

# **Numerische Simulation des Betonverhaltens unter Stoßwellen mit Hilfe des Elementfreien Galerkin-Verfahrens**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTOR-INGENIEURS**

von der Fakultät für  
Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)  
genehmigte

**DISSERTATION**

von  
Dipl.-Ing. Martin Larcher  
aus Freiburg

Tag der mündlichen Prüfung: 27.2.2007

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Lothar Stempniewski  
Korreferent: Prof. Dr. Klaus Thoma

Karlsruhe 2007



## Kurzfassung

Die Berechnung hochdynamisch beanspruchten Betons stellt sowohl an die zu verwendenden Stoffgesetze als auch an die zur Berechnung des Kontinuums benötigten numerischen Methoden hohe Anforderungen. Ziel der Arbeit ist die Untersuchung, ob das elementfreie Galerkin-Verfahren mit diskreten, kohäsiven Rissen zur Berechnung hochdynamisch beanspruchten Betons geeignet ist.

Das elementfreie Galerkin-Verfahren stellt eine Alternative zur sonst in der numerischen Mechanik üblichen Finiten-Elemente-Methode dar. Die Ansatzfunktionen werden dabei über eine Moving Least Square-Interpolation bestimmt. Dazu wird in einem Einflussgebiet der Fehler der Interpolation über Wichtungsfunktionen berücksichtigt. Die Interpolation ermöglicht es, die Ansatzfunktionen nur aus der Information über den Abstand der Knoten zueinander zu bestimmen. Deswegen kann auf die Zuordnung der Knoten über Elemente verzichtet werden. Die Integration über das Problemgebiet erfolgt mit einem Hintergrundnetz.

Um Risse abbilden zu können, werden die Wichtungs- und damit auch die Ansatzfunktionen an der Diskontinuität abgeschnitten. Die so erzeugten Risse sind für die Berechnung von Beton in Verbindung mit einem Ansatz für kohäsive Risse nutzbar. Bei diesem Ansatz wird davon ausgegangen, dass ein Riss erst bei Überschreitung einer bestimmten Rissöffnung zugspannungsfrei wird. Die bis zu dieser Rissöffnung auftretenden Riss-schließspannungen werden als externe Kräfte in das Modell implementiert. Untersuchungen mit verschiedenen Verläufen der Riss-schließspannungen über die Rissöffnung zeigen, dass ein bilinearer Verlauf die zur Validierung benutzten Modelle gut abbildet. Sowohl für die Rissentstehung als auch für das Risswachstum wird als Kriterium eine Versagensfläche für Beton verwendet.

Zur dynamischen Berechnung der hier vorgestellten Probleme wird eine explizite Zeitintegration benutzt. Dabei darf eine maximale Zeitschrittweite nicht überschritten werden, damit die Stabilität der Berechnung gewährleistet wird. Diese Zeitschrittgröße ist bei der Verwendung des elementfreien Galerkin-Verfahrens vom Einflussradius der Knoten abhängig und liegt in der gleichen Größenordnung wie bei der Finiten-Elemente-Methode. Je nach Topologie der Risse bezüglich der Knoten muss der Zeitschritt verkleinert werden. Die Parameter der für hochdynamische Berechnungen notwendigen künstlichen Viskosität müssen ebenfalls an das EFG-Verfahren angepasst werden.

Die numerische Simulation dynamischer Belastung von Beton erfordert die Berücksichtigung weiterer Effekte. Die bei steigenden Dehnraten ebenfalls

steigenden Festigkeiten werden über die Anpassung der Versagensfläche berücksichtigt. Wird Beton stark hydrostatisch belastet, ist das nichtlineare Versagen der Mikroporen zu berücksichtigen (Hugoniot-Kurve), das über eine Volumenfunktion eingeführt wird. Zusätzlich werden Annahmen über die Entlastung der Hugoniot-Kurve getroffen.

Das EFG-Verfahren mit den verwendeten Rissbeschreibungen wird anhand verschiedener statischer und dynamischer Versuche validiert. Die Berechnung eines von einer Kontaktdetonation belasteten Betonkörpers ergibt bezüglich der Eindringcharakteristik eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Die entstehenden Risse können ebenfalls abgebildet werden.

# Abstract

The calculation of highly dynamic loaded concrete requires high demands on the material laws and the numerical method used for the calculation of the continua. The aim of the presented work is to investigate whether the element-free Galerkin method in combination with discrete, cohesive cracks is usable for the calculation of highly dynamic loaded concrete.

The common method in the numerical mechanic is the finite element method. An alternative possibility presents the element-free Galerkin method which calculates the shape function by a moving least square interpolation. The error of the interpolation in a radius of support is weighted by a weight function. This interpolation allows the determination of the shape function only by the distances of the nodes. Therefore the elements are not necessary as a conjunction between the nodes. The integration over the domain is executed by background integration.

The weight functions and therewith the shape functions can be cut at a discontinuity. With this cutting discrete cracks can be implemented in the continua. The discrete cracks in combination with a cohesive crack model can be used to calculate concrete. A cohesive crack model acts on the assumption that a crack is becoming free of tension-stresses at its sides by exceeding a critical crack opening. The stresses between the crack sides are the so called crack closure stresses and can be implemented as external loads at the nodes. Investigations with different distributions of the crack closure stresses show that a bilinear distribution is able to represent the models used for the validation. A failure surface is implemented for the initiation of the cracks as well as the development of the cracks.

Explicit time integration is used for the calculation of the proposed dynamic problems. For the stability of the explicit time integration the time step must not exceed the critical time step. Using the element-free Galerkin method this critical time step depends on the radius of influence of the nodes and shows similar values as the critical time step using the finite element method. By additionally using cracks with the element-free Galerkin method the critical time step has to be increased. For highly dynamic calculations an artificial viscosity is necessary. The parameters for this must be adapted to the element-free Galerkin method.

The highly dynamic loading of concrete requires the consideration of additional effects. The concrete strength is increasing with increasing strain rates. This effect is taken into account by adaptation the failure surface. The nonlinear behaviour of concrete loaded by hydrostatic strains is considered by a

volume function. The cause for this nonlinear behaviour is the damage of the micro pores under high hydrostatic strains (Hugoniot curve). Furthermore the unloading of the hugoniot curve has to be determined.

The proposed simulation model with the discrete and cohesive cracks is validated with different experimental static and dynamic test results. The calculation of a concrete body loaded by a contact detonation results in a good correlation with the experimental data considering of the pressure characteristic. The resulting cracks can be reproduced.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie – Abteilung Massivbau der Universität Karlsruhe (TH).

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Lothar Stempniewski für seine Betreuung und die Übernahme des Hauptreferates. Ein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Klaus Thoma für die Übernahme des Korreferats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Häußler-Combe danke ich für den Einstieg in die Programmierung numerischer Mechanik, für die Schärfung des Blickes auf das Wesentliche und natürlich für die Begleitung auf dem Weg zur Elementfreiheit.

Neben meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Institut beschäftigte ich mich im Zuge des Erwerbs des Baden-Württemberg-Zertifikats für Hochschuldidaktik intensiv mit verschiedenen Lernmethoden. Daraus entstand die Idee, Intervention als Methode zum Projekt-, Zeit- und Selbstmanagement zu nutzen. Frau Dipl.-Ing. Daniela Bernhart danke ich für das Diskutieren, Zuhören und Reflektieren in unserer gemeinsamen Intervention. Die freundschaftliche Atmosphäre motivierte!

Der Austausch unter Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftlern lag mir immer stark am Herzen, da durch offene Diskussionen die Qualität wissenschaftlicher Arbeit wesentlich gestärkt wird. So danke ich meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut, aber auch denen anderer Institute und Universitäten für die Anregungen, Rückmeldungen und die gute Atmosphäre. Insbesondere danke ich Herrn Dr.-Ing. Christoph Niklasch für seine kritischen Fragen, die oft zu neuen Lösungen geführt haben.

Gerade in der Endphase einer Promotion muss das familiäre und freundschaftliche Umfeld oft die Beschäftigung mit "Nullen und Einsen" kompensieren. Ich bedanke mich bei meiner Frau, meiner Familie und meinen Freunden für die Kraft, die sie mir auf der Zielgerade gegeben haben.

Ich wünsche allen, die sich für der Simulation von Beton mit der EFG-Methode interessieren, dass meine Arbeit einen Ansatzpunkt für eine Weiterarbeit darstellt und damit ein Schritt ist auf dem Weg in eine berechenbare Welt, deren Wunder wir aber wohl nie in Zahlen fassen können.





# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>13</b>
1.1	Motivation . . . . .	13
1.1.1	Explosionen . . . . .	14
1.1.2	Impakt . . . . .	17
1.2	Problemstellung . . . . .	18
1.3	Vorgehen . . . . .	19
1.4	Ziel der Arbeit . . . . .	21
1.5	Übersicht . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Numerische Mechanik</b>	<b>23</b>
2.1	Finite-Elemente-Methode . . . . .	23
2.1.1	Einführung . . . . .	24
2.1.2	Formulierung von Kontinuumselementen . . . . .	24
2.1.3	Zweidimensionale Koordinatenmodelle . . . . .	26
2.2	Lagrange-Netze / Euler-Netze . . . . .	28
2.3	Nichtlineare Lösungsansätze . . . . .	29
2.3.1	Klassifikation der Nichtlinearität . . . . .	29
2.3.2	Newton-Raphson-Verfahren . . . . .	32
2.4	Zeitintegration . . . . .	33
2.4.1	Einführung . . . . .	33
2.4.2	Newmark-Verfahren . . . . .	34
2.4.3	Explizite Zeitintegration . . . . .	36
2.4.4	Dämpfung . . . . .	39
2.5	Diskrete Risse . . . . .	43
2.5.1	Levelset-Methode . . . . .	43
2.5.2	Extended Finite Element Method (X-FEM) . . . . .	45
2.6	Umsetzung der Methoden in einen Rechencode . . . . .	47
2.6.1	Objektorientierte Programmiersprachen . . . . .	47
2.6.2	Strukturierung der Daten und des Programms . . . . .	48

<b>3</b>	<b>Elementfreies Galerkin-Verfahren</b>	<b>53</b>
3.1	Einführung . . . . .	53
3.2	Interpolation . . . . .	54
3.2.1	Delta-Eigenschaft . . . . .	55
3.2.2	Wichtungsfunktion . . . . .	56
3.2.3	Einflussbereiche . . . . .	58
3.2.4	Moving Least Square Interpolation (MLS-Interpolation)	58
3.2.5	MLS-Interpolation und Risse . . . . .	61
3.3	Diskretisierung . . . . .	63
3.3.1	Einführung . . . . .	63
3.3.2	Integration mit einem Hintergrundnetz . . . . .	65
3.3.3	Risse . . . . .	70
3.3.4	Einflussgebiet . . . . .	75
3.4	Randbedingungen . . . . .	75
3.4.1	Lagrange-Multiplikatoren . . . . .	75
3.4.2	Penalty-Faktoren . . . . .	77
3.5	Punktintegration . . . . .	77
3.6	Dreidimensionales EFG-Verfahren . . . . .	78
3.7	Explizite Zeitintegration . . . . .	79
3.7.1	Eigenfrequenzen . . . . .	79
3.7.2	Zeitschrittweite . . . . .	81
3.7.3	Künstliche Viskosität . . . . .	81
3.8	Abgrenzung EFG, SPH, FEM . . . . .	85
3.9	Zusammenfassung . . . . .	86
<b>4</b>	<b>Simulationsmodelle für Beton</b>	<b>89</b>
4.1	Verhalten von Beton unter statischer und dynamischer Belastung	89
4.1.1	Versagen von Beton . . . . .	89
4.1.2	Entstehung von Stoßwellen . . . . .	92
4.1.3	Dehnrateneffekt . . . . .	95
4.1.4	Maximale Rissgeschwindigkeit . . . . .	99
4.1.5	Anforderungen an die Formulierung eines Simulations- modells für Beton . . . . .	102
4.2	Stoffgesetze für Beton . . . . .	102
4.2.1	Theoretische Ansätze . . . . .	103
4.2.2	Schädigungsstoffgesetz für Beton . . . . .	112
4.2.3	Versagensfläche . . . . .	114
4.2.4	Bruchmechanik . . . . .	121
4.2.5	Annahmen zum Dehnrateneffekt . . . . .	123
4.2.6	Stoffgesetze für hochdynamisch beanspruchten Beton	125

Inhaltsverzeichnis	11
4.3 Formulierung eines eigenen Simulationsmodells . . . . .	127
4.3.1 Beschreibung der Entwicklungsschritte . . . . .	127
4.3.2 Rissentstehung und Rissfortschritt . . . . .	129
4.3.3 Kohäsives Rissmodell . . . . .	138
4.3.4 Berücksichtigung des Dehnrateneffekts . . . . .	148
4.3.5 Beton-Hugoniot . . . . .	149
4.3.6 Rissgeschwindigkeit . . . . .	153
4.3.7 Stochastische Festigkeitsverteilung . . . . .	153
<b>5 Numerische Ergebnisse</b>	<b>155</b>
5.1 Vergleich X-FEM – EFG . . . . .	156
5.2 Unbewehrter Balken, 3-Punkt-Biegeversuch . . . . .	158
5.3 Schubversuch . . . . .	164
5.4 Biegezugversuch dynamisch . . . . .	167
5.5 Abscheren einer Platte unter Detonationsbelastung . . . . .	171
5.6 Kontaktdetonation . . . . .	173
5.6.1 Versuchbeschreibung . . . . .	173
5.6.2 Belastung . . . . .	175
5.6.3 Modellierung / Elementierung . . . . .	176
5.6.4 Rissparameter . . . . .	178
5.6.5 Anpassung des Stoffgesetzes . . . . .	185
5.6.6 Numerische Ergebnisse . . . . .	195
5.7 Diskussion des gewählten Modells . . . . .	198
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>201</b>



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Bei sicherheitsrelevanten Bauwerken müssen neben den planmäßigen Lastfällen auch unplanmäßige Lasten berücksichtigt werden. Neben Erdbebenlasten und dem Anprall von Fahrzeugen treten vermehrt hochdynamische Beanspruchungen in den Blickpunkt. Die Ursachen dafür sind unterschiedlicher Art. Sie resultieren meist aus Explosionen oder dem Beschuss.

Hochdynamische Belastungen sind geprägt durch eine hohe Belastungsgeschwindigkeit verbunden mit hohen Drücken. Diese hohe Belastungsgeschwindigkeit führt zu großen Dehnraten. In Abbildung 1.1 sind die Dehnraten von üblichen Belastungen zusammengefasst. Hochdynamische Belastungen weisen Dehnraten zwischen  $100$  und  $1.000.000 \text{ sec}^{-1}$  auf. Die auftretenden Dehnraten sind damit größer als bei einer dynamischen Belastung zum Beispiel aus einer Erdbebenlast. Noch größere Dehnraten treten beim Anprall von Meteoriten auf.

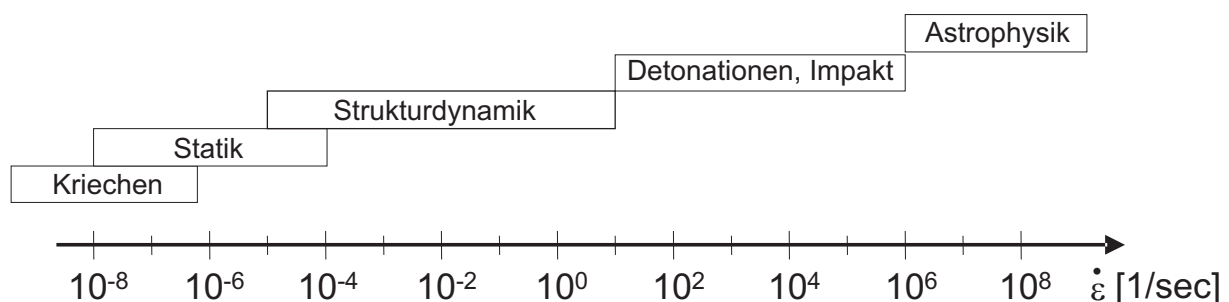


Abbildung 1.1: Verschiedene Dehnraten bei unterschiedlichen Belastungen

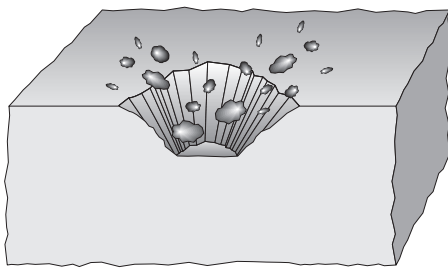
Beton versagt unter hochdynamischen Beanspruchungen in unterschiedlicher Weise. Folgende Versagensformen sind denkbar (siehe auch Abbildung 1.2).

Während bei Kontaktdetonationen insbesondere ein Auswurf des Betons unterhalb des Sprengstoffes (Spalling) und ein Abplatzen des Betons in Bereichen, in denen eine Druckwelle an freien Rändern reflektiert wird (Scabbing), beobachtet werden, ist beim Beschuss eines Betonkörpers (Impakt)

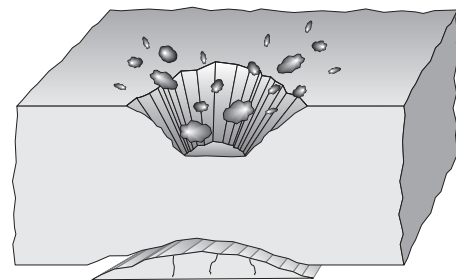
die Versagensform Perforation denkbar. Beim Spalling und bei der Perforation entspricht das Hauptversagen einer Zermalmung des Betons. Die Risse treten durch die Fortpflanzung der Druckwelle in weniger belastete Bereiche auf. Beim Scabbing und beim lokalen Durchstanzen versagt der Beton durch die Bildung von Rissen. Die Bruchstücke, die abgetrennt werden, sind zumeist größer als beim Zermalmungsversagen.

Im Folgenden werden die Ursachen für verschiedene hochdynamische Belastungen und deren Auswirkungen auf Bauwerke geschildert.

Spalling

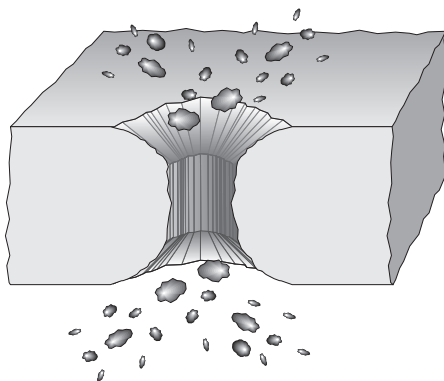


Spalling



Scabbing

Perforation



lokales Durchstanzen

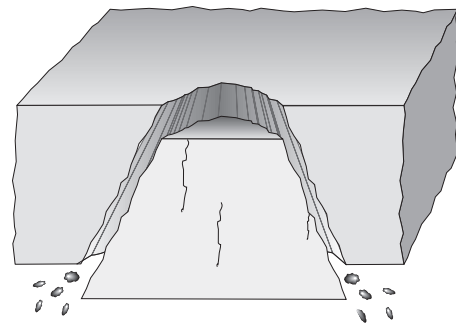


Abbildung 1.2: Versagensarten bei lokaler hochdynamischer Belastung

### 1.1.1 Explosionen

Explosionen können aufgeteilt werden in Deflagrationen und Detonationen. Während bei einer Deflagration die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamm- oder Reaktionsfront langsamer als die Schallgeschwindigkeit des jeweiligen Mediums ist (z.B. Abrennen von Methan-Luft-Gemischen), breitet sich bei ei-

ner Detonation die Reaktionsfront mit Überschallgeschwindigkeit im Medium aus (z.B. Explosion von TNT).

Detonationen können geplant oder ungeplant auftreten. Geplante Detonationen werden zum Beispiel beim Abbruch von Bauwerken eingesetzt. Die Detonation wird zumeist von einem in ein Bohrloch eingeführten Sprengstoff ausgelöst. Es muss zwischen dem Abbruchsprengen (Breidt [27]) und dem Lockerungssprengen unterschieden werden. Lockerungssprengungen dienen der Zerstörung von massiven Bauteilen zur besseren Demontage. Die Zerstörungswirkung kommt hierbei nur durch die Explosionswirkung des Sprengstoffs zustande.

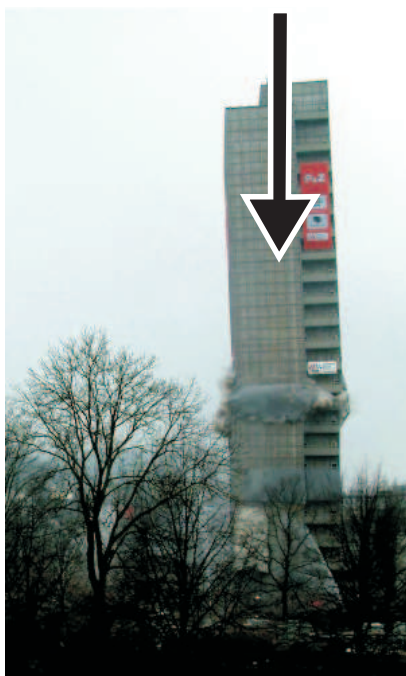
Im Gegensatz dazu wird beim Abbruchsprengen die kinetische Energie der herabfallenden Bauteile genutzt, um das Gebäude zu zerstören. Die Struktur wird nur in einem lokalen Bereich von der Detonation selbst beansprucht.

Beim Abbruchsprengen ist es das Ziel, in einem tragenden Strukturelement (z.B. Stütze, Wand) den gesamten Beton rund um das Bohrloch zu entfernen ("wegzublasen"). Die dann noch vorhandene Bewehrung knickt unter einer geringen Druckbelastung des Bauteiles aus. Durch diese lokale Schädigung des Bauwerks können verschiedene Versagensmechanismen erzielt werden. Eine Kippsprengung ist dadurch gekennzeichnet, dass das Bauwerk nur einseitig geschwächt wird. Auf der ungeschädigten Seite stellt sich ein Gelenk ein. Das Gebäude kippt um diese Gelenkachse. Bei einer Kollapssprengung werden hingegen ganze Stockwerke herausgesprengt. Die von oben herabfallende Masse zerstört die nicht gesprengten Teile des Bauwerkes, das in sich zusammenfällt.

Diese beiden Versagensmechanismen können auch kombiniert werden. Eine so genannte Kipp-Kollapssprengung wurde zum Beispiel beim Abbruch der Sparkasse in Hagen ("Langer Oskar") angewendet (siehe Abbildung 1.3). Das Problem bestand in der Höhe des Gebäudes (98 m) und der beschränkten Fläche, die für den Aufprall des Gebäudes zur Verfügung stand. Die oberen Teile des Gebäudes wurden mit einer Kollapssprengung zerstört. Erst im Folgenden setzte eine Kippbewegung durch die zeitversetzte Sprengung eines Keiles in das Gebäude ein.

Die größten Kosten einer Abbruchsprengung verursacht das Bohren der Löcher für den Sprengstoff. Gerade in massiven Bauteilen wie zum Beispiel Wänden sind sehr viele Bohrlöcher erforderlich, um das Bauteil sicher zu entfernen. Es stellt sich die Frage, ob eine Sprengung dieser massiven Teile mit Sprengschnüren, die den lokalen Bereich ähnlich wie bei einer Kontaktdetonation beanspruchen, nicht effektiver ist.

Abbruchsprengungen verursachen verschiedene Beeinflussungen der Um-



Kollapsvorgang



Kippvorgang

Abbildung 1.3: Abbruch des langen Oskars in Hagen

welt. So treten in der Umgebung des Bauwerkes Erschütterungen auf, die zu geringen Schäden führen sollten. Die Sprengstoffmenge wird deswegen möglichst klein gewählt. Große Sprengstoffmengen führen auch zu vermehrtem Sprengstreufzug, der durch das Abhängen entsprechender Gebäudeteile vermindert werden kann. Des Weiteren ist eine enorme Staubbelastung zu verzeichnen. Die Staubwolke kann durch die Explosion großer Wassersäcke gebunden werden.

Neben den planmäßigen Detonationen können Bauwerke durch ungewollte Explosionen belastet werden. Diese treten bei unsachgemäßem Umgang mit Gefahrstoffen oder bei terroristischen Anschlägen auf. Sie sind meist dadurch gekennzeichnet, dass die Struktur nicht durch eine Kontaktdetonation beansprucht wird, sondern durch die von der Explosion hervorgerufene Luftdruckwelle. Eine wesentlich höhere Gefährdung geht von Explosionen innerhalb von Bauwerken aus (Larcher [81]). Innerhalb einer Halle können sich Druckwellen z.B. entlang einer Decke ausbreiten und sich bei zeitgleichem Auftreffen mit der Hauptwelle auf eine Wand stark vergrößern. Die Geometrie des Bauwerks (siehe Abbildung 1.4) und eventuell vorhandene Entlastungsflächen sind deswegen von entscheidender Bedeutung.

Bei Hallen mit leichten Hüllkonstruktionen ist neben dem Versagen des Werkstoffes zumeist ein Versagen der Befestigungsmittel zu beobachten.



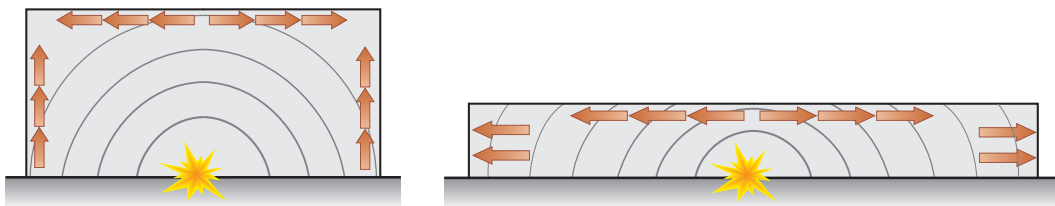


Abbildung 1.4: Verschiedene Gebäudeformen und deren Belastung durch Druckwellen im Inneren

Massivere Hallen können die Energie der Druckwelle besser absorbieren wodurch die Befestigungsmittel weniger belastet werden. Eine Verformungsfigur einer solchen Halle ist in Abbildung 1.5 dargestellt.

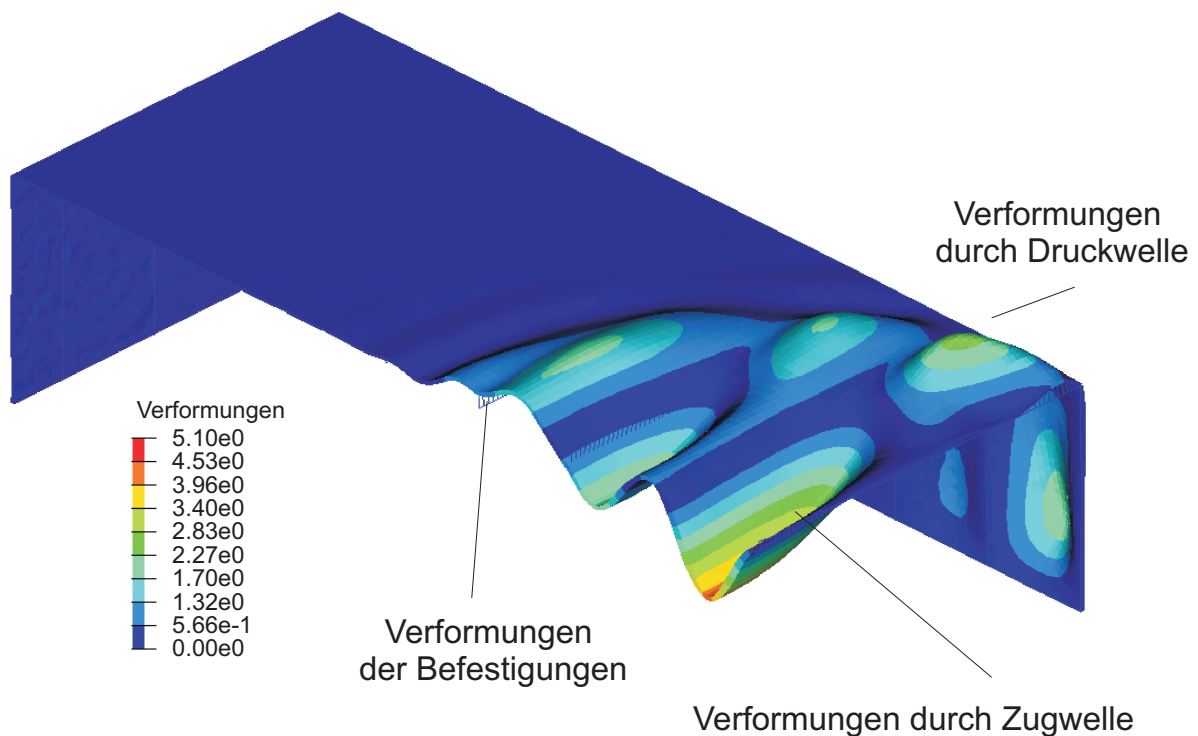


Abbildung 1.5: Überhöhte Verformung einer Industriehalle bei der Belastung durch eine aus einer Detonation resultierende Druckwelle von innen

## 1.1.2 Impakt

Eine weitere hochdynamische Beanspruchung ist der Beschuss (Impakt). Auch hier ist zu unterscheiden zwischen gewollten Belastungen (Militärische

Anwendung) und ungewollten Belastungen (z.B. terroristische Attacken, Flugzeuganprall).

Die Anschläge auf das World Trade Center haben gezeigt, dass die Lastannahmen, die bisher benutzt wurden, nicht in allen Fällen ausreichend sind. So sind Reaktor-Containments im Allgemeinen gegen den Anprall eines Düsenjets bemessen. Fraglich ist, welche Belastung durch den Aufprall eines wesentlich schwereren Passagierflugzeuges auftritt. Dies wird zum Beispiel von Bernhart [21] untersucht.

Beim Impakt muss unterschieden werden zwischen weichen und harten Stößen. Beim harten Stoß trifft ein quasi undeformierbarer Körper auf ein Bauteil. Die Energie des Stoßes wird als Deformationsarbeit des Bauteiles aufgenommen. Die Last-Zeit-Funktion ist in hohem Maße von den Eigenschaften des Bauteiles abhängig. Beim weichen Stoß ist der auftreffende Körper so deformierbar, dass er einen großen Teil der Energie über die Deformation aufnimmt. Das getroffene Bauteil nimmt nur einen Bruchteil der Energie auf. Daher ist der Last-Zeit-Verlauf nur in geringem Maße vom getroffenen Bauteil abhängig.

Für den (abgesehen von den Triebwerken) als weichen Stoß zu wertenden Flugzeugabsturz auf ein Kernkraftwerk können folglich Last-Zeit-Funktionen bestimmt werden, die unabhängig von der getroffenen Struktur sind. Ein einfaches Modell für einen solchen Last-Zeit-Verlauf wird z.B. von Riera [115] vorgeschlagen.

Auch wenn die Versagensformen von Impaktbelastungen denen von Kontaktdetonationen ähneln und für eine Berechnung dieselben Werkzeuge verwendet werden können, wird im Weiteren auf die Belastung durch Impakt nicht eingegangen.

## 1.2 Problemstellung

Beton verhält sich sowohl bei Zug- als auch bei Druckbelastung stark nichtlinear. Dies wird zum Beispiel in den Last-Verformungs-Kurven von zug- oder druckbeanspruchten Betonproben sichtbar. Nach einem linearen Anstieg der Last sinkt die Steifigkeit. Bei einem verformungsgesteuerten Versuch können nach Überschreitung der maximalen Last noch große Verformungen ertragen werden.

Beton ist ein Verbundwerkstoff aus Zement, Wasser und Zuschlägen. Auch wenn bei der Berechnung von Beton meist von einer verschmierten Betrachtung ausgegangen wird, können die Wirkungen der einzelnen Bestandteile des Betons nicht unberücksichtigt bleiben. Die Versagensmechanismen von

Beton müssen auf Mikro-, Meso- und Makroebene betrachtet werden. Ausgehend von auf Mikroebene vorhandenen Mikroporen und Mikrorissen entstehen unter einer Belastung auf Mesoebene Risse, die zu einem Versagen auf Makroebene führen. Die Vorschädigung der Mikroporen führt zur Anfälligkeit gegenüber Rissen und zu einer relativ niedrigen Zugfestigkeit des Verbundwerkstoffs.

Bei Belastung von Beton mit großen dynamischen hydrostatischen Lasten kommt ein weiterer Effekt zum Tragen: Übersteigt die hydrostatische Dehnung einen Grenzwert, werden die Mikroporen zerstört, die Steifigkeit des Betongefüges nimmt ab. Bei weiter steigender Belastung sind die Poren des Betons zerstört und die Steifigkeit des granular vorliegenden Materials ist wesentlich höher als bei niedrigen Dehnungen. Die Wellenanteile, die aus diesem Bereich resultieren, sind schneller als die übrigen Wellen. Es kommt zum Aufsteilen einer Stoßwellenfront, der so genannten Stoßwelle. Die Stoßwellen bauen sich allerdings rasch wieder ab, da die Zerstörung der Mikroporen sehr viel Energie absorbiert.

Ein weiterer Effekt, der bei der dynamischen Belastung von Beton zu berücksichtigen ist, ist der Dehnrateneffekt. Versuche verschiedener Autoren (Zusammenstellung z.B. von Bischoff [24]) zeigen, dass die Druck- und Zugfestigkeit bei steigenden Dehnraten zunimmt. Dies liegt an der Homogenisierung des Verbundwerkstoffes und der Verzögerung des Risswachstums. Da die Dehnraten bei den hier untersuchten Kontaktdetonationen große Werte annehmen, sind diese Steigerungen der Festigkeiten zu berücksichtigen.

## 1.3 Vorgehen

Um die Nichtlinearitäten von Beton in einem Berechnungsprogramm zu berücksichtigen, gibt es verschiedene Ansätze. Sehr anwendungsorientierte Finite-Elemente-Programme wie zum Beispiel SOFiSTiK [131] verwenden zur Berechnung von Beton die aus Versuchen bekannten Spannungs-Dehnungs-Linien. Das mehraxiale Verhalten des Werkstoffes wird dabei zumeist vernachlässigt.

Damit das mehraxiale Verhalten von Beton berücksichtigt werden kann, muss die Entstehung der Risse auf den verschiedenen Ebenen modelliert werden. Die hierfür vorhandenen Ansätze lassen sich grundsätzlich in zwei Methoden aufteilen. Zum einen können die Risse über kontinuumsmechanische Ansätze eingefügt, zum anderen können die Risse als diskrete Risse in einem Modell verwendet werden.

Bei kontinuumsmechanischen Ansätzen (verschmierte Risse, Schädigungsansatz) wird die Steifigkeitsänderung, die durch die Risse entsteht, über die Verminderung des E-Moduls erreicht. Bleibende Verformungen werden z.B. über einen Plastizitätsansatz berücksichtigt. Der Ort und die Größe der Risse werden nicht berechnet.

Die diskreten Rissansätze modellieren die durch einen Riss entstehende Diskontinuität. Deswegen sind der Ort und die Größe des Risses von Bedeutung und müssen berechnet werden. Bei der Verwendung von Standardelementen kann die Diskontinuität implizit im Finiten-Elemente-Netz vorgegeben sein, wobei dann der Rissfortschritt ebenfalls vorgegeben ist. Der Riss wird dabei zumeist über Federn modelliert. Alternativ kann durch eine aufwändige Neuvernetzung die Lage des Risses auch erst während der Berechnung festgelegt werden. Ebenfalls verwendbar sind dreieckige Elemente, die während der Berechnung an verschiedenen Stellen des Elements teilbar sind.

Um die Problematik der Adaption zu umgehen, können verschiedene Erweiterungen der Finiten-Elemente-Methode verwendet werden. Während die Extended Finite Element Method (X-FEM) zusätzliche Ansatzfunktionen zur Beschreibung des Risses verwendet, werden beim elementfreien Galerkin-Verfahren (EFG) zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix die Knotenabstände zueinander verwendet, so dass die Ansatzfunktionen am Riss abgetrennt werden können. Das Verfahren verwendet keine Elemente sondern nur Knoten.

Die wesentlich einfachere Berücksichtigung von großen Verformungen ist neben der Möglichkeit diskrete Risse zu implementieren ein weiterer Vorteil des elementfreien Galerkin-Verfahrens. Es bestehen keine Beschränkungen bezüglich einer verformten Elementgeometrie, da die Ansatzfunktionen auf Grundlage der aktuellen Verformungen in jedem Berechnungsschritt neu erstellt werden können.

Werden zur Berechnung von Beton diskrete Risse verwendet, kann das nichtlineare Verhalten der Rissentstehung über eine Bruchprozesszone eingeführt werden. Bei einer Bruchprozesszone geht man davon aus, dass ein Riss bis zum Erreichen einer maximalen Rissöffnung noch Kräfte über die Rissufer übertragen kann. Es findet also ein Übergang vom Kontinuum zur Diskontinuität in der Weise statt, dass die inneren Kräfte erst schrittweise verringert werden.

Simulationen von stoßwellenbeanspruchten Betonstrukturen werden zumeist mit kontinuumsmechanischen Schädigungsansätzen berechnet (siehe z.B. S. Eibl [44]). In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob ein diskretes Rissmodell, das von verschiedenen Autoren insbesondere für Zug- oder Biegebeanspruchungen von Beton verwendet wurde (siehe z.B. Häußler-

Combe [56]), auch für stoßwellenbeanspruchten Beton verwendet werden kann.

## 1.4 Ziel der Arbeit

Das elementfreie Galerkin-Verfahren ist in den verfügbaren kommerziellen und offenen Finiten-Elemente-Programmen nur in wenigen Fällen implementiert und nach dem heutigen Stand auch in dieser Weise, dass das Verfahren nur für große Verformungen angewendet werden kann. So können mit dem in LS-DYNA verwendbaren EFG-Verfahren zum Beispiel Extrusionsvorgänge von Kunststoff berechnet werden. Die Möglichkeit, mit dem EFG-Verfahren Diskontinuitäten zu berechnen, wird von keinem Programm derzeit unterstützt.

Es ist deshalb ein Programm zu entwickeln, in dem mit dem elementfreien Galerkin-Verfahren diskrete Risse berechnet werden können. Gleichzeitig sollen in diesem Programm Finite Elemente verwendet werden können, um z.B. einen Vergleich mit der Extended Finite Element Method (X-FEM) zu ermöglichen. Das Programm soll dabei die üblichen Methoden, die bei der Finiten-Elemente-Methode verwendet werden, zur Verfügung stellen. Es soll keine Einschränkung auf ein bestimmtes Lösungsverfahren vorgenommen werden. Neben der statischen nichtlinearen Berechnung mit dem Newton-Raphson-Verfahren sollen ein nichtlineares implizites und ein explizites Lösungsverfahren für dynamische Anwendungen möglich sein.

Das nichtlineare Verhalten von Beton soll über diskrete, kohäsive Risse abgebildet werden können. Deswegen sind Methoden zur Bestimmung der Kräfte aus der Bruchprozesszone zu integrieren. Ebenso ist das Verhalten von Beton unter hohen hydrostatischen Dehnungen und unter hohen Dehnraten zu berücksichtigen.

## 1.5 Übersicht

Im Kapitel 2 werden einführend verschiedene numerische Verfahren vorgestellt, die im Weiteren verwendet werden. Neben Verfahren zur Berücksichtigung von Nichtlinearitäten werden die Methoden zur Durchführung von dynamischen Simulationen beschrieben.

Diese Methoden werden mit dem im Kapitel 3 vorgestellten elementfreien Galerkin-Verfahren verwendet. Es wird die Erstellung der Ansatzfunktionen für das EFG-Verfahren erläutert, die mit einer Moving Least Square Interpolation durchgeführt wird. Die beim EFG-Verfahren möglichen Risse werden bei

dieser Interpolation berücksichtigt.

Im Kapitel 4 wird das Verhalten von Beton und die Beschreibung dieses Verhaltens in verschiedenen Stoffgesetzen dargestellt. Die in dieser Arbeit nicht weiter verwendeten Schädigungsansätze werden mit dem Ansatz diskreter Risse verglichen. Es werden die Erstellung der Bruchprozesszone und die weiteren in einem diskreten Riss wirkenden Kräfte beschrieben. Hierbei wird auch der Kontakt zwischen zwei Rissufern und die Reibung in einem Riss berücksichtigt. Das dynamische Verhalten von Beton unter hohen hydrostatischen Dehnungen wird über eine so genannte Y-Funktion eingeführt.

Kapitel 5 enthält verschiedene statische und dynamische Vergleichsrechnungen von Versuchen mit unterschiedlicher Belastung und Geometrie. Die untersuchten Geometrien, die mit Stoßwellen beansprucht werden, sind eine starke Vereinfachung der in der Realität vorkommenden Sprengungen. Es können mit dem hier entwickelten Ansatz nur zweidimensionale Berechnungen durchgeführt werden. Die Berechnung von Bohrlochladungen ist deswegen zum jetzigen Zeitpunkt nicht möglich. Abschließend werden in diesem Kapitel die Grenzen des verwendeten Simulationsmodells vorgestellt.

Im Kapitel 6 werden die in dieser Arbeit gesammelten Ergebnisse zusammengefasst.

## 2 Numerische Mechanik

In diesem Kapitel sollen die zum Einsatz kommenden numerischen Methoden vorgestellt werden. Die numerische Mechanik benutzt zur Berechnung eines Kontinuums die Massenerhaltung, die Bewegungsgleichungen und die Energieerhaltung. Da diese gekoppelten Differentialgleichungen bei komplexen Systemen nicht geschlossen lösbar sind, bedient man sich der numerischen Lösung über die Variationsrechnung (schwache Form). In der Kontinuumsmechanik kommt dabei zumeist die Finite-Elemente-Methode (FE-Methode) zum Einsatz.

Das methodische Vorgehen des in Kapitel 3 vorgestellten elementfreien Galerkin-Verfahrens (EFG-Verfahren) unterscheidet sich insbesondere bei der Erstellung der Ansatzfunktionen von der Finiten-Elemente-Methode und zeigt bei den betrachteten Problemen einige Vorteile.

Da beim EFG-Verfahren die meisten Verfahren analog zu denen der Finiten-Elemente-Methode verwendet werden können, sollen hier verschiedene Aspekte einführend erläutert werden. Ein Schwerpunkt liegt dabei auf der Berücksichtigung von Nichtlinearitäten. In der Arbeit sollen dynamische Prozesse betrachtet werden. Die in der numerischen Mechanik zur Lösung der Zeitintegration verwendeten Ansätze werden ebenfalls vorgestellt. Abschließend werden einige Erläuterungen zur Programmierung des Berechnungscodes gegeben.

### 2.1 Finite-Elemente-Methode

Die Methode der Finiten Elemente hat sich im Bauwesen zur Berechnung von Schnittkräften und zur Berechnung von Versagenszuständen weitgehend durchgesetzt. Es soll deswegen im Weiteren auf eine genaue Beschreibung verzichtet werden. Dazu sei auf die reichhaltig vorhandene Literatur verwiesen (z.B. Bathe [11], Belytschko [19], Wriggers [149]).

### 2.1.1 Einführung

Aus den Grundgleichungen der Mechanik lässt sich mit Hilfe der Variationsrechnung (Prinzip der virtuellen Verschiebungen) zu einem beliebigen Zeitpunkt das Gleichgewicht an einem Körper schreiben als

$$\int_V \delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (2.1)$$

Die linke Seite repräsentiert die Arbeit der inneren Kräfte  $W_{int}$ , die aus dem Integral über eine virtuelle Verzerrung  $\delta \boldsymbol{\epsilon}$  und die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  gebildet werden. Die rechte Seite entspricht der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte  $W_{ext}$  und bestimmt sich aus der Multiplikation des äußeren Kraftvektors  $\mathbf{f}_{ext}$  mit den virtuellen Verformungen  $\delta \mathbf{u}$ .

### 2.1.2 Formulierung von Kontinuumselementen

Gleichung 2.1 wird nun über die Zerlegung des Problemgebietes in Teilbereiche (Elemente) berechnet. Ziel ist es, das Integral an einem Element zu lösen und die sich ergebenden Steifigkeiten der entsprechenden Gesamtsteifigkeitsmatrix zuzuordnen.

Es werden Ansatzfunktionen  $N_i$  gewählt, mit denen der Verlauf der Verformungen in einem Element interpoliert werden kann. Die Interpolation der Verformung hat für ein zweidimensionales Kontinuumselement zum Beispiel folgende Form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_i \quad (2.2)$$

mit den Ansatzfunktionen für isoparametrische Elemente

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (2.3)$$

Bei den isoparametrischen Elementen wird das x-y-Koordinatensystem durch Abbildungen in ein  $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem überführt, bei dem die Eckpunkte gegeben sind als

$$\begin{Bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$



Die virtuelle Dehnung  $\delta\epsilon$  kann aus der Multiplikation der so genannten **B**-Matrix mit den virtuelle Verformungen  $\delta\mathbf{u}$  bestimmt werden.

$$\delta\epsilon = \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{u} \quad (2.5)$$

Eingesetzt in Gleichung 2.1 ergibt sich

$$\delta\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f}_{ext} = \int_V \delta\epsilon^T \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta\mathbf{u}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \epsilon dV = \int_V \delta\mathbf{u}\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}\mathbf{u} dV \quad (2.6)$$

wobei die **B**-Matrix die Ableitungen der Verschiebungen an den Integrationspunkten enthält

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

An einem Element ausgewertet ergibt die Integration der Gleichung 2.6 ein Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (2.8)$$

mit

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV \quad (2.9)$$

Auf die Erstellung der Materialmatrix **D** wird in Kapitel 4 eingegangen. Die Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  kann über eine numerische Integration (zum Beispiel Gauss-Integration) der Gleichung 2.1 bestimmt werden. Die Einträge der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  müssen an den entsprechenden Stellen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix **K** addiert werden, so dass sich eine zu lösende Gleichung für das Gesamtsystem ergibt

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext} \quad (2.10)$$

Alternativ kann Gleichung 2.10 auch über eine Energiebetrachtung ermittelt werden. Es gilt das Energiegleichgewicht

$$\Pi = \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (2.11)$$

Die Minimierung dieser Gleichung führt zu

$$\delta\Pi = 0 \iff \delta\mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} - \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (2.12)$$

Daraus lässt sich ebenfalls Gleichung 2.10 ableiten.

### 2.1.3 Zweidimensionale Koordinatenmodelle

Die im Rahmen dieser Arbeit erstellte Programmumgebung soll so offen gehalten werden, dass sowohl zwei- als auch dreidimensionale Probleme berechnet werden können. Die Berechnung von diskreten Rissen in einem räumlichen System wird hier allerdings nicht durchgeführt, da sowohl der numerische als auch der organisatorische Aufwand von räumlichen Rissen sehr groß ist. Deshalb müssen Wege gefunden werden, die dreidimensionale Wirklichkeit über zweidimensionale Koordinatenmodelle abzubilden. Es stehen dafür verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung: die Verwendung eines ebenen Dehnungs- oder eines ebenen Spannungszustandes und axialsymmetrische Elemente.

Der Unterschied zwischen dem ebenen Dehnungs- und dem ebenen Spannungszustand liegt in der Annahme der Reaktion in die aus der Ebene herauszeigende z-Richtung. Beim ebenen Dehnungszustand wird davon ausgegangen, dass die Elemente in Dickenrichtung ihre Dicke behalten, dass also die Dehnung in z-Richtung gleich Null ist. Spannungen können in dieser Richtung vorhanden sein. Der ebene Dehnungszustand tritt zum Beispiel bei einem Ausschnitt quer zur Längsrichtung aus einem langen Bauteil auf.

Beim ebenen Spannungszustand werden die Spannungen in z-Richtung als Null angenommen. Die Dehnungen in diese Richtung können verschieden von Null sein. Dies trifft bei dünnen Platten zu, die keine Biegebeanspruchung erfahren.

#### Axialsymmetrische Elemente

Die Berechnungen einer Platte unter Kontaktdetonation finden mit axialsymmetrischen Elementen statt, da sowohl Elemente mit einem ebenen Dehnungsansatz als auch Elemente mit einem ebenen Spannungsansatz nicht verwendbar sind, weil die räumliche Abstraktion von ebenem Dehnungs- bzw. ebenem Spannungszustand nicht dem Versuch entspricht.

In Abbildung 2.1 wird das beim axialsymmetrischen Element verwendete Koordinatensystem dargestellt, bei dem die im kartesischen System benutzte x-y-Ebene in eine r-z-Ebene übergeführt wird. Diese Ebene wird um die z-Achse gedreht. Der Drehwinkel wird dabei mit  $\Theta$  angegeben. Bei axialsymmetrischen Elementen wird davon ausgegangen, dass alle Größen einschließlich der Belastung unabhängig von dieser umlaufenden Koordinate  $\Theta$  sind. In der Abbildung 2.1 sind außerdem die jeweiligen Verformungen und Dehnungen dargestellt. Während die Verformungen in  $\Theta$ -Richtung Null sind,

können die Dehnungen in  $\Theta$ -Richtung bestimmt werden zu

$$\epsilon_{\Theta} = \frac{u}{r} \quad (2.13)$$

Festzuhalten bleibt, dass sich die Dehnungen  $\gamma_{r\Theta}$  und  $\gamma_{z\Theta}$  aufgrund des gewählten System zu Null ergeben. Deswegen können auch keine Torsionsbeanspruchungen dargestellt werden.

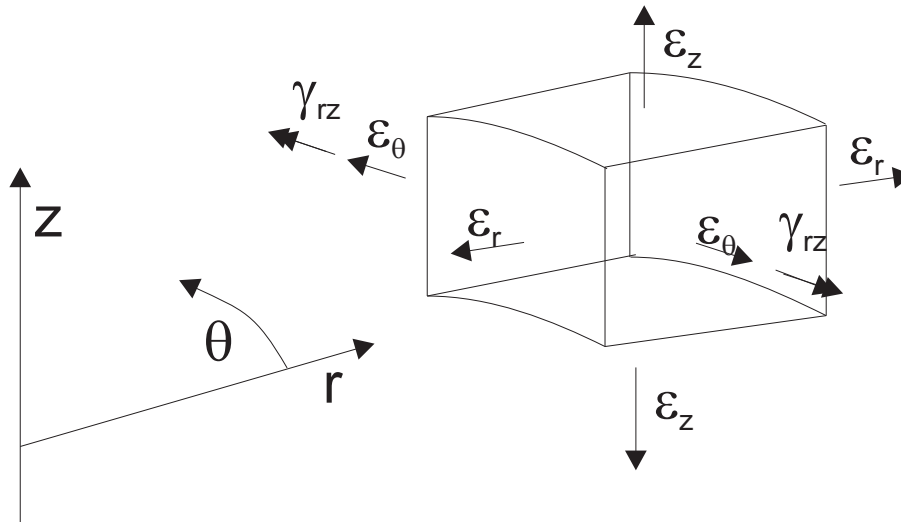


Abbildung 2.1: Axialsymmetrisches Element

Es bleiben die folgenden Dehnungsannahmen

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{\Theta} \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{u}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Die Ansatzfunktionen  $N_i$  werden analog zu denen von Elementen mit ebenem Dehnungs- oder ebenem Spannungszustand gebildet (Gleichung 2.3). Die  $\mathbf{B}$ -Matrix (Gleichung 2.7) muss folgendermaßen angepasst werden

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial z} \\ \frac{1}{r} N_1 & 0 & \dots & \frac{1}{r} N_n & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial z} & \frac{\partial N_n}{\partial r} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Es bleibt noch die Integration in Umfangsrichtung zu klären.

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} dV = 2 \cdot \pi \int_r \int_z \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} r \cdot dr dz \quad (2.16)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix ist damit abhängig vom Abstand des Elements zur Symmetrieachse. Die Integration der internen und externen Kräfte muss analog zur Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrix erfolgen.

## 2.2 Lagrange-Netze / Euler-Netze

Um die Bewegung von Körpern im Raum zu beschreiben, gibt es zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen. Bei der **Lagrange-Beschreibung** (Lagrange-Netz) wandert der Betrachter mit dem Körper mit. Das Netz bleibt fest mit der Struktur verbunden. Für beliebige Feldfunktionen  $\phi$  gilt damit

$$\phi = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (2.17)$$

Die Funktionen sind damit also von den materiellen Punkten (Körperkoordinate  $\mathbf{X}$ ) abhängig.

Die Vorteile von Lagrange-Netzen sind meist kürzere Rechenzeiten, eine Vereinfachung der Definition der Randbedingungen und die Möglichkeit, geschichtsabhängige Stoffgesetze zu verwenden. Nachteilig wirkt sich der Abbruch bei großen Netzdeformationen aus. Lagrange-Netze werden zumeist in der Strukturmechanik verwendet.

Die **Euler-Beschreibung** (Euler-Netz) betrachtet das Verhalten über die gesamte Zeit von einem festen Standpunkt aus. Das gesamte zu modellierende System wird mit einem raumfesten Netz überzogen, in dem sich der Körper bewegt.

Für beliebige Feldfunktionen  $\phi$  gilt damit

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

Die Funktionen sind damit also von den geometrischen Punkten (Raumkoordinate  $\mathbf{x}$ ) abhängig. Ein Vorteil des Euler-Netzes ist das Fehlen von Netzverzerrungen. Es eignet sich deswegen zur Beschreibung von Fluiden.

Die Unterschiede in der Betrachtung können gut mit Abbildung 2.2 beschrieben werden. Man stelle sich ein Stück Knetmasse vor, das auf ein anderes Stück Knetmasse geworfen wird. Für die Lagrange-Beschreibung wird auf die Knetmasse ein Netz gezeichnet, das sich beim Aufprall des Körpers verformt (Abbildung 2.2, oben). Bei der Euler-Beschreibung wird vor das Experiment eine durchsichtige Folie mit einem Gitter gelegt, das als Bezugssystem dient. Dieses Gitter verformt sich beim Aufprall des Körpers nicht (Abbildung 2.2, unten).

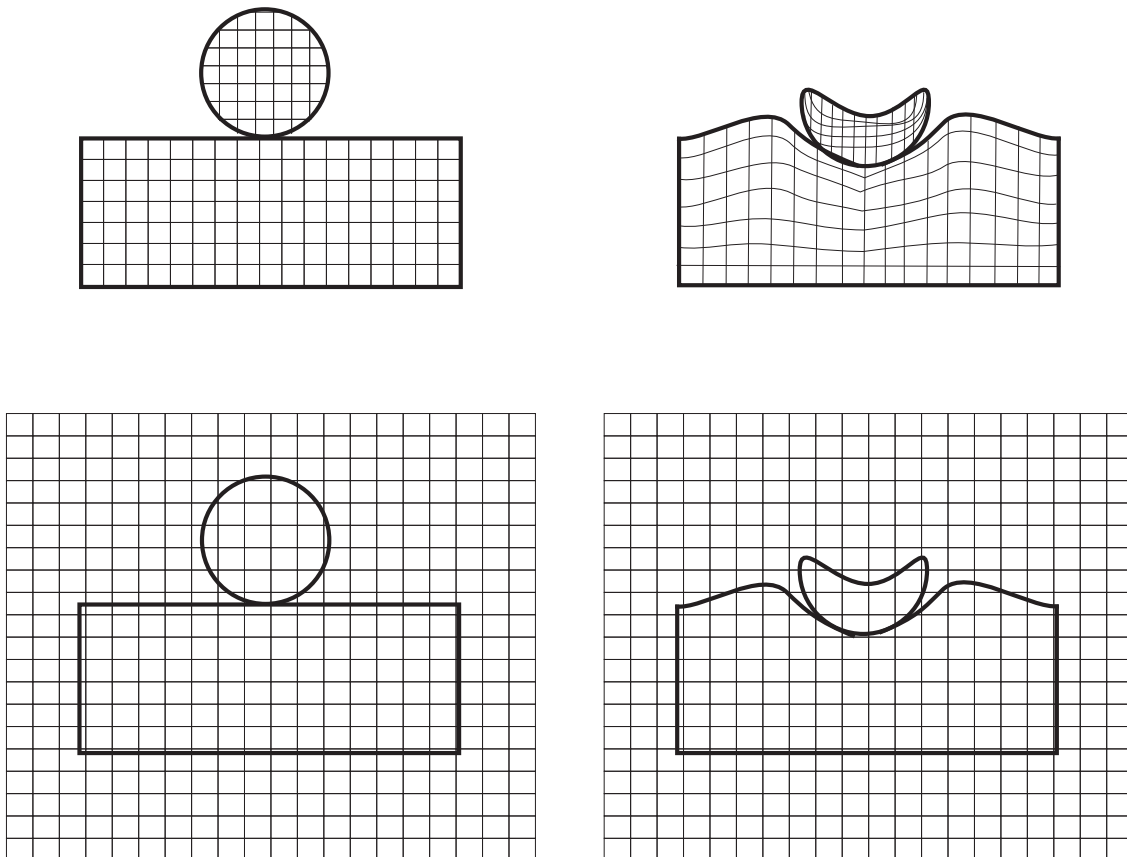


Abbildung 2.2: Lagrange-Netz (oben) – Euler-Netz (unten)

Sollen nun Lagrange- und Euler-Netze gekoppelt werden, sind im Kontaktbereich verschiedene Randbedingungen zu beachten. Dafür kann das ALE-Verfahren (Arbitrary Lagrangian Eulerian) verwendet werden. Eine Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in Plotitzka [109].

Durch das hier verwendete elementfreie Galerkin-Verfahren stellen sich die Probleme mit großen Verformungen nicht in dem Maße, wie sie bei Finiten Elementen bekannt sind. Es wird bei den Untersuchungen stets ein Lagrange-Netz verwendet.

## 2.3 Nichtlineare Lösungsansätze

### 2.3.1 Klassifikation der Nichtlinearität

Die meisten Ingenieurprobleme zeigen bei einer entsprechenden Belastung ein nichtlineares Verhalten. Eine lineare Betrachtung ist nur in einem eingeschränkten Bereich zulässig. Beispiele für nichtlineares Verhalten sind das Überschreiten von Materialfestigkeiten, das Knicken und Beulen oder der Kon-

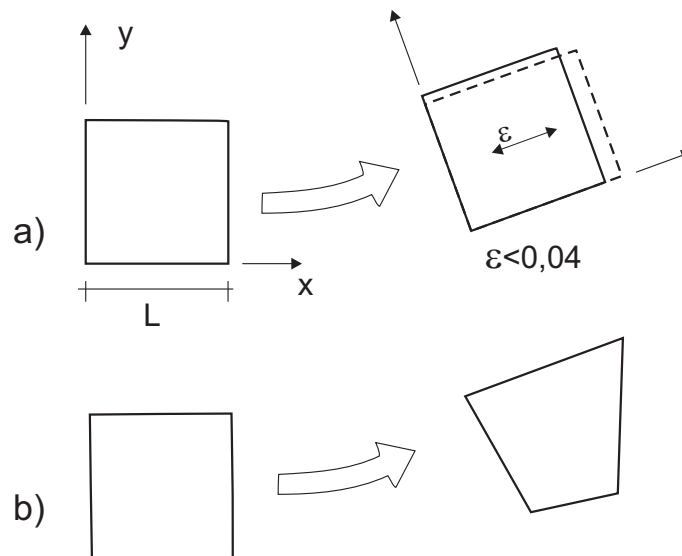


Abbildung 2.3: Verschiedene geometrisch nichtlineare Problemtypen aus Baathe [11]

- a) große Verschiebungen, kleine Verzerrungen
- b) große Verschiebungen, große Verzerrungen

takt. Nichtlinearitäten haben verschiedene Ursachen, die in drei Kategorien unterteilt werden können:

- Materialnichtlinearität (z.B. Plastizität)
- Geometrische Nichtlinearität (Theorie II. Ordnung). Die geometrischen Nichtlinearitäten können unterteilt werden in Probleme mit großen Verschiebungen, kleinen Verzerrungen und in Probleme mit großen Verschiebungen und großen Verzerrungen (siehe Abbildung 2.3).
- Sich ändernde Systemzustände z.B. Kontakt

Ein linearer FE-Ansatz geht davon aus, dass sich alle Teile des Gleichungssystems 2.8 linear verhalten. Für nichtlineare Stoffgesetze, für große Verschiebungen und große Verzerrungen sind lineare Ansätze nicht oder nur eingeschränkt verwendbar.

Das Gleichgewicht (Gleichungssystem 2.8) ist bei einer nichtlinearen Berechnung immer am aktuellen (verformten) System zu kontrollieren. Um dies zu ermöglichen, wird die Last in Lastinkremente oder Lastschritte aufgeteilt. Es wird eine Zeitvariable  $t$  eingeführt, die bei einer statischen Berechnung das Lastniveau und bei einer dynamischen Berechnung die wirkliche Zeit repräsentiert.

Da das Gleichgewicht in den seltensten Fällen zum Zeitpunkt  $t$  direkt bestimmbar ist, ist bei pfadabhängigen Problemen eine nichtlineare Berechnung

über den gesamten Zeitbereich zu lösen. Die Lösung zu einem Zeitpunkt  $t$  sei bekannt. Damit kann die Lösung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  bestimmt werden zu

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{ext}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{int}} = {}^t\mathbf{f}_{\text{int}} + \Delta\mathbf{f} \quad (2.19)$$

Der vorangestellte obere Index entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die entsprechende Größe betrachtet wird. In Gleichung 2.19 bezeichnet  $\Delta\mathbf{f}$  den Zuwachs der inneren Kräfte im Zeitschritt  $\Delta t$ . Dieser Vektor kann durch die Multiplikation der inkrementellen Verformungen mit der Tangentensteifigkeitsmatrix  ${}^t\mathbf{K}$ , die den geometrischen und materiellen Bedingungen zum Zeitpunkt  $t$  entspricht, angenähert werden

$$\Delta\mathbf{f} \approx {}^t\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{u} \quad (2.20)$$

Der Vektor  $\Delta\mathbf{u}$  repräsentiert die inkrementellen Knotenverschiebungen im Zeitschritt  $\Delta t$ . Dies ist nur eine Näherung, da die Matrix  ${}^t\mathbf{K}$  zum Zeitpunkt  $t$  bestimmt wird. Das Gleichgewicht muss damit in folgender Gleichung erfüllt sein

$${}^t\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{\text{ext}} - {}^t\mathbf{f}_{\text{int}} \quad (2.21)$$

Die Näherung für die Gesamtverschiebung ergibt sich zu

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \approx {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (2.22)$$

Da dieses Vorgehen nur eine Näherung ist, kann eine Lösung je nach Größe der Zeitschritte signifikant falsch sein. Deswegen muss ein stabiles Iterationsverfahren verwendet werden, das zum Beispiel mit dem Newton-Raphson-Verfahren gegeben ist.

### Nichtglatte Systeme

Nichtlineare Systeme sind außerdem oft zusätzlich nichtglatte Systeme (Leine [83]). Von nichtglatten Systemen spricht man, falls ein Stoffgesetz oder eine Randbedingung nicht differenzierbar oder unstetig ist. Es spielt dabei keine Rolle, ob die Unstetigkeit bzw. Undifferenzierbarkeit nach dem Ort oder nach der Zeit vorhanden ist. Beispiele für nichtglatte Systeme sind ein idealplastisches-ideal-elastisches Stoffgesetz, eine Kontaktbedingung oder das Beulen von dünnen Schalen.

Für alle nichtglatten Systeme gilt, dass der Punkt, an dem die Unstetigkeit bzw. fehlende Differenzierbarkeit auftritt, genauer betrachtet werden sollte. Es





gente der Steifigkeitsmatrix  $K_T$  am Punkt A. Der Fehler dieser Lösung beträgt  $\Delta\tilde{F}_1$  (Residuum). Im zweiten Schritt vom Punkt C zum Punkt D (Steigung der Steifigkeitsmatrix am Punkt C) verringert sich das Residuum auf  $\Delta\tilde{F}_2$ . Dieser Fehler wird im nächsten Schritt als neue Last verwendet. Um die wiederholte Erstellung der Steifigkeitsmatrix zu vermeiden, kann im zweiten Schritt auch die im Punkt A verwendete Steifigkeitsmatrix verwendet werden. Dieses so genannte modifizierte Newton-Raphson-Verfahren führt zwar zu einer schlechteren Konvergenz, bedeutet aber unter Umständen eine wesentlich schnellere Rechnung, da die Steifigkeitsmatrix nicht bei jedem Iterationsschritt aufgebaut werden muss.

Das Nachbruchverhalten kann mit diesem Verfahren nicht optimal abgebildet werden, da in diesem Fall die aufnehmbare Last bei zunehmender Verformung abnimmt. Dafür steht das Bogenlängenverfahren zur Verfügung. Dabei wird die neu aufzubringende Last eines Iterationsschrittes so bestimmt, dass die Gesamtverformungen des Systems in jedem Schritt gleich sind bzw. einen Grenzwert nicht überschreiten.

Ein Nachteil des Newton-Raphson-Verfahrens ist die aus den erforderlichen kleinen Schrittweiten resultierende lange Rechenzeit. Die genaue Vorgehensweise des Newton-Raphson-Verfahrens ist zum Beispiel in Belytschko [19] geschildert.

## 2.4 Zeitintegration

Im Folgenden sollen verschiedene Methoden zur Zeitintegration vorgestellt werden. Nach einer allgemeinen Einführung werden dabei das Newmark-Verfahren und die zentrale Differenzen-Methode vorgestellt. Abschließend werden einige weitere bei einer dynamischen Berechnung notwendige Methoden vorgestellt.

### 2.4.1 Einführung

Die Differentialgleichungen, die in Kapitel 2.1 hergeleitet wurden, müssen über die Zeit integriert werden. Die Integrationsverfahren können dabei aufgeteilt werden in explizite (differentielle Formulierung) und implizite (Variations-Formulierung) Methoden, die sich in der Anwendung folgendermaßen unterscheiden:

Bei der **expliziten Zeitintegration** (z.B. zentrales Differenzenverfahren) wird für die Berechnung der Verformungen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  das Gleich-

gewicht zum Zeitpunkt  $t$  hergestellt. Es ist ein rückwärtsgerichtetes Verfahren und benötigt wegen der Abhängigkeit der Zeitschrittgröße von der höchsten Eigenfrequenz des Systems sehr viele kleine Zeitinkremente. Der Rechenaufwand pro Inkrement ist dabei durch die bekannten Lösungen des letzten Zeitschrittes gering. Es sind keine Iterationen zu lösen.

Bei der **impliziten Zeitintegration** (z.B. Newmark-Verfahren) wird das Gleichgewicht zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  am Zeitpunkt  $t + \Delta t$  betrachtet. Es kann dabei nicht auf schon bekannte Lösungen zurückgegriffen werden. Die notwendige Iteration bedingt die wiederholte Lösung des globalen Gleichungssystems, so dass der numerische Aufwand pro Inkrement deutlich höher ist als bei expliziten Methoden. Die Zeitintervallgröße ist nur durch die angestrebte Genauigkeit und durch Konvergenzbedingungen festgelegt, da keine Beschränkung zum Erreichen der Konvergenz erforderlich ist.

Beide Zeitintegrationsverfahren besitzen eine quadratische Konvergenz. Das explizite Zeitintegrationsverfahren konvergiert allerdings nur quadratisch, falls die kritische Zeitschrittweite nicht unterschritten wird.

## 2.4.2 Newmark-Verfahren

Die Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.23)$$

stellt den Ausgangspunkt für die Herleitung des Newmark-Verfahrens dar. Dabei werden die globale Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und die globale Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  zur Bestimmung der unbekanntenen Verformungen  $\mathbf{u}$ , Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  und Beschleunigungen  $\mathbf{a}$  benutzt. Zur Lösung sind die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (2.24)$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (2.25)$$

erforderlich. Die Gleichung 2.23 wird nun für einzelne Zeitpunkte gelöst. Die Beschleunigung wird zwischen diesen Punkten mit einem Faktor  $\gamma$  gewichtet (siehe Abbildung 2.5).

Die Beschleunigung zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ergibt sich zu

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \gamma\Delta\mathbf{a} \quad (2.26)$$

Die Geschwindigkeit und die Verformung kann dann errechnet werden zu

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.27)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2}[(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.28)$$

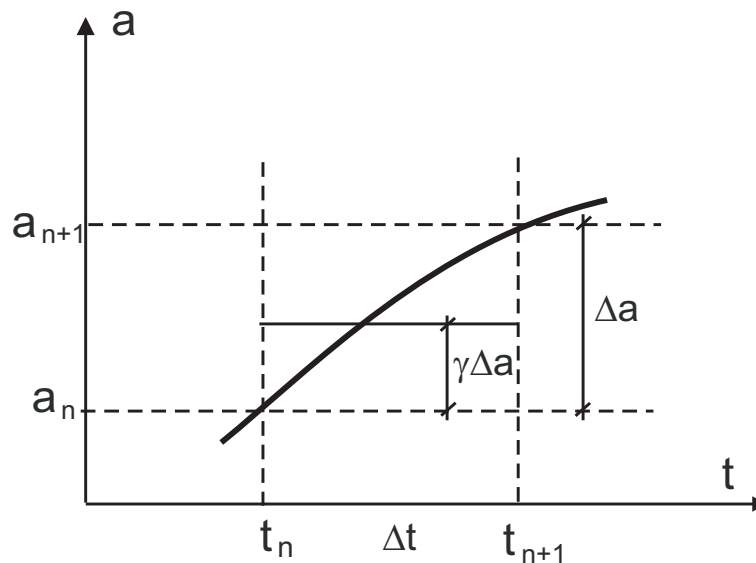


Abbildung 2.5: Wichtung der Beschleunigungen beim Newmark-Verfahren

wobei  $\beta$  je nach gewähltem Ansatz unterschiedliche Werte annehmen kann. Bei  $\beta = \frac{1}{4}$  wird von einer konstanten Beschleunigung ausgegangen, bei  $\beta = \frac{1}{6}$  von einer linearen Beschleunigung.

Die Aufstellung des Systemgleichgewichts ergibt

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (2.29)$$

Diese Gleichung kann nach  $\mathbf{a}_{n+1}$  aufgelöst werden, wobei folgendes Gleichungssystem zu lösen bleibt

$$(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C} + \beta\Delta t^2\mathbf{K})\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{C}\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} \quad (2.30)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t(1 - \gamma)\mathbf{a}_n \quad (2.31)$$

$$\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n \quad (2.32)$$

Zu klären bleibt die Startbedingung des Algorithmus also der Wert  $\mathbf{a}_0$ . Diese kann durch Auswertung der Gleichung 2.23 zum Zeitpunkt  $t = 0$  bestimmt werden zu

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\mathbf{v}_0 - \mathbf{K}\mathbf{u}_0 \quad (2.33)$$

Die Berechnung einer Startbedingung ist eine Eigenart des Newmark-Verfahrens. Bei anderen Zeitintegrationsverfahren (z.B. Petrow-Galerkin) ist dies

nicht erforderlich. Dies kann unter Umständen ein Vorteil sein. Bei Verwendung von  $\beta = \frac{\gamma}{2}$  ist das ungedämpfte Newmark-Verfahren für jede Zeitschrittweite stabil und besitzt eine quadratische Konvergenz. Falls  $\gamma > \frac{1}{2}$ , entsteht eine algorithmische Dämpfung und numerische Dispersion. Deswegen werden die beiden Newmark-Parameter meist folgendermaßen gewählt

$$\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4} \quad (2.34)$$

Dies entspricht dem Newmark-Verfahren unter Annahme konstanter Beschleunigung.

Die vorgestellten Gleichungen sind im Ablaufdiagramm 2.1 zusammengestellt (siehe auch Belytschko [19]).

### Dispersion

Mit Dispersion bezeichnet man den Phasenfehler, der bei der numerischen Zeitintegration entsteht. Sie wird durch Oszillationen sichtbar, die einer Belastungswelle nachlaufen. Verschiedene Autoren beschreiben zeitliche Integrationsverfahren, die die Dispersion verkleinern wie z.B. Neumann [99].

### 2.4.3 Explizite Zeitintegration

Für die Wahl  $\beta = 0$  und  $\gamma = \frac{1}{2}$  erhält man aus dem Newmark-Verfahren ein explizites Zeitintegrationsverfahren – das Verfahren der zentralen Differenzen.

Die Beschleunigung lässt sich unter Verwendung der Integrationsfaktoren darstellen als

$${}^t \mathbf{a} = \frac{1}{\Delta t^2} ({}^{t-\Delta t} \mathbf{u} - 2 {}^t \mathbf{u} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) \quad (2.35)$$

Die Verformung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  kann damit aus bisher bekannten Werten ermittelt werden. Die Gleichgewichtsbeziehung 2.29 wird zu

$$\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{f}_{int} - {}^t \mathbf{f}_{ext} - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) {}^t \mathbf{u} - \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} {}^{t-\Delta t} \mathbf{u} \quad (2.36)$$

Der Ablauf dieses Verfahrens ist im Ablaufdiagramm 2.2 dargestellt.

Die Lösung beruht also darauf, dass für die Berechnung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  die Gleichgewichtsbedingungen zum Zeitpunkt  $t$  angewendet werden. Es fällt weiter auf, dass unter Voraussetzung einer diagonalen (lumped) Massenmatrix keine Invertierung einer Matrix mehr notwendig ist sondern eine

## Ablaufdiagramm 2.1: Newmark-Verfahren

1. Zähler setzen zu  $n = 0, t = 0$
2. Anfangsbedingungen und Initialisierung der Parameter  $\mathbf{v}_n, \boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{u}_n$
3. Berechnung von  $\mathbf{M}, \mathbf{f}_n$
4. Berechnung der Anfangsbeschleunigung aus  $\mathbf{a}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{f}_0$  (bei  $\mathbf{u}_0 = 0$  und  $\mathbf{v}_0 = 0$ )
5.  $\mathbf{u}_{new} = \mathbf{u}_n$
6. Newton-Raphson-Iteration für den Zeitschritt  $n + 1$ 
  - a) Berechnen der Belastung  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_{new}, t_{n+1}) = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}$
  - b)  $\tilde{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n$   
 $\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t} (\mathbf{u}_{new} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1})$   
 $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}_n + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}$
  - c) Bestimmung des Residuums  $\mathbf{r} = \mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} - \mathbf{f}$   
Bei Berücksichtigung der Dämpfung  

$$\mathbf{r} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} \cdot (\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \mathbf{v}_n - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{a}_n \right] - \mathbf{f}$$
  - d) Kontrolle des Konvergenzkriteriums
  - e) Berechnung der Steifigkeitsmatrix  

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{u}_{new} - \tilde{\mathbf{u}}_{n+1}) \mathbf{M} + \mathbf{K}$$
  - f) Lösen der linearen Gleichung  $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{r}$
  - g)  $\mathbf{u}_{new} = \mathbf{u}_{new} + \Delta \mathbf{u}$
7. Verschiebungen aktualisieren  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_{new}$   
Zähler erhöhen  $n = n + 1, t = t + \Delta t$

## Ablaufdiagramm 2.2: Explizite Zeitintegration

1. Berechnung der Anfangskonditionen  $\mathbf{a}_0$
2. Berechnung der diagonalen, invertierten Massenmatrix  $\mathbf{M}^{-1}$ 
  - a) Berechnung des äußeren Lastvektors  $\mathbf{f}_{ext,n}$
  - b) Bestimmung der inneren Kräfte  $\mathbf{f}_{int,n}$  und der Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$
  - c)  $\mathbf{f}_n = \Delta t^2 \cdot (\mathbf{f}_{ext,n} - \mathbf{f}_{int,n})$
  - d) Kontrolle der Konvergenzbedingungen
  - e)  $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_n - \mathbf{C}\mathbf{v}_{n-1}) + 2 \cdot \mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}$
  - f)  $\mathbf{a}_{n+1} = \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \Delta \mathbf{u} - \frac{4}{\Delta t} \cdot \mathbf{v}_n - \mathbf{a}_n$
  - g)  $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \cdot \mathbf{a}_{n+1}$

wesentlich schnellere Matrizenmultiplikation durchgeführt wird. Unter der Voraussetzung einer über die Zeit konstanten Massenmatrix müssen in jedem Zeitschritt demnach nur noch die internen Kräfte bestimmt (es ist keine globale Steifigkeitsmatrix erforderlich) und verschiedene Matrizenadditionen und Matrizenmultiplikationen durchgeführt werden.

Die Durchführung der expliziten Zeitintegration kann auf zwei verschiedenen Ebenen durchgeführt werden. Die Multiplikation der Massenmatrizen mit dem residualen Kraftvektor kann auf Elementebene erfolgen. Dies hat den Vorteil, dass die Anzahl globaler Matrizen relativ klein ist. Alternativ kann die Multiplikation auch auf globaler Ebene erfolgen. Dies hat den Vorteil, dass das Newton-Raphson-Verfahren bzw. das Newmark-Verfahren entsprechend angepasst werden kann, ohne dass eine komplette Neuprogrammierung erforderlich ist. Deswegen wird dieses Vorgehen auch hier verwendet.

Eine diagonale Massenmatrix kann zum Beispiel mit der von Huges [64] beschriebenen "Row-sum"-Technik erstellt werden. Dabei werden auf Elementebene alle Werte einer Zeile zusammengefasst und in die Diagonale eingetragen.

### Stabilität

Im Gegensatz zum Newmark-Verfahren, bei dem gezeigt werden kann, dass bei Verwendung von  $\beta = \frac{\gamma}{2}$  das Verfahren unbedingst stabil ist, ist das zentrale Differenzenverfahren nur dann stabil, wenn die stabile Zeitschrittweite nicht

überschritten wird. Diese wird von Belytschko [15] angegebenen zu

$$\Delta t \leq \alpha_c \frac{d_{min}}{c} \quad (2.37)$$

mit dem minimalen Abstand der Knoten zueinander  $d_{min}$  und der Wellengeschwindigkeit  $c$ , die in elastischen isotropen Materialien unter kleinen Verformungen bestimmt werden kann zu

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1 - 2\nu)}} \quad (2.38)$$

$\alpha_c$  ist ein Reduktionsfaktor (Courant-Zahl [36]), der aufgrund der destabilisierenden Effekte der Nichtlinearitäten gewählt werden sollte zu

$$0,8 \leq \alpha_c \leq 0,98 \quad (2.39)$$

#### 2.4.4 Dämpfung

Die in der numerischen Mechanik verwendeten Dämpfungsansätze können unterteilt werden in eine für das Rechenverfahren erforderliche numerische Dämpfung und eine Dämpfung, die die Energiedissipationen des Werkstoffes abbildet.

Bei den meisten Zeitintegrationsverfahren wird eine numerische Dämpfung der hohen Frequenzbereiche eingeführt. Dies ist nötig, um zum Beispiel die hochfrequenten Schwingungen der Massenpunkte zu minimieren. Dabei sollten energieerhaltende Methoden bevorzugt werden, da gerade bei Analysen über längere Zeiträume die numerische Dämpfung zu einer erheblichen Energiedissipation führt.

##### Rayleigh-Dämpfung

Die Rayleigh-Dämpfung wird meist verwendet, um bestimmte Frequenzbereiche in einer Berechnung zu dämpfen. Es wird eine spektrale Dämpfungsmatrix  $\mathbf{C}$  eingeführt, die sich aus der gewichteten Summe der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  ergibt.

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (2.40)$$

Das vom Schwingungssystem abhängige Dämpfungsmaß  $\xi$  ergibt sich zu

$$\xi = \frac{1}{2} \left( \alpha\omega + \frac{\beta}{\omega} \right) \quad (2.41)$$

Wird dieses Dämpfungsmaß an zwei Stellen angenommen, können  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt werden. Das Dämpfungsmaß wird an diesen zwei Stellen genau eingehalten, dazwischen ist das Dämpfungsmaß kleiner. Außerhalb dieses Bereiches wird das System mehr gedämpft (siehe Abbildung 2.6).

Die Massendämpfung ist antiproportional zur Frequenz und dämpft deswegen kleine Frequenzen. Die Steifigkeitsdämpfung ist proportional zur Frequenz und dämpft deswegen hohe Frequenzen. Rayleigh-Dämpfung kann deswegen insbesondere dazu dienen, bei bekannter Systemantwort bestimmte Frequenzbereiche (niedrige Eigenformen) annähernd ungedämpft zu lassen und die anderen Bereiche herauszufiltern. Sie kann deswegen nur sehr eingeschränkt zur Dämpfung der Schwingung einzelner Knoten verwendet werden. Die Rayleigh-Dämpfung ist nicht energieerhaltend.

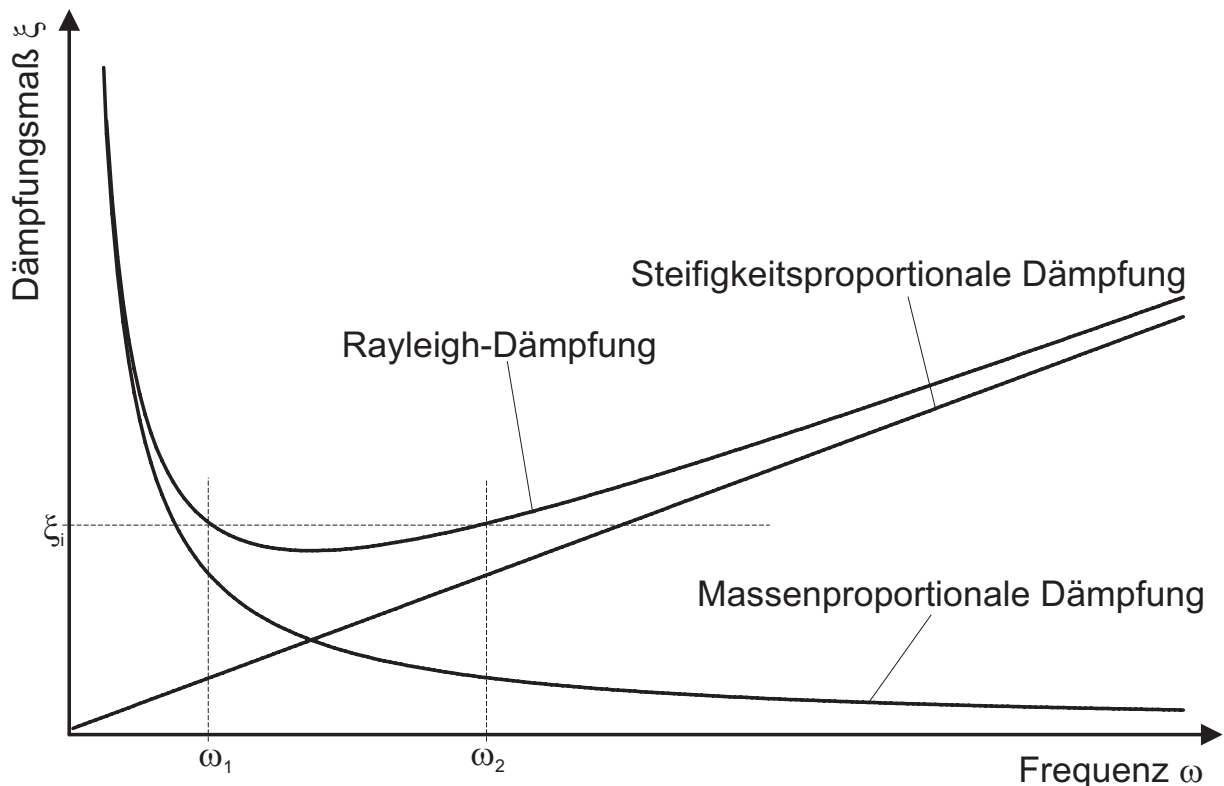


Abbildung 2.6: Rayleigh-Dämpfung



### Künstliche Viskosität (Bulk-Viscosity/artificial viscosity)

Numerische Berechnungsverfahren weisen insbesondere bei der Berechnung von Diskontinuitäten Probleme bei der dynamischen Zeitintegration auf. Diskontinuitäten können dabei zeitlicher (Stoßwellen, siehe Kapitel 4.1.2) oder geometrischer Art sein (z.B. Risse).

Die Schwierigkeit bei der Berechnung von Stoßwellen hat zwei Ursachen. Zum einen kann eine Stoßwelle, deren Länge kleiner ist als ein Element, nicht genau genug dargestellt werden. Zum anderen führen Diskontinuitäten zu Schwingungen der konzentrierten Massenpunkte. Um diese hochfrequenten Schwingungen der Massenpunkte herauszufiltern, ist in vielen expliziten Finiten-Elemente-Codes eine künstliche Viskosität – auch Neumann-Richtmeyer-Viskosität genannt – implementiert (siehe z.B. ABAQUS [1]). Es wird eine zur Geschwindigkeit der Knoten proportionale Dämpfung verwendet. Künstlich meint dabei, dass die verwendeten Ansätze nicht aus physikalischen Gleichungen ableitbar sind.

Die künstliche Viskosität wird über Kräfte, die auf die Knoten aufgebracht werden, berücksichtigt. Diese Kräfte werden nach Anderson [7] für die zwei oben genannten Probleme mit zwei unterschiedlichen Gleichungen bestimmt. Die Stoßwelle wird mit der quadratischen künstlichen Viskosität (Gleichung 2.42) auf mehrere Elemente verteilt (von Neumann [143]). Die Dehnrates geht dabei quadratisch ein. Daher hat dieser Anteil außerhalb der Stoßwelle nur einen sehr kleinen Einfluss.

Es gilt

$$\begin{aligned} q_{quad} &= b_{quad} \cdot \rho \cdot \Delta x^2 \cdot \dot{\epsilon}^2 && \text{für } \dot{\epsilon} < 0 \\ q_{quad} &= 0 && \text{für } \dot{\epsilon} > 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

wobei  $\Delta x$  die verwendete Elementabmessung darstellt. Der Parameter  $b_{quad}$  gibt das Maß der Viskosität an. LS-DYNA [86] verwendet dafür zum Beispiel einen Wert von 1,5. Das heißt, dass die Welle über 1,5 Elemente verschmiert wird und die Stoßwellenfront für die Berechnung deswegen keine Diskontinuität mehr darstellt.

Die Oszillationen im Nachlauf der Stoßwelle können mit einer Gleichung, in die die Dehnrates linear eingeht, gedämpft werden. Die lineare künstliche Viskosität wurde von Landshoff [79] und von Noh [101] vorgestellt.

$$\begin{aligned} q_{lin} &= b_{lin} \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta x \cdot |\dot{\epsilon}| && \text{für } \dot{\epsilon} < 0 \\ q_{lin} &= 0 && \text{für } \dot{\epsilon} > 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

mit der Wellengeschwindigkeit  $c$ . Der Parameter  $b_{lin}$  gibt das Maß der Viskosität an. ABAQUS und LS-DYNA verwenden dafür zum Beispiel einen Wert 0,06. Schmidt-Hurtienne [123] benutzt den Wert 0,25.

Den Einfluss der Parameter  $b_{lin}$  und  $b_{quad}$  zeigt die Berechnung des stark vereinfachten Systems eines Split-Hopkinson-Bars (Abbildung 2.7). Der Beton (Stoffgesetz mit Berücksichtigung des hydrostatischen Verhaltens) und das elastische Material haben einen E-Modul von  $40.000 \text{ N/mm}^2$ , eine Querkontraktionszahl von 0,2 und eine Dichte von  $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ . In Abbildung 2.8 ist der Wellenverlauf bei Variation der Parameter  $b_{lin}$  und  $b_{quad}$  zum Zeitpunkt  $t = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$  dargestellt.

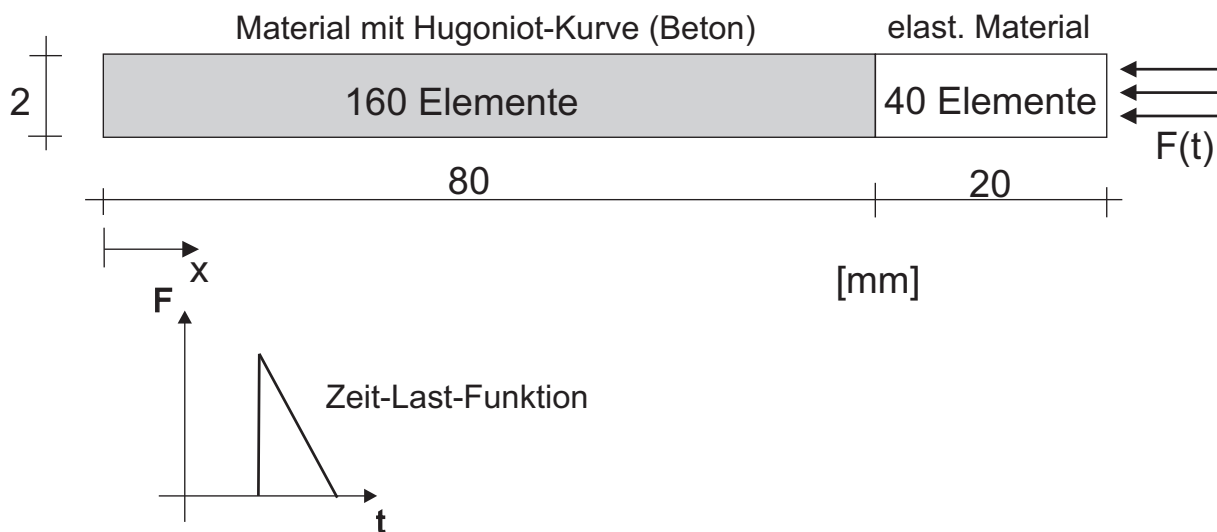


Abbildung 2.7: Split-Hopkinson-Bar – stark vereinfachte Modellierung

Die Stoßwellenfront, die sich bis zu diesem Zeitpunkt aufgebaut hat, ist bei Vernachlässigung der künstlichen Viskosität sehr steil. Bei Verwendung von  $b_{quad} = 1,5$  wird die Spitze der Stoßwelle auf einen größeren Bereich verteilt. Gleichzeitig nimmt die Amplitude der Stoßwellenfront ab.

Die numerisch ungedämpfte Berechnung zeigt Oszillationen im Nachlauf der Stoßwellenfront. Bei Verwendung des Parameters  $b_{lin}$  ergibt sich zum einen eine schwächere Oszillation nach dem Durchlaufen der Stoßwellenfront. Es ergibt sich aber auch eine Reduktion der Amplitude der Stoßwelle. Wählt man den Faktor  $b_{lin}$  zu groß, wird die Stoßwelle zu großen Teilen absorbiert. Die Größe der Absorption ist systemabhängig und wird zum Beispiel von Noh [101] diskutiert.

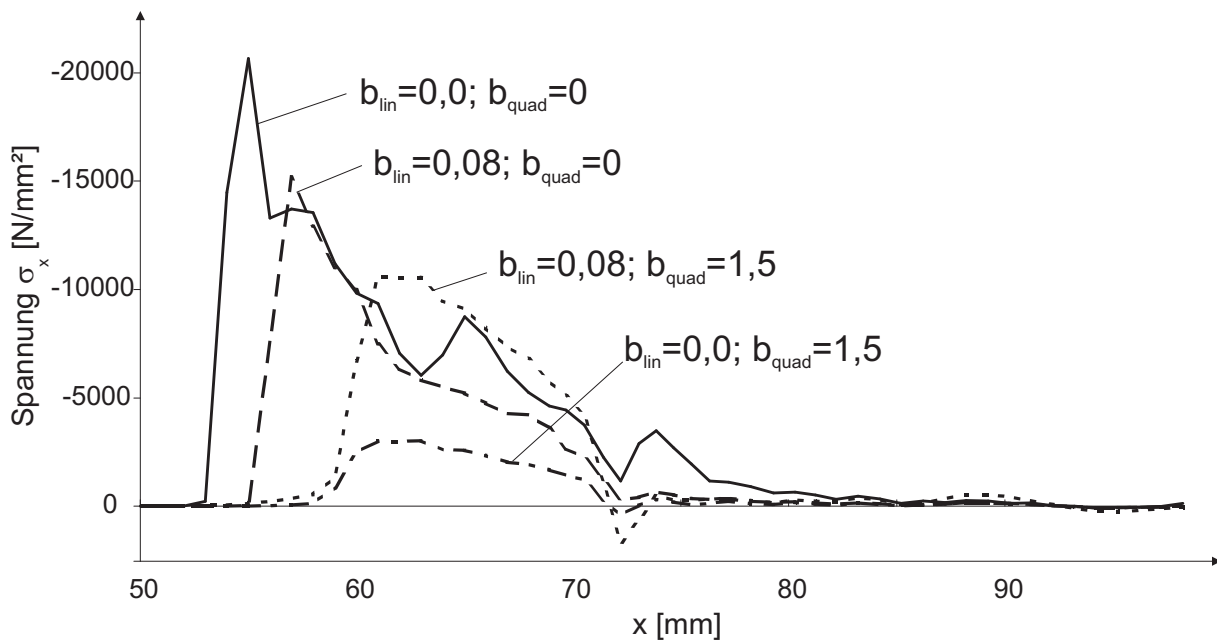


Abbildung 2.8: Split-Hopkinson-Bar – Einfluss der künstlichen Viskosität

## 2.5 Diskrete Risse

### 2.5.1 Levelset-Methode

Während ein Stoffgesetz mit einem Ansatz für verschmierte Risse die Informationen über die Risse an den Integrationspunkten implizit berechnet, muss bei der Verwendung diskreter Risse die genaue Rissgeometrie gespeichert werden. Die mathematische Beschreibung über geschlossene Formeln ist im Allgemeinen nicht effektiv genug, um beliebige Geometrien speichern zu können. Es hat sich gezeigt, dass die aus der Bildbearbeitung stammende Levelset-Methode (siehe Osher [105]) gewisse Vorteile besitzt. Die Levelset-Methode kann sowohl mit der hier geschilderten Extended Finite Element Method (X-FEM) (z.B. Stolarska [137]) als auch mit dem elementfreien Galerkin-Verfahren (z.B. Ventura [141]) verwendet werden.

Bei der Levelset-Methode werden drei Felder für jeden Riss definiert. Das Feld  $\psi$  gibt den vorzeichenbehafteten kleinsten Abstand zum Riss an. Es kann zur Identifizierung der getrennten Elemente verwendet werden. Zwei weitere Felder ( $\phi_1, \phi_2$ ) werden definiert, die den vorzeichenbehafteten kleinsten Abstand zur Normalen am Riss in den beiden Risspitzen angeben.

Das Feld, das zur Identifizierung der getrennten Elemente dient, wird fol-

gendermaßen erstellt

$$\psi(\mathbf{x}) = \pm \min | \mathbf{x} - \mathbf{x}_i | \quad (2.44)$$

wobei das Feld auf einer Seite des Risses positiv und auf der anderen negativ ist. Welche Seite positiv definiert wird, ist beliebig.

Die beiden Felder  $\phi_i$  zur Identifizierung der Rissspitzen  $i$  sind gegeben mit

$$\phi_i(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \cdot \hat{\mathbf{t}} \quad (2.45)$$

mit dem Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{t}}$  tangential zum Riss und der Position der  $i$ -ten Rissspitze  $\mathbf{x}_i$ . Abbildung 2.9 zeigt die Werte der einzelnen Felder, die sinnvollerweise an allen Knoten und Integrationspunkten gespeichert werden. Beim EFG-Verfahren können diese Felder relativ einfach durch die verwendete MLS-Interpolation bestimmt werden.

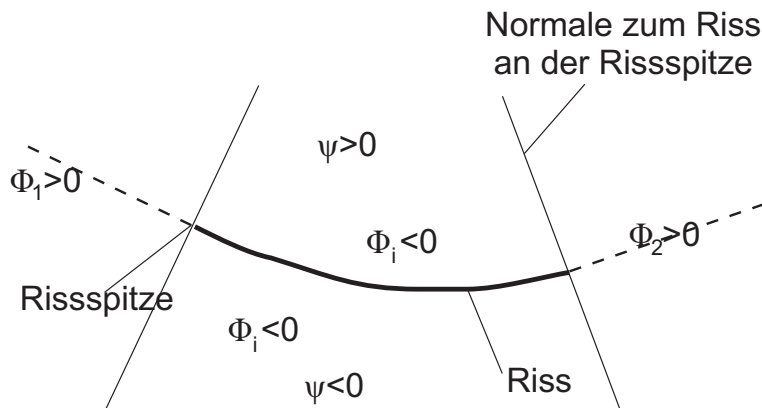


Abbildung 2.9: Vorzeichen der Felder bei der Levelset-Methode

Die Levelset-Methode ist auch für ein Risswachstum nutzbar. Verschiedene Autoren (Ventura [141], [142], Stolarska [137]) haben die Levelset-Methode zur Darstellung des Risswachstums sowohl für X-FEMs als auch für das EFG-Verfahren benutzt. Der Ablauf ist im Ablaufdiagramm 2.3 dargestellt.

Sind nun mehrere Risse in einem Modell vorhanden, stellt sich die Frage, wie hier mit den Levelsets umgegangen werden soll. Es ist hier eine Entscheidung zu treffen, ob ein Levelset für jeden Knoten ausreichend ist oder ob für jeden Riss ein eigener Levelset gespeichert werden muss. Die Verwendung eines Levelsets für alle Risse könnte in dem Sinne erfolgen, dass immer nur der betragsmäßig kleinste Levelset gespeichert wird und zusätzlich eine Referenz auf den auslösenden Riss vorgehalten wird. Diese Referenz ist notwendig, da sonst nicht unterschieden werden kann zwischen einem Riss und der Änderung des auslösenden Risses, die beide durch einen Vorzeichenwechsel angezeigt werden können. Ein weiterer Vorteil dieser Vorgehensweise ist,

Ablaufdiagramm 2.3: Levelset-Methode – Risswachstum

1. Der Riss wächst um den Vektor  $\mathbf{F}$

2. Erstellung eines Hilfsfeldes

$$\hat{\phi}_i = (x - x_i) \frac{F_x}{|\mathbf{F}|} + (y - y_i) \frac{F_y}{|\mathbf{F}|} \quad (2.46)$$

3. Feld für die geteilten Elemente  $\phi$ . Es müssen neue Werte nur berechnet werden, falls  $\hat{\phi}_i > 0$ .

$$\psi^{n+1} = \pm \left| (x - x_i) \frac{F_y}{|\mathbf{F}|} - (y - y_i) \frac{F_x}{|\mathbf{F}|} \right| \quad (2.47)$$

Das Vorzeichen wird so gewählt, dass es mit den bisherigen Feld  $\psi^n$  konsistent ist.

4. Aktualisierung der beiden Felder der Rissspitzen

$$\phi_i^{n+1} = \hat{\phi}_i - \Delta t |\mathbf{F}| \quad (2.48)$$

dass bei jedem Knoten schnell entschieden werden kann, welche Risse einen Einfluss auf einen Knoten haben.

Es treten aber mit dieser Vorgehensweise Probleme bei Rissen auf, die sich so nah kommen, dass ein Knoten von zwei Rissen beeinflusst wird. Dies können parallele oder sich kreuzende Risse sein. Das Problem tritt außerdem bei Rissverzweigungen und Rissverbindungen auf. Aus diesem Grund wird für jeden Knoten ein Levelset für jeden Riss und für jede Rissspitze gespeichert.

## 2.5.2 Extended Finite Element Method (X-FEM)

Bei der Extended Finite Element Method (X-FEM) wird die "normale" Finite-Elemente-Methode so erweitert, dass in einem Element Diskontinuitäten möglich sind. Vorgestellt wird diese Methode von Moes [94]. Es werden drei verschiedene Elemente unterschieden

- Elemente, die durch den Riss geteilt werden
- Elemente mit der Rissspitze
- Elemente, die nicht vom Riss beeinflusst werden

Um entscheiden zu können, welches Element geteilt wird und in welchem Element sich die Risspitze befindet, bietet sich die Levelset-Methode an.

Die Idee von X-FEM ist es, normale verschiebungsbasierte Finite Elemente mit zusätzlichen Freiheitsgraden zu erweitern. An Knoten, die mit geteilten Elementen verbunden sind, werden zusätzliche Freiheitsgrade mit einer Sprungfunktion  $H$  eingeführt. An Knoten, die mit dem Risspitzenelement verbunden sind, werden zusätzliche Freiheitsgrade mit Funktionen für die Berechnung der Risspitze eingeführt.

Die Approximation der Verformungen  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  ist gegeben als

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{x}) + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j N_j(\mathbf{x}) H(\psi(\mathbf{x})) + \sum_{k \in K} N_k(\mathbf{x}) \left( \sum_{\ell=1}^4 a_k^\ell(t) B_\ell(r, \Theta) \right) \quad (2.49)$$

mit den Formfunktionen  $N_i$  der Knoten  $i$ .  $j$  sind die Knoten, die mit geteilten Elementen verbunden sind und  $k$  sind die Knoten, die mit dem Risspitzenelement verbunden sind.

Die Sprungfunktion  $H$  ist folgendermaßen definiert

$$H(y) = \begin{cases} +1 & \text{für } y > 0 \\ -1 & \text{für } y < 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

$y$  ist der kleinste vorzeichenbehaftete Abstand zwischen dem Knoten und dem Riss, der durch das Feld  $\psi$  der Levelset-Methode vorliegt. Damit werden zwei (2D) bzw. drei (3D) Freiheitsgrade für jeden Knoten eingeführt, der mit einem geteilten Element verbunden ist.

Die Funktion für die Berechnung der Risspitze  $B_\ell$  wird mit der asymptotischen Risspitzenfunktion bestimmt (Belytschko [18])

$$B_\ell(r, \Theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin \Theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \sin \Theta \right\} \quad (2.51)$$

$\Theta$  und  $r$  sind die Koordinaten von  $\mathbf{x}$  in einem Polarkoordinatensystem mit der Risspitze im Ursprung und der Tangente am Riss in der Risspitze als Polarachse. Für jeden Knoten, der mit dem Risspitzenelement verbunden ist, werden zwei (2D) bzw. drei (3D) Freiheitsgrade eingeführt.

Risse, die durch einen Knoten laufen, stellen ein Problem dar. Die Lokalisation des Risses ist nicht möglich und die Sprungfunktion  $H$  ist in einem solchen Fall nicht definiert. Deswegen sollten Risse immer einen – wenn auch sehr kleinen – Abstand zu einem Knoten besitzen.

Der Vorteil von X-FEM bei der Berechnung von Problemen mit Diskontinuitäten ist die sehr geringe Rechenzeit im Vergleich zum ebenfalls in dieser Arbeit verwendeten EFG-Verfahren. Die Umsetzung dieser Methode erfordert insbesondere bei einem Wachstum des Risses einen gewissen Aufwand, da sich bei einem Fortschreiten des Risses die Anzahl der Freiheitsgrade ändert. Ein Vergleich der Ergebnisse des EFG-Verfahrens und X-FEM ist in Kapitel 5.1 dargestellt.

## 2.6 Umsetzung der Methoden in einen Rechencode

Zur Berechnung von Strukturproblemen mit den in diesem Kapitel geschilderten Vorgehensweisen bedarf es im Allgemeinen eines Programmcodes, der die Berechnung durchführt und die Daten strukturiert verwalten kann. Auf die Erstellung von Netzgeometrien für die Berechnung und die Auswertung der Ergebnisse soll hier nicht eingegangen werden, da hierfür verschiedene kommerzielle Produkte (z.B. Altair HyperWorks [5], MSC-Patran [97]) gute Dienste leisten.

Als Programmiersprache wird die von Stroustrup [138] entwickelte objektorientierte Programmiersprache C++ verwendet, die für verschiedene Umgebungen verfügbar ist. Es existiert mit dem gnu-Compiler auch eine offene Version von C++ (g++, GNU C++ Compiler [48], Entwicklungsumgebung kdevelop [71]).

Die Beschreibung einzelner Algorithmen wird an den entsprechenden Stellen dieser Arbeit kurz erläutert. Eine Einführung in die Programmierung von Algorithmen ist zu finden bei Sedgewick [126].

### 2.6.1 Objektorientierte Programmiersprachen

Menschen denken objektorientiert. Sie versuchen, alle Objekte, mit denen sie in Kontakt kommen, in Klassen zu strukturieren. In Abbildung 2.10 ist so beispielhaft die Klasse "Auto" dargestellt. Jede Objektklasse hat verschiedene Eigenschaften (Variablen). Ein Auto kann zum Beispiel die Eigenschaft Kennzeichen besitzen. Jede Objektklasse kann außerdem bestimmte Methoden ausführen. So kann ein Auto zum Beispiel fahren oder getankt werden.

Mehrere verschiedene Klassen können in einer übergeordneten Klasse zusammengefasst werden. In einer objektorientierten Programmiersprache

spricht man dann davon, dass die untergeordneten Klassen von der Basis-klasse vererbt werden. Sie erben damit auch alle Eigenschaften (Variablen) und Methoden der Basisklasse. So erbt die Klasse Auto die Eigenschaft Farbe von der Klasse „Fahrzeug“ (siehe Abbildung 2.10). Eine weitere Eigenschaft von objektorientierten Programmiersprachen ist die Kapselung. Wenn eine Klasse keine Beziehung zu einer anderen über eine Vererbung besitzt, so können deren Methoden und Variablen nicht benutzt werden.

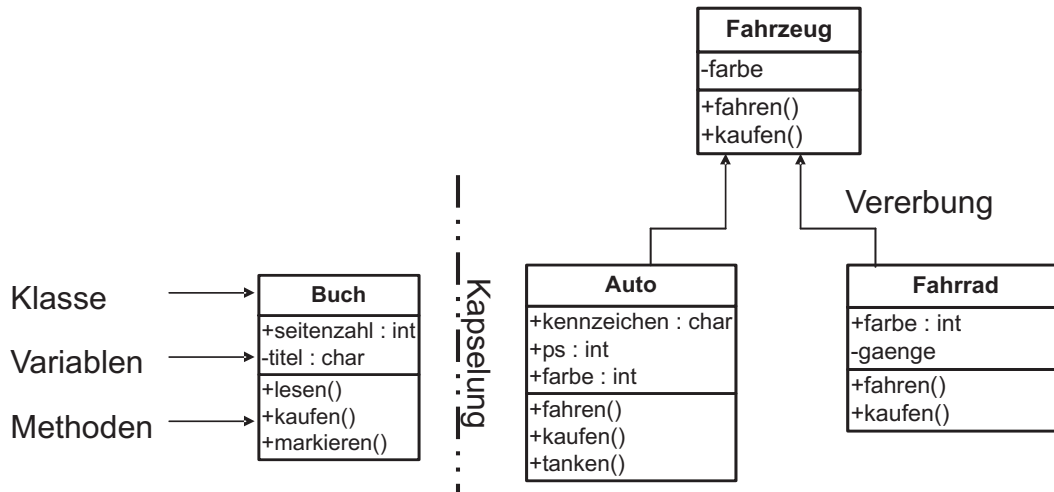


Abbildung 2.10: Objektorientierung: Vererbung, Kapselung

Der Unterschied zu den imperativen bzw. prozeduralen Programmiersprachen, bei denen die algorithmische Zerlegung (Sequenz, Schleife, Verzweigung) und die Datenstrukturierung unabhängig sind (Array, Record, File, Set), ist die zusätzliche Kapselung von Daten und ihren Operationen (Methoden) und die Vererbung von Klasseneigenschaften.

Die Programmierung wird menschlicher und damit wird die Pflege der Software einfacher, da Strukturen übersichtlicher werden. Außerdem werden die Daten gegen einen falschen Zugriff geschützt. Dies bedeutet mehr Sicherheit in der Programmierung. Durch das Vererben von Klassen wird Programmcode wieder verwendbar. Der Nachteil von objektorientierten Programmiersprachen ist ein langsamerer Code, wobei bei den heutigen technischen Möglichkeiten dieser Aspekt in den Hintergrund rückt.

## 2.6.2 Strukturierung der Daten und des Programms

Im Folgenden soll kurz die in dem hier beschriebenen Berechnungsprogramm verwendete Datenstruktur vorgestellt werden. Unter Datenstruktur wird hier die Organisation der für die Berechnung benötigten Daten verstanden.



In der Hauptdatei werden nur die für die Zeitintegration erforderlichen Daten gespeichert – also die Massen- und Steifigkeitsmatrizen, die Verschiebungen und die Zeitvariablen. In dieser Hauptdatei wird ein Objekt der Klasse MODELL erstellt. Die Klasse MODELL dient der Zusammenfassung aller für das Problem benötigten Daten. Sie enthält alle auf MODELL-Ebene benötigten Methoden wie die Erstellung der Steifigkeitsmatrix und die Methoden zum Rissfortschritt. Sie enthält als Variablen verschiedene Container. Ein Container ist eine Datenstruktur, in die beliebig viele Objekte einer gleichen Klasse gespeichert werden können. Es wird der in der Standard-Library vorhandene Container „vector“ verwendet.

In einen solchen Container werden nun die Objekte, die im Modell mehrfach vorkommen, gespeichert. So werden Knoten, Elemente (bzw. Integrationszellen), Lasten und Randbedingungen für die Berechnung zur Verfügung gestellt. Die Modelldaten werden mit einer Methode des Objekts MODELL eingelesen und in die verschiedenen Container verteilt.

Diese Modelldaten werden wie bei den meisten FE-Programmen üblich über eine Input-Datei eingelesen, die sich in groben Zügen an der Syntax von ABAQUS (siehe Abaqus-Manual [2]) orientiert. Dies hat den Vorteil, dass vorhandene Preprozessoren (z.B. Altair HyperMesh, MSC-Patran) für die Modellerstellung verwendet werden können; genauere Angaben über das Format der Eingabedateien enthält das Handbuch [80].

Zur Definition der Knoten wird nun die Eigenschaft der Vererbung verwendet. Es wird eine Klasse POINT definiert, die die geometrischen Funktionen eines Punktes zur Verfügung stellt. So werden auf dieser Ebene zum Beispiel die Abstände von Punkten bestimmt. Von dieser Punktklasse wird nun die Klasse NODE vererbt, die zusätzliche Funktionen eines Knoten bereithält wie die Verwaltung von Freiheitsgraden. Ein ähnliches Vorgehen wird zur Beschreibung der verschiedenen Elemente und Materialien verwendet. Von einer allgemeinen Klasse (ELEM, MAT) werden die jeweiligen Klassen (z.B. ELEM\_CP4, MAT\_ELAST) vererbt. Ein Element bzw. eine Integrationszelle wiederum enthält Pointer auf die bei dem Element verwendeten Knoten.

Eine Klasse Matrix dient zur Speicherung und Berechnung von Vektoren und Matrizen. Ergebniswerte an den einzelnen Knoten (z.B. Verformungen, Geschwindigkeiten, Knotenkräfte) werden in der Hauptdatei über diese Klasse Matrix gespeichert.

Spannungen und Dehnungen liegen nicht in den Knotenpunkten vor, sondern werden stets an den Integrationspunkten berechnet. Eine Speicherung dieser Werte mittels der Klasse Matrix scheidet deswegen aus. Es wurde ein Array mit beliebig vielen Feldern erstellt (VALIP), der je nach Anzahl der Wer-

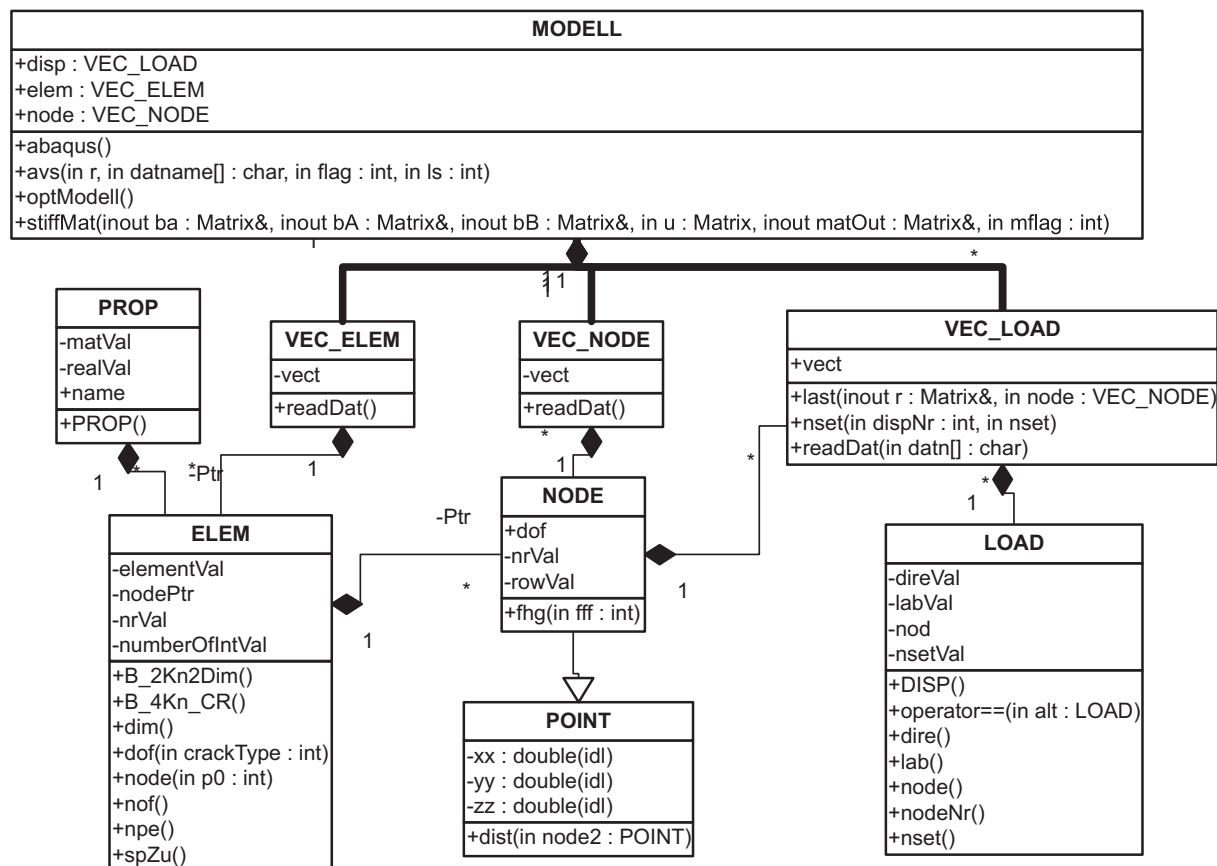


Abbildung 2.11: UML-Darstellung der Datenstrukturierung des erstellten Programmcodes

te, die an einem Integrationspunkt gespeichert werden sollen, unterschiedlich groß ist. Dieses Array wird so oft erstellt, wie Integrationspunkte in einem Element vorhanden sind. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt in der relativ flexiblen Handhabung.

Eine weitere umfangreiche Klasse ist CRACK. Sie repräsentiert eine Risspitze. Zwei Risspitzen bilden einen Riss. Es wird die Risspitze als POINT, die Nummer des verknüpften Levelsets und die Tangente an der Risspitze gespeichert. Für die Ausgabe des Risses werden alle alten Risspitzen vorgehalten. Zur Berechnung der Kräfte in der Bruchprozesszone (siehe Kapitel 4.3.3) werden entlang des Risspfades Punkte gespeichert, an denen die Rissöffnungen und die sich daraus ergebenden Spannungen bestimmt werden können.

Ein Ausschnitt aus der gesamten Datenstruktur ist im UML-Diagramm in der Abbildung 2.11 dargestellt.

Zur Berechnung der Verformungen muss eine Gesamtsteifigkeitsmatrix erstellt werden. Da die Speicherung aller Einträge zu einem sehr großen

Speicherbedarf und die Invertierung der Matrix zu einem sehr hohen Berechnungsaufwand führen, wurden sowohl die Steifigkeitsmatrix als auch die Massenmatrix in zwei Bandmatrizen gespeichert. Es wurde ein an die Bandstruktur angepasster Lösungsalgorithmus verwendet.

Zur Ausgabe der Ergebnisse stehen verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Das Einlesen der Ergebnisdaten in das Visualisierungswerkzeug AVS steht zwar prinzipiell zur Verfügung. Da dieses Werkzeug nicht für die Ausgabe von Finiten-Elemente-Programmen entwickelt wurde, ist hier mit verschiedenen Einschränkungen zu rechnen. So können die Werte in Integrationspunkten nur sehr umständlich angezeigt werden. Alternativ steht die Ausgabe über das von ABAQUS verwendete fil-Format im Textmodus zur Verfügung. Das fil-Format kann zum Beispiel mit dem sehr mächtigen Postprozessor HyperView eingelesen werden. Durch die Verwendung von verschiedenen Modellen, die in einer Visualisierung übereinander gelegt werden können, lassen sich damit auch Rissverläufe und Rissentstehung darstellen.

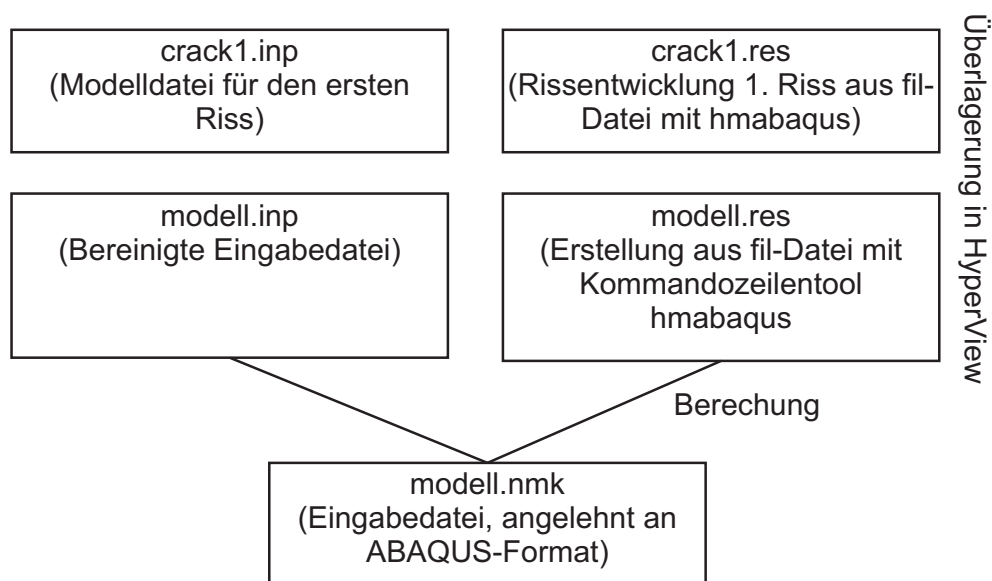


Abbildung 2.12: Ablauf der Darstellung der Ergebnisse in HyperView

Es ist davon auszugehen, dass sich die Prozesse, die zur Berechnung der hier vorgestellten Probleme notwendig sind, relativ einfach parallelisieren lassen. Rechenzeitintensive Vorgänge sind die Erstellung der Steifigkeitsmatrix, die Überprüfung des Kontinuums nach neuen Rissen und der Rissfortschritt. Diese drei Vorgänge werden in Schleifen über die Elemente bzw. Risse durchgeführt. Es wird auf eine gemeinsame Datenbasis zugegriffen. Für die Berechnung eines Schleifenwertes sind keine Zwischenergebnisse der anderen Schleifenwerte notwendig. Deswegen ist eine Parallelisierung effektiv.

Für den verwendeten gnu-Compiler gibt es allerdings derzeit noch keine

stabile Version, die eine Parallelisierung ermöglicht (siehe Lau [82]). Erst mit der Fertigstellung der Version 4.2 des gnu-Compilers wird diese Möglichkeit vorhanden sein.

# 3 Elementfreies Galerkin-Verfahren

In dem hier vorgestellten Simulationsmodell wird für die Darstellung von diskreten Rissen das elementfreie Galerkin-Verfahren (EFG) verwendet. Im Gegensatz zur Finiten-Elemente-Methode werden beim EFG-Verfahren nur Knoten für die Diskretisierung verwendet. Die durch die Elemente repräsentierten Kopplungen zwischen den Elementen werden über den Abstand der einzelnen Knoten zueinander festgelegt. Folglich müssen zuvor die sich beeinflussenden Knoten lokalisiert werden. Dies geschieht über so genannte Einflussbereiche.

Das EFG-Verfahren hat den Vorteil, dass hiermit relativ einfach Diskontinuitäten in der Diskretisierung implementiert werden können. Dies geschieht durch das Abschneiden der Ansatzfunktionen am Riss. Im Gegensatz zur Finiten-Elemente-Methode ist dies beim EFG-Verfahren möglich, da ein Knoten auch nach dem Abschneiden genügend andere Knoten als Unterstützung hat.

## 3.1 Einführung

Zunächst soll das elementfreie Galerkin-Verfahren (EFG) nicht über eine mathematische Herleitung sondern durch das Aufzeigen der Unterschiede zur Finiten-Elemente-Methode eingeführt werden.

Bei der Finiten-Elemente-Methode wird durch Elemente und deren Ansatzfunktionen die Beziehung zwischen mehreren Knoten definiert. Ein Knoten ist während der gesamten Berechnung mit einem Element verknüpft. Dies ist für den eindimensionalen Fall in Abbildung 3.1 a) dargestellt.

Beim EFG-Verfahren werden diese festen Beziehungen durch Formfunktionen ersetzt, die im Laufe der Berechnung neu erstellt werden können – siehe Abbildung 3.1 b). Diese geben nur den Einfluss eines Knotens auf die Nachbarknoten wieder und hängen vom Abstand der Knoten ab. Weit entfernte Knoten haben einen kleineren Wert in der Formfunktion als nähere Knoten.

Der Vorteil der Methode liegt in der Unabhängigkeit von Elementen. Der Aufwand der Berechnung wird aber durch die notwendige Suche nach den nächsten Nachbarn erhöht.

Über die Wichtungsfunktionen ist es nun möglich, diskrete Risse zu implementieren. Dazu werden die Wichtungsfunktionen an der Stelle eines Risses einfach abgeschnitten (siehe Abbildung 3.2). Knoten, die jenseits des Risses liegen, haben auf Knoten diesseits des Risses keinen Einfluss und haben deswegen keinen Eintrag in der Wichtungsfunktion.

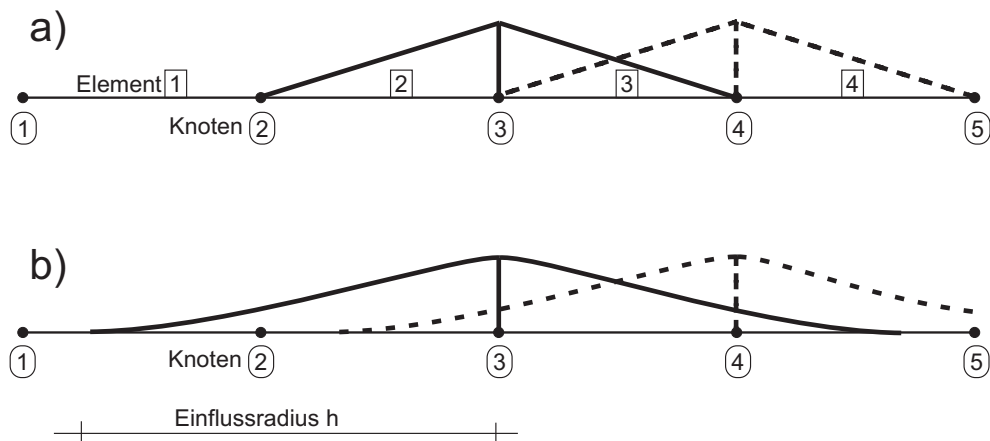


Abbildung 3.1: a) lineare Ansatzfunktion Finite Elemente am Knoten 3 (1D)  
b) Wichtungsfunktion EFG am Knoten 3 (1D)

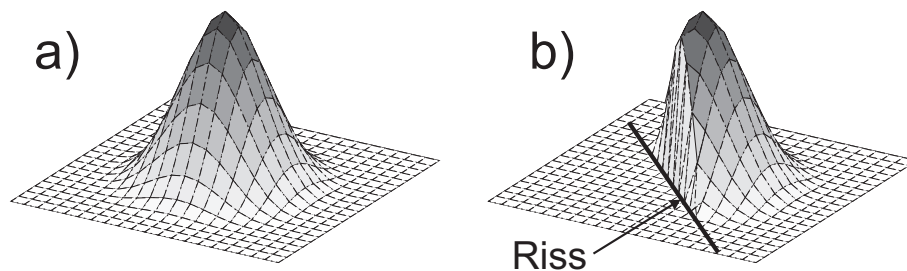


Abbildung 3.2: a) Wichtungsfunktion EFG ohne Riss (2D)  
b) Wichtungsfunktion EFG mit Riss (2D)

## 3.2 Interpolation

Die Aufgabe einer Interpolation ist es, zu gegebenen Werten eine kontinuierliche Funktion (die so genannte Interpolante) zu finden, die diese Werte abbildet. Im Gegensatz zu anderen Approximationsverfahren müssen bei einer Interpolation die Werte in den Stützstellen durch die Interpolante exakt wiedergegeben werden.

Eine Funktion (z.B. Verschiebungen)  $u^h(\mathbf{x})$  kann mit an den Knoten  $i$  bekannten Werten  $u_i$  mit folgendem Ansatz interpoliert werden

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot u_i \quad (3.1)$$

Darin sind  $\varphi_i$  die Formfunktionen an den Knoten  $i$ .

Die Konsistenz dieser Interpolation ist gegeben, falls die Interpolation im Hinblick auf ausgewählte Funktionen  $\chi_j$  diese Funktionen genau wiedergeben kann.

$$\chi_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \chi_j(\mathbf{x}_i) \quad (3.2)$$

Dies ist zum Beispiel für den einfachsten Fall  $\chi_j = \{1\}$  gegeben, falls

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.3)$$

In diesem Fall werden die Interpolationsansätze „Partition of unity“ genannt. Lineare Konsistenz ist im zweidimensionalen Fall  $\chi_j = \{1 \ x \ y\}$  gegeben, falls

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot x_i = x \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot y_i = y \quad (3.4)$$

### 3.2.1 Delta-Eigenschaft

Im Vergleich zu den Finiten Elementen besitzen elementfreie Interpolationen keine Kronecker-Delta-Eigenschaft. Ein beliebiger Knoten  $\mathbf{x}_i$  befindet sich in der Regel im Einflussbereich eines anderen Knotens  $\mathbf{x}_j$ . Damit gilt für die Formfunktion

$$\varphi_j(\mathbf{x}_i) \neq 0 \quad \text{für} \quad i \neq j \quad (3.5)$$

Unter Beachtung der konstanten Konsistenz (siehe Gleichung 3.2)

$$\sum_{k=1}^n \varphi_k(\mathbf{x}_i) = 1 \quad (3.6)$$

ergibt sich für die Formfunktion des Knotens  $i$

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) \neq 1 \quad (3.7)$$

Beides führt zur Feststellung

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij} = \varphi_i^{FE}(\mathbf{x}_j) \quad (3.8)$$

Dies ist insbesondere bei der Einführung der Randbedingungen zu berücksichtigen.

### 3.2.2 Wichtungsfunktion

Die Wichtungsfunktion  $w(\mathbf{x})$  spielt für elementfreie Ansätze eine zentrale Rolle. Deswegen wird diese im Folgenden näher betrachtet. Sie spiegelt den Einfluss eines Knotens  $\mathbf{x}_i$  auf die Stelle  $\mathbf{x}$  wieder und hängt vom Abstand  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$  ab. Dieser Abstand wird zusätzlich mit dem Einflussradius  $h_i$  normiert. Die Wichtungsfunktion kann geschrieben werden als

$$w(\mathbf{x}) = w(s) \text{ mit } s = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{h_i} \quad (3.9)$$

$w(s)$  sollte eine monoton fallende Funktion mit folgenden Eigenschaften sein

$$\begin{aligned} w(s) &= 1 & \text{für } s &= 0 \\ w(s) &> 0 & \text{für } s < 1 \\ w(s) &= 0 & \text{für } s \geq 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die folgende Spline-Funktion erfüllt diese Eigenschaften

$$w(s) = 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 \quad (3.11)$$

Auch Gauss'sche Exponentialfunktionen können zum Einsatz kommen, z.B.

$$w(s) = \frac{e^{-(\frac{s}{\alpha})^2} - e^{-\frac{1}{\alpha^2}}}{1 - e^{-\frac{1}{\alpha^2}}} \quad (3.12)$$

Verschiedene Untersuchungen (z.B. Korn [75]) kamen zu dem Ergebnis, dass die Art der Wichtungsfunktion keinen wesentlichen Einfluss auf die Berechnung hat. Die wegen der einfachen Umsetzung in dieser Arbeit benutzte Spline-Funktion ist in Abbildung 3.3 dargestellt.

Da die hier vorgestellten Wichtungsfunktionen nicht die Delta-Eigenschaft besitzen, schlägt Most [96] eine Wichtungsfunktion vor, die die Delta-Eigenschaft in einer hohen Genauigkeit erfüllt. Die Wichtungsfunktion eines Knotens  $i$  am Punkt  $\mathbf{x}$  wird folgendermaßen definiert

$$w_r = \frac{\tilde{w}_r(s_j)}{\sum_{j=1}^m \tilde{w}_r(s_j)} \quad (3.13)$$



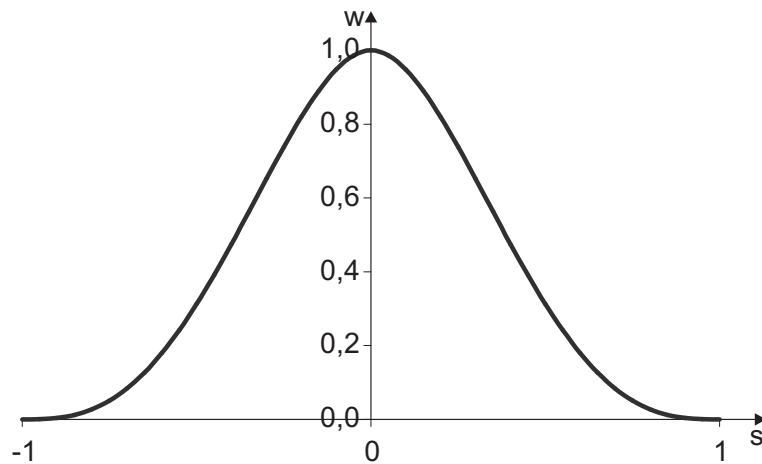


Abbildung 3.3: Spline-Funktion als Wichtungsfunktion

mit

$$\tilde{w}_r(s) = \frac{(s^2 + \epsilon)^{-2} - (1 + \epsilon)^{-2}}{\epsilon^{-2} - (1 + \epsilon)^{-2}} \quad \text{mit } \epsilon \ll 0 \quad (3.14)$$

Most zeigt, dass bei Verwendung von

$$\epsilon = 10^{-5} \quad (3.15)$$

die Delta-Eigenschaft in einer höheren Genauigkeit wie das Quadrat der Rechnergenauigkeit erfüllt wird.

Abbildung 3.4 zeigt den Unterschied zwischen dem Ansatz von Most und den Standard-Wichtungsfunktionen.

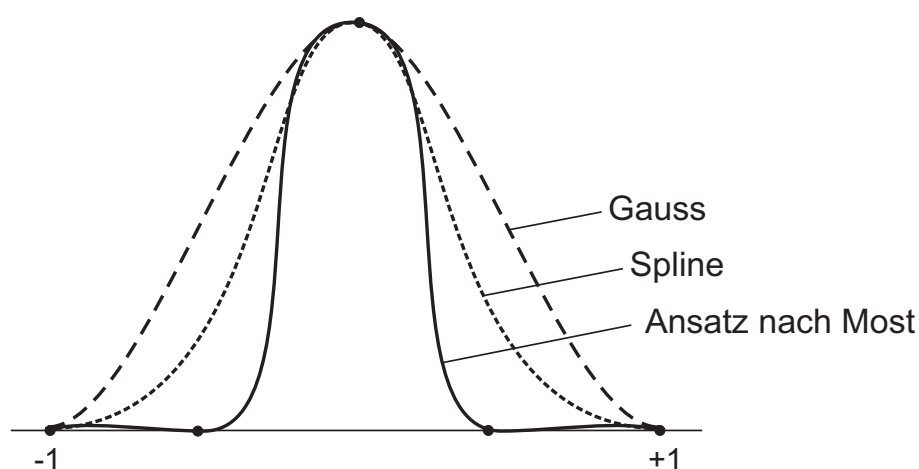


Abbildung 3.4: Vergleich der Wichtungsfunktionen

Bei den hier vorgestellten Untersuchungen wird für die Wichtungsfunktion die in Gleichung 3.11 angegebene Spline-Funktion verwendet.

### 3.2.3 Einflussbereiche

Es werden Problemstellungen aus der Festkörpermechanik betrachtet. In einem Körper  $\Omega$  sei eine Menge von  $n$  Knoten  $\mathbf{x}_i$  gegeben. Jeder dieser Knoten sei das Zentrum eines zugeordneten kreisförmigen Einflussgebietes  $\omega_i$  mit dem Radius  $h_i$ . Es gilt damit

$$\omega_i = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}| < h_i\} \quad (3.16)$$

Neben kreisrunden Einflussgebieten sind auch andere Formen denkbar wie z.B. Rechtecke, diese finden aber hier keine Anwendung. Die Einflussgebiete sind so zu wählen, dass der Bereich  $\Omega$  vollständig überdeckt ist, wobei sich die Einflussbereiche gegenseitig überlappen können (siehe Abbildung 3.5).

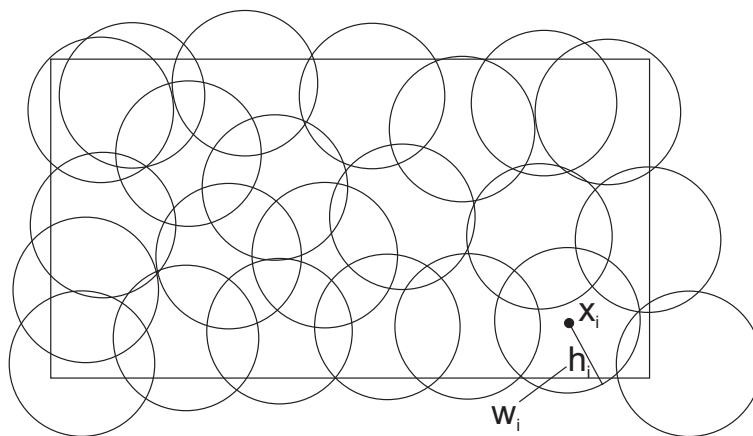


Abbildung 3.5: Kreise als Einflussbereiche

### 3.2.4 Moving Least Square Interpolation (MLS-Interpolation)

In der numerischen Mechanik existieren verschiedene Ansätze zur elementfreien Interpolation. Im Folgenden soll hier nur die Moving Least Squares Interpolation (MLS-Interpolation) dargestellt werden, da diese die weiteste Verbreitung findet und auch in dieser Arbeit verwendet werden soll. Weitere Interpolationsverfahren werden z.B. von Belytschko [14] oder Liu [85] diskutiert. Die Herleitung der MLS-Interpolation folgt der von Häußler-Combe [56] vorgestellten.

Der grundlegende Ansatz für eine MLS-Interpolation ist gegeben durch

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) \cdot a_j \quad (3.17)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T \cdot \mathbf{a} \quad (3.18)$$

mit

$$\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_m)^T \quad (3.19)$$

und

$$\mathbf{p} = (p_1(\mathbf{x}) \ p_2(\mathbf{x}) \ \dots \ p_m(\mathbf{x}))^T \quad (3.20)$$

Die für die Interpolation notwendigen Basisfunktionen  $\mathbf{p}$  können dabei unterschiedlicher Ordnung sein. Beispielhaft seien hier zwei zweidimensionale Monomiale gegeben

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\mathbf{x}) &= (1 \ x \ y)^T && \text{lineares Monomial} \\ \mathbf{p}(\mathbf{x}) &= (1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2)^T && \text{quadratisches Monomial} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Diese Basisfunktionen können an Rissspitzen durch den Ansatz der auch bei X-FEMs (Kapitel 2.5.2) verwendeten Rissspitzenfunktionen noch erweitert werden (siehe Belytschko [20]).

Die Funktion  $\mathbf{a}$  wird durch die MLS-Interpolation so bestimmt, dass der Interpolationsfehler

$$e_i(\mathbf{a}) = u_i - u^h(\mathbf{x}) = u_i - \mathbf{p}_i^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} \quad (3.22)$$

möglichst klein ist. Dieser Interpolationsfehler wird mit der in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Wichtungsfunktion  $w_i$  gewichtet.

$$J_i(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) \cdot (u_i - \mathbf{p}_i^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a})^2 \quad (3.23)$$

Um den Interpolationsfehler zu minimieren, muss die Funktion  $J_i(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  ein Minimum annehmen. Das Minimum kann mit der Ableitung von  $J_i(\mathbf{a}, \mathbf{x})$  bestimmt werden

$$\frac{\partial J_i(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (3.24)$$

Der über den gesamten Problembereich aufsummierte Fehler wird in der Form

$$\begin{aligned} J(\mathbf{a}, \mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n [w_i(\mathbf{x}) \cdot (u_i - \mathbf{p}_i^T \cdot \mathbf{a})^2] \\ &= (\mathbf{u}_i - \mathbf{P}\mathbf{a})^T \cdot \mathbf{W} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{P}\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

geschrieben, wobei der Vektor  $\mathbf{u}_i$  die Knotenwerte der zu interpolierenden Funktion darstellt. Die Matrix  $\mathbf{P}$  wird aus den Basisfunktionen der einzelnen Knoten erstellt

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \dots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Die Diagonalmatrix  $\mathbf{W}$  enthält die Wichtungen aller Knoten

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} w_1(\mathbf{x}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Unter Benutzung der Matrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

ergibt sich die Ableitung der Gleichung 3.24 zu

$$\frac{\partial J_i(\mathbf{a}, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad (3.30)$$

Daraus folgt

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.31)$$

Der über die MLS-Interpolation errechnete Vektor  $\mathbf{a}$  kann nun in die Gleichung 3.18 eingesetzt werden

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.32)$$

Die Zeilenvektoren  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$  erhalten die Formfunktionen  $\varphi_i$  eines jeden Knotens  $i$ . Diese können somit geschrieben werden als

$$\varphi_i = \text{row}_i(\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})) \quad (3.33)$$

Die Formfunktionen weisen folgende Eigenschaften auf

$$\varphi_i(\mathbf{x}) \begin{cases} \neq 0 & \text{für } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| < h_i \\ = 0 & \text{für } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \geq h_i \end{cases} \quad (3.34)$$

Die Interpolation kann damit unter Verwendung der Formfunktion  $\varphi_i$  geschrieben werden als

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (3.35)$$

Es ist leicht erkennbar, dass im Vergleich zu Finiten Elementen die Ansatzfunktionen durch die Formfunktionen  $\varphi_i$  ersetzt werden. Die Abhängigkeit der Einträge in den Formfunktionen ist nicht mehr über die Definition von Elementen gegeben sondern erfolgt nur durch den Abstand der Knoten zueinander.

Beim Erstellen der Formfunktionen muss die Matrix  $\mathbf{A}$  invertiert werden. Häußler-Combe [56] gibt Voraussetzungen für die Invertierbarkeit der Matrix  $\mathbf{A}$  an. Die Anzahl der von Null verschiedenen Wichtungsfunktionen muss größer als die Anzahl der Einträge in den Basisfunktionen sein. Es ergibt sich daraus die Konsequenz, dass bei Basisfunktionen mit höheren Potenzen die Einflussbereiche größer sein müssen. Die bei linearen Basisfunktionen erforderlichen drei Knoten dürfen zusätzlich nicht zusammenfallen und müssen in  $\mathbb{R}^2$  zwei unabhängige Richtungen aufspannen. Bei quadratischen Basisfunktionen (sechs Knoten erforderlich) müssen die Knoten in  $\mathbb{R}^2$  drei verschiedene Richtungen aufspannen.

Zur Bestimmung der Steifigkeitsmatrizen müssen außerdem die Ableitungen der Formfunktionen bestimmt werden. Das Vorgehen ist ebenfalls bei Häußler-Combe [56] beschrieben.

### 3.2.5 MLS-Interpolation und Risse

Durch Modifikation der Wichtungsfunktion  $w_i$  können beim elementfreien Galerkin-Verfahren auch diskrete Risse berücksichtigt werden. Die Fläche um den betrachteten Knoten herum wird in zwei Teilgebiete aufgeteilt: Teilgebiet A diesseits des Risses und Teilgebiet B jenseits des Risses (siehe Abbildung 3.6). Im Teilgebiet A wird die Wichtungsfunktion in der in Gleichung 3.33 geschilderten Form verwendet, im Teilgebiet B wird die Wichtungsfunktion gesetzt zu

$$w(\mathbf{x}) = 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in B. \quad (3.36)$$

Durch die Art des Interpolationsansatzes werden damit auch die Formfunktionen im Teilgebiet B zu Null gesetzt.

Die Entscheidung, welcher Knoten jenseits und welcher diesseits des Risses liegt, ist nicht in allen Fällen trivial – insbesondere in der Umgebung der

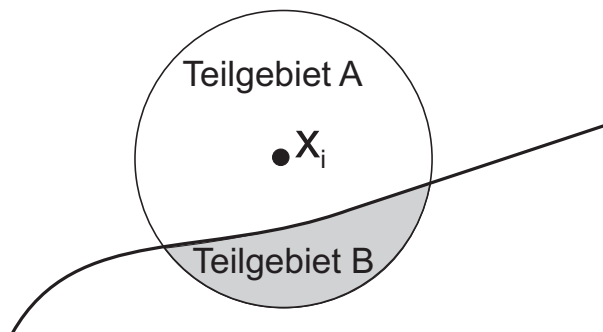


Abbildung 3.6: Teilgebiete A und B

Risspitze. Ventura [141] benutzt ein Sichtbarkeitskriterium, um die Stelle eines Knotens bezüglich eines Risses zu bestimmen. Alle Knoten, die durch den Riss abgeschattet werden, liegen jenseits des Risses (siehe Abbildung 3.7). Der Vorteil dieses Vorgehens ist die einfache Umsetzung. Es werden allerdings diskontinuierliche Formfunktionen erstellt, bei denen Konvergenzprobleme auftreten können.

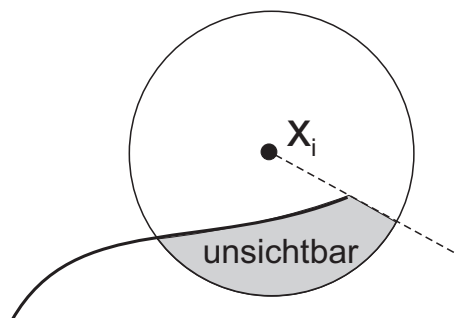


Abbildung 3.7: Sichtbarkeitskriterium

Krysl [77] zeigt unter Verwendung theoretischer Argumente, dass die diskontinuierlichen Approximationen trotzdem zu konvergenten Lösungen führen. Es kann in einigen Fällen sinnvoll sein, kontinuierliche Formfunktionen in der Nähe einer Risspitze zu verwenden. Organ [103] stellt die Diffraktionsmethode (auch Brechungsmethode) vor, die zu kontinuierlichen Formfunktionen führt. Dazu wird der Parameter  $h_i$  zur Erstellung der Wichtungsfunktion durch Biegung der Strahlen an der Risspitze vergrößert (siehe Abbildung 3.8). Der Einflussradius setzt sich damit aus dem Abstand der Risspitze vom Punkt, für den die Interpolation bestimmt wird ( $\mathbf{x}_i$ ) und dem Abstand der Risspitze vom Punkt, dessen Einfluss bestimmt wird ( $\mathbf{x}$ ), zusammen. Der Einflussbereich umhüllt die Risspitze, so dass die Wichtungsfunktion kontinuierlich wird. Die Diskontinuität des Risses bleibt erhalten.

Belytschko [17] zeigt, dass die Diffraktionsmethode zur Reduktion der Os-

zillation der Spannungen an der Rissspitze benutzt werden kann. Dies ist insbesondere bei einer expliziten Zeitintegration von Bedeutung.

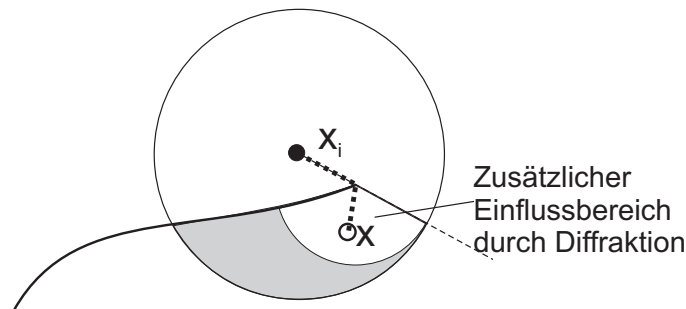


Abbildung 3.8: Diffraktionsmethode

Eine weitere Möglichkeit, die Situation an der Rissspitze zu berücksichtigen, ist die Transparenzmethode. Hierbei wird der Bereich hinter dem Riss nicht wie bei der Sichtbarkeitsmethode komplett abgeschattet, sondern es wird in Abhängigkeit vom Abstand von der Rissspitze die Wichtungsfunktion reduziert (siehe Abbildung 3.9). Dazu wird ein weiterer Parameter  $s_r$  eingeführt, der als Grad für die Abnahme der Wichtung dient. Das genaue Vorgehen wird in Kapitel 3.3.3 beschrieben.

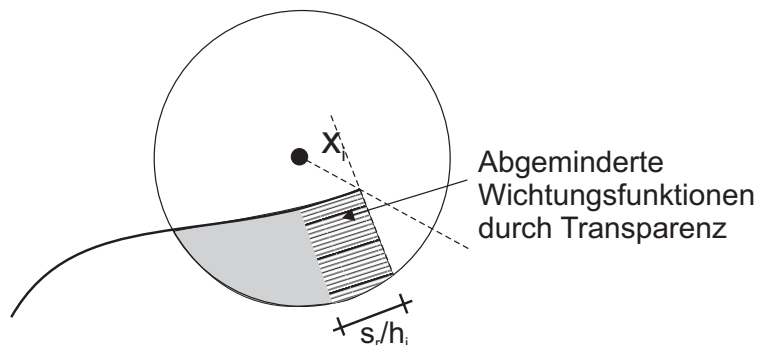


Abbildung 3.9: Transparenzmethode

## 3.3 Diskretisierung

### 3.3.1 Einführung

Das EFG-Verfahren kann zur Darstellung von beliebigen Feldfunktionen verwendet werden. Neben der Nutzung für die hier vorgestellten Verschiebungsfelder wird das EFG-Verfahren zum Beispiel zur Darstellung von elektrischen,

akustischen oder thermischen Feldern verwendet. Aufgrund der übersichtlicheren Darstellbarkeit wird hier die Diskretisierung zweidimensional vorgestellt. Eine Übertragung auf räumliche Probleme ist ohne Einschränkungen möglich.

Die Diskretisierung eines Verschiebungsfeldes erfolgt mit folgendem Ausdruck

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_j \quad (3.37)$$

wobei  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  die Matrix der Formfunktionen ist

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_i(\mathbf{x}) & 0 & \dots & \varphi_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \varphi_i(\mathbf{x}) & \dots & 0 & \varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Die Dehnungen können wie bei der Finiten-Elemente-Methode bestimmt werden zu

$$\epsilon(\mathbf{x}) = D\mathbf{u}(\mathbf{x}) = D\mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}_j(\mathbf{x}) \quad (3.39)$$

Die Matrix  $\mathbf{B}$ -Matrix ergibt sich zu

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_{i,x}(\mathbf{x}) & 0 & \dots & \varphi_{n,x}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \varphi_{i,y}(\mathbf{x}) & \dots & 0 & \varphi_{n,y}(\mathbf{x}) \\ \varphi_{i,y}(\mathbf{x}) & \varphi_{i,x}(\mathbf{x}) & \dots & \varphi_{n,y}(\mathbf{x}) & \varphi_{n,x}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Folglich müssen zu den Formfunktionen noch die jeweiligen partiellen Ableitungen  $\varphi_{i,x}$  und  $\varphi_{i,y}$  bestimmt werden.

Die  $\mathbf{B}$ -Matrix kann nun zur Aufstellung des Gleichgewichts über alle Freiheitsgrade genutzt werden

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3.41)$$

Durch Integration der Gleichung 3.41 (siehe Kapitel 3.3.2) kann das Gleichgewicht geschrieben werden als

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_j = \mathbf{f}_j \quad (3.42)$$

wobei die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  wie folgt berechnet wird

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\Omega \quad (3.43)$$



Analog kann für dynamische Probleme die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  bestimmt werden zu

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{x}) \rho d\Omega \quad (3.44)$$

Da wie in Kapitel 3.2.1 gezeigt die Delta-Kronecker-Eigenschaft nicht gilt, müssen die Verformungen  $\mathbf{u}_i$ , die sich aus der Interpolation ergeben, auf das Verschiebungsfeld zurückgerechnet werden

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_i \quad (3.45)$$

### 3.3.2 Integration mit einem Hintergrundnetz

Die Gleichgewichtsgleichung 3.41 muss nun über das Problemgebiet  $\Omega$  integriert werden. Hier stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung. Neben der hier vorgestellten Integration mit einem Hintergrundnetz (siehe z.B. Dolbow [38]) kann alternativ die in Kapitel 3.5 gezeigte Punktintegration verwendet werden. Der Vorteil der Hintergrundintegration ist die der Finiten-Elemente-Methode sehr ähnliche Integration und damit der relativ kleine Implementierungsaufwand.

Das gesamte Gebiet wird in Integrationszellen aufgeteilt. Dies können im zweidimensionalen Fall z.B. Dreieckszellen oder Viereckszellen sein. Als Integration bietet sich die allgemeine Gauss-Integration an, wie sie zum Beispiel von Bathe [11] beschrieben wird.

Die geometrische Anordnung der Punkte und der Integrationszellen lässt verschiedene Möglichkeiten zu:

- Die Eckpunkte der Integrationszellen sind gleichzeitig alle vorhandenen Knoten.
- Die Eckpunkte der Integrationszellen sind Knoten, werden aber durch zusätzliche Knoten ergänzt.
- Die Eckpunkte der Integrationszellen können Knoten sein, müssen es aber nicht.

Während für den ersten Fall ein regelmäßiges Knotennetz notwendig ist, sind beim zweiten und dritten Fall auch unregelmäßige Knotennetze denkbar. Unregelmäßige Netze sind vor allem bei Diskontinuitäten interessant, da im Bereich der Diskontinuität das Netz verfeinert werden kann. Dies kann allerdings

nur dann sinnvoll verwendet werden, wenn während der Berechnung weitere Knoten hinzugefügt werden. Bei den hier durchgeführten Untersuchungen war wegen der großen Zahl an Knoten, die wegen der expliziten Zeitintegration notwendig sind, keine Adaption während des Berechnungsfortschrittes erforderlich. Deswegen wurden als Eckpunkte der Integrationszellen vorhandene Knoten benutzt. Die bei den statischen Voruntersuchungen (Kapitel 5.2) verwendete Adaption wurde durch die Verfeinerung des Integrationsnetzes erreicht.

Mit der hier verwendeten Gauss-Integration können Polynome integriert werden, wobei zwei Voraussetzungen gegeben sein müssen:

- Die Terme sind stückweise Polynome.
- Die Elementränder entsprechen den Integrationszellen.

Beide Voraussetzungen sind beim EFG-Verfahren nicht gegeben. Während davon ausgegangen werden kann, dass die Verwendung nichtpolynomischer Funktionen zur Integration nur einen untergeordneten Einfluss auf die Genauigkeit besitzt, ergibt sich durch die Verwendung von Integrationszellen, die nicht den Elementrändern entsprechen, ein signifikanter Fehler. Wie Dolbow [38] zeigt, hängt die Größe des Fehlers entscheidend von der Integrationsordnung und von der Anzahl der Integrationszellen ab. Eine beispielhaft integrierte Funktion ergibt bei Verwendung von zwei Integrationspunkten und einer Integrationszelle einen Integrationsfehler von 28,5%. Dieser Fehler reduziert sich aber bei Verwendung von weiteren Integrationszellen sehr stark. Dolbow schlägt deswegen eine alternative Anordnung der Integrationszellen vor, auf die hier allerdings nicht weiter eingegangen werden soll.

Über die Anzahl der nötigen Integrationspunkte gibt es in der Literatur unterschiedliche Angaben. Belytschko [16] benutzt für die Integration ein Netz der Weite  $n_q \times n_q$  mit

$$n_q = \sqrt{m} + 2 \tag{3.46}$$

mit der Anzahl der Knoten  $m$  in einer Zelle. Daraus folgt, dass für ein regelmäßiges Netz mit den Eckpunkten der Integrationszellen als Knoten die Integrationsordnung 4 beträgt. Liu [85] zeigt, dass für die Bestimmung der Anzahl der Integrationspunkte das gesamte System betrachtet werden muss. Er gibt als Größenordnung die dreifache Zahl von Integrationspunkten im Vergleich zu den Knoten an. Daraus muss bei einem regelmäßigen Netz gefolgert werden, dass die minimale Integrationsordnung drei Integrationspunkte in jede Richtung besitzt.

Eigene Untersuchungen bestätigen die Abhängigkeit der Lösung von der gewählten Diskretisierung und der Anzahl der Integrationspunkte. Hierzu wurde ein aus 205 Knoten und 160 Integrationszellen modellierter quadratischer Balken unter Zug und Biegung belastet (siehe Abbildung 3.10). Die analytische Lösung für den Biegebalken wurde nach Timoshenko [139] bestimmt zu

$$u_y(x = L) = \frac{PL}{6EI}(D^2 + 2L^2) \quad (3.47)$$

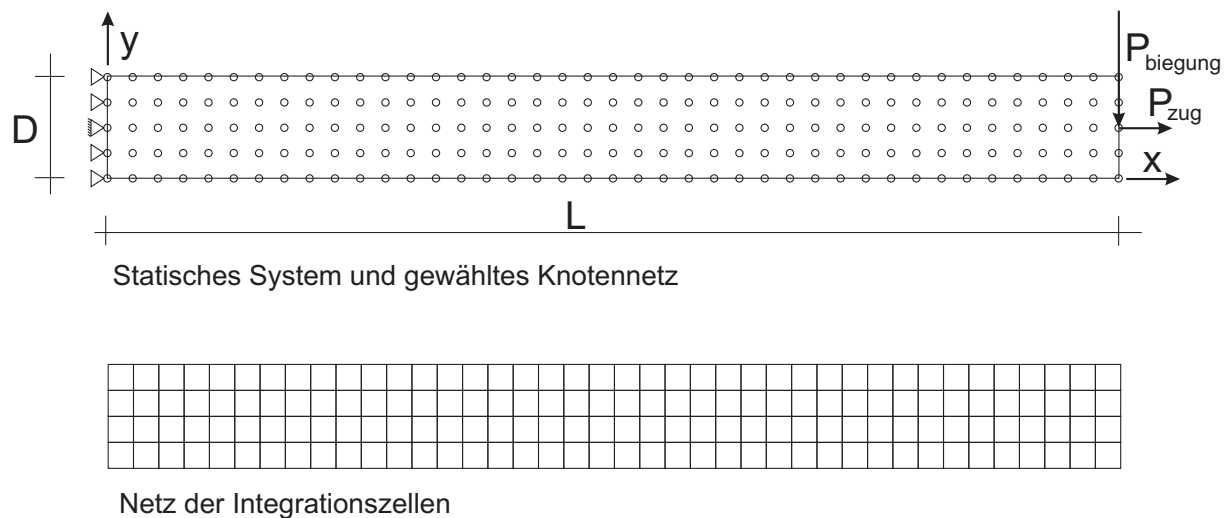


Abbildung 3.10: Verwendetes Balkenmodell zur Überprüfung des Integrationsfehlers

Die Ergebnisse der Berechnung des Balkens unter Zugbeanspruchung zeigen keine wesentliche Abhängigkeit von der Anzahl der Integrationspunkte (siehe Abbildung 3.11). Die Belastung mit einer Biegebeanspruchung zeigt eine gewisse Abhängigkeit vom gewählten Integrationsnetz. Bei einem Integrationsnetz mit zwei Integrationspunkten in jede Richtung liegt die numerische Lösung niedriger als die analytische Lösung, bei einem Integrationsnetz mit drei Integrationspunkten liegt die numerische Lösung höher als die analytische Lösung. In Abbildung 3.11 ist ebenfalls zu erkennen, dass die Abhängigkeit von der Anzahl der Integrationspunkte bei Verkleinerung der Diskretisierung zusätzlich abnimmt. Da die Abweichungen aber nur klein sind und bei den Untersuchungen eine feine Diskretisierung Verwendung findet, werden zumeist zwei Integrationspunkte in jede Richtung verwendet.

Korn [75] zeigt für Probleme mit Diskontinuitäten, dass bei einer Integrationsordnung von 6 Integrationspunkten in jede Richtung von einer guten Konvergenz der Lösung ausgegangen werden kann. Hier zeigen zwar eigene

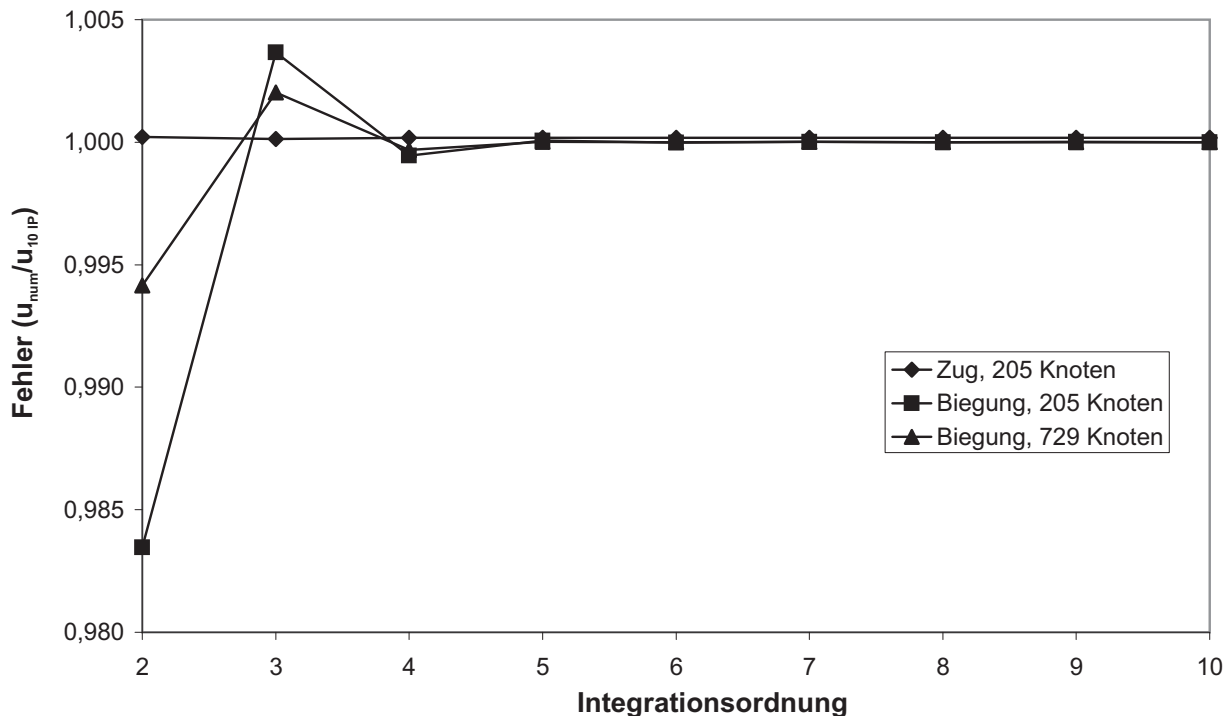


Abbildung 3.11: Fehler verschiedener Integrationsnetze bezogen auf ein Netz mit 10 Integrationspunkten in jede Richtung

Untersuchungen, dass eine so hohe Integrationsordnung nicht unbedingt für die Lösbarkeit notwendig ist. Die Untersuchungen wurden an dem in Abbildung 3.12 vorgestellten Modell durchgeführt. Bei Vergrößerung der Anzahl der Integrationspunkte wird der relative Fehler immer größer (siehe Abbildung 3.13). Dies liegt daran, dass der kleinste Abstand eines Integrationspunktes zur Risspitze kleiner wird und damit der Fehler an der Singularitätsstelle zunimmt. Blendet man einen endlichen Bereich um die Risspitze herum für die Berechnung des Fehlers aus, so zeigt sich eine nur geringe Abhängigkeit des Ergebnisses von der Anzahl der Integrationspunkte.

Eine hohe Integrationsordnung ist aber dennoch in den gerissenen Integrationszellen erforderlich. Eigene Untersuchungen haben auch gezeigt, dass bei einer ungenügenden Integrationsordnung Divergenzen zu beobachten sind, die bei einer Verfeinerung des Integrationsnetzes rund um die Risse nicht auftreten. Diese Divergenzen entstehen insbesondere dann, wenn ein Riss sich zwischen Knoten und Integrationspunkten befindet. Dies ist bei der Gauss-Integration möglich. Es wird deswegen in allen Integrationszellen, in denen ein Riss lokalisiert ist, die Integrationsordnung auf sechs erhöht.

Alternativ wäre es durch die Verwendung einer anderen Integrationsart (Gauss-Lobatto) möglich, eine konvergierende Lösung herbeizuführen. Bei

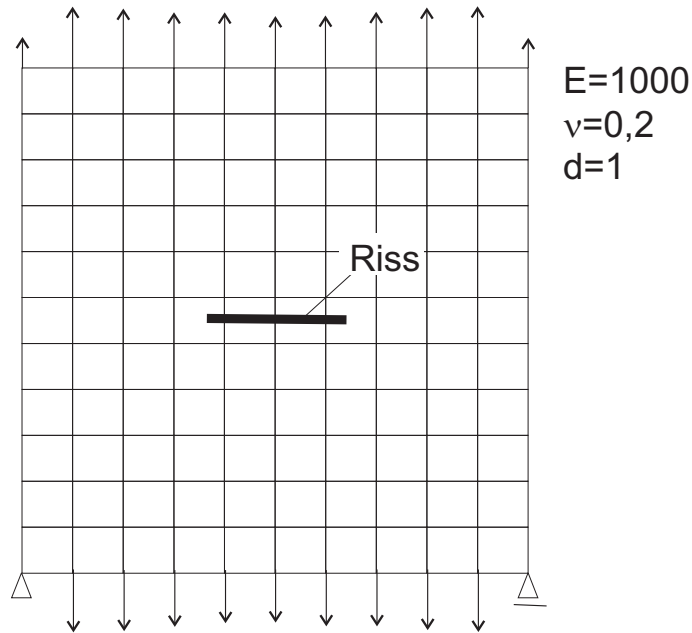


Abbildung 3.12: Vernetztes Modell mit 110 Integrationszellen

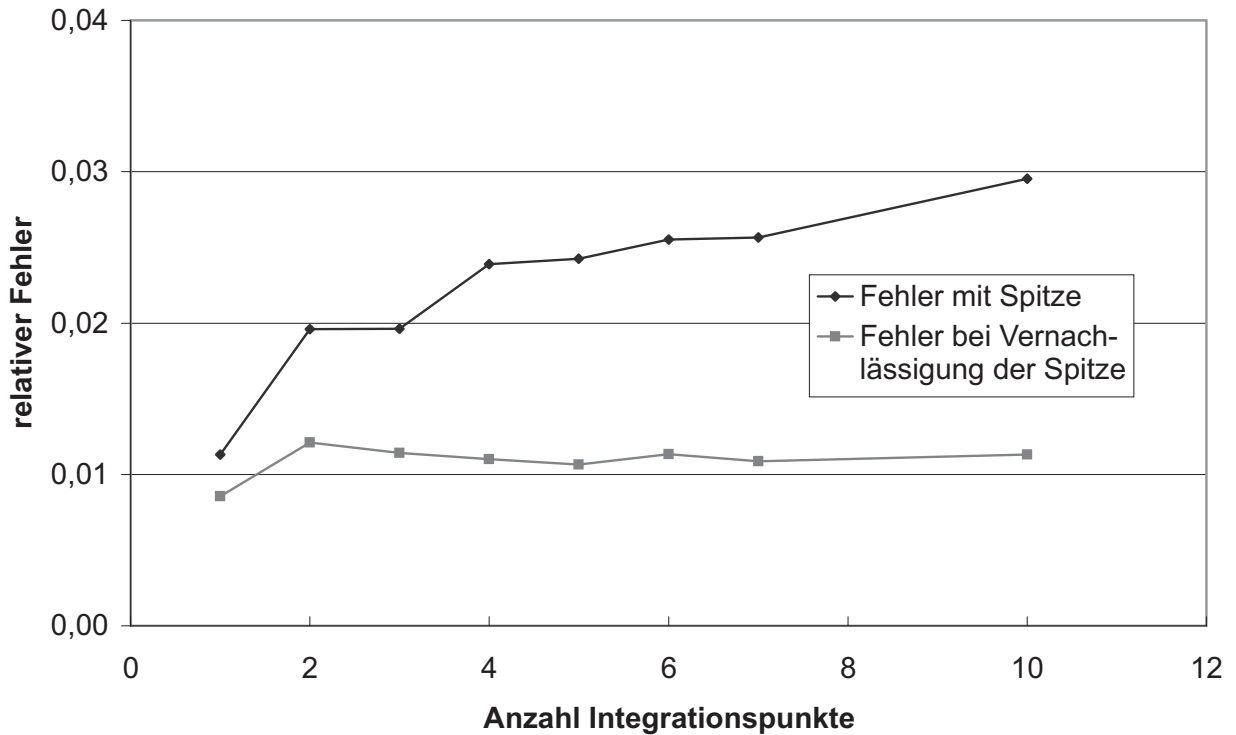


Abbildung 3.13: Fehler verschiedener Integrationsnetze mit impliziertem Riss

der Gauss-Lobatto-Integration werden auch die Randpunkte des Integrationsfeldes für die Integration verwendet. Es können damit keine Risse mehr zwischen Integrationspunkt und Knoten liegen.

Es stellt sich damit die Frage nach der Effizienz des Integrationsverfahrens. Werden in den Rissen viele Integrationspunkte benötigt (Integrationsordnung 6 bedeutet 36 Integrationspunkte!), ist die Berechnung mit einem Finiten-Elemente-Ansatz mit vielen Knoten und den Elementgrenzen als Rissufer effektiver. Die Verwendung von Finiten Elementen setzt aber aufwändige adaptive Verfahren voraus. Ohne diese Verfahren ist die Rissgeometrie vorausbestimmt und sehr stark eingeschränkt.

### 3.3.3 Risse

Im Gegensatz zu den X-FEMs (siehe Kapitel 2.5.2) werden beim EFG-Verfahren keine neuen Freiheitsgrade eingeführt. Der Riss wird durch das Abschneiden der Wichtungsfunktion – und damit auch der Ansatzfunktionen in der Berechnung berücksichtigt.

Mit der in Kapitel 2.5.1 vorgestellten Levelset-Methode kann entschieden werden, ob die Wichtungsfunktion – und damit auch die Ansatzfunktionen – für einen Knoten abgeschnitten werden müssen. Als Grundlage dienen dafür die in Kapitel 3.2.5 vorgestellten Verfahren (Sichtbarkeit, Transparenz, Diffraktion). Der Ablauf der Berechnung mit den verschiedenen Verfahren ist im Ablaufdiagramm 3.1 dargestellt.

In Abbildung 3.17 sind die Wichtungsfunktionen verschiedener Verfahren zur Berücksichtigung der Risspitze dargestellt. Es ist sowohl der diskontinuierliche Verlauf der Wichtungsfunktion durch die Verwendung des Sichtbarkeitskriteriums erkennbar, als auch die Vermeidung dieses Problems durch die Transparenz- oder Diffraktionsmethode. Der Unterschied zwischen der Transparenz- und der Diffraktionsmethode ist gering – kann aber durch eine andere Wahl des Parameters  $s_r$  gesteigert werden, mit dem der Grad des Abfalls der Wichtung bei der Transparenzmethode gesteuert werden kann.

Bei der Benutzung der verschiedenen Kriterien an der Risspitze fällt auf, dass dabei eine unterschiedliche Steifigkeit des Risses vorliegt. Dies ist in Abbildung 3.18 dargestellt. Es wurde hier die Anfangssteifigkeit am Schubversuch aus Kapitel 5.3 untersucht. Da beim Sichtbarkeitskriterium viele Knoten abgeschnitten werden, ist hier die Steifigkeit am geringsten.

Für die Berechnung der anzusetzenden Kräfte in der Bruchprozesszone (siehe Kapitel 4.3.3) muss die Rissöffnung bestimmt werden. Hierfür wird das im Ablaufdiagramm 3.2 dargestellte Verfahren verwendet.

Ablaufdiagramm 3.1: Berücksichtigung der verschiedenen Methoden an der Rissspitze

1. Ziel: Bestimmung des Einflusses  $w(\mathbf{x})$  von Punkt  $\mathbf{x}$  auf Punkt  $\mathbf{x}_i$  (Abbildung 3.14)
2. Bestimmung der Wichtung  $w(\mathbf{x})$  mit Gleichung 3.11
3. Bestimmung von  $\psi$  (Levelset Abstand zum Riss) für den Punkt  $\mathbf{x}_i$  ( $\psi_i$ ) und den Punkt  $\mathbf{x}$  ( $\psi_x$ ) und von  $\phi_{1,2}$  (Levelset der Rissspitzen) für die Rissspitzen  $T_1$  und  $T_2$
4. Falls  $\text{sign}(\psi_i) = \text{sign}(\psi_x)$  Ende
5. Bestimmung maßgeblicher Spitze  $T$  (kleinerer Abstand zu  $\mathbf{x}_i$ ), hier  $T_2$
6. Falls Abstand  $\overline{T_2\mathbf{x}_i} < \text{Einflussradius } \mathbf{x}_i$ 
  - a) Sichtbarkeit
    - i. Erstelle Punkt A Abstand  $\max\{\text{Abstand } \overline{T_2\mathbf{x}}, \text{Abstand } \overline{T_2\mathbf{x}_i}\}$  in tangentielle Rissrichtung nach Innen
    - ii. Falls Strecke  $\mathbf{x}\mathbf{x}_i$  einen Schnittpunkt mit der Strecke  $T_2T_1$  besitzt, dann  $w(\mathbf{x}) = 0$  (Abbildung 3.15)
  - b) Transparenz: Falls  $\psi_i < 0$ 
    - i. Bestimmung des gewichteten Abstandes  $\text{dist}_{SR}$  des Punktes  $\mathbf{x}$  von Rissspitze  $\text{dist}_{SR} = 1 + \phi_{i,x}/(h_i \cdot s_r)$
    - ii. Falls  $\text{dist}_{SR} > 0$  dann  $w(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) \cdot \text{dist}_{SR}$
    - iii. Sonst  $w(\mathbf{x}) = 0$
  - c) Diffraktion
    - i. Bestimmung von  $l_{lang} = \overline{T_2\mathbf{x}_i} + \overline{T_2\mathbf{x}}$
    - ii. Falls  $l_{lang} > h_i$  dann  $w(\mathbf{x}) = 0$
    - iii. Sonst  $s_u = l_{lang}/h_i$  und  $w(\mathbf{x}) = 1 - 6 \cdot s_u^2 + 8 \cdot s_u^3 - 3 \cdot s_u^4$
7. sonst
  - a)  $F_i = -\text{sign}(\phi_{1,i}) - \text{sign}(\phi_{2,i})$   
 $F_x = -\text{sign}(\phi_{1,x}) - \text{sign}(\phi_{2,x})$  (Abbildung 3.16)
  - b) Falls  $F_i = 2$  und  $F_x = 2 \rightarrow w(\mathbf{x}) = 0$  (Zwischen den beiden Tangenten und unterschiedliche  $\psi$ ) (siehe Abbildung 3.16)

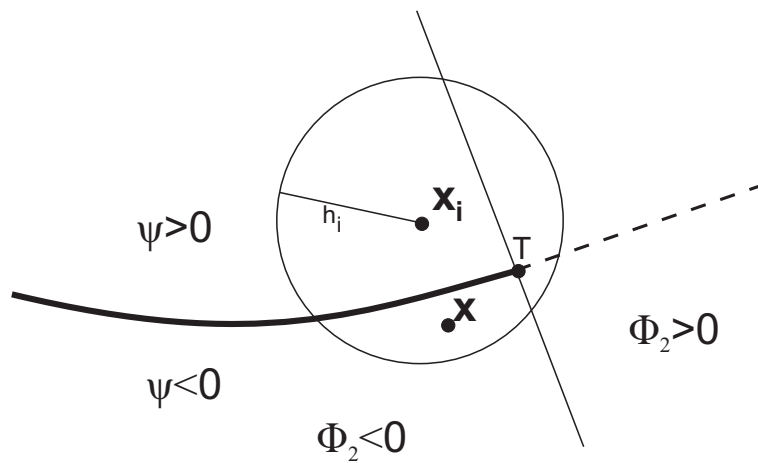


Abbildung 3.14: Levelset-Methode – Geometrie

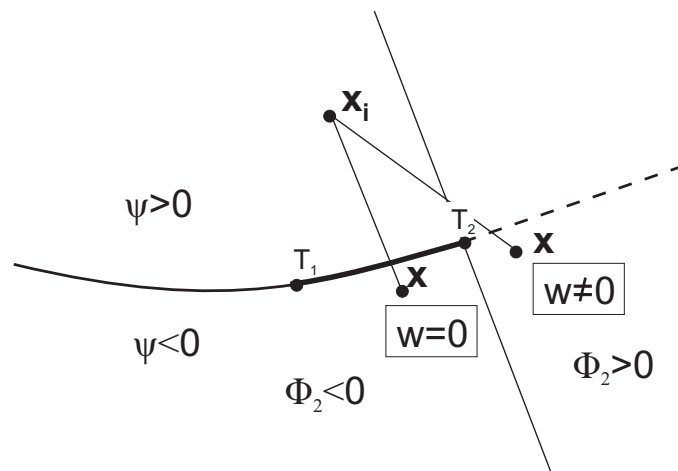
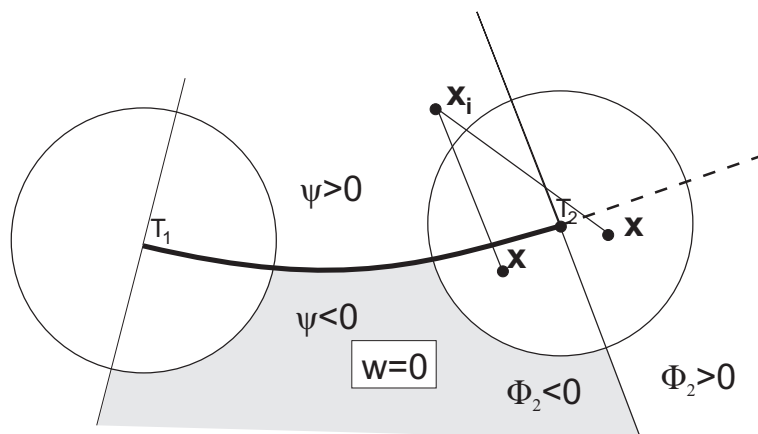
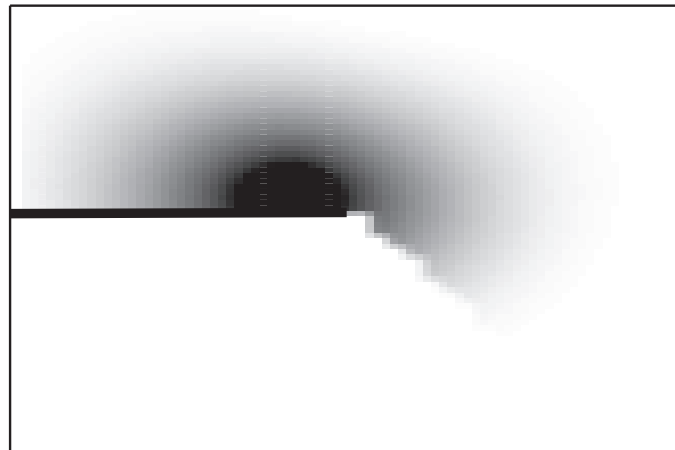
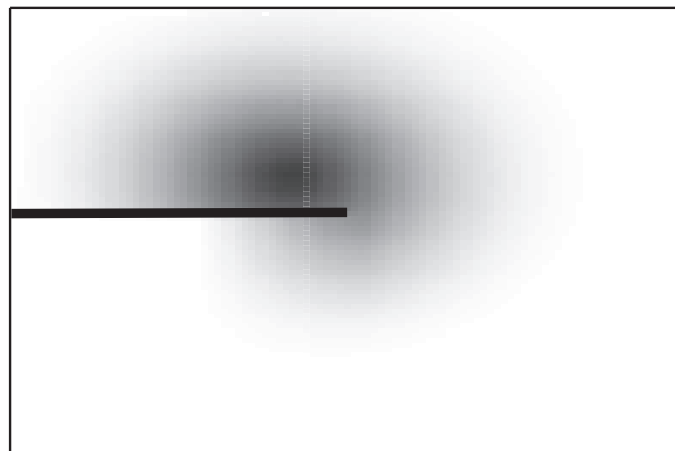
Abbildung 3.15: Levelset-Methode – Sichtbarkeit; Einfluss des Knotens  $\mathbf{x}$  auf den Knoten  $\mathbf{x}_i$ ; bei Existenz eines Schnittpunktes der Geraden  $\mathbf{x}_i\mathbf{x}$  und  $T_1T_2$  wird die Wichtungsfunktion zu Null gesetzt

Abbildung 3.16: Levelset-Methode – Punkte zwischen den beiden Rissspitzen

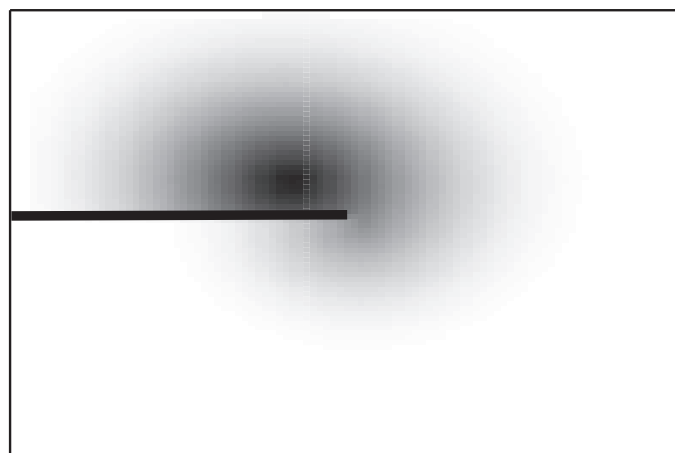




Sichtbarkeit



Transparenz



Diffraktion

Abbildung 3.17: Vergleich der Wichtungsfunktionen verschiedener Verfahren an der Rissspitze

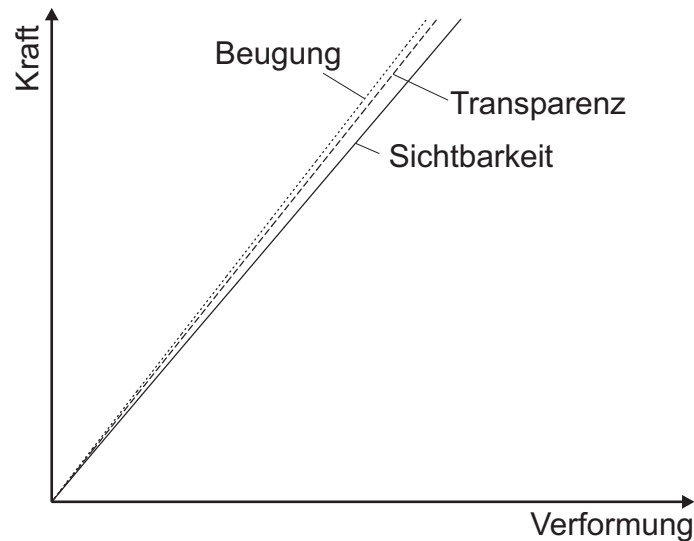


Abbildung 3.18: Vergleich der Wichtungsfunktionen verschiedener Verfahren an der Rissspitze

#### Ablaufdiagramm 3.2: Bestimmung der Rissöffnungen

1. Bestimmung zweier Punkte, die nahe am Riss aber auf unterschiedlichen Seiten des Risses liegen
2. Bestimmung der Levelsets und der Einflussradien der beiden Punkte
3. Interpolation der Verformungen an den beiden Punkten mit Hilfe des Einflussradius und der Levelsets
4. Unterschied der Verformungen an den beiden Knoten ist die Rissverschiebung
5. Zerlegung der Rissverschiebung in einen Anteil tangential und einen Anteil normal (Rissöffnung) zum Riss

### 3.3.4 Einflussgebiet

Die Größe des Einflussgebietes – bei kreisförmigen Einflussgebieten der Einflussradius – spielt eine entscheidende Rolle für die Konvergenz. Ist der Einflussradius zu klein, liegen also zu wenige Knoten im Einflussgebiet, kann die Matrix  $\mathbf{A}$  (siehe Gleichung 3.28) nicht mehr invertiert werden (siehe Kapitel 3.2.4). Außerdem müssen die Knoten in  $\mathbb{R}^2$  zwei unabhängige Richtungen aufspannen.

Problematisch ist ebenfalls die Wahl eines zu großen Einflussgebietes. Mit einer zunehmenden Zahl von Knoten in einem Einflussradius werden neben einem Anstieg des numerischen Aufwandes die Unterschiede der Einträge in die Steifigkeitsmatrix zwischen einzelnen Knoten immer geringer, so dass die Gefahr einer singulären Steifigkeitsmatrix besteht.

Untersuchungen an dem in Kapitel 3.3.2 vorgestellten Balkenmodell (Biegebeanspruchung) zeigen, dass ein Einflussradius in der Größe des ca. 1,6-fachen minimalen Knotenabstandes die besten Ergebnisse liefert (siehe Abbildung 3.19). Es liegen damit mindestens 7 Knoten in einem Einflussgebiet. Es fällt gleichzeitig eine große Abhängigkeit von der Diskretisierung auf. Dies liegt daran, dass bei wenigen Knoten in Höhenrichtung die Auflösung der Spannungen in diese Richtung nicht ausreichend genau ist.

Damit die Anzahl der Knoten in einem Einflussbereich den Anforderungen zur Lösbarkeit der Matrizeninversion in Gleichung 3.31 genügt, ist es meist erforderlich, bei Rissen und am Rand der Diskretisierung die Einflussradien zu vergrößern.

## 3.4 Randbedingungen

Um Nebenbedingungen (z.B. können Dirichlet-Randbedingungen als Nebenbedingungen formuliert werden) zu berücksichtigen, werden hier zwei Verfahren dargestellt: die Penalty-Methode und die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Ein drittes Verfahren ist die Kopplung mit Finiten Elementen (siehe Häußler-Combe [56], Belytschko [16]).

### 3.4.1 Lagrange-Multiplikatoren

Die Verschiebungen sollen am Knoten  $i$  für den Freiheitsgrad  $u_i$  beschränkt werden durch

$$u_i = u_i^* \tag{3.48}$$

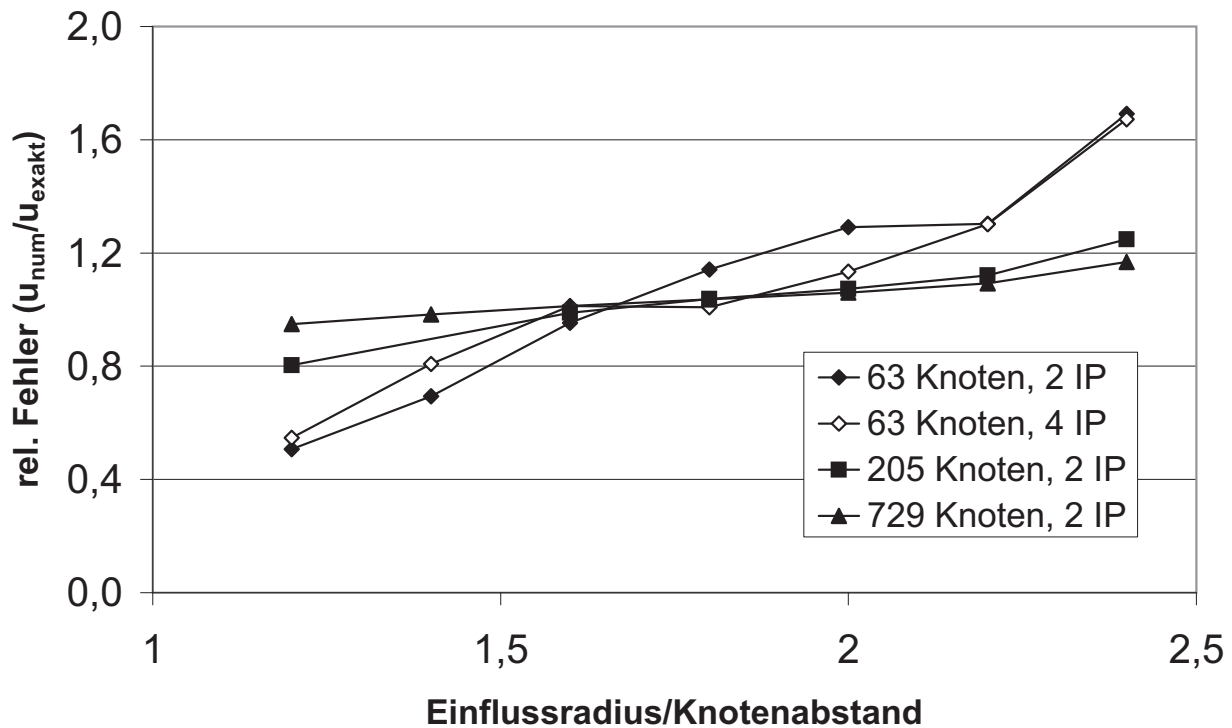


Abbildung 3.19: Variation der Größe des Einflussbereichs

Dies entspricht der Nebenbedingung  $\mathbf{K}_u \mathbf{u} = \mathbf{f}_\Gamma$ , wobei  $\mathbf{f}_\Gamma = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \mathbf{u}^* d\Gamma$ .

Bei der Methode der Lagrange-Multiplikatoren wird die Gleichung 2.11 um zusätzliche Freiwerte (Lagrange-Multiplikatoren)  $\lambda$  ergänzt

$$\Pi = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{f}_{ext} + \lambda^T (\mathbf{K}_u \mathbf{u} - \mathbf{f}_\Gamma) \quad (3.49)$$

Das Potential wird nun durch die Minimierung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.50)$$

geschrieben als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_u^T \\ \mathbf{K}_u & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_\Gamma \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Die zusätzlich erforderliche Matrix  $\mathbf{K}_u$  lässt sich für Finite Elemente nach Ba-  
the [11] bestimmen, indem  $\mathbf{K}_u$  für jede Nebenbedingung eine Null-Zeile ent-  
hält und an der Stelle des Freiheitsgrades der Nebenbedingung eine 1 ein-  
getragen wird (siehe Gleichung 3.52). Die Umsetzung des Verfahrens, ohne  
dass zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt werden müssen, wird z.B. von

Häußler-Combe [57] folgendermaßen vorgestellt

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1i} & \dots & K_{1n} & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & 0 \\ K_{i1} & \dots & K_{ii} & \dots & K_{in} & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ K_{n1} & \dots & K_{ni} & \dots & K_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \\ \mathbf{f}_\Gamma \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

Beim EFG-Verfahren ist dieses Vorgehen wegen der fehlenden Kronecker-Eigenschaft nicht zulässig. Die Matrix  $\mathbf{K}_u$  muss gebildet werden als

$$\mathbf{K}_u^T = \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma \quad (3.53)$$

Es ist erkennbar, dass die Nebenbedingung nicht nur in ihrem entsprechenden Freiheitsgrad einen Eintrag besitzt, sondern für jeden beeinflussten Knoten eine eigene Zeile benutzt werden muss. Die Umsetzung dessen stellt sich als etwas umständlich und unpraktisch dar, da sich die Größe der Matrix  $\mathbf{K}_u$  bei Veränderung des Einflussradius ändern kann. Damit ändert sich auch die Größe der Steifigkeitsmatrix.

### 3.4.2 Penalty-Faktoren

Die Penalty-Faktoren sind eine Alternative zu den Lagrange-Multiplikatoren. Es wird mit einem Strafterm gearbeitet. Es entstehen keine weiteren Freiheitsgrade. Die Matrix  $\mathbf{K}_u$  wird um Nullelemente auf die Dimension der Gesamtsteifigkeitsmatrix vergrößert.  $\mathbf{K}_u$  wird mit einem skalaren Faktor  $\alpha$  multipliziert und zur Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  addiert.

$$(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{K}_u) \mathbf{u} = \mathbf{f}_{ext} + \alpha \mathbf{f}_\Gamma \quad (3.54)$$

Es lässt sich nun zeigen, dass mit einem hinreichend großen  $\alpha$  die Nebenbedingungen erfüllt sind. Der Nachteil des Verfahrens besteht in der schlechteren Konditionierung der Steifigkeitsmatrix wegen größerer Betragsunterschiede. Das Vorgehen ist im Ablaufdiagramm 3.3 beschrieben.

## 3.5 Punktintegration

Gegenüber der in Kapitel 3.3.2 dargestellten Integration mit einem Hintergrundnetz ergibt sich durch eine Integration, die ohne ein zusätzliches Netz

Ablaufdiagramm 3.3: Penalty-Verfahren

1. Bestimmung der Knoten im Einflussbereich der Randbedingung
2. Für jeden Knoten  $K_{kbc,i} = N^T \cdot N$
3. Für jeden Knoten  $P_{kbc,i} = N^T \cdot \mathbf{f}_\Gamma$
4. Diese Werte müssen an den entsprechenden Stellen in der Steifigkeitsmatrix und im Lastvektor eingetragen werden.

auskommt, ein enormer Vorteil bezüglich des Rechenaufwandes. Dies liegt insbesondere daran, dass nicht mehr zwischen Integrationspunkten und Knoten unterschieden werden muss und damit die Suchalgorithmen wesentlich optimiert werden können.

Einen Ansatz für die Punktintegration gibt Beissel [13]. Die Integration der Steifigkeitsmatrix wird überführt in eine Summenreihe der Form

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n q_i^\Omega \mathbf{B}(\mathbf{x}_i)^T \mathbf{C}(\mathbf{x}_i) \mathbf{B}(\mathbf{x}_i) \quad (3.55)$$

wobei  $n$  die Anzahl der Knoten in der Gesamtfläche des Problems  $\Omega$  ist. Die Wichtung  $q_i^\Omega$  ist der Anteil des Knotens  $i$  an der Gesamtfläche.  $q_i^\Omega$  berechnet sich aus

$$q_i^\Omega = \frac{f_{\Omega,i} h_i^2}{\sum_{j=1}^n (f_{\Omega,j} h_j^2)} A_\Omega \quad (3.56)$$

$f_{\Omega,i}$  ist ein Support-Anteil. Für innere Knoten ist dieser 1,0, für Randknoten 0,5 und für Eckknoten 0,25.

Die Punktintegration ist in der hier gezeigten Form allerdings nicht stabil, da durch die Unterintegration Hourglass-Moden auftreten können. Verschiedene Autoren wie z.B. Beissel [13] versuchen zwar die Stabilität mit einem Stabilisierungsterm herzustellen. Aufgrund der Sensibilität der expliziten Zeitintegrationsverfahren gegenüber einer Instabilität durch Unterintegration wird die Punktintegration in dieser Arbeit nicht verwendet.

### 3.6 Dreidimensionales EFG-Verfahren

Eine Erweiterung des elementfreien Galerkin-Verfahrens auf dreidimensionale Probleme ist ohne weiteres möglich. Aus den kreisrunden Einflussgebieten

werden Kugeln und es sind dreidimensionale Basisfunktionen zu verwenden. Das weitere Verfahren kann analog angewendet werden.

Bei einer räumlichen Durchführung ist insbesondere die Frage nach effektiven Suchalgorithmen zu stellen. Es müssen wie im zweidimensionalen auch die Knoten in einem Einflussbereich gefunden werden. Die für ebene Probleme optimierten Suchalgorithmen sind daher zu erweitern. Der Rechenzeitbedarf für räumliche Probleme ist trotzdem erheblich.

Weitere Schwierigkeiten ergeben sich bei der Behandlung der Risse. Die Rissgeometrie stellt sich wesentlich komplexer dar als bei zweidimensionalen Problemen. Es müssen anstelle von Risslinien Rissflächen verwendet werden. Dies lässt die Levelsetmethode zu (siehe Moes [95], Gravouli [52]). Die Rissspitze wird zu einer Risslinie, die nach einem Risswachstum untersucht werden muss. Zu klären ist weiterhin das dreidimensionale geometrische Verhalten von sich verzweigenden und sich verbindenden Rissen. Auch wenn diese Probleme als lösbar erscheinen, wird in dieser Arbeit davon Abstand genommen. Es werden hier im Weiteren nur ebene bzw. axialsymmetrische Probleme berücksichtigt.

## 3.7 Explizite Zeitintegration

### 3.7.1 Eigenfrequenzen

Zur Bestimmung der maximal möglichen Zeitschrittweite bei der expliziten Zeitintegration und der Parameter für die künstliche Viskosität sind die Eigenfrequenzen der Knoten des EFG-Verfahrens zu bestimmen. Eine Aussage über die Eigenfrequenz der EFG-Massenpunkte ist bisher nicht getroffen worden. Um einen Anhaltspunkt für die Größe der Eigenfrequenzen zu erhalten, wurden Untersuchungen an dem in Abbildung 3.20 dargestellten Modell durchgeführt.

Die größte auftretende Eigenfrequenz bei der Finiten-Elemente-Methode wird über die Eigenfrequenz eines Zwei-Knoten-Stabes (siehe Cook [34]) bestimmt. Wenn die Massen kondensiert vorliegen, ergibt sich als Eigenfrequenz

$$\omega = 2\sqrt{\frac{AE}{mL}} = \frac{2}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{2}{10}\sqrt{\frac{36000}{2,4e-9}} = 774.597 \text{ sec}^{-1} \quad (3.57)$$

Damit ergibt sich bei dem hier betrachteten Problem bei Verwendung der

Finiten-Elemente-Methode als Eigenfrequenz der Massenpunkte

$$f = 123.281 \text{ Hz} \quad (3.58)$$

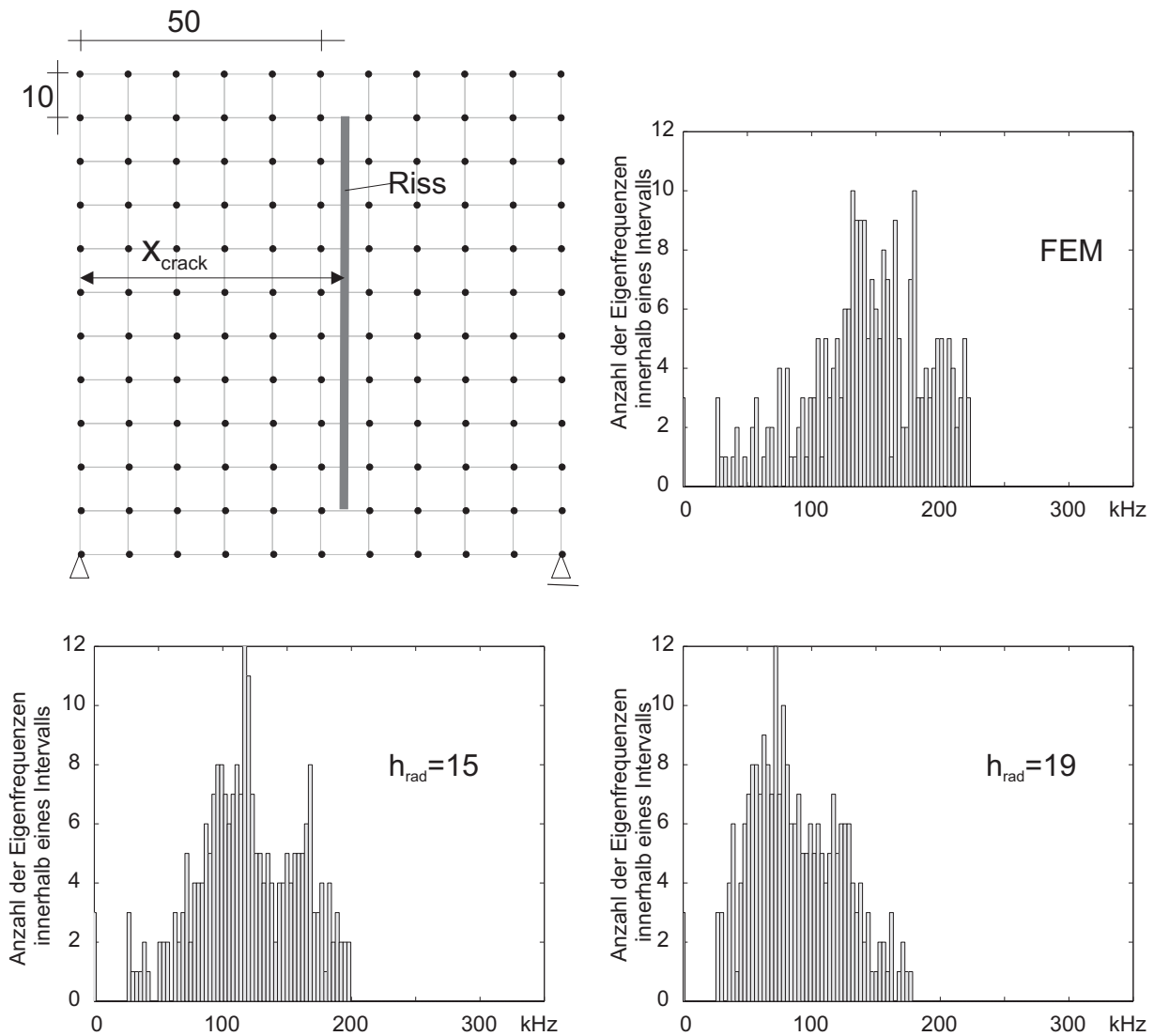


Abbildung 3.20: Eigenfrequenzen bei 4-Knoten-Elementen und dem EFG-Verfahren mit unterschiedlichen Einflussradien  $h_{\text{rad}}$

Die Eigenfrequenzen der Diskretisierung können über eine Eigenwertanalyse bestimmt werden. Es ist das folgende Eigenwertproblem zu lösen

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\phi = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

Für ein Netz mit Finiten Elementen ergibt sich der in Abbildung 3.20, oben rechts angegebene Verlauf der Eigenfrequenzen. Es zeigt sich ein relativ



großer Bereich mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen. Dies liegt daran, dass die Eigenfrequenz für Randknoten anders ist als für Mittelknoten. Die analytisch bestimmte Eigenfrequenz liegt in diesem Bereich.

Führt man für eine EFG-Diskretisierung eine Eigenwertanalyse durch, zeigen sich etwas niedrigere Eigenfrequenzen als die, die sich bei der Finiten-Elemente-Methode ergeben. Diese Eigenfrequenzen hängen zusätzlich von der Größe der Einflussradien ab (siehe Abbildung 3.20). Eine Diskretisierung mit einem kleineren Einflussradius  $h_{rad}$  weist höhere Eigenfrequenzen auf als eine Diskretisierung mit größeren Einflussradien.

Es zeigt sich außerdem, dass die Lage des Risses bezüglich der Knoten einen Einfluss auf die Eigenfrequenzen hat. Liegt der Riss nahe an den Knoten, so stellen sich wesentlich höhere Eigenfrequenzen ein als bei einer Diskretisierung ohne einen Riss. Die maximalen sich ergebenden Eigenfrequenzen erreichen den doppelten Wert wie bei einem ungerissenen System. Dies liegt am Systemwechsel. Der in Gleichung 3.57 verwendete Zwei-Knoten-Stab wird durch den Riss nur noch in eine Richtung gehalten. Deswegen sind die maximalen Eigenfrequenzen bis zu doppelt so groß im Gegensatz zum ungerissenen Kontinuum.

### 3.7.2 Zeitschrittweite

Die explizite Zeitintegration ist nur stabil, falls eine kritische Zeitschrittgröße nicht überschritten wird. Diese kritische Zeitschrittgröße wird für das EFG-Verfahren von Belytschko [15] analog zur Finiten-Elemente-Methode bestimmt (siehe Gleichung 2.37), wobei Belytschko den minimalen Knotenabstand in die Gleichung eingehen lässt. Lu [87] schlägt vor, statt dem minimalen Knotenabstand die Größe des Einflussradius zu benutzen. Dies führt zu größeren maximalen Zeitschrittgrößen.

Die deutlich erhöhte maximale Eigenfrequenz bei Diskretisierungen mit Rissen führt dazu, dass bei solchen Untersuchungen der Reduktionsfaktor  $\alpha_c$  (Courant-Zahl [36], siehe Gleichung 2.37) nicht zu groß gewählt werden sollte. Eigene Untersuchungen zeigen, dass dieser dann in einer Größenordnung von  $0,5 \leq \alpha_c \leq 0,8$  liegen sollte.

### 3.7.3 Künstliche Viskosität

Bei dynamischen Untersuchungen mit dem EFG-Verfahren zeigen sich beim Rissfortschritt hochfrequente Schwingungen. Es ist zu untersuchen, ob die

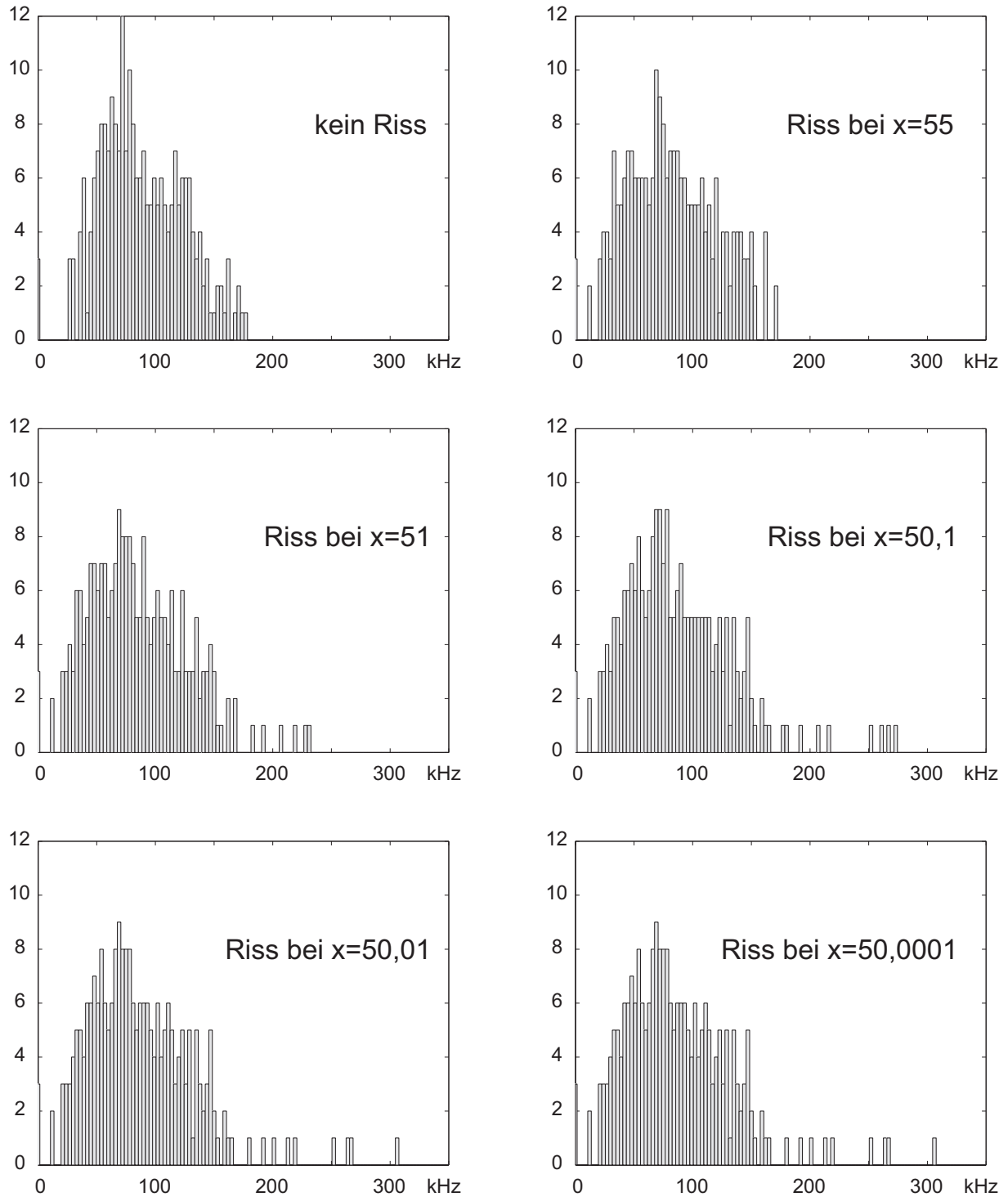


Abbildung 3.21: Eigenfrequenzen bei EFG-Verfahren mit unterschiedlichem Knotenabstand zum Riss,  $h_{rad} = 19$

hohen Eigenfrequenzen mit einer linearen künstlichen Viskosität (siehe Kapitel 2.4.4) gefiltert werden können. Die lineare künstliche Viskosität dient im Allgemeinen dazu, die Oszillationen im Nachlauf der Stoßwelle zu dämpfen.

Zur Klärung der Ursache der hochfrequenten Schwingungen wurde ein stark vereinfachtes Modell verwendet. In einem mit einer Dreieckslast beanspruchten Stab wurde in der Mitte ein Anfangsriß eingeführt (siehe Abbildung 3.22). Dieser Riß durfte während der Berechnung nur um eine Rißfortschrittslänge wachsen, um eine gegenseitige Beeinflussung des Rißwachstums auszuschließen.

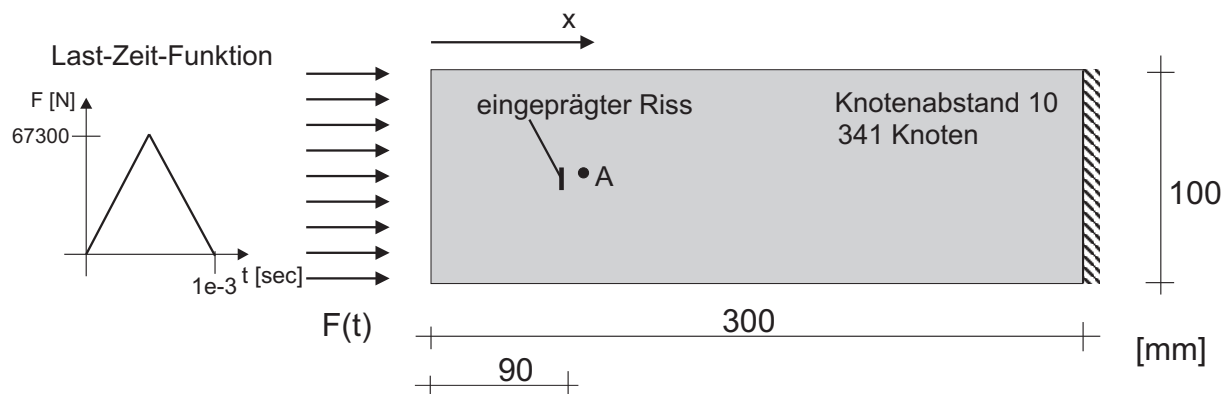


Abbildung 3.22: Vereinfachtes Stabmodell – Geometrie

Es zeigte sich, dass sich nach dem Rißwachstum hochfrequente Schwingungen ausbilden (Abbildung 3.23), die von dem verwendeten elastischen Stoffgesetz nicht gedämpft werden. Eine Fast Fourier-Transformation (FFT) ergab, dass sich Frequenzen im Bereich zwischen 50.000 und 110.000 Hz einstellen (siehe Abbildung 3.24).

Die Größe dieser Frequenz legt die Vermutung nahe, dass es sich um die Eigenschwingung der Massenpunkte handelt. Eine Eigenwertanalyse ergibt Eigenfrequenzen im Bereich zwischen 60.000 und 180.000 Hz (siehe Abbildung 3.24).

Vergleicht man nun die sich ergebenden Eigenfrequenzen mit den Frequenzen, die bei einem Rißfortschritt angeregt werden, so fällt auf, dass ein Großteil dieser Schwingungen im Bereich der Eigenfrequenzen der EFG-Knoten liegt.

Es stellt sich damit die Frage, wie groß der Parameter  $b_{lin}$  der linearen künstlichen Viskosität zu wählen ist, damit eine Dämpfung möglich ist. Um den Einfluss des Parameters auf die Berechnung zu ermitteln, wurde das vereinfachte Stabmodell (Abbildung 3.22) mit unterschiedlichen  $b_{lin}$  berechnet. Es sind zwei Effekte festzuhalten:

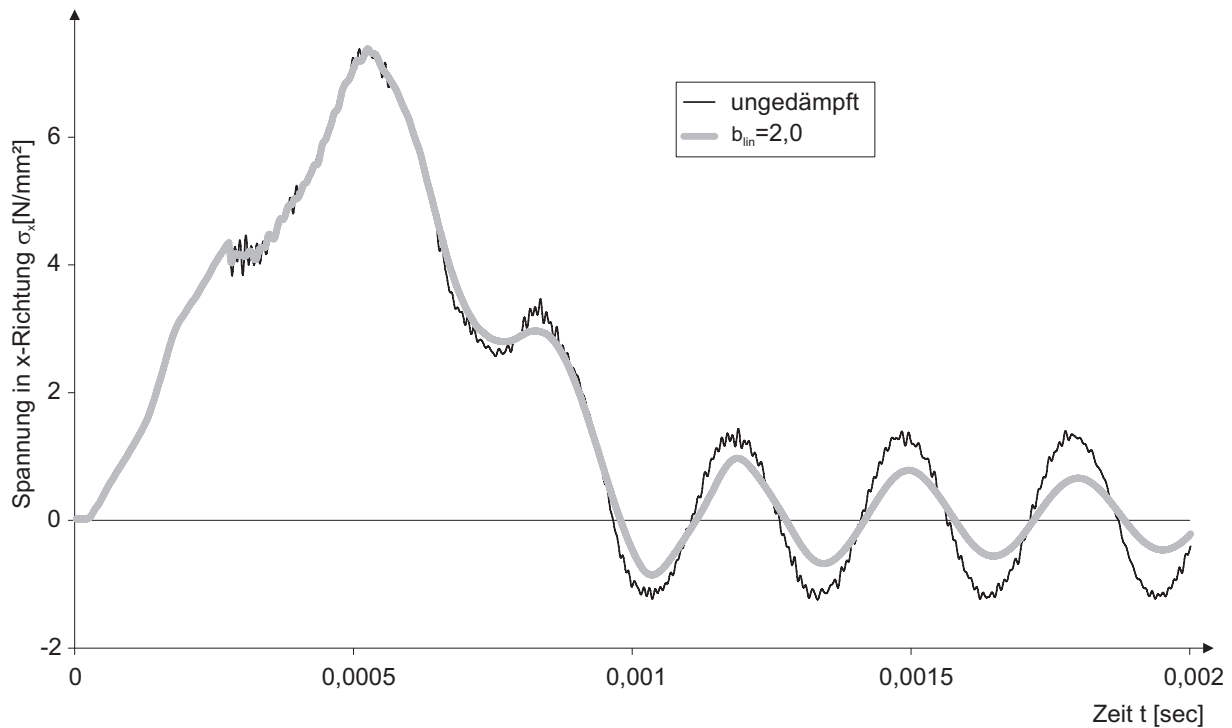


Abbildung 3.23: Vereinfachtes Stabmodell – Verlauf der Spannungen am Punkt A

- Bei wachsendem Parameter  $b_{lin}$  zeigt sich eine Abnahme der Schwingungen der Knoten (siehe Abbildung 3.25). Beim Wert  $b_{lin} = 0,04$  erkennt man, dass die Schwingungen zum größten Teil gedämpft werden, eine Phasenverschiebung und eine Abnahme der Amplitude der globalen Welle aber nicht verzeichnet werden kann. Dieser Wert liegt niedriger als die bei Berechnungen mit Finiten Elementen übliche Größe. Schmidt-Hurtienne [123] verwendet  $b_{lin} = 0,25$ , ABAQUS und LS-DYNA benutzen  $b_{lin} = 0,08$ . Ein niedriger Wert für  $b_{lin}$  ist erforderlich, da die Eigenfrequenzen beim EFG-Verfahren kleiner sind, als beim Finiten Elemente Modell.
- Wird der Parameter  $b_{lin}$  zu groß gewählt, wird auch die Eigenschwingung des Stabes gedämpft (siehe Abbildung 3.23). Die Schwingung erhält eine Phasenverschiebung und die Amplitude wird kontinuierlich kleiner.

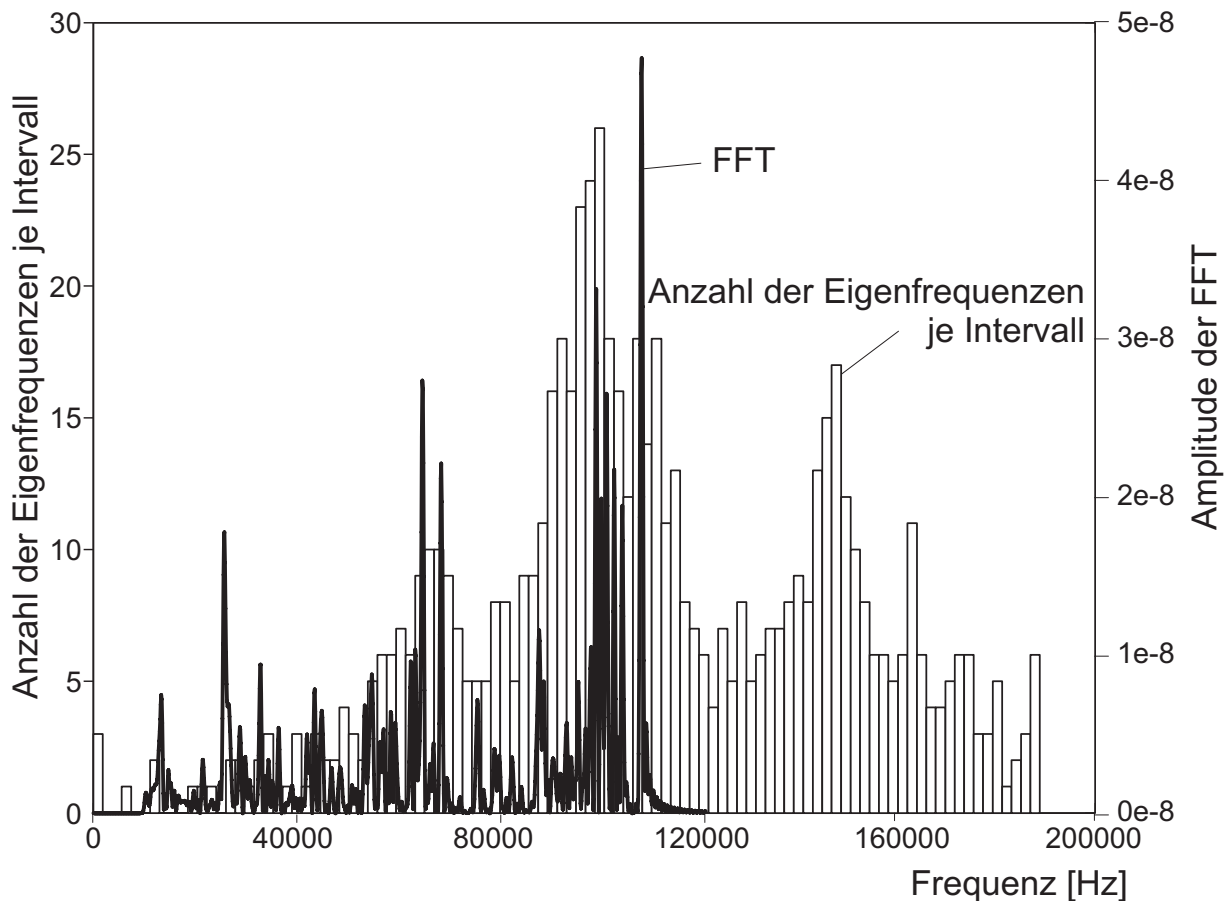


Abbildung 3.24: Fast Fourier-Transformation (FFT) der Schwingungen am vereinfachten Stabmodell mit Riss, Eigenfrequenzen

### 3.8 Abgrenzung EFG, SPH, FEM

Neben dem elementfreien Galerkin-Verfahren existieren verschiedene andere netzfreie Methoden. Die Smooth Particle Method (SPH) diskretisiert Partikel zwischen denen Impulse ausgetauscht werden. SPH wird erfolgreich verwendet, wenn es um die Darstellung des dynamischen Verhaltens von Flüssigkeiten geht. Die Anwendung von SPH für eine Kontaktdetonation zeigt Rabczuk [112].

Der Unterschied des hier vorgestellten EFG-Verfahrens zur Methode der Finiten Elementen und SPH liegt in der Bestimmung der Ansatzfunktionen. Während bei der Methode der Finiten Elemente die einzelnen Elemente miteinander vernetzt sind und nur durch Federn oder Elementerosion voneinander getrennt werden können, können sich sowohl bei SPH als auch beim EFG-Verfahren die Zuordnungen der Knoten zueinander während der Berechnung ändern und werden deswegen in jedem Zeitschritt neu berechnet. Die-

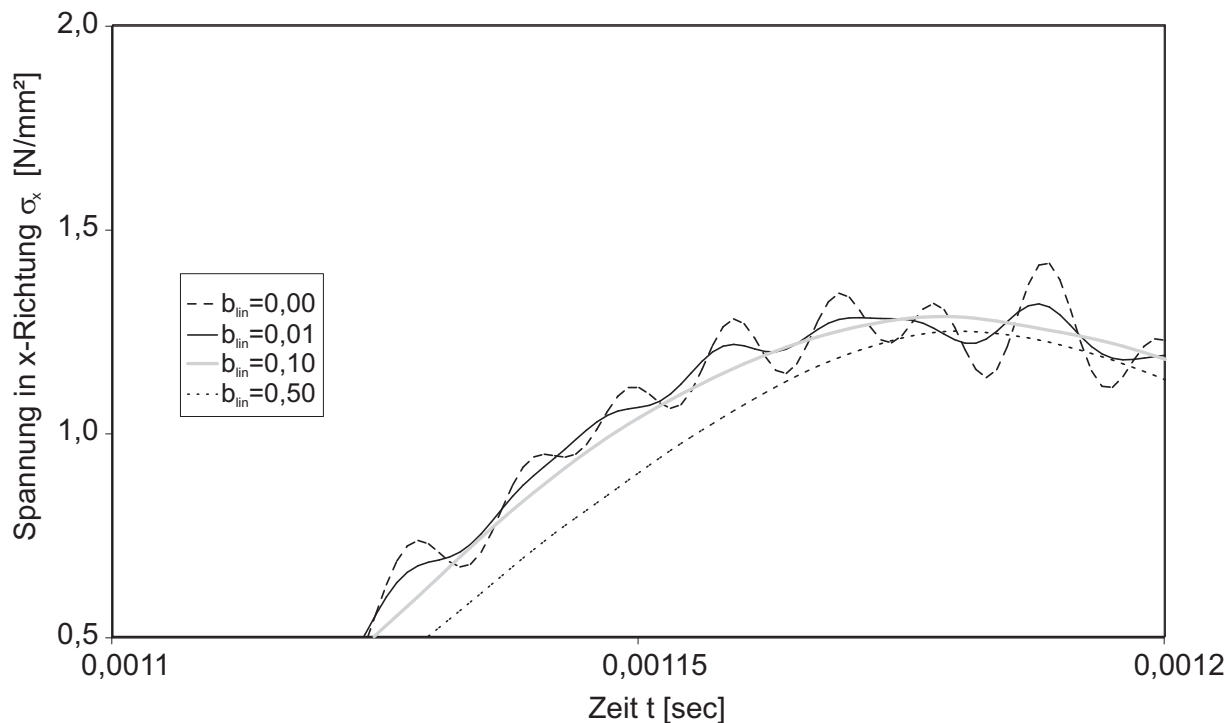


Abbildung 3.25: Vereinfachtes Stabmodell – Verlauf der Spannungen am Punkt A, Vergrößerung

se Nachbarschaftssuche bedingt einen erhöhten Rechenaufwand. Sowohl bei SPH als auch bei EFG gilt zudem die Delta-Eigenschaft nicht. Dies bedeutet einen mehr oder weniger großen Aufwand zur Berücksichtigung von Randbedingungen. SPH besitzt im Vergleich zum EFG-Verfahren kein Kontinuum. Es sind an den einzelnen Knoten Partikel definiert, die untereinander Impulse austauschen. Eine sich daraus ergebende Folge ist, dass bei SPH die Spannungen, Dehnungen etc. nicht an Integrationspunkten bestimmt werden, sondern in den Partikelpunkten. Außerdem wird bei SPH von der starken Form der Differentialgleichungen ausgegangen, die in den diskreten Punkten erfüllt werden. Ein weiteres Problem bei SPH ist die Einbeziehung von Randbedingungen. Das EFG-Verfahren stellt somit durch die Verwendung eines Kontinuums und eines Integrationsnetzes eine Mischung aus dem komplett netzfreien SPH und der Finiten-Elemente-Methode dar.

### 3.9 Zusammenfassung

Das in diesem Kapitel vorgestellte EFG-Verfahren kann nun nach dem im Ablaufdiagramm 3.4 vorgestellten Ablauf angewendet werden.

## Ablaufdiagramm 3.4: Ablauf des EFG-Verfahrens

1. Erstellung der Knoten und Integrationszellen
2. Schleife über alle Integrationszellen und über alle Integrationspunkte
  - Suche aller Knoten, die im Einflussbereich des Integrationspunktes liegen
  - Bestimmung der MLS-Interpolationen
  - Bestimmung der lokalen Steifigkeitsmatrix der Integrationszelle
  - Einfügen der lokalen Steifigkeitsmatrix in die Gesamtsteifigkeitsmatrix
3. Gleichungslösung  $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}$
4. Berechnung der Dehnungen und Spannungen

In Abbildung 3.26 sind die unterschiedlichen Rechenzeiten der verschiedenen Verfahren zusammengestellt. Es zeigt sich, dass das EFG-Verfahren einen wesentlich höheren Rechenaufwand erfordert als die FE-Methode. Wird eine explizite Zeitintegration verwendet, ist der Unterschied zur Finiten-Elemente-Methode wesentlich geringer. Die Rechenzeiten der hier nicht verwendeten Punktintegration liegen in der Größenordnung der Rechenzeiten der Finiten-Elemente-Methode. Es zeigt sich gleichzeitig, dass durch die Speicherung der Knoten, die einen Integrationspunkt beeinflussen, eine nicht zu vernachlässigende Reduktion der Rechenzeit auftritt.

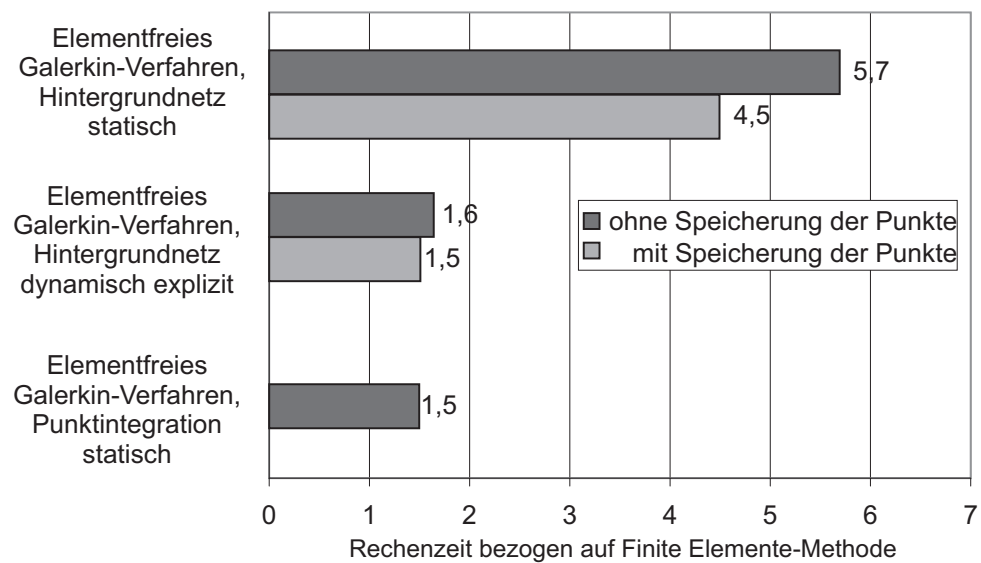


Abbildung 3.26: Vergleich der Rechenzeiten an einem Modell mit 3782 Freiheitsgraden



# 4 Simulationsmodelle für Beton

Um das Verhalten von Beton sowohl unter statischer als auch unter dynamischer Belastung numerisch erfassen zu können, muss in einem Stoffgesetz der Zusammenhang zwischen den Dehnungen und den Spannungen beschrieben werden.

Im ersten Teil dieses Kapitels werden zunächst die Eigenschaften des Betons auf den verschiedenen Betrachtungsebenen dargestellt. Im zweiten Teil des Kapitels werden verschiedene Stoffgesetze aus der Literatur vorgestellt, um schließlich im letzten Kapitel ein Simulationsmodell unter Verwendung diskreter Risse zu entwickeln.

## 4.1 Verhalten von Beton unter statischer und dynamischer Belastung

### 4.1.1 Versagen von Beton

Das Verhalten von Beton kann in drei verschiedenen Horizonten betrachtet werden. Während die Mesoebene in der Größenordnung der durch Augenschein unterscheidbaren Bestandteile des Betons angesiedelt ist, werden kleinere Maßstäbe als Mikroebene bezeichnet. Hier spielt die Interaktion der Bestandteile der Mörtelphase eine wichtige Rolle. Die Makroebene ist der im Stahlbetonbau übliche Betrachtungsmaßstab, bei dem Bauteile (Stützen, Balken, etc.) berechnet werden.

Beton wird aus Zement, Wasser, Zuschlägen und geringen Mengen an Betonzusatzstoffen und Betonzusatzmitteln hergestellt. Die Zuschläge selbst können eingeteilt werden in einen Feinanteil (bis 2 mm Durchmesser) und einen Grobanteil. Der Feinanteil bildet mit dem aus Zement und Wasser entstehenden Zementstein die Mörtelphase und wird für die weiteren Betrachtungen als homogen angenommen (Homogenisierung der Mikroebene). Die Mörtelphase nimmt im Allgemeinen einen Volumenanteil von 30 % des Betons ein. Betrachtet man die Mörtelphase näher, so fallen Kapillarporen auf, die einen Volumenanteil von ca. 10 % besitzen. Daraus folgt, dass die Zuschläge

eine höhere Dichte und eine höhere Festigkeit besitzen als die Mörtelphase.

Die Inhomogenität der Mesoebene ist wesentlich für das Verständnis des Versagens von Beton unter verschiedenen Belastungen. Schon bei der Herstellung des Betons entstehen in der Mörtelphase durch Schwindvorgänge des Zementsteins und durch thermische Effekte beim Abfließen der Hydrationswärme Mikrorisse. Wird der Beton belastet, entstehen weitere Mikrorisse, deren Richtung noch stark streuen kann. Wird die Belastung gesteigert, so findet ein Zusammenschluss der Mikrorisse statt. Diese Phase wird Rissüberbrückung genannt. Die Zugkräfte werden durch einzelne Zuschlagskomponenten übertragen. Erst bei weiterer Belastung wird der Riss zugspannungsfrei. Aus den Mikrorissen sind Makrorisse geworden.

Das Versagen von Beton lässt sich nach Ruppert [121] in die in Tabelle 4.1 aufgeführten Bruchmechanismen aufteilen, die in Abbildung 4.1 dargestellt werden. Im Folgenden werden nun insbesondere das Zug-, das Druck- und das Zermalmungsversagen weiter betrachtet.

Tabelle 4.1: Versagensarten von Beton und deren Rissgeometrien nach Ruppert [121]

<b>Versagensart</b>	<b>Belastung</b>	<b>Art der Risse</b>	<b>Rissrichtung</b>
Zugversagen	Zugspannungen	Einzelner Riss	Senkrecht zu den Hauptspannungen
Druckversagen	Hohe einaxiale Druckspannungen	Viele Risse	Parallel zur Belastungsrichtung
Spaltbruch	Mehraxiale Druckspannungen	Scheiben	Senkrecht zur kleinsten Druckhauptspannung
Schubbruch	Mehraxiale Druckspannungen	Begrenzte Zahl von Rissen	Parallel zur zweiten Hauptrichtung
Zermalmung	Hohe hydrostatische Druckspannungen	Sehr viele Risse	Keine Orientierung

### **Zugversagen**

Die gezeigten Vorgänge der Rissbildung in Beton lassen sich gut an einem Zugversuch darstellen (siehe Abbildung 4.2). Bereits bei 60 % der Zugfestig-

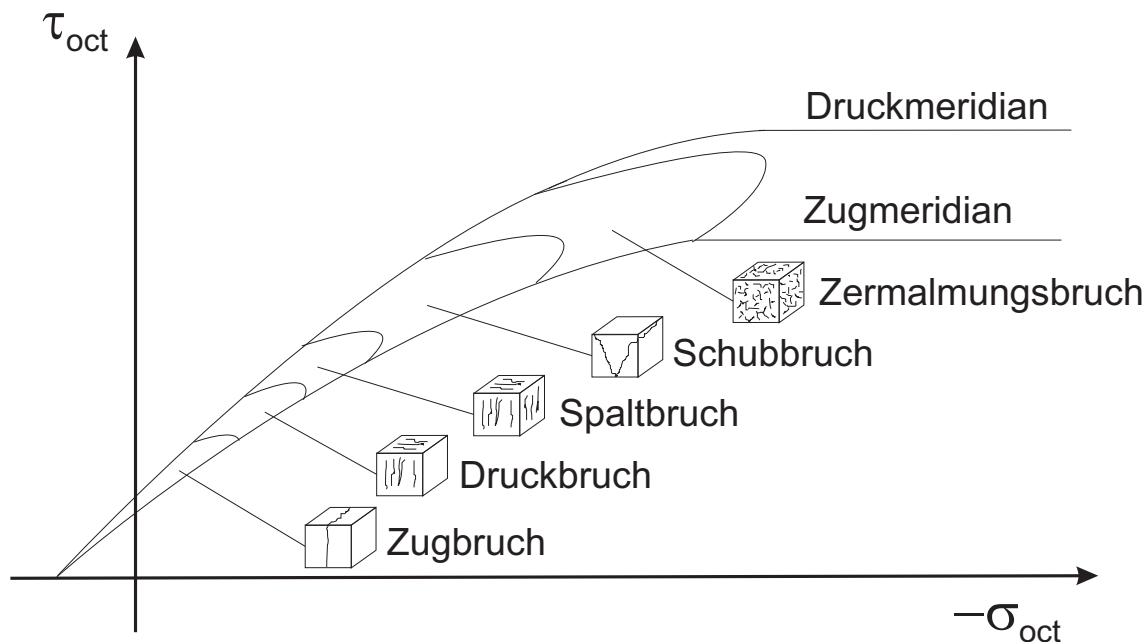


Abbildung 4.1: Versagensarten von Beton nach Ruppert [121]

keit kommt es im Beton zur ausgeprägten Bildung von Mikrorissen senkrecht zur Belastungsrichtung (A). Die Steifigkeit des Querschnittes verringert sich. Beim Erreichen der Zugfestigkeit (B) sind diese Mikrorisse in weiten Teilen verbunden. Beim Überschreiten der Zugfestigkeit (C) kommt es zur Ausbildung eines Makrorisses, der aber noch durch die Verzahnung der Rissufer Zugspannungen übertragen kann. Diesen Effekt nennt man auch Softening. Die Spannungs-Verformungskurve wird im Allgemeinen in zwei Bereiche aufgeteilt. Der Bereich des Spannungsanstieges bis zum Punkt (B) und der Bereich des Softening.

### Druckversagen

Auch das Versagen von Beton unter einer Druckbeanspruchung ist durch bruchmechanische Überlegungen erklärbar. Im Gegensatz zur Zugbeanspruchung entwickeln sich die Mikrorisse parallel zur Belastungsrichtung. Die bei weiterer Belastung aus den Mikrorissen entstehenden Makrorisse unterteilen den Beton in kleine „Betonsäulen“, deren Belastbarkeit wesentlich von der Probengeometrie abhängt. Dies zeigen die unterschiedlichen Werte für die Druckfestigkeit von Zylindern und Würfeln bei der Güteüberwachung von Beton. Gedrungene Körper besitzen eine höhere Belastbarkeit durch die kürzere Knicklänge der „Betonsäulen“ als schlankere Körper. Das Rissbild eines einaxialen Druckversuches zeigt wesentlich mehr parallele Risse als das eines Zugversuches. Das Rissbild ist außerdem diffuser. Bei schlanken Versuchs-

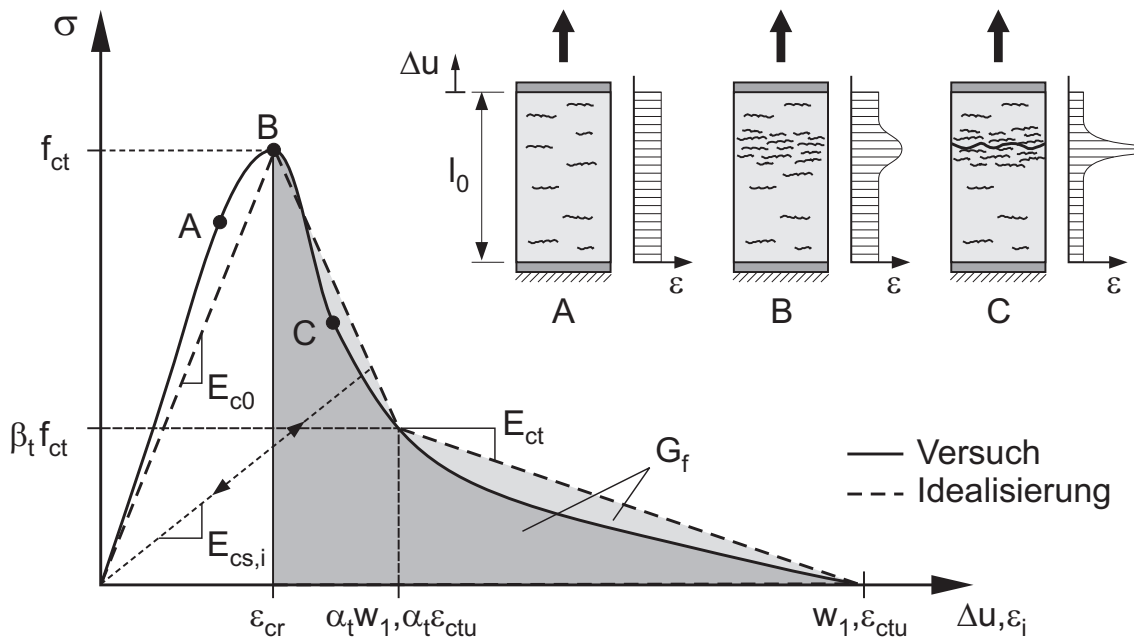


Abbildung 4.2: Zugversagen von Beton – aus Akkermann [3]

körpern tritt außerdem ein Abscheren auf.

Werden die Verformungen in Querrichtung behindert, kann der Beton wesentlich höhere Lasten ertragen, da das Ausknicken der „Betonsäulen“ verhindert wird. Dies erklärt die hohen hydrostatischen Drücke, denen der Beton ausgesetzt werden kann.

### Zermalmungsversagen

Der Zementstein enthält einen relativ hohen Anteil an Mikroporen. Wird der Beton mit einem sehr hohen hydrostatischen Druck belastet, so werden die Mikroporen zerstört. Dieser Effekt kann zur Ausbildung einer Stoßwelle (siehe Kapitel 4.1.2) führen. Nach dem Kollaps der Mikroporen ist davon auszugehen, dass der Beton als granulares Material vorliegt, da die Mikrostruktur des Betons zerstört ist. Er kann zwar noch Druck ertragen, versagt allerdings unter einer Zugbelastung.

#### 4.1.2 Entstehung von Stoßwellen

Die Entstehung von Stoßwellen im Beton liegt im Verhalten der Mikroporen unter einer großen hydrostatischen Dehnung begründet. Es wird hier der Einfluss der Porosität auf die Entstehung von Stoßwellen vorgestellt. Auf eine thermodynamische Darstellung der Beschreibung des Materialverhaltens von Beton über eine Zustandsgleichung wird verzichtet. Diese findet sich z.B. in

Ockert [102]. Die Hugoniot-Kurve wird hier unter Vernachlässigung der Energieachse nur zweidimensional als Druck-Dichte-Beziehung verwendet.

Von Stoßwellen spricht man, wenn sich Wellen schneller ausbreiten als die elastische Wellengeschwindigkeit. Damit eine Stoßwelle auftritt, muss die Druck-Dehnungslinie in der Weise nichtlinear sein, dass bei Überschreitung einer bestimmten Dehnung die Steifigkeit des Mediums ansteigt. Dies ist bei allen Materialien der Fall. Die Form einer Stoßwelle zeigt eine ausgeprägte Stoßwellenfront, deren Amplitude gegenüber den einzelnen Wellenteilen stark ansteigt.

Nachfolgend werden verschiedene Beispiele für die Entstehung von Stoßwellen genannt:

- Donnerknall: Die um den Blitzkanal stark aufgeheizte Luft bewirkt durch die vom Blitz ausgehende Stoßwelle den Donnerknall bei Gewittern. Es handelt sich also um eine Art Explosion entlang des Blitzkanals.
- Sprengstoffe: Man spricht von einer Detonation, wenn sich der Abbrand des Sprengstoffes schneller ausbreitet als die Wellengeschwindigkeit des Sprengstoffes. Die Belastungsfunktion findet in Form einer Stoßwelle statt.
- Metalle: Bei Metallen ist nicht das Verhalten der Mikroporen für den Steifigkeitszuwachs verantwortlich sondern die Kristallstruktur.

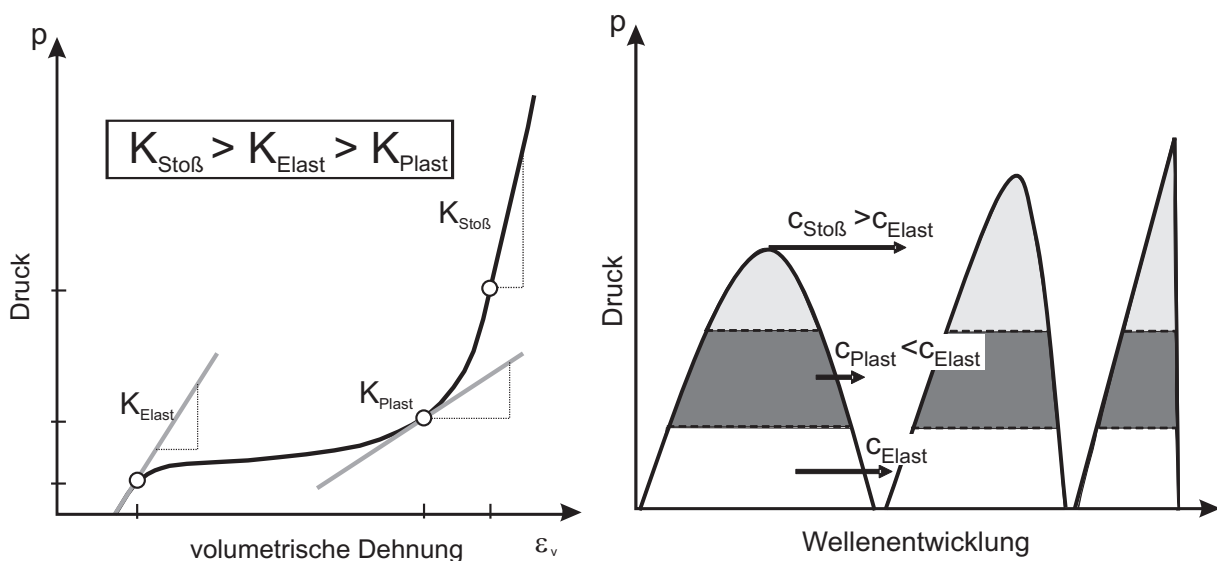


Abbildung 4.3: Abhängigkeit des Druckes von der hydrostatischen Dehnung, Hugoniot-Kurve von Beton (links), Wellenentwicklung (rechts)

Auch bei einer starken hydrostatischen Belastung von Beton können Stoßwellen entstehen. Beton zeigt bei einer solchen Belastung ein stark nichtlineares Verhalten (siehe Abbildung 4.3).

Bei kleinen hydrostatischen Beanspruchungen ist eine lineare Zunahme des Druckes mit der Steigung  $K_{Elast}$  zu beobachten. Die sich daraus ergebenden Wellen im Beton sind linear-elastisch und breiten sich mit der linearen Wellengeschwindigkeit  $c$  aus.

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{\rho(1-\mu-2\mu^2)}} \quad (4.1)$$

Die Wellengeschwindigkeiten für Flüssigkeiten, Scherung, etc. sind von Riedel [114] zusammengefasst. Für einen dünnen Stab ist die Wellengeschwindigkeit der Longitudinalwelle zum Beispiel definiert zu

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.2)$$

Bei zunehmender hydrostatischer Belastung werden die Mikroporen zerstört. Dies führt zu einer geringeren Steifigkeit in diesem Belastungsbereich. Die Wellen, die aus diesem Belastungsbereich entstehen, sind durch die geringere Steifigkeit  $K_{Plast}$  langsamer als die elastischen Wellen. Es entsteht eine nachlaufende Welle.

Bei weiter zunehmender Belastung sind die Mikroporen so weit zusammengedrückt, dass der Beton wieder wesentlich höhere Drücke aufnehmen kann. Es liegt ein granulares Material vor, das eine höhere Steifigkeit besitzt als die lineare Steifigkeit. Die Geschwindigkeit der Wellen nimmt deswegen rapide zu und ist größer als die aller anderen Wellen. Diese Wellenanteile überholen die langsameren Anteile und steilen sich zu einer Stoßwellenfront auf (siehe Abbildung 4.3, rechts). Durch die starke Energiedissipation bei der Zerstörung der Mikroporen wird die Amplitude der Stoßwellenfront allerdings sehr schnell abgebaut.

Das dargestellte Verhalten tritt sowohl bei porösen als auch bei kompakten Werkstoffen auf, wobei die Hugoniot-Kurve bei porösen Materialien ausgeprägter ist. Es stellt sich die Frage, in wieweit der Verbundwerkstoff Beton als porös bezeichnet werden kann. Beton enthält bezogen auf das Gesamtvolumen ca. 10%, bezogen auf das Volumen des Zementsteins ca. 30% Poren. Diese sind nicht zu vernachlässigen. Es tritt gleichzeitig eine Wechselwirkung zwischen dem porösen Zementstein und den annähernd kompakten Zuschlägen auf. Die Wechselwirkung zwischen Zementstein und Zuschlägen kann

man gut mit einem Schwamm beschreiben, dessen Volumen einzelne kompakte Bereiche (harte Kunststoffkugeln) besitzt. Drückt man einen solchen Schwamm zusammen, ergibt sich zunächst als Gesamtsteifigkeit die des porösen Schwammes. Ist der Schwamm so weit zusammengedrückt, dass sich die kompakten Bereiche berühren, wird eine starke Steifigkeitssteigerung eintreten.

### 4.1.3 Dehnrateneffekt

Bei den hier untersuchten Kontaktdetonationen treten hohe Belastungsgeschwindigkeiten und damit hohe Dehngeschwindigkeiten auf. Wie in der Einleitung gezeigt (Abbildung 1.1), kann die Dehngeschwindigkeit (Dehnrates) bei den untersuchten Kontaktdetonationen Werte von bis zu  $10^6 \text{ sec}^{-1}$  annehmen. Deswegen sind Einflüsse aus der hohen Belastungsgeschwindigkeit nicht vernachlässigbar. Verschiedene Materialparameter sind von der Dehnrates abhängig. Diese Abhängigkeiten werden im Folgenden erläutert und die gewählte Vorgehensweise beschrieben.

#### Festigkeiten

Belastet man Beton mit zunehmenden Dehnrates, so zeigt sich eine Steigerung sowohl der Druck- als auch der Zugfestigkeit. Für Dehnrates bis ca.  $100 \text{ sec}^{-1}$  kann zur Bestimmung der Festigkeitssteigerungen zum Beispiel der Split-Hopkinson-Bar (SHB) verwendet werden, wie dies u.a. von Bachmann [9] und Schuler [125] geschildert wird. Bischoff stellt in [24] die Festigkeitssteigerung bei Zunahme der Dehnrates unter Zuhilfenahme von Versuchsergebnissen verschiedener Autoren zusammen. Diese Zusammenstellung wird in Abbildung 4.4 und Abbildung 4.5 um weitere Versuchsergebnisse von Brara [26], Klepaczko [73] und Zheng [130] ergänzt.

Versuche mit Dehnrates größer als  $100 \text{ sec}^{-1}$  sind nach Riedel [114] nicht sinnvoll durchzuführen, da bei diesen Dehnrates zum einen nicht von einem gleichmäßigen Spannungszustand ausgegangen werden kann, zum anderen überschreiten die Belastungszeiten die Laufzeiten der Spannungswellen. Folglich kann über den Verlauf der Festigkeitszunahme nur spekuliert werden. Die Drücke, die bei Dehnrates im hochdynamischen Bereich auftreten können, bewirken zudem Temperaturerhöhungen, welche einen gegenläufigen Effekt verursachen könnten.

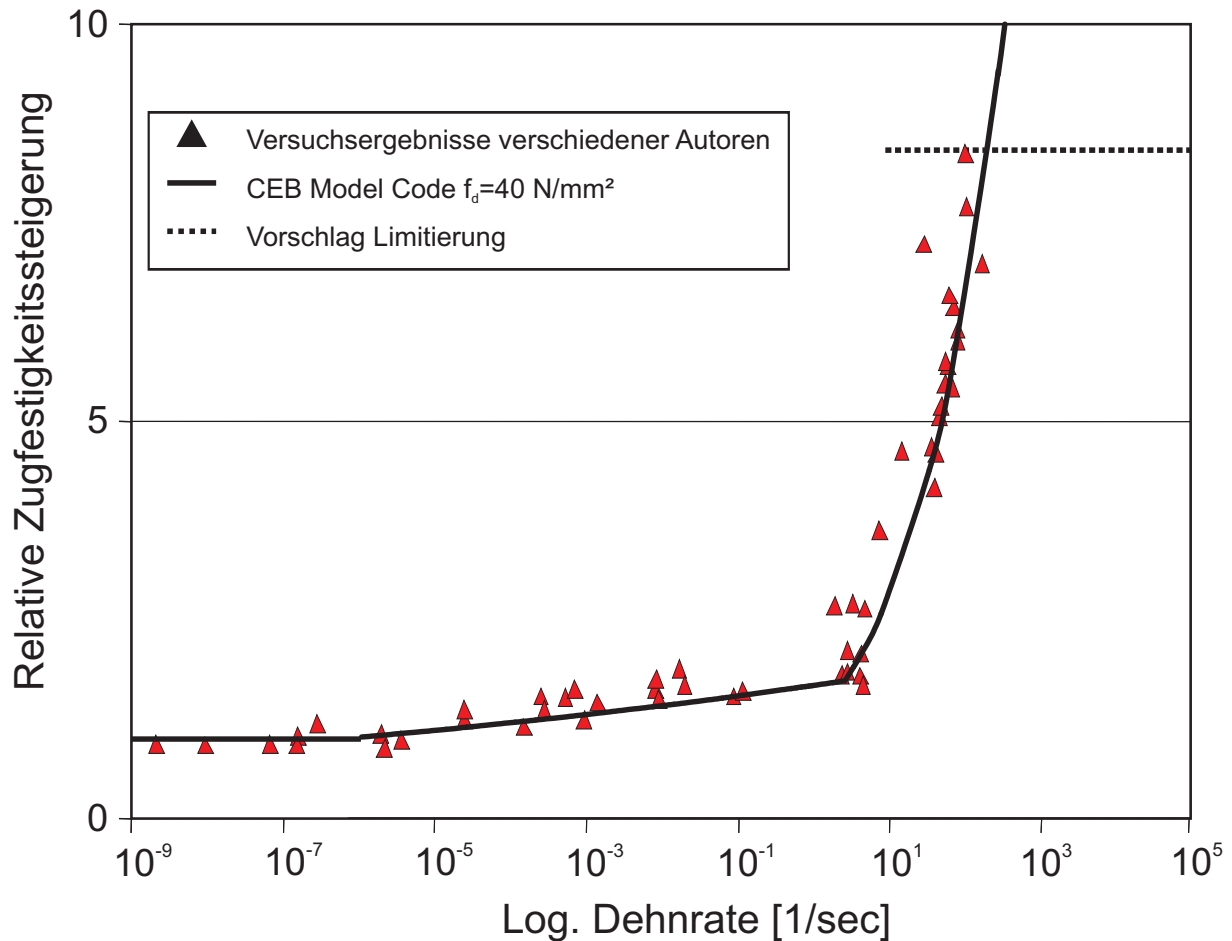


Abbildung 4.4: Steigerung der Zugfestigkeit bei zunehmenden Dehnraten – Versuchsergebnisse verschiedener Autoren (Bischoff [24]), Berechnungsansätze CEB-Bulletin 187 [30]

### Ursachen für die Dehnratenabhängigkeit

Die Erhöhung der Festigkeit unter einer erhöhten Dehnrateschwindigkeit hat verschiedene Ursachen, die nicht eindeutig geklärt sind. Die verschiedenen Ansätze werden im Folgenden vorgestellt. Die Festigkeitssteigerung bei niedrigeren Dehngeschwindigkeiten basiert auf der Massenträgheit. Eine Ursache für die Zunahme der Festigkeit bei höheren Dehnrateschwindigkeiten ist die Homogenisierung und damit die Viskosität der Mikrostruktur.

**Massenträgheit der Rissufer** Ein Riss kann erst geöffnet werden, wenn eine zu definierende aktivierende Masse beschleunigt wurde. Die Information der Rissöffnung wird mit der Wellengeschwindigkeit in die direkte Umgebung des Mikrorisses getragen. Die Zeit dieses Informationsflusses wird benötigt,



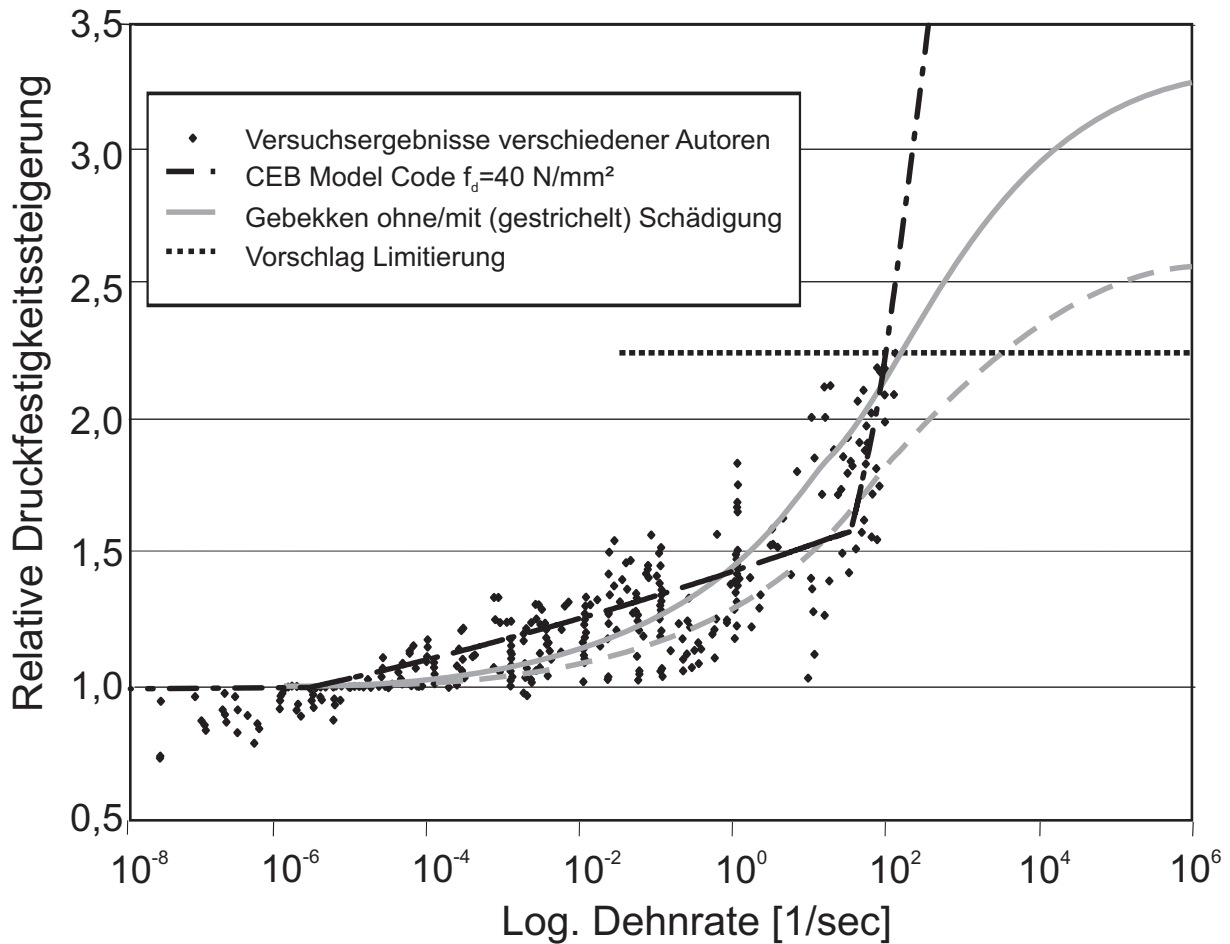


Abbildung 4.5: Steigerung der Druckfestigkeit bei zunehmenden Dehnraten – Versuchsergebnisse verschiedener Autoren (Bischoff [24]), verschiedene Berechnungsansätze

bis ein Riss geöffnet wird.

Es ist also die Frage zu klären, welches Ausmaß die rissangrenzende Masse hat. Schmidt-Hurtienne [123] geht von einer Rissmasse von  $m \simeq 10^{-4} \text{ kg}$  aus. Es liegt nahe, als zu aktivierende Rissmasse eine Kugel rund um den mit einer endlichen Länge definierten Anfangsriss zu benutzen.

Dieser Ansatz wird im Weiteren nicht verfolgt, da damit die unterschiedlichen Anteile Effekte des Dehnrateneffekts getrennt betrachtet werden müssten, was aufgrund der Komplexität im Vergleich zur gewonnenen besseren Abbildung der Realität nicht sinnvoll erscheint. Das von Schmidt-Hurtienne gewählte Vorgehen scheint hier nicht notwendig.

**Verzögerungsmechanismus durch Feuchte** Die in den Kapillarporen vorliegende Feuchte führt ebenfalls zu einer Verzögerung des Mikrorisswach-

tums (Rossi [119]). Unter einer Druckbeanspruchung hat das freie Wasser eine stützende Wirkung, die anhält, bis das Wasser aus den Gelporen gedrückt ist. Dadurch stellt sich ein gleichmäßigerer Spannungszustand ein und das Wachstum der Risse wird verzögert.

In einer auf Zug beanspruchten wassergefüllten Pore herrschen dagegen Kapillarkräfte. Diese wirken einer Verformung der Mikropore und damit der Entstehung eines Risses entgegen. Die Kapillarkraft setzt sich aus einem statischen und einem dynamischen Anteil zusammen. Der dynamische Anteil ist abhängig von der Belastungsgeschwindigkeit. Von Rossi [118] wurde eine Formel für diesen so genannten Stefan-Effekt hergeleitet, die die sehr starke Abnahme der Kapillarkräfte bei einer Vergrößerung der Porenweite beschreibt.

**Homogenisierung** Die Homogenisierung kann auf der Meso- und der Makroebene beobachtet werden. Auf Makroebene brauchen die Spannungsspitzen an den Risswurzeln Zeit, bis sie aufgebaut werden können. Die Spannungen sind rund um die Risspitze gleichmäßiger verteilt als unter einer quasistatischen Last. Dieser Effekt wird nach Curbach [37] von der Wellenausbreitung hervorgerufen.

Der Homogenisierungseffekt findet aber auch auf Mesoebene statt. Betrachtet man den in Abbildung 4.6 dargestellten Betonquerschnitt auf Mesoebene, so ist dieser gekennzeichnet durch eine nicht vorhandene Homogenisierung der Zuschläge, der Zementmatrix und der Mikrofehlstellen. Unter einer quasistatischen Last stellen sich an den Rändern der Zuschlagskörner Spannungsspitzen ein, die zu einem lokalen Versagen des Querschnittes führen können. Wird die Belastung aber in der Größenordnung der Wellengeschwindigkeit aufgebracht, so stellt sich analog zu einer Diskontinuität auf Makroebene eine gleichmäßigere Spannungsverteilung ein, die es dem Querschnitt erlaubt, höhere Belastungen zu ertragen. Es lässt sich so auch die zunehmende Anzahl von Zuschlagskornbrüchen erklären.

### **E-Modul, Bruchenergie**

Messungen von Schuler [125] an einem Split-Hopkinson-Bar (SHB) ergeben, dass bei Dehnraten bis  $100 \text{ sec}^{-1}$  keine Änderung des E-Moduls zu verzeichnen ist. Außerdem ermittelt er Werte für die Bruchenergie bei höheren Dehnraten. Diese verdoppeln sich bei einer Dehnrate von  $100 \text{ sec}^{-1}$ . Der Erhöhungsfaktor entspricht in etwa der Festigkeitssteigerung. Versuche von Weerheijm [145] ergeben ebenfalls einen konstanten E-Modul. Allerdings zeigen

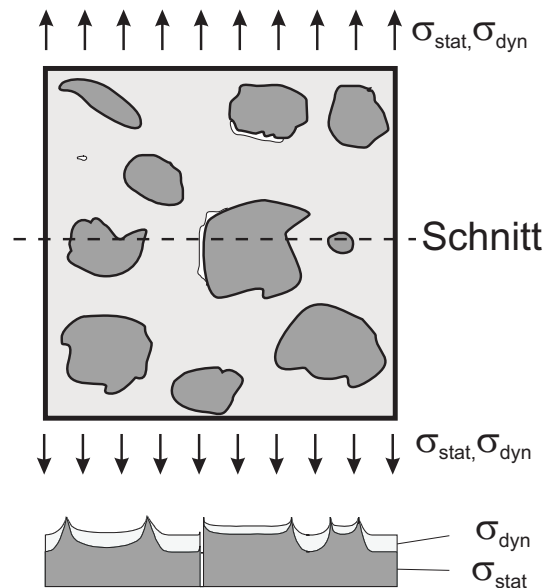


Abbildung 4.6: Homogenisierung der Spannungen auf Mesoebene

seine Versuche, dass die Bruchenergie praktisch unabhängig von der Dehnrates ist. Eine Änderung der Bruchenergie und des E-Moduls bleibt hier unberücksichtigt.

#### 4.1.4 Maximale Rissgeschwindigkeit

Neben dem Dehnrateneffekt wird bei einer Belastung von Beton mit einer hohen Dehnrates ein weiterer Effekt beobachtet. Die maximale Geschwindigkeit, mit der sich Risse im Beton bilden, ist wesentlich kleiner als die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit. Dies belegen zum Beispiel Versuche von Curbach [37], Shah [128], Mindess [93] und Muria Vila [98]. Die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit stellt eine obere Grenze der Rissgeschwindigkeit dar und ist nach Graff [51] definiert zu

$$c_{ray} = \frac{0,87 + 1,12\nu}{1 + \nu} \sqrt{\frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \frac{1}{\rho}} \quad (4.3)$$

Eine kleinere maximale Rissgeschwindigkeit als die Rayleigh-Wellengeschwindigkeit ist allerdings nicht nur bei Beton feststellbar sondern auch bei nahezu homogenen und isotropen Werkstoffen wie Stahl und Glas. Die Ursachen für die Begrenzung der Rissgeschwindigkeit in verschiedenen Werkstoffen werden zum Beispiel von Kerkhof [72] und Erdogan [45] diskutiert.

Ursache für die Verringerung der Maximalgeschwindigkeit ist die Existenz von Mikrorissen an der Risspitze. Die zur Verfügung stehende Energie wird dem-

nach nicht nur zum Rissfortschritt genutzt sondern auch zur Entwicklung der Mikrorisse an der Risspitze, aus denen nur zu einem gewissen Anteil Makrorisse entstehen. Dies wird in der stärker nichtlinear verlaufenden Spannungs-Dehnungs-Linie von Beton im Vergleich zu Glas sichtbar und kann ein Grund für das größere Verhältnis von Rayleigh-Wellengeschwindigkeit zu maximaler Rissgeschwindigkeit bei Beton sein.

Die Abhängigkeit der maximalen Rissgeschwindigkeit vom Grad der Nichtlinearität zeigt der Versuch einer Bestimmung der maximalen Rissgeschwindigkeit mittels einer FEM-Rechnung von Eibl [42]. Die Verwendung eines elastisch-plastischen Stoffgesetzes führt zu einer drastischen Abnahme der Rissgeschwindigkeit im Gegensatz zu einer mit einem elastischen Stoffgesetz bestimmten Rissgeschwindigkeit.

Curbach [37] begründet die Abnahme der Rissgeschwindigkeit über ein Masse/Feder/Reibungs-Modell (Abbildung 4.7). Versagt die Feder zwischen den beiden Massen B durch die Belastung mit der Streckenlast A, so stehen zunächst die Kräfte A mit den Trägheitskräften der Masse B im Gleichgewicht. Durch die Abnahme der Beschleunigung der beiden Massen lagern sich die Kräfte auf die nächste Feder um. Die Geschwindigkeit dieser Umlagerung ist geprägt von der Entlastung des Reibelements, das mehr Zeit in Anspruch nehmen wird als bei einem reinem Masse/Feder-Modell.

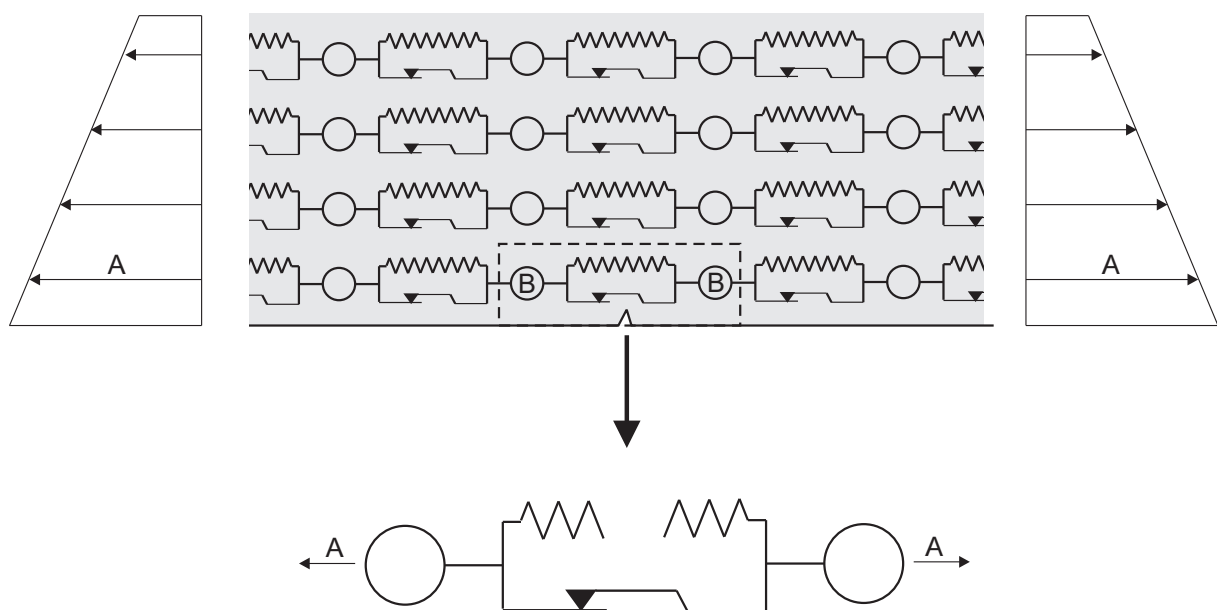


Abbildung 4.7: Masse/Feder/Reibungs-Modell Curbach [37]

Es bleibt noch die Höhe der maximalen Rissgeschwindigkeit zu klären. Ross [117] sieht bei Auswertung verschiedener Versuchsergebnisse eine Ab-

hängigkeit von der Dehnrade und definiert eine Ausgleichsgerade zu Bestimmung der Rissgeschwindigkeit (siehe Abbildung 4.8).

Vergleicht man diese Ausgleichsgerade mit Versuchsergebnissen anderer Autoren, so ist diese Ausgleichsgerade so nicht haltbar. Es ist aber davon auszugehen, dass die von Curbach definierte Grenze von  $v_{crack} = 500$  bis  $700$  m/sec realistisch ist. Dies konnte auch durch Auswertung von derzeit am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe (TH) von Steiner [134] durchgeführten Untersuchungen bei Kontaktdetonationen bestätigt werden. Die Auswertung von Hochgeschwindigkeitsaufnahmen dieser Versuche ergaben Rissgeschwindigkeiten in einer Größenordnung von  $v_{crack} = 280$  bis  $320$  m/sec.

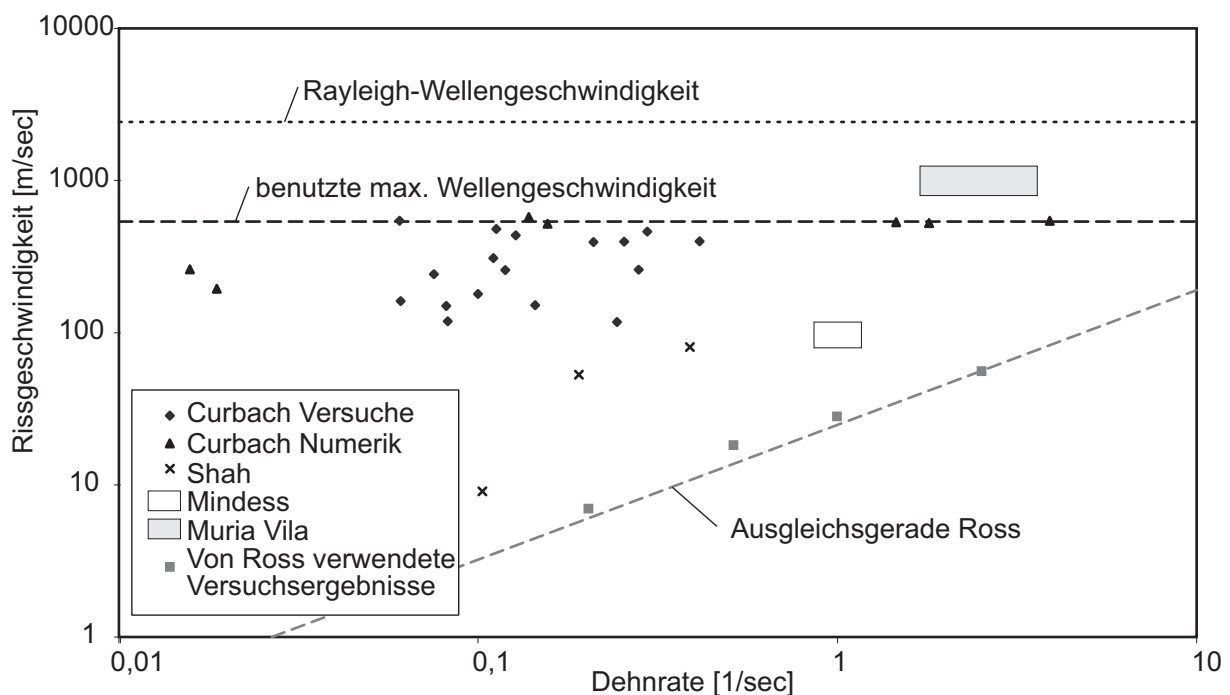


Abbildung 4.8: Versuchsergebnisse zur Rissgeschwindigkeit im Beton von verschiedenen Autoren

Für die stoffgesetzliche Beschreibung des Risswachstums ist wesentlich, dass die hier diskutierte maximale Rissgeschwindigkeit nicht der auftretenden Rissgeschwindigkeit entsprechen muss, die natürlich kleiner sein kann.

### 4.1.5 Anforderungen an die Formulierung eines Simulationsmodells für Beton

Folgende Anteile sind in einem Stoffgesetz für Beton unter hochdynamischer Beanspruchung zu berücksichtigen:

- Die Mikrorissbildung wird am besten über Stoffgesetze (z.B. Schädigung, siehe Lemaître [84]) abgebildet, da hier noch keine auf Mesoebene sichtbaren Risse vorliegen. Alternativ lassen sich verschmierte Rissmodelle für diesen Vorgang nutzen. Der Einfluss dieses nichtlinearen Effekts ist allerdings vor dem Erreichen der maximalen Festigkeit gering.
- Der Vorgang der Rissüberbrückung (Softening) kann durch kohäsive Ansätze berechnet werden (siehe Shah [127]). Alternativ kann ein Schädigungstoffgesetz für diesen Bereich verwendet werden.
- Die Berechnung des zugspannungsfreien Risses über ein Schädigungstoffgesetz erfordert die Implementierung eines anisotropen Schädigungsansatzes. Neben den verschmierten Rissen ist die Anwendung diskreter Risse z.B. über X-FEMs oder das EFG-Verfahren möglich (siehe Kapitel 3.3.3 und Kapitel 2.5.2).
- Weiter ist in einem Stoffgesetz für die hochdynamische Beanspruchung von Beton die Festigkeitssteigerung bei hohen Dehnraten zu berücksichtigen.
- Neben der Rissentstehung kann das Versagen der Mikroporen unter hohen hydrostatischen Beanspruchungen nicht vernachlässigt werden. Hier ist insbesondere die Frage zu klären, wie eine Entlastung von Bereichen stattfindet, deren Mikroporen geschädigt bzw. zerstört sind.

## 4.2 Stoffgesetze für Beton

Die numerische Beschreibung von Beton kann mit verschiedenen Modellen durchgeführt werden. Während Kontinuumsmodelle von einem zusammenhängendem Gebiet ausgehen, in dem die Eigenschaften des Betons auf der Ebene des Stoffgesetzes – also in der Beziehung zwischen Dehnungen und Spannungen berücksichtigt werden, beschreiben diskrete Modelle den Beton

durch z.B. diskrete Balken oder Massepunkte, zwischen denen Verschiebungen und Rotationen beschrieben werden. In dieser Arbeit wird ein gemischtes Modell verwendet, das die diskreten Risse über das elementfreie Galerkin-Verfahren und die nichtlinearen Effekte im Riss über eine Bruchprozesszone implementiert. Einige Beispiele für die unterschiedlichen Formulierungen sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Tabelle 4.2: Beispiele verschiedener Materialmodelle für Beton

Kontinuumsmodelle	Gemischte Modelle	Diskrete Modelle
Plastizitätstheorie, Schädigungsmodelle, verschmierte Risse	Fictitious crack Modelle	Partikelmodelle (SPH), Microplane model

## 4.2.1 Theoretische Ansätze

### Grundlagen

Ein Stoffgesetz muss folgende kontinuumsmechanische Erhaltungsgleichungen erfüllen:

- Massenerhaltung
- Bewegungsgleichung (zweites Newtonsches Gesetz bzw. Impulserhaltung)
- die beiden Hauptsätze der Thermodynamik

In der Kontinuumsmechanik werden die physikalisch vorhandenen diskreten Strukturen (mikrostrukturelles Modellniveau) durch Mittelung der Materialeigenschaften in ein hypothetisches, makroskopisches, d.h. phänomenologisches Modell überführt. Einführungen in diese Themen finden sich in den Standardwerken der Kontinuumsmechanik (z.B. Betten [23], Altenbach [6], Parisch [108]).

Ziel eines Stoffgesetzes ist es nun, ein Material durch ein mechanisches Modell so zu beschreiben, dass es in einer numerischen Simulation verwendet werden kann, indem es folgende Form besitzt

$$\sigma = f(\epsilon, \dots) \quad (4.4)$$

Diese Beziehung kann in das Gleichgewicht in der schwachen Form (Gleichung 2.6) eingesetzt werden.

### Elastizitätstheorie

Grundlage für die Elastizitätstheorie bildet das Hooksche Gesetz, das Hooke in seiner Arbeit „ut tensio sic vis“ [62] 1678 vorstellt. Das Gesetz beruht auf der Beobachtung, dass Verformungen proportional zur eingeleiteten Kraft sind. Obwohl der Ansatz der Elastizitätstheorie sehr einfach ist, gilt dieser in gewissen Grenzen für die meisten Werkstoffe. Da die Elastizitätstheorie die Grundlage für die im Weiteren verwendeten Schädigungs- und Plastizitätstheorien bildet, wird diese hier für isotrope Stoffe dargestellt.

Die Spannung lässt sich bestimmen zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.5)$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy})^T \\ \boldsymbol{\epsilon} &= (\epsilon_{xx} \ \epsilon_{yy} \ \epsilon_{xy})^T \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Dehnungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}$  sind dabei jeweils ein Tensor zweiter Ordnung während der Elastizitätstensor  $\mathbf{E}$  von vierter Ordnung ist. Durch die Symmetriebedingungen, die in einem isotropen Material herrschen, reduziert sich die Anzahl der zu findenden Parameter im Tensor  $\mathbf{E}$  von 81 auf 21. Da der Werkstoff invariant bezüglich einer Drehung des Koordinatensystems ist, lässt sich der Elastizitätstensor mit zwei unabhängigen Konstanten, den Lamé-Konstanten  $\Lambda$  und  $\mu$  und den Einheitstensoren zweiter ( $\mathbf{1}$ ) und vierter ( $\mathbf{I}$ ) Stufe beschreiben (vgl. Betten [22])

$$\mathbf{E} = \Lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (4.7)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu = G &= \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{3KE}{9K - E} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für den ebenen Spannungszustand lässt sich der Elastizitätstensor weiter vereinfachen und als Matrix darstellen (siehe Bathe [11])

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$



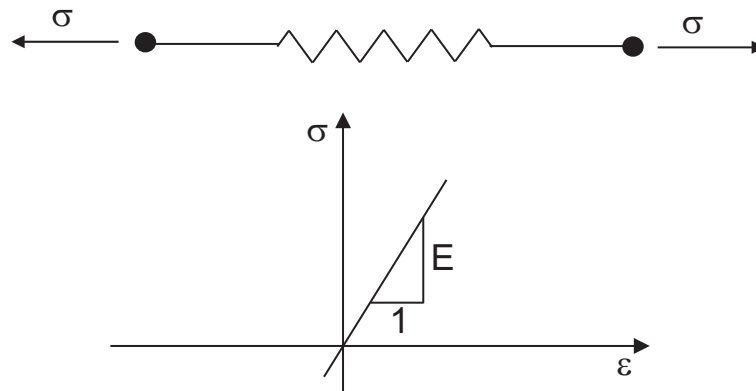


Abbildung 4.9: Elastizitätstheorie: rheologisches Modell

Das rheologische Modell für die Elastizität ist eine Feder mit der Steifigkeit  $E$  (siehe Abbildung 4.9).

Bei Stoffgesetzen zur Berechnung von Beton unter hochdynamischen Beanspruchungen werden die Dehnungen oftmals in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil aufgeteilt

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = K\epsilon_v + 2G\epsilon_{dev} \quad (4.10)$$

mit dem Kompressionsmodul  $K$

$$K = \frac{\Delta p}{\Delta V/V} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.11)$$

Die hydrostatische (volumetrische) Dehnung  $\epsilon_v$  kann unter der Voraussetzung kleiner Verzerrungen bestimmt werden zu

$$\epsilon_v = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = 1 - \frac{V}{V_0} \quad (4.12)$$

Die deviatorischen Dehnungen bestimmt sich damit zu

$$\epsilon_{dev} = \boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_v \quad (4.13)$$

Die hydrostatische und die deviatorischen Spannungen können analog bestimmt werden.

### Plastizitätstheorie

Die Elastizitätstheorie vernachlässigt alle nichtlinearen Effekte. Wird ein plastisches Stoffgesetz verwendet, treten bei Überschreitung einer bestimmten

Grenze bleibende Verformungen (Fließen) auf, die z.B. auf Gefügeänderungen zurückgehen. Diese irreversiblen Deformationen führen dazu, dass der spannungsfreie Endzustand nicht mehr mit der Ausgangskonfiguration übereinstimmt.

In der klassischen Plastizitätstheorie wird davon ausgegangen, dass die Entlastung linear parallel zur Anfangssteifigkeit erfolgt. Unabhängig davon können verschiedene Ansätze zur Verfestigung verwendet werden (z.B. lineare Verfestigung siehe Abbildung 4.10).

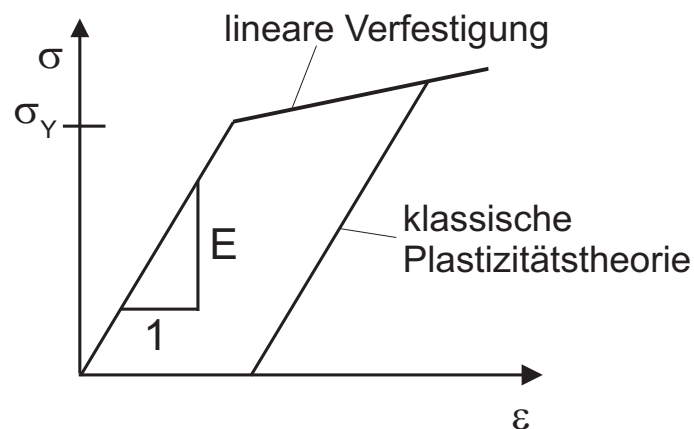


Abbildung 4.10: Lineare Verfestigung

Rheologisch setzt sich ein plastisches Stoffgesetz aus einer Feder (entsprechend der Elastizitätstheorie – Abbildung 4.9) und einem Reibglied (verantwortlich für die plastische Verformung – siehe Abbildung 4.11) zusammen. Das gesamte rheologische System ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Eine Verfestigung (falls vorhanden) wird über ein Reibglied definiert, dessen Grenzspannung von der Verformung abhängig ist.

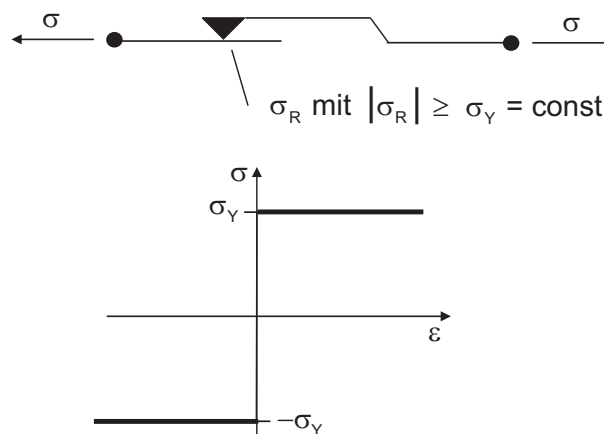


Abbildung 4.11: Rheologisches Modell der Coulomb-Reibung mit konstanter Haftgrenze

**Elasto-Plastizität (ideal)**

Die ideale Elasto-Plastizität geht davon aus, dass bis zum Fließen ein linear-elastisches Stoffgesetz vorliegt und keine Verfestigung auftritt.

Die Gesamtdehnung  $\epsilon$  wird aufgeteilt in einen elastischen Anteil  $\epsilon_e$  (Feder) und einen plastischen Anteil  $\epsilon_p$  (Reibglied).

$$\epsilon = \epsilon_e + \epsilon_p \quad (4.14)$$

Aus der Gleichgewichtsbetrachtung an der Feder erhält man

$$\sigma = E\epsilon_e = E(\epsilon - \epsilon_p) \quad (4.15)$$

Aus dem Gleichgewicht am Reibglied erhält man

$$\sigma = \sigma_R \quad (4.16)$$

Damit gilt

$$|\sigma| = |\sigma_R| \begin{cases} < \sigma_y & \rightarrow \text{elastisches Verhalten} \\ = \sigma_y & \rightarrow \text{plastisches Verhalten} \\ > \sigma_y & \rightarrow \text{unzulässig} \end{cases} \quad (4.17)$$

Die Definition der Fließbedingung erfolgt mit

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \quad (4.18)$$

Damit ist ein konvexer elastischer Bereich definiert

$$E_\sigma \{ \sigma \in \mathbb{R} \mid f(\sigma) \leq 0 \} \quad (4.19)$$

Unter Annahme einer assoziierten Plastizität ergibt sich mit dem skalaren Größenfaktor  $\lambda$  für die Dehnung  $\epsilon_p$

$$\epsilon_p = \lambda \frac{\partial f(\sigma, q)}{\partial \sigma} \quad (4.20)$$

Der skalare Größenfaktor  $\dot{\lambda}$  gibt Auskunft, ob der Werkstoff plastifiziert ( $\dot{\lambda} > 0$ ) oder nicht ( $\dot{\lambda} = 0$ ). Über die Kuhn-Tucker-Bedingung ist  $\lambda$  an die Grenzfunktion  $f(\sigma, \mathbf{q})$  gekoppelt

$$\dot{\lambda} \geq 0, f(\sigma, \mathbf{q}) \leq 0, \dot{\lambda} f(\sigma, \mathbf{q}) = 0 \quad (4.21)$$

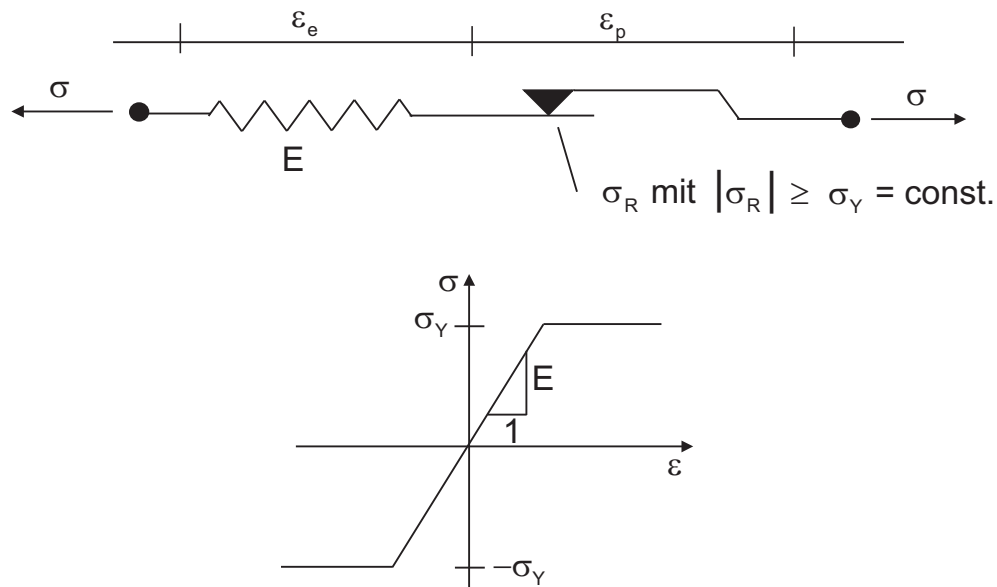


Abbildung 4.12: Rheologisches Modell der Elasto-Plastizität

### Schädigung

Während Plastizitätsansätze nur eingeschränkt für Beton verwendbar sind, ist die Beschreibung des Verhaltens von Beton mit einem Schädigungsansatz oder mit einem kombinierten Plastizitäts-Schädigungsansatz von verschiedenen Autoren erfolgreich angewendet worden (z.B. Schmidt-Hurtienne [123]). Im Folgenden wird dieser Ansatz vorgestellt.

**Isotrope Schädigung** Die Idee eines Schädigungsansatzes geht auf Kachanov [70] zurück, der erstmals eine Variable als Maß für die Schädigung einführte. Die Schädigung  $D$  wird ausgedrückt als ein Verhältnis der Defektfläche  $A_D$  zur Gesamtfläche  $A$ . Die Defektfläche ist der Flächenanteil, der aus Poren und Mikrorissen besteht und die Steifigkeit Null besitzt.

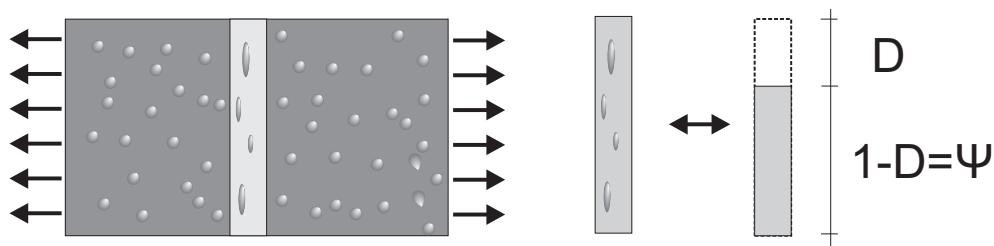


Abbildung 4.13: Definition der Schädigung – Belastete Probe, herausgeschnittener Anteil, Aufteilung in ungeschädigten und geschädigten Anteil

Anschaulich bedeutet dies, dass die Gesamtfläche auf den ungeschädigten

Querschnitt reduziert wird (siehe Abbildung 4.13). Die skalare Schädigung berechnet sich zu

$$D = \frac{A_D}{A} \quad \text{mit} \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (4.22)$$

Die Steifigkeit des Gesamtquerschnittes wird mit dem Schädigungsoperator  $\psi = 1 - D$  reduziert. Die Spannungen lassen sich im isotropen Fall berechnen zu

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \psi \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.23)$$

Die Bestimmung der Schädigungsvariable  $D$  kann zum Beispiel phänomenologisch durchgeführt werden (siehe Kapitel 4.2.2).

Falls die Schädigung  $D$  den Wert 1,0 erreicht, wird die Steifigkeit des Elements Null. Dies kann zu numerischen Problemen führen. Eine Lösungsmöglichkeit ist das Begrenzen der Schädigung auf einen Wert kleiner als 1,0.

**Anisotrope Schädigung** Während bisher die Schädigung isotrop betrachtet wurde, werden im Folgenden anisotrope Schädigungsansätze diskutiert. Diese sind insbesondere bei der Verwendung eines Schädigungsansatzes für Beton unter einer Zugbelastung erforderlich.

Mark [88] definiert die räumliche Verteilung des E-Moduls in Abhängigkeit der Schädigung mit den Richtungsvektoren  $\mathbf{e}$

$$E(\mathbf{e}) = (1 - D(\mathbf{e})) E_0 \quad (4.24)$$

Die Schädigung definiert er dabei in Richtung der Hauptdehnungen. Durch die Definition des Schädigungsoperators

$$\psi(\mathbf{e}) = 1 - D(\mathbf{e}) \quad (4.25)$$

kann er die Verteilung des Schädigungsoperators für den isotropen Fall ( $\psi = \psi(\mathbf{e})$ ) als Einheitskugel darstellen mit

$$\psi^2 - 1^2 = 0 \quad (4.26)$$

Bei einer Definition für anisotrope Werkstoffe entsteht aus der Kugel ein Ellipsoid mit folgender Gleichung

$$[\mathbf{B}\psi]^2 - 1^2 = 0 \quad (4.27)$$

Die anisotrope Werkstoffmatrix  $\mathbf{D}_\xi$  des geschädigten Materials wird in Richtung der Hauptspannungsrichtungen definiert und mit Hilfe der Drehmatrix  $\mathbf{N}$  in das globale Koordinatensystem überführt

$$\mathbf{D} = \mathbf{N}^T \mathbf{D}_\xi \mathbf{N} \quad (4.28)$$

Dies führt zu einer Matrix mit 36 nichttrivialen Komponenten. Unklar bleibt das Vorgehen bei einer sich ändernden Hauptrichtung. Mark [88] wendet die anisotrope Schädigung in einem zweidimensionalen Beispiel an.

Schmidt-Hurtienne [123] definiert die Schädigung über einen Schädigungsoperator  $\psi$  als (3,3)-Matrix. Mit den positiven Hauptdehnungen  $\mathbf{d}^{(\alpha)}$  bestimmt er die bisherige Schädigung in Richtung der aktuellen Hauptdehnungen  $\alpha$

$${}^t D_t^{(\alpha)} = 1 - \mathbf{d}^{(\alpha)} \cdot \psi \cdot \psi \cdot \mathbf{d}^{(\alpha)} \quad (4.29)$$

Unter der Annahme, dass eine neue Schädigung nur in Richtung der Hauptdehnung auftritt, wird die neue Schädigung im Hauptdehnungskordinatensystem berechnet.

### Kombination Plastizität und Schädigung

Zur Beschreibung des Materialverhaltens von Beton eignet sich eine Kombination aus Plastizitäts- und Schädigungsgesetz. Mit dem Schädigungsansatz wird die Entfestigung des Beton durch die Entstehung von Rissen berücksichtigt. Der Plastizitätsansatz ist erforderlich, damit Energie dissipiert wird und bleibende Verformungen nach einer Belastung abgebildet werden können. Bei einem Schädigungsansatz ohne Plastizitätsanteil wird die Steifigkeit bei Überschreitung einer bestimmten Beanspruchung verringert; die bleibenden Verformungen zeigen allerdings in die falsche Richtung.

Grundlage für die weitere Betrachtung soll ein nichtlineares anisotropes Stoffgesetz der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_d \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.30)$$

sein, deren einzelnen Dehnungs- und Spannungsanteile in Abbildung 4.14 dargestellt sind. Wegen einer nicht konstanten Elastizitätsmatrix  $\mathbf{E}_d$  ist die Spannungsrate gegeben als

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_d \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \dot{\mathbf{E}}_d \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \dot{\mathbf{E}}_p \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.31)$$

Die Dehnraten werden aufgespalten in einen elastischen und einen zusätzlichen Anteil, der aus der Schädigung resultiert

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_d \quad (4.32)$$

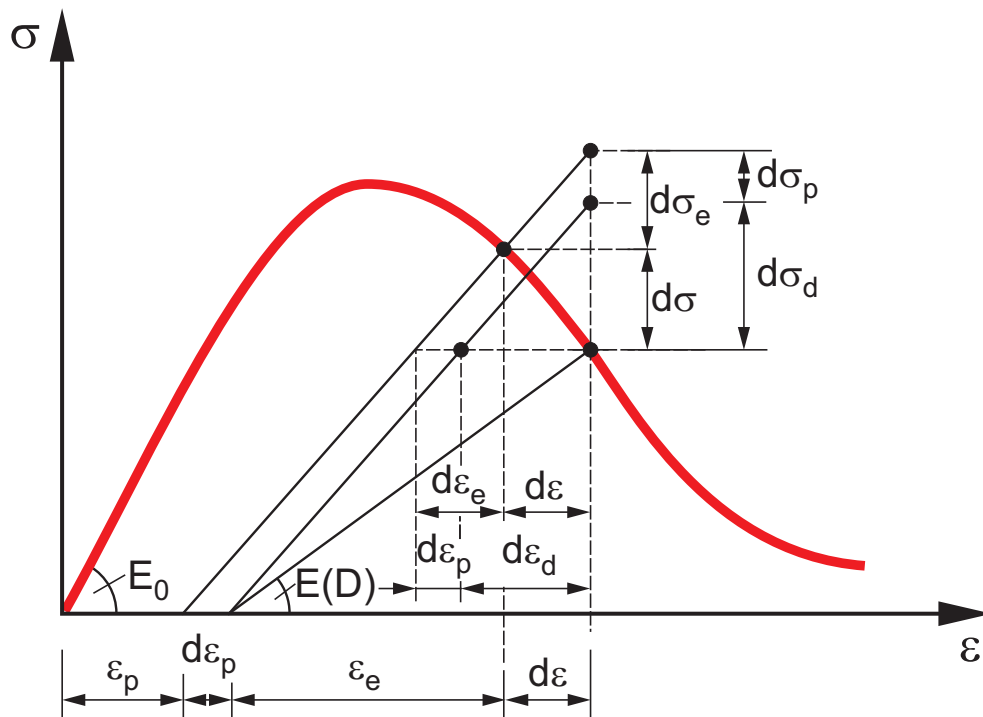


Abbildung 4.14: Anteile der Dehnung bei Verwendung des Schädigungs-Plastizitäts-Stoffgesetzes nach Schmidt-Hurtienne [123]

Die Spannungsrate ergibt sich aus den elastischen Dehnraten zu

$$\dot{\sigma} = \mathbf{E}_d \cdot \dot{\epsilon}_e = \mathbf{E}_d \cdot (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_d) \quad (4.33)$$

Aus den Gleichungen 4.31 und 4.33 ergibt sich

$$\dot{\mathbf{E}}_d \cdot \epsilon = -\mathbf{E}_d \cdot \dot{\epsilon}_d \quad (4.34)$$

$$\epsilon = -\dot{\mathbf{E}}_d^{-1} \cdot \mathbf{E}_d \cdot \dot{\epsilon}_d \quad (4.35)$$

Bei der Annahme eines Fließfaktors  $\lambda$  in der Größe der maximalen Schädigung  $D_{max}^\alpha$  (siehe Kapitel 4.2.1) ergibt sich

$$\dot{\mathbf{E}}_d = -\dot{\lambda} \mathbf{E} \quad (4.36)$$

Für ein anisotropes Schädigungsstoffgesetz muss der Stofftensor in Abhängigkeit des Schädigungstensors  $\mathbf{D}$  bzw. des Schädigungsoperators  $\psi$  gebracht werden

$$\mathbf{E}_d = \psi \cdot \mathbf{E} \quad (4.37)$$

Mit Gleichung 4.34 ergibt sich dann

$$\dot{\epsilon} = -\psi^{-1} \cdot \epsilon \quad (4.38)$$

Im isotropen Fall kann der Schädigungsoperator  $\psi$  geschrieben werden als skalarer Wert  $1 - D$ , wodurch sich Gleichung 4.38 schreiben lässt als

$$\dot{\epsilon}_d = \frac{1}{1 - D} \cdot \dot{\epsilon} \quad (4.39)$$

## 4.2.2 Schädigungsgesetz für Beton

Die Schädigungsmechanik geht im Gegensatz zur Bruchmechanik davon aus, dass Risse nicht nur aus Makrorissen bestehen, sondern dass nach Veränderungen in der Mikrostruktur aus Mikrorissen mit zunehmender Belastung Makrorisse entstehen. Dadurch nimmt die Steifigkeit des Werkstoffes in einem lokalen Bereich ab. Die innere Zerstörung wird phänomenologisch erfasst. Eine Kombination aus einem Schädigungs- und einem Plastizitätsansatz ergibt ein realistisches Stoffgesetz für Beton. Für die Zugbeanspruchung sollte das Stoffgesetz anisotrop definiert werden.

Im Schädigungsgesetz (Kapitel 4.2.1) bleibt noch die Bestimmung des Schädigungsparameters  $D$  zu klären. Dieser wird aus dem Spannungs- bzw. Dehnungszustand über Evolutionsgleichungen gewonnen, die zusätzlich noch die zeitliche Belastungsgeschichte enthalten können. Im Folgenden werden dazu phänomenologische Schädigungsmodelle vorgestellt, die z.B. von Ortiz [104] oder Simu [129] entwickelt wurden.

Der Ansatz von Schmidt-Hurtienne [123], der im Folgenden beschrieben wird, geht von einer Schädigungsfläche nach Hsieh-Ting-Chen [63] (Kapitel 4.2.3) aus. Alle Spannungspunkte, die innerhalb der Schädigungsfläche liegen, sind ungeschädigt. Die Schädigungsfläche ist allerdings über die äquivalente Schädigungsdehnung  $\kappa_d$  abhängig von der schon vorhandenen Schädigung. Dies entspricht einer Aufweitung der Schädigungsfläche im Dehnungsraum bei zunehmender Schädigung.

Die äquivalente Schädigungsdehnung  $\kappa_d$  bestimmt Schmidt-Hurtienne über die Schädigungsfläche folgendermaßen

$$\kappa_d = \frac{c_2 \sqrt{J_2} + c_3 \epsilon_{max}^{(\alpha)} + c_4 I_1}{2} + \sqrt{\frac{c_2 \sqrt{J_2} + c_3 \epsilon_{max}^{(\alpha)} + c_4 I_1}{2} + c_1 J_2} \quad (4.40)$$

Zur Berücksichtigung der Anisotropie kann die positive Spektral-Projektion nach Simo [129] verwendet werden.

Die Abhängigkeit des Schädigungsparameters  $D$  von der äquivalenten Schädigungsdehnung  $\kappa_d$  wird über eine stochastische Verteilung nach Wei-



bull angenommen und ergibt sich nach Bachmann [9] zu

$$D(\kappa_d) = 1 - e^{-\left(\frac{\kappa_d - e_0}{e_d}\right)^{g_d}} \quad \text{für } \kappa_d \geq e_0 \quad (4.41)$$

$$D(\kappa_d) = 0 \quad \text{für } \kappa_d < e_0$$

mit dem Dehnungsschwellwert  $e_0 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ , dem Modalwert der Weibull-Verteilung  $e_d = 2,2 \cdot 10^{-4}$  und dem Weibull-Exponent  $g_d = 1,5$ .

Dieses Vorgehen zeigt eine gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen bei einer Druckbeanspruchung von Beton (isotropes Verhalten). Die von Pröchtel [111] mit dem hier entwickelten Programmcode berechnete Druckprobe bildet den Spannungs-Dehnungs-Verlauf der Versuche von Zheng [150] sehr gut ab (siehe Abbildung 4.15).

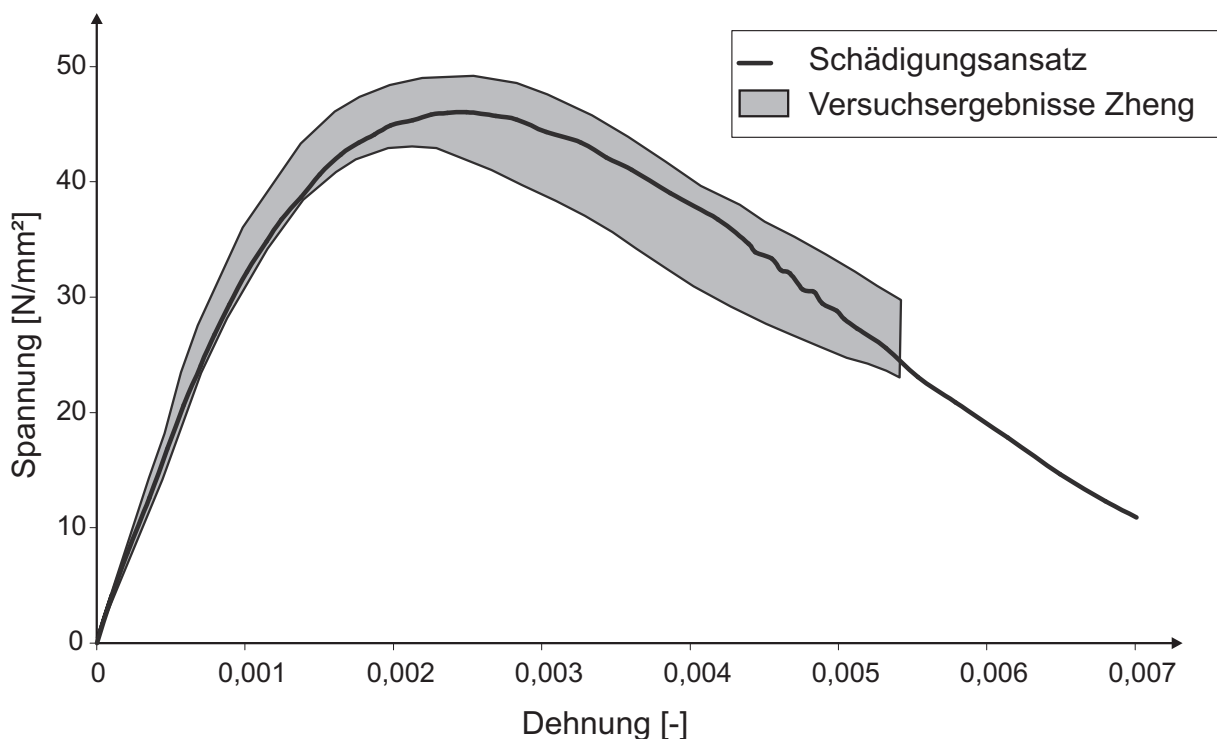


Abbildung 4.15: Vergleich der numerischen Ergebnisse mit dem Druckversuch nach Zheng [150]

Das von Schmidt-Hurtienne vorgeschlagene Verfahren ist allerdings von ihm selbst nur für explizite Zeitintegration entwickelt und getestet worden. Bei einer expliziten Zeitintegration müssen keine konsistenten Tangentensteifigkeiten bestimmt werden. Die Umsetzung des anisotropen Schädigungsansatzes von Schmidt-Hurtienne in einem impliziten Code gelingt nur dann, wenn eine konsistente Steifigkeitsmatrix erstellt wird. Da dies bisher nicht erfolg-

reich durchgeführt werden konnte, sind keine weiteren Berechnungen mit dem Schädigungsansatz vorgenommen worden.

### 4.2.3 Versagensfläche

Die in Abbildung 4.1 dargestellten Kriterien für die verschiedenen Versagensarten werden zur Berechnung in Form einer Versagensfläche dargestellt. Für die Form dieser Versagensfläche existieren verschiedene Ansätze, einige werden im Folgenden beschrieben. Eine ausführliche Darstellung der Versagensflächen findet sich z.B. in Chen [33].

Ausgehend von den Erfordernissen der möglichst genauen Beschreibung des Materials ist vor allem die Frage nach der Konvexität und der Glattheit der jeweiligen Flächen von Interesse. Glattheit meint hier, dass die Flächenfunktion der Versagensfläche partiell unendlich oft ableitbar ist. Während die Konvexität mechanisch erforderlich ist, führen nicht glatte Flächen zu nicht glatten Systemen (siehe Kapitel 2.3.1). Damit ergeben sich gewisse numerische Probleme, die zu einer schlechten oder fehlenden Konvergenz führen können.

Die Versagensfläche wird oft mit den drei Invarianten  $I_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  dargestellt. Während  $I_1$  den hydrostatischen Spannungszustand repräsentiert, werden  $J_2$  und  $J_3$  aus dem Spannungsdeviator gebildet. Alternativ kann die Versagensfläche im Raum über die Haigh-Westergaard-Koordinaten  $\xi$ ,  $\rho$  und  $\theta$  bzw.  $\sigma_{oct}$ ,  $\tau_{oct}$  und  $\theta$  beschrieben werden. Dabei gilt folgende Beziehung

$$\xi = \sqrt{3\sigma_{oct}} \quad \text{und} \quad \rho = \sqrt{3\tau_{oct}} \quad (4.42)$$

Experimentelle Untersuchungen verschiedener Autoren ergeben eine Form der Versagensfläche, die einem Kelch ähnelt (siehe Abbildung 4.16). Während im Zugbereich – also in Richtung der positiven Hauptspannungen – ein kleiner Bereich von Spannungen zulässig ist, öffnet sich die Versagensfläche im negativen Hauptspannungsbereich. Schneidet man die Versagensfläche senkrecht zur Äquisektrix ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ) entsteht die so genannte Deviatorebene. Man erkennt in diesem Schnitt (siehe Abbildung 4.17), dass die Form des Kelches sich mit zunehmenden hydrostatischen Spannungen von einem Dreieck in einen Kreis verändert. Diese konvex gekrümmten Meridiane führen zu einer zunehmenden Schubtragfähigkeit bei steigendem hydrostatischen Druck.

Die Versuchsergebnisse für biaxiale Beanspruchung von Beton von Kupfer [78] können in einen Schnitt in der  $\sigma_1$ - $\sigma_3$ -Ebene eingetragen werden (siehe Abbildung 4.18). Diese zeigen die relativ niedrige einaxiale Zugfestigkeit und die relativ hohe biaxiale Druckfestigkeit.

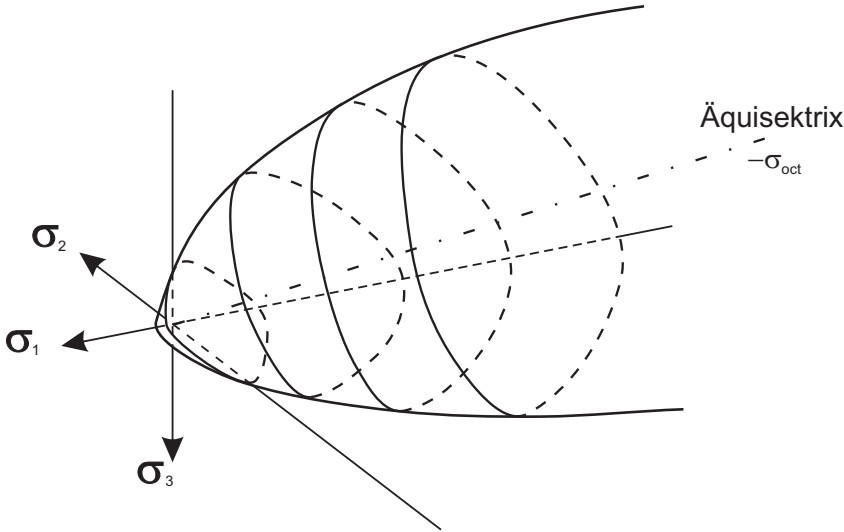


Abbildung 4.16: Dreidimensionale Versagensfläche von Beton

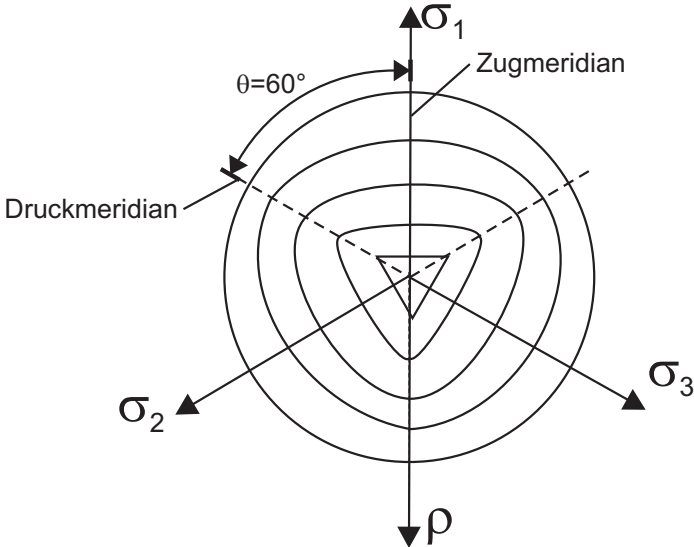


Abbildung 4.17: Schnitt in Deviatorebene

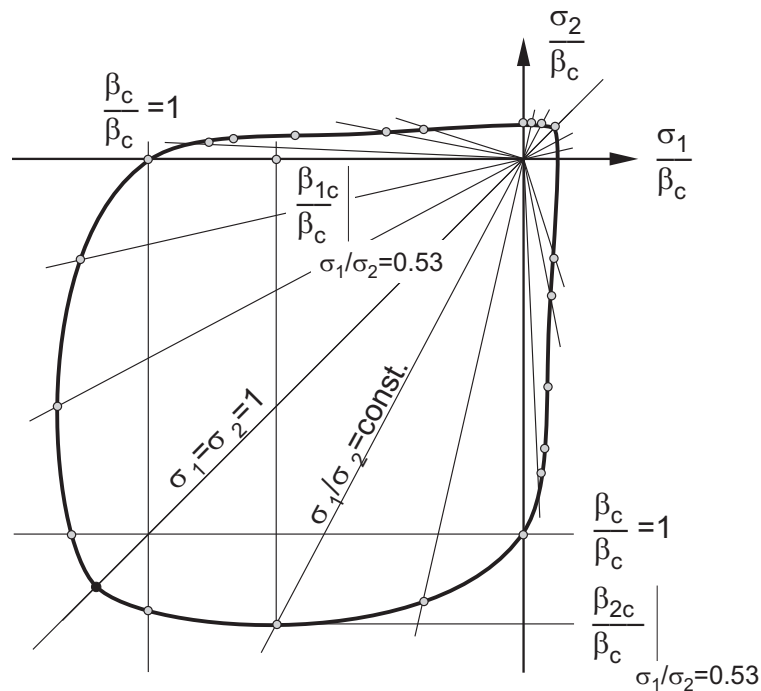


Abbildung 4.18: Versagensfläche für Beton unter zweidimensionaler Beanspruchung nach Kupfer [78]

Die Versagensfläche von Beton in der  $\xi$ - $\rho$ -Ebene (Meridianebene) ist in Abbildung 4.1 dargestellt. In der Meridianebene wird das bei niedrigem Druck vorhandene anisotrope Verhalten des Werkstoffes Beton sichtbar. Die Meridiane starten alle am Punkt des hydrostatischen Zugversagens und sind in Druckrichtung offen.

Verschiedene Autoren diskutieren die Versagensfläche bei hohem hydrostatischem Druck. Während z.B. Ockert [102] über einer Grenze von  $17f_c$  von einer nicht weiter steigenden Schubtragfähigkeit ausgeht und das Versagen durch die dann eintretende Zerstörung der Poren in der Versagensfläche vernachlässigt, versuchen andere Autoren wie z.B. Sandler [122] durch die Verwendung eines so genannten Kappenmodells (siehe Abbildung 4.19) auch das Versagen der Poren mit in die Versagensfläche aufzunehmen. Dies wird durch die Definition einer Kappe, die als Fließfläche fungiert, erreicht. Eine Versagensfläche für ein Kappenmodell sollte ebenfalls den oben geschilderten Randbedingungen genügen. Während die Konvexität im Allgemeinen gegeben ist, muss die Fläche, um die Glattheit zu erreichen, entsprechend angepasst werden. Dies kann z.B. über einen gleitenden Übergang zur Kappe („smooth-cap“) erreicht werden.

Versuche von Herrmann [58] zeigen eine Ertragbarkeit von relativ hohen deviatorischen Spannungen bei hohem volumetrischen Druck. Die daraus resultierende Schlussfolgerung, dass sich die Versagensfläche bei einem hohen

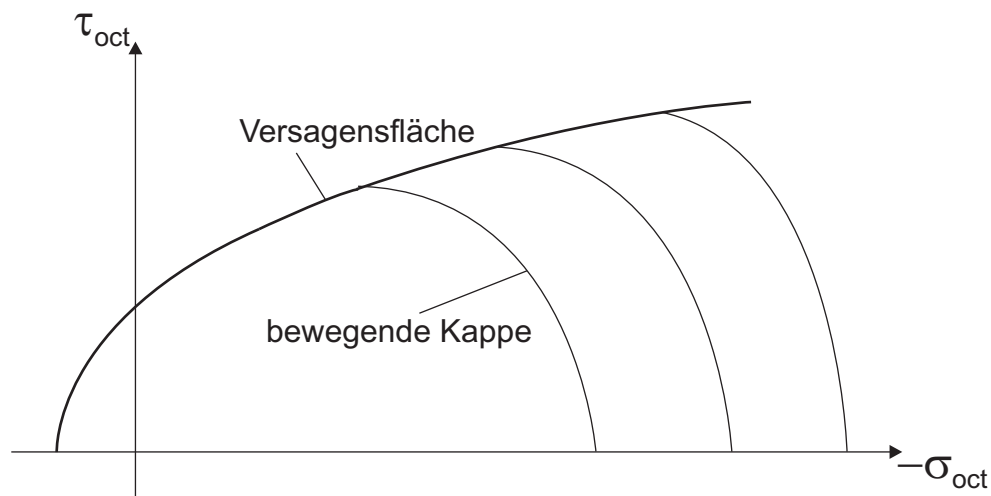


Abbildung 4.19: Versagensfläche in Meridianebene, Kappenmodell

Druck aufweitet, geht von einer Betrachtung zum Zeitpunkt der sehr kurzzeitigen Belastung aus. Die Probe scheint den Druck kurzzeitig zu ertragen. Es ist allerdings davon auszugehen, dass durch den hohen Druck das Porengefüge des Betons zerstört ist und deswegen von einem Versagen des Betons auszugehen ist. Die hohe Druckbeanspruchung verhindert allerdings während der Druckbelastung ein Auseinanderfallen des vorliegenden Granulats.

Im Folgenden werden verschiedene Versagensflächen dargestellt. Die Versagensflächen werden dabei nach der Anzahl der Parameter und damit nach der Komplexität der Beschreibung unterschieden.

## Ein-Parameter-Modelle

### Rankine / Saint-Venant

Das Rankine-Kriterium ist im Hauptspannungsraum definiert. Es geht auf den schottischen Physiker William John Macquorn Rankine (1820-1872) zurück. Ein Versagen tritt ein, falls eine der drei Hauptspannungen die Zugfestigkeit überschreitet. Im Hauptspannungsraum wird die Versagensfläche von drei Ebenen aufgespannt. Im Meridianschnitt erkennt man die ungenügende Anpassung der Versagensfläche bei Schubbeanspruchungen. Im Deviator-Schnitt wird ein Dreieck aufgespannt. Das Rankine-Kriterium findet im Allgemeinen nur bei der Beschreibung des Zugversagens von Beton als so genanntes „tension-cut-off“-Kriterium Verwendung. Meschke [91] verwendet das Rankine-Kriterium zum Beispiel mit einem diskreten Rissansatz.

Das Saint-Venant-Kriterium ist analog zum Rankine-Kriterium allerdings im Hauptdehnungsraum definiert.

### Von Mises

Die Versagensfläche nach von Mises ist zum Beispiel zur Beschreibung von Stahl sehr gebräuchlich und findet Verwendung bei der Plastizitätstheorie (siehe Kapitel 4.2.1). Sie basiert auf der Grundlage der Gestaltungsänderungsarbeit. In Richtung der Hauptspannungen kann das Kriterium ausgedrückt werden als

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2Y^2 \quad (4.43)$$

mit

$$Y = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{9}{2}\tau_{oct}} \quad (4.44)$$

Im Spannungsraum stellt diese Versagensfläche einen Zylinder dar, der in der Deviatorebene als Kreis erscheint. Die Versagensfläche ist für die Beschreibung von Beton nur in hohen Druckbereichen sinnvoll, da keine Begrenzung der Zugbeanspruchung stattfindet.

### Zwei-Parameter-Modelle

#### Mohr-Coulomb

Das Versagenskriterium nach Mohr-Coulomb hat sich bei der Beschreibung von Böden durchgesetzt und findet teilweise auch Verwendung für Beton. Die Versagensfläche wird bestimmt mit

$$k\sigma_3 - \sigma_1 - f_c = 0 \quad \text{für} \quad \sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad (4.45)$$

Der Parameter  $k$  wird bei Beton zumeist zu  $k = 4$  gesetzt. Die Hauptspannung  $\sigma_2$  geht in die Betrachtung nicht ein. In der Deviatorebene erscheint die Versagensfläche als Sechseck, das entlang der Äquisektrix geschoben wird. In der Meridiendarstellung ist die Versagensfläche deshalb als Linie zu identifizieren.

#### Drucker-Prager

Das Drucker-Prager-Modell beschreibt im Spannungsraum einen Kegel, der in der Deviatorebene ein Kreis wird.

$$f(I_1, J_2) = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \beta = 0 \quad (4.46)$$

Da diese Versagensfläche gerade im Zugbereich stark vom Materialverhalten von Beton abweicht, wird sie zur Beschreibung von Beton oft mit einem Rankine-Kriterium kombiniert. Der Nachteil dieser Kombination ist die numerisch problematische fehlende Glattheit.

### Drei-Parameter-Modelle

#### Willam-Warnke 3P

Die Form des dreiparametrischen William-Warnke Ansatzes [148] für die Versagensfläche ist eine Anpassung der Kombination aus Drucker-Prager-Versagensfläche und Rankine-Kriterium. Im Deviatorschnitt erkennt man eine fehlende Anpassung der annähernd dreieckigen Form an einen Kreis. Die zunehmende Zähigkeit des Materials bei zunehmender Druckbeanspruchung wird deswegen nicht abgebildet.

Dieser Ansatz zeigt Schwächen für den ebenen Spannungszustand. Die von Kupfer [78] bestimmten Werte für die zweidimensionale Belastung von Beton werden damit nur bedingt genau wiedergegeben.

### Vier-Parameter-Modelle

#### Ottosen

Die dreiparametrischen Modelle haben den Nachteil einer linearen Annahme für das Verhalten in Meridianebene. Ottosen [106] verwendet abgerundete Meridiankuven, die Deviatorschnitte entwickeln sich von einem Dreieck zu einem Kreis.

$$f(I_1, J_2, \theta) = aJ_2 + \lambda\sqrt{J_2} + bI_1 - 1 = 0 \quad (4.47)$$

wobei  $\lambda$  eine Funktion von  $\cos 3\theta$  ist

$$\lambda = \begin{cases} k_1 \cos \left[ \frac{1}{3} \cos^{-1}(k_2 \cos 3\theta) \right] & \text{für } \cos 3\theta \geq 0 \\ k_1 \cos \left[ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cos^{-1}(-k_2 \cos 3\theta) \right] & \text{für } \cos 3\theta \leq 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Die vier Parameter  $a, b, k_1, k_2$  können mit folgenden Versuchsergebnissen bestimmt werden:

- Einaxiale Druckfestigkeit  $f_c$  ( $\theta = 60^\circ$ )
- Einaxiale Zugfestigkeit  $f_t = 0,1 f_c$  ( $\theta = 0^\circ$ )

- Zweiaxiale Druckfestigkeit ( $\theta = 0^\circ$ )  $f_{bc} = 1,16 f_c$
- Triaxialer Spannungszustand  $(\xi/f_c; \rho/f_c) = (-5; 4)$  auf dem Druckmeridian ( $\theta = 60^\circ$ )

Damit ergeben sich für die Parameter die folgenden Werte

$$a = 1,2759, b = 3,1962, k_1 = 11,7365, k_2 = 0,9801 \quad (4.49)$$

Diese Versagensfläche ist für viele Spannungszustände geeignet und wird zum Beispiel von Ockert [102] zur Berechnung von Beton unter hohen dynamischen Lasten benutzt.

### Hsieh-Ting-Chen

Hsieh [63] substituierte in der Beschreibung der Versagensfläche nach Ottosen die Variable  $\lambda$  durch den folgenden Ausdruck

$$\lambda = b \cos \theta + c \quad (4.50)$$

Die Versagensfläche lässt sich durch die Normierung nach  $f_c$  darstellen als

$$aJ_2 + b\sqrt{J_2} + c\sigma_1 + dl_1 - 1 = 0 \quad (4.51)$$

Der Vorteil dieser Versagensfläche ist die einfachere Anpassung an Versuchsergebnisse als bei Ottosen. Die vier Parameter  $a, b, c, d$  werden an den biaxialen Versuchen von Kupfer [78] und an den triaxialen Versuchen von Mills und Zimmermann [92] geeicht. Die Parameter werden durch die folgenden Versagenszustände bestimmt

- Einaxiale Druckfestigkeit  $f_c$
- Einaxiale Zugfestigkeit  $f_t = 0,1 f_c$
- Zweiaxiale Druckfestigkeit  $f_{bc} = 1,15 f_c$
- Spannungszustand  $(\sigma_{oct}/f_c; \tau_{oct}/f_c) = (-1,95; 1,6)$  auf dem Druckmeridian

Damit ergeben sich für die Parameter die folgenden Werte

$$a = 2,0108; b = 0,9714; c = 9,1412; d = 0,2312 \quad (4.52)$$

Da die Parameter durch die Normierung mit  $f_c$  bestimmt wurden, sind diese unabhängig von der Betonfestigkeit. Deswegen wird diese Versagensfläche auch bei dem hier vorgestellten Simulationsmodell verwendet.



## Fünf-Parameter-Modelle

### Willam-Warnke 5P

Diese Versagensfläche berücksichtigt durch den parabelförmigen Verlauf der Druck- und Zugmeridiane auch das Zermalmungsverhalten von Beton. Der Ansatz scheint eine einfache Möglichkeit zu sein, eine glatte Versagensfläche auch für den Zermalmungsbereich zu erstellen. Da das Zermalmungsversagen hier nicht über eine Versagensfläche berücksichtigt werden soll, wird auf diesen Ansatz nicht weiter eingegangen.

## 4.2.4 Bruchmechanik

Betrachtet man ein linear-elastisches Material, so fällt auf, dass ein Bauteil mit Querschnittsänderungen, Kerben und Rillen eine geringere Last aufnehmen kann als ein ungekerbtes Bauteil. Schon früh (1909) stellte Kosolov [76] in der von ihm begründeten Kerbspannungslehre fest, dass an diesen Stellen nach der klassischen linear-elastischen Materialtheorie sogar unendliche Spannungen auftreten müssen. Auch wenn fraglich ist, ob es an diesen Stellen gerechtfertigt ist, nichtlineare Effekte bis hin zum atomaren Größenmaßstab zu vernachlässigen, konnte Griffith 1921 [54] eine Formel für die Berechnung der Spannungen im Bereich eines Risses herleiten:

$$\sigma_x(x) = -\sigma_0 \quad \text{für } |x| < a \quad (4.53)$$

$$\sigma_x(x) = \sigma_0 \left( \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} - 1 \right) \quad \text{für } |x| > a$$

$$\sigma_y(x) = 0 \quad \text{für } |x| < a \quad (4.54)$$

$$\sigma_y(x) = \sigma_0 \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1}} \quad \text{für } |x| > a$$

Aus den Gleichungen wird ersichtlich, dass an den Stellen  $x = a$  sowohl die Spannungen in  $x$ - als auch in  $y$ -Richtung unendlich werden. Es liegt somit eine mathematische Singularität vor.

Irwin [65] führt für die Berechnung der Spannungen in der Nähe der Risspitzen so genannte Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ) ein. Er unterscheidet drei mögliche Rissöffnungsarten, die in Abbildung 4.21 dargestellt sind.

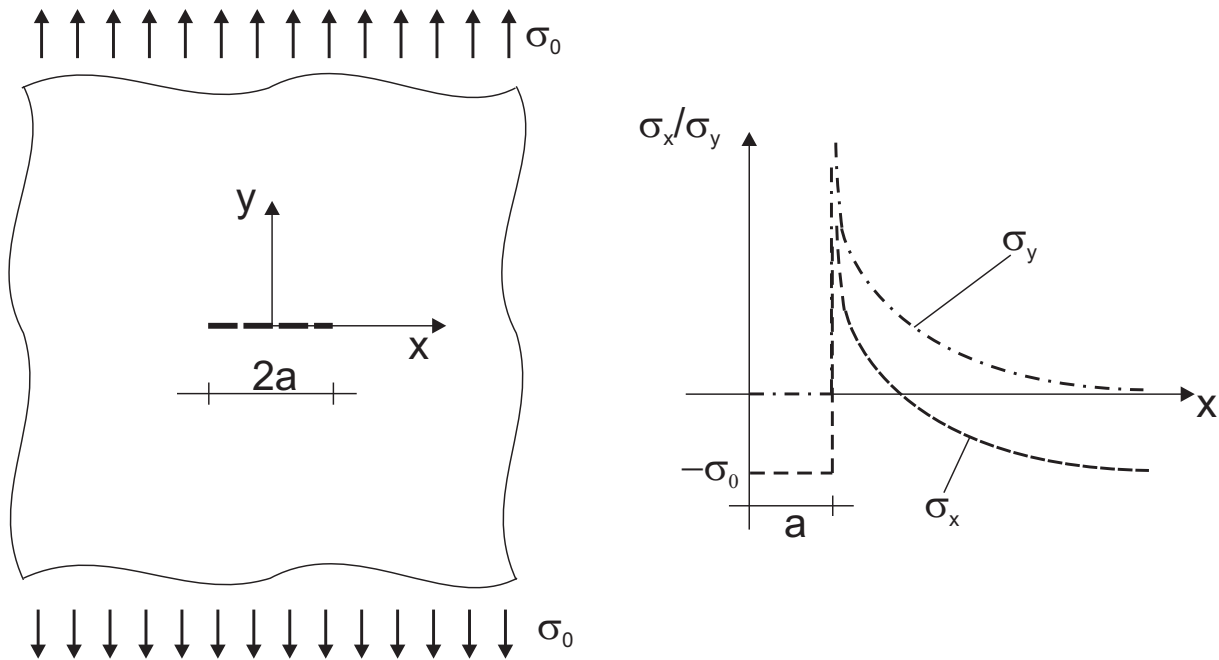


Abbildung 4.20: Modell des Risses in einer unendlichen Platte – Spannungen nach Griffith [54]

1. Zugbelastung des Risses (Mode I)
2. Schubbelastung in der Ebene (Mode II)
3. Schubbelastung aus der Ebene heraus (Mode III)

Für den im Folgenden betrachteten Mode I-Riss ergibt sich in Abhängigkeit des Abstandes  $r$  von der Risspitze unter Vernachlässigung der endlichen Spannungen folgender Spannungsverlauf

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \quad (4.55)$$

Irwin erweitert diesen Ansatz zur linearen Bruchmechanik, die davon ausgeht, dass im Bereich der Risspitze nur eine kleine irreversible Deformationszone vorhanden ist. Der Widerstand auf Seiten des Materials wird mit einer entsprechenden Widerstandsgröße (Risszähigkeit)  $K_{Ic}$  angenommen. Ein Rissfortschritt kommt zustande, falls

$$K_I > K_{Ic} \quad (4.56)$$

Da bei Beton keine kleine irreversible Deformationszone vorliegt, ist eine Verwendung der linearen Bruchmechanik für den Werkstoff Beton nicht sinnvoll.

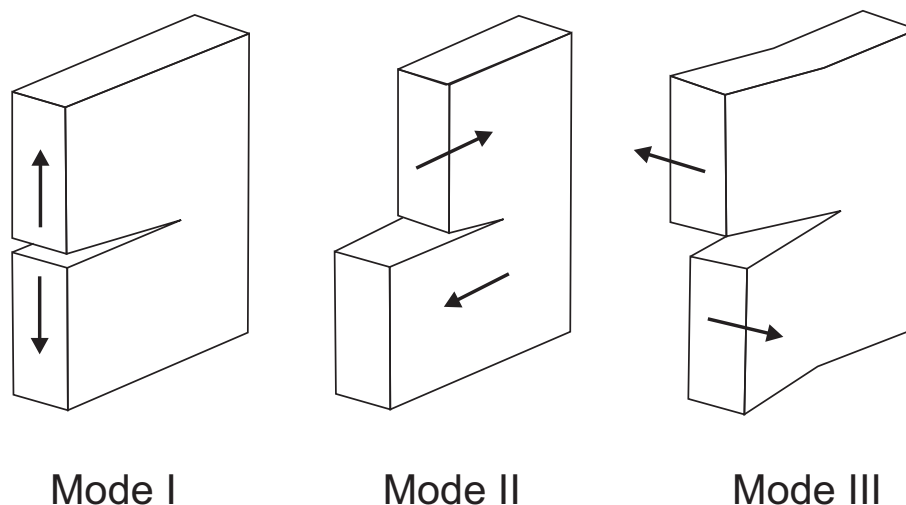


Abbildung 4.21: Rissöffnungsarten

### 4.2.5 Annahmen zum Dehnrateneffekt

Versuchsergebnisse zeigen eine Steigerung der Festigkeit bei hohen Dehnraten. Im CEB-Bulletin 187 [30] werden die bis dahin veröffentlichten Versuchsdaten benutzt, um eine bilineare Funktion zu entwickeln, mit der die Festigkeitssteigerung beschrieben werden kann. Die Empfehlungen des CEB lauten für die Entwicklung der Zugfestigkeit (bei Vernachlässigung der Änderung des E-Moduls)

$$\begin{aligned}
 \frac{f_t^{dyn}}{f_t} &= \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^\delta && \text{für } \dot{\epsilon} \leq 30 \text{ sec}^{-1} \\
 \frac{f_t^{dyn}}{f_t} &= \eta \dot{\epsilon}^{\frac{1}{3}} && \text{für } \dot{\epsilon} > 30 \text{ sec}^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

mit  $\dot{\epsilon}_0 = 3 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ ,  $\delta = \frac{1}{10 + \frac{1}{2} f_c}$ ,  $\log \eta = 7\delta - 0,492$

Für die Druckfestigkeit werden folgende Angaben gemacht

$$\begin{aligned}
 \frac{f_c^{dyn}}{f_c} &= \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^\alpha && \text{für } \dot{\epsilon} \leq 30 \text{ sec}^{-1} \\
 \frac{f_c^{dyn}}{f_c} &= \lambda \dot{\epsilon}^{\frac{1}{3}} && \text{für } \dot{\epsilon} > 30 \text{ sec}^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

mit  $\dot{\epsilon}_0 = 30 \cdot 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ ,  $\alpha = \frac{1}{5 + \frac{3}{4} f_c}$ ,  $\log \lambda = 6\alpha - 0,492$

Diese Funktionen wird z.B. von Eibl [44] für seine Untersuchungen benutzt. Die Funktion des CEB-Bulletin wird von Chandra [31] an neuere Untersuchungen angepasst.

Reinhardt [113] schlägt einen Ansatz vor, der die Dehnratenabhängigkeit nicht trilinear sondern bilinear annimmt. Damit fallen die Festigkeitssteigerungen bei sehr hohen Dehnraten kleiner aus.

Die Gleichungen sind aufgrund der fehlenden Versuchsergebnisse für Dehnraten über  $100 \text{ sec}^{-1}$  nur eingeschränkt verwendbar. Extrapoliert man die Festigkeitssteigerungen auf den bei hochdynamischen Untersuchungen auftretenden Bereich von bis zu  $10^6 \text{ sec}^{-1}$ , so erhält man physikalisch unsinnige Steigerungen.

Gebbeken [46] benutzt die Versuchsergebnisse für die Druckfestigkeitssteigerung bei steigenden Dehnraten (siehe Abbildung 4.5), um mit der zusätzlichen Bedingung, dass die Festigkeitssteigerungen einen Grenzwert haben, einen Ansatz für die Berechnung zu ermitteln. Er verwendet dafür die folgende Gleichung

$$\frac{f_c^{dyn}}{f_c} = \left( [\tanh(\log \dot{\epsilon}^* - 2) \cdot 0,4] \cdot \left[ \frac{F_m}{W_y} - 1 \right] + 1 \right) \cdot W_y \quad (4.59)$$

In dieser Gleichung geht zum einen die dimensionslose Dehnrates  $\dot{\epsilon}^*$  (normiert mit  $\dot{\epsilon}_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$ ), zum anderen der Begrenzungsparameter der Erhöhung  $F_m$  ein, der für den ungeschädigten Fall mit  $F_m = 3,4$ , für den geschädigten Fall mit  $F_m = 3,2$  angegeben wird. Der Formparameter  $W_y$  hängt von der Schädigung des Betons ab und wird zu  $W_y = 2,2$  (ungeschädigt) bzw.  $W_y = 1,83$  (geschädigt) angegeben. Die Werte sind durch grobe Anpassung an die Versuchsergebnisse gewonnen worden. Der Verlauf für Dehnraten größer als  $100 \text{ sec}^{-1}$  ist rein hypothetisch.

Einen anderen Weg geht Schmidt-Hurtienne [123]. Er entwickelt über ein rheologisches Modell die Abhängigkeiten der Festigkeitssteigerung von der Dehnrates und implementiert diese in sein Schädigungsstoffgesetz als Schädigungsrelaxation. Die Parameter in seinem Ansatz wählt er so, dass der Zusammenhang zwischen Dehnrates und Festigkeitssteigerung möglichst gut mit den Versuchsergebnissen übereinstimmt. Auch hier ergibt sich aber die Frage der Anwendbarkeit dieses Ansatzes für höhere Dehnrates, da diese nicht experimentell abgesichert sind.

Das Modell von Schmidt-Hurtienne ist für Dehnrates über  $100 \text{ sec}^{-1}$  nur eingeschränkt benutzbar, da es für diesen Bereich nicht entwickelt wurde. Da es nur Versuchsergebnisse auf ein rheologisches Modell anpasst, erscheint eine Anpassung an höhere Dehnrates nicht unbedingt nötig. Allerdings ist unklar, ob für höhere Dehnrates als  $100 \text{ sec}^{-1}$  weitere rheologische Effekte berücksichtigt werden müssten.

Die Festigkeitssteigerung wird in dem hier vorgestellten Simulationsmodell zur Bestimmung der Rissinitiation und zum Rissfortschritt verwendet. Bei der Verwendung einer Bruchprozesszone (siehe Kapitel 4.3.3) muss die an der Rissspitze auftretende maximale Zugspannung analog zur Festigkeitssteige-

rung erhöht werden.

### **4.2.6 Stoffgesetze für hochdynamisch beanspruchten Beton**

Im Folgenden soll eine kurze Übersicht über verschiedene Stoffgesetze für die Berechnung von Beton unter hochdynamischen Beanspruchungen gegeben werden (siehe auch Stempniewski [136]).

#### **Holmquist, Johnson und Cook (1993)**

Das Stoffgesetz von Holmquist, Johnson und Cook [61] wurde für Impakt-Berechnungen von Beton entwickelt. Es wurde eine Bruchfläche verwendet, die vom Grad der Schädigung abhängig ist. Die Hugoniot-Kurve wurde in drei Bereiche unterteilt, deren Materialkonstanten über Versuche ermittelt wurden. Für den Dehnrateneffekt wurde eine lineare Abhängigkeit zur Festigkeitssteigerung ohne die Definition einer Grenze verwendet.

#### **Eibl (1995)**

Das Ziel der Arbeit von Eibl [44] ist die Berechnung von Stahlbetonwänden, die von einer aufgesetzten Ladung belastet werden. Er benutzt für die Beschreibung des Betons ein verschmiertes Rissmodell. Als Versagenskriterium modifiziert er die Schädigungsfläche von Ottosen für hohe Dehnraten und Temperaturbeanspruchungen. Die dynamischen Effekte grenzt er durch ein hybrides Phasen-Modell von den statischen Anteilen ab, wobei er für die Zustandsgleichung Versuche von Grady [50] verwendet.

Um Fragmente lokalisieren zu können, definiert er ein Risskriterium und eliminiert beim Vorliegen von Ablösungsbedingungen die entsprechenden Elemente. Das Stoffgesetz wird ergänzt durch eine einfache Beschreibung des Stahls und des Verbundverhaltens. Seine zweidimensionalen Berechnungen (unter Ausnutzung der Achsensymmetrie) führt er mit einem Lagrangenetz durch und vergleicht die Ergebnisse mit den Versuchen von Ockert [102].

#### **Ockert (1997)**

Das Ziel von Ockert [102] war es, den bisher bekannten Bereich des Stoffgesetzes für Beton in den Bereich hoher Drücke zu erweitern. In dem von ihm

vorgestellten Stoffgesetz wird die Versagensfläche nach Ottosen [107] verwendet, kombiniert mit einem Nichtlinearitätsindex  $\beta_0$ , der ein Maß für den Abstand des Spannungszustandes von der Versagensfläche darstellt und einen Vergleich mit den einaxialen Festigkeiten ermöglicht. Diese werden bei hohen Dehnraten durch einen Faktor nach CEB [30] erhöht. Die hydrostatischen Eigenschaften werden durch die Anpassung einer DYNA2D-Zustandsgleichung eingeführt, die auch eine Modifikation im Entlastungsverhalten (Hystereseschleife) enthält.

### **Riedel-Hiermaier-Thoma (2000)**

Das RHT-Modell von Riedel, Hiermaier und Thoma [114] verwendet das von Holmquist, Johnson und Cook [61] entwickelte Schädigungsmodell. Die Zustandsgleichung wird über die mesomechanische Betrachtung der zwei Komponenten Zuschlag und Zementstein gewonnen, wobei die Zustandsgleichung von Herrmann [59] verwendet wird. Das mesomechanische Modell wird übersetzt in eine makromechanische Beschreibung, die im kommerziellen FE-Programm AUTODYN implementiert ist.

### **Ruppert (2000)**

Ruppert [121] benutzt zur Beschreibung des hydrostatischen Spannungszustandes ebenfalls eine Zustandsgleichung, zieht dafür aber die aktuelleren Versuchsergebnisse von Ockert [102] und Grady [50] hinzu. Es wird die Schädigungsfläche von Guo [55] verwendet, wobei zwischen der Schädigung durch Gestaltänderung und der Schädigung durch Kompaktion – bestimmbar über die Zustandsgleichung – unterschieden wird. Ruppert vergleicht seine Ergebnisse mit Schädigungen, die an Betonplatten unter Kontaktdetonation ermittelt wurden.

### **Schmidt-Hurtienne (2001)**

Die Arbeit von Schmidt-Hurtienne [123] liefert verschiedene neue Ansätze für die Berechnung von hochdynamisch beanspruchtem Beton. Er teilt das Stoffgesetz in einen statischen und einen dynamischen Anteil auf. Der statische Anteil enthält insbesondere einen kombinierten Plastizitäts-Schädigungsansatz mit der Schädigungsfläche nach Hsieh-Ting-Chen [63], wobei nur im Zugbereich eine anisotrope Schädigung ermöglicht wird. Die Zustandsgleichung wird umgewandelt in eine Y-Funktion, die in Abhängigkeit der volumetrischen

Dehnung einen Vergrößerungsfaktor des E-Moduls darstellt. Um den Dehnrateeffekt zu berücksichtigen, wird ein Ansatz vorgestellt, das die Festigkeitssteigerung über eine Verringerung der Schädigung berücksichtigt.

Schmidt-Hurtienne zeigt an verschiedenen statischen und dynamischen Versuchen die Verwendbarkeit seines Stoffgesetzes (Split-Hopkinson-Bar, Impact).

### **Schuler (2004)**

Das Ziel der Arbeit von Schuler [125] ist die genauere Beschreibung der Schädigungsentwicklung unter Stoßwellenbeanspruchung und dabei insbesondere die Identifizierung von Materialparametern aus Versuchen. Schuler benutzt als Grundlage für seine Entwicklung das RHT-Modell, in das er die neu abgeleitete Schädigungsbeschreibung implementiert.

## **4.3 Formulierung eines eigenen Simulationsmodells**

### **4.3.1 Beschreibung der Entwicklungsschritte**

Ausgehend von den im Kapitel 4.1.5 definierten Anforderungen an ein Stoffgesetz für die hochdynamische Beanspruchung von Beton wird im Folgenden ein Simulationsmodell für diesen Belastungsbereich entwickelt. Die einzelnen Anteile des Simulationsmodells sind in Abbildung 4.22 dargestellt.

Das Simulationsmodell verwendet diskrete Risse. Es wird damit auf die Verwendung eines Schädigungsmodells oder eines Ansatzes mit verschmierten Rissen verzichtet, was für die Stabilität der Berechnung Vorteile ergibt. Die diskreten Risse werden mit dem EFG-Verfahren (siehe Kapitel 3) beschrieben.

Als Kriterium für die Rissentstehung und den Rissfortschritt wird die Versagensfläche nach Hsieh (siehe Kapitel 4.2.3) verwendet. Diese stellt durch die Verwendung dimensionsloser Parameter einen praktikablen Ansatz für die Verwendung mit unterschiedlichen Festigkeiten dar. Als Rissrichtung wird eine Senkrechte zur ersten Hauptspannungsrichtung verwendet.

Das nichtlineare Verhalten der Risse im Beton wird über eine Bruchprozesszone berücksichtigt (kohäsiver Rissansatz). Der Verlauf des Risssschließspannungen wird bilinear angenähert. Durch die Verwendung der Bruchprozesszone kann das Verhalten des Betons über ein elastisches Stoffgesetz

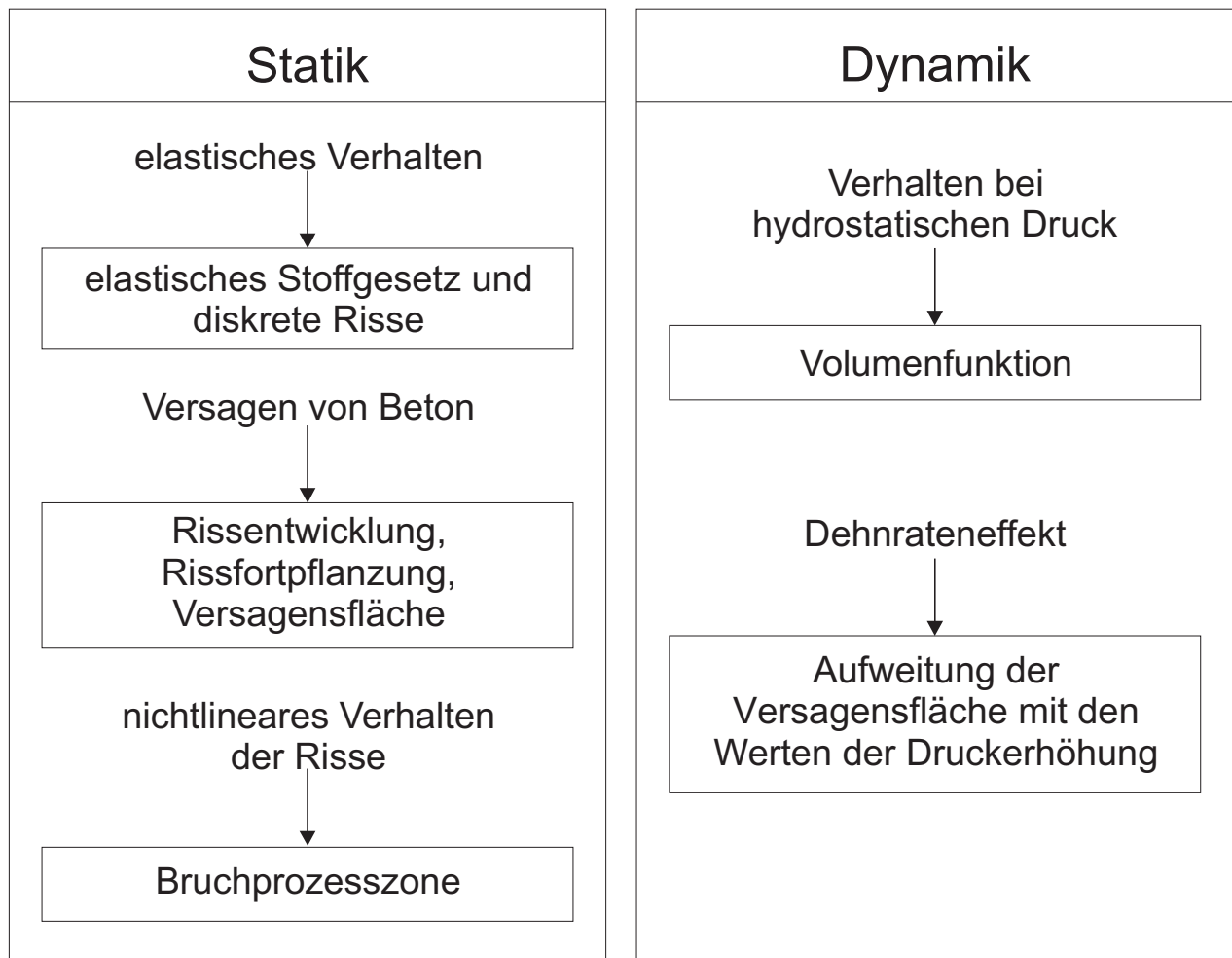


Abbildung 4.22: Anteile des Simulationsmodells

abgebildet werden. Die Nichtlinearität (Softening) wird nur im Einflussbereich des Risses wirksam.

Die Steifigkeitsänderung des Betons unter hohen hydrostatischen Beanspruchungen wird durch eine Y-Funktion implementiert. Diese stellt die Ableitung der Hugoniot-Kurve nach der hydrostatischen Dehnung dar. Die Entlastung von Bereichen, die von einer Stoßwelle beansprucht wurden (Kompaktierter Bereich), findet mit der bis dahin maximal aufgetretenen Steifigkeit statt. Die Entlastung für den Bereich, der plastisch beansprucht wurde (Kompaktionsbereich), findet mit einer höheren Steifigkeit statt, als die Anfangssteifigkeit. Die kompaktierten Bereiche werden bei der Beanspruchung mit einer Zugwelle aus dem Modell gelöscht. Im Kompaktionsbereich wird zusätzlich eine Schubschädigungsevolution eingefügt.

Die Erhöhung der Festigkeiten bei hohen Dehnraten wird über die Aufweitung der Versagensfläche berücksichtigt. Es wird dabei die Erhöhung der



Druckfestigkeit für den gesamten Belastungsbereich verwendet. Außerdem wird die Rissgeschwindigkeit auf einen aus Versuchen bestimmten Wert beschränkt, da mit dem diskreten Rissansatz und einem elastischen Stoffgesetz die Verringerung der Rissgeschwindigkeit durch lokale Nichtlinearitäten (Entstehung von Mikrorissen) nicht abgebildet werden.

Die Rissentstehung und der Rissfortschritt sind explizit definiert, das heißt, dass am Ende eines Zeitschrittes die verschiedenen Kriterien dafür überprüft werden. Eine Überprüfung in jedem Iterationsschritt würde zu einer schlecht konvergierenden Lösung führen. Da bei den dynamischen Analysen jedoch eine explizite Zeitintegration verwendet wird, hat dieses Vorgehen keinen Einfluss auf das Ergebnis.

Im Folgenden werden nun die einzelnen Anteile des Simulationsmodells genauer vorgestellt.

### **4.3.2 Rissentstehung und Rissfortschritt**

Grundlage des Simulationsmodells ist die Verwendung von diskreten Rissen, die mit dem EFG-Verfahren eingeführt werden. Es ist demnach ein Verfahren notwendig, mit dem die Rissentstehung und der Rissfortschritt bestimmt werden kann. Dabei sind folgende Schritte erforderlich:

- Kriterium, ob der Riss entsteht oder fortschreitet. Hier ist zwischen einem dehnungsbasierten und einem spannungsbasierten Verfahren zu unterscheiden. Grundlage für das Kriterium ist eine Versagensfläche.
- Bestimmung der Risslänge, mit der der Riss entsteht oder fortschreitet.
- Bestimmung der Richtung des Risses.

Für die Rissentstehung wird das gesamte Kontinuum nach Punkten kontrolliert, die außerhalb der Versagensfläche liegen. An diesen Punkten wird ein Riss in Richtung senkrecht zur Hauptspannungsrichtung eingeführt.

#### **Bestimmung des Kriteriums an der Rissspitze**

Um entscheiden zu können, ob ein Riss fortschreitet, werden die Spannungen/Dehnungen an der Rissspitze als Kriterium verwendet. Es gibt grundsätzlich zwei Ansätze, um diese an der Rissspitze numerisch berechnen zu können:

- lokaler Ansatz: Bestimmung der Spannungen, Dehnungen etc. an der Rissspitze, Rissfortschritt in Richtung der Hauptdehnungen.

- nichtlokaler Ansatz: Gewichten verschiedener Integrationspunkte im Einflussbereich der Rissspitze. Als Größe des Einflussbereiches kann bei der FE-Methode die charakteristische Größe verwendet werden. Diese stammt aus einem nichtlokalen Ansatz des Schädigungsstoffgesetzes. Rots [120] verwendet dafür z.B. die  $\sqrt{2}$ -fache Elementlänge.

Bei der Umsetzung des lokalen Ansatzes stößt man auf verschiedene Schwierigkeiten. Die Spannungen bzw. Dehnungen, die als Kriterium verwendet werden, ob ein Riss wächst oder nicht, besitzen an der Rissspitze eine Singularität. Wird nun die Diskretisierung verbessert, so werden die Spannungen bzw. Dehnungen an der Rissspitze immer größer. Folglich können die so bestimmten Spannungen bzw. Dehnungen nicht als Kriterium verwendet werden, da diese zu stark von der Diskretisierung abhängen.

Es bieten sich deshalb nichtlokale Ansätze an, wobei die MLS-Interpolation verwendet werden kann, um Spannungen bzw. Dehnungen über die B-Matrix zu bestimmen

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} \quad (4.60)$$

Nach der Bestimmung des Einflussradius der Rissspitze können die Knoten im Einflussbereich der Rissspitze gesucht und die Matrix  $\mathbf{B}$  (Gleichung 3.40) somit für die Rissspitze bestimmt werden.

Alternativ können die Ansatzfunktionen direkt benutzt werden, um die Spannungen bzw. Dehnungen an einem beliebigen Punkt zu bestimmen. Dies kann direkt über die Matrix der Ansatzfunktionen  $\mathbf{N}_i$  (Gleichung 3.38) für alle Knoten  $i$  im Einflussbereich geschehen

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \cdot \epsilon_i \quad (4.61)$$

Häußler-Combe schlägt vor, in einem Singularitätsbereich  $\Omega$  die Dehnungen direkt mit den in Kapitel 3.2.2 vorgestellten Wichtungsfunktionen  $w$  zu wichten.

$$\hat{\epsilon} = \int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_t) \epsilon(\mathbf{x}) d\Omega \quad (4.62)$$

Die Größe des Singularitätsbereichs  $\Omega$  gibt er für die von ihm berechneten Stahlbetonprobleme mit 7,5 cm an. Diese Größe bestimmt er über Vergleichsdehnungen mit dem Referenzfall nach Carpinteri [29]. Die Integration wird hier der Einfachheit halber durchgeführt über

$$\epsilon = \frac{\sum w \cdot \epsilon_i}{\sum w} \quad (4.63)$$

### **Versagensfläche**

Das berechnete Kriterium an der Rissspitze (Spannung, Dehnung) muss ausgewertet werden. Dazu wird eine in Kapitel 4.2.3 vorgestellte Versagensfläche verwendet. Für eine reine Zugbeanspruchung bietet sich ein Rankine- oder Saint-Venant-Kriterium an. Dieses zeigt aber gerade bei einer mehraxialen Druckbeanspruchung keine gute Übereinstimmung mit den Eigenschaften von Beton. Es wird deswegen bei den Untersuchungen das Versagenskriterium von Hsieh, Ting, Chen verwendet.

### **Risslänge**

Bei diskreten Rissen ist des Weiteren zu definieren, in welcher Länge ein Riss fortschreitet. Hier stehen zwei Verfahren zur Verfügung. Die Risslänge kann bestimmt werden durch die Suche nach dem von der Rissspitze am weitesten entfernten Punkt, an dem die Grenzdehnung gerade noch überschritten wird. Dieses Vorgehen ist rechenzeitaufwändig, da an vielen Punkten das Versagenskriterium bestimmt werden muss. Deshalb wird hier von einer konstanten Rissfortschrittswlänge ausgegangen. Die Untersuchungen an einem 3-Punkt-Biegeversuch im Kapitel 5.2 zeigen eine unbedeutende Abhängigkeit des Ergebnisses von der gewählten Rissfortschrittswlänge.

Untersuchungen mit dem Verfahren mit einer festen Risswachstumslänge und der MLS-Interpolation (Gleichung 4.61) zeigen, dass die Dehnungen bzw. Spannungen, die an der Rissspitze entstehen, abhängig vom Abstand zum nächsten Integrationspunkt sind. Dies konnte durch das Verschieben der Rissspitze gezeigt werden. Ursache hierfür ist die unterschiedliche Anzahl von berücksichtigten Integrationspunkten. Allerdings ist die Abhängigkeit mit ca. 10% nur unwesentlich.

Die Verwendung einer festen Risswachstumslänge bedingt, dass eine Berechnung dahingehend kontrolliert werden muss, ob die Zeitschritte klein genug sind, so dass das Risswachstum abgebildet werden kann.

### **Rissrichtung**

Eine numerisch notwendige Beschränkung betrifft die Richtungsänderung von Rissen. Eine zu starke Änderung der Rissrichtung führt zum Abschneiden einzelner EFG-Knoten. Dies sollte vermieden werden, da ansonsten der Einflussradius unrealistisch groß wird oder für die MLS-Interpolation keine Lösung mehr gefunden werden kann. Aus der Sicht des Werkstoffes Beton bleibt des Weiteren zu klären, welche Rissrichtungsänderungen bei Makrorissen

überhaupt vorkommen. Mechtcherine [90] benutzt zur Darstellung der Rissflächen fraktale Geometrien. Dieses Vorgehen ist zur kleinmaßstäblichen Identifizierung einer lokalen Rissgeometrie sinnvoll. Die fraktale Geometrie lässt aber keine Aussage über zu erwartende Rissrichtungsänderungen in einem Modell auf Makroebene zu.

Die Richtungsänderung wird bei den meisten hier durchgeführten Untersuchungen begrenzt (siehe Abbildung 4.23). Für die numerische Untersuchung von Beton, der von einer Kontaktdetonation beansprucht wird, wird die Beschränkung der Rissrichtungsänderung über die Auswertung von Schnittbildern in Kapitel 5.6.4 bestimmt.

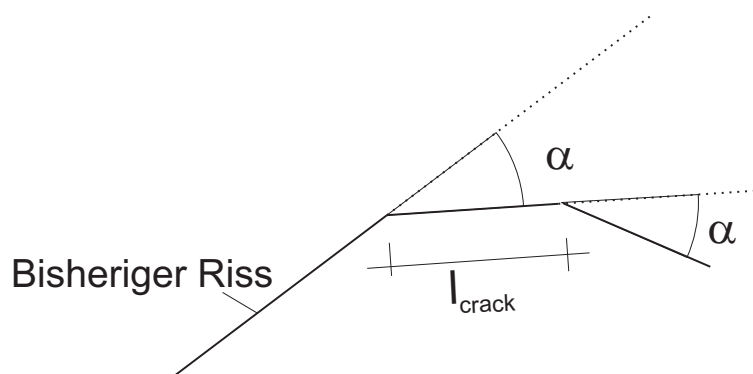


Abbildung 4.23: Rissrichtungsänderung

Bei einem kohäsiven Riss unter Biegebeanspruchung (z.B. 3-Punkt-Biegeversuch Kapitel 5.2) herrscht an der Riss Spitze biaxialer Zug, wobei die Größe der Zugdehnung in den beiden Hauptrichtungen (Entsprechen der x und y-Richtung) fast gleich ist. Dies liegt an den zusätzlich eingeführten Kräften in der Bruchprozesszone. In einem solchen Fall entscheiden die Schubdehnungen über die Richtung der Hauptdehnungsrichtungen und damit über das Risswachstum. Da die Schubdehnungen bei dem Riss unter Biegebeanspruchung sehr klein sind, führt dies zu einer relativ instabilen Bestimmung der Rissrichtung.

Jirásek [68] schlägt dafür vor, nicht die Hauptdehnungen als Kriterium für die Rissrichtung zu verwenden. Er bestimmt an Punkten auf einem Kreis um die Riss Spitze die Dehnungen in tangentialer Richtung (so genannte Umfangsdehnungen  $\epsilon_{\xi}$  – siehe Abbildung 4.24).

Betrachtet man bei einem 3-Punkt-Biegeversuch (siehe Kapitel 5.2) die Dehnungen auf einem Kreis um die Riss Spitze, so sind bei einem Riss ohne Bruchprozesszone die Hauptdehnungen ein zuverlässiges Indiz für die Rissrichtung. Betrachtet man nun aber einen Riss mit einer Bruchprozesszone, so fällt auf, dass das Maximum der Hauptdehnungen sich um  $90^{\circ}$  von dem

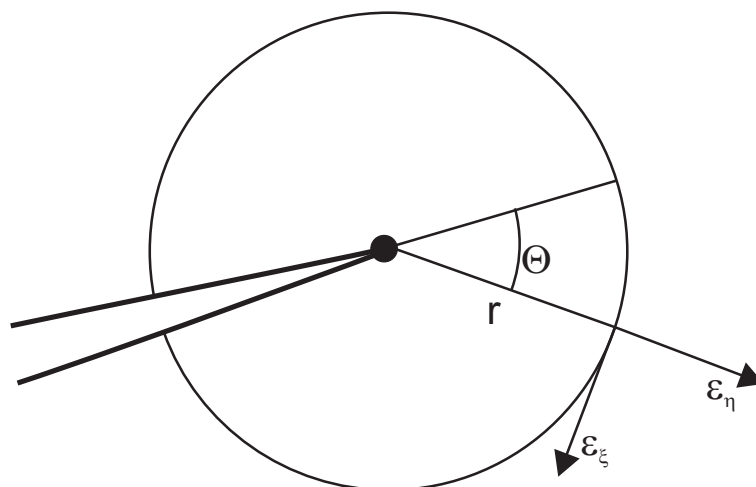


Abbildung 4.24: Verschiedene Dehnungen in Umfangsrichtung

der Umfangsdehnungen unterscheidet (siehe Abbildung 4.25). Die Richtung der maximalen Umfangsdehnungen entspricht der in den Versuchen beobachteten Rissrichtung (siehe Abbildung 5.7).

## Kontakt

Kontakt entsteht, wenn zwei feste Körper sich berühren und Kräfte über die Berührungsfläche austauschen. Kontakt ist ein extrem nichtlineares Problem, da sich der Übergang zwischen einem Zustand ohne Kontakt und einem Zustand mit Kontakt schlagartig vollzieht. Im Allgemeinen werden Kontaktbedingungen über Lagrange-Multiplikatoren (siehe Kapitel 3.4.1) oder Penalty-Faktoren (siehe Kapitel 3.4.2) eingeführt, die je nach Zustand der Kontaktbedingung einen Eintrag in der Steifigkeitsmatrix liefern. Da das EFG-Verfahren die Kronecker-Delta-Eigenschaft nicht erfüllt (siehe Kapitel 3.2.1) ist wie bei den Randbedingungen auch bei einem „klassischen“ Kontakt zwischen zwei Flächen eine Erweiterung der Kontaktalgorithmen aus der FE-Methode erforderlich. In dem hier verwendeten EFG-Verfahren ist allerdings vorrangig der Kontakt zwischen zwei Rissufern interessant, der nicht über die klassischen Kontaktansätze abgedeckt werden kann.

Die Verwendung von diskreten Rissen mit einem Kontaktalgorithmus wurde von verschiedenen Autoren diskutiert. Während Dolbow [39] X-FEMs so erweitert, dass damit auch Kontaktprobleme im Riss berechnet werden können, stellt Chen [32] zwei Verfahren vor, mit denen Kontaktbedingungen als Randbedingungen mit dem EFG-Verfahren berechnet werden können. Die Verfahren von Chen eignen sich allerdings nicht für die Benutzung von Kontaktproblemen in Rissen, da sie für Kontakt-Randbedingungen entwickelt wurden.

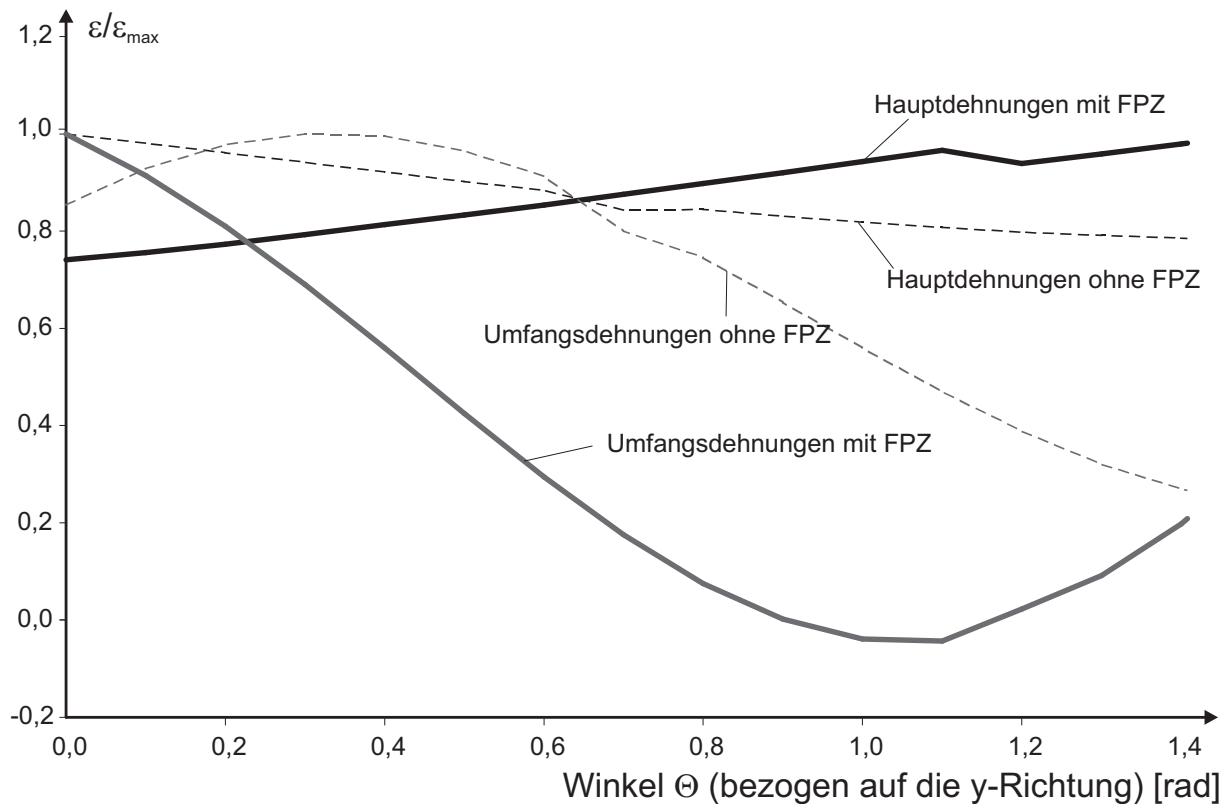


Abbildung 4.25: Dehnungen auf einem Kreis um die Risspitze in Abhängigkeit vom Drehwinkel

Um die hier vorgestellten Probleme berechnen zu können, ist ein einfacher Kontaktalgorithmus implementiert worden. Anhand der Geometriedaten des verformten und des unverformten Netzes wird entschieden, ob der Riss geöffnet ist, oder ob eine zu definierende untere Grenze des Abstandes unterschritten wurde. Falls dies der Fall ist, wird der Riss als geschlossen angesehen und die Wichtungsfunktionen werden nicht mehr am Riss abgeschnitten. Eine vollständige Kraftübertragung kann wieder stattfinden.

Beim Schließen des Risses kann die Konvergenz der Lösung allerdings sehr schlecht werden. Durch die Verwendung eines impliziten Kontaktalgorithmus und durch eine dynamische Analyse kann die Konvergenz verbessert werden. Eine weitere Schwierigkeit stellt die durch die Einführung der Kontaktbedingung mögliche diskontinuierliche Ansatzfunktion dar, deren Auswirkungen in Kapitel 3.2.5 diskutiert wurden.

Tabelle 4.3: Implizite und explizite Algorithmen

	Rissentstehung und Risswachstum	Kräfte aus FPZ	Kontakt
Implizit	Risse nach jedem Newton-Raphson-Schritt möglich → Aufwand groß, schlechte Konvergenz	Kräfte mit Verformungen aus Newton-Raphson-Verfahren → schlechte Konvergenz	Kontaktbedingungen mit Verformungen aus Newton-Raphson-Verfahren → schlechte Konvergenz
Explizit	Berechnung des Risswachstums am Ende des Zeitschrittes	Rissschließkräfte mit den Verformungen des letzten Zeitschrittes	Kontaktbedingung mit den Verformungen des letzten Zeitschrittes

### Implizite / Explizite Vorgehensweise

Die Algorithmen zur Rissentstehung, zur Bestimmung der Kräfte aus der Prozesszone und der Kontaktbedingung können sowohl mit einer impliziten als auch mit einer expliziten Vorgehensweise berücksichtigt werden. Unter einer impliziten Vorgehensweise wird in diesem Zusammenhang verstanden, dass das Verformungsinkrement eines Newton-Raphson-Schrittes für den jeweiligen Algorithmus verwendet wird. Es wird also für jeden Zeitschritt das Gleichgewicht gewährleistet. Die Kräfte der Bruchprozesszone zum Beispiel müssen dabei in jeder Iteration neu bestimmt werden. Dies führt zu einer schlechten Konvergenz.

Eine explizite Vorgehensweise benutzt nicht die Verformungsinkremente der Newton-Raphson-Iteration sondern die Ergebnisse des letzten Zeitschrittes. Da sich dann in jedem Newton-Raphson-Schritt zum Beispiel die Kräfte aus der Bruchprozesszone nicht ändern, konvergiert dieses Verfahren besser. Es ist allerdings bei zu großen Lastinkrementen ungenauer. Die Unterschiede für die einzelnen Verfahren sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst.

Da bei den hier durchgeführten dynamischen Untersuchungen eine explizite Zeitintegration verwendet wird, ist die Verwendung einer expliziten Rissstellung ohne Einschränkungen möglich.

## Kreuzende Risse

Bezüglich der Zulässigkeit von mehreren Rissen an einem Punkt existieren bei verschmierten Rissansätzen verschiedene Varianten. Diese Unterscheidung lässt sich bei diskreten Rissen analog benutzen, um verschiedene Varianten der Risserstellung zu unterscheiden. Einen Überblick über die Varianten bei verschmierten Rissen gibt Weihe [146].

- Fixed crack model. Dies entspricht dem bisher vorgestellten Verfahren. Liegt an einer Stelle die Dehnung / Spannung außerhalb der Versagensfläche, so entsteht ein Riss. Ein weiterer Riss ist an dieser Stelle – und zur Sicherstellung einer numerischen Stabilität auch in der Nähe – nicht möglich.
- Multiple fixed crack model. An einer gerissenen Stelle können im weiteren Verlauf der Berechnung zusätzliche Risse entstehen. Diese werden vorzugsweise nur in einer Richtung, die von der bisherigen Rissrichtung entscheidend abweicht, zugelassen.
- Rotating crack model. Die zu Beginn definierte Rissrichtung kann sich im Laufe der Berechnung ändern, falls dies die Belastung erfordert. Es wird damit versucht, die richtungsabhängige Entstehung von Mikrorissen in der Bruchprozesszone abzubilden. Dieses Konzept wird hier nicht verwendet, da es dem Gedanken der diskreten Risse widerspricht, die von lokalisierten Rissen ausgehen.

Es wird das Multiple fixed crack model eingesetzt, da zum einen in Rissbildern von Beton solche Risse beobachtet werden und da zum anderen mit diesem Verfahren die Entstehung von Rissen nicht eingeschränkt wird.

## Rissverbindung

Falls sich Risse zu nahe kommen, verbinden sich diese. Es gibt verschiedene Konfigurationen, unter denen eine Verbindung stattfinden kann. Diese sind in Abbildung 4.26 dargestellt.

Im Fall a) wandern zwei Risse aufeinander zu und verbinden sich. Es muss ein minimaler Abstand definiert werden, ab welchem sich die Risse verbinden. Das Ergebnis ist ein Riss mit zwei Rissspitzen, die inneren Rissspitzen sind zu löschen.

Im Fall b) wächst ein Riss unter einem Winkel auf einen anderen zu. Es muss gewährleistet sein, dass der wachsende Riss den anderen findet und



nicht parallel zum bestehenden Riss weiter wächst. Es resultiert ein Riss mit drei Rissspitzen. Die Rissspitze im Verbindungspunkt ist zu löschen.

Fall c) ist eine Kombination aus Fall a) und b). Zwei Risse wachsen in einem spitzen Winkel aufeinander zu. Vom Verbindungspunkt aus entsteht ein neuer Riss, der eine neue Rissspitze hat. Die beiden Rissspitzen der verbundenen Risse sind zu löschen, es verbleibt ein Riss mit drei Rissspitzen.

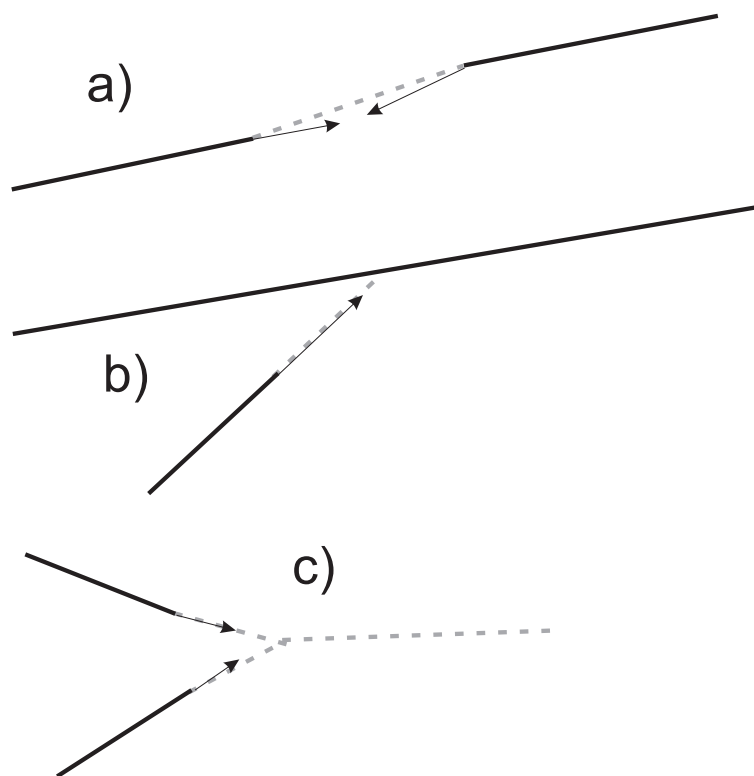


Abbildung 4.26: Verbindung von Rissen – verschiedene Konfigurationen

### Numerisch auszuschließende Rissgeometrien

Einige Rissgeometrien sollten der Lösbarkeit mit dem EFG-Verfahren wegen ausgeschlossen bzw. vermieden werden. Es kann im Allgemeinen keine Steifigkeitsmatrix aufgebaut werden, wenn die Gleichung 3.28 nicht mehr invertiert werden kann (siehe Kapitel 3.2.4) oder die dafür nötigen Einflussbereiche so groß werden, dass eine sinnvolle Lösung nicht mehr möglich ist. Dies betrifft insbesondere folgende Rissgeometrien:

- Risse nahe am Rand und parallel zum Rand: Durch das Sichtbarkeitskriterium ist im ungünstigsten Fall nur noch eine Knotenreihe sichtbar und damit für die Lösung verwendbar. Die Knoten spannen in  $\mathbb{R}^2$  nur noch eine unabhängige Richtung auf. Um dies zu vermeiden, wird bei

der Entstehung der Risse eine Kontrolle durchgeführt, ob ein Riss zu nahe am Rand entsteht.

- Parallele Risse mit zu geringem Abstand: Hier können ebenfalls die Knoten so liegen, dass eine Lösung nicht mehr möglich ist. Dies wird vermieden durch die Verbindung von zwei Rissen, die sich zu nahe kommen.
- Einzelne ausgeschnittene Knoten: Durch die Beschränkung der Rissrichtungsänderung (siehe Kapitel 4.3.2) wird dieser Fall ausgeschlossen.

### 4.3.3 Kohäsives Rissmodell

Das nichtlineare Verhalten nach Überschreitung der Zugfestigkeit soll bei den hier verwendeten diskreten Rissen über ein kohäsives Rissmodell implementiert werden. Kohäsive Rissmodelle sind der nichtlinearen Bruchmechanik zuzuordnen, die das Verhalten von Beton wesentlich besser beschreiben kann als die lineare Bruchmechanik. Es werden zwei Ansätze unterschieden:

- Modelle mit äquivalenten elastischen Rissen bei denen mindestens ein zusätzlicher Parameter eingeführt wird, der das langsame stabile Risswachstum vor dem Versagen des Betons beschreibt. Hierunter fallen das Two Parameter Modell von Jenq [67] und das Size Effekt Modell von Bažant [12].
- Modelle mit kohäsiven Rissen, bei denen davon ausgegangen wird, dass ein Riss in einer Prozesszone noch Kräfte übertragen kann. Diese Modelle sollen im Folgenden benutzt werden.

Das Modell der kohäsiven Risse geht zurück auf Dugdale [41] und Barenblatt [10]. Hillerborg [60] stellt mit dem „fictitious crack model“ eine Anpassung der kohäsiven Risse an die Eigenschaften von Beton vor. Das Modell geht davon aus, dass sich ein Werkstoff bis zum Erreichen der Materialfestigkeit linear-elastisch verhält. Nach dem lokalen Überschreiten der Festigkeit kommt es zu einer Erhöhung der lokalen Dehnung unter gleichzeitiger Abnahme der übertragenen Spannung. Diesen Bereich bezeichnet man als Bruchprozesszone (Fracture Prozess Zone – FPZ). Der wesentliche Unterschied zu einem schon voll geöffneten Riss ist die Tatsache, dass dieser Riss noch Spannungen senkrecht zur Rissrichtung übertragen kann.

Kohäsive Rissmodelle können sowohl für plastische Fließbereiche z.B. im Stahl als auch für Schädigungsprozesse durch Mikrorisse in zementgebundenen Werkstoffen verwendet werden. Kohäsive Rissmodelle können unter

entsprechender Anpassung mit verschmierten Rissen und mit diskreten Rissen eingesetzt werden.

Um die lokalen Effekte beschreiben zu können, sind verschiedene Parameter erforderlich. Neben dem E-Modul und der Materialfestigkeit ist eine Aussage über den Verlauf des Lastübertrages einer Bruchprozesszone in Abhängigkeit der lokalen Verformung erforderlich. Den von Hillerborg vorgestellten numerischen Ansatz der Bruchprozesszone konnten Gopalaratnam [49] und Cornelissen [35] mittels Versuchen bestätigen und damit einen Ansatz für den Verlauf der Rissspannungen bezogen auf die Rissöffnung bestimmen. Cornelissen benutzte dabei Betonproben mit eingesägten Rissen, die er zyklisch belastete. In Abbildung 4.27 sind die Versuchsergebnisse für Normalbeton zusammengestellt. Die Fläche unter dieser Kurve stellt dabei die Bruchenergie  $G_f$  dar. Mit Bruchenergie ist derjenige Energieanteil gemeint, der benötigt wird, um den Bruch der Probe zu erreichen. Die Bestimmung der Bruchenergie für verschiedene Betone, verschiedene Größtkorndurchmesser und Probengrößen beschreibt z.B. Trunk [140].

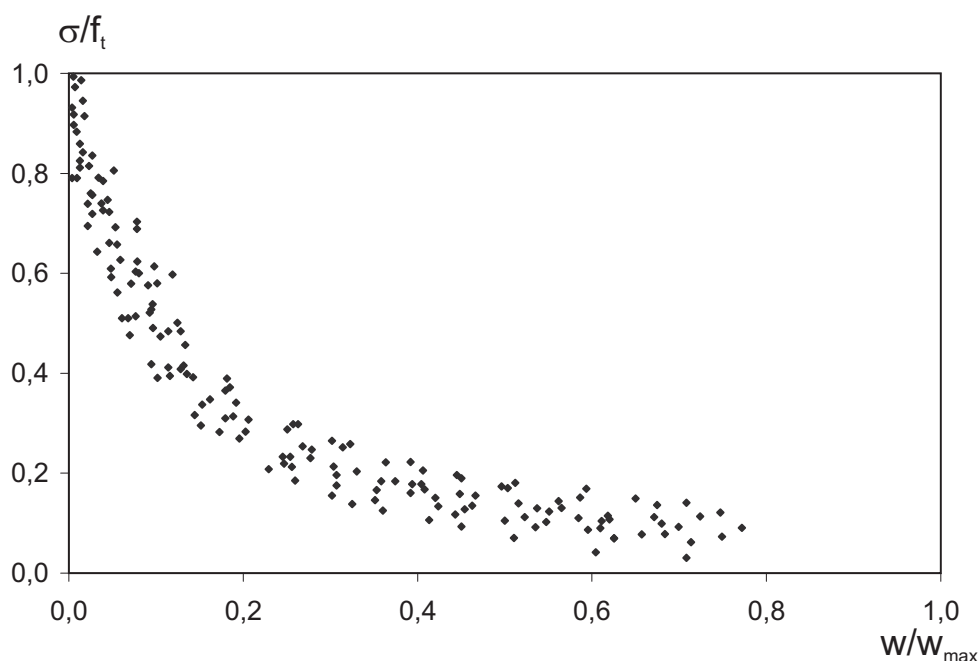


Abbildung 4.27: Verlauf der Spannungen in der Bruchprozesszone nach Versuchen von Cornelissen [35]

Es existieren verschiedene Methoden, um die noch teilweise vorhandene Kraftübertragung in einem Riss zu berücksichtigen. Neben der Implementierung in einem verschmierten Rissmodell kann auch die Steifigkeit lokal herabgesetzt werden, so dass bei gleicher Verformung ein kleinerer Kraftübertrag möglich ist. Dies entspricht einem klassischen Schädigungsansatz. Hier soll

das von Hillerborg vorgeschlagene Verfahren verwendet werden, bei dem der Riss geöffnet ist und die noch übertragbaren Kräfte als äußere Kräfte eingeführt werden (siehe Abbildung 4.28). Du [40] beschreibt dieses Verfahren zusätzlich für die dynamische Beanspruchung von Beton.

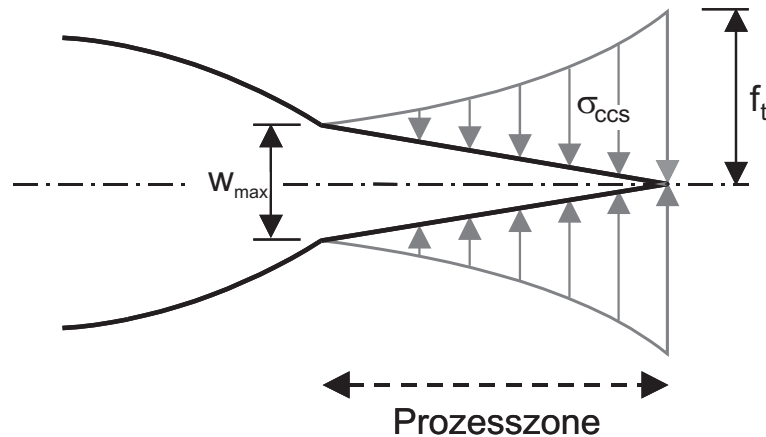


Abbildung 4.28: Verlauf der Spannungen in der Bruchprozesszone – Modellvorstellung

Es werden längs des Risses Spannungen angesetzt, die der Rissöffnung entgegen wirken (so genannte Riss-schließspannungen  $\sigma_{ccs}$ ). Der Verlauf dieser Spannungen muss angenommen werden. Die Spannungen haben an der Riss-spitze bei der Erstbelastung die Größe der Betonzugfestigkeit  $f_t$  und nehmen bis zur kritischen Rissöffnung  $w_{max}$  ab. Rots [120] (siehe auch Akkermann [3]) zeigt, dass der Verlauf der Riss-schließspannungen gerade für unbewehrten Beton einen großen Einfluss auf die Tragfähigkeit hat. Dies lässt sich durch die hier durchgeführten Untersuchungen bestätigen (siehe Kapitel 5.2), wobei insbesondere die Steigung bei kleinen Rissöffnungen einen großen Einfluss besitzt. Es werden hier drei verschiedene Formen für den Verlauf der Spannungen vorgestellt ein linearer, ein bilinearer und ein exponentieller Verlauf (siehe Abbildung 4.29).

Beim exponentiellen Verlauf werden die Spannungen  $\sigma_{ccs}$  in der Form

$$\sigma_{ccs} = f_t \cdot \left(1 - \frac{w}{w_{max}}\right)^\alpha \quad (4.64)$$

berechnet, wobei  $f_t$  die Betonzugfestigkeit darstellt. Diese muss bei einer Belastung mit einer hohen Dehnrates entsprechend erhöht werden (siehe Kapitel 4.1.3). Die kritische Rissöffnung  $w_{max}$  kann über die Bruchenergie  $G_f$  bestimmt werden.

$$G_f = \int_0^{w_{max}} \sigma_{ccs} dw = \frac{1}{1 + \alpha} f_t w_{max} \quad (4.65)$$

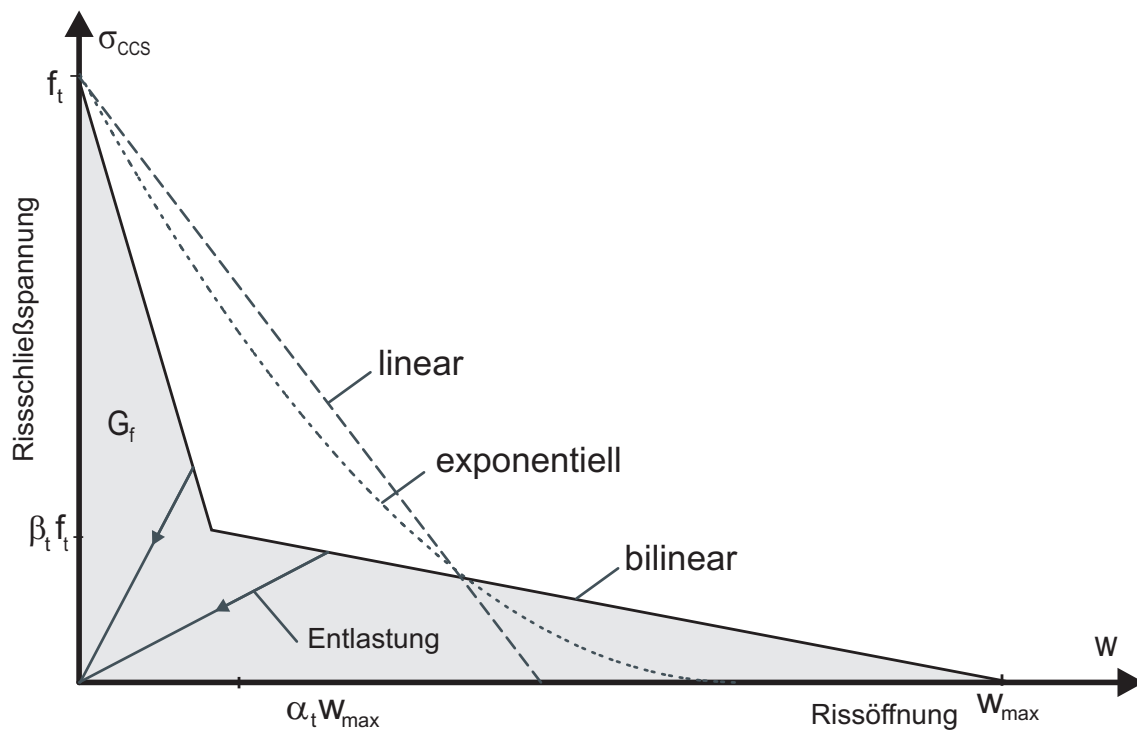


Abbildung 4.29: Abhängigkeit der Spannungen in der Bruchprozesszone von der Rissöffnung – linear / bilinear / exponentiell

Beim bilinearen Verlauf kann der von Akkermann [3] vorgeschlagene Verlauf verwendet werden

$$\sigma_{ccs} = \frac{(\beta_t - 1) \cdot f_t}{\alpha_t \cdot w_{max}} w + f_t \quad \text{für } w < \alpha_t \cdot w_{max} \quad (4.66)$$

$$\sigma_{ccs} = -\frac{\beta_t \cdot f_t}{w_{max}(1 - \alpha_t)} w + \frac{\beta_t \cdot f_t}{1 - \alpha_t} \quad \text{für } w > \alpha_t \cdot w_{max}$$

Der Beiwert  $\alpha_t$  kann wie von Roelfstra [116] beschrieben zu 0,14 angenommen werden; der Beiwert  $\beta_t$  hängt von der Betondruckfestigkeit ab

$$\beta_t = 0,25 \quad \text{für } f_c < 30 \text{ MPa} \quad (4.67)$$

$$\beta_t = 0,25 - 0,0015 \cdot (f_c[\text{MPa}] - 30) \quad \text{für } f_c > 30 \text{ MPa}$$

Die Rissöffnung  $w_{max}$  ab der keine Spannungen mehr übertragen werden können, kann ebenfalls aus der Integration der Spannung über die Rissöffnung bestimmt werden und ergibt sich zu

$$w_{max} = \frac{2 \cdot G_f}{f_t(\alpha_t + \beta_t)} \quad (4.68)$$

Ein linearer Verlauf der Spannungen ist ebenfalls denkbar

$$\sigma_{ccs} = \frac{-f_t}{w_{max}} w + f_t \quad (4.69)$$

Die Rissöffnung, ab der keine Spannungen mehr übertragen werden können, ergibt sich zu

$$w_{max} = \frac{2 \cdot G_f}{f_t} \quad (4.70)$$

Wird eine Bruchprozesszone mit einer hohen Dehnrage beaufschlagt, so ist die Betonzugfestigkeit entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.3.4 zu erhöhen. Da sich bei verschiedenen Untersuchungen gezeigt hat (siehe Kapitel 4.1.3), dass die Bruchenergie keine Abhängigkeit von der Dehnrage hat, ist die kritische Rissöffnung  $w_{max}$  ebenfalls anzupassen.

Eine weitere Betrachtung verdient die Entlastung einer Bruchprozesszone. Verringert sich der Abstand der beiden Rissufer, gehen die Spannungen zurück. Sie wachsen allerdings bei einer Wiederbelastung wieder bis zum ursprünglichen Wert an. Ein linearer Verlauf dieser Spannungsab- und -wiederzunahme scheint, wie von Camacho [28] gezeigt, ausreichend genau zu sein. Alternativ ist eine bilineare Entlastungsfunktion denkbar, die den bei zyklischen Versuchen gemessenen Verlauf der Bruchprozesszone besser abbildet (siehe Stempniewski [135]).

Wird mit den hier verwendeten Algorithmen eine lineare Entlastung verwendet, so zeigt sich durch die fehlende Steifigkeit des Risses kurz vor dem Schließen eine numerische Instabilität ("Flattern"), die aus der nichtglatten Beschreibung resultiert. Dies lässt sich durch die Verwendung eines konstanten Entlastungspfades vermeiden (siehe Abbildung 4.30). Eine weitere Unstetigkeit bei der Entlastung ist der Übergang zwischen Bruchprozesszone und Kontakt. Findet ein Kontakt im Riss statt, werden die Relativverschiebungen der beiden Rissufer behindert. Es ist ein Kontinuum vorhanden. Zusätzliche Kräfte aus der Bruchprozesszone sind mechanisch nicht wirksam. Folglich gehen die Kräfte aus der Bruchprozesszone schlagartig auf Null zurück. Diese fehlende Glattheit des Systems führt zu einer weiteren numerischen Instabilität. Eine Lösungsmöglichkeit besteht im weiteren Ansetzen der Spannungen aus der Bruchprozesszone beim Kontakt in der Größe, in der sie bei der Entlastung verwendet werden. Eine solche Vorgehensweise zeigt, wie bei den Untersuchungen am Schubalken im Kapitel 5.3 gezeigt, wesentlich glattere Kurven.

Um die Entlastung berücksichtigen zu können, ist es notwendig, an jedem Punkt der Bruchprozesszone die maximal aufgetretenen Spannungen

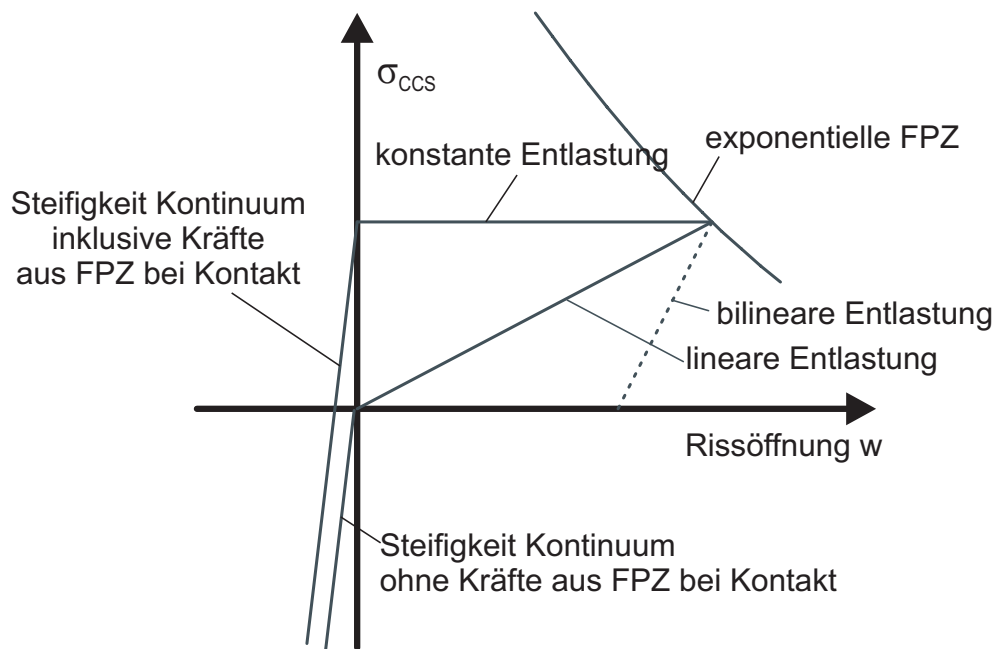


Abbildung 4.30: Entlastungspfade für die Bruchprozesszone

zu speichern. Die Riss-schließspannungen werden wie in Abbildung 4.31 gezeigt als externe Kräfte im System berücksichtigt. Diese Kräfte werden durch Integration der Riss-schließspannungen über den Rissverlauf bestimmt und über die Wichtungs- oder Ansatzfunktion auf die entsprechenden Knoten verteilt. Das genaue Vorgehen ist im Ablaufdiagramm 4.1 zusammengefasst. Der Ablauf der gesamten Berechnung ist im Ablaufdiagramm 4.2 dargestellt.

Wichtig ist, dass das Verhältnis zwischen Risslänge und Knotenanzahl gewahrt ist. Wenn entlang eines Risses zu wenige Knoten liegen, konzentrieren sich die Lasten aus der Bruchprozesszone an sehr wenigen Knoten und führen so zu einer recht ungenauen Berücksichtigung der Bruchprozesszone. Es hat sich gezeigt, dass ein Fünftel des Knotenabstandes als Abstand der Auswertungspunkte ausreichend ist.

Bei der Verwendung einer Bruchprozesszone mit einem axialsymmetrischen Ansatz ist darauf zu achten, dass die Kräfte aus der Bruchprozesszone auch auf die beim axialsymmetrischen Ansatz vorhandene Rissfläche bezogen wird. Die erfordert in dem hier gewählten Ansatz eine Multiplikation der Kräfte mit  $2\pi r$ .

### Reibung im Riss

Bei einer Belastung längs des Risses werden – vorausgesetzt die Verformung senkrecht zum Riss lässt dies zu – Reibkräfte aktiviert. Dieser Effekt ist insbesondere bei einer Druckbelastung zu beobachten. Es stellt sich hiermit die

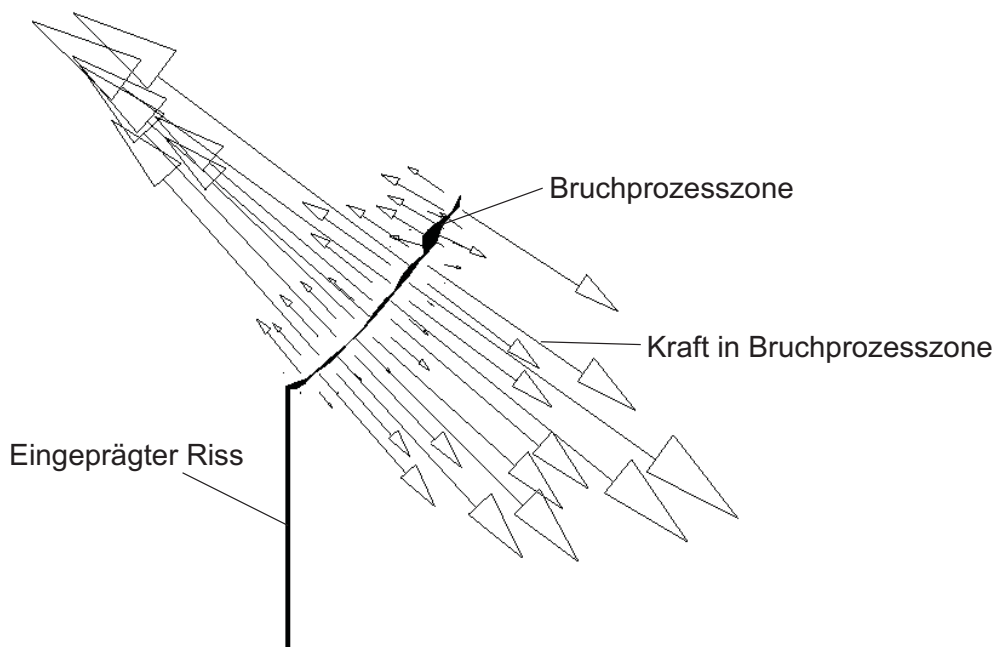


Abbildung 4.31: Kräfte an den Knoten in der Bruchprozesszone (zur besseren Darstellung in umgekehrter Richtung gezeichnet)

Frage nach einer Gesetzmäßigkeit zwischen den auftretenden Verformungen sowohl senkrecht zum Riss als auch tangential zum Riss und den im Riss auftretenden Kräften in tangentialer Richtung. Die Schubübertragung kann am so genannten Sägezahnmodell gezeigt werden (siehe Abbildung 4.32). Tritt eine Rissgleitung  $u$  auf, so werden durch die Verzahnung der Zuschlagskörner der unebenen Rissoberfläche Reibkräfte erzeugt. Die Größe der Reibkräfte hängt entscheidend vom Abstand der Rissufer zueinander ab. Die bei der Rissgleitung entstehende Dilatation verursacht zusätzlich Normalspannungen im Riss, die hier aber nicht weiter berücksichtigt werden.

Ein Schubgesetz für die Interaktion zwischen den Rissrändern wird z.B. von Walraven [144] beschrieben. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.33 zusammengefasst. Für Normalbeton gibt er folgenden Zusammenhang an

$$\tau_r = -\frac{1}{30}f_{cc} + [1,8w^{-0,8} + (0,234w^{-0,707} - 0,20) \cdot f_{cc}] \cdot u \text{ mit } \tau_r > 0 \quad (4.71)$$

wobei  $u$  und  $w$  in mm einzusetzen sind und  $f_{cc}$  die Würfeldruckfestigkeit darstellt. Bei zunehmender Rissöffnung  $w$  werden die Schubkräfte kleiner, bei abnehmender Rissöffnung nehmen die Schubkräfte allerdings Werte an, die die Betondruckfestigkeit überschreiten. Dies sollte bei einer Verwendung angepasst werden.

Ein ähnliches Gesetz gibt Jeang [66] an, das er über eine lineare Regres-



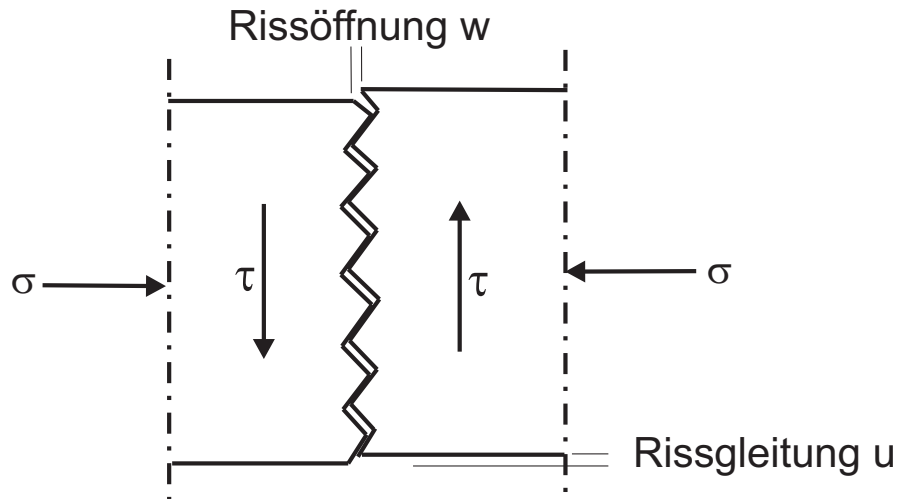


Abbildung 4.32: Sägezahnmodell zur Veranschaulichung der tangentialen Kraftübertragung im Riss

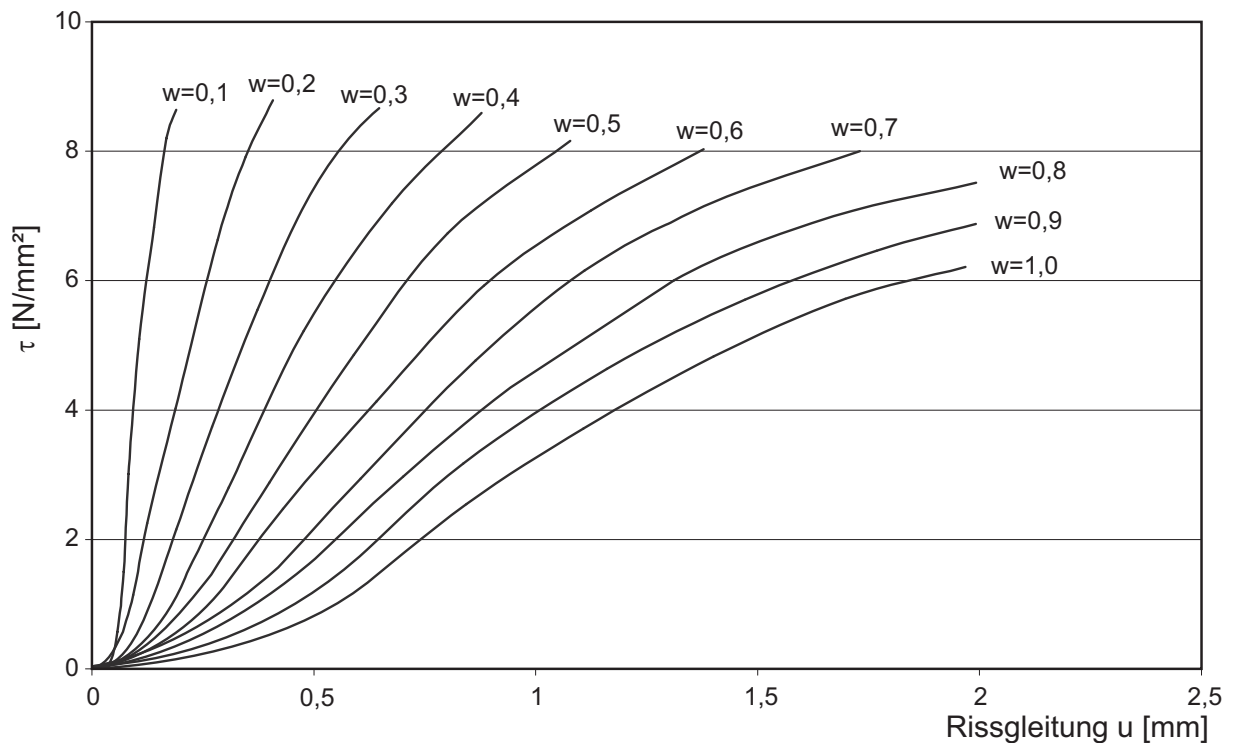


Abbildung 4.33: Approximation von Versuchsergebnissen für Reibung im Riss nach Walraven [144] und Ansatz nach Gleichung 4.71

Ablaufdiagramm 4.1: Bestimmung der Riss-schließspannungen in der Bruchprozesszone

1. Schleife über alle Bruchprozesszonen
2. Kontrolle, ob Risspitze außerhalb des Problemgebietes liegt. Falls außerhalb → Durchriss, keine FPZ
3. Suche eines Punktepaares, das auf unterschiedlichen Seiten des Risses liegt ( $p_1$  und  $p_2$ )
4. Bestimmung der Verformungen an den beiden Punkten. Der Unterschied ergibt die Rissöffnung  $w$
5. Entscheidung, ob Erstbelastung, Entlastung oder Wiederbelastung vorliegt
6. Bestimmung der notwendigen Riss-schließspannungen  $\sigma_{ccs}$  an den beiden Punkten mit den Gleichungen 4.64, 4.66 oder 4.69
7. Bestimmung der resultierenden Riss-schließkraft an den beiden Punkten aus dem Abstand zu den nächsten beiden Auswertungspunkten multipliziert mit der Riss-schließspannung  $\sigma_{ccs}$
8. Verteilung der Riss-schließkraft auf die Knoten im Einflussbereich der beiden Punkte  $p_1$  und  $p_2$  über Wichtungs- oder Ansatzfunktion
9. Addition der Lasten zum Gesamtlastvektor

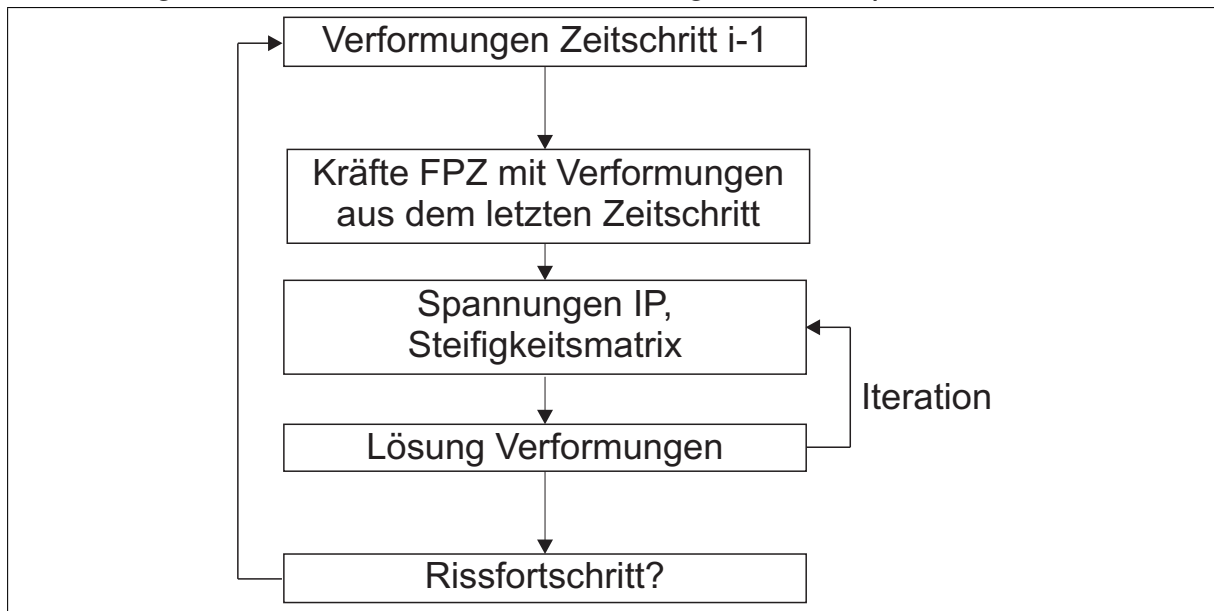
sionskurve aus experimentellen Daten bestimmt.

$$\tau_r = G(1 - e^{-(0,262(1/\Delta w)^{1,5} - 17,170)10^{-4}})\Delta u \quad (4.72)$$

$G$  ist der Schubmodul in psi,  $\tau_r$  ist die übertragene Schubspannung in psi,  $\Delta w$  die Rissverformung normal zum Riss und  $\Delta u$  die Rissverformung tangential zum Riss (beides in inches). Diesen Ansatz verwendet zum Beispiel Prasad [110].

Da für den Riss unter Schubbeanspruchung in der Bruchprozesszone keine verlässlichen Daten vorliegen, wird hier im Folgenden ein relativ einfaches Reibgesetz verwendet, das sich an das Vorgehen von Häußler-Combe [56] anlehnt, der das Reibgesetz allerdings in Kombination mit einem verschmier-ten Rissansatz verwendet.

Ablaufdiagramm 4.2: Ablauf der Berechnung der Bruchprozesszone



Es ist davon auszugehen, dass bei Kontakt in Normalenrichtung (siehe Kapitel 4.3.2) die tangential übertragbare Kraft im Riss sehr groß ist, so dass der Kontakt auch in Risslängsrichtung verwendet werden kann. Gleichzeitig ist davon auszugehen, dass die Reibkraft mit zunehmender Rissöffnung abnimmt. Es bietet sich deswegen an, die Spannungen, die normal zum Riss in der Bruchprozesszone verwendet werden, für die tangentialen Richtung entsprechend anzupassen. Dies geschieht mit folgendem Ansatz

$$\tau = \begin{cases} \beta \cdot \sigma_{ccs} \cdot \frac{u}{u_c} & \text{für } u < u_c \\ \beta \cdot \sigma_{ccs} & \text{für } u > u_c \end{cases} \quad (4.73)$$

wobei die Reibkraft bis zum Erreichen der maximalen Reibkraft  $\beta \cdot \sigma_{ccs}$  bei der Verformung  $u_c$  linear ansteigt. Für  $u_c$  schlägt Häußler-Combe einen Wert von  $u_c = 0,5 \cdot w_{max}$  vor; für  $\beta$  einen Wert von  $\beta = 0,5$ .

Neben einer steigenden Verformung in Risslängsrichtung muss auch eine Abnahme der Verformung berücksichtigt werden. Hierbei werden die Reibkräfte zurückgehen und ab einem bestimmten Punkt ihr Vorzeichen wechseln. Wegen fehlender Versuchsergebnisse wird angenommen, dass die Entlastung mit der gleichen Steigung erfolgen soll wie die Belastung. Es ist dann die in Abbildung 4.34 dargestellte Verformungs-Reibungs-Kurve zu verwenden.

Praktikabel erscheint die Speicherung des Wertes  $u_0$  zur Identifizierung des Belastungsstatus. Die mit der Gleichung 4.73 bestimmten Reibkräfte werden nun ähnlich wie bei der Bruchprozesszone als zusätzliche äußere Kräfte ins System eingeführt, indem sie auf die Knoten im Einflussbereich entsprechend einer Ansatz- oder Wichtungsfunktion verteilt werden.

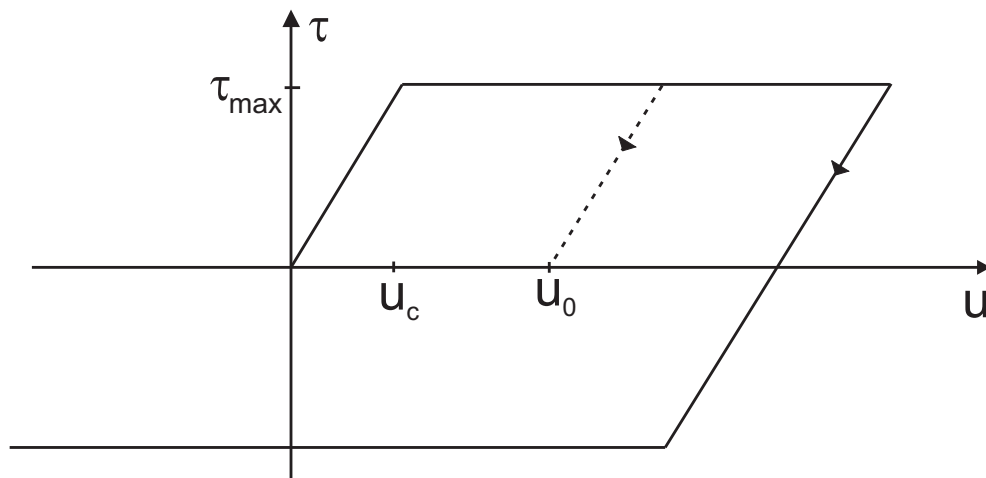


Abbildung 4.34: Reibungsansatz

#### 4.3.4 Berücksichtigung des Dehnrateneffekts

Der in Kapitel 4.1.3 vorgestellte Dehnrateneffekt wird im Allgemeinen eindimensional beschrieben. Als Dehnrade wird bei der Berechnung hier die betragsmäßig größte Hauptdehnrade verstanden. Diese entspricht der Dehnrade in den zumeist eindimensional belasteten Versuchen. Alternative und schnellere Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Dehnrade (hydrostatische Dehnrade, max. Dehnrade in den Koordinatenrichtungen) sind nicht verwendbar. Der eindimensionale Parameter muss nun in das dreidimensional formulierte Stoffgesetz implementiert werden.

Das Stoffgesetz von Riedel, Hiermaier, Thoma weitet die optimierte Formulierung der Versagensfläche nach Willam und Warnke in Kapitel 4.2.3 mit der Formel aus dem CEB-Bulletin (Gleichung 4.57) auf.

Eibl [44] schlägt ebenfalls vor, die Festigkeitssteigerung durch den Dehnrateneffekt über eine Aufweitung der Versagensfläche zu berücksichtigen. Er passt deswegen Gleichung 4.47 mit Hilfe der Koeffizienten  $C_r$  für die Dehnratenabhängigkeit und  $C_t$  für die Temperaturabhängigkeit an.

$$f(I_1, J_2, \theta) = aJ_2 + (\lambda\sqrt{J_2} + bI_1 - 1) \cdot C_r C_t = 0 \quad (4.74)$$

Dieses Vorgehen geht zurück auf Johnson [69], der die Formel erfolgreich für Stahl und Aluminium angewendet hat. Der Koeffizient  $C_r$  ist dabei die Druckfestigkeitssteigerung und wird von Eibl mit der Funktion aus dem CEB-Bulletin bestimmt.

Bei Vernachlässigung des Temperatureinflusses lässt sich die hier verwendete Versagensfläche von Hsieh, Ting und Chen (siehe Kapitel 4.2.3) anpas-

sen zu

$$aJ_2 + (b\sqrt{J_2} + c\sigma_1 + dl_1 - 1) \cdot C_r = 0 \quad (4.75)$$

In dem hier vorgestellten Simulationsmodell wird in Anlehnung an das Vorgehen von Eibl [44] ebenfalls die Druckfestigkeitssteigerung als Größe für die Aufweitung der Versagensfläche benutzt. Die Zugfestigkeitssteigerung ist im Allgemeinen größer als die Druckfestigkeitssteigerung. Bei Verwendung beider Anteile entsteht deswegen für die Versagensfläche im Übergangsbereich zwischen Druck- und Zugbeanspruchung eine Sprungstelle, die bei stark wechselnden Beanspruchungen zu Problemen führen kann. Beim verwendeten Vorgehen wird also in zugbeanspruchten Bereichen die Festigkeit unterschätzt.

Der Dehnrateneffekt geht zusätzlich bei der Bestimmung der zusätzlichen Kräfte der Bruchprozesszone ein. Die maximale Rissschließspannung wird wie in Kapitel 4.3.3 geschildert angepasst.

### 4.3.5 Beton-Hugoniot

#### Versuche zur Parameteridentifikation

Das im Kapitel 4.1.2 geschilderte Verhalten von Beton unter hochdynamischer Belastung lässt sich über die so genannte Hugoniot-Kurve beschreiben. Diese gibt den Druck als Funktion der Dichteänderung, der Volumenänderung oder der hydrostatischen Dehnungsänderung an. Für niedrigere Drücke kann diese Kurve in statischen Versuchen bestimmt werden. Höhere Drücke lassen sich in statischen Versuchen nur schwer nachbilden (siehe Eibl [43]). Es kommen hochdynamische Versuche zum Einsatz wie der Split-Hopkinson-Bar, der Planar-Platten-Impakt-Versuch und Kontaktdetonationen. In Abbildung 4.35 sind die Hugoniot-Punkte einiger Versuche zusammengefasst.

#### Y-Funktion

Numerisch gibt es verschiedene Möglichkeiten, das Verhalten der Mikroporen unter einer hohen dynamischen Belastung zu berücksichtigen. Während einige Autoren diesen Effekt mit Hilfe von Zustandsgleichungen implementieren, soll hier ein kontinuumsmechanischer Ansatz verwendet werden. Schmidt-Hurtienne [123] beschreibt eine Möglichkeit, die veränderliche hydrostatische Steifigkeit als Faktor bei der Bestimmung des E-Moduls eingehen zu lassen.

$$E_{tot} = Y(tr\epsilon_e) \cdot E \quad (4.76)$$

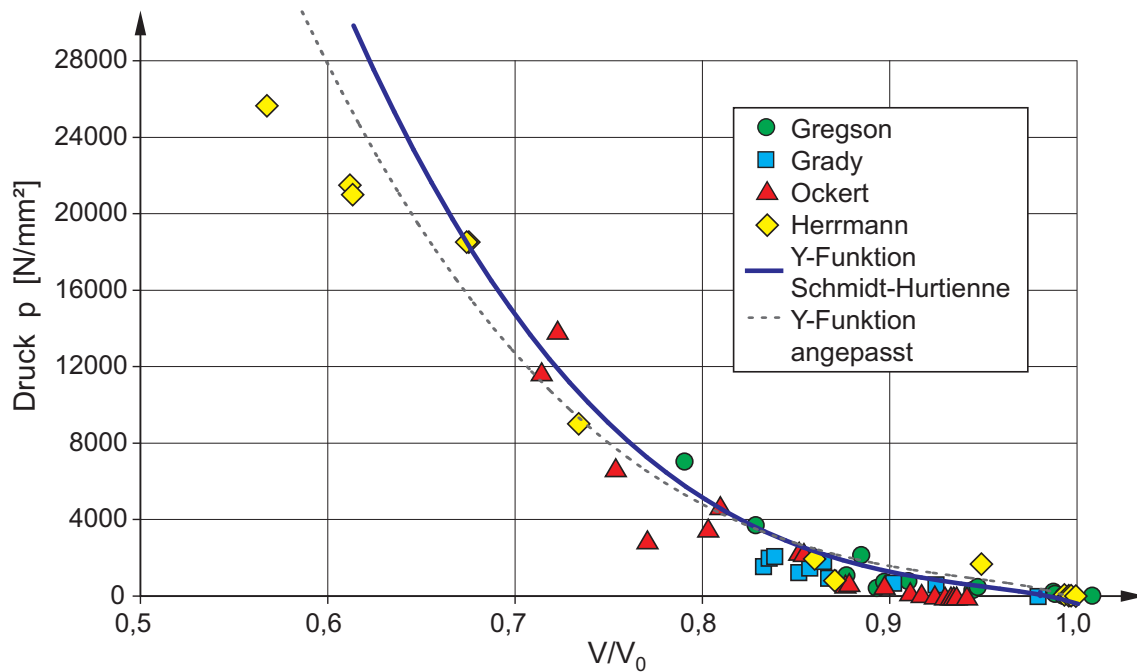


Abbildung 4.35: Hugoniot-Punkte aus verschiedenen Versuchen (Gregson [53], Grady [50], Ockert [102], Herrmann [58]), Ausgleichsfunktion (Schmidt-Hurtienne [123])

Es bleibt zu klären, ob der erhöhte E-Modul nur bei der Bestimmung des Kompressionsmoduls oder auch zur Bestimmung des Schubmoduls zu verwenden ist. Es ist also zu überprüfen, ob die erhöhte Steifigkeit nur zur Berechnung der hydrostatischen Spannungen verwendet wird oder auch bei der Berechnung der deviatorischen Komponenten Eingang findet. Da davon auszugehen ist, dass die Schubtragfähigkeit von Beton bei zerstörten Poren nicht erhöht ist, wird der erhöhte E-Modul nur zur Bestimmung des Kompressionsmoduls verwendet.

Der Faktor Y der Volumenfunktion wird dabei bestimmt zu

$$Y = \begin{cases} \left[ 1 - a_v \cdot \left( 1 - e^{-\frac{|tr\epsilon_e| - e_{v,th}}{e_v}} \right) \right] \cdot \left[ 1 + \left( \frac{|tr\epsilon_e| - e_{v,th}}{b_v \cdot e_v} \right)^2 \right] & \text{für } tr\epsilon_e < -e_{v,th} \\ 1 & \text{für } tr\epsilon_e \geq -e_{v,th} \end{cases} \quad (4.77)$$

Schmidt-Hurtienne benutzt für die Berechnung folgende Parameter

$$e_{v,th} = 0,008 \quad (4.78)$$

$$e_v = 0,02$$

$$a_v = 0,7$$

$$b_v = 3,5$$

Die Parameter, die Schmidt-Hurtienne vorschlägt, stellen allerdings nach neueren Ergebnissen von am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie durchgeführten Versuchen (Stempniewski [136]) keine zufrieden stellende Lösung mehr dar.  $Y$  wird im Bereich von volumetrischen Dehnungen größer als 0,3 stark überschätzt wird. Es wird daher vorgeschlagen, den Parameter  $e_v$  auf 0,0223 zu erhöhen (siehe Abbildung 4.35 und 4.36).

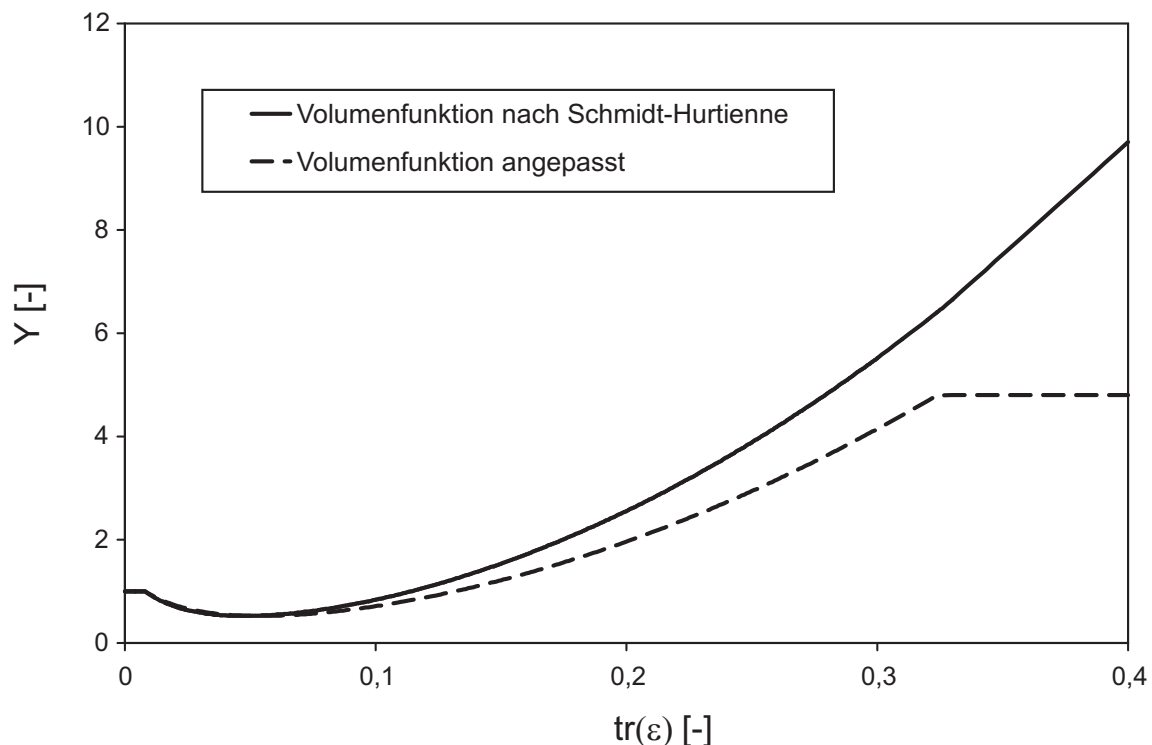


Abbildung 4.36: Volumenfunktion, mit aktuellen Versuchsergebnissen optimiert

Die Volumenfunktion hat nach der Argumentation von Ruppert [121] einen Grenzwert. Nach der Zerstörung der Poren liegt der Beton als granulares, kompaktiertes Material vor. Dieses besitzt eine höhere Steifigkeit als der noch intakte Beton. Die Steifigkeitszunahme ist allerdings beschränkt. Benutzt man die von Ruppert zusammengestellten Hugoniot-Werte, ergibt sich als Grenzwert  $Y_{max} = 4,8$ , der bei den Berechnungen verwendet wird.

Eine weitere Fragestellung ist die Form der Entlastungsfunktion. In Bereichen, die die hydrostatische Dehnung des Stoßwellenzustandes erreicht haben, wird davon ausgegangen, dass für die Entlastung die Steifigkeit der maximalen hydrostatischen Dehnung vorliegt. Dies lässt sich über die noch vorhandene Kompressionssteifigkeit des vorliegenden Granulats begründen. In Bereichen, die nur plastisch beansprucht wurden, wird die Y-Funktion zu einem in Kapitel 5.6.5 zu bestimmenden Parameter gesetzt, der größer als 1 ist. Die Steifigkeit ist demnach größer als die Anfangssteifigkeit. Der gesamte Verlauf der Y-Funktion mit der Entlastungsfunktion ist in den Abbildungen 4.37 und 4.38 dargestellt.

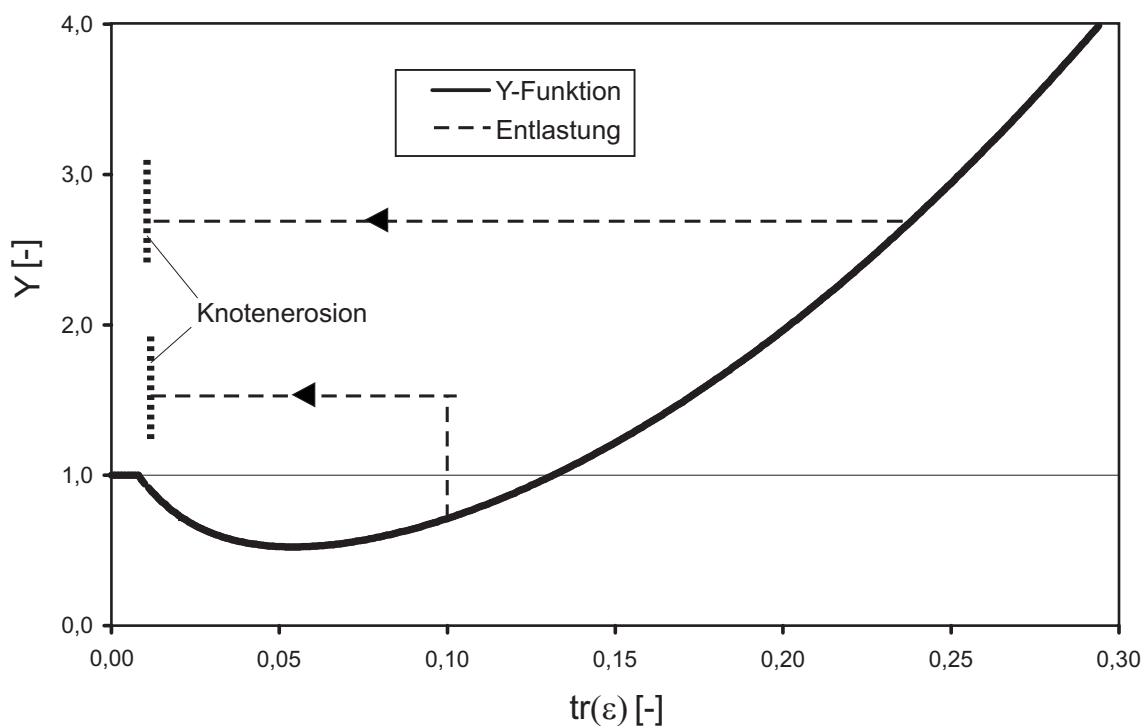


Abbildung 4.37: Volumenfunktion – Entlastung

Weiter muss davon ausgegangen werden, dass bei hochdynamischen Belastungen neben der Erhöhung der Steifigkeit eine Schädigung des Betons eintritt, da durch die hydrostatische Belastung das Porengefüge zerstört wurde. Dies führt zu einer wesentlich geringeren Festigkeit bei einer darauf folgenden Zugbelastung. Verschiedene Autoren implementieren dies auf der Ebene des Stoffgesetzes, indem sie eine so genannte Kappe einführen, die zum Beispiel bei einem Schädigungsstoffgesetz die Schädigungsvariable beeinflusst (siehe Kapitel 4.2.3). Befindet sich ein Spannungspunkt außerhalb dieser Kappe, wird die Steifigkeit des Betons herabgesetzt. Dies widerspricht der Steifigkeitszunahme durch die Hugoniot-Kurve. Hier wird ein anderer Weg gewählt. Da in den Bereichen, die sehr stark hydrostatisch beansprucht wur-



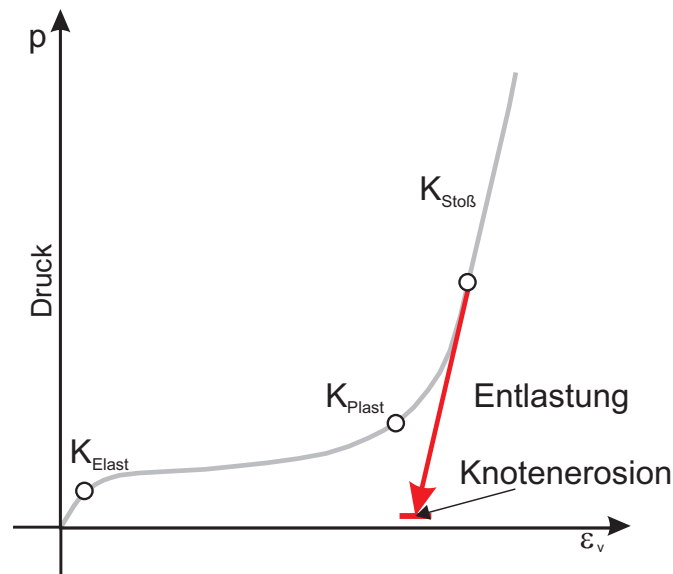


Abbildung 4.38: Druck-hydrostatischer Dehnungsverlauf bei einer Entlastung

den, nicht mehr von Beton gesprochen werden kann, sondern durch die Schädigung der Poren ein Granulat vorliegt, werden diese Bereiche aus dem Modell gelöscht (Knotenerosion, siehe Kapitel 5.6.5). Des Weiteren hat sich gezeigt, dass für die Abbildung des Schubtragverhaltens eine Schubschädigung erforderlich ist, die in Kapitel 5.6.5 erläutert wird.

### 4.3.6 Rissgeschwindigkeit

Da die Effekte der Mikrorissbildung an einer Rissspitze durch das verwendete elastische Stoffgesetz mit diskreten Rissen nicht genau genug abgebildet werden kann, ist die in Rechnungen erreichbare maximale Rissgeschwindigkeit wesentlich größer als die in Versuchen beobachtete.

Deswegen muss die maximale Rissgeschwindigkeit  $v_{crack,max}$  berücksichtigt werden. Da eine fest vorgegebene Risswachstumslänge  $l_{crack}$  verwendet werden soll, darf der Rissfortschritt nur nach der folgenden Zeit erfolgen

$$t_{crack,max} = \frac{l_{crack}}{v_{crack,max}} \quad (4.79)$$

Es wird eine maximale Rissgeschwindigkeit von 500 m/sec verwendet.

### 4.3.7 Stochastische Festigkeitsverteilung

Die Abbildung von Beton als ein homogenes Medium führt an verschiedenen Stellen zu Problemen. Es stellt sich zum Beispiel unter einer gleichmä-

Bigen Spannung die Frage, an welcher Stelle in einem Kontinuum ein Riss eingeführt werden soll. Bei Verwendung eines homogenen Ansatzes ist die Entscheidung über die Stelle des Risswachstums nicht möglich. Durch die Heterogenität im Werkstoff wird der Versagensort klar definiert. Eine Möglichkeit, diese Heterogenität in einer Berechnung zu berücksichtigen, ist die z.B. von Mechtcherine [90] benutzte stochastische Zuordnung der Materialeigenschaften.

Er ordnet jedem Element eine Zufallszahl zwischen 0 und 1 zu. Diese Zufallszahlen werden in eine Normalverteilung transformiert, die einer entsprechenden Materialfestigkeit zugeordnet werden. Die Materialfestigkeiten werden in neun Gruppen aufgeteilt, um eine bessere Handhabbarkeit zu erreichen.

Das Verfahren wird hier in der Weise angepasst, dass für jeden Integrationspunkt eine normalverteilte Größe gespeichert wird. Mit dieser Größe wird der E-Modul multipliziert. Die Verwendung des E-Moduls als stochastische Größe ist in dem hier verwendeten Modell von Vorteil, da diese Größe auch bei Verwendung einer komplizierten Versagensfläche, in der die Materialfestigkeiten implizit enthalten sind, anwendbar ist. Eine Aufteilung in Gruppen wird nicht als notwendig erachtet, da hierbei weder der benutzte Speicherplatz noch der Rechenaufwand verringert werden.

# 5 Numerische Ergebnisse

In dieser Arbeit wird das elementfreie Galerkin-Verfahren verwendet, um diskrete Risse in einem Kontinuum (hier Beton) darzustellen. Das stark nichtlineare Verhalten des Werkstoffes bei der Rissentstehung wird über den Ansatz der kohäsiven Risse abgebildet.

Im Folgenden werden verschiedene Beispiele gezeigt, an denen die Verwendbarkeit der in Kapitel 4 vorgestellten Verfahren überprüft wird. Die verschiedenen Beispiele dienen dabei der Validierung verschiedener Parameter bzw. unterschiedlicher Teilbereiche des Simulationsmodells. Diese sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst.

Tabelle 5.1: Validierung des Simulationsmodells

Modell	Validierung
X-FEM-EFG	Verifikation des EFG-Ansatzes für diskrete Risse
3-Punkt-Biegeversuch	Kohäsive Risse, Risswachstum eines geraden Risses
Schubversuch	Risswachstum eines krummlinigen Risses
Biegezugversuch dynamisch	Dehnrateneffekt, Bestimmung der Parameter für die künstliche Viskosität
Dynamisches Abscheren einer Platte	Dynamische Rissentwicklung von krummlinigen Rissen
Detonation – Eindringcharakteristik	Parameter für die Entlastung der Volumenfunktion

Anschließend werden verschiedene Berechnungen eines Betonkörpers durchgeführt, der durch eine Kontaktdetonation beansprucht wird. Dabei werden die Eindringcharakteristik und der entstehende Rissverlauf mit den Versuchsergebnissen verglichen.

Zusammenfassend werden einige Anmerkungen zur Verwendbarkeit des Verfahrens zur Berechnung von Beton unter statischer und dynamischer Last gegeben.

## 5.1 Vergleich X-FEM – EFG

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diskrete Risse numerisch abzubilden. Während das Vorgehen, Risse an den Elementgrenzen anzuordnen, hier nicht weiter betrachtet wird, sollen zwei Methoden verglichen werden, bei denen Risse zwischen den Knoten verlaufen. Verglichen werden das elementfreie Galerkin-Verfahren (EFG, siehe Kapitel 3) und die Extended Finite Element Method (X-FEM, siehe Kapitel 2.5.2). Bei beiden Verfahren werden die Ansatzfunktionen so angepasst, dass Risse zwischen Knoten möglich sind.

Als Vergleichsmodell dient die in Kapitel 4.2.4 vorgestellte unendliche Platte mit einem endlichen diskreten Riss. Für eine solche Platte stellte Westergaard [147] 1939 eine analytische Lösung für verschiedene Rissfälle vor, mit der die Dehnungen bzw. die Spannungen in der Platte bestimmt werden können. Diese Lösung basiert auf dem Berechnungsansatz von Griffith [54]. Der Verlauf der Spannungen ist in Kapitel 4.2.4 vorgestellt.

Es soll hier eine Platte mit einem zugbeanspruchten Riss untersucht werden (Mode 1 Riss). Mit den Vergleichswerten kann eine Aussage über die Genauigkeit der gewählten Diskretisierung gemacht werden.

Mit den Gleichungen 4.53 und 4.54 können die Spannungen und mittels eines Stoffgesetzes auch die Dehnungen an jedem Punkt der Platte bestimmt werden. Das Stoffgesetz muss dafür allerdings invers zu der in der Finiten-Elemente-Methode üblichen Richtung angewendet werden. Invers deshalb, da aus den Spannungen die zugehörigen Dehnungen bestimmt werden müssen und nicht umgekehrt. Da für die vergleichenden Untersuchungen ein elastisches Stoffgesetz verwendet werden soll, ist die inverse Darstellung möglich. Für die Berechnungen wurde vereinfachend ein E-Modul von  $1000 \text{ N/mm}^2$ , eine Querkontraktionszahl von 0,2 und eine Plattendicke von 1,0 mm verwendet.

Die Spannungen senkrecht und parallel zum Riss besitzen an den Risspitzen eine Singularität. Diese Singularität ergibt bei Verwendung eines elastischen Stoffgesetzes eine unendliche Spannung. Werden allerdings reale Materialien verwendet, so würden diese Spannungsspitzen nicht entstehen. Beim Werkstoff Stahl werden diese Spannungsspitzen durch plastische Verformungen abgebaut. Im Beton werden die Spannungsspitzen durch den Rissfortschritt beim Übergang von Mikrorissen zu Makrorissen abgebaut. Dieser Effekt kann z.B. über eine Bruchprozesszone berücksichtigt werden.

Die Singularität bereitet bei numerischen Simulationen immer gewisse Schwierigkeiten. So ist es mit Finiten-Elementen nicht möglich, die Dehnung bzw. die Spannung an der Risspitze zu bestimmen. Diese nimmt je nach Dis-

diskretisierung unterschiedlich hohe Werte an. Abhilfe schafft die Verwendung von Spannungsintensitätsfaktoren ( $K_I$ ,  $K_{II}$ ,  $K_{III}$ ).

Werden die Dehnungen bzw. die Spannungen allerdings mit Hilfe des EFG-Verfahrens über eine Wichtungsfunktion bestimmt, werden die Werte an der Rissspitze so verschmiert, dass eine Berechnung durchführbar ist (siehe Kapitel 4.3.2). Es ist dies dann ein nichtlokaler Ansatz der Dehnungen bzw. Spannungen an der Rissspitze.

Sowohl mit X-FEM als auch mit EFG-Verfahren wurden verschiedene Modelle verschiedener Diskretisierung untersucht. Bei X-FEM wurden zwei verschiedene Ansätze verwendet. Neben einem Ansatz, der nur zusätzliche Freiheitsgrade für die geteilten Elemente berücksichtigt (Sprung-Funktion), wurde auch ein Ansatz gewählt, bei dem zusätzlich noch Freiheitsgrade für die Rissspitze verwendet werden.

Die analytische Lösung von Westergaard [147] geht von einer unendlichen Platte aus. Im benutzten Modell wurden daher die von Westergaard bestimmten Spannungen an den Rändern der Diskretisierung zusätzlich angebracht, um der begrenzten Plattengeometrie Rechnung zu tragen. Ein Modell mit 270 Freiheitsgraden ist in Abbildung 5.1 dargestellt. In dieser Abbildung sind die aus den Randspannungen der unendlichen Platte sich ergebenden äußeren Lasten zu erkennen. Die Randspannungen werden mit der Länge des an diesem Knoten vorhandenen Einflussbereiches multipliziert, um die Knotenkräfte des freien Randes zu erhalten. Die Auflager sind so gewählt, dass sich ein statisch bestimmtes System ergibt. Es entstehen also durch die Lagerung keine weiteren äußeren Kräfte.

Beispielhaft sind in Abbildung 5.2, links die Spannungen senkrecht zum Riss gezeigt. Man erkennt die Spannungsspitzen an den Rissspitzen und die Abnahme dieser Spannungsspitzen über das Kontinuum. Die Spannung zwischen den Rissspitzen ist null.

Um die Ergebnisse, die mit EFG-Verfahren und X-FEM berechnet wurden, mit der analytischen Lösung vergleichen zu können, wurde folgender Energiefehler  $e$  verwendet

$$e = \frac{\int (\sigma^n - \sigma^e) \cdot (\epsilon^n - \epsilon^e) d\Omega}{\int \sigma^e \cdot \epsilon^e d\Omega} \quad (5.1)$$

Dieser Energiefehler  $e$  wurde über den ganzen Bereich des berechnenden Kontinuums integriert (siehe Abbildung 5.2, rechts).

Für den Mode 1 Riss sind die Ergebnisse in Abbildung 5.3 dargestellt. In allen benutzten Simulationsverfahren sinkt der Energiefehler  $e$  mit zunehmender Anzahl der Freiheitsgrade. Der Fehler sinkt also mit zunehmender Feinheit

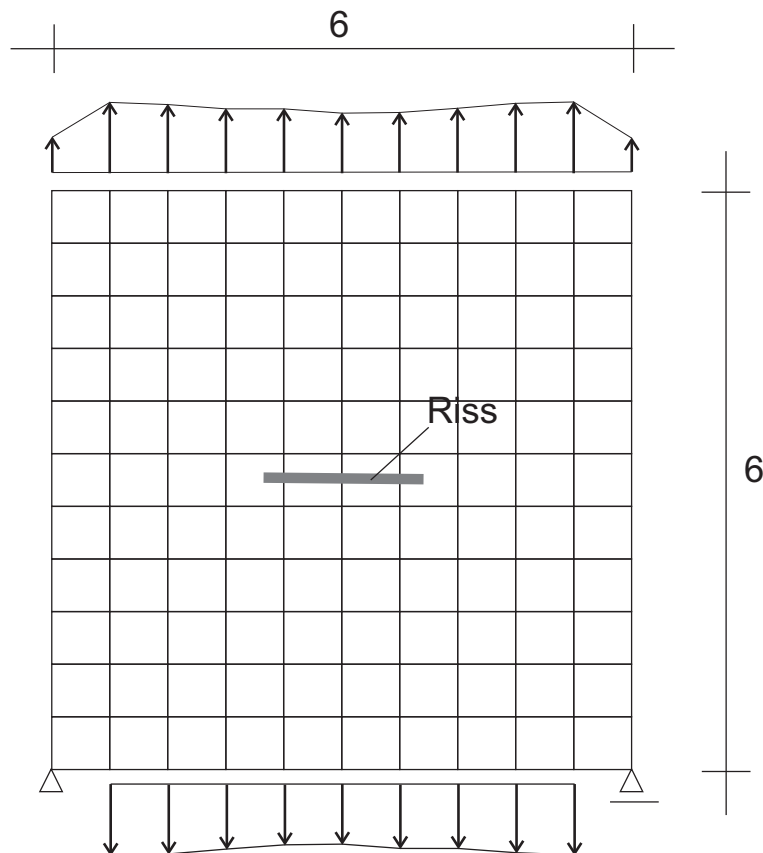


Abbildung 5.1: Vernetztes Modell mit 110 Elementen / Integrationszellen

der Diskretisierung. Da der Fehler in der doppelt logarithmischen Darstellung linear fällt, kann von einer guten Konvergenz ausgegangen werden. Bei den X-FEMs mit zusätzlichen Freiheitsgraden an der Rissspitze zeigt sich erwartungsgemäß ein kleinerer Fehler. Durch die zusätzlichen Freiheitsgrade werden die Spannungen an der Rissspitze dort exakter bestimmt. Der dadurch entstehende numerische Aufwand ist relativ klein, der Aufwand der Implementierung ist aber relativ groß.

Durch eine relativ einfach umzusetzende Verfeinerung des Netzes im Bereich der Rissspitze beim EFG-Verfahren lässt sich der Fehler analog vermindern. Dadurch ist der Fehler bei vergleichbarer Anzahl der Freiheitsgrade mit dem der X-FEMs mit zusätzlichen Freiheitsgraden vergleichbar.

## 5.2 Unbewehrter Balken, 3-Punkt-Biegeversuch

Das hier vorgestellte Simulationsmodell wird benutzt, um einen unbewehrten Betonbalken zu berechnen, bei dem auf der Unterseite ein künstlicher Riss eingeführt wurde. Solche Versuche werden standardmäßig zur Bestimmung

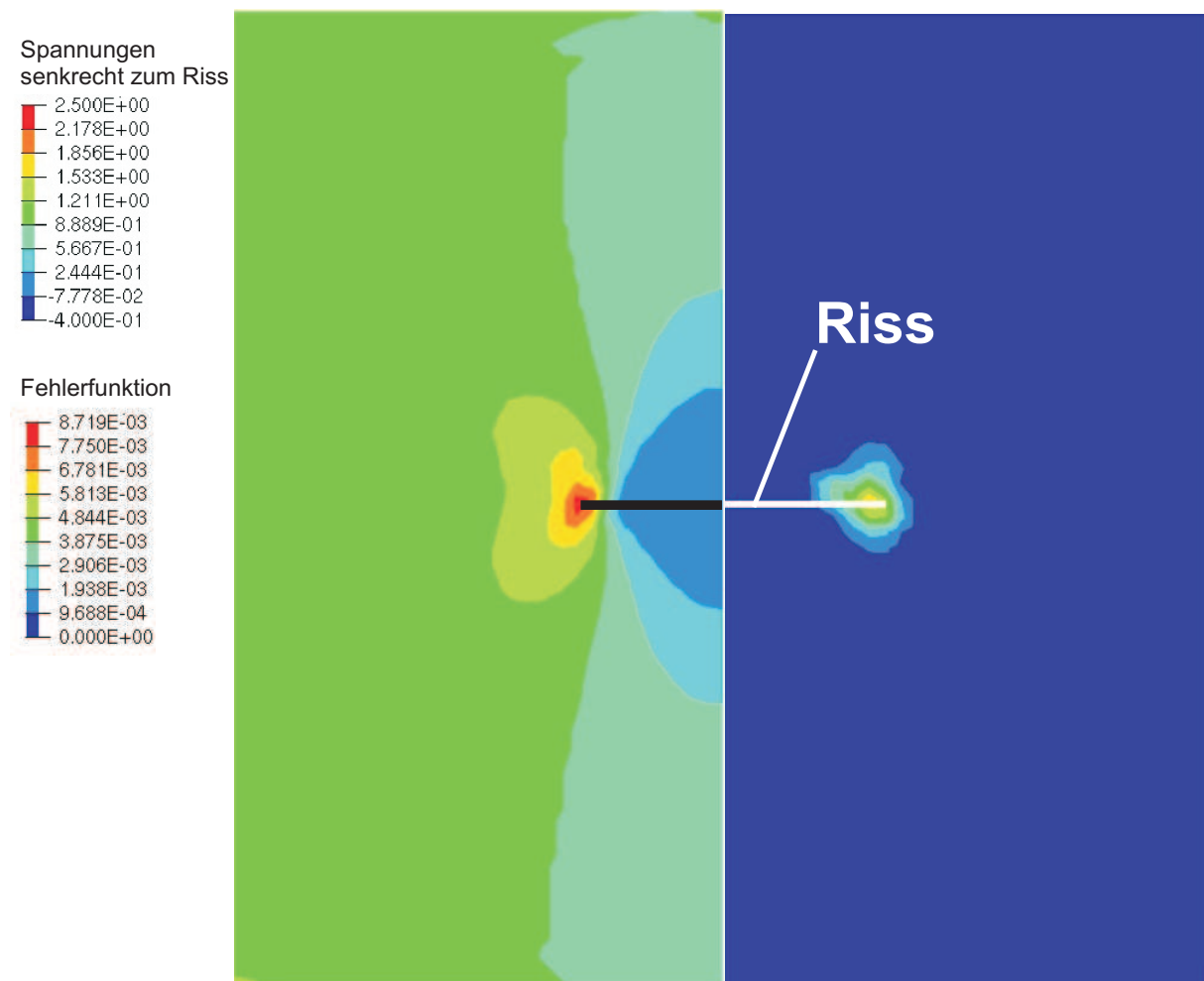


Abbildung 5.2: Modell mit 110 Integrationszellen – Spannungen normal zum Riss (links), Fehlerfunktion beim EFG-Riss (rechts)

der Bruchenergie durchgeführt. Es werden hier Versuchsergebnisse von Körmeling [74] und von Stegemann [132] verwendet. Die verwendeten Materialparameter sowie die Abmessungen der Probekörper (Abbildung 5.4) sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt.

Das dreidimensionale Problem wird in ein zweidimensionales Koordinatenmodell umgesetzt (siehe Kapitel 2.1.3). Es wird hier der ebene Dehnungszustand verwendet. Untersuchungen von Schmith [124] haben gezeigt, dass sich nur ein geringer Unterschied zu einer Berechnung unter Verwendung des ebenen Spannungszustandes ergibt.

Entgegen den Ausführungen im vorherigen Kapitel wird hier ein Saint-Venant-Kriterium für den Rissfortschritt verwendet, das heißt, dass beim Überschreiten der Hauptzugdehnungen von einem Risswachstum ausgegangen wird. Dieses Kriterium ist für ein biegezugbeanspruchtes Bauteil ausreichend,

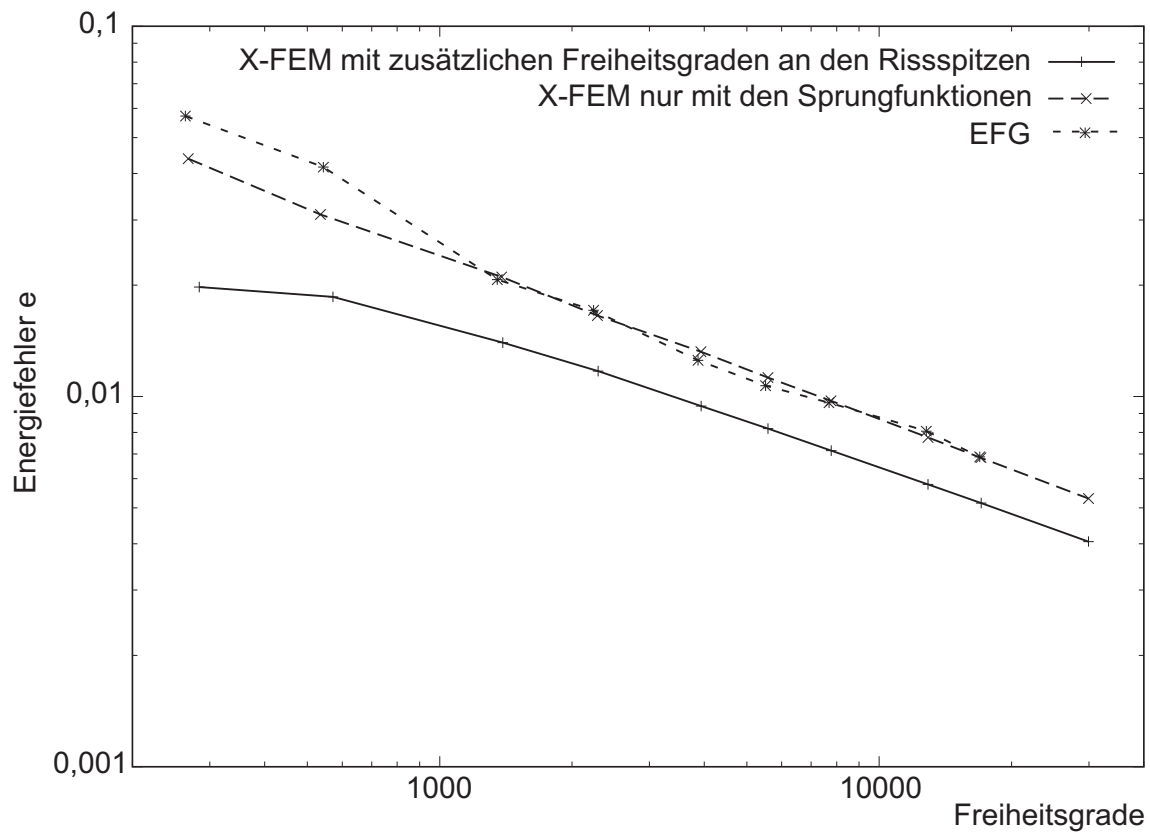


Abbildung 5.3: Energiefehler für den Mode 1 Riss

Tabelle 5.2: Materialparameter und Geometrie der beiden untersuchten 3-Punkt-Biegeversuche

Kennwert	Körmeling	Stegemann
E-Modul [ $N/mm^2$ ]	20 000	24 977
Querdehnzahl $\nu$ [–]	0,20	0,20
Zugfestigkeit $f_{t,static}$ [ $N/mm^2$ ]	2,4	3,2
Bruchenergie $G_f$ [ $N/m$ ]	113	141,75
Höhe $h$ [ $mm$ ]	100	200
Rissabstand $l_1 = l_2$ [ $mm$ ]	225	595
Risslänge $l_{crack}$ [ $mm$ ]	50	100
Dicke $d$ [ $mm$ ]	100	100
Auflagerabstand $l_r$ [ $mm$ ]	0	30



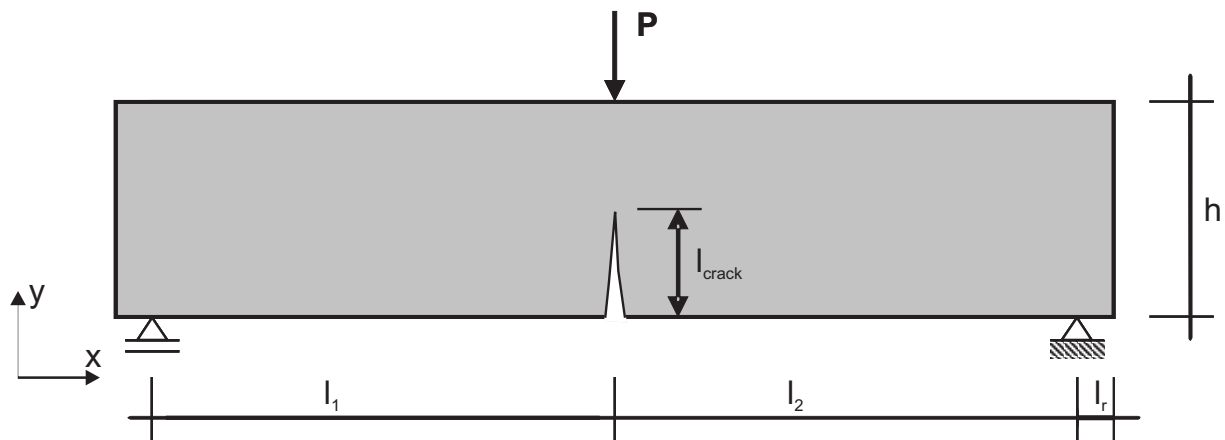


Abbildung 5.4: Abmessungen der Biegebalken

da weder ein Schub- noch ein Druckversagen zu erwarten ist. Ebenfalls wurde die Rissrichtung so festgehalten, dass ein Risswachstum nur in  $y$ -Richtung möglich ist. Die Untersuchungen haben gezeigt, dass im Fall eines reinen Biegezugversagens kein Unterschied in den Ergebnissen zwischen einer Berechnung mit dem Saint-Venant-Kriterium und der Versagensfläche nach Hsieh [63] besteht. Die Last-Verformungskurven sind nahezu identisch.

In Abbildung 5.5 sind die Dehnungen senkrecht zum Riss in einem Schnitt längs des Risses dargestellt. Die Dehnungen wurden in dem hier verwendeten Modell über eine MLS-Interpolation bestimmt. Diese ist für jeden beliebigen Punkt des Problemgebietes durchführbar. Im Bereich des Risses sind wie zu erwarten keine Dehnungen zu verzeichnen. An der Rissspitze ist eine Dehnungsspitze zu erkennen. Die Dehnungen fallen in einem kleinen Abstand von der Rissspitze schnell ab und wechseln das Vorzeichen.

Die Dehnungen an der Rissspitze dienen als Kriterium für den Rissfortschritt und werden ebenfalls über eine MLS-Interpolation bestimmt. Das heißt, dass die Dehnungen im Einflussbereich der Rissspitze zur Berechnung verwendet werden. Durch Verwendung dieses nichtlokalen Ansatzes kann an der Rissspitze ein Wert für die Dehnungen berechnet werden.

Die berechneten Last-Verformungs-Kurven für die Versuchsgeometrie von Körmeling sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Die berechneten Kurven zeigen bis zum Erreichen der maximalen Last eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen. Im Nachbruchbereich ergeben sich bei Verwendung einer exponentiellen oder einer bilinearen Entfestigung in der Bruchprozesszone höhere Kräfte als bei den Versuchen. Die Ergebnisse mit der Annahme einer linearen Entfestigung in der Bruchprozesszone zeigen bis zur Verformung von 0,2 mm eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

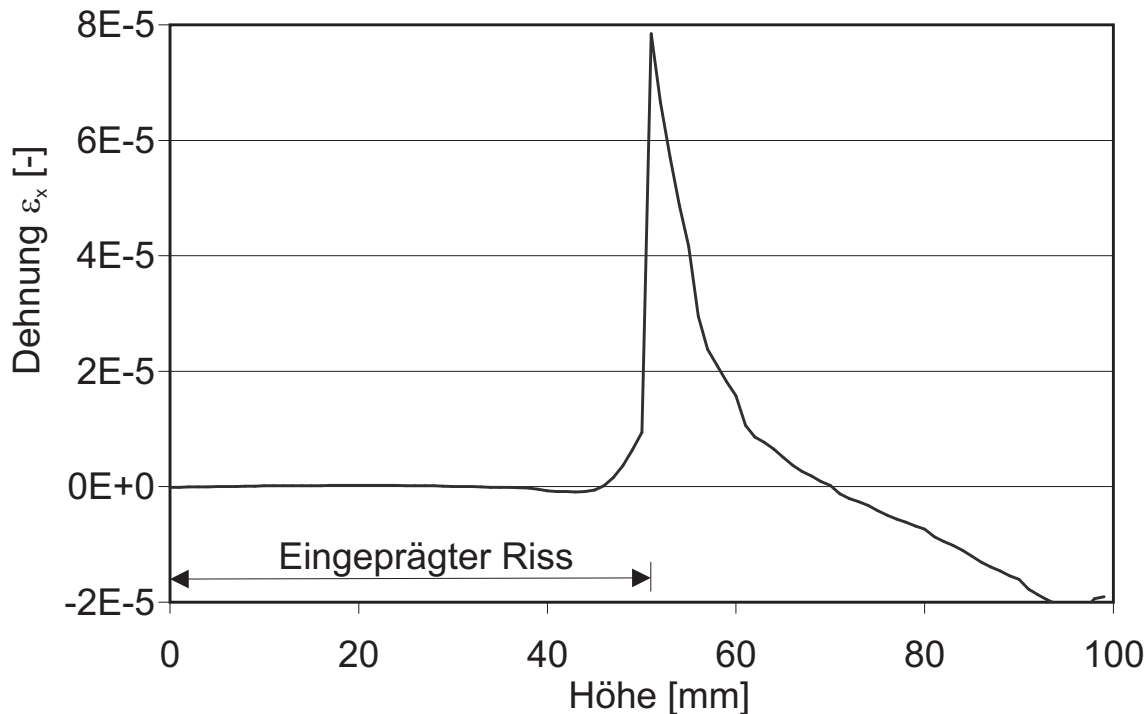


Abbildung 5.5: Verlauf der Dehnungen in x-Richtung  $\epsilon_x$  beim unbewehrten Balken in einem Schnitt in y-Richtung in Höhe des Risses

Danach werden die Lasten überschätzt, da im verbleibenden Druckbereich des Balkens hohe Spannungen auftreten. Da bei diesen Untersuchungen kein Entstehen von weiteren Rissen im druckbeanspruchten Bereich zugelassen wurde, führen diese Druckspannungen nicht zu einem lokalen Druckversagen des Betons wie bei Verwendung eines Schädigungsmodells.

Die Last-Verformungskurve weist Zacken auf. Diese entstehen beim Risswachstum. Da bei diskreten Rissen eine Risslänge definiert werden muss, die minimal bei einem diskreten Rissfortschritt verwendet wird, kommt es beim Rissfortschritt zu einem sprunghaften Lastabfall. Bei Versuchen wird ein solcher sprunghafter Lastabfall ebenfalls sichtbar, da durch die inhomogene Verteilung des Materials der Riss nicht kontinuierlich wachsen kann.

Im Vergleich zu anderen Autoren – zum Beispiel zum Schädigungsmodell von Rots [120] – sind die Ergebnisse in der gleichen Größenordnung. Es zeigt, dass ein Schädigungsmodell die Last-Verformungskurve im Bereich der Maximallast nur ungenau wiedergibt – allerdings im Nachbruchbereich das Verhalten des Betons besser abbilden kann.

Am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe wurden von Stegemann [132] zur Bestimmung der Bruchenergie ebenfalls 3-Punkt-Biegeversuche durchgeführt. Abbildung 5.7 zeigt einen dieser Balken kurz nach dem Durchriss. Die Abmessungen dieser Versuche sind etwa dop-

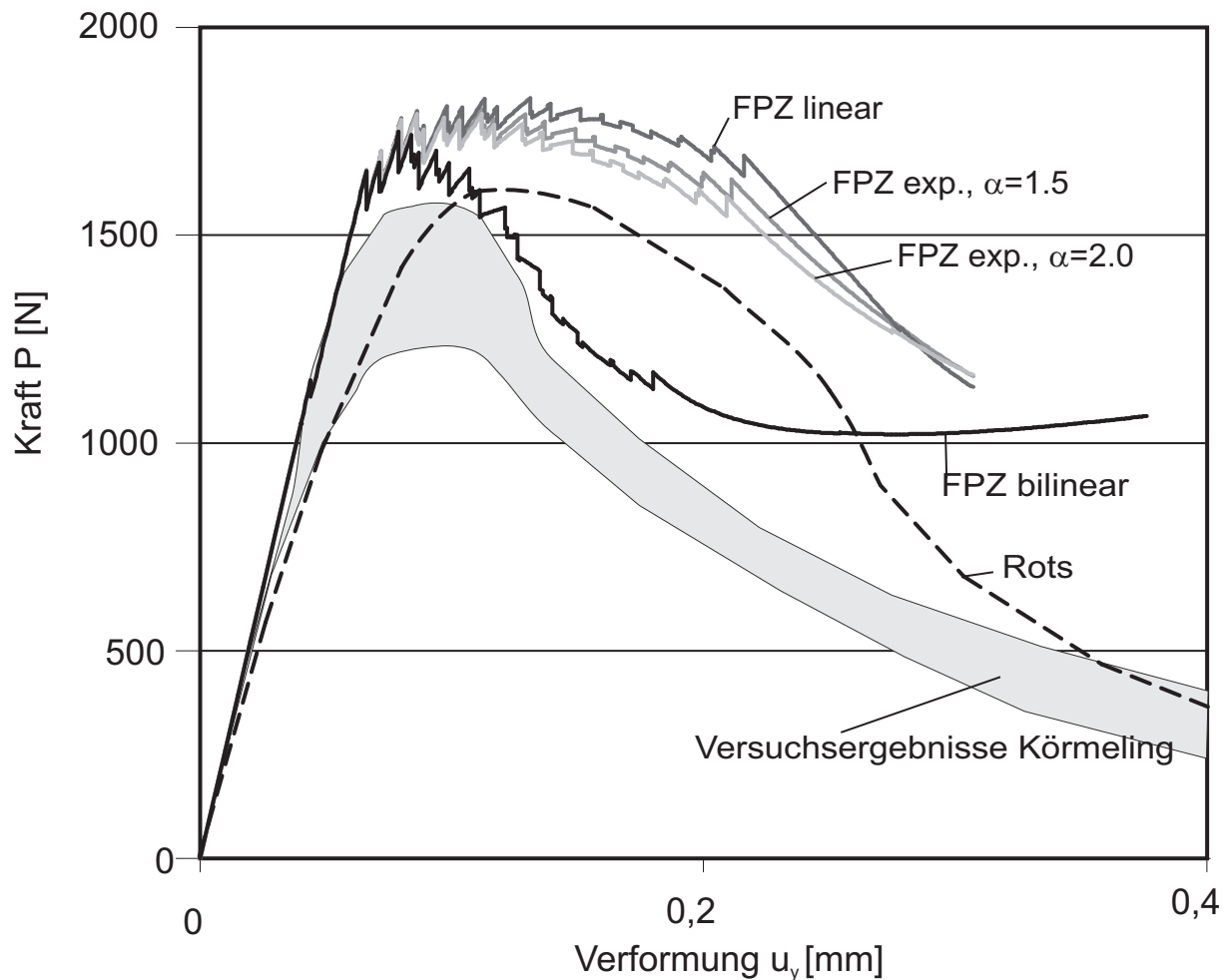


Abbildung 5.6: Drei-Punkt-Biege-Versuch – Vergleich von Experimenten von Körmeling [74] mit numerischen Ergebnissen (exponentielle, lineare und bilineare Entfestigung in der Bruchprozesszone), Ergebnisse von Rots [120] (Schädigungsgesetz)

pelt so groß wie die von Körmeling und sind in Tabelle 5.2 zusammengestellt.

Die Diskretisierung findet hier mit einem Netz mit der Kantenlänge von 23 mm statt, das im Bereich der Auflager auf ein Netz der Kantenlänge 12 mm und im Bereich des Risses auf ein Netz der Kantenlänge 6 mm verkleinert wird. Es werden so 817 Integrationszellen und 2000 Freiheitsgrade verwendet.

Die numerischen Ergebnisse zeigen ähnlich wie bei den Berechnungen der Versuche von Körmeling bei Verwendung der bilinearen Entfestigung in der Bruchprozesszone eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen (siehe Abbildung 5.8). Die Untersuchungen zeigen weiterhin, dass diese Rissfortschrittslänge keinen wesentlichen Einfluss auf das Berechnungsergeb-



Abbildung 5.7: 3-Punkt-Biegeversuch (Stegemann [132]) kurz nach dem Durchriss

nis hat.

### 5.3 Schubversuch

Ein weiterer üblicherweise zur Überprüfung von Simulationsmodellen genutzter Kalibrierungsversuch ist der von Arrea [8] durchgeführte Schubversuch mit einem Anfangsriss. An diesem Versuch lässt sich die Rissbildung bei sich ändernder Hauptrichtung überprüfen. Der Vergleich mit diesem Versuch ist insbesondere bei elementbehafteten Modellen von Interesse, da sich bei diesem Versuch nicht zu den Elementrändern parallel verlaufende Risse ergeben.

In Abbildung 5.9 sind die von Arrea verwendete Geometrie und die verwendeten Materialparameter dargestellt. Die Last wurde von Arrea über eine Stahltraverse aufgebracht. Die Belastung, die aus dieser Versuchsgeometrie resultiert, ist in kommerziellen Programmcodes relativ schwierig umzusetzen. In der hier verwendeten Simulation wurde die 0,13-fache Last, die im letzten Zeitschritt am mittleren Punkt auftritt, an der linken Ecke aufgebracht. Diese von den meisten Autoren vernachlässigte Belastung scheint allerdings beim Vergleich der sich ergebenden Rissgeometrie eine große Relevanz zu ha-

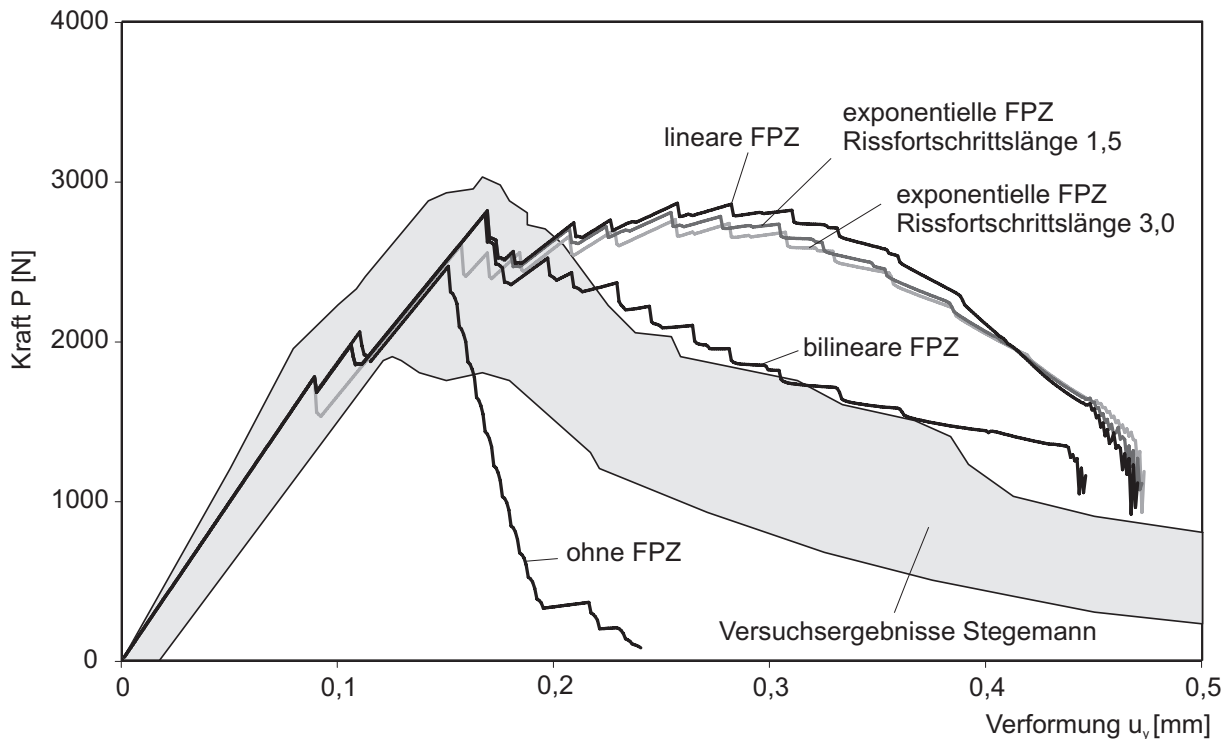


Abbildung 5.8: Drei-Punkt-Biege-Versuch – Vergleich von Experimenten von Stegemann [132] mit numerischen Ergebnissen (exponentielle, lineare und bilineare Entfestigung in der Bruchprozesszone)

ben. Die Last-Verformungsbeziehungen wurden über das so genannte Crack mouth sliding displacement (CMSD) erstellt, das ein Maß für die Rissverschiebung der Rissufer darstellt (siehe auch Abbildung 5.10).

In Abbildung 5.10 sind die überhöhten Verformungen kurz vor Abbruch der Berechnung dargestellt. Vergleicht man den sich einstellenden Rissverlauf (Abbildung 5.11), so erkennt man eine gute Übereinstimmung zwischen Versuch und Simulation. Der Rissverlauf, der sich bei anderen Autoren mit einem diskreten Rissansatz (Prasad [110]) oder mit einem Schädigungsmodell (Akkermann [3]) ergibt, ist wesentlich steiler.

Vergleicht man das CMSD der Versuche mit den numerischen Ergebnissen, so fällt eine etwas zu geringe Anfangssteifigkeit auf. Diese kann daran liegen, dass die Länge des Risses je nach Kriterium an der Risspitze (Sichtbarkeit, Diffraktion, Transparenz, siehe Kapitel 3.2.5) um den Einflussbereich länger sein kann als im Versuch und dadurch die Anfangssteifigkeit geringer ausfällt. Eine Berechnung ohne Bruchprozesszone ergibt, wie zu erwarten, eine wesentlich kleinere Last als bei den Versuchen beobachtet wurde (siehe Abbildung 5.12).

Da bei diesem Versuch Kontakt in der Bruchprozesszone auftritt, werden

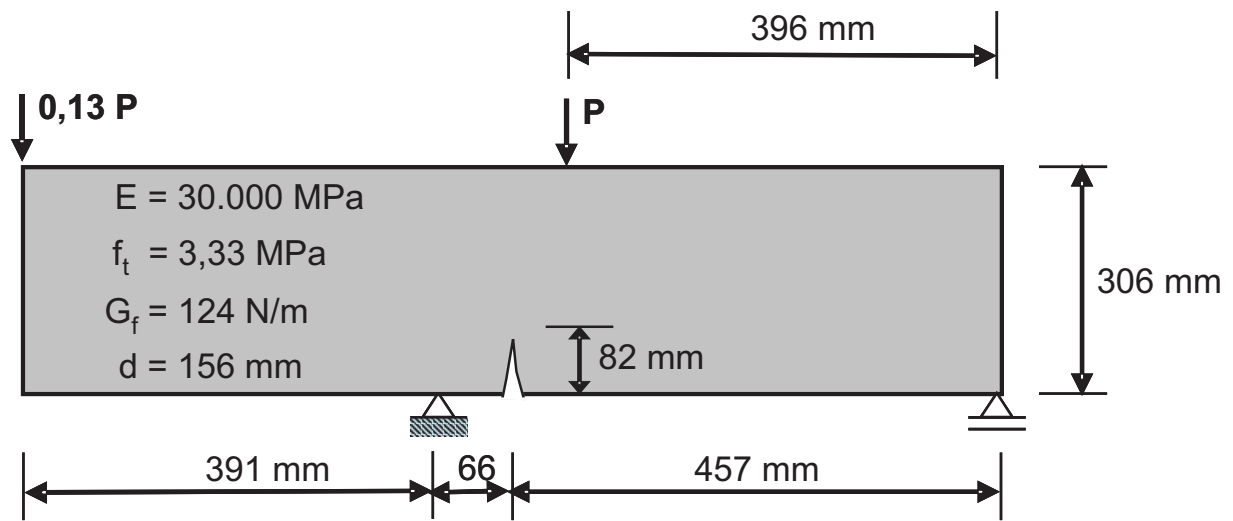


Abbildung 5.9: Schubversuch – Geometrie

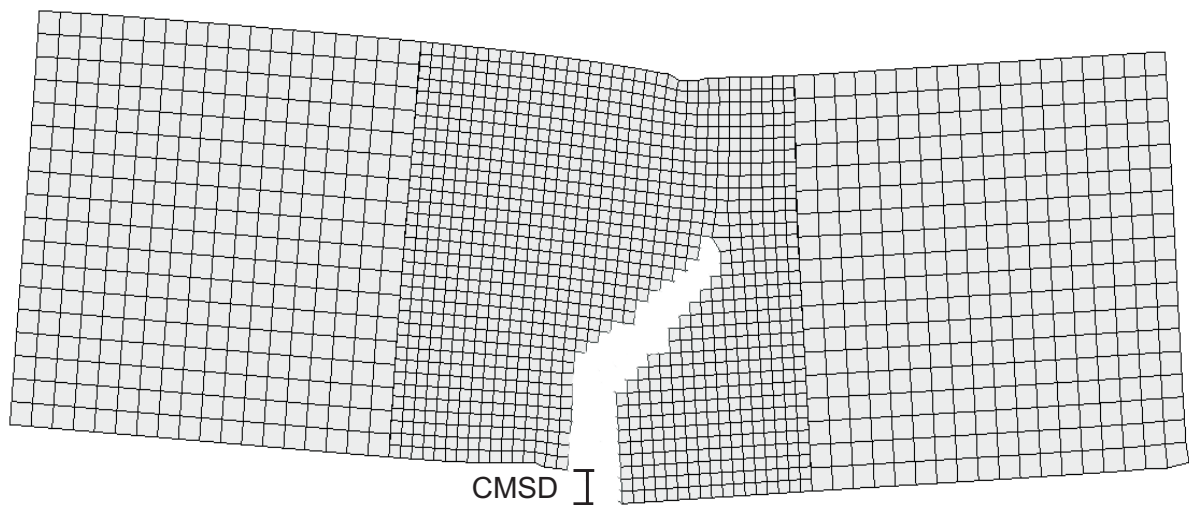


Abbildung 5.10: Schubversuch – Diskretisierung, Überhöhter Verformungsplot

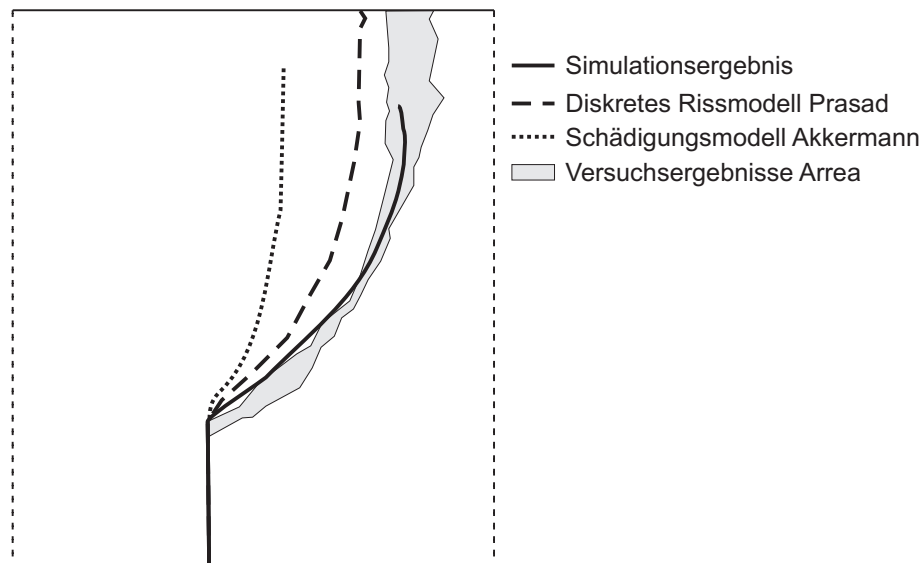


Abbildung 5.11: Schubversuch – Vergleich des Rissverlaufs

Unterschiede zwischen den verschiedenen Entlastungspfaden in der Bruchprozesszone deutlich (siehe Kapitel 4.3.3). Dieser Entlastungspfad ist notwendig, da bei einer Entlastung nicht von einem sofortigen Rückgang der Kräfte in der Bruchprozesszone auf Null ausgegangen werden kann. Eine lineare Entlastung ergibt wie die konstante Entlastung ohne Bruchprozesszonekräfte beim Kontakt ein “Flattern” der Rissufer. Werden die Bruchprozesszonekräfte auch bei einem Kontakt angesetzt, ergibt sich eine relativ glatte Kurve, deren Maximallast gut mit den Versuchsergebnissen korreliert. Der Ansatz der Bruchprozesszonekräfte auch bei Kontakt ergibt zwar glatte Kurven, spiegelt aber das mechanische Verhalten von Beton nicht wieder. Bruchprozesszonekräfte ergeben bei einem vorhandenen Kontakt keinen Sinn.

## 5.4 Biegezugversuch dynamisch

Zur Validierung des vorgestellten EFG-Ansatzes mit diskreten Rissen bei dynamischen Rissvorgängen werden Versuchsergebnisse von Du [40] verwendet. Du führt Untersuchungen an unbewehrten Betonbalken durch, deren Abmessungen in Abbildung 5.13 zu entnehmen sind. Die Materialeigenschaften sind in Tabelle 5.3 zusammengestellt. Die Versuchskörper wurden mit einer Fallmasse von 9,68 kg beaufschlagt, die aus einer Höhe von 1 m auf den Balken fallen gelassen wurde. Die Dehnungen im Beton wurden während des Versuches an drei verschiedenen Stellen in Abhängigkeit der Zeit gemessen. Die Lage der Dehnmessstreifen ist in Tabelle 5.4 angegeben. Ebenso wird



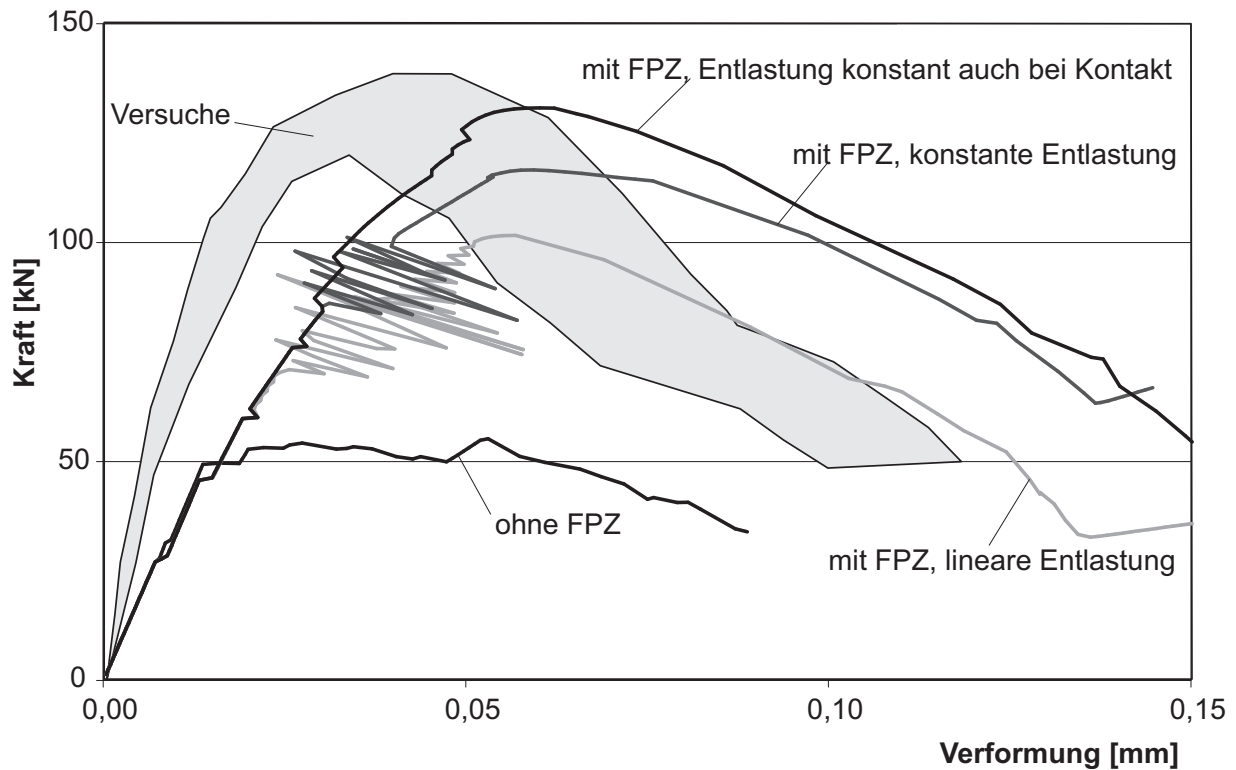


Abbildung 5.12: Schubversuch – Last-Verformungs-Kurve

das Wachstum des Risses mit Hilfe der Moiré-Interferometrie aufgezeichnet. Die Last-Zeit-Funktion der Belastung des Probekörpers wurde ebenfalls aufgezeichnet und ist in Abbildung 5.14 dargestellt.

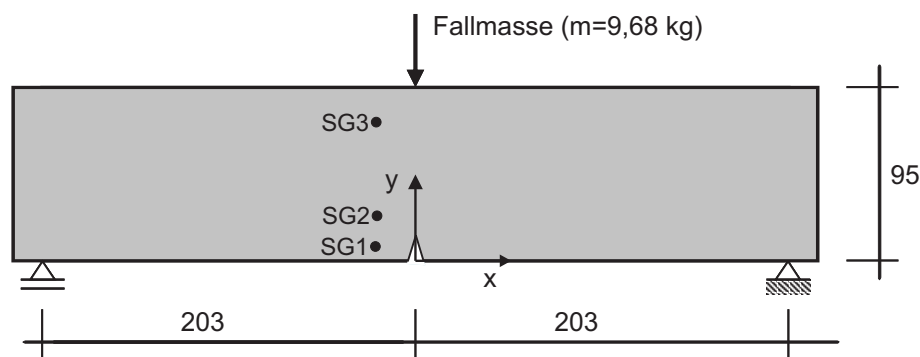


Abbildung 5.13: Geometrie beim Versuch von Du [40]

Untersuchungen von Borschnek [25] zeigten, dass durch das diskrete Wachsen des Risses Schwingungen ausgelöst werden, die sich durch das Material fortpflanzen. Borschnek filtert diese Schwingungen mit einem mathematischen Filter aus den einzelnen Ergebnisgrößen heraus. Dieses Vorgehen ist bei der Betrachtung einzelner Ausgabegrößen durchführbar, kann aber bei



Tabelle 5.3: Materialeigenschaften

Druckfestigkeit	55 N/mm <sup>2</sup>
Zugfestigkeit (dynamisch)	13,08 N/mm <sup>2</sup>
E-Modul, Zug, dynamisch	34.475 N/mm <sup>2</sup>
E-Modul, Druck, dynamisch	41.370 N/mm <sup>2</sup>
Bruchenergie	0,103 N/mm

Tabelle 5.4: Lage der Dehnmessstreifen

Dehnmessstreifen	x [mm]	y [mm]
SG1	-12,7	12,7
SG2	-12,7	25,4
SG3	-12,7	76,2

komplexen Problemen nicht verwendet werden.

Es zeigte sich, dass sich diese durch das Risswachstum ausgelösten, hochfrequenten Schwingungen Eigenschwingungen der Massenpunkte sind. Diese Schwingungen werden von dem verwendeten elastischen Stoffgesetz nicht gedämpft. Die Schwingungen können mit einer linearen künstlichen Viskosität (siehe Kapitel 2.4.4) gefiltert werden. Die Wahl des Parameters  $b_{lin}$  ist entsprechend Kapitel 3.7.3 durchzuführen. Die lineare künstliche Viskosität dient im Allgemeinen dazu, die Oszillationen im Nachlauf der Stoßwelle zu dämpfen.

Die von Du [40] durchgeführten Versuche wurden mit dem EFG-Verfahren und diskreten Rissen unter Verwendung der linearen Viskosität berechnet. Die Versuchsergebnisse an den einzelnen Messaufnehmern können in Abbildung 5.15 mit den berechneten Größen verglichen werden. Für den untersten Messaufnehmer (SG1) zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die Dehnungen am Messaufnehmer SG2 treten in der Berechnung leicht zeitversetzt auf. Es kann aber trotzdem von einer guten Übereinstimmung gesprochen werden. Sowohl beim Messaufnehmer SG1 als auch beim Messaufnehmer SG2 gehen die berechneten Dehnungen nach dem Vorbeilaufen des Risses am Messaufnehmer im Mittelwert auf Null zurück. Bei den Versuchen ist am Messaufnehmer noch eine Dehnung vorhanden, die bei einem Riss direkt neben dem Messaufnehmer nicht sinnvoll erscheint. Beim Messaufnehmer SG3 findet bei der Berechnung die Entlastung des Rissufers erst wesentlich später als im Versuch statt.

Es bleibt festzuhalten, dass für die Berechnung von dynamisch beanspruchten Kontinua mit diskreten Rissen, die mit dem elementfreien Galerkin-

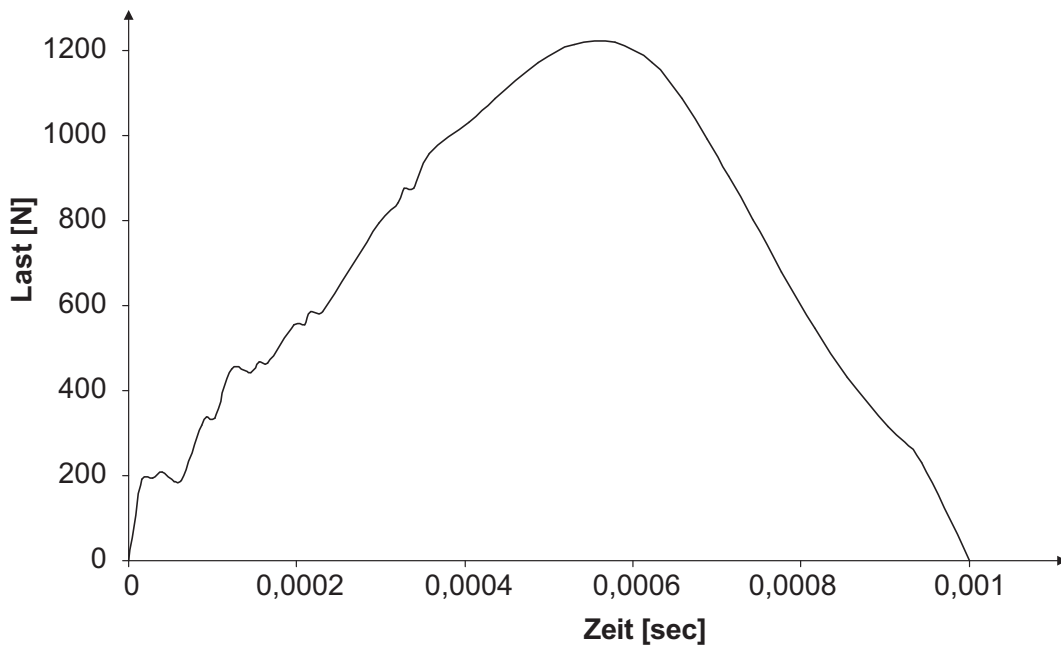


Abbildung 5.14: Lastamplitude beim Versuch von Du [40]

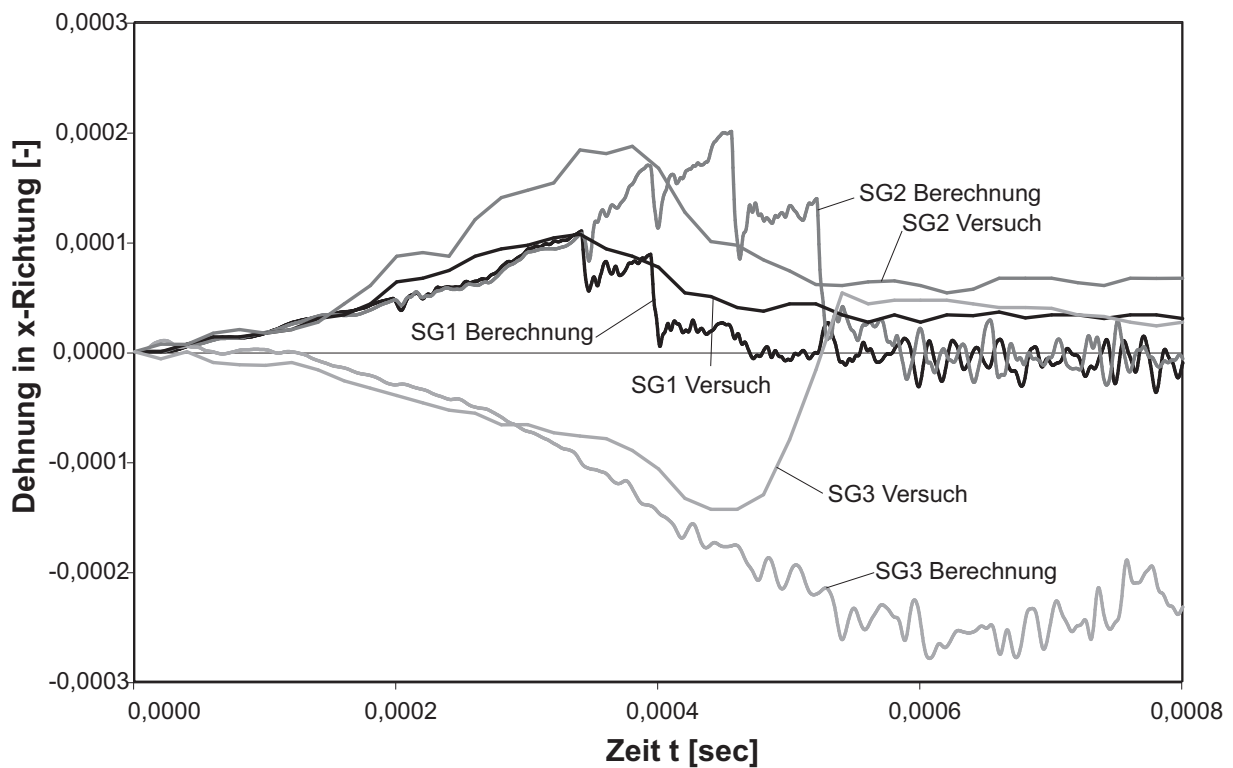


Abbildung 5.15: Vergleich der Versuchsergebnisse von Du [40] mit numerischen Ergebnissen

Verfahren eingefügt werden, eine künstliche Viskosität erforderlich ist. Damit können die Knotenschwingungen, die durch den Rissfortschritt angeregt werden, gedämpft werden.

## 5.5 Abscheren einer Platte unter Detonationsbelastung

Neben dem in Kapitel 5.3 dargestellten Schubversuch existieren verschiedene andere Versuchsergebnisse an Platten, die auf Abscheren beansprucht werden. Es gibt sowohl statische (siehe Mattock [89]) als auch dynamische Versuchsergebnisse (siehe Albritton [4]). Die Untersuchung von solchen Platten, die mit einer durch eine Detonation ausgelöste Luftstoßwelle belastet werden, ergeben ein Versagensbild, das mit der Fachwerkanalogie nicht zu erklären ist. Es bilden sich Schubrisse direkt an der Auflagerkanten (siehe Gebbeken [47]).

Die verschiedenen sich bei den Versuchen ergebenden Rissbilder sind in Abbildung 5.16 dargestellt. Die Versuche von Albritton [4], bei denen Betonbalken mit einer Druckwelle von bis zu 58,3 MPa beaufschlagt werden, zeigen je nach Bewehrung unterschiedliche Versagensformen. Während bei den bewehrten Versuchskörpern große Teile des Balkens unbeschädigt blieben und nur der innere Teil des Balkens abscherete, werden die unbewehrten Balken komplett zerstört. Die Versuche von Albritton werden im Folgenden untersucht. Verglichen wird hierbei nur die Ausbildung der Risse bei unterschiedlicher Belastungsgeschwindigkeit, da keine weiteren Versuchsergebnisse vorliegen.

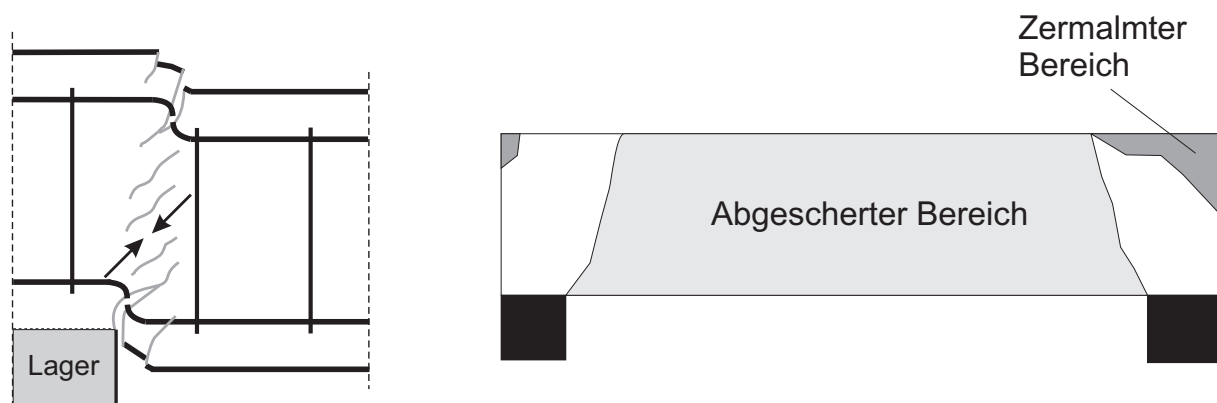


Abbildung 5.16: Rissbild bei den Versuchen von Mattock [89] (links) und Albritton [4] (rechts)

Für die Abbildung der Versuche wurde ein dreieckiger Last-Zeit-Verlauf mit einer maximalen Last von 20 MPa verwendet. Während für die Anstiegszeit eine Dauer von 0,05 msec angenommen wurde, wird für den Abfall der Last eine Zeitdauer von 5 msec verwendet. Die Abmessungen des Körpers sind in Abbildung 5.17 dargestellt. Als Diskretisierung wird ein Hintergrundnetz mit dem Knotenabstand von 10 mm benutzt. Der E-Modul beträgt  $34.500 \text{ N/mm}^2$ . Der Dehnrateneffekt und die Bruchprozesszone werden berücksichtigt.

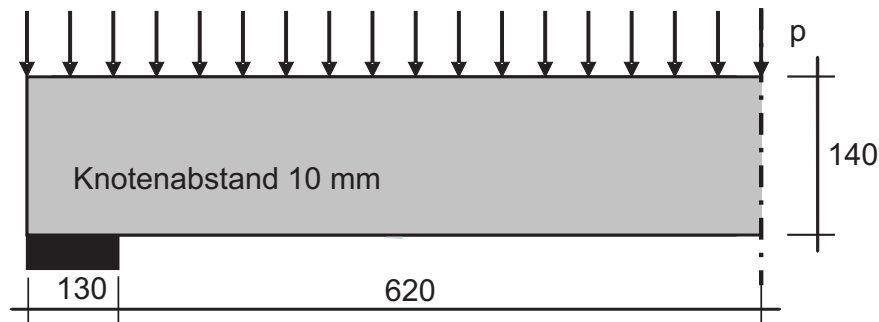


Abbildung 5.17: Abmessungen des untersuchten Balkens

In Abbildung 5.18 ist der sich ergebende Rissverlauf dargestellt. Man erkennt ein von der Auflagerkante ausgehendes Rissband. Dieses spiegelt die Rissgeometrie des Versuches sehr gut wieder. Rechts neben dem Auflager sind drei nahezu senkrechte Risse zu erkennen. Diese entstehen durch die Trägheit des Körpers und die damit resultierenden Zugspannungen an der Unterseite, die durch die fehlende Bewehrung nicht aufgenommen werden können.

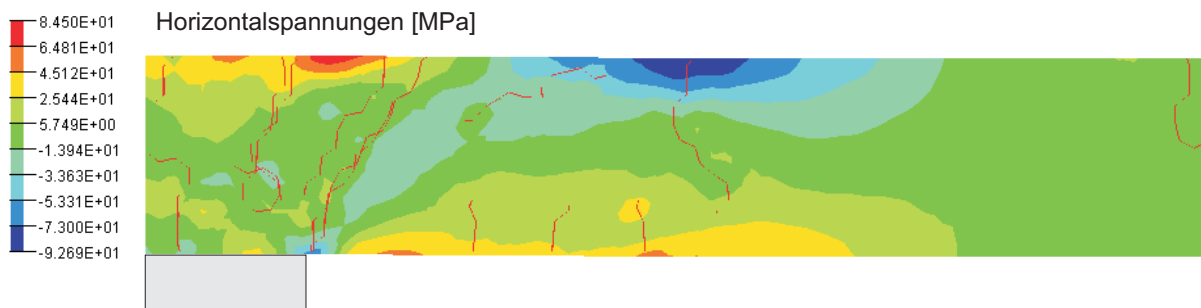


Abbildung 5.18: Rissverlauf

## 5.6 Kontaktdetonation

Ziel dieser Arbeit ist die Anwendung des elementfreien Galerkin-Verfahrens zur Berechnung von Beton unter hochdynamischen Belastungen. Mit hochdynamisch sind hier Belastungen gemeint, bei denen Dehnraten über  $100 \text{ sec}^{-1}$  auftreten. Untersucht werden sollen Detonationen, bei denen der Sprengstoff einen direkten Kontakt zum Beton hat. Auch hier müssen verschiedene Fälle unterschieden werden. Während die Berechnungen mit einer aufgesetzten Ladung durchgeführt wurden, sind in der Sprengpraxis verdämmte Bohrlochladungen üblich, das heißt, der Sprengstoff wird von mehreren Seiten vom Beton umschlossen. Bei einer Bohrlochsprengung wird das Bohrloch nach dem Einfüllen des Sprengstoffes zusätzlich mit unterschiedlichen Materialien verschlossen.

Die Berechnung einer Bohrlochsprengung ist mit dem hier vorgestellten Simulationsmodell theoretisch möglich. Da hierfür aber ein dreidimensionaler Rissansatz notwendig ist, werden Bohrlochsprengungen im Weiteren nicht betrachtet.

### 5.6.1 Versuchbeschreibung

Am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie der Universität Karlsruhe wurden zur Bestimmung der Materialparameter von Beton unter hochdynamischer Beanspruchung Versuche mit einem durch eine Kontaktdetonation beaufschlagten Betonkörper durchgeführt.

Die bei den meisten Versuchen verwendeten Körper hatten die Abmessungen  $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$ . Die Körper waren in dem zu untersuchenden Bereich unbewehrt und hatten lediglich an den Rändern eine leichte Transportbewehrung. Es wurde ein Beton der Festigkeit B35 verwendet (DIN 1045, 1988) was einer Betonfestigkeit von C30/37 (DIN 1045-1, 2001) entspricht. Die Zuschläge wiesen ein Größtkorn von 16 mm auf.

Der Sprengstoff wurde als so genannter Plane-Wave-Generator (siehe Abbildung 5.19) ausgebildet und bestand aus einem äußeren Mantel mit einem schnelleren Sprengstoff (Composition B, Detonationsgeschwindigkeit  $v_{det} = 7980 \text{ m/sec}$ ) und einem inneren Kegel mit Trinitrotoluol (TNT,  $v_{det} = 6930 \text{ m/sec}$ ). Die Geometrie der Ladung führt zur Entstehung einer annähernd ebenen Welle bei einer großen beaufschlagten Fläche. In den Körpern waren verschiedene Messaufnehmer positioniert, die zur Aufnahme des Druckes, der Dehnung und der Temperatur dienten.

Die Plane-Wave-Generatoren wurden in zwei verschiedenen Größen ver-

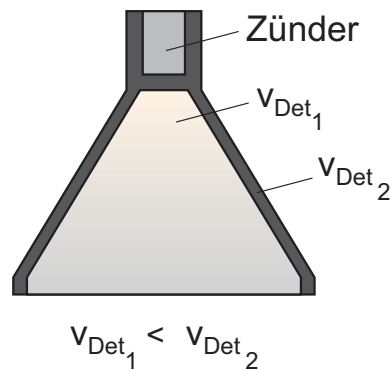


Abbildung 5.19: Schnitt durch den Plane-Wave-Generator

wendet. Der größere der beiden Kegel hatte eine Masse von 3325 g, der kleinere eine Masse von 640 g. Während die Versuchskörper, die mit dem großen Kegel belastet wurden, durch die Detonation komplett in kleine Stücke zerlegt wurden, wurde bei der Belastung der Versuchskörper mit dem kleineren Kegel auf der Oberseite unter dem Sprengstoff ein Krater herausgetrennt. Der Körper selbst wurde nicht komplett zerstört, so dass daran die verschiedenen Versagensbereiche identifiziert werden können (siehe Abbildung 5.20).

Es bildet sich direkt unter dem Sprengstoff ein Ausbruchkrater aus. In diesem Bereich ist davon auszugehen, dass der Beton als granulares Material ausgeworfen wurde. Der Bereich direkt unterhalb des Kraters ist sehr stark zerstört. Der Beton dieses Bereiches kann als dicht gepackter Sand bezeichnet werden, dessen Körner sich sehr stark gegenseitig verzahnt haben. Das Material wurde durch die Belastungswellen nicht entfernt. Versucht man ein einzelnes Korn aus diesem Gefüge herauszulösen, löst sich gleichzeitig eine größere Menge feinkörniges Material.

Unterhalb dieses kompaktierten Bereiches erkennt man einen Bereich mit starken Verformungen und vielen kleinen Rissen. Der restliche Körper ist von gut sichtbaren Rissen durchzogen, zwischen diesen Rissen ist der Beton – zumindest augenscheinlich – nicht geschädigt. An der Unterseite der Platte wurden einzelne Teile des Betons herausgetrennt. Je nach Dicke des Betonkörpers kommt es in diesem Bereich zum so genannten Spalling (siehe Kapitel 1.1).

Die verschiedenen Versuchsergebnisse sollen hier im Einzelnen nicht wiedergegeben werden. Ein Teil der Versuchsergebnisse wird bei der Bestimmung der Y-Funktion verwendet (siehe Kapitel 4.3.5). Weitere Angaben zu den verwendeten Messaufnehmern, zur Lage der Messaufnehmer und zu den Versuchsergebnissen finden sich in den Arbeiten von Ockert [102], Herrmann [58] und Steiner [134], [133].

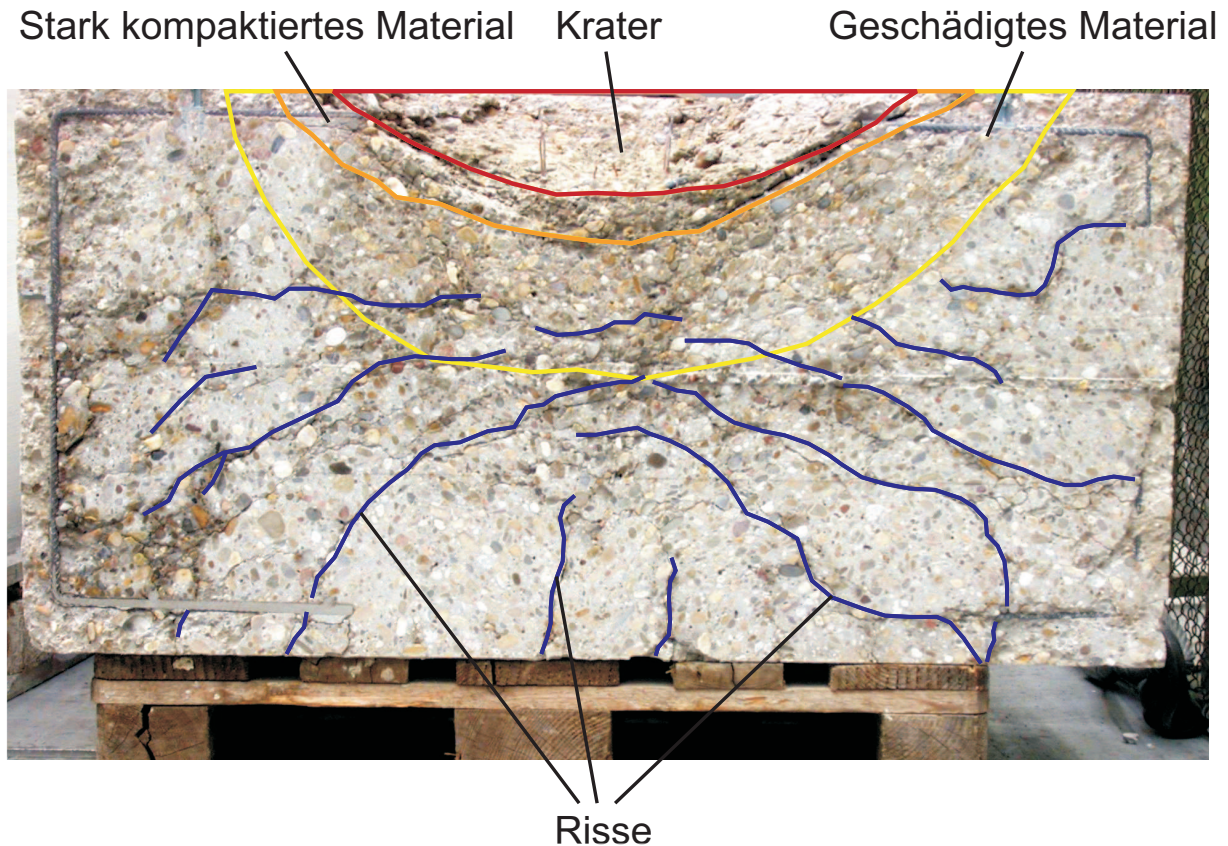


Abbildung 5.20: Schnitt durch einen Versuchskörper von Steiner [134]

### 5.6.2 Belastung

Die Detonation führt im Sprengstoff zur Ausbildung einer Stoßwelle. Diese Stoßwelle wird auf den Beton übertragen, da der Einfluss der Kontaktfläche vernachlässigbar ist. Die Versuche von Herrmann [58] haben gezeigt, dass die in der Stoßwelle enthaltene Energie im Beton sehr schnell durch plastische Verformungen dissipiert wird. Daher sind die hydrostatischen Dehnungen nur in einem sehr kleinen Bereich so groß, dass der Beton eine höhere Steifigkeit als bei einer elastischen Belastung aufweist. Es kann daher nicht von einer Entstehung einer Stoßwelle im Beton gesprochen werden.

Die Belastung des numerischen Modells wird mit dem von Plotitzka [109] bestimmten Druck-Zeit-Verlauf durchgeführt. Er ermittelte diesen an Modellen mit und ohne Beton unterhalb des Sprengstoffs (Plane-Wave-Generator mit der Masse  $m = 640 \text{ g}$ ). Für die hier vorgestellten Untersuchungen wird die Druck-Zeit-Funktion in einem Sprengstoffelement mit anliegendem Beton verwendet. Diese Druck-Zeit-Funktion wird auf die Knoten unterhalb des



Sprengstoffkegels aufgebracht. Dabei wird der Druck in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet. Der Verlauf der Druck-Zeit-Funktion ist in Abbildung 5.21 dargestellt.

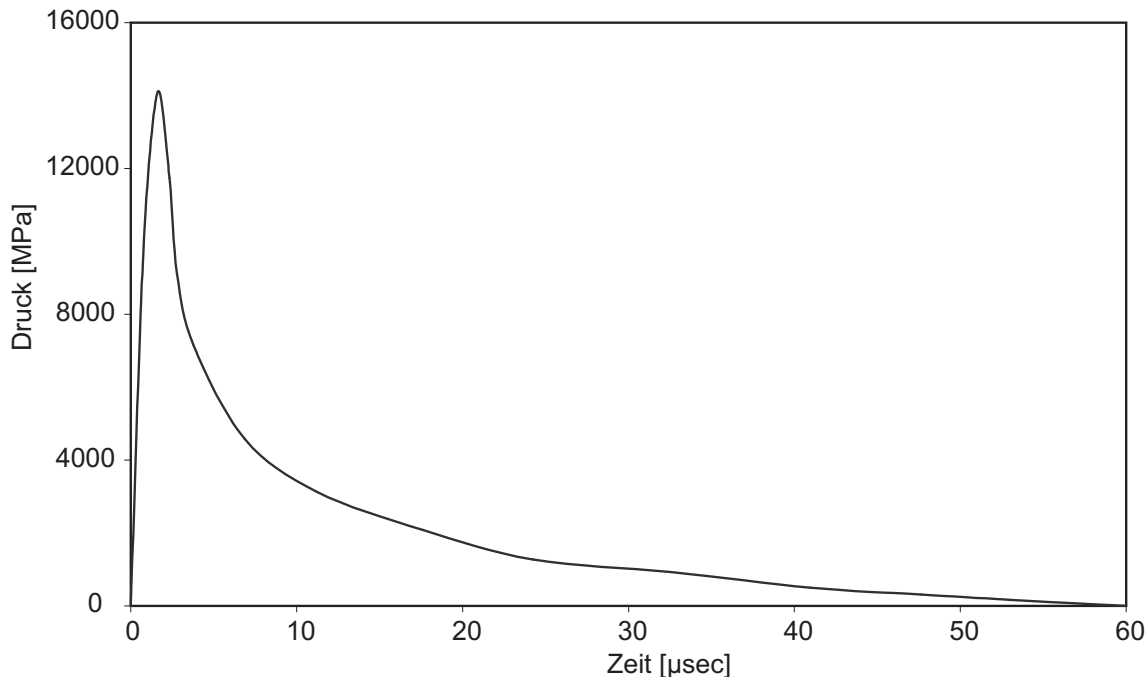


Abbildung 5.21: Druck-Zeit-Funktion

### 5.6.3 Modellierung / Elementierung

Eine dreidimensionale Elementierung des Betonkörpers schied wegen des numerischen Aufwandes aus. Da sowohl der Ansatz der ebenen Dehnung als auch der der ebenen Spannung keine realistische Abbildung des Versuches darstellen, wurde das EFG-Verfahren axialsymmetrisch implementiert (Prinzipskizze siehe Abbildung 5.24).

Der Knotenabstand wird mittels einer Konvergenzstudie an einem kleinen Modell (Abbildung 5.22) überprüft. Dieses Modell stellt nur einen Ausschnitt des Versuchskörpers dar (Höhe 132 mm, Breite 138 mm anstelle von Höhe 500 mm, Breite 500 mm). Die Breite der Lasteinleitung und damit die gesamte Last wird ebenfalls reduziert. Ein Vergleich der Ergebnisse des kleineren Modells mit den Versuchen ist daher nur sehr eingeschränkt möglich. Für die Bestimmung des Einflusses der Knotenabstände ist das Modell ausreichend.

Die Konvergenzstudie zeigt, dass bei einem Knotenabstand von 6 mm die Drücke teilweise deutlich über- bzw. unterschätzt werden. Zwischen den Drücken bei einem Knotenabstand von 3 mm und 1,5 bzw. 0,75 mm sind noch



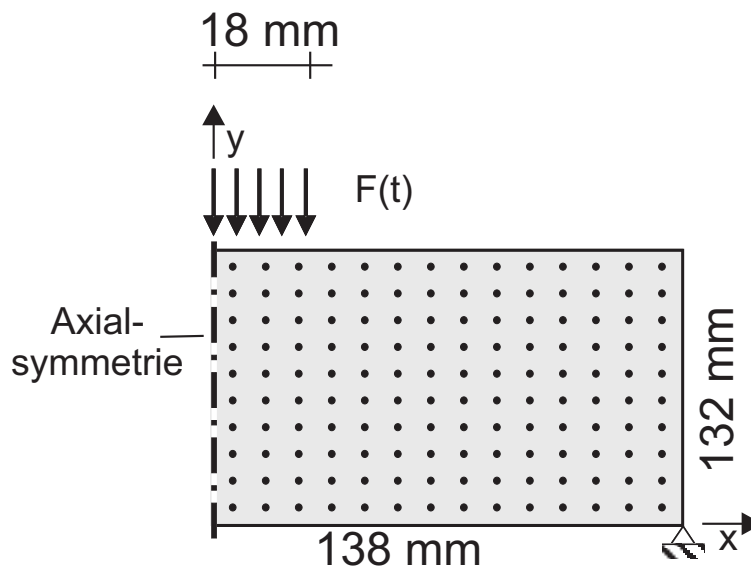


Abbildung 5.22: Kleines Modell für die Konvergenzstudie

Unterschiede vorhanden. Der Zuwachs an Genauigkeit steht allerdings in keinem Vergleich mit dem bei einer Netzfeinheit von 1,5 und 0,75 mm auftretendem numerischen Aufwand. Als kleinster Knotenabstand wird deswegen die Größe 3 mm verwendet, wobei der Abstand der Knoten in schwächer belasteten Bereichen auf das Doppelte vergrößert wird (siehe Abbildung 5.24). Dies entspricht den Elementgrößen die von Plotzitzka [109] bestimmten Elementabmessungen.

Beim kleinsten verwendeten Knotenabstand wird eine Zeitschrittweite von  $2 \cdot 10^{-7}$  sec verwendet, wobei diese bei der Verwendung von Rissen auf eine Größe von  $1 \cdot 10^{-7}$  sec verringert wird. Als standardmäßiger Einflussradius wird eine Größe von 7 mm verwendet. Diese wird allerdings so angepasst, dass mindestens sieben und maximal zehn Knoten in einem Einflussbereich liegen. Diese Anpassung findet am Anfang der Berechnung, bei jeder Rissinitiation und bei jedem Risswachstum statt. Eine Anpassung bei einer Änderung der Rissgeometrie ist notwendig, da sich die Anzahl der Knoten in einem Einflussradius durch das Abschneiden der Wichtungsfunktionen so stark verkleinern kann, dass keine Lösung mehr möglich ist (siehe auch Kapitel 3.2.4).

Zur Verminderung des Suchaufwandes innerhalb des Algorithmus werden die Knoten, von denen ein Integrationspunkt beeinflusst wird, gespeichert.

Als Materialkennwerte werden die in Tabelle 5.5 angegebenen Werte verwendet.

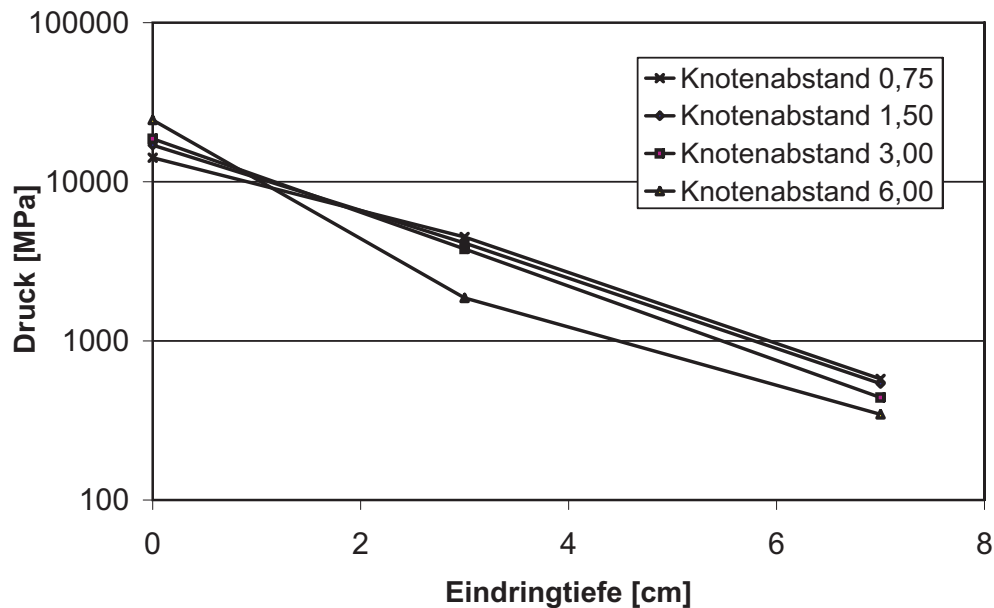


Abbildung 5.23: Konvergenzstudie

Tabelle 5.5: Materialkennwerte der Simulationen unter Kontaktdetonation

Kennwert	Verwendeter Wert
E-Modul [ $N/mm^2$ ]	30.000
Querdehnzahl $\nu$ [–]	0,20
Dichte [ $10^3 kg/mm^3$ ]	$2,5 \cdot 10^{-9}$
Standardabweichung für zufälliges Material	0,1

### 5.6.4 Rissparameter

Bei der Berechnung des Versuchskörpers sollen diskrete Risse zur Darstellung des Versagens verwendet werden. Es sind deswegen verschiedene Fragen bezüglich der Rissparameter zu beantworten.

An den Risspitzen wird als Kriterium, welche Knoten vom Riss beeinflusst werden, die Diffraktionsmethode verwendet (siehe Kapitel 3.2.5). Weiterhin wird Kontakt im Riss berücksichtigt. Integrationszellen, die nicht von einem Riss beeinflusst werden, werden mit zwei Integrationspunkten in jede Richtung berechnet. In den von einem Riss beeinflussten Integrationszellen werden sechs Integrationspunkte in jede Richtung benutzt.

Die maximale Rissrichtungsänderung und die Risslängen, in denen keine Richtungsänderung vorhanden ist, können aus den bei einem Schnitt durch den Versuchskörper gewonnenen Rissbild gewonnen werden (siehe Abbildung 5.25). Es ergibt sich ein minimaler Winkel von ca.  $130^\circ$ , d.h. der in Kapitel 4.3.2 definierte maximale Richtungsänderungswinkel  $\alpha$  hat einen Maxi-

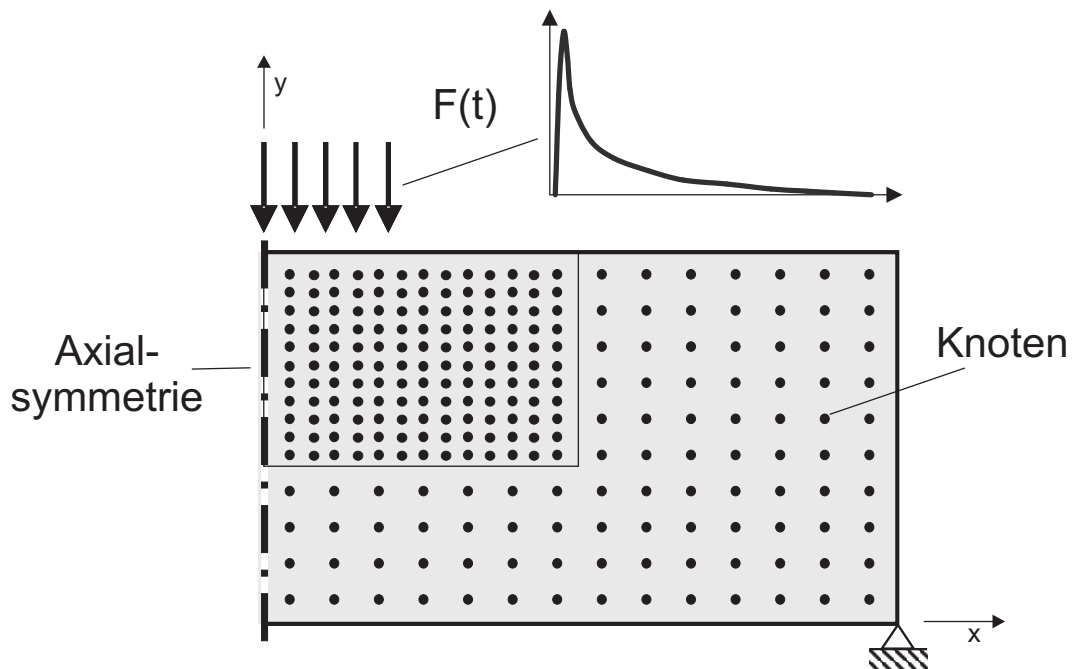


Abbildung 5.24: Kontaktdetonation Modellierung

malwert von  $50^\circ$ .

Aus dem Rissbild kann ebenfalls die Länge ermittelt werden, in der der Riss keine Richtungsänderung erfährt. Diese beträgt etwa 12 mm. Folglich wird bei einer Rissfortschrittsweglänge von 3 mm nur bei jedem fünften Rissfortschritt die Richtung angepasst.

Erste Untersuchungen haben ergeben, dass beim Durchlauf der Druckwelle relativ viele Querspannungen entstehen. Es wird deswegen ein minimaler Abstand zwischen zwei entstehenden Rissen definiert, da sonst zu viele Risse entstehen.

Auch im unteren Bereich des Betonkörpers entstehen zuerst Querspannungen. Die Druckwelle wird im Folgenden an der Unterseite reflektiert und läuft als Zugwelle zurück. Da der gesamte Körper schon mit Querspannungen im minimalen Abstand durchzogen ist (siehe Abbildung 5.26), können durch die Zugwelle keine weiteren Risse entstehen. Es bildet sich deswegen kein Spalling-Versagen aus. Daher wird die in Kapitel 4.3.2 vorgestellte Methode der kreuzenden Risse (Multiple Fixed Crack Modell) für die Berechnung benutzt, bei dem am selben Punkt Risse in unterschiedliche Richtungen zugelassen werden.

Ein Parameter, der durch die Verwendung kreuzender Risse zu wählen ist, ist der minimale Abstand, der zwischen zwei einander kreuzenden Rissen möglich ist. Die Berechnung der durch eine Stoßwelle belasteten Be-

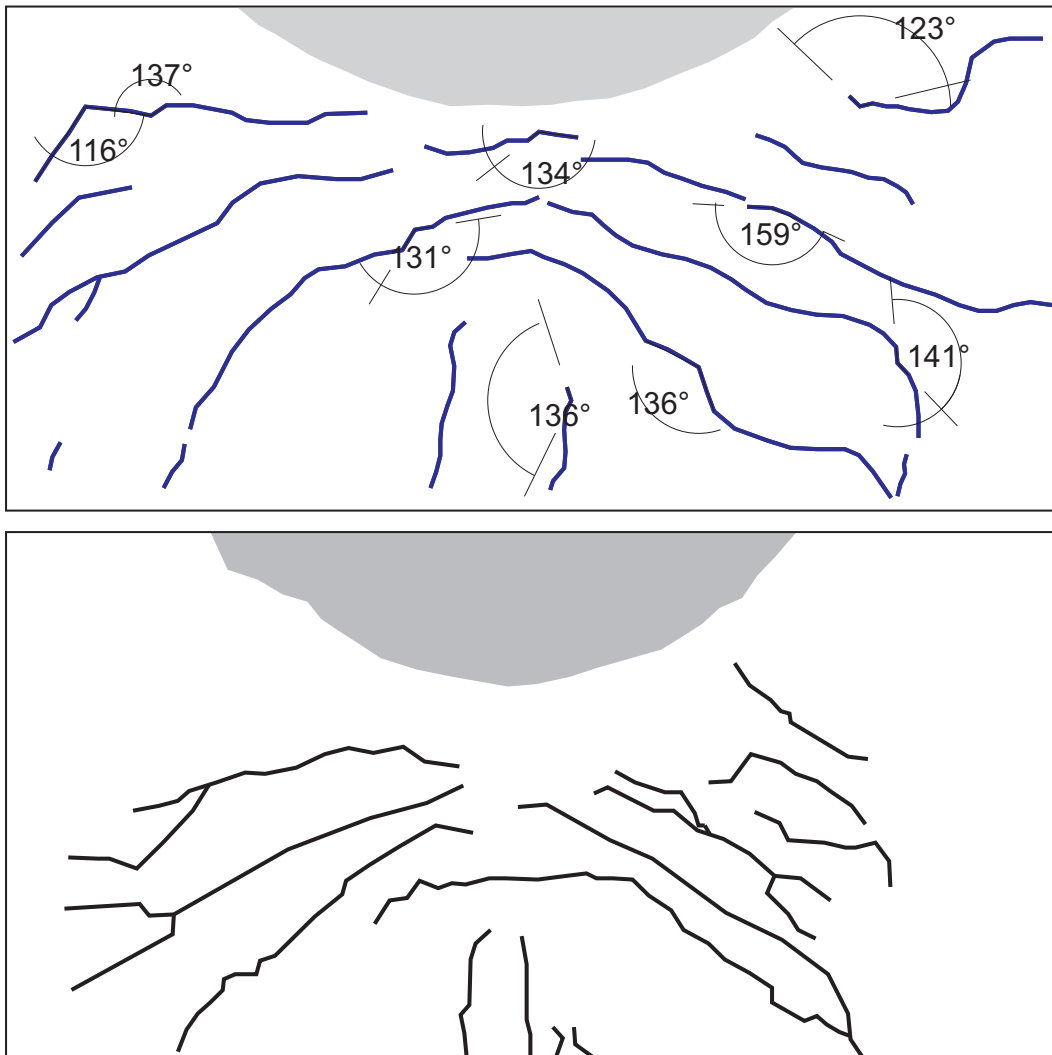


Abbildung 5.25: Bestimmung der maximalen Rissrichtungsänderung (oben Versuch von Steiner [134], unten Herrmann [58])

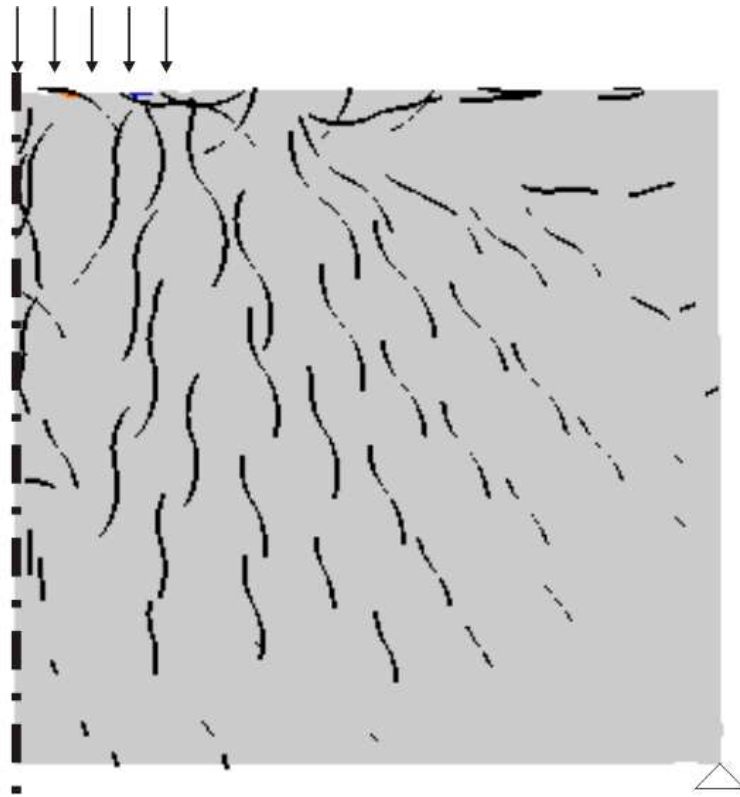


Abbildung 5.26: Entstehung vieler paralleler Quersugrisse

tonkörper zeigt, dass der von der Stoßwelle beanspruchte Bereich durch sehr viele Risse durchkreuzt wird (siehe Abbildung 5.27). Dies ist für eine lokale Betrachtung ein realistisches Ergebnis. Ein so feines Netz von Rissen entspricht dem granularen Material, das sich bei der Belastung in diesem Bereich ergibt. Für die globale Berechnung des Körpers stellt dies jedoch einen nicht zu bewerkstellenden Rechenaufwand dar. Es zeigt sich, dass zum einen die Bestimmung der Dehnungen an den Rissspitzen mit einem gewissen Aufwand verbunden ist und dass zum anderen der Aufwand zur Bestimmung der Ansatzfunktionen mit zunehmender Anzahl der Risse stark ansteigt. Der minimale Abstand zwischen zwei kreuzenden Rissen wird deswegen beschränkt auf den in Tabelle 5.6 angegebenen Wert.

Die Wahl der meisten Rissparameter ist nicht durch Versuche abgesichert. Ziel der Wahl der Parameter war es, möglichst den bei den Versuchen auftretenden Rissbildern nahezukommen. Daher wurden die Rissparameter in Anlehnung an diese Geometrien gewählt. Dieses Vorgehen ist unzufriedenstellend, da die Parameter nicht verifiziert werden können.

In einem ersten Schritt wird an dem kleineren Modell (Abbildung 5.22) die Auswirkung verschiedener Rissparameter verdeutlicht. Mit diesem kleinen Modell wird im Folgenden der Einfluss der Rissgeschwindigkeit und der



Abbildung 5.27: Risse im Stoßbereich

Rissrichtungsänderung auf die Entstehung des Rissbildes gezeigt.

In Abbildung 5.28 sind Rissverläufe dargestellt, wie sie sich beim kleinen Modell einstellen, wobei die Risse in rot dargestellt sind. Die Rissöffnung korreliert dabei nicht mit der dargestellten Breite des Risses.

### **Einfluss der Rissgeschwindigkeit**

Die Rissgeschwindigkeit liegt für Beton in der Größenordnung von ca. 250 bis 500 m/sec (siehe Kapitel 4.3.6). Es soll hier geklärt werden, welchen Einfluss die Rissgeschwindigkeit auf das entstehende Rissbild hat.

Es zeigt sich, dass sich bei Verwendung einer kleinen Rissgeschwindigkeit (250 m/sec) die ausbildenden Risse kürzer sind als bei der Rissgeschwindigkeit, die bei den übrigen Untersuchungen verwendet wurde (500 m/sec).

Wird eine wesentlich höhere Rissgeschwindigkeit verwendet, ändert sich während der Entstehung der Risse die Beanspruchungsrichtung nur unwesentlich und es treten relativ gerade Risse auf. Die bei den unterschiedlichen Rissgeschwindigkeiten ergebenden Rissgeometrien sind in Abbildung 5.28 dargestellt.

### **Einfluss des Rissrichtungsänderungswinkels**

Am gleichen Modell wurden Untersuchungen zum Einfluss der Rissrichtungsänderung durchgeführt. Die Berechnung wird mit fünf unterschiedlichen in Abbildung 4.23 dargestellten Rissrichtungsänderungswinkeln  $\alpha$  durchgeführt.

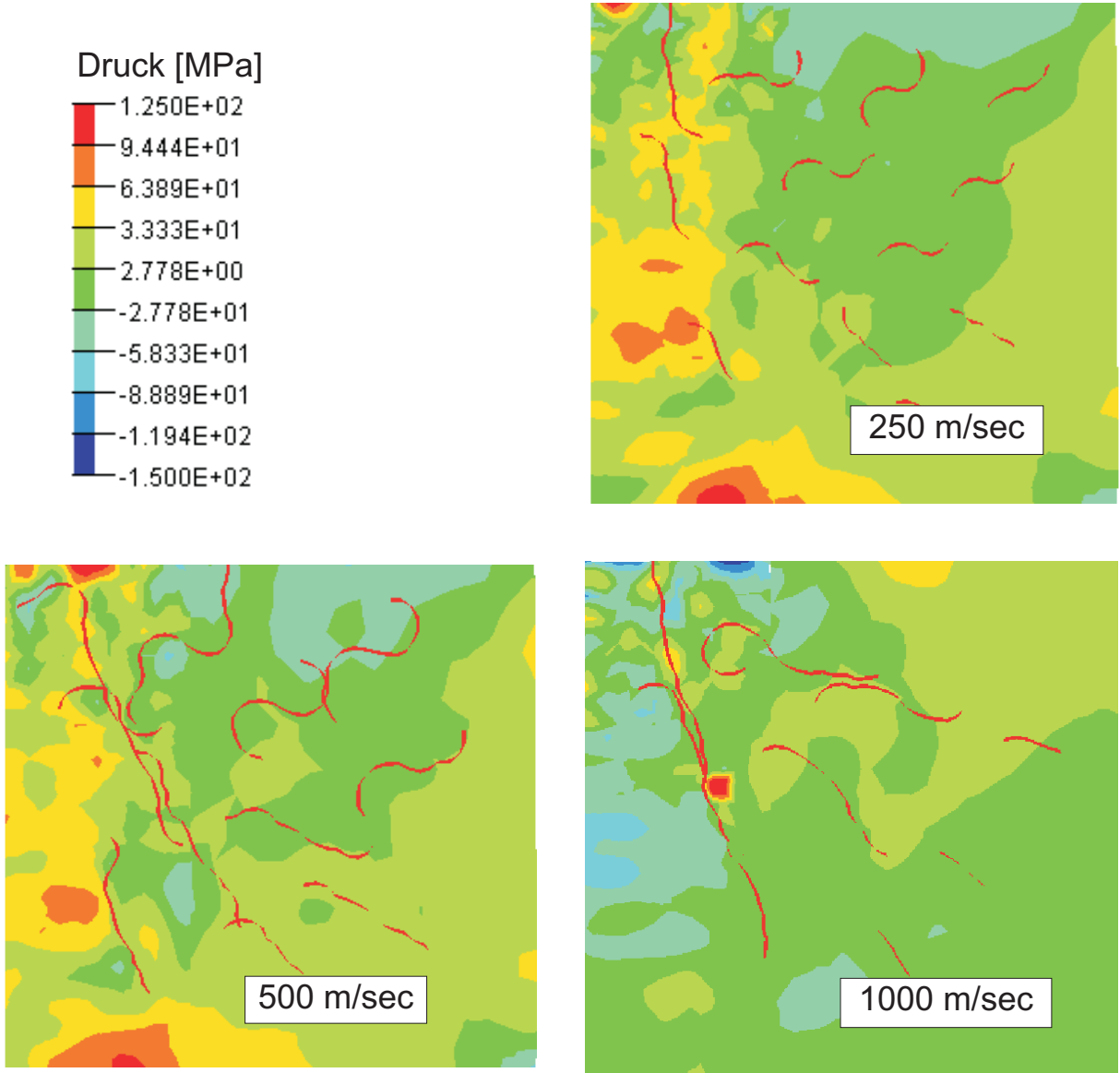


Abbildung 5.28: Vergleich der Rissgeometrien bei unterschiedlichen Rissgeschwindigkeiten

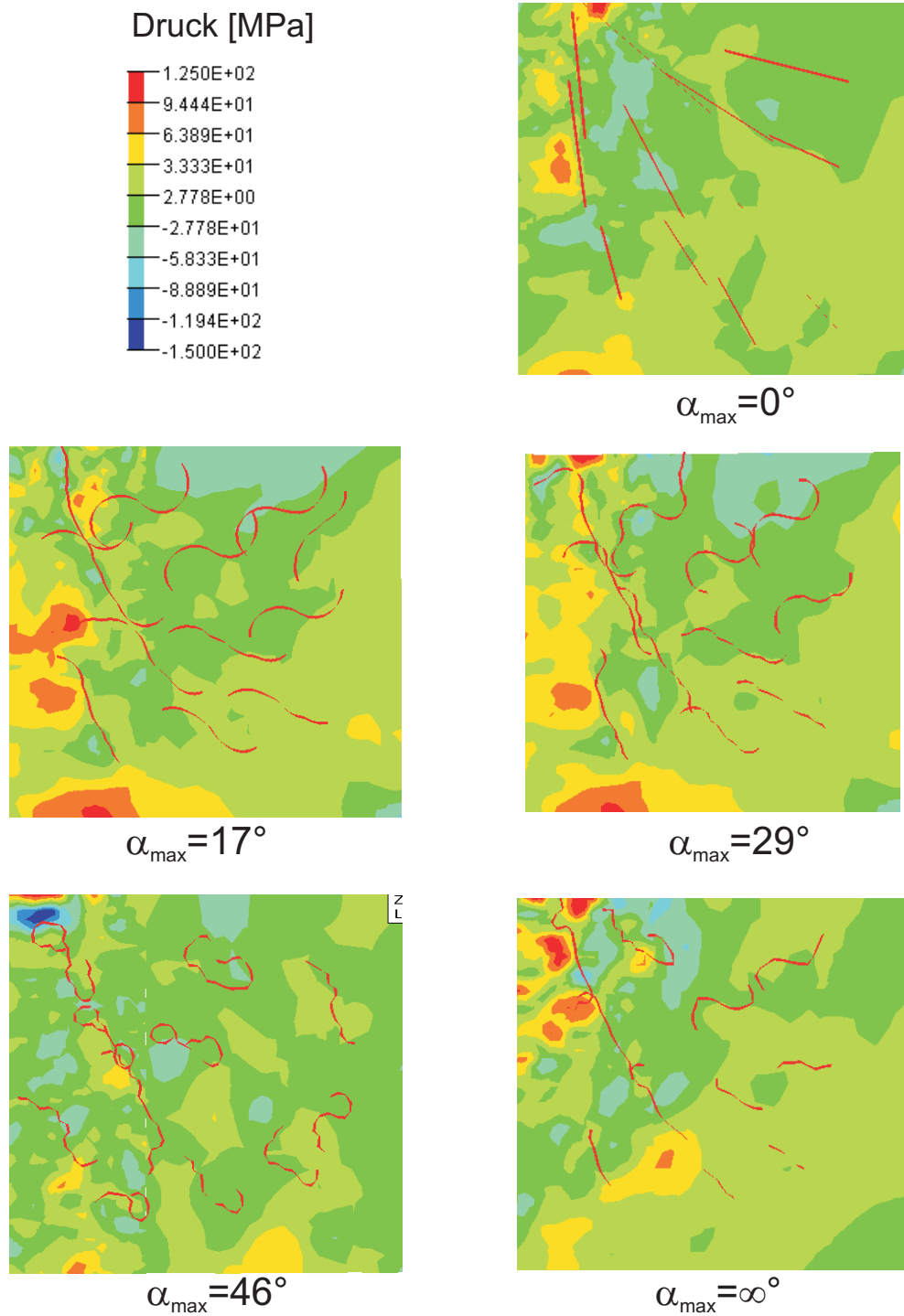


Abbildung 5.29: Vergleich der Rissgeometrien bei unterschiedlichen Rissrichtungsänderungswinkeln ( $t = 8e-5$  sec, bei  $\alpha_{\max} = \infty$  Abbruch bei  $t = 5,8e-5$  sec)



Tabelle 5.6: Rissparameter der Simulationen der Kontaktdetonation

Kennwert	Größe
Rissfortschrittslänge [ <i>mm</i> ]	3
Änderung der Rissrichtung [°]	50
Anzahl der Schritte, bei denen die Rissrichtung konstant gehalten wird	4
Rissgeschwindigkeit [ <i>mm/sec</i> ]	500000
Randbereich in dem keine Risse entstehen können [ <i>mm</i> ]	20
Minimaler Abstand zweier Risse bei der Entstehung [ <i>mm</i> ]	50
Maximale Anzahl von hinzugefügten Rissen	100
Erforderlicher minimaler Winkel bei der Erstellung von kreuzenden Rissen [°]	57

Die Ergebnisse zeigen, dass auch dieser Parameter einen großen Einfluss auf das entstehende Rissbild hat. Wird der Rissrichtungsänderungswinkel zu Null gesetzt entstehen unrealistisch gerade Risse. Wird der Rissrichtungsänderungswinkel komplett frei gelassen, bricht die Berechnung relativ früh ab. Bei einem Winkel von 46° entstehen kurze Risse, die einen Bogen beschreiben, der teilweise sogar geschlossen ist.

Eine Übersicht über die gewählten Rissparameter ist in Tabelle 5.6 dargestellt.

### 5.6.5 Anpassung des Stoffgesetzes

Die Berechnungen des Betonkörpers unter einer Kontaktdetonation mit einem elastischen Stoffgesetz und der Y-Funktion (siehe Kapitel 4.3.5) ohne Berücksichtigung der Entlastung des kompaktierten Bereichs zeigen, dass sich eine Stoßwelle ausbildet, die durch den Beton wandert (siehe Abbildung 5.30). Die Geschwindigkeit der Welle entspricht der z.B. von Herrmann [58] bestimmten Wellengeschwindigkeit. Die Amplitude der Welle nimmt allerdings in der Berechnung nicht ab. Die bei den Versuchen beobachtete starke Abnahme der Amplitude der Welle und damit der Energie kann mit einem Stoffgesetz, bei dem keine Energiedissipation möglich ist, nicht abgebildet werden.

Des Weiteren wird im nachlaufenden Bereich der Welle ein starkes Oszillieren sichtbar. Dieses resultiert aus der Anregung des obersten Bereiches des Körpers. Dieser Bereich wird zuerst durch die große Druckwelle beansprucht. Im Folgenden findet eine Entlastung statt, aus der eine Zugwelle resultiert.

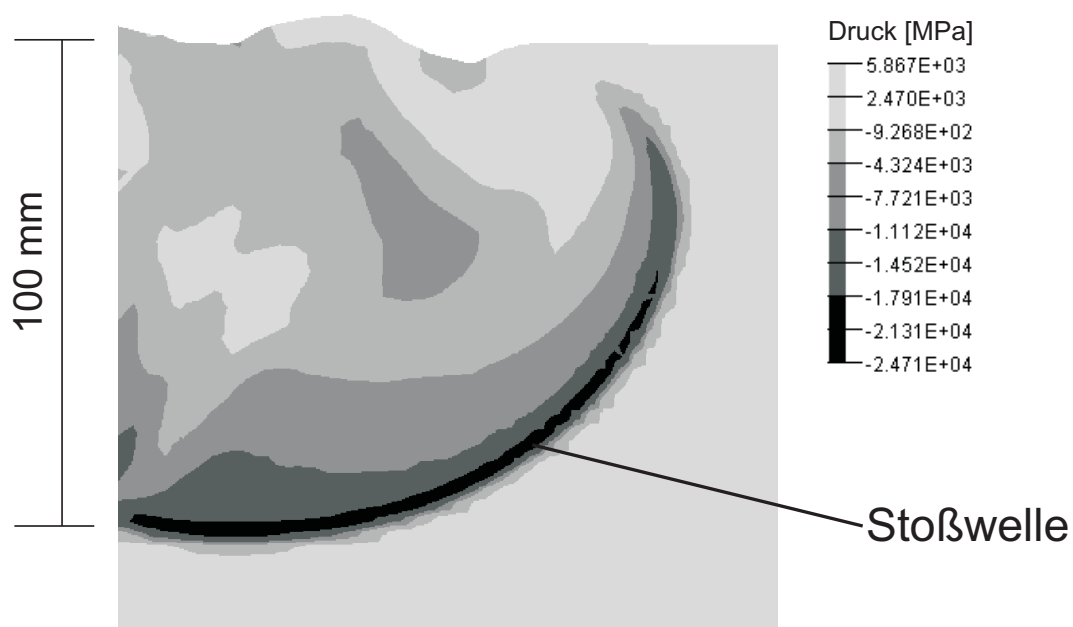


Abbildung 5.30: Ausbildung einer Stoßwelle ohne Entlastungsfunktion  
( $t = 1,8e-5$  sec)

Diese wandert ebenfalls durch den Körper. Die Amplitude dieser Zugwelle ist unrealistisch groß (siehe Abbildung 5.30,  $p_{max,zug} = 5867$  MPa).

Die Zerstörung des Betongefüges im Bereich der Stoßwelle führt zu einer starken Energiedissipation, die bei der Berechnung berücksichtigt werden muss. Zur Abbildung dieses in Versuchen beobachteten Verhaltens sind verschiedene Modelle denkbar:

- Implementierung in die hydrostatische Dehnungs-Druck-Beziehung (Entlastung der Y-Funktion)
- Druckschädigungsevolution
- Knotenerosion

Diese einzelnen Anteile des Stoffgesetzes, die die Zerstörung des Betongefüges beschreiben, werden im Folgenden dargestellt. Die Wirkungsweisen werden anhand der Eindringcharakteristik beurteilt. Mit Eindringcharakteristik wird die maximale Amplitude des Druckes in Abhängigkeit von der Entfernung zum Lasteintrag bezeichnet. Diese wurde von Ockert [102], Herrmann [58] und Steiner [134] für Kontaktdetonationen mit dem kleinen Plane-Wave-Generator experimentell bestimmt und ist in Abbildung 5.31 dargestellt. Die Eindringcharakteristik soll zur Kalibrierung des Stoffgesetzes verwendet werden.

An einem Modell mit einer Größe, die dieser Versuchsgeometrie nahe kommt, werden verschiedene Untersuchungen durchgeführt. Das verwendete Modell hat die Abmessungen 400 mm auf 300 mm und wird mit der in Kapitel 5.6.2 vorgestellten Druck-Zeit-Funktion belastet (siehe Abbildung 5.24).

### Entlastungsfunktion

Untersuchungen mit einer Form der Entlastungsfunktionen, bei der der maximal aufgetretene E-Modul für die Entlastung benutzt wurde, zeigen zwar eine Abnahme der Amplitude der Stoßwelle jedoch nicht in dem Maße, wie sie bei Versuchen beobachtet wurde. Es zeigt sich außerdem eine starke Anregung der einzelnen Knoten durch die Stoßwelle.

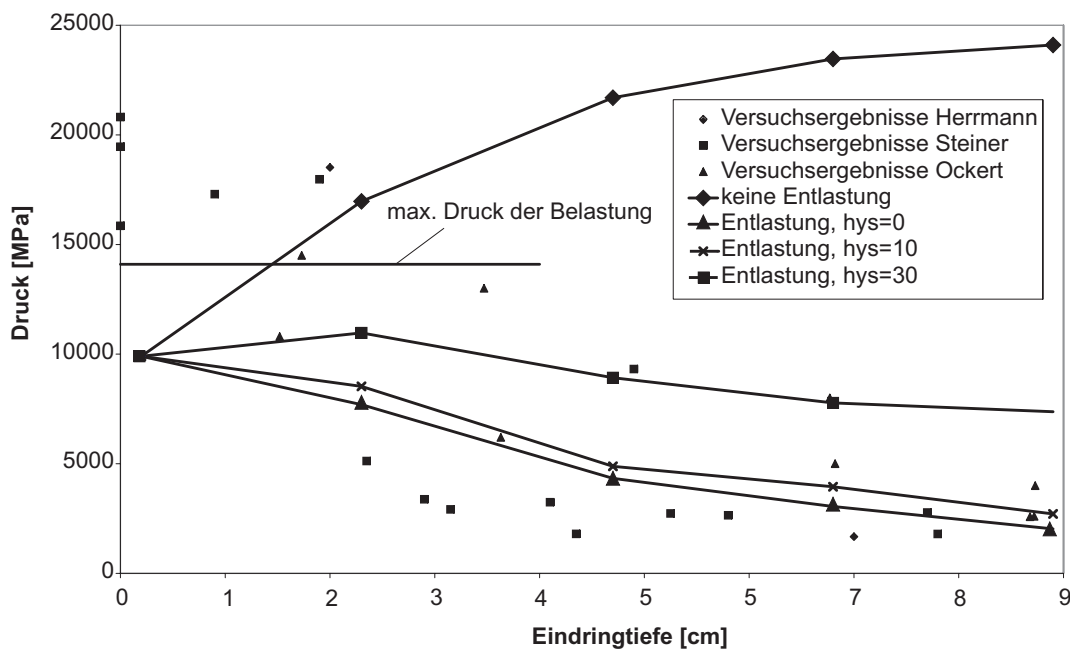


Abbildung 5.31: Eindringcharakteristik bei unterschiedlicher Änderung der Hysteresegeraden in der Y-Funktion

Um diese hochfrequenten Schwingungen zu dämpfen, wurde in einem ersten Schritt für die Entlastung der Y-Funktion eine Hystereseschleife eingeführt. Die Hystereseschleife wurde ebenfalls über die Beschreibung der Y-Funktion implementiert (siehe Abbildung 5.32). In Abbildung 5.31 ist die Eindringcharakteristik für verschiedene Steigungen der Hysteresegeraden in der Y-Funktion dargestellt. Es zeigt sich, dass eine Änderung der Steigung der Hysteresegeraden in der Y-Funktion keinen Einfluss auf die maximale Spannung am oberen Rand der Platte hat, da die Welle diesen Bereich passiert, ohne dass ein Integrationspunkt entlastet wird. Ist die Größe der Steigung der

Hysteresegeraden in der Y-Funktion sehr groß, dann fällt die Eindringcharakteristik sehr flach aus. Die Kurve nähert sich immer mehr der Eindringcharakteristik ohne die Berücksichtigung der Entlastungsfunktion. Trotz der Hystereseschleife nehmen die Knotenschwingungen nicht wesentlich ab. Es wird daher keine Hystereseschleife verwendet, da die Schwingungen der Knoten über die künstliche Viskosität (siehe Kapitel 2.4.4) gedämpft werden.

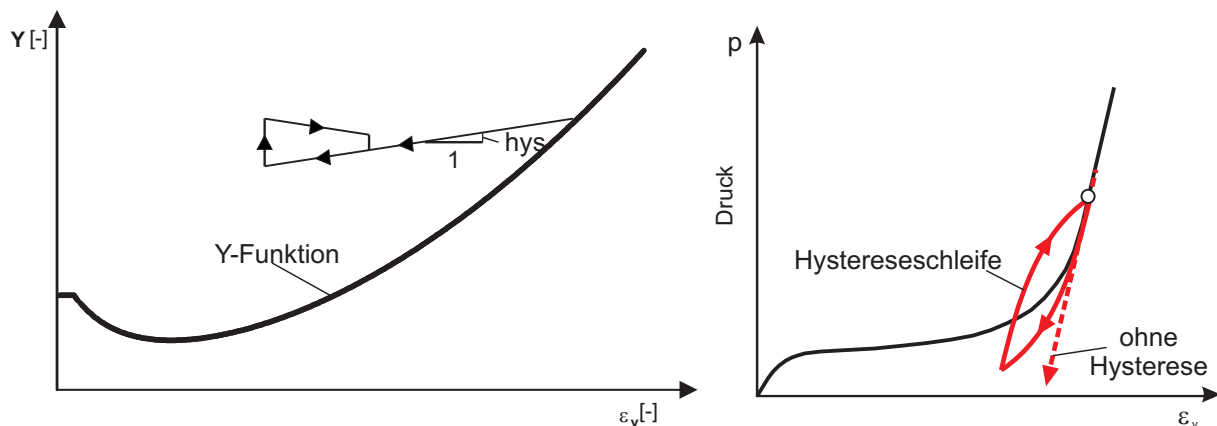


Abbildung 5.32: Änderung der Hysteresegeraden in der Y-Funktion

Des Weiteren ist eine Entlastungsfunktion für den Beton zu definieren, der hydrostatisch nur plastisch beansprucht wurde ( $Y < 1$ ). Hier soll folgendes Gedankenmodell verwendet werden: Presst man ein poröses Material zusammen (plastische hydrostatische Belastung), so verfestigt sich dieses. Auch wenn noch nicht alle Poren geschlossen sind (Stoßbeanspruchung), wird die Entlastungssteifigkeit des Materials größer sein, als die Anfangssteifigkeit bei Beginn des Belastungsvorgangs. Es wird deswegen für den Bereich, in dem der Beton plastisch beansprucht wurde, von einer um den Wert  $Y_{entl,plast}$  erhöhten Entlastungssteifigkeit ausgegangen (siehe Abbildung 4.37).

Der Einfluss des Parameters  $Y_{entl,plast}$  ist in Abbildung 5.33 dargestellt. Es zeigt sich, dass  $Y_{entl,plast}$  gerade im unteren Bereich des Versuchskörpers einen großen Einfluss hat. Je größer  $Y_{entl,plast}$  gewählt wird, desto kleiner sind die im unteren Bereich auftretenden Drücke. Nach dem Vergleich mit den Versuchsergebnissen wird vorgeschlagen, diesen Wert zu  $Y_{entl,plast} = 1,5$  zu wählen.

### Druckschädigungsevolution

In dem hier vorgestellten Simulationsmodell soll für das Zug- und Druckversagen des Betons keine Schädigung verwendet werden. Trotzdem stellt sich die

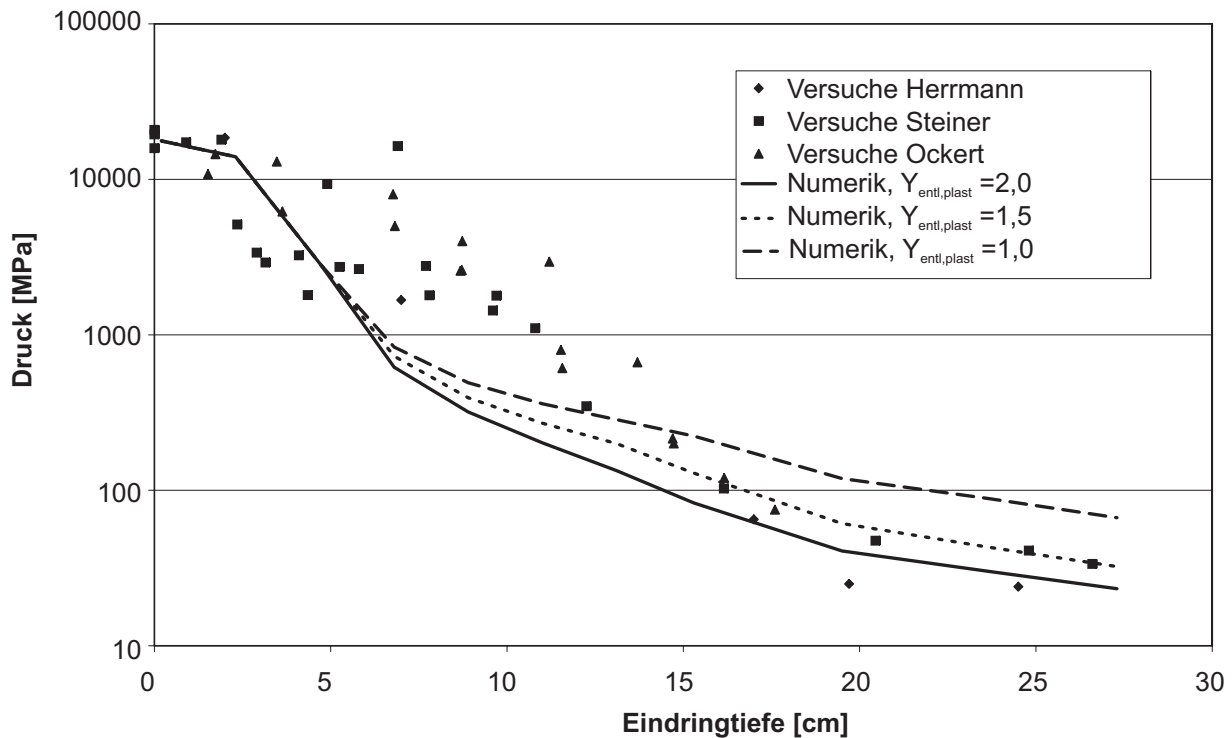


Abbildung 5.33: Einfluss der Entlastungsfunktion bei einer vorherigen plastischen Porenbelastung  $Y_{entl,plast}$   
 ( $D_z = 0,1$ ,  $\epsilon_{v,entl} = 0,02$ )

Frage, wie das Zermalmungsversagen und die damit einhergehende Energiedissipation abgebildet werden kann. Werden die Mikroporen des Betons hydrostatisch so stark belastet, dass sie kollabieren, wird viel Energie freigesetzt. Dieser Vorgang kann weder mit einem elastischen Stoffgesetz noch mit der im Kapitel 4.3.5 vorgestellten Y-Funktion berücksichtigt werden.

Es wird deswegen in Anlehnung an das Vorgehen von Ruppert [121] für den Zermalmungsbereich eine Schädigungsevolution eingeführt. Diese entwickelt sich in Abhängigkeit der hydrostatischen Dehnung  $\epsilon_v$ , wobei der Quotient aus dem aktuellen Wert der hydrostatischen Dehnung und dem beim maximal erreichbaren Y-Wert vorhandenen hydrostatischen Dehnung ( $\epsilon_{v,max} = 0,09$ ) verwendet wird. Für die Form der Kurve wird folgendes Gesetz verwendet

$$D_z = \left( \frac{\epsilon_v}{\epsilon_{v,max}} \right)^\gamma \quad (5.2)$$

Der Parameter  $\gamma$  gibt an, in welcher Form sich die Schädigung entwickelt. Während  $\gamma < 1$  ein duktileres Verhalten beschreibt, wird mit  $\gamma > 1$  ein sprödes Material definiert (siehe Abbildung 5.34).

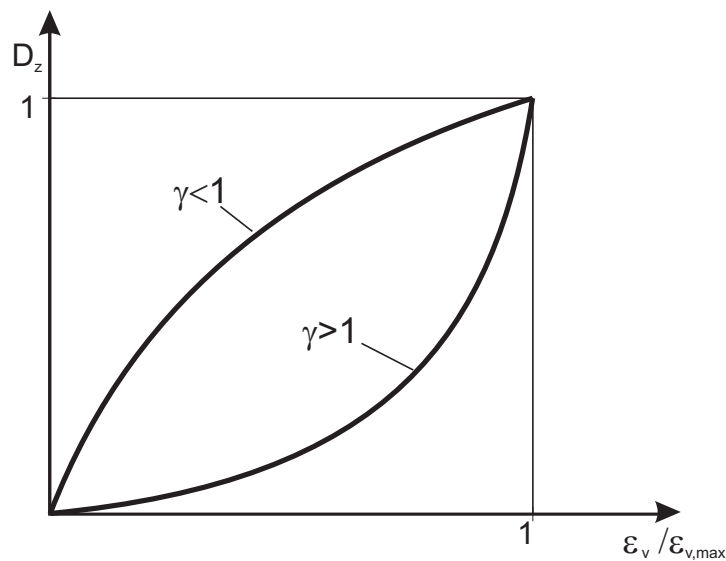


Abbildung 5.34: Schädigungsentwicklung im Zermalmungsbereich

Da eine Abminderung des Kompressionsmoduls bei einer Stoßwellenbeanspruchung nicht sinnvoll ist, wird der Schädigungsparameter  $D_z$  nur bei der Bestimmung des Schubmoduls berücksichtigt. Der Schubmodul, der zur Bestimmung der deviatorischen Spannungen benötigt wird, setzt sich somit folgendermaßen zusammen

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot (1 - D_z) \quad (5.3)$$

Die Untersuchungen (siehe Abbildung 5.35) zeigen, dass die Wahl eines spröden Versagens ( $D_z = 0,1$ ) eine niedrigere Druckentwicklung im unteren Bereich der Platte zur Folge hat. Gleichzeitig ist der Druck im oberen Bereich der Platte gegenüber einer duktilen Schädigungsevolution leicht erhöht. Bei größeren Werten für  $D_z$  ist der Unterschied zu einer Berechnung ohne Druckschädigungsevolution sehr klein. Im Folgenden wird für die Druckschädigungsevolution  $D_z = 0,1$  gewählt.

### Knotenerosion

Die numerische Kontinuumsmechanik weist im Allgemeinen starke Probleme auf, wenn ein Kontinuum in viele kleine Teile zerfällt. In der Finiten-Element-Methode wird deswegen beim Versagen bestimmter Materialien eine Erosion von Elementen durchgeführt. Diese Technik findet z.B. in der Geomechanik Verwendung, wenn granulare Materialien Zugbeanspruchung erfahren. Sie wird aber auch bei der Berechnung von hochdynamischen Belastungen verwendet, um einerseits zerstörte Materialanteile oder andererseits Bereiche

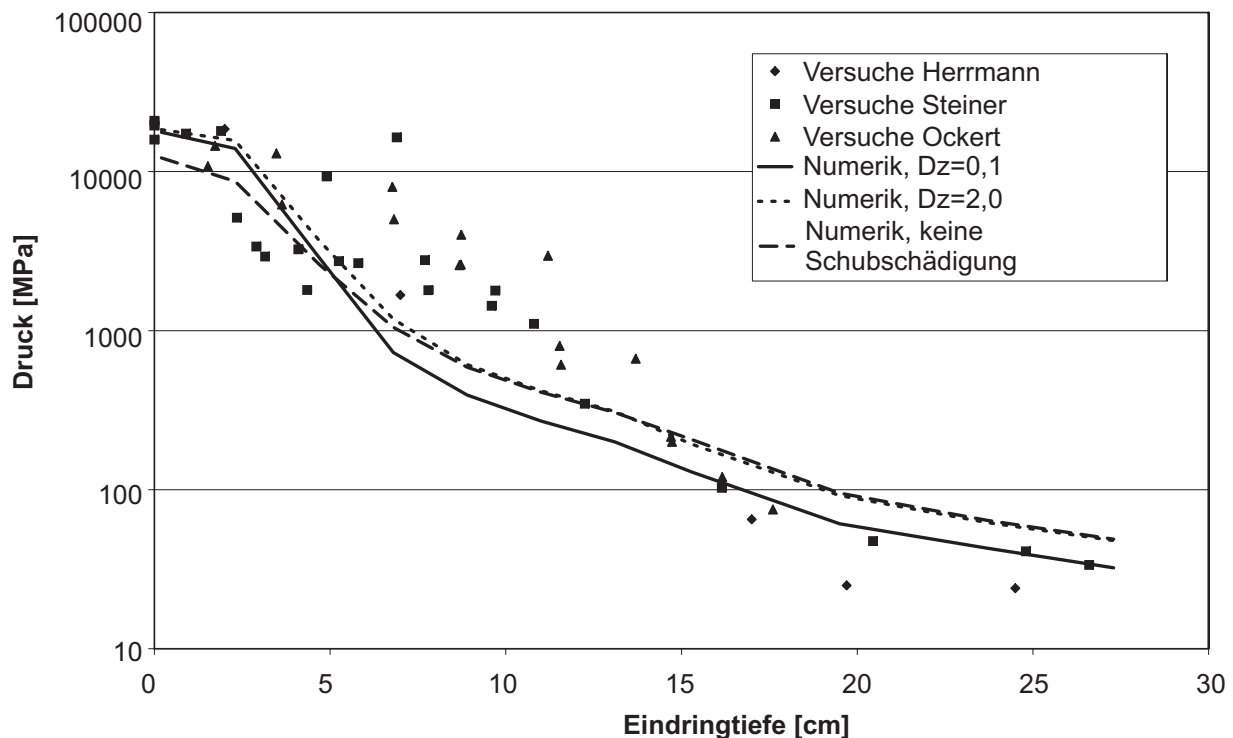


Abbildung 5.35: Einfluss der Schubschädigungsevolution  $D_z$   
 ( $Y_{entl,plast} = 1,5$ ,  $\epsilon_{v,deakt} = 0,02$ )

mit starken Verformungen und Verzerrungen aus dem Modell zu entfernen, um einen Fortgang der Berechnung zu ermöglichen. Als Kriterium für die Löschung von Elementen wird meist eine maximale plastische Dehnung verwendet.

Die Methode der Elementerosion wurde an das elementfreie Galerkin-Verfahren in dem Sinne angepasst, dass nicht die Elemente sondern die Integrationspunkte bzw. Integrationszellen gelöscht werden. Ein Integrationspunkt wird dann gelöscht, wenn er "geschockt" (kompaktiert) wurde (Überschreitung von  $\epsilon_{v,deakt}$ ) und dann eine Druckspannungsgrenze unterschreitet. Diese wurde hier ohne weiteren Nachweis bei 50 MPa angesetzt. Bei der Bestimmung der Spannungen und damit der inneren Kräfte wird dieser Integrationspunkt dann nicht mehr verwendet. Sind nun alle Integrationspunkte einer Integrationszelle gelöscht, wird die gesamte Integrationszelle deaktiviert. Im nächsten Berechnungsschritt werden unnötige Knoten deaktiviert.

Numerisch wird das Löschen der Knoten durch die Nullsetzung der jeweiligen Zeilen- und Spalteneinträge in der Massen- und Steifigkeitsmatrix und durch den Eintrag einer 1 an der Stelle des Diagonalelements durchgeführt. Die residualen Kräfte – also die inneren und die äußeren Kräfte – werden zu null gesetzt.

Ablaufdiagramm 5.1: Ablauf der Knotenerosion

1. Schleife über alle Elemente: Deaktivierung aller Integrationspunkte, die kompaktiert wurden und eine Druckspannungsgrenze unterschreiten
2. Deaktivieren von nicht mehr benötigten Integrationszellen (falls alle Integrationspunkte der Integrationszelle deaktiviert sind)
3. Schleife über alle Knoten: Deaktivieren aller Knoten, die von keiner Integrationszelle mehr verwendet werden
4. Deaktivieren von Rissen, die einen Mindestabstand zu deaktivierten Knoten unterschreiten oder im gelöschten Bereich liegen

Durch das Löschen der Integrationszellen und der Knoten ergeben sich weitere Problemstellungen. Risse, die in den gelöschten Bereichen liegen, sollten gelöscht werden, da ein Risswachstum hier keinen Sinn mehr macht. Risse, die am Rande des gelöschten Bereiches liegen, müssen gelöscht werden, da ansonsten einzelne Knoten von diesem Riss vom sonstigen Kontinuum getrennt werden. Daraus resultieren numerische Probleme (siehe Kapitel 4.3.2). Als minimaler Abstand eines Risses zum gelöschten Bereich empfiehlt sich hier die Größenordnung des doppelten Einflussradius.

Der Ablauf der Knoten- und Integrationszellenerosion ist im Ablaufdiagramm 5.1 beschrieben.

Es bleibt die Deaktivierungsgrenze  $\epsilon_{v,deakt}$  zu bestimmen, ab der nach einer Überschreitung Knoten und Integrationszellen gelöscht werden, wenn eine Druckgrenze unterschritten wird. Die Abhängigkeit der Eindringcharakteristik von der Deaktivierungsgrenze ist in Abbildung 5.36 dargestellt. Es zeigt sich, dass dieser Parameter nur einen sehr kleinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Vergleicht man die gelöschten Bereiche mit den in den Versuchen sich ergebenden Kratern an der Versuchskörperoberseite, dann erkennt man, dass der gelöschte Bereich diesen Krater gut wiedergibt. Die Größe dieses Kraters ist folglich von der Größe des Parameters abhängig (siehe Abbildung 5.37). Die Deaktivierungsgrenze wird deswegen im Folgenden zu  $\epsilon_{v,deakt} = 0,02$  gewählt.



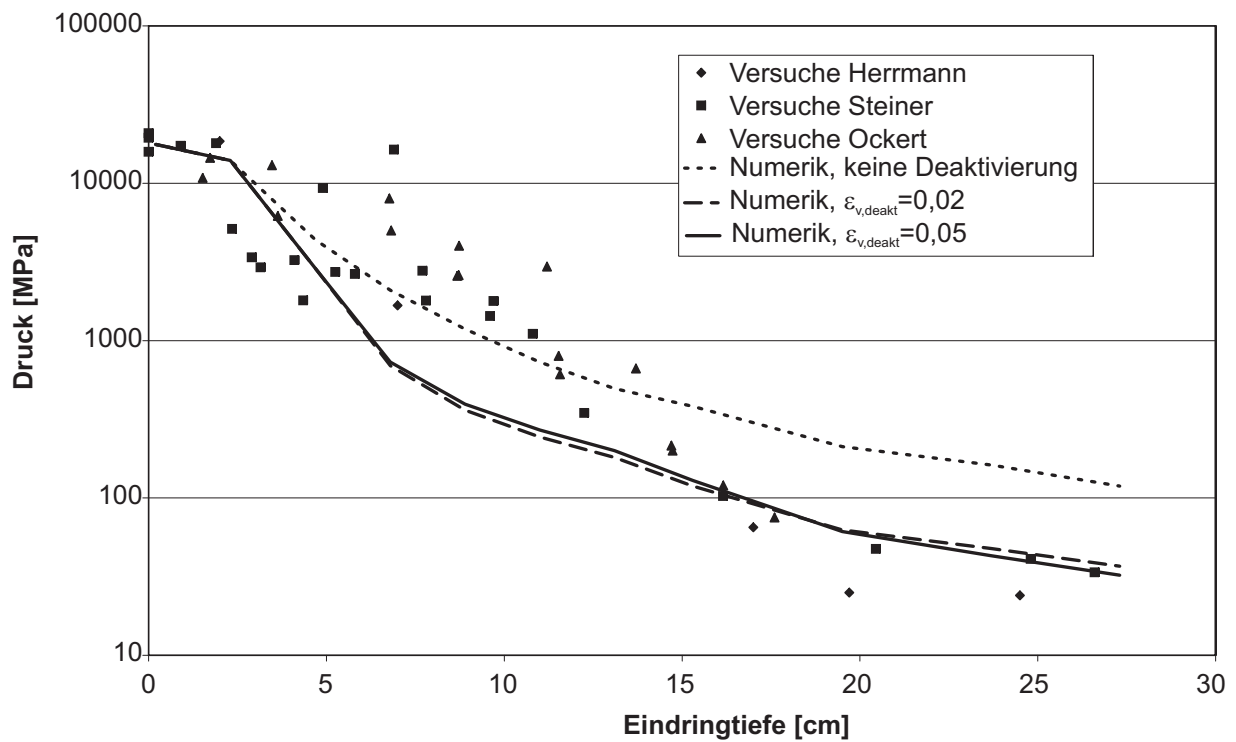


Abbildung 5.36: Einfluss der Deaktivierungsgrenze  $\epsilon_{v,deakt}$   
 ( $D_z = 0,1$ ,  $Y_{entl,plast} = 1,5$ )



Abbildung 5.37: Einfluss der Deaktivierungsgrenze  $\epsilon_{v,deakt}$  auf die Form des Kraters

### Einfluss der künstlichen Viskosität

Bei der Berechnung einer Stoßwelle mit der Finiten-Elemente-Methode wird, wie im Kapitel 2.4.4 gezeigt, eine quadratische künstliche Viskosität eingeführt, um die Diskontinuität auf mehrere Elemente zu verteilen. Dies führt im Allgemeinen zu einer besseren Konvergenz der Lösung. Da das elementfreie Galerkin-Verfahren auf höheren Ansatzfunktionen basiert, stellt sich die Frage, ob die quadratische künstliche Viskosität überhaupt erforderlich ist. In Abbildung 5.38 ist die Eindringcharakteristik bei Veränderung des Parameters  $b_{quad}$  dargestellt. Es zeigt sich, dass sich auch bei fehlender quadratischer künstlicher Viskosität Konvergenz einstellt. Gleichzeitig zeigt sich, dass bei Verwendung eines großen  $b_{quad}$  die Eindringcharakteristik im unteren Bereich des Versuchskörpers zu hohe Druckwerte ergibt. Es wird deswegen im Weiteren von einer sehr kleinen quadratischen künstlichen Viskosität von  $b_{quad} = 0,17$  ausgegangen.

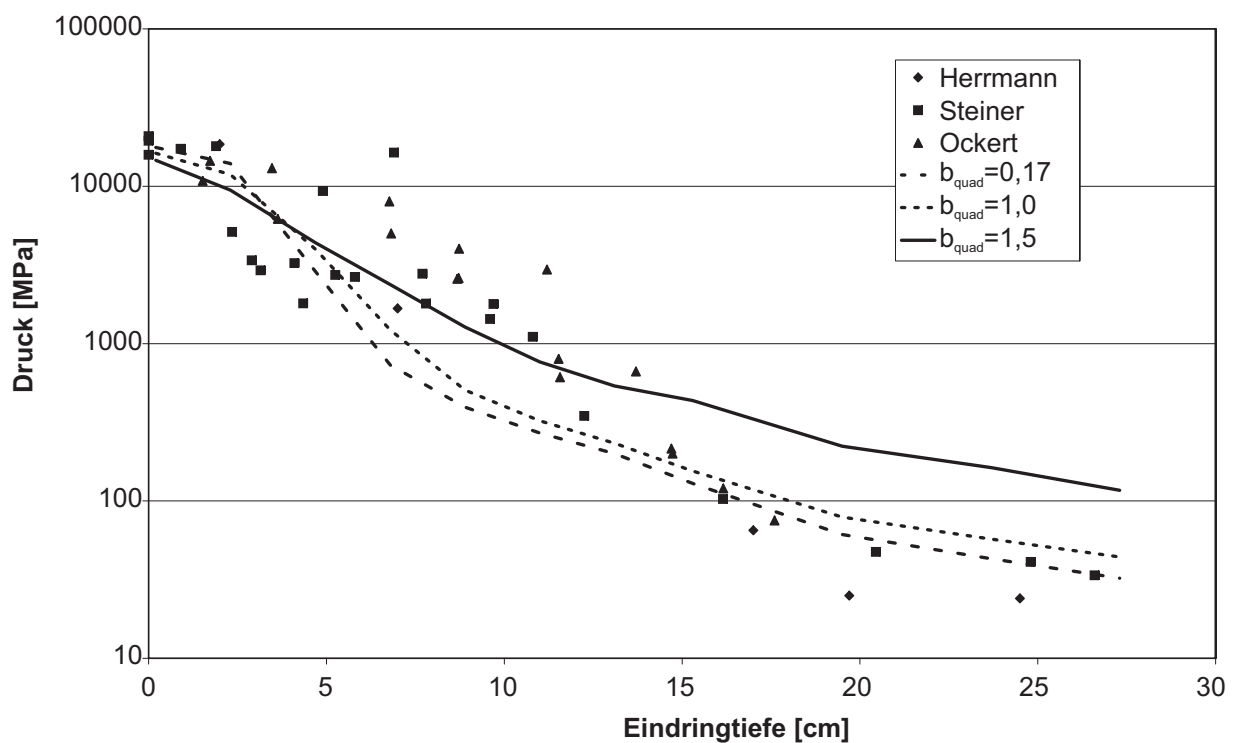


Abbildung 5.38: Einfluss der künstlichen Viskosität ( $\epsilon_{v,deakt} = 0,02$ ,  $D_z = 0,1$ ,  $Y_{entl,plast} = 1,5$ )

In Tabelle 5.7 sind die gewählten Parameter für die stoffgesetzliche Beschreibung des Betons unter einer Detonationsbelastung zusammengefasst.

Tabelle 5.7: Stoffgesetzliche Parameter

Kennwert	Größe
Deaktivierungsgrenze $\epsilon_{v,deakt}$	0,02
Druckschädigungsevolution $D_z$	0,1
Entlastungsfunktion bei einer vorherigen plastischen Porenbelastung $Y_{entl,plast}$	1,5
Parameter für lineare künstliche Viskosität $b_{lin}$	0,2
Parameter für quadratische künstliche Viskosität $b_{quad}$	0,17

### 5.6.6 Numerische Ergebnisse

#### Vergleich der Geschwindigkeit der Welle

Die Wellengeschwindigkeit wird von verschiedenen Autoren experimentell unterschiedlich bestimmt. Die Wellengeschwindigkeit geht in die Bestimmung der Hugoniot-Punkte ein. Während Ockert [102] und Herrmann [58] die Ankunftszeit der Druckwelle als Maßstab für die Zeit verwenden, benutzt Steiner [134] die Zeit, in der die halbe Maximalamplitude am Messaufnehmer registriert wird. Damit können Unterschiede zwischen den verschiedenen Messaufnehmern ausgeglichen werden. Es ist deswegen beim Vergleich der Versuchsergebnisse mit den Berechnungsergebnissen darauf zu achten, dass der gleiche Ankunftszeitpunkt zu Grunde gelegt wird.

In Abbildung 5.39 ist der Zeitverlauf der Welle über die Eindringtiefe dargestellt. Die Steigung dieser Kurve stellt die Wellengeschwindigkeit dar. Die experimentell bestimmte Kurve von Herrmann kann nun mit der numerisch bestimmten Kurve der Ankunftszeiten der Druckwelle verglichen werden. Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Der steigende Unterschied zwischen der Ankunftszeiten der Druckwelle und den Zeiten des maximalen Druckpeaks zeigt, dass die Anstiegszeit der Welle immer länger wird. Die Welle verliert ihre charakteristische Stoßwellenform.

#### Vergleich der Rissgeometrie

Mit den in den vorherigen Kapiteln zusammengestellten Parametern zur Rissentwicklung und zur stoffgesetzlichen Beschreibung des Betons unter einer hochdynamischen Beanspruchung wird eine Berechnung eines Betonkörpers unter einer Kontaktdetonation durchgeführt. Es stellt sich im oberen Teil des Körpers ein Bereich ein, in dem Knoten deaktiviert werden. Dieser Bereich spiegelt den entstehenden Auswurfkrater relativ gut wieder.

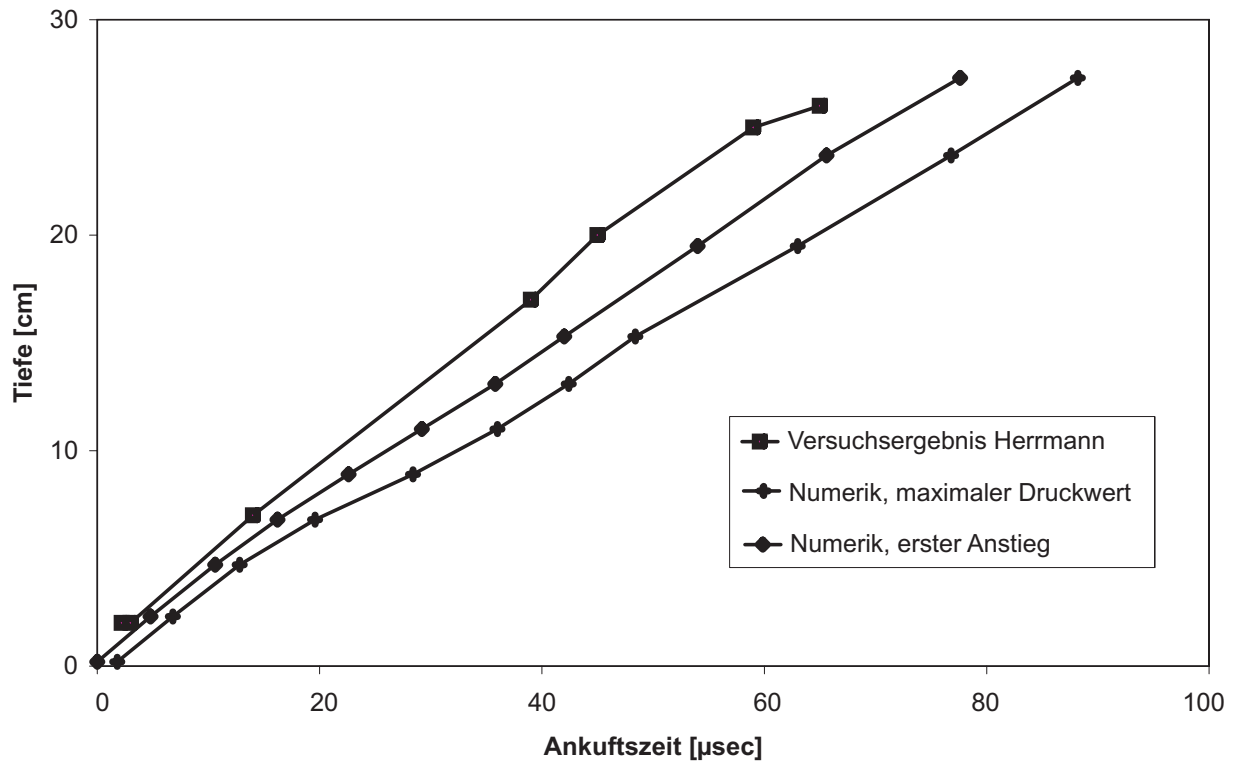


Abbildung 5.39: Vergleich des Zeitverlaufs der Welle über die Eindringtiefe

Die Druckwelle wandert, wie in den Untersuchungen zur Eindringcharakteristik gezeigt, durch den Beton und nimmt in ihrer Amplitude relativ schnell ab. Trifft die Welle an die Unterseite des Körpers, wird sie als Zugwelle reflektiert. Das Rissbild, das sich aus der Belastung ergibt, ist bis zur Reflexion der Welle an der Unterseite geprägt durch die im gesamten Körper auftretenden Quersugrisse. Nach der Reflexion der Welle drehen sich diese Risse und es bildet sich auf der Unterseite ein Spallingbereich aus.

Vergleicht man den sich nach einer Zeit von 0,13 msec ergebenden Rissverlauf mit dem bei den Versuchen aufgetretenen Rissbild (siehe Abbildung 5.40), so zeigt sich im oberen Bereich die Ausbildung eines Kraters mit ausgeworfenen Material und darunter die Ausbildung von Rissen.

Verstärkt man in Abbildung 5.40 die wesentlichen Risse (Abbildung 5.41), so erkennt man eine gute Übereinstimmung der beiden Rissgeometrien. Sowohl die im mittleren Bereich der Platte auftretenden horizontalen Risse als auch die im unteren Bereich in Form eines Ausbruchkegels vorhandenen Risse werden mit dem diskreten Rissmodell abgebildet.

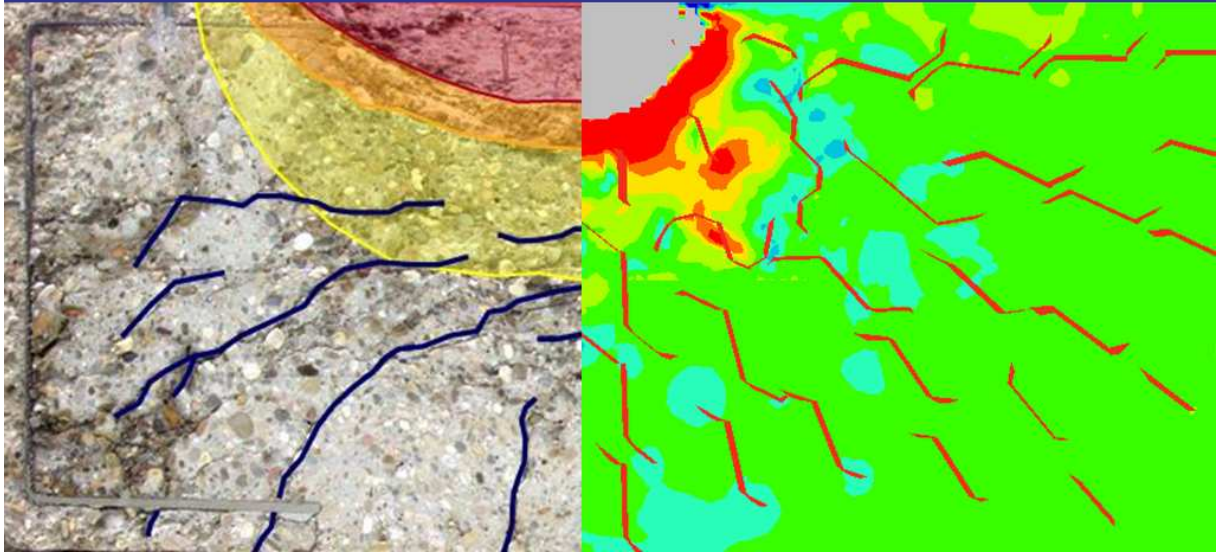


Abbildung 5.40: Vergleich der Rissgeometrie eines Versuches von Steiner [133] mit dem sich bei den Berechnungen ergebenden Rissbild

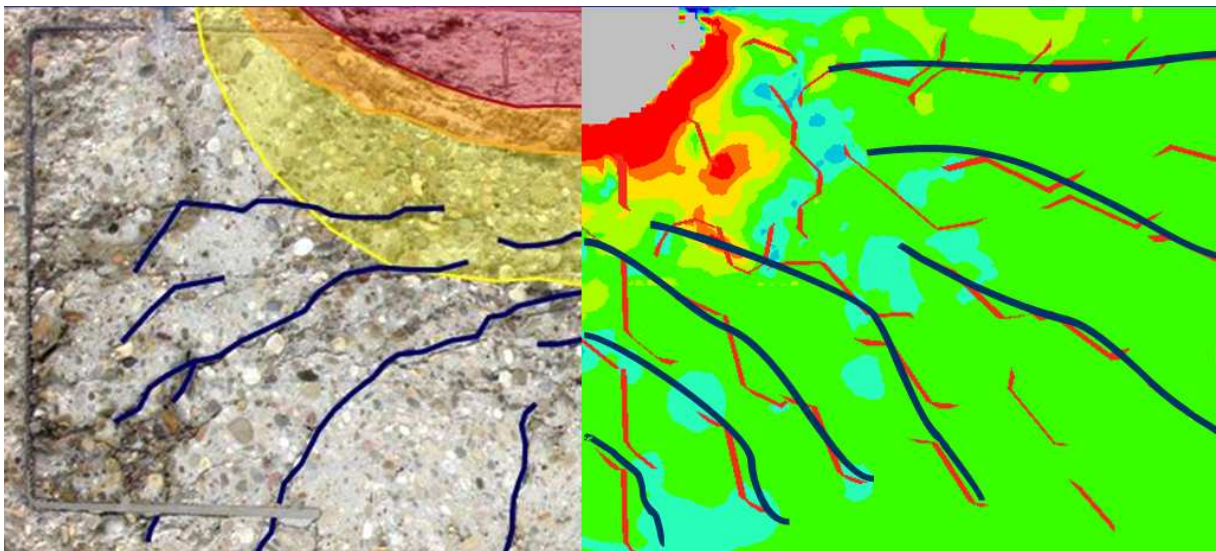


Abbildung 5.41: Vergleich der Rissgeometrie eines Versuches von Steiner [133] mit dem sich bei den Berechnungen ergebenden Rissbild – Kennzeichnung der wesentlichen Risse

## 5.7 Diskussion des gewählten Modells

Die Vergleiche der sich mit dem numerischen Modell ergebenden Rissverläufe zeigen, dass das vorgestellte Simulationsmodell zur Berechnung von hochdynamisch beanspruchtem Beton verwendet werden kann. Trotzdem stellt sich die Frage, ob der Ansatz des elementfreien Galerkin-Verfahrens mit diskreten Rissen Vorteile gegenüber anderen Verfahren bietet.

Die Implementierung diskreter Risse in das EFG-Verfahren wird von vielen verschiedenen Autoren erfolgreich verwendet. Allerdings wird bei den meisten Untersuchungen von Rissen ausgegangen, deren Richtung sich nicht ändert. Für die hier durchgeführten Untersuchungen waren Risse notwendig, deren Richtung sich ändern konnte. Bei den Untersuchungen zeigte sich, dass diese Rissverläufe grundsätzlich mit dem EFG-Verfahren darstellbar sind. Gleichzeitig musste festgestellt werden, dass die Konvergenz der Lösung bei Verwendung diskreter Risse nicht immer gegeben war. Gerade an den Rissrändern entstanden an verschiedenen Knoten unsinnige Verformungen, wobei sich zeigte, dass dies insbesondere bei der expliziten Zeitintegration auftrat. Durch kleinere Zeitschritte und die Verwendung einer künstlichen Viskosität konnte dieser Effekt vermindert werden. Ganz ausgeschlossen werden konnte er allerdings nicht.

Ein Riss stellt zunächst eine unstetige Funktion dar, deren Lösung zu Problemen führen kann. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, damit umzugehen. Die unstetige Funktion kann verschmiert werden. Dieser Ansatz wird z.B. bei Schädigungsmodellen verwendet. Alternativ kann eine höhere Integrationsordnung oder eine feinere Diskretisierung verwendet werden. Das EFG-Verfahren stellt in sich eine Methode mit höheren Ansatzfunktionen dar, da ein Knoten von mehr Knoten beeinflusst wird als bei linearen Finiten-Elementen. Aufgrund dessen lassen sich mit dieser Methode die Ansatzfunktionen zur Darstellung von Rissen abschneiden. Ungeklärt bleibt die Frage, ob die Verwendung der Finiten-Elemente-Methode mit adaptiver Anpassung der Netzgeometrie eine effektivere Darstellung der Risse ermöglicht. Zu vergleichen ist des Weiteren die Verwendung eines verschmierten Rissansatzes.

Die Überprüfung des Kontinuums nach neuen Rissen und die Überprüfung der Risswachstumsriterien bedeutet einen nicht zu unterschätzenden Rechenaufwand. Dieser war bei manchen der Untersuchungen größer als das Lösen des globalen Gleichgewichts.

In den durchgeführten Untersuchungen wurde darauf verzichtet, an den Rissspitzen die Knotendiskretisierung zu verfeinern. Dies wird von verschiedenen Autoren an kleinen Beispielen zwar durchgeführt, unklar ist allerdings,

ob ein solches Verfahren bei großen Knotenanzahlen sinnvoll sein kann. Eine Verfeinerung der Netzgeometrie geht einher mit der Änderung der Anzahl der Freiheitsgrade, die einen gewissen organisatorischen Aufwand bedeutet. Außerdem muss bei einer expliziten Zeitintegration bei einer Verkleinerung des Knotenabstandes die maximale Zeitschrittweite angepasst werden.

Es bleibt festzuhalten, dass das vorgestellte Simulationsmodell die Entwicklung von Einzelrissen gut abbilden kann. Die sich ergebenden Rissverläufe spiegeln die Versuchsergebnisse sehr gut wieder. Die bei einer dynamischen Belastung durch das Risswachstum auftretenden Schwingungen der Massenpunkte konnten so gedämpft werden, dass der dynamische Rissfortschritt bestimmt werden kann. Sowohl die Eindringcharakteristik als auch die entstandene Rissgeometrie bei einem mit einer Kontaktdetonation beaufschlagten Körper können mit dem Simulationsmodell berechnet werden.

Es hat sich weiter gezeigt, dass mit der Levelsetmethode ein gutes Werkzeug zur Speicherung der Rissgeometrie vorliegt, so dass auch komplizierte Rissgeometrien und Probleme mit vielen Rissen gut handhabbar sind.

Die Vorzüge des Simulationsmodells liegen insbesondere darin, dass bei der Berechnung der Versagensbereiche des Betons auch die Rissgeometrie bestimmt wird. Diese kann zum Beispiel für die Berechnung des Fragmentierungsverhaltens benutzt werden. Außerdem ist es damit möglich, Fluid-Struktur-Interaktionsberechnungen durchzuführen. Das von Niklasch [100] berechnete Leckageverhalten von gerissenem Beton geht bisher zum Beispiel von einer vorgegebenen Rissgeometrie aus. Mit dem Simulationsmodell ist es möglich, die diskreten Risse einzusetzen, um die Strukturberechnung des durch äußere Lasten und Temperaturzwängungen beanspruchten Betons mit einer Fluidberechnung eines den Riss durchströmenden Fluids zu koppeln.





# 6 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit untersucht die Verwendbarkeit eines diskreten Rissanansatzes für die Berechnung von hochdynamisch beanspruchten Betonstrukturen. Bei einer derartigen Berechnung müssen neben den Effekten, die bei einer statischen Beanspruchung zu berücksichtigen sind, auch das hydrostatische Verhalten der Mikroporen und das Verhalten von Beton unter hohen Dehnraten beachtet werden. Weiterhin zeigt die in der numerischen Mechanik verbreitete Finite-Elemente-Methode verschiedene Probleme mit den bei hochdynamischen Belastungen auftretenden großen Verformungen. Diese Probleme treten mit dem hier verwendeten Ansatz des elementfreien Galerkin-Verfahrens nicht auf.

Das Versagen von Beton wird in dem verwendeten Simulationsmodell weder über einen Schädigungsansatz noch über verschmierte Risse berücksichtigt. Es werden stattdessen diskrete Risse benutzt, die mit dem elementfreien Galerkin-Verfahren abgebildet werden. Die Verwendbarkeit der Risse wird über eine Konvergenzstudie gezeigt, bei der auch Unterschiede zur Extended Finite Element Method (X-FEM) gezeigt werden. Die Rissgeometrie wird über so genannte Levelsets gespeichert, die sich – wie sich im Laufe der Arbeit gezeigt hat – für eine besonders effektive Speicherung beliebiger Rissgeometrien eignen.

In der Arbeit wurde das elementfreie Galerkin-Verfahren erweitert, um eine Berechnung mit einer expliziten Zeitintegration zu ermöglichen. Eine Eigenwertanalyse zeigt weiterhin, dass die Eigenfrequenzen der Knoten von der Größe des Einflussradius abhängen. Die Eigenwerte der Knoten können sich stark erhöhen, wenn Rissufer nah am Knoten liegen. Dies ist bei der Bestimmung der maximalen Zeitschrittweite für die explizite Zeitintegration zu berücksichtigen. Die geänderten Eigenwerte haben auch einen Einfluss auf die Parameter der künstlichen Viskosität. Diese sind ebenfalls anzupassen, um die Eigenschwingungen der Knoten nach dem Durchlaufen einer Stoßwelle zu dämpfen.

Beton reagiert sowohl bei Zug- als auch bei Druckbeanspruchungen stark

nichtlinear. Dies liegt am kontinuierlichen Übergang der Mikroporen über die Mikrorisse zu den mit dem Auge sichtbaren Makrorissen. Da bei dem verwendeten Simulationsmodell ein elastisches Stoffgesetz verwendet wird, wird das nichtlineare Verhalten des Risswachstums über einen kohäsiven Rissansatz implementiert. Die in der Bruchprozesszone auftretenden Riss-schließspannungen werden als externe Kräfte eingeführt.

Um Risse abhängig vom aktuellen Zustand der Beanspruchung entstehen lassen zu können, müssen Kriterien für die Entstehung neuer Risse und für das Wachstum bestehender Risse entwickelt werden. In der Arbeit werden verschiedene Versagensflächen dargestellt, die als Kriterium verwendet werden können. Einen großen Einfluss auf das sich einstellende Rissbild haben die verschiedenen Parameter zum Risswachstum, deren Größe in dieser Arbeit bestimmt wird. Der Einfluss dieser Parameter, insbesondere die Frage nach der Rissrichtung, wird in der Arbeit diskutiert.

Bei einer hohen hydrostatischen Beanspruchung beeinflussen die Mikroporen das Verhalten des Betons. Das stark nichtlineare Verhalten wird mit einer Volumenfunktion beschrieben, die die nichtlineare Abhängigkeit des Druckes von den hydrostatischen Dehnungen abbildet. Es stellt sich heraus, dass die Entlastungsfunktion dieser Volumenfunktion für das Abklingverhalten einer in den Beton eingetragenen Stoßwelle von großer Bedeutung ist. Ohne diesen Anteil im Stoffgesetz nimmt die Amplitude einer Stoßwelle nicht ab, da keine Energie dissipiert wird. Es wird davon ausgegangen, dass die Entlastung mit der bis dahin maximal aufgetretenen Steifigkeit stattfindet.

Hohe Dehnraten führen zu einem Anstieg der Festigkeit von Beton. Dieser sogenannte Dehnrateneffekt wird über die Vergrößerung der Versagensfläche berücksichtigt. Die Steigerung der Festigkeit wird zusätzlich beschränkt, da es nicht sinnvoll erscheint, die Festigkeitssteigerung in Bereiche zu extrapolieren, in denen keine Versuchsergebnisse vorliegen und in denen dann unrealistisch große Festigkeitssteigerungen auftreten.

Einen weiteren wesentlichen Anteil bei der Ausbildung des Rissbildes hat die Rissgeschwindigkeit, die in dieser Arbeit auf die in Versuchen gemessene Größe begrenzt wird.

Das Simulationsmodell wird an verschiedenen statischen und dynamischen Versuchsergebnissen validiert. Der Vergleich mit statischen Biegeversuchen zeigt bei Verwendung eines bilinearen Verlaufs der Riss-schließspannungen eine gute Übereinstimmung. Der Vergleich mit Versuchen verschiedener Kontaktdetonationen ermöglicht eine Anpassung der Parameter der Entlastungsfunktion der Hugoniot-Kurve. Die Berechnungen einer Kontaktdetonation zeigen einen bei Versuchen ermittelten Rissverlauf.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Simulationsmodell ermöglicht die Berechnung von statisch und dynamisch beanspruchtem Beton. Der Vorteil des Modells liegt in der einfachen stoffgesetzlichen Beschreibung des Betons. Das elementfreie Galerkin-Verfahren und die Bestimmung der Rissgeometrie ergeben allerdings einen höheren numerischen Aufwand im Vergleich zu schädigungsbasierten Lösungsansätzen.

Das vorgestellte Simulationsmodell kombiniert einen diskreten kohäsiven Rissansatz mit stoffgesetzlichen Beschreibungen für hochdynamisch belasteten Beton. Das diskrete Rissmodell kann für verschiedene Anwendungen erweitert werden, bei denen für die Problemlösung die Rissgeometrie bekannt sein muss. Es ist damit insbesondere für Berechnungen einer Fluid-Struktur-Interaktionen anwendbar. So können die vorhandenen diskreten Risse unter einer Beanspruchung eines durchstömenden Fluids (Luft, Dampf, Wasser) berechnet werden. Ebenfalls ist es mit diesem Simulationsmodell möglich, genauere Aussagen über die Fragmentierung von statisch und dynamisch beanspruchtem Beton zu treffen.



# Symbolverzeichnis

<b><math>a</math></b>	Beschleunigungsvektor, Seite 32
<b><math>B</math></b>	B-Matrix, Seite 23
$b_{lin}$	Maß der Viskosität (linearer Anteil), Seite 39
$b_{quad}$	Maß der Viskosität (quadratischer Anteil), Seite 39
$c$	Wellengeschwindigkeit, Seite 37
<b><math>C</math></b>	Globale Dämpfungsmatrix, Seite 32
$D$	Skalare Schädigung, Seite 107
<b><math>D</math></b>	Materialmatrix, Seite 23
$D_z$	Schädigung bei Zermalmung, Seite 189
$d_{min}$	Minimaler Knotenabstand, Seite 37
$E$	E-Modul, Seite 37
<b><math>E</math></b>	Elastizitätstensor, Seite 102
$\Delta \mathbf{f}$	Zuwachs des internen Kraftvektors, Seite 29
$f_c$	Druckfestigkeit, Seite 116
$f_d^{dyn}$	Dynamische Druckfestigkeit, Seite 121
$\mathbf{f}_e$	Elementlastvektor, Seite 23
$f_t$	Einaxiale Zugfestigkeit, Seite 118
$f_t^{dyn}$	Dynamische Zugfestigkeit, Seite 121
$f_{dc}$	Zweiachiale Druckfestigkeit, Seite 118
$\mathbf{f}_{ext}$	Äußerer Kraftvektor, Seite 22
$\mathbf{f}_{int}$	Interner Kraftvektor, Seite 29
$\mathbf{f}_{res}$	Residualer Kraftvektor, Seite 30
$G_f$	Bruchenergie, Seite 140
$h_i$	Einflussradius des Knotens $i$ , Seite 54
$I_1$	1. Invariante, Seite 117
$J_2$	2. Invariante, Seite 117
$J_i$	Gewichteter Interpolationsfehler am Knoten $i$ , Seite 57
<b><math>K</math></b>	Gesamtsteifigkeitsmatrix, Seite 23
$K_e$	Elementsteifigkeitsmatrix, Seite 23
<b><math>M</math></b>	Globale Massenmatrix, Seite 32
$N_i$	Ansatzfunktion am Knoten $i$ , Seite 22
<b><math>P</math></b>	Matrix der Basisfunktionen, Seite 58
$p$	Basisfunktion, Seite 57

$q_{lin}$	Lineare künstliche Viskosität, Seite 39
$q_{quad}$	Quadratische künstliche Viskosität, Seite 39
$s$	Normierter Abstand eines EFG-Knotens, Seite 54
$u$	Rissverschiebung tangential, Seite 145
$\mathbf{u}$	Vektorfeld der Verformung, Seite 22
$\delta \mathbf{u}$	Virtuelle Verformungen, Seite 22
$u^h$	Interpolation der Verformungen, Seite 53
$\mathbf{u}_0$	Anfangsverformungen, Seite 32
$u_c$	Max. Rissverschiebung tangential, Seite 146
$\mathbf{u}_e$	Elementverformungen, Seite 23
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor, Seite 32
$\mathbf{v}_0$	Anfangsgeschwindigkeiten, Seite 32
$w$	Rissöffnung, Seite 139
$w(\mathbf{x})$	Wichtungsfunktion am Punkt $\mathbf{x}$ , Seite 54
$W_{ext}$	Arbeit der äußeren Kräfte, Seite 22
$W_{int}$	Arbeit der inneren Kräfte, Seite 22
$w_{max}$	Kritische Rissöffnung, Seite 139
$\mathbf{X}$	Körperkoordinate (Lagrange), Seite 26
$\mathbf{x}$	Raumkoordinate (Euler), Seite 26
$Y$	Volumenfunktion, Seite 149
$\alpha$	Penalty-Faktor, Seite 75
$\alpha_c$	Reduktionsfaktor der maximalen Zeitschrittweite (Courant-Zahl), Seite 37
$\dot{\epsilon}$	Dehnrage, Seite 39
$\epsilon$	Dehnungen, Seite 22
$\epsilon_v$	Hydrostatische Dehnung, Seite 149
$\delta \epsilon$	Virtuelle Dehnungen, Seite 23
$tr \epsilon_e$	Spur der Dehnung (Dreifache hydrostatische Dehnung), Seite 149
$\epsilon_e$	Elastische Dehnung, Seite 105
$\epsilon_p$	Plastische Dehnung, Seite 105
$\gamma$	Parameter zur Schädigungsentwicklung bei Zermalmung, Seite 189
$\mathbf{f}_\Gamma$	Nebenbedingung am dem Rand $\Gamma$ , Seite 74
$\kappa_d$	Äquivalente Schädigungsdehnung, Seite 110
$\Lambda$	Lamékonstante, Seite 102
$\lambda$	Skalarer Größenfaktor beim Plastizität und Schädigung, Seite 105
$\lambda$	Lagrange-Multiplikatoren, Seite 74

$\mu$	Lamékonstante, Seite 102
$\nu$	Querkontraktionszahl, Seite 37
$\omega_i$	Einflussbereich des Knotens $i$ , Seite 56
$\phi_i$	Levelset-Feld zur Identifizierung der Rissspitze, Seite 42
$\Pi$	Potential, Seite 23
$\psi$	Schädigungsoperator, Seite 107
$\psi_i$	Levelset-Feld zur Identifizierung der getrennten Elemente, Seite 42
$\rho$	Dichte, Seite 37
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen, Seite 116
$\sigma_{ccs}$	Spannungen Bruchprozesszone, Seite 139
$\sigma$	Spannungen, Seite 22
$\tau_r$	Reibung im Riss, Seite 145
$\varphi_i$	Formfunktion am Knoten $i$ , Seite 53





# Literaturverzeichnis

- [1] ABAQUS, INC.: *ABAQUS - Theory Manual, Version 6.4*, 2003.
- [2] ABAQUS, INC.: *ABAQUS - Keyword Manual, Version 6.5*, 2006.
- [3] AKKERMANN, JAN: *Rotationsverhalten von Stahlbeton-Rahmenecken*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [4] ALBRITTON, G.E. und COLE, K.M.: *Response of Deep Two-way Reinforced and Unreinforced Concrete Slabs to Static and Dynamic Loading*. Technischer Bericht N-69-2, U.S. Army Engineer Waterway Experiment Station, Vicksburg, MS, 1969.
- [5] ALTAIR HYPERWORKS: <http://www.altair.de>.
- [6] ALTENBACH, JOHANNES und ALTENBACH, HOLM: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1994.
- [7] ANDERSON, CHARLES E.: *An overview of the theory of hydrocodes*. International Journal of Impact Engineering, 5:33–59, 1987.
- [8] ARREA, M. und INGRAFFEA, A.R.: *Mixed-Mode Crack Propagation in Mortar and Concrete*. Technischer Bericht No. 81-13, Dept. of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, N.Y., 1982.
- [9] BACHMANN, HUBERT: *Die Massenträgheit in einem Pseudo-Stoffgesetz für Beton bei schneller Zugbeanspruchung*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 1993.
- [10] BARENBLATT, G.I.: *The mathematic theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. Advances in Applied Mechanics, 7:55–129, 1962.
- [11] BATHE, KLAUS-JÜRGEN: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, Berlin; Heidelberg; New York; Tokio, 2002.

- [12] BAŽANT, Z.P. und KAZEMI, M.T.: *Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete*. International Journal of Fracture, 44:111–131, 1990.
- [13] BEISSEL, STEPHEN und BELYTSCHKO, TED: *Nodal Integration of the element-free Galerkin method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:49–74, 1996.
- [14] BELYTSCHKO, T., KONGRAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M. und KRYSL, P.: *Meshless methods: an overview and recent developments*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 139:3–47, 1996.
- [15] BELYTSCHKO, T., KRYSL, P. und KONGRAUZ, Y.: *A three-dimensional explicit element-free galerkin method*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 24:1253–1270, 1997.
- [16] BELYTSCHKO, T., LU, Y.Y. und GU, L.: *Element-free galerkin methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37:229–256, 1994.
- [17] BELYTSCHKO, T., ORGAN, D. und GERLACH, C.: *Element-free galerkin methods for dynamic fracture in concrete*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 187:385–399, 2000.
- [18] BELYTSCHKO, TED und BLACK, T.: *Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45:601–620, 1999.
- [19] BELYTSCHKO, TED, LIU, WING KAM und MORAN, BRIAN: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley&Sons, Chichester, 2000.
- [20] BELYTSCHKO, TED, VENTURA, GIULIO und XU, JINGXIAO: *New Methods for Discontinuity and Crack Modeling in EFG*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering - Meshfree Methods for Partial Differential Equations, Seiten 37–50, 2000.
- [21] BERNHART, DANIELA: *Last-Zeit-Funktionen beim Aufprall flüssigkeitsgefüllter Stoßkörper*. In: *DAfStb-Forschungskolloquium*, Seiten 311–320. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 2006.

- [22] BETTEN, JOSEF: *Tensorrechnung für Ingenieure*. Teubner Stuttgart, 1987.
- [23] BETTEN, JOSEF: *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2., erweiterte Auflage, 2001.
- [24] BISCHOFF, P.H. und PERRY, S.H.: *Compressive behaviour of concrete at high strain rates*. *Materials and Structures*, 24:425–450, 1991.
- [25] BORSCHNEK, FERDINAND: *Verwendung diskreter Risse zur Berechnung von dynamisch beanspruchtem Beton*. Diplomarbeit, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe (TH), 2006.
- [26] BRARA, AHMED und KLEPACZKO, JANUSZ R.: *Dynamic tensile behavior of concrete: experiment and numerical analysis*. *ACI Materials Journal*, 101(2):162–167, 2004.
- [27] BREIDT, MICHAEL: *Computersimulation komplexer Bauwerk-Sprengungen unter Verwendung adaptiver Mehrebenenmodelle*. Fakultät für Bauingenieurwesen; Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 2004.
- [28] CAMACHO, G. T. und ORTIZ, M.: *Computational modelling of impact damage in brittle materials*. *International Journal of Solids and Structures*, 20-22:2899–2938, 1996.
- [29] CARPINTERI, A., DI TOMMASO, A. und FANELLI, M.: *Influence of material parameters and geometry on cohesive crack propagation*. In: *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*, Seiten 117–135, Proc. Int. Conf., Lausanne, 1986. Elsevier, Amsterdam.
- [30] CEB: *Concrete Structures under Impact and Impulsive Loading - Synthesis Report 187*. CEB-Bulletins, 1988.
- [31] CHANDRA, D. und KRAUTHAMMER, T.: *Dynamic effects on fracture mechanics of cracked solid*. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(5):809–822, 1995.
- [32] CHEN, JIUN-SHYAN und WANG, HUI-PING: *New boundary condition treatments in meshfree computation of contact problems*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187:441–468, 2000.

- [33] CHEN, WAI-FAH und SALEEB, ATEF F.: *Constitutive Equations for Engineering Materials*. Wiley and Sons, 1994.
- [34] COOK, ROBERT D., MALKUS, DAVID S., PLESHA, MICHAEL E. und WITT, ROBERT, J.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*. John Wiley & Sons, 4. Auflage, 2002.
- [35] CORNELISSEN, H.A., HORDIJK, D.W. und REINHARDT, H.W.: *Experimental determination of crack softening characteristics of normalweight and lightweight concrete*. Heron, 31(2):45–56, 1986.
- [36] COURANT, R., FRIEDRICHS, K. und LEWY, H.: *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*. Mathematische Annalen, 100(1):32–74, 1928.
- [37] CURBACH, MANFRED: *Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 1987.
- [38] DOLBOW, JOHN und BELYTSCHKO, TED: *Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods*. Computational Mechanics, 23:219–230, 1999.
- [39] DOLBOW, JOHN, MOËS, NICOLAS und BELYTSCHKO, TED: *An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(51-52):6825–6846, 2001.
- [40] DU, J., YON, J.H., HAWKINS, N.M., ARAKAWA, K. und KOBAYASHI, A.S.: *Fracture process zone for concrete for dynamic loading*. ACI Materials Journal, 89(3):252–258, 1992.
- [41] DUGDALE, D.S.: *Yielding in steel sheets containing slits*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8:100–108, 1960.
- [42] EIBL, J., GÖDDE, P. und CURBACH, M.: *Untersuchung der Betonzugfestigkeit unter hoher Belastungsgeschwindigkeit – Rissgeschwindigkeit*. Technischer Bericht, Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben Az. IV B 5 – FA 9293 des Landes Nordrhein-Westfalen, Karlsruhe, 1986.
- [43] EIBL, J., KLEIN, E. und KOBLE, G.: *Verhalten von Betonkonstruktionen bei harten Stößen - Teil 1: Betonverhalten bei hoher hydrodynamischer Beanspruchung*. Forschungsbericht zum DFG-Vorhaben EI-

- 114/13. Technischer Bericht, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, Dezember 1994.
- [44] EIBL, STEPHAN J.: *Schockwellenbeanspruchung von Stahlbetonwänden durch Kontakt-Detonationen*. Doktorarbeit, Technische Universität München, 1995.
- [45] ERDOGAN, F.: *Crack-Propagation Theories*. In: LIEBOWITZ, H. (Herausgeber): *Fracture – An Advanced Treatise*. Academic Press, New York, 1968.
- [46] GEBBEKEN, N. und RUPPERT, M.: *A new material model for concrete in high-dynamic hydrocode simulations*. *Archive of Applied Mechanics*, 70:463–478, 2000.
- [47] GEBBEKEN, NORBERT und DITTRICH, GERRIT: *Dynamisches Abscher-versagen von Stahlbeton-Bauteilen unter Detonationsbelastung*. *Beton- und Stahlbetonbau*, 101(7):490–498, 2006.
- [48] GNU C++ COMPILER: <http://gcc.gnu.org/>.
- [49] GOPALARATNAM, V.S. und SHAH, S.P.: *Softening response of plain concrete in direct tension*. *ACI Journal*, 82(3):310–323, 1985.
- [50] GRADY, D.E.: *The mechanics of Fracture under High-Rate Stress Loading*. In: BAZANT, Z. (Herausgeber): *Mechanics of Geomaterials*. John Wiley & Sons Ltd, 1985.
- [51] GRAFF, KARL F.: *Wave motion in elastic solids*. Clarendon Pr., 1975.
- [52] GRAVOUIL, A., MOES, N. und BELYTSCHKO, T.: *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part 2: Level set update*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2569–2586, 2002.
- [53] GREGSON, V.R.: *A Shock Wave Study of Fondu-Fyre WA-1 and Concrete*. Technischer Bericht MSL-70-30, General Motors Materials and Structures Laboratory, 1971.
- [54] GRIFFITH, A.A.: *The phenomena of rupture and flow in solids*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1921.

- [55] GUO, Z. und WANG, C.: *Experimentelle Untersuchungen der Bruchkriterien von Beton bei mehrachsiger Beanspruchung*. Fakultät für Bauingenieurwesen, Universität Tsinghua, 1990.
- [56] HÄUSSLER-COMBE, ULRICH: *Elementfreie Galerkin-Verfahren - Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, 2001.
- [57] HÄUSSLER-COMBE, ULRICH: *Einige Grundlagen nichtlinearer Kontinuumsmechanik*. Technische Universität Dresden, 2004.
- [58] HERRMANN, NICO: *Experimentelle Erfassung des Betonverhaltens unter Schockwellen*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2003.
- [59] HERRMANN, W.: *Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials*. Journal of Applied Physics, 40(6):2490–2499, 1969.
- [60] HILLERBORG, A., MODEER, M. und PETERSSON, P.E.: *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cement and Concrete Research, 6:773–782, 1976.
- [61] HOLMQUIST, T.J., JOHNSON, G.R. und COOK, W.H.: *A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures*. In: *Proc. 14th International Symposium on Ballistics, Quebec*, 1993.
- [62] HOOKE, ROBERT: *De Potentia Restitutiva, or of Spring Explaining the Power of Springing Bodies*. London, 1678.
- [63] HSIEH, S.S., TING, E.C. und CHEN, W.F.: *A plasticity-fracture model for concrete*. International Journal of Solids and Structures, 18:181–197, 1982.
- [64] HUGHES, THOMAS J.R.: *The finite element method*. Prentice Hall, 1987.
- [65] IRWIN, G.R.: *Handbuch der Physik*, Band 6, Seiten 551–590. Springer Verlag, 1958.

- [66] JEANG, F.L. und HAWKINS, N.M.: *Nonlinear analysis of concrete fracture*. Technischer Bericht No. SM 85-2, University of Washington, USA, 1985.
- [67] JENQ, YEUSHANG S. und SHAH, SURENDRA P.: *Two Parameter Fracture Model for Concrete*. Journal of Engineering Mechanics, 111(10):1227–1241, 1985.
- [68] JIRÁSEK, M. und MARFIA, S.: *From localized damage to discrete cracks*. In: *EUROMECH Colloquium 460*, 21.-23.2.2005, Innsbruck, 2005.
- [69] JOHNSON, G.R. und COOK, W.H.: *A constitutive model and data from metals subjected to large strains, high strain rates and high temperatures*. In: *Proc. 7th Int. Symp. on Ballistics, The Hague, Netherlands*, 1983.
- [70] KACHANOV, L.M.: *Time of the rupture process under creep conditions*. Izvestiya Akademia Nauk, USSR Otd. Tekh., 8:26–31, 1958.
- [71] KDEVELOP: <http://www.kdevelop.org/>.
- [72] KERKHOF, F.: *Bruchvorgänge in Gläsern*. Verlag der Deutschen Glas-technischen Gesellschaft, Frankfurt, 1970.
- [73] KLEPACZKO, J.R., BRARA: *An experimental method for dynamic tensile testing of concrete by spalling*. International Journal of Impact Engineering, 25(4):387–410, 2001.
- [74] KÖRMELING, H.A. und REINHARDT, H.W.: *Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete*. Technischer Bericht No. 5-83-18, Stevin Laboratory, Delft University of Technology, 1983.
- [75] KORN, CARSTEN: *Das elementfreie Galerkin-Verfahren mit adaptiver Verfeinerung*. Fakultät für Mathematik; Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999.
- [76] KOSOLOV, G.V.: *Über die Anwendung der komplexen Funktionentheorie auf das ebene Problem der mathematischen Elastizitätstheorie (Original in russisch)*. Diplomarbeit, Universität Yuriew, Dorpat, 1909.

- [77] KRYSL, P. und BELYTSCHKO, T.: *Element-free Galerkin method: Convergence of the continuous and discontinuous shape functions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 148(3-4):257–278, 1997.
- [78] KUPFER, HELMUT, HILSDORF, HUBERT und RÜSCH, HUBERT: *Behavior of concrete under biaxial stresses*. Journal of the American Concrete Institute, 66:656–666, 1969.
- [79] LANDSHOFF, R.: *A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks*. Technischer Bericht, Los Alamos Scientific Laboratory, Rept. LA-1930, 1955.
- [80] LARCHER, MARTIN: *nmk - Handbuch*, 2006.
- [81] LARCHER, MARTIN, HERRMANN, NICO und STEMPNIEWSKI, LOTHAR: *Explosionssimulation leichter Hallenhüllkonstruktionen*. Bauingenieur, 81(6):271–277, 2006.
- [82] LAU, OLIVER: *Abrakadabra - Programme parallelisieren mit OpenMP*. c't, 15:218–223, 2006.
- [83] LEINE, R.I. und CAMPEN, D.H. VAN: *Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical systems*. European Journal of Mechanics A, Solids, 25:595–616, 2006.
- [84] LEMAÎTRE, J.: *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [85] LIU, M.B., LIU, G.R. und LAM, K.Y.: *A one-dimensional meshfree particle formulation for simulating shock waves*. Shock Waves, 13(3):201–212, 2003.
- [86] LIVERMORE SOFTWARE TECHNOLOGY CORPORATION: *LS-DYNA - Theoretical Manual, Version 970*, April 2003.
- [87] LU, Y.Y., BELYTSCHKO, T. und TABBARA, M.: *Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 126(1-2):131–154, 1995.
- [88] MARK, PETER: *Ein Beitrag zur Modellierung und numerischen Simulation von Strukturveränderungen in stoßartig beanspruchtem Beton*. Doktorarbeit, Ruhr-Universität Bochum, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, 1997.



- [89] MATTOCK, A.H. und HAWKINS, N.M.: *Shear Transfer in Reinforced Concrete - Recent Research*. Journal of the Prestressed Concrete Institute, 17(2):55–75, 1972.
- [90] MECHTCHERINE, VIKTOR: *Bruchmechanische und fraktologische Untersuchungen zur Rissausbreitung in Beton*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [91] MESCHKE, G., LACKNER, R. und MANG, H.A.: *An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 42(4):703–728, 1998.
- [92] MILLS, L.L. und ZIMMERMANN, R.M.: *Compressive Strength of Plain concrete under multiaxial loading conditions*. ACI Journal, 67(10):802–807, 1970.
- [93] MINDESS, S., BANTHIA, N., RITTER, A. und SKALNY, J: *Crack Development in Cementitious Materials under Impact Loading*. In: MINDESS, H. und SHAH, S.P. (Herausgeber): *Cement-Based Composites: Strain Rate Effects on Fracture*, 1986.
- [94] MOES, N., DOLBOW, J. und BELYTSCHKO, T.: *A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46:131–150, 1999.
- [95] MOES, N., GRAVOUIL, A. und BELYTSCHKO, T.: *Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part 1: Mechanical model*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 53:2549–2568, 2002.
- [96] MOST, THOMAS und BUCHER, CHRISTIAN: *A Moving Least Squares weighting function for the Element-free Galerkin Method which almost fulfils essential boundary conditions*. Structural Engineering and Mechanics, 21(3):315–332, 2005.
- [97] MSC.SOFTWARE CORPORATION MSC.PATRAN: *Patran*, [www.mscsoftware.com](http://www.mscsoftware.com).
- [98] MURIA VILA, D. und HAMELIN, P.: *Comportement au choc des béton et mortiers a matrices hydraulique*. In: MASO, J.C. (Herausgeber): *Combining Materials: Design, Production and Properties*, Seiten 725–732. Chapman and Hall, London, 1987.

- [99] NEUMANN, JENS: *Anwendung von adaptiven Finite Element Algorithmen auf Probleme der Strukturodynamik*. Doktorarbeit, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe (TH), 2004.
- [100] NIKLASCH, CHRISTOPH: *Numerische Untersuchungen zum Leckageverhalten von gerissenen Stahlbetonwänden*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2007.
- [101] NOH, W.F.: *Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux*. Journal of Computational Physics, 72:78–120, 1978.
- [102] OCKERT, JÜRGEN: *Ein Stoffgesetz für die Schockwellenausbreitung in Beton*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.
- [103] ORGAN, D., FLEMING, M., TERRY, T. und BELYTSCHKO, T.: *Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency*. Computational Mechanics, 18(3):225–235, 1996.
- [104] ORTIZ, M.: *A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete*. Mechanics of Materials, 4:67–93, 1985.
- [105] OSHER, STANLEY: *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*. Springer, 2003.
- [106] OTTOSEN, NIELS SAABYE: *A failure criterion for concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 103:527–535, 1977.
- [107] OTTOSEN, NIELS SAABYE: *Constitutive model for short-time loading of concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division, 105(EM1):127–141, 1979.
- [108] PARISCH, HORST: *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1. Aufl. Auflage, 2003.
- [109] PLOTZITZA, ANDREAS: *Ein Verfahren zur numerischen Simulation von Betonstrukturen beim Abbruch durch Sprengen*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2002.

- [110] PRASAD, M.V.K.V. und KRISHNAMOORTHY, C.S.: *Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191:2699–2725, 2002.
- [111] PRÖCHTEL, PATRICK: *Schädigungsgesetz für Beton – Implementierung in das FE Programm nmk*. Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (TH), Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe, 2003.
- [112] RABCZUK, TIMON: *Numerische Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten von Beton mit Hilfe der SPH-Methode*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2002.
- [113] REINHARDT, HANS W.: *Simple relations for the strain rate influence on concrete*. Darmstadt Concrete, 2:203–211, 1987.
- [114] RIEDEL, WERNER: *Beton unter dynamischen Lasten – Meso- und makromechanische Modelle und ihre Parameter*. Fraunhofer-Institut für Kurzzeitdynamik, Ernst-Mach-Institut, Freiburg, 2000.
- [115] RIERA, J.D.: *On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces*. Nuclear Engineering and Design, 8:415–426, 1968.
- [116] ROELFSTRA, P.E. und WITTMANN, F.H.: *Numerical Method to Link Strain Softening with Failure of Concrete*. In: WITTMANN, F.H. (Herausgeber): *Fracture Toughness and Fracture Energy*, Seiten 163–175. Elsevier, 1986.
- [117] ROSS, ALLEN C., REROME, DAVID M., TEDESCO, JOSEPH W. und L., HUGHES MARY: *Moisture and strain rate effects on concrete strength*. ACI Materials Journal, 93(3):293–299, May-June 1996.
- [118] ROSSI, P.: *A physical phenomenon which can explain the mechanical behaviour of concrete under high strain rates*. Materials and Structures, 24:422–424, 1991.
- [119] ROSSI, P., MIER, J.G.M. VAN, BOULAY, C. und LE MAOU, F.: *The dynamic behaviour of concrete: influence of free water*. Materials and Structures, 25:509–514, 1992.
- [120] ROTS, J.G.: *Computational Modeling of Concrete Fracture*. Doktorarbeit, TH Delft, 1988.

- [121] RUPPERT, MAX: *Zur numerischen Simulation von hochdynamisch beanspruchten Betonstrukturen*. Universität der Bundeswehr; Dissertation, 2000.
- [122] SANDLER, I. und BARON, M.: *Numerical Models for dynamic Loading*. Mechanics of Geomaterials, Seiten 501–527, 1985.
- [123] SCHMIDT-HURTIENNE, BJÖRN: *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell für Beton unter Einschluss des Dehnrateneffekts bei Hochgeschwindigkeitsbelastung*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 2001.
- [124] SCHMITH, FLORIAN: *Berechnung von unbewehrtem Beton unter Einsatz diskreter, kohäsiver Risse*. Diplomarbeit, Institut für Massivbau und Baustofftechnologie, Universität Karlsruhe (TH), 2006.
- [125] SCHULER, HARALD: *Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Schädigung von stoßbeanspruchtem Beton*. Doktorarbeit, Universität der Bundeswehr München, Ernst-Mach-Institut Freiburg, 2004.
- [126] SEDGEWICK, ROBERT: *Algorithmen*. Addison-Wesley, 1988.
- [127] SHAH, S.P.: *Fracture toughness of cement-based materials*. Materials and Structures, 21:145–150, 1988.
- [128] SHAH, S.P. und JOHN, R.: *Strain rate effects in crack I propagation in concrete*. In: WITTMANN, F.H. (Herausgeber): *Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete*. Elsevier, Amsterdam, 1986.
- [129] SIMO und JU: *Strain- and stress-based continuum damage models*. International Journal of Solids and Structures, 23:821–869, 1987.
- [130] SISHAN ZHENG: *Beton bei variierender Dehngeschwindigkeit, untersucht mit einer neuen modifizierten Split-Hopkinson-Bar-Technik*. Doktorarbeit, Universität Karlsruhe (TH), 1996.
- [131] SOFISTIK AG: *SOFiSTiK – GENF – Generierung Finiter Elemente und Stabwerke*, 11.15 Auflage, 2005.
- [132] STEGEMANN, MICHEAL: *Untersuchungen zum Leckverhalten von Stahlbetonwänden unter Dampf und Luft, geplante Promotion*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; geplante Dissertation, Universität Karlsruhe, 2007.

- [133] STEINER, STEPHAN: *Beton unter Kontaktdetonation – Experimentelle Untersuchungen*. In: *Beiträge zum 47. DAfStb-Forschungskolloquium, 9.-10.November 2006*, 2006.
- [134] STEINER, STEPHAN: *Untersuchungen zu Materialeffekten in Betonstrukturen unter Explosionsbelastung*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; geplante Dissertation, Universität Karlsruhe, 2007.
- [135] STEMPNIEWSKI, LOTHAR: *Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 1990.
- [136] STEMPNIEWSKI, LOTHAR, LARCHER, MARTIN und STEINER, STEPHAN: *Beton unter hochdynamischer Belastung. Historie, Materialbeschreibung, Experimente und numerische Simulation*. Beton- und Stahlbetonbau, 03:152–162, 2006.
- [137] STOLARSKA, M., CHOPP, D.L., MOES, N. und BELYTSCHKO, T.: *Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:943–960, 2001.
- [138] STROUSTRUP, BJARNE: *Die C++-Programmiersprache*. Addison-Wesley-Longman, Bonn, 2000.
- [139] TIMOSHENKO, STEPAN P. und GOODIER, JAMES N.: *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, 1970.
- [140] TRUNK, BERNHARD GÜNTER: *Einfluss der Bauteilgrösse auf die Bruchenergie von Beton*. Doktorarbeit, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1999.
- [141] VENTURA, G., XU, J. und BELYTSCHKO, T.: *Level Set Crack Propagation Modelling in the Element Free Galerkin Method*. In: *WCCM V - Fifth World Congress on Computational Mechanics*, 2002.
- [142] VENTURA, G., XU, J.X. und BELYTSCHKO, T.: *A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54(6):923–944, 2002.

- [143] VON NEUMANN, J. und RICHTMYER, R.D.: *A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*. Journal of Applied Physics, 21(3):232–237, 1950.
- [144] WALRAVEN, J.C. und REINHARDT, H.W.: *Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subject to shear loading*. HERON, 26(1a), 1981.
- [145] WEERHEIJM, J.: *Concrete under Impact Tensile Loading and Lateral Compression*. Doktorarbeit, Technische Universität Delft, 1992.
- [146] WEIHE, STEFAN: *Modelle der fiktiven Rissbildung zur Berechnung der Initiierung und Ausbreitung von Rissen*. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktion, 1995.
- [147] WESTERGAARD, H.M.: *Bearing Pressures and Cracks*. Journal of Applied Mechanics, June 1939.
- [148] WILLAM, K.J. und WARNKE, E.P.: *Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete*. In: *IABSE Proceedings, Vol 19*, 1975.
- [149] WRIGGERS: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- [150] ZHENG, S.: *Beton bei variierender Dehngeschwindigkeit untersucht mit einer neuen modifizierten Split-Hopkinson Bar-Technik*. Schriftenreihe des Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie; Dissertation, Universität Karlsruhe, 1996.



# Lebenslauf

Martin Larcher geb. Wolters, Wilderichstr. 5, 76646 Bruchsal

Geboren am 4. Februar 1975 in Freiburg

tiffi@larcher.de – www.larcher.de

1985 bis 1994	Kolleg St. Sebastian Stegen, staatlich anerkanntes altsprachliches Gymnasium in Trägerschaft der Herz-Jesu-Priester, Abitur
09/1994 bis 11/1995	Zivildienst im Haus Tobias, einer Waldorfschule für geistig behinderte Kinder. Einzelbetreuung eines autistischen Jugendlichen
02/1996 bis 05/1996	Baupraktikum bei Bilfinger-Berger in Freiburg
10/1996 bis 02/2002	Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Karlsruhe
09/1997 bis 12/2001	Wissenschaftliche Hilfskraft in der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine
03/2002 bis 02/2007	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Massivbau und Baustofftechnologie
04/2005 bis 07/2006	Erwerb des Baden-Württemberg-Zertifikats für Hochschuldidaktik
01/1991 bis 07/1996	Leiter einer Jugendgruppe bei der Katholischen Jungen Gemeinde (KjG) in Stegen, Organisation von Ferienfreizeiten, KjG-Pfarrjugendleiter, KjG-Dekanatsleiter
10/1998 bis 10/2001	Ehrenamtlicher Diözesanleiter der Katholischen Jungen Gemeinde, Erzdiözese Freiburg
Hobbys	Wandern, Bergsteigen, Laufen, Skilanglauf, Reisen



# Veröffentlichungen

**Martin Larcher:** *Einsatz von HyperWorks für einen eigenen Programmcode – Die elementfreie Galerkin-Methode zur Berechnung von Beton unter Detonationsbeanspruchung*, 1. HyperWorks Users Meeting für Hochschulen, Böblingen, 29. November 2006.

**Martin Larcher:** *Simulation des Betonverhaltens bei Kontaktdetonationen*, Forschergruppe 500, 2. Workshop Abbruchsprengen, Dresden, 16. und 17. November 2006.

**Martin Larcher:** *Numerische Simulation von Schockwellenbeanspruchungen mit Hilfe des Elementfreien Galerkin-Verfahrens*, in *Beiträge zum 47. DAfStb-Forschungskolloquium am 9. und 10. November 2006*, Universität Karlsruhe (TH), Herausgeber H. Müller, L. Stempniewski, 2006.

**Martin Larcher, Lothar Stempniewski:** *Einsatz der elementfreien Galerkin-Methode zur Berechnung von Beton unter dynamischer Beanspruchung*, in *Neue Beweisen – Trends in Statik und Dynamik*, 10. Dresdner Baustatik-Seminar, Herausgeber P. Ruge, W. Graf, 2006.

**Martin Larcher, Lothar Stempniewski:** *Simulation of Shock Wave Loaded Concrete with Discrete Cracks*, 6. European Solid Mechanics Conference, Budapest 2006.

**Martin Larcher, Lothar Stempniewski:** *Simulation of Shock Wave Loaded Concrete with Discrete Cracks*, III European Conference on Computational Mechanics, Lissabon 2006.

**Martin Larcher, Nico Herrmann, Lothar Stempniewski:** *Explosionssimulation leichter Hallenhüllkonstruktionen*, Bauingenieur 6 2006, Seite 271-277.

**Lothar Stempniewski, Martin Larcher, Stephan Steiner:** *Beton unter hochdynamischer Belastung. Historie, Materialbeschreibung, Experimente und numerische Simulation*, Beton und Stahlbetonbau, Band 101, Heft 3, Seite 152-162, 2006.

**Martin Larcher, Nico Herrmann, Lothar Stempniewski:** *Bericht zum Forschungsvorhaben Explosionssimulation*, Fa. XELLA Bausysteme GmbH, Emstal, 2006.

**Martin Larcher, Lothar Stempniewski:** EFG and XFEM - methods to model discrete cracks in concrete for high dynamic loading?, 1st GACM Colloquium for Young Scientists on Computational Mechanics, Bochum, 2005.

**Lothar Stempniewski, Andreas Fäcke, Martin Larcher, Christoph Niklasch:** *Failure and Post-Failure Analysis for Extreme Loads*, 5th International Conference on Computation of Shell and Spacial Structures, Salzburg, 2005.

**Martin Larcher, Lothar Stempniewski:** *A model for shock-wave loaded concrete with discrete cracks*, EUROMECH Colloquium 460 on Numerical Modeling of Concrete Cracking, University of Innsbruck, 2005.

**Lothar Stempniewski, Martin Larcher, Stephan Steiner:** *Experimentelle und rechnerische Untersuchungen lokaler Phänomene beim Sprengen von Stahlbetonbauteilen*, Arbeitsbericht über die 1. Förderphase der DFG-Forschergruppe 500, Teilprojekt 1, 2004.

**Martin Wolters:** *Modellierung und Finite-Element-Berechnung eines längversteiften Zylindersegments aus Faserverbundmaterial unter Berücksichtigung von Schädigung*, Diplomarbeit, 2002.

**Martin Wolters, Friedrich Banke, Eduard Ewert, Ulrich Schulz:** *Untersuchungen zum Knittern von imperfekten Sandwichelementen*, Stahlbau, Band 71, Heft 4, Seite 253-262, 2002.

**Eduard Ewert, Friedrich Banke, Ulrich Schulz, Martin Wolters:** *Untersuchungen zum Knittern von Sandwichelementen mit ebenen und gesickten Deckschichten*, Stahlbau, Band 70, Heft 7, Seite 453-463, 2001.

**Martin Wolters**, *Experimentelle und numerische Untersuchung an biegebeanspruchten Sandwichelementen bei Vorhandensein von Schaum-, Haft- und Deckschichtimperfectionen*, Vertieferarbeit, 2001.

**Schriftenreihe des  
Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie**

Herausgeber:  
Prof. Dr.-Ing. Harald S. Müller und Prof. Dr.-Ing. Lothar Stempniewski  
ISSN 0933-0461

- Heft 1** Manfred Curbach: *Festigkeitssteigerung von Beton bei hohen Belastungsgeschwindigkeiten.* 1987
- Heft 2** Franz-Hermann Schlüter: *Dicke Stahlbetonplatten unter stoßartiger Belastung - Flugzeugabsturz.* 1987
- Heft 3** Marlies Schieferstein: *Der Zugflansch von Stahlbetonplattenbalken unter Längsschub und Querbiegung bei kritischer Druckbeanspruchung von Beton.* 1988
- Heft 4** Thomas Bier: *Karbonatisierung und Realkalisierung von Zementstein und Beton.* 1988
- Heft 5** Wolfgang Brameshuber: *Bruchmechanische Eigenschaften von jungem Beton.* 1988
- Heft 6** Bericht DFG-Forschungsschwerpunkt: *Durability of Non-Metallic Inorganic Building Materials.* 1988
- Heft 7** Manfred Feyerabend: *Der harte Querstoß auf Stützen aus Stahl und Stahlbeton.* 1988
- Heft 8** Klaus F. Schönlin: *Permeabilität als Kennwert der Dauerhaftigkeit von Beton.* 1989
- Heft 9** Lothar Stempniewski: *Flüssigkeitsgefüllte Stahlbetonbehälter unter Erdbebeneinwirkung.* 1990
- Heft 10** Jörg Weidner: *Vergleich von Stoffgesetzen granularer Schüttgüter zur Silodruckermittlung.* 1990
- Heft 11** Pingli Yi: *Explosionseinwirkungen auf Stahlbetonplatten.* 1991
- Heft 12** Rainer Kunterding: *Beanspruchung der Oberfläche von Stahlbetonsilos durch Schüttgüter.* 1991
- Heft 13** Peter Haardt: *Zementgebundene und kunststoffvergütete Beschichtungen auf Beton.* 1991
- Heft 14** Günter Rombach: *Schüttguteinwirkungen auf Silozellen - Exzentrische Entleerung.* 1991
- Heft 15** Harald Garrecht: *Porenstrukturmodelle für den Feuchtehaushalt von Baustoffen mit und ohne Salzbefrachtung und rechnerische Anwendung auf Mauerwerk.* 1992

- Heft 16** Violandi Vratsanou: *Das nichtlineare Verhalten unbewehrter Mauerwerksscheiben unter Erdbebenbeanspruchung - Hilfsmittel zur Bestimmung der q-Faktoren.* 1992
- Heft 17** Carlos Rebelo: *Stochastische Modellierung menschengenerierter Schwingungen.* 1992
- Heft 18** Seminar 29./30. März 1993: *Erdbebenauslegung von Massivbauten unter Berücksichtigung des Eurocode 8.* 1993
- Heft 19** Hubert Bachmann: *Die Massenträgheit in einem Pseudo-Stoffgesetz für Beton bei schneller Zugbeanspruchung.* 1993
- Heft 20** DBV/AiF-Forschungsbericht: H. Emrich: *Zum Tragverhalten von Stahlbetonbauteilen unter Querkraft- und Längszugbeanspruchung.* 1993
- Heft 21** Robert Stolze: *Zum Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit von den Bruchlinien abweichender Bewehrungsrichtung - Bruchlinien-Rotationskapazität.* 1993
- Heft 22** Jie Huang: *Extern vorgespannte Segmentbrücken unter kombinierter Beanspruchung aus Biegung, Querkraft und Torsion.* 1994
- Heft 23** Rolf Wörner: *Verstärkung von Stahlbetonbauteilen mit Spritzbeton.* 1994
- Heft 24** Ioannis Retzepis: *Schiefe Betonplatten im gerissenen Zustand.* 1995
- Heft 25** Frank Dahlhaus: *Stochastische Untersuchungen von Silobeanspruchungen.* 1995
- Heft 26** Cornelius Ruckenbrod: *Statische und dynamische Phänomene bei der Entleerung von Silozellen.* 1995
- Heft 27** Shishan Zheng: *Beton bei variierender Dehngeschwindigkeit, untersucht mit einer neuen modifizierten Split-Hopkinson-Bar-Technik.* 1996
- Heft 28** Yong-zhi Lin: *Tragverhalten von Stahlfaserbeton.* 1996
- Heft 29** DFG: *Korrosion nichtmetallischer anorganischer Werkstoffe im Bauwesen.* 1996
- Heft 30** Jürgen Ockert: *Ein Stoffgesetz für die Schockwellenausbreitung in Beton.* 1997
- Heft 31** Andreas Braun: *Schüttgutbeanspruchungen von Silozellen unter Erdbebeneinwirkung.* 1997
- Heft 32** Martin Günter: *Beanspruchung und Beanspruchbarkeit des Verbundes zwischen Polymerbeschichtungen und Beton.* 1997

- Heft 33** Gerhard Lohrmann: *Faserbeton unter hoher Dehngeschwindigkeit*. 1998
- Heft 34** Klaus Idda: *Verbundverhalten von Betonrippenstäben bei Querkzug*. 1999
- Heft 35** Stephan Kranz: *Lokale Schwind- und Temperaturgradienten in bewehrten, oberflächennahen Zonen von Betonstrukturen*. 1999
- Heft 36** Gunther Herold: *Korrosion zementgebundener Werkstoffe in mineral-sauren Wässern*. 1999
- Heft 37** Mostafa Mehrafza: *Entleerungsdrücke in Massefluss-Silos - Einflüsse der Geometrie und Randbedingungen*. 2000
- Heft 38** Tarek Nasr: *Druckentlastung bei Staubexplosionen in Siloanlagen*. 2000
- Heft 39** Jan Akkermann: *Rotationsverhalten von Stahlbeton-Rahmenecken*. 2000
- Heft 40** Viktor Mechtcherine: *Bruchmechanische und fraktologische Untersuchungen zur Rißausbreitung in Beton*. 2001
- Heft 41** Ulrich Häußler-Combe: *Elementfreie Galerkin-Verfahren – Grundlagen und Einsatzmöglichkeiten zur Berechnung von Stahlbetontragwerken*. 2001
- Heft 42** Björn Schmidt-Hurtienne: *Ein dreiaxiales Schädigungsmodell für Beton unter Einschluß des Dehnrateneffekts bei Hochgeschwindigkeitsbelastung*. 2001
- Heft 43** Nazir Abdou: *Ein stochastisches nichtlineares Berechnungsverfahren für Stahlbeton mit finiten Elementen*. 2002
- Heft 44** Andreas Plotzitz: *Ein Verfahren zur numerischen Simulation von Betonstrukturen beim Abbruch durch Sprengen*. 2002
- Heft 45** Timon Rabczuk: *Numerische Untersuchungen zum Fragmentierungsverhalten von Beton mit Hilfe der SPH-Methode*. 2002
- Heft 46** Norbert J. Krutzik: *Zu Anwendungsgrenzen von FE-Modellen bei der Simulation von Erschütterungen in Kernkraftbauwerken bei Stoßbelastungen*. 2002
- Heft 47** Thorsten Timm: *Beschuß von flüssigkeitsgefüllten Stahlbehältern*. 2002
- Heft 48** Slobodan Kasic: *Tragverhalten von Segmentbauteilen mit interner und externer Vorspannung ohne Verbund*. 2002
- Heft 49** Christoph Kessler-Kramer: *Zugtragverhalten von Beton unter Ermüdungsbeanspruchung*. 2002

- Heft 50** Nico Herrmann: *Experimentelle Verifizierung von Prognosen zur Sprengtechnik*. 2002
- Heft 51** Michael Baur: *Elastomerlager und nichtlineare Standorteffekte bei Erdbebeneinwirkung*. 2003
- Heft 52** Seminar 02. Juli 2004: *DIN 1045-1 Aus der Praxis für die Praxis*. 2004
- Heft 53** Abdelkhalek Saber Omar Mohamed: *Behaviour of Retrofitted Masonry Shear Walls Subjected to Cyclic Loading*. 2004
- Heft 54** Werner Hörenbaum: *Verwitterungsmechanismen und Dauerhaftigkeit von Sandsteinsichtmauerwerk*. 2005
- Heft 55** Seminar Februar 2006: *DIN 4149 - Aus der Praxis für die Praxis*. 2006
- Heft 56** Sam Foos: *Unbewehrte Betonfahrbahnplatten unter witterungsbedingten Beanspruchungen*. 2006
- Heft 57** Ramzi Maliha: *Untersuchungen zur Rissbildung in Fahrbahndecken aus Beton*. 2006
- Heft 58** Andreas Fäcke: *Numerische Simulation des Schädigungsverhaltens von Brückenpfeilern aus Stahlbeton unter Erdbebenlasten*. 2006
- Heft 59** Juliane Möller: *Rotationsverhalten von verbundlos vorgespannten Segmenttragwerken*. 2006
- Heft 60** Martin Larcher: *Numerische Simulation des Betonverhaltens unter Stoßwellen mit Hilfe des Elementfreien Galerkin-Verfahrens*. 2007
- Heft 61** Christoph Niklasch: *Numerische Untersuchungen zum Leckageverhalten von gerissenen Stahlbetonwänden*. 2007
- Heft 62** Halim Khbeis: *Experimentelle und numerische Untersuchungen von Topflagern*. 2007

Frühere Berichte des  
Instituts für Massivbau und Baustofftechnologie

Ulrich Häußler: *Geschwindigkeits- und Spannungsfelder beim Entleeren von Silozellen.* 1984

Wilfried Gladen: *Numerische Untersuchungen der Lasten in Silozellen beim exzentrischen Entleeren.* 1985

Bezug der Hefte: Institut für Massivbau und Baustofftechnologie  
Universität Karlsruhe (TH)  
D - 76128 Karlsruhe  
Tel. 0721/608-2263  
Fax 0721/608-2265

Druckkostenzuschuss incl. Porto: je Heft 18,-- Euro

Außerdem noch erhältlich:

Festschrift  
Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. techn. h.c. Josef Eibl

**Aus dem Massivbau und seinem Umfeld**

788 Seiten, Preis incl. Versand: 25,-- Euro