

Anke Thede

---

# Ein Workshopzuteilungs- verfahren als zweistufige Auktion zur Enthüllung privater Präferenzen





Anke Thede

**Ein Workshopzuteilungsverfahren als zweistufige Auktion zur Enthüllung privater Präferenzen**



# **Ein Workshopzuteilungsverfahren als zweistufige Auktion zur Enthüllung privater Präferenzen**

von  
Anke Thede



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, genehmigt von der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität  
Fridericiana zu Karlsruhe, 2006

Referenten: Prof. Dr. Andreas Geyer-Schulz, Prof. Dr. Karl-Heinz Waldmann

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziiert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2007  
Print on Demand

ISBN: 978-3-86644-111-8

Für  
meine Mutter Christiane  
und meine Töchter  
Clara und Janna





# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Lineare Optimierung</b>   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Grundlegende Definitionen . . . . .  | 6         |
| 2.2      | Lineare Optimierungsprobleme . . . . .   | 6         |
| 2.3      | Lösungsmethoden für lineare Programme . . . . .  | 9         |
| 2.3.1    | Die Simplex-Methode . . . . .  | 10        |
| 2.3.2    | Komplexität und Laufzeit alternativer Algorithmen: Der interior-point Ansatz . . . . . | 15        |
| 2.4      | Ganzzahlige lineare Optimierungsprobleme . . . . .                                     | 16        |
| 2.4.1    | Branch & Bound Verfahren . . . . .   | 18        |
| 2.4.2    | Branch & Cut Verfahren . . . . .   | 21        |
| 2.5      | Ganzzahligkeit des Lösungsraums . . . . .  | 23        |
| 2.5.1    | Totale Unimodularität von Matrizen . . . . .   | 24        |
| 2.6      | Netzwerkflussmodelle . . . . .   | 26        |
| 2.6.1    | Das shortest-path Problem . . . . .  | 27        |
| 2.6.2    | Das Transportproblem und das Assignment Problem . . . . .                              | 28        |
| 2.6.3    | Das Maximum Fluss Problem . . . . .  | 28        |
| 2.6.4    | LP Formulierung des reinen, kostenminimierenden Netzwerkflussproblems . . . . .        | 28        |
| 2.7      | Zusammenfassung . . . . .  | 30        |
| <b>3</b> | <b>Verwandte Problemklassen</b>  | <b>31</b> |
| 3.1      | Stundenplanprobleme . . . . .  | 31        |
| 3.1.1    | Schulstundenplanung . . . . .  | 32        |
| 3.1.2    | Kursplanungsproblem . . . . .  | 34        |
| 3.1.3    | Prüfungsplanungsproblem . . . . .  | 35        |
| 3.1.4    | Lösungsmethoden . . . . .  | 36        |
| 3.2      | Zuordnungsprobleme . . . . .   | 36        |
| 3.3      | Das National Intern Matching Program . . . . .   | 37        |
| 3.4      | Zusammenfassung . . . . .  | 40        |
| <b>4</b> | <b>Das Workshopzuteilungsproblem</b>   | <b>41</b> |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 4.1      | Definition des Workshopzuteilungsproblems . . . . .                 | 41         |
| 4.2      | Vergleich mit bekannten Problemen . . . . .                         | 49         |
| 4.3      | Lösbarkeit des Workshopzuteilungsproblems . . . . .                 | 50         |
| 4.3.1    | Totale Unimodularität der Matrix . . . . .                          | 51         |
| 4.3.2    | Modellierung als Netzwerkflussproblem . . . . .                     | 61         |
| 4.4      | Praktische Anwendungsbeispiele und Lösungen . . . . .               | 63         |
| 4.4.1    | Der Mädchen-Techniktag . . . . .                                    | 65         |
| 4.4.2    | Der Schnuppertag . . . . .  | 69         |
| 4.5      | Empirische Lösbarkeit . . . . .                                     | 71         |
| 4.5.1    | Ergebnisse mit CPLEX . . . . .                                      | 78         |
| 4.5.2    | Ergebnisse mit SAS . . . . .  | 86         |
| 4.6      | Zusammenfassung . . . . .   | 87         |
| <b>5</b> | <b>Verhaltensanalyse und die Rolle von Information in Auktionen</b> | <b>89</b>  |
| 5.1      | Konsumentenverhalten . . . . .                                      | 90         |
| 5.2      | Grundlagen der Spieltheorie . . . . .                               | 93         |
| 5.3      | Auktionen . . . . .   | 97         |
| 5.3.1    | Einstufige Auktionen . . . . .                                      | 99         |
| 5.3.2    | Weitere Einflussfaktoren von Auktionen . . . . .                    | 102        |
| 5.3.3    | Bewertung von Auktionen . . . . .                                   | 102        |
| 5.4      | Information in einstufigen Auktionen . . . . .                      | 104        |
| 5.5      | Zweistufige Spiele und Auktionen . . . . .                          | 106        |
| 5.5.1    | Eine zweite Stufe für das Divide the Dollar Spiel . . . . .         | 107        |
| 5.5.2    | Eine zweistufige Auktion nach Brams und Taylor . . . . .            | 108        |
| 5.5.3    | Eine zweistufige, parallele Auktion . . . . .                       | 111        |
| 5.5.4    | Survival Auctions . . . . .   | 113        |
| 5.5.5    | Zweistufige Auktionen nach Engelbrecht-Wiggans . . . . .            | 115        |
| 5.5.6    | Zweistufige Auktionen mit Eintrittskosten . . . . .                 | 116        |
| 5.6      | Zusammenfassung . . . . .   | 117        |
| <b>6</b> | <b>Ein Markt für Workshops basierend auf Schattenpreisen</b>        | <b>121</b> |
| 6.1      | Das einstufige Zuteilungsproblem . . . . .                          | 121        |
| 6.1.1    | Anreizkompatibilität . . . . .                                      | 123        |
| 6.1.2    | Auswahl der Präferenzen . . . . .                                   | 127        |
| 6.1.3    | Grenzen der einstufigen Zuteilung . . . . .                         | 132        |
| 6.2      | Einführung einer zweiten Stufe . . . . .                            | 134        |
| 6.2.1    | Eigenschaften einer Bewertungszahl zur Informationsenthüllung .     | 136        |
| 6.3      | Schattenpreise . . . . .  | 138        |
| 6.3.1    | Zum Einsatz von Schattenpreisen in der Literatur . . . . .          | 139        |
| 6.3.2    | Mögliche Bewertungszahlen . . . . .                                 | 140        |
| 6.3.3    | Eigenschaften des Schattenpreises als Bewertungszahl . . . . .      | 143        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 6.4      | Gültige Tausche . . . . .                                   | 145        |
| 6.5      | Das Optimierungsproblem für den Tauschmarkt . . . . .       | 149        |
| 6.5.1    | Nebenbedingungen für Freunde . . . . .                      | 153        |
| 6.6      | Zusammenfassung . . . . .                                   | 155        |
| <b>7</b> | <b>Simulationsergebnisse</b>                                | <b>157</b> |
| 7.1      | Workshopzuteilungsprobleme für die Simulation . . . . .     | 158        |
| 7.2      | Abgekehrte Teilnehmer . . . . .                             | 159        |
| 7.2.1    | Ergebnisse für abgekehrte Teilnehmer . . . . .              | 162        |
| 7.3      | Freunde . . . . .   | 164        |
| 7.3.1    | Ergebnisse für Freunde . . . . .                            | 169        |
| 7.4      | Zusammenfassung . . . . .                                   | 173        |
| <b>8</b> | <b>Zusammenfassung</b>                                      | <b>175</b> |
| <b>A</b> | <b>Ergebnisse der Simulation der abgekehrten Teilnehmer</b> | <b>184</b> |
| <b>B</b> | <b>Ergebnisse der Simulation der Freunde</b>                | <b>192</b> |
| <b>C</b> | <b>Ergebnisse für Freunde mit Nebenbedingung h)</b>         | <b>197</b> |



## Zusammenfassung des Inhalts

Diese Arbeit beschreibt eine neuartige Kombination von Techniken aus den Bereichen des Operations Research und der Spieltheorie. Ein zweistufiges Optimierungsverfahren wird für Probleme vorgeschlagen, bei denen die Eingangsvariablen des Problems durch das Ergebnis der Optimierung selbst nachträglich beeinflusst werden. Bei diesen Variablen geht es um persönliche Präferenzen von Teilnehmern für Workshops. Abhängigkeiten der Präferenzen, z.B. wegen sozialer Gruppenstrukturen, können zu einer Präferenzänderung nach Bekanntgabe der Zuteilung führen. In einer zweiten Phase wird daher das Zuteilungsergebnis basierend auf modifizierten Präferenzwerten weiter optimiert.

Das in der Arbeit behandelte Optimierungsproblem erzeugt eine Zuteilung von Teilnehmern zu Plätzen verschiedener Workshops, basierend auf partiellen Präferenzfunktionen der Teilnehmer. Lösungsmöglichkeiten für das binäre, lineare Workshopzuteilungsproblem werden untersucht. Die Ganzzahligkeit des Lösungsraums kann nur für bestimmte Beschränkungen der Problemstellung garantiert werden. Simulationsergebnisse zeigen die empirische Lösbarkeit des Problems mittels des Simplex- bzw. des Branch & Cut Verfahrens und damit auch die Eignung der Problemstellung für den praktischen Einsatz.

Die verschiedenen Abhängigkeiten der Teilnehmerpräferenzen basieren auf sozialen und psychologischen Faktoren, hinzu kommt das Problem der fehlenden Anreizkompatibilität der optimalen Zuteilung, weswegen strategisches Verhalten bei der Präferenzangabe begünstigt werden kann. Präferenzen sind zunächst private Informationen, die erst durch die initiale Zuteilung enthüllt und damit öffentlich werden. Die Schattenpreise der Workshops vermitteln dabei den Teilnehmern die wesentliche Information für eine verbesserte Präferenzangabe für die zweite Stufe. Zusätzliche Nebenbedingungen des Optimierungsproblems der zweiten Stufe beschränken die neue Lösung auf den pareto-effizienten Teil des Lösungsraums der aktuell gültigen Zuteilung. Weitere, optionale Nebenbedingungen erweitern diese Eigenschaft auf soziale Gruppen, die gemeinsame Workshopbesuche anstreben. Simulationsergebnisse zeigen, dass die zweite Optimierungsphase funktioniert und die Zuteilung für verschiedene Typen von Präferenzabhängigkeiten verbessern kann. Der Einsatz der optionalen Nebenbedingungen für den Erhalt gemeinsam besuchter Workshops durch soziale Gruppen erweist sich außerdem als vorteilhaft. Das vorgestellte, zweistufige Verfahren ist also erfolgreich einsetzbar zur Verbesserung von Optimierungsergebnissen für die vorgestellte Problemstellung, bei der die Eingangsparameter spieltheoretischen Einflüssen und Abhängigkeiten unterliegen und damit nicht im Vorherein festlegbar sind.



# Kapitel 1

## Einleitung

Ende November, Mädchen-Techniktag an der Universität Karlsruhe (TH). Etwa 500 Schülerinnen der Klassenstufen 10 bis 13 von Gymnasien aus dem Umland strömen auf den Campus, um etwas über technische Studiengänge zu erfahren. Die Institute der verschiedenen Fakultäten tun ihr Bestes, um die zukünftigen Studentinnen für ihre Sache zu begeistern: in 50 verschiedenen Workshops werden ausgewählte Thematiken der Fächer in anschaulichen Experimenten dargestellt und von den Schülerinnen eigenhändig ausprobiert. Die erste Runde wird am Vormittag eingeläutet, nach drei Stunden Workshop und einer verdienten Mittagspause für alle geht es am Nachmittag weiter, quer über den Campus, zum zweiten Workshop. Am Ende des Tages sind alle zufrieden: die Mädchen haben Neues hinzugelernt und ein bisschen Angst vor technischen Fächern verloren, die Organisatoren sind zufrieden mit dem Erfolg.

Veranstaltungen dieser Art bilden die Grundlage für die in dieser Arbeit behandelte Problematik. Die Teilnehmer haben Präferenzen für die Workshops, sie möchten zu einigen Workshops sehr gern gehen und haben an anderen wiederum kein Interesse. Die Workshops haben aber nur eine beschränkte Anzahl an verfügbaren Plätzen. Zusätzlich gibt es zeitliche Restriktionen sowohl für die Workshops als auch für die Teilnehmer, die bei einer Zuteilung beachtet werden müssen. Ziel der Organisatoren ist es, die Teilnehmer geeignet auf die Workshopplätze zu verteilen, so dass eine höchstmögliche Zufriedenheit der Teilnehmer erreicht wird und die gegebenen Restriktionen nicht verletzt werden.

Nun kann es aber sein, dass trotz einer gefundenen, optimalen Zuteilung der Teilnehmer auf die Workshopplätze, basierend auf den vor der Zuteilung von den Teilnehmern spezifizierten Präferenzen für die Workshops, nach Bekanntgabe der Zuteilung Unzufriedenheit herrscht. Und hier geht es nicht um Unzufriedenheit von Teilnehmern, die nicht in ihren Lieblingsworkshop gelangt sind, sondern vielmehr um den Einfluss der Präferenzen der anderen Teilnehmer und damit der Zuteilungsergebnisse selbst auf die Präferenzen der Teilnehmer. Beispielsweise halten sich gewisse Teilnehmer lieber ein wenig abseits von der Masse, sie interessieren sich weniger für Themen, die "hipp" sind, sondern eher für exzentrischere Workshops. Diese Teilnehmer ziehen Workshops vor, die das Interesse der Masse nicht im besonderen Maß auf sich ziehen. Ein weiteres Beispiel, das sich beim Mädchen-Techniktag sehr gut beobachten ließ, war das von sozialen Gruppen. Paare von Freunden wollen unbedingt dieselben Workshops besuchen, dies können auch Personen sein, die sich gegenseitig brauchen, wenn beispielsweise eine der Personen eine bestimmte Behinderung hat und die Hilfe der anderen benötigt. Freunde können zwar exakt dieselben Präferenzen äußern, dies ist jedoch keine Garantie für eine Zuteilung in dieselben Workshops, was sich natürlich abseits der angegebenen Präferenz-

werte negativ auf die Zufriedenheit auswirkt. Auch spieltheoretische Faktoren spielen eine Rolle, da das Workshopzuteilungsproblem nicht anreizkompatibel ist und damit Anreize für eine strategische Falschangabe von Präferenzen bieten kann. Deren Erfolg ist jedoch ebenfalls stark von den Präferenzen der anderen Teilnehmer abhängig.

Die Szenarios zeigen: man mag eine optimale Zuteilung der Teilnehmer zu den Workshops finden, basierend auf den a priori angegebenen Präferenzen. Jedoch kann die Zuteilung selbst und die zusätzliche Information, die mit der Zuteilung über die Präferenzen der anderen Teilnehmer enthüllt wird, die Präferenzen im Nachhinein ändern, so dass die Zuteilung bezogen auf die wahren Bewertungen nicht mehr optimal ist! Es ist daher wünschenswert, einen Mechanismus zu finden, der die initiale Zuteilung im Nachhinein noch weiter verbessert, basierend auf den geänderten Präferenzwerten einiger Teilnehmer, und dabei aber die Qualität der ersten Zuteilung für bereits zufriedene Teilnehmer erhält.

## Zielsetzung und Gliederung

Diese Arbeit schlägt ein zweistufiges Verfahren vor, um das Ergebnis eines Optimierungsproblems zu verbessern, bei dem die initialen Parameter Abhängigkeiten und Anreizproblemen unterliegen. Die Betrachtungen basieren auf dem Problem der Zuteilung von Teilnehmern zu Workshopplätzen. In der ersten Stufe wird die optimale Zuteilung basierend auf den durch die Teilnehmer a priori angegebenen Präferenzen berechnet. Aufgrund von Abhängigkeiten und Anreizproblemen können sich die wahren Präferenzwerte jedoch ändern, sobald Informationen über die Zuteilung und damit die Präferenzen der anderen Teilnehmer bekannt gegeben werden. Daher wird eine zweite Optimierungsphase eingeführt. Informationen über das Zuteilungsergebnis der ersten Phase werden mit Hilfe der Schattenpreise der Workshops bekannt gegeben. Dies verringert die Informationsasymmetrien und ermöglicht die Anpassung der Präferenzwerte durch die Teilnehmer. Das Ziel ist es, basierend auf den geänderten Präferenzwerten eine neue, verbesserte Zuteilung zu berechnen. Die Eignung der Schattenpreise zur Bekanntgabe der wesentlichen Information an die Teilnehmer soll untersucht werden. Weiterhin soll gewährleistet sein, dass die neue Lösung sich auf den pareto-effizienten Teil des Lösungsraums der ersten Zuteilung beschränkt. Das Verhindern einer Schlechterstellung der Teilnehmer ist wichtige Voraussetzung für die Anreize zur freiwilligen Teilnahme an der zweiten Phase. Außerdem sollen weitere, optionale Nebenbedingungen die Pareto-Effizienz erweitern auf soziale Gruppenstrukturen, für die der Erhalt der Zuteilung zu gemeinsam besuchten Workshops sicher gestellt werden soll. Die Verbindung von Optimierungsmethoden des Operations Research mit der Problematik von Anreizstrukturen und Abhängigkeiten persönlicher Präferenzangaben, die aus in der Spieltheorie betrachteten Informationsasymmetrien resultieren, stellt den zentralen, innovativen Teil dieser Arbeit dar.

Im ersten Teil der Arbeit in Kap. 2 bis 4 wird zunächst das lineare, binäre Optimierungsproblem zur Workshopzuteilung vorgestellt. Ähnliche Probleme aus der Literatur werden vorgestellt und die Lösungsmöglichkeiten für dieses Problem werden untersucht. Dabei wird insbesondere betrachtet, inwiefern sich das Problem mit dem Simplex-Verfahren lösen lässt, da dies polynomielle Komplexität bedeutet und weiterhin die durch das Verfahren berechneten Schattenpreise grundlegend für den Einsatz der zweiten Phase sind. Die empirische Lösbarkeit ist außerdem interessant für den praktischen Einsatz des Optimierungsproblems.



Der zweite, zentrale Teil der Arbeit ab Kap. 5 beschäftigt sich mit der Definition einer zweiten Optimierungsphase in Form eines Tauschmarkts für das Workshopzuteilungsproblem. In Kap. 5 werden zunächst die Faktoren aus den Bereichen der Persönlichkeitsforschung und der sozialen Gruppen erläutert, die eine Abhängigkeit der Präferenzen untereinander bedingen können. Der Einsatz von mehrstufigen Verfahren in der Literatur wird beschrieben, insbesondere im Bereich der Auktionstheorie. Auch hier wird durch Bekanntgabe von Informationen, die aus den Ergebnissen früherer Stufen resultieren, weiteres Verhalten induziert, das das erzielte Auktionsergebnis verbessert.

Kap. 6 beschäftigt sich mit der Anreizstruktur des Workshopzuteilungsproblems und untersucht, inwiefern der Zuteilungsmechanismus strategische Präferenzangaben fördert. Um Informationen über die Präferenzen anderer Teilnehmer und die daraus resultierende, initiale Zuteilung geeignet zu kommunizieren, werden mögliche Kennzahlen untersucht. Insbesondere werden hierzu die Schattenpreise der Workshops betrachtet, die durch die Lösung der ersten Zuteilung automatisch berechnet werden und außerdem Information über die Problemstruktur beinhalten. Die Schattenpreise geben Auskunft über den Wert, also die Beliebtheit der einzelnen Workshops und damit über die Chancen, erfolgreich in andere Workshops zu wechseln.

Am Schluss von Kap. 6 wird das Optimierungsproblem des Tauschmarkts der zweiten Stufe formuliert. Dabei werden Nebenbedingungen vorgeschlagen, die die neue Zuteilung auf den pareto-effizienten Lösungsraum der aktuell gültigen Zuteilung beschränken. Weitere, optionale Nebenbedingungen werden formuliert, die diese Eigenschaft erweitern auf den Erhalt gemeinsam besuchter Workshops durch beliebig große soziale Gruppenstrukturen. In Kap. 7 wird abschließend das Funktionieren der vorgestellten, zweiten Phase anhand einer Simulation untersucht. Simuliert werden zum einen abgekehrte Teilnehmer, die den Besuch von Workshops abseits der Masse präferieren, zum anderen Paare von Freunden, die den gemeinsamen Besuch von Workshops wünschen. Der Tauschmarkt für Freunde wird dabei sowohl ohne als auch mit der optionalen Nebenbedingung für den Erhalt gemeinsamer Workshopbesuche simuliert. Dies gibt Auskunft darüber, ob die zusätzliche Einschränkung des Lösungsraums sich auf die Anzahl und Qualität der möglichen Workshop-täusche auswirkt. Kap. 8 schließt mit einer Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit.



# Kapitel 2

## Lineare Optimierung

Optimierung hat zum Ziel, eine bestimmte Funktion oder Variable zu maximieren oder zu minimieren, wobei gegebenenfalls eine Reihe von Beschränkungen eingehalten werden müssen. Optimierung findet in mannigfaltigen Gebieten Anwendung, wie z.B. der Wirtschaft oder den Naturwissenschaften wie Mathematik, Chemie etc. Ein bekanntes Beispiel ist das Produktmixproblem (product mix problem). Hierbei sind verschiedene, zu produzierende Produkte gegeben, die bestimmte Kapazitäten verschiedener Maschinen zur Herstellung benötigen. Die verfügbaren Kapazitäten sind beschränkt. Das Ziel der Optimierung ist es herauszufinden, wieviel von jedem Produkt hergestellt werden sollte, so dass der entstehende Deckungsbeitrag maximiert wird [HL01]. Ein weiteres, bekanntes Problem ist das Stundenplanproblem, wie es Schulen betrifft [Sch99]. Die abzuhaltenden Stunden sollen dabei zeitlich derart den Klassen zugeteilt werden, dass sowohl für die Klassen als auch für die Lehrer möglichst günstige Stundenpläne entstehen, wobei die Lage von Freistunden ein Kriterium ist, welches die Güte eines Stundenplans beeinflusst. Bei der Lösung dieses Problems müssen zahlreiche Nebenbedingungen beachtet werden, da beispielsweise kein Lehrer zeitgleich zwei verschiedenen Klassen zugeteilt sein darf und keine Klasse zeitgleich mehr als einer Unterrichtsstunde.

Im Folgenden wird ein Überblick über die lineare und im besonderen ganzzahlige Optimierung gegeben. Zunächst folgt eine Vorstellung der Bestandteile linearer Optimierungsprobleme, während danach auf die spezifischen Eigenschaften ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme eingegangen wird, die für die Definition des Workshop-zuteilungsproblems in Kapitel 4 grundlegend sind.

In dieser Arbeit findet die folgende Notation Anwendung:

- Skalare Variablen werden als lateinischer Kleinbuchstabe notiert ( $y, x_1$ ).
- Vektoren werden durch einen fett gedruckten lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnet ( $\mathbf{x}$ ),  $x_i$  ist dann das  $i$ -te Element des Vektors. Ein Vektor  $\mathbf{x}$  bezeichnet den Spaltenvektor  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}^T$  ist der Zeilenvektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ .
- Matrizen werden durch einen fett gedruckten lateinischen Großbuchstaben bezeichnet ( $\mathbf{A}$ ).  $\mathbf{a}_{i\bullet}^T$  bezeichnet dann den  $i$ -ten Zeilenvektor,  $\mathbf{a}_{\bullet j}$  den  $j$ -ten Spaltenvektor der Matrix und  $a_{ij}$  das Element in Zeile  $i$  und Spalte  $j$ .

## 2.1 Grundlegende Definitionen

In diesem Abschnitt sollen kurz einige grundlegende mathematische Begriffe definiert werden, die in der Arbeit verwendet werden. Die meisten dieser Definitionen sind allgemein bekannt, von daher sei dem Leser empfohlen, diesen Abschnitt zunächst auszulassen und bei Bedarf nachzuschlagen.

**Definition 2.1**  $\mathbb{R}$  bezeichne die Menge der reellen Zahlen,  $\mathbb{R}_+$  bezeichne die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen.  $\mathbb{Z}$  sei die Menge der ganzen Zahlen,  $\mathbb{Z}_+$  bezeichne entsprechend die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen.  $\mathbb{B}$  bezeichne  $\{0, 1\}$ . Für eine Menge  $X$  ist  $X^n$  die Menge aller  $n$ -dimensionalen Vektoren mit Elementen aus  $X$ ,  $X^{m \times n}$  ist die Menge aller  $m \times n$  Matrizen mit Elementen aus  $X$ .

**Definition 2.2** Ein **Graph**  $G = (V, E)$  besteht aus einer Menge von Knoten  $V$  und einer Menge von Kanten  $E \subset V \times V$ .

Ein Graph wird oft veranschaulicht, indem man für jeden Knoten  $v \in V$  ein Symbol zeichnet und zwei Symbole  $v_1, v_2 \in V$  miteinander durch eine Linie verbindet, wenn  $(v_1, v_2) \in E$ .

**Definition 2.3** Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **ungerichtet**, wenn für beliebige  $v_1, v_2 \in V$  gilt:  $(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (v_2, v_1) \in E$ .  
Ein Graph  $G = (V, E)$  heißt **gerichtet**, wenn  $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ .

Bei ungerichteten Graphen spielt die Reihenfolge der Knoten einer Kante keine Rolle, bei einem gerichteten macht sie einen Unterschied. Bei der graphischen Darstellung gerichteter Graphen wird die Richtung einer Kante mit einer Pfeilspitze verdeutlicht.

**Definition 2.4** Ein **gewichteter Graph** ist ein Tripel  $G = (V, E, w)$  mit dem Graphen  $(V, E)$  und zusätzlich einer Menge von Gewichten  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , mit  $w(e)$  dem Gewicht für die Kante  $e \in E$ .

Zur Veranschaulichung gewichteter Graphen werden die Gewichte zu einer Kante an der entsprechenden Linie oder dem Pfeil notiert.

## 2.2 Lineare Optimierungsprobleme

Ein lineares Optimierungsproblem zeichnet sich dadurch aus, dass sowohl die Zielfunktion linear ist als auch die Nebenbedingungen durch lineare Ungleichungen ausgedrückt werden können. Mathematisch gesehen besteht ein lineares Optimierungsproblem also aus den in Gleichung (2.1) gezeigten Komponenten [HL01].

$$\begin{array}{rcll}
\text{Maximiere} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & & & & & & & & \\
& a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
& a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
& & & \vdots & & & & \vdots & & \\
& a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m & (2.1) \\
\text{mit den Nichtnegativitätsbedingungen} & & & & & & & & & \\
& & & & & & & x_1 & \geq & 0 \\
& & & & & & & x_2 & \geq & 0 \\
& & & & & & & \vdots & & \\
& & & & & & & x_n & \geq & 0
\end{array}$$

Hierbei sind  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  die zu optimierenden Variablen, während die  $a_{ji}$ ,  $b_j$  und  $c_i$ ,  $1 \leq j \leq m$  gegeben sind. Auch andere Formen von Problemstellungen lassen sich in dieses Modell umformen [HL01]:

- Die Zielfunktion soll minimiert statt maximiert werden. Die Minimierung einer Zielfunktion entspricht der Maximierung des Negativen der Zielfunktion. Durch Multiplizieren der Zielfunktion mit  $-1$  kann ein Minimierungsproblem in ein Maximierungsproblem umgewandelt werden.
- Es gibt größer-gleich Nebenbedingungen. Diese können jedoch ebenso durch Multiplizieren der gesamten Nebenbedingungszeile mit  $-1$  in eine kleiner-gleich Nebenbedingung umgeformt werden.
- Es gibt Gleichheitsnebenbedingungen. Diese lassen sich ersetzen durch eine Nebenbedingung mit  $\geq$  und eine mit  $\leq$ .

Fasst man die  $a_{ji}$  als Elemente einer Matrix  $\mathbf{A}$  auf und die  $x_i$ ,  $c_i$  und  $b_j$  als Elemente von Vektoren  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{b}$ , so lässt sich das lineare Optimierungsproblem auch folgendermaßen schreiben [KV02]:

$$\begin{array}{rcl}
\text{Maximiere} & \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \\
\text{unter den Nebenbedingungen} & & \\
& \mathbf{A} \mathbf{x} & \leq \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} & \in \mathbb{R}_+^n
\end{array} \tag{2.2}$$

Die  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$  wird als die Matrix der Nebenbedingungen bezeichnet, der Vektor  $\mathbf{b}$  stellt die rechte Seite dar, und der Vektor  $\mathbf{c}$  wird oft als Nutzen- bzw. Kostenvektor bezeichnet, je nachdem, ob die Zielfunktion maximiert oder minimiert werden soll.

Ein **lineares Programm** ist eine Instanz eines linearen Optimierungsproblems. Eine **Lösung** eines linearen Programms ist zunächst einmal nichts weiter als eine Belegung der Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  bzw. des Vektors  $\mathbf{x}$ . Eine Lösung selbst kann also immer noch die Nebenbedingungen verletzen oder einen ungünstigen Zielfunktionswert haben. Eine **zulässige Lösung** zu einem linearen Programm ist eine Lösung  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ , so dass  $\mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$  gilt. Eine solche Lösung erfüllt also alle an das Problem gestellten Nebenbedingungen. Der **Lösungsraum** ist die Menge aller zulässigen Lösungen zu einem linearen

Programm. Eine **optimale Lösung** ist eine zulässige Lösung, die die Zielfunktion maximiert, d.h. es gibt keine weitere, zulässige Lösung, die zu einem höheren Zielfunktionswert führt. Ein Problem kann mehrere verschiedene optimale Lösungen haben [KV02].

Es gibt Problemstellungen, bei denen das Finden einer zulässigen Lösung bereits ein großes Problem darstellt. Dies sind typischerweise Probleme mit einem eher kleinen Lösungsraum. Oft kommt es gar nicht so sehr darauf an, wirklich eine optimale Lösung zu finden, sondern vielmehr eine zulässige, vielleicht auch suboptimale Lösung. Beim Stundenplanproblem beispielsweise bedeutet eine zulässige Lösung bereits, dass man einen Stundenplan gefunden hat, der in die Praxis umsetzbar, also realisierbar ist. Wie bequem der Stundenplan für Lehrer und Schüler dann ist, mag eher zweitrangig sein, wichtig ist zunächst, überhaupt die Existenz eines zulässigen Stundenplans zu zeigen und einen solchen zu finden [Sch99].

Ein Problem kann auch keine zulässige Lösung besitzen, also einen leeren Lösungsraum haben. Solche Probleme heißen **unlösbar**. Ein Problem mit einem unbeschränkten Lösungsraum hat zwar zulässige Lösungen, aber keine optimale Lösung, da zu jeder zulässigen Lösung wieder eine weitere mit einem höheren Zielfunktionswert gefunden werden kann. Diese Probleme heißen **unbeschränkt**. Für beide Arten von Problemen kann keine optimale Lösung angegeben werden. Es kann gezeigt werden, dass für alle Probleme, die weder unlösbar noch unbeschränkt sind, immer eine optimale Lösung existiert [KV02].

Ein **Polyeder** in  $\mathbb{R}^n$  ist eine Menge  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$  für eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und einen Vektor  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ . Wenn  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{b}$  rational sind, dann ist  $P$  ein **rationales Polyeder**. Ein beschränktes Polyeder ist ein **Polytop**. Der Lösungsraum eines linearen Optimierungsproblems ist algebraisch ausgedrückt also ein Polyeder [KV02].

Ein **ganzzahliges** lineares Optimierungsproblem [NW99] ist ein lineares Optimierungsproblem mit der zusätzlichen Bedingung, dass die Variablen nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen:  $x_i \in \mathbb{Z}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ganzzahlige Probleme kommen beispielsweise zum Einsatz, wenn die Variablen Stückzahlen z.B. von zu produzierenden Produkten repräsentieren. In diesem Fall machen Variablenbelegungen mit Nachkommastellen keinen Sinn.

Das **gemischt-ganzzahlige** lineare Optimierungsproblem stellt den allgemeinen Fall dar. Es enthält sowohl ganzzahlige als auch reellwertige Variablen. Das ganzzahlige lineare Optimierungsproblem und das allgemeine lineare Optimierungsproblem sind jeweils Sonderfälle des gemischt-ganzzahligen, bei denen die Anzahl der reellwertigen bzw. ganzzahligen Variablen null ist. Das gemischt-ganzzahlige Problem stellt sich wie in (2.3) dar [NW99], wobei  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^p$  und  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ .

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{h}^T \mathbf{y} \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &\quad \mathbf{Ax} + \mathbf{Gy} \leq \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \\ &\quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^p \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ein Sonderfall eines ganzzahligen linearen Optimierungsproblems stellt das **0-1** oder **binäre** lineare Optimierungsproblem dar. Hier dürfen die ganzzahligen Variablen nur die Werte 0 oder 1 annehmen, meist repräsentieren sie dabei logische Beziehungen. Gleichung (2.4) zeigt das binäre lineare Optimierungsproblem.

$$\begin{aligned}
& \text{Maximiere} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
& \text{unter den Nebenbedingungen} && \\
& && \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\
& && \mathbf{x} \in \mathbb{B}^n
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Das binäre lineare Optimierungsproblem wird für diese Arbeit von besonderer Bedeutung sein, da die in Kapitel 4 vorgestellte Darstellung des Workshopzuteilungsproblems ein binäres lineares Optimierungsproblem darstellt.

Für die Lösung eines linearen Optimierungsproblems ist dessen **duales Problem** von Bedeutung. Zum Ausgangsproblem in (2.2), das auch als primales Problem bezeichnet wird, ist das duale Problem wie in (2.5) dargestellt definiert [NW99].

$$\begin{aligned}
& \text{Minimiere} && \mathbf{y}^T \mathbf{b} \\
& \text{unter den Nebenbedingungen} && \\
& && \mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \\
& && \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Das duale Problem hat also  $m$  Variablen und  $n$  Nebenbedingungsgleichungen, umgekehrt wie beim primalen Problem. Das duale Problem ist quasi das Komplementärproblem zum primalen Problem. Dabei ist das duale Problem des dualen Problems gleich dem primalen Problem. Die folgende Proposition, auch bekannt als **schwache Dualität** oder weak duality, zeigt den Zusammenhang zwischen zulässigen und optimalen Lösungen vom primalen und dualen Problem (siehe [NW99, S. 28]). Hierbei bezeichnen  $\mathbf{x}_{\text{opt}}$  und  $\mathbf{y}_{\text{opt}}$  optimale Lösungen zum primalen bzw. dualen Problem.

**Proposition 2.1** *Wenn  $\mathbf{x}_*$  eine zulässige Lösung zum primalen Problem (2.2) und  $\mathbf{y}_*$  eine zulässige Lösung zum dualen Problem (2.5) ist, so gilt:*

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}_* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}_{\text{opt}} \leq \mathbf{y}_{\text{opt}}^T \mathbf{b} \leq \mathbf{y}_*^T \mathbf{b}$$

**Beweis.** Da  $\mathbf{y}_*$  eine zulässige Lösung zum dualen Problem ist, gilt  $\mathbf{y}_*^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T$ . Da  $\mathbf{x}_* \geq \mathbf{0}$  gilt folglich  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_* \leq \mathbf{y}_*^T \mathbf{A} \mathbf{x}_*$ . Ebenso gilt  $\mathbf{y}_*^T \mathbf{A} \mathbf{x}_* \leq \mathbf{y}_*^T \mathbf{b}$ , da  $\mathbf{A} \mathbf{x}_* \leq \mathbf{b}$  und  $\mathbf{y}_* \geq \mathbf{0}$ . Also gilt  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_* \leq \mathbf{y}_*^T \mathbf{b}$  für alle zulässigen Lösungen zum primalen und dualen Problem, also auch für die optimalen Lösungen. Daher gilt für die Zielfunktionswerte  $\mathbf{c}^T \mathbf{x}_{\text{opt}} \leq \mathbf{y}_{\text{opt}}^T \mathbf{b}$ .  $\square$

Eine zulässige Lösung zum dualen Problem liefert also eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des primalen Problems. Diese Eigenschaft ist nützlich zum Nachweisen der Optimalität einer zulässigen Lösung, wie im Abschnitt 2.3.1 gezeigt wird.

## 2.3 Lösungsmethoden für lineare Programme

Dieser Abschnitt gibt einen Überblick über die wichtigsten Verfahren zur Lösung insbesondere ganzzahliger, linearer Optimierungsprobleme.

Im Folgenden wird von der in Gleichung (2.2) gezeigten Form eines linearen Programms ausgegangen. Die Zielfunktion ist also zu maximieren, die Nebenbedingungen liegen in kleiner-gleich Form vor und die Variablen nehmen nicht-negative, reelle Werte an.

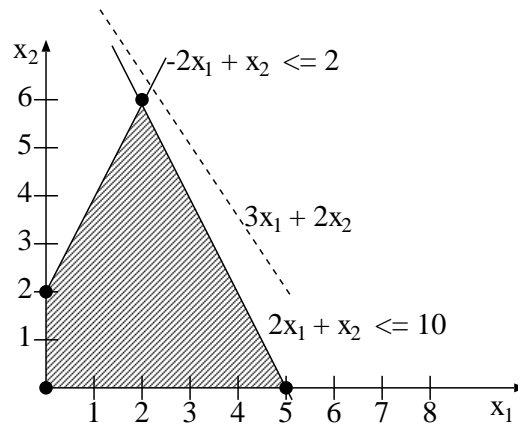


Abbildung 2.1: Grafische Darstellung des Optimierungsproblems aus (2.6)

### 2.3.1 Die Simplex-Methode

Die Simplex-Methode ist der bekannteste Algorithmus zum Lösen linearer Optimierungsprobleme. Der Algorithmus ist sehr effizient auch beim Lösen großer Probleme und ist in den gängigen Softwarepaketen zum Lösen von Optimierungsproblemen integriert. Die Simplex-Methode wurde 1947 von George Dantzig [Dan51] entwickelt.

Die Beschreibung der Simplex-Methode basiert auf [HL01], [NW99] und [KV02]. Das Vorgehen der Simplex-Methode soll zunächst anhand eines Beispiels anschaulich beschrieben werden. Gegeben sei das lineare Programm in (2.6).

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximiere} && 3x_1 + 2x_2 \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 & && 2x_1 + x_2 \leq 10 \\
 & && -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & && x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Da es im Beispiel nur zwei Variablen gibt, lassen sich die Nebenbedingungen grafisch darstellen. In Abb. 2.1 sind die beiden Nebenbedingungen als Geraden dargestellt. Da es kleiner-gleich Bedingungen sind und die Variablen außerdem nur positive Werte annehmen dürfen, ist die schattierte Region zwischen den Nebenbedingungengeraden und den Achsen der Lösungsraum. Die Schnittpunkte der begrenzenden Geraden sind die Eckpunktlösungen des Problems, in Abb. 2.1 durch einen schwarzen Punkt markiert. Jede Eckpunktlösung ist hierbei Schnittpunkt zweier Geraden, da wir ein zweidimensionales Problem betrachten. Die Zielfunktionsgerade ist gestrichelt dargestellt, hier ist natürlich nur die Steigung der Geraden maßgeblich, die Position wird durch die Maximierung verändert.

Falls nun eine optimale Lösung existiert, genügt es, die Eckpunkte des Lösungsraums abzulaufen. Ist ein Eckpunkt gefunden, so dass es keinen benachbarten Eckpunkt mehr gibt, der zu einem höheren Wert der Zielfunktion führt, so ist eine optimale Lösung gefunden. Eckpunkte sind dabei benachbart, wenn die den Eckpunkt bildenden Nebenbedingungengeraden sich nur in einer unterscheiden.

Algebraisch beschrieben kommt man folgendermaßen zu einer optimalen Lösung:

1. Wähle eine initiale zulässige Eckpunktlösung. Oft bietet sich hierfür an, alle Va-



riablen auf den Wert 0 zu setzen, da diese Belegung die kleiner-gleich Nebenbedingungen nicht verletzt.

2. Berechne den Zielfunktionswert für die aktuelle Lösung.
3. Bestimme alle benachbarten Eckpunktlösungen.
4. Bestimme die Zielfunktionswerte für die benachbarten Eckpunktlösungen. Falls eine der benachbarten Eckpunktlösungen einen höheren Zielfunktionswert hat als die aktuelle Lösung, so ist die aktuelle Lösung nicht optimal. Wenn die Lösung optimal ist, dann gib diese aus und stoppe.
5. Wähle eine benachbarte Eckpunktlösung als aktuelle Lösung (z.B. diejenige, die den größten Anstieg der Zielfunktion verspricht).
6. Wiederhole ab Schritt 3.

Im Beispiel starten wir also mit der initialen, zulässigen Eckpunktlösung  $[(x_1, x_2)] (0,0)$  mit Zielfunktionswert 0. Die benachbarten zulässigen Eckpunktlösungen sind  $(5,0)$  und  $(0,1)$  mit den Zielfunktionswerten 15 und 2.  $(0,0)$  ist daher nicht optimal, der Algorithmus wählt nun  $(5,0)$  als nächste aktuelle Eckpunktlösung. Die benachbarten Eckpunktlösungen sind  $(0,0)$  und  $(2,6)$  mit Zielfunktionswerten 0 und 18. Die aktuelle Lösung ist also noch nicht optimal, als nächste Eckpunktlösung wird  $(2,6)$  gewählt. Die benachbarten Eckpunktlösungen sind  $(5,0)$  und  $(0,1)$  mit Zielfunktionswerten 15 und 2. Da beide Zielfunktionswerte kleiner als 18 sind, ist  $(2,6)$  die optimale Lösung.

Für den tatsächlichen Algorithmus und die Anwendung auf beliebig viele Dimensionen muss natürlich noch genauer spezifiziert werden, wie genau zu einer Eckpunktlösung alle benachbarten Eckpunktlösungen bestimmt werden und wie man die initiale, zulässige Eckpunktlösung bestimmt, falls der Ursprung nicht Teil des Lösungsraums ist. Daher wird im Folgenden die präzisere, algebraische Darstellung des Simplex-Algorithmus gegeben. Hierzu wird vom linearen Optimierungsproblem mit ist-gleich Nebenbedingungen ausgegangen, siehe Gleichung (2.7). Durch Einführung von Schlupfvariablen lässt sich eine kleiner-gleich Nebenbedingung in eine Gleichheitsbedingung überführen. Weiterhin wird für alle folgenden Betrachtungen davon ausgegangen, dass die Nebenbedingungsmatrix  $\mathbf{A}$  vollen Rang hat ( $\text{Rang}(\mathbf{A}) = m \leq n$ ) und keine überflüssigen Nebenbedingungen enthält.

$$\begin{aligned}
 &\text{Maximiere } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
 &\text{unter den Nebenbedingungen} \\
 &\quad \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 &\quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \\
 &\text{mit } \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^m, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{Rang}(\mathbf{A}) = m \leq n
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Aus den  $n$  Spalten  $(\mathbf{a}_{\bullet 1}, \mathbf{a}_{\bullet 2}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n})$  der Matrix  $\mathbf{A}$  werden  $m$  Spalten mit den Indizes  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  gewählt. Sei  $N = \{1, \dots, n\} \setminus B$  die Menge der verbleibenden  $n - m$  Indizes. Setzt man nun alle Variablen  $\{x_i : i \in N\}$  auf 0, so verbleibt ein Gleichungssystem mit  $m$  Zeilen und  $m$  Unbekannten, zu dem sich, falls vorhanden, eine eindeutige Lösung bestimmen lässt.  $\mathbf{A}_B$  bezeichne die  $m \times m$  Sub-Matrix von  $\mathbf{A}$ , die nur aus den Spalten in  $B$  besteht,  $\mathbf{A}_N$  sei entsprechend definiert und ist dann eine  $(n - m) \times m$  Matrix. Analog bezeichnen  $\mathbf{c}_B$ ,  $\mathbf{x}_B$  und  $\mathbf{x}_N$  die Reduktionen der Vektoren auf die entsprechenden

Komponenten. Dann lässt sich  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  auch schreiben als  $\mathbf{A}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$ . Für  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  ist die Lösung für die restlichen Variablen dann  $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$ .

**Definition 2.5** Die durch Auswahl von  $m$  Spalten entstehende  $m \times m$  Submatrix  $\mathbf{A}_B$  ist eine *Basis*.

**Definition 2.6** Die sich daraus ergebende Lösung des Gleichungssystems  $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b}$  und  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$  heißt *Basislösung* von  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . Falls  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , so heißt die Lösung eine *zulässige Basislösung*.

**Definition 2.7**  $\mathbf{x}_B$  ist der Vektor der *Basisvariablen* und  $\mathbf{x}_N$  der Vektor der *Nicht-basisvariablen*.

Für den Test auf Optimalität einer zulässigen Lösung wird zum Optimierungsproblem das duale Problem gebildet. (2.8) zeigt das duale Problem zum Beispielproblem aus (2.6), entsprechend der Definition des dualen Problems in (2.5). Das duale Problem zur Problemstellung mit Gleichheitsbedingungen in (2.7) ist außerdem in (2.9) gezeigt [NW99].

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 10y_1 + 2y_2 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & \\ & 2y_1 - 2y_2 \geq 3 \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \mathbf{y}^T \mathbf{b} \\ \text{unter den Nebenbedingungen} \quad & \\ & \mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{2.9}$$

Um die Optimalität einer Lösung zu zeigen, wird nun die schwache Dualität ausgenutzt (Proposition 2.1). Hat man eine Basis gefunden, die eine zulässige Lösung sowohl zum primalen als auch zum dualen Problem liefert, so sind beide Problemlösungen aufgrund der schwachen Dualität optimal, siehe Proposition 2.2. Dieser Zusammenhang wird vom Simplex-Algorithmus zum Überprüfen der Optimalität einer Lösung ausgenutzt.

**Proposition 2.2** Gegeben sei eine Basis  $\mathbf{A}_B$  mit  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \geq \mathbf{c}_N^T$ . Dann ist  $\mathbf{x}^T = (\mathbf{x}_B^T, \mathbf{x}_N^T) = ((\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b})^T, \mathbf{0}^T)$  eine optimale Lösung des primalen Problems aus (2.7) und  $\mathbf{y}^T = \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1}$  ist eine optimale Lösung des dualen Problems aus (2.9).

Für den Beweis der Proposition 2.2 siehe [NW99, S. 31]. Um die Optimalität einer durch eine invertierbare Basis  $\mathbf{A}_B$  induzierten Lösung zu zeigen, muss man also nur überprüfen, ob  $\mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  und  $\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \geq \mathbf{c}_N^T$  gelten, d.h. ob diese Basis zulässige Lösungen sowohl zum primalen als auch zum dualen Problem definiert.

Die einzelnen Schritte des Simplex-Algorithmus sind in Algorithmus 1 dargestellt. Diese Darstellung des Algorithmus basiert auf [NW99] und [KV02], es gibt andere Darstellungsvarianten, hinter denen aber dieselbe Vorgehensweise steckt. Nun muss allerdings zum einen noch eine initiale, zulässige Basis gefunden werden, mit der der Algorithmus starten kann. Zum anderen müssen Schleifen erkannt werden, die potentiell,

---

**Algorithmus 1** Der Simplex-Algorithmus (Darstellung nach [NW99] und [KV02])

---

Eingabe: Ein Optimierungsproblem nach Gl. (2.7), und  $B \subset \{1, \dots, n\}$  so, dass  $\mathbf{A}_B$  quadratisch und regulär ist.

1. Berechne  $\mathbf{x}_B = \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$  und setze  $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ .
  2. Forme die Problemstellung nach der Gauss'schen Eliminationsmethode derart um, dass die neue Matrix  $\overline{\mathbf{A}}_B$  der Basisvariablen die Einheitsmatrix ist.
    - (a) Setze dazu  $\overline{\mathbf{A}} = (\overline{\mathbf{A}}_B, \overline{\mathbf{A}}_N) := \mathbf{A}_B^{-1}(\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N) = (\mathbf{I}, \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{A}_N)$ .
    - (b) Setze ebenfalls  $\overline{\mathbf{b}} := \mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{b}$ .
    - (c) Der Vektor  $\mathbf{c}$  wird so in  $\overline{\mathbf{c}}$  umgeformt, dass  $\overline{c}_i = 0$  für  $i \in B$  gilt. Setze  $\overline{\mathbf{c}}^T = (\overline{\mathbf{c}}_B^T, \overline{\mathbf{c}}_N^T) := \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A} = (\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T) - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} (\mathbf{A}_B, \mathbf{A}_N) = (\mathbf{0}^T, \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N) = (\mathbf{0}^T, \mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T \overline{\mathbf{A}}_N)$ .
  3. Überprüfe, ob für die gewählte Basis  $\mathbf{c}_B^T \mathbf{A}_B^{-1} \mathbf{A}_N \geq \mathbf{c}_N^T$  gilt, d.h. ob  $\overline{\mathbf{c}}_N \leq \mathbf{0}$ . Wenn ja, stoppe. Gib  $\mathbf{x}^T = (\overline{\mathbf{b}}^T, \mathbf{0}^T)$  als optimale Lösung zurück.
  4. Verändere die Basis  $\overline{\mathbf{A}}_B$  zu einer benachbarten Basis  $\overline{\mathbf{A}}_{B'}$ , d.h. mit  $|B \setminus B'| = |B' \setminus B| = 1$ .
    - (a) Wähle dazu zunächst aus der Menge der Nichtbasisvariablen eine, die neue Basisvariable werden soll (Pivotwahl). Bei dieser Wahl gibt es verschiedene Strategien (z.B. die Wahl derjenigen Variablen, die den höchsten Koeffizienten in der Zielfunktion besitzt, da durch deren Veränderung auf einen Wert größer Null der Zielfunktionswert möglichst weit wächst. Setze dafür also  $j = \arg \max_{i \in N} \{\overline{c}_i\}$ ).
    - (b) Bestimme diejenige Basisvariable, die Nichtbasisvariable werden soll. Dazu wird diejenige Nebenbedingungszeile bestimmt, deren Basisvariable bei einer Erhöhung der neuen Nichtbasisvariablen  $x_j$  zuerst auf Null gesetzt werden muss. Setze also  $\lambda_j = \min_{i \in B} \{\frac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ij}} : \overline{a}_{ij} > 0\}$  und  $k_j = \arg \lambda_j$ . Falls  $k_j$  nicht eindeutig ist, wähle einen dieser Indizes (verschiedene Strategien sind möglich). Die Basisvariable, die zur Nichtbasisvariablen wird, ist dann wegen  $\overline{\mathbf{A}}_B = \mathbf{I}$  die Variable  $x_{k_j}$ .
    - (c) Falls  $\overline{\mathbf{a}}_j \leq \mathbf{0}$  kann keine solche Basisvariable angegeben werden. In diesem Fall kann aber die neue Basisvariable unendlich erhöht werden, ohne dass die dadurch definierte Lösung unzulässig wird. In diesem Fall ist das lineare Optimierungsproblem unbeschränkt, der Algorithmus stoppt.
  5. Wiederhole mit der neuen Basis  $\overline{\mathbf{A}}_{B'}$  ab Schritt 2.
-

wenn auch selten, auftreten können, wenn in Schritt 4b  $\lambda_j$  wiederholt gleich 0 ist. Es gibt aber einfache Methoden, um zu vermeiden, dass der Algorithmus dieselbe Basis wiederholt betrachtet, die an dieser Stelle aber nicht im Detail betrachtet werden sollen.

Im Folgenden wird kurz erläutert, wie eine initiale, zulässige Basis gefunden werden kann, wenn diese nicht unmittelbar aus der Problemstellung ersichtlich ist. Unmittelbar ersichtlich ist die initiale Basis, falls das Problem lediglich aus  $\leq$ -Nebenbedingungen besteht, da dann in jeder Zeile eine Schlupfvariable eingefügt wird, die für die initiale Lösung Basisvariable wird und den Wert der rechten Seite annimmt. Dies ist allerdings bei  $\geq$ -Bedingungen nicht möglich, da die Schlupfvariablen dann einen negativen Koeffizienten haben, aber keine negativen Werte annehmen dürfen.

In diesem Fall wird für das Finden einer initialen, zulässigen Lösung ein separates Optimierungsproblem erstellt. Man führt für jede Zeile  $i \in \{1, \dots, m\}$  eine zusätzliche Schlupfvariable  $a_i$  ein mit  $a_i \geq 0$ . Als Zielfunktion wird  $\max - \sum_{i=1}^m a_i$  genommen. Dieses lineare Programm hat offensichtlich die zulässige Basislösung  $a_i = b_i$  für  $i = 1, \dots, m$ . Weiterhin ist das Problem offensichtlich beschränkt, da der Zielfunktionswert nicht größer als Null werden kann. Der Simplex-Algorithmus kann daher gestartet werden und liefert eine optimale Lösung. Ist die optimale Lösung kleiner als Null, so ist das ursprüngliche Problem unlösbar. Ist die optimale Lösung gleich Null, so sind folglich alle  $a_i = 0$ , die optimale Lösung liefert daher eine zulässige Variablenbelegung für das ursprüngliche Problem. Diese zulässige Lösung ist bereits eine zulässige Basislösung, falls alle künstlichen Schlupfvariablen in der optimalen Lösung des Hilfsproblems Nichtbasisvariablen sind. Falls einige der künstlichen Variablen Teil der Basis sind, kann jedoch gezeigt werden, dass durch Umformung bzw. Löschen von redundanten Nebenbedingungen eine zulässige Basislösung zum ursprünglichen Problem erzeugt werden kann [NW99].

Der Simplex-Algorithmus liefert damit einen Algorithmus zur Lösung des allgemeinen, linearen Optimierungsproblems. Über die Komplexität des Algorithmus gibt es verschiedene Veröffentlichungen. [Dan51], [DOW55] und [Bla77] zeigen, dass der Algorithmus nach höchstens  $\binom{m}{n}$  Iterationen terminiert und entweder die optimale Lösung oder aber die Unbeschränktheit des Problems als Ergebnis liefert. Allerdings werden in verschiedenen Veröffentlichungen Beispiele für lineare Programme präsentiert, deren Lösung eine exponentielle Anzahl an Iterationen benötigt [KM72]. Dies sind jedoch worst-case Fälle, es existieren weiterhin einige Veröffentlichungen, die die durchschnittliche Performanz des Algorithmus untersuchen und zu dem Ergebnis kommen, dass der Simplex-Algorithmus in den meisten Fällen in polynomieller Laufzeit terminiert. Einen Überblick über diese Veröffentlichungen bieten [ST04] und [Gol95].

In [HL01] wird weiterhin angegeben, dass eine praktisch relevante Daumenregel ist, dass die Laufzeit in etwa proportional ist zum Kubik der Anzahl  $n$  der Nebenbedingungen. Die Anzahl der Variablen dagegen scheint für die Laufzeit ein eher unbedeutender Faktor zu sein. Wichtig ist noch die Dichte der Nebenbedingungsmatrix, d.h. die Größe des Anteils an Koeffizienten ungleich Null. Eine höhere Dichte beeinflusst besonders die Laufzeit pro Iteration. Die Anzahl der benötigten Iterationen hängt wiederum hauptsächlich von der Anzahl der Nebenbedingungen ab und scheint gegen das Zweifache der Anzahl der Nebenbedingungen zu tendieren.

Für die vorliegende Arbeit ist weniger die worst-case Betrachtung der Laufzeit des Simplex-Algorithmus von Bedeutung, sondern vielmehr die durchschnittliche Laufzeit für Standardprobleme sowie das Vorhandensein guter und schneller Software-Implementierungen des Algorithmus. Heutzutage gibt es eine große Bandbreite an Implementie-

rungen des Simplex-Algorithmus. Fast jede Statistik-Software enthält diesen Algorithmus, so dass sich bereits Probleme von praktischer Relevanz und Größe auf einem durchschnittlichen PC lösen lassen. Für sehr große Probleme gibt es spezielle Softwarepakete, die auf performanten Parallelrechnern installiert Probleme mit mehreren Tausend linearen Nebenbedingungen und einer noch größeren Zahl an Variablen erfolgreich lösen.

Ein sehr bekanntes Softwarepaket zum Lösen großer linearer Programme ist CPLEX, ein Produkt von ILOG, Inc<sup>1</sup>. Mit Hilfe von CPLEX wurden bereits Probleme mit zwei Millionen Nebenbedingungen und einer ähnlich hohen Anzahl an Variablen gelöst [HL01]. Zum Lösen linearer Optimierungsprobleme verwendet CPLEX den Simplex-Algorithmus und den im nächsten Abschnitt kurz vorgestellten interior-point Ansatz.

LINDO ist ein weiteres Softwarepaket, das von LINDO Systems, California<sup>2</sup>, angeboten wird. Auch mit LINDO können sehr große Probleme gelöst werden, allerdings nicht bis zu der Größe, die CPLEX erfolgreich bewältigt [HL01]. Eine weitere, kommerzielle Statistiksoftware mit einem LP Löser ist weiterhin SAS (SAS/OR)<sup>3</sup>. Es gibt daneben noch eine Reihe weiterer kommerzieller sowie frei verfügbarer Softwarepakete. Die für diese Arbeit wichtigen Softwarepakete sind CPLEX und SAS/OR, da diese zum einen leistungsfähig genug für die generierten Probleme sind und zum anderen an der Universität Karlsruhe (TH) verfügbar sind.

### 2.3.2 Komplexität und Laufzeit alternativer Algorithmen: Der interior-point Ansatz

Der interior-point Ansatz zum Lösen linearer Optimierungsprobleme wurde 1980 von Karmarkar [Kar84] entwickelt. Wie der Simplex-Algorithmus startet der interior-point Ansatz mit einer initialen, zulässigen Lösung und nähert sich in Iterationen der optimalen Lösung an, bis diese gefunden ist. Der Unterschied liegt jedoch in der Wahl der Kandidatenlösungen in jedem Schritt. Während der Simplex-Algorithmus sich am Rand des Polyeders entlang bis zur optimalen Lösung hangelt, arbeitet der interior-point Ansatz mit Lösungen, die im Inneren des Polyeders liegen. Es sind also keine Basislösungen wie beim Simplex-Algorithmus.

Im Gegensatz zum Simplex lässt sich für den interior-point Ansatz zeigen, dass er eine polynomielle Laufzeit besitzt [Kar84]. In der Praxis allerdings hat sich gezeigt, dass abhängig vom konkreten Optimierungsproblem der eine Algorithmus eine kürzere Laufzeit hat als der andere. Da der interior-point Ansatz pro Iteration mehr Berechnungen benötigt als der Simplex und die Anzahl Iterationen bei kleinen Problemen bei beiden Algorithmen ähnlich ist, ist folglich der Simplex für diese Probleme schneller. Bei sehr großen Problemen allerdings steigt die Anzahl benötigter Iterationen des Simplex stark an, während die Anzahl Iterationen des interior-point Ansatzes relativ niedrig bleibt. Für sehr große Probleme kann also der interior-point Ansatz einen bedeutenden Laufzeitvorteil bedeuten [HL01].

Der tatsächliche Laufzeitunterschied der beiden Methoden hängt jedoch stark zum einen von der benutzten Software ab und zum anderen vom konkreten Optimierungsproblem. Die für diese Arbeit verwendete Software CPLEX unterstützt beide Methoden. Als wichtigste Erkenntnis für die folgenden Untersuchungen kann festgehalten werden,

<sup>1</sup><http://www.ilog.com/products/cplex/>

<sup>2</sup><http://lindo.com/products/productm.html>

<sup>3</sup><http://support.sas.com/rnd/app/or.html>

dass es Methoden gibt, um zu linearen Programmen in einer polynomiellen Laufzeit zur Anzahl der Nebenbedingungen und der Variablen eine optimale Lösung zu finden. Wie sich diese Laufzeit für das untersuchte Workshopzuteilungsproblem darstellt, wird detailliert in Abschnitt 4.5 untersucht und vorgestellt.

## 2.4 Ganzzahlige lineare Optimierungsprobleme

Dieser Abschnitt widmet sich den besonderen Eigenschaften bei der Lösung ganzzahliger linearer Optimierungsprobleme (siehe dazu [NW99] und [DMM97]). Der Einfachheit halber werden im Folgenden reine ganzzahlige Optimierungsprobleme betrachtet, deren sämtliche Variablen also ganzzahlige Werte annehmen sollen. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass betrachtete Probleme einen endlichen, nichtleeren Lösungsraum und damit also eine optimale Lösung besitzen.

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} && \\ &&& \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ganzzahlige lineare Optimierungsprobleme, siehe (2.10), sind schwerer zu lösen als Probleme mit reellwertigen Variablen. Es ist zwar so, dass die Anzahl der möglichen Lösungen zu einem ganzzahligen Problem endlich ist. Man könnte also meinen, die optimale Lösung durch Enumeration der möglichen Lösungen bestimmen zu können. Leider ist aber in den meisten Fällen die Anzahl der möglichen Lösungen doch so groß, dass die Enumeration selbst mit sehr leistungsfähigen Rechnern nicht praktikabel durchführbar ist. Bei einem binären Problem mit  $n$  Variablen gibt es bereits  $2^n$  mögliche Lösungen. Jede neue Variable verdoppelt also die Menge der möglichen Lösungen. Entsprechend stärker steigt die Anzahl, wenn die Variablen beliebige ganzzahlige Werte annehmen können.

Eine ganzzahlige, optimale Lösung muss nicht länger notwendigerweise am Rand oder gar einer Ecke des Polyeders, das den Lösungsraum des (reellwertigen) Problems bildet, liegen. Dies zeigt eine Variante des Beispiels aus (2.6), dargestellt in (2.11).

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && 3x_1 + 2x_2 \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} && \\ &&& 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ &&& -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ &&& x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Die grafische Darstellung des Lösungsraums in Abb. 2.2 zeigt den durch die Nebenbedingungen gebildeten Polyeder und die darin enthaltenen, ganzzahligen Lösungen. Die optimale Lösung des Problems, wenn man reellwertige Variablen zulässt, ist  $x_1 = 1.75$  und  $x_2 = 5.5$  mit einem Zielfunktionswert von 16.25. Die optimale Lösung für das ganzzahlige Problem dagegen ist  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 5$ . Dieser Punkt liegt zwar auf der durch die erste Nebenbedingung gebildeten Geraden, jedoch nicht an einer Ecke des Lösungsraums.

Ein *relaxiertes Problem* zu einem Optimierungsproblem heißt ein Problem, das entsteht, nachdem einige der Bedingungen des ursprünglichen Optimierungsproblems ent-

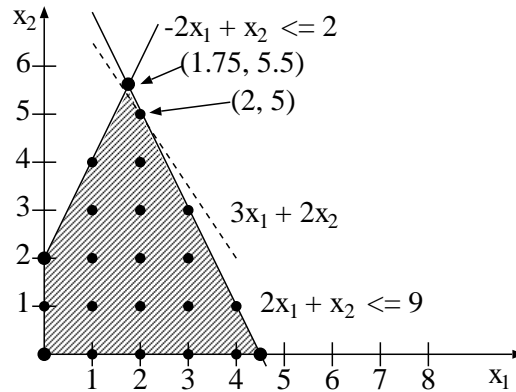


Abbildung 2.2: Grafische Darstellung des Optimierungsproblems aus (2.11)

fernt wurden [DMM97]. Da jede Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems auch eine Lösung des relaxierten Problems ist, enthält der Lösungsraum des relaxierten Problems den des ursprünglichen Problems. Die optimale Lösung des relaxierten Problems ist also größer oder gleich der optimalen Lösung des ursprünglichen Problems, liefert also eine obere Schranke für die gesuchte, optimale Lösung. Um sich der optimalen Lösung eines ganzzahligen, linearen Optimierungsproblems zu nähern, bildet man das relaxierte Problem, indem die Ganzzahligkeitsbedingungen gelöscht werden. Das relaxierte Problem lässt sich dann mit dem Simplex oder einem anderen Verfahren effizient lösen und liefert somit eine obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert des ganzzahligen Problems.

Für den Fall, dass die Lösung des relaxierten Problems bereits ganzzahlig ist, hat man eine optimale Lösung gefunden. Dies ist natürlich nicht immer der Fall, allerdings gibt es Problemklassen, für die man aufgrund ihrer speziellen Struktur zeigen kann, dass jede zulässige Eckpunktlösung und somit auch die optimale Lösung ganzzahlig ist. Man spricht dann von Problemen mit einem *ganzzahligen Lösungsraum*. Diese Problemklassen lassen sich folglich effizient lösen. Die wichtigste Problemklasse dieser Art sind Netzwerkflussprobleme, diese werden in Abschnitt 2.6 vorgestellt. Weitere Methoden zum Nachweis eines ganzzahligen Lösungsraums finden sich in Abschnitt 2.5.1.

Ist die Lösung des relaxierten Problems reellwertig, so sind weitere Berechnungen notwendig, um zu einer optimalen, ganzzahligen Lösung zu gelangen. Runden der Lösung auf die nächste, ganzzahlige Lösung führt nur sehr selten zum Erfolg, da

- gerundete Werte nicht notwendigerweise innerhalb des Lösungsraums liegen und
- die gerundete Lösung weit entfernt von der optimalen Lösung liegen kann.

Insbesondere im Fall eines binären Optimierungsproblems wird intuitiv klar, dass Rundungen sehr problematisch sind und nicht in die Nähe des tatsächlichen, optimalen Wertes führen müssen.

Im Folgenden werden die zwei bekanntesten Verfahren vorgestellt, die dazu dienen, ausgehend von einer relaxierten Lösung die optimale Lösung zu einem ganzzahligen Optimierungsproblem zu finden. Beide sind analog auch für gemischt-ganzzahlige Probleme einsetzbar.

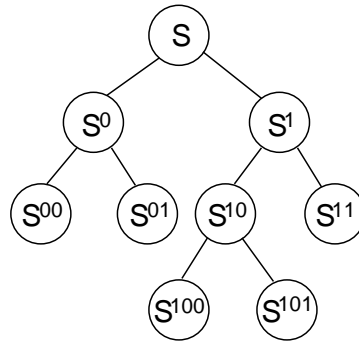


Abbildung 2.3: Darstellung der beim Branch & Bound Verfahren generierten Probleme als Suchbaum

### 2.4.1 Branch & Bound Verfahren

Das Branch & Bound Verfahren gehört zu den Entscheidungsbaumverfahren und wurde 1960 von Land und Doig vorgestellt [LD60]. Beim Branch & Bound Verfahren wird der Lösungsraum in Teilräume zerlegt, deren zugehörige Subprobleme dann getrennt weiter analysiert werden. Das Ziel der Analyse von Teilräumen ist es festzustellen, ob dieser Teilraum die optimale Lösung enthalten kann. Sobald für einen Teilraum klar wird, dass dieser keine weiteren, interessanten Lösungen enthalten kann, wird er aus der Analyse ausgeschlossen. Dadurch werden die zu analysierenden Probleme sukzessive reduziert und nur noch diejenigen weiter untersucht, die eine weitere Verbesserung des Zielfunktionswertes erhoffen lassen [PR02].

In praktischen Implementierungen des Branch & Bound Verfahrens werden die Grenzen für optimale Lösungen durch Lösung relaxierter Probleme mittels linearer Programmierung berechnet. Im Folgenden wird das Branch & Bound Verfahren mit linearer Programmierung vorgestellt. Dabei bezeichne  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$  die Menge der zulässigen Lösungen des ganzzahligen Problems und  $c_{opt}$  sei der Zielfunktionswert der optimalen Lösung der Relaxierung.

Die Schritte des Branch & Bound Verfahrens sind in Algorithmus 2 dargestellt, basierend auf [PR02], [KV02] und [NW99].

Der Algorithmus merkt sich die beste, bereits gefundene, ganzzahlige Lösung des Problems. Sobald ein Subproblem nicht mehr besser werden kann, wird es aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Auf diese Weise wird der untersuchte Lösungsraum sukzessive verkleinert, um möglichst schnell zur optimalen Lösung zu kommen. Die Vorgehensweise des Branch & Bound Verfahrens lässt sich als Baum visualisieren, bei dem jedes untersuchte Problem ein Knoten ist, verbunden mit den daraus entwickelten Subproblemen. Dieser Baum wird mit *Suchbaum* bezeichnet. Ein Problem, das nicht weiter betrachtet wird, stellt folglich ein Blatt des Baumes dar, die Wurzel ist das ursprüngliche, zu lösende Optimierungsproblem. Ein beispielhafter Baum ist in Abb. 2.3 dargestellt, wobei die Knoten ohne Nachfolger aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden konnten.

Es bleibt zu spezifizieren, wie die Aufteilung eines Problems in Subprobleme gemacht werden soll. Bei linearen Programmen wird die Aufteilung eines Problems in zwei Unterprobleme einfach dadurch erreicht, dass man den Lösungsraum durch eine Hyperebene in zwei Teile teilt. Diese Hyperebene wird durch eine neue Nebenbedingung festgelegt.



---

**Algorithmus 2** Der Branch & Bound Algorithmus
 

---

 Eingabe: ein Problem  $S = \{max \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n\}$ 

1. (Initialisierung) Setze die Menge der zu untersuchenden Probleme  $\mathcal{P} = \{S\}$ . Setze die aktuelle obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert  $\bar{c}_{opt} = \infty$  und die aktuelle, untere Schranke  $\underline{c}_{opt} = -\infty$  mit der aktuellen, besten Lösung  $\underline{\mathbf{x}}_{opt} = NULL$  nicht belegt.
  2. (Test auf Beendigung) Falls  $\mathcal{P} = \emptyset$ , dann gibt es keine weiteren Probleme zu untersuchen und es ist  $\underline{c}_{opt}$  der optimale Funktionswert und die Lösung  $\underline{\mathbf{x}}_{opt}$ , die diesen erreicht hat, ist die optimale Lösung. Falls es keine solche Lösung gibt, d.h.  $\underline{c}_{opt} = -\infty$ , ist das Problem unlösbar.
  3. (Wahl des nächsten Problems) Wähle und lösche ein Problem  $S^i$  aus  $\mathcal{P}$  und löse diese Relaxierung mittels linearer Programmierung. Der resultierende Zielfunktionswert sei  $c_{opt}^i$  und die Lösung, falls vorhanden, sei  $\mathbf{x}_{opt}^i$ .
  4. (Test auf Aussortierung) Überprüfe das Ergebnis des relaxierten Problems auf folgende Eigenschaften:
    - Ist  $c_{opt}^i \leq \underline{c}_{opt}$ , dann kann dieser Lösungsraum keine bessere als die beste, bereits gefundene ganzzahlige Lösung enthalten. Das Subproblem muss nicht weiter untersucht werden. Gehe zu Schritt 2.
    - Ist  $\mathbf{x}_{opt}^i$  ganzzahlig, also  $\mathbf{x}_{opt}^i \in \mathbb{Z}^n$  und  $c_{opt}^i > \underline{c}_{opt}$ , so setze  $\underline{c}_{opt} = c_{opt}^i$ . Es wurde eine neue, zulässige, ganzzahlige Lösung gefunden, die eine untere Schranke für die optimale, ganzzahlige Lösung bildet.  
 Lösche weiterhin aus  $\mathcal{P}$  alle Probleme  $S^j$  mit  $c_{opt}^j \leq \underline{c}_{opt}$ . Alle bereits betrachteten Probleme mit einer niedrigeren, relaxierten Lösung als der neuen, unteren Schranke müssen nicht weiter betrachtet werden.  
 Das Subproblem muss nicht weiter betrachtet werden, da keine besseren als die gefundene Lösung erreicht werden können. Gehe zu Schritt 2.
    - Ist das relaxierte Subproblem nicht lösbar, so muss es nicht weiter untersucht werden. Gehe zu Schritt 2.
    - In allen anderen Fällen fahre mit dem nächsten Schritt fort.
  5. (Aufteilung des Problems in Subprobleme) Generiere Subprobleme  $S^{ij}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , zu  $S^i$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^k S^{ij} = S^i$  und  $\bigcap_{j=1}^k S^{ij} = \emptyset$  (Erläuterung siehe S. 18). Füge diese der Menge der zu untersuchenden Probleme hinzu:  $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{S^{ij}\}_{j=1}^k$  und setze die obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert für alle Subprobleme auf den des Problems  $S^i$ :  $\bar{c}_{opt}^j = \bar{c}_{opt}^i$  für  $j = 1, \dots, k$ . Gehe zu Schritt 2.
-

Hat man also für das Problem die Nebenbedingungsmenge  $S^i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ , so wählt man  $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^n$  und  $\hat{d} \in \mathbb{Z}$  und bildet  $S^{i1} = S^i \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : \mathbf{d}^T \mathbf{x} \leq \hat{d}\}$  und  $S^{i2} = S^i \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n : \mathbf{d}^T \mathbf{x} \geq \hat{d} + 1\}$ . Diese Aufteilung ist gültig in dem Sinn, dass jede ganzzahlige Lösung zu  $S^i$  entweder in  $S^{i1}$  oder in  $S^{i2}$  enthalten ist. Dies gilt nicht für die entsprechenden Relaxierungen, was aber eine wünschenswerte Eigenschaft ist, da man auf diese Weise möglichst viele unzulässige Lösungen aus den Betrachtungen ausklammert und die Subprobleme so stark wie möglich einschränkt. Diese Eigenschaft kann man sogar derart ausnutzen, dass man  $\mathbf{d}, \hat{d}$  so wählt, dass die relaxierte Lösung zu  $S^i$  genau in dem Bereich liegt, der durch die neuen Nebenbedingungen ausgeklammert wird, also  $\hat{d} < \mathbf{d}^T \mathbf{x}_{opt}^i < \hat{d} + 1$ . Dann ist die Lösung  $\mathbf{x}_{opt}^i$  keine zulässige Lösung zu den Subproblemen, was die Chancen erhöht, dass die Relaxierungen der Subprobleme geringwertige, optimale Lösungen haben, die dann eher im Branch & Bound Verfahren aus der Betrachtung gelöscht werden können.

Für praktische Anwendungsfälle wird oft für ein Element  $x_{opt,j}^i$  der optimalen Lösung  $\mathbf{x}_{opt}^i$  mit  $x_{opt,j}^i \notin \mathbb{Z}$   $\hat{d} = \lfloor x_{opt,j}^i \rfloor$  gesetzt und  $d_j = 1$ ,  $d_i = 0$  für  $i \neq j$ . Dies entspricht dem Einführen einer neuen oberen bzw. unteren Schranke für  $x_j$ . Dies ist je nach Implementierung mit dem Simplex einfacher lösbar, da Schranken auf Grund ihrer Struktur anders behandelt werden können als Nebenbedingungen und somit nicht zu einer Vergrößerung der Basis führen. Weiterhin ist  $x_{opt,j}^i$  keine zulässige Lösung für die relaxierten Subprobleme. Für  $x_j \in \mathbb{B}$  bedeutet dies ein Festsetzen von  $x_j$  auf den Wert 0 bzw. 1.

Prinzipiell ist es wünschenswert, nach so wenig Aufspaltungen wie möglich Subbäume aus der Betrachtung eliminieren zu können, um den Suchraum möglichst rasch zu verkleinern. Dies begrenzt die Anzahl der noch möglichen, weiteren Aufspaltungen und damit die Zahl der Iterationen. Aber es kann natürlich keine Garantie dafür geben, dass zum Beispiel nach erfolgreichem anfänglichem Eliminieren von Subproblemen die optimale Lösung schnell gefunden werden kann.

Die Konvergenzgeschwindigkeit des Branch & Bound Verfahrens hängt wesentlich davon ab, wie die Qualität der relaxierten Lösungen verglichen mit der besten, bisher gefundenen ganzzahligen Lösung ist. Zwei Faktoren des Verfahrens beeinflussen die Entwicklung der Schranken und die Möglichkeiten, Subprobleme zu entfernen:

- die Wahl der für die Division heran gezogenen Variablen und
- die Wahl des als nächstes zu untersuchenden Subproblems aus der Menge  $\mathcal{P}$ .

Bei der Wahl der zu fixierenden Variablen kann es von Vorteil sein, diejenige Variable zu fixieren, die einen hohen Koeffizienten in der Zielfunktion hat. Dies kann zum einen dazu führen, dass schnell Subbäume generiert werden, die unlösbar sind, so dass der zu untersuchende Lösungsraum rasch verkleinert wird. Zum anderen besteht eine gute Chance, zulässige, ganzzahlige Lösungen mit einem hohen Zielfunktionswert zu generieren, was eine hohe untere Schranke für den optimalen Funktionswert ergibt. Weitere Strategien arbeiten mit einer vom Benutzer vorgegebenen Reihenfolge der Variablen, die durch deren Bedeutung für das Optimierungsproblem und Abhängigkeiten untereinander gegeben sind [NW99, S.359]. Ob eine Strategie erfolgreich ist, ist abhängig vom konkreten Optimierungsproblem.

Bei der Wahl des als nächstes zu untersuchenden Subproblems bietet es sich an, das zuletzt untersuchte Problem weiter zu unterteilen, sofern dieses nicht aus der weiteren Betrachtung gelöscht wurde (Tiefensuche, depth-first search oder Last-in-first-out (LIFO)). Da sich ein Problem von seinem Subproblem nur durch eine zusätzliche Schranke

einer Variablen unterscheidet, kann die Berechnung der relaxierten Lösung des Subproblems auf der Lösung des vorigen Problems basieren. Es ist dann keine komplett neue Berechnung mittels linearer Programmierung notwendig, statt dessen gibt es Reoptimierungstechniken, basierend auf dem dualen Simplex, die Abwandlungen eines Problems lösen. Weiterhin scheint die Erfahrung zu bestätigen, dass optimale Lösungen eher tief im Problembaum gefunden werden als nah am Wurzelknoten.

Eine alternative Reihenfolge ist die Breitensuche (breadth-first search), bei der Probleme zuerst betrachtet werden, die einen geringen Abstand vom Wurzelproblem haben. Diese Strategie wird allerdings selten zusammen mit linearer Programmierung angewandt, sie eignet sich mehr für den Einsatz anderer, heuristischer Verfahren.

## 2.4.2 Branch & Cut Verfahren

Der Begriff Branch & Cut wurde zuerst in [PR91] eingeführt. Branch & Cut Verfahren kombinieren Branch & Bound mit der Verwendung zusätzlicher *cutting planes*, also Schnittebenen. Schnittebenen dienen zur Verkleinerung des Lösungsraums und werden durch zusätzliche, lineare Nebenbedingungen definiert. Schnittebenenverfahren sind eigenständige Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen. Im Fall allgemeiner, linearer Optimierungsprobleme ist allerdings die Konvergenz von Schnittebenenverfahren zu langsam, da gute Schnittebenen stark vom Problem abhängen und meist problemspezifisch definiert werden. Daher wird die Kombination mit Branch & Bound verwendet.

**Definition 2.8** Gegeben sei ein Polyeder  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ . Für  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ ,  $h_0 \in \mathbb{R}$  wird die Ungleichung  $\mathbf{h}^T \mathbf{x} \leq h_0$  **gültige Ungleichung** (valid inequality) genannt, wenn sie für alle Punkte in  $S$  gilt.

Eine Schnittebene wird nun durch eine Ungleichung repräsentiert, die bezüglich aller ganzzahligen Punkte in einem Polyeder  $S$  gültig ist, aber den Lösungsraum der zugehörigen, relaxierten Lösung verkleinert, und zwar idealerweise wiederum so, dass die Ungleichung für die aktuelle, nicht ganzzahlige Lösung des relaxierten Problems ungültig ist, so dass sie durch die Schnittebene quasi vom restlichen Lösungsraum abgetrennt wird. Auf diese Weise wird der Lösungsraum verkleinert und die Möglichkeit geschaffen, durch erneute Lösung des neuen, relaxierten Problems eine andere, optimale Lösung zu bekommen. Hierbei wird aber der Lösungsraum nicht in mehrere Subprobleme geteilt, sondern verkleinert.

Der allgemeine Branch & Cut Algorithmus besteht aus den in Algorithmus 3 dargestellten Schritten (siehe [PR02] und [NW99]), wobei die Notation aus Abschnitt 2.4.1 unverändert Anwendung findet. Die Einführung von Schnittebenen geschieht in Schritt 5 des Algorithmus. Schritt 7 definiert weiterhin analog zum Branch & Bound Verfahren die Aufteilung des betrachteten Problems in Subprobleme.

Padberg und Rinaldi [PR91] stellen das Verfahren anhand des Handlungsreisendenproblems vor. Hierbei besteht das Problem, dass wegen der Komplexität des Problems das initiale Problem nicht die Menge aller Nebenbedingungen enthält. Zu Beginn des Verfahrens werden also Lösungen generiert, die, auch wenn sie ganzzahlig sind, noch keine zulässigen Lösungen des ursprünglichen Problems darstellen. In diesem Fall werden Schnittebenen zur Hilfe genommen, es wird also festgestellt, in welcher Art die gefundene Lösung eine Nebenbedingung des Problems verletzt und die entsprechende Nebenbedingung wird dem Problem hinzugefügt. Durch die Hinzunahme lediglich der

---

**Algorithmus 3** Der Branch & Cut Algorithmus
 

---

Eingabe: ein Problem  $S = \{max \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^n\}$ .

1. (Initialisierung) Setze die Menge der zu untersuchenden Probleme  $\mathcal{P} = \{S\}$ . Setze die aktuelle obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert  $\bar{c}_{opt} = \infty$  und die aktuelle, untere Schranke  $\underline{c}_{opt} = -\infty$  mit der aktuellen, besten Lösung  $\underline{\mathbf{x}}_{opt} = NULL$  nicht belegt.
  2. (Test auf Beendigung) Falls  $\mathcal{P} = \emptyset$ , dann gibt es keine weiteren Probleme zu untersuchen und es ist  $\underline{c}_{opt}$  der optimale Funktionswert und die Lösung  $\underline{\mathbf{x}}_{opt}$ , die diesen erreicht hat, ist die optimale Lösung. Falls es keine solche Lösung gibt, d.h.  $\underline{c}_{opt} = -\infty$ , ist das Problem unlösbar.
  3. (Wahl des nächsten Problems) Wähle und lösche ein Problem  $S^i$  aus  $\mathcal{P}$ .
  4. (Relaxierung) Löse die Relaxierung von  $S^i$  mittels linearer Programmierung. Der resultierende Zielfunktionswert sei  $c_{opt}^i$  und die Lösung, falls vorhanden, sei  $\mathbf{x}_{opt}^i$ .
  5. (Hinzunahme von Schnittebenen) Falls gewünscht und möglich und falls  $\mathbf{x}_{opt}^i \notin \mathbb{Z}^n$  füge dem Problem Schnittebenen hinzu, die für  $\mathbf{x}_{opt}^i$  nicht zulässig sind. Gehe zu Schritt 4.
  6. (Test auf Aussortierung) Überprüfe das Ergebnis des relaxierten Problems auf folgende Eigenschaften:
    - Ist  $c_{opt}^i \leq \underline{c}_{opt}$ , dann kann dieser Lösungsraum keine bessere als die beste, bereits gefundene ganzzahlige Lösung enthalten. Das Subproblem muss nicht weiter untersucht werden. Gehe zu Schritt 2.
    - Ist  $\mathbf{x}_{opt}^i$  ganzzahlig, also  $\mathbf{x}_{opt}^i \in \mathbb{Z}^n$  und  $c_{opt}^i > \underline{c}_{opt}$ , so setze  $\underline{c}_{opt} = c_{opt}^i$ . Es wurde eine neue, zulässige, ganzzahlige Lösung gefunden, die eine untere Schranke für die optimale, ganzzahlige Lösung bildet.  
 Lösche weiterhin aus  $\mathcal{P}$  alle Probleme  $S^j$  mit  $c_{opt}^j \leq \underline{c}_{opt}$ . Alle bereits betrachteten Probleme mit einer niedrigeren, relaxierten Lösung als der neuen, unteren Schranke müssen nicht weiter betrachtet werden.  
 Das Subproblem muss nicht weiter betrachtet werden, da keine besseren als die gefundene Lösung erreicht werden können. Gehe zu Schritt 2.
    - Ist das relaxierte Subproblem nicht lösbar, so muss es nicht weiter untersucht werden. Gehe zu Schritt 2.
    - In allen anderen Fällen fahre mit dem nächsten Schritt fort.
  7. (Aufteilung des Problems in Subprobleme) Generiere Subprobleme  $S^{ij}$ ,  $j = 1, \dots, k$ , zu  $S^i$ , so dass  $\bigcup_{j=1}^k S^{ij} = S^i$  und  $\bigcap_{j=1}^k S^{ij} = \emptyset$ . Füge diese der Menge der zu untersuchenden Probleme hinzu:  $\mathcal{P} = \mathcal{P} \cup \{S^{ij}\}_{j=1}^k$  und setze die obere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert für alle Subprobleme auf den des Problems  $S^i$ :  $\bar{c}_{opt}^j = \bar{c}_{opt}^i$  für  $j = 1, \dots, k$ . Gehe zu Schritt 2.
-

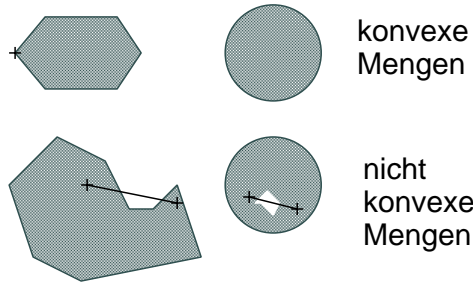


Abbildung 2.4: Beispiele für konvexe und nicht konvexe Mengen

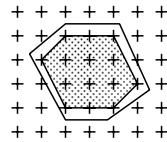


Abbildung 2.5: Polyeder und seine ganzzahlige Hülle (gepunktet)

benötigten Nebenbedingungen zum Problem wird die Lösung des relaxierten Problems stark vereinfacht. Hierbei entstehen jedoch die verwendeten Schnittebenen direkt aus der ursprünglichen Problemstellung.

## 2.5 Ganzzahligkeit des Lösungsraums

Um Aussagen über die Eigenschaften ganzzahliger Lösungsräume machen zu können, müssen im Vorfeld einige Begriffe eingeführt werden.

**Definition 2.9** Seien  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$  Vektoren und  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ . Dann ist  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}_i$  eine **Konvex-Kombination** von  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ .

Eine Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  ist **konvex**, wenn  $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in X$  für beliebige  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

Die **konvexe Hülle**  $\text{conv}(X)$  einer Menge  $X$  ist die Menge aller konvexen Kombinationen von Elementen aus  $X$ .

Ein **Extrempunkt** einer konvexen Menge  $X$  ist ein Element  $\mathbf{x} \in X$ , für das gilt  $\mathbf{x} \notin \text{conv}(X \setminus \{\mathbf{x}\})$ .

Konvexe Mengen können keine Löcher oder Täler enthalten. Abb. 2.4 zeigt Beispiele für konvexe und nicht konvexe Mengen im zweidimensionalen Raum. Dort liegen alle Konvex-Kombinationen zwischen zwei Vektoren auf der Linie zwischen den beiden Vektoren. Jede Verbindungslinie zwischen zwei Punkten der konvexen Menge muss also komplett innerhalb der konvexen Menge liegen. Ein Extrempunkt ist ein Eckpunkt, der nicht als Konvex-Kombination anderer Punkte dargestellt werden kann [CCPS98].

Wie in Abschnitt 2.2 bereits eingeführt, ist  $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$  ein Polyeder.  $P_I$  bezeichne die konvexe Hülle aller in  $P$  enthaltenen ganzzahligen Vektoren.  $P_I$  wird auch die ganzzahlige Hülle zu  $P$  genannt. Offensichtlich ist  $P_I$  in  $P$  enthalten. Abb. 2.5 zeigt ein Beispiel für einen Polyeder  $P$  und die darin enthaltene ganzzahlige Hülle.

**Definition 2.10** Ein Polyeder  $P$  ist ganzzahlig, wenn  $P = P_I$  gilt.

Die folgenden, äquivalenten Aussagen zeigen die Bedeutung ganzzahliger Polyeder für die Lösung ganzzahliger Optimierungsprobleme.

**Theorem 2.1** Sei  $P$  ein rationaler Polyeder. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- $P$  ist ganzzahlig.
- $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P\}$  wird von einem ganzzahligen Vektor  $\mathbf{x}$  erreicht, sofern das Maximum endlich ist.

Das Theorem leuchtet unmittelbar sein, da die Extrempunkte eines ganzzahligen Polyeders ganzzahlig sein müssen und wiederum das Maximum über die Vektoren in  $P$  von einem Extrempunkt erreicht wird, falls es endlich ist. Für den genauen Beweis siehe [KV02, S. 98] oder [CCPS98, S. 219].

Es stellt sich nun die Frage, auf welchem Weg man zu einem Optimierungsproblem untersuchen kann, ob dessen Polyeder ganzzahlig ist. Kann man zeigen, dass der durch die Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems definierte Polyeder ganzzahlig ist, weiß man folglich, dass das Problem mit Algorithmen für lineare Programmierung ganzzahlig gelöst werden kann. Es handelt sich dann um ein in polynomieller Zeit lösbares ganzzahliges Problem. Hierfür spielt die Eigenschaft der totalen Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix eine entscheidende Rolle.

### 2.5.1 Totale Unimodularität von Matrizen

Die totale Unimodularität von ganzzahligen Matrizen wird über die Determinanten von quadratischen Submatrizen definiert. Zu jeder quadratischen Matrix lässt sich die Determinante berechnen. Wir brauchen zunächst die Definition einer Subdeterminante:

**Definition 2.11** Sei  $\mathbf{A}$  eine ganzzahlige Matrix. Eine **Subdeterminante** von  $\mathbf{A}$  ist  $\det \mathbf{B}$  für eine quadratische Submatrix  $\mathbf{B}$  von  $\mathbf{A}$ , wobei  $\mathbf{B}$  gebildet wird durch beliebige Spalten- und Zeilenindizes.

**Definition 2.12** Eine ganzzahlige Matrix  $\mathbf{A}$  ist **total unimodular**, wenn jede Subdeterminante von  $\mathbf{A}$   $-1$ ,  $0$  oder  $+1$  ist.

Aus dieser Definition folgt sofort, dass eine total unimodulare Matrix keine Einträge außer  $-1$ ,  $0$  und  $1$  haben kann, da auch ein einzelner Eintrag eine Submatrix bildet, deren Subdeterminante gleich diesem Eintrag ist.

Das wesentliche Theorem, das den Zusammenhang zwischen der totalen Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix und der Ganzzahligkeit des Polyeders beschreibt, ist das folgende:

**Theorem 2.2** (Hoffmann und Kruskal [HK56]) Eine ganzzahlige Matrix  $\mathbf{A}$  ist total unimodular genau dann, wenn das Polyeder  $\{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  ganzzahlig ist für jeden ganzzahligen Vektor  $\mathbf{b}$ .

Das Theorem besagt also, dass die totale Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix sowohl notwendige als auch hinreichende Bedingung dafür ist, dass das Polyeder, das durch die Nebenbedingungen gebildet wird, ganzzahlig ist, sofern auch der Vektor  $\mathbf{b}$  der rechten Seite nur ganze Zahlen enthält. Um zu untersuchen, ob ein gegebenes, lineares Programm ganzzahlige Lösungen besitzt, genügt also die Untersuchung der Nebenbedingungsmatrix auf totale Unimodularität [CCPS98].

Wichtig ist, dass die  $\Rightarrow$ -Richtung des Theorems 2.2 auch für Polyeder  $\{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  gilt, jedoch nicht die  $\Leftarrow$ -Richtung [NW99]! Aus der Ganzzahligkeit eines Polyeders eines linearen Programms mit  $=$ -Nebenbedingungen folgt also nicht immer die totale Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix. Für unsere Betrachtungen ist es allerdings wichtig, aus der totalen Unimodularität auf die Ganzzahligkeit des Polyeders schließen zu können, was auch bei  $=$ -Nebenbedingungen möglich ist.

Allerdings ist die Eigenschaft der totalen Unimodularität einer Matrix keine, die man mal eben mit bloßem Auge feststellen kann. Zu einer  $m \times n$  Matrix mit  $m \leq n$  gibt es  $\sum_{i=1}^m \binom{m}{i} \binom{n}{i}$  quadratische Submatrizen. Bei einer  $3 \times 4$  Matrix sind dies beispielsweise bereits  $12 + 18 + 4 = 34$  Matrizen. Es gibt aber einen Algorithmus polynomieller Laufzeit zur Erkennung der totalen Unimodularität von Matrizen [Sey80].

Weiterhin gibt es aber eine Reihe anderer hinreichender Bedingungen für die totale Unimodularität einer Matrix.

**Theorem 2.3** *Hat eine Matrix  $\mathbf{A} \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$  in jeder Spalte nicht mehr als zwei von Null verschiedene Einträge, und ist  $\sum_{i=1}^m a_{ij} = 0$  falls Spalte  $j$  zwei von Null verschiedene Einträge hat, so ist  $\mathbf{A}$  total unimodular.*

Dieses Theorem (siehe [NW99, S. 542]) ist von Bedeutung für Netzwerkflussprobleme (siehe Abschnitt 2.6), da die Indizenzmatrizen der Knoten und Kanten eines gerichteten Graphen die beschriebene Gestalt haben (Definition 2.14 in Abschnitt 2.6.4). Folglich können Netzwerkflussprobleme mit linearer Programmierung ganzzahlig gelöst werden, was eine wichtige Feststellung ist, da sich mit Flüssen in Netzwerken viele Problemstellungen modellieren lassen. Diese Folgerung ist zulässig, da die entsprechende Richtung des Theorems 2.2 auch für lineare Programme mit  $=$ -Nebenbedingungen gilt. Die Formulierung von Netzwerkflussproblemen als lineares Programm ist in Gleichung 2.13 dargestellt.

Das folgende Theorem von Ghouila und Hourri ist genereller als das Theorem 2.3, welches sich direkt aus diesem ableiten lässt:

**Theorem 2.4** ([GH62]) *Eine  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  ist genau dann total unimodular, wenn es für jede Teilmenge  $R \subset \{1, \dots, m\}$  von Zeilen der Matrix eine Partition  $R = R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , gibt, so dass gilt:*

$$\sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Da weiterhin jede Matrix nur genau dann total unimodular ist, wenn deren transponierte total unimodular ist [NW99], kann Theorem 2.4 ebenso mit Hilfe von Partitionen von Spalten formuliert werden:

**Theorem 2.5** Eine  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  ist genau dann total unimodular, wenn es für jede Teilmenge  $R \subset \{1, \dots, n\}$  von Spalten der Matrix eine Partition  $R = R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , gibt, so dass gilt:

$$\sum_{j \in R_1} a_{ij} - \sum_{j \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

Für die Inzidenzmatrix  $\mathbf{A} = (a_{ij})^{m \times n}$  der Knoten und Kanten eines gerichteten Graphen  $(G, E)$  setze  $R_1 = \{1, \dots, m\}$  und  $R_2 = \emptyset$ . Die Summe über die Spalten jeder beliebigen Auswahl von Zeilen der Matrix ist immer  $\in \{-1, 0, 1\}$ .

Neben den Inzidenzmatrizen gerichteter Graphen sind Intervallmatrizen eine weitere Klasse von Matrizen, die total unimodular sind.

**Definition 2.13** Eine *Intervallmatrix* ist eine Matrix  $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{m \times n}$ , bei der in jeder Spalte die 1-Einträge einander direkt folgen, also für alle  $a_{ij} = a_{kj} = 1$  mit  $k > i + 1$  automatisch  $a_{lj} = 1$  für alle  $i < l < k$ .

Da das Löschen von Zeilen einer Intervallmatrix wieder eine Intervallmatrix ergibt, genügt es, gemäß Theorem 2.4 eine Aufteilung für die gesamte Menge  $R = \{1, \dots, m\}$  von Zeilen anzugeben. Setzt man  $R_1 = \{i : i \text{ ist ungerade}\}$  und  $R_2 = \{i : i \text{ ist gerade}\}$ , so wird die geforderte Eigenschaft laut Theorem 2.4 eingehalten.

In diesem Abschnitt wurde mit der totalen Unimodularität von Matrizen eine Eigenschaft vorgestellt, um zu einem gegebenen linearen Programm entscheiden zu können, ob der Polyeder ganzzahlig ist und daher mit Verfahren der linearen Programmierung ganzzahlige Lösungen ermittelt werden können. Im Falle von  $\leq$ -Nebenbedingungen gilt sogar eine Äquivalenzbeziehung dieser beiden Eigenschaften. Weiterhin bietet das Theorem von Ghouila-Houri eine wichtige Möglichkeit, die totale Unimodularität einer Matrix zu überprüfen, neben dem Algorithmus polynomieller Laufzeit basierend auf den Betrachtungen von Seymour.

## 2.6 Netzwerkflussmodelle

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in Netzwerkflussmodelle gegeben, basierend auf [JB80] und [AMO93]. Netzwerkflussmodelle sind die wohl wichtigste Klasse linearer Optimierungsprobleme, deren Lösungsraum ganzzahlig ist. Netzwerkflussprobleme lassen sich folglich effizient in polynomieller Laufzeit mit Standard-Algorithmen für lineare Programmierung lösen, weiterhin existieren aber ebenfalls spezielle Algorithmen, die die Struktur dieser Probleme ausnutzen und eine noch effizientere Berechnung der optimalen Lösung erlauben [JB80, AMO93].

Ein Netzwerk besteht aus Knoten und gerichteten Kanten zwischen den Knoten. Durch das Netzwerk soll ein Fluss transportiert werden, der an einem oder gewissen Quellknoten in das Netzwerk eintritt, entlang der Kanten transportiert wird und das Netzwerk an anderen Knoten, den Senken, wieder verlässt. Der Fluss, der entlang der Kanten zulässig ist, kann durch einige Bedingungen eingeschränkt werden:

- eine untere Schranke



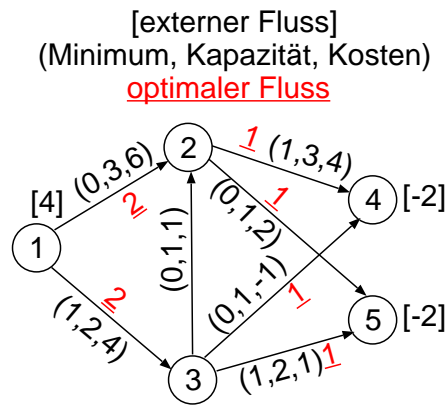


Abbildung 2.6: Beispiel eines Netzwerkflussmodells mit Lösung

- eine obere Schranke oder Kapazitätsgrenze
- Kosten pro Flusseinheit

Der externe Fluss gibt für jeden Knoten an, wieviele Flusseinheiten an diesem Knoten in das Netzwerk eintreten (positiver externer Fluss) bzw. das Netzwerk verlassen (negativer externer Fluss). Es darf kein Fluss an einem Knoten verloren gehen, so dass die Menge des Flusses, die in einen Knoten eintritt, über eine Kante oder von extern, gleich der Menge des Flusses sein muss, die den Knoten wieder verlässt (flow conservation).

Die Kosten pro Flusseinheit entlang einer Kante können positive wie auch negative Werte enthalten, negative Kosten sind demnach als Gewinn zu interpretieren. Das Optimierungsproblem eines Netzwerkflussmodells besteht darin, für jede Kante den Fluss zu bestimmen, so dass die gegebenen Schranken und die flow conservation eingehalten werden und die Summe der durch die Flüsse entstehenden Kosten minimiert wird. Ein Beispiel ist in Abb. 2.6 dargestellt, der resultierende, optimale Fluss ist in Abb. 2.6 unterstrichen angegeben.

Das dargestellte Netzwerkflussmodell wird auch als *reine, kostenminimierende Netzwerkflussproblem* (pure, minimum cost flow problem) bezeichnet. Es gibt einige Spezialisierungen und Abwandlungen dieses grundlegenden Problems, die im Folgenden kurz vorgestellt werden.

### 2.6.1 Das shortest-path Problem

Gegeben ist ein Netzwerk mit Knoten und Kanten, wobei jeder Kante eine Länge zugeordnet ist. Es gibt einen Quellknoten und einen Zielknoten. Ziel des Problems ist es, den kürzesten Pfad von der Quelle zum Ziel durch das Netzwerk zu finden. Der Quell- und Zielknoten haben somit einen externen Fluss von 1 bzw.  $-1$ , die anderen Knoten haben keinen externen Fluss. Die Kosten der Kanten entsprechen der Länge, untere und obere Schranken des Flusses gibt es nicht.

Das shortest-path Problem findet beispielsweise Anwendung bei der Bestimmung von kritischen Pfaden von Projektplänen oder Ablaufplänen mit Hilfe der Netzplantechnik. Hier geht es darum, dass verschiedene Aktivitäten oder Arbeitspakete ausgeführt werden müssen, wobei Aktivitäten sowohl parallel liegen als auch auf anderen basieren können, die folglich abgeschlossen sein müssen, damit Folgeaktivitäten starten können.

Der kritische Pfad bestimmt diejenigen Aktivitäten, deren Verzögerung sich unmittelbar als Verzögerung auf die Gesamtprojektdauer auswirkt. Weiterhin ist das Problem anwendbar bei der Routensuche in Verkehrs- oder Telefonnetzen [AMO93].

## 2.6.2 Das Transportproblem und das Assignment Problem

Beim Transportproblem lassen sich die Knoten des Netzwerks in zwei Mengen  $N_1$  und  $N_2$  aufteilen, so dass die Knoten in  $N_1$  nur ausgehende Kanten und die in  $N_2$  nur hereinkommende Kanten haben. Jeder Knoten hat einen externen Fluss ungleich Null, wobei die Knoten in  $N_1$  die Quellknoten sind und einen positiven, externen Fluss haben und die Knoten in  $N_2$  die Senken mit negativem, externem Fluss sind. Die Summe über alle externen Flüsse ist Null. Die Kanten haben unbeschränkte Kapazität und keinen minimalen Fluss. Das Ziel des Problems ist die Bestimmung des Transports des Flusses entlang der Kanten mit minimalen Kosten.

Das Zuordnungsproblem (assignment problem) ist eine weitere Spezialisierung des Transportproblems, bei dem  $|N_1| = |N_2|$ . Der Betrag des externen Flusses der Knoten ist weiterhin immer 1. Das Assignment Problem sucht also nach einer Zuordnung für jeden Knoten aus  $N_1$  zu genau einem Knoten aus  $N_2$ , so dass die Summe der Kosten minimiert wird. Eine bekannte Anwendung des Assignment Problems ist die Zuordnung von Leuten zu Jobs, so dass jede Person genau einen zu erledigenden Job zugewiesen bekommt. Die Kosten entsprechen beispielsweise den entstehenden Gehaltskosten, deren Summe es zu minimieren gilt.

## 2.6.3 Das Maximum Fluss Problem

Beim Maximum Fluss Problem (maximum flow problem) ist die Kapazität der Kanten der einzige, relevante Parameter, deren Kosten spielen hier keine Rolle. Ziel ist es, eine Strecke von einem Quellknoten zu einem Zielknoten zu finden, die den größtmöglichen Fluss erlaubt. Diese Problemstellung findet unter anderem in der Netzwerktechnik Anwendung, wenn es darum geht, einen Netzwerkpfad von einem Quell- zu einem Zielrechner zu finden, so dass die größtmögliche Bandbreite zur Verfügung steht.

## 2.6.4 LP Formulierung des reinen, kostenminimierenden Netzwerkflussproblems

Für die Darstellung des reinen kostenminimierenden Netzwerkflussproblems benötigt man die Inzidenzmatrix der Knoten und Kanten des Netzwerks. Das Netzwerk entspricht einem gerichteten Graphen  $(G, E)$  mit einer Knotenmenge  $G$  und einer Kantenmenge  $E \subset G \times G$  von geordneten Paaren, wobei  $(g_1, g_2) \in E \Leftrightarrow$  es geht eine gerichtete Kante von  $g_1$  nach  $g_2$ .

**Definition 2.14** Für ein Netzwerk mit einer Knotenmenge  $G = \{g_1, \dots, g_m\}$  und einer Kantenmenge  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  ist die  $m \times n$  **Inzidenzmatrix der Knoten und Kanten** (node-arc incidence matrix)  $\mathbf{A}$  definiert als

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow e_j = (g_i, g_x) \text{ und}$$

$$a_{ij} = -1 \Leftrightarrow e_j = (g_x, g_i).$$

Die Matrix enthält also in jeder Spalte genau eine 1 und eine -1, nämlich am Start- und Zielknoten der betreffenden Kante. Weiterhin gibt die Anzahl der Einträge ungleich Null in jeder Zeile den Grad des Knotens an, also die Anzahl der Kanten, die in dem Knoten starten oder enden.

Die Inzidenzmatrix der Knoten und Kanten zu dem Graphen des in Abb. 2.6 dargestellten Netzwerkflussmodells ist in (2.12) gezeigt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Die Formulierung des reinen kostenminimierenden Netzwerkflussmodells muss die folgenden Bedingungen umfassen:

- Beachtung der oberen Schranken (Kapazität) der Kanten
- Beachtung der unteren Schranken der Kanten
- Beachtung der Flusskonservierung (conservation of flow) an jedem Knoten
- Beachtung des externen Flusses der Knoten

Das reine, kostenminimierende Netzwerkflussmodell sei wie folgt aufgebaut. Seien

$G = \{g_1, \dots, g_m\}$  die Knoten des Netzwerks,

$E = \{e_1, \dots, e_n\}$  die Kanten des Netzwerks,

$\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  der Kostenvektor,  $c_i$  sind die Kosten pro Flusseinheit der Kante  $e_i$ ,

$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m$  der Vektor der externen Flüsse,  $b_i$  ist der externe Fluss von Knoten  $g_i$ ,

$\bar{\mathbf{s}} \in \mathbb{Z}_+^n$  der Vektor der oberen Schranken der Kanten (Kapazitäten),

$\underline{\mathbf{s}} \in \mathbb{Z}_+^n$  der Vektor der unteren Schranken der Kanten,

$\mathbf{A} \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$  die Inzidenzmatrix der Knoten und Kanten und

$\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$  der zu bestimmende Fluss in jeder Kante.

Dann ist das kostenminimierende Netzwerkflussproblem als lineares Optimierungsproblem gegeben als

$$\begin{aligned} &\text{Minimiere} && \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{unter den Nebenbedingungen} \\ &&& \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &&& \mathbf{x} \leq \bar{\mathbf{s}} \\ &&& \mathbf{x} \geq \underline{\mathbf{s}} \\ &&& \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \quad (2.13)$$

Natürlich muss man nicht notwendigerweise fordern, dass die externen Flüsse und die Schranken ganzzahlige Werte beinhalten. Das Problem kann dahin gehend einfach generalisiert werden. Da es jedoch insbesondere um Probleme geht, bei denen ein ganzzahliger Fluss gefunden werden soll, müssen logischerweise auch die Schranken und die externen Flüsse ganzzahlig sein. Sind sie es nicht, so wäre es zum einen eine unlogische Problemstellung und zum anderen nicht mehr nachweisbar ganzzahlig optimal lösbar (siehe auch Abschnitt 2.5.1).

Die Matrix der Nebenbedingungen besteht also nur aus der Inzidenzmatrix der Knoten und Kanten des Netzwerks. Diese ist, wie zu Theorem 2.3 bereits erläutert, einfach

nachweisbar total unimodular, da in jeder Spalte höchstens eine 1 und eine  $-1$  enthalten ist. Folglich ist der definierte Lösungsraum (sofern er beschränkt ist) ganzzahlig und damit auch der berechnete, optimale Fluss.

## 2.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen linearer Optimierungsprobleme dargestellt. Das Simplex-Verfahren zum Lösen linearer Optimierungsprobleme wurde genauer vorgestellt und eine kurze Einführung in den interior-point Ansatz gegeben. Lineare Optimierungsprobleme sind mit diesen Verfahren in polynomieller Zeit lösbar, weiterhin zeigt die praktische Anwendung eine schnelle Lösbarkeit der Probleme insbesondere mit dem Simplex-Verfahren. Es gibt entsprechend mächtige Softwareimplementierungen dieser Algorithmen.

Weiterhin beschäftigt sich das Kapitel mit der Spezialklasse der ganzzahligen linearen Optimierungsprobleme, da diese für das in dieser Arbeit behandelte Workshopzuteilungsproblem von Bedeutung sind. Zum einen wurde dargestellt, unter welchen Bedingungen bereits der Lösungsraum des relaxierten Problems ganzzahlig ist, so dass sich die Verfahren für allgemeine, lineare Optimierungsprobleme anwenden lassen. Dies trifft insbesondere auch auf die Klasse der Netzwerkflussprobleme zu, die eine Modellierung einer großen Bandbreite von praktischen Problemen erlauben. Zum anderen wurden zusätzliche Verfahren vorgestellt, mit deren Hilfe man basierend auf einer relaxierten, reellwertigen Lösung zu einer ganzzahligen, optimalen Lösung kommt.

Aufbauend auf diesen Grundlagen wird in Kap. 4 das Workshopzuteilungsproblem vorgestellt und untersucht, inwiefern sich dieses ganzzahlige, lineare Optimierungsproblem lösen lässt. Zunächst gibt jedoch Kap. 3 noch einen Überblick über mit dem Workshopzuteilungsproblem verwandten Problemklassen oder -stellungen.

# Kapitel 3

## Verwandte Problemklassen

In diesem Kapitel werden Klassen von Optimierungsproblemen aus der Literatur vorgestellt, die mit dem Workshopzuteilungsproblem als verwandt angesehen werden können. Es wird ein Überblick über die jeweilige Problemstellung, die Komplexität der Probleme und eingesetzte Lösungsmethoden gegeben.

### 3.1 Stundenplanprobleme

Stundenplanprobleme (timetabling problems) und deren automatisierte Lösung wurden zuerst durch [ABN61, Got63] erwähnt und seitdem sehr intensiv durch die Forschung behandelt. Ziel eines Stundenplanproblems ist zum einen die Zuordnung von Studenten oder Schülern und Lehrern zu Kursen oder Klassen und zum anderen die Zuordnung von Kursen zu Räumen und Zeiten. Dabei sind eine Reihe von Nebenbedingungen zu beachten, zum Beispiel darf in jedem Raum zu einer bestimmten Zeit höchstens ein Kurs stattfinden, es dürfen nicht mehr Studenten in dem Kurs sein, als Plätze zur Verfügung stehen und Lehrer können nur einen Kurs zur Zeit halten. Das Ziel des Optimierungsproblems ist es, eine Zuordnung zu finden, die zum einen gültig hinsichtlich der Bedingungen, zum anderen aber optimal bezüglich weiterer Kriterien ist, wie z.B. Anzahl oder Länge von Pausen für Klassen oder Lehrer oder größtmögliche Überschneidungsfreiheit der Kurse von Studenten.

Bei Stundenplanproblemen gibt es zwei Arten von Nebenbedingungen. Harte Nebenbedingungen (hard constraints) müssen von einer gültigen Lösung in jedem Fall eingehalten werden. Weiche Nebenbedingungen (soft constraints) sind wünschenswerte Eigenschaften einer Lösung, sie haben jedoch keinen Einfluss auf die Gültigkeit einer Lösung, sondern sind vielmehr Optimierungskriterien.

Es gibt drei wichtige Klassen von Stundenplanproblemen [Sch99], deren Nebenbedingungen und Optimierungsfunktionen sich leicht unterscheiden. Diese sind:

**Schulstundenplanung** (school timetabling). Es soll ein Wochenplan für die Klassen und Lehrer einer Schule erstellt werden. Jede Klasse muss eine bestimmte Anzahl an Stunden absolvieren, dabei ist jede Klasse eine feste Einheit, die nicht geteilt werden kann. Lehrer und Klassen können zu jedem Zeitpunkt höchstens einer Schulstunde zugeteilt sein, es müssen ebenfalls alle nötigen Schulstunden in der Zuteilung berücksichtigt werden. Auch die Zuteilung von Räumen zu Klassen kann in das Problem integriert sein, allerdings nur, wenn Klassen unterschiedlicher

Größen zugeteilt werden.

Die Qualität eines gültigen Schulstundenplans wird beispielsweise bestimmt durch die Anzahl und Lage der Pausen für Klassen und Lehrer. Pausen, die zusammen hängen oder am Anfang/Ende des Schultages liegen, sind günstiger als Pausen bzw. Löcher mitten im Tag.

Bei der Schulstundenplanung ist oft das Finden einer gültigen Lösung ein großes Problem, da die Nebenbedingungen das Problem stark eingrenzen. In der Praxis kann eine gültige Lösung aber auch schon zufriedenstellend sein, auch wenn es nicht die optimale Lösung ist, da die Optimalitätskriterien meist nebensächlich sind.

**Kursplanung an einer Universität** (course timetabling). Ein Kurs wird von einer Anzahl Studenten besucht, wobei jeder Student seine individuelle Kursmenge besucht. Es gibt hier also keinen festen Klassenverband, die Kurse sind unterschiedlich groß. Die Kurse sollen zu Zeitblöcken zugeordnet werden. Dabei darf kein Kursleiter mehr als einen Kurs zur Zeit geben und es muss ein entsprechend großer Raum verfügbar sein.

Zu minimieren ist die Anzahl der Überschneidungen für die Studenten. Weiterhin gibt es eine Reihe weiterer, möglicher harter oder weicher Nebenbedingungen, z.B. dass mehrere Blöcke eines Kurses immer zur selben Zeit stattfinden oder nicht am selben Tag. Ebenfalls kann es Pausen zwischen den Kursen geben, die eingehalten werden müssen.

**Prüfungsplanung** (examination timetabling). Wie bei der Kursplanung hat jeder Student eine individuelle Menge an Prüfungen abzulegen. Prüfungen müssen Räumen und Zeiten zugewiesen werden, wobei die Belegung eines Raums mit mehreren, zur gleichen Zeit stattfindenden Prüfungen erlaubt ist. Überschneidungen von Prüfungen zu Kursen, die von denselben Studenten besucht werden, sollen vermieden bzw. minimiert werden. Optimierungskriterium ist außerdem die möglichst gleichmäßige Verteilung der Prüfungen eines Studenten über die Zeit.

Fast alle Varianten bzw. Instanzen des Stundenplanproblems sind NP-vollständig [Sch99] und können daher meist nur mit heuristischen Methoden gelöst bzw. angenähert werden. Es gibt aber Probleminstanzen, die polynomiell lösbar sind, z.B. mit Hilfe von Netzwerkflussmodellen [dW71].

In den folgenden Abschnitten werden die verschiedenen Stundenplanprobleme formal vorgestellt. Dabei handelt es sich bei allen Varianten um grundlegende Suchprobleme, für die also zunächst überhaupt eine gültige Lösung gefunden werden soll, ohne dass eine Zielfunktion über dem Lösungsraum optimiert werden muss. Es werden aber ebenfalls Ansätze für Varianten beschrieben, die das grundlegende Suchproblem u.a. um eine Zielfunktion erweitern und aus dem Suchproblem ein Optimierungsproblem im eigentlichen Sinn machen.

### 3.1.1 Schulstundenplanung

Zunächst wird das Schulstundenplanungsproblem mit Anwesenheitsbedingungen für Lehrer und Klassen vorgestellt [dW85, Sch99]. Seien  $c_1, \dots, c_m$   $m$  Klassen,  $t_1, \dots, t_n$   $n$  Lehrer

und  $1, \dots, p$  Zeitperioden. Sei  $\mathbf{R} \in \mathbb{Z}_+^{m \times n}$  die Bedarfsmatrix, mit  $r_{ij}$  der Anzahl Stunden, die Lehrer  $t_j$  der Klasse  $c_i$  geben muss. Um die Anwesenheit von Lehrern bzw. Klassen zu den Zeitperioden anzugeben, seien ferner die Matrizen  $\mathbf{T} \in \mathbb{B}^{n \times p}$  für die Lehrer und  $\mathbf{C} \in \mathbb{B}^{m \times p}$  für die Klassen gegeben, wobei  $t_{jk} = 1$ , wenn der Lehrer  $t_j$  zur Zeitperiode  $k$  anwesend ist, und 0 sonst, analog für die Klassen.

Das Ziel des Problems ist es, eine Zuordnung der Klassen zu Zeitperioden zu finden, so dass keine Klasse und kein Lehrer zur selben Zeitperiode mehr als einer Stunde zugeordnet ist. Die Zuordnung wird durch binäre Variablen  $x_{ijk} \in \mathbb{B}$  kodiert, für  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, p$ . Die folgenden Nebenbedingungen müssen eingehalten werden:

$$\sum_{k=1}^p x_{ijk} = r_{ij} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ijk} \leq c_{ik} \quad i = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, p \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ijk} \leq t_{jk} \quad j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, p \quad (3.3)$$

Bedingung (3.1) stellt sicher, dass jeder Lehrer jeder Klasse die geforderte Mindestanzahl Schulstunden gibt. Die Bedingung (3.2) legt fest, dass jede Klasse stets in höchstens einer Schulstunde involviert ist, oder in gar keiner zu den Zeiten, zu denen die Klasse nicht verfügbar ist. Bedingung (3.3) stellt die Entsprechung für die Lehrer sicher.

Das vereinfachte Schulstundenplanungsproblem entspricht diesem Problem mit vollständiger Anwesenheit, d.h. Lehrer und Klassen können zu jedem Zeitpunkt an einer Schulstunde teilnehmen. Die Matrizen  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{C}$  sind dann unnötig, die Elemente in den Nebenbedingungen werden durch 1 ersetzt. Das vereinfachte Problem ist mittels eines Netzwerkflussverfahrens in polynomieller Zeit lösbar [Sch99, EIS76]. [EIS76] zeigen ebenfalls, dass das Problem mit Anwesenheit NP-vollständig ist.

Es gibt diverse Varianten dieses Problems, die sich durch praktische Anforderungen ergeben.

- In der Realität ist die Vorgabe der Anzahl Stunden pro Klasse durch einen Lehrer nicht vorhanden, vielmehr gibt es eine Reihe Unterrichtsfächer und für jede Klasse wird die Anzahl Unterrichtsstunden in jedem Fach vorgegeben. Jedes Fach kann wiederum von einer Anzahl verschiedener Lehrer unterrichtet werden. Hierbei wird allerdings gefordert, dass eine Klasse in einem Fach immer vom selben Lehrer unterrichtet wird.
- Die Lage der unterrichtsfreien Stunden ist oft beschränkt z.B. auf die ersten bzw. letzten Stunden des Schultags, da Aufsichtspflichten eingehalten werden müssen.
- Für bestimmte Fächer gibt es oft spezielle Räume (Turnhalle, Musikzimmer, Labor), die nur von einer Klasse zur Zeit belegt sein können. Die entsprechenden Fächer dürfen dann auch über mehrere Klassen hinweg nicht parallel liegen.

### 3.1.2 Kursplanungsproblem

Gegeben sind Kurse  $c_1, \dots, c_m$ , für den Kurs  $c_i$  gibt  $\hat{c}_i \in \mathbb{N}$  an, aus wie vielen Veranstaltungen der Kurs besteht, also wie oft z.B. eine Vorlesung pro Woche gehalten werden muss. Weiterhin gibt es Studienpläne  $S_1, \dots, S_n$  mit  $S_j \subset \{1, \dots, m\}$ . Die Teilnehmer der Kurse eines Studienplans überschneiden sich, so dass alle Kurse eines Studienplans überschneidungsfrei angeordnet werden müssen. Es gibt wiederum Zeitperioden  $1, \dots, p$  und für  $1 \leq k \leq p$  gibt  $l_k \in \mathbb{N}$  die maximale Anzahl Kurse an, die in der Periode  $k$  stattfinden können.  $l_k$  entspricht also der Anzahl zur Verfügung stehender Räume in Periode  $k$ .

Die Zuordnung wird durch binäre Variablen  $x_{ik} \in \mathbb{B}$  kodiert, wobei  $x_{ik} = 1$  bedeutet, dass der Kurs  $c_i$  in Periode  $k$  statt findet. Die Nebenbedingungen sind wie folgt:

$$\sum_{k=1}^p x_{ik} = \hat{c}_i \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} \leq l_k \quad k = 1, \dots, p \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in S_j} x_{ik} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, p \quad (3.6)$$

Nebenbedingung (3.4) stellt sicher, dass jeder Kurs aus der geforderten Anzahl Veranstaltungen besteht, (3.5) limitiert die Anzahl der pro Zeitperiode statt findenden Veranstaltungen auf die Anzahl der zur Verfügung stehenden Räume und (3.6) sorgt dafür, dass Kurse aus demselben Studienplan nicht in derselben Zeitperiode statt finden können.

Für das vorgestellte Modell kann durch eine Reduktion auf das Graph-Coloring-Problem die NP-Vollständigkeit gezeigt werden [Sch99].

Auch zu dieser grundlegenden Problemstellung gibt es einige Varianten.

- Das Modell kann erweitert werden um die Möglichkeit, von vornherein vorhandene zeitliche Restriktionen der Kurse zu beachten, so dass man für jeden Kurs festlegen kann, zu welchen Zeitperioden er gelegt werden darf und zu welchen anderen nicht, beispielsweise, weil ein Kursleiter montags zu Hause arbeitet und daher nicht verfügbar ist oder weil die Exkursion eines Kurses am Mittwoch statt finden muss.
- Das grundlegende Modell geht davon aus, dass jeder Kurs genau eine Zeitperiode in Anspruch nimmt. In der Praxis sind allerdings häufig unterschiedliche Kurslängen anzutreffen. Erweiterungen des Problems lassen es zu, dass Kurse über eine ganzzahlige Anzahl von Perioden dauern, durch die freie Wahl der Periodengranularität erlaubt dies bereits eine sehr flexible Modellierung. Für jeden Kurs müssen dann Startzeitpunkt und Dauer in die Problemformulierung integriert werden.
- Die Überschneidungsfreiheit der Kurse kann als weiche Bedingung in die Problemstellung Eingang finden. In der Praxis ist es oft nicht vermeidbar, dass Kurse, die von denselben Studenten besucht werden, sich überschneiden. Hier geht es darum, eine Lösung zu finden mit minimaler Anzahl an Überschneidungen. Die Überschneidungsfreiheit wird dann nicht mehr als Nebenbedingung formuliert, sondern geht in die zu optimierende Zielfunktion ein.



### 3.1.3 Prüfungsplanungsproblem

Das Prüfungsplanungsproblem ist dem Kursplanungsproblem recht ähnlich. Es geht um die Zuteilung von Prüfungen zu einer Anzahl gegebener Zeitperioden, wobei es pro Kurs eine Prüfung gibt. Hierbei dürfen sich allerdings Prüfungen, die von denselben Studenten besucht werden, in keinem Fall überschneiden. Es gibt weiterhin noch andere Nebenbedingungen, die besonders für die Prüfungszuteilung relevant sind. Oftmals sollen Studenten pro Tag nicht mehr als eine Prüfung abzulegen haben, oder die abzulegenden Prüfungen sollen optimal über die verfügbare Zeitperiode verteilt werden.

Gegeben sind wie beim Kursplanungsproblem Kurse  $c_1, \dots, c_m$ , mit einer Prüfung für jeden Kurs  $c_i$ . Weiterhin gibt es analog zu den Studienplänen Gruppen von Prüfungen  $S_1, \dots, S_n$  mit  $S_j \subset \{1, \dots, m\}$ , wobei es für jede Gruppe  $S_j$  Studenten gibt, die alle Prüfungen zu Kursen in  $S_j$  besuchen. Diese Prüfungen müssen also wiederum überschneidungsfrei angeordnet werden. Es gibt ebenso Zeitperioden  $1, \dots, p$  und  $l_k \in \mathbb{N}$  gibt die maximale Anzahl Prüfungen an, die gleichzeitig statt finden können. Dies muss nicht unbedingt der Anzahl verfügbarer Räume entsprechen, da durchaus auch mehrere Prüfungen im selben Raum statt finden können.

Die Zuordnung wird durch binäre Variablen  $x_{ik} \in \mathbb{B}$  kodiert, wobei  $x_{ik} = 1$  bedeutet, dass die Prüfung zum Kurs  $c_i$  in Periode  $k$  statt findet. Die Nebenbedingungen sind wie folgt:

$$\sum_{k=1}^p x_{ik} = 1 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ik} \leq l_k \quad k = 1, \dots, p \quad (3.8)$$

$$\sum_{i \in S_j} x_{ik} \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, p \quad (3.9)$$

Bedingung (3.7) legt fest, dass zu jedem Kurs eine Prüfung abgehalten wird, Bedingung (3.8) stellt sicher, dass in jeder Zeitperiode nicht mehr als die maximal mögliche Anzahl Prüfungen statt finden und Bedingung (3.9) schließlich sorgt für die Überschneidungsfreiheit der Prüfungen mit gemeinsamen Studenten.

Für das Prüfungsplanungsproblem kann analog zum Kursplanungsproblem die NP-Vollständigkeit gezeigt werden [Sch99]. Es gibt weiterhin folgende Erweiterungsmöglichkeiten:

- Ebenso wie bei den anderen Problemen können Verfügbarkeiten hinzugefügt werden, so dass für jede Prüfung und jede Zeitperiode angegeben werden kann, ob die Prüfung zu der Zeit statt finden darf oder nicht.
- Als weiche Nebenbedingung kann eine Zielfunktion angegeben werden, die optimal wird, wenn möglichst wenige Studenten Prüfungen an dicht aufeinander folgenden Perioden ablegen. So wird eine möglichst breite Streuung der Prüfungen erreicht, was den Prüflingen eine angemessene Vorbereitungszeit für jede Prüfung erlaubt.
- Prüfungen müssen Räumen zugeteilt werden, basierend auf der Anzahl Studenten pro Prüfung. Auf diese Weise können mehrere Prüfungen demselben Raum zugeteilt werden, sofern eine genügende Anzahl Plätze vorhanden ist. Ebenso ist die

Aufteilung einer Prüfung auf mehrere Räume denkbar oder aber verschiedene Typen von Räumen, so dass einige Prüfungen nur in bestimmten Räumen abgehalten werden können. Beispielsweise braucht man zum Testen des Verständnisses einer Fremdsprache ein Sprachlabor mit entsprechender Ausstattung zum Vorspielen gesprochener Texte.

### 3.1.4 Lösungsmethoden

Zum Lösen von Stundenplanproblemen werden die verschiedensten Methoden angewandt, die Wahl der Methode ist jeweils abhängig von der konkreten Problemstellung und den verwendeten Daten. Sowohl ganzzahlige Programmierung und Netzwerkflussmodelle [dW85] als auch heuristische Verfahren wie genetische Algorithmen, Tabusuche, Simulated Annealing etc. werden eingesetzt zum Lösen dieser Probleme. Viele erfolgreich gelöste Instanzen werden in der Literatur beschrieben. Allerdings lässt die große Variation der beschriebenen Versuche weder über die Vergleichbarkeit der Algorithmen noch über die generelle Lösbarkeit einzelner Problemklassen Aussagen zu. Dies ist vor allem bedingt durch die Eigenschaft des Nichtdeterminismus der oft eingesetzten, heuristischen Verfahren. [Sch99] berichtet aber dennoch, dass Methoden wie genetische Algorithmen und Tabusuche bessere Ergebnisse erzielen als die klassischen Verfahren des Operations Research wie lineare Programmierung.

## 3.2 Zuordnungsprobleme

Das Zuordnungsproblem oder assignment problem wurde bereits in Abschnitt 2.6.2 kurz vorgestellt und soll noch einmal im Detail dargestellt werden [AMO93].

Gegeben sei ein bipartiter, gewichteter Graph  $G = (V_1, V_2, E, w)$  mit  $|V_1| = |V_2| = n$ . Für die Formulierung des Zuordnungsproblems wird für jede Kante  $(v_i^1, v_j^2) \in E$  eine binäre Variable  $x_{ij} \in \mathbb{B}$  eingeführt, wobei  $x_{ij} = 1$  bedeutet, dass Knoten  $v_i^1 \in V_1$  dem Knoten  $v_j^2 \in V_2$  zugeordnet wird.  $w_{ij}$  ist das Gewicht der Kante, die  $v_i^1$  und  $v_j^2$  verbindet. Die Formulierung als lineares Programm ist dann wie folgt:

$$\min x_{ij}w_{ij} \tag{3.10}$$

$$\text{u.d.N.} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \tag{3.11}$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n \tag{3.12}$$

Das Ziel ist die Minimierung der Summe der Gewichte der Kanten zwischen zugeordneten Elementen. Jedem Element aus  $V_1$  wird genau ein Element aus  $V_2$  zugeordnet, dies wird durch die beiden Nebenbedingungen (3.11) und (3.12) ausgedrückt.

Das Zuordnungsproblem ist auch bekannt unter dem Namen *Heiratsproblem*, bei dem eine Anzahl Frauen und die gleiche Anzahl Männer gegeben sind, die jeweils zu Hochzeitspaaren zu vereinigen sind [JB80]. Eine graphische Darstellung des Zuordnungsproblems an diesem Beispiel ist in Abb. 3.1 gegeben. Das Zuordnungsproblem entspricht einem Netzwerkflussproblem, wobei der externe Fluss der einen Menge Knoten immer

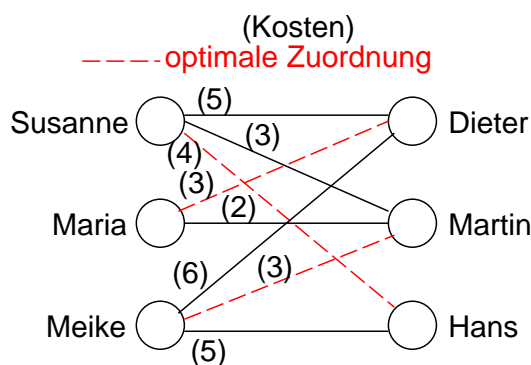


Abbildung 3.1: Zuordnungsproblem am Beispiel des Heiratsproblems

1 und der zweiten Menge Knoten immer  $-1$  ist. Minimaler Fluss und Kapazität sind nicht gegeben, da weder ein minimaler Fluss größer als Null noch eine Kapazität kleiner als Eins Sinn ergeben. Das Modell enthält also lediglich die Kosten der Kanten. Das Zuordnungsproblem ist als Instanz eines Netzwerkflussproblems polynomiell lösbar, der aufgespannte Lösungsraum ist ganzzahlig. Die Eigenschaft der totalen Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix ist leicht erkennbar: für jede Teilmenge von Zeilen der Matrix ordne die Zeilen der gleichen Nebenbedingung in die gleiche Partition. Dies ergibt dann genau zwei nach Theorem 2.4 gültige Partitionen.

Das Zuordnungsproblem lässt sich leicht auf Fälle erweitern, bei denen die Anzahl Elemente der beiden Knotenmengen unterschiedlich ist. Man betrachte beispielsweise die Situation, dass 20 Fussballfans jeweils Geld für Karten eines wichtigen Fussballspiels bieten, wobei aber nur 12 Plätze unterschiedlicher Qualität vorhanden sind. Der Veranstalter möchte die 12 Karten so verkaufen, dass er seinen Gewinn maximiert, die Fussballfans bieten unterschiedliche Summen für die verschiedenen Platzkategorien. Um diese Problemstellung als Zuordnungsproblem zu formulieren, führt man 8 zusätzliche Dummy-Plätze ein und fügt sie der Menge der 12 Plätze hinzu. Jeder Dummy-Platz wird mit jedem Fussballfan durch eine zusätzliche Kante mit dem Nutzen 0 verbunden. Nun entspricht die Problemstellung dem Zuordnungsproblem. Diejenigen 8 Fans, die in der optimalen Zuordnung einem Dummy-Platz zugeordnet werden, bekommen keine Karte zugesprochen.

### 3.3 Das National Intern Matching Program

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts wurden in den Vereinigten Staaten von Amerika Praktika für Absolventen eines Medizinstudiums eingeführt, die in Krankenhäusern abzuleisten waren (siehe [Rot84], [Rot90], [Rot91] und [RS99]). Diese Praktika waren sowohl von Vorteil für die Studenten, da sie wertvolle Einblicke in die praktische Arbeit gewährten, als auch für die Krankenhäuser, die dadurch billige Arbeitskräfte bekamen. Es gab normalerweise ein Überangebot an Praktikumsplätzen, so dass zum einen die Krankenhäuser um die Absolventen konkurrierten, aber auch die Studenten hatten Präferenzen bezüglich der Krankenhäuser. Selbstorganisation dieses Marktes schlug allerdings fehl.

Zunächst versuchten die Krankenhäuser, durch frühe Kontaktaufnahme die begehrtesten Stellenanwärter für sich verpflichten zu können, bevor die Konkurrenz sich ebenfalls

meldete. Dies führte jedoch zu einer stetigen Vergrößerung des Abstandes zwischen den Vertragsabschlüssen und dem tatsächlichen Beginn des Praktikums. Auch für Krankenhäuser war dies unvorteilhaft, da zwei Jahre vor dem Abschluss des Studiums noch keine sehr detaillierten Angaben über die Fähigkeiten der Studierenden vorlag.

Von zentraler Stelle wurde schließlich verordnet, dass die Daten über die Studienleistungen der Studierenden nicht vor einem bestimmten Datum herausgegeben wurden. Dies löste in der Tat das Problem der frühen Vertragsabschlüsse, führte aber zu einem neuen Problem. Die den Bewerbern gewährte Zeitfrist nach Unterbreitung eines Stellenangebots, um diese Stelle zu akzeptieren, wurde immer weiter eingeschränkt bis schließlich auf wenige Stunden. Dies führte wiederum dazu, dass viele Zusagen im Nachhinein rückgängig gemacht wurden, wenn Studierende im Nachhinein ein Stellenangebot von einem präferierten Krankenhaus bekamen. Da dann der zunächst zugesagte Platz frei wurde, pflanzte sich die nachträgliche Stellenänderung entsprechend fort.

Um diese Problematik zu beseitigen, wurde ein zentrales Organ ins Leben gerufen, das die Präferenzen von Studenten wie Krankenhäusern einsammelt und eine möglichst optimale Zuordnung erstellen sollte. Im Jahr 1952 fand die erste Zuteilung nach einem entwickelten Algorithmus statt. Die Teilnahme am Zuteilungsprogramm war dabei freiwillig, wobei ca. 95% der Medizinstudenten an diesem Verfahren teilnahmen und den zugewiesenen Platz akzeptierten. Der Algorithmus war also die erste erfolgreiche Methode, um die bis dahin vorhandenen Probleme endgültig und zur Zufriedenheit aller Beteiligten zu beseitigen, dies zeigt die hohe Teilnahmequote.

Der National Intern Matching Program (NIMP) Algorithmus teilt jedem Studierenden maximal einen Praktikumsplatz zu und jedem Krankenhaus maximal die Anzahl Kandidaten, für die es freie Plätze gibt. Die generierte Zuteilung ist dabei sowohl effizient als auch stabil, entsprechend den folgenden Definitionen. Dabei ist ein Platz für einen Studierenden unakzeptabel, wenn er lieber keinen Platz annimmt als diesen, bzw. für ein Krankenhaus ist ein Studierender unakzeptabel, wenn die Position eher unbesetzt gelassen als mit diesem Studierenden besetzt wird.

**Definition 3.1** *Eine Zuordnung einer Menge von Ressourcen zu einer Menge von Individuen wird als **effizient** bezeichnet, wenn es keine alternative Zuordnung gibt, die mindestens ein Individuum bezüglich dessen Präferenzen für die Ressourcen besser stellt und die für kein anderes Individuum einen Nachteil bedeutet.*

**Definition 3.2** *Eine Zuordnung von Studierenden zu Praktikumsplätzen wird als **stabil** bezeichnet, wenn*

- kein Studierender einen unakzeptablen Platz zugewiesen bekommt,
- kein Krankenhaus einen unakzeptablen Studierenden zugewiesen bekommt und
- es keine Zuteilung gibt, so dass der Studierende einen anderen, präferierteren Platz vorgezogen hätte und gleichzeitig dieses präferierte Krankenhaus einen anderen Studierenden zugewiesen bekommt, der in dessen Präferenzliste nach dem Studierenden kommt.

Die Eigenschaft der Stabilität ist eine stärkere Eigenschaft als die Effizienz. Die Effizienz garantiert die Optimalität bezüglich des Gesamtproblems, die Stabilität garantiert darüber hinaus, dass auch bezogen auf kleinere Teilgruppen keine Verbesserung der

Zuteilung möglich ist, auch wenn man die Verschlechterung für andere Teilnehmer in Kauf nehmen würde. Die Stabilität der Zuteilung ist insbesondere eine wichtige Voraussetzung dafür, dass es keine nachträglichen Vertragsänderungen gibt, da jeder Student sicher sein kann, dass die von ihm stärker als das zugewiesene präferierten Krankenhäuser diese Präferenz nicht erwidern und somit auch nachträglich kein Platzangebot unterbreiten werden. Roth sieht diese Eigenschaft des Algorithmus als maßgeblich für den andauernden Erfolg des Zuteilungsalgorithmus an, wobei ja sowohl die Teilnahme als auch die Akzeptanz der Zuteilung jeweils freiwillig sind.

Diese Stabilität gilt natürlich nur bezüglich der angegebenen Präferenzen. Falls es Gründe für einige der Beteiligten gibt, andere als die wahren Präferenzen als Eingabe für den Algorithmus zu liefern, so kann es sein, dass die Stabilität bezüglich der wahren Präferenzen nicht gegeben ist. In der Tat wurde 1951 ein Algorithmus vorgeschlagen, der Anreize für die Studierenden bot, nicht die wahren Präferenzen zu nennen. Das Ergebnis war dementsprechend nicht stabil bezüglich der wahren Präferenzen.

Roth (siehe [Rot90, RS99]) diskutiert die Frage, ob Individuen, also sowohl Studenten als auch Krankenhäuser, über genügend Informationen bezüglich der Präferenzen der anderen Individuen verfügen, um Ranglisten zu erstellen, die zu einer besonders favorisierten Zuordnung führen, wobei sich diese Rangliste von den wahren Rangordnungen und Präferenzen deutlich unterscheidet. Roth gibt Beispiele für Situationen, in denen die Angabe einer unehrlichen Rangordnung profitabel sein kann und sagt ebenfalls, dass Daten über vergangene Zuteilungen ausreichend Informationen über die Präferenzstruktur anderer Teilnehmer enthüllen. Man muss also z.B. davon ausgehen, dass es Studenten geben wird, die unwahre Rangordnungen angeben. Er zeigt aber zum anderen, dass es keinen Zuteilungsalgorithmus gibt, der eine stabile Zuteilung erzeugt und gleichzeitig die ehrliche Angabe der Präferenzen aller Teilnehmer zur dominanten Strategie macht. Hingegen gibt es einen Algorithmus, der eine stabile Zuteilung erzeugt und die Angabe wahrer Präferenzen durch die Studenten zur dominanten Strategie macht, der also in Hinblick auf die Studenten anreizkompatibel ist. Für die Krankenhäuser gilt dies allerdings nicht. Immerhin ist aber in jedem Fall die wahrheitsgemäße Angabe der ersten Wahl eine dominante Strategie, sowohl für Studenten als auch für die Krankenhäuser.

Für den vorgestellten Algorithmus wird gezeigt, dass er eine stabile Zuteilung erzeugt. Der Algorithmus funktioniert nach einem greedy-Verfahren, indem er versucht, möglichst vorteilhafte Zuordnungen zuerst vorzunehmen und weniger vorteilhafte später. In einer weiteren Phase können bereits vorgenommene Zuteilungen noch weiter verbessert werden, basierend auf später im Algorithmus bearbeiteten, weiteren Präferenzen und Platzzuteilungen. Der Algorithmus geht also sehr problemspezifisch vor. In [RS99] findet sich eine Begründung, wieso der Algorithmus terminiert. Zur Komplexität werden in den Veröffentlichungen keine genaueren Angaben gemacht. Die Berichte der praktischen Erfahrungen über die Jahre lassen aber vermuten, dass die Komplexität kein größeres Problem darstellt.

Für die Organisation zentralisierter Märkte sieht Roth die Stabilität als die wichtigste Eigenschaft an. Empirische Ergebnisse zeigen, dass die meisten instabilen Märkte sich als Misserfolg herausstellten und eingestellt wurden, während die stabilen Märkte bis in die Gegenwart bestehen und genutzt werden. Daher sollten auch nur solche Änderungen zur Berücksichtigung besonderer Fälle an den Zuteilungsalgorithmen vorgenommen werden, die die Stabilität nicht gefährden. Allerdings hat sich Mitte der Siebziger Jahre herausgestellt, dass die Stabilität für bestimmte Teilnehmer, nämlich verheiratete Paare, nicht mehr gegeben war. Verheiratete Paare wünschten sich Praktika an benachbarten

Krankenhäusern. Es wurden verschiedene Methoden probiert, um solche Wünsche bei der Zuteilung zu berücksichtigen. Eine wichtige Schwierigkeit stellt dabei bereits die Angabe der Präferenzen von Paaren dar. Roth zeigt, dass in einem Markt mit Paaren nicht unbedingt eine stabile Zuordnung existieren muss und erläutert dies anhand eines Beispiels [Rot84]. Aufgrund dieser mangelnden Stabilität schlossen sich daher verheiratete Studenten zunehmend vom Markt aus und schlossen Verträge für Praktikumsplätze außerhalb des Zuteilungsmechanismus ab.

### 3.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über ausgewählte Optimierungsprobleme, die in der einen oder anderen Weise mit dem Workshopzuteilungsproblem zu tun haben. Die genauen Zusammenhänge werden im folgenden Kapitel diskutiert.

Dieses Kapitel behandelt zunächst verschiedene Arten von Stundenplanproblemen, bei denen es im Prinzip um die zeitliche Einteilung von Schulstunden, Kursen oder Prüfungen geht, unter Beachtung verschiedener Nebenbedingungen. Die Zuordnung von Schülern bzw. Studenten zu Kursen oder Prüfungen ist hier bereits als Rahmenbedingung vorgegeben. Stundenplanprobleme sind nur in sehr einfacher Formulierung polynomiell lösbar, im allgemeinen sind es NP-vollständige Probleme, zur Lösung wurden verschiedene Heuristiken angewandt.

Das Zuteilungsproblem ist polynomiell lösbar, da es als Netzwerkflussproblem modellierbar ist. Das Zuteilungsproblem beinhaltet aber keinerlei Nebenbedingungen bezüglich erlaubter Kombinationen von Zuteilungen oder ähnlichen Anforderungen.

Das National Intern Matching Program behandelt die Zuordnung von Studenten zu Praktikumsplätzen basierend auf geordneten Präferenzlisten sowohl von Seiten der Studenten als auch von Seiten der Anbieter. Das vorrangige Ziel des Algorithmus ist das Erstellen einer stabilen Zuteilung. Bei einer stabilen Zuteilung gibt es keine Teilmenge von Teilnehmern, die zusammen durch Verändern der Zuteilung ein für sich vorteilhaftere Zuteilung erreichen können, auch nicht auf Kosten weiterer Teilnehmer außerhalb dieser Gruppe. Stabilität wird als zentrale Eigenschaft für den Erfolg des Programms, das auf freiwilliger Teilnahme und freiwilliger Akzeptanz der Zuteilung basiert, genannt. Allerdings zeigt sich, dass es keinen Algorithmus geben kann, der sowohl eine stabile Zuteilung erzeugt als auch die wahrheitsgemäße Angabe der Präferenzen zur dominanten Strategie für alle Beteiligten macht. Es gibt also unter dieser Zuteilung immer Teilnehmer, die durch eine Misrepräsentation ihrer Präferenzen eine für sich vorteilhaftere Zuteilung erreichen können, und aufgrund von historischen Daten sind ausreichend Informationen über die Präferenzstruktur anderer Teilnehmer vorhanden, dass davon auszugehen ist, dass dies auch wirklich passiert.

# Kapitel 4

## Das Workshopzuteilungsproblem

Das Workshopzuteilungsproblem beschäftigt sich mit der Zuteilung einer begrenzten Anzahl Plätze verschiedener zur Auswahl stehender Workshops zu Teilnehmern, wobei Präferenzen der Teilnehmer für die einzelnen Workshops berücksichtigt werden. Es wird eine Zuteilung von Teilnehmern zu Workshops gesucht, die zum einen gültig ist bezüglich einiger Nebenbedingungen und die zum anderen die Summe der Präferenzen über die zugeteilten Workshops maximiert. Die Nebenbedingungen umfassen zum einen Teilnehmergrenzen auf den einzelnen Workshops, zum zweiten die Spezifikation von inhaltsgleichen Workshops, von denen Teilnehmer höchstens einen besuchen, und zum dritten zeitliche Restriktionen, die festlegen, wann Workshops stattfinden und zu welchen Zeitpunkten Teilnehmer Workshops besuchen können.

Das Workshopzuteilungsproblem ist von hoher praktischer Relevanz. Veranstaltungen mit Workshops wie Konferenzen, Seminare, Kongresse usw. leben von einer zumeist freiwilligen Teilnahme der Besucher an den Workshops oder auch der gesamten Veranstaltung. Es ist hier also besonders wichtig, dass die Teilnehmer in hohem Maß zufrieden sind mit dem Besuch der Veranstaltung und damit auch mit den zugeteilten Workshops, damit Anreize für Folgebesuche gegeben sind und der erwünschte, positive Effekt der Veranstaltung nicht gefährdet wird. Der Besucher als Käufer muss für seinen oft festen, bezahlten Beitrag, z.B. Eintrittspreis oder auch investierte Zeit, Workshops geboten bekommen, die die Investition wert sind.

Das Workshopzuteilungsproblem wird in diesem Kapitel vorgestellt und es wird die Lösbarkeit des Problems untersucht. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der Lösbarkeit des Problems mit dem Simplex-Verfahren, da dies eine bestimmte Komplexität garantiert und in Softwarepaketen performant implementiert ist. Es wird daher genau untersucht, unter welchen Bedingungen sich die Lösbarkeit des Workshopzuteilungsproblems mit dem Simplex garantieren lässt, und wie sich die Performanz anderer Methoden gestaltet. Dies zeigt auch die Möglichkeiten für einen praktischen Einsatz des Optimierungsproblems zur Unterstützung der Organisation von entsprechenden Veranstaltungen.

### 4.1 Definition des Workshopzuteilungsproblems

Das allgemeine Workshopzuteilungsproblem ist so formuliert, dass es für ein möglichst breites Spektrum an praktischen Veranstaltungen geeignet ist. Daher ist es wichtig, dass das Modell eine hohe Flexibilität zur Darstellung spezifischer Veranstaltungsgeben-

heiten mit unterschiedlichen Strukturen bietet. Das auf eine konkrete Veranstaltung zugeschnittene Problem ist oft einfacher als der allgemeine Fall, weil einige der durch die Nebenbedingungen abgefangenen Voraussetzungen in jedem Fall erfüllt sind.

Zunächst gibt es eine Menge von Workshops, die während der Veranstaltung jeweils einmal stattfinden. Zur Zuordnung der Workshops zu den verschiedenen möglichen Zeiten werden eine Anzahl Zeitslots definiert. Die Länge eines Zeitslots entspricht der für die Veranstaltung kleinsten, nicht mehr zu teilenden Zeiteinheit. Wenn also bei einer Veranstaltung alle Workshops zur vollen Stunde beginnen und enden, so ist es sinnvoll, eine Stunde als einen Zeitslot zu definieren. Finden alle Veranstaltungen beispielsweise in vier verschiedenen, festgelegten Zeitblöcken statt, egal wann deren Beginn und Ende ist, so ist jeder Zeitblock als ein Zeitslot darzustellen. Jeder Workshop darf dabei in einem beliebigen Zeitslot anfangen und eine beliebige Menge von folgenden Zeitslots lang dauern. Es ist jedoch nicht gestattet und auch für die Praxis uninteressant, Lücken zuzulassen. Ein Workshop füllt also eine aufeinander folgende, zusammenhängende Reihe von Zeitslots ohne Lücken.

Jeder Workshop findet lediglich exakt einmal während der Veranstaltung statt. Es ist jedoch häufig der Fall, dass Workshops desselben Inhalts mehrfach statt finden, um zum einen mehr Teilnehmern, als an einem einzelnen Workshop teilnehmen können, die Teilnahme an diesem Workshop zu ermöglichen und um zum anderen möglichst vielen Teilnehmern mit unterschiedlichen zeitlichen Möglichkeiten die Teilnahme am Workshop zu erlauben. Um diesen Sachverhalt zu modellieren, wird eine Äquivalenzfunktion definiert (siehe Gleichung (4.1)), durch die Äquivalenzklassen von Workshops gleichen Inhalts gebildet werden. Von der Zuteilung wird erwartet, dass kein Teilnehmer mehr als einen Workshop einer Äquivalenzklasse besucht, also nicht mehrfach zu Workshops desselben Inhalts geht.

Es gibt weiterhin eine Anzahl von Teilnehmern an der Veranstaltung. Jede Person wird als ein Teilnehmer modelliert. Nicht jeder Teilnehmer muss über die gesamte Dauer der Veranstaltung anwesend sein, vielmehr wird für jeden Teilnehmer einzeln spezifiziert, an welchen der Zeitslots er anwesend ist und an welchen nicht. Diese Zeitslots dürfen im Gegensatz zu denen der Workshops Lücken enthalten, da es sehr wohl sein kann, dass ein Teilnehmer während der Veranstaltung für eine bestimmte Dauer abwesend ist und keine Workshops besuchen kann, vorher und nachher aber anwesend ist. Die Modellierung der Zeitslots muss also ebenfalls die Spezifikation der Anwesenheit der Teilnehmer zulassen, die Zeitslots müssen also so fein gewählt werden, dass für jeden Teilnehmer und jeden Zeitslot angegeben werden kann, ob der Teilnehmer in dem Zeitslot anwesend ist oder nicht. Hierbei gibt es nur die beiden Möglichkeiten "anwesend" oder "nicht anwesend", es gibt also keine weitere Abstufung im Sinne einer "teilweisen" oder "eingeschränkten" Anwesenheit eines Teilnehmers in einem Zeitslot. Entsprechende Abstufungen können durch die freie Wahl der Granularität der Zeitslots erreicht werden.

Ein Teilnehmer kann nur Workshops besuchen, die in Zeitslots stattfinden, in denen der Teilnehmer auch anwesend ist. Dies muss für die gesamte Dauer des Workshops gelten. Gibt es also einen Zeitslot, während dem ein Workshop statt findet und zu dem ein Teilnehmer nicht anwesend ist, so darf keine Zuteilung erfolgen. Teilnehmer sollen also jeden zugewiesenen Workshop vollständig besuchen können.

Jeder Workshop kann eine begrenzte Anzahl an möglichen Teilnehmern haben. Workshops ohne Teilnehmergrenzen können ebenfalls modelliert werden, für sie wird entweder die Anzahl aller Teilnehmer als Obergrenze gewählt oder aber es wird keine entsprechen-



de Nebenbedingung für diese Workshops in das Optimierungsproblem übernommen. Die Teilnehmergrenzen können nur positive, ganze Zahlen sein, was für den praktischen Einsatz auch natürlicherweise gegeben ist.

Workshops in derselben Äquivalenzklasse dürfen unterschiedliche Teilnehmergrenzen haben. Ein Workshop kann also mehrmals stattfinden und jeweils unterschiedliche Teilnehmergrenzen haben. Dies ist wichtig, wenn zum Beispiel unterschiedliche Räume mit verschiedenen Kapazitäten zur Verfügung stehen, die eine unterschiedliche Teilnehmeranzahl nötig machen.

Jeder Teilnehmer kann für die Workshops Präferenzen äußern. Die Anzahl der möglichen Präferenzen sowie deren Werte sind für den Veranstalter frei wählbar. Die Präferenzen dürfen dabei beliebige, reelle Zahlenwerte annehmen. Es wird lediglich vorausgesetzt, dass eine höhere Präferenz eines Teilnehmers für einen Workshop eine Bevorzugung dieses Workshops gegenüber einem zweiten mit einer niedrigeren Präferenz ausdrückt. Diese Bedingung wird im Folgenden mit *Präferenzreihenfolge* bezeichnet. Ein Teilnehmer darf beliebig viele gleiche Präferenzwerte für verschiedene Workshops angeben. Diese Workshops sind dann in diesem Sinn gleichwertig, das heißt, die Zuteilung zu einem der Workshops wird von dem Teilnehmer als ebenso erstrebenswert wie die Zuteilung zu einem anderen mit dem gleichen Präferenzwert angesehen.

Die Präferenzen, die Teilnehmer explizit vergeben, müssen nicht mit den Präferenzen übereinstimmen, die als Zahlenwerte in das Optimierungsproblem eingehen. Es kann sich beispielsweise als sinnvoll erweisen, die Teilnehmer Zahlenwerte von 0 bis 4 (also Werte  $\in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ) für Workshops vergeben zu lassen. Die höchste Präferenz werde durch die 4 ausgedrückt. Für das Optimierungsmodell können diese Werte durch ihr jeweiliges Quadrat ersetzt werden, es gehen also die Präferenzen  $\{0, 1, 4, 9, 16\}$  in das Optimierungsmodell ein. Der Vorteil für die Teilnehmer liegt dabei im einfacheren Verständnis der niedrigen Zahlenwerte. Für das Optimierungsmodell hingegen verlagert sich die Gewichtung der Präferenzen. Eine Kombination aus zwei Workshops mit den Teilnehmerpräferenzen 1 und 4 hat im Modell eine Wertigkeit von 17 (statt 5 bei direkter Übertragung der Präferenzen ins Modell) und ist damit höherwertig als eine Kombination zweier Workshops mit Präferenzen 2 und 3, da diese eine Gesamtwertigkeit von nur 13 haben (statt ebenfalls 5 bei direkter Übernahme der Präferenzwerte). Die Wahl der ins Modell eingehenden Präferenzwerte beeinflusst somit erheblich das Ergebnis der Optimierung und kann vom Veranstalter je nach den Anforderungen und Wünschen der jeweiligen Veranstaltung passend gestaltet werden (für eine Diskussion der Präferenzwerte siehe Abschnitt 6.1.2).

Die Interpretation von Präferenzen für Workshops muss nicht in jedem Fall positiv sein. Im Gegenteil, es ist sinnvoll, die Vergabe von negativen Präferenzen zuzulassen, womit also Workshops bezeichnet werden, die der Teilnehmer *nicht* besuchen möchte. Leicht verständlich für die Teilnehmer sind hier positive und negative Präferenzwerte, wobei positive Präferenzen ausdrücken, dass der Teilnehmer zu diesem Workshop eher gern gehen würde, während eine negative Präferenz Workshops markiert, die ein Teilnehmer lieber meiden möchte. Hierbei würde eine Präferenz von  $-4$  gegenüber einer Präferenz von  $-2$  also ausdrücken, dass die Abneigung des Teilnehmers für den Workshop mit Präferenz  $-4$  höher ist als die Abneigung für den Workshop mit Präferenz  $-2$ .

Bei den Präferenzen ist es für viele praktische Fälle sinnvoll, die Anzahl der zu vergebenen Präferenzen pro Teilnehmer zu begrenzen, also für die Optimierung nur eine par-

tielle Präferenzfunktion zu Grunde zu legen. Beispielsweise kann man bei einer Anzahl von 20 verschiedenen Workshops jedem Teilnehmer die Vergabe von 8 Präferenzwerten erlauben, beispielsweise  $\{-2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2\}$ , wobei hier negative Zahlwerte eine Abneigung und positive eine Zuneigung ausdrücken. Die restlichen Workshops werden mit einer Standardpräferenz belegt, die bedeutet, dass dieser Teilnehmer weder eine explizit positive noch eine explizit negative Präferenz gegenüber diesem Workshop ausdrücken möchte. Es ist ihm in diesem Sinn also “egal”, ob er einen solchen Workshop mit einer Standardpräferenz besucht. Diese Standardpräferenz muss dann nach der oben genannten Bedingung der Präferenzreihenfolge größer sein als die negativen Präferenzwerte und kleiner als die positiven. In diesem Fall würde sich also der Präferenzwert 0 als Standardwert anbieten, der automatisch für alle Workshops gesetzt wird, denen keine der genannten 8 Präferenzen zugeordnet wird.

Eine solche Standardpräferenz hat den Vorteil erhöhter Übersichtlichkeit. Meist sind Teilnehmer schon aufgrund der fehlenden Information über den genauen Workshopinhalt nicht in der Lage, eine vollständige Sortierung der Workshops durch Präferenzen anzugeben. Das Erstellen einer solchen Sortierung ist meist ebenfalls mit erheblichem Zeitaufwand verbunden, den nur wenige Teilnehmer zur Verfügung haben. Das Ergebnis wäre also, dass die Präferenzangaben am Ende nicht die tatsächlichen, subjektiven Präferenzen für die Workshops wiedergeben, was die Unzufriedenheit mit der Zuteilung und der gesamten Veranstaltung steigern könnte. Einfacher ist es in den meisten Fällen, nur eine begrenzte Anzahl von positiven und negativen Präferenzen zur Vergabe anzubieten. Dies erleichtert die Präferenzvergabe und deren Übersichtlichkeit. Natürlich ist hier abhängig von der Gesamtzahl der angebotenen Workshops sowie der Zielgruppe der Veranstaltung die Anzahl der zur Verfügung stehenden Präferenzen vom Veranstalter abzuwägen. Zu wenige würden eine zu knappe Differenzierung zwischen gewünschten und unerwünschten Workshops erlauben, bei zu vielen wiederum leidet die Übersichtlichkeit und der Verdruss steigt womöglich schon im Vorfeld der Veranstaltung durch den zu hohen Zeitaufwand für die Präferenzvergabe. Dies sind jedoch praktische Betrachtungen, die keinen Einfluss auf die Formulierung des Optimierungsproblems haben. Für das Optimierungsproblem ist lediglich die Existenz der Präferenzen und die Gültigkeit der Präferenzreihenfolge wichtig.

Die Präferenzen für äquivalente Workshops können, müssen aber nicht gleich sein. Es ist oft sinnvoll, für Workshops desselben Inhalts auch dieselben Präferenzen anzunehmen. In diesem Fall wird dem Teilnehmer nur eine Präferenzauswahl für alle Workshops einer Äquivalenzklasse angeboten und dementsprechend auch nur eine einzige Präferenz vergeben (wichtig bei beschränkter Präferenzanzahl). Diese Präferenz wird dann für die Modellierung für alle Workshops einer Äquivalenzklasse kopiert. Andererseits kann eine Unterscheidung von äquivalenten Workshops ebenfalls sinnvoll sein, wenn zum Beispiel der Workshop von verschiedenen Leitern gehalten wird und dies für die Teilnehmer einen Einfluss auf die subjektive Präferenz für einen Workshop hat. Die Entscheidung muss vom Veranstalter getroffen werden und abgestimmt sein auf die Art der Workshops und die Wünsche der Zielgruppe der Teilnehmer.

Für jeden Teilnehmer kann es eine Mindestanzahl an Workshops geben, die der Teilnehmer besuchen muss. Diese Mindestanzahl kann durchaus für verschiedene Teilnehmer unterschiedlich sein, da es sein kann, dass Teilnehmer eine Veranstaltung nur partiell besuchen können und dementsprechend an weniger Workshops teilnehmen als andere. Die Angabe einer Mindestanzahl von zu besuchenden Workshops scheint im ersten Moment vielleicht unnötig für das Optimierungsproblem zu sein, da es die Problemstellung mit

sich bringt, dass optimale Werte nur bei möglichst vielen Zuteilungen erreicht werden können. Dies muss sich aber nicht automatisch gleichmäßig auf die Teilnehmer verteilen, es könnte passieren, dass ein Teilnehmer zu mehr Workshops geschickt wird, als er besuchen muss, während ein anderer zu wenig Workshops besucht, weil diese Lösung wegen der Struktur der Präferenzen eine höherwertige Problemlösung ergibt. Beispielsweise kann es vorkommen, dass ein Teilnehmer hohe Präferenzwerte für Workshops vergibt, die ansonsten eher unbeliebt sind und in denen noch Plätze frei sind, während ein anderer die beliebten und damit wahrscheinlich schon ausgebuchten Workshops präferiert. Bei einer weiteren Zuteilung des ersten Teilnehmers kann sich die Summe der Präferenzen daher mehr erhöhen als bei einer Zuteilung des letzteren zu einem Workshop mit noch freien Plätzen, aber mit geringer Präferenzbewertung.

Wir bezeichnen mit  $W = \{1, \dots, w_{max}\}$  die Menge der Workshops eines Workshopproblems und  $w \in W$  bezeichne einen einzelnen Workshop. Entsprechend sei  $P = \{1, \dots, p_{max}\}$  die Menge aller Teilnehmer und  $p \in P$  bezeichne einen Teilnehmer. Die Präferenz eines Teilnehmers  $p$  für einen Workshop  $w$  sei durch die Relation  $pref(p, w) \in \mathbb{R}$  gegeben. Hierbei gehen wir davon aus, dass es eine Standardpräferenz gibt, die für jeden Teilnehmer und Workshop die Präferenz angibt, für die keine explizite Angabe durch den Teilnehmer erfolgte. Somit ist die Relation  $pref$  für alle  $p \in P$  und  $w \in W$  eindeutig definiert und damit eine Funktion.

Für eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf einer Menge  $M$  und  $a, b \in M$  bezeichne  $a \sim b$  die Äquivalenz von  $a$  und  $b$ .  $[a]_{\sim} = \{b : b \in M \text{ und } a \sim b\}$  bezeichne die durch Element  $a$  gebildete Äquivalenzklasse. Die Menge aller Äquivalenzklassen von  $M$  bezüglich  $\sim$  sei bezeichnet mit  $M/\sim = \{[a]_{\sim} : a \in M\}$ .

Die Funktion  $pref$  definiert nun zunächst für jeden Teilnehmer  $p$  eine Äquivalenzrelation  $\sim_p$  über den Workshops. Für zwei Workshops  $w_1, w_2 \in W$  ist  $\sim_p$  für einen festen Teilnehmer  $p \in P$  definiert als

$$w_1 \sim_p w_2 \Leftrightarrow pref(p, w_1) = pref(p, w_2) \quad (4.1)$$

$\sim_p$  ist

reflexiv:  $\forall w \in W : pref(p, w) = pref(p, w) \Rightarrow w \sim_p w$

symmetrisch:  $w_1, w_2 \in W, w_1 \sim_p w_2 \Rightarrow pref(p, w_1) = pref(p, w_2) \Rightarrow w_2 \sim_p w_1$

transitiv:  $w_1, w_2, w_3 \in W, w_1 \sim_p w_2$  und  $w_2 \sim_p w_3$   
 $\Rightarrow pref(p, w_1) = pref(p, w_2) = pref(p, w_3) \Rightarrow w_1 \sim_p w_3$

und damit eine Äquivalenzrelation über der Menge  $W$  der Workshops. Die Äquivalenzklasse  $[w_1]_{\sim_p}$  ist die Menge aller Workshops mit derselben Bewertung durch den Teilnehmer  $p$  wie für  $w_1$ :

$$[w_1]_{\sim_p} = \{w_2 \in W : pref(p, w_1) = pref(p, w_2)\} \quad (4.2)$$

Die Präferenzfunktion  $pref$  definiert nun weiterhin für jeden Teilnehmer  $p$  eine Ordnung  $\leq_p$  über den Äquivalenzklassen der Workshops. Seien  $w_1, w_2 \in W$ , dann ist

$$[w_1]_{\sim_p} \leq_p [w_2]_{\sim_p} \Leftrightarrow pref(p, w_1) \leq pref(p, w_2) \quad (4.3)$$

$\leq_p$  ist

reflexiv:  $\forall w \in W : \text{pref}(p, w_1) \leq \text{pref}(p, w_1) \Rightarrow [w]_{\sim_p} \leq_p [w]_{\sim_p}$

antisymmetrisch:  $w_1, w_2 \in W, [w_1]_{\sim_p} \leq_p [w_2]_{\sim_p}$  und  $[w_2]_{\sim_p} \leq_p [w_1]_{\sim_p}$   
 $\Rightarrow \text{pref}(p, w_1) = \text{pref}(p, w_2) \Rightarrow [w_1]_{\sim_p} = [w_2]_{\sim_p}$

transitiv:  $w_1, w_2, w_3 \in W, [w_1]_{\sim_p} \leq_p [w_2]_{\sim_p}$  und  $[w_2]_{\sim_p} \leq_p [w_3]_{\sim_p}$   
 $\Rightarrow \text{pref}(p, w_1) \leq \text{pref}(p, w_2) \leq \text{pref}(p, w_3) \Rightarrow [w_1]_{\sim_p} \leq_p [w_3]_{\sim_p}$

und somit eine Ordnung.

Eine weitere Äquivalenzrelation über der Menge  $W$  der Workshops bezeichnet die inhaltliche Gleichheit von Workshops und sei mit  $\sim_Q$  bezeichnet.  $w_1 \sim_Q w_2$  bedeutet also, dass die Workshops  $w_1$  und  $w_2$  vom selben Inhalt und damit äquivalent sind. Kein Teilnehmer soll mehr als einem Workshop derselben Äquivalenzklasse über  $\sim_Q$  zugewiesen werden. Die Äquivalenzklassen können beliebige Größen haben.

Die beschriebenen Bestandteile des Workshopproblems werden nun wie folgt mathematisch dargestellt:

Zeitslots:

$$t \in T = \{1, \dots, t_{max}\} \text{ Zeitslots}$$

Workshops:

$$w \in W = \{1, \dots, w_{max}\} \text{ Workshops}$$

$$\mathbf{F} \quad w_{max} \times t_{max} \text{ Intervallmatrix, } f_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ mit}$$

$$f_{wt} = 1 \Leftrightarrow \text{Workshop } w \text{ findet im Zeitslot } t \text{ statt}$$

$$\mathbf{Q} \quad w_{max} \times w_{max} \text{ Matrix, } q_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ mit}$$

$$q_{w_i w_j} = 1 \Leftrightarrow \text{Workshop } w_i \text{ und } w_j \text{ sind äquivalent } (w_i \sim_Q w_j)$$

$$\mathbf{c} \quad w_{max} \text{ Vektor, } c_i \in \mathbb{N}_0, \text{ mit}$$

$$c_w = x \Leftrightarrow \text{Workshop } w \text{ hat Teilnehmergrenze } x$$

Teilnehmer:

$$p \in P = \{1, \dots, p_{max}\} \text{ Teilnehmer}$$

$$\mathbf{B} \quad p_{max} \times t_{max} \text{ Matrix, } b_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ mit}$$

$$b_{pt} = 1 \Leftrightarrow \text{Teilnehmer } p \text{ besucht Zeitslot } t$$

$$\mathbf{m} \quad p_{max} \text{ Vektor, } m_i \in \mathbb{N}_0, \text{ mit}$$

$$m_p = x \Leftrightarrow \text{Teilnehmer } p \text{ besucht mindestens } x \text{ Workshops}$$

Präferenzen:

$$\mathbf{S} \quad p_{max} \times w_{max} \text{ Matrix, } s_{ij} \in \mathbb{R}, \text{ mit}$$

$$s_{pw} = \text{pref}(p, w) \text{ Präferenz des Teilnehmers } p \text{ für den Workshop } w$$

Gesucht ist nun eine Zuteilung der Teilnehmer zu den Workshops:

$$\mathbf{X} \quad p_{max} \times w_{max} \text{ Matrix, } x_{ij} \in \{0, 1\}, \text{ mit}$$

$$x_{pw} = 1 \Leftrightarrow \text{Teilnehmer } p \text{ wird zu Workshop } w \text{ zugeordnet}$$

Für die Matrix  $\mathbf{F}$  der Zuteilung der Workshops zu Zeitslots muss gelten, dass keine Lücken vorhanden sind. Für  $w \in W$  und  $t \in T$  mit  $f_{wt} = 1$  und  $f_{wt+1} = 0$  muss also gelten, dass  $f_{wt'} = 0$  für alle  $t' \in \{t+1, \dots, t_{max}\}$ .  $\mathbf{F}$  ist damit eine Intervallmatrix nach Definition 2.13.

Die Matrix  $\mathbf{S}$  der Präferenzen beinhaltet nur die in das Modell eingehenden Präferenzwerte. Eine eventuelle Übersetzung von den Werten, die die Teilnehmer vergeben, zu

denen, die in das Optimierungsmodell eingehen, hat im Vorfeld zu erfolgen (zu möglichen Übersetzungsfunktionen und deren Auswirkungen auf das Ergebnis der Optimierung siehe Abschnitt 6.1.2).

Das Optimierungsproblem wird im Folgenden vorgestellt. Es ist ein Maximierungsproblem, da höhere Präferenzwerte auch eine größere, subjektive Präferenz des Teilnehmers bedeuten. Das Ziel ist es also, eine Zuteilung von Teilnehmern zu Workshops zu finden, so dass die Summe aller für die zugeteilten Workshops ausgedrückten Präferenzen maximal wird. Basierend auf der gegebenen mathematischen Darstellung der Gegebenheiten einer Workshop-Veranstaltung lässt sich das Optimierungsproblem nun wie in (4.4) dargestellt formulieren.

$$\begin{aligned}
& \text{Maximiere} \quad \sum_{p \in P, w \in W} s_{pw} \cdot x_{pw} \\
& \text{unter den Nebenbedingungen (NB)} \\
& \text{a) Teilnehmergrenzen für Workshops nicht überschritten} \\
& \quad \sum_{p \in P} x_{pw} \leq c_w \quad \forall w \in W \\
& \text{b) Teilnehmer ist in den Zeitslots der zugeteilten Workshops da} \\
& \quad x_{pw} = 0 \quad \forall p \forall w (p \in P \wedge w \in W \wedge \exists t (t \in T \wedge f_{wt} = 1 \wedge b_{pt} = 0)) \\
& \text{c) Kein Teilnehmer besucht mehr als einen von äquivalenten Workshops} \\
& \quad \sum_{w' \in [w]_{\sim_Q}} x_{pw'} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall w (w \in W \wedge [w]_{\sim_Q} \in W / \sim_Q \wedge |[w]_{\sim_Q}| > 1) \\
& \text{d) Jeder Teilnehmer besucht seine Mindestanzahl Workshops} \\
& \quad \sum_{w \in W} x_{pw} \geq m_p \quad \forall p \in P \\
& \text{e) Kein Teilnehmer besucht mehr als einen Workshop pro Timeslot} \\
& \quad \sum_{w \in W: f_{wt}=1} x_{pw} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall t \in T \\
& \text{f) } x_{pw} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, \forall w \in W
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Die Nebenbedingung a) stellt sicher, dass in keinen Workshop mehr Teilnehmer eingeteilt werden, als dieser maximal fassen kann. Bei Workshops ohne Teilnehmergrenzen kann die entsprechende Nebenbedingungszeile gelöscht werden.

Die Nebenbedingung b) bedingt, dass Teilnehmer nur zu Workshops zugeteilt werden können, während deren Dauer sie anwesend sind. Überschneiden sich die Zeitslots eines Workshops mit denjenigen, während denen ein Teilnehmer abwesend ist, so wird die Zuteilung ausgeschlossen, indem die entsprechende Zuteilungsvariable auf 0 gesetzt wird. Damit können die betroffenen Zuteilungsvariablen aus dem Optimierungsproblem eliminiert werden, so dass für die Nebenbedingung b) keine expliziten Nebenbedingungszeilen entstehen.

Die Nebenbedingung c) sagt aus, dass aus jeder Äquivalenzklasse bezüglich  $\sim_Q$  von Workshops von jedem Teilnehmer höchstens ein Workshop besucht werden darf, da kein Teilnehmer mehr als einen Workshop desselben Inhalts besuchen soll. Für Äquivalenzklassen mit lediglich einem Element muss dabei keine Nebenbedingungszeile erstellt werden, da dieser Workshop dann zu keinem anderen in Konflikt steht. Zu jeder Äquivalenzklasse mit mindestens zwei Workshops entsteht also eine Nebenbedingungszeile für jeden Teilnehmer.

Die Nebenbedingung d) stellt sicher, dass jeder Teilnehmer seine Mindestanzahl an

Workshops besucht. Das Ungleichheitszeichen  $\leq$  in dieser Nebenbedingung kann bei Bedarf durch ein Gleichheitszeichen  $=$  ersetzt werden, wenn jeder Teilnehmer *genau* seine Mindestanzahl an Workshops besuchen soll und nicht eventuell noch weitere, sofern es die Struktur der Zeitslots und Workshops überhaupt zulässt. Ein einfaches Beispiel, bei dem die Struktur des Problems ein Übersteigen der Mindestanzahl an Workshops verhindert, ist eine Veranstaltung mit nur einem Zeitslot, so dass alle Workshops parallel zueinander ablaufen. In diesem Fall kann ein Teilnehmer maximal einen einzigen Workshop besuchen (siehe Nebenbedingung e)). Eine Mindestanzahl von 1 bedeutet also die Zuordnung von genau einem Workshop zu jedem Teilnehmer.

Die Nebenbedingung e) bedingt, dass kein Teilnehmer zeitlich überlappende Workshops besuchen kann. Während jedes Zeitslots darf jeder Teilnehmer also maximal einen Workshop besuchen, der in diesem Zeitslot statt findet. Dies wird sichergestellt durch eine Nebenbedingung für jeden Zeitslot  $t \in T$  und jeden Teilnehmer  $p \in P$ , für die die Summe aller Zuordnungen des Teilnehmers  $p$  zu Workshops, die in  $t$  statt finden ( $f_{wt} = 1$ ), höchstens 1 beträgt. Auch hier können identische Nebenbedingungen entstehen, falls mehrere Workshops über mehrere Zeitslots parallel liegen. In diesem Fall kann man alle Nebenbedingungen, deren Workshops bereits in einer weiteren Nebenbedingung enthalten sind, löschen. Wenn also in einem Zeitslot die Workshops  $w_1$  und  $w_2$  parallel liegen und in einem weiteren  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$ , so reicht die Nebenbedingung für den letzteren Zeitslot, da sie die aus dem ersten entstehende Bedingung einschließt.

Das Optimierungsproblem besteht aus maximal  $p_{max} \cdot w_{max}$  binären Variablen ( $x_{pw}$ ). Die Anzahl der Nebenbedingungszeilen aus den einzelnen Nebenbedingungen lässt sich wie folgt nach oben beschränken:

- a) Es gibt pro Workshop eine Zeile, daher entstehen maximal  $w_{max}$  Zeilen.
- b) Diese Nebenbedingung wird durch Löschung der entsprechenden binären Variablen eingehalten, es entstehen also keine Zeilen.
- c) Es gibt eine Zeile pro Kombination aus Teilnehmer und Äquivalenzklasse der Workshops mit mehr als einem Workshop in der Klasse. Es entstehen keine Nebenbedingungszeilen für Äquivalenzklassen mit nur einem Element. Die maximale Anzahl an Äquivalenzklassen mit einer Kardinalität von mindestens zwei ist bei  $w_{max}$  Workshops  $w_{max}/2$ . Diese Schranke wird genau erreicht, wenn jede Äquivalenzklasse genau zwei Workshops enthält, in allen anderen Fällen entstehen weniger Nebenbedingungszeilen. Für Nebenbedingung c) entstehen also maximal  $p_{max} \cdot w_{max}/2$  Zeilen.
- d) Es entsteht maximal eine Zeile pro Teilnehmer, also ist  $p_{max}$  die obere Schranke.
- e) Eine obere Schranke für die Anzahl an Zeilen ist  $p_{max} \cdot t_{max}$ . Diese obere Schranke kann tatsächlich erreicht werden, wenn jeder Workshop nur über einen Zeitslot dauert, es aber in jedem Zeitslot mehr als einen Workshop gibt. Die Schranke kann also nicht weiter reduziert werden.

Die obere Schranke für die Zahl der Nebenbedingungen ist also  $w_{max} + p_{max} \cdot w_{max}/2 + p_{max} + p_{max} \cdot t_{max} = w_{max} + p_{max}(w_{max}/2 + 1 + t_{max})$ . Diese Zahl verdeutlicht, dass die Anzahl der Nebenbedingungen stark von der Anzahl  $p_{max}$  der Teilnehmer einer Veranstaltung abhängt, und erst in zweiter Linie von der Anzahl der angebotenen Workshops, die für praktische Fälle sowieso deutlich kleiner ist als die Anzahl der Teilnehmer.

## 4.2 Vergleich mit bekannten Problemen

Im Folgenden soll die Lösbarkeit des Workshopzuteilungsproblems untersucht werden. Hier stellt sich zunächst die Frage, welche ähnlichen Optimierungsprobleme in der Literatur bereits behandelt und gelöst wurden und welche Methoden dabei zum Einsatz kamen. In Kapitel 3 wurden diejenigen bekannten Problemklassen vorgestellt, die sich in der einen oder anderen Weise mit dem Workshopzuteilungsproblem vergleichen lassen. Im Folgenden soll betrachtet werden, wo die Ähnlichkeiten und Unterschiede liegen und ob sich deren Lösungsmethoden auf das Workshopzuteilungsproblem übertragen lassen.

Aufgrund der thematischen Nähe fällt das Stundenplanproblem im Zusammenhang mit dem Workshopzuteilungsproblem oft schnell ins Auge. Bei einem genaueren Blick ist jedoch die Problemstellung nicht unbedingt vergleichbar. Das Workshopzuteilungsproblem ist sogar in gewisser Hinsicht die ‐Umkehrung‐ zum Stundenplanproblem, wenn man sich anschaut, welche Bedingungen gegeben sind und welche Zuordnungen generiert werden sollen. Beim Workshopzuteilungsproblem ist die zeitliche Struktur der Workshops wie auch der Teilnehmer fest vorgegeben. Gesucht wird eine Zuteilung der Teilnehmer zu den Workshops. Beim Stundenplanproblem dagegen wird die zeitliche Zuordnung gesucht, gegeben ist dagegen die Zuordnung der Lehrer bzw. Schüler zu den Klassen oder Kursen. Daraus ergeben sich wichtige Unterschiede in Hinblick sowohl auf die Zielfunktion als auch auf die Nebenbedingungen. Es gibt zwar Ähnlichkeiten, wie beispielsweise zwischen den Nebenbedingungen zur Überschneidungsfreiheit der Schulstunden (siehe (3.2)) und denjenigen zur Überschneidungsfreiheit der äquivalenten Workshops. Auch die Forderung nach der Mindestanzahl geleisteter Schulstunden (siehe (3.1)) ist der Forderung nach einer Mindestanzahl an besuchten Workshops sehr ähnlich. Andererseits haben die Stundenplanprobleme keine Bedingung der Ressourcenrestriktion analog zur Beschränkung der verfügbaren Workshopplätze. Auch wird die Zielfunktion nicht durch Präferenzangaben über den möglichen Belegungen gebildet. Das Workshopzuteilungsproblem lässt sich also nicht mit Hilfe von Stundenplanproblemen abbilden, daher können auch die Lösungsmethoden der Stundenplanprobleme nicht direkt übertragen werden. Das Stundenplanproblem ist aber außerdem NP-vollständig und momentan sind keine polynomiellen Algorithmen zur Lösung bekannt, so dass die Übertragung der vielfach heuristischen Lösungsmethoden nicht sehr erstrebenswert erscheint.

Das allgemeine Zuteilungsproblem ähnelt zunächst einmal dem Workshopzuteilungsproblem. Eine Menge von Teilnehmern muss einer Menge von Workshopplätzen zugeordnet werden, wobei die Präferenzen die Gewichte auf den Kanten darstellen. Mit Hilfe des Zuteilungsproblems lässt sich also eine optimale Zuteilung bezogen auf die Summe der Präferenzen generieren, wobei sowohl die Platzbeschränkungen abgebildet werden können als auch die Forderung nach einer Minimalzahl besuchter Workshops. Allerdings erlaubt das Zuteilungsproblem nicht die Abbildung der Restriktionen von Workshopkombinationen aufgrund von Überlappungen oder äquivalentem Inhalt. Löscht man jedoch die Nebenbedingungen c) und e) aus der Problemstellung, so lässt sich diese Reduktion mit Hilfe des Zuteilungsproblems darstellen und folglich effizient lösen, z.B. mit Netzwerkflussalgorithmen. Eine solche Reduktion mag für gewisse praktische Fälle anwendbar sein.

Das National Intern Matching Program (NIMP) ist von der Problemstellung dem Workshopzuordnungsproblem am ähnlichsten. Beim NIMP ist das Ziel eine Zuteilung von Studenten zu Praktikumsplätzen, basierend auf Präferenzen. Studenten geben Präferenzen für Krankenhäuser ab, in jedem Krankenhaus ist eine begrenzte Anzahl an

Plätzen verfügbar. Im Unterschied zum Workshopzuteilungsproblem geben jedoch auch die Krankenhäuser Präferenzen für die Studenten ab, so dass das Optimalitätskriterium anders formuliert ist. Roth bezeichnet diese Art von Zuordnungsproblem als “two-sided matching”, da Präferenzen von Individuen beider an der Zuordnung beteiligten Mengen abgegeben werden [RS99]. Weiterhin wird jedem Studenten nur ein Platz zugewiesen und es gibt damit keinerlei Restriktionen bezüglich Kombinationen von Plätzen. Bis auf die Kapazitätsbeschränkungen fallen die Nebenbedingungen des Workshopzuteilungsproblems beim NIMP also nicht an. Von daher ist für die Generierung der Zuordnung der vom NIMP verwendete Algorithmus nicht auf das Workshopzuteilungsproblem übertragbar, er ist zudem genau auf die spezifischen Anforderungen des NIMP zugeschnitten.

### 4.3 Lösbarkeit des Workshopzuteilungsproblems

Das Workshopzuteilungsproblem ist ein lineares, binäres Optimierungsproblem, da die zu optimierenden Variablen nur Werte aus  $\{0, 1\}$  annehmen dürfen. Es ist nicht weiter schwierig, als Bedingungen für ein Optimierungsproblem untere und obere Schranken für die Variablen anzugeben, in diesem Fall also 0 als untere und 1 als obere Schranke. Dies verhindert allerdings noch nicht Variablenbelegungen mit Werten zwischen 0 und 1. Das Problem ist also ein Spezialfall eines ganzzahligen Optimierungsproblems, denn wenn man zusätzlich zu den oberen und unteren Schranken eine ganzzahlige Lösung für das Problem angeben kann, ist automatisch eine binäre und daher gültige Lösung gefunden.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der Untersuchung der ganzzahligen Lösbarkeit des Workshopzuteilungsproblems. Die ganzzahlige Lösbarkeit des Problems würde bedeuten, dass eine Problemlösung innerhalb einer kurzen und relativ homogenen Zeit gefunden werden könnte. Dies ist für die Möglichkeit der Verwendung des in Kap. 6 vorgestellten Tauschmarkts im Rahmen einer Webanwendung wichtig. Tauschangebote würden von Teilnehmern online eingegeben und nach jeder Eingabe müsste das Optimierungsproblem gelöst werden, das mögliche Platzvertauschungen berechnet. Das Optimierungsproblem müsste sich also innerhalb der Zeit zwischen dem Eintreffen einer HTTP-Anfrage und dem Senden der HTTP-Antwort lösen lassen. Diese Zeitspanne ist meist begrenzt, die Grenze liegt üblicherweise bei 30 - 60 Sekunden. Die Berechnung einer Lösung innerhalb dieser Zeitspanne wäre also wünschenswert. Hierfür ist die ganzzahlige Lösbarkeit mittels des Simplex-Algorithmus vorteilhaft, da für diesen Algorithmus die Komplexität bekannt ist und weiterhin Anwendungspakete existieren, die sehr große Probleme in kurzer Rechenzeit lösen können.

Es gibt auch Problemstellungen, die sich recht schnell mit Hilfe eines greedy-Verfahrens lösen lassen. Diese Verfahren nutzen die Problemstruktur aus, um möglichst schnell eine möglichst gute Lösung zu generieren. Allerdings ist nicht immer garantiert, dass diese Lösung auch optimal ist. Für eine vereinfachte Version des Workshopzuteilungsproblems wurde ein greedy-Verfahren eingesetzt, um eine gültige Ausgangslösung für den Einsatz eines genetischen Algorithmus zu generieren [GST04]. Es hat sich jedoch gezeigt, dass das Ergebnis des greedy-Verfahrens im Schnitt lediglich 75% des Zielfunktionswerts der optimalen Lösung erreichte. Der genetische Algorithmus verbesserte das Ergebnis auf 85% des Optimums. Diese Ergebnisse sind noch zu weit von der optimalen Lösung entfernt.



| $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | $\dots$ | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | $\dots$ | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | $\dots$ | $x_{p_{max}w_{max}}$ |
|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|----------|---------|----------------------|
| 1        | 0        | 0        | 0        | $\dots$ | 1        | 0        | 0        | 0        | $\dots$ | 1        | 0        | 0        | 0        | $\dots$ | 0                    |
| 0        | 1        | 0        | 0        | $\dots$ | 0        | 1        | 0        | 0        | $\dots$ | 0        | 1        | 0        | 0        | $\dots$ | 0                    |
| 0        | 0        | 1        | 0        | $\dots$ | 0        | 0        | 1        | 0        | $\dots$ | 0        | 0        | 1        | 0        | $\dots$ | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 1        | $\dots$ | 0        | 0        | 0        | 1        | $\dots$ | 0        | 0        | 0        | 1        | $\dots$ | 0                    |
|          |          |          |          |         |          | $\vdots$ |          |          |         |          |          |          |          |         |                      |
| 0        | 0        | 0        | 0        | $\dots$ | 0        | 0        | 0        | 0        | $\dots$ | 0        | 0        | 0        | 0        | $\dots$ | 1                    |

Abbildung 4.1: Beispiel für Submatrix für NB a)

### 4.3.1 Totale Unimodularität der Matrix

Wie in Abschnitt 2.5.1 beschrieben, haben lineare Optimierungsprobleme der Form  $\max\{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$  ganzzahlige Eckpunktlösungen, wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  total unimodular ist (die Umkehrrichtung gilt nur für Optimierungsprobleme der Form  $\max\{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ , die allerdings wegen der  $\geq$ -Bedingungen für das Workshopproblem nicht zutreffend ist). Es ist also zu untersuchen, ob oder unter welchen Bedingungen die Matrix  $\mathbf{A}$  des Workshopzuteilungsproblems total unimodular ist, um eine Aussage über die ganzzahlige Lösbarkeit mittels des Simplex-Verfahrens zu machen.

Die totale Unimodularität von Matrizen ist über die Determinante und die Determinanten der Submatrizen definiert (siehe Definition 2.12). Da die totale Unimodularität nicht für eine bestimmte Instanz des Workshopproblems, sondern für die allgemeine Problemstellung untersucht werden soll, kann die Determinante nicht ohne Weiteres berechnet werden, da sich das Aussehen der Matrix  $\mathbf{A}$  von einer Problem Instanz zur nächsten ändert. Die totale Unimodularität muss also auf anderem Weg gezeigt werden.

Jeder Eintrag einer total unimodularen Matrix muss  $\in \{-1, 0, 1\}$  sein. Dies ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für totale Unimodularität, die leicht zu überprüfen ist. Die Nebenbedingungsmatrix  $\mathbf{A}$  setzt sich zusammen aus allen Faktoren vor den Variablen  $x_{pw}$  aller Nebenbedingungen a) – e).

Für die folgenden Betrachtungen gehen wir davon aus, dass die Nebenbedingung b) durch Löschung aller Variablen, deren Belegung 0 sein muss, eingehalten wird. Die Nebenbedingungsmatrix enthält also keine weiteren Zeilen für die Nebenbedingung b), es sind demnach nur die Zeilen, die durch die Nebenbedingungen a), c), d) und e) entstehen, zu betrachten.

Der nächste Schritt besteht nun also darin, die Matrix der Nebenbedingungen zu untersuchen, um Aussagen über die totale Unimodularität der Matrix machen zu können. Die Matrix besteht aus einer Spalte für jede Variable  $x_{pw}$  und einer Zeile für jede Nebenbedingung. Weiterhin entstehen Spalten für die Schlupfvariablen, die zur Umformung der Ungleichungen in Gleichungen dienen. Diese Spalten sind jedoch, wie später gezeigt wird, für die totale Unimodularität unproblematisch und werden der Übersichtlichkeit halber erstmal weggelassen.

Im Folgenden wird der Aufbau der Matrix der Nebenbedingungen getrennt nach den Nebenbedingungen dargestellt, es wird also jeweils nur derjenige Ausschnitt der Matrixzeilen gezeigt, der durch die entsprechende Nebenbedingung erzeugt wird. Die Spalten für die Schlupfvariablen werden weggelassen und im Anschluss getrennt betrachtet.

| $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | ... | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | ... | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | ... | $x_{p_{max}w_{max}}$ |
|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----------------------|
| 1        | 0        | 0        | 1        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 1        | 1        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1        | 0        | 0        | 1        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 1        | 1        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1        | 0        | 0        | 1        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 1        | 1        | 0        | ... | 0                    |
|          |          |          |          |     |          | ⋮        |          |          |     |          |          |          |          |     |                      |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |

Abbildung 4.2: Beispiel für Submatrix für NB c)

| $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | ... | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | ... | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | ... | $x_{p_{max}w_{max}}$ |
|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----------------------|
| 1        | 1        | 1        | 1        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1        | 1        | 1        | 1        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1        | 1        | 1        | 1        | ... | 0                    |
|          |          |          |          |     |          | ⋮        |          |          |     |          |          |          |          |     |                      |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1                    |

Abbildung 4.3: Beispiel für Submatrix für NB d)

| $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | ... | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{24}$ | ... | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{34}$ | ... | $x_{p_{max}w_{max}}$ |
|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----------|----------|----------|----------|-----|----------------------|
| 1        | 1        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 1        | 1        | 1        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1        | 1        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 1        | 1        | 1        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 1        | 1        | 0        | 0        | ... | 0                    |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 1        | 1        | 1        | ... | 0                    |
|          |          |          |          |     |          | ⋮        |          |          |     |          |          |          |          |     |                      |
| 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0        | 0        | 0        | 0        | ... | 0                    |

Abbildung 4.4: Beispiel für Submatrix für NB e)

Für die Nebenbedingung a) hat die Matrix die in Abb. 4.1 gezeigte Form. Es gibt also für jeden Workshop  $w$  eine Zeile, und in jeder Zeile steht bei den zu diesem Workshop gehörigen Variablen  $x_{pw}$  eine 1. Alle restlichen Einträge sind 0.

Für die Nebenbedingung c) ist die Matrix von der in Abb. 4.2 dargestellten Form. Diese Matrix ist ein Beispiel für ein Workshopproblem mit zwei Äquivalenzklassen. Workshop 1 und 4 sind in einer Äquivalenzklasse und Workshop 2 und 3 in einer zweiten. Workshop  $w_{max}$  ist mit keinem weiteren Workshop äquivalent. Es wird also pro Teilnehmer und Äquivalenzklasse eine Zeile erzeugt, wobei aber keine Spalte mit mehr als einer 1 entsteht. Dies würde eine Überschneidung von zwei verschiedenen Äquivalenzklassen bedeuten, was nach der Definition einer Äquivalenzrelation nicht sein kann.

Für die Nebenbedingung d) sehen die Matrixzeilen wie in Abb. 4.3 gezeigt aus. Es entsteht eine Zeile pro Teilnehmer  $p$ , in welcher in jeder Spalte  $x_{pw}$  von diesem Teilnehmer eine 1 steht.

Für die Nebenbedingung e) entstehen Zeilen der in Abb. 4.4 dargestellten Form. Dieses Beispiel stellt die Situation dar, dass es einen Zeitslot gibt, in dem Workshop 1 und 2 parallel statt finden und einen weiteren Zeitslot, in dem Workshop 2, 3 und 4 parallel stattfinden. Workshop 2 geht also mindestens über 2 Zeitslots. Für Workshop  $w_{max}$  sind keine aus parallelen Zeitslots resultierenden Restriktionen zu erkennen. Auch hier können also, wie bei Nebenbedingung c), mehrere Zeilen pro Teilnehmer entstehen. Im Unterschied zu Nebenbedingung c) aber können hier in einer Spalte mehrere 1 auftauchen, wie es dieses Beispiel verdeutlicht. Das liegt daran, dass die partielle Parallelität der Workshops keine Aufteilung in Äquivalenzklassen bewirkt, sondern lediglich in Mengen, deren Schnittmengen nichtleer sein können.

Die dargestellten Submatrizen sind nun noch ohne die zusätzlichen Spalten für die Schlupfvariablen angegeben. Es entsteht für jede  $\leq$ -Bedingung eine Schlupfvariable mit dem Faktor 1 und für jede  $\geq$ -Bedingung eine Schlupfvariable mit dem Faktor  $-1$ . Für Gleichheitsbedingungen muss keine zusätzliche Schlupfvariable eingeführt werden. Es entstehen also zusätzliche Spalten in der Matrix mit einem einzigen von Null verschiedenen Eintrag, der entweder 1 oder  $-1$  ist.

Es lässt sich also zunächst feststellen, dass die Matrix  $\mathbf{A}$  inklusive der Zeilen für die obere Schranke und der Spalten für die Schlupfvariablen die notwendige Bedingung für totale Unimodularität erfüllt, da sie nur aus Elementen  $\in \{-1, 0, 1\}$  besteht.

## Grenzen der totalen Unimodularität

Es wird nun zunächst durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt, dass die Matrix zu der gegebenen Version des Workshopzuteilungsproblems *nicht* total unimodular ist und dass es daher Instanzen des Workshopproblems gibt, die keine ganzzahligen Eckpunkt-lösungen haben.

**Theorem 4.1** *Das in (4.4) dargestellte Workshopzuteilungsproblem definiert nicht immer einen ganzzahligen Lösungsraum.*

**Beweis.** Es genügt die Angabe eines Gegenbeispiels. Betrachten wir das Workshopproblem in (4.5).

| $x_{pw}$ | $p$ | 1   | 2   | 3   | 4 | 5 | 6   |
|----------|-----|-----|-----|-----|---|---|-----|
| $w$      |     |     |     |     |   |   |     |
| 1        |     | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 |
| 2        |     | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1 | 0 | 0.5 |
| 3        |     | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0 | 1 | 0.5 |
| 4        |     | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1 | 1 | 0.5 |

Tabelle 4.1: Lösung des Workshopzuteilungsproblems aus 4.5

$$\begin{aligned}
W &= \{1, 2, 3, 4\} & \mathbf{c} &= (3, 4, 4, 4)^T & \mathbf{Q} &= \mathbf{I} \\
P &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} & \mathbf{m} &= (2, 2, 2, 2, 2, 2)^T & \mathbf{B} &= \mathbf{1}^{4 \times 6} \\
T &= \{1, 2, 3, 4\} \\
\mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & & (4.5)
\end{aligned}$$

Das Problem besteht aus vier nicht äquivalenten Workshops mit den Teilnehmergrenzen 3, 4, 4 und 4. Es gibt 6 Teilnehmer, jeder soll mindestens 2 Workshops besuchen. Es gibt weiterhin 4 Zeitslots, jeder Teilnehmer ist in jedem Zeitslot anwesend. Die Workshops überlappen sich teilweise: der erste Workshop geht über alle vier Zeitslots, während die anderen drei jeweils nur einen Zeitslot belegen und sich gegenseitig nicht überlappen. Es sind Präferenzen aus der Menge  $\{0, 1, 2, 3\}$  angegeben.

$$\begin{aligned}
a) \quad & x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} \leq 3 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} \leq 4 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} \leq 4 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} \leq 4 \\
d) \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 2 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 2 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \geq 2 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \geq 2 \\
& x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} \geq 2 \\
& x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} \geq 2 \\
e) \quad & x_{11} + x_{12} \leq 1 \\
& x_{11} + x_{13} \leq 1 \\
& x_{11} + x_{14} \leq 1 \\
& x_{21} + x_{22} \leq 1 \\
& \vdots \\
& x_{61} + x_{63} \leq 1 \\
& x_{61} + x_{64} \leq 1
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Die für das Problem entstehenden Nebenbedingungen sind in (4.6) dargestellt. Man sieht leicht, dass alle Koeffizienten der Nebenbedingungsmatrix gleich 0 oder 1 sind, diese notwendige Bedingung für totale Unimodularität ist also erfüllt. Die Lösung der Relaxierung dieses Optimierungsproblems mit dem Simplex-Verfahren mit CPLEX ist in Tab. 4.1 wiedergegeben.

Die Lösung ist eine gültige optimale Lösung des gegebenen Workshopzuteilungsproblems. Jeder Teilnehmer besucht mindestens 2 Workshops (Spaltensummen in Tab. 4.1), und die Summe aus der Zuteilung zu Workshop 1 und derjenigen zu einem der restlichen drei Workshops ist immer kleiner oder gleich 1. Die Teilnehmergrenzen werden ebenfalls eingehalten. Die einzige gültige ganzzahlige Zuteilung wäre es, alle Teilnehmer auf Workshops 2, 3 und 4 zu verteilen, da jemand, der Workshop 1 besucht, wegen der zeitlichen Restriktionen keinen weiteren Workshop besuchen kann. Die Kapazitäten der restlichen Workshops sind aber ausreichend, um alle Teilnehmer mit Plätzen zu versorgen. Es gibt also eine gültige, ganzzahlige Zuteilung, allerdings erreicht diese nur einen Zielfunktionswert von 14 gegenüber einem Ergebnis von 18 der hier dargestellten, reellwertigen Lösung.  $\square$

Dieses Workshopzuteilungsproblem zeigt also zunächst, dass die totale Unimodularität für die allgemeine Nebenbedingungsmatrix des Workshopzuteilungsproblems nicht gilt. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob es zusätzliche Bedingungen an die Workshopzuteilungsprobleme gibt, die die totale Unimodularität herstellen und die für praktische Problemstellungen einfach einzuhalten sind, so dass die breite Anwendbarkeit weiter gewährleistet sein kann.

### Totale Unimodularität

Da die totale Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix von der speziellen Struktur der Matrix abhängig ist, müssen für eine Untersuchung Theoreme heran gezogen werden, die das spezielle Aussehen der Matrix betreffen. Ein solches Theorem ist das Theorem 2.4 von Ghouila-Houri (siehe S. 25). Das Theorem besagt, dass eine ganzzahlige Matrix genau dann total unimodular ist, wenn für jede Teilmenge  $R \subseteq \{1, \dots, m\}$  von Zeilen der Matrix eine Partition in zwei Zeilenmengen  $R = R_1 \cup R_2$  gefunden werden kann, so dass  $\forall j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ . Das Theorem besagt also, dass man jede Menge  $R$  von Zeilen einer total unimodularen Matrix in zwei Partitionen aufteilen kann, so dass der Betrag der Differenz der Spaltensummen für jede Spalte höchstens 1 ist. Für jede ganzzahlige Matrix, für die man stets solche Partitionen einer Menge von Zeilen angeben kann, gilt, dass sie total unimodular ist. Zum Nachweis der totalen Unimodularität einer Matrix genügt es also, für jede mögliche Teilmenge an Zeilen eine solche Partitionierung anzugeben. Für die folgenden Betrachtungen bezeichnen wir den Differenzvektor aus den Spaltensummen  $\sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij}$  mit  $\Delta$ ,  $\Delta_j$  bezeichne den Ausdruck für eine bestimmte Spalte  $j$ .

Im Folgenden wird die Matrix der Nebenbedingungen des Workshopzuteilungsproblems auf die Existenz der genannten Zeilenpartition für jede Menge von Zeilen untersucht. Dabei werden verschiedene Fälle betrachtet, die die einheitliche Struktur und Regelmäßigkeit des Aufbaus der Matrix ausnutzen.

Zunächst ist die folgende Proposition hilfreich [NW99, S. 540]. Sei dazu  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix.

**Proposition 4.1** *Gegeben sei eine Matrix  $\mathbf{A}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- $\mathbf{A}$  ist total unimodular.
- Die Transponierte zu  $\mathbf{A}$  ist total unimodular.
- $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$  ist total unimodular.

Sei ferner  $\mathcal{I} = \{\mathbf{X} \in \{0, 1, -1\}^{n \times n} : x_{ii} \in \{-1, 1\}, x_{ij} = 0 \text{ für } i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$  die Menge aller quadratischen Matrizen mit Werten aus  $\{-1, 1\}$  auf der Hauptdiagonalen und 0 sonst. Nun lässt sich Proposition 4.1 um die folgende Äquivalenz erweitern, die man leicht mit Hilfe des Theorems 2.4 von Ghouila-Houri zeigen kann:

**Proposition 4.2** *Gegeben sei eine Matrix  $\mathbf{A}$ . Bezeichne  $\pm \mathbf{I}$  eine beliebige Matrix aus  $\mathcal{I}$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- $\mathbf{A}$  ist total unimodular.
- $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$  ist total unimodular.

**Beweis.** Sei  $\mathbf{A}$  total unimodular. Dann ist auch  $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$  total unimodular. Sei  $R$  eine Menge von Zeilenindizes der Matrix  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$ . Dann gibt es eine Partition in  $R_1$  und  $R_2$ , die für Zeilen aus  $R$  der Matrix  $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$  eine nach Theorem 2.4 gültige Aufteilung ergibt. Die Aufteilung ist ebenfalls gültig für  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$ , da jede Spalte von  $\pm \mathbf{I}$  nur einen Eintrag ungleich 0 enthält, der  $-1$  oder  $1$ . Daher ist die Differenz der Spaltensummen für diese Spalten  $\in \{-1, 0, 1\}$ . Die restlichen Spalten sind identisch zu  $(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ , für diese ist die Aufteilung in  $R_1$  und  $R_2$  daher gültig. Somit ist  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$  total unimodular.

Sei  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$  total unimodular. Dann ist jede für  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$  gültige Partition einer Menge  $R$  von Zeilenindizes auch für  $\mathbf{A}$  gültig, da  $\mathbf{A}$  eine Untermenge der Spalten von  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$  enthält.  $\square$

Zum einen bilden durch Schlupfvariablen erzeugte, zusätzliche Spalten eine Diagonalmatrix mit Einträgen von  $1$  oder  $-1$  auf der Hauptdiagonalen. Zum anderen bilden auch die Nebenbedingungszeilen für die oberen Schranken der Variablen eine Diagonalmatrix. Da eine Matrix der Form  $(\mathbf{A}, \pm \mathbf{I})$  genau dann total unimodular ist, wenn dies für  $\mathbf{A}$  gilt, und dasselbe für die transponierte gilt, können die Spalten der Schlupfvariablen sowie die Zeilen für die oberen Schranken der Variablen aus der Betrachtung ausgeschlossen werden, es genügt, die durch die Nebenbedingungen a) bis e) gebildete Matrix der Nebenbedingungen zu betrachten.



Form der Submatrix der NB a)    Form der Submatrizen der NB c), d) und e)

Abbildung 4.5: Formen der Submatrizen der unterschiedlichen Nebenbedingungen für drei Teilnehmer

Das Aussehen der Submatrizen der unterschiedlichen Nebenbedingungen stellt sich schematisch wie in Abb. 4.5 gezeigt dar, dargestellt für drei Teilnehmer. Nebenbedingung a) erzeugt für jeden Teilnehmer eine  $w_{max} \times w_{max}$  Diagonalmatrix, die also 1 auf der Diagonalen stehen hat und 0 sonst. Für die Nebenbedingungen c), d) und e) entstehen Submatrizen, bei denen Einträge ungleich 0 lediglich in den grau hinterlegten Matrixregionen vorkommen. Die nicht hinterlegten Einträge sind immer 0. Dabei entspricht jede dieser markierten Submatrizen genau einem Teilnehmer, hier beispielhaft Teilnehmer  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$ . Es besteht also zunächst ein wichtiger struktureller Unterschied zwischen der Submatrix der Nebenbedingung a) und den Submatrizen der restlichen Nebenbedingungen. Die 1-Einträge der Submatrix der Nebenbedingung a) lassen sich nicht auf zu einem Teilnehmer gehörige Blöcke beschränken, vielmehr enthält jede Zeile genau einen

1-Eintrag in jedem einzelnen der dargestellten Blöcke. Jede Zeile der Nebenbedingung a) überlappt sich also mit jedem Teilnehmerblock in genau einer Spalte.

Betrachten wir nun das Aussehen dieser hinterlegten Submatrix für einen einzelnen Teilnehmer getrennt nach den Nebenbedingungen c), d) und e). Das Aussehen stellt sich wie in Abb. 4.6 gezeigt dar, zur besseren Übersicht wiederum dort grau hinterlegt, wo Matrixeinträge ungleich 0 entstehen. Für Nebenbedingung c) wird eine Submatrix mit

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \\
 \text{NB c)} & \text{NB d)} & \text{NB e)}
 \end{array}$$

Abbildung 4.6: Struktur der Submatrizen eines Teilnehmers für NB c), d) und e)

mehreren Zeilen pro Teilnehmer erzeugt, und zwar entspricht jede Zeile einer Äquivalenzklasse bezüglich  $\sim_Q$  von Workshops. Da Äquivalenzklassen disjunkt sind, entstehen in diesen Submatrizen nie mehr als eine 1 pro Spalte. Die 1-Einträge der verschiedenen Zeilen überlappen sich also nicht. Für Nebenbedingung d) entsteht genau eine Zeile pro Teilnehmer mit einer 1 in jeder Spalte. Für Nebenbedingung e) können wiederum mehrere Zeilen entstehen, diese können sich jedoch überlappen, so dass es Spalten geben kann mit mehr als einem 1-Eintrag pro Submatrix.

Die in Abb. 4.5 gezeigte Blockstruktur der Nebenbedingungen c), d) und e) hat zur Folge, dass sich Blöcke unterschiedlicher Teilnehmer in keiner Spalte überlappen. Die Aufteilung von gewählten Zeilen eines Teilnehmer auf gültige Partitionen hat also keinen Einfluss auf die Aufteilung von Zeilen anderer Teilnehmer. Zur Konstruktion einer gültigen Partition gewählter Zeilen gemäß dem Theorem 2.4 von Ghouila-Houri genügt es also, eine Partition für einen einzelnen Teilnehmer anzugeben. Diese Partition kann dann auf weitere, gewählte Zeilen anderer Teilnehmer problemlos übertragen werden. Dies gilt aber, wie gesagt, nur für die Nebenbedingungen c), d) und e), nicht bei Hinzunahme von Zeilen aus der Nebenbedingung a). Hier ist eine Betrachtung über mehrere Teilnehmer hinweg nötig.

Für die folgenden Betrachtungen stellen große, nicht fett gedruckte Buchstaben ( $A, B, C, \dots$ ) Workshops dar bzw. sind stellvertretend für die Variable  $x_{pw} = 1$  für ein festes  $p$  und z.B.  $w = A$ . Zur Betrachtung von Variablen verschiedener Workshops, die in derselben Zeile eine 1 haben, schreiben wir die betreffenden Workshops hintereinander als Zeichenkette oder aber, zur besseren Übersicht, in Spalten entsprechend untereinander. Folgendes Beispiel dient zur Veranschaulichung der Notation.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & B & C & D & E \\
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \text{als Zeichenketten:} & & \text{in Spalten:} & \\
 & ABE & & AB & E \\
 & BC & & BC &
 \end{array}$$

Überschneiden sich also zwei Zeichenketten in gewissen Buchstaben, hier in Workshop  $B$ , so bedeutet dies, dass die zugehörigen zwei Nebenbedingungszeilen in der Spalte des Workshops  $B$  beide eine 1 haben, was für die Konstruktion einer gültigen Zeilenpartition wichtig ist. Umfasst die Menge  $R$  der gewählten Zeilen also beispielsweise diese beiden Zeilen  $ABE$  und  $BC$ , so führt die Partition  $R_1 = \{ABE\}$  und  $R_2 = \{BC\}$  zum Differenzvektor von  $(1, 0, -1, 0, 1)$  für  $A, B, C, D, E$ , respektive. Diese Partitionierung wäre also gültig, da der Differenzvektor nur aus Einträgen  $\{-1, 0, 1\}$  besteht. Im Gegensatz dazu wäre eine Partitionierung von  $R_1 = \{ABE, BC\}$ ,  $R_2 = \emptyset$  nicht gültig, da für  $\Delta_B$  ein Wert von 2 entstehen würde.

## Untersuchung der totalen Unimodularität durch Fallunterscheidung

Im Folgenden wird untersucht, durch welche Kombinationen von Nebenbedingungen des Workshopzuteilungsproblems sich nachweisen lässt, dass die Nebenbedingungsmatrix  $\mathbf{A}$  total unimodular ist, unter Zuhilfenahme des Theorems von Ghouila-Houri:

**Theorem** Eine  $m \times n$  Matrix  $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{Z}^{m \times n}$  ist genau dann total unimodular, wenn es für jede Teilmenge  $R \subset \{1, \dots, m\}$  von Zeilen der Matrix eine Partition  $R = R_1 \cup R_2$ ,  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ , gibt, so dass gilt:

$$\sum_{i \in R_1} a_{ij} - \sum_{i \in R_2} a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

Zunächst zeigen wir, dass die totale Unimodularität für bestimmte Beschränkungen des Workshopzuteilungsproblems in der Tat gegeben ist.

**Theorem 4.2** Beschränkt man das Workshopzuteilungsproblem auf die Nebenbedingungen a), b), c) und d), so ist die Nebenbedingungsmatrix  $\mathbf{A}$  total unimodular.

**Beweis.** Sei also  $R \subset \{1, \dots, m\}$  eine Teilmenge von Zeilen der Nebenbedingungsmatrix. Nebenbedingung b) wird durch Weglassen der entsprechenden binären Variablen eingehalten. Die Matrix der Nebenbedingungen enthält also nur Zeilen aus den Nebenbedingungen a), c) und d). Wir untersuchen zunächst die Fälle, dass  $R$  nur Zeilen einer dieser Nebenbedingungen enthält, und danach die Fälle von Kombinationen verschiedener Nebenbedingungszeilen.

### Fall 1: $R$ enthält nur Zeilen aus NB a)

Wie man in Abb. 4.5 sehen kann, enthält für alle Zeilen der NB a) jede Spalte genau eine 1. Besteht  $R$  nur aus Zeilen der NB a), so enthält also jede Spalte maximal eine 1 und sonst nur 0. Setze also  $R_1 = R$  und  $R_2 = \emptyset$ . Dann ist  $\Delta \in \{0, 1\}^n$  und damit im gültigen Bereich.

### Fall 2: $R$ enthält nur Zeilen aus NB d)

Bei NB d) entstehen für jeden Teilnehmer disjunkte Blöcke von Zeilen (siehe Abb. 4.5), wobei jeder Block aus genau einer Zeile besteht (siehe Abb. 4.6). Für alle Zeilen der NB d) enthält jede Spalte also genau eine 1.  $R$  enthält also in jeder Spalte maximal eine 1. Setze also, wie bei Fall 1,  $R_1 = R$  und  $R_2 = \emptyset$ . Dann ist  $\Delta \in \{0, 1\}^n$  und damit im gültigen Bereich.

### Fall 3: $R$ enthält nur Zeilen aus NB c)

Bei NB c) entstehen wie bei NB d) für jeden Teilnehmer disjunkte Blöcke von Zeilen (siehe Abb. 4.5), wobei jeder Block zwar aus mehreren Zeilen bestehen kann, aber nur in maximal einer Spalte eine 1 enthält, wie in Abb. 4.6 dargestellt. Setze also wiederum  $R_1 = R$  und  $R_2 = \emptyset$ . Dann ist  $\Delta \in \{0, 1\}^n$ .

### Fall 4: $R$ enthält Zeilen aus NB a) und d)

Wir setzen  $R_1$  gleich der Menge aller Zeilen aus NB a) und  $R_2$  gleich der Menge aller Zeilen aus NB d). Wie in Fall 1 und 2 erläutert, sind die jeweiligen Spaltensummen  $\in \{0, 1\}$ . Die Differenz aus zwei Zahlen, die nur die Werte 0 oder 1 annehmen können, ist  $\in \{-1, 0, 1\}$  ( $1 - 1 = 0$ ,  $1 - 0 = 1$ ,  $0 - 1 = -1$ ,  $0 - 0 = 0$ ).

### Fall 5: $R$ enthält Zeilen aus NB a) und c)

Analog zu Fall 4 setzen wir  $R_1$  gleich der Menge aller Zeilen aus NB a) und  $R_2$  gleich



der Menge aller Zeilen aus NB c). Wie in Fall 1 und 3 erläutert, sind die jeweiligen Spaltensummen  $\in \{0, 1\}$ , die Differenz ist daher wiederum  $\in \{-1, 0, 1\}$ .

**Fall 6:  $R$  enthält Zeilen aus NB c) und d)**

Auch hier wäre die Konstruktion einer gültigen Partition analog zu Fall 4 und 5 möglich. Durch folgendes Vorgehen erhält man aber sogar eine Partition mit  $\Delta \in \{0, 1\}^n$ , man kann also  $\Delta$ -Werte von  $-1$  vermeiden: Wir ordnen zunächst alle Zeilen der NB d) in  $R_1$ . Für jede beliebig große Menge von Zeilen der NB c) eines Teilnehmers ordnen wir diese ebenfalls in  $R_1$ , sofern die entsprechende Zeile der NB d) für diesen Teilnehmer nicht in  $R$  enthalten ist. Wie in Abb. 4.6 ersichtlich, besteht die NB d) für jeden Teilnehmer nur aus genau einer Zeile. Enthält  $R$  für den betrachteten Teilnehmer die Zeile der NB d) ebenfalls, so ordnen wir die Zeilen der NB c) in  $R_2$ .

Da sich die Blöcke verschiedener Teilnehmer für NB c) und d) nicht überlappen (siehe Abb. 4.5), kann jeder Teilnehmer getrennt betrachtet werden. Für jeden Teilnehmer, für den  $R$  nur Zeilen entweder aus NB d) oder aus NB c) enthält, sind diese Zeilen in  $R_1$  eingeordnet,  $\Delta_j \in \{0, 1\}$  gilt also für die betreffenden Spalten  $j$ , analog zu Fall 2 und 3. Betrachten wir diejenigen Teilnehmer, für die die Zeile der NB d) und eine oder mehrere Zeilen der NB c) in  $R$  enthalten sind. Wie in Abb. 4.6 dargestellt, enthält die Zeile der NB d) in *jeder* Spalte eine 1, während für jede alle Zeilen der NB c) in jeder Spalte *maximal* eine 1 enthalten ist, was natürlich auch für jede Teilmenge von Zeilen der NB c) gilt. Daher entstehen für diese Teilnehmer lediglich Differenzen von  $1 - 0 = 1$  bzw.  $1 - 1 = 0$ . Folglich gilt für alle Teilnehmer, dass mit dieser Partition  $\Delta \in \{0, 1\}^n$  ist.

**Fall 7:  $R$  enthält Zeilen aus NB a), c) und d)**

Wir ordnen zunächst die Zeilen von NB c) und d) wie in Fall 6 beschrieben in  $R_1$  und  $R_2$  an.  $\Delta$  ist dann  $\in \{0, 1\}^n$ . Nun können wir alle Zeilen aus NB a) zu  $R_2$  hinzufügen. Da die Spaltensummen für die Zeilen der NB a)  $\in \{0, 1\}$  sind (siehe Fall 1), ist  $\Delta$  über alle Zeilen  $\in \{-1, 0, 1\}^n$  und damit im gültigen Bereich.

Es kann also für jede mögliche Form der Menge  $R$  von Zeilen eine Partition in  $R_1$  und  $R_2$  angegeben werden, so dass für jede Spalte  $j$   $\Delta_j \in \{-1, 0, 1\}$  ist.  $\square$

Es lässt sich also zeigen, dass eine Reduktion des Workshopzuteilungsproblems auf die Nebenbedingungen a) bis d) eine total unimodulare Nebenbedingungsmatrix und damit einen ganzzahligen Lösungsraum hat. Diese Reduktion entspricht Problemen, bei denen die Zuteilung zu sich zeitlich überlappenden Workshops zugelassen wird. Die Hinzunahme der Nebenbedingung e) zerstört allerdings leider diese Eigenschaft.

**Theorem 4.3** *Die Nebenbedingungsmatrix des Workshopzuteilungsproblems mit Nebenbedingungen a) bis e) ist nicht immer total unimodular.*

**Beweis.** Wir zeigen dies durch Angabe eines Gegenbeispiels anhand einer Instanz des Workshopzuteilungsproblems.  $R$  enthalte die in Abb. 4.7 gezeigten Zeilen für zwei Teilnehmer. Hierbei ist zu beachten, dass die zur Nebenbedingung a) gehörigen Zeilen Einträge für jeden Teilnehmer enthalten. Die Zeilen sind der Übersicht halber für jeden Teilnehmer einmal dargestellt, aber sie sind entsprechend mit derselben Nummerierung versehen, die deutlich macht, dass es sich hierbei um ein und dieselbe Zeile handelt. Die Spaltenindizes seien der Einfachheit halber mit der Kombination aus Teilnehmer und Workshop bezeichnet (z.B.  $\Delta_{1A}$  für die zur binären Variablen  $x_{1A}$  gehörige Spalte).

Um eine gültige Zuteilung zu finden, ordnen wir oBdA. zunächst Zeile 3 in  $R_1$  ein. Da für Teilnehmer 1 Workshop B nur noch in Zeile 4 vorkommt, muss zwangsläufig

|       | Zeile | Teilnehmer 1 |   |   |       | Zeile | Teilnehmer 2 |   |   |       |   |       |
|-------|-------|--------------|---|---|-------|-------|--------------|---|---|-------|---|-------|
| NB a) | 1     | A            |   |   | $R_1$ | 1     | A            |   |   | $R_1$ |   |       |
| NB a) | 2     |              |   | D | $R_1$ | 2     |              |   | D | $R_1$ |   |       |
| NB d) | 3     | A            | B | C | D     | $R_1$ | 6            | A | B | C     | D | $R_2$ |
| NB e) | 4     | A            | B |   |       | $R_2$ |              |   |   |       |   |       |
| NB e) | 5     | A            |   | C |       | $R_2$ |              |   |   |       |   |       |

Abbildung 4.7: Konflikt bei mehr als einer Zeile in NB e) mit gleichem Workshop

Zeile 4 in  $R_2$  eingeordnet werden. Wegen Workshop C gilt dies ebenso für Zeile 5. Da nun  $R_2$  für Workshop A zwei Spalten mit einer 1 enthält,  $R_1$  dagegen nur eine, muss Zeile 1 wiederum in  $R_1$  eingeordnet werden, da sonst  $\Delta_{1A}$  einen ungültigen Wert annehmen würde. Diese Einordnung gilt ebenso für Teilnehmer 2 und bedingt daher eine Einordnung von Zeile 6 in  $R_2$ , um einen ungültigen Wert für  $\Delta_{2A}$  zu verhindern. Daraus wiederum folgt die Notwendigkeit, die Zeile 2 in  $R_1$  einzusortieren, um einen gültigen Wert für  $\Delta_{2D}$  zu erhalten. Dies gilt wiederum ebenso für Teilnehmer 1. Das Ergebnis ist ein Wert von  $\Delta_{1D} = 2$ . Aus der Einordnung einer Zeile in eine beliebige Partition folgt also zwangsläufig mindestens ein ungültiger Wert für  $\Delta$ , eine gültige Zuordnung ist somit nicht möglich.  $\square$

Das Gegenbeispiel in Abb. 4.7 zeigt sogar recht gut, für welche konkreten Instanzen des Workshopzuteilungsproblems die totale Unimodularität verletzt wird. Dies wird anhand des Theorems 4.4 wiedergegeben.

**Theorem 4.4** *Gegeben sei eine Instanz des Workshopzuteilungsproblems mit  $w_{max} \geq 4$  und  $p_{max} \geq 2$ , mit Beschränkungen gemäß NB a) und d), welches sich nicht durch die Reduktion der Problemstellung auf die Nebenbedingungen a), b), c) und d) ausdrücken lässt. Dann ist die zugehörige Nebenbedingungsmatrix nicht total unimodular.*

**Beweis.** Eine Instanz des Workshopzuteilungsproblems lässt sich dann nicht mit der reduzierten Problemstellung ausdrücken, wenn es Konflikte zwischen Workshops gibt, die sich nicht durch die Angabe einer Äquivalenzrelation ausdrücken lassen. Dies kann nur dann geschehen, wenn die Transitivitätsbedingung verletzt wird, da Konflikte zwischen Workshops immer reflexiv und symmetrisch sind (wenn ein Teilnehmer nicht A und B gemeinsam besuchen kann, gilt dies ebenso für B und A). Es gibt also einen Konflikt zwischen einem Workshop A und B und einen weiteren zwischen A und C, so dass B und C nicht miteinander in Konflikt stehen. Nur wenn es mindestens drei Workshops dieser Form gibt, ist die Transitivität verletzt und die Abbildung durch eine Äquivalenzrelation ist nicht möglich.

Dann aber enthält das Workshopzuteilungsproblem für jeden Teilnehmer Zeilen der Form

$$\begin{array}{cccc} & A & B & \\ \text{Form} & A & C & \dots \end{array} \cdot$$

Da es mindestens 4 Workshops und mindestens 2 Teilnehmer gibt und die Nebenbedingungszeilen der NB a) und d) vorhanden sind, kann eine Teilmenge  $R$  an Zeilen der in Abb. 4.7 dargestellten Form gewählt werden. Wie im Beweis von Theorem 4.3 beschrieben, ist dann die totale Unimodularität verletzt.  $\square$

Das Theorem 4.4 zeigt also, dass die totale Unimodularität durch die Hinzunahme der Nebenbedingung e) zur Problemstellung in quasi allen praktisch relevanten Fällen sofort verletzt wird.

In diesem Abschnitt wurde die Nebenbedingungsmatrix des Workshopzuteilungsproblems auf die Eigenschaft der totalen Unimodularität untersucht, welche wichtige Eigenschaften der ganzzahligen Lösbarkeit des Problems mit sich bringt. Wir haben gesehen, dass eine Nebenbedingungsmatrix, die Zeilen der Nebenbedingungen a), c) und d) enthält, total unimodular ist und somit mit dem Simplex ganzzahlig gelöst werden kann. Allerdings wird durch Hinzunahme der Nebenbedingung e) diese Eigenschaft praktisch in jedem Fall verletzt.

Im folgenden Abschnitt wird die Möglichkeit untersucht, das Workshopzuteilungsproblem als Netzwerkflussproblem zu modellieren. Auch Netzwerkflussprobleme sind ganzzahlig lösbar, zudem gibt es aber für diese Modelle optimierte, schnelle Lösungsverfahren. Daher ist es interessant zu wissen, inwieweit sich einzelne Klassen von Workshopzuteilungsproblemen auf diese Art darstellen lassen.

### 4.3.2 Modellierung als Netzwerkflussproblem

In Abschnitt 4.3.1 wurde gezeigt, dass das Workshopzuteilungsproblem nur dann eine total unimodulare Nebenbedingungsmatrix hat, wenn es auf die Nebenbedingungen a) bis d) reduziert wird und damit keine zeitlichen Überlappungen von Workshops beachtet werden müssen. Genau diese Klasse von Workshopzuteilungsproblemen lässt sich auch durch ein Netzwerkflussproblem (siehe Abschnitt 2.6) abbilden, wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Das Netzwerkflussmodell ist beispielhaft für drei Teilnehmer und sechs Workshops in Abb. 4.8 dargestellt. Workshop 1 und 2 sind äquivalent, ebenso Workshop 3 und 4. Die Workshops 5 und 6 sind dagegen mit allen anderen uneingeschränkt kombinierbar. Knoten sind durch Kreise dargestellt, die die Bezeichner der Knoten enthalten. Die Pfeile markieren die Kanten mit den Flussrichtungen. An den Knoten sind, soweit vorhanden, in eckigen Klammern der feste externe und der maximale variable Fluss angegeben. Der feste externe Fluss findet in jedem Fall statt, der variable externe Fluss gibt die Grenze an, bis zu der ein externer Fluss auftreten darf (Minimum ist immer 0). An den Kanten sind in runden Klammern die Kapazität, also der maximale erlaubte Kantenfluss, und die Kosten pro Flusseinheit angegeben.

Allgemein wird das Netzwerkflussmodell für das reduzierte Workshopzuteilungsproblem folgendermaßen konstruiert:

- Für jeden Teilnehmer enthält das Modell einen Knoten. Der feste externe Fluss ist gleich der Mindestanzahl an zu besuchenden Workshops. Falls der Besuch von weiteren Workshops erlaubt ist, wird zusätzlich ein maximaler variabler externer Fluss angegeben, der groß genug ist, dass beliebig viele weitere Workshops besucht werden können. Er wird daher auf die Anzahl Workshops minus die Mindestanzahl zu besuchender Workshops gesetzt. Soll die Mindestanzahl Workshops exakt besucht werden, so ist der variable externe Fluss gleich 0. Jede Flusseinheit entspricht also dem Besuch eines Workshops, Nebenbedingung d) wird durch den festen externen Fluss eingehalten, der eine Mindestanzahl besuchter Workshops garantiert. Zusätzlicher Besuch weiterer Workshops wird durch den variablen Fluss ermöglicht.
- Für jede Äquivalenzklasse und jeden Teilnehmer enthält das Modell einen Knoten (z.B. Knoten  $[w_1]_1$  in Abb. 4.8 für die Äquivalenzklasse  $[w_1]_{\sim_Q}$  und Teilnehmer 1).

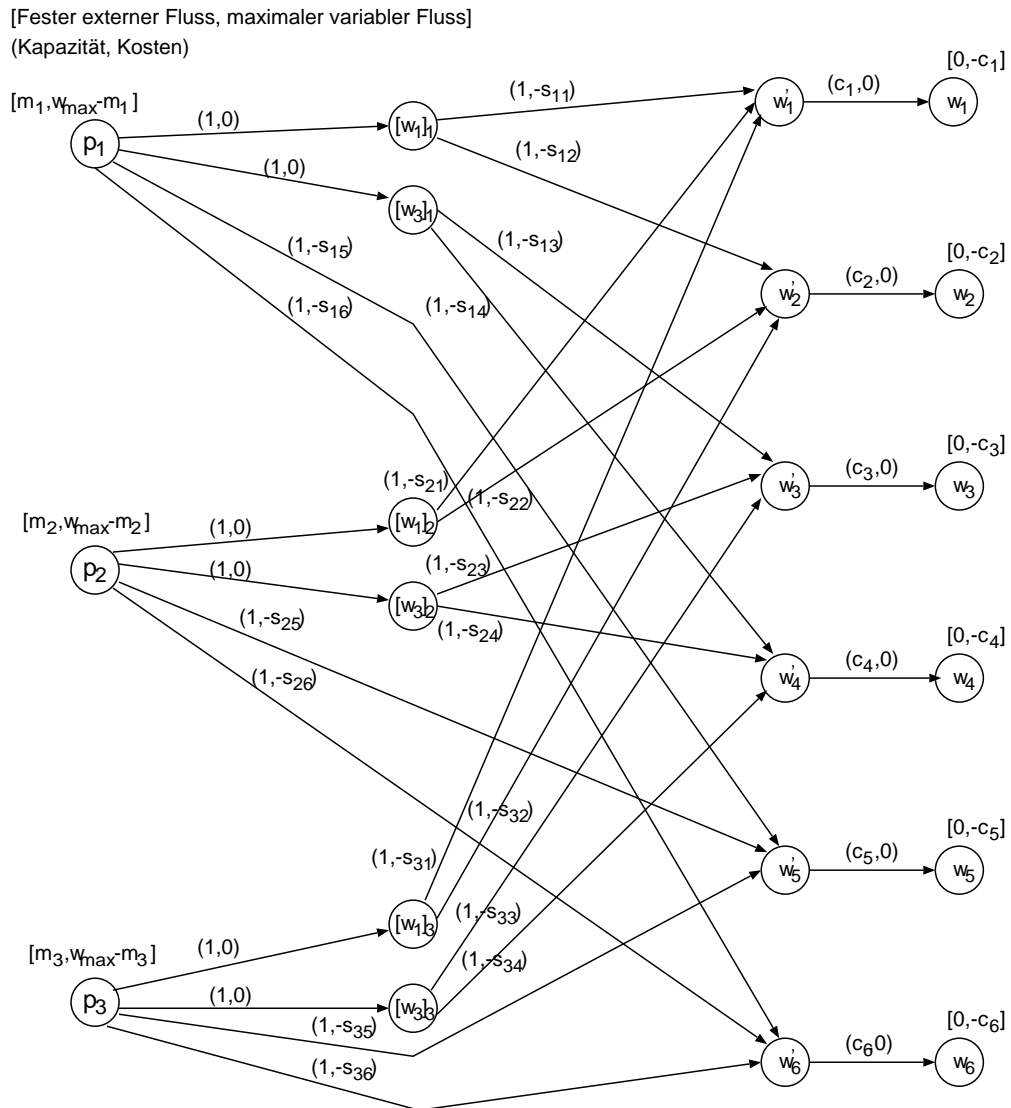


Abbildung 4.8: Beispiel eines Netzwerkflussmodells für das Workshopzuteilungsproblem

Jeder Knoten ist mit dem entsprechenden Teilnehmerknoten verbunden, die Verbindung hat eine Kapazität von 1 und keine Kosten. Somit ist sichergestellt, dass pro Äquivalenzklasse höchstens eine Flusseinheit passiert, d.h. es wird höchstens ein Workshop aus dieser Äquivalenzklasse besucht.

- Für jeden Workshop enthält das Modell einen Knoten, genannt Workshopsammelknoten (z.B. Knoten  $w'_1$  in Abb. 4.8). Ist der betreffende Workshop in einer Äquivalenzklasse (mit mehr als einem Workshop) enthalten, so gibt es pro Äquivalenzklassenknoten eine Kante zum Workshopsammelknoten. Ist der Workshop mit allen anderen Workshops kombinierbar, so führen die Kanten direkt von den Knoten der Teilnehmer zum Workshopsammelknoten. Jeder Workshopsammelknoten hat also für jeden Teilnehmer eine eingehende Kante. Jede Kante hat die Kapazität von 1, da jeder Teilnehmer jeden Workshop nur einmal besuchen kann, und die Kosten sind die negative Präferenz des entsprechenden Teilnehmers für den Workshop. Da bei der Optimierung ein Fluss gesucht wird, der die Kosten minimiert, entspricht dies der Maximierung der Summe der Präferenzen.
- Von jedem Workshopsammelknoten führt eine Kante zu einem weiteren Workshopknoten, bezeichnet z.B. mit  $w_1$ . Die Kapazität dieser Kante entspricht der maximalen Anzahl an Teilnehmern für diesen Workshop ( $c_w$ ). Der Workshopknoten hat einen fixen externen Fluss von 0, da es keine zwingende Mindestanzahl an Teilnehmern für jeden Workshop gibt, und einen maximalen variablen Fluss vom negativen der Kapazität des Workshops, d.h. es können maximal  $c_w$  Flusseinheiten das Netzwerk an diesem Workshop verlassen.

In Abb. 4.9 ist eine alternative Formulierung ohne variablen externen Fluss gezeigt. Dieser wird durch einen weiteren Knoten  $S$ , den Schlupfknoten, modelliert. Der Schlupfknoten hat einen fixen externen Fluss von der Anzahl der freien Plätze. Die Anzahl der freien Plätze errechnet sich aus der Summe aller Workshopplätze minus der Summe aller Mindestbesuche über alle Teilnehmer.

$$\text{freie Plätze} = \sum_{w \in W} c_w - \sum_{p \in P} m_p \quad (4.7)$$

Das vorgestellte Netzwerkflussmodell entspricht dem kostenminimierenden Netzwerkflussmodell. Es existieren daher effiziente Algorithmen zur Lösung des Problems, wobei der Fluss durchs Netzwerk immer ganzzahlig ist (siehe Abschnitt 2.6). Es kann also eine gültige Lösung für das Workshopzuteilungsproblem errechnet werden.

Die Modellierung dieses Spezialfalls des Workshopzuteilungsproblems ergibt also dasselbe Ergebnis wie die Untersuchungen der Nebenbedingungsmatrix auf totale Unimodularität. Unter Ausschluss der Nebenbedingung e) der zeitlichen Restriktionen ist das Workshopzuteilungsproblem ganzzahlig effizient lösbar. Im folgenden Abschnitt wird nun die Lösbarkeit des Workshopzuteilungsproblems mit allen Nebenbedingungen untersucht.

## 4.4 Praktische Anwendungsbeispiele und Lösungen

In diesem Abschnitt werden zunächst zwei verschiedene, reale Workshopzuteilungsprobleme vorgestellt. Die Beispiele zeigen die praktische Relevanz des allgemeinen Workshopzuteilungsproblems und dessen Flexibilität. Mit Hilfe von besonderen Workshops

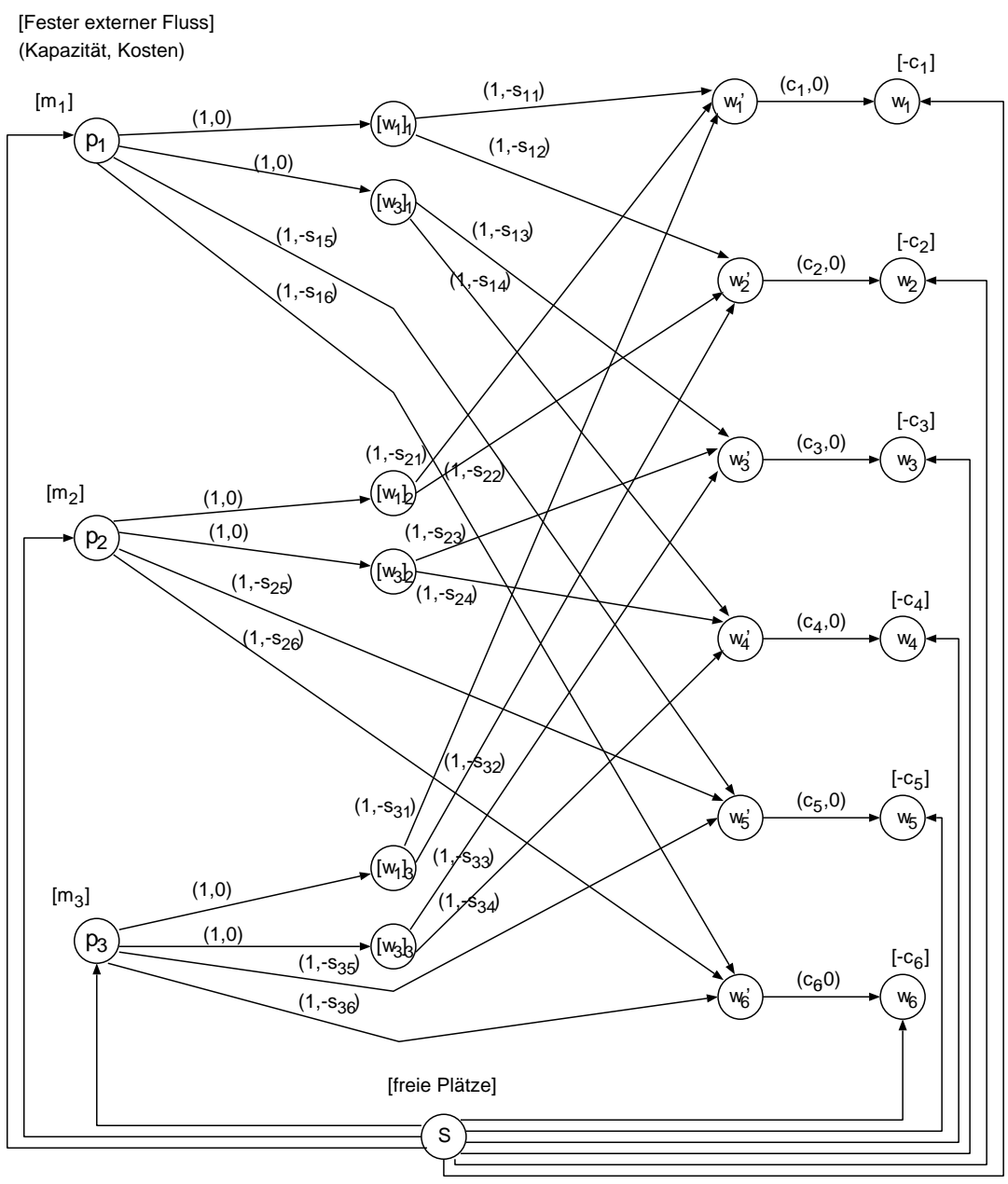


Abbildung 4.9: Beispiel eines Netzwerkflussmodells mit Schlupfknoten

können auch Sachverhalte wie Mittagspausen sinnvoll in die Problemstellung integriert werden. Basierend auf diesen praktischen Erfahrungen werden in Abschnitt 4.5 weitere Instanzen des Workshopzuteilungsproblems generiert, anhand derer die allgemeine, empirische Lösbarkeit untersucht werden soll.

Für beide Workshopprobleme ist die Matrix der Nebenbedingungen nicht total unimodular, allerdings zeigen empirische Ergebnisse, inwiefern diese Probleme für verschiedene generierte Instanzen trotzdem ganzzahlig lösbar waren.

#### 4.4.1 Der Mädchen-Techniktag

Der Mädchen-Techniktag findet alljährlich an der Universität Karlsruhe (TH) im November statt. Der Mädchen-Techniktag verfolgt das Ziel, Schülerinnen der gymnasialen Mittel- und Oberstufen Einblick in technische Studiengänge zu geben, um so ihr Interesse an technischen Fächern und Studiengängen zu wecken. Die Schülerinnen sollen ermutigt werden, nach dem Abitur ein technisches Studium zu ergreifen, und möglicherweise auch bereits während der letzten Schuljahre technische Fächer zu wählen oder entsprechende Berufspraktika zu absolvieren. Man verspricht sich dadurch eine Erhöhung des recht niedrigen Frauenanteils in technischen Studiengängen.

Am Mädchen-Techniktag bieten Institute und Lehrstühle technischer Fakultäten der Universität diverse, in Eigenregie organisierte Workshops an, die von den Schülerinnen besucht werden können. Der Tag gliedert sich in den Vor- und den Nachmittag, so dass jeder Workshop entweder am Vor- oder am Nachmittag statt findet und die Teilnehmerinnen somit am Mädchen-Techniktag zwei verschiedene Workshops besuchen können. Die Organisatoren haben die Möglichkeit, einen Workshop zwei Mal anzubieten, also einmal am Vormittag und einmal am Nachmittag, oder nur zu einem der beiden Zeitpunkte. Der Großteil der Schülerinnen besucht zwei Workshops, es gibt jedoch ebenfalls Teilnehmerinnen, die nur am Vormittag oder nur am Nachmittag anwesend sind und somit nur einen Workshop besuchen können. Es darf natürlich keine Teilnehmerin am Vormittag und am Nachmittag zum gleichen, zwei Mal statt findenden Workshop eingeteilt werden.

In den letzten Jahren wurden am Mädchen-Techniktag etwa 50 verschiedene Workshops angeboten, wobei aber viele zwei Mal statt fanden, so dass es etwa 85 einzelne Veranstaltungen waren. Die Teilnehmerzahl bewegte sich um die 450 Anmeldungen, wobei der Großteil der Teilnehmerinnen die Veranstaltung über die gesamte Dauer besucht hat, so dass sich über 850 Einzelteilnahmen ergaben. Die Anzahl der Teilnehmerinnen pro Workshop schwankte zwischen 6 und 25, dabei waren insgesamt genügend Plätze für alle Teilnehmerinnen vorhanden.

Die Teilnehmerinnen konnten den Workshops Präferenzen aus der Menge  $\{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$  zuteilen. Die negativen Präferenzen drücken dabei eine Abneigung gegenüber Workshops aus, die positiven eine Zuneigung. Je höher der Betrag einer Präferenz ist, desto höher ist die Abneigung bzw. Zuneigung. Jeder Präferenzwert durfte für zwei Workshops vergeben werden, so dass sich insgesamt pro Teilnehmerin 16 Präferenzen ergaben. Die restlichen Workshops wurden mit der Standardpräferenz 0 belegt. Die Präferenzen wurden dabei einheitlich für jede Äquivalenzklasse von Workshops vergeben.

Ziel des Optimierungsproblems ist die Maximierung der Summe der Präferenzwerte. Allerdings zeigte sich, dass der durch die Teilnehmerinnen subjektiv empfundene Unterschied zwischen Workshops mit verschiedenen, positiven Präferenzen nicht so bedeutend

war wie zwischen einer niedrigen, positiven Präferenz und der Standardpräferenz 0. Beispielsweise ergibt sich die Summe der Präferenzen zweier Workshops mit den Präferenzen 4 und 0 und zweier anderer mit den Präferenzen 3 und 1 jeweils zu 5. Teilnehmerinnen sind jedoch glücklicher mit einer Kombination aus 3 und 1, da beide Workshops von ihnen “gewählt” wurden, während aus der Kombination 4 und 0 der eine zwar sehr hoch gewählt wurde, der andere war aber nicht gewählt und der Besuch war eher unerwartet. Die Linearität der Präferenzen hat außerdem zur Folge, dass eine Kombination aus den Präferenzen 4 und -2 dieselbe Summe ergibt wie die Kombination aus 1 und 1. Der Algorithmus würde also eher einer Teilnehmerin eine Präferenz 4 und einer anderen die Präferenz -1 zuweisen, statt beiden einen Workshop mit der Präferenz 1 zuzuteilen, was aber für die praktische Zufriedenheit der Teilnehmerinnen ungeeignet war. Die Zuteilung negativer Präferenzen galt es in jedem Fall möglichst zu vermeiden.

Die Präferenzen wurden daher in interne Präferenzwerte übersetzt. Zunächst wurde zu jeder Präferenz 5 addiert, so dass alle Präferenzen positive Werte hatten. Dann wurden die Präferenzen quadriert, um höhere Präferenzen gegenüber niedrigen deutlicher zu bevorzugen. Es ergeben sich dann die Präferenzwerte  $\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81\}$ . Die quadratische Zunahme der Werte erhöht nun die Bedeutung der positiven Präferenzen, allerdings gibt es immer noch Kombinationen, die höherwertig gegenüber anderen sind, aber in der Praxis unerwünschter. Beispielsweise würde der Algorithmus weiterhin eine Kombination aus den Präferenzen 4 und 0 ( $81 + 25 = 106$ ) einer Kombination aus 1 und 3 ( $64 + 36 = 100$ ) bevorzugen. Das Ziel ist es jedoch, eine beliebige Präferenzkombination aus positiven Präferenzen höherwertiger zu machen gegenüber einer mit einer 0 oder gar einem negativen Wert. Die niedrigste Kombination aus positiven Präferenzen ist die Kombination von zwei 1 ( $36 + 36 = 72$ ). Wir suchen nun eine Zahl  $x$ , die wir zusätzlich zu allen positiven Präferenzen addieren, so dass eine Kombination aus zwei 1 mehr wert ist als die Kombination, die eine 0 enthält (dies schließt Kombinationen mit negativen Präferenzen ein). Wir suchen also  $x$  mit  $36 + x + 36 + x > 81 + x + 25$  und bekommen  $x = 35$ . Zu allen positiven Präferenzwerten wurde also zusätzlich 35 addiert, so dass sich die internen Präferenzwerte zu  $\{1, 4, 9, 16, 25, 71, 84, 99, 116\}$  ergaben.

Seien  $W_V$  und  $W_N$  die Mengen der Workshops, die am Vormittag bzw. am Nachmittag statt finden. Workshops, die zwei Mal angeboten werden, werden als zwei getrennte Workshopinstanzen modelliert, von denen eine in  $W_V$  und die andere in  $W_N$  enthalten ist. Dann ist  $W = W_V \cup W_N$  und  $W_V \cap W_N = \emptyset$ . Seien  $P_G$ ,  $P_V$  und  $P_N$  die Mengen der Teilnehmerinnen, die den ganzen Tag, nur den Vormittag oder nur den Nachmittag besuchen, respektive. Dann ist  $P = P_G \cup P_V \cup P_N$  und  $P_G \cap P_V \cap P_N = \emptyset$ . Der Vormittag und der Nachmittag werden als zwei Zeitslots modelliert, also ist  $t_{max} = 2$ ,  $t = 1$  bezeichne den Vormittag und  $t = 2$  den Nachmittag.

Dann ergibt sich die  $w_{max} \times 2$  Matrix  $\mathbf{F}$  mit  $f_{w1} = 1$  für alle  $w \in W_V$  und  $f_{w2} = 1$  für alle  $w \in W_N$ , ansonsten ist  $f_{wt} = 0$ . Die Matrix  $\mathbf{Q}$  bildet Äquivalenzklassen mit zwei Elementen aus denjenigen Workshopinstanzen, einer am Vor- und einer am Nachmittag, denen derselbe Workshop zu Grunde liegt. Für die  $p_{max} \times 2$  Matrix  $\mathbf{B}$  ergibt sich  $b_{p1} = 1$  für alle  $p \in P_G \cup P_V$  und  $b_{p2} = 1$  für alle  $p \in P_G \cup P_N$ .  $m_p = 2$  für alle  $p \in P_G$  und  $m_p = 1$  für alle  $p \in P_V \cup P_N$ , so dass jede Teilnehmerin in dem Zeitslot, in dem sie anwesend ist, natürlich auch einem Workshop zugeteilt werden soll.

Das Optimierungsproblem lässt sich folgendermaßen formulieren:



Maximiere  $\sum_{p \in P, w \in W} s_{pw} \cdot x_{pw}$

unter den Nebenbedingungen (NB)

a) Teilnehmergrenzen für Workshops nicht überschritten

$$\sum_{p \in P} x_{pw} \leq c_w \quad \forall w \in W$$

b) Teilnehmer ist in den Zeitslots des zugewiesenen Workshops da

$$x_{pw} = 0 \quad \forall p \forall w (p \in P_V, w \in W_N) \text{ und } \forall p \forall w (p \in P_N, w \in W_V)$$

c) Kein Teilnehmer besucht mehr als einen von äquivalenten Workshops

$$x_{pw_1} + x_{pw_2} \leq 1 \quad \forall p \forall w_1 \forall w_2 (p \in P, w_1 \in W_V, w_2 \in W_N, q_{w_1 w_2} = 1)$$

d) Jeder Teilnehmer besucht seine geforderte Anzahl Workshops

$$\sum_{w \in W_V} x_{pw} = 1 \quad \forall p \in P_G \cup P_V$$

$$\sum_{w \in W_N} x_{pw} = 1 \quad \forall p \in P_G \cup P_N$$

f)  $x_{pw} \in \{0, 1\} \quad \forall p \in P, \forall w \in W$

Durch die einfache, feste Struktur der Zeitslots und die Vorgabe, dass jede Teilnehmerin, sofern anwesend, pro Zeitslot einen Workshop besucht, lässt sich die Nebenbedingung e) ersetzen durch eine alternative Formulierung der Nebenbedingung d). Es wird nun verlangt, dass alle Teilnehmer, die vormittags anwesend sind, genau einen Workshop am Vormittag besuchen. Somit ist deren Mindestanzahl an Vormittagsworkshops gegeben und es wird gleichzeitig vermieden, dass mehr als ein Workshop am Vormittag zugewiesen werden kann. Dieselbe Bedingung gilt entsprechend für alle am Nachmittag anwesenden Teilnehmerinnen.

Nun ergeben sich aber für die ganztags anwesenden Schülerinnen zwei statt einer Zeile für die Nebenbedingung d). Deren Spalten überschneiden sich zwar nicht, aber dadurch, dass eine Zeile der Nebenbedingung d) nicht mehr garantiert alle Workshops enthält, kann die Zuordnung von Zeilen zu Partitionen, wie in Fall 6 in Abschnitt 4.3.1 beschrieben, nicht mehr vorgenommen werden. In der Tat lassen sich Zeilenmengen angeben, für die es keine gültigen Partitionen gibt, was daran liegt, dass die Zeilen zu NB c) immer genau einen Vormittags- und einen Nachmittagsworkshop enthalten. Die Bedingungen aus NB c) und d) lassen sich nicht zu einer einheitlichen Aufteilung der Workshops in Äquivalenzklassen zusammenführen.

Anhand eines Versuchs wurde die empirische Lösbarkeit des Mädchen-Techniktag Problems untersucht. Dazu wurden verschiedene Probleme dieser Struktur folgendermaßen generiert.

- $t_{max} = 2$
- Die Anzahl der Workshops  $w_{max}$  wurde zufällig aus dem Intervall  $[50, 100]$  gezogen, basierend auf den 85 Workshopinstanzen des realen Problems.
- Von den Workshops wurden 70% in eine zweier Äquivalenzklasse sortiert und 30% hatten keinen äquivalenten Workshop. Diese Aufteilung ergibt sich ebenfalls aus den Erfahrungswerten von 35 Workshops, die zweimal statt fanden, und 15, die nur einmal statt fanden.

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 124 (86%)  | 2.80 (1.27) | 76 (15)   | 548 (105) |
| optimal, Branch & Cut | 13 (9%)    | 7.39 (3.52) | 76 (18)   | 539 (129) |
| unlösbar              | 7 (5%)     | 2.22 (1.54) | 65 (14)   | 471 (112) |
| $\Sigma$              | 144 (100%) | 2.97 (1.80) | 75 (15)   | 540 (110) |

Tabelle 4.2: Empirische Ergebnisse für den MTT. Letzte drei Spalten: Mittelwert (Std-Abw.)

- Die Größe der Workshops wird zufällig aus dem Intervall  $[8, 25]$  gezogen.
- Jeder Workshop belegt einen Zeitslot. Dieser wird für jeden Workshop zufällig bestimmt. Ein eventueller zweiter, äquivalenter Workshop wurde dann dem anderen Zeitslot zugeordnet.
- Die Auslastung ist 80%, d.h. es gibt so viele Teilnehmer, dass 80% der verfügbaren Plätze besetzt sind.
- Jeder Teilnehmer besucht einen oder zwei Workshops. Dabei besuchen  $2/3$  der Teilnehmer 2 Workshops und  $1/3$  einen Workshop, basierend auf Beobachtungen der praktischen Fälle. Die Anzahl der besuchten Workshops entspricht auch der Anzahl der Zeitslots, in denen der Teilnehmer anwesend ist. Für Teilnehmer an nur einem Workshop wird der Zeitslot mit Abwesenheit zufällig bestimmt, so dass ein gleicher Teil dieser Teilnehmer nur vor- bzw. nur nachmittags kommt.
- Die Zuteilung der Präferenzen zu Workshops geschieht analog zum in Abschnitt 4.5 beschriebenen Vorgehen (siehe S. 77 und Abb. 4.12), so dass es beliebte und weniger beliebte Workshops gibt.

Die empirischen Ergebnisse sind in Tab. 4.2 dargestellt. Sie zeigen, dass es zwar Instanzen des MTT gibt, die mit dem Simplex nicht ganzzahlig lösbar sind, dies ist aber nur ein sehr geringer Anteil der Probleme der Struktur des MTT. Wenn man von den unlösbaren Problemen absieht, sind gut 90% der Probleme mit dem Simplex lösbar. Die Ausführungszeiten liegen aber auch bei den mit Branch & Cut gelösten Problemen im unkritischen Bereich, im Schnitt deutlich unter 10 Sekunden. Probleme von der Struktur und Größe des Mädchen-Techniktags können also als empirisch leicht lösbar angesehen werden. Es wurden auch einige wenige, unlösbare Instanzen erzeugt, was auf eine ungünstige, zeitliche Verteilung der Workshops zurück zu führen ist, so dass die Anzahl der verfügbaren Plätze in einem der beiden Zeitslots zu gering war. Auf eine entsprechende Verbesserung des Problemgenerators wurde aufgrund der geringen Anzahl der Fälle verzichtet.

Seit dem Frühjahr 2006 wird der Mädchen-Techniktag durch den Girls'Day ersetzt, einer jährlichen Veranstaltung, die zeitgleich in vielen Firmen und Organisationen der Bundesrepublik Deutschland statt findet. Die Problemstruktur des Girls'Day ist der des MTT recht ähnlich. Es gibt zwei wesentliche Unterschiede, die auch in die Generation der empirischen Daten in Abschnitt 4.5 eingehen. Zum einen sind die Teilnehmer den ganzen Zeitraum der Veranstaltung über anwesend. Zum anderen ist die Zahl der Äquivalenzklassen der Workshops deutlich gestiegen. Beim Girls'Day finden 59% der Workshops nur einmal statt und nur noch 41% zwei mal.

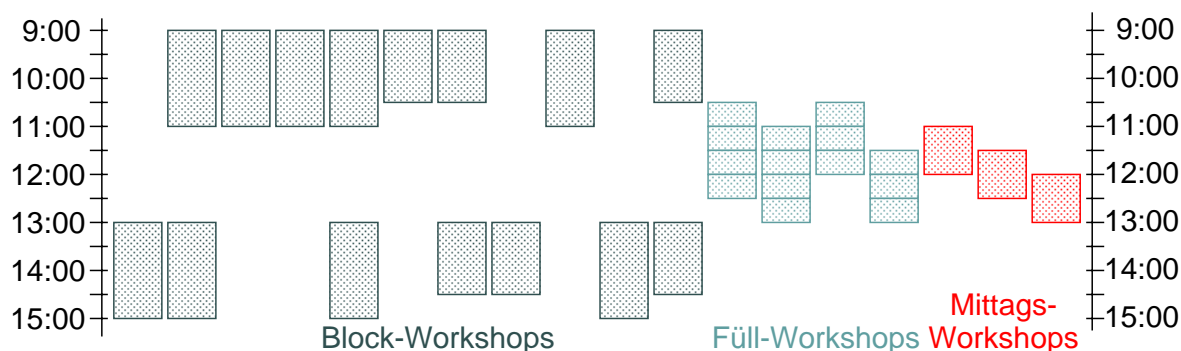


Abbildung 4.10: Zeitliche Einteilung der Workshops des Schnuppertags

## 4.4.2 Der Schnuppertag

Der Schnuppertag ist eine dem Mädchen-Techniktag (siehe Abschnitt 4.4.1) durchaus ähnliche Veranstaltung. An diesem Tag werden Teilnehmern in verschiedenen Workshops Einblicke in die betreffende Organisation gewährt. Die zeitliche Organisation der Workshops ist jedoch anders. Workshops können zu verschiedenen Uhrzeiten beginnen und unterschiedlich lange dauern. Die Teilnehmer sind einheitlich den ganzen Tag lang anwesend und sollen alle ein Minimum von vier verschiedenen Workshops besuchen. Auch hier können die gleichen Workshops öfter statt finden, so dass verschieden große Äquivalenzklassen entstehen.

Die zeitliche Aufteilung der Workshops ist beispielhaft in Abb. 4.10 dargestellt. Eine Spalte entspricht einer Äquivalenzklasse von Workshops, jeder Block stellt einen Workshop und die von ihm belegte Zeitspanne dar. Die Abbildung zeigt beispielhaft die Typen von Workshops, die Gesamtanzahl des tatsächlichen Schnuppertags lag etwas höher bei etwa 30 Äquivalenzklassen, die etwa 45 einzelne Workshopinstanzen ergaben. In der Abbildung kann man erkennen, dass es hier, ähnlich dem Mädchen-Techniktag, einen Vor- und einen Nachmittagsblock gibt, wobei die Startzeiten der Workshops am Vor- und am Nachmittag einheitlich bei 9:00 bzw. 13:00 liegen (dunkelgrau markierte Block-Workshops in Abb. 4.10). Allerdings gehen einige der Workshops über zwei, andere nur über eineinhalb Stunden. Desweiteren gibt es eine Gruppe sehr kurzer Workshops, mit einer Dauer von jeweils nur einer halben Stunde, die zwischen dem Vor- und Nachmittagsblock positioniert sind (Füll-Workshops in Abb. 4.10). Die kleinste, zeitliche Einheit, die das Modellieren der zeitlichen Bedingungen erlaubt, ist folglich eine halbe Stunde, die somit einem Zeitslot entspricht.

Ziel der Organisatoren des Schnuppertags ist es, dass die Teilnehmer je einen längeren Workshop am Vormittag und einen längeren am Nachmittag besuchen. Zudem sollen zwei der kurzen Workshops besucht werden, wobei die kurzen aber so gewählt sein sollen, dass zwischen 11:00 und 13:00 eine Pause von einer vollen Stunde für das Mittagessen bleibt. Es darf also nicht so zugeteilt werden, dass zwischen 11:00 und 13:00 zwei Pausen von je einer halben Stunde entstehen und die beiden anderen halben Stunden jeweils mit dem Besuch eines kurzen Workshops belegt sind.

Die Forderung nach einer Mittagspause lässt sich über einen kleinen Trick mit dem allgemeinen Workshopzuteilungsproblem lösen. Die möglichen Mittagspausen werden als zusätzliche Mittags-Workshops modelliert (siehe Abb. 4.10). Es entstehen drei verschiedene Mittags-Workshops: einer von 11:00 bis 12:00, einer von 11:30 bis 12:30 und einer

von 12:00 bis 13:00. Da es pro Teilnehmer nur eine Mittagspause geben soll, wird eine Äquivalenzklasse dieser drei Workshops gebildet. Jetzt muss noch sicher gestellt werden, dass jeder Teilnehmer eine der Mittagspausen "besucht". Dies kann über einen hohen Präferenzwert erreicht werden, der noch deutlich höher gewählt wird als die größte der für die normalen Workshops vergebenen Präferenzen. Eine optimale Lösung wird dann immer so gewählt sein, dass jeder Teilnehmer genau einen Mittags-Workshop besucht und demzufolge die volle Stunde Mittagspause gewährleistet ist.

Wie hoch sollte nun die Präferenz für die Mittags-Workshops gewählt werden, damit garantiert ist, dass jeder Teilnehmer seine Mittagspause zugeteilt bekommt? Der Algorithmus muss seine Zuteilung in jedem Fall so wählen, dass jeder Teilnehmer vier Workshops plus die Mittagspause, also insgesamt fünf Veranstaltungen besucht. Die Präferenz muss so gewählt sein, dass jede Kombination aus Präferenzen für fünf normale Workshops kleiner ist als jede andere Kombination aus vier Workshops und einem Mittagsworkshop. Bezeichne also  $s_{max}$  die höchste, zu vergebene Präferenz und  $s_{min}$  die niedrigste, so muss die Präferenz  $s_{mittag}$  für die Mittags-Workshops so gewählt sein, dass  $s_{mittag} + 4 \cdot s_{min} > 5 \cdot s_{max}$ . Wenn man weiterhin berücksichtigt, dass die höchste Präferenz wahrscheinlich nicht fünf Mal vergeben werden kann, sondern weniger oft, kann man diese Zahl durch Angabe der größtmöglichen Kombination aus fünf Präferenzen bzw. der kleinsten möglichen aus vier Präferenzen noch weiter eingrenzen. Der Algorithmus wird dann jedem Teilnehmer lieber den Mittagsworkshop zusammen mit vier anderen, wenn auch mit schlechten Präferenzen, zuteilen als fünf Workshops mit der höchst möglichen Präferenzkombination.

Es ist leicht ersichtlich, dass für den Schnuppertag keine alternative Formulierung des Optimierungsproblems gefunden werden kann, die eine total unimodulare Nebenbedingungsmatrix besitzt. Um die Lösbarkeit zu untersuchen, wurde eine empirische Untersuchung gemacht.

Das Problem wurde mit 44 Workshopinstanzen gelöst, wobei es 22 verschiedene Äquivalenzklassen an Workshops gab. Die Präferenzen  $\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  konnten für je zwei Workshops vergeben werden und wurden analog zum Mädchen-Techniktag intern kodiert als  $\{4, 9, 16, 71, 84, 99\}$ . Wegen der geringeren Zahl an Workshops verglichen mit dem Mädchen-Techniktag wurden die Präferenzen  $-4$  und  $4$  weggelassen. Die Präferenz für die drei Instanzen des Mittags-Workshops ergab sich zu 412. Jeder Teilnehmer sollte mindestens vier Workshops besuchen. Die Kurzzeitworkshops hatten keine Teilnehmerbegrenzung, die längeren Workshops hatten Teilnehmergrenzen zwischen 6 und 14. Da jeder Teilnehmer zwei der längeren Workshops besuchen können soll, die insgesamt 217 Plätze zur Verfügung stellten, können nicht viel mehr als 100 Teilnehmer zugelassen werden. Als Anzahl der Teilnehmer wurden daher 100 gewählt.

Als Besonderheit beim Schnuppertag ist die Tatsache anzusehen, dass die Teilnehmer zwar alle über die gesamte Dauer der Veranstaltung anwesend sind, aber es bestimmte Workshops gibt, die sich nur für bestimmte Altersklassen von Teilnehmern eignen. Für jeden Teilnehmer gibt es also abhängig von seinem Alter eine Auswahl von Workshops, die er besuchen kann und weitere Workshops, die er nicht besuchen soll. Diese Tatsache kann ebenso wie die Anwesenheit modelliert werden, indem die entsprechenden Variablen von ungültigen Zuordnungen von Teilnehmern zu Workshops aus dem Optimierungsproblem entfernt werden. Auf diese Art und Weise hatte das Problem mit 100 Teilnehmern und 44 Workshops lediglich 3230 statt 4400 Variablen.

Die Zuteilung der Präferenzen zu den Workshops geschah ebenso wie beim Mädchen-

Techniktag analog zum im Abschnitt 4.5 beschriebenen Vorgehen (siehe S. 77 und Abb. 4.12), so dass Workshops mit kleinem Index sehr beliebt und Workshop mit großem Index eher unbeliebt waren.

Das Ergebnis des empirischen Versuchs war, dass alle generierten Instanzen eines Branch & Cut-Verfahrens zur Lösung bedurften. Es wurden also mit dem Simplex keine ganzzahligen Lösungen generiert. Es ist zu vermuten, dass dies an der doch im Vergleich zum Mädchen-Techniktag deutlich komplexeren Problemstruktur liegt, da hier verschiedene zeitliche Restriktionen sowie Äquivalenzrestriktionen zum Einsatz kommen.

Allerdings konnte dieses Problem in einer sehr kurzen Zeit gelöst werden. Im Durchschnitt wurden 1.09 Sekunden mit 0.39 Sekunden Standardabweichung benötigt (zu den genauen Angaben bezüglich verwendeter Soft- und Hardware siehe Abschnitt 4.5). Dies ist wohl auch dadurch zu erklären, dass es bei diesem Problem, verglichen mit dem Mädchen-Techniktag, nur um wenige Workshops und insbesondere wenige Teilnehmer ging, da ja jeder Teilnehmer bereits 4 Workshopplätze beanspruchte. Das Problem hatte 3230 Variablen und 2170 Nebenbedingungen.

## 4.5 Empirische Lösbarkeit

In Abschnitt 4.3 wurde beschrieben, welche Unterklassen des Workshopzuteilungsproblems total unimodulare Nebenbedingungsmatrizen besitzen und damit mit dem Simplex Verfahren ganzzahlig lösbar sind. Für die recht große Klasse der restlichen Problemstellungen jedoch kann keine Garantie gegeben werden, dass eine ganzzahlige Lösung durch den Simplex gefunden werden kann. Die zwei in Abschnitt 4.4 vorgestellten praktischen Beispiele haben gezeigt, dass es von der Problemstruktur abhängt, ob ein Problem meist bereits mit dem Simplex ganzzahlig lösbar ist oder auch nicht. Die Ausführungszeiten lagen jedoch in beiden Fällen im Bereich weniger Sekunden, basierend auf der im Folgenden genauer vorgestellten, verwendeten Hard- und Software.

Um zu untersuchen, wie sich die Lösbarkeit für praktisch relevante Zuteilungsprobleme verschiedener Größe und Struktur verhält, wird im Folgenden die empirische Lösbarkeit verschiedener, generierter Probleminstanzen untersucht. Interessant ist dabei zum einen, welcher Anteil der generierten Problemstellungen bereits ganzzahlige relaxierte Optima besitzt und somit mit dem Simplex-Verfahren lösbar ist. Dies ist aufgrund der Limitierungen der eingesetzten Software besonders für die praktische Durchführung der Simulation des in dieser Arbeit definierten Tauschmarkts (siehe Kap. 7) von Bedeutung. Zum anderen ist sowohl für den praktischen Einsatz des Problems als auch für den Onlineeinsatz des Tauschmarktes wichtig, in welcher Rechenzeit eine Problemlösung im Allgemeinen gefunden werden kann. Ergibt die Relaxierung eine reellwertige Lösung, so wird die ganzzahlige optimale Lösung durch Einsatz eines Branch & Cut Verfahrens berechnet. Besonders beim Branch & Cut Verfahren ist die tatsächliche Rechenzeit interessant, da die Anzahl der notwendigen Iterationen abhängig von der konkreten Problemstellung stark schwanken kann. Auch die Qualität der relaxierten Lösung und die Anzahl der Variablen mit ungültigen Werten spielen eine Rolle.

Es werden verschiedene Probleminstanzen erzeugt und mit dem Simplex gelöst, und die Gültigkeit der Lösung wird untersucht. Wenn man mit den erzeugten Instanzen eine genügend große Breite von Workshopzuteilungsproblemen abdeckt, also eine breite Variation der Problemparameter in den für die meisten praktischen Fälle relevanten Bereichen zulässt, kann man auf dieser Grundlage Aussagen über die empirische Lösbarkeit

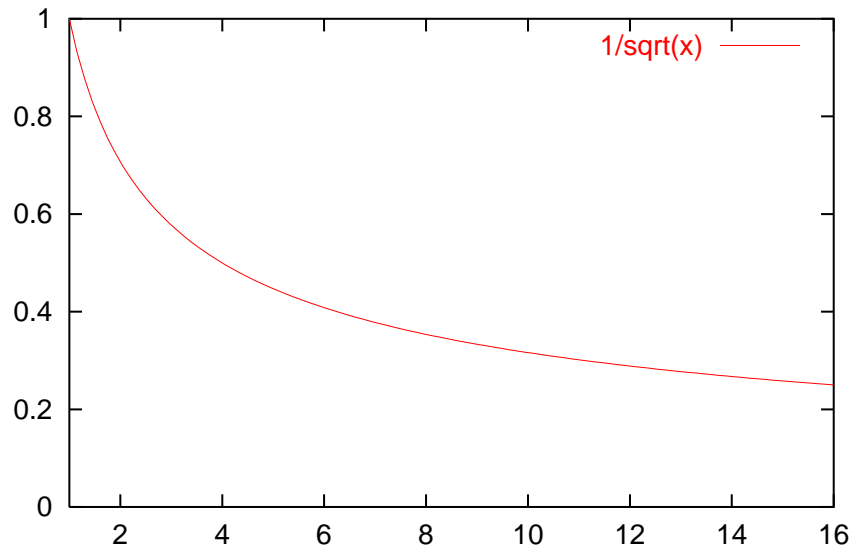


Abbildung 4.11: Anteil belegter Zeitslots abhängig von der Anzahl Zeitslots

des Workshopzuteilungsproblems innerhalb des untersuchten Bereichs treffen.

Die generierten Probleme wurden mit der Software CPLEX, Version 9.0, gelöst. CPLEX läuft auf einem Parallelrechner IBM RS/6000 SP, mit AIX 5.1 als Betriebssystem. Die IBM SP ist ein hybrider Parallelrechner mit 256 Prozessoren. Die Spitzenleistung über alle Prozessorknoten beträgt 384 GFlops. Der gesamte Hauptspeicher umfasst 256 GB. Es ist also ein sehr leistungsstarker Rechner, aus diesem Grund werden einige, ausgewählte Probleme ebenfalls mit der Software SAS auf einer Working Station gelöst, um einen Vergleich zu haben, inwiefern die Performanz der Hardware einen Einfluss auf die Zeit zur Lösung des Problems hat und inwiefern auch andere Software außer CPLEX bzw. andere Hardware in der Lage ist, Probleme der betrachteten Größe zu lösen.

Die Parameter der zu lösenden Probleme wurden wie folgt erzeugt:

- Die Anzahl  $w_{max}$  der Workshops ist eine zufällig gewählte Zahl zwischen 20 und 100. Bei weniger als 20 Workshops wird die Problemstellung zu einfach und eine automatische Zuteilung über Präferenzen scheint übertrieben. Mehr als 100 Workshops wiederum scheinen praktisch nicht relevant zu sein, auch würde die reine Präferenzvergabe für so viele Workshops Teilnehmer einer Veranstaltung schlicht überfordern.
- Die Anzahl  $t_{max}$  der Zeitslots ist eine zufällig gewählte Zahl zwischen 2 und 16. Das Beispiel des Mädchen-Techniktags hat gezeigt, dass 2 Zeitslots bereits praktisch relevant sind. 16 Zeitslots genügen, um von einem 8-stündigen Tag eine Unterteilung in halbe Stunden zu machen, was bereits eine sehr feine Aufteilung ist. Da Workshops im Allgemeinen eher regelmäßig stattfinden, also zur gleichen Zeit beginnen und enden, genügt diese Anzahl auch für mehrtägige Veranstaltungen.
- Die Teilnehmeranzahl für die Workshops wird für jeden Workshop zufällig bestimmt und liegt zwischen 8 und 25 Plätzen. Dies sind in etwa die Größen, die sich für die Praxis am relevantesten erwiesen haben. Es werden keine unbegrenz-

ten Workshops modelliert, da unbegrenzte Workshops die Problemstellung eher vereinfachen.

- Die Workshops müssen den Zeitslots zugeordnet werden. Dazu muss zunächst entschieden werden, über wieviele der Zeitslots sich die einzelnen Workshops erstrecken sollen. Dazu wird eine zur Anzahl der Zeitslots relative Größe, die Besetzungsquote, generiert, die angibt, über welchen Anteil der Zeitslots die Workshops sich maximal erstrecken dürfen. Beispielsweise dürften Workshops bei 6 Zeitslots und einer Besetzungsquote von 0.5 maximal 3 Zeitslots belegen. Eine Besetzungsquote von 1 würde auch Workshops einer Dauer von 6 Zeitslots erlauben. Eine solch hohe Besetzungsquote ist allerdings nicht sinnvoll, da lang dauernde Workshops zum einen kaum mit anderen kombinierbar sind und dieser Fall zum anderen für die Praxis nicht relevant ist. Praktische Problemstellungen haben gezeigt, dass bei wenigen Zeitslots hohe Besetzungsquoten von 0.5 oder sogar höher durchaus sinnvoll sind, während bei vielen Zeitslots geringere Besetzungsquoten anfallen, so dass die Workshops nicht so sehr unterschiedlich lang sind. Für die Berechnung der Besetzungsquote wurde daher die Formel  $\frac{1}{\sqrt{t_{max}}}$  gewählt. Die dabei entstehenden Werte für  $1 \leq t_{max} \leq 16$  sind in Abb. 4.11 dargestellt. Der nicht lineare Verlauf der Besetzungsquote bewirkt, dass bei einer geringen Anzahl an Zeitslots die Workshops einen größeren Anteil der Slots belegen dürfen. Aus der Besetzungsquote errechnet sich die maximale Anzahl zu belegender Zeitslots mit  $\lceil t_{max} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_{max}}} \rceil = \lceil \sqrt{t_{max}} \rceil$ . Beispielsweise dürfen bei einer Anzahl von  $t_{max} = 3$  Zeitslots die Workshops über  $\lceil \sqrt{3} \rceil = \lceil 1.73 \rceil = 2$  Zeitslots gehen. Bei einer größeren Anzahl an Zeitslots macht es jedoch keinen Sinn, Workshops zwei Drittel der Zeitslots occupieren zu lassen. Bei  $t_{max} = 13$  ergibt die Besetzungsquote eine Maximaldauer von 4 Zeitslots. Für jeden Workshop wird dann die individuelle Dauer zufällig aus dem Intervall zwischen 1 und der Maximalanzahl Zeitslots gewählt.
- Wenn für jeden Workshop die Dauer gewählt ist, muss noch der Anfangszeitlot gewählt werden, um die komplette zeitliche Information für jeden Workshop zu haben. Eine Möglichkeit der Wahl des Anfangszeitlots für einen Workshop  $w$  mit der bereits gewählten Dauer  $dauer_w$  ist das zufällige Ziehen eines Zeitslots aus  $\{1, \dots, t_{max} - dauer_w\}$ . Dies führt allerdings insbesondere bei einer größeren Anzahl an Zeitslots zu sehr verteilten Anfangszeitpunkten für die Workshops, was wiederum die Kombinierbarkeit der Workshops stark einschränkt und außerdem nicht repräsentativ für praktisch relevante Fälle ist. Es wurde daher eine alternative Methode der Wahl der Anfangszeitlots entwickelt.

Nur eine bestimmte Untermenge der Zeitslots wird als möglicher Startzeitlot für Workshops ausgewählt. Betrachten wir beispielsweise  $t_{max} = 13$ , die maximale Dauer der Workshops ist 4 Zeitslots. Wir wählen nun die Zeitslots  $\{1, 4, 8, 9, 12\}$  als mögliche Startzeitlots aus. Jeder Workshop startet also in einem dieser Zeitslots. Dies spiegelt die praktischen Fälle besser wider, wie auch das Beispiel des Schnuppertags zeigt, da es zwar oft Workshops geben mag, die unterschiedlich enden, aber meistens gibt es einige, recht einheitliche Startzeiten für Workshops.

Die Startzeitlots müssen nun zum einen so gewählt werden, dass auf Grund der maximalen Dauer der Workshops jeder Zeitslot auch von einem Workshop belegt werden kann. Wäre die Menge der Startzeitlots beispielsweise  $\{1, 6, 12\}$ , so würden die Zeitslots 10 und 11 nie belegt werden können, da Workshops nur in Zeitslot 6 starten können und maximal vier Zeitslots belegen (also 6,7,8,9). Ebenfalls muss

Zeitslot 1 immer ein möglicher Startzeitslot sein, da dieser Zeitslot ansonsten von keinem Workshop genutzt werden könnte und somit für die Modellierung sinnlos wäre.

Die Menge der Startzeitslots wird daher zunächst auf  $\{1\}$  gesetzt. Es wird dann zufällig eine Zahl zwischen 1 und der maximalen Dauer der Workshops gezogen. Für  $t_{max} = 13$  ziehen wir beispielsweise eine  $3 \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Der nächste Startzeitslot ist dann der höchste, bisher vorhandene plus 3, wir haben also dann die Menge der Startzeitslots erweitert auf  $\{1, 4\}$ . Es werden nun so lange zufällig weitere Startzeitslots gewählt, bis der höchste Startzeitslot im Intervall  $[t_{max} - \text{maximale Dauer}, t_{max}]$  liegt. Dann können durch die gewählten Startzeitslots alle vorhandenen Zeitslots durch Workshops belegt werden, und es wird gleichzeitig eine gewisse Homogenität bei der zeitlichen Verteilung der Workshops erreicht.

- Es wurden Wahrscheinlichkeiten angegeben, mit der ein Workshop sich in einer Äquivalenzklasse mit  $x$  anderen Workshops befindet. Hierfür wurden zwei verschiedene Fälle genommen, um den Einfluss der Äquivalenzklassenstruktur auf die Problemlösbarkeit zu sehen.

**Fall 1** enthält Workshopprobleme mit den folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- 25%, dass ein Workshop in einer Äquivalenzklasse der Größe zwei ist,
- 11,4%, dass ein Workshop in einer Äquivalenzklasse der Größe drei ist und
- 5%, dass ein Workshop in einer Äquivalenzklasse der Größe vier ist.

**Fall 2** definiert sehr viel niedrigere Wahrscheinlichkeiten und damit weniger Workshops, für die es weitere äquivalente Workshops gibt:

- 9,3%, dass ein Workshop in einer Äquivalenzklasse der Größe zwei ist,
- 1%, dass ein Workshop in einer Äquivalenzklasse der Größe drei ist und
- 0.1%, dass ein Workshop in einer Äquivalenzklasse der Größe vier.

Für jeden noch nicht in eine Äquivalenzklasse eingeteilten Workshop wird eine Zufallszahl gezogen, die bestimmt, welcher Größe die Äquivalenzklasse dieses Workshops ist. Die Äquivalenzklasse wird dann entsprechend mit weiteren Workshops aufgefüllt, bis sie ihre geforderte Größe erreicht. Diese weiteren Workshops werden zufällig aus der Menge der restlichen, noch nicht zugeteilten Workshops gewählt.

Die Zahlen wurden gewählt, da sie verschiedene praktische Situationen widerspiegeln, wobei die genauen Werte durch die Implementierung des Ziehungsmechanismus bedingt sind. Fall 1 orientiert sich an den Erfahrungen der beschriebenen praktischen Problemstellungen (siehe Abschnitt 4.4.1 und 4.4.2), bei denen insgesamt ungefähr die Hälfte der Workshops mit mindestens einem anderen äquivalent waren, es keine Äquivalenzklassen mit mehr als 4 Workshops gab und der Großteil der Äquivalenzklassen zwei Workshops enthielt. Die Wahrscheinlichkeiten von Fall 1 ergeben für 41.5% der Workshops eine Äquivalenzklasse mit mehr als einem Element, so dass sich die Äquivalenzbedingungen in der Problemstellung deutlich niederschlagen. Fall 2 entspricht Veranstaltungen mit sehr wenigen, äquivalenten Workshops und zeigt den Einfluss der Anzahl der entsprechenden Nebenbedingungen auf die Lösbarkeit. Die Zahlen sind empirisch bisher nicht belegt, die Situation ist dennoch denkbar für Veranstaltungen mit wenigen, zentralen Workshops.



- Die Anzahl der Teilnehmer wird so gewählt, dass es genügend Workshopplätze gibt, so dass jeder Teilnehmer die geforderte Mindestanzahl von Workshops besuchen kann. Ein Parameter gibt die anteilige Auslastung der Workshopplätze durch Teilnehmer an, er ist auf 0.7 gesetzt worden. Es werden also so viele Teilnehmer erzeugt, dass die Summe der Mindestanzahl an zu besuchenden Workshops dieser Teilnehmer mindestens 70% der zur Verfügung stehenden Plätze ausfüllen. Da die zeitlichen Einschränkungen bedingen, dass nicht jeder Teilnehmer jeden Workshop besuchen kann, und Workshops wiederum nur in bestimmten Kombinationen besucht werden dürfen, würde eine zu hohe Auslastung zu sehr vielen unlösbaren Problemen führen. In der Praxis können durchaus größere Auslastungen vorkommen, im Idealfall sogar 100%, allerdings wird dann im Vorherein darauf geachtet, dass diese Plätze auch von den Teilnehmern belegt werden können, d.h. dass zu jedem Zeitpunkt genügend Teilnehmer anwesend sind, um die zur Verfügung stehenden Plätze zu belegen etc. Diese Abhängigkeiten können jedoch bei zufällig generierten Problemen nicht beachtet werden, daher wird eine etwas niedrigere als in der Praxis zu beobachtende Auslastung gewählt, insbesondere in Zusammenhang mit der möglichen Abwesenheit der Teilnehmer.
- Jeder Teilnehmer hat eine Mindestanzahl an Workshops zu besuchen. Für jeden Teilnehmer wird diese Anzahl aus einem Intervall möglicher Werte zufällig gewählt. Der minimale, zugelassene Wert ist ein Workshop. Der maximale Wert des Intervalls ist abhängig von der Anzahl der Zeitslots, der durchschnittlichen Dauer der Workshops und der Anzahl der Startzeitslots für die Workshops. Als maximaler Wert wird zunächst die Anzahl der Zeitslots  $t_{max}$  geteilt durch die durchschnittliche Dauer der Workshops, die sich aus der minimalen und maximalen Dauer der Workshops ergibt. Für eine minimale Workshopdauer von 1 Zeitslot und eine maximale von 3 Zeitslots ergibt sich eine durchschnittliche Dauer von 2 Zeitslots für die Workshops. Bei einer Anzahl von 10 Zeitslots ergibt sich also zunächst die maximale Anzahl zu besuchender Workshops zu 5.

Dieser Wert darf jedoch nicht größer sein als die Anzahl der Startzeitslots für die Workshops. Workshops, die im selben Startzeitslot starten, sind nicht miteinander kombinierbar. Sind also 3 Startzeitslots vorhanden, so können maximal 3 Workshops von den Teilnehmern besucht werden, eine höhere Anzahl würde ein unlösbares Problem generieren. Ist also die bisherige, maximale Anzahl zu besuchender Workshops größer als die Anzahl der Startzeitslots, so wird sie auf die Anzahl der Startzeitslots herabgesetzt.

Um den Besuch von wenigen Workshops gegenüber dem vieler Workshop zu begünstigen und so möglichst wenig unlösbare Probleme zu generieren, wird der Besuch von  $x$  Workshops nur mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/x$  akzeptiert. So wird der Besuch von nur einem Workshop immer akzeptiert. Je mehr Workshops ein Teilnehmer besuchen soll, desto geringer ist die Akzeptanzwahrscheinlichkeit für diesen Wert.

Es werden so lange weitere Werte für die minimale Anzahl von Workshopbesuchen gezogen, bis die geforderte Auslastung von Workshopplätzen erreicht ist. Die Anzahl gezogener Werte ergibt gleichzeitig die Anzahl der Teilnehmer des Workshopzuteilungsproblems.

- Es muss nun noch die Anwesenheit für die Teilnehmer erzeugt werden. Auch hierfür

wird ein Intervall abhängig von der Anzahl der erzeugten Zeitslots angegeben. Die minimale Anwesenheit wird auf 80% der vorhandenen Zeitslots gesetzt, die maximale auf 100%. Ungerade Werte werden aufgerundet. Bei fünf Zeitslots ist also jeder Teilnehmer vier oder fünf Zeitslots lang anwesend.

Eine zufällige Zuteilung der Anwesenheit könnte jedoch wiederum sehr viele unlösbare Probleme erzeugen. Man betrachte folgendes Beispiel: wir haben  $t_{max} = 5$  Zeitslots, die Workshops starten in 3 verschiedenen Startzeitslots, dies seien  $\{1, 2, 4\}$ . Wenn ein Teilnehmer nun bereits eine Mindestanzahl von 3 Workshops besuchen soll, wobei er nur in 4 der 5 Zeitslots anwesend ist, so wird das Problem in jedem Fall unlösbar, sofern der nicht besuchte Zeitslot einer der Startzeitslots ist. Um dieses Problem zu umgehen, sind die folgenden Betrachtungen notwendig.

**Definition 4.1** Für eine gegebene Anzahl an Zeitslots  $t_{max}$  und eine Menge von  $n$  Startzeitslots  $\{t_{s_1}, t_{s_2}, \dots, t_{s_n}\}$  mit  $t_{s_j} < t_{s_{j+1}} \forall j = 1, \dots, n - 1$  heißt die Menge  $\{t_i \mid t_{s_j} \leq t_i < t_{s_{j+1}}\}$  für  $j < n$  bzw.  $\{t_i \mid t_{s_j} \leq t_i \leq t_{max}\}$  für  $j = n$  das durch  $t_{s_j}$  aufgespannte **Startzeitslotintervall**.

Ein Startzeitslotintervall zu einem Startzeitslot umfasst also diesen Startzeitslot und alle folgenden Zeitslots, die kleiner als das nächst größere Startzeitslotintervall sind, bzw. alle folgenden Zeitslots, wenn das betrachtete Startzeitslotintervall das größte ist. Für das Beispiel ergeben sich also die drei Startzeitslotintervalle  $\{1\}$ ,  $\{2, 3\}$ ,  $\{4, 5\}$ .

**Definition 4.2** Gilt für einen Teilnehmer  $p \in P$  und ein Startzeitslotintervall  $\{t_i, \dots, t_n\}$ , dass  $b_{pt_j} = 0$  für ein  $t_j \in \{t_i, \dots, t_n\}$ , so heißt das Startzeitslotintervall für diesen Teilnehmer **blockiert**.

Ein Startzeitslotintervall heißt also für einen Teilnehmer blockiert, wenn dieser in mindestens einem der im Intervall enthaltenen Zeitslots abwesend ist. Die Abwesenheit bedeutet, dass der Teilnehmer einige, vielleicht sogar alle im entsprechenden Startzeitslot startenden Workshops nicht besuchen kann. Betrachten wir das Startzeitslotintervall  $\{2, 3\}$  zum Startzeitslot 2. Ist ein Teilnehmer in Zeitslot 3 abwesend, so kann er nur diejenigen in Startzeitslot 2 startenden Workshops besuchen, die nur über einen Zeitslot dauern. Alle längeren Workshops kann er nicht mehr besuchen. Ist er im Startzeitslot selbst abwesend, also in Zeitslot 2, so kann er sämtliche Workshops, die in diesem Zeitslot starten, nicht besuchen. Wieviele Workshops also tatsächlich durch die Blockierung eines Startzeitslotintervalls für einen Teilnehmer aus der Auswahl herausfallen, hängt vom nicht besuchten Zeitslot ab. Allerdings wird dieser Unterschied bei der Feststellung der Blockierung nicht betrachtet.

Die Anwesenheit der Teilnehmer wird nun so gewählt, dass die Anzahl der nicht blockierten Startzeitslotintervalle immer größer oder gleich der Mindestanzahl an zu besuchenden Workshops ist. Soll nun ein Teilnehmer mindestens 2 Workshops besuchen, so ist seine Abwesenheit in den Zeitslots 2 und 3 erlaubt, ebenso ist seine Abwesenheit in Zeitslot 1 erlaubt, aber nicht die Abwesenheit in Zeitslot 2 und 5, da dies zwei verschiedene Startzeitslotintervalle blockiert und somit nur eines als nicht blockiert übrig bleibt. Es müssen jedoch mindestens so viele nicht

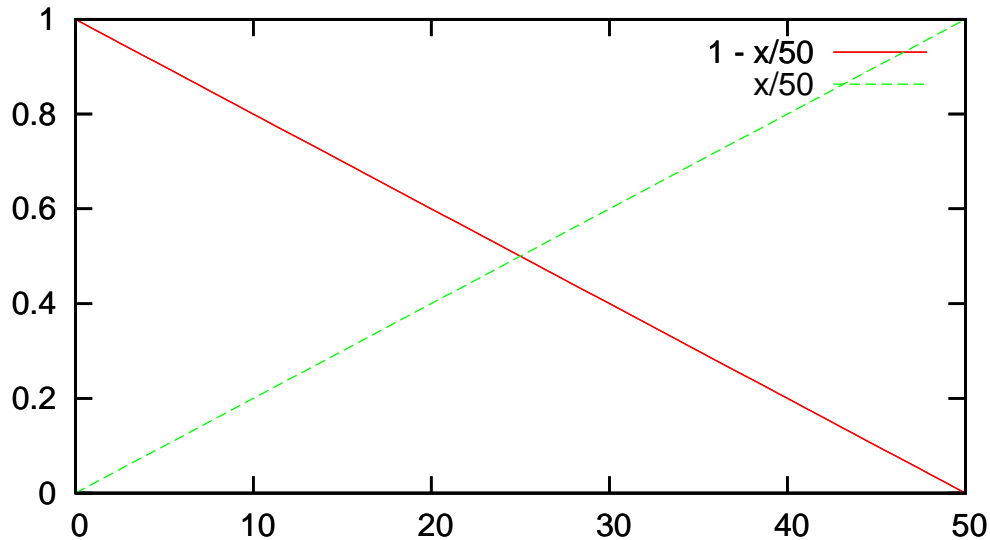


Abbildung 4.12: Wahrscheinlichkeiten zur Akzeptanz einer positiven/negativen Präferenz abhängig vom Workshopindex (beispielhaft für  $w_{max} = 50$ )

blockierte Intervalle resultieren, wie die geforderte Mindestanzahl an zu besuchenden Workshops vorgibt, in diesem Fall also 2.

Konkret wird die Anwesenheit folgendermaßen gewählt. Zunächst wird für jeden Teilnehmer die Anzahl zu besuchender Zeitslots zufällig aus dem zulässigen Intervall gewählt. Es wird dann zufällig ein Zeitslot gewählt, an dem der Teilnehmer abwesend sein soll. Wird durch diese Abwesenheit ein neues Startzeitslotintervall blockiert, so wird diese Wahl nur akzeptiert, falls die Anzahl nicht blockierter Intervalle größer oder gleich der Mindestanzahl an besuchten Workshops für diesen Teilnehmer bleibt. Ist dies nicht der Fall, so wird die Abwesenheit nicht akzeptiert und es wird kein neuer Zeitslot gezogen. Es kann nicht mit Sicherheit gesagt werden, ob noch ein weiterer Zeitslot existiert, für den die Abwesenheit erlaubt ist, da dies von den bereits blockierten Startzeitslotintervallen abhängt sowie von deren Größen. Im obigen Beispiel würde eine initiale Wahl der Abwesenheit in Zeitslot 1 bedeuten, dass keine weitere Abwesenheit erlaubt wäre, während die Abwesenheit in Zeitslots 2 noch die zusätzliche Abwesenheit in Zeitslot 3 zulässt.

- Für die generierten Probleme wurden die Präferenzen für Workshops innerhalb derselben Äquivalenzklasse kopiert, und es konnten je zwei Präferenzen aus der Menge  $\{1, 4, 9, 16, 71, 84, 99, 116\}$  angegeben werden, bei einer Standardpräferenz von 25. Praktische Erfahrungen haben gezeigt, dass eine größere Auswahl für Teilnehmer zu aufwendig und komplex wäre. Dies hat sich bereits beim Mädchen-Techniktag gezeigt, da ein Anteil der Teilnehmerinnen nur eine Untermenge der möglichen Präferenzen zugeteilt hat. Diese Teilnehmerinnen wollten sich also entweder lieber “überraschen” lassen oder hatten Mühe, die Workshops ausreichend zu studieren und sich Präferenzen zu bilden.

Die Präferenzen wurden nicht gleichmäßig auf die Workshops verteilt, sondern so, dass es beliebte und weniger beliebte Workshops gab. Jede Präferenz eines Teilnehmers wurde nacheinander einem Workshop zugewiesen. Dazu wurde zu einer Präferenz ein Workshop zufällig aus der Menge der noch nicht bewerteten Workshops

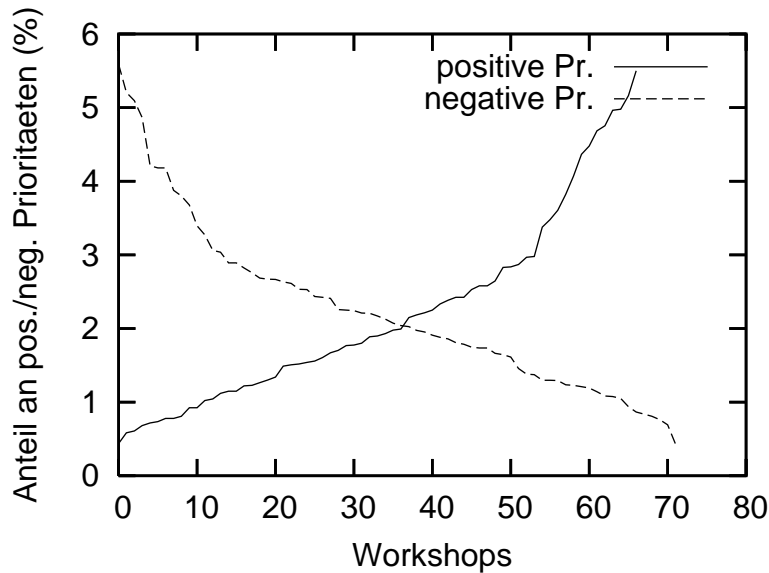


Abbildung 4.13: Empirische Verteilung der positiven und negativen Präferenzen ( $x\%$  positive Präf. heißt, auf diesen Workshop entfielen im Schnitt über alle Veranstaltungen, bei denen der Workshop teilnahm,  $x\%$  der gesamten positiven Präferenzen)

gezogen. Der Index des Workshops wurde zur Berechnung der Akzeptanzwahrscheinlichkeit der betreffenden Präferenz verwendet, die Wahrscheinlichkeiten sind für positive und negative Präferenzen am Beispiel von 50 Workshops in Abb. 4.12 wiedergegeben. Die Akzeptanzwahrscheinlichkeit einer positiven Präferenz berechnet sich für Workshop  $w$  als  $1 - (w/w_{max})$  (rote, durchgezogene Kurve) und für eine negative Präferenz (grüne, gestrichelte Kurve) entsprechend als  $w/w_{max}$ . Somit sind Workshops mit kleinem Index beliebt und Workshops mit großem Index unbeliebt. Der lineare Zusammenhang ergibt sich aus den empirischen Daten der Mädchen-Techniktage von drei Jahren, die in Abb. 4.13 dargestellt sind. Für jeden Workshop wurde dafür berechnet, welcher Anteil der positiven bzw. negativen Präferenzen auf ihn in jeder Veranstaltung entfiel. Da Workshops wiederholt angeboten wurden, wurde für jeden Workshop der mittlere Anteil über alle Veranstaltungen, in denen dieser präsent war, gebildet. Die Workshops wurden nach Beliebtheit sortiert und dargestellt. Der beliebteste Workshop konnte im Schnitt 5.5% aller positiven Präferenzen einer Veranstaltung für sich verbuchen, während im Schnitt nur 0.5% der negativen Präferenzen auf ihn entfielen. Die Abweichung von der linearen Verteilungskurve ist über weite Bereiche vernachlässigbar, so dass diese Approximation der Präferenzverteilung die praktischen Erfahrungen ausreichend genau widerspiegelt.

#### 4.5.1 Ergebnisse mit CPLEX

Die Ergebnisse des empirischen Versuchs sind in Tab. 4.3 und Tab. 4.4 dargestellt. Es wurden insgesamt knapp 1000 Workshopzuteilungsprobleme generiert und gelöst, davon 476 bei einer größeren Größe der Äquivalenzklassen (Fall 1, Tab. 4.3) und 489 bei wenigen Äquivalenzklassen mit mehr als einem Workshop (Fall 2, Tab. 4.4).

Die Tabellen zeigen in der ersten Spalte, welche Anzahl der Probleme direkt mit

Ergebnisse für  $t_{max} \leq 16$ 

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$    | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|--------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 297 (62%)  | 1.80 (1.76) | 7.90 (4.22)  | 55 (23)   | 374 (197) |
| optimal, Branch & Cut | 141 (30%)  | 5.28 (6.51) | 11.38 (3.52) | 67 (22)   | 360 (139) |
| unlösbar              | 38 (8%)    | 0.74 (1.10) | 10.92 (3.96) | 39 (20)   | 224 (138) |
| $\Sigma$              | 476 (100%) | 2.75 (4.17) | 9.17 (4.33)  | 57 (24)   | 358 (182) |

Ergebnisse für  $t_{max} \leq 12$ 

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$   | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 243 (71%)  | 1.92 (1.84) | 6.48 (3.24) | 55 (23)   | 398 (202) |
| optimal, Branch & Cut | 76 (22%)   | 6.50 (8.16) | 8.63 (2.30) | 70 (21)   | 413 (138) |
| unlösbar              | 22 (6%)    | 1.05 (1.35) | 8.05 (2.58) | 44 (23)   | 275 (157) |
| $\Sigma$              | 341 (100%) | 2.89 (4.60) | 7.06 (3.15) | 57 (24)   | 394 (189) |

Ergebnisse für  $t_{max} \leq 8$ 

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$   | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 165 (77%)  | 2.22 (2.00) | 4.57 (1.87) | 57 (23)   | 450 (206) |
| optimal, Branch & Cut | 37 (17%)   | 6.59 (1.32) | 6.59 (1.32) | 70 (22)   | 442 (151) |
| unlösbar              | 13 (6%)    | 6.23 (1.31) | 6.23 (1.31) | 53 (26)   | 341 (174) |
| $\Sigma$              | 215 (100%) | 3.12 (5.26) | 5.02 (1.94) | 59 (24)   | 442 (197) |

Tabelle 4.3: Empirische Ergebnisse mit CPLEX für Fall 1: Mittelwert (Std-Abw.)

dem Simplex-Verfahren optimal lösbar waren, welche zusätzlich eines Branch and Cut-Verfahrens bedurften, um eine gültige, ganzzahlige Lösung zu erhalten und welche weiterhin aufgrund der generierten Bedingungen unlösbar waren. In Klammern hinter der Anzahl steht der Anteil an der Gesamtzahl der Probleme, dies vereinfacht die Vergleichbarkeit der Werte. Die nächste Spalte zeigt den Mittelwert und in Klammern die Standardabweichung der Zeit in Sekunden, die die Lösungsberechnung brauchte. Dies ist besonders bei einer potentiellen Integration in eine Webanwendung interessant, da übliche Timeouts nicht überschritten werden dürfen und auch die Geduld der Anwender nicht überstrapaziert werden darf, um die Akzeptanz zu gewährleisten. Die letzten drei Spalten zeigen die Durchschnittswerte und Standardabweichungen für die Anzahl der Timeslots, der Workshops und der Teilnehmer der generierten Probleme. Diese Angaben geben Hinweise darauf, welche Problemkonstellationen eher unlösbar sind und welche sich eher mit dem Simplex ganzzahlig lösen lassen.

Wie lassen sich nun die Ergebnisse interpretieren? Zunächst einmal fällt der Einfluss der Menge an äquivalenten Workshops auf. Für Fall 1 ließen sich insgesamt 62% der Probleme mit dem Simplex lösen und für 30% wurde ein Branch & Cut Verfahren benötigt, während die Zahl der mit dem Simplex lösbaren Probleme für Fall 2 auf insgesamt 82% steigt, lediglich 13% der Probleme müssen, über alle Zeitslots betrachtet, mit dem Branch & Cut Verfahren gelöst werden. Auch die Anzahl der generierten, unlösbaren Probleme nimmt leicht ab von 8% auf 5%. In der Tat scheinen die Äquivalenzbedingungen des Optimierungsproblems einen Einfluss auf die ganzzahlige Lösbarkeit des Problems zu haben, auch wenn sich dieser Einfluss nicht direkt aus den Überlegungen

Ergebnisse für  $t_{max} \leq 16$ 

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$    | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|--------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 401 (82%)  | 1.76 (1.55) | 8.63 (4.15)  | 59 (24)   | 377 (181) |
| optimal, Branch & Cut | 63 (13%)   | 3.12 (4.37) | 12.63 (3.34) | 63 (19)   | 313 (100) |
| unlösbar              | 25 (5%)    | 0.69 (0.54) | 10.92 (3.83) | 45 (16)   | 233 (94)  |
| $\Sigma$              | 489 (100%) | 1.88 (2.17) | 9.26 (4.27)  | 59 (23)   | 361 (173) |

Ergebnisse für  $t_{max} \leq 12$ 

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$   | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 315 (90%)  | 1.87 (1.63) | 7.03 (3.10) | 59 (24)   | 400 (187) |
| optimal, Branch & Cut | 23 (7%)    | 4.29 (6.72) | 8.82 (2.33) | 58 (20)   | 336 (115) |
| unlösbar              | 12 (3%)    | 0.73 (0.56) | 7.42 (2.50) | 43 (12)   | 263 (100) |
| $\Sigma$              | 350 (100%) | 1.99 (2.41) | 7.16 (3.07) | 58 (23)   | 391 (183) |

Ergebnisse für  $t_{max} \leq 8$ 

|                       | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$   | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-----------------------|------------|-------------|-------------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex      | 198 (91%)  | 1.99 (1.76) | 5.04 (1.98) | 58 (25)   | 430 (202) |
| optimal, Branch & Cut | 11 (5%)    | 4.63 (6.75) | 6.73 (1.14) | 55 (18)   | 347 (124) |
| unlösbar              | 8 (4%)     | 0.81 (0.64) | 5.88 (1.27) | 43 (12)   | 285 (111) |
| $\Sigma$              | 217 (100%) | 2.08 (2.35) | 5.15 (1.96) | 58 (24)   | 421 (199) |

Tabelle 4.4: Empirische Ergebnisse mit CPLEX für Fall 2: Mittelwert (Std-Abw.)

zur totalen Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix ergibt.

Auch die durchschnittlichen Werte für  $t_{max}$ ,  $w_{max}$  und  $p_{max}$  zeigen, welche Probleme leichter und welche schwerer zu lösen sind. Probleme mit einer geringeren Anzahl an Zeitslots und einer größeren Anzahl an Workshops und auch Teilnehmern sind tendenziell am einfachsten zu lösen. Unlösbar sind dagegen typischerweise Probleme mit einer recht großen Anzahl an Zeitslots und einer geringen Anzahl an Workshops und Teilnehmern. Dies lässt sich erklären durch die verringerte Flexibilität der Zuteilungsmöglichkeiten. Bei wenigen Workshops und Teilnehmern, wobei die Workshops durch zeitliche und Äquivalenzrestriktionen oft nicht kombinierbar sind, gibt es wenige Möglichkeiten, überhaupt eine gültige Zuteilung zu finden, und manchmal eben überhaupt keine. Gibt es mehr Workshops, so entstehen auch mehr Kombinationsmöglichkeiten und das Problem ist eher lösbar.

Die Anzahl an Workshops und Teilnehmern scheint weiterhin nicht unbedingt einen Einfluss auf die ganzzahlige Lösbarkeit mit dem Simplex-Verfahren zu haben. Lediglich für Fall 1 lässt sich beobachten, dass hauptsächlich diejenigen Probleme mit vielen Workshops eines Branch & Cut bedurften. Dies gilt jedoch nicht für Fall 2. Dies kommt wahrscheinlich daher, dass in Fall 1 bei vielen Workshops auch viele Nebenbedingungen zu den Äquivalenzklassen entstehen, während dies bei Fall 2 weniger stark der Fall ist.

Die Aufgliederung nach der Anzahl der Zeitslots zeigt ebenfalls einen deutlichen Einfluss auf die ganzzahlige Lösbarkeit mit dem Simplex. Je weiter die Grenze für die Anzahl an Zeitslots verringert wird, desto mehr Probleme sind mit dem Simplex ganz-

zahlig lösbar. Bei höchstens 8 Zeitslots sind es für Fall 1 bereits 77% der Probleme (siehe Tab. 4.3 unten), bei Fall 2 sogar 91% (siehe Tab. 4.4 unten). Diese Beobachtung bestätigt die in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen Untersuchungen. Die Anzahl der Zeitslots hat einen erheblichen Einfluss auf die Struktur der Nebenbedingungen  $e$ ), die wiederum als ausschlaggebend für die ganzzahlige Lösbarkeit gefunden wurden. Eine hohe Anzahl an Zeitslots erzeugt potentiell eine größere Menge an Nebenbedingungszeilen der Nebenbedingung  $e$ ), die wiederum diejenigen sind, die die totale Unimodularität der Nebenbedingungsmatrix verletzen. Die Anzahl der unlösbaren Probleme sinkt zwar auch mit sinkender Anzahl an Zeitslots, aber nicht ganz so deutlich verglichen mit dem prozentualen Unterschied zwischen Fall 1 und Fall 2 der Äquivalenzklassenstruktur.

Diese Beobachtung lässt erwarten, dass bei einer Reduktion der Anzahl der maximal erlaubten Zeitslots der generierten Workshopzuteilungsprobleme der Anteil der mit dem Simplex lösbaren Probleme steigt. Aus diesem Grund wurde untersucht, wie sich die Lösbarkeit der Probleme aufteilt, wenn man die maximale Anzahl erlaubter Zeitslots auf 12 reduziert, was immer viele, für die Praxis relevante Probleme einschließt. Die Ergebnisse sind in den mittleren Tabellen in Tab. 4.3 und 4.4 dargestellt. Von den erzeugten Problemen waren insgesamt 341 bzw. 350 mit einer Anzahl Zeitslots von maximal 12. Hiervon konnten 71% bzw. 90% der Probleme erfolgreich mit dem Simplex Verfahren gelöst werden, abhängig von der Äquivalenzklassenstruktur. Wiederum sind es diejenigen Probleme mit einer hohen Anzahl an Zeitslots, die mit dem Branch & Cut Verfahren gelöst werden.

Da die Anzahl von 8 Zeitslots besonders für eintägige Workshopveranstaltungen interessant ist, wurde die Verteilung ebenfalls für die Probleme mit bis zu 8 Zeitslots berechnet, siehe jeweils die untere Tabelle in Tab. 4.3 und 4.4. Hier sind es insgesamt 215 bzw. 217 Workshopzuteilungsprobleme. 77% bzw. 91% ließen sich mit dem Simplex-Verfahren lösen, also bei komplexer Äquivalenzklassenstruktur bereits über drei Viertel aller Probleme. Für Fall 2 ließen sich lediglich 5% der Probleme nur mit dem Branch & Cut Verfahren lösen, weitere 4% waren unlösbar und daher für die Praxis nicht relevant. Auch hier lässt sich wieder beobachten, dass die durchschnittliche Anzahl an Zeitslots für die Branch & Cut Probleme deutlich höher ist als für die mit dem Simplex ganzzahlig lösbaren Probleme.

Insbesondere für  $t_{max} \leq 8$  in Tab. 4.4 zeigt sich, dass sich eine hohe Anzahl an Teilnehmern positiv auf die Lösbarkeit auszuwirken scheint. Dies ist ebenfalls leicht zu erklären. Eine hohe Anzahl an Teilnehmern entsteht immer dann, wenn pro Teilnehmer eine geringe Anzahl an Workshops mindestens zu besuchen ist, diese Situation entsteht insbesondere dann oft, wenn es wenige Zeitslots gibt, da ein Teilnehmer nicht mehr Workshops besuchen kann, als es Zeitslots gibt. Wenn jeder Teilnehmer aber nur wenige Workshops besuchen muss, so entstehen weniger Probleme mit der Kombinierbarkeit verschiedener Workshops, was zum einen, wie bereits festgestellt, weniger unlösbare Probleme generiert, aber auch die Schwere der Lösbarkeit des Problems zu verringern scheint. Diese Beobachtung lässt sich aber schwer pauschalisieren, die Standardabweichungen zeigen, dass sich auch viele Probleme mit geringer Teilnehmerzahl mit dem Simplex lösen ließen bzw. umgekehrt solche mit hoher Teilnehmerzahl eines Branch & Cut bedurften.

Eine weitere, interessante Tatsache fällt beim Vergleich der Werte unabhängig vom Lösungstyp auf. Bei Zeitslots bis 16 beträgt die durchschnittliche Zeit zur Bearbeitung des Problems 2.75 Sekunden, bei einer Standardabweichung von 4.17 Sekunden (Fall 1). Sowohl Mittelwert als auch Standardabweichung steigen bei Verringerung der zulässi-

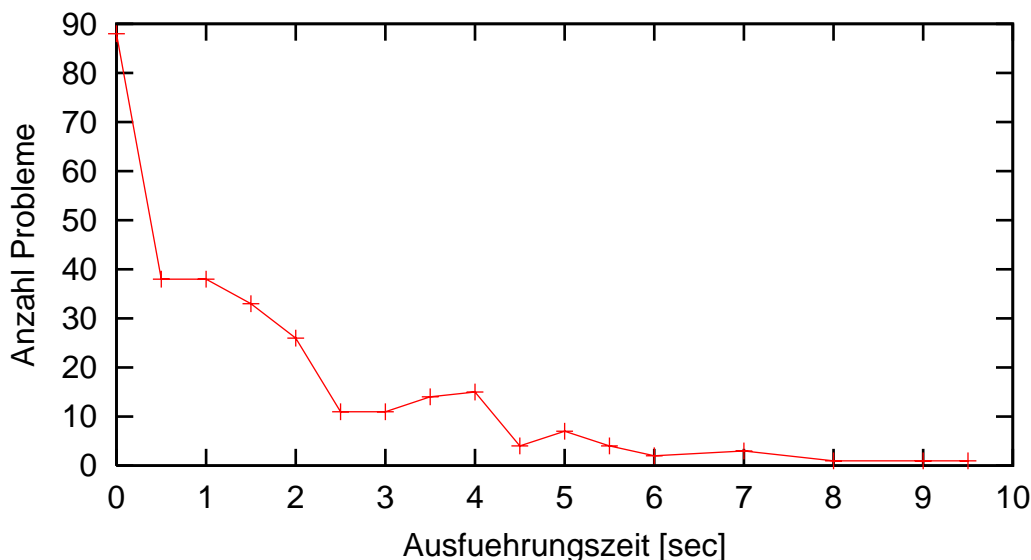


Abbildung 4.14: Anzahl der mit dem Simplex optimal gelösten Workshopprobleme pro Ausführungszeitfenster von 0.5 Sekunden (Fall 1)

gen, maximalen Anzahl an Zeitslots. Die entsprechende Tendenz ist auch beim Vergleich der Zeiten abhängig vom Lösungsverfahren zu beobachten, und zwar sowohl bei Fall 1 als auch bei Fall 2. Es ist unwahrscheinlich zu vermuten, dass eine größere Anzahl an mit Branch & Cut zu lösenden Problemen einhergeht mit einer im Durchschnitt geringeren Ausführungszeit, da Branch & Cut notwendigerweise, da es auf dem Ergebnis des Simplex-Verfahrens aufsetzt, länger braucht. Es ist eher zu vermuten, dass sich in den Daten einige zeitliche Ausreißer finden, die bei einer geringen Anzahl an Zeitslots trotzdem eine lange Ausführungsdauer hatten. Dies würde auch die größere Standardabweichung bei den niedrigeren Zeitslots erklären.

In den Abb. 4.14 bis 4.17 sind zu den Ausführungszeiten, aufgeführt als Intervalle von 0.5 Sekunden, die Anzahl der Workshopzuteilungsprobleme gezeigt, die während einer Zeit im gegebenen Intervall mit der jeweiligen Methode gelöst wurden. Die Ausführungszeitfenster sind jeweils mit ihren Startzeitpunkten eingetragen. Im Vergleich der Zeiten zwischen Simplex und Branch & Cut lässt sich zunächst feststellen, dass beim Simplex die Anzahl der gelösten Probleme bei zunehmender Zeit relativ kontinuierlich abnimmt. Bei den Branch & Cut Problemen ist diese Abnahme nicht zu beobachten, vielmehr entsteht eine teilweise recht gezackte Kurve. Dies lässt sich erklären, wenn man sich vor Augen führt, dass die Branch & Cut Methode quasi auf Glück beim Absuchen und Verkleinern des Lösungsraums beruht. Daher können die Ausführungszeiten stärker variieren.

Wie aber lässt sich nun erklären, dass die mittleren Ausführungszeiten bei Betrachtung niedriger Zeitslots zu- statt abnehmen? Um dies zu erläutern, sind in Tab. 4.5 Detailangaben zu denjenigen Problemen mit den längsten Ausführungszeiten aufgeführt, aufgeteilt nach Lösungsmethode und Fall.

Zunächst lässt sich feststellen, dass bis auf eine Ausnahme alle Probleme weniger als 8 Zeitslots hatten, was bedeutet, dass diese Probleme in allen drei Statistiken auftauchen. Da in den Statistiken mit maximal 12 bzw. 8 Zeitslots (siehe Tab. 4.3 und 4.4, Mitte und unten) weniger Zuteilungsprobleme insgesamt auftauchen, die Ausrei-



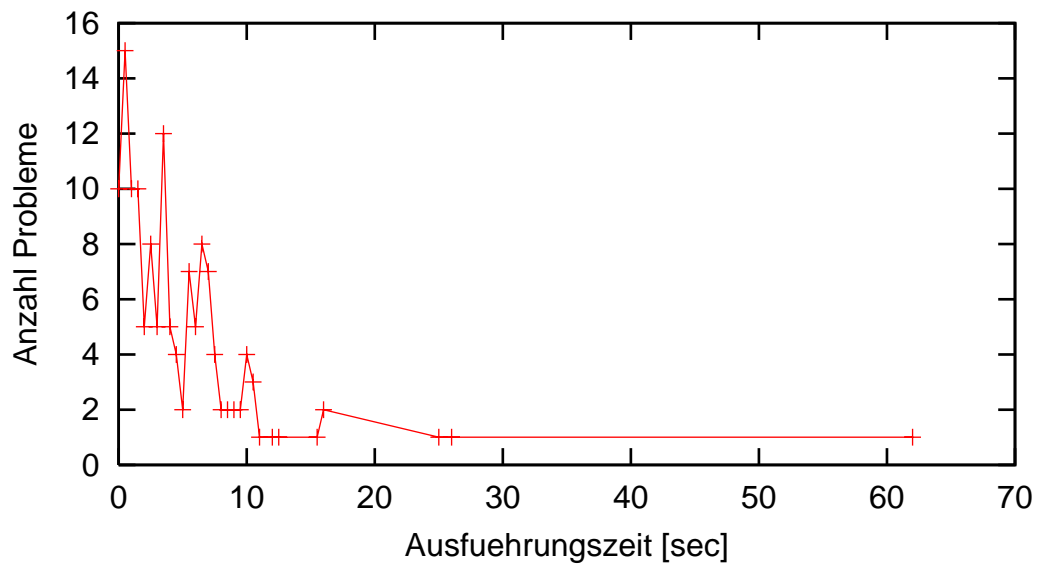


Abbildung 4.15: Anzahl der mit dem Branch & Cut optimal gelösten Workshopprobleme pro Ausführungszeitfenster von 0.5 Sekunden (Fall 1)

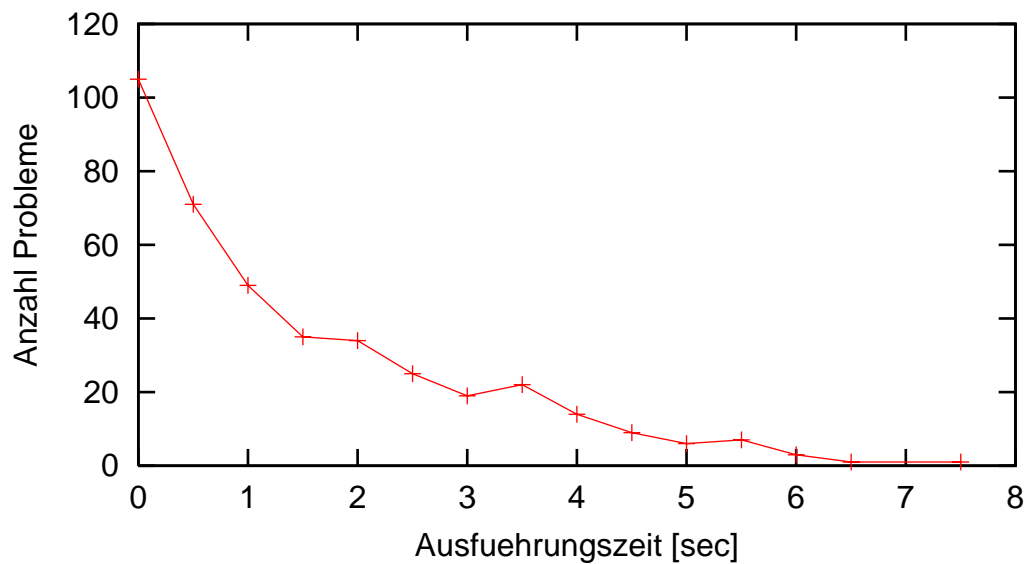


Abbildung 4.16: Anzahl der mit dem Simplex optimal gelösten Workshopprobleme pro Ausführungszeitfenster von 0.5 Sekunden (Fall 2)

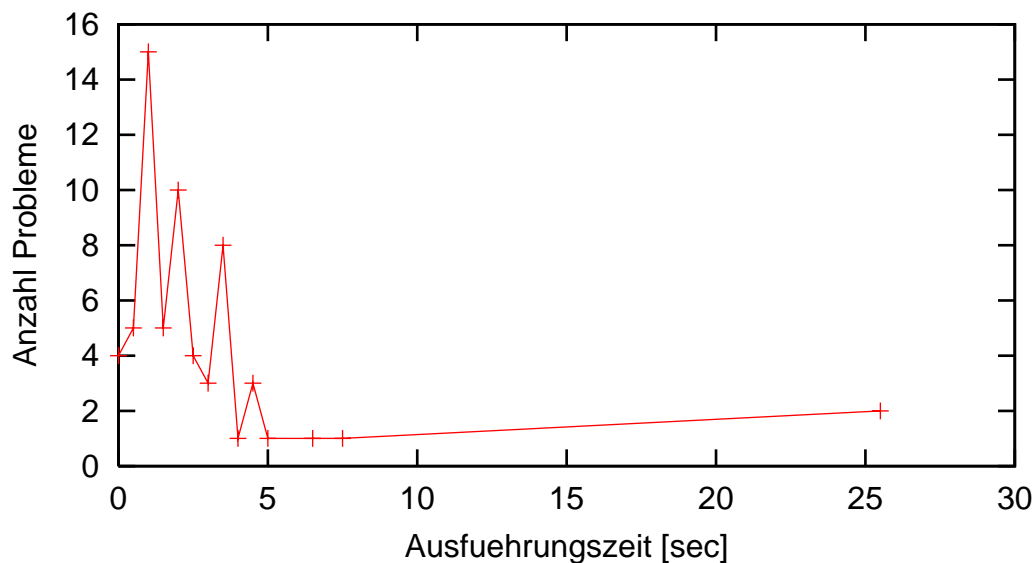


Abbildung 4.17: Anzahl der mit dem Branch & Cut optimal gelösten Workshopprobleme pro Ausführungszeitfenster von 0.5 Sekunden (Fall 2)

| Methode | Fall   | Zeit  | $t_{max}$ | $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Var   | (SA)     | #NB    | (SA)    |
|---------|--------|-------|-----------|-----------|-----------|--------|----------|--------|---------|
| Simplex | Fall 1 |       |           |           |           | 22,746 | (20,230) | 5,590  | (3738)  |
|         |        | 9.98  | 3         | 93        | 763       | 70,959 |          | 11,538 |         |
|         |        | 9.31  | 4         | 98        | 784       | 76,832 |          | 12,642 |         |
|         |        | 8.40  | 3         | 100       | 820       | 82,000 |          | 15,680 |         |
| B&C     | Fall 1 |       |           |           |           | 23,551 | (15,079) | 6,920  | (3393)  |
|         |        | 26.42 | 7         | 93        | 578       | 48,770 |          | 11,191 |         |
|         |        | 25.24 | 7         | 93        | 613       | 51,966 |          | 11,388 |         |
|         |        | 62.45 | 3         | 100       | 816       | 81,600 |          | 15,604 |         |
| Simplex | Fall 2 |       |           |           |           | 23,667 | (19,148) | 4,026  | (2,227) |
|         |        | 7.65  | 5         | 96        | 740       | 62,481 |          | 8,623  |         |
|         |        | 6.74  | 6         | 90        | 600       | 48,489 |          | 5,023  |         |
| B&C     | Fall 2 |       |           |           |           | 18,311 | (10,396) | 4,396  | (1,791) |
|         |        | 25.90 | 10        | 95        | 497       | 39,750 |          | 5,933  |         |
|         |        | 25.55 | 6         | 98        | 642       | 54,543 |          | 5,821  |         |

Tabelle 4.5: Zuteilungsprobleme mit den längsten Ausführungszeiten

|                         | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$ | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-------------------------|------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex        | 181 (60%)  | 40 (51)     | 8 (4)     | 65 (30)   | 466 (246) |
| optimal, Branch & Cut   | 28 (9%)    | 67 (82)     | 11 (4)    | 69 (28)   | 432 (222) |
| lösbar, Branch & Cut    | 63 (21%)   | 235 (88)    | 10 (3)    | 78 (23)   | 477 (172) |
| Zeitlimit, Simplex      | 8 (3%)     | 300 (0)     | 9 (3)     | 113 (3)   | 711 (134) |
| Zeitlimit, Branch & Cut | 7 (2%)     | 300 (0)     | 11 (3)    | 103 (9)   | 592 (109) |
| unlösbar                | 13 (4%)    | 1 (2)       | 13 (3)    | 41 (18)   | 238 (128) |
| $\Sigma$                | 300 (100%) | 95 (111)    | 9 (4)     | 69 (30)   | 465 (230) |

Tabelle 4.6: Empirische Ergebnisse für  $t_{max} \leq 16$ , SAS: Mittelwert (Std-Abw.)

ßer jedoch weiterhin darin enthalten sind, steigt die mittlere Ausführungszeit ebenso wie die Standardabweichung verglichen mit den Werten über alle generierten Probleme, dargestellt jeweils in den oberen Tabellen.

Wieso ausgerechnet Probleme mit eher wenigen Zeitslots die längsten Lösungszeiten beanspruchen, zeigen die Werte für die Anzahl der Workshops und Teilnehmer in Tab. 4.5. Diese Probleme zeichnen sich durch eine sehr große Anzahl an Workshops aus, sie haben alle zwischen 90 und 100 Workshops, wobei 100 die obere Grenze ist. Die wenigen Zeitslots bedingen, dass jeder Teilnehmer nur wenige Workshops besuchen kann, so dass eine große Anzahl an Teilnehmern generiert wird, um die nötige Auslastung der vielen Workshops mit den entsprechend vielen Plätzen zu erzeugen. Die große Menge an Workshops und Teilnehmern erzeugt eine sehr große Menge an Nebenbedingungen sowie Variablen, und dies bedingt eine lange Ausführungszeit sowohl für den Simplex als auch für das Branch & Cut Verfahren. Um dies zu bestätigen, enthält Tab. 4.5 ebenfalls die zu den jeweiligen Problemen gehörigen Anzahlen an Variablen ( $\#Var$ ) bzw. Nebenbedingungen ( $\#NB$ ). Für jeden Fall ist in der ersten Zeile ebenfalls die durchschnittliche Anzahl Variablen und Nebenbedingungen über alle Probleme gelistet, zusammen mit der Standardabweichung in Klammern (SA). Man sieht deutlich, dass die Größe der gelisteten Zuteilungsprobleme als Ausreißer nach oben zu bewerten sind, die Werte befinden sich allesamt nicht mehr innerhalb der Grenze der Standardabweichung, sondern deutlich darüber.

Es bleibt also zusammen zu fassen, dass eine geringe Anzahl an Zeitslots bei den generierten Workshopzuteilungsproblemen zum einen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit einhergeht, dass das Problem mit dem Simplex ganzzahlig lösbar ist, bei einer großen Anzahl an Workshops werden jedoch sehr viele Teilnehmer erzeugt und damit viele Variablen und Nebenbedingungen des Optimierungsproblems, was zu einer relativ langen Lösungszeit verglichen mit anderen Problemen führt. Es ist jedoch ebenfalls wichtig festzustellen, dass eine Lösungszeit von 25 Sekunden in jedem Fall im akzeptablen Bereich sogar für Webanwendungen liegt. Lediglich der Ausreißer von über 60 Sekunden würde bei den Standardeinstellungen für HTTP Verbindungstimeouts (30 - 60 Sekunden) zu Problemen führen. Betrachtet man die durchschnittlichen Ausführungszeiten über alle Probleme von 2.75 bzw. 1.88 Sekunden, so wird deutlich, dass die Ausführungszeit des Workshopzuteilungsproblems auf der verwendeten Hardware im Allgemeinen keine Probleme bereitet, auch unabhängig von einer Webanwendung.

|                         | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$ | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-------------------------|------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex        | 139 (64%)  | 39 (47)     | 7 (3)     | 66 (29)   | 507 (246) |
| optimal, Branch & Cut   | 20 (9%)    | 76 (86)     | 9 (3)     | 72 (29)   | 474 (229) |
| lösbar, Branch & Cut    | 44 (20%)   | 246 (82)    | 9 (3)     | 80 (23)   | 517 (178) |
| Zeitlimit, Simplex      | 6 (3%)     | 300 (0)     | 7 (2)     | 113 (4)   | 754 (124) |
| Zeitlimit, Branch & Cut | 5 (2%)     | 300 (0)     | 10 (2)    | 103 (10)  | 621 (116) |
| unlösbar                | 3 (1%)     | 3 (3)       | 9 (1)     | 68 (13)   | 431 (112) |
| $\Sigma$                | 217 (100%) | 97 (111)    | 7 (3)     | 71 (29)   | 514 (230) |

Tabelle 4.7: Empirische Ergebnisse für  $t_{max} \leq 12$ , SAS: Mittelwert (Std-Abw.)

### 4.5.2 Ergebnisse mit SAS

Um feststellen zu können, wie sich das Workshopzuteilungsproblem mit einem PC und einer Standardstatistiksoftware lösen lässt, wurden Workshopprobleme für Fall 2 generiert und mit der Software SAS gelöst. Der Rechner ist ein PC mit Debian Linux 3.1 Betriebssystem, einem Gigabyte Hauptspeicher und zwei Prozessoren mit jeweils 2.4 Gigahertz. Es ist anzunehmen, dass vor allem die recht geringe Hauptspeichergröße der kritische Faktor besonders für größere Probleme ist.

Die Ergebnisse für Zeitslots bis einschließlich 16, 12 oder 8 sind in den Tab. 4.6, 4.7 und 4.8 dargestellt. Für die Lösung der Probleme war eine maximale Anzahl an Ganzzahliterationen für die Branch & Cut Probleme von 2000 gegeben und eine maximale Zeit bis zur Lösung des Problems von 300 Sekunden. Diese Grenzen bedingten weitere Lösungstypen. Probleme, die als "lösbar, Branch & Cut" markiert sind, sind solche, deren Ganzzahliterationen an die gegebene Grenze stießen und deren weitere Lösung daher abgebrochen wurde. In diesem Fall wird die momentan optimale Lösung zurückgegeben (sofern eine gefunden wurde), die nicht die global optimale sein muss (aber kann). Falls die Berechnung wegen Überschreiten des Zeitlimits abgebrochen wurde, wurden die Probleme unter "Zeitlimit" eingeordnet. Das Zeitlimit kann sowohl für Simplex-Berechnungen als auch für Branch & Cut Berechnungen erreicht werden.

Es wurden insgesamt 300 Probleme generiert und gelöst. Etwa 3-4% der Probleme sind mit dem Simplex-Verfahren unabhängig von der Anzahl Zeitslots am Zeitlimit gescheitert, die anderen Simplex-Probleme benötigten im Durchschnitt zwischen 37 und 40 Sekunden bis zur Lösung. Die Standardabweichungen zeigen, dass sich der Großteil der Probleme in weniger als 90 Sekunden lösen ließ. Diejenigen Probleme, die am Zeitlimit scheiterten, zeichnen sich vor allem durch eine große Anzahl Workshops und eine auffallend große Anzahl Teilnehmer aus. Diese Probleme haben die meisten Variablen und Nebenbedingungen, es ist also anzunehmen, dass hier der Mangel an Hauptspeicher ausschlaggebend für die lange Zeit ist.

Die Branch & Cut Probleme, die ans Zeitlimit stoßen, zeichnen sich dagegen durch eine höhere Anzahl Zeitslots aus, was ja die Wahrscheinlichkeit der ganzzahligen Lösbarkeit mit dem Simplex verringert, und, verglichen mit den anderen Branch & Cut Problemen, wieder durch eine große Anzahl Workshops und Teilnehmer. Auch hier betrifft es also diejenigen Probleme mit vielen Variablen und Nebenbedingungen.

Die lösbaren Branch & Cut Probleme, deren Berechnung wegen der Grenze der Ganzzahliterationen abgebrochen wurde, heben sich nicht so deutlich von den anderen Branch & Cut Problemen ab. Tab. 4.6 legt nahe, dass viele Iterationen für eine etwas größere

|                         | Anzahl     | Zeit [Sek.] | $t_{max}$ | $w_{max}$ | $p_{max}$ |
|-------------------------|------------|-------------|-----------|-----------|-----------|
| optimal, Simplex        | 93 (72%)   | 37 (45)     | 5 (2)     | 65 (29)   | 543 (259) |
| optimal, Branch & Cut   | 8 (6%)     | 79 (60)     | 6 (1)     | 85 (22)   | 639 (204) |
| lösbar, Branch & Cut    | 22 (17%)   | 266 (51)    | 7 (1)     | 85 (18)   | 592 (169) |
| Zeitlimit, Simplex      | 5 (4%)     | 300 (0)     | 6 (1)     | 112 (4)   | 789 (105) |
| Zeitlimit, Branch & Cut | 1 (1%)     | 300 (0)     | 6 (0)     | 119 (0)   | 832 (0)   |
| unlösbar                | 1 (1%)     | 7 (0)       | 7 (0)     | 85 (0)    | 585 (0)   |
| $\Sigma$                | 130 (100%) | 90 (107)    | 5 (2)     | 72 (29)   | 569 (243) |

Tabelle 4.8: Empirische Ergebnisse für  $t_{max} \leq 8$ , SAS: Mittelwert (Std-Abw.)

Anzahl Workshops und Teilnehmer benötigt werden, dies ist aber in 4.8 wiederum nicht mehr der Fall. Es ist anzunehmen, dass es von der Struktur des Problems abhängt, ob der Algorithmus “Glück hat” und den Lösungsraum schnell verkleinern kann oder eben nicht. Die Ausführungszeit der gelösten Branch & Cut Probleme liegt im Durchschnitt bei 67 bis 80 Sekunden, der größte Teil der Probleme ist unabhängig von den Zeitslots innerhalb von weniger als 160 Sekunden zu lösen. Man stellt allerdings ebenfalls fest, dass der größere Anteil der Branch & Cut Probleme nicht erfolgreich gelöst wird, zumeist wegen der Begrenzung der Ganzzahliterationen.

Als Ergebnis lässt sich feststellen, dass sich Workshopzuteilungsprobleme bis zu einer mittleren Größe auch noch gut mit einer Standardstatistiksoftware auf einem handelsüblichen PC lösen lassen. Hohe Standardabweichungen geben allerdings keine große Verlässlichkeit dafür, ob ein bestimmtes Problem tatsächlich problemlos lösbar ist oder nicht. Vor allem für große Probleme ist es notwendig, genügend Hardwarekapazitäten bereit zu halten, und für eine Onlineverwendung des Systems empfiehlt sich die Lösung auf einem leistungsfähigen Rechner mit einer Software, die für große Probleme optimiert ist. Ist ein konkretes Workshopzuteilungsproblem gegeben, so empfiehlt es sich bei kritischer Größe des Problems, die Lösung auf einem PC mittels SAS vor dem tatsächlichen Einsatz zu testen. Dies gibt einen Anhaltspunkt über die Anwendbarkeit der Hard- und Software, aber natürlich immer noch keine Garantie, da ein Problem mit gewissen Daten ganzzahlig lösbar sein kann, das Problem mit gleicher Struktur und anderen Daten aber wiederum nicht.

## 4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Workshopzuteilungsproblem als lineares Optimierungsproblem vorgestellt. Es wurde gezeigt, dass das Problem in seinem allgemeinen Fall nicht immer ganzzahlige Lösungen hat und es wurde genauer untersucht, bis zu welchem Grad eine ganzzahlige Lösbarkeit nachgewiesen werden kann. Dabei hat sich gezeigt, dass das Problem bei Eliminierung der zeitlichen Nebenbedingungen in der Tat ganzzahlig lösbar ist, bei Verwendung dieser Nebenbedingungen allerdings in den meisten Fällen nicht. Dies zeigt sich auch mit Hilfe einer Modellierung durch ein Netzwerkflussmodell, die Modellierung gelingt, wenn keine zusätzlichen zeitlichen Nebenbedingungen gegeben sind.

Die Beispiele des Mädchen-Techniktags und des Schnuppertags zeigen die praktische Relevanz des Workshopzuteilungsproblems und wie sich unterschiedliche Gegebenheiten mit Hilfe des Modells abbilden lassen. Auch wenn beide Probleme nicht total unimo-

dular und damit nicht garantiert ganzzahlig lösbar sind, so zeigen doch die empirischen Ergebnisse, dass sich zum einen viele Instanzen trotzdem mit dem Simplex gültig lösen ließen und dass zum anderen auch das Branch & Cut Verfahren innerhalb kurzer Zeit zu einer gültigen Lösung kommt, wobei eine ausreichend leistungsfähige Hard- und Software vorausgesetzt wird.

Um die Lösbarkeit des Problems allgemeiner zu untersuchen, wurden empirische Versuche durchgeführt. Es wurden Workshopzuteilungsprobleme unterschiedlicher Größe generiert und gelöst und die jeweils verwendeten Methoden und Zeiten gemessen. Bei der Lösung auf einer leistungsfähigen Hardware mit der professionellen Software CPLEX, die für große Probleme optimiert ist, ergeben sich auch für Branch & Cut Probleme Laufzeiten von sehr wenigen Sekunden, sogar für große Probleme. Wiederholt man das Experiment auf einem PC mit der weit verbreiteten Software SAS, so ergeben sich deutlich längere Laufzeiten von durchschnittlich eineinhalb Minuten, die sich daher für eine Anwendung in einer Internet-Applikation ohne weiteres nicht mehr eignen. Allerdings gibt es hier große Unterschiede abhängig von der Größe des Problems, gegeben durch die Anzahl Workshops und Teilnehmer, die die Anzahl der Variablen und Nebenbedingungen entscheidend beeinflussen. Falls schlicht eine gültige Zuteilung im Hintergrund erzeugt werden soll, unabhängig von einem Anstoßen durch eine Internetanwendung, so lässt sich in jedem Fall sagen, dass das Workshopzuteilungsproblem sich problemlos in akzeptabler Zeit lösen lässt.

Fazit ist also: das Workshopproblem ist anwendbar! Es hat praktische Relevanz und es ist, eine ausreichend leistungsfähige Hard- und Software vorausgesetzt, ohne Probleme innerhalb von kürzester Zeit mit Standardverfahren lösbar. Ein Großteil der Probleme ist direkt mit dem Simplex ganzzahlig lösbar, Branch & Cut Verfahren eignen sich für die restlichen Probleme zum Finden einer optimalen Lösung. Das Workshopzuteilungsproblem spart Organisatoren von Veranstaltungen viel Zeit und Arbeit und unterstützt die größtmögliche Zufriedenheit der Teilnehmer.

# Kapitel 5

## Verhaltensanalyse und die Rolle von Information in Auktionen

Um zu verstehen, in welcher Art und Weise Teilnehmer einer Workshopveranstaltung ihre Präferenzen für Workshops vergeben und welche Faktoren ausschlaggebend für die endgültige tatsächliche Zufriedenheit mit den zugeteilten Plätzen sind, muss das Verhalten von Teilnehmern als Konsumenten von Workshops genauer untersucht werden.

Der wirtschaftswissenschaftliche Zweig des Konsumentenverhaltens (Consumer Behavior) beschäftigt sich allgemein mit den Zusammenhängen zwischen den Einflussfaktoren auf das Verhalten von Konsumenten und den getroffenen Kaufentscheidungen. Hier spielen neben anderen auch psychologische und soziologische Faktoren eine Rolle. Solche Betrachtungen sind vor allem im Marketing wichtig, da Erkenntnisse gewonnen werden, durch welche Marketingtechniken und -strategien das Konsumentenverhalten sich zur Kaufentscheidung eines Produkts hin beeinflussen lässt. Ebenfalls wird untersucht, wodurch sich Kunden auszeichnen, die potentielle Käufer eines bestimmten Produktes darstellen, und wie man sie erkennen und bewerben kann.

Die Spieltheorie (Game Theory) hingegen geht von rationalen, egoistischen Konsumenten, oder allgemeiner Spielern, aus und untersucht, welche Entscheidungen sich beeinflussende Spieler in bestimmten Situationen wahrscheinlich treffen würden. Ziel ist es, Situationen mit mehreren interagierenden Spielern zu untersuchen und dahingehend zu optimieren, dass ein für alle oder gewisse Beteiligten optimales Ergebnis entsteht. Auktionen sind eine besondere Art von Spielen, bei denen in der einfachsten Form mehrere Spieler um ein zum Verkauf stehendes Gut konkurrieren. Ein Ziel der Untersuchung von Auktionen ist es herauszufinden, welchen Einfluss verschiedene Regeln oder Auktionsformen auf den Ausgang einer Auktion haben und welche Arten von strategischem Verhalten durch eine Auktionsform begünstigt werden. Entscheidend ist dabei die Rolle von Information und deren Zugang durch Bieter oder Verkäufer. Es wird untersucht, inwiefern die Veröffentlichung gewisser Information Einfluss auf das Ergebnis verschiedener Auktionsformen hat und welche Auktionsformen bisher vorgeschlagen wurden, um eine vorteilhafte Bekanntgabe wichtiger Information zu erreichen.

Beide Bereiche sind wichtig für die Untersuchung der Einführung einer zweiten Stufe für das Workshopzuteilungsproblem. Beim Workshopzuteilungsproblem kann man, wie in Auktionen auch, davon ausgehen, dass die Teilnehmer ihre Präferenzen rational wählen mit dem Ziel, eine möglichst vorteilhafte Zuteilung zu erreichen. Dabei können Anreize zu strategischem Verhalten zu einer von subjektiven Werten abweichenden

Präferenzangabe führen, die sich in Abhängigkeit von den angegebenen Präferenzen der anderen Teilnehmer auf die Zuteilung auswirken können. Konzepte des Konsumentenverhaltens sind wiederum die Ursache dafür, wieso sich die subjektiven Präferenzen durch Bekanntgabe der ersten Zuteilung und damit implizit der Präferenzen der anderen Teilnehmer nachträglich ändern können.

Im Folgenden werden zunächst einige wichtige Erkenntnisse zum Konsumentenverhalten aus dem Bereich der sozialen Psychologie beschrieben. Es folgt ein Abschnitt über die für Auktionen wesentlichen Grundlagen der Spieltheorie. Der restliche Teil dieses Kapitels widmet sich einer Einführung zu Auktionen und der Vorstellung von Auktionsformen. Hierbei geht es um den Vergleich von Auktionsformen in Bezug auf die während der Auktion veröffentlichte Information. Ein besonderes Augenmerk liegt auf zweistufigen Auktionsformen, da diese sich dadurch auszeichnen, dass zwischen den einzelnen Stufen eine Veröffentlichung gewisser Information statt findet, was wiederum einen Einfluss auf das Ergebnis der Auktion hat.

## 5.1 Konsumentenverhalten

Studien des Konsumentenverhaltens dienen dazu herauszufinden, wie Konsumenten Güter auswählen, kaufen und verwenden, um ihre eigenen Bedürfnisse und Wünsche zu befriedigen. Konsumentenverhalten lässt sich definieren als „die Aktivitäten von potentiellen oder tatsächlichen Konsumenten von Marktobjekten – seien es Produkte, Dienste, Handlungsumgebungen oder Ideen“ [Kot00, BG86]. Kotler [Kot00] unterteilt die das Kaufverhalten beeinflussenden Faktoren in kulturelle, soziale, persönliche und psychologische. Berkman und Gilson [BG86] subsumieren unter Umwelteinflüssen die kulturellen und sozialen Faktoren und sehen dem gegenüber die Psychologie des Individuums.

Von Bedeutung für das Workshopzuteilungsproblem sind diejenigen Faktoren, die außerhalb der Präferenzen für die Workshops Einfluss auf die letztendliche Zufriedenheit der Teilnehmer mit der Zuteilung haben. Kulturell bedingte Faktoren und Einfluss der sozialen Klasse und Umgebung sind dabei auszuschließen, diese schlagen sich bereits in der Auswahl der Workshoppräferenzen nieder. Wichtig ist vielmehr die Betrachtung der möglichen Persönlichkeitstypen der Teilnehmer und inwieweit unterscheidbare Persönlichkeitstypen mit der Zufriedenheit der eigenen Zuteilung in Verbindung mit der Zuteilung der anderen Teilnehmer verknüpft sein können.

Karen Horney [Hor45] entwickelte 1945 erstmals eine Theorie über verschiedene Persönlichkeitstypen von Menschen bezogen auf soziales Verhalten und zwischenmenschliche Interaktionen. Sie unterschied die folgenden inneren Einstellungen:

- “moving forward with people” (compliant): ein Mensch bewegt sich zusammen mit den anderen, wendet sich anderen zu, ist angepasst.
- “moving against people” (aggressive): ein Mensch bewegt sich genau entgegen der Masse, ist kämpferisch und aggressiv, nimmt eine gegnerische Stellung ein.
- “moving away from people” (detached): ein Mensch bewegt sich unabhängig von den anderen, distanziert und kehrt sich ab von anderen.

Diese drei Richtungen und deren Konflikte stehen im Zentrum von Horney's Untersuchungen und Theorie zur Entstehung und Entwicklung von Neurosen. Sie geht davon aus,



dass ein Mensch durch Erfahrungen im Laufe seines Lebens diejenige dieser drei Strategien annimmt, die für ihn selbst die meisten Vorteile zu haben scheint. Die Vorherrschaft eines Verhaltens kann sich im Lauf der Zeit durch neue Erfahrungen ändern oder auch situationsbedingt anpassen. Sie zeigt damit die grundlegenden, psychologischen Tendenzen auf, die ausschlaggebend für soziales Verhalten und menschliches Miteinander sind.

Angepasste Personen streben nach Liebe und Anerkennung und wünschen sich, von anderen Hilfe und Schutz zu erhalten. Sie sind altruistisch und versuchen, von der Gesellschaft akzeptiert zu werden. Die Gesellschaft von anderen ist sehr wichtig für angepasste Personen. Aggressive Individuen streben nach Erfolg, Macht und Ansehen. Sie agieren strategisch und egoistisch mit den eigenen Zielen und Vorteilen im Auge. Gefühle sind für diese Individuen nicht von Bedeutung. Gesellschaft anderer ist für sie wichtig als Gefolgschaft zur Bestätigung des eigenen Selbstwertgefühls. Für abgekehrte Personen steht die Unabhängigkeit von Pflichten und anderen Menschen im Vordergrund. Sie geben sich ungern Gefühlen hin und misstrauen anderen Leuten, die mögliche Gefahren für die individuelle Freiheit darstellen.

Morris [Ros57] hat in seinem Buch über psychologische Faktoren der Berufswahl unter anderem auch den Einfluss von Horney's Persönlichkeitstypen auf die Berufswahl untersucht. Er entwickelte einen eher einfachen Test, um die Persönlichkeitsattribute bei Probanden nachzuweisen. Um nachzuweisen, ob der Test in der Lage ist, die Persönlichkeitsattribute sinnvoll voneinander zu trennen, stellte Morris weitere Fragen zu Erwartungen bezüglich des Berufs- und Karrierelebens und erhielt Ergebnisse, die mit den intuitiven Erwartungen übereinstimmten. Er ging also davon aus, dass die Eignung seiner Testmethode ausreichend war. Die Personengruppe des Berufswahltests umfasste 499 Probanden, von denen Morris 185 (37%) als angepasst, 188 (38%) als aggressiv und 126 (25%) als abgekehrt einstufte. Es ergibt sich also ein praktisch gleicher Anteil von angepassten und aggressiven Menschen und ein kleinerer Teil von einem Viertel von abgekehrten Personen. Über die weiteren Eigenschaften und die Repräsentativität seiner Testpersonen macht Morris keine genaueren Aussagen.

Cohen [Coh67, Coh68, BG86] hat eine komplexere Skala entwickelt, um diese Persönlichkeitsattribute zu testen, die sogenannte CAD (compliant-aggressive-detached) Skala. Er hat in seinen Studien untersucht, inwieweit die Persönlichkeit eines Konsumenten mit dem Konsum verschiedener Güter zusammen hängt. Anhand eines Fragebogens hat er überprüft, für welche der drei Charaktermerkmale ein Individuum überdurchschnittlich hohe Tendenzen aufweist. Cohens Experiment wurde mit insgesamt 157 Studenten der Wirtschaftswissenschaften an zwei Universitäten durchgeführt. Von diesen wiesen insgesamt 66 hohe Tendenzen zu angepasstem Verhalten, 67 zu aggressivem und 75 zu abgekehrtem Verhalten auf. Die Charaktermerkmale treten in diesem Fall also fast zu gleichen Teilen auf, auffällig ist der hier höhere Anteil an abgekehrten Personen als in Morris Untersuchungen. Dies würde darauf hindeuten, dass es unter den befragten Studenten mehr abgekehrte Personen gibt als in der Gesamtbevölkerung.

Cohens Untersuchungsergebnisse bezüglich der Produktpräferenzen verschiedener Konsumententypen decken sich mit seinen Hypothesen. Angepasste Personen zeigen hohe Präferenzen für Produkte, die soziale Beziehungen unterstützen und verbessern. Aggressive Persönlichkeitstypen tendieren zu solchen Produkten, die mit sozialem Status und erfolgreichem Image verbunden werden können, während abgekehrte Teilnehmer Produkte bevorzugen, die ihre Unabhängigkeit und Freiheit unterstreichen. Diese Untersuchungen zeigen also, dass tatsächlich ein Zusammenhang zwischen den verschiedenen

| Extraversion        |                 | Verträglichkeit |               |
|---------------------|-----------------|-----------------|---------------|
| gesprächig          | - schweigsam    | gutmütig        | - grantig     |
| freimütig           | - verschlossen  | wohlwollend     | - mißgünstig  |
| unternehmungslustig | - zurückhaltend | freundlich      | - starrköpfig |
| gesellig            | - zurückgezogen | kooperativ      | - feindselig  |

Tabelle 5.1: Charakteristische Variablen der ersten beiden Persönlichkeitsfaktoren im Fünf-Faktoren-Modell der Persönlichkeit (nach [AB97])

Persönlichkeitstypen und Produktpräferenzen besteht, die bestimmtes soziales Verhalten widerspiegeln.

Es gab zur CAD Skala noch einige weitere Veröffentlichungen, die die Validität der Skala zur Messung der Persönlichkeitsattribute untersuchten und ein paar Verbesserungen vorschlugen (siehe z.B. [JG98]). Weitere Untersuchungen in Bezug auf Konsumentenverhalten, die auch auf eine breiter gültige Verteilung der Eigenschaften in der Bevölkerung schließen lassen, sind nicht geschehen bzw. die betreffenden Ergebnisse sind in den Veröffentlichungen nicht enthalten. In dieser Arbeit gehen wir daher als Kompromiss zwischen den vorgestellten empirischen Ergebnissen von einem Anteil von 30% von abgekehrten Personen und je 35% von aggressiven und angepassten aus. Kleine Abweichungen von der Realität sind für diese Arbeit nicht von Bedeutung. Die Untersuchungen sowohl von Morris als auch von Cohen belegen jedoch die Tatsache, dass diese Persönlichkeitsmerkmale für menschliche Interaktion existieren und nachgewiesen werden können. Daher kann man davon ausgehen, dass die verschiedenen Persönlichkeitstypen ebenso wie auf Produkte einen Einfluss auf den Konsum von Workshops haben und daher die Präferenzen beeinflussen. Welche Charakteristika von Workshops auf unterschiedliche Arten von sozialem Verhalten hindeuten, wird am Ende dieses Abschnittes noch näher erläutert (s.S. 93).

Das Modell von Horney hat in jüngerer Zeit nicht mehr viel Aufmerksamkeit erhalten, es scheint vergessen worden zu sein. Man findet aber dennoch ähnliche Faktoren in weit verbreiteten Ansätzen der Persönlichkeitsstrukturierung wieder. Als Beispiel sei das Anfang der neunziger Jahre entwickelte Fünf-Faktoren-Modell der Persönlichkeit genannt [AB97]. Das Modell besteht aus den folgenden fünf Persönlichkeitsfaktoren höherer Ordnung:

- Extraversion
- Verträglichkeit
- Gewissenhaftigkeit
- Emotionale Stabilität
- Offenheit für Erfahrungen

Interessant sind in diesem Fall insbesondere die ersten beiden Faktoren, deren wichtigste Variablen in Tab. 5.1 angegeben werden. Es sind genau diese beiden Faktoren, die sich auf die Interaktion einer Person mit ihrer Umgebung bezieht. Es ist zu erwarten, dass eine nach Horney angepasste Person nach dem Fünf-Faktoren-Modell zum einen verträglich und zum anderen extravertiert ist. Eine aggressive Person wäre wohl ebenfalls

extravertiert, da sie ihr Verhalten auf das anderer Menschen bezieht, aber eben gerade am anderen Ende der Verträglichkeitsskala, nämlich feindselig etc. Eine abgekehrte Person wäre dagegen wahrscheinlich als introvertiert zu bezeichnen, da sie sich von der Masse zurück zieht, so dass die Verträglichkeit in dem Sinn eine untergeordnete Rolle spielt. Morris [Ros57] stellt außerdem die Einordnung angepasster, aggressiver und abgekehrter Typen auf einer zweidimensionalen Skala vor, die in der einen Dimension den Grad der erwünschten Dominanz bzw. Unterwerfung darstellt und auf der zweiten Skala den Grad der gewünschten Distanz von anderen. Angepasste Typen unterwerfen sich eher und suchen die Nähe anderer, aggressive suchen ebenfalls die Nähe anderer, aber um sie zu dominieren. Abgekehrte Typen finden sich zwischen Unterwerfung und Dominanz in Distanz zu anderen wieder. Diese Skala hat eine große Ähnlichkeit mit den zwei Faktoren Verträglichkeit und Extraversion und bestätigt somit den beschriebenen Zusammenhang mit der Einteilung von Horney. Horney's Klassifikation findet sich also auch in anderen Persönlichkeitsmodellen wieder, wenn auch nicht in der dort gewählten Dreiereinheit. Der Zusammenhang zwischen den fünf Persönlichkeitsfaktoren und Verhalten, insbesondere sozialem Verhalten, wird in verschiedenen Publikationen untersucht und belegt (siehe z.B. [Pau01, Pau03]).

Inwieweit beeinflussen nun die genannten Persönlichkeitseigenschaften soziales Verhalten und die Präferenzen von Workshopteilnehmern? Angepasste Personen streben nach der Gesellschaft und dem Schutz von anderen. Solche Teilnehmer werden sich oft die Gesellschaft von anderen Bekannten oder Freunden wünschen und daher vielleicht versuchen, zusammen mit einem Freund oder einer Freundin dieselben Workshops zu besuchen. Ebenfalls möglich ist es, dass angepasste Leute eher diejenigen Workshops präferieren, die von vielen anderen auch präferiert und damit gesellschaftlich als interessant bewertet oder akzeptiert sind. In beiden Fällen sind die Präferenzen abhängig von Präferenzen oder der Zuteilung anderer Teilnehmer.

Abgekehrte Teilnehmer wiederum streben eher nach dem Gegenteil bezogen auf die angepassten. Sie wenden sich von der Masse ab und möchten sich nicht beeinflussen lassen. Abgekehrte Teilnehmer werden daher wohl Workshops präferieren, auf die die allgemeine Aufmerksamkeit sich weniger richtet, für die also die Präferenz der Masse gering ist. Typischerweise sind dies Workshops, die nach einer Zuteilung entweder noch freie Plätze haben oder aber, wenn es keinen Überschuss an Workshopplätzen gibt, denen Teilnehmer mit geringen Präferenzen zugeteilt sind. Auch diese Präferenz von quasi exzentrischen Workshops ist abhängig von den Präferenzen der anderen Teilnehmer.

Für aggressive Teilnehmer lässt sich keine geeignete Abhängigkeit von den Präferenzen der anderen Teilnehmer formulieren. Solche Teilnehmer sind wahrscheinlich hauptsächlich beeinflusst durch die Thematik der Workshops, sie werden diejenigen Workshops wählen, deren Themen ihnen am meisten Fortkommen, Erfolg oder Ansehen versprechen. Dies müssen aber nicht notwendigerweise diejenigen Workshops sein, für die sich die anderen Teilnehmer in besonderem Maß interessieren oder eben nicht. Diese Präferenz ist eher abhängig von den Inhalten der Workshops, die sich daher a priori ausreichend gut spezifizieren lassen.

## 5.2 Grundlagen der Spieltheorie

Die Spieltheorie beschäftigt sich, ganz allgemein formuliert, mit dem strategischen Verhalten von zwei oder mehr autonom agierenden Personen in Entscheidungs- oder Kon-

fliktsituationen [Güt99]. Sie untersucht beispielsweise, wie miteinander interagierende Personen auf bestimmte Situationen reagieren und welche Entscheidungen sie treffen, um das Ergebnis für sich selbst zu optimieren. Sie untersucht ebenfalls, wie Situationen gestaltet sein sollten, damit für alle Beteiligten, die letztlich egoistisch denkend Entscheidungen fällen, das insgesamt beste Ergebnis erzielt werden kann. Genau hier ist die Spieltheorie für das Workshopzuteilungsproblem interessant. Die Teilnehmer einer Veranstaltung stehen vor gewissen Entscheidungen, nämlich der Vergabe von Präferenzwerten, und haben dabei ein Ziel vor Augen, nämlich in gewisse Workshops eingeteilt zu werden. Der Organisator der Veranstaltung kann die Spielregeln vorgeben und damit beeinflussen, welche Anzahl und Art von Entscheidungen getroffen werden können. Sein Ziel ist die größtmögliche Zufriedenheit der Gesamtheit der Teilnehmer, und daran orientiert sich die Gestaltung des Zuteilungsmechanismus.

Ein Spiel ist gegeben durch eine Menge  $I$  von  $n$  Spielern. Jeder Spieler hat eine Menge an möglichen Strategien  $\Sigma_i$  zur Verfügung, die seine Entscheidungen in diesem Spiel beschreiben. Wenn jeder Spieler eine Strategie  $\sigma_i \in \Sigma_i$  wählt, so entsteht die Strategiekonfiguration  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ , die den Ausgang des Spiels bestimmt. Vom Spielausgang hängt die Auszahlungsfunktion  $H_i(\sigma) \in \mathbb{R}$  ab, die den Gewinn (oder Verlust) beschreibt, den Spieler  $i$  aus dem Ausgang des Spiels zieht. Ein Spiel wird also beschrieben durch die Menge der Spieler, die Menge der Strategien für jeden Spieler und die Auszahlungsfunktionen für jeden Spieler [BEG02].

Bei einem solchen einfachen Spiel wird zunächst davon ausgegangen, dass kein Spieler Informationen über die gewählten Strategien der anderen Spieler hat, dass also praktisch jeder Spieler simultan seine Strategie wählt. Man geht ebenfalls davon aus, dass jeder Spieler die volle Information über das Spiel hat, jeder kennt also die Spielregeln des Spiels und die möglichen Strategien und Auszahlungsfunktionen der anderen Spieler. Dies ist beispielsweise für wirtschaftliche Betrachtungen naheliegend, da sich ein Unternehmen gut überlegen kann, ob und inwieweit der Konkurrent von bestimmten Situationen profitiert. Weiterhin können die Spieler nicht kooperieren, also keine Verträge miteinander abschließen, um eine bestimmte Strategie zu vereinbaren. Eine weitere Annahme betrifft die Rationalität und Intelligenz der Spieler. Jeder Spieler ist gleichermaßen in der Lage, das Spiel zu überschauen und Überlegungen bezüglich seiner Strategiewahl anzustellen. Jeder Spieler trifft seine Entscheidungen auf einer rationalen Basis, die als Ziel hat, den eigenen Vorteil zu maximieren.

Spiele, die aus mehreren aufeinanderfolgenden Schritten bestehen, die von den Spielern beobachtet werden und bei denen der Spieler seine nächste Aktion abhängig vom momentanen Stand des Spiels bestimmt, sind Spiele in extensiver Form. Für solche Spiele werden die möglichen Zustände des Spiels modelliert, die Informationen über bisherige Spielzüge beinhalten [Ras90]. Die besonderen Eigenschaften solcher Spiele sind aber für Auktionen nicht wichtig, sie werden daher an dieser Stelle nicht gesondert betrachtet.

Um zu untersuchen, welche Strategien für Spieler vorteilhaft sind, betrachtet man zunächst solche Strategien, die für einen Spieler in jedem Fall mindestens so vorteilhaft sind wie die anderen, unabhängig von den Strategien der Mitspieler. Solche Strategien bezeichnet man als dominant. Bezeichne  $\sigma_{-i} = (\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$  die Strategien aller Spieler bis auf den aktuell betrachteten Spieler  $i$ , so ist  $\sigma_i^0$  eine dominante Strategie, wenn  $H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i^0) \geq H_i(\sigma_{-i}, \sigma_i)$  für alle  $\sigma_i \in \Sigma_i \setminus \{\sigma_i^0\}$  gilt. Es muss außerdem mindestens eine Strategie  $\sigma'_{-i}$  existieren, für die die Wahl von  $\sigma_i^0$  echt besser für Spieler  $i$  ist als die Wahl einer beliebigen anderen Strategie. Gilt dies für alle Strategien  $\sigma_{-i}$  der anderen Spieler, so heißt  $\sigma_i^0$  streng dominant. In diesem Fall lässt sich also das  $\geq$  obiger

Gleichung durch ein  $>$  ersetzen. Von einer dominanten Strategie würde man erwarten, dass ein rational denkender Spieler diese Strategie wählt, da sie ihm gegenüber seinen anderen Strategien in keinem Fall Nachteile verspricht, unabhängig vom Verhalten der anderen Spieler, und in gewissen Situationen echte Vorteile. Eine dominierte Strategie ist dementsprechend eine Strategie, für die es eine weitere gibt, die gegenüber dieser dominant ist. Um Strategiekonfigurationen zu finden, die sich für Spieler eines Spiels anbieten, kann man dominierte Strategien vom Spiel eliminieren und dann das reduzierte Spiel weiter betrachten. Auf diese Weise können weitere dominierte Strategien entstehen, so dass man das Spiel sukzessive reduzieren und somit vielleicht die sich für alle Beteiligten anbietende Lösung in Form einer Strategiekonfiguration finden kann.

Gleichgewichte beschreiben Lösungskonzepte von Spielen, die zu bestimmten Strategiekonfigurationen führen. Das bekannteste Gleichgewichtskonzept ist das Nash-Gleichgewicht, das die Vorteilhaftigkeit von einseitigem Abweichen von einer Strategie betrachtet, bei fester Strategiewahl der anderen Spieler.

**Definition 5.1** *Eine Strategiekonfiguration  $\sigma^* = (\sigma_1^*, \dots, \sigma_n^*)$  heißt Nash-Gleichgewicht, wenn für jede Strategie  $\sigma_i \in \Sigma_i$  eines jeden Spielers  $i \in I$  gilt:  $H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i^*) \geq H_i(\sigma_{-i}^*, \sigma_i)$*

Nash-Gleichgewichte sind praktisch stabile Konfigurationen in dem Sinn, dass ein einzelner Spieler kein Interesse daran hat, von dieser Strategie abzuweichen. Spiele können kein Nash-Gleichgewicht haben, aber auch mehr als eins.

Besondere Nash-Gleichgewichte sind diejenigen, die durch dominante Strategien charakterisiert sind.

**Theorem 5.1** *a) Eine Lösung in streng dominanten Strategien ist ein eindeutiges Nash-Gleichgewicht eines Spiels.  
b) Eine Lösung, die durch Eliminierung von dominierten Strategien entsteht, ist ein Nash-Gleichgewicht.*

Gleichgewichte, die aus dominanten Strategien bestehen, werden oft auch als *dominantes Gleichgewicht* bezeichnet. Dominante Gleichgewichte sind stärker als Nash-Gleichgewichte, da die Strategiewahl für einen Spieler unabhängig von der Strategiewahl der anderen Spieler ist [BEG02].

Gibt es in einem Spiel mehrere Gleichgewichte, so ist die Frage, welches davon realisiert werden wird. Manchmal gibt es Situationen, in denen gewisse Eigenschaften eines Gleichgewichts den Fokus der Spieler verstärkt auf dieses Gleichgewicht lenken, was wiederum dazu führt, dass man eher die Realisierung dieses Gleichgewichts beobachten wird als eines anderen. Dies ist der *focal-point effect*, und ein solches Gleichgewicht heißt *fokales Gleichgewicht* [Mye97].

Zur Beurteilung des Gesamtergebnisses eines Spiels ist der Begriff der Pareto-Effizienz sehr nützlich. Eine Strategiekonfiguration ist *pareto-effizient*, wenn es nicht möglich ist, die Auszahlung für einen der Spieler zu erhöhen, ohne dass sich die Auszahlung für mindestens einen anderen Spieler verschlechtert. Ein Auszahlungsvektor ist gegenüber einem zweiten *pareto-dominant*, wenn der Payoff des ersten Vektors für keinen Spieler schlechter ist als der des zweiten und für mindestens einen Spieler echt besser ist. Das *soziale Optimum* wiederum bezeichnet diejenige Strategiekonfiguration, die die höchste Summe der Auszahlungen für alle Spieler bedeutet, ohne dabei den einzelnen Spieler zu betrachten. Das soziale Optimum ist zwangsläufig pareto-effizient. Das soziale Optimum

ist ein guter Kandidat für den von einem Veranstaltungsorganisator angestrebten Zustand, da er die höchstmögliche Gesamtzufriedenheit aller Teilnehmer darstellt. Wie sich die Zufriedenheit auf die einzelnen Teilnehmer verteilt, wird hierbei nicht betrachtet.

Informationen spielen eine wichtige Rolle in Spielen und insbesondere bei der Analyse von Auktionen. Die Vollständigkeit der Information beschreibt, wieviele Informationen den Spielern bekannt sind. Die Symmetrie der Information dagegen unterscheidet, inwieweit es unterschiedliche Information bei den verschiedenen Teilnehmern eines Spiels gibt. Bei einem Spiel mit vollständiger Information sind alle Spieler über alle beeinflussenden Faktoren des Spiels informiert. Dem gegenüber steht ein Spiel mit unvollständiger Information, hierbei gibt es gewisse Information, die nicht allen Spielern bekannt ist. Bei einem Spiel mit symmetrischer Information verfügen alle Spieler über dieselben Informationen, vor und während des Spiels. Unterscheidet sich dagegen die Information zwischen Spielern, so spricht man von einem Spiel mit asymmetrischer Information. Private Information ist eine Information, die lediglich ein Spieler hat und alle anderen nicht [Ras90]. Verschiedene Kombinationen von Vollständigkeit und Symmetrie sind denkbar. Beispielsweise ist ein Kartenspiel, bei dem jeder Spieler einige seiner Karten verdeckt und andere offen auf dem Tisch liegen hat, ein Beispiel für ein Spiel mit unvollständiger, aber symmetrischer Information, da jeder Spieler über dieselbe Information verfügt, aber eben nicht über die gesamte Information. Vollständige Information kann allerdings nie asymmetrisch sein.

Insbesondere bei asymmetrischer bzw. privater Information spielen Anreize eine wichtige Rolle. In einem Spiel kann es Anreize für Spieler geben, bei der Bekanntgabe gewisser privater Information strategisch zu lügen, weil sich dadurch das Ergebnis des Spiels für diesen Spieler positiv beeinflussen lässt. Das Spielergebnis ist natürlich wiederum abhängig vom Wahrheitsgehalt der Angaben der anderen Spieler. Durch gemeinschaftliche, unwahre Angabe von privater Information kann sich das Ergebnis eines Spiels für alle Spieler zum Negativen wenden, während bei einer wahrheitsgemäßen Angabe alle Spieler profitieren würden. Hier stellt sich also die Frage, wie die Regeln des Spiels beschaffen sein müssen, damit die Spieler keinen Anreiz haben zu lügen. Keinen Anreiz zu lügen haben sie, wenn sie durch Sagen der Wahrheit mindestens ein ebenso gutes Ergebnis erzielen wie durch Lügen. Wahrheitsgemäße Angabe muss also für alle Spieler gegenüber dem Lügen dominant sein, dann gibt es keine Anreize für die Spieler zu lügen, da aus dem Lügen kein Profit gezogen werden kann. Ein solches Spiel wird als anreizkompatibel bezeichnet, die Spielregeln induzieren die gewünschten Anreize zum Sagen der Wahrheit [MR92, Hur72].

Ein weiterer wichtiger Anreiz betrifft die freiwillige Teilnahme am Spiel [MR92]. Wenn die Teilnahme am Spiel für einen Spieler unprofitabel gegenüber der Nichtteilnahme erscheint, so wird er gar nicht erst spielen wollen und die Teilnahme verweigern. Der Teilnahmeanreiz ist ein wichtiger Punkt bei freiwilligen Spielen, bei denen die Teilnahme nicht erzwungen werden kann. Ein Beispiel ist der in Abschnitt 3.3 beschriebene NIMP Algorithmus zur Zuteilung von Studenten zu Praktikumsplätzen in Krankenhäusern. Der Algorithmus bot, wie die Ergebnisse zeigten, einen Anreiz zur Teilnahme, da die Zuteilung den Studenten sowie den Krankenhäusern die langwierige, zeitintensive Suche nach geeigneten Partnern ersparte und gleichzeitig eine ähnlich gute oder sogar bessere Zuteilung versprach. Ohne diesen Teilnahmeanreiz wäre der Zuteilungsalgorithmus in der Praxis gescheitert.

Das Design anreizkompatibler Mechanismen bei Spielen mit privater Information kann schwierig bis unmöglich sein. In [MR92, S.140ff] ist ein Beispiel für ein Zwei-

Personen Spiel gegeben, für das es unmöglich ist, einen anreizkompatiblen Vorgang zu definieren, der für alle beteiligten Spieler die wahrheitsgemäße Angabe ihrer privaten Werte zur profitabelsten Strategie macht. Es ist möglich, dies für einen Teil der Spieler zu erreichen, allerdings gewinnen dann die anderen Spieler weiterhin durch unkorrekte Angabe ihrer Werte und das effiziente Ergebnis, das unter vollständiger Information möglich wäre, wird nicht erreicht. Auch hier ist das National Intern Matching Program (Abschnitt 3.3) ein weiteres Beispiel, da auch für dieses gezeigt werden konnte, dass es keinen Algorithmus gibt, der sowohl ein stabiles und damit ebenfalls effizientes Ergebnis erzeugt und gleichzeitig die wahrheitsgemäße Angabe der Präferenzen für alle Teilnehmer zur präferierten Strategie macht. Auch hier ist also die Anreizkompatibilität nicht gegeben.

## 5.3 Auktionen

An auction is a market institution with an explicit set of rules determining resource allocation and prices on the basis of bids from the market participants. [MM87]

Eine Auktion ist also ein Mechanismus, bestehend aus einer Menge an Regeln, der als Eingabe eine Menge von Geboten der Marktteilnehmer, also sowohl der Käufer als auch der Verkäufer, entgegen nimmt und als Ergebnis zurück gibt, welche Güter an welche Marktteilnehmer gegeben werden und zu welchen Preisen.

Auktionen werden insbesondere dann zum Verkauf von Gütern eingesetzt, wenn der Wert des zu verkaufenden Gutes a priori nicht feststeht oder sich abhängig von den Käufern bzw. Verkäufern unterschiedliche Werte ergeben. Auktionen helfen zum einen dabei, eine Vorstellung über den Wert des Gutes zu bekommen, und zum anderen unterstützen sie Verkäufer dabei, das Gut an denjenigen Käufer zu verkaufen, der dem Gut den höchsten Wert beimisst und daher das meiste dafür zu zahlen bereit ist. Es geht hier also um Situationen mit Informationsasymmetrien [Kle04], in denen gewisse Informationen nicht oder nur bei bestimmten Parteien vorhanden sind. Bereits Hayek argumentierte, dass die Allokation von Ressourcen in der ökonomischen Gesellschaft nur deshalb so problematisch sei, weil die nötigen Informationen verteilt seien und nie in ihrer Gesamtheit vorliegen [Hay45]. Im Fall von Auktionen geht es hier vorrangig um Informationen über den Wert eines Gutes für verschiedene Parteien. Auktionen unterstützen den Prozess der Preisbildung. Wenn Informationen über den Wert des Gutes sowie über die Eigenschaften der beteiligten Parteien allgemein bekannt sind (perfekte Information), dann ist meist kein Auktionsmechanismus mehr nötig [MM87, Kle04].

Es gibt eine Reihe verschiedener Auktionsformen mit unterschiedlichen Eigenschaften. Zentral für die Untersuchung einer Auktionsform ist die Struktur der vorhandenen Information. Es geht dabei zum einen um Information über das versteigerte Gut und zum anderen um Informationen über die anderen Beteiligten, sowohl die Käufer als auch Verkäufer.

Informationen über das versteigerte Gut sind die Grundlage dafür, wie die potentiellen Käufer das Gut für sich bewerten. Die Bewertung legt die Obergrenze des Betrags fest, den ein Käufer bieten würde, da eine Bezahlung darüber für den Käufer einen Verlust bedeuten würde. Es ist aber nicht immer so, dass ein Käufer die Bewertung des Gutes auch kennt. Man unterscheidet dabei die folgenden Situationen:

1. Im Fall unabhängiger, privater Werte (independent, private-value model) kennen die Bieter ihre eigene Werteinschätzung für das Gut, sie wissen jedoch nichts über die Werteinschätzungen der anderen Bieter. Die Werte sind voneinander unabhängig, d.h. kein Bieter wird seine Werteinschätzung basierend auf denen der anderen Bieter anpassen. Dies ist beispielsweise der Fall bei Gütern, bei denen persönlicher Geschmack den Wert bestimmt, oder aber bei Aufträgen, bei denen sich der Wert nach den Kosten für die Auftragsdurchführung der jeweiligen Firma richtet.
2. Das Gegenteil zu privaten Werten sind Güter mit einem objektiven, gemeinsamen Wert, der für alle Bieter gleichermaßen gilt (common-value model). Dieser Wert ist generell nicht bekannt, die Bieter haben aufgrund unterschiedlicher Vorabinformation verschiedene, initiale Wertschätzungen. Eine Bewertung wird dabei durch die Bekanntgabe von Informationen über die Bewertungen durch andere Bieter beeinflusst. Die Bewertungen sind also voneinander abhängig.

Milgrom und Weber schlagen in [MW82] zum ersten Mal ein allgemeines Modell für verknüpfte Werte (affiliated values) vor. Dieses Modell besteht aus einer Komponente für private Werte und einer Komponente für abhängige Werteeinflüsse. Die Gesamtbewertung für das Gut setzt sich aus den einzelnen Bewertungsteilen zusammen. Reine private bzw. reine öffentliche Werte lassen sich als Extrempunkte von verknüpften Werten darstellen.

Das Modell verknüpfter Werte stellt sich folgendermaßen dar [MW82].  $n$  Bieter konkurrieren um ein einzelnes Gut. Gegeben sei ein Vektor  $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$  von privaten Signalen bezüglich des Gutes. Gegeben sei weiterhin ein Vektor  $S = (S_1, \dots, S_m) \in \mathbb{R}^m$  von weiteren, objektiven Informationen über das Gut, die dessen Wert beeinflussen, und die den Bietern a priori zum größten Teil unbekannt sind (evtl. sind Elemente von  $S$  dem Verkäufer bekannt).  $V_i = u_i(S, X)$  bezeichne den wahren Wert des Gutes für Bieter  $i$ . Der Wert hängt also sowohl von den privaten Signalen als auch den objektiven Eigenschaften des Gutes ab. Milgrom und Weber machen dann die folgenden Annahmen:

- Es existiert eine Funktion  $u \in \mathbb{R}^{m+n}$ , so dass  $u(S, X_i, \{X_j\}_{j \neq i}) = u_i(S, X)$  für alle Bieter  $i$  gilt. Dies bedeutet, dass die wahren Werte der Bieter zum einen in gleicher Weise von  $S$  abhängen und dass zum anderen die privaten Signale der anderen Bieter den wahren Wert in gleicher Weise beeinflussen. Es wird also von homogenen Bietern ausgegangen.
- Die Funktion  $u$  ist nicht-negativ, stetig und monoton steigend in allen Variablen. Erhöht man also beispielsweise das private Signal eines Bieters, so steigen auch die Werte aller anderen Bieter an. Es gibt also eine positive Korrelation zwischen den einzelnen Elementen und der Funktion  $u$ .
- $E[V_i] < \infty$  für alle Bieter  $i$ . Der Erwartungswert des wahren Wertes ist also immer beschränkt.

Das Modell verknüpfter Werte entspricht für  $m = 0$  und  $V_i = X_i$  dem Modell privater Werte, wobei die wahre Bewertung gleich dem privaten Signal ist und unabhängig von den restlichen, privaten Signalen. Setzt man  $m = 1$  und  $V_i = S_1$ , so lässt sich das Modell allgemeiner Werte darstellen. Private Signale spielen hier gar keine Rolle, sondern die Bewertung hängt von einer objektiven, unbekanntem Charakteristik des Gutes ab.



Insbesondere erlaubt das Modell aber die Kombination privater und allgemeiner Werte, wie es auf viele praktische Situationen zutrifft.

Die Verknüpfung der Werte untereinander stellt sich, anschaulich gesagt, als eine Art positive Korrelation aller Werte untereinander dar. Die exakte Definition von Affiliation ist in [MW82] gegeben als:

**Definition 5.2** *Seien  $z, z' \in \mathbb{R}^{m+n}$ .  $z \vee z'$  bezeichne das komponentenweise Maximum der beiden Vektoren, und  $z \wedge z'$  das komponentenweise Minimum. Sei  $f$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf  $\mathbb{R}^{m+n}$ . Dann sind die Modellvariablen verknüpft (affiliated), wenn für alle  $z$  und  $z'$*

$$f(z \vee z')f(z \wedge z') \geq f(z)f(z')$$

*Die Dichtefunktion  $f$  heißt dann ebenfalls verknüpft (affiliated).*

Dadurch, dass in der Definition lediglich  $\geq$  gefordert wird, sind voneinander unabhängige Zufallsvariablen ebenfalls als verknüpft anzusehen. Man kann verknüpfte Werte also nicht mit positiver Korrelation gleichsetzen, man muss sie eher verstehen als die Abwesenheit von negativer Korrelation, wobei der Vergleich mit dem Begriff Korrelation anschaulich zu verstehen ist und keine Entsprechung der Definitionen bedeutet. Im Prinzip bedeutet affiliation aber im Fall einer Dichtefunktion, dass höhere Werte einer Variablen höhere Werte für die anderen Variablen wahrscheinlicher macht (oder eben auch gleich lässt, diese Tatsache wird aber der Einfachheit halber in den folgenden Formulierungen nicht immer separate Erwähnung finden). Im Fall von verknüpften privaten Signalen von Bietern bedeutet dies, dass, wenn sich das private Signal eines Bieters erhöht, sich auch die Wahrscheinlichkeit für höhere Werte der anderen Signale erhöht. Ändert also ein Bieter seine Meinung über ein Gut, so ändert dies entsprechend die erwarteten Werte der anderen Bieter.

Das Modell verknüpfter Werte macht in seiner allgemeinen Form noch keine konkrete Aussage über die Beschaffenheit der privaten Signale bzw. der objektiven, den Wert beeinflussenden Eigenschaften des Gutes. Private Werte werden im Fall homogener Bieter oft so modelliert, dass die Bieter die Werte der anderen Bieter als Ergebnis einer Wahrscheinlichkeitsverteilung wahrnehmen. Diese Verteilung ist allen Beteiligten bekannt, und die Öffentlichkeit der Verteilung ist ebenso bekannt. Die Information über die anderen Bieter äußert sich also in dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung mit oberer und unterer Grenze für die privaten Bewertungen.

Welche Rolle spielt nun Information für Auktionen und für die Ergebnisse von Auktionen? Durch welche Mechanismen kann Information in Auktionen sinnvoll genutzt werden? In den folgenden Abschnitten werden zunächst die wichtigsten, einstufigen Auktionsformen vorgestellt und untersucht, inwiefern die Auktionsformen Einfluss auf die veröffentlichte Information haben und wie dies das Ergebnis der Auktion beeinflusst. Dann wendet sich die Arbeit insbesondere zweistufigen Auktionsmechanismen zu und stellt dar, welchen Einfluss eine zweite Stufe auf die kommunizierte Information hat und wieso diese sinnvoll sein kann. Der Rolle von Information für das Workshopzuteilungsproblem widmet sich dann das folgende Kapitel 6.

### 5.3.1 Einstufige Auktionen

Der Überblick zu den gängigsten einstufigen Auktionsverfahren orientiert sich maßgeblich an [Hol98] und [MM87]. Auktionsverfahren lassen sich anhand einiger Eigenschaften

in verschiedene Gruppen klassifizieren. Im Folgenden werden dabei nur die meist üblichen Situationen dargestellt, in denen Gebote von Käufern abgegeben werden. Es gibt zu den meisten Auktionsformen eine entsprechende, bei der die Gebote von den Verkäufern kommen und der Käufer entscheidet, von wem er kauft (Ausschreibung). Diese Entsprechungen werden nicht gesondert erwähnt.

**Einheitspreisauktionen** (uniform price) Diese Auktionen zeichnen sich dadurch aus, dass für ein Produkt, dass in höherer Stückzahl angeboten wird, von jedem Käufer derselbe Preis bezahlt wird.

**sequentielle vs. parallele Auktionen** Bei sequentiellen Auktionen werden die Gebote der Käufer nacheinander in einzelnen Schritten abgegeben, nach jedem abgegebenen Gebot werden gewisse Informationen über den aktuellen Stand der Auktion enthüllt und danach folgt die nächste Gebotsabgabe, die also durch diese zusätzliche Information beeinflusst sein kann. Dem gegenüber stehen parallele Auktionen (Sealed-Bid Auctions), bei denen die Gebote gleichzeitig abgegeben werden, so dass kein Bieter Informationen über die Gebote der Konkurrenten erhält. Die Gebote werden also versiegelt abgegeben und erst nach Abgabe aller Gebote geöffnet.

**einseitige vs. zweiseitige Auktionen** (One-Sided vs. Double Auction) Bei einseitigen Auktionen gibt es für gewöhnlich einen Verkäufer und mehrere Käufer. Gebote werden nur von den Käufern, also von einer Seite, abgegeben. Bei zweiseitigen Auktionen werden Gebote simultan von Käufern und Verkäufern abgegeben, es können jederzeit Verträge zustande kommen, sobald miteinander kompatible Gebote abgegeben werden.

**Stückzahl angebotener Produkte** (Single-Unit vs. Multi-Unit Auction) Auktionen, bei denen lediglich ein einzelnes Produkt verkauft wird, stehen Auktionen gegenüber, bei denen von einem Produkt mehrere Einheiten verkauft werden. Hier ist weiter zu unterscheiden, ob die Käufer typischerweise nur eine Einheit des Produkts erwerben möchten, oder eventuell mehrere.

**Anzahl angebotener Produkte** (Single-Item vs. Multi-Item Auction) Es gibt Auktionen, bei denen nicht nur ein einzelnes Produkt, sondern mehrere verschiedene gleichzeitig angeboten werden (kombinatorische Auktionen). In diesem Fall haben Käufer typischerweise Interesse an mehreren Produkten gleichzeitig, und bei den angebotenen Produkten kommt es häufig zu Komplementäreffekten bzw. Substitutionseffekten für die Käufer. Bei Substitutionsgütern handelt es sich um Güter, die sich gegenseitig ersetzen. Der Nutzen aus zwei Substitutionsgütern ist also deutlich geringer als die Summe der Nutzen eines einzelnen solchen Gutes. Komplementärgüter ergänzen sich dagegen, hier ist der Nutzen aus zwei Gütern größer als die Summe der Nutzen der einzelnen Güter.

**Posted-Offer Auktionen** sind generell Festpreisauktionen, bei denen der Verkäufer einen festen Preis nennt, für den er bereit ist, eine Einheit des angebotenen Produkts zu verkaufen. Die Käufer erhalten nacheinander die Chance, eine beliebige Anzahl der Produkte zu kaufen, solange, bis alle Produkte verkauft sind.

Bei einer **Discriminatory Auction** sind mehrere Einheiten eines Produkts vorhanden. Die Käufer nennen parallel die gewünschte Anzahl an Einheiten und den Preis. Die Käufer mit den höchsten Preisen kaufen zu ihrem Preis, solange, bis die Stückzahl des

nächsten Käufers nicht mehr gedeckt werden kann. Ähnlich dazu ist die **Competitive Auction**, bei der der Preis jedoch für alle Käufer einheitlich der Preis des höchsten, zurückgewiesenen Käufers ist. Beide Auktionen sind also Sealed-Bid, One-Sided und Multi-Unit Auktionen.

Eine weitere Einheitspreisauktion ist die **Clearinghouse Auction**. Diese funktioniert mit einer dritten Stelle zwischen Käufern und Verkäufern, dem Clearinghouse. Das Clearinghouse sammelt Angebote der Käufer und Verkäufer und ermittelt aus den Angebots- und Nachfragekurven den Markträumungspreis, zu dem alle vorhandenen Produkte verkauft werden. Hier handelt es sich also um eine zweiseitige, parallele Auktion.

**Cournot Spiele** funktionieren ähnlich wie das Clearinghouse, es werden allerdings keine Preise der Verkäufer gesammelt, sondern lediglich deren angebotene Mengen. Der Markträumungspreis ergibt sich aus der insgesamt angebotenen Menge und den Kaufangeboten so, dass zu diesem Preis kein Nachfrageüberschuss entsteht. Für den Fall zu geringer Nachfrage müssen Verkäufer aber bereit sein, zu einem Preis von Null zu verkaufen.

Eine weitere Methode ist die der **Walras'schen Auktion (tâtonnement process)**. Ein Auktionator ruft wiederholt Preise aus und sammelt daraufhin die Kauf- und Verkaufsangebote ein. Je nachdem, ob ein Angebots- oder ein Nachfrageüberschuss vorhanden ist, wird der Preis für die nächste Runde nach unten bzw. oben korrigiert, so lange, bis Angebot und Nachfrage gleich hoch sind. Der dann ausgerufene Preis ist der Markträumungspreis. Hier handelt es sich also um eine sequentielle Auktionsform, da zwischen den einzelnen Stufen durch die Preisanpassungen implizit Informationen über die abgegebenen Angebote enthüllt werden.

Die **Oral Double Auction** ist ebenfalls zweiseitig und sequentiell, hier werden die Gebote sowohl von Käufern als auch von Verkäufern offen ausgerufen, so dass alle Einzelheiten über die Gebote der Konkurrenz wie der Gegenseite öffentlich sind. Jeder Käufer und Verkäufer kann zu jeder Zeit ein Angebot der Gegenseite akzeptieren.

Im Folgenden werden Auktionen vorgestellt, bei denen nur eine Einheit eines Gutes verkauft wird.

Bei der **First-Price Sealed-Bid Auction** gewinnt der Höchstbietende und zahlt den Preis seines Gebotes. Diese Auktionsform findet oft bei Ausschreibungen z.B. durch die Regierung Anwendung. Es werden Gebote von Firmen abgegeben, die sich um einen Auftrag bewerben, und diejenige Firma mit dem hier niedrigsten Gebot bekommt den Auftrag zu diesem Preis zugeteilt. Bei der **Second-Price Sealed-Bid Auction** oder **Vickrey Auktion** [Vic61] zahlt der Höchstbietende lediglich den Preis des zweithöchsten Bieters. Diese Auktionsform entspricht der Competitive Auction mit nur einem angebotenen Gut. Diese Auktion wird in der Praxis selten verwendet, ist aber sehr nützlich für theoretische Betrachtungen und Vergleiche [MM87].

Sequentielle, einseitige Auktionen sind die holländische und die Open Ascending-Bid Auction. Bei **holländischen Auktionen (Dutch Auctions)** wird vom Auktionator als Startpreis ein hoher Preis für das Gut angegeben. Der Preis wird dann in festen Schritten nach und nach gesenkt, so lange, bis der erste Käufer das aktuelle Gebot akzeptiert. **Open-Bid Ascending Auctions** funktionieren praktisch umgekehrt. Hier wird mit einem sehr niedrigen Gebot gestartet und das Gebot wird sequentiell erhöht. Käufer hören auf zu bieten oder steigen aus, wenn das Gebot ihren Maximalpreis übersteigt. Sobald nur noch ein Bieter vorhanden ist, wird das Gut zu dem dann aktuellen Preis

verkauft. Von dieser Auktionsform gibt es verschiedene Varianten. Bei der **englischen Auktion** rufen die Käufer die Gebote selbst aus. Oft gibt es ein Mindestinkrement, um das ein neues Angebot das letzte, aktuelle übersteigen muss. Das Ende der Auktion kann sowohl mit Bedenkzeit nach jedem weiteren Gebot funktionieren als auch zu einem bestimmten, allen bekannten Zeitpunkt enden. Bei der **japanischen Auktion** wird der Preis durch den Auktionator erhöht. Nach jeder Erhöhung haben die Bieter die Chance, aus der Auktion auszusteigen. Wer einmal aussteigt, kann nicht wieder einsteigen. Durch diese Methode wird verhindert, dass “jump bids” abgegeben werden, also Gebote, die den Preis in einem großen Sprung erhöhen und dadurch die anderen Bieter von der weiteren Teilnahme abschrecken [Kle04]. Die Variante der japanischen Auktion wird sehr oft in theoretischen Analysen verwendet. Bei der Open-Bid Ascending Auction handelt es sich um eine sequentielle Second-Price Auction [FMS99], da der Höchstbietende denjenigen Betrag zahlt, zu dem der Zweithöchste gerade nicht mehr bereit ist, das Gut zu erwerben.

### 5.3.2 Weitere Einflussfaktoren von Auktionen

Das Risikoverhalten der Käufer und Verkäufer ist ein wichtiger Faktor bei der Untersuchung von Auktionen. Auktionsteilnehmer sind risiko-avers, risiko-neutral oder risikofreudig, Bietstrategien können von diesen Merkmalen abhängen. In dieser Arbeit wird das Risikoverhalten allerdings nicht separat untersucht, es wird von risikoneutralen Bietern ausgegangen.

Desweiteren gibt es Auktionen mit Eintrittspreisen (entry fees), bei denen die Teilnahme an der Auktion kostenpflichtig ist. Käufer müssen also zunächst einmal entscheiden, ob die Chance, als Gewinner aus einer Auktion zu gehen, den Eintrittspreis rechtfertigt.

Bei den meisten Auktionen wird davon ausgegangen, dass die Bieter symmetrisch sind, also bis auf ihre privaten oder a priori Werte dieselben Eigenschaften haben und dem Verkäufer sowie sich untereinander gleich erscheinen. Annahmen über die Bieter gelten in diesem Fall gleichermaßen für alle Bieter. Dem gegenüber stehen Auktionen, bei denen sich die Bieter aufgrund gewisser Eigenschaften in verschiedene Klassen unterteilen lassen. Dies macht besonders bei parallelen Auktionen einen Unterschied, da die Existenz verschiedener Klassen von Bietern zu verschiedenen Annahmen über die Eigenschaften der Konkurrenz führen, was die Höhe der Gebote beeinflussen kann.

### 5.3.3 Bewertung von Auktionen

Der Ausgang einer Auktion wird als **Pareto-effizient** bezeichnet, wenn derjenige Bieter mit der höchsten Bewertung für das Gut den Zuschlag erhält. Würde ein Bieter mit einer niedrigeren Bewertung den Zuschlag erhalten, so könnte derjenige mit der höchsten Bewertung denselben Preis an den Verkäufer zahlen und dem Käufer zusätzlich dessen Gewinn zahlen. Die zu zahlende Gesamtsumme wäre gleich der Bewertung des Gutes durch den Käufer und läge damit unterhalb der höchsten Bewertung, so dass dieser immer noch einen Gewinn hätte. Er könnte sich also besser stellen, ohne den Käufer oder den Verkäufer schlechter zu stellen, damit wäre das Ergebnis nicht pareto-effizient.

Es gibt verschiedene Formen von Äquivalenz zwischen Auktionen. Die stärkste Form ist die strategische Äquivalenz. Zwei Auktionen sind **strategisch äquivalent**, wenn es einen Isomorphismus zwischen den Strategieräumen gibt, so dass die Payoffs jeweils

gleich sind [FMS99]. Der Strategieraum einer Auktion ist die Menge aller möglichen Strategien aller Teilnehmer. Die Strategie eines Spielers legt zu jedem Zeitpunkt in einer Auktion fest, welche Aktion der Spieler als nächstes ausführen wird. Jeder Zeitpunkt einer Auktion kann durch einen Entscheidungspunkt dargestellt werden, der beschreibt, welche Information zu diesem Zeitpunkt genau jedem einzelnen Teilnehmer bekannt ist. Die Aktionen betreffen die Gebote oder Entscheidungen, in der Auktion zu verbleiben bzw. auszuschneiden. Die Payoffs der Spieler ergeben sich aus dem Ergebnis der Auktion. Die möglichen Auktionsergebnisse können durch zusätzliche terminale Entscheidungspunkte abgebildet werden, von denen keine weiteren Aktionen ausgehen.

Für strategische Äquivalenz muss es einen Isomorphismus geben, der die Entscheidungspunkte der Bieter aufeinander abbildet, und einen weiteren, der zu jedem Entscheidungspunkt die Menge der Aktionen aufeinander abbildet. Da ein Entscheidungspunkt die Information repräsentiert, die zu diesem Zeitpunkt der Auktion für einen Bieter verfügbar ist, impliziert der Isomorphismus zwischen den Entscheidungspunkten auch eine bijektive Abbildung der verfügbaren Informationen aufeinander. Zusätzlich zu der Existenz der beiden Isomorphismen muss der Payoff bei einander entsprechenden Auktionsergebnissen identisch sein. Strategische Äquivalenz impliziert Nash-Ergebnis-Äquivalenz ebenso wie Erlösäquivalenz.

Zwei Auktionen sind **Nash-Ergebnis-äquivalent**, wenn jede Auktion ein Nash-Gleichgewicht hat, so dass das Spielen dieser Gleichgewichtsstrategien zum selben Ergebnis führt [FMS99]. Das Ergebnis bedeutet hier, dass derselbe Spieler gewinnt und dieselben Zahlungen an den Verkäufer erfolgen. Dasselbe Prinzip ist anwendbar auf **dominante Gleichgewichte** [MM87], bei denen die bevorzugte Strategie eines jeden Spielers unabhängig von den Strategien der anderen Spieler ist. Äquivalenz bezüglich dominanter Gleichgewichte ist also noch stärker als basierend auf Nash-Gleichgewichten.

Allgemeiner spricht man von **Erlös-Äquivalenz** (outcome / revenue equivalence), wenn zwei Auktionen denselben Erlös für den Verkäufer generieren. Hierbei wird nicht betrachtet, welcher Bieter den Zuschlag bekommt. Bei der Berechnung des Erlöses wird davon ausgegangen, dass Gleichgewichtsstrategien gespielt werden.

Eine wichtige Bedeutung für Auktionen hat das **Enthüllungsprinzip** (revelation principle) [Mye81]. Es besagt, dass es zu jedem Auktionsmechanismus einen anreizkompatiblen, direkten Enthüllungsmechanismus gibt, der dasselbe Ergebnis erzielt. Ein direkter Enthüllungsmechanismus ist einer, bei dem die Bieter dem Verkäufer lediglich ihren privaten Wert des Gutes enthüllen. Ein Mechanismus ist anreizkompatibel, wenn es die beste Strategie für die Bieter ist, den wahren Wert anzugeben und nicht strategisch zu lügen. Stellt sich also der Verkäufer eines Gutes die Frage, welcher Auktionsmechanismus für ihn der optimale ist, so weiß er, dass es zu diesem optimalen Mechanismus einen direkten, anreizkompatiblen Mechanismus gibt, der ihm denselben Erlös bringt. Man kann die Suche nach einem optimalen Mechanismus also auf die Menge der direkten, anreizkompatiblen Mechanismen beschränken [MM87].

Das Phänomen des **winner's curse** [BT96, KL86] tritt hauptsächlich bei Common Value Auktionen auf. Bei diesen hat das zu versteigernde Gut einen allgemein gültigen Wert (Marktwert), der aber den Bietern unbekannt ist. Jeder Bieter hat seine private Schätzung des Wertes, diese Schätzungen können jedoch sehr unterschiedlich ausfallen. Gibt jeder Bieter ein Gebot in Höhe seiner privaten Schätzung ab, so wird derjenige mit der höchsten Schätzung gewinnen. Er wird, wenn er nach Ende der Auktion feststellt, dass alle anderen Schätzungen niedriger waren als die eigene, seine eigene Schätzung

nach unten korrigieren und damit das Gefühl haben, zu viel bezahlt zu haben, da seine initiale Schätzung zu hoch war (wir gehen von einer First-Price Sealed-Bid Auktion aus).

Um den winner's curse zu vermeiden, wird in der Auktionstheorie davon ausgegangen, dass Bieter ihre Gebote vor der Abgabe nach unten korrigieren, basierend auf der zusätzlichen Information, die sich aus einem Auktionsgewinn folgern ließe [BT96, Mye97, MM87]. Dies würde einen Nachteil für den Verkäufer bedeuten, der dadurch einen geringeren Erlös erzielt. Für den Bieter bedeutet eine Verringerung des Gebots natürlich auch ein höheres Risiko, nicht Gewinner der Auktion zu sein. In der Praxis wurde häufig ein starker Effekt des winner's curse beobachtet, so wie beispielsweise bei der Versteigerung von UMTS Lizenzen an Telekommunikationsunternehmen [BE00]. Die Unternehmen konnten davon ausgehen, dass ihr Marktwert sehr stark leiden würde, wenn sie keine Lizenz ersteigern können würden. Es wurden daher Gebote abgegeben, die überhöht waren und die Erwartungen der Verkäufer deutlich übertrafen. Für die Gewinner der Auktion stellte sich das Problem, die zu zahlenden Gebühren wieder erwirtschaften zu müssen. Ähnliche Erfahrungen wurden bei Versteigerungen von Bohrrechten an Mineralölkonzern oder bei Unternehmensübernahmeschlachten gemacht [KL86, MM87]. Experimente zeigten, dass der winner's curse bei rationalen, aber unerfahrenen Spielern zu beobachten ist, während sich sein Effekt bei erfahrenen Spielern verringert. Weiterhin trägt eine hohe Anzahl von Bietern zur Verstärkung des winner's curse bei [KL86].

## 5.4 Information in einstufigen Auktionen

Zur Untersuchung von Informationen und Vergleich von Auktionsmethoden werden einseitige Auktionsmethoden betrachtet, bei denen eine Einheit eines einzelnen Gutes verkauft wird. Unter den Voraussetzungen, dass

1. die Bieter risikoneutral sind,
2. die Bewertungen des Gutes nach dem Modell der unabhängigen, privaten Werte erfolgt,
3. die Bieter symmetrisch sind und
4. die Zahlung nur von den Geboten abhängt,

wurde das Revenue-Equivalence-Theorem gezeigt [Kle99, MM87]. Das Revenue-Equivalence Theorem besagt, dass jeder beliebige Auktionsmechanismus, für den die genannten Voraussetzungen gelten, im Gleichgewicht zum selben Payoff für jeden Spieler führt. Dies bedeutet auch, dass der Gewinner der Auktion immer denselben Preis an den Verkäufer zahlt, da sich sein Payoff aus seinem privaten Wert minus dem bezahlten Preis ergibt. Für einen Verkäufer ist es demnach unerheblich, welche Auktionsform er zum Verkauf eines Gutes wählt, sein erwarteter Gewinn ist immer derselbe. Dies gilt also insbesondere für die englische und die holländische Auktion sowie die First-Price und Second-Price Sealed-Bid Auktionen. Dies bedeutet, dass die sequentiellen Verfahren keinerlei Vorteil gegenüber den parallelen Verfahren bieten, in diesem Fall haben also im Lauf einer sequentiellen Auktion bekannt werdende Informationen über die Bewertungen der anderen Bieter keinen Einfluss auf die Gebote. Dies ist im Fall privater, unabhängiger Werte leicht einzusehen, da sich die Bewertungen nicht in Abhängigkeit anderer ändern. Jeder Bieter kennt bereits vor Beginn der Auktion sein Höchstgebot.

Dies ändert sich aber im Fall verknüpfter Werte, wie Milgrom und Weber [MW82] zeigen. Ihr Ergebnis ist, dass im Fall verknüpfter Werte zum einen die holländische und die First-Price Auktion einander weiterhin strategisch äquivalent sind und daher zum selben Ergebnis für alle Beteiligten führen. Die Äquivalenz der englischen und der Second-Price Auktion gilt jedoch nicht mehr im Fall abhängiger Werte, hier kann die englische Auktion zu höheren erwarteten Erlösen für den Verkäufer führen. Dies liegt darin begründet, dass die Bieter im Lauf einer englischen Auktion durch die Gebote der anderen Bieter Informationen über den Wert des Gutes bekommen, den sie in ihre eigene Wertschätzung einbeziehen können. Dies verringert den Effekt des winner's curse und führt zu aggressiverem Bieten. Die Second-Price Auktion wiederum führt zu höheren, erwarteten Erlösen als die First-Price und die holländische Auktion.

Für die Second-Price Auktion zeigen Milgrom und Weber, dass die Bietstrategie im Gleichgewicht darin besteht zu vermuten, dass kein anderer Bieter eine höhere als die eigene Wertabschätzung hat und die zweithöchste Wertabschätzung gleich der eigenen ist.

Sei  $X = (X_1, \dots, X_n)$  der Vektor der Wertabschätzungen der  $n$  Bieter und sei  $S = (S_1, \dots, S_m)$  der Vektor der zusätzlichen, den Wert des Gutes beeinflussenden Variablen. Alle Elemente seien reellwertig, d.h. in Geldeinheiten ausdrückbar. Eine Strategie für Bieter  $i$  besteht dann in einer Bietfunktion  $b_i(X_i) = b \geq 0$ , die seine Wertabschätzung in ein Gebot transformiert. Wegen der Symmetrie der Bieter genügt es, Bieter 1 zu betrachten. Bezeichne  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  die Gebote  $X_2, \dots, X_n$  sortiert, so dass  $Y_1 \geq Y_2 \geq \dots \geq Y_{n-1}$ . Der Wert des Gutes für Bieter 1 ist dann gegeben durch  $V_1 = u(S_1, \dots, S_m, X_1, Y_1, \dots, Y_{n-1})$  (zur Funktion  $u$  siehe Abschnitt 5.3 auf Seite 98).

Die Autoren definieren eine Funktion  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  als  $v(x, y) = E[V_1 | X_1 = x, Y_1 = y]$ .  $v$  gibt also den erwarteten Wert des Gutes für Bieter 1 wider, unter Festsetzung der eigenen Wertschätzung auf  $x$  und der höchsten Wertschätzung der anderen Bieter auf  $y$ . Setzt man nun eine Bietstrategie  $b^*(x) = v(x, x)$ , so zeigen sie, dass durch  $(b^*, \dots, b^*)$  ein Nash-Gleichgewicht der Second-Price Auktion festgelegt wird. Unter der Annahme, dass die anderen Bieter die Strategie  $b^*$  verfolgen, ist also für einen festen Bieter ebenfalls  $b^*$  die beste Strategie. Die Gleichgewichtsstrategie besteht also darin anzunehmen, dass es kein höheres privates Signal als das eigene gibt, das zweithöchste aber gleich dem eigenen ist. Es bringt also weder Vorteile anzunehmen, dass ein anderer Bieter ein höheres Signal hat als man selbst, noch anzunehmen, dass alle anderen Signale strikt kleiner sind als das eigene. Der Verkäufer erhält dann einen Erlös von  $v(Y_1, Y_1)$  für den Fall, dass Bieter 1 gewinnt, da dieser Wert dem zweithöchsten Gebot entspricht (Beweis siehe [MW82, Abschnitt 4]).

Milgrom und Weber zeigen nun weiter, dass das zusätzliche Enthüllen von gewisser Information den erwarteten Erlös der Second-Price Auktion steigern kann. Die Werte der Bieter sind abhängig von den Signalen aller Bieter sowie evtl. von zusätzlicher Information über das Gut. Es geht also um die Enthüllung eines Teils dieser Informationen. Wieso die Enthüllung von Information den Erlös einer Second-Price Auktion steigern kann, lässt sich folgendermaßen erläutern: der Erlös hängt von der Wertschätzung des Bieters mit dem zweithöchsten Signal ab. Nehmen wir weiter an, dass Bieter 1 das höchste Signal ( $x$ ) hat und Bieter 2 das zweithöchste ( $y$ ), wobei  $x > y$  gilt. Solange keine zusätzliche Information enthüllt wird, bestimmt Bieter 2 im Gleichgewicht sein Gebot als  $b^*(y) = v(y, y) = E[V_1 | X_1 = y, Y_1 = y]$ . Er geht also davon aus, dass sein eigenes Signal das höchste ist und ein weiterer Bieter mit demselben Signal existiert. Die Werte der restlichen Bieter ergeben sich aus dem Erwartungswert. Nun ist es in der Realität

aber so, dass ja ein weiteres, höheres Signal existiert, nämlich das von Bieter 1, von dem Bieter 2 aber nichts weiß. Da die restlichen Variablen mit  $x$  und  $y$  verknüpft sind, erhöht sich gegenüber der Kombination  $X_1 = Y_1 = y$  auch der Erwartungswert für die restlichen Variablen. Da Bieter 2 also von dem höheren Signal  $x$  nichts weiß, unterschätzt er im Mittel folglich auch die restlichen Signale gegenüber deren tatsächlichem Wert.

Aus diesem Grund ist die Bekanntgabe von Informationen im Mittel hilfreich, da sich durch die Bekanntgabe der im Schnitt höheren, wahren Werte der Erwartungswert des wahren Wertes für Bieter 2 erhöht. Dies wiederum bedeutet, dass Bieter 2 ein höheres Gebot abgibt, was wiederum den Erlös für den Verkäufer steigert. Diese Betrachtungen beziehen sich wegen den zu Grunde liegenden Erwartungswerten auf durchschnittliche Ergebnisse, es ist damit nicht ausgeschlossen, dass in einem konkreten Fall die Enthüllung von Information einen negativen Einfluss auf den Auktionserlös hat. Diese Ergebnisse lassen sich direkt auf die englische Auktion übertragen. In dem Moment, wo in der englischen Auktion bis auf 2 Bieter alle ausgeschieden sind, entspricht die Situation derjenigen einer Second-Price Auktion, wobei durch die Veröffentlichung der Gebote bzw. der Ausscheidezeitpunkte der anderen Spieler Informationen über die Werte der anderen Bieter bekannt gegeben sind. Daher lassen sich die Ergebnisse bezüglich der allgemeinen Veröffentlichung von Information direkt auf die englische Auktion übertragen. Daher folgern die Autoren, dass die englische Auktion im Mittel einen höheren Erlös generieren kann als die Second-Price Auktion, durch die Bekanntgabe von Information während der Auktion.

Die Ergebnisse von Milgrom und Weber zeigen also, dass Information eine große Rolle im Fall von Auktionen spielt, bei denen die Werte der Bieter miteinander positiv korreliert sind. In diesem Fall führt im Verlauf einer Auktion veröffentlichte Information dazu, dass die Wertschätzungen der noch aktiven Bieter sich ändern können. Auf diese Weise wird das Risiko des winner's curse vermieden, welches wiederum die Bieter zu eher vorsichtigen Geboten treibt und daher den erzielten Preis für den Verkäufer niedrig hält. Durch die Verminderung des Risikos können höhere Gebote erzielt werden. Diese Ergebnisse liefern auch eine Erklärung dafür, wieso englische Auktionen sehr viel stärker in der Praxis verbreitet sind als die anderen Auktionsformen.

## 5.5 Zweistufige Spiele und Auktionen

Nachdem die Rolle der Veröffentlichung von Information für einstufige Auktionsverfahren gezeigt wurde, befasst sich dieser Abschnitt insbesondere mit zwei- oder mehrstufigen Auktionsverfahren, die explizit so gestaltet sind, dass gewisse Informationen im Lauf der Auktion veröffentlicht werden. Es findet ein Vergleich der Verfahren untereinander sowie mit ausgewählten, einstufigen Verfahren statt. Hauptaugenmerk liegt auf dem Einfluss der Einführung einer zweiten Stufe auf die Lösungen der Spiele und den Vor- und Nachteilen dieser zusätzlichen Stufe.

[EW88] gibt eine allgemeine Übersicht zu Auktionen, die aus mehreren Stufen bestehen. Es gibt sehr viele mögliche, mehrstufige Auktionsformen, bei denen Bieter aus- und einsteigen können oder auch von weiteren Geboten ausgeschlossen werden, bei denen sich die Auktionsmethode zwischen den Stufen ändert, die unterschiedliche Arten von Informationen zwischen zwei Stufen enthüllen uvm. Die Autoren sehen als grundlegende Gemeinsamkeit mehrstufiger Auktionen lediglich die Tatsache, dass Bieter während der Stufen Informationen bekommen können, aufgrund derer sie das weitere Verhalten in



der Auktion anpassen können.

In diesem Abschnitt werden verschiedene zweistufige Spiele und Auktionen vorgestellt und mit einstufigen Verfahren sowie miteinander verglichen. Eine zweite Stufe für das Divide the Dollar Spiel wird vorgestellt sowie eine auf demselben Mechanismus basierende, zweistufige Auktionsform. Eine zweistufige, parallele Auktionsform wird vorgestellt, die dasselbe Ergebnis wie die japanische Auktion erzielt. Weiterhin wird die allgemeinere Form der Survival Auction vorgestellt, die einen allgemeinen Rahmen für verschiedene Ausprägungen zweistufiger Auktionen bietet. Abschließend werden Auktionsverfahren vorgestellt, bei denen gewisse Information, die zur Bewertung des angebotenen Gutes wichtig ist, kostenpflichtig erworben werden kann. Hier helfen mehrstufige Verfahren dabei, das Risiko des nutzlosen Erwerbs kostenpflichtiger Information für die Bieter zu verringern.

### 5.5.1 Eine zweite Stufe für das Divide the Dollar Spiel

Divide the Dollar ist ein in der Spieltheorie bekanntes und oft diskutiertes Spiel. Bei diesem Spiel gibt es zwei Spieler, die einen Dollar unter sich aufteilen können. Sie geben dazu beide gleichzeitig eine Anzahl an Cents an, die sie für sich beanspruchen. Ist die Summe der Centangaben kleiner oder gleich 100, so bekommt jeder Spieler den gewünschten Betrag. Ist er jedoch größer als 100, so gehen beide Spieler leer aus.

Dieses Spiel hat viele verschiedene, pure Nash-Gleichgewichte. Nämlich ist  $(x, 100-x)$  für jedes  $0 \leq x \leq 100$  ein Nash-Gleichgewicht, zusätzlich ist weiterhin  $(100, 100)$  eines. Für  $(x, 100-x)$  ist dies klar, da sich kein Spieler durch ein anderes Gebot verbessern kann, sofern der andere Spieler bei seinem Gebot bleibt.  $(100, 100)$  ist ein sehr ineffizientes Gleichgewicht, da beide Spieler nichts erhalten, und dies durch ein anderes Gebot nicht ändern können, sofern der andere bei seiner Forderung von 100 bleibt. Das erwünschte Ergebnis des Spiels ist die gerechte Aufteilung von  $(50, 50)$ . Diese Strategie ist aber, außer dass sie den Spielern als offensichtlicher Schwerpunkt erscheinen mag, weder dominant noch hat sie sonst eine spieltheoretische Eigenschaft, die darauf hinweist, dass dieser Ausgang von beiden Spielern bevorzugt werden könnte. Es handelt sich hierbei also um ein Problem der Koordination der beiden Spieler, da keiner weiß, was der andere bieten wird.

Die Eigenschaften des Spiels ändern sich beim Hinzufügen einer zweiten Stufe, die in [BT96] erstmals vorgeschlagen wird. In der ersten Stufe wird wiederum von jedem Spieler ein Gebot abgegeben, diese werden jedoch am Ende der Stufe veröffentlicht. In der zweiten Stufe hat jeder Spieler die Möglichkeit, eines von den in der ersten Stufe abgegebenen Geboten als endgültiges Gebot abzugeben. Im Fall von einem zwei Personen Spiel kann also entweder das eigene Gebot bestätigt oder das Gebot des anderen angenommen werden. Ausgehend von den Geboten der zweiten Stufe erfolgt die Verteilung des Dollar nach den bekannten Regeln.

**Definition 5.3** *Ein Ergebnis ist dominance inducible durch einen Spieler, wenn der Spieler ein Gebot der ersten Stufe abgeben kann, das, durch Elimination dominierter Strategien, dieses Ergebnis als Lösung hat.*

Ein Ergebnis, das dominance inducible, hier bezeichnet als “induzierbar”, ist, kann also von einem Spieler durch Abgabe eines bestimmten Gebots der ersten Stufe quasi herbeigeführt werden, ein Gebot beeinflusst die Strategiewahl des anderen Spielers

derart, dass Strategien, die zu anderen Lösungen führen würden, für ihn schlechter wären. Das Gebot eines Spielers "lenkt" also quasi den anderen Spieler zur gewünschten Lösung hin.

Brams und Taylor [BT96] zeigen das folgende Theorem.

**Theorem 5.2** *Im Divide the Dollar mit einer zweiten Stufe, mit zwei Spielern, ist das Ergebnis  $(50, 50)$  dominance inducible durch ein Gebot von 50 eines der Spieler. Das Ergebnis  $(50, 50)$  ist weiterhin das einzige, welches dominance inducible ist.*

**Beweis.** Sei  $x$  das in Stufe 1 abgegebene Gebot, das das Ergebnis induzieren soll. Sei  $y$  das Gebot des anderen Spielers. Zunächst ist festzustellen, dass ein Ergebnis, das durch das Gebot  $x$  induzierbar sein soll, gleich  $(x, x)$  sein muss. Ansonsten wäre das Ergebnis abhängig von  $y$ , wobei aber  $y$  vom Spieler, der  $x$  bietet, nicht beeinflusst werden kann. Das Ergebnis wäre dann also nicht eindeutig bestimmt.

Fall 1:  $x = 50$ . Ist  $y = 50$ , so ist das Ergebnis trivialerweise  $(50, 50)$ . Ist  $y > 50$ , so ist es für jeden Spieler nachteilhaft, in der zweiten Stufe  $y$  zu bieten, da dadurch klar ist, dass beide einen Payoff von 0 erhalten. Ist  $y < 50$ , so ist der Payoff für denjenigen Spieler, der  $y$  in der zweiten Stufe wählt, in jedem Fall  $y$ , also weniger als 50. Es ist also für beide Spieler eine streng dominante Strategie, in der zweiten Stufe 50 zu wählen. Fall 1 zeigt also, dass ein Gebot von 50 das Ergebnis  $(50, 50)$  zum dominanten Gleichgewicht macht. Es bleibt zu zeigen, dass dies das einzige, solche Ergebnis ist.

Fall 2:  $x > 50$ . Das Ergebnis  $(x, x)$  bedeutet für beide Spieler einen Payoff von 0, was jedoch der schlechtest mögliche Ausgang ist und daher andere Strategien nicht dominieren kann.

Fall 3:  $x < 50$ . Das Ergebnis  $(x, x)$  wäre für  $x < y \leq 50$  nicht dominant, das beste Ergebnis für beide Spieler wäre hingegen die Wahl von  $y$  in der zweiten Stufe mit dem Ergebnis  $(y, y)$ . Bei einem Gebot von  $x < 50$  in der ersten Stufe ist das Ergebnis also abhängig vom Gebot  $y$  und damit nicht eindeutig induziert durch  $x$ .  $\square$

Auch wenn sich dieses Theorem leider nicht auf  $n > 2$  Spieler verallgemeinern lässt, zeigt sich, dass die Einführung einer zweiten Stufe dazu beiträgt, ohne weitere Koordination zwischen den Spielern das gewünschte Ergebnis durch einen Spieler herbeizuführen. Dies liegt an der zusätzlichen Information über die abgegebenen Gebote, die am Ende der ersten Stufe enthüllt wird und den beiden Spielern hilft, ein für beide vorteilhaftes Verhalten zu erzielen. Weitere Auswirkungen der zweiten Stufe sind natürlich auch die erhöhte Komplexität. Die Anzahl möglicher Strategien für die beiden Spieler steigt stark an, und das Spiel selbst wird in etwa doppelt so lang wie vorher.

### 5.5.2 Eine zweistufige Auktion nach Brams und Taylor

Brams und Taylor [BT96] schlagen einen Auktionsmechanismus in zwei Stufen vor, der vom Vorgehen her dem im vorigen Abschnitt beschriebenen zweistufigen Divide the Dollar Spiel sehr ähnelt. Bei dieser Auktion gibt es  $n$  Bieter und ein angebotenes Gut. In der ersten Stufe werden von allen Bietern geheime Gebote abgegeben. Diese Gebote werden am Ende der ersten Stufe veröffentlicht, allerdings ohne die Information, welches Gebot von welchem Bieter kam. In der zweiten Stufe darf jeder Bieter das finale Gebot, wiederum geheim, abgeben, dieses darf jedoch nur aus der Menge der bereits in Stufe eins abgegebenen Gebote, einschließlich dem eigenen, stammen. Der Höchstbieter der zweiten Stufe erhält den Zuschlag für das Gut zu seinem Gebot. Für den Fall, dass

mehrere Bieter in der zweiten Stufe ein höchstes Gebot abgeben, erhält es derjenige Bieter unter ihnen, der das höchste Gebot in der ersten Stufe abgegeben hat.

Der Unterschied dieses zweistufigen Auktionsmechanismus ist, im Gegensatz zu vielen einstufigen Auktionsformen, dass die zweite Stufe zusätzliche Informationen enthüllt. In diesem Fall werden am Ende der ersten Stufe alle Gebote bekannt, so dass jeder Bieter seine Vorstellungen über den Wert des Gutes anpassen kann. Die zweite Stufe bietet daraufhin die Möglichkeit, das Gebot der ersten Stufe erneut zu revidieren, basierend auf der gewonnenen Information.

Das Ergebnis dieser zweistufigen Auktion ist abhängig davon, ob die Bewertungen der Spieler für das angebotene Gut privat und unabhängig oder einheitlich (common value) sind. Betrachten wir zunächst die zweistufige Auktion im Fall von privaten Werten. Es wird angenommen, dass kein Spieler ein Gebot abgeben wird, das den eigenen Wert für das Gut übersteigt, weder in Stufe eins noch in Stufe zwei der Auktion. Denn in diesem Fall könnte es passieren, dass der Spieler einen Preis für das Gut bezahlen muss, der seinen eigenen Wert übersteigt, so dass er einen Verlust erleiden würde.

Eine zweite Annahme betrifft den Vergleich verschiedener Strategien. Es wird angenommen, dass von zwei Strategien, die für einen Spieler dasselbe Resultat liefern, diejenige präferiert wird, die das höhere Gebot der ersten Stufe beinhaltet, oder, beim selben Gebot der ersten Stufe das höhere Gebot der zweiten Stufe. Die Annahme betrifft hauptsächlich die Wahl der Gebote bei wenig Aussicht auf Gewinnen der Auktion. Auch wenn ein Spieler weiß, dass ein Konkurrent mehr bieten wird, wird er selbst so viel wie möglich bieten, um als vernünftiger Konkurrent zu erscheinen, evtl. im Hinblick auf weitere, folgende Spiele. Brams und Taylor nennen dies die “competitiveness assumption” (CA).

Brams und Taylor zeigen, dass unter diesen beiden Annahmen und den weiteren Annahmen, dass zum einen alle Spieler unterschiedliche Bewertungen des Gutes haben und daher immer unterschiedlich in der ersten Stufe bieten, und dass zum anderen eine obere Grenze der privaten Bewertungen öffentlich bekannt ist, das Ergebnis der zweistufigen Auktion mit privaten Werten dem einer Vickrey-Auktion entspricht. Jeder Spieler bietet seinen privaten Wert in der ersten Stufe, und der Höchstbietende bietet in der zweiten Stufe das zweithöchste Gebot, mit welchem er die Auktion gewinnt. Alle anderen Spieler bieten auch in der zweiten Stufe ihr Gebot der ersten Stufe. Dies entspricht also einer Vickrey-Auktion, bei der der Höchstbietende der Auktion gewinnt und den zweithöchsten Preis für das Gut zahlt (siehe [BT96, S.185ff]).

Die zweistufige Auktion mit privaten Bewertungen scheint den Autoren vorteilhafter gegenüber der Vickrey-Auktion zu sein. Durch die Tatsache, dass die Gebote der ersten Stufe öffentlich gemacht werden und die Anzahl der Gebote mit der Anzahl Bieter übereinstimmen muss, ist es schwieriger, Scheingebote abzugeben, die bei einer Vickrey-Auktion dazu dienen könnten, das zweithöchste Gebot und damit den bezahlten Preis möglichst hoch zu treiben. Ein weiterer Vorteil entsteht durch die Veröffentlichung der Gebote, allerdings spielt dies besonders bei Gütern mit einer gemeinsamen Bewertung eine Rolle, nicht so sehr bei unabhängigen, privaten Bewertungen.

Interessanter sind die Auswirkungen der zweiten Stufe bei gemeinsamen Bewertungen des Gutes. Besonders dann scheint die zweite Stufe von Vorteil zu sein, da sich die Bieter durch Veröffentlichung der Gebote am Ende der ersten Stufe ein besseres Bild vom wahren Wert des Gutes machen können als ohne diese Information über die Gebote der anderen Bieter. Gebote der ersten Stufe können noch nach oben oder unten

korrigiert werden, Bieter können sogar komplett “aussteigen”, indem sie entsprechend niedrig bieten und damit sicher sein können, nicht den Zuschlag zu erhalten (dies ist für alle Bieter in jedem Fall möglich bis auf denjenigen, der das höchste Gebot in Stufe eins abgibt).

Brams und Taylor untersuchen, inwieweit die Spieler im Fall gemeinsamer Bewertungen ähnlich wie bei den privaten Werten angehalten sind, in der ersten Stufe ehrlich zu bieten, d.h. deren wahre Bewertungen für das Gut zu bieten, basierend auf dem zur Verfügung stehenden, privaten a priori Wissen. Bei einstufigen Auktionen mit geheimen Geboten und gemeinsamen Bewertungen gibt es das Problem des winner’s curse (vgl. S. 103), das Bieter evtl. zur Abgabe von Geboten veranlasst, die niedriger sind als die eigene Wertschätzung des Objekts, um im Fall des Gewinns eine Überbezahlung zu vermeiden [BT96]. Es stellt sich die Frage, ob dieses Problem durch die zweite Stufe verhindert werden kann.

Die Autoren unterstellen die Berechnung des wahren Wertes anhand des Medians der Gebote der ersten Stufe und zeigen das folgende Theorem:

**Theorem 5.3** *Gegeben sei eine zweistufige Auktion, bei der die Spieler die folgende Strategie verwenden:*

*S: biete ehrlich in der ersten Stufe und biete in der zweiten Stufe das höchste Gebot unter dem Median der Gebote der ersten Stufe.*

*Wir nehmen an, der Median sei die beste Schätzung für den wahren Wert des Gutes. Dann können genau diejenigen Spieler von einer einseitigen Abweichung der Strategie S profitieren, deren ehrliche Gebote niedriger als das höchste Gebot und größer als das Gebot des Gewinners der zweiten Stufe sind. Diese Spieler können dabei sowohl profitieren, indem sie in Stufe eins ein niedrigeres Gebot als das niedrigste der anderen Spieler abgeben, als auch, indem sie ein höheres Gebot als das höchste der anderen Spieler abgeben.*

Der Beweis des Theorems findet sich in [BT96, S.193f]. An dieser Stelle sei grob skizziert, wieso sich dies so ergibt. Gibt ein Spieler statt seinem ehrlichen Gebot ein sehr viel höheres oder niedrigeres ab, so verändert sich in bestimmten Fällen dadurch der Median und damit der Wert, den die anderen Spieler in der zweiten Stufe bieten. Bietet ein Spieler sehr viel niedriger und verändert sich der Median nach unten, so bieten die anderen Spieler in Stufe zwei weniger als bei ehrlichen Geboten. Der abweichende Spieler kann entsprechend höher in Stufe zwei bieten und gewinnt das Gut mit einem Profit. Bietet ein Spieler sehr viel höher in Stufe eins, so macht er sich zum Gewinner, indem er in der zweiten Stufe denselben Wert bietet wie die anderen Spieler, woraufhin er wegen des hohen Gebots der ersten Stufe gewinnt.

Ein Spieler kann also sowohl durch Angabe eines sehr viel höheren Gebots als auch eines sehr viel niedrigeren Gebots profitieren. Allerdings gilt dies nur für Spieler mit einer ehrlichen Bewertung von mindestens dem Median und höchstens der zweithöchsten Bewertung.

Da es für den Spieler mit der höchsten und den mit der niedrigsten Bewertung in jedem Fall nicht funktioniert, ergibt sich als Folge des Theorems 5.3 das Korollar

**Korollar 5.1** *In einer zweistufigen Auktion mit zwei Spielern ist die Strategie S ein Nash-Gleichgewicht, sofern der Median der beste Schätzer für den Wert des Gutes ist.*

Bei drei Spielern zahlt es sich aber bereits für denjenigen Spieler mit der mittleren Bewertung aus, nach oben oder unten abzuweichen. Bei der zweistufigen Auktion mit gemeinsamen Bewertungen sind ehrliche Gebote in Stufe eins folglich, anders als bei privaten Bewertungen, nur für zwei Spieler vorteilhaft.

Ähnliche Betrachtungen gelten ebenfalls für andere Maße zur Bestimmung des wahren Werts des Gutes, wie zum Beispiel den Mittelwert. Auch hier zahlt es sich für gewisse Spieler aus, von der Strategie des ehrlichen Bietens in Stufe eins abzuweichen. Das ehrliche Bieten stellt somit kein Nash-Gleichgewicht dar, der Auktionsmechanismus ist nicht anreizkompatibel.

Brams und Taylor argumentieren an dieser Stelle jedoch noch weiter. Da sich sowohl Abweichungen nach oben als auch nach unten auszahlen können, und dies alle Spieler wissen, können die Spieler nicht vorhersagen, wie sich die anderen Spieler verhalten werden. Sie können also für die Wahl der eigenen Strategie nicht die erwarteten Strategien der anderen Spieler vernünftig einkalkulieren, dies ist mit einer zu großen Unsicherheit behaftet. Wegen dieser Unsicherheit werden viele Spieler wohl dazu tendieren, in der ersten Stufe doch ein Gebot abzugeben, das ihrer ehrlichen Einschätzung entspricht. Dies hat sich tatsächlich gezeigt für Fälle, in denen ein System zwar manipulierbar ist, die Teilnehmer aber entweder die Folgen einer Manipulation aus Gründen der Komplexität oder aber aus Mangel an Information nicht vorhersagen können. In diesen Fällen wird tendenziell von strategischem Verhalten abgesehen.

Insofern sehen die Autoren in der zweistufigen Auktionsform mit gemeinsamen Bewertungen trotzdem Vorteile im Vergleich zu einer Vickrey-Auktion oder anderen einstufigen Auktionsverfahren mit geheimen Geboten, da sich die Bieter durch die erste Stufe trotz allem Vorstellungen vom wahren Wert des Gutes machen können und damit den winner's curse vermeiden können. Bei einer Vickrey-Auktion mit zwei dicht beieinander liegenden, höchsten Geboten ist dies nicht der Fall, auch bei Bezahlung des zweit höchsten Gebotes wird der Gewinner den Eindruck haben, zu viel zu bezahlen. Die Vorteile der zweiten Stufe kommen somit vor allem bei Auktionen mit gemeinsamen Bewertungen zum Tragen, da hier die veröffentlichte Information eine besonders große Rolle für die endgültigen Bewertungen und Gebote spielt und dazu beiträgt, dass ein angemessener Preis gezahlt wird.

### 5.5.3 Eine zweistufige, parallele Auktion

In [PWZ00] stellen die Autoren eine zweistufige, parallele Auktion vor, die ertragsäquivalent zur englischen Auktion ist. Der Vorteil der zweistufigen Auktion ist außerdem, dass übliche Probleme der englischen Auktion wie jump-bidding und Verabredungen unter Bietern nicht vorkommen können, weswegen die Auktionsform in der Praxis Anwendung findet. Es muss allerdings erwähnt werden, dass der Vergleich wegen des Bezugs auf die Ergebnisse in [MW82] effektiv mit der japanischen Variante der Open Ascending-Bid Auktion statt findet, was die Autoren aber nicht deutlich herausstellen. Bei der japanischen Auktion gibt es beispielsweise kein jump-bidding, da der Preis kontinuierlich vom Auktionator erhöht wird. Ob sich die Überlegungen ohne Weiteres auf jede Art von Open Ascending-Bid Auktionen wie der englischen Auktion übertragen lassen, ist daher offen. Es wird jedoch im folgenden Abschnitt wegen des Bezugs zum Artikel der Begriff englische Auktion verwendet.

In der ersten Stufe der Auktion geben alle Bieter geheime Gebote ab. Am Ende der

ersten Stufe scheiden bis auf die zwei Höchstbietenden alle Bieter aus der Auktion aus, die Gebote der ausscheidenden Bieter werden öffentlich bekannt gegeben. Die zwei Bieter mit den höchsten Geboten nehmen an der zweiten Stufe teil. Auch hier werden wieder geheime Gebote abgegeben, wobei jeder Bieter sein eigenes Gebot der ersten Stufe nicht unterbieten darf. Der Höchstbietende zahlt den Betrag des unterlegenen Gebots. Im Fall von Gebotsgleichheiten entscheidet jeweils der Zufall.

Die Autoren von [PWZ00] gehen von folgenden Annahmen bei der Analyse ihrer Auktion aus:

- Ein unteilbares Gut wird angeboten.
- Die Bieter sind risiko-neutral.
- Jeder Bieter erhält vor der Auktion ein privates Signal bzw. eine Schätzung  $X_i \in [0, 1]$  des Werts des Gutes. Die  $X_i$  werden durch eine symmetrische, gemeinsame Verteilung erzeugt.
- Die wahren Bewertungen des Gutes sind miteinander verknüpft (symmetric affiliated values). Die Funktion  $V(X_i, X_{-i})$ , die zum Signal  $X_i$  von Bieter  $i$  und der Menge  $X_{-i}$  der Signale der anderen Bieter den wahren Wert liefert, ist für alle Bieter gleich.  $V$  ist nichtnegativ, kontinuierlich, streng monoton steigend in jeder Variablen und symmetrisch in  $X_{-i}$ .
- Die Bietfunktionen  $b(X)$  für das Gebot der ersten Runde und  $\beta(X, Z)$  für das Gebot der zweiten Runde sind streng monoton steigend ( $Z$  bezeichne die nach Stufe eins zurückgewiesenen, veröffentlichten Gebote).

Perry, Wolfstetter und Zamir zeigen, dass das einzige, symmetrische, strikte Gleichgewicht für das Gebot der ersten Runde  $b^* = V(X, X, 0)$  ist, wobei  $V(X, a, b)$  die Bewertungsfunktion ist für das Signal  $X$ , das höchste Gebot  $a$  der anderen Bieter und den Vektor  $b$  der restlichen Gebote der anderen Bieter. Für das Gebot der ersten Runde ist es also die beste Strategie, davon auszugehen, dass das höchste, konkurrierende Gebot dem eigenen entspricht und die anderen Gebote alle gleich Null sind. Man muss quasi in der ersten Runde hoch genug bieten, um in die zweite Runde zu kommen, aber trotzdem so niedrig wie möglich, da das Gebot der ersten Runde eine untere Grenze für das der zweiten Runde darstellt.

Für das Gebot der zweiten Runde finden die Autoren das einzige, symmetrische Gleichgewicht als  $\beta^*(X, Z) = \max\{b(X), V(X, X, Z)\}$  bei gegebener Bietfunktion  $b$  der ersten Runde und der Menge  $Z$  an veröffentlichten Geboten nach Ende der ersten Runde. Es hilft also weder, davon auszugehen, dass das Signal  $Y$  des Konkurrenten niedriger ist als das eigene, da man in diesem Fall evtl. zu wenig bieten und die Auktion verlieren würde. Noch hilft es anzunehmen, dass das Signal des anderen höher ist, und entsprechend hoch zu bieten, denn in diesem Fall bietet der Konkurrent wegen der Monotonität der Bewertungsfunktion bereits höher als die eigene Bewertung des Gutes, man würde folglich bei Gewinn der Auktion einen Verlust erleiden.

Die Autoren zeigen, dass der Ertrag dieses Ergebnisses für den Verkäufer gleich dem der englischen Auktion ist. Das Gleichgewicht einer englischen Auktion entspricht, nachdem  $n - 2$  Bieter ausgeschieden sind, dem einer Second-Price Sealed-Bid Auktion, nachdem die niedrigsten  $n - 2$  Gebote bekannt sind [MW82]. Dies entspricht im Gleichgewicht genau der zweiten Stufe der vorgestellten Auktion. Insbesondere generiert ja die

Open Ascending-Bid Auktion verglichen mit Descending- oder Sealed-Bid Auktionen im Fall verknüpfter Werte (affiliated values) den höchsten Ertrag für den Verkäufer und ist damit für den Verkäufer am attraktivsten (siehe Abschnitt 5.4 und [MW82]). Das vorgeschlagene, zweistufige Verfahren beinhaltet außerdem einige Vorteile gegenüber der englischen Auktion. Probleme der englischen Auktion sind Vereinbarungen unter den Bieter oder zwischen Bieter und Verkäufer, welche den Preis beispielsweise künstlich in die Höhe treiben können, ebenso wie das “jump-bidding”, ein hohes, initiales Gebot eines Bieters, das Konkurrenten davon abschreckt, weiter zu bieten oder überhaupt in die Auktion einzusteigen. Dadurch, dass die zweistufige Auktion in der ersten Stufe geheim ist, ist sie weniger anfällig für diese Probleme, da keine schrittweise Veröffentlichung der Gebote der anderen Bieter statt findet.

In [PWZ00] wird ein zweistufiges Auktionsverfahren vorgestellt und gezeigt, dass dieses Verfahren im Fall verknüpfter Werte der Bieter und unter bestimmten Annahmen über die Werte und Bietfunktionen im Gleichgewicht dem Verhalten einer englischen Auktion entspricht. Der Vorteil der zwei Stufen besteht hier weniger in der zusätzlichen Informationsenthüllung, sondern vielmehr darin, dass die Information nur einmal statt wie bei der englischen Auktion fortlaufend enthüllt wird. Durch diese eher restriktive Enthüllung werden bekannte Probleme der englischen Auktion begrenzt, ohne dabei jedoch das Ergebnis der Auktion im Gleichgewicht zu verändern. In diesem Fall profitiert man also von der kontrollierten Enthüllung von Information im Laufe einer Auktion. Dieses Auktionsverfahren ist, bis auf Details, ein Spezialfall der im folgenden Abschnitt vorgestellten Survival Auctions.

#### 5.5.4 Survival Auctions

In [FMS99] werden “Survival Auctions” vorgestellt. Eine Survival Auction ist im Prinzip eine mehrstufige Auktion, bei der nach jeder Stufe gewisse Bieter aus der Auktion ausgeschlossen werden und nur die anderen an der nächsten Stufe teilnehmen können. Survival Auctions werden charakterisiert durch

- eine Regel, welche Bieter in die nächste Stufe kommen,
- eine Regel, welches Minimalgebot für die Bieter einer nächsten Stufe gilt (dieses gilt immer einheitlich für alle Bieter)
- und eine Regel zur Berechnung des endgültigen Preises, den der Gewinner zu zahlen hat.

Eine Survival Auction startet mit einem initialen Minimalgebot. Jede Stufe besteht aus einer parallelen Auktion. Nach jeder Stufe wird entschieden, welche Bieter an der nächsten Runde teilnehmen dürfen. Ist nur ein Bieter übrig, so ist dies der Gewinner und der Preis wird bekannt gegeben. Qualifizieren sich mehrere Bieter, so wird das neue Minimalgebot für die nächste Stufe bekannt gegeben, zusammen mit allen Geboten derjenigen Bieter, die aus der Auktion ausgeschlossen wurden.

Die zweistufige Auktion nach [BT96] fällt folglich nicht in die Klasse der Survival Auctions, da Brams und Taylor die Gebote der zweiten Stufe auf die Menge der Gebote der ersten Stufe beschränken, nicht aber ein allgemein gültiges Minimalgebot angeben. Ebenso unterscheidet sich die zweistufige Auktion in [PWZ00] von einer Survival Auction, wenn auch nur sehr geringfügig. Eine Survival Auction erlaubt in einer Stufe keine

unterschiedlichen Minimalgebote für verschiedene Bieter, während in [PWZ00] für die Bieter der zweiten Stufe ein minimales Gebot in der Höhe ihre eigenen Gebots der ersten Stufe gilt (vgl. S. 112).

[FMS99] vergleichen zunächst die  $(n-1)$ -stufige Survival Auction mit der japanischen Auktion. Bei der  $(n-1)$ -stufigen Survival Auction scheidet nach jeder Stufe nur derjenige Bieter mit dem geringsten Gebot aus. Dieses Gebot ist das Minimalgebot für die nächste Stufe. Der Gewinner zahlt das Minimalgebot der letzten Stufe, also den Preis des vor ihm ausgeschiedenen Bieters. Die Autoren zeigen die strategische Äquivalenz dieser Auktionsform mit der japanischen Auktion.

Die strategische Äquivalenz zwischen den beiden Auktionsformen ist recht einfach nachzuweisen, da die enthüllten Informationen zwischen den einzelnen Stufen der Survival Auction den veröffentlichten Informationen zwischen den Schritten einer japanischen Auktion entsprechen. Jeder Strategiepunkt lässt sich identisch auf einen entsprechenden der anderen Auktion abbilden und es sind identische Aktionen möglich. Eine Stufe der Survival Auction entspricht der Zeitspanne einer japanischen Auktion zwischen dem Ausscheiden eines Bieters und dem des nächsten Bieters.

Desweiteren betrachten die Autoren eine allgemeinere Form der Survival Auction und vergleichen sie mit der japanischen Auktion. Diese Form der Survival Auction wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

- Die Anzahl der Bieter, die von einer Stufe in die nächste kommen, ist von Beginn an allgemein bekannt.
- Diejenigen Bieter mit den höchsten Geboten wechseln in die nächste Stufe.
- Das Minimalgebot einer Stufe entspricht dem höchsten Verlierergebot der vorigen Stufe. Das initiale Minimalgebot ist  $-\infty$ .
- Die Runde mit den letzten zwei Bietern ist die letzte Runde. Der Gewinner zahlt den Preis des Gebots des unterlegenen Bieters.

Sie betrachten die Survival Auction unter den folgenden Bedingungen:

- Jeder Bieter besitzt eine private Information oder ein Signal  $s_i$  über den Wert des Gutes.
- Die Signale  $\{s_j\}$  werden aus einer gemeinsamen Verteilung erzeugt und besitzen eine symmetrische Korrelation. Wenn also gewisse Signale festgelegt sind, so ist die resultierende Verteilung der restlichen Signale immer gleich.
- Die wahren Bewertungen der Bieter sind Ergebnis einer gemeinsamen Funktion von allen Signalen:  $v(s_i, \{s_j\}_{j \neq i})$ . Die Funktion ist für alle Bieter symmetrisch, monoton steigend in allen Variablen und weiterhin so beschaffen, dass  $v_i$  bei einem festen Anstieg von  $s_i$  mindestens ebenso stark oder stärker steigt als bei demselben Anstieg von  $s_j$ . Die letzte Eigenschaft besagt, dass  $v_i$  stärker vom eigenen Signal  $s_i$  abhängt oder darauf reagiert wie von den Signalen  $s_j$  der anderen Bieter.
- Die Bieter sind risiko-neutral.

Fujishima, McAdams und Shoham zeigen, dass unter den genannten Annahmen die Survival Auction Nash-Ergebnis-äquivalent zur japanischen Auktion ist. Der Beweis ist



weniger formal als der entsprechende Beweis in [PWZ00], aber vom Inhalt her sehr ähnlich. Es wird begründet, dass das Nash-Gleichgewicht der japanischen Auktion in jeder Stufe auf der Strategie basiert, die aktuelle Bewertung zu bieten. Diese basiert auf den bereits bekannten Geboten der ausgeschiedenen Bieter und auf der Annahme, dass die privaten Signale der noch aktiven Bieter dem eigenen Signal entsprechen. Sind also in der betrachteten Stufe Bieter 1 bis  $k$  bereits ausgeschieden und deren Gebote  $b_1, \dots, b_k$  bekannt, so kann daraus, da die Funktion  $v$  für alle Bieter gleich ist, auf die korrespondierenden, privaten Signale  $s_1^*, \dots, s_k^*$  geschlossen werden. Dann ergibt sich das aktuelle Gebot im Nash-Gleichgewicht für Bieter  $j$ ,  $j > k$ , als  $v(s_j, s_1^*, s_2^*, \dots, s_k^*, s_j, \dots, s_j)$ .

Die Gleichgewichtsstrategie für die Survival Auction ist ähnlich. Die Berechnung des aktuellen Gebots basiert auf den berechenbaren Signalen der bereits ausgeschiedenen Bieter und der Annahme, dass die Signale der noch aktiven Bieter gleich dem eigenen sind. Es wird begründet, wieso dies auch bei der Survival Auction ein Nash-Gleichgewicht darstellt und es sich für Bieter nicht auszahlt, weniger aggressiv oder aggressiver zu bieten.

Der Gewinner der Auktion ist folglich in beiden Fällen der Bieter mit dem höchsten, privaten Signal und der zu zahlende Preis entspricht dem Gebot des zweithöchsten Bieters.

Die Autoren betrachten zum Schluss noch den Sonderfall einer zweistufigen Survival Auction, in der lediglich die zwei Bieter mit den höchsten Geboten an der zweiten Stufe teilnehmen. Das Minimalgebot der zweiten Stufe ist das niedrigste, zurückgewiesene Gebot der ersten Stufe. Diese Auktion ist ein Spezialfall der vorgestellten, allgemeineren Form und führt damit ebenfalls im Nash-Gleichgewicht zum selben Ergebnis wie die japanische Auktion. Diese betrachtete Auktionsform ähnelt sehr stark der in [PWZ00] betrachteten. In beiden Fällen werden affiliated private values und monoton steigende, allgemein gültige Biet- bzw. Wertefunktionen betrachtet. Die entwickelten Nash-Gleichgewichte entsprechen einander. Die Wahl des Minimalgebots stellt den einzigen, wichtigen Unterschied in der Gestaltung der Auktionsmethoden dar, dies hat jedoch keinen Einfluss auf die Ergebnisse. In beiden Quellen wird mit der japanischen Variante der Open Ascending-Bid Auktion verglichen. Insofern stellt die Formulierung der Survival Auction eine interessante Verallgemeinerung auf eine größere Klasse an mehrstufigen Auktionen dar, für die dieselben Ergebnisse zu erwarten sind wie von englischen oder japanischen Auktionen, für die aber weitere Vorteile gelten.

Als Vorteil der Survival Auction gegenüber der japanischen Auktion nennen die Autoren in [FMS99] vor allem, dass die Anzahl der Schritte und damit die benötigte Zeit bei der Survival Auction begrenzt und von vornherein bekannt sind, während die Dauer einer japanischen Auktion nicht vorhersehbar ist. Die in [PWZ00] beschriebenen Vorteile der mehrstufigen gegenüber einer englischen Auktion sind außerdem ebenso für Survival Auctions gültig.

### 5.5.5 Zweistufige Auktionen nach Engelbrecht-Wiggans

Engelbrecht-Wiggans [EW88] beschreibt die Vorteile von mehrstufigen Auktionen, bei denen die Bieter in den unterschiedlichen Stufen entscheiden können, ob sie bestimmte Informationen erlangen möchten, wobei davon ausgegangen wird, dass das Erhalten von Informationen kostenpflichtig ist. Als Beispiel nennt der Autor die Teilnahme eines Ehemannes an der Auktion eines Kunstwerks, wobei es die Möglichkeit gibt, dass

das Kunstwerk der Frau nicht gefällt und sie es daher wegwirft. Der Ehemann hat die Möglichkeit, seine Frau per Telefon zur Auktion zu bitten, damit sie ihm sagt, ob das Kunstwerk akzeptabel ist. Das Telefongespräch und die Fahrt der Frau addieren sich zu gewissen Kosten, die anfallen, egal wie der Ehemann bietet und wie die Auktion ausgeht.

In jeder Stufe der Auktion können die Bieter entscheiden, ob sie gewisse kostenpflichtige Informationen erlangen möchten. Sie können, müssen aber nicht bieten, sie können auch lediglich in der letzten Stufe bieten. Es werden also in dem Sinn keine Informationen über die Bewertungen und Gebote der Mitbieter enthüllt, im Gegenteil, es ist eine Sealed-Bid Auktion. Engelbrecht-Wiggans argumentiert, dass die Stufen Vorteile bieten, weil sich jeder Bieter basierend auf seiner aktuellen Bewertung und der Erwartung seiner Möglichkeiten, Höchstbietender zu sein, entscheiden kann, ob er Informationen erwerben möchte oder nicht. Diejenigen Bieter, die für sich eine geringe Chance sehen, das Gut zu erwerben, werden auf den Kauf von Informationen verzichten und damit ihren erwarteten Verlust schmälern. Lediglich diejenigen Bieter mit hohen Chancen auf den Gewinn der Auktion werden sich vollständige Information leisten. Das dadurch verringerte Verlustrisiko lockt potentiell weitere Bieter an, so dass der erwartete Erlös für den Verkäufer steigt, da ein neuer Bieter einer mit einer höheren als der aktuell höchsten Bewertung sein kann. Engelbrecht-Wiggans vergleicht diese Auktionsform mit einstufigen Auktionen, bei denen entweder kein Bieter über die zusätzliche Information verfügt oder aber alle gleichermaßen, was bedeutet, dass die Kosten zur Erlangung der Informationen für alle Bieter anfallen. In beiden Fällen ist der erwartete Gewinn für die Bieter geringer als in dem mehrstufigen Fall, in dem nur bestimmte Bieter die Informationen erwerben und andere nicht.

Ähnliche Ergebnisse zeigt die Arbeit [CJ05]. Hier werden parallele (Sealed-Bid) Auktionsformen verglichen mit offenen Formen, bei denen sich der Preis im Laufe der Auktion öffentlich für alle Bieter verändert und die Bieter so Informationen erhalten können. Unter diese Auktionsform fallen sowohl englische Auktionen als auch mehrstufige Auktionen, wie Engelbrecht-Wiggans sie untersucht. Compte und Jehiel nehmen an, dass die Bieter private, unabhängige Werte haben, diese jedoch nicht unbedingt vor der Auktion kennen. Sie können ihre Werte aber zu gewissen Kosten erfahren. Bei Sealed-Bid Auktionen müssen die Entscheidungen, ob die Information gekauft werden soll, a priori fallen, während in einer englischen Auktion nach jedem einzelnen Auktionsschritt diese Entscheidung getroffen werden kann. Der Effekt ist derselbe, den Engelbrecht-Wiggans bereits beschrieben hat. Durch das sinkende Risiko für die Bieter steigt die Anzahl der Bieter, was den Erlös des Verkäufers potentiell erhöht. Unter die Definition von mehrstufigen Auktionen von Engelbrecht-Wiggans fallen auch englische Auktionen, indem man jede Aktion, also den Ausstieg eines Bieters oder aber das Steigen des Preises, als eine neue Stufe interpretiert.

### 5.5.6 Zweistufige Auktionen mit Eintrittskosten

[Ye06] beschreibt zweistufige Auktionen mit Eintrittskosten. Es handelt sich hierbei um Indicative Bidding Auktionen. Diese Auktionsform wird benutzt, wenn es sich um sehr teure, komplizierte Güter handelt, wie zum Beispiel ganze Firmen oder Firmenteile, Anlagen etc. Die Auktion besteht aus einer ersten Phase, in der potentiell interessierte Käufer gebeten werden, ein erstes, nicht bindendes Gebot abzugeben. Basierend auf diesen Geboten (und eventuell weiteren Informationen über die Liquidität des Bieters etc.) werden wenige Bieter zur Teilnahme an der zweiten Stufe ausgewählt. In der zweiten

Stufe werden dann die bindenden Gebote abgegeben und basierend darauf wird das Gut dem Höchstbietenden zugeschlagen. Typischerweise ist die Teilnahme an der zweiten Stufe mit erheblichen Investitionskosten verbunden, da sich die Bieter ausführlich über das Gut informieren und dessen Wert für sich feststellen müssen. Lediglich die Bieter der zweiten Phase bekommen vom Auktionator diesbezüglich weitreichende Informationen zur Verfügung gestellt, die bei der Bewertung hilfreich sind. Bei diesen Kosten handelt es sich um Eintrittskosten (entry costs), die bei der Teilnahme an der (zweiten Stufe der) Auktion für alle Bieter entstehen, unabhängig davon, wer den Zuschlag für das Gut erhält.

Die Aufteilung in zwei Phasen hat Vorteile für alle beteiligten Bieter und auch den Verkäufer. Bieter, die das Gut in der ersten Phase eher gering bewerten und wahrscheinlich geringe Chancen auf Gewinn der Auktion haben, werden nicht zur zweiten Phase zugelassen, so dass für sie keine Eintrittskosten entstehen. Durch die Restriktion auf wenige Teilnehmer der zweiten Phase (ca. 5 bis 10) gibt es für diese Teilnehmer eine genügend hohe Chance, Gewinner der Auktion zu sein, so dass die Eintrittskosten in Kauf genommen werden. Bei einer größeren Konkurrenz in der zweiten Phase würden wahrscheinlich viele Bieter von vornherein aussteigen, da für sie das Verlustrisiko zu hoch ist, was sich wiederum negativ auf den Erlös des Verkäufers auswirkt.

## 5.6 Zusammenfassung

Dieses Kapitel beschäftigt sich zunächst mit soziopsychologischen Einflussfaktoren auf das Konsumentenverhalten und stellt wissenschaftliche Ergebnisse zu Persönlichkeitstypen dar, die unterschiedliche soziale Verhaltensweisen bedingen. Unter anderem können Menschen eingeteilt werden in solche, die auf andere Leute zugehen und sich in die Gemeinschaft einfügen, solche, die einer Gemeinschaft aggressiv und als Konkurrent begegnen und solche, die sich eher abseits von der Gemeinschaft anderer halten und die eigene Unabhängigkeit suchen. Es wurde gezeigt, dass sich die unterschiedlichen Persönlichkeitstypen auf Präferenzen und daraus folgende Konsumententscheidungen auswirken, die auf bestimmtes, soziales Gruppenverhalten schließen lassen. Diese Erkenntnisse sind auch für das Workshopzuteilungsproblem und den Konsum von Workshops wichtig, da sie zeigen, dass Präferenzen für Workshops nicht nur vom persönlichen Geschmack bezogen auf den Workshopinhalt abhängen, sondern es ebenfalls verschiedene Arten von Abhängigkeiten einer Präferenz von anderen Präferenzen und damit vom Zuteilungsergebnis geben kann. Präferenzen werden also durch gewisse Informationen beeinflusst, die den Teilnehmern a priori aber nicht bekannt sind.

Die Rolle von Informationsasymmetrien auf Allokationsmechanismen werden in der Auktionstheorie betrachtet, dem sich der Rest des Kapitels widmet. Das Workshopzuteilungsproblem ist mit einem Auktionsmechanismus vergleichbar. Daher wird beschrieben, welchen Einfluss Informationen und verschiedene Formen von Informationsasymmetrien auf Auktionen und deren Ergebnisse haben. Insbesondere werden in diesem Hinblick mehrstufige Auktionen vorgestellt, die sich dadurch auszeichnen, dass durch die Einführung mehrerer Stufen gewisse Information im Lauf der Auktion enthüllt werden kann, was sich im Vergleich zu einstufigen Verfahren als positiv erweist. Wie [BT96] zeigen, gilt dies auch für andere Arten von Spielen, bei denen die Einführung einer zweiten Stufe Koordinationsprobleme lösen kann.

Bei den vorgeschlagenen, zweistufigen Verfahren werden sehr unterschiedliche Infor-

mationen enthüllt. [BT96] enthüllen am Ende der ersten Stufe sämtliche Gebote anonym und beschränken die Gebote der zweiten Stufe auf die Menge der Gebote der ersten Stufe. Im Fall privater Werte erzielen sie damit dasselbe Ergebnis wie eine Vickrey-Auktion, allerdings mit verringerten Betrugsmöglichkeiten. Im Fall gemeinsamer Werte kann für mehr als zwei Spieler kein anreizkompatibles Gleichgewicht angegeben werden, für gewisse Spieler lohnt sich ein Abweichen von der Strategie der ehrlichen Gebotsabgabe. Allerdings verringert die Auktion durch die Veröffentlichung der Gebote den Effekt des winner's curse.

[PWZ00] stellen eine zweistufige Auktion vor, die im Fall von symmetrischen, privaten verknüpften Werte (private affiliated values) dasselbe Ergebnis erzielt wie die Open Ascending-Bid Auction. Hier werden nur die zwei Höchstbietenden der erste Stufe zur zweite zugelassen, die Gebote der ausscheidenden Bieter werden veröffentlicht. Dies entspricht der Situation mit nur noch zwei aktiven Bietern einer Ascending-Bid Auktion, mit dem Vorteil, dass die Stufen die Auktion zeitlich klar begrenzen und einige Probleme von englischen Auktionen vermieden werden. Die zweistufige Variante bringt also klare Vorteile, ohne Nachteile bezüglich des Ausgangs der Auktion nach sich zu ziehen.

In [FMS99] wird mit der Survival Auction ein Rahmen für viele Arten von mehrstufigen Auktionen vorgeschlagen, wobei jede einzelne Stufe eine Sealed-Bid Auktion ist und zwischen den Stufen gewisse Informationen über Gebote bekannt gegeben werden. Sie schlagen mehrere, konkrete Auktionsformen vor, die mit der japanischen Auktion strategisch bzw. Nash-Ergebnis äquivalent sind. Hierbei betrachten sie die quasi identische Auktionsform zu der in [PWZ00], ebenfalls unter der Voraussetzung symmetrischer, verknüpfter Werte. Die Vorteile sind wiederum die zeitliche Begrenzung der Auktion und die Vermeidung einiger Probleme von englischen Auktionen im Allgemeinen, bei gleichbleibend gutem Auktionsergebnis. Sehr nützlich ist außerdem der vorgestellte, allgemeine Rahmen für die Definition von mehrstufigen Auktionen.

Weiterhin finden Betrachtungen von Auktionsformen statt, bei denen die Werte der Bieter zwar nicht miteinander verknüpft, jedoch dem Bieter a priori nicht vollständig bekannt, sondern abhängig von weiteren, kostenpflichtigen Informationen sind. Die Vergleiche in [EW88] und [CJ05] zeigen, dass mehrstufige Verfahren dem Bieter bessere Möglichkeiten bieten, sich zu entscheiden, ob er die zusätzliche Information zu den gegebenen Kosten erwerben möchte oder nicht. Das Risiko sinkt für die Bieter, umsonst Geld für Informationen auszugeben, was wiederum die Attraktivität der Auktion und damit den erwarteten Gewinn für die Verkäufer steigert. Letztendlich ist das auch der Effekt, von dem das zweistufige Verfahren profitiert, das in [Ye06] vorgestellt wird. Auch hier geht es um die Entscheidung des kostenpflichtigen Erwerbs von Information, die für die Bestimmung des privaten Wertes des Gutes wichtig ist. Die Kosten werden erst für Bieter in der zweiten Stufe fällig, in die nur diejenigen Bieter mit den höchsten Geboten der ersten Stufe kommen, für die also die Gewinnchancen bereits recht hoch sind. Auch hier geht es um Verminderung des Risikos für die Bieter, indem zusätzliche Kosten nur für diejenigen mit hohen Gewinnchancen entstehen. Für die Feststellung der Gewinnchancen müssen in jedem Fall Informationen während der Auktion enthüllt werden, so dass mehrstufige Verfahren hier eindeutig von Vorteil sind.

Letztendlich sind es also immer Informationen über die privaten Werte der anderen Bieter, die enthüllt werden, sowohl im Fall von common oder affiliated values, wo dieser Zusammenhang auf der Hand liegt, als auch im Fall der Feststellung der Gewinnchancen, die natürlich auch von den Werten der anderen Bieter abhängen. Die vorgestellten, mehrstufigen Verfahren zeigen, dass das implizite oder explizite Enthüllen von Werten

der anderen Bieter den Auktionsausgang positiv beeinflusst, sofern Abhängigkeiten zwischen den Bewertungen durch die Bieter existieren. Das nächste Kapitel beschreibt den Einsatz eines mehrstufigen Verfahrens, um Probleme von Präferenzabhängigkeiten des Workshopzuteilungsproblems zu lösen.



# Kapitel 6

## Ein Markt für Workshops basierend auf Schattenpreisen

Auch die Zuteilung von Workshops kann als Auktion angesehen werden. Die Präferenzen der Teilnehmer für die Workshops entsprechen den Geboten. Die Workshopplätze sind die zu vergebenden Güter, die in begrenzter Anzahl zur Verfügung stehen. Die Ausgabe des Mechanismus ist die Zuteilung der Plätze zu den Teilnehmern. In diesem Fall sind zwar keine Preise in der üblichen Form von Geldeinheiten zu zahlen, die Auszahlungen für jeden Teilnehmer entsprechen den Bewertungen der zugeteilten Workshops. Die Regeln dieses Mechanismus werden durch das Optimierungsproblem bestimmt.

In diesem Kapitel werden zunächst einige spieltheoretische Betrachtungen zum einstufigen Workshopzuteilungsproblem vorgenommen und dessen Anreizstruktur wird beschrieben. Im zweiten Teil werden die Möglichkeiten und Vorteile einer zweiten Stufe betrachtet. Der Tauschmarkt wird beschrieben, zusammen mit dem zugehörigen, modifizierten Optimierungsproblem zum Finden von neuen Zuteilungen basierend auf Tauschangeboten.

### 6.1 Das einstufige Zuteilungsproblem

Beim Workshopzuteilungsproblem gibt es zunächst eine Menge von Teilnehmern  $P = \{1, \dots, p_{max}\}$ ,  $p \in P$ , die um die Workshopplätze konkurrieren. Es gibt  $w_{max}$  verschiedene Typen von Ressourcen  $w \in W = \{1, \dots, w_{max}\}$ , genannt Workshops, von jedem Workshop  $w \in W$  gibt es  $c_w$  verfügbare Einheiten bzw. Plätze. Jeder Teilnehmer  $p \in P$  möchte  $m_p$  Güter unterschiedlichen Typs bekommen. Es muss davon ausgegangen werden, dass insgesamt genügend Güter bzw. Workshopplätze verschiedener Workshops zur Verfügung stehen, um den Gesamtbedarf zu decken.

Es handelt sich hier also zunächst um eine einseitige Auktion, da es nur einen Verkäufer gibt, dieser ist der Organisator der Workshopveranstaltung. Desweiteren gibt es diverse Güter und von diesen wiederum mehrere Einheiten, wir haben also eine Multi-Unit Multi-Item Auktion. Allerdings beziehen sich die mehreren Einheiten lediglich auf die Kapazität des Verkäufers, Käufer wollen lediglich maximal eine Einheit eines Gutes erhalten. Weiterhin gibt es weder Komplementär- noch Substitutionseffekte zwischen den verschiedenen Gütern, der Nutzen eines Workshopplatzes für einen Teilnehmer ist in unserem Fall unabhängig davon, ob dieser einen bestimmten, anderen Workshopplatz ebenfalls zugeteilt bekommt oder nicht. Die Gesamtpräferenz über alle zugeteilten Plätze

ist exakt die Summe der Einzelpräferenzen der Workshops. Der Zuteilungsalgorithmus erfordert aber die gleichzeitige Verteilung aller Workshopplätze auf die Teilnehmer, so dass die Versteigerung der Plätze nicht sequenzialisiert werden kann.

Für alle Teilnehmer gilt ein begrenztes Budget  $G = \{g_1, \dots, g_l\}$  von möglichen Geboten, wobei die Gebote aufsteigend sortiert seien:  $g_i \leq g_j \Leftrightarrow i \leq j$ . Der Einfachheit halber erweitern wir  $G$  so oft mit dem Wert 0, dass  $|G| = |W|$ , so dass für jeden Workshopstyp genau ein Gebot vorhanden ist. Jeder Teilnehmer hat für jeden Workshopstyp eine Präferenz, die sowohl von einem privaten Signal als auch von den Präferenzen der anderen Teilnehmer abhängt. Der private Teil der Bewertung spiegelt den persönlichen Geschmack oder die Vorliebe für die Thematik des Workshops wider, während Vorlieben bezüglich der Beliebtheit der Workshops oder Wünsche von Gruppen von Freunden durch den abhängigen Teil der Werte modelliert werden. Sei also  $s_{pw}$  das private Signal von Teilnehmer  $p$  für Workshop  $w$ , von dem man ausgehen kann, dass es dem Teilnehmer a priori bekannt ist. Dann ist der entsprechende wahre Wert  $v(p, w) = V(s_{pw}, z_{pw})$  das Ergebnis einer Funktion  $V$  vom privaten Signal  $s_{pw}$  dieses Teilnehmers für den Workshop und ebenfalls von sämtlichen anderen privaten Signalen  $z_{pw} := \{s_{ij}\}_{i \in P, j \in W} \setminus \{s_{pw}\}$  sowohl dieses Teilnehmers als auch aller anderen, denn nur die Gesamtheit aller Signale oder Präferenzen bestimmt die Zuteilung, deren Ergebnis wiederum die Präferenzen beeinflusst. Diese Wertefunktion ist also weder symmetrisch in ihren Variablen noch besitzt sie irgendeine Monotonität. Das Steigen von Präferenzen kann sowohl das Steigen als auch das Sinken anderer zur Folge haben. Die Veränderung einer Präferenz kann eine stark veränderte Zuteilung zur Folge haben und damit andere Präferenzen beeinflussen. Dieselbe Veränderung einer weiteren Präferenz kann ganz ohne Folge für die Zuteilung bleiben.

Für den Teilnehmer  $p$  ordnet die Bietfunktion  $B_p : W \rightarrow G$  den Workshops die zur Verfügung stehenden Gebote zu. Im Fall einer ehrlichen Präferenzangabe wird man erwarten, dass die Workshops mit den größten privaten Wertsignalen (denn nur diese sind vor der Zuteilung bekannt) die höchsten Gebote zugeteilt bekommen, also  $B_p(w) \geq B_p(w') \Rightarrow s_{pw} \geq s_{pw'} \forall p \in P$ . Das Ziel des Workshopzuteilungsproblems ist es, die Summe der wahren Werte aller zugeteilten Workshops zu maximieren, denn durch diese drückt sich die maximale Zufriedenheit der Teilnehmer aus. Die Zuteilung sei beschrieben durch  $z_{pw} \in \{0, 1\}$  mit  $z_{pw} = 1 \Leftrightarrow$  Teilnehmer  $p$  ist zugeteilt zu Workshop  $w$ . Wir suchen also eine Allokation, die  $\max \sum_{p \in P, w \in W} v(p, w) \cdot z_{pw}$  entspricht.

Die initiale Zuteilung der Workshops zu den Teilnehmern entspricht vom Vorgehen her dem einer parallelen Auktion. Die Präferenzen der Teilnehmer werden gleichzeitig abgegeben, ohne dass dabei Information über die Präferenzen der anderen Teilnehmer enthüllt wird. Der Optimierungsalgorithmus liefert ein Ergebnis, das die Werte basierend auf den abgegebenen Geboten maximiert, das also  $\max \sum_{p, w} B_p(w) \cdot z_{pw}$  entspricht. Dieses Ergebnis ist, bezogen auf die Gebote, bedingt durch die Optimalität der Lösung pareto-effizient. Es kann keinem Teilnehmer ein Workshopplatz mit einem höheren Gebot zugeordnet werden, ohne einen anderen Teilnehmer gleichzeitig schlechter zu stellen. Geht man davon aus, dass die Angabe der Gebote ehrlich erfolgt, so erreicht die Allokation ebenfalls  $\max \sum_{p, w} s_{pw} \cdot z_{pw}$ . Die Zuteilung garantiert allerdings nicht das Optimum bezogen auf die wahren Werte  $v(p, w)$ , da diese unbekannte Komponenten enthalten, die beim einstufigen Problem nicht in die Berechnung einbezogen werden können.

Es stellt sich also nun zunächst die Frage, inwiefern Teilnehmer tatsächlich motiviert sind, ihre Präferenzen oder Gebote wahrheitsgemäß abzugeben, da dies grundlegend dafür ist, dass die einstufige Zuteilung optimal bezüglich der privaten Signale ist. Mit



dieser Frage beschäftigt sich der folgende Abschnitt.

### 6.1.1 Anreizkompatibilität

Welche Strategien der Gebotsabgabe versprechen Teilnehmern eine bestmögliche Platzierung in den Workshops, bezogen auf die wahren Werte für die Workshops? Diese Frage ist abhängig von den Annahmen der Teilnehmer über die Präferenzen der anderen Spieler. Wir betrachten zunächst den Einfluss vollständiger Information auf die möglichen Strategien der Gebotsabgabe. Wir gehen also davon aus, dass alle Teilnehmer die Präferenzen der anderen Spieler kennen, ebenso wie das Zuteilungsverfahren, so dass sie die Vergabe ihrer eigenen Präferenzen entsprechend anpassen können.

**Theorem 6.1** *Das Workshopzuteilungsproblem ist nicht anreizkompatibel, d.h. in bestimmten Situationen zahlt sich die unwahrheitsgemäße Angabe von Präferenzen aus und ist damit nicht dominiert.*

**Beweis.** Wir betrachten ein Workshopzuteilungsproblem mit vier Workshops, die im Folgenden mit A, B, C und D bezeichnet seien und jeweils einen Teilnehmer aufnehmen können. Weiterhin seien vier Teilnehmer 1, 2, 3 und 4 gegeben. Jeder Teilnehmer kann die Präferenzen  $\{4, 2\}$  für Workshops vergeben, die restlichen Workshops erhalten die Präferenz 0. Es sei davon ausgegangen, dass die Präferenzwerte die wahren Werte für die Workshops widerspiegeln. Die Präferenzen der Teilnehmer für die Workshops seien wie in (6.1) dargestellt.

$$\left. \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\} \text{ erw. Payoff: } \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1,5 \quad (6.1)$$

Da alle Präferenzen gleich sind und damit jede mögliche Zuteilung den optimalen Zielfunktionswert erlangt, teilt der Algorithmus bei ehrlicher Angabe der Präferenzen jeden Teilnehmer "zufällig" zu einem Workshop zu. Der erwartete Payoff ist folglich für jeden Teilnehmer 1,5.

$$\left. \begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 2(4) & 4(2) & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ erw. Payoff: } 1 \cdot 2 = 2 \\ \text{ erw. Payoff: } \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 1,33 \end{array} \quad (6.2)$$

Weicht nun ein Spieler, sagen wir Spieler 1, von der Strategie der ehrlichen Präferenzangabe ab und gibt statt dessen die in (6.2) dargestellten Gebote an (in Klammern stehen neben den Geboten die wahren Präferenzen, sofern diese abweichen), so verändern sich die erwarteten Payoffs. Der Algorithmus teilt nun Spieler 1 in jedem Fall Workshop B zu, während die restlichen drei Spieler wiederum "zufällig" auf die Workshops A, C und D verteilt werden. Der erwartete Payoff von Spieler 1 erhöht sich damit auf 2, während er sich für die anderen drei Spieler auf 1,33 absenkt. Die Strategie der ehrlichen Präferenzangabe ist damit für Spieler 1 nicht dominant.  $\square$

Betrachtet man das Beispiel weiter, so wird deutlich, dass die Vorteilhaftigkeit der unehrlichen Präferenzangabe stark vom Verhalten der anderen Spieler abhängt. Weicht nun ein Spieler in der beschriebenen Art von der Strategie der ehrlichen Präferenzangabe ab, so ist es für die restlichen Spieler die beste Strategie, bei der ehrlichen Präferenzangabe zu bleiben. Würde beispielsweise Spieler 2 ebenfalls die Präferenzen für die Workshops A und B vertauschen, so ergäben sich die in (6.3) gezeigten, erwarteten Payoffs.

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 2(4) & 4(2) & 0 & 0 \\ 2 & 2(4) & 4(2) & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 2(4) & 4(2) & 0 & 0 \\ 2 & 2(4) & 4(2) & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{erw. Payoff: } \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1 \\ \text{erw. Payoff: } \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2 \end{array} \quad (6.3)$$

Die Payoffs ergeben sich, weil der Algorithmus auf jeden Fall einen der Spieler 1 und 2 zu Workshop B zuteilen wird und einen der Spieler 3 und 4 zu Workshop A. Die Abweichung von der ehrlichen Präferenzangabe ist also nur so lange vorteilhaft, wie die sichere Zuteilung zu dem nun mit höherer Präferenz belegten Workshop gewährleistet ist, was wiederum von den Geboten der anderen Spieler abhängt.

### Vergleich mit dem NIMP und Diskussion

Beim in Abschnitt 3.3 beschriebenen National Intern Matching Program wurde die Stabilität des erzeugten Ergebnisses als wünschenswerte Eigenschaft sowie deren Zusammenhang mit der Anreizkompatibilität des Algorithmus beschrieben. Um die Ergebnisse mit denen für das Workshopzuteilungsproblem vergleichen zu können, muss zunächst der Begriff der Stabilität angepasst werden.

Stabilität bei der Zuteilung des NIMP bedeutet, dass keine nachträglichen Vereinbarungen zwischen Gruppen von Teilnehmern zu deren Vorteil möglich sind, auch bei Schlechterstellung anderer Teilnehmer. Stabilität definiert sich allerdings zum einen auf beidseitigen Präferenzen, die beim Workshopzuteilungsproblem nicht gegeben sind. Zum anderen basiert die Bedeutung der Stabilität sowohl auf der Freiwilligkeit der Teilnahme am Programm als auch auf der Freiwilligkeit der Akzeptanz der Zuteilung. Beides lässt sich ohne Weiteres nicht auf das Workshopzuteilungsproblem übertragen. Da es normalerweise nicht die Alternative geben wird, dass Teilnehmer eigene Verabredungen mit Workshopanbietern treffen, um sich außerhalb der Zuteilung Plätze zu sichern, ist die Teilnahme an der Zuteilung für jeden, der an der Veranstaltung überhaupt teilnehmen will, obligatorisch. Ebenso ist die Akzeptanz des Ergebnisses obligatorisch in dem Sinn, dass keine nachträglichen Verhandlungen und Nebenabreden vorgesehen sind. Insbesondere haben die Workshopanbieter, da sie keine Präferenzen über den Teilnehmern haben, daran kein Interesse.

Effizienz der generierten Zuteilung ist natürlich ein wesentlicher Punkt für das Workshopzuteilungsproblem. Weiterhin sollte die Zuteilung derart sein, dass die Teilnehmer Verständnis für das Ergebnis haben, insbesondere diejenigen, die zu Workshops mit niedriger Bewertung zugeteilt wurden. Für jede Teilgruppe von Teilnehmern muss daher gelten, dass die Zuteilung das soziale Optimum der möglichen, gültigen Zuteilungen darstellt. Gibt es beispielsweise zwei Teilnehmer 1 und 2, und Workshops A und B, mit Präferenzen  $B_1(A) = 4$ ,  $B_2(A) = 2$  und  $B_1(B) = B_2(B) = 0$ . Dann würde eine Zuteilung von Teilnehmer 2 zu Workshop A auf Unverständnis durch Teilnehmer 1 stoßen, der ja eine höhere Präferenz für Workshop A angegeben hat, während die Präferenzen

beider Teilnehmer für Workshop B gleich sind. Die Zuteilung wäre zwar effizient, da ein Tausch eine Verschlechterung für Teilnehmer 2 bedeutet, aber nicht sozial optimal.

Für das NIMP wurde gezeigt, dass es keinen Zuteilungsalgorithmus geben kann, der zum einen immer eine stabile Zuteilung erzeugt und zum anderen für alle Teilnehmer die wahre Angabe der Präferenzen zur dominanten Strategie macht. Dies wurde gezeigt durch Angabe eines Beispiels, für das jede stabile Zuteilung für mindestens einen Teilnehmer einen Anreiz zum Lügen bot [RS99, S.145f]. Ähnliches gilt für das Workshopzuteilungsproblem, bezogen auf die soziale Optimalität:

**Theorem 6.2** *Es gibt keinen Algorithmus, der für das Workshopzuteilungsproblem das soziale Optimum erzeugt und gleichzeitig anreizkompatibel ist.*

**Beweis.** Gegeben sei das Zuteilungsproblem mit den in (6.1) angegebenen, wahren Präferenzen. Jede mögliche Zuteilung ist hier soziales Optimum, mit dem Zielfunktionswert 6. Eine dieser Lösungen wird vom Zuteilungsalgorithmus generiert. Dann aber ist es für diejenigen beiden Teilnehmer, die der Algorithmus auf Workshop C bzw. D zuteilt, vorteilhaft, wie in (6.2) gezeigt unwahre Präferenzen anzugeben, da dann der Algorithmus diesen Teilnehmer zwangsläufig in Workshop B einteilen müsste, um das soziale Optimum zu generieren. Lügen zahlt sich für mindestens einen Teilnehmer also im Gegensatz zur Angabe der Wahrheit aus.  $\square$

Bezogen auf die Anreizkompatibilität lässt sich das Workshopzuteilungsproblem also mit dem NIMP vergleichen. Zur Erzeugung von guten, also stabilen bzw. sozial optimalen Ergebnissen gibt es immer Situationen, in denen Teilnehmer durch unwahre Angabe von Präferenzen profitieren können. Um durch Anwendung der Strategie unehrlicher Präferenzen den erwarteten Payoff zu erhöhen, müssen Teilnehmer allerdings über genügend Informationen über die Präferenzen anderer Teilnehmer verfügen. Beide Zuteilungsverfahren basieren auf unvollständiger, privater Information, insbesondere die Präferenzen der Teilnehmer werden nicht öffentlich bekannt gegeben. Bezogen auf das NIMP musste Roth [Rot84] allerdings feststellen, dass u.a. den Studenten durchaus genügend Informationen zur Verfügung standen, um die Rangfolge abweichend von der wahren zu deren Vorteil anzugeben. Dies lag daran, dass die Auswahlkriterien und Rangfolgen der Krankenhäuser sich durch historische Daten der vergangenen Jahre ausreichend genau erschließen ließen, um daraus eine verbesserte, eigene Rangfolge erstellen zu können. Weiterhin war die genaue Funktionsweise des Algorithmus zum einen öffentlich und zum anderen nicht zu kompliziert und damit allen Betroffenen hinlänglich bekannt.

Im Fall des Workshopzuteilungsproblems kann man davon ausgehen, dass Informationen über die Anzahl zur Verfügung stehender Plätze öffentlich vorhanden und damit jedem Teilnehmer gleichermaßen bekannt sind. Weiterhin ist nicht davon auszugehen, dass die Funktionsweise des Zuteilungsalgorithmus umfassend verstanden wird. Es ist zu erwarten, dass die Teilnehmer verstehen, dass die Chance, in einen beliebten Workshop eingeteilt zu werden, geringer ist als in einen weniger beliebten Workshop. Wie aber genau die Kombination der Präferenzen zur Zuteilung führt, ist abhängig von den weiteren Nebenbedingungen und damit für ein Workshopproblem von praktisch relevanter Größenordnung nicht überschaubar.

Die Präferenzen der Teilnehmer sind private Information. Jeder Teilnehmer kann allerdings Schätzungen über die möglichen Präferenzen machen und seine Strategie daran orientieren. Ideen über die Beliebtheit von Workshops können beispielsweise gegeben

sein durch Themen, die aktuell in Mode oder von allgemeinem Interesse sind. Die maßgeblichen Eigenschaften hängen stark von der Zielgruppe der Teilnehmer und deren Homogenität bezüglich den die privaten Signale beeinflussenden Faktoren ab.

Historische Daten sind nur zum Teil vorhanden, da nicht unbedingt alle Workshops einer Veranstaltung (die z.B. jährlich statt findet) bei der darauf folgenden Veranstaltung unverändert wieder angeboten werden. Im Gegensatz dazu ändert sich beispielsweise die Menge der Krankenhäuser, die Praktika anbieten, nur sehr gering. Es ist abhängig vom Organisator, ob entsprechende Daten aus vergangenen Veranstaltungen veröffentlicht werden oder nicht. Praktische Erfahrungen z.B. mit dem Mädchen-Techniktag (siehe Abschnitt 4.4.1) zeigen gleichermaßen beide Tendenzen: gewisse, wiederholt angebotene Workshops waren wiederholt gleichermaßen beliebt, aber es gab auch Workshops, die in einem Jahr deutlich gemieden und im darauf folgenden sehr viel stärker nachgefragt wurden.

Eine weitere Quelle von Information über Präferenzen entsteht durch die mögliche Vernetzung von Teilnehmern untereinander, so dass a priori Präferenzen untereinander kommuniziert werden. Ein Beispiel sind Freundeskreise oder Schulklassen bei Veranstaltungen mit Schülern als Zielgruppe, wie zum Beispiel dem Mädchen-Techniktag. Innerhalb von Klassen oder sozialen Netzwerken findet dann wahrscheinlich eine gegenseitige Weitergabe der Präferenzen statt. Diese Information könnte ein Teilnehmer nutzen, um sich durch die Angabe unwahrer Präferenzen zumindest einen Platz in einem Workshop mit einer mittleren Präferenz zu sichern. Allerdings könnte es auch hierbei bereits Anreiz zum Lügen geben, so dass diese Informationen nicht verlässlich sind.

Das Beispiel in (6.1) bis (6.3) zeigt, dass eine Angabe unehrlicher Präferenzen nur in sehr bestimmten Kombinationen aus Präferenzen der anderen Teilnehmer und verfügbaren Plätzen einen Vorteil bietet. Die Nachfrage nach den meist präferierten Workshops muss hoch genug sein und die Nachfrage nach mittelmäßig präferierten Workshops zum anderen niedrig genug, damit ein Präferenztausch den erwarteten Payoff erhöht.

Weiterhin ist der Effekt des Lügens anderer Teilnehmer zu beachten. Ist ein Teilnehmer der Meinung, eine ausreichend verlässliche Schätzung über die Präferenzen der anderen Teilnehmer angeben zu können, um eine vorteilhafte Veränderung seiner Präferenzen vorzunehmen, so ist es möglich, dass auch andere Teilnehmer in derselben Art rasonieren und eine Vertauschung der Präferenzen vornehmen. Damit verschlechtert sich allerdings wiederum der erwartete Payoff der Teilnehmer mit Präferenzvertauschungen, wie in Beispiel (6.3) gezeigt, während dies denjenigen mit ehrlicher Präferenzangabe zu Gute kommt. Unter der Vermutung, dass andere Teilnehmer ihre Präferenzen vertauschen können, ist wiederum die Angabe ehrlicher Präferenzen die beste Antwortstrategie.

Die Strategie der unehrlichen Präferenzangabe ist mit großer Unsicherheit behaftet. In einer ähnlichen, in [BT96] geschilderten Situation (siehe Abschnitt 5.5.2) kann für gewisse Spieler ein vom privaten Signal abweichendes Gebot sowohl nach oben als auch nach unten von Vorteil sein. Hier argumentieren die Autoren, dass diese Unsicherheit bezüglich der Wahl der besten Strategie wahrscheinlich zu einer ehrlichen Gebotsabgabe führen wird, da sich die Spieler wegen fehlender Informationen über die Gebote der anderen nicht mit ausreichender Sicherheit für eine Strategie entscheiden können.

Für das Workshopzuteilungsproblem liegen keine praktischen Erfahrungswerte bezüglich der unwahren Präferenzabgabe vor (solche Werte sind auch schwer zu erheben). Zu erwarten ist, dass im Allgemeinen aufgrund der geschilderten Unsicherheit wahre Präferenzen angegeben werden. Jedoch sind trotzdem in bestimmten Situationen Anrei-

ze für eine unwahre Angabe vorhanden, so dass dies nicht ausgeschlossen werden kann, insbesondere nicht durch den Mechanismus der Zuteilung an sich. Es ist nicht zu erwarten, dass verbreitetes Lügen zu einer großen, allgemeinen Unzufriedenheit mit der Zuteilung führen wird, es mag aber trotzdem Teilnehmer geben, die aufgrund unwahrer Angaben entweder durch sich selbst oder durch andere eine unvorteilhafte Zuteilung erlangen. Auf diese Problematik wird bei der Vorstellung des Tauschmarktes noch weiter eingegangen.

### 6.1.2 Auswahl der Präferenzen

Im vorigen Abschnitt wurden die Auswirkungen einer Präferenzvertauschung auf den erwarteten Payoff von Spielern diskutiert. Nun stellt sich jedoch die Frage, welchen Einfluss die Zahlenwerte der Präferenzen auf dieses Ergebnis haben. Es leuchtet ein, dass sich die Beziehung der erwarteten Payoffs zueinander nicht ändern für alle Präferenzfunktionen, die sich linear in die in den Beispielen (6.1) bis (6.3) verwendeten Präferenzwerte überführen lassen (z.B. Präferenzwerte  $\{6, 3\}$  statt  $\{4, 2\}$ ). Was aber passiert, wenn die Präferenzwerte quadriert werden ( $\{16, 4\}$ ) oder wenn die Auswahl der Präferenzen den Teilnehmern überlassen wird? Für die folgenden Ausführungen wird, wenn nicht anders angegeben, davon ausgegangen, dass bei endlicher Anzahl an zu vergebenden Präferenzen immer die Standardpräferenz 0 für Workshops gilt, denen keine andere Präferenz zugewiesen wurde.

#### Freie Präferenzwahl

Zunächst stellt sich die Frage, ob es überhaupt sinnvoll ist, eine Auswahl fester Präferenzwerte vorzugeben. Das Ziel der Zuteilung ist die bestmögliche Befriedigung der subjektiven Signale der Teilnehmer, die jedoch nicht notwendigerweise mit Hilfe der festen Präferenzen ausdrückbar sind. Beispielsweise könnte ein Teilnehmer einen bestimmten Workshop, sagen wir Workshop A, sehr stark präferieren und schon mit Workshop B nicht sehr zufrieden sein, während ein zweiter zwar Workshop A leicht über B präferiert, aber auch mit Workshop B sehr glücklich wäre, eventuell ebenfalls mit Workshop C. Beide würden als Präferenzen 4, 2, 0, 0 für Workshops A, B, C und D vergeben, aber eine Zuteilung des ersten Teilnehmers zu B und des zweiten zu A würde eine geringere, subjektive Zufriedenheit erlangen als die umgekehrte Zuteilung, obgleich die Zielfunktionswerte des Optimierungsproblems gleich sind.

Eine freie Wahl der Präferenzen wäre gut geeignet, um die subjektiven Präferenzen der Teilnehmer bestmöglich zu repräsentieren. Allerdings zeigt sich sofort das Problem der oberen Begrenzung der maximalen Präferenz. Ohne obere Schranke für die maximale Präferenz würde jeder Teilnehmer eine möglichst hohe Präferenz für den meist präferierten Workshop angeben, um sich einen Platz zu sichern. In diesem Fall gibt es kein endliches Nash-Gleichgewicht, da es für jeden Teilnehmer bei gegebenen Präferenzwerten der anderen immer vorteilhaft ist, eine um 1 erhöhte Präferenz anzugeben, was wiederum die Vorteilhaftigkeit der gegebenen Präferenzen der anderen Spieler zerstört. Es muss also in jedem Fall eine obere Schranke für die Präferenzen geben.

## Rangfolge

Das System der Präferenzangabe durch eine Rangfolge wurde beispielsweise beim NIMP (siehe Abschnitt 3.3) erfolgreich eingesetzt. Die Studenten und Krankenhäuser drücken ihre Präferenzen durch Angabe einer Sortierung der möglichen Kandidaten aus. Zusätzlich ist die Möglichkeit gegeben, einzelne Zuordnungspartner als “nicht akzeptabel” zu kennzeichnen, eine entsprechende Zuordnung wird dann verhindert. Dabei kann es passieren, dass im Ergebnis nicht zugeordnete Kandidaten übrig bleiben, diese müssen dann außerhalb des Algorithmus nach einer Zuteilung suchen.

Für das Workshopzuteilungsproblem hat diese Methode jedoch Nachteile. Zum einen gibt es, wie praktische Anwendungsfälle zeigen, eine so große Anzahl an Workshops, dass die Erstellung einer kompletten Rangfolge, also einer totalen Ordnung, zu aufwändig wäre. Bei der Vergabe der Präferenzen muss eine partielle Spezifikation daher unbedingt möglich sein. Eine partielle Rangfolge, also beispielsweise eine Einordnung der  $x$  beliebtesten Workshops in eine Rangfolge, würde es dann aber erschweren, unbeliebte Workshops zu kennzeichnen. Eine Markierung als “nicht akzeptabel” ist nicht möglich, da in jedem Fall eine Zuteilung aller Teilnehmer erfolgen muss. Es dürfen keine nicht zugeteilten Kandidaten am Ende übrig bleiben, da eine separate Nachverhandlung von freien Plätzen bzw. Kandidaten zu zeitaufwändig (insbesondere für die Workshopanbieter) und zu komplex aufgrund der zu beachtenden Nebenbedingungen wäre. Jeder zu einer Veranstaltung angemeldete Kandidat muss sicher sein können, die erforderliche Anzahl Plätze zugeteilt zu bekommen, wie dies ja auch die Nebenbedingungen des Zuteilungsproblems verlangen.

Eine weitere Eigenschaft einer Rangfolge ist, dass man keine zwei oder mehr Workshops als “gleich gut” markieren kann. Dies mag aber wünschenswert sein, insbesondere, da pro Teilnehmer mehrere Plätze zu vergeben sein können. Als Beispiel sei der in Abschnitt 4.4.1 beschriebene Mädchen-Techniktag genannt, bei dem jeder Teilnehmer zwei Workshops zugeteilt bekommt. In diesem Fall ist es sogar sinnvoll, den Teilnehmern zu gestatten, zwei Workshops gleichermaßen als “am meisten gewünscht” zu markieren.

## Feste Präferenzen mit freier Anzahl

Betrachten wir die Möglichkeit, dass die Präferenzwerte auf die Auswahl  $\{4, 2\}$  beschränkt seien, jedoch lässt der Organisator die Möglichkeit, die gleiche Präferenz zwei Mal zu vergeben, um Workshops mit gleicher subjektiver Präferenz zu markieren. Die wahren, subjektiven Präferenzen seien wie in Beispiel (6.4) dargestellt, Spieler 1 habe also für die Workshops A und B eine gleich hohe Präferenz, während die restlichen Spieler Workshop A über Workshop B präferieren.

$$\begin{array}{c|cccc} & A & B & C & D \\ \hline 1 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 \end{array} \left. \begin{array}{l} \} \\ \} \\ \} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{erw. Payoff: } 1 \cdot 4 = 4 \\ \text{erw. Payoff: } \frac{1}{3} \cdot 4 = 1,33 \end{array} \quad (6.4)$$

Der erwartete Payoff von Spieler 1 ist 4, da der Algorithmus ihn zu Workshop B zuteilen wird, während die restlichen Spieler zufällig auf A, C und D verteilt werden. Die Summe der Payoffs ist 8.

|   |          |          |          |          |   |   |
|---|----------|----------|----------|----------|---|---|
|   | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |   |   |
| 1 | 4        | 4        | 0        | 0        | } | erw. Payoff: $\frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 2,66$ |
| 2 | 4        | 4(2)     | 0        | 0        | } | erw. Payoff: $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 1,66$ |
| 3 | 4        | 2        | 0        | 0        | } |   |
| 4 | 4        | 2        | 0        | 0        | } | erw. Payoff: $\frac{1}{3} \cdot 4 = 1,33$   |

(6.5)

Was passiert nun, wenn einer der Spieler unwahre Präferenzen angibt? Beispiel (6.5) zeigt die Situation, dass Spieler 2 für Workshop B ebenfalls die Präferenz 4 angibt, obwohl seine subjektive Präferenz für Workshop B kleiner ist als für Workshop A (abweichende subjektive Präferenzen stehen in Klammern neben den Geboten). In diesem Fall jedoch steigt der erwartete Payoff von Spieler B auf 1,66, während der erwartete Payoff von Spieler 1 sinkt, da die Wahrscheinlichkeit der Zuteilung zu Workshop B auf 0,5 sinkt. Die Summe der erwarteten Payoffs über alle Spieler verringert sich auf 7. Die Gesamtzufriedenheit aller Spieler sinkt also im Vergleich zur ehrlichen Präferenzangabe.

Da sich der Payoff von Spieler 2 durch strategisches Verhalten erhöht, bedeutet dies einen ebensolchen Anreiz für die Spieler 3 und 4, unwahre Präferenzen anzugeben. Dies würde die in Beispiel (6.6) gezeigte Situation zur Folge haben.

|   |          |          |          |          |   |  |
|---|----------|----------|----------|----------|---|--|
|   | <i>A</i> | <i>B</i> | <i>C</i> | <i>D</i> |   |  |
| 1 | 4        | 4        | 0        | 0        | } | erw. Payoff: $\frac{1}{2} \cdot 4 = 2$                         |
| 2 | 4        | 4(2)     | 0        | 0        | } |  |
| 3 | 4        | 4(2)     | 0        | 0        | } | erw. Payoff: $\frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1,5$ |
| 4 | 4        | 4(2)     | 0        | 0        | } |  |

(6.6)

Die Summe der erwarteten Payoffs verringert sich weiter auf 6,5. Spieler 3 und 4 haben zwar einen höheren Erwartungswert als in den beiden anderen Beispielen, aber Spieler 1 steht deutlich schlechter da, Spieler 2 zumindest schlechter als in Beispiel (6.5). Die Gesamtzufriedenheit ist geringer als bei ehrlicher Angabe, allerdings stellt die Präferenzangabe in Beispiel (6.6) das Nash-Gleichgewicht dar. Es wird also deutlich, dass eine freie Anzahl an zu vergebenden hohen Präferenzen nicht sinnvoll für die allgemeine Zufriedenheit ist, da diese Möglichkeit jeden Spieler dazu verleitet, die höchste Präferenz maximal oft anzugeben, um seine Chancen auf einen präferierten Workshop zu sichern. Dies wiederum hindert den Algorithmus daran, diejenige Verteilung zu generieren, die dem Optimum bezogen auf die privaten Signale entspricht.

Es bleiben die Möglichkeiten, zum einen die zu vergebenden Präferenzen auf eine vorgegebene Auswahl sinnvoller Größe zu begrenzen oder aber die Summe der zu vergebenden Präferenzwerte nach oben zu beschränken, die Auswahl der Anzahl vergebener Präferenzen und deren Höhe aber den Teilnehmern zu überlassen. Diese letztere Möglichkeit wird im folgenden Abschnitt diskutiert.

## Präferenzbudget

Das *Präferenzbudget* bezeichnet die obere Schranke für die Summe aller vergebenen Präferenzen für jeden Teilnehmer. Jeder Teilnehmer kann frei darüber entscheiden, wie er sein Budget verwendet, er kann also die Anzahl und Höhe der vergebenen Präferenzen selbst bestimmen, solange deren Summe nicht größer als das zur Verfügung stehende Budget ist. Die Vorgehensweise und die verschiedenen Strategien werden anhand von Beispielen illustriert.

Die Summe aller Präferenzwerte sei auf 6 begrenzt. Dies würde Spieler 1 beispielsweise die Möglichkeit eröffnen, den beiden, gleich präferierten Workshops A und B jeweils die Präferenz 3 zuzuordnen, so dass die subjektive Einschätzung sich in den Präferenzwerten widerspiegelt. Ebenso ist die Vergabe der Präferenz 6 für den beliebtesten Workshop erlaubt, alle weiteren Workshops erhalten dann automatisch die Standardpräferenz 0. Eine solche Vergabe entspricht dem "alles auf eine Karte setzen".

| a) | A    | B    | C | D | P. | b) | A    | B    | C | D | P.   |
|----|------|------|---|---|----|----|------|------|---|---|------|
| 1  | 3    | 3    | 0 | 0 | 3  | 1  | 3    | 3    | 0 | 0 | 3    |
| 2  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 4  | 2  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 1,33 |
| 3  | 4    | 2    | 0 | 0 | 0  | 3  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 1,33 |
| 4  | 4    | 2    | 0 | 0 | 0  | 4  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 1,33 |

(6.7)

| c) | A    | B    | C | D | P. | d) | A    | B    | C | D | P. |
|----|------|------|---|---|----|----|------|------|---|---|----|
| 1  | 3    | 3    | 0 | 0 | 3  | 1  | 3    | 3    | 0 | 0 | 0  |
| 2  | 5(4) | 1(2) | 0 | 0 | 0  | 2  | 0(4) | 6(2) | 0 | 0 | 2  |
| 3  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 2  | 3  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 2  |
| 4  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 2  | 4  | 6(4) | 0(2) | 0 | 0 | 2  |

(6.8)

Beispiele a) und b) in (6.7) zeigen, dass der Erfolg der Strategie, alles auf eine Karte zu setzen, maßgeblich von den Strategien und Präferenzen der anderen Teilnehmer abhängt. Hier sei davon ausgegangen, dass Spieler 1 indifferent zwischen Workshop A und B ist und die anderen Spieler subjektive Signale von 4 für Workshop A und 2 für Workshop B haben (subjektive Signale in Klammern hinter strategischen Geboten). "P." bezeichnet den erwarteten Payoff.

In Beispiel a) ist Spieler 2 mit der Strategie des Setzens auf eine Karte erfolgreich, gleichzeitig profitiert Spieler 1 von der ehrlichen Präferenzangabe. In Beispiel b) ist die ehrliche Präferenzangabe von Spieler 1 wiederum die beste Alternative, während sich die restlichen Spieler in ein Glücksspiel um Workshop A begeben. Im Vergleich mit Beispiel a) wird jedoch deutlich, dass der Payoff von Spieler 3 und 4 durch das Setzen auf eine Karte steigt. Der Erfolg dieser Strategie hängt jedoch von der Beliebtheit der Workshops ab. Hätte beispielsweise Spieler 3 eine subjektive Präferenz von 2 für den ansonsten unbeliebten Workshops C, so würde ihm eine ehrliche Präferenzangabe immerhin diesen Workshop garantieren, während eine einzige hohe Präferenz von 6 für den beliebten Workshop A nachteilig wäre.

Beispiele c) und d) zeigen die Auswirkungen von Kompromissentscheidungen. In Beispiel c) geht Spieler 2 einen Kompromiss ein zwischen ehrlicher Präferenzangabe und dem Setzen auf eine Karte. Dies ist jedoch eine unvorteilhafte Strategie. Besser ist Spieler 2 in Beispiel d) dran, wo er nicht alles auf die beliebteste, aber auf die zweit beliebteste Karte setzt. Damit bekommt er Workshop B sicher zugesprochen.

Was lässt sich daraus zusammenfassend sagen über die Methode des Präferenzbudgets? Die Vorteilhaftigkeit einer Strategie hängt entscheidend von den Geboten der restlichen Teilnehmer ab. Strategisches Verhalten kann sich auszahlen, aber auch sehr nachteilig auswirken. Das Budget lässt den Teilnehmern auf der einen Seite eine große Freiheit bei der Spezifikation der Präferenzen. Indifferenz zwischen Workshops und Vorlieben für eine große Anzahl an Angeboten kann ebenso ausgedrückt werden wie die subjektive Fokussierung auf einen bestimmten Workshop. Durch die Beschränkung des Budgets ist die Gefahr des Strebens gegen unendlich große Präferenzwerte nicht gegeben. Allerdings bedeutet diese Flexibilität auch die "Qual der Wahl", was auf der anderen



Seite Überlegungen zum optimalen, strategischen Verhalten fördern kann und daher die ehrliche Präferenzangabe eventuell nicht begünstigt.

### **Feste Präferenzmenge**

Als letzte Möglichkeit steht die Angabe einer festen Menge an zu vergebenden Präferenzen zur Auswahl. Den Teilnehmern stehen eine Anzahl an Präferenzen zur Verfügung, die auf die Workshops verteilt werden müssen.

Im Prinzip könnte man ebenfalls fordern, dass die zur Verfügung stehenden Präferenzen zwar vergeben werden können, aber nicht müssen. Dies führt allerdings zu Ungerechtigkeiten, die sich anhand eines kleinen Beispiels illustrieren lassen. Angenommen, es gibt zwei Workshops, A und B, und zwei Spieler, 1 und 2, die beide private Signale von 4 für Workshop A und 2 für Workshop B haben. Die beiden Präferenzen 4 und 2 stehen zur Vergabe zur Verfügung. Man betrachte die Situation, dass Spieler 1 seine Präferenzen ehrlich und vollständig angibt, also 4 für Workshop A und 2 für Workshop B. Spieler 2 dagegen gibt lediglich Präferenz 4 für Workshop A an. In diesem Fall würde der Algorithmus, mangels besserer Alternativen für Spieler 2, diesem Workshop A zusprechen und Spieler 1 in Workshop B einteilen. Es ist aber wünschenswert, dass beide Spieler eine gleich große Chance auf beide Workshops erhalten und die Angabe sehr weniger Präferenzen nicht belohnt wird. Auch dies ist letztlich als strategisches Verhalten zu sehen. Wenige Präferenzangaben erschweren dem Algorithmus die Berechnung einer Zuteilung, die allen subjektiven Präferenzen und damit dem öffentlichen Wohl optimal entspricht. Um diesen Anreiz zu vermeiden, wird daher gefordert, dass alle angebotenen Präferenzen auf Workshops verteilt werden. Man kann dies in der Praxis leicht dadurch erreichen, indem man die nicht vergebenen Präferenzen vor der Zuteilung zufällig vergibt und diese Vorgehensweise den Teilnehmern vorab deutlich bekannt gibt. Auf diese Weise kann der Anreiz zur unvollständigen Präferenzangabe beseitigt werden.

Die Strategien der ehrlichen bzw. unehrlichen Präferenzangabe wurden bereits miteinander verglichen. Das Ergebnis war, dass es abhängig von der genauen Präferenzstruktur ist, ob die Angabe ehrlicher Präferenzen einen höheren Payoff erwarten lässt als das Vertauschen von Präferenzen. Strategische Fehlangaben zahlen sich nur in bestimmten Konstellationen aus, aber diese Anreize existieren und lassen sich nicht beseitigen.

Was lässt sich zusammenfassend über die Alternativen für Präferenzwerte sagen? Es muss in jedem Fall eine partielle Präferenzangabe erfolgen, da eine totale Spezifikation der Präferenzen zu hohe Transaktionskosten für die Teilnehmer bedeuten würde. Eventuell wären die Teilnehmer gar nicht in der Lage, die Workshops anhand der vorhandenen Information so differenziert zu bewerten. Weiterhin lässt die partielle Präferenzangabe dem Algorithmus genügend Spielraum zum Finden einer Zuteilung, da bei einer Konzentration der Präferenzen auf wenige beliebte Workshops die Zuteilung zu weiteren, nicht bewerteten Workshops möglich ist. Die Angabe negativer partieller Präferenzen verhindert dabei dennoch eine Zuteilung, die für einige Teilnehmer große Unzufriedenheit erzeugen würde. Die Vermeidung der Zuteilung negativ bewerteter Plätze gibt Teilnehmern auch bei nicht so guter Zuteilung das Gefühl, dass die eigenen Präferenzen berücksichtigt wurden.

Unvorteilhaft war die Methode, eine unbegrenzte Anzahl an gleichen Präferenzen zuzulassen, da dies in jedem Fall die unehrliche Präferenzangabe unterstützt. Auch wenn man nicht folgern kann, dass die höchstmögliche Angabe der maximalen Präferenz in

jedem Fall eine dominante Strategie darstellt, so ist doch leicht ersichtlich, dass der Anreiz dazu im Allgemeinen hoch ist. Dies wirkt sich negativ auf die erzielte Gesamtzufriedenheit aus. Ebenso ist die Möglichkeit der Angabe einer Rangfolge unvorteilhaft für das Workshopzuteilungsproblem.

Sowohl beim Präferenzbudget als auch bei der festen Präferenzmenge ist es in bestimmten Fällen vorteilhaft, unehrliche Präferenzwerte anzugeben, abhängig von den Präferenzen der anderen aber auch oft bessere, ehrliche Angaben zu machen. Die Unsicherheit über die genauen Angaben der anderen Teilnehmer lässt keine verlässlichen Vermutungen über die bessere Strategie zu. Aus diesem Grund kann man, wie bereits in Abschnitt 6.1.1 argumentiert, wohl davon ausgehen, dass die Präferenzangabe größtenteils ehrlich erfolgen würde. Das Präferenzbudget bietet den Vorteil der flexibleren Widerspiegelung der privaten Signale, Fokussierung auf einen Workshop ist ebenso möglich wie ein Verteilen der Präferenzwerte auf eine größere Menge von Workshops. Die Flexibilität, die durch die vielen Kombinationsmöglichkeiten gegeben ist, kann jedoch auf der anderen Seite, abhängig von der Veranstaltung und der Zielgruppe der Teilnehmer, die Präferenzangabe sehr komplex machen. Eine feste Präferenzmenge lässt weniger Möglichkeiten und verringert dadurch aber auch die Komplexität oder “Qual der Wahl”. Abgesehen davon wird durch die feste Präferenzmenge die Verteilung der Präferenzen auf mehrere Workshops erzwungen. Dies schließt extreme Situationen aus, die beim Präferenzbudget etwa auftreten, wenn sehr viele Teilnehmer eine einzige hohe Präferenz für eine kleine Auswahl von Workshops angeben. In diesem Fall fehlen dem Optimierungsalgorithmus Daten zum Finden einer guten Zuteilung und viele Teilnehmer werden zufällig auf nicht bewertete Workshops verteilt, obwohl mehr Daten eine bessere Zuteilung ermöglichen könnten. Eine Verteilung der Präferenzen auf mehrere Workshops ist daher zum Finden des tatsächlichen, sozialen Optimums wichtig.

### 6.1.3 Grenzen der einstufigen Zuteilung

Bei einer einstufigen Zuteilung wird die optimale Zuteilung basierend auf den privaten Signalen der Teilnehmer berechnet. Die Informationen, die den Teilnehmern zur Bestimmung ihrer privaten Signale zur Verfügung stehen, sind zum einen die Beschreibungen der einzelnen Workshops und zum anderen die Angaben über die Anzahl der insgesamt zur Verfügung stehenden Plätze. Die Teilnehmer haben jedoch keine vollständige Information über die Präferenzstruktur der anderen Teilnehmer. Eventuell verfügen einige Teilnehmer über partielle Informationen über die Präferenzen befreundeter Teilnehmer.

Die wahren Werte für die Workshops können jedoch von weiteren Faktoren beeinflusst werden, die zum Teil auf den in Abschnitt 5.1 erläuterten Faktoren der Persönlichkeit bezogen auf soziales Verhalten basieren:

- Ein Teilnehmer präferiert das “Schwimmen mit der Masse”, er bevorzugt also einen Workshop, der allgemein sehr beliebt und gut besucht ist und im Trend liegt. Dies sind also tendenziell diejenigen Teilnehmer mit einer angepassten Persönlichkeit.
- Ein Teilnehmer bevorzugt einen individuellen Workshop, also eher unbeliebte und wenig besuchte Workshops zu Thematiken, die nicht im allgemeinen Interesse stehen. Ein solcher Teilnehmer wäre von seiner Persönlichkeit her als eher abgekehrt zu klassifizieren. Diese Individualisten können den Wunsch nach etwas Besonderem hegen oder sich für intensive Betreuung durch die Organisatoren interessieren, um ausführliche Erläuterungen erhalten zu können.

- Ein Teilnehmer möchte unbedingt zusammen mit einem Freund (oder einer Gruppe von Freunden) Workshops besuchen. Dies kann beispielsweise auch der Fall sein, wenn ein Teilnehmer Ausländer oder Gast ist und mit einem Freund, der gleichzeitig Dolmetscher bzw. Betreuer ist, die Workshops besuchen möchte. Ähnliche Abhängigkeiten treten z.B. bei Behinderungen auf.
- Eine Gruppe von Teilnehmern möchte ein möglichst breites Bild der Veranstaltung erhalten und strebt danach, möglichst viele unterschiedliche Workshops zu besuchen, um später die Erfahrungen austauschen zu können. Auch die Angabe unterschiedlicher Präferenzen garantiert nicht die tatsächliche Zuteilung in verschiedene Workshops. Hier können zum Beispiel auch Zeitrestriktionen eine Rolle spielen, die bestimmte Kombinationen nicht zulassen.

Diese Faktoren können bei der einstufigen Zuteilung nicht oder nur in begrenztem Maß berücksichtigt werden. Die Auslastung der Workshops ist vor der Zuteilung nicht bekannt, so dass von der Auslastung abhängige Präferenzen in jedem Fall nicht berücksichtigt werden können. Der gemeinsame Workshopbesuch durch Freunde kann zwar durch die Angabe derselben Präferenzen begünstigt, aber nicht garantiert werden, aber auch dies ist erst nach der erfolgten Zuteilung klar. Das Gleiche gilt für den Besuch verschiedener Workshops durch eine Gruppe von Teilnehmern.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist durch die Anreizproblematik gegeben, die bedingt, dass Teilnehmer durchaus einen Anreiz haben können, nicht ihre wahren, sondern veränderte Präferenzen anzugeben. Die Vorteilhaftigkeit einer solchen Strategie hängt jedoch stark von den abgegebenen Präferenzen der anderen Teilnehmer ab. Es ist durchaus möglich, dass die Strategie falscher Angaben nicht zum gewünschten Erfolg führt und der Teilnehmer eine schlechte Zuteilung erhält, evtl. schlechter als bei wahrheitsgemäßer Angabe. Für einen solchen Teilnehmer kann die Möglichkeit, die Präferenzwerte im Nachhinein anzupassen, sehr hilfreich sein, um seine Zuteilung im Nachhinein, unter besserer Kenntnis der Präferenzen der anderen Teilnehmer, zu verbessern.

Desweiteren kann die Angabe der Präferenzen für einige Teilnehmer zu ungenau für eine gute Zuteilung sein. Durch die Beschränkung der Menge zu vergebender Präferenzen kann es durchaus passieren, dass ein Teilnehmer, der sehr beliebte Workshops gewählt hat, in keinen dieser Workshops eingeteilt werden kann und daher in einem mit dem Standardwert Null bewerteten Workshop landet. Dabei wird jedoch seitens des Algorithmus keine Unterscheidung zwischen verschiedenen mit Null bewerteten Workshops gemacht, da die Präferenzen nicht in diesem Detail erfasst werden. Für einen solchen Teilnehmer kann es aber sehr hilfreich sein, die von vornherein nicht bewerteten Workshops zu klassifizieren, um einen möglichst hohen Zufriedenheitsgrad zu erlangen. Für welche Teilnehmer diese Situation allerdings eintritt, ist ebenfalls erst nach erfolgter Zuteilung bekannt.

Die Zuteilung wiederum ist in der Hauptsache abhängig von den angegebenen Präferenzen der ersten Stufe, abgesehen von den übrigen Nebenbedingungen bezüglich Zeitangaben, Platzanzahl etc. Diese Situation ist vergleichbar mit derjenigen von einstufigen Auktionen, bei denen die Informationen über die Gebote der anderen Bieter erst am Ende der Auktion bekannt gegeben werden, obwohl sie schon vorher nützlich wären. Wie in Kapitel 5 gezeigt werden zwei- oder mehrstufige Auktionsverfahren eingesetzt, um die Weitergabe von Information im Laufe der Auktion zu organisieren und damit das Auktionsergebnis positiv zu beeinflussen, sowohl für den Verkäufer als auch für die

Bieter. Sobald die Präferenzen der Bieter nicht mehr voneinander unabhängig sind, ist die Veröffentlichung der Präferenzen der anderen Bieter von Vorteil, und zwar sowohl für die Bieter als auch für den Verkäufer.

Beim Workshopzuteilungsproblem gibt es keine Kosten, die durch die Teilnahme oder das Ergebnis der Zuteilung entstehen. Das Ziel der Zuteilung ist das soziale Optimum, das die maximale Gesamtzufriedenheit der Teilnehmer wiedergibt, was man durchaus mit der Maximierung der Verkaufserlöse vergleichen kann. Da keine Bezahlung erfolgt, sind die Bieter also ebenso wie der Verkäufer daran interessiert, einen möglichst hohen Preis und damit eine gute Bewertung der Zuteilung zu erzielen. Das Problem des winner's curse ist bei der Workshopzuteilung also nicht gegeben. Bei der Workshopzuteilung sind die Präferenzen der Teilnehmer unter anderem auch abhängig von der Gesamtheit der Präferenzen der anderen Teilnehmer, die jedoch weder komplett von vornherein noch durch eine schrittweise vorgehende Auktion bekannt gegeben werden können. Das schrittweise Vorgehen sei hier auf die englische Auktion bezogen, in deren Verlauf bereits Informationen veröffentlicht werden. Die Zuteilung jedoch ergibt sich erst aus der Gesamtheit aller Präferenzen, und aus der Zuteilung letztendlich ergeben sich wiederum angepasste Präferenzen der Teilnehmer, so dass die Optimalität der Zuteilung bezogen auf die angepassten Werte nicht mehr notwendigerweise gegeben ist. Um eine weitere Anpassung der Zuteilung mit weiterer Verbesserung bezogen auf die neuen Werte zu ermöglichen, muss die Zuteilung also zwangsläufig um eine zusätzliche Stufe erweitert werden. Der Vorschlag für eine zweite Stufe für das Workshopzuteilungsproblem ist das Kernelement dieser Arbeit und wird in den folgenden Abschnitten präsentiert und entwickelt.

## 6.2 Einführung einer zweiten Stufe

Wie kann nun konkret eine zweite Stufe für das Workshopzuteilungsproblem aussehen, welche Anforderungen muss sie erfüllen, wie kann sie ihren Zweck erreichen? Die Präferenzen der Teilnehmer sind voneinander abhängig und müssen daher in geeigneter Weise veröffentlicht werden. Nun ist es aber allein aufgrund der großen Menge der anfallenden Information schier unmöglich, einfach die Menge aller Präferenzen bekannt zu geben, zusammen mit den Details zum Zuteilungsverfahren. Die Teilnehmer wären zum einen wegen der Masse und zum anderen wegen der Komplexität des Verfahrens nicht in der Lage, diese Informationen auszuwerten. Aus demselben Grund ist eine Bekanntgabe der Präferenzen *vor* der Zuteilung mit der Möglichkeit der Präferenzänderung basierend auf diesen Informationen keine praktikable Lösung.

Es muss daher eine einfache Art und Weise gefunden werden, Informationen über die Präferenzen aller Teilnehmer und die Zuteilung in verständlicher Art und Weise öffentlich zu machen. Dabei geht es hier wegen der Nebenbedingungen des Problems effektiv darum, Platzvertauschungen vorzunehmen. Ein Tausch ordnet einen Teilnehmer einem nicht besuchten Workshop zu und entfernt ihn gleichzeitig aus einem besuchten Workshop. Die Anzahl der von jedem Teilnehmer besuchten Workshops bleibt gleich, die entsprechende Nebenbedingung zur Mindestanzahl besuchter Workshops wird also nicht verletzt. Im Prinzip kann es auch möglich sein, einem Teilnehmer einen zusätzlichen Platz zuzuordnen. Dies wird jedoch in der Praxis nur selten der Fall sein, da der Algorithmus bereits zur Maximierung des Zielfunktionswertes alle möglichen Zuteilungen vornimmt und weiterhin die Platzbegrenzungen der Workshops eingehalten werden

müssen. Welche Informationen genau benötigen also die Teilnehmer, um gewünschte Platzvertauschungen anzugeben?

Freunde, die dieselben Workshops besuchen wollen, benötigen zunächst die Information, ob sie tatsächlich in dieselben Workshops eingeteilt sind. Dies kann durch Bekanntgabe der Zuteilung pro Teilnehmer geschehen, da diese Information leicht zwischen den Teilnehmern kommuniziert werden kann. Sind die Freunde nicht in dieselben Workshops eingeteilt, so interessiert sie, für welche alternative Präferenzangabe die Chance steigen würde, in dieselben Workshops zu kommen. Freunde wünschen sich also einen Workshopwechsel und einen Hinweis darauf, welcher Wechsel erfolgsversprechend wäre. Dies ist hauptsächlich abhängig von der Beliebtheit der Workshops. Der Wechsel in einen bereits sehr beliebten und damit "überfüllten" Workshop ist wenig Erfolg versprechend, dagegen ist ein Wechsel aus einem allgemein beliebten in einen weniger beliebten eher möglich.

Die Beliebtheit der Workshops ist ebenfalls wichtig sowohl für sich von der Masse abkehrende Teilnehmer als auch für nach der Masse strebende Teilnehmer. Die einen bevorzugen allgemein eher unbeliebte Workshops, während die anderen diejenigen bevorzugen, die die Massen anziehen. Sie ist ebenfalls wichtig für strategische Lügner, die ihre Überlegungen zur Optimierung der eigenen Präferenzwerte ja auf a priori Schätzungen der Beliebtheit von Workshops basieren. Sind diese Schätzungen falsch und die Zuteilung ist unvorteilhaft, so können diese Teilnehmer im Nachhinein ihre Präferenzwahl basierend auf den nun vorhandenen Informationen über die Beliebtheit nachbessern.

Eine weitere Teilnehmergruppe, die von einer Tauschmöglichkeit profitieren kann, sind diejenigen, die ausschließlich Präferenzen für sehr beliebte Workshops angegeben haben und daher z.B. in einem der vielen mit der Standardpräferenz bewerteten Workshops gelandet sind. Diese Teilnehmer würden von einer weiteren Präferenzverfeinerung profitieren, indem sie Vorlieben bezüglich der bisher nicht bewerteten Workshops angeben können, um ihre Zuteilung zumindest in diesem Rahmen zu verbessern. Es geht hier also um die nachträgliche, zusätzliche Angabe von Präferenzen, die im Rahmen der ersten Präferenzvergabe nicht in diesem Detail erfolgen konnte (und für den Großteil der Teilnehmer normalerweise auch nicht erfolgen muss). Diese Teilnehmer interessiert also auch, welche Tauschmöglichkeiten sich bieten würden, letztendlich geht es also auch hier um die Frage, wo freie Plätze vorhanden sind oder entstehen könnten und wo dagegen die Überbuchung bereits zu hoch ist, um eine solche Möglichkeit zu bieten.

Was genau bedeutet die Einführung einer zweiten Stufe basierend auf diesen Überlegungen? Durch diese Methode werden zwei grundlegend verschiedene Problematiken miteinander verknüpft. Zum einen geht es um die Problematik der Optimierung zur Bestimmung einer sozial optimalen Zuteilung. Dies ist ein Problem des Operations Research, das in dieser Arbeit mit Hilfe linearer Programmierung behandelt wird. Optimierungsprobleme basieren auf gewissen, festen Eingabeparametern und erzeugen dazu eine optimale Lösung. In dieser Situation geht es jedoch zusätzlich um die Problematik der Anreize und der Weitergabe von Information zum Erzielen einer Lösung eines Problems, das ein Kollektiv von Menschen betrifft. Hier befinden wir uns im Gebiet der Spieltheorie, die sich mit strategischem Verhalten von Personen und der Rolle von Informationsasymmetrien für das Ergebnis einer Problemstellung interessiert. Die Eingabeparameter des Optimierungsproblems unterliegen eben diesen Einflüssen und sind daher nicht als fest gegeben zu betrachten, sondern beeinflussen sich gegenseitig und damit natürlich auch die generierte Zuteilung.

In dieser Arbeit werden nun erstmalig aus der Optimierung entstehende Ergebnisse benutzt, um entstehende Informationsasymmetrien im Nachhinein zu verringern. Die Informationen gehen in eine zweite Stufe der Optimierung ein, in der das Ergebnis weiter verbessert werden kann. Die subjektive Gesamtzufriedenheit, die sich vor Beginn der ersten Stufe gar nicht umfassend mit Hilfe der Präferenzen ausdrücken lässt, kann dadurch noch weiter gesteigert werden. In dieser neuartigen Kombination von Problemen der Optimierung und Problemen basierend auf Anreizen und fehlender Information besteht der innovative Kernbeitrag der vorliegenden Arbeit.

### 6.2.1 Eigenschaften einer Bewertungszahl zur Informationsent-hüllung

Wie im letzten Abschnitt beschrieben, ist das Ziel die Schaffung der Möglichkeit, Workshopplätze nachträglich zu tauschen. Dazu ist als Information der Grad der Überbuchung der einzelnen Workshops wichtig. Tauschmöglichkeiten entstehen eher, wenn ein wenig überbuchter Workshop gewünscht wird und ein Platz in einem stärker überbuchten dafür frei gegeben wird. Insbesondere ist es wichtig, einen Unterschied zu machen zwischen einem Workshop mit beispielsweise 10 Plätzen und 50 Bewerbern und einem zweiten mit 10 Plätzen und 11 Bewerbern. Beide sind zwar überbucht, aber die Wahrscheinlichkeit für einen Teilnehmer, einen Platz in einem dieser Workshops zugeteilt zu bekommen, ist sehr unterschiedlich, insbesondere im Zusammenhang mit mehreren, verschiedenen Tauschangeboten, die sich gegenseitig ergänzen können.

Wie lässt sich die Information über die Präferenzen der anderen Teilnehmer und damit die Überbuchung der Workshops sinnvoll weitergeben? Im Folgenden wird analysiert, welche Eigenschaften eine Zahl, die Informationen über die Beliebtheit und Verfügbarkeit von Workshops liefern soll, haben muss, um ihre Aufgabe zu erfüllen. Nach der Zuteilung basierend auf den Präferenzen der ersten Stufe soll die Zuteilung durch Veröffentlichung von einer Bewertungszahl für jeden Workshop verbessert werden können. Die Bewertungszahl soll den Teilnehmern Auskunft darüber geben, welche Workshops beliebt bzw. überbucht sind, d.h. für welche viele Teilnehmer hohe Präferenzwerte angegeben haben, und welche anderen weniger beliebt sind. Daraus ergibt sich, welche Tauschangebote Aussicht auf Erfolg haben und welche nicht. Zusätzlich dazu hat natürlich jeder Teilnehmer die private Information über die ihm in der ersten Stufe zugeteilten Plätze.

Im Folgenden wird bei der Analyse der Tauschmöglichkeiten davon ausgegangen, dass die Teilnehmer selbst bestimmen, welche Workshops sie aufgrund der zeitlichen Restriktionen besuchen können, also zum einen keine Tauschangebote für Workshops abgeben, die zu einer Zeit statt finden, während der sie selbst abwesend sind, und zum anderen nur Workshops wählen, die sich zeitlich mit ihren restlichen, zugeteilten Workshops nicht überschneiden. Diese Restriktionen lassen sich auch durch die Workshopapplikation sicherstellen, indem sie nur den zeitlichen Restriktionen entsprechende Tauschpartner zur Auswahl anbietet.

Als wünschenswerte Eigenschaften der Bewertungszahl lassen sich die folgenden identifizieren.

**Zahlwert** Die Bewertungszahl soll aus einem einzigen Zahlwert bestehen. Kombinationen aus verschiedenen Zahlen oder Buchstaben sind zu komplex, als dass die

Teilnehmer darauf basierend einen Vergleich der Workshops bewerkstelligen könnten. Dies ist besonders daher gegeben, weil eine Bewertung auch bei einer großen Anzahl Workshops möglich sein soll. Die Bewertungszahlen müssen das Aufstellen einer Rangfolge der Beliebtheit der Workshops erlauben.

**Klare Identifikation von Workshops mit freien Plätzen** Workshops, deren Plätze durch die Zuteilung nicht vollständig belegt werden, stehen für Tauschangebote problemlos zur Verfügung. Ein Teilnehmer, der also eine höhere Präferenz für einen Workshop mit freien Plätzen eintauscht, kann sich sicher sein, diesen Platz auch angeboten zu bekommen. Dies muss durch die Bewertungszahl deutlich gemacht werden.

**Unabhängigkeit von Präferenzwerten** Die Bewertungszahl muss für alle möglichen Präferenzwerte funktionieren, also sowohl für eine feste Präferenzmenge als auch für ein Präferenzintervall. Ebenso muss eine Mischung von positiven und negativen Präferenzen, zum Ausdruck von Ablehnung, möglich sein.

**Einheitlichkeit für alle Teilnehmer** Jeder Workshop soll eine für alle Teilnehmer einheitliche Bewertungszahl erhalten. Das Bestimmen einer separaten Zahl für jeden Teilnehmer wird zunächst als zu komplex eingestuft und nicht weiter betrachtet, auch wenn durch die mögliche Personalisierung über das WWW-basierte Interface eine Darstellung teilnehmerbezogener Bewertungszahlen technisch machbar wäre.

**Beachtung der Präferenzen der Teilnehmer** Man kann davon ausgehen, dass ein Teilnehmer mit einer niedrigen Präferenz für seinen Workshop eher zu einem Tausch bereit ist als einer mit einer hohen Präferenz, der demzufolge zufrieden mit seiner aktuellen Zuteilung ist. Die Bewertungszahl sollte also die Präferenzen der zugeweilten Teilnehmer widerspiegeln. Niedrige Präferenzen der Teilnehmer versprechen höhere Chancen auf einen erfolgreichen Tausch.

**Beachtung des Nachfrageüberschusses** Die Erfolgchancen eines Tauschangebots werden nicht nur von den Präferenzen der tatsächlich zugeweilten Teilnehmer bestimmt, sondern ebenfalls von der nicht befriedigten Nachfrage, also den Präferenzen derjenigen Teilnehmer für einen Workshop, die keinen Platz zugeweiht bekommen haben. Falls in einem Workshop durch einen Tausch ein Platz frei wird, aber gleichzeitig eine hohe, nicht befriedigte Nachfrage vorhanden ist, so sind die Chancen für einen Teilnehmer auf die Erfüllung eines entsprechenden Tauschangebots niedriger als bei einem zweiten Workshop mit niedrigerem Nachfrageüberschuss.

Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft wäre natürlich die Korrektheit der durch die Bewertungszahl induzierten Rangfolge der Workshops. Ein Workshop mit einer höheren Bewertungszahl müsste also bei einem Tauschangebot durch einen Teilnehmer weniger Aussicht auf einen erfolgreichen Tausch bieten als ein anderer Workshop mit einer niedrigeren Bewertungszahl. Da die Bewertungszahlen jedoch einheitlich für alle Teilnehmer sind und der Tauscherfolg gleichzeitig von den zugeweilten Plätzen und Präferenzen des einzelnen Teilnehmers abhängt, lässt sich diese Forderung kaum erfüllen.

## 6.3 Schattenpreise

Schattenpreise stellen eine mögliche Bewertungszahl der Workshops dar. Daher sollen Schattenpreise von linearen Optimierungsproblemen im Folgenden kurz vorgestellt werden.

Schattenpreise sind ökonomisch als Wert einer beschränkten Ressource zu interpretieren. Viele Optimierungsprobleme beinhalten die Verteilung von beschränkten Ressourcen, insbesondere  $\leq$ -Nebenbedingungen können als Angabe einer Ressourcenbeschränkung angesehen werden, wobei die Grenze dem Wert der rechten Seite entspricht. Der Schattenpreis misst den Grenznutzen einer Ressource, d.h. um wieviel der Zielfunktionswert gegenüber einer gegebenen Lösung verbessert werden kann, wenn man die Verfügbarkeit der entsprechenden Ressource leicht erhöht [HL01]. Im Fall von ganzzahligen Werten für Ressourcengrenzen geht man von einer Erhöhung um eine Einheit aus.

Schattenpreise werden oft im Rahmen von Sensitivitätsanalysen verwendet. Sensitivitätsanalysen untersuchen, inwiefern Veränderungen an den Variablen oder Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems sich auf den Zielfunktionswert auswirken. Sie dienen also bei einer gegebenen Situation, d.h. nach Lösung eines initialen Optimierungsproblems, dazu zu untersuchen, welche Auswirkungen Veränderungen an der Problemstellung auf den Zielfunktionswert des Optimierungsproblems haben. Meistens geht es darum, welche Veränderungen oder Maßnahmen eine weitere Verbesserung des Zielfunktionswertes zur Folge haben [AS00].

Der Schattenpreis gibt beispielsweise eine Auskunft über den Grenznutzen einer Maschine. Plant nun das Unternehmen eine Investition in zusätzliche Maschinen und möchte wissen, welche Maschinen genau angeschafft werden sollten, so dass die Investition die größtmögliche Erlössteigerung nach sich zieht, so ist die Betrachtung der Schattenpreise der einzelnen Maschinen ein guter Ausgangspunkt für eine solche Entscheidung.

Im Fall des Workshopzuteilungsproblems stellen die Workshopplätze eine knappe Ressource dar. Der Wert jeder Ressource wird durch die vergebenen Präferenzen bestimmt. Von stark überbuchten Workshops ist ein zu geringes Angebot der Plätze vorhanden, eine Erhöhung der Anzahl der vorhandenen Plätze würde das Ergebnis der Zuteilung stark verbessern und die Zufriedenheit der Teilnehmer erhöhen. Solche Workshops haben also hohe Schattenpreise. Gibt es von einem Workshop exakt so viele Plätze, dass die Nachfrage voll befriedigt werden kann, so ist der Schattenpreis gleich Null, auch ohne dass in diesem Workshop zwangsläufig freie Plätze sind. Schattenpreise von überbuchten Workshops können insbesondere größer sein als die höchste, zu vergebende Präferenz. Dies liegt daran, dass die Umbuchung eines Teilnehmers auf einen zusätzlichen Platz wiederum einen anderen Platz freigibt, so dass weitere Tausche mit Präferenzverbesserung möglich werden (siehe Abschnitt 6.3.3). Die Schattenpreise erlauben also eine Aussage über den Wert eines Workshops für die allgemeine Zufriedenheit der Teilnehmer.

Die Schattenpreise eines linearen Optimierungsproblems werden bei der Lösung des Problems durch den Simplex automatisch erzeugt. Die Optimalitätsbedingung wird durch einen Vergleich des Zielfunktionswertes des primalen Problems mit demjenigen des dualen Problems abgeprüft. Das duale Problem wird also zu jeder Kandidatenlösung berechnet. Die Schattenpreise finden sich in den Werten der Variablen der dualen Problemlösung wieder. Insbesondere hat das duale Problem für jede Nebenbedingung des primalen Problems eine Variable. Die Schattenpreise finden sich in den Variablen, die



der Ressourcenbeschränkung im primalen Problem entsprechen. Diese wird beim Workshopzuteilungsproblem durch die Nebenbedingung a) dargestellt, die die Anzahl der zur Verfügung stehenden, knappen Ressource "Workshopplatz" festlegen. Die maximale Teilnehmerzahl ist die Ressourcenbeschränkung, die zugehörigen Variablen des dualen Problems enthalten in der Problemlösung genau die Schattenpreise für die Workshops. Die Schattenpreise sind also aus einer vorhandenen Lösung des Optimierungsproblems bestimmbar.

Auch bei der Lösung eines ganzzahligen Problems mit dem Branch & Cut Verfahren werden Schattenpreise erzeugt, da im Lauf des Verfahrens Subprobleme generiert und mit dem Simplex gelöst werden. Auch für die optimale, ganzzahlige Lösung als Lösung der Relaxierung eines Subproblems können also gültige Schattenpreise angegeben werden. Durch andere Verfahren (z.B. heuristische oder greedy-Verfahren), die nicht mit dem dualen Problem rechnen, werden Schattenpreise nicht automatisch erzeugt.

### 6.3.1 Zum Einsatz von Schattenpreisen in der Literatur

Zur Kommunikation von Information wurden Schattenpreise im makroökonomischen Kontext der Ressourcenallokation vorgeschlagen [Hur73]. Das Problem besteht hierbei darin, die Effizienz eines ökonomischen Systems zu maximieren. Effizienz bedeutet in diesem Zusammenhang die Optimierung der Nutzenfunktion eines Konsumenten (oder die Summe der Nutzenfunktionen aller Konsumenten) abhängig von den vom System produzierten Gütern und den dabei entstehenden Kosten. Nebenbedingungen sind zum einen die Beschränkung von Ressourcen und zum anderen die Produktionsfunktionen der Produktionsstätten. Um dieses Optimierungsproblem zu lösen, müssen insbesondere alle notwendigen Informationen vorhanden sein. Idealerweise gibt es eine zentrale Einheit, die alle Informationen kommuniziert bekommt und die optimale Verteilung der Ressourcen berechnet. Dies ist jedoch in der Praxis meist nicht durchführbar, weil zum einen die Kommunikation aller Informationen problematisch ist und zum anderen das Problem in seiner Gesamtheit so komplex ist, dass es aus technischen Gründen schlicht nicht lösbar ist. Es wurden daher Vorschläge zur Zerlegung des Problems in kleinere Teilprobleme gemacht, die an den jeweiligen Stellen, wo die relevante Information anfällt, gelöst werden, beispielsweise direkt an den Produktionsstätten. Gewisse globale Information muss jedoch weiterhin von einer zentralen Einheit an alle dezentralen Einheiten geliefert werden, um die Lösung der Teilprobleme zu gewährleisten.

Neben dem Ansatz der Kommunikation von Preisvektoren schlagen die Autoren in [KL65] die Kommunikation von einem Quantitätsvektor vor. Der einer Produktionsstelle kommunizierte Vektor enthält für alle beschränkten Ressourcen die Angabe, wieviele der Ressourcen dieser Stätte zugeteilt werden. Jede Produktionsstätte bekommt somit einen anderen Quantitätsvektor. Anhand der Angaben über die verfügbaren Ressourcen kann wiederum jede Produktionsstätte berechnen, wieviele von welchen Produkten sie bei maximaler Effizienz herstellen kann. Aus diesem Ergebnis leiten sich die Schattenpreise für die Ressourcen ab, die zu jeder Ressource angeben, um wieviel eine zusätzliche Einheit die Effizienz erhöhen würde. Diese Schattenpreise werden an die zentrale Stelle zurück kommuniziert. Anhand der Schattenpreise kann die zentrale Stelle nun unter Beachtung der globalen Ressourcenbeschränkung die optimale Verteilung der Ressourcen auf die Produktionsstätten berechnen und somit eine optimale Effizienz des gesamten Systems erreichen.

Hurwicz beschäftigt sich in seiner Arbeit [Hur73] allgemein damit, welche Eigenschaften ein Mechanismus zur Ressourcenallokation haben sollte und wie man verschiedene Mechanismen vergleichen und bewerten kann. Ein solcher Mechanismus hat zum Ziel, die Aktionen der am System beteiligten Agenten zu steuern. Dabei soll die Summe der entstehenden Aktionen zum einen realisierbar sein (es kann z.B. nicht mehr konsumiert werden als produziert wird), zum anderen sollte das Ergebnis wünschenswerte Eigenschaften erfüllen wie Pareto-Effizienz oder Optimalität (Maximierung des sozialen Wohls). Er formalisiert zunächst die grundlegenden Eigenschaften eines Mechanismus. Ein Mechanismus beschreibt dabei zum einen eine Sprache, mit der die Agenten kommunizieren können, eine Antwortregel, die beschreibt, wie auf eine empfangene Nachricht reagiert wird, und eine Ergebnisregel, die die auf eine Menge von Nachrichten und anderen Informationen folgenden Aktionen von Agenten festlegt. Mit diesem allgemeinen Rahmenwerk kann eine Vielzahl von möglichen Mechanismen zur Ressourcenallokation beschrieben werden.

In diesem Zusammenhang sind die Schattenpreise also als Teil der durch den Allokationsmechanismus definierten Sprache zu sehen. Die Schattenpreise dienen hier also zur Kommunikation der Produktivität zwischen den einzelnen Produktionsstätten und der zentralen Stelle. Hurwicz vergleicht verschiedene Mechanismen auf Basis der Größe der definierten Sprache und der Komplexität der gesendeten Nachrichten sowie der Anzahl der Nachrichten, die gesendet werden müssen, um ein Ergebnis zu erzielen. Die Reduktion der zu sendenden Nachrichten bedingt dabei oftmals eine sehr komplexe Sprache. Schattenpreise stellen eine sehr einfache Möglichkeit dar, einen komplexen Sachverhalt zu beschreiben, da sie nur aus einem einzelnen Zahlenwert bestehen. Sie helfen also bei der Aufgliederung eines komplexen Optimierungsproblems in Teilprobleme kleinerer Komplexität und der Kommunikation von notwendigen Informationen über die Ergebnisse der Teilprobleme zur zentralen Problemlösung. Mit Hilfe der Schattenpreise konnte ein Gleichgewicht erreicht werden, allerdings ohne die Garantie der Endlichkeit der Anzahl der benötigten Schritte. Diese Methode ist also ein Beispiel für einen Mechanismus, dessen Nachrichten simpel sind, aber dessen Anzahl benötigter Nachrichten groß sein kann. Der Einsatz von Schattenpreisen zur Kommunikation von Information ist also bereits vorgeschlagen worden, allerdings geht es hier nicht um die Verbesserung der optimalen Lösung durch Optimierung in zwei Stufen, sondern vielmehr um Komplexitätsreduktion durch Aufteilen des Problems.

### 6.3.2 Mögliche Bewertungszahlen

Welche Zahlen kommen als Kandidaten für eine Workshopbewertungszahl in Frage? In diesem Abschnitt werden mögliche Kandidaten für eine Workshopbewertungszahl diskutiert und in Hinblick auf die genannten wünschenswerten Eigenschaften miteinander verglichen. Als Teilnehmer werden dabei diejenigen Personen bezeichnet, die nach der ersten Stufe einem Workshop zugeteilt wurden, während "Nachfrager" alle Personen bezeichnet, die eine Präferenz für einen Workshop abgegeben haben, unabhängig von der bestehenden Zuteilung. Die Notation orientiert sich an Abschnitt 6.1.

#### Alternative 1: Durchschnitt der Teilnehmerpräferenzen

$$alt1_w = \frac{\sum_{p \in P} z_{pw} \cdot B_p(w)}{c_w}$$

Diese Zahl  $alt1_w$  berechnet sich für den Workshop  $w \in W$  aus der Summe der Präferenzen der Teilnehmer des Workshops geteilt durch die Anzahl der vorhandenen Plätze. Es ist sicherlich nicht sinnvoll, die Summe der Präferenzen lediglich durch die Anzahl der Teilnehmer zu teilen, da dann ein Workshop mit 10 Plätzen, aber nur 2 Teilnehmern, die aber beide eine hohe Präferenz für diesen Workshop haben, eine hohe Zahl erhält, obwohl er für Tauschangebote gut zur Verfügung steht. Freie Plätze werden somit Teilnehmern mit einer Präferenz von 0 gleichgesetzt.

Diese Zahl verdeutlicht sehr schön die zu erwartende Tauschbereitschaft der Workshopteilnehmer. Ist der Durchschnitt niedrig, so gibt es eine gute Chance auf einen erfolgreichen Tausch in diesen Workshop, ist er dagegen hoch, so werden die Teilnehmer ihren Platz eher behalten wollen.

Diese Zahl hat allerdings einige Nachteile:

- Die Anzahl freier Plätze, die einen Tausch sofort möglich machen, wird nicht deutlich.
- Die Zahl sagt nichts über die einzelnen Präferenzen aus. Ein Teilnehmer mit einer stark negativen Präferenz kann den Durchschnitt ebenso beeinflussen wie mehrere Teilnehmer mit einer durchschnittlichen, aber positiven Präferenz. Allerdings wäre für einen Tauschwilligen die Information, dass einer sehr unzufrieden ist, hilfreich, da ja schon ein verfügbarer Platz für den Tausch ausreichend ist.
- Die Präferenzen außerhalb der zugeteilten Teilnehmer sind nicht ersichtlich. Es kann für einen Workshop eine Anzahl Teilnehmer mit sehr hoher Präferenz geben, für die genau Plätze vorhanden sind. In dem Fall ist der Durchschnitt sehr hoch, aber da außer den Zugeteilten sich keiner mehr besonders für den Workshop interessiert, ist ein Tauschangebot Erfolg versprechender, als wenn zusätzlich eine große, nicht erfüllte Nachfrage vorhanden wäre. Der Nachfrageüberschuss wird also nicht abgebildet.

## Alternative 2: Summe aller Präferenzen

$$alt2_w = \sum_{p \in P} B_p(w)$$

Für die Zahl  $alt2_w$  werden sämtliche Präferenzen der Nachfrager aufsummiert. Es werden also nicht nur die Präferenzen der Workshopteilnehmer berücksichtigt, sondern auch die Größe der nicht befriedigten Nachfrage mit einbezogen. Diese Zahl zeigt sehr anschaulich, auf welche Workshops die Präferenzen wie verteilt wurden, welche also generell beliebt sind und welche unbeliebt sind. Allerdings gibt es die folgenden Nachteile zu bemängeln:

- Die Zahl berücksichtigt lediglich die Nachfrage, nicht aber das Angebot an Plätzen. Man sieht also nicht den Unterschied zwischen zwei Workshops mit denselben Präferenzen, aber einer unterschiedlichen Anzahl an Plätzen. Die Knappheit der Plätze wird somit nicht dargestellt, obwohl sie einen entscheidenden Einfluss auf den Tauscherfolg hat.
- Es wird nicht deutlich, welcher Anteil der Präferenzen positiv und welcher negativ ist. Um beurteilen zu können, wie groß die Nachfrage nach diesem Workshop ist,

ist es wichtig zu wissen, wieviele positive Präferenzen der Workshop bekommen hat. Bei einem Tausch interessieren diejenigen Teilnehmer, die den betreffenden Workshop nicht besuchen wollen, nicht so sehr, sondern vielmehr diejenigen, die ihn auch besuchen wollen, also die unmittelbare Konkurrenz.

### Alternative 3: Summe aller Präferenzen, geteilt durch Anzahl Plätze

$$alt3_w = \frac{\sum_{p \in P} B_p(w)}{c_w}$$

Diese Kennzahl entspricht der Alternative 2 geteilt durch die Anzahl zur Verfügung stehender Workshopplätze. Dadurch wird der erste Nachteil von Alternative 2 ausgeglichen. Die Kennzahl gibt quasi wieder, wieviele Präferenzen auf jeden Workshopplatz entfallen, stellt also das Verhältnis zwischen Nachfrage und Angebot dar. Sie zeigt allerdings nicht den Unterschied zwischen wenigen Nachfragern mit hohen Präferenzen und vielen Nachfragern mit niedrigen Präferenzen. Die zweite Situation kann allerdings für den Erfolg eines Tauschangebots vorteilhafter sein, solange die für den Tausch angebotene Präferenz hoch genug ist.

Auch hier gibt es jedoch das Problem der negativen Präferenzen. Ein Workshop mit einer großen Anzahl positiver Präferenzen, aber ebenfalls einer großen Anzahl negativer Präferenzen erhält eine kleine Kennzahl, obwohl wiederum, wie bei Alternative 2 angemerkt, die Konkurrenz groß ist. Dieses Problem kann man jedoch umgehen, indem nur die positiven Präferenzen zur Bildung der Kennzahl herangezogen werden.

### Alternative 4: Summe der positiven Präferenzen, geteilt durch Anzahl Plätze

$$alt4_w = \frac{\sum_{p \in P} B_p(w) \cdot 1_{\{B_p(w) > 0\}}}{c_w}$$

Die Summe der positiven Präferenzen pro Workshopplatz ist eine Kennzahl, die die beiden wesentlichen negativen Eigenschaften von Alternative 2 nicht mehr aufweist. Durch die Ausweisung der Präferenzen pro Platz ist das Angebot in der Kennzahl entsprechend berücksichtigt. Durch Beschränkung auf die positiven Präferenzen wird veranschaulicht, wie groß die Konkurrenz um einen Platz eines Workshops ist, was einen entscheidenden Hinweis auf die Erfolgswahrscheinlichkeit eines Tauschangebots gibt.

Ob ein Tauschangebot trotz einer großen Konkurrenz erfolgreich sein kann, hängt ebenfalls von der Problemstruktur der betroffenen Teilnehmer ab, die sich jedoch nicht ohne Weiteres in diese Kennzahl inkorporieren lässt. Man betrachte beispielsweise die Situation von zwei äquivalenten, sehr beliebten Workshops. Wegen der Äquivalenz kann jeder Teilnehmer nur einen der beiden Workshops besuchen, in den meisten Fällen ist es aber logisch, wenn jeder Teilnehmer für beide Workshops dieselbe Präferenz äußert. Dies ist sinnvoll, wenn derselbe Workshop öfter statt findet und ein Teilnehmer nur markiert, dass er diesen Workshop gern besuchen würde, aber nicht wann. Beide Workshops würden nun recht hohe Werte für *alt4* erzielen, obwohl die Nachfrage sich ja praktisch auf beide Workshops verteilt, da ein Teilnehmer, der einen Platz im ersten Workshop bekommen hat, zwar immer noch eine positive Präferenz für den zweiten geäußert hat, aber diesen nicht besuchen kann. Dieser Teilnehmer steht also einer Tauschanfrage eines dritten praktisch nicht im Weg, obwohl die hohe Kennzahl dies suggeriert.

### Alternative 5: Summe der positiven Präferenzen des Nachfrageüberschusses

$$alt5_w = \sum_{p \in P} B_p(w) \cdot 1_{\{B_p(w) > 0\}} \cdot (1 - z_{pw})$$

Die Summe des Nachfrageüberschusses ist die Summe aller Präferenzen von Nachfragern eines Workshops, die keinen Platz zugeteilt bekommen haben. Diese Kennzahl gibt Auskunft darüber, wie groß die nicht befriedigte Nachfrage und damit die Konkurrenz um einen eventuell einzutauschenden Platz ist.

Leider beachtet diese Maßzahl nicht die Machbarkeit einer Zuteilung. Ein hoher Nachfrageüberschuss muss nicht zwangsläufig bedeuten, dass diese Teilnehmer auch in den Workshop wechseln können, abhängig von deren restlichen, zugeteilten Workshops und den zeitlichen sowie den Äquivalenzrestriktionen. Von daher ist ein hoher Nachfrageüberschuss nicht in jedem Fall gleichzusetzen mit geringen Erfolgsaussichten für ein Tauschangebot.

Diese Maßzahl wäre eine sinnvolle Ergänzung zu *alt1*, da *alt1* den Nachfrageüberschuss gerade nicht darzustellen vermag. Die Kombination zweier Zahlen wäre jedoch zu komplex und die eindeutige Sortierung der Workshops wäre erschwert, da zu klären wäre, welche Maßzahl Vorrang vor der anderen hat.

### 6.3.3 Eigenschaften des Schattenpreises als Bewertungszahl

Die vorgeschlagenen alternativen Bewertungszahlen sind einzeln jeweils nicht aussagekräftig genug, um die Beliebtheit der Workshops umfassend genug darzustellen. Sowohl die vergebenen Präferenzen als auch der Nachfrageüberschuss sind wichtige Faktoren, die jedoch für sich gesehen nicht ausreichen, sich aber auch schlecht zu einer Zahl kombinieren lassen. Auch die Anzahl der freien Plätze wird nicht deutlich, da ein Workshop mit ansonsten hohen Teilnehmerpräferenzen trotzdem einen freien Platz haben kann, der als Tauschkandidat problemlos in Frage käme. Weiterhin sind natürlich die tatsächlichen Möglichkeiten für Platzvertauschungen, abhängig von den Nebenbedingungen, in diesen Bewertungszahlen gar nicht berücksichtigt.

Der Schattenpreis ist im Gegensatz zu den genannten alternativen Bewertungszahlen der einzige Wert, der die Restriktionen der Nebenbedingungen des Problems beachtet. Er beachtet also nicht nur den Nachfrageüberschuss eines Workshops, sondern ebenfalls, welche der Nachfrager aufgrund der Restriktionen überhaupt in diesen Workshop wechseln könnten. Nur wenn tatsächlich Nachfrager vorhanden sind, die einen zusätzlichen Platz belegen würden, ist der Schattenpreis entsprechend hoch, ansonsten ist er gleich Null.

Weiterhin sagt der Schattenpreis etwas über die Abhängigkeiten der Teilnehmer und Workshops untereinander aus. Er reflektiert als einziger Wert die Möglichkeit, dass beim Entstehen eines zusätzlichen Platzes eines Workshops durch einen dadurch ermöglichten Tausch weitere Folgetäusche möglich werden können, die weiterhin zur Verbesserung des Zielfunktionswertes beitragen. Dies ist sehr wichtig, da darauf letztendlich die Tauschentscheidungen des Algorithmus basieren. Lässt also beispielsweise ein zusätzlicher Platz eines Workshops nur eine Zuteilung eines Teilnehmers mit der Präferenz 4 zu, durch diesen Tausch kann aber ein weiterer Teilnehmer auf den nun freien Platz rücken, den er mit 9 bewertet hat, so spiegelt der Schattenpreis diese Abhängigkeit wider.

Dies soll beispielhaft am in (6.9) gegebenen Workshopzuteilungsproblem verdeut-

$$\begin{aligned}
W &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} & \mathbf{c} &= (2, 1, 1, 1, 2, 1, 1)^T \\
P &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} & \mathbf{m} &= (2, 2, 1, 1, 1, 1, 1)^T \\
T &= \{1, 2, 3, 4\} \\
\mathbf{Q} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\mathbf{S} &= \begin{pmatrix} 9 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

| $w \rightarrow$ | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7 |
|-----------------|----|----|----|----|----|---|---|
| $p \downarrow$  |    |    |    |    |    |   |   |
| 1               | 9  | 9  | 3  | 0  | 0  | 0 | 0 |
| 2               | 9  | 9  | 3  | 0  | 0  | 0 | 0 |
| 3               | 0  | 0  | 9  | 3  | 0  | 0 | 0 |
| 4               | 0  | 0  | 0  | 9  | 0  | 3 | 0 |
| 5               | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 9 | 3 |
| 6               | 0  | 0  | 3  | 0  | 9  | 0 | 0 |
| 7               | 0  | 0  | 3  | 0  | 9  | 0 | 0 |
| SP              | 12 | 27 | 21 | 15 | 12 | 9 | 3 |

Tabelle 6.1: Präferenzen mit optimaler Zuteilung (Kringel) und Schattenpreise

licht werden. Die höchste, zu vergebende Präferenz in diesem Problem ist der Wert 9. Die optimale Zuteilung ist in Tab. 6.1 durch Kringel dargestellt, zusammen mit den entstehenden Schattenpreisen für die Workshops. Workshop 2 hat einen Schattenpreis von 27, der damit deutlich über der höchsten zu vergebenden Präferenz liegt. Dies liegt daran, dass ein zusätzlicher Platz in Workshop 2 weitere Verbesserungen der Zuteilung ermöglichen würde. Auf einen weiteren Platz könnte zunächst Teilnehmer 2 zugeteilt werden. Dies erhöht dessen Bewertung von 3 auf 9. Dadurch wird ein Platz in Workshop 3 frei, den Teilnehmer 3 belegen könnte (mit Bewertung 9 statt 0), und der dann freie Platz in Workshop 5 könnte durch Teilnehmer 6 belegt werden (mit Bewertung 9 statt 0). Der Algorithmus würde dann Teilnehmer 5 zusätzlich zu seinem ersten Platz den freien Platz in Workshop 7 zuteilen, was den Zielfunktionswert dann nochmal um 3 erhöht. Diese Verbesserungen ergeben eine gesamte Steigerung des Zielfunktionswertes von  $9 - 3 + 9 + 9 + 3 = 27$ . In der Tat würde ein zusätzlicher Platz in Workshop 2 die Zufriedenheit von drei Teilnehmern stark verbessern.

Der Schattenpreis spiegelt also sämtliche, durch einen zusätzlichen Platz realisierbare Vorteile wieder, wobei die durch die Nebenbedingungen gegebenen Restriktionen beachtet werden. Er beinhaltet die Summe der Bewertungsverbesserungen jeweils der "ersten Nachfrager in der Schlange" für freiwerdende Plätze. Ein solcher Teilnehmer steht quasi in direkter Konkurrenz zu einem weiteren, der in den betreffenden Workshop tauschen

möchte. Somit ist diese Information sehr nützlich zur Bewertung der Tauschpotentiale der Workshops.

Für Workshops mit freien Plätzen ist der Schattenpreis immer gleich Null. Allerdings kann auch ein voll belegter Workshop einen Schattenpreis von Null haben, der Schattenpreis sagt also nicht eindeutig etwas über das Vorhandensein von freien Plätzen aus. Allerdings ist ein Schattenpreis von Null immer als Indikator für gute Tauschmöglichkeiten anzusehen.

Ein Kritikpunkt am Schattenpreis ist die Tatsache, dass er sich auf die Verfügbarkeit eines zusätzlichen Platzes des jeweiligen Workshops bezieht. In der Realität geht es aber nicht um einen zusätzlichen Platz, sondern um die Verfügbarkeit eines bereits vorhandenen Platzes. Ist ein Workshop zum Beispiel gerade voll belegt, es besteht aber kein Nachfrageüberschuss, so ist der Schattenpreis gleich Null, da ein zusätzlicher Platz nicht nachgefragt ist. Dennoch kann es der Fall sein, dass die vorhandenen Plätze allesamt mit Teilnehmern mit hohen Bewertungen belegt sind, so dass eine Freigabe eines der vorhandenen Plätze unwahrscheinlich ist. Allerdings wird ein solcher Fall eher selten auftreten, so dass der grundsätzliche Einsatz des Schattenpreises dadurch nicht in Frage gestellt wird.

Die Formulierung des Optimierungsproblems zum Tauschmarkt (siehe Abschnitt 6.5) hat außerdem zur Folge, dass der Schattenpreis zusätzlich zu den normalen Präferenzen auch die auf dem Markt befindlichen Tauschangebote widerspiegelt. Das Vorhandensein von Tauschangeboten für einen Workshop kann also auch dessen Schattenpreis erhöhen, was wiederum ein guter Indikator für andere Teilnehmer ist, diesen Workshop nicht als Tauschpartner auszuwählen. Dies ist natürlich sinnvoll, da sich dadurch die Tauschangebote immer auf die aktuell am vielversprechendsten Workshops konzentrieren und sich konkurrierende Tauschangebote für ein und denselben Workshop nicht "aufhäufen".

## 6.4 Gültige Tausche

In den vorigen Abschnitten wurde die Idee einer zweiten Stufe zum Tausch von Workshopplätzen vorgestellt. In der ersten Stufe werden die Plätze den Teilnehmern basierend auf den gegebenen Präferenzen zugeteilt. Jedem Teilnehmer werden seine Plätze bekannt gegeben, weiterhin werden die Schattenpreise der Workshops für alle Teilnehmer veröffentlicht. In der zweiten Stufe können Teilnehmer, die mit der Zuteilung der ersten Phase nicht zufrieden sind, Tauschangebote machen. Sie bieten also jeweils zwei Präferenzen zum Tausch an, in die Auswahl der zu tauschenden Präferenzen fließt dabei die Information der Schattenpreise ein, die Auskunft darüber gibt, welche Tausche erfolgsversprechend sind und welche es eher nicht sind. Basierend auf den Tauschangeboten kann eine neue Zuteilung errechnet werden, die eventuell effizienter ist als die ursprüngliche Zuteilung und die Zufriedenheit weiter steigert.

Jetzt stellt sich die Frage, wie genau eine solche effizientere Zuteilung aussehen kann bzw. darf und wie darauf aufbauend das Optimierungsproblem aussieht, das in der zweiten Stufe gelöst wird. Die "Bewertung" eines Platzes bezeichnet dabei die Präferenz, die ein Teilnehmer für einen Workshopplatz geäußert hat.

Für die Zuteilung in Stufe zwei gibt es zwei grundlegende Alternativen.

- Die Zuteilung wird basierend auf den Tauschangeboten komplett neu berechnet. Es wird eine neue, optimale Lösung erstellt, die unabhängig von der Zuteilung in Stufe

eins ist und dementsprechend keine Garantie für in Stufe eins zugeteilte Plätze anderer Teilnehmer enthält. Eine solche Zuteilung stellt das soziale Optimum dar.

- Die Zuteilung der zweiten Stufe ist abhängig von der Zuteilung der ersten Stufe derart, dass nur eine solche Zuteilung erlaubt ist, bei der keinem Teilnehmer schlechter bewertete Plätze als in der ersten Stufe zugeteilt werden.

Die zweite Alternative lässt sich mit Hilfe des Begriffs der Pareto-Dominanz genauer charakterisieren. Ein Auszahlungsvektor ist gegenüber einem zweiten pareto-dominant, wenn er keinen Teilnehmer schlechter stellt und mindestens einen echt besser stellt als der zweite [Ras90]. Für unsere Zwecke genügt jedoch ebenfalls die Äquivalenz der Auszahlungsvektoren, also dass kein Teilnehmer schlechter, aber auch keiner echt besser gestellt wird. Dies soll der Begriff der Pareto-Erhaltung verdeutlichen.

**Definition 6.1** *Ein Auszahlungsvektor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ist pareto-erhaltend gegenüber einem zweiten Vektor  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ , wenn  $\forall i \in \{1, \dots, n\} x_i \geq y_i$  gilt.*

Pareto-Erhaltung fordert also lediglich, dass kein Teilnehmer schlechter gestellt wird, aber nicht notwendigerweise wie bei der Pareto-Dominanz, dass es einen geben muss, der echt besser gestellt wird. In diesem Sinn fordert die zweite Alternative zur Effizienz einer Zuteilung, dass diese gegenüber der aktuell gültigen Zuteilung die Pareto-Erhaltung gewährleistet, dass also kein Teilnehmer zu Workshops schlechterer Bewertungen zugeteilt werden darf als in der aktuell gültigen Zuteilung.

Der Vorteil der ersten Alternative liegt klar in der Eigenschaft, dass das soziale Optimum erreicht wird, es wird also die größtmögliche Gesamtzufriedenheit aller Teilnehmer erreicht. Allerdings wirkt sich die Möglichkeit, dass bereits zugeteilte Plätze wieder weggenommen werden können, negativ auf die Akzeptanz und Anreizstruktur der zweiten Tauschphase aus. Dies gilt insbesondere für Teilnehmer, die mit ihrer Zuteilung der ersten Phase bereits sehr zufrieden sind und an der Tauschphase nicht teilnehmen möchten. Eine nachträgliche Verschlechterung der Zuteilung würde sich entweder sehr negativ auf die Zufriedenheit dieser Teilnehmer auswirken oder sie aber zwingen, selbst an der Tauschphase teilzunehmen, um ihre Zuteilung möglicherweise wieder zu verbessern. Es ist daher wichtig, dass die Nicht-Beteiligung an der Tauschphase keine negativen Folgen hat.

Eine Beispielsituation soll die die entstehenden Anreize der ersten Alternative verdeutlichen. Betrachten wir einen Teilnehmer mit Präferenz 9 für Workshop A und Präferenz 4 für Workshop B. Die erste Zuteilung teile ihn in Workshop B ein. Workshop A habe einen Schattenpreis von 4, B einen Schattenpreis von 0 und ein dritter Workshop, Workshop C, habe einen Schattenpreis von 9. Um nun trotzdem in den Workshop A eingeteilt zu werden, könnte dieser Teilnehmer die Präferenzen von Workshop B und C vertauschen. Da Workshop C einen noch höheren Schattenpreis hat als A, wäre es durchaus möglich, dass eine komplett neue Zuteilung ihn in Workshop A einteilen würde und dafür einen anderen Teilnehmer aus Workshop A anders, da nun ein anderer Teilnehmer aus Workshop A eine bessere Alternativzuteilung hat als dieser betrachtete Teilnehmer. Der betrachtete Teilnehmer wird also, um sein Ziel zu erreichen, dazu verleitet, unwahre Präferenzen anzugeben, um darüber den Algorithmus zu beeinflussen. Diese Situation tritt im Fall der zweiten Alternative nicht auf, da nicht einfach ein anderer Teilnehmer aus Workshop A in einen Alternativworkshop mit einer schlechteren Präferenz zugeteilt werden könnte.



Um Alternative zwei präziser zu beschreiben, muss zunächst festgelegt werden, wann für einen Teilnehmer die Bewertung einer Zuteilung schlechter ist als die einer zweiten.

**Definition 6.2** Gegeben sei ein Teilnehmer  $p \in P$  mit einer Mindestanzahl an zu besuchenden Workshops  $m_p$ . Gegeben seien weiterhin zwei Multimengen  $A$  und  $B$  von Präferenzen mit  $|A| \geq m_p$  und  $|B| \geq m_p$ .  $A$  und  $B$  seien absteigend sortiert.  $a_i$  bzw.  $b_i$  bezeichne das jeweils  $i$ -te Element der Menge  $A$  bzw.  $B$ .

Dann heißt die Präferenzmenge  $A$  **nicht schlechter** als  $B$ , bezogen auf Teilnehmer  $p$ , wenn

$$a_i \geq b_i \quad \forall i = 1, \dots, m_p$$

Die Präferenzmenge  $A$  heißt dementsprechend **schlechter** als  $B$  für Teilnehmer  $p$ , wenn es ein  $i \in \{1, \dots, m_p\}$  gibt mit

$$a_i < b_i$$

Um zwei Zuteilungen miteinander zu vergleichen, werden nun die Präferenzmengen der jeweils zugewiesenen Workshopplätze für jeden Teilnehmer miteinander verglichen.

**Definition 6.3** Gegeben seien zwei Workshopzuteilungsprobleme, die sich lediglich in den Präferenzen der Teilnehmer für die Workshops unterscheiden können (d.h. die Bietfunktionen  $B_p$  der Teilnehmer  $p \in P$  dürfen sich unterscheiden). Dann heißt die optimale Zuteilung des ersten Problems **nicht schlechter** als die des zweiten Problems, wenn für jeden Teilnehmer gilt, dass die Menge der Präferenzen für die Workshopplätze der ersten Zuteilung nicht schlechter ist als die Menge der Präferenzen für die Workshopplätze der zweiten Zuteilung.

Für einen Teilnehmer, der mindestens 2 Workshops besuchen muss und in der ersten Stufe 3 Workshops mit den Präferenzen  $\{9, 4, 1\}$  zugeweiht bekommen hat, bedeuten diese Definitionen, dass jede Zuteilung der zweiten Stufe ihm einen Workshop mit einer Präferenz von 9 und einen weiteren mit einer Präferenz von mindestens 4 zuweisen muss. Die Zuteilung des dritten Workshops ist nicht obligatorisch und kann daher in der zweiten Stufe ganz ausfallen bzw. hierfür werden keine Präferenzgarantien gegeben. Wird in der zweiten Stufe noch ein weiterer, vierter Workshop zugeweiht, so werden auch über dessen Präferenz keine Aussagen gemacht. Verglichen mit  $\{9, 4, 1\}$  wäre also eine Präferenzmenge von  $\{9, 9\}$  nicht schlechter, ebenso eine Präferenzmenge von  $\{9, 4, 4, 0\}$ . Schlechter wäre dagegen beispielsweise eine Präferenzmenge von  $\{4, 4\}$ .

Durch die Garantie lediglich so vieler Platzbewertungen, wie mindestens Workshops besucht werden müssen, bleibt die notwendige Flexibilität für die zweite Stufe erhalten. Es soll in der zweiten Stufe durchaus möglich sein, einem Teilnehmer weniger Workshops als in der ersten Stufe zuzuteilen, sofern die Bedingung der Mindestanzahl weiterhin erfüllt ist. Durch die Garantie des Erhalts der besten Bewertungen erhält man sich die Zufriedenheit der Teilnehmer mit dem Ergebnis der zweiten Stufe, bekommt aber ebenfalls die nötige Flexibilität der Zuteilung dadurch, dass die "überschüssigen" Workshopplätze nicht unbedingt wieder zugeweiht werden müssen.

Es lassen sich durchaus weitere Möglichkeiten finden, die Qualität von zwei Präferenzmengen miteinander zu vergleichen. Diese werden im Folgenden kurz beschrieben, zusammen mit ihren Vor- und Nachteilen.

**Summe über alle Präferenzen** Nimmt man die Summe über die Präferenzen als Basis für einen Vergleich zweier Präferenzmengen, so entstehen insbesondere Probleme beim Vergleich von Präferenzmengen unterschiedlicher Kardinalität. Ein Teilnehmer, der mindestens einen Workshop besuchen muss, in der ersten Zuteilung aber zwei Workshops mit den Präferenzen  $\{9, 1\}$  zugeteilt bekommt, kann in der zweiten Zuteilung nicht mehr auf nur noch einen Workshop zugeteilt werden. Dies würden die Nebenbedingungen zwar erlauben, jedoch ist keine Zuteilung zu einem Platz mit einer Präferenz von mindestens 10 möglich (9 ist die maximale Präferenz).

Abhilfe schaffen würde es, lediglich die Summe über die  $m_p$  höchsten Präferenzen für Teilnehmer  $p$  als Basis zu nehmen, also nur so viele Präferenzen, wie der Teilnehmer auch Workshops mindestens besuchen muss. Der Vorteil der Präferenzsumme wäre eine erhöhte Flexibilität, da einem Teilnehmer mit 2 zu besuchenden Workshops und einer initialen Zuteilung von Workshops mit den Präferenzen  $\{4, 4\}$  auch eine neue Kombination von Workshops mit Präferenzen  $\{9, 1\}$  zugeteilt werden könnte. Allerdings ist die Sinnhaftigkeit der Summe wiederum abhängig von der konkreten Wahl der Präferenzwerte. Es macht einen Unterschied, ob als Präferenzen  $\{9, 4, 1\}$  oder  $\{3, 2, 1\}$  vergeben werden können und wie bestimmte Kombinationen für die Teilnehmer subjektiv empfunden werden. Bei der Wahl der Präferenzsumme als Vergleichsmaß für Präferenzmengen ist daher die geeignete Wahl der Präferenzwerte besonders wichtig, um die Zufriedenheit der Teilnehmer nicht zu gefährden.

**Erhalt der schlechtesten Präferenzen** Eine weitere Möglichkeit besteht darin, lediglich den Erhalt der schlechtesten Präferenzen zuzusichern. Ein Teilnehmer mit mindestens zwei zu besuchenden Workshop und einer ersten Zuteilung von Workshops mit den Präferenzen  $\{9, 4, 1\}$  bekommt nur den Erhalt von Workshopplätzen mit den Präferenzen  $\{1, 4\}$  für die zweite Stufe zugesichert. Die Folge dieser Vorgehensweise ist eine erhöhte Flexibilität beim Errechnen der Zuteilung der zweiten Stufe, man muss aber ebenfalls mit einer geringeren Akzeptanz seitens der Teilnehmer rechnen. Ein Teilnehmer mit den Präferenzen  $\{9, 4, 1\}$  für seine zugeteilten Workshops wird sich wahrscheinlich sehr über die Zuteilung des Workshops mit der hohen Präferenz 9 freuen und dementsprechend enttäuscht sein, wenn er in der zweiten Stufe lediglich Workshops mit den Präferenzen  $\{4, 1, 1\}$  zugeteilt bekommt. Diese Präferenzmenge ist eindeutig als schlechter zu bewerten und kann damit keine Grundlage für eine Pareto-Erhaltung sein.

**Erhalt aller Präferenzen** Erhalt aller Präferenzen bedeutet, dass jedem Teilnehmer in der zweiten Stufe mindestens ebenso viele Workshops zugewiesen werden wie in der ersten Stufe. Dies bedeutet jedoch eine unnötige Einschränkung des Optimierungsproblems, die im ursprünglichen Problem nicht vorhanden war und unnötige Flexibilitätseinbußen bedeutet.

Aufbauend auf der Vergleichbarkeit von Präferenzmengen und Zuteilungen kann nun beschrieben werden, wann eine Pareto-Erhaltung als erfüllt und damit eine Tauschzuteilung als gültig anzusehen ist.

**Definition 6.4** *Gegeben sei ein Workshopzuteilungsproblem und eine optimale Zuteilung. Ein **gültiger Tausch** ist eine zweite Zuteilung basierend auf Angeboten zu tauschender Präferenzen, die nicht schlechter ist als die erste, optimale Zuteilung.*

|                      |  |
|----------------------|--|
| <b>Z</b>             | $\in \{0, 1\}^{p_{max} \times w_{max}}$ , $z_{pw} = 1 \Leftrightarrow$ Teiln. $p$ ist Workshop $w$ zugeordnet  |
| <b>t<sup>P</sup></b> | $\in \{1, \dots, w_{max}\}^{w_{max}}$ , $t_{w_i}^p = w_j \neq w_i \Leftrightarrow$ Teilnehmer $p$ bietet Tausch der Präferenzen der Workshops $w_i$ und $w_j$ an                                       |
| $S^{Tausch}(p, w)$   | $\in \mathbb{R}$ mit $S^{Tausch}(p, w) = \begin{cases} s_{pw} & \text{falls } t_w^p = w \\ s_{pw'} & \text{falls } t_w^p = w' \in W \setminus \{w\} \end{cases}$                                       |
| $min\_s(p, \hat{s})$ | $\subset \{1 \dots w_{max}\}$ , $min\_s(p, \hat{s}) = \{w \in W : s_{pw} \geq \hat{s} \text{ od. } S^{Tausch}(p, w) \geq \hat{s}\}$  |
| $visit\_top(p)$      | $\subset \{1 \dots w_{max}\}$ , $ visit\_top(p)  = m_p$ , $w \in visit\_top(p) \Rightarrow$<br>( $z_{pw} = 1$ und $\nexists w' : (z_{pw'} = 1$ und $s_{pw'} > s_{pw}$ und $w' \notin visit\_top(p))$ ) |
| $cnt(p, w)$          | $\in \mathbb{N}$ mit $cnt(p, w) =  min\_s(p, s_{pw}) \cap visit\_top(p) $  |

Tabelle 6.2: Übersicht über die zusätzlichen Datenstrukturen und Funktionen für das Optimierungsproblem des Tauschmarkts

## 6.5 Das Optimierungsproblem für den Tauschmarkt

Der *Tauschmarkt* bezeichnet die Menge aller Tauschangebote, die aktuell offen sind. Auch wenn sich hier die Handelspartner von Workshopplätzen nicht direkt gegenüber stehen, sondern der Handel nur durch den Zuteilungsalgorithmus erfolgt, so ist es doch oft der Fall, dass ein Tauschangebot nur dann erfüllt werden kann, wenn ein entsprechend passendes, weiteres Angebot vorliegt. So ein Angebot muss sich nicht notwendigerweise auf dieselben Workshops beziehen, da ein Tausch weitere Teilnehmer und weitere Workshops einschließen kann. Weiterhin werden die auf dem Markt befindlichen Gebote den Teilnehmern indirekt kommuniziert, indem sich die Schattenpreise entsprechend anpassen. Auch der Tauschmarkt bietet also den Austausch von Information, die zum Zustandekommen eines Tausches nützlich sein kann.

Das Optimierungsproblem für die Workshopzuteilung muss nun derart angepasst werden, dass es zum einen die optimale Zuteilung unter Beachtung der möglichen, gültigen Tausche errechnet, und zum anderen diejenigen Tauschangebote in die Problemstellung integriert, die sich aktuell auf dem Tauschmarkt befinden. Die neue Zuteilung soll Pareto-erhaltend sein verglichen mit der aktuell gültigen Zuteilung und ist daher in diesem Sinne von der aktuell gültigen abhängig. Zur Definition des Optimierungsproblems für den Tauschmarkt werden die folgenden, zusätzlichen Datenstrukturen benötigt. Die Datenstrukturen des Workshopzuteilungsproblems sind auf S. 46 beschrieben, eine Übersicht der neuen Strukturen ist außerdem in Tab. 6.2 dargestellt.

**Z**  $p_{max} \times w_{max}$  Matrix,  $z_{ij} \in \{0, 1\}$ , mit  
 $z_{pw} = 1 \Leftrightarrow$  Teilnehmer  $p$  ist Workshop  $w$  zugeordnet

Die Matrix **Z** enthält die aktuell gültige Zuteilung der Workshops zu Teilnehmern.  $z_{pw} = 1$  bedeutet, dass Teilnehmer  $p$  dem Workshop  $w$  aktuell zugeteilt ist.

**t<sup>P</sup>**  $w_{max}$  Vektor für Teilnehmer  $p$ ,  $t_i^p \in \{1, \dots, w_{max}\}$ , mit  
 $t_{w_i}^p = w_j \neq w_i \Leftrightarrow$  Teilnehmer  $p$  bietet Tausch der Präferenzen der Workshops  $w_i$  und  $w_j$  an, und  
 $t_{w_i}^p = w_i \Leftrightarrow$  Kein Tauschangebot von Teilnehmer  $p$  für Workshop  $w_i$

Die Tauschangebote sind für jeden Teilnehmer  $p$  in einem Vektor  $\mathbf{t}^p$  kodiert, der für jeden Workshop einen Eintrag enthält. Ist  $\mathbf{t}_w^p = w$ , so gibt es kein Tauschangebot von Teilnehmer  $p$  für Workshop  $w$ . Ist dagegen  $\mathbf{t}_w^p = w' \neq w$ , so bietet Teilnehmer  $p$  seine Präferenzen für die Workshops  $w$  und  $w'$  zum Tausch an. Diese Darstellung macht insbesondere deutlich, dass für jeden Workshop nur ein Tauschpartner zugelassen ist. Andernfalls wäre es nicht eindeutig, welche Präferenz einem Workshop zuzuordnen ist, für den es zwei verschiedene Tauschpartner mit unterschiedlichen Präferenzen gibt.

$$S^{Tausch}(p, w) \in \mathbb{R} \text{ mit } S^{Tausch}(p, w) = \begin{cases} s_{pw} & \text{falls } t_w^p = w \\ s_{pw'} & \text{falls } t_w^p = w' \in W \setminus \{w\} \end{cases}$$

Die Präferenzfunktion  $S^{Tausch}$  gibt für einen Teilnehmer zu einem Workshop entweder dessen ursprüngliche Präferenz zurück oder aber die Präferenz des Tauschpartners, sofern einer existiert. Die Funktion gibt also die Präferenzen unter Berücksichtigung der Tauschangebote aus.

$$\begin{aligned} \min\_s(p, \hat{s}) &\subset \{1 \dots w_{max}\} \text{ mit} \\ \min\_s(p, \hat{s}) &= \{w \in W : s_{pw} \geq \hat{s} \text{ oder } S^{Tausch}(p, w) \geq \hat{s}\} \end{aligned}$$

Die Funktion  $\min\_s$  gibt zu einem Teilnehmer und einem Präferenzwert aus, für welche Workshops der gewählte Teilnehmer mindestens die angegebene Präferenz oder eine größere geäußert hat. Dies gilt sowohl für die ursprüngliche Präferenz als auch für eine zum Tausch angebotene Präferenz. Für Teilnehmer  $p$  und Präferenz 10 ist das Ergebnis die Menge aller Workshops, für die  $p$  eine Präferenz von mindestens 10 angegeben hat oder für die  $p$  einen Tauschpartner mit einer Präferenz von mindestens 10 benannt hat. Diese Funktion dient als Hilfsfunktion für die Definition der Nebenbedingungen, die die Gültigkeit des Tausches sicher stellen.

$$\begin{aligned} \text{visit\_top}(p) &\subset \{1 \dots w_{max}\} \text{ mit } |\text{visit\_top}(p)| = m_p \text{ und } w \in \text{visit\_top}(p) \Rightarrow \\ &(z_{pw} = 1 \text{ und } \nexists w' : (z_{pw'} = 1 \text{ und } s_{pw'} > s_{pw} \text{ und } w' \notin \text{visit\_top}(p))) \end{aligned}$$

Die Relation  $\text{visit\_top}$  gibt zu einem Teilnehmer die mit den höchsten Präferenzen bewerteten, aktuell besuchten Workshops zurück, und zwar so viele, wie der Teilnehmer mindestens besuchen muss. Diese Menge ist eventuell uneindeutig, da dieselben Präferenzen für mehrere Workshops vergeben werden können. In diesem Fall ist jede mögliche Lösung zulässig und es wird zufällig eine gewählt, um das Optimierungsproblem zu erzeugen.  $\text{visit\_top}$  ist folglich nicht injektiv. Als Beispiel sei ein Teilnehmer genannt, der mindestens einen Workshop besuchen soll und in der initialen Zuteilung zwei Workshops mit jeweils derselben Präferenz zugeteilt bekommen hat.  $\text{visit\_top}$  enthält dann nur einen Workshop, es sind jedoch beide zugeteilten Workshops jeweils zulässig.

$$\text{cnt}(p, w) \in \mathbb{N} \text{ mit } \text{cnt}(p, w) = |\min\_s(p, s_{pw}) \cap \text{visit\_top}(p)|$$

Die Funktion  $\text{cnt}(p, w)$  gibt an, wieviele Workshops mit einer Präferenz gleich oder größer als  $s_{pw}$  besucht werden müssen, damit die Pareto-Erhaltung gewährleistet ist. Als Beispiel sei ein Teilnehmer  $p$  betrachtet, der in der aktuell gültigen Zuteilung die Workshops A, B und C besucht, wobei er Workshop A mit 9 bewertet hat und die Workshops B und C jeweils mit 1. Dann ist  $\text{cnt}(p, A) = 1$ , da zur Erhaltung des Bewertungsniveaus einer neuen Zuteilung Teilnehmer  $p$  mindestens einen mit der Präferenz 9 bewerteten Workshop zugeteilt bekommen muss. Weiterhin ist  $\text{cnt}(p, B) = \text{cnt}(p, C) = 3$ , da die Anzahl der mit *mindestens* 1 bewerteten Workshops einer gültigen, neuen Zuteilung

gleich 3 sein muss. Hier zählt auch der Workshop A mit, dessen Bewertung durch  $p$  ja höher ist als 1. Obwohl  $visit\_top$  nicht injektiv ist, ist die Funktion  $cnt$  immer eindeutig, sie liefert für alle Abbildungen von  $visit\_top$  dasselbe Ergebnis.

Das Optimierungsproblem für den Tauschmarkt ergibt sich dann folgendermaßen.

$$\text{Maximiere } \sum_{p \in P, w \in W} S^{Tausch}(p, w) \cdot x_{pw}$$

unter den Nebenbedingungen

a) Teilnehmergrenzen für Workshops nicht überschritten

$$\sum_{p \in P} x_{pw} \leq c_w \quad \forall w \in W$$

b) Teilnehmer ist in den Zeitslots der zugeteilten Workshops da

$$x_{pw} = 0 \quad \forall p \forall w (p \in P \wedge w \in W \wedge \exists t (t \in T \wedge f_{wt} = 1 \wedge b_{pt} = 0))$$

c) Kein Teilnehmer besucht mehr als einen von äquivalenten Workshops

$$\sum_{w' \in [w]_{\sim_Q}} x_{pw'} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall w (w \in W \wedge [w]_{\sim_Q} \in W / \sim_Q \wedge |[w]_{\sim_Q}| > 1)$$

d) Jeder Teilnehmer besucht seine Mindestanzahl Workshops

$$\sum_{w \in W} x_{pw} \geq m_p \quad \forall p \in P$$

e) Kein Teilnehmer besucht mehr als einen Workshop pro Timeslot

$$\sum_{w \in W: f_{wt}=1} x_{pw} \leq 1 \quad \forall p \in P, \forall t \in T$$

f) Die Zuteilung ist gültig (Pareto-Erhaltung für die Teilnehmer)

$$\sum_{w' \in \min\_s(p, s_{pw})} x_{pw'} \geq cnt(p, w) \quad \forall p \in P, \forall w \in visit\_top(p)$$

g)  $x_{pw} \in \{0, 1\}$   $\forall p \in P, \forall w \in W$

Die Nebenbedingungen a) bis e) sind unverändert aus dem Workshopzuteilungsproblem übernommen (siehe (4.4) auf S. 47). Die neue Nebenbedingung f) stellt die Gültigkeit der neuen Zuteilung sicher und kann somit als Nebenbedingung der Pareto-Erhaltung angesehen werden. Die Formulierung der Gültigkeitsbedingung f) wurde gewählt, da sie Nebenbedingungen ohne Faktoren ungleich Eins vor den Variablen erzeugt und zudem exakt alle Möglichkeiten der Zuteilung zulässt, die für eine gültige Tauschzuteilung in Frage kommen. Betrachten wir beispielsweise wiederum einen Teilnehmer  $p$ . Die möglichen, zu vergebenden Präferenzen seien  $\{9, 4, 1, 0\}$ , wobei jede Präferenz zwei Mal vergeben werden darf. Der Teilnehmer habe für die Workshops A und B jeweils die Präferenz 9 vergeben, für die Workshops C und D jeweils die Präferenz 4 und für die Workshops E und F jeweils die Präferenz 1. In der aktuell gültigen Zuteilung sei er zu den Workshops A, E und F zugeteilt, die Menge der Präferenzen für die zugeteilten Workshops ist also  $\{9, 1, 1\}$ . Dann ist  $\min\_s(p, 9) = \{A, B\}$  die Menge aller Workshops, die Teilnehmer  $p$  mit mindestens 9 bewertet hat und  $\min\_s(p, 1) = \{A, B, C, D, E, F\}$  die Menge aller Workshops mit einer Bewertung durch  $p$  von mindestens 1.  $m_p$  sei gleich 3, der Teilnehmer besucht aktuell also ebenso viele Workshops, wie er besuchen soll. Dann ist  $visit\_top(p) = \{A, E, F\}$  genau die Menge der aktuell besuchten Workshops.

Für jeden der Workshops in  $visit\_top(p)$  entsteht eine Nebenbedingungszeile:

$$\begin{array}{lll} \text{Workshop A:} & x_{pA} + x_{pB} & \geq 1 \\ \text{Workshop E:} & x_{pA} + x_{pB} + x_{pC} + x_{pD} + x_{pE} + x_{pF} & \geq 3 \\ \text{Workshop F:} & x_{pA} + x_{pB} + x_{pC} + x_{pD} + x_{pE} + x_{pF} & \geq 3 \end{array}$$

Die zweite und die dritte Nebenbedingungszeile sind allerdings identisch, daher kann eine der beiden weggelassen werden. Diese Nebenbedingungen erzwingen, dass dem Teilnehmer mindestens ein Workshop mit Präferenz 9 und zwei weitere mit einer Präferenz von mindestens 1, möglicherweise aber auch höher, zugeteilt werden. Einer der Workshops A und B muss besucht werden und zusätzlich zwei weitere, beliebige der Workshops A bis F. Werden dem Teilnehmer  $p$  in einer neu erzeugten Zuteilung also der Workshop A zugeteilt und zusätzlich noch die Workshops B und D, die er mit 9 bzw. 4 bewertet hat, so ist diese Zuteilung nicht schlechter als die vorige. Im Gegenteil, sie ist sogar deutlich besser, da die Menge der Bewertungen sich von  $\{9, 1, 1\}$  auf  $\{9, 9, 4\}$  verbessert. Diese Formulierung der Gültigkeitsnebenbedingung erlaubt also genau alle gültigen Workshopkombinationen.

Beim Tauschmarktproblem werden die Präferenzen des Tauschmarkts in der Tat vertauscht in die Zielfunktion des Optimierungsproblems übernommen. Ergibt das Ergebnis des Optimierungsproblems, dass ein Tauschangebot zu einer geänderten Zuteilung eines Teilnehmers geführt hat oder aber zu einer Änderung der Präferenz bei gleich bleibender Zuteilung, so wird eine tatsächliche Vertauschung der Präferenzen vorgenommen und die Tauschangebote dieses Teilnehmers werden vom Tauschmarkt entfernt. Die geänderte Zuteilung wird zur neuen, aktuellen Zuteilung und damit zur neuen Grundlage der Gültigkeit für zukünftige Tauschangebote.

Eine Änderung der Präferenzen ohne Änderung der Zuteilung ergibt sich, wenn ein Teilnehmer in einem Workshop mit niedriger Präferenz eingeteilt ist, und ein Tauschangebot mit einem weiteren Workshop mit höherer Präferenz angibt. In diesem Fall wird sich die Zuteilung höchstwahrscheinlich nicht ändern, da diese Zuteilung nun einen noch höheren Zielfunktionswert erreichen kann, durch die erhöhte Präferenz für den bereits zugeteilten Workshop. Dies ist der Fall, wenn ein Teilnehmer mit seiner Zuteilung in einen Workshop niedriger Präferenz sehr zufrieden ist und dies bekräftigen möchte, indem er diesem Workshop nachträglich eine höhere Präferenz als die initiale gibt. Auf diese Weise kann er ebenfalls sein Bewertungsniveau erhöhen, so dass er bei zukünftigen Tauschzuteilungen nicht mehr so leicht aus diesem Workshop raus in einen anderen eingeteilt werden kann. Sofern er in der Tat zufrieden mit der Zuteilung ist, ist dieses Verhalten wünschenswert, da die neuen Präferenzen die subjektiven Bewertungen der Workshops besser wieder geben.

Beim Vergleich der Zuteilungen vor und nach einem Tausch ergibt sich die Frage, ob sich für einen Teilnehmer mit mehreren Tauschangeboten sagen lässt, welche Tauschangebote für eine geänderte Zuteilung verantwortlich waren und welche nicht. Kann man diese Zuordnung fehlerfrei machen, so kann man lediglich die betroffenen Tauschangebote aus dem Markt entfernen und deren Präferenzen ändern, die übrigen Tauschangebote aber auf dem Markt belassen. Es gibt sicherlich Fälle, in denen man diese Zuordnung relativ gefahrlos und fehlerfrei vornehmen kann. Im Allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Tauschangebote beeinflussen eine Zuteilung auch abhängig von den Präferenzen und Tauschangeboten anderer Teilnehmer, diese Zusammenhänge sind oft nicht unmittelbar ersichtlich. Nicht jedes Tauschangebot von Workshop A und B mündet in einen Wechsel von vormals Workshop A in nachher Workshop B (oder umgekehrt). Beispielsweise kann ein Teilnehmer ein Tauschangebot abgeben, um in einen bestimmten Workshop *nicht* eingeteilt zu werden, indem er beispielsweise diesem Workshop eine niedrigere Präferenz als vorher gibt. Eine solche Änderung der Präferenzen kann eine Platzvertauschung nach sich ziehen, die noch andere Workshops involviert.

In der Tat entspricht ja auch die Zuteilung nach einer Reihe von Tauschangeboten

exakt dem optimalen Ergebnis, das sich aus der Gesamtheit dieser Tauschangebote ableitet. Daher macht es Sinn, alle Tauschangebote eines Teilnehmers gleich zu behandeln, d.h. sie nach einer erfolgreichen Zuteilungsänderung für diesen Teilnehmer vom Markt zu entfernen. Der Teilnehmer hat danach immer noch die Wahl, weitere Tauschangebote entsprechend der nun aktuellen Zuteilung abzugeben, um seine Zuteilung noch weiter zu verändern.

Ob ein derart definierter Tauschmarkt tatsächlich funktioniert und zur Verbesserung des Zielfunktionswerts und der Teilnehmerzufriedenheit führt, wird anhand einer Simulation im folgenden Kapitel 7 gezeigt. Parallel zur Simulation wird auch der Einfluss von den zusätzlichen Nebenbedingungen zur Pareto-Erhaltung auf die ganzzahlige Lösbarkeit durch den Simplex untersucht. Zunächst soll aber noch die Möglichkeit untersucht werden, Nebenbedingungen zu definieren, die über den Erhalt des Bewertungsniveaus der individuellen Teilnehmer hinaus gehen und zusätzlich explizit soziale Netzwerkstrukturen beachten.

### 6.5.1 Nebenbedingungen für Freunde

Die Nebenbedingung f) des Optimierungsproblems für den Tauschmarkt stellt die Pareto-Erhaltung für die individuellen Teilnehmer sicher, basierend auf den für die Workshops angegebenen Präferenzen. Dies sichert jedoch keine Erhaltung gewisser Zuteilungseigenschaften zu, die Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Teilnehmern beinhalten. Zum Beispiel wird durch die Bedingung f) nicht sicher gestellt, dass zwei Freunde, die in der aktuell gültigen Zuteilung gewisse Workshops gemeinsam besuchen, dies auch in einer darauf aufbauenden Zuteilung tun, da diese Tatsache im Optimierungsproblem nicht formuliert ist. Daher wird noch eine Erweiterung der linearen Nebenbedingungen vorgeschlagen, die diese Zusicherung erfüllt, die also den gemeinsamen Besuch von Workshops als weiteres Kriterium für die Pareto-Erhaltung einführt.

Dazu wird zunächst eine Äquivalenzrelation  $\sim_f$  über der Menge der Teilnehmer  $P$  definiert mit  $p_1 \sim_f p_2 \Leftrightarrow p_1$  und  $p_2$  sind Freunde. Entsprechend wäre  $[p]_{\sim_f}$  die Menge aller Freunde von  $p$  oder soziologisch ausgedrückt die Gruppe oder Clique von  $p$ , da alle Freunde von  $p$  auch Freunde voneinander sind.

Die Nebenbedingung muss sicher stellen, dass Zuteilungen von Teilnehmern zu Workshops, in die mehrere Teilnehmer einer Clique zugeteilt sind, erhalten bleiben. Dazu genügt es, die Variable  $x_{pw}$  auf 1 festzusetzen für alle Teilnehmer  $p$ , die zunächst bereits in der aktuell gültigen Zuteilung Workshop  $w$  besuchen (also  $z_{pw} = 1$ ) und für die außerdem gilt, dass mindestens ein weiterer Teilnehmer der Freundesgruppe  $[p]_{\sim_f}$  denselben Workshop  $w$  besucht. Dies wird durch die folgende Formulierung der neuen, zusätzlichen linearen Nebenbedingung h) sichergestellt:

$$\text{h) Freunde bleiben in gemeinsam besuchten Workshops} \\ x_{pw} = 1 \quad \forall p \forall w (p \in P, w \in W, z_{pw} = 1, \sum_{p' \in [p]_{\sim_f}} z_{p'w} \geq 2) \quad (6.10)$$

Die Nebenbedingung h) garantiert also den Erhalt der Zuteilungen zu Workshops, die gemeinsam mit mindestens einem weiteren Freund besucht werden. Es spielt dabei keine Rolle, wie groß die Freundesgruppen sind oder welcher Anteil der Freunde einer Gruppe denselben Workshop besuchen. Es wird der gemeinsame Besuch auch aller Teilmengen von Freundesgruppen ab der Größe 2 erhalten. Somit kann die Forderung nach der

Pareto-Erhaltung erzeugter Zuteilungen erweitert werden um ein zusätzliches Kriterium, basierend auf sozialen Gruppenstrukturen beliebiger Größe zwischen Teilnehmern.

Es gibt zwei weitere Alternativen, den gemeinsamen Besuch von Workshops durch Freunde in die Problemstellung zu integrieren, die im Folgenden kurz beschrieben werden. Zunächst kann man die Nebenbedingung h) dahingehend modifizieren und verallgemeinern, dass lediglich der gemeinsame Workshopbesuch gefordert wird, ohne Festlegung auf den konkreten Workshop. Besuchen also zwei Freunde gemeinsam den Workshop A, so wird lediglich gefordert, dass in jeder Folgezuteilung mindestens ein gemeinsamer Workshop für diese beiden Freunde existiert, es kann aber auch ein anderer als Workshop A sein. Dies erhöht die Flexibilität verglichen mit der Nebenbedingung h), steigert allerdings gleichzeitig die Komplexität der Problemstellung durch eine sehr viel größere Anzahl an Variablen und Nebenbedingungen. Um die Vorgehensweise zu zeigen, genügt die Darstellung der Formulierung für Zweierpaare von Freunden.

Zum Verständnis ist es hilfreich, zunächst von der folgenden, nicht-linearen Darstellung der erforderlichen Nebenbedingung für Paare von Freunden auszugehen:

$$\sum_{w \in W} x_{pw} \cdot x_{p'w} \geq \text{anz}(p, p') \quad \forall p \forall p' (p, p' \in P, p \sim_f p') \quad (6.11)$$

wobei die Funktion  $\text{anz}(p, p')$  die Anzahl der in der aktuellen Zuteilung von  $p$  und  $p'$  gemeinsam besuchten Workshops liefert. Die Summanden der Summe werden nur dann gleich 1, wenn beide Freunde denselben Workshop  $w$  besuchen, wobei  $w$  aber ein beliebiger Workshop sein kann.

Diese Bedingung lässt sich mit Hilfe von zusätzlichen Variablen linearisieren. Für jedes Freundespaar  $p, p'$  und jeden Workshop  $w$  wird eine weitere Variable  $y_{p,p',w}$  eingeführt und für jedes Freundespaar werden die folgenden vier Nebenbedingungen generiert:

$$\begin{array}{l} \text{h')} \quad \text{Anzahl gemeinsam besuchter Workshops bleibt erhalten} \\ \left. \begin{array}{l} \sum_{w \in W} y_{p,p',w} \geq \text{anz}(p, p') \quad \forall p \forall p' (p \in P, p' \in P, p \sim_f p') \\ y_{p,p',w} - x_{pw} \leq 0 \\ y_{p,p',w} - x_{p'w} \leq 0 \\ y_{p,p',w} - x_{pw} - x_{p'w} + 1 \geq 0 \end{array} \right\} \forall w \forall p \forall p' (w \in W, p \in P, p' \in P, p \sim_f p') \end{array}$$

Die letzten drei Nebenbedingungen von h') bedingen, dass die Hilfsvariable  $y_{p,p',w}$  genau dann den Wert 1 annimmt, wenn sowohl  $x_{pw}$  als auch  $x_{p'w}$  gleich 1 sind. Die ersten beiden dieser drei sorgen dafür, dass die Hilfsvariable immer dann 0 sein muss, wenn eine der beiden anderen Variablen den Wert 0 annimmt. Die letzte der drei Bedingungen stellt sicher, dass die Hilfsvariable 1 sein muss, wenn beide Belegungsvariablen 1 sind. Die erste der vier Nebenbedingungen ist dann die Reformulierung der Gleichung (6.11) mit Hilfe der Hilfsvariablen. Diese Vorgehensweise lässt sich auch auf größere Gruppen von Freunden erweitern. Allerdings wächst die Anzahl der benötigten Hilfsvariablen exponentiell an, wenn man beispielsweise für Gruppen von 4 Freunden ebenfalls den gemeinsamen Besuch eines Workshops von lediglich 2 oder 3 dieser Freunde erhalten will. Für jede mögliche Teilgruppe von Freunden wird dann ein eigener Satz von Hilfsvariablen (eine für jeden Workshop!) benötigt, für Gruppen mit  $n$  Freunden sind dies  $w_{\max} \cdot \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}$  Hilfsvariablen, und zusätzlich entstehen natürlich entsprechend viele Nebenbedingungen.



Eine weitere Alternative ist es, den gemeinsamen Workshopbesuch der Freunde direkt in die initiale Problemstellung des Workshopzuteilungsproblems zu integrieren. Die Variablen  $x_{pw}, x_{p'w}, \dots$  der Teilnehmer einer Äquivalenzklasse  $[p]_{\sim_f}$  würden dann für jeden Workshop  $w$  zu einer einzigen Belegungsvariablen  $x_{pw}$  ( $p$  sei ein ausgewählter, repräsentativer Teilnehmer der Äquivalenzklasse  $[p]_{\sim_f}$ ) zusammen gefasst, so dass alle Teilnehmer einer Freundesgruppe simultan zu Workshops zugeteilt werden. Die entsprechende Präferenz in der Zielfunktion würde ersetzt durch die Summe der Präferenzen aller Freunde für den entsprechenden Workshop. Für die Nebenbedingung a) der Beschränkung der Workshopplätze erhält die neue Belegungsvariable die Größe  $n$  der Äquivalenzklasse als Faktor, da durch einen Wert von 1  $n$  Plätze im jeweiligen Workshop besetzt würden. Außerdem müsste für die restliche Problemstellung gefordert werden, dass alle Freunde einer Gruppe zu denselben Zeiten anwesend sind und dieselbe minimale Anzahl an Workshops besuchen müssen, die Gruppe muss also sehr einheitlich sein. Die Nebenbedingungen c), d) und e) bleiben dann bis auf Ersetzung der Belegungsvariablen unverändert.

Vorteil einer solcher Modellierung von sozialen Netzwerken ist, dass eine gemeinsame Zuteilung für alle Freunde von vornherein garantiert ist. Eine weitere Folge neben der erwähnten, notwendigen Einheitlichkeit der Gruppe ist allerdings, dass die vorherrschende Präferenz der Gruppe ausschlaggebend für die Zuteilung ist. Ein Teilnehmer einer Gruppe, der andere Präferenzen hat als die restlichen Mitglieder der Gruppe würde sich deren Meinung unterordnen, da die individuelle Präferenz keinen Eingang mehr in die Problemstellung findet, sondern lediglich die Summe über alle Präferenzen der Freunde. Dies entspricht aber wahrscheinlich der in der Praxis zu erwartenden Situation, Abweichler ordnen sich entweder der Meinung einer Gruppe unter oder verlassen die Gruppe. Die Flexibilität der Zuteilung ist weiterhin eingeschränkt, da die Möglichkeit der Verteilung der Freunde auf unterschiedliche Workshops nicht mehr gegeben ist. Dies kann auch einen Einfluss auf die Qualität der Zuteilung für die restlichen Teilnehmer haben. Problemstellungen, die bei normaler Modellierung lösbar sind, können dadurch sogar unlösbar werden. Weiterhin entstehen in der Nebenbedingungsmatrix Werte größer als 1. Die totale Unimodularität der Matrix ist daher in jedem Fall dann nicht mehr gegeben, was sich auf die Problemlösung auswirkt. Allerdings verkleinert sich ebenfalls die Problemstellung, da die Menge der binären Variablen reduziert wird, was wiederum das Branch & Cut Verfahren beschleunigen kann.

## 6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wird der Tauschmarkt als zweite Optimierungsstufe für das Workshopzuteilungsproblem vorgestellt. Spieltheoretische Analysen des einstufigen Problems zeigen zunächst, dass eine Zuteilung basierend auf dem sozialen Optimum nicht anreizkompatibel sein kann, vergleichbar mit der Unvereinbarkeit von Anreizkompatibilität und Stabilität im Fall des National Intern Matching Program. Es kann also für einen Teilnehmer vorteilhaft sein, unwahre Präferenzen anzugeben, um seine resultierende Zuteilung zu verbessern. Diese Anreizproblematik kann jedoch zu erhöhter Unzufriedenheit mit dem Zuteilungsergebnis führen, sowie von strategisch agierenden als auch anderen Teilnehmern. Verschiedene Möglichkeiten der Präferenzangaben werden diskutiert und im Hinblick auf ihre Auswirkungen auf die Anreizkompatibilität untersucht. Die Vorgabe einer festen Menge von Präferenzwerten, die auch gleiche Werte enthalten können,

scheint die meisten Vorteile zu bieten, diese Variante findet auch in dieser Arbeit Anwendung.

Anreizprobleme, Abhängigkeiten der Präferenzen untereinander, soziale Gruppenstrukturen sowie eine partielle Präferenzangabe begründen den Nutzen einer zweiten Optimierungsstufe zum nachträglichen Tausch der angegebenen Präferenzen. Diese Faktoren haben gemeinsam, dass sie wegen fehlender Information in die Präferenzen der erste Zuteilungsstufe nicht inkorporierbar sind, sondern erst nach Bekanntgabe des Zuteilungsergebnisses bewertet werden können. Um das Ergebnis einer Zuteilung geeignet an die Teilnehmer zu kommunizieren, werden verschiedene Alternativen einer informativen Bewertungszahl untersucht. Diese Zahl soll zu jedem Workshop Auskunft darüber geben, ob ein Tausch in diesen Workshop Erfolgsaussichten hat. Dies hängt von den Bewertungen der zugeteilten Teilnehmer und vom Nachfrageüberschuss ab. Verschiedene Alternativen werden vorgeschlagen und diskutiert, dabei erweist sich der Einsatz der Schattenpreise der Workshops als am vorteilhaftesten.

Damit das Ergebnis einer neuen Zuteilung von allen Teilnehmern akzeptiert wird, wird die Eigenschaft der Pareto-Erhaltung gefordert, die die Schlechterstellung einzelner Teilnehmer verglichen mit der aktuell gültigen Zuteilung ausschließt. Die Eigenschaft der Pareto-Effizienz ist allgemein für die Bewertung von Allokationen von großer Bedeutung, sie besagt, dass es keine Anreize zur nachträglichen Modifikation einer Allokation durch einzelne Teilnehmer gibt. Es wird genau festgelegt, wann beim Workshopzuteilungsproblem eine Zuteilung für einen Teilnehmer als schlechter anzusehen ist als eine andere. Eine neue Zuteilung wird als gültig angesehen, wenn sie die so definierte Pareto-Erhaltung erfüllt. Die Pareto-Erhaltung wird durch das Hinzufügen einer neuen linearen Nebenbedingung sichergestellt und das resultierende Optimierungsproblem für den Tauschmarkt wird beschrieben.

Um die Pareto-Erhaltung auf soziale Gruppen, die den gemeinsamen Besuch von Workshops wünschen, zu erweitern, wird eine weitere, optionale Nebenbedingung vorgeschlagen. Hierbei werden verschiedene konkrete Umsetzungsmöglichkeiten im Optimierungsproblem vorgestellt, die sich in Bezug auf das genaue Ergebnis und die Steigerung der Komplexität und Größe des Problems unterscheiden.

# Kapitel 7

## Simulationsergebnisse

Dieses Kapitel beschreibt die Ergebnisse der Simulationen, die verdeutlichen sollen, dass ein Tauschmarkt, wie er im vorangegangenen Kapitel 6 definiert wurde, zum einen funktioniert, d.h. dass Tausche tatsächlich statt finden können, und zum anderen Sinn ergibt, d.h. dass durch den Tauschmarkt die Zuteilung verbessert und die Zufriedenheit der Teilnehmer erhöht werden kann.

Simuliert wurden zwei der genannten möglichen Situationen, die einen Tauschmarkt aus Sicht der Teilnehmer wünschenswert machen. Zum einen wurde das Vorhandensein von abgekehrten (“detached”) Teilnehmern simuliert, d.h. von Teilnehmern, die sich von der Menge distanzieren und Workshops präferieren, die keinen allzu hohen Beliebtheitsgrad für die Masse aufweisen. Zum anderen wurde das Vorhandensein von Freunden simuliert, also Zweierpaaren von Teilnehmern, die dieselben Workshops besuchen möchten, und im Fall verschiedener, zugeteilter Workshops durch nachträgliche Tausche erreichen möchten.

Die Simulationen basieren auf dem in Abschnitt 6.5 auf S. 151 definierten Optimierungsproblem. Um außerdem die Auswirkungen der in Abschnitt 6.5.1 vorgeschlagenen, zusätzlichen Nebenbedingungen für die Pareto-Erhaltung von Freunden zu untersuchen, wurde die Simulation des Tauschmarkts für Freunde einmal ohne und einmal mit der zusätzlichen Nebenbedingung  $h$  (siehe (6.10)) durchgeführt. Diese garantiert den Verbleib von Freunden in gemeinsam besuchten Workshops. Die Verwendung des Tauschmarkts ohne diese zusätzliche Nebenbedingung birgt zwar eben die Gefahr, dass Freunde aus gemeinsam besuchten Workshops wieder entfernt werden, hat allerdings den Vorteil, dass die Struktur der Freundesgruppen nicht explizit bekannt sein muss, da sie in die Problemstellung nicht direkt eingeht. Im praktischen Einsatz kann nicht immer davon ausgegangen werden, dass die Mitglieder sozialer Gruppen sich offiziell als solche zu erkennen geben wollen. Der Tauschmarkt bietet die Möglichkeit der verdeckten Realisierung solcher Präferenzen, da Tauschangebote nicht begründet werden müssen.

Im ersten Abschnitt werden die Parameter erläutert, die den für die Simulationen generierten Workshopzuteilungsproblemen zu Grunde liegen. Anschließend wird für jede Simulation erläutert, in welcher Weise Tauschangebote generiert wurden, gefolgt von den Ergebnissen und der Analyse der jeweiligen Simulation.

## 7.1 Workshopzuteilungsprobleme für die Simulation

Für beide Simulationen wurden Workshopzuteilungsprobleme mit den folgenden Parametern generiert:

1. 2-8 Zeitslots
2. 30-60 Workshops
3. 5-25 Teilnehmer pro Workshop
4. Jeder Teilnehmer besucht mindestens 1-3 Workshops.
5. Die Workshopplätze sind zu einem Anteil von 0.7 ausgelastet.
6. Die Teilnehmer sind in allen Zeitslots anwesend.
7. Die Wahrscheinlichkeiten für einen Workshop, eine Äquivalenzklasse zu bilden, sind 9,3% für eine 2-er Klasse, 1% für eine 3-er Klasse und 0.1% für eine 4-er Klasse.
8. Ein Workshop belegt zwischen 1 und  $\lceil \sqrt{t_{max}} \rceil$  Zeitslots.
9. Die Präferenzen sind  $\{26, 19, 14, 10, 0, -14, -26\}$ , wobei 0 die Standardpräferenz ist.
10. Jeder Teilnehmer vergibt jede Präferenz für zwei Workshops. Workshops einer Äquivalenzklasse können unterschiedliche Präferenzen bekommen.

Diese Parameter wurden gewählt, da sie zum Teil den Verhältnissen in den bisher bekannten, praktischen Problemstellungen entsprechen. Zum anderen werden durch diese Parameter, wie die empirischen Ergebnisse in Abschnitt 4.5 zeigen, zum einen nur wenige unlösbare Probleme erzeugt, und zum anderen ist der Großteil der erzeugten Probleme mit dem Simplex ganzzahlig lösbar. Dies ist wesentlich, da die verwendete Software CPLEX für Lösungen mit dem Branch & Cut Verfahren die Schattenpreise der Workshops nicht ausgibt, sondern nur für ganzzahlige Lösungen mit dem Simplex Verfahren. Daher ist die Simulation auf Probleme beschränkt, die sich, alle Tauschmarktprobleme eingeschlossen, mit dem Simplex ganzzahlig lösen lassen. Wichtig dafür ist insbesondere die maximale Anzahl von 8 Zeitslots. In der Tat ergaben die Simulationen einen Anteil reellwertiger Lösungen von lediglich 4%, dies betrifft nicht nur die initialen Zuteilungsprobleme, sondern ebenfalls die Tauschmarktprobleme. In lediglich 2 von 100 Fällen war ein initiales Problem ganzzahlig lösbar, aber eines der daraus folgenden Tauschmarktprobleme nicht. Für die simulierten Fälle kann man im Allgemeinen also davon ausgehen, dass die Tauschmarktprobleme lösbar sind, sofern die initialen Zuteilungsprobleme ganzzahlig lösbar sind.

Zur Durchführung der Simulation ergeben sich zwei verschiedene Möglichkeiten der Einarbeitung der Tauschangebote in das Zuteilungsproblem. Zum einen kann man für sämtliche Teilnehmer die Tauschangebote gleichzeitig generieren und daraus ein einziges Zuteilungsproblem erstellen, lösen und auswerten, für welche Teilnehmer ein erfolgreicher Tausch statt gefunden hat. Dies entspräche jedoch nicht der Herangehensweise in der Praxis, bei dem Teilnehmer sofort nach Abgabe eines Tauschangebotes wissen

möchten, ob sich deren Zuteilung ändern lässt. Möchte ein Teilnehmer beispielsweise zu einem Workshop wechseln, der noch freie Plätze hat, so kann dieser Wunsch sofort erfüllt werden, es ist somit sinnvoll, die Zuteilung nach jedem neuen Tauschangebot zu wiederholen und zu überprüfen, welche Tauschangebote erfüllt werden konnten und welche nicht. Die nicht erfüllten Tauschangebote bleiben auf dem Markt erhalten und können sich zusammen mit weiteren, abgegebenen Angeboten später erfüllen.

Aus diesem Grund sind auch die Ausführungszeiten von Bedeutung, die zur Generierung einer optimalen Lösung tatsächlich benötigt werden. Wenn Tauschangebote über eine Webschnittstelle eingegeben werden, so soll nach jeder neuen Eingabe sofort eine neue Zuteilung berechnet werden, die die Möglichkeit einer neuen, besseren Zuteilung überprüft. Aus diesem Grund ist die Lösung des Optimierungsproblems innerhalb der Zeit einer Webanfrage untersucht worden.

Bei den Simulationen wurde immer ein einzelnes Tauschangebot generiert, dieses dem Markt hinzugefügt und dann die Zuteilung errechnet. Tauschangebote, die durch die neue Zuteilung erfüllt wurden, wurden vom Markt gelöscht, die restlichen Angebote blieben erhalten. Die Ergebnisse bei den Abgekehrten zeigen auf, welche Anzahl von Angeboten sofort bei der dazu gehörigen Zuteilung erfüllt werden konnten und welche dagegen zu einem späteren Zeitpunkt unter anderen Marktverhältnissen eingelöst wurden.

## 7.2 Abgekehrte Teilnehmer

In Bezug auf den Anteil abgekehrter Teilnehmer an der Gesamtzahl der Teilnehmer an einer Workshopveranstaltung konnten noch keine praktischen Beobachtungen gemacht werden. Basierend auf den Untersuchungen in der Literatur wurde, wie bereits in Abschnitt 5.1 (siehe S. 92) begründet, daher von einem Anteil von 30% abgekehrter Teilnehmer ausgegangen. Ob sich diese Zahl mit dem in der Praxis zu beobachtenden Anteil tatsächlich deckt, wird an dieser Stelle nicht untersucht. Man kann jedoch davon ausgehen, dass eine Veränderung des Anteils von abgekehrten Teilnehmern die Ergebnisse der Simulation nicht nachhaltig ändern würden.

Ein abgekehrter Teilnehmer strebt danach, Workshops zu besuchen, die von der Masse gemieden werden, also einen geringen Beliebtheitsgrad haben und evtl. nicht voll belegt sind. Dies sind folglich diejenigen Workshops mit einem geringen bzw. nullwertigen Schattenpreis. Die abgekehrten Teilnehmer werden aus den Teilnehmern zufällig gewählt. Es gibt keine Besonderheiten der abgekehrten Teilnehmer bezüglich der Präferenzen oder sonstigen Bedingungen der generierten Problemstellung, da man nicht davon ausgehen kann, dass a priori Wissen über die Beliebtheit von Workshops vorhanden ist.

Algorithmus 4 zeigt das genaue Vorgehen bei der Simulation der abgekehrten Teilnehmer. In jeder Runde wird der nächste, abgekehrte Teilnehmer aus der Liste derjenigen ohne bisherige Tauschangebote gewählt. Für diesen Teilnehmer wird bestimmt, ob es sinnvolle Tauschmöglichkeiten gibt. Werden keine gefunden, so merkt sich der Algorithmus diesen Teilnehmer für die nächste Runde, da durch folgende Tausche und neue Zuteilungen sinnvolle Tauschpartner zu einem späteren Zeitpunkt entstehen können. Für jeden Teilnehmer wird allerdings höchstens einmal ein Tauschangebot generiert. Kann für die restlichen Teilnehmer kein weiteres Tauschangebot generiert werden, so terminiert die Simulation.

---

**Algorithmus 4** Simulation von abgekehrten Teilnehmern
 

---

```

1: Eingabe: detached := Liste der abgekehrten Teilnehmer;
2: avg := mittlerer Schattenpreis über alle Workshops;
3: tausch_gefunden := FALSE;
4: still_detached := leere Menge;
5: while (detached nicht leer) und (not tausch_gefunden) do
6:   p := wähle und lösche den ersten Teilnehmer aus detached;
7:   assigned := zugeteilte Workshops für p, absteigend sortiert nach Schattenpreis;
8:   candidates := nicht zugeteilte Workshops für p mit positiver Präferenz, mit einem
   Schattenpreis < avg, aufsteigend sortiert nach Schattenpreis, absteigend nach
   Präferenz;
9:   tausch_can_be_found := TRUE;
10:  while tausch_can_be_found UND assigned ist nicht leer do
11:    ws := wähle und lösche den ersten Workshop aus assigned;
12:    cand := wähle und lösche den ersten Workshop aus candidates, der von den
    zeitlichen Nebenbedingungen her möglich wäre;
13:    if cand gefunden und  $\text{pref}(\text{cand}) < \text{pref}(\text{ws})$  then
14:      if  $(\text{sp}(\text{cand}) = 0 \text{ UND } \text{sp}(\text{ws}) > 0)$  ODER  $(\text{sp}(\text{ws}) \setminus \text{sp}(\text{cand}) > 2)$  then
15:        füge Tausch ws gegen cand in den Markt;
16:        tausch_gefunden := TRUE;
17:      else
18:        tausch_can_be_found := FALSE;
19:      end if
20:    end if;
21:  end while;
22:  if not tausch_gefunden then
23:    füge p an still_detached an;
24:  end if
25: end while;
26: if tausch_gefunden then
27:   // Zuteilungsproblem wird generiert und gelöst, eine weitere Runde folgt
28:   return detached und still_detached;
29: else
30:   // in diesem Fall ist detached leer, keine weiteren Tauschmöglichkeiten
31:   return fertig;
32: end if

```

---

Zum Finden eines Tauschkandidaten wird zunächst geschaut, welche Workshops dieser Teilnehmer aktuell zugewiesen bekommen hat. Als mögliche Tauschkandidaten werden diejenigen Workshops selektiert, deren Schattenpreis kleiner ist als der durchschnittliche Schattenpreis über alle Workshops, für die der Teilnehmer eine positive Präferenz geäußert hat und denen der Teilnehmer nicht zugeteilt ist.

Es wird nun der zugeteilte Workshop mit dem höchsten Schattenpreis verglichen mit dem Tauschkandidaten mit dem niedrigsten Schattenpreis und, falls es davon mehrere gibt, mit der höchsten Präferenz unter diesen. Dies ist der vielversprechendste und präferierteste Workshop für diesen Teilnehmer. Der Tausch macht zum einen nur dann Sinn, wenn

- die Präferenz des Tauschkandidaten niedriger ist als die Präferenz des zugeteilten Workshops, denn ansonsten hätte der Algorithmus den Teilnehmer bereits in den Tauschkandidaten eingeteilt, wenn es möglich gewesen wäre,
- der Schattenpreis des zugeteilten Workshops größer als Null ist (denn sonst wäre dieser Workshop bereits akzeptabel für den Teilnehmer und kein Tausch wäre nötig)
- und der Schattenpreis des Tauschkandidaten entweder Null ist oder ausreichend kleiner als der Schattenpreis des zugeteilten Workshops. Der Schattenpreis des Tauschkandidaten wird dabei als ausreichend kleiner angesehen, wenn er höchstens halb so hoch ist wie der Schattenpreis des aktuell zugeteilten Workshops. Weiterhin ist er ebenfalls kleiner als der durchschnittliche Schattenpreis über alle Workshops. Ein Tauschversuch muss also lohnend sein sowohl bezogen auf den einzelnen zugeteilten Workshops als auch auf die Menge der übrigen Workshops.

Man könnte argumentieren, dass Tauschkandidaten nur dann Sinn machen, wenn deren Schattenpreis gleich Null ist, da jeder Workshop mit einem Schattenpreis größer als Null, auch wenn er gering ist, bedeutet, dass der Workshop in jedem Fall voll belegt ist, was den abgekehrten Teilnehmer abschrecken könnte. Andererseits zeugt ein hoher Schattenpreis gegenüber einem niedrigen von einem großen allgemeinen Interesse an diesem Workshop und der darin behandelten Thematik. Es kann also durchaus attraktiv für einen Teilnehmer sein, in einen Workshop mit einem geringen positiven Schattenpreis wechseln zu wollen, auch wenn dieser voll belegt ist. Daher wurden beide Möglichkeiten zugelassen, wobei natürlich Workshops mit einem nullwertigen Schattenpreis vorrangig als Tauschpartner in Frage kommen.

Weiterhin sind als Tauschpartner nur diejenigen Workshops selektiert worden, für die der Teilnehmer bereits eine positive Präferenz geäußert hat. Man kann nicht davon ausgehen, dass ein abgekehrter Teilnehmer bereit wäre, in einen Workshop zu wechseln, für den er a priori keine oder eine negative Präferenz geäußert hat, ein solch starker Einfluss der Beliebtheit der Workshops, dass er die a priori Präferenzen komplett überlagert, ist im Allgemeinen nicht zu erwarten und wird daher für diese Simulation nicht vorausgesetzt. Die Forderung, dass Tauschpartner nur solche Workshops mit positiver Präferenz sein können, verschärft die Bedingungen für die Simulation, die uns daher eine untere Schranke für das zu erwartende Ergebnis liefert. Dadurch, dass in der Praxis der eine oder andere Teilnehmer einen Tauschpartner aus den Workshops mit nicht-positiver Präferenz wählen könnte, kann sich die Erfolgsquote weiter verbessern.

Der Algorithmus terminiert, da in jeder Runde entweder ein Tauschangebot generiert wird, was die Anzahl der noch zu betrachtenden Teilnehmer um einen verringert, oder

| $t_{max}$ | $n$ | sofort | später | übrig | kein Tau. | #det | #ws | SP0 vo. | SP0 na. | Verä. SP0 | Verä. $\emptyset$ SP | Veränd. obj.val. |
|-----------|-----|--------|--------|-------|-----------|------|-----|---------|---------|-----------|----------------------|------------------|
| 2         | 19  | 0.68   | 0.24   | 0.05  | 0.03      | 137  | 137 | 0.51    | 0.93    | 58.47     | 0.35                 | 260 (186)        |
| 3         | 13  | 0.49   | 0.14   | 0.14  | 0.24      | 101  | 134 | 0.51    | 0.76    | 33.62     | 0.45                 | 58 (52)          |
| 4         | 13  | 0.44   | 0.14   | 0.16  | 0.26      | 109  | 146 | 0.53    | 0.72    | 28.31     | 0.57                 | 47 (38)          |
| 5         | 15  | 0.47   | 0.14   | 0.14  | 0.25      | 95   | 140 | 0.50    | 0.76    | 35.73     | 0.42                 | 58 (46)          |
| 6         | 13  | 0.52   | 0.11   | 0.14  | 0.24      | 90   | 139 | 0.49    | 0.75    | 35.00     | 0.40                 | 69 (52)          |
| 7         | 13  | 0.49   | 0.15   | 0.14  | 0.23      | 91   | 151 | 0.55    | 0.78    | 35.31     | 0.46                 | 66 (50)          |
| 8         | 14  | 0.44   | 0.10   | 0.16  | 0.30      | 75   | 137 | 0.53    | 0.76    | 32.00     | 0.50                 | 75 (61)          |
| alle      | 100 | 0.51   | 0.15   | 0.13  | 0.21      | 102  | 140 | 0.52    | 0.79    | 38.14     | 0.44                 | 100 (76)         |

Tabelle 7.1: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse für abgekehrten Teilnehmer

es wird keins generiert, dann terminiert der Algorithmus sofort. Dadurch, dass jeder Teilnehmer höchstens einmal Angebote auf den Tauschmarkt einstellt, werden Zyklen vermieden.

### 7.2.1 Ergebnisse für abgekehrte Teilnehmer

Die genauen Ergebnisse der Simulation sind im Appendix A aufgeführt, siehe Tabellen A.1 bis A.7. Tab. 7.1 gibt eine Zusammenfassung der Ergebnisse wieder. Die Ergebnisse sind getrennt nach Anzahl der Zeitslots der generierten Workshopzuteilungsprobleme aufgeführt. Die Zeitslots wurden bereits als ein wichtiger Faktor für die Schwere der Lösbarkeit des Problems identifiziert (siehe Abschnitt 4.5). Eine Trennung nach Zeitslots macht sichtbar, ob der Erfolg des Tauschmarkts von der Problemschwere abhängig zu sein scheint. Die Werte in Tab. 7.1 sind Durchschnittswerte über die Einzelergebnisse, getrennt nach Zeitslots. Die Anzahl der pro Zeitslot generierten Probleme ist ebenfalls aufgeführt. Auf die Darstellung der Standardabweichung wurde der Übersichtlichkeit halber verzichtet. Die Bedeutungen der in Tab. 7.1 dargestellten Werte sind wie folgt:

$n$ : Anzahl der generierten Probleme mit entsprechendem  $t_{max}$ .

**sofort/später/übrig**: Anteil der Tauschangebote, die sofort/später/gar nicht erfüllt wurden, an der Gesamtzahl der Workshops, für die ein Tauschpartner gesucht wurde.

**kein Tau.:** Anteil der Workshops, für die kein Tauschpartner gefunden wurde (abhängig von den Schattenpreisen, zeitlichen Restriktionen etc.), an der Gesamtzahl der Workshops, für die ein Tauschpartner gesucht wurde. Die Summe der vier Spalten "sofort", "später", "übrig" und "kein Tausch" ergibt folglich 1.

**#det/#ws**: Absolute Anzahl der abgekehrten (detached) Teilnehmer bzw. der von ihnen besuchten Workshops.

**SP0 vo./na.:** Anteil der Workshops mit Schattenpreis 0 an der Gesamtzahl der Workshops der abgekehrten Teilnehmer vor bzw. nach den Tauschen.

**Verä. SP0** : absolute Veränderung der Anzahl an Workshops der abgekehrten Teilnehmer mit Schattenpreis 0.



**Verä.  $\emptyset$  SP:** Anteilige Veränderung des durchschnittlichen Schattenpreises über alle Workshops der abgekehrten Teilnehmer (ein Wert von 0.50 besagt, dass der durchschnittliche Schattenpreis über alle Workshops der abgekehrten Teilnehmer durch die Tausche um die Hälfte verringert wurde.).

**Verä. obj.val.:** Absolute Veränderung des Zielfunktionswertes am Ende der Tauschphase, verglichen mit dem Zielfunktionswert vor der Tauschphase. Der erste Wert zeigt den Zuwachs der Präferenzsumme über alle Teilnehmer, der Wert in Klammern ist die absolute Veränderung des Zielfunktionswertes über alle nicht abgekehrten Teilnehmer, die also keine eigenen Tauschangebote abgegeben haben.

Die Ergebnisse zeigen in den vier Spalten “sofort” bis “kein Tau” zunächst, wieviele Tauschangebote generiert und wieviele davon wann erfüllt werden konnten. Etwa in der Hälfte der Fälle von Workshops mit einem hohen Schattenpreis konnte ein Tauschpartner gefunden und der Tausch auch sofort erfüllt werden. Bei weiteren 15% wurde das Tauschangebot zu einem späteren Zeitpunkt, nach dem Hinzukommen anderer Tauschangebote, erfüllt. 13% der Tauschangebote wurden nicht erfüllt, verblieben also bis zum Schluss auf dem Tauschmarkt. Außerdem konnte für ein gutes Fünftel der Workshops mit hohen Schattenpreisen kein passender Tauschpartner gefunden werden. Dies ist zum einen dadurch bedingt, dass ein Teilnehmer keine positiven Präferenzen für einen Workshop mit einem ausreichend niedrigen Schattenpreis vergeben hat, und zum anderen durch die Restriktionen der Nebenbedingungen. Insbesondere muss ein Tauschpartner zeitlich in die Lücke aus denjenigen Zeitslots passen, die der zu tauschende Workshop belegt oder die für den Teilnehmer noch nicht belegt sind. Überlappt sich ein Tauschpartner mit einem dritten Workshop, der nicht getauscht werden soll, so wird er von vornherein nicht als Tauschpartner akzeptiert.

Man sieht, dass insbesondere bei 2 Zeitslots die Werte stark vom Durchschnitt abweichen. Dies liegt daran, dass bei 2 Zeitslots die Teilnehmer maximal einen Workshop besuchen. Es entstehen also keine Abhängigkeiten zwischen Tauschpartnern und weiteren, besuchten Workshops, so dass hier sehr viel mehr Tauschpartner gefunden und auch erfolgreich zugewiesen werden konnten. Ansonsten fällt auf, dass die Zahlen relativ konstant bleiben über die größeren Zeitslots hinweg. Es hat auf den Erfolg des Tauschens also weniger Einfluss, ob die Teilnehmer zwei oder noch mehr Workshops besuchen. Zentral scheint zu sein, ob sie nur einen oder mehr als einen besuchen.

Die Anzahl der insgesamt von allen abgekehrten Teilnehmern besuchten Workshops ist recht konstant über die Zeitslots hinweg, je mehr Workshops ein einzelner Teilnehmer allerdings besucht, umso weniger einzelne Teilnehmer sind es.

Der zentrale Indikator für den Tauscherfolg ist die Anzahl der vor und nach den Tauschen von den abgekehrten Teilnehmern besuchten Workshops mit Schattenpreis Null. Dies sind die Workshops, die potentiell nicht voll belegt sind und auf der Beliebtheitskala folglich ganz unten rangieren, also die höchste Attraktivität für die abgekehrten Teilnehmer besitzen. Wie man sieht, konnte der Anteil dieser Workshops von gut der Hälfte auf fast 80% gesteigert werden! Es ist also eine deutliche Verbesserung zu sehen. “Verä. SP0” zeigt die absolute Anzahl an Workshops mit Schattenpreis Null, die durch die Tauschphase hinzugekommen sind, im Durchschnitt also gut 38 Workshops auf insgesamt 140. Sehr hoch ist die Verbesserung wiederum bei nur 2 Zeitslots, aus den bereits genannten Gründen. In der Tat ergibt sich der Anteil derjenigen Workshops, für die kein Tauschpartner gefunden werden konnte, bereits fast als der fehlende Anteil der Schattenpreis Null-Workshops nach der Tauschphase, so dass die fehlenden Prozente

zum großen Teil auf die fehlenden Tauschpartner zurück geführt werden können. Wo also ein Tausch statt fand, da war er größtenteils auch erfolgreich. Dass bei 8 Zeitslots für 30% der Workshops kein Tauschpartner gefunden werden konnte, und zum Schluss 76% der Workshops Schattenpreis 0 hatten, liegt neben Rundungsfehlern daran, dass in einer frühen Tauschrunde zu einem Workshop kein Partner gefunden wurde, dieser zu einem späteren Zeitpunkt aber als Seiteneffekt durch andere Tausche trotzdem den Schattenpreis Null erlangte. Da jedoch nicht explizit ein erfolgreicher Tausch statt fand, wurde dieser Workshop bei denjenigen ohne Tauschpartner mitgezählt.

Die Veränderung des durchschnittlichen Schattenpreises in der vorletzten Spalte zeigt, wie sich der Schattenpreis insgesamt über alle Workshops der abgekehrten Teilnehmer verändert hat. Hier spielt also auch ein Tausch rein, wo im Endeffekt der Schattenpreis nicht Null, aber vielleicht doch geringer war als der des ursprünglich besuchten Workshops. Es ist im übrigen natürlich möglich, dass ein Tausch in einen Workshop mit Schattenpreis Null statt findet, dieser Workshop jedoch im Lauf der weiteren Tausche wieder einen höheren Schattenpreis erlangt. Ein solcher Workshop wird dann bei der Zählung derjenigen mit Schattenpreis Null nicht gewertet. Im Durchschnitt sank der Schattenpreis auf 44% seines ursprünglichen Wertes. Ein besonders starkes Absinken ist wiederum bei 2 Zeitslots zu beobachten. Der durchschnittliche Schattenpreis konnte also meistens auf weniger als die Hälfte des ursprünglichen Wertes verringert werden.

Bei der Angabe der Veränderung des Zielfunktionswertes in der letzten Spalte ist besonders interessant, inwieweit auch Teilnehmer, die keine Tauschangebote abgegeben haben, also die nicht abgekehrten, von den Tauschen profitieren konnten. Dies geschieht, indem ein abgekehrter Teilnehmer einen begehrten Platz freigibt, der wiederum von einem anderen Teilnehmer belegt werden kann. In der Tat bezieht sich ein hoher Teil des Zuwachses des Zielfunktionswertes auf diese "unbeteiligten" Teilnehmer. Dieser Effekt ist aber natürlich gerade bei der Betrachtung der abgekehrten Teilnehmer hoch, da gerade diese beliebte Workshops meiden und daher begehrte Plätze freigeben.

### 7.3 Freunde

Für die Simulation eines Tauschmarkts für Freundespaare wurde ein Anteil von 0.3 an Freundespaaren unter allen Teilnehmern angenommen, basierend auf praktischen Erfahrungen während des Mädchen-Techniktags und des Girls' Day. Dazu wurden nacheinander ein Teilnehmer und sein Freund zufällig aus der Menge aller Teilnehmer gewählt und solange der Menge der Freundespaare hinzugefügt, bis ein Anteil von 0.3 an der Gesamtteilnehmerzahl erreicht war.

Bei Freunden, die dieselben Workshops besuchen möchten, muss davon ausgegangen werden, dass diese folglich auch dieselben Präferenzen für Workshops äußern. Dies ist logisch und wurde durch Beobachtungen am Mädchen-Techniktag zu 100% bestätigt. Alle Teilnehmerinnen, die den Wunsch äußerten, mit einer Freundin zusammen dieselben Workshops zu besuchen, hatten exakt dieselben Präferenzen angegeben. Weiterhin wird davon ausgegangen, dass Freunde dieselben Zeitslots besuchen und dieselbe Mindestanzahl an Workshops zugeteilt bekommen sollen. Da in den hier generierten Problemen die Teilnehmer alle immer anwesend sind, ist die Gleichheit der Zeitslots automatisch gewährleistet. Die Gleichheit der Mindestanzahl der Workshops wurde bei der Problemgenerierung entsprechend berücksichtigt.

Bei den Simulationen ergab sich, dass die initiale Zuteilung bereits einen großen Teil

| Freund 1 |           |       |    | Freund 2 |           |       |    |
|----------|-----------|-------|----|----------|-----------|-------|----|
| WS       | Zeitslots | Präf. | SP | WS       | Zeitslots | Präf. | SP |
| A        | x         | 26    |    | A        | x         | 26    |    |
| B        | x         | 19    | 5  | C        | x x       | 26    | 4  |
| D        | x         | 10    | 0  | E        | x         | 19    | 0  |

Tabelle 7.2: Beispiel zur Bildung der optimalen Workshopkombination (WS: Workshop, Präf: Präferenz, SP: Schattenpreis)

der Freunde in dieselben Workshops einteilte, es gab jedoch immer ein paar Freunde, die nicht dieselben Workshops besuchten. Für diese Freunde müssen nun geeignete Tauschangebote definiert werden. Um für zwei Freunde Tauschangebote zu generieren, wurde wie folgt vorgegangen:

1. Sei  $n$  die Anzahl der Workshops, die die Freunde unterschiedlich besuchen. Es wird zunächst diejenige Kombination aus  $n$  Workshops bestimmt, die das optimale Ziel für die Freunde darstellt. Dies ist diejenige Kombination an Workshops, die die Freunde gern gemeinsam besuchen möchten und auf die sie mit den Tauschangeboten hinarbeiten. Die Grundlage für die Kombinationen bilden alle Workshops, die von einem der beiden Freunde aktuell besucht werden, vom anderen aber nicht. Um eine so erzeugte Kombination gemeinsam zu besuchen, muss also einer der Freunde erfolgreich in den Workshop des anderen tauschen. Dies ist eine nahe liegende Vorgehensweise, da ein Tausch eines Freundes in einen Workshop des anderen realistischer erscheint, als dass beide in einen weiteren, noch von keinem bereits besuchten Workshop tauschen.

Für die Berechnung der optimalen Kombination gelten die folgenden Bedingungen:

- Eine Kombination ist nur dann zulässig, wenn sie durch die zeitliche Belegung der Workshops möglich ist. Das bedeutet, dass sich die Workshops einer Kombination gegenseitig nicht überschneiden dürfen und sich ebenfalls nicht mit anderen, gemeinsam besuchten Workshops der Freunde überschneiden dürfen, in denen die Freunde ja bleiben wollen.
- Eine Kombination ist vorteilhafter als eine zweite, wenn die Summe der Schattenpreise der Workshops geringer ist als diejenige der zweiten. Die Schattenpreise drücken die Beliebtheit der Workshops aus. Je geringer die Schattenpreise und daher weniger beliebt die Workshops einer Workshopkombination sind, desto höher sind die Chancen, dass die Freunde in diese Kombination von Workshops erfolgreich wechseln können.
- Zwei Workshopkombinationen mit der gleichen Schattenpreissumme werden nach der Summe der Präferenzen sortiert. Eine Kombination ist dann vorteilhafter als eine zweite, wenn deren Präferenzsumme höher ist als diejenige der zweiten. Die Kombination ist umso wünschenswerter für die Freunde, je höher die Präferenzen der darin enthaltenen Workshops sind.

Die Bestimmung der Wunschkombination soll an einem Beispiel verdeutlicht werden, siehe Tab. 7.2.

|                    | (B,D) | (B,E) | (C,E) | (D,E) |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|
| Schattenpreissumme | 5     | 5     | 4     | 0     |
| Präferenzsumme     | 29    | 38    | 45    | 29    |

Tabelle 7.3: Schattenpreis- und Präferenzsummen der möglichen Workshopkombination von Freund 1 und Freund 2

Es werden zunächst alle Kombinationen aus den nur von einem Freund besuchten Workshops gebildet, auf Basis derjenigen Zeitslots, die nicht von anderen, gemeinsam besuchten Workshops belegt werden. Im Beispiel wird Workshop A bereits gemeinsam besucht, dieser belegt Zeitslot 1. Daher darf die Kombination sich nur über die übrigen Zeitslots 2 bis 4 erstrecken. Dies ist automatisch der Fall, solange man zur Bildung der Kombination lediglich diejenigen Workshops zu Grunde legt, die bereits von einem Teilnehmer besucht werden (es wäre auch denkbar, weitere, nicht besuchte Workshops zuzulassen). Es werden Kombinationen aus zwei Workshops gesucht, da die beiden Freunde jeweils 2 Workshops besuchen, an denen der andere nicht teilnimmt. Die möglichen Kombinationen sind also zunächst (B,C), (B,D), (B,E), (C,D), (C,E) und (D,E).

Von diesen Kombinationen sind (B,C) und (C,D) nicht Zeitslot-kompatibel, da sich sowohl B und C als auch C und D zeitlich überschneiden. Diese Kombinationen werden also gestrichen, es bleiben (B,D), (B,E), (C,E) und (D,E). Die Summen der Schattenpreise und Präferenzen dieser Kombinationen sind in Tab. 7.3 aufgeführt. Die Kombination (D,E) hat hierbei die geringste Schattenpreissumme, welches das primäre Sortierkriterium ist, und ist daher die optimale Kombination für die Freunde des Beispiels.

2. Das Ziel für die Freunde ist es, ein solches Tauschangebot zu erstellen, dass möglichst in die gefundene Wunschkombination von Workshops gewechselt werden kann. Dies bedeutet, dass die Workshops der Kombination die höchstmöglichen Präferenzen bekommen müssen. Dazu wird zunächst bestimmt, welches die höchstmöglichen Präferenzen für die Kombinationsworkshops sind und daraufhin werden weitere Workshops bestimmt, die als Tauschpartner geeignet sind. Als Tauschpartner auszuschließen sind natürlich diejenigen Workshops, die bereits gemeinsam besucht werden. Deren Präferenzen stehen somit nicht für die Kombinationsworkshops zur Verfügung.

Im Beispiel aus Tab. 7.2 ist die höchstmögliche Präferenzkombination für die Workshops D und E gleich  $26 + 19$ . Jede Präferenz kann für zwei Workshops vergeben werden. Der gemeinsame Workshop A belegt jedoch schon eine Präferenz 26, folglich steht nur eine weitere zur Verfügung. Welcher der Kombinationsworkshops welche Präferenz zugeordnet bekommt, wird zufällig bestimmt. Nehmen wir also für die folgenden Betrachtungen an, dass Workshop D die Präferenz 26 und Workshop E die Präferenz 19 bekommen soll.

3. Als nächster Schritt müssen die Tauschpartner für die Kombinationsworkshops bestimmt werden, falls diese nicht bereits die Wunschpräferenz haben. Hierzu qualifizieren sich diejenigen Workshops, die mit der Wunschpräferenz belegt sind und die nicht entweder ein bereits gemeinsam besuchter Workshop oder aber Teil der optimalen Kombination sind. Gemeinsam besuchte Workshops sollen weiterhin be-

sucht werden und dürfen daher keine niedrigere als die aktuelle Präferenz zugewiesen bekommen. Andere Workshops der Wunschkombination sind auszuschließen, da für diese ebenfalls noch ein Tauschangebot gebildet werden soll. Workshops hingegen, die nur von einem Freund besucht werden und nicht Teil der Wunschkombination sind, sind als Tauschpartner hervorragend geeignet. Denn dies sind gerade die Workshops, die einer der Freunde gern verlassen möchte, daher ist eine Verringerung von deren Präferenz nur hilfreich.

Im Beispiel kommt also als Tauschpartner für Workshop D lediglich Workshop C in Frage, da Workshop A die Präferenz 26 behalten muss. Für Workshop E wird kein Tauschpartner benötigt, da die aktuelle Präferenz von Workshop E bereits der Wunschpräferenz entspricht.

4. Die berechneten Tauschangebote werden in den Markt eingefügt, und zwar für beide Freunde. Auch wenn ein Freund bereits die Wunschkombination besucht, sollte das Tauschangebot für ihn eingetragen werden. Dies erhöht die Präferenzen für die bereits besuchten Workshops und verhindert so, dass der Zuteilungsalgorithmus lediglich die Plätze der beiden Freunde vertauscht. Auch spiegelt es die tatsächliche Situation wider, da der Freund in jedem Fall gern in den bereits belegten Workshops bleiben möchte und daher in der Tat nun die höchsten Präferenzen für seine Workshopkombination hat. Seine a priori Präferenzen haben sich durch die Situation mit seinem Freund entsprechend geändert.

Es kann nun passieren, dass keine Tauschangebote generiert werden können. Im vorliegenden Fall, in dem jede Präferenz für zwei Workshops vergeben werden kann, passiert dies beispielsweise oft, wenn Freunde zwei verschiedene Workshops derselben Präferenz besuchen und diese Präferenz die höchste, für einen Tausch zur Verfügung stehende Präferenz ist. Dies passiert z.B., wenn zwei Freunde die höchste Präferenz 26 für zwei Workshops A und B vergeben haben und der eine Workshop A zugeteilt ist und der andere Workshop B. Haben die Freunde für die Workshops A und B lediglich die Präferenz 19 vergeben und die Präferenz 26 für zwei weitere Workshops C und D angegeben, so entsteht eine ähnliche Situation, falls die Freunde den Workshops C und D gemeinsam zugeteilt sind und wiederum einer zusätzlich Workshop A zugeteilt ist und der andere Workshop B. Der Besuch der Workshops C und D soll dann natürlich in jedem Fall beibehalten werden, die Präferenz 26 steht damit für Tauschangebote nicht zur Verfügung. In solchen Fällen kann man also nicht vorgehen, indem man durch einen Präferenztausch der gewünschten Workshopkombination höhere Präferenzen zuweist, als für die aktuell zugeteilten Workshops vergeben sind.

Für diese Situation gibt es die beiden folgenden Strategien zum Generieren von Tauschangeboten:

1. Ziel ist es, einen dritten Workshop zu finden, in den beide Freunde wechseln können. Hierzu benötigt man einen Workshop mit einem Schattenpreis, der möglichst klein ist, in jedem Fall kleiner als die Schattenpreise der bereits besuchten Workshops. Gibt es mehrere Workshops zur Auswahl, so wählt man denjenigen mit der höchsten Präferenz. Als weiteres Sortierkriterium kommt bei einem Schattenpreis von 0 die Anzahl der freien Plätze in Frage, je mehr freie Plätze ein Workshop hat, desto größer sind die Chancen eines erfolgreichen Wechsels für beide Freunde.
2. Statt die Präferenz des Wunschworkshops zu erhöhen versucht man, die Präferenz

desjenigen Workshops, den ein Freund verlassen will, zu verringern. Als Tauschpartner kommt in diesem Fall ein Workshop mit niedrigerer Präferenz und einem hohen Schattenpreis in Frage. Dieser Schattenpreis muss größer sein als beide Schattenpreise der bereits besuchten Workshops. Der hohe Schattenpreis dient dazu, den Algorithmus möglichst zu drängen, dass dieser Teilnehmer diesem Workshop nicht zugeteilt wird, sondern statt dessen eben dem Workshop mit derselben Präferenz, den der Freund bereits besucht.

Diese Strategie unterscheidet sich von den anderen darin, dass sie die Problemstellung nicht wie die anderen entspannt. Die anderen Strategien funktionieren alle, indem ein Workshop mit einem niedrigen Schattenpreis eine höhere Präferenz angeboten bekommt. Dies trägt zur gleichmäßigeren Verteilung der Nachfrage auf die Workshops bei, da sich die Nachfrage für einen bisher gering gewünschten Workshop erhöht und statt dessen die Nachfrage für einen stärker gewünschten verringert. Die Schattenpreise werden dadurch quasi leicht geglättet (auch wenn sich dies nicht unbedingt in den tatsächlichen Zahlen niederschlagen muss!), man kann dies als im bildlichen Sinn als “Entspannung” der Problemstellung betrachten. Diese Strategie erhöht statt dessen die Nachfrage nach einem bereits stark nachgefragten Workshop, indem ein Workshop mit einem bereits hohen Schattenpreis eine weitere, hohe Präferenz bekommt. Hier könnte man also eher, was die Schattenpreise betrifft, anschaulich von einer “Vertiefung der Gräben” sprechen.

---

**Algorithmus 5** Simulation des Tauschmarkts für Freunde
 

---

```

1: freunde = Liste der Freunde mit verschiedenen Workshops;
2: schonprobiert = ();
3: while freunde nicht leer do
4:   f1, f2 := wähle und lösche ein Freundespaar aus freunde;
5:   füge f1, f2 zu schonprobiert hinzu;
6:   tausch := generiere_tauschangebot(f1,f2);
7:   if tausch nicht leer then
8:     füge tausch zum Markt hinzu;
9:     generiere und löse Zuteilungsproblem;
10:    if Zuteilung für f1, f2 geändert then
11:      ändere Präferenzen für f1 und f2 entsprechend dem Tausch;
12:      lösche tausch vom Markt;
13:    end if;
14:    freunde := Liste der Freunde mit verschiedenen Workshops \ schonprobiert;
15:  end if;
16: end while;

```

---

Das genaue Vorgehen zur Simulation der Freunde ist in Algorithmus 5 dargestellt. In jeder Runde sucht der Algorithmus nach dem nächsten Freundespaar, für das mittels der beschriebenen Methode erfolgreich ein Tauschangebot generiert werden kann. Gibt es keine solchen Freundespaare mehr, so terminiert der Algorithmus. Der Algorithmus terminiert in jedem Fall, da für jedes Freundespaar nur maximal einmal ein Tauschangebot akzeptiert wird. Die Anzahl der Schleifen ist also nach oben begrenzt durch die Anzahl der Freundespaare. Dies verhindert zum einen, dass der Algorithmus in einer Schleife hängen bleibt, und spiegelt zum anderen die begrenzte Geduld und Zeit wider,

| $t_{max}$ | $n$ | #Pa-<br>are | Markt<br>(alle/<br>übrig) | bleibt<br>gut   | schle-<br>chter | bes-<br>ser    | bleibt<br>schle-<br>cht | #WS<br>(vorh./<br>nachh.) | obj.val<br>(total/<br>andere) |
|-----------|-----|-------------|---------------------------|-----------------|-----------------|----------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 2         | 14  | 73.07       | 9.86<br>2.64              | 66.21<br>90.62% | 0.00<br>0.00%   | 4.14<br>5.67%  | 2.71<br>3.71%           | 6.86<br>2.71              | 54.14<br>21.29                |
| 3         | 13  | 51.00       | 13.58<br>0.65             | 43.38<br>85.07% | 0.46<br>0.90%   | 6.15<br>12.07% | 1.00<br>1.96%           | 7.23<br>1.46              | 88.92<br>19.88                |
| 4         | 12  | 49.50       | 23.08<br>1.96             | 40.00<br>80.81% | 0.83<br>1.68%   | 7.08<br>14.31% | 1.58<br>3.20%           | 9.00<br>2.50              | 92.25<br>10.80                |
| 5         | 17  | 45.59       | 16.41<br>1.21             | 37.59<br>82.45% | 1.12<br>2.45%   | 6.18<br>13.55% | 0.71<br>1.55%           | 7.18<br>1.82              | 53.12<br>15.50                |
| 6         | 18  | 48.78       | 12.78<br>2.00             | 39.94<br>81.89% | 1.00<br>2.05%   | 6.44<br>13.21% | 1.39<br>2.85%           | 7.89<br>2.39              | 72.22<br>8.00                 |
| 7         | 12  | 44.50       | 12.75<br>1.50             | 37.00<br>83.15% | 0.42<br>0.94%   | 4.75<br>10.67% | 2.33<br>5.24%           | 7.33<br>2.75              | 77.58<br>15.83                |
| 8         | 14  | 44.14       | 10.79<br>1.11             | 37.71<br>85.44% | 0.43<br>0.97%   | 4.50<br>10.19% | 1.50<br>3.40%           | 6.57<br>2.00              | 103.43<br>22.89               |
| alle      | 100 | 50.85       | 14.04<br>1.59             | 43.01<br>84.58% | 0.64<br>1.26%   | 5.64<br>11.09% | 1.56<br>3.07%           | 7.42<br>2.22              | 76.03<br>16.30                |

Tabelle 7.4: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse für Freunde

die Teilnehmer in die Teilnahme an einem Tauschmarkt investieren können. Die Notwendigkeit wiederholter Tausche führt zwangsläufig zu Frustration der Teilnehmer, die somit die Sinnhaftigkeit des Tauschmarkts für sich persönlich in Frage stellen würden. Kann das erste Tauschangebot nicht erfüllt werden, so werden sich die meisten Teilnehmer mit dieser Situation abfinden und davon ausgehen, dass sie halt Pech haben und der gewünschte Tausch einfach nicht möglich ist.

Ohne diese Restriktion könnten in der Tat Schleifen entstehen, in denen der Algorithmus hängen bliebe. Dies entstünde in dem Fall, in dem ein Tausch zweier Freunde in einen gemeinsamen Workshop zur Folge hat, dass zwei weitere Freunde aus ihrem gemeinsamen Workshop in verschiedene gelangen. Im nächsten Schritt wird wiederum für diese Freunde ein Tauschangebot entstehen, das wiederum zur Folge haben kann, dass ein weiteres Freundespaar entsteht, evtl. wieder das erste, das in verschiedene Workshops gerät. Solche Schleifen können beispielsweise durch die Hinzunahme der in Abschnitt 6.5.1 beschriebenen Nebenbedingungen vermieden werden, die verhindern, dass Freunde aus bereits gemeinsam besuchten Workshops wieder entfernt werden.

### 7.3.1 Ergebnisse für Freunde

Die Ergebnisse der Simulation der Freunde sind in Tab. 7.4 zusammenfassend dargestellt. Die detaillierte Auflistung der einzelnen Ergebniswerte ist im Anhang zu finden (siehe Tab. B.1 bis B.7). Die Ergebnisse sind wiederum nach Anzahl der Zeitslots  $t_{max}$  der generierten Probleme aufgeteilt, die in Tab 7.4 dargestellten Werte sind Durchschnittswerte über die Einzelergebnisse zu jedem  $t_{max}$ . Die Bedeutung der Spalten ist wie folgt:

$n$ : Anzahl der generierten Probleme.

**#Paare**: Absolute Anzahl der Freundespaare

**Markt (alle/übrig)**: Anzahl der gesamten Tauschangebote im Markt (alle) sowie Anzahl derjenigen Angebote, die nach Ende der Simulation auf dem Markt übrig waren und somit nicht erfüllt werden konnten (übrig).

**bleibt gut**: Anzahl der Paare, die sowohl in der initialen Zuteilung als auch am Ende der Simulation dieselben Workshops besuchen, sowie in der zweiten Zeile der prozentuale Anteil an allen Freundespaaren.

**schlechter**: Anzahl der Paare, die in der initialen Zuteilung gemeinsame und am Ende der Simulation unterschiedliche Workshops besuchen, für die der Tauschmarkt die Situation also verschlechtert hat. In der zweiten Zeile ebenfalls der prozentuale Anteil dieser Paare an allen Freundespaaren.

**besser**: Anzahl der Paare, die in der initialen Zuteilung verschiedene Workshops und am Ende der Simulation nur noch gemeinsame Workshops besuchen, für die der Tauschmarkt die Situation also verbessert hat. In der zweiten Zeile der prozentuale Anteil dieser Paare an allen Freundespaaren.

**bleibt schlecht**: Anzahl der Paare, die sowohl in der initialen Zuteilung als auch nach der Simulation unterschiedliche Workshops besuchen (die Anzahl der unterschiedlichen Workshops spielt dabei keine Rolle). In der zweiten Zeile der prozentuale Anteil dieser Paare an allen Freundespaaren.

**#WS (vorh./nachh.)**: Anzahl der Workshops von Freunden, die in der initialen Zuteilung (vorher, erste Zeile) bzw. nach der Simulation (nachher, zweite Zeile) unterschiedlich waren, unabhängig davon, wieviele Freundespaare diese betreffen.

**obj.val (total/andere)**: Veränderung des Zielfunktionswertes, also der Summe der Präferenzen der zugeweilten Workshops, von der initialen Zuteilung zur Zuteilung nach der Simulation, sowohl insgesamt (total, erste Zeile) als auch nur bezogen auf diejenigen Teilnehmer, die nicht unter den Freunden waren (andere, zweite Zeile) und daher auch nicht am Tauschmarkt teilnahmen.

Insgesamt gab es im Durchschnitt gut 50 Freundespaare unter den Teilnehmern, für die insgesamt 14 Tauschangebote erzeugt wurden. Von diesen 14 Angeboten waren nach der Simulation im Schnitt 1,6 Angebote übrig, was gut 11% der Angebote entspricht. Knapp 90% der Tauschangebote waren also in dem Sinn erfolgreich, dass sie tatsächlich zu einem Tausch der Präferenzen führten. Dies muss allerdings nicht in jedem Fall heißen, dass das entsprechende Freundespaar danach dieselben Workshops besucht. Von den gut 50 Paaren besuchen 43 vor und nach der Simulation dieselben Workshops, haben also keine Verschlechterung ihrer Situation erfahren. Insgesamt besuchen knapp 86% aller Freundespaare in der initialen Zuteilung dieselben Workshops, was deutlich macht, dass durch die Angabe derselben Präferenzen bereits eine hohe Wahrscheinlichkeit für gemeinsame Zuteilung erreicht wird. Man sieht jedoch ebenfalls, dass es immer einen Anteil an Freunden gibt, der eben nicht denselben Workshops zugeweiht wird und für den der Tauschmarkt Verbesserung verspricht. Gut 14% der Freundespaare besuchen in der initialen Zuteilung nicht dieselben Workshops, 11% der Paare konnten aber durch den



Tauschmarkt in dieselben Workshops gelangen, lediglich 3% besuchten auch nach der Simulation weiterhin unterschiedliche Workshops. Dies entspricht einer Erfolgsquote von gut 78% bezogen auf alle Freundespaare mit unterschiedlichen Workshops in der initialen Zuteilung. Leider gibt es auch einige Fälle von Freundespaaren, die in der initialen Zuteilung dieselben Workshops besuchen, durch den Tauschmarkt aber in verschiedene Workshops geraten und dies nicht wieder durch eigene Tauschangebote erfolgreich rückgängig machen können. Dieser Anteil ist mit 1.26% gemessen an allen Paaren aber sehr gering und insbesondere deutlich geringer als der Anteil von 11% der Paare, die eine Verbesserung erfahren.

Dies zeigen auch die Zahlen der unterschiedlichen Workshops der Freunde. Die durchschnittliche Anzahl unterschiedlicher Workshops kann durch den Tauschmarkt von 7.42 auf 2.22 verringert werden, was einer Verringerung auf 30% der ursprünglichen Menge an verschiedenen Workshops entspricht. Insbesondere ist es wichtig zu bemerken, dass der Großteil der nach der Simulation nicht zufrieden gestellten Freunde auch vorher unterschiedliche Workshops besuchten, nämlich ein Anteil von 70%. Es ist wichtig, dass möglichst wenige Teilnehmer schlechter gestellt werden als ohne den Tauschmarkt, weil das natürlich die Akzeptanz des Marktes negativ beeinflusst. Dieser Anteil könnte durch Hinzunahme der in Abschnitt 6.5.1 definierten Nebenbedingungen komplett vermieden werden.

Um festzustellen, wie sich der Tauschmarkt unter Hinzunahme der Nebenbedingung h) für die Pareto-Erhaltung der Freunde (siehe (6.10) auf S. 153) verhält, wurde eine weitere Simulation durchgeführt. Diese entspricht der ersten Simulation der Freunde bis auf die Hinzunahme der Nebenbedingung h), die bedingt, dass alle Freunde in bereits gemeinsam besuchten Workshops bleiben. Die Einzelergebnisse der Simulation finden sich in Anhang C in Tab. C.1 bis C.7. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist in Tab. 7.5 dargestellt, die Bedeutung der Spalten ist analog zu Tab. 7.4 (siehe S. 169). Zum Vergleich der Gesamtergebnisse sind in der letzten Zeile noch einmal die Ergebnisse für die Freunde ohne Nebenbedingung h) wieder gegeben.

Durch Hinzunahme der Nebenbedingung h) sinkt der Anteil derjenigen Paare, die schlechter gestellt werden, auf 0 und gleichzeitig kann ein etwas größerer Anteil an Freunden besser gestellt werden. Im Ergebnis ist die Anzahl derjenigen Workshops, die nach dem Tauschmarkt noch von Freunden unterschiedlich besucht werden, geringer, die meisten Tauschwünsche können erfüllt werden. Es zeigt sich also, dass die Flexibilität des Algorithmus zum Finden von Tauschangeboten unter den zusätzlichen Nebenbedingungen nicht sonderlich leidet, es sind immer noch genug andere Teilnehmer vorhanden, die an Tauschen beteiligt werden können. Auffällig ist weiterhin, dass weniger Tauschangebote vonnöten sind, um das gewünschte Ergebnis zu erreichen, es gibt weniger Marktteilnehmer. Dies liegt wahrscheinlich darin begründet, dass in der ersten Version Freunde aus gemeinsamen Workshops herausgetauscht wurden, die dann den Tausch mit Hilfe eigener Tauschangebote rückgängig gemacht haben. Dadurch entstehen Marktaktivitäten, die mit der Nebenbedingung h) vermieden werden.

Ein weiterer, auffälliger Unterschied ist die Summe der Erhöhung des Zielfunktionswertes für Freunde. Diese ist unter der Nebenbedingung h) deutlich niedriger als ohne diese Einschränkung. Dies lässt sich zum einen auf die erhöhte Marktaktivität zurück führen, die ja auch Präferenzveränderungen nach sich zieht. Zum anderen ist zu vermuten, dass durch die zusätzlichen Nebenbedingungen der Algorithmus doch so weit in seiner Flexibilität eingeschränkt wird, dass die Tausche bezogen auf den Präferenzgewinn weniger vorteilhaft sind als ohne die Nebenbedingung. Der Algorithmus kann

| $t_{max}$            | $n$ | #Pa-<br>are | Markt<br>(alle/<br>übrig) | bleibt<br>gut   | schle-<br>chter | bes-<br>ser    | bleibt<br>schle-<br>cht | #WS<br>(vorh./<br>nachh.) | obj.val<br>(total/<br>andere) |
|----------------------|-----|-------------|---------------------------|-----------------|-----------------|----------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------------|
| 2                    | 18  | 69.28       | 16.00<br>2.44             | 64.44<br>93.03% | 0.00<br>0.00%   | 3.00<br>4.33%  | 1.83<br>2.64%           | 4.83<br>1.83              | 31.89<br>18.06                |
| 3                    | 12  | 51.00       | 8.00<br>0.17              | 43.42<br>85.14% | 0.00<br>0.00%   | 7.50<br>14.71% | 0.08<br>0.16%           | 7.83<br>0.08              | 16.42<br>8.00                 |
| 4                    | 19  | 54.00       | 8.32<br>1.00              | 45.11<br>83.52% | 0.00<br>0.00%   | 8.58<br>15.89% | 0.32<br>0.59%           | 9.37<br>0.32              | 41.95<br>11.16                |
| 5                    | 18  | 48.56       | 9.22<br>0.11              | 41.39<br>85.23% | 0.00<br>0.00%   | 7.06<br>14.54% | 0.11<br>0.23%           | 7.33<br>0.11              | 25.22<br>10.33                |
| 6                    | 12  | 44.42       | 9.50<br>0.25              | 36.83<br>82.91% | 0.00<br>0.00%   | 7.42<br>16.70% | 0.17<br>0.38%           | 7.83<br>0.17              | 52.08<br>17.83                |
| 7                    | 9   | 44.22       | 7.78<br>0.44              | 37.44<br>84.67% | 0.00<br>0.00%   | 6.67<br>15.08% | 0.11<br>0.25%           | 7.22<br>0.11              | 33.22<br>13.11                |
| 8                    | 12  | 35.58       | 9.50<br>0.17              | 28.67<br>80.58% | 0.00<br>0.00%   | 6.83<br>19.20% | 0.08<br>0.22%           | 7.42<br>0.08              | 54.83<br>13.08                |
| alle                 | 100 | 51.17       | 10.06<br>0.76             | 44.06<br>86.11% | 0.00<br>0.00%   | 6.65<br>13.00% | 0.46<br>0.90%           | 7.39<br>0.46              | 36.04<br>13.08                |
| Vergleich<br>ohne h) |     | 50.85       | 14.04<br>1.59             | 43.01<br>84.58% | 0.64<br>1.26%   | 5.64<br>11.09% | 1.56<br>3.07%           | 7.42<br>2.22              | 76.03<br>16.30                |

Tabelle 7.5: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse für Freunde mit Nebenbedingung h)

die gewünschten Tausche weiterhin, ohne Nachteile für andere Teilnehmer, durchführen, aber mit einem geringeren Anstieg der Summe der partiellen Präferenzen für die zugewiesenen Workshops. Dies trifft, wenn auch in geringerem Maß, auch auf die anderen Teilnehmer zu, die nicht zu der Gruppe der Freunde gehören.

Für die Problematik der Freunde insgesamt bedeutet der Tauschmarkt eine deutliche Verbesserung der Teilnehmerzufriedenheit. Die Anzahl der verschiedenen Workshops konnte in jedem einzelnen Fall reduziert werden, ein großer Teil der Tauschangebote konnte erfüllt werden und dadurch wurde der Anteil derjenigen Freunde mit gemeinsamen Workshops erfolgreich gesteigert. Von den Tauschangeboten profitieren ebenfalls die anderen Teilnehmer, auf für diese ergibt sich eine Steigerung der Summe der Bewertungen. Durch den Einsatz der Nebenbedingung h) zur Pareto-Erhaltung der Freunde kann Schlechterstellung von Freunden vermieden werden, aber auch ohne diese explizite Restriktion betrifft dies nur einen sehr geringen Anteil der Teilnehmer. Natürlich wirkt sich die Möglichkeit, dass Freunde aus gemeinsam besuchten Workshops im Lauf des Tauschmarkts entfernt werden, negativ auf die Anreizstruktur des Tauschmarkts aus. Allerdings muss beachtet werden, dass der Einsatz der Nebenbedingung h) erfordert, dass die Freundespaare der Problemstellung bekannt sein müssen. Dazu muss der Organisator einer Workshopveranstaltung diese Daten also zunächst einmal von den Teilnehmern erfassen. Neben dem zusätzlichen Aufwand ist fraglich, inwieweit diese Angaben freiwillig und gern gemacht würden, beispielsweise aus Gründen der Privatsphäre. Der Tauschmarkt ohne die Nebenbedingung h) erfordert keine explizite Erfassung dieser Daten.

## 7.4 Zusammenfassung

Die Simulationen dieses Kapitels sollten zeigen, dass der in Abschnitt 6.5 definierte Tauschmarkt im praktischen Einsatz funktioniert. Dass persönliche Präferenzen für Workshops von den Ergebnissen der Zuteilung der ersten Stufe abhängen können, abhängig u.a. von der Persönlichkeit und den sozialen Präferenzen der einzelnen Teilnehmer, wurde bereits in Kapitel 5 dargelegt. Dieser Einfluss wurde beispielhaft anhand von abgekehrten Teilnehmern in der Simulation untersucht. Die zweite betrachtete Situation ist die von Zweierpaaren von befreundeten Teilnehmern, die gern dieselben Workshops besuchen möchten.

Für die Simulationen wurden Workshopzuteilungsprobleme generiert, für deren Parameter in Abschnitt 4.5 gezeigt wurde, dass sie in den meisten Fällen mit dem Simplex ganzzahlig lösbar sind, die zum anderen aber für praktische Probleme relevant scheinen. Die ganzzahlige Lösbarkeit mit dem Simplex-Verfahren war deshalb wichtig, da die Ergebnisse des Branch & Cut Verfahrens der Software CPLEX keine Information über die duale Lösung und somit die Schattenpreise der ganzzahligen Lösung enthalten. Daher konnte für Probleme, deren Lösungen eines Branch & Cut bedurften, nicht mit Schattenpreisen gearbeitet werden, obwohl dies theoretisch kein Problem wäre. Eine genauere Analyse der Lösbarkeit der Tauschmarktprobleme ist an dieser Stelle nicht gemacht worden, aber die geringe Rate von 2 aus 200 Problemen, die initial ganzzahlig lösbar waren, als Tauschmarktproblem aber teilweise nicht mehr, zeigt, dass die zusätzlichen Nebenbedingungen des Tauschmarkts die ganzzahlige Lösbarkeit mit dem Simplex nicht entscheidend beeinflussen. Probleme, die im Lauf der Simulation reellwertige Lösungen hatten, wurden aus der weiteren Betrachtung gestrichen.

Nach jedem neuen Angebot auf dem Tauschmarkt wurde das entsprechende Tauschmarktproblem generiert und gelöst, und es wurde untersucht, ob neu hinzugekommene oder auch bereits länger auf dem Markt befindliche Angebote erfüllt werden konnten oder nicht. Jede Änderung der Zuteilung von Teilnehmern mit Angeboten auf dem Tauschmarkt wurde als Erfüllung gewertet. Erfüllte Angebote wurden vom Markt gelöscht und die neuen Zuteilungen und Präferenzen wurden zur aktuellen Zuteilung für weitere Tauschrunden. Die Simulation terminierte, wenn keine neuen Angebote mehr generiert werden konnten. Dabei wurde davon ausgegangen, dass jeder abgekehrte Teilnehmer bzw. jedes Freundespaar maximal einmal ein Tauschangebot auf den Markt stellt. Dies verhindert zum einen mögliche Schleifen durch ständiges Hin- und Hertauschen zwischen verschiedenen Teilnehmern, zum anderen ist dies eine für die Praxis sinnvolle Annahme, da es die begrenzte Geduld von Teilnehmern zutreffend abbildet.

Der Großteil der Teilnehmerwünsche kann durch einen Tauschmarkt erfüllt werden, weiterhin profitieren auch unbeteiligte Teilnehmer, denen durch Tauschangebote ein Wechsel in stärker präferierte Workshops möglich wird. Der Erhalt des Niveaus der Platzbewertungen stellt zudem sicher, dass Tausche nur im Rahmen einer Pareto-Erhaltung geschehen, so dass die Qualität einer einmal erreichten Zuteilung nicht mehr verloren gehen kann. Natürlich gab es auch in allen Fällen Tauschangebote, die nicht erfüllt werden konnten oder Teilnehmer, für die kein Tauschangebot erzeugt werden konnte, was zum einen an den zeitlichen Restriktionen und der Struktur und Präferenzen für die zugewiesenen Workshops liegen kann und zum anderen an der Forderung der gültigen Tausche, die natürlich Flexibilität kostet, für die Anreizstruktur des Tauschmarkts aber unverzichtbar ist.

Im Fall der Freunde ohne weitere Nebenbedingung zur Pareto-Erhaltung der gemeinsamen Workshopbesuche gab es außerdem den Fall, dass Freunde im Lauf des Tauschmarkts aus gemeinsam besuchten Workshops wieder entfernt wurden. Da dies nicht notwendigerweise eine Verschlechterung der Präferenzen für die zugeteilten Plätze bedeutet, sind solche Tausche im Rahmen der Pareto-Erhaltung des Präferenzniveaus zulässig. Um dies zu verhindern, wurde der Tauschmarkt für Freunde mit einer zusätzlichen Nebenbedingung wiederholt, die zusichert, dass Freunde in gemeinsam besuchten Workshops bleiben. Dadurch konnte die Schlechterstellung von Freunden verhindert werden, gleichzeitig blieb ausreichend Flexibilität erhalten, um Tausche für die anderen Freunde weiter erfolgreich zu ermöglichen. Dadurch sinkt die Anzahl der notwendigen Tauschmarkttransaktionen, gleichzeitig bleibt jedoch auch die Steigerung des Zielfunktionswertes geringer. Sofern dem Veranstalter also Daten über die sozialen Gruppenstrukturen der Teilnehmer vorliegen, ist es vorteilhaft, die Erhaltung der gemeinsamen Besuche durch eine zusätzliche Nebenbedingung zu garantieren.

Die Ergebnisse der Simulationen zeigen, dass der Tauschmarkt basierend auf der zusätzlichen Information der Schattenpreise funktioniert und dass sich mit dessen Hilfe die Gesamtzufriedenheit der Teilnehmer deutlich verbessern lässt.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung

Diese Arbeit beschreibt eine neuartige Kombination von Techniken aus den Bereichen des Operations Research und der Spieltheorie. Optimierungsverfahren werden eingesetzt, um die Zuteilung von Teilnehmern einer Veranstaltung zu Workshopplätzen, unter Beachtung diverser Nebenbedingungen, zu lösen. Die Optimierung basiert auf den partiellen Präferenzfunktionen der Teilnehmer für die Workshops. Diese Präferenzen unterliegen Problematiken aus dem Bereich der Spieltheorie. Dies sind zum einen Anreize für strategisches Verhalten und zum anderen Informationsasymmetrien und Abhängigkeiten der Präferenzen untereinander. Diese Faktoren bedingen einen Einfluss der Bekanntgabe des Zuteilungsergebnisses auf die dem Problem zu Grunde liegenden Präferenzen, so dass die Optimalität des Ergebnisses nicht mehr gewährleistet ist. In dieser Arbeit wird daher ein zweistufiges Optimierungsverfahren vorgeschlagen. Durch die initiale Zuteilung basierend auf den a priori Präferenzwerten werden wichtige Informationen erzeugt. Mit Hilfe der Schattenpreise der Workshops werden diese Informationen den Teilnehmern in geeigneter Weise kommuniziert, so dass die Teilnehmer basierend auf diesen neuen Angaben ihre Präferenzwerte für die zweite Optimierungsstufe anpassen können. Die modifizierten Präferenzen sind Grundlage für die Berechnung einer verbesserten Zuteilung. Durch zusätzliche Nebenbedingungen wird dabei der Lösungsraum der neuen Zuteilung auf den pareto-effizienten Bereich des Lösungsraums der aktuell gültigen Zuteilung beschränkt, so dass jedem Teilnehmer der Erhalt der bereits erreichten Bewertung seiner Workshopplätze garantiert wird.

Der erste Teil der Arbeit in Kap. 2 bis 4 widmet sich dem Workshopzuteilungsproblem und dessen Lösungsmöglichkeiten mittels Methoden des Operations Research. Das Problem wird als ganzzahliges, lineares Programm formuliert. Das Ergebnis der Untersuchungen ist, dass das Problem in der vorgestellten Form keinen ganzzahligen Lösungsraum besitzt. Zum einen wird beschrieben, unter welchen Einschränkungen ein reduziertes Workshopzuteilungsproblem garantiert ganzzahlig lösbar ist. Zum anderen zeigen empirische Ergebnisse, dass die Relaxierungen eines großen Anteils an praktisch relevanten Instanzen ganzzahlige optimale Lösungen haben. Diejenigen Probleme mit reellwertigen Lösungen lassen sich in kurzer Zeit erfolgreich mit dem Branch & Cut Verfahren lösen. Das Workshopzuteilungsproblem an sich lässt sich also für die Praxis erfolgreich anwenden. Der erfolgreiche Einsatz dieser Lösungsmethoden ist außerdem Voraussetzung für die Umsetzung der vorgestellten, zweiten Optimierungsphase.

Das Workshopzuteilungsproblem ist trotz seiner praktischen Relevanz als Optimierungsproblem bisher in der Literatur nicht behandelt worden. Es hat inhaltliche Ähnlichkeit mit dem Stundenplanproblem und basiert auf dem allgemeinen Zuteilungsproblem,

die Lösungsverfahren lassen sich aber nicht ohne weiteres übertragen. Spieltheoretisch interessant ist der Vergleich mit dem National Intern Matching Program, das eine Zuteilung von Studenten auf Praktikumsplätze vornimmt. Hier ist insbesondere der Vergleich der dabei entstehenden Stabilitäts- und Anreizprobleme für das Workshopzuteilungsproblem interessant.

Der zweite Teil der Arbeit ab Kap. 5 widmet sich der Analyse der Anreize und der Informationsstrukturen des Workshopzuteilungsproblems. Bezüglich der Anreize wird gezeigt, dass eine Zuteilung basierend auf dem sozialen Optimum nicht anreizkompatibel sein kann, es kann also immer Teilnehmer geben, für die eine unwahre Präferenzangabe profitabel sein kann. Zum anderen werden die Informationsasymmetrien und -abhängigkeiten analysiert. Ähnlich wie bei Auktionsmechanismen ergibt sich hier die Problematik von privaten Informationen, nämlich den Präferenzen, die voneinander abhängig sind. Dies basiert unter anderem auch auf psychologischen Faktoren des sozialen Gruppenverhaltens, deren Grundlagen erläutert werden. Die Abhängigkeit der Präferenzen voneinander bewirkt, dass die Teilnehmer ihre wahren Präferenzen erst nach Bekanntgabe von Information über die Präferenzen der anderen Teilnehmer und die daraus resultierende Zuteilung lernen, was zur Folge hat, dass die wahre Optimalität der initialen Zuteilung nicht gegeben sein muss. Bei ähnlichen Problemstellungen in der Auktionstheorie wurden Probleme erfolgreich durch Einführung mehrstufiger Verfahren behoben. In dieser Arbeit wird analog die Einführung einer zweiten Stufe vorgeschlagen, während der die Zuteilung der ersten Stufe unter Hinzunahme neuer Informationen durch die Teilnehmer verbessert werden kann. Schattenpreise von Workshops zeigen sich als sehr geeignet, um sowohl einfach als auch umfassend über die Ergebnisse der ersten Zuteilung zu informieren. Zur Berechnung neuer, besserer Lösungen basierend auf getauschten Präferenzen wird eine Erweiterung des Optimierungsproblems entwickelt. Hierzu werden Nebenbedingungen entwickelt, die die Pareto-Erhaltung der neu generierten Zuteilungen, verglichen mit der aktuell gültigen Zuteilung, sicherstellen. Diese sind sehr wichtig für die Anreizstruktur des Tauschmarkts. Es werden Alternativen für eine Erweiterung dieser linearen Nebenbedingungen vorgeschlagen, die die Pareto-Erhaltung zusätzlich zu den individuellen Bewertungen der zugeteilten Plätze erweitern auf Kriterien für beliebig große Gruppen von Freunden.

Simulationsergebnisse in Kap. 7 zeigen anhand von zwei ausgewählten Problemstellungen, dass der so definierte Tauschmarkt funktioniert und zu einer Verbesserung der Zuteilung führt. Dabei kann nicht nur die Zuteilung von denjenigen Teilnehmern, die explizit Tauschgesuche abgegeben haben, verbessert werden, sondern gleichzeitig auch die Zuteilung für andere, nicht beteiligte Teilnehmer, die auf durch Tausche frei werdende Plätze nachrücken können. Die Erweiterung der Problemstellung um die Pareto-Erhaltung der Freundesgruppen verkürzt den Tauschprozess und verbessert das Ergebnis. Der Tauschmarkt kombiniert damit die Idee zweistufiger Verfahren zur Informationsenthüllung aus der Auktionstheorie mit Optimierungsmethoden und daraus generierten Schattenpreisen, die die gesamte Problemstruktur widerspiegeln und sich daher hervorragend zur Kommunikation der nötigen Information eignen. Die wichtige Eigenschaft der Pareto-Erhaltung wird durch lineare Nebenbedingungen abgebildet. Eine derartige Kombination von Techniken des Operations Research mit Methodiken der Spieltheorie zur Lösung von aus der Spieltheorie bekannten Problemen ist bisher in der Literatur noch nicht vorgeschlagen worden.

Als Ausblick bieten sich einige, weitere Betrachtungen und Untersuchungen an. Dazu gehören die folgenden:

- Welche weiteren Problemstellungen neben dem Workshopzuteilungsproblem können von einem Tauschmarkt profitieren? Es gibt eine Reihe weiterer Problemstellungen, die Zuteilungen basierend auf Präferenzangaben erzeugen. Sehr interessant wäre die Einführung eines Tauschmarkts für das National Intern Matching Program (siehe Abschnitt 3.3). Hier wurde berichtet, dass die letzte Version des Algorithmus vor allem von verheirateten Paaren nicht akzeptiert wurde, die gerne örtlich benachbarte Praktikumsplätze haben wollten. Auch hier geht es also um Präferenzen, die abhängig sind von den a priori unbekanntenen Präferenzen der anderen Studenten und der Krankenhäuser. Aufbauend auf einer Formulierung der Zuteilung als lineares Optimierungsproblem könnte das Ergebnis entweder durch einen Tauschmarkt weiter optimiert werden oder die Wünsche der verheirateten Paare könnten durch die Einführung weiterer Nebenbedingungen in die Problemstellung integriert werden.

Eventuell wäre ein Tauschmarkt auch anwendbar für bestimmte Formulierungen des Stundenplanproblems (siehe Abschnitt 3.1), bei denen beispielsweise Präferenzangaben von Seiten der Lehrenden abgegeben werden können. Diese Präferenzen können sich beispielsweise im Fall der Prüfungsplanung auf Prüfungen an bestimmten Tagen oder zu bestimmten Uhrzeiten beziehen. Auch diese Präferenzen können abhängig sein von denen der anderen Professoren, z.B. bei verheirateten Professoren oder Abhängigkeiten wegen gemeinsamer Projekte. Weiterhin ließe sich das Prinzip der Nebenbedingungen zur Pareto-Erhaltung von modifizierten Problemlösungen sicher auf andere Anwendungsfelder übertragen, bei denen eine nachträgliche Verbesserung einer initialen Problemlösung sinnvoll ist.

Die linearen Nebenbedingungen zur Pareto-Erhaltung können auch unabhängig von einem Tauschmarkt in Situationen eingesetzt werden, in denen die Verbesserung einer initialen Lösung gefordert wird. Im Prinzip geht dies bei allen Problemstellungen, die eine Allokation mit gewissen Auszahlungsvektoren als Ergebnis erzeugen.

- Die Frage, ob der so definierte Tauschmarkt basierend auf den Schattenpreisen tatsächlich ausreichend verständlich ist und von den Teilnehmern akzeptiert wird, könnte in Experimenten untersucht werden. Solche Experimente könnten auch weitere Erkenntnisse ergeben bezüglich der Annahmen des Anteils von abgekehrten Teilnehmern, Freunden etc. und inwieweit sich diese Annahmen in der Praxis, eventuell abhängig von verschiedenen Zielgruppen von Teilnehmern, bestätigen. Auch die Feststellung des Anteils an Teilnehmern, die unwahre Präferenzen angeben, könnte evtl. experimentell untersucht werden.
- Schattenpreise waren aufgrund der Limitierung der Software nur dann vorhanden, wenn das zugrunde liegende Optimierungsproblem sich mit dem Simplex Verfahren lösen ließ. Für den Tauschmarkt wurden die Parameter daher so gewählt, dass sich der Großteil der Probleme mit dem Simplex ganzzahlig lösen ließ. Die empirischen Untersuchungen sollten aber ebenfalls mit schwereren Problemstellungen wiederholt werden, die einen Branch & Cut erfordern, um zu sehen, inwiefern die Ergebnisse und Laufzeiten davon beeinflusst werden.
- Das Optimierungsproblem des Tauschmarkts unterscheidet sich von dem des Workshopzuteilungsproblems in zusätzlichen Nebenbedingungen, die die Gültigkeit des Tausches zusichern, und einer leicht veränderten Präferenzfunktion. Eventuell ist

es möglich, basierend auf dem Ergebnis des initialen Problems das Tauschmarktproblem mit Hilfe von Sensitivitätstechniken zu lösen, so dass keine Lösung eines eigenständigen Optimierungsproblems vonnöten ist. Diese Möglichkeit wurde in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt, da der praktische Einsatz des Problems notwendig war und vorhandene Softwarepakete Sensitivitätsanalysen nicht ausreichend unterstützen.



# Literaturverzeichnis

- [AB97] Manfred Amelang and Dieter Bartussek. *Differentielle Psychologie und Persönlichkeitsforschung*. Kohlhammer, 1997.
- [ABN61] J. S. Appleby, D. V. Blake, and E. A. Newman. Techniques for producing school timetables on a computer and their application to other scheduling problems. *The Computer Journal*, 3(4):237–245, 1961.
- [AMO93] Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, and James B. Orlin. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1993.
- [AS00] E. Marian Scott Andrea Salatelli, Karen Chan, editor. *Sensitivity Analysis*. John Wiley, 2000.
- [BE00] Stefan Bach and Georg Erber. Die UMTS-Lizenzvergabe in Deutschland – Auktionsverfahren unbefriedigend. *Wochenbericht des Deutschen Instituts für Wirtschaftsforschung (DIW) Berlin*, 30, 2000.
- [BEG02] Siegfried K. Berninghaus, Karl-Martin Ehrhart, and Werner Güth. *Strategische Spiele : Eine Einführung in die Spieltheorie*. Springer, Berlin, 2002.
- [BG86] Harold W. Berkman and Christopher C. Gilson. *Consumer Behavior: Concepts and Strategies*. Kent Publ. Co., Boston, Mass., 3 edition, 1986.
- [Bla77] Robert G. Bland. New finite pivoting rules for the simplex method. *Mathematics of Operations Research*, 2(2):103–107, May 1977.
- [BT96] Steven J. Brams and Alan D. Taylor. *Fair Division : From Cake-Cutting to Dispute Resolution*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [CCPS98] William J. Cook, William H. Cunningham, William R. Pulleyblank, and Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [CJ05] Olivier Compte and Philippe Jehiel. Auctions and information acquisition: Sealed-bid or dynamic formats? Technical Report Levine’s Biblio, UCLA Department of Economics, Oct 2005.
- [Coh67] Joel B. Cohen. An interpersonal orientation to the study of consumer behavior. *Journal of Marketing Research*, 4(3):270–278, Aug 1967.

- [Coh68] Joel B. Cohen. Toward an interpersonal theory of consumer behavior. *California Management Review*, 10(3):73–81, 1968.
- [Dan51] G. B. Dantzig. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In T. C. Koopmans, editor, *Activity Analysis of Production and Allocation*, pages 339–347. Wiley, New York, 1951.
- [DMM97] Mauro Dell’Amico, Francesco Maffioli, and Silvano Martello, editors. *Annotated bibliographies in combinatorial optimization*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [DOW55] Dantzig, Orden, and Wolfe. The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. *Pacific Journal of Mathematics*, 5:183–195, 1955.
- [dW71] D. de Werra. Construction of school timetables by flow methods. *INFOR – Information Systems and Operations Research*, 9(1):12 – 22, Mar 1971.
- [dW85] D. de Werra. An introduction to timetable research. *European Journal of Operational Research*, 19:151 – 162, 1985.
- [EIS76] S. Even, A. Itai, and A. Shamir. On the complexity of timetabling and multicommodity flow problems. *SIAM Journal On Computing*, 5(4):691–703, 1976.
- [EW88] Richard Engelbrecht-Wiggans. On a possible benefit to bid takers from using multi-stage auctions. *Management Science*, 34(9):1109–1120, Sep 1988.
- [FMS99] Yuzo Fujishima, David McAdams, and Yoav Shoham. Speeding up ascending-bid auctions. In Thomas Dean, editor, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 554–563, San Francisco, CA, USA, 1999. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- [GH62] A. Ghouila-Houri. Caractérisation des matrices totalement unimodulaires. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l’Académie des Sciences*, 254:1192–1194, 1962.
- [Gol95] Michael Goldwasser. A survey of linear programming in randomized subexponential time. *SIGACT News*, 26(2):96–104, 1995.
- [Got63] C.C. Gotlieb. The construction of class-teacher timetables. In C.M. Poppelwell, editor, *Proceedings of the IFIP congress 1962*, pages 73–77. North-Holland, 1963.
- [GST04] Andreas Geyer-Schulz and Anke Thede. A two-phase grammar-based genetic algorithm for a workshop scheduling problem. In Daniel Baier and Klaus-Dieter Wernecke, editors, *Innovations in Classification, Data Science, and Information Systems*, volume 26 of *Studies in Classification, Data Analysis, and Knowledge Organization*, pages 535–543. Springer-Verlag Heidelberg Berlin, 2004.
- [Güt99] Werner Güth. *Spieltheorie und ökonomische (Bei)Spiele*. Springer, Berlin, 2 edition, 1999.

- [Hay45] Friedrich A. Hayek. The use of knowledge in society. *The American Economic Review*, 35(4):519–530, Sep 1945.
- [HK56] A. J. Hoffmann and J. B. Kruskal. Integral boundary points of convex polyhedra. In Harold William Kuhn, editor, *Linear Inequalities and Related Systems*, volume 38 of *Annals of mathematics studies*, pages 223 – 246. Princeton University Press, 1956.
- [HL01] Frederick S. Hillier and Gerald J. Liebermann. *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, New York, 7 edition, 2001.
- [Hol98] Charles Holt. Industrial organization: A survey of laboratory research. In *The Handbook of Experimental Economics*, chapter 5, pages 349–443. Princeton University Press, 1998.
- [Hor45] Karen Horney. *Our Inner Conflicts*. W.W. Norton & Company Ltd, Dec 1945.
- [Hur72] Leonid Hurwicz. On informationally decentralized systems. In C. B. McGuire and Roy Radner, editors, *Decision and Organization – A Volume in Honor of Jacob Marschak*, volume 12 of *Studies in Mathematical and Managerial Economics*, chapter 14, pages 297 – 336. North-Holland, 1972.
- [Hur73] Leonid Hurwicz. The design of mechanisms for resource allocation. *The American Economic Review*, 63(2):1–30, May 1973.
- [JB80] Paul A. Jensen and J. Wesley Barnes. *Network Flow Programming*. John Wiley & Sons, Inc., 1980.
- [JG98] Kerryn Jackson and Mark Gabbott. The CAD scale revisited: Validation and refinement. In Brendan J Gray and Kenneth R Deans, editors, *Australian and New Zealand Marketing Academy*, pages 1047 – 1060. University of Otago, 1998.
- [Kar84] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.
- [KL65] J. Kornai and T. Liptak. Two-level planning. *Econometrica*, 33(1):141–169, Jan 1965.
- [KL86] John H. Kagel and Dan Levin. The winner’s curse and public information in common value auctions. *American Economic Review*, 76(5):894–920, Dec 1986.
- [Kle99] Paul Klemperer. Auction theory: A guide to the literature. *Journal of Economics Surveys*, 13(3):227–286, Jul 1999.
- [Kle04] Paul Klemperer. *Auctions: Theory and Practice*. Toulouse Lectures in Economics. Princeton University Press, Mar 2004.
- [KM72] V. Klee and G. J. Minty. How good is the simplex algorithm? In Oved Shisha, editor, *Inequalities III*, pages 159–175, New York; London, 1972. Academic Press.

- [Kot00] Philip Kotler. *Marketing Management: Millennium Edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 10 edition, 2000.
- [KV02] Bernhard Korte and Jens Vygen. *Combinatorial Optimization : Theory and Algorithms*. Springer, Berlin, 2002.
- [LD60] A. H. Land and A. G. Doig. An automatic method of solving discrete programming problems. *Econometrica*, 28:497–520, 1960.
- [MM87] R. Preston McAfee and John McMillian. Auctions and bidding. *Journal of Economic Literature*, 25(2):699 – 738, Jun 1987.
- [MR92] Paul Milgrom and John Roberts. *Economics, Organisation and Management*. Prentice Hall, 1992.
- [MW82] Paul R. Milgrom and Robert J. Weber. A theory of auctions and competitive bidding. *Econometrica*, 50(5):1089–1122, Sep 1982.
- [Mye81] Roger B. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1):58–73, Feb 1981.
- [Mye97] Roger B. Myerson. *Game Theory*. Harvard University Press, London, 3 edition, 1997.
- [NW99] George L. Nemhauser and Laurence A. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley Interscience. John Wiley and Sons, New York, 1 edition, 1999.
- [Pau01] M. C. Paunonen, S. V. & Ashton. Big five factors and facets and the prediction of behavior. *Journal of Personality and Social Psychology*, 81(3):524–539, 2001.
- [Pau03] Sampo V. Paunonen. Big five factors of personality and replicated predictions of behavior. *Journal of Personality and Social Psychology*, 84(2):411–424, 2003.
- [PR91] G. Padberg and M. Rinaldi. A branch-and-cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 33(1):60–100, Jan 1991.
- [PR02] Panos M. Pardalos and Mauricio G. C. Resende, editors. *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press, 2002.
- [PWZ00] Motty Perry, Elmar Wolfstetter, and Shmuel Zamir. A sealed-bid auction that matches the english auction. *Games and Economic Behavior*, 33:265–273, 2000.
- [Ras90] Eric Rasmusen. *Games and Information : An Introduction to Game Theory*. Basil Blackwell, Oxford, Cambridge, 1990.
- [Ros57] Morris Rosenberg. *Occupations and Values*. Glencoe, Ill. Free Press, 1957.

- [Rot84] Alvin E. Roth. The evolution of the labor market for medical interns and residents: A case study in game theory. *Journal of Political Economy*, 92(6):991–1016, Dec 1984.
- [Rot90] Alvin E. Roth. New physicians: A natural experiment in market organization. *Science, New Series*, 250(4987):1524–1528, Dec 1990.
- [Rot91] Alvin E. Roth. A natural experiment in the organization of entry-level labor markets: Regional markets for new physicians and surgeons in the united kingdom. *American Economic Review*, 81(3):415–440, Jun 1991.
- [RS99] Alvin E. Roth and Marilda A. Oliveira Sotomayor. *Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis*, volume 18 of *Econometric Society Monographs*. Cambridge University Press, 1999.
- [Sch99] A. Schaerf. A survey of automated timetabling. *Artificial Intelligence Review*, 13(2):87 – 127, Apr 1999.
- [Sey80] P.D. Seymour. Decomposition of regular matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 28:305–359, 1980.
- [ST04] Daniel A. Spielman and Shang-Hua Teng. Smoothed analysis of algorithms: Why the simplex algorithm usually takes polynomial time. *Journal of the ACM*, 51(3):385 – 463, May 2004.
- [Vic61] William Vickrey. Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. *The Journal of Finance*, 16(1):8–37, Mar 1961.
- [Ye06] Lixin Ye. Indicative bidding and a theory of two-stage auctions. *Games and Economic Behavior*, im Druck, 2006.

# Anhang A

## Ergebnisse der Simulation der abgekehrten Teilnehmer

Die Bedeutung der Tabellenspalten von Tab. A.1 bis A.7 sind die folgenden:

**#det** Anzahl der abgekehrten (detached) Teilnehmer

**#ws** Anzahl der Workshops, die von den abgekehrten Teilnehmern insgesamt belegt wurden

**sof.** Anzahl der Tauschangebote, die sofort erfüllt werden konnten

**spä.** Anzahl der Tauschangebote, die zu einem späteren Zeitpunkt erfüllt werden konnten, also nachdem weitere Tauschangebote hinzu kamen

**übr.** Anzahl der Tauschangebote, die nicht erfüllt werden konnten und auf dem Markt verblieben

**kT.** Anzahl der Workshops, für die kein Tauschpartner gefunden werden konnte (wegen Struktur der Schattenpreise der vom Teilnehmer präferierten Workshops, der zeitlichen Struktur und Inkompatibilität etc.)

**#SP0** Anzahl der Workshops vorher (jeweils erste Zeile) und nachher (jeweils zweite Zeile) der abgekehrten Teilnehmer mit Schattenpreis 0

$\emptyset$  **SP** Durchschnittlicher Schattenpreis über alle Workshops der abgekehrten Teilnehmer (vorher und nachher)

$\sigma$  **SP** Standardabweichung der Schattenpreise über alle Workshops der abgekehrten Teilnehmer (vorher und nachher)

**obj-val.** Zielfunktionswert (Summe der Bewertungen über alle Teilnehmer) vorher und nachher

**and.** absolute Veränderung des Zielfunktionswerts für alle anderen Teilnehmer, die also nicht zur Gruppe der abgekehrten gehören (und dementsprechend auch keine Tauschangebote abgegeben haben)

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0      | $\varnothing$ SP | $\sigma$ SP  | obj-val.       | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|-----------|------------------|--------------|----------------|------|
| 47        | 518       | 155  | 155 | 39   | 14   | 16   | 6   | 80<br>138 | 1.92<br>1.43     | 0.24<br>0.37 | 13100<br>13267 | 153  |
| 42        | 459       | 136  | 136 | 29   | 15   | 6    | 14  | 72<br>112 | 3.29<br>4.03     | 0.39<br>0.76 | 11150<br>11355 | 139  |
| 39        | 404       | 121  | 121 | 41   | 11   | 1    | 1   | 57<br>112 | 2.95<br>1.25     | 0.35<br>0.40 | 10013<br>10263 | 165  |
| 41        | 450       | 135  | 135 | 49   | 23   | 2    | 0   | 65<br>132 | 3.21<br>0.37     | 0.37<br>0.22 | 10883<br>11187 | 178  |
| 53        | 546       | 163  | 163 | 64   | 33   | 8    | 16  | 53<br>114 | 5.20<br>6.53     | 0.37<br>0.84 | 13087<br>13588 | 358  |
| 31        | 308       | 92   | 92  | 26   | 5    | 1    | 1   | 54<br>91  | 3.16<br>0.15     | 0.43<br>0.15 | 7618<br>7797   | 125  |
| 36        | 385       | 115  | 115 | 28   | 9    | 1    | 0   | 68<br>114 | 2.57<br>0.17     | 0.35<br>0.16 | 9662<br>9807   | 112  |
| 48        | 535       | 160  | 160 | 66   | 35   | 5    | 4   | 61<br>131 | 4.34<br>3.46     | 0.35<br>0.63 | 13118<br>13490 | 275  |
| 38        | 407       | 122  | 122 | 31   | 7    | 2    | 0   | 89<br>122 | 1.57<br>0        | 0.27<br>0    | 10192<br>10337 | 105  |
| 50        | 488       | 146  | 146 | 51   | 19   | 6    | 2   | 60<br>130 | 3.88<br>2.00     | 0.36<br>0.54 | 11757<br>12078 | 239  |
| 39        | 393       | 117  | 117 | 43   | 11   | 0    | 0   | 64<br>112 | 2.66<br>0.64     | 0.31<br>0.28 | 9910<br>10120  | 161  |
| 30        | 296       | 88   | 88  | 28   | 17   | 2    | 2   | 37<br>84  | 4.25<br>0.74     | 0.47<br>0.40 | 7182<br>7352   | 113  |
| 46        | 476       | 142  | 142 | 60   | 22   | 7    | 1   | 65<br>126 | 3.70<br>1.46     | 0.35<br>0.41 | 11774<br>12152 | 271  |
| 47        | 548       | 164  | 164 | 41   | 10   | 2    | 0   | 89<br>164 | 1.91<br>0.00     | 0.24<br>0.00 | 13801<br>14024 | 138  |
| 38        | 370       | 111  | 111 | 31   | 9    | 2    | 0   | 65<br>111 | 1.88<br>0.00     | 0.28<br>0.00 | 9321<br>9466   | 110  |
| 52        | 561       | 168  | 168 | 66   | 17   | 0    | 2   | 80<br>159 | 3.83<br>0.89     | 0.34<br>0.30 | 13571<br>14036 | 302  |
| 41        | 420       | 126  | 126 | 39   | 12   | 2    | 0   | 67<br>125 | 2.47<br>0.11     | 0.30<br>0.11 | 10395<br>10600 | 167  |
| 56        | 604       | 181  | 181 | 70   | 30   | 3    | 1   | 78<br>174 | 2.91<br>0.67     | 0.27<br>0.26 | 15035<br>15332 | 214  |
| 48        | 540       | 162  | 162 | 46   | 22   | 2    | 0   | 96<br>160 | 2.77<br>0.16     | 0.28<br>0.11 | 13433<br>13692 | 209  |

Tabelle A.1: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 2$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0      | $\varnothing$ SP | $\sigma$ SP  | obj-val.       | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|-----------|------------------|--------------|----------------|------|
| 47        | 342       | 102  | 134 | 46   | 5    | 8    | 13  | 79<br>105 | 2.98<br>0.97     | 0.34<br>0.23 | 11098<br>11290 | 141  |
| 51        | 412       | 123  | 166 | 38   | 10   | 13   | 29  | 75<br>125 | 2.18<br>0.86     | 0.22<br>0.15 | 12932<br>12993 | 66   |
| 34        | 244       | 73   | 94  | 34   | 3    | 9    | 6   | 44<br>74  | 3.57<br>0.76     | 0.40<br>0.27 | 7750<br>7827   | 41   |
| 36        | 345       | 103  | 131 | 48   | 11   | 11   | 12  | 69<br>98  | 2.76<br>0.39     | 0.29<br>0.10 | 10799<br>10869 | 55   |
| 37        | 288       | 86   | 117 | 32   | 9    | 15   | 19  | 57<br>90  | 3.18<br>0.85     | 0.36<br>0.24 | 9249<br>9363   | 100  |
| 41        | 315       | 94   | 129 | 25   | 2    | 19   | 23  | 56<br>91  | 3.81<br>1.50     | 0.36<br>0.28 | 9651<br>9742   | 80   |
| 43        | 295       | 88   | 126 | 42   | 10   | 8    | 10  | 65<br>108 | 1.77<br>0.33     | 0.24<br>0.11 | 9997<br>10070  | 59   |
| 31        | 235       | 70   | 95  | 17   | 8    | 6    | 19  | 37<br>72  | 1.13<br>0.84     | 0.46<br>0.22 | 7212<br>7200   | 7    |
| 59        | 481       | 144  | 192 | 54   | 20   | 19   | 27  | 89<br>139 | 0.71<br>0.57     | 0.10<br>0.12 | 15124<br>15103 | 0    |
| 44        | 315       | 94   | 123 | 32   | 20   | 7    | 23  | 70<br>76  | 2.06<br>1.84     | 0.35<br>0.38 | 9620<br>9602   | 5    |
| 39        | 334       | 100  | 128 | 30   | 19   | 4    | 12  | 78<br>99  | 1.33<br>0.83     | 0.28<br>0.24 | 10630<br>10626 | 9    |
| 48        | 426       | 127  | 163 | 44   | 16   | 10   | 27  | 90<br>128 | 1.97<br>1.52     | 0.37<br>0.37 | 12706<br>12706 | 14   |
| 47        | 366       | 109  | 141 | 44   | 8    | 7    | 16  | 75<br>116 | 2.68<br>0.38     | 0.28<br>0.09 | 11453<br>11578 | 105  |

Tabelle A.2: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 3$



| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0       | $\varnothing$ SP | $\sigma$ SP  | obj-val.       | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|------------|------------------|--------------|----------------|------|
| 42        | 310       | 93   | 127 | 26   | 5    | 15   | 26  | 68<br>75   | 3.01<br>4.02     | 0.36<br>0.55 | 9615<br>9700   | 72   |
| 41        | 356       | 106  | 133 | 52   | 10   | 8    | 14  | 65<br>103  | 2.04<br>0.27     | 0.22<br>0.06 | 11231<br>11282 | 55   |
| 49        | 450       | 135  | 182 | 42   | 25   | 19   | 27  | 96<br>135  | 1.44<br>0.80     | 0.20<br>0.16 | 13941<br>13925 | 7    |
| 30        | 262       | 78   | 107 | 22   | 12   | 9    | 20  | 48<br>74   | 0.55<br>0.31     | 0.05<br>0.04 | 8424<br>8424   | 0    |
| 48        | 389       | 116  | 154 | 52   | 15   | 18   | 20  | 71<br>104  | 3.01<br>0.52     | 0.27<br>0.10 | 12259<br>12321 | 53   |
| 39        | 284       | 85   | 111 | 27   | 12   | 6    | 16  | 72<br>90   | 1.59<br>0.71     | 0.27<br>0.20 | 9102<br>9092   | 9    |
| 49        | 405       | 121  | 153 | 23   | 12   | 11   | 8   | 105<br>141 | 0.39<br>0.16     | 0.07<br>0.07 | 13071<br>13078 | 0    |
| 53        | 399       | 119  | 167 | 38   | 16   | 16   | 34  | 82<br>113  | 1.44<br>1.33     | 0.24<br>0.25 | 12542<br>12550 | 0    |
| 42        | 320       | 96   | 132 | 42   | 6    | 12   | 32  | 50<br>78   | 5.05<br>2.81     | 0.39<br>0.38 | 10102<br>10255 | 68   |
| 59        | 423       | 126  | 168 | 46   | 7    | 21   | 26  | 85<br>125  | 3.07<br>1.08     | 0.29<br>0.21 | 13513<br>13676 | 117  |
| 31        | 271       | 81   | 105 | 32   | 7    | 19   | 9   | 60<br>68   | 0.43<br>0.35     | 0.05<br>0.05 | 8832<br>8833   | 0    |
| 58        | 425       | 127  | 181 | 47   | 19   | 8    | 34  | 102<br>136 | 1.38<br>0.63     | 0.19<br>0.16 | 13632<br>13641 | 21   |
| 58        | 448       | 134  | 179 | 41   | 8    | 17   | 29  | 101<br>131 | 2.91<br>2.16     | 0.35<br>0.35 | 13814<br>13911 | 89   |

Tabelle A.3: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 4$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0       | $\varnothing$ SP | $\sigma$ SP  | obj-val.       | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|------------|------------------|--------------|----------------|------|
| 47        | 386       | 85   | 118 | 45   | 14   | 11   | 28  | 16<br>102  | 1.25<br>0.14     | 0.10<br>0.03 | 12746<br>12764 | 0    |
| 32        | 294       | 88   | 118 | 33   | 23   | 13   | 16  | 65<br>78   | 0.45<br>0.39     | 0.05<br>0.06 | 9605<br>9588   | 0    |
| 52        | 338       | 101  | 171 | 57   | 10   | 12   | 24  | 73<br>123  | 3.41<br>1.92     | 0.28<br>0.32 | 12528<br>12711 | 143  |
| 40        | 305       | 91   | 120 | 43   | 14   | 9    | 12  | 63<br>102  | 2.39<br>0.35     | 0.27<br>0.12 | 10020<br>10111 | 79   |
| 54        | 345       | 103  | 171 | 32   | 13   | 14   | 39  | 99<br>109  | 1.36<br>0.91     | 0.18<br>0.18 | 12270<br>12250 | 21   |
| 42        | 321       | 96   | 123 | 44   | 9    | 9    | 15  | 73<br>96   | 1.99<br>0.32     | 0.26<br>0.09 | 10438<br>10493 | 36   |
| 58        | 386       | 115  | 187 | 64   | 22   | 15   | 31  | 77<br>130  | 3.28<br>0.99     | 0.25<br>0.16 | 14252<br>14398 | 93   |
| 31        | 220       | 66   | 89  | 22   | 10   | 6    | 3   | 50<br>76   | 0.44<br>0.15     | 0.05<br>0.04 | 7212<br>7240   | 0    |
| 38        | 235       | 70   | 117 | 7    | 1    | 10   | 38  | 62<br>74   | 4.11<br>3.76     | 0.57<br>0.58 | 8501<br>8506   | 9    |
| 47        | 382       | 114  | 146 | 41   | 9    | 17   | 19  | 88<br>101  | 2.14<br>0.99     | 0.26<br>0.21 | 12318<br>12357 | 33   |
| 54        | 467       | 140  | 189 | 64   | 11   | 15   | 18  | 78<br>155  | 2.56<br>1.07     | 0.23<br>0.28 | 15382<br>15565 | 131  |
| 44        | 277       | 83   | 146 | 34   | 11   | 15   | 19  | 70<br>112  | 2.10<br>0.95     | 0.24<br>0.21 | 10268<br>10310 | 53   |
| 58        | 389       | 116  | 188 | 32   | 17   | 7    | 39  | 103<br>134 | 2.09<br>0.91     | 0.25<br>0.18 | 13974<br>13986 | 47   |
| 30        | 251       | 75   | 103 | 42   | 7    | 10   | 5   | 58<br>90   | 1.14<br>0.36     | 0.20<br>0.13 | 8375<br>8456   | 33   |
| 40        | 287       | 86   | 121 | 27   | 7    | 8    | 11  | 74<br>103  | 1.74<br>0.20     | 0.21<br>0.06 | 9711<br>9735   | 13   |

Tabelle A.4: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 5$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0      | $\emptyset$ SP | $\sigma$ SP  | obj-val.       | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|-----------|----------------|--------------|----------------|------|
| 58        | 437       | 131  | 159 | 51   | 3    | 6    | 19  | 79<br>118 | 3.47<br>0.62   | 0.29<br>0.14 | 14040<br>14191 | 97   |
| 51        | 326       | 97   | 162 | 58   | 12   | 14   | 15  | 74<br>116 | 1.26<br>0.57   | 0.18<br>0.12 | 12703<br>12800 | 70   |
| 43        | 306       | 91   | 127 | 19   | 7    | 14   | 11  | 91<br>101 | 0.93<br>0.58   | 0.18<br>0.15 | 10408<br>10436 | 14   |
| 31        | 208       | 62   | 97  | 31   | 2    | 5    | 17  | 41<br>74  | 3.55<br>1.59   | 0.41<br>0.36 | 7721<br>7843   | 74   |
| 60        | 415       | 124  | 198 | 69   | 13   | 18   | 19  | 94<br>141 | 2.67<br>0.69   | 0.23<br>0.15 | 16105<br>16251 | 103  |
| 60        | 343       | 102  | 160 | 41   | 14   | 12   | 16  | 90<br>125 | 1.68<br>0.69   | 0.24<br>0.17 | 13155<br>13201 | 55   |
| 38        | 283       | 84   | 111 | 42   | 8    | 6    | 7   | 56<br>90  | 1.63<br>0.45   | 0.21<br>0.15 | 9287<br>9305   | 22   |
| 39        | 274       | 82   | 141 | 19   | 2    | 8    | 32  | 79<br>100 | 2.84<br>2.48   | 0.39<br>0.44 | 9680<br>9716   | 34   |
| 39        | 245       | 73   | 117 | 42   | 13   | 7    | 18  | 61<br>87  | 2.29<br>0.51   | 0.26<br>0.13 | 8806<br>8817   | 21   |
| 53        | 314       | 94   | 153 | 39   | 11   | 12   | 23  | 77<br>110 | 2.34<br>1.39   | 0.29<br>0.28 | 11317<br>11379 | 52   |
| 42        | 264       | 79   | 149 | 52   | 7    | 9    | 25  | 54<br>113 | 3.40<br>0.81   | 0.26<br>0.20 | 10417<br>10437 | 35   |
| 40        | 255       | 76   | 111 | 28   | 11   | 10   | 13  | 49<br>76  | 2.11<br>0.64   | 0.23<br>0.15 | 9309<br>9364   | 29   |
| 39        | 267       | 80   | 122 | 41   | 4    | 12   | 14  | 45<br>94  | 3.75<br>1.12   | 0.37<br>0.28 | 9890<br>9993   | 72   |

Tabelle A.5: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 6$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0       | $\varnothing$ SP | $\sigma$ SP  | obj-val.       | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|------------|------------------|--------------|----------------|------|
| 48        | 292       | 84   | 131 | 26   | 13   | 2    | 24  | 66<br>103  | 0.63<br>0.26     | 0.10<br>0.06 | 11305<br>11304 | 14   |
| 54        | 341       | 102  | 162 | 52   | 14   | 15   | 13  | 70<br>130  | 2.65<br>0.78     | 0.24<br>0.17 | 13120<br>13239 | 106  |
| 60        | 387       | 116  | 188 | 31   | 26   | 13   | 23  | 98<br>142  | 2.15<br>1.22     | 0.24<br>0.24 | 14191<br>14330 | 104  |
| 34        | 242       | 72   | 117 | 49   | 5    | 5    | 14  | 41<br>95   | 4.09<br>0.72     | 0.37<br>0.22 | 9132<br>9228   | 67   |
| 58        | 361       | 108  | 166 | 37   | 26   | 15   | 6   | 103<br>125 | 0.61<br>0.35     | 0.10<br>0.09 | 13815<br>13843 | 12   |
| 46        | 287       | 86   | 150 | 32   | 12   | 12   | 10  | 103<br>123 | 0.59<br>0.43     | 0.12<br>0.13 | 11040<br>11056 | 9    |
| 49        | 340       | 102  | 161 | 35   | 9    | 18   | 11  | 92<br>124  | 2.58<br>0.79     | 0.26<br>0.17 | 12884<br>12959 | 59   |
| 48        | 290       | 87   | 142 | 51   | 7    | 8    | 7   | 71<br>120  | 2.84<br>0.85     | 0.30<br>0.21 | 10641<br>10810 | 112  |
| 31        | 235       | 70   | 110 | 20   | 3    | 4    | 18  | 78<br>90   | 1.17<br>0.55     | 0.22<br>0.18 | 8646<br>8635   | 0    |
| 57        | 386       | 115  | 196 | 52   | 14   | 19   | 21  | 99<br>165  | 1.95<br>0.78     | 0.21<br>0.17 | 14797<br>14889 | 61   |
| 42        | 289       | 86   | 143 | 39   | 9    | 5    | 11  | 103<br>108 | 0.92<br>0.34     | 0.17<br>0.10 | 11513<br>11572 | 23   |
| 41        | 249       | 74   | 123 | 31   | 7    | 12   | 15  | 78<br>80   | 1.88<br>0.99     | 0.26<br>0.18 | 9197<br>9256   | 52   |
| 57        | 278       | 83   | 176 | 27   | 7    | 13   | 50  | 66<br>122  | 3.97<br>3.32     | 0.42<br>0.46 | 11361<br>11378 | 29   |

Tabelle A.6: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 7$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #det | #ws | sof. | spä. | übr. | kT. | #SP0 | $\varnothing$ SP | $\sigma$ SP | obj-val. | and. |
|-----------|-----------|------|-----|------|------|------|-----|------|------------------|-------------|----------|------|
| 50        | 272       | 81   | 165 | 36   | 1    | 18   | 33  | 69   | 2.68             | 0.26        | 11706    | 43   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 125  | 0.94             | 0.20        | 11791    |      |
| 38        | 220       | 66   | 113 | 21   | 9    | 9    | 17  | 75   | 1.88             | 0.33        | 8543     | 10   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 92   | 1.51             | 0.34        | 8570     |      |
| 51        | 275       | 82   | 128 | 36   | 10   | 15   | 9   | 66   | 2.17             | 0.24        | 10677    | 35   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 103  | 0.48             | 0.15        | 10721    |      |
| 55        | 344       | 103  | 177 | 66   | 9    | 7    | 31  | 63   | 3.46             | 0.26        | 13139    | 203  |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 140  | 0.84             | 0.16        | 13398    |      |
| 37        | 192       | 57   | 111 | 15   | 2    | 10   | 20  | 59   | 2.70             | 0.35        | 7770     | 23   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 75   | 1.08             | 0.25        | 7805     |      |
| 44        | 292       | 87   | 149 | 46   | 12   | 9    | 20  | 71   | 2.62             | 0.30        | 11429    | 74   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 120  | 0.98             | 0.21        | 11545    |      |
| 33        | 166       | 49   | 83  | 16   | 6    | 10   | 11  | 38   | 3.25             | 0.44        | 6800     | 39   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 56   | 1.64             | 0.36        | 6834     |      |
| 48        | 254       | 76   | 130 | 33   | 8    | 10   | 12  | 74   | 1.49             | 0.25        | 10290    | 31   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 107  | 0.87             | 0.23        | 10323    |      |
| 43        | 233       | 69   | 128 | 21   | 2    | 4    | 22  | 86   | 1.31             | 0.22        | 9141     | 59   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 105  | 0.91             | 0.23        | 9209     |      |
| 49        | 262       | 78   | 160 | 39   | 12   | 15   | 28  | 64   | 3.50             | 0.28        | 10577    | 74   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 95   | 1.66             | 0.24        | 10623    |      |
| 60        | 298       | 89   | 180 | 29   | 6    | 22   | 39  | 74   | 2.23             | 0.22        | 12727    | 44   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 113  | 1.51             | 0.24        | 12773    |      |
| 48        | 253       | 75   | 143 | 25   | 4    | 18   | 24  | 82   | 2.91             | 0.32        | 10911    | 94   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 100  | 1.90             | 0.30        | 11022    |      |
| 30        | 207       | 62   | 105 | 25   | 10   | 7    | 14  | 86   | 1.32             | 0.28        | 8011     | 46   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 95   | 0.61             | 0.20        | 8069     |      |
| 51        | 270       | 81   | 148 | 37   | 9    | 5    | 17  | 89   | 2.43             | 0.32        | 11103    | 85   |
|           |           |      |     |      |      |      |     | 118  | 1.41             | 0.31        | 11196    |      |

Tabelle A.7: Ergebnisse der Simulation der Abgekehrten für  $t_{max} = 8$

# Anhang B

## Ergebnisse der Simulation der Freunde

Die Bedeutung der Tabellenspalten von Tab. B.1 bis B.7 sind die folgenden:

**#Fr:** Anzahl der Freundespaare

**Ma alle/Ma übr.:** Anzahl der gesamten Tauschangebote auf dem Markt durch Freundespaare bzw. der nach der Simulation übrigen, also nicht erfüllten Tauschangebote

**OV vorh./ OV nach.:** Zielfunktionswert vor bzw. nach der zweiten Stufe

→: Anzahl der Paare, die sowohl vor als auch nach der zweiten Stufe nur gemeinsame Workshops besuchen (Situation gleichbleibend gut).

↘: Anzahl der Paare, die vor der zweiten Stufe nur gemeinsame Workshops besuchen, am Ende der zweiten Stufe aber mindestens einen unterschiedlichen (Situation verschlechtert).

↗: Anzahl der Paare, die vor der zweiten Stufe mindestens einen verschiedenen Workshop, nach der zweiten Stufe aber nur noch gemeinsame Workshops besuchen (Situation verbessert).

←: Anzahl der Paare, die sowohl vor als auch nach der zweiten Stufe mindestens einen verschiedenen Workshop besuchen (Situation gleichbleibend schlecht).

**#WS vorh./nach.:** Anzahl der Workshoppaare aller Freunde insgesamt, die vor bzw. nach der zweiten Stufe unterschiedlich sind.

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗ | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|---|---|--------------|--------------|
| 53        | 508       | 76  | 18         | 8          | 12205       | 12322       | 67 | 0 | 3 | 6 | 9            | 6            |
| 45        | 466       | 70  | 9          | 0          | 11548       | 11640       | 63 | 0 | 7 | 0 | 7            | 0            |
| 45        | 499       | 75  | 9          | 2          | 12328       | 12440       | 66 | 0 | 7 | 2 | 9            | 2            |
| 54        | 561       | 84  | 25         | 4          | 13890       | 13923       | 75 | 0 | 5 | 4 | 9            | 4            |
| 56        | 541       | 81  | 8          | 2          | 13604       | 13656       | 74 | 0 | 5 | 2 | 7            | 2            |
| 32        | 360       | 54  | 3          | 1          | 8839        | 8858        | 51 | 0 | 2 | 1 | 3            | 1            |
| 55        | 587       | 88  | 14         | 4          | 14609       | 14670       | 77 | 0 | 7 | 4 | 11           | 4            |
| 36        | 399       | 60  | 7          | 2          | 10068       | 10108       | 54 | 0 | 4 | 2 | 6            | 2            |
| 38        | 415       | 62  | 9          | 2          | 10411       | 10425       | 57 | 0 | 2 | 3 | 5            | 3            |
| 55        | 565       | 85  | 8          | 3          | 14085       | 14111       | 80 | 0 | 2 | 3 | 5            | 3            |
| 60        | 609       | 91  | 11         | 3          | 15083       | 15178       | 81 | 0 | 6 | 4 | 10           | 4            |
| 41        | 420       | 63  | 7          | 3          | 10631       | 10669       | 58 | 0 | 2 | 3 | 5            | 3            |
| 34        | 346       | 52  | 4          | 1          | 8635        | 8649        | 49 | 0 | 1 | 2 | 3            | 2            |
| 54        | 544       | 82  | 6          | 2          | 13440       | 13485       | 75 | 0 | 5 | 2 | 7            | 2            |

Tabelle B.1: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 2$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 53        | 406       | 61  | 10         | 0          | 13572       | 13614       | 55 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 53        | 453       | 68  | 14         | 0          | 14895       | 15322       | 58 | 0 | 10 | 0 | 11           | 0            |
| 43        | 325       | 49  | 30         | 2.5        | 10180       | 10304       | 37 | 0 | 8  | 4 | 12           | 4            |
| 36        | 287       | 43  | 4          | 0          | 9262        | 9348        | 37 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 49        | 368       | 55  | 9          | 1          | 11678       | 11836       | 44 | 0 | 8  | 3 | 11           | 3            |
| 36        | 292       | 44  | 6          | 0          | 9395        | 9449        | 41 | 0 | 3  | 0 | 3            | 0            |
| 37        | 308       | 46  | 5          | 0          | 10455       | 10553       | 40 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 40        | 287       | 43  | 36         | 1          | 9540        | 9554        | 32 | 1 | 5  | 5 | 10           | 6            |
| 35        | 306       | 46  | 13         | 0          | 9851        | 9866        | 39 | 3 | 4  | 0 | 4            | 3            |
| 36        | 256       | 38  | 9          | 0          | 8520        | 8513        | 33 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 48        | 346       | 52  | 7          | 0          | 10993       | 11015       | 46 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 44        | 346       | 52  | 11         | 0          | 11417       | 11480       | 46 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 58        | 438       | 66  | 22         | 4          | 15042       | 15102       | 56 | 2 | 7  | 1 | 8            | 3            |

Tabelle B.2: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 3$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 30        | 241       | 36  | 10         | 3.5        | 7725        | 7822        | 25 | 0 | 9  | 2 | 11           | 2            |
| 32        | 244       | 37  | 8          | 2          | 7913        | 7939        | 31 | 0 | 5  | 1 | 6            | 1            |
| 38        | 310       | 47  | 32         | 7          | 9419        | 9608        | 34 | 3 | 9  | 1 | 11           | 4            |
| 45        | 377       | 57  | 34         | 1          | 11921       | 12056       | 47 | 2 | 8  | 0 | 8            | 2            |
| 44        | 334       | 50  | 30         | 0          | 10933       | 11080       | 41 | 1 | 8  | 0 | 9            | 1            |
| 36        | 269       | 40  | 12         | 3          | 8810        | 8876        | 35 | 1 | 2  | 2 | 5            | 3            |
| 50        | 456       | 68  | 19         | 1          | 14754       | 14759       | 58 | 2 | 7  | 1 | 8            | 3            |
| 46        | 331       | 50  | 25         | 1          | 10372       | 10453       | 39 | 0 | 10 | 1 | 11           | 1            |
| 37        | 287       | 43  | 21         | 0          | 9154        | 9250        | 38 | 0 | 3  | 2 | 5            | 3            |
| 30        | 255       | 38  | 20         | 0          | 7905        | 7988        | 34 | 0 | 2  | 2 | 5            | 2            |
| 45        | 346       | 52  | 34         | 2          | 11078       | 11159       | 34 | 1 | 14 | 3 | 17           | 4            |
| 58        | 505       | 76  | 32         | 3          | 15946       | 16047       | 64 | 0 | 8  | 4 | 12           | 4            |

Tabelle B.3: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 4$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 60        | 556       | 83  | 58         | 3          | 18571       | 18625       | 64 | 1 | 16 | 2 | 18           | 3            |
| 31        | 214       | 32  | 1          | 0          | 7248        | 7269        | 30 | 0 | 2  | 0 | 2            | 0            |
| 36        | 277       | 42  | 9          | 1          | 9759        | 9839        | 36 | 1 | 3  | 2 | 5            | 3            |
| 47        | 302       | 45  | 5          | 0          | 11709       | 11789       | 41 | 1 | 3  | 0 | 3            | 1            |
| 41        | 278       | 42  | 25         | 2          | 9858        | 9985        | 32 | 2 | 6  | 2 | 8            | 4            |
| 31        | 203       | 30  | 8          | 0.5        | 7570        | 7562        | 26 | 1 | 3  | 0 | 3            | 1            |
| 54        | 395       | 59  | 19         | 0          | 13535       | 13566       | 51 | 3 | 5  | 0 | 5            | 3            |
| 32        | 216       | 32  | 18         | 1          | 8346        | 8339        | 25 | 1 | 6  | 0 | 6            | 1            |
| 39        | 338       | 51  | 30         | 1          | 10834       | 10863       | 43 | 1 | 7  | 0 | 7            | 1            |
| 36        | 228       | 34  | 6          | 1          | 8757        | 8814        | 29 | 1 | 3  | 1 | 5            | 2            |
| 36        | 243       | 36  | 10         | 1          | 9504        | 9561        | 29 | 1 | 6  | 0 | 6            | 1            |
| 54        | 423       | 63  | 13         | 2          | 14357       | 14417       | 53 | 1 | 9  | 0 | 10           | 1            |
| 51        | 431       | 65  | 33         | 4          | 14521       | 14535       | 51 | 3 | 11 | 0 | 11           | 3            |
| 36        | 233       | 35  | 18         | 3          | 8787        | 8991        | 23 | 1 | 8  | 3 | 13           | 4            |
| 33        | 193       | 29  | 12         | 1          | 7318        | 7354        | 23 | 1 | 4  | 1 | 6            | 2            |
| 44        | 357       | 54  | 6          | 0          | 11733       | 11747       | 49 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 38        | 289       | 43  | 8          | 0          | 9613        | 9667        | 34 | 0 | 8  | 1 | 9            | 1            |

Tabelle B.4: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 5$



| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 59        | 374       | 56  | 12         | 1.5        | 13992       | 14482       | 47 | 1 | 8  | 0 | 8            | 1            |
| 38        | 291       | 44  | 8          | 0          | 9813        | 9810        | 38 | 2 | 4  | 0 | 4            | 2            |
| 49        | 290       | 44  | 9          | 2          | 11677       | 11774       | 37 | 0 | 5  | 2 | 7            | 2            |
| 57        | 341       | 51  | 15         | 2          | 12811       | 12939       | 39 | 1 | 9  | 2 | 11           | 3            |
| 44        | 259       | 39  | 4          | 0          | 9914        | 9750        | 34 | 1 | 3  | 1 | 4            | 2            |
| 55        | 363       | 54  | 12         | 1          | 14044       | 14116       | 49 | 0 | 4  | 1 | 5            | 1            |
| 60        | 405       | 61  | 10         | 1          | 15530       | 15641       | 50 | 1 | 7  | 3 | 10           | 4            |
| 50        | 385       | 58  | 23         | 4          | 12889       | 12938       | 42 | 2 | 13 | 1 | 14           | 3            |
| 58        | 357       | 54  | 12         | 2          | 14188       | 14238       | 47 | 2 | 3  | 2 | 5            | 4            |
| 32        | 249       | 37  | 7          | 1          | 8293        | 8348        | 31 | 0 | 5  | 1 | 6            | 1            |
| 53        | 364       | 55  | 14         | 2.5        | 13683       | 13735       | 51 | 0 | 3  | 1 | 4            | 1            |
| 42        | 329       | 49  | 12         | 3          | 10994       | 11034       | 38 | 2 | 9  | 0 | 9            | 2            |
| 55        | 479       | 72  | 36         | 6          | 15918       | 15939       | 56 | 3 | 10 | 3 | 13           | 6            |
| 45        | 292       | 44  | 15         | 3          | 11486       | 11585       | 34 | 1 | 7  | 2 | 9            | 3            |
| 33        | 223       | 33  | 6          | 2          | 8228        | 8320        | 22 | 0 | 8  | 3 | 12           | 3            |
| 41        | 237       | 36  | 11         | 0          | 9203        | 9247        | 28 | 0 | 7  | 1 | 8            | 1            |
| 38        | 287       | 43  | 15         | 4          | 9668        | 9714        | 33 | 2 | 7  | 1 | 8            | 3            |
| 40        | 318       | 48  | 9          | 1          | 10665       | 10686       | 43 | 0 | 4  | 1 | 5            | 1            |

Tabelle B.5: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 6$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗ | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|---|---|--------------|--------------|
| 45        | 265       | 40  | 14         | 3          | 10222       | 10303       | 33 | 1 | 2 | 4 | 6            | 5            |
| 41        | 238       | 36  | 9          | 0          | 9722        | 9772        | 29 | 0 | 4 | 3 | 8            | 3            |
| 39        | 252       | 38  | 11         | 2          | 10031       | 10078       | 33 | 1 | 2 | 2 | 4            | 3            |
| 40        | 262       | 39  | 8          | 2          | 10103       | 10107       | 34 | 0 | 4 | 1 | 5            | 1            |
| 46        | 318       | 48  | 11         | 2          | 11983       | 12035       | 43 | 0 | 2 | 3 | 5            | 3            |
| 49        | 263       | 39  | 7          | 1          | 11124       | 11240       | 31 | 0 | 7 | 1 | 8            | 1            |
| 57        | 343       | 51  | 15         | 3          | 13089       | 13184       | 42 | 0 | 4 | 5 | 9            | 5            |
| 58        | 385       | 58  | 23         | 1          | 15194       | 15215       | 48 | 0 | 8 | 2 | 10           | 2            |
| 56        | 378       | 57  | 11         | 3          | 14742       | 14809       | 49 | 2 | 5 | 1 | 6            | 3            |
| 38        | 210       | 32  | 17         | 0          | 8178        | 8279        | 24 | 1 | 6 | 1 | 8            | 2            |
| 58        | 329       | 49  | 8          | 0          | 12758       | 12845       | 38 | 0 | 9 | 2 | 11           | 2            |
| 52        | 312       | 47  | 19         | 1          | 12586       | 12796       | 40 | 0 | 4 | 3 | 8            | 3            |

Tabelle B.6: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 7$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>vorh. | OV<br>nach. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|-------------|-------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 44        | 219       | 33  | 3          | 0          | 9569        | 9617        | 30 | 0 | 3  | 0 | 3            | 0            |
| 60        | 405       | 61  | 10         | 0          | 15604       | 15965       | 51 | 0 | 10 | 0 | 10           | 0            |
| 50        | 266       | 40  | 9          | 0          | 11273       | 11364       | 34 | 0 | 5  | 1 | 7            | 1            |
| 47        | 287       | 43  | 5          | 0          | 12066       | 12121       | 39 | 0 | 4  | 0 | 4            | 0            |
| 55        | 277       | 42  | 19         | 5          | 12483       | 12613       | 34 | 1 | 4  | 3 | 9            | 4            |
| 32        | 194       | 29  | 9          | 2          | 7580        | 7668        | 23 | 1 | 3  | 2 | 6            | 3            |
| 60        | 422       | 63  | 26         | 1.5        | 16547       | 16659       | 55 | 0 | 6  | 2 | 9            | 2            |
| 43        | 303       | 45  | 9          | 0          | 11358       | 11407       | 38 | 0 | 5  | 2 | 7            | 2            |
| 51        | 292       | 44  | 11         | 0          | 12436       | 12602       | 38 | 0 | 3  | 3 | 8            | 4            |
| 31        | 208       | 31  | 5          | 0          | 8429        | 8484        | 27 | 0 | 4  | 0 | 4            | 0            |
| 40        | 224       | 34  | 18         | 2          | 9483        | 9534        | 26 | 1 | 4  | 3 | 8            | 4            |
| 48        | 320       | 48  | 3          | 0          | 12374       | 12423       | 42 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 56        | 298       | 45  | 10         | 2          | 12981       | 13079       | 38 | 2 | 2  | 3 | 5            | 5            |
| 55        | 399       | 60  | 14         | 3          | 14978       | 15073       | 53 | 1 | 4  | 2 | 6            | 3            |

Tabelle B.7: Simulationsergebnisse der Freunde für  $t_{max} = 8$

# Anhang C

## Ergebnisse für Freunde mit Nebenbedingung h)

Die Bedeutung der Tabellenspalten von Tab. C.1 bis C.7 sind die folgenden:

**#Fr:** Anzahl der Freundespaare

**Ma alle/Ma übr.:** Anzahl der gesamten Tauschangebote auf dem Markt durch Freundespaare bzw. der nach der Simulation übrigen, also nicht erfüllten Tauschangebote

**OV Fre./ OV and.:** absolute Veränderung des Zielfunktionswerts für Freunde bzw. für die anderen Teilnehmer.

→: Anzahl der Paare, die sowohl vor als auch nach der zweiten Stufe nur gemeinsame Workshops besuchen (Situation gleichbleibend gut).

↘: Anzahl der Paare, die vor der zweiten Stufe nur gemeinsame Workshops besuchen, am Ende der zweiten Stufe aber mindestens einen unterschiedlichen (Situation verschlechtert).

↗: Anzahl der Paare, die vor der zweiten Stufe mindestens einen verschiedenen Workshop, nach der zweiten Stufe aber nur noch gemeinsame Workshops besuchen (Situation verbessert).

←: Anzahl der Paare, die sowohl vor als auch nach der zweiten Stufe mindestens einen verschiedenen Workshop besuchen (Situation gleichbleibend schlecht).

**#WS vorh./nach.:** Anzahl der Workshoppaare aller Freunde insgesamt, die vor bzw. nach der zweiten Stufe unterschiedlich sind.

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗ | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|---|---|--------------|--------------|
| 58        | 597       | 180 | 6          | 2          | 12         | 7          | 88 | 0 | 1 | 1 | 2            | 1            |
| 52        | 554       | 166 | 24         | 2          | 45         | 69         | 73 | 0 | 8 | 2 | 10           | 2            |
| 45        | 432       | 130 | 6          | 0          | 31         | 24         | 62 | 0 | 3 | 0 | 3            | 0            |
| 57        | 668       | 200 | 30         | 0          | 7          | 21         | 93 | 0 | 5 | 2 | 7            | 2            |
| 54        | 506       | 152 | 22         | 4          | 14         | 21         | 69 | 0 | 4 | 3 | 7            | 3            |
| 40        | 420       | 126 | 8          | 2          | 0          | 14         | 60 | 0 | 2 | 1 | 3            | 1            |
| 44        | 460       | 138 | 40         | 0          | 14         | 26         | 65 | 0 | 3 | 1 | 4            | 1            |
| 51        | 511       | 154 | 8          | 4          | 14         | 0          | 73 | 0 | 2 | 2 | 4            | 2            |
| 56        | 584       | 176 | 18         | 8          | 0          | 0          | 83 | 0 | 0 | 5 | 5            | 5            |
| 35        | 327       | 98  | 40         | 2          | 28         | 0          | 45 | 0 | 0 | 4 | 4            | 4            |
| 60        | 656       | 196 | 12         | 0          | 35         | 28         | 91 | 0 | 7 | 0 | 7            | 0            |
| 30        | 348       | 104 | 16         | 2          | 7          | 12         | 48 | 0 | 2 | 2 | 4            | 2            |
| 49        | 539       | 162 | 14         | 4          | 0          | 14         | 76 | 0 | 2 | 3 | 5            | 3            |
| 31        | 353       | 106 | 4          | 2          | 7          | 7          | 51 | 0 | 1 | 1 | 2            | 1            |
| 31        | 315       | 94  | 12         | 6          | 7          | 14         | 42 | 0 | 2 | 3 | 5            | 3            |
| 36        | 383       | 114 | 10         | 0          | 14         | 40         | 52 | 0 | 5 | 0 | 5            | 0            |
| 34        | 321       | 96  | 8          | 2          | 7          | 14         | 43 | 0 | 4 | 1 | 5            | 1            |
| 31        | 340       | 102 | 10         | 4          | 7          | 14         | 46 | 0 | 3 | 2 | 5            | 2            |

Tabelle C.1: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 2$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 43        | 340       | 102 | 8          | 0          | 26         | 10         | 45 | 0 | 6  | 0 | 8            | 0            |
| 45        | 353       | 106 | 10         | 0          | 7          | 5          | 48 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 33        | 275       | 82  | 6          | 0          | 0          | 0          | 35 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 33        | 258       | 78  | 14         | 2          | 0          | 0          | 31 | 0 | 7  | 1 | 8            | 1            |
| 30        | 249       | 74  | 6          | 0          | 26         | 0          | 30 | 0 | 7  | 0 | 8            | 0            |
| 41        | 305       | 92  | 14         | 0          | 21         | 52         | 34 | 0 | 12 | 0 | 12           | 0            |
| 60        | 426       | 128 | 6          | 0          | 7          | 12         | 59 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 59        | 502       | 150 | 6          | 0          | 7          | 0          | 66 | 0 | 9  | 0 | 9            | 0            |
| 47        | 365       | 110 | 8          | 0          | 0          | 0          | 49 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 40        | 350       | 106 | 8          | 0          | 0          | 0          | 37 | 0 | 16 | 0 | 16           | 0            |
| 37        | 316       | 94  | 6          | 0          | 7          | 17         | 42 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 46        | 343       | 102 | 4          | 0          | 0          | 0          | 45 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |

Tabelle C.2: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 3$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 42        | 323       | 96  | 8          | 0          | 37         | 4          | 39 | 0 | 9  | 0 | 10           | 0            |
| 56        | 436       | 130 | 8          | 0          | 40         | 21         | 60 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 59        | 453       | 136 | 8          | 1          | 59         | 7          | 60 | 0 | 7  | 1 | 8            | 1            |
| 30        | 246       | 74  | 4          | 0          | 0          | 0          | 32 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 30        | 259       | 78  | 10         | 0          | 21         | 21         | 32 | 0 | 7  | 0 | 8            | 0            |
| 50        | 394       | 118 | 6          | 0          | 26         | 0          | 48 | 0 | 11 | 0 | 11           | 0            |
| 37        | 278       | 84  | 10         | 0          | 7          | 14         | 31 | 0 | 11 | 0 | 13           | 0            |
| 33        | 248       | 74  | 2          | 0          | 0          | 0          | 32 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 49        | 395       | 118 | 8          | 4          | 19         | 0          | 46 | 0 | 12 | 1 | 15           | 1            |
| 59        | 462       | 138 | 10         | 4          | 59         | 0          | 55 | 0 | 13 | 1 | 15           | 1            |
| 46        | 344       | 104 | 8          | 0          | 78         | 0          | 38 | 0 | 14 | 0 | 15           | 0            |
| 55        | 431       | 130 | 6          | 0          | 0          | 0          | 55 | 0 | 10 | 0 | 10           | 0            |
| 35        | 250       | 76  | 14         | 0          | 28         | 43         | 30 | 0 | 8  | 0 | 8            | 0            |
| 41        | 308       | 92  | 6          | 0          | 37         | 7          | 41 | 0 | 5  | 0 | 6            | 0            |
| 54        | 406       | 122 | 12         | 0          | 92         | 59         | 49 | 0 | 12 | 0 | 12           | 0            |
| 44        | 382       | 114 | 12         | 4          | 26         | 5          | 47 | 0 | 9  | 1 | 10           | 1            |
| 51        | 392       | 118 | 6          | 0          | 0          | 16         | 51 | 0 | 8  | 0 | 8            | 0            |
| 46        | 367       | 110 | 4          | 0          | 23         | 0          | 50 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 57        | 468       | 140 | 16         | 6          | 33         | 15         | 61 | 0 | 7  | 2 | 9            | 2            |

Tabelle C.3: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 4$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 30        | 258       | 78  | 6          | 0          | 0          | 0          | 29 | 0 | 10 | 0 | 10           | 0            |
| 36        | 255       | 76  | 6          | 0          | 19         | 7          | 33 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 43        | 285       | 86  | 8          | 0          | 7          | 24         | 34 | 0 | 9  | 0 | 9            | 0            |
| 40        | 308       | 92  | 6          | 0          | 7          | 14         | 37 | 0 | 9  | 0 | 9            | 0            |
| 46        | 349       | 104 | 10         | 2          | 21         | 19         | 44 | 0 | 7  | 1 | 8            | 1            |
| 57        | 477       | 144 | 8          | 0          | 19         | 12         | 61 | 0 | 11 | 0 | 11           | 0            |
| 54        | 369       | 110 | 8          | 0          | 40         | 0          | 46 | 0 | 9  | 0 | 9            | 0            |
| 35        | 276       | 82  | 6          | 0          | 0          | 7          | 37 | 0 | 4  | 0 | 4            | 0            |
| 38        | 226       | 68  | 6          | 0          | 52         | 4          | 30 | 0 | 4  | 0 | 4            | 0            |
| 46        | 354       | 106 | 4          | 0          | 0          | 0          | 49 | 0 | 4  | 0 | 4            | 0            |
| 36        | 288       | 86  | 6          | 0          | 0          | 7          | 37 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 42        | 359       | 108 | 40         | 0          | 14         | 7          | 49 | 0 | 4  | 1 | 5            | 1            |
| 33        | 270       | 82  | 6          | 0          | 0          | 0          | 36 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 47        | 312       | 94  | 16         | 0          | 44         | 41         | 39 | 0 | 8  | 0 | 10           | 0            |
| 50        | 382       | 114 | 8          | 0          | 0          | 0          | 49 | 0 | 8  | 0 | 8            | 0            |
| 42        | 334       | 100 | 6          | 0          | 0          | 17         | 44 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 32        | 283       | 84  | 6          | 0          | 0          | 0          | 36 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 58        | 445       | 134 | 10         | 0          | 45         | 27         | 55 | 0 | 12 | 0 | 13           | 0            |

Tabelle C.4: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 5$

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 35        | 213       | 64  | 8          | 0          | 14         | 28         | 26 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 60        | 451       | 136 | 10         | 0          | 105        | 20         | 61 | 0 | 7  | 0 | 7            | 0            |
| 50        | 285       | 86  | 8          | 0          | 26         | 16         | 36 | 0 | 7  | 0 | 7            | 0            |
| 51        | 298       | 90  | 16         | 0          | 71         | 38         | 35 | 0 | 10 | 0 | 10           | 0            |
| 52        | 320       | 96  | 12         | 0          | 28         | 18         | 42 | 0 | 6  | 0 | 6            | 0            |
| 38        | 244       | 74  | 12         | 0          | 32         | 28         | 27 | 0 | 10 | 0 | 11           | 0            |
| 35        | 235       | 70  | 4          | 2          | 7          | 7          | 31 | 0 | 3  | 1 | 4            | 1            |
| 48        | 420       | 126 | 6          | 0          | 0          | 7          | 48 | 0 | 15 | 0 | 15           | 0            |
| 46        | 290       | 88  | 8          | 0          | 38         | 12         | 40 | 0 | 4  | 0 | 5            | 0            |
| 30        | 232       | 70  | 8          | 1          | 12         | 12         | 31 | 0 | 3  | 1 | 4            | 1            |
| 49        | 362       | 108 | 8          | 0          | 21         | 0          | 42 | 0 | 12 | 0 | 12           | 0            |
| 30        | 190       | 58  | 14         | 0          | 57         | 28         | 23 | 0 | 6  | 0 | 7            | 0            |

Tabelle C.5: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 6$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 46        | 286       | 86  | 10         | 0          | 19         | 16         | 36 | 0 | 7  | 0 | 7            | 0            |
| 37        | 221       | 66  | 6          | 0          | 0          | 14         | 25 | 0 | 8  | 0 | 8            | 0            |
| 60        | 418       | 126 | 6          | 0          | 0          | 18         | 53 | 0 | 10 | 0 | 11           | 0            |
| 43        | 243       | 72  | 8          | 0          | 26         | 0          | 28 | 0 | 8  | 0 | 8            | 0            |
| 39        | 254       | 76  | 8          | 0          | 26         | 19         | 33 | 0 | 5  | 0 | 6            | 0            |
| 38        | 259       | 78  | 8          | 4          | 7          | 11         | 33 | 0 | 5  | 1 | 6            | 1            |
| 40        | 276       | 82  | 4          | 0          | 26         | 0          | 36 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 49        | 323       | 96  | 14         | 0          | 47         | 33         | 40 | 0 | 8  | 0 | 9            | 0            |
| 59        | 379       | 114 | 6          | 0          | 30         | 7          | 53 | 0 | 4  | 0 | 5            | 0            |

Tabelle C.6: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 7$ 

| $w_{max}$ | $p_{max}$ | #Fr | Ma<br>alle | Ma<br>übr. | OV<br>Fre. | OV<br>and. | →  | ↘ | ↗  | ← | #WS<br>vorh. | #WS<br>nach. |
|-----------|-----------|-----|------------|------------|------------|------------|----|---|----|---|--------------|--------------|
| 59        | 393       | 118 | 14         | 0          | 45         | 7          | 44 | 0 | 15 | 0 | 16           | 0            |
| 33        | 216       | 64  | 14         | 0          | 50         | 7          | 28 | 0 | 4  | 0 | 5            | 0            |
| 42        | 244       | 74  | 6          | 0          | 44         | 7          | 34 | 0 | 3  | 0 | 3            | 0            |
| 36        | 213       | 64  | 4          | 0          | 26         | 9          | 27 | 0 | 5  | 0 | 5            | 0            |
| 37        | 211       | 64  | 8          | 0          | 33         | 7          | 28 | 0 | 4  | 0 | 5            | 0            |
| 33        | 184       | 56  | 14         | 2          | 55         | 16         | 22 | 0 | 5  | 1 | 8            | 1            |
| 52        | 254       | 76  | 12         | 0          | 52         | 26         | 30 | 0 | 8  | 0 | 8            | 0            |
| 30        | 194       | 58  | 10         | 0          | 31         | 40         | 22 | 0 | 7  | 0 | 7            | 0            |
| 34        | 178       | 54  | 10         | 0          | 47         | 26         | 17 | 0 | 10 | 0 | 10           | 0            |
| 34        | 212       | 64  | 8          | 0          | 14         | 12         | 23 | 0 | 9  | 0 | 9            | 0            |
| 44        | 248       | 74  | 10         | 0          | 104        | 0          | 29 | 0 | 8  | 0 | 9            | 0            |

Tabelle C.7: Simulationsergebnisse der Freunde mit NB h) für  $t_{max} = 8$



---

Girls‘Day in Deutschland – Schülerinnen besuchen Workshops zu technischen Themen, ihre Begeisterung für technische Berufe soll gefördert werden. Doch jede hat bestimmte Workshops im Blick. Wie kann man erreichen, dass jede Teilnehmerin ihre Wunschplätze bekommt?

Diese Arbeit stellt ein lineares Optimierungsverfahren vor, das eine optimale Platzzuteilung berechnen kann, basierend auf Präferenzangaben der Teilnehmerinnen. Dabei werden auch Nebenbedingungen wie Teilnehmergrenzen der Workshops und zeitliche Restriktionen beachtet. Optimale Lösungen sind mit dem Simplex- und ggf. dem Branch&Cut-Verfahren berechenbar. Ist die Zufriedenheit der Teilnehmerinnen damit garantiert?

Nicht unbedingt! Es gibt gewisse Arten von Sonderwünschen, die a priori nicht beachtet werden können, da sie erst nach Bekanntgabe der Zuteilung überhaupt entstehen, so zum Beispiel der gemeinsame Workshopbesuch von Freundinnen oder der Wunsch nach einem nicht so vollen Workshop. Daher wird eine zweite Optimierungsstufe eingeführt, während der die Teilnehmerinnen ihre Präferenzen nachträglich ändern können. Das Optimierungsproblem wird für die zweite Stufe leicht angepasst und berechnet neue, mögliche Zuteilungen, wobei aber niemand schlechter gestellt werden darf als vorher. So kann tatsächlich die initiale, optimale Zuteilung noch weiter verbessert werden, zum Vorteil für alle! Zufriedenheit garantiert!

---