

# Verlustmechanismen in ungeordneten quasi-1D-Photonischen Kristallen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN  
von der Fakultät für Physik der  
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl. Phys. Meikel Frank  
aus Schwetzingen

Tag der mündlichen Prüfung: 19.01.2007

Referent: Prof. Dr. K. Busch  
Korreferent: Prof. Dr. P. Wölfle

19. Januar 2007





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Einführung	5
2.2	Lichtausbreitung im homogenen Medium	9
2.3	Der eindimensionale Photonische Kristall	13
2.3.1	Charakteristiken der Bandstruktur	17
2.4	Physik der Bandstruktur und Modenpropagation	24
2.5	Bragg- und Mie-Streuung	25
2.6	Herstellungsverfahren von Photonischen Kristallen	26
2.6.1	1D-Photonische Kristalle: Bragg-Gratings	26
2.6.2	2D-Photonische Kristalle: Makroporöses Silizium	26
2.7	Unordnung im Photonischen Kristall	27
2.8	Ziel der Arbeit	30
<b>3</b>	<b>Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA)</b>	<b>33</b>
3.1	Programmaufbau	34
3.1.1	Perfectly Matched Layers (PMLs)	35
3.1.2	Homogene Abschnitte	37
3.1.3	Abschnittsanalyse für TM-Polarisation	38
3.2	S-Matrix-Methode	40
3.2.1	Interface-Matrix	40
3.2.2	Transfer-Matrix	42
3.2.3	S-Matrix	44
3.3	Bloch-Moden-Berechnung	48
3.4	Konvergenzbetrachtungen	49
<b>4</b>	<b>Idealer Photonischer Kristall</b>	<b>53</b>
4.1	Blochmodenausbildung in abhängigkeit der Ätztiefe	53
4.2	Fabry-Perot-Oszillationen und Feldintensität im Photonischen Kristall	57
4.3	Transmissionsberechnung mit Hilfe der S-Matrix-Methode	61
4.3.1	Bandstruktur und Transmission	62
4.3.2	Transmissionsberechnungen der idealen Strukturen	63
4.4	Einseitig unendliche Photonische Kristalle	70
4.4.1	Einkopplung in einen einseitig unendlichen Photonischen Kristall	70
4.4.2	Flussberechnung mit Hilfe des Poynting Vektors	71
4.4.3	Ergebnisse	73

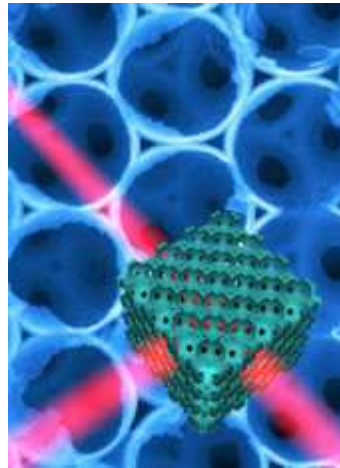
4.4.4	Auskopplung aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall . . . . .	78
4.4.5	Ergebnisse . . . . .	80
4.5	Die effektive Spiegelmethode . . . . .	83
4.5.1	Die Fabry-Perot Formel und die S-Matrix . . . . .	84
4.5.2	Verlustfreier Fall . . . . .	85
4.5.3	Absorbierende Spiegel . . . . .	86
4.5.4	Absorbierende Spiegel und Propagationsverluste . . . . .	86
4.5.5	Vergleich: S-Matrix - Eff. Spiegel Methode . . . . .	88
4.5.6	Phasenbetrachtung . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Ungeordnete Photonische Kristalle</b>	<b>93</b>
5.1	Einfluss der Variationen auf die Blochmoden . . . . .	93
5.2	Unordnungen im Photonischen Kristall . . . . .	96
5.3	Berechnete Transmissionsdaten . . . . .	99
5.3.1	Vergleich der verschiedenen Strukturen . . . . .	110
5.3.2	Verwertbarkeitsanalyse der verschiedenen Strukturen . . . . .	114
5.4	Statistiken der Transmissionsdaten . . . . .	116
5.5	Ungeordnete einseitig unendliche Photonische Kristalle . . . . .	120
5.5.1	Einkopplung . . . . .	120
5.5.2	Auskopplung . . . . .	121
5.5.3	Propagationsverlust . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>127</b>
6.1	Ausblick . . . . .	129
<b>A</b>	<b>Anhang: Wellenleitertheorie</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Anhang: Transmissionsdaten für StrukturIII in TM-Polarisation</b>	<b>135</b>
<b>C</b>	<b>Anhang: Transmissionsdaten für StrukturI in TE-Polarisation</b>	<b>141</b>
<b>D</b>	<b>Anhang: Transmissionsdaten für StrukturI in TM-Polarisation</b>	<b>147</b>
<b>E</b>	<b>Anhang: Transmissionsdaten für StrukturII in TE-Polarisation</b>	<b>153</b>
<b>F</b>	<b>Anhang: Transmissionsdaten für StrukturII in TM-Polarisation</b>	<b>159</b>

# 1 Einleitung

Die bahnbrechende Erfindung der Halbleiter gegen Ende der vierziger Jahre des letzten Jahrhunderts war der Startschuss für eine rasante Neu- und Weiterentwicklung von elektronischen Geräten, zu denen nicht zuletzt der Computer zählte. Die Grundlage dieses Aufschwungs bildete die gezielte Manipulation von Elektronen. Im Gegensatz zu Metallen sind in Halbleitern keine freien Elektronen zum Ladungstransport verfügbar. Sie müssen erst durch eine Aktivierungsenergie (z.B. die Anregung durch Strahlung bei Solarzellen) oder durch das Dotieren zur Verfügung gestellt werden. Der Durchbruch der Halbleitertechnologie und der damit verbundene Siegeszug gelang mit dem Transistor, welcher bis heute das grundlegende Bauelement der Elektronik bildet.

Mit der Entdeckung des Lasers wurde Anfang der sechziger Jahre des letzten Jahrhunderts ein weiteres neues und hoch interessantes Gebiet erschlossen, die Photonik. In diesem Forschungsgebiet wird versucht, Licht, in Analogie zu Elektronen in der Elektronik, technisch nutzbar zu machen. Besondere Anwendung fand dies zunächst bei der Datenübertragung. Laserpulse können wesentlich schneller und noch dazu in unterschiedlichen Frequenzbändern durch Glasfaserkabel geschickt werden, als dies mit elektronischen Mitteln möglich ist. Mit Hilfe dieser Innovation erfuhr der globale Datenaustausch einen neuen Höhepunkt, das Internet.

Diese Anwendung stellte nur den Anfang der Möglichkeiten der Lichtmanipulation dar. Gelänge es, Licht in einer zu den Elektronen vergleichbaren Weise zu manipulieren, ist der optische Transistor nicht mehr fern und damit der optische Computer sehr bald denkbar. Ein großer Schritt in diese Richtung ist durch die so genannten Photonischen Kristalle ermöglicht worden. Photonische Kristalle sind mikrostrukturierte Materialien, welche eine Periodizität im Wellenlängenbereich des zu manipulierenden Lichtes aufweisen. Aufgrund dieser Periodizität treten Effekte auf, die auch bei Elektronen in kristallinen Strukturen zu finden sind. So bildet sich in Photonischen Kristallen durch die Streuung der EM-Wellen an periodisch angeordneten Brechungsindexdifferenzen ein spezieller Zusammenhang zwischen den Wellenvektoren der im Kristall propagierenden Strahlung und den dazu gehörigen Frequenzen aus, die so genannte Bandstruktur. In Halbleitermaterialien ist dieser Effekt durch die Streuung von Elektronen an den periodisch angeordneten Atommümpfen zu beobachten. Das Resultat ist, dass die Elektronen auf beschränkten Ener-



optischer Transistor

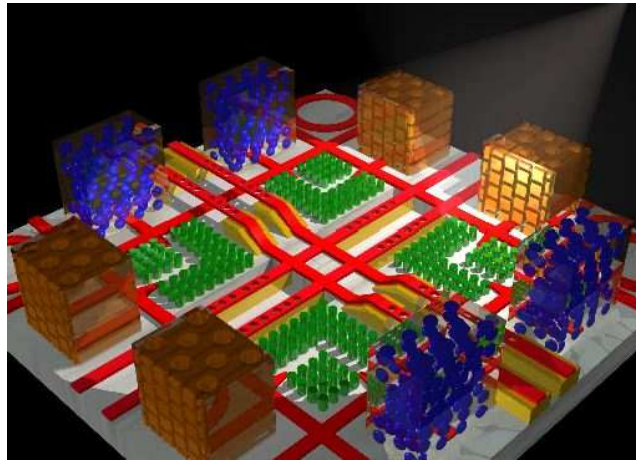
## 1 Einleitung

giebereichen, in diesem Zusammenhang Bänder genannt, zu finden sind. Analog dazu bilden sich bei Photonischen Kristallen ebenfalls Bänder aus und damit sind auch vollständige Bandlücken, also Frequenzen für die in keine Raumrichtungen innerhalb des Photonischen Kristalls eine EM-Wellen propagieren kann, denkbar. Materialien bei denen dies der Fall ist nennt man im allgemeinen Photonic Band Gap (PBG) Materialien.

Diese Materialien bilden durch die so genannten Defektmoden eine viel versprechende Grundlage technischer Anwendungen. Das gezielte Einbringen von Defekten oder von Defektstrukturen in die periodische Struktur des Photonischen Kristalls, ermöglicht es Moden anzuregen, deren Frequenzen in der vollständigen Bandlücke liegen. Diese Moden propagieren nur in den Defekten bzw. in der Defektstruktur und können nicht in die periodische Struktur des Kristalls abstrahlen. Sie werden also entlang der Defekte durch den Kristall geführt. Eine darauf basierende und zur Lichtleitung genutzte Innovation bildet das so genannte Photonic Crystal Fiber. Auch optische Bauelemente, wie der Wellenleiter und Strahlteiler sind demnach machbar. Ein Wellenleiter kann zum Beispiel mit Hilfe eines Liniendefektes in einem zwei dimensional Photonischen Kristall umgesetzt werden.

Andere Anwendungen werden durch einen weiteren Effekt der PBG-Materialien ermöglicht. In der Bandstruktur treten sehr flache Bänder auf, was sich in einer sehr starken Brechung des Lichtes ausdrückt. Dieser superrefraktive Effekt kann in Linsensystemen verwendet werden. Ferner können durch gezieltes Manipulieren des Kristalls unterschiedliche Frequenzen unterschiedlich stark gebrochen werden, was zu einem Photonischen Kristall-Prisma führt.

Mit Hilfe der Photonischen Kristalle kann Licht daher in analoger Weise zu Elektronen kontrolliert werden. Photonische Kristalle bilden demnach eine viel versprechende Grundlage für optische Schaltkreise und folglich ist der optische Computer durchaus realisierbar.



Mögliche Realisierung eines optischen Schaltkreises

Der für die tatsächliche Verwendung der Photonischen Kristalle wichtigste Aspekt ist die Herstellung und die damit einhergehenden Ungenauigkeiten in der Periodizität. Da eben diese Periodizität die Grundlage der Photonischen Kristalle bildet, ist es von entscheidender Bedeutung herauszufinden, welchen Einfluss kleine Störungen auf die Eigenschaften der Kristalle haben. Ferner ist ein physikalisches Verständnis der auftretenden Effekte und eine mögliche Modellierung von grundlegendem Interesse. Mit Hilfe eines Modells, welches die Auswirkungen der herstellungsbedingten Ungenauigkeiten berechnen kann, könnte eine mögliche Realisierung von photonischen Bauelementen im Vorfeld geklärt werden.

Eben diese Untersuchungen werden im Verlaufe dieser Arbeit durchgeführt. Im ersten Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Photonischen Kristalle aufgezeigt. Darauf wird die zur Berechnung verwendete Methode, welche auf der S-Matrix für nicht periodische Systeme basiert, vorgestellt. Mit dieser Methode wird der ungestörte, sozusagen ideale, Kristall genauer betrachtet. Mit Hilfe dieser Betrachtung wird eine mögliche Modellierung der Photonischen Kristalle durch effektive Spiegel aufgezeigt werden. Im Folgenden wird der Einfluss verschiedener Unordnungen auf unterschiedliche Frequenzen in drei verschiedenen Strukturen untersucht. Anhand dieser Untersuchungen werden die den Ergebnissen zugrunde liegenden physikalischen Effekte erläutert. Zum Abschluss werden die Erkenntnisse dieser Arbeit zusammengefasst und offene Fragestellungen diskutiert.





## 2 Grundlagen

Dieses Kapitel dient dazu eine Einführung in das hoch interessante Gebiet der Photonischen Kristalle zu geben. Begonnen wird mit einem historischen Abriss über ihre Entwicklung. Im Anschluss daran wird das Ausbilden der Bandstruktur in Photonischen Kristallen kurz skizziert. Anhand des eindimensionalen Photonischen Kristalls werden darauf die herausragenden Eigenschaften dieser Materialien aufgezeigt und die zugrunde liegenden physikalischen Effekte erläutert. Zum Abrunden der Einführung werden die gängigsten Herstellungsverfahren vorgestellt. Die Überleitung auf das Thema dieser Arbeit wird durch eine Zusammenfassung der wichtigsten bisher veröffentlichten Erkenntnisse eingeleitet. Im Anschluss daran wird das Ziel dieser Arbeit formuliert.

### 2.1 Einführung

Die Bezeichnung 'Photonischer Kristall' weist auf die beiden wesentlichen Elemente dieser Materialien hin. Der Begriff des Kristalls impliziert die aus der Festkörperphysik bekannten und nicht zuletzt in der Halbleiterphysik sehr erfolgreich verwendeten Eigenschaften der elektrischen Kristalle. Diese bestehen aus einer periodischen Anordnung von Atomrümpfen, durch welche sich die so genannten fast freien Elektronen bewegen. Durch die Periodizität stehen den Elektronen dabei jedoch nur begrenzte Energiebereiche, die so genannten Bänder, zur Verfügung. Der Zusammenhang der möglichen Energieniveaus und der Propagationsrichtung der Elektronen wird in der Bandstruktur graphisch dargestellt.

Der Photonische Kristall besteht aus einer periodischen Anordnung von Materialien mit unterschiedlichem Brechungsindex, deren Periode im Wellenlängenbereich der verwendeten Strahlung liegt. Durch die Differenzen im Brechungsindex werden EM-Wellen gestreut und aufgrund der Periodizität eine photonische Bandstruktur ausgebildet. Diese Bandstruktur beschreibt den Zusammenhang zwischen der Frequenz und dem Wellenvektor, entspricht also der Dispersionsrelation. Die wichtigste Analogie zum elektrischen Kristall ist die Ausbildung von Bandlücken, einem Frequenzbereich, in welchem keinem Wellenvektor eine Frequenz zugeordnet werden kann. Mit Hilfe der Photonischen Kristalle ist es also möglich, Licht in ähnlicher Weise wie Elektronen zu manipulieren [1].

Der Bragg-Spiegel bildet ein schon seit der Mitte des letzten Jahrhunderts bekanntes Beispiel eines eindimensionalen Photonischen Kristalls [2]. Durch die periodische Abfolge zweier dielektrischer Schichten mit unterschiedlichem Brechungsindex ist die Bragg-Bedingung [3] für bestimmte Frequenzen erfüllt. Dadurch kommt es zu einer vollständigen Reflexion der einfallenden Strahlung mit diesen Frequenzen. Der Photo-

nische Kristall bildet demnach einen idealen, verlustarmen Spiegel und findet seine Anwendung unter anderem in der Entwicklung des Lasers. Der eigentliche Grundstein, welcher das Interesse an den periodischen Strukturen zur Lichtmanipulation weckte, wurde im Jahre 1987 durch die Artikel von E. Yablonovitch und S. John gelegt.

E. Yablonovitch [4] schlägt in seinem Artikel vor, die spontane Emission von Photonen mit Hilfe eines Photonischen Kristall zu unterdrücken und das emittierte Photon dadurch zu lokalisieren. Dies soll dadurch erreicht werden, dass sich die Frequenz des Photons in der Bandlücke des Kristalls befindet. Dem Photon stehen damit keine Moden im Photonischen Kristall zur Verfügung, an die es koppeln könnte und es bleibt daher lokalisiert.

S. John [5] hingegen wählt einen anderen Zugang. Er sucht bei Photonen nach einem Analogon zur starken Lokalisierung der Elektronen, auch Anderson Lokalisierung [6] genannt. Dazu geht er von kleinen Unordnungen in periodischen Strukturen aus und sagt eine Lokalisierung von EM-Wellen durch selbige voraus.

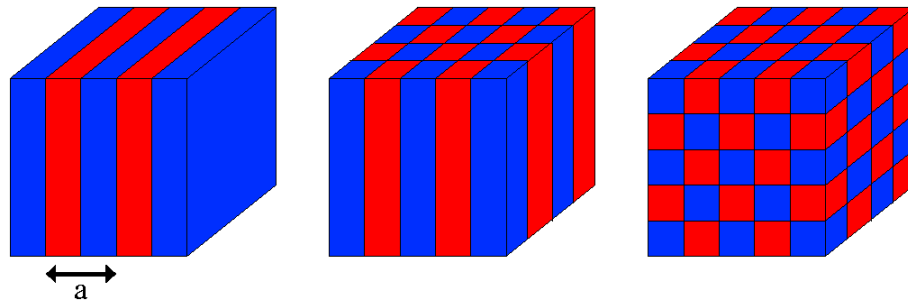


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung Photonischer Kristalle: Der eindimensionale Photonische Kristall besteht aus einer periodischen Abfolge von Schichten mit unterschiedlichem Brechungsindex, welcher in der Skizze durch rote bzw. blaue Farbe gekennzeichnet ist. Die Gitterkonstante wird dabei mit  $a$  bezeichnet und liegt im Wellenlängenbereich der verwendeten Strahlung. Der zweidimensionale Photonische Kristall besteht aus periodisch angeordneten Säulen mit unterschiedlichem Brechungsindex. Den dreidimensionalen Kristall kann durch eine periodische Anordnung von Würfeln mit unterschiedlichem Brechungsindex realisiert werden.

Ein weiterer wichtiger Punkt, der die rasante Entwicklung der Photonischen Kristalle vorantreibt, ist die mit dem Aufkommen der Mikro- und Nanotechnologie einhergehende Möglichkeit, die periodischen Strukturen herzustellen. Für die Anwendung der Photonischen Kristalle in optischen Gebieten, wie der Telekommunikation, ist eine Periode im  $\mu\text{m}$  Bereich erforderlich. Daher ist bei der Herstellung der Kristalle eine hohe Präzision gefordert. Der eindimensionale Photonische Kristall stellte dabei die geringsten Anforderungen an die technische Realisierbarkeit. Er besteht aus einer periodischen Abfolge von Schichten mit unterschiedlichen Brechungsindex. Die Periodizität in nur einer Raumrichtung erlaubt jedoch eine Lichtmanipulation allein entlang dieser Richtung und ist in der Anwendung daher eingeschränkt.

Zweidimensionale Photonische Kristalle hingegen weisen eine Variation des Brechungsindex in zwei Raumrichtungen auf, wobei sie in der verbleibenden dritten Raumrichtung homogen verlaufen. Dadurch ist es möglich eine Bandlücke für die Propagation in der Ebene der periodischen Variation zu erhalten. Diese Bandlücken können zum Beispiel zur Herstellung von Wellenleitern, Umlenkern und Strahlteilern genutzt werden [7], siehe Abb.2.2.

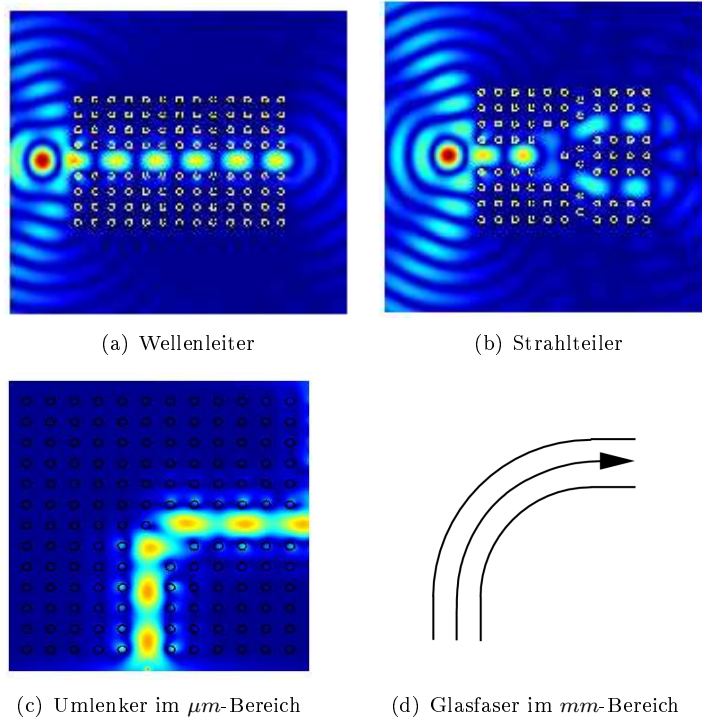


Abbildung 2.2: Anwendungsbeispiele für 2D-Photonischen Kristalle: (a) Beim Wellenleiter wird die Bandlücke des Kristalls genutzt, um die Abstrahlung der Wellenleitermode orthogonal zur Propagationsrichtung zu unterbinden. (b) Durch gezieltes Einfügen von Defekten kann die Verzweigung von einem in mehrere Wellenleiter optimiert werden. (c) Die Umlenkung eines Wellenleiters kann durch Photonische Kristalle im  $\mu\text{m}$  Bereich realisiert werden. (d) Im Gegensatz dazu ist die Biegung eines Glasfaserkabels durch die zur Lichtleitung notwendige Totalreflexion auf den  $\text{mm}$  Bereich beschränkt.

Die zur Nutzung dieser Strukturen notwendige Beschränkung in der dritten Raumrichtung wird durch eine Wellenleiterschicht, welche orthogonal zur periodischen Variation verläuft, erreicht. Die Wellenleiterschicht bildet eine in dieser Richtung beschränkte Mode aus. Die Ausbreitung der Mode wird in den beiden anderen Dimensionen durch

den Photonischen Kristall verhindert. Durch die gezielte Manipulation des Photonischen Kristalls kann die Wellenleitermode daher in dieser Dimension geführt werden. Mit Hilfe der Photonischen Kristalle sind daher Wellenleiterstrukturen im  $\mu\text{m}$  Bereich möglich und stellen so einen ersten Schritt zu den optischen Schaltkreisen da.

Industriell werden Photonische Kristalle bereits als so genannten Photonic Crystal Fibers (PCFs) [8, 9] genutzt. Das Licht wird in diesen Fasern orthogonal zur Ebene der periodischen Variation geleitet. In Abb. 2.3 sind zwei mögliche Querschnitte gezeigt. Das darin abgebildete PCF besteht aus einem sechseckigen Photonischen Kristall mit einem Defekt in der Mitte. Der Defekt in der Mitte wird so gewählt, dass sich darin Moden ausbilden. Die Frequenzen der Moden liegen in der Bandlücke des sie umgebenden Photonischen Kristalls. Dadurch wird eine Abstrahlung orthogonal zur Propagationsrichtung verhindert und es ist eine nahezu verlustfreie Leitung der Moden über lange Distanzen möglich.

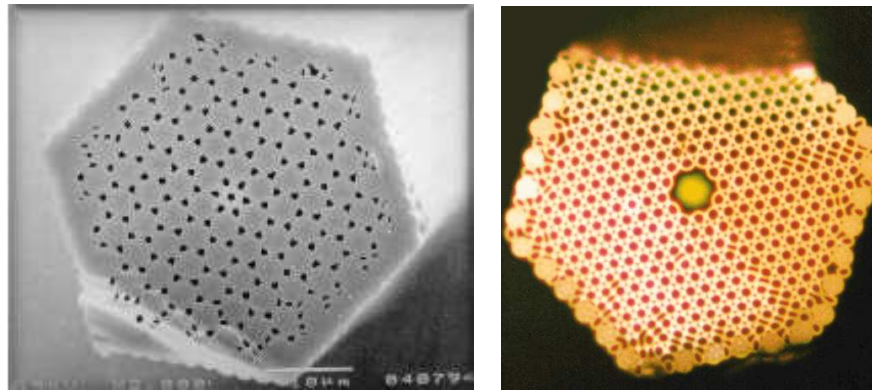


Abbildung 2.3: Photonic Crystal Fibers (PCF): Die PCFs bestehen aus einem 2D-Photonischen Kristall, welcher in der Mitte einen Defekt aufweist. Dieser Defekt ermöglicht die Ausbildung einer lateral lokalisierten Mode im Frequenzbereich der Bandlücke des ihn umgebenden Kristalls. Die Ausbreitungsrichtung der Mode verläuft demnach nahezu verlustfrei längs der Faser, also orthogonal zur Ebene der periodischen Variation des Kristalls.

Die größte Herausforderung stellen die dreidimensionalen Photonischen Kristalle dar, welche eine periodische Variation des Brechungsindex in allen drei Raumrichtungen aufweisen. Die Existenz von dreidimensionalen Bandlücken wurde zunächst für Diamantstrukturen gezeigt [10]. Später wurden sie dann auch für so genannte Opalstrukturen vorhergesagt [11, 12]. Die Herstellungsverfahren für diese Opalstrukturen sind bis heute jedoch noch nicht ausgereift und weisen häufig ungewollte Störungen der idealen Periodizität auf. Der erste realisierte dreidimensionale Photonische Kristall basierte daher auf einer diamantähnlichen Symmetrie und wurde nach seinem Erfinder Yablonovite genannt [13, 14]. Die auf der Anfertigung des Yablonovite basierenden bisher viel versprochenste Methode zur Herstellung von idealen dreidimensionalen

Photonischen Kristallen ist die Holographie [15, 16]. Das Direct Laser Writing [17] hingegen ermöglicht die Herstellung von beliebigen und damit auch dreidimensionalen Photonischen Kristallen. Der Vorteil der letzteren Methode liegt darin, dass in der idealen Struktur gezielt Defekte geschrieben werden können.

Die bisher aufgezeigten Möglichkeiten der Lichtmanipulation durch Photonische Kristalle können durch die Verwendung von nichtlineare Materialien [18, 19] oder dem Infiltrieren von Flüssigkristallen noch erweitert werden. Die aus der Flexibilität in der Dimension und der Materialnutzung folgenden Perspektiven sind viel versprechend und stellen eine Herausforderung an das physikalische Verständnis und die technische Realisierbarkeit dar. Es ist daher nicht verwunderlich, dass das Gebiet der Photonischen Kristall in den letzten Jahren eine enormen Aufschwung erlebt hat und sicherlich noch weiter erleben wird.

## 2.2 Lichtausbreitung im homogenen Medium

Der Übergang der Lichtausbreitung im homogenen Medium zur Lichtausbreitung in periodischen Strukturen wird im Folgenden skizziert werden. Ausgegangen wird dabei von den Maxwell-Gleichungen [20, 21] im Medium, welche in Gauß-Einheiten lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B} \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\partial_t\vec{D} + \frac{4\pi}{c}\vec{j} \quad (2.4)$$

Die Verknüpfung zwischen der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  und dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  wird mit Hilfe der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  gebildet:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (2.5)$$

Die Dielektrizitätskonstante stellt dabei die makroskopischen elektrischen Eigenschaften des Mediums dar. Analog dazu kann eine Relation zwischen der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  und dem magnetischen Induktion  $\vec{B}$  über die Permeabilität  $\mu$  wie folgt aufgestellt werden:

$$\vec{H} = \mu^{-1}\vec{B} \quad (2.6)$$

Die Permeabilität repräsentiert folglich die makroskopischen magnetischen Eigenschaften des Mediums. Im Allgemeinen sind die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität als Tensoren darzustellen. Für den hier betrachteten homogenen Fall können sie aber als Skalare behandelt werden. Ferner sollen im Medium keine freien Ladungsträger zur Verfügung stehen, daher kann  $\rho = 0$  gesetzt werden. Ebenso wird davon ausgegangen, dass kein Strom fließt, wodurch  $\vec{j} = 0$  gilt. Die letzten beiden Annahmen gelten für die gesamte Arbeit. Weiterhin beschränkt sich die Arbeit auf lineare, nicht

## 2 Grundlagen

dispersive Medien. Änderungen in der Gruppengeschwindigkeit sind demnach allein auf die Bandstruktur und damit deren Entstehung durch die Bragg- bzw. Mie-Resonanzen zurückzuführen, siehe Abschnitt 2.3.1.

Die Gleichungen 2.1-2.4 bilden einen Satz von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung. Sie lassen sich jedoch in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, den so genannten Wellengleichungen, für das elektrische und magnetische Feld umschreiben.

Zur Separation des elektrischen Feldes wird zunächst die Rotation von Gleichung 2.3 gebildet. Die darin enthaltene Rotation des  $\vec{B}$ -Feldes kann mit Hilfe der Gleichungen 2.4 und 2.6 sowie 2.5 ersetzt werden. Damit ergibt sich die erwünschte Differentialgleichung zweiter Ordnung für das elektrische Feld

$$\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}. \quad (2.7)$$

Dabei wurde der Brechungsindex  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  eingeführt. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für das magnetische Feld kann auf die gleiche Weise aus der Rotation von Gleichung 2.4 und dem Ersetzen der Rotation des  $\vec{E}$ -Feldes durch Gleichung 2.3 unter Berücksichtigung von 2.6 und 2.5 gewonnen werden:

$$\vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \right) - \nabla^2 \vec{B} = -\frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \vec{B}. \quad (2.8)$$

Mit Gleichung 2.1 für  $\vec{j} = 0$  und Gleichung 2.2 für  $\rho = 0$  vereinfachen sich die Gleichungen 2.7 und 2.8 zu den Wellengleichungen

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}, \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{n^2}{c^2} \partial_t^2 \vec{B}. \quad (2.10)$$

Ausgehend von einer harmonischen Zeitabhängigkeit der Felder

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e} \exp[i\omega t], \\ \vec{B} &= \vec{b} \exp[i\omega t] \end{aligned}$$

folgen daraus die zeitunabhängigen Wellengleichungen:

$$\nabla^2 \vec{e} = -\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{e}, \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \vec{b} = -\frac{\omega^2 n^2}{c^2} \vec{b}. \quad (2.12)$$

Die Eigenwerte dieser Gleichung sind offensichtlich  $\omega n/c$ . Durch den Wellenansatz, in welchem der Wellenvektor  $\vec{k}$  die Ausbreitungsrichtung und  $\vec{p}$  die Polarisation der Welle festlegt,

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \vec{p}_e \exp[i\vec{k}\vec{r}] \\ \vec{b} &= \vec{p}_b \exp[i\vec{k}\vec{r}] \end{aligned}$$

folgt die so genannte Dispersionsrelation. Diese ordnet dem Betrag des Wellenvektors  $\vec{k}$  den Eigenwert  $\omega n/c$  der zeitunabhängigen Wellengleichung zu:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega n}{c}.$$

Die Dispersionsrelation im homogenen, nicht dispersiven Medium ist linear und in Abb. 2.4a dargestellt.

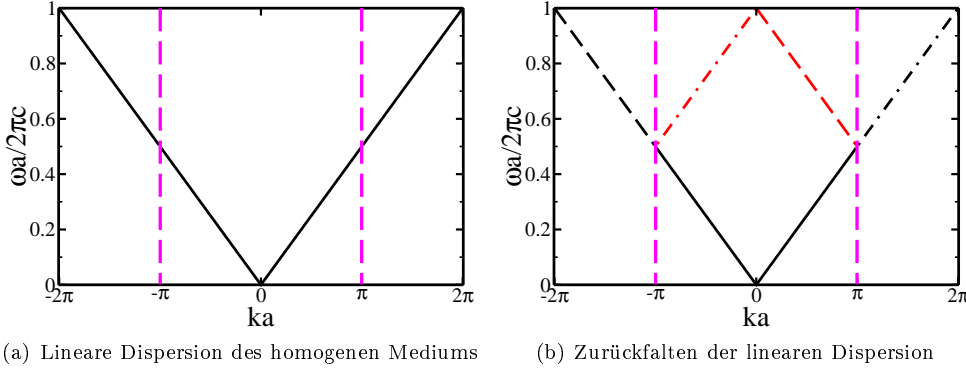


Abbildung 2.4: Dispersionsrelationen: (a) Die Dispersionsrelation im homogenen, nicht dispersiven Medium weist einen linearen Zusammenhang auf (schwarze Linie). (b) Die quasi-periodische Betrachtung der linearen Dispersionsrelation (schwarz) führt auf ein Zurückfalten auf die erste Brillouin-Zone, gekennzeichnet durch die magentafarbenen gestrichelten Linien. Das Zurückfalten wird graphisch durch eine Verschiebung des außerhalb der ersten Brillouin-Zone liegenden Teiles der Dispersionsrelation um einen Gittervektor erreicht. Die gestrichelte schwarze Linie wird so auf die gestrichelte rote Linie zurück in die erste Brillouin-Zone geschoben. Analog wird die strich-punktierte schwarze Linie auf die rote abgebildet.

Die Eigenvektoren der zeitunabhängigen Wellengleichung bilden die Feldvektoren  $\vec{e}$  für das elektrische bzw.  $\vec{b}$  für das magnetische Feld und können durch folgende drei Parameter charakterisiert werden

- die (Kreis-)Frequenz:  $\omega$
- den Wellenvektor:  $\vec{k}$
- die Polarisation:  $\vec{p}$

### Übergang zu periodischen Strukturen

Im Folgenden wird eine quasi-periodische Betrachtung der Wellengleichung im Medium vorgestellt. Darauf aufbauend wird der Übergang zu periodischen Strukturen, wie dem Photonischen Kristall, skizziert.



## 2 Grundlagen

Zur quasi-periodischen Betrachtung der Wellengleichung im homogenen Medium wird die dielektrische Konstante als räumlich periodisch angenommen. Dies bedeutet, dass  $\epsilon(x) = \epsilon(x + a)$  gilt, wobei  $a$  die Periodizitäts- bzw. Einheitszellenlänge ist. Dabei ist jedoch zu beachten, dass immer noch  $\epsilon(x) = \epsilon = \text{konstant}$  gilt. Aufgrund der künstlich eingeführten Periodizität kann die Darstellung der Dispersionsrelation auf die erste Brillouin-Zone beschränkt werden [22, 23], im Eindimensionalen bedeutet das  $-\pi \leq ka \leq \pi$ . Diese Reduktion wird durch das Zurückfalten der Dispersionsrelation auf die erste Brillouin-Zone erreicht, siehe Abb. 2.4b. Die Darstellung der Dispersionsrelation im reduzierten Zonenschema wird als Bandstruktur bezeichnet.

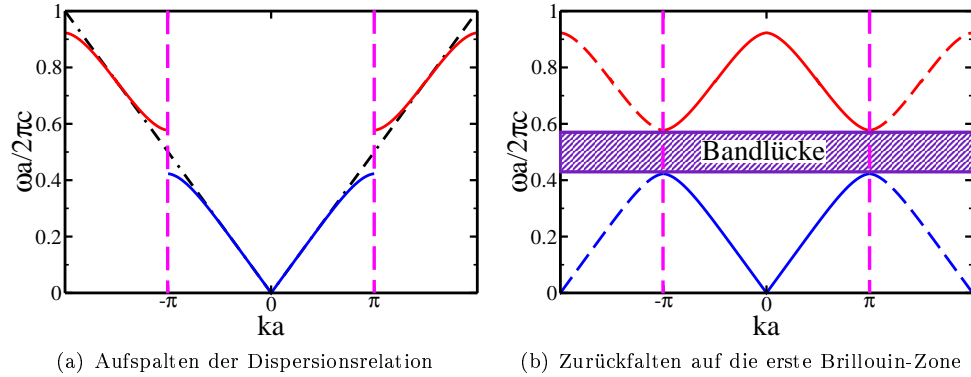


Abbildung 2.5: Dispersionsrelation eines Photonischen Kristalls: (a) Aufgrund der Bragg-Bedingung kommt es am Rand der Brillouin-Zone zur kohärenten Rückstreuung. Dadurch wird eine Propagation im Photonischen Kristall verhindert und es kommt zur Aufspaltung der Dispersionsrelation. (b) Das Zurückfalten auf die erste Brillouin-Zone ergibt die Bandstruktur. Der Bereich, in welchem keinem Wellenvektor eine Frequenz zugeordnet werden kann, wird als Bandlücke bezeichnet.

Der Übergang zu periodischen Strukturen und damit zum Photonischen Kristall kann folgendermaßen vollzogen werden. Im Gegensatz zum homogenen Fall besteht eine periodische Struktur aus einer periodischen Abfolge von mindestens zwei Schichten mit unterschiedlichem Brechungsindex. Die dielektrische Konstante lässt sich demnach für eine periodische Struktur aus zwei Schichten mit der Einheitszellenlänge  $a$  folgendermaßen darstellen:

$$\epsilon(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \epsilon_1 & \text{wenn } x \text{ in der ersten Schicht} \\ \epsilon_2 & \text{wenn } x \text{ in der zweiten Schicht} \end{array} \right\} \quad \text{wobei } \epsilon_1 \neq \epsilon_2.$$

Aufgrund der Periodizität der dielektrischen Konstante

$$\epsilon(x) = \epsilon(x + a)$$

ist wiederum, analog zum quasi-periodischen Fall, das Zurückfalten auf die erste Brillouin-Zone möglich. Ferner kann das elektrische Feld mit Hilfe der aus der Festkörpertheorie

[24] bekannten Blochfunktionen dargestellt werden

$$\vec{e}(\vec{r}) = \vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r}) \exp[i\vec{k}\vec{r}] \quad (2.13)$$

Dabei ist  $\vec{p}_{\vec{k}}(\vec{r})$  eine gitterperiodische Funktion, welche die Amplitude zur dazugehörigen ebenen Welle darstellt. Der Unterschied zum homogenen Medium kommt insbesondere an der Brillouin-Zonen-Grenze zum Tragen. Im Gegensatz zum quasi-periodischen Fall findet aufgrund der Brechungsindexdifferenz eine Reflexion der elektromagnetischen Welle statt. An der Brillouin-Zonen-Grenze gilt folglich die Bragg-Bedingung [25]

$$\Delta\vec{k} = \vec{g}. \quad (2.14)$$

Sie besagt, dass die Differenz des einfallenden Wellenvektors mit dem reflektierten einen reziproken Gittervektor  $\vec{g}$  ergibt. Daraus folgt eine kohärenten (Rück)-Streuung und damit wird eine Propagation entlang der Einfallrichtung verhindert [26]. Dies führt in der Dispersionsrelation dazu, dass es an der Brillouin-Zonen-Grenze zu einer Aufspaltung kommt. In Abb. 2.5a ist dies bildlich dargestellt. Das Zurückfalten auf die erste Brillouin-Zone ergibt die Bandstruktur, siehe Abb. 2.5b. Zwischen den so entstandenen Bändern gibt es einen Bereich, in welchem keinem Wellenvektor eine Frequenz zugeordnet werden kann. Dieser Bereich wird als Bandlücke bezeichnet und ist Abb. 2.5b durch die schraffierte Fläche hervorgehoben.

Es sei an dieser Stelle noch einmal hervorgehoben, dass in obiger Betrachtung nicht von dispersiven Materialien ausgegangen wurde. Das Aufspalten der Bänder und die damit einhergehende Krümmung derselben beruht auf der resonanten Rückstreuung. Die resonante Rückstreuung hat ihren Ursprung in einer räumlichen Periodizität der dielektrischen Konstante, nicht in deren Frequenzabhängigkeit. Für die im Zuge dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist deswegen von nicht dispersive Materialien ausgegangen worden.

## 2.3 Der eindimensionale Photonische Kristall

Anhand des eindimensionalen Falls werden die speziellen Eigenschaften der Photonischen Kristalle herausgearbeitet. Das betrachtete System ist in Abb. 2.6 skizziert. Es besteht aus einer periodischen Abfolge zweier Abschnitte  $A_1$  und  $A_2$ . Die dielektrischen Konstanten seien  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  mit den jeweiligen Abschnittslängen  $a_1$  und  $a_2$ . Eine Einheitszelle dieses Systems wird folglich aus  $A_1$  und  $A_2$  gebildet, woraus sich eine Einheitszellenlänge von  $a = a_1 + a_2$  ergibt. Im hier betrachteten System stehen das elektrische und das magnetische Feld orthogonal zueinander und zum Wellenvektor  $\vec{k}$ . Die Ausbreitungsrichtung der Welle sei die  $z$ -Richtung, das  $E$ -Feld sei in der  $x$ -Richtung, das  $H$ -Feld in  $y$ -Richtung polarisiert. Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  und der magnetischen Induktion  $\vec{B}$  sei durch  $\vec{\mu}_0 H(x, t) = \vec{B}(x, t)$  gegeben, das System sei also nicht magnetisch.

Die Wellengleichung für das elektrische Feld lautet

$$\frac{1}{\epsilon(z)} \partial_z^2 E(z, t) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E(z, t) = 0. \quad (2.15)$$

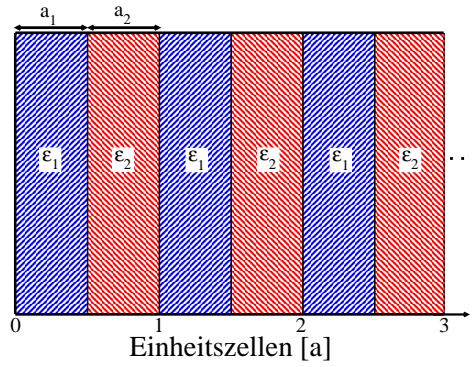


Abbildung 2.6: Skizze eines eindimensionalen Photonischen Kristalls: Er besteht aus einer periodischen Abfolge zweier Schichten der Längen  $a_1$  bzw.  $a_2$  mit unterschiedlichem Brechungsindex  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ . In der Skizze sind diese Schichten über der Anzahl der Einheitszellen aufgezeichnet. Eine Einheitszelle besteht aus den beiden Schichten und hat demnach die Länge  $a = a_1 + a_2$ .

Die dielektrische Konstante wird dabei abschnittsabhängig definiert durch

$$\epsilon(z) = \begin{cases} \epsilon_1 & \text{wenn } z \text{ in } A_1 \\ \epsilon_2 & \text{wenn } z \text{ in } A_2 \end{cases} \quad \text{wobei } \epsilon_1 > \epsilon_2.$$

Jede periodische Funktion kann als Fourier-Reihe [27] geschrieben werden. Angewandt auf die dielektrische Konstante bedeutet dies

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n \exp[iG_n z] \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

wobei  $G_n = 2\pi n/a$  den reziproken Gittervektor darstellt. Für die Fourierkoeffizienten  $\epsilon_n$  folgt daher

$$\epsilon_n = \frac{1}{a} \int_0^a \epsilon(z) \exp[-iG_n z] dz. \quad (2.16)$$

In der numerischen Berechnung ist es von Vorteil, den Kehrwert von  $\epsilon(z)$  zu entwickeln [22, 28]. Für diesen gilt

$$\eta(z) = \frac{1}{\epsilon(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n \exp[iG_n z] \quad \text{mit} \quad \eta_n = \frac{1}{a} \int_0^a \frac{1}{\epsilon(z)} \exp[-iG_n z] dz. \quad (2.17)$$

Da sich die Periodizität auch in den elektromagnetischen Wellen zeigen wird, kann für diese auch eine Fourier-Entwicklung durchgeführt werden. Mit der weiteren Voraussetzung der harmonischen Zeitabhängigkeit, folgt der Ansatz

$$E(z, t) = \exp[i\omega t] \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n \exp[i(k + G_n)z]. \quad (2.18)$$

Das Umstellen der Terme führt auf eine Trennung zwischen dem gitterperiodischen Anteil und dem ebenen Wellen-Anteil

$$E(z, t) = \exp[i\omega t] \exp[ikz] \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n \exp[iG_n z] = \exp[i\omega t] \exp[ikz] \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(z) .$$

Die Summe über die gitterperiodischen Anteile  $p_n(z)$  entspricht dabei der eindimensionalen gitterperiodischen Funktion  $p_{\vec{k}}(\vec{r})$  aus Gleichung 2.13. Somit zeigt die rechte Seite der Gleichung die eindimensionale harmonische Zeitentwicklung der Blochfunktion. Das elektrische Feld innerhalb des Photonischen Kristalls bildet demnach, wie in Abschnitt 2.2 schon angeführt, Blochmoden aus.

Um die Wellengleichung 2.15 für den eindimensionalen Photonischen Kristall auf eine numerisch lösbare Form zu bringen, wird die Fourier-Entwicklung des  $E$ -Feldes in die Wellengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon(z)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n \exp[i\omega t] \partial_z^2 \exp[i(k + G_n)z] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2} e_n \exp[i(k + G_n)z] \partial_t^2 \exp[i\omega t] \\ -\frac{1}{\epsilon(z)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n (k + G_n)^2 \exp[iG_n z] &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{c^2} e_n \exp[iG_n z]. \end{aligned}$$

Multiplizieren mit  $\exp[-iG_m z]$  und integrieren über die erste Brillouin-Zone liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n (k + G_n)^2 \int_0^a \frac{1}{\epsilon(z)} \exp[i(G_n - G_m)z] dz \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2}{c^2} e_n \int_0^a \exp[i(G_n - G_m)z] dz. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation

$$\delta_{nm} = \frac{1}{a} \int_0^a \exp[i(G_n - G_m)z] dz$$

und der Definition von  $\eta_n$  aus Gleichung 2.17 folgt daraus

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n (k + G_n)^2 \eta_{n-m} = \frac{\omega^2}{c^2} e_m$$

Durch die Transformation  $b_n = (k + G_n)e_n$  folgen die symmetrisierten Gleichungen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (k + G_n)(k + G_m) \eta_{n-m} b_n = \frac{\omega^2}{c^2} b_m \quad (2.19)$$

Diese linear gekoppelten Gleichungen für die Koeffizienten  $b_n$  gilt es nun zu lösen.

Zunächst wird hier jedoch eine kleine Vorbetrachtung eingeschoben, welche das Lösen von Gleichung 2.19 vereinfachen wird. Aufgrund der Periodizität des Kristalls gilt das aus der Festkörpertheorie bekannte Bloch-Theorem [29]

$$E(z + a) = E(z) \exp[ika]. \quad (2.20)$$

Dieses sorgt einerseits dafür, dass sich die Periodizität des Kristalls auch im elektrischen Feld widerspiegelt und das Feld folglich durch eine Fourier-Entwicklung dargestellt werden kann. Andererseits ist das Zurückfalten der  $k$ -Werte auf die erste Brillouin-Zone eine weitere Folge dieses Theorems. Jeder Wellenvektor  $\vec{k}$  der sich außerhalb der ersten Brillouin-Zone befindet,  $|\vec{k}| = k > |\pi/a|$ , kann dargestellt werden durch  $|\vec{k}| = k = \kappa + 2\pi n/a$ . Dabei muss  $\kappa$  innerhalb der ersten Brillouin-Zone liegen:  $-\pi/a \leq \kappa \leq \pi/a$ . Mit diesen Betrachtungen folgt aus dem Bloch-Theorem

$$\begin{aligned} E_k(z + a) &= E(z) \exp[ika] = E(z) \exp \left[ i \left( \kappa + \frac{2\pi}{a}n \right) a \right] \\ &= E(z) \exp[i\kappa a] = E_\kappa(z + a) \end{aligned}$$

Somit sind die Werte für  $E_k$  und  $E_\kappa$  identisch. Es genügt daher sich auf die  $k$ -Werte der ersten Brillouin-Zone zu beschränken.

Zum Lösen des Gleichungssystems 2.19 für die Koeffizienten  $b_n$  ist es aufgrund des Blochtheorems ausreichend die  $k$ -Wert innerhalb der ersten Brillouin-Zone zu betrachten. Es wird daher jeweils ein  $k$ -Wert innerhalb der ersten Brillouin-Zone festgelegt und die dazugehörigen Eigenfrequenzen  $\omega_{(j)}(k)$  mit  $j = 1, 2, 3, \dots$  berechnet. Dabei wird  $j$  als Bandindex bezeichnet, da sich durch das Auftragen der  $\omega_j(k)$  über  $k$  Bänder ausbilden. Die so entstandene Dispersionsrelation wird daher auch als Bandstruktur bezeichnet. Diese Bandstruktur weist im eindimensionalen Fall eine Spiegelsymmetrie zur Mittelachse des betrachteten  $k$ -Wertebereiches auf, sie liegt daher auf der Ordinate des Koordinatensystems.

Um die Gleichung numerisch lösen zu können muss die Summe über die Fourier-Entwicklung auf  $N$  beschränkt werden. Die Anzahl  $N$  der Entwicklungen legt gleichzeitig den maximalen Bandindex fest. Wichtig ist hierbei jedoch, dass die Werte des so berechneten Bandes  $j = N$  nicht als exakt betrachtet werden können. Somit wird die Anzahl der zu betrachteten Entwicklungen durch das maximal zu betrachtende Band nach unten beschränkt. Um die obere Grenze zu finden, werden Testrechnungen für verschiedene Entwicklungsanzahlen  $N_1, N_2, N_3, \dots$  durchgeführt und die Werte auf Konvergenz untersucht. Die optimale Effizienz zur Berechnung der Bandstruktur wird dabei durch die notwendige Genauigkeit und den dazu benötigten geringsten Rechenaufwand bestimmt.

### Skalierungseigenschaften

Eine der herausragenden Eigenschaften der Maxwell-Gleichungen ist deren Skalierungsinvarianz. Dies bedeutet, dass die Maxwell-Gleichungen keine fundamentale Längenskala besitzen, wie es z.B. in der Atomphysik der Bohrsche Radius ist. Die Folge dieser Eigenschaft ist, dass Effekte, welche im makroskopischen Bereich auftreten, auch im

mikroskopischen Bereich zu finden sind. Um zu zeigen, dass die Skalierungsinvarianz auch für die Wellengleichung des Photonischen Kristalls gilt, werden die dimensionslosen Größen

$$\tilde{z} = \frac{za}{2\pi}, \quad \tilde{k} = \frac{ka}{2\pi} \quad \text{und} \quad \tilde{\omega} = \frac{\omega a}{2\pi c} \quad (2.21)$$

eingeführt. Mit Hilfe dieser Variablen wird die symmetrisierte Wellengleichung 2.19 umgeschrieben werden. Dazu muss diese zunächst auf beiden Seiten mit  $(a/2\pi)^2$  multipliziert werden. Nach dem Einsetzen der dimensionslosen Größen aus Gleichung 2.21 folgt dann

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (\tilde{k} + n)(\tilde{k} + m) \tilde{\eta}_{n-m} = \tilde{\omega}^2 b_m, \quad (2.22)$$

wobei  $\eta_{n-m} = \tilde{\eta}_{n-m}$  ist. Die so erhaltene Gleichung ist unabhängig von der Einheitszellenlänge und damit skalierungsinvariant. Sie wird also von allen Systeme mit den selben Brechungsindizes  $\epsilon_1$  bzw.  $\epsilon_2$ , sowie demselben Verhältnis der Schichtlängen  $a_1 : a_2$  erfüllt, unabhängig von der Einheitszellenlänge  $a = a_1 + a_2$ . Folglich weisen diese Systeme in dimensionslosen Einheiten dieselbe Bandstruktur auf. Dies ist auch der Grund dafür, dass die Bandstruktur immer in den dimensionslosen Einheiten angegeben wird.

In der obigen Betrachtung wurde  $\eta_{n-m} = \tilde{\eta}_{n-m}$  einfach vorausgesetzt. Im Folgenden wird aufgezeigt werden, dass dies auch zutrifft. Die Definition der Fourierkoeffizienten aus Gleichung 2.17 kann mit der dimensionslosen Größe  $\tilde{z} = 2\pi z/a$  geschrieben werden als

$$\eta_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon(\frac{a}{2\pi}\tilde{z})} \exp[-in\tilde{z}] d\tilde{z}.$$

Der Wert der dielektrischen Konstante  $\epsilon(z)$  hängt von der Position innerhalb der betrachteten Struktur ab und muss daher auf die Struktur reskaliert werden. Es ist jedoch auch möglich, die Struktur durch das Verhältnis der beiden Schichten zu definieren, was durch  $\tilde{\epsilon}(\tilde{z}) = \epsilon(a\tilde{z}/2\pi)$  ausgedrückt werden kann. Mit diesem Ansatz folgt

$$\eta_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tilde{\epsilon}(\tilde{z})} \exp[-in\tilde{z}] d\tilde{z} = \tilde{\eta}_m.$$

Wobei  $\tilde{\eta}_m$  nun unabhängig von der Längenskala ist. Damit ist die Skalierungsinvarianz der Wellengleichung für den Photonischen Kristall vollständig gezeigt.

### 2.3.1 Charakteristiken der Bandstruktur

#### Mitte der Brillouin-Zone

Das erste Band weist in der Mitte der Brillouin-Zone einen nahezu linearen Verlauf auf. Der Wellenvektor liegt hierbei betragsmäßig in der Mitte der ersten Brillouin-Zone, es

## 2 Grundlagen

gilt also  $ka \simeq 0$ . Durch das reziproke Verhältnis von Wellenzahl und Wellenlänge:  $k = 2\pi/\lambda$ , folgt, dass die Wellenlänge der propagierenden Mode wesentlich größer als die Länge der Einheitszelle ist:  $\lambda > a$ . Die Struktur des Kristalls wird durch die Moden nicht mehr aufgelöst. Der Kristall kann daher durch ein homogenes Material ersetzt werden. Der effektive Brechungsindex  $n_{\text{eff}}$  des homogenen Materials wird dabei durch das Größenverhältnis der Schichten in einer Einheitszelle und deren Brechungsindex bestimmt.

### Rand der Brillouin-Zone

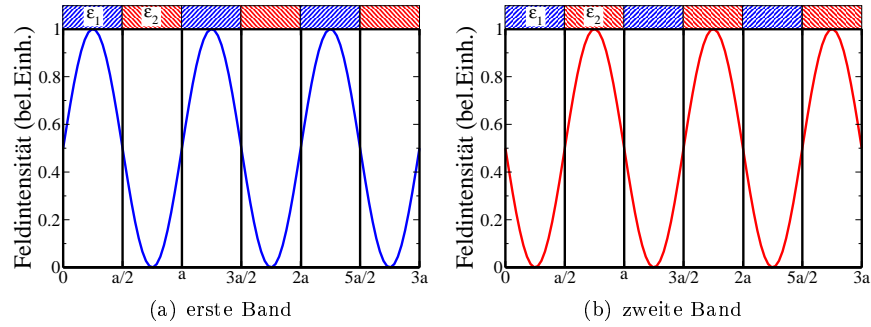


Abbildung 2.7: Feldintensitäten innerhalb des Photonischen Kristalls für das erste und zweite Band am Rand der Brillouin-Zone. (a) Im ersten Band liegt die maximale Intensität im Hochindexmaterial mit  $\epsilon_1 > \epsilon_2$ , da dies energetisch am günstigsten ist. (b) Im zweiten Band liegt die maximale Intensität im Niederindexmaterial mit  $\epsilon_2 < \epsilon_1$ .

Aufgrund der Bragg-Bedingung, welche am Rand der Brillouin-Zone erfüllt ist, kommt es dort zur kohärenten Rückstreuung. Die Bänder spalten demnach um die Frequenz  $\omega_0$ , für die die Bragg-Bedingung erfüllt ist, auf und es entsteht eine Bandlücke. Es gibt folglich zwei Frequenzen  $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ , welche die Ausbildung einer Mode am Rande der Brillouin-Zone ermöglichen. Mit dem Aufspalten der Bänder geht auch ein Abflachen einher, wodurch die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \partial_k \omega(k)$$

zum Rand der Brillouin-Zone auf  $v_g = 0$  abfällt. Der Grund liegt darin, dass die sich ausbildenden Moden stehende Wellen mit der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k = 2a$  sind, welche durch eine Überlagerung von entgegenlaufenden Wellen der Form  $\exp[ikx]$  und  $\exp[-ikx]$  geformt werden. Es gibt nun zwei Möglichkeiten die stehenden Wellen im Photonischen Kristall auszubilden, siehe Abb. 2.7. Die eine ist, dass sich das Intensitätsmaximum im Hochindexmaterial mit  $\epsilon_1$  befindet. Die zweite Möglichkeit das Intensitätsmaximum in das Niederindexmaterial mit  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  zu legen. Energetisch unterscheiden sich diese beiden Aufteilungen dahingehend, dass es begünstigt wird, das Intensitätsmaximum in das Hochindexmaterial zu legen. Daher wird das untere Band

an der Bandkante als dielektrisches Band bezeichnet, während das obere Luftband genannt wird.

### Dielektrische Bänder und Luftbänder

Im vorhergehenden Abschnitt wurden die dielektrischen Bänder und Luftbänder schon eingeführt. Die Frage, warum es energetisch günstiger ist die maximale Feldintensität in das Hochindexmaterial zu legen, wurde allerdings noch nicht geklärt. Dies wird hier nun nachgeliefert.

Dazu wird die schon bekannte Wellengleichung 2.15 mit der Voraussetzung der harmonischen Zeitabhängigkeit  $E(z, t) = E(z) \exp[i\omega t]$  wie folgt umgeschrieben

$$\partial_z^2 E(z) + \frac{\omega^2}{c^2} E(z) = \frac{\omega^2}{c^2} (1 - \epsilon(z)) E(z) = \phi(z) E(z) \quad (2.23)$$

Obige Form der Wellengleichung erinnert sehr an die Schrödinger Gleichung [30, 31], welche für ein Teilchen mit Masse  $m$  und Energie  $E$  im Potential  $V(z)$  lautet

$$\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 \varphi(z) + E\phi(z) = V(z)\varphi(z) \quad (2.24)$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen legt den Schluss nahe, dass  $\phi(z) = (1 - \epsilon(z))\omega^2/c^2$  in Gleichung 2.23 dem Potential in Gleichung 2.24 entspricht. Für  $\epsilon(z) > 1$  würde  $\phi(z) < 0$  gelten und demnach ein anziehendes Potential darstellen. Dies hat zur Folge, dass die Mode mit dem Intensitätsmaximum im Hochindexmaterial eine niedrigere Frequenz und damit eine geringere Energie besitzt, als die Mode, welche das Intensitätsmaximum im Niederindexmaterial hat.

Eine weitere Betrachtung der Gleichungen 2.23 und 2.24 zeigt eine interessante Analogie auf. Die Rolle des Energieeigenwertes wird in der Wellengleichung von  $\omega^2/c^2$  übernommen. Da im Falle von Photonen jedoch  $\omega^2/c^2 \geq 1$  ist, folgt, dass es keine gebundene Zustände im herkömmlichen Sinne geben kann. Der Verlust in Form von abstrahlender elektromagnetischer Energie ist also nicht einfach durch ein attraktives Potential einzudämmen.

### Bandlücke: evaneszente Moden

Nachdem die Bänder nun ausführlich betrachtet wurden, sollen hier die Bandlücken untersucht werden. Wie schon erwähnt, können Wellen mit Frequenzen innerhalb der Bandlücke nicht an den Photonischen Kristall koppeln, da sich dort keine Moden mit dieser Frequenz ausbreiten können. Für den Wellenvektor der Moden bedeutet dies, dass er einen imaginären Anteil enthält, welcher für ein exponentielles Abklingen der Mode innerhalb des Kristalls sorgt.

Zur genaueren Untersuchung wird eine Frequenz in der Nähe der zweiten Bandkante betrachtet. Aufgrund der positiven Krümmung  $\partial_k^2 \omega(k) > 0$  und der verschwindenden Gruppengeschwindigkeit  $\partial_k \omega(k) = 0$  an der Bandkante kann die Frequenz in eine Taylorreihe entwickelt werden

$$\omega(k) = \omega_0 + \partial_k^2 \omega(k) (k - k_0)^2.$$



## 2 Grundlagen

Dabei ist  $\omega_0$  die Frequenz an der zweiten Bandkante und  $k_0$  der Betrag des dazugehörigen Wellenvektors. Auflösen dieser Gleichung nach der Wellenzahl  $k$  ergibt

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega(k) - \omega_0}{\partial_k^2 \omega(k)}} + k_0$$

Für eine Frequenz in der Bandlücke in der Nähe der zweiten Bandkante gilt  $\omega_0 > \omega$ . Da die Krümmung und somit der Nenner des Bruches unter der Wurzel positiv ist, hat die Wurzel damit einen negativen Wert. Daher kann die Wellenzahl und damit der Betrag des Wellenvektors mit einer Abklingkonstante  $\gamma = \sqrt{(\omega(k) - \omega_0)/(\partial_k^2 \omega(k))}$  geschrieben werden als

$$k = k_0 \pm i\gamma.$$

Einsetzen in die Gleichung für die Felder ergibt einen exponentiell abfallenden Vorfaktor  $\exp[\pm\gamma z]$ . Es folgt damit

$$\begin{aligned} E(z, t) &\sim p_k(z) \exp[-\gamma z] \exp[ik_0 z] \exp[i\omega t] && \text{mit } z > 0 \\ E(z, t) &\sim p_k(z) \exp[+\gamma z] \exp[ik_0 z] \exp[i\omega t] && \text{mit } z < 0 \end{aligned}$$

Die Abklingkonstante  $\gamma$  wird einerseits durch die Krümmung  $\partial_k^2 \omega(k)$  im Nenner und andererseits durch den Abstand zur Bandkante  $\omega(k) - \omega_0$  im Zähler bestimmt. Offensichtlich gilt daher, dass die Abklingkonstante um so größer wird, je tiefer sich die Frequenz  $\omega(k)$  in der Bandlücke befindet. Mit der größer werdenden Abklingkonstante wird folglich auch die Eindringtiefe in den Kristall kürzer.

Photonische Kristalle weisen in der Anwendung eine endliche Länge auf. Ein Tunneln der Moden mit Frequenzen in der Bandlücke ist daher, in Analogie zur Quantenmechanik, denkbar. Folglich ist Eindringtiefe bei der Betrachtung der endlichen Systeme von entscheidender Bedeutung.

### Lichtkegel

In diesem Abschnitt wird der so genannte Lichtkegel eingeführt. Dieser kommt bei der Betrachtung der quasi-eindimensionalen Systeme zum Tragen, siehe Abb. 2.8. Der Lichtkegel beschreibt die Trennung zwischen den in einem Photonischen Kristall mit endlicher Höhe gebundenen und nicht gebundenen Moden. Die nicht gebundenen Moden werden auch verlustbehaftete Moden genannt, da sie an Moden außerhalb des Photonischen Kristalls koppeln können. Dadurch kommt es zu Abstrahl- oder auch Propagationsverlusten, welche die Mode innerhalb des Kristalls langsam entschwinden lassen. Die geführten Moden sind im Gegensatz dazu innerhalb der Photonischen Kristall Schicht gefangen. Dies wird im Folgenden anhand eines Wellenleiters näher untersucht und erläutert werden.

Das betrachtete System bestehe aus einem Wellenleiter, welcher entlang der  $x$ -Achse liegt, siehe Abb. 2.9. Er habe eine endliche Höhe, entlang der  $y$ -Achse, und besitze einen Brechungsindex von  $n_g > 1$ . Unterhalb des Leiters sei ein Substrat mit dem Brechungsindex  $n_s < n_g$ , oberhalb sei Luft mit  $n_a = 1$ . Aus der Optik ist bekannt, dass

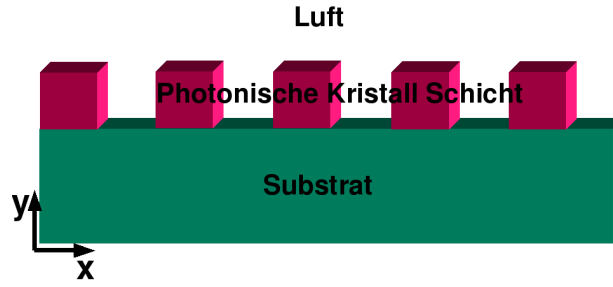


Abbildung 2.8: Skizze eines quasi-eindimensionalen Photonischen Kristalls: Die Photonische Kristall Struktur ist in der  $y$ -Richtung endlich und liegt auf einer Substratschicht. Oberhalb der Kristallschicht ist Luft. Die Propagationsrichtung der Moden ist die  $x$ -Richtung.

beim Übergang an einer Grenzschicht die Energie, also die Frequenz, und der Betrag des Wellenvektors parallel zur Grenzschicht erhalten bleiben [20]. Für den Übergang vom Wellenleiter auf das Substrat gilt demnach

$$\omega_g = \omega_s = \omega$$

$$|\vec{k}_g|_{||} = |\vec{k}_s|_{||} = |\vec{k}|_{||}$$

Der maximal mögliche Wert der Parallelkomponente des Wellenvektors  $|\vec{k}|_{||} = k_x$ , wird bei der Ausbreitung parallel zum Wellenleiter entlang der  $x$ -Achse erreicht. Dieser wird für eine festgelegte Frequenz  $\omega$  durch den jeweiligen Brechungsindex bestimmt

$$\begin{aligned} \text{Wellenleiter :} & \quad |\vec{k}_g|_{||} = k_x^{(g)} = \frac{n_g}{c} \omega \\ \text{Substrat :} & \quad |\vec{k}_s|_{||} = k_x^{(s)} = \frac{n_s}{c} \omega \\ \text{Luft :} & \quad |\vec{k}_a|_{||} = k_x^{(a)} = \frac{1}{c} \omega \end{aligned}$$

Offensichtlich können im Wellenleiter höhere Werte für  $k_x$  erreicht werden als im Substrat oder in Luft, da  $n_g > n_s > n_a$  gilt.

Ein Übergang von Luft bzw. dem Substrat auf den Wellenleiter ist daher immer möglich. Der umgekehrte Vorgang wird jedoch durch den maximal möglichen  $k_x$  Werte für Luft bzw. Substrat beschränkt. Die Geraden  $k_x = \omega n/c$  bezeichnet man daher auch als Lichtlinien. Im Graphen der Dispersionsrelation bedeutet dies, dass der Übergang aus dem Bereich unterhalb der Lichtlinie in den Bereich oberhalb der Lichtlinie nicht möglich ist. Da sich die propagierenden Moden oberhalb der Geraden befinden, bezeichnet man diese Fläche als Lichtkegel. Die geführten Moden des Wellenleiters befinden sich nun innerhalb des Lichtkegels des Wellenleiters und unterhalb des Lichtkegels des Substrats. Die Moden in diesem Bereich werden an den Grenzschichten total reflektiert

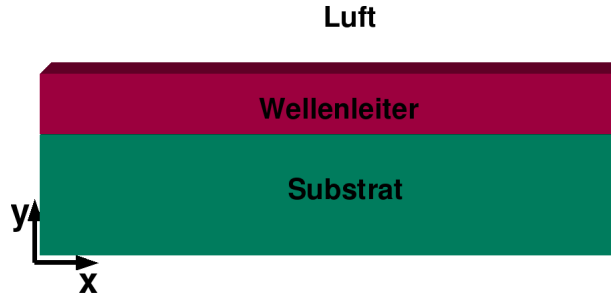


Abbildung 2.9: Skizze eines Wellenleiters: Die Wellenleiterschicht ist in der  $y$ -Richtung endlich und liegt auf einer Substratschicht. Oberhalb der Wellenleiterschicht ist Luft. Die Propagationsrichtung der Moden ist die  $x$ -Richtung.

und sind somit innerhalb des Wellenleiters gefangen. In Abb. 2.10 sind die Lichtlinien und dazugehörigen Lichtkegel für einen Wellenleiter und einen Photonischen Kristall graphisch dargestellt.

### Gruppengeschwindigkeit und Zustandsdichte

Um die Diskussion abzurunden wird hier die Gruppengeschwindigkeit und die Zustandsdichte eingeführt, sowie deren Zusammenhang aufgezeigt.

Die Gruppengeschwindigkeit ist definiert als

$$v_g = \partial_k \omega(k) \quad (2.25)$$

und gibt somit die Steigung des Bandes an der Stelle  $k$  an. Wie schon in den vorherigen Abschnitten gezeigt wurde, weist die Bandstruktur des Photonischen Kristalls Stellen mit verschwindender Gruppengeschwindigkeit auf. Diese sind nicht nur auf den Rand der Brillouin-Zone beschränkt, sondern finden sich z. B. auch für  $k = 0$  im zweiten Band. In höherdimensionalen Kristallen kommt es durch die Abstoßung zweier Bänder mit gleicher Symmetrie zu weiteren Punkten mit verschwindender Gruppengeschwindigkeit [32, 29]. Ferner flachen Bänder bei höheren Frequenzen ab, weisen also geringere Gruppengeschwindigkeiten auf. Diese Differenzen in den Gruppengeschwindigkeiten machen Photonische Kristalle für Anwendungen, wie dem Superprisma [33, 34], so interessant.

Die Zustandsdichte der Moden in einem Frequenzbereich  $[\omega, \omega + \Delta\omega]$  ist definiert durch

$$\varrho(\omega) = \frac{N(\omega)}{\Delta\omega}. \quad (2.26)$$

Dabei ist  $N(\omega)$  die Anzahl der Zustände im betrachteten Bereich. Diese Anzahl ist direkt mit den möglichen Wellenzahlen im Bereich  $[k, \Delta k]$  verknüpft.

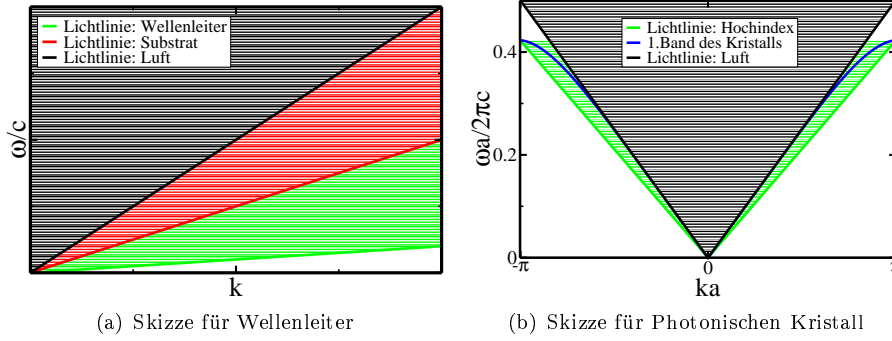


Abbildung 2.10: Skizze zur Veranschulichung der Lichtlinien und Lichtkegel: (a) Lichtlinien und Lichtkegel (schraffierter Bereich) für Wellenleiter (grün), Substrat (rot) und Luft (schwarz). Die im Wellenleiter geführten Moden befinden sich im grün schraffierten Bereich. Der Übergang vom grünen in den roten oder dem roten in den schwarzen Bereich ist nicht möglich, jedoch der von schwarz auf rot und von rot auf grün. (b) Lichtlinie und Lichtkegel eingezeichnet in die Bandstruktur eines eindimensionalen Photonischen Kristalls mit Luft als Niederindexmaterial und  $\epsilon_h > 1$  als Hochindexmaterial. Die geführten Moden befinden sich im Lichtkegel des Hochindexmaterials und unterhalb des Lichtkegels der Luft.

Die Wellenzahl und damit der Betrag des Wellenvektors wird durch eine Linearkombination der reziproken Gittervektoren gebildet und ist daher in endlichen Systemen quantisiert. Im eindimensionalen Fall ist die Quantisierung durch  $2\pi/Na$  gegeben, wobei  $a$  die Länge der Einheitszelle darstellt und  $N$  die Anzahl der Zustände. Somit folgt für die Anzahl der Moden im Bereich  $[k, \Delta k]$  für den eindimensionalen Fall

$$N(\omega) = 2 \frac{\Delta k}{\frac{2\pi}{a}}.$$

Der Faktor zwei berücksichtigt dabei die zwei möglichen Polarisationen. Einsetzen in Gleichung 2.26 der Zustandsdichte ergibt

$$\varrho(\omega) = \frac{2a}{2\pi} \frac{\Delta k}{\Delta \omega}$$

Der hintere letzte Faktor wird nun mit Hilfe der Definition der Gruppengeschwindigkeit umgeschrieben. Für kleine Bereiche  $\Delta k$  kann die Gruppengeschwindigkeit auch geschrieben werden als

$$v_g = \partial_k \omega(k) = \frac{\Delta \omega(k)}{\Delta k}.$$

Der zu ersetzende Faktor entspricht also gerade dem Kehrwert der Gruppengeschwin-

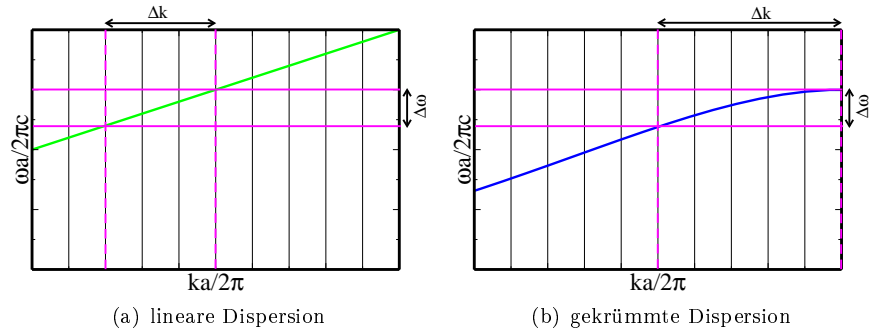


Abbildung 2.11: Skizze zur Verdeutlichung der Erhöhung der Zustandsdichte bei abnehmender Gruppengeschwindigkeit: (a) Bei linearer Dispersion entspricht dem Frequenzbereich  $\Delta\omega$  ein Wellenzahlbereich  $\Delta k$ . (b) In der Nähe einer Bandkante entspricht dem selben Frequenzbereich  $\Delta\omega$  ein im Vergleich zur linearen Dispersion größerer Wellenzahlbereich  $\Delta k$ .

digkeit. Für die Zustandsdichte folgt somit

$$\rho(\omega) = \frac{a}{\pi} v_g^{-1}.$$

Anschaulich kann dieser Zusammenhang dadurch erklärt werden, dass die Anzahl der möglichen Wellenzahlen für den betrachteten Frequenzbereich mit steigender Gruppengeschwindigkeit sinkt. Dies ist in Abb. 2.11 bildlich dargestellt.

Der reziproke Zusammenhang zwischen der Zustandsdichte und der Gruppengeschwindigkeit ist eine der charakteristischen Eigenschaften der Photonischen Kristalle. Besonders deutlich wird der Zusammenhang an der Bandkante. Da die Gruppengeschwindigkeit dort verschwindet, hat die Zustandsdichte in diesem Bereich einen drastischen Anstieg. Dieser Anstieg ist es, der die Bandkanten u.a. so interessant macht.

## 2.4 Physik der Bandstruktur und Modenpropagation

In diesem Abschnitt wird die Fourier-Zerlegung der Blochmoden noch einmal genauer beleuchtet werden. Die Untersuchung ist in [35] ausführlicher dargelegt und auch auf 2D Photonische Kristalle erweitert. Für diese Arbeit ist jedoch nur der eindimensionale Fall von Bedeutung.

Das Feld in einem Photonischen Kristall kann in eine Fourier-Reihe zerlegt werden. Diese hat, für das magnetische Feld, dann die Form

$$H_k(z) = \sum_n h_{k,n} H_0 \exp[i(k + G_n)z], \quad (2.27)$$

wobei  $h_{k,n}$  die Fourierkoeffizienten mit  $\sum_n |h_{k,n}|^2 = 1$ ,  $H_0$  die Feldamplitude,  $k$  der Betrag des Wellenzahlvektors und  $G_n = 2\pi n/a$  die reziproken Gittervektoren mit  $a$

als Einheitszellenlänge sind. Die Summe über  $n$  entspricht damit der Summe über alle reziproken Gittervektoren. Die zur Blochmode beitragenden ebenen Wellen haben also den Betrag des Wellenvektors  $k_n = k + G_n$ . Mit Hilfe dieser Zerlegung kann die gemittelte Energiedichte geschrieben werden als

$$\langle \epsilon_k \rangle_{t,s} = \frac{1}{2} \sum_n \mu_0 |h_{k,n}|^2 H_0^2. \quad (2.28)$$

Die gemittelte Energiedichte der Blochmode setzt sich demnach aus den Energiedichten der ebenen Wellen mit dem jeweiligen Gewichtungsfaktor  $|h_{k,n}|^2$  zusammen. Ferner kann, wie in [35] aufgezeigt wird, die Gruppengeschwindigkeit durch diese Zerlegung ausgedrückt werden durch

$$\vec{v}_g = \sum_n |h_{k,n}|^2 \frac{\omega}{k_n} \vec{e}_z. \quad (2.29)$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Blochmode setzt sich damit aus der Gruppengeschwindigkeit der einzelnen ebenen Wellen mit dem Gewichtungsfaktor  $|h_{k,n}|^2$  zusammen.

Aufgrund der obigen Betrachtung kann nun der Übergang vom homogenen Medium in den Photonischen Kristall folgendermaßen interpretiert werden. In einem homogenen Medium propagiere die ebene Welle mit Wellenzahl  $k$ . Durch den Übergang zum periodischen Medium kommen nun Beiträge der ebenen Wellen mit  $k_n = k + G_n$  hinzu, während der Beitrag der ursprünglichen Welle verringert wird. Besonders deutlich wird dieser Effekt für  $k = 2\pi/a$ . Dort wird der Beitrag der ursprünglichen Welle halbiert. Die andere Hälfte wird von  $k_{-1}$  gebildet. Die Gruppengeschwindigkeit verschwindet damit, da die Anteile der beiden Wellen sich weg heben und es bildet sich eine stehende Welle aus.

## 2.5 Bragg- und Mie-Streuung

Bisher wurde der Ausbildung der Bandstruktur die Bragg-Streuung zugrunde gelegt. In Artikel [36] wird hingegen aufgezeigt, dass eine Bandstruktur auch wesentlich durch Mie-Resonanzen beeinflusst werden kann. Die Bragg-Streuung ist ein auf Vielfachstreuung beruhender Effekt. Das bedeutet, dass die Anordnung der einzelnen Streuer wichtig ist und deren Ausdehnung eine untergeordnete Rolle spielt. Dieser Effekt repräsentiert demnach das photonisches Analogon zu der fast freien Elektronen Näherung der Festkörperphysik. Im Gegensatz dazu sind Mie-Resonanzen Einzelstreuer-Effekte. Sie kommen zustande, sofern der Durchmesser des Streuers ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge beträgt. Dabei ist die Ausdehnung der einzelnen Streuer von entscheidender Bedeutung.

Eine Mode welche die Mie-Resonanzbedingung erfüllt wird innerhalb des Streuers quasi-gebunden. Das elektromagnetische Feld fällt mit  $1/r$  ab, was für eine Lokalisierung im herkömmlichen Sinne nicht ausreichend ist. Im Kristallgitter kann dies allerdings als lokalisiert angesehen werden. Eine periodische Anordnung von Mie-Resonanzen kann damit als photonisches Analogon zu stark lokalisierten Elektronen

betrachtet werden. Aufgrund der Reichweite der Felder kommt es zu Wechselwirkungen der einzelnen Streuer. Die Streuer sind folglich nicht mehr unabhängig voneinander zu betrachten, wodurch es zur Ausbildung einer Bandstruktur kommt. Das unterste Band spielt dabei eine Sonderrolle. Anfangs werden noch keine Mie-Resonanzen angeregt, da die Wellenlänge nicht im Bereich der Streuer liegt. Das Feld wird demnach durch ein effektives Medium beeinflusst und weist eine lineare Dispersion auf. Sobald die Wellenlänge nun in die Größenordnung der Streuer kommt, also für Wellenzahlvektoren im Bereich der ersten Brillouin-Zone, treten Resonanzen auf. Die lineare Dispersion wird folglich gestört und es bilden sich Bandlücken aus.

Die Entstehung der Bandstruktur kann demnach durch ein Zusammenspiel der Bragg- und Mie-Resonanzen erklärt werden.

## 2.6 Herstellungsverfahren von Photonischen Kristallen

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die physikalischen Grundlagen der Photonischen Kristalle gelegt wurden, wird in diesem Abschnitt kurz auf die Prinzipien der zur Herstellung verwendete Methoden eingegangen werden.

### 2.6.1 1D-Photonische Kristalle: Bragg-Gratings

- **Molecular Beam Epitaxy (MBE):** Bei der MBE werden die einzelnen Schichten aufgedampft. Dazu werden die Substanzen getrennt in Verdampfungskammern gegeben und dort erhitzt. Die so gelösten Moleküle werden auf das Substrat geschossen, wo sie sich zu einer Schicht verbinden und kondensieren.
- **UV-Belichtung:** Bei diesem Verfahren wird die Photosensitivität von bestimmten Materialien wie Germanosilicaten benutzt. Hill entdeckte im Jahre 1978, dass sich der Brechungsindex von germanium-dotierten Schichten bei der Bestrahlung von Licht ändert. Eine periodische Variation des Brechungsindex kann nun folgendermaßen in eine photosensitive Schicht geschrieben werden. Ein Laserstrahl wird durch eine Photomaske zur Interferenz innerhalb der Schicht gebracht. Dadurch entstehen die aus der Wellenoptik bekannten Interferenzmuster innerhalb der Schicht. Die Interferenzmaxima sorgen dann für die Änderung des Brechungsindex.

Auf diesem Verfahren beruhen auch die zur Herstellung von 3D-Photonischen Kristallen verwendeten Methoden der Holographie und des Direkt Laser Writing.

### 2.6.2 2D-Photonische Kristalle: Makroporöses Silizium

- **Elektrochemisches Wachsen:** Hier wird die Eigenschaft von Silizium, mit Flusssäure zu reagieren, verwendet. Das zu bearbeitende Silizium wird auf der oberen Seite mit Flusssäure bedeckt. Die untere Seite wird mit Licht bestrahlt, wodurch Elektronen in das Leitungsband gehoben werden. Eine anliegende Spannung mit

der Anode an Silizium und der Kathode in der Flusssäure zieht die so entstandenen Elektronen ab. Die Löcher wandern nun in die Nähe der Phasengrenzschicht von Silizium mit der Säure und bilden dort eine Raumladungszone aus. Diese Raumladungszone verläuft parallel zur Phasengrenzschicht, aber innerhalb des Siliziums. Aus der Raumladungszohne werden dann Löcher zur Verfügung gestellt um die Reaktion von Silizium mit der Flusssäure zu gewährleisten. Ist die Grenzschicht von Silizium vorstrukturiert, durch kleine Perforationen, so wandern die Löcher bevorzugt zu diesen Stellen. Dadurch wird die Perforation nach unten geätzt und es entsteht ein 2D-Photonischer Kristall.

- **Reaktives Ionenätzen (Reactive Ion Etching, RIE):** Das zu bearbeitende Material wird in eine Vakuumkammer auf eine der sich dort befindenden zwei Elektroden gesetzt. Nach dem abpumpen der Luft auf ein geeignetes Vakuum wird ein Ätzgas eingelassen. Dieses wird durch eine hochfrequente Wechselspannung zu einem Plasma gezündet. Die geladenen Teilchen des Plasmas werden dann zur Elektrode mit dem Substrat beschleunigt. Beim Auftreffen auf das Material reagieren die Ionen mit der obersten Schicht des Substrates und tragen diese ab. Durch geeignete Einstellungen können so Strukturen in das Material geätzt werden.

## 2.7 Unordnung im Photonischen Kristall

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten bisher zum Thema Unordnung und Verlust veröffentlichten Arbeiten und deren Ergebnisse kurz vorgestellt.

### Streuverluste und Systemparameter

Streuverluste werden in zwei Kategorien eingeteilt:

- **intrinsische Verluste:** Dies sind Verluste, die in einem idealen Photonischen Kristall auftreten. Ihr Ursprung liegt darin, dass die Mode des Kristalls an eine Mode im Substrat koppeln kann. In der Bandstruktur bedeutet dies, dass an eine Mode oberhalb der Lichtlinie des Substrates gekoppelt wird. Dadurch ist ein Abstrahlen oder sogar ein Propagieren in das Substrat möglich.
- **nicht-intrinsische Verluste:** Bei dieser Art von Streuverlusten handelt es sich einerseits um Kopplungsverluste, die durch die unterschiedliche Modenform von Wellenleitermode und Blochmode zustande kommen. Andererseits werden diese Verluste auch durch Unordnungen in der Kristallstruktur verursacht.

In [37] wurden diese Verluste an 2D-Systemen untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass der Verlust mit dem Füllfaktor  $f = A_{\text{Loch}}/A_{\text{Einheitszelle}}$  steigt. Ferner hat die Form der Löcher eine entscheidende Bedeutung. Das Koppeln an abstrahlende Moden innerhalb der Löcher wird durch eine konische Lochform begünstigt. Besonders deutlich wird der Effekt, wenn zudem der Füllfaktor hoch ist.

Neben der Form der Löcher bedingt auch die Länge der Einheitszelle die möglichen Verluste. Durch die Länge der Einheitszelle wird die Ausdehnung der propagierenden



Blochmode bestimmt, wobei eine größere Ausdehnung der Mode einen höheren Verlust begünstigt.

Des Weiteren hat in 2D- und 3D-Photonischen Kristallen die gewählte Propagationsrichtung Einfluss auf die Verluste.

### Imaginäre Verlustkonstante

H. Benisty stellte in Artikel [38] ein Modell vor, welches die Abstrahlungsverluste in einem 2D-Photonischen Kristall genauer beschreiben soll. Der Grundaufbau des darin betrachteten Systems besteht aus einer Wellenleiterschicht, welche in Substratschichten eingebettet ist. Aus dieser Grundstruktur werden orthogonal zur Wellenleiterschicht Poren geätzt. Die Abstrahlungsverluste aus der Wellenleiterschicht resultieren nun allein aus diesen Poren. Da die Poren auch durch die Substratschichten geätzt sind, ist ein Abtauchen in diese Schichten nicht möglich.

Um die Abstrahlungsverluste numerisch simulieren zu können, werden die Poren auf der Höhe der Wellenleiterschicht durch ein absorbierendes Material mit imaginärem Brechungsindex beschrieben. Diese Füllungen bilden einen sogenannten Anti-Photonischen Kristall. Der Realteil des Füllungsindex hängt dabei von der Differenz des Brechungsindex der Wellenleiterschicht und der Substratschichten ab. Die Füllungen werden als unabhängige Dipolstrahler behandelt und mit der Abstrahlung aus den Löchern korreliert. Dies führt zu einer Bestimmungsgleichung für den oben erwähnten imaginären Brechungsindex. Diese Gleichung hängt vom Überlappintegral der propagierenden Mode mit dem absorbierenden Material und dem Quadrat der Differenz der Brechungsindizes von Wellenleiter und Substrat ab.

Aufgrund dieser Abhängigkeit kann das Ausschmieren der Fabry-Perot-Oszillationen an der zweiten Bandkante erklärt werden. Da sich im zweiten Band das Intensitätsmaximum der Blochmode im Niederindexmaterial befindet, also in diesem Fall den Poren, ist die Absorption für Moden in diesem Band größer, als für die des ersten Bandes. Ferner kann gezeigt werden, dass Hochindex-Photonische Kristalle mit einem geringem Unterschied zwischen Substrat- und Wellenleiter-Brechungsindex einen geringen Verlust aufweisen, sofern die Löcher tief genug geätzt sind. Dies steht im Gegensatz zur gängigen Vorstellung, dass das Substrat entfernt werden muss, um ein möglichst im Wellenleitermaterial zentriertes Modenprofil zu erhalten und damit den Abstrahlungsverlust zu verringern.

### Endliche Ätztiefe in 2D-Photonischen Kristallen

Die oben skizzierte Methode wird in den Artikeln [39] und [40] auf Systeme mit endlicher Ätztiefe angewendet. Im Gegensatz zum vorherigen Fall wird nun das Substrat in den Löchern mit einem Imaginärteil versehen. Die Erklärung dafür ist, dass die Mode aufgrund des höheren Brechungsindex in das Substrat abtaucht. Daher wird nur das in den Poren befindliche Substrat als abstrahlender Dipol betrachtet. Es wird in den Artikeln verdeutlicht, dass die Abstrahlungsverluste mit dem Überlapp des Modenprofils und dem Substrat innerhalb der Poren zusammenhängen. Die Folge daraus ist, dass mit zunehmender Ätztiefe auch die Abstrahlungsverluste geringer sind.

Ein weiterer Schwerpunkt der in den Artikeln vorgestellten Untersuchungen ist die Form der Poren. Dazu sind Poren mit konischem Abschluss betrachtet worden. Diese Untersuchungen ergaben, dass der Winkel des konischen Abschlusses von entscheidender Bedeutung ist. Demnach sind die Abstrahlverluste um so geringer, je größer der Winkel des konischen Abschlusses ist.

### **Verbesserte Einkopplung**

Der gesamte Abstrahlverlust eines Photonischen Kristalls setzt sich aus den Kopplungsverlusten und den Propagationsverlusten zusammen. Die zuvor betrachteten Analysen bezogen sich auf die Propagationsverluste. In den Artikeln [41] und [42] wird dagegen das Einkoppelverhalten in 1D- und 2D-Photonischen Kristallen untersucht. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Kopplungsverluste auf den unterschiedlichen Modenprofil der Wellenleiter- bzw. Blochmode beruhen. Um die Transformation der Wellenleitermode in die Blochmode schrittweise durchzuführen, wird eine so genannte Taper-Struktur verwendet. Diese Taperstruktur nähert sich vom Wellenleiter graduell dem Photonischen Kristall an, in dem z.B. die Lamellenbreite des 1D-Systems von Einheitszelle zu Einheitszelle vergrößert wird. Mit Hilfe der Taperstrukturen ist es möglich, basierend auf den in den Artikeln durchgeführten Untersuchungen, die Transmission und somit die Einkopplung deutlich zu verbessern.

### **Einfluß von Unordnung auf die Bandlücke eines strikt 2D-Photonischen Kristalls**

In Artikel [43] wird untersucht, wie sich die Bandlücke unter Unordnung verhält. Dabei wird von einem strikt zweidimensionalen Photonischen Kristall ausgegangen, welcher keine Abstrahlverluste aus der Propagationsebene aufweist. Im Gegensatz dazu wird in dieser Arbeit ein eindimensionaler Kristall endlicher Höhe betrachtet, welcher Abstrahlverluste aus der Propagationsebene zuläßt. Die aus dem Artikel gewonnenen Erkenntnisse werden daher mit Hilfe dieser Arbeit auf Systeme mit Abstrahlverlusten erweitert werden. Im Verlaufe der vorangegangenen Abschnitte sind die zwei zur Ausbildung der Bandstruktur beitragenden Effekte der Bragg- und Mie-Streuung schon vorgestellt worden. Durch die im Artikel präsentierten Untersuchungen wird deutlich, dass der Einfluss auf die Bandlücke eng mit dem dominierenden Effekt zur Bildung derselben verknüpft ist.

Die Mie-Streuung tritt hauptsächlich bei Hochindexkontrasten in TE-Polarisation auf und ist das photonische Analogon zum stark lokalisierten Elektron. Die Bandstruktur, welche durch ihn dominiert wird, bleibt von Variationen in der Einheitszelllänge nahezu unbeeinflusst.

Im Gegensatz dazu ist die Bragg-Streuung ein Vielstreuerereffekt und entspricht dem fast freien Elektron der Festkörpertheorie. Die Bandstruktur, welche durch die Bragg-Streuung dominiert wird, ist daher unempfindlich gegenüber Variationen der einzelnen Streuer, solange die Periodizität gewahrt bleibt.

Diese sehr wichtigen Ergebnisse werden im Verlaufe dieser Arbeit erneut aufgegriffen werden.

### Analyse der Unordnungen in einem 2D-Photonischen Kristall

Eine genaue Untersuchung von 2D-Photonischen Kristallen in Bezug auf herstellungsbedingte Ungenauigkeiten ist in [44] durchgeführt worden. Die möglichen Unordnungen wurden dazu in drei Klassen eingeteilt

- Form: Abweichungen von der idealen Kreisform der Poren
- Rauigkeit: Abweichung der Porenwände vom idealen glatten Fall
- Versatz: Abweichungen von der Position des Porenmittelpunktes in Bezug auf das ideale Gitter

Im Artikel wird dargelegt, dass der Versatz der Pore durch eine Gaußverteilung der Breite  $\sigma$  beschrieben werden kann. Ferner wird gezeigt, dass die Breite der Gaußverteilung von der Symmetrie des Kristalls und der betrachteten Richtung abhängt.

Diese Untersuchungen werden im Kapitel 5 dieser Arbeit noch einmal aufgegriffen werden.

## 2.8 Ziel der Arbeit

Aus den in Abschnitt 2.7 vorgestellten Artikeln zu den Abstrahlverlusten eines Photonischen Kristalls wird deutlich, dass das Gebiet physikalisch noch nicht vollständig untersucht wurde. Es sind einzelne Ansätze gemacht worden, die jeder für sich genommen einen kleinen Aspekt der Streuverluste zu erläutern vermögen, eine vollständige Analyse der zugrunde liegenden physikalischen Effekte ist jedoch nicht durchgeführt worden.

In Abschnitt 2.1 wurde ferner angeführt, dass gezielt manipulierte 2D-Photonische Kristalle als Wellenleiter Verwendung finden können. In den Artikeln [45] und [46] wurden Untersuchungen zu diesen aus Photonischen Kristallen herstellbaren Wellenleitern durchgeführt. Dabei wurde festgestellt, dass diese so genannten Defektwellenleiter für eine genügend große Ätztiefe weniger Verluste aufweisen, als ein herkömmlicher Streifenwellenleiter [47]. Zudem wurde aufgezeigt, dass die Verluste mit größerer Frequenz der zu leitenden Mode abnehmen. Der Grund dafür liegt darin, dass die geführte Mode mehr im Defektbereich des Photonischen Kristalls zentriert ist und damit weniger tief in den diesen eindringt. Diese Ergebnisse beruhen auf empirischen Untersuchungen. In den Artikeln wurde kein Modell herausgearbeitet, welches die Verluste der Defektwellenleiter beschreiben kann. In der technischen Anwendung sind jedoch Vorhersagen über die Verluste, die aus herstellungsbedingten Ungenauigkeiten auftreten können, unentbehrlich.

Das Ziel dieser Arbeit ist daher eine vollständige Untersuchung der Auswirkungen der herstellungsbedingten Ungenauigkeiten darzulegen und die damit einhergehenden Streuverluste herauszufinden und zu charakterisieren. Um eine effektive Analyse vornehmen zu können, beschränkt sich diese Arbeit zunächst auf den eindimensionalen Fall. Die Ergebnisse sind jedoch auf höhere Dimensionen übertragbar [37].

Die im Verlaufe der Arbeit durchgeführten Analysen beziehen sich auf das Transmissionsverhalten für verschiedene Kristalllängen. Durch diese Betrachtung kommen die für endliche Systeme typischen Fabry-Perot-Oszillationen zum Tragen. Diese wurden in den oben aufgeführten Artikeln nicht beachtet, obwohl sie einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf das Transmissionsverhalten haben. Ferner werden Kristalllängen bis zu zweihundert Einheitszellen betrachtet, was für technische Anwendungen mit längeren Kristallen wie dem Superprisma [33, 34] von großer Bedeutung ist.

Die in dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen lassen sich in zwei Teile gliedern. Der erste Teil besteht aus der numerischen Berechnung der Transmission mit Hilfe einer auf der Rigorous Coupled Wave Analysis basierenden Methode. Der Aufbau des dafür geschriebenen Programms und die mathematischen sowie physikalischen Hintergründe der Methode werden in Kapitel 3 vorgestellt und diskutiert werden.

Den zweiten Teil bildet die so genannte effektive Spiegel-Methode. Sie basiert darauf, dass das Einkoppeln in bzw. das Auskoppeln aus einem Photonischen Kristall durch so genannten effektive Spiegel beschrieben werden kann. Die Propagation innerhalb des Kristalls kann darauf durch eine einfache Propagationsmatrix dargestellt werden. Die mit Hilfe dieser Methode erhaltenen effektiven Parameter können zur Charakterisierung der einzelnen betrachteten Systeme verwendet werden. Zur Auswertung von experimentell gemessenen Transmissionsspektren wird standardmäßig die Hakki-Paoli-Methode [48, 49] verwendet. Die Anwendung dieser Methode setzt jedoch die effektive Spiegeldarstellung voraus. Es ist bisher aber noch nicht gezeigt worden, dass diese Annahme für Photonische Kristalle gerechtfertigt ist. In Kapitel 4 wird daher die effektive Spiegel-Methode ausführlich dargestellt und anhand der ungestörten, sozusagen idealen, Systeme getestet werden.

In Kapitel 5 werden darauf beide Methoden dazu verwendet, um die durch Unordnung verursachten Effekte zu beschreiben. Im Anschluss an diese Analysen folgt eine Zusammenfassung der im Verlaufe dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und ein Ausblick auf weitere interessante Fragestellungen und Forschungsmöglichkeiten.



### 3 Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA)

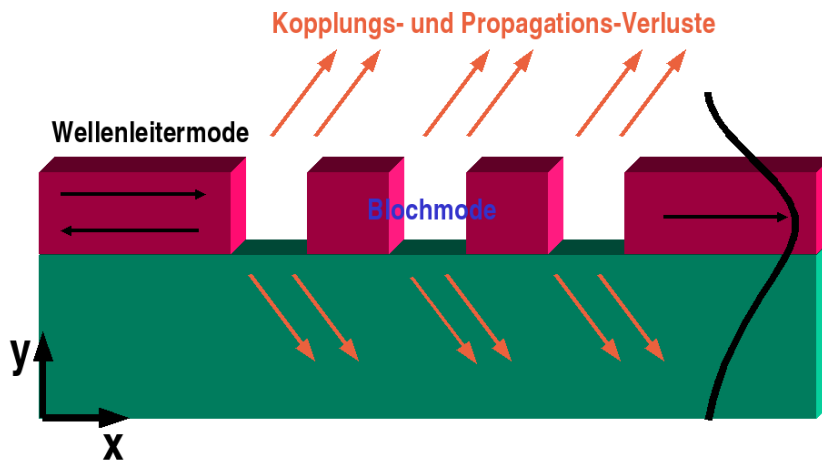


Abbildung 3.1: Skizze der in dieser Arbeit behandelten Problemstellung. Eine Wellenleitermode (schwarz) trifft auf einen Photonischen Kristall endlicher Höhe und wird in eine Blochmode umgewandelt. Darauf folgt wiederum ein Wellenleiter und die darin propagierende Wellenleitermode. Die Umwandlung von Wellenleiter- in Blochmode sorgt für Kopplungsverluste (orange). Bei nicht idealen Photonischen Kristallen kommen Propagationsverluste hinzu (orange)

In dieser Arbeit wird die RCWA, siehe z.B. [50, 51, 52], in der von Lalanne [53] eingeführte Weise benutzt um quasi-eindimensionale Photonische Kristalle mit Streuverlusten zu untersuchen. Als quasi-eindimensionale Photonische Kristalle werden eindimensionale Photonische Kristalle mit endlicher Höhe bezeichnet. Durch die endliche Höhe können die Blochmoden des Kristalls an Moden außerhalb desselben koppeln. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn sich die angeregte Blochmode überhalb des Lichtkegels befindet. Dadurch entstehen die so genannten intrinsische Verluste. Sollte sich die angeregte Blochmode unterhalb des Lichtkegels befinden kann es dennoch zur Abstrahlung durch Kopplungsverluste oder durch Unordnung verursachte Propagationsverlusten kommen. Diese werden dann nicht-intrinsische Verluste genannt.

Das zu betrachtende System besteht demnach aus einem einmodigen Wellenleiter gekoppelt mit einem Photonischen Kristall endlicher Höhe. In Abb. 3.1 ist dies skizziert. Im Wellenleiter wird die Fundamentalmode gestartet, deren Profil in der Abbildung schwarz dargestellt ist. Diese trifft auf den Photonischen Kristall und wird in eine Blochmode umgewandelt. Dabei entstehen zunächst Ein- bzw. Auskoppelverluste. In einem idealen Photonischen Kristall propagieren die Blochmoden verlustfrei, es treten also nur Koppelverluste auf. Bei einem Photonischen Kristall mit Unordnung kommen zudem noch Propagationsverluste hinzu. Die Verluste sind in der Abbildung durch die orangenen Pfeile dargestellt.

Da die Maxwell-Gleichungen in 1D bzw. 2D entkoppeln [13], sind zwei verschiedene Polarisierungen zu betrachten. Ist das elektrische Feld in  $z$ -Richtung polarisiert, wird dies als TE-Polarisation bezeichnet. Bei der TM-Polarisation ist das magnetische Feld in  $z$ -Richtung polarisiert. Im Folgenden sind meistens die Gleichungen für die TM-Polarisation aufgeführt. Der Übergang zwischen den beiden Polarisierungen kann in den folgenden Gleichungen durch  $\mu \rightarrow \epsilon$  und  $E \rightarrow H$  bewerkstelligt werden [53].

In den folgenden Kapiteln werden zunächst die Eingabeparameter des für diese Arbeit geschriebenen Programms definiert. Im Anschluss daran werden die Berechnungsmethoden erläutert. Ferner wird gezeigt wie sich die Blochmoden und die Bandstruktur berechnen lassen.

### 3.1 Programmaufbau

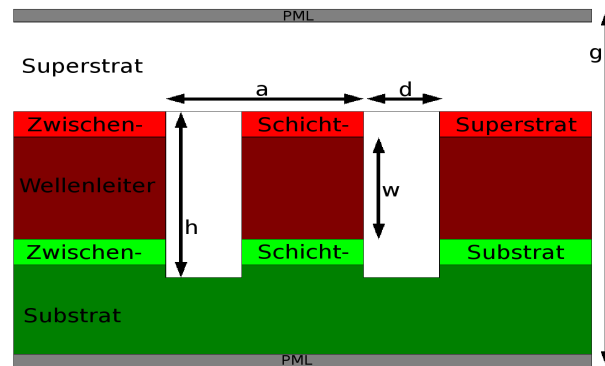


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Grundstruktur für das im Verlaufe dieser Arbeit geschriebene Programm. Die Brechungsindizes der Schichten können ebenso wie deren Höhen und Längen gewählt werden.

Das für diese Arbeit geschriebene Programm erlaubt die Berechnung von Strukturen, welche die in Abb. 3.2 dargestellten Form aufweisen. Die Grundlage bildet eine siebenschichtige Wellenleiterstruktur. Als oberste und unterste Schicht dienen die so genannten Perfectly Matched Layers (PMLs), welche im Anschluss an dieses Kapitel

genauer erläutert werden. Auf der unteren PML liegt das Substrat, worauf eine weitere Substrat-Zwischenschicht liegt. Darauf folgt die Wellenleiterschicht. Oberhalb dieser liegt wiederum eine Superstrat-Zwischenschicht, worauf das Superstrat folgt. Die wählbaren Parameter in dieser Grundstruktur sind in Tab. 3.1 aufgeführt. Bei der Wahl der Brechungsindizes ist dabei zu beachten, dass im Wellenleiter geführte Moden erst auftreten, wenn dessen Brechungsindex höher ist als der der anderen Schichten. Die PMLs

Beschreibung	Variable
Brechungsindex des Wellenleiters	$n_{\text{guide}}$
Brechungsindex des Substrates	$n_{\text{sub}}$
Brechungsindex der Substrat-Zwischenschicht	$n_{\text{Zsub}}$
Brechungsindex des Superstrates	$n_{\text{super}}$
Brechungsindex der Superstrat-Zwischenschicht	$n_{\text{Zsuper}}$
Permeabilität des Wellenleiters	$\mu_{\text{guide}}$
Permeabilität des Substrates	$\mu_{\text{sub}}$
Permeabilität der Substrat-Zwischenschicht	$\mu_{\text{Zsub}}$
Permeabilität des Superstrates	$\mu_{\text{super}}$
Permeabilität der Superstrat-Zwischenschicht	$\mu_{\text{Zsuper}}$
Gesamthöhe der Struktur	$g$
Höhe des Wellenleiters	$w$
Höhe der Substrat-Zwischenschicht	$h_{\text{Zsub}}$
Höhe der Superstrat-Zwischenschicht	$h_{\text{Zsuper}}$

Tabelle 3.1: wählbare Parameter der Wellenleiterstruktur

haben eine fest vorgegebene Höhe, die sich aus der verwendeten Wellenlänge  $\lambda$  berechnet durch  $h_{\text{PML}} = \lambda/4$ . Die Höhe der Substrat-Schicht  $h_{\text{sub}}$  bzw. Superstrat-Schicht  $h_{\text{super}}$  ergibt sich damit zu  $h_{\text{sub}} = h_{\text{super}} = (g - w - h_{\text{Zsub}} - h_{\text{Zsuper}} - 2 * h_{\text{PML}})/2$ .

Die Einheitszelle des Photonische Kristalls wird mit Hilfe dieser Grundstruktur wie folgt beschrieben. Der erste Abschnitt der Einheitszelle entspricht dem des Wellenleiters, also der Grundstruktur. Der zweite entspricht jedoch einem geätzten Wellenleiter. Dies bedeutet, dass das Superstrat von der Superstrat-Zwischenschicht bis zur gewählten Ätztiefe eingesetzt wird. Der unter der Ätztiefe liegende Teil der Grundstruktur bleibt dadurch unberührt. Die wählbaren Parameter für den Photonischen Kristall sind in Tab. 3.2 aufgeführt. Bei der Wahl der Gesamthöhe  $w$  ist noch folgendes zu beachten. Die sich im Photonischen Kristall ausbildenden Blochmoden sind nicht auf die Höhe des Wellenleiters beschränkt, sondern dringen noch in die Substrat bzw. Superstratschicht ein. Die PML-Schichten müssen daher weit genug von der Wellenleiterschicht entfernt sein. Aufgrund von mehreren Testrechnungen wird in dieser Arbeit eine Gesamthöhe von  $10a$  angesetzt, welche die ungehinderte Ausbildung der Blochmode gewährleistet.

### 3.1.1 Perfectly Matched Layers (PMLs)

Die PMLs sind mathematisch konstruierte Schichten an denen keine Reflexion stattfindet. Die darin propagierenden Moden werden zudem exponentiell gedämpft. Aufgrund



Beschreibung	Variable
Einheitszellenlänge	$a$
Ätztiefe	$h$
Ätzbreite	$d$
Anzahl der Einheitszellen	$n$

Tabelle 3.2: Parameter des Photonischen Kristalls

dieser Eigenschaften werden PMLs dazu eingesetzt, um mit einem numerisch endlichen System ein unendliches System zu simulieren [54]. Der Ausgangspunkt für die Herleitung dieser Schichten ist, dass sich der Wellenvektor  $\vec{k}$  bei einem Schicht-Übergang mit unterschiedlichen Brechungsindizes ändert. Sobald eine Veränderung im Wellenvektor nicht mehr auftritt, sind die beiden Schichten für die einfallende Welle gleich und es entsteht keine Reflexion an der Grenzschicht. Um die Bedingungen für diesen Fall mathematisch zu beschreiben, wird von der Wellengleichung mit Tensorcharakter in der Permeabilität und Dielektrizität ausgegangen. Dabei wird der Einfachheit halber keine  $x, y$ -Abhängigkeit der Permeabilität und der Dielektrizität angenommen und der Tensorcharakter auf die Diagonalelemente beschränkt. Somit lautet die Ausgangsgleichung für die homogenen benachbarten Schichten ( $i$ ) und ( $t$ ) in TE-Polarisation

$$-\partial_x^2 E_z(x, y) - \frac{\omega^2}{c^2} \mu_{zz}^{(i/t)} \epsilon^{(i/t)} E_z(x, y) = \frac{\mu_{zz}^{(i/t)}}{\mu_{xx}^{(i/t)}} \partial_y^2 E_z(x, y)$$

Für das elektrische Feld wird die Form

$$E_z(x, y) = A \exp[ik_x x + ik_y y] \quad \text{und} \quad k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

angesetzt. Einsetzen in die Wellengleichung ergibt für die beiden Schichten

$$\begin{aligned} \text{Schicht(i)} : \quad k_x^2 - k^2 \mu_{zz}^{(i)} \epsilon^{(i)} &= -\frac{\mu_{zz}^{(i)}}{\mu_{xx}^{(i)}} k_y^2 \\ \text{Schicht(t)} : \quad k_x^2 - k^2 \mu_{zz}^{(t)} \epsilon^{(t)} &= -\frac{\mu_{zz}^{(t)}}{\mu_{xx}^{(t)}} k_y^2 \end{aligned}$$

Hierbei wurde schon implizit vorausgesetzt, dass sich der Wellenvektor  $\vec{k}$  in den beiden Schichten nicht ändert. Nach dem Umstellen der Gleichungen und Vergleichen der Vorfaktoren erhält man die Bedingungen

$$\begin{aligned} \mu_{xx}^{(i)} \mu_{zz}^{(i)} &= \mu_{xx}^{(t)} \mu_{zz}^{(t)} \\ \frac{\mu_{xx}^{(i)}}{\epsilon^{(i)}} &= \frac{\mu_{xx}^{(t)}}{\epsilon^{(t)}} \end{aligned}$$

Um nun die PML zu konstruieren, muss  $\epsilon^{(t)}$  imaginär gewählt werden. Was gleichbedeutend damit ist, dass die Schicht ( $t$ ) die Welle absorbiert. Die noch freien Parameter

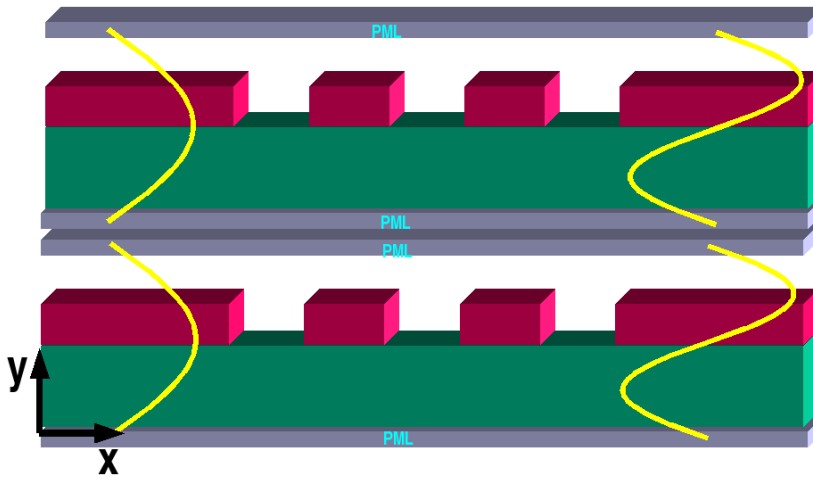


Abbildung 3.3: Künstliche Periodizität in  $y$ -Richtung: Das zu betrachtende System wird durch die PMLs begrenzt und durch deren Eigenschaften von der Umgebung abgeschottet. Die Moden (gelb) des betrachteten Systems haben Knotenpunkte in den PMLs. Daher ist es möglich mehrere Systeme übereinander zu stapeln und eine künstliche Periodizität in  $y$ -Richtung zu erzeugen. Dies hat zur Folge, dass die Felder in  $y$ -Richtung in Fourier Reihen entwickelt werden können.

$\mu_{xx}^{(t)}$  und  $\mu_{zz}^{(t)}$  können dann mit Hilfe der obigen Bedingungen bestimmt werden. In dem für diese Arbeit verwendeten Program wurde nach [53]  $\epsilon^{(t)} = 5(1 + i)$  gesetzt. Die so konstruierten PML absorbieren also die einfallende Welle perfekt, ohne Reflexion. Mit Hilfe der PML ist es daher möglich eine künstliche Periodizität des betrachteten Systems in  $y$ -Richtung zu erzeugen, ohne dass es zu Wechselwirkungen der Teilsysteme kommt. Das betrachtete System mit den PMLs wird dazu, wie in Abb. 3.3 dargestellt, gestapelt.

### 3.1.2 Homogene Abschnitte

Aufgrund der durch die PML künstlichen Periodizität in  $y$ -Richtung, kann eine Fourier Zerlegung der  $y$ -Komponente der Felder vorgenommen werden, siehe Abb.3.3. Die Fourier Koeffizienten sind damit nur noch von  $x$ , also der Propagationsrichtung, abhängig und beschreiben sozusagen die Entwicklung der einzelnen Komponenten mit fortschreitender Länge.

Im nächsten Schritt wird das System in einzelne in  $x$ -Richtung homogene Abschnitte zerlegt, siehe Abb. 3.4. In diesen homogen gewählten Abschnitten kann die Propagation durch vorwärts und rückwärts laufende Moden wie folgt beschrieben werden:

$$\vec{m}(x) = \vec{f} \exp[k_0 \gamma x] + \vec{r} \exp[k_0 \gamma x].$$

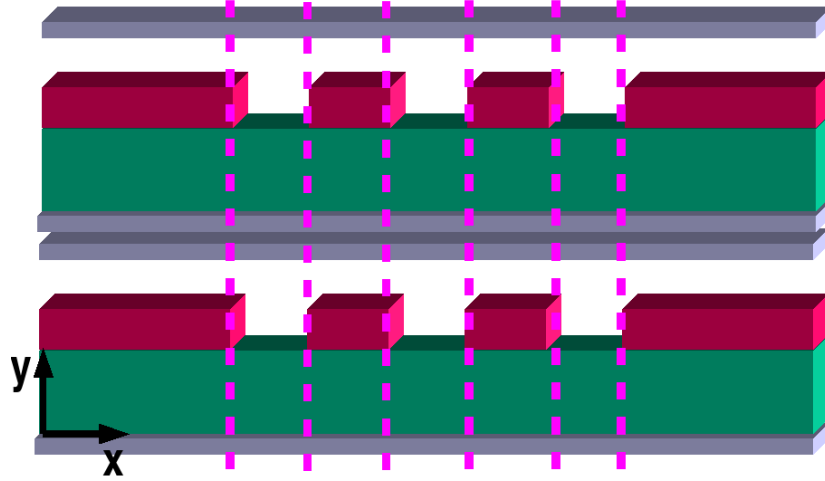


Abbildung 3.4: Schichteinteilung: Da die Periodizität in  $y$ -Richtung eine Fourier Zerlegung der Felder in dieser Richtung erlaubt und damit eine Kopplungsbasis gegeben ist, kann das System nun in einzelne homogene Abschnitte zerlegt werden. Dies hat zur Folge, dass die Propagation innerhalb dieser Abschnitte bekannt ist. Die Fourier Komponenten können demnach zur nächsten Grenzschicht (gestrichelte Linie) mit Hilfe eines Exponentialfaktors verschoben werden.

Somit können die Fourier Koeffizienten in jedem homogenen Abschnitt durch  $\vec{m}(x)$  dargestellt werden. Die Unbekannten  $\vec{f}$  und  $\vec{r}$  sind dabei für jeden Abschnitt unterschiedlich, können aber durch die Anschlussbedingungen in Relation zueinander gesetzt werden.

Im Folgenden wird eine genauere Analyse der homogenen Abschnitte durchgeführt. Aus den oben genannten Gründen sind dabei  $\epsilon$  und  $\mu$  nur von der  $y$ -Komponente abhängig.

### 3.1.3 Abschnittsanalyse für TM-Polarisation

Die zu betrachtende Wellengleichung in TM-Polarisation lautet [53]

$$\partial_x^2 H_z(x, y) = - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_{zz}(y) \mu(y) H_z(x, y) - \epsilon_{zz}(y) \partial_y [\epsilon_{xx}^{-1}(y) \partial_y H_z(x, y)]$$

Aufgrund der künstlich erzeugten Periodizität in  $y$ -Richtung, kann das Feld in dieser Richtung durch eine Fourier-Reihe dargestellt werden

$$H_z(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m(x) \exp[iG_m y]$$

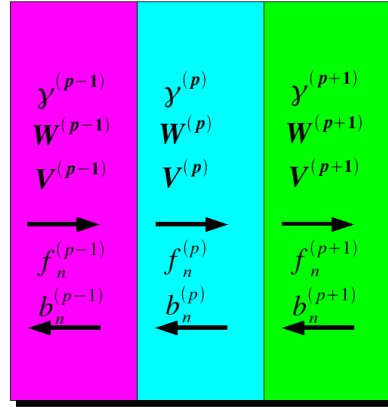


Abbildung 3.5: Zusammenfassung der Abschnittsanalyse: Jeder Abschnitt kann durch seine Eigenwerte  $\gamma$  und den dazugehörigen Eigenvektoren  $\hat{W}$ ,  $\hat{V}$  sowie den Unbekannten  $\vec{f}$  und  $\vec{b}$  dargestellt werden

wobei der reziproke Gittervektor  $G_m = m2\pi/d$  eingeführt wurden. Die Koeffizienten  $h_m(x)$  können in einen Vektor geschrieben werden mit

$$\vec{h}(x) = \begin{pmatrix} \vdots \\ h_{p-1}(x) \\ h_p(x) \\ h_{p+1}(x) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Setzt man dies nun in die Wellengleichung ein, so erhält man eine Propagationsgleichung für die Fourier Koeffizienten

$$\partial_x^2 \vec{h}(x) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[ \hat{A}^{-1} (\hat{G} \hat{D}^{-1} \hat{G} - \hat{B}) \right] \vec{h}(x)$$

Dies ist eine einfache Eigenwertgleichung, mit den Matrizen

$$G_{nm} = \delta_{nm} \frac{G_m}{c}$$

$$B_{nm} = \int \mu(y) \exp[i(G_n - G_m)y] dy$$

$$A_{nm} = \int \epsilon_{zz}^{-1}(y) \exp[i(G_n - G_m)y] dy$$

$$D_{nm} = \int \epsilon_{xx}(y) \exp[i(G_n - G_m)y] dy,$$

### 3 Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA)

wobei  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{D}$  Töplitz-Matrizen sind. Die Propagation in den einzelnen Abschnitten ist homogen, daher wird folgender Ansatz gewählt:

$$\vec{h}(x) = \vec{W} \exp[k_0 \gamma x] \quad \text{mit} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Setzt man diesen Ansatz in die obige Eigenwertgleichung ein, so erhält man die Eigenwerte  $\gamma_m$  und die dazugehörigen Eigenvektoren  $\vec{W}_m$ . Die volle Lösung besteht nun aus vorwärts und rückwärts laufenden Moden mit noch zu bestimmenden Koeffizienten  $f_n$  und  $b_n$ :

$$\vec{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{W}_n (f_n \exp[k_0 \gamma_n x] + b_n \exp[-k_0 \gamma_n x]). \quad (3.1)$$

Dieselbe Entwicklung kann nun auch für das elektrische Feld ausgeführt werden mit

$$E_z(x, y) = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m(x) \exp[i G_m y]$$

Analog zum magnetischen Feld lautet volle Lösung des E-Feldes, vergleiche [53]:

$$\vec{e}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{V}_n (f_n \exp[k_0 \gamma_n x] - b_n \exp[-k_0 \gamma_n x]), \quad (3.2)$$

$$\text{mit} \quad \hat{V} = \hat{A} \hat{W} \hat{\gamma} \quad \text{und} \quad \gamma_{nm} = \delta_{nm} \gamma_n \quad (3.3)$$

Die Unbekannten sind, wie oben bereits erwähnt  $f_n$  und  $b_n$ .

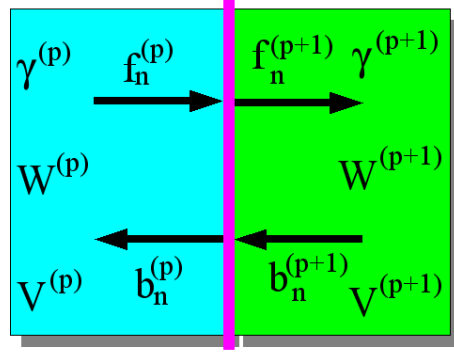
Alle Informationen über die einzelnen Abschnitte sind in deren Eigenwerten und Eigenvektoren enthalten, siehe Abb. 3.5. Die beschriebene Analyse ist für jeden Abschnitt des Systems aufzustellen. Die einzelnen Abschnitte müssen darauf über die Anschlussbedingungen gekoppelt werden. Dies wird mit Hilfe der S-Matrix-Methode durchgeführt, welche im Folgenden beschrieben wird.

## 3.2 S-Matrix-Methode

In diesem Abschnitt werden in Anlehnung an [55] die Interface-Matrix, T-Matrix und S-Matrix vorgestellt. Ferner wird die S-Matrix-Multiplikation hergeleitet. Zum Abschluss wird noch gezeigt wie die Blochmoden aus der S-Matrix berechnet werden können [56].

### 3.2.1 Interface-Matrix

Wie zuvor gezeigt, lassen sich alle Informationen über die einzelnen Abschnitte in den Eigenwerten und Eigenvektoren speichern, siehe Abb. 3.5. Der Abschnitt ( $p$ ) wird



(a) Abschnitte und Grenzschichten

Abbildung 3.6: Skizzen zur Interface-Matrix: Die Interface-Matrix verbindet die ein- und auslaufenden Moden des Abschnittes (p) mit denen des angrenzenden Abschnittes (p+1).

daher durch die Matrizen  $\hat{W}^{(p)}$ ,  $\hat{V}^{(p)}$  und  $\hat{\gamma}^{(p)}$  beschrieben. Die Gleichungen für das magnetische (3.1) und elektrische (3.2) Feld lassen sich somit zusammenfassen

$$\begin{pmatrix} \vec{h}^{(p)}(x) \\ \vec{e}^{(p)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{X}_-^{(p)}(x) & 0 \\ 0 & \hat{X}_+^{(p)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p)} & \hat{W}^{(p)} \\ -\hat{V}^{(p)} & \hat{V}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

wobei  $(X_{\pm})_{nm} = \delta_{nm} \exp[\pm k_0 \gamma_n x]$  eingeführt wurde und die Propagation im homogenen Abschnitt beschreibt. An der Grenzschicht von Abschnitt (p) zu Abschnitt (p+1) gilt aufgrund der Stetigkeit der Parallelkomponenten Felder

$$\begin{pmatrix} \vec{h}^{(p)}(x) \\ \vec{e}^{(p)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{h}^{(p+1)}(x) \\ \vec{e}^{(p+1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Zunächst sei die Grenzschicht bei  $x = 0$ . Somit lautet die zu lösende Gleichung

$$\begin{pmatrix} \hat{W}^{(p)} & \hat{W}^{(p)} \\ -\hat{V}^{(p)} & \hat{V}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p+1)} & \hat{W}^{(p+1)} \\ -\hat{V}^{(p+1)} & \hat{V}^{(p+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p+1)} \end{pmatrix}$$

Durch das Multiplizieren mit der inversen Matrix von Abschnitt (p+1) lässt sich dies leicht auflösen

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p+1)} & \hat{W}^{(p+1)} \\ -\hat{V}^{(p+1)} & \hat{V}^{(p+1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p)} & \hat{W}^{(p)} \\ -\hat{V}^{(p)} & \hat{V}^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Mit der symmetrischen Interface-Matrix

$$\hat{I}_{(p)}^{(p+1)} = \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p+1)} & \hat{W}^{(p+1)} \\ -\hat{V}^{(p+1)} & \hat{V}^{(p+1)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p)} & \hat{W}^{(p)} \\ -\hat{V}^{(p)} & \hat{V}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{I}_{(p)}^{(p+1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\hat{W}^{(p+1)})^{-1} & -(\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \\ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1} & (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{W}^{(p)} & \hat{W}^{(p)} \\ -\hat{V}^{(p)} & \hat{V}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{I}_{(p)}^{(p+1)} = \begin{pmatrix} (i_+)^{(p+1)} & (i_-)^{(p+1)} \\ (i_-)^{(p+1)} & (i_+)^{(p+1)} \end{pmatrix}$$

wobei die Untermatrizen definiert sind als

$$(i_-)^{(p+1)} = \frac{1}{2} [(\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} - (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)}]$$

$$(i_+)^{(p+1)} = \frac{1}{2} [(\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)}]$$

vereinfacht sich dies zu

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \hat{I}_{(p)}^{(p+1)} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

### 3.2.2 Transfer-Matrix

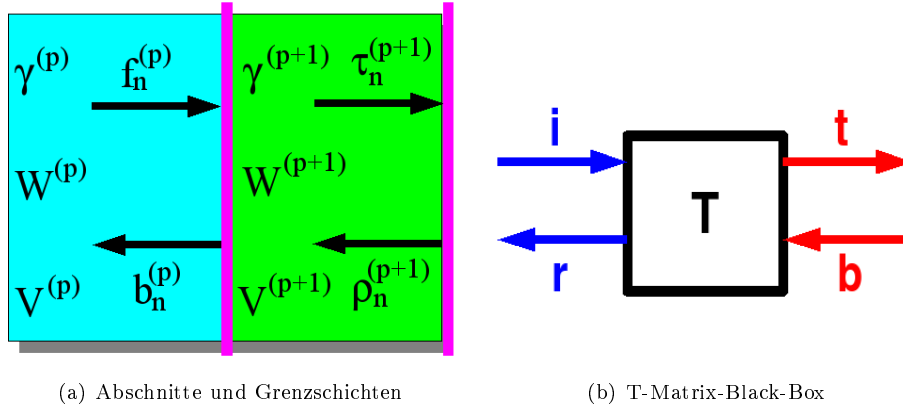


Abbildung 3.7: Skizzen zur T-Matrix: Auf der linken Seite sind die aus der Abschnittsanalyse bekannten Komponenten für die zwei betrachteten Abschnitte (p) und (p+1) dargestellt. Auf der rechten Seite ist eine schematische Darstellung der T-Matrix zu sehen. Die T-Matrix verbindet demnach die auf der linken Seite einlaufenden (i) bzw. auslaufenden (r) Moden mit den auf der rechten Seite einlaufenden (b) bzw. auslaufenden (t)

Die Propagation in Abschnitt  $(p + 1)$  wird, wie oben schon eingeführt, durch die Propagationsmatrix

$$\hat{X}^{(p+1)}(x) = \begin{pmatrix} \hat{X}_-^{(p+1)}(x) & 0 \\ 0 & \hat{X}_+^{(p+1)}(x) \end{pmatrix}$$

beschrieben. Durch diese Matrix kann eine Mode von der Grenzschicht bei  $x = 0$  zum Ende des homogenen Abschnittes  $(p + 1)$ , also zur nächsten Grenzschicht bei  $x = \Delta x$  transferiert werden. Die Koeffizienten berechnen sich damit aus

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \hat{X}^{(p+1)}(\Delta x) \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p+1)} \end{pmatrix}$$

Der Transfer der Koeffizienten von Abschnitt  $(p)$  zum Ende von Abschnitt  $(p + 1)$ , siehe Abb. 3.7, berechnet sich daher aus

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \hat{X}^{(p+1)}(\Delta x) \hat{I}_{(p)}^{(p+1)} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Um die Schreibweise zu vereinfachen wird die so genannte Transfermatrix eingeführt. Sie ist definiert als

$$\hat{T}_{(p)}^{(p+1)}(\Delta x) = \begin{pmatrix} \hat{t}_{bb}(\Delta x) & \hat{r}_{bf}(\Delta x) \\ \hat{r}_{fb}(\Delta x) & \hat{t}_{ff}(\Delta x) \end{pmatrix}$$

Die Untermatrizen berechnen sich aus

$$\begin{aligned} \hat{T}_{(p)}^{(p+1)}(\Delta x) &= \hat{X}^{(p+1)}(\Delta x) \hat{I}_{(p)}^{(p+1)} \\ \begin{pmatrix} \hat{t}_{bb}(\Delta x) & \hat{r}_{bf}(\Delta x) \\ \hat{r}_{fb}(\Delta x) & \hat{t}_{ff}(\Delta x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \hat{X}_-^{(p+1)}(\Delta x) & 0 \\ 0 & \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} (i_+)^{(p+1)}_{(p)} & (i_-)^{(p+1)}_{(p)} \\ (i_-)^{(p+1)}_{(p)} & (i_+)^{(p+1)}_{(p)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach dem Ausmultiplizieren der obigen Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{t}_{bb}(\Delta x) &= \hat{X}_-^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} [(\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)}] \\ \hat{t}_{ff}(\Delta x) &= \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} [(\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)}] \\ \hat{r}_{bf}(\Delta x) &= \hat{X}_-^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} [(\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} - (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)}] \\ \hat{r}_{fb}(\Delta x) &= \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} [(\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} - (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)}]. \end{aligned}$$

Die Transfermatrix-Gleichung lautet somit

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_{bb} & \hat{r}_{bf} \\ \hat{r}_{fb} & \hat{t}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$



## 3.2.3 S-Matrix

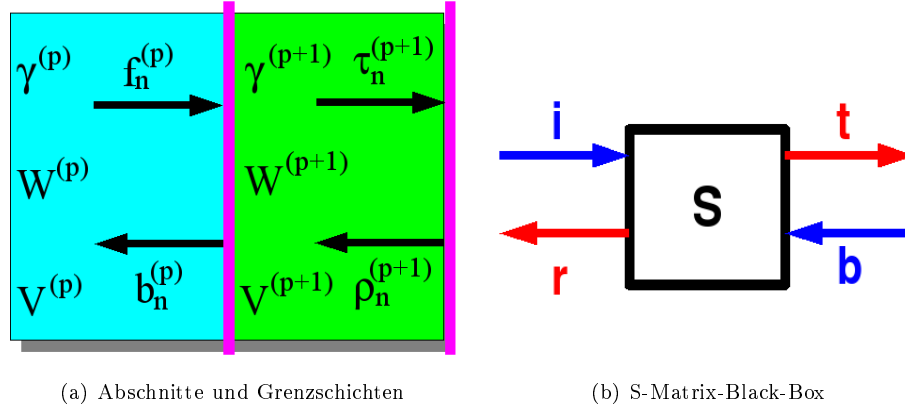


Abbildung 3.8: Skizzen zur S-Matrix: Auf der linken Seite sind die aus der Abschnittsanalyse bekannten Komponenten für die zwei betrachteten Abschnitte (p) und (p+1) dargestellt. Auf der rechten Seite ist eine schematische Darstellung der S-Matrix zu sehen. Die S-Matrix verbindet demnach die einlaufenden Moden (i) und (b) mit den auslaufenden Moden (r) und (t).

Die Transfer-Matrix verbindet die Koeffizienten des linken mit denen des rechten Abschnittes, siehe Abb. 3.7. Im Gegensatz dazu verknüpft die S-Matrix die Koeffizienten der einlaufenden mit denen der auslaufenden Moden, siehe Abb. 3.8. Der Vorteil der S-Matrix gegenüber der Transfer-Matrix (T-Matrix) macht sich bei der numerischen Berechnung von mehreren Abschnitten bemerkbar. Die S-Matrix ist dabei numerisch stabil, wohingegen die T-Matrix dies nicht uneingeschränkt ist. Im allgemeinen wird daher die S-Matrix der T-Matrix vorgezogen.

Die S-Matrix wird durch folgende Gleichung dargestellt:

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \hat{S}_{(p)}^{(p+1)} \begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_{(p)}^{(p+1)} = \begin{pmatrix} \hat{T}_{bb} & \hat{R}_{bf} \\ \hat{R}_{fb} & \hat{T}_{ff} \end{pmatrix}$$

Die Untermatrizen können aus der Transfermatrix berechnet werden. Dazu wird die Transfermatrix-Gleichung in die der S-Matrix umgeschrieben. Ausgehend von

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_{bb} & \hat{r}_{bf} \\ \hat{r}_{fb} & \hat{t}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_{bb}\vec{b}^{(p)} + \hat{r}_{bf}\vec{f}^{(p)} \\ \hat{r}_{fb}\vec{b}^{(p)} + \hat{t}_{ff}\vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

werden  $\vec{b}^{(p)}$  und  $\vec{\tau}^{(p+1)}$  auf die linke Seite gebracht und  $\vec{f}^{(p)}$  sowie  $\vec{\rho}^{(p+1)}$  auf die rechte

Seite.

$$\begin{pmatrix} -\hat{t}_{bb}\vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} - \hat{r}_{fb}\vec{b}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{bf}\vec{f}^{(p)} - \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \hat{t}_{ff}\vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\hat{t}_{bb} & \hat{0} \\ -\hat{r}_{fb} & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{1} & \hat{r}_{bf} \\ \hat{0} & \hat{t}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Dies wird nun nach  $\vec{b}^{(p)}$  und  $\vec{\tau}^{(p+1)}$  aufgelöst

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{t}_{bb} & \hat{0} \\ -\hat{r}_{fb} & \hat{1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\hat{1} & \hat{r}_{bf} \\ \hat{0} & \hat{t}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Die Inverse-Matrix in obiger Gleichung kann umgeschrieben werden und es folgt

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{t}_{bb}^{-1} & \hat{0} \\ -\hat{r}_{fb}\hat{t}_{bb}^{-1} & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\hat{1} & \hat{r}_{bf} \\ \hat{0} & \hat{t}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Aus multiplizieren der Matrizen ergibt die gesuchte S-Matrix

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{t}_{bb}^{-1} & -\hat{t}_{bb}^{-1}\hat{r}_{bf} \\ \hat{r}_{fb}\hat{t}_{bb}^{-1} & -\hat{r}_{fb}\hat{t}_{bb}^{-1}\hat{r}_{bf} + \hat{t}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{b}^{(p)} \\ \vec{\tau}^{(p+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{T}_{bb} & \hat{R}_{bf} \\ \hat{R}_{fb} & \hat{T}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}^{(p+1)} \\ \vec{f}^{(p)} \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich die Untermatrizen zu

$$\begin{aligned} \hat{T}_{bb} &= \hat{t}_{bb}^{-1} \\ \hat{R}_{bf} &= -\hat{t}_{bb}^{-1}\hat{r}_{bf} \\ \hat{R}_{fb} &= \hat{r}_{fb}\hat{t}_{bb}^{-1} \\ \hat{T}_{ff} &= -\hat{r}_{fb}\hat{t}_{bb}^{-1}\hat{r}_{bf} + \hat{t}_{ff} \end{aligned}$$

Dies kann nun durch die Eigenwerte und Eigenvektoren der einzelnen Schichten ausgedrückt werden, wobei  $(\hat{X}_-(x))^{-1} = \hat{X}_+(x)$  zu berücksichtigen ist:

$$\hat{T}_{bb} = 2 \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)} \right]^{-1} \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x)$$

$$\hat{R}_{bf} = \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)} \right]^{-1} \left[ (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)} - (\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} \right]$$

$$\hat{R}_{fb} = \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} - (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)} \right]$$

$$\left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1}\hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1}\hat{V}^{(p)} \right]^{-1} \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ff} = & -\hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} - (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)} \right] \\ & 2 \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)} \right]^{-1} \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \\ & \hat{X}_-^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} - (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)} \right] \\ & + \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \frac{1}{2} \left[ (\hat{W}^{(p+1)})^{-1} \hat{W}^{(p)} + (\hat{V}^{(p+1)})^{-1} \hat{V}^{(p)} \right] \end{aligned}$$

Die letzten beiden Untermatrizen lassen sich vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \hat{R}_{fb} = & \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \left[ (\hat{V}^{(p)})^{-1} \hat{V}^{(p+1)} + (\hat{W}^{(p)})^{-1} \hat{W}^{(p+1)} \right]^{-1} \\ & \left[ (\hat{V}^{(p)})^{-1} \hat{V}^{(p+1)} - (\hat{W}^{(p)})^{-1} \hat{W}^{(p+1)} \right] \hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \\ \hat{T}_{ff} = & 2\hat{X}_+^{(p+1)}(\Delta x) \left[ (\hat{V}^{(p)})^{-1} \hat{V}^{(p+1)} + (\hat{W}^{(p)})^{-1} \hat{W}^{(p+1)} \right]^{-1} \end{aligned}$$

### S-Matrix-Multiplikation

Um nun mit den S-Matrizen rechnen zu können, wird noch die S-Matrix-Multiplikation benötigt. Im Gegensatz zur Transfermatrix, welche einfach nach den Matrix-Regeln multipliziert wird, ist dies bei der S-Matrix etwas komplizierter. Im Folgenden wird daher die S-Matrix-Multiplikation hergeleitet. Dazu werden die Gleichung für das System(I)

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} = \hat{S}_{(p-1)}^{(p)} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{i} \end{pmatrix} = \hat{S}^{(I)} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{i} \end{pmatrix}$$

und für das System(II)

$$\begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{t} \end{pmatrix} = \hat{S}_{(p)}^{(p+1)} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} = \hat{S}^{(II)} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix}$$

verknüpft zu einer Gleichung für  $\hat{S}_{(p-1)}^{(p+1)} = \hat{S}_{(p-1)}^{(p)} \times \hat{S}_{(p)}^{(p+1)}$  mit

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{t} \end{pmatrix} = \hat{S}_{(p-1)}^{(p+1)} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{i} \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ \vec{i} \end{pmatrix}$$

Löst man die obigen Einzelgleichungen auf, so erhält man ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \hat{T}_{bb}^{(I)} \vec{\rho} + \hat{R}_{bf}^{(I)} \vec{i} \\ \vec{\tau} &= \hat{R}_{fb}^{(I)} \vec{\rho} + \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \\ \vec{\rho} &= \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{R}_{bf}^{(II)} \vec{\tau} \\ \vec{t} &= \hat{R}_{fb}^{(II)} \vec{z} + \hat{T}_{ff}^{(II)} \vec{\tau} \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem muss nun nach  $\vec{t}$  und  $\vec{r}$  aufgelöst und auf folgende Form gebracht werden

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \hat{T}_{bb} \vec{z} + \hat{R}_{bf} \vec{i} \\ \vec{t} &= \hat{R}_{fb} \vec{z} + \hat{T}_{ff} \vec{i}\end{aligned}$$

Dazu wird zunächst  $\vec{\rho}$  durch  $\vec{z}$  und  $\vec{i}$  ausgedrückt:

$$\begin{aligned}\vec{\rho} &= \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{R}_{bf}^{(II)} \left[ \hat{R}_{fb}^{(I)} \vec{\rho} + \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \right] \\ \vec{\rho} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \vec{\rho} &= \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \\ \vec{\rho} &= \left[ \hat{1} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \right]^{-1} \left[ \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \right]\end{aligned}$$

Nun kann  $\vec{\rho}$  in der Gleichung für  $\vec{r}$  ersetzt werden

$$\vec{r} = \hat{T}_{bb}^{(I)} \left( \left[ \hat{1} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \right]^{-1} \left[ \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \right] \right) + \hat{R}_{bf}^{(I)} \vec{i}$$

Sortieren nach  $\vec{z}$  und  $\vec{i}$  ergibt

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \left( \hat{T}_{bb}^{(I)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \right]^{-1} \hat{T}_{bb}^{(II)} \right) \vec{z} \quad + \\ &+ \left( \hat{T}_{bb}^{(I)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \right]^{-1} \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{T}_{ff}^{(I)} + \hat{R}_{bf}^{(I)} \right) \vec{i}\end{aligned}$$

Daraus können die Untermatrizen von  $\hat{S}$  abgelesen werden zu

$$\begin{aligned}\hat{T}_{bb} &= \left( \hat{T}_{bb}^{(I)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \right]^{-1} \hat{T}_{bb}^{(II)} \right) \\ \hat{R}_{bf} &= \left( \hat{T}_{bb}^{(I)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{R}_{fb}^{(I)} \right]^{-1} \hat{R}_{bf}^{(II)} \hat{T}_{ff}^{(I)} + \hat{R}_{bf}^{(I)} \right)\end{aligned}$$

Als nächstes ist  $\vec{r}$  in Abhängigkeit von  $\vec{z}$  und  $\vec{i}$  auszudrücken, indem  $\vec{\rho}$  eingesetzt wird

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \hat{R}_{fb}^{(I)} \left[ \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{R}_{bf}^{(II)} \vec{r} \right] + \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \\ \vec{r} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \vec{r} &= \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \\ \vec{r} &= \left[ \hat{1} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \right]^{-1} \left[ \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \right]\end{aligned}$$

Einsetzen von  $\vec{r}$  in die Gleichung für  $\vec{t}$

$$\vec{t} = \hat{R}_{fb}^{(II)} \vec{z} + \hat{T}_{ff}^{(II)} \left( \left[ \hat{1} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \right]^{-1} \left[ \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{T}_{bb}^{(II)} \vec{z} + \hat{T}_{ff}^{(I)} \vec{i} \right] \right)$$

Umformen und Sortieren nach  $\vec{z}$  und  $\vec{i}$  ergibt

$$\vec{t} = \left( \hat{R}_{fb}^{(II)} + \hat{T}_{ff}^{(II)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \right]^{-1} \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{T}_{bb}^{(II)} \right) \vec{z} + \left( \hat{T}_{ff}^{(II)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \right]^{-1} \hat{T}_{ff}^{(I)} \right) \vec{i}$$

Daraus können nun die noch fehlenden Untermatrizen von  $\hat{S}$  abgelesen werden zu

$$\hat{T}_{ff} = \left( \hat{T}_{ff}^{(II)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \right]^{-1} \hat{T}_{ff}^{(I)} \right)$$

$$\hat{R}_{fb} = \left( \hat{R}_{fb}^{(II)} + \hat{T}_{ff}^{(II)} \left[ \hat{1} - \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{R}_{bf}^{(II)} \right]^{-1} \hat{R}_{fb}^{(I)} \hat{T}_{bb}^{(II)} \right)$$

Damit ist die S-Matrix-Multiplikation vollständig. Die S-Matrix des Systems kann mit Hilfe der S-Matrix-Multiplikation aus den S-Matrizen der einzelnen Abschnitte erstellt werden. Um das Verfahren zu beschleunigen wird in einer rein periodischen Struktur zuerst die S-Matrix für eine Periode berechnet. Durch  $n$ -faches Multiplizieren mit sich selbst folgt die S-Matrix für die  $n$ -te Einheitszelle. Auf diese Weise werden die Abtastungen über die Einheitszellen erstellt, welche im Verlaufe dieser Arbeit präsentiert werden.

### 3.3 Bloch-Moden-Berechnung

In diesem Abschnitt werden zwei Berechnungsmethoden der Blochmoden hergeleitet. Die eine verwendet die T-Matrix, die andere die S-Matrix. Grundlage der beiden Methoden bildet die Zerlegung der Blochmode in eine Fourier-Reihe, wie es in Abschnitt 2.3 gezeigt wurde.

Die Blochmode besteht in der Basis der Fourier-Entwicklung aus vorwärts und rückwärts laufenden Komponenten und kann wie folgt dargestellt werden

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{f} \end{pmatrix}$$

Die Gitterperiodizität der Blochmode erlaubt bei einer Verschiebung um die Gitterkonstante  $L$  nur eine Änderung des Phasenfaktors. Dies wird mit Hilfe der Gleichung

$$\vec{B}(r) = \vec{B}(r + L) \exp[ikL]$$

dargestellt.

Durch die Transfermatrix  $\hat{T}$  für eine Gitterperiode(eine Einheitszelle), wird die Blochmode daher mit einer Phasenverschiebung auf sich selbst abgebildet. Die Transfermatrixgleichung lautet demnach

$$\exp[ikL] \vec{B} = \hat{T} \vec{B}.$$

Somit sind die Eigenwerte der Matrixgleichung gleich dem Exponentialfaktor. Um die propagierenden Moden herauszufinden, müssen die rein reellen  $k$ -Werte gefunden werden. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind dann die propagierenden Blochmoden. Numerisch bedeutet dies, dass die Werte mit dem geringsten Imaginärteil gesucht werden. In den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen liegt dieser im Bereich von  $< 10^{-10}$ , was als numerischer Fehler betrachtet werden kann.

Die Transfermatrix ist nicht uneingeschränkt stabil, siehe [56][57]. Daher wird im allgemeinen die S-Matrix verwendet. Die dahingehend umgeschriebene Gleichung lautet [56]

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_{bb} & \hat{0} \\ \hat{R}_{fb} & -\hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{f} \end{pmatrix} = \exp[ikL] \begin{pmatrix} \hat{1} & -\hat{R}_{bf} \\ \hat{0} & -\hat{T}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{f} \end{pmatrix}$$

Dieses generalisierte Eigenwertproblem kann mit Hilfe der numerischen Routinen einfach gelöst werden. Die Suche nach Lösungen mit rein reellen  $k$ -Werten liefert auch hier die propagierenden Blochmoden.

Im Zuge dieser Arbeit sind beide Methoden implementiert worden. Es zeigte sich im Verlaufe einiger Testrechnungen, dass die Transfermatrix für die betrachteten Systeme stabil ist. Dies liegt daran, dass die Transfermatrix nur für eine Einheitszelle aufgestellt werden muss, um die Bandstruktur zu berechnen. Die Instabilität dieser Methode macht sich erst bei Behandlung mehrerer Einheitszellen bemerkbar. Daher wurde die T-Matrix Methode benutzt um die in der Arbeit gezeigten Bandstrukturen zu berechnen. Für die Berechnung der Transmission bzw. Reflektion durch längere und insbesondere ungeordnete Photonische Kristalle konnte die T-Matrix nicht verwendet werden. Bei diesen Berechnungen wurde demnach auf die S-Matrix zurückgegriffen.

Zur Berechnung der Bandstruktur wird die Transfermatrix  $\hat{T}$  der Einheitszelle für verschiedene Frequenzen aufgestellt und das Eigenwertproblem gelöst. Die dimensionslose Frequenz  $\omega a/2\pi c$  wird dann im Bandstrukturgraph über dem dazugehörigen reellen  $ka$ -Wert aufgetragen, wobei  $a$  die Einheitszellenlänge ist.

## 3.4 Konvergenzbetrachtungen

In diesem Unterkapitel werden zwei wählbare Parameter des im Verlaufe dieser Arbeit implementierten Programms diskutiert. Aus der Zerlegung des zu betrachtenden Systems in homogenen Abschnitte, siehe Abschnitt 3.1.2, geht hervor, dass eine Fourier-Entwicklung der  $y$ -Komponente der Felder möglich ist. In der numerischen Berechnung wird sich die dadurch entstandene Summe auf  $N$  Komponenten beschränken. Im folgenden wird  $N$  als Anzahl der verwendeten Fourier-Komponenten bezeichnet und stellt den ersten hier genauer betrachteten Parameter da.

Als zweiten Parameter wird die Anzahl der Einheitszellen, im Folgenden mit  $Z$  bezeichnet, untersucht werden. Im Gegensatz zu den Fourier-Komponenten, welche rein mathematischen Ursprungs sind, zeigt die Anzahl der Einheitszellen einen physikalisch greifbaren Effekt auf. Die Bandstruktur und damit die Ausbildung von Blochmoden in einem Photonischen Kristall beruht auf der Annahme der unendlichen Periodizität. In

### 3 Rigorous Coupled Wave Analysis (RCWA)

der Realität sind die betrachteten Kristalle jedoch endlich. Daher stellt sich die Frage, ob es überhaupt möglich ist in einem endlichen System eine Bandlücke und damit auch Blochmoden auszubilden und wenn ja, wieviele Einheitszellen dazu nötig sind. Da die Bandstruktur nur für das unendlichen Systems berechnet werden kann, wird in endlichen Systeme die Transmission betrachtet. Die Bandlücke zeigt sich dabei durch ein scharfes Abfallen der Transmission auf Null.

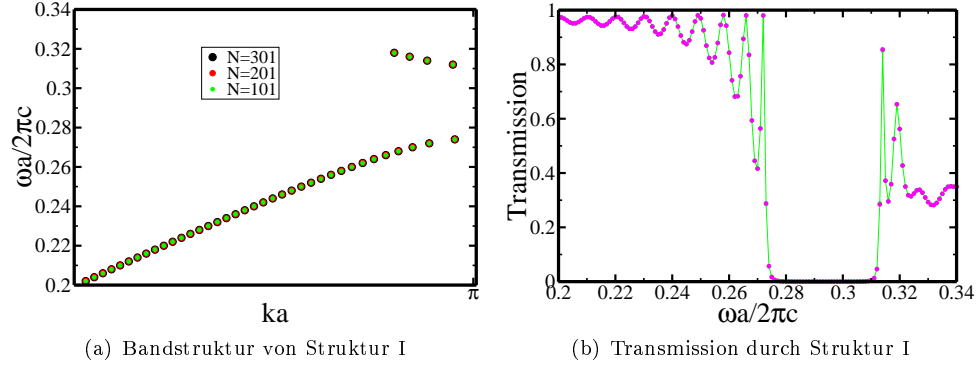


Abbildung 3.9: Konvergenzbetrachtung für Struktur I, siehe Kapitel 4.3, mit  $n_{\text{guide}} = 2.17$ ,  $n_{\text{sub}} = 1.43$ ,  $n_{\text{super}} = 1$ ,  $d = 106,55\text{nm}$ : a) Berechnungen der Bandstruktur für  $N$  Fourier Koeffizienten;  $N = 301$  (schwarz),  $N = 201$  (rot) und  $N = 101$  (grün). b) Berechnungen der Transmission über der dimensionslosen Frequenz für  $N$  Fourier Koeffizienten bei  $Z = 25$  Einheitszellen;  $N = 101$  (magenta) und  $N = 201$  (grün). In den Graphen ist zu erkennen, dass  $N = 101$  Fourier Koeffizienten genügen, um eine gute Konvergenz der Bandstruktur und Transmission zu erhalten.

Nach diesen Vorüberlegungen wird zunächst die Bandstruktur eines unendlichen Systems betrachtet. In Abb. 3.9 ist diese für Struktur I, in Kapitel 4.3, mit  $N = 101$  und  $N = 201$  sowie  $N = 301$  Fourier-Komponenten dargestellt. Bei der Berechnung der Bandstruktur entfällt der Parameter der Anzahl der Einheitszellen, da nur die T-Matrix für eine Einheitszelle benötigt wird. Die Konvergenz in Bezug auf die nötigen Fourier-Komponenten kann folglich direkt überprüft werden. Anhand des in Abb. 3.9 dargestellten Graphen ist eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Kurven zu erkennen. Daher kann von einer Konvergenz der Bandstruktur mit  $N = 101$  Fourier-Komponenten ausgegangen werden.

Im nächsten Schritt wird das Transmissionsverhalten eines  $Z = 25$  Einheitszellen langen Photonischen Kristalls bei verschiedenen Frequenzen betrachtet. Die Anzahl der Einheitszellen wurde aufgrund der oben aufgeführten Annahme, dass zwanzig Einheitszellen ausreichen um eine Bandstruktur und die damit einhergehenden Effekte auszubilden, angenommen. In Abb. 3.9 ist die Transmission über die dimensionslose Frequenz für  $N = 101$  und  $N = 201$  Fourier-Komponenten dargestellt. Es ist auch in diesem Graphen eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Berechnungen zu er-

kennen. Somit kann auch bei Transmissionsrechnungen von minimal  $Z = 101$  nötigen Fourier-Komponenten ausgegangen werden.

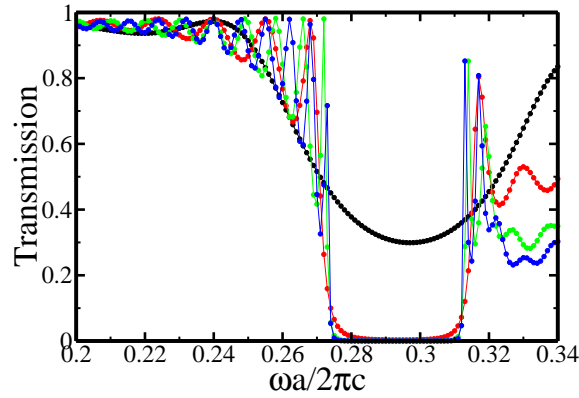


Abbildung 3.10: Konvergenzbetrachtung für Struktur I, siehe Kapitel 4.3: Berechnung der Transmission für  $Z = 5$  (schwarz), 15 (rot), 25 (grün) und 30 (blau) bei  $N = 101$ . Es ist deutlich zu erkennen, dass mindestens  $Z = 15$  Einheitszellen notwendig sind, um die im unendlichen System erwartete Bandlücke (Transmission fällt auf Null) auszubilden.

Nachdem die zur Berechnung benötigten Fourier-Komponenten geklärt sind, kann die Frage nach dem Effekt der Anzahl der Einheitszellen angegangen werden. Dazu wird die Transmission durch Struktur I über die dimensionslose Frequenz aufgetragen. Diesmal bleibt die Anzahl der Fourier-Komponenten jedoch bei  $N = 101$ , während die Anzahl der Einheitszellen variiert. In Abb. 3.10 ist dies für  $Z = 5$ ,  $Z = 15$ ,  $Z = 25$  und  $Z = 30$  Einheitszellen dargestellt. In dem Graphen ist schon bei  $Z = 5$  Einheitszellen ein deutlicher Abfall in der Transmission zu erkennen. Die Transmission der Moden wird jedoch nicht vollständig verhindert. Dies lässt darauf schließen, dass es zu einem Analogon des aus der Quantenmechanik bekannten Tunneffekts [30] kommt. Die Anzahl der Einheitszellen reicht also nicht aus, um eine vollständige Bandlücke auszubilden. Es stellt sich anhand des Graphen heraus, dass die Bandlücke zwischen  $Z = 15$  und  $Z = 25$  Einheitszellen richtig ausgebildet wird und daher die Transmission scharf auf Null abfällt.





## 4 Idealer Photonischer Kristall

In diesem Kapitel werden die idealen, also nicht gestörten, Photonische Kristalle untersucht. Zunächst wird der Effekt der Ätztiefe betrachtet, worauf die Fabry-Perot-Oszillationen in endlichen Kristallen vorgestellt werden. Dann werden die drei in dieser Arbeit verwendeten Systeme untersucht. Dazu wird die Bandstruktur berechnet und das Transmissionsverhalten für ausgewählte Frequenzen, die Bandkanten, ausgewertet. Darauf werden einseitig unendliche Photonische Kristalle durch effektiven Spiegelmethode beschrieben. Zum Abschluss wird die Transmission durch den idealen Photonischen Kristall mit Hilfe der effektiven Spiegelmethode berechnet und mit den zuvor aufgezeigten Daten verglichen. Darauf folgt eine Parameteranalyse für die effektive Spiegelmethode.

### 4.1 Blochmodenausbildung in abhängigheit der Ätztiefe

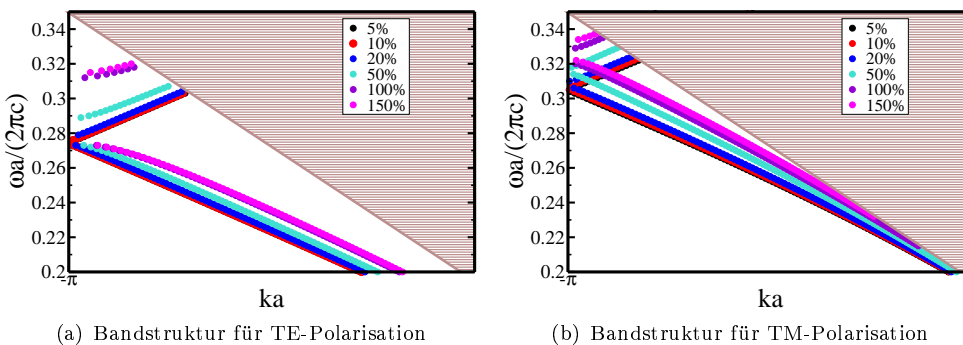


Abbildung 4.1: Gegenüberstellung des Einfluss der Ätztiefe auf die Bandstruktur für (a) TE-Polarisation und (b) TM-Polarisation. Die Brechungsindices, Ätztiefe und Einheitszellenlänge sind in Tabelle 4.1 aufgeführt. Die Ätztiefen sind in den Graphen in Prozent bezüglich der Höhe der Wellenleiterschicht angegeben. Es ist zu erkennen, dass die Krümmung der Bänder mit der Ätztiefe zunimmt. Ferner wird die Bandlücke mit der Ätztiefe größer. Die braun linierte Fläche stellt den Lichtkegel des Substrates dar. Moden, welche sich innerhalb dieser Fläche befinden werden nicht in der Wellenleiterschicht geführt und sind folglich nicht eingezeichnet.

Der Übergang vom Wellenleiter zum Photonischen Kristall wird durch die periodischen Ätzungen bewerkstelligt. Die Tiefe der Ätzungen bestimmt die Differenz der Brechungsindizes und folglich die Stärke der Bragg-Reflexion. Die Form der Bandstruktur wird daher durch die Ätztiefe bestimmt. Diese ist in Abb. 4.1 für die in dieser Arbeit betrachteten Wellenleiterstruktur, siehe Tabelle 4.1, in TE- und TM-Polarisation dargestellt. Man erkennt, dass sich bei der TE-Polarisation die untere Bandkante fast nicht verschiebt. Die obere Bandkante hingegen verschiebt sich mit steigender Ätztiefe zu höheren Frequenzen. Dies hat eine Verbreiterung der Bandlücke zur Folge, siehe Abb. 4.2.

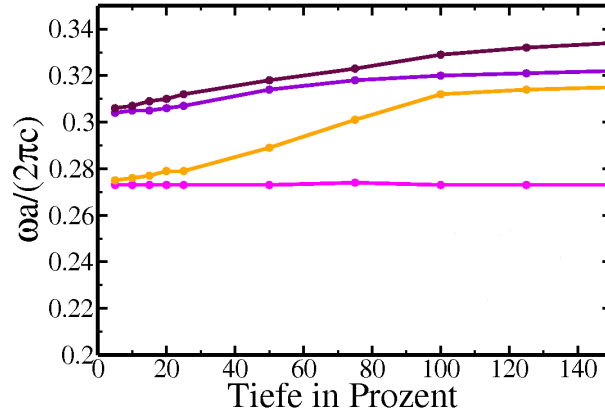


Abbildung 4.2: Verlauf der Bandkanten über der Ätztiefe in Prozent, mit  $n_{\text{guide}} = 2.17$ ,  $n_{\text{sub}} = 1.43$ ,  $n_{\text{super}} = 1$ ,  $d = 106,55\text{nm}$ . Die erste Bandkante (magenta) der TE-Polarisation weist einen nahezu konstanten Verlauf auf. Die zweite Bandkante (orange) in TE-Polarisation steigt ab einer Ätztiefe von 30% bis 100% deutlich an, wodurch die Bandlücke verbreitert wird. Der abflachende Verlauf ab 100% Ätztiefe zeigt, dass die Intensität der Mode im Wellenleiter zentriert ist und schnell innerhalb des Substrats abfällt. Bei der TM-Polarisation ist dieses Verhalten für beide Bandkanten zu beobachten. Die erste Bandkante (violett) und zweite Bandkante (braun) in TM-Polarisation weisen beide einen sichtbaren Anstieg auf. Dennoch kommt es zu einer leichten Vergrößerung der Bandlücke, da das zweite Band etwas stärker ansteigt.

Bei der TM-Polarisation tritt ebenfalls eine Verbreiterung der Bandlücke auf. Diese Verbreiterung kommt durch das stärkere Ansteigen der zweiten Bandkante im Vergleich zur ersten zustande. In Abb. 4.2 ist der Verlauf der Bandlücke der TM-Polarisation ebenfalls eingezeichnet. Die Bandstruktur der TM-Polarisation ist in Abb. 4.1 der TE-Polarisation für verschiedene Ätztiefen gegenübergestellt. Die Lichtkegel sind in den Graphen durch eine braun schraffierte Fläche dargestellt. Frequenzen innerhalb des schraffierten Bereiches strahlen in das Substrat ab und werden folglich nicht mehr in der Wellenleiterschicht geführt.

Ein weiterer in den Bandstrukturen erkennbarer Effekt ist die Krümmung der Bänder. Diese nimmt ebenfalls mit zunehmender Ätztiefe zu. Bei einer Ätztiefe bis zu 20% ist der Verlauf der Bandstruktur in TE-Polarisation bis zur unmittelbaren Nähe zur Bandkante linear. Ab einer Ätztiefe von 50% ist die Krümmung vor allem im zweiten Band deutlich zu erkennen. Zu erklären ist das Verhalten dadurch, dass sich die Bänder aufgrund der Symmetrieaufspaltung der Moden stärker abstoßen [22] [29] [32], wodurch sich die Bandlücke vergrößert und damit einer stärkere Krümmung der Bänder einhergeht. Durch die Krümmung der Bänder kommt es zu einem abflachen der Gruppengeschwindigkeit, da diese die Ableitung der Bandstruktur darstellt, siehe [29] [58]. Folglich hat man bei stark gekrümmten Bändern einen großen Bereich von sehr unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten, was seine Anwendung im sogenannten Superprisma findet [59].

Der Übergang der Wellenleitermode zur Blochmode für verschiedene Ätztiefen ist in Abb. 4.3 für die TE-Polarisation aufgezeigt. Hierzu wurde zwei Vertiefungen in die Wellenleiterstruktur geätzt und die Intensität des transversalen Feldes, also  $|H_z(x, y)|^2$  berechnet. Um eine richtige Ausformung der Blochmode zu erhalten sind mehr Vertiefungen notwendig, für die hier angestrebte prinzipielle Darstellung der auftretenden Effekte genügt die Betrachtung jedoch. Später wird die Ausbildung der Blochmoden in endlichen Kristallen ausführlicher behandelt. Hier soll es zunächst um den Einfluss der Ätztiefe gehen.

Die in Abb. 4.3 berechneten Intensitätsgraphen sind für die Frequenz an der jeweils ersten Bandkante, also für ein nahezu festen Wellenvektor von  $k \approx \pi/a$  bei den Ätztiefen von 5%, 10% 20%, 50%, 100% und 150% berechnet worden. Bis zu 5% ist kaum eine Änderung im Intensitätsverlauf der Wellenleitermode zu erkennen. Bei 10% ist eine leichte Änderung des in Propagationsrichtung homogenen Verlaufes des Intensitätsmaxima zu beobachten. Bei 20% kommt noch ein leichtes Abtauchen der Moden hinzu, welches bei 50% noch deutlicher wird. Dieser Effekt wird später noch einmal aufgegriffen werden, da er für ein sehr interessantes Verhalten bei Unordnung sorgt. Mit zunehmender Ätztiefe wird auch das Abtauchen unterbunden und die Intensitätsmaxima werden voneinander getrennt. Die Intensitätsmaxima liegen dabei in den Wellenleiterschichten, wie es für Frequenzen im ersten Band erwartet wird. Der Abfall der Intensität mit der Länge liegt daran, dass sich die Blochmode aufgrund der fehlenden Rückkopplung bei nur zwei Vertiefungen nicht ganz ausbilden kann.

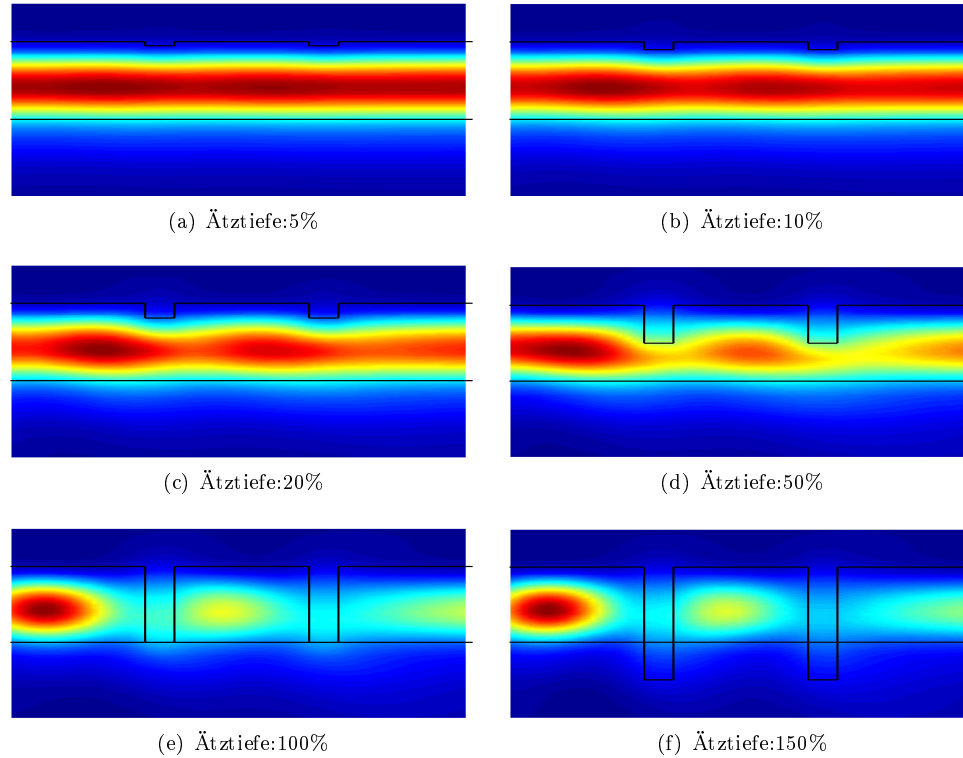


Abbildung 4.3: Feldintensität für verschiedene Ätztiefen an der 1.Bandkante in TM-Polarisation. Rot entspricht hoher, dunkelblau niedriger Intensität. Bei geringen Ätztiefen ist nur eine leichte Verformung der Wellenleitermode zu erkennen. Bei einer Ätztiefe von 20% kommt es zur Ausbildung der für die Blochmoden charakteristischen Intensitätsmaximas, welche allerdings noch zusammenhängen. Bei einer Ätztiefe von 100% sind diese Maximas voneinander getrennt und die Blochmoden ausgeformt.

## 4.2 Fabry-Perot-Oszillationen und Feldintensität im Photonischen Kristall

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Abhängigkeit der Blochmodenausbildung von der Ätztiefe betrachtet wurde, wird hier die Abhängigkeit von der Länge genauer untersucht.

Durch die endliche Struktur des Photonischen Kristalls kommt es zu sogenannten Fabry-Perot-Oszillationen in der Transmission. Diese Oszillationen entstehen durch die Reflektionen am Übergang von Photonischem Kristall zu Wellenleiter. Innerhalb des Kristalls kommt es zu Überlagerungen der reflektierten Moden welche für bestimmte Kristalllängen eine resonante Rückstreuung oder Transmission ermöglichen. Das resultierende Modenprofil innerhalb des Kristalls kann durch eine gitterperiodische Mode als Trägerwelle und eine Einhüllende beschrieben werden, siehe [60]. Dies ist mit Hilfe der Berechnungen der Feldintensitäten in TE-Polarisation über einen endlichen Kristall bei einem Fabry-Perot-Maximum, siehe Abb. 4.2, und einem Fabry-Perot-Minimum, siehe Abb. 4.2, bildlich dargestellt.

### Mathematische Beschreibung:

Die im unendlichen Photonischen Kristall propagierenden Moden sind die Blochmoden. Bei einem endlichen Kristall kommt es aufgrund der Reflektion an den Enden zu einer Überlagerung von vorwärts und rückwärts laufenden Moden:

$$F(x) = \exp[ikx]U(x) + b \exp[-ikx]U(x)$$

Dabei bilden die Exponentialfunktion mit positivem Exponenten und die gitterperiodische Funktion  $U(x)$  die vorwärtslaufende Blochmode. Der zweite Summand entspricht demnach der rückwärts laufenden Mode, wobei die Amplitude durch den Vorfaktor  $b$  bestimmt wird. Dieser gibt sozusagen die Reflektion zurück in den Kristall an, welcher durch die effektive Spiegel-Methode berechnet werden kann.

Das Intensitätsprofil wird durch das Betragsquadrat dieser Überlagerung gebildet.

$$\begin{aligned} |F(x)|^2 &= |\exp[ikx]U(x) + b \exp[-ikx]U(x)|^2 \\ I^2 &= |U(x)|^2(1 + |b|^2) + b \exp[-2ikx]|U(x)|^2 + b^* \exp[2ikx]|U(x)|^2 \end{aligned}$$

Dadurch folgen drei Terme, der erste Term ist gitterperiodisch. Die anderen beiden Terme sind komplex konjugiert zueinander und stellen eine Überlagerung der Gitterperiodischen Funktion mit einer Einhüllenden dar. Die Propagationsvektoren der letzten beiden Terme ergeben sich durch eine Fourier-Entwicklung der gitterperiodischen Funktion

$$|U(x)|^2 \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \exp[iG_n x],$$

wobei  $G_n = 2\pi n/a$  ist und  $a$  für die Gitterperiode steht, folgendermassen:

$$\kappa_n = G_n \pm 2k.$$

Das negative Vorzeichen entspricht dem zweiten, das positive dem dritten Term.

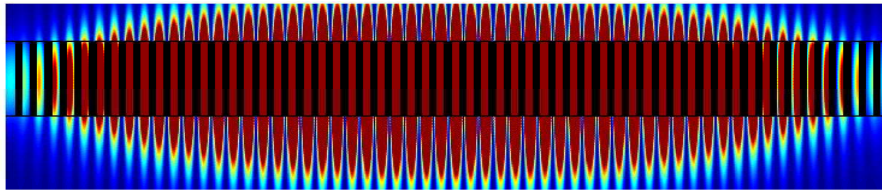
Bei einer Frequenz innerhalb eines Bandes dominiert ein einziger Gittervektor, siehe [35]. Somit können alle  $\kappa_n$  bis auf ein bestimmtes  $n = m$  vernachlässigt werden. Dabei entspricht  $m$  der Zahl des jeweiligen Bandes. Das Vorzeichen wird durch die Propagationsrichtung der Mode festgelegt. Für eine vorwärts laufende Mode ist  $m$  positiv für eine rückwärts laufende negativ. Damit ist es möglich die Periode der Einhüllenden zu berechnen bzw. aus einer Messung der Felder auf den Wellenvektor der Blochmode zu schliessen und so eine Bandstruktur zu erstellen.

#### **Anschauliche Interpretation:**

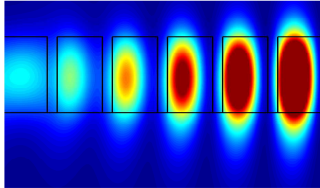
Beträgt die Länge des Kristalls gerade die Länge der Fabry-Perot-Oszillation, was der Periodenlänge der Einhüllenden entspricht, so ist ein deutliches Anwachsen der Feldintensität in der Mitte des Photonischen Kristalls zu erkennen, siehe Abb. 4.2. Ferner sind die Intensitätsmaxima der Blochmoden zu erkennen, welche die Periodenlänge des Kristalls aufweisen. Die Intensitätsmaxima der Blochmoden sind für Frequenzen an der ersten Bandkante im Wellenleitermaterial zentriert, für Frequenzen an der zweiten Bandkante sind diese in den Ätzungen zentriert. An den Enden des Kristalls ist eine leichte Verschiebung dieser Intensitätsmaxima zu erkennen. Dies lässt darauf schliessen, dass die Umwandlung der Wellenleitermode in die im Kristall propagierende Blochmode noch nicht gänzlich vollzogen ist. Eine anschauliche Interpretation ist die folgende. Beträgt die Länge des Photonischen Kristalls gerade eine ganzzahlige Vielfache der Fabry-Perot-Oszillation, so ist die Transmission durch denselben maximal und die Reflektion minimal. Dadurch wird wenig in den Wellenleiter zurückgestreut. Die Transformation der Wellenleitermode muss daher innerhalb des Kristalls geschehen. Dies wird durch die vorwärts und rückwärts laufende Blochmoden gewährleistet. Die Resonanz der Überlagerung und damit das Maximum der Einhüllenden liegt bei einer Kristalllänge von einer Fabry-Perot-Oszillation in der Mitte des Kristalls. Bei mehrfachen Vielfachen der Länge der Fabry-Perot-Oszillation, sind dementsprechend mehrere Intensitätsmaxima der Einhüllenden zu erkennen.

Anders sieht es in einem Kristall mit der halben Wellenlänge der Fabry-Perot-Oszillation aus. Dort ist die Transmission minimal, die Reflektion jedoch maximal. Dadurch kann die Umformung der Wellenleitermode schon teilweise im Wellenleiter selbst geschehen. Die Einkopplung ist daher maximal, jedoch wesentlich geringer als im vorherigen Fall, da ja viel mehr in den Kristall zurückgestreut wird. Am Ende des Kristalls folgt dann wiederum die Umwandlung in die Wellenleitermode, was zu einer Verschiebung der Intensitätsmaxima und eine damit einhergehende Abnahme der Feldintensität führt.

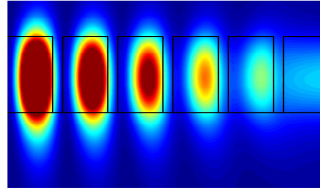
Die in den beiden letzten Abschnitten dargelegten Betrachtung sollen einen kurzen Einblick in die Eigenschaften eines endlichen idealen Photonischen Kristalls geben. In den folgenden Abschnitten werden drei sich in der Ätztiefe unterschiedenden Strukturen in Bezug auf ihre Eigenschaften genauer diskutiert und verglichen werden.



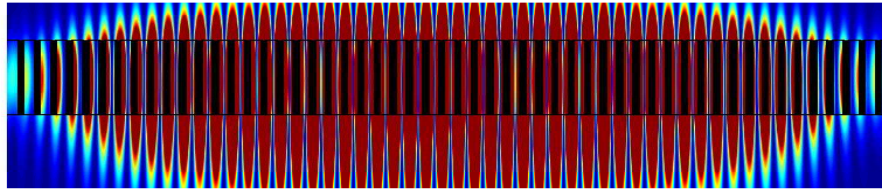
(a) Feld des gesamten Kristalls für eine Frequenz an der ersten Bandkante



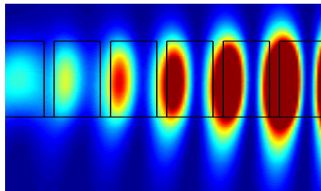
(b) Einkoppelvorgang



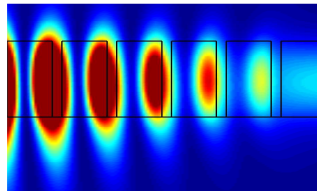
(c) Auskoppelvorgang



(d) Feld des gesamten Kristalls für eine Frequenz an der zweiten Bandkante



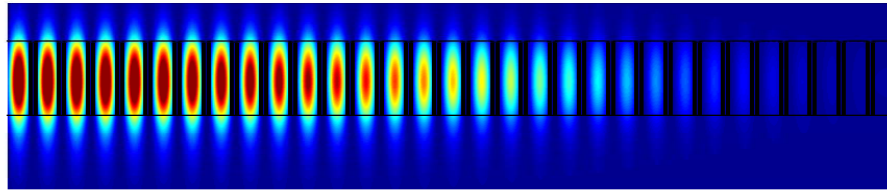
(e) Einkoppelvorgang



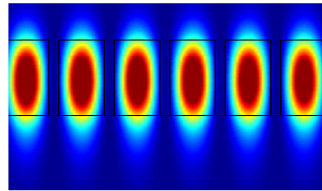
(f) Auskoppelvorgang

Abbildung 4.4: Feldintensität an einem Fabry-Perot-Maximum berechnet für Struktur I an der ersten (a)-(c) und zweiten (d)-(f) Bandkante in TE-Polarisation. Im Graphen über die gesamte Kristalllänge ist das Maximum der Einhüllenden in der Mitte des Kristalls deutlich zu erkennen. Die Graphen zur Ein- und Auskopplung verdeutlichen die Verschiebung der Blochmodenmaxima, welche auf die Transformation der Wellenleiter in die Blochmode beim Einkoppeln bzw. umgekehrt beim Auskoppeln schließen lassen.

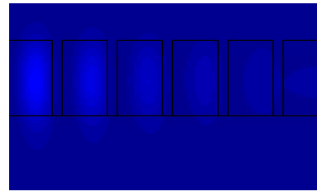




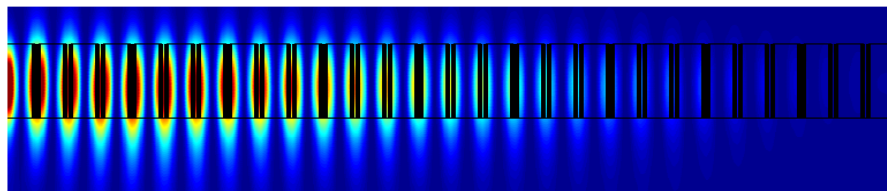
(a) Feld des gesamten Kristalls für eine Frequenz an der ersten Bandkante



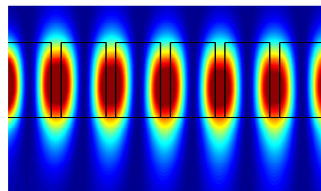
(b) Einkoppelvorgang



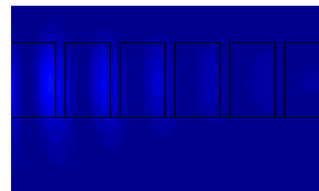
(c) Auskoppelvorgang



(d) Feld des gesamten Kristalls für eine Frequenz an der zweiten Bandkante



(e) Einkoppelvorgang

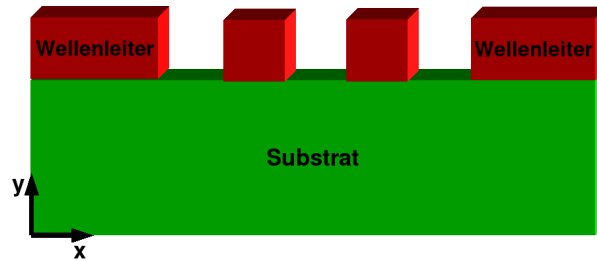


(f) Auskoppelvorgang

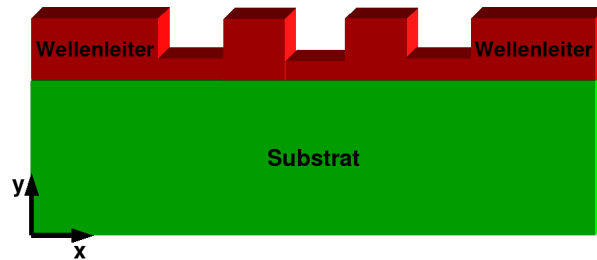
Abbildung 4.5: Feldintensität an einem Fabry-Perot-Minimum berechnet für Struktur I an der ersten (a)-(c) und zweiten (d)-(f) Bandkante in TE-Polarisation. Im Graphen über die gesamte Kristalllänge ist das Maximum der Einhüllenden am Anfang des Kristalls, dem Einkoppelbereich, deutlich zu erkennen. Die Graphen zur Einkopplung verdeutlichen, dass dort die Blochmoden vollständig ausgebildet sind. Für eine Frequenz an der ersten Bandkante ist das Intensitätsmaxima der Blochmode im Wellenleitermaterial, an der zweiten Bandkante in den Ätzungen zu finden. Die Einkopplung ist daher optimal und die Wellenleitermode schon im Wellenleiter an die Blochmode angeglichen worden. Bei der Auskopplung kommt es zum Verschieben der Blochmodenmaxima, was auf eine Modentransformation innerhalb des Kristalls schließen lässt.

### 4.3 Transmissionsberechnung mit Hilfe der S-Matrix-Methode

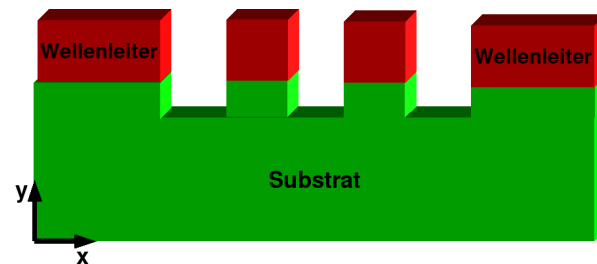
Mit der in Kapitel 3 dargestellten S-Matrix-Methode und dem dazu entwickelten Programm werden im Zuge des BMBF-Projektes PCOC (Photonic Crystal Integrated Circuits) drei Strukturen untersucht, siehe Abb. 4.6. Die Basis der drei Strukturen bildet ein eindimensionaler dreischichtiger Wellenleiter. Die Wellenleiterschicht ist Tantalpentoxid. Siliziumdioxid dient als Substrat, wohingegen Luft als Superstrat angenommen wird.



(a) Struktur I



(b) Struktur II



(c) Struktur III

Abbildung 4.6: Skizzen der drei in dieser Arbeit betrachteten Strukturen. Sie bestehen aus einem Substrat, auf dem sich die Wellenleiterschicht befindet. Oberhalb dieser ist Luft. Der Unterschied der drei Strukturen liegt in der jeweiligen Ätztiefe.

Der darin eingebettete Photonische Kristall besteht aus periodisch angeordneten rechteckig geätzten Kanälen, welche orthogonal zur Ausbreitungsrichtung der einlaufenden Wellenleitermode verlaufen. Die drei betrachteten Strukturen unterscheiden sich in den jeweiligen Ätztiefen. Die Parameter der einzelnen Strukturen sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

Beschreibung	Variable	Wert
Brechungsindex des Wellenleiters	$n_{\text{guide}}$	2.17
Brechungsindex des Substrates	$n_{\text{sub}}$	1,43
Brechungsindex des Superstrates (Luft)	$n_{\text{super}}$	1
Höhe des Wellenleiters	$h_{\text{guide}}$	500nm
Einheitszellenlänge	$a$	595nm
Ätzbreite	$d$	106,55nm
Ätztiefe von Struktur I	$h_1^{(I)}$	500nm
Ätztiefe von Struktur II	$h_1^{(II)}$	202,5nm
Ätztiefe von Struktur III	$h_1^{(III)}$	750nm

Tabelle 4.1: Tabelle der zur Berechnung benutzten Daten

Das so entstandene System entspricht der Kopplung eines Wellenleiters an einen eindimensionalen Photonischen Kristall mit endlicher Höhe. Es wird daher auch als quasi-eindimensionales System bezeichnet. Da der Aufbau des Programms Streuungen aus der Wellenleiterebene zulässt und diese durch die PML absorbiert werden, können Transmissionsberechnungen mit Verlust durchgeführt werden. Durch diese Betrachtungen sollen daher die Ein- und Auskoppelverluste eines idealen, also ungestörten, Photonischen Kristalls betrachtet werden. Ferner wird die Einkoppellänge bzw. Auskoppellänge in einen einseitig unendlichen Kristall betrachtet werden. Die einseitig unendlichen Betrachtungen liefern dann die Koeffizienten für die effektive Spiegelmethode. Später werden die Betrachtungen dann auf gestörte Kristalle ausgeweitet und die dadurch entstehenden Effekte charakterisiert. Zunächst werden jedoch die betrachteten Systeme genauer vorgestellt und analysiert.

### 4.3.1 Bandstruktur und Transmission

Die Bandstruktur ist die erste Untersuchung, welche bei der Betrachtung eines Photonischen Kristalls durchgeführt wird. Wie in den Grundlagen aufgezeigt wurde, sind in der Bandstruktur die wichtigsten Eigenschaften wie z.B. die Bandlücken enthalten.

Auf der experimentellen Seite werden zudem Transmissionsmessungen bei verschiedenen Frequenzen durchgeführt. Die Bandlücke zeigt sich bei diesen Messungen darin, dass die Transmission rapide abfällt [13] [61]. Ferner steigen beim Überschreiten des Lichtkegels die Streuverluste [13] [61].

Im Folgenden wird die Bandstruktur für das jeweilige System in den beiden Polarisierungen aufgezeigt. Die erste Polarisation wird mit TE (transversal elektrisch) bezeichnet, das E-Feld hat hierbei nur eine Komponente in z-Richtung. Die zweite mit

TM (transversal magnetisch), das H-Feld besitzt nur eine Komponente in z-Richtung. Demgegenüber werden die Transmissionsberechnungen durch die S-Matrix-Methode gestellt.

In Abb. 4.7 ist der Vergleich zwischen der Bandstruktur, linke Seite und der Transmissionsberechnung, rechte Seite für Struktur I gezeigt. Die Gegenüberstellung für Struktur II und III sind in Abb. 4.8 und Abb. 4.9 zu finden. Die Bandstruktur wird auf der linken Seite durch die grünen Punkte dargestellt. Ferner ist der Lichtkegel des Substrates durch die grau linierte Fläche eingezeichnet. Moden, die sich innerhalb des Lichtkegels befinden, werden nicht in der Wellenleiterschicht geführt. Sie werden daher als verlustbehaftete Moden bezeichnet und in der Bandstruktur nicht eingezeichnet. Drei markante Punkte der Bandstruktur werden durch gestrichelte Linien hervorgehoben. Die violett gestrichelte Linie entspricht der ersten Bandkante, die dunkel braune der zweiten Bandkante und die orangene dem Schnittpunkt der Bandstruktur mit dem Lichtkegel. Auf der rechten Seite ist die dimensionslose Frequenz  $\omega a/2\pi c$  über der Transmission  $T$  bzw. dem Verlust  $L = 1 - T - R$  aufgetragen. Für die Berechnung der Transmission wurde ein Photonischer Kristall mit zwanzig Einheitszellen zugrunde gelegt. Dies reicht, wie in Abschnitt 3.4 gezeigt wurde, aus um eine Bandlücke auszubilden. In den Gegenüberstellungen der Graphen der Bandstruktur und Transmission zeigen sich die zuvor beschriebenen Effekte. Die Transmission fällt in der Bandlücke, also zwischen der ersten und zweiten Bandkante, stark ab und der Verlust steigt beim Überschreiten des Lichtkegels an. Ferner sind Oszillationen der Transmission zu sehen, welche ihren Ursprung in den endlichen Abmessungen des Kristalls haben und als Fabry-Perot-Oszillationen bezeichnet werden. Die Anzahl der Oszillationen ist dabei von der Anzahl der Einheitszellen des betrachteten Kristalls abhängig. In Abschnitt 4.2 wurde die Entstehung dieser Oszillationen skizziert eine ausführliche Darstellung der Entstehung ist in [26] oder [62] zu finden.

Ein Vergleich der verschiedenen Strukturen zeigt, dass die Bandstrukturen von Struktur I und Struktur III sowohl in der TE als auch in der TM-Polarisation fast gleiche Werte aufweisen. Struktur II hingegen weist eine deutlich schmälere Bandlücke auf. In der TE-Polarisation liegt das zweite Band deutlich tiefer, verglichen mit dem aus Struktur I bzw. Struktur III, wohingegen das erste Band nahezu konstant bleibt. Bei der TM-Polarisation verschieben sich im Gegensatz dazu beide Bänder nach unten. Dieser Effekt ist in Abschnitt 4.1 genauer diskutiert.

### 4.3.2 Transmissionsberechnungen der idealen Strukturen

In diesem Abschnitt wird die Transmission für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante durch einen idealen Photonischen Kristall über die Länge der Einheitszellen betrachtet werden. Die Bandkanten der drei Strukturen sind nochmals in Tab. 4.3.2 für die TE-Polarisation und Tab. 4.3.2 für die TM-Polarisation aufgeführt. In Kapitel 5 wird die Diskussion der Transmission dann für ungeordnete Photonische Kristalle durchgeführt. Die Bandkanten sind für technologische Anwendungen aufgrund der starken Krümmung in diesem Bereich von besonderem Interesse [59]. Die Nähe zur Bandlücke hat jedoch den Nachteil, dass sich kleinere Störungen im Photonischen Kristall drastisch auswirken können [43]. Zunächst werden hier anhand der endlichen

idealen Photonischen Kristalle die dabei auftretenden Fabry-Perot-Oszillationen in der Transmission aufgezeigt. Später werden diese berechneten Ergebnisse mit denen der ungeordneten Kristalle verglichen, um die charakteristischen Effekte der Unordnung herauszufinden.

Struktur	Betrachtete Punkte	$ka$	$\omega a/2\pi c$
I	1.Bandkante	3.08836	0.274
I	2.Bandkante	3.08341	0.312
II	1.Bandkante	3.11378	0.2735
II	2.Bandkante	3.12737	0.2845
III	1.Bandkante	3.08425	0.274
III	2.Bandkante	3.06478	0.315

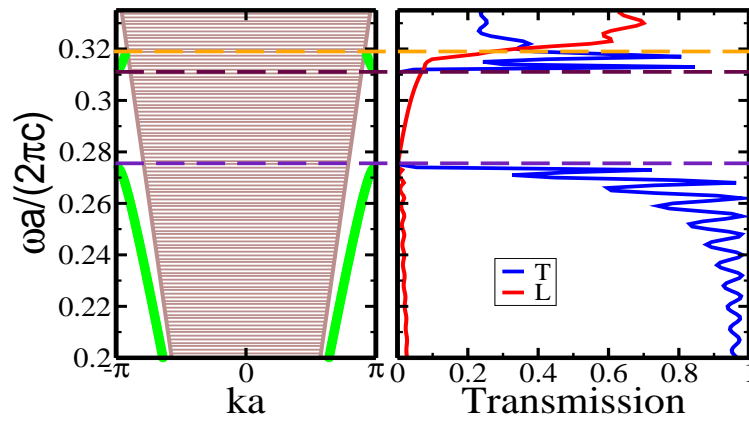
Tabelle 4.2: Betrachtete Punkte in TE-Polarisation

In Abb.4.10 sind die Transmissionsberechnungen über die Anzahl der Einheitszellen für die einzelnen Strukturen und Bandkanten in TE-Polarisation abgebildet. Wie aus den in Tab. 4.3.2 aufgeführten Werten ersichtlich ist, sind die Frequenzen und Wellenvektoren für Struktur I und Struktur III an der ersten Bandkante bis zur dritten Nachkommastelle identisch. Dies zeigt sich in den Transmissionsberechnungen durch eine leichte Verschiebung in der Fabry-Perot-Frequenz. Deutliche Unterschiede sind jedoch im zweiten Band zu sehen. Struktur II bildet, wie schon in der Bandstruktur, ein Sonderfall. Hier sind die Fabry-Perot-Oszillationen deutlich länger.

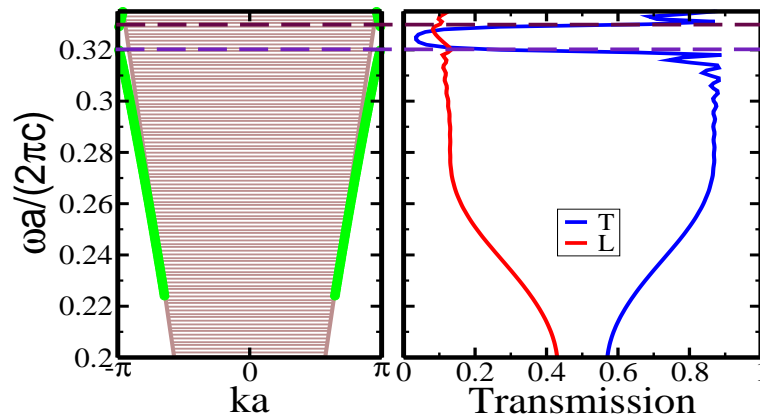
Struktur	Betrachtete Punkte	$ka$	$\omega a/2\pi c$
I	1.Bandkante	3.11302	0.32
I	2.Bandkante	3.10953	0.329
II	1.Bandkante	3.12383	0.311
II	2.Bandkante	3.11261	0.317
III	1.Bandkante	3.11046	0.322
III	2.Bandkante	3.10159	0.334

Tabelle 4.3: Betrachtete Punkte in TM-Polarisation

Die Berechnungen für die TM-Polarisation sind in den Abb.4.11 aufgeführt. Wie schon bei der TE-Polarisation sind die Transmissionsberechnungen für die erste Bandkante von Struktur I und Struktur III nur leicht in der Frequenz der Fabry-Perot-Oszillationen verschoben. Die zweite Bandkante weist hingegen eine größere Verschiebung auf. Die Werte in Tab. 4.3.2 bestätigen das, da sie sich für die Frequenz und den Wellenvektor an der ersten Bandkante erst ab der dritten Nachkommastelle unterscheiden. Struktur II weist an der ersten Bandkante eine deutlich länger Oszillationslänge auf, wobei die Amplitude sich im selben Bereich wie bei den anderen beiden Strukturen befindet. An der zweiten Bandkante verringert sich die Amplitude jedoch sichtbar.

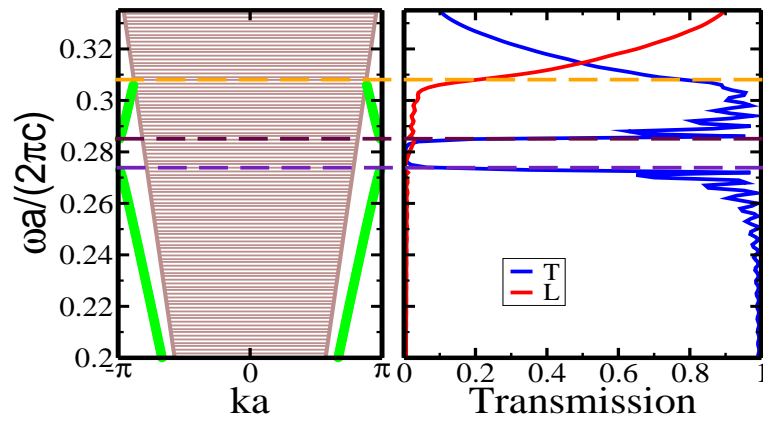


(a) TE-Polarisation

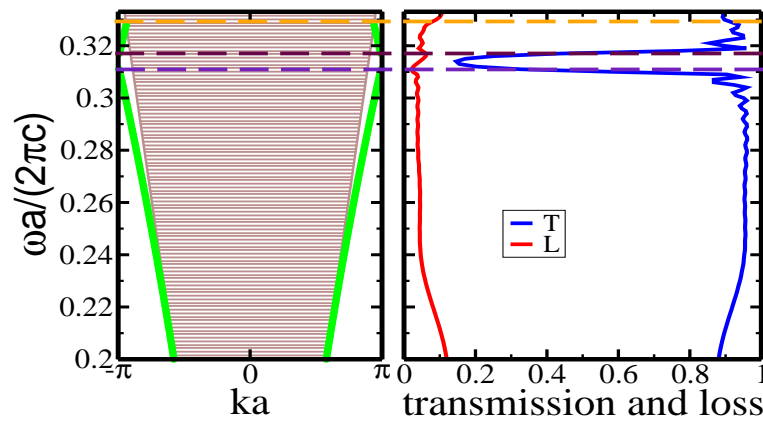


(b) TM-Polarisation

Abbildung 4.7: Struktur I: Vergleich zwischen der Bandstruktur (linker Graph) des unendlichen Kristalls mit der Transmissionsberechnung (rechter Graph) eines zwanzig Einheitszellen langen Kristalls für TE-Polarisation (a) und TM-Polarisation (b). Im jeweils linken Graphen ist die Bandstruktur durch grüne Punkte dargestellt. Die braun linierte Fläche stellt den Lichtkegel da. Im rechten Graphen ist ein starkes Abfallen der Transmission (blaue Linie) in der Bandlücke (zwischen der violett gestrichelten Linie und der dunkel braun gestrichelten Linie) zu erkennen. Ferner ist ein Ansteigen des Verlustes (rote Linie) beim Überschreiten des Lichtkegels (oberhalb der orange gestrichelten Linie) zu sehen.

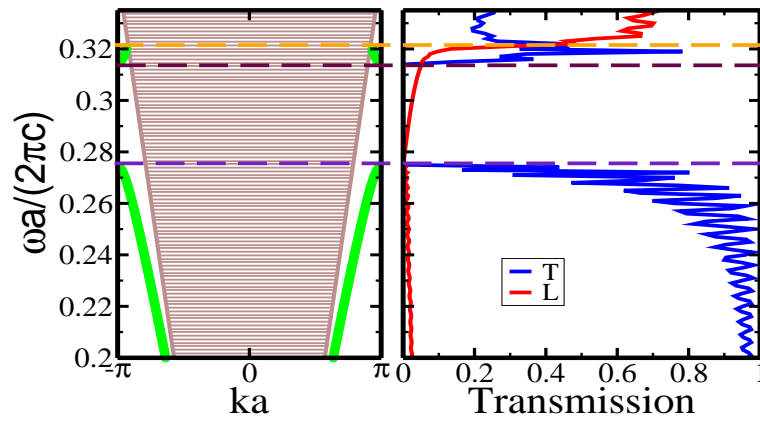


(a) TE-Polarisation

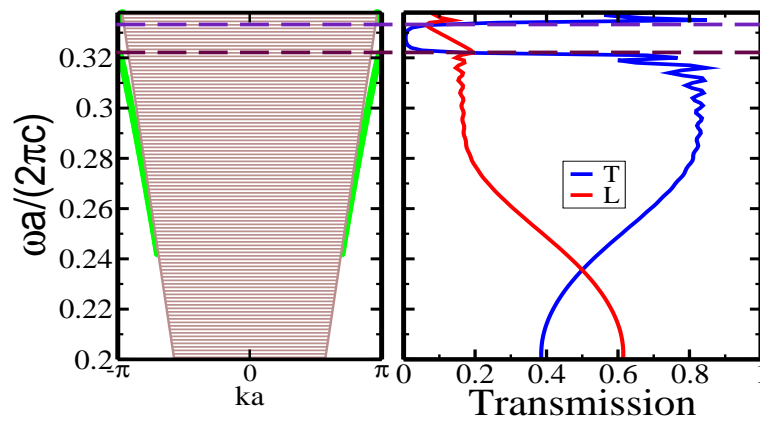


(b) TM-Polarisation

Abbildung 4.8: Struktur II: Vergleich zwischen der Bandstruktur (linker Graph) des unendlichen Kristalls mit der Transmissionsberechnung (rechter Graph) eines zwanzig Einheitszellen langen Kristalls für TE-Polarisation (a) und TM-Polarisation (b). Im jeweils linken Graphen ist die Bandstruktur durch grüne Punkte dargestellt. Die braun linierte Fläche stellt den Lichtkegel da. Im rechten Graphen ist die Transmission durch die blaue Linie und der Verlust durch die rote Linie dargestellt. Die gestrichelten Linien stellen die markanten Punkte der Bandstruktur da, die erste (violett) und zweite (dunkel braun) Bandkante, sowie die Lichtkegelgrenze (orange).



(a) TE-Polarisation



(b) TM-Polarisation

Abbildung 4.9: Struktur III: Vergleich zwischen der Bandstruktur (linker Graph) des unendlichen Kristalls mit der Transmissionsberechnung (rechter Graph) eines zwanzig Einheitszellen langen Kristalls für TE-Polarisation (a) und TM-Polarisation (b). Im jeweils linken Graphen ist die Bandstruktur durch grüne Punkte dargestellt. Die braun linierete Fläche stellt den Lichtkegel da. Im rechten Graphen ist die Transmission durch die blaue Linie und der Verlust durch die rote Linie dargestellt. Die gestrichelten Linien stellen die markanten Punkte der Bandstruktur da, die erste (violett) und zweite (dunkel braun) Bandkante, sowie die Lichtkegelgrenze (orange).



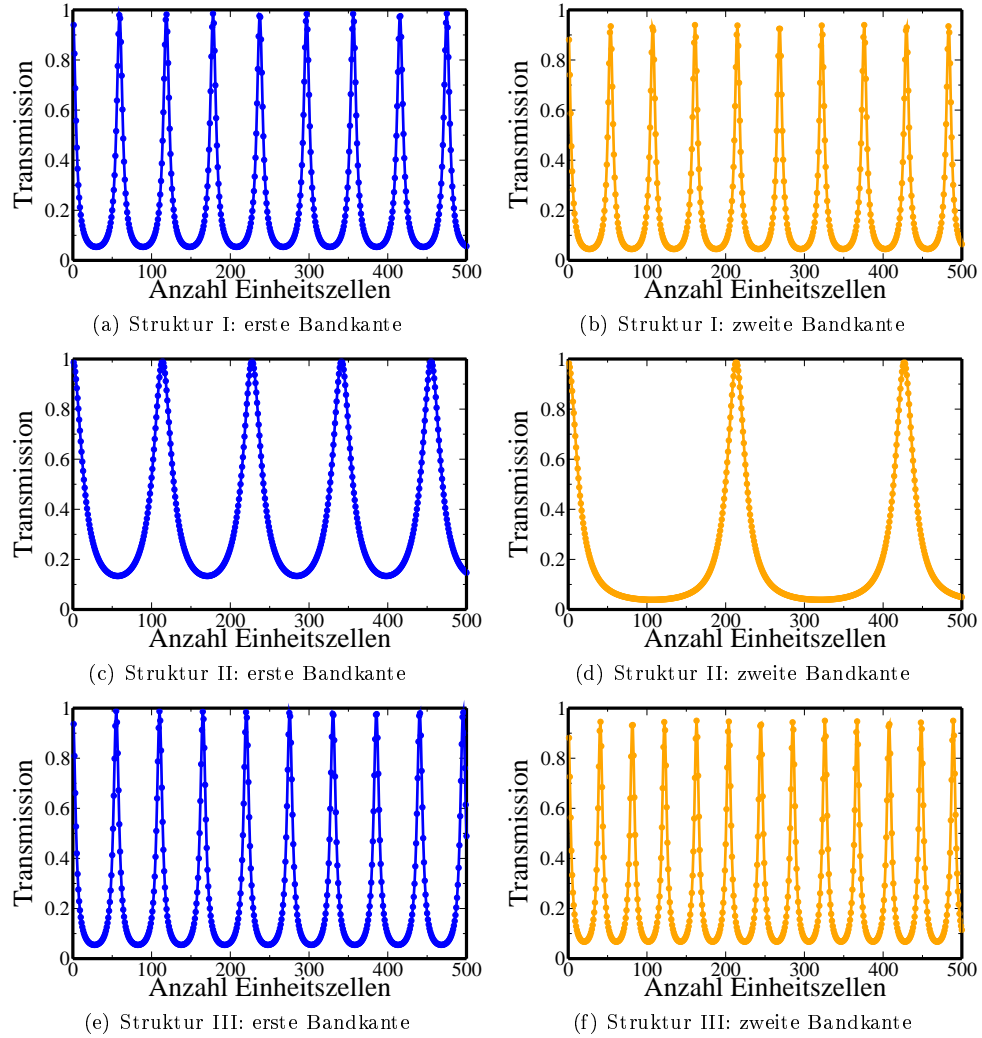


Abbildung 4.10: Transmission über Anzahl der Einheitszellen in TE-Polarisation für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante. Es sind die für endliche Kristalle charakteristischen Fabry-Perot-Oszillationen zu erkennen. Ferner sind Unterschiede in den Fabry-Perot-Oszillationen für verschiedene Bandkanten und Strukturen zu sehen. Auffällig dabei ist, dass sich die Transmission für Struktur I und Struktur III sehr ähneln.

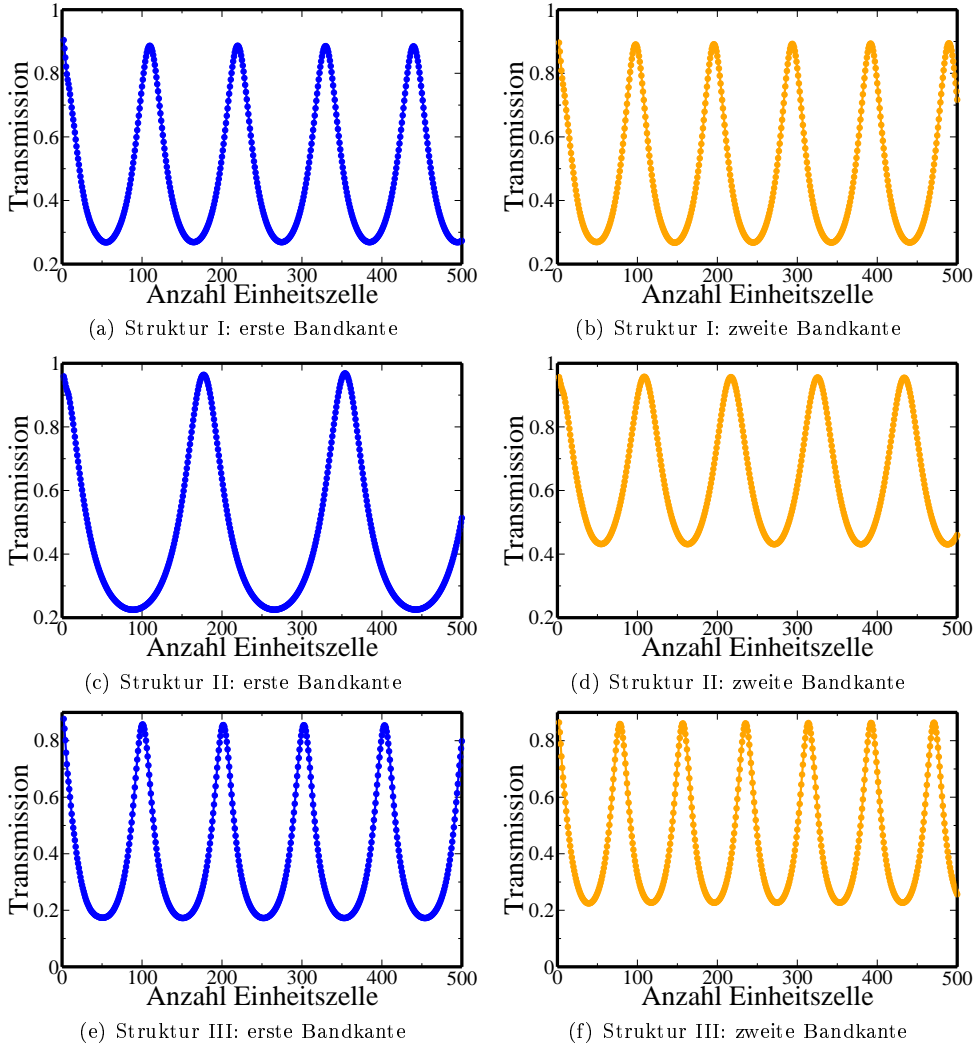


Abbildung 4.11: Transmission über die Anzahl der Einheitszellen in TM-Polarisation für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante. Es sind die für endliche Kristalle charakteristischen Fabry-Perot-Oszillationen zu erkennen. Ferner sind die Unterschiede in den Fabry-Perot-Oszillationen für verschiedene Bandkanten und Strukturen zu sehen. Auffällig dabei ist, dass sich die Transmission für Struktur I und Struktur III sehr ähneln.

## 4.4 Einseitig unendliche Photonische Kristalle

Die in Kapitel 3 beschriebene Methode wird nun auf einseitig unendliche Photonische Kristalle angewendet. Zuerst wird die Einkopplung in einen einseitig unendlichen idealen Photonischen Kristall berechnet. Dadurch kann ein effektiver Spiegel definiert werden, welcher die Reflexion, Transmission und Kopplungsverluste beinhaltet. Die Kopplungsverluste werden dabei durch eine effektive Absorption des Spiegels dargestellt. Ferner kann eine effektive Einkoppellänge bestimmt werden. Nach dieser Betrachtung wird das Auskoppelverhalten in einen Wellenleiter untersucht. Dabei kann wiederum ein effektiver Spiegel definiert werden.

### 4.4.1 Einkopplung in einen einseitig unendlichen Photonischen Kristall

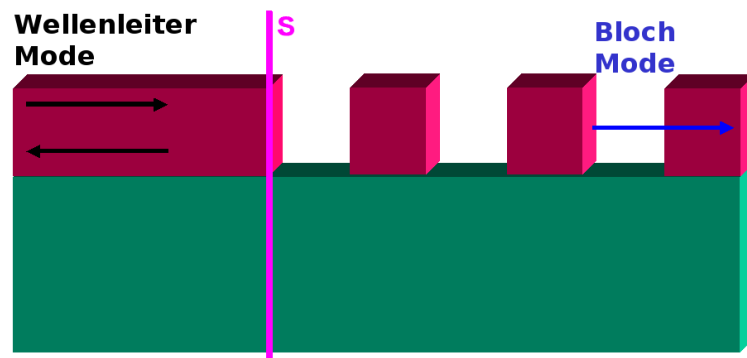


Abbildung 4.12: Skizze des Einkoppelvorgangs in einen einseitig unendlichen Photonischen Kristall. Die im Wellenleiter laufende Mode (schwarz) wird an der Grenzschicht (magentafarbene Linie) teilweise zurück reflektiert. Ein Teil dringt in den Photonischen Kristall ein und wird in eine Blochmode (blau) umgewandelt. Die Kopplung des Wellenleiters und des Photonischen Kristalls soll mathematisch durch einen effektiven Spiegel  $S$  repräsentiert werden.

In diesem Unterkapitel wird die Kopplung von einem einmodigen Wellenleiter in einen einseitig unendlichen Photonischen Kristall behandelt. Die Fundamentalmode des Wellenleiters muss dazu in eine Blochmode umgewandelt werden. Dieser Vorgang wird einige Einheitszellen benötigen, wodurch sich eine Einkoppellänge bestimmen lässt. Die Blochmode lässt sich durch eine Überlagerung von vorwärts und rückwärts laufenden Wellenleiter-Moden beschreiben. Da bei der Umwandlung der Wellenleitermode in die Blochmode keine normierte Blochmode entstehen wird, ist es weiterhin nötig einen komplexen Vorfaktor  $\tau$  einzuführen. Die transmittierte Blochmode kann

somit geschrieben werden als

$$\vec{B}_t = \tau \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

Dieser Ansatz wird in die S-Matrix-Gleichung für  $n$  Einheitszellen eingesetzt, woraus folgt

$$\begin{pmatrix} \vec{r} \\ \tau \vec{f} \end{pmatrix} = \hat{S}^{(n)} \begin{pmatrix} \tau \vec{b} \\ \vec{i} \end{pmatrix}$$

$S^{(n)}$  stellt darin die S-Matrix für  $n$  Einheitszellen da. Die Unbekannten in obiger Gleichung sind  $\vec{r}$  und  $\tau$ . Damit die Gleichung nach den Unbekannten aufgelöst werden können, müssen  $\tau_i = \tau$ ,  $b_{ij} = \delta_{ij}b_i$  und  $f_{ij} = \delta_{ij}f_i$  eingeführt werden. Mit diesen Definitionen folgt

$$\begin{pmatrix} \vec{r} - \hat{S}_{11}\tau\vec{b} \\ \tau\vec{f} - \hat{S}_{21}\tau\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{12}\vec{i} \\ \hat{S}_{22}\vec{i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{1} & -\hat{S}_{11}\hat{b} \\ \hat{0} & \hat{f} - \hat{S}_{21}\hat{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{12}\vec{i} \\ \hat{S}_{22}\vec{i} \end{pmatrix}.$$

Der Faktor  $\tau$  kann allerdings nicht direkt als Transmissionskoeffizient angesehen werden, da dieser sich auf die Blochmode, nicht auf die Wellenleitermode bezieht und somit auf beiden Seiten unterschiedliche Basis-Moden verwendet werden. Um die Transmission zu erhalten, muss sich daher des Poynting Vektors bedient werden und die Flüsse in den einzelnen Bereichen berechnet werden.

#### 4.4.2 Flussberechnung mit Hilfe des Poynting Vektors

In diesem Unterkapitel wird der Poynting Vektor benutzt um den Energiefluss im Wellenleiter bzw. im Photonischen Kristall zu berechnen. Der Poynting Vektor ist allgemein definiert als

$$\vec{S}_{\text{poy}} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^*.$$

Für H-Polarisation, also für

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H_z \end{pmatrix}$$

folgt somit

$$\vec{S}_{\text{poy}} = \begin{pmatrix} E_y H_z^* \\ -E_x H_z^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### 4 Idealer Photonischer Kristall

Der Energiefluss durch eine Ebene orthogonal zur  $x$ -Achse berechnet sich damit aus

$$F(x) = \int S_{\text{poy},x} dy = \frac{1}{2} \int E_y H_z^* dy.$$

In diese Gleichung werden dann die Fourier Entwicklungen der Felder

$$H_z(x, z) = \sum_m h_m(x) \exp[iG_m y], \quad E_y = i \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_m e_m(x) \exp[iG_m y]$$

eingesetzt. Dadurch lässt sich der Energiefluss schreiben als

$$F(z) = i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_m \sum_l e_l(x) h_m^*(x) \int \exp[i(G_l - G_m)y] dy.$$

Mit  $2\pi\delta(G_l - G_m) = \int \exp[i(G_l - G_m)y] dy$  kann dies weiter vereinfacht werden:

$$F(z) = i\pi \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \sum_m e_m(x) h_m^*(x).$$

Zur übersichtlicheren Gestaltung werden die Fourier Koeffizienten in Vektoren zusammengefasst

$$\vec{h}(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \vec{e}(x) = \begin{pmatrix} e_1(x) \\ e_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix},$$

wodurch sich die Summe als Skalarprodukt schreiben lässt

$$F(z) = i\pi \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \vec{e}(x) \cdot \vec{h}^*(x).$$

Die Fourier Vektor-Koeffizienten können nun weiter aufgegliedert werden in

$$\begin{aligned} \vec{h} &= \sum_c \vec{W}_c (f_c \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c \exp[-k_0 \lambda_c z]) \\ \vec{e} &= \sum_c \vec{V}_c (f_c \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c \exp[-k_0 \lambda_c z]), \end{aligned}$$

wobei  $b_c$  die Entwicklungskoeffizienten der rückwärts propagierenden und  $f_c$  die der vorwärts propagierenden Moden sind. Diese Koeffizienten wurden im Zuge der S-Matrix-Methode berechnet. Somit lässt sich der Fluss im Wellenleiter und Photonischen Kristall berechnen.

### Transmissions-und Reflexionsberechnung

Um die Transmission und Reflexion zu berechnen, werden die einlaufenden und auslaufenden Flüsse separat betrachtet. Der einlaufende Fluss  $F_{\text{in}}(x)$  des in diesem Abschnitt betrachteten Systems berechnet sich durch die Vektor-Koeffizienten:

$$\vec{h}_{\text{in}} = \sum_c \vec{W}_c (i_c \exp[k_0 \lambda_c z]), \quad \vec{e}_{\text{in}} = \sum_c \vec{V}_c (i_c \exp[k_0 \lambda_c z]).$$

Der reflektierte Fluss  $F_r(x)$  berechnet sich demnach aus den Vektor-Koeffizienten

$$\vec{h}_r = \sum_c \vec{W}_c (r_c \exp[-k_0 \lambda_c z]), \quad \vec{e}_r = \sum_c \vec{V}_c (-r_c \exp[-k_0 \lambda_c z]).$$

Die Reflexion in den Wellenleiter lässt sich durch den Quotienten des in den Wellenleiter zurück reflektierten Flusses bezogen auf den einlaufenden Fluss beschreiben:

$$R = \frac{F_r}{F_{\text{in}}}$$

Für den in den Photonischen Kristall transmittierten Fluss  $F_t(x)$  müssen sowohl die vorwärts als auch die rückwärts laufenden Moden miteinbezogen werden. Mit der Definition von oben lassen sich die Vektor-Koeffizienten berechnen aus

$$\begin{aligned} \vec{h}_t &= \sum_c \vec{W}_c \tau (f_c \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c \exp[-k_0 \lambda_c z]) \\ \vec{e}_t &= \sum_c \vec{V}_c \tau (f_c \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c \exp[-k_0 \lambda_c z]). \end{aligned}$$

Die Transmission in den Photonischen Kristall berechnet sich aus dem Quotienten des transmittierten Flusses bezogen auf den einlaufenden Fluss:

$$T = \frac{F_t}{F_{\text{in}}}$$

Zum Abschluss wird noch der Verlust definiert. Als Verlust wird die Energie angesehen, welche weder reflektiert noch transmittiert wurde, also die Strahlungsverluste. Dies lässt sich mathematisch beschreiben durch:

$$A = 1 - \frac{F_t + F_r}{F_{\text{in}}}$$

Dieser Verlust ist im idealen Fall einfach der Kopplungsverlust beim Übergang von Wellenleiter zu Photonischen Kristall bzw. Photonischer Kristall zu Wellenleiter.

#### 4.4.3 Ergebnisse

Um die Methode zu testen, wurden Transmissionsberechnungen über die dimensionslose Frequenzen durchgeführt. Die Freiheitsgrade bei dieser Berechnung sind die Anzahl der Fourier-Koeffizienten und die Einkoppllänge.

Analog zu der Betrachtung in Abschnitt 3.4 sind in Abb. 4.13 Berechnungen mit  $N = 101$  Fourier-Koeffizienten für verschiedene Einkoppellängen aufgeführt. Es sind zudem die erste und zweite Bandkante der Bandstruktur eingezeichnet. Die verschiedenen gewählten Einkoppellängen von  $Z = 5$ ,  $Z = 25$ ,  $Z = 50$  und  $Z = 100$  weisen nahezu denselben Verlauf auf. Die Bandlücke wird in allen Fällen richtig wiedergegeben, indem dort die Transmission auf Null abfällt. Im Gegensatz zu der Betrachtung in Abschnitt 3.4, bei der die Ausbildung der Bandlücke von der Anzahl der Einheitszellen abhing, wird bei der jetzigen Berechnung eine Blochmode vorausgesetzt und somit die Bandstruktur implizit mit in Betracht gezogen. Daher hängt die Ausbildung der in der Bandlücke verschwindenden Transmission nicht mehr von der Anzahl der Einheitszellen ab.

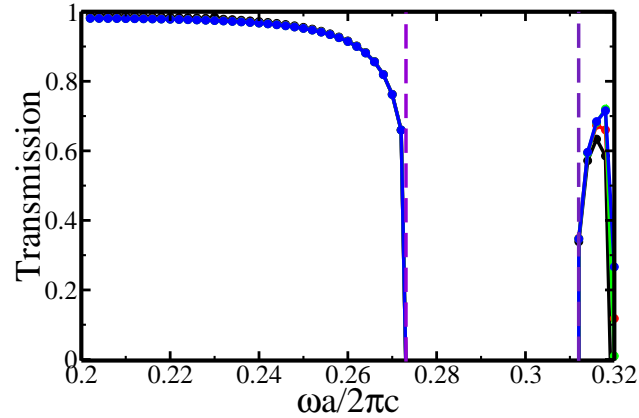


Abbildung 4.13: Transmissionsberechnungen für einen einseitig unendlichen Kristall von Struktur I in TE-Polarisation mit  $N = 101$  Fourier-Koeffizienten für verschiedene Einkoppellängen:  $Z = 5$ (schwarz),  $Z = 25$ (rot),  $Z = 50$ (grün) und  $Z = 100$ (blau). Da implizit davon ausgegangen wird, dass sich eine Blochmode ausbildet, ist die Transmissionsberechnung nahezu unabhängig von der Einkoppellänge.

Abb.4.14 zeigt einen Vergleich zwischen der Transmissionsberechnung des einseitig unendlichen Kristalls mit der eines endlichen Kristalls aus Abschnitt 4.3. Die Transmission des einseitig unendlichen Kristalls zeigt keine Fabry-Perot-Oszillationen, da diese nur in endlichen Systemen durch interne Reflexionen gebildet werden. Beide Kurven weisen jedoch einen ähnlichen mittleren Verlauf auf.

Der oben beobachtete Effekt der fehlenden Fabry-Perot-Oszillationen kann genutzt werden um die Einkoppellänge zu bestimmen. Dazu werden in Abb. 4.16 Transmission  $T$ , Reflexion  $R$  und Verlust  $A = 1 - T - R$  für die Einkopplung von einem Wellenleiter in Struktur I für TE und TM-Polarisation über die Einheitszellen gezeigt. Die Berechnung wurde mit  $N = 301$  Fourier-Koeffizienten durchgeführt. Durch die fehlenden Fabry-Perot-Oszillationen wird die Transmission in den Photonischen Kristall mit steigender Einkoppellänge gegen einen festen Wert streben.

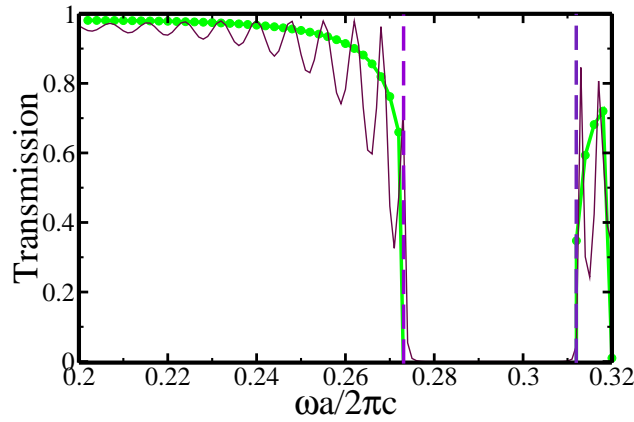


Abbildung 4.14: Vergleich der Transmissionsberechnung für einen einseitig unendlichen Kristall von Struktur I mit einem endlichen Kristall derselben Struktur. Es sind die Fabry-Perot-Oszillationen des endlichen Photonischen Kristalls zu erkennen. Der allgemeine Verlauf der Transmission der beiden Systeme ist jedoch vergleichbar.

In den ersten fünfzig Einheitszellen sind noch Kopplungseffekte zu sehen, welche sich durch Schwankungen der jeweils berechneten Transmissions- bzw. Reflexionswerte zeigen. Diese Schwankungen heben sich bei der Berechnung des Verlustes weg. Daher wird der Verlust benutzt, um die Konvergenz auf einen Fixwert zu bestimmen. Diese Konvergenz wird durch die Anzahl der Fourier-Koeffizienten beeinflusst. Es stellte sich anhand von Testrechnungen heraus, dass die Anzahl von  $N = 301$  oder mehr Koeffizienten einen in der dritten Nachkommastelle konstanten Wert aufweisen.

Der Verlust in Abb. 4.16 pendelt sich sowohl für die TE-Polarisation als auch für die TM-Polarisation nach ca.  $Z = 50$  Einheitszellen auf einen Fixwert ein. Gleiches gilt für die Transmission und Reflexion. Daher kann die Einkoppellänge auf  $Z_{\text{in}} = 50$  Einheitszellen festgelegt werden.

Aus der Gegenüberstellung von TE- und TM-Polarisation geht hervor, dass sich die Einkoppelschwankungen der TM-Polarisation in der zweiten Nachkommastelle abspielen, während sie sich bei der TE-Polarisation im Bereich der vierten Nachkommastelle befinden. Ein ähnliches Verhalten ist auch bei der zweiten Bandkante und Struktur II bzw. Struktur III zu sehen. In Tab. 4.15 sind die berechneten Werte für alle Strukturen und Polarisationen an der ersten und zweiten Bandkante aufgestellt.

Aufbauend auf den obigen Betrachtungen wird nächster Schritt der so genannte Einkoppelspiegel eingeführt, welcher das Einkoppeln in einen Photonischen Kristall beschreiben soll. Dieser wird durch eine  $2 \times 2$ -Matrix wie folgt beschrieben:

$$\hat{S}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} t_{wc} & r_{cc} \\ r_{ww} & t_{cw} \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der konvergierten Transmissions- und Reflektionswerte können nun zwei Ko-



Struktur	Frequenz	$ t_{wc} ^2$	$ r_{ww} ^2$
I	1.Bandkante	0.374629	0.625089
I	2.Bandkante	0.348412	0.627948
II	1.Bandkante	0.533941	0.465722
II	2.Bandkante	0.328266	0.660592
III	1.Bandkante	0.377837	0.621938
III	2.Bandkante	0.40972	0.574454

(a) TE-Polarisation

Struktur	Frequenz	$ t_{wc} ^2$	$ r_{ww} ^2$
I	1.Bandkante	0.681163	0.265912
I	2.Bandkante	0.688947	0.267921
II	1.Bandkante	0.559562	0.431438
II	2.Bandkante	0.775941	0.203348
III	1.Bandkante	0.582118	0.346018
III	2.Bandkante	0.640915	0.321626

(b) TM-Polarisation

Abbildung 4.15: Berechnete Einkoppel-Koeffizienten für  $Z = 250$  Einheitszellen

effizienten der Einkoppelmatrix definiert werden. Die Beträge des Transmissionskoeffizienten vom Wellenleiter auf den Photonischen Kristall  $|t_{wc}|$  und des Reflexionskoeffizienten vom Wellenleiter zurück in den Wellenleiter  $|r_{ww}|$  sind somit

$$|t_{wc}| = \sqrt{T} \quad |r_{ww}| = \sqrt{R}$$

Für die anderen zwei Komponenten wird die Auskopplungsbetrachtung aus einem Photonischen Kristall benötigt.

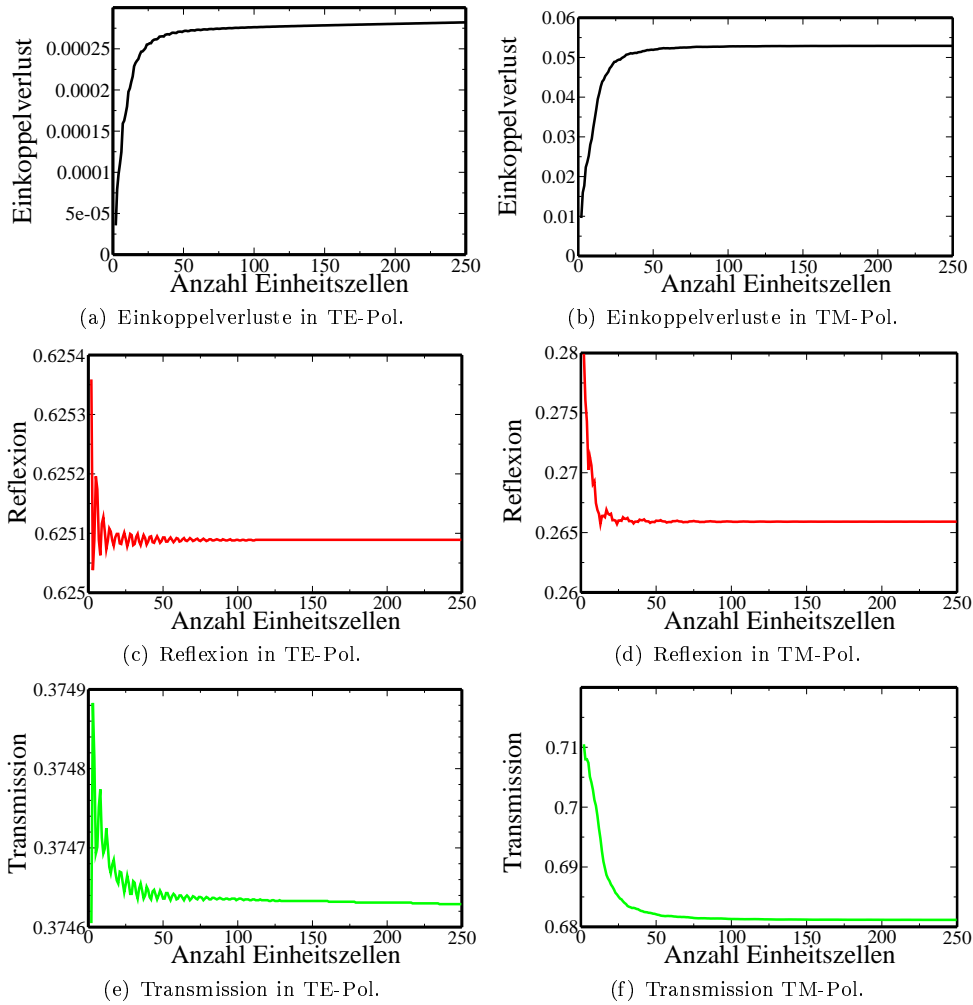


Abbildung 4.16: Einkoppelverluste, Reflexion und Transmission über der Anzahl der Einheitszelle für Struktur I an der ersten Bandkante für TE- und TM-Polarisation. Es ist in allen Graphen eine Konvergenz zu einem Fixwert zu erkennen. Die Länge bis zum Erreichen dieses Wertes kann als Einkoppellänge in den einseitig unendlichen Photonischen Kristall angesehen werden.

#### 4.4.4 Auskopplung aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall

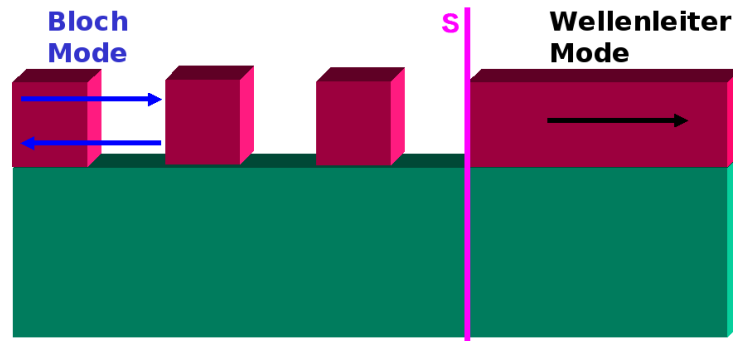


Abbildung 4.17: Skizze des Auskoppelvorgangs aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall. Die im Kristall laufende Blochmode (blau) wird an der Grenzschicht (magentafarbene Linie) teilweise zurück reflektiert. Ein Teil dringt in den Wellenleiter ein und propagiert dort als Wellenleitermode (schwarz) weiter. Die Kopplung des Photonischen Kristalls und des Wellenleiters soll mathematisch durch einen effektiven Spiegel  $S$  repräsentiert werden.

Analog zur Einkopplung, wird nun die Auskopplung aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall untersucht. Dazu wird ein einseitig unendlicher Photonischer Kristall, welcher an einen Wellenleiter gekoppelt ist, betrachtet. Die einlaufende Mode im Kristall wird als ideale Blochmode angenommen und lässt sich durch die Überlagerung von vorwärts und rückwärts laufenden Moden darstellen.

$$\vec{B}_i = \begin{pmatrix} \vec{f}_f \\ \vec{b}_f \end{pmatrix}.$$

Diese einlaufende Mode wird nun am Übergang zum Wellenleiter reflektiert und bildet eine rücklaufende Blochmode aus

$$\vec{B}_r = \rho \begin{pmatrix} \vec{f}_b \\ \vec{b}_b \end{pmatrix}.$$

Um die S-Matrix-Gleichung für die Transmission in den Wellenleiter aufzustellen, benötigt man die Überlagerung der reflektierten und transmittierten Blochmodelemente.

Somit kann man die Gleichung schreiben als

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_f + \rho \vec{b}_b \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{f}_f + \rho \vec{f}_b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_f + \rho \vec{b}_b \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{12}(\vec{f}_f + \rho \vec{f}_b) \\ \hat{S}_{22}(\vec{f}_f + \rho \vec{f}_b) \end{pmatrix}.$$

Die Unbekannten in obiger Gleichung sind  $\rho$  und  $\tau$ . Das Auflösen nach selbigen ergibt

$$\begin{pmatrix} \rho \vec{b}_b - \hat{S}_{12} \rho \vec{f}_b \\ \vec{\tau} - \hat{S}_{22} \rho \vec{f}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{12} \vec{f}_f - \vec{b}_f \\ \hat{S}_{22} \vec{f}_f \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_b - \hat{S}_{12} \hat{f}_b & \hat{0} \\ -\hat{S}_{22} \hat{f}_b & \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{12} \vec{f}_f - \vec{b}_f \\ \hat{S}_{22} \vec{f}_f \end{pmatrix}.$$

Die Faktoren  $\rho$  und  $\tau$  können allerdings nicht direkt als Reflexionskoeffizient angesehen werden, da man auf den Seiten unterschiedliche Basis-Moden hat. Um die Transmission und Reflexion zu erhalten, muss man sich daher des Peking Vektors bedienen und die Flüsse in den einzelnen Bereichen berechnen.

### Transmissions- und Reflexionsberechnung

Der einlaufende Fluss  $F_{\text{in}}(x)$  ist durch die einlaufende Blochmode gegeben und berechnet sich durch die Vektor-Koeffizienten:

$$\vec{h}_{\text{in}} = \sum_c \vec{W}_c \left( f_c^{(f)} \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c^{(f)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right)$$

$$\vec{e}_{\text{in}} = \sum_c \vec{V}_c \left( f_c^{(f)} \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c^{(f)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right).$$

Der reflektierte Fluss  $F_r(x)$  entspricht der reflektierten Blochmode, was zu den Vektor-Koeffizienten

$$\vec{r}_{\text{in}} = \sum_c \vec{W}_c \rho \left( f_c^{(b)} \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c^{(b)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right)$$

$$\vec{e}_{\text{in}} = \sum_c \vec{V}_c \rho \left( f_c^{(b)} \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c^{(b)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right)$$

führt. Die Reflexion in den Photonischen Kristall lässt sich durch den Quotienten von reflektiertem und einlaufenden Fluss berechnen mit

$$R = \frac{F_r}{F_{\text{in}}}.$$

Für den in den Wellenleiter transmittierten Fluss  $F_t(x)$  lassen sich die Vektor-Koeffizienten berechnen aus

$$\vec{h}_t = \sum_c \vec{W}_c (\tau_c \exp[k_0 \lambda_c z]), \quad \vec{e}_t = \sum_c \vec{V}_c (\tau_c \exp[k_0 \lambda_c z]).$$

Die Transmission in den Wellenleiter berechnet sich aus dem Quotienten des transmittierten und einlaufenden Flusses zu

$$T = \frac{F_t}{F_{\text{in}}}.$$

Der Verlust ist wiederum definiert durch den Teil des nicht reflektierten oder transmittierten Flusses bestimmt:

$$A = 1 - \frac{F_t + F_r}{F_{\text{in}}}.$$

#### 4.4.5 Ergebnisse

In Abb. 4.18 werden zunächst wieder Transmission  $T$ , Reflexion  $R$  und Verlust  $A = 1 - T - R$  für die Auskopplung aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall von Struktur II an der ersten Bandkante für TE und TM-Polarisation gezeigt. Die Berechnungen sind wiederum für  $Z = 301$  Fourier-Koeffizienten durchgeführt worden.

Die TE-Polarisation zeigt darin nach dem Auskoppelbereich ein sehr gutes Konvergenzverhalten. Die Transmission bzw. Reflexion streben ab fünfzig Einheitszellen einem festen Wert zu. Wodurch die Auskoppellänge in der TE-Polarisation auf  $Z_{\text{out}} = 50$  gelegt wird. Der Bereich der Schwankungen des Auskoppelbereiches erstreckt sich wiederum nur über die dritten Nachkommastelle.

Für die TM-Polarisation ist in Abb. 4.18 jedoch kein Konvergenzverhalten zu erkennen. Es ist statt dessen ein deutliches Abknicken in der Transmission, Reflexion und dem Auskoppelverlust zu sehen. Dies zeigt abermals die schon bekannten Konvergenzprobleme in der TM-Polarisation [63]. Für eine genauere Berechnung müssen daher mehr Fourier Komponenten betrachtet werden. Eine gute Konvergenz ist bei  $Z = 401$  Fourier Komponenten gegeben. Die dazugehörigen Berechnungen für die Transmission und Reflexion sind in Abb. 4.19 gezeigt. Für alle betrachteten Strukturen sind die konvergierten Werte der Transmission, Reflexion und des Auskoppelverlustes in Tab. 4.20 aufgeführt.

Zum Abschluss wird ein Spiegel, welcher die Auskopplung beschreibt, eingeführt. Er kann in folgender Matrixform angegeben werden

$$\hat{S}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} t_{cw} & r_{ww} \\ r_{cc} & t_{wc} \end{pmatrix}$$

Die Elemente sind im Vergleich zum Einkoppelspiegel lediglich vertauscht. Mit Hilfe der konvergierten Transmissions- und Reflektionswerte können nun die zwei noch unbekannt Koeffizienten definiert werden. Die Beträge des Transmissionskoeffizienten vom Photonischen Kristall auf den Wellenleiter  $|t_{cw}|$  und des Reflexionskoeffizienten vom Kristall zurück in den Kristall  $|r_{ww}|$

$$|t_{cw}| = \sqrt{T} \quad |r_{cc}| = \sqrt{R}$$

Somit sind beide Matrizen für den idealen Photonischen Kristall bestimmt.

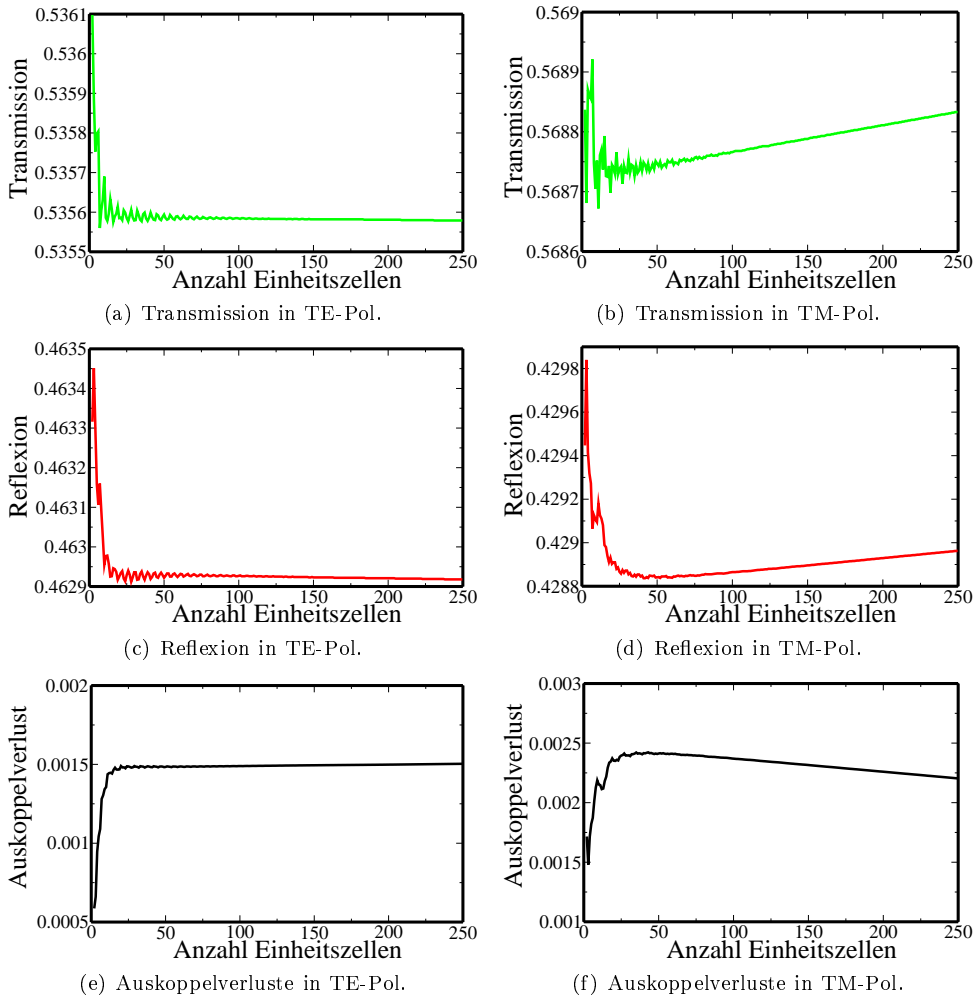


Abbildung 4.18: Auskoppelverluste, Reflexion und Transmission über der Anzahl der Einheitszellen für Struktur II an der ersten Bandkante für TE- und TM-Polarisation. In Graphen der TE-Polarisation (linke Seite) ist eine gute Konvergenz zu einem Fixwert zu erkennen. Die Länge bis zum Erreichen dieses Wertes kann als Auskoppellänge aus dem einseitig unendlichen Photonischen Kristall angesehen werden. Die Graphen zur TM-Polarisation zeigen keine Konvergenz auf. Die Berechnungen müssen daher mit mehr Fourier-Koeffizienten durchgeführt werden.

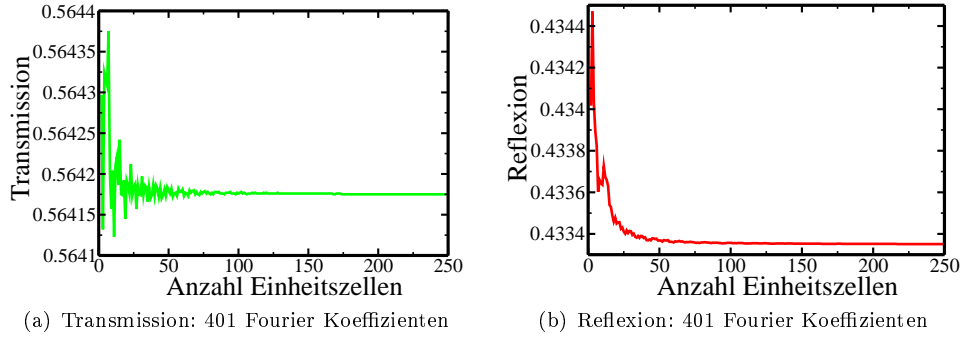


Abbildung 4.19: Transmission und Reflexion über die Anzahl der Einheitszellen für Struktur II an der ersten Bandkante in TM-Polarisation. Aufgrund der Berechnung mit mehr Fourier-Koeffizienten ist in den Graphen eine deutliche Konvergenz der Transmission und Reflexion auf einen Fixwert zu erkennen. Die Kristalllänge, welche zum Erreichen des Fixwertes nötig ist, kann als Auskoppellänge definiert werden.

Struktur	Frequenz	$ r_{cc} ^2$	$ t_{cw} ^2$
I	1.Bandkante	0.621677	0.376511
I	2.Bandkante	0.64026	0.349239
II	1.Bandkante	0.462918	0.535579
II	2.Bandkante	0.669177	0.329335
III	1.Bandkante	0.619234	0.379317
III	2.Bandkante	0.579138	0.410594

(a) TE-Polarisation

Struktur	Frequenz	$ r_{cc} ^2$	$ t_{cw} ^2$
I	1.Bandkante	0.277038	0.719416
I	2.Bandkante	0.26942	0.726019
II	1.Bandkante	0.433351	0.564175
II	2.Bandkante	0.207314	0.788517
III	1.Bandkante	0.371281	0.624421
III	2.Bandkante	0.308496	0.684315

(b) TM-Polarisation

Abbildung 4.20: Berechnete Auskoppel-Koeffizienten für 250 Einheitszellen

## 4.5 Die effektive Spiegelmethode

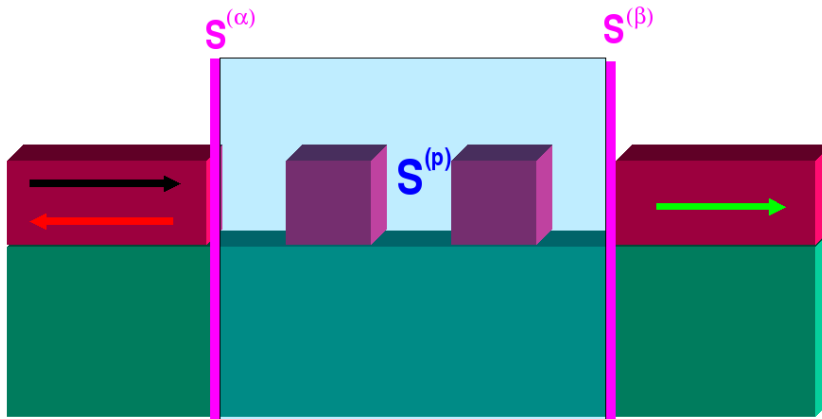


Abbildung 4.21: Skizze der effektiven Spiegelmethode: Die einfallende Mode (schwarz) wird am Photonischen Kristall teilweise zurück reflektiert (rot). Dies wird durch den Spiegel  $S$  an der linken Grenzschicht beschrieben. Der in den Photonischen Kristall eindringende Teil wird durch die Propagationsmatrix  $S^{(p)}$  und am Ende des Kristalls durch einen weiteren Spiegel  $S$  an die transmittierte Mode (grün) gekoppelt.

Die effektive Spiegelmethode, auch Hakki-Paoli-Methode genannt, basiert darauf, dass die Ein- und Auskopplung des betrachteten endlichen Systems durch halbdurchlässige Spiegel dargestellt werden kann [48]. Dabei können die Spiegel auch verlustbehaftet sein. Die Propagation zwischen den Spiegeln wird durch eine Propagationsmatrix dargestellt, welche ebenfalls Verluste beinhalten kann.

Das so vereinfachte System, siehe Abb. 4.5, entspricht einem Fabry-Perot-Etalon. Die transmittierten und reflektierten Intensitäten können daher im verlustfreien Fall durch die Fabry-Perot-Formel [62] für senkrechten Einfall

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{1 + F \sin^2(kd)}$$

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{F \sin^2(kd)}{1 + F \sin^2(kd)}$$

$$F = \left( \frac{2r}{1 - r^2} \right)^2$$

berechnet werden. Dabei entspricht  $r$  dem realen Reflexionskoeffizienten der eingeführten halbdurchlässigen Spiegel. Die Länge des Etalons wird mit  $d$  bezeichnet und  $k$  ist der Wellenvektor der im Etalon laufenden Moden. Für eine feste Länge hängt die transmittierte bzw. reflektierte Intensität vom Wellenvektor und damit der verwendete



ten Frequenz ab. Dies führt zu den in diesem Kapitel schon vorgestellten Fabry-Perot-Oszillationen bei der Auftragung der Transmission über der einheitslosen Frequenz. Bei einer fest gewählten Frequenz, aber variabler Länge  $d$  kommt es beim Auftragen der Transmission über der Etalon-Länge ebenfalls zu Oszillationen. Letztere Methode der Auftragung wird in dieser Arbeit verwendet. Der Übergang zum Photonischen Kristall mit variabler Länge wird durch  $d \rightarrow ax$  gewährleistet. Dabei entspricht  $a$  der Einheitszellenlänge des Kristalls.

Mit Hilfe der so angepassten Fabry-Perot-Formel können dem betrachteten Photonischen Kristall effektive Parameter zugeordnet werden, was wiederum eine Klassifizierung möglich macht. In Kapitel 5 wird die effektive Spiegelmethode verwendet werden, um die Effekte verschiedener Unordnungen in quasi eindimensionalen Photonischen Kristallen zu analysieren und effektive Parameter anzugeben. Hier soll nun zunächst die analytische Betrachtung folgen. Es wird die aus Kapitel 3 bekannte S-Matrix verwendet, um das vereinfachte System darzustellen. Darauf wird die Transmission berechnet und somit mit den effektiven Parametern in den Matrizen verknüpft.

#### 4.5.1 Die Fabry-Perot Formel und die S-Matrix

Die aus Kapitel 3 bekannte S-Matrix verbindet die einlaufenden mit den auslaufenden Moden. Für ein System mit nur einer einlaufenden Mode folgt daher

$$\begin{pmatrix} t \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Die S-Matrix soll das in Abb. 4.5 dargestellte System beschreiben. Somit setzt sie sich zusammen aus den Spiegelmatrizen  $\hat{S}^{(\alpha)}$  und  $\hat{S}^{(\beta)}$  und der Propagationsmatrix  $\hat{S}^{(p)}$ , welche zunächst nur für die Phasenverschiebung zwischen den Spiegeln sorgt.

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{S}^{(\alpha)} * \hat{S}^{(p)} * \hat{S}^{(\beta)} \\ \hat{S}^{(\alpha)} &= \begin{pmatrix} t_{wc}^{(\alpha)} & r_{cc}^{(\alpha)} \\ r_{ww}^{(\alpha)} & t_{cw}^{(\alpha)} \end{pmatrix} \\ \hat{S}^{(\beta)} &= \begin{pmatrix} t_{cw}^{(\beta)} & r_{ww}^{(\beta)} \\ r_{cc}^{(\beta)} & t_{wc}^{(\beta)} \end{pmatrix} \\ \hat{S}^{(p)} &= \begin{pmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \quad \phi = e^{ikax} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $t$  und  $r$  seien komplex. Die Phasenverschiebung wird durch  $\phi$  berücksichtigt. Mit Hilfe der in Kapitel 3 hergeleiteten S-Matrix-Multiplikation

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{11}^{(\beta)} [1 - S_{12}^{(\alpha)} S_{21}^{(\beta)}]^{-1} S_{11}^{(\alpha)} \\ S_{12} &= S_{12}^{(\beta)} + S_{11}^{(\beta)} [1 - S_{12}^{(\alpha)} S_{21}^{(\beta)}]^{-1} S_{12}^{(\alpha)} S_{22}^{(\beta)} \\ S_{21} &= S_{21}^{(\alpha)} + S_{22}^{(\alpha)} [1 - S_{21}^{(\beta)} S_{12}^{(\alpha)}]^{-1} S_{21}^{(\beta)} S_{11}^{(\alpha)} \\ S_{22} &= S_{22}^{(\alpha)} [1 - S_{21}^{(\beta)} S_{12}^{(\alpha)}]^{-1} S_{22}^{(\beta)} \end{aligned}$$

folgt für die Untermatrizen der S-Matrix  $\hat{S}$

$$\begin{aligned} S_{11} &= t_{cw}^{(\beta)} \phi [1 - r_{cc}^{(\alpha)} \phi r_{cc}^{(\beta)} \phi]^{-1} t_{wc}^{(\alpha)} \\ S_{12} &= r_{ww}^{(\beta)} + t_{cw}^{(\beta)} \phi [1 - r_{cc}^{(\alpha)} \phi r_{cc}^{(\beta)} \phi]^{-1} r_{cc}^{(\alpha)} \phi t_{wc}^{(\beta)} \\ S_{21} &= r_{ww}^{(\alpha)} + t_{cw}^{(\beta)} [1 - r_{cc}^{(\alpha)} \phi r_{cc}^{(\beta)} \phi]^{-1} \phi r_{cc}^{(\beta)} \phi t_{wc}^{(\alpha)} \\ S_{22} &= t_{cw}^{(\alpha)} [1 - r_{cc}^{(\alpha)} \phi r_{cc}^{(\beta)} \phi]^{-1} \phi t_{wc}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

Die transmittierte Intensität berechnet sich nun aus dem Betragsquadrat der Untermatrix  $S_{11}$  zu

$$I_t = |S_{11}|^2 = \left| \frac{t_{cw}^{(\beta)} t_{wc}^{(\alpha)} \phi}{1 - r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \phi^2} \right|^2 \quad (4.3)$$

Die reflektierte Intensität ist durch

$$I_r = |S_{21}|^2 = \left| r_{ww}^{(\alpha)} + \frac{r_{cc}^{(\beta)} t_{cw}^{(\beta)} t_{wc}^{(\alpha)} \phi^2}{1 - r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \phi^2} \right|^2$$

gegeben.

In in Gl. 4.3 tritt neben den Transmissionskoeffizienten in den Photonischen Kristall  $t_{wc}$  bzw. aus dem Photonischen Kristall  $t_{cw}$  nur der Reflexionskoeffizienten  $r_{cc}$ , welcher die Reflexion zurück in den Photonischen Kristall beschreibt, auf. Die Erklärung hierfür ist die folgende. Die Transmission in höheren Ordnungen wird durch die mehrfach reflektierten Anteile gebildet. Dies Mehrfachreflexionen werden durch die Reflexion zurück in den Photonischen Kristall, also von  $r_{cc}$ , bestimmt. Die erste Ordnung besteht folglich aus einer Transmission in den Photonischen Kristall, worauf eine zweifache Reflexion innerhalb desselben folgt. Erst nach diesen zwei Reflexionen kommt es dann zur Transmission aus dem Kristall. Das Aufsummieren dieser höheren Ordnungen ergibt schließlich die Fabry Perot Formel[62]. In der obigen Betrachtung mit Hilfe der S-Matrizen, wurde diese Summation durch die S-Matrix-Matrixmultiplikation implizit vorgenommen.

#### 4.5.2 Verlustfreier Fall

Für die folgende Betrachtung wird weiterhin von einer verlustfreien Propagation innerhalb des Photonischen Kristalls ausgegangen. Ferner wird eine verlustfreie Ein- bzw.

Auskopplung vorausgesetzt. In diesem Fall ist die Energie erhalten und folglich ist  $T + R = 1$ . Es gilt somit

$$\begin{aligned} \left| t_{cw}^{(\beta)} t_{wc}^{(\alpha)} \right| &= T = 1 - R \\ R &= \left| r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \right| \\ \varphi &= \frac{1}{2} \arg \left( r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \right). \end{aligned}$$

Mit der einfallenden Intensität von  $I_i = 1$  folgt aus Gl. 4.3 die Fabry-Perot-Formel

$$\begin{aligned} I_t &= \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(2(kax + \varphi))} \\ &= \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R + 4R \sin^2(kax + \varphi)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(kax + \varphi)} = \frac{1}{1 + F \sin^2(kax + \varphi)}, \end{aligned}$$

wobei  $\cos(2\gamma) = 1 - 2\sin^2(\gamma)$  verwendet wurde.

### 4.5.3 Absorbierende Spiegel

Nach den verlustfreien Betrachtungen sollen jetzt zunächst Ein- und Auskoppelverluste zugelassen werden. Diese werden in Analogie zum Fabry-Perot-Resonator durch absorbierende Spiegel simuliert. Es ist jedoch nicht möglich die beiden Verluste voneinander zu trennen, daher wird im Folgenden nur von Kopplungsverlusten geredet. Ferner sei nur der transmittierte Anteil von der Absorption betroffen [62]. Die Absorptionskonstante  $A$  wird daher wie folgt implizit definiert

$$\begin{aligned} \left| t_{cw}^{(\beta)} t_{wc}^{(\alpha)} \right| &= T = 1 - A - R \\ R &= \left| r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \right| \\ \varphi &= \frac{1}{2} \arg \left( r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \right). \end{aligned}$$

Mit diesen Annahmen folgt aus Gl. 4.3

$$I_t = \left( 1 - \frac{A}{1 - R} \right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2(kax + \varphi)}. \quad (4.4)$$

### 4.5.4 Absorbierende Spiegel und Propagationsverluste

Im nächsten Schritt werden nun nicht nur Kopplungsverluste, sondern auch Propagationsverluste betrachtet. Die Propagationsverluste seien dabei nur innerhalb des Photonischen Kristalls. Es wird ferner davon ausgegangen, dass dieser Verlust exponentiell

mit der Länge abnimmt und durch eine Abklingkonstante  $\gamma$  bestimmt wird [48]. Diese Annahmen werden in die Propagationsmatrix eingesetzt, worauf folgt:

$$\hat{S}^{(p)} = \begin{pmatrix} \phi e^{-\gamma x} & 0 \\ 0 & \phi e^{-\gamma x} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Nach dem Ausmultiplizieren der S-Matrix  $\hat{S}$  und dem Einsetzen von  $R$ ,  $A$  und  $\varphi$  folgt die Transmissionsgleichung mit Propagations- und Kopplungsverlusten

$$I_t = \left| \frac{t_{wc}^{(\alpha)} t_{cw}^{(\beta)} \phi e^{-\gamma x}}{1 - r_{cc}^{(\alpha)} r_{cc}^{(\beta)} \phi^2 e^{-2\gamma x}} \right|^2 \quad (4.6)$$

$$= \frac{(1 - A - R)^2}{e^{2\gamma x} + R^2 e^{-2\gamma x} - 2R \cos(2(kax + \varphi))} \quad (4.7)$$

$$= \frac{(1 - A - R)^2}{e^{2\gamma x} + R^2 e^{-2\gamma x} - 2R + 4R \sin^2(kax + \varphi)}, \quad (4.8)$$

Wobei die Koppelverluste wieder durch die Absorptionskonstante  $A$  berücksichtigt wurden.

## Diskussion und Ergebnisse

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die einzelnen Formeln zur Berechnung der Transmission mit Hilfe der effektiven Spiegelmethode hergeleitet wurden, sollen nun ein paar Ergebnisse aufgezeigt und diskutiert werden. Dies wird später bei der Diskussion der ungeordneten Photonischen Kristalle von Nutzen sein.

Aus Gl. 4.3 geht hervor, dass die Transmission über die Phasenverschiebung  $\phi = e^{ikax}$  von der benutzten Frequenz bzw. des dazugehörigen  $k$ -Vektors, sowie der Länge des Kristalls  $ax$  abhängt. In den folgenden Betrachtungen sei die Frequenz fest und  $x$  eine natürliche Zahl, wodurch das Auftragen der Transmission über die Anzahl der Einheitszellen ermöglicht wird.

Zunächst soll geklärt werden welchen Einfluss die Reflexion  $R$  auf die Transmissions-eigenschaften hat. In Abb. 4.22 sind die obersten Graphen für eine Reflexion von  $R = 0.2$  auf der linken Seite und  $R = 0.8$  auf der rechten Seite dargestellt. Für den Wellenvektor wurde nach mehreren Testrechnungen zur besten Darstellung der folgenden Effekte  $ka = 3$  gewählt. Aus diesen Graphen lässt sich ablesen, dass die Reflexion der halbdurchlässigen Spiegel die Amplitude der Fabry-Perot-Oszillationen bestimmt. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die maximale Transmission bzw. Reflexion durch einen Fabry-Perot-Etalon auf Resonanzeffekten basiert, welche wiederum durch die interne Reflexion der Spiegel bestimmt werden. Im Falle von geringer interner Reflexion kommt es zu keiner völligen resonanten Rückstreuung und somit keiner totalen Reflexion. Der Graph auf der rechten Seite weist allerdings noch eine Besonderheit auf. Die maximale Transmission scheint mit der Einheitszellenlänge zu variieren. Dieser Effekt basiert auf den diskreten Schritten von ganzen Einheitszellen. Die Wellenlänge der Fabry-Perot-Oszillationen ist kürzer als die Länge der Einheitszellen, daher werden die Transmissionsmaxima nicht richtig aufgelöst.

Die beiden mittleren Graphen in Abb. 4.22 sind mit einer Absorption der Spiegel von  $A = 0.1$  berechnet worden. Diese Absorption soll die Koppelverluste simulieren. Im linken Graphen ist eine Verschiebung der maximalen und minimalen Transmission zu erkennen. Zudem wird die Amplitude zwischen den beiden verringert. Bei der stärkeren Reflexion, also der rechten Seite, ist die Verschiebung der minimalen Transmission nicht mehr möglich. Daher äußert sich das Einführen der Absorption in einer Verringerung der Amplitude bzw. der maximalen Transmission. Darauf aufbauend kann der Einfluss der Kopplungsverluste in einem idealen Photonischen Kristall durch eine Amplitudenverringern und einer eventuellen Verschiebung der maximalen bzw. minimalen Transmission beschreiben werden.

Zum Abschluss werden nun noch die Auswirkungen der Propagationsverluste mit  $\gamma a = 0.0005$  präsentiert, siehe unteren beiden Graphen in Abb. 4.22. Im rechten Graphen ist der Effekt des exponentiellen Propagationsverlustes deutlich zu sehen. Die maximale Transmission nimmt mit der Anzahl der Einheitszellen exponentiell ab. Die minimale Transmission bleibt derweil unbeeinflusst. Anders sieht dies auf der linken Seite aus. Dort wird sowohl die maximale, wie auch die minimale Transmission verringert. Es ist allerdings in diesem Graphen nicht eindeutig zu erkennen, ob beide Verläufe exponentiell mit der Anzahl der Einheitszellen abnehmen. Eine Vergleichsrechnung mit  $\gamma a = 0.001$  jedoch zeigte dies. Dabei nimmt die maximale Transmission schneller ab, was wiederum zu einer effektiven Verringerung der Amplitude führt. Die Effekte des Propagationsverlustes lassen sich also durch ein exponentielles Abnehmen der maximalen Transmission und eventuell einer zusätzlichen Abnahme der minimalen Transmission beschreiben.

#### 4.5.5 Vergleich: S-Matrix - Eff. Spiegel Methode

Um die Betrachtung der effektiven Spiegelmethode abzurunden, soll hier der Vergleich zwischen den mit der S-Matrix berechneten Transmissionswerten durchgeführt werden. In den vorherigen Kapiteln wurden die Ein- und Auskopplung aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall betrachtet. Im Zuge dieser Betrachtungen wurden auch die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten definiert und in Tab. 4.15, sowie Tab. 4.20 aufgeführt. Diese Koeffizienten werden nun benutzt und in die Gleichung für den verlustfreien Fall mit absorbierenden Spiegeln

$$I_t = \left(1 - \frac{A}{1 - R}\right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2(kax * \varphi)}$$

eingesetzt. Dabei wurde zunächst  $\varphi = 0$  angenommen. Die Auswirkungen von  $\varphi$  auf die transmittierte Intensität  $I_t$  wird im folgenden Abschnitt 4.5.6 kurz aufgezeigt. In Abb. 4.23 sind die berechneten Werte der transmittierten Intensität über die Anzahl der Einheitszellen für die TE-Polarisation dargestellt. Die dunkelblaue Linie stellt Transmissionswerte der S-Matrix-Methode da, wohingegen die hellblauen Punkte die effektive Spiegelmethode repräsentieren. Es ist eine perfekte Übereinstimmung der beiden Methoden zu sehen.

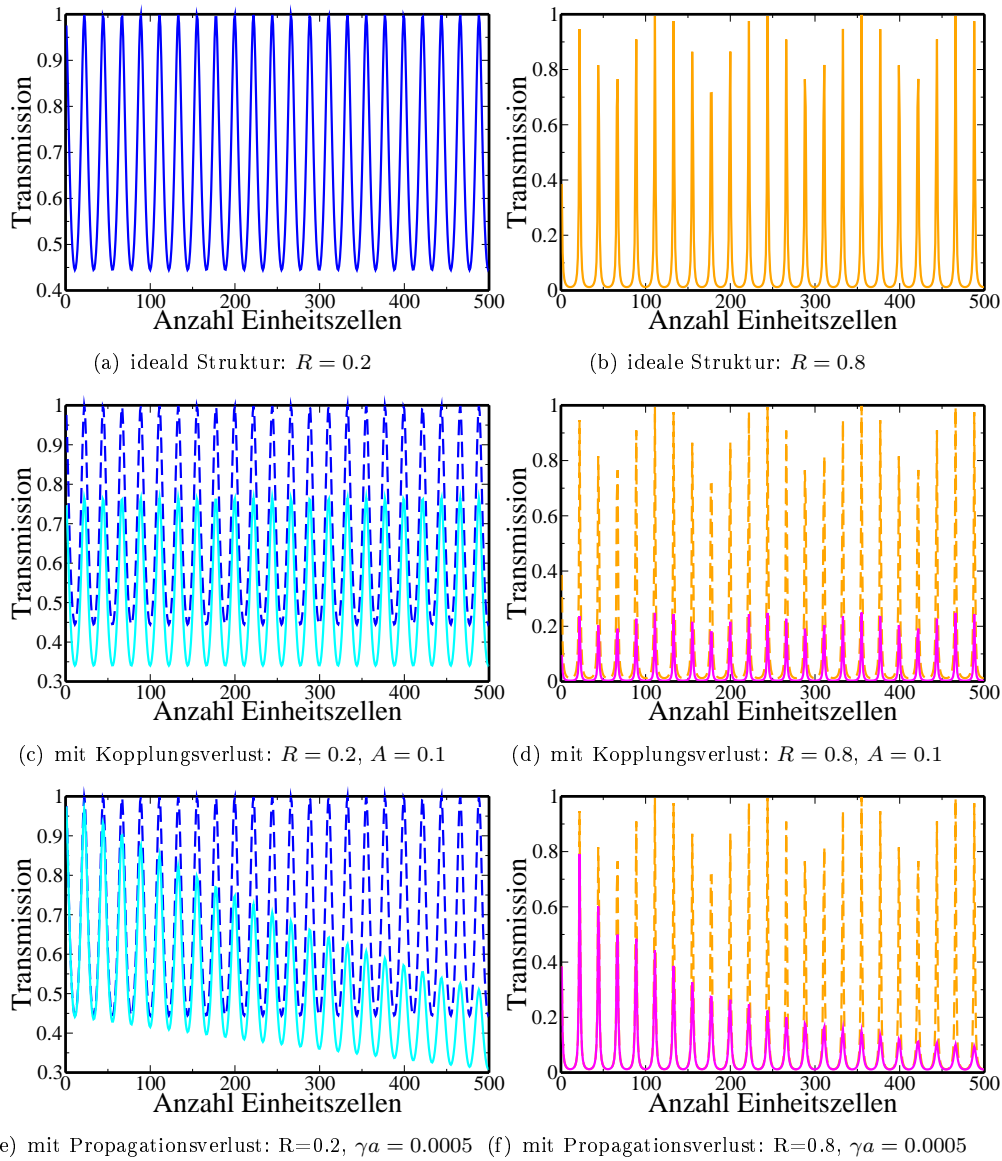


Abbildung 4.22: Berechnungen zur Veranschaulichung der Effekte der wählbaren Parameter in der effektiven Spiegelmethode. Auf der linken Seite ist eine geringe Reflexion von  $R = 0,2$  angenommen. Auf der rechten Seite ist eine Reflexion von  $R = 0,8$  eingesetzt. Die erste Spalte zeigt die verlustfreie Transmission über der Anzahl der Einheitszelle. Die zweite Spalte beinhaltet Kopplungsverluste, wohingegen die letzte Spalte auch Propagationsverluste mit einbezieht.

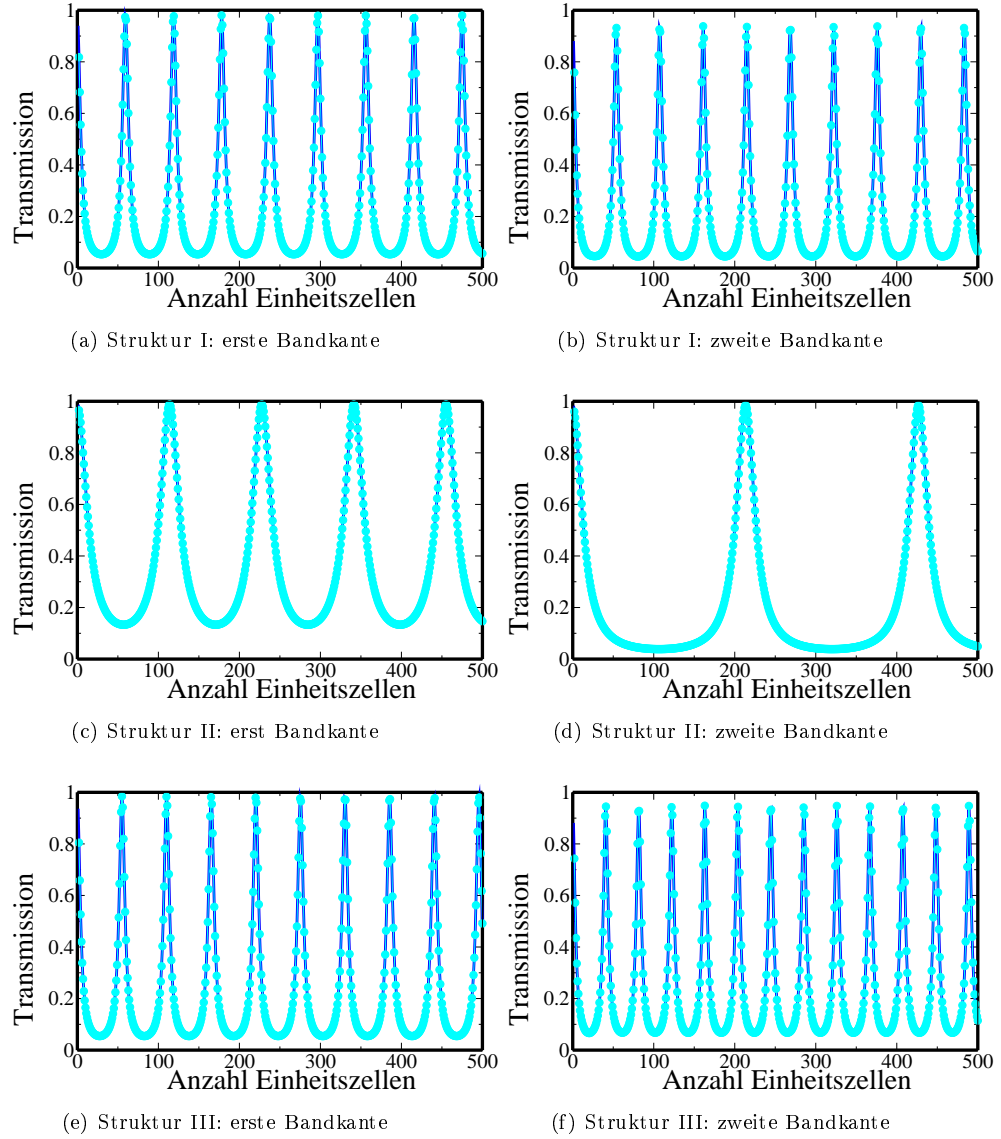


Abbildung 4.23: Vergleich der mit der S-Matrix-Methode (blaue Linie) berechneten Transmission über der Anzahl der Einheitszellen mit den durch die Effektive-Spiegel-Methode (hellblaue Punkte) berechneten Werte in TE-Polarisation für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung der beide Methoden zu erkennen.

## 4.5.6 Phasenbetrachtung

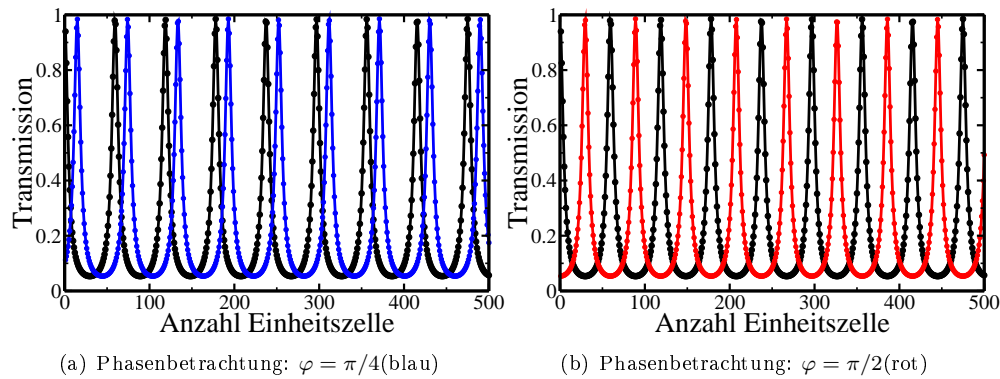


Abbildung 4.24: Phasenbetrachtung für Struktur I an der ersten Bandkante in TE-Polarisation. Die schwarz gepunktete Linie stellt dabei eine Phase von  $\varphi = 0$  da. Es ist zu erkennen, dass die Wahl von  $\varphi$  die Transmissionswerte über der Anzahl der Einheitszellen verschiebt.

In den hergeleiteten Formeln der effektiven Spiegelmethode wurde eine Phasenwahl  $\varphi$  mit einbezogen. Diese kommt daher, dass der Reflektionskoeffizient  $r_{cc}$  der S-Matrix komplex ist. In Abb.4.5.6 sind die Effekte dieser Phasenwahl für  $\varphi = \pi/4$  im linken Graphen und  $\varphi = \pi/2$  im rechten Graphen dargestellt. Die in den Graphen eingezeichnete schwarze Linie entspricht einer Phasenverschiebung von  $\varphi = 0$ . Es ist in den beiden Graphen zu erkennen, dass die Wahl von  $\varphi$  nur die Lage der maximalen Transmission verschiebt. An der Höhe oder dem Abstand der Werte wird nichts geändert. Dieses Verhalten impliziert auch die Bezeichnung von  $\varphi$  als Phasenwahl.

Die im Verlaufe dieser Arbeit durch die S-Matrix-Methode berechneten Transmissionswerte zeigten, dass die Phasenverschiebung im allgemeinen als Null angenommen werden kann. Eine einfache Erklärung dafür ist die Folgende. Bei der Auftragung von  $I_t$  über die Anzahl der Einheitszellen ist die Transmission durch Null Einheitszellen, also ohne einen Photonischen Kristall, gerade maximal. Im verlustfreien Fall, also für  $A = 0$  und  $\gamma = 0$ , ist dies mit  $\varphi = 0$  zu erreichen. Dadurch wird die Transmission  $I_t = 1$  und ist folglich maximal.





# 5 Ungeordnete Photonische Kristalle

In diesem Kapitel werden ungeordnete quasi-eindimensionale Photonische Kristalle betrachtet. Dazu wird zunächst anschaulich gezeigt welchen Einfluss die Störung der Periodizität auf die Intensitätsverteilung innerhalb des Kristalls haben kann. Darauf werden die in dieser Arbeit betrachteten Störungen und deren Auswirkungen auf die Struktur des Kristalls erläutert. Im Anschluss daran werden die Berechneten Daten präsentiert und ausgewertet. Zunächst werden die Transmissionsdaten über der Kristalllänge untersucht. Darauf wird die statistische Verteilung der Transmission an Fabry-Perot-Maxima und Minima dargelegt und interpretiert. In Analogie zum vorherigen Kapitel werden zum Abschluss des Kapitels einseitig unendliche Systeme mit Störungen betrachtet.

## 5.1 Einfluss der Variationen auf die Blochmoden

In diesem Abschnitt wird die Überleitung zu dem zweiten Hauptthema dieser Arbeit anschaulich aufgezeigt. In den vorangegangenen Kapitel wurde der Einfluss der Kristalllänge und der Ätztiefe betrachtet. Hier wird nun verdeutlicht, was Störungen der perfekten Struktur für Folgen haben.

Eine durch die Herstellung bedingte Störung der idealen Struktur ist die Oberflächenrauigkeit. Diese macht sich besonders an den Grenzschichten von Wellenleitermaterial und Ätzung bemerkbar. Die Rauigkeiten dieser Grenzschicht ist auf einer kleineren Skala als die Wellenlänge der propagierenden Mode. Der vorherrschende Streueffekt ist daher die Raylight-Streuung. Folglich können die Störungen als Dipolstrahler angesehen werden. Innerhalb der Ätzung interferieren demnach die Felder der einzelnen Strahler, was sich in der Transmissionsbetrachtung durch den Photonischen Kristall als Propagationsverluste bemerkbar macht. Diesem Effekt wird in dem in Abschnitt 2.7 vorgestellten Artikel [38] von Benisty durch einen Imaginäranteil in der Dielektrizitätskonstante der Ätzungen Rechnung getragen. Ein Vergleich der theoretischen Berechnungen und Messungen untermauert diese Theorie. Es ist dabei allerdings hervorzuheben, dass die so erhaltenen Verluste hauptsächlich auf der Interferenz innerhalb der Ätzungen basieren. Abstrahlverluste aus der Wellenleiterebene können mit diesem Ansatz nicht erklärt werden. Die im Photonischen Kristall propagierende Blochmode wird durch die Interferenz der aus den Ätzungen abgestrahlten Feldern auf die Wellenleiterschicht beschränkt. Die Interferenzeffekte innerhalb der Ätzungen haben demnach einen verschwindend geringen Einfluß auf die Ausbildung der Blochmode. Ein wesentlich größerer Effekt in der Ausbildung der Blochmoden und damit dem Abstrahlverlust ist bei Variationen in der Einheitszellenlänge zu erwarten.

In dieser Arbeit werden daher folgende drei Arten von Störungen betrachtet

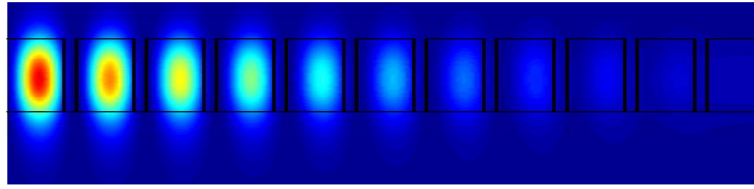
1. Variation der Ätzbreite mit konstanter Einheitszellenlänge
2. Variation der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzbreite
3. Variation der Einheitszellenlänge durch die Ätzbreite

Die erste Art der Störung der Ätzbreite bei konstanter Einheitszelle sollte die geringsten Auswirkungen zeigen, da die Periodizität mehr oder weniger bewahrt bleibt. Anders sieht es bei den letzten zwei Störungen aus. Sie sollten je nach dem welches Band betrachtet wird, also wo sich die maximale Intensität der Blochmode befindet, unterschiedliche Einflüsse haben. Für das erste Band ist anzunehmen, dass Variationen der Ätzbreite weniger Einfluss auf die Blochmode zeigen, im Gegensatz zur Änderung der Einheitszellenlänge durch die Ätzbreite. Dadurch, dass die Blochmode im ersten Band im Wellenleitermaterial zentriert ist, wird durch eine Änderung in der Einheitszellenlänge durch die Ätzbreite die Mode eventuell aus dem Wellenleitermaterial verschoben, was größere Abstrahlverluste zur Folge hätte. Im zweiten Band ist es genau umgekehrt. Die Mode ist dort in der Ätzung zentriert, was die Änderung der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzbreite zum wichtigeren Faktor macht. Eine weiter zu klärende Frage ist, welchen Einfluss die Störungen bei unterschiedlichen Ätztiefen haben. Zu erwarten ist, dass sich die Struktur mit durchgeätztem Wellenleiter ähnlich dem überätztem Fall verhält. Nicht ganz durchgeätzte Strukturen werden sich dagegen anders verhalten.

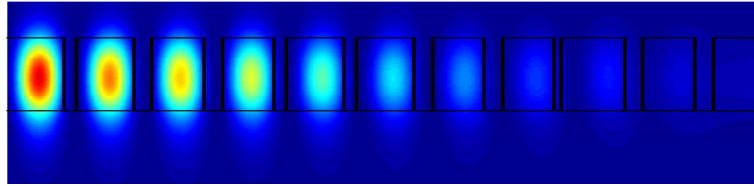
In Abbildung 5.1 ist als Beispiel die voll durchgeätzte Struktur mit zehn Einheitszellen gezeigt. Es wurde zur Verdeutlichung eine Störung von  $\delta = \pm 50nm$  gewählt. Für jede Einheitszelle wurde die Störung aus  $-50nm$ ,  $0nm$  oder  $+50nm$  willkürlich gezogen.

Bei konstanter Einheitszelle ist der Einfluss im Vergleich zum ungestörten Fall kaum zu sehen. Dem gegenüber stehen die anderen beiden Fällen. Bei der Variation der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzlänge fällt die Intensität deutlich schneller ab. Dies ist der zu erwartende starke Einfluss bei dieser Art von Störung. Im letzten Fall, der Variation der Einheitszellenlänge durch die Ätzlänge, kommt es zu einem Anwachsen die Intensität über einen mehrere Einheitszellen langen Bereich des Kristalls. Dies ist mit den obigen Vorbetrachtungen anschaulich zu Erklären. Da die Mode im Wellenleitermaterial die maximale Intensität hat, kann eine Verkürzung der Ätzbreiten zwischen den Wellenleitermaterialien dazu führen, dass es zu einer lokalen Erhöhung der Modenintensität im Wellenleitermaterial kommt. Dieser Effekt wird bei der graduellen Einkopplung in einen Photonischen Kristall genutzt, um die Modenumwandlung von der Wellenleitermode in die Blochmode langsam zu vollziehen und dadurch die Reflexion an den Grenzschichten sowie den Kopplungsverlust zu minimieren [42, 41, 64].

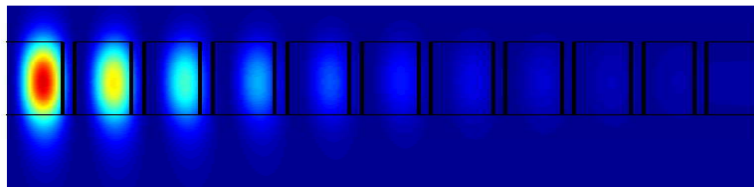
Im weiteren Verlauf dieses Kapitels werden die hier aufgestellten intuitiven Erwartungen anhand von Transmissionsberechnungen überprüft werden.



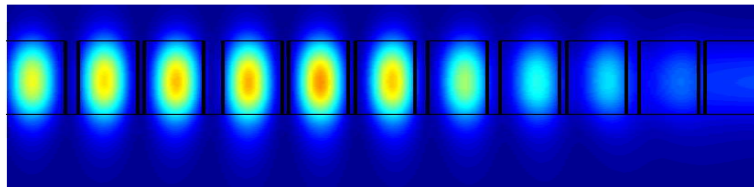
(a) idealer Fall



(b) Störungen der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge



(c) Störungen in der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzlänge



(d) Störungen der Einheitszellenlänge durch Ätzlängenvariation

Abbildung 5.1: Feldintensitäten an der ersten Bandkante von Struktur I in TE-Polarisation. Im idealen Fall ist das Abklingen der Feldintensität mit der Eindringtiefe zu erkennen, da die Kristalllänge nicht im Bereich eines Fabry-Perot Maximums liegt und somit eine geringe Transmission vorliegt (a). Die Störung der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge zeigt einen ähnlichen Verlauf wie der ideale Fall (b). Die Störung der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzlänge weist hingegen deutlich schnelleres Abklingen der Intensität auf, wie es im idealen Fall zu sehen ist (c). Die Störung der Einheitszellenlänge durch die Ätzlängenvariation zeigt einen lokalen Anstieg der Feldintensität und eine höhere Transmission sowie geringere Reflexion in den Wellenleiter, als der ungestörte Fall (d).

## 5.2 Unordnungen im Photonischen Kristall

In Anlehnung an die in Kapitel 2 vorgestellten experimentellen Vermessungen von zweidimensionalen Photonischen Kristallen [44] werden folgende Arten von Unordnungen untersucht.

1. Variationen der Ätzbreite  $d$  mit konstanter Einheitszellenlänge  $a$ . Dies entspricht einer Variation im Radius des geätzten Zylinders eines zweidimensionalen Photonischen Kristalls, wobei die Position desselben nicht geändert wird.
2. Variationen der Einheitszellenlänge  $a$  mit konstanter Ätzbreite  $d$ . Dies entspricht dem Versetzen der geätzten Zylinder in einem zweidimensionalen Kristall, wobei der Radius nicht geändert wird.
3. Variationen der Einheitszellenlänge  $a$  und der Ätzbreite  $d$ . Dies entspricht dem Versetzen des Zylinders in einem zweidimensionalen Photonischen Kristalls mit zusätzlicher Variation im Radius.

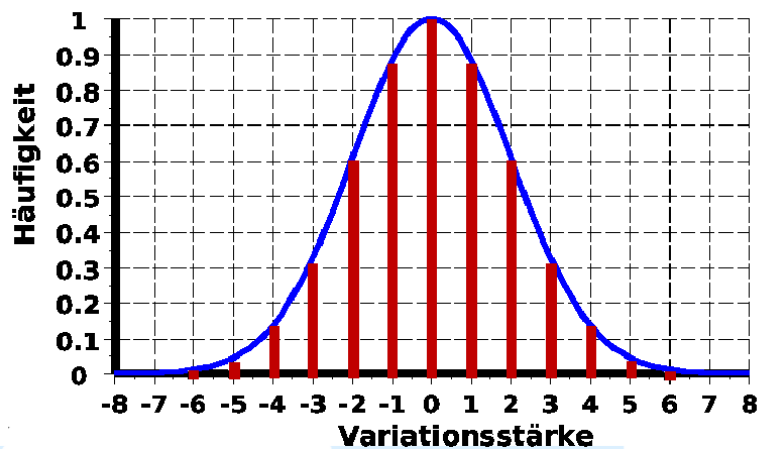


Abbildung 5.2: Skizze zur Normalverteilung der Variationsstärken: Die blaue Kurve entspricht der berechneten Gaußverteilung mit  $\sigma = 2$ . Es ist zu erkennen, dass die maximal mögliche Variation von  $\delta = 3\sigma$  mit verschwindend geringer Wahrscheinlichkeit auftritt. Die roten Balken stellen die Häufigkeitsverteilungen der diskretisierten Variationsstärken im Bereich  $\pm\delta$  da.

Für die Berechnung wird eine Normalverteilung der Variation mit einer Breite  $\sigma$  angenommen, siehe 5.2. Die Breite wird dabei durch die gewählte maximale Abweichung vom idealen Wert  $\delta$  angegeben. Die maximale Abweichung soll zu einer verschwindend geringen Wahrscheinlichkeit auftreten, welches über die Beziehung von  $\sigma = \delta/3$  gegeben ist. Somit kann die Breite und damit die Normalverteilung durch die maximale Abweichung vom Idealwert bestimmt werden. Bezug nehmend auf [44] wurden

für die Rechnungen die maximalen Werte von  $\delta = 1nm, 3nm, 5nm$  und  $8nm$  verwendet. Ferner ist der Bereich der um den Idealwert möglichen Variationen  $\pm\delta$  in fünfzig Abschnitte konstanter Breite unterteilt worden. Dies führt zu einundfünfzig diskreten Variationsstärken, welche dann im Kristall mit gaußförmiger Häufigkeitsverteilung vorkommen.

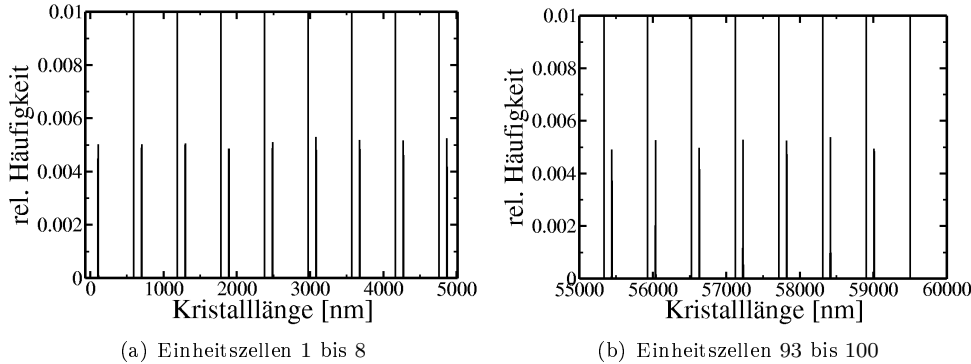


Abbildung 5.3: Statistische Verteilung der Grenzschichten bei Unordnung in der Ätzbreite  $d$  mit konstanter Einheitszellenlänge  $a$ . Die gaußverteilte Variation in der Ätzbreite hat Breite von  $\sigma = 5/3nm$ . In beiden Graphen ist zu erkennen, dass die Grenzschicht der Einheitszelle konstant bleibt, wohingegen die Ätzbreite variiert. Die Breite und Höhe der Verteilung der Ätzbreitenvariation bleibt ebenfalls nahezu konstant.

In Abb. 5.3 bis Abb. 5.5 sind die statistischen Verteilungen der Grenzschichten für alle drei Unordnungen gezeigt. Die jeweilige Variation ist normal verteilt mit  $\delta = 5nm$ . Um eine aussagekräftige Häufigkeitsverteilung zu erhalten, wurden zehntausend Systeme von Struktur I mit einhundert Einheitszellen berechnet. Die Werte für die Grenzschicht wurden darauf in einem Histogramm einsortiert.

Im Falle der Unordnung mit konstanter Einheitszelle variiert nur eine der Grenzschichten, während die andere konstant bleibt. Die variierende Grenzschicht ist normal verteilt, wobei sich die Höhe und Breite der Verteilung nicht ändern. Bei den anderen zwei Unordnungen sind beide Grenzschichten normal verteilt. Mit zunehmender Einheitszellenlänge nimmt die Breite  $\sigma$  der Verteilung zu und die Höhe exponentiell ab. Der Grund dafür liegt daran, dass die Einheitszelle nicht mehr konstant ist und sich die Variationen daher fortsetzen. Dies führt zu einem langsamen Verwischen der Grenzen. Ab einer Länge von neunzig Einheitszellen beginnen sich die beiden Grenzschichten zu überschneiden. Die Folge des Überlapps ist, dass nun die Periodizität des Photonischen Kristalls aufgehoben ist. Damit entfallen die Bragg-Resonanzen, was sich wiederum in der Transmission bemerkbar machen wird. Die Unterschiede der Unordnungen mit Variation in  $a$ , jedoch ohne zusätzliche Variation in  $d$  und der Unordnung mit Variation in  $a$  und zusätzlicher Variation in  $d$  ist in den Verteilungen nur in der ersten Grenzschicht zu sehen. Wie sich die verschiedenen Unordnungen in der Transmissionsberechnung zeigen, wird im Folgenden untersucht werden.

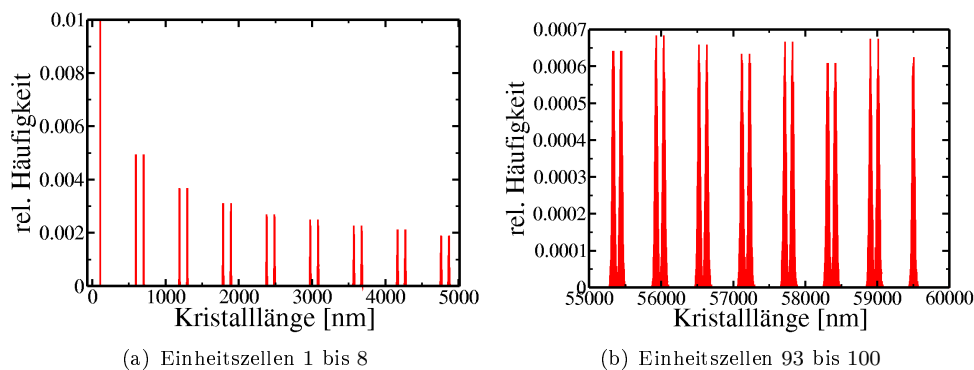


Abbildung 5.4: Statistische Verteilung der Grenzschichten bei Unordnungen in der Einheitszellenlänge  $a$  mit konstanter Ätzbreite  $d$ . Die gaußverteilte Variation in der Einheitszellenlänge hat eine Breite von  $\sigma = 5/3nm$ . In den ersten acht Einheitszellen ist ein deutlicher Abfall der relativen Häufigkeiten zu erkennen (a). Die Abnahme der relativen Häufigkeit ist mit einer Verbreiterung der Verteilung verknüpft. Dies hat zur Folge, dass sich die Verteilungen der Grenzschichten ab neunzig Einheitszellen überschneiden (b).

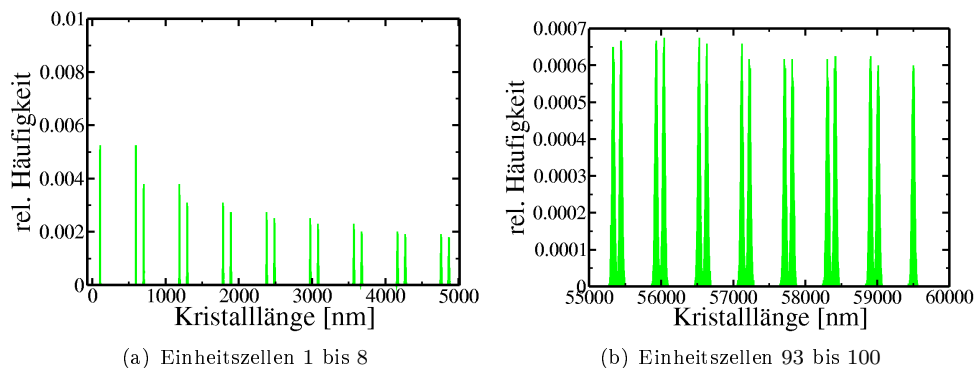


Abbildung 5.5: Statistische Verteilung der Grenzschichten bei Unordnungen in der Einheitszellenlänge  $a$  durch Ätzbreitenvariation. Die gaußverteilte Variation in der der Ätzbreite  $d$  und damit auch von  $a$  hat eine Breite von  $\sigma = 5/3nm$ . In den ersten acht Einheitszellen ist ein deutlicher Abfall der relativen Häufigkeiten zu erkennen (a). Die Abnahme der relativen Häufigkeit ist mit einer Verbreiterung der Verteilung verknüpft. Dies hat zur Folge, dass sich die Verteilungen der Grenzschichten ab neunzig Einheitszellen überschneiden (b).

## 5.3 Berechnete Transmissionsdaten

Um einen Überblick der Effekte der drei verschiedenen Unordnungen auf Photonische Kristalle zu erhalten, werden die in Abschnitt 4.3 vorgestellten drei Strukturen betrachtet. Dazu wird die Transmission in Abhängigkeit der Kristalllänge für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante in TE- bzw. TM-Polarisation berechnet. Diese Berechnungen werden auf zwei Arten untersucht. Zum einen wird die in Abschnitt 4.5 eingeführte effektive Spiegelmethode benutzt um die einzelnen Berechnungen zu klassifizieren. Die dadurch erhaltenen Werten sind dann in Tabellen aufgeführt. Zum anderen werden für die Unordnung in der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge die statistischen Verteilungen der Transmission für verschiedene Einheitszellenlängen betrachtet.

Zunächst werden anhand der Transmissionsberechnungen von Struktur III die Effekte der Unordnungen in der TE-Polarisation aufgezeigt. Die Berechnungen sind in Abb. 5.6 bis Abb. 5.11 graphisch ausgewertet. Die Parameter von Struktur III sind in Tab. 4.1 zu finden. Die dazugehörige Bandstruktur- sowie Transmissionsrechnungen für den ideale Fall sind in Abschnitt 4.3 dargelegt worden.

In den nun folgenden Abbildungen entsprechen die roten Punkte den berechneten Werten, welche über der Kristalllänge in  $nm$  aufgetragen sind. Für die Abszisse wurde in den Graphen die Kristalllänge gewählt, da die Unordnungen mit variierender Einheitszelle bei der Auftragung über selbige verzerrt würde. Für eine aussagekräftige Statistik wurden zweitausendvierhundert Systeme mit zweihundert Einheitszellen berechnet. Die in den Graphen eingezeichneten grün punktierten Linien entsprechen der Anpassung der effektiven Spiegelmethode mit Kopplungs- und Propagationsverlust

$$I_t = \frac{(1 - A - R)^2}{e^{2\gamma x} + R^2 e^{-2\gamma x} - 2R + 4R \sin^2(kax)}$$

Die Phasenwahl  $\varphi$  wurde dabei aufgrund der Diskussion in Abschnitt 4.5.6 auf Null gesetzt. Die wesentliche Folge dieser Annahme ist, dass nur noch die Reflexion  $R$  und Absorption  $A$  der Spiegel sowie der Propagationsverlust  $\gamma$  innerhalb des Photonischen Kristalls als effektive Parameter bleiben. Der benötigte Wellenzahlvektor ist aus der Bandstrukturrechnung für die jeweilige benutzte Frequenz bekannt. Die mit Hilfe von XMGRACE angepassten Kurven sind in die Graphen der Transmissionsberechnungen eingezeichnet. Die Werte der drei effektiven Parameter sind in den dazugehörigen Tabellen aufgeführt.

### Variation mit der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge

In Abb. 5.6 und Abb. 5.7 sind die Graphen für Unordnungen mit konstanter Einheitszellenlänge für verschiedene Variationsstärken dargestellt. Die berechneten Transmissionsdaten für die erste Bandkante sind in Abb. 5.6 zu finden, die der zweiten Bandkante in Abb. 5.7. In den Grundlagen wurde zwei Effekte vorgestellt, welche zur Ausbildung der Bandstruktur beitragen. Der erste ist die Bragg-Reflexion, sie dominiert im ersten Band. Der zweite Effekt basiert auf den Mie-Resonanzen, dieser wird im zweiten Band hervorstechen. Bei der Unordnung mit konstanter Einheitszelle wird nun die



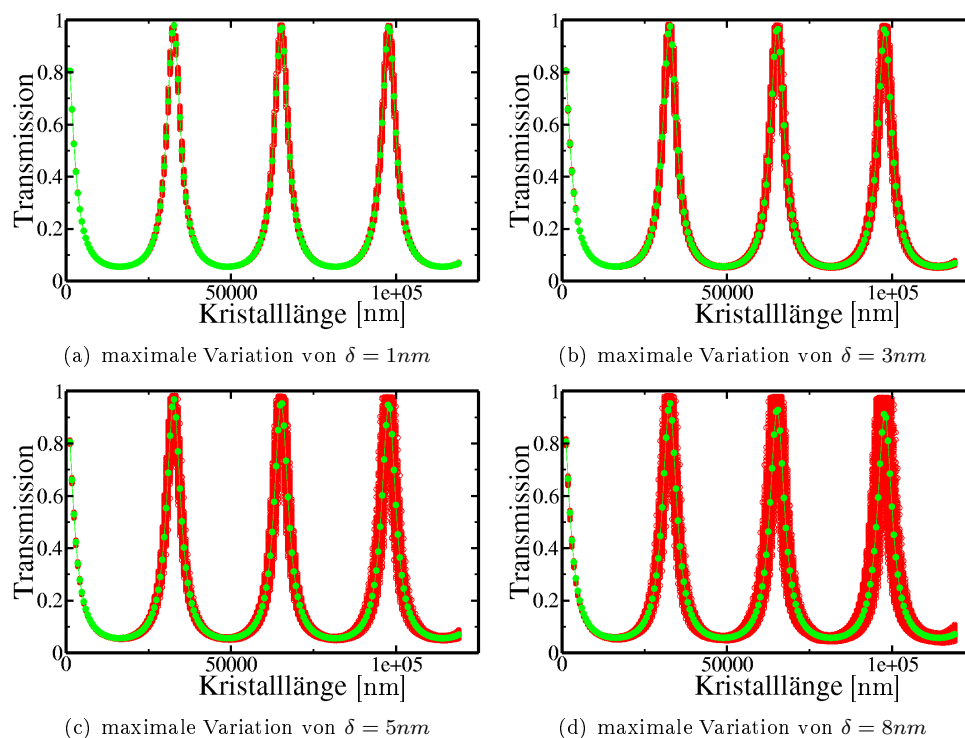


Abbildung 5.6: Struktur III an der ersten Bandkante: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  bei Unordnung in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszelle für TE-Polarisation. Die roten Punkte entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Selbst bei einer Variationen von  $\delta = 5nm$  ist die Auffächerung der berechneten Transmissionsdaten gering.

Bragg-Reflexion nur leicht gestört, da der sie hauptsächlich bedingende Parameter die Einheitszellenlänge ist. Die Auffächerung der berechneten Daten ist daher selbst bei einer Variationsstärke von  $5nm$  gering und der Verlauf der Fabry-Perot-Oszillationen wird kaum gestört.

Im Gegensatz dazu ist das Verhalten der berechneten Transmissionswerte an der zweiten Bandkante zu sehen. Dort ist schon bei  $1nm$  eine stärkere Auffächerung zu erkennen, als sie im ersten Band bei  $5nm$  zu sehen ist. Mit zunehmender Variationsstärke nimmt die Auffächerung noch weiter zu. Bei einer Variation von  $5nm$  beginnen die Fabry-Perot-Maxima in einander überzugehen. Der Verlauf der Fabry-Perot-Oszillationen ist zerstört und es können keine Vorhersage über die zu erwartende Transmission gemacht werden. Die Erklärung für das starke Auffächern und der damit einhergehende Verlust der Fabry-Perot-Oszillationen ist, dass durch die Unordnung bei

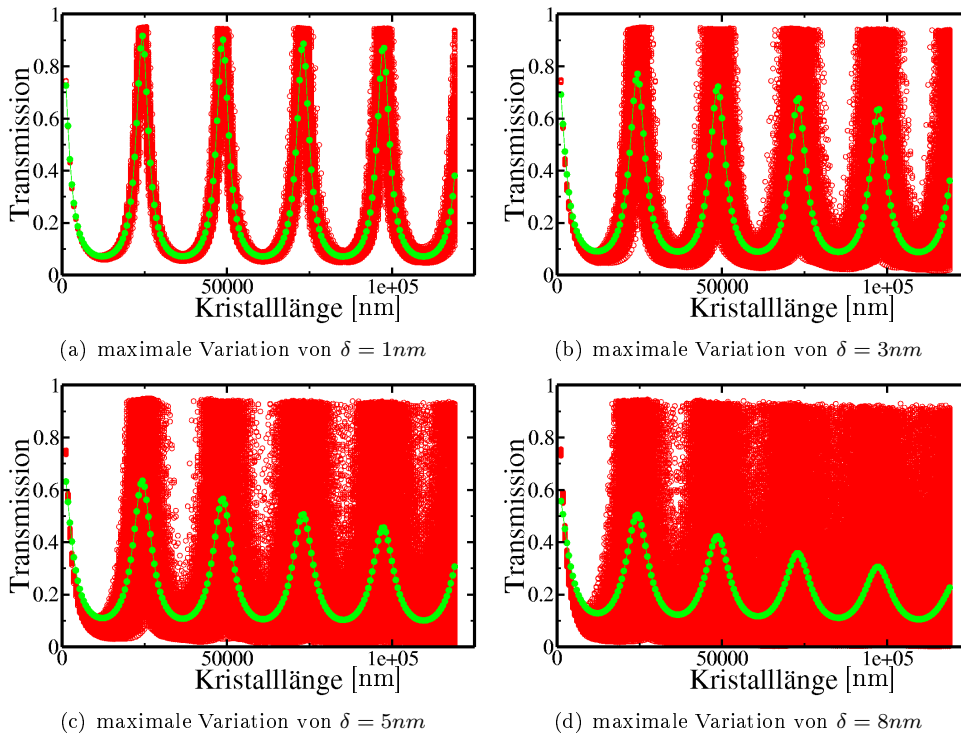


Abbildung 5.7: Struktur III an der zweiten Bandkante: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  bei Unordnung in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszelle für TE-Polarisation. Die roten Punkte entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Schon bei einer Variationen von  $\delta = 1nm$  ist eine starke Auffächerung der berechneten Transmissionsdaten zu sehen.

konstanter Einheitszelle die Ätzlänge und damit auch der Abstand zwischen den einzelnen Ätzungen verändert wird. Dies sind jedoch die Parameter, welche in dem auf den Mie-Resonanzen basierenden Effekt zur Bandstrukturausbildung die entscheidende Rolle spielen. Welcher der beiden die dominantere Rolle spielt wird in den folgenden Betrachtungen aufgezeigt werden.

Die in den Graphen eingezeichneten grünen Linien geben die angepasste Kurve der effektiven Spiegelmethode an. Die daraus erhaltenen Werte der Reflexion  $R$ , des Kopplungsverlustes  $A$  sowie des Propagationsverlustes  $\gamma$  sind in Tab. 5.1 aufgeführt. Dabei ist zu beachten, dass nur das Abklingen mit der Länge des Photonischen Kristalls skaliert. Änderungen in der Transmissionskurve mit der Länge werden sich daher hauptsächlich in der Abklingkonstante bemerkbar machen. Als Vergleichswerte befinden sich in der ersten Zeile die aus der Betrachtung der einseitig unendlichen

(a) erste Bandkante

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
0	-	0.619234	0.002189723
1	1.50895e-05	0.61734	0.003057
3	3.01978e-05	0.616255	0.003312
5	6.66146e-05	0.613473	0.003936
8	1.5344e-04	0.608209	0.004882

(b) zweite Bandkante

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
0	-	0.579138	0.010705233
1	1.60964e-04	0.565428	0.015477
3	9.19335e-04	0.500643	0.045984
5	1.99102e-03	0.434518	0.08699
8	3.74548e-03	0.365905	0.138813

Tabelle 5.1: Struktur III: Tabelle der durch die Anpassung der effektiven Spiegelmethode gewonnenen effektiven Parameter für verschiedene Variationsstärken bei konstanter Einheitszelle in TE-Polarisation

Kristalle gewonnenen Werte der Reflexion  $R = |r_{cc}|^2$  und des Kopplungsverlustes  $A = 1 - R - \sqrt{|t_{cw}|^2 |t_{wc}|^2}$ .

In den Graphen von Abb. 5.6 ist deutlich zu sehen, dass die Anpassung für die erste Bandkante sehr gut mit den berechneten Werten verläuft. Dies spiegelt sich in den Werten in Tab. 5.1 wieder. Die Abklingkonstante befindet sich bis zu einer Variationsstärke von  $8\text{nm}$  im Bereich von  $10^{-5} 1/\mu\text{m}$ . Erst ab  $8\text{nm}$  Variation gelangt die Abklingkonstante in den Bereich von  $10^{-4} 1/\mu\text{m}$ , welcher an der zweiten Bandkante schon bei einer Variationsstärke von  $1\text{nm}$  erreicht wird. Die Reflexion nimmt hingegen langsam ab und erreicht eine Änderung von etwa 0,011 bei einer Variationsstärke von  $8\text{nm}$ . Im Gegensatz dazu nimmt der Kopplungsverlust langsam zu und erreicht bei  $8\text{nm}$  Variation gerade eine Änderung von etwa 0,0026. Der Anstieg des Kopplungsverlustes belegt den erwarteten Effekt der schlechteren Ein- bzw. Auskopplung und das damit einhergehende langsamere Ausbildung der Blochmode in einen ungeordneten Photonischen Kristall.

An der zweiten Bandkante ist in der angepassten Kurve eine exponentielle Abnahme der maximalen Transmissionswerte zu erkennen, siehe Abb.5.6. Der exponentielle Abfall nimmt dabei mit steigender Variationsstärke zu. Wie zuvor erklärt, weist dies auf ein Ansteigen des Abklingkonstante und damit der Propagationsverluste mit zunehmender Variationsstärke hin. Die Werte in Tab. 5.1 bestätigen dies. Die Abklingkonstante liegt bis zu einer Variationsstärke von  $3\text{nm}$  im Bereich von  $10^{-4} 1/\mu\text{m}$ . Das in den Graphen bei  $5\text{nm}$  Variationsstärke zu erkennende Ineinanderlaufen der Fabry-Perot-Maxima macht sich in der Abklingkonstante dadurch bemerkbar, dass sie sich nun im Bereich von  $10^{-3} 1/\mu\text{m}$  befindet. Die Differenz der Reflexion zum Vergleichs-

wert beträgt bei  $5nm$  Variation  $0,15$ , was um eine Zehnerpotenz höher ist als die Änderung an der ersten Bandkante bei  $8nm$  Variationsstärke. Der Kopplungsverlust weist auch eine deutliche Zunahme von etwa  $0,08$  bei  $5nm$  und sogar  $0,1$  bei  $8nm$  auf. Dies zeigt deutlich, dass die Ausbildung der Blochmode der zweiten Bandkante auf den Mie-Resonanzen basiert und daher durch die Variation der Ätzlänge mit gleichzeitig konstanter Einheitszelle empfindlich gestört wird. Da sich die Blochmode folglich nicht richtig ausbilden kann, kommt es zu den erhöhten Propagationsverluste. Der Anstieg des Kopplungsverlustes und der auftretende Propagationsverlust bedingen also einander.

### Variation der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzlänge

Im Gegensatz zum oben betrachteten Fall ist nun die Einheitszellenlänge nicht mehr konstant, daher wird eine stärkere Auffächerung der Transmissionswerte im ersten Band erwartet. In Abb. 5.8 ist dies deutlich zu sehen. Bei einer Variation von  $3nm$  sind die Fabry-Perot-Oszillationen deutlich breiter und ab  $5nm$  beginnen sie in einander überzugehen.

Im zweiten Band ist das Verhalten ähnlich dem des ersten Bandes. Auch hier sind die Fabry-Perot-Oszillationen schon bei  $3nm$  Variation deutlich verbreitert und ab  $5nm$  nicht mehr zu trennen, siehe Abb. 5.9. Die Erklärung hierfür ist, wie oben bereits angedeutet, dass die Mie-Resonanzen sehr empfindlich auf die Ätzlänge bzw. den Abstand der Ätzungen reagieren. Da in dem hier betrachteten Fall die Ätzlänge konstant gehalten wurde, ist der nun einzig verantwortliche Faktor der Abstand der Ätzungen. Eine einfache Erklärung für diesen Effekt ist die folgende. Im zweiten Band sind die Blochmoden in den Ätzungen zentriert. Diese Zentrierung ist so gut, dass kleine Störungen wenig daran ändern. Die Kopplung der einzelnen in den Ätzungen zentrierten Moden basiert auf dem Tunneln durch die dazwischenliegende Wellenleiterabschnitte. Diese Wellenleiterabschnitte besitzen nun unterschiedliche Längen. Offensichtlich sind diese Längen genau der entscheidende Faktor, welche eine resonante Kopplung der einzelnen Mie-Resonanzen ermöglichen.

Die in den Graphen eingezeichneten Anpassungen zeigen nun im Gegensatz zu dem vorher betrachteten Fall eine deutliche Verbreiterung. Dies kommt daher, dass in dem hier betrachteten Fall die Einheitszelle nicht mehr konstant ist. Somit entfällt die Diskretisierung in der zur Anpassung verwendeten Formel und es treten weitere sehr räumlich schnelle Oszillationen auf, welche in den Graphen eine scheinbare Verbreiterung der angepassten Kurve bewirken.

In Tab. 5.2 sind die durch die Anpassungskurve erhaltenen effektiven Parameter aufgelistet. Die in der Graphen zu erkennende Auffächerung bei der ersten Bandkante zeigt sich in den effektiven Parametern dadurch, dass bei einer Variationsstärke von  $1nm$  die Abklingkonstante im Bereich von  $10^{-4} 1/\mu m$  liegt, also um eine Zehnerpotenz größer ist als bei der Unordnung mit konstanter Einheitszellenlänge. Auch in der Reflexion und dem Kopplungsverlust treten hier größere Differenzen zum Referenzwert auf, als es in der Betrachtung mit konstanter Einheitszelle der Fall war. Wiederum ist eine gegenseitige Beeinflussung zwischen der Änderung des Kopplungsverlustes und der Abklingkonstante zu sehen. Ab einer Variationsstärke von  $3nm$  liegt die Abkling-

konstante im Bereich von  $10^{-3} 1/\mu\text{m}$ . Bei der Unordnung mit konstanter Einheitszelle an der zweiten Bandkante bedeutete eine Abklingkonstante in diesem Bereich, dass die Fabry-Perot-Maxima in einander laufen. Hier ist dies allerdings erst bei einer Variationsstärke von  $5\text{nm}$  der Fall. Um dieses Verhalten zu erklären, muss zunächst genauer geschildert werden, was die Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen bedeutet und wie die Abklingkonstante dadurch beeinflusst wird.

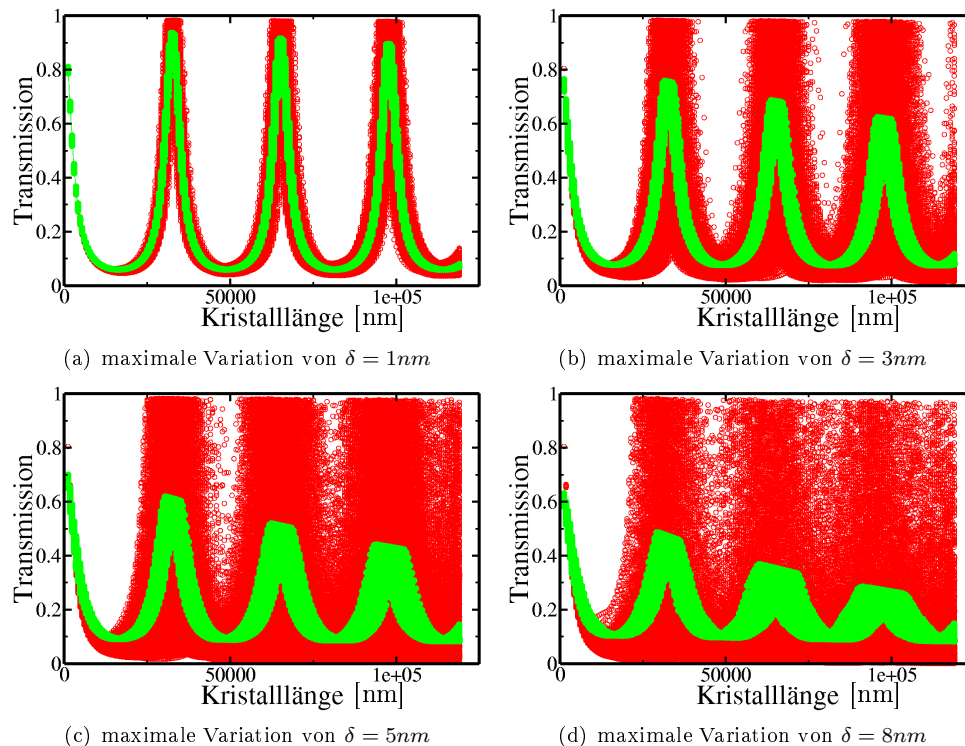


Abbildung 5.8: Struktur III an der ersten Bandkante: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $\text{nm}$  bei Unordnung der Einheitszelllänge mit konstanter Ätzlänge für TE-Polarisation. Die roten Punkte entsprechen den berechneten Werten, die grün gepunktete Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Bei einer Variationen von  $\delta = 5\text{nm}$  beginnen die Fabry-Perot-Oszillationen der berechneten Transmissionsdaten zu verwischen. Die angepasste Kurve der effektiven Spiegelmethode ist verbreitert, da die Diskretisierung durch eine konstante Einheitszelllänge entfällt.

Die in den Graphen zu sehende Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen beruht auf einer breiter gestreuten Verteilung der Transmissionswerte um den Idealwert. Dies wird in Abschnitt 5.4 genauer aufgezeigt werden. Beim Anpassen wird die Abkling-

konstante so gewählt, dass die Kurve den Mittelwerten der Verteilungen folgt. Der Unterschied zwischen dem Fall von  $3nm$  Variation, bei welchen die Fabry-Perot-Maxima noch nicht ineinander laufen und dem Fall bei welchem dies zutrifft, ist daher folgendermaßen zu erklären. Im ersteren Fall wird die Abklingkonstante durch die Mittelwerte der Minima und Maxima gleichermaßen beeinflusst. Dadurch kommt es zu einem effektiven Abklingen, welches ihren Ursprung in einer Verschiebung der Maxima und Minima hat. Für den Fall, dass die Fabry-Perot-Maxima ineinander laufen, sind eben diese Maxima durch die Variationen stärker beeinflusst als die Fabry-Perot-Minima. Dadurch folgt eine effektive Verbreiterung der Transmissionswerte und eine Verschie-

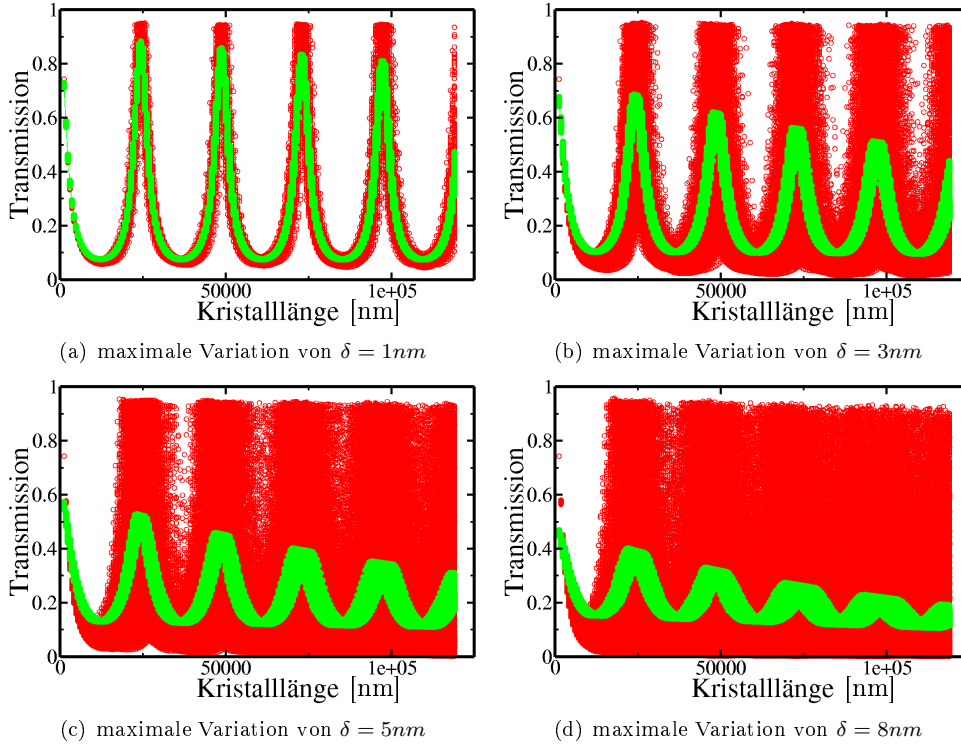


Abbildung 5.9: Struktur III an der zweiten Bandkante: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  bei Unordnung der Einheitszelllänge mit konstanter Ätzlänge für TE-Polarisation. Die roten Punkte entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Bei einer Variationen von  $\delta = 5nm$  beginnen die Fabry-Perot-Oszillationen der berechneten Transmissionsdaten zu verwischen. Die angepasste Kurve der effektiven Spiegelmethode ist verbreitert, da die Diskretisierung durch eine konstante Einheitszelllänge entfällt.

bung des Mittelwertes der Transmissionsmaxima nach unten. Dies bewirkt demnach die Erhöhung der Abklingkonstante. Aus dieser Ausführung ist zu erkennen, dass die Abklingkonstante ein gutes Maß für das effektive Abklingen der Transmissionswerte ist. Sollte sich die Abklingkonstante oberhalb eines Schwellenwertes befinden, ist das Transmissionsmaxima nicht mehr eindeutig erkennbar. Aufgrund der bisherigen Betrachtungen kann der Schwellenwert für diese Struktur auf eine Abklingkonstante im Bereich von  $10^{-3} \text{ 1}/\mu\text{m}$  gelegt werden.

Die zweite Bandkante verhält sich anhand der Graphen ähnlich wie im Falle der Unordnung mit konstanter Einheitszelle. In den effektiven Parametern ist jedoch zu erkennen, dass sich bei einer Variationsstärke von  $3\text{nm}$  die Abklingkonstante schon im Bereich von  $10^{-3} \text{ 1}/\mu\text{m}$  befindet, der Schwellenwert also überschritten ist. Eine genauere Betrachtung des Graphen für  $3\text{nm}$  Variation, lässt ein zunehmendes ineinanderlaufen der Fabry-Perot-Maxima mit der Kristalllänge erkennen. Dies erinnert an das in Abschnitt 5.2 aufgezeigte Verhalten des langsamen Überlappens der Grenzschichtverteilungen.

(a) erste Bandkante

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
0	-	0.619234	0.002189723
1	1.73159e-04	0.600382	0.008681
3	1.01429e-03	0.533789	0.0386
5	2.19327e-03	0.478408	0.071775
8	4.35237e-03	0.424994	0.108841

(b) zweite Bandkante

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
0	-	0.579138	0.010705233
1	3.53599e-04	0.552046	0.020883
3	1.6624e-03	0.459888	0.068988
5	3.02172e-03	0.36383	0.139072
8	5.19595e-03	0.27377	0.219569

Tabelle 5.2: Struktur III: Tabelle der durch die Anpassung der effektiven Spiegelmethode gewonnenen effektiven Parameter für verschiedene Variationsstärken bei konstanter Ätzlänge in TE-Polarisation.

### Variation der Einheitszellenlänge durch Ätzlänge

Nun sind sowohl die Einheitszellenlänge als auch die Ätzlänge nicht mehr konstant. In Abb. 5.10 sind die berechneten Transmissionswerte für die erste und in Abb. 5.11 die Werte für die zweite Bandkante dargestellt. Das erste Band verhält sich dabei ähnlich wie in dem zuvor betrachteten Fall bei konstanter Ätzlänge. Dies bestätigt wiederum, dass das erste Band durch die Bragg-Bedingung geprägt ist.

Im zweiten Band sind im Gegensatz zu den vorherigen Betrachtungen die Fabry-Perot-Maxima auch bei einer Variation von  $5nm$  deutlich zu unterscheiden. Es tritt nur eine leichte Verbreiterung der Fabry-Perot-Oszillationen auf, welche auch bei  $5nm$  geringer ist, als die im ersten Band für  $1nm$ . Die Erklärung für dieses Verhalten liegt nun darin, dass die Kopplungslänge zwischen den einzelnen Mie-Resonanzen konstant ist. Dadurch ist eine resonante Kopplung möglich. Die Nebenbedingung ist allerdings, dass die Änderung in der Ätzlänge die Zentrieren der Moden nicht wesentlich beeinflusst. Die angepasste Kurve zeigt wiederum die zuvor erklärte Verbreiterung. Im

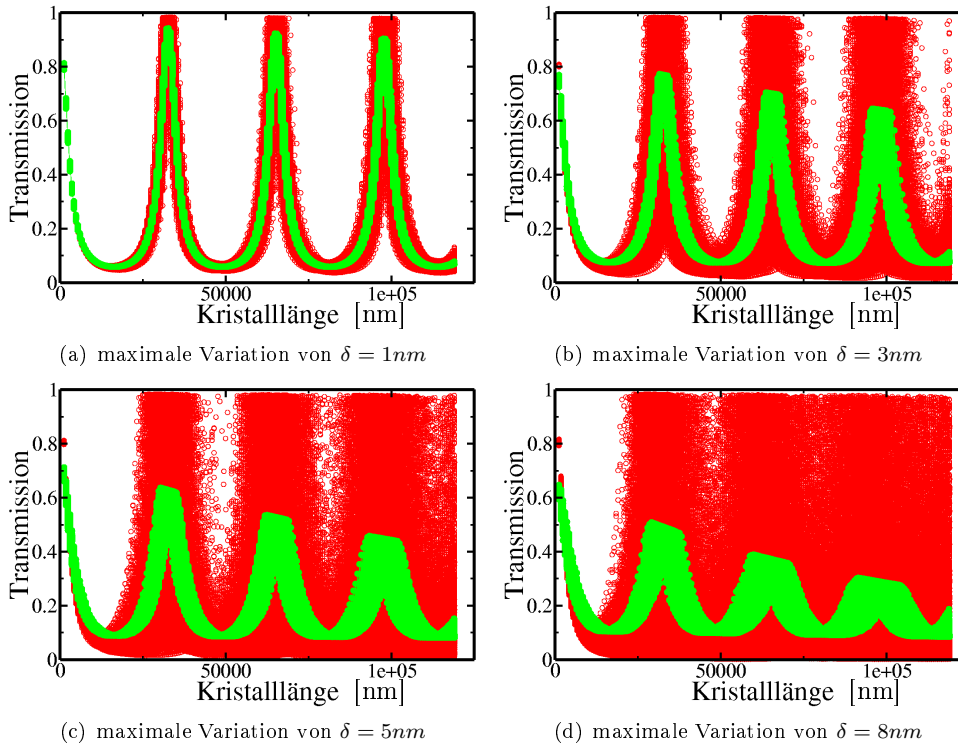


Abbildung 5.10: Struktur III an der ersten Bandkante: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  bei Unordnung der Einheitszelllänge durch Ätzlängenvariation für TE-Polarisation. Die roten Punkte entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Bei einer Variationen von  $\delta = 5nm$  beginnen die Fabry-Perot-Oszillationen der berechneten Transmissionsdaten zu verwischen. Die angepasste Kurve der effektiven Spiegelmethode ist verbreitert, da die Diskretisierung durch eine konstante Einheitszelllänge entfällt.

ersten Band spiegelt der Abfall der Kurve mit ansteigender Variation das Ansteigen



der Propagationsverluste wieder. Tab. 5.3 ist zu entnehmen, dass die diesen Propagationsverlust bedingende Abklingkonstante etwas geringer ist, als in der Unordnung mit variabler Einheitszellenlänge aber konstanter Ätzlänge. Sie befindet sich bei einer Variationsstärke von  $3nm$  knapp unter dem Schwellenwert von  $10^{-3} 1/\mu m$ . Auch die Reflexion und der Kopplungsverlust weisen für  $3nm$  eine geringere Differenz zu ihren Referenzwerten auf, als im zuvor betrachteten Fall.

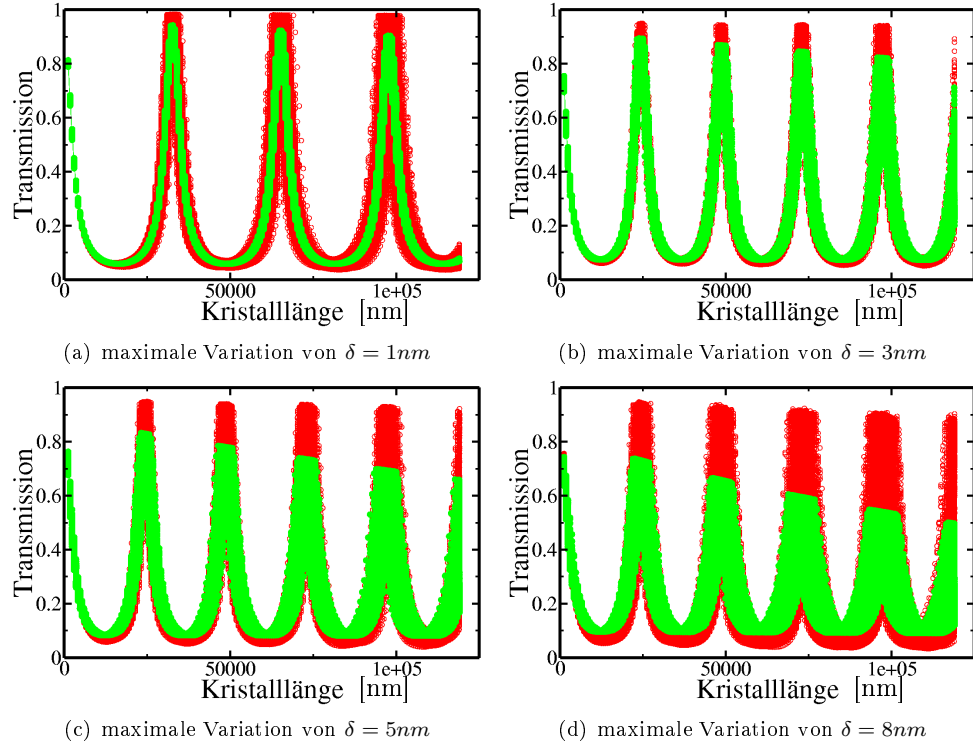


Abbildung 5.11: Struktur III an der zweiten Bandkante: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  bei Unordnung der Einheitszellenlänge durch Ätzlängenvariation für TE-Polarisation. Die roten Punkte entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Selbst bei einer Variationen von  $\delta = 5nm$  ist nur eine geringe Auffächerung in den Transmissionsdaten zu sehen. Die angepasste Kurve der effektiven Spiegelmethode ist verbreitert, da die Diskretisierung durch eine konstante Einheitszellenlänge entfällt.

Im zweiten Band ist eine sehr gute Übereinstimmung der angepassten Kurve und der berechneten Daten für  $1nm$  Variation zu erkennen. Mit steigender Variation weist die angepasste Kurve jedoch einen sichtbaren Abfall der Fabry-Perot-Maxima auf. Dieses

Abklingen lässt sich wiederum auf den Abfall der mittleren Transmission zurückführen. In den effektiven Parametern ist das Ansteigen der Abklingkonstante deutlich zu erkennen. Für eine Variationsstärke von  $1nm$  liegt sie im Bereich von  $10^{-5} 1/\mu m$ , bei  $8nm$  Variation hingegen bei  $10^{-3} 1/\mu m$ . Die Differenzen der Reflexion bzw. des Kopplungsverlustes zu ihren Referenz-werten weisen ebenfalls einen sichtbaren Anstieg auf. Trotzdem liegen die Werte unterhalb derjenigen der vorhergehenden Betrachtungen an der zweiten Bandkante und bestätigen damit das wesentlich robustere Verhalten der Transmissionskurve gegenüber der Unordnung bei Variationen der Einheitszellenlänge durch die Ätzlänge.

(a) erste Bandkante

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu m$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
0	-	0.619234	0.002189723
1	1.63161e-04	0.60341	0.007469
3	9.15145e-04	0.540561	0.035986
5	2.08766e-03	0.488009	0.065522
8	4.10724e-03	0.428497	0.102237

(b) zweite Bandkante

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu m$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
0	-	0.579138	0.010705233
1	7.46633e-05	0.577821	0.010824
3	3.36871e-04	0.556311	0.018369
5	8.10863e-04	0.52922	0.028171
8	1.60485e-03	0.486701	0.04946

Tabelle 5.3: Struktur III: Tabelle der durch die Anpassung der effektiven Spiegelmethode gewonnenen effektiven Parameter für verschiedene Variationsstärken mit Einheitszellen- und Ätzlängenvariation in TE-Polarisation

### TM-Polarisation

Die TM-Polarisation von Struktur III zeigt ein ähnliches Verhalten, wie es in der TE-Polarisation beschrieben ist. Die Graphiken sind in Anhang B aufgeführt.

Die berechneten Werte für Frequenzen an der ersten Bandkante bzw. zweiten Bandkante zeigen, dass bei Variationen mit konstanter Einheitszellenlänge die erste Bandkante weniger beeinflusst wird. Die Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen ist für die erste Bandkante daher auch bei einer Variation von  $5nm$  gering. Im Vergleich dazu ist die Auffächerung bei Frequenzen an der zweiten Bandkante bei Variationen von  $5nm$  doppelt so breit.

Bei Variationen in der Einheitszellenlänge aber mit konstanter Ätzlänge sind die Transmissionswerte für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante gleich betroffen. Die Auffächerung ist im Vergleich zu den Variationen mit konstanter Einheits-

zellenlänge stärker. Die Fabry-Perot-Oszillationen sind allerdings noch zu erkennen und laufen nicht ineinander.

Variieren hingegen die Einheitszelle und die Ätzlänge, so weisen die Berechnungen für Frequenzen an der zweiten Bandkante eine geringere Beeinflussung auf. Die angepasste Kurve zeigt wiederum die zuvor erklärte Verbreiterung auf. Sie passt sich dadurch den Berechneten Werten des zweiten Bandes sehr gut an. Ferner ist, wie in der TE-Polarisation schon erklärt, in der angepassten Kurve der Abfall des Transmissionsmaximums zu erkennen.

Ein qualitativer Vergleich zwischen den beiden Polarisationen lässt erkennen, dass die TM-Polarisation weniger stark auf die Variationen reagiert. Dies ist einerseits in der geringeren Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen zu sehen. Andererseits ist es in der Anpassungskurve zu erkennen. Diese zeigen einen geringeren Abfall, als es bei der TE-Polarisation der Fall ist. Anhand der in Anhang B aufgeführten Werte der effektiven Parameter, kann dieser qualitative Vergleich verifiziert werden. Die Abklingkonstante ist für die TM-Polarisation in allen Unordnungen für  $1nm$  Variation im Bereich von  $10^{-9} 1/\mu m$  bzw.  $10^{-10} 1/\mu m$  zu finden und damit um Zehnerpotenzen geringer als für die TE-Polarisation. Bei steigender Variation nähern sich die Werte der Abklingkonstanten für beide Polarisationen jedoch an. Demgegenüber ist der Kopplungsverlust zu sehen. Dieser liegt bei der TE-Polarisation für  $1nm$  Variation in allen Unordnungen unterhalb der Werte der TM-Polarisation. Dies ist jedoch nicht verwunderlich, da der Kopplungsverlust dafür sorgt, dass die Transmissionskurve als ganzes verschoben wird und damit die maximal mögliche Transmission nicht mehr eins beträgt. Schon in den Transmissionsberechnungen der ungestörten Systeme, siehe 4.11, war dieser Effekt in der TM-Polarisation zu sehen. Daher ist der höhere Kopplungsverlust der TM-Polarisation bei Variationen von  $1nm$  nicht auf die Unordnung zurückzuführen. Die TM-Polarisation ist folglich gegenüber klein Variationen im Bereich von  $1nm$  bis  $2nm$  bei allen drei betrachteten Unordnungsarten robuster als die TE-Polarisation.

### 5.3.1 Vergleich der verschiedenen Strukturen

Ein Vergleich der betrachteten Strukturen unter den verschiedenen Unordnungen für beide Polarisationen zeigt, dass sich Struktur I und Struktur III qualitativ gleich verhalten. Der Schluss daraus ist, dass ein tieferes Ätzen keine qualitativen Änderungen im Verhalten bringt. Anhand der effektiven Parameter, welche für Struktur I in TM-Polarisation in Anhang D und in TE-Polarisation in Anhang C zu finden sind, kann auch ein quantitativer Vergleich durchgeführt werden.

Dieser zeigt, dass die beiden Strukturen in der TE-Polarisation fast dieselben Werte aufweisen. Leichte Unterschiede sind bei der Unordnung mit Einheitszellenlängen- und Ätzlängenvariation an der zweiten Bandkante zu erkennen. Dabei weist Struktur III geringere Abklingkonstanten auf. Dies ist auf die bessere Lokalisierung der Mie-Resonanzen in den Ätzungen zurückzuführen. Anders sieht das in der TM-Polarisation aus. Dort zeigt Struktur I mit zunehmender Variation die geringeren Abklingkonstanten auf.

Besonders interessant ist das im Folgenden zu betrachtende Verhalten von Struktur

II. Darin sind in der TE-Polarisation ebenso wie in der TM-Polarisation unterschiedliche Verhalten, bezogen auf die in Struktur III aufgezeigten, zu erkennen. In Anhang F bzw. Anhang E sind die dazu gehörigen Graphen und Wertetabellen der effektiven Parameter aufgeführt.

### TE-Polarisation von Struktur II

In der TE-Polarisation verhält sich Struktur II bei Variationen mit konstanter Einheitszellenlänge auf die Weise, welche schon in Struktur III beschrieben wurde. Das erste Band ist nicht so anfällig auf die Störungen, da die Bragg-Bedingung erfüllt bleibt. Das zweite Band hingegen weist eine sichtbare Auffächerung in den Fabry-Perot-Oszillationen auf. Die ebenso in Anhang E aufgeführten Tabellen der effektiven Parameter zeigen für die erste Bandkante Abklingkonstanten im Bereich von  $10^{-5} \text{ 1}/\mu\text{m}$  und eine nahezu konstante Reflexion sowie Kopplungsverlust auf. Dies ist auf die im Graphen ersichtliche geringer Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen zurückzuführen. Die Auffächerung im zweiten Band wird jedoch nicht von den effektiven Parametern widerspiegelt. Die Abklingkonstante befindet sich im Bereich von  $10^{-9} \text{ 1}/\mu\text{m}$ . Die geringe Abklingkonstante ist folgendermaßen zu erklären. Die Berechnung der Transmissionswerte wurde nicht für eine ganze Fabry-Perot-Oszillation durchgeführt. Dadurch wird die anzupassende Kurve hauptsächlich durch das Minimum der Fabry-Perot-Oszillation bestimmt, welches durch die Unordnung wesentlich weniger beeinflusst wird, als das Transmissionsmaxima. Die effektiven Parameter sind daher erst ab einer besser noch mehreren Fabry-Perot-Oszillationen aussagekräftig.

Auch bei Variationen der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzlänge verhält sich Struktur II gemäß den vorherigen Betrachtungen von Struktur I und Struktur III. Beide Bänder werden von dieser Unordnung gleich betroffen und zeigen daher eine starke Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen. Die Anpassungskurve mit Hilfe der effektiven Spiegelmethode liefert ein sichtbares Abklingen. Dies zeigt sich auch in den effektiven Parametern. Im Gegensatz zu den Unordnung mit konstanten Einheitszellen ist hier die Diskretisierung der Anpassungskurve aufgehoben. Dadurch kommt es zu einer Auffächerung derselben, was dazu führt, dass die Auffächerungen der Transmissionsdaten besser berücksichtigt werden können. Dies wiederum hat zur Folge, dass die effektiven Parameter den in den berechneten Transmissionswerten ersichtlichen Verlauf besser widerspiegeln.

Bei der gleichzeitigen Variation von Einheitszellenlänge und Ätzlänge tritt nun ein neues Verhalten auf. Im Gegensatz zu Struktur III, in welcher das zweite Band eine geringe Auffächerung aufgewiesen hat und die Anpassungskurve sehr gut mit den berechneten Daten übereingestimmt hat, liegt hier ein anderes Verhalten vor. Die beiden Bänder von Struktur II zeigen dasselbe Verhalten, welches schon bei der Variation der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzlänge beobachtet wurde. Ebenso verhält es sich mit den aufgelisteten effektiven Parametern. Offensichtlich werden die Mie-Resonanzen in Struktur II durch alle Variationsarten gestört.

Eine Erklärung für die starke Auffächerung der Fabry-Perot-Maxima an der zweiten Bandkante für die Unordnung mit variabler Einheitszellenlänge und Ätzlänge ist die folgende. Die Mie-Resonanzen spielen auch für das zweite Band eine untergeordnete

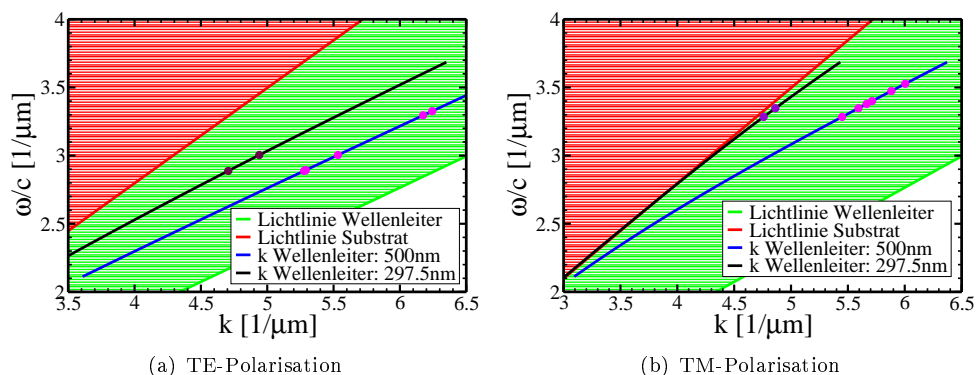


Abbildung 5.12: Wellenleitermoden für (a) TE- und (b) TM-Polarisation. Die schwarze Linie entspricht einem Wellenleiter mit  $297,5\text{nm}$  Höhe, was der Höhe des ungeätzten Teils von Struktur II entspricht. Die auf der Linie zu findenden Punkte entsprechen der ersten und zweiten Bandkante von Struktur II. Die blaue Linie entspricht einem Wellenleiter mit  $500\text{nm}$  Höhe. Dies ist der den Strukturen zugrunde liegende Wellenleiter. Die auf der Linie zu findenden Punkte entsprechen den Bandkanten der drei betrachteten Strukturen. Ferner sind in den Graphen die Lichtkegel des Substrates (rot linierte Fläche) und des Wellenleitermaterials (grün linierte Fläche) eingezeichnet. Die geführte Moden sich innerhalb der grün linierten Fläche zu finden.

Rolle. Dies ist dann möglich, wenn sich die Mode im durch die Ätzung unberührten unteren Teil des Wellenleiters befindet. Eine Lokalisation der Mode, welche für das Auftreten der Mie-Resonanzen nötig ist, würde dann nicht statt finden.

Eine Analyse der geführten Moden eines Wellenleiters mit der Höhe des ungeätzten Teiles der Kristallstruktur zeigt, dass diese für Frequenzen an der ersten und zweiten Bandkante sowohl für TE- als auf für TM-Polarisation geführte Moden aufweisen, siehe Abb. 5.12. Somit ist ein Abtauchen der Wellenleitermode in den unteren Teil möglich. Durch die periodische Anordnung im oberen Teil kommt es jedoch trotzdem zu Interferenzen, welche eine Blochmodenstruktur erzeugen. Diesmal basiert sie jedoch ausschließlich auf der Bragg-Reflexion.

Das Verhalten der Moden innerhalb eines idealen Photonischen Kristalls ist in den Intensitätsplots der E-Felder in Abb. 5.13 noch einmal veranschaulicht. Auf der linken Seite ist die Intensitätsverteilung für die Berechnungen an der ersten Bandkante zu sehen. Es ist kein Abtauchen der Mode zu erkennen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Ausbildung der Modenstruktur im erste Band nur von der Bragg-Bedingung abhängt und die Intensitätsmaxima in den ungeätzten Abschnitten des Wellenleitermaterials zu finden sind. Auf der linken Seite ist demgegenüber die Berechnung der Feldintensitäten für das zweite Band dargestellt. Die Intensitätsmaxima befinden sich in den geätzten Abschnitten. Das Zentrum der Mode ist jedoch im unteren nicht geätz-

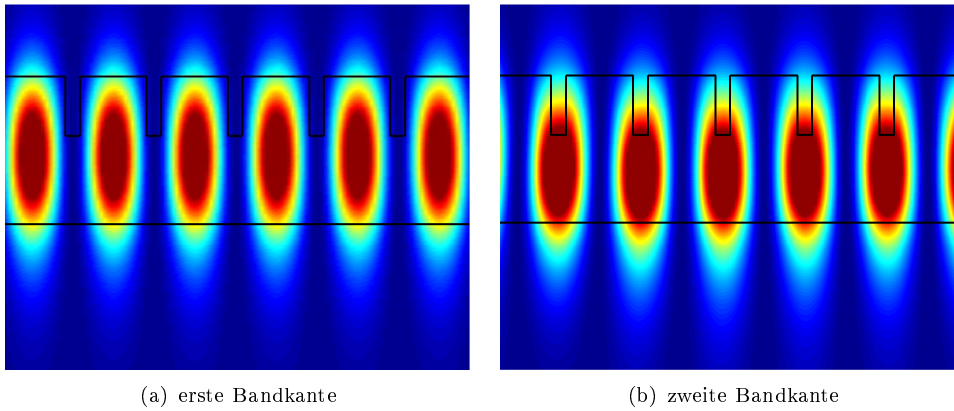


Abbildung 5.13: Struktur II: Feldintensität für das Einkoppelverhalten bei einem Fabry-Perot-Minimum der TE-Polarisation. Es ist zu sehen, dass sich die Bereiche mit maximaler Intensität für Frequenzen an der ersten Bandkante innerhalb des Wellenleitermaterials befinden. Für Frequenzen an der zweiten Bandkante liegen sie im Bereich der Ätzungen. Dadurch kommt es zu leichten Stauchungen der Mode bzw. Abtauchen der Mode in das Wellenleitermaterial.

ten Teil zu finden. Sie ist somit nach unten verschoben, also abgetaucht. Diese kurze Betrachtung untermauert somit die durch die Transmissionsberechnungen erhaltenen Ergebnisse und die Interpretation derselben. Bleibt nun noch zu klären, wie sich die TM-Polarisation verhält.

### TM-Polarisation in Struktur II

Für die TM-Polarisation tritt schon in der Variation bei konstanter Einheitszellenlänge eine Besonderheit auf. Das zweite Bandkante ist in diesem Fall weniger von der Variation betroffen als das erste und zeigt daher eine geringere Auffächerung. In den in den Tabellen aufgeführten effektiven Parameter zeigt sich dieses Verhalten durch die Konstanz der Werte. Für beide Frequenzen sind nahezu konstante Werte in der Reflexion und im Kopplungsverlust zu erkennen. Der Unterschied der beiden Bandkanten liegt in der Abklingkonstante. Diese weist für die erste Bandkante einen Abfall von  $10^{-9} \text{ 1}/\mu\text{m}$  bei einer Variationsstärke von  $1\text{nm}$  und  $10^{-4} \text{ 1}/\mu\text{m}$  bei  $8\text{nm}$  Variation auf. Dies ist auf die zunehmende Auffächerung zurückzuführen ist. Die Abklingkonstante für die zweiten Bandkante bleibt demgegenüber im Bereich von  $10^{-5} \text{ 1}/\mu\text{m}$ .

Dieser Effekt kann folgendermaßen erklärt werden, auch in der TM-Polarisation ist das Abtauchen der Mode in den unteren Teil des Wellenleiters möglich. Im Unterschied zur TE-Polarisation jedoch leckt die Blochmode der TM-Polarisation für das zweite Band wesentlich weniger in die Ätzungen, siehe Abb. 5.14. Dadurch kommt es zu weniger Streuverlusten und mehr Stabilität gegenüber kleinen Störungen, sofern die

Einheitszellenlänge konstant bleibt.

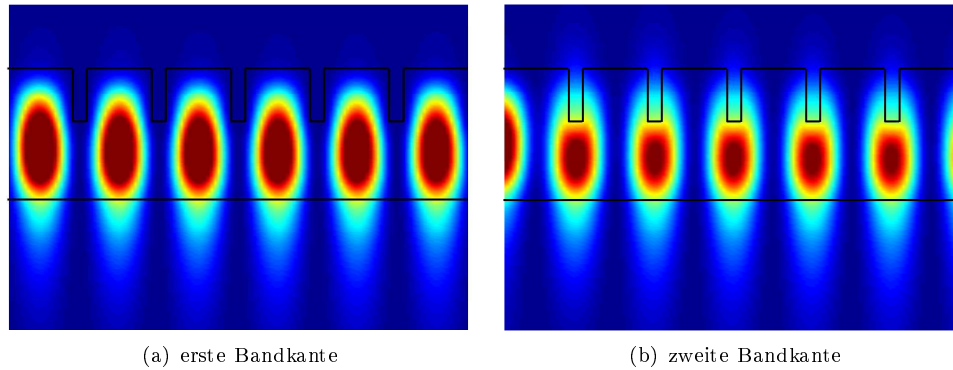


Abbildung 5.14: Struktur II: Feldintensität für das Einkoppelverhalten bei einem Fabry-Perot-Minimum der TM-Polarisation. Es ist zu sehen, dass sich die Bereiche mit maximaler Intensität für Frequenzen an der ersten Bandkante innerhalb des Wellenleitermaterials befinden. Für Frequenzen an der zweiten Bandkante liegen sie im Bereich der Ätzungen. Dadurch kommt es zu Stauchungen der Mode bzw. Abtauchen der Mode in das Wellenleitermaterial. Verglichen mit der TE-Polarisation ist das Abtauchen der Mode wesentlich deutlicher zu erkennen und die Zentrierung im Wellenleitermaterial dementsprechend besser.

Die Variation in der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzlänge beeinflusst die Berechnungen der Transmission für die erste wie für die zweite Bandkante ähnlich stark. Die Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen der zweiten Bandkante sind dabei jedoch etwas geringer als die der ersten. Dies lässt sich auch in der Abklingkonstante ablesen. Der relative Anstieg der Abklingkonstante der ersten Bandkante ist größer als der der zweiten.

Auch bei der Variation in der Einheitszellenlänge bei variabler Ätzlänge ist der Einfluss auf die Berechnungen für die erste und zweite Bandkante ähnlich. Dieser Effekt trat schon in der TE-Polarisation von Struktur II auf und wurde auf die fehlenden Mie-Resonanzen zurückgeführt, welches die Folge des Abtauchens der Mode ist. Wiederum ist die in Struktur III beobachtete Robustheit der Fabry-Perot-Oszillationen für die zweite Bandkante in Struktur II nicht so ausgeprägt. Die zweite Bandkante weist zwar eine geringere Auffächerung auf, sie ist jedoch mit der zu vergleichen, die bei Variationen in der Einheitszellenlänge bei konstanter Ätzlänge entstehen. Dies ist auch durch einen Vergleich der effektiven Parameter zu erkennen.

### 5.3.2 Verwertbarkeitsanalyse der verschiedenen Strukturen

Mit Hilfe der berechneten Daten kann nun eine Verwendbarkeitsanalyse der Strukturen durchgeführt werden. Diese Analyse richtet sich nach der angepassten Kurve der

effektiven Spiegelmethode. Dabei ist zu beachten, dass die genaue Verteilung der Transmissionswerte bei dieser Betrachtung nicht miteinbezogen wird, sondern nur über eine Mittelung berücksichtigt wird. Die Analyse dient daher nur einer ersten Abschätzung. Als Beispiel einer Verwendbarkeitsanalyse wird eine Transmission von mindestens 80% in TE-Polarisation vorausgesetzt, wobei die Kristalllänge in dem berechneten Bereich von 50 – 200 Einheitszellen liegen soll. Gesucht sind demnach die maximal möglichen Variationen für die drei betrachteten Strukturen, welche eine Herstellbarkeit mit diesen Anforderungen zu ermöglichen.

Für Struktur III sind bei der Unordnung mit konstanter Einheitszellenlänge nur  $1nm$  Variationsstärke an der zweiten Bandkante erlaubt. Für die erste Bandkante können jedoch bis zu  $8nm$  Variationsstärke toleriert werden. Bei den anderen Unordnungsarten sind für beide Bandkanten nur  $1nm$  Variation erlaubt. Eine Ausnahme bildet die zweite Bandkante bei der Unordnung mit Einheitszellen und Ätzlängenvariation. Bei dieser sind bis zu  $3nm$  Variationen möglich, solange die Kristalllänge unter  $1 \cdot 10^5 nm$  bleibt.

Struktur I kann für die erste Bandkante bei einer Unordnung mit konstanter Einheitszellenlänge Variationsstärken von bis zu  $8nm$  tolerieren. An der zweiten Bandkante jedoch nur  $1nm$ . Für die anderen Unordnungen kann maximal  $1nm$  Variation zugelassen werden. Im Falle der Unordnung mit Einheitszellenvariation bei konstanter Ätzlänge sind Variationen von  $1nm$  an der zweiten Bandkanten sogar nicht mehr vertretbar.

Für Struktur II entfällt die zweite Bandkante, da es kein Fabry-Perot-Maximum über 50 Einheitszellen aufweist. Die erste Bandkante erweist sich für Unordnungen mit konstanter Einheitszelle als sehr robust und kann Variationen bis zu  $8nm$  tolerieren. Bei den anderen zwei Unordnungsarten sollten nur Variationen von  $1nm$  auftreten um eine Transmission von über 80% zu erzielen. Bei  $3nm$  Variation liegt die Anpassungskurve zwar stellenweise oberhalb der 80%, die Verbreiterung der Kurve weist aber auf eine deutliche Streuung der Transmissionswerte hin.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass Variationen von  $1nm$  in allen Strukturen und an beiden Bandkanten tolerabel sind. Höhere Variationen sind für die erste Bandkante bei Unordnungen mit konstanter Einheitszelle ebenso in allen drei Strukturen möglich. Bei Unordnungen mit Einheitszellen- und Ätzlängenvariation ist die zweite Bandkante zu bevorzugen, wodurch eventuell ebenfalls höhere Toleranzwerte ermöglicht werden. Mit einer solchen Abschätzung kann also im Vorfeld die Möglichkeit der Herstellung eines Photonischen Kristalls geklärt werden.



## 5.4 Statistiken der Transmissionsdaten

Im Folgenden wird eine qualitative Analyse der statistischen Verteilung der Transmissionswerten bei vorgegebenen Einheitszellen betrachtet. Dazu wird die Unordnung in der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge herangezogen werden. Die beiden anderen Unordnungen besitzen eine Variation in der Einheitszelle, wodurch trotz einer festen Anzahl von Einheitszellen eine Streuung der Transmissionswerte über einen Längenbereich eintritt. Dies lässt sich nur in einer zweidimensionalen Häufigkeitsverteilung darstellen. Das qualitative Verhalten der Transmission ist folglich anhand der Unordnung in der Ätzlänge bei konstanter Einheitszelle besser darzustellen. Die Kristalllänge bleibt hier bei vorgegebener Einheitszellenzahl gleich. Daher können die Transmissionswerte in einer eindimensionalen Häufigkeitsverteilung angegeben werden.

Zur genaueren Analyse wurden die Einheitszellen mit Transmissionsmaxima und Transmissionsminima betrachtet. Die erhaltenen Daten werden anhand von Struktur III vorgestellt und erläutert. Für die Abszisse wurde dabei, aufgrund der selbstmittelnden Eigenschaften, der Logarithmus der Transmission gewählt. Darüber ist die Häufigkeit der einzelnen Werte aufgetragen.

### TE-Polarisation: erstes Band

In Abb. 5.15 sind die Häufigkeitsverteilungen des Logarithmus der Transmissionswerte für das erste Band in TE-Polarisation aufgezeigt. Die schwarzen Linien repräsentiert darin eine Variation von  $1nm$ , rot entsprechen  $3nm$ , grün  $5nm$  und blau  $8nm$ .

Für das erste Fabry-Perot-Minimum bei Einheitszelle 27 ist eine Normalverteilung der Häufigkeit der Logarithmen der Transmissionswerte für alle Variationen zu erkennen. Der Unterschied liegt dabei in der Breite der Verteilung. Diese nimmt mit steigender Variation zu. Dies entspricht der stärkeren Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen mit steigender Variation.

Der Unterschied des ersten zum zweiten Fabry-Perot-Minimum bei Einheitszelle 82 liegt ebenfalls in der Breite der Normalverteilungen. Die Breiten für das zweite Fabry-Perot-Minimum sind größer als die des ersten. Dies ist die schon in den Graphen der Transmission über der Kristalllänge erkannte Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen mit zunehmender Kristalllänge.

Das Fabry-Perot-Maximum weist hingegen einen anderen Verlauf auf. Hier ist der maximale Wert der Transmission auf eins, also der Logarithmus auf Null beschränkt. Dadurch wird die Normalverteilung der Häufigkeiten nach oben abgeschnitten. Der Unterschied der einzelnen Variationsstärken macht sich wiederum in der Breite bemerkbar. Ebenso ist es mit dem Unterschied zwischen dem ersten Fabry-Perot-Maximum bei Einheitszelle 55 und dem zweiten bei Einheitszelle 110.

Zusammenfassend kann über die Auswertung der Häufigkeitsverteilungen folgendes gesagt werden. Die Transmissionswerte sind, bezogen eine feste Kristalllänge, um einen Mittelwert zentriert. Der Verlauf der Verteilung entspricht dabei einer Normalverteilung, wobei die Variationsstärke sich in deren Breite zeigt. Es ist daher möglich durch die Anpassung einer Normalverteilung an die Häufigkeitsverteilungen der Transmissionswerte Vergleichsparameter zu erhalten. Mit Hilfe dieser Vergleichspara-

meter können darauf die unterschiedlichen Einflüsse der Unordnung für verschiedene Stärken und Kristalllängen charakterisieren werden. Dabei sind jedoch die Propagationsverluste und Kopplungsverluste sowie die Reflexion des betrachteten Systems nicht bestimmbar. Diese sind nur mittels einer Analyse der Transmissionswerte aufgetragen über die Kristalllänge zu erreichen, wie es in den vorherigen Abschnitten durchgeführt wurde.

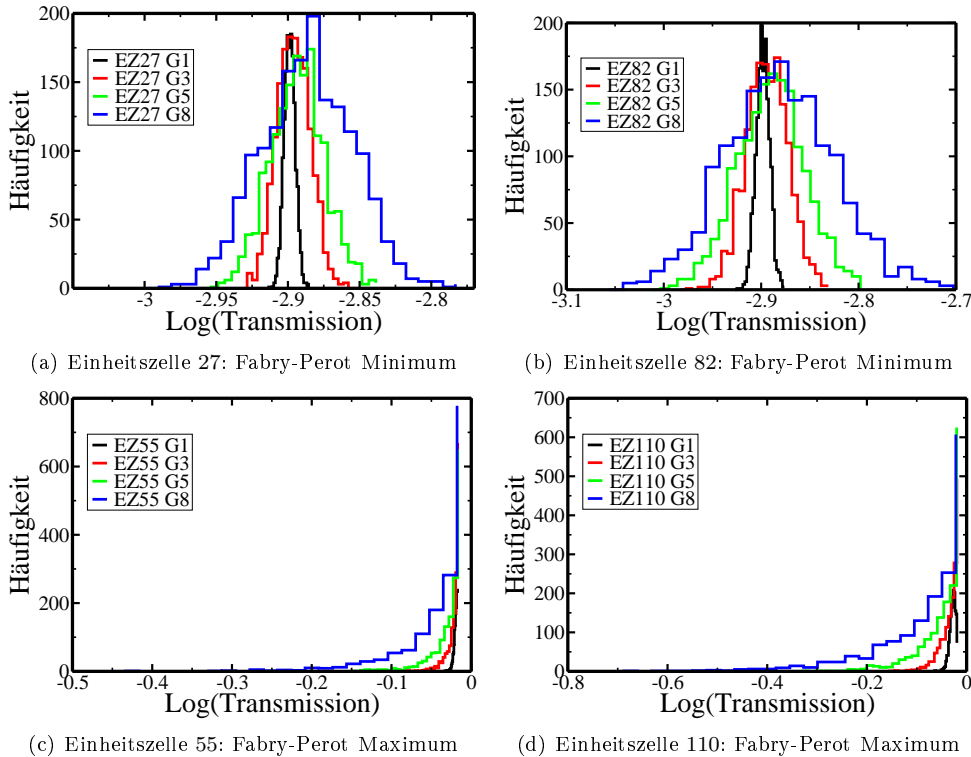


Abbildung 5.15: Struktur III an der ersten Bandkante: Statistiken der Transmission für verschiedene Variationsstärken bei konstanter Einheitszelle in TE-Polarisation. Die schwarze Linie entspricht einer Variationsstärke von  $1\text{nm}$ , rot  $3\text{nm}$ , grün  $5\text{nm}$  und blau  $8\text{nm}$ . Für die Minima sind die Transmissionswerte normalverteilt. Die Breite der Verteilung ist jedoch von der Stärke der Variation abhängig. Die Maxima weisen hingegen nur eine Hälfte der Normalverteilung auf. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die maximale Wert der Transmission auf eins begrenzt ist.

Die Anpassung basiert dabei auf der impliziten Annahme, dass die Transmissionswerte einen mittleren Verlauf aufweisen, der durch die effektive Spiegelmethoden darstellbar ist. Durch die obige Betrachtung der Häufigkeitsverteilungen ist gezeigt wor-

den, dass die Transmissionswerte für eine feste Kristalllänge um einen Mittelwert zentriert sind. Daher ist eine Darstellung der Transmission über der Kristalllänge durch die Mittelwerte möglich und eine Anpassung an die Transmissionswerte mit Hilfe der effektiven Spiegelmethode vertretbar.

### TE-Polarisation: zweites Band

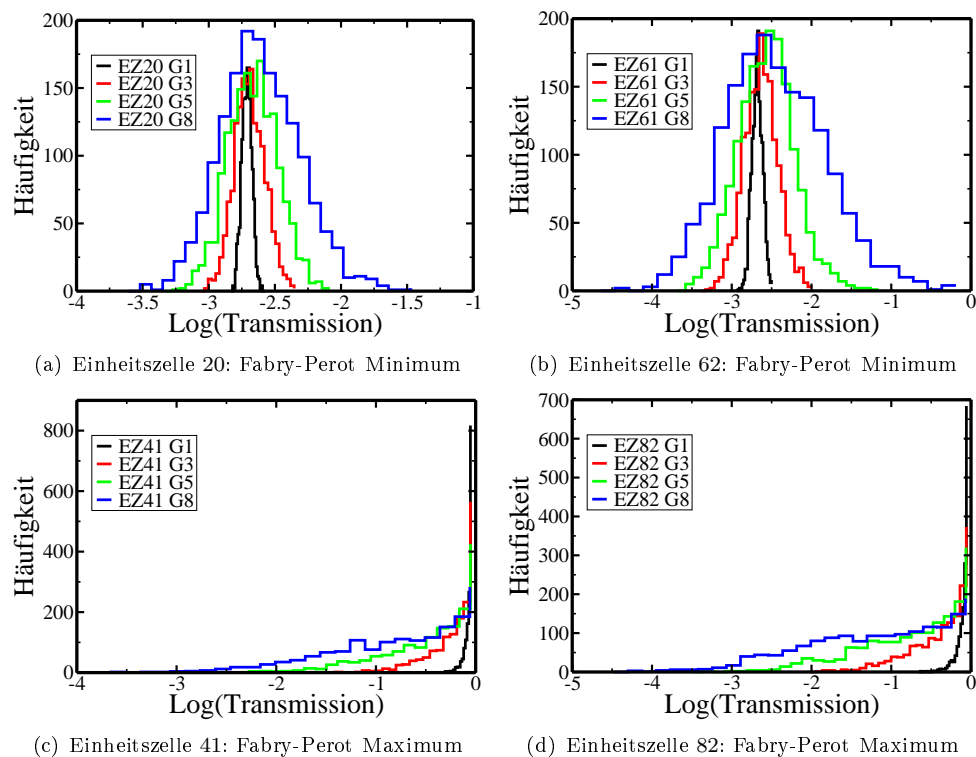


Abbildung 5.16: Struktur III an der zweiten Bandkante: Statistiken der Transmission für verschiedene Variationsstärken bei konstanter Einheitszelle in TE-Polarisation. Die schwarze Linie entspricht einer Variationsstärke von  $1\text{nm}$ , rot  $3\text{nm}$ , grün  $5\text{nm}$  und blau  $8\text{nm}$ . Für die Minima sind die Transmissionswerte normalverteilt. Die Breite der Verteilung ist jedoch von der Stärke der Variation abhängig. Die Maxima weisen, aufgrund der Begrenzung auf einen maximale Transmission von eins, nur eine Hälfte der Normalverteilung auf. Ferner ist zu sehen, dass ab einer Variationsstärke von  $5\text{nm}$  kein herausragendes Maximum der Verteilung erkennbar ist.

Die Häufigkeitsverteilungen der Logarithmen der Transmissionswerte für die zweite Bandkante sind in Abb. 5.16 aufgeführt. Wie schon an den Graphen zur ersten Band-

kante repräsentieren die schwarzen Linien eine Variation von  $1nm$ , rot  $3nm$ , grün  $5nm$  und blau  $8nm$ .

Für das Fabry-Perot-Minimum sind die Normalverteilungen deutlich breiter als in den Graphen für die erste Bandkante. Dies repräsentiert die deutlich stärkere Auffächerung der Fabry-Perot-Oszillationen für das zweite Band in den Graphen der Transmission über der Kristalllänge. Analog zum ersten Band nimmt die Breite der Verteilung einerseits mit steigender Variation und andererseits mit steigender Kristalllänge zu.

Das erste Transmissionsmaxima bei Einheitszelle 41 weist ebenso wie das zweite bei Einheitszelle 82 ab einer Variation von  $5nm$  eine flache Häufigkeitsverteilung ohne herausragendes Maxima auf. Dies bedeutet, dass die Transmissionswerte ab dieser Variationsstärke nicht mehr als zentriert aufgefasst werden können. In der Auftragung der Transmissionswerte über der Kristalllänge machte sich dies im in einanderlaufen der Fabry-Perot-Maxima bemerkbar.

Aus dieser Betrachtung lässt sich nun folgender Schluss ziehen. Das Transmissionsverhalten der Fabry-Perot-Maxima wird ab einer Variationsstärke von  $5nm$  soweit gestört, dass keine Vorhersage mehr gemacht werden kann. Im Gegensatz dazu ist dies bei den Fabry-Perot-Minima noch möglich. Die in den Graphen der Transmission über der Kristalllänge eingezeichnete Anpassungskurve berücksichtigt alle Werte. Dadurch wird eine qualitative Aussage und damit einer Charakterisierung, über die effektiven Parameter auch für Variationsstärken über  $5nm$  möglich sein. Die verwaschene Häufigkeitsverteilung der Transmissionsmaxima wird sich im Propagationsverlust zeigen, welcher dann ein deutlich sichtbares Abklingen der Anpassungskurve zur Folge hat. Bei der Betrachtung der Transmissionsdaten über der Kristalllänge in Abschnitt 5.3 wurde demnach ein Schwellenwert für die Abklingkonstante eingeführt. Eine quantitative Aussage ist demnach nur bis zu einer Variationsstärke von  $5nm$  sinnvoll, was mit den hier betrachteten Ergebnissen übereinstimmt.

## 5.5 Ungeordnete einseitig unendliche Photonische Kristalle

Nachdem die Transmissionsberechnungen der endlichen ungeordneten Photonischen Kristalle vorgestellt und interpretiert wurden, werden im Folgenden die einseitig unendliche Kristalle untersucht. Die Grundidee hierbei ist, die effektiven Parameter, in Analogie zum idealen Photonischen Kristall, direkt zu bestimmen. Dazu bedarf es im Falle der Abklingkonstante  $\gamma$  einer zusätzlichen Betrachtung, welche in Abschnitt 5.5.3 aufgezeigt wird. Zunächst wird jedoch die Ein- und Auskopplung der ungeordneten einseitig unendlichen Photonischen Kristalle untersucht werden.

### 5.5.1 Einkopplung

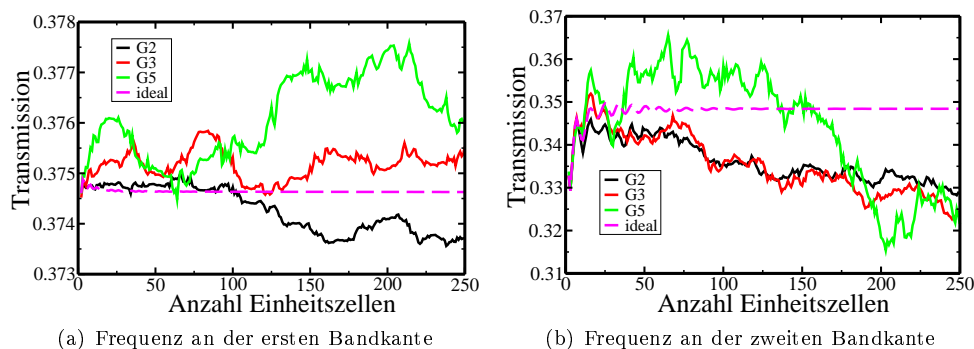


Abbildung 5.17: Transmission in Struktur I bei Variationen mit konstanter Einheitszelle in TE-Polarisation. Die gestrichelte Linie entspricht dem idealen Fall. Die durchgezogenen Linien der Mittlung über fünf hundert Transmissionswerte an der jeweiligen Einheitszelle. Die schwarze Linie zeigt die Berechnung für eine Variationsstärke von  $2nm$ , rot entspricht  $3nm$  und grün  $5nm$ . Im Gegensatz zum idealen Fall ist im ungeordneten Fall keine Konvergenz zu erkennen. Dies bedeutet, dass nicht vollständig an die Blochmode gekoppelt werden kann.

In Abb. 5.17 ist die Transmission in einen einseitig unendlichen Photonischen Kristall von Struktur I für die Unordnung in der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge gezeigt. Im linken Graph sind die berechneten Werte für die erste Bandkante dargestellt, im rechte die der zweiten Bandkante. Zu Vergleichszwecken sind in den Graphen die Werte für den idealen ungestörten Fall an der jeweiligen Bandkante durch die gestrichelte magenta-farbene Linie eingezeichnet. Für die Betrachtung der gewählten Unordnung wurden Variationen von  $2nm$  (schwarze Linie),  $3nm$  (rote Linie) und  $5nm$  (grüne Linie) angesetzt. Dabei wurden für jede Variation fünf hundert Strukturen mit zweihundert fünfzig Einheitszellen berechnet, wodurch eine gute Mittlung über die

jeweiligen Transmissionswerte gewährleistet ist. Der erhaltene Mittelwert der Transmission ist in den Graphen dann über die Anzahl der Einheitszellen aufgetragen.

Im Gegensatz zum idealen Fall ist im ungeordneten Fall keine Konvergenz zu erkennen. Dies bedeutet, dass die Blochmode sich im ungeordneten Photonischen Kristall nicht richtig ausbilden kann. Es findet also keine vollständige Einkopplung statt. Dadurch zeigen sich in der Transmission sowohl Kopplungsverluste als auch Propagationsverluste. Eine Trennung der beiden Verluste ist nur durch die in Abschnitt 5.5.3 dargestellte Methode möglich. Die fehlende Konvergenz der Transmissionswerte bedeutet ferner, dass die effektiven Parameter im Gegensatz zum idealen Fall nun von der Kristalllänge abhängen. Eine Nutzbarkeit der effektiven Spiegelmethode mit den so erhaltenen Parametern ist folglich fraglich. Um eine definitive Aussage treffen zu können, wird nun das Auskoppelverhalten betrachtet.

### 5.5.2 Auskopplung

Nach den Erkenntnissen aus dem Einkoppelverhalten wird nun das Auskoppelverhalten aus einem einseitig unendlichen Photonischen Kristall von Struktur I untersucht. In Abb. 5.18 ist die Transmission in den Wellenleiter dargestellt. Ferner ist in Abb. 5.19 die Reflexion zurück in den Kristall abgebildet. Wiederum entspricht die gestrichelte Linie dem idealen Fall. Es wurden, analog zur Einkopplung, Variationen von  $2nm$  (schwarze Linie),  $3nm$  (rote Linie) und  $5nm$  (grüne Linie) angenommen und die Mittelwerte über fünfhundert Datenpunkte pro Einheitszelle in den Graphen eingezeichnet.

In beiden Betrachtungen ist jedoch keine Konvergenz zu erkennen. Die Mittelwerte schwanken, wobei die Amplitude mit steigender Variation und Kristalllänge zunimmt. Die Schwankungen der Mittelwerte der Transmission spielen sich, vergleichbar mit dem Einkoppelverhalten, für Frequenzen an der ersten Bandkante in der dritten Nachkommastelle ab. Für Frequenzen an der zweiten Bandkante liegen sie, wiederum analog zum Einkoppelverhalten, in der zweiten Nachkommastelle. Ebenso sind die Schankungsbereiche der Mittelwerte der Reflexion für das erste Band um eine Zehnerpotenz geringer als die des zweiten Bandes. Dies entspricht dem schon in Abschnitt 5.3 aufgezeigten Effekt, dass die Unordnung in der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge einen geringeren Einfluss auf Frequenzen im ersten Band hat, als auf Frequenzen des zweiten Bandes.

Die aus den Daten gewonnenen Erkenntnisse bedeuten, dass die effektiven Parameter auch für das Auskoppeln von der Kristalllänge abhängig sind. Diese Abhängigkeit kann nicht einfach funktionell beschrieben werden. Die Konsequenz daraus ist, dass die Verwendung der effektiven Parameter zur Erzeugung der Transmissionskurve von ungeordneten endlichen Photonischen Kristalle nicht sinnvoll ist. Als Anpassung an die berechneten Transmissionswerte kann die effektive Spiegelmethode unabhängig davon verwendet werden. Die daraus erhaltenen Parameter dienen zur Kategorisierung und damit zum Abschätzen des prinzipiellen Verhaltens des Photonischen Kristalls unter einer bestimmten Unordnung. Aus den so erhaltenen Parametern lässt sich jedoch nicht auf das Verhalten der einseitig unendlichen Systeme schließen.

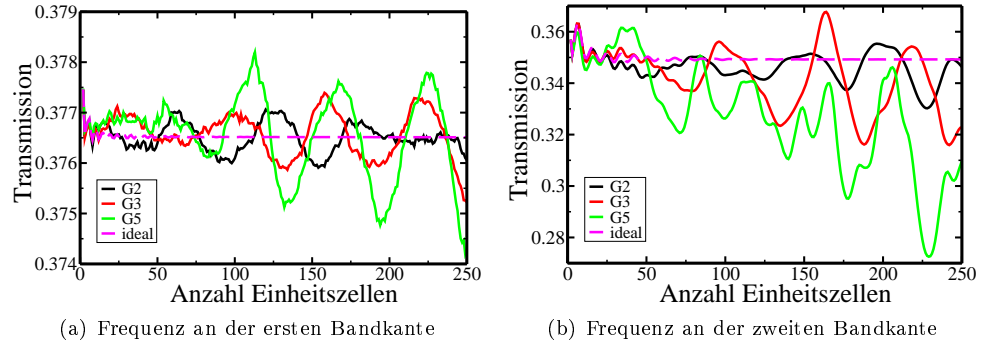


Abbildung 5.18: Transmission aus Struktur I in einen Wellenleiter bei Variation mit konstanter Einheitszellenlänge in TE-Polarisation. Die gestrichelte Linie entspricht dem idealen Fall. Die durchgezogenen Linien der Mittlung über fünfhundert Transmissionswerte an der jeweiligen Einheitszelle. Die schwarze Linie zeigt die Berechnung für eine Variationsstärke von  $2nm$ , rot entspricht  $3nm$  und grün  $5nm$ . Im Gegensatz zum idealen Fall ist im ungeordneten Fall keine Konvergenz zu erkennen. Die Schwankungen für Frequenzen an der ersten Bandkante sind jedoch deutlich geringer als die der Frequenzen an der zweiten Bandkante.

### 5.5.3 Propagationsverlust

Nachdem in den vorherigen Abschnitten aufgezeigt wurde, dass im ungeordneten Fall sowohl Kopplungs- als auch Propagationsverluste in die Transmissionswerte eingehen, soll hier eine Methode aufgezeigt werden, mit deren Hilfe die beiden Verlustarten getrennt werden können. Dazu bedarf es der Betrachtung zweier einseitig unendlichen idealen Kristallhälften, welche durch einen endlichen ungeordneten Photonischen Kristall verbunden sind. Um die Kopplungsverluste zu unterbinden bestehen alle drei Teile aus demselben System. Die in der idealen Kristallhälfte gestartete Blochmode wird auch im ungeordneten Fall weiter propagieren. Folglich werden keine Kopplungsverluste auftreten. Die durch die Unordnung entstehenden Verluste können damit als Propagationsverluste aufgefasst werden.

Zur numerischen Berechnung des System werden die einlaufende, transmittierte und reflektierte Blochmode der einseitig unendlichen Kristalle wie folgt dargestellt.

$$\vec{B}_i = \begin{pmatrix} \vec{f}_f \\ \vec{b}_f \end{pmatrix} \quad \vec{B}_t = \tau \begin{pmatrix} \vec{f}_f \\ \vec{b}_f \end{pmatrix} \quad \vec{B}_r = \rho \begin{pmatrix} \vec{f}_b \\ \vec{b}_b \end{pmatrix}.$$

Dabei sind  $\vec{f}_f$  bzw.  $\vec{f}_b$  die vorwärts und  $\vec{b}_f$  bzw.  $\vec{b}_b$  die rückwärts laufenden Komponenten der Blochmoden. Die in das System von links einlaufenden Komponenten sind demnach die vorwärts propagierenden Komponenten der einlaufenden Blochmode  $\vec{f}_f$  und die vorwärts laufenden Komponenten der reflektierten Blochmode  $\rho\vec{f}_b$ . Ebenso ver-

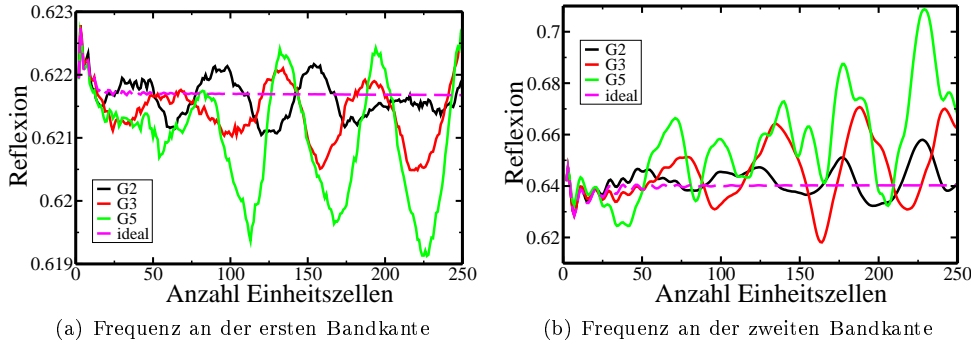


Abbildung 5.19: Reflexion zurück in Struktur I bei Variationen mit konstanter Einheitszellenlänge in TE-Polarisation. Die gestrichelte Linie entspricht dem idealen Fall. Die durchgezogenen Linien der Mittlung über fünfhundert Transmissionswerte an der jeweiligen Einheitszelle. Die schwarze Linie zeigt die Berechnung für eine Variationsstärke von  $2nm$ , rot entspricht  $3nm$  und grün  $5nm$ . Analog zur Berechnung der Transmission ist auch hier für den ungeordneten Fall keine Konvergenz zu erkennen.

hält es sich mit den aus dem System laufenden Moden auf der linken Seite. Die auf der rechten Seite des Systems laufenden Moden bestehen nur aus den Komponenten der transmittierten Blochmode. Die S-Matrix-Gleichung des Systems lautet demnach folgendermaßen

$$\begin{pmatrix} \vec{b}_f + \rho \vec{b}_b \\ \tau \vec{f}_f \end{pmatrix} = \hat{S} \begin{pmatrix} \tau \vec{b}_f \\ \vec{f}_f + \rho \vec{f}_b \end{pmatrix}.$$

Die Unbekannten sind die Koeffizienten der reflektierten Blochmode  $\rho$  und der transmittierten Blochmode  $\tau$ . Das Auflösen nach diesen ergibt

$$\begin{pmatrix} \hat{b}_b - \hat{S}_{12} \hat{f}_b & -\hat{S}_{11} \hat{b}_f \\ -\hat{S}_{22} \hat{f}_b & \hat{f}_f - \hat{S}_{21} \hat{b}_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{12} \vec{f}_f - \vec{b}_f \\ \hat{S}_{22} \vec{f}_f \end{pmatrix}.$$

Um die Transmission und Reflexion, sowie den Propagationsverlust zu berechnen, muss, wie schon in Abschnitt 4.4 beschrieben, der Poynting Vektor benutzt werden.

### Transmissions-und Reflexionsberechnung

Der einlaufende Fluss  $F_{in}(x)$  ist durch die einlaufende Blochmode gegeben und berechnet sich durch die Vektor-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \vec{h}_{in} &= \sum_c \vec{W}_c \left( f_c^{(f)} \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c^{(f)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right) \\ \vec{e}_{in} &= \sum_c \vec{V}_c \left( f_c^{(f)} \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c^{(f)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right). \end{aligned}$$



Der reflektierte Fluss  $F_r(x)$  entspricht der reflektierten Blochmode, woraus sich die Vektor-Koeffizienten

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{in}} &= \sum_c \vec{W}_c \rho \left( f_c^{(b)} \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c^{(b)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right) \\ \vec{e}_{\text{in}} &= \sum_c \vec{V}_c \rho \left( f_c^{(b)} \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c^{(b)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right)\end{aligned}$$

ergeben. Die Reflexion in den Photonischen Kristall lautet daher

$$R = \frac{F_r}{F_{\text{in}}}.$$

Die transmittierte Mode ist in diesem Fall wieder eine Blochmode. Somit lassen sich die für den transmittierten Fluss  $F_t(x)$  benötigten Vektor-Koeffizienten durch

$$\begin{aligned}\vec{h}_{\text{in}} &= \sum_c \vec{W}_c \tau \left( f_c^{(f)} \exp[k_0 \lambda_c z] + b_c^{(f)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right) \\ \vec{e}_{\text{in}} &= \sum_c \vec{V}_c \tau \left( f_c^{(f)} \exp[k_0 \lambda_c z] - b_c^{(f)} \exp[-k_0 \lambda_c z] \right)\end{aligned}$$

darstellen. Die Transmission in den Wellenleiter folgt damit aus

$$T = \frac{F_t}{F_{\text{in}}}.$$

Der Propagationsverlust kann demnach über die Gleichung

$$L = 1 - \frac{F_t + F_r}{F_{\text{in}}}$$

berechnet werden.

### Bestimmung der Abklingkonstante

Die Bestimmung der Abklingkonstante  $\gamma$  kann folgendermaßen durchgeführt werden. Zunächst werden die Transmission, Reflexion und der Propagationsverlust über mehrere Einheitszellen berechnet. Diese Berechnungen müssen für eine statistisch sinnvolle Anzahl von Werten pro Einheitszelle durchgeführt werden. Durch die so erhaltenen Werte wird dann eine Anpassungskurve der Form  $1 - \exp[-\gamma x]$  gelegt, wobei  $x$  die Länge des ungeordneten Systems darstellt. Diese Anpassungskurve trägt dem exponentiellen Abfall der Transmission Rechnung, welcher sich im Propagationsverlust durch das dementsprechende Ansteigen auf eins zeigt.

Zur Verdeutlichung dieser Analyse sind in Abb. 5.20 die Transmissionswerte (linker Graph) und die Propagationsverluste (rechter Graph) für Struktur I aufgeführt. Die Berechnungen wurden für eine Frequenz an der ersten Bandkante mit Variation in der Ätzlänge bei konstanter Einheitszellenlänge in TE-Polarisation durchgeführt. Die Variationsstärke wurde dabei auf  $8nm$  gesetzt. Die Mittelwerte der eintausend

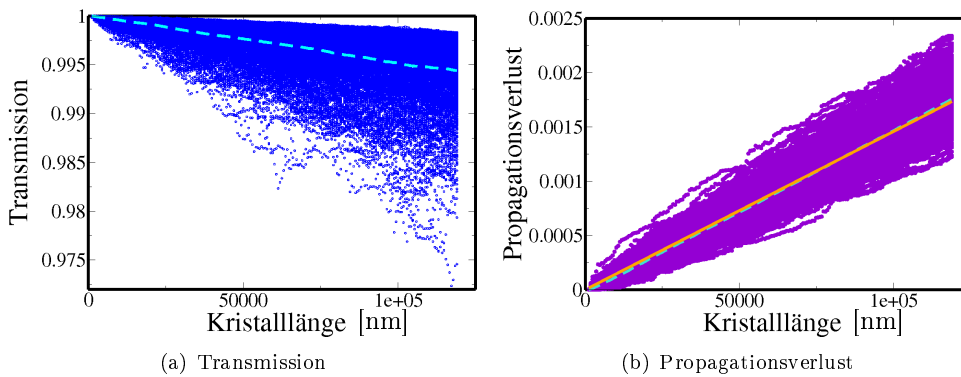


Abbildung 5.20: Transmission (a) und Propagationsverlust (b) für Struktur I über der Kristalllänge in  $nm$ . Die Berechnung wurde für eine Frequenz an der ersten Bandkante bei einer Variation von  $8nm$  in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszellenlänge in TE-Polarisation durchgeführt. Die gestrichelten hellblauen Linien entsprechen den Mittelwerten der eintausend zweihundert Datenpunkte pro Einheitszelle. Im Graphen des Propagationsverlustes ist ferner die Anpassungskurve durch die orangefarbene Linie gezeigt. Der nahezu linear verlaufende Anstieg des Mittelwertes im Propagationsverlust lässt sich durch die geringe Verlustkonstante erklären.

zweihundert Werte pro Einheitszelle sind darin durch die gestrichelte hellblaue Linie dargestellt.

Im Graphen des Propagationsverlustes entspricht die orangefarbene Linie der Anpassungskurve. Dabei wurde die Abklingkonstante auf  $\gamma = 1.45745 \cdot 10^{-5} 1/\mu m$  bestimmt. Diese Abklingkonstante liegt um eine Zehnerpotenz niedriger als die in Tab. C.1 aufgeführte Abklingkonstante für die Transmission durch einen an zwei Wellenleiter angeschlossenen endlichen ungeordneten Photonischen Kristall.

Die Abweichung der beiden Werte lässt sich über die Längenabhängigkeit der Kopplungsverluste erklären. Bei der Anpassung der effektiven Spiegelmethode an die endlichen Systeme ist diese Längenabhängigkeit der Transmission bzw. Reflexion und damit des Kopplungsverlustes vernachlässigt worden. Dadurch wird die Änderung der Transmissionskurve mit der Länge nur über die Abklingkonstante bestimmt, was zu den gefundenen Abweichungen führt.

Zusammenfassend kann folgendes gesagt werden. Die Bestimmung der Transmission, Reflexion und des Kopplungsverlustes ist im Falle der einseitig unendlichen ungeordneten Systeme aufgrund der fehlenden Konvergenz nicht möglich. Durch das Einbetten des ungeordneten Photonischen Kristalls in zwei ideale einseitig unendliche Kristalle ist jedoch eine Isolierung der Abklingkonstante möglich. Für die Betrachtung der endlichen Systeme mit Hilfe der effektiven Spiegelmethode kann diese jedoch nicht weiter verwendet werden, da die Längenabhängigkeit des Kopplungsverlustes und der

Reflexion in der verwendeten Formel nicht gegeben ist.

Die Schlussfolgerung ist also die, dass zu einer generellen Kategorisierung der Unordnungseffekte die Anpassung der effektiven Spiegelmethode an die endlichen ungeordneten Systeme ausreicht. Quantitative Werte können durch separate Betrachtungen jedoch nur für die Abklingkonstante ermittelt werden. Ein Aufbauen der Transmissionskurve durch effektive Parameter ähnlich dem Verfahren im idealen Fall ist jedoch nicht möglich.

## 6 Zusammenfassung

Im Zuge dieser Arbeit ist ein Programm entwickelt worden, mit dessen Hilfe quasi-eindimensionale Photonische Kristalle vollständig untersucht werden können. Es soll dazu dienen statistische Untersuchungen über den Einfluss möglicher Unordnungen auf das Transmissionsverhalten des Kristalls durchzuführen. Dazu ist die Transmission durch eindimensionale Photonischen Kristall endlicher Höhe betrachtet worden. Die so erhaltenen Ergebnisse können qualitativ auf höher dimensionale Kristalle übertragen werden. Grundlage des Programms bildet die numerisch stabile S-Matrix-Methode mit absorbierenden Randbedingungen. Aus den berechneten S-Matrizen können ferner die Blochmoden und damit die Bandstruktur des Kristalls bestimmt werden. Des weiteren ist die Berechnung der transversalen Komponenten der Felder und damit die Visualisierung der Moden innerhalb des Kristalls möglich.

Dieses Programm ist zunächst verwendet worden um den Einfluss der Ätztiefe auf die Bandstruktur und die Blochmoden-Ausbildung zu untersuchen. Dabei ist festgestellt worden, dass die erste Bandkante für die TE-Polarisation sehr stabil ist. Mit zunehmender Ätztiefe verbreitert sich die Bandlücke durch das Verschieben der zweiten Bandkante zu höheren Frequenzen. Im Falle der TM-Polarisation verschieben sich beide Bandkanten zu höheren Frequenzen. Die Verbreiterung der Bandlücke mit steigender Ätztiefe wird durch ein stärkeres Verschieben der zweiten Bandkante gewährleistet. Um die Betrachtung abzurunden, ist die Feldintensitäten für verschiedene Ätztiefen bei Frequenzen an der ersten Bandkante aufgezeigt worden. Dadurch ist verdeutlicht worden, dass die Blochmoden bei nicht ganz durchgeätzten Systemen in den unberührten Teil des Wellenleiters abtauchen können. Dieses Abtauchen hat, wie später erkannt wurde, Auswirkungen auf das Verhalten bei Unordnungen mit Variation der Einheitszellenlänge durch Ätzlängenvariation.

Ferner sind Intensitätsverteilungen der Moden innerhalb der Photonischen Kristalle für verschiedene Kristalllängen betrachtet und in Verbindung mit den Transmissionsdaten gebracht worden. Die aus dieser Betrachtung gewonnen Erkenntnisse sind, dass die Modenkonversion der Wellenleitermode in die Blochmode bei minimaler Transmission innerhalb des Wellenleiters geschieht. Dies ist durch die hohe Reflexion an der Grenzschicht von Wellenleiter und Photonischem Kristall möglich. Die Überlagerung der reflektierten und einlaufenden Wellenleitermode bildet dabei eine der Blochmode ähnlichen Struktur. Im Gegensatz dazu kommt es bei maximaler Transmission erst innerhalb des Kristalls zur Modenkonversion. Dies ist durch die an den Grenzschichten von Wellenleiter zu Photonischem Kristall und Photonischem Kristall zu Wellenleiter in den Kristall zurückreflektierten Moden möglich. Diese überlagern sich so, dass in der Mitte des Kristalls die Blochmode vollständig ausgebildet ist. In der Feldverteilung ist die vollständige Ausbildung der Blochmode durch ein Intensitätsmaximum zu erkennen.

Die Blochmoden ermöglichen weiterhin die Untersuchung von einseitig unendlichen Systemen. Dies führt auf eine Berechnung von effektiven Parametern, welche eine mathematische Darstellung des Kristalls durch effektive Spiegel ermöglicht. Mit Hilfe der effektiven Spiegelgestaltung ist darauf der Einfluss der verschiedenen Parameter auf die Transmission untersucht worden. Die effektive Reflexion beeinflusst dabei die Amplitude der Fabry-Perot-Oszillationen. Eine geringe effektive Reflexion hat eine geringe Amplitude der Fabry-Perot-Oszillationen zur Folge. Der Kopplungsverlust sorgt für eine Verschiebung des Mittelwertes der Fabry-Perot-Oszillationen, wohingegen der Propagationsverlust zu einem exponentiellen Abfall der Fabry-Perot-Maxima mit der Kristalllänge führt.

Darauf aufbauend sind dann drei verschiedene Unordnungen implementiert und untersucht worden, welche auch in zweidimensionalen Systemen zu finden sind. Die erste Art der Unordnung besteht in der Variation der Ätzbreite bei konstanter Einheitszelle. Im zweidimensionalen Fall entspricht dies der Änderung des Porenradius. Die zweite betrachtete Unordnung weist eine konstante Ätzbreite bei variabler Einheitszellenlänge auf. Das zweidimensionale Analogon ist ein Versetzen der Poren bei konstantem Radius. Die dritte in dieser Arbeit betrachtete Unordnung besteht in der Variation der Einheitszellenlänge durch die Ätzlänge und entspricht dem Versetzen der Poren und gleichzeitigem ändern ihres Radius im zweidimensionalen Fall. Der Einfluss dieser Unordnungen sind anhand von drei verschiedenen Strukturen an der ersten und zweiten Bandkante für die TE- und TM-Polarisationen untersucht worden. Die Strukturen unterscheiden sich dabei in der Ätztiefe durch die Wellenleiterstruktur. In der ersten betrachteten Struktur sind die Wellenleiterschicht ganz durchgeätzt. In der zweiten ist nur bis zur Hälfte in die Wellenleiterschicht geätzt und in der dritten Struktur ist durch die Wellenleiterschicht in das Substrat geätzt. Es wurde festgestellt, dass die Transmission für Frequenzen an der ersten Bandkante für alle Strukturen und Polarisationen bei Unordnungen mit konstanter Einheitszelle sehr robust ist. Als Erklärung wurde dabei angeführt, dass der im ersten Band dominierende Effekt zur Ausbildung der Bandstruktur die Bragg-Streuung ist. Diese Art der Streuung basiert auf der periodischen Anordnung der Streuer, also einer konstanten Einheitszellenlänge, nicht jedoch auf einer bestimmten Form derselben. Die Transmissionswerte für Frequenzen an der zweiten Bandkante sind dagegen empfindlicher in Bezug auf die betrachteten Unordnungen. Hier ist eine Stabilität der Transmissionswerte bei Unordnungen mit Variationen in der Einheitszelle durch Ätzlängenvariation nur für die durchgeätzte oder die überätzte Struktur sowohl in TE-Polarisation als auch in TM-Polarisationen festgestellt worden. Dieses Verhalten ist auf die Dominanz der Mie-Resonanzen zurückgeführt worden. Für die halb durch die Wellenleiterschicht geätzten Strukturen ist dagegen ein Abtauchen der Moden festgestellt worden. Dieses Abtauchen führt dazu, dass in diesem Fall die Bragg-Streuung der für das Ausbilden der Moden wichtige Effekt ist. Daher ist bei dieser Struktur für Frequenzen an der zweiten Bandkante eine breite Streuung der Transmissionswerte bei Unordnungen mit Variation in der Einheitszellenlänge durch die Ätzlängenvariation gefunden worden.

Zum Abschluss ist versucht worden gemittelte effektive Parameter aus den ungeordneten einseitig unendlichen Systemen zu berechnen. Dabei ist festgestellt worden, dass die Konvergenz der Werte nicht gegeben ist. Folglich sind die Reflexion und der Kopp-

ungsverlust bei Strukturen mit Unordnung längenabhängig und die effektive Spiegelmethod demnach nicht unteingeschränkt verwendbar. Folglich sind Untersuchungen von experimentell gemessenen Transmissionsspekten mit Hilfe der Hakki-Paoli-Methode nur qualitativ zu sehen. Eine separate Betrachtung des Propagationsverlustes ist jedoch durch eine Modifikation des Programms ermöglicht worden.

Zusammenfassend ist in den Betrachtungen bestätigt worden, dass die zwei die Bandstruktur bestimmenden Effekte die Bragg-Streuung und die Mie-Resonanzen sind. Durch diese Effekte lässt sich das Verhalten der verschiedenen Strukturen bei den drei betrachteten Unordnungen erklären. Ist zum Beispiel der zur Ausbildung der Bandstruktur dominierende Effekt die Bragg-Streuung, so ist die Transmission durch eine Struktur mit Variationen der Ätzlänge relativ stabil, vorausgesetzt die Einheitszellenlänge bleibt konstant. Ferner ist herausgefunden worden, dass Kopplungsverhalten durch die Reflexion bestimmt wird. Durch eine geringe Reflexion wird die Modenkonversion in den Kristall verlagert. Dies führt dazu, dass sich Unordnungen in Fabry-Perot-Maxima deutlich bemerkbar machen und der Kopplungsverlust als längenabhängig betrachtet werden muss.

## 6.1 Ausblick

Die in dieser Arbeit herausgearbeiteten Erkenntnisse bilden eine gute Grundlage für weitere Untersuchungen. Zum einen wäre eine Modifikation der effektiven Spiegelmethode mit längenabhängigen Parametern denkbar. Eine genauere Analyse des Propagationsverlustes könnte dabei zur Reduktion einer Variablen führen, was die Anpassung der modifizierten Spiegelmethode an die berechneten Daten vereinfacht.

Ferner ist der Einfluss der Unordnungen auf Systeme mit kegelförmigen Ätzungen von Interesse. Zudem kann eine Äzttiefenvariation eingeführt und untersucht werden. Eine weitere sehr wichtige Betrachtung ist das Einführen der Porenrauigkeit oder Verformung, da bei den Herstellungsverfahren nicht von einer glatt geätzten Pore ausgegangen werden kann.

Darauf aufbauend ist eine Erweiterung auf quasi-zweidimensionale Systeme möglich. Dies würde zu weiteren Erkenntnissen bezüglich des Verhaltens der Photonischen Kristalle bei leichten Störungen führen. Eine quasi-zweidimensionale Simulation der Herstellungstoleranzen ist dabei besonders in der Produktion von Photonischen Kristallen von Interesse.



# A Anhang: Wellenleitertheorie

In diesem kleinen Exkurs, werden die Grundlagen zur Berechnung der Wellenleitermoden, wie sie auch in [26] zu finden ist, dargelegt. Diese Erkenntnisse werden dann dazu verwendet, um die Wellenleitermoden für das in dieser Arbeit betrachtete System zu berechnen.

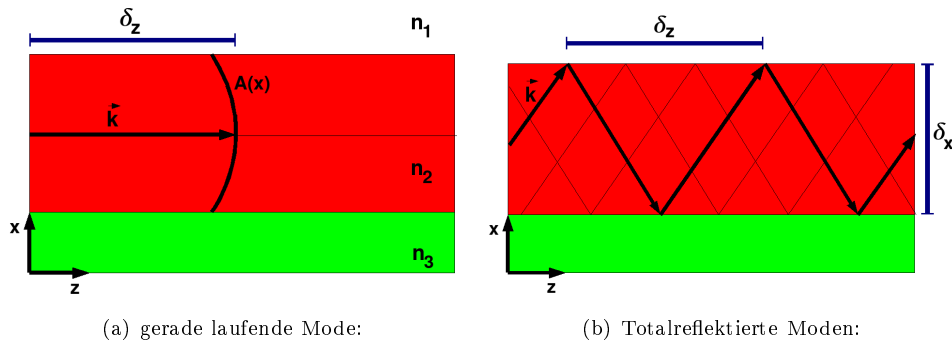


Abbildung A.1: Gegenüberstellung der zwei möglichen Darstellungen einer Wellenleitermode. a) Wellenoptische Darstellung: gerade laufende Mode mit Amplitudenmodulation in  $x$ -Richtung. b) Linearoptische Darstellung: Parallel laufende Moden, die durch die Totalreflektion im Wellenleitermaterial geleitet werden. Die Amplitude der einzelnen Moden ist dabei konstant. Die einzelnen parallel laufenden Moden überlagern sich innerhalb des Wellenleiters und bilden dadurch das Wellenleitermodenprofil aus.

Der wellenoptische Ansatz eine in einem Wellenleiter propagierende Mode wird wie folgt dargestellt:

$$E_y(x, z) = A(x) \exp[i(\omega t - k_z z)].$$

Die Amplitudenfunktion  $A(x)$  gibt das Modenprofil an, während die Propagation entlang des Wellenleiters durch die Exponentialfunktion, in welcher die Frequenz des Wellenleitermode  $\omega$  und die Wellenzahl  $k_z$  zu finden sind, gegeben ist. Bildlich ist dies in Abb. A.1 dargestellt.

Eine geometrische Interpretation, welche auf der Totalreflektion der propagierenden Moden basiert, lässt sich folgendermassen schreiben

$$E_y(x, z) = E_0 \exp[i(\omega t - k_z z - k_x x)]$$



Die Amplitude  $E_0$  ist in diesem Fall eine Konstante. Die Propagation wird wiederum durch die Exponentialfunktion beschrieben. Die Ausbreitungsrichtung ist jedoch durch die Wellenvektorkomponenten  $k_z$  und  $k_x$  bestimmt. Das Modenprofil der Wellenleitermode kommt dadurch zustande, dass sich die im Wellenleiter zickzack laufenden Moden konstruktiv und destruktiv überlagern. Dies ist in Abb. A.1 zu sehen.

Die oben angeführten zwei Darstellungsmöglichkeiten der Linearen- und Wellen-Optik müssen, für im Wellenleiter geführte Moden, in Einklang gebracht werden. Die erste Darstellung, also der direkte Weg, liefert in der Zeit  $\delta_t$  und der dabei zurück gelegten Strecke  $\delta_z$  eine Phasenverschiebung von

$$\varphi_1 = \omega\delta_t - k_z\delta_z$$

Der indirekte Weg beinhaltet die Reflektionen an der oberen- und unteren Grenzschicht. Diese Reflektionen sorgen für eine zusätzliche Phasenverschiebung von

$$\phi_o = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{k_z^2 - n_1^2 k_0^2}{n_2^2 k_0^2 - k_z^2}} \right]$$

an der oberen Grenzschicht und

$$\phi_u = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{k_z^2 - n_3^2 k_0^2}{n_2^2 k_0^2 - k_z^2}} \right]$$

an der unteren Grenzschicht. Dabei gilt  $n_1 < n_3 < n_2$ , wobei  $n_2$  der Brechungsindex des Wellenleiters,  $n_2$  der des Substrates und  $n_1$  der des Superstrates ist. Die gesamte Phasenverschiebung dieses indirekten Weges beinhaltet demnach die durch die Zeit verursachte Phasenverschiebung, die durch den Weg in  $z$ -Richtung sowie den zweimaligen Weg in  $x$ -Richtung und die Phasenverschiebungen durch Reflektion an der oberen bzw. unteren Kante. Formal lässt sich dies folgendermassen schreiben:

$$\varphi_2 = \omega\delta_t - k_z\delta_z - 2k_x\delta_x + \phi_o + \phi_u$$

Eine konstruktive Überlagerung der beiden Wege kommt zustande unter der Bedingung, dass die Phasendifferenz ein ganzzahliges Vielfaches von  $2\pi$  ist, also

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k_x\delta_x - \phi_o - \phi_u = 2\pi m$$

Unter der Berücksichtigung der trigonometrischen Rechenregeln und mit den Definitionen

$$\begin{aligned} h &= k_x = \sqrt{n_2^2 k_0^2 - k_z^2} \\ q &= \sqrt{k_z^2 - n_1^2 k_0^2} \\ p &= \sqrt{k_z^2 - n_3^2 k_0^2} \end{aligned}$$

folgt eine implizite Gleichung für die Propagationskonstante  $k_z$ :

$$\frac{q + p}{h \left(1 - \frac{qp}{h^2}\right)} = \tan[h\delta_x]$$

wobei  $n_3 k_0 < k_z < n_2 k_0$  gelten muss. Obige Gleichung ist auf geometrische Weise lösbar, indem die rechte und linke Seite der Gleichung in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden und der Schnittpunkt bestimmt wird.

$k_0 = \omega/c$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	$k_z$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	$\omega a/2\pi c$
2.893	5.28902	5.271	0.274
3.295	6.17468	6.173	0.312
2.888	5.27806	5.266	0.2735
3.004	5.53266	5.544	0.2845
2.893	5.28902	5.271	0.274
3.326	6.2433	6.243	0.315

Tabelle A.1: Frequenzen und dazugehörige Propagationsvektoren für das in dieser Arbeit betrachtete System in TE-Polarisation

In dieser Arbeit wurde jedoch MATHEMATICA verwendet, um die Berechnung für die benutzte Wellenleitergrundstruktur durchzuführen. Die so erhaltenen  $k_z$ -Werte für die in dieser Arbeit verwendeten Frequenzen sind in Tabelle A aufgeführt. Dem gegenüber wurde die rein numerische Berechnung der Dispersionsrelation des Wellenleiters mit der S-Matrix-Methode gestellt. Es ist eine gute Übereinstimmung der beiden Methoden zu erkennen.

$k_0 = \omega/c$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	$k_z$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	$k$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	$\omega a/2\pi c$
3.379	5.66487	5.66521	0.32
3.474	5.88232	5.88275	0.329
3.284	5.44941	5.44974	0.311
3.3475	5.59319	5.59321	0.317
3.400	5.71278	5.71348	0.322
3.527	6.00437	6.00443	0.334

Tabelle A.2: Frequenzen und dazugehörige Propagationsvektoren für das in dieser Arbeit betrachtete System in TM-Polarisation

Für die TM-Polarisation folgt in analoger Weise mit

$$h' = k_x = \sqrt{n_2^2 k_0^2 - k_z^2} \quad , \quad q' = \frac{n_2^2}{n_1^2} \sqrt{k_z^2 - n_1^2 k_0^2} \quad , \quad p' = \frac{n_2^2}{n_3^2} \sqrt{k_z^2 - n_3^2 k_0^2}$$

die implizite Gleichung für die Propagationskonstante  $k_z$ :

$$\frac{h'(q' + p')}{h'^2 - p'q'} = \tan[h'\delta_x]$$

In Tabelle A sind wiederum die mit Hilfe von MATHEMATICA berechneten Werte, denen aus der S-Matrix-Methode gegenübergestellt. Es ist auch für die TM-Polarisation ein gute Übereinstimmung der numerisch berechneten Werte und der aus der Wellenleitertheorie berechneten zu erkennen.

Ferner sind in Abb. A die numerisch berechneten Dispersionsrelationen und Lichtkegel sowie die in den Tabellen aufgeführten Werte für die zwei zu betrachteten Polarisationen aufgeführt. Es ist die in den Tabellen schon ersichtliche Übereinstimmung der beiden Berechnungsmethoden zu erkennen. Weiterhin befinden sich die Werte innerhalb des Wellenleiterlichtkegels, jedoch unterhalb des Substratlichtkegels, wie es im 1.Kapitel für geführte Moden vorausgesetzt wurde.

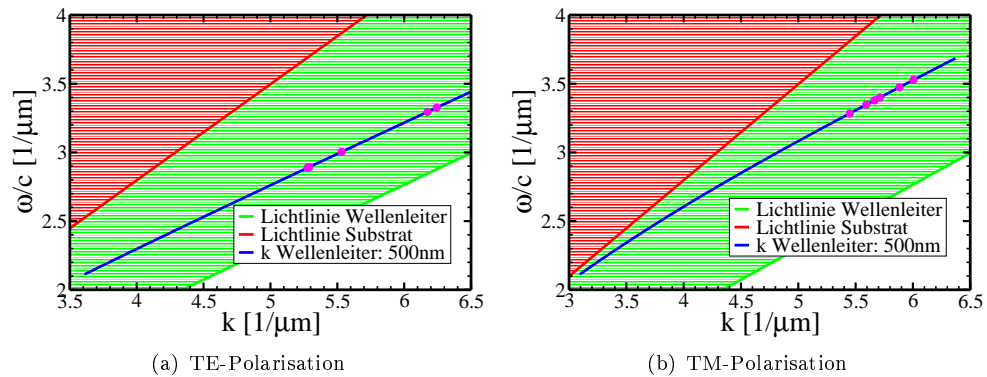


Abbildung A.2: Mit Hilfe der S-Matrix-Methode berechnete Dispersionsrelation des in dieser Arbeit benutzten Wellenleiters mit  $500\text{nm}$  Höhe (blaue Linie). Die Magentafarbenen Datenpunkte sind die durch die Wellenleitertheorie berechneten Werte. Ferner sind der Lichtkegel des Substrates (rot) und des Wellenleiters (grün) eingezeichnet. Geführte Moden müssen sich im grün gestreiften Bereich befinden.

## B Anhang: Transmissionsdaten für StrukturIII in TM-Polarisation

(a) Struktur III: Unordnung bei konstanter Eiheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.36578e-09	0.380371	0.046824
3	2.19111e-09	0.378103	0.04855
5	1.73773e-05	0.374957	0.051863
8	1.7922e-04	0.37133	0.053037

(b) Struktur III: Unordnung in Eiheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	8.4626e-10	0.379614	0.047887
3	9.7705e-05	0.367468	0.055167
5	4.18154e-04	0.351461	0.062504
8	1.18859e-03	0.332148	0.070485

(c) Struktur III: Unordnung in Eiheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.3092e-09	0.379683	0.047372
3	1.7853e-08	0.37268	0.0536
5	2.17271e-04	0.363292	0.057844
8	7.37223e-04	0.349902	0.064348

Tabelle B.1: Struktur III: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TM-Polarisation für eine Frequenz an der ersten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. B.1 bis Abb. B.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur III sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

(a) Struktur III: Unordnung bei konstanter Eiheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	7.12972e-10	0.320584	0.051177
3	1.90122e-05	0.314221	0.056509
5	1.98054e-04	0.305284	0.060864
8	6.09937e-04	0.289344	0.070076

(b) Struktur III: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.18432e-09	0.317602	0.053745
3	2.7435e-04	0.299919	0.063663
5	7.59148e-04	0.270985	0.080319
8	1.7539e-03	0.227974	0.106508

(c) Struktur III: Unordnung in Eiheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	7.77839e-10	0.3204	0.051272
3	1.01436e-05	0.312978	0.057038
5	1.90997e-04	0.301362	0.062721
8	4.97098e-04	0.279754	0.075009

Tabelle B.2: Struktur III: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TM-Polarisation für eine Frequenz an der zweiten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. B.1 bis Abb. B.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur III sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

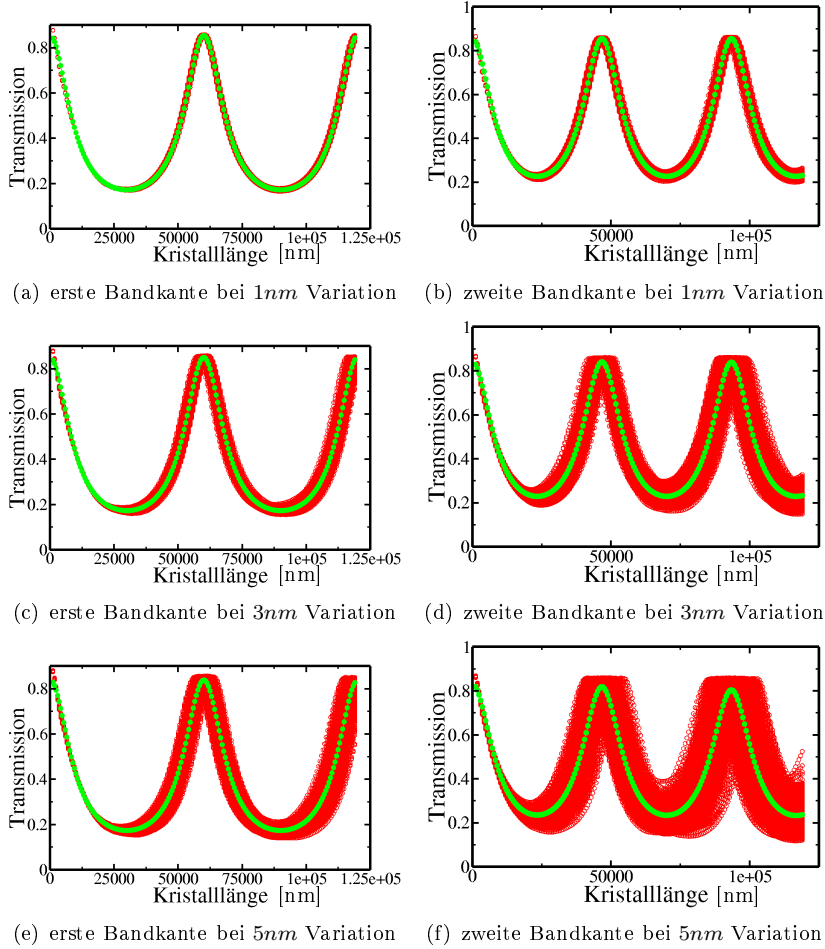


Abbildung B.1: Struktur III: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszellenlänge in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur III sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

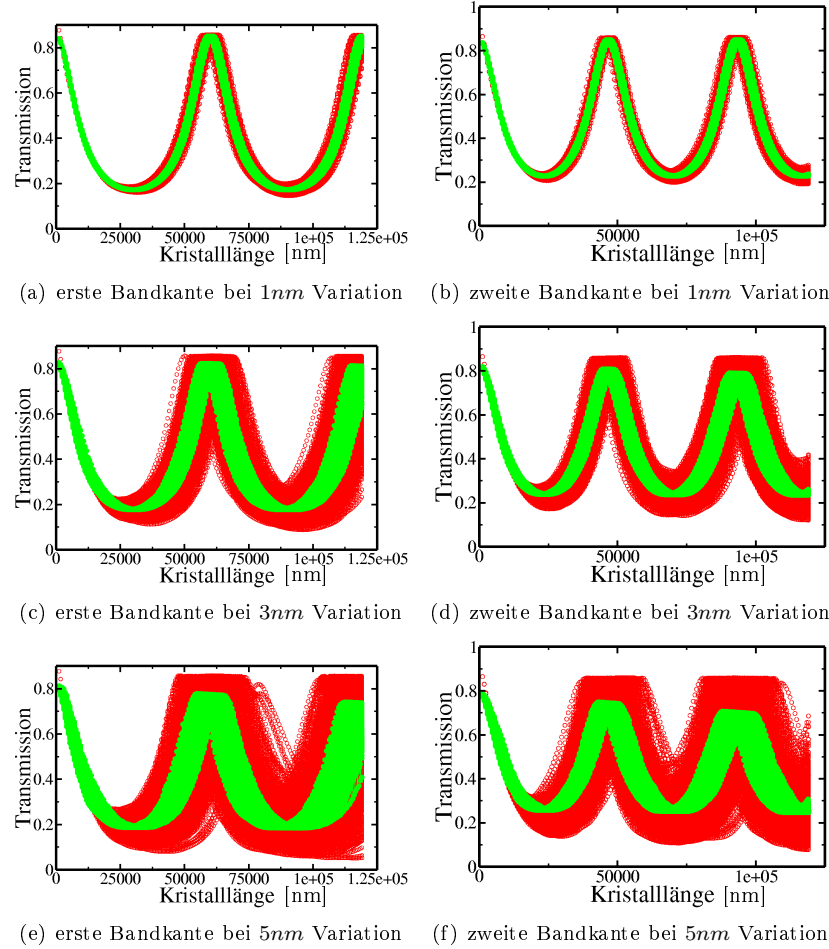


Abbildung B.2: Struktur III: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzlänge in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur III sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

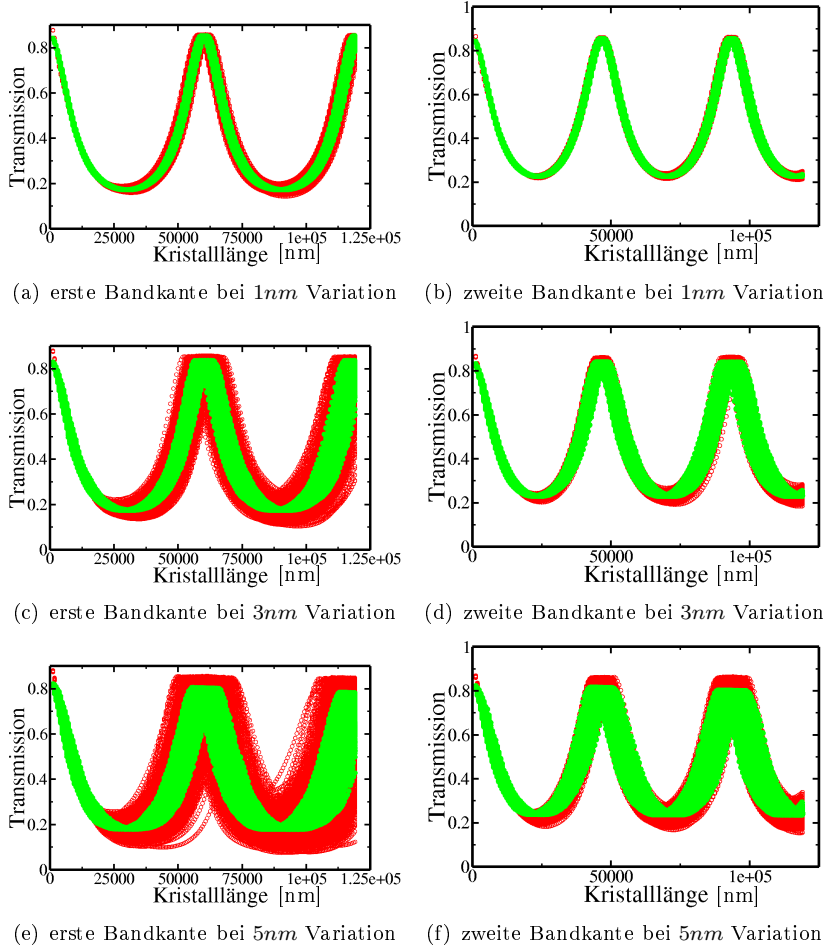


Abbildung B.3: Struktur III: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszelllänge durch Ätzlängenvariation in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur III sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.





# C Anhang: Transmissionsdaten für Struktur I in TE-Polarisation

(a) Struktur II: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.35167e-05	0.619542	0.003935
3	2.51819e-05	0.618053	0.004351
5	6.36716e-05	0.615731	0.004772
8	1.39693e-04	0.610266	0.005955

(b) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	$A = 1 - T - R$
1	1.63199e-04	0.601776	0.009937
3	1.09076e-03	0.530272	0.040938
5	2.39563e-03	0.47752	0.071895
8	4.68721e-03	0.430162	0.102072

(c) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.62896e-04	0.60283	0.009293
3	9.58114e-04	0.538774	0.038162
5	2.14457e-03	0.490547	0.063569
8	4.34565e-03	0.436193	0.097189

Tabelle C.1: Struktur I: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedenen Variationsstärken in TE-Polarisation eine Frequenz an der ersten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. C.1 bis Abb. C.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

(a) Struktur II: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	2.4814e-04	0.619581	0.017923
3	1.29882e-03	0.535596	0.059001
5	2.61989e-03	0.471952	0.098392
8	5.06282e-03	0.400586	0.149715

(b) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	4.42742e-04	0.59713	0.027758
3	2.25609e-03	0.4836	0.091102
5	4.18393e-03	0.398172	0.152652
8	7.57013e-03	0.347777	0.19474

(c) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.00571e-04	0.634231	0.012786
3	5.64881e-04	0.591803	0.029584
5	1.09651e-03	0.549061	0.05244
8	2.29641e-03	0.493437	0.086699

Tabelle C.2: Struktur I: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TE-Polarisation für eine Frequenz an der zweiten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. C.1 bis Abb. C.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

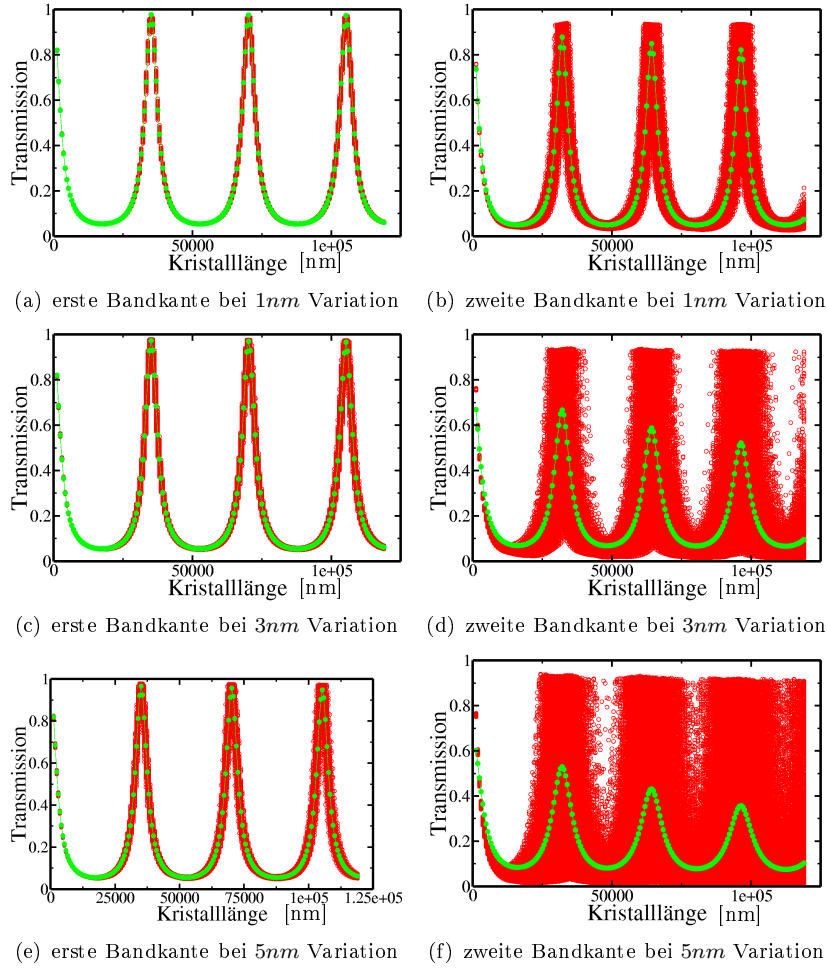


Abbildung C.1: Struktur I: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszellenlänge in TE-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

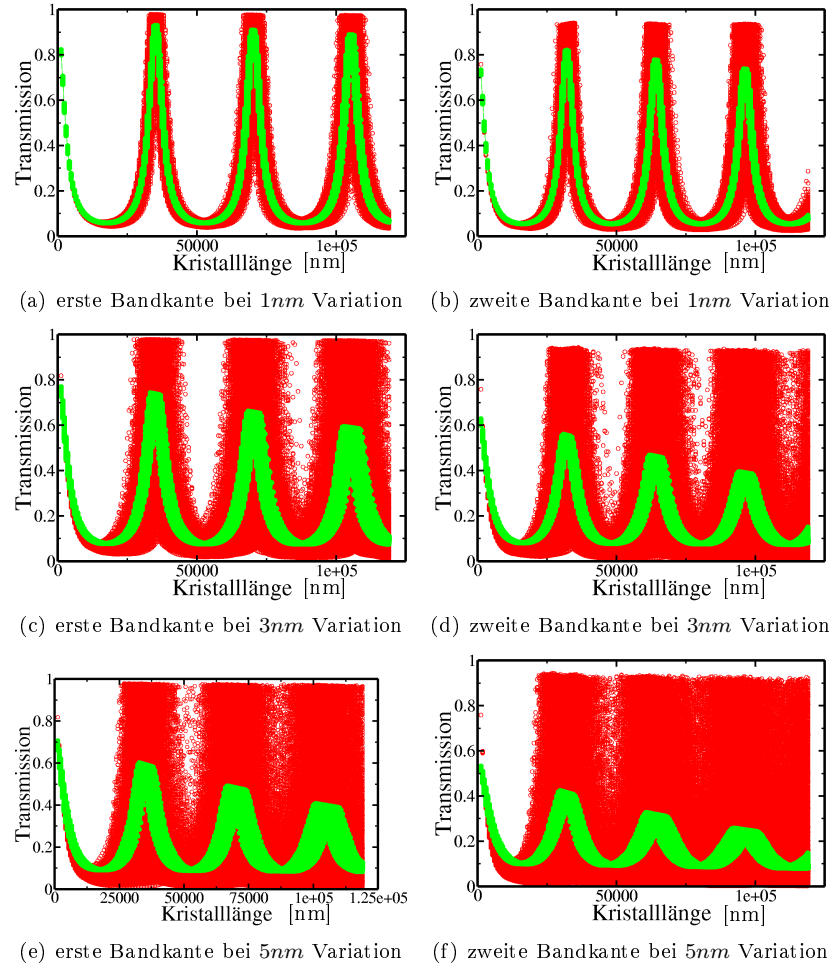


Abbildung C.2: Struktur I: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzlänge in TE-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

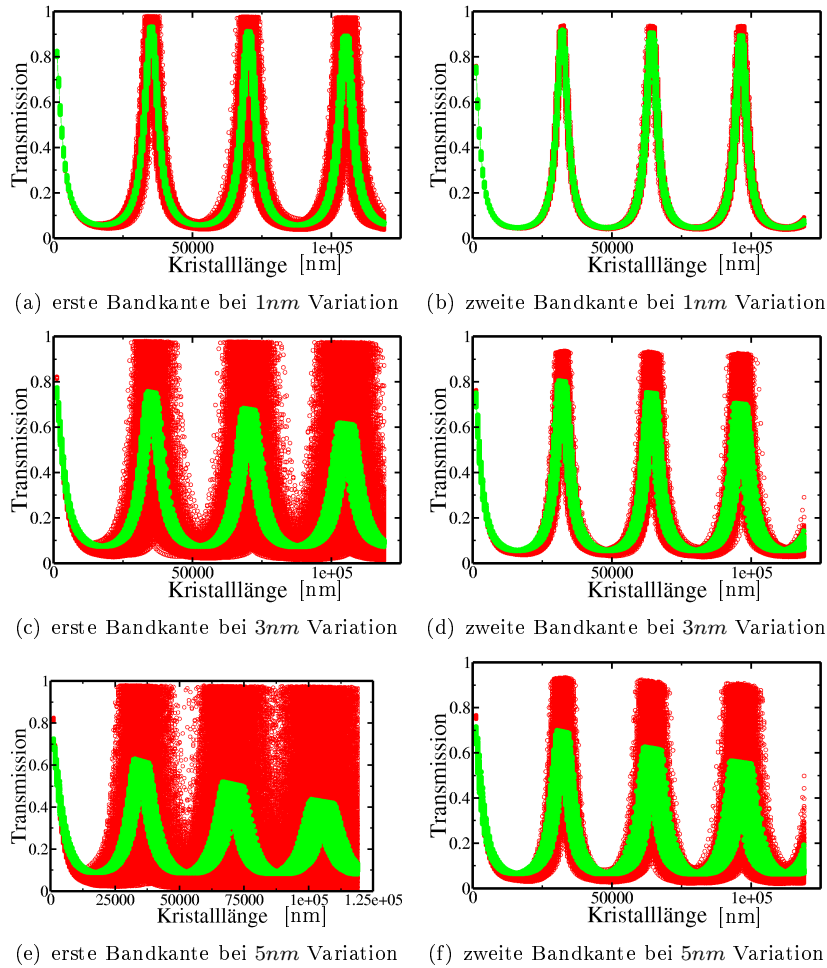


Abbildung C.3: Struktur I: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszelllänge durch Ätzlängenvariation in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.



# D Anhang: Transmissionsdaten für Struktur I in TM-Polarisation

(a) Struktur I: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.3826e-09	0.288287	0.043111
3	1.17127e-09	0.288037	0.043813
5	1.63939e-09	0.286736	0.045252
8	2.36902e-05	0.284739	0.047905

(b) Struktur I: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.07102e-09	0.288018	0.043492
3	1.86763e-09	0.282091	0.047465
5	1.3035e-09	0.27603	0.054544
8	2.9145e-04	0.263666	0.063267

(c) Struktur I: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	2.07701e-09	0.28803	0.043342
3	1.74134e-09	0.286127	0.045679
5	1.22466e-09	0.282191	0.050135
8	1.70813e-04	0.271675	0.057724

Tabelle D.1: Struktur I: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TM-Polarisation eine Frequenz an der ersten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. D.1 bis Abb. D.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt.



(a) Struktur I: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	9.37148e-10	0.290462	0.041251
3	2.18697e-05	0.286929	0.044411
5	9.22091e-05	0.281123	0.048286
8	3.68098e-04	0.271704	0.051893

(b) Struktur I: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	5.72752e-10	0.28749	0.04341
3	1.57325e-04	0.270642	0.05455
5	4.65949e-04	0.247503	0.068953
8	1.32262e-03	0.211256	0.089805

(c) Struktur I: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflexion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.6039e-09	0.289923	0.041641
3	1.54262e-09	0.281726	0.048362
5	7.1005e-05	0.269373	0.057242
8	3.97566e-04	0.248378	0.070422

Tabelle D.2: Struktur I: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TM-Polarisation für eine Frequenz an der zweiten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. D.1 bis Abb. D.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

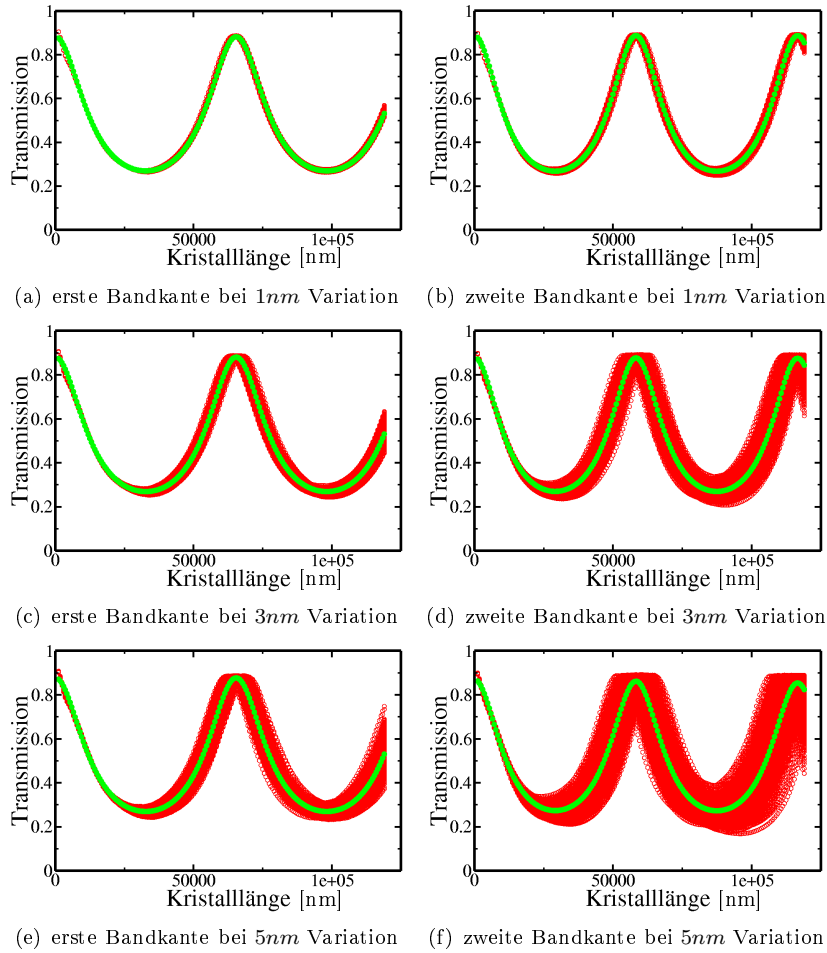


Abbildung D.1: Struktur I: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszellenlänge in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

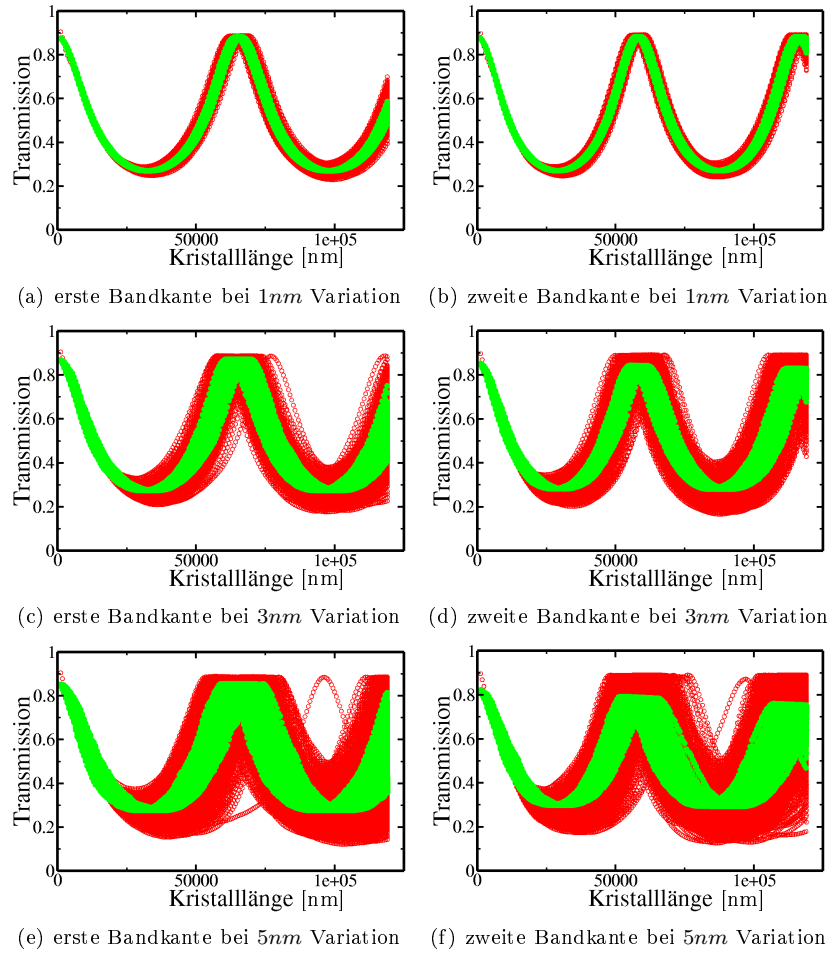


Abbildung D.2: Struktur I: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszelllänge mit konstanter Ätzlänge in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

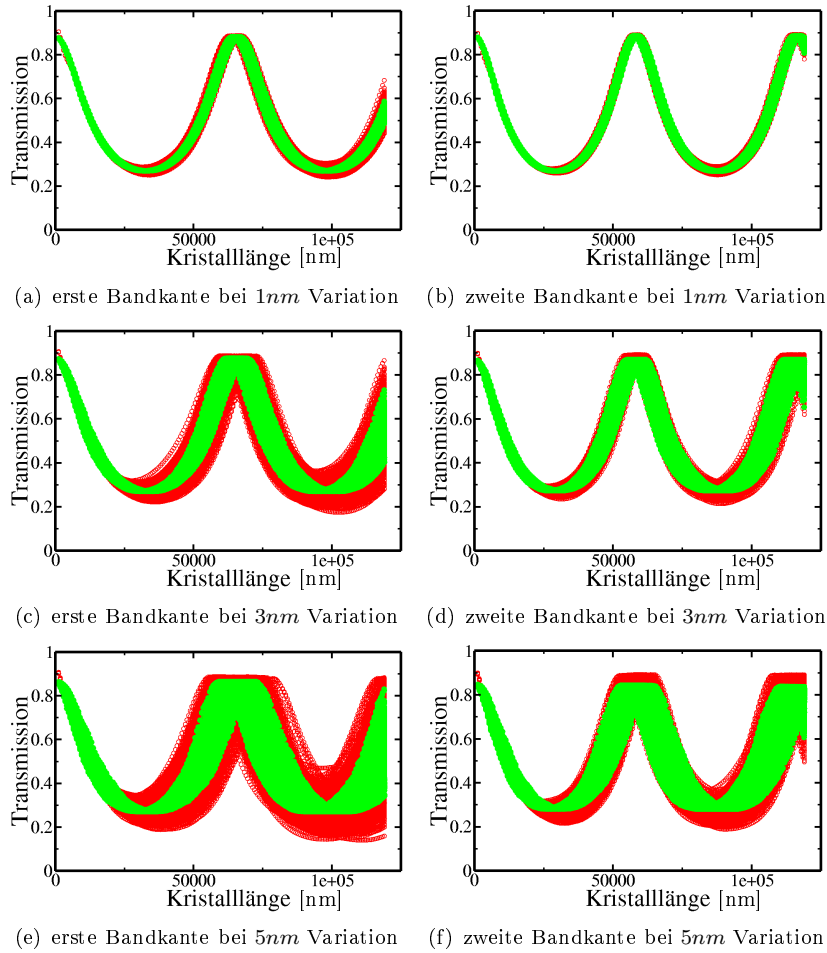


Abbildung D.3: Struktur I: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszelllänge durch Ätzlängenvariation in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur I sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.



# E Anhang: Transmissionsdaten für StrukturII in TE-Polarisation

(a) Struktur II: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	9.81475e-06	0.460452	0.003101
3	1.29998e-05	0.460431	0.003055
5	1.70998e-05	0.460266	0.003053
8	3.69149e-05	0.46036	0.002692

(b) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	5.56573e-05	0.458243	0.003742
3	3.56468e-04	0.442054	0.009204
5	8.63107e-04	0.415816	0.019438
8	1.7721e-03	0.380739	0.034144

(c) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	5.34489e-05	0.458149	0.003767
3	3.53521e-04	0.443272	0.009346
5	8.34067e-04	0.418207	0.018254
8	1.84294e-03	0.384795	0.032183

Tabelle E.1: Struktur II: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TE-Polarisation für eine Frequenz an der ersten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. E.1 bis Abb. E.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

(a) Struktur II: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.08028e-09	0.677303	0.002662
3	1.13454e-09	0.667717	0.004631
5	8.03299e-10	0.655671	0.007207
8	1.41721e-09	0.636717	0.011802

(b) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	7.17823e-10	0.663363	0.006279
3	1.28913e-03	0.615065	0.018341
5	2.82239e-03	0.587995	0.024418
8	5.56369e-03	0.569501	0.025296

(c) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	7.52679e-10	0.667653	0.005184
3	1.20607e-03	0.623214	0.015939
5	2.71347e-03	0.604078	0.01988
8	4.64605e-03	0.579773	0.024794

Tabelle E.2: Struktur II: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TE-Polarisation eine Frequenz an der zweiten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. E.1 bis Abb. E.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

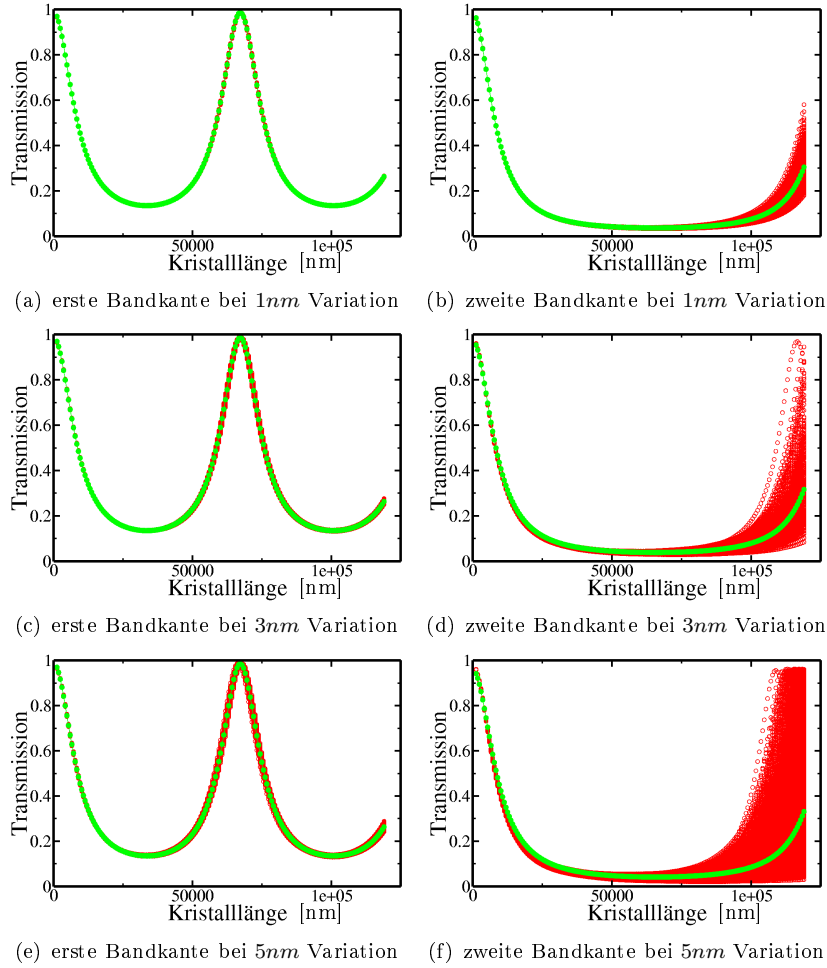


Abbildung E.1: Struktur II: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszellenlänge in TE-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.



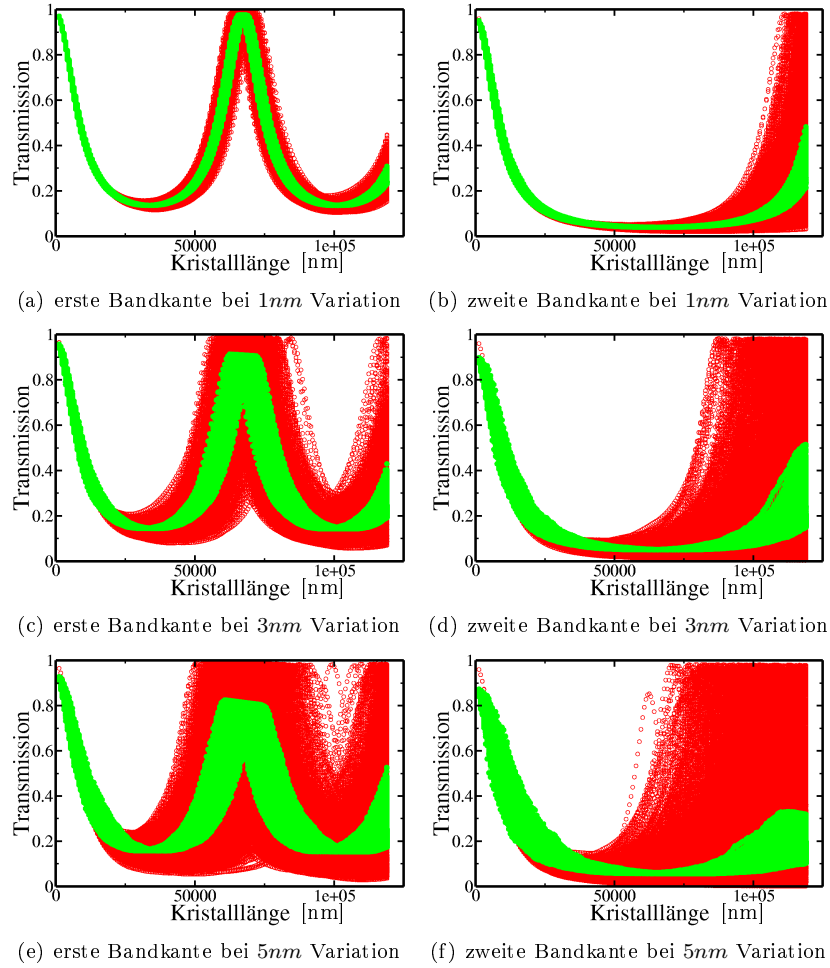


Abbildung E.2: Struktur II: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzlänge in TE-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

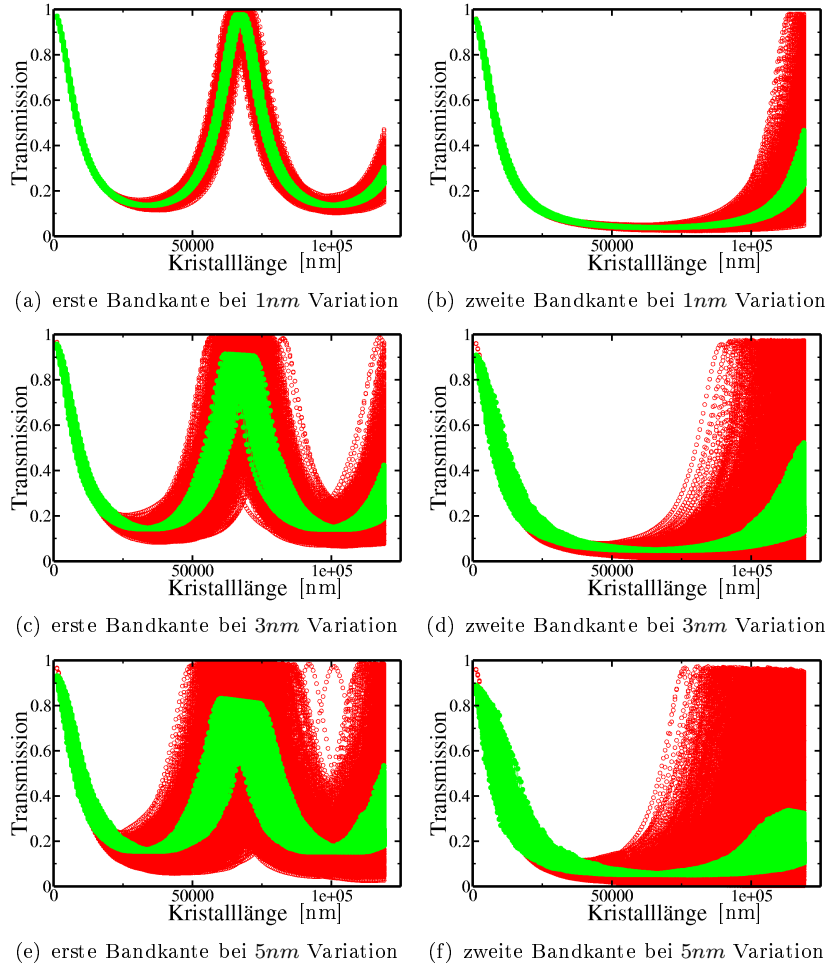


Abbildung E.3: Struktur II: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszelllänge durch Ätzlängenvariation in TE-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.



# F Anhang: Transmissionsdaten für StrukturII in TM-Polarisation

(a) Struktur II: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.91019e-09	0.34778	0.012367
3	4.49598e-06	0.346835	0.013069
5	3.56321e-05	0.346414	0.013193
8	1.10204e-04	0.343179	0.013756

(b) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	1.07336e-05	0.347005	0.013018
3	2.14192e-04	0.344786	0.013277
5	5.72886e-04	0.337046	0.013584
8	1.25465e-03	0.323083	0.016182

(c) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [ $1/\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	2.31283e-06	0.347588	0.012859
3	1.28954e-04	0.345018	0.013062
5	3.64464e-04	0.340792	0.013765
8	8.39628e-04	0.330775	0.015228

Tabelle F.1: Struktur II: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TM-Polarisation für eine Frequenz an der ersten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. F.1 bis Abb. F.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

(a) Struktur II: Unordnung bei konstanter Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	3.66984e-05	0.197076	0.016134
3	3.94552e-05	0.196792	0.016278
5	4.3908e-05	0.196342	0.016581
8	6.90595e-05	0.19567	0.016876

(b) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	6.39541e-05	0.196741	0.016244
3	2.18595e-04	0.189463	0.018987
5	5.38402e-04	0.177204	0.024884
8	1.03634e-03	0.155007	0.038366

(c) Struktur II: Unordnung in Einheitszellenlänge und Ätzlänge

Variation [nm]	Abklingkonstante $\gamma$ [1/ $\mu\text{m}$ ]	Reflektion $R$	Kopplungsverlust $A$
1	6.35275e-05	0.196523	0.016114
3	2.17136e-04	0.191397	0.018075
5	4.50961e-04	0.18184	0.022519
8	9.04119e-04	0.160246	0.034196

Tabelle F.2: Struktur II: Tabelle der effektiven Parameter. Die Parameter sind durch das Anpassen der effektiven Spiegelmethode an die berechneten Transmissionsdaten bestimmt worden. Die Berechnung ist dabei für Unordnungen mit verschiedene Variationsstärken in TM-Polarisation eine Frequenz an der zweiten Bandkante durchgeführt worden. Die graphische Auswertung ist in Abb. F.1 bis Abb. F.3 gezeigt. Die genaue Beschreibung und eine ausführliche Interpretation ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt.

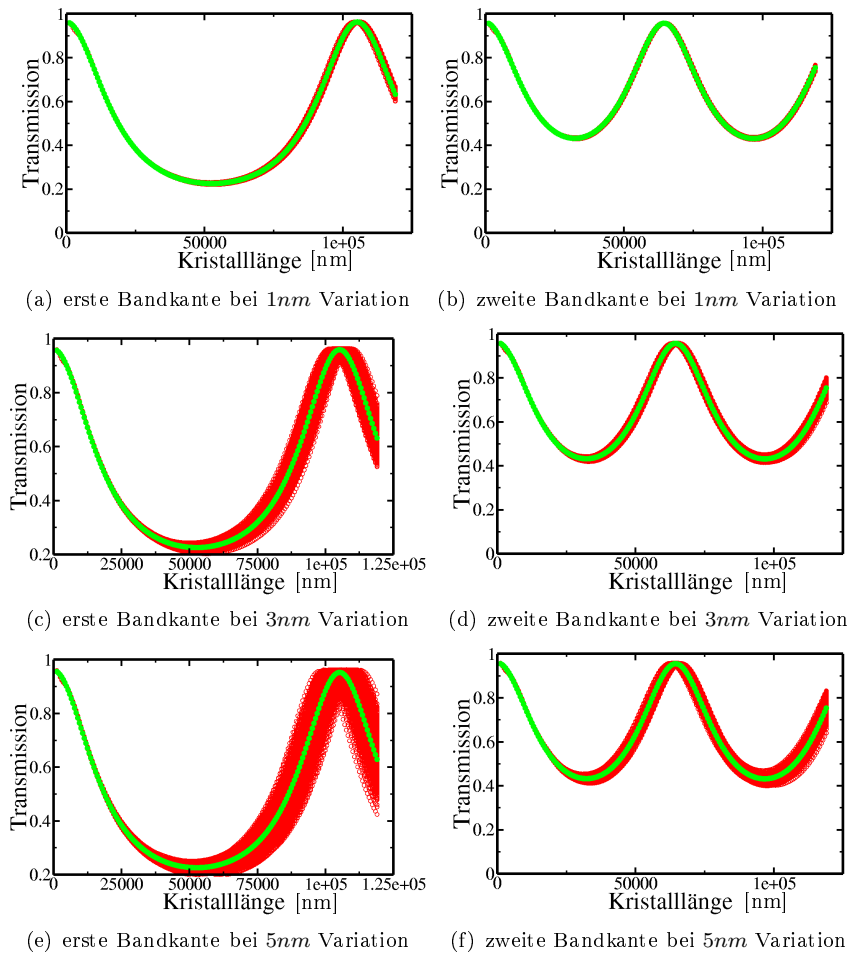


Abbildung F.1: Struktur II: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Ätzlänge mit konstanter Einheitszelllänge in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

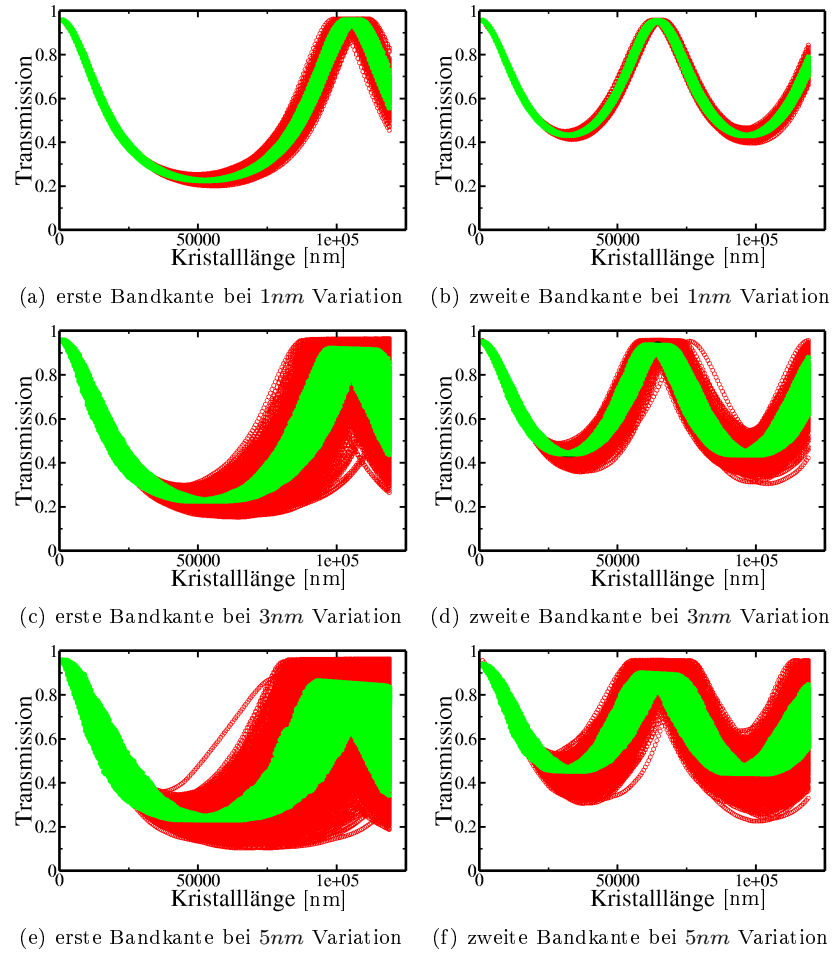


Abbildung F.2: Struktur II: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszellenlänge mit konstanter Ätzlänge in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.

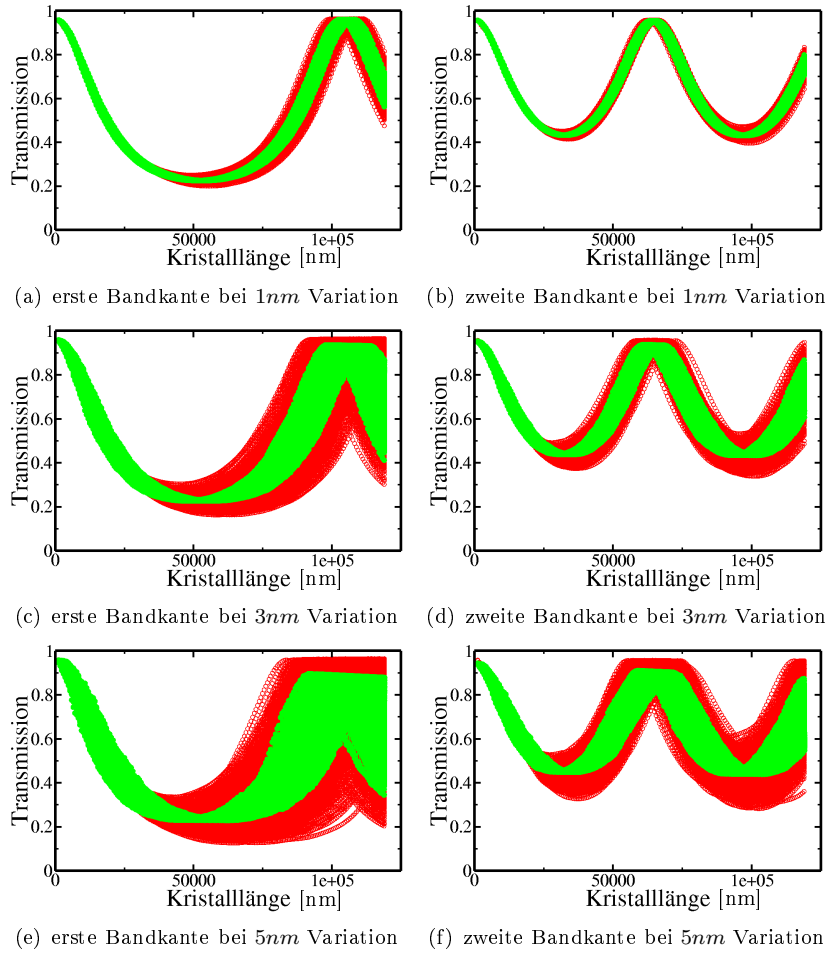


Abbildung F.3: Struktur II: Transmission über der Länge des Photonischen Kristalls in  $nm$  für Frequenzen an der ersten Bandkante (linke Spalte) und zweiten Bandkante (rechte Spalte). Es sind die berechneten Transmissionsdaten für verschieden starken Variationen in der Einheitszelllänge durch Ätzlängenvariation in TM-Polarisation graphisch dargestellt. Die roten Punkte in den Graphen entsprechen den berechneten Werten, die grün punktierte Linie der daran angepassten effektiven Spiegelmethode. Eine ausführliche Interpretation der Daten ist in Abschnitt 5.3 zu finden. Die Parameter von Struktur II sind in Tab. 4.1 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 sind die Bandstruktur und Transmissionsdaten für den ungestörten Kristall gezeigt.





# Literaturverzeichnis

- [1] J. D. Joannopoulos, P. R. Villeneuve, and S. Fan. Photonic crystals: Putting a new twist to light. *Nature*, 386:143, 1997.
- [2] A. Yariv and P. Yeh. *Optical Waves in Crystals*. Wiley, 1984.
- [3] Ch. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley and Sons, 1971.
- [4] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2059, 1987.
- [5] S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2486, 1987.
- [6] P. W. Anderson. Absence of diffusion in certain random lattices. *Phys. Rev.*, 109(5):1492, 1958.
- [7] F. Hagmann. Eigenschaften von defektstrukturen in zweidimensionalen photonischen kristallen. Master's thesis, PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2005.
- [8] J.C.Knight, J.Broeng, T.A.Birks, and P.St.J.Russell. *Science*, 282:1476, 1998.
- [9] J.C.Knight et. all. *Nature*, 424:847, 2003.
- [10] K. M. Ho, C. T. Chan, and E. M. Soukoulis. Existence of photonic gaps in periodic dielectric structures. *Phys. Rev. Lett*, 65(25):3152, 1990.
- [11] H. S. Sözüer and J. W. Haus. Photonic bands: Convergence problems with the plane-wave method. *Phys. Rev. B*, 58(45):13962, 1992.
- [12] Kurt Busch and Sajeev John. Photonic band gap formation in certain self-organizing systems. *Phys. Rev. E*, 58(3):3896, 1998.
- [13] J. D. Joannopoulos. *Photonic crystals: modeling the flow of ligh*. Princeton University Press, 1995.
- [14] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, and K. M. Leung. Photonic band structures: The face-centered cubic case employing non-spherical atoms. *Phys. Rev. Lett*, 67:2295, 1991.
- [15] Yu. V. Miklyaev, D.C. Meisel, A. Blanco, G. von Freymann, K. Busch, W. Koch, C. Enkrich, M. Deubel, and Martin Wegener. Three-dimensional photonic crystals by holographic lithography using the umbrella configuration: Symmetries and complete photonic band gaps. *Phys. Rev. Lett.*, 82(8):1284, 2003.

- [16] D.C.Meisel, Martin Wegener, and Kurt Busch. Three-dimensional photonic crystals by holographic lithography using the umbrella configuration: Symmetries and complete photonic band gaps. *Phys. Rev. B*, 70:165104, 2004.
- [17] Markus Deubel, Georg von Freymann, Martin Wegener, Suresh Pereira, Kurt Busch, and Costas M. Soukoulis. Direct laser writing of three-dimensional photonic-crystal templates for telecommunications. *Nature Materials*, 3:444, July 2004.
- [18] L. Tkeshelashvili. Wechselwirkung nichtlinearer wellen in photonischen kristallen. Master's thesis, PhD thesis, Universität Karlsruhe, 2003.
- [19] J. Niegemann. Wechselwirkung von solitonen und defekten in photonischen kristallen. Master's thesis, Institut für Theorie der Kondensierten Materie, Universität Karlsruhe, 2004.
- [20] M. Born. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999.
- [21] John D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wesley, 1998.
- [22] K. Sakoda. *Optical Properties of Photonic Crystals*. Springer, 2001.
- [23] H. Benisty, V. Berger, J.-M. Gerard, D. Maystre, and A. Tchelnokov. *Photonic Crystals: Towards Nanoscale Photonic Devices*. Springer, 2004.
- [24] N.W.Ashcroft and N.D.Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, 1976.
- [25] K. Kopitzki. *Einführung in die Festkörperphysik*. Teubner, 1989.
- [26] P. Yeh. *Optical Waves in Layerd Media*. Wiley, 1988.
- [27] Bronstein, Semendjajew, Musiol, and Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, 1995.
- [28] L. Li. Use of fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13:1870, 1998.
- [29] M. Lax. *Symmetry Principles*. Addison-Wesley, 1998.
- [30] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, 1992.
- [31] J. J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1985.
- [32] D. Hermann. Bandstrukturechnungen für photonische kristalle mittels mehrgitter-verfahren. Master's thesis, Institut für Theorie der Kondensierten Materie, Universität Karlsruhe, 2001.
- [33] H.Kosaka et al. *Phys.Rev B*, 58:10096, 1998.

- [34] H.Kosaka, T. Kawashima, A. Tomita, M. Notomi, T. Tamamura, T.Sato, and S. Kawakami. *J. Lightwave Technol.*, 17:2032, 1999.
- [35] B. Lombardet, L.A. Dunbar, R. Ferrini, and R. Houdré. Fourier analysis of bloch wave propagation in photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, 22(6):1179, JUNE 2005.
- [36] E. Lidorikis, M. M. Sigalas, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis. Tight-binding parametrization for photonic band gap materials. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1405, 1998.
- [37] M. Kafesaki and C. M. Soukoulis. Losses and transmission in two-dimensional slab photonic crystals. *J. Appl. Phys.*, 96(8):4033, OCT 2004.
- [38] H. Benisty, D. Labilloy, C. Weisbuch, C.J.M. Smith, T.F. Krauss, D. Cassagne, A. Beraud, and C. Jouanin. Radiation losses of waveguide-based two-dimensional photonic crystals: Positive role of the substrate. *Appl. Phys. Lett.*, 76(5):532–534, JAN 2000.
- [39] R. Ferrini, R. Houdre, H. Benisty, M. Qiu, and J. Moosburger. Radiation losses in planar photonic crystals: two-dimensional representation of hole depth and shape by an imaginary dielectric constant. *JOS-B*, 20(3):469–478, MAR 2003.
- [40] H. Benisty, P. Lalanne, S. Olivier, M. Rattier, C. Weisbuch, C.J.M. Smith, T.F. Krauss, C. Jouanin, and D. Cassagne. Finite-depth and intrinsic losses in vertically etched two-dimensional photonic crystals. *OPTICAL AND QUANTUM ELECTRONICS*, 34(1-3):205–215, JAN 2002.
- [41] D. Peyrade, E. Silberstein, P. Lalanne, A. Talneau, and Y. Chen. Short bragg mirrors with adiabatic mode conversion. *Appl. Phys. Lett.*, 81(5):829, JUL 2002.
- [42] M. Palamaru and P. Lalanne. Photonic crystal waveguides: Out-of-plane losses and adiabatic modal conversion. *Appl. Phys. Lett.*, 78(11):1466, MAR 2001.
- [43] E. Lidorikis, M. M. Sigalas, E. N. Economou, and C. M. Soukoulis. Gap deformation and classical wave localization in disordered two-dimensional photonic-band-gap materials. *Phys. Rev. B*, 61:13458, 2000.
- [44] M. Skorobogatiy, G. Begin, and A. Talneau. Statistical analysis of geometrical imperfections from the images of 2d photonic crystals. *Opt. Express*, 13:2487, 2005.
- [45] C.J.M. Smith, H. Benisty, S. Olivier, M. Rattier, C. Weisbuch, T.F. Krauss, R.M. De La Rue, R. Houdre, and U. Oesterle. Low-loss channel waveguides with two-dimensional photonic crystal boundaries. *Appl. Phys. Lett.*, 77(18):2813–2815, OKT 2000.
- [46] Z-Y Li and K-M Ho. Anomalous propagation loss in photonic crystal waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, 92(6):063904–1, FEB 2004.

- [47] Allan W. Snyder and John D. Love. *Optical waveguide theory*. Springer, 1983.
- [48] K. Busch, S. Lölkes, R. B. Wehrspohn, and H. Föll, editors. *Photonic Crystals*. Wiley-VCH, 2004.
- [49] B.W. Hakki and T.L. Paoli. Gain spectra in gaas double heterostrucute injection lasers. *J. Appl. Phys.*, 46:1299, 1975.
- [50] M.G. Moharam and T.K. Gaylord. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. Opt. Soc. Am.*, 71:811, 1981.
- [51] M.G. Moharam and T.K. Gaylord. Rigorous coupled-wave analysis of grating diffraction- e-mode polarization and losses. *J. Opt. Soc. Am. A*, 73(4):451, 1983.
- [52] M.G. Moharam, E.B. Grann, D.A. Pommet, and T.K. Gaylord. Formulation for stable and efficient implementation of the rcwa of binary gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12:1068, 1995.
- [53] E. Silberstein, P. Lalanne, J.P. Hugonin, and Q.Cao. Use of grating theories in integrated optics. *J. Opt. Soc. Am. A*, 18(11):2865, NOV 2001.
- [54] E.A.Marengo, C.M.Rappaport, and E.L.Miller. Optimum pml abc conductivity profile in ftd. *IEEE Trans Magn*, 35:1506–1509, 1999.
- [55] Lifeng Li. Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13(5):1024, MAY 1996.
- [56] Q. Cao, P. Lalanne, and J.P. Hugonin. Stable and efficient bloch-mode computational method for one-dimensional grating waveguides. *J. Opt. Soc. Am. A*, 19(2):335, FEB 2002.
- [57] Zhi-Yuan Li and Kai-Ming Ho. Light propagation in semi-infinite photonic crystals and related waveguide structures. *Phys. Rev. B*, 68:155101, 2003.
- [58] M. Frank. Pulsausbreitung in zweidimensionalen photonischen kristallen mit intensitätsabhängiger nichtlinearität. Master's thesis, Institut für Theorie der Kondensierten Materie, Universität Karlsruhe, 2001.
- [59] T. F. Krauss. Planar photonic crystal waveguide devices for integrated optics. *phys. stat. sol.*, 197(3):688, 2003.
- [60] Shanhui Fan, Ian Appelbaum, and J. D. Joannopoulos. Near-field scanning optical microscopy as a simultaneous probe of fields and band structure of photonic crystals: A computational study. *Applied Physics Letters*, 75(22), NOV 1999.
- [61] K. Inoue and K. Ohtaka. *Photonic Crystals*. Springer, 2004.
- [62] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 1998.

- [63] P. Lalanne and G.M. Morris. Highly improved convergence of the coupled-wave method for tm-polarisation. *J. Opt. Soc. Am. A*, 13:779, 1996.
- [64] A. Talneau, M. Mulo, S. Anand, and P. Lalanne. Compound cavity measurement of transmission and reflection of a tapered single-line photonic-crystal waveguide. *Appl. Phys. Lett.*, 82(16):2577, APR 2003.

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Friedrichshafen, den 12. Dezember 2006

---

Meikel Frank

## Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all den Leuten bedanken, die mich beim Schreiben dieser Doktorarbeit unterstützt haben.

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Kurt Busch für die Möglichkeit danken in dem hoch interessanten Gebiet der Photonischen Kristalle zu Promovieren. Weiterhin möchte ich mich für die gute Betreuung und die vielen konstruktiven Diskussionen bedanken.

Ferner möchte ich mich bei Herrn Prof. Peter Wölfle für die Übernahme des Korreferates und das freundliche Arbeitsklima bedanken.

Der Photonik-Gruppe im allgemeinen und Dr. Lasha Tkeshelashvili, Dr. Frank Hagemann, Dr. Matthias Schillinger, Dipl. Phys. Marcus Diem, Dipl. Phys. Daniel Hermann, Dipl. Phys. Jens Niegeman im besonderen möchte ich für die vielen Diskussionen, den freundschaftlichen Zusammenhalt, das wundervolle Arbeitsklima und die schöne Zeit danken.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern, meinem Bruder und dessen Familie sowie Pina Grabert und Ankana Punlor. Zudem möchte ich mich bei den Mitgliedern des Universitäts Karate Dojo, insbesondere Carolin Burkhardt, Hans-Jörg Binder, Sabine Binder-Bethke, Sikha Ray und Najib Chahrouri für ihre Unterstützung und das Korrekturlesen bedanken.