

Matthias Hettel

**Analytische und numerische  
Untersuchungen der Dynamik  
von Vormischflammen sowie  
deren Interaktion mit Ring-  
wirbelstrukturen**





Matthias Hettel

**Analytische und numerische Untersuchungen  
der Dynamik von Vormischflammen sowie  
deren Interaktion mit Ringwirbelstrukturen**



# **Analytische und numerische Untersuchungen der Dynamik von Vormischflammen sowie deren Interaktion mit Ringwirbelstrukturen**

von  
Matthias Hettel



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)

Fakultät für Chemieingenieurwesen und Verfahrenstechnik, 2006

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2007  
Print on Demand

ISBN: 978-3-86644-099-9





**ANALYTISCHE UND NUMERISCHE UNTERSUCHUNGEN  
DER DYNAMIK VON VORMISCHFLAMMEN  
SOWIE DEREN INTERAKTION MIT  
RINGWIRBELSTRUKTUREN**

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

von der Fakultät für Chemieingenieurwesen und Verfahrenstechnik  
der Universität Fridericiana Karlsruhe (Technische Hochschule)

genehmigte

**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Matthias Hettel

aus Karlsruhe

Tag des Kolloquiums: 24.10.2006  
Referent: Prof. Dr.-Ing. Henning Bockhorn  
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. habil. Ulrich Maas





Am meisten schätze ich die Analogie,  
meine zuverlässigste Lehrmeisterin,  
die Mitwisserin aller Geheimnisse der Natur.

Johannes Kepler



**gewidmet  
meinen Eltern  
und meiner Familie**



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Bereich Verbrennungstechnik des Engler-Bunte-Institutes der Universität Karlsruhe (TH).

Bei dem Lehrstuhlinhaber Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Bockhorn möchte ich mich für die Betreuung der Arbeit und das große mir entgegengebrachte Vertrauen bedanken. Zudem hat die gemeinsame Bearbeitung spannender Industrieprojekte meinen Erfahrungsschatz wesentlich erweitert. Herrn Prof. Dr. rer. nat. habil. U. Maas danke ich für die wohlwollende Unterstützung und die freundliche Übernahme des Korreferates.

Dem vormaligen Lehrstuhlinhaber Herrn Prof. Dr.-Ing. B. Leuckel möchte ich zunächst für die noch unter seiner Leitung genossenen Arbeitsjahre danken. Die mit ihm geführten Diskussionen bedeuteten für mich stets einen großen fachlichen Gewinn. Insbesondere möchte ich mich für den von ihm gelieferten Beitrag zur analytischen Berechnung der Dynamik idealisierter Kegelflammern bedanken. Auch Herr Prof. Dr.-Ing. B. Lenze hat sich für den Fortschritt meiner Arbeit interessiert. Bei der Lösung praxisrelevanter Fragestellungen habe ich von seinem reichen Erfahrungsschatz profitiert. Die vielfältigen Gespräche, die auch weit über fachliche Inhalte hinausgingen, waren für mich jedes Mal eine persönliche Bereicherung.

Ich bin mir wohl bewusst, dass diese Arbeit ohne die Beiträge weiterer Personen nicht möglich gewesen wäre. Darüber hinaus hat mir diese Zusammenarbeit viel Freude bereitet und ich bin dankbar für die daraus entstandenen freundschaftlichen Beziehungen. Stellvertretend seien hier der Leiter der EDV-Abteilung Walter Pfeffinger sowie vormals Wolfgang Paulat genannt. Besonders möchte ich mich auch bei den DiplomarbeiterInnen Dipl.-Ing. Vera Hübner, Dipl.-Ing. Frank Wetzels, Dipl.-Ing. Max Weiß und Sylvain Cail bedanken. Vielen Dank auch an die wissenschaftlichen Hilfskräfte Christian Rakowski und Khalid Es-Saidy.

Sehr dankbar bin ich für die offene und familiäre Atmosphäre am Institut, die sich auch in gemeinsamen außerfachlichen Aktivitäten niederschlug. Besonders hervorheben will ich dabei die derzeitigen Mitglieder der Theoriegruppe sowie die ehemaligen Kollegen Dr.-Ing. Christoph Hirsch, Dr.-Ing. Hans-Peter Schmid und Dr.-Ing. Frank Holzäpfel. Von ihnen allen habe ich viel gelernt. Allen voraus steht jedoch der Leiter der theoretischen Abteilung Dr.-Ing. Peter Habisreuther. Ihm danke ich für seinen umfangreichen selbstlosen Einsatz, die vielen mit ihm geführten Diskussionen, seine Ideen und Anregungen und die herzlichen Aufmunterungen beim Kampf gegen sumpfige Divergenzen und knorrige Algorithmen.

Schließlich gilt mein Dank einigen Personen, die mich auf verschiedene Art und Weise unterstützt haben. Meinen Eltern, meiner Frau Nicole, meiner Tochter Laila, Dagmar Reinhardt, Dr.-Ing. Nadia Sebbar, H.-P. Fecht, Prof. Dr.-Ing. Nikolaos Zarzalis, Dr.-Ing. C. Kulsheimer, Dr.-Ing. Dirk Großschmidt, Dr.-Ing. habil. Berthold Noll, Prof. Dr.-Ing. K. Bühler sowie S. und L.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung der Projekte Bo693/12-1, Bo693/12-2 und Bo693/12-3, im Rahmen derer die vorliegende Arbeit entstanden ist.



---

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1	Problemdarstellung .....	1
1.2	Zielsetzung .....	6
1.3	Gliederung der Arbeit .....	7
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b> .....	<b>9</b>
2.1	Strömungsmechanische Grundlagen .....	9
2.1.1	Die Navier-Stokes Gleichungen .....	9
2.1.2	Statistische Beschreibung turbulenter Strömungen .....	10
2.1.3	Charakterisierung der Turbulenz .....	14
2.1.4	Turbulenzmodellierung .....	21
2.1.5	Das k- $\epsilon$ Modell .....	26
2.1.6	Wirbel und ihre Eigenschaften .....	30
2.1.7	Freie laminare Ringwirbel .....	43
2.1.8	Freie turbulente Ringwirbel .....	47
2.1.9	Turbulente Ringwirbel bei pulsierten Freistrahlen .....	49
2.1.10	Numerische Berechnung von Ringwirbeln .....	50
2.2	Verbrennungstechnische Grundlagen .....	51
2.2.1	Selbsterregte Verbrennungsschwingungen .....	51
2.2.2	Modellierung turbulenter Vormischflammen .....	68
2.3	Numerische Grundlagen .....	80
2.3.1	Finite Volumen-Verfahren .....	80
2.3.2	Spektralverfahren .....	97
<b>3</b>	<b>Berechnung von Testsystemen</b> .....	<b>99</b>
3.1	Rotierende Farbflecke .....	99
3.1.1	Durchführung der Berechnungen .....	99
3.1.2	Ergebnisse .....	100
3.2	Laminare isotherme ebene Wirbel .....	106
3.2.1	Durchführung der Berechnungen .....	106
3.2.2	Ergebnisse .....	108
<b>4</b>	<b>Berechnung laminarer isothermer Ringwirbel</b> .....	<b>114</b>
4.1	Durchführung der Untersuchungen .....	114
4.1.1	Vorgehensweise .....	114
4.1.2	Beschreibung des Systems .....	115
4.1.3	Detektion des Wirbelzentrums .....	116
4.1.4	Ermittlung des Spiraldurchmessers .....	117
4.2	Einzelne Anfahrwirbel .....	118
4.2.1	Die Wirbelbildungsphase .....	118
4.2.2	Ausgebildetes laminares Stadium .....	127
4.3	Pulsierter Freistrahel .....	130

---

4.3.1	Einfluss von Frequenz und Amplitude	131
4.4	Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles	133
<b>5</b>	<b>Berechnung turbulenter isothermer Ringwirbel</b>	<b>137</b>
5.1	Durchführung der Untersuchungen	137
5.1.1	Vorgehensweise	137
5.1.2	Beschreibung des Systemes	137
5.1.3	Abschätzung der Kompressibilität	139
5.2	Wirbeltrajektorien	141
5.2.1	Detektion des Wirbelzentrums	141
5.2.2	Vergleich mit Messdaten	143
5.3	Mischungsfeld	146
5.3.1	Physikalische und numerische Diffusion	146
5.3.2	Vergleich mit Messdaten	150
<b>6</b>	<b>Berechnung von Frequenzgängen idealisierter pulsierter Flammen</b>	<b>153</b>
6.1	Durchführung der Untersuchungen	153
6.2	Analytische Berechnung sphärischer Flammen	154
6.3	Berechnung von Kegelflammen	157
6.3.1	Analytische Berechnung	157
6.3.2	Auswertung der Verweilzeitverteilung	168
6.3.3	Berechnung mit dem SLIC-Algorithmus	169
<b>7</b>	<b>Berechnung stationärer turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen</b>	<b>171</b>
7.1	Durchführung der Untersuchungen	171
7.2	Ergebnisse der Berechnungen	172
<b>8</b>	<b>Berechnung pulsierter turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen</b>	<b>176</b>
8.1	Durchführung der Untersuchungen	176
8.1.1	Vorgehensweise	176
8.1.2	Beschreibung des Systemes	176
8.1.3	Typische Zeitmaße	177
8.2	Detaillierte Analyse ausgewählter Flammen	179
8.2.1	Interaktion von Ringwirbel und Flamme	179
8.2.2	Phasenverzug und Verweilzeitverteilung	183
8.2.3	Amplitudenreduktion und Flammgeometrie	190
8.3	Die Flamme als nichtlineares zeitvariantes Übertragungsglied	193
8.3.1	Modell der verteilten Totzeit	193
8.3.2	Vergleich von direkter und indirekter Methode	196
8.4	Vergleich berechneter Flammenfrequenzgänge mit Messdaten	199
8.4.1	Variation der thermischen Leistung	199
8.4.2	Variation des Pulsationsgrades	203
8.5	Separation von Einflussgrößen auf den Flammenfrequenzgang	204
8.5.1	Vorgehensweise	204

---

8.5.2	Einfluss der Flammenlänge	209
8.5.3	Einfluss der Flammendicke	210
8.5.4	Einfluss der Flammenfläche	212
8.5.5	Einfluss des Mischungsfeldes	213
8.5.6	Einfluss des Turbulenzfeldes	214
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>216</b>
<b>10</b>	<b>Literatur</b>	<b>225</b>
<b>11</b>	<b>Anhang</b>	<b>235</b>
11.1	Mittelungsgesetze	235
11.2	Analytische Berechnung einer idealisierten Kugelflamme	236
11.3	Analytische Berechnung einer idealisierten Kegelflamme	242

## Nomenklatur

### Lateinische Symbole

<b><u>Symbol</u></b>	<b><u>Einheit</u></b>	<b><u>Bedeutung</u></b>
A	[m <sup>2</sup> ]	Fläche
a	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Temperaturleitfähigkeit
a	[-]	Ausbrand
a	-	Ausgangsgröße
c	[-]	Reaktionsfortschritt
c	[kmol m <sup>-3</sup> ]	Konzentration
c <sub>p</sub>	[kJ kmol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	molare Wärmekapazität bei konstantem Druck
c, C	-	Konstante
d, D	[m]	Durchmesser
D	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	molekularer Diffusionskoeffizient
D	-	Deformationstensor
D	-	Dämpfungsfaktor
D(κ,t)	[m <sup>3</sup> s <sup>-3</sup> ]	Energiedissipationsrate pro Wellenzahl
e	-	Eingangsgröße
E(κ,t)	[m <sup>3</sup> s <sup>-2</sup> ]	Energie pro Wellenzahl
f	[-]	Mischungsbruch bzw. skalare Testgröße
f	[s <sup>-1</sup> ]	Frequenz
F	-	komplexer Frequenzgang
F	[m <sup>2</sup> ]	Fläche
F	[-]	Amplitudenantwort
g	[-]	Gewichtsfunktion (Stoßantwort)
G	-	komplexe Übertragungsfunktion
G	-	Geschwindigkeitsänderungstensor
h	[-]	Übergangsfunktion (Sprungantwort)
h	[kJ kg <sup>-1</sup> ]	spezifische Enthalpie
H	[m]	Kegelhöhe
i	-	Laufindex
Im	-	Imaginärteil einer komplexen Größe
j	-	Laufindex
j	-	imaginäre Einheit einer komplexen Zahl
k	[m <sup>2</sup> s <sup>-2</sup> ]	turbulente kinetische Energie
K	-	Konstante
K	-	Kreuzkorrelation
L	[m]	Länge
M	[kg kmol <sup>-1</sup> ]	Molekulargewicht
$\dot{M}$	[kg s <sup>-1</sup> ]	Massenstrom
N	-	Anzahl
p	[N m <sup>-2</sup> ]	statischer Druck

---

P	[kg s <sup>-3</sup> m <sup>-1</sup> ]	Produktionsrate von k
P	-	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
P( $\kappa, t$ )	[m <sup>3</sup> s <sup>-3</sup> ]	Energieproduktionsrate pro Wellenzahl
$\dot{Q}$	[J s <sup>-1</sup> ]	Wärmefreisetzungsrate
r	[m]	radiale Koordinate
R	[m]	Radius
R	[kg s <sup>-1</sup> ]	integrale Umsatzgeschwindigkeit
R	[kg m <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup> ]	volumenspezifische Umsatzgeschwindigkeit
R	[kJ kg <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	spezifische Gaskonstante
$\mathfrak{R}$	[kJ mol <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	universelle Gaskonstante
Re	-	Realteil einer komplexen Größe
s	[m]	Wirbelkerndurchmesser
s	-	komplexe Variable
s	[m]	Strecke
S	[m s <sup>-1</sup> ]	Flammengeschwindigkeit (Flame Speed)
S	[m <sup>-1</sup> ]	Profilsteilheit
S	-	Quellstärke
S <sup>°</sup>	[kJ kmol <sup>-1</sup> ]	molare Standardbildungsenthalpie
t	[s]	Zeit
T	[s]	Zeitintervall
T	[K]	Temperatur
T	-	Tensor
T(t)	[m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]	Energietransferrate
T( $\kappa, t$ )	[m <sup>3</sup> s <sup>-3</sup> ]	Energietransferrate pro Wellenzahl
u, U	[m s <sup>-1</sup> ]	axiale Geschwindigkeit
U	[kg s <sup>-1</sup> ]	anteiliger Brennstoffumsatz
U	[kg s <sup>-1</sup> ]	integrale Umsatzgeschwindigkeit
V	[m <sup>3</sup> ]	Volumen
V	[Volt]	Spannungssignal
$\dot{V}$	[m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]	Volumenstrom
w, W	[m s <sup>-1</sup> ]	tangentiale Geschwindigkeit
x, X	[m]	axiale Koordinate
y, Y	[m]	laterale Koordinate, radiale Koordinate
z	[m]	Tiefenkoordinate

### Griechische Symbole

<u>Symbol</u>	<u>Einheit</u>	<u>Bedeutung</u>
$\alpha$	[°]	Winkel
$\beta$	-	Wichtungsfaktor
$\dot{\gamma}$	[s <sup>-1</sup> ]	Schergeschwindigkeit
$\Gamma$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Zirkulation

---

$\Gamma$	[N s m <sup>-2</sup> ]	turbulenter Diffusionskoeffizient
$\delta$	[m]	Längenmaß
$\delta$	-	Kronecker Symbol
$\delta(t)$	[-]	Stoß- bzw. Dirac-Funktion
$\Delta$	-	finite Differenz
$\varepsilon$	[m <sup>2</sup> s <sup>-3</sup> ]	Dissipationsrate der Turbulenzenergie
$\kappa$	-	Isotropenkoeffizient
$\kappa$	[m <sup>-1</sup> ]	Wellenzahl
$\lambda$	-	Luftzahl
$\lambda$	[W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> ]	Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	[N s m <sup>-2</sup> ]	dynamische Viskosität
$\nu$	[m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	kinematische Viskosität
$\pi$	-	Pi
$\pi$	[N m <sup>-2</sup> ]	Schubspannung
$\rho$	[kg m <sup>-3</sup> ]	Dichte
$\sigma$	[kmol kg <sup>-1</sup> ]	spezifische Molzahl
$\sigma$	-	Proportionalitätsfaktor
$\sigma(t)$	[-]	Sprung- bzw. Heaviside-Funktion
$\Sigma$	[m <sup>2</sup> m <sup>-3</sup> ]	Flammenfrontoberflächendichte
$\tau$	[s]	Aufenthaltszeit, Verzugszeit, Verweilzeit, Totzeit
$\varphi$	[°]	Winkel
$\varphi$	[m]	tangentiale Koordinate
$\Phi$	-	allgemeine Transportvariable
$\chi$	[-]	normierte mittlere Wirbelstreckung
$\psi$	[m <sup>3</sup> s <sup>-1</sup> ]	Stromfunktion
$\omega$	[s <sup>-1</sup> ]	Rotation
$\Omega$	[s <sup>-1</sup> ]	Umsatzrate
$\omega$	[kmol m <sup>-3</sup> s <sup>-1</sup> ]	Ratenquellterm
$\Omega$	[s <sup>-1</sup> ]	Winkelgeschwindigkeit
$\Omega$	[kg m <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup> ]	Umsatzgeschwindigkeit pro Flammenfrontoberfläche

**Kennzahlen und dimensionslose Größen**

Co	Courantzahl
Da	Damköhlerzahl
Ka	Karlovitzzahl
Pe	Pecletzahl
Pr	Prandtlzahl
Pu	Pulsationsgrad
Re	Reynoldszahl
Ro	Rosbyzahl
Sc	Schmidtzahl
Str	Strouhalzahl
Tu	Turbulenzgrad

**Sonstige Symbole**

$\nabla$	Nabla-Operator
$\Delta$	Laplace-Operator
$\langle \Phi \rangle$	Ensemble- oder Phasengemittelter Wert von $\Phi$
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation
$\mathcal{L}$	Laplace-Transformation
$O$	Ordnung

**Hochgestellte Indices**

$\Phi^*$	entdimensionierte Größe $\Phi$
$\Phi^{**}$	entdimensionierte Größe $\Phi$
$\vec{\Phi}$	vektorielle Größe
$\hat{\Phi}$	Amplitude von $\Phi$
$\overline{\Phi}$	zeitlich gemittelter Wert (Reynolds-Mittelung) von $\Phi$
$\tilde{\Phi}$	zeitlich gemittelter Wert (Favre-Mittelung) von $\Phi$
$\check{\Phi}$	Abweichung vom zeitlichen Mittelwert $\overline{\Phi}$
$\Phi'$	geordneter Anteil einer statistisch instationären Größe $\Phi$
$\Phi''$	Schwankungsanteil von $\Phi$ gegenüber dem Reynolds-Mittelwert
$\Phi'''$	Schwankungsanteil von $\Phi$ gegenüber dem Favre-Mittelwert

**Tiefgestellte Indices**

a	alt	norm	normierter Wert
e, E	east (Osten)	N	Wert bei
A	Ausschub		Normalbedingungen
c	Phase	P	Periode
char	charakteristisch	P	Wert in Zellmitte
chem	chemisch	Per	Persistence
D	Diffusion	r	in radialer Richtung
Diss	Dissipation	rel	relativ
Disso	Dissoziation	R	Reaktion
ein	Einlasswert	Ref	Referenzwert
eff	Effektivwert	stat	stationär, statisch
Err	Erregung	s, S	south (Süden)
F	Front	S	Spirale
F	Flamme	S	Strahl
F	Frischgemisch	S	Stabilisierung
global	globale Größe bzw. Gesamtwert	t	turbulent
$\eta$	Kolmogorov-Maßstab	therm	thermisch
l	laminar	T	Translation
m	pro Meter	Ums	Umsatz
mittel	gemittelte Größe	V	Verzug
M	Wert an der Düsenmündung	w, W	west (Westen)
Max	Maximalwert	W	Wirbel
mol	molekular	x	in axialer Richtung
n	neu	$\varphi$	Umfangsrichtung
n, N	north (Norden)	0	Ausgangs-, Start-, Referenzwert
		$\infty$	Wert in unendlicher Entfernung

**Abkürzungen**

ATG	Allgemeine Transportgleichung	POKE	$k-\epsilon$ Modell mit Pope (bzw. Freistrah)-Korrektur
CFD	Computational Fluid Dynamics	QUICK	Quadratic Upstream Interpolation for Convection Kinematics
DGL	Differentialgleichung	RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
DNS	Direkte Numerische Simulation	RMS	Root-Mean-Square
EBI	Engler-Bunte-Institut	SIMPLEC	Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations Corrected
ERF	Errorfunktion	SLIC	Simple Line Interface Calculation
FANS	Favre Averaged Navier Stokes	STKE	Standard $k-\epsilon$ Modell
FF	Flammenfront	SV	Spektralverfahren
FSD	Flame Surface Density	TDMA	Tri-Diagonal-Matrix Algorithmus
FVV	Finite Volumen Verfahren	TEACH	Teaching Elliptic Axisymmetric Characteristics Heuristically
HD	Hitzdrahtanemometrie	TFC	Turbulent Flamespeed Closure
HYBRID	Hybrid-Diskretisierungsansatz	UFANS	Unsteady Favre-Averaged Navier-Stokes
LES	Large Eddy Simulation	URANS	Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes
LDA	Laser-Doppler-Anemometrie		
MLU	Monotonized Linear Upwind		
PDF	Probability Density Function		
PHP	Premixed High Performance		
PM	Photomultiplier		



# 1 Einleitung

## 1.1 Problemdarstellung

Im Jahr 2003 betrug der Weltprimärenergieverbrauch ca. 10 Milliarden Tonnen Öläquivalent. Davon wurden ca. 90% durch die Verbrennung fossiler Brennstoffe (Kohle, Erdöl, Erdgas) bereitgestellt. Die exponentielle Zunahme der Erdbevölkerung sowie die derzeitige Entwicklung der politischen Lage, die keine Anstrengungen erkennen lässt, den Energieverbrauch zu drosseln, lassen die Prognose zu, dass der Primärenergieverbrauch auch weiterhin um ca. 2% jährlich steigen wird [So6]. Damit wird auch der Verbrauch an fossilen Brennstoffen weiterhin zunehmen. Die daraus resultierende Schadstoffabgabe an Atmosphäre, Boden und Gewässer stellt eine enorme Umweltbelastung dar und führt zu Konsequenzen wie saurem Regen, dem Treibhauseffekt und der Ozonproblematik.

Die Schadstoffemission von Verbrennungssystemen kann prinzipiell durch Erhöhung des Wirkungsgrades sowie durch primäre (Verbrennungsführung) oder sekundäre Maßnahmen (Rauchgasreinigung) verringert werden. Als primärseitige Maßnahme wird in den letzten Jahren verstärkt das Konzept der mageren Vormischverbrennung eingesetzt. Bei dieser treten - im Gegensatz zur Diffusionsverbrennung - keine nahestöchiometrischen Mischungsbereiche innerhalb der Flamme auf. Dadurch werden lokale Temperaturspitzen vermieden, wodurch vor allem die Produktionsrate des Schadstoffes  $\text{NO}_x$  minimiert wird. Die Verwendung dieses Konzeptes birgt jedoch vor allem zwei Problembereiche. Zum einen ergeben sich Sicherheitsrisiken, weil die Zusammenführung von Brennstoff und Oxidator bereits vor dem Brenner erfolgt und damit außerhalb der Brennkammer ein zündfähiges Gemisch vorliegt. Dies verhindert bisher den Einsatz der mageren Vormischverbrennung in Flugtriebwerken. Zum anderen birgt das Konzept der mageren Vormischverbrennung die Neigung zur Ausbildung von Verbrennungsschwingungen in sich.

Die vorliegende Arbeit lässt sich mit den Schlüsselbegriffen *Verbrennungsschwingungen*, *Ringwirbel* und *Modellierung* charakterisieren. Diese werden daher im Folgenden verwendet, um die Motivation zur Durchführung der theoretischen Untersuchungen zu erläutern.

### **Verbrennungsschwingungen**

Verbrennungsschwingungen sind ein weitverbreitetes Phänomen, welches in zahlreichen technischen Anwendungen (Feuerungsanlagen in Industrie und Haushalt, Gasturbinen, Raketenantriebe) auftritt. Verbrennungsschwingungen können durch vorhandene periodische Energiequellen gewollt oder ungewollt aufrechterhalten werden. Wenn in der vorliegenden Arbeit von Verbrennungsinstabilitäten gesprochen wird, so sind damit

generell unerwünschte instabile Betriebszustände einer Verbrennungsanlage bezeichnet, bei denen die Energie zur Aufrechterhaltung der Schwingung direkt aus dem Verbrennungsprozess bzw. aus der Flamme bezogen wird. Verbrennungsschwingungen dieser Art werden in der Literatur auch als *selbsterregte Verbrennungsinstabilitäten* bezeichnet. Diese instationären Betriebszustände zeichnen sich durch periodische Schwankungen des statischen Druckes in der Brennkammer aus. Die daraus resultierenden Begleiterscheinungen, wie eine erhöhte mechanische Belastung von Anlagenteilen (s. Abb. 1.1-1), verstärkte Schadstoffemissionen oder vermehrte Lärmabstrahlung, schränken den Regelbereich der Anlage oftmals stark ein oder machen einen kontinuierlichen Betrieb gänzlich unmöglich. In der vorliegenden Arbeit wurde mit Anregungsfrequenzen bis zu 250 Hz gearbeitet. Diese niederfrequenten Schwingungen dominieren hinsichtlich ihrer Bedeutung in der Anwendung.

Die in bestehenden Feuerungsanlagen auftretenden Schwingungsprobleme werden heute meist durch zeitaufwendige und kostenintensive Experimente untersucht und durch nachfolgende Änderungen an der Originalkonstruktion bzw. durch Änderung der Betriebsbedingungen beseitigt. Diese Vorgehensweise ist jedoch für den Anlagenhersteller wie auch für den Betreiber höchst unbefriedigend. Ein für die Zukunft angestrebtes Ziel bei der Auslegung von Vormisch-Verbrennungsanlagen ist daher die Vorhersage der Schwingungsneigung mit Hilfe der numerischen Simulation. Damit eine Modellierung des Gesamtsystems Erfolg verspricht, muss sichergestellt sein, dass das frequenzabhängige dynamische Verhalten der einzelnen Übertragungsglieder im Rückkopplungskreis Mischer-Brenner-Flamme-Brennkammer hinreichend genau berechnet werden kann. Eine wesentliche Schwierigkeit stellt dabei die numerische Berechnung des dynamischen Verhaltens bzw. der Übertragungsfunktion des Elementes "Flamme" dar. Bei ausgebildeten Verbrennungsschwingungen ist die in der Brennkammer auftretende Druckamplitude in vielen Fällen so hoch, dass dadurch eine deutliche periodische Schwankung des aus dem Brenner austretenden Frischgemisch-Massenstromes initiiert wird. Während der in jeder Periode erfolgenden Beschleunigungsphase der Ausströmung rollt sich die vom Brennermund abgelöste Scherschicht auf. Die so entstehenden Ringwirbel bilden sich als kohärente Strukturen im turbulenten Strömungsfeld aus und beeinflussen während der Stromabbewegung maßgeblich das Strömungs- und Mischungsfeld und somit auch das dynamische Verhalten der Flamme (s. Abb. 1.1-2) [Vi1,Vi3,Vi9-Vi13].

### **Ringwirbel**

Wirbel sind entscheidend für den Bewegungsablauf von Materie. So setzt sich ein turbulent strömendes Fluid aus einem Konglomerat von Wirbelfäden zusammen. Das Spektrum der in der Natur vorkommenden Wirbel reicht von Turbulenzwirbeln in der Größenordnung von Bruchteilen von Millimetern bis hin zu ozeanischen oder atmosphärischen Wirbeln.

Ringwirbel sind spezielle Wirbel mit einer in sich geschlossenen kreisförmigen Rotationsachse. Es gibt zahlreiche Beispiele für das Auftreten von Ringwirbeln in der belebten und unbelebten Natur (s. Abb. 1.1-3 u. 1.1-4). Das Auftreten von Ringwirbeln im Bereich der Technik lässt sich in zwei Kategorien einteilen. Zum einen treten diese als

Nebeneffekt technischer Anwendungen auf. So z. B. bei stoßweisen Strömungsvorgängen (Abfeuern von Geschossen/Raketen, Zylindereinlassströmung), bei Auftriebsströmungen auf Grund lokaler Thermik (z. B. Tankflammen [Vi15], Atompilz) oder bei Strömungsablösungen hinter Körpern. Die zweite Kategorie beinhaltet eine technische Nutzung und orientiert sich meist daran, dass Ringwirbel die Fähigkeit besitzen, eine bestimmte Menge eines Fluids über eine längere Strecke hinweg durch eine ruhende Umgebung transportieren zu können. Mit ihrer Hilfe ist es möglich Fremd- und Schmutzstoffe effektiver in Luft oder Wasser einzuleiten ([We13], [We14]) sowie geeignete Stoffe in die Atmosphäre einzubringen, um damit künstlichen Regen zu erzeugen oder Hagelschlag zu verhindern [S1]. Auch in der Lüftungstechnik [We15] und beim Verfahren des Wasserstrahlbohrens [We11] werden Ringwirbel genutzt.

Trotz der großen Anzahl von Veröffentlichungen, die sich mit Ringwirbeln befassen, sind noch viele Fragen offen geblieben, die mit deren Bildung, Bewegung und Struktur zusammenhängen und aus wissenschaftlicher und praktischer Hinsicht interessant sind. Trotz der Verschiedenartigkeit ihrer Entstehung, Struktur und Art des Mediums weisen Wirbel übereinstimmende Eigenschaften auf. Die aus der Untersuchung von Ringwirbelstrukturen gewonnenen Erkenntnisse lassen sich somit zumindest qualitativ auch auf andere Wirbelformen übertragen.

### **Modellierung**

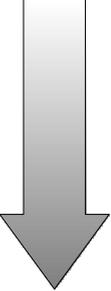
Die Berechnung des Frequenzganges einer turbulenten Vormischflamme erfordert die Vorhersage des zeitlichen Verhaltens der Wärmefreisetzungsrates in Abhängigkeit von Schwankungen des zugeführten Gemischmassenstromes. Um dies zu erreichen, muss sichergestellt sein, dass das von den Ringwirbeln induzierte instationäre Geschwindigkeits-, Turbulenz- und Mischungsfeld realistisch beschrieben wird. Die Berechnung der Verbrennung erfordert zusätzlich die Einbeziehung reaktiver Prozesse. Die Interaktion von Turbulenz und Chemie innerhalb turbulenter Flammen spielt sich auf einer großen Bandbreite von Längen- und Zeitskalen ab. Der heutige Stand der Modellierung von Flammen zeichnet sich dadurch aus, dass die Komplexität einer Simulation durch die verfügbare Rechnerkapazität begrenzt ist. Die heute zur Verfügung stehenden Ressourcen reichen bei weitem nicht aus, um eine detaillierte Berechnung aller beteiligten Phänomene zu ermöglichen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das am Engler-Bunte-Institut entwickelte Strömungsberechnungsprogramm EBI-2d eingesetzt. Ein damit erzielttes Ergebnis zeigt Abb. 1.2-5. Das Programm verwendet die sog. URANS (Unsteady-**R**eynolds-**A**veraged-**N**avier-**S**tokes)-Methode auf Basis des Finite-Volumen-Verfahrens. Dabei werden die Navier-Stokes-Gleichungen zunächst zeitlich gemittelt und anschließend über ein finites Volumen integriert. Die sich ergebenden Bilanzgleichungen werden auf einem numerischen Gitter diskretisiert und nachfolgend iterativ gelöst. Zur Modellierung der Turbulenz wurde das  $k-\epsilon$  Modell, zur Beschreibung der Reaktion das PHP-Verbrennungsmodell eingesetzt. Im Folgenden werden die Kriterien, die zu dieser Auswahl von Methoden und Modellen geführt haben, näher beleuchtet.

### Berechnung von Strömung und Turbulenz

Prinzipiell stehen zur Berechnung mehrdimensionaler Strömungen verschiedene Verfahren unterschiedlicher Vielseitigkeit bzw. Allgemeingültigkeit zur Verfügung (s. Tab. 1.1-1).

Tab. 1.1-1: Verfahren zur Berechnung räumlich mehrdimensionaler Strömungen (NOLL [Vi17]).

Vielseitigkeit	Methode	Ressourcen
	1. Lösung der Laplace-Gleichung (Potentialgleichung)	
	2. Lösung der Euler-Gleichungen	
	3. URANS ( <i>Unsteady-Reynolds-Averaged-Navier-Stokes</i> )	
	4. LES ( <i>Large-Eddy-Simulation</i> )	
	5. DNS ( <i>Direkte Numerische Simulation</i> )	
	6. Berechnung von Molekularkollisionen	

Mit steigender Vielseitigkeit ist jedoch auch eine wachsende Anforderung an Ressourcen, d. h. an Schnelligkeit und Speicherplatz der zur Berechnung verwendeten Computer verbunden. Während mit der Laplace-Gleichung lediglich die Beschreibung von drehungsfreien, reibungsfreien, dichtekonstanten Kontinua möglich ist, ermöglicht die Berechnung der Bewegung der einzelnen Moleküle eines Fluides die Einbeziehung aller vorkommenden physikalischen Effekte. Neben diesen Methoden existieren eine Vielzahl weiterer Ansätze, die jedoch meist nur für spezielle, bzw. stark idealisierte Strömungsvorgänge anwendbar sind (z. B. analytische Methoden, diskrete Wirbelberechnung, Stromfadentheorie). Strömungen in technischen Anwendungen sind meist turbulent und erfordern somit eine adäquate Berücksichtigung der durch die Turbulenz beeinflussten Vorgänge Reibung und Mischung. Bei der Auslegung technischer Prozesse sowie der Erforschung von turbulenten Strömungen in Natur und Technik mit numerischen Simulationen kommen heute vor allem die Verfahren URANS, LES und DNS zum Einsatz.

Ein Schwerpunkt der Arbeit ist die Berechnung pulsierter turbulenter Strömungen. Der Einsatz von fortgeschrittenen Verfahren wie der Grobstruktursimulation (LES) oder der direkten numerischen Simulation (DNS) wäre zwar wünschenswert, verbietet sich aber auf Grund des damit verbundenen Rechenaufwandes. Dies hat vor allem zwei Gründe:

- Bei einer LES werden nur die größeren Zeit- und Längenmaße, bei einer DNS jedoch alle Anteile des Turbulenzspektrums aufgelöst. Beide Methoden erfordern daher die Verwendung dreidimensionaler Rechengitter sowie eine feine räumliche wie zeitliche Diskretisierung. Die bei einer DNS erforderliche Gitterfeinheit und Zeitschrittweite skaliert mit den Skalen der kleinsten Turbulenzelemente und damit

---

mit der Reynoldszahl der Strömung. Die in dieser Arbeit berechneten Strömungen weisen Reynoldszahlen im Bereich von 50000 auf. Eine Berechnung mittels einer DNS ist damit nicht praktikabel. Die URANS-Methode lässt dagegen eine Reduktion der räumlichen Dimensionalität und die Berücksichtigung von Symmetriebedingungen zu. So kann im vorliegenden Fall einer axialsymmetrischen Strömung mit einem zweidimensionalen Gitter gerechnet werden. Die Zeitschrittweite orientiert sich dabei an der aufzulösenden Pulsationsfrequenz.

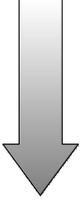
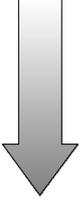
- Um die Ergebnisse der Modellierung analysieren zu können und einen Vergleich mit Messdaten zu ermöglichen, müssen diese in Form von phasengemittelten Feldwerten vorliegen. Um diese zu erhalten, wäre es bei Verwendung einer LES notwendig, eine entsprechende Anzahl von Perioden der pulsierten Strömung zu berechnen und die zeitliche Mittelung nachträglich durchzuführen. Dies würde sehr große Rechenzeiten und ein aufwendiges Postprozessing immenser Datenmengen erfordern. Dagegen wird die Turbulenz bei der URANS-Methode rein statistisch behandelt. Nach der Berücksichtigung einer Einschwingphase, die typischerweise 10 Perioden dauert, genügt die Berechnung einer einzigen Schwingungsperiode, um die geforderten phasengemittelten Werte zu erhalten.

Aus den genannten Gründen ist die URANS-Methode momentan die einzige ökonomische Methode, um die in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Parameterstudien bei der Berechnung pulsierter turbulenter Strömungen bewältigen zu können. Zur Schließung der bei der zeitlichen Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen auftretenden Unbekannten wird ein Turbulenzmodell benötigt. Obwohl es eine Vielzahl von Modellansätzen gibt, wird in der industriellen Anwendung bislang überwiegend das  $k-\epsilon$  Modell favorisiert. Trotz der bekannten Schwächen bietet es überragende Vorteile und hat deshalb in Industrie und Forschung eine sehr weite Verbreitung gefunden. Es zeichnet sich unter anderem durch einen relativ geringen Rechenaufwand und eine robuste numerische Stabilität aus. Es besteht allerdings ein erheblicher Klärungsbedarf, ob und unter welchen Voraussetzungen die Berechnung des dynamischen Verhaltens von turbulenten Vormischflammen bzw. eine zukünftige Vorhersage von Brennkammerschwingungen in Feuerungsanlagen technischen Maßstabs unter Verwendung des  $k-\epsilon$  Modelles möglich ist.

### **Berechnung von chemischen Reaktionen**

Die Berechnung von innerhalb turbulenter Strömungen ablaufender Verbrennungsprozesse kann auf verschiedenen Ebenen erfolgen (s. Tab. 1.1-2).

Tab. 1.1-2: Methoden zur Berechnung von chemischen Reaktionen

Vielseitigkeit	Methode	Ressourcen
	1. Formale Umsatzgleichungen	
	2. Reduzierter Mechanismus	
	3. Detaillierter Mechanismus (Elementarreaktionen)	
	4. Molekularkollision	

Unter Berücksichtigung heute verfügbarer Rechnerkapazitäten ist es bei Strömungen mit hohen Reynoldszahlen noch nicht möglich, die Interaktion von Turbulenz und Reaktion, z. B. mittels einer DNS-Rechnung, detailliert zu erfassen. Die Einbeziehung komplexer Chemie ist praktisch nur durch eine vereinfachte Berücksichtigung der Turbulenz (d. h. durch Modellierung) oder im Falle laminarer Strömungen möglich. Bei der Berechnung reaktiver turbulenter Strömungen kommen daher meist reduzierte Reaktionsmechanismen zum Einsatz, die nur wenige Reaktionsgleichungen und Spezies beinhalten.

In den Vorarbeiten zu den vorgestellten Untersuchungen wurden verschiedene Verbrennungsmodelle zur Berechnung von instationären turbulenten Flammen getestet. Im Vergleich hat sich das PHP (**P**remixed **H**igh **P**erformance)-Verbrennungsmodell von SCHMIDT ([Va9], [Va10]) als das leistungsfähigste Modell zur Berechnung von pulsierten turbulenten vorgemischten Axialstrahlflammen erwiesen. Bei diesem Modell wird die lokale Wärmefreisetzungsrate über eine lokale turbulente Flammengeschwindigkeit unter Verwendung einer Einschnitt-Globalkinetik bestimmt.

## 1.2 Zielsetzung

Aus der Problemdarstellung lassen sich drei wesentliche Ziele der vorliegenden Arbeit ableiten:

### 1. *Untersuchung von Ringwirbeln und deren Interaktion mit Vormischflammen*

Der Fortschritt der Modellierung soll stufenweise über die Berechnung der Ringwirbelbildung im isothermen laminaren Fall zum turbulenten Fall mit überlagerter Verbrennung erfolgen.

### 2. *Berechnung des Übertragungsverhaltens von Vormischflammen*

Das dynamische Verhalten von pulsierten vorgemischten Axialstrahlflammen soll berechnet und in Form von Flammenfrequenzgängen dargestellt werden. Einerseits sollen idealisierte Flammen analytisch untersucht werden. Andererseits sollen turbulente Flammen unter realen Bedingungen mit der URANS-Methode modelliert werden.

### 3. *Bewertung der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Methoden und Modelle*

Es soll untersucht werden, ob und unter welchen Voraussetzungen eine Berechnung von instationären Wirbelströmungen und von Flammenfrequenzgängen mit Hilfe der URANS-Methode auf Basis des Finite-Volumen-Verfahrens möglich ist. Für die Berechnung sollen das  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell und das PHP-Verbrennungsmodell verwendet werden.

---

## 1.3 Gliederung der Arbeit

Der Inhalt der einzelnen Kapitel gliedert sich wie folgt:

**Kapitel 2:** Einführung in die *theoretischen Grundlagen* getrennt nach den Teilgebieten Strömungsmechanik, Verbrennungstechnik und Numerik.

**Kapitel 3:** Ergebnisse der Berechnung von zwei verschiedenen *laminaren Testsystemen*. Ziel ist hierbei, das verwendete Programm EBI-2d im Hinblick auf die numerischen Verfahren und Algorithmen zu überprüfen. Zum Vergleich werden sowohl analytische Lösungen als auch Ergebnisse von Berechnungen herangezogen, die unter Verwendung eines Spektralverfahrens gewonnen wurden.

**Kapitel 4:** Ergebnisse von Berechnungen *laminarer isothermer Ringwirbel*. Ziel ist hierbei die Validierung des verwendeten Programmes EBI-2d bzw. die Untersuchung der Leistungsfähigkeit des Finite-Volumen-Verfahrens zur Berechnung instationärer Strömungs- und Mischungsfelder. Weiterhin sollen die Ergebnisse dazu dienen, neue Erkenntnisse über die Natur von Ringwirbelstrukturen zu gewinnen.

**Kapitel 5:** Ergebnisse der Modellierung *turbulenter isothermer Ringwirbel*. Das berechnete Strömungs- und Mischungsfeld wird ausführlich diskutiert und der Einfluss von Konvektion, physikalischer und numerischer Diffusion erörtert.

**Kapitel 6:** Berechnung von Frequenzgängen *idealisierter Flammen*. Zunächst wird die analytische Behandlung von zwei Flammen unterschiedlicher Geometrie (Kugelflamme, Kegelflamme) vorgestellt. Zusätzlich durchgeführte Feldrechnungen erlauben die wechselseitige Validierung von Simulation und analytischer Vorgehensweise.

**Kapitel 7:** Ergebnisse der Modellierung *stationärer turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen* unterschiedlicher thermischer Leistung. Verglichen werden die in Modellierung und Experiment zur Bestimmung der jeweiligen Frequenzgänge herangezogenen Größen Umsatzgeschwindigkeit und OH-Strahlungsintensität.

**Kapitel 8:** Ergebnisse der Modellierung *pulsierter turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen*. Zunächst werden typische Eigenschaften der Interaktion von Ringwirbel und Flamme herausgearbeitet. Anschließend werden zwei Methoden zur Berechnung des Flammenfrequenzganges verglichen und der Vergleich mit gemessenen Frequenzgängen diskutiert. Abschließend wird der isolierte Einfluss von im Experiment nicht separierbarer Parameter auf den Flammenfrequenzgang untersucht.

**Kapitel 9:** Zusammenfassung

**Kapitel 10:** Thematisch geordnetes Literaturverzeichnis

**Kapitel 11:** Anhang



Abb. 1.1-1: Durch Verbrennungsschwingungen initiiertes Riss am Überleitungsstück einer Gasturbine [Vi16].

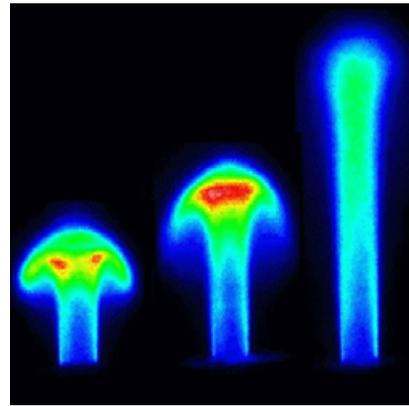


Abb. 1.1-2: Interaktion zwischen Ringwirbel und turbulenter Vormischflamme (Videoaufnahme von (C. KÜLSHEIMER [Vi6])



Abb. 1.1-3: Rauchwirbel über dem Ätna (Foto von JUERG ALEAN [So7])

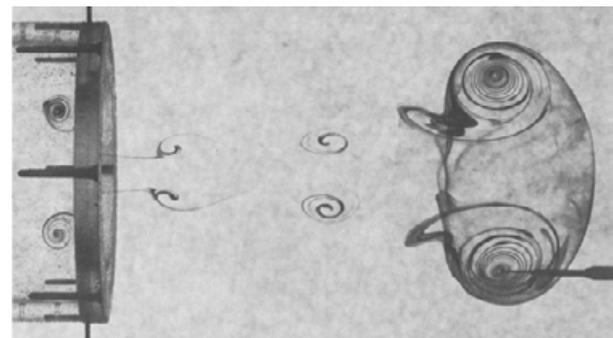


Abb. 1.1-4: Ringwirbel in Wasser (Foto von SALLET, aus LUGT [S1])

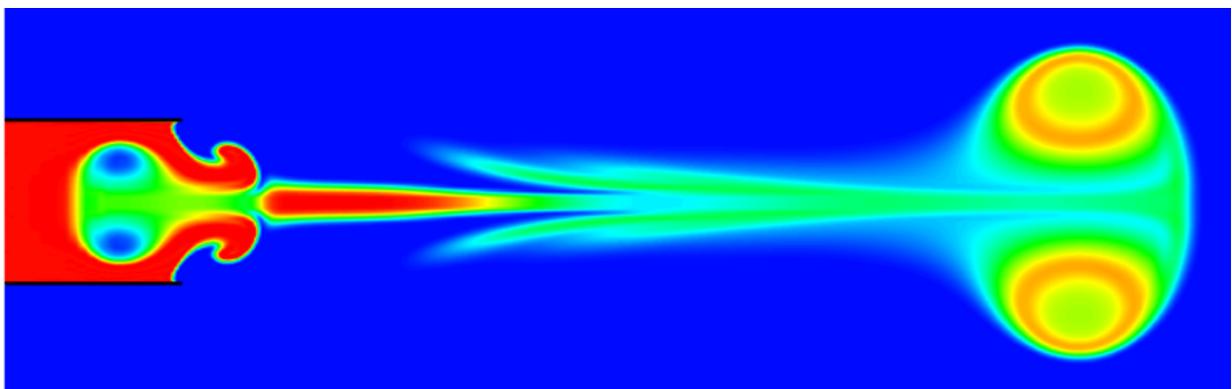


Abb. 1.1-5: Berechnetes Mischungsfeld eines laminaren Ringwirbels in Wasser

## 2 Theoretische Grundlagen

### 2.1 Strömungsmechanische Grundlagen

#### 2.1.1 Die Navier-Stokes Gleichungen

Im Hinblick auf die in dieser Arbeit hauptsächlich untersuchten axialsymmetrischen Strömungen, werden die Grundgleichungen in den Zylinderkoordinaten  $x$ ,  $r$ ,  $\varphi$  angegeben. Ausgangspunkt sind die Massenerhaltungsgleichung sowie die Bewegungs- bzw. Impulserhaltungsgleichungen (Navier-Stokes-Gleichungen) für isotrope Newton'sche Fluide (SCHLICHTING [S5]).

Massenerhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho w)}{\partial \varphi} = 0 \quad (2.1-1)$$

Impulserhaltungsgleichungen (axial, radial, tangential):

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \rho uv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho uw)}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \tau_{xr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \rho vv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho vw)}{\partial \varphi} - \frac{\rho w^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \cdot \tau_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r \rho wv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho ww)}{\partial \varphi} + \frac{\rho vw}{r} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} \\ &+ \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial(r^2 \cdot \tau_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.1-2)$$

$u$ ,  $v$ ,  $w$  stellen die Momentangeschwindigkeiten in die drei Raumrichtungen  $x$ ,  $r$ ,  $\varphi$  dar.  $\tau_{ij}$  repräsentieren die Schub- bzw. Normalspannungen. Diese beschreiben den molekularen Austausch von Impuls und bilden zusammen einen symmetrischen Tensor.

Ein Fluid wird als isotrop bezeichnet, wenn der Zusammenhang zwischen den

Komponenten des Spannungstensors und des Verformungsgeschwindigkeits-Tensors in allen Raumrichtungen gleich ist. Wenn dieser Zusammenhang zusätzlich linear ist, handelt es sich um ein Newton'sches Fluid. Da bei der Herleitung der Navier-Stokes-Gleichungen der empirische Stokes-Ansatz verwendet wurde, ist allerdings nicht von vornherein sicher, dass die Bewegungsgleichungen das Verhalten isotroper Newton'scher Fluide richtig beschreiben. Die Gültigkeit der Gleichungen wurde jedoch durch eine große Anzahl von experimentellen Untersuchungen bestätigt. Daher werden die Navier-Stokes-Gleichungen heute als allgemein gültig zur Beschreibung von isotropen Newton'schen Fluiden angesehen (SCHLICHTING [S5]). Im weiteren Verlauf der Arbeit wird von der für inkompressible Fluide gültigen Formulierung der Navier-Stokes-Gleichungen bzw. der auftretenden Spannungsterme ausgegangen. Eine in Kap. 5.1.3 vorgestellte Abschätzung zeigt, dass diese Annahme für die in der vorliegenden Arbeit berechneten statistisch instationären Strömungen gerechtfertigt ist.

## 2.1.2 Statistische Beschreibung turbulenter Strömungen

### Zeitliche Mittelung (Reynolds-Mittelwerte)

Ausgangspunkt für die statistische Beschreibung turbulenter Strömungen bildet die Aufspaltung des Momentanwertes einer abhängigen Variable  $\Phi$  in einen zeitlichen Mittelwert  $\bar{\Phi}$  und eine Schwankungsgröße  $\Phi'$ .

$$\Phi(\vec{x}, t) = \bar{\Phi}(\vec{x}, t) + \Phi'(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.1-3)$$

Der zeitliche Mittelwert für statistisch stationäre Strömungen wird als Reynolds-Mittelwert bezeichnet. Er ist wie folgt definiert:

$$\bar{\Phi}(\vec{x}, t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Phi(\vec{x}, t) dt \quad . \quad (2.1-4)$$

Die zeitliche Mittelung ist über ein so großes Zeitintervall  $T$  zu erstrecken, dass der Mittelwert von der Zeit unabhängig wird. Die zeitlichen Mittelwerte von Schwankungsgrößen sind dann nach Definition gleich Null, d. h.  $\bar{\Phi}' = 0$  (SCHLICHTING [S4]).

Wendet man die Reynolds-Zerlegung auf die abhängigen Größen der Navier-Stokes-Gleichungen an und führt nachfolgend noch eine zeitliche Mittelung durch, so erhält man die sog. Reynolds-Gleichungen. Bei dieser Vorgehensweise ergeben sich aufgrund der Nichtlinearitäten einzelner Terme neben den Mittelwerten der Feldgrößen zusätzlich neue Größen, die auch als Korrelationen bezeichnet werden (z. B. der Term  $\overline{u'v'}$ ). Sie beinhalten den Einfluss der Turbulenz auf das Strömungsfeld.

### Zeitliche Mittelung (Ensemble- und Phasenmittelwerte)

Bei der Reynolds-Mittelung wird davon ausgegangen, dass die durch die zeitliche Mittelung gewonnene Größe  $\overline{\Phi}$  selbst von der Zeit unabhängig ist. Im zeitlichen Mittel liegt dann eine statistisch stationäre Strömung vor. Wenn die “mittlere” Bewegung jedoch von der Zeit abhängig ist, so setzt sich diese im Allgemeinen aus einem zeitunabhängigen Anteil  $\overline{\Phi}(\vec{x})$  und einem zeitabhängigen “geordneten”  $\check{\Phi}(\vec{x}, t)$  Anteil zusammen. Turbulente Strömungen dieser Art werden als statistisch instationär oder transient bezeichnet. Beispiele sind Anfahr- oder Abschaltvorgänge oder periodische Vorgänge. Der Momentanwert der Größe  $\Phi(\vec{x}, t)$  lässt sich nun mit der Tripelzerlegung in drei Komponenten zerlegen (s. Abb. 2.1-1):

$$\Phi(\vec{x}, t) = \overline{\Phi}(\vec{x}) + \check{\Phi}(\vec{x}, t) + \Phi'(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.1-5)$$

Im Fall *nichtperiodischer transienter* Strömungen wird der statistische Mittelwert durch eine Mittelung über viele Realisationen gewonnen und wird auch als “Ensemble-Mittelwert” (engl.: ensemble average) bezeichnet. Experimentell kann er ermittelt werden, indem ein Versuch unter gleichen Bedingungen N mal durchgeführt und jeweils zum gleichen Zeitpunkt t vom Strömungsbeginn an gemessen die momentane Größe  $\Phi(\vec{x}, t)$  ermittelt wird. Die Werte sind zu addieren und durch die Anzahl der Realisationen zu teilen:

$$\langle \Phi(\vec{x}, t) \rangle = \overline{\Phi}(\vec{x}) + \check{\Phi}(\vec{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \Phi(\vec{x}, t) \quad . \quad (2.1-6)$$

Der statistische, bzw. Ensemble-Mittelwert  $\langle \Phi(\vec{x}, t) \rangle$  beinhaltet damit den deterministischen Anteil der Strömung.  $\Phi'(\vec{x}, t)$  beschreibt nach wie vor die ungeordnete “stochastische” turbulente Schwankung (SCHLICHTING [S4]).

Bei *periodisch transienten* Strömungen gilt folgende Vorgehensweise: Ein Experiment wird N Perioden lang durchgeführt und die Größe  $\Phi(\vec{x}, t)$  immer zum gleichen Zeitpunkt t innerhalb der Periodendauer  $t_p$  gemessen, um einen Phasenmittelwert für diesen relativen Zeitpunkt zu erhalten. Für den “Phasen-Mittelwert” (engl.: phase average) ergibt sich danach:

$$\langle \Phi(\vec{x}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \Phi(\vec{x}, t + i \cdot t_p) \quad . \quad (2.1-7)$$

Einige nützliche Beziehungen zur zeitlichen Mittelung von Größen sind im Anhang 11.1 angegeben.

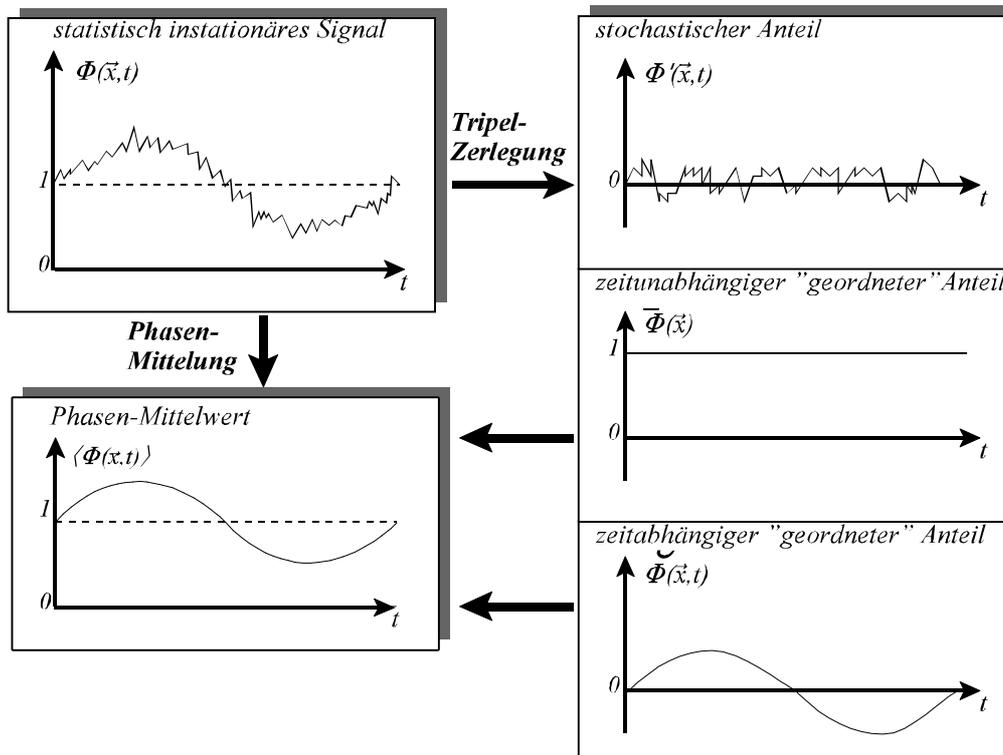


Abb.2.1-1: Tripelzerlegung bei periodisch instationären turbulenten Strömungen

Wird die Tripel-Zerlegung auf die abhängigen Größen der Navier-Stokes-Gleichungen angewendet und nachfolgend ebenfalls die zeitliche Mittelung durchgeführt, so haben die zusätzlich auftretenden Korrelationen die Form  $\langle \mathbf{u}' \mathbf{v}' \rangle$ . Für alle drei Bewegungsanteile der Tripelzerlegung können Bilanzgleichungen angegeben werden, die jedoch miteinander gekoppelt sind (TELIONIS [S11]). In der Regel werden diese Korrelationen mangels geeigneter Alternativen durch ein konventionelles Turbulenzmodell geschlossen. Das heißt, die Ensemble-gemittelte Korrelation wird als Korrelation einer statistisch stationären Strömung behandelt  $\langle \mathbf{u}' \mathbf{v}' \rangle = \overline{\mathbf{u}' \mathbf{v}'}$  (s. Gl. 2.1-35). Diese Vorgehensweise ist gerechtfertigt, wenn die Frequenz der Ensemble-Mittelwerte bei periodischer Strömung klein gegenüber den Frequenzen der turbulenten Fluktuationen ist. In diesem Fall liegt eine quasi-stationäre Strömung vor, d. h. die Turbulenz verhält sich zu jedem Zeitpunkt so, als ob eine statistisch stationäre Strömung mit der momentanen mittleren Geschwindigkeit vorliegen würde (SCHLICHTING [S4]). In diesem Fall lassen sich die Ensemble- oder Phasenmittelwerte auch als zeitliche Mittelwerte interpretieren. Als zeitliche Mittelungsvorschrift gilt dann:

$$\langle \Phi(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{t_1} \int_{t_0}^{t_0+t_1} \Phi(\vec{x}, t) dt \quad . \quad (2.1-8)$$

Das Zeitintervall  $t_1$  muss dann groß genug gewählt werden, um alle turbulenten Schwankungen zu erfassen. Es muss jedoch auch so klein sein, dass kein Anteil des

transienten bzw. periodischen Anteiles eingeht (HINZE [S19]). Dies setzt jedoch voraus, dass der transiente Vorgang langsam verläuft, bzw. dass die Frequenz der von außen aufgeprägten Oszillation klein gegenüber den Frequenzen des Turbulenzspektrums ist.

### Dichtegewichtete Mittelung (Favre-Mittelwerte)

Bei Strömungen mit überlagerter Reaktion, ist die Dichte  $\rho$  nicht mehr konstant und müsste ebenfalls in einen Mittel- und einen Schwankungswert zerlegt werden  $\rho = \bar{\rho} + \rho'$ . Führt man diese Zerlegung in die Gleichungen ein würden dadurch zusätzliche Korrelationen auftreten, die sich aus Geschwindigkeits- und Dichteschwankungen zusammensetzen. So ergäbe sich z.B. bei zeitlicher Mittelung des Termes  $\rho uv$

$$\begin{aligned}\overline{\rho uv} &= \overline{(\bar{\rho} + \rho')(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} \\ &= \overline{\bar{\rho} \bar{u} \bar{v}} + \overline{\bar{\rho} u' v'} + \overline{\bar{\rho} v u'} + \overline{\bar{\rho} u' v'} + \overline{\rho' \bar{u} \bar{v}} + \overline{\rho' u' v'} + \overline{\rho' v u'} + \overline{\rho' u' v'} \quad (2.1-9) \\ &= \overline{\bar{\rho} \bar{u} \bar{v}} + \overline{\bar{\rho} u' v'} + \overline{\bar{\rho} v u'} + \overline{\rho' u' v'} + \overline{\rho' v u'} + \overline{\rho' u' v'} \quad .\end{aligned}$$

Da man die auftretenden Terme im Allgemeinen nicht vernachlässigen darf, sie aber andererseits wegen ihrer Komplexität nur mit starken Vereinfachungen modellieren kann, werden die Erhaltungsgleichungen reaktiver turbulenter Strömungen dichtegewichtet, was zur Elimination der meisten Terme mit Dichtefluktuationen in den Gleichungen führt. Man spricht in diesem Fall auch von der Favre-Mittelung (FAVRE [S20]). Einige nützliche Beziehungen zur Favre- und Reynolds-Mittelung sind in Anhang 11.1 angegeben.

Reynolds-Mittelung	Favre-Mittelung
$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$	$\Phi = \check{\Phi} + \Phi''$

Der Favre-Mittelwert ist wie folgt definiert:

$$\check{\Phi} = \frac{\overline{\rho \Phi}}{\bar{\rho}} \quad . \quad (2.1-10)$$

Für die Dichte gilt hierbei  $\rho' = \rho''$ , sowie  $\bar{\rho} = \check{\rho}$ . Bei der zeitlicher Mittelung des Termes  $\rho uv$  ergibt sich nun im Gegensatz zu oben:

$$\begin{aligned}\overline{\rho uv} &= \overline{(\check{\rho} + \rho'')(\check{u} + u'')(\check{v} + v'')} \\ &= \check{\rho} \cdot \overline{(\check{u} + u'')(\check{v} + v'')} \\ &= \overline{\check{\rho} \check{u} \check{v}} + \overline{\check{u} \rho'' v''} + \overline{\check{v} \rho'' u''} + \overline{\rho'' u'' v''} \\ &= \overline{\check{\rho} \check{u} \check{v}} + \overline{\rho'' u'' v''} \\ &= \overline{\check{\rho} \check{u} \check{v}} + \overline{\rho'' \cdot \widetilde{u'' v''}} \quad .\end{aligned} \quad (2.1-11)$$

Bei der Favre-Mittelung verschwinden alle Dichtekorrelationen und es verbleiben statt dessen neue Korrelationen des Types  $\overline{\rho'' \cdot \widetilde{u'' v''}}$ . Auch diese Terme besitzen, ebenso wie

Korrelationen des Types  $\overline{\rho u_i' u_j'}$ , die Bedeutung von turbulenten Scheinspannungen und sind zu modellieren. Obwohl der Term  $\overline{\rho \Phi''} = 0$  ist, ist das zeitliche Mittel des Favre-Schwankungswertes im allgemeinen von Null verschieden, d. h.  $\overline{\Phi''} \neq 0$ . Bei der Reynoldsmittelung gilt dagegen  $\overline{\Phi'} \neq 0$ . Diese bedeutet für die Herleitung der Turbulenzgleichungen in der Favre-Darstellung, dass verschiedene Mittelwert-Terme, die aus dem Produkt Mittelwert mal Schwankungsgröße bestehen, nun nicht verschwinden, wie sie es bei einer Reynolds-Mittelung tun würden (HIRSCH [S16]). Terme dieser Art treten z. B. bei der Formulierung des Produktionstermes der turbulenten kinetischen Energie auf (s. u.).

Die Strömungs- und die übrigen Transportgleichungen haben unter Verwendung der Favre-Mittelung für alle Variablen die gleiche äußere Form wie vorher, nur dass die Mittel- und Schwankungswerte nun eine andere Bedeutung besitzen. Bei Verwendung der Transportgleichungen in konventioneller Schreibweise unter Vernachlässigung der Dichteschwankungskorrelationen wird daher automatisch die Mittelung nach Favre benutzt. Die Dichte  $\rho$  ist dann eine mittlere Dichte  $\tilde{\rho}$ . Bei Strömungen ohne Dichteschwankungen sind berechnete und gemessene Werte direkt vergleichbar. Die Verwendung der Favre-Mittelung für Strömungen mit Dichteschwankungen hat den Nachteil, dass gerechnete und gemessene Werte nicht mehr einfach vergleichbar sind. Zum Vergleich von Rechnung und Messung wäre es notwendig, Favre-Mittelwerte zu messen. Manche Messprinzipien kommen dieser Forderung recht nahe, wie z. B. LDA (ZINSER [Val]), andere nicht, wie z. B. die Temperaturmessung mit Thermoelementen. In diesem Fall wäre eine zusätzliche Messung der Dichteschwankungskorrelation  $\overline{\rho' \Phi'}$  erforderlich. Mit deren Kenntnis lassen sich Reynolds-Mittelwerte in Favre-Mittelwerte umrechnen:

$$\tilde{\Phi} = \overline{\Phi} + \frac{\overline{\rho' \Phi'}}{\tilde{\rho}} \quad . \quad (2.1-12)$$

Von messtechnischer Seite ist dieses Problem jedoch nur teilweise und unter größtem Aufwand zu bewältigen. Ein Abschätzung des Messfehlers für die Geschwindigkeitsmessung in stöchiometrischen Methanflammen ergibt für die feuerungstechnisch üblichen Strömungen mit Turbulenzgraden unter 0,2 einen relativen Fehler von ca. 15% (HIRSCH [S16]).

### 2.1.3 Charakterisierung der Turbulenz

Die Navier-Stokes-Gleichungen lassen sich nur für wenige Spezialfälle analytisch lösen. Die numerische Lösung ist mit heutiger Rechnerkapazität nur für Reynoldszahlen in der Größenordnung von 1000 möglich. Bei der zeitlichen Mittelung dieser Gleichungen treten neue Unbekannte in Form von Korrelationen (Terme der Form  $\overline{u_i' u_j'}$ ) zwischen turbulenten Schwankungsgrößen auf. Das Gleichungssystem ist dadurch nicht mehr geschlossen. Ein Turbulenzmodell ist ein Satz von Gleichungen zur Berechnung der in den Reynoldsgleichungen auftretenden Korrelationen bzw. Scheinspannungen und repräsentiert somit die Lösung des Schließungsproblems (RODI [S13]). Die Aufgabe eines

Turbulenzmodelles ist es, die Effekte der turbulenten Schwankungen auf die Gesamtströmung zu erfassen, ohne diese Schwankungen detailliert berechnen zu müssen. Dazu werden unter Zuhilfenahme von empirischen Informationen zusätzliche differentielle oder algebraische Gleichungen für das zeitlich mittlere Verhalten der Turbulenz formuliert. In der Literatur werden Turbulenzmodelle gemäß der Anzahl der partiellen Differentialgleichungen, die ein Modell beinhaltet, geordnet. Das in dieser Arbeit verwendete  $k$ - $\varepsilon$  Modell zählt zur Klasse der Zwei-Gleichungs-Modelle.

### **Energiekaskade**

Eine grundlegende Eigenschaft turbulenter Strömungen ist der Energieaustausch zwischen unterschiedlichen Skalen. Eine qualitativ korrekte Beschreibung des Mechanismus stützt sich auf die Veranschaulichung von Turbulenz als eine Überlagerung von "Spaghetti"-ähnlichen Wirbelfäden unterschiedlicher Größe in einem hierarchisch strukturierten Prozess. In einer turbulenten Strömung sind großskalige Wirbelfäden mit einer niederfrequenten Eigenbewegung ausgestattet, die sich der mittleren Bewegung überlagert. Diese großen Turbulenzelemente entziehen der Hauptströmung Energie und erzeugen zum großen Teil die scheinbaren Schubspannungen. Dabei wird die Hauptströmung nicht von den Spannungen selbst, sondern durch deren örtliche Unterschiede beeinflusst. Die Größe der größten Wirbelfäden ist durch die charakteristische Abmessung der Strömung festgelegt. Die großskaligen Wirbelfäden reichen ihre Energie an immer kleinere Elemente weiter. In den kleinsten Elementen wird dann die durch die großen Elemente der Hauptströmung entzogene Energie durch viskose Kräfte in innere Energie dissipiert. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer *Energiekaskade* infolge des Prozesses der *Wirbelfadenstreckung*. Darunter versteht man die zeitliche Streckung unter Reduzierung des Wirbelfadenquerschnittes. Da die kleinsten Elemente keine bevorzugte Richtung haben sind sie isotrop. Die Struktur dieser "feinkörnigen" Turbulenz kann mittels Schlierenaufnahmen sichtbar gemacht werden (s. z. B. SCHLICHTING [S4]).

Der Kaskadenprozess kann durch drei Bereiche charakterisiert werden:

- Wirbelfäden großer Abmessung werden durch die Geschwindigkeitsgradienten der Hauptströmung gestreckt. Durch diesen Mechanismus wird Energie von der Hauptströmung in die Schwankungsbewegung eingespeist. Man bezeichnet diesen Bereich kleiner Frequenzen auch als *Produktionsbereich* der Energiekaskade. Der Einfluss der Viskosität auf die großen Wirbel ist gering, da bei ihnen Trägheitskräfte dominieren. Dies ist die Ursache für die Reynoldszahlunabhängigkeit vollturbulenter Strömungen, da "nur" die größeren Wirbel, die den Hauptteil der kinetischen Energie tragen, mit der Strömung wechselwirken. Die restliche Kaskade stellt sich entsprechend dem Energietransfer von den großen Wirbeln ein.
- Bei großen Reynoldszahlen bildet sich zwischen großen und kleinen Wirbeln der sogenannte *Trägheitsbereich* (Englisch: inertial subrange) aus. Wirbel mit einem Längenmaß in diesem Bereich transferieren die ursprünglich von der Hauptströmung entzogene Energie an immer kleinere Turbulenzelemente. Sie sind zu klein und kurzlebig, um der Hauptströmung Energie entziehen zu können, gleichzeitig ist aber

die Trägheit noch viel größer als die Reibung, so dass diese Wirbel noch keine Energie dissipieren.

- Am Ende des Kaskadenprozesses wird die Viskosität auf Grund des stark angewachsenen räumlichen Geschwindigkeitsgradienten im Bereich kleiner Strukturen wirksam. In diesem, bei hohen Frequenzen angesiedelten *Dissipationsbereich*, wird die Schwankungsenergie in Wärme umgewandelt. Die Wirbel dieser Größenklasse werden bei hinreichend großen Reynoldszahlen als isotrop, d. h. richtungsunabhängig angesehen. Sie beinhalten keine Information mehr über die Randbedingungen der Strömung. Die Turbulenz kann in diesem Bereich als universell betrachtet werden. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die kleinen Elemente nur für die Dissipation verantwortlich sind. So ist etwa die hohe Diffusivität turbulenter Strömungen nur durch das Vorhandensein sowohl großer als auch kleiner Wirbel möglich. Die großen Elemente transportieren größere Fluidballen über relativ große Distanzen, können jedoch keine molekulare Vermischung hervorrufen. Diese Grobstrukturen werden aber sehr schnell von den kleineren Wirbeln aufgelöst. Sie bauen dabei, wie bei den Geschwindigkeitsgradienten, hohe Konzentrationsgradienten auf, so dass molekulare Austauschprozesse greifen können.

Der Kaskadenprozess wird somit dadurch charakterisiert, dass die auf der Längenskalen der großen Wirbelelemente der Hauptströmung entzogene kinetische Energie an immer kleinere Elemente weitergegeben und schließlich in den kleinsten Elementen dissipiert und in innere Energie des Fluids überführt wird. Dies beinhaltet die Vorstellung, dass nur so viel Energie dissipiert werden kann, wie der Hauptströmung durch die großen Elemente entzogen wird. Dies ist der geschwindigkeitsbestimmende Schritt für die Energiedissipation. Folglich hängen die turbulente kinetische Energie  $k$  (Einheit:  $[J/kg]$ ) und deren Dissipationsrate  $\epsilon$  (Einheit:  $[J/(kg \cdot s)]$ ) von den großen Turbulenzelementen (Makrowirbel) mit dem Längenmaß  $L_t$  ab. Die derartig parametrisierte Turbulenzkaskade kann man näherungsweise mit der Analogie eines durchströmten Rohres veranschaulichen: Am Rohreintritt werden große Wirbel eingefüllt, am Rohraustritt fließen kleine Wirbel aus. Innerhalb des Rohres (inertial subrange) ist der Durchfluss konstant. Also entspricht die Turbulenzenergie  $k$  dem Inhalt des Rohres, und die Dissipation  $\epsilon$  dem Durchfluss durch das Rohr.

Neuere Arbeiten zeigen jedoch, dass sog. *kohärente Strukturen* eine weit größere Rolle innerhalb turbulenter Strömungen spielen als bisher angenommen (LESIEUR [S33]). Als *kohärente Strukturen* sind Fluidbereiche zu verstehen, die sich durch einen gewissen Ordnungsgrad auszeichnen und deren Lebensdauer größer ist als das integrale Turbulenzzeitmaß.

### Spezielle Turbulenzfelder

In diesem Zusammenhang sollen die Begriffe *isotrope* und *homogene* Turbulenz eingeführt werden (z. B. KESSLER [S24]).

Bei *isotroper* Turbulenz ist der Tensor der Reynoldsspannungen invariant gegenüber Rotation und Spiegelung des Koordinatensystemes. D. h. für beliebig ausgerichtete

Koordinatensysteme gilt, dass alle Normalspannungen gleich groß sind ( $\overline{\rho u'^2} = \overline{\rho v'^2} = \overline{\rho w'^2}$ ) und alle Schubspannungen gleich Null sind ( $\overline{\rho u'v'} = \overline{\rho u'w'} = \overline{\rho v'w'} = 0$ ). Zur Produktion von Turbulenzenergie muss das Strömungsfeld endliche Gradienten aufweisen und die Schubspannungen müssen von Null verschieden sein. Ein Turbulenzfeld ist in Bereichen mit endlicher Produktion von turbulenter kinetischer Energie daher immer anisotrop.

Ein Turbulenzfeld wird als *homogen* bezeichnet, wenn die Werte aller statistisch gemittelten Größen vom Ort unabhängig sind. Die Reynoldsgleichungen reduzieren sich dann zu  $\overline{\partial u_i / \partial t} = 0$ . Das heißt, auch die mittlere Strömungsgeschwindigkeit muss bei homogenen Turbulenzfeldern räumlich und zeitlich konstant sein. In einem homogenen Turbulenzfeld müssen die turbulente kinetische Energie und damit auch die Geschwindigkeitsschwankungen mit der Zeit abklingen  $\partial k / \partial t = -\epsilon$ . Die exakte Verwirklichung eines homogenen Turbulenzfeldes ist praktisch nicht möglich, im Nachlauf eines Gitters stellt sich jedoch ein solches näherungsweise ein. Bezieht man die Forderung nach Homogenität nur auf die Turbulenzgrößen, so sind auch Gradienten in der Hauptströmung möglich. Voraussetzung ist ein konstanter Gradient der Hauptströmung im ganzen Strömungsfeld. Eine solche Strömung bezeichnet man als homogene Scherströmung. Die Gleichung für die turbulente kinetische Energie beinhaltet nun zusätzlich einen Produktionsterm  $\partial k / \partial t = P - \epsilon$ . Für bestimmte Werte des Geschwindigkeitsgradienten kann erreicht werden, dass Produktion und Dissipation lokal im Gleichgewicht stehen und damit eine näherungsweise stationäre Turbulenz entsteht  $\partial k / \partial t = 0$ .

### Energiespektrum

Turbulente Strömungen zeichnen sich durch ein kontinuierliches Spektrum von Längen- und Zeitskalen (bzw. Frequenzen) aus. Die Größe einzelner Wirbelfäden wird dabei üblicherweise mit einer Wellenzahl  $\bar{\kappa}$  (Einheit:  $[1/m]$ ) charakterisiert. Da die Abmessungen der Elemente in die drei Raumrichtungen unterschiedlich ist, stellt diese eine vektorielle Größe dar. Die spektrale Verteilung der Wellenzahl steht in Beziehung zur spektralen Verteilung der Frequenz der Turbulenzschwankungen. Über die Taylor'sche Hypothese lassen sich mit Hilfe der mittleren Geschwindigkeit örtliche Turbulenzänderungen durch zeitliche Turbulenzänderungen ausdrücken. Wenn die Wellenzahl eine über alle Raumrichtungen integrierte Elementgröße charakterisiert, so spricht man von einem dreidimensionalen Spektrum. In diesem Fall ist die Wellenzahl eine skalare Größe  $\kappa$ . In allgemeinen Strömungen ist eine Messung des dreidimensionalen Spektrums leider noch nicht möglich. Für isotrope Turbulenz kann das dreidimensionale Spektrum jedoch aus gemessenen eindimensionalen Spektren bestimmt werden (z. B. RODI [S13]).

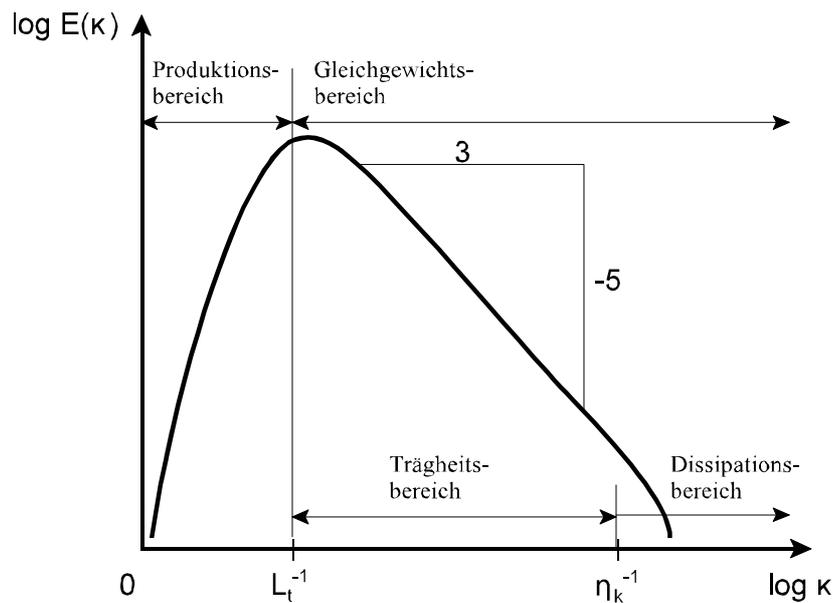


Abb. 2.1.-2: Schematische Darstellung des Energiespektrums einer ausgebildeten Turbulenz im Wellenzahlbereich

Zur Analyse der Turbulenzstruktur wird die Energie-Spektralfunktion  $E(\kappa, t)$  verwendet ( $\equiv$  Energie pro Wellenzahl in  $[m^3/s^2]$ ). Die Energie-Spektralfunktion (kurz. Turbulenzspektrum) beschreibt die Verteilung der Turbulenzenergie in Abhängigkeit von der Wellenzahl  $\kappa$ . Abb. 2.1-2 zeigt eine typische Verteilungsfunktion. Der Energiefluss zwischen den einzelnen Längenskalen wird durch verschiedene Anteile bestimmt. Der Produktionsterm  $P(\kappa, t)$  beinhaltet die Einspeisung von Energie in die Kaskade, der Dissipationsterm  $D(\kappa, t)$  die Umwandlung von Energie aufgrund viskoser Effekte in Wärme. Die Verteilung der Energieanteile im Wellenzahlspektrum wird durch den Transferterm  $T(\kappa, t)$  beschrieben, welcher den Energiefluss zwischen zwei benachbarten Skalen steuert. Für die Energie-Spektralfunktion lässt sich eine Transportgleichung herleiten, dessen Gestalt für homogene isotrope Turbulenz (Gitterturbulenz) besonders einfach ist, da hierbei Produktionsglieder und Diffusionsglieder vernachlässigbar sind:

$$\frac{\partial E(\kappa, t)}{\partial t} = \dot{E}(\kappa, t) = T(\kappa, t) - D(\kappa, t) \quad . \quad (2.1-13)$$

Zur Diskussion der Turbulenzspektrums ist eine Unterteilung in die bereits oben angeführten Abschnitte Produktions-, Trägheits- und Dissipationsbereich dienlich (s. Abb. 2.1-2). Den unterschiedlichen Wellenzahlbereichen lassen sich verschiedenartige Beiträge zum Energiehaushalt der Turbulenz zuordnen (HINZE [S19], ROTTA [S22], TENNEKES AND LUMLEY [S23]). Im *Produktionsbereich* kann die viskose Dissipation vernachlässigt werden. Die Änderung des Gesamttransfers in diesem Wellenzahlbereich wird dann alleinig durch den Produktionsterm bestimmt:

$$\dot{E}(\kappa, t) = \frac{\partial T(t)}{\partial \kappa} = P(\kappa, t) \quad . \quad (2.1-14)$$

Das zugehörige Energiespektrum ist:

$$E(\kappa, t) = \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \cdot \exp\left(-\frac{3}{2} \pi \beta \alpha^{1/2} (\kappa L_t)^{-4/3}\right), \quad (2.1-15)$$

wobei  $\alpha = 1,5$  und  $\beta = 0,3$  Konstanten sind, die sich durch Anpassung an experimentelle Daten ergeben. Der Hauptanteil der Energie findet sich nicht in den größten Elementen, sondern in Elementen die das integrale Längenmaß  $L_t$  aufweisen. Der *Trägheitsbereich* und der *Dissipationsbereich* lassen sich zum sog. *Gleichgewichtsbereich*, der sich durch isotrope homogene Bedingungen auszeichnet, zusammenfassen. In diesem kann die Produktion von Turbulenzenergie vernachlässigt werden. Innerhalb des *Gleichgewichtsbereiches* ist das Integral des Transfergliedes über alle Wellenzahlen null, was bedeutet, dass dieses Glied den kleinen Elementen genau so viel Energie zuführt wie es den großen entzieht:

$$T(t) = \int_0^{\infty} T(\kappa, t) d\kappa = 0. \quad (2.1-16)$$

Die Transportgleichung der Energie-Spektralfunktion erfüllt in diesem Bereich die Beziehung (RODI [S13])

$$\dot{E}(\kappa, t) = T(\kappa, t) - D(\kappa, t) \approx 0. \quad (2.1-17)$$

Im *Dissipationsbereich* des *Gleichgewichtsbereiches* wird die Änderung des Gesamttransfers alleinig durch die viskose Dissipation bestimmt:

$$\dot{E}(\kappa, t) = \frac{\partial T(t)}{\partial \kappa} = -D(\kappa, t) = -2\nu \kappa^2 \cdot E(\kappa, t) \quad (2.1-18)$$

Die Dissipation findet auf der Längenskala  $L_\eta$  der sogenannten Kolmogorov-Wirbel statt. Das zugehörige Energiespektrum ist:

$$E(\kappa, t) = \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \cdot \exp\left(-\frac{3}{2} \alpha (\kappa L_\eta)^{4/3}\right) \quad (2.1-19)$$

Im *Trägheitsbereich* des *Gleichgewichtsbereiches* ist die Dissipation vernachlässigbar. Die Transferrate, ist ebenfalls Null. Es findet keine Umverteilung des Energieflusses zwischen benachbarten Skalen statt.

$$D(\kappa, t) = 0, \quad T(\kappa, t) = 0. \quad (2.1-20)$$

Dieser Bereich nimmt für große Reynoldszahlen den größten Teil des Spektrums ein. Die Überlagerung der Energiespektren für den Produktions- und den Dissipationsbereich ergibt für den Trägheitsbereich die bekannte Gesetzmäßigkeit (s. Abb. 2.1-2):

$$E(\kappa, t) = \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}. \quad (2.1-21)$$

Das Integral der spektralen Dissipationsrate über alle Wellenzahlen beschreibt die totale Dissipationsrate  $\varepsilon$  der Turbulenz:

$$\varepsilon = \int_0^\infty D(\kappa, t) d\kappa = 2\nu \int_0^\infty \kappa^2 \cdot E(\kappa, t) d\kappa \sim \frac{k^{3/2}}{L_t} \quad (2.1-22)$$

Die skalare Größe  $\varepsilon$  ist ein Maß für die Umwandlung von Turbulenzenergie in Wärme. Sie kann bei Gleichgewichtsturbulenz auch unter Verwendung des integralen Längenmaßes definiert werden. Die turbulente kinetischen Energie lässt sich als Integral des Energiespektrums berechnen:

$$k = \int_0^\infty E(\kappa, t) d\kappa \quad (2.1-23)$$

Die drei charakteristischen Bereiche der Turbulenzkaskade zeichnen sich durch typische Maßstäbe aus. Diese sind im Vergleich zu den Maßstäben der Hauptströmung in Tab. 2.1-1 aufgeführt (z. B. RUNG [S25]).

Tab. 2.1-1: Charakteristische Maßstäbe in turbulenten Strömungen.

	Hauptströmung	Produktionsbereich	Trägheitsbereich	Dissipationsbereich
Längenmaß	$L$	$L_t \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$	$L_\kappa \sim \frac{1}{\kappa}$	$L_\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}$
Geschwindigkeitsmaß	$U$	$u_t \sim \sqrt{k}$	$u_\kappa \sim \left( \frac{\varepsilon}{\kappa} \right)^{1/3}$	$u_\eta = (\nu \cdot \varepsilon)^{1/4}$
Zeitmaß	$\tau \sim \frac{L}{U}$	$\tau_t \sim \frac{k}{\varepsilon} \sim \frac{L_t}{u_t'}$	$\tau_\kappa \sim (\varepsilon \cdot \kappa^2)^{-1/3}$	$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}$

Aus diesen Skalengesetzen lassen sich die folgenden typischen Verhältnisse zwischen den Makro- und Mikroskalen der Turbulenz ableiten:

$$\frac{L_t}{L_\eta} \sim Re_t^{3/4}, \quad \frac{\tau_t}{\tau_\eta} \sim Re_t^{2/4}, \quad \frac{u_t}{u_\eta} \sim Re_t^{1/4} \quad (2.1-24)$$

Diese Verhältnisse skalieren mit der turbulenten Reynoldszahl, die mit den integralen Turbulenzskalen gebildet wird:

$$Re_t = \frac{u_t \cdot L_t}{\nu} \quad . \quad (2.1-25)$$

Da diese Skalen vom Strömungssystem vorgegeben sind ( $L_t \sim L$ ,  $u_t \sim Tu \cdot U$ ), bedeutet dies, dass das Längenmaß  $L_\eta$  der Kolmogorov-Wirbel sowie deren Zeitmaß  $\tau_\eta$  und Geschwindigkeitsmaß  $u_\eta$  mit steigender turbulenter Reynoldszahl immer kleiner werden. Setzt man in die Definition von  $Re_t$  die obigen Beziehungen ein, so ergibt sich für die auf der Skala der Kolmogorov-Wirbel gebildete Reynoldszahl

$$Re_\eta = \frac{u_\eta \cdot L_\eta}{\nu} \approx 1 \quad , \quad (2.1-26)$$

worin sich der starke Reibungseinfluss dieser Größenskala manifestiert. Aus den Skalengesetzen lässt sich wiederum die im Trägheitsbereich geltende Abhängigkeit 2.1-24 ableiten (PETERS [Va5]). Die kinetische Energie einer Wirbelklasse im Trägheitsbereich ist proportional zum Quadrat der Schwankungsgeschwindigkeit dieser Wirbelklasse

$$u_\kappa^2 \sim \left( \frac{\epsilon}{\kappa} \right)^{2/3} \sim \epsilon^{2/3} \cdot \kappa^{-2/3} \quad . \quad (2.1-27)$$

Die Energiedichte im Wellenzahlraum (Energie pro Wellenzahl) lässt sich damit aus der Ableitung der kinetischen Energie nach der Wellenzahl bestimmen

$$E(\kappa, t) = \frac{\partial u_\kappa^2}{\partial \kappa} \sim \epsilon^{2/3} \cdot \kappa^{-5/3} \quad . \quad (2.1-28)$$

## 2.1.4 Turbulenzmodellierung

### 2.1.4.1 Die zeitgemittelten Navier-Stokes-Gleichungen

Werden die Navier-Stokes-Gleichungen (Gl. 2.1-1 u. 2.1-2) zur Berechnung statistisch stationärer Strömungen einer Reynolds-Mittelung unterzogen, spricht man im Allgemeinen von den Reynolds- oder auch RANS (**R**eynolds **A**veraged **N**avier-**S**tokes)-Gleichungen. Die aus einer Mittelung nach Favre resultierenden Gleichungen werden entsprechend als FANS (**F**avre **A**veraged **N**avier-**S**tokes)-Gleichungen bezeichnet. Entsprechend ergeben sich zur Beschreibung von statistisch transienten Strömungen je nach Mittelungsvorschrift sog. URANS (**U**nsteady **R**eynolds **A**veraged **N**avier-**S**tokes)-bzw. UFANS (**U**nsteady **F**avre **A**veraged **N**avier-**S**tokes)-Gleichungen. In der Literatur und im täglichen Sprachgebrauch wird jedoch oftmals nicht zwischen den Begriffen RANS und FANS bzw. zwischen URANS und UFANS unterschieden. Dies ist allerdings nur im Hinblick auf die Beschreibung isothermer Strömungen richtig, da dann das Resultat der Anwendung der jeweiligen Mittelungsvorschriften identisch ist.

In der vorliegenden Arbeit werden Ergebnisse der Berechnung statistisch instationärer Strömungen ohne und auch mit überlagerter Reaktion diskutiert. Im vorliegenden Kapitel 2 werden, wenn von Mittelwerten die Rede ist, der Übersichtlichkeit halber immer stillschweigend die dichtegewichteten Ensemble-Mittelwerte vorausgesetzt. Das heißt, die verwendete "vereinfachte" Schreibweise  $\overline{\Phi}$  für eine transportierte Größe ist identisch mit der "ausführlichen" Schreibweise  $\langle \Phi \rangle$ , die Schreibweise  $\overline{\rho u_i' u_j'}$  für eine dichtegewichtete Korrelation ist identisch mit  $\langle \overline{\rho u_i' u_j'} \rangle$ . Bei der Diskussion der Ergebnisse in den Kapiteln 7 und 8 wird jedoch zur genauen Unterscheidung der diskutierten Größen die ausführliche Schreibweise verwendet.

Für die in dieser Arbeit untersuchten axialsymmetrischen Strömungen gilt  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Da alle berechneten Strömungen zusätzlich drallfrei waren ( $\overline{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ ), entfällt eigentlich die Notwendigkeit einer Impulsbilanz in tangentialer Richtung. Dennoch wurde die Geschwindigkeitskomponente in tangentialer Richtung der Vollständigkeit halber in den Grundgleichungen belassen.

Die Kontinuitätsgleichung und die Impulserhaltungsgleichungen in der zeitgemittelten Form werden auch *Reynoldsgleichungen* genannt. Sie lauten für eine axialsymmetrische inkompressible Strömung:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho u})}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \overline{\rho v})}{\partial r} = 0 \quad (2.1-29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\overline{\rho u})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho u u})}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \overline{\rho u v})}{\partial r} &= - \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \tau_{xr})}{\partial r} \\ \frac{\partial (\overline{\rho v})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho v u})}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \overline{\rho v v})}{\partial r} - \frac{\overline{\rho w^2}}{r} &= - \frac{\partial \overline{p}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \cdot \tau_{rr})}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} \\ \frac{\partial (\overline{\rho w})}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{\rho w u})}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial (r \overline{\rho w v})}{\partial r} + \frac{\overline{\rho v w}}{r} &= \frac{\partial \tau_{xp}}{\partial x} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial (r^2 \cdot \tau_{r\varphi})}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.1-30)$$

Die Komponenten des Tensors  $T_{ij}$  setzen sich aus den in den Navier-Stokes Gleichungen auftretenden viskosen Spannungen im Tensor  $T_{ij,l}$  und einem bei zeitlicher Mittelung der konvektiven Glieder der instationären Navier-Stokes Gleichung entstehenden turbulenten Anteil im Tensor  $T_{ij,t}$  zusammen:

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} \pi_{xx} & \pi_{xr} & \pi_{xp} \\ \pi_{rx} & \pi_{rr} & \pi_{r\varphi} \\ \pi_{\varphi x} & \pi_{\varphi r} & \pi_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = T_{ij,l} + T_{ij,t} \quad (2.1-31)$$

Die Komponenten des turbulenten Tensors beinhalten den Einfluss der Turbulenz auf das Strömungsfeld und wirken, als ob der Widerstand des Fluides gegen Deformation scheinbar erhöht ist:

$$T_{ij,t} = \begin{pmatrix} \overline{\rho u'^2} & -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho u'w'} \\ \vdots & -\overline{\rho v'^2} & -\overline{\rho v'w'} \\ \vdots & \vdots & -\overline{\rho w'^2} \end{pmatrix}. \quad (2.1-32)$$

Sie werden deshalb auch als *scheinbare* Spannungen bezeichnet. Der daraus resultierende Effekt wird als *Scheinreibung* bezeichnet. Der turbulente Anteil bewirkt ebenso wie die viskose Reibung einen Impulsaustausch, der in der Regel deutlich größer ist als der durch viskose Reibung bedingte. Der Beitrag der Diagonalelemente (Normalspannungen) des turbulenten Tensors  $T_{ij,t}$  zum gesamten Impulstransport ist in der Regel klein (SCHLICHTING [S4]).

Ein Maß für die Turbulenzintensität gibt die massenspezifische turbulente kinetische Energie

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (2.1-33)$$

an, die sich aus der halben Summe der Normalspannungen errechnet. Im Gegensatz zu den einzelnen Komponenten des turbulenten Tensors  $T_{ij,t}$  ist  $k$  invariant gegenüber Koordinatentransformation und wird deshalb in der Turbulenzmodellierung als Maß der Turbulenzintensität zur Berechnung des turbulenten Austausches benutzt.

#### 2.1.4.2 Turbulente Viskosität

Der laminare Anteil  $T_{ij,l}$  des Tensors  $T_{ij}$  (Gl. 2.1-15) lässt sich in folgender Form mit Hilfe des Deformationstensors (bzw. Schergeschwindigkeitstensors)  $D_{ij}$  schreiben:

$$T_{ij,l} = \mu_l \cdot D_{ij} = \mu_l \cdot \begin{pmatrix} \left( 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \\ \vdots & \left( 2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) & \left( r \frac{\partial \bar{w}/r}{\partial r} \right) \\ \vdots & \vdots & \left( 2 \frac{\bar{v}}{r} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.1-34)$$

Das Wirbelviskositätsprinzip beruht auf der Annahme, dass analog zur laminaren Strömung auch die Spannungen bei turbulenten Strömungen in Bezug zu Gradienten bekannter Größen gesetzt werden können. Hierbei werden die unbekanntes Kovarianzen dadurch bestimmt, dass sie ebenfalls proportional zu den Deformationsgeschwindigkeiten gesetzt werden. Grundlage dafür ist der verallgemeinerte Gradientenansatz (Boussinesqansatz), der die Reynoldsspannung im turbulenten Tensor  $T_{ij,t}$  in Bezug zu den viskosen Spannungen im laminaren Tensor  $T_{ij,l}$  setzt. Dabei wird von jedem

Diagonalelement der Anteil  $2/3 \bar{\rho} \bar{k}$  subtrahiert. Dies ist notwendig, damit die Spur von  $T_{ij,t}$  wie beim Ausgangstensor  $T_{ij}$  wieder gleich  $-2\bar{\rho} \bar{k}$  ergibt. Analog zur laminaren Viskosität  $\mu_l$  wird der Proportionalitätsfaktor  $\mu_t$  turbulente Wirbelviskosität genannt. Anstelle der 6 Korrelationen im Reynoldsspannungstensor muss jetzt alleinig die Wirbelviskosität  $\mu_t$  bestimmt werden. Diese ist von den lokalen Strömungsbedingungen, bzw. der Turbulenzstruktur abhängig und ist damit keine Stoffgröße. Dieser Ansatz stellt eine Vereinfachung dar, da angenommen wird, dass die Wirbelviskosität in alle Raumrichtungen die gleiche Größe hat und somit isotrop ist. Das bedeutet aber nicht, dass die Turbulenz als isotrop angenommen wird. Aus der Analogie zwischen laminarem und turbulentem Spannungsansatz resultiert durch Summierung der Spannungsglieder der allgemeine Spannungsansatz:

$$\begin{aligned}
 T_{ij} &= \mu_l \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{\rho} \overline{u_i' u_j'} \\
 &= \mu_l \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \mu_t \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{k} \cdot \delta_{ij} \quad (2.1-35-a) \\
 &= \mu_{eff} \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \bar{\rho} \cdot \bar{k} \cdot \delta_{ij} .
 \end{aligned}$$

Die effektive Gesamtviskosität  $\mu_{eff}$  ist die Summe aus der laminaren und der turbulenten Viskosität  $\mu_{eff} = \mu_l + \mu_t$ . Die entsprechende Formulierung in *ausführlicher* Schreibweise (s. o.) lautet:

$$T_{ij} = \langle \mu_{eff} \rangle \cdot \left( \frac{\partial \langle \tilde{u}_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle \tilde{u}_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \langle \bar{\rho} \rangle \cdot \langle \bar{k} \rangle \cdot \delta_{ij} . \quad (2.1-35-b)$$

### 2.1.4.3 Turbulente Viskosität

Das  $k$ - $\epsilon$  Modell gehört zur Gruppe der Zwei-Gleichungs-Modelle und verwendet das Prinzip der Wirbelviskosität. Diese wird hierbei aus den zwei Größen turbulente kinetische Energie  $k$  und turbulente Dissipation  $\epsilon$  ermittelt. Dazu wird von einer Analogie zwischen laminarer und turbulenter Viskosität ausgegangen. Gemäß der kinetischen Gastheorie kann die laminare Viskosität aus der mittleren Geschwindigkeit  $u_{mol}$  und der mittleren freien Weglänge  $\lambda$  von Molekülen wie folgend berechnet werden:

$$\mathbf{v}_t = \frac{1}{3} \cdot \varrho \cdot u_{mol} \cdot \lambda \quad . \quad (2.1-36)$$

Im turbulenten Fall lassen sich die großen Wirbel als die transportierte Massenelemente interpretieren. Da die großen Wirbel den Hauptteil der Turbulenzenergie tragen, ist die mittlere Schwankungsgeschwindigkeit  $\sqrt{k}$ , ein geeignetes Maß zur Charakterisierung der Austauschgeschwindigkeit. Die Austauschlänge  $L$  lässt sich als Produkt aus Austauschgeschwindigkeit und Existenzzeit der großen Wirbel darstellen. Als Maß für die Existenzzeit kann das turbulente Zeitmaß  $\tau$ , welches die charakteristische Abbaugeschwindigkeit der Turbulenzenergie repräsentiert, verwendet werden ( $\tau = k/\epsilon$ ). Folglich kann die Wirbelviskosität gemäß unten stehender Gleichung aus den lokalen Turbulenzgrößen  $k$  und  $\epsilon$  bestimmt werden.

$$\begin{aligned} \mu_t &\sim \varrho \cdot u' \cdot L \sim \varrho \cdot u' \cdot u' \cdot \tau_t \sim \varrho \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt{k} \cdot \frac{k}{\epsilon} \sim \varrho \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \\ \mu_t &= c_\mu \cdot \varrho \cdot \frac{k^2}{\epsilon} \end{aligned} \quad (2.1-37)$$

$c_\mu$  ist eine empirisch zu bestimmende Konstante. Eine Beziehung zwischen  $k$  und  $\epsilon$  lässt sich aus der Transportgleichung für die Reynoldsspannungen oder aus einer Dimensionsanalyse herleiten (RODI [S13]):

$$L_t \sim \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \quad . \quad (2.1-38)$$

$L_t$  ist dabei das Längenmaß der großen, energietragenden Turbulenzelemente. Eine heuristische Deutung dieser Beziehung ist weiter unten gegeben. Um die turbulente kinetische Energie  $k$  und turbulente Dissipation  $\epsilon$  zu bestimmen, muss für jede dieser Größen eine zusätzliche Transportgleichung definiert und gelöst werden.

#### 2.1.4.4 Turbulente Diffusivität

Analog zum turbulenten Austausch von Impuls wird angenommen, dass der turbulente Austausch skalarer Größen  $\phi$  ebenfalls einem Gradientenansatz gehorcht:

$$-\overline{\varrho \cdot u_i' \phi'} = \Gamma_t \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_j}, \quad \text{mit} \quad \Gamma_t = \frac{\mu_t}{\sigma_t} \quad . \quad (2.1-39-a)$$

In ausführlicher Schreibweise (s. o.) gilt:

$$-\langle \bar{\rho} \rangle \cdot \widetilde{u_i'''} \phi'' = \langle \Gamma_t \rangle \frac{\partial \langle \check{\Phi} \rangle}{\partial x_j}, \quad \text{mit} \quad \langle \Gamma_t \rangle = \frac{\langle \mu_t \rangle}{\sigma_t}. \quad (2.1-39-b)$$

Wie die Wirbelviskosität, so ist auch die turbulente Diffusivität  $\Gamma_t$  keine Stoffgröße, sondern hängt von den lokalen Turbulenzbedingungen ab. Nach der Reynolds'schen Analogie besteht eine enge Beziehung zwischen  $\Gamma_t$  und  $\mu_t$ , die durch einen Proportionalitätsfaktor  $\sigma_t$  ausgedrückt wird. Zur Beschreibung des Wärmeaustausches wird für  $\sigma_t$  die turbulente Prandtlzahl  $Pr_t$  verwendet, zur Beschreibung des Stoffaustausches die turbulente Schmidtzahl  $Sc_t$ . Beide Kennzahlen drücken das Verhältnis von turbulentem Austausch von Impuls zum turbulenten Austausch des jeweiligen Skalares aus. Wie Experimente gezeigt haben, variieren zwar die turbulenten Diffusivitäten für Impuls, Wärme und Stoff innerhalb eines Strömungsfeldes oftmals stark, aber ihr Verhältnis  $\sigma_t$  bleibt bei den meisten Strömungskonfigurationen relativ konstant. Es gibt allerdings auch Konfigurationen, bei denen  $\sigma_t$  innerhalb des Strömungsfeldes stark variieren kann, z. B. bei Strömungen mit Auftrieb oder Stromlinienkrümmungen (RODI [S12]). Die Überlagerung aus molekularem und turbulentem Stoffaustausch kann wiederum durch eine sich aus den Einzeldiffusivitäten zusammensetzende effektive Gesamtdiffusivitäten  $\Gamma_{eff}$  berechnet werden:

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_l + \Gamma_t = \frac{\mu_l}{\sigma_l} + \frac{\mu_t}{\sigma_t} = \frac{\mu_{eff}}{\sigma_{eff}}. \quad (2.1-40)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass die jeweiligen Prandtl- und Schmidtzahlen für den turbulenten und den laminaren Fall gleich sind.

## 2.1.5 Das k- $\epsilon$ Modell

### 2.1.5.1 Transportgleichungen für k und $\epsilon$

Die exakten Transportgleichungen für  $k$  und  $\epsilon$  lassen sich zwar herleiten, enthalten jedoch Terme, die modelliert werden müssen. Um das Gleichungssystem lösbar zu machen, müssen diese durch Modellannahmen in Ausdrücke umgewandelt werden, die nur  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, p, k$  und  $\epsilon$  enthalten. Die modellierten Gleichungen lauten für ein zylindrisches rotationssymmetrisches inkompressibles System:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}uk)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r\bar{\rho}vk)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{Pr_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\mu_t}{Pr_k} \cdot \frac{\partial k}{\partial r} \right) \\
&+ P - \bar{\rho} \cdot \varepsilon \\
\frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u\varepsilon)}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r\bar{\rho}v\varepsilon)}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\mu_t}{Pr_\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) \\
&+ \bar{\rho} \cdot \frac{\varepsilon}{k} \cdot \left( c_1 \cdot \frac{P}{\bar{\rho}} - c_2 \cdot \varepsilon \right),
\end{aligned} \tag{2.1-41}$$

wobei  $P = P_0 + P''$  die Produktion von turbulenter Schwankungsenergie aus der mittleren Bewegung ist. Diese setzt sich aus zwei Anteilen zusammen.  $P_0$  ist die Produktion bei Strömungen mit konstanter Dichte. Sie errechnet sich aus dem Produkt von Spannungstensor und Deformationstensor. Der Spannungstensor ist wiederum das Produkt aus Deformationstensor und turbulenter Zähigkeit.

$$\begin{aligned}
P_0 &= S_{ij} \cdot D_{ij} = \mu_t \cdot D_{ij} \cdot D_{ij} = -\overline{\rho u'_i u'_j} \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \\
&= \mu_t \cdot \left[ 2 \left( \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\bar{v}}{r} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left( r \frac{\partial(\bar{w}/r)}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.1-42}$$

Im Term  $P''$  tauchen Zusatzterme auf, die in dichteveränderlichen Strömungen auftreten, deren Gleichungen durch Favre-Mittelung gewonnen wurde. Diese Terme können teilweise vernachlässigt werden. Im verwendeten CFD-Programm EBI-2d ist der Anteil

$$P'' = -\frac{\nu_t}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \tag{2.1-43}$$

berücksichtigt (HIRSCH [S16]).

Die sich durch die Modellierung der Transportgleichungen für  $k$  und  $\varepsilon$  ergebenden vier zusätzlichen Konstanten müssen ebenfalls empirisch bestimmt werden. Die Konstanten wurden durch Optimierungsrechnungen festgelegt. Durch Vergleich von Rechen- und Messergebnissen für verschiedene Strömungstypen wurde ein Standard-Konstantensatz zusammengestellt (RODI [S13]), der auch in der vorliegenden Arbeit durchgängig verwendet wurde (s. Tab. 2.1-2).

Tab. 2.1-2: Standard-Konstantensatz des  $k$ - $\varepsilon$  Modelles

$c_\mu$	$c_1$	$c_2$	$\sigma_k$	$\sigma_\varepsilon$
0,09	1,44	1,92	1,0	1,3

Die  $k$ -Gleichung, die  $\varepsilon$ -Gleichung, die Kontinuität und drei Impulserhaltungsgleichungen ergeben ein unter gegebenen konsistenten Randbedingungen lösbares, partielles Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der 6 Unbekannten  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, k$  und  $\varepsilon$  für die Berechnung einer isothermen turbulenten Strömung.  $\mu_t$  stellt dabei gewissermaßen eine Hilfsgröße dar.

### 2.1.5.2 $k$ - $\varepsilon$ Modell und stationäre Strömungen

Das  $k$ - $\varepsilon$  Modell liefert für viele Strömungskonfigurationen recht zuverlässige Aussagen, vor allem aber für solche mit Grenzschichtcharakter. Die bei der Modellierung der  $\varepsilon$ -Transportgleichungen erforderlichen zusätzlichen Modellannahmen, sowie die real nicht vorhandene Isotropie der Wirbelviskosität sind die Hauptkritikpunkte am  $k$ - $\varepsilon$  Modell. Dies führt zu den bekannten Defiziten des Modelles bei der Berechnung verschiedener statistisch stationärer Strömungskonfigurationen. Dazu zählen vor allem Strömungen mit starker Stromlinienkrümmung oder Staupunkten, Grenzschichten mit Druckanstieg, Auftriebsströmungen sowie rotationssymmetrische Freistrahlen (s. Kap. 2.1.5.7). Zur Berechnung dieser Strömungstypen ist der oben angegebene Standard-Konstantensatz nicht geeignet. In der Literatur existiert eine große Anzahl von Arbeiten bei denen die Leistungsfähigkeit des Modelles zur Berechnung spezieller Strömungskonfigurationen durch Anpassung der Konstanten verbessert wurde.

Bei der Herleitung des Modelles wird davon ausgegangen, dass sich die Turbulenzkaskade im Gleichgewicht befindet, d. h. der Energietransfer längs der Kaskade konstant ist. In diesem Fall ist die Dissipation von turbulenter kinetischer Energie gleich groß wie die Produktion  $\varepsilon = P$ . Die auf kleinen Skalen stattfindende Dissipation kann somit mit den großen Skalen, bei denen die Produktion stattfindet, verknüpft werden, was sich in der Beziehung  $\varepsilon \sim k^{3/2}/L_t$  ausdrückt. Das gesamte Längenmaßspektrum der Turbulenz wird gewissermaßen durch nur ein einziges Längenmaß  $L_t$  ersetzt. Eine anschauliche Deutung dieser Beziehung ist in RUNG [S25] gegeben. Nach dem Impulssatz ist der Widerstand eines Turbulenzballens mit der durchschnittlichen räumlichen Ausdehnung  $L_t$  proportional zum Quadrat der Relativgeschwindigkeit ( $\sim k$ ) gegen die Umgebung. Der Massenstrom des Elementes lässt sich als Produkt aus Dichte  $\rho$ , Querschnittsfläche ( $\sim L_t^2$ ) und Schwankungsgeschwindigkeit ( $\sim \sqrt{k}$ ) darstellen. Damit ergibt sich bezogen auf die Masse ( $\sim \rho L_t^3$ ):

$$\varepsilon \sim \frac{k \cdot (\rho \cdot \sqrt{k} \cdot L_t^2)}{\rho \cdot L_t^3} = \frac{k^{3/2}}{L_t} \quad . \quad (2.1-44)$$

Die Energietransferrate ist nur für eine sich im Gleichgewicht befindliche Turbulenzkaskade konstant. Dies bedeutet aber auch, dass die Turbulenzstruktur unabhängig von ihrer zeitlichen Geschichte ist. Dieses Gleichgewicht kann sich allerdings nur bei isotroper homogener Turbulenz einstellen. In realen Strömungen wird Turbulenzenergie zusätzlich auch konvektiv und diffusiv transferiert. Die

Turbulenzmodellierung behilft sich daher trotz der gleichzeitigen Berücksichtigung von konvektivem und diffusivem Transport, mit der Gleichsetzung  $\epsilon = P$ . Der hiermit eingeführt Fehler ist umso größer je größer der Transportanteil von Turbulenzenergie wird (LEUCKEL [S2]). Die spektrale Trennung von Produktionsbereich und Dissipationsbereich hängt von der Existenz des Trägheitsbereiches ab. Dessen spektrale Ausdehnung wird umso breiter, desto größer die turbulente Reynoldszahl ist. Die Annahme eines ausgeprägten Gleichgewichtsbereiches, in dem homogene isotrope Bedingungen herrschen, wird deshalb mit steigender Reynoldszahl einer Strömung zunehmend erfüllt. Da diese auch von der Systemgröße abhängt, ist eine Skalentrennung bei geometrisch kleinen Systemen fraglich.

### 2.1.5.3 k- $\epsilon$ Modell und instationäre Strömungen

Die Entwicklung des k- $\epsilon$  Modelles beruht auf der Betrachtung statistisch stationärer Strömungen. Einige Autoren behaupten, dass die Modellierung von statistisch instationären Strömungen (z. B. periodische Strömungen) nur dann vertrauenswürdig ist, wenn die Existenz einer spektralen Lücke (engl.: spectral gap) zwischen dem Frequenz- bzw. Wellenzahlband der numerisch aufgelösten transienten Grundströmung und dem des modellierten Turbulenzspektrums gewährleistet ist (z. B. RUNG [S25]). Mit Verringerung des Zeitmaßes der periodischen Strömung  $\tau_p$  und dem größten Turbulenzzeitmaß  $\tau_t$  kommt es zu einer spektralen Überlappung. Diese wirkt sich in nichtlinearen Wechselwirkungen zwischen Turbulenz und transienter Grundströmung aus. Dafür sind momentan keine Modellansätze verfügbar (s. auch Kap. 2.1.2).

DURBIN [S26] führt jedoch aus, dass auch periodische Strömungen berechnet werden können, deren Frequenzen im Trägheitsbereich der Turbulenzkaskade liegen. Voraussetzung ist allerdings, dass das Frequenzband der aufgeprägten oder sich ergebenden Periodizität (z. B. bei selbsterregten Wirbelablösevorgängen) scharf begrenzt ist. Als Begründung wird angegeben, dass die zeitliche Reynoldsmittelung aus örtlichen Korrelationen abgeleitet wird (s. o.). Ein Kriterium für die Rechtfertigung von lokaler Gleichgewichtsturbulenz muss deshalb nicht wie üblich im Frequenzbereich, sondern im Ortsbereich definiert werden. Als maßgebliches Kriterium wird angegeben, dass das Verhältnis von turbulentem Längenmaß und der typischen Abmessung des mittleren Strömungsfeldes nicht oberhalb der Größenordnung von Eins liegen sollte. IACCARINO stellt in [S27] Ergebnisse vor, die zeigen, dass die Langzeit-gemittelten Bedingungen, die beim Auftreten von Karmann'schen Wirbelstraßen hinter angeströmten Zylindern vorliegen, durch URANS-Rechnungen sehr viel besser wiedergegeben werden können als mit RANS-Rechnungen und vergleichbar mit den Ergebnissen von LES-Rechnungen sind. FRANKE [S28] zeigt, dass auch der zeitaufgelöste Vergleich von URANS-Rechnungen mit entsprechenden Messungen eine sehr gute Übereinstimmung liefert. Dies gilt allerdings nur, wenn die URANS-Rechnungen mit Turbulenzmodellen durchgeführt werden, die nicht den Wirbelviskositätsansatz verwenden (z. B. Reynoldsspannungsmodelle). Eine Nachfolgearbeit von BOSCH [S29] zeigt allerdings auf, dass auch mit dem k- $\epsilon$  Modell gute Ergebnisse erzielt werden können, wenn dessen bekannte Schwächen (zu große

Turbulenzproduktion im vorderen Staupunkt des angeströmten Körpers, mangelnde Beschreibung von komplexen Wandgrenzschichten) durch entsprechende Modifikationen beseitigt werden.

#### 2.1.5.4 **k- $\epsilon$ Modell und rotationssymmetrische Freistrahlen**

Der Strahlwinkel von stationären axialsymmetrischen Freistrahlen wird von der Standard-Version des  $k - \epsilon$  Modelles um bis zu 30% zu groß berechnet. Zur Verbesserung dieses Defizites hat POPE [S21] eine physikalisch begründete Korrekturfunktion entwickelt (s. auch EHRHARDT [Va2]). Ausgangspunkt ist die Überlegung, dass in der Scherschicht von axialsymmetrischen Strömungen stochastisch Ringwirbeln auftreten, die durch die divergierende Strömung gestreckt werden. Dieser Vorgang ist aufgrund der Verkleinerung der charakteristischen Wirbelabmessungen mit dem turbulenten Energiekaskadenprozess, dem Transfer von turbulenter Energie großer Wirbel hin zu kleineren Wirbeln, verbunden. Da die kleineren Wirbel turbulente Energie in innere Energie des Strahlmediums überführen, ist die Streckung mit Dissipation turbulenter Energie verbunden. Diese zusätzliche Dissipation führt zu einer verminderten effektiven Viskosität. POPE leitet hierzu einen zusätzlichen Senkenterm  $S_\epsilon$  her, der in die Transportgleichung für die Dissipation  $\epsilon$  eingebracht wird:

$$S_\epsilon = C_{Pope} \cdot \chi \cdot \left( \frac{\epsilon^2}{k} \right), \quad \text{mit} \quad \chi = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{k}{\epsilon} \right)^3 \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \cdot \frac{\bar{v}}{r} \quad (2.1-45)$$

Die Proportionalitätskonstante  $C_{Pope}$  wurde für den runden Freistrahler zu 0,79 bestimmt. Die Variable  $\chi$  ist ein dimensionloses Maß für die mittlere Wirbelstreckung. Sie ist von örtlichen Strömungsgrößen abhängig. Durch diese Erweiterung wird die von der Standardversion des  $k - \epsilon$  Modelles als zu groß berechnete Ausbreitungsrate eines stationären axialsymmetrischen Freistrahles korrigiert.

### 2.1.6 **Wirbel und ihre Eigenschaften**

#### 2.1.6.1 **Typisierung**

##### **Definition eines Wirbels**

Die Antwort auf die Frage, was ein Wirbel ist, ist weder einfach noch eindeutig. Eine allgemeine Formulierung gibt LUGT [S1]: “Unter einem Wirbel versteht man die kreisende Bewegung einer Vielzahl von Materieteilchen um ein gemeinsames Zentrum. Die Teilchenbahnen müssen dabei nicht zwingend kreisförmig verlaufen.” Eine Auswertung der Stromfunktion ist bei instationären Strömungen jedoch nur bedingt dazu geeignet, einen Wirbel zu detektieren (s. u.).

##### **Rotation, Drehung, Vorticity**

Die Drehung von Materie im Raumpunkt eines Kontinuums wird als Rotation (Englisch “Vorticity”) bezeichnet. Es gibt keinen Wirbel ohne Rotation, während ein

rotationsbehaftetes Strömungsfeld keine Wirbel aufweisen muss (siehe z.B. parallele Scherströmung) (LUGT [S1]). Die Beschreibung eines strömenden Fluides mittels der Navier-Stokes-Gleichungen beruht auf der von EULER geprägten Betrachtungsweise eines Kontinuums. Dieser gab damit die NEWTON'sche Auffassung von diskreten Flüssigkeitspunkten auf. Die einzelnen Glieder der Differentialgleichungen beziehen sich deshalb nicht auf Flüssigkeitsteilchen, sondern auf Raumpunkte und auf die in ihnen eigenen Feldgrößen. Die Frage, ob ein kleines Flüssigkeitsteilchen bei seiner Bewegung auf einer Bahnlinie rotiert oder nicht, lässt sich mit Ausnahme von speziellen Fällen, nicht stellen (TIETJENS [S9]). Trotzdem wird in den folgenden Abschnitten aus Gründen der Anschaulichkeit teilweise der Begriff des "Fluidelementes" verwendet. Damit ist jedoch im Hinblick auf kinematische Betrachtungen immer ein Raumpunkt des Kontinuums gemeint. Jede Zuordnung zu einem bestimmten Flüssigkeitsteilchen ist damit aufgehoben.

### Typische Wirbelformen

Um Eigenschaften realer Wirbel zu beschreiben und deren Verhalten anzunähern werden charakteristische Wirbelformen verwendet. Die Umfangsgeschwindigkeitsverteilungen einiger ebenen Wirbeltypen sind in Tabelle 2.1-3 zusammengestellt (HOLZÄPFEL [S17]). Vorausgesetzt wird ein Zylinderkoordinatensystem mit den Koordinaten  $(x, r, \varphi)$ . Die Bahnlinien der Wirbel befinden sich in der  $x,r$ -Ebene. Abb. 2.1-3 zeigt einige Umfangsgeschwindigkeitsverteilungen (Parameter:  $A = 750$ ,  $B = 0,15$ ,  $A = 5250$ ).  $\Gamma_0$  ist die Gesamtzirkulation.

Tab. 2.1-3: Typische Wirbelformen und deren Umfangsgeschwindigkeitsverteilung

Starrkörperwirbel	$w(r) = A \cdot r$
Potentialwirbel	$w(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} = \frac{B}{r}$
Hamel-Lamb-Oseen Wirbel	$w(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right) = \frac{B}{r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{C \cdot r^2}{t}}\right)$
Rankinewirbel	$w(r) = w_{\max} \cdot \left(\frac{r_k}{r}\right)^n$ , mit $\begin{cases} n = -1 & \text{für } 0 \leq r \leq r_k \\ n = 1 & \text{für } r > r_k \end{cases}$
Burgerswirbel	$w(r) = \frac{\Gamma_0}{2\pi r} \cdot \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2 \cdot \nu}}\right) = \frac{B}{r} \cdot \left(1 - e^{-C \cdot r^2}\right)$

Der *Starrkörperwirbel* besitzt eine lineare Geschwindigkeitsverteilung und ist drehungsbehaftet (d. h. jedes Fluidelement bewegt sich bei einem Umlauf um das Wirbelzentrum auch gerade einmal um seine eigene Achse). Winkelgeschwindigkeit und Rotation sind in jedem Raumpunkt konstant. Da der Starrkörperwirbel keine Scherung

aufweist, ist er nicht dissipativ. Die Zirkulation ist in jedem Raumpunkt konstant. Jeder rotierende Festkörper stellt einen Starrkörperwirbel dar.

Der *Potentialwirbel* besitzt eine hyperbolische Geschwindigkeitsverteilung. Es gibt zwei Strömungsklassen, bei denen ein derartiges Geschwindigkeitsprofil zu finden ist. Es findet sich zum einen in der Potentialströmung der Umgebung eines Wirbelfadens mit der Zirkulation  $\Gamma_0$ . Die gesamte Zirkulation ist auf das Wirbelzentrum konzentriert und stellt damit eine Singularität dar. Potentialströmungen sind nur möglich, wenn ausschließlich konservative Kräfte wirken, wie dies bei idealen (wirbelfrei und reibungsfreien) Fluiden der Fall ist. Potentialwirbel erfüllen die Laplace-Gleichung. Das Strömungsfeld von sich überlagernden Potentialwirbeln kann daher durch Superposition berechnet werden. Zum anderen entspricht das Geschwindigkeitsfeld eines realen (reibungsbefaheten) Fluides zwischen zwei konzentrisch rotierenden Zylindern unter gewissen Bedingungen demjenigen einer Potentialströmung. Die Winkelgeschwindigkeiten von innerem und äußeren Zylinder müssen dabei in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, damit die Strömung im Spalt rotationsfrei ist. Der Potentialwirbel ist in diesem Fall zwar drehungsfrei, besitzt aber auf Grund der auftretenden Scherung eine von Null verschiedene Dissipation (SPURK [S37]). Ein isolierter Potentialwirbel in einem viskosen Medium kann somit ohne Energiezufuhr nicht aufrecht erhalten werden. Wird der Wirbel sich selbst überlassen, so verlangsamt sich die Drehbewegung mit zunehmender Zeit.

Der sogenannte *Hamel-Lamb-Oseen-Wirbel* beschreibt diese zeitliche Entwicklung (SCHLICHTING [S4]). Mit zunehmender Zeit ergibt sich ein rankinewirbelförmiges Profil, welches sich radial ausbreitet und dabei abflacht (s. Abb. 2.1-4). Die Strömung ist dann allerdings nicht mehr rotationsfrei. Dieses Verhalten entspricht qualitativ dem Verhalten von realen ebenen laminaren Wirbeln.

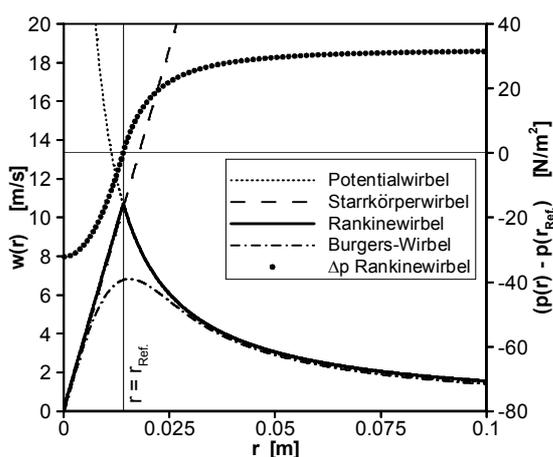


Abb. 2.1-3: Verlauf von Umfangsgeschwindigkeit und Druck bei verschiedenen Wirbeltypen

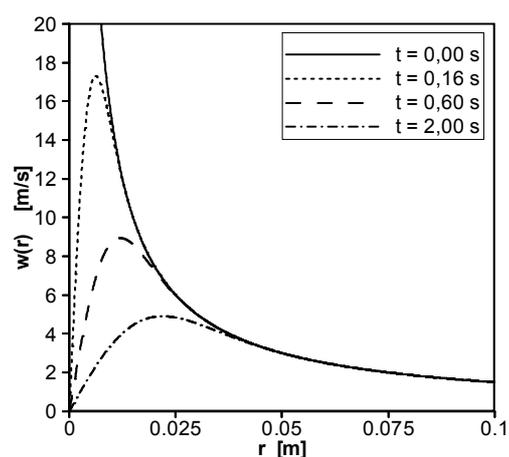


Abb. 2.1-4: Zeitlicher Verlauf der Umfangsgeschwindigkeit beim Hamel-Lamb-Oseen Wirbel

Näherungsweise können oft auch reibungsbehaftete Drehströmungen als Potentialwirbel betrachtet werden. Dies gilt um so mehr, je weiter der Abstand vom Zentrum der

Gesamtbewegung ist. Mit abnehmendem Radius werden im Potentialwirbel die Größen Druck und Umfangsgeschwindigkeit bei Annäherung an das Wirbelzentrum singular. Um den theoretisch nicht verwirklichbaren negativen Druck und damit auch die unendliche Drehgeschwindigkeit bei Annäherung an die Symmetrieachse zu “vermeiden” sind bei den in der Natur vorkommenden zähen Strömungsmedien zwei Erscheinungen zu beobachten. Zum einen kann sich in Achsnähe ein Starrkörperwirbel ausbilden. Der so entstandene zusammengesetzte Wirbel wird als *Rankinewirbel* bezeichnet. Er besteht bis zu einem Radius  $r_{Ref}$  aus einem Starrkörperwirbel und geht dort unstetig in einen Potentialwirbel über (s. Abb. 2.1.3). Viele in Natur und Technik auftretenden Wirbelformen können mit dem Wirbeltyp des Rankinewirbels angenähert werden (ZIEREP [S18]). Zum anderen kann sich ein Hohlwirbel ausbilden.

Der *Burgerswirbel* ist im Gegensatz zu den bereits vorgestellten Wirbeltypen dreidimensional und stellt eine weitere exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen dar (BURGERS [S35]). Im Umfangsgeschwindigkeitsprofil findet der Übergang zwischen den asymptotischen Lösungen für  $r \rightarrow 0$  (Starrkörperwirbel) und  $r \rightarrow \infty$  (Potentialwirbel) stetig statt.

Eine weitere typische Eigenschaft ebener stationärer Wirbel lässt sich aus der zweiten Navier-Stokes-Gleichung ableiten:

$$\frac{w^2}{r} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} . \quad (2.1-46)$$

Der durchweg positive Druckgradient zeigt, dass mit Annäherung an die Rotationsachse unabhängig vom radialen Profil der Umfangsgeschwindigkeitsprofil ein zunehmender Unterdruck gegenüber der ruhenden Umgebung auftritt. In Abb. 2.1-4 ist exemplarisch der Verlauf des statischen Druckes in einem Rankinewirbel gezeigt. Die räumliche Position des Druckminimums wurde in der vorliegenden Arbeit verwendet, um die Lage des Wirbelzentrums zu definieren.

### 2.1.6.2 Physikalische und kinematische Größen

Bei der Charakterisierung von Wirbelstrukturen und der Diskussion der Rechenergebnisse werden verschiedene physikalische und kinematischen Größen und Bezeichnungen verwendet, die an dieser Stelle eingeführt werden. Da in der vorliegenden Arbeit nur rotationssymmetrische Strömungen untersucht werden, wird die Beschreibung der jeweiligen Größen in einem Zylinderkoordinatensystem mit den Koordinaten  $x$ ,  $r$ ,  $\varphi$  angegeben. Weiterhin ist die Voraussetzung konstanter Dichte impliziert. Für die in dieser Arbeit untersuchten axialsymmetrischen Strömungen gilt  $\partial/\partial\varphi = 0$ . Da alle berechneten Strömungen zusätzlich drallfrei waren, entfallen eigentlich alle Terme, in denen die Umfangsgeschwindigkeit  $w$  auftaucht. Dennoch wurde diese Geschwindigkeitskomponente der Vollständigkeit halber berücksichtigt.

#### Der örtliche kinematische Zustand eines Strömungskontinuums

Bei der Bewegung eines Fluidelementes kann dies im Strömungsfeld sowohl seine

räumliche Lage als auch seine Form verändern. Die allgemeine Bewegung entsteht durch Superposition von Translation, Deformation, Rotation und Dilatation (Volumenänderung). Die Bewegung eines Fluidelementes bzw. seine räumliche Lage wird durch die Translation (Verschiebung) und die Rotation (Drehung) bestimmt. Die Verformung wird durch die bei der Bewegung auftretenden Änderungen der ursprünglichen Längen und Winkel des Elementes beschrieben. Will man die Drehung und Verformung bestimmen, so kommt es nur auf die zu einem gegebenen Zeitpunkt vorhandene relative Bewegung zwischen zwei benachbarten Punkten A und B an. Der momentane örtliche Bewegungszustand in der infinitesimalen Umgebung B eines fixen Strömungsfeldpunktes A, der durch den Ortsvektor  $\vec{x}_A$  gekennzeichnet ist, lässt sich wie folgt formulieren (LEUCKEL [S2]):

$$\vec{u}_{i,B} = \vec{u}_{i,A} + G_{ij,A} \cdot \Delta \vec{x}_{A,B} = \vec{u}_{i,A} + (D_{ij,A} + \omega_{ij,A}) \cdot \Delta \vec{x}_{A,B} \quad (2.1-47)$$

Der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u}_{i,A}$  ist der Vektor der allen Materieteilchen dieses Fluidelementes gemeinsamen Translationsgeschwindigkeit. Der im allgemeinen Fall nicht symmetrische Tensor  $G_{ij}$  beschreibt den momentanen Relativbewegungszustand des den Punkt A infinitesimal umgebenden Fluidelementes.  $\Delta \vec{x}_{A,B}$  ist der Vektor der Ortsdifferenz zwischen den Punkten A und B. Der Tensor der räumlichen Geschwindigkeitsänderung  $G_{ij}$  lässt sich in die zwei Teiltensoren Deformationstensor  $D_{ij}$  und Rotationstensor  $\omega_{ij}$  zerlegen. Bei  $D_{ij} = D_{ji}$  handelt es sich um einen symmetrischen und bei  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  um einen schiefsymmetrischen (alternierenden) Tensor zweiter Stufe (TRUCKENBRODT [S6]).

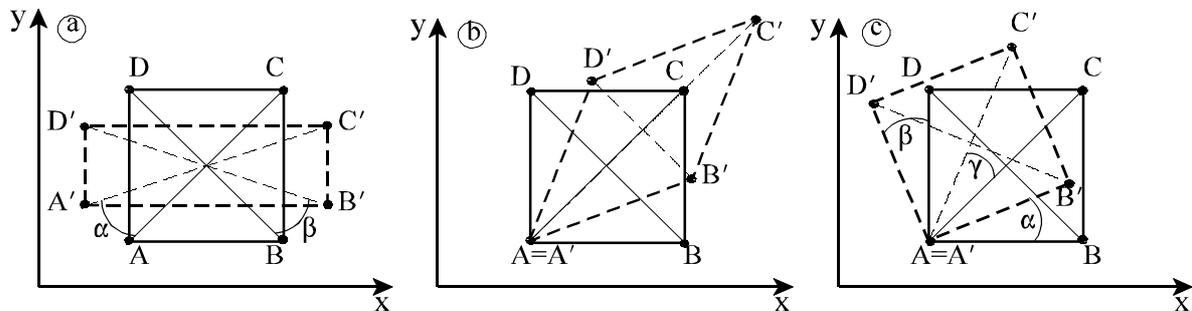


Abb. 2.1-5: Deformation (a, b) und Rotation (c) eines Fluidelementes (nach SIGLOCH [S36])

In Abb. 2.1-5 sind die Einflüsse Deformation und Rotation auf ein Fluidelement schematisch dargestellt. Ein Fluidelement ABCD erfährt eine reine Verformung ohne Volumenänderung und nimmt dabei die Form A'B'C'D' nach Teilbild a oder b oder eine Kombination aus beiden an. Als Kennzeichen der reinen Deformation ergibt sich, dass die Gesamtdrehung der Diagonalen gleich null bleibt, d. h. die Drehung jeder einzelnen Diagonalen ist null ( $\alpha = \beta = 0$ ) oder entgegengesetzt und gleich groß ( $\alpha = -\beta$ ). Teilbild c zeigt eine Drehbewegung des Fluidelementes. Dabei bleiben die Schnittwinkel der Diagonalen unverändert. Es gilt dann:  $\gamma = \alpha = \beta \rightarrow \gamma = 1/2 \cdot (\alpha + \beta)$  (SIGLOCH [S36]).

**Deformationstensor  $D_{ij}$**

Der Deformationszustand (Verformungs- oder Verzerrungszustand) setzt sich aus den Anteilen Dehnung (Volumendilatation, Längenänderung) und Scherung (Schiebung, Winkeldeformation) zusammen. Diese beiden Grundtypen der Verformung lassen sich linear überlagern und können daher getrennt voneinander behandelt werden. Der Deformationszustand wird durch den Deformationstensor (Deformationsgeschwindigkeitstensor)  $D_{ij}$  beschrieben. Dieser ist ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe dessen Elemente sich aus dem Gradienten des Vektorfeldes der Geschwindigkeit  $div \vec{u}$  gewinnen lassen. Es handelt sich dabei um den symmetrischen Anteil des Tensors der Geschwindigkeitsänderung  $G_{ij}$ . Der Deformationszustand wird durch die sechs Deformationskomponenten (Verzerrungskomponenten) gebildet. Diese haben die Einheit [1/s]. Dabei repräsentieren die Glieder der Hauptdiagonalen  $i=j$  die Dehnung (bzw. die Dehngeschwindigkeiten  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ) und die übrigen Glieder  $i \neq j$  die Scherung (bzw. die Schergeschwindigkeiten  $\dot{\gamma}_{ij}$ ) (TRUCKENBRODT [S6]).

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\gamma}_{xr} & \dot{\gamma}_{x\varphi} \\ \dot{\gamma}_{rx} & 2 \cdot \dot{\epsilon}_{rr} & \dot{\gamma}_{r\varphi} \\ \dot{\gamma}_{\varphi x} & \dot{\gamma}_{\varphi r} & 2 \cdot \dot{\epsilon}_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} & \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 2 \cdot \frac{\partial v}{\partial r} & \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) & 2 \cdot \frac{v}{r} \end{pmatrix} \quad (2.1-48)$$

### Spannungstensor $T_{ij}$

Translation und Rotation eines Fluidelementes, das sich wie ein starrer Körper durch ein Strömungsfeld bewegt, können nicht Ursache für irgendwelche an den Oberflächen des Elementes zusätzlich zum Druck hervorgerufene Spannungen sein. Zusätzliche Spannungen können also nur durch die Deformation des Elementes entstehen. Ausgehend vom Newton'schen Reibungsansatz wird angenommen, dass die Spannungen proportional den im Deformationstensor vorkommenden Geschwindigkeitsänderungen nach den Raumkoordinaten sind. Diese Vorgehensweise trifft für normalviskose (Newton'sche Fluide) zu. Für dichtebeständige Fluide ( $\rho = \text{const.}$ ) ergibt sich damit der Spannungstensor durch Multiplikation des Deformationstensors mit der dynamischen Viskosität. Der Faktor 2 wurde aus Gründen der Zweckmäßigkeit eingeführt (TRUCKENBRODT [S6]).

$$T_{ij} = 2 \cdot \mu \cdot D_{ij} \quad (2.1-49)$$

### Rotationstensor $\omega_{ij}$

Der Rotationszustand, auch Drehung oder im Englischen Vorticity genannt, lässt sich als

Dreh- oder Wirbelvektor aus der Rotation des Vektorfeldes der Geschwindigkeit  $\vec{\omega} = 1/2 \cdot \text{rot } \vec{u}$  oder als Rotationssensor  $\omega_{ij}$  darstellen.

$$\omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_{xr} & \dot{\omega}_{x\varphi} \\ \dot{\omega}_{rx} & 0 & -\dot{\omega}_{r\varphi} \\ -\dot{\omega}_{\varphi x} & \dot{\omega}_{\varphi r} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1-50)$$

Es handelt sich hierbei um den schiefssymmetrischen Anteil des Tensors der Geschwindigkeitsänderung  $G_{ij}$ . Der Rotationstensor (Rotationsgeschwindigkeitstensor)  $\omega_{ij}$  beschreibt die mittlere Drehung eines Fluidelementes. Benachbarte Fluidelemente unterscheiden sich in den Geschwindigkeitskomponenten gewöhnlich nur um infinitesimale Beträge. Die drei Komponenten der Rotationstensors werden auch Rotationsgeschwindigkeiten genannt und stellen die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Drehachsen dar. Das infinitesimale Fluidelement wird hierbei als quasistarrer Körper betrachtet (TRUCKENBRODT [S6]).

### Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\Omega}$

Obwohl sich die Geschwindigkeitskomponenten benachbarter Flüssigkeitsteilchen gewöhnlich nur um infinitesimale Beträge unterscheiden, kann ihre Verbindungslinie - bezogen auf ein raumfestes Koordinatensystem - jedoch durchaus eine endliche Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\Omega}$  (auch Dreh- oder Wirbelvektor genannt) aufweisen. Die mittlere Rotation des Vektorfeldes der Geschwindigkeit ergibt das Vektorfeld der Winkelgeschwindigkeit. Die Richtung des Vektors  $\vec{\Omega}$  ist dabei die der momentanen Drehachse. Der Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit - gebildet für alle Radien einer kugelförmigen Umgebung - ist gerade gleich einem Drittel der Rotation

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{3} \cdot \text{rot } \vec{u} \quad . \quad (2.1-51)$$

In zwei-oder eindimensionaler Strömung, z. B.  $w = \text{const.}$  und  $\partial/\partial\varphi = 0$ , ergibt sich für den Mittelwert der Winkelgeschwindigkeit in einer kreisförmigen Umgebung der Wert

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot } \vec{u} = \frac{\omega_{xr}}{2} \quad . \quad (2.1-52)$$

Der jeweilige Vorfaktor 1/3 oder 1/2 stellt sozusagen das arithmetische Mittel dar und

repräsentiert die Invarianz gegenüber der Wahl des Koordinatensystems. Für einen starren Körper in beliebiger Drehung hat die Winkelgeschwindigkeit seiner momentanen Drehung im Raum für alle Punkte des Körpers den gleichen Vektor  $\vec{\Omega}$  (PRANDTL [S3]).

### Zirkulation $\Gamma$

Der Betrag des Linienintegrals des Vektorfeldes der Geschwindigkeit für eine geschlossene Linie C ist die Zirkulation:

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} \quad [m^2/s] \quad (2.1-53)$$

Nach dem Satz von Stokes gilt für einen Vektor  $\vec{u}$ , dass sein Linienintegral über die geschlossene Kurve C gleich dem Flächenintegral von  $\text{rot } \vec{u}$  über eine von C umrandete Fläche F ist (GERTHSEN [So1]).

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_F \int \text{rot } \vec{u} \, dF \quad (2.1-54)$$

Die Zirkulation  $\Gamma$  ist wie die Rotation  $\vec{\omega}$  oder die Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\Omega}$  eine rein kinematische Größe. Ihre Definition ist somit sowohl auf reibungsfreie als auch auf reibungsbehaftete Strömungen dichtebeständiger und dichteveränderlicher Fluide anwendbar. Die Zirkulation ist ein Maß für die Wirbelstärke des umschlungenen Gebietes. Für einen Festkörperwirbel lässt sich zeigen, dass die Zirkulation eines umschlungenen Gebietes mit der Fläche F gerade das Zweifache der Winkelgeschwindigkeit (bzw. das Einfache der Rotation) multipliziert mit der Fläche ist (BETZ [S8]):

$$\Gamma = F \cdot 2 \cdot \Omega = F \cdot \omega \quad (2.1-55)$$

Man kann nun die umschlungene Fläche beliebig klein machen und schließlich zu einem Flächenelement  $dF$  übergehen. Immer wird das Verhältnis

$$\frac{\Gamma}{F} = \frac{d\Gamma}{dF} = 2 \cdot \Omega = \omega \quad (2.1-56)$$

das Zweifache der Winkelgeschwindigkeit, bzw. die Rotation des umschlungenen Gebietes darstellen. Wird innerhalb eines umschlungenen Gebietes eine Zirkulation festgestellt, so besagt dies, dass sich innerhalb dieses Gebietes Fluidelemente befinden, welche eine Drehung ausführen. Die Zirkulation um ein endliches Gebiet ist die Summe der Zirkulationen der umschlungenen Teilgebiete. Die Verteilung der Fluidelemente sowie ihre Winkelgeschwindigkeit sind dabei noch unbestimmt. Ist die Zirkulation  $\Gamma < 0$  ist das Gebiet als linksdrehend, für  $\Gamma > 0$  als rechtsdrehend definiert.

Nach dem Satz von Thomson bleibt in einer reibungslosen homogenen Flüssigkeit die Zirkulation längs einer geschlossenen Linie konstant. Daraus folgt, dass aus einer

Bewegung aus der Ruhe heraus (Zirkulation gleich null) die Zirkulation für jede geschlossene Linie gleich null ist und auch gleich null bleibt. Ein Geschwindigkeitsfeld hat ein Potential  $\phi$  wenn gilt:

$$\vec{u} = \text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi, \quad (2.1-57)$$

d. h. das Vektorfeld der Geschwindigkeit lässt sich aus dem Gradienten des Skalarfeldes des Potentials berechnen. Jede aus der Ruhe heraus entstandene Bewegung einer homogenen reibungslosen Flüssigkeit besitzt ein Potential, ist also eine Potentialströmung und somit drehungsfrei. Diese Bedingung wird wegen  $\text{rot}(\text{grad } \phi) = \mathbf{0}$  von selbst erfüllt (TRUCKENBRODT [S7]).

Die Ermittlung der Gesamtzirkulation eines einzelnen Ringwirbels (z. B. eines Anfahrwirbels) kann auf verschiedene Arten erfolgen.

### **Auswertung des Ringintegrals**

Bewegt sich ein einzelner Ringwirbel in einer ruhenden Umgebung, so kann dessen Zirkulation durch Integration der Axialgeschwindigkeit längs der Translationsachse (die Radialgeschwindigkeit ist dort gleich null) ermittelt werden. Zur Schließung des Linienintegrals liefern die zwei Integrationswege senkrecht zur Translationsachse (jeweils in weiter Entfernung und damit in ruhender Umgebung stromauf und stromab des Wirbels) und der Integrationsweg radial im Unendlichen (dort ruht die Umgebung ebenfalls) keinen Beitrag. Im Experiment kann die Zirkulation unter der Voraussetzung, dass sich der Ringwirbel mit einer konstanten Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  bewegt, somit auch über eine zeitabhängige Messung der Axialgeschwindigkeit an einer ortsfesten Position auf der Translationsachse erfolgen (DIDDEN [We3]).

$$\Gamma = \oint_C \vec{u} \cdot d\vec{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, r=0) dx = U_T \cdot \int_0^{+\infty} u(t, r=0) dt \quad (2.1-58)$$

### **Auswertung des Flächenintegrals**

Die Zirkulation eines Strömungsgebietes kann durch Integration der Rotation über dessen Fläche berechnet werden (s. o.).

$$\Gamma = \int_F \int \text{rot } \vec{u} dF \quad (2.1-59)$$

### **Bilanzierung der ins Kontrollvolumen eingebrachten Zirkulation**

Wurde der zu untersuchende Ringwirbel durch einen Anfahrvorgang an einer Düsenmündung erzeugt, so lässt sich dessen Zirkulation durch eine Aufsummierung der durch den Mündungsquerschnitt in das Strömungsfeld eingebrachten Zirkulation  $\Gamma_M$  bestimmen. Voraussetzung ist allerdings, dass sich die gesamte Zirkulation im Wirbel

“ansammelt”, also in diesen integriert wird. Die zeitliche Änderung der durch eine rotationssymmetrische Düse mit dem Mündungsquerschnitt hindurchtretende Zirkulation ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_M}{dt} &= \int_0^{D_M/2} \omega_{\theta r}(r,t) \cdot u(r,t) \, dr \\ &= \int_0^{D_M/2} \left( \frac{\partial v(r,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right) \cdot u(r,t) \, dr . \end{aligned} \quad (2.1-60)$$

Dieses Integral lässt sich unter der Annahme, dass sich am Mündungsquerschnitt eine Grenzschicht mit einer zeitlich konstanten und gegenüber  $D_M$  kleinen Dicke  $\delta$  ausbildet und die Geschwindigkeit  $u_M$  außerhalb dieser Grenzschicht konstant ist, analytisch lösen (DIDDEN [We2]). Als Ergebnis ergibt sich, dass sich die austretende Zirkulation durch zeitliche Integration der Mündungsgeschwindigkeit bestimmen lässt:

$$\Gamma_M = \int_0^T u_M^2(t) \, dt . \quad (2.1-61)$$

### 2.1.6.3 Strom-, Streichlinien, Teilchenbahnen

Bei der Betrachtung von experimentell sichtbar gemachten oder der Darstellung numerisch berechneter Wirbelströmungen stellt sich die Frage, wie die jeweiligen Bilddaten zu bewerten sind. In diesem Zusammenhang spielen die Begriffe Stromlinien, Streichlinien und Teilchenbahnen eine besondere Rolle. Die folgenden Ausführungen sind in enger Anlehnung an LUGT [S1] formuliert.

#### **Stromlinien und Stromfunktion**

Zeichnet man die Geschwindigkeitsvektoren einzelner Teilchen einer ebenen Strömung als Pfeile, so erhält man das “Richtungsfeld” der Strömung. Die Linien tangential zu diesen Pfeilen heißen Stromlinien. Stromlinien zeigen den Augenblickszustand einer Strömung an, denn sie bestimmen für einen bestimmten Zeitpunkt die Bewegungsrichtung der Fluidelemente.

Die Kontinuitätsgleichung für ein quellenfreies Strömungsfeld kann durch Einführen einer vektoriellen Stromfunktion  $\Psi$  (vektorielles Geschwindigkeitspotential) erfüllt werden. Die Stromfunktion lässt sich im zweidimensionalen rotationssymmetrischen inkompressiblen Fall über folgende Integration ermitteln:

$$\Psi(x,r) = 2\pi \int_0^R \bar{u}(x,r) \cdot r \, dr - 2\pi r \int_0^L \bar{v}(x,r) \, dx . \quad (2.1-62)$$

R bezeichnet dabei den maximalen Radius des Strömungsgebietes und L die maximale

axiale Erstreckung. Dabei ist es zweckmäßig, zunächst entlang der x-Achse für  $r = 0$  zu integrieren, was zu einem Wegfall des rechten Integrals führt, da die Radialgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse null beträgt. Bei zweidimensionalen Strömungen sind die Stromlinien durch jeweils konstante Werte der Stromfunktion ( $\psi = \text{const.}$ ) definiert. Der zwischen zwei in der x,r-Ebene liegenden Stromlinien a und b hindurchtretende Volumenstrom kann aus den konstanten Werten der Stromfunktion auf diesen Stromlinien ( $\psi_a$  und  $\psi_b$ ) berechnet werden:

$$\dot{V} = \psi_b - \psi_a \quad . \quad (2.1-63)$$

In bestimmten Fällen ist es möglich, durch eine Verlagerung des Beobachtungsstandortes bzw. durch eine geschickte Wahl des Bezugssystems aus einer zeitabhängigen Strömung eine zeitunabhängige zu machen. Wird z. B. ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig durch ein Fluid bewegt, so ändern sich die Stromlinien für einen feststehenden Beobachter (ruhendes Bezugssystem) mit der Zeit. Bewegt sich jedoch der Beobachter mit dem Körper mit (mitgeführtes Bezugssystem), so erhält man eine zeitunabhängige Strömung. Stromlinien und Teilchenbahnen sind daher nicht invariant beim Wechsel des Bezugssystems. Geschlossene Stromlinien weisen deshalb nicht zwingend auf das Vorhandensein eines Wirbels hin. Andererseits ist ein Wirbel nicht immer durch geschlossene Stromlinien gekennzeichnet.

### Teilchenbahnen

Die Bahn eines Teilchens oder Fluidelementes erhält man, wenn man dessen Position über einen bestimmten Zeitabschnitt verfolgt. Ändert sich das Geschwindigkeitsfeld mit der Zeit, so erhält man Teilchenbahnen, die natürlich mit momentanen Stromlinien nicht mehr übereinstimmen können. Teilchenbahnen sind wie Stromlinien im Allgemeinen nicht invariant beim Wechsel des Bezugssystems. Man kann aber versuchen, ein Bezugssystem zu finden, in dem geschlossene oder spiralförmige Teilchenbahnen auftreten. Diese Bahnen weisen auf das Vorhandensein eines Wirbels hin.

### Streichlinien

Sich in einem Fluid befindliche Wirbel sind nur sichtbar, wenn die Strömung durch die Zugabe von Teilchen (z. B. Tinte, Rauch, Wolken) visualisiert wird. Beobachtet man Wirbel im Experiment oder in der Natur, so sieht man im allgemeinen weder Stromlinien noch Teilchenbahnen. Stromlinien können nicht ohne weiteres sichtbar gemacht werden. So gibt eine Kurzzeitfotographie von Teilchenbahnen nur annähernd die Stromlinien wieder. Der Weg einzelner Teilchen zu verfolgen ist gerade bei komplizierten Strömungen meist nicht möglich. Wird über eine gewisse Zeit Farbe an ein und derselben Stelle einer Strömung injiziert, so bildet sich ein Farbstreifen, eine Streichlinie. Streichlinien sind daher gewöhnlich das einzige Erkennungszeichen für das Vorhandensein eines Wirbels. Fotografien von Streichlinien oder Streichflächen geben allerdings keine Auskunft über den Ursprung oder die zeitliche Entwicklung von Strömungen. Dieser Schluss gelingt nur, wenn eine Serie von Fotografien zu verschiedenen Zeitpunkten vorliegt. Das momentane Aussehen einer Streichlinie

repräsentiert somit das Endergebnis der zeitlichen Entwicklung bis zum betrachteten Zeitpunkt. Die Streichlinien von rotierenden Flüssigkeiten sind im Allgemeinen spiralförmig, in Sonderfällen kreisförmig.

*Nur bei zeitunabhängigen (stationären) Strömungen fallen Teilchenbahnen, Stromlinien und Streichlinien zusammen (LUGT [S1]).*

#### 2.1.6.4 Ringwirbel und deren Lebenslauf

Ringwirbel sind Wirbelströmungen mit einer in sich geschlossenen, im Allgemeinen kreisförmigen Rotationsachse. Sie können als freie oder gebundene Wirbel auftreten. Bei gebundenen Wirbeln, die z. B. bei der Umströmung einer Kugel auftreten, wird die zur Aufrechterhaltung der Wirbelströmung benötigte Energie von der Außenströmung geliefert. Bei freien Ringwirbeln führt der Wirbel selbst Energie mit und tauscht diese während seiner Lebensdauer mit der Umgebung aus. Freie Ringwirbel entstehen dadurch, dass sich eine axialsymmetrische, z. B. zylindrische Scherschicht, aufrollt. Scherschichten dieser Art treten z. B. beim Ausstoß einer bestimmten Fluidmenge aus einer Düse in ruhendes Umgebungsmedium hinein auf (s. auch Abb. 1.1-4 und Abb. 4.1-2). Abb. 2.1-6 zeigt in idealisierter Form das Stromlinienbild eines ausgebildeten Ringwirbels mit dem Durchmesser  $D_w$  in einem wirbelfesten Koordinatensystem (DIDDEN [We2], LIESS [We6]). Die besondere Form der Rotationsachse ermöglicht es dem Ringwirbel, sich selbst eine Translationsgeschwindigkeit zu induzieren, so dass er sich entlang seiner Symmetrieachse (= Translationsachse) fortbewegt. Im wirbelfesten Koordinatensystem beträgt die Geschwindigkeit im Unendlichen  $U_T$  (Parallelströmung). Das Fluid innerhalb der sphäroid-förmigen Grenzstromfläche  $\Psi = 0$  bewegt sich auf geschlossenen Stromlinien und wird mit dem Ringwirbel mitbewegt. Der Wirbelkern, bzw. die Wirbelseele ist ein dünner Ring, dessen Durchmesser  $s$  in etwa  $0,04 \cdot D_w$  beträgt und der sich dadurch auszeichnet, dass in diesem Bereich nahezu kein Austausch mit dem umgebenden Fluid stattfindet (LIESS [We6]).

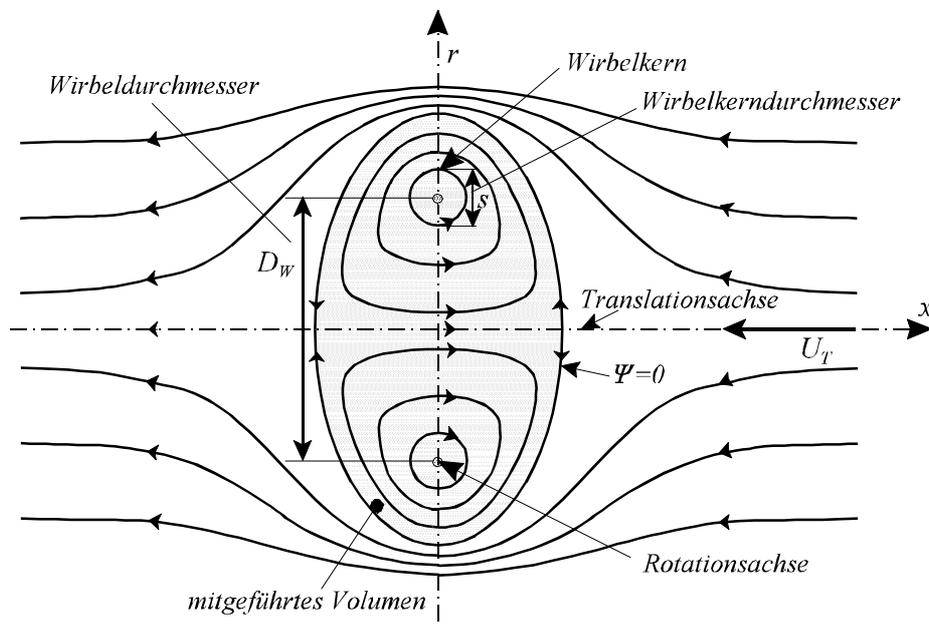


Abb. 2.1-6: Schematische Darstellung des Stromlinienbildes eines ausgebildeten laminaren Ringwirbels im wirbelfesten Koordinatensystem (nach DIDDEN [We2])

Im Lebenslauf von freien Ringwirbeln lassen sich folgende Stadien unterscheiden (LIESS [We6]):

1. Wirbelbildung
2. Ablösung von der Mündung
3. Laminare (ausgebildetes) Stadium
4. Welliges Stadium
5. Umschlag in den turbulenten Zustand
6. Turbulentes Stadium
7. Zerfallsstadium

In den Kapiteln 2.1.7 und 2.1.8 werden einige Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten von sich in den Stadien 1-3 bzw. 6 befindlichen Ringwirbeln vorgestellt. Die Umbildung eines laminaren Ringwirbels in den turbulenten Zustand (Stadien 4 und 5) zeichnet sich durch überaus komplexe Phänomene aus, bei denen sich dreidimensionale Strukturen ausbilden (SCHNEIDER [We9], [We12]). Diese Phasen sind für die Zielsetzung dieser Arbeit nicht relevant und werden deshalb nicht berücksichtigt.

## 2.1.7 Freie laminare Ringwirbel

### 2.1.7.1 Selbstähnlichkeit der Aufrollung freier Scherschichten

Die Motivation der Untersuchung der Einrollung von Wirbelschichten stammt aus der Tragflügeltheorie. Hinter dem Flügel bildet sich eine Wirbelfläche, die sich am Rand einrollt (s. Abb. 2.1-7 a/b). Die Einrollung hat zunächst Folgen für den Auftrieb. So ist der induzierte Widerstand eines Flügels bei gegebenem Auftrieb dann minimal, wenn die Wirbelfläche eben bleibt, sich also nicht einrollt KADEN [Wa6]. Des Weiteren beeinflusst die aufgewickelte Scherschicht die Strömungsbedingungen hinter dem Flügel, z. B. das Höhenleitwerk. Bei der Betrachtung der Bildung dieser Wirbelstrukturen schloss KADEN [Wa6] unter der Voraussetzung eines unendlich breiten Tragflügels, dass der zeitliche Verlauf des Bildungsvorganges eine „stetige ähnliche Vergrößerung einer bestimmten Strömungsfigur“ sei. Dass der Bildungsvorgang eines ebenen Wirbels ein selbstähnlicher Vorgang ist, wurde zuvor bereits von PRANDTL [Wa1] am Beispiel einer Kantenumströmung postuliert (s. Abb. 2.1-7 c). Von ihm ist der Fall, dass die sich aufrollende Spirale eine logarithmische Form hat, behandelt worden. Durch das Fehlen einer festen Vergleichslänge, ändern sich Form und Belegungsdichte der Unstetigkeitsfläche selbstähnlich. PRANDTL spricht daher in seinem Artikel die Vermutung aus, dass die aufgerollte Wirbelfläche im Inneren von der Art einer Spirale  $R = \text{konst.}/\varphi^m$  sei ( $R$  und  $\varphi$  bedeuten Polarkoordinaten vom Mittelpunkt der Spirale aus gerechnet,  $m$  ist eine Zahl). Folglich müssen die funktionalen Abhängigkeiten der zugrundeliegenden Ähnlichkeitsgesetze die Form von Potenzgesetzen haben .

### 2.1.7.2 Ähnlichkeitsgesetze für die Bildung von Wirbelstrukturen

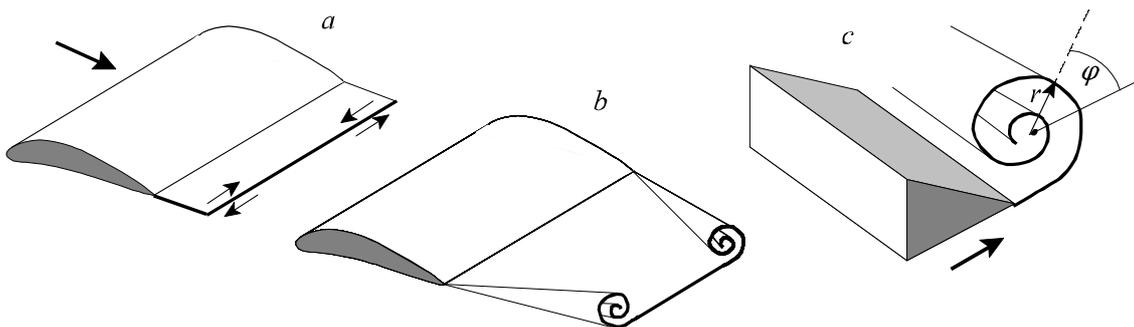


Abb. 2.1-7: Sich selbst aufrollende Unstetigkeitsfläche hinter einem Tragflügel (KADEN [Wa6])

KADEN [Wa6] berechnet analytisch den Aufrollvorgang des Randes der Unstetigkeitsfläche hinter einem Tragflügel. Ausgangspunkt ist die Strömung um eine ebene einseitige Unstetigkeitsfläche. Die Strömung um diese Fläche lässt sich über die Methode der konformen Abbildung aus der Parallelströmung längs einer ebenen Wand erhalten. Als Ergebnis ergibt sich, dass in ähnlich zum Nullpunkt gelegenen Punkten

( $\varphi = \text{konst}$ ) die Geschwindigkeiten mit  $1/\sqrt{r}$  abnehmen und ihre Richtungen konstant sind, d. h. die Ähnlichkeitsbeziehung ist im ganzen Raum erfüllt. Nach KADEN denkt man sich nun aus dieser Anfangsströmung zwei ähnliche Gebiete abgetrennt, von denen das eine  $n$ -mal größere Abmessungen besitzt als das andere und betrachtet in jedem die eintretenden Veränderungen. Da in ähnlich gelegenen Punkten auch alle Anfangsgeschwindigkeiten proportional sind, so ist auch jede eintretende gegenseitige Verschiebung der Punkte in beiden Gebieten einander ähnlich; es entstehen also in beiden Gebieten genau ähnliche Formänderungen der Stromlinien. Nur dauert der entsprechende Vorgang in dem großen Gebiet länger als in dem kleinen, da einerseits die Geschwindigkeiten  $1/\sqrt{n}$  mal kleiner und andererseits die zurückgelegten Wege  $n$  mal größer sind als in dem kleineren Gebiet. Die Zeit, die erforderlich ist, um in dem großen Gebiet eine ähnliche Formänderung zu erreichen wie im kleinen ist daher  $n \cdot \sqrt{n} = n^{3/2}$  mal länger. Als Resultat ergibt sich, dass ein Strömungsbild, welches zur Zeit  $t$  vom Beginn der Bewegung an gerechnet auftritt, zur Zeit  $n^{3/2} \cdot t$  in  $n$ -fach vergrößertem Maßstabe wieder vorhanden ist. Die Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  verhalten sich zu den Maßstäben  $r_1$  und  $r_2$  der ähnlichen Strömungsbilder wie:

$$\frac{t_2}{t_1} = n^{3/2} = \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^{3/2} \quad \text{oder} \quad \frac{r_2}{r_1} = \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^{2/3} \quad (2.1-64)$$

ANTON [Wa7] berechnet mit analytischen Methoden die Ausbildung und das Anwachsen eines Wirbels an der Kante einer senkrecht angeströmten Platte. Für das Verhalten des Wirbelkernes, also des inneren Teiles der Spirale verweist er auf die Lösung von KADEN, da die Gesetzmäßigkeiten die gleichen seien. Im weiteren werden Lösungen für die Außenwindung der Spirale sowie für die endlich breite Platte hergeleitet. WEDEMEYER [Wa8] berechnet wie Anton die Ausbildung eines symmetrischen Paares von Wirbelflächen an den Kanten einer senkrecht angeströmten Platte. Als Ausgangspunkt hierzu dient die von Anton durchgeführte, hier aber nochmal auf andere Weise wiederholte Berechnung der Wirbelfläche an der Kante einer einseitig unendlich breiten Platte. Das verwendete Verfahren liefert dabei eine höhere Genauigkeit.

SAFFMANN [Wa4] untersucht ebenfalls mit analytischen Methoden die Instabilitätsphase von Wirbelringen. Er fasst zunächst die von ANTON, WEDEMEYER, KADEN, u. a. gefundenen Ähnlichkeitsgesetze zusammen. Die folgende Darstellung der Ähnlichkeitsgesetze lehnt sich eng an die Darstellung von SAFFMANN an. In dimensionsloser Form lauten die Ähnlichkeitsgesetze:

$$\begin{aligned} X^* &\sim (t^*)^{2/3}, & Y^* &\sim (t^*)^{2/3}, & D_s^* &\sim (t^*)^{2/3} \\ \Gamma^*(s) &\sim (s^*)^{1/2}, & \Gamma^* &\sim (t^*)^{1/3} \end{aligned} \quad (2.1-65)$$

$X^*$  ist der axiale Abstand des Wirbelzentrums von der Düsenkante,  $Y^*$  ist der radiale Abstand.  $\Gamma^*$  ist die gesamte, im Wirbel enthaltene Zirkulation,  $\Gamma^*(s)$  ist die in einem kreisförmigen Bereich mit dem Radius  $s$  um das Wirbelzentrum herum konzentrierte Zirkulation,  $D_s$  ist der Durchmesser der inneren Wirbelspirale. Die normierten Größen

sind mit den charakteristischen Größen  $U_0$  (Auslassgeschwindigkeit) und  $H_0$  (charakteristische Geometrielänge) entdimensioniert:

$$X^* = \frac{X}{H_0}, \quad Y^* = \frac{Y}{H_0}, \quad \Gamma^* = \Gamma \cdot U_0 \cdot H_0, \quad t^* = t \cdot \frac{U_0}{H_0}, \quad D_s^* = \frac{D_s}{H_0}. \quad (2.1-66)$$

Führt man diese Entdimensionierungen in die Ähnlichkeitsgesetze ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} X &= c_1 \cdot (\alpha \cdot t)^{2/3}, \quad Y = c_2 \cdot (\alpha \cdot t)^{2/3}, \quad D_s = c_5 \cdot \alpha^{2/3} \cdot t^{2/3}, \\ \Gamma(s) &= c_3 \cdot \alpha \cdot s^{1/2}, \quad \Gamma = c_4 \cdot \alpha^{4/3} \cdot t^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.1-67)$$

$C_1, C_2, C_3, C_4$  und  $C_5$  sind Konstanten.  $\alpha$  hängt von der Geometrie und von der Strömung weitab des Auslassrandes ab. Diese Beziehungen gelten nur für den Bereich des Wirbelbildungsvorganges bei dem die charakteristische Abmessung der Wirbelspirale  $D_s$  sehr viel kleiner als die charakteristische Geometriegröße  $H_0$  (z. B. Düsendurchmesser, Kanalhöhe, Plattenhöhe) ist ( $D_s \ll H_0$ ). Außerdem gelten die Gesetze zunächst nur für kartesische Probleme, d. h. für einzelne, sich aufrollende Stabwirbel, die keine Krümmung der Rotationsachse aufweisen.

### 2.1.7.3 Charakteristische Größen ausgebildeter Ringwirbel

Nach dem Entstehungsvorgang eines Ringwirbels kommt es zur Umbildung in das sogenannte *ausgebildete laminare Stadium*. Dies zeichnet sich durch eine relativ lange stabile Phase aus, in der der Durchmesser des Wirbels nur langsam anwächst. Während die Rotation während des Entstehungsvorganges in dünnen Schichten spiralförmig verteilt ist, diffundiert diese unter dem Einfluss der Zähigkeit und weist nun eine kontinuierliche Verteilung auf (ARNOLD [We13]). Die charakteristischen Größen eines ausgebildeten laminaren Ringwirbels sind seine Translationsgeschwindigkeit  $U_T$ , sein Durchmesser  $D_w$ , seine Zirkulation  $\Gamma_0$  und die Wirbelstärkeverteilung im Wirbelkern (DIDDEN [We2]). Diese Größen hängen von den Erzeugungsbedingungen ab. Vom Beginn des laminaren Stadiums bis zum Turbulenzumschlag nimmt die axiale Position nach der Beziehung  $X_w \sim \log t$  zu. Die Translationsgeschwindigkeit nimmt näherungsweise linear mit der Zeit ab. Die Verzögerung erfolgt dabei proportional zum mittleren Quadrat der Ausschubgeschwindigkeit, d. h. schnelle Wirbel werden stärker verzögert. Der Wirbeldurchmesser vergrößert sich nach der Beziehung  $D_w \sim t^k$ , wobei der Exponent von den Erzeugungsbedingungen abhängt (LIESS [We5]). Das stabile laminare Stadium wird meist durch die Instabilität und den nachfolgenden Turbulenzumschlag des Wirbelringes beendet.

#### Translationsgeschwindigkeit

Eine analytische Beschreibung von Wirbelströmungen ist auf Grund der Komplexität der Bewegungsgleichungen bisher nur für sehr einfache, meist reibungsfreie Strömungen

möglich. Aus den Helmholtz'schen Sätzen, die für ideale (reibungsfreie) Strömungen mit Wirbelfäden in einem sonst wirbelfreien Fluid gelten, lassen sich jedoch weitreichende Aussagen treffen. So induzieren zwei sich entgegengesetzt drehende gerade Wirbelfäden eine Fortschrittsgeschwindigkeit, die senkrecht zur Verbindungslinie wirkt. Das Geschwindigkeitsfeld kann über das Bio-Savart'sche Gesetz bestimmt werden. Bei kreisförmigen Wirbelringen kommt durch die Krümmung des Wirbelfadens eine zusätzliche Geschwindigkeit des Fortschreitens zustande, die umso größer ist, je dünner der mit Drehung behaftete Wirbelkern ist (PRANDTL [S3]). Abb. 2.1-6 zeigt schematisch einen ausgebildeten Ringwirbel mit einem Durchmesser  $D_w$ , dessen Zirkulation  $\Gamma_0$  auf einen torusförmigen Wirbelkern mit dem Kerndurchmesser  $s \ll D_w$  begrenzt ist. Die Translationsgeschwindigkeit lässt sich wie folgt angeben (DIDDEN [We2]):

$$U_T = \frac{\Gamma_0}{2 \cdot \pi \cdot D_w} \cdot \left( \ln \left( \frac{8 \cdot D_w}{s} - \frac{1}{2} + A + O \left( \frac{s}{D_w} \cdot \ln \left( \frac{s}{D_w} \right) \right) \right) \right) . \quad (2.1-68)$$

Dabei ist  $A$  eine Funktion der Wirbelstärkeverteilung im Kern und  $O(s/D_w)$  ein Zusatzterm der Größenordnung  $(s/D_w)$ , der die Abweichung von der Axialsymmetrie auf Grund der Krümmung des torusförmigen Wirbelkerns berücksichtigt. Die Translationsgeschwindigkeit ist in einem idealen Fluid stationär. In einem realen, Zähigkeitsbehafteten Fluid nimmt der Durchmesser der Wirbelseele  $s$  mit der Zeit zu und damit die Translationsgeschwindigkeit ab.

#### 2.1.7.4 Bildungsvorgang eines laminaren Freistrahles

Zur Untersuchung des Bildungsvorganges eines laminaren Freistrahles wurden von WILLE [We4] experimentelle Untersuchungen durchgeführt. Das nach einer Beschleunigungsphase mit einer konstanten Geschwindigkeit in die ruhende Umgebung ausgeschobene Fluid Wasser rollt sich an der Düsenmündung zunächst zu einem Anfahrwirbel auf, der sich mit fortlaufender Zeit von dieser Mündung wegbewegt. Dieser wird auch als Frontwirbel bezeichnet. Nach PRANDTL (zitiert in WILLE [We4]) lässt sich eine Aussage über die Vorwärtsgeschwindigkeit der Strahlfront treffen, wenn man für ein in der Strahlfront mitgeführtes Bezugssystem den Staudruck auf der Front bestimmt (s. Abb. 2.1-8). Die durch die Wirbelaufrollung gebildete Strahlfront und mit ihr das mitgeführte Bezugssystem bewegen sich auf der dargestellten Stromlinie mit der konstanten Frontgeschwindigkeit  $U_F$  nach rechts. Im Relativsystem hat also die Strahlfront die Geschwindigkeit null. Der in gleiche Richtung fließende Strahl hat im Absolutsystem die Geschwindigkeit  $U_S$ , im Relativsystem die Geschwindigkeit  $(U_S - U_F)$ . Auf der vor der Strahlfront liegenden Stromlinie herrscht im Relativsystem die nach links gerichtete Geschwindigkeit  $-U_F$ . Für den Staupunkt der von links und rechts kommenden Stromlinien gilt die Beziehung

$$(U_S - U_F)^2 = U_F^2 . \quad (2.1-69)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{U_F}{U_S} = 0,5 . \quad (2.1-70)$$

Die Geschwindigkeit der Strahlfront beträgt die Hälfte der Strahlgeschwindigkeit. Im Experiment von WILLE [We4] ergaben sich für dieses Verhältnis aus der Auswertung der Translationsgeschwindigkeit des Frontwirbels abhängig von der Reynoldszahl Werte zwischen 0,55 und 0,8, wobei die Strahlgeschwindigkeit nur ungefähr ermittelt werden konnte.

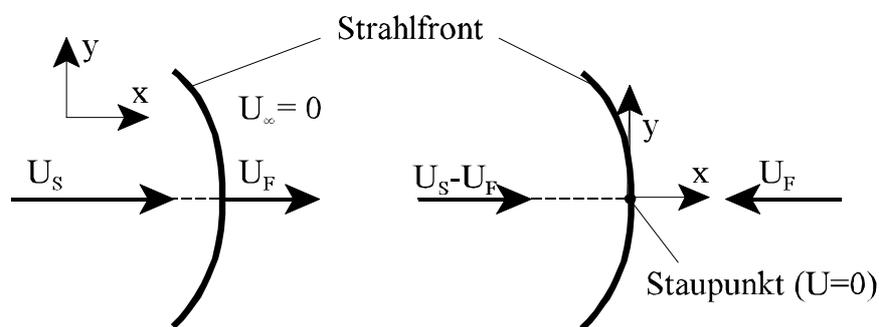


Abb. 2.1-8: Bedingungen an der Front eines Freistrahles (WILLE [We4])

Diese Beziehung wurde auch von LIESS [We6] bestätigt. Dieser zeigte zunächst, dass die Translationsgeschwindigkeit einzelner Ringwirbel während des Bildungsvorganges ungefähr ein Drittel der Mündungsgeschwindigkeit beträgt. Die Translationsgeschwindigkeit einzelner ausgebildeter Ringwirbel nähert sich mit zunehmendem ausgeschobenem Volumen jedoch zusehends der Translationsgeschwindigkeit eines Frontwirbels an. Es besteht danach ein kontinuierlicher Übergang vom Einzelwirbel zum Frontwirbel.

### 2.1.8 Freie turbulente Ringwirbel

Während die Struktur laminarer Ringwirbel durch die Erzeugungsbedingungen (Düsenform, Ausschubcharakteristik, ...) bestimmt ist, hängt die Struktur von turbulenten Ringwirbeln nicht, oder nur zu einem geringen Teil von den Anfangs- und Randbedingungen ab (LUGOWZOW [Wa10]). Freie turbulente Ringwirbel können sich zum einen nach Durchlaufen einer Instabilitätsphase aus laminaren Ringwirbeln bilden, zum anderen können diese - wie im Falle laminarer Ringwirbel - durch Ausstoß einer Flüssigkeitsmenge aus einer Düse erzeugt werden. Voraussetzung sind entsprechend große Reynoldszahlen. In der Literatur sind nur wenige Arbeiten zu finden, die sich mit der Untersuchung von freien turbulenten Ringwirbeln beschäftigen.

ARNOLD [We13] untersuchte die Einleitung von turbulenten Ringwirbeln in eine Umgebungsströmung. Nach der Entstehungsphase stellt sich ein Gleichgewichtszustand

ein. Dieser zeichnet sich durch eine Abhängigkeit der axialen Wirbelposition von der Zeit in der Form  $X_w \sim \log t$  aus. Der Durchmesser von Wirbeln in turbulenzarmer Grundströmung verhält sich dabei nach der Beziehung  $D_w = C \cdot \log(t/t_0)$ , wobei  $C$  eine Konstante und  $t_0$  eine Bezugszeit darstellen. Der stabile Zustand dauert umso kürzer, je intensiver und grobskaliger die Turbulenz der Außenströmung ist und umso länger, je größer die Gesamtzirkulation des Wirbels ist. Mit steigender Turbulenzintensität der Außenströmung wächst der Ringwirbeldurchmesser im zeitlichen Verlauf schneller an und verliert entsprechend rascher an Geschwindigkeit und Zirkulation als in turbulenzarmer Umgebungsströmung.

Fallen einzelne Tropfen auf eine Flüssigkeitsoberfläche, so können sich ebenfalls Ringwirbel bilden (DURST ET AL [We16]). Nach der auf den laminaren Zustand folgenden Instabilitätsphase bildet sich eine neue, nun turbulente Wirbelstruktur. Für diese lässt sich der Wirbelringdurchmesser als Potenzfunktion von der Zeit ausdrücken. Es ist den Autoren jedoch nicht gelungen, einfache Gesetzmäßigkeiten für die zeitliche Abhängigkeit der Lauflänge anzugeben.

Eine überaus interessante Arbeit stellt der Artikel von MAXWORTHY [We20] dar. Darin wird die experimentelle Untersuchung von turbulenten Ringwirbeln in Wasser diskutiert. Diese sind durch Turbulenzumschlag aus laminaren Ringwirbeln entstanden und bewegen sich in ruhender Umgebung fort. Durch spezielle Anfärbemethoden werden die ablaufenden Prozesse sichtbar gemacht. Der Lebenslauf eines turbulenten Ringwirbels wird vor allem durch zwei Prozesse gesteuert bzw. von zwei unterschiedlichen Regionen dominiert. Das sich im Wirbelkern (s. Abb. 2.1-6) mit dem Durchmesser  $s$  befindliche Fluid tauscht sich mit der umgebenden Region, die auch als "Blase" bezeichnet wird, nur schwach aus. Der Diffusionskoeffizient liegt dabei in der Größenordnung der molekularen Diffusion. Durch die in diesem Bereich vorliegenden großen Rotationsgeschwindigkeiten werden turbulente Schwankungen gedämpft. Dazu dürfte auch wesentlich die Tatsache beitragen, dass das radiale Geschwindigkeitsprofil in diesem Bereich einem Festkörperwirbelprofil gleicht. Der dadurch erfolgende Turbulenzabbau ist ein bekanntes Phänomen und kann durch einfache Stabilitätsbetrachtungen erklärt werden (HOLZÄPFEL [S17]). Bei einer sich hinter einem Tragflügel ablösenden Wirbelschlepppe weist der Randbereich des Wirbelkernes einen Masseaustausch mit der Umgebung auf, der lediglich in der Größenordnung der viskosen Diffusion liegt. COTEL ET AL [S34] erklären dies damit, dass die Richardsonzahl in diesem Bereich singular wird und damit kein turbulenter Austausch stattfinden kann. Der Masseaustausch zwischen der Grenzfläche der den Wirbelkern umgebenden turbulenten Blase und der Umgebung ist jedoch stärker. Dabei wird ständig Umgebungsfluid in die Blase eingemischt. Es gelangt jedoch nur ein kleiner Teil dieses Fluides in die inneren Bereich der Blase, der größte Anteil wird wieder an den Nachlauf des Wirbels ausgestoßen. Durch diesen Vorgang wird der Wirbel ständig vergrößert, verliert aber auch zunehmend Impuls an den Nachlauf. Zu beobachten ist eine lineare Zunahme des Ringwirbeldurchmessers mit dem Abstand  $X_w$  vom Entstehungspunkt. Dies kann einfach damit erklärt werden, dass nur diese zwei relevanten Längenmaße existieren. Im untersuchten Reynoldszahlbereich von 14000-30000 lässt sich die Translationgeschwindigkeit  $U_T$  mit der Beziehung

$$U_T = \left( 0,011 \cdot \frac{X_W}{R_0} + 1 \right)^{-(C_D+3)} \quad (2.1-71)$$

beschreiben, wobei  $R_0$  einen hypothetischen Ursprungsdurchmesser und  $C_D$  einen Auftriebskoeffizienten repräsentieren.

### 2.1.9 Turbulente Ringwirbel bei pulsierten Freistrahlen

Eine weitere Möglichkeit der Erzeugung turbulenter Ringwirbel stellt die Pulsation eines turbulenten Freistrahles dar. Sind die Amplitude oder die Frequenz der Schwankung des Düsenmassenstromes hinreichend groß, so wickelt sich die vom Düsenrand abgelöste Scherschicht während jeder Beschleunigungsphase der Schwingung auf. Die sich bildenden Ringwirbel bewegen sich in diesem Falle nicht, wie im vorigen Abschnitt am Beispiel *freier Ringwirbel* beschrieben, in einer homogenen Umgebung, sondern in einem vom Freistrahle induzierten Geschwindigkeitsfeld. Dadurch kommt es zu einer Intensivierung der Vermischung von Strahlmedium und Umgebungssubstanz. Dieser Effekt kann z. B. zur Verbesserung von Injektoren genutzt werden (REMKE [We31]). Die Ringwirbel sind als *kohärente Strukturen* innerhalb des turbulenten Strömungsfeldes zu verstehen. Dies bedeutet, dass deren Lebensdauer größer ist als das charakteristische integrale Turbulenzzeitmaß (LESIEUR [S33]). In der Literatur sind bislang nur wenige Untersuchungen zur Bildung turbulenter Ringwirbel bei pulsierten Freistrahlen zu finden.

Von BÜCHNER [Vi1] und KÜLSHEIMER [S32] wurden experimentelle Untersuchungen von pulsierten turbulenten Freistrahlen durchgeführt. Danach sind im Strömungsfeld erst dann Ringwirbel zu beobachten, wenn der Pulsationsgrad einen von der Frequenz abhängigen Schwellwert überschreitet. Dieser Schwellwert zeigt eine hyperbolische Abhängigkeit. Das heißt, bei steigender Frequenz der Anregung ist schon bei kleineren Amplituden mit einem Auftreten von Ringwirbeln zu rechnen. Die axiale Translationsgeschwindigkeit der ausgebildeten Wirbel nimmt mit steigender mittlerer Austrittsgeschwindigkeit sowie wachsender Anregungsfrequenz zu, hängt jedoch nicht vom Pulsationsgrad ab [S32]. Es konnte außerdem gezeigt werden, dass die Mischung von Strahlmedium und Umgebungsmedium beim pulsierten Strahl schneller erfolgt als beim stationären Freistrahle [Vi1].

HIRSCH [We1] untersuchte Ringwirbelbildung bei pulsierten isothermen turbulenten Freistrahlen analytisch. Es wird davon ausgegangen, dass sich eine abgelöste Scherschicht dann aufrollt, wenn deren Gradient der Rotation in axialer Richtung einen kritischen Wert überschreitet. Aus dimensionsanalytischen Überlegungen wird eine Beziehung hergeleitet, die die axiale Position der Wirbelbildung mit der Frequenz  $f$  und der Amplitude  $\hat{u}$  der sinusförmigen Geschwindigkeitsschwankung am Düsenaustritt verknüpft.

$$Str \cdot A = \frac{1}{C_{ex} + x/D_M} \quad (2.1-72)$$

Dabei stellt die Strouhalzahl  $Str = (D_M \cdot f) / \bar{u}$  eine dimensionslose Frequenz und  $A = \hat{u} / \bar{u}$  eine dimensionslose Amplitude dar. Zu gegebener mittlerer Düsenaustrittsgeschwindigkeit ergibt sich der axiale Ort  $x$  der Wirbelbildung durch das Produkt aus Strouhalzahl und Amplitude. Eine Erhöhung dieses Produktes verlagert den Entstehungsort des Wirbels stromauf zur Düse hin. Für die Konstante  $C_{ex}$  wurde mittels numerischen Rechnungen der Wert 36,8 ermittelt. Die Verifizierung der analytisch gefundenen Beziehung mit numerischen Feldrechnungen zeigt sehr gute Ergebnisse.

### 2.1.10 Numerische Berechnung von Ringwirbeln

In der Literatur gibt es eine große Anzahl von Arbeiten, die sich mit der Berechnung von Wirbelströmungen beschäftigen. Diese beschäftigen sich jedoch meist mit Strömungssystemen, bei denen zwar zwei- oder auch dreidimensionale Wirbelstrukturen auftreten, jedoch keine rotationssymmetrischen Ringwirbel. Phänomene dieser Art werden im Zusammenhang mit der Bildung kohärenter Strukturen in ebenen freien Scherschichten, mit Ablösevorgängen hinter Körpern sowie in Verbindung mit grundlegenden Untersuchungen zur Turbulenzstruktur und turbulenten Mischungsprozessen berechnet. Die im folgenden Abschnitt zitierten Arbeiten befassen sich, wenn nicht anderes angegeben, mit der numerischen Berechnung von Ringwirbeln unter Verwendung von Feldmethoden.

#### Laminare Ringwirbel

MOHSENI ET AL [Wn1] beschreiben die Berechnung von Ausschubwirbeln mit langer Ausschubzeit. Dabei bilden sich nach dem ausgeprägten Frontwirbel auf Grund von Instabilitäten in der abgelösten Scherschicht mehrere kleine nachfolgende Wirbel. Dieses Phänomen konnte auch in der vorliegenden Arbeit bei der Berechnung von pulsierten laminaren Freistrahlen kleiner Frequenz beobachtet werden (s. Kap. 4.3). Die Autoren stellen eine gute Übereinstimmung mit aus theoretischen Überlegungen vorhergesagten Tendenzen fest. ROSENFELD ET AL [Wn2] untersuchen ein ähnliches System und gehen der Frage nach, unter welchen Bedingungen die Zirkulation des Frontwirbels maximal wird. Sie finden in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen, dass die sogenannte "formation number"  $t^* = \bar{u} \cdot t / D$  ungefähr den Wert Vier aufweisen muss. Dieser Parameter stellt eine dimensionslose Zeit dar und verknüpft die Ausschubzeit mit der mittleren Ausschubgeschwindigkeit und dem Düsendurchmesser. Mit wachsender Ausschubzeit nimmt die Zirkulation des Frontwirbels zunächst zu. Nach Überschreiten einer Maximalzeit verliert dieser jedoch zunehmend Masse und damit auch Zirkulation an den ebenfalls in Ringwirbel zerfallenden Nachlauf. FRIEBEL [Wn3] beschreibt die Berechnung und die experimentelle Untersuchung freier laminarer Ringwirbel in Wasser sowie deren Interaktion mit Hindernissen und der Wasseroberfläche. Ausgewertet wurden

die Wirbelpositionen, -durchmesser und -translationsgeschwindigkeiten. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung von berechneten und gemessenen Daten. Eine weitere Möglichkeit der numerischen Berechnung von Ringwirbeln besteht in Verwendung der Einzelwirbel-Methode (engl.: vortex method). Dabei wird eine rotationssymmetrische Scherschicht durch eine große Anzahl diskreter Einzelwirbel angenähert. Die Interaktion der Einzelwirbel wird mit dem Biot-Savart Gesetz berechnet (LEONARD [Wn4]). Mit dieser kinematischen Methode lassen sich zwar wesentliche Eigenschaften der Ringwirbelbildung untersuchen, zur Wiedergabe von Reibungs- und Mischungseffekten ist dieses Verfahren jedoch naturgemäß nicht in der Lage. Stellvertretend für die Berechnung von Ringwirbeln sei die Arbeit von SENO [Wn5] erwähnt. Darin wird gezeigt, dass kinematischen Methoden in der Lage sind, gemessene Wirbelpositionen, -durchmesser und -translationsgeschwindigkeiten wiederzugeben. Außer der besprochenen Methoden gibt es noch eine Reihe weiterer Verfahren, die allerdings immer von einer vereinfachten Physik ausgehen (z. B. BRADY [Wn6]).

### **Turbulente Ringwirbel**

In der Literatur sind nur wenige Ergebnisse von numerischen Untersuchungen turbulenter Ringwirbel zu finden. HIRSCH [Vi3] untersucht die Ringwirbelbildung am System des pulsierten Freistrahles und zeigt, dass die gemessene axiale Position des Wirbelzentrums durch die Simulation nahezu perfekt wiedergegeben werden kann. Die Beschreibung des instationären Mischungsfeldes ergibt ebenfalls gute Ergebnisse (HIRSCH [We1]). KÜLSHEIMER [Vi6] und HELFGEN [Wn7] kommen dagegen zum Schluss, dass die Simulation nicht in der Lage ist, den zeitlichen Verlauf der radialen Position des Wirbelzentrums wiederzugeben.

## **2.2 Verbrennungstechnische Grundlagen**

### **2.2.1 Selbsterregte Verbrennungsschwingungen**

Verbrennungsschwingungen, auch als Verbrennungsinstabilitäten bezeichnet, sind ein weitverbreitetes Phänomen, welches in zahlreichen technischen Anwendungen (Feuerungsanlagen in Industrie und Haushalt, Gasturbinen, Raketenantriebe) auftritt. Sie zeichnen sich durch periodische Schwankungen des statischen Druckes in der Brennkammer eines Verbrennungssystems aus. Die daraus resultierenden Begleiterscheinungen wie eine erhöhte mechanische Belastung der Brennkammer, verstärkte Schadstoffemissionen oder vermehrte Lärmabstrahlung schränken den Regelbereich der Anlage oftmals stark ein oder machen im Extremfall einen kontinuierlichen Betrieb unmöglich. Verbrennungsschwingungen können durch vorhandene periodische Energiequellen aufrechterhalten werden. Dazu zählen z. B. Gebläseeigenfrequenzen, strömungsmechanische Instabilitäten wie Karmann'sche Wirbelstraßen oder auch komplexe Phänomene, die im Zusammenhang mit den zur aerodynamischen Stabilisierung von Flammen oftmals verwendeten Drallströmungen entstehen, wie z. B. eine präzessierende Wirbelachse (PVC oder Precessing Vortex Core). Wenn in der vorliegenden Arbeit von Verbrennungsschwingungen gesprochen wird, so

sind damit periodische Zustände gemeint, bei denen die Energie zur Aufrechterhaltung der Schwingung direkt aus dem Verbrennungsprozess bzw. aus der Flamme bezogen wird. Das Wesen dieser Brennkammerschwingungen zeichnet sich dadurch aus, dass diese keine Resonanzschwingungen darstellen, sondern selbsterregte Schwingungen sind. Das hat zur Konsequenz, dass sich bei einer Änderung der Geometrie von Brenner/Brennkammer oder veränderten Betriebsbedingungen zwar Frequenz und Amplitude der Schwingung ändern können, die Schwingungsneigung selbst aber dadurch meist nicht beseitigt wird (BAADE [Vi26]).

### 2.2.1.1 Regelungstechnische Systembeschreibung

Eine technische Verbrennungsanlage stellt ein dynamisches System dar. Dessen Eigenschaften können grundsätzlich mit den Methoden der Systemtheorie untersucht werden. Dazu muss zunächst ein durch mathematische Beziehungen beschriebenes Abbild des Systemes aufgestellt werden, welches die zu untersuchenden Systemeigenschaften abbildet. Ein dynamisches System enthält zeitveränderliche Größen, die durch eindeutige Funktionalbeziehungen miteinander verknüpft werden können. Eine anschauliche Darstellung dieser Abhängigkeiten bietet ein Strukturbild. Für jedes Teilelement des Systemes gibt es eine Funktionalbeziehung, die das zeitliche Verhalten des sich ergebenden Antwortsignals  $a(t)$  in Bezug auf das Eingangssignal  $e(t)$  charakterisiert. Diese Beziehung wird im Zeitbereich durch eine Differentialgleichung, bzw. im sogenannten Bildbereich durch eine komplexe Übertragungsfunktion  $G(s)$  beschrieben.

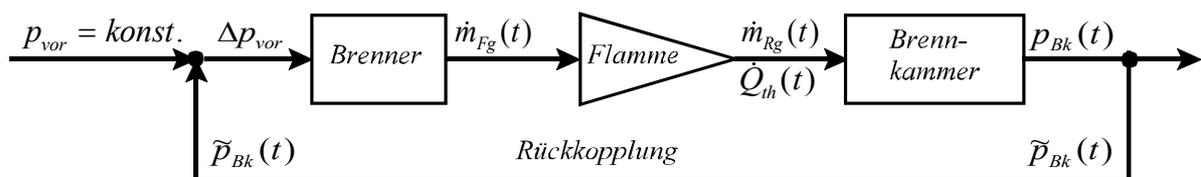


Abb. 2.2-1: Rückkopplungskreis eines Verbrennungssystemes (z. B. LENZ [Vi2])

Fast jedes reale System zeigt, z. B. bei großen Auslenkungen, ein nichtlineares Verhalten. Eine analytische Lösung von nichtlinearen Differentialgleichungen ist jedoch nur für einige wenige einfache Spezialfälle zu erhalten. Die meisten theoretischen Werkzeuge der Systemtheorie können jedoch nur auf Systeme angewendet werden, die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden. Fast immer ist jedoch bei kleinen oder mäßigen Amplituden eine Beschreibung durch ein lineares oder linearisiertes Ersatzsystem möglich. Lineare Systeme zerfallen in zwei Klassen: zeitinvariante und zeitvariante. Die zugrundeliegenden linearen Differentialgleichungen haben entsprechend konstante oder zeitabhängige Koeffizienten. Zu den linearen zeitinvarianten Gliedern gehören rationale und Totzeit-Glieder (FÖLLINGER [So4]). Die mathematische Beschreibung von dynamischen Systemen im Zeitbereich ist meist sehr aufwendig. Geht man aber in den sog. Bildbereich über, so können viele funktionelle Zusammenhänge übersichtlicher dargestellt werden. Die nur im Bildbereich definierte

Übertragungsfunktion  $G(s)$  der komplexen Variablen  $s = \delta + j\omega$  stellt eine eindeutige Funktion eines *linearen zeitinvarianten* Systemes dar. Sie enthält die Informationen der dem betrachteten System zugrundeliegenden Differentialgleichung und ist definiert als das Verhältnis der Laplace-transformierten Ausgangs- und Eingangssignale (WALTER [So3]):

$$G(s) = \frac{a(s)}{e(s)} = \frac{\mathcal{L}\{a(t)\}}{\mathcal{L}\{e(t)\}} \quad (2.2-1)$$

### 2.2.1.2 Rückkopplungskreis

Selbsterregte Verbrennungsschwingungen sind als Instabilitäten in einem Schwingkreis zu verstehen, welcher sich durch das Zusammenwirken aller beteiligten Elemente auszeichnet. Das dynamische Verhalten des Gesamtsystems zeichnet sich durch komplexe Wechselwirkungen zwischen dem frequenzabhängigen Wärmefreisetzungsverhalten der turbulenten Flamme und dem geometrieabhängigen Druckübertragungsverhalten der turbulent durchströmten Teilsysteme Brenner, Brennkammer und Abgasführung aus. Als Bedingung für die selbsttätige Erhaltung einer Verbrennungsschwingung muss eine entsprechende Phasenlage zwischen Wärmefreisetzungsrate und Brennkammerdruck vorliegen. Ein Verbrennungssystem kann in die Teilsysteme Brenner, Flamme und Brennkammer zerlegt werden. In diesem Fall besteht eine geschlossene Wirkungskette, die sich durch das in Abb. 2.2-1 dargestellte Strukturbild charakterisieren lässt. Das Element Flamme ist darin als Verstärker dargestellt, da diese als Energiequelle zur Aufrechterhaltung der Schwingung dient.

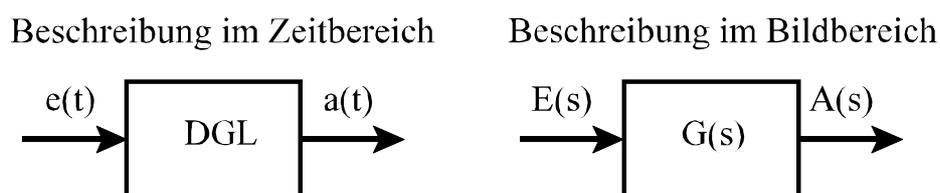


Abb. 2.2-2: Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Systemelementes

Eine positive Fluktuation des Frischgemisch-Massenstromes an der Brennerdüse wirkt sich in einer Vergrößerung der Wärmefreisetzungsrate und somit in einer Vergrößerung des Abgasmassenstromes aus. Dieser führt zu einer Steigerung des statischen Druckes in der Brennkammer. Da dadurch der Gegendruck kleiner wird, führt dies zu einer Verringerung der Ausströmgeschwindigkeit am Brenner, wodurch sich der Wirkungskreis schließt. Zur Aufrechterhaltung einer selbsterregten Schwingung muss das sog. Rayleigh-Kriterium erfüllt sein. Dieses fordert, dass zur Erhaltung einer stabilen Druckschwingung Wärme im Moment größten Druckes zugeführt, bzw. im Moment niedrigsten Druckes abgeführt werden muss. Die notwendige Stabilitätsbedingung kann in allgemeiner Form integral formuliert werden (PUTNAM [Vi36]):

$$\int_0^{t_p} \dot{Q}'(t) \cdot p'(t) dt > 0 \quad . \quad (2.2-2)$$

Hierbei ist  $t_p$  die Periodendauer,  $\dot{Q}'$  die Schwankung der Wärmefreisetzungsrate und  $p'$  die Schwankung des statischen Druckes. Die Schwankungen von Wärmezufuhr und der Druck müssen demnach nicht unbedingt phasengleich sein, sondern ihr Produkt muss integral über eine Schwingungsperiode hinweg größer null sein. Diese Bedingung ist zwar notwendig, jedoch nicht hinreichend. Hiermit kann nur untersucht werden, ob dem System durch die Flamme Energie zugeführt oder entzogen wird. Ob es zur Ausbildung einer selbsterregten Schwingung kommt hängt von den auftretenden Energieverlusten ab. Für eine Stabilitätsbeurteilung eines Verbrennungssystems ist es somit erforderlich die Verluste mit einzubeziehen.

Die Untersuchung des dynamischen Verhaltens eines gesamten Verbrennungssystems, bzw. dessen Stabilitätsanalyse, kann mit den Methoden der Systemtheorie erfolgen. Davor muss jedoch das Übertragungsverhalten der einzelnen Teilelemente bekannt sein. Die Bestimmung kann mittels Messung, numerischer Berechnung oder auch durch analytische Methoden erfolgen. Ein für die Zukunft angestrebtes Ziel bei der Auslegung technischer Vormisch-Verbrennungsanlagen ist die Vorhersage der Schwingungsneigung in Abhängigkeit der eingestellten Betriebsparameter. Das Hauptproblem stellt hierbei die numerische Berechnung des Übertragungselementes *Flamme* dar. Diesem kommt eine besondere Bedeutung im Rückkopplungskreis zu, weil es als einziges Element die Energie zur Anfachung einer Druckschwingung bereitstellen kann.

### Die Rolle von Ringwirbeln

Bei ausgebildeten Verbrennungsschwingungen ist die in der Brennkammer auftretende Druckamplitude in vielen Fällen so hoch, dass dadurch eine für die Bildung von Ringwirbeln ausreichende periodische Schwankung des aus dem Brenner austretenden Frischgemisch-Massenstromes initiiert wird (s. Kap. 2.1.9). Während der in jeder Periode erfolgenden Beschleunigungsphase der Ausströmung rollt sich die vom Brennermund abgelöste Scherschicht auf. Die so entstehenden Ringwirbel bilden sich als kohärente Strukturen im turbulenten Strömungsfeld aus. Das Auftreten von Ringwirbelstrukturen und deren Bedeutung für die Entstehung und Aufrechterhaltung von selbsterregten Verbrennungsinstabilitäten ist ein in der Literatur bekanntes Phänomen. Während der Stromabbewegung beeinflussen diese Wirbel maßgeblich das Strömungs- und Mischungsfeld und somit auch den zeitlichen Verlauf der Wärmefreisetzung sowie das dynamische Verhalten der Flamme [Vi1, Vi3, Vi9-Vi13, Vi15].

#### 2.2.1.3 Integraltransformationen

Signale existieren zunächst im Zeitbereich. Die Behandlung mit sog. Zeitbereichsmethoden ist aber oftmals schwierig oder ganz unmöglich. Für die Lösung vieler praktischer Problemstellungen bietet jedoch die Verwendung von

Bildbereichsmethoden bedeutende Vorteile. Mit Hilfe der mathematischen Werkzeuge Fourier- und Laplace-Transformation gelingt es, Signale und die Übertragung von Signalen in linearen Systemen im Bild- bzw. Frequenzbereich zu beschreiben. Die Laplace-Transformation eines zeitkontinuierlichen Signales  $x(t)$  ist über die Beziehung

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (2.2-3)$$

definiert. Die Fourier-Transformation eines zeitkontinuierlichen Signales  $x(t)$  ist über die Beziehung

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.2-4)$$

definiert (KORN [So9]).

#### 2.2.1.4 Definition des Frequenzganges

Wird auf den Eingang eines *linearen* Übertragungsgliedes eine *harmonische* Testfunktion  $e(t)$  gelegt, so erhält man, wenn alle Einschwingvorgänge abgeklungen sind, als Reaktion des Systemes ebenfalls eine *harmonische* Antwortfunktion  $a(t)$ . Diese weist eine gegenüber der Testfunktion geänderte Amplitude und Phasenlage auf. Dieser Sachverhalt lässt sich sowohl im Zeitbereich, als auch - in komplexer Formulierung - im Frequenzbereich ausdrücken:

$$\begin{aligned} e(t) = \hat{e} \cdot \sin(\omega t) &\Rightarrow a(t) = \hat{a} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ e(t) = \hat{e} \cdot e^{j\omega t} &\Rightarrow a(t) = \hat{a} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

Geht man zur komplexen Schreibweise über und bildet den Quotienten aus Ausgangsgröße und Eingangsgröße, so erhält man den komplexen Frequenzgang. Formal mathematisch ist der Frequenzgang  $F(j\omega)$  als Übertragungsfunktion  $G(s)$  (s. o.) auf der imaginären Achse der  $s$ -Ebene definiert. Für rein harmonische Signale vereinfacht sich die komplexe Variable  $s = \sigma + j\omega$  zu einer rein imaginären Größe  $s = j\omega$ .

$$F(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\hat{a} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}}{\hat{e} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\hat{a}}{\hat{e}} \cdot e^{j\varphi(\omega)} \quad (2.2-6)$$

$$F(j\omega) = \operatorname{Re}\{F(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{F(j\omega)\} = |F(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

Der Frequenzgang ist eine Kennfunktion eines Übertragungsgliedes. Er gibt das

dynamische Verhalten eines Übertragungsgliedes im Frequenzbereich wieder (z. B. WALTER [S3]). Dazu muss der Einschwingvorgang abgeklungen sein. Es gilt dann nur noch die partikuläre Lösung der das System beschreibenden Differentialgleichung. Der Frequenzgang ist eine komplexwertige Funktion der reellen Veränderlichen  $\omega$ . Er lässt sich graphisch auf zwei Wegen darstellen. Entweder unter Verwendung von Real- und Imaginärteil als Ortskurve oder unter Verwendung von Betrag und Phase in der Form eines BODE-Diagrammes.

### Darstellung im BODE-Diagramm

Im BODE-Diagramm werden die beiden Anteile Betrag und Phase getrennt dargestellt. Der Betragsgang wird dazu logarithmiert und in dB (Dezibel) in Form eines Amplitudenganges aufgetragen:  $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log |F(j\omega)|$ . Der Phasenwinkel wird in Form eines Phasenganges  $\varphi(\omega)$  in einem zweiten Diagramm mit linearer Ordinatenenteilung aufgetragen. Beide Anteile werden über der logarithmisch geteilten Frequenzachse dargestellt. Die Betragskennlinie und die Phasenkennlinie bilden zusammen die Frequenzkennlinien, die auch als Frequenzcharakteristiken bezeichnet werden.

#### 2.2.1.5 Frequenzgänge ausgewählter Übertragungsglieder

Man unterscheidet bezüglich des Übertragungsverhaltens zwei Gruppen. Die erste Gruppe beinhaltet reguläre Übertragungsglieder, wie das Proportionalglied (P-Glied), Integrierglied (I-Glied), Differenzierglied (D-Glied) und Verzögerungsglieder erster und höherer Ordnung. Im Gegensatz zu diesen lässt sich bei irregulären Gliedern bei einem gegebenen Amplitudengang nicht ohne weiteres auf den Phasengang schließen. Zu diesen zählt auch das Totzeitglied (WALTER [S3]).

##### Verzögerungsglied 1. Ordnung

Das Übertragungsverhalten lässt sich durch eine Differentialgleichung erster Ordnung beschreiben. Es weist folgenden Frequenzgang auf:

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (2.2-7)$$

Betrags- und Phasengang lauten:

$$|F(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctan(-\omega T) \quad (2.2-8)$$

Für kleine Frequenzen  $\omega \ll \omega_0 = 1/T$  liegt das Amplitudenverhältnis bei  $K$ , bei hohen Frequenzen  $\omega \gg \omega_0$  fällt die Betragskennlinie um 20 dB pro Dekade ab. Der Phasenverzug beträgt für kleine Frequenzen  $0^\circ$  und für große Frequenzen  $-90^\circ$ . Die Zeitkonstante  $T$  bestimmt die Schnelligkeit des Anstieges der Sprungantwort.

##### Verzögerungsglied 2. Ordnung

Das Übertragungsverhalten lässt sich durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

beschreiben. Es weist folgenden Frequenzgang auf:

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + (j\omega) \cdot 2D + (j\omega)^2 \cdot \omega_0^2} \quad (2.2-9)$$

Betrags- und Phasengang lauten:

$$|F(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2D \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}},$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{-2D \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.2-10)$$

In der Nähe der Eckfrequenz  $\omega_0$  hängt das dynamische Verhalten stark von der Dämpfungszahl  $D$  ab. Für kleine Frequenzen  $\omega \ll \omega_0$  liegt das Amplitudenverhältnis bei  $K$ , bei hohen Frequenzen  $\omega \gg \omega_0$  fällt die Betragskennlinie um 40 dB pro Dekade ab. Der Phasenverzug beträgt für kleine Frequenzen  $0^\circ$  und für große Frequenzen  $-180^\circ$ .

### Totzeitglied

Totzeiten treten dort auf, wo Verzugszeiten in Erscheinung treten, z. B. bei Transportvorgängen. Bei einer Änderung der Eingangsgröße eines Systemes erfolgt die sich daraus ergebende Änderung des Ausgangssignales erst nach einer gewissen Totzeit  $\tau_t$ . Das Übertragungsverhalten eines *idealen* Totzeitgliedes weist folgenden irrationalen Ausdruck für den Frequenzgang auf:

$$F(j\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega \tau_t} \quad (2.2-11)$$

Betrags- und Phasengang lauten:

$$|F(j\omega)| = 1 = 0 \text{ dB}, \quad \varphi(\omega) = -\omega \tau_t \quad (2.2-12)$$

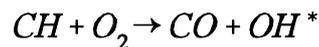
Der Amplitudengang hat einen frequenzunabhängigen, konstanten Wert. Die Phasenkennlinie fällt mit wachsender Frequenz in Richtung  $-\infty$  ab und dominiert die Phasenlage bei totzeitbehafteten Systemen. Das Totzeitverhalten drückt sich in der Nichtlinearität der dem System zugrundeliegenden Differentialgleichung aus. Trotzdem erfüllen Totzeitglieder die Linearitätseigenschaften Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip (FÖLLINGER [So4]).

### 2.2.1.6 Messung von Flammenfrequenzgängen

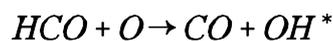
Das Übertragungsverhalten einer Flamme beschreibt die zeit- bzw. frequenzabhängige Änderung der Wärmefreisetzung der Flamme bei periodischen Änderungen der Brenngas/Luft-Gemisch Zufuhr. Das Übertragungsverhalten kann durch den Flammenfrequenzgang charakterisiert werden. Als Anregungsgröße der fremderregten bzw. pulsierten Flamme wird die sinusförmige Massenstromschwankung  $\dot{m}_D(t)$  des aus der Düse austretenden Brenngas/Luft-Gemisches angesehen. Die Antwort der Flamme wirkt sich in einer zeitlichen Änderung der integralen Umsatzgeschwindigkeit bzw. der Wärmefreisetzung aus. Diese Größen können jedoch im Experiment nicht oder nur unter besonderen Voraussetzungen (z. B. Verbrennung in einer adiabaten Brennkammer) direkt quantifiziert werden. Das Antwortverhalten der Flamme muss somit über den Umweg der Messung und Analyse einer Sekundärgröße (Brennkammerdruck, Strahlungsintensität, Abgasmassenstrom, Flammenlänge, usw.) ermittelt werden. Bei den zur Validierung der in dieser Arbeit berechneten Flammenfrequenzgängen verwendeten Messdaten wurde die Strahlungsintensität angeregter OH-Radikale ausgewertet. Diese Größe kann bei der numerischen Simulation turbulenter Flammen nicht berechnet werden, weshalb hier die vom Reaktionsmodell gelieferte Umsatzgeschwindigkeit ausgewertet wurde.

#### OH-Strahlung von Vormischflammen

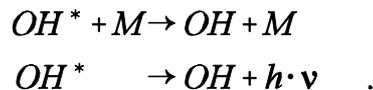
Bei der Verbrennung von Kohlenwasserstoffen entstehen eine ganze Reihe von Ionen und Radikalen als Zwischenprodukte. Ein Teil der gebildeten Zwischenprodukte wird energetisch angeregt, wodurch die Elektronen des betroffenen Moleküls auf ein elektrisch höherwertiges Energieniveau gelangen. Als Hauptreaktion für die Bildung angeregter Radikale OH\* der Spezies OH wird meist die Reaktion



angegeben (HABER [Va6]). Nach dem Vergleich experimenteller und numerischer Untersuchungen stellte HABER fest, dass die Verwendung dieser Bildungsreaktion nur für den Umsatz von Kohlenwasserstoffen mit mehr als einem C-Atom gerechtfertigt ist. Werden jedoch Kohlenwasserstoffe mit nur einem C-Atom umgesetzt, so lässt sich die Bildung angeregter OH-Radikale über die Reaktion



beschreiben. Dieser Mechanismus ist auch für den Umsatz von Kohlenwasserstoffen mit mehreren C-Atomen gültig. Die oben angegebene Bildungsreaktion aus CH stellt eine Vereinfachung dar, die jedoch nur für Kohlenwasserstoffe mit mehr als einem C-Atom gerechtfertigt ist. In diesem Fall tritt die intermediäre Spezies CH in relativ großen Konzentrationen auf und bildet die Hauptquelle für die Bildung von HCO. Der Rückfall in den energetisch stabilen Grundzustand kann durch Interaktion mit einem dritten Stoßpartner, wie auch spontan unter Abgabe von Energie in Form elektromagnetischer Strahlung erfolgen.



Dieser Vorgang wird auch als *Chemilumineszenz* bezeichnet. Bei der messtechnischen Erfassung der Flammenfrequenzgänge, die in dieser Arbeit zum Vergleich der Rechenergebnisse herangezogen wurden, wurde als Bezugsgröße für die Systemantwort die von der Flamme emittierte globale Strahlungsintensität angeregter OH-Radikale verwendet [Vi7]. Diese besitzen eine starke Emissionsbande bei einer Wellenlänge von 306,7 nm. Diese Strahlung kann mittels eines Photomultipliers gemessen werden. Bei der Messung der globalen Strahlungsintensität wurde die gesamte von der Flamme emittierte Strahlung erfasst. Bei der Untersuchung der axialen Verteilung der Strahlungsintensität längs der Flammenachse wurde eine Schlitzblendenoptik verwendet, welche die Flamme optisch in Scheiben mit einer Dicke von 10 mm zerlegt [Vi1].

Da die OH-Strahlungsintensität außer von der Reaktionsgeschwindigkeit in nichtlinearer Weise auch noch von weiteren Faktoren (z. B. Temperatur, lokale Stöchiometrie) abhängt, kann die Strahlungsintensität nicht direkt in eine Reaktionsgeschwindigkeit umgerechnet werden. HABER [Va6] untersuchte die Strahlungsemission laminarer Vormischflammen experimentell und rechnerisch. Die experimentellen Ergebnisse zeigen, dass die Gesamtstrahlung zwar linear mit der thermischen Leistung ansteigt, die Steigung jedoch von der Luftzahl abhängt. Das Maximum der Strahlung ist bei nahestöchiometrischer Mischung. Der Abfall auf in Richtung fettere Mischung ist schwächer ausgeprägt als derjenige in Richtung magere Mischung. Die Luftzahlabhängigkeit der OH-Strahlung ist im Wesentlichen auf die Temperatur zurückzuführen und nicht von der vorhandenen O-Konzentration abhängig (dies gilt zumindest im mageren Bereich). Die Berechnung der Strahlungsintensität ist für laminare Vormischflammen unter Verwendung detaillierter Reaktionsmechanismen auch quantitativ möglich. BÜCHNER [Vi1] zeigte experimentell, dass die Strahlungsintensität in mageren turbulenten Vormischflammen weitgehend auf den Einfluss der Temperatur und nicht auf den Einfluss der Stöchiometrie zurückzuführen ist. LENZ [Vi2] stellte außerdem fest, dass die Eigenabsorption der Strahlung durch die turbulente Vormischflammen selbst vernachlässigbar ist.

### **Experimentelle Auswertung des Frequenzganges**

Als Bezugsgröße für die Systemanregung wurde im Experiment die über den Düsenquerschnitt gemittelte Austrittsgeschwindigkeit verwendet. Diese wurde über einen im Mündungsquerschnitt befindlichen Hitzdraht gemessen. Als Bezugsgröße für die Systemantwort wurde, wie bereits beschrieben, die Strahlungsintensität angeregter OH-Radikale verwendet. Dabei wurde das bei der Messung der Strahlung mittels eines Photomultipliers erzeugte elektrische Spannungssignal direkt ausgewertet. Der gemessene Frequenzgang ist wie folgt definiert (BÜCHNER [Vi1]):

$$|F|(f) = 20 \cdot \log \frac{\frac{V_{RMS,PM}(f)}{V_{RMS,PM,stat}(f)}}{\frac{u_{RMS,HD}(f)}{u_{RMS,HD,stat}(f)}} . \quad (2.2-13)$$

$V_{RMS,PM}(f)$  ist die am Photomultiplier (PM) anliegenden Spannung.  $u_{RMS,HD}(f)$  ist die mit Hitzdrahtanemometrie (HD) gemessene Düsenaustrittsgeschwindigkeit. Der tiefgestellte Index RMS (engl. Root-Mean-Square) steht für den Effektivwert der jeweiligen Größe. Er wird aus der mittleren quadratischen Abweichung des Schwankungswertes  $\Phi'$  zum Mittelwert  $\bar{\Phi}$  einer Größe  $\Phi$  berechnet:

$$\Phi_{RMS} = \sqrt{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (\Phi(t) - \bar{\Phi})^2 dt} . \quad (2.2-14)$$

Die bei der jeweiligen Anregungsfrequenz gemessenen Effektivwerte sind mit ihren jeweiligen quasistationären Werten normiert. Dabei wurde die Flammen bei kleinen Anregungsfrequenzen (typischerweise 5 Hz) betrieben. Unter diesen Bedingungen verhält sich eine instationäre Flamme zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Periode so wie eine stationäre Flamme mit dem entsprechenden Massenstrom (BÜCHNER [Vil]). Zur Auswertung der elektrischen Signale und zur Bestimmung von deren Amplitudenverhältnis und Phasenlage wurde ein elektronischer Frequenzanalysator verwendet.

### 2.2.1.7 Numerische Berechnung von Flammenfrequenzgängen

Grundsätzlich gibt es drei Möglichkeiten, um den Frequenzgang einer turbulenten Vormischflamme numerisch zu ermitteln.

#### Direkte Methode

Diese Methode wird auch bei experimentellen Untersuchungen angewendet. Dabei wird die Flamme über eine Modulation des Frischgemischmassenstromes periodisch angeregt. Die Auswertung der Flammenantwort in Phase und Amplitude für eine Vielzahl diskreter Frequenzen ergibt in Summe den Flammenfrequenzgang. Diese Vorgehensweise wurde auch in der vorliegenden Arbeit zur numerischen Bestimmung von Frequenzgängen angewendet. Die direkte Methode stellt den einzig gangbaren Weg zur Bestimmung des Frequenzganges eines nichtlinearen Systemes dar. Als Bezugsgröße für die Systemanregung wurde in der Modellierung wie im Experiment die über den Düsenquerschnitt gemittelte Austrittsgeschwindigkeit verwendet. Als Bezugsgröße für die Systemantwort in der Simulation wurde die integrale Umsatzgeschwindigkeit zur Berechnung des Betragsfrequenzganges herangezogen. Die Berechnung der OH-Radikalstrahlung ist für laminare Flammen in guter Näherung möglich (s. o.). Prinzipiell

könnte die Strahlungsintensität turbulenter Flammen daher mittels DNS-Rechnungen ermittelt werden. Dies ist zum momentanen Zeitpunkt jedoch nur für kleine Reynoldszahlen realistisch. Der aus den Ergebnissen der Berechnungen ermittelte Frequenzgang ist wie folgt definiert:

$$|F|(f) = 20 \cdot \log \frac{\frac{R_{RMS}(f)}{R_{RMS,stat}(f)}}{\frac{u_{RMS}(f)}{u_{RMS,stat}(f)}} . \quad (2.2-15)$$

Er bestimmt sich aus dem effektiven Schwankungswert der integralen Umsatzgeschwindigkeit  $R_{RMS}(f)$  und dem effektiven Schwankungswert der Axialgeschwindigkeit am Düsenaustritt  $u_{RMS}(f)$ . Beide Schwankungsgrößen wurden wie bei der für die Auswertung der experimentellen Untersuchungen verwendeten Definition (KÜLSHEIMER [Vi6]) mit den Werten der entsprechenden quasistationären Flammen normiert. Die Definition des RMS-Wertes ist oben angegeben. Der Phasenwinkel wurde über die Bestimmung der Kreuzkorrelation  $K_{e,a}(f)$  ausgewertet. Die Kreuzkorrelationsfunktion der Signale von Systemerregung  $e(f)$  und Systemantwort  $a(f)$  ist ein Maß für den linearen Zusammenhang dieser Signale (MESCH [So5]). Dazu werden die beiden Signale mathematisch gefaltet:

$$K_{e,a}(\tau) = \frac{1}{t_P} \cdot \int_0^{t_P} (e(t-\tau) \cdot a(t)) dt \quad (2.2-16)$$

$$K_{e,a}(\Delta\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (e(i \cdot \Delta t - \Delta\tau) \cdot a(i \cdot \Delta t)) .$$

Anschaulich kann man sich die Faltung so vorstellen, dass das zweite Signal gegenüber dem ersten jeweils um Zeit  $\tau$  verschoben wird. Diese Verschiebung ist für zeitkontinuierliche Signale differentiell. Im vorliegenden Fall gibt es lediglich Lösungen zu bestimmten Zeitschritten, daher wird die Zeitverschiebung diskret ausgeführt. Nach der Verschiebung werden die beiden zugehörigen Signalwerte an jeder Position  $t$  miteinander multipliziert und alle Produkte zu einer Summe aufaddiert. Zu jeder Verschiebung wird eine solche Summe berechnet. Die Korrelationsfunktion ergibt sich, wenn die für jede Verschiebung  $\tau$  berechneten Werte als Funktion der Zeitverschiebung  $\tau$  dargestellt werden. Die Verzugszeit und damit auch der Phasenwinkel zwischen den Signalen lassen sich aus der Position des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion bestimmen (s. Abb. 2.2-3):

$$\tau_V(f) = \tau_P - \tau(K_{\max}) \Rightarrow \varphi(f) = -\tau_V(f) \cdot f \cdot 360^\circ . \quad (2.2-17)$$

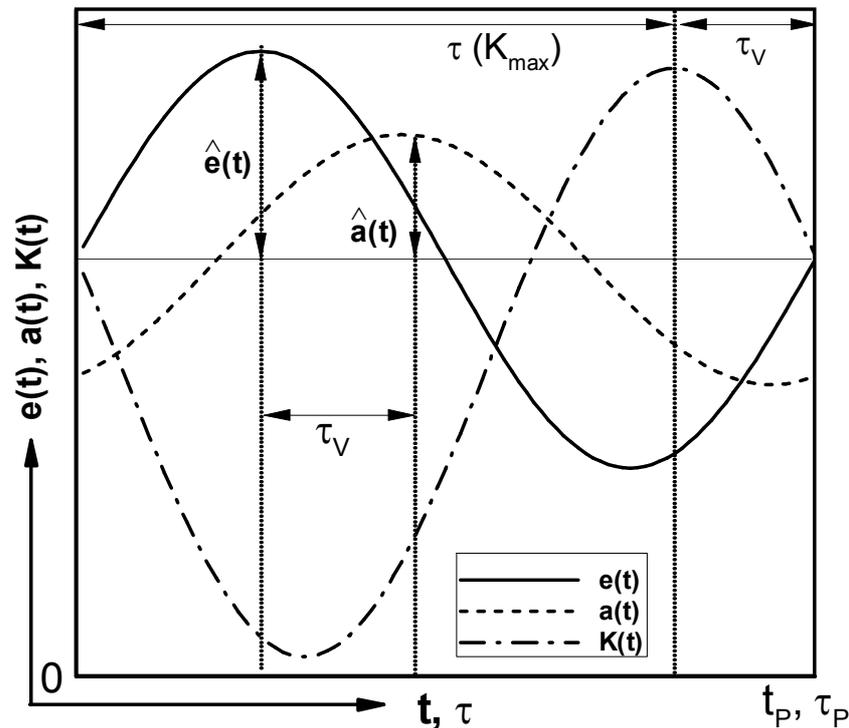


Abb. 2.2-3: Auswertung von Amplituden- und Phasengang aus der Kreuzkorrelation  
**Auswertung der Sprungantwort**

Der Düsenmassenstrom wird zum Zeitpunkt  $t=0$  ausgehend vom stationären Zustand sprunghaft erhöht. Unter Annahme eines linearen Systemverhaltens stellt die durch die Sprunghöhe dividierte Ausgangsgröße die Antwortfunktion auf einen Einheitssprung  $\sigma(t)$  und damit die Übergangsfunktion  $h(t)$  dar. Der Frequenzgang lässt sich aus dem Quotienten der Laplace-transformierten Größen Übergangsfunktion  $h(t)$  und Einheitssprung  $\sigma(t)$  berechnen (WALTER [So3]). Für rein harmonische Signale vereinfacht sich die bei der Laplace-Transformation verwendete komplexe Variable  $s = \sigma + j\omega$  zu einer rein imaginären Größe  $s = j\omega$ :

$$F(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\mathcal{L}\{h(t)\}}{\mathcal{L}\{\sigma(t)\}} = j\omega \cdot \mathcal{L}\{h(t)\} \quad (2.2-18)$$

### Auswertung der Stoßantwort

Der Düsenmassenstrom wird zum Zeitpunkt  $t=0$  ausgehend vom stationären Zustand für eine kurze Zeitspanne erhöht. Unter Annahme eines linearen Systemverhaltens stellt die durch die Impulsfläche des Testsignals dividierte Ausgangsgröße die Antwortfunktion auf einen Dirac-Stoß  $\delta(t)$  und damit die Gewichtsfunktion  $g(t)$  dar. Der Frequenzgang lässt sich aus dem Quotienten der Laplace-transformierten Größen Gewichtsfunktion  $g(t)$  und Dirac-Funktion  $\delta(t)$  berechnen (WALTER [So3]):

$$F(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\mathcal{L}\{g(t)\}}{\mathcal{L}\{\delta(t)\}} = 1 \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \quad . \quad (2.2-19)$$

Der Frequenzgang lässt sich aber auch direkt aus der Fourier-Transformation der Gewichtsfunktion ermitteln (KORN [So9]):

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad .$$

Diese Vorgehensweise wird in Kap. 8.5 zur Bestimmung von Frequenzgängen turbulenter Axialstrahlflammen angewendet und dort zur Unterscheidung mit der oben angeführten *direkten* Methode als *indirekte* Methode bezeichnet.

### 2.2.1.8 Dynamisches Verhalten turbulenter Vormischflammen

Es gibt eine große Anzahl von Veröffentlichungen, die sich mit der experimentellen oder numerischen Untersuchung der Wechselwirkung von Wirbeln mit Flammenfronten beschäftigen. Schwerpunkt dieser Arbeiten ist meist die Erforschung der Interaktion von Turbulenz und Chemie. Stellvertretend seien hier die Arbeiten von GERLINGER [Va18], ASHURST [Va19] und MUELLER [Va20] genannt.

Die Modellierung turbulenter ebener Wirbelstrukturen bei zusätzlicher überlagerter Verbrennung im Hinblick auf die Entstehung von Verbrennungsinstabilitäten wird von THIBAUT [Vi30] und NAJM [Vi31] vorgestellt. Die Dynamik der Flammenfront wird dabei durch Ansätze kinematischer Art beschrieben und nicht über ein mittels Turbulenzmodellen berechnetes Mischungsfeld gesteuert. Damit ist prinzipiell die Vorhersage der Position der instationären Flammenfront möglich, eine realistische Beschreibung des zeitlichen Verlaufes der Wärmefreisetzungsrate ist damit aber nicht zu erreichen. Von SCHÖNFELD [Vi28] wird die LES-Modellierung eines pulsierten turbulenten Axialstrahles mit überlagerter Verbrennung diskutiert, wobei leider kein Vergleich mit Messdaten gezeigt wird. SCHLÜTER [Vi34] beweist mittels LES-Rechnungen, dass die Interaktion von Ringwirbeln mit turbulenten Flammen durch einen Coflow vermindert werden kann.

Um die Thematik einzugrenzen, werden im Weiteren ausschließlich Arbeiten zitiert, in denen Aussagen über das frequenzabhängige dynamische Verhalten von unverdrallten Flammen enthalten sind bzw. in denen Frequenzgänge von unverdrallten Flammen diskutiert werden.

Zunächst sollen jedoch die typischen Charakteristiken von gemessenen Frequenzgängen von *unverdrallten turbulenten Flammen* anhand eines Bode-Diagrammes beschrieben werden (s. Abb. 2.2-4). Auch die Frequenzgänge von Flammen mit abweichenden Eigenschaften (z. B. laminar, verdrallt) zeigen im Allgemeinen ähnliche Charakteristiken. Die *Amplitudenkennlinie* startet für kleine Frequenzen bei 0 dB. In diesem Bereich verhält

sich die Flamme zu jedem Zeitpunkt innerhalb der Schwingungsperiode wie eine stationäre Flamme mit dem entsprechenden Frischgemischmassenstrom (quasistationäre Flamme). Für größere Frequenzen beginnt die Amplitude zunehmend abzufallen. Dies bedeutet, dass die ausgewertete Antwortgröße der Flamme in Bezug auf die Anregung eine immer kleiner werdende Amplitude liefert. In einigen experimentellen Daten sind im abfallenden Ast des Amplitudenganges Sattelpunkte zu erkennen, deren Höhe jedoch mit steigender Frequenz abnimmt. Zwischen den zwei asymptotischen Bereichen zeigt sich abhängig vom Flammentyp und den Betriebsbedingungen eine mehr oder weniger stark ausgeprägte Amplitudenüberhöhung. Diese Überhöhung ist unabhängig davon, ob der Frequenzgang aus Strahlungsmessungen einer freibrennenden Flamme oder aus Messungen der Druckschwankungen innerhalb der Brennkammer bei einer eingeschlossenen Flamme gewonnen wurde. Die *Phasenkennlinie* startet für kleine Frequenzen bei null Grad. Im Bereich der quasistationären Flamme tritt kein Phasenverzug zwischen Anregung und Antwort auf. Für wachsende Frequenzen wird der Phasenverzug zunehmend größer und strebt gegen minus unendlich. Dies weist darauf hin, dass eine Flamme ein totzeitbehaftetes System darstellt.

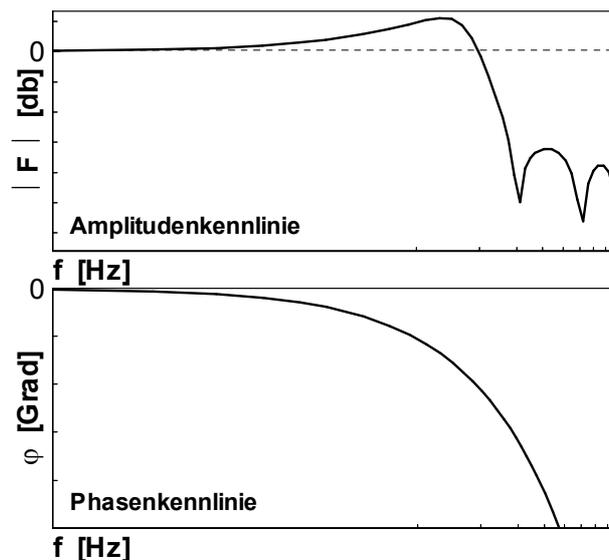


Abb. 2.2-4: Typischer gemessener Frequenzgang einer turbulenten Flamme

### Experimentelle Untersuchungen

LENZ [Vi2] untersuchte das dynamische Verhalten eingeschlossener turbulenter Vormischflammen mit Hilfe des Druckmessverfahrens. Dazu wird zunächst das Druckübertragungsverhalten der isotherm durchströmten Brennkammer gemessen. Danach wird der Gesamtfrequenzgang des angeregten Systemes Flamme/Brennkammer durch Auswertung des statischen Brennkammerdruckes bestimmt. Da sich der Gesamtfrequenzgang aus dem Produkt der Einzelfrequenzgänge zusammensetzt, kann damit der Flammenfrequenzgang ermittelt werden. Der Vergleich mit Flammenfrequenzgängen, die unter Verwendung der OH-Strahlungsmesstechnik gewonnen wurden, zeigt eine gute Übereinstimmung. Aus den Ergebnissen leitet LENZ folgendes Frequenzgangmodell her:

$$F(j\omega) = \frac{e^{-j\omega\tau_{tot}}}{1 + \frac{2D \cdot j\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (2.2-20)$$

Dies entspricht einer Überlagerung eines Verzögerungsgliedes 2. Ordnung mit einem Totzeitglied. Die Parameter Totzeit  $\tau_{tot}$ , Dämpfungsfaktor  $D$  und Eckfrequenz  $\omega_0$  werden durch Anpassung an die Messwerte festgelegt. Mit dieser Methode können die gemessenen Frequenzgänge sehr gut approximiert werden.

In den Arbeiten von BÜCHNER [Vi1,Vi3] und KÜLSHEIMER [Vi5,Vi6,Vi13] werden gemessene Frequenzgänge von turbulenten vorgemischten Axialstrahlflammen gezeigt, die unter Verwendung der OH-Strahlungsmesstechnik gewonnen wurden. Variiert wurden die Betriebsparameter thermische Leistung, Amplitude der Anregung (Pulsationsgrad), Luftzahl sowie die Einschließung. Von KÜLSHEIMER ET AL [Vi9] und LOHRMANN ET AL [Vi9] wurden zahlreiche Messungen von Frequenzgängen vorgemischten turbulenten Drallflammen durchgeführt. In allen diesen Arbeiten wird die Gültigkeit der Modellvorstellung eines idealen Totzeitgliedes für das dynamische Verhalten der Flamme favorisiert. Es wird gezeigt, dass das Phasenverhalten der entsprechenden Flammen im betrachteten Frequenzbereich von bis zu 250 Hz sehr gut mit dem Phasenverhalten eines idealen Totzeitgliedes approximiert werden kann. Die Verzugszeit dieses Totzeitgliedes entspricht einer typischen Gesamtverzugszeit, die sich aus der Analyse der entsprechenden stationären Flamme entnehmen lässt. Der Amplitudengang eines idealen Totzeitgliedes liegt konstant bei 0 dB. Alle Messungen zeigen jedoch ein davon abweichendes Verhalten, die Amplitudenkennlinie fällt für wachsende Frequenzen zunehmend ab. Die Autoren führen die Abweichung zwischen Messdaten und Modellvorstellung vollständig auf einen Effekt der verwendeten OH-Strahlungsmesstechnik zurück. Die durch die auftretenden Ringwirbel verursachte Einmischung von kaltem Umgebungsmedium führt zu einer Erhöhung der Luftzahl in der Reaktionszone und in Folge zu einem Rückgang der Verbrennungstemperatur sowie des Mittelwertes und der Amplitude der gemessenen Strahlungsintensität.

PRIESMEIER [Vi14] untersuchte das dynamische Verhalten von pulsierten turbulenten Diffusionsflammen. Die über die OH-Strahlung ausgewerteten Frequenzgänge weisen ebenfalls die in Abb. 2.2-4 zu identifizierenden Charakteristiken auf. PRIESMEIER zeigt, dass die relativ lange Diffusionsflamme in drei Zonen eingeteilt werden kann, die ein unterschiedliches dynamisches Verhalten aufweisen und für die sich einzelne Frequenzgänge bestimmen lassen. Die komplexe Überlagerung dieser Zonenfrequenzgänge stimmt sehr gut mit dem ebenfalls gemessenen Gesamtfrequenzgang überein. Bei der Überlagerung entstehen durch wechselnde Phasenlagen sowohl Amplitudenüberhöhungen als auch zusätzliche Ausblendeffekte, was zu den im Amplitudengang auftretenden Sattelpunkten führt.

### Analytische Untersuchungen

LENZ [Vi2] leitet den Frequenzgang einer idealen kegelförmigen Vormischflamme analytisch unter der Voraussetzung her, dass sich eine Geschwindigkeitsänderung am

Eintritt mit der Strömungsgeschwindigkeit ausbreitet. Die Ausbrandfunktion wird als Übergangsfunktion interpretiert. Aus der Laplace-Transformation des Quotienten aus Übergangsfunktion und Sprungfunktion ergibt sich der Frequenzgang:

$$F(j\omega) = \frac{-2}{(j\omega \tau_{Max})^2} \cdot \left[ 1 - j\omega \tau_{Max} - e^{-j\omega \tau_{Max}} \right] \quad \text{mit} \quad \tau_{Max} = \frac{H}{u_0} \quad . \quad (2.2-21)$$

DEUKER [Vi25] arbeitet heraus, dass sich eine Störung am Eintritt nicht mit Strömungsgeschwindigkeit, sondern mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet und kommt damit für eine ebene laminare Vormischflamme, die sich über einem Schlitz der Breite  $B$  ausbildet, zu folgender Formulierung des Frequenzganges:

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega \tau_{Max}} \cdot \left[ 1 - e^{j\omega \tau_{Max}} \right] \quad \text{mit} \quad \tau_{Max} = \frac{B}{2S_l} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{S_l}{u_0} \right)^2}} \quad . \quad (2.2-22)$$

Beide Modelle ergeben für große Frequenzen einen maximalen Phasenverzug von  $-90^\circ$  bzw.  $-180^\circ$ . Dieses Verhalten widerspricht jedoch experimentellen Ergebnissen, bei denen die Phasenkennlinie gegen  $-\infty$  läuft.

SCHULLER ET AL. [Vi27] leiten eine analytische Lösung für den Frequenzgang idealer vorgemischter Kegelflammern unter Verwendung der G-Transportgleichung (s. Kap. 2.3.2.2) her. Für eine sich durch die Flammenfront bewegende axiale Geschwindigkeitswelle ergibt sich die folgende Lösung:

$$F_1(j\omega) = \frac{2}{\omega_*^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha} \cdot \left[ 1 - e^{j\omega_*} + \frac{e^{j\omega_* \cos^2 \alpha} - 1}{\cos^2 \alpha} \right] \quad . \quad (2.2-23)$$

Weist die durchlaufende Geschwindigkeitswelle eine große Länge auf, so ist die Geschwindigkeitserregung ortsunabhängig und die Übertragungsfunktion lässt sich vereinfachen:

$$F_2(j\omega) = \frac{2}{\omega_*^2} \cdot \left[ 1 - e^{j\omega_*} + j\omega_* \right] \quad . \quad (2.2-24)$$

Ersetzt man hierbei die vom Öffnungswinkel  $\alpha$  der Flamme abhängige, dimensionslose Frequenz  $\omega^*$  mit

$$\omega_* = \frac{\omega \cdot R_0}{S_l \cdot \cos \alpha} = \frac{\omega \cdot R_0}{S_l \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{S_l}{u_0}\right)^2}} = \omega \cdot \tau_{Max} \quad , \quad (2.2-25)$$

so ergibt sich der Frequenzgang:

$$F_2(j\omega) = \frac{-2}{(j\omega \tau_{Max})^2} \cdot \left[ 1 + j\omega \tau_{Max} - e^{j\omega \tau_{Max}} \right] \quad . \quad (2.2-26)$$

Es wird gezeigt, dass damit das gemessene Amplitudenverhalten einer laminaren Vormischflamme gut wiedergegeben werden kann. Das Phasenverhalten der realen Flamme bewegt sich jedoch zwischen den von den asymptotischen Frequenzgängen  $F_1(j\omega)$  und  $F_2(j\omega)$  beschriebenen Phasenkenlinien.

SUGIMOTO [Vi29] stellt einen Flammenfrequenzgang vor, der einen frequenzabhängigen Parameter  $\beta$  enthält:

$$F(j\omega) = \frac{-2}{(j\omega - \beta)^2 \tau_{Max}^2} \cdot \left[ 1 - (j\omega - \beta) \tau_{Max} - e^{-(j\omega - \beta) \tau_{Max}} \right] \quad \text{mit} \quad \tau_{Max} = \frac{H}{u_0} \quad (2.2-27)$$

Für kleine Frequenzen ist  $\beta = 0$  und es ergibt sich das Modell von LENZ. Der Frequenzgang ist in der Lage, das gemessene Verhalten einer laminaren Vormischflamme in Amplitude und Phase bis zu Frequenzen von einigen hundert Hertz auch quantitativ wiederzugeben.

Um das Schwingungsverhalten von Raketentriebwerken und Industriefeuerungen analytisch zu untersuchen, wird von CROCCO & CHENG [Vi36] und PUTNAM [Vi37] das Übertragungsverhalten der verwendeten Flammen zunächst als einfaches Totzeitglied abgeschätzt. Die mittlere Totzeit lässt sich aus der Flammgeometrie und der Strömungsgeschwindigkeit berechnen. In beiden Arbeiten wird diese Modellvorstellung im Weiteren durch die Annahme einer Totzeitverteilung verfeinert. Damit lässt sich die inhärente Neigung des Konzeptes der Vormischverbrennung zum Auftreten von Verbrennungsschwingungen erklären. Turbulente Vormischflammen weisen meist hohe Reaktionsdichten auf und sind damit räumlich sehr kompakt bzw. kurz. Damit ergeben sich kleine konvektive Verzugszeiten, die außerdem relativ enge Verteilungsbreiten aufweisen. Je länger eine Flamme ist, desto wahrscheinlicher ist es, dass verschiedene Teile der Flamme bei hohen Frequenzen in verschiedenen Phasenlagen zueinander stehen und die Schwingungsneigung damit vermindert wird. Deshalb zeigen Diffusionsflammen in der Regel eine größere Stabilität gegenüber dem Auftreten von Verbrennungsschwingungen.

## Numerische Untersuchungen

Zur Modellierung von Flammenfrequenzgängen realer Flammen mit Feldmodellen sind nur wenige Untersuchungen dokumentiert. KRÜGER ET AL. [14] berechneten das Übertragungsverhalten von laminaren Vormischflammen durch sprunghaftes Erhöhen des Einlassmassenstromes um 15% und nachfolgender Analyse der Sprungantwort durch eine Laplace-Transformation (indirekte Methode). Es wird gezeigt, dass sich die laminare Flamme für diese Sprunghöhe wie ein lineares System verhält. Der so gewonnene Frequenzgang weist die typische Eigenschaften von gemessenen Frequenzgängen auf. Leider ist kein direkter Vergleich mit Messdaten gezeigt. BOHN ET AL. [Vi18,Vi24] wenden die gleiche Methode auf die von PRIESMEIER [Vi14] untersuchten turbulenten Diffusionsflammen an. Der Vergleich zwischen Messung und Rechnung ergibt jedoch nur eine gute qualitative Übereinstimmung.

Ein weiterer Ansatz zur Beschreibung des Flammenverhaltens ist die Analyse der Verweilzeitverteilung mittels CFD-Rechnungen. FLOHR ET AL. [Vi32] bestimmen die Verweilzeitverteilung einer stationären turbulenten Vormischflamme durch im Postprocessing durchgeführte Partikelverfolgung. Die Berücksichtigung der turbulenten Diffusion führt zu einer Dispersion der Verweilzeitverteilung. Der daraus gewonnene Frequenzgang ergibt jedoch nur eine qualitative Übereinstimmung mit Messdaten.

KREBS ET AL. [Vi33] gewinnen die Verweilzeitverteilung einer vorgemischten Drallflamme durch Lösen von zwei zusätzlichen Transportgleichungen. Daraus bestimmen sie eine mittlere Verweilzeit, die als Totzeit eines idealen Totzeitgliedes angesetzt wird. Der sich ergebende Phasengang zeigt einen zu kleinen Phasennachlauf. Möglicherweise liegt dies jedoch daran, dass die Modellierung die reale Flamme nicht adäquat abbildet. Leider ist kein Vergleich von berechneten und gemessenen Feldgrößen gezeigt.

## 2.2.2 Modellierung turbulenter Vormischflammen

### 2.2.2.1 Klassifizierung

In einer turbulenten Strömung tragen die großen Wirbel den Hauptanteil der turbulenten kinetischen Energie. In einem Energiekaskadenprozess wird diese dann an kleinere Elemente weitergegeben, bis sie dann in den kleinsten Wirbelelementen dissipiert und in innere Energie des Fluids überführt wird. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die kleinen Elemente nur für die Dissipation verantwortlich sind. So ist etwa die hohe Diffusivität turbulenter Strömungen nur durch das Vorhandensein sowohl großer als auch kleiner Wirbel möglich. Die großen Elemente transportieren größere Fluidballen und damit verbunden auch Impuls, Stoff und Energie über relativ große Distanzen, können jedoch keine molekulare Vermischung hervorrufen. Diese Grobstrukturen werden aber sehr schnell von den kleineren Wirbeln aufgelöst. Sie bauen dabei, wie bei den Geschwindigkeitsgradienten, hohe Konzentrationsgradienten auf, so dass molekulare Austauschprozesse greifen können. Diese sind die Voraussetzung für den Ablauf chemischer Reaktionen. Die Verbrennungsreaktionen laufen dabei in der Regel in

Bereichen kleiner Längen- und Zeitskalen ab. Eine turbulente Flamme lässt sich im Betriebsbereich vieler technischer Anwendungen als ein Ensemble gewinkelter Reaktionszonen, sog. Flamelets auffassen. Diese weisen für schwache Turbulenz weitgehend die Struktur von laminaren Flammen auf, entfernen sich von dieser jedoch mit steigenden Turbulenzgraden.

Turbulente Flammen zeichnen sich also durch das Vorhandensein einer großen Bandbreite von Längen- und Zeitmaßstäben, sogenannter Skalen aus, wobei sich diese gegenseitig beeinflussen. Die Klassifizierung der Interaktion von Turbulenz und Reaktionszonen lässt sich in einem Strukturdiagramm darstellen (s. Abb. 2.2-5, z. B. BORGHI [Va7], PETERS [Va5], LEUCKEL [S2]). In diesem werden verschiedenen Klassen von möglichen Interaktionen in turbulenten Vormischflammen als Funktion dimensionsloser Kennzahlen dargestellt. Ein wichtiger Ordnungsparameter ist dabei das physikalische Prinzip, dass die Wahrscheinlichkeit der Beeinflussung unterschiedlicher Skalen umso geringer wird, je größer die Skalentrennung ist. Das vollständige Wirbelspektrum wird dabei durch die Klasse der energietragenden Elemente und die Klasse der dissipativen Kolmogorov-Wirbel repräsentiert. Die Skalen der Flamme werden mit den typischen Maßstäben der laminaren Flammenfront parametrisiert. Die Struktur einer laminaren Vormischflamme lässt sich in die drei Bereiche Vorwärmzone, Reaktionszone und Ausbrandzone aufteilen (z. B. HOFFMANN [Va8]). Die Vorwärmzone zeichnet sich durch die Prozesse Wärmeleitung und Stoffdiffusion (z. B. Radikale) aus. Die eigentliche Wärmeabgabe durch Umsetzung des Brennstoffes in die stabilen Zwischenprodukte  $H_2$  und  $CO$  erfolgt jedoch erst in der Reaktionszone. Die Dicke der Reaktionszone  $L_{Reaktion}$  kann zu der Dicke der Flammenfront  $L_{Flamme}$  über einen Parameter  $\delta_{RF}$  in Beziehung gesetzt werden

$$\delta_{RF} = \frac{L_{Reaktion}}{L_{Flamme}} \quad (2.2-28)$$

Der Parameter  $\delta_{RF}$  ist eine Funktion des Drucks und der Vorwärmtemperatur und kann für stöchiometrische Methan/Luft-Gemische unter Standardbedingungen zu ca. 0,1 abgeschätzt werden (PETERS [Va5]). In der Ausbrandzone werden die stabilen Zwischenprodukte zu den Verbrennungsendprodukten  $CO_2$  und  $H_2O$  oxidiert. Diese Reaktionen sind für die Bestimmung der laminaren Flammgeschwindigkeit  $S_l$  von nachgeordneter Bedeutung. Die zur Erstellung des Strukturdiagrammes verwendeten Skalen sind in Tab. 2.3-1 aufgeführt.

Auf der Ordinate des Strukturdiagrammes ist das Verhältnis der integralen Längenskalen von Turbulenz und Flamme  $L_t/L_{Flamme}$  aufgetragen, auf der Abszisse das Verhältnis der integralen Geschwindigkeitsskalen  $u'/S_l$ . Im Diagramm lassen sich verschiedene Bereiche identifizieren, die durch typische Skalenverhältnisse voneinander abgetrennt sind. Der lokale Turbulenzzustand lässt sich anhand der turbulenten Reynoldszahl definieren

$$Re_t = \frac{u' \cdot L_t}{\nu} \quad (2.2-29)$$

Ist deren Nenner (Trägheitskräfte) größer als der Zähler (Zähigkeitskräfte) so liegt eine turbulente Strömung vor. Ist die kinematische Viskosität gleich groß wie der repräsentative Diffusionskoeffizient der Mischung, so ist die Schmidtzahl  $Sc = \nu/D = 1$  und die turbulente Reynoldszahl lässt sich als Funktion von turbulenten und chemischen Skalen schreiben:

$$Re_t = \frac{u'}{S_l} \cdot \frac{L_t}{L_{Flamme}} = Da_t^2 \cdot Ka_t^2 \quad . \quad (2.2-30)$$

Tab. 2.3-1: Charakteristische Maßstäbe von Turbulenz und Reaktion, bzw. Flamme

	Turbulenzstruktur		Flammenstruktur	
	integrale Skalen	dissipative Skalen	integrale Skalen	Skalen der Reaktionszone
Längenmaß	$L_t \sim \frac{k^{3/2}}{\epsilon}$	$L_\eta = \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}$	$L_{Flamme} \sim \frac{D}{S_l}$	$L_R \sim \delta_{RF} \cdot L_{Flamme}$
Geschwindigkeitsmaß	$u' \sim \sqrt{k}$	$u_\eta = (\nu \cdot \epsilon)^{1/4}$	$S_l$	$S_l$
Zeitmaß	$\tau_t \sim \frac{k}{\epsilon} \sim \frac{L_t}{u'}$	$\tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2}$	$\tau_{Flamme} \sim \frac{L_{Flamme}}{S_l}$	$\tau_R \sim \frac{L_{Reaktion}}{S_l}$

Die turbulente Damköhlerzahl beschreibt das Verhältnis der integralen Zeitskalen von Turbulenz und Flamme (bzw. des chemischen Zeitmaßes)

$$Da_t = \frac{\tau_t}{\tau_{Flamme}} = \frac{S_l}{u'} \cdot \frac{L_t}{L_{Flamme}} \quad . \quad (2.2-31)$$

Die turbulente Karlovitzzahl beschreibt das Verhältnis der dissipativen Zeitskala der Turbulenz und integraler Zeitskala der Flamme. Diese lässt sich unter Verwendung der dissipativen Turbulenzskalen  $L_\eta$  oder auch der integralen Turbulenzskalen  $L_t$  definieren:

$$Ka_\eta = \frac{\tau_{Flamme}}{\tau_\eta} = \frac{u_\eta}{S_l} \cdot \frac{L_{Flamme}}{L_\eta} \quad \equiv \quad Ka_t = \left( \frac{u'}{S_l} \right)^{3/2} \cdot \left( \frac{L_t}{L_{Flamme}} \right)^{-1/2} \quad . \quad (2.2-32)$$

Eine zweite Karlovitzzahl lässt sich auf der Basis der Reaktionszonendicke  $L_{Reaktion}$  definieren:

$$Ka_R = \left( \frac{L_{Reaktion}}{L_\eta} \right)^2 = \delta_{RF}^2 \cdot Ka_\eta \quad . \quad (2.2-33)$$

Die durch typische Werte der Skalenverhältnisse abgeteilten Bereiche des Strukturdiagrammes weisen charakteristische Eigenschaften der Interaktion von Strömung und Reaktion bzw. von Turbulenz und Flammenfront auf.

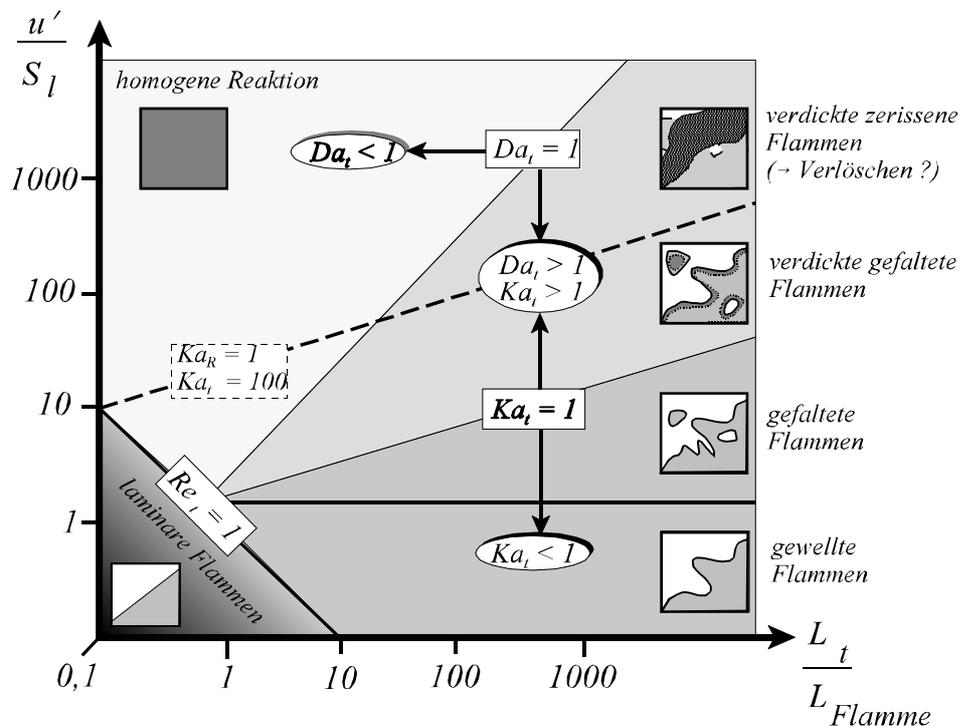


Abb. 2.2-5: Strukturdiagramm der Vormischverbrennung

- $Re_t < 1$ : Bereich der laminaren Flammen.
- $Ka_t < 1$ : Dieser Bereich wird als Flameletbereich bezeichnet. Die Reaktionszone wird durch die Turbulenz lediglich deformiert. Dadurch bedingte Effekte wie die bevorzugte Diffusion von Wärme und Stoff spielen eine zunehmende Rolle. Die innere Struktur der Flamme gleicht jedoch weiterhin der eindimensionalen Struktur einer laminaren Flamme. Der Grad der Aufwellung wird durch das Verhältnis  $u'/S_l$  bestimmt. Wenn dieses Verhältnis größer als eins wird, so ist eine gegenseitige Interaktion benachbarter Flammenfronten gegeben.
- $1 < Ka_t < Ka_R$ : In diesem Bereich sind die kleinsten Turbulenzelemente in der Lage, die gegenüber der eigentlichen Reaktionszone relativ ausgedehnte Vorwärmzone zu beeinflussen. Diese wird dadurch aufgedickt. Die Reaktionszone an sich bleibt dabei jedoch unbeeinflusst.
- $Ka_t > Ka_R$ : In diesem Bereich sind die kleinsten Turbulenzelemente so klein, dass sie in die Reaktionszone eindringen können. Die Bedingungen unter den hier vorliegenden großen turbulenten Reynoldszahlen sind zum einen experimentell äußerst schwierig zu untersuchen, zum anderen reicht die derzeitige Rechnerkapazität noch nicht aus, um das Problem mittels systematischer DNS-Rechnungen anzugehen. Deshalb gehen die Meinungen über die ablaufenden

Prozesse weit auseinander und reichen vom Postulat der Flammenlöschung bis zur Annahme eines kontinuierlichen Überganges in den Bereich der homogenen Reaktion.

- $Da_t < 1$ : In diesem Bereich spricht man von einer homogenen, d. h. ortsunabhängigen, bzw. verteilten Reaktion. Der Begriff der Flammenfront verliert hier seine Bedeutung.

### 2.2.2.2 Methoden der Modellierung

Zum besseren Verständnis wird im Folgenden angenommen, dass sich die Verbrennungschemie durch eine einzige Fortschrittsvariable  $c$  beschreiben lässt. Diese nimmt den Wert Null im unverbrannten und den Wert Eins im verbrannten Gemisch an. Das Grundproblem der Verbrennungsmodellierung besteht dabei in der Bestimmung des Reaktionsquellterms  $\bar{\omega}_c$  der Transportgleichung für den Reaktionsfortschritt. Dieser Quellterm beinhaltet jegliche Information über die Interaktion von Turbulenz und Chemie. Es lassen sich verschiedene prinzipielle Ansätze für die Modellierung des Reaktionsquellterms bei der Berechnung turbulenter Vormischflammen unterscheiden. Einen guten Überblick liefern die Arbeiten von PETERS [Va5] und HOFFMANN [Va8] ).

- Beschreibung mit statistischen Methoden:

Der Reaktionsfortschritt wird durch eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $P(c, \vec{x})$ , oder PDF (engl. Probability Density Function) ausgedrückt. Diese gibt an, mit welcher statistischer Wahrscheinlichkeit der Reaktionsfortschritt  $c$  am einem bestimmten Ort  $\vec{x}$  in einem Intervall der Breite  $dc$  liegt. Durch Wichtung der momentanen, durch einen entsprechenden Reaktionsmechanismus bestimmten Umsatzrate  $\bar{\omega}_c$  mit deren Wahrscheinlichkeit ergibt die zeitlich gemittelte Umsatzrate

$$\bar{\omega}_c(\vec{x}) = \int_0^1 \bar{\omega}_c \cdot P(c, \vec{x}) dc \quad . \quad (2.2-34)$$

Die Form der PDF's kann dabei entweder aus entsprechenden Transportgleichungen ermittelt werden (sog. Transport-PDF Modelle) oder aus typischen vorgegebenen Funktionen, z. B. Gauss- oder  $\beta$ -PDF, bestimmt werden (sog. presumed PDF-Modelle).

- Beschreibung auf Basis der skalaren Dissipationsrate

Die skalare Dissipationsrate beschreibt die Relaxationsgeschwindigkeit von Fluktuationen aufgrund von molekularer Mischung. Modelle dieser Kategorie basieren auf der Annahme, dass die Zeitskala der Reaktion immer kleiner ist als die Zeitskala der turbulenten Mischung  $Ka_t \ll 1$ . Dabei wird davon ausgegangen, dass die Reaktionsgeschwindigkeit ausschließlich über die durch das turbulente Zeitmaß gesteuerte molekulare Feinmischung abhängt. Da der Umsatz proportional zu der Geschwindigkeit ist, mit der Reaktanden und Reaktionsfronten in Kontakt kommen,

erscheint die skalare Dissipationsrate direkt oder indirekt im Reaktionsquellterm. Zu dieser Modellkategorie gehören die verschiedenen *Wirbelzerfallsansätze*, die das Zeitmaß der Mischung über eine charakteristische Lebenszeit turbulenter Wirbel ausdrücken  $\tau \sim k/\epsilon$ .

- Beschreibung auf Basis der Flammenfrontgeometrie:

Die Modellansätze dieser Klasse beschreiben die Kinematik der Flammenfront. Es wird dabei davon ausgegangen, dass die eigentliche Reaktionsfront dünn gegenüber dem integralen Längenmaß ist. Die Gültigkeit ist damit auf den Flamelet-Bereich  $Ka_f < 1$  begrenzt. Zur Beschreibung der Topologie der Reaktionsfortschrittsvariablen gibt es unterschiedliche Methoden: Feldgleichungen für Isoflächen des Reaktionsfortschrittes (z.B. G-Gleichung), Bilanzgleichungen für die Flammenfrontdichte und Bilanzgleichungen für die Flammenfrontkrümmung.

- Beschreibung auf Basis der turbulenten Brenngeschwindigkeit:

Modelle dieser Art werden auch als TFC (Turbulent Flamespeed Closure) Ansätze bezeichnet. Der Reaktionsquellterm  $\overline{\dot{\omega}}_c$  wird dabei in Abhängigkeit einer turbulenten Flammengeschwindigkeit formuliert. Modelle dieser Art eröffnen die einfache Möglichkeit, experimentell oder analytisch bestimmte Korrelationen der turbulenten Flammengeschwindigkeit zu implementieren. Das in dieser Arbeit verwendete und in Kap. 2.3.2.3 beschriebene PHP-Modell zählt ebenfalls zu dieser Kategorie.

### 2.2.2.3 Das PHP-Modell

#### Modellierungsstrategie

Für die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse der Modellierung turbulenter Vormischflammen wurde das PHP (Premixed High Performance)-Verbrennungsmodell von SCHMID ([Va9], [Va10]) verwendet. Es zählt zur Klasse der TFC-Ansätze (s. o.). SCHMID geht davon aus, dass das charakteristische Zeitmaß der turbulenten Umsatzgeschwindigkeit  $\tau_{Ums}(\kappa)$  eines Wirbels im Turbulenzspektrum als proportional zur quadratischen Überlagerung der charakteristischen Zeiten von skalarer Dissipation (molekulare Vermischung)  $\tau_{Diss}(\kappa)$  und chemischer Reaktion  $\tau_{chem}(\kappa)$  formuliert werden kann. Diese Überlagerung wird durch einen quadratischen Ausdruck repräsentiert, der der Annahme Rechnung trägt, dass diese beiden Prozesse nicht genau hintereinander ablaufen, sondern sich, abgesehen von den limitierenden Grenzfällen, zumindest teilweise überlagern.  $\tau_{Ums}(\kappa)$  wird dabei als proportional zur inversen spektralen Umsatzrate  $\dot{\omega}(\kappa)$  angenommen.

$$\tau_{Ums}(\kappa) = \sqrt{\tau_{Diss}^2(\kappa) + \tau_{chem}^2(\kappa)} \sim \frac{1}{\dot{\omega}(\kappa)} \quad (2.2-35)$$

Durch Integration dieser Beziehung über alle Wellenzahlen  $\kappa$  ergibt sich für die Umsatzrate:

$$\bar{\omega}_{Ums} = \left( \tau_{chem}^2 + 0,09 \cdot \tau_t^2 \right)^{-1/2} = \frac{1}{\tau_t} \cdot \left( 1 + Da_t^{-2} \right)^{-1/2} \quad (2.2-36)$$

Die Umsatzrate hängt allein vom chemischen Zeitmaß  $\tau_{chem}$  und dem Makrozeitmaß der Turbulenz  $\tau_t$  ab. Die Damköhlerzahl stellt das Verhältnis des Turbulenzzeitmaßes und des charakteristischen chemischen Zeitmaßes dar. Sie ist bei der von SCHMID [Va9] angewendeten Vorgehensweise wie folgt definiert:

$$Da_t = \frac{\tau_t}{\tau_{chem}} = 0,09 \cdot \frac{L_t}{u'} \cdot \frac{1}{\tau_{chem}} = \frac{0,09}{4,96} \cdot \frac{\tilde{k}}{\tilde{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\tau_{chem}} \quad (2.2-37)$$

Als chemisches Zeitmaß wird hierbei das Zeitmaß der Wärmefreisetzung verwendet. Um dieses zu bestimmen, wurden Rechnungen mit laminarer Flammen mit einem detaillierten Mechanismus durchgeführt. Aus der thermischen Theorie der laminaren Brenngeschwindigkeit ist der Zusammenhang zwischen der laminaren Brenngeschwindigkeit  $S_l$ , der Temperaturleitfähigkeit  $\alpha$  und dem chemischen Reaktionszeitmaß  $\tau_{chem}$  bekannt:

$$S_l = C_{chem} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\tau_{chem}}} \quad (2.2-38)$$

Die Analyse ergab, dass die Konstante  $C_{chem}$  näherungsweise unabhängig von der Luftzahl ist, jedoch von der Brennstoffart abhängt. Für Methan ergab sich ein typischer Wert von  $C_{chem} = 1,1$ . Die angegebene Beziehung für die laminare Brenngeschwindigkeit kann formal auch auf turbulente Verhältnisse übertragen werden. Analog zur laminaren Brenngeschwindigkeit wird die turbulente Brenngeschwindigkeit  $S_t$  als Gleichgewichtsgröße zwischen turbulentem Wärmetransport und reaktionskinetischer Energieumwandlung bzw. Zeitmaß des Reaktionsumsatzes betrachtet:

$$S_t \sim \sqrt{\frac{\alpha_t}{\tau_{Ums}}} \sim \sqrt{\Gamma_t \cdot \bar{\omega}_{Ums}} \sim \sqrt{u' \cdot L_t \cdot \bar{\omega}_{Ums}} \quad (2.2-39)$$

Wird Gl. 2.2.-38 in Gl. 2.2-39 eingesetzt, so ergibt sich eine Korrelation für die turbulente Brenngeschwindigkeit. In der üblichen Darstellung als Verhältnis zur laminaren Brenngeschwindigkeit ausgedrückt lautet diese:

$$\frac{S_t}{S_l} = 1 + Re_t^{1/2} \cdot \left( 1 + Da_t^2 \right)^{-1/4} \quad (2.2-40)$$

Der Summand Eins berücksichtigt dabei die Forderung, dass die Brenngeschwindigkeit

für verschwindende Turbulenz gegen den Wert der laminaren Strömung konvergieren muss. SCHMID [Va9] zeigt, dass diese Beziehung für große Damköhlerzahlen (gewellte Flammen) wie auch kleine Damköhlerzahlen (homogener Reaktor) gute Ergebnisse liefert. Die Grenzfallbetrachtungen liefern die schon von Damköhler postulierten Fälle für grobballige und feinballige Turbulenz, bzw. einer gegenüber dem Turbulenzzeitmaß schnellen oder langsamen Chemie:

$$Ka_t \ll 1, Da_t \gg 1 \Rightarrow \frac{S_t}{S_l} = 1 + \frac{u'}{S_l}, \quad Ka_t \gg 1, Da_t \ll 1 \Rightarrow \frac{S_t}{S_l} = C \cdot Re_t^{1/2} \quad (2.2-41)$$

Mit Hilfe des sog. KPP-Theorems kann die Beziehung für die turbulente Brenngeschwindigkeit in einen Reaktionsquellterm für die Transportgleichung des Brennstoffes umgewandelt werden (s. ZELDOVICH [Va11], SCHMID [Va9], HOFFMANN [Va8]):

$$\bar{\dot{\omega}}_{Br} = \frac{1}{4} \cdot \frac{S_t^2}{u' \cdot L_t} \quad (2.2-42)$$

In numerischen Rechnungen mit dem k-ε Modell müssen die Turbulenzwerte  $u'$  und  $L_t$  auf die turbulente kinetische Energie  $k$  und die turbulente Dissipationsrate  $\epsilon$  zurückgeführt werden. Bei isotroper Gleichgewichtsturbulenz gilt mit  $c_\mu = 0,09$ :

$$u' = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot k}, \quad L_t = c_\mu^{0,75} \cdot \frac{k^{3/2}}{\epsilon} \Rightarrow \frac{u'}{L_t} = 4,96 \cdot \frac{\epsilon}{k} \quad (2.2-43)$$

Damit ergibt sich die endgültige Formulierung des Reaktionsquelltermes für die Transportgleichung des Brennstoffes:

$$\bar{\dot{\omega}}_{Br} = 4,96 \cdot \frac{\epsilon}{k} \cdot \left( \frac{S_l}{\sqrt{2/3 k}} + \left(1 + Da_t^{-2}\right)^{-1/4} \right)^2 \cdot \bar{c} \cdot (1 - \bar{c}) \cdot \varrho_0 \cdot \sigma_{F,0} \left[ \frac{kmol}{m^3 \cdot s} \right] \quad (2.2-44)$$

Dabei bezeichnen  $\varrho_0$  die Frischgemischdichte und  $\sigma_{F,0}$  die spezifische Molzahl des Brennstoffes im Frischgemisch. Die Verwendung des Modelles lieferte schon bei der Berechnung verschiedener Flammensysteme (hochturbulente Vormischflammen mit [Va12] und ohne [Va13] Vorwärmung, Drallflammen [Va10], sphärische Flammen [Va9]) gute Ergebnisse. Nach SCHMID lässt sich dieses Verbrennungsmodell auch für Flammen deren Reaktionszone schon durch die Einmischung von Umgebungsluft beeinflusst ist (teilvergemischte Flammen) anwenden. In diesem Fall muss das lokale chemische Zeitmaß jedoch  $\tau_{chem}$  durch die Vorgabe einer entsprechenden luftzahlabhängigen laminaren Flammengeschwindigkeit variiert werden.

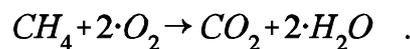
## Reaktionsfortschritt und Ausbrand

Als Maß für den globalen Fortschritt  $\bar{c}$  der Verbrennungsreaktion wird in dieser Arbeit der Ausbrandgrad  $\bar{a}$  verwendet. Dieser Ausdruck setzt auf Basis des Sauerstoffverbrauches der oxidativen Verbrennungsreaktion den bereits in Zwischen- und Endprodukten enthaltenen Sauerstoffanteil zu dem für die vollständige Oxidationsreaktion erforderlichen Sauerstoffanteil ins Verhältnis. Durch die von HABISREUTHER [Va3] eingeführte Formulierung lässt sich der Gültigkeitsbereich des normalerweise nur für unterstöchiometrische Verbrennung definierten Ausbrandgrades auf alle Stöchiometriebereiche erweitern:

$$\bar{c} \equiv \bar{a} = \frac{[O_2]_{\text{chemischgebunden}}}{\min([O_2]_{\text{erforderlich}}, [O_2]_{\text{vorhanden}})} \quad (2.2-45)$$

### Reaktionskinetik

Bei den hier durchgeführten Feldrechnungen stand die zeitliche Modellierung der Wärmefreisetzungsrates turbulenter Vormischflammen im Mittelpunkt. Beim verwendeten PHP-Verbrennungsmodell wird die lokale Wärmefreisetzungsrates mittels einer lokalen turbulenten Flammengeschwindigkeit modelliert. In diesem Zusammenhang interessiert weder die Bildung von Schadstoffen wie  $NO_x$ , noch die Bildung von stabilen oder instabilen Zwischenspezies wie  $H_2$  oder  $CO$ . Das PHP-Verbrennungsmodell verwendet daher eine Einschritt-Globalkinetik für den Brennstoffumsatz:



Dies erfordert lediglich die Lösung einer einzigen Transportgleichung für die Brennstoffkonzentration. Im vorliegenden Falls wurde eine zusätzliche Erhaltungsgleichung für die Konzentration von Methan (ausgedrückt als zeitgemittelte spezifische Molzahl  $\bar{\sigma}_{CH_4}$  [kmol/kg]) gelöst. Aus der lokalen Methankonzentration kann somit zusammen mit dem lokalen Mischungsbruch der lokale Ausbrand bestimmt werden und direkt auf die Konzentration aller anderen, in der Reaktionsgleichung beteiligten Spezies geschlossen werden.

#### 2.2.2.4 Enthalpieberechnung

Die in Kap. 2.1.3 diskutierten zeitgemittelten Impulsgleichungen und die Kontinuitätsgleichung bilden zusammen mit dem Turbulenzmodell die Basis zur Berechnung von turbulenten Strömungen. Bei inkompressibler isothermer Strömung ist die Dichte  $\rho$  dabei konstant und vorab bekannt. Zur Bestimmung der Dichte bei dichteveränderlichen Strömungen wird eine weitere Gleichung benötigt. Dazu wird die ideale Gasgleichung verwendet:

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{R \cdot \bar{T}} \quad .$$

In dieser taucht wiederum die Temperatur  $T$  als neue Unbekannte auf. Um bei der

Verbrennung aus dem umgesetzten Brennstoff die Temperatur bestimmen zu können, wird eine weitere Transportgleichung für die Enthalpie benötigt. In der vorliegenden Arbeit wurde dazu die spezifische Totalenthalpie  $\bar{h}$  verwendet. Sie setzt sich aus der Summe von thermischer und chemisch gebundener Enthalpie zusammen. Da in der vorliegenden Arbeit nur vorgemischte Flammen berechnet wurden, diese Flammen jedoch nahezu keinen Ruß produzieren ("Blaubrenner") wurde der Wärmeverlust durch Strahlung vernachlässigt. Da außerdem keine Wandwärmeverluste berücksichtigt wurden, stellt die Totalenthalpie damit eine konservierte Größe dar. Der Quellterm der Enthalpietransportgleichung ist für diese adiabaten Bedingungen Null. Der Mittelwert der Temperatur  $\bar{T}$  wird iterativ aus der Gesamtenthalpie  $\bar{h}$  und der Zusammensetzung  $\bar{\sigma}_i$  unter Verwendung tabellierter spezifischer Wärmekapazitäten  $c_{p,i}$  und der Standardbildungsenthalpien  $S_i^0$  ermittelt:

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^n \bar{\sigma}_i \cdot \left( \bar{c}_{p,i}(\bar{T}) \cdot \bar{T} + S_i^0 \right) \quad . \quad (2.2-46)$$

Bei Verwendung von globalen Reaktionskinetiken, wie im vorliegenden Fall einer Einschritt-Kinetik, ergäbe sich bei vollständigem Reaktionsumsatz die *kalorische* Verbrennungstemperatur. Auf Grund von Dissoziationsreaktionen liegt die tatsächliche, meist mit dem Attribut *theoretisch* oder *adiabat* belegte, Verbrennungstemperatur jedoch tiefer. Dieser Effekt wurde vereinfachend durch die Einführung einer Verlustenthalpie  $\bar{h}_{Disso}$  berücksichtigt (s. SCHMID [Va9]). Mit dieser wird die Gesamtenthalpie vor der Temperaturberechnung korrigiert. Die kalorische Verbrennungstemperatur eines stöchiometrischen Methan/Luft-Gemisches beträgt 2329 K.

$$\bar{h}_{Disso} = 4 \cdot 10^5 \frac{J}{kg} \cdot \left( \frac{\bar{T} - 300K}{2329K - 300K} \right)^2 \quad (2.2-47)$$

### 2.2.2.5 Mischungsbruchberechnung

Das verwendete PHP-Verbrennungsmodell wurde für die Berechnung ideal vorgemischter Flammen hergeleitet, kann jedoch auch zur Berechnung teilvorgemischter Flammen (Vormischflammen mit Einmischung von Umgebungsmedium) verwendet werden. Für Flammen dieser Art ist eine weitere Größe notwendig, die die lokale Stöchiometrie beschreibt. Die Gesamtheit der chemischen Spezies  $\bar{\sigma}_i$  kann unter der vereinfachenden Annahme, dass die turbulente und molekulare Diffusion aller Spezies gleich ist, zu einer einzigen Größe, dem Mischungsbruch  $\bar{f}$  zusammengefasst werden. Meist wird der Mischungsbruch als Summe der Elementarmassenbrüche von Kohlenstoff und Wasserstoff definiert  $\bar{f} = \bar{Y}_C + \bar{Y}_H$  (in  $[\text{kg}_{C+H}/\text{kg}_{\text{ges.}}]$ ) und kann unter Berücksichtigung aller C und H enthaltenen Spezies ermittelt werden. Ein besonderer Vorteil dieser Definition ist, dass  $\bar{f}$  eine konservierte, also von chemischen Reaktionen unbeeinflusste Größe

darstellt. Die Verteilung gehorcht damit allein den Gesetzen von Konvektion und Diffusion und kann mit einer quellenfreien Transportgleichung beschrieben werden. Eine Variation der lokalen Stöchiometrie wird im Rahmen des PHP-Modelles durch die Verwendung der lokalen laminaren Brenngeschwindigkeit berücksichtigt. Diese wirkt über Gleichung 2.2-38 auf das lokale chemische Zeitmaß  $\tau_{chem}$  zurück. Zu diesem Zweck wurde die laminare Brenngeschwindigkeit aus Berechnungen laminarer Vormischflammen unter Verwendung detaillierter Chemie ermittelt und in Form eines Polynomfittes in das Programm integriert.

### 2.2.2.6 Aufenthaltszeitgleichung

Um die bei der instationären Verbrennung stattfindenden Vorgänge zu analysieren wurde eine zusätzliche Transportgleichung für die lokale mittlere Aufenthaltszeit- oder Verweilzeit  $\bar{\tau}$  gelöst (HABISREUTHER [Va3]). Diese Größe gibt die Gesamtzeit an, die ein Masseteilchen, das an einem bestimmten Ort angetroffen werden kann, im statistischen Mittel seit seinem Eintritt in das Strömungssystem verbracht hat. Da diese Eigenschaft an die Masse gebunden ist und somit auch dem turbulenten Austausch unterliegt, kann dafür eine Transportgleichung definiert werden. Sie lautet in Favre-gemittelter Form:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{\tau})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}u\bar{\tau})}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(r\bar{\rho}v\bar{\tau})}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_t} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\mu_t}{\sigma_t} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial r} \right) + \bar{\rho} \cdot S_{\tau} \quad (2.2-48)$$

Für die turbulente Schmidtzahl wurde der Wert  $\sigma_t = 0,7$  angenommen. Der Randwert der Verweilzeitgleichung an allen Rändern des Strömungsgebietes wird zu Null gesetzt. Um das aus der Düse austretende Fluid bzw. das Frischgemisch von der über die freien Ränder einströmende Umgebungsluft unterscheiden zu können, wird der Quellterm  $S_{\tau}$  der Transportgleichung jedoch an die Brennstoffkonzentration gekoppelt. Die Verweilzeit wird lediglich während derjenigen physikalischen Zeitspanne aufsummiert, die zwischen dem Austritt von Brennstoff aus der Düse und dessen "Ankunft" an der Reaktionszone verstreicht. Der Quellterm hat deshalb die Einheit [s/s]. Jenseits der Reaktionszone wird keine Verweilzeit aufsummiert. Diese Verweilzeit wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht direkt, sondern immer nur gewichtet mit dem momentanen Umsatz von Brennstoff verwendet. Es wird somit die Verweilzeit bzw. das "Alter" des momentan abreagierenden Brennstoffes ausgewertet.

### 2.2.2.7 Beeinflussung der Flammendicke

Das analytisch hergeleitete PHP-Verbrennungsmodell lässt auch Aussagen über die Dicke turbulenter Vormischflammen zu. SCHMID [Va9] leitet folgende Beziehung für die Dicke einer turbulenten Flamme relativ zur Dicke einer laminaren Flamme her:

$$\frac{\delta_t}{\delta_l} = 1 + Re_t^{1/2} \cdot (1 + Da_t^2)^{1/4} . \quad (2.2-49)$$

Um den Einfluss der Flammendicke auf das dynamische Verhalten zu untersuchen (s. Kap. 8.3.2), wurde die im Folgenden beschriebene Vorgehensweise zur Beeinflussung der Flammendicke angewendet.

Ausgangspunkt der Betrachtung ist, dass sich der lokale Verbrennungszustand innerhalb einer vorgemischten Flamme durch eine einzige Reaktionsfortschrittsvariable  $\tilde{c}$  beschreiben lässt. Unter Annahme eines isobaren adiabaten Verbrennungsprozesses lassen sich damit alle Zustandsgrößen ( $p, T, \sigma$ ) sowie die Umsatzgeschwindigkeit als eindeutige Funktion des Reaktionsfortschrittes darstellen. Der zeitliche Mittelwert des Reaktionsfortschrittes ist dann durch folgende Transportgleichung gegeben:

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{c})}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho}\bar{u}\bar{c}) - \nabla(\Gamma_t \nabla\bar{c}) = \bar{\rho} \cdot \bar{\omega}_{Ums} \left[ \frac{kg}{m^3 \cdot s} \right] . \quad (2.2-50)$$

Es werden nun die Voraussetzungen getroffen, dass die Dichte, der turbulente Austauschkoefizient und der Reaktionsquellterm über die Flammenfront hinweg konstant sind. Im Falle einer eindimensionalen turbulenten Vormischflamme, die sich in einem homogenen Geschwindigkeitsfeld befindet, dessen Strömungsgeschwindigkeit gleich der Flammengeschwindigkeit ist, folgt daraus:

$$\rho \cdot S_t \cdot \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \Gamma_t \cdot \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = \rho \cdot \bar{\omega}_{Ums} . \quad (2.2-51)$$

Aus der Analyse dieser Gleichung ergibt sich aus dem KPP-Theorem (s. o.) der folgende Zusammenhang zwischen turbulenter Brenngeschwindigkeit, turbulentem Austauschkoefizienten und Reaktionsrate:

$$S_t = 2 \cdot \sqrt{\Gamma_t / \rho \cdot \bar{\omega}_{Ums}} \quad (2.2-52)$$

Es stellt sich nun die Frage, wie die Dicke der Flammenfront einer Kegelflamme in der Modellierung beeinflusst werden kann, ohne deren globale Länge zu ändern. Die Höhe  $H$  einer turbulenten Kegelflamme verhält sich wie im Fall einer laminaren Kegelflamme proportional zum typischen Zeitmaß des Reaktionsumsatzes bzw. umgekehrt proportional zur Flammengeschwindigkeit:

$$H \sim \frac{1}{\sqrt{\Gamma_t / \rho \cdot \bar{\omega}_{Ums}}} \sim \frac{1}{S_t} . \quad (2.2-53)$$

Analog zur Dicke einer laminaren Vormischflamme kann die Dicke einer turbulenten Vormischflamme mit dem turbulenten Austauschkoefizienten  $\Gamma_t$  und dem für den Reaktionsumsatz typischen Zeitmaß ausgedrückt werden:

$$\delta_t \sim \sqrt{\frac{\Gamma_t}{\varrho} \cdot \tau_{Ums}} \sim \sqrt{\frac{\Gamma_t}{\varrho \cdot \dot{\omega}_{Ums}}} . \quad (2.2-54)$$

Eine Änderung des turbulenten Austauschkoefizienten in der Transportgleichung für die Fortschrittsvariable (bzw. in der Transportgleichung für die Brennstoffkonzentration) führt damit direkt zu einer Änderung der Flammendicke. Damit ändert sich aber auch die turbulente Flammengeschwindigkeit. Die turbulente Flammengeschwindigkeit bleibt bei einer Variation der Flammendicke (über eine Veränderung des turbulenten Austauschkoefizienten) nur dann konstant, wenn der Ausdruck für die Reaktionsrate gegenläufig variiert wird (s. Gl. 2.2-51). Diese Aussage kann für laminare Flammen in universeller Form durch Entdimensionierung der Transportgleichungen abgeleitet werden (O'ROURKE ET AL [Va14]) und gilt dann allgemein für die Bedingung, dass die Dicke der Flammenfront klein gegenüber der charakteristischen Abmessung des Strömungsfeldes ist. Dies impliziert, dass die Strömungsbedingungen innerhalb der Flammenfront quasistationär sind.

## 2.3 Numerische Grundlagen

Zur Berechnung der in dieser Arbeit untersuchten Strömungen und Flammen wurde das am Engler-Bunte-Institut auf Basis des TEACH-Codes [N1] entwickelte Rechenprogramm EBI-2d verwendet. Der Code löst unter Anwendung der Finite-Volumen-Methode iterativ elliptische Transporterhaltungsgleichungen in kartesischen oder zylindrischen Koordinaten. Das Programm zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus: Verwendung zweidimensionaler versetzter orthogonaler Gitter, Ortsdiskretisierung zweiter Ordnung, implizite Zeitdiskretisierung erster Ordnung, Druckkorrekturverfahren, TDMA-Gleichungslöser. Das ursprünglich nur zur Berechnung stationärer Strömungen entwickelte Programm wurde zunächst zur Modellierung instationärer Strömungen erweitert. Zusätzlich wurden im Rahmen dieser Arbeit verschiedene Algorithmen implementiert. Im Folgenden sollen die Grundlagen der Finite-Volumen-Methode sowie die im Programm implementierten numerischen Verfahren in knapper Form skizziert werden. Für weitere Details wird auf die Arbeiten von PATANKAR [N4], NOLL [N2], DÖBBELING [S15] und HIRSCH [S16] verwiesen.

### 2.3.1 Finite Volumen-Verfahren

Beim Finite-Volumen-Verfahren (FVV) werden die zu lösenden Transportdifferentialgleichungen zunächst über ein fiktives finites Volumen integriert.

Das bedeutet, dass hier im Gegensatz zu dem Verfahren der Finiten Differenzen nicht die differentielle Form sondern die integrale Form der Transportgleichungen der eigentliche Ausgangspunkt ist. Diese Vorgehensweise hat gegenüber der Methode der Finiten Differenzen den Vorteil konservativ zu sein, d. h. die Massenerhaltung ist in jedem Kontrollvolumen implizit erfüllt (NOLL [N2]). Die Finite-Element-Methode erfüllt diese Bedingung zwar auch, sie ist jedoch mathematisch anspruchsvoller und numerisch aufwändiger und benötigt daher in der Regel mehr Speicherplatz und Rechenzeit als ein Finite-Volumen-Verfahren. Die sich durch die Integration über das finite Volumen ergebenden Bilanzgleichungen werden nachfolgend örtlich diskretisiert. Das Strömungsfeld wird dazu durch ein Gitternetz in kleine finite Volumina zerlegt. Für die Berechnung instationärer Strömungen muss zusätzlich noch eine zeitliche Diskretisierung durchgeführt werden. Durch Diskretisierung der integrierten Differentialgleichungen ergibt sich aus dem ursprünglichen nichtlinearen Differentialgleichungssystem ein numerisch lösbares nichtlineares algebraisches Gleichungssystem.

### 2.3.1.1 Die Allgemeine Transportgleichung (ATG)

Ausgangspunkt ist die allgemeine Transportgleichung in den Zylinderkoordinaten  $x, r, \varphi$ . Die Umfangskoordinate  $\varphi$  fällt hierbei auf Grund der vorausgesetzten Rotationssymmetrie (Kap. 2.1.1) weg.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\Phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\rho v\Phi) \\ - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r\Gamma_{\Phi} \frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = S_{\Phi} \end{aligned} \quad (2.3-1)$$

In vektorieller Schreibweise formuliert lautet diese Gleichung

$$\frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\vec{u}\Phi) - \nabla(\Gamma\nabla\Phi) = S_{\Phi} \quad (2.3-2)$$

Dabei ist für die abhängige Variable  $\Phi$  die jeweils zu interessierende transportierte Größe einzusetzen.  $\Gamma_{\Phi}$  entspricht deren Diffusivität und  $S_{\Phi}$  steht für deren Quellstärke. Für die Berechnung von periodischen Strömungen mit überlagerter Verbrennung stellen alle zeitabhängigen Größen dichtegewichtete Phasen-Mittelwerte dar (z. B.  $\Phi = \langle\check{\Phi}\rangle$ ,  $\vec{u} = \langle\check{\vec{u}}\rangle$ ) (s. Kap. 2.1.3). Auf diese Schreibweise der Größen wird in diesem Kapitel jedoch aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit verzichtet. Alle Transportdifferentialgleichungen sowie die Massenerhaltungsgleichung können in der Form der allgemeinen Transportgleichung formuliert werden. Dies hat den Vorteil, dass

alle Gleichungen mit denselben numerischen Algorithmen behandelt werden können. Alle auftauchenden Terme, die sich nicht in der Form des instationären, des konvektiven oder des diffusiven Termes in Gl. (2.3-1) schreiben lassen, müssen dem Quellterm zugeschlagen werden. Dies stellt einen Nachteil bei der Verwendung der allgemeinen Transportgleichung dar. So müssen z.B. Anteile der Reibungsterme der Impulsgleichungen in die jeweiligen Quellterme aufgenommen werden (NOLL [N2]). Eine Übersicht über alle in dieser Arbeit verwendeten Transportgleichungen mit den jeweiligen Quelltermen gibt Kap. 2.3-10.

### 2.3.1.2 Räumliche Integration der ATG

Zunächst wird die allgemeine Transportgleichung über ein finites Volumen integriert.

$$\int_V \frac{\partial(\varrho\Phi)}{\partial t} dV + \int_V \nabla(\varrho\vec{u}\Phi) dV - \int_V \nabla(\Gamma\nabla\Phi) dV = \int_V S_\Phi dV \quad (2.3-3)$$

Mit dem Satz von Gauß können die Integrale über das Kontrollvolumen  $V$  in Integrale über die das Kontrollvolumen umhüllende Oberfläche  $A$  umgewandelt werden:

$$\int_V \nabla(\varrho\vec{u}\Phi) dV = \int_A (\varrho\Phi)\vec{u} dA \quad (2.3-4)$$

Damit ergibt sich:

$$\int_V \frac{\partial(\varrho\Phi)}{\partial t} dV + \int_A \varrho\Phi(\vec{u}\cdot dA) - \int_A \Gamma(\nabla\Phi\cdot dA) = \int_V S_\Phi dV \quad (2.3-5)$$

Die Auswertung des Oberflächenintegrals beruht auf der Voraussetzung, dass über die das Kontrollvolumen begrenzenden Flächen  $A_i$ , homogene Verteilungen von  $\varrho, \Gamma, \vec{u}, \Phi$  vorliegen. In der Realität liegt in der Regel jedoch ein nichtlinearer Verlauf der Größe  $\Phi$  sowie deren Quellterm  $S_\Phi$  innerhalb eines Kontrollvolumens vor. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} \right)_P \cdot V + \\
& (\rho u \Phi)_e \cdot A_e - (\rho u \Phi)_w \cdot A_w + (\rho v \Phi)_n \cdot A_n - (\rho v \Phi)_s \cdot A_s + \\
& \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \cdot A_e - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \cdot A_w + \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_n \cdot A_n - \left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_s \cdot A_s + \\
& = (S_\Phi)_P \cdot V
\end{aligned} \tag{2.3-6}$$

Der bei der Auswertung der Volumenintegrale beim instationären Term sowie beim Quellterm auftauchende Index P bedeutet nun, dass die jeweilige Verteilung der Größen durch einen am Rechenpunkt P vorliegenden räumlichen Mittelwert repräsentiert wird. Für die weiter unten angegebene Zeitintegration wird dabei weiterhin vorausgesetzt, dass diese Bedingung für jeden Zeitpunkt innerhalb eines Zeitschrittes gilt. Als Indizierung wurde die sog. Kompassnotation (s. Abb. 2.3-1) verwendet, bei der die Richtungen der Flächennormalen nach Himmelsrichtungen bezeichnet sind. Kleine Indices (**e**=east, **w**=west, **n**=nord, **s**=south) stehen für Werte an den die Kontrollvolumina begrenzenden Flächen, während durch große Indices (**E**, **W**, **N**, **S**) die Werte der Variablen im Zentrum der jeweiligen Nachbarkontrollvolumina gekennzeichnet werden. Gl. (2.3-6) stellt somit eine Bilanzierung der konvektiven und diffusiven Flüsse durch die das Kontrollvolumen  $V$  begrenzenden Flächen ( $A_e, A_w, A_n, A_s$ ) und der im Kontrollvolumen entstehenden Quellen dar.

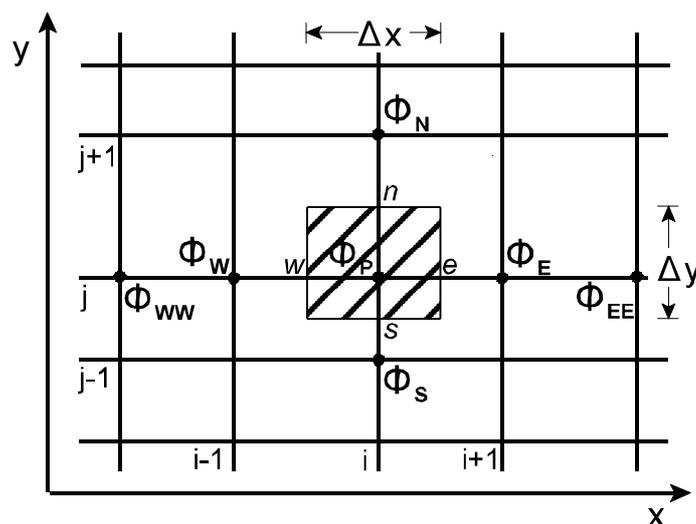


Abb. 2.3-1: Gitterausschnitt mit finitem Volumen und Kompassnotation im 2-d Fall

### 2.3.1.3 Verfahren der räumlichen Diskretisierung

Die räumlich integrierte allgemeine Transportgleichung wird zunächst örtlich diskretisiert. Die verschiedenen Terme werden dazu mit unterschiedlichen Ansätzen (Diskretisierungsverfahren) behandelt. Aus numerischen Gründen (z. B. zur Vermeidung von sog. Zick-Zack-Druckverläufen) wird dazu ein versetztes Rechengitter (engl.: *staggered grid*) verwendet, bei dem die Lage der Kontrollvolumina für die Variablen  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  gegenüber den Kontrollvolumina der skalaren Größen um einen halben Linienabstand versetzt sind. Dadurch können die, in der Axial- und Radialimpulsgleichung vorkommenden Druckgradientenquellterme durch zentrale Differenzenapproximation der auf den jeweiligen Kontrollvolumengrenzen von  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  abgespeicherten Druckwerte berechnet werden.

#### Numerische Fehler

Da es unterschiedliche Arten von numerischen Fehlern gibt und diese in der Literatur teilweise mit verschiedenen Begriffen bezeichnet werden, soll zunächst eine Terminologie des Begriffes *Fehler* vorangestellt werden.

Als *Abbruchfehler* wird der Fehler bezeichnet, der bei der Approximation eines Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten oder bei der Interpolation eines Wertes entsteht. Der Abbruchfehler bei der Diskretisierung einer Differentialgleichung ist gleich der Summe der Abbruchfehler bei der Approximation der einzelnen Terme. Ein Verfahren ist genau dann konsistent, wenn der Abbruchfehler mit kleiner werdenden Gittermaschenweiten und Zeitschritten gegen Null geht. Je geringer der Abbruchfehler ist, desto formal genauer ist die Differentialgleichung diskretisiert (SCHÖNUNG [N3]). Zur Bestimmung des Abbruchfehlers kann folgendermaßen vorgegangen werden. Zunächst wird die Größe  $\Phi$  an denjenigen Knotenpunkten, die im Ansatz vorkommen (also z. B.  $\Phi_P, \Phi_E, \Phi_W$ ) jeweils durch eine Taylorreihe ersetzt. Aus Kombinationen der verschiedenen Taylorreihenentwicklungen wird der zu untersuchende Differenzenansatz konstruiert, wobei in den Reihen Glieder ab einer charakteristischen Ordnung  $n$  vernachlässigt werden müssen. Die kleinste Ordnung  $n$  der vernachlässigten Glieder in den Taylorreihenentwicklungen wird als Abbruchfehler der Ordnung  $n$  bezeichnet. Der Differenzenansatz weist dann eine *formale Genauigkeit der Ordnung  $n$*  auf und wird dann zuweilen auch als *Approximation  $n$ 'ter Ordnung* bezeichnet. Werden bei dieser Vorgehensweise z. B. alle Glieder der Ordnung  $\sim \Delta x^1$  und höher (bei räumlicher Diskretisierung) oder  $\sim \Delta t^1$  (bei zeitlicher Diskretisierung) vernachlässigt, so bezeichnet man den untersuchten Differenzenansatz als eine Approximation erster Ordnung bzw. einen Ansatz der formalen Genauigkeit  $n$  im Ort bzw. in der Zeit. Diese Nomenklatur wird einsichtig, wenn man berücksichtigt, dass die vernachlässigten Terme in der ursprünglichen, noch nicht über das Kontrollvolumen integrierten Differentialgleichung, zweiter Ordnung sind.

Ansätze, die eine formale Genauigkeit von mindestens zweiter Ordnung aufweisen, werden oft als Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung bezeichnet (RODI [N6], NOLL [N2]). Als *Diskretisierungsfehler* wird der Unterschied zwischen der exakten Lösung der Differentialgleichung und der exakten Lösung der Differenzgleichung bezeichnet.

Differenzengleichungen werden im allgemeinen nur approximativ gelöst. Der Unterschied zwischen der exakten und der approximativen Lösung einer Differenzgleichung wird als *Lösungsfehler* bezeichnet. Als *Rundungsfehler* wird der Fehler bezeichnet, der auf Grund der Genauigkeit der Darstellung einer reellen Zahl auf dem Rechner auftritt (SCHÖNUNG [N3]).

Im Zusammenhang mit numerischen Rechnungen wird oftmals der Begriff *numerische Diffusion* verwendet. Als Beispiel sei der aus der Diskretisierung des konvektiven Flusses mit dem Aufwindverfahren (Engl.: Upwind-Differencing) an einer Kontrollvolumengrenze resultierende numerische Fehler betrachtet (NOLL [N2], RODI [N6]). Da die Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_w$  an der Position  $\mathbf{x}_w$  bei einem versetzten Gitter bekannt ist, besteht die Schwierigkeit in der Beschaffung der transportierten Variable  $\Phi$  an dieser Position. Beim Aufwindverfahren wird eine stufenförmige Verteilung der Größe  $\Phi$  innerhalb der Zelle angenommen. Die Variable  $\Phi_w$  auf der Kontrollvolumengrenze  $\mathbf{x}_w$  wird, wenn die axiale Geschwindigkeit  $\mathbf{u}_w$  negativ ist, durch die Variable, die stromauf in der Kontrollvolumenmitte bekannt ist, ersetzt:

$$\Phi_w = \Phi_P \quad .$$

Die Taylorreihenentwicklung für den Punkt P lässt sich wie folgt formulieren:

$$\Phi_P = \Phi_w + \frac{\Delta x}{2} \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w + \frac{\Delta x^2}{8} \cdot \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_w + O(\Delta x^3) \quad (2.3-7)$$

Die Approximationsvorschrift des Aufwindverfahrens ergibt sich nun, wenn alle Glieder der Ordnung eins und höher vernachlässigt werden. Der Konvektionsfluss  $C_w$  durch die w-Fläche lautet in diesem Fall:

$$C_w = \mathbf{u}_w \cdot \Phi_w = \mathbf{u}_w \cdot \Phi_P \quad . \quad (2.3-8)$$

Wird das zweite Glied jedoch berücksichtigt, dann ist der konvektive Fluss durch die w-Fläche:

$$C_w = \mathbf{u}_w \cdot \Phi_w = \mathbf{u}_w \cdot \Phi_P + \frac{\mathbf{u}_w \Delta x}{2} \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \quad . \quad (2.3-9)$$

Bei Vernachlässigung des Gliedes erster Ordnung ist der Approximationsfehler im Konvektionsfluss also:

$$\Delta C_w = \frac{u_w \Delta x}{2} \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma \cdot \frac{Pe}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w = \Gamma_f \cdot \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_w \quad (2.3-10)$$

Da der Fehler proportional zum Gradienten ist, verhält er sich wie ein Diffusionsfluss, d. h. die ursprüngliche Diffusion wird erhöht. Der Abbruchfehler, der beim Aufwind-Ansatz auftritt, ist formal von der gleichen Ordnung wie die Diffusionsterme, die in der ursprünglichen Differentialgleichung erscheinen. Damit lässt er sich in Form eines Diffusionstermes ausdrücken. Die entsprechende "falsche" Diffusivität ist  $\Gamma_f = \Gamma \cdot Pe/2$ , wobei die Pecletzahl  $Pe$  das Verhältnis von konvektiven Termen zu diffusiven Termen darstellt. Die *numerische Diffusion* der Aufwindapproximation wird also mit wachsendem Gradienten größer. Bei einer mehrdimensionalen Diskretisierung spielt zusätzlich die Strömungsrichtung eine wichtige Rolle.

Streng genommen ist der Begriff der "numerischen Diffusion" nur dann zulässig, wenn sich der Abbruchfehler formal über einen Diffusionsterm ausdrücken lässt, wie dies beim Aufwind-Verfahren der Fall ist. Auch bei Diskretisierungsverfahren höherer Ordnung machen sich Diskretisierungsfehler in Form des Abbaus von Gradienten der transportierten Variable bemerkbar. Da dieser Effekt jedoch qualitativ einer erhöhten Diffusivität gleicht, wird dieser in der vorliegenden Arbeit ebenfalls als "numerische Diffusion" bezeichnet.

### Räumliche Diskretisierung der konvektiven Terme

Wie bereits beschrieben, besteht die Schwierigkeit bei der Diskretisierung der konvektiven Terme darin, die jeweiligen transportierten Variablen  $\Phi$  an den Kontrollvolumengrenzen zu interpolieren. In der vorliegenden Arbeit wurden mehrere Diskretisierungsverfahren miteinander verglichen. Diese unterscheiden sich unter anderem in ihrer Genauigkeit (Abbruchfehler, numerische Diffusion), in ihrer Stabilität, in ihren Transporteigenschaften und in ihrem Speicherplatz- und Rechenzeitbedarf.

### HYBRID-Verfahren

Je größer die Pecletzahl ist, desto exakter wird die Lösung einer eindimensionalen Konvektions-Diffusions-Gleichung durch den Aufwind-Ansatz wiedergegeben. Bei einer Pecletzahl kleiner als zwei liefert hingegen der Zentralfdifferenzenansatz die bessere Näherung. Dieser besitzt mit der formalen Genauigkeit zweiter Ordnung eine höhere Genauigkeit als der Aufwind-Ansatz. Bei gegen null strebende Pecletzahlen verschwindet der Diskretisierungsfehler des Zentralfdifferenzenansatzes. Bei großen  $Pe$ -Zahlen ist das Verfahren jedoch stärker diffusiv als der Aufwind-Ansatz. Der Hybrid-Ansatz stellt somit eine Mischung aus Aufwind- (s. o.) und Zentralfdifferenzenansatz (s. Gl. 2.3-15) dar. Die Vorteile beider Verfahren werden kombiniert, in dem in Abhängigkeit der lokalen Pecletzahl das besser geeignete Diskretisierungsverfahren verwendet wird. Das Hybrid-Verfahren garantiert bei den meisten Gleichungslösern ein stabiles Verhalten, da die Koeffizienten der diskretisierten Transportgleichung im Allgemeinen immer positiv sind.

### QUICK-Verfahren

Beim quadratischen Aufwindverfahren von LEONARD [N7], auch QUICK-Ansatz (Quadratic Upstream Interpolation for Convection Kinematics) genannt, werden die  $\Phi$ -Werte an den Kontrollvolumenflächen durch quadratische Interpolation zwischen  $\Phi$ -Werten an drei Knotenpunkten bestimmt. Bei der Interpolation einer Größe  $\Phi$  auf die  $w$ -Kontrollvolumenfläche sind es die Punkte  $WW$ ,  $W$  und  $P$ , wenn die Geschwindigkeit  $u_w$  an der Position  $w$  größer null ist (s. Abb. 2.3-2). Wenn  $u_w < 0$  werden die Punkte  $W$ ,  $P$  und  $E$  verwendet. Die quadratische Interpolationsformel lautet bei einem äquidistanten Gitter:

$$\Phi_w = \frac{\Phi_W + \Phi_P}{2} - \frac{1}{8} (\Phi_{WW} + \Phi_P - 2\Phi_W) \quad (2.3-11)$$

Das QUICK-Verfahren hat formal eine Genauigkeit dritter Ordnung. Da die  $\Phi$ -Verteilung durch ein 3-Punkte-Polynom angenähert wird, können sogenannte Über- oder Unterschinger auftreten, d. h. ein auf die Kontrollvolumengrenze interpolierter Wert muss in seinem Betrag nicht unbedingt zwischen den Beträgen seiner beiden Nachbarpunkte liegen, was aber physikalisch notwendig ist.

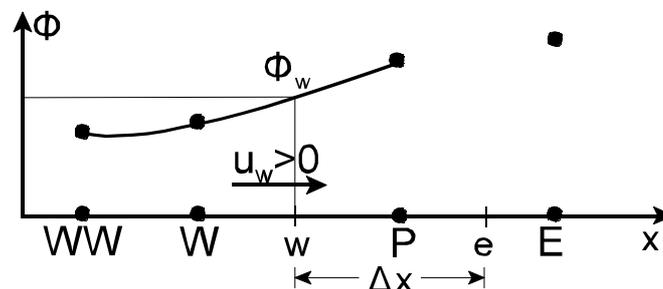


Abb. 2.3-2: Interpolation mit dem QUICK-Ansatz

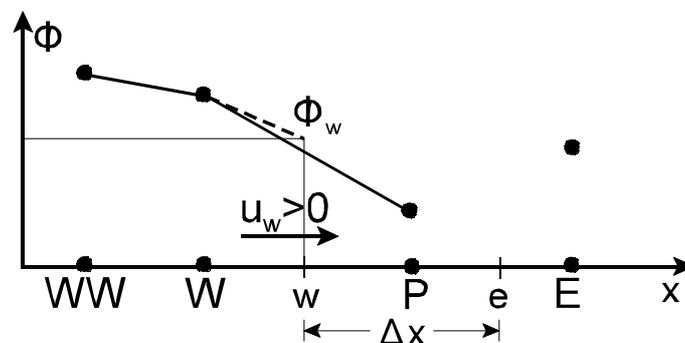


Abb. 2.3-3: Interpolation mit dem MLU-Ansatz

### MLU-Verfahren

Beim MLU-Schema (Monotonized Linear Upwind) von NOLL [N2] wird durch eine geschickte Kombination von stückweise linearen Verteilungsfunktionen von  $\Phi$  zwischen benachbarten Gitterpunkten das beim QUICK-Ansatz auftretende über- bzw. unterschwingende Verhalten vermieden. Für den Fall, dass  $u_w > 0$  ist, wird  $\Phi$  an der Westfläche nach folgender Vorschrift bestimmt (s. Abb. 2.3-3):

$$\Phi_w = \Phi_W + s_w \cdot \frac{x_P - x_W}{2} \quad (2.3-12)$$

Die Variablen  $a$  und  $b$  sind dabei die Steigungen:

$$a = \frac{\Phi_P - \Phi_W}{x_P - x_W}, \quad b = \frac{\Phi_W - \Phi_{WW}}{x_W - x_{WW}} \quad (2.3-13)$$

Der Faktor  $s_w$  wird unter Verwendung der *minmod*-Funktion ermittelt:

$$s_w = \minmod \left( \frac{a+b}{2}, 2 \cdot \minmod(a,b) \right) \quad \text{mit} \quad (2.3-14)$$

$$\minmod(a,b) = \begin{cases} a & \text{für } |a| \leq |b| \text{ und } a \cdot b > 0 \\ b & \text{für } |a| > |b| \text{ und } a \cdot b > 0 \\ 0 & \text{für } a \cdot b \leq 0 \end{cases}$$

Der MLU-Ansatz garantiert in Strömungsbereichen, in denen eine monotone Verteilung der Größe  $\Phi$  vorliegt, eine formale Genauigkeit zweiter Ordnung (NOLL [N2]).

### Räumliche Diskretisierung der diffusiven Terme

Die in Gleichung (2.3-6) auftretenden diffusiven Flüsse sind das Produkt aus Ableitung der diffundierenden Variable  $\Phi$ , deren Diffusivität  $\Gamma_\Phi$  und der Kontrollvolumenfläche  $A$ . Der Betrag der Ableitung, sowie die Diffusivität werden als über die Fläche konstant angenommen. Die Ableitung der diffundierenden Variable an der Kontrollvolumengrenze wird über das Zentralfdifferenzschema gewonnen. Dieses weist formal eine Genauigkeit zweiter Ordnung auf. So ergibt sich, z.B. für die rechte (east) Zellfläche:

$$\left( \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \cdot A_e = \Gamma_\Phi \cdot \left( \frac{\Phi_E - \Phi_P}{x_E - x_P} \right) \cdot A_e \quad (2.3-15)$$

### Räumliche Diskretisierung des Quellterms

Der Quellterm wird in einen von der Variablen selbst abhängigen, linearen Anteil  $S_{\Phi,L}$  und in einen von ihr unabhängigen, konstanten Anteil  $S_{\Phi,K}$  aufgespalten. In den

linearisierten Teil werden jedoch nur diejenigen Anteile aufgenommen die negativ sind. Diese Vorgehensweise ist von grundlegender Bedeutung für das numerische Verfahren, da sie die Diagonaldominanz des Gleichungssystems verstärkt und somit zur numerischen Stabilität des Lösungsverfahrens beiträgt.

$$(S_{\Phi})_P \cdot V = (S_{\Phi,K} + S_{\Phi,L} \cdot \Phi)_P \cdot V \quad (2.3-16)$$

Wie bereits oben erwähnt, bedeutet der Index P, dass der im Zentrum P des Kontrollvolumens vorhandene Wert der Variablen ein repräsentativer Wert für das gesamte Kontrollvolumen darstellt. In der Realität liegt in der Regel ein nichtlinearer Verlauf des Quelltermes über das Kontrollvolumen hinweg vor. In diesem Fall kann eine konservative Diskretisierung, d. h. eine die integrale Bilanz erfüllende Diskretisierung des Quelltermes nur durch die Integration der Quelle über das Kontrollvolumen erreicht werden. Der exakte Verlauf ist jedoch aufgrund der Tatsache, dass zur Berechnung notwendige physikalische Werte nur an den Stützstellen bekannt sind, unbekannt. Es kann somit vorkommen, dass auch beim Finite-Volumen-Verfahren die integralen Bilanzen nicht erfüllt werden. Durch eine entsprechend feine Diskretisierung kann der daraus entstehende Fehler jedoch minimiert werden (NOLL [N2]).

#### 2.3.1.4 Zeitliche Integration der ATG

Nach der örtlichen Diskretisierung der allgemeinen Transportgleichung wird diese zeitlich diskretisiert. Dazu wird zunächst formal die Integration über den Zeitschritt  $\Delta t$  hinweg durchgeführt.

$$\begin{aligned} & \int_T \left( \frac{\partial(\rho\Phi)}{\partial t} \right)_P \cdot V dt + \\ & \int_T \left( \rho u \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \right)_e \cdot A_e dt - \int_T \left( \rho u \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \right)_w \cdot A_w dt + \\ & \int_T \left( \rho v \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \right)_n \cdot A_n dt - \int_T \left( \rho v \Phi - \Gamma_{\Phi} \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \right)_s \cdot A_s dt \\ & = \int_T (S_{\Phi,K} + S_{\Phi,L} \cdot \Phi)_P V dt \end{aligned} \quad (2.3-17)$$

### 2.3.1.5 Verfahren der zeitlichen Diskretisierung

An diesem Punkt wird eine Annahme benötigt, wie die einzelnen Terme innerhalb eines Zeitschrittes mit der Zeit variieren. Dies kann allgemein durch die generalisierte Formulierung

$$\int_T \Phi \cdot V \, dt = (\beta \cdot [\Phi]^n + (1-\beta) \cdot [\Phi]^a) \cdot V \quad (2.3-18)$$

ausgedrückt werden (PATANKAR [N4]). Der Index  $n$  (neu) bezeichnet die Werte zum neuen Zeitschritt, der Index  $a$  (alt) die Werte zum alten Zeitschritt.  $\beta$  ist ein Wichtungsfaktor, der zwischen 0 und 1 liegt.

#### Zeitliche Diskretisierung der einzelnen Terme

Für einen einzelnen Term, z. B. für die Summe aus konvektivem und diffusivem Fluss an der rechten Zellgrenzfläche, (s. Gl. 2.3-17) ergibt sich:

$$\int_T \left( \rho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} \right)_e \cdot A_e \, dt = \beta \cdot \left[ \left( \rho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \right]^n \cdot \Delta t + (1-\beta) \cdot \left[ \left( \rho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_e \right]^a \cdot \Delta t \quad (2.3-19)$$

Der zeitlich diskretisierte Quellterm lautet:

$$\int_T (S_{\Phi,K} + S_{\Phi,L} \cdot \Phi)_P \cdot V \, dt = \beta \cdot [(S_{\Phi,K} + S_{\Phi,L} \cdot \Phi)_P]^n \cdot V \cdot \Delta t + (1-\beta) \cdot [(S_{\Phi,K} + S_{\Phi,L} \cdot \Phi)_P]^a \cdot V \cdot \Delta t \quad (2.3-20)$$

Für den diskretisierten zeitabhängigen Term ergibt sich:

$$\int_T \left( \frac{\partial (\rho \Phi)}{\partial t} \right)_P \cdot V \, dt = ([\rho \Phi]^n - [\rho \Phi]^a)_P \cdot V \quad (2.3-21)$$

Da sich im Volumen  $V$  verschiedene zeitliche Ableitungen von  $(\rho \Phi)$  einstellen können, wird wiederum davon ausgegangen, dass die am zugehörigen Rechenpunkt  $P$  vorliegenden Werte zu jedem Zeitpunkt innerhalb des Zeitschrittes das volumetrische Mittel des Kontrollvolumens repräsentieren (NOLL [N2]).

### Verwendetes Zeitschrittverfahren

Wird der Wichtungsfaktor  $\beta = 0$  gewählt, spricht man von einem expliziten Zeitschrittverfahren. Alle zeitunabhängigen Terme der Differentialgleichungen werden zum alten Zeitpunkt  $a$  diskretisiert. Die explizite Vorgehensweise hat den Vorteil, dass die zu berechnende Variable  $\Phi_P^n$  im neuen Zeitschritt nur von schon bekannten Variablen im alten Zeitschritt abhängt. Im Falle von Strömungen mit im Ort parabolischem Charakter kann die für jeden Punkt  $P$  resultierende algebraische Gleichung ohne Iteration direkt aufgelöst werden. Die Stabilität des expliziten Lösungsverfahrens kann dabei nur durch genügend kleine Zeitschritte  $\Delta t$  gewährleistet werden. Dies erfordert oftmals sehr viele aufeinander folgende Zeitschritte, so dass trotz der Einfachheit der expliziten Formulierung im Endeffekt ein sehr großer Rechenaufwand entstehen kann (NOLL [N2]).

Aus diesen Gründen wurde im verwendeten Programm EBI-2d eine implizite Zeitdiskretisierung implementiert. Bei der impliziten Formulierung werden alle zeitunabhängigen Terme der Differentialgleichung zum neuen Zeitpunkt  $n$  diskretisiert ( $\beta = 1$ ). Nun enthält die resultierende Differenzgleichung nicht nur  $\Phi_P^n$  als Unbekannte, sondern auch die  $\Phi$ -Werte an den Nachbarnpunkten  $\Phi_E^n, \Phi_W^n, \Phi_N^n, \Phi_S^n$ . Die diskretisierte Gleichung kann nur zusammen mit den Gleichungen an den Nachbarnpunkten gelöst werden. Dies macht ein iteratives Lösungsverfahren notwendig. Dieses ist zwar aufwändiger als ein explizites Verfahren, verhält sich jedoch numerisch wesentlich stabiler und unterliegt damit auch prinzipiell keiner Beschränkung bezüglich der Größe des Zeitschrittes. Als nachteilig bei den impliziten Verfahren muss erwähnt werden, dass eine unendliche Signalfortpflanzungsgeschwindigkeit simuliert wird, wie sie eigentlich nur für die Diffusion gilt (SCHÖNUNG [N3]).

Die Diskretisierung des Zeittermes weist für das explizite wie auch für das implizite Verfahren einen Abbruchfehler  $\sim \Delta t$  auf. Beide besitzen damit eine formale Genauigkeit erster Ordnung. Verfahren höherer Ordnung wie das Leap-Frog Verfahren oder die Crank-Nicolson Methode ( $\beta = 0,5$ ) enthalten in den Differenzgleichungen die Variablen aus drei Zeitschritten, wodurch allerdings die mathematische Bearbeitung und der benötigte Speicherplatzbedarf wesentlich aufwendiger werden.

### Zeitlich und örtlich diskretisierte allgemeine Transportgleichung

Wird die implizite Zeitdiskretisierung angewendet und die Gesamtgleichung durch den Zeitschritt  $\Delta t$  dividiert, erhält man die in Zeit und Ort diskretisierte allgemeine Transportgleichung:

$$\begin{aligned}
& \frac{([\varrho\Phi]^n - [\varrho\Phi]^a)_p}{\Delta t} \cdot V + \\
& \left[ \left( \varrho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \right)_e \right]^n \cdot A_e - \left[ \left( \varrho u \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} \right)_w \right]^n \cdot A_w + \\
& \left[ \left( \varrho v \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \right)_n \right]^n \cdot A_n - \left[ \left( \varrho v \Phi - \Gamma_\Phi \frac{\Delta\Phi}{\Delta r} \right)_s \right]^n \cdot A_s \\
& = [(S_{\Phi,K} + S_{\Phi,L} \cdot \Phi)_p]^n \cdot V
\end{aligned} \tag{2.3-22}$$

### 2.3.1.6 Druckberechnung

Bei der Strömungssimulation auf der Basis der sogenannten primitiven Variablen Geschwindigkeit und Druck müssen diese so ermittelt werden, dass die Kontinuität und die Impulsbilanzen gleichzeitig erfüllt sind. Im verwendeten Programm EBI-2d sind dazu mehrere Varianten von Druckkorrekturverfahren implementiert. Diese bauen auf der engen Wechselwirkung zwischen Druck- und Geschwindigkeit im Stromfeld auf. Zur Berechnung des Druckes wird eine Druckkorrekturgleichung aus der Massenerhaltungsgleichung und den Impulserhaltungsgleichungen hergeleitet. Nach der Lösung der Impulserhaltungsgleichungen ist während des Iterationsfortschrittes die Massenerhaltung noch nicht erfüllt. Da die Geschwindigkeiten stark mit den Druckgradienten gekoppelt sind, wird daher nach jedem Iterationsschritt eine Druckkorrektur berechnet. Damit werden die Geschwindigkeitskomponenten so korrigiert, dass in jedem Kontrollvolumen die Massenerhaltung erfüllt wird. Das Druckfeld selbst wird ebenfalls mit diesem Korrekturwert berichtigt. Für die vorliegenden Rechnungen wurde der sog. SIMPLEC-Algorithmus (**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure-**L**inked **E**quations **C**orrected) verwendet (s. z. B. PATANKAR [N4]).

### 2.3.1.7 Randbedingungen

Um das diskretisierte Differentialgleichungssystem lösen zu können, müssen die Randbedingungen an den Grenzen des Rechengebietes vorgegeben werden. Es wird zwischen Einlässen, Auslässen, Freistrahlrändern, Symmetrieachsen und festen Wänden unterschieden. Einlässe sind Randbedingungen nullter Ordnung, an denen alle Strömungsgrößen vorgegeben werden (Dirichlet-Randbedingung). An Freistrahlrändern und Auslässen wird angenommen, dass die zu dem jeweiligen Rand orthogonalen Ableitungen aller Größen verschwinden (Neumann-Randbedingung). An diesen Rändern wird nur die Kontinuität erfüllt. Dies bedeutet, dass das Strömungsgebiet entkoppelt von der Umgebung betrachtet wird. Wenn allerdings über einen Rand Fluid eintritt (Freistrahland), dann müssen dort sinnvolle Randwerte spezifiziert werden. An der

Symmetrieachse werden die partiellen radialen Ableitungen aller Größen zu null gesetzt. Bei Vorhandensein von Wänden wird die Wandschubspannung in der wandnächsten Zelle über das logarithmische Wandgesetz bestimmt. Da Wände bei den vorliegenden Berechnungen nur eine sehr untergeordnete Bedeutung haben, soll auf die Einzelheiten hier nicht näher eingegangen werden.

### 2.3.1.8 Lösungsverfahren

Wird von der diskretisierten allgemeinen Transportgleichung noch die diskretisierte Kontinuitätsgleichung multipliziert mit  $\Phi_P$  subtrahiert, so ergibt sich für jeden Punkt P im Strömungsfeld folgende nichtlineare algebraische Gleichung:

$$a_E [\Phi_E]^n + a_W [\Phi_W]^n + a_N [\Phi_N]^n + a_S [\Phi_S]^n = a_P [\Phi_P]^n - S_{\Phi,P}^* \quad , \quad (2.3-23)$$

mit

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + \frac{[\rho_P]^a}{\Delta t} \cdot V - [S_{\Phi,L}]^n$$

$$S_{\Phi}^* = \left( [S_{\Phi,K}]^n + \frac{[(\rho\Phi)_P]^a}{\Delta t} \right) \cdot V \quad .$$

Durch die Diskretisierung ist aus dem nichtlinearen System partieller Differentialgleichungen ein nichtlineares System algebraischer Gleichungen entstanden. Die Koeffizienten  $a_P, a_E, a_W, a_N, a_S$  setzen sich dabei aus Konvektionsraten und Diffusionsraten über die jeweiligen Zellengrenzen hinweg zusammen. Werden die Koeffizienten  $a_i$  sowie die Quellanteile  $S_{\Phi}^*$  und  $[S_{\Phi,L}]^n$  im jeweiligen Schritt eines iterativen Verfahrens als konstant angenommen, so erhält man für jede Variable ein lineares Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix nur an fünf Diagonalen ungleich null und somit schwach besetzt ist.

Die Variable am Rechenfeldpunkt P hängt jedoch von den Variablen an den benachbarten Gitterknoten ab. Bei der Berechnung von elliptischen Strömungen werden stromauf liegende Variablenwerte stromab durch liegende Variablenwerte beeinflusst. Dies erfordert die Anwendung eines iterativen Lösungsverfahrens. Zur Lösung der diskretisierten Transportdifferentialgleichungen ist im Programm EBI-2d der **Tri-Diagonal-Matrix-Algorithmus** (TDMA) implementiert (DÖBBELING [S15], SCHÖNUNG [N3]). Bei diesem Verfahren wird die Lösung der Variablen  $\Phi_P$  jeweils längs von Gitterlinien mit konstantem Index i, bzw. j berechnet. Dies soll am Beispiel einer Gitterlinie mit festem Index i ( $x = \text{const.}$ ) erläutert werden. Die für alle Gitterknoten dieser Linie diskretisierten Gleichungen in der Form von Gl. 2.3-23 ergeben zusammen eine Matrix von linearen Gleichungen, die nur an drei Diagonalen besetzt ist. Zur Lösung, wird nun angenommen, dass die zu berechnende Variable  $\Phi$  auf den Linien i-1 und i+1, sowie alle anderen vorkommenden Variablen bekannt sind. Bei bekannten

Randbedingungen am Beginn und am Ende der Linie lässt sich dann die Größe  $\Phi$  an allen Gitterpunkten längs dieser Linie berechnen. Schreitet man bei der Berechnung z. B. von links nach rechts im Stromfeld voran, so sind die Variablenwerte links der zu berechnenden Linie  $i$ , also bei  $i-1$  schon bei der Berechnung eben dieser Linie bestimmt worden. Die Variablen auf der Linie rechts von Linie  $i$ , bei  $i+1$  werden aus der letzten Iteration übernommen. Die Werte der Linie  $i=1$  und  $i=i_{\max}$ , müssen ebenfalls als Randwerte gegeben sein.

Der Ablauf einer Iteration innerhalb eines Zeitschrittes ergibt sich daraus wie folgt. Zunächst werden die zeitabhängigen Randwerte gesetzt. Danach werden alle Transportgleichungen nacheinander gelöst. Für die Berechnung eines Variablenfeldes wird der TDMA-Algorithmus dabei mehrmals auf alle Gitterlinien angewendet. Um eine möglichst gute Verknüpfung der Feldwerte und der Randwerte in sämtliche Raumrichtungen zu erreichen, wird dabei bei elliptischen Strömungen in die verschiedenen Koordinatenrichtungen alternierend vorgegangen. Das heißt, es werden immer abwechselnd die Linien mit festem Index  $i$  und mit festem Index  $j$  behandelt. Die Lösungswerte werden aus Gründen der Stabilität nur zum Teil, d. h. multipliziert mit einem Unterrelaxationsfaktor kleiner 1 beim nächsten Zeitschritt verwendet. Diese Dämpfung beschleunigt das Konvergenzverhalten der Lösung. Die Schleife über die Transportgleichungen wird so oft wiederholt, bis die Summe der Änderungen aller Feldvariablen von einem Iterationsschritt zum nächsten unter einem vorgegebenen Abbruchwert liegen. Für den aktuellen Zeitschritt erhält man so eine Lösung, welche die diskretisierte Transportgleichung mit einer vorgegebenen Genauigkeit erfüllt.

Diese Genauigkeit ist durch ein Abbruchkriterium festgelegt. Der Restfehler wird dabei anhand des Gleichungsresiduums bestimmt. Dieses repräsentiert die Summe aller Terme einer Gleichung und muss im konvergenten Fall gleich null betragen. Da das Residuum, bzw. der *Lösungsfehler* bei numerischen Rechnungen zwar mit fortschreitender Konvergenz immer kleiner, jedoch niemals identisch null wird, besteht eine besondere Schwierigkeit in der Beantwortung der Frage, wann eine numerische Rechnung hinreichend konvergiert ist bzw. die Lösung physikalische Aussagekraft besitzt. Zur Bewertung werden hierbei im Allgemeinen relative Residuen herangezogen. Bei dem im verwendeten Programm EBI-2d implementierte Residuenkriterium wird das Residuum relativ zum jeweiligen betragsmäßig größten Term der Transportgleichung ausgewertet. Dabei wird vorausgesetzt, dass dieser Term charakteristisch für die Gleichung ist (HIRSCH [S16]).

### 2.3.1.9 Der SLIC-Algorithmus

Um den rein konvektiven Transport skalarer Größen numerisch zu berechnen (s. Kap. 3.1 und 5.3.1) und um den Fortschritt einer als unendlich dünn angenommenen Flammenfront zu untersuchen (s. Kap. 6.3.2) wurde in das Programm EBI-2d ein Algorithmus zur Beschreibung einer Diskontinuitätsfläche implementiert. Dieser beruht auf der Idee der von NOH u. WOODWARD [N8] vorgeschlagenen SLIC (Simple Line Interface

Calculation)-Methode. Jede Rechenzelle, in der sich die Diskontinuitätsfläche (bzw. bei einem 2-d Gitter die Diskontinuitätslinie) befindet, wird durch diese in zwei Teilvolumina zerlegt, die zwei verschiedene Fluidanteile repräsentieren. Diese Fluidanteile können unterschiedlicher Herkunft sein (z. B. Düsenfluid und Umgebungsmedium) oder auch zwei verschiedene Zustände eines Gemisches repräsentieren (z. B. unverbrannt und verbrannt). Die folgende Erläuterung des Algorithmus wird am Beispiel einer als unendlich dünn angenommenen Flammenfront vorgenommen (s. Abb. 2.3-4).

Jede Rechenzelle wird zunächst auf den Volumenanteil der interessierenden skalaren Größe, z. B.  $f$  für Frischgemisch, untersucht. Hat die Variable  $f$  den Wert Eins, so ist die Zelle ganz mit Frischgemisch gefüllt. Hat  $f$  den Wert Null, so ist die Zelle ganz mit Abgas gefüllt. Zellen mit  $0 < f < 1$  beinhalten somit die Flammenfront. Nur die Zellen, welche die Diskontinuitätslinie beinhalten werden weiter behandelt, was sich günstig auf Buchhaltung und Rechenzeit auswirkt. In jeder dieser Zellen wird nun die Flammenfront als eine vertikale oder horizontale Linie approximiert, welche die jeweilige Zelle in einen unverbrannten und einen verbrannten Anteil aufteilt. Die Orientierung der Linie ergibt sich aus einer Untersuchung der  $f$ -Werte der umliegenden Zellen, wobei bezüglich der Strömungsrichtung senkrechte Linien bevorzugt werden. Je nach Füllgrad der betrachteten Zelle und der umliegenden Zellen wurden sieben verschiedene Fälle von Nachbarschaftsbeziehungen implementiert. Eine Differenzierung in zahlreiche weitere Fälle ist prinzipiell möglich (z. B. ORAN [N5]). Die Bewegung einer Flammenfront, die sich in einem instationären Strömungsfeld befindet kann in zwei Anteile zerlegt werden. Diese werden innerhalb eines diskreten Zeitschrittes getrennt behandelt. Beim *Brennschritt* wird die Bewegung der Flamme mit der Brenngeschwindigkeit normal zu sich selbst berücksichtigt, beim *Konvektionsschritt* der Einfluss des umgebenden instationären Strömungsfeldes.

Beim *Konvektionsschritt* wird die Konvektionsgeschwindigkeit am Ort der Interfacelinie über eine lineare Interpolation aus den an den Zellgrenzen vorhandenen Geschwindigkeiten berechnet. Innerhalb eines Zeitschrittes wird der  $f$ -Wert der aktuellen Zelle, sowie eventuell betroffener Nachbarzellen (wenn sich die Interfacelinie über eine Zellgrenze hinwegbewegt) abhängig von dieser Geschwindigkeit verändert. In einem zweidimensionalen Strömungsfeld wird die Konvektion in die zwei Koordinatenrichtungen getrennt behandelt. Zuerst wird die Grenzlinie mit der Geschwindigkeitskomponente in axialer Richtung bewegt, danach mit der radialen Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung. Dabei kann sich die Orientierung der Linie innerhalb derselben Zelle abhängig von der Konvektionsrichtung ändern. Um daraus resultierende Biasingeffekte zu vermeiden, wird die Reihenfolge der zwei Teilschritte bei jedem Zeitschritt gewechselt. Einen Eindruck, wie eine Flammenfront durch die Interfacelinien approximiert wird, gibt Abb. 2.3-4.

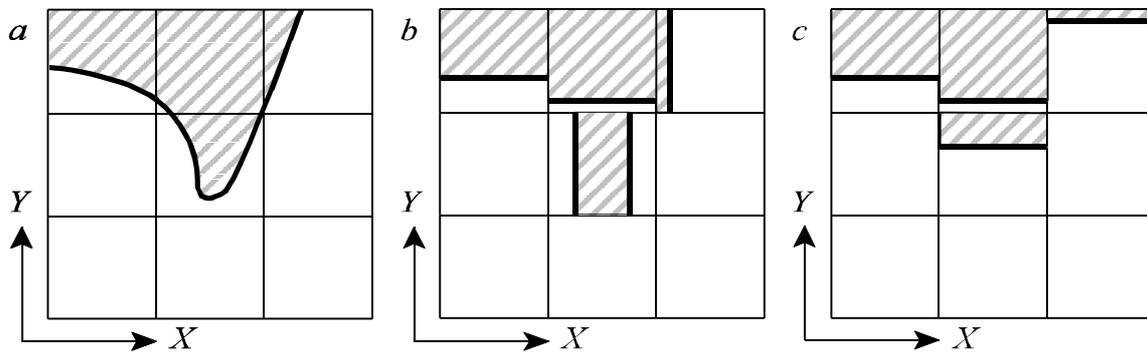


Abb. 2.3-4: Prinzip des SLIC-Algorithmus nach NOH AND WOODWARD [N8]. a: Aktuelle Grenzlinie, b: SLIC-Approximation in x-Richtung, c: SLIC-Approximation in y-Richtung.

Der *Brennschritt* wird im wesentlichen genauso wie der *Konvektionsschritt* gehandhabt. Die Geschwindigkeit, mit der sich die Grenzlinie jetzt fortbewegt, ist die lokale Brenngeschwindigkeit. Wie bei der Konvektion wird die Reihenfolge der Brennschritte in die unterschiedlichen Koordinatenrichtungen bei jedem Zeitschritt gewechselt.

Die Verwendung des SLIC-Algorithmus ergibt keine numerische Diffusion im Sinne einer Abflachung von Gradienten. Das Fehlen einer numerischen Diffusion bedeutet aber nicht, dass das SLIC-Verfahren frei von numerischen Fehlern arbeitet. So wird die Konvektionsgeschwindigkeit an der Position der Interfacelinie durch lineare Interpolation gewonnen. Dies führt jedoch nicht zu einer Verbreiterung der Grenzlinie im Sinne eines diffusiven Effektes. Der SLIC-Algorithmus eignet sich aus diesem Grund nur zur Darstellung einer unendlich dünnen Grenzlinie bzw. Diskontinuitätslinie, die keinerlei physikalischer Diffusion unterworfen ist. In der vorliegenden Arbeit wurde der SLIC-Algorithmus verwendet, um den Einfluss der Konvektion auf die Ausbreitung einer skalaren Größe innerhalb eines instationären Strömungsfeldes isoliert zu untersuchen (s. Kap. 5.3.1) sowie um die Ausbreitung einer als Diskontinuitätsfläche angenommenen Flammenfront zu berechnen (s. Kap. 6.3.3).

### 2.3.1.10 Tabelle der Transportgleichungen

Eine Übersicht über alle bei der Rechnung mit dem Programm EBI-2d verwendeten Transportgleichungen in der Form der allgemeinen Transportgleichung (Gl. 2.3-1) gibt Tab. 2.3-1. Dabei bedeuten  $\Phi$  die transportierte Variable,  $\sigma_{eff}$  die Proportionalitätsfaktoren zur Bestimmung der entsprechenden effektiven Viskositäten (Kap. 2.1.5.2.) und effektiven Diffusivitäten (Kap. 2.1.5.3),  $S_{\Phi,K}$  der konstante Anteil des Quelltermes und  $S_{\Phi,L}$  der lineare Anteil des Quelltermes.  $\dot{P}$  ist die Produktion von turbulenter kinetischer Energie (s. Kap. 2.1.5.4).

Tab. 2.3-1: Die nach dem Schema der allgemeinen Transportgleichung dargestellten Transportdifferentialgleichungen

Gleichung	$\Phi$	$S_{\Phi,K}$	$S_{\Phi,L}$	$\sigma_{eff}$
Kontinuität	1	-	-	-
Axialimpuls	$\bar{u}$	$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu_{eff} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)$	0	1,0
Radialimpuls	$\bar{v}$	$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{eff} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \mu_{eff} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right)$	$-\frac{2\mu_{eff}}{r^2}$	1,0
turb. kin. Energie	$k$	$P$	$-c_{\mu} \bar{\varrho} \frac{\varepsilon}{k}$	1,0
Dissipation	$\varepsilon$	$c_1 P \frac{\varepsilon}{k}$	$-c_2 \bar{\varrho} \frac{\varepsilon}{k}$	1,3
Mischungsbruch	$\bar{f}$	0	0	0,7
Enthalpie	$\bar{h}$	0	0	0,7
Brennstoff	$\bar{\sigma}$	0	$\bar{\omega}$	0,7
Aufenthaltszeit	$\bar{\tau}$	$\bar{\varrho}$	0	0,7

### 2.3.2 Spektralverfahren

Zur Bewertung der numerischen Genauigkeit des verwendeten Finite-Volumen-Codes EBI-2d werden in den Kapiteln 3.1 und 3.2 Ergebnisse von Vergleichsrechnungen diskutiert, die unter Verwendung eines Spektralverfahrens erzielt wurden. Zur Berechnung wurde das Programm SICOM des Institutes für Technische Chemie und Polymerchemie verwendet, welches die Lösung von Transportgleichungen in einem zweidimensionalen kartesischen System ermöglicht. An dieser Stelle soll das Verfahren kurz charakterisiert werden. Für eine detaillierte Beschreibung der Methode und des Programmes wird auf die entsprechende Literatur verwiesen (GERLINGER [N9], FRÖHLICH [N10], CANUTO [N11], PEYRET [N12]).

Bei der Spektralmethode wird die Lösungsfunktion für eine transportierte Variable zunächst in einen orts- und einen zeitabhängigen Term separiert. Der ortsabhängige Term wird durch eine Summe ortsabhängiger Ansatzfunktionen dargestellt, die sehr glatt sind und von denen jede einzelne das gesamte Rechengebiet überdeckt. Die in der Summe

enthaltenen Koeffizienten sind die Freiwerte der numerischen Lösung und werden in jedem Zeitschritt berechnet. Werden in einer Koordinatenrichtung ausschließlich periodische Ränder verwendet, so wird zur Ortsdiskretisierung eine Zerlegung in trigonometrische Funktionen (Fourier-Methode) durchgeführt. Beim Vorliegen von Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen werden Tschebyschew-Polynome als Basisfunktionen gewählt. Für die Zeitdiskretisierung wird ein semi-implizites Differenzenverfahren zweiter Ordnung verwendet, bei dem aus Stabilitätsgründen die Diffusionsterme implizit und die verbleibenden Terme explizit diskretisiert werden. Der zeitabhängige Term wird dabei durch eine unendliche Reihe aus zeitabhängigen Koeffizienten dargestellt.

Die Vorteile von Spektralmethoden liegen in ihrer Genauigkeit begründet. Diese liefern wegen der speziellen Eigenschaften der zugrunde liegenden Basisfunktionen bei ausreichend vielen Termen in der approximierenden Summe extrem genaue Lösungen, was auch als *spektrale Konvergenz* bezeichnet wird. Die Nachteile der Methode liegen in der Formulierung von Randbedingungen und in der Darstellung von Singularitäten bzw. von großen Gradienten der transportierten Variablen. Dies erschwert zum einen die Behandlung von Wänden, zum anderen die Berechnung spezieller Feldgrößen, z. B. Skalare, die eine kleine physikalische Diffusivität aufweisen (s. Kap. 3). In diesem Zusammenhang ist vor allem das sog. *Gibbs-Phänomen* zu erwähnen. Wird eine Funktion, die eine Unstetigkeitsstelle aufweist, mit einer Fourierreihe dargestellt, so treten unmittelbar neben der Sprungstelle wellenförmige Überschwinger auf. Die Wellenberge rücken zwar für eine wachsende Anzahl berücksichtigter Fourier-Koeffizienten der Sprungstelle immer näher, d. h. die Auswirkung des Phänomens wird räumlich eingegrenzt, jedoch konvergiert die Abweichung von der ursprünglichen Funktion nicht gegen Null sondern beträgt mindestens 9% der Sprunghöhe (KLOTTER [So2]).

## 3 Berechnung von Testsystemen

In Kapitel 3 wird die Leistungsfähigkeit des in dieser Arbeit verwendeten Finite-VolumenVerfahrens (FVV) im Hinblick auf die Berechnung instationärer Strömungs- und Mischungsfelder untersucht. Ziel ist hierbei einerseits die Abschätzung der numerischen Fehler des Finite-Volumen-Verfahrens unter Variation verschiedener numerischer und physikalischer Parameter. Andererseits sollte die Erweiterung des Programmes zur Berechnung instationärer Strömungen und die korrekte Implementierung des SLIC-Algorithmus getestet werden. Zu diesem Zweck wurden zwei unterschiedliche Strömungskonfigurationen sowohl mit dem Finite-Volumen-Verfahren, im Folgenden FVV genannt, als auch mit einem Spektralverfahren, im Folgenden SV genannt, berechnet. Die Berechnungen mit dem FVV wurden mit dem Programm EBI-2d (s. Kap. 2.3.1), die Berechnungen mit dem SV mit dem Programm SICOM (s. Kap. 2.3.2) durchgeführt. In Kapitel 3.1 wird die Berechnung des konvektiven Transportes einer skalaren Größe in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld ("rotierender Farbfleck") vorgestellt, in Kapitel 3.2 die Berechnung des Strömungs- und Mischungsfeldes ebener laminarer Wirbelstrukturen (Stabwirbel).

### 3.1 Rotierende Farbflecke

#### 3.1.1 Durchführung der Berechnungen

##### Beschreibung des Systemes

Als Rechengebiet wurde eine Ebene mit den Abmessungen 10 x 10 cm gewählt. Es wurden zwei orthogonale äquidistante Gitter mit den Auflösungen 100 x 100 bzw. 200 x 200 Zellen verwendet. Zu Beginn der Rechnung wurde die transportierte skalare Testgröße  $f$  mit zwei verschiedenen Ausgangsverteilungen A bzw. B vorgelegt. Als Ausgangsverteilung A wurde eine zweidimensionale Gauß-Verteilung mit dem Maximalwert  $f_{Max} = 1$  und einer Standardabweichung von  $\sigma = 0,003$  gewählt. Ausgangsverteilung B war eine quadratische Verteilung der Höhe  $f = 1$ . In Abb. 3.1-1 sind die Anfangsbedingungen jeweils für die Gauß-Verteilung (linke Spalte) und die quadratische Verteilung (rechte Spalte) dargestellt. Die Farbe *schwarz* markiert den Wert *Eins*, die Farbe *weiß* den Wert *Null* von  $f$ . Die transportierte skalare Größe  $f$  wird im Weiteren als Konzentration bezeichnet. Die Teilbilder 1 und 2 zeigen das gesamte Rechengebiet zusammen mit den Ausgangsverteilungen und einigen Stromlinien des vorgegebenen Geschwindigkeitsfeldes. Um einen Eindruck von der Gitterfeinheit zu vermitteln, ist ein kleiner Ausschnitt des Rechengebietes zusammen mit den Gitterlinien in den Teilbildern 3 und 4 für das gröbere Gitter und in den Teilbildern 5 und 6 für das feinere Gitter dargestellt.

### Geschwindigkeitsfeld

Die jeweilige Ausgangsverteilung A oder B wurde ausgehend vom Zeitpunkt  $t=0$  in einem vorgegebenen und zeitlich konstanten Geschwindigkeitsfeld konvektiv transportiert. Als Geschwindigkeits-Profil wurde ein Festkörperwirbel-Profil mit folgender Umfangsgeschwindigkeitsverteilung gewählt:  $w = K \cdot r$ , mit  $K = 20[1/s]$ .

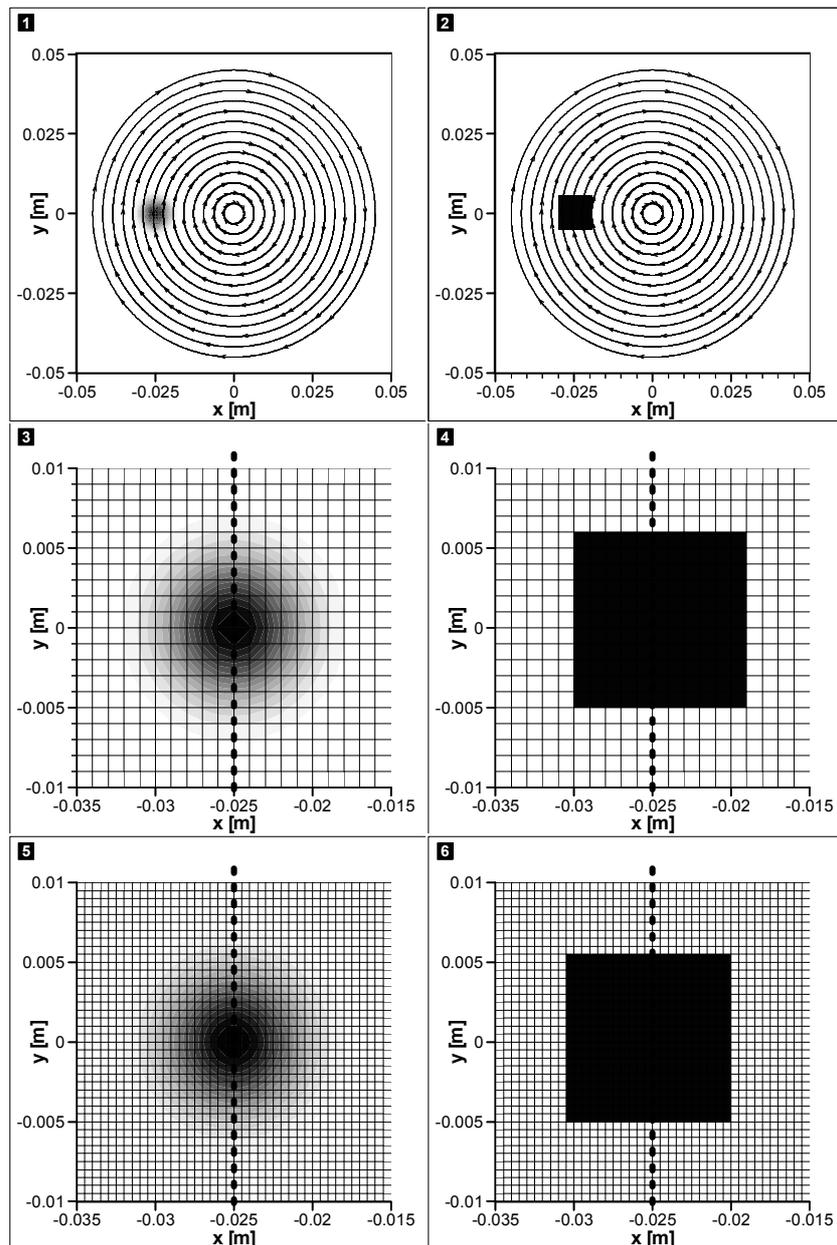


Abb. 3.1-1: Ausgangsverteilungen A und B

### 3.1.2 Ergebnisse

Alle folgenden Abbildungen zeigen Vertikalschnitte des Konzentrationsfeldes an der Axialposition  $x = -0.025\text{ m}$  nach einer einmaligen Umdrehung um das Rotationszentrum

( $x = 0$ ;  $y = 0$ ). Die Schnittlinie ist in Abb. 3.1-1 gestrichelt eingezeichnet. An der Position  $x = -0,025\text{ m}$ ,  $y = 0\text{ m}$  befand sich zu Beginn der Rechnung der Mittelpunkt der jeweiligen Ausgangsverteilung. Die Zeit, die der Mittelpunkt benötigte, um das Drehzentrum zu umrunden, betrug  $t = 0,314\text{ s}$ . Die Anzahl der pro Kurve dargestellten Symbole ist aus Gründen der Übersichtlichkeit kleiner als die Anzahl der vorhandenen Stützstellen.

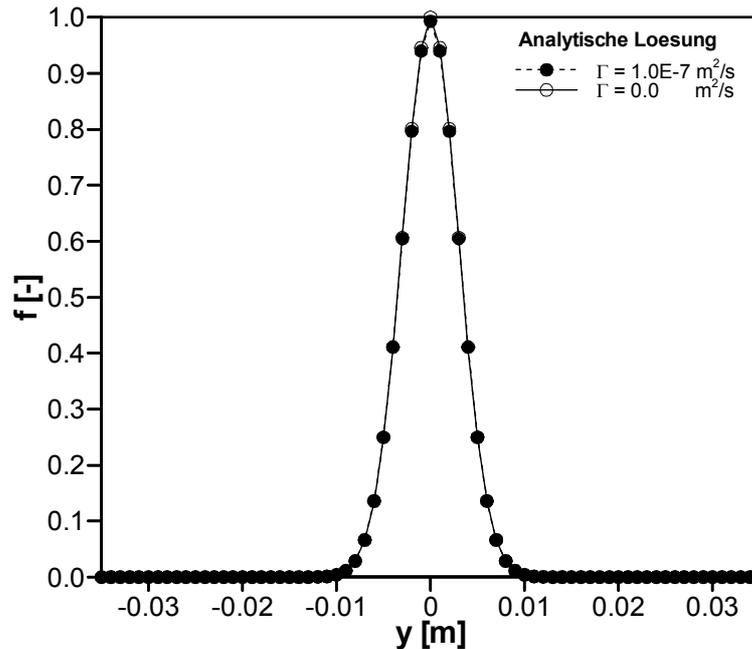


Abb. 3.1-2: Ausgangsverteilung A: Einfluss der physikalischen Diffusion bei analytischer Rechnung. Radialschnitte der Konzentration bei  $x = -0,025\text{ m}$ .

### Ausgangsverteilung A (Einfluss der physikalischen Diffusion)

Bei der Rechnung mit dem FVV war es möglich, die Wirkung der physikalischen Diffusion durch Nullsetzen des Diffusionskoeffizienten  $\Gamma$  gänzlich zu unterdrücken und dadurch den durch die Diskretisierung der konvektiven Terme herrührenden numerischen Fehler zu analysieren. Das Spektralverfahren war bei Nullsetzen der physikalischen Diffusion instabil. Abb. 3.1-2 zeigt den Einfluss der physikalischen Diffusion anhand der analytischen Lösung. Wie zu erkennen ist, ist das Ergebnis, welches sich unter Verwendung eines Diffusionskoeffizienten von  $\Gamma = 1,0 \cdot 10^{-7}\text{ m}^2/\text{s}$  ergibt, nahezu deckungsgleich mit dem Ergebnis, das ohne Berücksichtigung der physikalischen Diffusion erzielt wird. Das heißt, die Verbreiterung des Ausgangsverteilung durch physikalische Diffusion ist bei Verwendung des angegebenen Wertes für den Diffusionskoeffizienten bei einer Konvektionszeit von  $t = 0,314\text{ s}$  vernachlässigbar. Da das Spektralverfahren bei Verwendung dieses Diffusionskoeffizienten konvergente Lösungen ergab, wurde für alle mit Ausgangsverteilung A durchgeführten Vergleichsrechnungen der angegebene Wert für  $\Gamma$  verwendet.

### Ausgangsverteilung A (Einfluss numerischer Parameter)

Die mit dem FVV erzielten Lösungen (Abb. 3.1-3 u. 3.1-4) zeigen, dass sich die

Ausgangsverteilung  $A$  je nach Wahl von Diskretisierungsverfahren, Gitterauflösung und Zeitschrittweite unterschiedlich verbreitert bzw. unter Abnahme des Maximalwertes abflacht. Das ‐Zerfließen‐ der Ausgangsfunktion  $A$  lässt sich als Wirkung eines diffusiven Prozesses deuten. Da der Einfluss der tatsächlichen physikalischen Diffusion auf Grund des kleinen Diffusionskoeffizienten im vorliegenden Fall vernachlässigbar ist (vgl. Abb. 3.1-2), stellt dieses ‐Zerfließen‐ die direkte Auswirkung von numerischen Fehlern dar. Dieser Vorgang wird im Folgenden als ‐numerische Diffusion‐ (vgl. Kap. 2.3.1-3) bezeichnet. Die mit dem SV unter Verwendung beider Gitter erzielte Lösungen decken sich mit der analytischen Lösung. Die zeigt, dass der numerische Fehler bei Verwendung des Spektralverfahrens sehr klein ist.

Eine Halbierung der Zeitschrittweite von  $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$  auf  $\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$  ergibt bei jedem Gitter eine Verkleinerung der numerischen Diffusion. Das gleiche gilt für eine Halbierung des Gitterabstandes, bzw. einer Verdoppelung der Anzahl der Gitterlinien. Es ist jedoch deutlich zu erkennen, dass eine Gitterverfeinerung um den Faktor zwei, was einer Vervierfachung der Zellanzahl entspricht, eine stärkere Verkleinerung des Rechenfehlers nach sich zieht als eine Halbierung des Zeitschrittes. Dies zeigt, dass der von der Diskretisierung der konvektiven Terme herrührende numerische Fehler größer ist als der Fehler der Zeitdiskretisierung. Der instationäre Term der Transportgleichung ist beim verwendeten FVV zwar nur mit einem Diskretisierungsansatz erster Ordnung aufgelöst (s. Kap. 2.3.1-5), jedoch ist der verwendete Zeitschritt schon so klein, dass der daraus resultierende Fehler entsprechend vermindert ist.

Die ‐Stärke‐ des numerischen Fehlers nimmt in der Reihenfolge der Diskretisierungsverfahren von QUICK über MLU zu HYBRID zu, wobei der Unterschied zwischen QUICK- und MLU-Verfahren weitaus geringer ist als zwischen QUICK-/MLU-Verfahren einerseits und dem HYBRID-Verfahren andererseits. Dies war zu erwarten, da die Diskretisierungsverfahren QUICK und MLU jeweils Verfahren zweiter Ordnung sind, das HYBRID-Verfahren jedoch nur ein Verfahren erster Ordnung ist (s. Kap. 2.3.1-3).

Tab. 3.1-1: Maximalwerte der Konzentration  $f$  zum Zeitpunkt  $t = 0,314 \text{ s}$

$f$	100 x 100 Gitterpunkte			200 x 200 Gitterpunkte		
	$\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$	$\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	$\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ s}$	$\Delta t = 5,0 \cdot 10^{-5} \text{ s}$
HYBRID	0.07	0.08	0.08	0.11	0.15	0.15
QUICK	0.3	0.61	0.68	0.32	0.71	0.8
MLU	0,27	0,5	0,54	0,3	0,66	0,72
Spektralverfahren	-	-	100	-	-	0,98
analytische Lösung	1			10		

Für die Rechnung mit dem grobem Gitter (Abb. 3.1-3) ist zu erkennen, dass die zu Beginn der Rechnung symmetrische Gauß-Verteilung nach dem konvektiven Transport eine Asymmetrie bezüglich ihrer Lage senkrecht zur Strömungsrichtung aufweist. Die Asymmetrie rührt daher, dass die Courantzahl  $Co = w \cdot \Delta t / \Delta x$  vom Mittelpunkt des Rechengebietes nach außen hin anwächst. Eine größere Courantzahl zieht jedoch einen größeren numerischen Fehler nach sich. Die Asymmetrie ist bei Verwendung des feineren Gitters (Abb. 3.1-4) nahezu verschwunden.

Tab. 3.1-1 zeigt eine Übersicht der nach dem konvektiven Transport auftretenden Maximalwerte der Konzentration. Der Einfluss der Gitterfeinheit ist größer als der Einfluss der Zeitschrittweite. Der Einsatz eines Diskretisierungsverfahrens zweiter Ordnung (QUICK oder MLU) bringt gegenüber dem Diskretisierungsverfahren erster Ordnung (HYBRID) im Vergleich zur Variation der Parameter Zeitschritt oder Gitterauflösung die weitaus stärkste Verringerung des numerischen Fehlers.

### **Ausgangsverteilung B (Einfluss numerischer Parameter)**

Da mit dem Spektralverfahren ein unendlich großer Gradient der skalaren Größe  $f$  nicht realisiert werden kann (s. Kap. 3.2.1.3) wurde bei der Ausgangsverteilung B nur mit dem FVV gerechnet. Zusätzlich wurde der SLIC-Algorithmus (s. Kap. 2.3.1-9) eingesetzt.

Abb. 3.1-5 und 3.1-6 zeigen die Ergebnisse der Berechnungen. Die Abhängigkeit von den Einflussparametern sind qualitativ gleich wie schon für die Ausgangsverteilung A diskutiert. Zusätzlich ist der Vorteil des MLU-Verfahrens gegenüber dem QUICK Verfahren zu erkennen. Das QUICK-Verfahren liefert zwar insgesamt eine kleinere numerische Diffusion, zeigt jedoch überschwingendes Verhalten. Es stellen sich Werte der Konzentration ein, die über dem Anfangswert ( $f = 1$ ) liegen. Diese Eigenschaft liegt in der Verwendung des über drei Gitterpunkte reichenden Approximationspolynoms zur Bestimmung des  $f$ -Wertes auf der Zellgrenze her. Bei Verwendung des MLU-Verfahrens wird dieser Fehlereinfluss unterdrückt. Allerdings ist damit eine etwas stärker wirkende numerische Diffusion verbunden.

Zusätzlich sind Ergebnisse, die unter Verwendung des SLIC-Algorithmus erzielt wurden eingezeichnet. Der SLIC-Algorithmus ergibt keine numerische Diffusion im Sinne eines "Zerfließens" der Ausgangsverteilung. Dies ist auch im Vergleich mit der analytischen Lösung zu erkennen. Die scheinbare schwache Verbreiterung des Peaks liegt in der Gitterauflösung begründet und ist ein reines Darstellungsproblem. Das Grafikprogramm stellt eine gerade Linie zwischen den Werten null und eins der Größe  $f$  dar, was in Verbindung mit dem Zellabstand zu einer gegenüber der Senkrechten leicht geneigten Gerade führt. In Wirklichkeit liegt die unendlich dünne Grenzlinie an einer definierten Position innerhalb einer Gitterzelle. Das Fehlen einer numerischen Diffusion bedeutet aber nicht, dass das SLIC-Verfahren frei von numerischen Fehlern arbeitet. Auch die Bestimmung der Position der Grenzlinie ist numerischen Ungenauigkeiten unterworfen, da dabei eine (im vorliegenden Fall lineare) Interpolationsvorschrift verwendet wird. Dies führt jedoch nicht zu einer Verbreiterung der Grenzlinie im Sinne eines diffusiven Effektes. An dieser Stelle soll jedoch nochmals explizit darauf hingewiesen werden, dass das SLIC-Verfahren nur zur Darstellung einer Diskontinuitätslinie, welche keinerlei

physikalischer Diffusion unterworfen ist, geeignet ist.

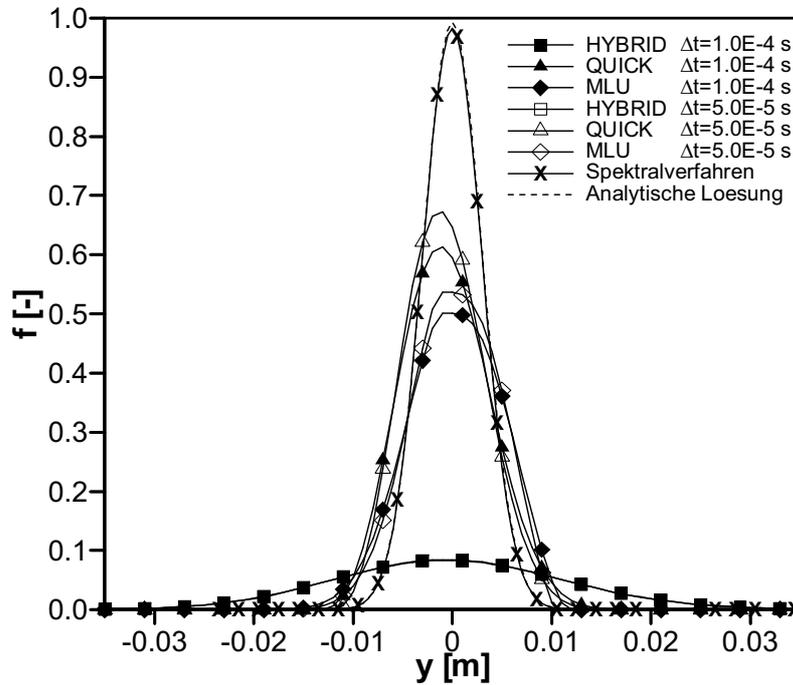


Abb. 3.1-3: Ausgangsverteilung A: Einfluss von Diskretisierung und Zeitschritt. Radialschnitte der Konzentration bei  $x = -0,025$  m. (Gitter:  $100 \times 100$ ,  $\Gamma = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ )

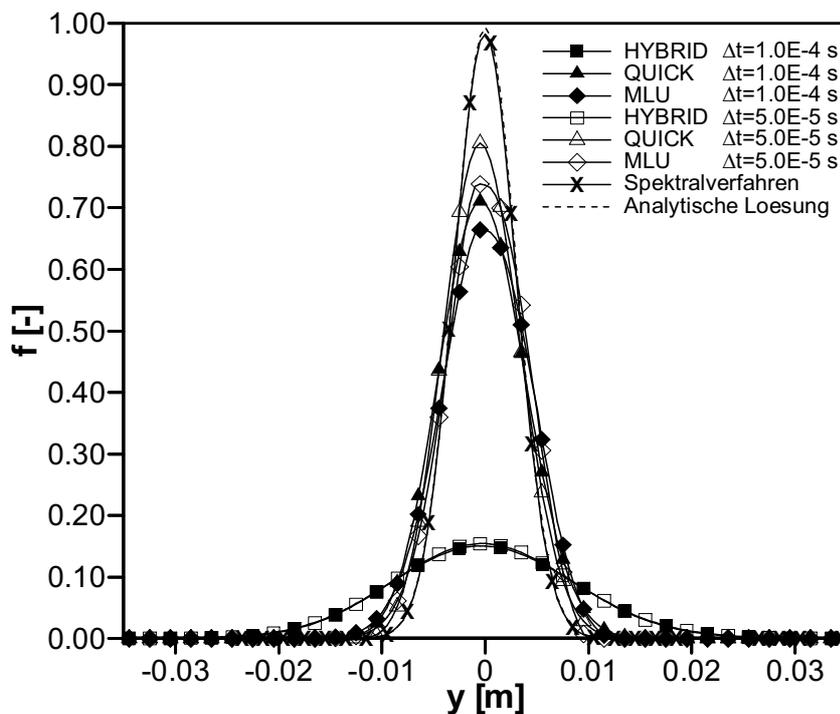


Abb. 3.1-4: Ausgangsverteilung A: Einfluss von Diskretisierung und Zeitschritt. Radialschnitte der Konzentration bei  $x = -0,025$  m. (Gitter:  $200 \times 200$ ,  $\Gamma = 1.0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ )

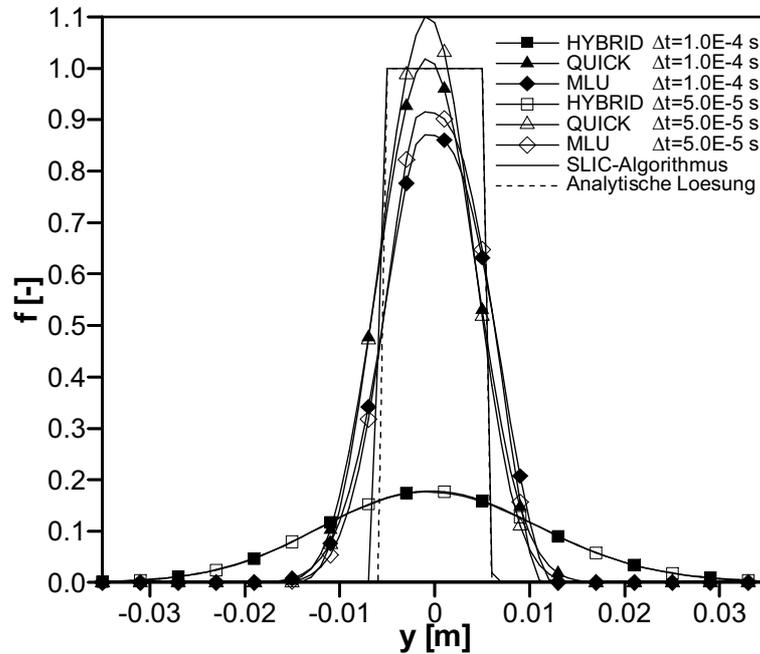


Abb. 3.1-5: Ausgangsverteilung B: Einfluss von Diskretisierung und Zeitschritt. Radialschnitte der Konzentration bei  $x = -0,025$  m. (Gitter:  $100 \times 100$ ,  $\Gamma = 0,0$  m<sup>2</sup>/s)

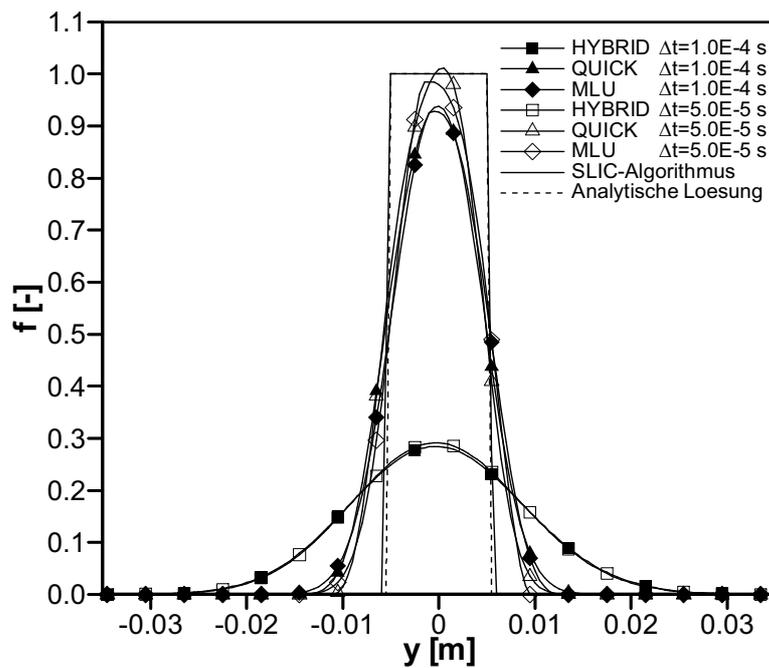


Abb. 3.1-6: Ausgangsverteilung B: Einfluss von Diskretisierung und Zeitschritt. Radialschnitte der Konzentration bei  $x = -0,025$  m. (Gitter:  $200 \times 200$ ,  $\Gamma = 0,0$  m<sup>2</sup>/s)

## 3.2 Laminare isotherme ebene Wirbel

### 3.2.1 Durchführung der Berechnungen

#### Beschreibung des Systemes

Das als Vertreter der Spektralmethoden verwendete Programm SICOM erlaubt nur die Verwendung eines zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystems. Aus diesem Grund wurde das Strömungs- und Mischungsfeld *ebener* laminarer Wirbelstrukturen (Stabwirbel) berechnet. Im Gegensatz zu Ringwirbeln, die sich beim Austritt eines definierten Fluidvolumens aus einer rotationssymmetrischen Düse bilden (s. Kap. 2.1.7), wickeln sich Stabwirbel stromab von Schlitzdüsen auf.

#### Geometrie und Randbedingungen

Die numerischen Grundlagen der beiden verwendeten Rechenprogramme EBI-2d (Finite-Volumen-Verfahren) und SICOM (Spektralverfahren) sind völlig verschieden. Dies spiegelt sich auch in den unterschiedlichen Ansätzen zur Behandlung der Randbedingungen wieder. In SICOM sind in Strömungsrichtung die Randbedingungstypen Dirichlet (Randwertvorgabe) und Neumann (Nullgradientenbedingung), senkrecht zur Hauptströmungsrichtung periodische Randbedingungen implementiert. In EBI-2d sind die Randbedingungen Wand, Symmetrie und offener Rand wählbar. Es sind jedoch keine periodischen Ränder implementiert. Aus diesem Grund wurden zunächst umfangreiche Testrechnungen durchgeführt. Diese ergaben, dass bei Verwendung der in Abb. 3.2-1 dargestellten Konfigurationen der Einfluss der jeweiligen Randbedingungen auf das Ergebnis minimal ist.

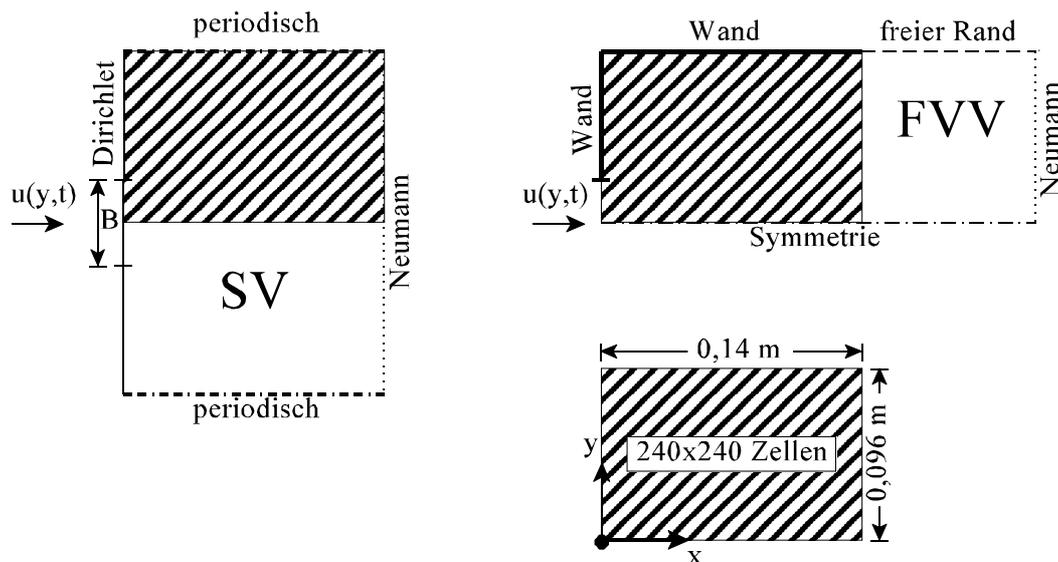


Abb. 3.2-1: Geometrie und Randbedingungen

#### Rechengitter

Die Wahl der Anzahl und Verteilungen der Stützstellen des Rechengitters orientierte sich

an den Erfordernissen des Spektralverfahrens. Bei Verwendung des SV kann ein Lösungsfehler auftreten, der durch das sogenannte Gibbs-Phänomen (s. Kap. 3.2.3) verursacht wird. Werden Gradienten von Feldgrößen nicht durch ein entsprechend feines Gitter aufgelöst, so werden diese Größen durch eine Überlagerung mit unphysikalischen Abweichungen, die einen Wellencharakter aufweisen, verfälscht. Um diesen Effekt auszuschließen, wurde die erforderliche Gitterfeinheit durch Testrechnungen ermittelt. Ausgewertet wurde der auftretende Maximalwert der Konzentration. Diese darf an keiner Stelle im Rechengebiet größer als der am Einlassrand vorgegebene Wert 1 sein. Die Überschreitung dieses Wertes stellt daher ein qualitatives Maß für eine ausreichende Gitterauflösung dar. Für eine kleiner werdende physikalische Diffusion werden die Gradienten im Konzentrationsfeld stärker. Aus diesem Grund ist es erforderlich mit größer werdender Schmidtzahl auch die Gitterauflösung zu verbessern. Das verwendete Gitter wurde so optimiert, dass der auftretende maximale Fehler der Konzentrationswerte bei der Rechnung mit dem Spektralverfahren (SICOM-Code) unter 1% lag. In axialer Richtung war eine Stützstellenverteilung optimal, bei der sich der Abstand der Gitterlinien mit zunehmender Entfernung vom Einlassrand vergrößert. In radialer Richtung waren die Stützstellen äquidistant verteilt. Innerhalb des in Abb. 3.2-1 gezeigten schraffierten Bereiches waren die für die beiden Programme verwendeten Rechengitter identisch.

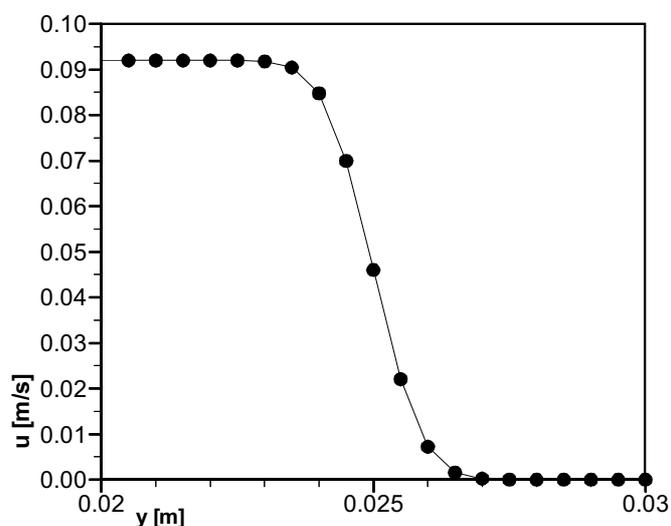


Abb. 3.2-2: Radialer Verlauf der Axialgeschwindigkeit am Einlassrand (Ausschnitt)

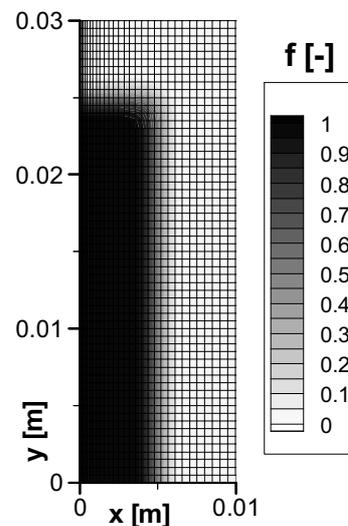


Abb. 3.2-3: Anfangsbedingung für die Konzentration

### Geschwindigkeit am Einlassrand

Am Einlassrand wurde ein sinusförmiger zeitabhängiger Verlauf für die Axialgeschwindigkeit  $u$  vorgegeben:

$$u(t) = \frac{A}{2} \cdot \left[ 1 + \sin \left( \pi \left( 2 \cdot \frac{t}{t_P} + 1,5 \right) \right) \right], \quad u(t > t_P) = 0 .$$

Als Amplitude wurde ein Wert von  $A = 0,092$  m/s gewählt, als Periodendauer  $t_P = 4$  s. Im

Gegensatz zum Finite-Volumen-Verfahren ist es bei Verwendung der Spektralmethode unmöglich, ein Blockprofil für den radialen Verlauf der Axialgeschwindigkeit am Einlassrand zu verwenden, da bei der Fourier-Transformation von Sprungfunktionen das Gibbs-Phänomen auftritt (s. o.). Für den radialen Verlauf der Axialgeschwindigkeit am Einlassrand wurde daher folgende Funktion gewählt:  $u(y,t) = u(t) \cdot (0,5 - 0,5 \cdot \text{erf}[S \cdot (y - 0,025)])$ , wobei  $\text{erf}$  die Errorfunktion repräsentiert. Für die Steilheit des Profils wurde der Wert  $S = 1000 \text{ 1/m}$  verwendet. In Abb. 3.2-2 ist das radiale Profil der Axialgeschwindigkeit am Einlassrand für den Zeitpunkt  $t = 1 \text{ s}$  dargestellt.

### Anfangswerte für die Konzentration

Um die Wirkung des Gibbs-Phänomens (s. o.) zu minimieren, war es ebenfalls erforderlich, eine spezielle Anfangsbedingung für die Konzentration des Skalares  $f$  zu verwenden

$$f(t=0) = (0,5 - 0,5 \cdot \text{erf}[S \cdot (y - 0,025)]) \cdot (0,5 - 0,5 \cdot \text{erf}[S \cdot (x - 0,005)]) \quad .$$

Die Anfangskonzentration ist zusammen mit dem Rechengitter in Abb. 3.2-3 gezeigt.

### Stoffwerte

In Anlehnung an die in Kap. 4 beschriebenen Berechnungen laminarer Ringwirbel wurden die Stoffwerte von Wasser bei einer Temperatur von 300 K verwendet:  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$ . Zur Untersuchung des Einflusses der physikalischen Diffusion der transportierten skalaren Größe  $f$  wurde der Diffusionskoeffizient über die Schmidtzahl  $Sc$  variiert:

$$\Gamma = \frac{\nu}{Sc}, \quad Sc \in \{ 0,7; 5; 400; \infty \} \quad .$$

Wasser weist eine Schmidzahl von ca. 400 auf.

### Zeitschritt

Es wurde ein Zeitschritt von  $\Delta t = 0,0002 \text{ s}$  verwendet.

## 3.2.2 Ergebnisse

### Vergleich der berechneten Geschwindigkeitsfelder

Das Wirbelzentrum befindet sich bei einer physikalischen Zeit von  $t = 2 \text{ s}$  an den Koordinaten  $x = 0,027 \text{ m}$  und  $y = 0,027$ . Abb. 3.2-4 und 3.2-5 zeigen an dieser Axialposition Schnitte der Geschwindigkeit und der Rotation in vertikaler Richtung. Die mit dem FVV und dem SV berechnete Axialgeschwindigkeiten (Abb. 3.2-4) stimmen sehr gut miteinander überein. Der Gradient in der Nähe des Wirbelzentrums ist bei der FVV-Rechnung leicht steiler, was zu einem etwas größeren Wert der Rotation in diesem Bereich führt (Abb. 3.2-5).

### Vergleich der berechneten Mischungsfelder

In Abb. 3.2-6 sind die Feldverteilungen der Konzentration des Skalares  $f$ , ebenfalls zum Zeitpunkt  $t = 2$  s dargestellt. Die ersten vier Teilbilder zeigen den Vergleich bei Rechnung mit dem FVV und dem SV unter Verwendung zweier unterschiedlicher Schmidtzahlen (bzw. unterschiedlicher molekularer Diffusionskoeffizienten)  $Sc=0,7$  und  $Sc=5,0$ . Mit dem SICOM-Programm war es nicht möglich stabile Lösungen unter Verwendung der Schmidtzahl von Wasser ( $Sc=400$ ) durchzuführen. Eine weitere Erhöhung der Schmidtzahl, bzw. Verkleinerung der molekularen Diffusion bei Verwendung des SV hätte einer weiteren Verfeinerung des Rechengitters bedurft. Da die Rechenzeiten schon bei dem verwendeten Rechengitter bei ca. 10 Tagen lagen, wurden keine entsprechenden Rechnungen mit dem SV durchgeführt. Bei Verwendung des FVV war es jedoch möglich, die Schmidtzahl weiter zu erhöhen. In den Teilbildern 5 und 6 sind daher zusätzlich Ergebnisse von FVV-Rechnungen gezeigt, die unter Verwendung der Schmidtzahlen  $Sc=400$  und  $Sc=\infty$  durchgeführt wurden. Eine unendlich große Schmidtzahl entspricht einer Eliminierung der physikalischen Diffusion der Transportgleichung. Der Vergleich der Isobilder zeigt, dass die Auflösung der Feinstruktur des Mischungsfeldes innerhalb des Wirbels nur bei Verwendung des SV zu erzielen ist. Eine detaillierte Diskussion der berechneten Mischungsfelder wird wiederum anhand von Vertikalschnitten an der Position  $x = 0,027$  m durchgeführt (s. Abb. 3.2-7 und 3.2-8).

Die Mischungsfelder der Rechnung mit dem SV (s. Abb. 3.2-7) zeigen eine deutliche Abhängigkeit von der Schmidtzahl. Eine größere Schmidtzahl entspricht einem kleineren Diffusionskoeffizienten und damit einer ausgeprägteren Feinstruktur des Skalares  $f$  innerhalb der Wirbels. Bei der FVV-Rechnung (Abb. 3.2-8) macht sich der Einfluss der unterschiedlichen Schmidtzahlen lediglich in den Randbereichen des Wirbels ( $x = 0,013$  m und  $x = 0,048$  m) bemerkbar. Die Lösungen mit den Schmidtzahlen von 400 und  $\infty$  sind identisch. Bei verschwindender molekularer Diffusion ( $Sc=\infty$ ) müssten die Gradienten im Mischungsfeld unendlich groß sein. Der Gradient der Grenzlinie stellt somit ein quantitatives Maß für die Auswirkung numerischen Fehler (bzw. der numerischen Diffusion) dar.

### Analyse der numerischen Fehler des Finite-Volumen-Verfahrens (FVV)

Da die mit den beiden numerischen Verfahren FVV und SV berechneten Strömungsfelder sehr gut übereinstimmen, manifestieren sich in den Unterschieden der Konzentrationsverteilungen somit direkt die bei der Lösung der skalaren Transportgleichung mit dem FVV auftretenden numerischen Fehler.

Bei der Rechnung mit dem FVV konnte verifiziert werden, dass die Ergebnisse nur schwach von der Wahl des Zeitschrittes abhängen. Die Diskretisierung des instationären Termes der skalaren Transportgleichung für  $f$  hat somit, obwohl im verwendeten Programm nur eine Genauigkeit erster Ordnung aufweisend, nur einen kleinen Einfluss. Die Fehlereinflüsse stammen daher zum größten Teil von der Diskretisierung der konvektiven Terme her. Die Ergebnisse zeigen, dass die numerische Diffusion des FVV so groß ist, dass der Einfluss der physikalischen Diffusion völlig verfälscht wird. Daraus lässt sich ableiten, dass die numerische Diffusion größer ist als die physikalische

Diffusion. Das bei dieser FVV-Rechnung verwendete MLU-Verfahren zur Ortsdiskretisierung der konvektiven Terme der Konzentrationsgleichung weist zwar eine Genauigkeit zweiter Ordnung auf, ist aber damit dem Spektralverfahren weit unterlegen. Während die Konzentrationsgradienten an den Randbereichen des Wirbels ( $x = 0,013$  m und  $x = 0,048$  m) von beiden Verfahren ähnlich gut aufgelöst werden, wird die Konzentrationsverteilung im Wirbelzentrum von der FVV-Rechnung deutlich schlechter wiedergegeben. In diesem Bereich wechselt das Vorzeichen des Konzentrationsgradienten auf kurzer Distanz mehrmals, was hohe Anforderungen an die Diskretisierung stellt. Zusätzlich weist das sich im Wirbelzentrum befindliche Fluid die größte Verweilzeit im Strömungsfeld auf. Während der gesamten Zeit wird das Fluid konvektiv transportiert und ist somit auch am längsten den Einwirkungen numerischer Fehler ausgesetzt.

Die Vergleich der mit den beiden Verfahren berechneten Strömungsfelder zeigen im Gegensatz zum Vergleich der Mischungsfelder eine sehr gute Übereinstimmung. Dies bedeutet, dass das FVV bei der Berechnung der Impulsgleichungen einen ebenso geringen Lösungsfehler wie das SV aufweist. Der numerische Fehler wächst mit der Größe des Gradienten. Im Geschwindigkeitsfeld stellen sich jedoch im Gegensatz zum Konzentrationsfeld nur relativ kleine Gradienten ein. Daher ist auch der resultierende Diskretisierungsfehler bei der Lösung der Impulsgleichungen kleiner als bei der Lösung der skalaren Transportgleichung.

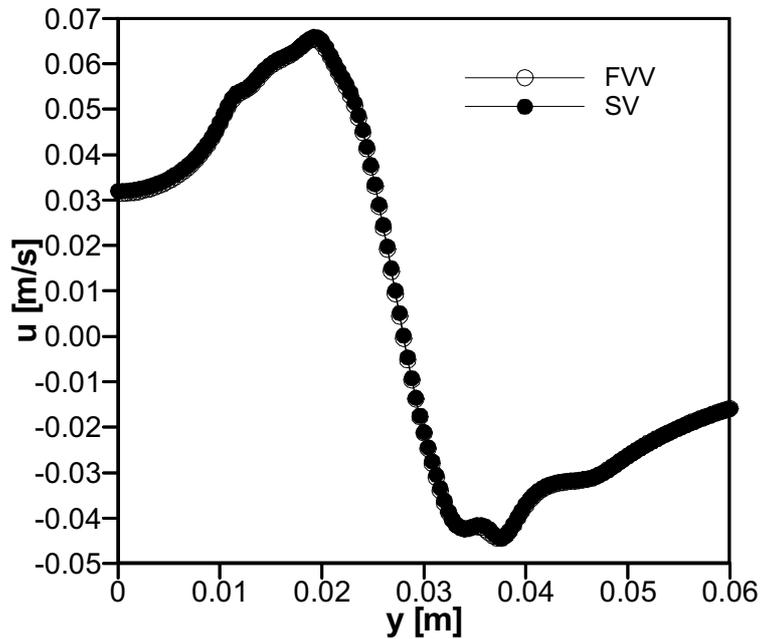


Abb. 3.2-4: Vertikalschnitte der Axialgeschwindigkeit an der Position  $x = 0,027$  m ( $t_p = 4$  s,  $t = 2$  s)

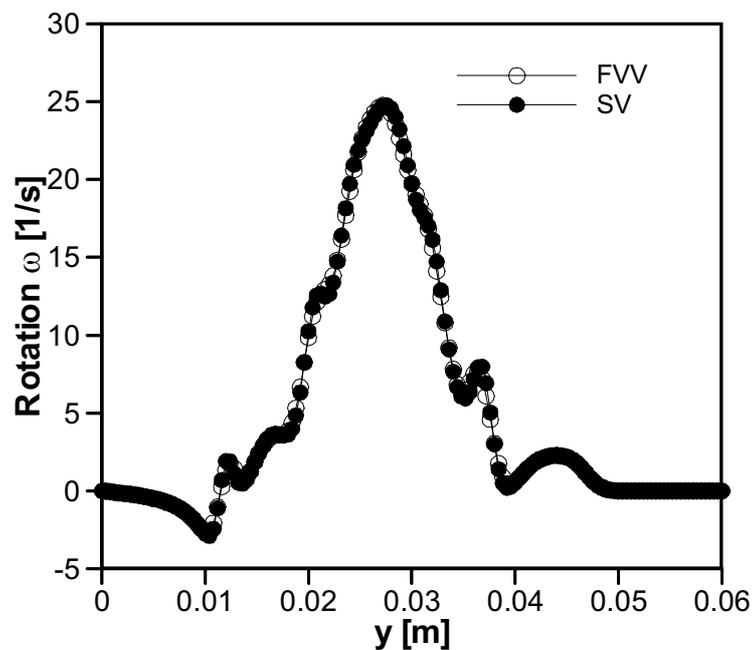


Abb. 3.2-5: Vertikalschnitte der Rotation an der Position  $x = 0,027$  m ( $t_p = 4$  s,  $t = 2$  s)

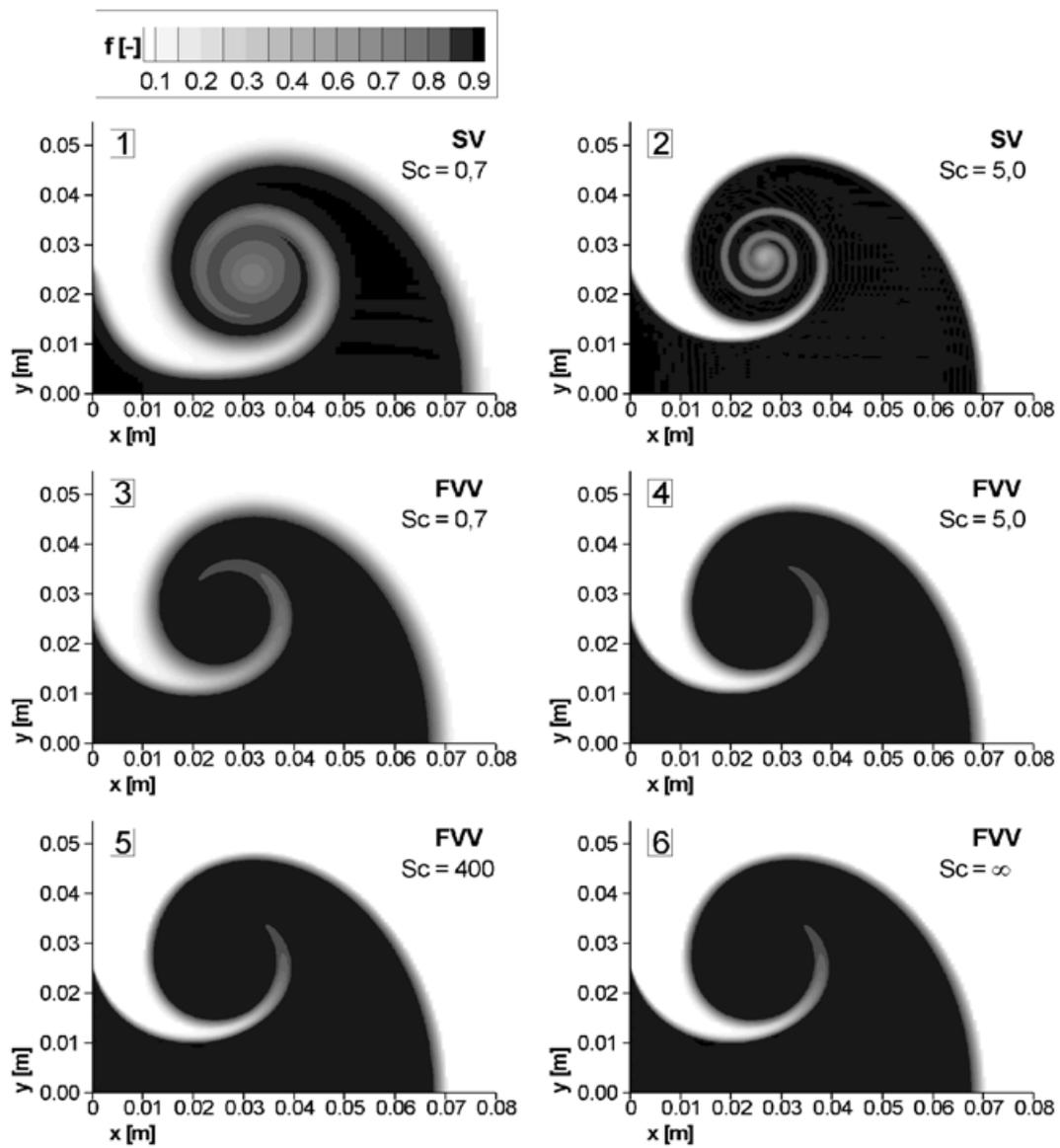
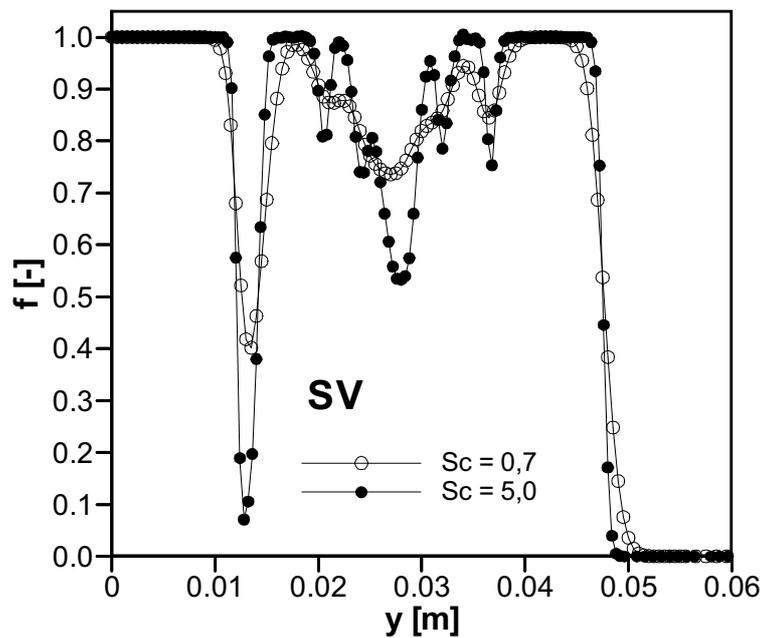
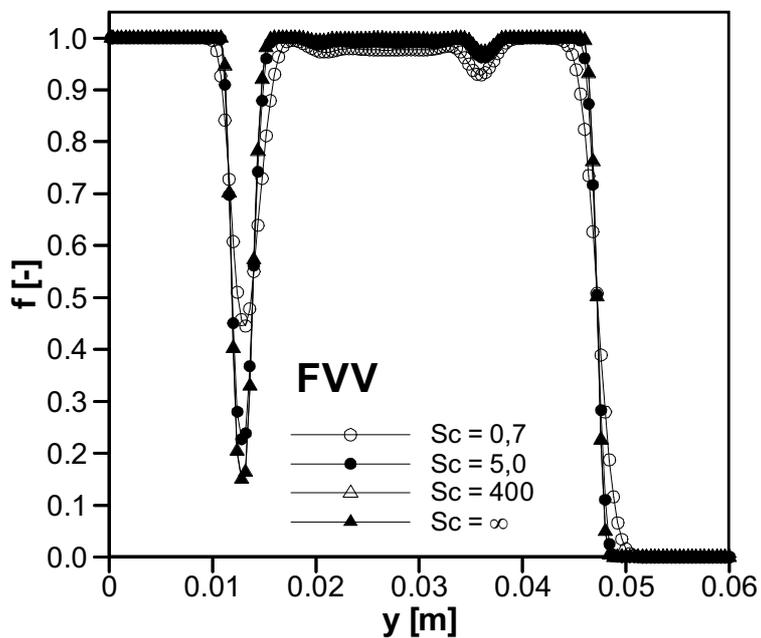


Abb. 3.2-6: Vergleich der Feldverteilungen des Skalars  $f$  ( $t_p = 4$  s,  $t = 2$  s)

Abb. 3.2-7: Vertikalschnitte des Skalars  $f$  an der Position  $x = 0,027$  m ( $t_p = 4$  s,  $t = 2$  s)Abb. 3.2-8: Vertikalschnitte des Skalars  $f$  an der Position  $x = 0,027$  m ( $t_p = 4$  s,  $t = 2$  s)

## 4 Berechnung laminarer isothermer Ringwirbel

### 4.1 Durchführung der Untersuchungen

#### 4.1.1 Vorgehensweise

Im vorliegenden Kapitel wird die Berechnung laminarer Ringwirbel diskutiert. Als Grundlage wurde das von DIDDEN [We3] experimentell untersuchte Strömungssystem verwendet. Dabei wird ein definiertes Volumen des Fluides Wasser aus einem Rohr in einen mit Wasser gefüllten Tank hinein ausgestoßen. Um einen breiten Bereich von Strömungskonfigurationen abzudecken, wurden bei der Berechnung drei verschiedene Varianten des zeitlichen Verlaufes der Strömungsgeschwindigkeit innerhalb des Rohres gewählt:

- a Die Strömungsgeschwindigkeit wird nur über ein bestimmtes Zeitintervall mittels einer definierten zeitabhängigen Funktion vorgegeben und danach zu null gesetzt. Es bilden sich *einzelne Ringwirbel*, die sich in das ruhende Umgebungsmedium ausbreiten.
- b Die Strömungsgeschwindigkeit wird periodisch variiert. Bei jeder Periode bildet sich ein Ringwirbel am Rand des *pulsierten laminaren Freistrahles*. Diese Variante entspricht dem Typus der in den weiteren Kapiteln untersuchten pulsierten turbulenten Freistrahlen.
- c Die Strömungsgeschwindigkeit wird zum Zeitpunkt null auf einen festen Wert gesetzt und dann konstant gehalten. Dieser Vorgang wird im Folgenden als *Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles* bezeichnet.

Bei den in dieser Arbeit berechneten laminaren Ringwirbelstrukturen werden ausschließlich die ersten drei Stadien des Lebenslaufes (*Bildungsvorgang*, *Ablösungsvorgang*, *ausgebildetes Stadium*) untersucht (vgl. Kap. 2.1.6.4). Die Phasen *welliges Stadium*, *Turbulenzumschlag* und *turbulenter Zustand*, sowie der nachfolgende *Zerfall* werden nicht untersucht. Die Darstellung der Ergebnisse gliedert sich in Anlehnung an diesen Lebenslauf. Der *Bildungsvorgang* bei Strömungskonfiguration **a** wird in Kap. 4.2.1 diskutiert, das *ausgebildete laminare Stadium* in Kap. 4.2.2. Zusätzlich werden noch einige Erkenntnisse zum *Ablösungsvorgang* vorgestellt. Für die Strömungskonfigurationen **b** und **c** werden die drei betrachteten Abschnitte des Lebenslaufes zusammenfassend in den Kapiteln 4.3 und 4.4 diskutiert.

### 4.1.2 Beschreibung des Systems

Als Basis der numerischen Untersuchungen diente das von DIDDEN [We3] experimentell untersuchte System (s. Abb. 4.1-1). Es handelt sich dabei um einen mit Wasser gefüllten Tank, in den ein Rohr (Düse) hineinragt. Die Erzeugung von Ringwirbeln geschieht durch Ausschub eines definierten Fluidvolumens aus der Düse in die zunächst ruhende Umgebung. Der Ausschub erfolgt dabei mittels eines Kolbens, dem ein definierter Weg-Zeit-Verlauf aufgeprägt ist. Die Ausschublänge  $L(t)$  bezeichnet dabei den Weg, den der das Fluidvolumen ausschubende Kolben zurücklegt. Dieser bewegt sich von  $L(t) = 0\text{ m}$  (Beginn des Ausschubes) bis  $L(t) = L_{\text{End}}$  (Ausschubende). Durch die Viskosität des Fluids bildet sich an der inneren Rohrwand eine Grenzschicht aus. Diese löst sich an der Düsenkante als freie Scherschicht ab und beginnt sich zu einem Ringwirbel aufzuwickeln. Nach Beendigung des Ausschubes erfolgt eine Verkleinerung des Wirbeldurchmessers und das Abschnüren des Wirbels von der Düsenkante. An der Mündung bildet sich ein kleiner gegensinnig rotierender Wirbel, der in die Düse hineinläuft (s. Abb. 4.1-2, links). Nach der Abschnürung bewegt sich der Ringwirbel auf Grund einer selbst induzierten Translationsgeschwindigkeit von der Düsenmündung weg.

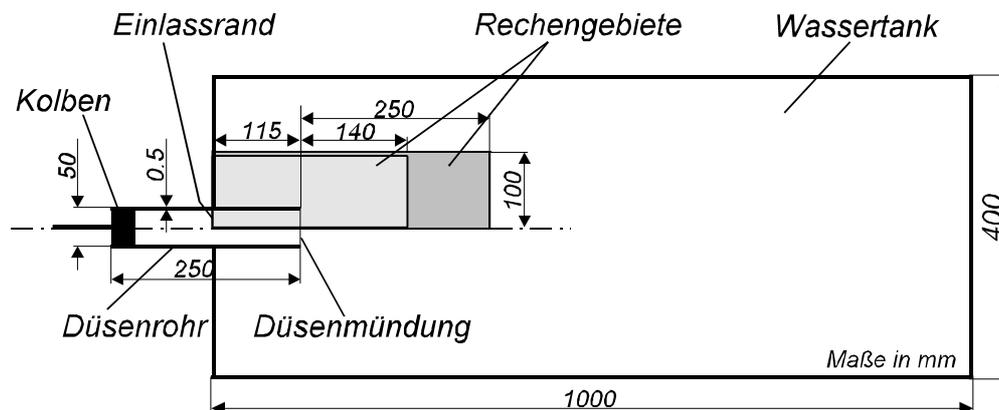


Abb. 4.1-1: Geometrie des betrachteten Systems mit Rechengebietsgrenzen

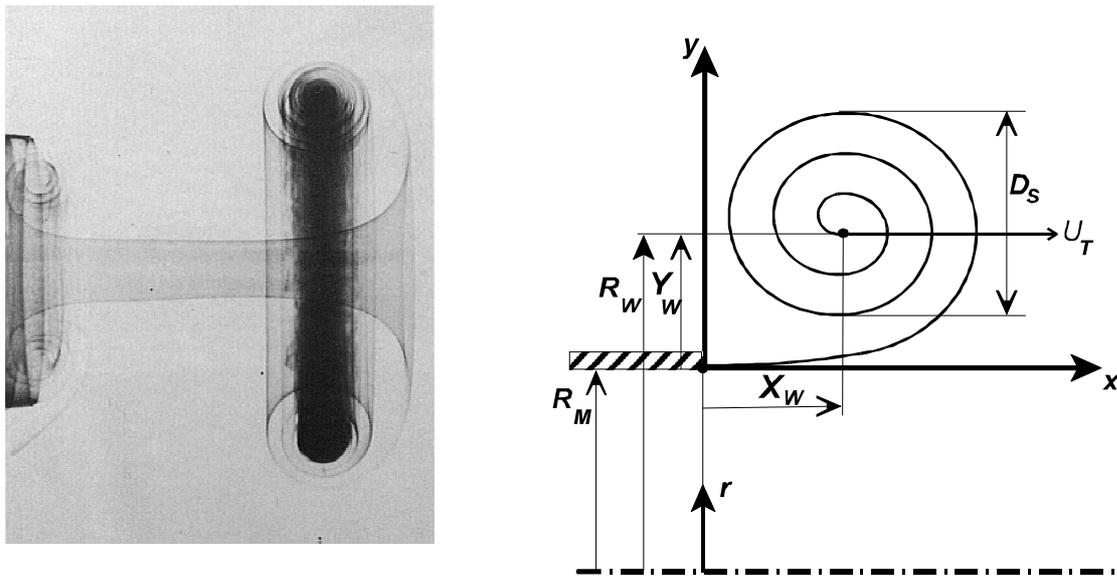


Abb. 4.1-2: Links: Fotografie eines Ringwirbels (aus DIDDEN [We3])  
Rechts: Schematische Schnittdarstellung der Wirbelspirale

Die in Abb. 4.1-1 dargestellten zwei grauen Gebiete stellen die Lage und Größe der zwei verwendeten Rechengebiete dar. Das hellgraue Gebiet ( $300 \cdot 180$  Gitterpunkte) wurde zur Berechnung der *Bildungsphase* verwendet, das dunkelgraue Gebiet ( $450 \cdot 200$  Gitterpunkte) zur Auswertung des *ausgebildeten Stadiums*.

Das rechte Teilbild von Abb. 4.1-2 zeigt schematisch einen Ringwirbel, die Lage seines Zentrums ( $X_w$ ,  $Y_w$ ), den Durchmesser der Wirbelspirale  $D_s$  und die Richtung seiner Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  in Bezug auf ein zylindrisches Koordinatensystem, dessen Nullpunkt sich an der inneren Düsenkante befindet. Bei der Betrachtung der Diagramme ist darauf zu achten, dass die radiale Koordinate teilweise von der Symmetrieachse des Systemes ab gemessen wird und in diesem Falle mit  $r$  bzw. in Bezug auf die Position des Wirbelzentrums mit  $R_w$  bezeichnet wird.

Die Vorschubbewegung des Kolbens wurde bei der Rechnung durch die Vorgabe einer entsprechenden Strömungsgeschwindigkeit am Einlassrand des Rechengebietes ( $x = -0,115$  m) angenähert. Um das aus der Düse stammende Medium vom Umgebungsmedium unterscheiden zu können, wurde eine zusätzliche skalare Transportgleichung für die Variable  $f$  gelöst. Diese wurde zu Beginn der Rechnung innerhalb des gesamten Rohres auf den Wert Eins gesetzt. Es wurden die Stoffdaten von Wasser verwendet.

### 4.1.3 Detektion des Wirbelzentrums

Die Position des Wirbelzentrums wurde bei der Berechnung von laminaren Wirbeln über das Maximum der Stromfunktion definiert. Dazu wurde ein Algorithmus in das CFD-Programm implementiert, der in jedem Zeitschritt automatisch die räumliche Position des Maximums der Stromfunktion auffindet. Im Gegensatz dazu wurde bei der Berechnung

turbulenter Wirbel das Druckminimum ausgewertet. Da sich die hier untersuchten laminaren Ringwirbel nur sehr langsam stromab bewegen, deckt sich die Position des Maximums der Stromfunktion zu jedem Zeitpunkt in sehr guter Näherung mit der Position des Minimums des statischen Druckes (s. Kap. 5.2.1). Aus der ermittelten Lage des Wirbelzentrums ( $X_{\mathcal{W}}(t)$ ,  $Y_{\mathcal{W}}(t)$ ) konnten sodann der Wirbeldurchmesser  $D_{\mathcal{W}}(t)$  sowie indirekt dessen Translationsgeschwindigkeit  $U_{\mathcal{T}}(t)$  ermittelt werden.

#### 4.1.4 Ermittlung des Spiraldurchmessers

Die Visualisierung des Wirbels wurde im Experiment durch Einleiten verdünnter Tinte in das Rohrrinnere durch einen Schlitz kurz vor der Düsenmündung realisiert. Aufgrund des sehr kleinen molekularen Diffusionskoeffizienten von Wasser, ergibt sich eine sich scharf abzeichnende Spiralstruktur der abgelösten Scherschicht, aus deren Auswertung der Spiraldurchmesser ermittelt werden kann (s. Abb. 4.1-2, links).

Um den Durchmesser der Wirbelspirale bei der Rechnung zu ermitteln, kann die Feldverteilung des mit der zusätzlichen Transportgleichung berechneten Skalares ausgewertet werden (s. Abb. 4.1-3 links). Dieses weist jedoch auf Grund numerischer Diffusion im Gegensatz zum Experiment keine klar definierte Grenzlinie zwischen Wirbel und Umgebung auf (vgl. Kap. 3). Um den Spiraldurchmesser exakt zu bestimmen, wurde das mit dem SLIC-Algorithmus (s. Kap. 2.3.1.9) berechnete Mischungsfeld verwendet (s. Abb. 4.1-3 rechts). Der Durchmesser der Wirbelspirale  $D_s$  (s. Abb. 4.1-2) wurde mit einem parallel zur Rechnung mitlaufenden automatischen Auswerteargorithmus ausgewertet. Dazu wurde die Differenz der radialen Koordinate des oberen und des unteren Spiralandes an der Position  $X_{\mathcal{W}}$  des momentanen Wirbelzentrums ermittelt.

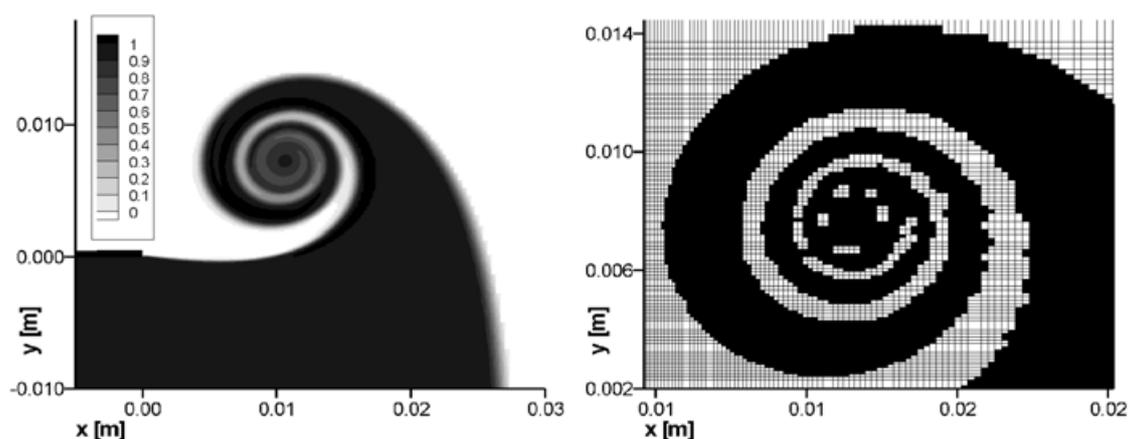


Abb. 4.1-3: Feld des transportierten Skalares bei Rechnung mit Transportgleichung (links) oder SLIC-Algorithmus (rechts).

## 4.2 Einzelne Anfahrwirbel

### 4.2.1 Die Wirbelbildungsphase

Im folgenden Abschnitt wird die Bildungsphase einzelner laminarer Ringwirbel untersucht. Zunächst werden das Geschwindigkeitsfeld, der zeitliche Verlauf der Position des Wirbelzentrums, sowie der Durchmesser der Wirbelspirale mit experimentellen Ergebnissen von DIDDEN [We3] verglichen. Im Anschluss werden Ergebnisse vorgestellt, bei denen der Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf variiert wurde.

Die Koordinaten des Wirbelzentrums ( $X_w(t)$ ,  $Y_w(t)$ ) und der Durchmesser der Wirbelspirale  $D_s(t)$  sind jeweils mit dem Durchmesser der Düsenmündung  $D_M = 0,05 \text{ m}$  normiert und über der normierten Zeit aufgetragen.

$$X_w^*(t) = \frac{X_w(t)}{D_M}, \quad Y_w^*(t) = \frac{Y_w(t)}{D_M}, \quad D_s^*(t) = \frac{D_s(t)}{D_M}, \quad t^* = \frac{L(t)}{D_M}.$$

$L(t)$  ist die momentane Ausschublänge bzw. die Position des Vorschubkolbens (s. o.).  $t^*$  stellt streng genommen eine normierte Ausschublänge dar, wird jedoch im Weiteren aus Gründen der Anschaulichkeit und zum Vergleich mit den Ähnlichkeitsgesetzen als normierte Zeit bezeichnet. Die physikalische Zeit  $t$  lässt sich bei bekanntem Zeitgesetz  $u_M(t)$  aus der normierten Zeit  $t^*$  und der momentanen Kolbenposition bestimmen.

#### 4.2.1.1 Vergleich von Rechnung und Messung

Zur Validierung der Berechnung wird zunächst ein Vergleich mit Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen von DIDDEN vorgenommen. Der im Experiment verwendete Zeitverlauf des Kolbenvorschubes  $L(t)$  ist in [We3] gegeben. Nach einer gewissen Anlaufphase stellt sich dabei bis eine bis zum Ausschubende konstante Geschwindigkeit von  $u_M = 0,046 \text{ m/s}$  ein. Der Kolben legt insgesamt eine dimensionslose Strecke (bzw. Ausschublänge) von  $L/D_M = 1,4$  zurück. Der gegebene zeitliche Verlauf wurde gefittet und bei den numerischen Berechnungen als Geschwindigkeitsrandwert vorgegeben.

#### Der radiale Verlauf der Axialgeschwindigkeit im Mündungsquerschnitt

Abb. 4.2-1 zeigt den radialen Verlauf der gemessenen Axialgeschwindigkeit an der Position  $x = 0 \text{ m}$  (Mündungsquerschnitt) zu verschiedenen Zeitpunkten ( $t = 0,1/0,3/1,6 \text{ s}$ ) nach Beginn des Ausschubes im Vergleich zu den Berechnungsergebnissen. Die Düseninnenkante liegt bei  $r = 0,025 \text{ m}$ . Bei einer Rohrwandstärke von  $5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  befindet sich die Düsenaußenkante bei  $r = 0,0255 \text{ m}$ .

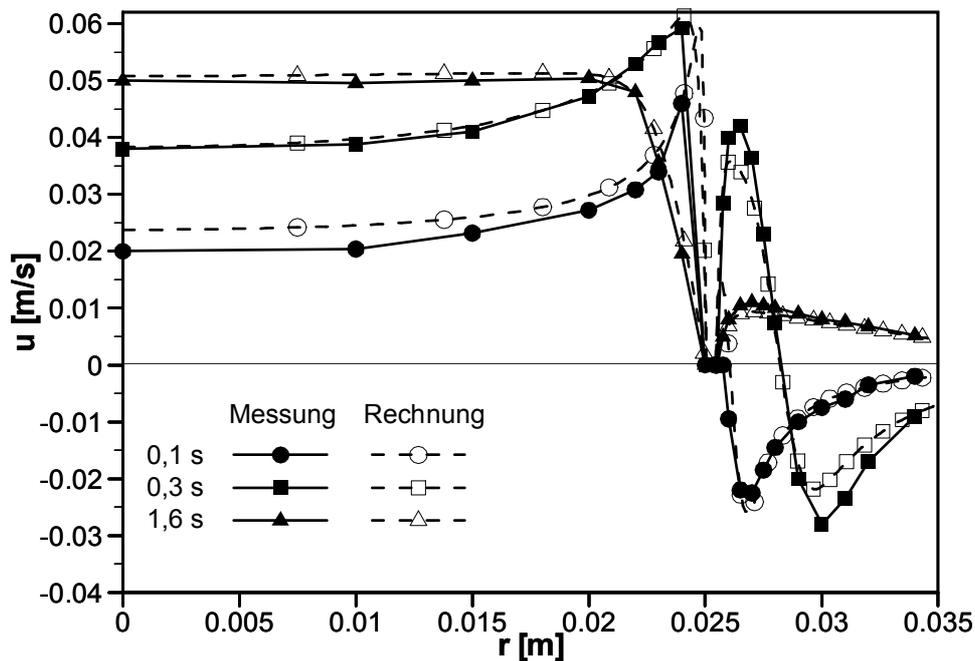


Abb. 4.2-1: Vergleich zwischen gemessener und berechneter Axialgeschwindigkeit in der Düsenaustrittsebene.

Der Vergleich von gemessenen und berechneten Geschwindigkeiten zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Zu Beginn des Ausschubes entwickelt sich eine Strömung um die Düsenkante herum aus. In Nähe der inneren Düsenwand strömt das Fluid zunächst schneller als auf der Achse. Die an der Düsenkante vor allem radial abfließende Masse hinterströmt die Düse und spiegelt die sich beginnende Wirbelaufrollung wieder. Im weiteren Verlauf nimmt die Geschwindigkeit auf der Düsenachse immer weiter zu. Das sich in Wandnähe befindliche Maximum flacht ab und es bildet sich eine Grenzschicht aus, bei der die Geschwindigkeit zur Rohrwand stetig abfällt. Mit zunehmender Entfernung des Wirbels von der Düsenkante wird zum einen die Hinterströmung der Düse schwächer, zum anderen bildet sich an der äußeren Düsenwand zunehmend eine Scherschicht aus, die gegenüber der Grenzschicht im Rohrinne einen umgekehrten Geschwindigkeitsgradienten  $\partial u / \partial y$  aufweist. Aus diesem resultiert ein Bereich negativer Zirkulation an der Außenseite der Düse.

### Die axiale Position des Wirbelzentrums

Abb. 4.2-2 zeigt den Vergleich der gemessenen und berechneten normierten axialen Position  $X_w^*$  des Wirbelzentrums in Abhängigkeit von der normierten Zeit  $t^*$ . Die Ergebnisse der Berechnungen decken sich nahezu mit den Messwerten und bestätigen somit die von DIDDEN [We3] experimentell gefundene exponentielle Abhängigkeit der Axialkoordinate  $X_w^*$  des Wirbelzentrums von  $t^*$ . Der ermittelte Exponent hat einen Wert von  $3/2$ , steht damit aber zunächst im Widerspruch zu den postulierten Ähnlichkeitsgesetzen (vgl. Kap. 2.1.7.2), die für ebene Wirbel einen Exponenten von  $2/3$  vorhersagen. Die in Kap. 4.2.1.2 diskutierten Ergebnisse zeigen, dass dieser Widerspruch in der unterschiedlichen Wahl der jeweiligen Bezugssysteme begründet ist.

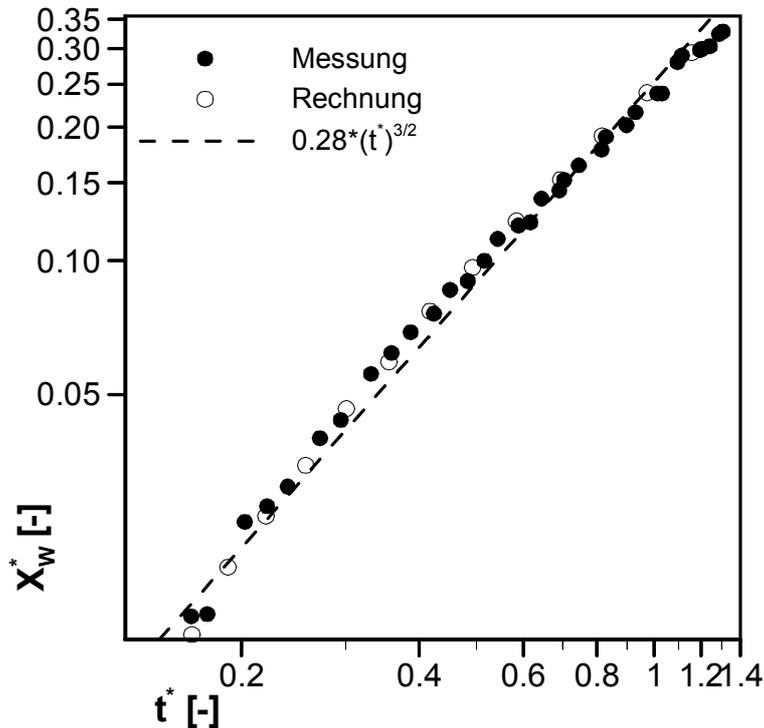


Abb. 4.2-2: Vergleich von gemessener und berechneter normierter axialer Position des Wirbelzentrums über der normierten Zeit.

### Die radiale Position des Wirbelzentrums

Abb. 4.2-3 zeigt den Vergleich der gemessenen und berechneten normierten radialen Position  $Y_w^*$  des Wirbelzentrums in Abhängigkeit von der normierten Zeit  $t^*$ . Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung. Die von den Ähnlichkeitsgesetzen für *ebene* Wirbel vorhergesagte Abhängigkeit mit einem Exponenten von  $2/3$  wird sowohl von der Messung als auch von der Rechnung richtig wiedergegeben.

### Der Durchmesser der Wirbelspirale

Abb. 4.2-4 zeigt den normierten Spiraldurchmesser  $D_s^*$  in Abhängigkeit von der normierten Zeit  $t^*$ . Der aus den Berechnungen folgende Verlauf des Spiraldurchmessers bestätigt die aus den Ähnlichkeitsbetrachtungen für ebene Wirbel stammende Abhängigkeit mit einem Exponenten von  $2/3$  (vgl. Kap. 2.1.7.2), widerspricht aber den Messungen von DIDDEN [We3], der für Ringwirbel einen linearen Verlauf von  $D_s^*$  über  $t^*$  gefunden hat.

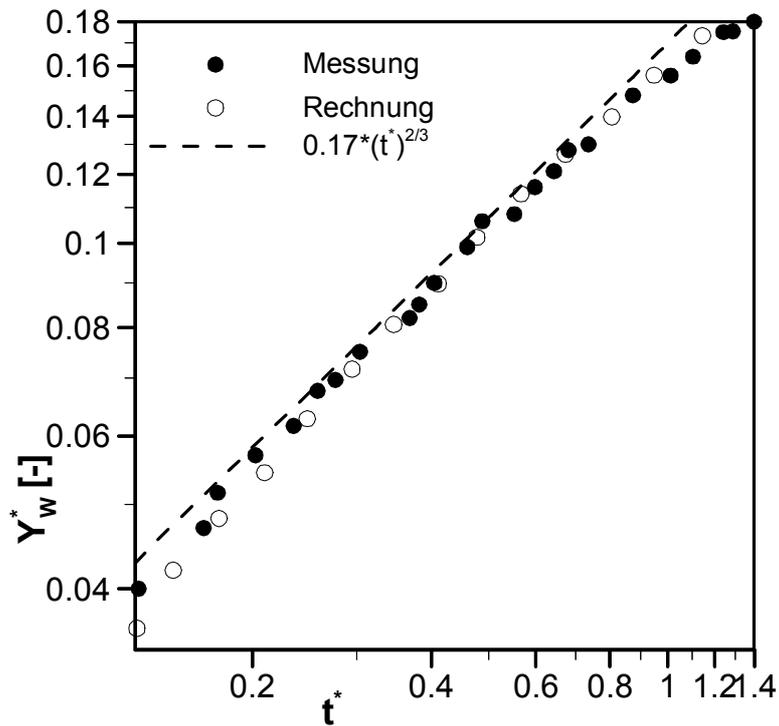


Abb. 4.2-3: Vergleich von gemessener und berechneter normierter radialer Position des Wirbelzentrums über der normierten Zeit.

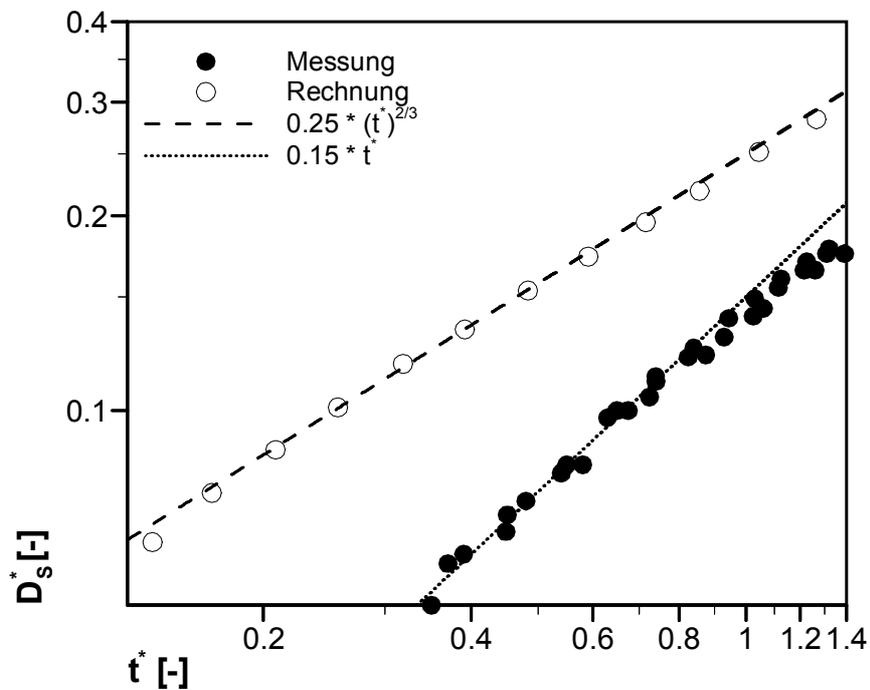


Abb. 4.2-4: Vergleich von gemessenem und berechnetem normiertem Spiraldurchmesser über der normierten Zeit.

Da die Definition des Spiraldurchmessers bei DIDDEN [We3] unklar bleibt, ist der Unterschied zwischen Messung und Theorie möglicherweise durch eine unterschiedliche Interpretation des Spiraldurchmessers begründet. Der von ANTON [Wa7] und WEDEMEYER [Wa8] bei der Herleitung der maßgeblichen Ähnlichkeitsbeziehung definierte Spiraldurchmesser stellt eine idealisierte Näherung dar, die zum Zwecke der Lösbarkeit des analytischen Verfahrens gemacht wird und ist als derjenige Durchmesser definiert, bei dem die Windungen der Wirbelspirale gerade noch als kreisförmig betrachtet werden dürfen. Der für die Auswertung der Rechenergebnisse definierte Durchmesser ist in Abb. 4.1-2 dargestellt. Offensichtlich deckt sich der so gewählte Durchmesser mit demjenigen der analytischen Berechnungen.

Der Exponent  $2/3$  der Abhängigkeit zwischen  $D_S^*$  und  $t^*$  lässt sich außerdem aus folgender Betrachtung herleiten: Der Spiraldurchmesser ist eine Differenz zweier Werte  $Y^*$ . Auf Grund der Selbstähnlichkeit des Wirbels beim Bildungsvorgang, muss für jeden radialen Wert  $Y^*$  die gleiche Abhängigkeit bezüglich  $t^*$  gelten, wie für die Position des Wirbelzentrums  $Y_W^*$  und damit auch für die Differenz zweier Werte  $\Delta Y^*$ . Also muss, analog zur Abhängigkeit der  $Y_W^*$  - Position des Wirbelzentrums, für den Durchmesser der Wirbelspirale ebenfalls eine exponentielle Abhängigkeit von  $t^*$  mit einem Exponenten von  $2/3$  gelten.

#### 4.2.1.2 Variation der Erzeugungsfunktion

Um den Einfluss der Erzeugungsfunktion zu untersuchen, wurden bei der Berechnung verschiedene Zeitverläufe am Einlassrand vorgegeben. Es wurden drei verschiedene Funktionen gewählt (s. Gl. 6.2-1).  $\overline{u_M} = 0,046 \text{ m/s}$  ist dabei die zeitlich gemittelte Ausschubgeschwindigkeit. Als Ausschubdauer wurde jeweils der Wert  $t_A = L/\overline{u_M} \approx 1,522 \text{ s}$  verwendet. Die Funktionen sind derart definiert, dass sich jeweils das gleiche ausgeschobene Volumen bzw. eine gleiche normierte Ausschublänge ( $L/D_M = 1,4$ ) ergibt.

$$\begin{aligned}
 \text{linear steigend: } u_M(t) &= \overline{u_M} \cdot \frac{2 \cdot t}{t_A} \\
 \text{Sinusfunktion: } u_M(t) &= \overline{u_M} \cdot \left( 1 + \sin \left[ 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{t_A} - \frac{\pi}{2} \right] \right) \\
 \text{Potenzfunktion: } u_M(t) &= \overline{u_M} \cdot \frac{1}{0,78568} \cdot t^{2,6}
 \end{aligned} \tag{4.2-1}$$

Abb. 4.2-5 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen. In Teilbild 1 ist der zeitliche Verlauf der Einlassgeschwindigkeit  $u_M(t)$  für die drei verschiedenen Beschleunigungsfunktionen zu sehen, in Teilbild 2 der zeitliche Verlauf der Zirkulation des über die Rohrmündung ausströmenden Volumens. Diese wurde durch Integration über den Mündungsquerschnitt gewonnen (vgl. Kap. 2.1.6.2). Beide Größen sind über der physikalischen Zeit  $t$  aufgetragen. Die in den Teilbildern 4-5 gezeigten Größen  $X_W^*$ ,  $Y_W^*$ ,  $D_S^*$  repräsentieren die Koordinaten des Wirbels sowie den Spiraldurchmesser, jeweils mit dem

Düsendurchmesser normiert. Diese drei Größen sind über einer normierten Zeit  $t^{**}$  aufgetragen. Diese wurde wie folgt bestimmt. Wegen der bei den verschiedenen Erzeugungsfunktionen auftretenden unterschiedlichen Beschleunigung setzt die Wirbelbildung zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_0$  nach Beginn des Ausschubes ein. Nach KADEN [Wa6] beschreiben die Ähnlichkeitsgesetze jedoch eine „stetige ähnliche Vergrößerung einer Strömungsfigur“. Diese muss aber erst vorhanden sein. Daher wird der bei Anwendung der verschiedenen Erzeugungsfunktionen auftretende zeitliche Versatz des Einsetzens der Wirbelbildung bei der Auswertung berücksichtigt. Dazu wird die Zeitskala mit Beginn des Einsetzens der Wirbelbildung zu null gesetzt. Die physikalische Zeit  $t$  lässt sich bei bekanntem Zeitgesetz  $u_M(t)$  aus der momentanen Kolbenposition bestimmen. Entsprechend lässt sich der Zeitpunkt der Wirbelbildung aus der dazugehörigen Kolbenposition bestimmen. Die normierte Zeit wurde daher unter Verwendung der jeweiligen Ausschublängen wie folgt definiert:

$$t^{**} = t^* - t_0^* = \frac{L(t) - L(t_0)}{D_M} .$$

Dabei sind  $t^*$  die seit Beginn der Ausschubes verstrichene normierte physikalische Zeit,  $t_0^*$  die normierte Zeit bei Einsetzen der Wirbelbildung und  $t^{**}$  die relativ zum Wirbelbildungszeitpunkt gemessene normierte Zeit. Die normierten Zeiten stellen streng genommen zwar normierte Ausschublängen dar, werden jedoch im Weiteren aus Gründen der Anschaulichkeit und zum Vergleich mit den Ähnlichkeitsgesetzen als normierte Zeit bezeichnet.

Der Verlauf der  $Y_W^*$ -Koordinate (Abb. 4.2-5 Teilbild 3) und der Verlauf des Spiraldurchmessers  $D_S^*$  (Abb. 4.2-5 Teilbild 4) sind für alle Erzeugungsfunktionen nahezu gleich und geben eine funktionale Abhängigkeit proportional zu  $(t^{**})^{2/3}$  wieder.

Für die  $X_W^*$ -Koordinate des Wirbelzentrums (Abb. 4.2-5 Teilbild 5) findet sich in unabhängig von der Erzeugungsfunktion in guter Näherung eine funktionale Abhängigkeit proportional zu  $(t^*)^{3/2}$ . Dieser Befund ergab sich ebenfalls bei der Nachrechnung des Experimentes von DIDDEN (s. Abb. 4.2-2). DIDDEN erklärt den Unterschied des gemessenen Exponenten (3/2 statt 2/3) gegenüber der Theorie ebener Wirbel mit der bei Ringwirbeln auftretenden, aus der Krümmung der Wirbelröhre resultierenden vergrößerten selbstinduzierten Translationsgeschwindigkeit (vgl. Kap. 2.1.7.3). Diese Hypothese könnte somit den Unterschied zwischen der Wirbelbildung an einer axialsymmetrischen Düse mit derjenigen an einer ebenen Schlitzdüse erklären. Hier nicht gezeigte Vergleichsrechnungen zwischen diesen Systemen haben jedoch ergeben, dass die Düsenform auf den aus den Rechenergebnissen ermittelten Exponenten keinen Einfluss hat. Auch bei einem ebenen System ergab sich ein Exponent von 3/2.

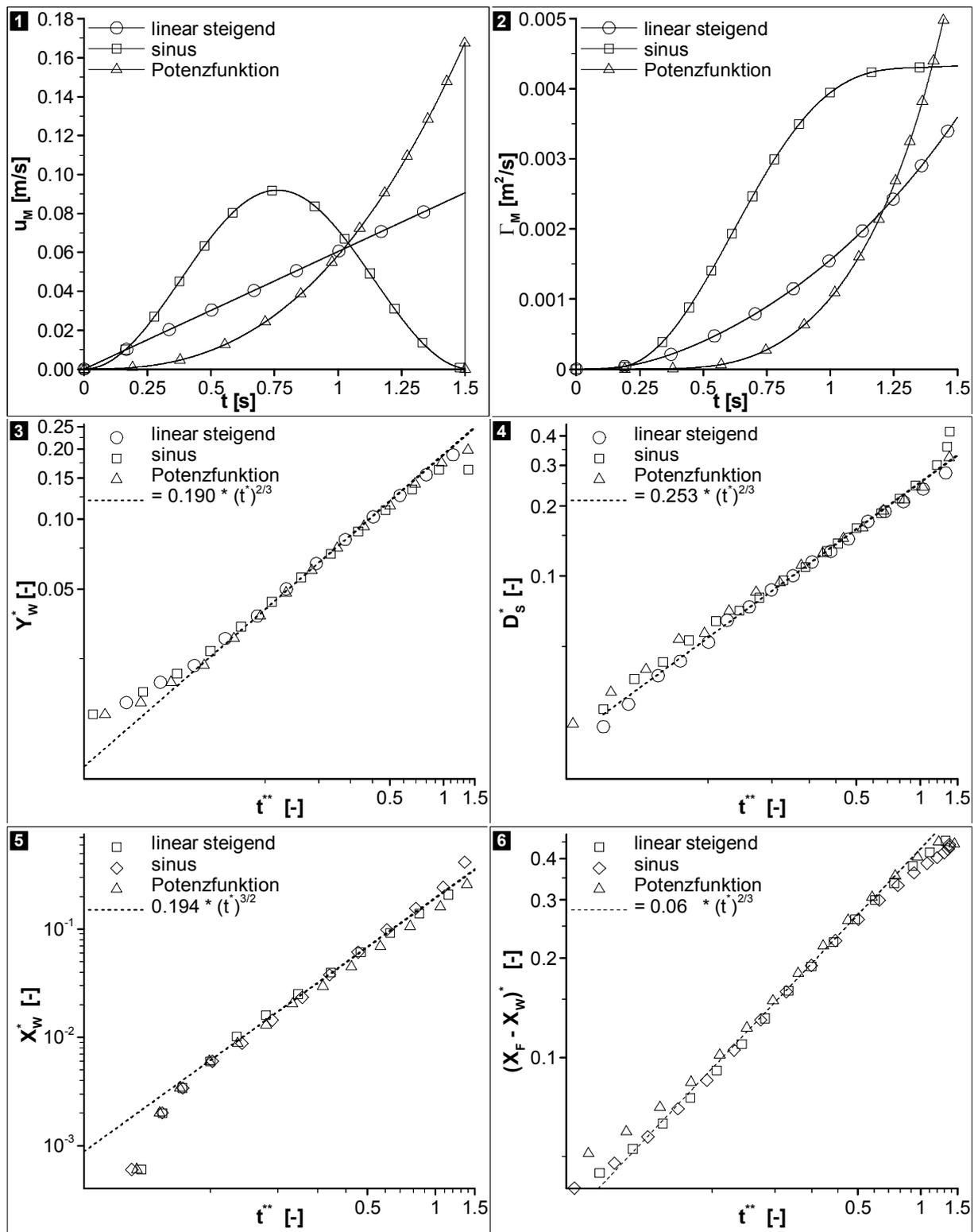


Abb. 4.2-5: Vergleich von gemessenen und berechneten Wirbeltrajektorien: Variation der Ausschublänge bei einem einzelnen Anfahrwirbel mit  $\overline{u_M} = const. = 0,046 m/s$ .

Dies legt den Schluss nahe, dass die von DIDDEN aufgestellte Hypothese nicht zutreffend ist. Die zwei Fälle *Wirbelbildung bei der freien Scherschicht* wie sie unter anderem von KADEN [Wa6] untersucht wurde (s. Kap. 2.1.7.1) und der von DIDDEN in [We3] untersuchten *Wirbelbildung stromab einer Düsenmündung* unterscheiden sich in der Bewegungsrichtung des Wirbels. Im von KADEN untersuchten Fall befindet sich die freie Scherschicht in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld. Der entstehende ebene Wirbel bewegt sich während dessen Aufrollung mit der Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  in negative x-Richtung (s. Abb. 4.2-6 a). Im Fall der Ringwirbelbildung außerhalb einer Düse löst sich die Scherschicht jedoch zunächst von der Wand ab und entwickelt sich in einem von der Düsenströmung induzierten Geschwindigkeitsfeld. Der sich bildende Ringwirbel wird dabei während dessen Bildung relativ zum Bezugssystem konvektiv stromab in axialer Richtung bewegt (s. Abb. 4.2-6 b).

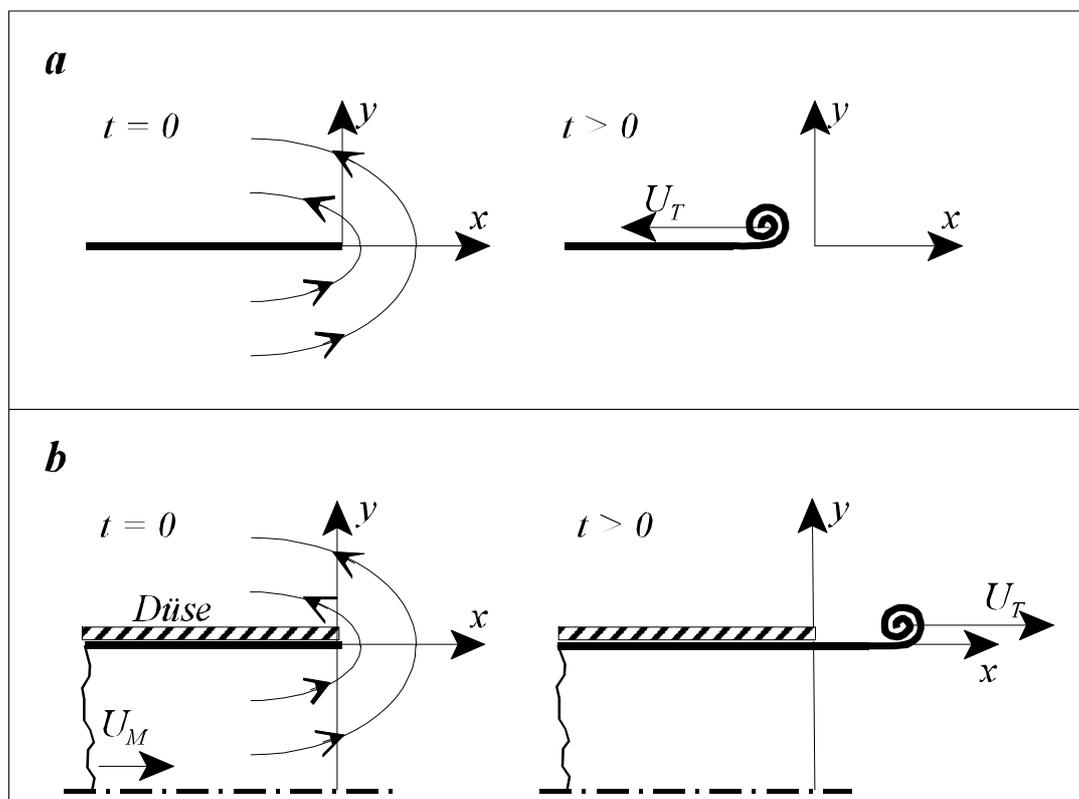


Abb. 4.2-6: Vergleich von Bezugssystemen. a: Aufwicklung einer ebenen Scherschicht nach KADEN [We6], b: Bildung eines Anfahrwirbels an einer Düsenkante.

Dies wurde bei der Analyse der Rechenergebnisse durch die Wahl eines mitbewegten Bezugssystems berücksichtigt. Zur Veranschaulichung ist in Abb. 4.2-7 die Kontur des Wirbels, bzw. des ausgeströmten Düsenfluides, zu zwei verschiedenen Zeitpunkten gezeigt. Die das Düsenfluid und das Umgebungsmedium trennende Linie (im folgenden als Strahlfront bezeichnet) bewegt sich mit zunehmender Zeit stromab. Die Position des Schnittpunktes der Strahlfront mit der Symmetrieachse wird im folgenden als Frontposition  $X_F$  bezeichnet.

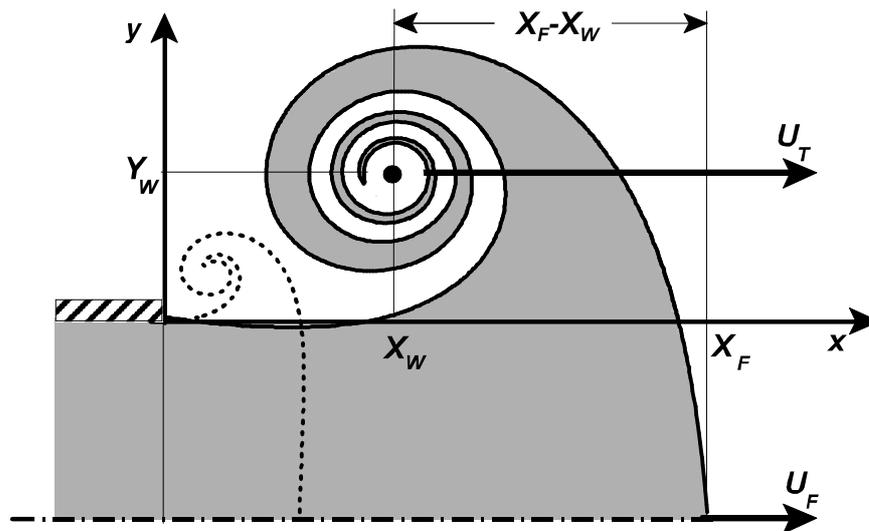


Abb. 4.2-7: Schematische Darstellung zur Auswertung der berechneten Wirbelpositionen

Die Bewegung der Frontposition kann als eine von außen auf das Wirbelsystem aufgeprägte Geschwindigkeit interpretiert werden. Wird die aktuelle Wirbelposition von der Frontposition subtrahiert, so wird die Wirbelposition relativ zu einem mit der Front mitbewegten Koordinatensystem gemessen. Als Ergebnis ergibt sich für die axiale Position des Ringwirbels relativ zur Front  $X_F - X_W$  ebenfalls eine Abhängigkeit mit einem Exponenten von  $2/3$  (s. Abb. 4.2-5 Teilbild 6). Dieses Ergebnis bestätigt somit wiederum die Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze für die axiale Wirbelposition auch für die Verwendung verschiedener zeitabhängiger Ausschubfunktionen.

## 4.2.2 Ausgebildetes laminares Stadium

Die Berechnungen in diesem Kapitel wurden mit einer mittleren Ausschubgeschwindigkeit von  $\overline{u_M} = 0,069 \text{ m/s}$  durchgeführt. Der zeitliche Verlauf des Wirbelzentrums wurde bis zum Erreichen der Position  $X_W = 3 \cdot D_M = 0,15 \text{ m}$  berechnet. Die Darstellungen der Koordinaten des Wirbelzentrums erfolgt im Weiteren nicht in normierter Form. Außerdem ist zu beachten, dass der Nullpunkt der radiale Koordinate  $r$  im Folgenden auf der Symmetrieachse des Systems liegt und nicht an der inneren Düsenkante.

### 4.2.2.1 Variation der Ausschublänge

#### Räumliche Position des Wirbelzentrums

Anhand Abb. 4.2-8, in welcher die radiale Position des Wirbelzentrums über dessen axialer Position aufgetragen ist, soll zunächst der Einfluss der Ausschublänge auf den räumlichen Verlauf des Wirbelzentrums diskutiert werden. Für alle Ausschublängen ergibt sich der gleiche charakteristische Verlauf. Die radiale Position des Wirbelzentrums

erreicht bei Ausschubende einen Maximalwert  $R_{\max}$ , fällt danach wieder ab und nähert sich einem relativ stabil bleibenden Endwert  $R_{\text{End}}$ . Dieser markiert das Stadium des ausgebildeten Wirbels. Die ausgefüllten Symbole in Abb. 4.2-8 repräsentieren die Messwerte. Im linken Teil sind die für die Ausschublängen  $L/D_M = 0,6/1,0/1,4$  die erreichten Maximalwerte  $R_{\text{Max}}$  zu sehen, im rechten Teil für die Ausschublängen  $L/D_M = 0,6/1,0/1,4/2,2$  die Endwerte  $R_{\text{End}}$ . Der gestrichelt eingezeichnete Verlauf repräsentiert die einzige gemessene gesamte Wirbeltrajektorie für  $L/D_M = 1,4$  (DIDDEN [We3]). Zu Anfang des Ausschubvorganges liegen die Raumkurven der Messung wie auch der Rechnung für alle Ausschublängen aufeinander. Hier ist der Zeitverlauf des Ausschubes für alle betrachteten Ausschublängen der gleiche. Der Ausschubvorgang wird lediglich zu unterschiedlichen Zeitpunkten, also bei unterschiedlichen Ausschublängen beendet. Eine größere Ausschublänge bedingt ein größeres ausgeschobenes Fluid-Volumen und damit einen größeren maximalen Wirbeldurchmesser  $R_{\text{Max}}$  und auch einen größeren Enddurchmesser  $R_{\text{End}}$ .

Das Abfallen der Radialposition nach Durchlaufen des Maximums ist bei kleinem  $L/D_M$  stärker ausgeprägt, als bei großem  $L/D_M$ . Verantwortlich dafür ist die Interaktion des Ringwirbels mit der Düsenkante. Diese manifestiert sich in zwei Effekten (s. auch [We3]):

Während des Aufrollvorganges des Wirbels entsteht an der äußeren Düsenwand ein Bereich negativer Zirkulation. Diese negative Zirkulation wird teilweise mit in den Wirbel aufgenommen und vermindert so dessen Gesamtzirkulation. Bei einer großen Ausschublänge ist der Anteil der vom Ringwirbel aufgenommenen negativen Zirkulation gegenüber der beinhaltenen positiven Zirkulation kleiner und bedingt nach Ausschubende eine geringere Abnahme des Wirbeldurchmessers als bei kleinen Ausschublängen.

Bei Ausschubende reißt der Ringwirbel von der Düsenkante ab. An der Düsenmündung entsteht ein gegensinnig rotierender Wirbel, der zunächst mit dem ablösenden Ringwirbel interagiert, dann aber in das Düsenrohr hineinläuft (s. Abb. 4.1-2 links sowie Abb. 1.1-4 u. 1.1-5). Da der Ringwirbel zum Zeitpunkt des Ausschubendes für große Ausschublängen weiter von der Düsenmündung entfernt ist als für kleine, resultiert ein geringerer Einfluss des Sekundärwirbels auf den Ringwirbel, was sich in einer geringeren Abnahme des Ringwirbeldurchmessers nach Ausschubende auswirkt.

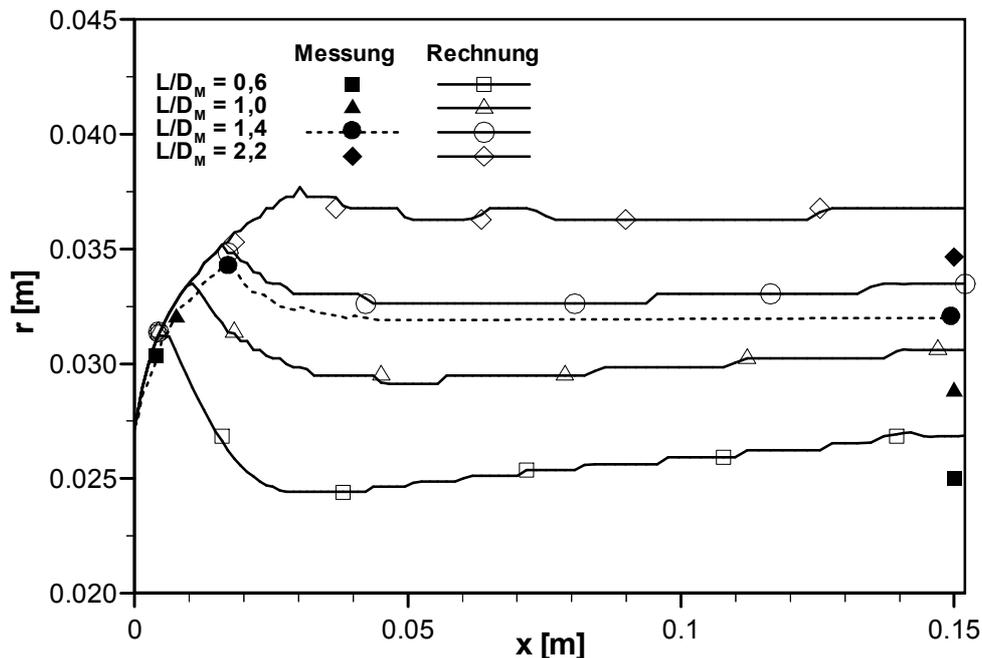


Abb. 4.2-8: Vergleich der Wirkung verschiedener Erzeugungsfunktionen bei gleichem ausgeschobenem Volumen auf die Ringwirbelbildung.

Der Vergleich der berechneten und gemessenen Wirbelpositionen zeigt für die Trajektorie bei der Ausschublänge von  $L/D_M = 1,4$  eine sehr gute Übereinstimmung. Die für die anderen Ausschublängen  $L/D_M = 0,6/1,0/2,2$  berechneten Maximalwerte  $R_{Max}$  und Endwerte  $R_{End}$  liegen bei etwas größeren Radien als die gemessenen. Die Unterschiede zwischen Rechnung und Messung können zum einen daraus resultieren, dass der zeitliche Verlauf der Ausschubfunktion nur für  $L/D_M = 1,4$  bekannt war und bei dieser Rechnung vorgegeben wurde (DIDDEN [We3]). Die Randwerte der Rechnungen für die drei anderen Ausschubfunktionen wurden durch eine zeitliche Streckung der gegebenen Funktion erzeugt. Zum anderen wurde bei den vorliegenden Rechnungen ein größeres und aus Gründen der Rechenzeit gröber diskretisiertes Rechengebiet als bei der Untersuchung der Bildungsphase verwendet (s. Abb. 4.1-1).

### Die Translationsgeschwindigkeit des Wirbels

Bei steigender Ausschublänge (hier nicht gezeigt) wächst die Translationsgeschwindigkeit stetig an und nähert sich asymptotisch dem Wert, der sich beim Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles ergibt:  $U_T = 0,5 \cdot \overline{u_M}$  (s. Kap. 4.4 und LIESS [We6]). Die Abhängigkeit der Translationsgeschwindigkeit von der Ausschublänge bei sinusförmiger Ausschubfunktion ist in Kap. 4.3 gezeigt.

### Die Geschwindigkeitsverteilung im Wirbel

In der Arbeit von DIDDEN [We2] wurde die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb ausgebildeter laminarer Ringwirbel gemessen. Dazu wurden an der axialen Position  $x = 3 \cdot D_M = 0,015 \text{ m}$  mittels einer LDA Radialschnitte der Axialgeschwindigkeit durch das Wirbelzentrum bestimmt. Um die ausgewertete Axialposition zu erreichen, benötigte der Wirbel eine physikalische Zeit von ca. 4,2 s. Für den zeitlichen Verlauf des

Kolbenvorschubes wurde im Experiment eine Sinusfunktion mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $\overline{u_M} = 0,0667 \text{ m/s}$  verwendet (Gl. 4.2-1). Bei einer angegebenen Ausschublänge von 0,07 m ( $L/D_M = 1,4$ ) ergibt sich damit eine Periodenlänge von  $t_p = 1,05 \text{ s}$ . Abb. 4.2-9 zeigt den Vergleich zwischen gemessenen und berechneten Werten. Bei den berechneten Werten wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit nur jede dritte Gitterstützstelle mit einem Symbol versehen.

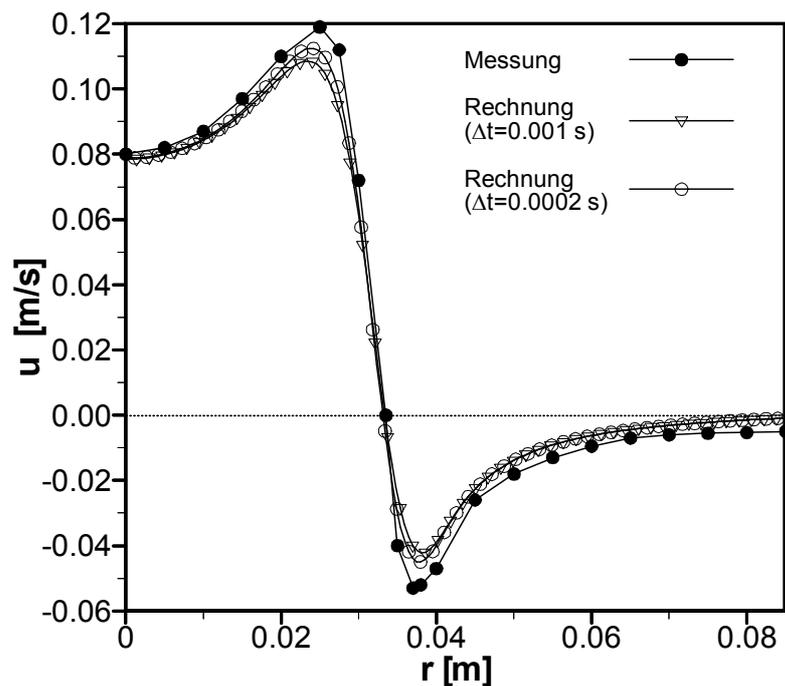


Abb. 4.2-9: Vergleich von gemessener und berechneter Axialgeschwindigkeit. Radialschnitte an der axialen Position  $x/D_M = 3$ .

Die mit einem Zeitschritt von  $\Delta t = 1 \text{ ms}$  erzielten Ergebnisse geben den gemessenen Verlauf gut wieder. Das Maximum und das Minimum der Geschwindigkeitsverteilung sind bei der Rechnung mit einem Zeitschritt von  $\Delta t = 1 \text{ ms}$  etwas weniger ausgeprägt als bei der Messung. Durch die Wahl eines kleineren Zeitschrittes ( $\Delta t = 0,2 \text{ ms}$ ) ergibt sich eine noch bessere Übereinstimmung. Da die Schnittlinie durch das Wirbelzentrum verläuft, repräsentiert die Axialgeschwindigkeit gleichzeitig die Umfangsgeschwindigkeit um das Wirbelzentrum. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Geschwindigkeitsverteilung ähnlich wie bei einem Burgers-Wirbel verläuft. Im Zentrum befindet sich ein Festkörperwirbelprofil. Dieses ist dafür verantwortlich, dass der Wirbelkern bezüglich der Mischung relativ austauschbar ist. Das Festkörperwirbelprofil bildet sich in einiger Entfernung von der Rotationsachse in ein potentialwirbelähnliches Profil um.

### 4.2.2.2 Variation der Ausschubgeschwindigkeit

Den Einfluss der mittleren Ausschubgeschwindigkeit  $\overline{u_M}$  auf den Endwert der Radialkoordinate  $R_{End}$  des Wirbelzentrums bei konstanter Ausschublänge  $L/D_M = 1,4$  zeigt Abb. 4.2-10 (Teilbild 1). Die von DIDDEN [We2] festgestellte Unabhängigkeit des Endwertes der Radialkoordinate des Wirbels von der mittleren Ausschubgeschwindigkeit kann durch die Rechnung in guter Näherung bestätigt werden.

Den Einfluss der mittleren Ausschubgeschwindigkeit  $\overline{u_M}$  auf die Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  des Wirbelzentrums bei konstanter Ausschublänge  $L/D_M = 1,4$  zeigt Abb. 4.2-10 (Teilbild 2). Die Ergebnisse der Berechnung geben in guter Näherung die von DIDDEN [We2] gemessene lineare Abhängigkeit der Translationsgeschwindigkeit von der mittleren Ausschubgeschwindigkeit wieder.

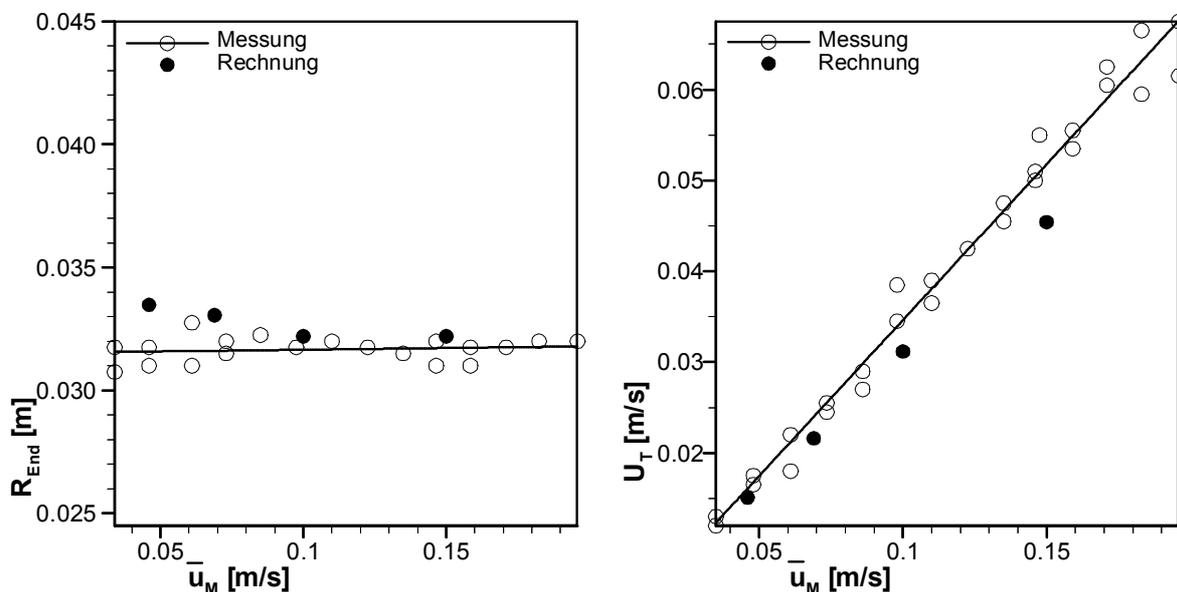


Abb. 4.2-10: Radialkoordinate  $R_{End}$  und Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  des Wirbelzentrums als Funktion der mittleren Ausschubgeschwindigkeit  $\overline{u_M}$  bei  $L/D_M = 1,4$ .

## 4.3 Pulsierter Freistrah

In diesem Abschnitt wird die periodische Ringwirbelbildung beim pulsierten laminaren Freistrah untersucht und mit der Bildung einzelner Ringwirbel verglichen. Als Ausschubfunktion wurde der sinusförmige Verlauf

$$u_M(t) = \overline{u_M} + \hat{u} \cdot \sin \left[ \pi \cdot \left( \frac{2 \cdot t}{t_P} + 1,5 \right) \right], \quad \overline{u_M} = 0,069 \text{ m/s} \quad (4.3-1)$$

vorgegeben. Diese Vorschrift impliziert, dass der Periodenbeginn als der Zeitpunkt

definiert ist, zu dem die Funktion  $u_M(t)$  den kleinsten Wert aufweist. Im Folgenden werden drei verschiedene Konfigurationen miteinander verglichen:

- *Einzelne Anfahrwirbel*. Die in Gl. 4.3-1 gegebenen Geschwindigkeitsfunktion wird für alle Zeiten größer als  $t_p$  zu null gesetzt.
- Die Amplitude der Geschwindigkeitsfunktion beträgt  $\hat{u} = 0,069 \text{ m/s}$ . Damit fällt die Geschwindigkeit zu Beginn jeder Periode auf den Wert Null ab. Die sich ergebende Strömungsstruktur stellt quasi eine Aneinanderreihung einzelner Wirbel dar und wird als Abgrenzung zu Fall A im Folgenden auch als *Wirbelkette* bezeichnet.
- Die Amplitude der Geschwindigkeitsfunktion beträgt  $\hat{u} = 0,0345 \text{ m/s}$ . Dieser Fall wird im Folgenden als *pulsierter Freistrah* bezeichnet.

Variiert wurde die Periodendauer bzw. die Frequenz ( $1/t_p$ ) der Ausschubfunktion. Diese Variation ist bei der Berechnung der Fälle B und C jedoch nur für einen relativ eng begrenzten Frequenzbereich sinnvoll. Ist die Frequenz zu groß, ergibt sich eine zu starke Interaktion der aufeinander folgenden Wirbel. Ist die Frequenz zu klein, so rollt sich die abgelöste Scherschicht aufgrund ihrer Instabilität zu mehreren Wirbeln auf. Diese Charakteristik kann auch bei experimentellen Untersuchungen festgestellt werden (SCHADE [We8]). Als Grundlage für die nachfolgende Diskussion der Ergebnisse soll zunächst der Einfluss von Amplitude und Frequenz der Ausschubgeschwindigkeit auf Ausschublänge und Beschleunigung erläutert werden. Das pro Periode ausgeschobene Volumen berechnet sich aus dem Produkt von Düsenquerschnitt und Ausschublänge. Die Ausschublänge  $L$  berechnet sich nach

$$L = \int_0^{t_p} u_M(t) dt = \int_0^{t_p} \left( \overline{u_M} + \hat{u} \cdot \sin \left[ \pi \cdot \left( \frac{2 \cdot t}{t_p} + 1,5 \right) \right] \right) dt \quad . \quad (4.3-2)$$

Integration und Vereinfachung ergeben

$$L = \overline{u_M} \cdot t_p \quad .$$

Eine Vergrößerung der Frequenz bewirkt pro Periode ein kleineres ausgeschobenes Volumen. Die dabei auftretende Beschleunigung wird jedoch größer. Eine Vergrößerung der Amplitude hat keine Auswirkung auf das ausgeschobene Volumen, führt jedoch ebenfalls zu einer größeren Beschleunigung.

### 4.3.1 Einfluss von Frequenz und Amplitude

Abb. 4.3-1 zeigt den Verlauf der radialen Position über der axialen Position des Wirbelzentrums für periodisch angeregte laminare Freistrahlen (Wirbelketten) im Vergleich zu einzelnen Ringwirbeln. Variiert wurden Frequenz und Amplitude der Ausschubfunktion.

### Der Einfluss der Frequenz (bzw. Ausschublänge) auf die Position des Wirbelzentrums

Abb. 4.3-1 zeigt die Verläufe der radialen Position über der axialen Position des Wirbelzentrums. Die Ergebnisse zeigen die schon in Kap. 4.2.2 diskutierten Charakteristika. In allen drei betrachteten Konfigurationen A, B und C werden die jeweiligen Radialpositionen (bzw. Wirbeldurchmesser) mit kleiner werdender Frequenz (wachsender Periodendauer) größer, da die Ausschublänge und damit das ausgeschobene Volumen zunimmt. Bei der größeren Frequenz (kleinere Ausschublänge) ist im Verlauf der Radialpositionen jeweils ein deutlicher Maximalwert  $R_{Max}$  zu erkennen. Wie in Kap. 4.2.2.1 bereits diskutiert, resultiert die Abnahme des Wirbeldurchmessers von einer Interaktion des Wirbels mit der Düsenkante her. Diese Interaktion wird bei größerem ausgeschobenem Volumen kleiner. Daher ist bei der kleineren Frequenz (größeren Periodendauer) weder ein Maximum, noch ein nachfolgendes Abfallen zu erkennen.

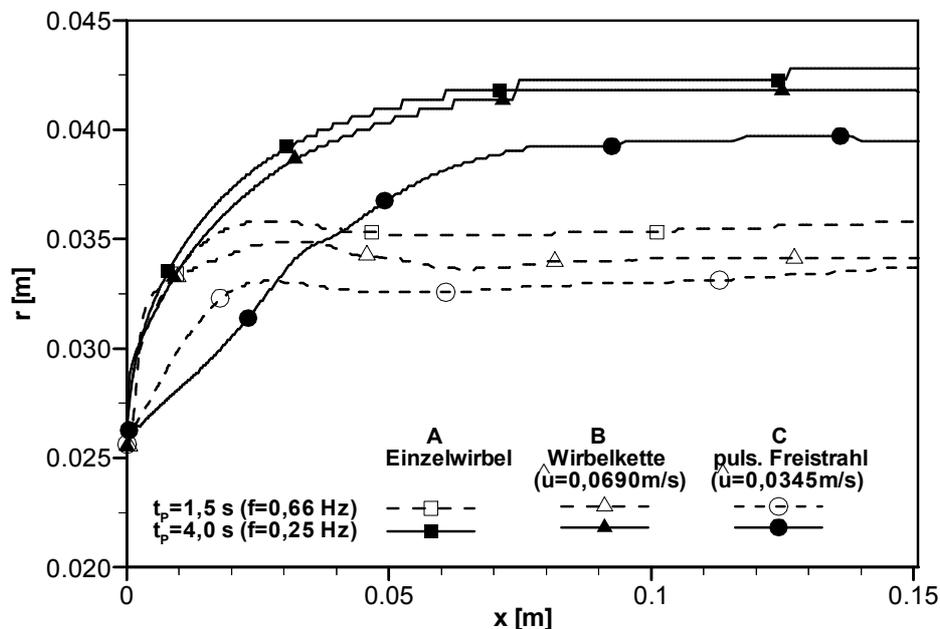


Abb. 4.3-1: Vergleich der Wirbeltrajektorien der Systeme periodisch angeregter laminarer Freistrah und einzelner Anfahrwirbel ( $\overline{u_M} = 0,069$  m/s). Variation von Frequenz (bzw. Ausschublänge) und Amplitude.

### Der Einfluss der Amplitude auf die Position des Wirbelzentrums

Die Radialpositionen (bzw. Durchmesser) der Wirbel der "Wirbelkette" (Fall B) weisen im Vergleich zu einzelnen Wirbeln (Fall A) kleinere Werte auf. Bei Ablösung eines jeden Ringwirbels der Wirbelkette entsteht wie im Falle einzelner Anfahrwirbel an der Düseninnenseite ein Sekundärwirbel gegensinniger Zirkulation (s. o.). Dieser wird vom nachfolgenden Wirbel aufgenommen und bewirkt, dass sich die Gesamtzirkulation des sich in der nächsten Periode neu bildenden Ringwirbels um den Betrag der Zirkulation des Sekundärwirbels der vorherigen Periode vermindert. Da sich die Gesamtzirkulation auf den Wirbeldurchmesser und somit auf seine radiale Koordinate auswirkt, ergeben sich im Fall der "Wirbelkette" kleinere Ringwirbeldurchmesser als im Fall einzelner

Anfahrwirbel. Wird der Freistrahls mit kleiner Amplitude pulsiert (Fall C) ergeben sich Ringwirbel mit noch kleineren Durchmessern. Bei der kleineren Amplitude wird die Beschleunigung der abgelösten Scherschicht kleiner, was zu einer schwächeren Einrollung führt. Obwohl die pro Periode ausgeschobene Masse unabhängig von der Amplitude ist (Gl. 4.2-3), wird in diesem Fall nur ein kleinerer Anteil des ausströmendem Mediums in den Wirbel eingebunden, was dessen Durchmesser verringert.

### Der Einfluss der Frequenz auf die Translationsgeschwindigkeit des Wirbelzentrums

Der Einfluss der Frequenz (bzw. Periodendauer oder Ausschublänge) auf die Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  bei  $x/D_M=3$  ist in Abb. 4.3-2 gezeigt. Die Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  nimmt bei allen drei Konfigurationen mit kleiner werdender Frequenz (größerer Periodendauer oder Ausschublänge) zu. Da mit zunehmendem ausgeschobenem Volumen die Gesamtzirkulation  $\Gamma_0$  des jeweiligen Ringwirbels wächst, vergrößert sich auch dessen Translationsgeschwindigkeit  $U_T$  (vgl. Kap. 2.1.7.3 und [We2]). Einzelne Ringwirbel (Fall A) weisen die kleinste Translationsgeschwindigkeit auf, da sie sich in ruhender Umgebung ausbreiten. Ringwirbel der "Wirbelkette", die sich bei dem mit großer Amplitude pulsierten Freistrahls ausbilden weisen dagegen eine höhere Translationsgeschwindigkeit auf. Dies kann mit dem Einfluss des Nachlaufes des sich stromab befindenden, vorherigen, Wirbels erklärt werden. Ringwirbel, die sich bei dem mit kleiner Amplitude pulsierten Freistrahls ausbilden, weisen demgegenüber eine langsamere Translationsgeschwindigkeit auf. Da sich nur ein Teil der ausgeschobenen Strahlmasse im Wirbel befindet (s. o.), ist auch dessen Gesamtzirkulation kleiner, was sich in einer kleineren Translationsgeschwindigkeit auswirkt.

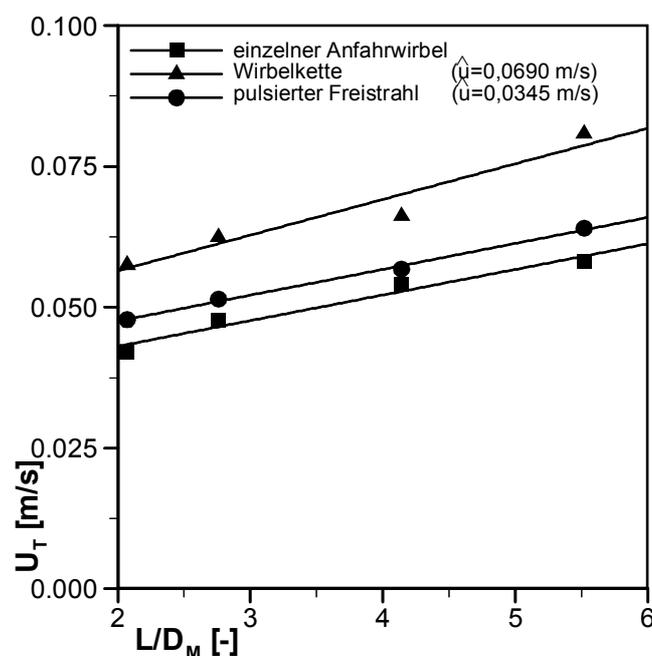


Abb. 4.3-2: Einfluss der Ausschublänge auf die Translationsgeschwindigkeit des Wirbels; Vergleich der Systeme einzelner Anfahrwirbel und periodisch angeregter laminarer Freistrahls ( $\overline{u_M} = 0,069$  m/s).

## 4.4 Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles

Um die von PRANDTL (zitiert in WILLE [We4]) durchgeführten Überlegungen (vgl. Kap. 2.1.7.4) zu überprüfen wurde der Anfahrvorgang eines Freistrahles berechnet. Dazu wurde die Einlassgeschwindigkeit an der Düsenmündung auf den Wert  $u_M = 0,046 \text{ m/s}$  gesetzt und zeitlich konstant gehalten. Es bildet sich ein Anfahrwirbel aus, der zusammen mit dem sich ausbreitenden Freistrahle stromab schwimmt. Nach unendlich langer Zeit würde sich somit ein stationärer laminarer Freistrahle einstellen. Die Rechnung wurde bis zu einer physikalischen Zeit von 9 s durchgeführt.

Abb. 4.4-1 zeigt, dass sich die axiale Position  $X_F$  der Strahlfront (vgl. Abb. 4.2-7) nach einer Beschleunigungsphase in guter Näherung mit der Hälfte des Düsenaustrittsgeschwindigkeit stromab bewegt. Wie zu sehen ist, bewegt sich die axiale Position  $X_W$  des Wirbelzentrums nach einer Anlaufphase mit der gleichen Geschwindigkeit  $U_T$  wie die Strahlfront  $U_F$  stromab. Der Wirbel ist dann gewissermaßen an die Strahlfront gebunden. Diese Bedingungen sind zusätzlich nochmals in einem Diagramm verdeutlicht, für das die Positionsänderungen als Geschwindigkeiten ausgewertet wurden (Abb. 4.4-2). Die von PRANDTL hergeleitete Abhängigkeit wird durch die Rechnungen damit in sehr guter Näherung bestätigt.

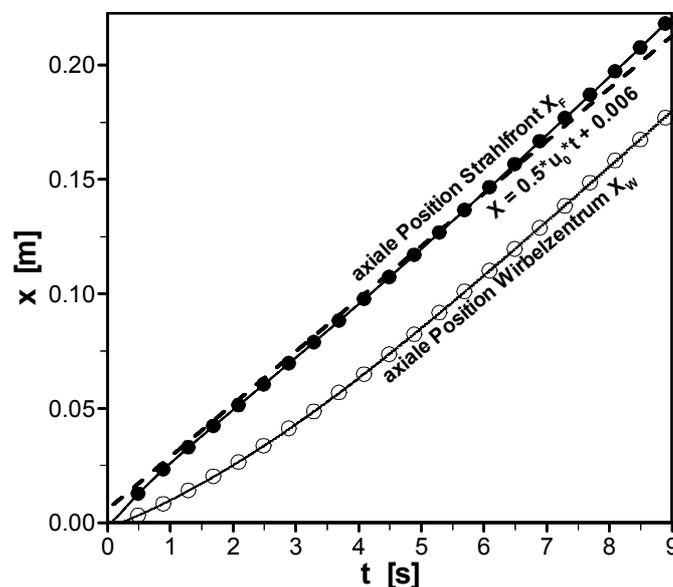


Abb. 4.4-1: Axiale Koordinaten ausgezeichneter Punkte beim Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles.

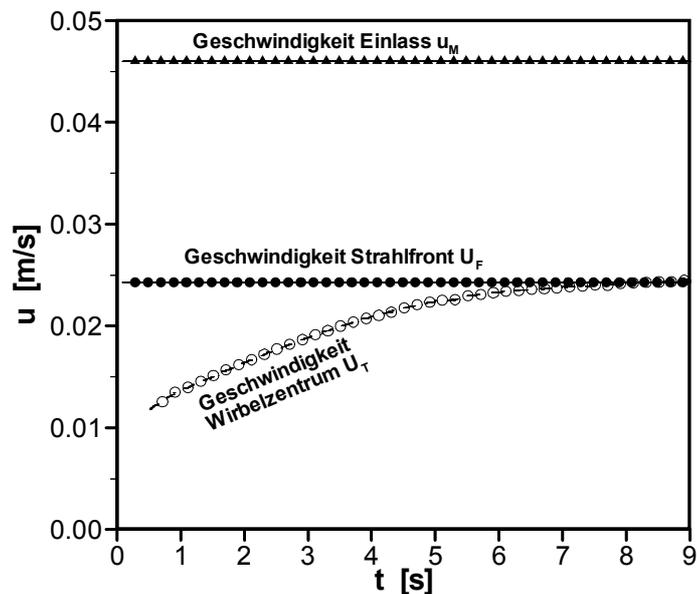


Abb. 4.4-2: Geschwindigkeiten ausgezeichneter Punkte beim Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles.

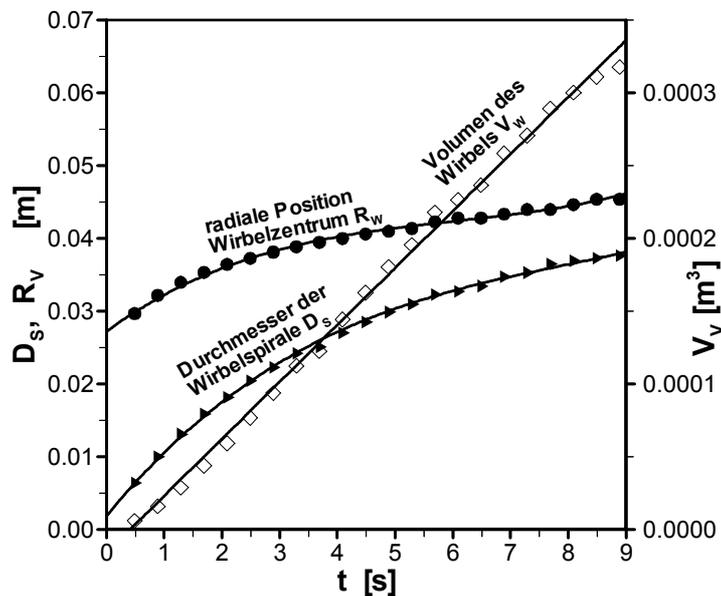


Abb. 4.4-3: Radiale Koordinaten ausgezeichneter Punkte und Verlauf des Wirbelvolumens beim Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles.

Wie in Abb. 4.4-3 zu sehen ist, nehmen sowohl die radiale Position des Wirbelzentrums  $R_w$  sowie auch der Durchmesser der Wirbelspirale  $D_s$  mit der Zeit zu. Da die Geschwindigkeit der Strahlfront kleiner als die Düsenaustrittsgeschwindigkeit ist, fließt ständig ein Teil der aus der Düse austretenden Masse radial nach außen in den Wirbel ab. Dadurch ergibt sich eine langsame, aber stetige Vergrößerung der radialen Position des Wirbelzentrums  $R_w$ , bzw. des Wirbeldurchmessers  $D_w$ . Der in den Wirbel einfließende

Volumenstrom  $\dot{V}_W$  von Düsenfluid beträgt genau die Hälfte des aus der Düse austretenden Volumenstromes:

$$\dot{V}_W = \frac{1}{2} \cdot u_M \cdot \pi \cdot \frac{D_M^2}{4} = U_F \cdot \pi \cdot \frac{D_M^2}{4} = 4,52 \cdot 10^{-5} \frac{m^3}{s} .$$

Wie in Abb. 4.1-3 zu erkennen ist, wird jedoch auch Umgebungsmedium in die Spiralstruktur eingemischt. Eine Analyse der Wirbelstruktur für große Zeiten rechtfertigt die Annahme, dass der Volumenstrom des in den Wirbel eingemischten Umgebungsmediums relativ klein gegenüber dem in den Wirbel eingemischten Volumenstrom von Düsenfluid ist. Wenn man weiterhin annimmt, dass der Wirbel eine torusförmige Geometrie aufweist, deren Durchmesser gleich dem Durchmesser der Wirbelspirale  $D_S$  entspricht, so gilt für das Volumen des Torus:  $V = \pi^2/2 \cdot D_S^2 \cdot R_W$ . Damit kann das Volumen des Wirbels  $V_W$  auch über die folgende Beziehung ausgedrückt werden:

$$V_W(t) = \frac{\pi^2}{2} \cdot D_S^2(t) \cdot R_W(t) , \quad (3-7)$$

In Abb. 4.4-3 ist das so berechnete Wirbelvolumen  $V_W(t)$  über der Zeit aufgetragen. Das Ergebnis zeigt, dass die Annahmen bezüglich der Wirbelgeometrie zutreffend sind. Das Volumen des Wirbels wächst linear mit der Zeit.

## 5 Berechnung turbulenter isothermer Ringwirbel

Im vorliegenden Kapitel wird die numerische Berechnung turbulenter isothermer Ringwirbel im Medium Luft diskutiert. Diese bilden sich beim pulsierten Betrieb von turbulenten isothermen Freistrahlen, wenn hinreichend große Frequenzen bzw. Amplituden vorliegen (s. dazu Kap. 2.1.9). In Kap. 5.1 wird die Vorgehensweise und die verwendeten Parameter und Modelle beschrieben. In Kap. 5.2 wird die Problematik der Detektion des Wirbelzentrums im Experiment und bei der Modellierung diskutiert und es werden die berechneten Wirbeltrajektorien gezeigt. In Kap. 5.3 wird das berechnete Mischungsfeld analysiert. Zum Vergleich der Rechenergebnisse werden, soweit in der Literatur vorhanden, experimentell ermittelte Daten herangezogen.

### 5.1 Durchführung der Untersuchungen

#### 5.1.1 Vorgehensweise

Für die Modellierung der Turbulenz wurde zum einen das  $k$ - $\epsilon$  Modell in der Standard Version (s. Kap. 2.1.5.4) verwendet, zum anderen die mittels der sog. Pope-Korrektur modifizierte Variante (s. Kap. 2.1.5.7). Diese zwei Modellversionen werden im Folgenden als STKE- bzw. POKE-Modell bezeichnet. Um den Einfluss der numerischen Parameter zu untersuchen, wurden drei unterschiedliche Rechengitter und drei verschiedene Schemata zur Diskretisierung der konvektiven Terme der Transportgleichung für den Mischungsbruch (HYBRID, QUICK, MLU) verwendet. Um den Einfluss der Randbedingungen auf das Ergebnis zu untersuchen, wurden die Turbulenzwerte am Einlassrand systematisch variiert.

#### 5.1.2 Beschreibung des Systemes

##### Geometrie und Gitter

Abb. 5.1-1 zeigt schematisch das Rechenfeld und die verwendeten Randbedingungen. Das grau hinterlegte Rechengebiet wurde mit drei verschiedenen Auflösungen diskretisiert. Hierbei waren die Gitterpunkte nicht äquidistant verteilt, sondern zur Düse hin dichter, um eine gute Auflösung des Bereiches der Wirbelbildung zu gewährleisten. Die Gitter werden im Folgenden als *grobes* ( $84 \cdot 60$  Zellen), *mittleres* ( $300 \cdot 186$  Zellen) und *feines* Gitter ( $497 \cdot 305$  Zellen) bezeichnet.

### Randbedingungen

Zum Vergleich der Rechenergebnisse wurden Messdaten aus der Literatur verwendet. In den entsprechenden experimentellen Untersuchungen wurden sogenannte Wirbelfadendüsen (s. auch [S30]) eingesetzt. Diese zeigen auch im pulsierten Betrieb ein nahezu ebenes Strömungsprofil im Austrittsquerschnitt [Vi3]. Die Wirbelfadendüsen wurden bei der Modellierung durch ein zylindrisches Rohr angenähert, dessen Länge  $0,75 \cdot d$  betrug. Am Einlassrand des Rechengebietes wurden ebene Profile für die Geschwindigkeit und die Turbulenzgrößen angenommen. Im Experiment waren die Wirbelfadendüsen mit dem Auslassquerschnitt bündig in eine Metallplatte eingelassen. Daher wurde die untere Seite des Rechengebietes als Wand definiert. Aufgrund der existierenden Rotationssymmetrie wurde nur eine Symmetriehälfte des Strömungsfeldes berechnet. Die Ränder zur Umgebung wurden als freie Ränder (Ein- und Ausströmung sind möglich) definiert.

Bei den experimentellen Untersuchungen konnten die mittlere Austrittsgeschwindigkeit, die Frequenz und der Pulsationsgrad der Austrittsströmung durch eine Pulsationseinrichtung unabhängig voneinander variiert werden [Vi1]. Die zeitlichen Verläufe von Geschwindigkeit und turbulenter kinetischer Energie wurden jedoch lediglich für die folgende Parameterkombination mittels Hitzdrahtanemometrie bestimmt [Vi5]: Düsendurchmesser  $d=26$  mm, mittlere Austrittsgeschwindigkeit  $u_0=26$  m/s, Pulsationsgrad  $Pu=21,9$  %, Anregungsfrequenz  $f=80$  Hz. Zur Verwendung bei der Modellierung wurden die gemessenen zeitlichen Verläufe von phasengemittelter Austrittsgeschwindigkeit  $\langle u(t) \rangle$  und turbulenter kinetischer Energie  $\langle k(t) \rangle$  mit Splinefunktionen approximiert und als Randwerte am Einlass vorgegeben. Die turbulente Dissipation  $\langle \epsilon(t) \rangle$  wurde mit einem aus Messungen bei stationärer Strömung bekannten turbulenten Längenmaß von  $L_t = 8$  mm über unten angegebene Beziehung abgeschätzt. Die mit dieser Vorgehensweise durchgeführten Berechnungen sind in den Abb. 5.2-3 und 5.3-5 bis 5.3-7 diskutiert.

Da der zeitliche Verlauf der Randwerte für alle sonstigen Parameterkombinationen unbekannt war, wurde für alle weiteren Rechnungen die im Folgenden erläuterte Vorgehensweise gewählt. Die phasengemittelte Axialgeschwindigkeit an der Düse wurde durch eine Sinusfunktion approximiert

$$\langle u(t) \rangle = u_0 \cdot \left( 1 + Pu \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \pi/4) \right) , \quad (5.1-1)$$

wobei  $Pu$  den für eine einzelne Anregungsfrequenz gemessenen Pulsationsgrad bezeichnet [Vi1]. Dieser stellt für eine rein harmonische Schwingung den auf die mittlere Geschwindigkeit bezogenen Effektivwert der Amplitude dar:  $Pu = \langle \hat{u} \rangle / (\sqrt{2} \cdot u_0) = \langle u \rangle_{eff} / u_0$ . Die Randwerte für die turbulente kinetische Energie  $\langle k(t) \rangle$  und die Dissipation  $\langle \epsilon(t) \rangle$  wurden mit den folgenden Beziehungen bestimmt:

$$\begin{aligned}\langle Tu(t) \rangle &= \frac{\sqrt{\langle u'(t) \rangle^2}}{\langle u(t) \rangle} \equiv Tu_{stationär} = \frac{\sqrt{u'^2}}{u_0} = \frac{u_{RMS}}{u_0} \\ \langle k(t) \rangle &= \frac{3}{2} \cdot \langle u'(t) \rangle^2 \equiv \frac{3}{2} \cdot u_{RMS}^2 \\ \langle \varepsilon(t) \rangle &= c_\mu^{0,75} \cdot \frac{\langle k(t) \rangle^{3/2}}{L_t} .\end{aligned}\tag{5.1-2}$$

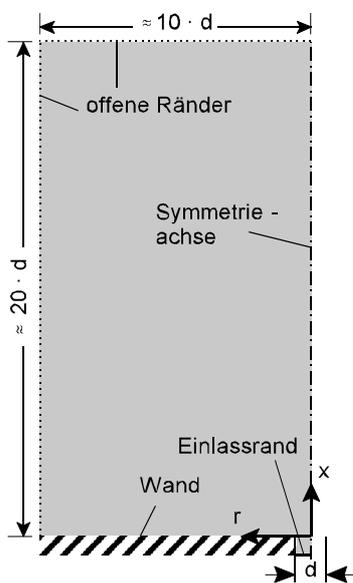


Abb. 5.1-1: Rechengebiet und Randbedingungen.

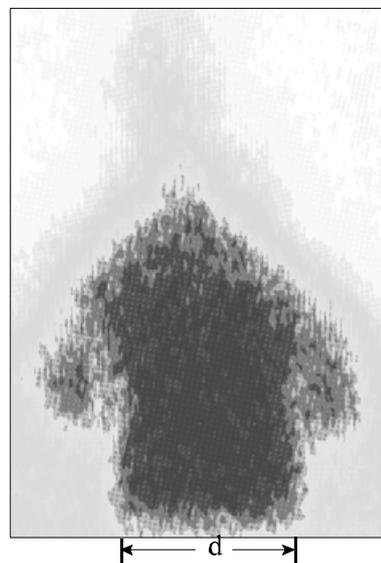


Abb. 5.1-2: Laserlichtschnittaufnahme eines pulsierten Freistrahles [Vi7].

Dabei wurden, wenn in den entsprechenden Diagrammen nicht anders angegeben, die aus Messungen am stationären Strahl ermittelten turbulenten Längenmaße von  $L_t = 8\text{ mm}$  (bei  $d = 26\text{ mm}$ ) und  $L_t = 5\text{ mm}$  (bei  $d = 20\text{ mm}$ ) sowie ein typischer, ebenfalls am stationären Strahl gemessener Turbulenzgrad von  $Tu_{stationär} = 2,5\%$  verwendet [Vi3]. Die hier beschriebene Vorgehensweise zur Abschätzung der Einlassrandwerte wurde auch für die in Kap. 8 diskutierten Ergebnisse der Modellierung pulsierter Vormischflammen angewendet.

### 5.1.3 Abschätzung der Kompressibilität

Um beurteilen zu können, ob bei der Berechnung von pulsierenden Freistrahlen Kompressibilitätseffekt eine Rolle spielen, sollen im Folgenden die im isothermen Strömungsfeld auftretenden Dichteunterschiede abgeschätzt werden. Dazu soll eine

eindimensionale pulsierte turbulente Strömung untersucht werden, bei der die Turbulenzwerte vom Ort unabhängig sind. Aus den sich im Strömungsfeld einstellenden Druckunterschieden kann auf die daraus resultierenden Dichteunterschiede im kompressiblen Fall geschlossen werden. Ausgangspunkt ist die Impulsgleichung in axialer Richtung

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \left( \langle v_t \rangle \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \varrho \langle k \rangle = - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{d \langle p \rangle}{dx} \quad (5.1-3)$$

Für die axiale Strömungsgeschwindigkeit wird eine eindimensionale Geschwindigkeitswelle angenommen:

$$\langle u(x, t) \rangle = \bar{u}_0 + \hat{u} \cdot \sin(\text{Arg}) , \quad \text{Arg} = \left( \omega \cdot t - \frac{\omega}{u_c} \cdot x \right) = \left( \omega \cdot t - 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda_c} \right) . \quad (5.1-4)$$

Es wird weiterhin angenommen, dass sich die Geschwindigkeitswelle mit der mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortpflanzt, d. h.  $u_0/u_c = 1$ . Dies steht in guter Übereinstimmung mit Daten, die durch Geschwindigkeitsmessungen längs der Symmetrieachse eines isothermen pulsierten turbulenten Freistrahles gewonnen wurden (s. PRIESMEIER [Vi14]). Der in Gl. 5.1-3 auftretende Druckgradient ist für einen festen Zeitpunkt dann maximal, wenn die linke Seite der Gleichung einen Extremwert besitzt bzw. wenn deren Ableitung in axialer Richtung identisch Null ist:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \left( \langle v_t \rangle \cdot \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \varrho \langle k \rangle \right) = 0 . \quad (5.1-5)$$

Wird die Geschwindigkeitsfunktion 5.1-4 in Gleichung 5.1-5 eingesetzt, so ergibt sich die Beziehung:

$$\cos^2(\text{Arg}) - \langle v_t \rangle \cdot \frac{1}{\hat{u}} \cdot \frac{\omega}{u_c} \cdot \cos(\text{Arg}) - 1 = 0 . \quad (5.1-6)$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung liefert zwei Ergebnisse für das Argument:

$$\text{Arg}_{1/2} = \arccos \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{4} \right) = \left( \omega \cdot t - \frac{\omega}{u_c} \cdot x \right) \quad \text{mit} \quad a = \langle v_t \rangle \cdot \frac{1}{\hat{u}} \cdot \frac{\omega}{u_c} . \quad (5.1-7)$$

Daraus lassen sich für die Zeit  $t=0$  zwei Axialpositionen bestimmen, für die der Druckgradient in axialer Richtung maximal wird:

$$x_{1/2} = - \arccos \left( \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8}}{4} \right) \cdot \frac{u_c}{\omega} \quad (5.1-8)$$

Die ursprüngliche Gleichung 5.1-3 schreibt sich für den Zeitpunkt  $t=0$  als:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dx} = \varrho \cdot \hat{u}^2 \cdot \frac{\omega}{u_c} \cdot \sin\left(-\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \cdot \cos\left(-\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) - \varrho \cdot \langle v_t \rangle \cdot \hat{u} \cdot \left(\frac{\omega}{u_c}\right)^2 \cdot \sin\left(-\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \quad (5.1-9)$$

Nimmt man nun in konservativer Abschätzung an, dass der maximale Druckgradient über eine halbe Wellenlänge  $\lambda_c = 2\pi \cdot u_c / \omega$  der Geschwindigkeitswelle existiert, so ergibt sich für den maximalen Unterschied des statischen Druckes:

$$p_{Max} = \frac{d\langle p \rangle}{dx} \cdot \frac{\lambda_c}{2} = \pi \cdot \varrho \cdot \hat{u}^2 \cdot \sin\left(-\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \cdot \cos\left(-\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) - \pi \cdot \varrho \cdot \langle v_t \rangle \cdot \hat{u} \cdot \frac{\omega}{u_c} \cdot \sin\left(-\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \quad (5.1-10)$$

Mit den für die vorliegenden Untersuchungen typischen Werten von  $u_0 = u_c = 25 \text{ m/s}$ ,  $\hat{u} = 10 \text{ m/s}$ ,  $\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 100 \text{ Hz}$ ,  $\varrho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\langle v_t \rangle = 0,09 \cdot \langle k \rangle^2 / \langle \varepsilon \rangle = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}^2$  und unter Verwendung einer der erhaltenen Axialpositionen  $x_{1/2}$  ergibt sich ein Wert von

$$\Delta p_{Max} \approx 150 \text{ Pa} \quad (5.1-11)$$

Für isentrope Bedingungen lässt sich daraus folgende Dichteveriation innerhalb eines pulsierten Freistrahles berechnen:

$$\left(\frac{\varrho_{Ref} + \Delta \varrho}{\varrho_{ref}}\right) = \left(\frac{p_\infty + \Delta p}{p_\infty}\right)^{1/\kappa} = \frac{101450 \text{ Pa}}{101300 \text{ Pa}} \approx 1,0015 \quad (5.1-12)$$

Die Analyse der Ergebnisse der in diesem Kapitel vorgestellten Berechnungen turbulenter Ringwirbel hat weiterhin ergeben, dass sich der aufgrund der Rotationsbewegung im Wirbelzentrum einstellende Unterdruck ebenfalls im Bereich von 150 Pa bewegt. Die in dieser Arbeit untersuchte instationäre Strömung kann daher in sehr guter Näherung als inkompressibel betrachtet werden.

## 5.2 Wirbeltrajektorien

### 5.2.1 Detektion des Wirbelzentrums

Zum Vergleich der Rechenergebnisse wurden Messdaten von BÜCHNER [Vi3] und KÜLSHEIMER [Vi5] verwendet. Im Experiment wurden die zeitlichen Verläufe der Wirbelpositionen mit Hilfe der Laserlichtschnitttechnik ermittelt. Dazu wird ein Laserstrahl durch eine Zylinderlinse zu einem dünnen Lichtband aufgeweitet, welches den Freistrah entlang der Symmetrieachse schneidet. Wird die Umgebung mit kleinen Nebeltröpfchen beladen, so kann das von der Lichtschnittebene emittierte Streulicht mit einer Videokamera aufgenommen werden. Die Helligkeit des Streulichtes ist dabei ein Maß für die Tropfenkonzentration. Abb. 5.2-1 zeigt eine typische Aufnahme der Streulichtkonzentration zu einem festen Zeitpunkt innerhalb einer Periode. Die dunklen Gebiete zeigen Bereiche mit kleiner Tropfenkonzentration, die hellen solche mit großer Tropfenkonzentration an. Das momentane Wirbelzentrum wurde durch manuelle Auswertung der deutlich erkennbaren typischen pilzförmigen Struktur ermittelt.

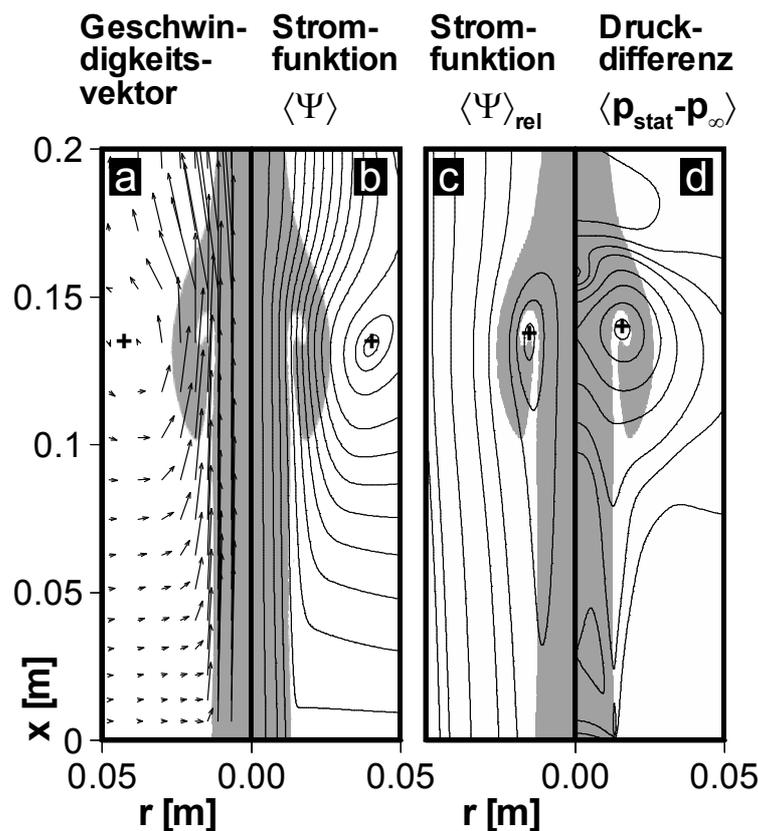


Abb. 5.2-1: Analyse des Strömungsfeldes. Rechnung mit Standard  $k-\epsilon$  Modell. Gitter  $300 \times 186$ . Parameter:  $d=26$  mm,  $\bar{u}=26$  m/s,  $Pu=21,9\%$ ,  $f=80$  Hz,  $t/t_p=0,65$ .

Zur Bestimmung des Wirbelzentrums bei der Modellierung wurde ein anderer Weg beschritten. Zur Erläuterung zeigen die vier in Abb 5.2-1 dargestellten Teilbilder verschiedene Größen zum jeweils gleichen Zeitpunkt innerhalb einer Schwingungsperiode. Anhand dieser Darstellung lassen sich wesentliche Eigenschaften des Strömungsfeldes aufzeigen. Werden die Geschwindigkeitsvektoren einzelner Fluidelemente als Pfeile gezeichnet, so ergibt sich das Teilbild *a* dargestellte momentane Richtungsfeld der instationären Strömung. Die in Teilbild *b* gezeigten Stromlinien sind Linien, die sich in tangentialer Lage zum Geschwindigkeitsvektor befinden. Die Stromlinien wurden unter Verwendung von Gl. 2.1-62 berechnet. Beide Teilbilder zeigen den Augenblickszustand der Strömung an und suggerieren, dass sich das Wirbelzentrum an der durch das jeweilige Kreuz markierten Position befindet. Die in jedem der vier Teilbilder im Hintergrund zu erkennende Struktur repräsentiert das mit dem SLIC-Algorithmus berechnete Mischungsfeld. Da Diffusionsprozesse hierbei gänzlich unberücksichtigt bleiben, erlaubt diese Vorgehensweise die isolierte Untersuchung des konvektiven Anteils des instationären Prozesses. Die Farbe grau kennzeichnet das aus der Düse ausgetretene Fluid. Die Grenzlinie zwischen Düsenfluid und Umgebungsfluid ist das Ergebnis einer zeitlichen Entwicklung und stellt eine Streichlinie dar. Alle sich auf dieser Linie befindlichen Fluidelemente stammen ursprünglich von der Düsenkante ab. Für stationäre Strömungen sind Stromlinien, Streichlinien und Teilchenbahnen

deckungsgleich, unterscheiden sich jedoch für instationäre Strömungen. Spiralförmige oder kreisförmige Streichlinien deuten auf das Vorhandensein eines Wirbels hin (vgl. Kap. 2.1.6.3). Im vorliegenden Fall ist zu erkennen, dass sich die Streichlinie um ein Zentrum eingerollt hat. Das Wirbelzentrum kann über eine im mit dem Wirbel mitbewegten Bezugssystem definierten Stromfunktion  $\langle \Psi(x, r, t) \rangle_{rel}$  (s. Gl. 5.2-1) gefunden werden. Dazu werden an jeder Position im Strömungsfeld die Bewegungsanteile des Wirbelzentrums von den jeweiligen Komponenten der lokalen Strömungsgeschwindigkeit subtrahiert.

$$\begin{aligned} \langle \Psi(x, r, t) \rangle_{rel} = & 2\pi \int_0^r \left( \langle u(x, r, t) \rangle - \langle u(t) \rangle_w \right) \cdot r \, dr - \\ & 2\pi r \int_0^x \left( \langle v(x, r, t) \rangle - \langle v(t) \rangle_w \right) dx \quad . \end{aligned} \quad (5.2-1)$$

Die radiale Bewegung  $\langle v(t) \rangle_w$  des Wirbelzentrums ist dabei in erster Näherung vernachlässigbar (s. Abb. 5.2-5). Teilbild *c* in Abb. 5.2-2 zeigt, dass das mit dem Kreuz gekennzeichnete Maximum der so definierten, relativen Stromfunktion die Position des Wirbelzentrums repräsentiert. Die Streichlinie wickelt sich um dieses Zentrum herum auf. Da zur Bestimmung der relativen Stromfunktion jedoch wiederum die zunächst unbekannte Wanderungsgeschwindigkeit des Wirbelzentrums erforderlich ist, wurde die Position des Wirbelzentrums bei der Modellierung über das in Teilbild *d* durch ein Kreuz markierte lokale Minimum des statischen Druckes ausgewertet. Durch die Zentrifugalbewegung ergibt sich im Wirbelzentrum ein Unterdruck gegenüber der Umgebung. Zur Auswertung wurde in das CFD-Programm ein Algorithmus implementiert, der die Position des lokalen Druckminimums automatisch detektiert, weiterverfolgt und die Positionsdaten ausgibt. Der Vergleich der mittels der relativen Stromfunktion und der mit dem Druckminimum ausgewerteten Wirbelposition zeigte eine sehr gute Übereinstimmung.

### 5.2.2 Vergleich mit Messdaten

Im folgenden Abschnitt werden berechnete und gemessene Wirbeltrajektorien verglichen. Eine Trajektorie stellt in diesem Zusammenhang die zeitabhängige Raumposition des Wirbelzentrums dar. Die Wirbeltrajektorien sind mit dem Düsendurchmessers  $d$  entdimensioniert gegenüber der relativen Verzugszeit  $t/t_p$  aufgetragen. Da über die absolute Phasenlage der verwendeten Messwerte keine Informationen vorlagen, sind die Werte auf der Zeitachse so weit verschoben, dass sich eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Rechenergebnissen ergibt.

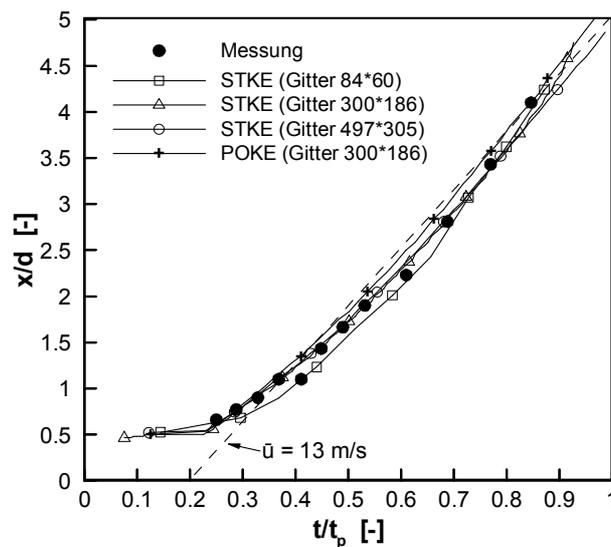


Abb. 5.2-2: Vergleich von gemessenen ([Vi3]) und berechneten axialen Wirbelpositionen; STKE = Standard  $k-\epsilon$  Modell, POKE =  $k-\epsilon$  Modell mit Pope-Korrektur; Parameter:  $d=26$  mm,  $u_0=26$  m/s,  $Pu=21,9\%$ ,  $f=80$  Hz.

Abb. 5.2-2 zeigt den zeitlichen Verlauf der *axialen* Wirbelposition für einen Freistrah mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $u_0=26$  m/s. Die Rechnung mit dem STKE-Modell unter Verwendung des mittleren und feinen Gitters decken sich nahezu und weisen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Messergebnissen aus [Vi3] auf. Daraus lässt sich schließen, dass die mit dem mittleren Gitter erzeugten Rechenergebnisse gitterunabhängig sind, was durch die Ergebnisse der Mischungsrechnungen bestätigt wird (s. u.). Die Rechnung mit dem STKE-Modell unter Verwendung des groben Gitters ergibt etwas kleinere axiale Wirbelpositionen. Die Rechnung mit dem POKE-Modells ergibt gegenüber der Rechnung mit dem STKE-Modells eine schwache Vergrößerung der radialen Positionswerte.

Abb. 5.2-3 zeigt den zeitlichen Verlauf der *axialen* Wirbelposition für einen Freistrah mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $u_0=40$  m/s. Die berechneten Wirbelpositionen liegen bis zu einer relativen Zeit von 0,5 zunächst zu weit stromab. Für größere relative Zeiten decken sich die berechneten Positionen jedoch nahezu mit den Messwerten. Der Knick im gemessenen Verlauf bei  $t/t_p = 0,5$  weist auf einen Inkonsistenz in der Messung hin. Die durchgeführte Variation des zur Randwerterzeugung zugrundegelegten Längenmaßes deutet auf einen weitgehende Unabhängigkeit der berechneten Ergebnisse von den Turbulenzrandwerten hin. Die Wahl der Variante des Turbulenzmodelles zeigt ebenfalls keinen Einfluss.

Abb. 5.2-4 zeigt den zeitlichen Verlauf der *radialen* Wirbelposition für einen Freistrah mit einer mittleren Geschwindigkeit von  $u_0=40$  m/s. Die Rechnung mit dem POKE-Modell ergibt etwas größere radiale Positionen als die Rechnung mit dem STKE-Modell. Auf den ersten Blick scheint die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung insgesamt schlechter zu sein, als beim Vergleich der axialen Wirbelpositionen.

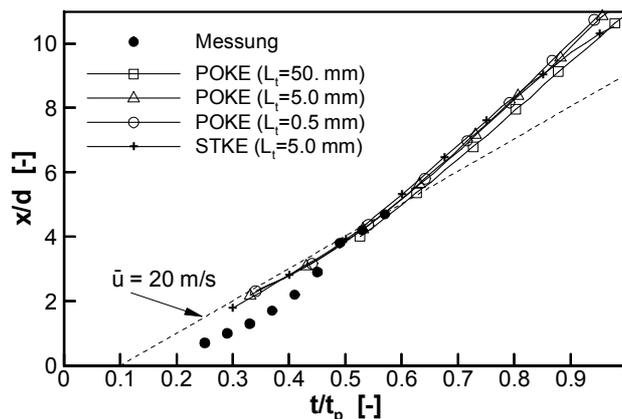


Abb. 5.2-3: Vergleich von gemessenen ([Vi5]) und berechneten axialen Wirbelpositionen.; STKE = Standard  $k-\epsilon$  Modell, POKE =  $k-\epsilon$  Modell mit Pope-Korrektur. Parameter:  $d=20$  mm,  $u_0=40.0$  m/s,  $Pu=30$  %,  $f=100$  Hz, Gitter  $300 \times 186$ .

Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, dass eine Abweichung von 0,1 auf der normierten Ordinate in der Realität eine Abweichung von lediglich 2 mm bedeutet. Beim Vergleich muss außerdem berücksichtigt werden, dass die Methoden zur Detektierung der jeweiligen Wirbelpositionen im Experiment (manuelle Auswertung eines mittels Videoaufnahme aufgenommenen Laserlichtschnittes) und Rechnung (Auswertung des Minimums des statischen Druckes im Strömungsfeld) völlig unterschiedlich waren (s. o.). Vor diesem Hintergrund ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung überraschend gut.

Die vorgestellten Ergebnisse lassen einige Parallelen zur Bildung von laminaren Ringwirbeln erkennen. In Kap. 4.4 wurde gezeigt, dass sich beim Anfahrvorgang eines laminaren Freistrahles ein Ringwirbel ausbildet, der sich mit einer axialen Translationsgeschwindigkeit stromab bewegt, die genau der Hälfte der Strömungsgeschwindigkeit am Düsenaustritt entspricht. In den Abb. 5.2-2 und 5.2-3 ist zusätzlich eine Gerade eingezeichnet, deren Steigung jeweils gleich der Hälfte der periodengemittelten Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  des pulsierten Strahles am Düsenaustritt ist. Für den Strahl mit  $u_0=26$  m/s beträgt die Translationsgeschwindigkeit des Wirbels nach einer gewissen Anfahrphase während des gesamten betrachteten Zeitraumes in guter Näherung der Geschwindigkeit  $u_0/2$ . Für den Strahl mit  $u_0=40$  m/s gilt diese Aussage allerdings nur für den Bereich  $t/t_p < 0,65$ . Danach wird die Translationsgeschwindigkeit jedoch zunehmend größer, da sich der Wirbel im Gegensatz zum Anfahrvorgang eines Freistrahles nicht in ruhendes Medium hinein ausbreitet. Auffällig ist weiterhin, dass der zeitliche Verlauf der radialen Wirbelposition im turbulenten Fall den gleichen typischen Verlauf wie im Falle eines laminaren Anfahrwirbels aufweist. Die Radialposition nimmt zu, durchschreitet ein Maximum und bleibt danach relativ konstant. Dieser Verlauf kann bei laminaren Ringwirbeln auf die Interaktion des Wirbels mit der Düsenkante zurückgeführt werden (s. Kap. 4.2.2) und führt zu der Vermutung, dass die hier untersuchten turbulenten Ringwirbel während deren Bildungsphase ebenfalls von einer Interaktion mit der Düse, bzw. die Düse umgebenden Bodenplatte beeinflusst sind.

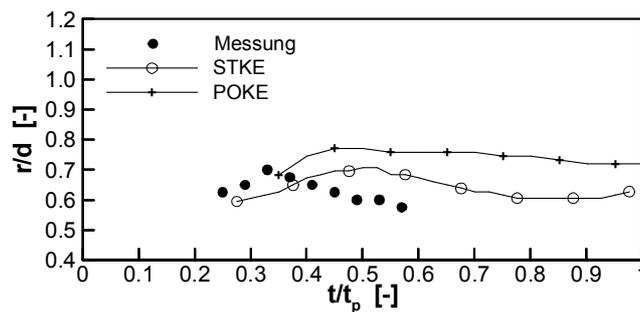


Abb. 5.2-4: Vergleich von gemessenen ([Vi5]) und berechneten radialen Wirbelpositionen; STKE = Standard  $k-\epsilon$  Modell, POKE =  $k-\epsilon$  Modell mit Pope-Korrektur; Parameter:  $d=20$  mm,  $u_0=40.0$  m/s,  $Pu=30$  %,  $f=100$  Hz, Gitter  $300 \times 186$ .

## 5.3 Mischungsfeld

### 5.3.1 Physikalische und numerische Diffusion

Jedes der vier Teilbilder in Abb. 5.3-1 zeigt einen Isoplot der normierten Konzentration von Düsenfluid zum gleichen relativen Zeitpunkt innerhalb der Schwingungsperiode. Teilbild *a* stellt das Ergebnis der Berechnung mit dem SLIC-Algorithmus dar. Die unendlich dünne Grenzlinie trennt den Bereich des Düsenfluides (grau) vom Bereich des Umgebungsfluides (weiß). Da bei dieser Vorgehensweise weder eine physikalische noch eine numerische Diffusion wirksam ist, visualisiert diese Darstellung ausschließlich das Ergebnis des konvektiven Prozesses. Dieser führt, wie schon oben beschrieben, zu einer Einrollung der Grenzlinie (Streichlinie) um das Wirbelzentrum. Die Teilbilder *b*, *c*, und *d* zeigen das mit einer skalaren Transportgleichung unter Verwendung der Diskretisierungsverfahren HYBRID, QUICK und MLU berechnete Mischungsfeld. Der turbulente Diffusionskoeffizient wurde bei diesen Rechnungen zu null gesetzt. Das heißt, die physikalische Diffusion wurde unterdrückt. Das deutlich zu erkennende "Verschmieren" der Grenzlinie und stellt somit ein direktes Maß für die Wirkung der numerischen Diffusion dar.

Der in Abb. 5.3-2 dargestellte Axialschnitt an der radialen Position  $r = 0,016m$  lässt die Unterschiede im Detail erkennen und bestätigt die schon in Kap. 3 gewonnenen Erkenntnisse. Die Linie ohne Symbole repräsentiert die mit dem SLIC-Algorithmus erzielte Lösung. Sie zeigt zwei rechteckförmige Konzentrationsberge. Ein "perfekt" arbeitendes Diskretisierungsverfahren sollte in der Lage sein, diese Verteilung wiederzugeben. Das HYBRID-Verfahren weist die größte numerische Diffusion auf. Der Maximalwert der normierten Konzentration im ersten Peak fällt von 1 auf 0,6 ab. Das MLU-Verfahren weist eine weitaus kleinere numerische Diffusion auf und ist in der Lage, diesen Maximalwert zumindest bereichsweise zu reproduzieren. Die Verwendung des QUICK-Verfahrens weist die kleinste numerische Diffusion auf, führt jedoch zu einem Überschwingen der Konzentrationswerte. Dies ist auch am Auftreten der schwarzen Bereiche in Teilbild *c* von Abb. 5.3-1 zu erkennen.

---

Die vier Teilbilder von Abb. 5.3-3 zeigen wiederum einen Isoplot des Mischungsfeldes zum gleichen relativen Zeitpunkt innerhalb der Schwingungsperiode. Im Unterschied zu Abb. 5.3-1 wurden die Ergebnisse unter Verwendung der turbulenten Schmidtzahl von Luft ( $Sc_t = 0,7$ ) erzeugt. Teilbild *a* zeigt wiederum die mit dem SLIC-Algorithmus erzielte Lösung. Der Vergleich der mit den drei verschiedenen Diskretisierungsverfahren erzielten Ergebnisse mit den entsprechenden Ergebnissen in Abb. 5.3-1 lässt die Wirkung der physikalischen Diffusion erkennen. Die typische pilzförmige Struktur, die bei der Berechnung ohne physikalische Diffusion zu erkennen ist, ist hier völlig verschwunden.

Abb. 5.3-4 zeigt wiederum einen Axialschnitt der in Abb. 5.3-3 dargestellten Konzentrationsfelder an der radialen Position  $r = 0,016m$ . Die mit den drei Diskretisierungsverfahren erzielten Lösungen decken sich nun. Dies zeigt, dass die Berechnung des instationären Mischungsfeldes bei Verwendung des mittleren Gitters ( $300 \cdot 186$  Zellen) nicht oder nur in sehr kleinem Maße durch numerische Fehler verfälscht ist. Offensichtlich ist die physikalische Diffusion so groß, dass die am Düsenaustritt noch vorliegenden radialen Konzentrationsgradienten sehr schnell abgebaut werden. Da sich der numerische Fehler, bzw. die numerische Diffusion, jedoch bei kleinen Gradienten ebenfalls verringert, spielt die Wahl des Diskretisierungsverfahrens hier keine maßgebliche Rolle.

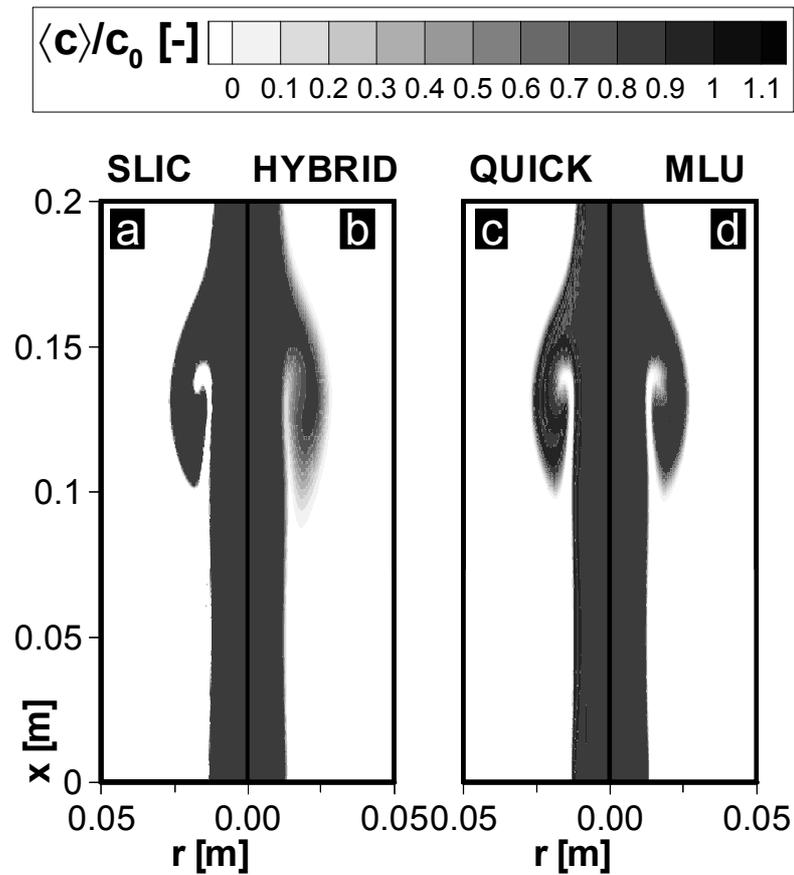


Abb. 5.3-1: Konzentrationsfelder bei Rechnung ohne physikalische Diffusion.  
 Parameter:  $d=26$  mm,  $\bar{u}=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz,  $t/t_p = 0,65$ .

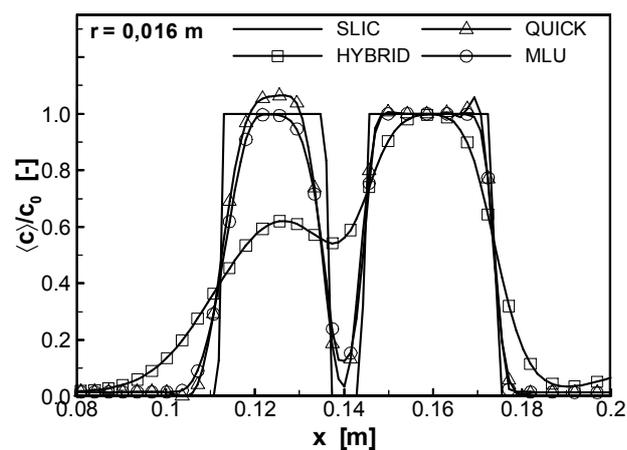


Abb. 5.3-2: Radialschnitt der Konzentration bei Rechnung ohne physikalische Diffusion.  
 Parameter:  $d=26$  mm,  $\bar{u}=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz,  $t/t_p = 0,65$ ,  
 $r = 0,016m$ .

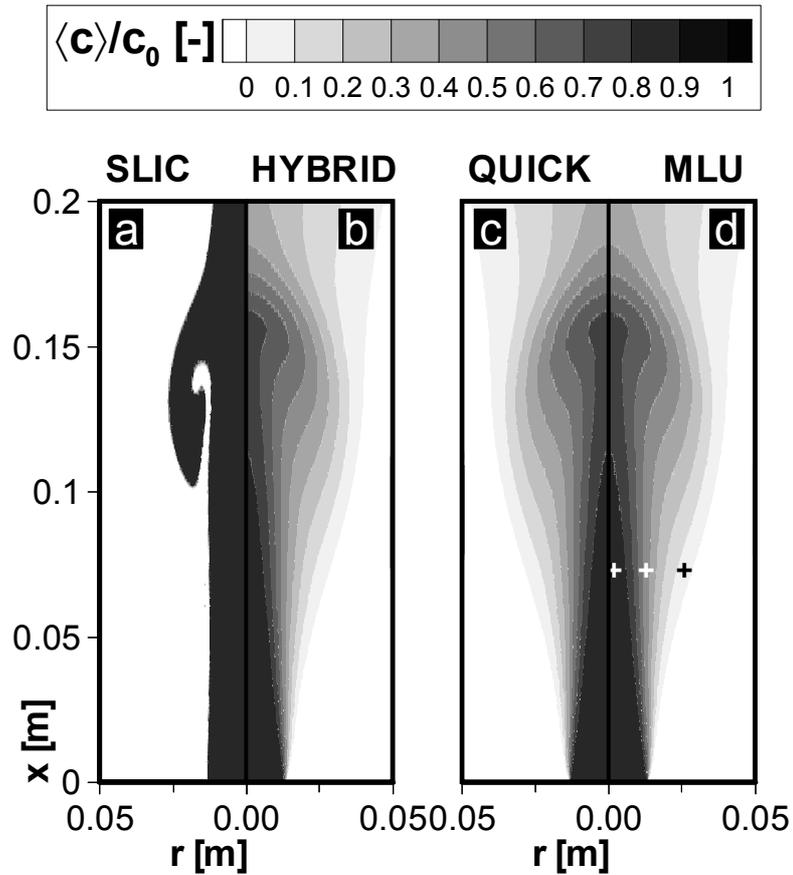


Abb. 5.3-3: Konzentrationsfelder bei Rechnung mit physikalischer Diffusion. Parameter:  $d=26$  mm,  $\bar{u}=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz,  $t/t_p = 0,65$ .

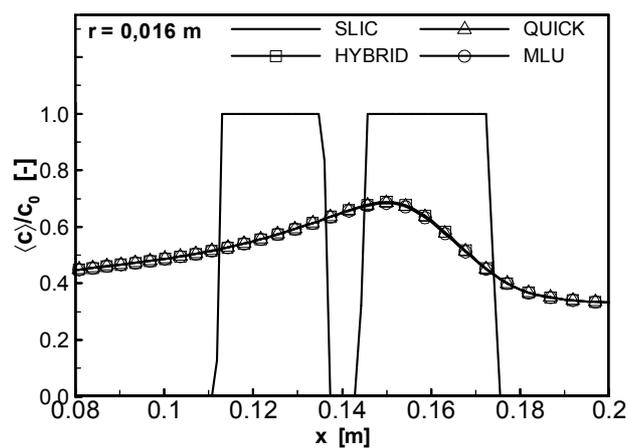


Abb. 5.3-4: Radialschnitt der Konzentration bei Rechnung mit physikalischer Diffusion. Parameter:  $d=26$  mm,  $\bar{u}=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz,  $t/t_p = 0,65$ ,  $r = 0,016$  m.

### 5.3.2 Vergleich mit Messdaten

Zum Vergleich der Rechenergebnisse wurden Messdaten von BÜCHNER [Vi1] und DIERSCHKE [Vi8] verwendet. In den experimentellen Untersuchungen wurde dem Freistrah Helium beigemischt. Mittels einer Absaugsonde wurde der zeitliche Verlauf der Heliumkonzentration an verschiedenen Punkten im Strömungsfeld gemessen. Dazu wird das abgesaugte Fluid innerhalb der Sonde zunächst auf Schallgeschwindigkeit beschleunigt und dann an einem Hitzdraht vorbeigeführt [So8]. Bei der Modellierung wurden Auftriebs- und Dichteeffekte vernachlässigt, was bei einer Zumischung von 10 Vol % Helium im Experiment gerechtfertigt ist. Da über die absolute Phasenlage der Messwerte keine Informationen vorlagen, sind die Werte auf der Zeitachse so weit verschoben, dass sich eine möglichst gute Übereinstimmung mit den Rechenergebnissen ergibt.

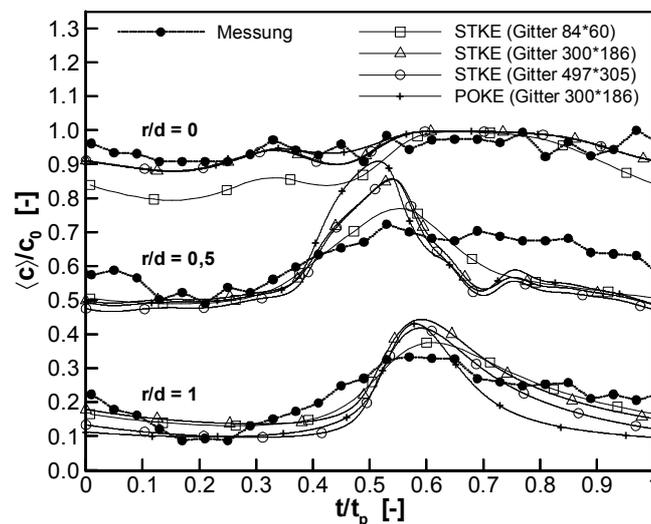


Abb. 5.3-5: Zeitliche Verläufe von gemessenen ([Vi1]) und berechneten Konzentrationswerten bei  $x/d=3$  und  $r/d=0; 0,5; 1$ . STKE = Standard  $k-\epsilon$  Modell, POKE =  $k-\epsilon$  Modell mit Pope-Korrektur. Parameter:  $d=26$  mm,  $\bar{u}=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz.

In Abb. 5.3-5 ist der zeitliche Verlauf der mit dem Wert am Düsenaustritt normierten Konzentration in einem axialen Abstand von  $x/d=3$  an drei verschiedenen Radialpositionen ( $r/d=0; 0,5; 1,0$ ) gezeigt. Die Positionen sind in Abb. 5.3-3 mit Kreuzen markiert. Das Niveau der Konzentration fällt mit wachsendem Abstand  $r/d$  von der Symmetrieachse ab. An den Verläufen bei  $r/d=0,5$  und  $1,0$  ist zu erkennen, wie die Konzentration jeweils zunächst langsam ansteigt, um danach schnell wieder abzufallen. Der vorbeiziehende Ringwirbel transportiert Strahlmedium radial nach außen. Die berechneten Verläufe weisen größere zeitliche Gradienten auf als die jeweiligen gemessenen Verläufe. Die mit dem STKE-Modell unter Verwendung des mittleren und feinen Gitters erzielten Lösungen decken sich nahezu. Dies weist, wie auch schon bei der Berechnung der Wirbeltrajektorien erwähnt, darauf hin, dass die mit dem mittleren Gitter

(300·186 Zellen) erzielte Lösung weitgehend gitterunabhängig ist. Das heißt, die Verwendung des feinen Gitters bringt keinen nennenswerten Fortschritt im Hinblick auf die Diskretisierungsgüte. Dieses Gitter wurde daher auch bei der Berechnung der instationären Flammen (s. Kap. 8) verwendet. Die mit dem STKE-Modell unter Verwendung des groben Gitters erzielte Lösung zeigt tendenziell eine bessere Übereinstimmung mit den Messergebnissen. Unter der Annahme, dass die Messwerte fehlerfrei sind und durch keinerlei Rückmischungseffekte in der Absaugsonde beeinflusst waren, deutet dieses Ergebnis darauf hin, dass die turbulente Mischung bei Verwendung des STKE-Modelles unterschätzt wird. Dieser Befund deckt sich mit den Ergebnissen weiterer Autoren (z. B. NOLL [N13]). Die bessere Übereinstimmung der Rechnung mit dem groben Gitter mit den Messdaten erklärt sich somit mit der vergrößerten numerischen Diffusion, die qualitativ den gleichen Effekt aufweist, wie eine vergrößerte physikalische Diffusion. Die Rechnung mit dem POKE-Modell weist im Gegensatz zur Rechnung mit dem STKE-Modell tendenziell größere zeitliche Gradienten auf. Da die turbulente Viskosität bei Verwendung der Pope-Korrektur in der Scherschicht des Freistrahles verkleinert wird, führt dies zu einem verminderten turbulenten Austausch.

Um die Abhängigkeit der Ergebnisse von den Randwerten zu untersuchen, wurden unterschiedliche, jedoch zeitkonstante, Werte am Einlassrand gesetzt. Abb. 5.3-6 zeigt, dass die Ergebnisse relativ unbeeinflusst von der Wahl der Randbedingungen sind. Wird die turbulente Viskosität am Einlassrand verkleinert, so verringert sich die turbulente Mischung und umgekehrt. Die turbulente Mischung wird an den betrachteten Positionen jedoch überwiegend von den innerhalb des instationären Strömungsfeldes generierten Turbulenzbedingungen beeinflusst.

In Abb. 5.3-7 ist ein Radialschnitt der Konzentration an der axialen Position  $x/d=3$  zur relativen Zeit  $t/t_p = 0,65$  innerhalb der Periode dargestellt. Um die phasengemittelten Konzentrationswerte zu erhalten, wurden bei der Messung einzelne Momentanwerte der Konzentration über eine große Anzahl von Perioden gemittelt [Vi8]. Bezüglich des Gittereinflusses zeigt sich die schon oben festgestellte Charakteristik. Die vom Turbulenzmodell tendenziell zu schwach vorhergesagte physikalische Diffusion wird von der bei Verwendung des groben Gitters verstärkt auftretenden numerischen Diffusion kompensiert. Eine Überlagerung von zwei gegensätzlichen Fehlereinflüssen führt somit zu der besten Übereinstimmung mit den Messwerten.

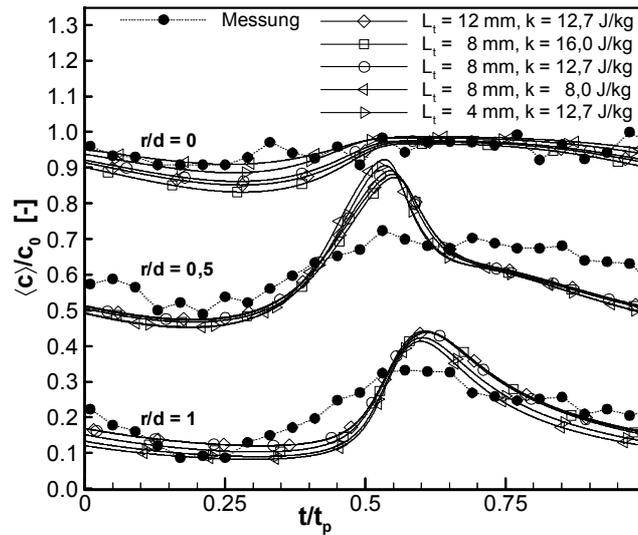


Abb. 5.3-6: Zeitliche Verläufe von gemessenen ([Vi1]) und berechneten Konzentrationswerten bei  $x/d=3$  und  $r/d=0;0,5;1$ . Rechnung mit Standard  $k-\epsilon$  Modell. Parameter:  $d=26$  mm,  $u_0=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz, Gitter  $300 \times 186$ .

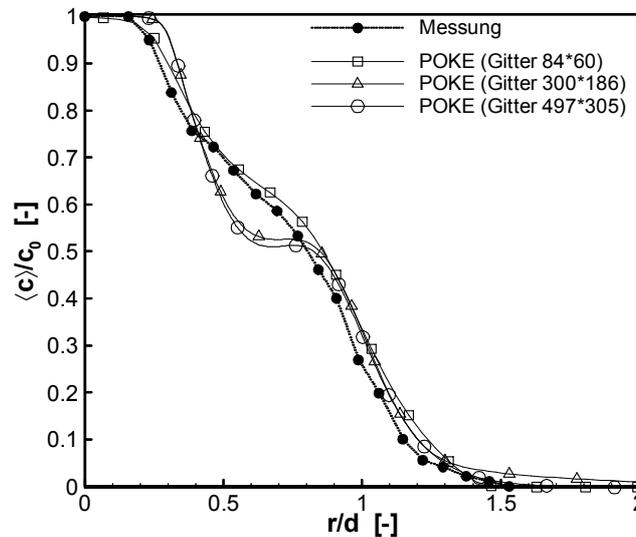


Abb. 5.3-7: Radialschnitt von gemessenen ([Vi8]) und berechneten Konzentrationswerten bei  $x/d=3$  und  $t/t_p=0,65$ . Rechnung mit POKE-Modell. Parameter:  $d=26$  mm,  $u=26$  m/s,  $Pu=21,9$  %,  $f=80$  Hz, Gitter  $300 \times 186$ .

## 6 Berechnung von Frequenzgängen idealisierter pulsierter Flammen

### 6.1 Durchführung der Untersuchungen

In diesem Kapitel wird die Dynamik idealisierter Flammenfronten, die sich in einem deterministischen oszillierenden Geschwindigkeitsfeld bewegen, analytisch berechnet. Es werden die Flammgeometrien *sphärisch* und *kegelförmig* betrachtet (s. Abb. 6.1-1 u. 6.1-2).

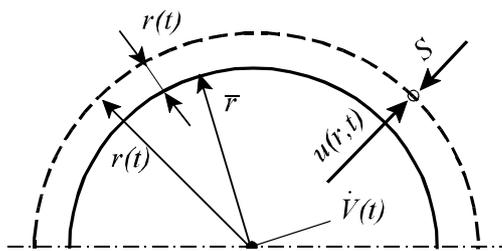


Abb. 6.1-1: Kinematik einer idealisierten sphärischen Flamme

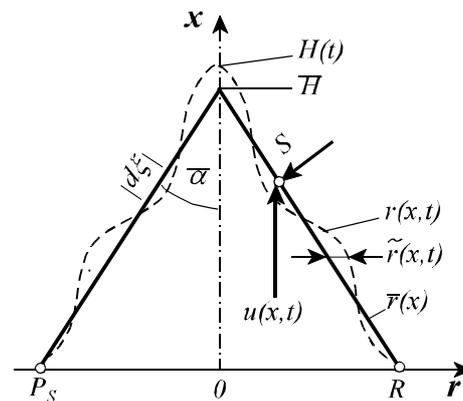


Abb. 6.1-2: Kinematik einer idealisierten kegelförmigen Flamme

Als Ausgangspunkt der Untersuchungen werden folgende idealisierte Annahmen getroffen:

- Die Flammenfront ist unendlich dünn. Dies beinhaltet die Vernachlässigung diffusiver Prozesse.
- Die Flammenfront hat die Brenngeschwindigkeit  $S$ . Diese ist unabhängig vom Ort, von den Strömungsbedingungen und von Krümmungs- oder Dehnungseffekten.
- Die Stöchiometrie, die Temperatur und damit auch die Dichte sind im gesamten Strömungsfeld konstant. Damit hat die Flammenfront keine Rückwirkung auf das Strömungsfeld.
- Der Fußpunkt der Flammenfront ist am Stabilisierungspunkt  $P_s$  fixiert.

Unter diesen Voraussetzungen kann die Dynamik der Flammenfront als Bewegung einer

Diskontinuitätsfläche in einem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld angesehen werden. Zunächst wird eine partielle nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für die zeit- und ortsabhängige Flammenfrontkontur hergeleitet. Diese Differentialgleichung wird nachfolgend linearisiert, analytisch gelöst und numerisch in Form von Flammenfrequenzgängen ausgewertet. Die eigentliche mathematische Lösung der Differentialgleichungen von Kugel- und Kegelflamme sowie die Vorgehensweise bei der numerischen Auswertung der analytischen Lösung ist in den Kapiteln 11.2 u. 11.3 des Anhanges zu finden. In den Kapiteln 6.2 und 6.3 werden die jeweiligen Lösungsfunktionen angegeben und die sich in Abhängigkeit verschiedener Parameter ergebenden Frequenzgänge dargestellt. Zusätzlich wird ein auf analytischem Wege bestimmter Frequenzgang einer Kegelflamme mit einem Frequenzgang verglichen, der mit dem SLIC-Algorithmus berechnet wurde. Ein Vergleich mit Frequenzgängen dünner Flammen, die mit dem Feldmodell berechnet wurden, ist in Kap. 8.3.3 zu finden.

## 6.2 Analytische Berechnung sphärischer Flammen

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine punktförmige Volumenquelle  $\dot{V}(t)$ . Diese Volumenquelle pulsiert periodisch und erzeugt damit ein ebenfalls periodisch pulsierendes sphärisches Strömungsfeld (s. Abb. 6.1-1). Die Konvektionsgeschwindigkeit  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  an jedem Punkt des Strömungsfeldes ist durch die Volumenquelle und die Geometrie eindeutig bestimmt

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{V}(t)}{4\pi \cdot r^2} \quad \text{mit} \quad \dot{V}(t) = \bar{\dot{V}} + \hat{\dot{V}} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (6.2-1)$$

Als Lösungsfunktion für die zeitabhängige Position  $\mathbf{r}(t)$  der Flammenfront ergibt sich (s. Kap. 11.2):

$$\mathbf{r}(t) = \bar{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{r}}(t) \quad (6.2-2)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \frac{\hat{\dot{V}}}{4\pi \cdot (\omega \cdot \bar{r}^2 + 4 \cdot S^2/\omega)} \cdot \left( e^{-\frac{2S}{\bar{r}} \cdot t} + 2 \cdot \frac{S}{\bar{r} \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t) \right) \quad (6.2-3)$$

Der hochgestellte Index  $\sim$  bedeutet in diesem Kapitel die Abweichung vom Mittelwert. Der zeitgemittelte Flammenradius  $\bar{r}$  ist über folgende Beziehung festgelegt:

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{\bar{\dot{V}}}{4\pi \cdot S}} \quad (6.2-4)$$

Für die zeitabhängige Auslenkung  $\tilde{r}(t)$  der Flammenfront von der zeitlich mittleren Position  $\bar{r}$  lassen sich einige allgemeine Eigenschaften sowie deren Auswirkungen im Hinblick auf den Frequenzgang ableiten:

- Die Auslenkung verhält sich umgekehrt proportional zur Kreisfrequenz  $\omega$  der Erregung. Mit steigender Frequenz ist daher eine Abnahme des Amplitudenganges zu erwarten.
- Die Auslenkung verhält sich proportional zur Erregeramplitude  $\hat{V}$ , wie bei einem linearen (bzw. linearisierten) System zu erwarten ist. Die Variation der Amplitude hat somit keinen Einfluss auf den Frequenzgang.

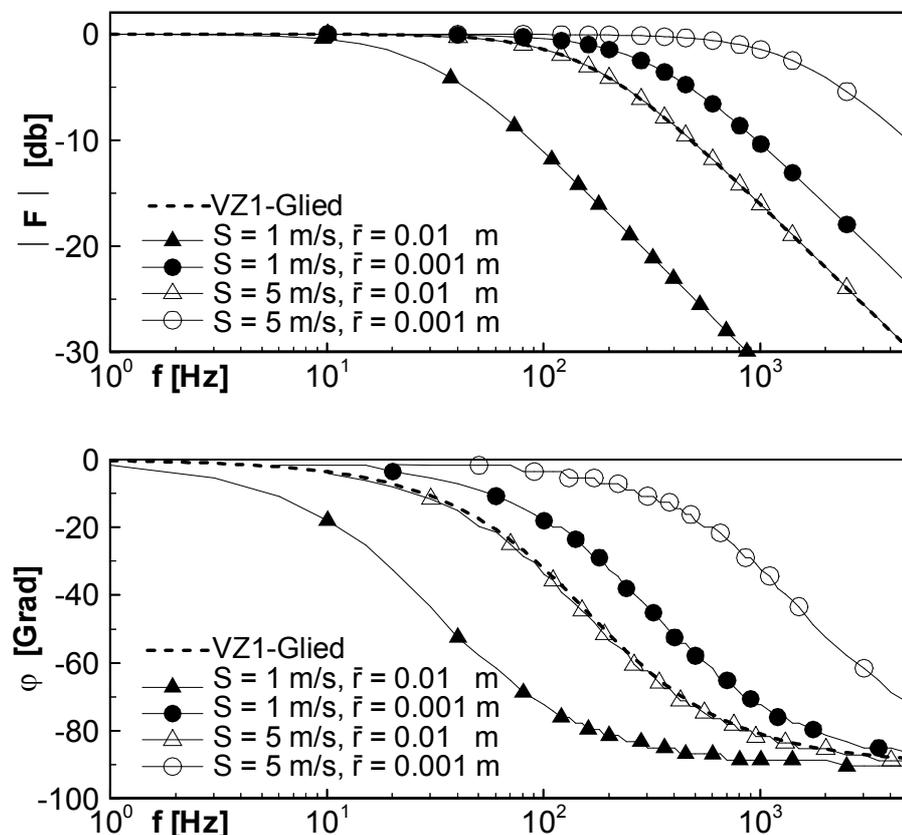


Abb. 6.2-1: Frequenzgänge einer sphärischen Flamme

Die Einflussparameter des Kugelflammenproblems sind der zeitgemittelte Volumenstrom  $\bar{V}$ , die Flammengeschwindigkeit  $S$  sowie die Kreisfrequenz  $\omega$ . Die Lösungsfunktion für  $r(t)$  wurde numerisch ausgewertet um die Frequenzgänge zu erhalten (s. Kap. 11.2).

Abb. 6.2-1 zeigt die Frequenzkennlinien bei Variation der Parameter mittlerer Radius  $\bar{r}$  der sphärischen Flammenfront und Brenngeschwindigkeit  $S$  in Abhängigkeit der Frequenz. Die Frequenzgänge entsprechen dem Übertragungsverhalten eines VZ1-Gliedes (s. Kap.

2.2.1.5):

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1} \quad , \quad \text{mit} \quad T_1 = \frac{\bar{r}}{S} \cdot 0,5 = \tau_{Flamme} \cdot 0,5 \quad . \quad (6.2-5)$$

Bei diesem fällt die Amplitudenkennlinie für große Frequenzen um 20 dB pro Dekade ab. Die Phasenkennlinie strebt dabei einem Wert von  $-90^\circ$  zu. Für die Parameterkombination  $S = 5 \text{ m/s}$  und  $\bar{r} = 0,01 \text{ m}$  sind die Frequenzkennlinien des entsprechenden VZ1-Gliedes im Diagramm mit eingezeichnet. Die Variation der Einflussparameter und die nachfolgende Analyse ergab, dass sich die ergebenden Frequenzgänge in Abhängigkeit einer einzigen dimensionslosen Parametergruppe, der normierten Kreisfrequenz, darstellen lassen:

$$\omega_{norm} = \frac{\bar{r}}{S} \cdot \omega = \frac{\tau_{Flamme}}{\tau_{Err}} \quad . \quad (6.2-6)$$

Die normierte Kreisfrequenz  $\omega_{norm}$  lässt sich auch als Verhältnis zweier Zeitmaße deuten. Das Zeitmaß der Erregerschwingung ist  $\tau_{Err} = 1/\omega = 1/(2\pi \cdot f)$ . Das charakteristische Zeitmaß der Flamme ist  $\tau_{Flamme} = \bar{r}/S$ . Bei steigender normierter Kreisfrequenz vergrößert sich das Zeitmaß der Flamme gegenüber dem Zeitmaß der Anregung und die Flamme reagiert zunehmend träger auf eine Änderung des Geschwindigkeitsfeldes. Dabei kann das Zeitmaß der Flamme zum einen durch eine Vergrößerung des mittleren Flammenradius  $\bar{r}$  (entsprechend einem kleiner werdenden mittleren Volumenstrom  $\dot{V}$ ), zum anderen durch Verkleinerung der Brenngeschwindigkeit  $S$  vergrößert werden. In beiden Fällen vergrößert sich dabei die zeitgemittelte Flammenfläche.

Abb. 6.2-2 zeigt die Frequenzkennlinien der Kugelflamme in Abhängigkeit von der normierten Kreisfrequenz. Bei dieser Auftragung fallen alle Kurven aufeinander. Der Phasengang des entsprechenden VZ1-Gliedes ist dabei:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega_{norm} T_1^*} \quad , \quad \text{mit} \quad T_1^* = 0,5 \quad . \quad (6.2-7)$$

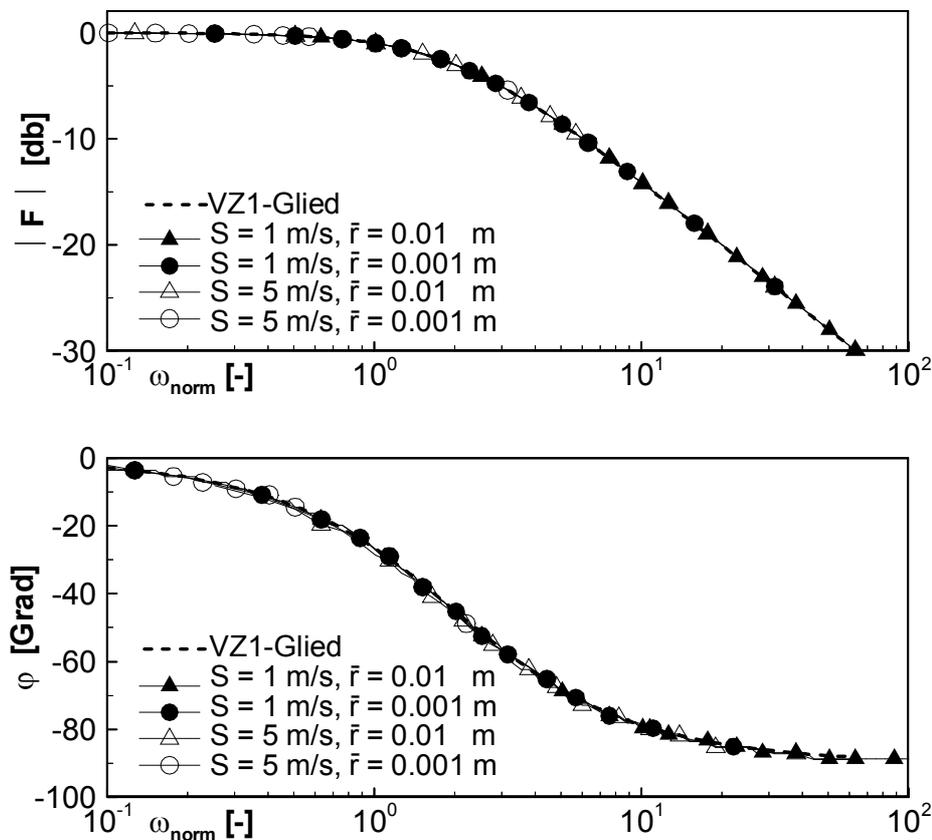


Abb. 6.2-2: Normierte Frequenzgänge einer sphärischen Flamme

### 6.3 Berechnung von Kegelflammen

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine kegelförmige Flamme, die am Stabilisierungspunkt  $P_s$  stabilisiert ist (s. Abb. 6.1-2). Diese soll sich in einem vorgegebenen Strömungsfeld, welches durch die Funktion

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \cos \left( \boldsymbol{\omega} \cdot \left( t - \frac{\mathbf{x}}{u_c} \right) \right) \quad (6.3-1)$$

definiert ist, befinden. Das Geschwindigkeitsfeld weist die Charakteristik einer eindimensionalen, transversalen Welle auf, wobei  $u_c$  die Phasengeschwindigkeit der Welle ist.

#### 6.3.1 Analytische Berechnung

Als Lösungsfunktion für die zeitabhängige Position  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$  der Flammenfront ergibt sich (s. Kap. 11.3):

$$\mathbf{r}(x, t) = \bar{\mathbf{r}}(x) + \tilde{\mathbf{r}}(x, t) \quad (6.3-2)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{r}}(x, t) = \frac{1}{\omega} \cdot \hat{u} \cdot \frac{S}{\bar{u}} \cdot \frac{(u_c/\bar{u})}{(u_c/\bar{u}) - \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left[ \sin \left( \omega \cdot \left( \frac{x}{\bar{u} \cdot \cos^2 \alpha} - t \right) \right) - \sin \left( \omega \cdot \left( \frac{x}{u_c} - t \right) \right) \right], \quad (6.3-3)$$

Der hochgestellte Index  $\sim$  bedeutet in diesem Kapitel die Abweichung vom Mittelwert. Die zeitgemittelte Flammenkontur  $\bar{\mathbf{r}}(x)$  ist über folgende Beziehung festgelegt:

$$\bar{\mathbf{r}}(x) = R - \frac{(S/\bar{u})}{\cos \alpha} \cdot x \quad \text{mit} \quad \cos \alpha = \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{S}{\bar{u}} \right)^2 \right]}. \quad (6.3-4)$$

Für die zeitabhängige Auslenkung  $\tilde{\mathbf{r}}(x, t)$  der Flammenfront von der zeitlich mittleren Position  $\bar{\mathbf{r}}(x)$  lassen sich einige allgemeine Eigenschaften sowie deren Auswirkungen im Hinblick auf den Frequenzgang ableiten:

- Die Auslenkung verhält sich umgekehrt proportional zur Kreisfrequenz  $\omega$  der Erregung. Mit steigender Frequenz ist daher eine Abnahme des Amplitudenganges zu erwarten.
- Die Auslenkung verhält sich proportional zur Erregeramplitude  $\hat{u}$ , wie bei einem linearen (bzw. linearisierten) System zu erwarten ist. Die Variation der Amplitude hat somit keinen Einfluss auf den Frequenzgang.

Die Einflussparameter des Kegelflammenproblems sind die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  die Phasengeschwindigkeit  $u_c$  die Flammengeschwindigkeit  $S$ , der Düsenradius  $R$  sowie die Kreisfrequenz  $\omega$ . Die Lösungsfunktion für  $\mathbf{r}(x, t)$  wurde numerisch ausgewertet um die Frequenzgänge zu erhalten (s. Kap. 11.3). Dabei wurde im Hinblick auf die Vergleichbarkeit mit den in dieser Arbeit berechneten turbulenten Vormischflammen eine mittlere Geschwindigkeit von  $\bar{u} = 25 \text{ m/s}$  zugrunde gelegt. Der Düsenradius betrug, wenn nicht anders angegeben,  $R = 0,013 \text{ m}$ . In Abhängigkeit der Größe der Phasengeschwindigkeit  $u_c$  lassen sich zwei typische Fälle unterscheiden, die im Folgenden als Fall A und Fall B bezeichnet werden.

### Fall A

Ist die Phasengeschwindigkeit  $u_c$  sehr groß, so ist die vorgegebene Geschwindigkeitsschwankung ortsunabhängig  $u(t) = \bar{u} + \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ . In diesem Fall vereinfacht sich die Lösungsfunktion für die zeitabhängige Auslenkung  $\tilde{\mathbf{r}}(x, t)$  der Flammenfront (Gl. 6.3-3) zu:

$$\tilde{r}(x,t) = \frac{1}{\omega} \cdot \hat{u} \cdot \frac{S}{\bar{u}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left[ \sin \left( \omega \cdot \left( \frac{x}{\bar{u} \cdot \cos^2 \alpha} - t \right) \right) + \sin (\omega \cdot t) \right] \quad (6.3-5)$$

Abb. 6.3-1 zeigt die Flammenkonturen für unterschiedliche Winkel und Anregungsfrequenzen jeweils für vier Zeitpunkte innerhalb einer Schwingungsperiode. Die Farben der Konturen repräsentieren die momentane axial Geschwindigkeit, der die Flammenfront ausgesetzt ist. Da die Geschwindigkeitserregung beim vorliegenden Fall A homogen (ortsunabhängig) ist, ist auch die Farbe jeder Konturlinie homogen.

Unabhängig vom Winkel ist zu erkennen, wie die axiale wie auch radiale Verschiebung der Flammenfront gegenüber der zeitlich mittleren Kontur bei steigender Frequenz immer kleiner wird. Daraus ergibt sich der mit wachsender Frequenz abfallende Amplitudengang. Weiterhin ist zu erkennen, dass sich bei steigender Frequenz eine zunehmende Anzahl von Wellenbergen und -tälern längs der Flammenfront einstellt. Erstaunlicherweise lässt sich aus der Betrachtung der Flammenkonturen nicht ableiten, dass sich die Flamme mit einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  durch die kleinste Trägheit auszeichnet (s. u.). Diese Eigenschaft tritt erst durch die Auswertung der Flammenkonturen in Form von Frequenzgängen hervor. Bei der Flamme mit dem Winkel von  $\alpha = 65^\circ$  ist zu erkennen, dass sich die Kontur in radialer Richtung über die radiale Position des Stabilisierungspunktes bei  $r = 0,013 \text{ m}$  hinaus aufwellt.

Abb. 6.3-2 zeigt die Frequenzgänge für verschiedene Flammen, bei denen der Öffnungswinkel  $\alpha$ , bzw. das Verhältnis  $\bar{u}/S$  variiert wurde (s. Tab. 6.3-1). Für eine feste Frequenz wird der Amplitudenabfall ausgehend von spitzen Flammen (kleine Winkel) in Richtung stumpfer Flammen (große Winkel) zunächst kleiner. Der Phasennachlauf wird ebenfalls geringer. Die Flammen verhalten sich mit größer werdendem Winkel also zunächst zunehmend weniger träge. Diese Tendenz kehrt sich allerdings für Öffnungswinkel  $\alpha$  größer als ca.  $45^\circ$  wieder um, die Trägheit nimmt wieder zu. Unabhängig vom Öffnungswinkel stellt sich für große Frequenzen ein Phasennachlauf von  $-90^\circ$  ein. Dieser Wert wird für kleinere Öffnungswinkel (spitzere Flammen) schon bei kleineren Frequenzen erreicht.

Die Frequenzgänge entsprechen für die Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Frequenzen dem Übertragungsverhalten eines VZ1-Gliedes

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1} \quad , \quad \text{mit} \quad T_1 = \frac{\bar{r}}{S} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot 0,5 = \tau_{\text{Flamme}} \cdot 0,5 \quad (6.3-6)$$

Für die Flamme mit dem Winkel  $\alpha = 2,9^\circ$  sind die Frequenzkennlinien des entsprechenden VZ1-Gliedes mit eingezeichnet.

Tab. 6.3-1: Parameter der Flammen bei homogener Erregung

$\alpha$	[°]	0,6	2,9	14,5	45,0	65,4	72,5
$\bar{u}/S$	[-]	100	20	4	1,4	1,1	1,05
$\tau_{Flamme}$	[ms]	52,0	10,3	2,03	1,04	1,37	1,78
$f_{Eck}$	[Hz]	19,2	97,1	492,6	961,5	729,9	561,7
$\bar{H}$	[m]	1,3	0,26	0,05	0,013	0,006	0,004

Die Analyse der Frequenzgänge ergab, dass sich die Ergebnisse in Abhängigkeit einer einzigen dimensionslosen Parametergruppe, der normierten Kreisfrequenz, darstellen lassen  $\omega_{norm} = R/S \cdot \omega / \cos \alpha$ . Dieser für die Beschreibung pulsierter Kegelflammen wichtige Parameter wurde zunächst von FLEIFIL ET AL [Vi39] als eine für kleine Kegelwinkel ( $\cos \alpha \approx 1$ ) gültige Strouhalzahl der Flamme  $Str = R/S \cdot \omega$  eingeführt und von DUCRUIX ET AL [Vi38] zur obigen Beziehung erweitert. Die normierte Kreisfrequenz wird in der vorliegenden Arbeit als Verhältnis zweier charakteristischer Zeitmaße gedeutet:

$$\omega_{norm} = \frac{R}{S} \cdot \frac{\omega}{\cos \alpha} = \frac{\tau_{Flamme}}{\tau_{Err}} \quad (6.3-7)$$

Das Zeitmaß der Erregerschwingung ist  $\tau_{Err} = 1/\omega = 1/(2\pi \cdot f)$ . Das charakteristische Zeitmaß der Flamme ist  $\tau_{Flamme} = R/S \cdot 1/\cos \alpha$ . Damit wird direkt ersichtlich, warum die Flamme mit einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  im Vergleich den kleinsten Amplitudenabfall sowie den kleinsten Phasennachlauf zeigt. Das Zeitmaß weist bei diesem Winkel ein Minimum auf und liegt bei  $\tau_{Flamme} = 1,04 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  (s. Tab. 6.3-1). Damit ist die Interaktion zwischen homogener Erregung und Flamme vergleichsweise am Schwächsten. Das dynamische Verhalten der Flammen entspricht qualitativ einem Tiefpassfilter. Ab einer charakteristischen Eckfrequenz beginnt der Amplitudengang abzufallen. Je größer die Anregungsfrequenz, desto schwächer ist die Amplitudenantwort. Die in Abb. 6.3-2 abzulesenden Eckfrequenzen entsprechen in guter Näherung der Eckfrequenz, die sich aus dem charakteristischen Zeitmaß der Flamme über die Beziehung  $f_{Eck} = 1/\tau_{Flamme}$  gewinnen lässt (s. Tab. 6.3-1).

In Abb. 6.3-3 sind die Frequenzkennlinien über der normierten Kreisfrequenz  $\omega_{norm}$  aufgetragen. Die Darstellung verdeutlicht, dass die Kegelflamme im Falle einer ortsunabhängigen Geschwindigkeitserregung nur von der normierten Kreisfrequenz bzw. vom Verhältnis der beiden Zeitmaße abhängt. Der Phasengang des VZ1-Gliedes, welches die normierten Frequenzkennlinien für sehr kleine und sehr große Frequenzen wiedergibt, ist:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega_{norm} T_1^*} \quad , \quad \text{mit } T_1^* = 0,5 \quad (6.3-8)$$

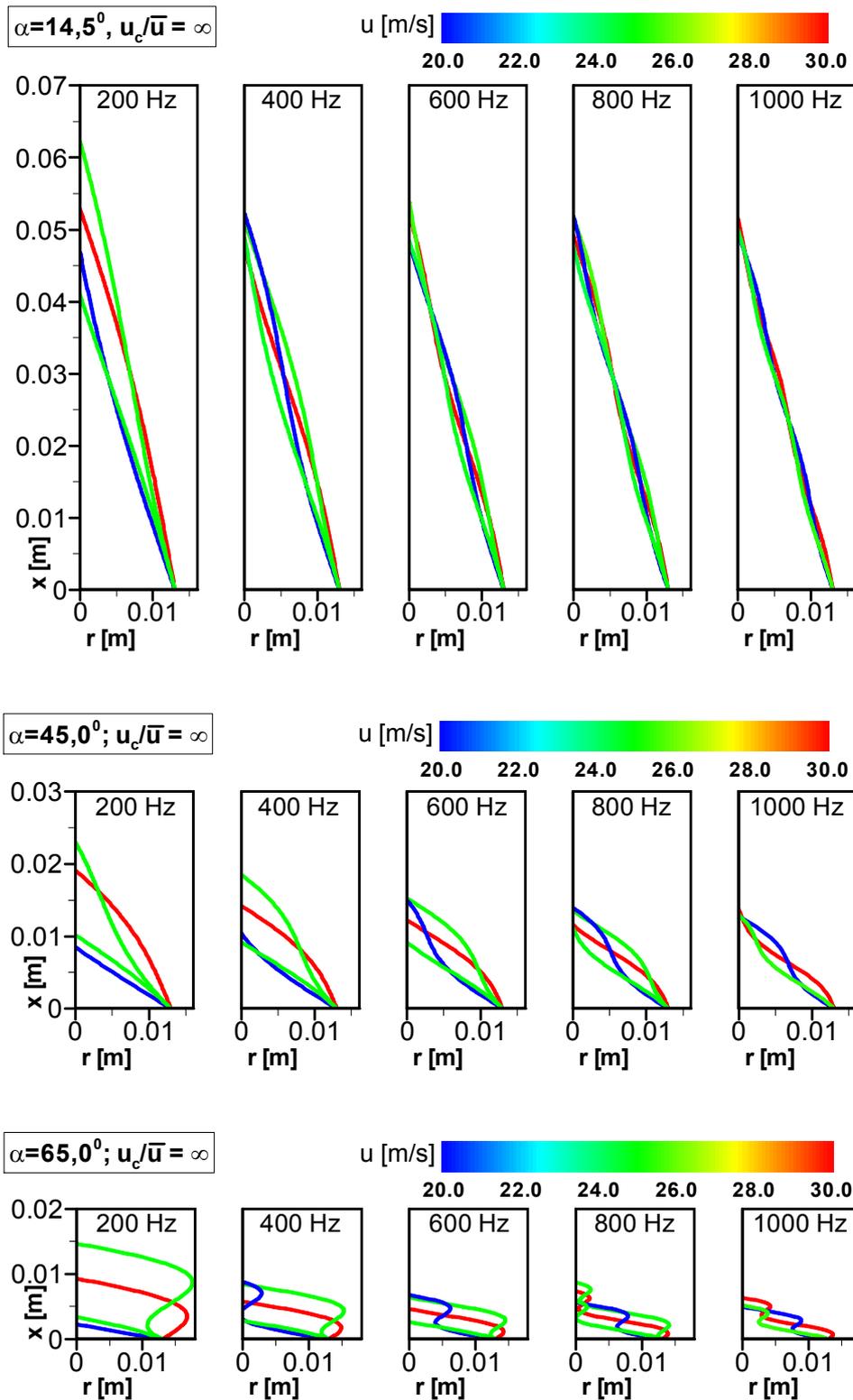


Abb. 6.3-1: Flammenkonturen bei homogener Anregung:  $u_c/\bar{u} = \infty$ ,  $\hat{u} = 0,3 \cdot \bar{u}$ .  
 Parameter:  $\alpha = 14,5^\circ \equiv \bar{u}/S = 4$   $\alpha = 45^\circ \equiv \bar{u}/S = 1,4$ ,  $\alpha = 65^\circ \equiv \bar{u}/S = 1,1$ .

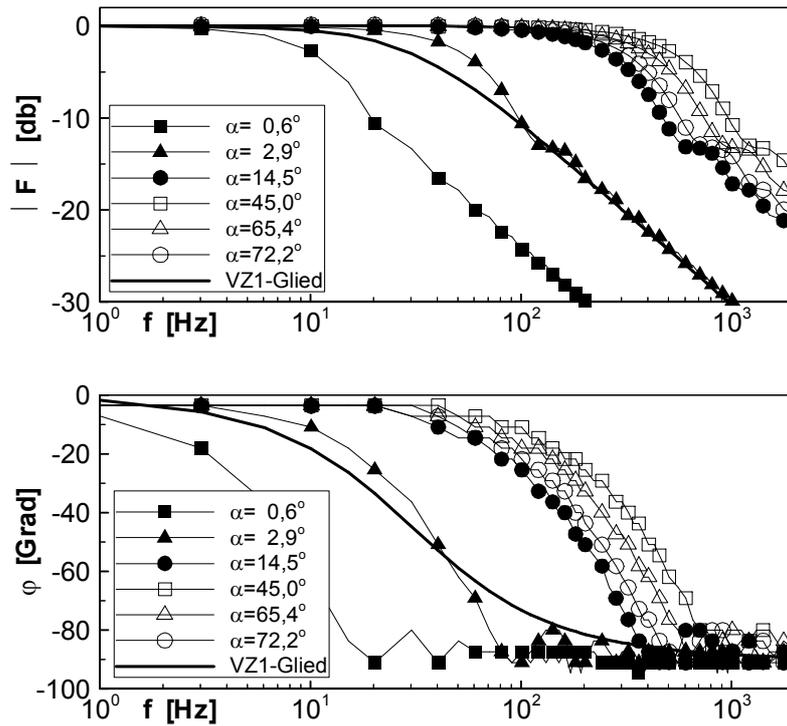


Abb. 6.3-2: Frequenzgang einer Kegelflamme (homogenes Geschwindigkeitsfeld)

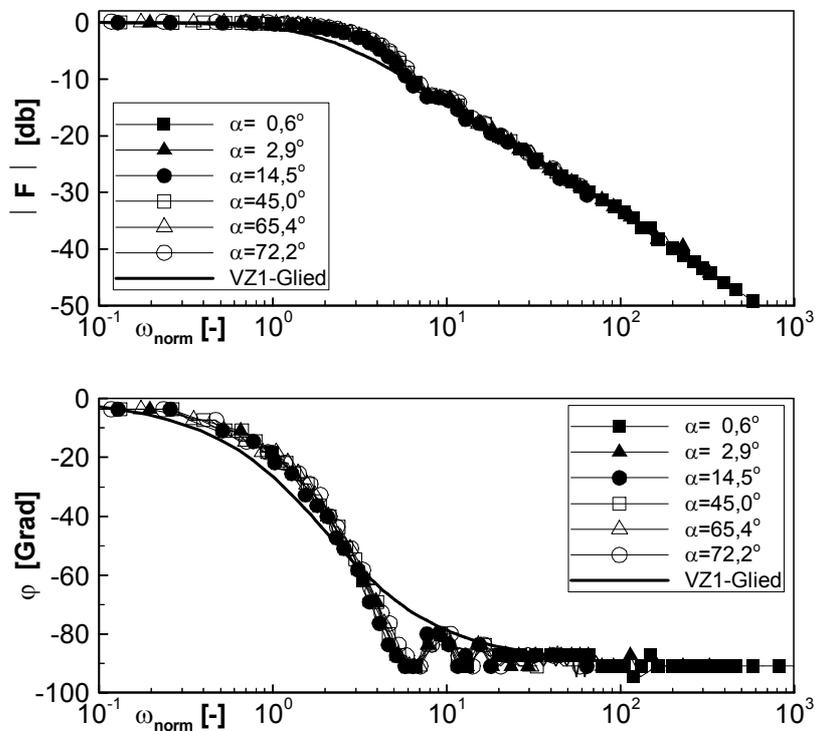


Abb. 6.3-3: Normierter Frequenzgang einer Kegelflamme (homogenes Geschwindigkeitsfeld)

**Fall B**

Für beschränkte Phasengeschwindigkeiten  $u_c$  hängt die Lösung außer von der normierten Kreisfrequenz von zwei zusätzlichen Parametern ab. Zur Verdeutlichung dazu zunächst folgende Vorüberlegung. Im Falle der Anregung mit einer ortsabhängigen Geschwindigkeit (Geschwindigkeitswelle), weist diese eine charakteristische Wellenlänge auf. Je kürzer diese Wellenlänge ist, desto mehr Geschwindigkeitsmaxima, bzw. -minima befinden sich im Bereich des Flammenkegels. Die Lösung muss somit vom Verhältnis der Wellenlänge der Anregung zu einer charakteristischen Wellenlänge der Flamme abhängen. Zur Diskussion wird Gl. 6.3-3 in folgender Form dargestellt:

$$\tilde{r}(x,t) = \frac{1}{\omega} \cdot \hat{u} \cdot \frac{S}{\bar{u}} \cdot \frac{(u_c/\bar{u})}{(u_c/\bar{u}) - \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \left[ \sin \left( 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda_{Flamme}} - \omega \cdot t \right) - \sin \left( 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda_c} - \omega \cdot t \right) \right], \quad (6.3-9)$$

mit

$$\lambda_{Flamme} = 2\pi \cdot \frac{\bar{u}}{\omega} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{S}{\bar{u}} \right)^2 \right] = 2\pi \cdot \frac{\bar{u}}{\omega} \cdot \cos^2 \alpha, \quad \lambda_c = 2\pi \cdot \frac{u_c}{\omega}.$$

Die charakteristische Wellenlänge der Flammenfront  $\lambda_{Flamme}$  hängt vom Verhältnis  $\bar{u}/S$  bzw. vom Öffnungswinkel  $\alpha$  ab. Sie wächst mit kleiner werdendem Öffnungswinkel bzw. mit der Länge des Flammenkegels.  $\lambda_c$  ist die Wellenlänge der vorgegebenen Geschwindigkeitsschwankung. Sie wächst mit der Phasengeschwindigkeit  $u_c$ . Beide charakteristische Wellenlängen verkleinern sich mit steigender Frequenz. Damit ergeben sich die zwei zusätzlichen dimensionslosen Parameter:

1. Öffnungswinkel  $\alpha$  bzw. Geschwindigkeitsverhältnis  $\bar{u}/S$
  2. Wellenlängenverhältnis  $\lambda/\lambda_{Flamme}$  bzw. Geschwindigkeitsverhältnis  $u/\bar{u}$ .
- Abb. 6.3-4 zeigt die Flammenkonturen für unterschiedliche Winkel und Anregungsfrequenzen jeweils für vier Zeitpunkte innerhalb einer Schwingungsperiode. Die Farben der Konturen repräsentieren wiederum den Verlauf des momentanen Geschwindigkeitsfeldes, dem die Flammenfront ausgesetzt ist. Durch die nun inhomogene Geschwindigkeitsanregung ändern sich die Farben der Konturen abhängig von der axialen Koordinate. Die Ergebnisse gleichen qualitativ dem Fall der homogenen Erregung. Mit steigender Frequenz wird die Zahl der Wellen größer, deren Auslenkungen jedoch kleiner. Die Anzahl der Geschwindigkeitsmaxima und -minima, die sich im Bereich des Flammenkegels befinden, wird dabei immer größer. Außerdem ist zu erkennen, dass die Flamme mit größer werdendem Kegelwinkel einem zunehmend homogeneren Geschwindigkeitsfeld ausgesetzt ist. Bei größeren Frequenzen stellt sich eine Ablösung einzelner Zonen der Flammenkontur von der Flammenspitze ein. Dieser Effekt ist sich jedoch nur bei relativ großen Amplituden (hier:  $\hat{u} = 0,3 \cdot \bar{u}$ ) zu beobachten. Die Daten zur Berechnung der Frequenzgänge wurden mit Amplituden von  $\hat{u} = 0,01 \cdot \bar{u}$  gewonnen.

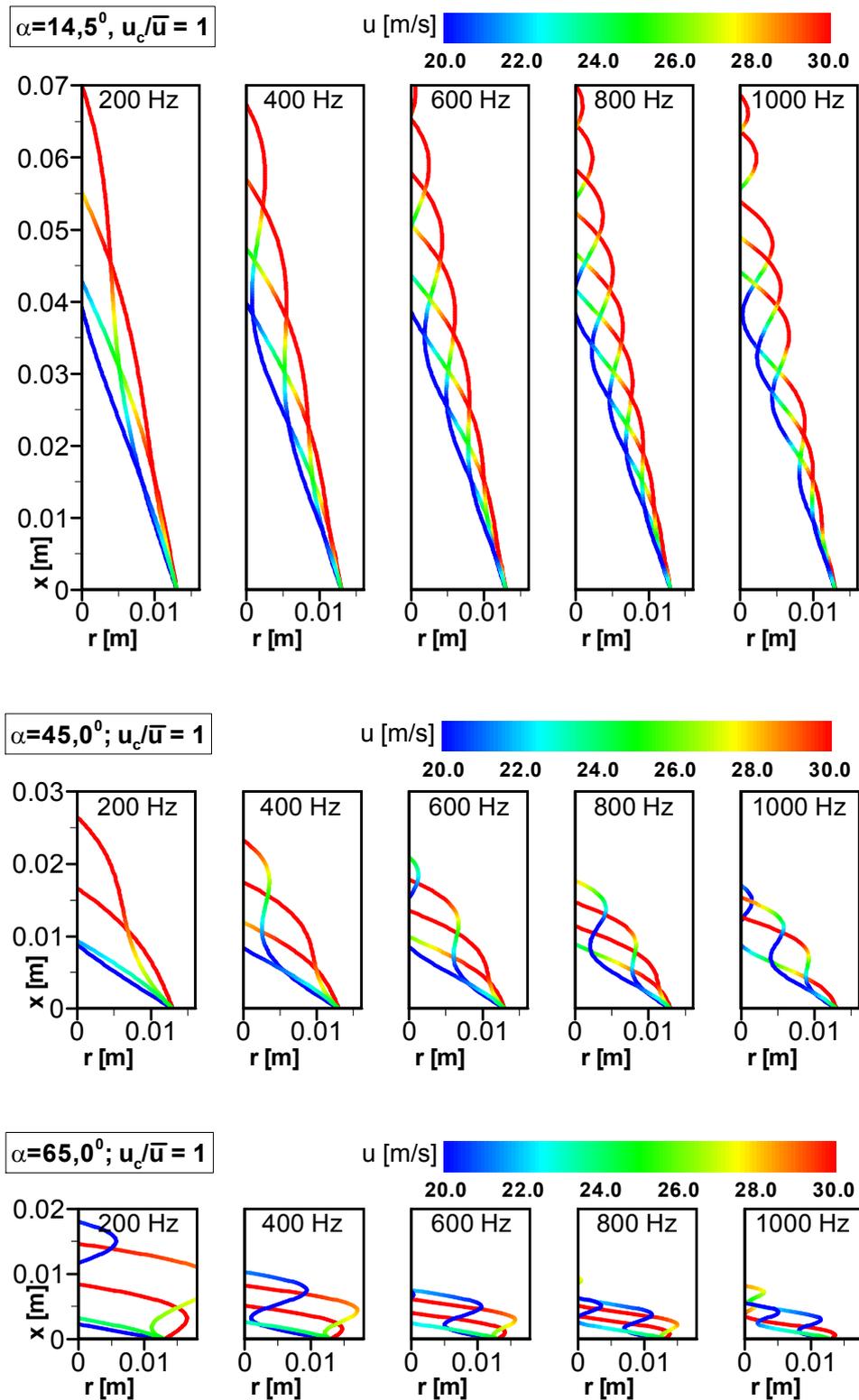


Abb. 6.3-4: Flammenkonturen bei inhomogener Anregung:  $u_c/\bar{u} = 1$ ,  $\hat{u} = 0,3 \cdot \bar{u}$ .  
 Parameter:  $\alpha = 14,5^\circ \equiv \bar{u}/S = 4$ ,  $\alpha = 45^\circ \equiv \bar{u}/S = 1,4$ ,  $\alpha = 65^\circ \equiv \bar{u}/S = 1,1$ .

Zur anschaulicheren Verdeutlichung der Abhängigkeiten sind die Frequenzkennlinien in den Abb. 6.3-5 bis 6.3-7 jeweils für ein konstantes Verhältnis  $u_c/\bar{u}$  über der nicht normierten Frequenz aufgetragen. Variiert wurde jeweils der Öffnungswinkel der Flamme. Das charakteristische Zeitmaß der Flamme ist konstant und beträgt  $\tau_{Flamme} = 12,13 \text{ ms}$ . Das heißt, die normierte Kreisfrequenz ist direkt proportional zur Frequenz. Weiterhin ist zu beachten, dass der Düsenradius  $R$  beim vorgegebenen konstanten charakteristischen Zeitmaß variiert (s. Tab. 6.3-2).

Tab. 6.3-2: Parameter der Flammen bei inhomogener Erregung

$\alpha$	[°]	5	30	45	60	70	85
$\bar{u}/S$	[-]	11,47	2,00	1,41	1,15	1,06	1,004
$\tau_{Flamme}$	[ms]	12,13	12,13	12,13	12,13	12,13	12,13
$R$	[m]	0,005	0,13	0,15	0,13	0,1	0,026
$\bar{H}$	[m]	0,3	0,23	0,15	0,076	0,036	0,002

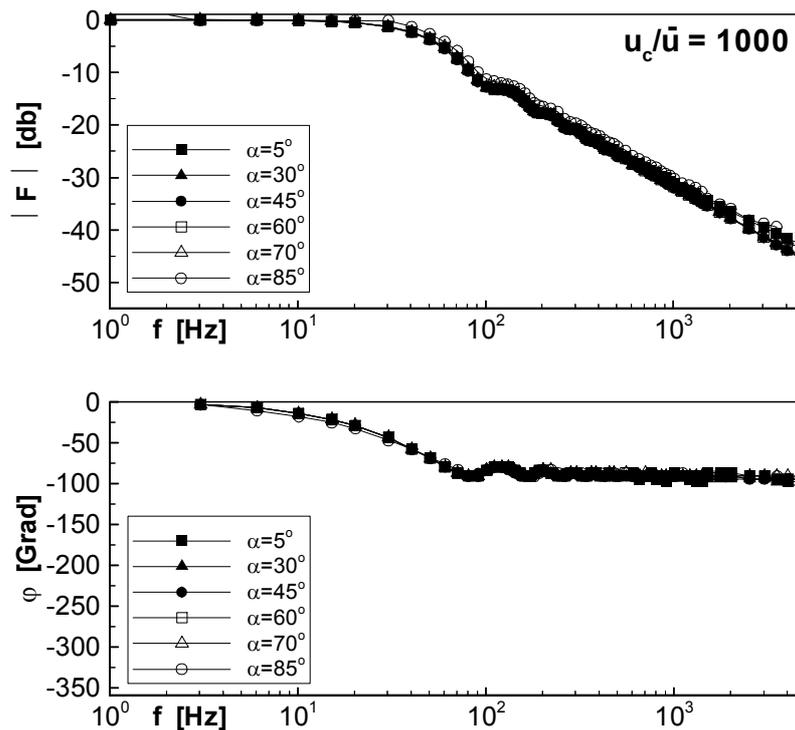


Abb. 6.3-5: Frequenzgang einer Kegelflamme (Parameter:  $u_c/\bar{u} = 1000$ ,  $\tau_{Flamme} = 12,13 \text{ ms}$ )

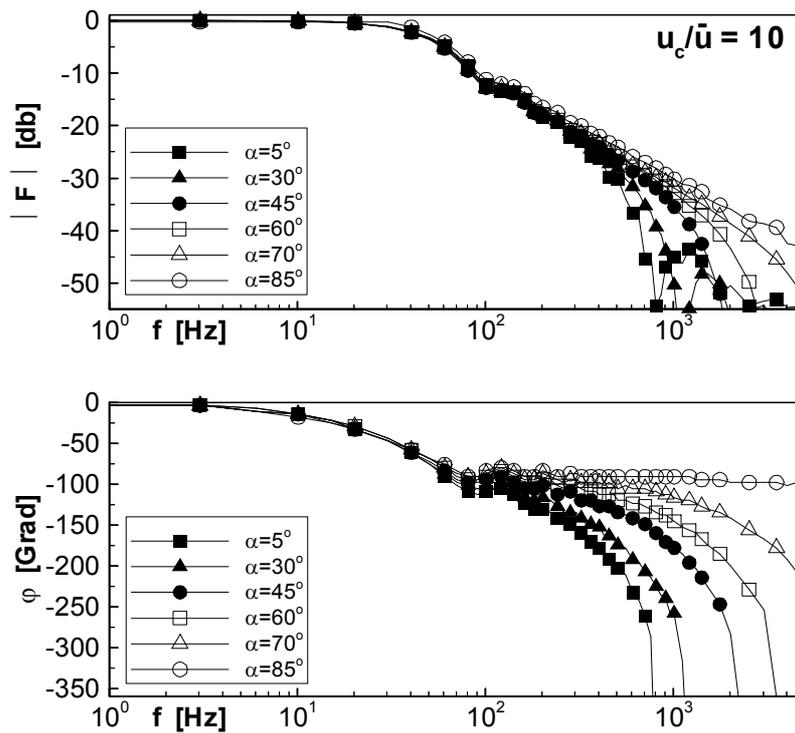


Abb. 6.3-6: Frequenzgang einer Kegelflamme (Parameter:  $u_c/\bar{u} = 10$ ,  $\tau_{Flamme} = 12,13 \text{ ms}$ )

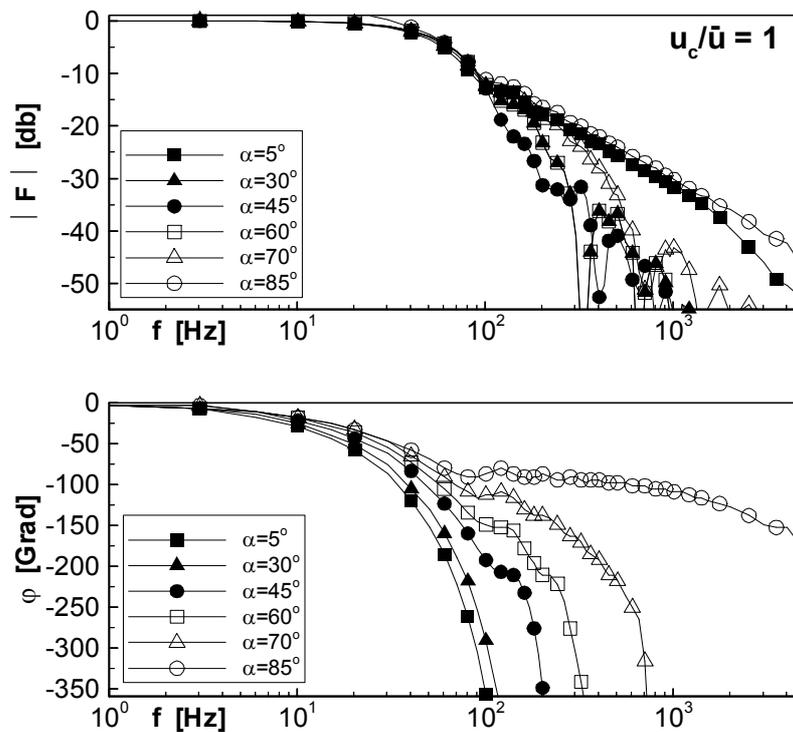


Abb. 6.3-7: Frequenzgang einer Kegelflamme (Parameter:  $u_c/\bar{u} = 1$ ,  $\tau_{Flamme} = 12,13 \text{ ms}$ )

Abb. 6.3-5 zeigt die Frequenzkennlinien für  $u_c/\bar{u} = 1000$ . Die Wellenlänge  $\lambda_c$  der Anregung ist für jede Frequenz viel größer als die Wellenlängen  $\lambda_{Flamme}$  der jeweiligen Flammen. Die Flammenkontur ist zu jedem Zeitpunkt einem homogenen Geschwindigkeitsfeld ausgesetzt. Da das Zeitmaß der Flammen jeweils konstant gehalten wurde, ist auch die normierte Kreisfrequenz  $\omega_{norm}$  für alle Flammen gleich. Damit ergibt sich wie im bereits diskutierten Fall A für alle Flammen der gleiche Frequenzgang.

Abb. 6.3-6 zeigt die Frequenzgänge für  $u_c/\bar{u} = 10$ . Die Flammenkontur ist bei großen Öffnungswinkeln (stumpfen Flammen) einem örtlich gesehen homogeneren Geschwindigkeitsfeld ausgesetzt, als Flammen mit kleinem Öffnungswinkel. Die Wellenlänge der Flamme mit einem Öffnungswinkel von  $85^\circ$  ist für jede Frequenz viel kleiner als die Wellenlänge der Störung, weshalb sich für diese Flamme keine Änderung im Frequenzgang im Vergleich zu Abb. 6.3-3 ergibt. Es stellt sich keine Interaktion der Flamme mit der durchlaufenden Geschwindigkeitsschwingung ein. Die Wellenlänge der Flamme wird für kleiner werdende Öffnungswinkel jedoch größer und nähert sich zunehmend der Wellenlänge der Geschwindigkeitsschwankung an. Die nun erfolgende Interaktion wird umso stärker, je kleiner der Öffnungswinkel bzw. je größer die Wellenlänge der Flamme ist und drückt sich in einem zunehmenden Abfall der Amplitude wie auch dem Phasenwinkel aus. Darin zeigt sich die Tatsache, dass das System, im Gegensatz zum Fall A, nun totzeitbehaftet ist. Die Geschwindigkeitsstörungen benötigen Zeit, um vom Düsenaustritt bis zur Flammenfront zu gelangen. Herauszuheben ist, dass die Phasenwinkel für kleinere werdende Öffnungswinkel mit wachsender Frequenz zunehmend schneller gegen einen unendlichen Phasennachlauf streben. Da die zeitgemittelte Flammenhöhe  $\bar{H}$ , mit kleiner werdendem Winkel immer größer wird (s. Tab. 6.3-2), wird auch die Totzeit bzw. die konvektive Verzugszeit immer größer. Dieses Phasenverhalten wurde auch bei der experimentellen Untersuchung von vorgemischten laminaren Methanflammen (DUCRUIX [Vi38]) sowie bei der analytischen Untersuchung von Kegelflammen und V-Flammen (SCHULLER ET AL [Vi27]) gefunden.

Die gleiche Abhängigkeit der Phasengänge vom Öffnungswinkel ist noch deutlicher für die Rechnung mit  $u_c/\bar{u} = 1$  zu erkennen (s. Abb. 6.3-7). In diesem Fall laufen die Phasengänge mit steigender Frequenz noch schneller gegen minus unendlich, da die Wellenlänge der Anregung nun kleiner ist und die relativen Verzugszeiten entsprechend größer werden. Im Amplitudengang zeigt sich jedoch überraschenderweise, dass die Flamme mit einem Winkel von  $\alpha = 45^\circ$  den stärksten Amplitudenabfall ergibt. Eine Abschätzung der Amplitudenwerte kann anhand der Lösungsfunktion (Gl. 6.3-9) erfolgen. Die radiale Auslenkung ist maßgeblich von deren Vorfaktor bestimmt:

$$\tilde{r}(x,t) \sim \frac{S}{\bar{u}} \cdot \frac{(u_c/\bar{u})}{(u_c/\bar{u}) - \cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \quad (6.3-10)$$

Dieser Faktor weist bei  $u_c/\bar{u} = 1$  und  $\alpha = 45^\circ$  ein Minimum auf. Zusätzlich ist der sich aus den Parametern ergebende Düsenradius maximal. Das Verhältnis von zeitabhängiger Auslenkung  $\tilde{r}(x,t)$  der Flammenfront zur zeitlich mittleren Position  $\bar{r}(x)$  (mit  $\bar{r}(x) \sim R$ )

stellt ein Maß für die Amplitudenantwort dar. Dieses Verhältnis ist bei der  $45^\circ$ -Flamme ebenfalls minimal (s. Tab. 6.3-2).

### 6.3.2 Auswertung der Verweilzeitverteilung

#### Verweilzeitverteilung der stationären Flamme

Bei der Analyse von turbulenten Vormischflammen (s. Kap. 8.2.2) wird die mittels einer zusätzlichen Transportgleichung berechnete Verweilzeitverteilung bzw. das "Alter" des reagierenden Brennstoffes verwendet. Die Verweilzeitverteilung der im aktuellen Kapitel untersuchten idealen Kegelflamme kann für stationäre Bedingungen wie folgt bestimmt werden. Die Mantelfläche  $F(x)$  des Flammenkegels in Abhängigkeit der axialen Koordinate (s. Abb. 6.1.2) ist:

$$F(x) = 2\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \cdot \left( \frac{x}{H} - \frac{x^2}{2H^2} \right) \quad (6.3-11)$$

Dabei ist  $R$  der Düsenradius und  $H$  die Flammenhöhe. Durch Transformation der Ortsvariablen  $x$  in den Zeitbereich ( $x = t \cdot u$ ) und Multiplikation mit der Flammengeschwindigkeit  $S$  ergibt sich die Umsatzgeschwindigkeit  $U(t)$  in Abhängigkeit von der Verweilzeit bzw. vom "Alter" der reagierenden Brennstoffelemente:

$$U(t) = F(t) \cdot S = 2\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \cdot \left( t \cdot \frac{u}{H} - t^2 \cdot \frac{u^2}{2H^2} \right) \cdot S \quad \left[ \frac{m^3}{s} \right] \quad (6.3-12)$$

Die Verweilzeitverteilung berechnet sich dann durch Differentiation des Umsatzes nach der Zeit:

$$\frac{dU(t)}{dt} = 2\pi \cdot R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \cdot \left( \frac{u}{H} - t \cdot \frac{u^2}{H^2} \right) \cdot S \quad \left[ \frac{m^3}{s^2} \right] \quad (6.3-13)$$

#### Mittlere Verweilzeit der stationären Flamme

Mit Beziehung 6.3-13 kann nun eine mittlere Verweilzeit  $\tau_{Kegel,stat}$  der stationären idealen Kegelflamme bestimmt werden:

$$\tau_{Kegel,stat} = \frac{\int_0^{H/u} \frac{dU(t)}{dt} \cdot t \cdot dt}{U_{global}} \quad (6.3-14)$$

Unter der Annahme einer langen Flamme (s. GÜNTHER [Va15])

$$H = R \cdot \sqrt{\left( \frac{u}{S} \right)^2 - 1} \approx R \cdot \frac{u}{S} \quad (6.3-15)$$

und mit dem sich aus dem Produkt von Flammenfläche und Flammengeschwindigkeit ergebenden integrale Umsatzgeschwindigkeit  $U_{global} = F_{Kegel} \cdot S = \pi \cdot R^2 \cdot u$  lässt sich nach Vereinfachung schreiben:

$$\tau_{Kegel,stat} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R}{S} = \frac{1}{3} \cdot \frac{H}{u} \quad (6.3-16)$$

Diese Beziehung besagt, dass es eine charakteristische mittlere Verweilzeit gibt, die sich aus der Strömungsgeschwindigkeit und einer charakteristischen Länge berechnen lässt. Die charakteristische Länge beträgt dabei ein Drittel der Flammenhöhe. Führt man die

$$\tau_{Kegel,stat} \sim \tau_{Flamme} \quad (6.3-17)$$

hier verwendete Voraussetzung einer langen Flamme in das in Kap. 6.3.1 hergeleitete Zeitmaß  $\tau_{Flamme} = R/S \cdot 1/\cos\alpha$  ein, so ergibt sich mit  $\cos\alpha \approx 1$ , dass die beiden Zeitmaße zueinander proportional sind:

Mit den Messdaten einer *turbulenten* Axialstrahlflamme kann ebenfalls eine charakteristische Verzugszeit  $\tau_{char,stat} = x_{Max}/u$  definiert werden. Diese deckt sich mit der mittleren Verweilzeit  $\tau_{mittel,stat}$ , der sich aus der berechneten Verweilzeitverteilung gewinnen lässt (Kap. 8.2.2). KÜLSHEIMER ET AL. [Vi6] geben an, dass die axiale Position  $x_{Max}$  des Maximums der Strahlungsverteilung einer turbulenten Kegelflamme typischerweise bei 1/3 der Flammenhöhe  $H$  liegt. Damit ergibt sich:  $\tau_{mittel,stat} = \tau_{char,stat} = H/(3 \cdot u)$ . Diese Beziehung stimmt mit der hier auf analytischem Wege gefundenen Beziehung  $\tau_{Kegel,stat} = H/(3 \cdot u)$  für die charakteristische mittlere Verweilzeit einer stationären idealen Kegelflamme überein.

### 6.3.3 Berechnung mit dem SLIC-Algorithmus

Das Problem der idealisierten Kegelflamme ist dazu prädestiniert, mit dem in Kap. 2.3.1-9 beschriebenen SLIC (Simple-Line-Interface-Convection)-Algorithmus behandelt zu werden. Dieser eignet sich zur Darstellung einer unendlich dünnen Grenzlinie die keinerlei physikalischer Diffusion unterworfen ist. Die Kegelflamme wurde daher für einige Parameterkombinationen unter Verwendung des im Rahmen dieser Arbeit in das CFD-Programm EBI-2d implementierten Algorithmus berechnet. Das Ziel war hierbei die gegenseitige Verifizierung von numerischem Algorithmus und analytischer Lösung. Bei den bisher in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnissen wurde der SLIC-Algorithmus ausschließlich dazu verwendet, den konvektiven Transport einer Grenzlinie, bzw. einer Diskontinuitätslinie in einem Geschwindigkeitsfeld zu berechnen. Im vorliegenden Kapitel wird dieser nun angewendet, um die Dynamik einer Flammenfront zu untersuchen. Diese ist zum einen der Konvektion durch das sie umgebende Geschwindigkeitsfeld unterworfen, zum anderen pflanzt sie sich mit der Flammengeschwindigkeit  $S$  normal zu sich selbst fort. Diese zwei Bewegungsanteile werden bei der Anwendung des implementierten SLIC-Verfahrens in jedem Zeitschritt getrennt behandelt (s. Kap. 2.1.3.9), wobei das Geschwindigkeitsfeld nicht vom Feldmodell berechnet, sondern explizit vorgegeben wird. Zur Berechnung wurde ein Gitter mit **489 · 34** Zellen bei einer

Rechengebietsgröße von  $0,5 \cdot 0,03 \text{ m}$  mit einer typischen Zellgröße von 1 mm verwendet.

Bei der Auswertung der Ergebnisse der numerischen Berechnung der Kegelflamme wurde ähnlich vorgegangen wie im Falle der analytischen Berechnung. Die momentane Umsatzrate der Flamme wurde über das Produkt aus Flammenfläche und Brenngeschwindigkeit bestimmt. Die Flammenfront ist beim SLIC-Verfahren durch senkrechte, bzw. waagerechte Linie im verwendeten orthogonalen Gitter definiert. Die gesamte Flammenfläche wurde durch Summation der jeweiligen Abmessungen aller Zellen, die die Flammenfront beinhalten, bestimmt. Aus dem zeitlichen Verlauf der Umsatzrate im Vergleich zur Geschwindigkeit am Düsenauslass wurden die Amplitudenreduktion und der Phasenversatz extrahiert.

Abb. 6.3-8 zeigt den Vergleich eines auf diesem Wege berechneten Frequenzganges im Vergleich zu dem mit dem analytischen Modell gewonnenen Frequenzgang. Dabei wurden folgende Parameter verwendet:  $R = 0,013 \text{ m}$ ,  $\bar{u} = 26 \text{ m/s}$ ,  $u_c = \infty$ ,  $S = 1,7 \text{ m}$ . Die beiden Frequenzgänge stimmen sehr gut miteinander überein. Bei größeren Frequenzen weicht der Amplitudengang der numerische Lösung etwas von der analytischen Lösung ab. Dies ist damit begründet, dass bei den hier vorliegenden extrem kleinen Auslenkungen der Flammenfront die numerischen Fehler des SLIC-Verfahrens zunehmend eine Rolle spielen.

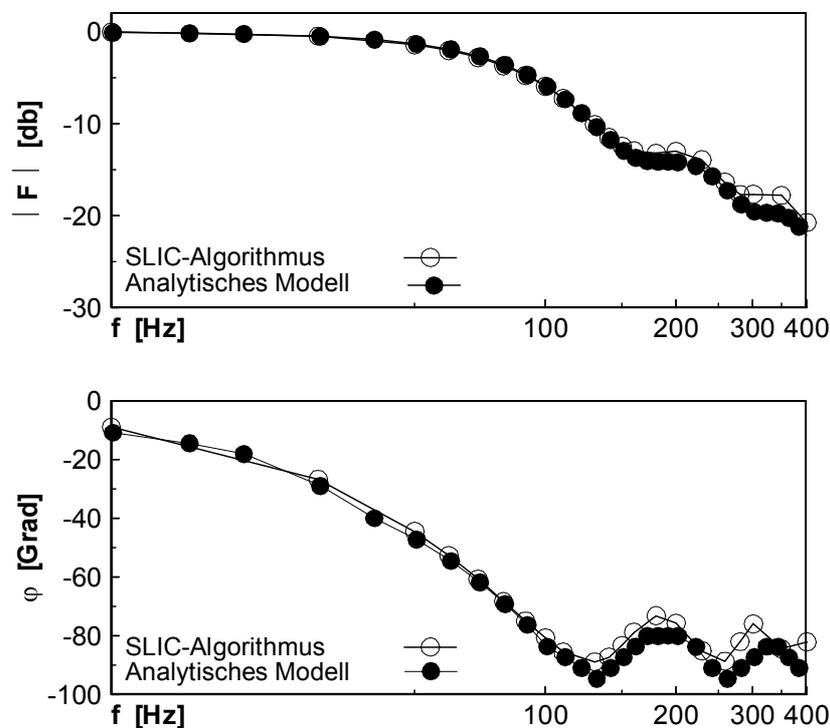


Abb. 6.3-8: Frequenzgang einer Kegelflamme (homogenes Geschwindigkeitsfeld). Vergleich von analytischer Lösung und Berechnung mit SLIC-Algorithmus.

## 7 Berechnung stationärer turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen

In Kapitel 8 wird der Vergleich von gemessenen und berechneten Frequenzgängen *pulsierter* vorgemischter Axialstrahlflammen vorgestellt. Dazu werden experimentell ermittelte Ergebnisse aus der Literatur herangezogen, bei denen die Flammenfrequenzgänge aus der Analyse der globalen Strahlungsintensität angeregter OH-Radikale gewonnen wurden. Bei der Modellierung wurde dagegen die integrale Umsatzgeschwindigkeit ausgewertet. Im aktuellen Kapitel werden die beiden Größen *gemessene OH-Strahlung* und *berechnete Umsatzgeschwindigkeit* am Beispiel von *stationären* vorgemischten freibrennenden Axialstrahlflammen unterschiedlicher thermischer Leistung verglichen.

### 7.1 Durchführung der Untersuchungen

#### Geometrie und Gitter

Zur Berechnung der stationären Flammen wurde das schon in Kap. 5.1.2 beschriebene "mittlere" Gitter mit einer Auflösung von  $300 \cdot 186$  Zellen verwendet. Die Geometrie und die zugehörigen Randbedingungen sind in Abb. 5.1-1 dargestellt. Der Austrittsdurchmesser der Wirbelfadendüse betrug  $d=26$  mm.

#### Randbedingungen

Die experimentellen Untersuchungen wurden an mit Erdgas betriebenen Flammen durchgeführt, bei der Rechnung wurde der Brennstoff Methan verwendet. Die Luftzahl betrug für alle berechneten Flammen  $\lambda = 1$ . Die Turbulenzgrößen  $\tilde{k}$  und  $\tilde{\epsilon}$  am Einlassrand wurden unter Verwendung der in Kap. 5.1.2 angegebenen Beziehungen aus einem gemessenen turbulenten Längenmaß von  $L_t = 8$  mm sowie einem gemessenen Turbulenzgrad von  $Tu = 2,5\%$  bestimmt (BÜCHNER [Vi3]). Für die axiale Geschwindigkeit und die Turbulenzwerte wurden ebene Profile am Einlassrand angenommen.

In Tab. 7.1-1 sind die verwendeten Randwerte sowie einige weitere charakteristische Parameter der Flammen angegeben (s. Kap. 2.2.3). Es wurden dabei folgende, für eine laminare vorgemischte stöchiometrische Methanflamme typische, Daten verwendet: Brenngeschwindigkeit  $S_f = 0,42$  m/s, Flammendicke  $\delta_f = 5 \cdot 10^{-4}$  m, chemisches Zeitmaß  $\tau_{chem} = 1,5 \cdot 10^{-4}$  s. Unter der Voraussetzung, dass sich die Reaktionszonen der untersuchten Flammen vollständig in den Bereichen des Strömungsfeldes befinden, in denen die Turbulenzbedingungen von den am Düsenaustritt vorliegenden Werten dominiert werden, lassen sich die Vormischflammen im Strukturdiagramm der

Vormischverbrennung (Abb. 2.2-1) in den Bereich der gefalteten Flammen einordnen. Die jeweiligen Karlovitzzahlen liegen unter dem Wert Eins.

### Stabilisierung

Im Experiment wurden die Flammen mit einer Pilotierung versehen, um einen stabilen Betrieb zu gewährleisten. Dazu wurde durch einen am Düsenmund befindlichen Ringspalt Wasserstoff zugeführt. Die thermische Leistung der Stabilisierung betrug ca. 4% der gesamten thermischen Leistung [Vi1]. Auch bei der Modellierung war eine Stabilisierung notwendig, um ein Abheben der Flammen zu verhindern. Diese wurde durch die Vorgabe einer festen Umsatzgeschwindigkeit in einem kleinen Bereich direkt stromab der Düsenkante realisiert. Die Größe des Stabilisierungsbereiches betrug ca. 3,5x0,5 mm.

Tab. 7.1-1: Randbedingungen und Parameter der berechneten stationären Flammen

		20 [kW]	40 [kW]	60 [kW]
$u_0$	[m/s]	12,3	24,6	36,9
$Re$	[-]	21320	42640	63960
$u'$	[m/s]	0,308	0,615	0,922
$u'/S_t$	[-]	0,73	1,46	2,19
$L_t$	[m]	0,008	0,008	0,008
$L_t/\delta_t$	[-]	16,0	16,0	16,0
$\tilde{k}$	[J/kg]	0,142	0,567	1,277
$\tilde{\epsilon}$	[J/(kg·s)]	1,097	8,777	29,623
$\tau_t$	[s]	0,01	0,013	0,0086
$Da_t$	[-]	15,31	7,66	5,10
$Ka_t$	[-]	0,156	0,440	0,810
$S_t$	[m/s]	0,69	0,95	1,22

## 7.2 Ergebnisse der Berechnungen

Um einen Eindruck von der Flammenform zu geben, sind in Abb. 7.2-1 für alle drei Flammen jeweils im linken Teilbild die Temperatur und im rechten Teilbild die volumenspezifische Umsatzgeschwindigkeit der Reaktion dargestellt. Die Verteilungen lassen deutlich erkennen, wie sich die Flammen mit wachsendem Volumenstrom verlängern. Die maximale Temperatur beträgt jeweils ca. 2100 K, was der adiabaten Verbrennungstemperatur entspricht. Die in den Darstellungen der Umsatzgeschwindigkeit zusätzlich eingezeichneten schwarzen Linien grenzen den Bereich ein, innerhalb dessen die Luftzahl gleich Eins beträgt. Es ist zu erkennen, dass nahezu die gesamte Reaktion im

Bereich stöchiometrischer Mischung stattfindet. Lediglich bei der 60 kW-Flamme liegt ein schmaler Bereich der Reaktionszone im Gebiet luftreicher Mischung.

Um die OH-Strahlungsverteilung längs der Flammenachse zu vermessen, wurde dem Strahlungsdetektor (Photomultiplier) eine Schitzblendenoptik vorgeschaltet. Durch diese war es möglich, die Flamme optisch in horizontale Scheiben mit einer Dicke von ca. 10 mm zu zerlegen (BÜCHNER [Vi1]).

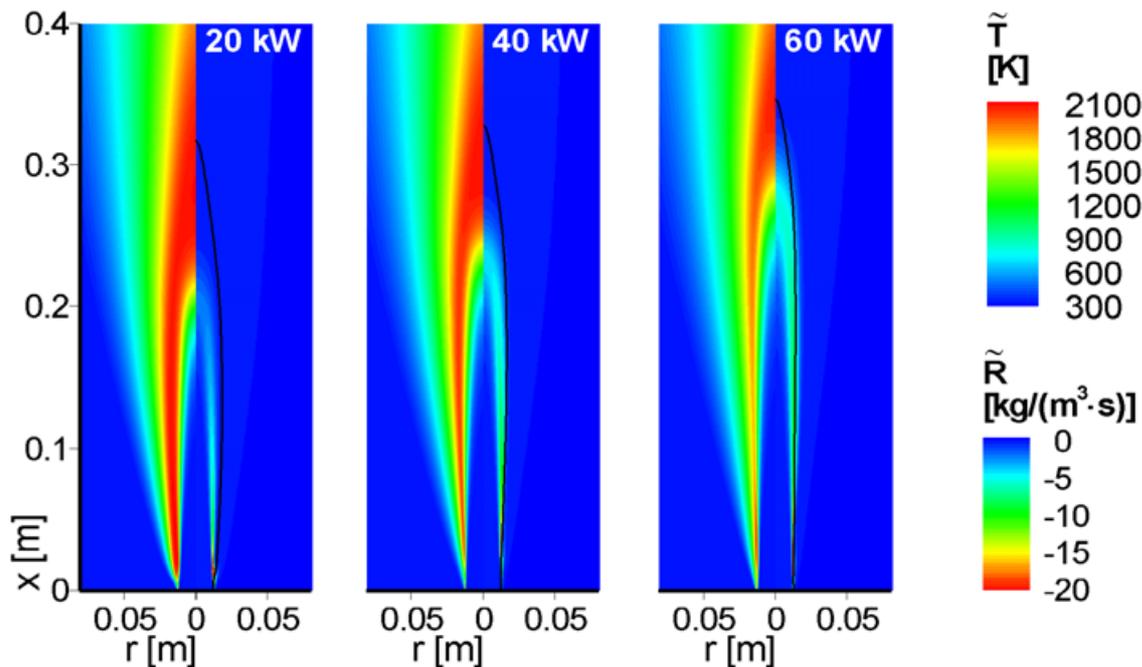


Abb. 7.2-1: Berechnung stationärer turbulenter Vormischflammen (20/40/60 kW).  
Jeweils links: Temperaturfeld, jeweils rechts: volumenspezifische Umsatzgeschwindigkeit.

In den Abb. 7.2-2 u. 7.2-3 sind die gemessenen axialen Verteilungen der OH-Strahlung pro Längeneinheit  $\overline{OH}_m$  sowie die berechneten axiale Verteilungen der volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit pro Längeneinheit  $\tilde{R}_m$  für die Flammen mit einer thermischen Leistung von 40 kW bzw. 60 kW aufgetragen. Um eine dimensionsfreie Darstellung zu erhalten sind die Verläufe mit dem jeweiligen auftretenden axialen Maximalwert  $\overline{OH}_{m,Max}$ , bzw.  $\tilde{R}_{m,Max}$  normiert. In jeder der zwei Abbildungen gibt die gestrichelte Linie das Ergebnis der Berechnung an, bei der die originale Formulierung des Reaktionsquelltermes des PHP-Verbrennungsmodelles verwendet wurde. Es ist zu erkennen, dass die qualitative Form der jeweiligen berechneten Verteilung gut mit der Messung übereinstimmt. Die Verteilungen weisen jedoch eine zu kleine axiale Erstreckung auf, d. h. die Flammen werden tendenziell als zu kurz vorhergesagt. Mit der axialen Position  $x_{Max}$  des Maximums der jeweiligen Verteilungsfunktion und der Düsenaustrittsgeschwindigkeit  $u_0$  kann eine charakteristische Verzugszeit definiert werden (BÜCHNER [Vi1]):

$$\tau_{char,stat} = \frac{x_{Max}}{u_0} \quad (7.2-1)$$

Diese stellt einen zentralen Parameter zur Charakterisierung des zur Flamme gehörenden Frequenzganges dar (s. Kap. 8.2.2 u. 8.4.1). KÜLSHEIMER ET AL. [Vi6] geben an, dass die axiale Position  $x_{Max}$  des Maximums typischerweise bei  $1/3$  der Flammenlänge  $H$  liegt. Dieser Befund steht in Übereinstimmung mit der in Kap. 6.3.2 berechneten mittleren Verweilzeitverteilung einer idealen Kegelflamme:  $\tau_{Kegel,stat} = H/(3 \cdot u_0)$ .

Um nun eine bessere Koinzidenz der gemessenen und berechneten axialen Positionen  $x_{Max}$  zu erzielen, wurde die Umsatzgeschwindigkeit bei der Rechnung reduziert. Dies wurde durch Einführung eines konstanten Reduktionsfaktors im Ratenquellterm realisiert. Die berechnete Umsatzgeschwindigkeit wurde dadurch in allen Gitterzellen um den gleichen Faktor verringert. Die so erzielten Ergebnisse werden in den Abb. 7.2-2 u. 7.2-3 durch die durchgezogenen Linien repräsentiert. Eine Reduktion des Ratentermes um 20% bei der 40 kW-Flamme sowie eine Reduktion um 30% bei der 60 kW-Flamme führen zu einer sehr guten Übereinstimmung der Axialpositionen der jeweiligen Maxima. Die gemessenen und berechneten Verläufe zeigen bezüglich der Form und der Verteilungsbreite eine überraschend gute Übereinstimmung, wenn berücksichtigt wird, dass hier völlig unterschiedliche physikalische Größen miteinander verglichen werden. Die durchgeführte Reduktion der Reaktionsrate relativiert sich außerdem, wenn berücksichtigt wird, dass SCHMID in seiner Arbeit [Va9] eine Unsicherheit von  $\pm 20\%$  bei der Bestimmung des Ratenausdrucks angibt.

Systematische Abweichungen zwischen Rechnung und Messung ergeben sich im Bereich des Flammenfußes. Hier zeigen die Rechenergebnisse im Gegensatz zu den Messdaten ein zweites Maximum. Diese Bereiche sind auch in Abb. 7.2-1 in den Isobildern der Umsatzgeschwindigkeit in Form roter Gebiete zu erkennen. Der gleiche Befund trat auch bei der Berechnung eingeschlossener Flammen auf. Da bei diesen keine Stabilisierung benötigt wurde, können die auftretenden großen Werte der Reaktionsrate nicht durch die Auswirkungen der Stabilisierungszone bedingt sein. Die in der Scherschicht auftretenden kleinen Turbulenzzeitmaße führen in diesem Bereich zu großen Werten der Umsatzgeschwindigkeit. Offenbar kann diese Scherschicht durch das verwendete  $300 \cdot 186$  Gitter nicht genügend fein aufgelöst werden, obwohl die Zellabmessungen in diesem Bereich nur ca. 0,5 mm betragen. In optischen Aufnahmen der Flammen ist im Bereich des Flammenfußes nur eine sehr dünne quasilaminare Flammenhaut zu erkennen. Es hat sich gezeigt, dass die Verwendung eines feineren Gitters zu einer Verbesserung der Ergebnisse in diesem Bereich führt. Bei der Verwendung eines feineren Gitters werden die in radialer Richtung auftretenden Maximalwerte der Umsatzgeschwindigkeit durch kleinere Zellvolumina erfasst und wirken sich dadurch nicht so stark in der Verteilungsfunktion aus. Die Verwendung eines feineren Gitters führte jedoch zu nicht akzeptablen großen Rechenzeiten bei der Modellierung der instationären Flammen. Aus Gründen der Vergleichbarkeit wurde deshalb für alle stationären und instationären Rechnungen von Flammen das gleiche Gitter ( $300 \cdot 186$  Zellen) verwendet. In Kap. 8.2.2 wird gezeigt, dass der im beschriebenen Fußbereich stattfindende Brennstoffumsatz nur einen kleinen Anteil des Gesamtumsatzes der Flamme beträgt.

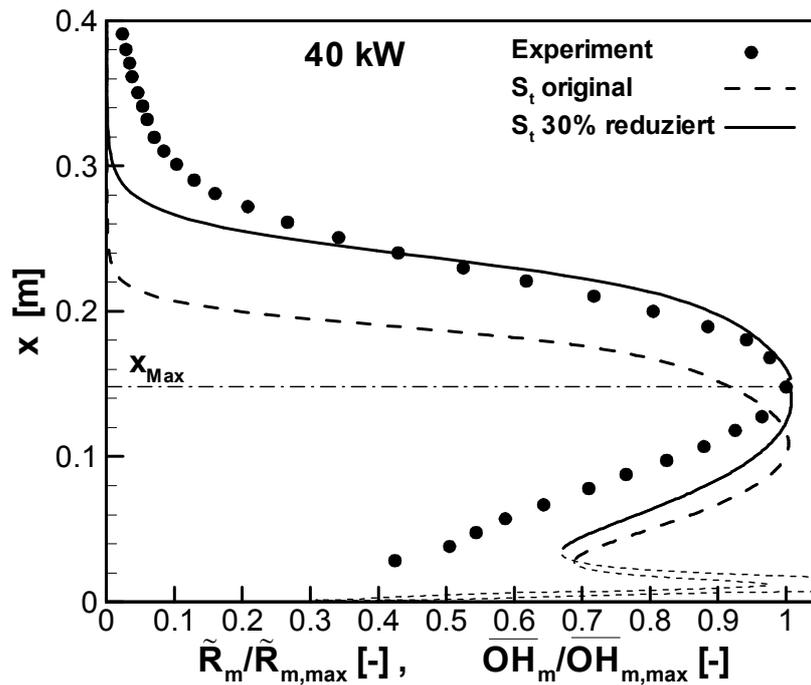


Abb. 7.2-2: Normierte axiale Verläufe von gemessener OH-Strahlungsintensität (BÜCHNER [Vi1]) und berechneter Reaktionsrate ( $P_{therm} = 40 kW$ ).

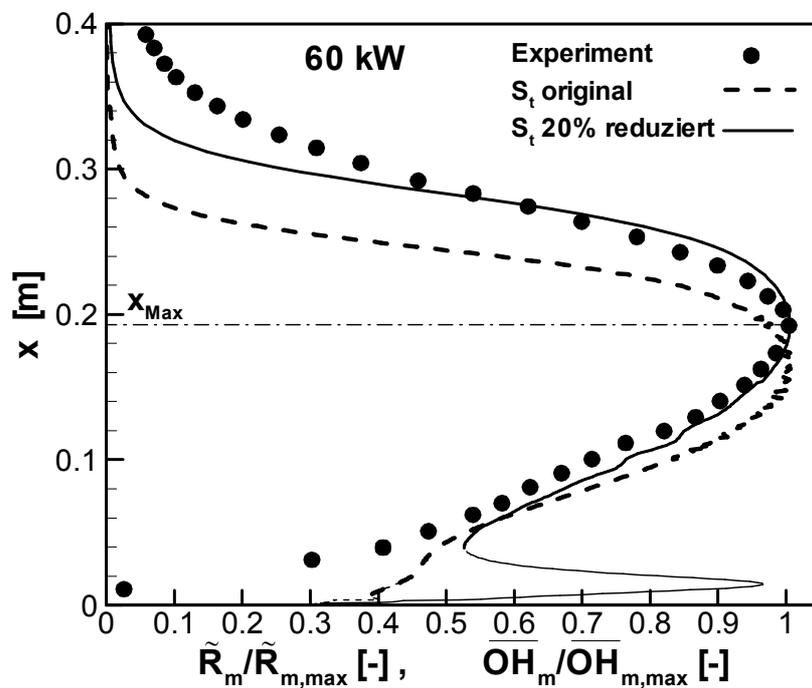


Abb. 7.2-3: Normierte axiale Verläufe von gemessener OH-Strahlungsintensität (BÜCHNER [Vi1]) und berechneter Reaktionsrate ( $P_{therm} = 60 kW$ ).

## 8 Berechnung pulsierter turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen

### 8.1 Durchführung der Untersuchungen

#### 8.1.1 Vorgehensweise

In vorliegendem Abschnitt wird die numerische Berechnung von pulsierenden turbulenten vorgemischten Axialstrahlflammen vorgestellt. In Kapitel 8.1 wird zunächst die Durchführung der Untersuchungen erläutert sowie typische Zeitmaße des instationären Verbrennungsprozesses abgeschätzt. Die Interaktion zwischen Ringwirbel und Flamme wird in Kapitel 8.2 diskutiert. In Kap. 8.3 werden zwei unterschiedliche Methoden zur Berechnung des Flammenfrequenzganges angewendet und verglichen. Ein Vergleich von berechneten Frequenzgängen mit Messdaten aus der Literatur erfolgt in Kapitel 8.4. In Kap. 8.5 wird der isolierte Einfluss von im Experiment nicht separierbaren Parametern auf den Flammenfrequenzgang untersucht. Für alle Berechnungen wurde das CFD-Programm EBI-2d mit dem Standard  $k-\epsilon$  Modell und dem PHP-Verbrennungsmodell verwendet.

#### 8.1.2 Beschreibung des Systemes

##### Geometrie und Gitter

Zur Berechnung der pulsierenden Flammen wurden, wenn nicht anders angegeben, die in Kap. 4.1.2 beschriebene Geometrie sowie das Rechengitter mit einer Auflösung von  $300 \cdot 186$  Zellen ("mittleres" Gitter) verwendet. Der Düsendurchmesser betrug stets  $d=26$  mm.

##### Randbedingungen

Die zum Vergleich der Rechenergebnisse herangezogenen Daten aus experimentellen Untersuchungen wurden an mit Erdgas betriebenen Flammen gewonnen, bei der Rechnung wurde der Brennstoff Methan verwendet. Die Luftzahl betrug für alle berechneten Flammen  $\lambda = 1$ . Zur Bestimmung der zeitabhängigen Randwerte am Einlass wurde die gleiche Vorgehensweise angewendet, die bereits bei der Berechnung isothermer pulsierter turbulenter Freistrahlen vorgestellt wurde (s. Kap. 5). Dabei wurde der zeitliche Verlauf der phasengemittelten Axialgeschwindigkeit an der Düse durch eine Sinusfunktion approximiert

$$\langle \tilde{u}(t) \rangle = u_0 \cdot \left( 1 + Pu \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t - \pi/4) \right) , \quad (8.1-1)$$

wobei  $Pu$  den gemessenen Pulsationsgrad bezeichnet. Die zeitabhängigen Randwerte für die phasengemittelte turbulente kinetische Energie  $\langle \tilde{k}(t) \rangle$  und die Dissipation  $\langle \tilde{\epsilon}(t) \rangle$  wurden abgeschätzt (s. Kap. 4.1.2).

### 8.1.3 Typische Zeitmaße

#### Abchätzung typischer Zeitmaße

Die vorgegebene Luftzahl betrug für alle berechneten Flammen  $\lambda = 1$ . Mit der umgestellten Beziehung für die laminare Flammengeschwindigkeit  $S_l = C_{chem} \cdot \sqrt{\alpha / \tau_{chem}}$  und den Daten  $S_l = 0,42 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 15 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$  und  $C_{chem} = 1,1$  (s. Kap. 2.3.2.3) ergibt sich folgender typischer Wert für das chemische Zeitmaß einer planaren stöchiometrisch vorgemischten Methanflamme

$$\tau_{chem} = \frac{\alpha}{(S_l / C_{chem})^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (8.1-2)$$

Die bei der Berechnung der pulsierenden Flammen auftretenden Düsenaustrittsgeschwindigkeiten bewegen sich bei den verwendeten mittleren Geschwindigkeiten und Pulsationsgraden im Bereich von  $u_0 \approx 12 - 57 \text{ m/s}$ . Zusammen mit dem bei den Rechnungen verwendeten Turbulenzgrad von  $Tu = 2,5\%$  und einem turbulenten Längenmaß am Düsenaustritt von  $L_t = 8 \text{ mm}$  ergeben sich folgende Wertebereiche für das integrale und dissipative turbulente Zeitmaß der Düsenströmung (vgl. Kap. 2.1.5.1):

$$\tau_t \sim \frac{L_t}{u'} \approx 5 \cdot 10^{-3} - 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ s}, \quad \tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\epsilon} \right)^{1/2} \approx 3,5 \cdot 10^{-4} - 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (8.1-3)$$

Die Berechnung erfolgte für Erregungsfrequenzen von  $f \approx 30 - 200 \text{ Hz}$ . Damit gilt für das Zeitmaß der Erregungsschwingung:

$$\tau_{Err} = \frac{1}{f} \approx 5 \cdot 10^{-3} - 3,3 \cdot 10^{-1} \text{ s} \quad (8.1-4)$$

Bei der untersuchten pulsierenden Axialstrahlströmung bilden sich bei hinreichend großen Frequenzen und Amplituden innerhalb des turbulenten Strömungsfeldes kohärente Ringwirbelstrukturen aus. Aus den in Kap. 5 gezeigten Ergebnissen lässt sich abschätzen, dass sich ein Ringwirbel während einer Periode der Schwingung ungefähr einmal um sich selbst dreht. Mit einem typischen, in der Größenordnung des Düsendurchmessers  $d$  liegenden Ringwirbeldurchmesser  $D_w$ , lässt sich das Rotationszeitmaß  $\tau_{Rot}$  eines Ringwirbels abschätzen:

$$\tau_{Rot} = \frac{D_w}{u_{Rot}} = \frac{D_w}{\pi \cdot d \cdot f} = \frac{1}{\pi \cdot f} \approx 1,6 \cdot 10^{-3} - 1,1 \cdot 10^{-1} \text{ s} \quad (8.1-5)$$

Für die Einordnung der beim instationären Verbrennungsprozess ablaufenden Vorgänge

sind nicht die absoluten Größen der typischen Zeitmaße maßgebend, sondern ihre Verhältnisse. Dabei findet das physikalische Prinzip Eingang, dass die Wahrscheinlichkeit der gegenseitigen Beeinflussung unterschiedlicher Prozesse um so geringer wird, je größer die Skalentrennung ist.

### Interaktion von Pulsation, Rotation und Turbulenz

Der Vergleich der Zeitmaße von Pulsation  $\tau_{Err}$  und Turbulenz  $\tau_t$  zeigt, dass diese bei der größten untersuchten Frequenz von  $f = 200 \text{ Hz}$  etwa gleich groß sind. Damit kann nicht ausgeschlossen werden, dass die Turbulenzstruktur durch die überlagerte Pulsation beeinflusst wird. Über die Art und Größe dieser Auswirkungen und ob es bei einer wie im vorliegenden Fall aufgeprägten definierenten Anregungsfrequenz überhaupt zu einer Beeinflussung kommt, sind jedoch bislang in der Literatur widersprüchliche Aussagen zu finden (s. Kap. 2.1.5.6).

Die Wechselwirkung zwischen Turbulenz und Rotation lässt sich nach HIRSCH [S16] in *lineare* und *nichtlineare* Effekte einteilen. Die *nichtlinearen* Wechselwirkungen betreffen Wirkungen starker Rotation auf die Turbulenzkaskade und erfordern eine Änderung der Dissipationsgleichung des  $k-\epsilon$  Turbulenzmodelles. Der Einfluss lässt sich über die turbulente Rossbyzahl  $Ro$  abschätzen, welche über das Verhältnis der typischen Zeitmaße von Rotation und Turbulenz definiert ist. Diese liegt mit den oben berechneten Zeitmaßen im Bereich

$$Ro = \frac{\tau_{Rot}}{\tau_t} \geq 1 \quad . \quad (8.1-6)$$

Ein wesentlicher Einfluss der Rotation auf die Form der Turbulenzkaskade kann nach HIRSCH [S16] erst für Rossbyzahlen erwartet werden, die weit unterhalb eines Verhältnisses von Eins liegen.

Die *linearen* Effekte wirken hauptsächlich auf die Lage des Spannungstensors und haben keinen direkten Einfluss auf seine Form und Größe, wohl aber auf die Verteilungen der Spannungen (HIRSCH [S16]). Dieser Einfluss kann bei verdrallten Strömungen wesentlich sein. Auch die in dieser Arbeit berechneten Ringwirbel sind durch das Vorhandensein einer Stromlinienkrümmung gekennzeichnet. Ob diese sich auswirkt, kann über das Beharrungsverhältnis (engl. Persistence Parameter)  $K_{Per}$  abgeschätzt werden (COTEL ET AL [S34]). Dieses ist durch das Verhältnis von Rotationszeitmaß  $\tau_{Rot}$  zu Translationszeitmaß  $\tau_{trans}$  eines Wirbels definiert und beschreibt, wie oft sich ein Wirbel dreht, während er sich um eine Strecke, die seinem Durchmesser entspricht, stromab bewegt. Die vorliegenden Untersuchungen zeigen, dass die Translationsgeschwindigkeit der hier untersuchten turbulenten Ringwirbel typischerweise die Hälfte der mittleren Düsengeschwindigkeit beträgt  $U_T = 0,5 \cdot u_0$  (s. Kap. 5). Damit ergibt sich folgender typischer Wert für das Beharrungsverhältnis:

$$K_{Per} = \frac{\tau_{trans}}{\tau_{Rot}} = \frac{\pi \cdot f}{U_T/d} = \frac{\pi \cdot f}{0,5 \cdot \bar{u}/d} = \frac{\pi \cdot 100 \text{ 1/s} \cdot 0,026 \text{ m}}{0,5 \cdot 25 \text{ m/s}} \approx 0,65 \quad . \quad (8.1-7)$$

Das heißt, eine Beeinflussung des turbulenten Austausches durch die Rotation kann nicht

generell ausgeschlossen werden.

### Interaktion von Turbulenz und Verbrennung

Unter der Voraussetzung, dass sich die Reaktionszonen der untersuchten Flammen vollständig in den Bereichen des Strömungsfeldes befinden, in denen die Turbulenzbedingungen von den am Düsenaustritt vorliegenden Werten dominiert werden, lassen sich in konservativer Abschätzung folgende Werte für die Damköhlerzahl  $Da$  und die Karlovitzzahl  $Ka$  ableiten (s. Kap. 2.3.2.1):

$$Da_t = \frac{\tau_t}{\tau_{Flamme}} = \frac{S_l}{u'} \cdot \frac{L_t}{L_{Flamme}} > 5, \quad Ka_t = \left( \frac{u'}{S_l} \right)^{3/2} \cdot \left( \frac{L_t}{L_{Flamme}} \right)^{-1/2} \approx 0,1 - 1,0 \quad (8.1-8)$$

Dabei wurde als typischer Wert für die Dicke einer laminaren stöchiometrischen Methanflamme der Wert  $L_{Flamme} = 5 \cdot 10^{-4} m$  verwendet. Die berechneten Vormischflammen lassen sich somit im Strukturdiagramm der Vormischverbrennung (Abb. 2.2-1) überwiegend in den Bereich der gefalteten Flammen einordnen. Bei größeren Ausströmgeschwindigkeiten, d. h. bei Flammen mit großer thermischer Leistung bei gleichzeitigem großem Pulsationsgrad, kann der Übergangsbereich hin zu den verdickten gefalteten Flammen erreicht werden.

## 8.2 Detaillierte Analyse ausgewählter Flammen

### 8.2.1 Interaktion von Ringwirbel und Flamme

In Abb. 8.2-1 sind Aufnahmen einer von KÜLSHEIMER [Vi6] experimentell untersuchten pulsierten turbulenten Vormischflamme gezeigt. Die aus Videoaufnahmen extrahierten Bilder geben die Intensität der sichtbaren Strahlung zu verschiedenen Zeitpunkten innerhalb der Schwingungsperiode wieder. Die Darstellung zeigt die gesamte senkrecht zur optischen Achse der Kamera integrierte sichtbare Strahlung. Es ist deutlich zu erkennen, wie sich die Flammenlänge in Abhängigkeit vom momentanen Gemischvolumenstrom stark ändert. In der Beschleunigungsphase der Düsenströmung bildet sich, initiiert durch den stromab wandernden Ringwirbel, eine typische pilzförmige Form der Reaktionszone aus.

Abb. 8.2-2 zeigt zum Vergleich beispielhaft ein Ergebnis der Modellierung. Dargestellt sind die volumetrische Umsatzgeschwindigkeit der Reaktion, die Temperatur, die Methankonzentration sowie der Mischungsbruch.

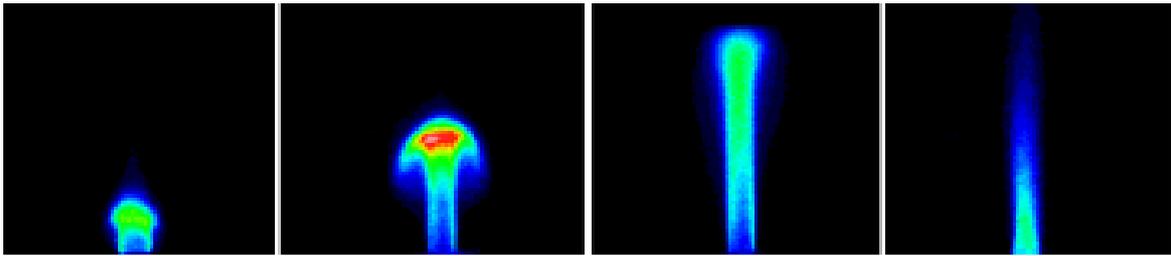


Abb. 8.2-1: Fotografien einer pulsierten turbulenten Axialstrahlflamme (KÜLSHEIMER [Vi6])

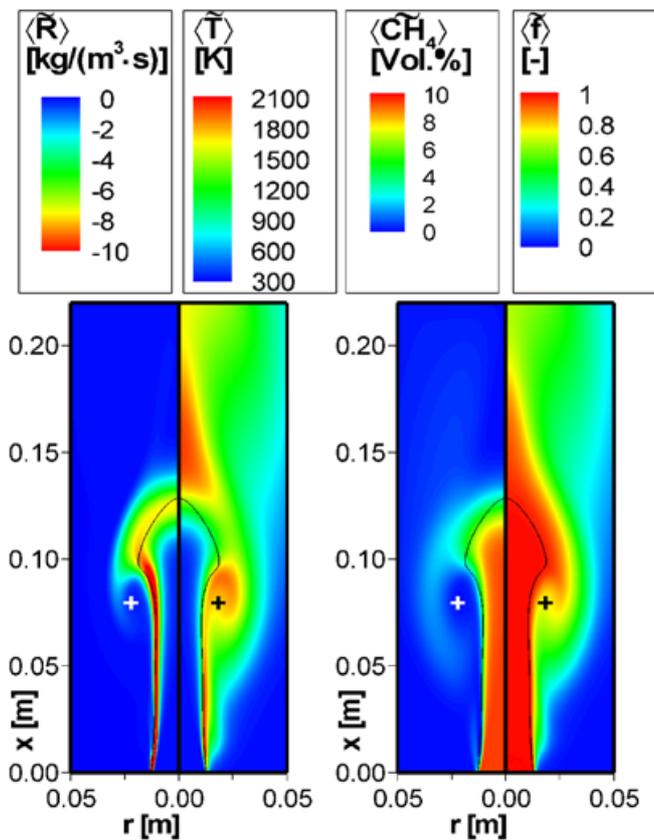


Abb. 8.2-2: Berechnung einer pulsierten turbulenten Axialstrahlflamme.

Parameter:  $P_{therm} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$ ,  $Pu = 35\%$ ,  
 $t/t_p = 0,735$ .

Im Gegensatz zur Fotografie stellen die Bilder der Rechenergebnisse einen zweidimensionalen Schnitt durch die Flamme dar. Ausgenommen vom Temperaturfeld, lässt sich in allen Verteilungen deutlich die in der Fotografie zu erkennende pilzförmige Struktur identifizieren. Diese ist durch die Rotationsbewegung des Ringwirbels bedingt, der Strahlmedium bzw. Frischgemisch in radialer Richtung von der Strahlachse weg

transportiert (s. Kap. 5.3). Das momentane Wirbelzentrum ist mit einem Kreuz markiert. Das Temperaturfeld lässt ein Gebiet hoher Temperatur im Bereich des Wirbelzentrums erkennen. Das sich in dieser Zone befindliche Abgas bewegt sich zusammen mit dem Wirbelkern stromab. Die in allen Verteilungen zusätzlich eingezeichneten schwarzen Linien grenzen den Bereich ein, innerhalb dessen die Luftzahl gleich Eins ist. In den Darstellungen der Umsatzgeschwindigkeit sowie der Methankonzentration ist zu erkennen, dass ein Teil der Reaktion außerhalb des stöchiometrischen Mischungsbereiches (= 9,5 Vol.% CH<sub>4</sub>), d. h. bei abgemagerten Bedingungen stattfindet. Die in den Bereichen höherer Luftzahl (Luftüberschuss) ablaufende Reaktion führt zu einer Reduktion der Verbrennungstemperatur und in der Realität zu einem Rückgang der OH-Strahlungsintensität. Diese wird im Experiment dazu verwendet, den Flammenfrequenzgang auszuwerten. Bei der Modellierung wird dagegen die integrale Umsatzgeschwindigkeit zur Bestimmung des Flammenfrequenzganges verwendet. Der Vergleich dieser zwei Größen ist im Fall stationärer Flammen zumindest qualitativ möglich, weil sich die Reaktionszone dann nahezu völlig im stöchiometrisch vorgemischten Bereich befindet (s. Kap. 7). Der Vergleich der aus diesen beiden Größen jeweils im Experiment und bei der Modellierung ermittelten Amplitudenkennlinien ist dagegen nur sehr eingeschränkt möglich, was bei der Diskussion der jeweiligen Frequenzgänge berücksichtigt werden muss (s. Kap. 8.4).

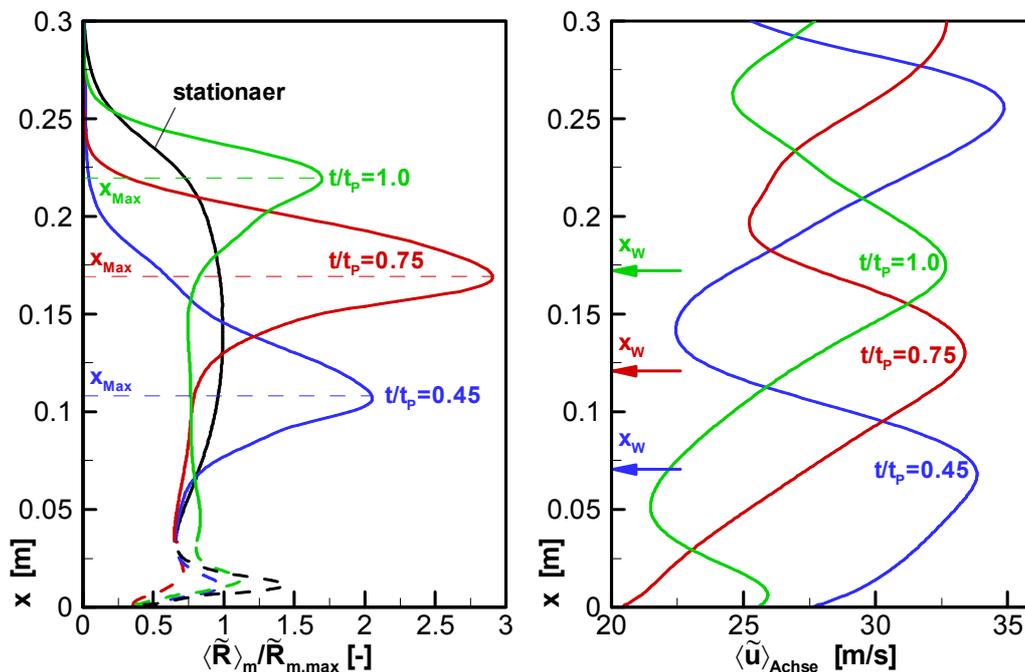


Abb. 8.2-3: Analyse der pulsierten Flamme. Links: Normierte axiale Verläufe der Umsatzgeschwindigkeit. Rechts: Axialgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse. Parameter:  $P_{therm} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $Pu = 15\%$ .

Die Analyse der Rechenergebnisse lässt einige charakteristische Eigenschaften der Interaktion von Ringwirbel und Flamme deutlich werden. In Abb. 8.2-3 (links) ist für die

berechnete 40 kW-Flamme die axiale Verteilung der volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit pro Längeneinheit  $\langle \tilde{R} \rangle_m$  aufgetragen. Die schwarze Linie repräsentiert wiederum das Ergebnis der stationären Rechnung (vgl. Kap. 7.2). Die drei farbigen Linien stellen die axialen Verteilungen von  $\langle \tilde{R} \rangle_m$  im Fall der pulsierten Flamme dar und geben den Verlauf zu drei verschiedenen relativen Zeitpunkten innerhalb einer Schwingungsperiode wieder. Zur Normierung wurde jeweils der im stationären Fall auftretende Maximalwert  $\tilde{R}_{m,Max}$  verwendet. Zu allen gezeigten Zeitpunkten des instationären Falles weist die auf die Längeneinheit bezogene Umsatzgeschwindigkeit ein deutlich ausgeprägtes Maximum auf, welches im zeitlichen Verlauf stromab wandert. Die axiale Position des Maximums  $x_{Max}$  ist jeweils mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Für die relative Zeit  $t/t_p = 0,75$  ist der Maximalwert nahezu um den Faktor drei größer als im stationären Fall.

Die rechte Seite von Abb. 8.2-3 zeigt die zu den drei betrachteten relativen Zeitpunkten gehörende Axialgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse. Die kleinen Pfeile auf der Ordinate kennzeichnen jeweils die momentanen axialen Positionen  $x_w$  des Ringwirbelzentrums. Es ist zu erkennen, dass sich das Maximum der Vorwärtsgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse jeweils an der gleichen axialen Position wie das Wirbelzentrum befindet. Das an dieser axialen Position auftretende Geschwindigkeitsmaximum ergibt sich hierbei durch eine Überlagerung von zwei Anteilen. Zum einen wandert das zu einem bestimmten Zeitpunkt am Auslass vorliegende Maximum der vorgegebenen Geschwindigkeitsschwankung stromab. Zum anderen führt die Rotationsgeschwindigkeit des Ringwirbels zu einer zusätzlichen axialen Komponente der Strömung auf der Symmetrieachse des Systemes. Die Überlagerung dieser zwei Komponenten führen zu einer maximalen Strömungsgeschwindigkeit von ca. 35 m/s. Diese Geschwindigkeit ist somit größer als die am Düsenaustritt maximal vorliegende Geschwindigkeit von ca. 30 m/s.

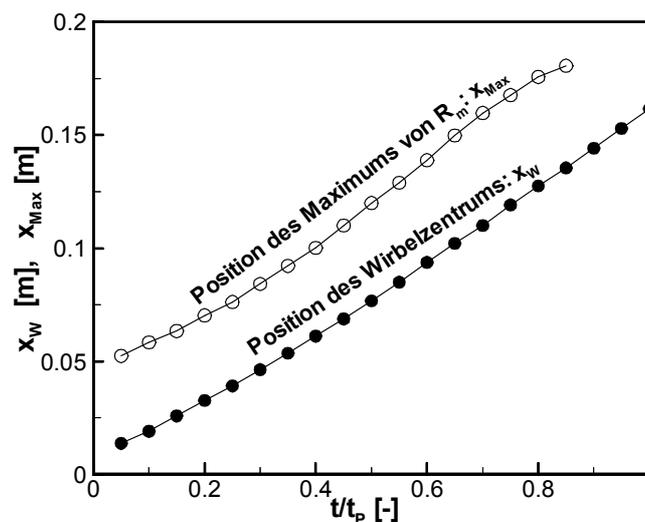


Abb. 8.2-4: Zeitliche Verläufe der axialen Positionen von  $x_{Max}$  und  $x_w$ .

Parameter:  $P_{therm} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $Pu = 15\%$ .

Eine weitere Charakteristik ist beim Vergleich der axialen Positionen  $x_{Max}$  (Abb. 8.2-3 links) mit den Verläufen der Axialgeschwindigkeit (Abb. 8.2-3 rechts) zu identifizieren. Aus Gründen der Kontinuität befindet sich das Maximum des radialen konvektiven Transportes an der gleichen axialen Position, an der die Vorwärtsgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse die größte Verzögerung erfährt. Der dadurch bedingte radiale Transport von Strahlmedium führt in diesem axialen Bereich zu einer makroskopischen Auffaltung der Flammenfront, die sich in der pilzförmigen Struktur manifestiert. Diese Auffaltung vergrößert die makroskopische Flammenfläche und führt an der gleichen Axialposition zu den im Verlauf der Größe  $\langle \tilde{R} \rangle_m / \tilde{R}_{m,Max}$  auftretenden, gegenüber der stationären Flamme vergrößerten, Werten. Abb. 8.2-4 zeigt nochmals, dass sich die axialen Positionen des Maximums der längenbezogenen Umsatzgeschwindigkeit  $x_{Max}$  sowie des Zentrums des Ringwirbels  $x_w$  nahezu mit der gleichen Geschwindigkeit stromab bewegen.

## 8.2.2 Phasenverzug und Verweilzeitverteilung

Im folgenden Abschnitt wird der sich zwischen Anregung und Flammenantwort einstellende Phasenverzug diskutiert. Wie gezeigt wird, steht dieser im engen Zusammenhang mit der Verweilzeitverteilung des reagierenden Brennstoffes (s. Kap. 2.3.2.6). Die Analyse erfolgt am Beispiel einer Flamme mit einer thermischen Leistung von 40 kW.

### Stationäre Flamme

Die Berechnung der stationären Flamme wurde, wie bereits in Kap. 7 beschrieben, für zwei verschiedene Bedingungen durchgeführt. Die im Folgenden mit dem Index "A" versehenen Rechenergebnisse wurden unter Verwendung der originalen Formulierung des Ratentermes des PHP-Verbrennungsmodelles erzielt. Für die Rechnung "B" wurde der Ratenterm um 30% reduziert .

Auf der linken Seite von Abb. 8.2-5 ist das Feld der volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit für beide Rechnungen gezeigt. Die Reduktion des Ratentermes bei Rechnung B führt zu einer Verringerung der turbulenten Brenngeschwindigkeit und damit zu einer Verlängerung der Flamme gegenüber Rechnung A. Die schwarzen Linien grenzen den Bereich ein, innerhalb dessen die Luftzahl gleich Eins beträgt. Wie zu erkennen ist, liegt in beiden Fällen die gesamte Reaktionszone im Bereich stöchiometrischer Mischung. Auf der rechten Seite von Abb. 8.2-5 ist jeweils die Verweilzeit  $\tau$  des Brennstoffes gezeigt. Diese Verweilzeit zeigt an wie "alt" der Brennstoff ist bzw. wie lange sich der Brennstoff nach Austritt aus der Düse bereits im Strömungsfeld befindet. Deutliche Unterschiede zwischen den zwei berechneten Fällen zeigen sich lediglich für axiale Abstände die größer als 0,2 m sind. Da sich bei Rechnung B eine längere Flamme ergibt als bei Rechnung A und die Produktion von Verweilzeit an das Vorhandensein von Brennstoff gekoppelt wurde (s. Kap. 2.3.2.6), ergeben sich bei Rechnung B größere Endwerte für die Verweilzeit.

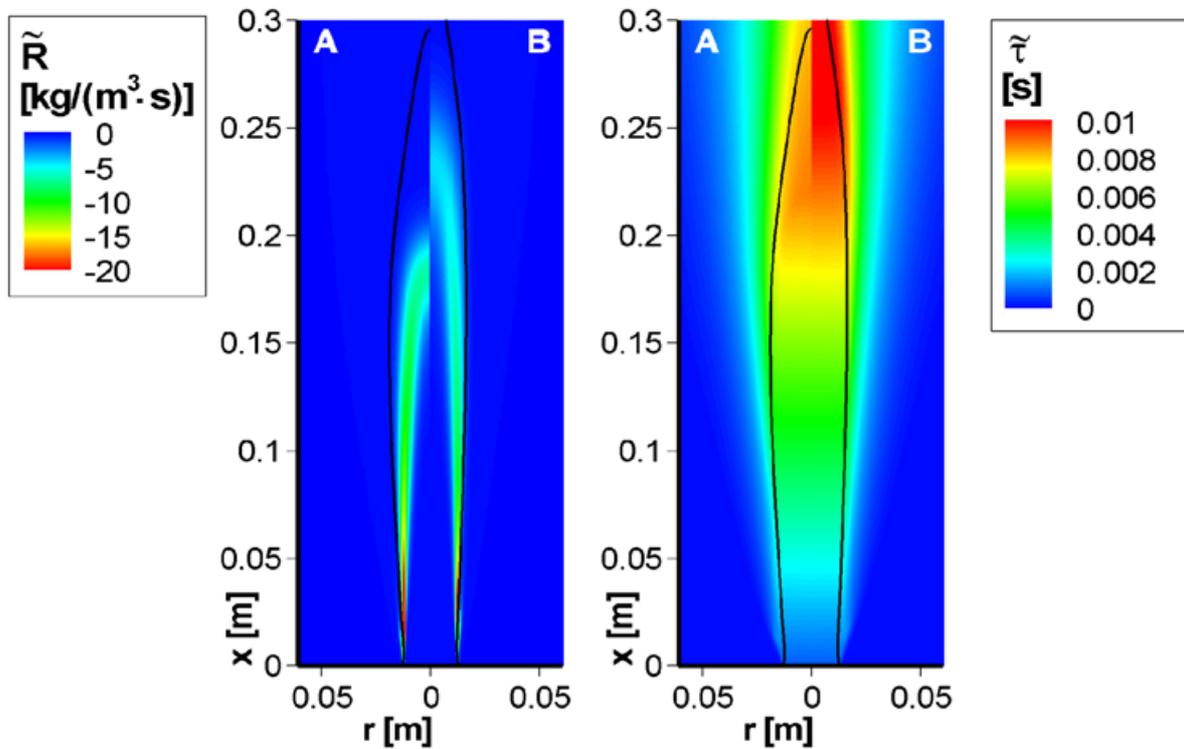


Abb. 8.2-5: Berechnung der stationären Flamme: links volumenspezifische Umsatzgeschwindigkeit, rechts Verweilzeit. Parameter:  $P_{therm} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ .

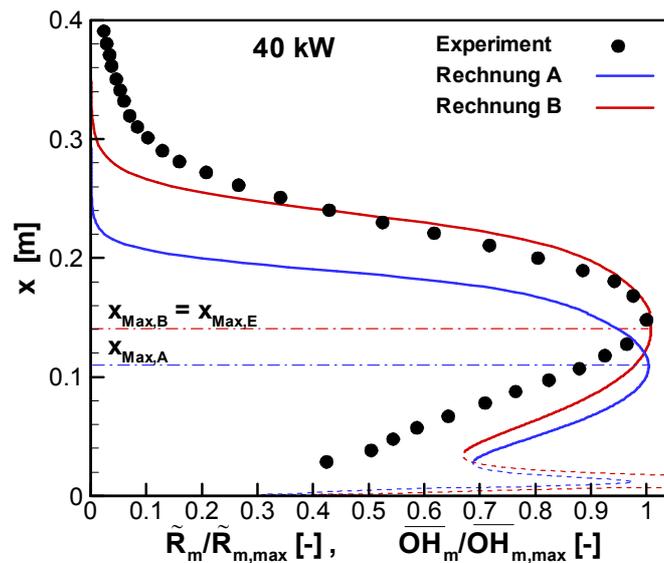


Abb. 8.2-6: Normierte axiale Verläufe von gemessener OH-Strahlungsintensität und berechneter Umsatzgeschwindigkeit. Parameter:  $P_{therm} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ .

In Abb. 8.2-6 sind wiederum die normierten axialen Verteilungen der gemessenen der OH-Strahlung pro Längeneinheit  $\overline{OH}_m$  sowie der berechneten volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit pro Längeneinheit  $\tilde{R}_m$  dargestellt. Die in den berechneten Verteilungen für kleine axiale Abstände auftretenden Spitzenwerte sind durch die zu großen, an der Flammenbasis auftretenden Umsatzgeschwindigkeiten bedingt (vgl. Kap. 7.2), tragen jedoch nur wenig zum Gesamtumsatz der Flamme bei (s. u.). Aus diesem Grund sind die Verläufe in diesem Bereich gestrichelt gezeichnet. Nimmt man diese Spitzenwerte von der Betrachtung aus, so zeigen alle drei Verteilungsfunktionen einen typischen zwiebel förmigen Verlauf mit einem ausgeprägtem Maximum. Die jeweiligen axialen Positionen der Maxima  $x_{Max}$  sind mit einer horizontalen gestrichelten Linie gekennzeichnet. Während die axiale Position des Maximums von Rechnung A gegenüber der Messung zu weit stromauf liegt, decken sich die axialen Positionen der Maxima von Rechnung B und Experiment.

Mit der axialen Position des Maximums und der Düsenaustrittsgeschwindigkeit lässt sich nach BÜCHNER [Vi1] eine charakteristische Verzugszeit definieren:

$$\tau_{char,stat} = \frac{x_{max}}{u_0} \quad . \quad (8.2-1)$$

Diese stellt einen zentralen Parameter zur Beschreibung des Frequenzganges der entsprechenden Flamme dar (s. Kap. 8.4). Für die charakteristischen Verzugszeiten der Rechnungen A und B ergeben sich im vorliegenden Fall die Werte:

$$\tau_{char,stat,A} = \frac{x_{Max,A}}{u_0} = 4,5 \cdot 10^{-3} s \quad , \quad \tau_{char,stat,B} = \frac{x_{Max,B}}{u_0} = 5,7 \cdot 10^{-3} s \quad .$$

Der Wert für Rechnung B entspricht dabei dem aus dem Experiment ermittelten Wert:

$$\tau_{char,stat,B} = \tau_{char,stat,E}$$

In Abb. 8.2-7 sind die zu den in Abb. 8.2-5 gezeigten Verweilzeitverteilungen gehörenden Verweilzeitspektren gezeigt. Jeder Balken repräsentiert einen gewissen Massenstrom (in  $[kg/s]$ ) von *reagierendem* Brennstoff pro Verweilzeitintervall. Dieser anteilige Massenstrom wird im Rahmen der Diskussion von Verweilzeitspektren im Folgenden als *integrale Umsatzgeschwindigkeit U* bezeichnet. Die durch die Höhe eines jeden Balkens ausgewiesene anteilige Umsatzgeschwindigkeit besitzt das durch die Position des Balkens auf der Verweilzeitachse definierte "Alter". Da die Flamme von Rechnung B länger als diejenige von Rechnung A ist, dehnt sich die Verweilzeitverteilung bis zu größeren Werten hin aus. Die in den Verweilzeitspektren für kleine Aufenthaltszeiten auftretenden Maxima sind wiederum durch die zu großen, an der Flammenbasis auftretenden Umsatzgeschwindigkeiten bedingt (s. o.), stellen jedoch nur einen kleinen Anteil an der integralen Umsatzgeschwindigkeit der Flamme dar. Aus einem Verweilzeitspektrum lässt sich eine mittlere Verweilzeit bestimmen:

$$\bar{\tau}_{mittel,stat} = \frac{\sum_i \tilde{U}_i \cdot \tau_i}{\tilde{U}_{global}} \quad (8.2-2)$$

Diese berechnet sich aus der Summation der mit der jeweiligen Verweilzeit gewichteten anteiligen Brennstoffumsätze über alle Rechenzellen dividiert durch die integrale Umsatzgeschwindigkeit. Die sich ergebenden mittleren Verweilzeiten von *reagierendem* Brennstoff sind in den dargestellten Verweilzeitspektren gekennzeichnet (s. Abb. 8.2.7). In Tabelle 8.2-1 sind die Werte für die charakteristischen Verzugszeiten sowie die mittleren Verweilzeiten aufgeführt. Der Vergleich zeigt, dass diese für die beiden Rechnungen A und B nur ca. 5% voneinander abweichen.

Tab. 8.2-1: Charakteristische Verzugszeiten und mittlere Verweilzeiten für die stationäre Flamme

	charakteristische Verzugszeit	mittlere Verweilzeit
Rechnung Flamme A	$\tau_{char,stat,A} = 4,5 \text{ ms}$	$\bar{\tau}_{mittel,stat,A} = 4,4 \text{ ms}$
Rechnung Flamme B	$\tau_{char,stat,B} = 5,7 \text{ ms}$	$\bar{\tau}_{mittel,stat,B} = 5,4 \text{ ms}$
Experiment	$\tau_{char,stat,E} = 5,7 \text{ ms}$	

In Kap. 7.2 wurde außerdem gezeigt, dass die charakteristische Verzugszeit einer turbulenten vorgemischten Axialstrahlflamme in guter Übereinstimmung mit der mittleren Verweilzeit einer idealisierten Kegelflamme steht ( $\tau_{char,stat} \approx \tau_{Kegel,stat} = H/(3 \cdot u_0)$ ).

### Pulsierte Flamme

Im folgenden Abschnitt wird die Analyse der Verweilzeitverteilungen für die pulsierte Flamme vorgestellt. Die Berechnung der 40 kW-Flamme erfolgte bei einer Anregungsfrequenz von 100 Hz bei einem Pulsationsgrad von 15 % unter Verwendung des um 30% reduzierten Ratenausdrucks (s. o. Rechnung B). Abb. 8.2-8 zeigt die Verteilung der Axialgeschwindigkeit zu zwei relativen Zeitpunkten innerhalb einer Schwingungsperiode. Wie bereits anhand Abb. 8.2-3 beschrieben, befindet sich das Wirbelzentrum an der gleichen axialen Position wie das Maximum der Geschwindigkeit auf der Symmetrieachse und ist mit einem schwarzen Punkt gekennzeichnet. Die schwarze Kontur grenzt das Gebiet der Reaktionszone ein.

Die zu den zwei Zeitpunkten gehörenden Spektren der Verweilzeit von *reagierendem* Brennstoff sind in Abb. 8.2-9 dargestellt. Beide Verteilungen weisen drei Zonen *a*, *b* und *c* auf, die durch das Auftreten lokaler Maxima im jeweiligen Verweilzeitspektrum gekennzeichnet sind. Diese Zonen sind unterschiedlich eingefärbt und werden im Folgenden diskutiert. Die den Zonen *b*, *c* zugehörigen Bereiche innerhalb der Flammenfront sind in Abb. 8.2-8 ebenfalls markiert.

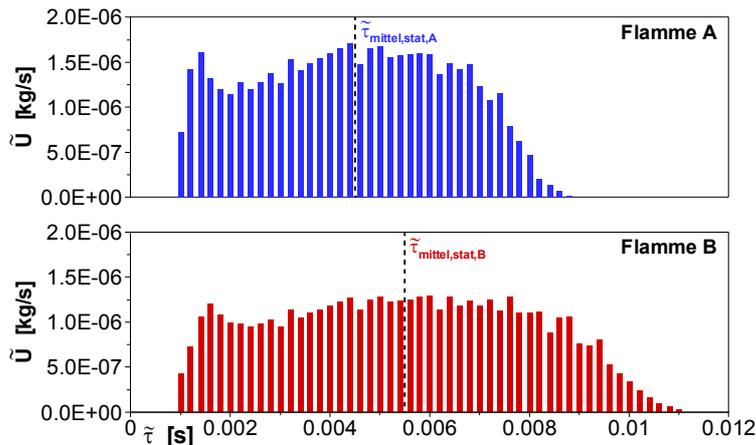


Abb. 8.2-7: Stationäre Flamme: Verweilzeitspektrum des reagierenden Brennstoffes. Parameter:  $P_{therm} = 40 kW$ ,  $u_0 = 24,6 m/s$ .

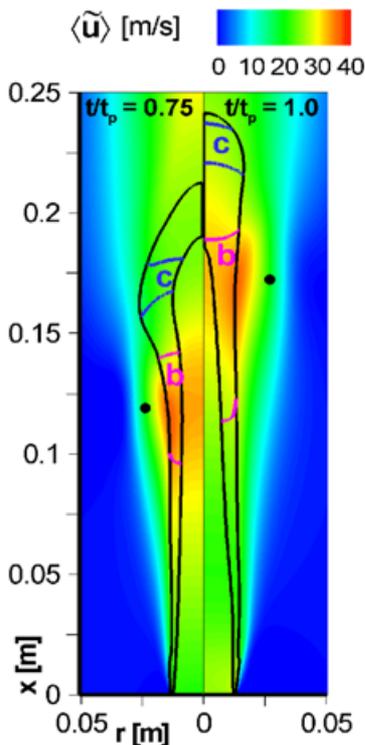


Abb. 8.2-8: Axialgeschwindigkeit

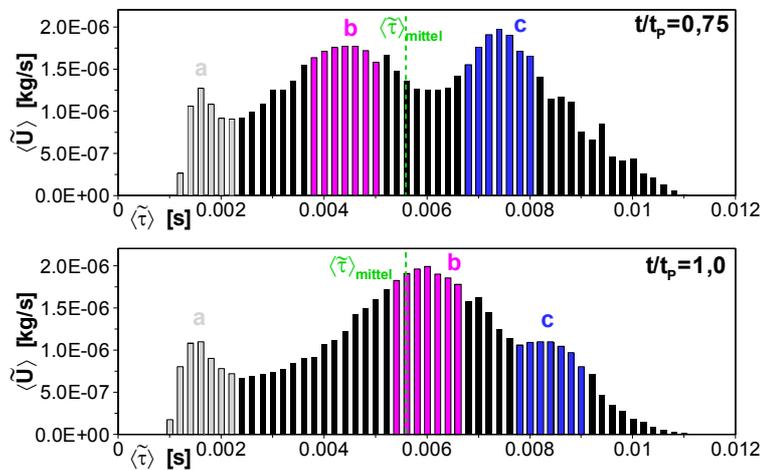


Abb. 8.2-9: Verweilzeitspektrum des reagierenden Brennstoffes

Zone a: Das bei kleinen Verweilzeiten im Spektrum auftretende lokale Maximum ist wie schon bei der stationären Flamme gezeigt, durch die im Bereich des Flammenfußes auftretenden großen Umsatzgeschwindigkeiten bedingt und stellt einen Effekt der Modellierung dar (s. o.).

Zone b: Der zugeordnete Bereich der Flammenfront zeichnet sich durch das Vorhandensein großer axialer Geschwindigkeiten aus, was zu einer relativ großen axialen

Erstreckung des Bereiches führt. Obwohl die Umsatzgeschwindigkeit pro Längeneinheit  $\langle \tilde{R} \rangle_m / \tilde{R}_{m,Max}$  in diesem Bereich der Flamme relativ klein ist (vgl. Abb. 8.2-3) ergibt sich durch die große Ausdehnung des Gebietes in Summe ein relativ großer Anteil von Brennstoff, der darin umgesetzt wird. Das Gebiet liegt auf gleicher axialer "Höhe" wie das Wirbelzentrum und wandert mit diesem zusammen stromab. Dieser Vorgang äußert sich in den Verweilzeitspektren durch eine Verschiebung des entsprechenden lokalen Maximas zu größeren Verweilzeiten hin.

Zone *c*: Der zugeordnete Bereich der Flammenfront liegt stromab vom Wirbelzentrum. Das Gebiet repräsentiert zum Zeitpunkt  $t/t_p = 0,75$  den Bereich der Flamme, der in Abb. 8.2-3 durch das Maximum der Umsatzgeschwindigkeit pro Längeneinheit  $\langle \tilde{R} \rangle_m / \tilde{R}_{m,Max}$  gekennzeichnet ist. Hier erfährt die Flamme die größte makroskopische Auffaltung und damit das größte Volumen pro Längeneinheit. Zum späteren Zeitpunkt verschiebt sich dieser Bereich ebenfalls zu größeren Verweilzeiten hin wobei die anteilige Umsatzgeschwindigkeit abnimmt.

In Abb. 8.2-10 sind die zeitlichen Verläufe verschiedener Größen innerhalb einer Schwingungsperiode aufgetragen. Die blaue Linie zeigt die sinusförmige Geschwindigkeit  $\langle \tilde{u} \rangle$  am Düsenauslass. Die rote Linie gibt den Verlauf der integralen Umsatzgeschwindigkeit  $\langle \tilde{U}(t) \rangle_{global}$  wieder. Der Phasenversatz zwischen Systemanregung und Systemantwort beträgt ca.  $190^\circ$ . Die durchgezogene grüne Kurve zeigt den Verlauf der mittleren Verweilzeit  $\langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel}$  an. Diese kann analog zum stationären Fall für jeden Zeitpunkt innerhalb der Schwingungsperiode aus dem momentanen Verweilzeitspektrum über folgende Beziehung bestimmt werden:

$$\langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel} = \frac{\sum_i \langle \tilde{U}(t) \rangle_{mittel} \cdot \langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel}}{\tilde{U}_{global}} \quad (8.2-3)$$

Wird der zeitliche Verlauf von  $\langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel}$  über die Periodendauer gemittelt, so ergibt sich die über die Schwingungsperiode gemittelte Verweilzeit  $\overline{\langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel}}$  bzw. das durchschnittliche mittlere "Alter" von *reagierendem* Brennstoff:

$$\overline{\langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel}} = \frac{\int_0^{t_p} \langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{mittel} \cdot dt}{t_p} = 5,3 \text{ ms} \quad (8.2-4)$$

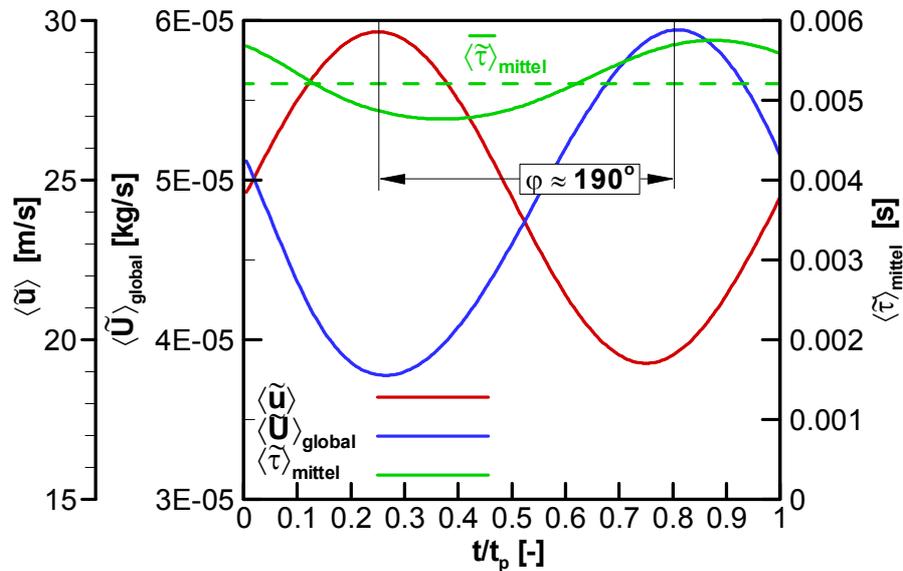


Abb. 8.2-10: Pulsierte Flamme: Zeitliche Verläufe von Einlassgeschwindigkeit, integraler Umsatzgeschwindigkeit und mittlerer Verweilzeit. Parameter:  $P_{\text{therm}} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ ,  $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $Pu = 15\%$ .

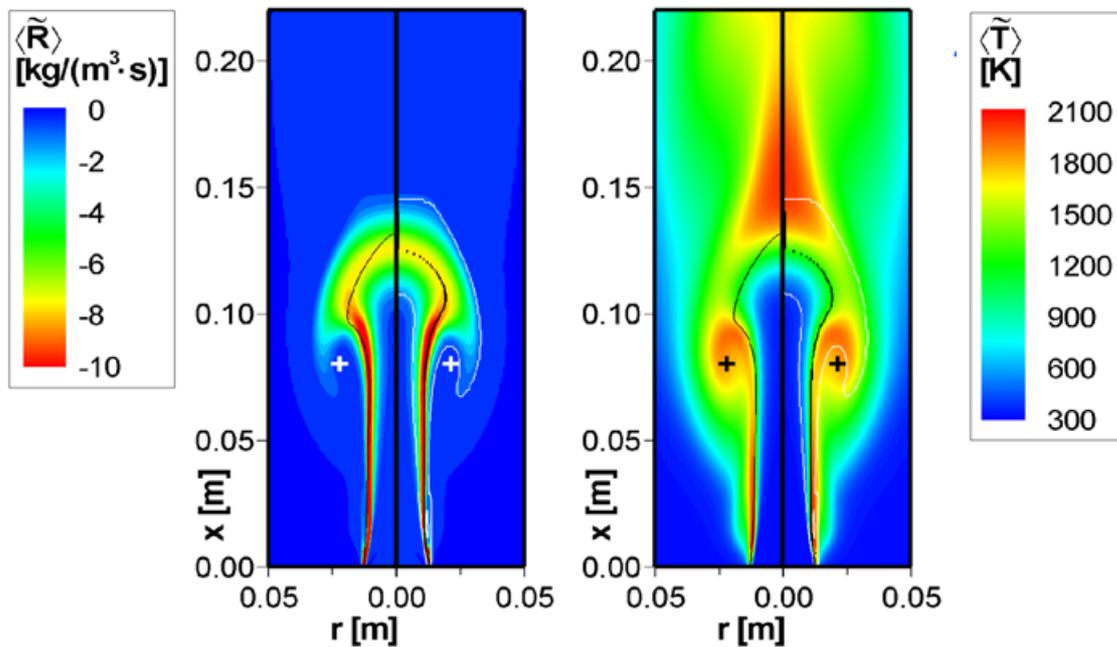


Abb. 8.2-11: Analyse der pulsierten turbulenten Axialstrahlflamme. Parameter:  $P_{\text{therm}} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ ,  $f = 150 \text{ Hz}$ ,  $Pu = 35\%$ ,  $t/t_p = 0,735$ .

Abb. 8.2-10 zeigt, dass die momentane mittlere Verweilzeit  $\langle \tilde{\tau}(t) \rangle_{\text{mittel}}$  mit einer Amplitude von ca. 15% um den Durchschnittswert  $\overline{\langle \tilde{\tau}(t) \rangle}_{\text{mittel}}$  schwankt. Der Durchschnittswert der Verweilzeit  $\overline{\langle \tilde{\tau}(t) \rangle}_{\text{mittel}} = 5,3 \text{ ms}$  stimmt mit einer Abweichung von weniger als 10% mit folgenden, bereits oben für die entsprechende stationäre 40 kW Flamme ermittelten, typischen Zeitmaßen überein:

- der charakteristischen Verzugszeit  $\tau_{\text{char,stat,B}}$  (= 5,7 ms), die sich aus der berechneten (bzw. gemessenen) axialen Position des Maximums der axialen Verteilung der volumenspezifischen Umsatzgeschwindigkeit ableiten lässt
- der mittleren Verweilzeit  $\tilde{\tau}_{\text{mittel,stat,B}}$  (= 5,4 ms), die sich aus dem berechneten Verweilzeitspektrum ergibt.

Es lässt sich somit ein globales Zeitmaß  $\tau_{\text{Flamme}}$  der Flamme angeben für das gilt:

$$\tau_{\text{Flamme}} \approx \tau_{\text{char,stat}} \approx \tilde{\tau}_{\text{mittel,stat}} \approx \overline{\langle \tilde{\tau}(t) \rangle}_{\text{mittel}} . \quad (8.2-1)$$

Der Phasenversatz zwischen Systemanregung und Systemantwort eines idealen Totzeitgliedes, welches die gleiche Totzeit wie das globale Zeitmaß der Flamme besitzt, berechnet sich zu:

$$\varphi = \tau_{\text{Flamme}} \cdot f \cdot 360^\circ = 5,3 \text{ ms} \cdot 100 \text{ Hz} \cdot 360^\circ \approx 190^\circ .$$

Der so ermittelte Wert des Phasennachlaufes stimmt in guter Näherung mit dem in Abb. 8.4-2 zu identifizierenden Phasennachlauf überein. In Kapitel 8.4 wird weiterhin gezeigt, dass sich der gesamte Phasengang der instationären Flamme aus dem globalen Zeitmaß der Flamme bestimmen lässt.

### 8.2.3 Amplitudenreduktion und Flammengeometrie

In folgendem Abschnitt wird die sich für größere Anregungsfrequenzen einstellende Amplitudenreduktion diskutiert. Wie gezeigt wird, steht diese im engen Zusammenhang mit der makroskopischen Flammengeometrie. Die Analyse erfolgt am Beispiel einer Flamme mit einer thermischen Leistung von 40 kW.

Abb. 8.2-11 zeigt die Darstellung einer pulsierten Flamme zu einem bestimmten Zeitpunkt innerhalb der Periode. Im linken Bild ist die volumenspezifische Umsatzgeschwindigkeit, im rechten die Temperatur dargestellt. Die in den linken Symmetriehälften der beiden Bilder zusätzlich eingezeichneten schwarzen Linien grenzen den Bereich ein, innerhalb dessen die Luftzahl gleich Eins ist. Es ist zu erkennen, dass ein Teil der Reaktion außerhalb des stöchiometrischen Mischungsbereiches stattfindet. In der nachfolgenden Analyse werden zusätzlich zum zeitlichen Verlauf der integralen Umsatzgeschwindigkeit die zeitlichen Verläufe des Flammenvolumens sowie der Flammenfläche diskutiert. Diese beiden Größen sind jeweils in den rechten Symmetriehälften der beiden Bilder markiert. Der Bereich innerhalb der weißen Linien

stellt das Volumen der Reaktionszone dar. In diesem Bereich überschreitet die Reaktionsrate einen festgelegten Schwellenwert. Die eingezeichnete schwarze Linie stellt die momentane makroskopische Flammenfläche dar. Zur Festlegung der Flammenfläche wird zunächst für jede axiale Rechenebene die zugehörige Position der maximalen Umsatzgeschwindigkeit in radialer Richtung gesucht. Diese Positionen werden mit stückweisen linearen Funktionen verbunden. Die Summation der Mantelflächen der so entstandenen Kegelstümpfe ergibt die zum entsprechenden Zeitschritt zugehörige Flammenfläche.

In Abb. 8.2-12 sind die zeitlichen Verläufe von integraler Umsatzgeschwindigkeit  $\langle \dot{U} \rangle_{global}$ , Flammenfläche  $\langle F \rangle$  und Flammenvolumen  $\langle V \rangle$  in jeweils einem Diagramm für die Frequenzen  $f = 60/100/150 \text{ Hz}$  verglichen. Die integrale Umsatzgeschwindigkeit (in  $[\text{kg/s}]$ ) errechnet sich aus der Summation des Produktes aus Zellvolumen (in  $[\text{m}^3]$ ) und volumenspezifischer Umsatzgeschwindigkeit (in  $[\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})]$ ) über alle Rechenzellen. Um die Phasenlage der Größen bezüglich der Anregung zu verdeutlichen, ist jeweils zusätzlich die Düsendgeschwindigkeit als gestrichelte Linie eingezeichnet. Alle Größen sind über der mit der Periodenlänge normierten Zeit aufgetragen.

Das obere Bild zeigt den Vergleich der integralen Umsatzgeschwindigkeit für die drei verschiedenen Anregungsfrequenzen. Die offenen Symbole repräsentieren eine Flamme, die mit einer unendlich kleinen Frequenz angeregt wird. Diese virtuelle Flamme wurde durch die Berechnung von zwölf stationären Flamme angenähert. Die jeweiligen Geschwindigkeiten am Düsenauslass wurden dabei gleich groß gewählt wie die zu den entsprechenden relativen Zeitpunkten im pulsierten Fall vorliegenden Geschwindigkeiten. Die Gesamtheit der so berechneten stationären Flammen wird im Folgenden als *quasistationäre* Flamme bezeichnet. Wie zu erwarten ist, gleicht der Verlauf der Umsatzrate der quasistationären Flamme bei entsprechender Skalierung der Ordinaten genau dem Verlauf der Einlassgeschwindigkeit. Das heißt, es lässt sich weder ein Phasenverzug, noch eine Amplitudenreduktion feststellen.

Die Berechnung der pulsierten Flammen (gefüllte Symbole) ergibt dagegen einen mit steigender Frequenz wachsenden Phasenversatz sowie eine abnehmende Amplitude des Umsatzes. Die Reduktion der Amplitude ist durch einen "Speichereffekt" der Flamme zu erklären. Der Maximalwert der Umsatzrate erreicht im pulsierten Fall nicht den Maximalwert der quasistationären Flamme. Der in diesem Zeitintervall reduzierte Umsatz wird zu einem späteren Zeitpunkt innerhalb der Periode "nachgeholt". In diesem Zeitbereich ist der Umsatz dann größer als der entsprechende Umsatz der quasistationären Flamme.

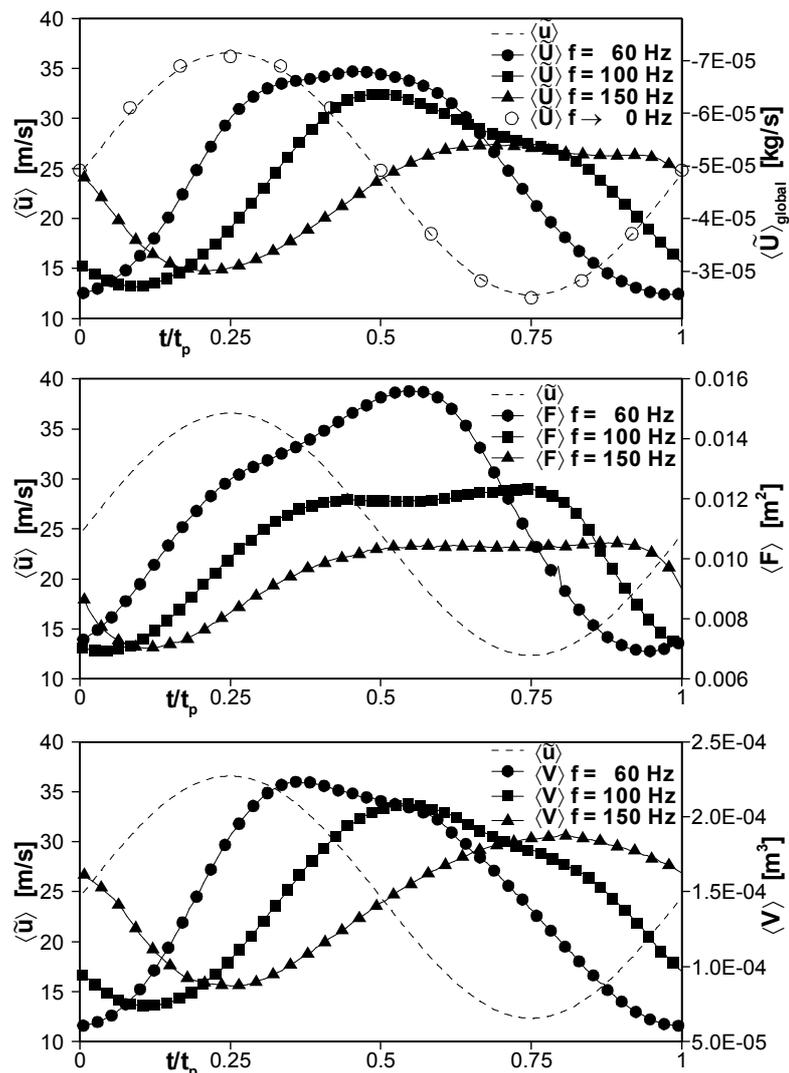


Abb. 8.2-12: Zeitliche Verläufe von integraler Umsatzgeschwindigkeit (oben),  
Flammenfläche (Mitte) und Flammenvolumen (unten) für drei verschiedene  
Anregungsfrequenzen.

Parameter:  $P_{\text{therm}} = 40 \text{ kW}$ ,  $u_0 = 24,6 \text{ m/s}$ ,  $Pu = 35\%$ .

Die Betrachtung der im mittleren und unteren Bild von Abb. 8.2-12 dargestellten Verläufe der Flammenfläche und des Flammenvolumens lässt erkennen, dass diese Größen in Bezug auf Amplitudenreduktion und Phasenlage das gleiche Verhalten wie die globale Umsatzgeschwindigkeit zeigen. Das zeitliche Verhalten der integralen Umsatzgeschwindigkeit lässt sich somit auch an der Veränderung der Flammengeometrie ablesen. Der Ringwirbel führt zu dem in Abb. 8.2-11 dargestellten Zeitschritt ( $t/t_p = 0,75$ ) sowohl zu einer makroskopischen Aufwellung der Flammenfläche als auch zu einer Vergrößerung des gesamten Reaktionsvolumens.

## 8.3 Die Flamme als nichtlineares zeitvariantes Übertragungsglied

Die Stabilitätsuntersuchung eines Verbrennungssystems geht vom Beginn einer selbsterregten Schwingung aus. In diesem Fall sind die Amplituden noch klein und es kann ein näherungsweise *lineares* Systemverhalten vorausgesetzt werden (BOHN [Vi18]). Für *lineare zeitinvariante* Systeme kann der Frequenzgang sowohl aus der Gewichtsfunktion  $g(t)$  als auch aus der Übergangsfunktion  $h(t)$  bestimmt werden (s. Kap. 2.2.1.7). In der vorliegenden Arbeit soll jedoch das dynamische Verhalten von Vormischflammen bei ausgebildeten Verbrennungsschwingungen untersucht werden. Diese stehen unter dem Einfluss der Bildung kohärenter Ringwirbelstrukturen. In diesem Fall kann nicht mehr von einem linearen Systemverhalten ausgegangen werden. Weiterhin ist eine derart pulsierte Flamme nicht mehr zeitinvariant, d. h. das dynamische Verhalten ändert sich im Verlauf einer Schwingungsperiode, was sich unter anderem in der zeitabhängigen Form der Verweilzeitverteilung manifestiert (s. Kap. 8.2.2). Das Systemverhalten eines *nichtlinearen zeitvarianten* Systems kann prinzipiell immer durch die Verschaltung linearer Übertragungsglieder approximiert werden (s. Kap. 2.2.1.8). Die physikalische Interpretation der zur Konstruktion der einzelnen Übertragungsglieder eingehenden Größen ist damit allerdings schwierig.

### 8.3.1 Modell der verteilten Totzeit

#### Die direkte Methode zur Bestimmung des Flammenfrequenzganges

Die *direkte* Methode (s. Kap. 2.2.1.7) stellt den einzig gangbaren Weg zur Bestimmung des Frequenzganges eines *nichtlinearen* Systems dar. Dabei wird die Flamme über eine periodische Modulation des Frischgemischmassenstromes angeregt. Die Auswertung der Flammenantwort in Phase und Amplitude für eine Vielzahl diskreter Frequenzen ergibt in Summe den Flammenfrequenzgang. Um eine hinreichende Trennung des charakteristischen Zeitmaßes der periodischen Strömungsstörung vom charakteristischen Zeitmaß  $k/\varepsilon$  der Turbulenz zu gewährleisten, wurden nur niederfrequente Schwingungen mit einer Frequenz bis zu 200 Hz untersucht. Diese dominieren jedoch hinsichtlich ihrer Bedeutung in der Anwendung. Zur Auswertung einer für eine einzelne Frequenz durchgeführten instationären URANS-Modellierung reicht es theoretisch aus, eine einzige Schwingungsperiode des instationären Verbrennungsprozesses zu berechnen. Um ein hinreichendes Einschwingen der Vorganges bei der Variation eines Parameters zu gewährleisten, war es jedoch erforderlich, bis zu zehn Perioden zu berechnen. Dies erforderte für eine instationäre Rechnung abhängig von der Frequenz Rechenzeiten von einigen Stunden (große Frequenzen) bis hin zu drei Wochen (kleine Frequenzen) auf einzelnen PC's (serielle Arbeitsweise) des Linux-Clusters des Engler-Bunte-Institutes.

#### Die indirekte Methode zur Bestimmung des Flammenfrequenzganges

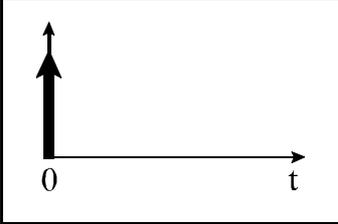
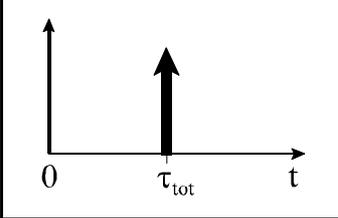
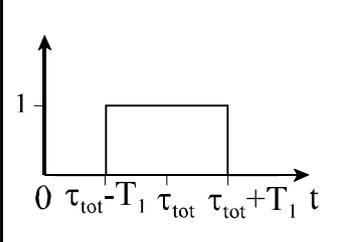
Wird bei einem totzeitbehafteten Systems die Eingangsgröße verändert, so erfolgt eine sich daraus ergebende Änderung des Ausgangssignales erst nach einer gewissen Totzeit  $\tau_{tot}$ . Eine Flamme stellt ein totzeitbehaftetes System dar, da Verzugszeiten (konvektiv,

chemisch, diffusiv) in Erscheinung treten. Im Folgenden soll zunächst der Frequenzgang verschiedener totzeitbehafteter Systeme diskutiert werden. Ausgangspunkt ist dabei jeweils die Gewichtsfunktion  $g(t)$ . Diese stellt das Antwortsignal eines linearen Systems auf die Anregung mit einem Dirac-Stoß  $\delta(t)$  dar. Wird die Gewichtsfunktion unter Anwendung der Fourier-Transformation in den Frequenzbereich überführt, so ergibt sich der Frequenzgang des Systemes (KORN [So9]):

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} \quad (8.3-1)$$

Diese Vorgehensweise wird im Weiteren zur Unterscheidung mit der oben angeführten *direkten* Methode als *indirekte* Methode bezeichnet (s. auch Kap. 2.2.1.7).

Tab. 8.3-1: Gewichtungsfunktionen und zugehörige Frequenzgänge (MESCH [So5])

Gewichtungsfunktion	Frequenzgang	Amplitudengang	Phasengang
$g(t)$	$F(j\omega)$	$ F(j\omega) $	$\varphi(\omega)$
	1	1	0
	$1 \cdot e^{-j\omega \tau_{tot}}$	1	$-\omega \tau_{tot}$
	$2 \cdot T_1 \cdot \frac{\sin(\omega T_1)}{(\omega T_1)} \cdot e^{-j\omega \tau_{tot}}$	$2 \cdot T_1 \cdot \frac{\sin(\omega T_1)}{(\omega T_1)}$	$-\omega \tau_{tot}$

In Tabelle 8.3-1 sind die sich für verschiedene Gewichtsfunktionen ergebenden Frequenzgänge sowie deren Amplituden und Phasengänge aufgeführt. Ist die Gewichtsfunktion eines Systemes ein Dirac-Stoß  $g(t) = \delta(t)$ , so ist der dazugehörige Frequenzgang  $F(j\omega) = 1$ . Ist die Gewichtsfunktion eines Systemes dagegen ein um die Totzeit  $\tau_{tot}$  verschobener Dirac-Stoß  $g(t) = \delta(t - \tau_{tot})$  ergibt sich als Frequenzgang  $F(j\omega) = 1 \cdot e^{-j\omega \tau_{tot}}$ . Dabei wird von dem Verschiebungssatz der Fourier-Transformation Gebrauch gemacht.

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{g(t - \tau_t)\} = \mathcal{F}\{g(t)\} \cdot e^{-j\omega \tau_{tot}} \quad (8.3-2)$$

Die Modellvorstellung der Flamme als ein Übertragungsglied mit rechteckförmiger

## Totzeitverteilung

Gewichtsfunktionen von Systemen, die eine Totzeitverteilung aufweisen, weisen eine zeitliche Erstreckung auf. Das heißt eine mittels eines unendlich kurzen Dirac-Stoßes am Eingang aufgeprägtes Signal wird im System zwischengespeichert und lässt sich in Form eines zeitlichen Verlaufes am Ausgang wiederfinden. In Tabelle 8.3-1 ist die Gewichtsfunktion eines Systemes angegeben, welches auf eine Stoßfunktion mit einem zeitlich verschobenen Rechtecksignal bzw. einer rechteckförmigen Totzeitverteilung antwortet.

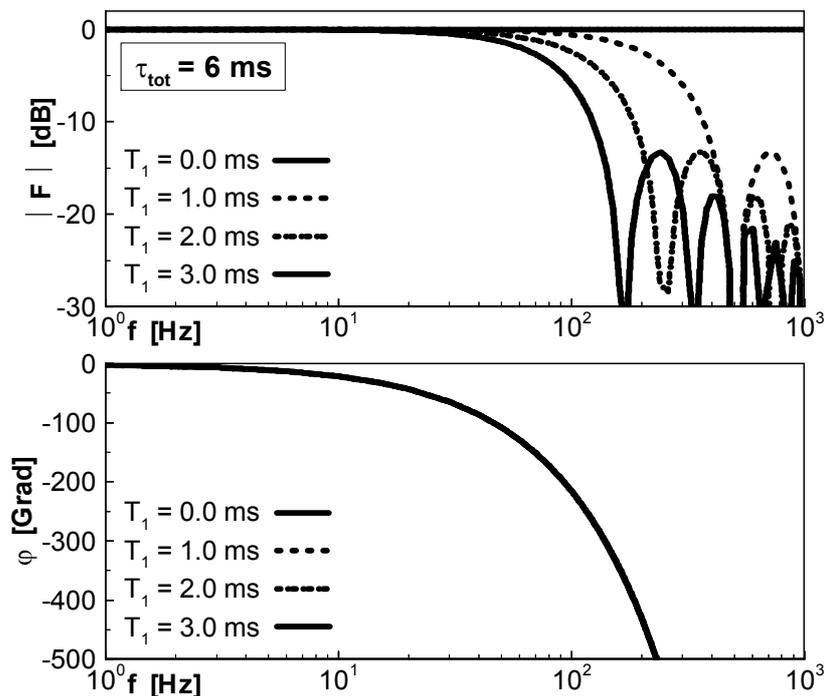


Abb. 8.3-1: Frequenzgänge von Systemen mit rechteckförmiger Totzeitverteilung

Abb. 8.3-1 zeigt den zugehörigen Frequenzgang. Parameter ist die zeitliche Erstreckung  $T_1$  des Antwortsignals. Für alle Verteilungsbreiten ergibt sich der gleiche Phasengang, sofern der Mittelwert  $\tau_f$  der Totzeitverteilung der gleiche ist. Die Phasenkennlinie fällt mit wachsender Frequenz in Richtung  $-\infty$  ab. Ein System, welches keine zeitliche Erstreckung der Gewichtsfunktion aufweist, wird oftmals auch als *ideales Totzeitglied* bezeichnet (s. Kap. 2.2.1.5). Dessen Amplitudengang weist einen frequenzunabhängigen, konstanten Wert von null db auf. In Bezug auf das System *Flamme* würde dies bedeuten, dass eine am Düsenaustritt innerhalb einer unendlich kurzen Zeitspanne eingebrachte infinitesimal kleine Brennstoffmenge nach Verstreichen einer Totzeit  $\tau_f$  innerhalb einer unendlich kurzen Zeitspanne abreagiert. Weist ein System jedoch eine Totzeitverteilung auf, so führt die zeitlich verteilte "Ankunft" der zusätzlich zugeführten Brennstoffmenge an verschiedenen Positionen der Reaktionszone zu einer zeitlichen Verteilung der Umsatzrate. Teile der eingespeisten Brennstoffmasse halten sich unterschiedlich lange im Bereich innerhalb des Flammenkegels auf bzw. werden zwischengespeichert. Der

Maximalwert des sich ergebenden zeitlichen Verlaufes des Umsatzes ist umso kleiner, je breiter die Totzeitverteilung ist. Bei einem derartigen System fällt die Amplitudenkennlinie mit steigender Frequenz zunehmend ab und weist dabei Sattelpunkte auf (s. Abb. 8.3-1). Diese Charakteristik ist auch bei experimentell bestimmten Frequenzgängen zu erkennen (vgl. Kap. 2.2.1.8).

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird das Modell einer rechteckförmigen Totzeitverteilung verwendet, um den Einfluss verschiedener Parameter auf den Flammenfrequenzgang zu erklären. Dabei wird davon ausgegangen, dass die hier betrachteten Axialstrahlflammen von den konvektiven Verzugszeiten dominiert werden. Diese heißt, dass weitere Zeitanteile wie die Verzugszeit zum Aufheizen des Gemisches auf Zündtemperatur sowie reaktionskinetische Verzugszeiten keinen wesentlichen Beitrag zur flammeninternen Gesamtverzugszeit liefern (BÜCHNER [Vi1]). Die Verweilzeitverteilung bzw. das "Alter" des innerhalb der Reaktionszone reagierenden Brennstoffes repräsentiert dabei die Totzeitverteilung der Flamme. Das Verweilzeitspektrum wird bei dieser Betrachtungsweise als Gewichtsfunktion (Stoßantwort) des Systemes *Flamme* interpretiert. Diese Betrachtungsweise steht in Analogie zur Beschreibung chemischer Reaktoren (BOCKHORN [So10]). Die Modellvorstellung der Flamme als ein Übertragungsglied mit rechteckförmigen Totzeitverteilung impliziert weiterhin, dass der Phasengang ausschließlich vom Mittelwert des Verweilzeitspektrums bestimmt wird und der Amplitudengang ausschließlich von der Breite des Verweilzeitspektrums.

### 8.3.2 Vergleich von direkter und indirekter Methode

Bei Anwendung der *direkten* Methode wird der instationäre Verbrennungsprozess in seinem zeitlichen Verlauf berechnet. Bei der *indirekten* Methode wird davon ausgegangen dass die Verweilzeitverteilung des reagierenden Brennstoffes als Gewichtsfunktion  $g(t)$  interpretiert werden kann. Die Wirkung einer verteilten Totzeit kann anschaulich durch einen virtuellen Färbeversuch verdeutlicht werden. Wird der Brennstoff in der Düsenaustrittsebene innerhalb einer infinitesimal kurzen Zeitspanne eingefärbt, so stellt dies die Anregung bzw. den Dirac-Stoß  $\delta(t)$  dar. Da das System Flamme eine Totzeitverteilung aufweist, so führt die zeitlich verteilte "Ankunft" der gefärbten Brennstoffmenge an verschiedenen Positionen der Reaktionszone zu einer zeitlichen Verteilung des Reaktionsumsatzes. Teile der gefärbten Brennstoffmasse halten sich unterschiedlich lange im Bereich innerhalb des Flammenkegels auf bzw. werden zwischengespeichert. Die Anwendung der *direkten* Methode ist zunächst nur für *lineare zeitinvariante* Systeme gerechtfertigt (s. o.). Trotzdem soll an dieser Stelle untersucht werden, inwieweit der Flammenfrequenzgang *pulsierter* Flammen aus der Analyse der jeweiligen *stationären* Flammen vorhergesagt werden kann. Ausgangspunkt der Betrachtung ist die Berechnung von drei stationären Axialstrahlflammen unterschiedlicher thermischer Leistung ( $P_{therm} = 20/40/60 \text{ kW}$ ). Einige Ergebnisse wurden bereits in Kap. 7 diskutiert.

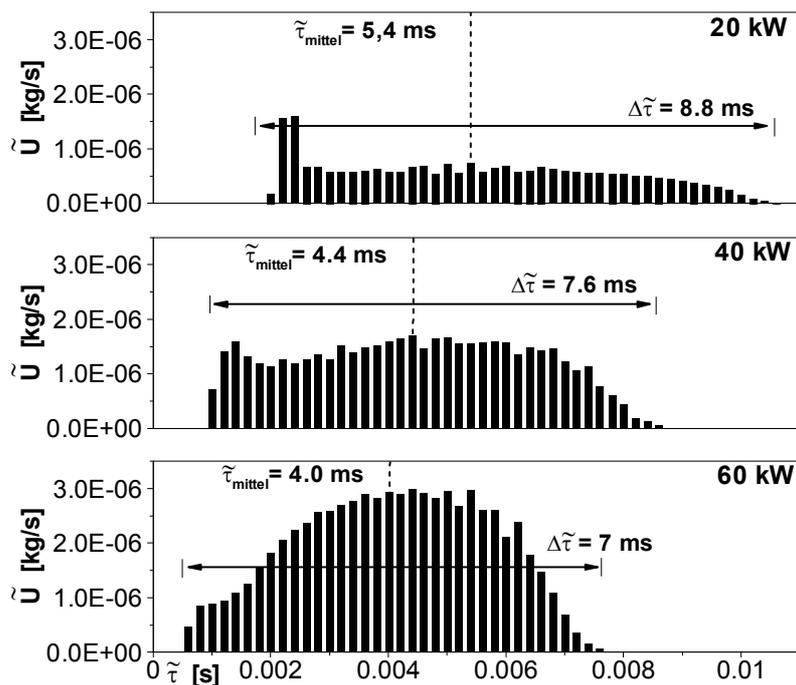


Abb. 8.3-2: Stationäre Flammen: Verweilzeitspektren des reagierenden Brennstoffes. Parameter:  $P_{therm} = 20/40/60 \text{ kW}$ ,  $Pu = 15\%$ .

In Abb. 8.3-2 sind die zugehörigen Verweilzeitspektren des reagierenden Brennstoffes dargestellt. Die durch die Höhe eines jeden Balkens ausgewiesene anteilige integrale Umsatzgeschwindigkeit ( $\tilde{U}$  in  $[\text{kg/s}]$ ) liegt innerhalb dem durch die Position des Balkens auf der Verweilzeitachse definierten Verweilzeitintervall („Brennstoffalter“). Je größer die thermische Leistung, desto kleiner sind Mittelwert  $\tilde{\tau}_{mittel}$  und Breite  $\Delta\tilde{\tau}$  des Verweilzeitspektrums. Nach dem in Kap. 8.3.2 vorgestellten Totzeitglied mit rechteckförmiger Totzeitverteilung ist der Amplitudengang nur von der Breite und der Phasengang nur vom Mittelwert des Antwortsignales abhängig. Werden die dargestellten Verweilzeitspektren in grober Näherung als rechteckförmige Funktionen interpretiert, so ist nach der oben eingeführten Modellvorstellung eine mit steigender thermischer Leistung kleiner werdende Amplitudenreduktion sowie ein kleiner werdender Phasennachlauf zu erwarten. Um aus den Verweilzeitspektren die Frequenzgänge zu erhalten, wurden diese unter Anwendung einer diskreten Fourier-Transformation in den Frequenzbereich überführt.

In Abb. 8.3-3 sind die Frequenzkennlinien im Vergleich gezeigt. Die Kurven ohne Symbole kennzeichnen die Ergebnisse der *indirekten* Methode, die Kurven mit Symbolen die Ergebnisse der *direkten* Methode. Die Amplitudenwerte werden jeweils mit wachsender thermischer Leistung größer. Die sich aus der Anwendung der *indirekten* Methode ergebenden Amplitudenwerte sind für eine konstante Frequenz jedoch kleiner als die Amplitudenwerte, die sich aus der *direkten* Methode ergeben. Diese Differenz ist vor allem durch das nichtlineare Verhalten der Flamme verursacht. So ist die bei der Berechnung der *direkten* Methode wie auch bei den Messwerten für moderate Frequenzen zu beobachtende Überhöhung der Amplitudengänge vor allem auf die

Ringwirbelbildung zurückzuführen (s. Kap. 8.5.4). Mit der *indirekten* Methode können die Amplitudengänge somit nur qualitativ vorhergesagt werden.

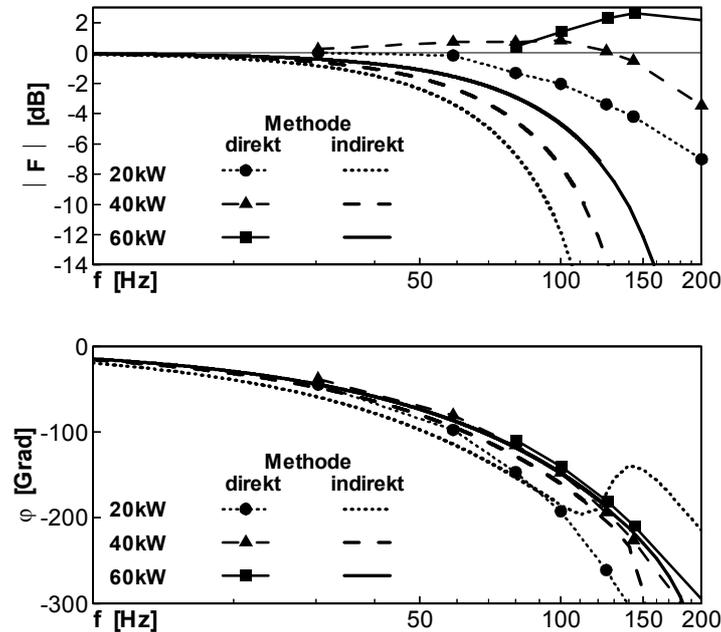


Abb. 8.3-3: Vergleich der Methoden direkt/indirekt (Rechnung mit originalem Ratenterm). Parameter:  $P_{therm} = 20/40/60 \text{ kW}$ ,  $Pu = 15\%$ .

Der Einfluss einer wachsenden thermischen Leistung wirkt sich in einer Abnahme des Phasennachlaufes ab. Die mit den zwei unterschiedlichen Methoden ermittelten Phasengänge zeigen für die Flammen 40 u. 60 kW bis zu Frequenzen von 150 Hz eine sehr gute Übereinstimmung. Bei der 20 kW Flamme weicht der mit der *direkten* Methode ermittelte Phasengang für Frequenzen oberhalb 100 Hz stark von dem mit der *indirekten* Methode ermittelten Phasengang ab. Diese Abweichung ist vor allem auf das im Verweilzeitspektrum der zugehörigen stationären Flamme bei kleinen Verweilzeiten auftretende Maximum zurückzuführen (s. Abb. 8.3-1). In Kap. 7.2 wurde gezeigt, dass dieses Maximum aus einer Überschätzung der Umsatzgeschwindigkeit an der Flammenbasis resultiert. Die Ergebnisse zeigen, dass sich die Phasengänge mit der *indirekten* Methode sehr gut vorhersagen lassen. Dies liegt daran, dass der Mittelwert des Verweilzeitspektrums  $\bar{\tau}_{mittel}$  der stationären Flamme ein charakteristisches globales Zeitmaß  $\tau_{Flamme}$  darstellt. Dieses Zeitmaß bleibt auch bei der instationären Flamme innerhalb der Pulsationsperiode nahezu konstant (s. Kap. 8.2.2). Das nichtlineare Verhalten der Flamme beeinflusst somit nahezu nicht die vorherrschende mittlere konvektive Verzugszeit. Aus diesem Grund ist es möglich, den Phasengang der pulsierten Flammen in guter Näherung aus der Analyse der entsprechenden stationären Flammen abzuleiten.

## 8.4 Vergleich berechneter Flammenfrequenzgänge mit Messdaten

Im vorliegenden Kapitel wird der Vergleich von berechneten und gemessenen Frequenzgängen *pulsierter* vorgemischter freibrennender Axialstrahlflammen vorgestellt. Modelliert wurden Flammen mit drei unterschiedlichen thermischen Leistungen ( $P_{\text{therm}} = 20/40/60 \text{ kW}$ ). Für die 40 kW-Flamme wurde zusätzlich der Pulsationsgrad variiert ( $Pu = 15/35\%$ ). Die zum Vergleich der Rechenergebnisse herangezogenen Messdaten stammen aus der Arbeit von KÜLSHEIMER [Vi6]. Zur Berechnung der in den Kapiteln 8.4 und 8.5 gezeigten Ergebnisse wurde die *direkte* Methode zur Bestimmung von Flammenfrequenzgängen angewendet. Dabei wird die Flamme über eine Modulation des Frischgemischmassenstromes periodisch angeregt. Die Auswertung der Flammenantwort in Phase und Amplitude für eine Vielzahl diskreter Frequenzen ergibt in Summe den Flammenfrequenzgang. Zur Bestimmung der Flammenfrequenzgänge wurde im Experiment die globale Strahlungsintensität angeregter OH-Radikale verwendet. Bei der Modellierung wurde dagegen die integrale Umsatzgeschwindigkeit ausgewertet.

### 8.4.1 Variation der thermischen Leistung

Abb. 8.4-1 zeigt den Vergleich von Rechnung und Messung bei einer Variation der thermischen Leistung. Die berechneten wie auch die gemessenen Amplitudengänge ordnen sich gestaffelt nach der thermischen Leistung an und zeigen die gleichen charakteristischen Abhängigkeiten. Für kleine Frequenzen (quasistationäre Flammen) orientieren sich die Verläufe an der 0 dB – Linie, um dann für größere Frequenzen zunehmend abzufallen. In diesem Bereich liegen die berechneten Amplitudengänge jeweils oberhalb den gemessenen Amplitudengängen. Zwischen den asymptotischen Bereichen zeigt sich eine mit wachsender thermischer Leistung zunehmende Überhöhung. Im Fall der 60 kW-Flamme war für kleine Frequenzen keine stabile Flamme zu erzielen. Bei dieser Konfiguration stellen sich bei kleinen Frequenzen relative große Änderungen der Flammenlänge ein. Dies führt in der Beschleunigungsphase der Einlassgeschwindigkeit zu einem teilweisen Abriss der Flamme und daraufhin zu stark nichtlinearen Verläufen der integralen Umsatzgeschwindigkeit. Die Phasengänge starten für kleine Frequenzen bei null Grad und fallen für wachsende Frequenzen gegen minus unendlich ab. Darin manifestiert sich das im dynamischen Gesamtverhalten beinhaltete Totzeitverhalten.

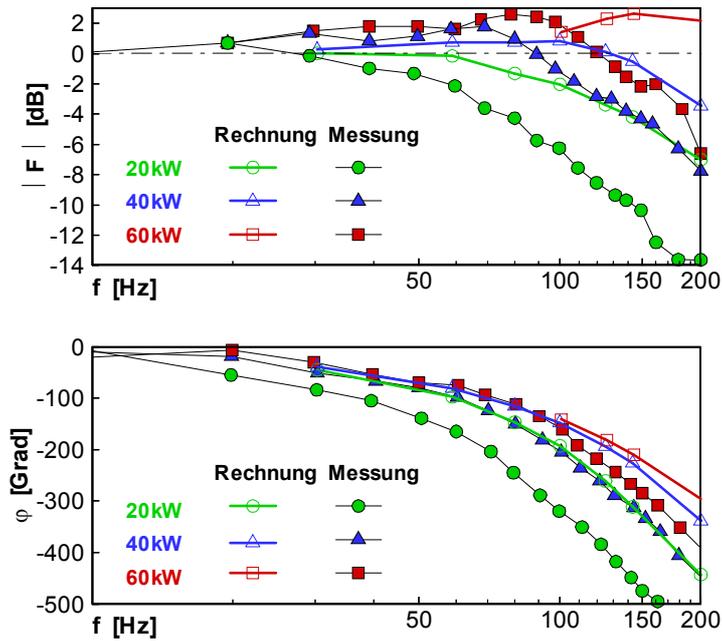


Abb. 8.4-1: Vergleich von gemessenen und berechneten Flammenfrequenzgängen (Rechnung mit originalem Ratenterm). Parameter:  $P_{therm} = 20/40/60\text{ kW}$ ,  $Pu = 15\%$ .

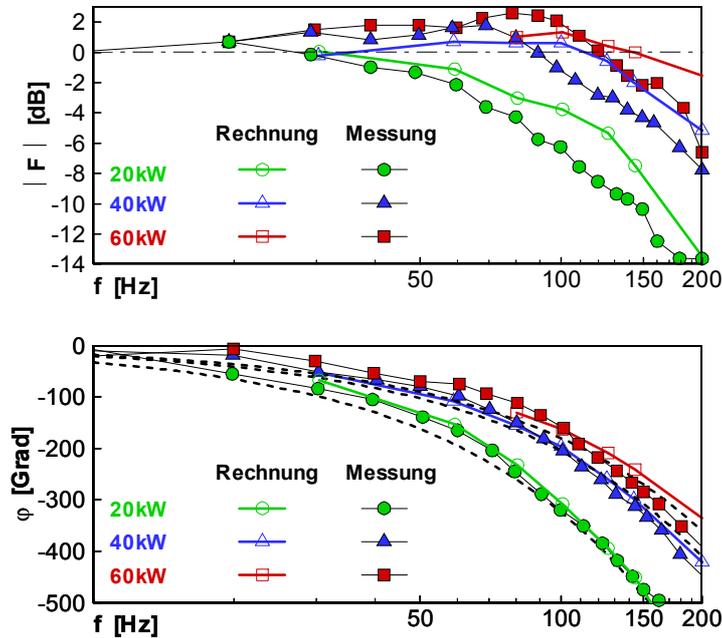


Abb. 8.4-2: Vergleich von gemessenen und berechneten Flammenfrequenzgängen (Rechnung mit reduziertem Ratenterm). Parameter:  $P_{therm} = 20/40/60\text{ kW}$ ,  $Pu = 15\%$ .

Der Phasenverzug reduziert sich mit wachsender thermischer Leistung. Die berechneten Phasengänge liegen dabei bei größeren Werten (d. h. kleineren Phasennachläufen) als die jeweiligen gemessenen Phasengänge.

Die in Abb. 8.4-1 gezeigten berechneten Frequenzgänge wurden unter Verwendung der originalen Formulierung des Ratentermes des PHP-Verbrennungsmodelles erzielt. Die in Kapitel 7 vorgestellte Analyse der entsprechenden stationären Flammen ergab, dass von der Modellierung zu kleine konvektive Verzugszeiten bzw. zu kleine Flammenlängen vorhergesagt werden. Wird der Ratenterm durch einen von der thermischen Leistung abhängigen Faktor reduziert und damit die turbulente Brenngeschwindigkeit erniedrigt, stellen sich längere stationäre Flammen ein und es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen gemessenen und berechneten charakteristischen Verzugszeiten. Die bereits bei der Berechnung der stationären Flammen ermittelten Reduktionsfaktoren für den Ratenterm wurden nun ebenfalls zur Berechnung der pulsierten Flammen verwendet.

Die sich daraus ergebenden Frequenzgänge sind in Abb. 8.4-2 gezeigt. Die verwendeten Reduktionsfaktoren sind jeweils angegeben. Zwischen berechneten und gemessenen Phasengängen ergibt sich nun eine sehr gute Übereinstimmung. BÜCHNER [Vi1] zeigte, dass sich der gemessene Phasenverlauf einer pulsierten Axialstrahlflamme in guter Näherung durch den Phasenverlauf eines idealen Totzeitgliedes approximieren lässt. Die frequenzunabhängige Totzeit  $\tau_{Flamme}$  der Flamme kann als charakteristische konvektive Verzugszeit gedeutet werden. Diese lässt sich aus der Untersuchung der zugehörigen stationären Flamme ermitteln (s. Kap. 7):

$$\tau_{Flamme} \approx \tau_{char,stat} = x_{Max}/u_0 \quad . \quad (8.4-1)$$

In Kap. 8.2.2 wurde weiterhin gezeigt, dass sich die frequenzunabhängige Totzeit  $\tau_{Flamme}$  der Flamme sowohl aus der mittleren Verweilzeit der entsprechenden stationären Flamme gleicher thermischer Leistung als auch aus der periodengemittelten Verweilzeitverteilung der pulsierten Flamme gewinnen lässt:

$$\tau_{Flamme} \approx \tau_{char,stat} \approx \tilde{\tau}_{mittel,stat} \approx \overline{\langle \tilde{\tau}(t) \rangle}_{mittel} \quad . \quad (8.4-2)$$

Die in Abb. 8.4-2 zusätzlich eingezeichneten schwarzen gestrichelten Linien geben die mit der Beziehung

$$\varphi(f) = -\omega \cdot \tau_{Flamme} = -2\pi \cdot f \cdot \tau_{Flamme} \cdot 360^\circ$$

bestimmten Phasengänge von drei idealen Totzeitgliedern wieder. Für die drei Flammen mit den thermischen Leistungen  $P_{therm} = 20/40/60 \text{ kW}$  wurden dabei folgende Werte für die Totzeiten verwendet:  $\tau_{Flamme} = 9/5,7/5,0 \text{ ms}$ . Es ist zu erkennen, dass die Phasengänge der jeweiligen Totzeitglieder die berechneten wie auch die gemessenen Phasengänge sehr gut wiedergeben. Obwohl die pulsierten Flammen, wie in Kap. 8.3 diskutiert wurde, ein

nichtlineares zeitvariantes Übertragungsverhalten aufweisen, so kann doch das zeitgemittelte Phasenverhalten durch diese einfache Beschreibung approximiert werden. Damit wird die von BÜCHNER [Vi1] auf Grund experimenteller Untersuchungen gefundene Modellvorstellung des Phasenverhaltens turbulenter Axialstrahlflammen bestätigt.

Der Phasennachlauf, bzw. die charakteristische konvektive Verzugszeit, reduziert sich mit steigender thermischer Leistung. Diese Tendenz lässt sich durch folgende Beziehung, welche die charakteristische Verzugszeit  $\tau_{char,stat}$  mit der zeitgemittelten Düsenaustrittsgeschwindigkeit  $u_0$  verknüpft, darstellen:

$$\tau_{char,stat} = \frac{x_{Max}}{u_0} \sim \frac{H}{u_0} \sim \frac{u_0 \cdot D}{u_0 \cdot S_f} \sim \frac{1}{S_f} \sim \frac{1}{u'} \sim \frac{1}{Tu \cdot u_0} \sim \frac{1}{u_0} \quad (8.4-3)$$

Die charakteristische Verzugszeit der stationären Flamme kann als Verhältnis der axialen Position  $x_{Max}$  des Maximums der Strahlungsverteilung bzw. der längenbezogenen volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit und der Düsenaustrittsgeschwindigkeit definiert (s. Kap. 8.2.2). Die axiale Position des Maximums steht in einem festen Verhältnis zur Flammenlänge  $H$  (s. Kap. 7). Die Länge einer spitzen Kegelflamme verhält sich wie  $H \sim D \cdot u_0 / S_f$ , wobei  $D$  der konstante Düsendurchmesser ist. Damit ergibt sich, dass sich die charakteristische Verzugszeit umgekehrt proportional zur Flammengeschwindigkeit  $S_f$  verhält. Diese kann bei den vorliegenden schwach turbulenten Flammen in erster Näherung als proportional zur Schwankungsgeschwindigkeit  $u'$  angenommen werden. Ist der Turbulenzgrad  $Tu$  der Düsenströmung unabhängig von der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, was in der Realität in guter Näherung zutrifft, so ergibt sich weiterhin, dass sich die Flammengeschwindigkeit proportional zur Düsenaustrittsgeschwindigkeit verhält. Obwohl mit steigender thermischer Leistung bzw. Düsenaustrittsgeschwindigkeit die Flammenlänge ansteigt, ergibt sich eine kleinere charakteristische Verzugszeit. Damit ist eine Reduktion des Phasennachlaufes verbunden.

Die Staffelung der Amplitudengänge mit der thermischen Leistung kann über die Breite der Verweilzeitverteilung erklärt werden. Mit steigender thermischer Leistung reduziert sich die den Phasenwinkel dominierende mittlere Verweilzeit und damit auch zwangsläufig deren Verteilungsbreite. Damit ergibt sich eine schwächere Amplitudenreduktion. Die sich unter Verwendung des reduzierten Ratentermes ergebenden Amplitudenwerte sind kleiner als die sich mit der originalen Formulierung berechneten Amplitudenwerte. Die Amplitudenkennlinien liegen jedoch im größten Frequenzbereich typischerweise immer noch oberhalb der Messwerte. Es wurde bereits bei der Diskussion der stationären Flammen darauf hingewiesen, dass ein quantitativer Vergleich von gemessener OH-Strahlung und berechneter Umsatzgeschwindigkeit für turbulente Flammen nicht möglich ist. Die durch die Ringwirbel verursachte Einmischung von Umgebungsluft führt zu einer Vergrößerung der Luftzahl in der Reaktionszone und damit zu einer Erniedrigung der Verbrennungstemperatur. Dies hat im Experiment einen starken Rückgang der Amplitude der Strahlungsintensität zur Folge. Da bei der

Modellierung jedoch die integrale Umsatzgeschwindigkeit ausgewertet wird, wirkt sich dieser Effekt nicht aus. Damit kann erklärt werden, dass die aus den Experimenten ermittelte Amplitudenreduktion für wachsende Frequenzen tendenziell größer ist als bei der Rechnung. Die Berechnungen zeigen, dass die in der Literatur teilweise vertretene Modellvorstellung, in welcher die vorgemischte Axialstrahlflamme als ideales Totzeitglied behandelt wird, nicht der Realität entspricht.

### 8.4.2 Variation des Pulsationsgrades

Abb. 8.4-3 zeigt den Vergleich von berechneten und gemessenen Frequenzgängen bei einer Variation des Pulsationsgrades. Der Einfluss des Pulsationsgrades auf den Amplitudengang zeigt in Modellierung und Experiment die gleichen Tendenzen. Die durch die Ringwirbel bedingte Einmischung von Umgebungsmedium in die Reaktionszone wächst mit zunehmendem Pulsationsgrad an. Wie schon in Kap. 8.2.3 gezeigt wurde, reagiert bei einem Pulsationsgrad von 35% ein beträchtlicher Teil des Brennstoffes unter luftreichen Bedingungen ab. Damit steigt der Einfluss des im Experiment aufgrund der Temperaturabsenkung zu beobachtenden Effektes der Reduktion der Intensität der OH-Strahlung an, was zu einem zusätzlichen Rückgang der gemessenen Amplitudenwerte gegenüber der Rechnung führt.

Die Auswirkung eines größeren Pulsationsgrades auf den berechneten Frequenzgang lässt die gleichen Charakteristiken erkennen, die später bei der Diskussion des separierten Einflusses der Flammenfläche vorgestellt werden (s. Kap. 8.5.4). Bei steigendem Pulsationsgrad nimmt die Amplitude ab. Die beim Pulsationsgrad von 15% für kleine Frequenzen auftretende Amplitudenerhöhung ist ebenfalls durch die Variation der Flammenfläche induziert. Durch die radial abfließende Masse und die dadurch bedingte makroskopische Auffaltung der Flammenfläche wird die Amplitude der integralen Umsatzgeschwindigkeit bei kleinen Frequenzen größer als die Amplitude der Massenstromschwankung. Daraus lässt sich ableiten, dass die zeitabhängige Form der makroskopischen Flammenfläche auch in der Realität einen großen Einfluss auf den Frequenzgang ausübt und nicht nur auf Mischungseffekte zurückzuführen ist.

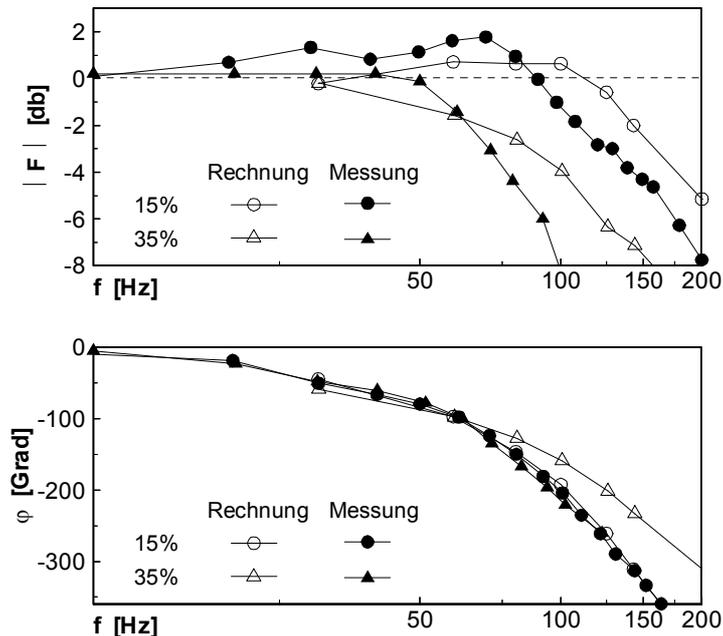


Abb. 8.4-3: Vergleich von gemessenen und berechneten Flammenfrequenzgängen (Rechnung mit reduziertem Ratenterm). Parameter:  $P_{therm} = 40 kW$ ,  $Pu = 15/35\%$ .

Die gemessene Unabhängigkeit des Phasenwinkels vom Pulsationsgrad kann von der Rechnung nur für kleine Frequenzen wiedergegeben werden. Für den Pulsationsgrad 35% zeigt die Rechnung mit wachsender Frequenz einen zunehmend zu kleinen Phasenverzug. Es konnte verifiziert werden, dass die Flamme mit dem größeren Pulsationsgrad bei der Modellierung im Mittel etwas kürzer und die mittlere Verzugszeit somit etwas kleiner ist. Der Phasenverzug wird somit ebenfalls geringer. In diesem Bereich ist der Effekt der Einmischung, der bei der Modellierung zu einer Reduktion der turbulenten Brenngeschwindigkeit führt, so groß, dass die Verwendung des zunächst nur für perfekt vorgemischte Flammen bzw. mit nur schwacher Einmischung hergeleiteten PHP-Verbrennungsmodelles zunehmend fragwürdig wird.

## 8.5 Separation von Einflussgrößen auf den Flammenfrequenzgang

### 8.5.1 Vorgehensweise

In Kap. 6 wurde bereits die analytische Berechnung der Frequenzgänge von idealisierten Kegelflammen vorgestellt. Um die analytische Bearbeitung zu ermöglichen, wurden verschiedene vereinfachende Annahmen getroffen. Die Berücksichtigung der in der Realität vorhandenen turbulenten Strömungs- und Mischungsprozesse erfordert jedoch die Verwendung eines Feldmodelles. Eine Analyse der Auswirkungen einzelner

Teilprozesse auf den Flammenfrequenzgang kann außerdem nur gelingen, wenn deren Auswirkungen separiert werden können. Zunächst soll die bei der Separation des Einflusses einzelner Parameter auf den Flammenfrequenzgang angewendete Vorgehensweise erläutert werden. Zu diesem Zweck wird im Folgenden eine Formulierung des Ratentermes benutzt, der bei FSD (**F**lame-**S**urface-**D**ensity)-Verbrennungsmodellen üblich ist. Dieser Ausdruck soll jedoch nur zur Anschaulichkeit dienen. Alle weiteren gezeigten Ergebnisse wurden unter Verwendung des PHP-Verbrennungsmodelles erzielt. Verbrennungsmodelle, die auf dem Konzept der Flammenfrontdichte basieren, gehen generell davon aus, dass die Reaktionsfront als dünn gegenüber den Abmessungen der Wirbelelemente betrachtet werden kann. Ihre Gültigkeit ist damit auf den Bereich der *Flamelets* ( $Ka_f < 1$ ) begrenzt (HOFFMANN [Va8]). Wie bereits in Kap. 7 gezeigt wurde, liegen die hier betrachteten Flammen in diesem Bereich. Bei der Formulierung der Umsatzgeschwindigkeit kann dann von einer formalen Entkoppelung von Turbulenz und Chemie ausgegangen werden. Damit lässt sich die in die Transportgleichung für den Brennstoff eingehende Quellterm  $\bar{\omega}$  als Produkt der Flammenfrontoberflächendichte  $\bar{\Sigma}$  und einer lokalen Umsatzgeschwindigkeit  $\bar{\Omega}$  darstellen:

$$\bar{\omega} = \bar{\Sigma} \cdot \bar{\Omega} = \bar{\Sigma} \cdot \varrho_0 \cdot S_f \quad (8.5-1)$$

Die zeitlich gemittelte Flammenfrontoberflächendichte  $\bar{\Sigma}$  (in  $[m^2/m^3]$ ) ist ein Maß für die pro Volumeneinheit Flamme zur Verfügung stehende (laminare) Flammenfrontoberfläche. Die Umsatzgeschwindigkeit pro Flammenfrontoberflächeneinheit  $\bar{\Omega}$  (in  $[kg/(m^2 \cdot s)]$ ) ist im einfachsten Fall über die Brenngeschwindigkeit  $S_f$  der laminaren, planaren, ungestreckten Flamme definiert. Die integrale Umsatzgeschwindigkeit  $\tilde{U}_{global}$  (in  $[kg/s]$ ) einer Flamme ergibt sich durch Integration der volumenspezifischen Umsatzgeschwindigkeit über das gesamte Flammenvolumen bzw. numerisch durch Summation über alle Rechenzellen. Geht man in erster Näherung davon aus, dass der Reaktionsquellterm  $\bar{\omega}$  innerhalb des Volumens der Reaktionszone überall konstant ist, so lässt sich der momentane Globalumsatz einer Flamme als Produkt aus volumenspezifischer Umsatzgeschwindigkeit und Flammenvolumen darstellen, wobei sich das Flammenvolumen über die makroskopische Flammenfläche  $F$  und die makroskopische Flammendicke  $\delta$  ausdrücken lässt.

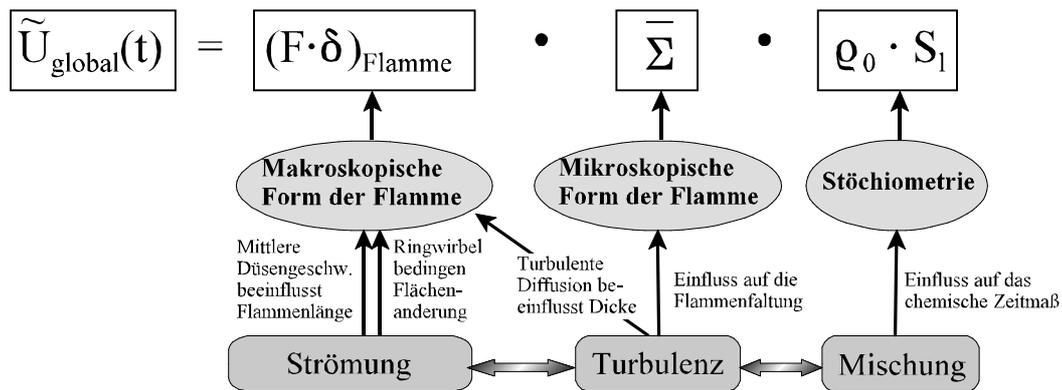


Abb. 8.5-1: Einflussgrößen auf die integrale Umsatzgeschwindigkeit

Abb. 8.5-1 verdeutlicht die Abhängigkeit der integralen Umsatzgeschwindigkeit von den Einflussfaktoren Strömungs-, Turbulenz- und Mischungsfeld. Das Strömungsfeld dominiert die makroskopische Form der Flamme. Diese wird durch die Ringwirbelbildung makroskopisch aufgefaltet (Pilzstruktur) und über die Austrittsgeschwindigkeit in ihrer Länge beeinflusst. Die Turbulenzstruktur wirkt sich einerseits auf die Flammenfaltung und damit auf die mikroskopische Form der turbulenten Flamme aus. Andererseits verändert das Turbulenzfeld die turbulente Mischung und damit auch die makroskopische Flammenform. Eine erhöhte Turbulenzintensität führt zu einer größeren Flammenfrontoberflächendichte und, bei sonst konstanten Bedingungen, zu einer größeren makroskopischen Flammendicke. Eine Änderung des Mischungszustandes durch Einmischung von Umgebungsmedium wirkt sich vor allem in einer Veränderung der Reaktionschemie aus. Diese wird durch die laminare Flammengeschwindigkeit repräsentiert. Durch eine gezielte Variation der bei den Rechnungen verwendeten Parameter und Randbedingungen konnte eine weitgehende Separation der Einflussfaktoren *Flammenlänge*, *Flammendicke*, *Flammenfläche*, *Turbulenzfeld* und *Mischungsfeld* auf den berechneten Flammenfrequenzgang erreicht werden. Vor der Diskussion der Ergebnisse werden zunächst die zum Erreichen der Separation getroffenen Annahmen und verwendeten Parameter diskutiert.

### Separation des Einflusses der Flammenlänge

Der separierte Einfluss der Flammenlänge auf den Frequenzgang wurde bereits Kap. 6 durch die analytische Berechnung einer idealisierten Kegelflamme untersucht. Die wichtigsten Ergebnisse werden jedoch in Kap. 8.5.2 nochmals aufgegriffen.

### Separation des Einflusses der Flammendicke

Es werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Das zeitabhängige Strömungsfeld wird vorgegeben und ist durch die Funktion  $\mathbf{u}(x, t) = \bar{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \cos(\omega \cdot (t - x/u_c))$  definiert. Dies entspricht der bei der analytischen Berechnung von Kegelflammen angewendeten Vorgehensweise (s. Kap. 6.3.1).
- Der Fußpunkt der Flammenfront ist am Stabilisierungspunkt  $P_s$  fixiert.

- Die Verbrennungschemie lässt sich mit einer Einschritt-Reaktion beschreiben.
- Die Stöchiometrie, die Temperatur und damit auch die Dichte sind im gesamten Strömungsfeld konstant.
- Bei den analytischen Untersuchungen wurde die Flamme als Diskontinuitätsfläche (unendlich dünne Flamme) angenommen. Im Gegensatz dazu wird die Flammendicke nun über eine Variation des Stoffaustauschkoeffizienten gesteuert. Dieser besitzt jedoch im gesamten Strömungsfeld einen konstanten Wert.

Unter diesen Voraussetzungen kann die Flamme mit einer einzigen Transportgleichung für die Konzentration des Brennstoffes Methan beschrieben werden. Der Ratenquellterm wird dazu wie folgt definiert (s. Kap. 2.3.2.3):

$$\bar{\dot{\omega}}_c = K \cdot \bar{\dot{\omega}}_{Ref} \cdot \bar{c} \cdot (1 - \bar{c}) \cdot \rho_0 \cdot \sigma_{F,0} \quad \left[ \frac{\text{kmol}}{\text{m}^3 \cdot \text{s}} \right] \quad (8.5-2)$$

Dabei bezeichnet  $K$  ([-]) eine Konstante,  $\bar{\dot{\omega}}_{Ref}$  ([1/s]) einen Referenzwert der Reaktionsrate,  $\bar{c}$  ([-]) den Reaktionsfortschritt,  $\rho_0$  ([kg/m<sup>3</sup>]) die Frischgemischdichte und  $\sigma_{F,0}$  ([kmol/kg]) die spezifische Molzahl des Brennstoffes im Frischgemisch. Bei dieser Formulierung des Quelltermes ist die Umsatzrate unabhängig vom Turbulenzfeld. Die

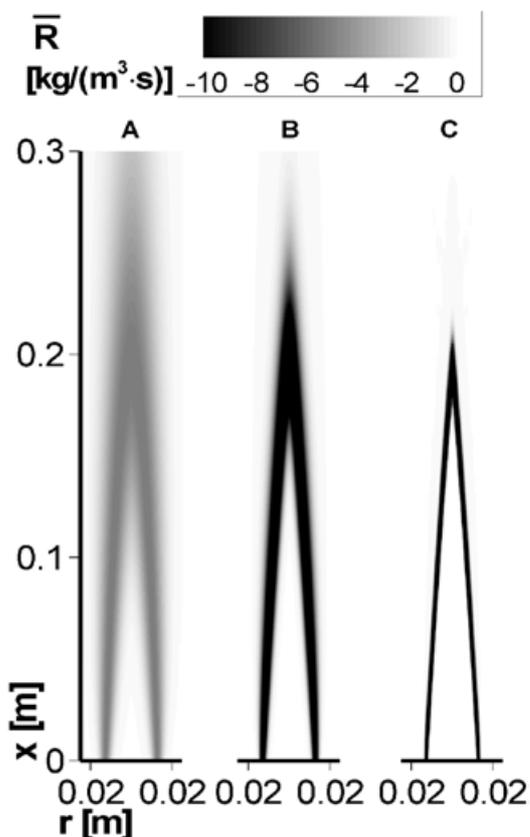


Abb. 8.5-2: Stationäre Vormischflamme: Reaktionszone bei Variation der Flammendicke

Flammendicke kann durch Variation des Stoffaustauschkoeffizienten  $\Gamma$  der Brennstofftransportgleichung beeinflusst werden. Das charakteristische Zeitmaß der Flamme (bzw. Flammenlänge  $H$  und Flammengeschwindigkeit  $S$ ) bleiben bei einer Variation der Flammendicke jedoch nur dann konstant, wenn der Ausdruck für die Reaktionsrate über die Wahl der Konstanten  $K$  gegenläufig variiert wird (s. Kap. 2.3.2.7).

Ausgangspunkt der Untersuchungen war die Berechnung einer Referenzflamme, die eine vergleichbare Dicke wie die in Kap. 7 berechneten stationären turbulenten Vormischflammen aufweist. Zu diesem Zweck wurde ein typischer Wert für den hier im gesamten Strömungsfeld konstanten Stoffaustauschkoeffizienten verwendet:  $\Gamma_{Ref} = 7,76 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s})$ . Der in Gl. 8.5-2 zur Berechnung der Umsatzrate eingehende Referenzwert  $\bar{\dot{\omega}}_{Ref}$  wurde dann durch Testrechnungen so eingestellt, dass sich eine

gewünschte Flammenlänge von  $H = 0,2\text{m}$  ergab (Referenzflamme B). Als Flammenlänge wurde die axiale Position des Maximums der volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse definiert. Ausgehend von dieser Referenzflamme wurde der Stoffaustauschkoeffizient variiert. Die Flammengeschwindigkeit wurde über Variation der Konstanten in Gl. 8.5-2 ausgehend vom Wert  $K_{Ref} = 1$  entsprechend gegenläufig variiert, um die geforderte Konstanz der Flammenlänge zu erreichen (s. Kap. 2.3.2.7):

$$H \sim \frac{1}{S} \sim \frac{1}{\sqrt{\Gamma/\rho \cdot \bar{\omega}_c}} \sim \frac{1}{\sqrt{\Gamma/\rho \cdot K \cdot \bar{\omega}_{Ref}}} = \text{const.} \quad (8.5-3)$$

Abb. 8.5-2 zeigt die Verteilung der volumetrischen Umsatzgeschwindigkeit für die drei untersuchten Flammen A, B und C. In Tab. 8.5-1 sind die zur Berechnung verwendeten Stoffaustauschkoeffizienten im Vergleich zum Referenzwert (Flamme B) angegeben. Die sich für alle drei Flammen einstellende konstante Flammengeschwindigkeit lässt sich aus der für kegelförmige Flammen gültigen Beziehung  $H = R \cdot \sqrt{(\bar{u}/S)^2 - 1}$  (GÜNTHER [Va15]) bestimmen. Für die Flammenhöhe  $H = 0,2\text{m}$  ergibt sich bei einer mittleren Geschwindigkeit von  $\bar{u} = 26\text{m/s}$  und einem Düsenradius von eine Flammengeschwindigkeit von  $S = 1,7\text{m/s}$ .

Die Flammendicke nimmt über die Beziehung  $\delta \sim \sqrt{\Gamma/(\rho \cdot \bar{\omega}_{Ums})}$  (s. Kap. 2.3.2.7) von Flamme A nach Flamme C ab. Die Dicke von Flamme C betrug unter den genannten Voraussetzungen nur ca. 2 mm. Um diese noch numerisch auflösen zu können, wurde zur Untersuchung der Dickenvariation ein spezielles Gitter mit  $499 \cdot 98$  Zellen bei einer Rechengebietsgröße von  $0,5 \cdot 0,165\text{m}$  eingesetzt. Dieses Gitter weist im gesamten Bereich der Flammenfront würfelförmige Zellen mit einer typischen Zellgröße von 0,5 mm auf.

Tab. 8.5-1: Stoffaustauschkoeffizienten der Flammen A, B und C.

	A	B (Referenzflamme)	C
$\Gamma/\Gamma_{Ref}$	3,5	1	0,116

### Separation des Einflusses der Flammenfläche

Es gelten weiterhin die Annahmen 2 bis 5, die bereits zur Separierung des Einflusses der Flammendicke getroffen wurden. Allerdings werden das Strömungsfeld und das Turbulenzfeld nun über das Feldmodell durch die Lösung der entsprechenden Transportgleichungen berechnet. Die Reaktion wird jedoch weiterhin mit dem vom Turbulenzzustand unabhängigen Ratenterm (Gl. 8.5-2) beschrieben. Zur Berechnung werden außerdem die oben angegebenen Voraussetzungen zur Erzielung einer "dünnen" Flamme verwendet. Damit ergibt sich der momentane Globalumsatz näherungsweise aus dem Produkt von Flammenfläche und Flammengeschwindigkeit. Durch diese Vorgehensweise kann der Einfluss der durch die Ringwirbelbildung induzierten makroskopischen Flammenfaltung auf den Frequenzgang separiert werden.

### Separation des Mischungseinflusses

Die Rechnungen zur Untersuchung des Mischungseinflusses wurden unter Berücksichtigung der gesamten Physik des Problem es durchgeführt. Das heißt, alle Feldgrößen wurden unter Verwendung der jeweiligen Transportgleichungen berechnet. Die Ringwirbelbildung führt zu einer Einmischung des Umgebungsmediums Luft in die Reaktionszone einer freibrennenden vorgemischten Axialstrahlflamme. Um den Einfluss dieser Einmischung zu separieren, wurden Vergleichsrechnungen durchgeführt, bei denen eine Konstanz des Mischungsbruches im gesamten Strömungsfeld gewährleistet war. Zu diesem Zweck werden an den zur Umgebung hin offenen Rändern des Rechengebietes die für eine ausgebrannte stöchiometrische Mischung geltenden Bedingungen vorgegeben. Die Vormischflamme befindet sich somit in einer Umgebung, die aus heißem Abgas besteht. Dies entspricht dem Fall einer sich in einer unendlich ausgedehnten Brennkammer befindlichen Flamme, wobei kein Einfluss von Brennkammerwänden vorhanden ist. Um die Rückwirkung der sich für die Vergleichsfälle unterschiedlich einstellenden Turbulenzfelder auszuschließen, wurde das in die Berechnung der Reaktionsrate des PHP-Verbrennungsmodells einfließende turbulente Zeitmaß  $\tau_t \sim \langle \tilde{k} \rangle / \langle \tilde{\epsilon} \rangle$  auf einen für alle Rechenzellen konstanten und zeitunabhängigen Wert gesetzt. Die Berechnung des Strömungsfeldes erfolgte jedoch weiterhin mit dem  $k - \epsilon$  Turbulenzmodell.

### Separation des Turbulenzeinflusses

Um den Einfluss des Turbulenzfeldes zu separieren wurde das am Einlassrand vorgegebene turbulente Längenmaß variiert. Um einen zusätzliche Einfluss des Mischungsfeldes auszuschließen, wurden alle Berechnungen unter den im vorigen Abschnitt erläuterten Bedingungen der "eingeschlossenen" Flamme durchgeführt.

## 8.5.2 Einfluss der Flammenlänge

Der Einfluss der Flammenlänge bzw. des damit verbundenen charakteristischen Zeitmaßes  $\tau_{Flamme}$  auf die Frequenzkennlinien idealisierter Kegelflammen wurde bereits in Kap. 6 diskutiert. Für einige ausgewählte Flammen ist der Einfluss der Flammenlänge jedoch nochmals in Abb. 8.5-3 gezeigt. Der Verlauf der Amplitudengänge ist für die ausgewählten Parameterkombinationen und den dargestellten Frequenzbereich unabhängig von der Phasengeschwindigkeit  $u_c$  bzw. von der Art der Anregung (homogen oder inhomogen). Flammen mit kleinerem Öffnungswinkel (spitzere Flammen) besitzen ein relativ großes charakteristisches Zeitmaß  $\tau_{Flamme}$  und zeigen eine stärkere Amplitudenreduktion als Flammen mit größerem Öffnungswinkel (stumpfe Flammen) bzw. relativ kleinem charakteristischem Zeitmaß  $\tau_{Flamme}$ . Dieses Verhalten kann auch durch die mit wachsender Flammenlänge breiter werdende Verweilzeitverteilung erklärt werden. Der Verlauf der Phasenkennlinie ist dagegen stark abhängig von der Art der Erregung. Ist die Phasengeschwindigkeit  $u_c$  unendlich groß, so ist die aufgeprägte Geschwindigkeitspulsation im gesamten Strömungsfeld homogen ( $u_c/\bar{u} = \infty$ ). In diesem Fall ergibt sich für große Frequenzen unabhängig vom Öffnungswinkel ein maximaler Phasennachlauf von  $-90^\circ$ . Ist die Phasengeschwindigkeit  $u_c$  der

Geschwindigkeitspulsation jedoch genauso groß, wie die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ( $u_c/\bar{u} = 1$ ), so fällt der Phasengang mit zunehmender Frequenz in Richtung  $-\infty$  ab. Da eine lange (spitzere) Flamme ein größeres charakteristisches Zeitmaß  $\tau_{Flamme}$  bzw. eine größere mittlere Verweilzeit  $\tau_{Kegel,stat}$  aufweist als eine kurze (stumpfe) Flamme, ist auch der sich hierbei einstellende Phasennachlauf größer.

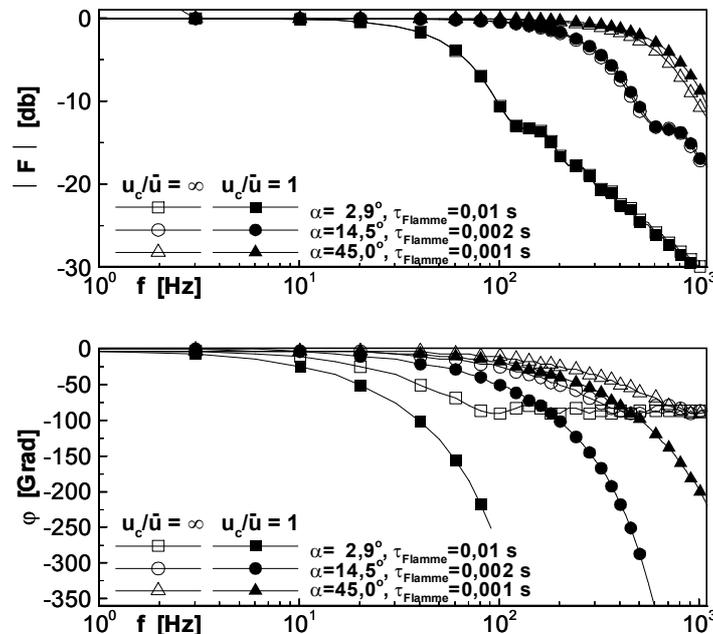


Abb. 8.5-3: Einfluss der Flammenlänge bzw. des charakteristischen Zeitmaßes  $\tau_{Flamme}$  auf den Frequenzgang einer idealisierten Kegelflamme (analytische Lösung).

### 8.5.3 Einfluss der Flammendicke

Abb. 8.5-4 zeigt die sich bei Variation der Flammendicke ergebenden Frequenzgänge bei homogener Erregung ( $u_c/\bar{u} = \infty$ ), Abb. 8.5-5 bei wellenförmiger Erregung ( $u_c/\bar{u} = 1$ ). In beiden Abbildungen ist zusätzlich ein analytisch bestimmter Frequenzgang einer idealen Kegelflamme gleicher Länge eingezeichnet (vgl. Abb. 8.5-3). Die mit dem Feldmodell berechneten Frequenzgänge der Flammen kleinster Dicke (Flammen C) decken sich nahezu mit den entsprechenden Frequenzgängen des analytischen Modelles. Diese Flammen stellen im Hinblick auf die Dicke den Grenzfall "unendlich dünn" dar. Diese Übereinstimmung bestätigt zum einen Richtigkeit der in Kap. 6 vorgestellten analytischen Berechnungen und rechtfertigt zum anderen die zur Untersuchung des Einflusses der Flammendicke angewendeten Vorgehensweise.

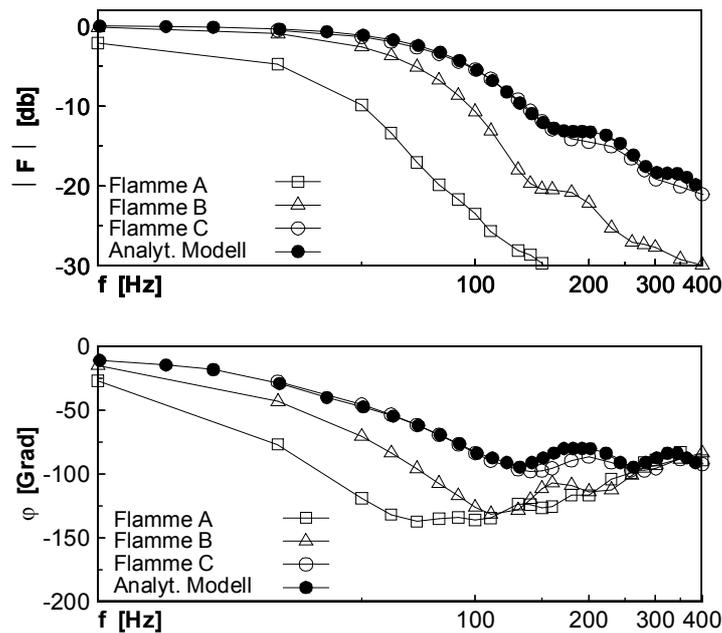


Abb. 8.5-4: Einfluss der Flammendicke auf den Frequenzgang einer Kegelflamme.  
Parameter:  $u_c/\bar{u} = \infty$ .

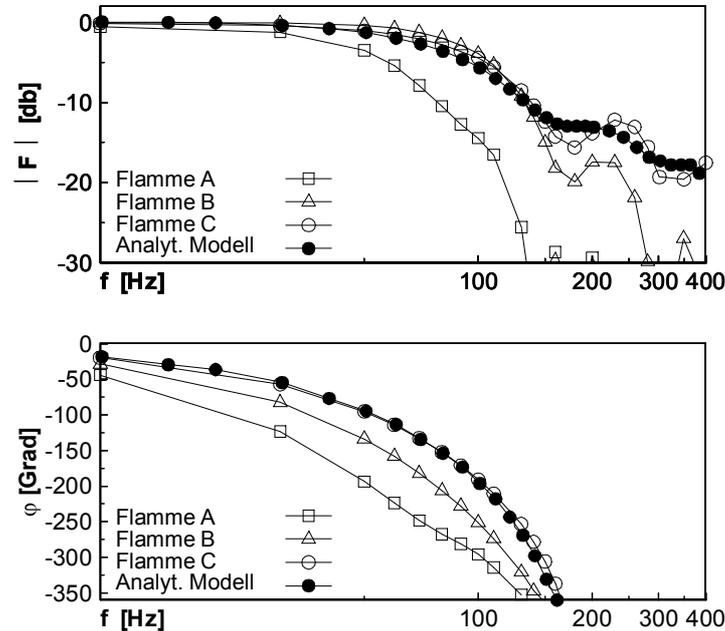


Abb. 8.5-5: Einfluss der Flammendicke auf den Frequenzgang einer Kegelflamme.  
Parameter:  $u_c/\bar{u} = 1$ .

Für große Frequenzen streben die Amplitudengänge aller Flammen unabhängig von der Erregung (homogen oder wellenförmig) gegen minus unendlich, wobei die Amplitudenwerte mit zunehmender Flammendicke (von A nach C) kleiner werden. Als Flammenlänge wurde die axiale Position des Maximums der volumenspezifischen Umsatzgeschwindigkeit auf der Symmetrieachse definiert (s. o.). Mit wachsender

Flammendicke weist die Verweilzeitverteilung des reagierenden Brennstoffes auf diesem Stromfaden eine größere Breite auf. Stellt man sich die Bedingungen auf dem entlang der Symmetrieachse liegenden Stromfadens vor, so wird ersichtlich, dass die Verweilzeitverteilung von reagierendem Brennstoff auf diesem Stromfaden mit größer werdender Flammendicke ebenfalls größer wird.

Die Phasengänge staffeln sich für kleinere Frequenzen unabhängig von der Erregung (homogen oder wellenförmig) ebenfalls nach der Flammendicke. Der Phasennachlauf wird mit zunehmender Flammendicke (von A nach C) größer. Die bei kleineren Frequenzen auftretenden Unterschiede im Phasennachlauf ergeben sich dadurch, dass sich die innere und äußere Begrenzung der Reaktionszone mit wachsender Flammendicke zunehmend gegeneinander verschieben können. Bei großen Frequenzen ändert sich die Form der Reaktionszone im zeitlichen Verlauf der Periode jedoch nur noch wenig, was sich in dem immer kleiner werdenden Amplitudengang ausdrückt. Die mittlere Verweilzeit, die den Phasenwinkel bestimmt, ist dann für alle Flammen gleich, da eine gleiche Länge der entsprechenden stationären Flammen gegeben war. Die Phasengänge nähern sich deshalb für große Frequenzen immer mehr den jeweiligen Phasengängen der unendlich dünnen Flamme an.

#### **8.5.4 Einfluss der Flammenfläche**

Abb. 8.5-6 zeigt den Einfluss des Pulsationsgrades bzw. der Amplitude des eintretenden Massenstromes auf den berechneten Frequenzgang. Es ist zu erkennen, dass die Amplitudenreduktion bei steigendem Pulsationsgrad größer wird. Das heißt, die durch die Ringwirbelbildung bedingte Schwankung der Flammenfläche wächst unterproportional zur Schwankung des Einlassmassenstromes, bzw. zum Pulsationsgrad, an. Auffallend ist, dass sich für kleine Frequenzen eine Überhöhung des Amplitudenganges zeigt. In diesem Frequenzbereich ist die Schwankung der Flammenfläche größer als die vorgegebene Schwankung des Gemischmassenstromes. Dieses Verhalten ergibt sich durch den in der Beschleunigungsphase der Austrittsgeschwindigkeit induzierten, radial abfließenden Massenstrom. Durch diesen wird die Flammenfront makroskopisch aufgewellt und die Flammenfläche entsprechend überproportional vergrößert. Dies kann innerhalb der Periode zu einer momentanen integralen Umsatzgeschwindigkeit führen, die größer ist als der aufgrund des maximal eintretenden Gemischmassenstromes zu erwarten ist. Diese Charakteristik ist auch bei den in Kap. 8.4 diskutierten "realen" Flammen zu erkennen.

Der beschriebene radiale Massentransport ist bei kleinem Pulsationsgrad relativ gesehen größer. Die Analyse der Flammenkontur zeigte, dass dadurch die axiale Erstreckung der Flamme deutlich kleiner wird. Diese führt wiederum zu einer kleineren mittleren Verweilzeit von reagierendem Brennstoff, und damit zu einem kleineren Phasennachlauf.

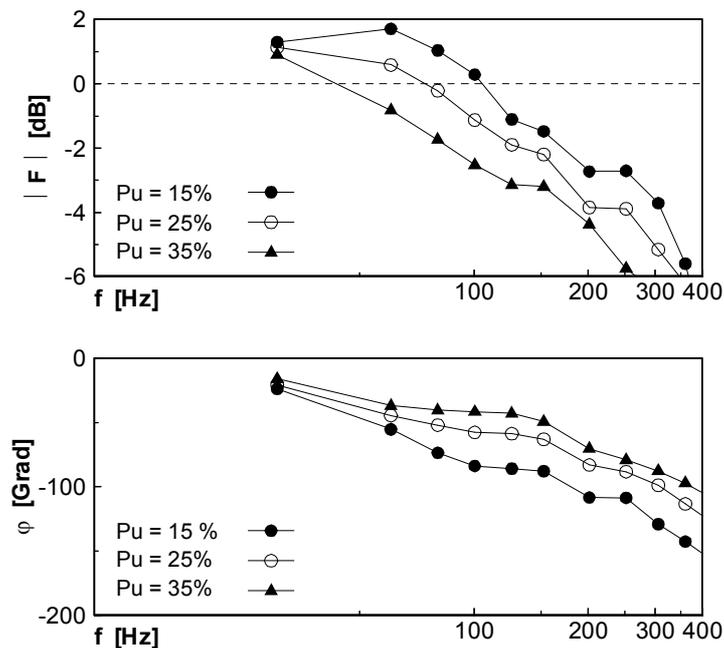


Abb. 8.5-6: Einfluss der Flammenfläche auf den Flammenfrequenzgang.  
Parameter:  $S = 1,7 \text{ m/s}$ ,  $P_u = 15/25/35\%$ .

### 8.5.5 Einfluss des Mischungsfeldes

Der Vergleich der Amplitudengänge in Abb. 8.5-7 zeigt, dass die mit steigender Frequenz erfolgende Amplitudenreduktion bei den eingeschlossenen Flammen etwas größer ist als bei freibrennenden Flammen. Die Unterschiede bewegen sich jedoch lediglich in der Größenordnung von einem dB. Dieses Ergebnis sollte jedoch nicht zu der Annahme verleiten, dass kein Einfluss des Mischungsfeldes auf den instationären Verbrennungsverlauf vorhanden ist. Wie bereits in Kap. 8.2.1 gezeigt, führt eine Einmischung von Umgebungsluft in die sonst stöchiometrische Reaktionszone zu einer bereichsweisen Reduktion der Umsatzgeschwindigkeit. Dass ein wesentlicher Einfluss des Mischungsfeldes vorhanden ist, lässt sich auch daran ersehen, dass bei der in Kap. 8.4 vorgestellten Berechnung der vergleichsweise langen 60 kW-Flamme bei kleinen Frequenzen keine stabile Verbrennung realisiert werden konnte. Die Einmischung von Umgebungsmedium in die Reaktionszone am Flammenfuß führte hier zu einem Flammenabriss während der Beschleunigungsphase der Einströmung. Aus den Ergebnissen kann jedoch abgeleitet werden, dass der Einfluss des Mischungsfeldes auf den Verlauf des Frequenzganges als schwach zu bewerten ist. Der Einfluss der Einmischung kann jedoch nicht eindeutig separiert werden. Das sich beim Vergleich einer freibrennenden mit einer eingeschlossenen Flamme ändernde Dichteverhältnis zwischen Frischgemisch und Umgebung zieht zwangsläufig auch eine Änderung des Turbulenz- und des Strömungsfeldes und damit auch einen Einfluss auf die Ringwirbelbildung nach sich. Dies wirkt sich auch auf die Flammenfläche und Flammendicke aus. So ergab eine genauere Analyse der Ergebnisse, dass die Wirbelbildung im freibrennenden Fall auf Grund der anderen Dichteverhältnisse zu einem früheren Zeitpunkt innerhalb der Periode

beginnt und der sich bildende Ringwirbel stärker ausgeprägt ist. Dies wirkt sich durch einen sich im Wirbelzentrum einstellenden größeren Unterdruck aus (vgl. Kap. 5.2.1).

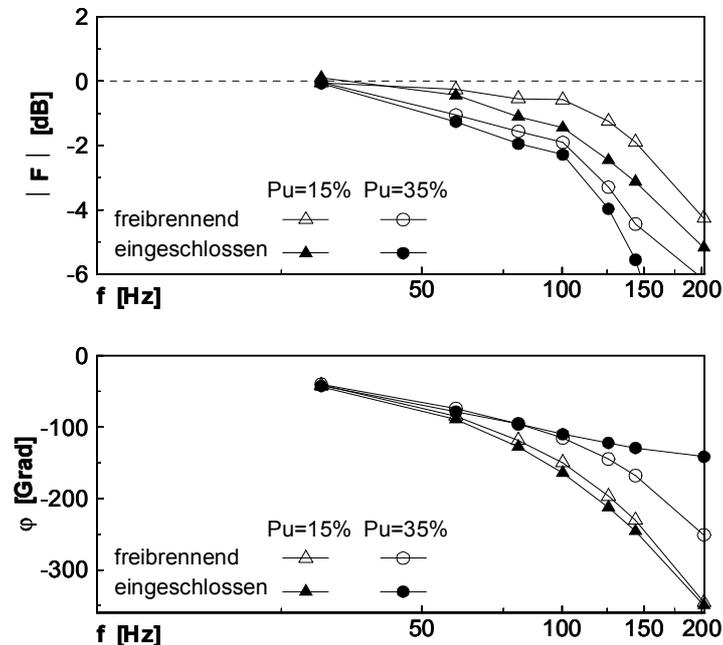


Abb. 8.5-7: Einfluss des Mischungsfeldes auf den berechneten Flammenfrequenzgang  
Parameter:  $P_{therm} = 60 kW$ ,  $Pu = 15/35\%$ .

Ein deutlicher Einfluss des Mischungsfeldes auf den Frequenzgang ist lediglich beim Pulsationsgrad 35% für größere Frequenzen zu erkennen. Hier ist der Phasenwinkel im eingeschlossenen Fall gegenüber dem freibrennenden Fall deutlich reduziert. Die mittlere Flammenlänge und damit auch die mittlere Verzugszeit und die Verweilzeitverteilung werden durch die intensive Einmischung von heißem Abgas in die Reduktionszone kleiner.

Die Wirkung eines steigenden Pulsationsgrades auf die Frequenzkennlinien gibt die schon bei der Diskussion des Einflusses der Flammenfläche aufgezeigten Tendenzen wieder: Die Amplitudenreduktion wird stärker, der Phasenversatz jedoch schwächer.

### 8.5.6 Einfluss des Turbulenzfeldes

In Abb. 8.5-8 ist der Einfluss des am Einlassrand vorgegebenen turbulenten Längenmaßes auf den Frequenzgang "eingeschlossener" Flammen dargestellt. Die Amplitudenwerte der Rechnungen, bei denen ein Längenmaß von  $L_t = 16 mm$  verwendet wurde sind etwas größer als die Amplitudenwerte der Rechnungen, bei denen ein Längenmaß von  $L_t = 8 mm$  verwendet wurde. Gleichzeitig sind die Phasennachläufe bei größerem Längenmaß etwas geringer. Das in die Berechnung der Reaktionsrate einfließende turbulente Zeitmaß  $\tau_t$  ist proportional zum turbulenten Längenmaß  $\tau_t \sim \langle \tilde{k} \rangle / \langle \tilde{\epsilon} \rangle \sim L_t / u'$ . Die Reaktionsrate verhält sich in erster Näherung umgekehrt proportional zum Zeitmaß (vgl. Kap. 2.3.2.3). Damit

wäre bei steigendem Längenmaß zunächst eine Verlängerung der Flamme und damit verbunden eine wachsende Dämpfung sowie ein wachsender Phasennachlauf zu erwarten. Die Änderung des turbulenten Zeitmaßes wirkt über die turbulente Zähigkeit jedoch auch auf das Strömungsfeld und damit auf die Ringwirbelbildung zurück. Die Analyse der Ergebnisse ergab, dass dies zu etwas geringeren Werten für die Mittelwerte und Breiten der Verweilzeitspektren bei größeren verwendeten Längenmaßen führt. Bei der Diskussion ist allerdings zu berücksichtigen dass sich die Unterschiede der Amplitudenwerte in der Größenordnung von einem dB bewegen. Diese entspricht entlogarithmiert einer Änderung der Amplitude der integralen Umsatzgeschwindigkeit von nur ca. 10%.

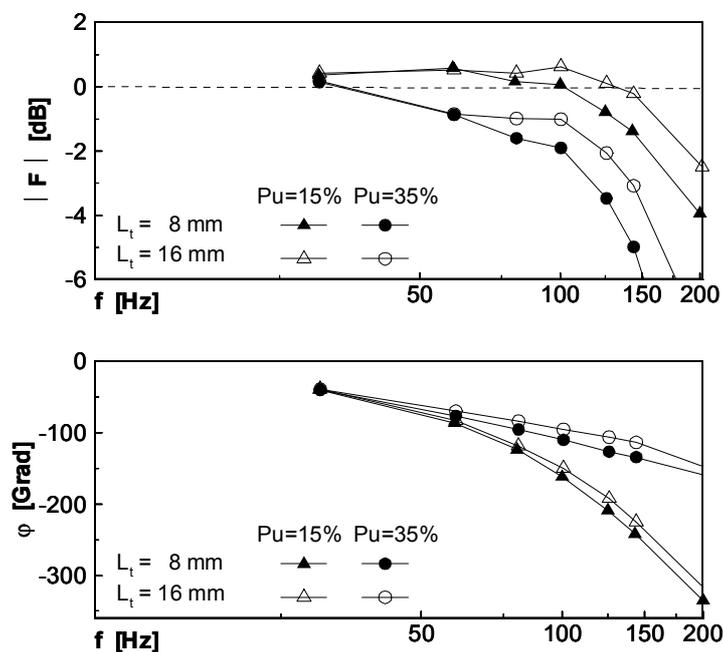


Abb. 8.5-8: Einfluss des turbulenten Längenmaßes auf den berechneten Flammenfrequenzgang. Parameter:  $P_{therm} = 40 \text{ kW}$ ,  $Pu = 15/35\%$ .

Der Einfluss der Turbulenzrandwerte ist somit als gering zu bewerten. Der Turbulenzzustand innerhalb der Reaktionszone ist weitgehend von den innerhalb des instationären Strömungsfeldes generierten Bedingungen beeinflusst. Eine Auswertung der Feldwerte der Turbulenzgrößen ergab, dass das turbulente Zeitmaß innerhalb der Reaktionszone um den Faktor 3-10 kleiner ist als das durch die Turbulenzwerte am Einlassrand vorgegebene turbulente Zeitmaß. Weitere Rechnungen bestätigten dieses Ergebnis. Dabei wurde das in die Berechnung der Reaktionsrate des PHP-Verbrennungsmodelles einfließende turbulente Zeitmaß  $\tau_t \sim \langle \tilde{k} \rangle / \langle \tilde{\epsilon} \rangle$  auf einen für alle Rechenzellen konstanten und zeitunabhängigen Wert gesetzt. Dieser Wert entsprach dem zeitlichen Mittelwert des am Düsenaustritt vorliegenden turbulenten Zeitmaßes. Die Berechnung des Strömungsfeldes erfolgte jedoch weiterhin mit dem  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell. Als Ergebnis ergab sich eine im Mittel um den Faktor zwei vergrößerte Flammenlänge.

## 9 Zusammenfassung

Ein für die Zukunft angestrebtes Ziel bei der Auslegung von Vormisch-Verbrennungsanlagen ist die Vorhersage der Schwingungsneigung mit Hilfe der numerischen Simulation. Dies erfordert die Berechnung des dynamischen Verhaltens, bzw. der Übertragungsfunktion des Elementes "Flamme" im Rückkopplungskreis Mischer-Brenner-Flamme-Brennkammer. Bei ausgebildeten Verbrennungsschwingungen kann es an der Brennermündung zur Ausbildung von kohärenten Ringwirbelstrukturen kommen, die das dynamische Verhalten der Flamme beeinflussen. Vor diesem Hintergrund lassen sich die drei wesentlichen Ziele der vorliegenden Arbeit ableiten (s. Kap. 1.2):

- **Untersuchung von Ringwirbeln und deren Interaktion mit Vormischflammen**
- **Berechnung des Übertragungsverhaltens von Vormischflammen**
- **Bewertung der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Methoden und Modelle**

Die numerischen Untersuchungen wurden mit dem Strömungsberechnungsprogramm EBI-2d durchgeführt. Das Programm arbeitet mit der URANS (Unsteady-Reynolds-Averaged-Navier-Stokes)-Methode auf Basis eines Finite-Volumen-Verfahrens. Zur Modellierung der Turbulenz wurde das  $k-\epsilon$  Modell verwendet. Als Verbrennungsmodell wurde das auf Basis der turbulenten Brenngeschwindigkeit formulierte PHP-Modell eingesetzt.

Bei der theoretischen Untersuchung wurde stufenweise vorgegangen. Zu Beginn wurde das im Rahmen dieser Arbeit erweiterte Strömungsberechnungsprogramm EBI-2d am Beispiel zweier Strömungskonfigurationen getestet. Im Anschluss daran wurde die Bildung laminarer und turbulenter Ringwirbelstrukturen bei isothermen Bedingungen berechnet. Die Dynamik idealisierter vorgemischter Flammen wurde zunächst mit Hilfe analytischer Methoden untersucht. Abschließend erfolgte die Modellierung von turbulenten vorgemischten Axialstrahlflammen. Aufbauend auf der Berechnung bei statistisch stationärer Strömung wurde die Dynamik der Flammen und deren Interaktion mit Ringwirbelstrukturen bei pulsierter Zuströmung untersucht. Weiterhin wurde der Einfluss verschiedener Parameter auf den berechneten Flammenfrequenzgang separiert. Die erzielten Teilergebnisse wurden, soweit vorhanden, mit Messergebnissen aus der Literatur verglichen.

Im Folgenden werden die wichtigsten Erkenntnisse nochmals zusammengefasst.

### **Berechnung von Testsystemen**

Es wurden zwei Testsysteme (rotierender Farbfleck, ebene laminare Wirbel) mit den zwei unterschiedlichen numerischen Methoden Finite-Volumen-Verfahren (FVV) und

Spektralverfahren (SV) berechnet.

Die mit den beiden Verfahren berechneten Strömungsfelder *ebener* laminarer Wirbelstrukturen zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Das heißt, das FVV weist unter den gegebenen Bedingungen bei der Lösung der Impulsgleichungen einen ebenso geringen Lösungsfehler auf wie das SV. Die Analyse des instationären Mischungsfeldes zeigt dagegen den überragenden Vorteil des SV. Der sich einstellende numerische Fehler ist sehr klein, bzw. unter den gewählten Voraussetzungen nicht nachweisbar. Nur mit diesem Verfahren ist es - unter Einhaltung realistischer Rechenzeiten - möglich, die komplexe Mischungsstruktur im Inneren von laminaren Wirbelstrukturen aufzulösen. Allerdings ist die Methode zur Berechnung des Mischungsfeldes von Fluiden, die eine geringe physikalische Diffusion aufweisen (z. B. Wasser), aufgrund der zur Berechnung nötigen großen Rechenzeiten und Speicherplatzanforderungen auch in nächster Zukunft nicht praktikabel. Das Verfahren eignet sich außerdem nur für Strömungsprobleme, die mit den mathematisch formulierbaren Randbedingungen kompatibel sind. Bei Verwendung des FVV wird das berechnete Mischungsfeld dagegen erheblich durch numerische Fehler verfälscht. Eine Verbesserung der örtlichen und zeitlichen Diskretisierung zeigt eine Verkleinerung des numerischen Fehlers. Den weitaus größten Einfluss auf die Ergebnistüte hat jedoch die Wahl des Diskretisierungsverfahrens. Unter den im Programm EBI-2D (FVV) zur Diskretisierung der konvektiven Terme implementierten Schemata HYBRID, QUICK und MLU, liefert die Verwendung des letzteren in Summe die besten Ergebnisse.

### **Berechnung laminarer isothermer Ringwirbel**

Es wurden Ringwirbel berechnet, die sich bei verschiedenen laminaren Strömungskonfigurationen (Medium Wasser) bilden: *Einzelne Anfahrwirbel, pulsierter Freistrahle, Anfahrvorgang eines Freistrahles*.

Die Berechnung der Bildungsphase **einzelner Anfahrwirbel**, die sich beim Ausstoß eines definierten Fluidvolumens aus einer Düse bilden, zeigte eine sehr gute Übereinstimmung mit Messdaten was die Vorhersage der zeitlichen Position des Wirbelzentrums sowie des Geschwindigkeitsfeldes am Düsenaustritt betrifft. Theoretische Arbeiten, die sich mit der Bildung *ebener* Wirbelstrukturen beschäftigen, liefern typische zeitliche Abhängigkeiten der normierten axialen und radialen Position des Wirbelzentrums ( $X_w^*$ , bzw.  $Y_w^*$ ) sowie des normierten Durchmessers der Wirbelspirale  $D_s^*$  von der normierten Zeit  $t^*$ .

$$X_w^* \sim (t^*)^{2/3}, \quad Y_w^* \sim (t^*)^{2/3}, \quad D_s^* \sim (t^*)^{2/3}$$

Die für die Bildung *ebener* Wirbelstrukturen gültigen Gesetzmäßigkeiten konnte mit den vorliegenden Untersuchungen auch für die Bildung von *Ringwirbelstrukturen* bestätigt werden. Die von der Theorie vorhergesagte Selbstähnlichkeit ist bei den verschiedenen, bei der Rechnung vorgegebenen Geschwindigkeitsfunktionen jedoch nur dann gegeben, wenn der Zeitpunkt der Wirbelbildung und das jeweilige Bezugssystem berücksichtigt werden. Die Ergebnisse der Berechnung von Ringwirbeln, die sich in der Phase der Abschnürung bzw. im ausgebildeten Zustand befinden, zeigten bezüglich aller

ausgewerteten Größen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Dies betrifft die zeitliche Position des Wirbelzentrums, die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Wirbels sowie die Abhängigkeit des stabilen Enddurchmessers und der Translationsgeschwindigkeit von der Ausschubgeschwindigkeit.

Die Berechnung der Wirbelbildung beim **periodisch angeregten Freistrah** ergab deutliche Unterschiede im Vergleich zur Bildung einzelner Anfahrwirbel. Die Herkunft dieser Unterschiede konnte auf den Einfluss von Frequenz und Amplitude der Anregung, auf die sich einstellende Gesamtzirkulation sowie auf die Interaktion der Wirbel mit der Düsenkante zurückgeführt werden.

Beim **Anfahrvorgang eines Freistrahles** bildet sich ein Ringwirbel, der zusammen mit der Front des sich ausbildenden Strahles stromab wandert. Die Geschwindigkeit der Strahlfront auf der Symmetrieachse beträgt nach einer Anlaufphase in sehr guter Näherung der Hälfte der Austrittsgeschwindigkeit, was sich mit experimentellen und theoretischen Untersuchungen deckt. Es konnte gezeigt werden, dass sich der Anfahrwirbel nach einer Beschleunigungsphase ebenfalls mit der halben Strahlgeschwindigkeit stromab bewegt. Dieser typische Zusammenhang wurde auch bei der Berechnung turbulenter Ringwirbelstrukturen gefunden.

### **Berechnung turbulenter isothermer Ringwirbelstrukturen**

Es wurde die Bildung von turbulenten isothermen Ringwirbeln am System eines pulsierten Freistrahles (Medium Luft) modelliert.

### **Wirbeltrajektorien**

Die zeitabhängige räumliche Position des Wirbelzentrums lässt sich sowohl durch das im Strömungsfeld auftretende Druckminimum als auch durch das Maximum der im mitbewegten Bezugssystem definierten relativen Stromfunktion identifizieren. Der Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Wirbeltrajektorien zeigt eine sehr gute Übereinstimmung. Generell hängen die Wirbeltrajektorien nur schwach von den variierten Parametern Gitterauflösung, Turbulenzrandwerte und Turbulenzmodell ab.

### **Mischungsfeld**

Ein Vergleich der implementierten Diskretisierungsverfahren HYBRID, QUICK und MLU zeigte wiederum die Überlegenheit des MLU-Verfahrens. Eine Variation der Gitterauflösung ergab, dass die mit einem Gitter von 300\*186 Zellen erzielten Lösungen als gitterunabhängig zu bezeichnen sind. Durch Vergleichsrechnungen, bei denen die physikalische Diffusion unterdrückt wurde, ist es gelungen, die Einflüsse von Konvektion, physikalischer Diffusion und numerischer Diffusion auf das Mischungsfeld zu separieren. Dadurch konnte verifiziert werden, dass die Diskretisierungsfehler unter den gegebenen Bedingungen vernachlässigbar sind. Die von der Modellierung als zu schwach vorhergesagte turbulente Mischung kann daher eindeutig auf Defizite des  $k-\epsilon$  Turbulenzmodelles zurückgeführt werden. Die Standard Version des  $k-\epsilon$  Modelles liefert etwas bessere Ergebnisse als die Anwendung der Freistrahkorrektur. Es konnte verifiziert werden, dass sich die Unterschätzung der physikalischen Diffusion durch das  $k-\epsilon$  Modell durch die Verwendung eines groben Gitters, welches zu einer erhöhten

numerischen Diffusion führt, zumindest bereichsweise kompensieren lässt. Die Überlagerung zweier Defizite kann somit unter Umständen zu einem in Summe besseren Gesamtergebnis führen.

### **Berechnung von Frequenzgängen idealisierter pulsierter Flammen**

Das dynamische Verhalten von idealisierten sphärischen und kegelförmigen Flammenfronten (Diskontinuitätsflächen) in einem deterministischen Geschwindigkeitsfeld wurde analytisch berechnet.

#### **Analytische Berechnung sphärischer Flammen**

Die Variation der Einflussparameter zeitgemittelter Flammenradius  $\bar{r}$ , Flammengeschwindigkeit  $S$ , Kreisfrequenz  $\omega$  und die nachfolgende Analyse ergab, dass sich der Frequenzgang einer sphärischen Flamme in Abhängigkeit einer einzigen dimensionslosen Parametergruppe, der normierten Kreisfrequenz  $\omega_{norm} = \tau_{Flamme} / \tau_{Err} = \bar{r} / S \cdot \omega$  bzw. vom Verhältnis der Zeitmaße von Flamme und der Erregung darstellen lässt. Die Dynamik einer sphärischen Flamme entspricht dem Verhalten eines VZ1-Gliedes.

#### **Analytische Berechnung von Kegelflammen**

Die Variation der Einflussparameter mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$ , Amplitude  $\hat{u}$ , Phasengeschwindigkeit  $u_c$ , Flammengeschwindigkeit  $S$ , Kreisfrequenz  $\omega$  und die nachfolgende Analyse ergab die folgenden Abhängigkeiten:

- Im Falle einer ortsunabhängigen Geschwindigkeitserregung hängt der Frequenzgang nur von der normierten Kreisfrequenz  $\omega_{norm} = \tau_{Flamme} / \tau_{Err} = (R \cdot \omega) / (S \cdot \cos \alpha)$  bzw. vom Verhältnis der Zeitmaße der Flamme und der Erregung ab. Für kleine und große Frequenzen gleicht die Dynamik dem Verhalten eines VZ1-Gliedes. Bei festgehaltener Frequenz zeigt eine Flamme mit einem Kegelwinkel von  $\alpha = 45^\circ$  die kleinste Trägheit.
- Im Falle der Anregung mit einer eindimensionalen Geschwindigkeitswelle kommen die zwei weiteren Parameter Öffnungswinkel  $\alpha$  (bzw.  $S / \bar{u}$ ) und Wellenlängenverhältnis  $\lambda_c / \lambda_{Flamme}$  (bzw. Geschwindigkeitsverhältnis  $u_c / \bar{u}$ ) hinzu. Bei festgehaltener Frequenz und  $u_c / \bar{u} = 1$  zeigt eine Flamme mit einem Kegelwinkel von  $\alpha = 45^\circ$  die größte Trägheit.

Die Berechnung einer mittleren Verweilzeit aus dem Verweilzeitspektrum der stationären Kegelflamme ergab die Abhängigkeit  $\tau_{mittel} = H / (3 \cdot \bar{u})$ , mit  $H$  als Flammenhöhe.

Der mit dem CFD-Code unter Verwendung des SLIC-Algorithmus berechnete Frequenzgang stimmt sehr gut mit dem analytisch ermittelten Frequenzgang überein. Diese Übereinstimmung zeigt einerseits die Gültigkeit der analytischen Lösung und andererseits, dass der implementierte SLIC-Algorithmus in der Lage ist, das dynamische Verhalten einer Diskontinuitätsfläche wiederzugeben.

### **Berechnung stationärer turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen**

Als Voruntersuchung zur Berechnung pulsierter Flammen zunächst stationäre freibrennende vorgemischte Axialstrahlflammen (stöchiometrische Methan/Luft-

Mischung) unterschiedlicher thermischer Leistung ( $P_{therm} = 20/40/60 \text{ kW}$ ) modelliert. Die Ergebnisse zeigen, dass die normierten axialen Verläufe der gemessenen OH-Strahlung sowie der berechneten Umsatzgeschwindigkeit in Bezug auf Form und Breite der Verteilungsfunktionen gut übereinstimmen. Die Rechnung liefert jedoch tendenziell zu kurze Flammen. Wird der Ratenterm des verwendeten PHP-Verbrennungsmodelles um einen, von der thermischen Leistung abhängigen, konstanten Faktor reduziert, so stimmen die axialen Positionen der Maxima der gemessenen und berechneten Verteilungsfunktionen und damit auch die daraus ableitbaren charakteristischen Verzugszeiten  $\tau_{char,stat}$  überein.

### **Berechnung pulsierter turbulenter vorgemischter Axialstrahlflammen**

Es wurden pulsierte turbulente vorgemischte Axialstrahlflammen (stöchiometrische Methan/Luft-Mischung) unter Variation der thermischen Leistung ( $P_{therm} = 20/40/60 \text{ kW}$ ) und des Pulsationsgrades ( $Pu = 15 - 35\%$ ) modelliert. Um eine hinreichende Trennung des charakteristischen Zeitmaßes der periodischen Strömungsstörung vom charakteristischen Zeitmaß  $k/\epsilon$  der Turbulenz zu gewährleisten, wurden ausschließlich niederfrequente Schwingungen mit einer Frequenz bis zu 200 Hz untersucht. Diese dominieren jedoch hinsichtlich ihrer Bedeutung in der Anwendung.

### **Interaktion von Ringwirbel und Flamme**

Der durch den Ringwirbel bedingte radiale Transport von Strahlmedium führt bereichsweise zu einer makroskopischen Auffaltung der Flammenfront, die sich in einer pilzförmigen Struktur manifestiert. Diese Auffaltung vergrößert die makroskopische Flammenfläche und führt zu einem Maximum der axialen Verteilung der längenbezogenen Umsatzgeschwindigkeit, welches weitaus ausgeprägter ist als im stationären Fall. Der radiale Transport von Frischgemisch führt zu einer bereichsweisen Absenkung der Luftzahl, so dass nun - im Gegensatz zur stationären Flamme - ein Teil der Reaktion unter luftreichen Bedingungen abläuft. Die axiale Position des Maximums der längenbezogenen Umsatzgeschwindigkeit ist eindeutig mit den Feldverteilungen der axialen und der radialen Strömungskomponenten gekoppelt. Die axiale Position des Maximums und das Wirbelzentrum bewegen sich mit der gleichen und nahezu zeitkonstanten Geschwindigkeit stromab.

Die sich mit wachsender Frequenz einstellende Reduktion der Amplitude ist durch einen "Speichereffekt" zu erklären. Der zeitliche Maximalwert der integralen Umsatzgeschwindigkeit erreicht im pulsierten Fall nicht den Maximalwert einer quasistationären Flamme. Der im entsprechenden Zeitintervall reduzierte Umsatz führt zu einer "Ansammlung" von Frischgemisch innerhalb des durch die Reaktionszone begrenzten Volumens. Dieses wird zu einem späteren Zeitbereich der Periode umgesetzt. In diesem Zeitbereich ist die integrale Umsatzgeschwindigkeit größer als die entsprechende Umsatzgeschwindigkeit einer quasistationären Flamme. Die mit wachsender Frequenz abnehmende Amplitude lässt sich auch aus der Analyse der zeitlichen Verläufe der makroskopischen Flammenfläche und des makroskopischen Flammenvolumens ableiten.

### Das dynamische Verhalten einer pulsierten Axialstrahlflamme

Das dynamische Verhalten der untersuchten Flammen steht unter dem Einfluss der Bildung kohärenter Ringwirbelstrukturen. Es konnte gezeigt werden, dass diese Flammen ein nichtlineares und zeitvariantes Systemverhalten aufweisen. Die wesentlichen Charakteristiken der berechneten Frequenzgänge können jedoch mit dem einfachen Modell eines Übertragungsgliedes, welches eine rechteckförmige Totzeitverteilung aufweist, erklärt werden. Die Verweilzeitverteilung bzw. das "Alter" des innerhalb der Reaktionszone reagierenden Brennstoffes repräsentiert dabei die Totzeitverteilung der Flamme. Das Verweilzeitspektrum der entsprechenden stationären Flamme wird bei dieser Betrachtungsweise als Gewichtsfunktion (Stoßantwort) des Systemes *Flamme* interpretiert. Diese Modellvorstellung impliziert weiterhin, dass der Phasengang ausschließlich vom Mittelwert des Verweilzeitspektrums bestimmt wird und der Amplitudengang ausschließlich von der Breite des Verweilzeitspektrums. Je größer der Mittelwert des Spektrums ist, desto schnell fällt die Phasenkennlinie mit wachsender Frequenz in Richtung unendlich großer Phasennachläufe ab. Je breiter die Verweilzeitverteilung ist, desto stärker ist der oben beschriebene "Speichereffekt" und desto größer die daraus resultierende Amplitudenreduktion.

Aus der Analyse einer pulsierten Axialstrahlflamme sowie der entsprechenden stationären Flamme lassen sich verschiedene typische Zeitmaße gewinnen:

- Die charakteristische Verzugszeit der *stationären* Flamme  $\tau_{char,stat}$  kann aus der axialen Position des gemessenen Maximums der OH-Strahlungsverteilung und der Düsendeschwindigkeit über die Beziehung  $\tau_{char,stat} = x_{Max}/u_0$  ermittelt werden.
- Die charakteristische Verzugszeit der *stationären* Flamme  $\tau_{char,stat}$  kann aus der axialen Position  $x_{Max}$  des berechneten Maximums des längenbezogenen Reaktionsumsatzes und der Düsendeschwindigkeit über die Beziehung  $\tau_{char,stat} = x_{Max}/u_0$  ermittelt werden.
- Die mittlere Verweilzeit der *stationären* Flamme  $\bar{\tau}_{mittel,stat}$  kann aus dem berechneten Spektrum der Verweilzeit von reagierendem Brennstoff ermittelt werden.
- Die periodengemittelte Verweilzeit der *pulsierten* Flamme  $\overline{\langle \bar{\tau}(t) \rangle}_{mittel}$  kann aus dem berechneten zeitabhängigen Spektrum der Verweilzeit von reagierendem Brennstoff bestimmt werden.

Alle diese Zeitmaße stimmen gut miteinander überein. Es lässt sich somit ein globales Zeitmaß  $\tau_{Flamme}$  der vorgemischten Axialstrahlflamme angeben, für das gilt:

$$\tau_{Flamme} \approx \tau_{char,stat} \approx \bar{\tau}_{mittel,stat} \approx \overline{\langle \bar{\tau}(t) \rangle}_{mittel} .$$

Der gemessene wie auch der berechnete Phasengang einer pulsierten Axialstrahlflamme lässt sich in guter Näherung mit dem Phasengang eines idealen Totzeitgliedes

approximieren, dessen Totzeit dem globalen Zeitmaß der Flamme  $\tau_{Flamme}$  entspricht. Damit wird die in der Literatur angegebene Modellvorstellung für den Phasengang

$$\varphi(f) = \tau_{Flamme} \cdot 2\pi \cdot f \cdot 360^\circ .$$

durch die numerischen Berechnungen bestätigt.

### **Der Einfluss verschiedener Parameter auf den berechneten Flammenfrequenzgang**

Durch eine gezielte Variation der bei den Rechnungen verwendeten Parameter und Randbedingungen konnte eine weitgehende Separation der Einflussfaktoren *Flammenlänge*, *Flammendicke*, *Flammenfläche*, *Turbulenzfeld* und *Mischungsfeld* auf den berechneten Flammenfrequenzgang erreicht werden.

Die Ergebnisse zeigen, dass der berechnete Frequenzgang vor allem von der Flammengeometrie beeinflusst ist. Die Flammenlänge bzw. das sich daraus ergebende globale Zeitmaß der Flamme  $\tau_{Flamme}$  ist der zentrale Parameter, der den Verlauf des Phasenganges bestimmt. Ein größere makroskopische Flammendicke führt zu einer stärkeren Amplitudenreduktion und zu einem größeren Phasennachlauf. Die bei experimentell ermittelten Frequenzgängen für moderate Frequenzen zu beobachtende Amplitudenüberhöhung ist auf eine durch die Ringwirbelbildung induzierte makroskopische Variation der Flammenfläche zurückzuführen. Die bei der Rechnung am Düsenaustritt vorgegebenen Turbulenzwerte haben unter den untersuchten Bedingungen einen nur schwachen Einfluss. Der Turbulenzzustand innerhalb der Reaktionszone ist weitgehend von den innerhalb des instationären Strömungsfeldes generierten Bedingungen dominiert. Der Einfluss der Einmischung von Umgebungsfluid in die Reaktionszone ist für eine kleine Anregungsamplitude als schwach zu bewerten, wirkt sich jedoch für größere Amplituden deutlich aus.

Die Auswirkungen der einzelnen Einflussfaktoren auf die berechneten Frequenzgänge können mit der Modellvorstellung einer Übertragungsgliedes, welches eine rechteckförmige Totzeitverteilung aufweist, erklärt werden. Der Phasengang wird dabei vom Mittelwert des Spektrums der Verweilzeit von reagierendem Brennstoff dominiert, der Amplitudengang von der Breite des Spektrums.

### **Vergleich berechneter Flammenfrequenzgänge mit Messdaten**

Zunächst wurde die *direkte* Methode zur Bestimmung von Flammenfrequenzgängen angewendet. Dabei wird die Flamme über eine Modulation des Frischgemischmassenstromes periodisch angeregt. Die Auswertung der Flammenantwort in Phase und Amplitude für eine Vielzahl diskreter Frequenzen ergibt in Summe den Flammenfrequenzgang. Bei der Modellierung wurde der zeitliche Verlauf der integralen Umsatzgeschwindigkeit ausgewertet, um die Frequenzkennlinien zu erhalten. Die zum Vergleich der Berechnung herangezogenen Frequenzgänge aus der Literatur wurden jedoch durch die experimentelle Auswertung der globalen Strahlungsintensität angeregter OH-Radikale ermittelt.

Da die Längen der entsprechenden stationären Flammen bei der Modellierung tendenziell

unterschätzt werden, ergaben sich für die berechneten Phasenverläufe gegenüber den Messwerten zunächst typischerweise zu kleine Phasennachläufe bzw. zu kleine Gesamtverzugszeiten. Es konnte jedoch verifiziert werden, dass durch eine entsprechende Reduktion der turbulenten Brenngeschwindigkeit bzw. des Ratentermes des verwendeten PHP-Verbrennungsmodelles eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Phasenverläufen erzielt werden kann. Die Phasengänge lassen sich jeweils in guter Näherung mit dem Phasengang eines Totzeitgliedes approximieren, dessen Totzeit dem globalen Zeitmaß der Flamme  $\tau_{Flamme}$  entspricht (s. o.).

Die berechneten Amplitudengänge liegen für größere Frequenzen typischerweise oberhalb der Messwerte, d. h. die Amplitudenreduktion ist schwächer. Die durch die Ringwirbel verursachte Einmischung von Umgebungsluft führt zu einer Vergrößerung der Luftzahl in der Reaktionszone und damit zu einer Erniedrigung der Verbrennungstemperatur. Dies hat im Experiment einen zusätzlichen Rückgang der Amplitude der OH-Strahlungsintensität zur Folge. Damit kann erklärt werden, dass die Amplitudenreduktion im Experiment für wachsende Frequenzen tendenziell größer ist als bei der Rechnung. Die Ergebnisse zeigen, dass die in der Literatur teilweise vertretene Modellvorstellung, in welcher die vorgemischte Axialstrahlflamme als ideales Totzeitglied behandelt wird, nicht der Realität entspricht.

Der Einfluss einer größeren Amplitude der Anregung bzw. eines wachsenden Pulsationsgrades zeigt in Modellierung und Experiment die gleichen Tendenzen. Es stellt sich eine Reduktion der Amplitudenwerte ein. Zusätzlich wächst der Einfluss der durch die Ringwirbelbildung bedingten Einmischung von Umgebungsmedium in die Reaktionszone an. Der Rückgang der Amplitudenwerte kann bei der Modellierung auf den Einfluss der Variation der makroskopischen Flammenfläche zurückgeführt werden. Die gemessene Unabhängigkeit des Phasenwinkels vom Pulsationsgrad wird von der Rechnung nur für Frequenzen bis 60 Hz wiedergegeben.

Weiterhin wurde die *indirekte* Methode zur Bestimmung von Flammenfrequenzgängen angewendet. Bei dieser wird versucht, den von der thermischen Leistung abhängigen Frequenzgang aus der Analyse der jeweiligen stationären Flamme abzuleiten. Durch die Interpretation des Verweilzeitspektrums von reagierendem Brennstoff als Gewichtsfunktion des Systemes kann der Frequenzgang über eine Fouriertransformation derselben berechnet werden. Mit dieser Vorgehensweise können die Verläufe der Amplitudengänge lediglich qualitativ vorhergesagt werden. In der quantitativen Abweichung zwischen den mit der direkten und der indirekten Methode bestimmten Frequenzgängen manifestiert sich das ausgeprägte nichtlineare Verhalten der pulsierten Flammen. Die Phasengänge lassen sich jedoch sehr gut quantitativ vorhersagen. Dies ist in der Tatsache begründet, dass der Mittelwert des Verweilzeitspektrums  $\bar{\tau}_{mittel}$  der stationären Flamme ein charakteristisches globales Zeitmaß  $\tau_{Flamme}$  darstellt. Dieses Zeitmaß bleibt auch bei der instationären Flamme innerhalb der Pulsationsperiode nahezu konstant (s. o.).

### **Bewertung der eingesetzten Methoden und Modelle**

Die vorgestellten numerischen Untersuchungen laminarer Ringwirbel zeigen, dass die

verwendete Finite-Volumen-Methode in der Lage ist, das instationäre Strömungsfeld und alle daraus ableitbaren Größen sehr gut wiederzugeben. Die Berechnung des Mischungsfeldes (Medium Wasser) ist jedoch erheblich von numerischen Fehlern beeinflusst, was vor allem durch die großen auftretenden Konzentrationsgradienten bedingt ist. Im Falle der Berechnung turbulenter isothermer Ringwirbel (Medium Luft) ist dagegen der Einfluss numerischer Fehler vernachlässigbar. Das verwendete  $k-\epsilon$  Turbulenzmodell unterschätzt den Einfluss der turbulenten Mischung.

Die Berechnung von pulsierten turbulenten vorgemischten Axialstrahlflammen mit der URANS-Methode liefert wertvolle Ergebnisse zum Verständnis der komplexen Interaktion von Ringwirbel und Flamme. Bei der Modellierung können im Gegensatz zum Experiment einzelne Einflussfaktoren separiert werden. Die Modellierung liefert bezüglich der Vorhersage von Phasengängen im betrachteten Frequenzbereich bis 200 Hz eine sehr gute Übereinstimmung mit Messdaten, wenn der Ratenterm des verwendeten PHP-Verbrennungsmodelles mit einer zusätzlichen, leistungsabhängigen Konstante versehen wird. Es konnte bestätigt werden, dass der Phasengang einer pulsierten Flamme auch aus der Analyse der zugehörigen stationären Flamme abgeleitet werden kann. Der quantitative Vergleich von berechneten und gemessenen Amplitudengängen ist aufgrund der unterschiedlichen ausgewerteten Größen (OH-Strahlung und Reaktionsumsatz) nicht möglich. Die berechneten Amplitudengänge weisen jedoch alle im Experiment zu beobachtenden Charakteristiken auf. Es gibt Hinweise, dass das für vorgemischte Flammen konzipierte PHP-Verbrennungsmodell den Einfluss der bei großen Anregungsamplituden verstärkt auftretenden Einmischung nicht richtig wiedergibt. Um die genaue Herkunft der dabei auftretenden Unterschiede zwischen Modellierung und Experiment aufzuklären, sind jedoch detaillierte zeitaufgelöste Messdaten der Feldgrößen notwendig.

## 10 Literatur

### **Wirbelstrukturen (experimentelle Untersuchungen)**

- [We1] Hirsch, C.; Büchner, H.; Leuckel, W. (1992): The Formation of coherent turbulent Vortex Rings in periodic Flow. Proceedings of the 13th Symposium on Turbulence, 21.-31.9.92, University of Missouri-Rolla, Rolla, USA
- [We2] Didden, N. (1977): Untersuchung laminarer, instabiler Ringwirbel mittels Laser-Doppler-Anemometrie. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen
- [We3] Didden, N. (1979): On the Formation of Vortex Rings: Rolling-up and Production of Circulation. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), Vol. 30, S. 101-116
- [We4] Wille, R. (1952): Über Strömungserscheinungen im Übergangsbereich von geordneter zu ungeordneter Bewegung. Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft 46, S. 176-187
- [We5] Liess, C.; Didden, N. (1975): Experimentelle Untersuchung von Ringwirbeln. 50 Jahre Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen. S. 163-173
- [We6] Liess, C. (1978): Experimentelle Untersuchung des Lebenslaufes von Ringwirbeln. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, Bericht 1/1978
- [We7] Liess, C.; Didden, N. (1976): Experimente zum Einfluß der Anfangsbedingungen auf die Instabilität von Ringwirbeln. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM) Vol. 56 S. T206-T208
- [We8] Schade, H.; Michalke, A. (1962): Zur Entstehung von Wirbeln in einer freien Grenzschicht, Zeitschrift für Flugwissenschaften 10, Heft 4/5
- [We9] Schneider, E. (1980): Experimentelle Untersuchung der Instabilitätsphasen eines laminaren Ringwirbels im Hinblick auf vergleichbare Instabilitätsereignisse in turbulenten Scherschicht-, Grenzschicht- und Kanalströmungen, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, Bericht 17/1980
- [We10] Schneider, P.E.M. (1975): Rhythmische Wirbelströmungen, MPI-Bericht 113 / 1975
- [We11] Johnson, V. E. et al (1982): Cavitating and structured jets for mechanical bits to increase drilling rate, ASME Paper 82-Pet-13
- [We12] Schneider, E. (1978): Werden, Bestehen, Instabilität, Regeneration, Vergehen eines Ringwirbels, Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen, Bericht 17/1978
- [We13] Arnold, O. (1974): Pusierende Einleitung in eine turbulente Grundströmung, Bericht SFB 80/ET/19, Sonderforschungsbereich 80, Ausbreitungs- und Transportvorgänge in Strömungen, Universität Karlsruhe
- [We14] Turner, J. S. (1960): Intermittent release of smoke from chimneys, J. Mech. Eng.

- Sci., Vol.2 No. 2
- [We15] Skaret, E. (1985): Effective Ventilating Systems, CLIMA 2000, VVS Kongres Copenhagen
- [We16] Durst, F.; Fuchs, W. (1974): Die Bildung von Wirbelringen durch fallende Tropfen und die Dynamik der Wirbelringfortbewegung, Bericht SFB 80/ET/23, Sonderforschungsbereich 80, Ausbreitungs- und Transportvorgänge in Strömungen, Universität Karlsruhe (TH)
- [We17] Sallet, D. W.; Widmayer, R. S. (1974): An experimental Investigation of laminar and turbulent Vortex Rings in Air. Zeitschrift für Flugwissenschaften Vol. 22, S. 201-215
- [We18] Maxworthy, T. (1972): The structure and stability of vortex Rings. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 51 Part 1 pp. 15-32
- [We19] Maxworthy, T. (1976): Some experimental studies of vortex Rings: Journal of Fluid Mechanics, Vol. 81, pp. 465-495
- [We20] Maxworthy, T. (1974): Turbulent vortex rings, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 64, part 2, pp. 227-239

### **Wirbelstrukturen (numerische Untersuchungen)**

- [Wn1] Mohseni, K.; Ran, H.; Colonius, T. (2001): Numerical experiments on vortex ring formation, Journal of Fluid Mechanics, 430, p. 267-282
- [Wn2] Rosenfeld, M.; Rambod, E.; Gharib, M. (1998): Circulation and formation number of laminar vortex rings, Journal of Fluid Mechanics, 376, p. 292-318
- [Wn3] Friebel, C. (1986): Numerische Simulation von Ringwirbeln, VDI-Fortschrittsberichte, Reihe 7: Strömungstechnik, Nr. 136, VDI-Verlag
- [Wn4] Leonard, A. (1980): Vortex Methods for Flow Simulation, Journal of Computational Physics, 37, pp. 289-335
- [Wn5] Seno, T.; Kageyama, S.; Ito, R. (1988): A Modeling of Vortex Rings in an Axisymmetric Pulsed Jet, J. Chem. Eng. Japan, Vol 21 (1), pp. 1-5.
- [Wn6] Brady, M.; Leonard, A.; Pullin, D. I. (1988): Regularized Vortex Sheet Evolution in three Dimensions, Journal of Computational Physics, 146, pp. 520-545.
- [Wn7] Wetzel, F. (2001): Numerische Berechnung laminarer Ringwirbelstrukturen, Diplomarbeit, Enger-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)

### **Wirbelstrukturen (analytische Untersuchungen)**

- [Wa1] Prandtl, L. (1924): Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflügeltheorie und andere Aufgaben, Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik, Herausgegeben v. Th. v. Kármán u. T. Levi-Civita S.19-34, Berlin
- [Wa2] Saffman, P. G. (1970): The Velocity of viscous Vortex Rings. Studies in Applied Mathematics Vol. 49 S. 371-381
- [Wa3] Saffman, P. G. (1975): On the Formation of Vortex Rings. Studies in Applied Mathematics Vol. 54, S. 261-268

- 
- [Wa4] Saffman, P. G. (1978): The Number of Waves on Unstable Vortex Rings. *Journal of Fluid Mechanics* 84, S. 625-639
- [Wa5] Saffman, P. G. (1977): *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press
- [Wa6] Kaden, H. (1931): Aufwicklung einer unstablen Unstetigkeitsfläche. *Ingenieur-Archiv* 2, S. 140-169
- [Wa7] Anton, L. (1939): Ausbildung eines Wirbelpaares an den Kanten einer Platte. *Ingenieur-Archiv* 10, S. 411-427
- [Wa8] Wedemeyer, E. (1961): Ausbildung eines Wirbelpaares an den Kanten einer Platte. *Ingenieur-Archiv* 30, S. 187-200
- [Wa9] Durst, F., Simons, M. (1977): Ergänzungen zur Theorie und Struktur und Bewegung nichtviskoser Wirbelringe, Bericht SFB 80/T/110, Sonderforschungsbereich 80, Ausbreitungs- und Transportvorgänge in Strömungen, Universität Karlsruhe
- [Wa10] Lugowzow, B. A. (1975): Über die Bewegung eines turbulenten Wirbelrings und den durch sie bedingten Stofftransport, Bericht SFB 80/TE/50, Sonderforschungsbereich 80, Ausbreitungs- und Transportvorgänge in Strömungen, Universität Karlsruhe
- [Wa11] Zaroodny, S.J. (1966): Revised Theory of Vortex Rings - A Simplified Review of the State-of-the-Art, US Army Limited War Lab. TM 66-01
- [Wa12] Wang, C. T. et al. (1994): Initial Motion of a viscous Vortex Ring. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, Vol. 446 Nr. 1928, S. 589-599
- [Wa13] Bühler, K. (1988): Das Zeitverhalten der Druckverteilung beim Zerfließen des Potentialwirbels, *Z. angew. Math. Mech. (ZAMM)*, Vol. 11, pp. 580-581

### **Strömungen, Turbulenz**

- [S1] Lugt, H., J. (1979): *Wirbelströmungen in Natur und Technik*, G. Braun Verlag Karlsruhe
- [S2] Leuckel, W. (1998): *Theorie turbulenter Strömungen ohne u. mit überlagerter Verbrennung*. Scriptum zur Vorlesung. Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [S3] Prandtl, H.; Oswatitsch, K.; Wieghardt., K. (1989): *Führer durch die Strömungslehre*, 9. Auflage, Vieweg Verlag
- [S4] Schlichting, H. u. Gersten, K. (1997): *Grenzschichttheorie*. 9. Auflage, Springer-Verlag
- [S5] Schlichting, H. (1965): *Grenzschichttheorie*, 5. Auflage, Verlag G. Braun, Karlsruhe
- [S6] Truckenbrodt, E. (1996): *Fluidmechanik*, Band 1, 4. Auflage, Springer-Verlag
- [S7] Truckenbrodt, E. (1996): *Fluidmechanik*, Band 2, 4. Auflage, Springer-Verlag
- [S8] Betz, A. (1950): Wie entsteht ein Wirbel in einer wenig zähen Flüssigkeit. *Die Naturwissenschaften* Heft 9, Jahrgang 37
- [S9] Tietjens, O. (1960): *Strömungslehre: Band 1, Hydro- und Aerostatik, Bewegung der idealen Flüssigkeiten*. Springer-Verlag
- [S10] Tietjens, O. (1970): *Strömungslehre: Band 2, Bewegungen der Flüssigkeiten und Gase*. Springer-Verlag

- 
- [S11] Telionis, D. (1981): *Unsteady Viscous Flows*. Springer Series in Computational Physics. Springer-Verlag
- [S12] Rodi, W. (1980): *Turbulence Models and their Applications in Hydraulics*, State-of-the-art Paper, IAHR, Delft
- [S13] Rodi, W. (1995): *Turbulenzmodelle und ihre Anwendungen mit Hilfe von Differenzenverfahren*, Skriptum zur Vorlesung, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe (TH)
- [S14] Rodi, W. (1970): *Basic Equations for Turbulent Flow in Cartesian and Cylindrical Coordinates*. Imperial College, Dept. Mech. Engd., Report BL/TN/A/26, London
- [S15] Döbbeling, K. (1990): *Experimentelle und theoretische Untersuchungen an stark verdrallten, turbulenten isothermen Strömungen*. Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Universität Karlsruhe (TH)
- [S16] Hirsch, C. (1995): *Ein Beitrag zur Wechselwirkung von Turbulenz und Drall*, Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Universität Karlsruhe (TH)
- [S17] Holzäpfel, F. (1996): *Zur Turbulenzstruktur freier und eingeschlossener Drehströmungen*, Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
- [S18] Zierep, J. (1982): *Grundzüge der Strömungslehre*, Verlag G. Braun, Karlsruhe
- [S19] Hinze, J. O. (1965): *Turbulence*, McGraw-Hill Book Company, New York
- [S20] Favre, A. J. (1965): *The Equations of Compressible Turbulent Gases*, USAF Contract AF61 (052)-772, AD 622097
- [S21] Pope, S. B. (1978): *An Explanation of the Turbulent Round-Jet/Plane-Jet Anomaly*. AIAA Journal, March 1978, Vol. 16, No. 3, S. 279-281
- [S22] Rotta, J. C. (1972): *Turbulente Strömungen*. Band 15 der Reihe Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Verlag B. G. Teubner, Stuttgart
- [S23] Tennekes, H.; Lumley, J. L. (1972): *A First Course in Turbulence*. MIT Press, Massachusetts and London.
- [S24] Kessler, R. (1992): *Homogene Turbulenz*. Vortrag im Rahmen des Hochschulkurses Turbulenz Erlangen
- [S25] Rung, T. (2002): *Statistische Turbulenzmodellierung*. Skriptum zur Vorlesung, Hermann-Föttinger-Institut für Strömungsforschung, Technische Universität, Berlin
- [S26] Durbin, P. A. (2002): *A Perspective on Recent Developments in RANS-Modelling*. In: *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 5*, W. Rodi and N. Fueyo (Editors), Elsevier Science Ltd.
- [S27] Iaccarino, G.; Ooi, A.; Durbin, P. A.; Behnia, M.: (2003): *Reynolds averaged simulation of unsteady separated flow*. Int. Journal of Heat and Fluid Flow, Vol. 24, pp. 147-156
- [S28] Franke, R. (1991): *Numerische Berechnung der instationären Wirbelablösung hinter zylindrischen Körpern*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
- [S29] Bosch, G. (1995): *Experimentelle und theoretische Untersuchung der instationären Strömung um zylindrische Strukturen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
- [S30] Börger, G. (1973): *Optimierung von Windkanaldüsen für den*

- Unterschallbereich. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum
- [S31] Remke, K. (1971): Untersuchungen zum pulsierenden turbulenten Freistrahle. Dissertation, Technische Universität Dresden
- [S32] W. Leuckel, H. Büchner, C. Köhlsheimer (1997): Abschlussbericht der ersten Phase des Forschungsvorhabens: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ausbildung kohärenter, turbulenter Ringwirbelstrukturen in periodisch-instationären Strömungen und Flammen. DVGW-Forschungsstelle Karlsruhe, Bereich Verbrennungstechnik
- [S33] Lesieur, M. (1993): Understanding Coherent Vortices Through Computational Fluid Dynamics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, Vol. 5, pp. 177-193
- [S34] Cotel, A. J.; Breidenthal, R., E. (1999): Turbulence inside a vortex. *Physics of Fluids*, Vol. 11, No. 10, pp. 3026-3029
- [S35] Burgers, J. M. (1948): A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, Academic Press, New York, pp. 171-96
- [S36] Sigloch, H.(1989): Technische Fluidmechanik, 3. Auflage, VDI-Verlag
- [S37] Spurk, J. H.(1993): Strömungslehre, 3. Auflage, Springer-Verlag

### **Verbrennungstechnik allgemein (Messung, Modellierung, Theorie)**

- [Va1] Zinser, W. (1984): Zur Entwicklung mathematischer Flammenmodelle für die Berechnung technischer Brennstoffe, Fortschrittsberichte VDI, Reihe 6: Energietechnik / Wärmetechnik, Nr. 171, VDI-Verlag Düsseldorf
- [Va2] Ehrhardt, K. (1991): Mathematische Modellierung des isothermen Strömungs- und Mischungsfeldes eines Stauscheibenbrenners, Diplomarbeit, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Va3] Habisreuther, P. (2002): Untersuchung zur Bildung von thermischem Stickoxid in turbulenten Drallflammen, Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Va4] Damköhler, G. (1940): Der Einfluss der Turbulenz auf die Flammengeschwindigkeit in Gasgemischen. *Zeitschr. F. Elektrochemie u. angewandte Chemie*, Vol. 46, S. 601-626
- [Va5] Peters, N. (2000): *Turbulent Combustion*. Cambridge University Press, London
- [Va6] Haber, L. (2000): An investigation into the origin, measurement and application of chemiluminescent light emissions from premixed flames. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute, Virginia State University, Blacksburg, Virginia, USA
- [Va7] Borghi, R. (1984): On the structure and morphology of turbulent premixed flames. *Recent Advantages in Aerospace Science*, pp. 117-138
- [Va8] Hoffmann, A. (2004): Modellierung turbulenter Vormischverbrennung, Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Va9] Schmid, H. P. (1995): Ein Verbrennungsmodell zur Beschreibung der Wärmefreisetzung von vorgemischten turbulenten Flammen. Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)

- 
- [Va10] Schmid, H.-P.; Habisreuther, P.; Leuckel, W. (1998): A model for calculating heat release in premixed turbulent flames. *Comb. and Flame* 113, p. 79-91
- [Va11] Zeldovich, Y. (1980): Flame Propagation in a Substance Reacting at Initial Temperature. *Combustion and Flame*, Vol. 39, S. 219-224
- [Va12] Hettel, M.; Zajadatz, M., Leuckel, W. (1998): Burning velocity of high-turbulence natural gas flames for gas turbine application, Proc. of the International Gas Research Conference, San Diego, California, USA, p. 793-803
- [Va13] Hettel, M.; Schmid, H. P.; Lenze, B. (1997): Flame Structures of Highly Turbulent Premixed Flames: Measurements and Numerical Calculations, ASPACC'97 (Asian Pacific Conference on Combustion), Osaka, Japan, 12.5.-15.5.97
- [Va14] O'Rourke, P.J.; Bracco, F.V., G. (1979): Two Scaling Transformations for the Numerical Computation of Multidimensional Unsteady Laminar Flames. *Journal of Computational Physics*, Vol.33, pp. 185-203
- [Va15] Günther, R. (1984): *Verbrennung und Feuerungen*, 15. Auflage, Springer Verlag, Berlin
- [Va16] Phillip, M. (1991): Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten von Drallflammen mit zentraler Rückströmzone. Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Va17] Bray, K. N. C.; Moss, J. B (1978): A unified statistical model of the premixed turbulent flame. *Acta Astronautica*, 4:1063-1077.
- [Va18] Gerlinger, W. (2002): Direkte numerische Simulation der Wechselwirkung von chemischen Reaktionen, Vermischungsprozessen und Transportvorgängen, Dissertation, Institut für Technische Chemie und Polymerchemie, Universität Karlsruhe (TH)
- [Va19] Ashurst, WM. T.; McMurtry, P. A. (1989) Flame Generation of Vorticity: Vortex Dipoles from Monopoles. *Comb. Sci. And Tech.*, Vol. 66, pp. 17-37
- [Va20] Mueller, C. J.; Dricoll, J. F. (1998) Vorticity Generation and Attenuation as Vortices Convect Through a Premixed Flame. *Combustion and Flame*, Vol. 112, pp. 342-358
- [Va21] Zarzalis, N. (1986): Berechnung des instationären Strömungsfeldes und der Flammenausbreitung im Zylinderraum eines Otto-Motors, Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)

### **Verbrennungsinstabilitäten**

- [Vi1] Büchner, H. (1992): Experimentelle und theoretische Untersuchungen der Entstehungsmechanismen selbsterregter Druckschwingungen in technischen Vormisch-Verbrennungssystemen, Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH), Verlag Shaker, Reihe Verfahrenstechnik, Aachen
- [Vi2] Lenz, W. (1980): Die dynamischen Eigenschaften von Flammen und ihr Einfluss auf die Entstehung selbsterregter Brennkammerschwingungen Dissertation,

- 
- Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Vi3] Büchner, H.; Hirsch, C.; Leuckel W. (1993): Experimental Investigations on the Dynamics of Pulsated Premixed Axial Jet Flames, *Combustion Science and Technology* 94, pp. 219 - 228
- [Vi4] Weiß, M. (2002): Numerische Berechnung turbulenter Ringwirbelstrukturen ohne und mit überlagerter Verbrennung, Diplomarbeit, Enger-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Vi5] Kulsheimer, C.; Leuckel, W.; Büchner, H. (1998): Abschlussbericht der zweiten Phase des Forschungsvorhabens: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ausbildung kohärenter, turbulenter Ringwirbelstrukturen in periodisch-instationären Strömungen und Flammen. DVGW-Forschungsstelle Karlsruhe, Bereich Verbrennungstechnik
- [Vi6] Kulsheimer, C.; Bockhorn, H.; Büchner, H. (1999): Abschlussbericht der dritten Phase des Forschungsvorhabens: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ausbildung kohärenter, turbulenter Ringwirbelstrukturen in periodisch-instationären Strömungen und Flammen. DVGW-Forschungsstelle Karlsruhe, Bereich Verbrennungstechnik
- [Vi7] Landefeld, D. (1999): Experimentelle Untersuchungen zur Ausbildung kohärenter, turbulenter Wirbelstrukturen in isothermen, periodisch-instationären Axialstrahlen. Studienarbeit, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (T.H.)
- [Vi8] Dierschke, K. (1992): Messung instationärer axialer und radialer Konzentrationsprofile in turbulenten Ringwirbelstrukturen. Seminararbeit, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (T.H.)
- [Vi9] Kulsheimer, C.; Büchner, H. (2002): Combustion Dynamics of Turbulent Swirling Flames, *Combustion and Flame*, 131:1-2, pp. 70-84.
- [Vi10] Schadow, K. C.; Gutmark, E.; Parr, D. M.; Wilson, K. J.; Crump, J. E. (1989): Large-Scale Coherent Structures as Drivers of Combustion Instability, *Combust. Sci. and Tech.*, 64, pp. 167-186.
- [Vi11] Candel, S., (1992): Combustion Instabilities Coupled by Pressure Waves and their Active Control, 24. Symp. (Int.) on Comb., The Combustion Institute, pp. 1277-1296.
- [Vi12] Poinso, T.; Trouvé, A.; Veynante, D.; Candel, S.; Esposito, E., (1987): Vortex-driven acoustically coupled combustion instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 177, pp. 265-292.
- [Vi13] Kulsheimer, C. (2005): Die Bedeutung periodischer Ringwirbelstrukturen für das Auftreten selbsterregter Verbrennungsinstabilitäten, Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (T.H.)
- [Vi14] Priesmeier, U. (1987): Das dynamische Verhalten von Axialstrahl-Diffusionsflammen und dessen Bedeutung für selbsterregte Brennkammerschwingungen. Dissertation, Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und

- Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Vi15] Hardalupas, Y.; Selbach, A. (2002): Imposed oscillations and non-premixed flames. *Progress In Energy and Combustion Science*, Vol. 28, pp. 75-104
- [Vi16] Lieuwen, T.; McManus, K. (2002): That Elusive Hum, *Mechanical Engineering (Power)*, June 2002
- [Vi17] Noll, B.; Aigner (2004): RANS-simulation of periodically excited turbulent flames. Presentation at the First International Workshop on "Unsteady Combustion: Transport Phenomena, Chemical Reactions, Technical Systems", 8-9 July 2004, Karlsruhe
- [Vi18] Bohn, D. (1998): Selbsterregte Brennkammerschwingungen: Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Flammendynamik. Dissertation D 82 der RWTH Aachen.
- [Vi19] Hübner, V. (2003): Numerische Berechnung des dynamischen Verhaltens von Vormischflammen, Diplomarbeit, Enger-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [Vi20] Krebs, W.; Büchner, H.; Lohrmann, M.; Hoffmann, S.; Prade, B. (2002): Thermoacoustic Flame Response of Swirl Flames. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2002*, Amsterdam, The Netherlands, Paper GT-2002-30065
- [Vi21] Lohrmann, M.; Büchner, H.; Zarzalis, N.; Krebs, W. (2003): Flame Transfer Function Characteristics of Swirl Flames for Gas Turbine Applications. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2003*, Atlanta, Georgia, USA, Paper GT2003-38113
- [Vi22] Lohrmann, M.; Büchner: (2004): Scaling of Stability Limits in Lean-Premixed Gas Turbine Combustors. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2004*, Vienna, Austria, Paper GT2004-53710
- [Vi23] Lohrmann, M.; Dissertation (in Vorbereitung), Engler-Bunte-Institut, Lehrstuhl und Bereich Verbrennungstechnik, Universität Karlsruhe (T.H.)
- [Vi24] Bohn, D.; Deutsch, G.; Krüger, U. (1998): Numerical Prediction of the Dynamic Behaviour of Turbulent Diffusion Flames, *J. of Engineering for Gas Turbines and Power*, New York 120, 4, pp. 713-720
- [Vi25] Deuker, E. (1995): Ein Beitrag zur Vorausberechnung des akustischen Stabilitätsverhaltens von Gasturbinen-Brannkammern mittels theoretischer und experimenteller Analyse von Brennkammerschwingungen, VDI-Verlag, Reihe 6: Energietechnik, Nr. 317 (bzw. D28 Dissertation an der RWTH Aachen)
- [Vi26] Baade, P. K. (1974): Selbsterregte Schwingungen in Gasbrennern, *Klima- + Kälteingenieur*, Nr. 4/74, Teil 6, S. 167-176
- [Vi27] Schuller, T.; Durox, D.; Candel, S. (2003) A unified model for the prediction of laminar flame transfer functions: comparisons between conical and V-flame dynamics. *Comb. and Flame* 134, p. 21-34
- [Vi28] Schönfeld, T., Angelberger, C., Legier, J.-P. (1999): "Numerical simulation of compressible reactive flows on unstructured grids", In *Proceedings of 37th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, AIAA 99-0414, Jan. 11-14, Reno, NV
- [Vi29] Sugimoto, T.; Matsui, Y. (1982): An Experimental Study on the Dynamic Behaviour of Premixed Laminar Flames. 19. Symp. (Int.) on Comb., The

- Combustion Institute, pp. 245-250.
- [Vi30] Thibaut, D.; Candel, S. (1998): Numerical modeling of unsteady turbulent premixed combustion: Application to flashback simulation, *Combustion and Flame*, 113: 53-65
- [Vi31] Najm, H. N. (1998): Numerical investigation of the instability of premixed dump combustors, Requirement for the Degree of Doctor of Philosophy in Mech. Eng., Massachusetts Institute of Technology, Dallas, Texas, USA
- [Vi32] Flohr, P., Paschereit, C. O., van Roon, B., Schuermans, B. (2001): "Using CFD for Time-Delay Modeling of Premix Flames", In *Proceedings of ASME Turbo Expo 2001*, Paper 2001-GT-0376, New Orleans, Louisiana, USA
- [Vi33] Krebs, W., Flohr, P., Prade, B., Hoffmann, S. (2002): "Thermoacoustic Stability Chart for High-Intensity Gas Turbine Combustion Systems", *Combustion Science and Technology*, 147(7): 99-128
- [Vi34] Schlüter, J. U. (2002): Large Eddy Simulations of Suppression on Combustion Oscillations by Static Control. 1. AIAA Flow Control Conference, St. Louis, MO, AIAA Paper 2002-3283
- [Vi35] Putnam, A. A.; Dennis, W. R. (1955): Survey of Organ-Pipe Oscillations in Combustion Systems, *The Journal of the Society of America*, Vol. 28, Nr. 2
- [Vi36] Putnam, A. A. (1971): *Combustion-Driven Oscillations in Industry*. Fuel and Energy Science Series, Elsevier
- [Vi37] Crocco, L.; Cheng, S. J. (1956): *Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors*, Agardograph 8, Butterworths
- [Vi38] Ducruix, S.; Durox, D., Candel, S. (2000): Theoretical and Experimental Determinations of the Transfer Function of a Laminar Premixed Flame. 28. Symp. (Int.) on Comb., The Combustion Institute, pp. 765-773.
- [Vi39] Fleifil, M.; Annaswamy, A. M., Ghoneim, Z. A., Ghoniem, A. F. (1996): Response of a Laminar Premixed Flame to Flow Oscillations: A Kinematic Model and Thermoacoustic Instability Results, *Combustion and Flame*, 106: 487-510

### Numerik

- [N1] Gosman, A. D., Ideriah, F. J. K. (1976): TEACH-2E: A General Computer Program for Two-Dimensional, Turbulent, Recirculating Flows. Report, Department of Mechanical Engineering, Imperial College, London.
- [N2] Noll, B. (1993): *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag
- [N3] Schönung, B. (1990): *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag
- [N4] Patankar, S. V. (1980): *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation, Washington, XIII
- [N5] Oran, E. S.; Boris, J. P. (1987): *Numerical Simulation of Reactive Flow*. Elsevier-Verlag
- [N6] Rodi, W. (1995): *Numerische Methoden in der Strömungsmechanik*, Skriptum zur Vorlesung, Institut für Hydromechanik, Universität Karlsruhe (TH)
- [N7] Leonard, B. (1979): A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering, Vol. 19, p. 59
- [N8] Noh, W. F.; Woodward, P. (1976): SLIC (Simple Line Interface Method). Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, in A.I. van de Vooren and P.J. Zandbergen (eds.), Lecture Notes in Physics, Vol. 59, pp. 330-340, Springer-Verlag, New York.
- [N9] Gerlinger, W. (2002): Direkte Numerische Simulation der Wechselwirkung von chemischen Reaktionen, Vermischungsvorgängen und Transportprozessen, Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
- [N10] Fröhlich, J., Peyret, R. (1991): A Spectral Algorithm for Low Mach Number Combustion, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 90, pp. 631-642
- [N11] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., Zang, T.A. (1988): *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, New York
- [N12] Peyret, R. (2002): *Spectral Methods with Applications for Incompressible Viscous Flow*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 148
- [N13] Noll, B. (1992): Möglichkeiten und Grenzen der numerischen Beschreibung von Strömungen in hochbelasteten Brennräumen. Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe (TH)

### Sonstiges

- [So1] Gerthsen, C. (1999): *Physik*. Bearb. von Helmut Vogel, 20. Aufl., Springer-Verlag
- [So2] Klotter, K. (1978): *Technische Schwingungslehre*. Teil A, 3. Aufl., Springer-Verlag
- [So3] Walter, H. (2001): *Kompaktkurs Regelungstechnik*. Vieweg-Verlag
- [So4] Föllinger, O. (1985): *Regelungstechnik*. 5. Aufl., Hüthig-Verlag
- [So5] Mesch, F. (1980): *Korrelationsverfahren in der Mess- und Regelungstechnik*. Scriptum zur Vorlesung, Institut für Mess- und Regelungstechnik, Universität Karlsruhe (TH)
- [So6] Webseite der Internationalen Energie-Agentur (IEA). [www.library.iea.org](http://www.library.iea.org)
- [So7] Stromboli online: [www.stromboli.net](http://www.stromboli.net), Projekt zur Verbreitung vulkanologischer Daten und Forschungsergebnisse, Fotos mit freundlicher Unterstützung von Dr. Jürg Alean und Dr. Marco Fulle.
- [So8] Bishton, J. C. (1967): A Helium Detektor Probe. *Journal of the Institute of Fuel*, 10, S. 465-467
- [So9] Korn, U. (2000): *Grundkurs Signale und Systeme*. Scriptum zur Vorlesung, Institut für Automatisierungstechnik, Fakultät Elektrotechnik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg
- [So10] Bockhorn, H. (2002): *Chemische Technik I*. Scriptum zur Vorlesung. Institut für Technische Chemie und Polymerchemie, Universität Karlsruhe (TH)
- [So11] Wille, R. (1952): Über Strömungserscheinungen im Übergangsbereich von geordneter zu ungeordneter Bewegung. *Jahrbuch der Schiffsbau-technischen Gesellschaft*. Band 46. S. 176-187. Zitat von Prof. Dr.-Ing. H. Dickmann (Karlsruhe) über den Vortrag von Prof. Dr.-Ing. R. Wille.

# 11 Anhang

## 11.1 Mittelungsgesetze

### Nomenklatur

- $\bar{\Phi}$  zeitlich gemittelter Wert (Reynolds-Mittelung) von  $\Phi$
- $\check{\Phi}$  zeitlich gemittelter Wert (Favre-Mittelung) von  $\Phi$
- $\breve{\Phi}$  geordneter Anteil einer statistisch instationären Größe  $\Phi$
- $\Phi'$  Schwankungsanteil von  $\Phi$  gegenüber dem Reynolds-Mittelwert
- $\Phi''$  Schwankungsanteil von  $\Phi$  gegenüber dem Favre-Mittelwert
- $\langle \Phi \rangle$  Ensemble- oder Phasengemittelter Wert von  $\Phi$

### Beziehungen für die zeitliche Mittelung

Seien  $f$  und  $g$  abhängige Variablen, deren Mittelwerte gebildet werden sollen und sei  $s$  eine unabhängige Variable (z. B.  $x, r, \varphi, t$ ) so gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten (SCHLICHTING [S5]):

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}} &= \bar{f} \quad , \quad \overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g} \quad , \quad \overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \quad , \quad \int \overline{f ds} = \int \bar{f} ds \quad . \end{aligned}$$

Einige Beziehungen für die aus der Tripelzerlegung resultierenden Komponenten (TELIONIS [S11]):

### Beziehungen zwischen Favre- und Reynolds-Mittelwerten (aus PHILLIP [Va16])

$$\begin{aligned} \overline{\Phi'} &= 0 \quad , \quad \check{\Phi} = 0 \quad , \quad \langle \Phi' \rangle = 0 \quad , \quad \overline{\check{f}g'} = \langle \check{f}g' \rangle = 0 \quad , \\ \langle \bar{\Phi} \rangle &= \bar{\Phi} \quad , \quad \langle \check{\Phi} \rangle = \check{\Phi} \quad , \quad \langle \check{f}g \rangle = \check{f} \langle g \rangle \quad , \quad \langle \bar{f}g \rangle = \bar{f} \langle g \rangle \quad . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\check{\Phi}} &= \check{\Phi} , & \bar{\varrho}\bar{\Phi}'' &= 0 , \\
 \varrho' &= \varrho'' , & \bar{\varrho} &= \check{\varrho} . \\
 \check{\Phi} &= \bar{\Phi} + \frac{\varrho'\bar{\Phi}'}{\bar{\varrho}} , & \bar{\Phi}'' &= -\frac{\varrho'\bar{\Phi}'}{\bar{\varrho}} \\
 \bar{\Phi} &= \check{\Phi} + \bar{\Phi}'' , & \bar{\Phi}'' &= \check{\Phi}' + \bar{\Phi}'' . \\
 \overline{\varrho\Phi} &= \bar{\varrho}\bar{\Phi} + \overline{\varrho'\Phi'} = \overline{\varrho(\check{\Phi} + \Phi'')} = \bar{\varrho}\check{\Phi}
 \end{aligned}$$

## 11.2 Analytische Berechnung einer idealisierten Kugelflamme

### Herleitung der Differentialgleichung

Ausgangspunkt der Betrachtung ist eine punktförmige Volumenquelle  $\dot{V}(t)$ . Diese Volumenquelle pulsiert periodisch und erzeugt damit ein ebenfalls periodisch pulsierendes sphärisches Strömungsfeld. Die momentane Bewegungsgeschwindigkeit  $u_p$  eines Punktes P auf der als unendlich dünn angenommene Flammenfront, die die Brenngeschwindigkeit S besitzt, lässt sich als Differenz der Konvektionsgeschwindigkeit und der Flammengeschwindigkeit schreiben (s. Abb. 11.2-1):

$$u_p = u(r, t) - S = \frac{dr}{dt} \quad (11.2-1)$$

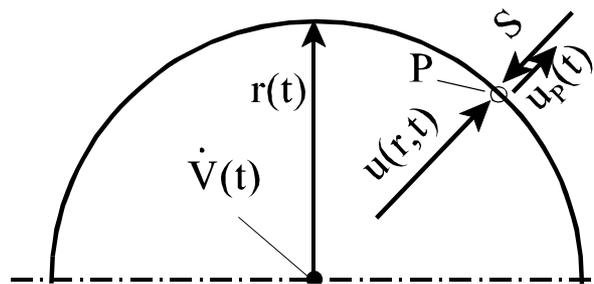


Abb. 11.2-1: Flammenfront mit Geschwindigkeitskomponenten am Punkt P.

Die Konvektionsgeschwindigkeit  $u(r, t)$  am Punkt P ist durch die Volumenquelle und die Geometrie eindeutig bestimmt

$$u(r, t) = \frac{\dot{V}(t)}{4\pi \cdot r^2}$$

Eingesetzt in Gl. (1) ergibt sich eine gewöhnliche, nichtlineare, inhomogene, Differentialgleichung erster Ordnung für die Flammenfrontposition  $r(t)$ :

$$\frac{dr}{dt} \cdot r^2 + S \cdot r^2 = \frac{\dot{V}(t)}{4\pi} \quad (11.2-2)$$

### Linearisierung der Differentialgleichung

Zum Zweck der Linearisierung der Differentialgleichung (2) wird die radiale Position in eine mittlere (stationäre) Position und eine fluktuierende (instationäre) Position zerlegt. Der hochgestellte Index  $\sim$  bedeutet in diesem Kapitel die Abweichung vom Mittelwert::

$$r(t) = \bar{r} + \tilde{r}(t)$$

Hieraus folgt der linearisierte Ausdruck:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\tilde{r}}{dt}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung (2) ergibt sich unter der Vernachlässigung kleiner Terme

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\tilde{r}}{dt} \right) \cdot (\bar{r} + \tilde{r})^2 + S \cdot (\bar{r} + \tilde{r})^2 &= \frac{\dot{V}(t)}{4\pi} \\ \left( \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\tilde{r}}{dt} \right) \cdot (\bar{r}^2 + 2\bar{r}\tilde{r} + \tilde{r}^2) + S \cdot (\bar{r}^2 + 2\bar{r}\tilde{r} + \tilde{r}^2) &= \frac{\dot{V}(t)}{4\pi} \\ \left( \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\tilde{r}}{dt} \right) \cdot (\bar{r}^2 + 2\bar{r}\tilde{r}) + S \cdot (\bar{r}^2 + 2\bar{r}\tilde{r}) &= \frac{\dot{V}(t)}{4\pi} \end{aligned} \quad (11.2-3)$$

Nun wird der Volumenstrom in einen zeitlich mittleren und einen Schwankungsanteil zerlegt:

$$\dot{V}(t) = \bar{\dot{V}} + \tilde{\dot{V}}(t)$$

In Gl. (3) eingesetzt ergibt sich

$$\left( \frac{d\bar{r}}{dt} + \frac{d\tilde{r}}{dt} \right) \cdot (\bar{r}^2 + 2\bar{r}\tilde{r}) + S \cdot (\bar{r}^2 + 2\bar{r}\tilde{r}) = \frac{\bar{\dot{V}} + \tilde{\dot{V}}(t)}{4\pi} \quad (11.2-4)$$

Die zeitkonstanten Terme liefern zusammen die Gleichung:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \bar{r}^2 + S \cdot \bar{r}^2 = \frac{\bar{\dot{V}}}{4\pi}$$

Für den Sonderfall eines stationären Volumenstromes ist auch die Flammenfront stationär und es gilt  $d\bar{r}/dt = 0$ . Daraus resultiert der sich im stationären Fall einstellende Flammenfrontradius

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{\bar{\dot{V}}}{4\pi \cdot S}} .$$

Die zeitabhängigen Terme von Gl. (4) ergeben zusammen mit  $d\bar{r}/dt = 0$  und unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung die Gleichung:

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} + 2\tilde{r} \cdot \frac{S}{\bar{r}} = -S + \frac{\bar{\dot{V}}}{4\pi \cdot \bar{r}^2} + \frac{\tilde{\dot{V}}(t)}{4\pi \cdot \bar{r}^2} . \quad (11.2-5)$$

Mit

$$-S + \frac{\bar{\dot{V}}}{4\pi \cdot \bar{r}^2} = -S + u(\bar{r}) = 0$$

ergibt sich folgende gewöhnliche, lineare, inhomogene, Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten für die Flammenfrontkontur  $\tilde{r}(t)$ :

$$\frac{d\tilde{r}(t)}{dt} + 2 \cdot \frac{S}{\bar{r}} \cdot \tilde{r}(t) = \frac{\tilde{\dot{V}}(t)}{4\pi \cdot \bar{r}^2} . \quad (11.2-6)$$

Diese DGL ist mit der "Erregerfunktion"

$$\tilde{\dot{V}}(t) = \hat{\dot{V}} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

bei vorgegebener Amplitude  $\hat{\dot{V}}$  und Kreisfrequenz  $\omega$  zu lösen.  $\bar{r}$  und  $S$  sind die Parameter der stationären Flammenkugel, die als zeitgemittelte Flammenfrontkontur des Pulsationsfalles fungiert.

### Lösung der linearisierten Differentialgleichung

Mit den Parameterabkürzungen

$$A = 2 \cdot \frac{S}{\bar{r}} \quad ; \quad B = \frac{\hat{\dot{V}}}{4\pi \cdot \bar{r}^2}$$

ergibt sich folgende Form der DGL:

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} + A \cdot \tilde{r} = B \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad . \quad (11.2-7)$$

Die Gesamtlösung dieser gewöhnlichen inhomogenen linearen Differentialgleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zusammen:

$$\tilde{r}(t) = \tilde{r}(t)_{\text{homogen}} + \tilde{r}(t)_{\text{inhomogen}} \quad .$$

Wir lösen zunächst die homogene DGL

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} + A \cdot \tilde{r} = 0 \quad .$$

mit dem Exponentialansatz

$$\tilde{r}(t)_{\text{homogen}} = C \cdot e^{\lambda t}$$

und erhalten

$$\tilde{r}(t)_{\text{homogen}} = C_{\text{homogen}} \cdot e^{-At} \quad .$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\tilde{r}(t)_{\text{partikulär}} = C_1 \cdot \sin(\omega \cdot t) + C_2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

für die inhomogene DGL (11.2-7) erhalten wir die Gleichung

$$\cos(\omega \cdot t) \cdot [\omega \cdot C_1 + A \cdot C_2] + \sin(\omega \cdot t) \cdot [A \cdot C_1 - \omega \cdot C_2 - B] = 0 \quad .$$

Die Bestimmung der Unbekannten  $C_1$  und  $C_2$  gelingt durch Nullsetzen der Argumente der trigonometrischen Funktionen. Es ergeben sich zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} \cos(\omega \cdot t) = 0 &\Rightarrow \omega \cdot C_1 = 0 \\ \sin(\omega \cdot t) = 0 &\Rightarrow A \cdot C_1 - \omega \cdot C_2 - B = 0 \quad , \end{aligned}$$

mit den Lösungen:

$$C_1 = \frac{A \cdot B}{(\omega^2 + A^2)} ; \quad C_2 = \frac{-B}{(\omega + A^2/\omega)} .$$

Als Gesamtlösung ergibt sich damit zunächst:

$$\tilde{r}(t) = C_{\text{homogen}} \cdot e^{-At} + \frac{A \cdot B}{(\omega^2 + A^2)} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \frac{B}{(\omega + A^2/\omega)} \cdot \cos(\omega \cdot t) .$$

Für  $t = 0$  ist  $\tilde{r}(t) = 0$  und für  $C_{\text{homogen}}$  ergibt sich daraus

$$C_{\text{homogen}} = \frac{B}{(\omega + A^2/\omega)} .$$

Durch Rückeinsetzen der Parameter A, B und Vereinfachen lautet die Gesamtlösung:

$$\tilde{r}(t) = \frac{\hat{V}}{4\pi \cdot (\omega \cdot \bar{r}^2 + 4 \cdot S^2/\omega)} \cdot \left( e^{-\frac{2S}{\bar{r}} \cdot t} + 2 \cdot \frac{S}{\bar{r} \cdot \omega} \cdot \sin(\omega \cdot t) - \cos(\omega \cdot t) \right) . \quad (11.2-8)$$

### Bestimmung von Frequenzgängen durch numerische Auswertung

Um die Darstellung des Flammenverhaltens in Form von Frequenzgängen zu ermöglichen, wurde Gl. 11.2-8 numerisch ausgewertet. Die Vorgehensweise wird am Beispiel einer einzelnen Erregungsfrequenz erläutert:

- Berechnung der Flammenkontur  $r(t) = \bar{r} + \tilde{r}(t)$  für verschiedene Zeitschritte innerhalb einer Schwingungsperiode.
- Bestimmung der momentanen integralen Umsatzgeschwindigkeit  $\dot{V}(t)_{\text{Brenn}}$  (in  $[m^3/s]$ ) für jeden Zeitschritt. Diese lässt sich unter den gegebenen Modellannahmen aus der momentanen Flammenfläche multipliziert mit der Brenngeschwindigkeit errechnen:  $\dot{V}(t)_{\text{Brenn}} = S \cdot 4\pi \cdot r(t)^2$  .
- Ausgabe der momentanen Werte von Quellvolumenstrom  $\dot{V}(t)$  und Umsatzgeschwindigkeit  $\dot{V}(t)_{\text{Brenn}}$  auf eine Datei und nachfolgende Analyse der Zeitverläufe. Der Phasenwinkel  $\varphi(f)$  ergibt sich über eine Kreuzkorrelation aus dem Zeitversatz  $t_v(f)$  zwischen der Ausgangsgröße  $\dot{V}(t)_{\text{Brenn}}$  und der Eingangsgröße  $\dot{V}(t)$ . Die Amplitude errechnet sich aus der normierten Schwankung der integralen Umsatzgeschwindigkeit bezogen auf die normierte Schwankung des Quellvolumenstromes. Die Normierungsparameter lassen sich

kürzen, da der RMS-Wert des Quellvolumenstromes bei kleinen Referenzfrequenzen  $f_{ref}$  bzw. bei quasistationärer Flamme dem RMS-Wert der integralen Umsatzgeschwindigkeit entspricht.

$$\varphi(f) = -t_V(f) \cdot f \cdot 360^\circ$$

$$|F|(f) = 20 \cdot \log \frac{\frac{\dot{V}(f)_{Brenn,RMS}}{\dot{V}(f_{ref})_{Brenn,RMS}}}{\frac{\dot{V}(f)_{RMS}}{\dot{V}(f_{ref})_{RMS}}} = \frac{\dot{V}(f)_{Brenn,RMS}}{\dot{V}(f)_{RMS}} \quad .$$

## 11.3 Analytische Berechnung einer idealisierten Kegelflamme

### Herleitung der Differentialgleichung

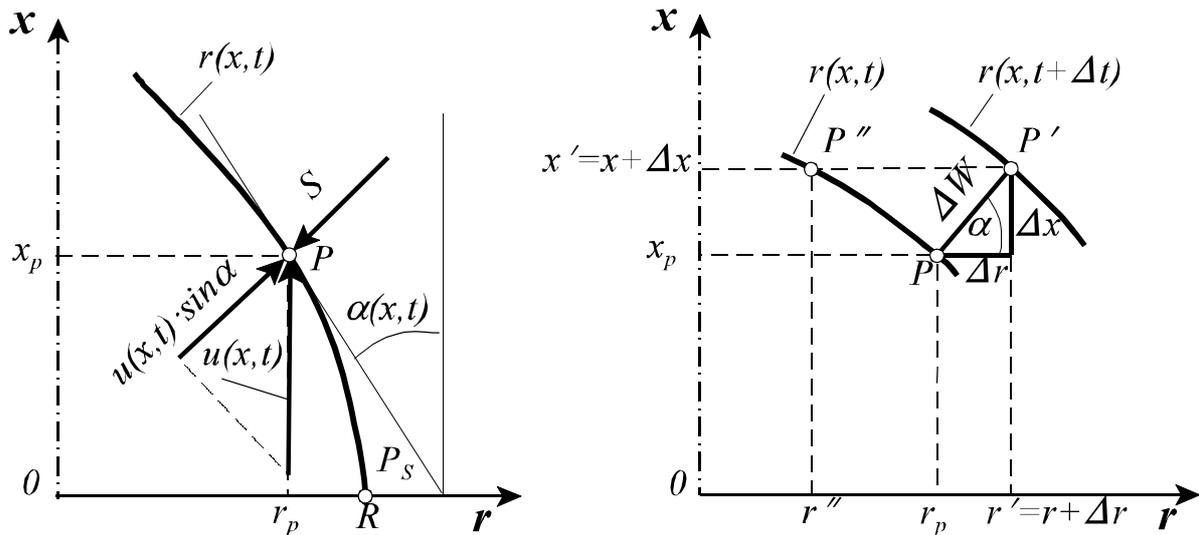


Abb. 11.3-1: links: Flammenfront mit Geschwindigkeitskomponenten am Punkt P. rechts: Bedingungen bei einer zeitlichen Verschiebung der Flammenfront.

Abb. 11.3-1 (links) zeigt die momentanen Geschwindigkeitskomponenten am Punkt P einer instationären kegelförmigen Flammenfront (FF), die am Punkt  $P_s$  stabilisiert ist. Während der (infinitesimalen) Zeitspanne  $\Delta t$  wird der Flammenfrontpunkt P senkrecht zur Flammenfront (FF) um die infinitesimale Wegstrecke

$$\Delta W = [u \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - S] \cdot \Delta t = [u \cdot \sin \alpha - S] \cdot \Delta t$$

in den Punkt  $P'$  verschoben (s. Abb. 11.3-1 rechts). Dabei ergeben sich für diesen ausgezeichneten Punkt auf der FF die Verschiebungen:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x' - x_p = [u \cdot \sin \alpha - S] \cdot \sin \alpha \cdot \Delta t \\ \Delta r &= r' - r_p = [u \cdot \sin \alpha - S] \cdot \cos \alpha \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (11.3-1)$$

Die FF-Kontur  $r = r(x, t)$  ist nach der Zeitspanne  $\Delta t$  in die FF-Kontur  $r = r(x, t + \Delta t)$  übergegangen. Dabei ist der FF-Punkt  $P''$  mit der radialen Koordinate  $r''$  längs  $x = \text{konst.}$  in den FF-Punkt  $P'$  mit der radialen Koordinate  $r'$  überführt worden. Diese Überführung repräsentiert die radiale Verschiebung eines Funktionswertes der FF-Kontur und nicht wie in Gl. (11.3-1) die Bewegung eines ausgezeichneten Punktes auf der Flammenfront. Hieraus folgt für die radiale Verschiebung des Funktionswertes

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{x=\text{konst}} = \frac{\partial r}{\partial t} \approx \frac{r' - r''}{\Delta t} \approx \frac{(r' - r_P) - (r'' - r_P)}{\Delta t} \quad (11.3-2)$$

Wie in Abb. 11.3-1 (rechts) zu sehen gilt für die Steigung der FF zum Zeitpunkt  $t$ :

$$\left. \frac{dr}{dx} \right|_{t=\text{konst}} \approx \frac{r'' - r_P}{x' - x_P} .$$

Umgestellt ergibt sich für die radiale Verschiebung:

$$r'' - r_P \approx (x' - x_P) \cdot \left. \frac{dr}{dx} \right|_{t=\text{konst}} = \Delta x \cdot \frac{\partial r}{\partial x} .$$

Zusammen mit  $r' - r_P = \Delta r$  eingesetzt in Gl. (11.3-2) folgt

$$\frac{\partial r}{\partial t} \approx \frac{\Delta r - \Delta x \cdot \frac{\partial r}{\partial x}}{\Delta t} .$$

Wird nun  $\Delta r$ ,  $\Delta x$  von Gl. (11.3-1) eingesetzt ergibt sich die Beziehung:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = (u \cdot \sin \alpha - S) \cdot \left( \cos \alpha - \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \sin \alpha \right) .$$

Für einen im Geschwindigkeitsgleichgewicht befindlichen Flammenkegel gilt

$$\bar{u} \cdot \sin \bar{\alpha} = S .$$

Damit ist  $\partial r / \partial t = 0$ , d. h. dieser Flammenkegel ist stationär und positionsstabil. Nun sind

noch  $\sin \alpha$  und  $\cos \alpha$  durch  $\frac{\partial r}{\partial x}$  zu ersetzen:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= -\frac{\partial r}{\partial x} \\ \sin \alpha &= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{-\frac{\partial r}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2}}\end{aligned}$$

Nach Einsetzen und Ordnen der Terme nach  $u$ - und  $S$ -Gliedern folgt :

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u \cdot \left(-\frac{\partial r}{\partial x}\right) - S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2} . \quad (11.3-3)$$

Dies ist eine partielle nichtlineare Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung für die FF-Kontur  $r = r(x, t)$ . Eine zugehörige Randbedingung lässt sich für den Stabilisierungspunkt  $P_s$  (s. Abb. A11.3-1 links) angeben:

$$x = 0 ; \quad r = R = \textit{konst.} .$$

Für den Sonderfall des stationären, zeitinvarianten Flammenkegels gilt :

$$\sin \bar{\alpha} = \frac{S}{u} ,$$

oder entsprechend :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\tan \bar{\alpha} = -\frac{\sin \bar{\alpha}}{\sqrt{1 - \sin^2 \bar{\alpha}}} = \frac{-\frac{S}{u}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{u}\right)^2}} = \textit{konst.} .$$

In obiger DGL (11.3-3) auf der rechten Seite eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial t} &= \bar{u} \cdot \left( \frac{\frac{S}{\bar{u}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} \right) - S \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} \\
&= \frac{S}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} - S \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

wie zu erwarten ist. Mit obiger, nichtlinearer DGL (11.3-3) soll nun eine im oszillierenden Geschwindigkeitsfeld

$$u \equiv u(x,t) \equiv \bar{u}(t) + \tilde{u}(x,t) \equiv \bar{u}(t) + \hat{u} \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{u_c}\right)\right)$$

periodisch um den Flammenkegel des stationären Systems fluktuierende FF berechnet werden. Das Geschwindigkeitsfeld soll die Charakteristik einer räumlich eindimensionalen, transversalen Welle aufweisen, wobei  $u_c$  die Phasengeschwindigkeit der Welle ist. Für die weitere Behandlung ist es zweckmäßig, die Wellenfunktion wie folgt aufzuspalten, da später nach zeit- und ortsabhängigen Termen aufgliedert wird:

$$u(x,t) \equiv \bar{u}(t) + \tilde{u}(x,t) \equiv \bar{u}(t) + \hat{u} \cdot \left[ \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \right]$$

### Linearisierung der Differentialgleichung

Eine geschlossene analytische Lösung der nichtlinearen Differentialgleichung (11.3-3) ist nur für die linearisierte Form der DGL, d. h. für begrenzte Auslenkungen vom stationären FF-Kegel möglich. Zum Zweck der Linearisierung wird die radiale Position in eine mittlere (stationäre) Position und eine fluktuierende (instationäre) Position (s. Abb. 11.3-2) zerlegt. Der hochgestellte Index  $\sim$  bedeutet in diesem Kapitel die Abweichung vom Mittelwert::

$$r(x,t) = \bar{r}(x) + \tilde{r}(x,t) ,$$

mit

$$\left| \frac{\partial \tilde{r}(x,t)}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial \bar{r}(x)}{\partial x} \right| .$$

Hieraus folgen als linearisierte Ausdrücke:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} + \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} + \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \\ &\approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}} \\ &\approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \cdot \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2}} \\ &\approx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}\right) . \end{aligned}$$

Eingesetzt in die allgemeine DGL (11.3-3) ergibt sich:

$$\frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial t} = (\bar{\mathbf{u}} + \check{\mathbf{u}}(t)) \cdot \left(-\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x} - \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}\right) - S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial \check{\mathbf{r}}}{\partial x}\right) .$$

Nun wird diese Beziehung in zwei Anteile aufgetrennt. Der Anteil, der die zeitkonstanten Terme 1.Ordnung enthält ist:

$$0 = \bar{\mathbf{u}} \left(-\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right) - S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}}{\partial x}\right)^2} .$$

Diese Beziehung führt auf die FF-Kontur des stationären Flammenkegels (s. o.)

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \frac{-\frac{S}{\bar{u}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} \quad (11.3-4)$$

und ist somit a priori erfüllt. Der Anteil, der die zeitvariablen Terme 1. Ordnung enthält ist:

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} = \bar{u} \cdot \left(-\frac{\partial \tilde{r}}{\partial x}\right) + \tilde{u}(t) \cdot \left(-\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right) - S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x}$$

oder vereinfacht:

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} = - \left( \bar{u} + S \cdot \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} - \tilde{u}(t) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \quad (11.3-5)$$

Setzt man in Gleichung (11.3-5) noch den Ausdruck (11.3-4) ein, so folgt nach einigen Umformungen die endgültige Form der linearisierten Schwingungs-Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \tilde{r}(x,t)}{\partial t} + \bar{u} \cdot \left[ 1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2 \right] \cdot \frac{\partial \tilde{r}(x,t)}{\partial x} = \frac{\frac{S}{\bar{u}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} \cdot \tilde{u}(x,t) \quad (11.3-6)$$

Diese bezüglich der gesuchten Funktion  $\tilde{r}(x,t)$  inhomogene, nun aber lineare DGL ist mit der "Erregerfunktion":

$$\tilde{u}(x,t) \equiv \hat{u} \cdot \left[ \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \right]$$

bei vorgegebener Amplitude  $\hat{u}$ , Kreisfrequenz  $\omega$  und Phasengeschwindigkeit  $u_c$  zu lösen.  $\bar{u}$  und  $S$  sind die Parameter des stationären Flammenkegels, der als zeitgemittelte FF-Kontur des Pulsationsfalles fungiert.

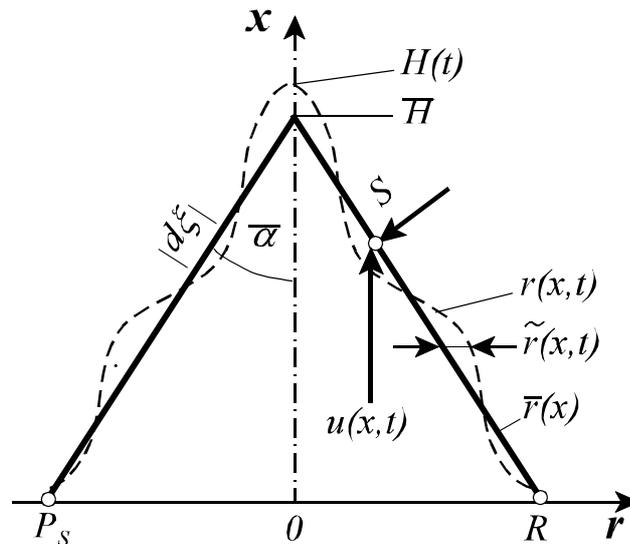


Abb. 11.3-2: Zur Definition der Flammenfrontkontur  $\tilde{r}(x, t)$

### Lösung der linearisierten Differentialgleichung

Wir führen zunächst folgende Parameterabkürzungen ein:

$$A = \bar{u} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{S}{\bar{u}} \right)^2 \right] \quad ; \quad B = \frac{\frac{S}{\bar{u}}}{\sqrt{1 - \left( \frac{S}{\bar{u}} \right)^2}} \cdot \hat{u} \quad .$$

Diese führen zu folgender Form der linearisierten DGL:

$$\frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} = B \cdot \left[ \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \right] \quad . \quad (11.3-7)$$

Für diese DGL wird der Lösungsansatz

$$\tilde{r}(x, t) = p(x) \cdot \cos(\omega \cdot t) + q(x) \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (11.3-8)$$

verwendet. Das Einsetzen dieses Ansatzes in die DGL und ein nachfolgender Koeffizientenvergleich für die Terme  $\cos(\omega \cdot t)$  und  $\sin(\omega \cdot t)$  führt zu den zwei Beziehungen:

$$\text{Term } \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow +\omega \cdot q(x) = -A \cdot p'(x) + B \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right)$$

$$\text{Term } \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow -\omega \cdot p(x) = -A \cdot q'(x) + B \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \quad .$$

Hieraus folgen durch wechselweises Eliminieren zwei Differentialgleichungen für  $p(x)$  und  $q(x)$

$$p''(x) + \frac{\omega^2}{A^2} \cdot p(x) = -\frac{\omega B}{A} \cdot \left[\frac{1}{c} + \frac{1}{A}\right] \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \quad (11.3-9)$$

$$q''(x) + \frac{\omega^2}{A^2} \cdot q(x) = +\frac{\omega B}{A} \cdot \left[\frac{1}{c} + \frac{1}{A}\right] \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \quad . \quad (11.3-10)$$

Diese zwei gewöhnlichen DGL's zweiter Ordnung sind vom Typ der Schwingungsdifferentialgleichung. Als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Lösung werden die entsprechenden homogenen Differentialgleichungen benötigt. Da diese für beide Funktionen  $p(x)$  und  $q(x)$  die gleiche Form haben, wird zunächst nur die homogene DGL für  $p(x)$

$$p''(x) + \frac{\omega^2}{A^2} \cdot p(x) = 0 \quad .$$

gelöst. Dazu wird der Lösungsansatz  $p(x) = e^{\lambda x}$  verwendet und in die DGL eingesetzt. Es ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \frac{\omega^2}{A^2} = 0 \quad ,$$

welche die konjugiert komplexe Lösung

$$\lambda_{1/2} = \pm i \frac{\omega}{A} \quad .$$

aufweist. Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung setzt sich aus der Summe der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL und einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL zusammen:

$$p(x)_{\text{allgemein}} = p(x)_{\text{homogen}} + p(x)_{\text{partikulär}} \quad .$$

Die Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich abhängig vom Typ der Störfunktion zu

$$p(x)_{\text{partikulär}} = F \cdot \sin\left(\frac{\omega x}{u_c}\right) + G \cdot \cos\left(\frac{\omega x}{u_c}\right) \quad .$$

Als Lösung der homogenen DGL ergibt sich abhängig vom Typ der Lösung der

charakteristischen Gleichung (konjugiert komplex) zu

$$p(x)_{\text{homogen}} = H \cdot \sin\left(\frac{\omega x}{A}\right) + I \cdot \cos\left(\frac{\omega x}{A}\right).$$

Damit ergibt sich die folgende allgemeine Lösung für die Funktion  $p(x)$ :

$$p(x) = F_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + G_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + H_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + I_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) .$$

Entsprechend ergibt sich als allgemeine Lösung für die Funktion  $q(x)$ :

$$q(x) = F_q \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + G_q \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + H_q \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + I_q \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right)$$

Eingesetzt in den Lösungsansatz (Gl. 11.3-8) erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x,t) = & \left[ F_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + G_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + \right. \\ & \left. H_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + I_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \right] \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ & + \left[ F_q \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + G_q \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + \right. \\ & \left. H_q \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + I_q \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) . \end{aligned} \quad (11.3-11)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der linearisierten DGL (11.3-7). Sie enthält noch die 8 offenen Parameter  $F_p, G_p, H_p, I_p, F_q, G_q, H_q, I_q$ .

Zur Bestimmung der Parameter werden die partikulären Lösungen  $p(x)_{\text{partikulär}}$  und  $q(x)_{\text{partikulär}}$  zunächst abgeleitet und dann in die inhomogenen DGL's (11.3-9) und (11.3-

10) eingesetzt. Durch Koeffizientenvergleich der Terme mit  $\sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right)$  und

$\cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right)$  erhält man:

$$F_p = -\frac{B \cdot u_c}{\omega \cdot (u_c - A)}, \quad G_p = 0, \quad F_q = 0, \quad G_q = -F_p .$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung (11.3-11) nun:

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x,t) = & \left[ F_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + H_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + I_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \right] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ & \left[ -F_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + H_q \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + I_q \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) . \end{aligned} \quad (11.3-12)$$

Die Anpassung an eine erste Randbedingung im Stabilisierungspunkt  $P_s$

$$x = 0 ; \quad \tilde{r}(0,0) = \tilde{r}(0,t) = 0$$

führt zu

$$I_p = 0, \quad I_q = -G_q .$$

Die an die erste Randbedingung angepasste Lösung lautet somit

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x,t) = & \left[ F_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + H_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \right] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ & \left[ -F_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) + F_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) + H_q \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) . \end{aligned} \quad (11.3-13)$$

Für die Festlegung der noch unbekanntenen Parameter  $H_p$ ,  $H_q$  bedarf es einer weiteren (zweiten) Randbedingung. Um diese zu finden stelle man sich das Problem zunächst als eines dem hier behandelten zylindersymmetrischen entsprechendes ebenes  $x,y$ -Problem (mit  $r \equiv y$ ) vor. Die vorstehende mathematische Behandlung wäre genau die gleiche; es würde jedoch keine "Achsbegrenzung" der Flammenfront bestehen, d. h. eine Randbedingung an einem "Flammenfront-Endpunkt" wäre physikalisch sinnlos. Die fehlende Randbedingung kann also nur im Punkt S (d. h. bei  $x = 0$ ) gesucht werden.

Auf die Ausgangs-Ansätze

$$\Delta x = [u \cdot \sin \alpha - S] \cdot \sin \alpha \cdot \Delta t$$

$$\Delta r = [u \cdot \sin \alpha - S] \cdot \cos \alpha \cdot \Delta t$$

zurückgreifend ist festzustellen, dass für  $x = 0$  beide Verschiebungsgrößen  $\Delta x$  und  $\Delta r$  für alle Zeiten  $t$  verschwinden müssen, d.h. es muss:

$$[u \cdot \sin \alpha - S]_{x=0} = 0 \quad (11.3-14)$$

sein. Die schon oben eingeführte Beziehung

$$\sin \alpha = \frac{-\frac{\partial r}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2}}$$

in Gl. (11.3-14) eingesetzt ergibt

$$\left[ u \cdot \frac{\frac{\partial r}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2}} + S \right]_{x=0} = 0$$

und somit

$$\left[ u \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2} \right]_{x=0} = 0 .$$

Setzen wir wie früher

$$u = \bar{u} + \tilde{u}(t)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x}$$

und linearisieren bezüglich der Schwankungsterme, so erhalten wir eine Beziehung am Stabilisierungspunkt  $P_S$ :

$$\left[ (\bar{u} + \tilde{u}) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \bar{u} \cdot \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} + S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2} \cdot \left( 1 + \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}}{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = 0 .$$

Für den stationären FF-Kegel ist (s. o.):

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + S \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2} = 0 .$$

Nach Abzug dieser Gleichung verbleibt

$$\left[ \tilde{u}(t) \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} + \left( \bar{u} + S \cdot \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 .$$

Mit den bereits eingeführten Relationen

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = \frac{-\frac{S}{\bar{u}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} \quad ; \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}}$$

folgt als zweite Randbedingung:

$$\left[ \frac{\tilde{u}(t)}{\bar{u}} \cdot \frac{\frac{S}{\bar{u}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2}} - \left[ 1 - \left(\frac{S}{\bar{u}}\right)^2 \right] \cdot \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \right]_{x=0} = 0 \quad . \quad (11.3-15)$$

Dieser zweiten Randbedingung ist die obige, bereits an die erste Randbedingung angepasste Lösung (Gl. (11.3-13)) zu unterwerfen, wobei für die Geschwindigkeitsschwankung am Stabilisierungspunkt  $P_s$  ( $x = 0$ ) gilt

$$\tilde{u}(t) \equiv \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad .$$

Die Ableitung der an die erste Randbedingung angepassten Lösung (Gl. (11.3-13)) ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} = & \left[ F_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \cdot \frac{\omega}{u_c} + H_p \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \cdot \frac{\omega}{A} \right] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \\ & \left[ F_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{u_c} \cdot x\right) \cdot \frac{\omega}{u_c} - F_p \cdot \sin\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \cdot \frac{\omega}{A} + H_q \cdot \cos\left(\frac{\omega}{A} \cdot x\right) \cdot \frac{\omega}{A} \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad . \end{aligned} \quad (11.3-16)$$

An der Position  $x = 0$  ergibt sich dafür

$$\left. \frac{\partial \bar{r}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left[ F_p \cdot \frac{\omega}{u_c} + H_p \cdot \frac{\omega}{A} \right] \cdot \cos(\omega \cdot t) + \left[ H_q \cdot \frac{\omega}{A} \right] \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad . \quad (11.3-17)$$

Für diesen Ausdruck muss nun die obige zweite Randbedingung (Gl. (11.3-15)) für beliebige Zeiten  $t$  erfüllt sein. Setzt man den Ausdruck (11.3-17) in Gl. (11.3-15) ein, ergeben sich durch Koeffizientenvergleich für die Terme mit  $\cos(\omega \cdot t)$  und  $\sin(\omega \cdot t)$  zwei Gleichungen, aus denen sich die zwei noch unbekannt Parameter  $H_p$ ,  $H_q$  bestimmen lassen:

$$H_p = + \frac{B \cdot u_c}{\omega \cdot (u_c - A)} \quad , \quad H_q = 0 \quad .$$

Mit den Abkürzungsparametern  $A$  und  $B$  (s. o.) eingesetzt lautet die endgültige, an beide

Randbedingungen angepasste Lösung:

$$\tilde{r}(x,t) = \frac{S}{\omega} \cdot \frac{(\hat{u}/\bar{u})}{\sqrt{[1 - (S/\bar{u})^2]}} \cdot \frac{u_c}{(u_c - \bar{u} \cdot [1 - (S/\bar{u})^2])} \cdot \left[ \sin \left( \omega \left( \frac{x}{\bar{u} \cdot [1 - (S/\bar{u})^2]} - t \right) \right) - \sin \left( \omega \left( \frac{x}{u_c} - t \right) \right) \right], \quad (11.3-18)$$

wobei  $\hat{u}$  die Amplitude,  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $u_c$  die Phasengeschwindigkeit der vorgegebenen Geschwindigkeitsschwankung bedeuten. Die zeitlich mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  und die Flammengeschwindigkeit  $S$  sind die Parameter des stationären Flammenkegels, der als zeitgemittelte Flammenfrontkontur des Pulsationsfalles fungiert. Die Lösung kann auch in folgender Form, dargestellt werden:

$$\tilde{r}(x,t) = \frac{1}{\omega} \cdot \hat{u} \cdot \frac{S}{\bar{u}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{(u_c/\bar{u}) - \cos^2 \alpha} \cdot \left[ \sin \left( \omega \cdot \left( \frac{x}{\bar{u} \cdot \cos^2 \alpha} - t \right) \right) - \sin \left( \omega \cdot \left( \frac{x}{u_c} - t \right) \right) \right], \quad (11.3-19)$$

mit

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{S}{\bar{u}} \right)^2}.$$

Der Öffnungswinkel  $\alpha$  der stationären Flamme hängt nur vom Verhältnis  $S/\bar{u}$  ab (s. Abb. 11.3-1 links).

### Bestimmung von Frequenzgängen durch numerische Auswertung

Um die Darstellung des Flammenverhaltens in Form von Frequenzgängen zu ermöglichen, wurde Gl. 11.3-19 numerisch ausgewertet. Die Vorgehensweise wird am Beispiel einer einzelnen Erregungsfrequenz erläutert:

- Berechnung der Flammenkontur  $r(x,t) = \bar{r} + \tilde{r}(x,t)$  an N axialen Stützstellen für verschiedene Zeitschritte innerhalb einer Schwingungsperiode.
- Bestimmung der momentanen integralen Umsatzgeschwindigkeit  $\dot{V}(t)_{\text{Brenn}}$  (in  $[m^3/s]$ ) für jeden Zeitschritt. Diese lässt sich unter den gegebenen Modellannahmen aus der momentanen gesamten Flammenfläche multipliziert mit der Brenngeschwindigkeit errechnen. Die Flammenfläche ergibt sich durch Integration der Flammenkontur entlang des Weges  $\xi$  bzw. entlang der axialen

Koordinate (s. Abb. 11.3-2).  $H(t)$  bezeichnet dabei die momentane Flammenhöhe. Bei der numerischen Auswertung wurde die Flammenfläche durch eine Summe von  $N-1$  Kegelmantelflächen  $F_{Mantel}$  approximiert, wobei  $N$  die Anzahl der Stützstellen auf der axialen Koordinate bezeichnet.

$$\begin{aligned}\dot{V}(t)_{Brenn} &= S \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\xi_{Max}(t)} r(x,t) d\xi \approx S \cdot 2\pi \sum_{i=1}^{N-1} F_{Mantel,i} \\ &= S \cdot 2\pi \sum_{i=1}^{N-1} \cdot \frac{(r(x_{i+1},t) + r(x_i,t))}{2} \cdot \sqrt{(r(x_{i+1},t) - r(x_i,t))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} .\end{aligned}$$

- Bestimmung des momentanen Einlassvolumenstromes aus der vorgegebenen Geschwindigkeit. Dieser markiert die momentane integrale Umsatzgeschwindigkeit einer entsprechenden quasistationären Flamme:

$$\dot{V}(t)_{Ein} = \pi \cdot R^2 \cdot u(x=0, t) .$$

- Ausgabe der zeitabhängigen Werte  $\dot{V}(t)_{Ein}$  und  $\dot{V}(t)_{Brenn}$  auf eine Datei und nachfolgende Analyse der Zeitverläufe. Der Phasenwinkel  $\varphi(f)$  ergibt sich über eine Kreuzkorrelation aus dem Zeitversatz  $t_v(f)$  zwischen der Ausgangsgröße  $\dot{V}(t)_{Brenn}$  und der Eingangsgröße  $\dot{V}(t)_{Ein}$ . Die Amplitude errechnet sich aus der normierten Schwankung der Umsatzgeschwindigkeit bezogen auf die normierte Schwankung des Einlassvolumenstromes. Die Normierungsparameter lassen sich kürzen, da der RMS-Wert des Einlassvolumenstromes bei kleinen Referenzfrequenzen  $f_{ref}$  bzw. bei quasistationärer Flamme dem RMS-Wert der integralen Umsatzgeschwindigkeit entspricht.

$$\varphi(f) = -t_v(f) \cdot f \cdot 360^\circ$$

$$|F|(f) = 20 \cdot \log \frac{\frac{\dot{V}(f)_{Brenn,RMS}}{\dot{V}(f_{ref})_{Brenn,RMS}}}{\frac{\dot{V}(f)_{Ein,RMS}}{\dot{V}(f_{ref})_{Ein,RMS}}} = \frac{\dot{V}(f)_{Brenn,RMS}}{\dot{V}(f)_{Ein,RMS}} .$$

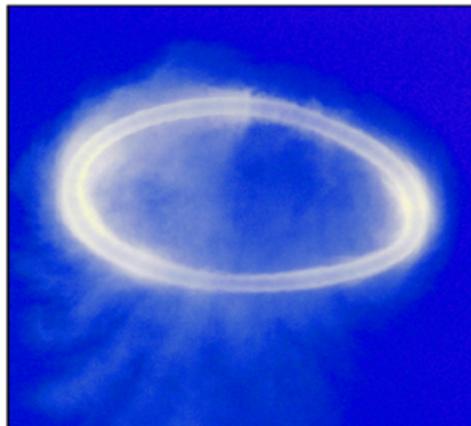




"Gestatten Sie mir zum Schluss, dass ich mich an diejenigen unter Ihnen wende, die vielleicht den Eindruck gehabt haben, dass es sich bei der hier vorgelegten Arbeit um eine mehr spielerische Beschäftigung handelt, die man ernsthaften Männern eigentlich nicht zutrauen sollte.

Ich möchte deshalb mit besonderem Nachdruck hervorheben, dass gerade die Entstehung und das Verhalten von Wirbeln fundamentale Probleme der Strömungstechnik überhaupt sind, deren Bedeutung gar nicht überschätzt werden kann."

Prof. Dr.-Ing. H. Dickmann [So11]



Ringwirbel über dem Ätna. Foto von Dr. M. Fulle [So7]

Das Auftreten von selbsterregten Verbrennungsinstabilitäten in technischen Verbrennungsanlagen stellt ein weit verbreitetes Problem dar und ist vermehrt bei Systemen zu beobachten, in denen das Konzept der Vormischverbrennung eingesetzt wird. Die Vorhersage der Schwingungsneigung einer Verbrennungsanlage in Abhängigkeit der eingestellten Betriebsparameter erfordert die Berechnung des dynamischen Verhaltens, bzw. des Frequenzgangs, des Elementes *Flamme* im Rückkopplungskreis Brenner-Flamme-Brennkammer. Bei ausgebildeten Verbrennungsschwingungen kann es zur periodischen Ausbildung von kohärenten Ringwirbelstrukturen kommen, die das dynamische Verhalten der Flamme beeinflussen. Die vorgestellten analytischen und numerischen Untersuchungen umfassen:

- die Berechnung von laminaren und turbulenten Ringwirbelstrukturen
- die Modellierung des Übertragungsverhaltens von turbulenten Axialstrahlflammen
- die Bewertung der Leistungsfähigkeit der eingesetzten Methoden und Modelle

