Blick auf Berechnungsverfahren und generelle Elementansätze sei an dieser Stelle auf die Literatur von BATHE [5], HUGHES [58], SIMO & HUGHES [132] und ZIENKIEWICZ [155] verwiesen.

5.1.1 Prinzipielles Vorgehen

Die Finite-Element-Methode basiert auf den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik, von denen einige – hier benötigte – in Abschnitt 2.1 vorgestellt wurden. Für ein finites Vierknotenelement werden mit $nel = 4$ die Koordinaten in der Form

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^{nel} N_I(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_I \\ y_I \end{bmatrix} = \mathbf{N}^e \mathbf{x}^e \quad (5.1)$$

parametrisiert. Hierbei werden die Ansatzfunktionen

$$N_I = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_I) (1 + \eta \eta_I) \quad (5.2)$$

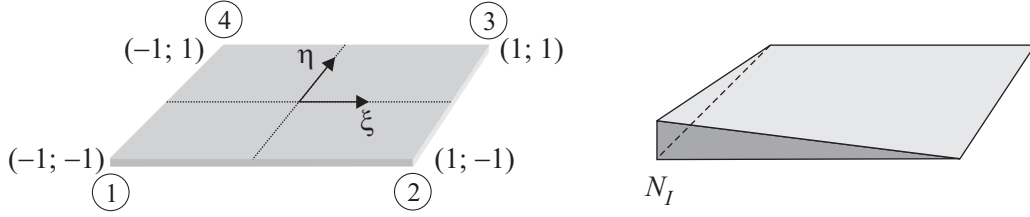


Abbildung 5.1: Finites Vierknotenelement mit Ansatzfunktion

verwendet, vergleiche Abbildung 5.1. Für ein geometrisch lineares Reissner-Mindlin-Plattenelement wählt man einen isoparametrischen Verschiebungsansatz über

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \mathbf{v}^e, \quad \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \delta \mathbf{v}^e, \quad \Delta \mathbf{u}^e = \mathbf{N}^e \Delta \mathbf{v}^e \quad (5.3)$$

und erhält nach Einsetzen in (2.5) die Krümmungen und Schubverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \mathbf{v}^e, \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \delta \mathbf{v}^e, \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{B}^e \Delta \mathbf{v}^e. \quad (5.4)$$

Die jeweils letzte Formulierung ist im Rahmen der Linearisierung bei materiell nichtlinearem Verhalten nötig.

Ausgehend von Gleichung (2.15) erfolgt nun auf Elementebene die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Die Summation über alle Knoten liefert dabei zunächst

$$\delta \Pi^e = \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^{eT} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^{eT} \mathbf{S}^e d\Omega_e - \int_{\delta \Omega_e} \mathbf{N}_I^{eT} \bar{\mathbf{t}} d\delta \Omega_e \right]. \quad (5.5)$$

Der erste Term in der Klammer wird dabei als Vektor \mathbf{R}_I^e der inneren Kräfte bezeichnet, der zweite umfasst die äußeren Kräfte \mathbf{P}_I^e . Die Differenz ist der Fehlkraftvektor \mathbf{G}_I^e in Form des Residuums aus

$$\delta \Pi^e = \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^{eT} [\mathbf{R}_I^e - \mathbf{P}_I^e] = \sum_{I=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^{eT} \mathbf{G}_I^e. \quad (5.6)$$

Im Falle eines linearelastischen Materialverhaltens ergibt sich aus (2.26) und (5.4), summiert über die Knotenverschiebungen \mathbf{v}^e , der Schnittgrößenvektor \mathbf{S}^e mit

$$\mathbf{S}^e = \sum_{K=1}^{nel} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_K^e \mathbf{v}_K^e. \quad (5.7)$$

Mit (5.5) folgt daraus

$$\delta \Pi^e = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta \mathbf{v}_I^{eT} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_K^e d\Omega_e \mathbf{v}_K^e - \mathbf{P}_I^e \right], \quad (5.8)$$

wobei die elastische Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{IK}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^{eT} \mathbf{E}^e \mathbf{B}_K^e d\Omega_e \quad (5.9)$$

für Knoten I und K eingesetzt werden kann.

Bei einem nichtlinearen Materialverhalten wird die Linearisierung

$$\Delta\delta\Pi^e = \sum_{I=1}^{nel} \sum_{K=1}^{nel} \delta\mathbf{v}_I^{eT} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^{eT} \tilde{\mathbf{E}}_T \mathbf{B}_K^e d\Omega_e \Delta\mathbf{v}_k^e \quad (5.10)$$

benötigt. In die Formulierung geht das Materialverhalten im aktuellen Verschiebungszustand als numerische Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{E}}_T$ ein, vergleiche SIMO & HUGHES [132]. Man erhält damit

$$\mathbf{K}_{T IK}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^{eT} \tilde{\mathbf{E}}_T \mathbf{B}_K^e d\Omega_e . \quad (5.11)$$

Schließlich erfolgt über die Gesamtzahl $numel$ aller Elemente der Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} beziehungsweise \mathbf{K}_T

$$\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{K}^e \quad \text{und} \quad \mathbf{K}_T = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{K}_T^e , \quad (5.12)$$

sowie analog der Gesamtvektoren \mathbf{G} , \mathbf{R} und \mathbf{P} , siehe Gleichung (5.6). Für geometrische und materielle Linearität verschwindet der Fehlkraftvektor \mathbf{G} , sodass die Verschiebungen \mathbf{v} direkt aus

$$\mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{P} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{P} \quad (5.13)$$

gewonnen werden können. Andernfalls wird die Anwendung eines nichtlinearen Iterationsverfahrens wie beispielsweise des Newton-Raphson-Verfahrens erforderlich, siehe BURDEN et al. [16], mit dessen Hilfe der nichtlineare Gleichgewichtszustand über die Iterationsgleichung

$$\mathbf{K}_T^i \Delta\mathbf{v}^i = -\mathbf{G}^i \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{i+1} = \mathbf{v}^i + \Delta\mathbf{v}^i \quad (5.14)$$

bestimmt wird.

5.1.2 Formulierung eines geschichteten Schalenelements

Zur Berechnung von Referenzlösungen auf Grundlage der Fließzonentheorie wird ein Reissner-Mindlin-Schalenelement verwendet, dessen wesentliche Eigenschaften hier in knapper Form wiedergegeben sind, vergleiche WAGNER & GRUTTMANN [147]. Abbildung 5.2 zeigt das Vierknotenelement mit der Referenzfläche Ω^h , die beispielsweise in der Mittelebene gewählt werden kann. Die Basis zur Beschreibung eines geometrisch und materiell nichtlinearen Verhaltens liefert das Hu-Washizu-Funktional, dessen erste Variation

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega} \left[\delta\boldsymbol{\varepsilon}^T (\delta_{\varepsilon}W - \boldsymbol{\sigma}) + \delta\boldsymbol{\sigma}^T (\boldsymbol{\varepsilon}_G - \boldsymbol{\varepsilon}) + \delta\varepsilon_G^T \boldsymbol{\sigma} \right] dA + \\ & - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{p}} dA - \int_{\Gamma_{\sigma}} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} ds = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

lautet, vergleiche hierzu die Abschnitte 2.1.4 sowie 5.1.1. Im weiteren Verlauf führt die zweite Variation auf die linearisierte Variationsformulierung und man erhält

$$L = \sum_{e=1}^{numel} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{v} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}_e^T \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{k}_g & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{G} & -\mathbf{F}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}^i - \mathbf{f}^a \\ \mathbf{f}^e \\ \mathbf{f}^s \end{bmatrix} \right\}_e. \quad (5.16)$$

Die lokalen Verzerrungs- und Spannungsansätze werden dabei mit Hilfe von

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{F}^T)^{-1} (\mathbf{G}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f}^s) \quad (5.17)$$

und

$$\Delta\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{H}\Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{f}^e) \quad (5.18)$$

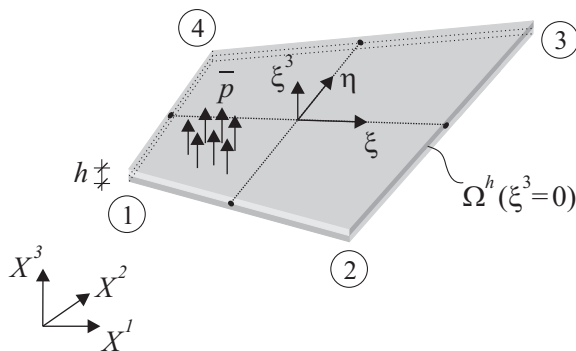


Abbildung 5.2: Vierknotiges Schalenelement mit geschichtetem Ansatz

auf Elementebene kondensiert. Mit

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_\varepsilon^T \mathbf{C} \mathbf{N}_\varepsilon dA \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{A} \bar{\mu} d\xi^3 \quad (5.19)$$

geht die numerische Tangentensteifigkeitsmatrix $\tilde{\mathbf{C}}$ zur Beschreibung eines nicht-linearen Materialverhaltens ein, welche über die Elementdicke h integriert wird. Auf diese Weise wird die materielle Nichtlinearität über alle Schichten hinweg erfasst, sodass schließlich das plastische Verhalten im Gesamtquerschnitt ermittelt werden kann, siehe Abbildung 5.3 und vergleiche Beispiel 1 in Kapitel 7.

Für eine detailliertere Ausführung der theoretischen Zusammenhänge und des genauen Vorgehens sei auf die bereits eingangs zitierte Literatur verwiesen.



Abbildung 5.3: Plastizierende Zone im Querschnitt

5.2 Traglastermittlung mit finiten Dreieckselementen

Als Grundlage zur Beschreibung von polygonalen Teilplatten dient ein starres Dreieckselement, da Polygone einerseits in Dreiecksflächen zerlegt werden können und drei Knotenpunkte andererseits stets eine Ebene definieren. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keine Ansatzfunktionen im Sinne der klassischen Finite-Element-Methode aufgestellt werden, sondern kinematische Beziehungen, die Knotenverschiebungen und Kantenverdrehungen ins Verhältnis setzen. Dieser einfache Elementansatz wurde von ANDERHEGGEN & KNÖPFEL [1] sowie MUNRO & DA FONSECA [101] vorgestellt und ist Ausgangspunkt verschiedener Weiterentwicklungen, beispielsweise von RAMSAY & JOHNSON [118] oder THAVALINGAM et al. [140].

5.2.1 Statische und kinematische Elementbeziehungen

Da als Grundvoraussetzung zur Traglastermittlung nach der Fließlinientheorie ein kinematisch zulässiger Mechanismus vorgegeben sein muss, werden auch die Elementbeziehungen in erster Linie anhand von vertikalen Knotenverschiebungen

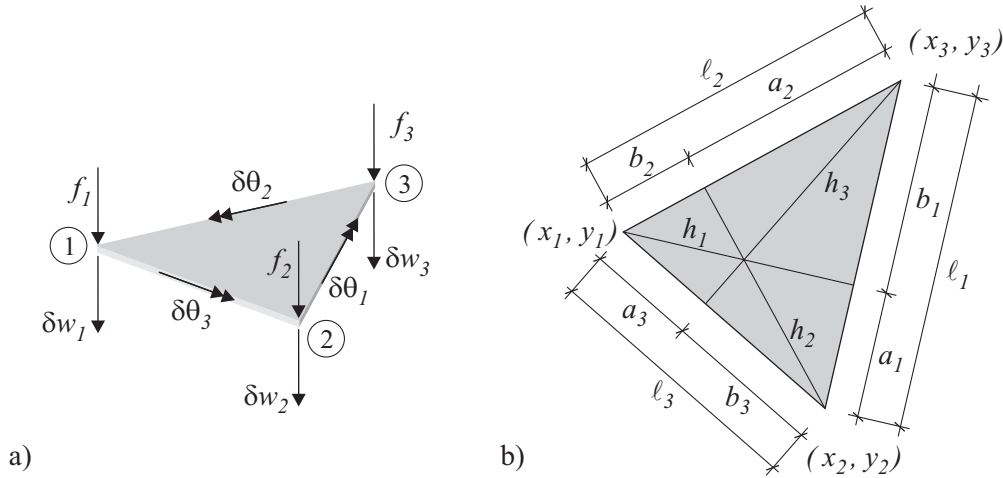


Abbildung 5.4: Finites Dreieckselement

- a) Verschiebungsbeziehungen
b) Längenverhältnisse

und Kantenverdrehungen im Dreieckselement aufgestellt. Vorausgesetzt werden hierbei virtuelle Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{w}$ senkrecht zur Plattenebene, welche wiederum virtuelle Kantenrotationen $\delta \boldsymbol{\theta}^e$ hervorrufen, mit denen sie über die lokale kinematische Transformationsmatrix \mathbf{E}^e in Relation stehen. Entsprechend Abbildung 5.4 ergeben sich im Element die Kompatibilitätsbeziehungen

$$\begin{bmatrix} \delta \theta_1^e \\ \delta \theta_2^e \\ \delta \theta_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h_1} & \frac{b_1}{\ell_1 h_1} & \frac{a_1}{\ell_1 h_1} \\ \frac{a_2}{\ell_2 h_2} & -\frac{1}{h_2} & \frac{b_2}{\ell_2 h_2} \\ \frac{b_3}{\ell_3 h_3} & \frac{a_3}{\ell_3 h_3} & -\frac{1}{h_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

und in Matrixschreibweise angegeben

$$\delta \boldsymbol{\theta}^e = \mathbf{E}^e \delta \mathbf{w}^e . \quad (5.21)$$

Hinzu kommt der Lastvektor \mathbf{f}^e , der entweder für eine gleichmäßige Flächenbelastung p mit

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \frac{p h_1 \ell_1}{6} \\ \frac{p h_2 \ell_2}{6} \\ \frac{p h_3 \ell_3}{6} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

oder in Form von Einzellasten f_i auf die Knoten des Elements wirkt. Über die transponierte kinematische Transformationsmatrix aus Gleichung (5.20) steht er

mit dem Momentenvektor \mathbf{m}^e in Verbindung, der die plastischen Grenzmomente m_{pl} der Elementkanten beinhaltet. Es gilt

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{E}^{eT} \mathbf{m}^e . \quad (5.23)$$

Dieser Zusammenhang zwischen Kräften und Momenten einerseits und Verdrehungen und Verschiebungen andererseits wird auch als statisch-kinematische Dualität bezeichnet, siehe Abbildung 5.5 und MUNRO [100] sowie MUNRO & SMITH [102].

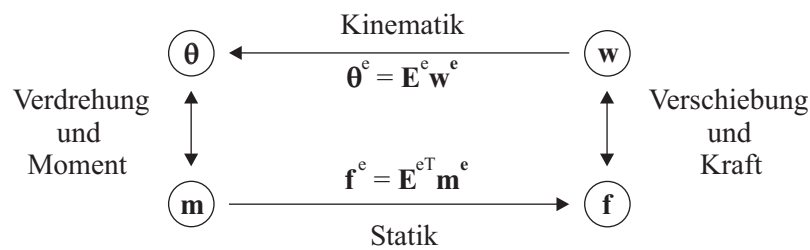


Abbildung 5.5: Statisch-kinematische Dualität

5.2.2 Formulierung der Zielfunktion

Die beschriebene Verwandtschaft zwischen statischen und kinematischen Beziehungen beruht auf vektoriellen Überlegungen und stellt in dieser Form leider noch keine direkte Verbindung zwischen Kraft- und Verschiebungsgrößen, also zwischen Statik und Kinematik des Problems her. Diese wird über das Materialverhalten des Elements und den damit verbundenen plastischen Momenten gewonnen. Da jede Elementkante einer potenziellen Fließlinie entspricht, ist die Gesamtheit aller Elementkanten im Momentenvektor \mathbf{m} erfasst mit

$$- \mathbf{m}_{pl}^- \leq \mathbf{m} \leq + \mathbf{m}_{pl}^+ . \quad (5.24)$$

Die Indizes definieren sich dabei analog zu den Bezeichnungen der positiven und negativen Fließlinien, wie sie in Abschnitt 3.1.1 eingeführt wurden, siehe Abbildung 3.1. Über die Identitätsmatrix \mathbf{I}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{m} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{pl}^+ \\ \mathbf{m}_{pl}^- \end{bmatrix} , \quad (5.25)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{N}^T \mathbf{m} \leq \mathbf{m}_{pl} , \quad (5.26)$$

ausgedrückt, entspricht dies der Formulierung der Fließbedingung, vergleiche Abschnitt 2.2.4.

Je nachdem, ob eine positive oder eine negative Fließlinie vorliegt, wird das zugehörige plastische Moment $m_{pl,i}^+$ oder $m_{pl,i}^-$ aktiviert. Ebenso wird der Vektor $\delta\boldsymbol{\theta}$ in $\delta\boldsymbol{\theta}^+$ und $\delta\boldsymbol{\theta}^-$ eingeteilt. Der Grund für dieses Vorgehen liegt in der Nichtnegativitätsbedingung des Simplexalgorithmus, die nur positive Lösungen zulässt. Um sie zu erfüllen, wird die Bedingung

$$\delta\theta_i = \delta\theta_i^+ - \delta\theta_i^- \quad \text{mit} \quad \delta\theta_i^+ \geq 0 \quad \text{und} \quad \delta\theta_i^- \geq 0 \quad (5.27)$$

definiert. Hieraus wird deutlich, dass sich ein gleichzeitiges Eintreten von $\delta\theta_i^+$ und $\delta\theta_i^-$ ausschließt. Insgesamt folgt also für die Verdrehungen der Platte

$$\delta\boldsymbol{\theta} = [\mathbf{I} \quad -\mathbf{I}] \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^+ \\ \delta\boldsymbol{\theta}^- \end{bmatrix}. \quad (5.28)$$

Da positive Fließlinien eine Dehnung der Plattenunterseite bewirken, wird im Folgenden anstelle der Bezeichnung \mathbf{m}_{pl}^+ das plastische Moment $\mathbf{m}_{pl,u}$ angesetzt; Entsprechendes gilt für die Oberseite mit \mathbf{m}_{pl}^- und $\mathbf{m}_{pl,o}$. Auf diese Weise steht als Zielfunktion die Minimierung der inneren Arbeit mit

$$[\mathbf{m}_{pl,u}^T \quad \mathbf{m}_{pl,o}^T] \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^+ \\ \delta\boldsymbol{\theta}^- \end{bmatrix} \rightarrow \min \quad (5.29)$$

zur Verfügung.

5.2.3 Zusammenbau eines Optimierungstableaus

In der Programmhierarchie erfolgt oberhalb der Elementebene der Zusammenbau einer globalen kinematischen Transformationsmatrix über alle Elemente

$$\mathbf{E} = \bigcup_{e=1}^{numel} \mathbf{E}^e. \quad (5.30)$$

Sie kann als Analogon zur Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} der klassischen Finite-Element-Methode angesehen werden, die in Abschnitt 5.1.1 eingeführt wurde. Im Gegensatz zu \mathbf{K} ist \mathbf{E} jedoch weder symmetrisch noch notwendigerweise quadratisch. Nach der Kondensation der gelagerten Vertikalverschiebungen werden über die kinematische Transformationsmatrix sämtliche Kantenverdrehungen $\delta\boldsymbol{\theta}$ der Bruchflächen mit den Durchsenkungen $\delta\mathbf{w}$ ins Verhältnis gesetzt. Letztere werden für die Gesamtplatte zusammengeführt mit

$$\delta\mathbf{w} = \bigcup_{e=1}^{numel} \delta\mathbf{w}^e. \quad (5.31)$$

Auch auf globaler Ebene gilt nun

$$\delta\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E}\delta\boldsymbol{w} , \quad (5.32)$$

siehe Gleichung (5.21).

Auf gleiche Weise entsteht aus den lokalen Lastvektoren \mathbf{f}^e ein Gesamtlastvektor \mathbf{f} . Gemeinsam mit den Knotenverschiebungen $\delta\boldsymbol{w}$ definieren sie die äußere Arbeit, die an der Platte verrichtet wird und die als erste Nebenbedingung in skaliert Form mit

$$\mathbf{f}^T \delta\boldsymbol{w} = 1 \quad (5.33)$$

angegeben wird. Die Gleichung (5.32) liefert umgeschrieben ebenfalls eine Reihe von Nebenbedingungen, nämlich

$$\delta\boldsymbol{\theta} - \mathbf{E}\delta\boldsymbol{w} = \mathbf{0} . \quad (5.34)$$

Da für die Optimierungsvariablen aufgrund der Nichtnegativitätsbedingung nur positive Werte ermittelt werden können, wird $\delta\boldsymbol{w}$ analog zu $\delta\boldsymbol{\theta}$ in $\delta\boldsymbol{w}^+$ und $\delta\boldsymbol{w}^-$ aufgespalten. Durch die Erweiterung

$$\delta\boldsymbol{\theta}^+ - \mathbf{E}\delta\boldsymbol{w}^+ = \mathbf{0} \quad (5.35a)$$

$$- \delta\boldsymbol{\theta}^- + \mathbf{E}\delta\boldsymbol{w}^- = \mathbf{0} \quad (5.35b)$$

ist es möglich, sowohl negative als auch positive Werte zu ermitteln, wobei ein gleichzeitiges Auftreten ausgeschlossen ist.

Die Nebenbedingungen bilden die Assemblierungsmatrix \mathbf{A} , aus der das Optimierungstableau für den Simplex-Algorithmus hervorgeht:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & -\mathbf{f}^T \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} . \quad (5.36)$$

Die erste Zeile ist die erste Nebenbedingung (5.33); alle weiteren werden über \mathbf{E} eingebracht und entsprechen der Anzahl n der Elementkanten. Der Lösungsvektor \boldsymbol{x} beinhaltet zusätzlich noch m Vertikalverschiebungen, die sich aus der Anzahl der Elementknoten abzüglich der Zahl der vertikal gelagerten Knoten bestimmt. Da sämtliche Einträge aufgesplittet werden, hat die Matrix \mathbf{A} die Form $(1 + n) \times (2n + 2m)$. Aufgrund der geometrischen Zusammenhänge zwischen Kanten und Verzweigungspunkten lässt sich feststellen, dass die Menge der Rotationen die der Verschiebungen zahlenmäßig immer übersteigen wird, sodass gilt $n > m$.

Zusammen mit der Zielfunktion aus Gleichung (5.29) ergibt sich schließlich die Optimierungsvorschrift

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{pl,u}^T & \mathbf{m}_{pl,o}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^+ \\ \delta\boldsymbol{\theta}^- \\ \delta\boldsymbol{w}^+ \\ \delta\boldsymbol{w}^- \end{bmatrix} \rightarrow \min \quad (5.37a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{f}^T & -\mathbf{f}^T \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} & -\mathbf{E} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^+ \\ \delta\boldsymbol{\theta}^- \\ \delta\boldsymbol{w}^+ \\ \delta\boldsymbol{w}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.37b)$$

$$\text{mit} \quad \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\theta}^+ \\ \delta\boldsymbol{\theta}^- \\ \delta\boldsymbol{w}^+ \\ \delta\boldsymbol{w}^- \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (5.37c)$$

und kompakter ausgedrückt

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min \quad (5.38a)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (5.38b)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} . \quad (5.38c)$$

5.2.4 Bestimmung des Lösungsvektors

Da die Assemblierungsmatrix \mathbf{A} stets mehr Spalten als Zeilen aufweist, wird sie zur Anwendung des Simplex-Algorithmus in die Matrizen \mathbf{A}_B und \mathbf{A}_N eingeteilt, vergleiche Abschnitt 4.2.5. Dabei ist \mathbf{A}_B quadratisch und besitzt vollen Rang. Entsprechend der Zeilenanzahl können für das Problem $1+n$ Unbekannte ermittelt werden. Davon sind m Vertikalverschiebungen der Verzweigungspunkte abzuziehen, sodass maximal $1+n-m$ Rotationen einen Wert ungleich Null annehmen können. Umgekehrt formuliert gibt es zumindest $m-1$ Elementkanten, deren beiden Nachbarelemente keine Relativverdrehung besitzen. Somit verbleiben nur die tatsächlich eintretenden Fließlinien und es entsteht eine Versagensfigur, wie sie aus Abschnitt 3.1.2 bekannt ist.

Gleichzeitig liefert die Zielfunktion – die im Weiteren aus Gründen der Übersichtbarkeit mit Z gekennzeichnet werden soll – den minimalen Wert der Traglast, sodass ihre bisherige Formulierung nach Gleichung (5.38a) umgeschrieben wird zu

$$Z(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} . \quad (5.39)$$

Der Vektor χ beinhaltet die Koordinaten x_i und y_i der einzelnen Verzweigungspunkte. Er wird durch die Kantenlängen ℓ_i der Dreieckselemente beeinflusst, siehe Abbildung 5.4b, und verdeutlicht damit die Abhängigkeit der erzielten Traglast von den geometrischen Gegebenheiten der zugehörigen Fließlinienfigur.

5.3 Direkte Suchstrategie zur Geometrieverbesserung

Bisher wurde durch die Simplex-Optimierung nur die niedrigste Traglast für eine fest vorgegebene Netzdiskretisierung bestimmt. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass sich dieses Ergebnis durch Variieren der Netzkoordinaten (r-Adaption) weiter reduzieren lässt. Deshalb kommt in dieser Arbeit zunächst eine direkte Suchstrategie zur Anwendung, die auf einem Verfahren nach RAMSAY & JOHNSON [117] beruht. Das zugrunde liegende Prinzip basiert auf dem Algorithmus aus Tafel 4.3.

Beim Zusammenbau des Optimierungstableaus in Abschnitt 5.2.3 wurden geometrische Randbedingungen für die Vertikalverschiebungen δw eingeführt. Genauso werden nun für die Suchfreiheitsgrade χ Randbedingungen in der Plattenebene gesetzt, sodass die Eckknoten sowie Verzweigungspunkte, die auf einer vertikalen Punktstützung liegen, nicht bewegt werden können. Übrig bleiben diejenigen Punktkoordinaten, die als Variablen für eine Verbesserung des Fließliniennetzes zur Verfügung stehen. Gegebenenfalls erfolgt an dieser Stelle eine Koordinaten-

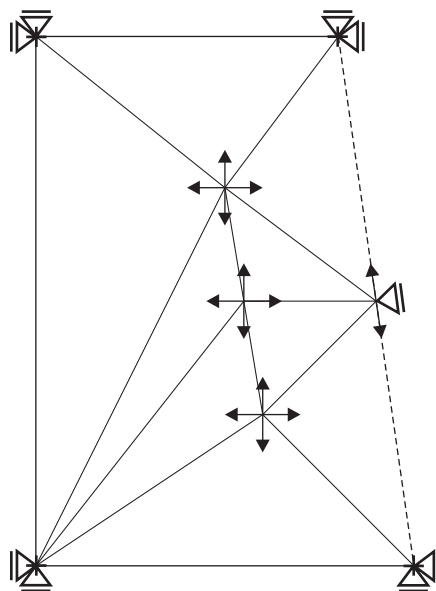


Abbildung 5.6: Suchfreiheitsgrade von Verzweigungspunkten in Plattenebene

transformation, die beispielsweise die Bewegungsrichtung eines Punktes auf einem schräg zu den Koordinatenrichtungen verlaufenden freien Rand berücksichtigt, wie es in Abbildung 5.6 gezeigt ist.

Entlang der so entstandenen Geraden werden für jeden Freiheitsgrad Tastschritte in Vorwärts- und Rückwärtsrichtung unternommen. Um dabei allerdings eine unbeabsichtigte Präferenz einzelner Parameter χ_i auszuschließen, werden die Schritte vor der Wahl eines neuen Netzes sowohl einzeln als auch in ihrer gegenseitigen Wechselwirkung überprüft. Dadurch entsteht eine sukzessiv verbesserte Fließlinienfigur, welche die bisher erreichte Traglast weiter senkt.

Da die Suchschrittweite vor dem eigentlichen Optimierungsprozess definiert werden muss, wird sie – sofern vom Benutzer nicht anders vorgegeben – als Faktor auf der Basis der kleinsten Plattenspannweite bestimmt. Die Berechnung der Traglast, die für jeden Tastschritt gesondert ermittelt wird, erfolgt in gleicher Weise wie es in Abschnitt 5.2 beschrieben wurde. Der Vorgang endet, wenn die Veränderung des Netzes keine weitere Reduzierung der Traglast mehr erzielt. Gegebenenfalls kann die Suche jedoch mit einer modifizierten Schrittweite erneut gestartet werden, vergleiche Abschnitt 4.3.2.

5.4 Anwendung des Gradientenverfahrens

Eine andere Möglichkeit zur Optimierung der Netzgeometrie besteht darin, die jeweilige Bewegung der Verzweigungspunktkoordinaten unter Anwendung eines Gradientenansatzes zu bestimmen. Dieses Konzept wurde im Zuge der vorliegenden Arbeit nach JENNINGS et al. [63], MCKEOWN et al. [92] und THAVALINGAM [139] mit Hilfe der konjugierten Gradientenmethode realisiert.

5.4.1 Ableitungsformulierungen

Ausgangspunkt der Verbesserung ist der Algorithmus nach FLETCHER & REEVES [36], der in Tafel 4.5 aufgeführt ist. Um hierfür den Gradienten \mathbf{g} der Suchrichtung zu berechnen, werden auf Elementebene die Geometrieparameter ℓ , a , b und h aus Abbildung 5.4b nach den Koordinaten $\boldsymbol{\chi}$ der Verzweigungspunkte abgeleitet. Gleiches gilt für die Komponenten des Lastvektors \mathbf{f}^e . Nachfolgend sind die Längen bezüglich der Bezeichnungen in der Abbildung angegeben; die Indizes

i, j und k sind Permutationen der Knotennummern 1, 2 und 3:

$$\ell_i = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}, \quad (5.40)$$

$$a_i = \frac{\ell_i^2 + \ell_j^2 + \ell_k^2}{2\ell_i^2}, \quad (5.41)$$

$$b_i = \ell_i - a_i, \quad (5.42)$$

$$h_i = \frac{(y_i - y_j)x_k + (y_j - y_k)x_i + (y_k - y_i)x_j}{\ell_i}. \quad (5.43)$$

Die Ableitungsmatrizen werden für jeden Parameter in Form einer Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_{\ell,x} := \frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}_x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \ell_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \ell_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \ell_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \ell_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \ell_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \ell_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \ell_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \ell_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (5.44a)$$

beziehungsweise

$$\mathbf{J}_{\ell,y} := \frac{\partial \ell}{\partial \mathbf{x}_y} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ell_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \ell_1}{\partial y_2} & \frac{\partial \ell_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \ell_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \ell_2}{\partial y_2} & \frac{\partial \ell_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial \ell_3}{\partial y_1} & \frac{\partial \ell_3}{\partial y_2} & \frac{\partial \ell_3}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad (5.44b)$$

aufgestellt. Analog entstehen die Jacobi-Matrizen \mathbf{J}_a , \mathbf{J}_b und \mathbf{J}_h , jeweils für beide Koordinatenrichtungen. Die einzelnen Komponenten – wiederum mit permutierenden Indizes – sind für die x -Richtung:

- Ableitungen $\frac{\partial \ell}{\partial x}$:

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial x_i} = 0 \quad (5.45a)$$

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial x_j} = \frac{x_j - x_k}{\ell_i} \quad (5.45b)$$

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial x_k} = \frac{x_k - x_j}{\ell_i} \quad (5.45c)$$

- Ableitungen $\frac{\partial a}{\partial x}$:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_k}{\ell_i} \quad (5.46a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = & -\frac{x_k - 2x_j + x_i}{\ell_i} + \\ & + \frac{(x_j - x_k)(-x_j^2 - y_j^2 - x_i x_k + x_j x_i + x_k x_j - y_i y_k + y_j y_i + y_k y_j)}{\ell_i^3} \end{aligned} \quad (5.46b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} = & -\frac{x_j - x_i}{\ell_i} + \\ & + \frac{(x_k - x_j)(-x_j^2 - y_j^2 - x_i x_k + x_j x_i + x_k x_j - y_i y_k + y_j y_i + y_k y_j)}{\ell_i^3} \end{aligned} \quad (5.46c)$$

- Ableitungen $\frac{\partial b}{\partial x}$:

$$\frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_k}{\ell_i} \quad (5.47a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_i}{\partial x_j} = & \frac{x_i - x_k}{\ell_i} + \\ & - \frac{(x_j - x_k)(x_k^2 + y_k^2 - x_i x_k + x_j x_i - x_k x_j - y_i y_k + y_j y_i - y_k y_j)}{\ell_i^3} \end{aligned} \quad (5.47b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_i}{\partial x_k} = & \frac{-x_i + 2x_k - x_j}{\ell_i} + \\ & - \frac{(x_k - x_j)(x_k^2 + y_k^2 - x_i x_k + x_j x_i - x_k x_j - y_i y_k + y_j y_i - y_k y_j)}{\ell_i^3} \end{aligned} \quad (5.47c)$$

- Ableitungen $\frac{\partial h}{\partial x}$:

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \frac{y_j - y_k}{\ell_i} \quad (5.48a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = & \frac{y_k - y_i}{\ell_i} + \\ & + \frac{(x_j - x_k)(x_i y_k - x_i y_j + x_j y_i - x_j y_k + x_k y_j - x_k y_i)}{\ell_i^3} \end{aligned} \quad (5.48b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial x_k} = & \frac{y_i - y_j}{\ell_i} + \\ & + \frac{(x_k - x_j)(x_i y_k - x_i y_j + x_j y_i - x_j y_k + x_k y_j - x_k y_i)}{\ell_i^3} \end{aligned} \quad (5.48c)$$

Die Ableitung nach der Koordinatenrichtung y erfolgt sinngemäß; lediglich die Komponenten des Höhenparameters h sind gegenüber der oben gezeigten Darstellung der x -Richtung negativ anzusetzen:

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_j} = -\frac{\partial h_i}{\partial x_j}. \quad (5.49)$$

Zur Ermittlung der Suchrichtung wird die Ableitung der lokalen Transformationsmatrix \mathbf{E}^e sowie die des Lastvektors \mathbf{f}^e benötigt. Grundsätzlich existieren am Dreieckselement zwei Suchrichtungen für jeden der drei Knotenpunkte. Aus den Ableitungen der Längenparameter setzt sich für die Koordinate x_i die Ableitungsmatrix

$$\frac{\partial \mathbf{E}^e}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial h_1}{\partial x_i} & \frac{\frac{\partial a_2}{\partial x_i} \ell_2 h_2 - a_2 \frac{\partial \ell_2}{\partial x_i} h_2 - a_2 \ell_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_i}}{\ell_2^2 h_2^2} & \frac{\frac{\partial b_3}{\partial x_i} \ell_3 h_3 - b_3 \frac{\partial \ell_3}{\partial x_i} h_3 - b_3 \ell_3 \frac{\partial h_3}{\partial x_i}}{\ell_3^2 h_3^2} \\ \frac{\frac{\partial b_1}{\partial x_i} \ell_1 h_1 - b_1 \frac{\partial \ell_1}{\partial x_i} h_1 - b_1 \ell_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_i}}{\ell_1^2 h_1^2} & \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial x_i} & \frac{\frac{\partial a_3}{\partial x_i} \ell_3 h_3 - a_3 \frac{\partial \ell_3}{\partial x_i} h_3 - a_3 \ell_3 \frac{\partial h_3}{\partial x_i}}{\ell_3^2 h_3^2} \\ \frac{\frac{\partial a_1}{\partial x_i} \ell_1 h_1 - a_1 \frac{\partial \ell_1}{\partial x_i} h_1 - a_1 \ell_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_i}}{\ell_1^2 h_1^2} & \frac{\frac{\partial b_2}{\partial x_i} \ell_2 h_2 - b_2 \frac{\partial \ell_2}{\partial x_i} h_2 - b_2 \ell_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_i}}{\ell_2^2 h_2^2} & \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial h_3}{\partial x_i} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

zusammen. Genauso folgt für den Lastvektor

$$\frac{\partial \mathbf{f}^e}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} p (y_2 - y_3) \\ \frac{1}{6} p (y_3 - y_1) \\ \frac{1}{6} p (y_1 - y_2) \end{bmatrix} \quad (5.51a)$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial \mathbf{f}^e}{\partial y_i} = - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} p (x_2 - x_3) \\ \frac{1}{6} p (x_3 - x_1) \\ \frac{1}{6} p (x_1 - x_2) \end{bmatrix}. \quad (5.51b)$$

Für die Zielfunktion wird darüber hinaus die Ableitung des Momentenvektors \mathbf{m} benötigt. Da die plastischen Momente in Verbindung mit den Fließlinienlängen stehen, definieren sich die Komponenten von $\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i}$ zu

$$\frac{\partial m_j}{\partial x_i} = m_{pl,j} \frac{\partial \ell_j}{\partial x_i}. \quad (5.52)$$

Der Index j unterscheidet dabei verschieden ausgerichtete plastische Momente.

5.4.2 Statische Kondensation und Gradientenermittlung

In Abschnitt 5.3 wurde gezeigt, wie durch die Einführung von geometrischen Randbedingungen die Suchfreiheitsgrade $\boldsymbol{\chi}$ definiert werden, siehe Abbildung 5.6. Nach ihrer Anzahl richtet sich nun auch die Dimension des Gradientenvektors

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}) \equiv \frac{\partial Z(\boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\chi}}. \quad (5.53)$$

Aus der Einteilung in Basisvariablen und Nichtbasisvariablen folgt für die Optimierungsvorschrift der Gleichungen (5.38)

$$Z(\boldsymbol{\chi}) = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \quad (5.54a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (5.54b)$$

$$\text{mit } \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0} \text{ und } \mathbf{x}_N = \mathbf{0}. \quad (5.54c)$$

Bei der Differenziation nach $\boldsymbol{\chi}$ wird der Vektor \mathbf{b} zu Null, da er nur Konstanten enthält. Auch die mit \mathbf{x}_N behafteten Terme entfallen, da die Nichtbasisvariablen ebenfalls Null sind. Für die Ausdrücke von Zielfunktion und Nebenbedingungen folgt nach der Ableitung

$$\frac{\partial Z(\boldsymbol{\chi})}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial \mathbf{c}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_B \frac{\partial \mathbf{x}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} \quad (5.55a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_B \frac{\partial \mathbf{x}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} = \mathbf{0}. \quad (5.55b)$$

Umgeformt ergibt sich für Gleichung (5.55b)

$$\frac{\partial \mathbf{x}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} = -\mathbf{A}_B^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} \mathbf{x}_B \quad (5.56)$$

und zusammengefasst mit Gleichung (5.55a) erhält man schließlich den Gradienten

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}) = \left(\frac{\partial \mathbf{c}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} - \mathbf{c}_B \mathbf{A}_B^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}_B}{\partial \boldsymbol{\chi}} \right) \mathbf{x}_B. \quad (5.57)$$

5.4.3 Problematik der Diskontinuität

Wie bereits in Abschnitt 4.1.3 deutlich wurde, können in dem Suchraum, der von den Koordinaten $\boldsymbol{\chi}$ aufgespannt wird, Diskontinuitäten auftreten, die eine Optimierung mit klassischen Gradientenmethoden erschweren. Sofern über diese Unstetigkeiten keine weiteren Informationen vorliegen, eignen sich nur aufwendige

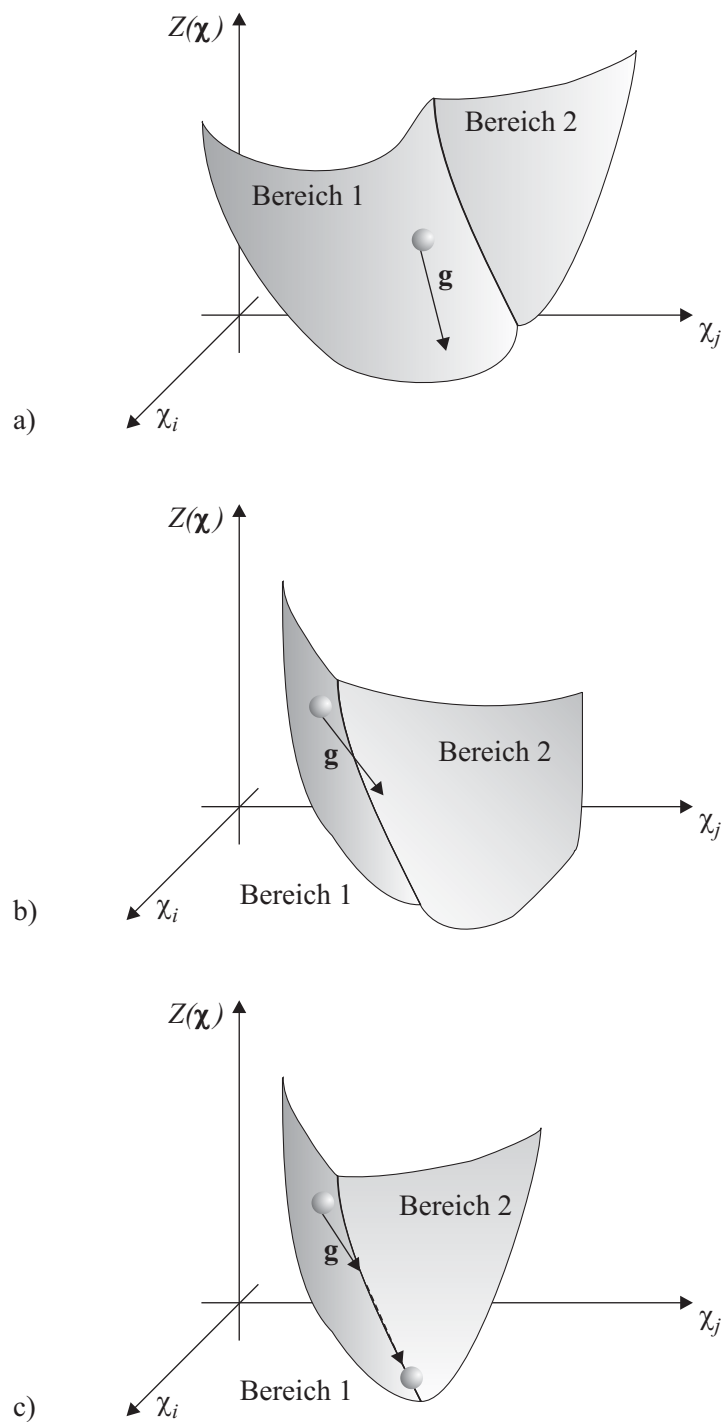


Abbildung 5.7: Lage des Suchpunktes in der Optimierungsfunktion

- a) Bewegung im gleichen Bereich
- b) Wechsel des Bereiches
- c) Bewegung entlang der Bereichsgrenze

allgemeine Verfahren, vergleiche SHOR [130] und URYAS'EV [143]. Existiert jedoch ein bereichsweise stetiger Verlauf, wie ihn die Zielfunktion aufweist, solange sie sich innerhalb gleicher Basisvektoren \mathbf{a} bewegt, so ermöglicht dies den Einsatz gesonderter Methoden.

THAVALINGAM et al. [140] schlagen für diesen Fall eine Modifikation des Algorithmus von Tafel 4.5 im Abschnitt 4.4.2 vor. Wie aus Abbildung 5.7 ersichtlich ist, gibt es drei Möglichkeiten, wie der Suchpunkt im Verlauf der Optimierungsfunktion positioniert sein kann. Ausgehend vom Bereich 1 kann das Minimum entweder hier (a) oder im benachbarten Bereich 2 gefunden werden (b). Als Drittes besteht schließlich noch die Möglichkeit, dass sich der Suchpunkt entlang der Bereichsgrenze zum Minimum hin bewegt (c). Ist Letzteres der Fall, so gehört der Punkt beiden Bereichen an. Dies bedeutet für die Optimierung, dass zumindest ein Basisvektor \mathbf{a}_B der Assemblierungsmatrix \mathbf{A} zu Null geworden ist. Durch den Austausch gegen einen Nichtbasisvektor \mathbf{a}_N wird der angrenzende Bereich betreten und für den Fall, dass der bisherige Nichtbasisvektor zu einem Basisvektor wird und Werte ungleich Null annimmt, dringt der Suchpunkt ins Innere des neuen Bereiches vor.

Da die Basisvariablen und Nichtbasisvariablen in gleicher Weise zusammenhängen, kann dieser Vorgang geometrisch interpretiert werden, indem eine Fließlinienrotation zu Null wird, während eine andere in Erscheinung tritt, vergleiche Beispiel 10 aus Kapitel 7. Somit entspricht ein Basiswechsel zugleich einer Änderung der Fließlinienfigur. Durch diesen kontinuierlichen Übergang kann ein sprunghaftes Verhalten der zugehörigen Traglastwerte und damit der Zielfunktion ausgeschlossen werden. Es sind also lediglich Unstetigkeiten in Form von Knicken zu erwarten. Dennoch hat dies nach Gleichung (5.57) Auswirkungen auf den Gradienten. Deshalb müssen bei einem Basiswechsel im Optimierungsvorgang die Gradienten der angrenzenden Bereiche untersucht werden. Ist dort kein Gefälle zu erkennen, wird die Suche entlang dem absteigenden Diskontinuitätsverlauf verfolgt.

5.4.4 Modifizierter Optimierungsalgorithmus

Innerhalb eines Bereiches mit gleicher Basis ist die konjugierte Gradientenmethode problemlos anwendbar. Kommt der Lösungsvektor $\boldsymbol{\chi}_k$ im Iterationsschritt k auf einer Bereichsgrenze zu liegen, so ist zunächst zu kontrollieren, ob die Richtung des steilsten Abstiegs diese Grenze überschreitet. Ist dies nicht der Fall, dann wird dieser Gradient als neue Suchrichtung übernommen; ansonsten ist die Zulässigkeit der Abstiegsrichtung der Nachbarregion zu überprüfen und gegebenenfalls hinüberzuwechseln. Wenn auch dies nicht möglich ist, erfolgt eine Suche

entlang der abfallenden Grenzlinie, bis deren Gradient Null ist, vergleiche Abbildung 5.7.

Um diese Strategie anwenden zu können, ist es notwendig, von den Informationen Gebrauch zu machen, die während des Optimierungsprozesses gesammelt wurden. Der Wechsel von Basisvektoren – und somit die nahe gelegene Diskontinuität – kündigt sich dadurch an, dass eine oder mehrere Basisvariablen \mathbf{x}_B Werte nahe Null annehmen. Das Erreichen einer solchen Nullstelle hängt vom Verhalten der Verzweigungspunktkoordinaten $\boldsymbol{\chi}$ ab. Sei n_D die Anzahl der degenerierenden Basisvariablen und n_χ die Zahl der Freiheitsgrade $\boldsymbol{\chi}$, so lässt sich eine Degenerierungsmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{B,1}}{\partial \chi_1} & \dots & \frac{\partial x_{B,n_D}}{\partial \chi_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_{B,1}}{\partial \chi_{n_\chi}} & \dots & \frac{\partial x_{B,n_D}}{\partial \chi_{n_\chi}} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

definieren, die den Einfluss der Topologieänderungen charakterisiert (MCKEOWN et al. [92]). Eine geringfügige Veränderung $\Delta \boldsymbol{\chi}$ der Verzweigungspunktkoordinaten zieht demnach eine entsprechende Veränderung $\Delta \mathbf{x}$ der Lösungsvariablen, bestehend aus den Verdrehungen und Durchsenkungen, nach sich. Es ist

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\chi} . \quad (5.59)$$

Da die Kontinuitätsbedingung $\Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ gewahrt bleiben muss, ist

$$\mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\chi} = \mathbf{0} . \quad (5.60)$$

Die Koordinatenänderung $\Delta \boldsymbol{\chi}$ wird durch den skalierten Gradienten \mathbf{p}_k beschrieben, der im Verlaufe der konjugierten Gradientenmethode ermittelt wird. Dies führt auf

$$\mathbf{D} \mathbf{p}_k = \mathbf{0} . \quad (5.61)$$

Unter der Voraussetzung, dass die Zeilen von \mathbf{D} linear unabhängig sind, erfolgt eine Einteilung in einen quadratischen, nichtsingulären Teil \mathbf{D}_1 und den verbleibenden Anteil \mathbf{D}_2 . Der Vektor \mathbf{p}_k wird ebenfalls in $\mathbf{p}_{1,k}$ und $\mathbf{p}_{2,k}$ gegliedert, sodass aus Gleichung (5.61)

$$\mathbf{D}_1 \mathbf{p}_{1,k} + \mathbf{D}_2 \mathbf{p}_{2,k} = \mathbf{0} \quad (5.62)$$

und damit

$$\mathbf{p}_{1,k} = -\mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{p}_{2,k} \quad (5.63)$$

hervorgeht.

In gleicher Weise werden die Freiheitsgrade χ_k in $\chi_{1,k}$ und $\chi_{2,k}$ unterteilt und Gleichung (4.36) erweitert sich für das vorliegende Problem zu

$$\chi_{1,k+1} = \chi_{1,k} - \alpha_k \mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \mathbf{p}_{2,k} \quad (5.64a)$$

$$\chi_{2,k+1} = \chi_{2,k} + \alpha_k \mathbf{p}_{2,k} . \quad (5.64b)$$

Die Einführung einer Projektionsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_1^{-1} \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

liefert den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} \chi_{1,k+1} \\ \chi_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{1,k} \\ \chi_{2,k} \end{bmatrix} + \alpha_k \mathbf{T} \mathbf{p}_{2,k} . \quad (5.66)$$

Der Vergleich mit der allgemeinen Form von Gleichung (4.38) ergibt

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{T} \mathbf{p}_{2,k} , \quad (5.67)$$

und über

$$\mathbf{p}_k = -\mathbf{T} \mathbf{T}^T \mathbf{g}_k \quad (5.68)$$

lässt sich ein Zusammenhang zum Gradienten \mathbf{g}_k herstellen, siehe Abschnitt 4.4.3. Mit der Berücksichtigung der drei Fallunterscheidungen im Grenzbereich erhält man schließlich den modifizierten Suchalgorithmus, wie er in Tafel 5.1 zusammengefasst ist. Sollte sich im Laufe der Optimierung eine entartete Netzgeometrie einstellen, so ist der Vorgang zu unterbrechen und gegebenenfalls eine veränderte Netzstruktur zu wählen. Eine solche Entartung von Dreieckselementen ist leicht festzustellen, indem aufgrund des sich umkehrenden Umlaufsinn der Knoten eine Elementfläche kleiner oder gleich Null errechnet wird.

1. Iterationsschritt $k = 0$:
 - 1.1. Definiere die Startkoordinaten $\boldsymbol{\chi}_0$, sowie die Toleranzen ε_1 und ε_2 .
 - 1.2. Bestimme den Ausgangsgradienten \mathbf{g}_0 .
 - 1.3. Wenn $\|\mathbf{g}_0\| < \varepsilon_1$: Stopp,
sonst: setze als Suchrichtung $\mathbf{p}_0 := -\mathbf{g}_0$.
2. Für jeden Iterationsschritt $k = k + 1$:
 - 2.1. Ermittle den skalaren Verbesserungsbeiwert α_k ,
 - 2.2. berechne $\boldsymbol{\chi}_{k+1} = \boldsymbol{\chi}_k + \alpha_k \mathbf{p}_k$.
 - 2.3. Wenn $\|\boldsymbol{\chi}_{k+1} - \boldsymbol{\chi}_k\| < \varepsilon_2$: Stopp.
 - 2.4. Ermittle Gradient \mathbf{g}_{k+1} nach Gleichung (5.57).
 - 2.5. Wenn $\|\mathbf{g}_{k+1}\| < \varepsilon_1$: Stopp.
 - 2.6.1. Wenn $\boldsymbol{\chi}_{k+1}$ nicht degeneriert:
 - 2.6.1.1. Wenn $\boldsymbol{\chi}_{k+1}$ und $\boldsymbol{\chi}_k$ mit gleicher Basis (Abbildung 5.7a):
Ermittle nach der konjugierten Gradientenmethode
 $\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1} + \beta_{k+1} \mathbf{p}_k$,
sonst (Abbildung 5.7b): setze $\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1}$.
 - 2.6.1.2. Gehe zu Schritt 2.
 - 2.6.2. Wenn $\boldsymbol{\chi}_{k+1}$ degeneriert (Abbildung 5.7c):
 - 2.6.2.1. Berechne \mathbf{D} und \mathbf{g}_{k+1}
 - 2.6.2.2. Wenn $\|\mathbf{D}\mathbf{g}_{k+1}\| < 0$:
setze $\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}_{k+1}$,
sonst: berechne \mathbf{g}'_{k+1} aller Nachbarbereiche durch Basiswechsel.
 - 2.6.2.3. Wenn für alle Basen $\|\mathbf{D}\mathbf{g}'_{k+1}\| < 0$:
setze $\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{g}'_{k+1}$,
sonst: berechne Projektionsmatrix \mathbf{T} ,
setze $\mathbf{p}_{k+1} = -\mathbf{T}\mathbf{T}^T \mathbf{g}_{k+1}$.
 - 2.6.2.4. Gehe zu Schritt 2.

Tafel 5.1: Modifizierter Suchalgorithmus nach THAVALINGAM et al. [140]

Zuletzt bleibt noch die Frage der Skalierungsfaktoren α_k und β_k . Letzterer wurde bereits in Abschnitt 4.4.2 mit

$$\beta_k = \frac{\mathbf{g}_{k+1}^T \mathbf{g}_{k+1}}{\mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k}$$

eingeführt. Einen viel signifikanteren Einfluss auf den Optimierungsvorgang hat jedoch der Parameter α_k . Seine Aufgabe ist es, in Suchrichtung die Schrittweite so zu justieren, dass der Wert der Traglast ein Minimum im Verlauf der Zielfunktion trifft. Da diese Aufgabenstellung einer eindimensionalen Suche entspricht, kann zur Bestimmung von α_k der Algorithmus nach Tafel 4.2 angewendet werden.

5.5 Ansatz einer evolutionären Strategie

Eine Alternative zur schrittweisen Verbesserung einer vorgegebenen Netzgeometrie bieten Verfahren auf der Basis eines unveränderlichen Netzes. Sie kommen ohne die Ableitung der Geometrieparameter aus, benötigen aber im Gegenzug eine feinere Diskretisierung, um den endgültigen Versagensmechanismus möglichst realitätsnah finden zu können. Häufig dienen sie daher nur als Ausgangspunkt zur Bestimmung einer Fließliniengeometrie, die dann einer weiteren Topologieoptimierung zugeführt wird, vergleiche JOHNSON [68] und RAMSAY & JOHNSON [118]. An dieser Stelle soll jedoch auf der Grundlage eines starren Netzes der Ansatz einer evolutionären Strategie vorgestellt werden, welche unter Verwendung des in Abschnitt 5.2.1 eingeführten Dreieckselements einen Vergleich der Ergebnisse insbesondere für die endgültige Versagensgeometrie des Fließliniennetzes zulässt.

Zu diesem Zweck wird der genetische Algorithmus aus Tafel 4.6 angewendet. Die Startpopulation des Evolutionsvorgangs entspricht der Elementknotenzahl des Problems. Dabei repräsentiert jedes Individuum eine Fließlinienfigur und besitzt eine eigene Ausprägung der Gene, die im Einzelnen den Knotenkoordinaten entsprechen. Ein einzelnes Gen enthält die Information über die Koordinaten x und y eines Knotenpunktes sowie über dessen Auslenkung w senkrecht zur Plattenebene. Da die Nummerierungen der Gene den Knotennummern entsprechen, sind die darin enthaltenen Informationen zum Phänotyp der einzelnen Individuen kompatibel. Auf diese Weise ist eine Rekombination der Gene einzeln oder sequenziell möglich, wobei der Crossover-Punkt zufällig gewählt wird. Zusätzlich ist eine Mutation eines Genes möglich, indem der Wert der Durchsenkung w variiert wird. Auch hier fällt eine Entscheidung über das Zufallsprinzip.

Jedem Individuum wird bei der Beurteilung eine Güte zugemessen, die hauptsächlich von der zum Phänotyp gehörigen Traglast bestimmt wird. Es er-

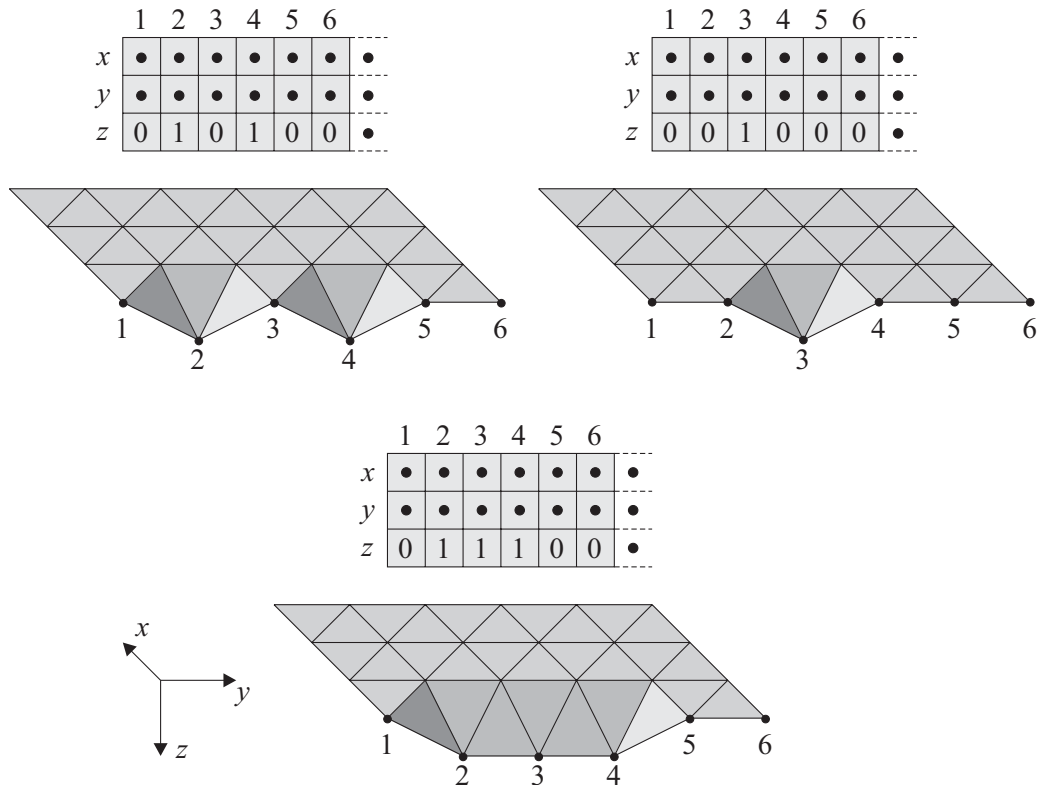


Abbildung 5.8: Rekombination zweier Individuen in Genotyp und Phänotyp

weist sich jedoch als hilfreich, noch weitere Charakteristika mit zu berücksichtigen, wie beispielsweise die Gesamtlänge und die Rotationswinkel θ_i der sich einstellenden Fließlinien. Dadurch entsteht der Anreiz, nicht nur vorrangig die geringste Traglast anzustreben, sondern auch eine möglichst realitätsnahe Versagensfigur zu erreichen, indem das Schließen von Fließlinien und die Bildung starrer Teilplatten unterstützt wird. Dieses Prinzip gleicht dem Kombinieren von Elementarketten der Fließgelenktheorie nach NEAL & SYMONDS [103]. Abbildung 5.8 veranschaulicht diesen Vorgang.

Gemäß dem erzielten Gütefaktor werden schließlich aus der momentanen Generation die Eltern für die nachfolgende selektiert. Die Wahl der Gewichtungsfaktoren der Güteparameter sowie das Maß der Wahrscheinlichkeiten von Mutation und Rekombination entscheiden sowohl über die Entwicklungsgeschwindigkeit als auch über die Qualität des Lösungsindividuums.

5.6 Diskussion der verschiedenen Optimierungsansätze

Abschließend ist festzustellen, dass sich Ansätze auf der Grundlage feiner Netzstrukturen in der praktischen Umsetzung meist als sehr berechnungsintensiv erweisen. Dennoch bieten sie die Möglichkeit, von einer neutralen Situation ausgehend die endgültige Versagensfigur und die zugehörige Traglast zu ermitteln. Aus diesem Grunde wurde beispielsweise in den schon zitierten Arbeiten von RAMSAY & JOHNSON [117, 118] zumindest für die Auffindung einer anfänglichen Fließlinienfigur darauf zurückgegriffen.

Die in den Abschnitten 5.3 und 5.4 vorgestellten Ansätze der direkten Suche sowie des konjugierten Gradientenverfahrens sind hingegen auf der Basis eines gröber strukturierten Netzes wesentlich effizienter. Insbesondere der Berechnungsaufwand der Suchmethode erhöht sich bei einer größeren Anzahl an Knoten sehr stark. Demgegenüber ist der theoretische Hintergrund dieser Strategie deutlich einfacher und somit auch in der numerischen Umsetzung unkomplizierter als der des Gradientenverfahrens. Letzteres hat neben seiner Schnelligkeit jedoch noch den entscheidenden Vorteil, im Laufe des Optimierungsvorgangs lokale Minima überwinden zu können. Ein Beleg hierfür ist Beispiel 11 aus Kapitel 7. Als ein kritischer Punkt erweist sich jedoch die empfindliche Reaktion auf schlecht gewählte Schrittweiten α , was für die direkte Suchmethode wiederum kein Problem darstellt.

6 Numerische Geometriefindung

Vor dem Hintergrund einer numerischen Anwendung werden aus den in Kapitel 3 gezeigten geometrischen Zusammenhängen bestimmte Gesetzmäßigkeiten herausgearbeitet. Ziel ist hierbei, einen allgemein gültigen Algorithmus zu erstellen, mit dessen Hilfe für jede Plattengeometrie eine Versagensfigur zur weiteren Berechnung gefunden wird, vergleiche WÜST [153, 154]. Da die Finite-Element-Formulierung auf einem Dreieckselement beruht, an dessen Kanten sich Fließlinien ausbilden können, wird für die Berechnung eine weitere Triangulierung der polygonalen Teilflächen notwendig. Im Zuge der vorliegenden Arbeit wurden diese Ansätze in Form eines Netzgenerierungsprogrammes realisiert, das vor dem eigentlichen Optimierungsprozess durchlaufen wird.

6.1 Bestimmung einer Anfangsgeometrie für Fließlinienfiguren

Der Ausgangspunkt für eine Traglastberechnung nach der Fließlinientheorie ist die Annahme eines Versagensmechanismus. Da diese Fragestellung noch immer ein zentrales Problem darstellt, setzen Berechnungsprogramme häufig eine Vorgabe der Fließlinienfigur durch den Anwender voraus wie zum Beispiel *Cobras*, vergleiche IBELL et al. [59] und MIDDLETON [94]. Dadurch wird allerdings das Berechnungsergebnis willkürlich beeinflusst, was einer objektiven Betrachtung widerstrebt.

Dennoch lassen sich Anhaltspunkte finden, die man sich zur Beschreibung der geometrischen Beschaffenheit zunutze machen kann. So müssen die von den Ver-

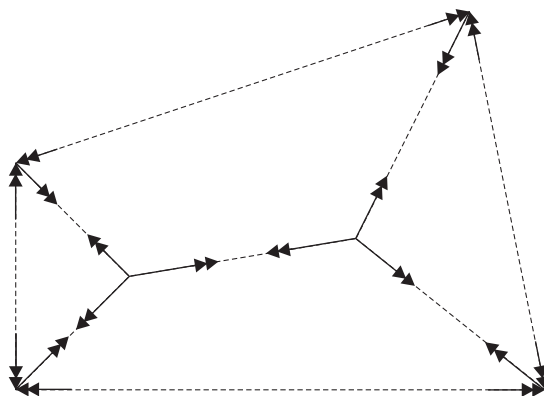


Abbildung 6.1: Rotationsvektoren im Fließliniennetz

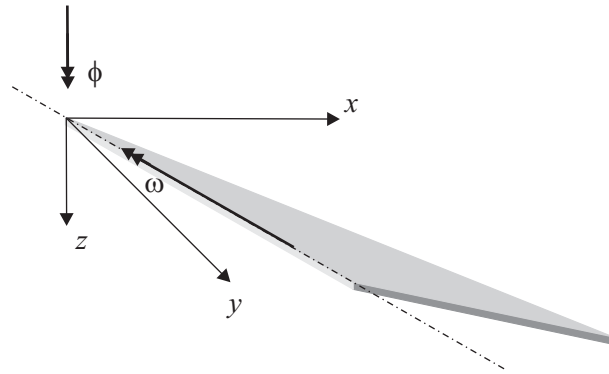


Abbildung 6.2: Verkipfung und Drehung von Teilebenen

zweigungspunkten ausgehenden Rotationen ähnlich dem Krafteck eines Fachwerks Gleichgewichtsbedingungen erfüllen, vergleiche Abschnitt 3.1.1 und Abbildung 6.1. Eine daraus gebildete Kompatibilitätsmatrix erlaubt es, unbekannte Größen wie die Koordinaten von Verzweigungspunkten zu berechnen, wie von DENTON [26] vorgeschlagen.

Ein intuitiv sehr nahe liegender Ansatz ist die Verkipfung von Ebenen als potenzielle Bruchflächen, deren Auflagerkanten als Drehachsen in Erscheinung treten. In jüngerer Zeit wurde diese Idee von KWAN [84] aufgegriffen. Hierin wird vorgeschlagen, den Versagensmechanismus einer Platte über die Rotationswinkel ω der Bruchflächen zu beschreiben. Im Falle von Einzelstützungen ist zumindest ein Punkt der Drehachse bekannt; der noch unbekannte zweite wird durch einen senkrecht zur Plattenebene gerichteten Verdrehungsvektor ϕ parametrisiert (Abbildung 6.2). Da Fließlinienfiguren tatsächlich maßgeblich von den Verdrehwinkeln der versagenden Plattenteile bestimmt werden, erscheint dieses Verfahren zur Bestimmung der benötigten Verzweigungspunktkoordinaten am besten geeignet, wobei für die erste Wahl eines Versagensmodus vereinfachend jeweils gleich große Winkel angenommen werden können. Leider muss jedoch die von KWAN aufgestellte Vermutung widerlegt werden, wonach aus der Definition von ϕ und ω ein eindeutiger kinematischer Mechanismus hervorgeht, wie unter anderem Beispiel 6 in Kapitel 7 beweist.

6.2 Algorithmus für polygonal berandete Platten

Um das Aussehen eines Versagensmechanismus überhaupt beschreiben zu können, müssen geeignete Parameter gefunden werden, anhand derer die Gesamtgeometrie einer Fließlinienfigur wiedergegeben werden kann. Neben der Koordinatenbestimmung durch das Verkippen von Ebenen – vergleiche hierzu Beispiel 5 in

Kapitel 7 – ist dabei vor allem die Verbindung der daraus entstandenen Verzweigungspunkte zu einem Fließliniennetz wichtig. Aus numerischer Sicht gleicht dies dem bei der Evolutionsstrategie angewendeten Prinzip von Phänotyp und Genotyp, was im konkreten Zusammenhang allerdings mit den Begriffen Konfiguration und Chiffrierung bezeichnet wird. Eine Konfiguration entspricht also einer bestimmten Fließlinienfigur, deren Verzweigungspunktkoordinaten jedoch im Rahmen der kinematischen Zulässigkeit variabel sind.

6.2.1 Beschreibung von Fließlinienfiguren

Bereits im Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, dass jede verkippende Teilplatte eine eigene Drehachse besitzt. Dementsprechend richtet sich ihre Anzahl nach der Zahl der Drehachsen, welche wiederum im Falle allseitig gelagerter Platten gleichzeitig ihren Kanten entspricht. JENNINGS [62] begründet darauf zwei grundlegende Theoreme bezüglich der Topologie, das heißt dem Aussehen einer Versagensfigur, und der Traglast.

Theorem zur Topologie

Bei einer n -seitig umrandeten Polygonplatte besitzt der unter der geringsten Traglast auftretende Versagensmechanismus n polygonale Teilplatten. Jede von ihnen grenzt an einer Seite an eine gerade Plattenkante, hat aber ansonsten keinen weiteren Kontakt zum Rand.

Im Weiteren resultieren hieraus auch Konsequenzen für den Funktionsverlauf des Traglastminimums. Wie bereits im Abschnitt 3.4.2 ersichtlich wurde, ist dieser innerhalb eines gleichbleibenden kinematischen Mechanismus konvex. Damit kann auch eine Aussage zur Eindeutigkeit getroffen werden.

Theorem zur Eindeutigkeit des Minimums

Der Kehrwert der Traglast, die einen Mechanismus von n Teilplatten gemäß dem Topologietheorem aktiviert, verhält sich wie eine konvexe Funktion sofern sich die Konfiguration nicht ändert.

Die so ermittelten Fließlinienfiguren erfüllen die Forderung nach der Abhängigkeit von einem einzigen Freiheitsgrad. Zugleich lässt sich das Topologietheorem ausnutzen, um die verschiedenen zulässigen Konfigurationen zu beschreiben. Da nun der direkte Zusammenhang zwischen n Polygonpunkten und n ebenen Teilplatten gegeben ist, liegt eine analoge Nummerierung nahe. Die gerade verlaufenden Fließlinien, welche die Grenze zwischen ihnen bilden, lassen sich folglich mit

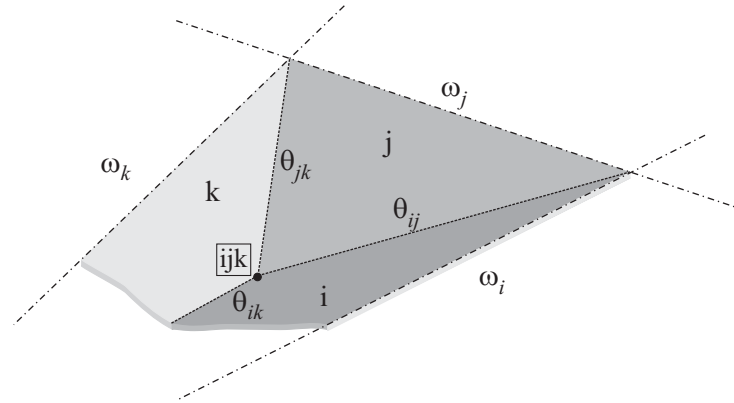


Abbildung 6.3: Chiffrierung von Fließlinien und Verzweigungspunkten

der Angabe der beiden Nachbarebenen i und j eindeutig beschreiben. Da sich drei Raumebenen mit nichtparallelen Drehachsen in einem Punkt treffen, werden diese Verzweigungspunkte von Fließlinien mit den entsprechenden drei Ebenenbezeichnungen ijk chiffriert, vergleiche Abbildung 6.3. Die Reihenfolge der Ziffern ist hierbei irrelevant. Daraus erwächst die Forderung, dass sich in einem Verzweigungspunkt genau drei Fließlinien treffen dürfen. Sollten es mehr sein, so lässt sich dieser Punkt in entsprechend viele Verzweigungspunkte aufspalten. Bei diesem Sonderfall ist dieselbe Fließliniengeometrie zwei oder mehreren Konfigurationen zugehörig, das heißt es existieren verschiedene Möglichkeiten, die Verzweigungspunkte zu chiffrieren. Abbildung 6.4 zeigt dies am einfachen Beispiel einer Viereckplatte. Der Fall des Übergangs beider Konfigurationen ineinander kann daher auf zweierlei Weise chiffriert werden.

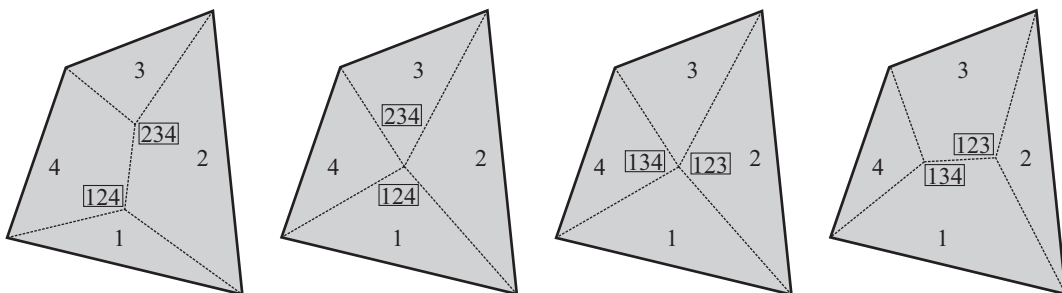


Abbildung 6.4: Übergang zweier Konfigurationen bei einer Viereckplatte

6.2.2 Kombinationsmöglichkeiten von Konfigurationen

Zur Erfassung aller zulässiger Mechanismen ist die Kenntnis von allen denkbaren Kombinationen der Verzweigungspunkte erforderlich. Betrachtet man verschiedene allseitig gelagerte Polygonplatten, so kann man – angefangen mit einer Dreieckplatte – anschaulich zeigen, dass immer

$$p = n - 2 \quad (6.1)$$

Verzweigungspunkte vorhanden sind, siehe Abbildung 6.5. Dieser Zusammenhang wurde bereits von EULER für die Anzahl der Zerlegungen eines konvexen n -Polygons in Dreiecke erkannt. Im Falle von Fließlinienfiguren spielt die Frage der Konvexität jedoch zunächst keine Rolle.

Legt man nun drei ungleiche Zahlen für die Chiffrierung der Verzweigungspunkte zugrunde, erhält man a priori

$$k = \binom{n}{3} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \quad (6.2)$$

unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten.

Da jedoch Fließlinien analog mit den beiden Ziffern der Nachbarplatten gekennzeichnet werden und gerade Linien naturgemäß zwei Endpunkte haben, besitzen zwei durch eine Linie ij verbundene Verzweigungspunkte ebenfalls die Ziffern i und j . Alle übrigen Punktchiffrierungen können aber nur noch jeweils eine der beiden Ziffern beinhalten; die Kombination mit ij ist ein drittes Mal unmöglich. Mit diesem Wissen kann die Gleichung (6.2) weiter verfeinert werden zu der Form

$$C_n(p) = \frac{1}{p+1} \binom{2p}{p} = \frac{(2p)!}{p!(p+1)!}, \quad (6.3)$$

deren Ergebnis als Catalansche Zahl C_n bezeichnet wird. Bringt man die Anzahl der Verzweigungspunkte p und die Ergebnisse von Gleichung (6.3) in Zusammenhang, so erhält man die Catalansche Zahlenreihe, die in Tabelle 6.1 für

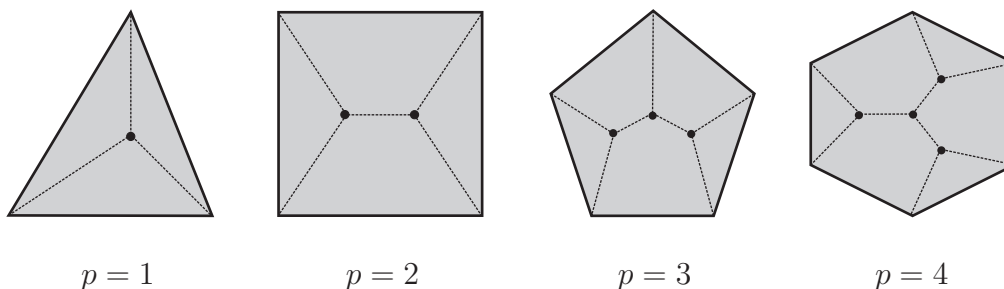


Abbildung 6.5: Verzweigungspunkte verschiedener Polygonplatten

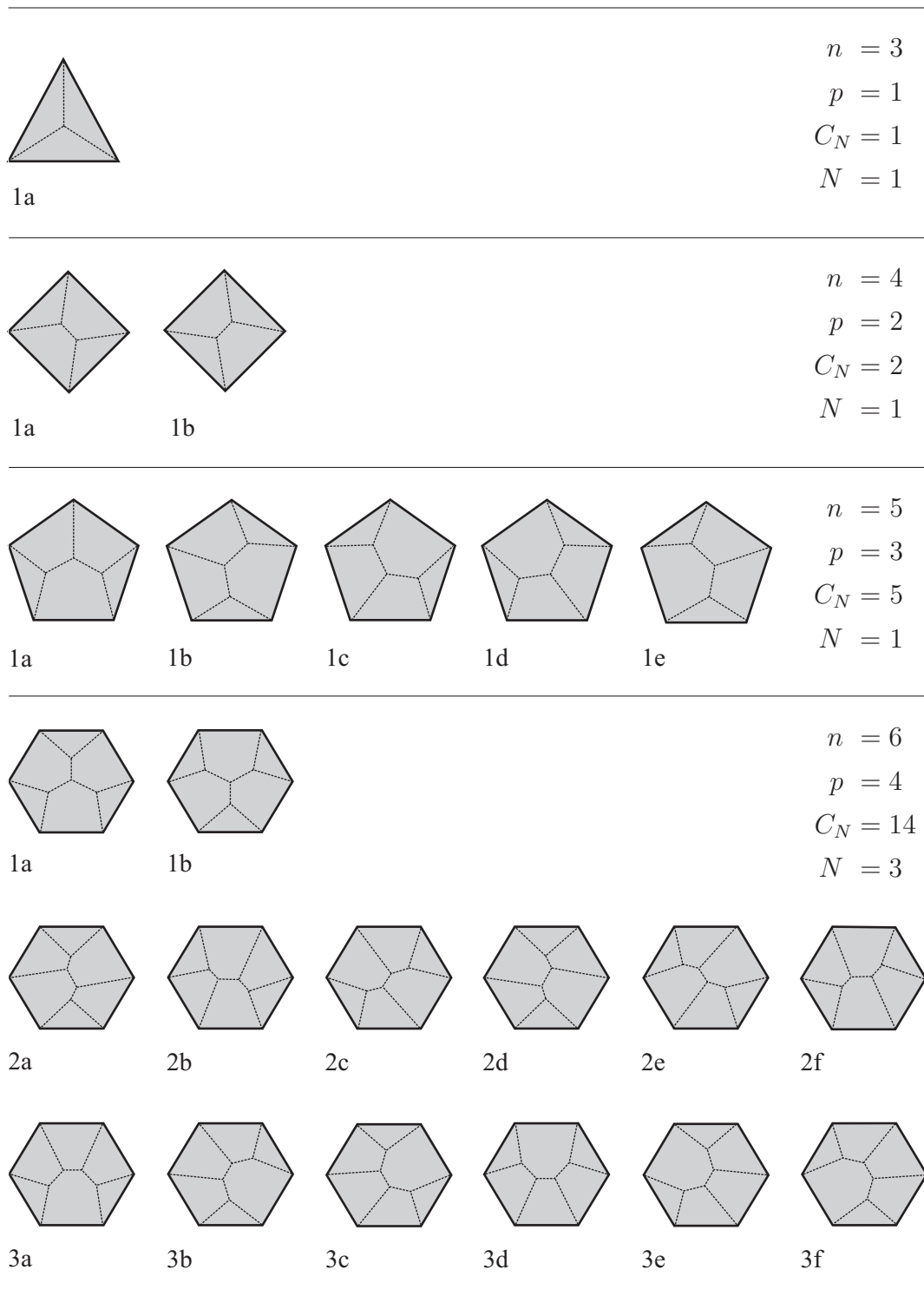


Abbildung 6.6: Konfigurationen und Konfigurationsgruppen

n	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_n(p)$	1	2	5	14	42	132	429	1430
N	1	1	1	3	4	12	27	82

Tabelle 6.1: Anzahl zulässiger Verzweigungspunktombinationen

einige Polygone n dargestellt ist. In der Literatur werden beispielsweise von BEGE & KÁSA [8] und BERNHART [12] eine Vielzahl von Anwendungsbereichen der Catalanschen Zahlenreihe gezeigt, unter anderem das Beschreiben von binären Bäumen oder dem Problem der Triangulierung von Polygonen. Beides wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch benötigt. Der Ansatz im Zusammenhang mit der Geometriefindung von Fließlinien stellt jedoch eine Neuerung dar und fand erstmals im Zuge der vorliegenden Arbeit Verwendung.

In Abbildung 6.6 sind sämtliche Möglichkeiten an Fließlinienkonfigurationen, angefangen von einer Viereckplatte bis hin zum Sechseck, gezeigt. Es fällt auf, dass viele der Konfigurationen lediglich eine Permutation ein und derselben Fließlinienfigur sind. Dennoch handelt es sich um verschiedene Konfigurationen, da sich abhängig vom Ausgangspunkt der Teilplattenummerierung unterschiedliche Kombinationen ergeben.

In SIEMON [131] wird dieser kombinatorische Aspekt ausführlich behandelt und die Formel

$$N = \frac{1}{2(p+2)} C_n(p) + \frac{1}{3} C_n\left(\frac{p-1}{3}\right) + \frac{3}{4} C_n\left(\frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2} C_n\left(\frac{p-1}{2}\right) \quad (6.4)$$

zur Ermittlung der Anzahl N der Konfigurationsgruppen angegeben, vergleiche auch BEINEKE & PIPPERT [9]. Dabei ist zu beachten, dass Summanden, die keinen ganzzahligen Funktionswert von C_n besitzen, entfallen. Die so gefundene Menge an Konfigurationsgruppen ist ebenfalls in Tabelle 6.1 eingetragen.

6.2.3 Binäre Kodierung

Eine Anwendung der Catalanschen Zahlen zeigt sich in der Aufgabe, ein Quadrat-raster von links oben nach rechts unten zu durchlaufen, wobei der Weg lediglich nach rechts oder nach unten weiterführen und der Bereich unterhalb der Diagonale nicht beschriftet werden darf. Abbildung 6.7 zeigt dieses Vorgehen anhand eines 3×3 -Rasters.

Zur numerischen Beschreibung kann ein Binär-code herangezogen werden, der die horizontalen und vertikalen Schritte mit 0 beziehungsweise 1 notiert. Auf diese

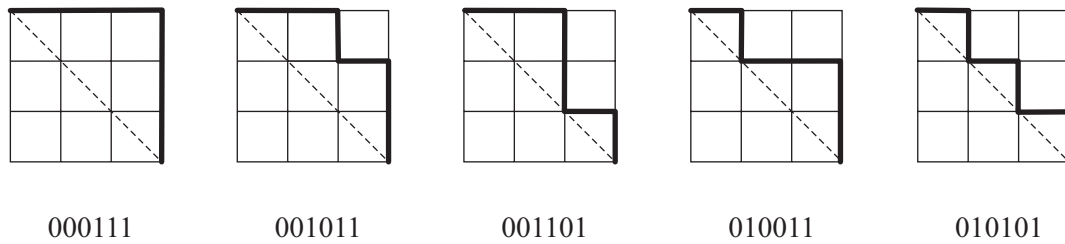


Abbildung 6.7: Durchlauf eines 3×3 -Rasters

Weise lassen sich entsprechend der Größe des gestellten Problems alle zulässigen Binärcodes reproduzieren. Unzulässig sind diejenigen, deren Sequenz in ihrer Gesamtheit ungleich viele Nullen und Einsen aufweisen. Auch die Anfangs- und Endziffer muss jeweils unverändert bleiben, da der erste und letzte Schritt bei der Durchwanderung des Gitters festgelegt ist, wie sich anhand der Abbildung leicht nachvollziehen lässt.

6.2.4 Dekodierung zu einem Fließliniennetz

Um alle Chiffrekombinationen auf numerischem Wege ermitteln zu können, ist eine weitere Betrachtung des Anwendungsgebietes der Catalanschen Zahlenreihe erforderlich. Wie Abbildung 6.8 verdeutlicht, kann der Verlauf eines Fließliniennetzes in einer Polygonplatte als binärer Baum interpretiert werden.

BEGE & KÁSA [8] haben in Verbindung mit einem Binärcode, wie er in Abschnitt 6.2.3 erstellt wurde, ein System zur Beschreibung von Binärbäumen entwickelt (Tabelle 6.2). Davon ausgehend wird für jede Zweiersequenz entweder ein Ast nach links oder nach rechts fortgeführt, ein Abzweigungspunkt in einen Speicher-

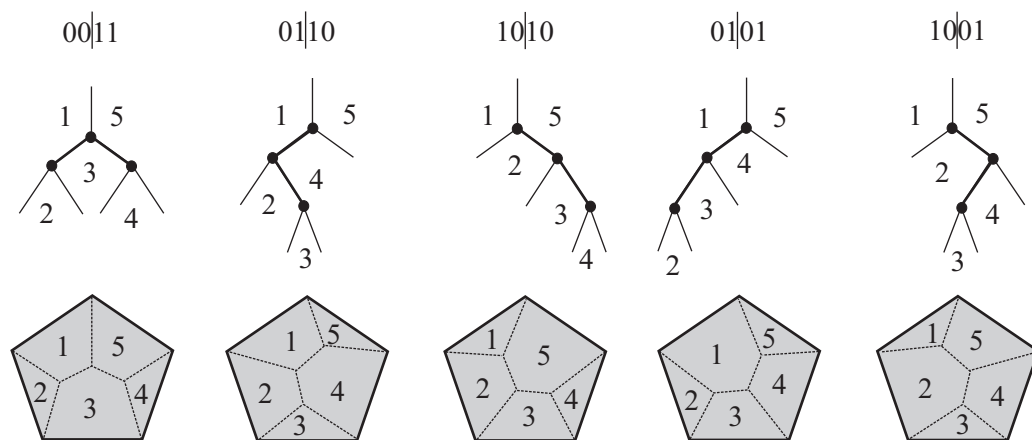


Abbildung 6.8: Binäre Kodierung von Binärbäumen und Fließlinien

Sequenz	Anweisung
01	Ast nach links anhängen
10	Ast nach rechts anhängen
00	Knoten auf den Stapel legen und Ast nach links anhängen
11	Knoten vom Stapel nehmen und Ast nach rechts anhängen

Tabelle 6.2: Binäre Kodierung nach BEGE & KÁSA [8]

stapel gelegt oder herausgenommen. In diesem Fall wird der zuletzt gespeicherte Knoten gewählt, bis am Ende keine mehr auf dem Stapel sind.

Fügt man dem noch einen weiteren Schritt zur Ermittlung der Chiffrierungen von Verzweigungspunkten hinzu, ist das Ziel eines Findungsalgorithmus erreicht. Betrachtet man die entstandene Verästelung als Begrenzung zwischen nummerierten Teilplatten, so entstehen die Chiffrierungen an den Knotenpunkten der Äste beim Zusammentreffen der Teilplatten. Abbildung 6.9 zeigt das Vorgehen an einem beispielhaften Binärbaum.

Anfangen an der Baumwurzel, welche die Teilplatten 1 und n voneinander trennt, wird das System im Gegenuhrzeigersinn umlaufen. Zu Beginn sind damit bereits zwei Ziffern bekannt, die unbekannt dritte wird für eine spätere Rückrechnung in einem Variablenspeicher S notiert. Die Einspeicherung der noch unbekannt Ziffern erfolgt dabei nach dem Prinzip "last in – first out". In den weiteren Schritten wandern die aktuellen Ziffern im dreistelligen Zahlencode um jeweils eine Stelle weiter, sodass die nachfolgende Plattennummer aufgenommen werden kann, während die inzwischen nicht mehr angrenzende Teilebene ausscheidet. Dies geschieht sowohl mit den bekannten Ziffern als auch mit denjenigen, die

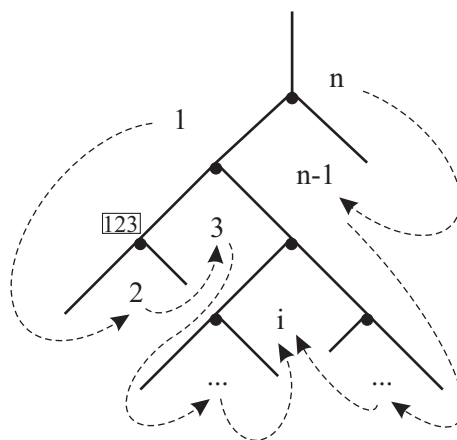


Abbildung 6.9: Chiffrierung anhand eines Binärbaumes

vorläufig noch mit einer Variablen versehen sind. Wird das Ende eines Astes erreicht, so muss die Chiffrierung drei aufeinanderfolgende Ziffern enthalten; auch ein Abknicken des Verlaufs nach rechts lässt Schlüsse auf die benachbarten Platten zu. Damit kann eine teilweise Rückrechnung der Unbekannten aus dem Variablenspeicher erfolgen. Es ist jedoch zu berücksichtigen, ob es sich um einen nach links oder nach rechts abzweigenden Ast handelt. Spätestens am Ausgangspunkt lässt sich so die letzte noch verbleibende Variable ermitteln, sodass die Chiffrierung für eine theoretisch zulässige Folge von Verzweigungspunkten vorliegt.

Tabelle 6.3 zeigt nochmals die zusammengefasste Dekodierungsanweisung, bei der mit

$$a_0 = 1; \quad b_0 = x_1; \quad c_0 = n$$

der Startpunkt stets gleichbleibend ist, während die nachfolgenden Punktchiffrierungen a , b und c entsprechend der binären Sequenz berechnet werden. Die Chiffrierungen werden gemäß der Vorschrift – gegebenenfalls auch in Form von Variablen x_i – weitergegeben oder im Speicherstapel S_i abgelegt.

Sequenz	00	01	10	11
a	$a_i \rightarrow a_{i+1}$	$a_i \rightarrow a_{i+1}$	*	*
b	$b_i \rightarrow c_{i+1}; S_1$	$b_i \rightarrow c_{i+1}$	$b_i \rightarrow a_{i+1}$	$S_1 \rightarrow a_{i+1}$
c	$c_i \rightarrow S_2$	*	$c_i \rightarrow c_{i+1}$	$S_2 \rightarrow c_{i+1}$

* = Rückrechnung am Knick oder Ende eines Astes

Tabelle 6.3: Dekodierungsvorschrift für Binärcodesequenzen

Die Vorgehensweise soll anhand des Binärcodes 0010011110 veranschaulicht werden, siehe Abbildung 6.10. Aufgrund der Länge der Codierung von zehn Ziffern steht bereits fest, dass es sich um eine Achteckplatte handelt. Damit ist die Ausgangslage

$$a_0 = 1; \quad b_0 = x_1; \quad c_0 = 8 .$$

Das erste Ziffern paar – vergleiche erste Spalte in Tabelle 6.3 – sorgt dafür, dass in der Chiffrierung des Verzweigungspunktes die erste Plattennummer beibehalten wird. Die zweite wird hingegen an die zukünftige dritte Stelle übergeben und zusammen mit der bisherigen gespeichert. Weil dem nächsten Zweierblock entsprechend ein Ast nach rechts angehängt wird und damit zwei benachbarte Teilplatten vorliegen, müssen beim zweiten Verzweigungspunkt die erste und zweite Zahl der Chiffrierung aufeinanderfolgend sein. Gemäß dem dritten Ziffern paar der Codierung ist anschließend ein Ast nach links anzufügen; im Gegensatz zur ersten Sequenz werden jedoch keine Nummern gespeichert. Da der vorletzte

Zweierblock wieder Plattennummern aus dem Speicher zurückverlangt und einen Ast nach rechts an die Baumwurzel setzt, endet der bisherige Strang. Dies bedeutet, dass der vierte Verzweigungspunkt drei aufeinanderfolgende Zahlen besitzen muss; also kann nun die Variable $x_2 = 4$ ermittelt werden. Der neue Ast, der von der Baumwurzel nach rechts abzweigt, muss als dritte Zahl die Nummer der Teilplatte 8 beinhalten. Danach wird er abermals nach rechts verlängert. Da der Binärcode nun endet, können die mitgeführten Variablen mit $x_4 = 7$ und $x_3 = 6$ bestimmt werden. Zuletzt erschließt sich auch die einzige noch verbliebene Unbekannte mit $x_1 = 5$.

Im Folgenden sind die einzelnen Schritte zusammengefasst:

Start: $a_0 = 1$; $b_0 = x_1$; $c_0 = 8$
 00: $a_1 = 1$; $b_1 = 2$; $c_1 = x_1$; $x_1 \rightarrow S1$; $8 \rightarrow S2$
 10: $a_2 = 2$; $b_2 = x_2$; $c_2 = x_1$
 01: $a_3 = 2$; $b_3 = 3$; $c_3 = x_2$; $x_2 = 4$
 11: $a_4 = x_1$; $b_4 = x_3$; $c_4 = 8$; $x_1 \leftarrow S1$; $8 \leftarrow S2$
 10: $a_5 = x_3$; $b_5 = x_4$; $c_5 = 8$; $x_4 = 7$; $x_3 = 6$; $x_1 = 5$

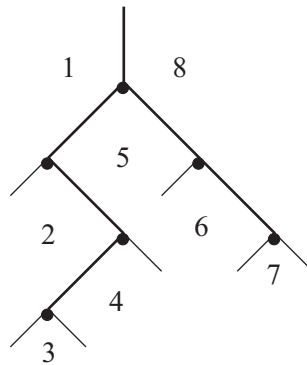


Abbildung 6.10: Beispiel: Binärbaum aus der Codierung 0010011110

6.2.5 Betrachtung der individuellen Topologie

Nachdem alle theoretisch zulässigen Punktfolgen ermittelt wurden, ist eine Untersuchung der geometrischen Gegebenheiten des Problems notwendig. Da bei der Verkipfung von jeweils drei Teilebenen Schnittpunkte ermittelt wurden, deren Koordinaten außerhalb der Plattenberandung liegen, scheiden ihre Chiffrierungen und somit alle mit ihnen verbundenen Punktkombinationen als unzulässig

aus. Des Weiteren entfallen selbstverständlich auch diejenigen Konstellationen, bei denen beispielsweise wegen Parallelität der Ebenen erst gar keine Koordinaten berechnet werden konnten. Für die übrig gebliebenen Fließliniennetze erfolgt eine Plausibilitätskontrolle, bei der die Summe aller Teilflächen die Gesamtfläche der Platte ergeben muss. Auf diese Weise werden eventuelle Überkreuzungen von Fließlinien ausgeschlossen.

Bei der Anwendung des Verfahrens zeigt es sich, dass für eine gegebene Plattengeometrie zumeist nur eine zulässige Konfiguration übrig bleibt. Dennoch gibt es Beispiele, bei denen – abgesehen von identischen Konfigurationen – mehrere zulässige Mechanismen gefunden werden, siehe Beispiele 6 und 12 in Kapitel 7.

6.3 Triangulierung

Die bisher erzielte Netzstruktur gewährleistet lediglich, dass die sich bei der Berechnung einstellenden Fließlinien in der Plattentopologie vertreten sind. Für die Behandlung mit dem in Abschnitt 5.2 eingeführten Dreieckselement ist jedoch eine weitere Verfeinerungsstufe in Form einer Triangulierung der verbliebenen Teilflächen erforderlich. Eine erneute Anwendung des in Abschnitt 6.2.4 beschriebenen Verfahrens auf die zuvor entstandenen Plattenteile ist allerdings ungeeignet, da auch bei mehrmaliger Wiederholung nicht zwangsläufig Dreiecksmaschen entstehen, siehe Abbildung 6.11a. Stattdessen werden die benötigten Dreiecke durch geeignetes Verbinden der Eckpunkte eines jeden polygonalen Plattenteils gebildet (Abbildung 6.11b). Dies hat außerdem den Vorteil, dass keine zusätzlichen Netzknoten entstehen, was den Berechnungsaufwand nur unnötig erhöhen würde. Der genaue Verlauf dieser sekundären Fließlinien ist dabei von untergeordneter Bedeutung, da er nur über den Zusammenbau der Assemblierungsmatrizen

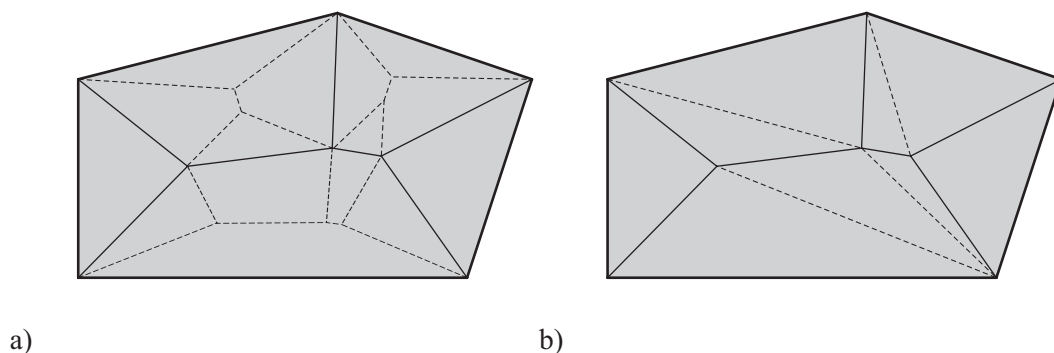


Abbildung 6.11: Weiterführende Triangulierung einer Fließlinienfigur
 a) Verwendung des Algorithmus zur Geometriefindung
 b) Verbinden der Polygonecken

entscheidet, jedoch keine Veränderung der Traglastergebnisse bewirkt. In der Folge bestätigt sich, dass an den künstlich eingeführten Fließlinien keine gegenseitige Verdrehung der Elemente eintritt, vergleiche Beispiel 3 in Kapitel 7.

Bei der Wahl anderer Optimierungsansätze, die dichtere Netze benötigen, ist gegebenenfalls eine erneute Verfeinerung des entstandenen Dreiecksnetzes notwendig. Deshalb wurde bei der numerischen Umsetzung des Verfahrens die Möglichkeit einer gleichmäßigen Triangulierung vorgesehen. Abbildung 6.12 zeigt die ersten drei Triangulierungsstufen einer Dreiecksfläche.

Zum Zwecke einer freien Netzgenerierung empfiehlt sich das Verfahren zur Triangulierung nach DELAUNAY [25], auf das an dieser Stelle jedoch nicht näher eingegangen werden soll. Für Ausführungen zu diesem Thema und zu Parzellierungsproblemen allgemein sei auf die Literatur von LEE & SCHACHTER [86], OKABE et al. [108] sowie PREPARATA & SHAMOS [115] verwiesen.

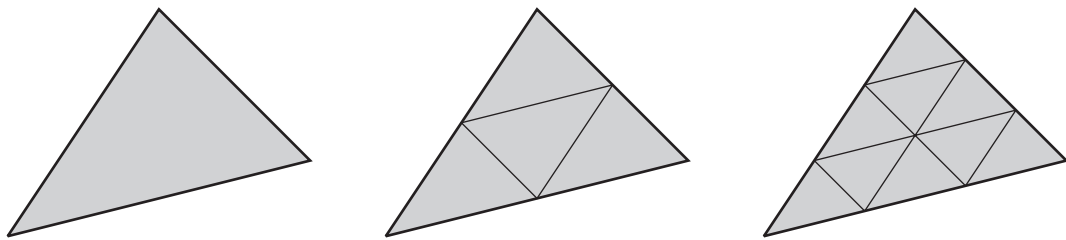


Abbildung 6.12: Drei Triangulierungsstufen einer Dreiecksfläche

7 Numerische Berechnungsbeispiele

Zur Veranschaulichung der bisher behandelten theoretischen Grundlagen werden einige numerische Beispiele vorgeführt, die einerseits Ergebnissen aus der Literatur gegenübergestellt und auf der anderen Seite mit Finite-Element-Berechnungen der klassischen Fließzonentheorie verglichen werden. Hierbei kommt das finite Schalenelement zur Anwendung, dessen theoretischer Hintergrund im Abschnitt 5.1.2 erläutert wurde. Die für die praktische Anwendung notwendigen Informationen zur Modellierung des nichtlinearen Materialverhaltens werden gemeinsam mit den verwendeten Parametern zu Beginn dieses Kapitels in Abschnitt 7.1 angegeben.

Die Strukturierung der nachfolgenden Beispiele orientiert sich im Wesentlichen am Aufbau der Theoriekapitel. Zur Einführung werden zunächst verschieden gelagerte Rechteckplatten untersucht, worauf eine Betrachtung der Plattengeometrie und von lokalen Einflüssen folgt. Nach der Darstellung einiger Optimierungsmerkmale wird schließlich noch der praktische Einsatz der implementierten Fließlinientheorie erörtert.

7.1 Vergleichsgrundlagen

Im Vorfeld der eigentlichen Vergleichsberechnungen werden in einer kurzen Übersicht die allgemein gültigen Materialdaten zusammengetragen. Anschließend folgt ein einfaches Beispiel, um die Berechnungsgrundlagen von Fließlinientheorie und Fließzonentheorie aufeinander abzustimmen.

7.1.1 Materialparameter

Zunächst wird vereinbart, dass den numerischen Berechnungsbeispielen – sofern nicht anders angegeben – Stahl als isotroper Werkstoff zugrunde liegen soll. Die für die Finite-Element-Modellierung benötigten Materialdaten sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt. Um den Definitionen der Fließlinientheorie Folge zu leisten, wird generell eine Querdehnzahl von $\nu = 0$ vorausgesetzt; eine Materialverfestigung findet nicht statt.

Für die Betrachtung der orthotrop bewehrten Stahlbetonplatte aus Abschnitt 7.2.3 wurden in Tabelle 7.2 die Parameter übernommen, auf denen die Versuche von PARDEY [111] basieren. Auf die Umrechnung der Eingabewerte zwischen den beiden Berechnungsmethoden wird im nachfolgenden Einführungsbeispiel eingegangen.

Baustahl S235	
E-Modul:	$E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}$
Streckgrenze:	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2}$

Tabelle 7.1: Materialparameter für Stahlplatten

Beton Festigkeitsklasse C30/37	
E-Modul:	$E_{cm} = 3,2 \cdot 10^7 \frac{kN}{m^2}$
Druckfestigkeit:	$ f_{ck} = 3,0 \cdot 10^4 \frac{kN}{m^2}$

Betonstahl BSt 500 M normalduktil	
E-Modul:	$E = 2,1 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2}$
Streckgrenze:	$f_{y,k} = 5,0 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2}$

Tabelle 7.2: Materialparameter für Stahlbetonplatten

7.1.2 Beispiel 1: Einachsiger gespannter Plattenstreifen

Zu Beginn wird ein Plattenstreifen untersucht, der jeweils an zwei gegenüberliegenden Seiten gelenkig gelagert beziehungsweise frei ist. Sein Tragverhalten entspricht somit dem eines Balkens, wie er in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Anhand dieses Beispiels sollen die Lösungen nach der Fließlinientheorie und die Finite-Element-Berechnungen auf der Basis der Fließzonentheorie aufeinander abgestimmt werden. Zu diesem Zweck muss zunächst das vorgegebene plastische Moment in eine Spannung umgerechnet werden. Durch die Wahl realer Materialwerte – zugrunde gelegt sei die Fließspannung von Stahl mit $f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2}$ – bleibt nur noch die Höhe h des Balkens als Variable verfügbar, die am durchplas-

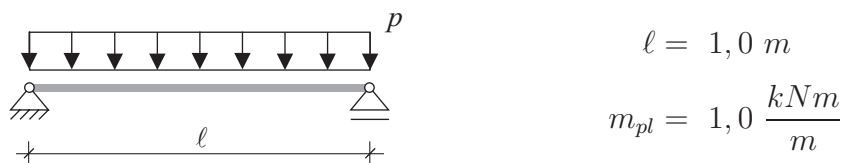


Abbildung 7.1: Beispiel 1: Einachsiger gespannter Plattenstreifen in der Ansicht

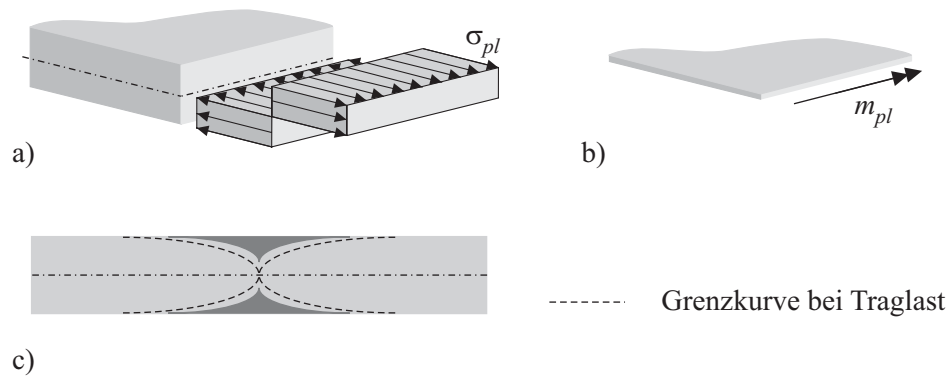


Abbildung 7.2: Vollplastizierter Querschnitt einer Platte

- a) Spannungsverteilung
- b) äquivalentes plastisches Moment
- c) Fließgelenkbildung in der Seitenansicht

tizierten Querschnitt über das Verhältnis

$$m_{pl} = \frac{1}{4} h^2 f_{y,k} \quad \text{oder} \quad h = \sqrt{\frac{4m_{pl}}{f_{y,k}}}$$

bestimmt wird, siehe Abbildung 7.2. Im konkreten Fall ergibt sich daraus eine Dicke von $h = 4,082 \text{ mm}$. Dieses Verhältnis zwischen plastischem Moment und Plattendicke taucht auch in einigen späteren Beispielen wieder auf.

Über die Höhe des Plattenstreifens werden sieben Elementschichten gewählt, die zur numerischen Integration jeweils zwei Gauß-Punkte besitzen und deren Referenz die Mittelfläche ist. Über die Länge ℓ werden für die Vernetzung 20 Elemente verwendet. Mit derselben Netzfeinheit werden auch die nachfolgenden Beispiele diskretisiert, wobei der Einfluss auf das Ergebnis in dieser Größenordnung praktisch nicht mehr ins Gewicht fällt. Die Berechnung aller Platten erfolgt stets geometrisch linear, seitens des Materialgesetzes jedoch mit isotroper J_2 -Plastizität auf der Grundlage kleiner Verzerrungen. Die von Mises-Vergleichsspannungen in Abbildung 7.3 zeigen für den Längsquerschnitt des einachsigen gespannten Plattenstreifens verschiedene Plastizierungsgrade. Während die Abbildungen 7.3a und b aufgrund der Dehnung beziehungsweise Stauchung nur an den Randschichten plastizieren, zeigt Abbildung 7.3d bereits einen stark durchplastizierten Querschnitt und große Verformungen. Demgegenüber repräsentiert Abbildung 7.3c genau die Laststufe, bei der sich der kinematische Mechanismus vollständig ausgebildet hat – vergleiche Abbildung 7.2c. Die zugehörige Traglast entspricht mit $p = 8 \frac{kN}{m^2}$ sowohl der analytischen als auch numerischen Lösung der Fließlinientheorie. Für alle nun folgenden Beispiele werden deshalb die Vergleichswerte entnommen, sobald ein kinematischer Mechanismus erreicht wird. Dies ist der

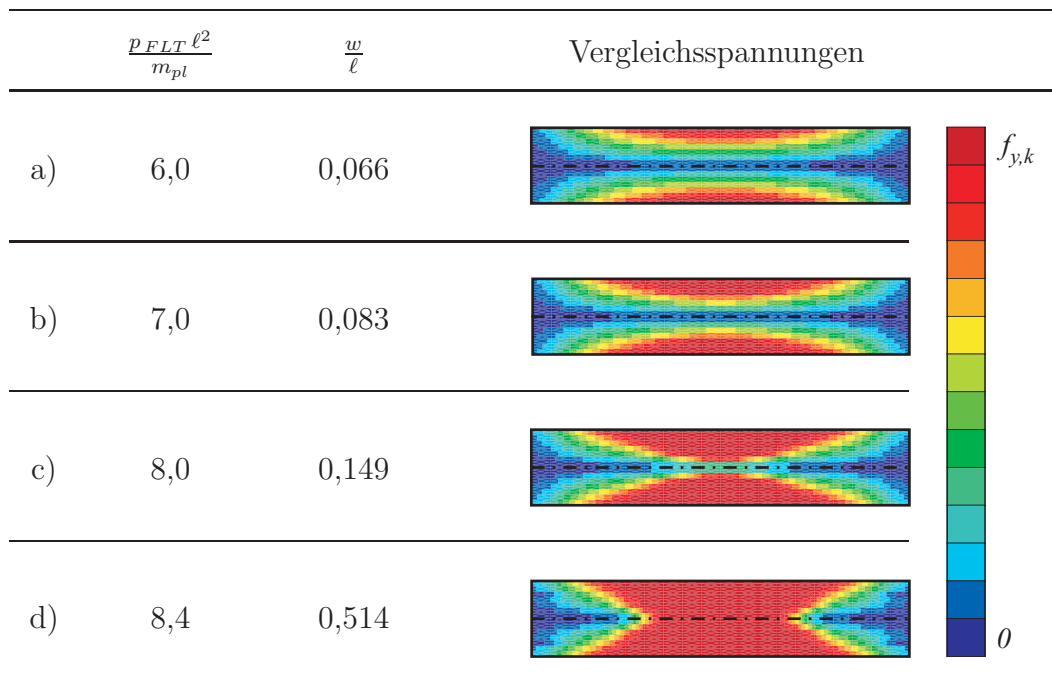


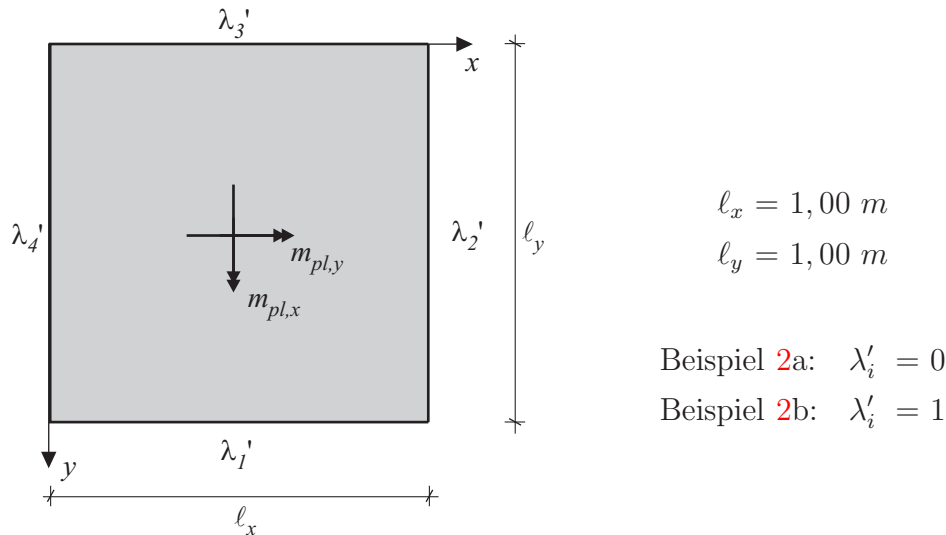
Abbildung 7.3: Plastizierender Querschnitt des Plattenstreifens

Fall, wenn die an die neutrale Ebene grenzende Elementschicht plastiziert und die Fließzonen des Zug- und Druckbereichs verbunden sind. In den numerischen Beispielen werden zusammen mit den Traglastergebnissen auch die von Mises-Vergleichsspannungen der plastizierenden Zonen dargestellt. Dennoch sei vorab betont, dass auch die so ermittelten und der Fließlinientheorie am ehesten nahe kommenden Referenzlösungen wegen ihres qualitativen Charakters stets mit Bedacht und im Rahmen einer gewissen Toleranz zu vergleichen sind.

7.2 Einfluss der Randlagerung bei Rechteckplatten

Mit den nun folgenden Beispielen isotroper Platten werden insbesondere die im Kapitel 3 dargelegten Grundlagen nochmals beleuchtet. Als Einstieg und zum Abgleich der vorgestellten Berechnungsverfahren wird der einfache Fall einer Quadratplatte untersucht, bevor dann auf die Betrachtung von Rechteckplatten übergegangen wird. Dabei werden Beispiele aus dem Bereich des Stahlbaus und des Stahlbetonbaus erörtert, deren wesentliche Materialparameter aus den Tabellen 7.1 und 7.2 in Abschnitt 7.1.1 ersichtlich sind.

7.2.1 Beispiel 2: Isotrope Quadratplatte



FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$h = 4,082 \text{ mm}$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Stahl})$

Abbildung 7.4: Beispiel 2: Isotrope Quadratplatte

Zur Verifikation der Herleitungen aus Abschnitt 3.3 dient eine quadratische Platte, deren Kantenlänge mit $l_x = l_y = 1 \text{ m}$ vorgegeben wird, siehe Abbildung 7.4. Unter der Annahme eines einheitlichen plastischen Moments von $m_{pl} = 1 \frac{kNm}{m}$ resultieren aus der Fließlinientheorie die Traglasten von $p = 24 \frac{kN}{m^2}$ für gelenkig gelagerte (Beispiel 2a mit $\lambda'_i = 0$), beziehungsweise $p = 48 \frac{kN}{m^2}$ für eingespannte Ränder (Beispiel 2b mit $\lambda'_i = 1$).

Aus Sicht der vorgeschalteten Netzgenerierung stellt dieses erste Beispiel bereits einen Sonderfall dar. Da die beiden Verzweigungspunkte genau in der Mitte des Plattenfeldes mit exakt denselben Koordinaten gefunden werden, sind formell zwei Versagenskonfigurationen zulässig, die jedoch den gleichen kinematischen Mechanismus repräsentieren, vergleiche Abschnitt 6.2.1 und Abbildung 6.4. In Anbetracht der doppelten Symmetrie entspricht die vorgeschlagene Figur zugleich der endgültigen Lösung, sodass die auf die Fließlinientheorie gestützte numerische Berechnung unmittelbar und ohne vorherigen Optimierungsdurchlauf die schon genannten Traglastergebnisse liefert.

Zur Kalibrierung der erzielten Ergebnisse mit den Finite-Element-Berechnungen

der Fließzonentheorie wird Stahl als isotropes Material zugrunde gelegt, wobei die Umrechnung von m_{pl} hier auf eine äquivalente Plattendicke von $h = 4,082 \text{ mm}$ führt. Die gesamte Plattenfläche wird mit einem verhältnismäßig feinen Netz von 20×20 Elementen diskretisiert. Abbildung 7.5 zeigt die plastizierenden Zonen und das aufprojizierte Fließliniennetz für den Fall der Navierlagerung (links) sowie für eine allseitige Einspannung (rechts). Es fällt auf, dass sich die Fließzonen in der linken Darstellung sehr gut mit den prognostizierten Fließlinien decken. Auf der rechten Seite bildet sich jedoch eine in den Ecken in Querrichtung verlaufende, ringförmige Zone aus, welche die Vereinfachung des gewählten kinematischen Modells in diesem Bereich etwas in Frage stellt. Unter den Abbildungen sind jeweils die auf ℓ_y und $m_{pl,y}$ bezogenen Traglastwerte nach Fließlinientheorie und aus der Finite-Element-Berechnung angegeben. Infolge der guten Übereinstimmung des plastischen Verhaltens in Beispiel 2a einerseits und den gesicherten Lösungen aus Abschnitt 3.3 andererseits, rechtfertigt sich die Definition der vollständig ausgeprägten Fließmechanismen als Vergleichskriterium. Allerdings zeigt sich bei einer Einspannung, dass sich die Versagenslast der Finite-Element-Methode mit $p = 47,2 \frac{kN}{m^2}$ bereits geringfügig vom oberen Grenzwert entfernt. Der Grund für die zwar akzeptable, aber dennoch merkliche Abweichung von 1,7% – bezogen auf die Ergebnisse der Fließlinientheorie – lässt sich in der näheren Betrachtung der lokalen Eckeffekte finden, denen sich Abschnitt 7.4 widmet.

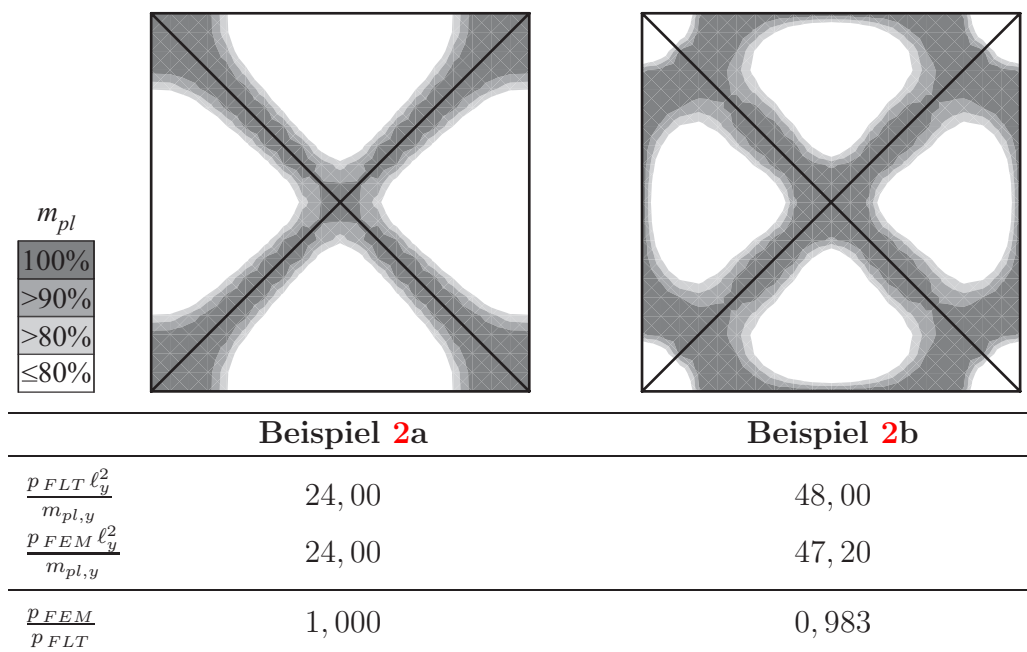
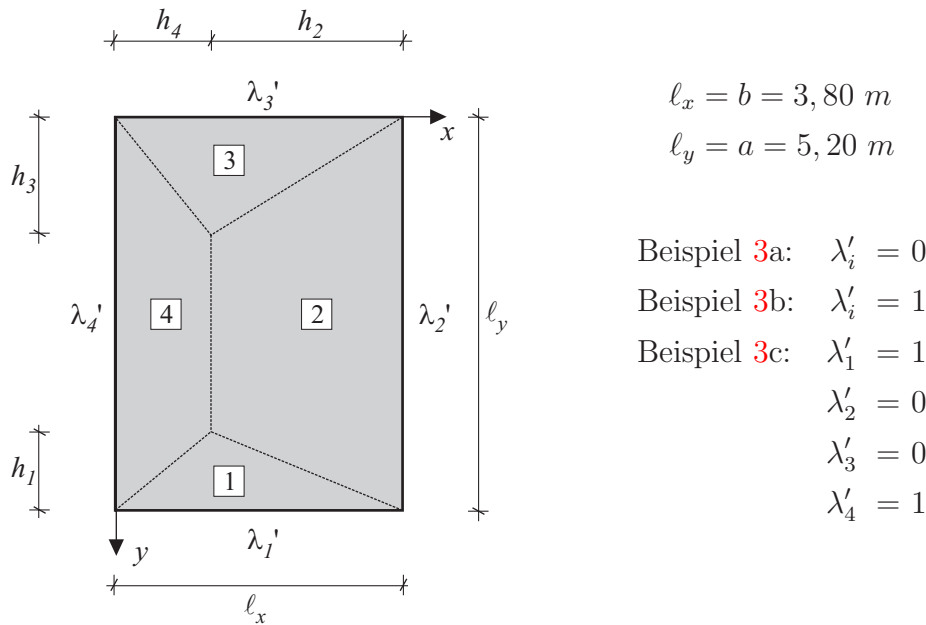


Abbildung 7.5: Gegenüberstellung der Beispiele 2a und 2b mit Fließlinien und Fließzonen in der neutralen Ebene

7.2.2 Beispiel 3: Isotrope Rechteckplatten



FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 6,558 \frac{kNm}{m}$	$h = 10,45 \text{ mm}$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 6,558 \frac{kNm}{m}$	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Stahl})$

Abbildung 7.6: Beispiel 3: Isotrope Rechteckplatte nach HAASE [50]

Die im vorliegenden Beispiel betrachtete Rechteckplatte geht mit den gegebenen Parametern auf HAASE [50] zurück, wobei die in Abschnitt 3.3.1 erläuterte Grenzgleichgewichtsmethode für Handrechnungen angewendet wurde. Die Abmessungen und die weiterhin benötigten Größen sind aus Abbildung 7.6 ersichtlich. Für die mit dem beschriebenen Schalelement durchgeführte Referenzberechnung wurde eine regelmäßige Netzdiskretisierung mit 19×26 Elementen gewählt. Unter der Annahme einer Stahlplatte mit den Materialdaten nach Tabelle 7.1 würden die Angaben der plastischen Momente einer äquivalenten Dicke von $h = 10,45 \text{ mm}$ entsprechen.

Beispiel 3a: Navierlagerung

Zu Anfang soll als einfachster Fall eine allseitig gelenkige Randlagerung untersucht werden. Da an den Plattenkanten keinerlei Momente aufgenommen werden

können, folgt mit $m'_{pl,i} = 0$ für sämtliche Einspannungsverhältnisse ein Faktor $\lambda'_i = 0$ und damit auch eine Vereinfachung der Gleichungen (3.24) und (3.25) für die reduzierten Seitenlängen. Mit den angegebenen Plattenabmessungen sowie einem Referenzwert von $m_{pl} = 6,558 \frac{kNm}{m}$ bleiben Letztere jeweils bei den ursprünglichen Längen $a_r = a = 5,20 \text{ m}$ und $b_r = b = 3,80 \text{ m}$. Gleichung (3.29) liefert schließlich eine Traglast von $p = 8,254 \frac{kN}{m^2}$ und aus (3.20) folgen als Parameter für die Lage der beiden Verzweigungspunkte $h_1 = h_3 = 2,18 \text{ m}$, sowie aus Symmetriegründen erwartungsgemäß $h_2 = h_4 = 1,90 \text{ m}$.

Zur Berechnung basierend auf der numerischen Implementierung der Fließlinientheorie muss zunächst eine geeignete Netzdiskretisierung gefunden werden. Das nach den Herleitungen aus Kapitel 6 entwickelte Generierungsprogramm liefert als erste Annahme die in Abbildung 7.7a dargestellte Versagensfigur, die durch die Verschneidung von gekippten Ebenen entstanden ist. Die vier polygonalen Teilplatten können jedoch nicht direkt für die Aufstellung der geometrischen Elementbeziehungen aus Abschnitt 5.2 verwendet werden. Hierfür wird zusätzlich eine Triangulierung notwendig, siehe Abbildung 7.7b, bei der im Vergleich zum vorigen Schritt die Fließlinien 25 und 46 hinzukommen (die Ziffern zu ihrer Bezeichnung werden im Weiteren stets von den Nachbarknoten abgeleitet). An ihnen tritt keine gegenseitige Verdrehung der angrenzenden Teilplatten auf, sodass diese nach wie vor als durchgängige Fläche agieren. Demzufolge wird dort auch keine Dissipationsarbeit verrichtet und das Ergebnis für die Traglast bleibt unbeeinflusst. Abbildung 7.7c zeigt dies anhand des Fließliniennetzes, das über den senkrecht zur Plattenebene stehenden Verschiebungsfreiheitsgrad gelegt wurde: Da sich die gegenseitigen Verdrehungen θ_{25} und θ_{46} zu Null ergeben, sind die Abstufungen der Teilplatten 2 und 3, sowie 5 und 6 zu den Verzweigungspunkten 5 und 6 hin identisch.

Bei der Berechnung werden die Werte der Handrechnung sowohl mit der Gradientenmethode als auch mit der direkten Suchstrategie exakt ermittelt. Abbildung 7.8 (links) bestätigt, dass die Finite-Element-Lösung im Bereich dieses Lastfaktors ebenfalls einen kinematischen Mechanismus erreicht.

Beispiel 3b: Allseitige Einspannung

Im nächsten Schritt soll dieselbe Platte an allen Seiten eingespannt werden. Die maximal aufnehmbaren Momente $m'_{pl,i}$ an den vier Plattenrändern entsprechen somit dem allgemein geltenden plastischen Moment m_{pl} ; das Momentenverhältnis ist demnach jeweils $\lambda'_i = 1$. Bei der Anwendung der Grenzgleichgewichtsmethode führt dies zu einer um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ veränderten reduzierten Seitenlänge, also $a_r = \frac{a}{\sqrt{2}} = 3,68 \text{ m}$ beziehungsweise $b_r = \frac{b}{\sqrt{2}} = 2,69 \text{ m}$. Die

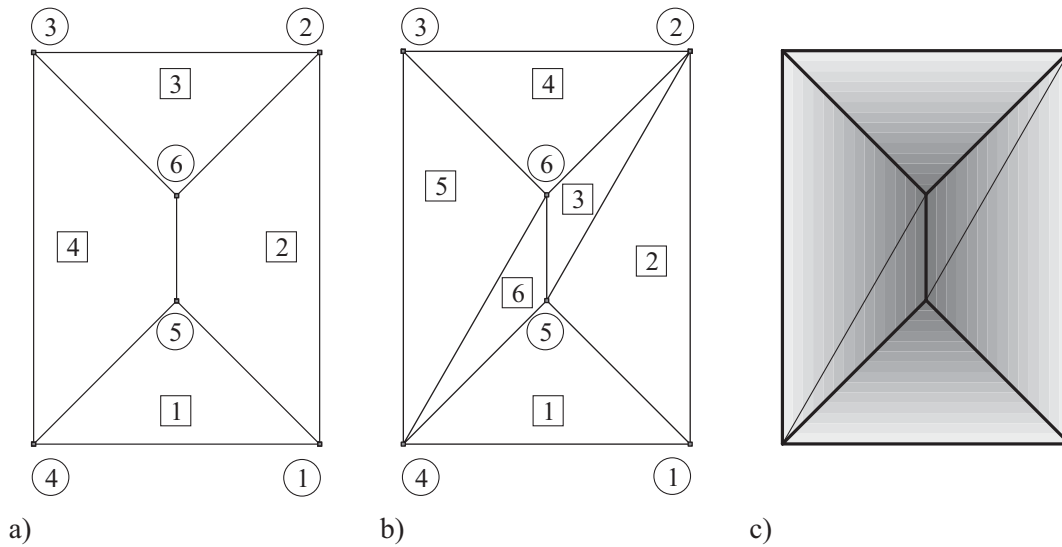


Abbildung 7.7: Isotrope Rechteckplatte

- a) Numerisch generierte Fließlinienfigur
- b) Triangulierung
- c) Fließliniennetz mit Durchsenkung

Position der beiden Verzweigungspunkte im Platteninneren bleibt hingegen unverändert, da die Einspanngrade von allen benachbarten Drehachsen – respektive Plattenkanten – in gleichem Maße verändert wurden. Die erreichte Traglast liegt nun bei $p = 16,51 \frac{kN}{m^2}$ und ist damit wegen der hinzugekommenen inneren Dissipationsenergie deutlich höher als zuvor. Auch hier liefert die Computerberechnung nach der Fließlinientheorie genau dieselben Resultate wie die Handrechnung, während seitens der Fließzonentheorie die Darstellung der von Mises-Vergleichsspannungen bereits eine in weiten Teilen durchplastizierte Platte aufweist. Der mittlere Plot der Abbildung 7.8 zeigt daher eine niedrigere Traglaststufe im Bereich von $p = 15,9 \frac{kN}{m^2}$. Dies bedeutet eine Abweichung von rund 3,7% bezüglich der Fließlinientheorie.

Beispiel 3c: Unterschiedlich gelagerte Ränder

Als dritte Variante wird die Lagerungsart der Plattenränder variiert. Die einzelnen Verhältnisse der Stützmomente sind $\lambda'_1 = 1$, $\lambda'_2 = 0$, $\lambda'_3 = 0$ und $\lambda'_4 = 1$, was jeweils einer Einspannung am linken und am unteren Rand bei ansonsten gelenkiger Lagerung entspricht.

Nach den Gleichungen (3.24) und (3.25) aus Abschnitt 3.3.1 ergeben sich für die Grenzgleichgewichtsmethode die reduzierten Seitenlängen $a_r = 4,31 m$ und $b_r = 3,15 m$. In der Folge liegen die Verzweigungspunkte an den von $h_1 = 2,56 m$

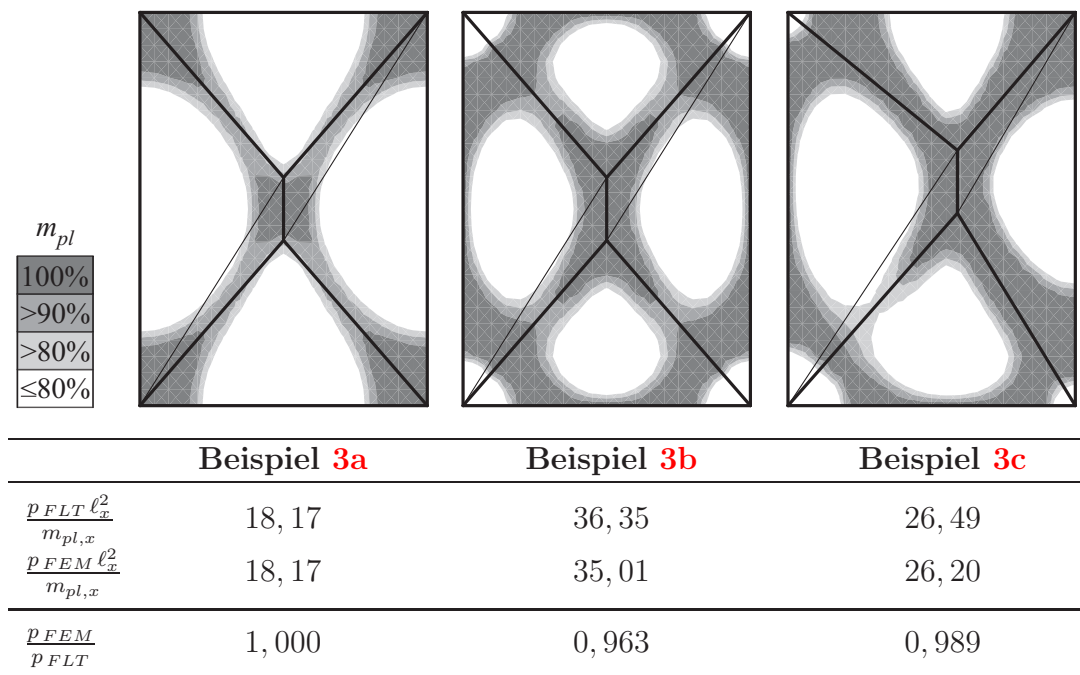


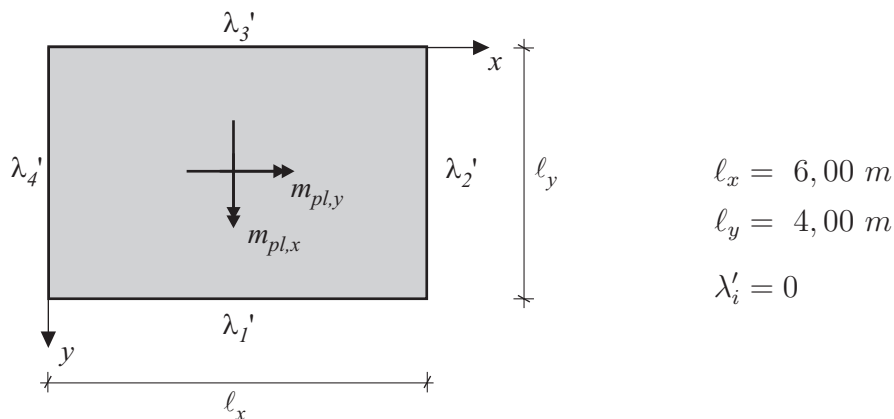
Abbildung 7.8: Gegenüberstellung der Beispiele 3a bis 3c mit Fließlinien und Fließzonen in der neutralen Ebene

und $h_2 = 1,57 \text{ m}$, sowie $h_3 = 1,81 \text{ m}$ und $h_4 = 2,23 \text{ m}$ definierten Stellen. Insgesamt beträgt die Traglast nach der Handrechnung $p = 12,03 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$. Sie stimmt wiederum mit den numerischen Ergebnissen der Fließlinientheorie überein. Die Finite-Element-Berechnung liefert auf der Basis des Schalenelements mit plastischen Eigenschaften einen Versagensmechanismus bei $p = 11,9 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$, einer Differenz von 1,1%. Dabei präsentieren sich allerdings die zu den gelenkig gelagerten Rändern strebenden Fließzonen – in Abbildung 7.8 rechts – schon stark plastiziert, während der Bereich zwischen den beiden eingespannten Kanten gerade erst zu fließen beginnt. Wie in der vorangegangenen Variante stellt sich auch hier beim Vergleich der Eckbereiche die Frage, ob die gewählte Modellierung den eintretenden Mechanismus trotz der guten Ergebnisse ausreichend genau widerspiegelt.

7.2.3 Beispiel 4: Orthotrop bewehrte Rechteckplatte

Im Bereich des Stahlbetonbaus kommt die affine Verzerrung der Plattengeometrie zur Anwendung – vergleiche Abschnitt 3.2.2 – um in x - und y -Richtung des Plattenfeldes verschiedene Bewehrungsgrade realisieren zu können. Von PARDEY [111] wird das Beispiel einer naviergelagerten Rechteckplatte angeführt, wie sie in Abbildung 7.9 gezeigt ist.

Aus Tafelwerken (CZERNY [20], STIGLAT & WIPPEL [135]) folgen nach der Elas-



FLT	FEM
$\mu = 2,53$	$h = 16,0 \text{ cm}$
$m_{pl,x} = 1,00 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$	$ f_{ck} = 3,0 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ (Beton C30/37)
$m_{pl,y} = 2,53 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$	$f_{y,k} = 5,0 \cdot 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ (Stahl BSt 500 M)

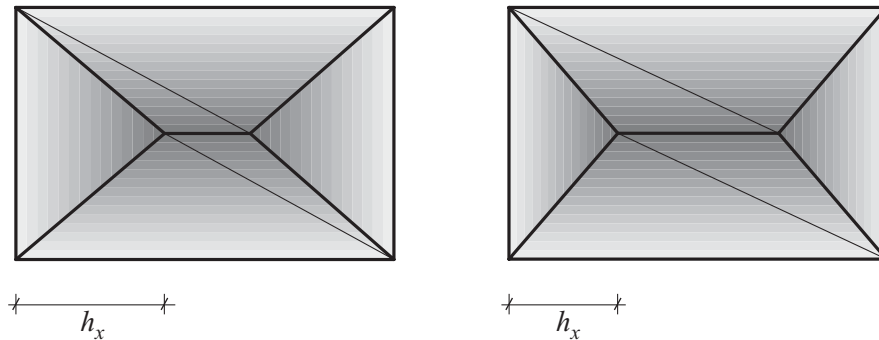
Abbildung 7.9: Beispiel 4: Orthotrop bewehrte Stahlbetonplatte nach PARDEY [111]

tizitätstheorie für die Feldmomente der Haupt- und Nebentragsrichtung die Werte

$$m_{pl,x} = \frac{p\ell_y^2}{34,7} \quad \text{sowie} \quad m_{pl,y} = \frac{p\ell_y^2}{13,7}$$

und mit Gleichung (3.5) dementsprechend der Orthotropiekoeffizient $\mu = 2,53$ – ungeachtet des absoluten Betrages von $m_{pl,y}$ als Bezugsmoment. Infolge der Gleichung (3.14) führt dies zu einer virtuellen Stauchung der y -Richtung mit dem Skalierungsfaktor $\lambda = 0,628$. Die Berechnung nach der Fließlinientheorie liefert schließlich den bezogenen Traglastfaktor $p = 12,92 \frac{m_{pl,y}}{\ell_y^2}$, wie er für dieses Verfahren auch von PARDEY angegeben wird. Demgegenüber weisen die dort beschriebenen Versuchsergebnisse und eine ebenfalls durchgeführte nichtlineare Vergleichsberechnung mit Werten im Bereich von $p = 13,9 \frac{m_{pl,y}}{\ell_y^2}$ beim Erreichen der Streckgrenze eine deutlich höhere Last auf. Dies ist allerdings auf eine zusätzliche Drillbewehrung in den Plattenecken zurückzuführen, deren zusätzliche Formänderungsarbeit von der Fließlinientheorie nicht erfasst wird.

In Abbildung 7.10 ist links das Ergebnis einer isotropen und rechts das einer orthotropen Bewehrungsführung dargestellt. Auffällig sind insbesondere die jeweils abweichenden Randabstände h_x der beiden Verzweigungspunkte, wobei natürlich in beiden Fällen nach wie vor eine doppelte Symmetrie vorliegt.



	Beispiel 4a isotrop	Beispiel 4b orthotrop
$\frac{p\ell_y^2}{m_{pl,y}}$	6,703	12,92
$\frac{h_x}{\ell_y}$	0,595	0,428

Abbildung 7.10: Vergleich der Beispiele 4a und 4b mit Fließlinien und vertikaler Durchsenkung

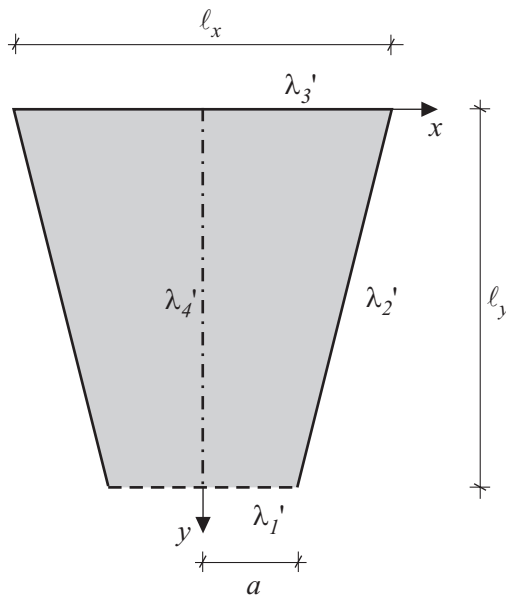
7.3 Geometriebetrachtung und Netzgenerierung

Neben Bewehrungsverhältnissen und Einspanngraden spielen bei der Ausprägung einer bestimmten Versagensfigur vor allem geometrische Gegebenheiten eine Rolle. Aus diesem Grund werden nun Einflüsse aus der Plattenform näher untersucht. Bei komplexeren Geometrien besteht zudem eine zentrale Schwierigkeit in der objektiven Auffindung der kinematisch zulässigen Mechanismen, die jedoch mit Hilfe des in Kapitel 6 entwickelten Verfahrens gelöst wird. Daher sollen in diesem Abschnitt auch die Aspekte der Netzgenerierung Beachtung finden.

7.3.1 Beispiel 5: Viereckplatte mit schrägem Rand

Ausgangspunkt für diese Untersuchung ist eine symmetrische Platte mit einem freien Rand, die sich zu diesem hin verengt, siehe Abbildung 7.11. Darüber hinaus besitzt auch ihre Oberseite die Fähigkeit zur Aufnahme von plastischen Momenten, sodass in positiven wie negativen Fließlinien gleichermaßen Dissipationsarbeit verrichtet wird.

Als Erstes muss ein geeignetes Versagensmuster gefunden werden, das den sich einstellenden Mechanismus ausreichend genau beschreiben kann. Abbildung 7.12 zeigt die numerisch ermittelte Annahme sowohl für die gesamte (a) als auch für die entlang der Symmetrieachse halbierte Platte (b) und deren Dreiecksvernet-



$$l_x = 1,00 \text{ m}$$

$$l_y = 1,00 \text{ m}$$

$$\lambda_1' = 0 ; \quad \lambda_2' = 0$$

$$\lambda_3' = 0 ; \quad \lambda_4' = 1$$

$$\text{Beispiel 5a: } a = 0,25 \text{ m}$$

$$\text{Beispiel 5b: } a = 0,50 \text{ m}$$

$$\text{Beispiel 5c: } a = 0,75 \text{ m}$$

FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$h = 4,082 \text{ mm}$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Stahl})$

Abbildung 7.11: Beispiel 5: Viereckplatte mit schrägen Kanten nach MCKEOWN et al. [92]

zung (c). Da es sich um zweierlei Modellierungen desselben Problems handelt, wird die Traglast in beiden Fällen erwartungsgemäß mit $p = 28,72 \frac{kN}{m^2}$ bestimmt.

Mit Hilfe von Beispiel 5a soll die Funktionsweise der numerischen Geometriefindung im Falle eines freien Randes veranschaulicht werden. Wie anhand der Abbildungen 7.12a und b nachzuvollziehen ist, wird für dessen Simulation die zugehörige Teilplatte (2 beziehungsweise 1 und 2) senkrecht zur x - beziehungsweise y -Achse umgeklappt. Aus diesem Grund sind bei der anfänglichen Vernetzung noch degenerierte Elemente sowie übereinander liegende Knoten – zum Beispiel 1 und 6 im mittleren Bild – zu finden, die für die in Abbildung 7.12c dargestellte Triangulierung eliminiert werden, vergleiche Abschnitt 6.3.

Von Interesse ist nun speziell die rechte obere Ecke der halbierten Platte. Abbildung 7.13 zeigt in Anlehnung an MCKEOWN et al. [92] drei geometrische Varianten, einmal mit einem spitzen (a), stumpfen (c), sowie einem rechten Winkel (b). Die frei gewählten Dreiecksnetze sind in der Lage, einen detaillierteren Eckmechanismus auszubilden und dienen jeweils als Ausgangspunkt eines anschließenden Optimierungsvorgangs.

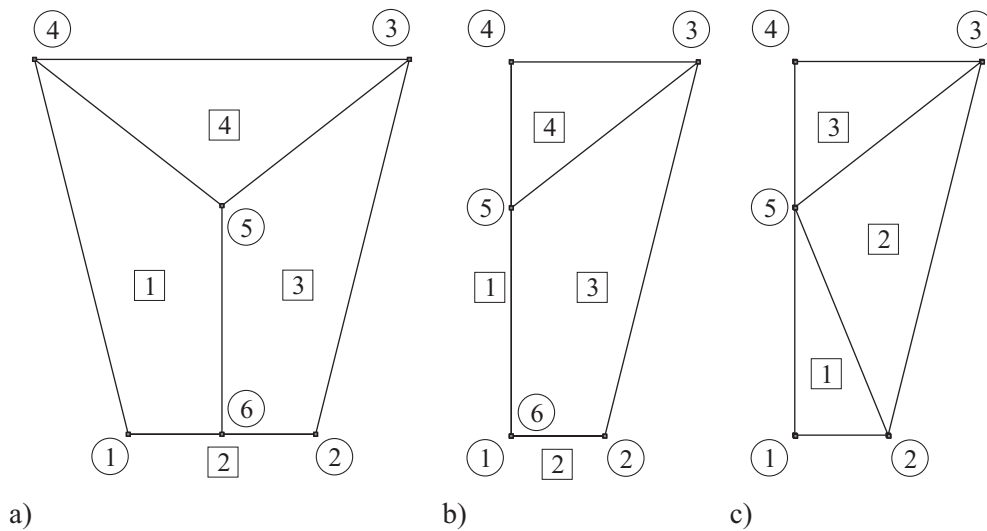


Abbildung 7.12: Numerisch generierte Fließlinienfiguren für Beispiel 5a

- a) Gesamtplatte
- b) halbe Platte
- c) triangulierte halbe Platte

Beispiel 5a: Spitzwinklige Plattenecke

Im Laufe der Geometrieverbesserung nähern sich die vom Verzweigungspunkt 6 in Richtung der Ecke strebenden Fließlinien 67 und 68 einander an, ohne sich jedoch zu verbinden, vergleiche Abbildung 7.13a. Im Gegensatz zu der zuvor ermittelten Traglast erhält man eine Verringerung auf $p = 28,55 \frac{kN}{m^2}$; auch die plastischen Zonen der Vergleichsrechnung bestätigen, dass sich ein veränderter Eckmechanismus einstellt, siehe linkes Bild in Abbildung 7.14. Dabei bewegt sich die Linie 78 in die Nähe des Knotens 3 und wird zu einer negativen Fließlinie, welche den geometrisch ungünstigen spitzen Winkel ausrundet. Demzufolge senkt dieser Vorgang die erzielte Traglast, obwohl durch die vorhandene obere Bewehrung ($m'_{pl} \neq 0$) ein zusätzlicher innerer Arbeitsanteil erzeugt wird, den die gelenkige Lagerung mit $\lambda'_i = 0$ nicht hervorgerufen hätte. Das zwischen den Knoten 3, 7 und 8 liegende Dreieck erfährt wegen des Widerspruchs, dass zwei seiner Kanten gleichzeitig Rotationsachsen sein müssten, keine Verdrehung und bleibt eben.

Beispiel 5b: Rechtwinklige Plattenecke

Das Verhalten des rechten Winkels wurde bereits in Abschnitt 7.2 eingehend analysiert. In Abbildung 7.13b liegt nun jedoch eine detailliertere Diskretisierung vor, die einen aufwendigeren Mechanismus ähnlich dem Beispiel 5a erlauben würde.

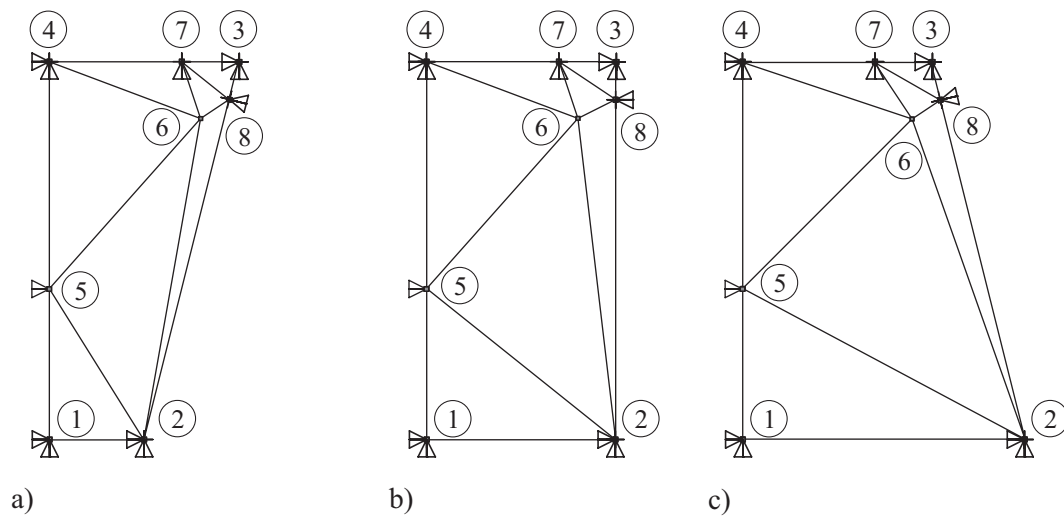


Abbildung 7.13: Ausgangsnetze der unterschiedlichen Beispielvarianten

- a) Beispiel 5a: Spitzwinklige Plattenecke
- b) Beispiel 5b: Rechtwinklige Plattenecke
- c) Beispiel 5c: Stumpfwinklige Plattenecke

Dennoch erweist sich im Laufe der Optimierung, dass sich die beiden vom Punkt 6 ausgehenden Fließlinien diesmal zusammenschließen und das Dreieck zwischen den Knoten 3, 7 und 8 nahezu verschwindet. Am Ende entsteht ein Versagensmuster, wie es auch schon in der Rechteckplattenserie aufgetreten ist. Somit bleibt es in diesem Fall – wie schon in den Beispielen 2 bis 4 – ohne Bedeutung, ob die Plattenoberseite ein plastisches Moment aufnehmen kann oder nicht.

Beispiel 5c: Stumpfwinklige Plattenecke

Als Pendant zum spitzen Winkel wird schließlich noch die Variante einer stumpfen Ecke betrachtet. Abbildung 7.13c zeigt auch hierfür das vorgegebene Netz, woraus sich im Laufe der Verbesserung erneut ein relativ einfacher Versagensmechanismus entwickelt.

In der Gesamtschau lässt sich mit Hilfe der Abbildung 7.14 feststellen, dass Winkel unter 90° im Laufe der Optimierung dazu neigen, die Ecke durch ein Abbrechen der Spitze auszurunden. Demgegenüber bilden sich bei stumpfen Winkeln relativ großflächige Fließzonen aus. Gleichzeitig ist die Plattenebene eher schwach gekrümmt, sodass die genaue Lage der Fließlinien einer gewissen Streuung unterworfen ist. Die Vergleichswerte der Fließzonentheorie – zugrunde liegt eine Stahlplatte mit einer äquivalenten Dicke von $h = 4,082 \text{ mm}$ – weisen zwar im vorliegenden Fall eine zufrieden stellende Übereinstimmung auf, lassen aber auch

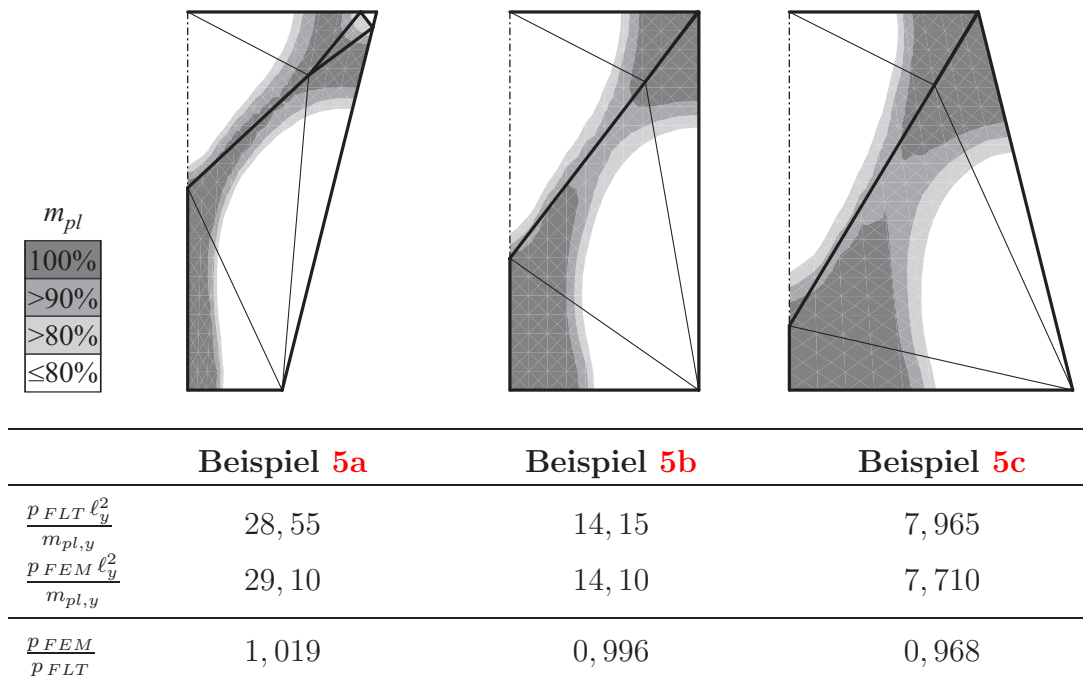


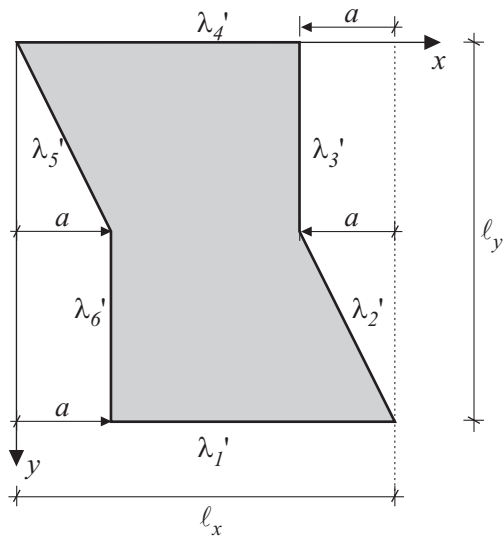
Abbildung 7.14: Beispiele 5a bis 5c am Ende der Optimierung mit Fließlinien und Fließzonen in der neutralen Ebene

erkennen, dass sowohl die Plattengeometrie insgesamt als auch örtlich begrenzte Einflüsse einer besonderen Betrachtung bedürfen.

7.3.2 Beispiel 6: Variation der Plattengeometrie

Um für zukünftige Berechnungen Anhaltspunkte zu gewinnen, inwiefern die Form einer Platte das Gesamtergebnis beeinflusst, wird die Geometrie einer Sechseckplatte verändert. Abbildung 7.15 erläutert, wie durch die entsprechende Wahl des Längenparameters a zwischen einer konvexen und einer konkaven Berandung variiert wird.

Betrachtet werden die beiden Konstellationen $a = -\frac{1}{4} \ell_x$ und $a = \frac{1}{4} \ell_x$, für die sich im Vorfeld der Optimierung wiederum das Problem der Bestimmung einer Fließliniengeometrie stellt. Die numerische Netzgenerierung liefert die in Abbildung 7.16 gezeigten Lösungen, wobei auffällt, dass für $a = \frac{1}{4} \ell_x$ trotz der eindeutigen Definition von sämtlichen Drehachsenrichtungen ϕ und Rotationswinkeln ω zwei mögliche Mechanismen existieren, vergleiche Abschnitt 6.1.



$$\ell_x = 1,00 \text{ m}$$

$$\ell_y = 1,00 \text{ m}$$

$$\lambda'_i = 0$$

$$\text{Beispiel 6a: } a = -0,25 \text{ m}$$

$$\text{Beispiel 6b: } a = 0,25 \text{ m}$$

FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$h = 4,082 \text{ mm}$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 0$	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \text{ (Stahl)}$

Abbildung 7.15: Beispiel 6: Variation der Plattengeometrie

Beispiel 6a: Konvexe Berandung

Für die von $a = -\frac{1}{4} \ell_x$ charakterisierte Variante mit konvexer Berandung ist die Diskretisierung eindeutig. Nach der Dreiecksvernetzung in Abbildung 7.17 ermittelt sich eine Traglast von $p = 17,43 \frac{kN}{m^2}$, die durch den Optimierungsvorgang auf den Betrag $p = 17,22 \frac{kN}{m^2}$ reduziert wird. Abbildung 7.18 zeigt, dass auch die Fließzonen der Finite-Element-Methode ein ähnliches Bild ergeben. Allerdings liegt die hierfür benötigte Traglast mit $p = 17,75 \frac{kN}{m^2}$ über dem Wert der Fließlinientheorie. Da die Umrandung der Platte einer Ellipsenform recht nahe kommt, treten trotz der zunehmenden Belastung nur moderate Krümmungen ein, sodass sich durchgehende Fließzonen erst relativ spät ausbilden. Folglich muss dieses Verhalten bei der Untersuchung von ähnlich strukturierten Plattentragwerken berücksichtigt werden, indem der Vergleich der Ergebnisse in einem früheren Stadium der Finite-Element-Berechnung erfolgt.

Beispiel 6b: Konkave Berandung

Schon beim ersten Schritt der numerischen Netzgenerierung in Abbildung 7.16 wurde deutlich, dass für diese Plattengeometrie zwei Fließlinienkonfigurationen

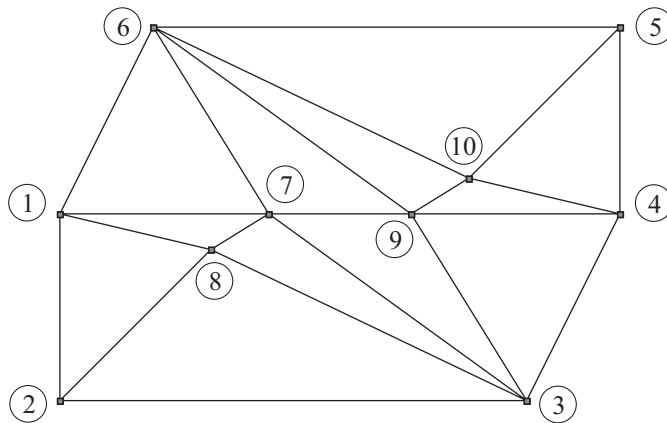
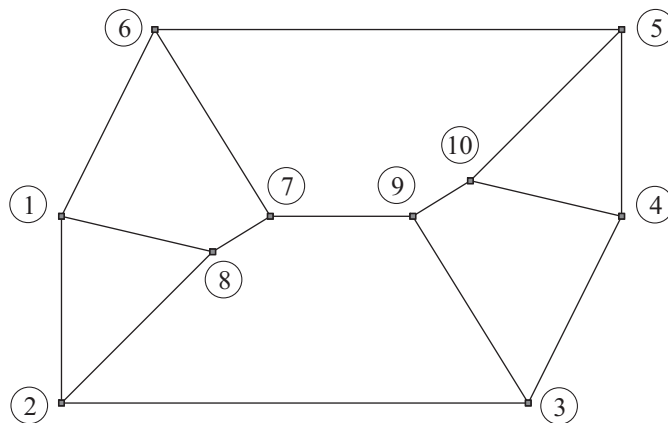
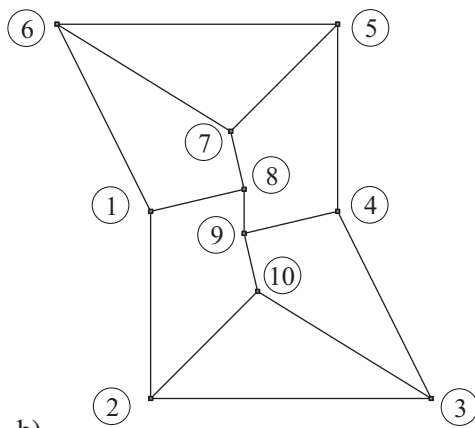


Abbildung 7.16: Numerisch generierte Fließlinienfiguren

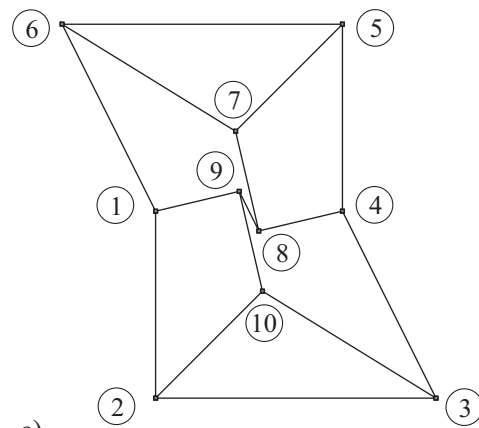
- a) Beispiel 6a
- b) Beispiel 6b: Erste Konfiguration
- c) Beispiel 6b: Zweite Konfiguration



a)



b)



c)

Abbildung 7.17: Dreiecksvernetzung für Beispiel 6a

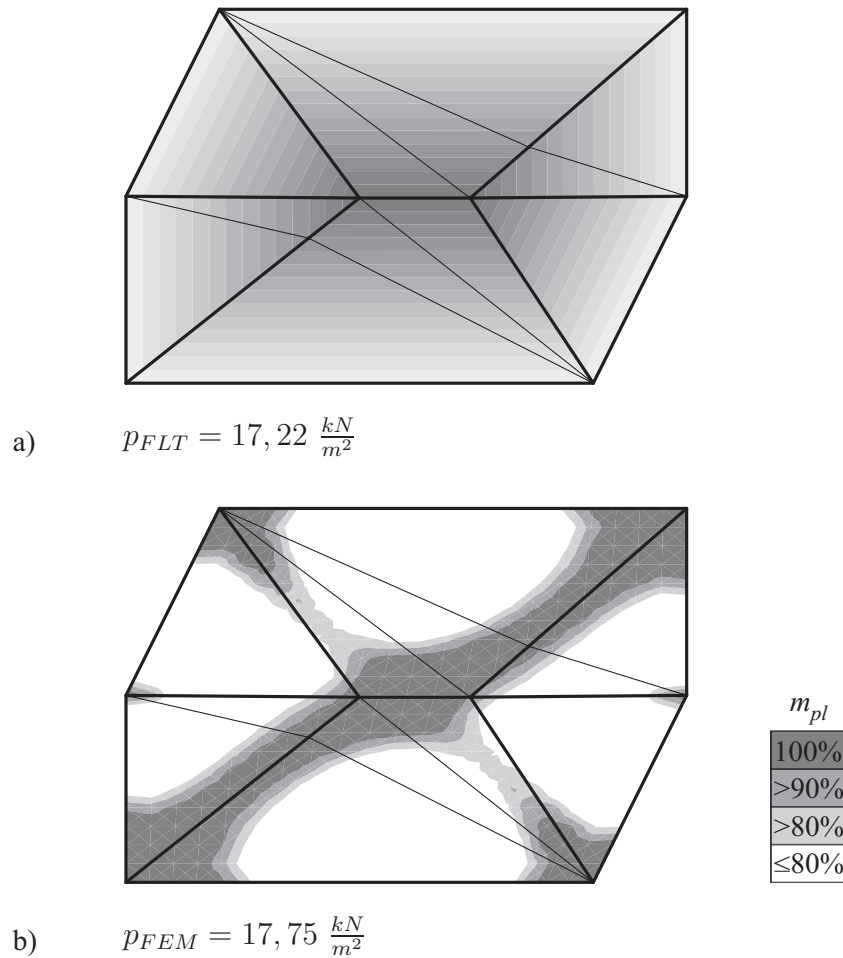


Abbildung 7.18: Beispiel 6a am Ende der Optimierung

- a) Fließliniennetz mit Durchsenkung
 b) Fließlinien und Fließzonen

gefunden werden, welche die Kriterien der Geometriebestimmung aus Abschnitt 6.2 erfüllen. Abbildung 7.19 zeigt die nachfolgende Verfeinerung zu einem Dreiecksnetz. Wegen des einfacheren und somit realistischeren Fließlinienverlaufs der Abbildung 7.19a wird schon intuitiv klar, dass die erzielte Traglast niedriger liegen muss als in Abbildung 7.19b. Bei den dargestellten Netzen bestätigt sich dies auch rechnerisch mit den Werten $p = 56,49 \frac{kN}{m^2}$ für 7.19a beziehungsweise $p = 58,46 \frac{kN}{m^2}$ für 7.19b. Da sich die Ergebnisse in derselben Größenordnung bewegen, unterscheiden sich auch die Versagensfiguren nur wenig, wie in der Abbildung erkennbar ist. Der günstigere Mechanismus liefert nach einem anschließenden Optimierungsprozess die Versagenslast $p = 56,06 \frac{kN}{m^2}$, vergleiche Abbildung 7.20a.

War die Ausbildung der Fließbereiche bei der vorhergehenden Konstellation noch in der Entstehung begriffen, so präsentiert sich die Platte in der Finite-Element-

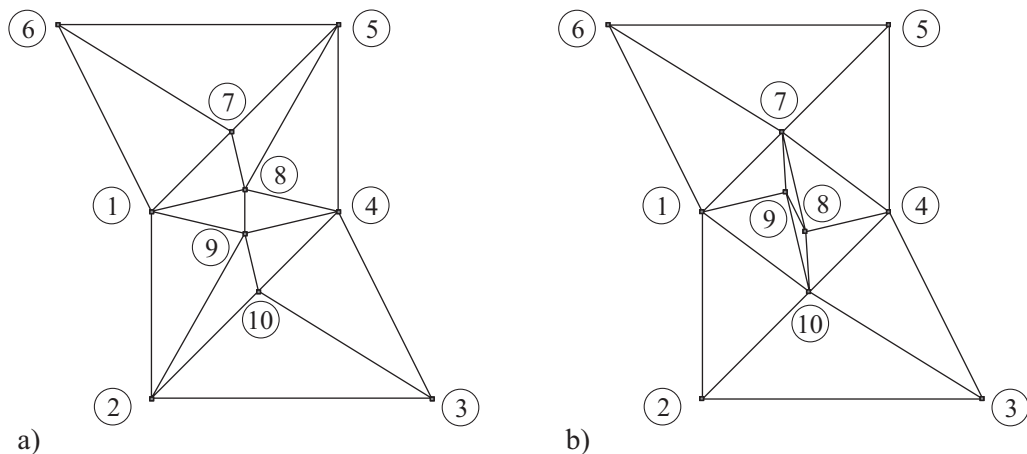


Abbildung 7.19: Dreiecksnetzungen für Beispiel 6b

- a) erste Konfiguration
b) zweite Konfiguration

Lösung im vergleichbaren Zustand bereits stark durchplastiziert. Abbildung 7.20b zeigt daher die plastizierenden Zonen bei einer Traglaststufe von $p = 54,40 \frac{kN}{m^2}$, also in diesem Fall unter dem Wert der Fließlinientheorie. Die Koordinaten der Verzweigungspunkte haben sich jedoch im Vergleich zur Ausgangslage in Abbildung 7.19a kaum verändert.

Es bleibt anzumerken, dass für die Berechnungen auf den Ansatz der plastischen Momente $m'_{pl,x}$ und $m'_{pl,y}$ an der Plattenoberseite verzichtet wurde, was prinzipiell nicht der Finite-Element-Modellierung entspricht. Da hierbei jedoch große

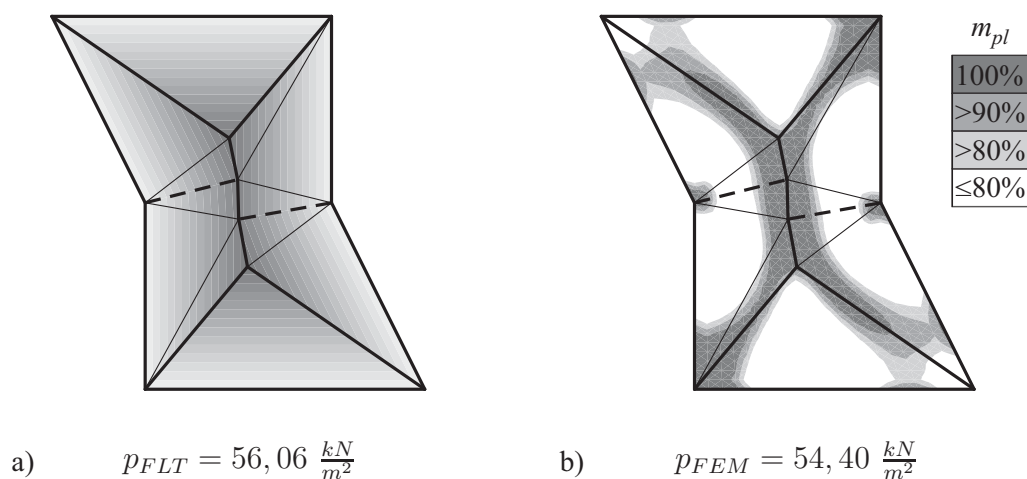


Abbildung 7.20: Beispiel 6b am Ende der Optimierung

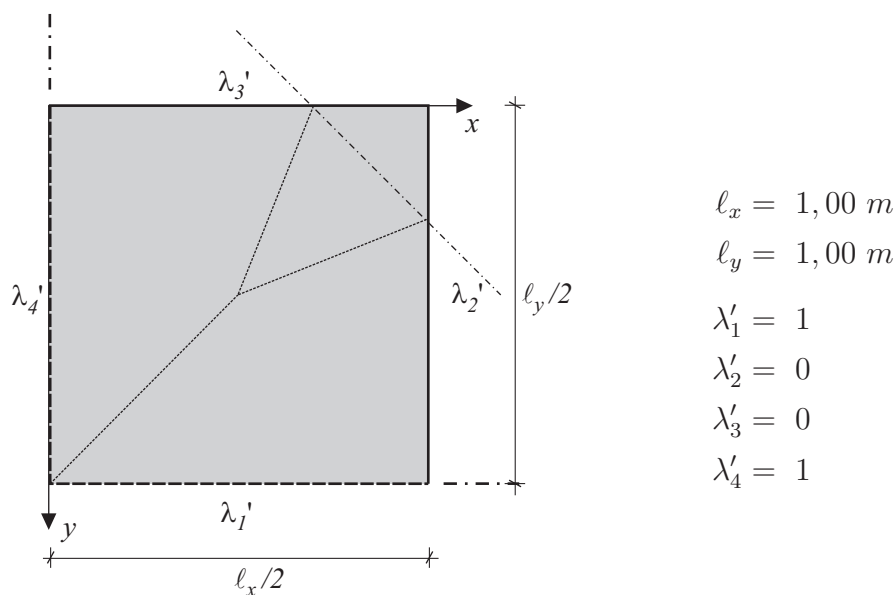
- a) Fließliniennetz mit Durchsenkung
b) Fließlinien und Fließzonen

Bereiche der Unterseite Zug aufweisen, während negative Fließlinien vom Rand bis weit in die Mitte des Plattenfeldes führen, liefert diese Annahme realistischere Vergleichswerte. Ein weiterer Aspekt wird im Zusammenhang mit fächerförmigen Eckmechanismen diskutiert, siehe Abschnitt 7.4.2.

7.4 Untersuchung lokaler Effekte

Die bisherigen Erfahrungen lassen erkennen, dass die gewählten Fließlinienfiguren Detailbereiche oft nur unzureichend abbilden. Dies äußert sich insbesondere in den Plattenecken, für die nun spezielle Lösungen in Form von Wippen und Fächern untersucht werden sollen. Deren theoretischer Hintergrund wurde im Abschnitt 3.4.3 ausführlich behandelt.

7.4.1 Beispiel 7: Plattenecke mit Wippe



FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$h = 4,082 \text{ mm}$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 1,00 \frac{kNm}{m}$	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Stahl})$

Abbildung 7.21: Beispiel 7: Quadratplattenecke mit Wippenmechanismus

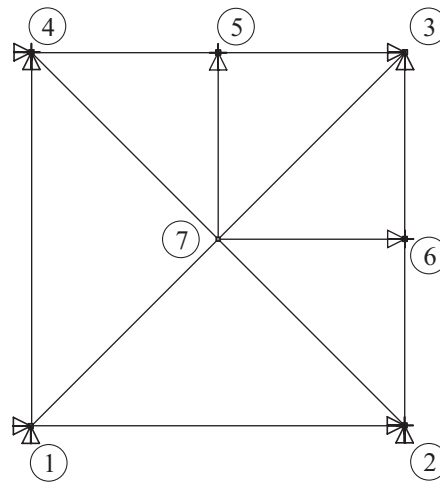


Abbildung 7.22: Verfeinerte Netzdiskretisierung im rechten oberen Viertel

Die erste Möglichkeit für einen lokalen Mechanismus ist die sogenannte Wippe, bei der eine nicht festgehaltene Plattenecke abheben kann. Im verankerten Zustand bildet sich entlang der Drehachse der Wippe eine negative Fließlinie aus, welche im Bereich der Ecke eine unverkippte Teilplatte begrenzt. Dieses Phänomen wurde zuvor bereits in Beispiel 5a beobachtet.

Als Anschauungsobjekt dient erneut die isotrope Quadratplatte aus Beispiel 2 mit Einheitswerten für die Kantenlängen sowie für die plastischen Momente. Dies gestattet einen direkten Vergleich der Traglastkoeffizienten, wie sie mit den Gleichungen (3.30) und (3.31) hergeleitet und in Abschnitt 7.2.1 bestätigt wurden. Zur Betrachtung des Eckbereichs wird das rechte obere Viertel der Platte herangezogen, das längs der Schnittachsen den Symmetrierandbedingungen entsprechend gelagert wird (Abbildung 7.21). Die Modellierung dieser Stellen erfolgt bei der Fließlinientheorie durch die Definition von freien Rändern, welche mit $m_{pl,S,u} = m'_{pl,S,u} = 1 \frac{kNm}{m}$ dennoch plastische Momente aufnehmen können. Die restlichen Kanten bleiben gelenkig gelagert. Abbildung 7.22 beschreibt außerdem ein geeignetes Netz, um den Fließlinienmechanismus darstellen zu können.

Während der Netzadaption im Zuge des Optimierungsvorgangs können sich die Knoten 5 und 6 entlang ihrer Kanten bewegen; die Eckknoten 2 und 4 hingegen sind gehalten, lediglich für 1 und 3 bleibt die Richtung senkrecht zur Plattenebene frei. Abbildung 7.23 zeigt die Fließlinien und die zugehörige Durchsenkung zu Beginn (a) und nach Beendigung der Optimierung (b). Die unterlegten Abstufungen veranschaulichen, wie sich die Versagensfigur inzwischen grundlegend verändert hat: Wo zuvor nur zwei Teilplatten existierten, ist nun eine zusätzliche Wippe mit abhebender Ecke entstanden.

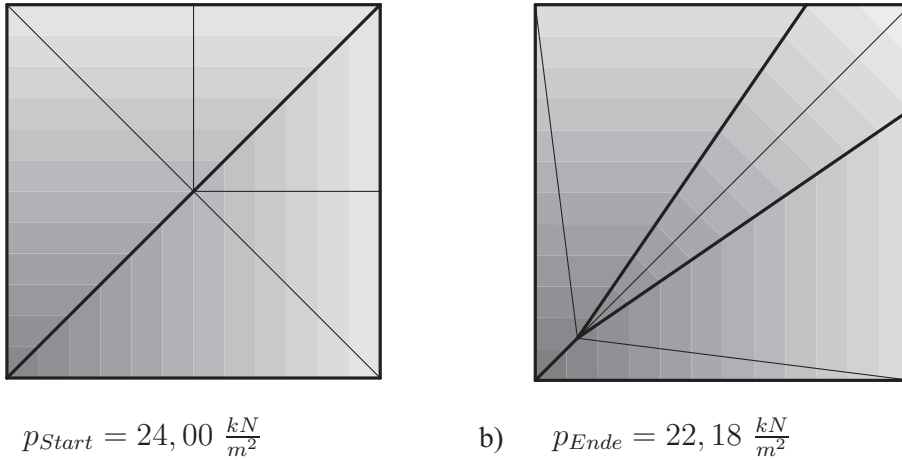


Abbildung 7.23: Wippenmechanismus mit Durchsenkung

a) Ausgangslage

b) Fließliniennetz nach der Optimierung

Die Rechnung belegt mit einer Traglastreduzierung auf $p = 22,18 \frac{kN}{m^2}$, dass sich der ursprüngliche Wert von $24 \frac{kN}{m^2}$ ohne eine obere Bewehrungslage um 7,5% senken lässt; PARDEY [111] nennt mit $p = 22,0 \frac{kN}{m^2}$ einen Betrag in einer ähnlichen Größenordnung. Nach Abschluss der Geometrieverbesserung hat sich für Beispiel 7 eine Wippe entwickelt, deren Fußpunkt im Knoten 7 in einer Entfernung von je $0,06 m$ zu den beiden Schnitten liegt. Da die Diagonale ebenfalls eine Symmetrieachse darstellt, nähern sich die Punkte 5 und 6 jeweils bis auf einen Abstand von $0,14 m$ an den Eckknoten 3 an.

7.4.2 Beispiel 8: Plattenecke mit Fächermechanismus

Ein in den Plattenecken weitaus häufiger auftretendes Phänomen sind Fächerstrukturen, bei denen sich die von der Plattenmitte kommende Fließlinie in zahlreiche auseinander strebende Linien verzweigt. Insbesondere bei Stahlbetonplatten entspricht dieses Verhalten viel eher einem realistischen Versagensmodus als die Wippe, weshalb Fächermechanismen in Versuchen und in der Literatur wesentlich intensiver studiert wurden. Genannt seien hierzu beispielsweise die Arbeiten von FOX [37], THAVALINGAM [141] und WOLFENSBERGER [150].

Beispiel 8a: Fächer mit freiem Fußpunkt

Zur Kontrolle soll erneut das rechte obere Plattenviertel aus Beispiel 2 verwendet werden. Das anfängliche Fließliniennetz wird manuell so gewählt, dass sich ein

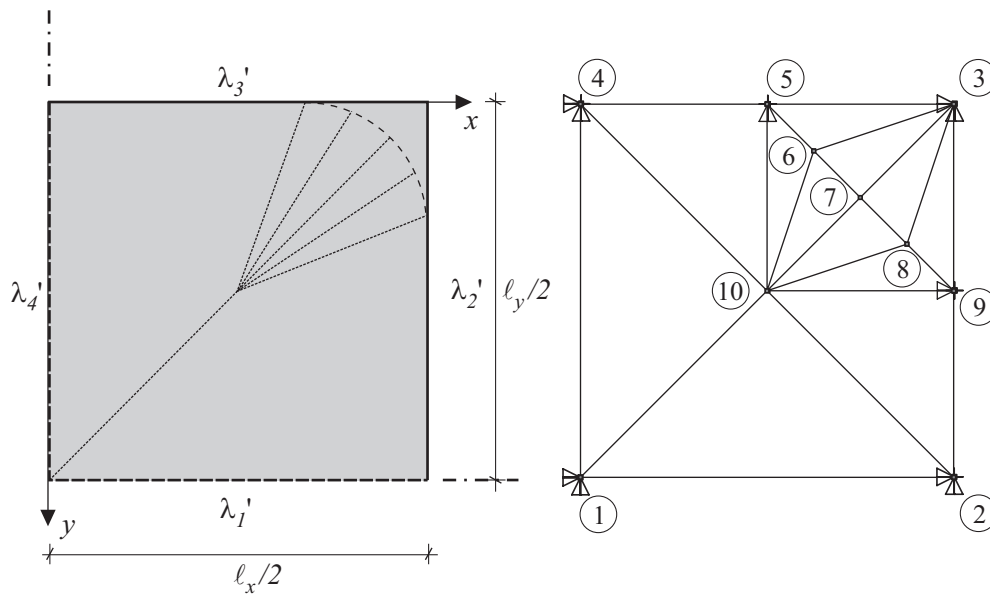
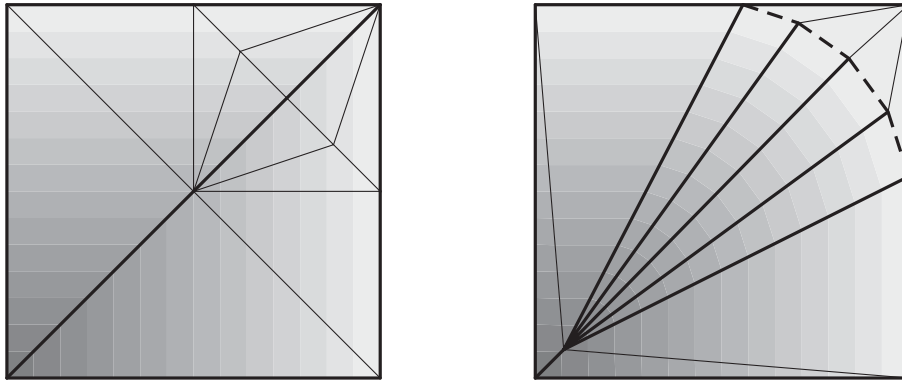


Abbildung 7.24: Beispiel 8a: Fächerförmige Vernetzung der Viertelplatte

Eckfächer einstellen kann, siehe Abbildung 7.24, wobei der Knoten 3 nun festgehalten ist. Außerdem werden die plastischen Momente der Oberseite, $m'_{pl,x}$ und $m'_{pl,y}$, zu Null gesetzt. Andernfalls würde das Auftreten eines Fächerbogens in Form von negativen Fließlinien verhindert, da eine gelenkige Randlagerung keinerlei Dissipationsarbeit verrichtet und dem Versagensmechanismus somit keinen Widerstand entgegensetzt.

In der Ausgangslage stellt sich zunächst wieder die einfachere, aber mit einem höheren Traglastfaktor verbundene Verschiebungsfigur ein (Abbildung 7.25a). Im Laufe des Optimierungsprozesses schieben sich jedoch die Knoten 5 bis 9 weit in die rechte obere Plattenecke hinein, sodass eine ausgerundete negative Fließlinie entsteht. Der Verzweigungspunkt der Fächerlinien wandert wie schon im vorigen Beispiel zur Mitte der Gesamtplatte und schließlich wird für Abbildung 7.25b die Traglast $p = 21,53 \frac{kN}{m^2}$ gefunden. Sie liegt somit im Bereich zwischen $p = 21,7 \frac{kN}{m^2}$ für Fächer mit kreisförmiger Ausrundung – siehe Gleichung (3.50) – und dem unter Zulassung eines hyperbolischen Linienverlaufs angegebenen Wert von $p = 21,4 \frac{kN}{m^2}$ (WOOD [151]). Dies lässt darauf schließen, dass sich die berechneten Traglasten bei zunehmender Verfeinerung der Auffächerung an diese Lösung annähern. Bei der Betrachtung der Durchsenkungen fällt ferner auf, dass die an den Eckpunkt 3 grenzenden Dreieckselemente keine Verkipfung erfahren. Das bedeutet, dass sie weder durch die Beisteuerung von äußerer Arbeit noch durch die Verrichtung von innerer Dissipationsarbeit in den Arbeitssatz eingehen.



a) $p_{Start} = 24,00 \frac{kN}{m^2}$

b) $p_{Ende} = 21,53 \frac{kN}{m^2}$

Abbildung 7.25: Fächer mit freiem Fußpunkt in Beispiel 8a

a) Ausgangslage

b) Fließliniennetz nach der Optimierung

Beispiel 8b: Fächer mit gehaltenem Fußpunkt

Als alternative Variante wird nun der Fächerursprung (Knoten 10 in Abbildung 7.24) mit dem in x - und y -Richtung fixen Punkt im Zentrum der Quadratplatte zusammengelegt, alle anderen Knoten bleiben an Ort und Stelle. Auf diese Weise vereinfacht sich die Geometrie der Viertelplatte zu der in Abbildung 7.26 gezeigten Darstellung.

Im vorliegenden Fall ist insbesondere die Startsituation von Interesse. Abbildung 7.27a lässt erkennen, dass hier nicht der bisherige Standardmechanismus

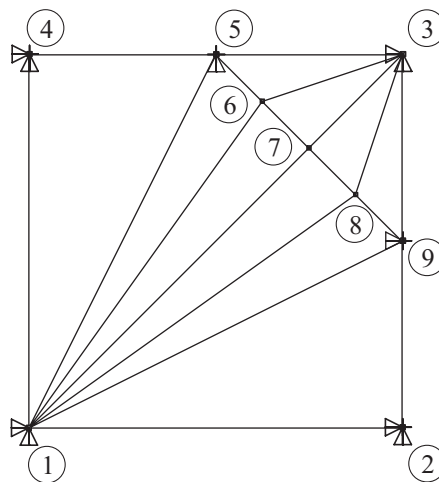
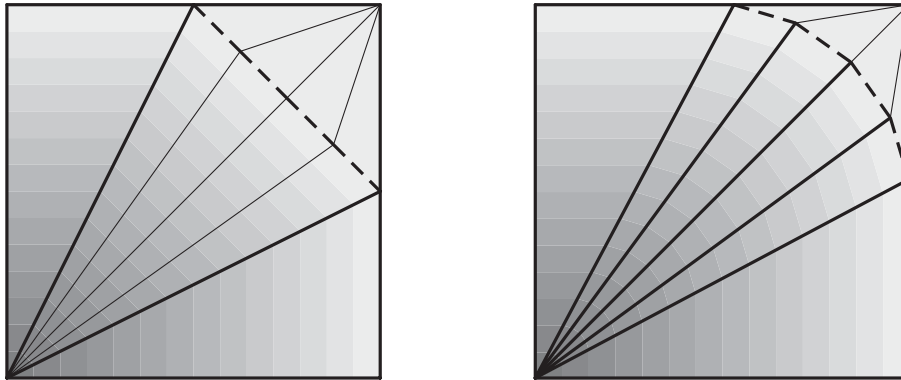


Abbildung 7.26: Beispiel 8b: Viertelplatte mit gehaltenem Fächerfußpunkt



a) $p_{Start} = 22,86 \frac{kN}{m^2}$

b) $p_{Ende} = 21,54 \frac{kN}{m^2}$

Abbildung 7.27: Fächer mit gehaltenem Fußpunkt in Beispiel 8b

a) Ausgangslage

b) Fließliniennetz nach der Optimierung

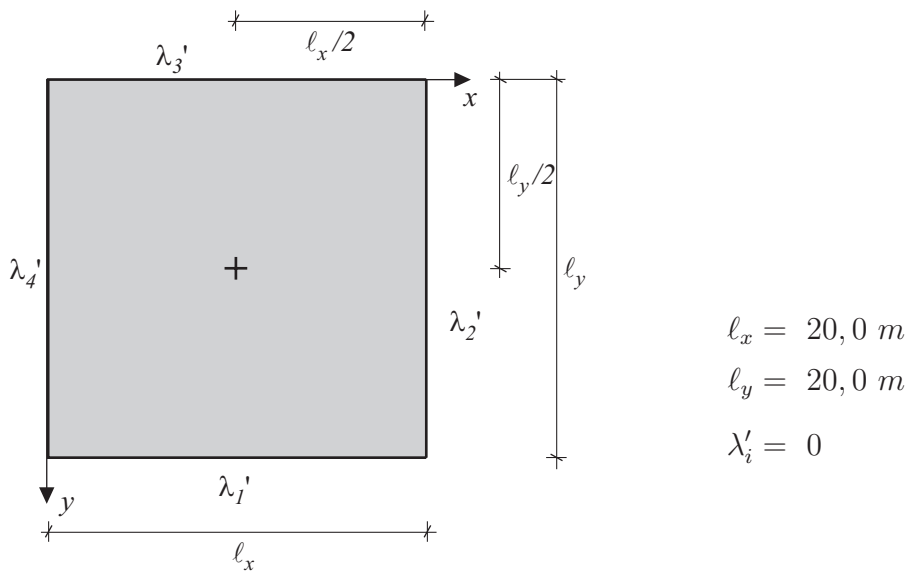
als Ausgangspunkt dient, sondern eine bereits mit einem niedrigeren Lastfaktor ($p = 22,86 \frac{kN}{m^2}$) behaftete Figur, die über die Gesamtplatte gesehen ein Oktagon bildet. Die optimierte Lösung gleicht mit $p = 21,54 \frac{kN}{m^2}$ und der Abbildung 7.27b abermals dem bekannten Ergebnis aus Beispiel 8a. Der Unterschied in der Lage des Fächerfußpunktes ist demnach nur unwesentlich und lässt sich durch den flachen Verlauf der Durchbiegung in der Mitte des Plattenfeldes erklären.

7.4.3 Beispiel 9: Quadratplatte mit Einzelstütze

Dass auch punktuelle Einwirkungen einen entscheidenden Einfluss auf das Versagensbild haben, beweist das letzte Beispiel in diesem Abschnitt. Betrachtet wird wieder das rechte obere Viertel einer naviergelagerten Quadratplatte, in deren Mittelpunkt eine Einzelstütze steht, siehe Gesamtbild in Abbildung 7.28. Der Untersuchung von PARK & GAMBLE [112] liegt eine Stahlbetonplatte zugrunde, deren obere und untere Bewehrung sich mit $m'_{pl} \neq m_{pl}$ unterscheiden.

Beispiel 9a: Grobe Triangulierung

Zunächst soll eine grobe Vernetzung analog zu der in der Literatur beschriebenen Variante analysiert werden. Abbildung 7.29 zeigt eine willkürlich gewählte Ausgangssituation, die in der Lage ist, den Mechanismus auszubilden. Die Einzelstützung befindet sich dabei im Knoten 1 an der linken unteren Ecke der Viertelplatte. Beim ersten Iterationsschritt stellt sich eine recht aufwendige Fließlinienfigur ein (Abbildung 7.30a), die auf eine hohe Traglast schließen



FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 50 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$	$h = 30,0 \text{ cm} ; \quad z = 0,67h$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 100 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$	$f_{y,k} = 5,0 \cdot 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$ (Stahl BSt 500 M)
	$a_{su} = 5,0 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} ; \quad a_{so} = 10,0 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$

Abbildung 7.28: Beispiel 9: Quadratplatte mit Einzelstütze nach PARK & GAMBLE [112]

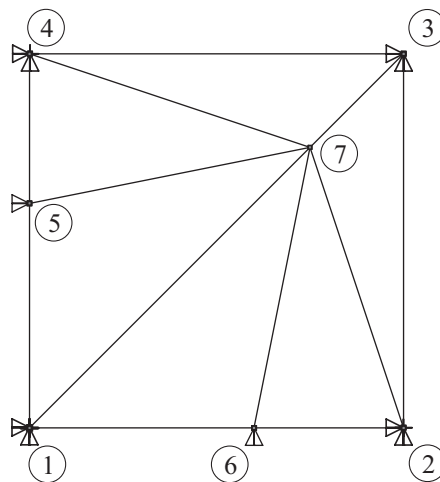


Abbildung 7.29: Beispiel 9a: Grob vernetzte Viertelplatte

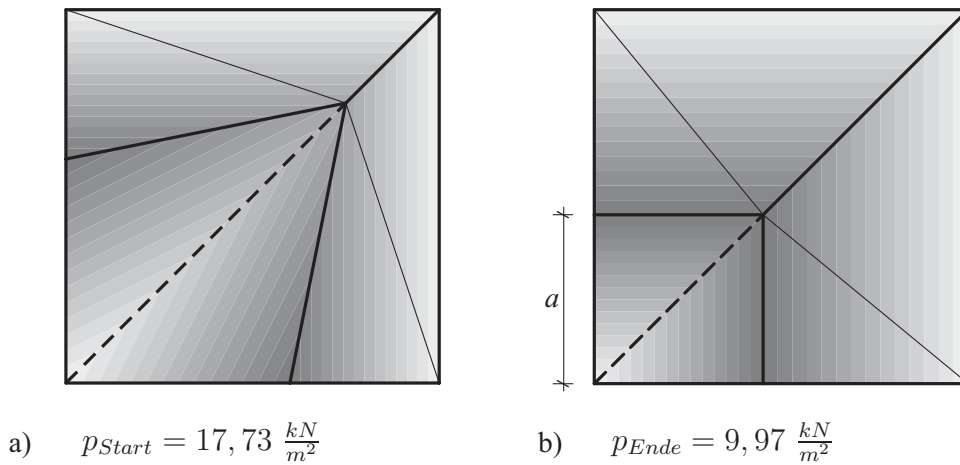


Abbildung 7.30: Grobes Fließliniennetz mit Durchsenkung

a) Ausgangslage

b) Fließliniennetz nach der Optimierung

lässt. Angefangen mit einem Betrag von $p = 17,73 \frac{kN}{m^2}$ reduziert sich die Traglast bis auf $p = 9,97 \frac{kN}{m^2}$, wobei sich um die Stütze herum eine parallel zu den Außenkanten der Platte verlaufende positive Fließlinie bildet, siehe Abbildung 7.30b. Da der jeweils freie untere und linke Rand aus Symmetriegründen eine zum Platteninneren gleichwertige Einspannung erhält, stehen die herauslaufenden Fließlinien erwartungsgemäß senkrecht zu den geschnittenen Kanten. Der Abstand zur Stütze beträgt bei beiden $a = 4,51 \text{ m}$.

Beispiel 9b: Netzverfeinerung

Von einem Startpunkt nahe dem Endergebnis des Beispiels 9a geht die verfeinerte Netzgeometrie aus, welche Abbildung 7.31 zeigt. Da die Distanz a nun der Einfachheit halber auf $a = \frac{1}{4} \ell_y$ gesetzt wird, liegt die Ausgangstraglast mit $p = 10,00 \frac{kN}{m^2}$ geringfügig über dem zuvor ermittelten Minimum.

Zuletzt befand sich Knoten 7 noch relativ weit von der Einzelstütze entfernt. Nun wandern er und seine beiden Nachbarpunkte 6 und 8 näher an die Stütze heran, wodurch um sie herum ein polygonaler Durchstanzkegel entsteht. Auf diese Weise wird eine weiter verringerte Traglast von $p = 8,60 \frac{kN}{m^2}$ erreicht. Abbildung 7.32 stellt wiederum Anfang und Ende des Optimierungsprozesses gegenüber. Bemerkenswert ist, dass die beiden von den Knoten 1, 6, 7 und 8 umschlossenen Teilplatten eine Einheit bilden. Für die Gesamtplatte ergibt sich daraus ein achtflächiger Durchstanzkegel um die Mittelstütze mit einem Radius von $a = 5,26 \text{ m}$.

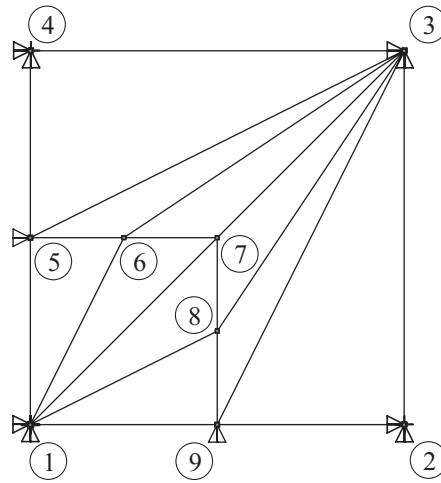
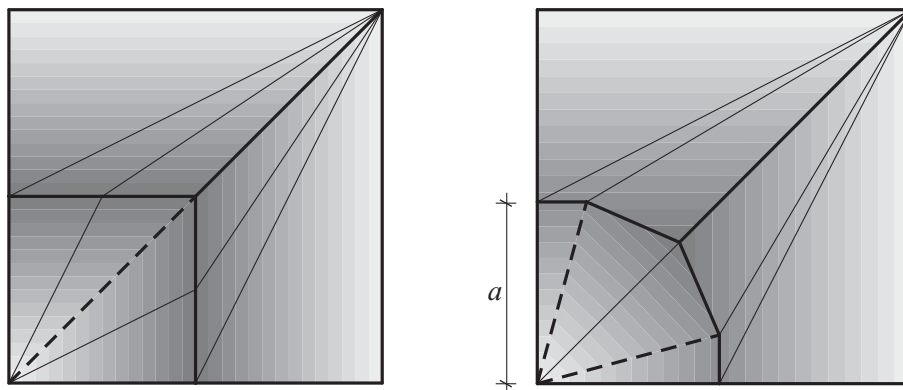


Abbildung 7.31: Beispiel 9b: Verfeinertes Fließliniennetz



a) $p_{Start} = 10,00 \frac{kN}{m^2}$

b) $p_{Ende} = 8,60 \frac{kN}{m^2}$

Abbildung 7.32: Verfeinertes Fließliniennetz mit Durchsenkung

a) Ausgangslage

b) Durchstanzkegel nach der Optimierung

Beispiel 9c: Gleiche Bewehrungsführung

Zum Vergleich sei nochmals dieselbe Situation mit einer angeglichenen Bewehrung in der Plattenoberseite ($m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 50 \frac{kN}{m^2}$) angeführt. Aufgrund der reduzierten plastischen Momente m'_{pl} fällt die nach Beendigung des Berechnungsdurchlaufs erzielte Traglast mit $p = 5,11 \frac{kN}{m^2}$ niedriger aus als vorher. Interessant ist jedoch, dass der Bruchkegel um die Einzelstützung jetzt eine Zwölfeckform aufweist: Die verringerte obere Bewehrung erleichtert die Ausbildung von negativen Fließlinien an der Oberseite, vergleiche Abbildung 7.33a. Der Radius des Durchstanzkegels beträgt nur noch $a = 2,80 m$.

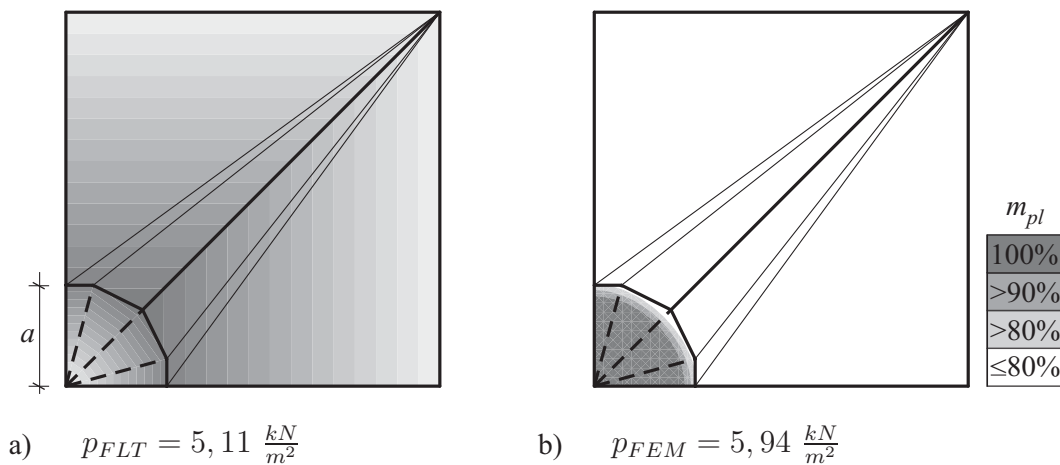


Abbildung 7.33: Gleiche Bewehrungsführung in Beispiel 9c

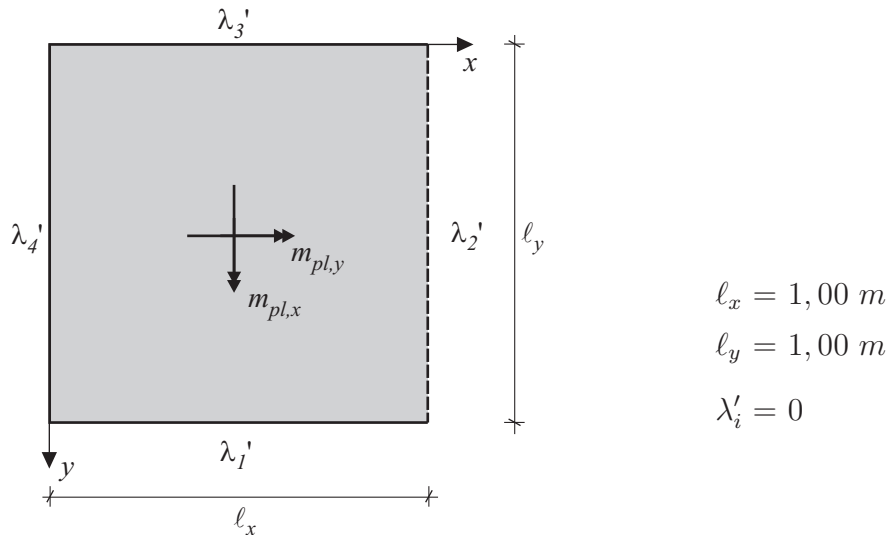
- a) Fließliniennetz mit Durchsenkung
b) Fließlinien und Fließzonen

Abbildung 7.33b zeigt die plastischen Zonen einer Finite-Element-Berechnung bei derselben Laststufe und belegt die Übereinstimmung in der radialen Ausdehnung. Nachdem jedoch eine punktuelle Singularität vorliegt und damit ein lokales Versagen, vergleiche PUCHER [116], ist in solchen Fällen die numerisch erreichte Gesamttraglast stets mit Vorsicht zu betrachten, da die verbleibende Plattenfläche noch immer eine Resttragfähigkeit besitzt. So erreicht die endgültige Versagenslast der Fließzonentheorie einen Wert von $p = 5,94 \frac{kN}{m^2}$ und liegt damit über dem Ergebnis der Fließlinientheorie.

7.5 Vergleich der Optimierungsansätze

In diesem Abschnitt wird anhand von zwei konkreten Fallbeispielen die Funktionsweise des Gradientenverfahrens näher erläutert. Hierbei sind insbesondere die Vorgänge beim Auftreten einer Degenerierung von Interesse. Eine Vorstellung über Dimension und Zusammenbau eines Optimierungstableaus, wie es in Abschnitt 5.2.3 beschrieben wurde, bietet das nachfolgende Beispiel einer isotropen Quadratplatte. Es wurde mehrfach in den Veröffentlichungen von JENNINGS [63], MCKEOWN [92] sowie THAVALINGAM [140] angeführt, und in Anlehnung an die dort gewählten Zahlenwerte sei allgemein ein idealisiertes plastisches Moment mit $m_{pl} = 1 \frac{kNm}{m}$ angenommen.

7.5.1 Beispiel 10: Quadratplatte mit freiem Rand

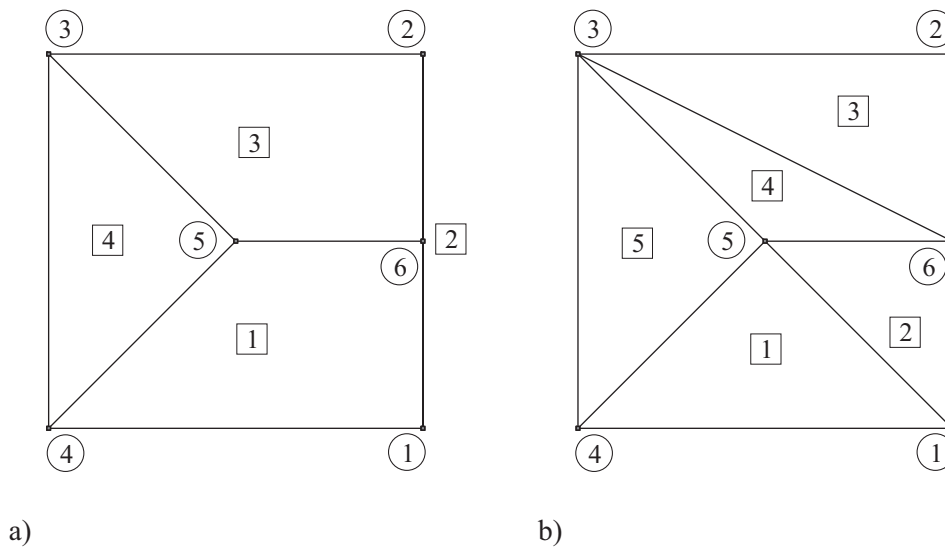


FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 1,00 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$	$h = 4,082 \text{ mm}$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 1,00 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$	$f_{y,k} = 2,4 \cdot 10^5 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \quad (\text{Stahl})$

Abbildung 7.34: Beispiel 10: Quadratplatte mit freiem Rand

Betrachtet wird die in Abbildung 7.34 dargestellte quadratische Platte mit den Kantenlängen $\ell_x = \ell_y = 1 \text{ m}$, die an drei Seiten gelenkig gelagert ist; der rechte Rand sei frei. Abbildung 7.35a zeigt das Ergebnis einer einfachen Netzgenerierung, die drei zusammenhängende Teilplatten hervorbringt, aus denen nach der Triangulierung insgesamt fünf Dreiecksplatten entstanden sind (Abbildung 7.35b). Im anschließenden Optimierungsprozess werden mit diesem Netz dieselben Ergebnisse erzielt wie mit der veränderten Diskretisierung in Abbildung 7.36. Mit ihrer Hilfe soll untersucht werden, inwieweit der Algorithmus in der Lage ist ein symmetrisches Fließliniennetz auszubilden.

Gemäß der Methode von MUNRO & DAFONSECA [101] wird für diese – kinematisch zulässige – Annahme einer Fließlinienfigur ein Optimierungstableau nach Gleichung (5.36) aufgestellt. Dabei bestimmt die Anzahl n der Elementkanten und deren relative Verdrehwinkel θ die Zahl der Nebenbedingungen und somit die der Zeilen. Die Spaltenzahl entspricht wegen der Nichtnegativitätsbedingung der doppelten Menge an Verdrehungs- und Verschiebungsfreiheitsgraden. Weil grundsätzlich jeder Punkt einen Freiheitsgrad w senkrecht zur Plattenebene be-

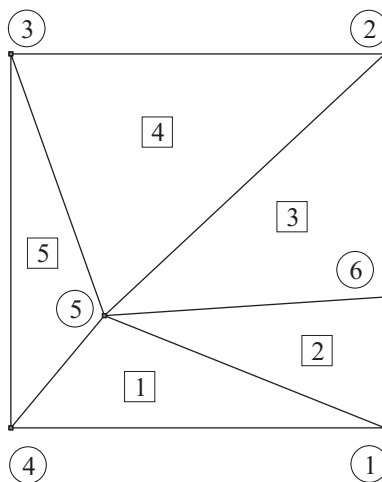
**Abbildung 7.35:** Quadratplatte mit freiem Rand

a) Numerisch generierte Fließlinienfigur

b) Triangulierung

sitzt, erhält man $m = 6$ Verschiebungen zu $n = 10$ Elementkanten und kommt auf das schematische Optimierungstableau \mathbf{A} nach Abbildung 7.37.

Die Zahl der ursprünglich elf Tableauzeilen reduziert sich auf $n_Z = 9$, da an den beiden freien Elementkanten entlang der Punkte 1, 6 und 2 keine Momente übertragen werden. Aufgrund der Einteilung von \mathbf{A} in eine quadratische Basismatrix \mathbf{A}_B der Form $n_Z \times n_Z$ und in eine Nichtbasismatrix \mathbf{A}_N – vergleiche Abschnitt 4.2.2 – liefert der Simplex-Algorithmus ebenfalls einen Lösungsvektor \mathbf{x}_B der

**Abbildung 7.36:** Manuelle Diskretisierung

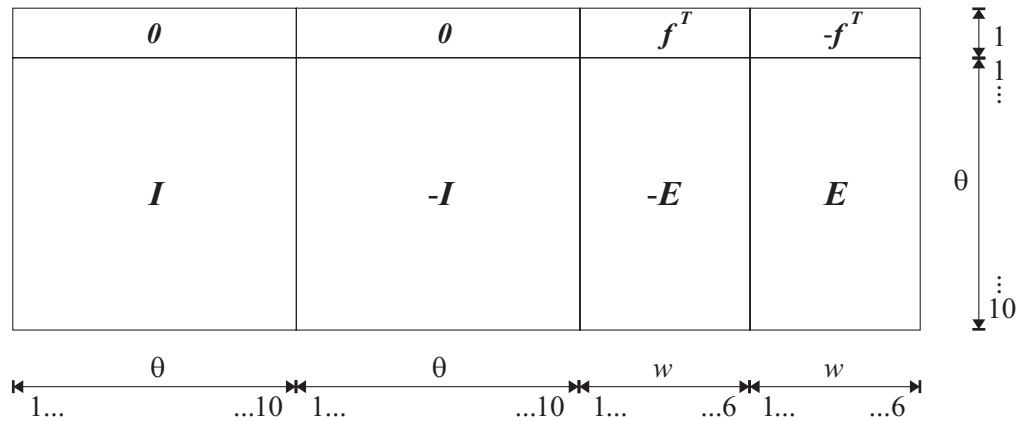
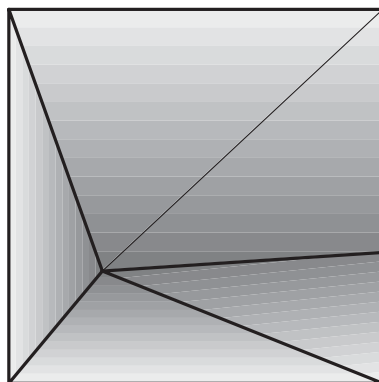
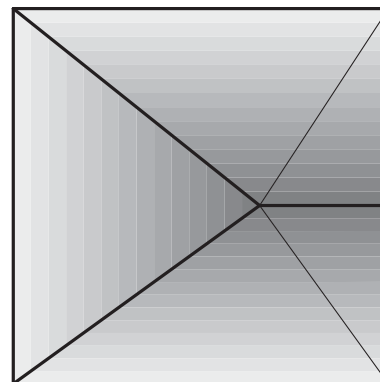


Abbildung 7.37: Schematisches Optimierungstableau **A**

Größe $n_Z = 9$. Nachdem bereits zwei Ergebniswerte auf die Vertikalverschiebungen der beiden Verzweigungspunkte 5 und 6 entfallen, verbleiben nur noch sieben Lösungsvariablen zur Bestimmung von Drehwinkeln. Davon müssen drei Werte ungleich Null für die gelenkige Randlagerung vorgesehen werden, sodass schließlich noch vier Ergebnisse für die fünf Fließlinien im Plattenfeld zur Verfügung stehen. Abbildung 7.38a zeigt, dass θ_{25} verschwindet und die Plattenteile 3 und 4 eine Einheit bilden. Wie ein Blick auf das endgültige Fließliniennetz in Abbildung 7.38b verdeutlicht, und wie es auch Abbildung 7.35a bereits nahelegte, entstehen am Ende des Iterationsprozesses jedoch lediglich drei Fließlinien. Folglich muss der vierte Winkel – obwohl er Teil der Basisvariablen ist – ebenfalls Null werden.



a) $p_{Start} = 19,71 \frac{kN}{m^2}$



b) $p_{Ende} = 14,14 \frac{kN}{m^2}$

Abbildung 7.38: Manuelle Diskretisierung mit Durchsenkung

a) Ausgangslage

b) Fließliniennetz nach der Optimierung

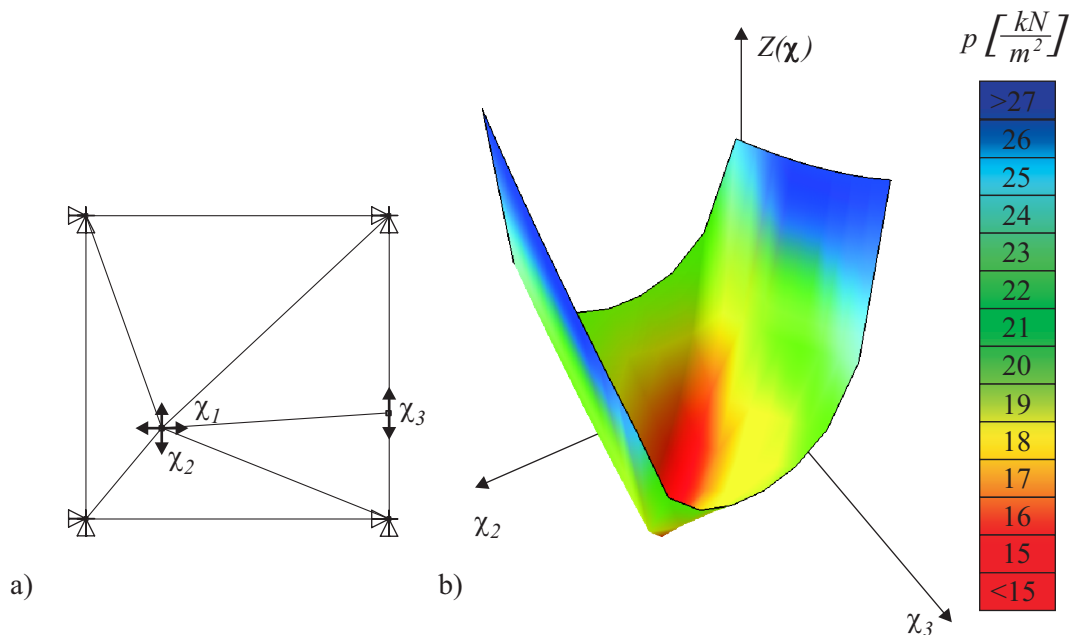


Abbildung 7.39: Quadratplatte mit freiem Rand

a) Suchfreiheitsgrade χ

b) Optimierungslandschaft

Auf der Suche nach einem Minimum stehen im vorliegenden Beispiel drei Freiheitsgrade χ zur Verfügung: Die Bewegung des Verzweigungspunktes 5 in x - und y -Richtung sowie die des Knotens 6 entlang des Plattenrandes, siehe Abbildung 7.39a. Im Laufe der Optimierung mit Hilfe der Gradientenmethode kann es also passieren, dass die beiden relativen Verdrehwinkel θ_{15} und θ_{25} ihre Zugehörigkeit zu den Variablen \mathbf{x}_B und \mathbf{x}_N tauschen. In diesem Fall liegt eine Degenerierung vor, wie sie in Abschnitt 5.4.3 beschrieben wurde. Aufgetragen über die beiden Freiheitsgrade in y -Richtung, χ_2 und χ_3 , formen die zugehörigen Traglastwerte eine Optimierungslandschaft, die in Abbildung 7.39b dargestellt ist. Da die beiden Relativverdrehungen an den Stellen $\chi_2 = \chi_3$ verschwinden, verläuft entlang dieser Linie die Grenze zwischen zwei Bereichen, welche durch unterschiedliche Basislösungen bestimmt sind – vergleiche Abbildung 5.7. Es ist zu beachten, dass natürlich auch die dritte Suchrichtung χ_1 die Zielfunktion der Traglast beeinflusst. Die Degenerierung ist hiervon jedoch unabhängig, da ein Verschieben des Punktes 5 entlang χ_1 im Falle von $\chi_2 = \chi_3$ keine Änderung der Winkel θ_{15} und θ_{25} bewirkt. Deshalb besitzt dieses Beispiel bei einer Traglast von $p = 14,14 \frac{kN}{m^2}$ ein globales Minimum, das sowohl vom Gradientenverfahren als auch von der direkten Suchmethode problemlos erreicht wird. Abbildung 7.40 zeigt jedoch Unterschiede im Iterationsverlauf. Die

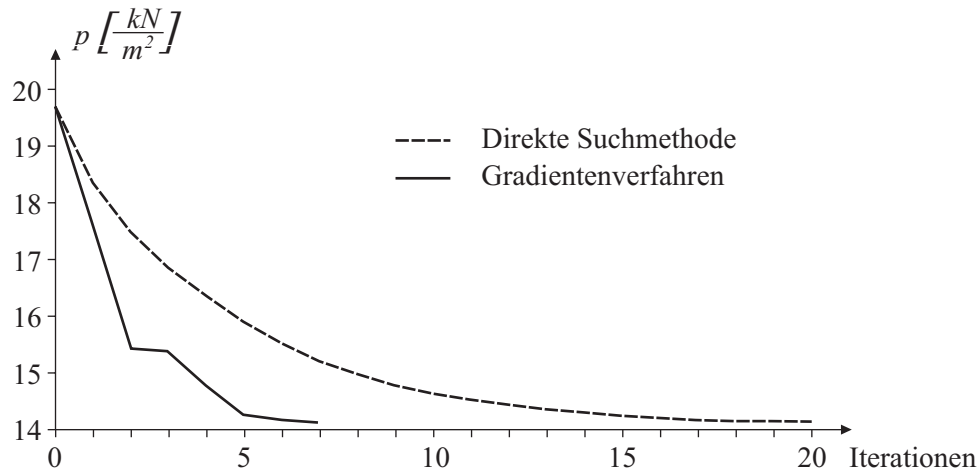
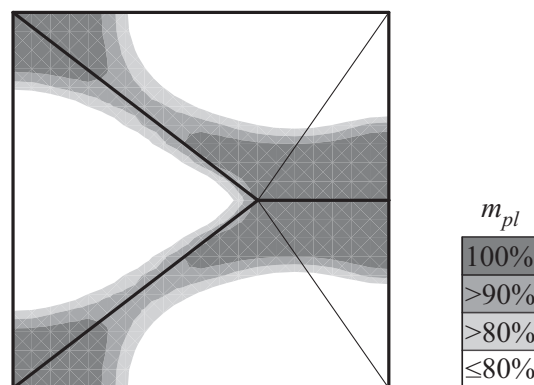


Abbildung 7.40: Reduzierung der Traglast im Laufe der Optimierung für Beispiel 10

direkte Suchmethode nähert sich dem Minimum abhängig von der gewählten Schrittweite und dem Gefälle der Optimierungslandschaft kontinuierlich an. Sie benötigt gegenüber dem Gradientenverfahren allerdings vergleichsweise viele Iterationsschritte. Letzteres hingegen erreicht die minimale Traglast sehr schnell; lediglich beim Eintritt einer degenerierten Lösung und dem damit verbundenen Wechsel zwischen zwei Basislösungen wird der Abstieg etwas verzögert.

Darüber hinaus kann die Traglast auch mittels einer Handrechnung aus der Grenzgleichgewichtsmethode ermittelt werden, indem die Platte am freien Rand gespiegelt wird. Damit wäre die Anwendung der geschlossenen Lösung aus Abschnitt 3.3.1 erlaubt. Im Vergleich zum Fließlinienverfahren liegt das Ergebnis der Finite-

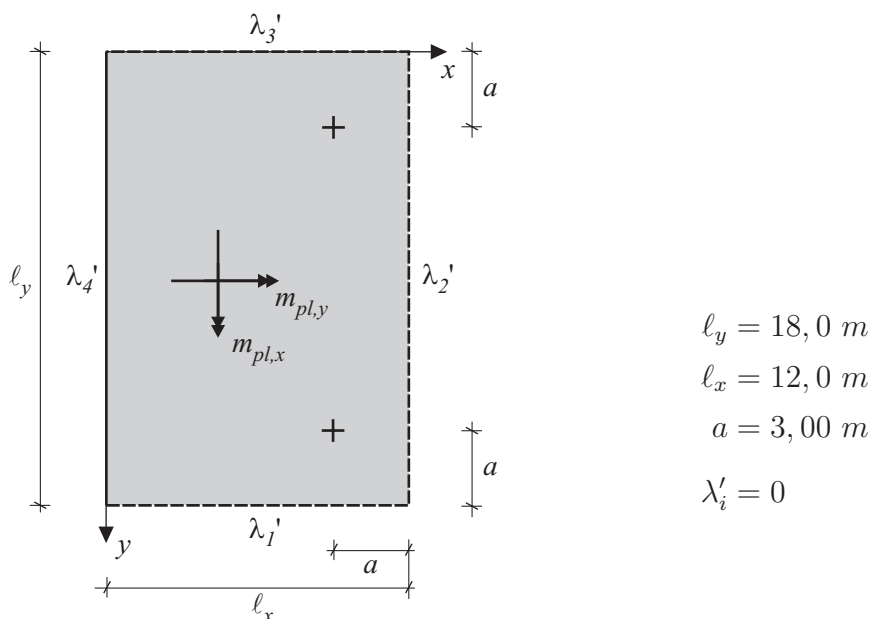


$$p_{FEM} = 14,1 \frac{kN}{m^2}$$

Abbildung 7.41: Endgültige Fließlinienfigur und Fließzonen

Element-Rechnung mit $p = 14,1 \frac{kN}{m^2}$ im Rahmen dessen, was bei gelenkig gelagerten Rechteckplatten bisher schon beobachtet wurde. Abbildung 7.41 zeigt nochmals die Position des endgültigen Fließliniennetzes im Verhältnis zu den plastizierenden Zonen des nichtlinearen Schalelements. Die Berechnung basiert auf einem Netz aus 20×20 Elementen.

7.5.2 Beispiel 11: Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen



FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 50 \frac{kNm}{m}$	$h = 30,0 \text{ cm} ; \quad z = 0,67h$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 50 \frac{kNm}{m}$	$f_{y,k} = 5,0 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Stahl BSt 500 M})$
	$a_{su} = 5,0 \frac{cm^2}{m} ; \quad a_{so} = 5,0 \frac{cm^2}{m}$

Abbildung 7.42: Beispiel 11: Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen

Ein markanteres Beispiel zur Verfolgung der Degenerierung und der beschriebenen Diskontinuität stellt eine einseitig gelenkig gelagerte Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen innerhalb des Feldes dar (Abbildung 7.42), die von JOHANSEN [66] und THAVALINGAM [139] beschrieben wurde. Sie soll zu diesem Zweck zunächst komplett und anschließend unter Ausnutzung der Symmetrie nochmals halbiert betrachtet werden.

Beispiel 11a: Gesamtplatte

Abbildung 7.43 zeigt die Annahme eines Anfangsnetzes und die Suchfreiheitsgrade χ für den ersten Fall; die Vergleichsrechnung der Finite-Element-Methode geht von einem Netz mit 24×36 für die gesamte beziehungsweise 24×18 Elementen für die halbierte Platte aus.

Aus der Startposition mit einer Traglast $p = 6,67 \frac{kN}{m^2}$ erreichen die Gradientenmethode und der direkte Suchalgorithmus die Versagensmuster der Abbildung 7.44a und b. Demnach bildet sich im Abstand von $3,96 m$ parallel zum gelagerten Rand eine durchgehende Fließlinie in y -Richtung aus, die den Wert $p = 6,25 \frac{kN}{m^2}$ liefert. Die Fließlinie zwischen den Knoten 8 und 10 bleibt jeweils geschlossen und ist somit bedeutungslos, was den Unterschied der beiden Netze erklärt. Im Vorblick auf den tatsächlich erreichbaren Betrag von $p = 5,78 \frac{kN}{m^2}$ mit der zugehörigen Fließlinienfigur (Abbildung 7.45b) stellt sich jedoch heraus, dass es sich hierbei nur um ein lokales Minimum handelt.

Während in Beispiel 10 der Einfluss des dritten Parameters – χ_2 in Abbildung 7.39 – keine negativen Auswirkungen auf das Ergebnis hatte, kommt jetzt eine ungünstige Optimierungstopografie zum Tragen. Abbildung 7.46 führt vor Augen, inwieweit sich die Suchfreiheitsgrade von Abbildung 7.43b gegenseitig beeinflussen, wobei χ_5 stets unverändert auf der Symmetrieachse $y = 9 m$ liegt. Solange χ_2 diese Höhe nicht erreicht, steckt der Optimierungsvorgang mit der oben genannten

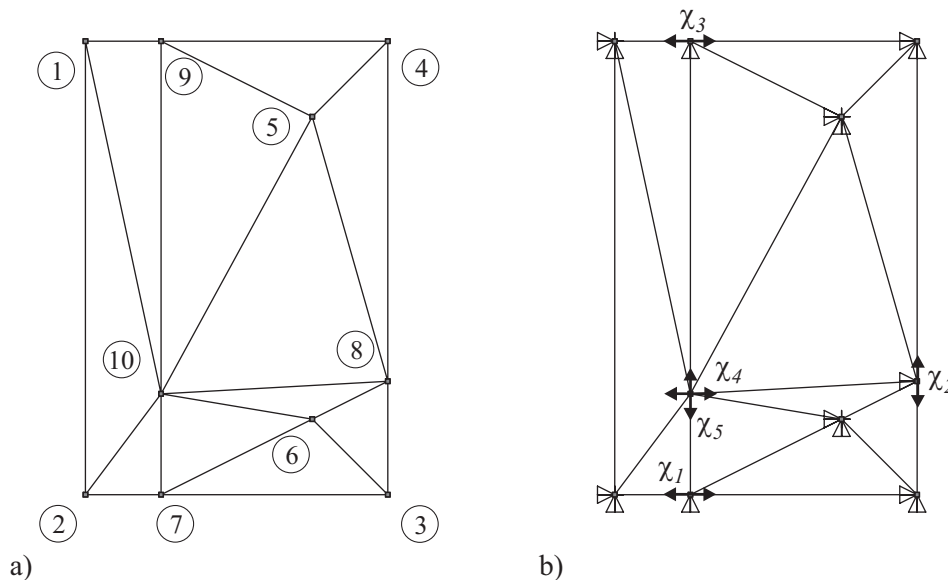
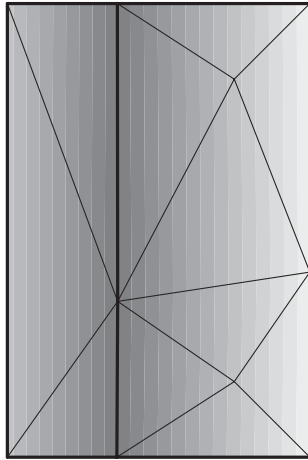
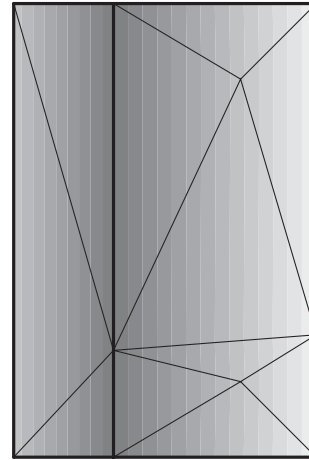


Abbildung 7.43: Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen

- a) Manuelle Diskretisierung
- b) Suchfreiheitsgrade χ



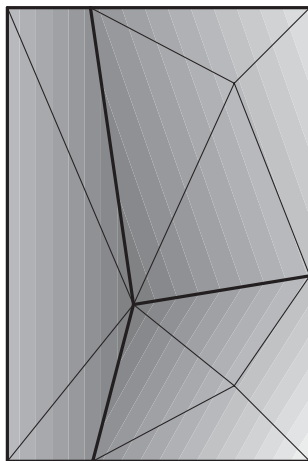
a) $p_{FEM(G)} = 6,25 \frac{kN}{m^2}$



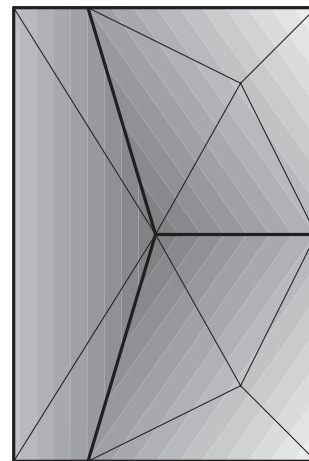
b) $p_{FEM(D)} = 6,25 \frac{kN}{m^2}$

Abbildung 7.44: Versagensfigur bei lokalem Minimum
 a) mit dem Gradientenverfahren
 b) mit der direkten Suchmethode

Traglast in einem lokalen Minimum fest. Abbildung 7.46b veranschaulicht, dass Letzteres für ein konstantes $\chi_2 = 13,50 \text{ m}$ an der Stelle $\chi_1 = \chi_3 = \chi_4 = 3,96 \text{ m}$ auf der Ursprungsgeraden zu finden sein wird. Betrachtet man nun die Entwicklung über die Veränderung des Parameters χ_2 (Abbildung 7.46a), so präsentiert sich der Verlauf der Zielfunktion $Z(\chi)$ als Flächenschar, die bei einem zuneh-



a) $p_{FEM(G)} = 6,08 \frac{kN}{m^2}$



b) $p_{FEM(G)} = 5,78 \frac{kN}{m^2}$

Abbildung 7.45: Iteration mit dem Gradientenverfahren
 a) Schritt nach lokalem Minimum
 b) Fließliniennetz nach der Optimierung

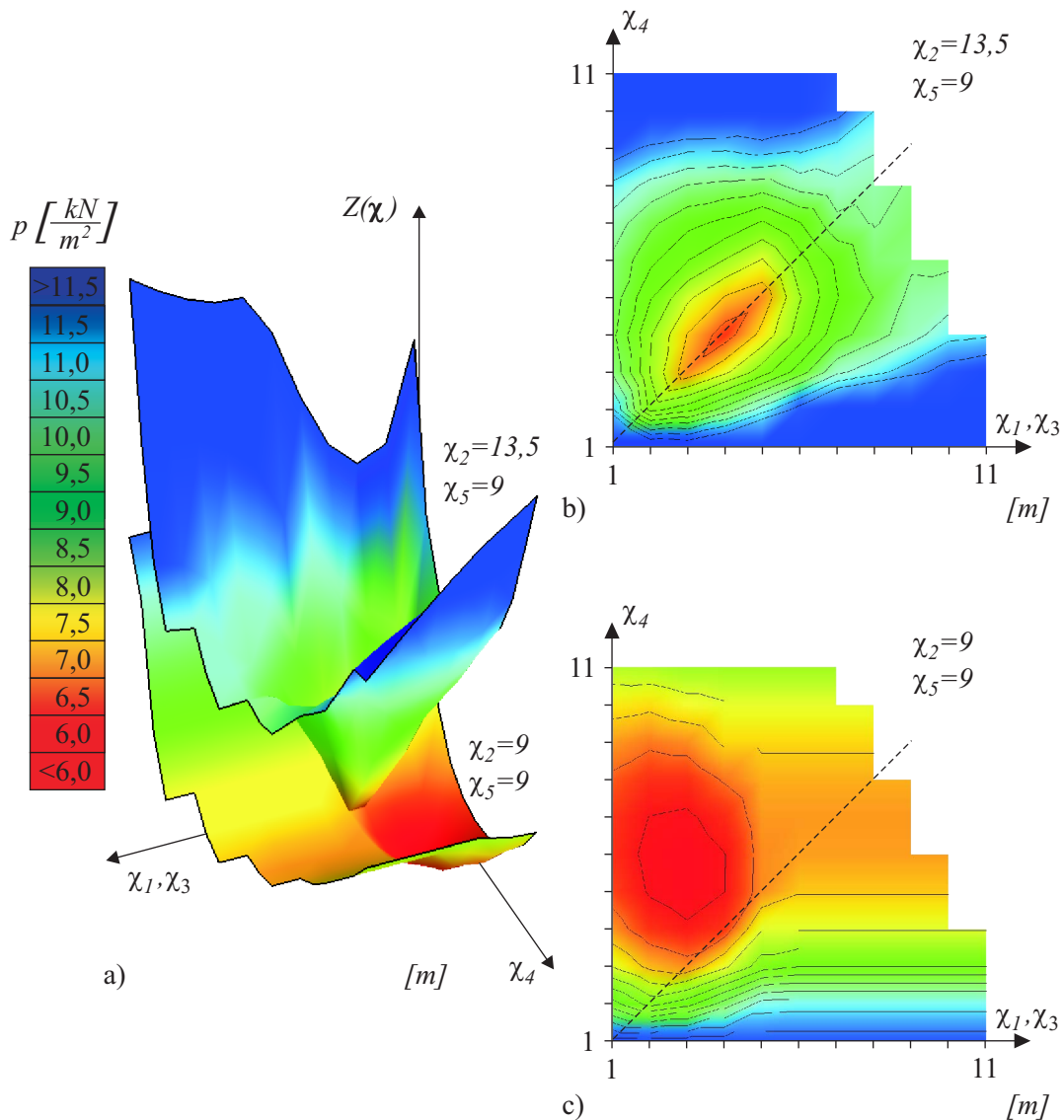


Abbildung 7.46: Topografie der Optimierungslandschaft

- a) dreidimensionale Ansicht
- b) zweidimensionale Ansicht ($\chi_2 = 13,50 \text{ m}$)
- c) zweidimensionale Ansicht ($\chi_2 = 9,00 \text{ m}$)

menden Betrag von χ_2 immer mehr eine Trichterform annimmt. Die Spitze des Trichters für $\chi_2 = 13,50 \text{ m}$ – in der Darstellung die höher gelegene Fläche – befindet sich bei einer Traglast von $p = 6,25 \frac{kN}{m^2}$ und ist identisch mit dem Tiefpunkt der Zielfunktion $Z(\chi)$.

Für $\chi_2 = 9,00 \text{ m}$ ändert sich diese Situation, vergleiche Abbildung 7.46c. Nun

liegt das Minimum abseits der Ursprungsgeraden; das heißt, dass die Fließlinienfigur jetzt einen Versagensmodus wie in Abbildung 7.45 aufweist, bei dem die von χ_1 , χ_3 und χ_4 bewegten Knoten nicht mehr auf einer Geraden liegen. Auch in Abbildung 7.46a ist die zugehörige Fläche auf ein niedrigeres Traglastniveau abgesunken. Es existiert jedoch auf Höhe von $p = 6,25 \frac{kN}{m^2}$ ein Punkt, der beiden Flächen angehört. Dieser markierte zuvor die Trichterspitze, ist der gesamten Flächenschar gemeinsam und beweist, dass eine Verschiebung des Freiheitsgrades χ_2 entlang der rechten Plattenkante bei gleich bleibenden Parametern $\chi_1 = \chi_3 = \chi_4 = 3,96 m$ keine Auswirkung auf die Traglast hat. Abbildung 7.44 bestätigt dies.

Nachdem die direkte Suchmethode bei dieser Konstellation angelangt ist und die Variation der Freiheitsgrade nur eine Verschlechterung oder bestenfalls keine Veränderung der Traglast bewirkt, wird der Optimierungsprozess abgebrochen. Das globale Minimum wurde jedoch nicht erreicht.

Das Gradientenverfahren durchläuft hingegen eine Programmroutine, die den Einfluss der Freiheitsgrade χ auf den Lösungsvektor untersucht. Diese Sensitivitätsanalyse ermöglicht eine gezielte Veränderung der Position des Knotens 8 (Abbildung 7.45a), welche die weitere Optimierung zum richtigen Ergebnis lenkt. In den nun folgenden Schritten wird auch Knoten 10 in Richtung der Symmetrieachse bewegt, sodass das globale Minimum schließlich mit $p = 5,78 \frac{kN}{m^2}$ gefunden wird.

Wählt man eine günstigere Ausgangslage, wie sie in Abbildung 7.47 dargestellt ist, so ermittelt das direkte Suchverfahren mit $p = 5,82 \frac{kN}{m^2}$ zwar eine niedrigere Traglast als zuvor, doch wird das globale Optimum auch hier nicht erreicht. Die

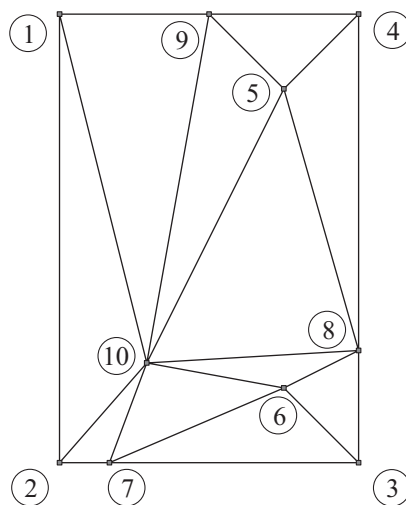
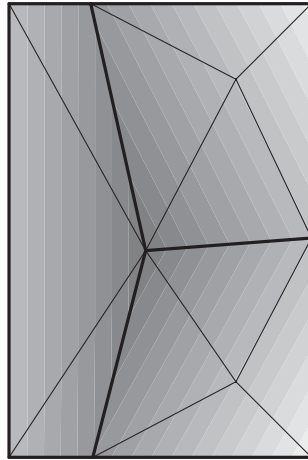


Abbildung 7.47: Verändertes Ausgangsnetz der zweifach punktgestützten Platte



$$p_{FEM(D)} = 5,82 \frac{kN}{m^2}$$

Abbildung 7.48: Optimale Lösung der direkten Suchmethode mit Durchsenkung

letztendlich gefundene Versagensfigur zeigt Abbildung 7.48. Mit dem Wissen über die Topografie der Zielfunktion lässt sich dies allerdings erklären. Da Knoten 8 bei $y = 8,70 \text{ m}$ zu liegen kommt, reiht sich die Fläche für χ_2 zwischen den beiden in Abbildung 7.46a dargestellten Verläufen ein. Die Senke des Optimums bewegt sich dabei bereits in Richtung des globalen Minimums aus Abbildung 7.46c, was auch in der Fließlinienfigur zum Zeitpunkt des Iterationsendes zum Ausdruck kommt.

Obwohl das Gradientenverfahren die bessere Wahl zu sein scheint, sind auch hier Nachteile festzustellen (siehe RAMSAY & JOHNSON [117]). So zeigt sich anhand der Berechnung, dass sich die Lösung dem Optimum zwar schnell nähert und dieses auch erreicht. Aufgrund der schwierigen Situation der Optimierungslandschaft ergeben sich jedoch ständige Wechsel des Gradienten über Diskontinuitätsstellen hinweg, vergleiche Abschnitt 5.4.3 und Abbildung 5.7. Dies macht sich im Verlauf des Optimierungsprozesses durch ein Oszillieren der Freiheitsgrade bemerkbar, was wiederum darauf schließen lässt, dass die korrekte Wahl der Suchschrittweite α von großer Bedeutung ist. Insbesondere bei komplizierten Optimierungstopografien besteht sonst die Gefahr, dass der Suchpunkt in unzulässige Bereiche der Zielfunktion gelangt.

Beispiel 11b: Symmetrische Modellierung

Als zweite Variante wird die Modellierung unter Ausnutzung der Symmetrie gezeigt, siehe Abbildung 7.49. Dafür muss entlang der freien Kante zwischen

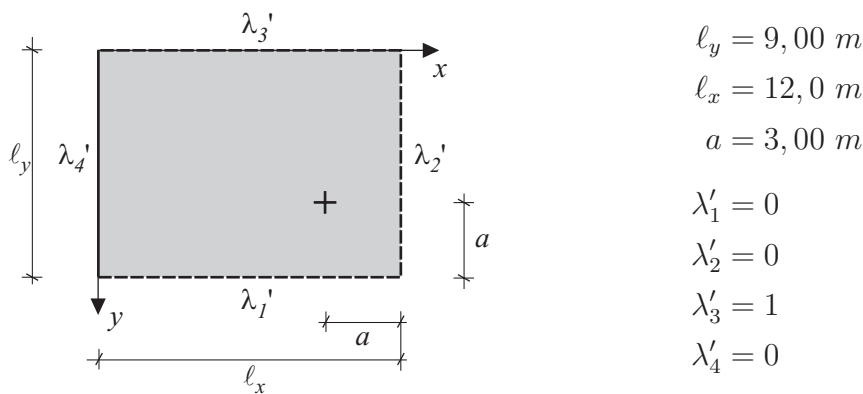


Abbildung 7.49: Beispiel 11b: Symmetrische Modellierung der Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen

den Knoten 1 und 4 in Abbildung 7.50a eine Momenteneinspannung vorgesehen werden, die im Falle der Fließlinientheorie mit der Vorgabe des Stützmoments $m'_{pl} = 50 \frac{kNm}{m}$ umgesetzt wird. Durch diese Vereinfachung des Problems verbleiben lediglich noch die beiden Suchrichtungen χ_1 und χ_2 , siehe Abbildung 7.50b.

Nach der Eliminierung der Freiheitsgrade parallel zur y -Achse sind beide Verfahren gleichermaßen in der Lage, das globale Minimum und die tatsächliche Traglast $p = 5,78 \frac{kN}{m^2}$ zu erreichen. Die endgültige Lösung für Beispiel 11b zeigt Abbildung 7.51. Zur Ergebniskontrolle können wieder die Fließzonen aus der Finite-Element-Berechnung herangezogen werden. Abbildung 7.51b belegt, dass diese von der resultierenden Fließlinienfigur zwar tendenziell getroffen werden, dass sich aber über den Stützen weitere plastische Bereiche bilden. Ferner weisen die Zonen eine Krümmung auf, die eine allmähliche Ausbildung von Durchstanzkegeln andeutet.

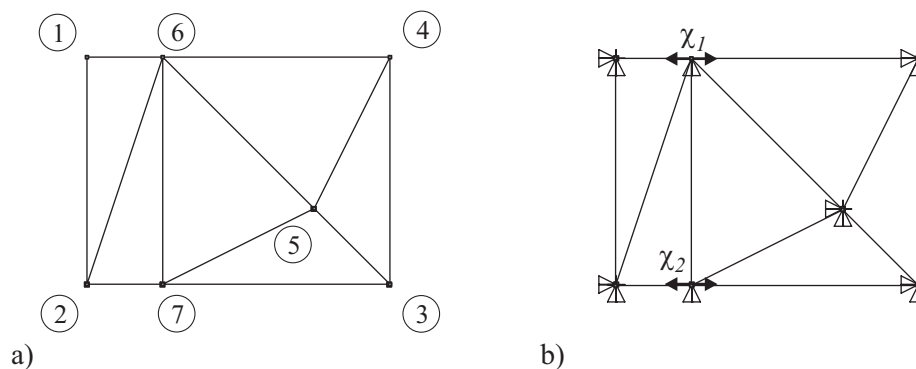


Abbildung 7.50: Symmetrische Modellierung der Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen
a) Diskretisierung
b) Suchfreiheitsgrade χ

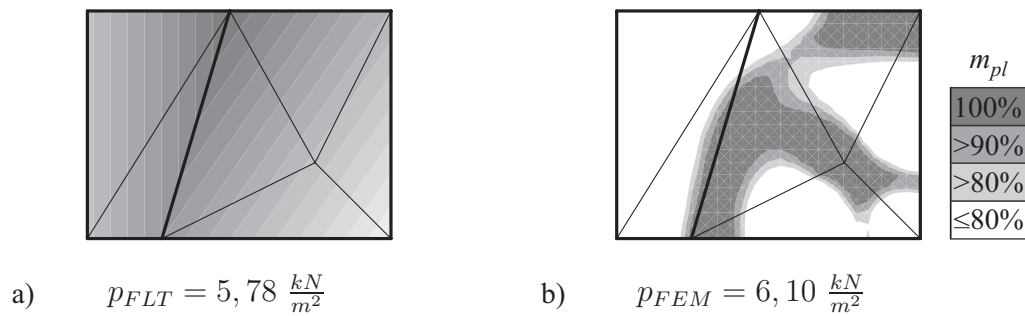


Abbildung 7.51: Symmetrische Modellierung der Rechteckplatte mit zwei Einzelstützen
a) Fließliniennetz mit Durchsenkung
b) Fließlinien und Fließzonen

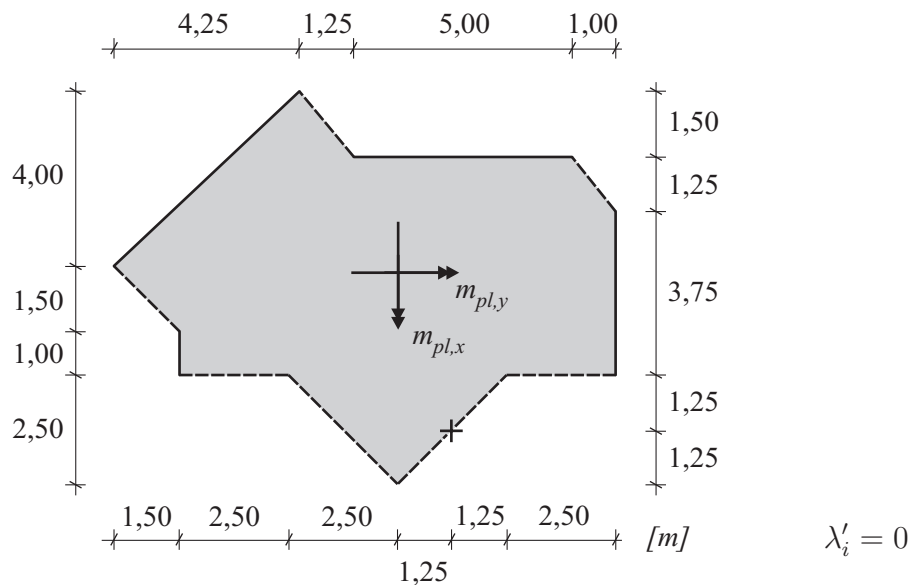
Als Konsequenz für die Fließlinientheorie empfiehlt sich eine erneute Betrachtung mit einem verfeinerten Fließliniennetz, vergleiche Abschnitt 7.4. Im Gegenzug bereitet jedoch auch die Traglastermittlung nach der Methode der finiten Elemente einige Schwierigkeiten. Da der Wert von $p = 6,1 \frac{kN}{m^2}$ für Abbildung 7.51b die Ergebnisse des Fließlinienverfahrens bereits überschreitet und die Platte numerisch gesehen noch nicht an die Grenzen ihrer Kapazität stößt, stellt sich ab einer gewissen Komplexität der Plattengeometrie die Frage nach der Vergleichbarkeit der Berechnungen. Dies führt zurück auf die Diskussion am Ende des Abschnitts 7.1.2.

7.6 Praxisorientierte Anwendung

In der Praxis kommt die Fließlinientheorie häufig nur in Detailbereichen eines Gesamttragwerks zum Einsatz, siehe zum Beispiel KENNEDY & GOODCHILD [75]. Nachfolgend soll deshalb untersucht werden, inwieweit auch umfangreichere Berechnungen auf der Grundlage der Fließlinientheorie durchgeführt werden können. Die Erfahrungen der bisherigen Beispiele werden dabei nochmals auf ihre Anwendbarkeit überprüft.

7.6.1 Beispiel 12: Polygonale Hochbauplatte

Anhand einer von DAMKILDE & KRENK [22], KRENK et al. [83] sowie KRABENHOFT & DAMKILDE [80] vorgestellten Hochbauplatte werden die Ergebnisse der Fließlinientheorie den Berechnungen der Finite-Element-Methode gegenübergestellt.

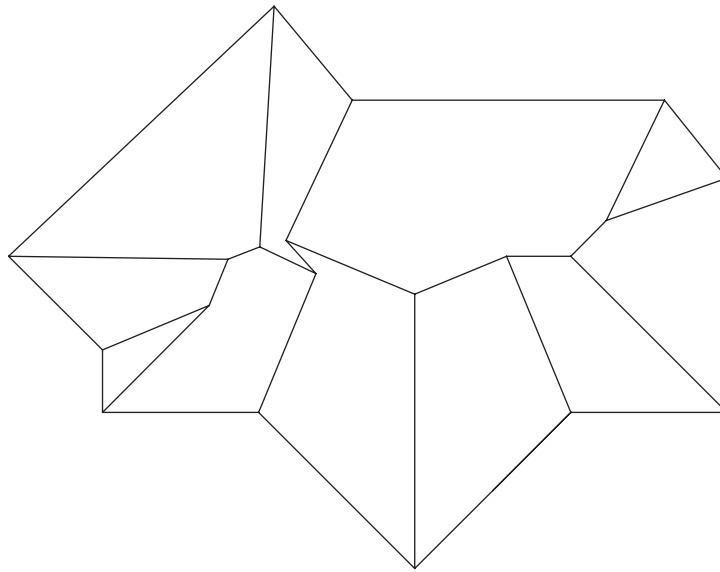


FLT	FEM
$m_{pl,x} = m_{pl,y} = 50 \frac{kNm}{m}$	$h = 30,0 \text{ cm} ; \quad z = 0,67h$
$m'_{pl,x} = m'_{pl,y} = 50 \frac{kNm}{m}$	$f_{y,k} = 5,0 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2} \quad (\text{Stahl BSt 500 M})$
	$a_{su} = 5,0 \frac{cm^2}{m} ; \quad a_{so} = 5,0 \frac{cm^2}{m}$

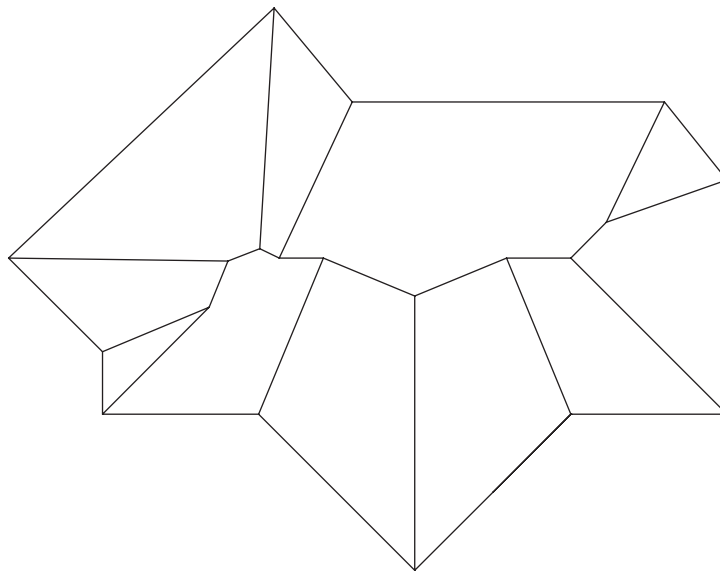
Abbildung 7.52: Beispiel 12: Polygonale Hochbauplatte nach KRENK et al. [83]

Für die polygonale Form der in [Abbildung 7.52](#) dargestellten Platte liefert der Algorithmus zur Netzgenerierung zunächst zwei zulässige Versagensmechanismen, die durch eine gleichmäßige Verkipfung der Plattenkanten erzeugt werden und die in [Abbildung 7.53a](#) und [b](#) gezeigt sind. Es fällt jedoch auf, dass auch hier – wie zuvor schon in [Beispiel 6b](#) – lediglich in der linken Plattenhälfte geringfügige Abweichungen vorhanden sind. Die anschließende Triangulierung führt jeweils auf eine Vernetzung, wie sie in [Abbildung 7.54a](#) und [b](#) dargestellt ist. Der erste mögliche Mechanismus (a) erzielt eine Last von $p = 19,48 \frac{kN}{m^2}$, während die zweite Variante $p = 19,24 \frac{kN}{m^2}$ liefert. Mit den nahezu identischen Ausgangsgeometrien lässt sich dieser relativ geringe Unterschied zwischen den prognostizierten Traglastergebnissen leicht erklären. Ebenso entspricht es den Erwartungen, dass der einfacher erscheinende Mechanismus (b) die geringere Traglast erzielt.

Am Ende des Optimierungsvorgangs, der nochmals eine Reduzierung auf $p = 17,39 \frac{kN}{m^2}$ beziehungsweise $p = 17,15 \frac{kN}{m^2}$ bewirkt, erhält man die beiden Netze in [Abbildung 7.55a](#) und [b](#). [Abbildung 7.55c](#) zeigt die Netzdiskretisierung der Finite-Element-Berechnung. Außerdem ist in jedem Bild die Plattendurchsenkung abgestuft hinterlegt. Die Anschauung verdeutlicht, dass das Verformungsverhalten der gleichmäßig belasteten Platte in allen drei Fällen richtig wiederge-



a)



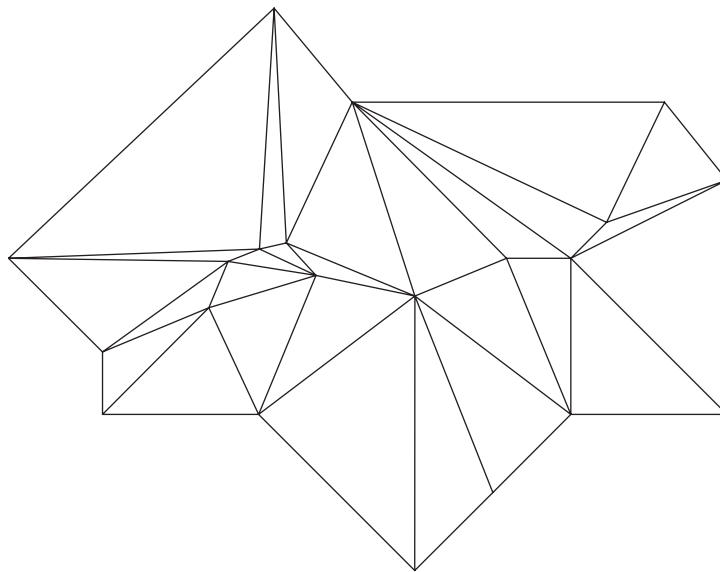
b)

Abbildung 7.53: Numerisch generierte Fließlinienfiguren

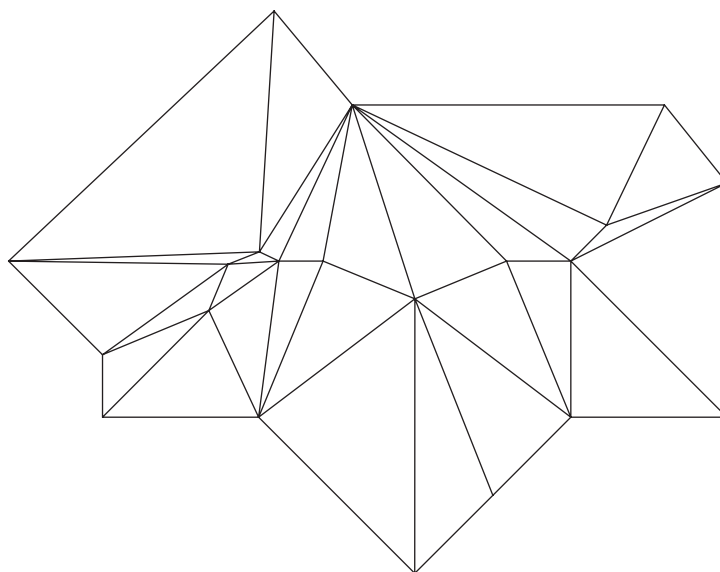
a) erste Konfiguration

b) zweite Konfiguration

geben wurde. Darüber hinaus sind in [Abbildung 7.56](#) die aktiven Fließlinien der beiden Netzvarianten über den plastischen Zonen der Finite-Element-Methode eingezeichnet. Tendenziell bestätigt die Gegenrechnung auch hier eine gute Übereinstimmung der Mechanismen, wobei eine gewisse Differenz in der linken und unteren Plattenhälfte auf die flache Neigung in diesen Bereichen zurückzuführen ist. Demzufolge werden diese vermeintlichen Abweichungen durch entsprechend



a)



b)

Abbildung 7.54: Triangulierung der Platte
a) für die erste Konfiguration
b) für die zweite Konfiguration

kleine Knickwinkel in den Fließlinien wieder ausgeglichen. Letztlich liegt die erzielte Traglast mit $p = 16,2 \frac{kN}{m^2}$ zwischen 5% und 7% unter der zuvor bestimmten oberen Belastungsgrenze, was angesichts der Komplexität der Platte ein sehr gutes Resultat ist. Dennoch darf es nicht über die Tatsache hinwegtäuschen, dass das untersuchte Problem – abgesehen von dem Gebiet über der Einzelstütze – praktisch keine lokalen Mechanismen aufweist, da aufgrund der vielen freien Kanten

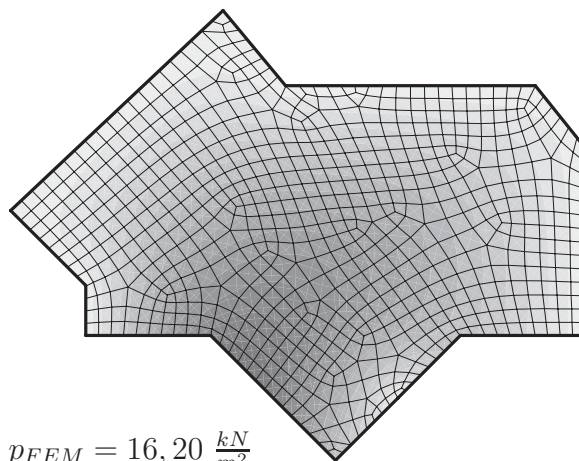
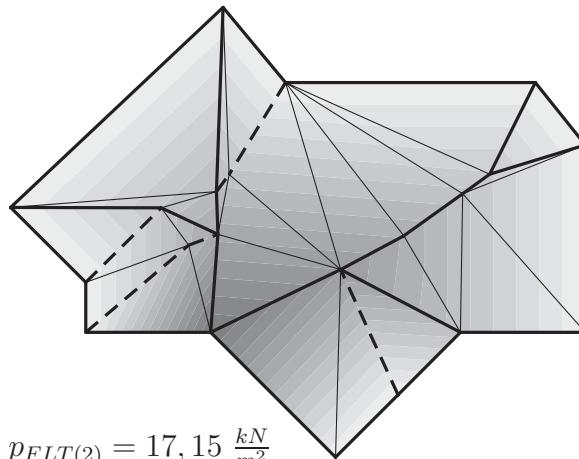
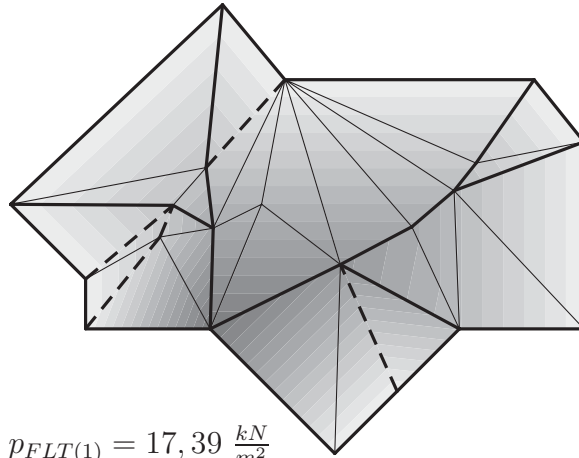


Abbildung 7.55: Polygonale Hochbauplatte mit vertikaler Durchsenkung

- a) erste Netzvariante nach der Optimierung
- b) zweite Netzvariante nach der Optimierung
- c) Diskretisierung der Finite-Element-Methode

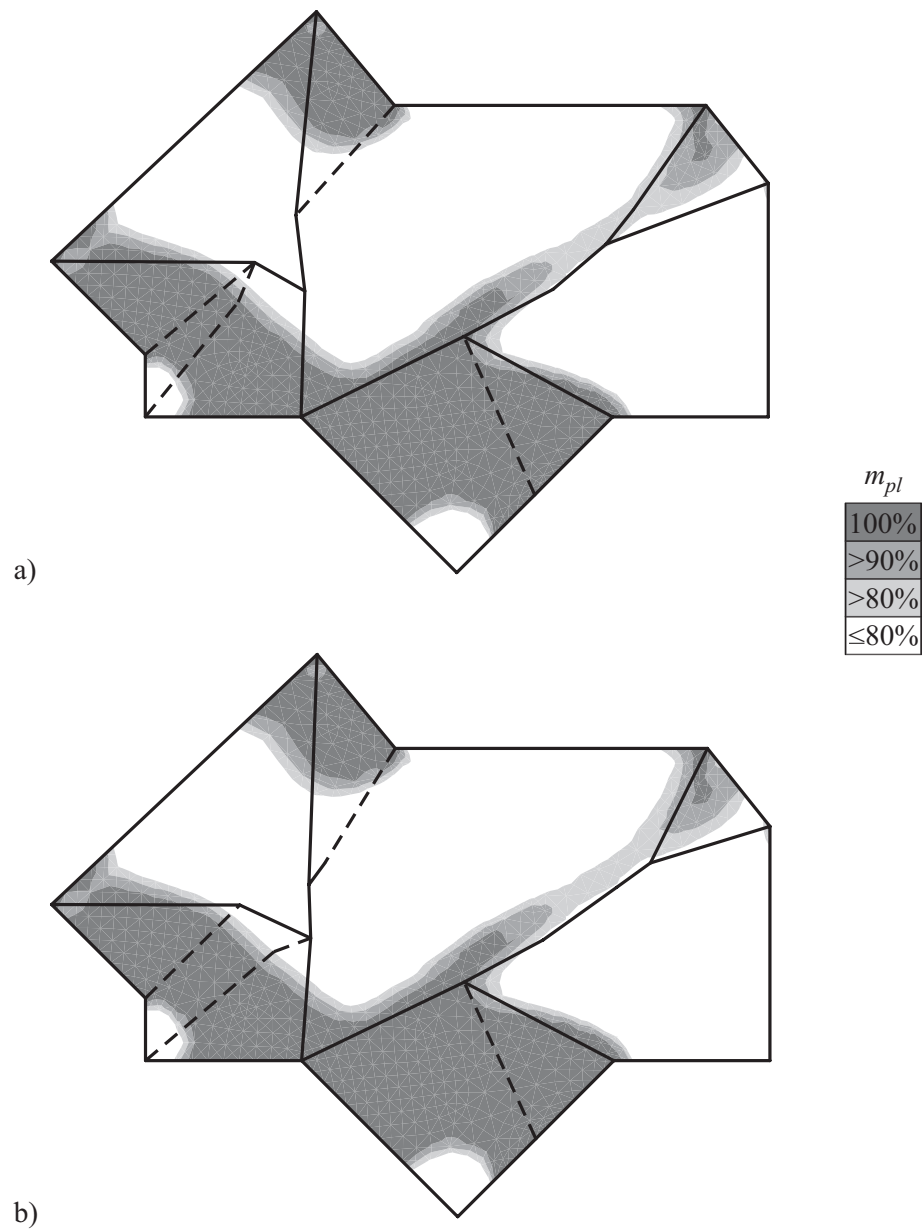


Abbildung 7.56: Fließzonen und aktive Fließlinien

a) erste Netzvariante

b) zweite Netzvariante

keine Eckfächer auftreten können. Somit begründet lediglich der Durchstanzkegel über der Stütze eine Abminderung der Traglast in einer Größenordnung, wie sie bereits in Abschnitt 7.4 gefunden wurde.

Die Untersuchung dieses Beispiels weist darauf hin, dass die Anwendung der Fließlinientheorie sogar großzügige Abstriche gegenüber einer realitätsnahen Modellierung verkraftet. So wurden beispielsweise an den freien Rändern keinerlei Fließlinien definiert, die dort aus der Platte austreten können. Ferner bestätigt sich erneut, dass der Verzicht auf ein plastisches Moment m'_{pl} an der Plattenoberseite die zusätzliche innere Arbeit ausgleicht, welche durch negative Fließlinien verursacht wird, vergleiche Beispiele 6 und 8. Insgesamt lässt sich die Fließlinientheorie also durchaus auch für schwierigere Geometrien verwenden.

7.7 Diskussion und Schlussfolgerungen

In den vorangegangenen Beispielen wurde zunächst der Einfluss der Gesamtgeometrie von Platten untersucht (Beispiele 2 bis 6). Es wurde gezeigt, dass lokale Einwirkungen wie Einzelstützen – oder dementsprechend auch Einzellasten – einer gesonderten Betrachtung bedürfen (Beispiel 9). Dabei musste zur Darstellung des auftretenden Versagensmechanismus in jedem Fall eine geeignete Fließlinienfigur vorgegeben werden. Für polygonale Plattenberandungen wurde deshalb ein im Zuge dieser Arbeit entwickelter Algorithmus eingesetzt, der in der Lage ist, alle kinematisch zulässigen Konfigurationen aufzufinden. Bei Bedarf kann diese Vorgabe zur Abbildung von örtlich begrenzten Effekten – wie beispielsweise Fächermechanismen in den Plattenecken – noch weiter verfeinert werden (Beispiele 7 und 8). Je nach Ausgestaltung des zugrunde liegenden Fließliniennetzes erzielt die anschließende Optimierung eine Verringerung der Traglast von bis zu 10%. Die Beaufschlagung der Ergebnisse mit einem Faktor dieser Größenordnung wird deshalb in der Literatur häufig empfohlen, beispielsweise von SAWCZUK & JAEGER [124], auch um eventuelle Abweichungen zwischen dem ermittelten und dem tatsächlichen Versagensmechanismus abzudecken. Die vorgeführten Beispiele belegen jedoch, dass in der Regel bereits relativ grobe Fließlinienfiguren zu einer guten Abschätzung der Versagenslast führen, sofern sie in der Lage sind, den kritischen Mechanismus richtig darzustellen.

Während des Optimierungsvorgangs kann es abhängig von der Konstellation der Suchfreiheitsgrade vorkommen, dass nicht das globale, sondern lediglich ein lokales Minimum gefunden wird (Beispiel 11). Diese Gefahr besteht vor allem bei der direkten Suche nach HOOKE & JEEVES [57], da diese jeden Tastschritt neu bestimmt. Im Gegensatz dazu verwendet das konjugierte Gradientenverfahren Informationen aus den zurückliegenden Optimierungsschritten und kann gegebene

nenfalls Maßnahmen einleiten, die möglicherweise zunächst nur indirekt zu einer Verbesserung führen. Außerdem wird die Lösung auch bei einer großen Zahl von Freiheitsgraden schnell erreicht. Allerdings ist das Verfahren aufgrund der vielen Fallunterscheidungen – siehe Tafel 5.1 – sehr aufwendig und es kommt häufig zu Wechseln zwischen in sich konvexen Bereichen der Zielfunktion (Beispiele 10 und 11). Deshalb ist die richtige Bestimmung der Suchschrittweite für das Gradientenverfahren von entscheidender Bedeutung, während sich die ableitungsfreie direkte Suchmethode diesbezüglich weitaus weniger empfindlich zeigt. In der Regel werden hier Werte von etwa einem Zehntel der kleineren Plattenspannweite angenommen. Angesichts der meist komplex gestalteten Optimierungstopografie – vergleiche Abbildung 7.46 – plädieren RAMSAY & JOHNSON [117] für das robustere Verfahren und nehmen dafür die Variation verschiedener Netzgeometrien in Kauf. Trotz der teilweise sehr überzeugenden Lösungen der Gradientenmethode legen die vorgeführten Beispiele einen ähnlichen Schluss nahe. Dennoch empfiehlt sich mit Blick auf die im Vorfeld einer Berechnung ungewisse Problemstruktur der Einsatz beider Strategien, um die unterschiedlichen Stärken und Herangehensweisen auszunutzen. Dementsprechend bliebe auch eine kombinierte Anwendung zu erwägen.

Was die Gegenüberstellung von Fließlinientheorie und Fließzonentheorie auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente anbelangt, so zeigen diese trotz der verschiedenen theoretischen Hintergründe eine sehr gute Übereinstimmung der Lösungen. Während Letztere ein Problem jedoch bekanntermaßen in endliche Bereiche – nämlich finite Elemente – zerlegt, liegt der Untersuchung mit der Fließlinientheorie stets die Platte in ihrer Gesamtheit zugrunde. Dies erfordert insbesondere bei der Modellierung eine gewisse Erfahrung von Anwenderseite. Da die Auswahl der Netzstruktur das Endergebnis schon vorab stark beeinflussen kann, bietet die numerische Netzgenerierung einerseits Hilfe und andererseits eine Objektivierung des Problems. Dennoch zeigt sich in der praktischen Anwendung der Fließlinientheorie, dass verschiedene Blickwinkel in Form von unterschiedlichen Netzen untersucht werden müssen, um den Charakter der Lastabtragung zu ergründen. Dabei stellt die Fließlinientheorie aus numerischer Sicht eine gute Ergänzung zur etablierten Finite-Element-Methode dar, vergleiche Beispiel 12.

Für die konstruktive Bemessung mit Hilfe der Fließlinientheorie ist in Anbetracht der Vereinfachung der zugrunde liegenden Theorie Vorsicht geboten. Obwohl die geschichtliche Entwicklung des Verfahrens hier ihren Anfang nahm – man vergleiche Abschnitt 1.1 –, gilt dies speziell für Stahlbetonplatten. Der Grund liegt im deutlich abweichenden Verformungsverhalten im Grenzzustand der Tragfähigkeit, da der Stahlbeton die notwendige Rotationsfähigkeit nicht grundsätzlich erbringen kann. Dennoch ist ein Sicherheitskonzept auf der Basis nichtlinearer Trag-

lastverfahren seit Einführung der neuen DIN 1045 [29] im Jahre 2001 wieder zugelassen, vergleiche SIX [133]. Deshalb ist in den letzten Jahren insbesondere der Verbund zwischen Beton und Bewehrungsstahl in Verbindung mit Schädigungsmodellen Gegenstand der Forschung, vergleiche zum Beispiel D'ADDETTA [21] und SCHÜTT [126].

Die Auswirkungen auf die weitere Entwicklung numerischer Berechnungsverfahren auf der Grundlage materieller Nichtlinearität bleiben also abzuwarten.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Als Ergänzung und Alternative zur weit verbreiteten Finite-Element-Methode verfolgt die vorliegende Arbeit das Ziel, die Prinzipien der Fließlinientheorie numerisch umzusetzen. Zu diesem Zweck werden zunächst die notwendigen Grundlagen aus der Theorie der Platten und der Plastizitätstheorie zusammengetragen und aufbereitet. Da die Fließlinientheorie aufgrund ihrer Annahmen über Geometrie und Materialverhalten eines Plattentragwerks eine Sonderstellung im Vergleich zu anderen Berechnungsverfahren einnimmt, werden diese Voraussetzungen aus den zuvor erarbeiteten Zusammenhängen abgeleitet.

Die zentrale Fragestellung der Methode besteht in der geeigneten Wahl eines kinematisch zulässigen Mechanismus, welcher die potenzielle Versagensfigur einer betrachteten Platte unter der Einwirkung einer gleichmäßig verteilten Flächenlast beschreibt. Anhand dieser sogenannten Fließlinienfigur lässt sich auf der Basis des Prinzips der virtuellen Verschiebungen diejenige Flächenlast p bestimmen, die benötigt wird, um den zugrunde gelegten Versagensmodus hervorzurufen. Sie ist die größtmögliche Belastung, die der Platte aufgrund ihrer Geometrie und Materialeigenschaften zugeführt werden kann und wird dementsprechend als Traglast bezeichnet. Umgekehrt formuliert ist für den Versagensfall genau die Traglast maßgeblich, welche den niedrigsten Betrag aufweist. Der zugehörige kinematische Mechanismus macht zugleich die Bereiche der Platte kenntlich, in denen Risse oder plastische Zonen auftreten, welche die Gesamtfläche in mehrere polygonale Teilflächen unterteilen.

Da die einfachste Form einer solchen Teilfläche ein Dreieck ist, werden die Beziehungen zwischen statischen und kinematischen Größen anhand eines finiten Dreieckselements aufgestellt. Nach einer Dreiecksvernetzung der Polygonflächen lässt sich mit Hilfe dieses Elements die gesamte Struktur darstellen. Im Gegensatz zur herkömmlichen Finite-Element-Methode entsteht im nächsten Schritt allerdings keine Steifigkeitsmatrix im klassischen Sinne, sondern ein Optimierungstableau, auf dessen Grundlage die Traglast mittels einer Simplex-Optimierung berechnet wird. Als Nebenprodukt dieser Berechnung ergeben sich auch die gegenseitigen Kantenverdrehungen benachbarter Dreieckselemente, sodass sich die entsprechende Versagensfigur dadurch beschreiben lässt.

Auf diese Weise kann für eine vorgegebene Vernetzung die optimale Traglast gefunden werden. Dennoch ist es nicht auszuschließen, sondern im Gegenteil sogar sehr wahrscheinlich, dass eine Veränderung der Netzknoten innerhalb der betrachteten Platte sowie an ihrem Rand die erzielte Traglast noch weiter reduzieren könnte. Dies führt – über den Simplex-Algorithmus hinaus – zu einer weiteren Anwendung von Optimierungstechniken, die zum Zwecke der Klassifizierung und

zur Wahl eines brauchbaren Verfahrens ausführlich erläutert werden. Schließlich erscheinen die direkte Suchmethode und das konjugierte Gradientenverfahren als am besten geeignet.

Die einfachste Lösungsmöglichkeit besteht in der Anwendung einer direkten Suche, bei der durch probeweises Verschieben von Knotenpunkten in Richtung der zulässigen Bewegungsfreiheitsgrade jeweils das Ergebnis in der benachbarten Lage getestet wird. Im Falle einer Verbesserung wird die neu gewonnene Konfiguration beibehalten und dient als Ausgangspunkt für den nächsten Suchschritt. Diese Vorgehensweise erweist sich als äußerst robust, hat jedoch den Nachteil, dass lokale Tiefpunkte in der Zielfunktion oft nicht erkannt werden. Außerdem steigert sich der Berechnungsaufwand mit einer zunehmenden Zahl an Freiheitsgraden erheblich.

Die zweite gewählte Variante, das konjugierte Gradientenverfahren, hat diese Probleme nicht. Durch die Berechnung eines Abstiegsgradienten kann das globale Minimum zielgerichtet erreicht werden. Allerdings zeichnet sich dieser Optimierungsansatz im Gegensatz zur ableitungsfreien Suchstrategie durch einen verhältnismäßig komplizierten Algorithmus aus. Ein großer Nachteil besteht außerdem darin, dass eine sehr präzise Vorgabe der Schrittweite notwendig ist.

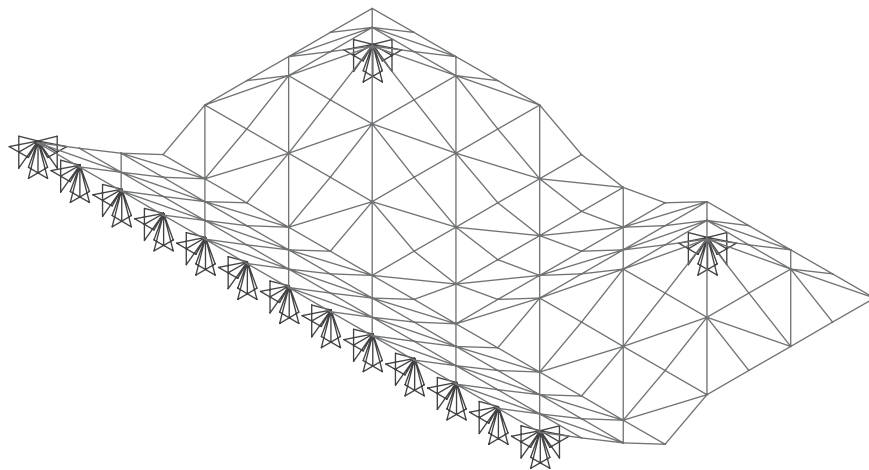


Abbildung 8.1: Erstes Ergebnis eines evolutionären Optimierungsansatzes

Als Alternative wird auf der Basis einer evolutionären Entwicklung eine im Zusammenhang mit der Fließlinientheorie neuartige Strategie vorgeschlagen und erörtert. Da allerdings der numerische Berechnungsaufwand zum Zeitpunkt des Abschlusses dieser Arbeit noch äußerst hoch war, kann dieser Ansatz lediglich als Impuls für weitere Forschungsarbeiten mit auf den Weg gegeben werden. Als

Anreiz zeigt Abbildung 8.1 das Ergebnis dieser Optimierungsvariante für das Beispiel 11 aus Kapitel 7.

Schließlich ist als weitere im Zuge dieser Arbeit entstandene Neuerung noch ein Verfahren zur Netzgenerierung von Fließlinienfiguren zu nennen, das auf Grundlage geometrischer Ebenenschnitte zunächst diejenigen Punkte bestimmt, die als Anfangs- oder Endknoten von Fließlinien in Betracht kommen. Der wesentliche Schritt besteht dabei in einer algorithmischen Berechnung aller für eine vorgegebene Plattengeometrie zulässigen Fließlinienkonfigurationen. Auf diese Weise erhalten Anwender die Möglichkeit, nach objektiven Kriterien eine Vorhersage zu möglichen Versagensmechanismen zu treffen.

Literatur

- [1] ANDERHEGGEN, E. / KNÖPFEL, H.: *Finite element limit analysis using linear programming*. International Journal of Solids and Structures 8 (1972), S. 1413–1431.
- [2] AVELLAN, K. / WERKLE, H.: *Zur Anwendung der Bruchlinientheorie in der Praxis*. Bautechnik 75 (1998), S. 80–93.
- [3] BAŞAR, Y. / WEICHERT, D.: *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2000.
- [4] BALASUBRAMANYAM, K. V. / KALYANARAMAN, V.: *Yield-Line Analysis by Linear Programming*. Journal of Structural Engineering 114 (1988), S. 1431–1437.
- [5] BATHE, K. J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin/Heidelberg, 2002.
- [6] BAUER, D. / REDWOOD, R. G.: *Numerical Yield Line Analysis*. Computers & Structures 26 (1987), S. 587–596.
- [7] BECKMAN, F. S.: *The solution of linear equations by the conjugate gradient method*. Mathematical Methods for Digital Computers (1960), S. 62–72.
- [8] BEGE, A. / KÁSA, Z.: *Coding Objects Related to Catalan Numbers*. Studia Univ. Babeş-Bolyai, Informatica XLVI (2001), S. 31–40.
- [9] BEINEKE, L. W. / PIPPERT, R. E.: *A census of ball and disk dissections*. Lecture Notes in Mathematics 303 (1972), S. 25–40.
- [10] BELLMAN, R. E.: *Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [11] BELLMAN, R. E. / DREYFUS, S. E.: *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press, Oxford University Press, Princeton/Oxford, 1962.
- [12] BERNHART, F. R.: *Catalan, Motzkin, and Riordan numbers*. Discrete Mathematics 204 (1999), S. 73–112.
- [13] BETTEN, J.: *Kontinuumsmechanik*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2001.
- [14] BLETZINGER, K. U. / WÜCHNER, R. / DAOUD, F. / CAMPRUBÍ, N.: *Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes*. Computer methods in applied mechanics and engineering 194 (2005), S. 3438–3452.
- [15] BUNDAY, B. D.: *Basic Optimisation Methods*. Edward Arnold, London, 1984.

-
- [16] BURDEN, R. L. / FAIRES, J. D. / REYNOLDS, A. C.: *Numerical Analysis*. Thomson, Pacific Grove, 2003.
- [17] CHEN, W. F. / HAN, D. J.: *Plasticity for Structural Engineers*. Springer, New York, 1988.
- [18] CHERKAEV, A.: *Variational Methods for Structural Optimitation*. Springer, New York, 2000.
- [19] CHVÁTAL, V.: *Linear Programming*. W. H. Freeman & Company, New York, 1983.
- [20] CZERNY, I.: *Tafeln für Rechteckplatten*. In: *Betonkalender Teil I*, S. 277–339, 1999.
- [21] D'ADDETTA, G. A.: *Discrete Models for Cohesive Frictional Materials*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2004.
- [22] DAMKILDE, L. / KRENK, S.: *Limits – A system for limit state analysis and optimal material layout*. *Computers & Structures* 64 (1997), S. 709–718.
- [23] DANTZIG, G.: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton, 1963.
- [24] DE JONG, K. A.: *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*. Dissertation, University of Michigan, 1975.
- [25] DELAUNAY, B.: *Sur la sphère de vide*. *Bulletin of the Academy of Sciences of the U.S.S.R., Classe de Sciences Mathématiques et Naturelles* 7 (1934), S. 793–800.
- [26] DENTON, S. R.: *Compatibility requirements for yield-line mechanisms*. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), S. 3099–3109.
- [27] DERSHOWITZ, N. / ZAKS, S.: *Enumeration of ordered trees*. *Discrete Mathematics* 31 (1980), S. 9–28.
- [28] DICKENS, J. G. / L. L., JONES: *A General Computer Program for the Yield-Line Solution of Edge Supported Slabs*. *Computers & Structures* 30 (1988), S. 465–476.
- [29] DIN 1045–1: *Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton, Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung e.V. (Juli 2001).
- [30] DIN 18800–1: *Stahlbauten, Teil 1: Bemessung und Konstruktion*. Deutsches Institut für Normung e.V. (November 1990).
- [31] ESCHENAUER, H. / OLHOFF, N. / SCHNELL, W.: *Applied Structural Mechanics*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1997.

- [32] EUROCODE 2: *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1: Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*. Europäisches Komitee für Normung (Dezember 1991).
- [33] FAMIYESIN, O. O. R. / HOSSAIN, K. M. A. / CHIA, Y. H. / P. A., SLADE: *Numerical and analytical predictions of the limit load of rectangular two way slabs*. Computers & Structures 79 (2001), S. 43–52.
- [34] FLETCHER, R.: *Optimization*. Academic Press, London/New York, 1969.
- [35] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*. John Wiley & Sons, Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore, 1995.
- [36] FLETCHER, R. / REEVES, C. M.: *Function minimization by conjugate gradients*. The Computer Journal 7 (1964), S. 149–154.
- [37] FOX, E. N.: *Limit analysis for plates: The exact solution for a clamped square plate of isotropic homogeneous material obeying the square yield criterion and loaded by uniform pressure*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A – Mathematical and Physical Science 277 (1974), S. 121–155.
- [38] FUNG, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965.
- [39] GEIGER, C. / KANZOW, C.: *Numerische Verfahren zur Lösung unrestringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1999.
- [40] GEIGER, C. / KANZOW, C.: *Theorie and Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2002.
- [41] GERDES, I. / KLAWONN, F. / KRUSE, R.: *Evolutionäre Algorithmen*. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [42] GILL, P. E. / MURRAY, W.: *Numerical Methods for Constrained Optimization*. Academic Press, London/New York/San Francisco, 1974.
- [43] GILL, P. E. / MURRAY, W. / WRIGHT, M. H.: *Practical Optimization*. Elsevier Academic Press, London, 2004.
- [44] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer, Wien, 6. Auflage, 1963.
- [45] GOLDBERG, D. E.: *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading (MA), 1989.
- [46] GRIERSON, D. E. / GLADWELL, G. M. L.: *Collapse load analysis using linear programming*. Journal of the Structural Division ASCE 97 (1971), S. 1561–1573.
- [47] GROSS, D. / SEELIG, T.: *Bruchmechanik*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2001.

-
- [48] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 194 (2005), S. 4279–4300.
- [49] GRUTTMANN, F. / WAGNER, W.: *Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element*. Computational Mechanics 37 (2006), S. 479–497.
- [50] HAASE, H.: *Über die Bruchlinientheorie von Platten, zusammenfassende Darstellung und Erweiterung*. Dissertation, Technische Universität Berlin-Charlottenburg, 1956.
- [51] HAASE, H.: *Bruchlinientheorie von Platten – Grundlagen und Anwendungen*. Werner, Düsseldorf, 1962.
- [52] HAFTKA, R. T. / GÜRDAL, Z. / KAMAT, M. P.: *Elements of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1990.
- [53] HESTENES, M. R. / STIEFEL, E.: *Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems*. Journal of Research of the National Bureau of Standards 49 (1952), S. 409–436.
- [54] HILLERBORG, A.: *Strip method of design*. Viewpoint, London, 1974.
- [55] HILLERBORG, A.: *Strip Method Design Handbook*. E & FN Spon, London, 1996.
- [56] HOLLAND, J. H.: *Adaption in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor (MI), 1975.
- [57] HOOKE, R. / JEEVES, T. A.: *“Direct search” solution of numerical and statistical problems*. Journal of the Association for Computing Machinery 8 (1961), S. 212–229.
- [58] HUGHES, T. J. R.: *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.
- [59] IBELL, T. J. / MORLEY, C. T. / MIDDLETON, C. R.: *A plasticity approach to the assessment of shear in concrete beam-and-slab bridges*. The Structural Engineer 75 (1997), S. 331–338.
- [60] INGERSLEV, A.: *Om en elementaer Beregningsmaade af krydsarmerede Plader*. Ingeniøren 30 69 (1921), S. 507–515.
- [61] JARRE, F. / STOER, J.: *Optimierung*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2004.
- [62] JENNINGS, A.: *On the identification of yield-line collapse mechanisms*. Engineering Structures 18 (1996), S. 332–337.

- [63] JENNINGS, A. / THAVALINGAM, A. / MCKEOWN, J. J. / SLOAN, D.: *On the Optimisation of Yield Line Patterns*. Developments in Computations Engineering (1993), S. 209–213.
- [64] JOHANSEN, K. W.: *Brudlinieteorier*. Jul. Gjellerups Forlag, København, 1943.
- [65] JOHANSEN, K. W.: *Pladeformler*. Polyteknisk Forening, København, 2. Auflage, 1949.
- [66] JOHANSEN, K. W.: *Yield-line Theory*. Cement and Concrete Association, London, 1962.
- [67] JOHANSEN, K. W.: *Yield-line formulae for slabs*. Cement and Concrete Association, London, 1972.
- [68] JOHNSON, D.: *Mechanism determination by automated yield-line analysis*. The Structural Engineer 72 (1994), S. 323–327.
- [69] JOHNSON, D.: *Yield-Line Analysis by Sequential Linear Programming*. International Journal of Solids and Structures 32 (1995), S. 1395–1404.
- [70] JONES, L. L.: *Ultimate Load Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures*. Chatto & Windus, London, 1962.
- [71] JONES, L. L. / WOOD, R. H.: *Yield-Line Analysis of Slabs*. Thames & Hudson, London, 1967.
- [72] JUNGnickel, D.: *Optimierungsmethoden*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1999.
- [73] KALISZKY, S.: *Plastizitätslehre – Theorie und technische Anwendungen*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1984.
- [74] KAZINCZY, G.: *Bemessung von statisch unbestimmten Konstruktionen unter Berücksichtigung der bleibenden Formänderungen (ung.)*. Betonszemle 4–6 (1914).
- [75] KENNEDY, G. / GOODCHILD, C.: *Practical yield line design*. British Cement Association, Crowthorne, 2003.
- [76] KIRKPATRICK, S. / GELATT, C. D. / VECCHI, M. P.: *Optimization by Simulated Annealing*. Science 220 (1983), S. 671–680.
- [77] KLINKEL, S.: *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [78] KÜNZI, H. P. / KRELLE, W. / VON RANDOW, R.: *Nichtlineare Programmierung*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.

-
- [79] KOWAL, Z. / SAWCZUK, A.: *On the yield-line theory of plates with random plastic moments*. Engineering Fracture Mechanics 8 (1976), S. 275–280.
- [80] KRABBENHOFT, K. / DAMKILDE, L.: *Lower bound limit analysis of slabs with nonlinear yield criteria*. Computers & Structures 80 (2000), S. 2043–2057.
- [81] KRABS, W.: *Einführung in die lineare und nichtlineare Optimierung für Ingenieure*. Teubner, Stuttgart, 1983.
- [82] KREISSIG, R.: *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Fachbuchverlag, Leipzig/Köln, 1992.
- [83] KRENK, S. / DAMKILDE, L. / HØYER, O.: *Limit analysis and optimal design of plates with equilibrium elements*. Journal of Engineering Mechanics 120 (1994), S. 1237–1255.
- [84] KWAN, A. K. H.: *Dip and strike angles method for yield line analysis of reinforced concrete slabs*. Magazine of Concrete Research 56 (2004), S. 487–498.
- [85] LAWO, M.: *Optimierung im konstruktiven Ingenieurbau*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1987.
- [86] LEE, D. T. / SCHACHTER, B. J.: *Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation*. International Journal of Computer and Information Sciences 9 (1980), S. 219–242.
- [87] LITGER, K.: *Optimierung*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1992.
- [88] LIU, T. C.: *Automatic computational method for yield line analysis*. Structural Engineering and Mechanics 8 (1999), S. 311–324.
- [89] LOOTSMA, F. A.: *Numerical Methods for Non-Linear Optimization*. Academic Press, London/New York, 1972.
- [90] LUENBERGER, D. G.: *Optimization by Vector Space Methods*. John Wiley & Sons, New York/London/Sydney/Toronto, 1969.
- [91] LUENBERGER, D. G.: *Linear and Nonlinear Programming*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1984.
- [92] MCKEOWN, J. J. / JENNINGS, A. / THAVALINGAM, A. / SLOAN, D.: *Optimization Techniques for Generating Yield-Line Patterns*. Advances in Structural Optimization (1994), S. 161–169.
- [93] MCKEOWN, J. J. / MEEGAN, D. / SPREVAK, D.: *An Introduction to unconstrained Optimisation*. Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [94] MIDDLETON, C. R.: *Concrete Bridge Assessment*. <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/brg/papers/brgsrv98/> (1998).

- [95] MINDLIN, R. D.: *Influence of rotatory inertia and shear flexural motions of isotropic elastic plates*. Journal of Applied Mechanics 18 (1951), S. 31–38.
- [96] MINOUX, M.: *Mathematical Programming*. John Wiley & Sons, Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore, 1986.
- [97] MONOTTI, M. N.: *Reinforced Concrete Slabs — Compatibility Limit Design*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 2004.
- [98] MOON, J. W. / MOSER, L.: *Triangular dissections of n-Gons*. Canadian Mathematical Bulletin 6 (1963), S. 175–178.
- [99] MÖRSCH, E.: *Der Eisenbetonbau*. Band 1 & 2, Wittwer, Stuttgart, 6. Auflage, 1923/29.
- [100] MUNRO, J.: *The elastic and limit analysis of planar skeletal structures*. Civil Engineers & PWR 60 (1965), S. 674–677.
- [101] MUNRO, J. / DAFONSECA, A. M. A.: *Yield line method by finite elements and linear programming*. The Structural Engineer 56B (1978), S. 37–44.
- [102] MUNRO, J. / SMITH, D. L.: *Linear programming in plastic analysis and synthesis*. Proceedings International Symposium Computer-Aided Structural Design, University of Warwick 1 (1972), S. A1/22–A1/54.
- [103] NEAL, B. G. / SYMONDS, P. S.: *The rapid calculation of the plastic collapse load for a framed structure*. Proc. Inst. Civil Engrs. 1 (1952), S. 58–71.
- [104] NEGOITA, C. V. / RALESCU, D. A.: *Applications of fuzzy sets to systems analysis*. Birkhäuser, Basel, 1975.
- [105] NELDER, J. A. / MEAD, R.: *A Simplex Method for Function Minimization*. Computer Journal 7 (1965), S. 308–313.
- [106] NIELSEN, M. P.: *Limit Analysis of reinforced concrete Slabs*. The Danish Academy of Technical Sciences, Copenhagen, 1964.
- [107] NIELSEN, M. P.: *Limit Analysis and Concrete Plasticity*. CRC Press, Boca Raton/London/New York/Washington, 1998.
- [108] OKABE, A. / BOOTS, B. / SUGIHARA, K.: *Spatial Tessellations*. John Wiley & Sons, Chichester/New York/Brisbane/Toronto/Singapore, 1992.
- [109] OLSEN, P. C.: *The influence of the linearisation of the yield surface on load-bearing capacity of reinforced concrete slabs*. Computer methods in applied mechanics and engineering 162 (1998), S. 351–358.
- [110] PAPAGEORGIOU, M.: *Optimierung*. Oldenbourg, München/Wien, 1991.

-
- [111] PARDEY, A.: *Physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten im Vergleich zur Bruchlinientheorie*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 441. Beuth, Berlin/Köln, 1994.
- [112] PARK, R. / GAMBLE, W. I.: *Reinforced Concrete Slabs*. John Wiley & Sons, New York/Chichester/Brisbane/Toronto, 1980.
- [113] POLAK, E. / RIBIÈRE, G.: *Note sur la Convergence de Methods de Directions Conjugues*. Revue Française Informat. Recherche Opérationnelle 16 (1969), S. 35–43.
- [114] PRAGER, W. / HODGE, P. G.: *Theorie ideal plastischer Körper*. Springer, Wien, 1954.
- [115] PREPARATA, F. P. / SHAMOS, M. I.: *Computational Geometry*. Springer, New York/Berlin/Heidelberg/Tokyo, 1985.
- [116] PUCHER, A.: *Einflußfelder elastischer Platten*. Springer, Wien/New York, 5. Auflage, 1977.
- [117] RAMSAY, A. / JOHNSON, D.: *Geometric optimization of yield-line patterns using a direct search method*. Structural Optimization 14 (1997), S. 108–115.
- [118] RAMSAY, A. / JOHNSON, D.: *Analysis of practical slab configurations using automated yield-line analysis and geometric optimization of fracture patterns*. Engineering Structures 20 (1998), S. 647–654.
- [119] RECHENBERG, I.: *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1973.
- [120] RECHENBERG, I.: *Evolutionsstrategie '94*. Frommann-Holzboog, Stuttgart, 1994.
- [121] REISSNER, E.: *The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates*. Journal of Applied Mechanics 12 (1945), S. 69–76.
- [122] ROSEN, J. B.: *The gradient projection method for nonlinear programming, Part I – linear constraints*. SIAM Journal on Applied Mathematics 8 (1960), S. 181–217.
- [123] ROTTNER, T.: *Sensitivitätsanalyse stabiler Gleichgewichtslagen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung von Lösungsverfahren für Parallelrechner*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [124] SAWCZUK, A. / JAEGER, T.: *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*. Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1963.
- [125] SCHELLENBERGER, R.: *Beitrag zur Berechnung von Platten nach der Bruchtheorie*. Dissertation, Technische Hochschule Karlsruhe, 1958.

-
- [126] SCHÜTT, J.: *Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2005.
- [127] SCHWARZ, S.: *Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [128] SCHWEFEL, H.-P.: *Evolutionsstrategie und numerische Optimierung*. Dissertation, TU Berlin, 1975.
- [129] SHOEMAKER, W. L.: *Computerized yield line analysis of rectangular slabs*. Concrete International (1989), S. 62–65.
- [130] SHOR, N. Z.: *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. Springer Series in Computational Mathematics Springer, Berlin/Heidelberg, 1985.
- [131] SIEMON, H.: *Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zahlentheorie und Kombinatorik*. Klett, 1981.
- [132] SIMO, J.C. / HUGHES, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. Springer, New York, 1998.
- [133] SIX, M.: *Sicherheitskonzept für nichtlineare Traglastverfahren im Betonbau*. Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 534. Beuth, Berlin/Wien/Zürich, 2003.
- [134] SPELLUCCI, P.: *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*. Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1993.
- [135] STIGLAT, K. / WIPPEL, H.: *Massive Platten*. In: *Betonkalender Teil II*, S. 211–290, 2000.
- [136] STOLZE, R.: *Zum Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit von den Bruchlinien abweichender Bewehrungsrichtung – Bruchlinien-Rotationskapazität*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1993.
- [137] SUENSON, E.: *Krydsarmerede Jaernbetonpladers Styrke*. Ingeniøren 25 76–78 (1916), S. 535–551 u. 631–632.
- [138] TAYLOR, R.L.: *FEAP – A finite element analysis program, version 7.5, programmer manual*. <http://www.ce.berkeley.edu/~rlt/feap/pmanual.pdf> (2004).
- [139] THAVALINGAM, A.: *Determination of Optimal Yield Line Patterns Governing the Collapse of Slabs*. Dissertation, The Queen’s University of Belfast, 1995.
- [140] THAVALINGAM, A. / JENNINGS, A. / MCKEOWN, J. J. / SLOAN, D.: *A computerised method for rigid-plastic yield-line analysis of slabs*. Computers & Structures 68 (1998), S. 601–612.

-
- [141] THAVALINGAM, A. / JENNINGS, A. / SLOAN, D. / MCKEOWN, J. J.: *Computer-assisted generation of yield-line patterns for uniformly loaded isotropic slabs using an optimisation strategy*. Engineering Structures 21 (1999), S. 488–496.
- [142] TIMOSHENKO, S. P. / WOINOWSKY-KRIEGER, S.: *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, New York, 2. Auflage, 1959.
- [143] URYAS'EV, S. P.: *New Variable-Metric Algorithms for Nondifferentiable Optimization Problems*. Journal of Optimization Theory and Applications 71 (1991), S. 359–389.
- [144] VANDERBEI, R. J.: *Linear Programming: Foundations and Extensions*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 2000.
- [145] VON BACH, C. / GRAF, O.: *Versuche mit allseitig aufliegenden, quadratischen und rechteckigen Eisenbetonplatten*. Deutscher Ausschuß für Eisenbeton, Heft 30. Ernst & Sohn, Berlin, 1915.
- [146] WAGNER, W.: *Ein flaches Schalenelement mit anisotropem geschichtetem Aufbau*. IBNM-Bericht 90/4, 1990.
- [147] WAGNER, W. / GRUTTMANN, F.: *A robust nonlinear mixed hybrid quadrilateral shell element*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 64 (2005), S. 635–666.
- [148] WEICKER, K.: *Evolutionäre Algorithmen*. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden, 2002.
- [149] WOLFE, P.: *Methods of nonlinear programming*. In: ABADIE, J., (HRSG.), *Nonlinear Programming*, S. 97–131 North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- [150] WOLFENSBERGER, R.: *Traglast und optimale Bemessung von Platten*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1964.
- [151] WOOD, R. H.: *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*. Thames & Hudson, London, 1961.
- [152] WOOD, R. H. / JONES, J. J.: *Yield-Line Analysis of Slabs*. Thames & Hudson, Chatto & Windus, London, 1967.
- [153] WÜST, J.: *Computation of yield-line geometries for polygonal slabs using Catalan numbers*. In: WALRAVEN, B. / BLAAUWENDRAAD, J. / SCARPAS, T. / SNIJDER, B., (HRSG.), *5th International Ph. D. Symposium in Civil Engineering*, S. 1049–1056 A. A. Balkema Publishers, 2004.

- [154] WÜST, J.: *Prediction of Yield-line Geometries for Arbitrary Simply Supported Slabs*. In: *PAMM*, S. 384–385 Wiley, 2004.
- [155] ZIENKIEWICZ, O.C. / TAYLOR, R.L.: *The Finite Element Method*. Band 1–3, Butterworth-Heinemann, Oxford/Woburn, 5. Auflage, 2000.

Berichte des Instituts für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH)

Verzeichnis der bisher erschienenen Berichte:

- 51/1: Beitrag zur Ermittlung der zeitabhängigen Eigenspannungen in Verbundträgern, Dissertation, Hansjürgen Sonntag, 1951.
- 54/2: Beiträge zur Ermittlung der zeitabhängigen Spannungen in Verbundträgern, Dissertation, Eugen Müller, 1954.
- 54/3: Zur Statik räumlich gekrümmter Träger, Dissertation, Heinrich Bechert, 1954.
- 55/4: Bemessungsverfahren für Verbundträger, Dissertation, Günter Utescher, 1955.
- 57/5: Einflußfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme, Dissertation, Otto Köller, 1957.
- 60/6: Beitrag zur numerischen Berechnung der Schnittkräfte von rechteckigen und schiefen randversteiften Platten, Dissertation, Klaus Stiglat, 1960.
- 61/7: Allgemeines und einheitliches Berechnungsverfahren für Verbundkonstruktionen aus Stahl und Beton, Dissertation, Herbert Wippel, 1961.
- 62/8: Beitrag zur Bemessung vorgespannter stählerner Fachwerkträger mit besonderer Berücksichtigung der Tragsicherheit Dissertation, Wolfgang Heidecker, 1962.
- 63/9: Beitrag zur Berechnung der Schnittkräfte und Durchbiegungen von umfanggelagerten Rechteckplatten mit veränderlichem Querschnitt in einer Spannrichtung, Dissertation, Ernst Buchholz, 1963.
- 63/10: Der winkelrecht zu seiner Ebene belastete, kreisförmig gekrümmte Träger mit starrer Torsionseinspannung an den Auflagerpunkten, Dissertation, Hans Wittfoht, 1963.

- 63/11: Ein Verfahren zur Berechnung biegsamer rechteckiger Gründungsplatten mit elektronischen Rechengeräten, Dissertation, Artur Deninger, 1963.
- 64/12: Anwendung des Momentenausgleichsverfahrens für durchlaufende schiefwinklige Platten, Dissertation, Jahiclul Alum, 1964.
- 67/13: Beitrag zur Berechnung des Tragvermögens von Rahmentragwerken aus Stahl nach der Plastizitätstheorie II. Ordnung, Dissertation, Mieng-siong Wang, 1967.
- 67/14: Zusammenwirken von biegesteifem Skelett und aussteifenden Wandscheiben in Hochhauskonstruktionen, Dissertation, Rolf Zickendraht, 1967.
- 68/15: Experimentelle Untersuchung von beliebig gelagerten Plattentragwerken mit Hilfe von elektrischen Analogieschaltungen, Dissertation, Werner Sitzler, 1968.
- 0/75 : Berechnung einfeldriger und durchlaufender Kastenträger unter Berücksichtigung der Querschnittsdeformation, Dissertation, J. Harnisch, 1975.
- 1/76 : Das Tragverhalten längsversteifter, vorverformter Rechteckplatten unter Axialbelastung nach der nichtlinearen Beultheorie (unter Berücksichtigung der orthotropen Struktur sowie einer elastischen Lagerung am Längsrand), Dissertation, Helmut Rubin, 1976.
- 2/78 : Traglastuntersuchungen ebener Rahmen aus Stahl unter Berücksichtigung teilplastischer Zonen, Dissertation, Ülgen Korkut, 1978.
- 3/79 : Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz, Dissertation, Wolfgang Heil, 1979.
- 4/79 : Schnittgrößen im Verschneidungsbereich eines kreiszylindrischen Druckbehälters mit einem Stutzen beliebiger Länge, Dissertation, Kurt Schumer, 1979.
- 5/81 : Traglastberechnung räumlicher Rahmen aus Stahl- oder Leichtmetallprofilen mit dünnwandigen offenen Querschnitten, Dissertation, Theodor Ackermann, 1981.

- 6/83 : Berechnung orthotroper Rechteckplatten nach der nichtlinearen Elastizitätstheorie für beliebige Randbedingungen, Dissertation, Karl Morgen, 1983.
- 7/86 : Traglastermittlung räumlicher Stabtragwerke aus Stahl und Leichtmetall unter Berücksichtigung der Schubweichheit, Dissertation, Dietmar H. Maier, 1986.
- 8/89 : Bemessung von Raumfachwerken bezüglich ihrer Grenztragfähigkeit mit Hilfe der mathematischen Optimierung, Dissertation, Richard Harich, 1989.
- 9/89 : Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Forschungsbericht, Karl Schweizerhof, 1989.
- 10/90 : Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen, Dissertation, Heinrich Gebhardt, 1990.
- 11/91 : Theorie II. Ordnung des eben gekrümmten Stabes bei nicht richtungstreuen Kräften, Dissertation, Peter Brković, 1991.
- 12/91 : Nichtlineare Finite Element Berechnungen von Schalenträgwerken mit geschichtetem anisotropen Querschnitt, Dissertation, Rudolf Klarman, 1991.
- 13/94 : Adaptive Finite Element Konzepte zur Analyse von Schalenträgwerken, Dissertation, Markus Baumann, 1994.
- 1 (1995) : Optimierung von Stockwerkrahmen aus Stahl mit biegesteifen und biegeweichen Rahmenknoten, Dissertation, Petra Höß, 1994, ISBN: 3-935322-00-3.
- 2 (1996) : Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen, Forschungsbericht, Friedrich Gruttmann, 1996, ISBN: 3-935322-01-1.
- 3 (1997) : Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen, Forschungsbericht, Klaus Knebel, 1997, ISBN: 3-935322-02-X.
- 4 (1998) : Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalenträgwerke mit endlichen Rotationen, Dissertation, Roland Sauer, 1998, ISBN: 3-935322-03-8.

- 5 (1999) : Finite-Element-Modellierung von Starrkörper- und Übergangsbedingungen in der Statik, Dissertation, Joachim Kugler, 1999, ISBN: 3-935322-04-6.
- 6 (2000) : Delaminationsanalysen von Faserverbundstrukturen mit der Methode der finiten Elemente, Dissertation, Wolfgang Sprenger, 2000, ISBN: 3-935322-05-4.
- 7 (2000) : Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen, Dissertation, Sven Klinkel, 2000, ISBN: 3-935322-06-2.
- 8 (2001) : Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Dissertation, René Ziegler, 2001, ISBN: 3-935322-07-0.
- 9 (2005) : Ein inelastisches 3D-Versagensmodell für Beton und seine Finite-Element-Implementierung, Dissertation, Jan Schütt, 2005, ISBN: 3-935322-08-9.
- 10 (2006) : Formfindung der Fließliniengeometrie für polygonale Platten im Traglastzustand, Dissertation, Jochen Wüst, 2006, ISBN: 3-935322-09-7.

Lebenslauf

Name	Jochen Gerd Wüst
Geburtsdatum	31.10.1973 in Bietigheim
1980-1993	Schulausbildung Ellental-Gymnasium Bietigheim-Bissingen Abschluss: Allgemeine Hochschulreife
1993-1994	Grundwehrdienst
1994-2000	Studium des Bauingenieurwesens Universität Stuttgart Abschluss: Diplom-Ingenieur
2000-2006	Wissenschaftlicher Assistent Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH)
2004-2006	Lehrauftrag für Technische Mechanik Studiengang Bauingenieurwesen Hochschule Karlsruhe – Technik und Wirtschaft