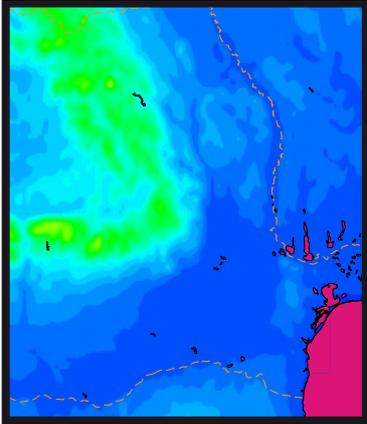


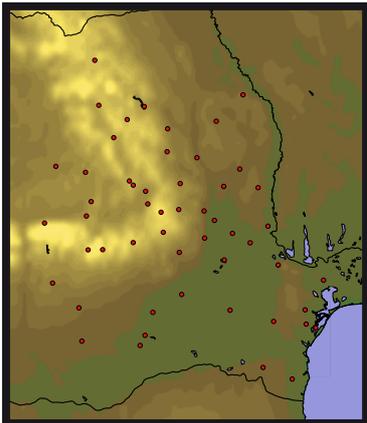
Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Studiengangs  
Geodäsie und Geoinformatik  
2007,5



André Nuckelt

# **Dreidimensionale Plattenkinematik: Strainanalyse auf B-Spline-Approximationsflächen am Beispiel der Vrancea-Zone / Rumänien**





André Nuckelt

**Dreidimensionale Plattenkinematik: Strainanalyse  
auf B-Spline-Approximationsflächen am Beispiel  
der Vrancea-Zone / Rumänien**

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik

2007, 5

# **Dreidimensionale Plattenkinematik: Strainanalyse auf B-Spline-Approxima- tionsflächen am Beispiel der Vrancea-Zone / Rumänien**

von  
André Nuckelt



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, genehmigt von der  
Fakultät für Bauingenieur-, Geo und Umweltwissenschaften  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH), 2007  
Referenten: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. G. Schmitt, Prof. Dr. rer. nat. G. Alefeld

## **Impressum**

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2007  
Print on Demand

ISSN: 1612-9733  
ISBN: 978-3-86644-152-1





Dreidimensionale Plattenkinematik:  
Strainanalyse auf B-Spline-Approximationsflächen  
am Beispiel der Vrancea-Zone/Rumänien

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften  
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. André Nuckelt  
aus Grevesmühlen

Tag der mündlichen Prüfung: 23.05.2007  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. G. Schmitt  
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. G. Alefeld

Karlsruhe 2007



*Für Markus*



---

## Kurzfassung

Für die vorliegende Arbeit werden Verfahren und Methoden kombiniert, um eine Analyse der dreidimensionalen Plattenkinematik Rumäniens auf Basis der geschätzten Geschwindigkeiten der Stationen eines GPS-Überwachungsnetzes durchzuführen.

Aus den Daten der unregelmäßig verteilten GPS-Stationen wird ein dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld abgeleitet. Verschiedene Approximationsverfahren werden hierfür verglichen und die Multilevel B-Spline Approximation ausführlich vorgestellt. Mit diesem Verfahren wird die notwendige analytische Beschreibung eines kontinuierlichen Körpers erhalten, um die Theorien der Kontinuumsmechanik anwenden zu können. Mit deren Hilfe können Verformungen eines Körpers, wie Dehnungen und Stauchungen, beschrieben werden. Durch die Implementierung des Varianzfortpflanzungsgesetzes werden Genauigkeitsmaße für das Geschwindigkeitsfeld und die Ergebnisse der Strainanalyse erhalten, die deren qualitative Beurteilung ermöglichen.

Durch die Anwendung der Algorithmen auf die Daten des Überwachungsnetzes können Bereiche signifikanter Bewegung detektiert werden. Die dreidimensionalen Bewegungen werden bezüglich bestehender geologischer und geodynamischer Modelle für das Untersuchungsgebiet analysiert. Außerdem werden die Deformationen der tektonischen Einheiten untersucht.

Darüber hinaus wird die Möglichkeit diskutiert, die Varianzfortpflanzung dadurch zu vereinfachen, dass nur Kovarianzmatrizen mit besetzter Hauptdiagonale verwendet werden.

## Abstract

In the presented work methods are combined for analysing the three dimensional plate kinematics in Romania. Basis for the analysis are the estimated station velocities of the GPS network.

A three dimensional velocity field is estimated from the data of GPS network, whose stations are scattered located. Therefore different approximation methods are compared. The Multilevel B-Spline Approximation is presented in detail. Using these methods achieves the necessary analytical description of a continuum to apply the theory of continuum mechanics. These methods describe the deformation of an object, e. g. extension and compression. Implementation of error propagation allows to process standard deviations for the velocity field and the strain parameter.

The algorithms are applied to the data of the GPS network. Areas of significant dislocation can be detected. The three dimensional plate kinematics are compared with geological and geodynamical models of Romania. Furthermore the deformations of the tectonic units are analysed.

Beyond that, a possibility to simplify the error propagation will be discussed.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b> . . . . .	v
<b>Tabellenverzeichnis</b> . . . . .	vi
<b>1. Einleitung</b> . . . . .	1
1.1 Motivation und Einführung . . . . .	1
1.2 Deformationsanalyse zur Bestimmung rezenter Krustenbewegungen . . . . .	2
<b>2. Kontinuumsübergang</b> . . . . .	3
2.1 Einführung in die Scattered Data Approximation . . . . .	4
2.2 Freiformflächen . . . . .	5
2.2.1 B-Spline-Technik . . . . .	5
2.2.1.1 Definition . . . . .	6
2.2.1.2 Eigenschaften . . . . .	6
2.2.1.3 Erzeugung von B-Spline-Kurven . . . . .	7
2.2.1.4 Unterschied zu Bézier-Techniken . . . . .	9
2.2.2 Tensorprodukt-Flächen . . . . .	9
2.2.3 Hierarchische B-Spline Flächen . . . . .	11
2.2.4 NURBS-Flächen . . . . .	12
2.2.5 Dreiecks-Bézier-Flächen . . . . .	13
2.3 Scattered Data Approximation mit Multilevel B-Splines . . . . .	15
2.3.1 B-Spline Approximation . . . . .	15
2.3.2 Multilevel B-Spline Approximation . . . . .	19
2.3.3 Multilevel B-Spline Interpolation . . . . .	23
2.3.4 Beurteilung des Approximationsverfahrens . . . . .	24
<b>3. Kontinuumsmechanik</b> . . . . .	26
3.1 Einführung in die Kontinuumsmechanik . . . . .	26
3.1.1 Grundbegriffe . . . . .	26
3.1.2 Infinitesimale Deformationen . . . . .	29
3.1.3 Spannungen . . . . .	30
3.1.4 Anmerkungen zur Verwendbarkeit der Kontinuumsmechanik in der Geodäsie . . . . .	32
3.2 Verschiebungsgradiententensorfeld . . . . .	33

3.3	Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen . . . . .	35
3.3.1	Das Eigenwertproblem . . . . .	35
3.3.2	Hauptachsentransformation eines symmetrischen $(3, 3)$ -Tensors . . . . .	36
3.3.3	Hauptachsentransformation eines symmetrischen $(2, 2)$ -Tensors . . . . .	38
3.4	Scherdehnung . . . . .	38
3.5	Zeitliche Änderung der Deformationen . . . . .	39
<b>4.</b>	<b>Varianzfortpflanzung</b> . . . . .	<b>40</b>
4.1	Grundlagen . . . . .	40
4.1.1	Varianz und Kovarianz . . . . .	40
4.1.2	Allgemeine Form des Varianzfortpflanzungsgesetzes . . . . .	41
4.1.3	Varianzfortpflanzungsgesetz für nichtlineare Funktionen . . . . .	41
4.2	Varianzfortpflanzung bei der Multilevel B-Spline Approximation . . . . .	42
4.2.1	Größe der Funktionalmatrizen und Kovarianzmatrizen . . . . .	43
4.2.2	VFG für die Generierung eines Gitters $\Phi$ . . . . .	43
4.2.3	VFG für die Differenz $P = P - F(\Phi)$ . . . . .	44
4.2.4	VFG für die Addition zweier Gitter $\Psi = \Psi' + \Phi$ . . . . .	45
4.2.5	VFG für die Verfeinerung eines Gitters $\Psi$ zu $\Psi'$ . . . . .	45
4.3	Varianzfortpflanzung bei der Strainanalyse . . . . .	45
4.3.1	VFG für den Verschiebungsgradiententensor . . . . .	46
4.3.2	VFG für Tensorrechnungen . . . . .	48
4.3.3	VFG für die Hauptachsentransformation . . . . .	49
4.3.3.1	Varianzfortpflanzung auf Basis der Eigenwert-Eigenvektor-Synthese . . . . .	49
4.3.3.2	VFG für Hauptachsentransformation 3D . . . . .	50
4.3.3.3	VFG für Hauptachsentransformation 2D . . . . .	52
4.3.4	VFG für den Scherdehnungsvektor 3D . . . . .	53
4.3.5	VFG für den Scherdehnungsvektor 2D . . . . .	54
<b>5.</b>	<b>Dreidimensionale Plattenkinematik in Rumänien</b> . . . . .	<b>55</b>
5.1	Tektonik und Geodynamik des Untersuchungsgebietes . . . . .	55
5.1.1	Plattentektonik . . . . .	55
5.1.2	Geodynamisches Modell . . . . .	57
5.2	GPS-Stationsnetz . . . . .	58
5.3	Approximiertes Geschwindigkeitsfeld . . . . .	60
5.4	Abgeleitete Haupt- und Scherdehnungsänderungen . . . . .	66
5.4.1	Dreidimensionale Dehnungsänderungen . . . . .	66
5.4.2	Horizontale Dehnungsänderungen . . . . .	67
5.4.3	Dehnungen an den Verwerfungen . . . . .	69

<b>6. Reduzierte Kovarianzmatrizen</b> . . . . .	70
<b>7. Beurteilung der Modelle und Algorithmen</b> . . . . .	72
7.1 Approximation des Geschwindigkeitsfeldes . . . . .	72
7.2 Strainanalyse . . . . .	72
7.3 Empfehlungen für zukünftige Projekte . . . . .	73
<b>8. Zusammenfassung</b> . . . . .	75
<b>Literatur</b> . . . . .	77

**Abbildungsverzeichnis**

1.1	Modelle der geodätischen Deformationsanalyse . . . . .	2
2.1	B-Spline-Funktionen vom Grad 1, 2 und 3 . . . . .	6
2.2	B-Spline-Funktionen mit mehrfachen Knoten . . . . .	7
2.3	Konvexkombination des de Boor-Algorithmus . . . . .	8
2.4	Parametergebiet, Kontrollnetz und resultierende Fläche . . . . .	10
2.5	Kontrollpunktgitter und Gitter der Overlayfläche . . . . .	11
2.6	Teilungsverhältnisse und baryzentrische Koordinaten . . . . .	14
2.7	Konfiguration des Kontrollgitters . . . . .	15
2.8	Lagebeziehungen zwischen Daten- und Kontrollpunkten . . . . .	17
2.9	B-Spline Approximationen mit verschiedenen Kontrollgittern . . . . .	18
2.10	Beispiele für Multilevel B-Spline Approximationen . . . . .	20
2.11	Lagebeziehungen bei der B-Spline Verfeinerung . . . . .	21
2.12	Berechnung der Approximationsfunktion mit dem MBA-Algorithmus . . . . .	22
2.13	Beispiele für eine Interpolations- und Approximationssituation . . . . .	23
3.1	Richtungsableitungen in x- und y-Richtung . . . . .	35
4.1	Besetzung der Funktionalmatrix bei der Generierung unterschiedlicher Gitter . . . . .	44
4.2	Funktionalmatrix für Funktionswertberechnung . . . . .	45
4.3	Funktionalmatrix der B-Spline-Verfeinerung . . . . .	46
5.1	Seismizität der Südostkarpaten . . . . .	56
5.2	Tektonische Übersichtskarte der Karpatenregion . . . . .	56
5.3	Hauptverwerfungen . . . . .	57
5.4	Geodynamisches Modell . . . . .	58
5.5	Stationen des Überwachungsnetzes . . . . .	59
5.6	Ergebnisse der Deformationsanalyse . . . . .	62
5.7	Horizontales Geschwindigkeitsfeld . . . . .	63
5.8	Vertikales Geschwindigkeitsfeld . . . . .	64
5.9	Delaminierung des Slab . . . . .	65
5.10	Hauptdehnungsänderungen dreidimensional . . . . .	66
5.11	Scherdehnungsänderungen dreidimensional . . . . .	67
5.12	Haupt- und Scherdehnungsänderungen zweidimensional . . . . .	68
5.13	Hauptdehnungen mit Standardabweichungen . . . . .	68
5.14	Haupt- und Scherdehnungen an den Hauptverwerfungen . . . . .	69

---

6.1	Standardabweichungen nach Varianzfortpflanzung mit Diagonalmatrix . . . . .	71
-----	-----------------------------------------------------------------------------	----

## Tabellenverzeichnis

2.1	Unterschiede zwischen Spline-Kurven und Bézier-Kurven . . . . .	9
2.2	Eigenschaften der Spline-Flächen und Bézier-Flächen . . . . .	10
5.1	Standards für die GPS-Auswertung . . . . .	60
5.2	Validierung der Geschwindigkeiten der CEGRN-Stationen . . . . .	61
5.3	Ergebnisvalidierung mit geschätzten Geschwindigkeiten von 2005 . . . . .	61
5.4	Standardabweichungen der GPS-Stationen . . . . .	65
5.5	Standardabweichungen des Geschwindigkeitsfeldes . . . . .	65
6.1	Vergleich der Rechenzeiten . . . . .	70
6.2	Speicherbedarf eines Kontrollgitters mit vollbesetzter Kovarianzmatrix . . . . .	70
6.3	Standardabweichungen nach Varianzfortpflanzung mit Diagonalmatrix . . . . .	70

---

# 1. Einleitung

## 1.1 Motivation und Einführung

Das Ziel dieser, im Rahmen des Teilprojekts *B1: „Dreidimensionale Plattenkinematik in Rumänien“* des *Sonderforschungsbereiches 461 „Starkbeben - von geowissenschaftlichen Grundlagen zu Ingenieurmaßnahmen“* angefertigten Arbeit ist es, Aussagen über die dreidimensionale Bewegung und Verformung der tektonischen Einheiten in Rumänien zu treffen. Im Kontext der bisherigen Ergebnisse und der gesteckten Ziele im Sonderforschungsbereich 461 wurden drei Schwerpunkte definiert:

- i. Realisierung des Übergangs von diskreten Punkten zu kontinuierlichen Flächen
- ii. Durchführung von Strainanalysen auf Basis dieser Flächen
- iii. Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes auf den Kontinuumsübergang und die Strainanalyse

Ausgangspunkt der Untersuchungen sind die approximierten Bewegungsraten der Stationen eines GPS-Überwachungsnetzes. Diese Bestimmung von Punktverschiebungen wird in der Geodäsie als Deformationsanalyse oder im geodynamischen Kontext auch als *Bestimmung rezenter Krustenbewegungen* bezeichnet. Am Abschnitt 1.2 dieses einleitenden Kapitels finden sich einige allgemeine Bemerkungen zur Deformationsanalyse.

Da die berechneten Geschwindigkeiten für die Punkte eines Überwachungsnetzes aufgrund der speziellen Anforderungen an die Örtlichkeit einer GPS-Station nicht in einem regelmäßigen Raster vorliegen, muss mittels eines geeigneten Approximationsverfahrens der Übergang zum Kontinuum vollzogen werden. In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen dazu aufgearbeitet. Nach einer Einführung in die *Scattered Data Approximation* wird auf die Methodik der *Freiformflächen* eingegangen und im Speziellen das Verfahren der *Multilevel B-Spline Approximation* diskutiert.

Die Strainanalyse, d. h. die Berechnung von Deformationsmaßen, basiert auf den Modellen der Kontinuumsmechanik, deren theoretische Grundlagen sowie praktische Umsetzung auf Basis der approximierten Kontinuumsflächen in Abschnitt 3 präsentiert werden.

Das dritte zentrale Element dieser Arbeit ist neben der Kombination von B-Spline Approximation und Strainanalyse die vollständige Varianzfortpflanzung mit vollbesetzter Kovarianzmatrix. In Kapitel 4 wird nach der Aufbereitung der Grundlagen die Durchführung der Varianzfortpflanzung beim Kontinuumsübergang und der Ableitung der Deformationsmaße erörtert.

Im Abschnitt 5 wird die Anwendung der Algorithmen und Verfahren auf das GPS-Netz in Rumänien vorgestellt. Einer Einführung in das tektonische Szenario des Untersuchungsgebietes folgt ein Abschnitt über das GPS-Überwachungsnetz, in dem neben einigen allgemeinen Angaben zur Netzkonfiguration und Datenprozessierung auch auf aufgetretene Probleme hingewiesen wird. Daran schließen sich die Abschnitte zur Analyse der Plattenbewegung und -verformung an. Das Ergebnis der Multilevel B-Spline Approximation, das dreidimensionale Geschwindigkeitsfeld der Oberfläche, wird hinsichtlich der geodynamischen und tektonischen Modelle analysiert. Die abgeleiteten Verformungen werden anschließend vorgestellt. Da diese Straingrößen für jeden beliebigen Punkt innerhalb der Approximationsfläche bestimmbar sind, werden sie sowohl für ein gleichmäßiges Gitter ermittelt, was eine Beurteilung der ganzen Region ermöglicht, als auch für Punkte, die den annähernden Verlauf der Hauptverwerfungen im Untersuchungsgebiet beschreiben, um Deformationen an den Grenzen der tektonischen Einheiten zu erhalten.

Im Kapitel 6 wird diskutiert, inwieweit die Varianzfortpflanzung bei der Multilevel B-Spline Approximation vereinfacht werden kann, indem nur Kovarianzmatrizen mit besetzter Hauptdiagonale berechnet werden.

Den Abschluss der Arbeit bilden eine Beurteilung der verwendeten Verfahren in Abschnitt 7 und die Zusammenfassung in Kapitel 8.

## 1.2 Deformationsanalyse zur Bestimmung rezenter Krustenbewegungen

Die Überwachung rezenter Plattenkinematik in regionaler oder globaler Größenordnung erfordert den Einsatz geodätischer Raumverfahren. In der Regel kommen dabei GPS-Messungen zum Einsatz [KLOTZ ET AL. 1995], [KANIUTH ET AL. 2001], [BECKER ET AL. 2001], die entweder epochal in Messkampagnen oder mit permanenten GPS-Stationen kontinuierlich durchgeführt werden. Die Daten der Permanentstationen können einer Zeitreihenanalyse unterzogen werden, um das langzeitige Bewegungsverhalten besser als durch epochale Betrachtung zu erfassen, indem periodische Effekte detektiert werden [MAUTZ U. PETROVIC 2005], [NUCKELT U. KNÖPFLER 2007].

In der geodätischen Deformationsanalyse werden vier Modelle, wie in Abbildung 1.1 dargestellt, unterschieden [HEUNECKE 1995], [WELSCH 1999]. Dabei lassen sich die Inhalte und Aufgaben der Modelle

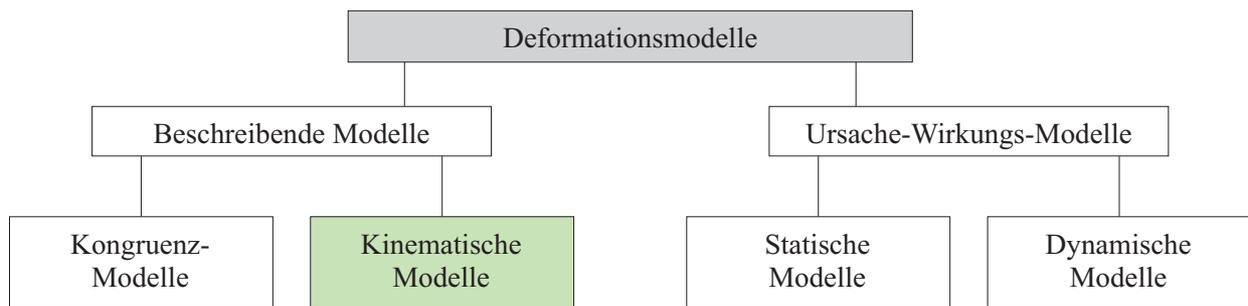


Abb. 1.1: Hierarchie der Modelle zur geodätischen Deformationsanalyse, nach [WELSCH 1999] S. 507

bei Überwachungsmessungen wie folgt zusammenstellen:

- i. *Kongruenzmodell*: rein geometrischer Vergleich des Zustands eines Objektes zu einem Zeitpunkt mit demjenigen Zustand zu einem anderen Zeitpunkt.
- ii. *Kinematisches Modell*: Zeitabhängige Beschreibung des Verhaltens der Objektpunkte. Aus den Messungen zu bestimmten Zeitpunkten wird auf die Objektbewegung und ihre Parameter geschlossen.
- iii. *Statisches Modell*: Beschreibung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Beanspruchung des Messobjektes und seiner Reaktion. Zum Zeitpunkt der Messungen muss sich das Objekt hinreichend in Ruhe befinden, da die Zeitkomponente im Modell unberücksichtigt bleibt.
- iv. *Dynamisches Modell*: Betrachtung von Objektreaktionen als Funktion der Zeit und der Beanspruchung.

Zur Analyse rezenter Krustenbewegungen auf Basis epochaler GPS-Messungen werden in der Regel kinematische Modelle benutzt, um die Geschwindigkeiten von Einzelpunkten oder Punktgruppen zu bestimmen [KANIUTH ET AL. 2001], so auch im Sonderforschungsbereich 461 [DINTER 2002], [SCHMITT ET AL. 2004].

## 2. Kontinuumsübergang

Geodätische Messungen finden ausnahmslos punktweise statt bzw. die Ergebnisse liegen für diskrete Punkte vor. Ob tachymetrische Beobachtungen, GNSS-Positionsbestimmungen, Laser-Scanning oder SAR-Interferometrie, allen Verfahren ist gemein, dass die Mess- bzw. Auswertergebnisse punktuellen Charakter besitzen. Durch vielfältige Approximationstechniken kann eine analytische Beschreibung der Punktwolke abgeleitet werden. In geodätischen Anwendungen sind bereits diverse Techniken zur Flächenapproximation eingesetzt worden, z. B. Modellierung von Deformationsmessungen mit Hilfe von Bézier-Splines [WÄLDER 2005] oder NURBS (*non uniform rational B-Splines*) [GRIMM-PITZINGER U. RUDIG 2005], Erstellung eines digitalen Höhenmodells mit Dreiecks-Bézier-Flächen [HÄHNLE U. GRAFAREND 2002] oder Bestimmung eines Geschwindigkeitsfeldes ebenfalls auf Basis von Dreiecks-Bézier-Flächen [ABELE 2001].

Ein primäres Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung eines kontinuierlichen Geschwindigkeitsfeldes. Datenbasis sind die Ergebnisse einer Deformationsanalyse. Dabei handelt es sich um Bewegungsraten für  $n$  ungleichmäßig verteilte Punkte  $P(X, Y)$ , gegeben durch

$$\bar{v}_i = \bar{v}_i(X, Y) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{mit} \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} v_{Nord}(X, Y) \\ v_{Ost}(X, Y) \\ v_{Hoch}(X, Y) \end{bmatrix}.$$

In der Geodäsie ist die Kollokation mit empirisch bestimmter Korrelationsfunktion ein weit verbreitetes Verfahren für die Berechnung eines Geschwindigkeitsfeldes [STRAUB 1996], [PETER 2001], [DREWES U. HEIDBACH 2004], [LEGRAND ET AL. 2006]. Allerdings wird bei der Kollokation keine Approximationsfläche analytisch beschrieben. Stattdessen werden Funktionswerte für wiederum diskrete Punkte in Abhängigkeit von den Punkten  $P$  berechnet [MORITZ 1973], [PEROVIC 2005].

Für den Übergang von diskreten Punkten zu einem Kontinuum erscheinen zunächst die bereits erwähnten Techniken mit Bézier-, B-Spline- oder NURBS-Flächen am zweckmäßigsten. Jedoch muss dem Umstand der ungleichmäßigen Anordnung der Datenpunkte Rechnung getragen werden.

In diesem Kapitel werden Techniken und Algorithmen vorgestellt, um eine Fläche zu erzeugen, die sich an diskrete, unregelmäßig angeordnete Punkte annähert. Nach einer kurzen Einführung in die Approximation ungleichmäßig verteilter Daten in Abschnitt 2.1 vermittelt das Kapitel 2.2 einen Einblick in die Geometrische Modellierung mit Freiformflächen. Dieses Kapitel soll den Leser in ausgewählte Modellierungstechniken des *Computer Aided Geometric Design* (CAGD) einführen. Für das bessere Verständnis der Algorithmen der *Multilevel B-Spline Approximation*, mit der das gesteckte Ziel „Realisierung des Kontinuumsübergangs“ erreicht werden soll, müssen einige Grundlagen wiederholt werden. Der Schwerpunkt in den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.3 wird als Vorbereitung auf die Multilevel B-Spline Approximation dabei auf B-Splines gelegt. Zusätzlich werden die oben erwähnten Dreiecks-Bézier- und NURBS-Flächen kurz betrachtet, um deren Einsetzbarkeit für die Approximation ungleichmäßig verteilter Daten zu diskutieren.

Das Kernstück dieses Kapitels 2 bildet Abschnitt 2.3, in dem die *Multilevel B-Spline Approximation* ausführlich vorgestellt wird.

Die einführenden Abschnitte 2.1 und 2.2 können nur einen sehr reduzierten Einblick in die vielfältige Welt des CAGD geben, in dem einige wesentlich Grundlagen äußerst kompakt aufbereitet und Literaturhinweise für vertiefende Studien angegeben werden.

Die Multilevel B-Spline Approximation soll angewendet werden, um das kontinuierliche Geschwindigkeitsfeld für das Untersuchungsgebiet zu generieren, weshalb diese Algorithmen ausführlich aufbereitet und diskutiert werden. Für die in Kapitel 4.2 beschriebene Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes auf die Multilevel B-Spline Approximation ist eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens

notwendig, ebenso im Hinblick auf die Strainanalyse, deren Basis das kontinuierliche Geschwindigkeitsfeld ist.

## 2.1 Einführung in die Scattered Data Approximation

Die Rekonstruktion einer unbekanntem Funktion aus gegebenen unregelmäßig verteilten Daten (*scattered data*) ist ein seit vielen Jahren bearbeitetes, stets aktuelles und schnell wachsendes Forschungsgebiet in der Mathematik und Informatik. Dieser einführende Abschnitt beinhaltet einen kurzen Abriss der wichtigsten Entwicklungen in der *Scattered Data Approximation*. Für eine sehr gute und umfassende Einführung in dieses Thema wird auf [HOSCHEK U. LASSER 1992], [FRANKE U. NIELSON 1991] und [WENDLAND 2005] verwiesen.

Zu den ersten bekannten Algorithmen gehört die *Shepard Methode* [SHEPARD 1968]. Es wird dabei eine  $C^0$ -stetige Interpolationsfunktion<sup>1</sup> als gewichtetes Mittel der Daten erzeugt, wobei die Gewichtung umgekehrt proportional zum Punktabstand erfolgt. Die Methode hat den Nachteil der globalen Wirksamkeit aller Punkte. Wird ein Punkt hinzugefügt, entfernt oder verändert, erfordert dies eine Neuberechnung aller Gewichte. Durch Einführen einer modifizierten quadratischen Shepard Methode konnten diese Defizite minimiert und eine  $C^1$ -stetige Interpolationsfläche erhalten werden [FRANKE U. NIELSON 1980].

Ein weiteres, sehr populäres Verfahren der Scattered Data Interpolation ist die Bestimmung einer Interpolationsfunktion als Linearkombination *radialsymmetrischer Basisfunktionen*. Für die Bestimmung der unbekanntem Koeffizienten der Basisfunktionen ist ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Als Basisfunktion werden dabei häufig *Hardy's Multiquadriken* eingesetzt [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Umfangreiche Untersuchungen zu verschiedenen radialen Basisfunktionen können in [FRANKE 1982], [FRANKE U. NIELSON 1980] und [BUHMANN 2000] nachgelesen werden.

Bei *Thin Plate Splines* werden die Interpolationsfunktionen durch Minimierung des Krümmungsintegrals über der Fläche bestimmt. Beispielsweise können Thin Plate Splines auch aus radialen Basisfunktionen abgeleitet werden [DUCHON 1975]. Diese Technik wird oft in der digitalen Bildbearbeitung, wie z. B. *Image Warping* und *Morphing*, eingesetzt [LEE ET AL. 1994], [LEE ET AL. 1996A].

Einen anderen Lösungsansatz zur Scattered Data Interpolation bietet die *Finite Element Methode*. Hierbei muss in einem ersten Arbeitsgang die Triangulierung der Datenpunkte erfolgen. Im zweiten Schritt wird mit der Finiten Element Methode eine Dreiecksfläche aufgebaut [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Eine stückweise lineare Approximation über den Dreiecken führt nur auf eine  $C^0$ -stetige Fläche. Bei der gängigen  $C^1$ -stetigen Methode wird der Clough-Tocher Dreiecks-Interpolant verwendet.

Einen weiteren Ansatz zur Interpolation ungleichmäßig verteilter Daten bietet die Zweistufige bzw. Mehrstufige Methode (*two-stage method* bzw. *multistage method*), bei der zunächst ein Scattered Data Interpolant über einem gleichmäßigen Gitter abgetastet und neu interpoliert oder approximiert wird. Anschließend wird auf Basis des Gitters eine Tensorproduktfläche erzeugt [SCHUMAKER 1976]. Ausgehend von dieser Idee sind verschiedene Techniken entwickelt worden, denen jedoch gemein ist, dass eine Regularisierung auf Gitterpunkte erfolgt.

Scattered Data Approximation mit Hilfe von B-Spline-Techniken sind z. B. 1992 vorgestellt worden [HSU ET AL. 1992], [WELCH U. WITKIN 1992]. Dabei werden Pseudoinversen einer Matrix, welche die Werte der B-Spline-Funktionen enthält, berechnet, um den Approximationsfehler zu minimieren. Die Kombination dieses Verfahrens mit der Methode der Hierarchischen B-Spline-Flächen führt zur Methode der *Multilevel B-Spline Approximation*, welche im Abschnitt 2.3 ausführlich vorgestellt werden soll.

<sup>1</sup>  $C^n$ -Stetigkeit einer Funktion mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  besagt, dass die Funktion  $n$ -mal stetig differenzierbar ist.

## 2.2 Freiformflächen

Mit Freiformflächen ist es in der Computergrafik möglich, auf einfache Weise komplexe Formen darzustellen. Nahezu alle Verfahren des CAGD beruhen auf B-Spline- und Bézier-Techniken. Jedoch wurden diese Verfahren konzipiert, um neue Objekte zu konstruieren und nicht für die Approximation vorgegebener Punkte, im Gegensatz zu den Scattered Data Verfahren.

Das Verfahren der Multilevel B-Spline Approximation basiert auf den Methoden der Freiformflächen, speziell der Tensorprodukt-B-Spline-Flächen und deren Adaption in Form von Hierarchischen B-Spline-Flächen. Es ist somit ein Verfahren, was Methoden der Scattered Data Approximation und Freiformflächen in sich vereinigt.

Dieses Kapitel ist in zwei Themenbereiche unterteilt. In den Abschnitten 2.2.1 bis 2.2.3 werden einige ausgewählte Grundlagen zu den Freiformflächen wiederholt, die zum besseren Verständnis der Algorithmen der Scattered Data Approximation mit Multilevel B-Splines in Abschnitt 2.3 notwendig sind. Es werden die B-Spline-Techniken, Tensorproduktflächen und Hierarchischen B-Spline-Flächen vorgestellt.

Der zweite Themenbereich wird in den Teilabschnitten 2.2.4 und 2.2.5 behandelt. Die Methoden der NURBS- und Dreiecks-Bézier-Flächen werden darin kurz angesprochen, weil sie bereits zur Bearbeitung geodätischer Aufgabenstellungen eingesetzt wurden. Dabei soll diskutiert werden, unter welchen Umständen diese Techniken geeignet sind, ungleichmäßig verteilte Daten zu approximieren.

Es können in diesem Kapitel nur sehr kurze Beschreibungen und Anmerkungen erfolgen. Für mathematische Herleitungen und detaillierte Erläuterungen sei auf die Fachliteratur verwiesen. Umfangreiche Ausführungen zu B-Splines, Tensorprodukt- und Dreiecks-Bézier-Flächen finden sich in [HOSCHEK U. LASSER 1992], [FARIN 1997], [PRAUTZSCH ET AL. 2002], [GREINER 2006] und auch [BERKHAHN 2005]. Das Thema NURBS wird in [FARIN 1994] und [PIEGL U. TILLER 1997] ausführlich behandelt.

### 2.2.1 B-Spline-Technik

Bézier- und B-Spline-Darstellungen sind zwei leicht zu verwechselnde Verfahren zur Kurven- und Flächenbeschreibung, die auf ähnlichen Techniken beruhen. Der wichtigste Unterschied sind die verschiedenen Basisfunktionen. In diesem Abschnitt werden die B(asis)-Spline-Funktionen als Basisfunktionen der B-Spline-Verfahren sowie die Grundlagen der B-Spline-Technik vorgestellt.

Aufgrund der Verwandtschaft von Bézier- und B-Spline-Verfahren wird auf eine explizite Beschreibung der Bézier-Techniken und deren Basisfunktionen verzichtet. Ein Vergleich beider Verfahren wird es jedoch ermöglichen, die Vorteile der B-Splines zu unterstreichen.

Neben den B(asis)-Spline-Funktionen existieren eine Vielzahl weiterer Basisfunktionen, auf die jedoch nicht detailliert eingegangen werden soll, da sie heutzutage in der Computergrafik nicht mehr gebräuchlich sind und fast nur noch Bézier- und B-Spline-Techniken zum Einsatz kommen. Umfangreiche Beschreibungen dieser anderen Basisfunktionen, z. B. Monome oder Lagrange-Polynome, finden sich in [HOSCHEK U. LASSER 1992] und [AUMANN U. SPITZMÜLLER 1993].

Die Basisfunktionen der Bézier-Verfahren sind die Bernstein-Polynome, die als spezielle B-Splines aufgefasst werden können. Für eine ausführliche Darstellung dieser Funktionen sei auf [FARIN 1997] und [PRAUTZSCH ET AL. 2002] verwiesen.

B-Splines wurden erstmals vorgestellt in [SCHOENBERG U. GREVILLE 1967]. Die B-Spline-Techniken verallgemeinern die Bézier-Techniken. B-Splines selbst sind zwar älter als die Bézier-Techniken, viele B-Spline-Verfahren wurden jedoch später oder gleichzeitig entdeckt wie die entsprechenden Bézier-Verfahren. Sehr detaillierte Beschreibungen sind in [COX 1972], [DE BOOR 1978], [DE BOOR 1993] sowie [PRAUTZSCH ET AL. 2002] und [HOSCHEK U. LASSER 1992] zu finden.

### 2.2.1.1 Definition

Eine Spline-Kurve  $s(u)$  ist als Affinkombination von Kontrollpunkten  $\mathbf{c}_i$  durch

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^{m-n-2} \mathbf{c}_i N_i^n(u) \quad (2.1)$$

definiert. Dabei bezeichnen  $N_i^n$  die Basis-Spline-Funktionen vom Grad  $n$ . Diesen Basisfunktionen liegen die geordneten Parameterwerte

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

zugrunde, die auch als Träger bzw. Knoten bezeichnet werden. Dabei ist  $m$  die Anzahl der Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_i$  des Splines. Die Knoten bilden den Träger- bzw. Knotenvektor. Die Definition der Basis-Spline-Funktionen  $N_i^n$  erfolgt mit den Rekursionsformeln

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & a_i \leq u < a_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.2)$$

und

$$N_i^n(u) = \alpha_i^{n-1} N_i^{n-1}(u) + (1 - \alpha_{i+1}^{n-1}) N_{i+1}^{n-1}(u). \quad (2.3)$$

Dabei ist

$$\alpha_i^{n-1} = \frac{u - a_i}{a_{i+n} - a_i} \quad (2.4)$$

der lokale Parameter bezüglich des Trägers von  $N_i^{n-1}$ . In Abbildung 2.1 sind B-Spline-Funktionen verschiedenen Grades und deren Träger dargestellt.

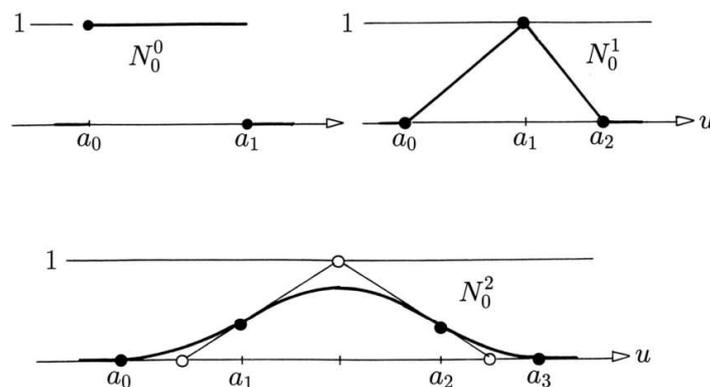


Abb. 2.1: B-Spline-Funktionen vom Grad 0, 1 und 2, [PRAUTZSCH ET AL. 2002] S. 60

### 2.2.1.2 Eigenschaften

B-Spline-Funktionen haben die folgenden Eigenschaften:

- i.  $N_i^n(u)$  ist stückweise polynomial vom Grad  $n$ ,
- ii.  $\text{supp } N_i^n(u) = [a_i, a_{i+n+1}]$  (support, auf deutsch: Träger),

iii. Positivität:  $N_i^n(u) > 0$  für  $u \in (a_i, a_{i+n+1})$ ,

iv.  $N_i^n(u) = 0$  für  $u$  außerhalb  $[a_i, a_{i+n+1})$ ,

v. Partition der 1:

$$\sum_{i=0}^m N_i^n(u) = 1 \quad \text{für} \quad u \in [a_n, a_{m+1}),$$

vi. Stetigkeit:  $N_i^n(u)$  ist  $C^n$ -stetig für alle  $u$ , d. h., die Funktion ist  $n$ -mal stetig differenzierbar,

vii. Ableitung einer B-Spline-Funktion:

$$\frac{\partial}{\partial u} N_i^n(u) = \frac{n}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(u) - \frac{n}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(u).$$

Die  $N_i^n(u)$  bilden die Basis für den Raum aller Splines vom Grad  $n$  mit den Knoten  $a_i$ . Sind die Knoten äquidistant, d. h. beispielsweise  $a_i = i$ , vereinfacht sich die Rekursionsformel (2.3) zu

$$N_i^n(u) = \frac{u-i}{n-1} N_i^{n-1}(u) + \frac{i+n-u}{n-1} N_{i+1}^{n-1}(u). \quad (2.5)$$

B-Splines mit äquidistanten Knoten werden als *uniforme B-Splines* bezeichnet. Dementsprechend heißen B-Splines über einem Trägervektor mit nicht-äquidistantem Intervall *nicht-uniforme B-Splines* [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Desweiteren können die Trägervektoren auch mehrfache Knoten enthal-

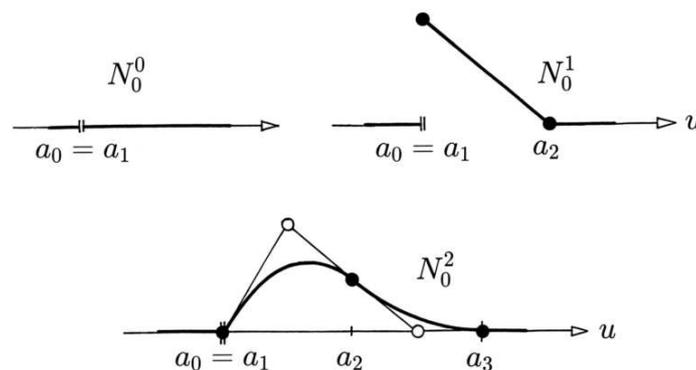


Abb. 2.2: B-Spline-Funktionen mit mehrfachen Knoten, [PRAUTZSCH ET AL. 2002] S. 63

ten. Dann gilt für die B-Spline-Funktionen  $N_i^n(u)$  die Konvention

$$N_i^{r-1} = \frac{N_i^{r-1}}{a_{i+r} - a_i} \quad \text{falls} \quad a_{i+r} = a_i. \quad (2.6)$$

In Abbildung 2.2 ist die Auswirkung von mehrfachen Knoten auf verschiedene B-Spline-Funktionen dargestellt.

### 2.2.1.3 Erzeugung von B-Spline-Kurven

Um eine Spline-Kurve  $s(u)$  auszuwerten, kann der *de Boor-Algorithmus* [DE BOOR 1972] eingesetzt werden, bei dem die gesuchten Funktionswerte mittels iterierter linearer Interpolation berechnet werden. Der äquivalente Algorithmus zur Auswertung von Bézier-Kurven wird als *de Casteljau-Algorithmus* bezeichnet [PRAUTZSCH ET AL. 2002].

Ausgegangen wird von der Affinkombination entsprechend Definition (2.1)

$$\mathbf{s}(u) = \sum_i \mathbf{c}_i^0 N_i^n(u).$$

Die B-Spline-Funktionen vom Grad  $n$  sind dabei über einer Knotensequenz  $(a_i)$  definiert. Mit  $u \in [a_n, a_{n+1})$  gilt für  $\mathbf{s}(u)$

$$\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{c}_i^0 N_i^n(u). \quad (2.7)$$

Die wiederholte Anwendung der B-Spline-Rekursion und Zusammenfassung der Terme führt zu

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(u) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{c}_i^1 N_i^{n-1}(u) \\ &\vdots \\ &= \sum_{i=n}^n \mathbf{c}_i^n N_i^0(u) = \mathbf{c}_n^n, \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei die  $\mathbf{c}_i^r$  gebildet werden durch die Affinkombination

$$\mathbf{c}_i^r = (1 - \alpha) \mathbf{c}_{i-1}^{r-1} + \alpha \mathbf{c}_i^{r-1} \quad \text{mit} \quad \alpha = \alpha_i^{n-r} = \frac{u - a_i}{a_{i+n+1-r} - a_i}. \quad (2.9)$$

Wegen  $\alpha \in [0, 1]$  und  $u \in [a_n, a_{n+1})$  sind die Affinkombinationen konvex. Beim de Boor-Algorithmus werden die Punkte  $\mathbf{c}_i^r$  in einem Dreiecksschema angeordnet:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{c}_0^0 & & & & & & \\ \mathbf{c}_1^0 & \mathbf{c}_1^1 & & & & & \\ \mathbf{c}_2^0 & \mathbf{c}_2^1 & \mathbf{c}_2^2 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ \mathbf{c}_n^0 & \mathbf{c}_n^1 & \mathbf{c}_n^2 & \cdots & \mathbf{c}_n^n & & \end{array}$$

Es wird dabei gemäß Gleichung (2.9) in horizontaler Richtung jeweils mit dem entsprechenden  $\alpha$  und in schräger Richtung mit  $(1 - \alpha)$  multipliziert. Aus dem de Boor-Algorithmus folgt, dass der Spline

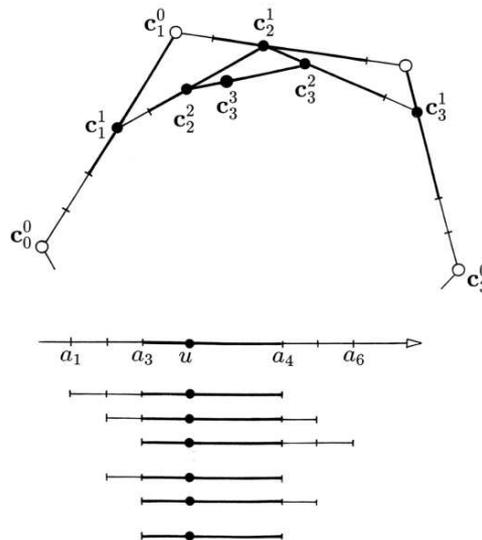


Abb. 2.3: Konvexkombination des de Boor-Algorithmus für  $n = 3$ , [PRAUTZSCH ET AL. 2002] S. 65

$s(u)$  über seinem Knotenintervall eine konvexe Affinkombination seiner Koeffizienten  $\mathbf{c}_i$  ist, weshalb die Punkte  $\mathbf{c}_i$  als Kontroll- bzw. de Boor-Punkte bezeichnet werden. Der Spline liegt in der konvexen Hülle der Kontrollpunkte. In Abbildung 2.3 ist die geometrische Bedeutung des de Boor-Algorithmus illustriert. Es wird dabei verdeutlicht, wie durch Unterteilung aus dem Polygon der Kontrollpunkte  $\mathbf{c}_i^0$  der Punkt  $s(u) = \mathbf{c}_n^n$  auf der Spline-Kurve erhalten wird.

Für weiterführende Studien zu den B-Spline-Techniken, z. B. weiteren Unterteilungsverfahren, Einfügen von Knoten oder Graderhöhung sei auf die Fachliteratur, wie z. B. [PRAUTZSCH ET AL. 2002] und [DE BOOR 1978], verwiesen.

#### 2.2.1.4 Unterschied zu Bézier-Techniken

Neben den B-Spline-Techniken sind Bézier-Techniken ebenfalls in der Computergrafik weit verbreitet, wenn Approximations- und Interpolationsaufgaben zu lösen sind. In diesem Abschnitt sollen die wichtigsten Eigenschaften bezogen auf B-Spline-Kurven und Bézier-Kurven kurz gegenübergestellt werden.

Stückweise polynomiale Kurven haben sowohl eine Bézier- als auch eine B-Spline-Darstellung. Beide Darstellungen haben gleiche oder ähnliche geometrische Eigenschaften, wie z. B. die „konvexe Hüllen“-Eigenschaft [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Die elementarsten Unterschiede sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Tab. 2.1: Unterschiede zwischen Spline-Kurven und Bézier-Kurven

Bézier-Kurve
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Bézier-Kurven sind polynomial auf Basis der Bernstein-Polynome</li> <li>+ Kontrollpolygon vermittelt Eindruck vom möglichen Kurvenverlauf</li> <li>+ Verschiebung der Kontrollpunkte ändert den Verlauf der Kurve</li> <li>– Kontrollpunkte haben globalen Einfluss auf den Kurvenverlauf</li> <li>– Anzahl der Kontrollpunkte ist fest gekoppelt an den Grad der Bézier-Kurve</li> </ul>
B-Spline-Kurve
<ul style="list-style-type: none"> <li>• B-Spline-Kurven sind stückweise polynomial</li> <li>+ B-Spline-Basisfunktionen sind lokal definiert</li> <li>+ Kontrollpolygon vermittelt Eindruck vom möglichen Kurvenverlauf</li> <li>+ Verschiebung eines Kontrollpunktes hat nur lokalen Einfluss auf den Kurvenverlauf</li> <li>+ Einfügen zusätzlicher Kontrollpunkte ohne Erhöhung des Polynomgrades möglich</li> <li>+ Glattheit des Übergangs benachbarter Segmente ist beeinflussbar</li> </ul>

Der Vorteil der Bézier-Technik liegt in der „nahen“ Korrespondenz von Kurve und Kontrollpolygon und der einfachen Berechenbarkeit der Kurve. Allerdings sind mehr Kontrollpunkte zur Kurvenbeschreibung notwendig als bei der B-Spline-Technik. Außerdem lassen sich Splines in B-Spline-Darstellung leichter modifizieren, weil Differenzierbarkeit garantiert ist [HOSCHEK U. LASSER 1992].

## 2.2.2 Tensorprodukt-Flächen

Tensorproduktflächen im Allgemeinen sind Abbildungen eines rechteckigen  $(u, v)$ -Parameterraumes in den dreidimensionalen euklidischen Raum. Auf Grund der jeweiligen Basisfunktionen können diverse Tensorproduktflächen generiert werden. Für das Geometrische Modellieren sind vor allem die Bézier- und B-Spline-Flächen sowie auch Coons-Flächen von Bedeutung. Hingegen werden Hermite- und Lagrange-Darstellungen nicht oder nur in sehr geringem Umfang eingesetzt [BERKHAHN 2005]. Die Methodik der Tensorproduktflächen soll im Folgenden vorgestellt werden.

Eine Tensorproduktfläche lässt sich als Ort einer Kurve auffassen, die sich durch den Raum bewegt und dabei ihre Form ändert. Somit wird eine Spline-Fläche  $\mathbf{s}(u, v)$  aus einer Spline-Kurve  $\mathbf{s}(u)$  durch Einführung eines zweiten Parameters  $v$ , eines zweiten Trägervektors und eines Kontroll-Gitters  $\mathbf{c}_{ij}$  generiert. Gleichung (2.1) wird somit erweitert zu

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \mathbf{c}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v) \quad (2.10)$$

mit dem  $u$ -Knotenvektor  $\{a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{N+n}\}$  und dem  $v$ -Knotenvektor  $\{b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{M+m}\}$ . Abbildung 2.4 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Parametergebiet (Trägervektoren  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$ ), Kontroll-Netz (hier bezeichnet mit  $\mathbf{b}_{ij}$ ) und der resultierenden Tensorproduktfläche. Grundlage

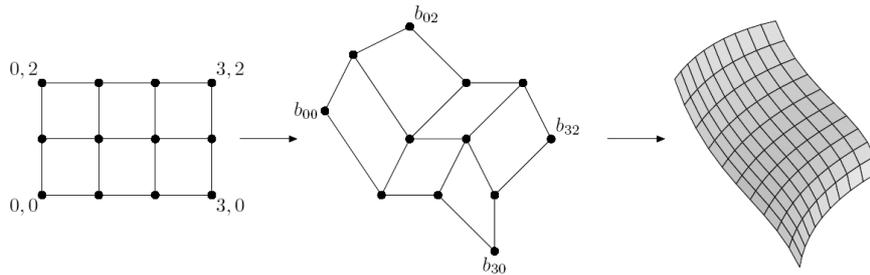


Abb. 2.4: Parametergebiet, Kontrollnetz und resultierende Fläche, [GREINER 2006] S. 82

einer funktionalen Tensorproduktfläche in Bézier- oder B-Spline-Repräsentation ist ein reguläres  $(x, y)$ -Gitter der Kontrollpunkte, nur die  $z$ -Koordinaten der Kontrollpunkte werden variiert (siehe Abb. 2.4). Ausgewertet werden Tensorproduktflächen durch zweimaliges Anwenden des de Casteljau-Algorithmus (Bézier-Fläche) bzw. des de Boor-Algorithmus (B-Spline-Fläche)

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \sum_{j=0}^{M-1} \mathbf{c}_{ij} N_j^m(v) \right) N_i^n(u). \quad (2.11)$$

In Analogie zu Abschnitt 2.2.1.4 werden in Tabelle 2.2 die Eigenschaften der Bézier- und Spline-Fläche gegenübergestellt. Dabei sind die Eigenschaften der Kurven aus Tabelle 2.1 sowie die geometrische Eigenschaft der „konvexen Hülle“ direkt auf die Flächen übertragbar.

Tab. 2.2: Eigenschaften der Spline-Flächen und Bézier-Flächen

Bézier-Fläche
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpolation der vier Eckpunkte des Kontrollnetzes</li> <li>• Ränder sind Bézier-Kurven</li> <li>• die Fläche berührt das Bézier-Netz tangential in den Eckpunkten</li> <li>• Affine Invarianz</li> <li>• globale Wirkung der Kontrollpunkte</li> </ul>
Spline-Fläche
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Endpunktinterpolation nur dann, wenn <math>n</math>- bzw. <math>m</math>-fache Knoten am Anfang und Ende des Trägervektors</li> <li>• Ränder sind Spline-Kurven</li> <li>• Affine Invarianz</li> <li>• lokale Kontrolle: Ein Kontrollpunkte beeinflusst nur einen Teil der Fläche</li> </ul>

Kann eine einzige Bézier-Fläche ein vorgegebenes Flächenstück nicht gut genug approximieren, empfiehlt es sich, mehrere Bézier-Flächenstücke (*patches*) zu benutzen, die mit gewissen Anschlussbedin-

gungen aneinander angeschlossen werden müssen. Eine ausführliche Beschreibung der Anschlussbedingungen ( $C^k$ -Stetigkeiten) findet sich in [HOSCHEK U. LASSER 1992] sowie die Realisierung von Flächenkonstruktionen mit  $C^k$ -Übergängen in [PRAUTZSCH ET AL. 2002].

Für eine Spline-Fläche ist die Unterteilung in Segmente nicht notwendig, da sie analog zu den Spline-Kurven per Definition aus Segmenten zusammengesetzt ist.

Für die Approximation ungleichmäßig verteilter Punkte mit einer Bézier- oder auch Spline-Fläche sind zusätzliche Überlegungen notwendig. Eine Möglichkeit ist die Projektion der Punkte auf eine Hilfsebene, deren Parameternetz bekannt ist [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Dieser Ansatz wird auch bei der Scattered Data Approximation mit Multilevel B-Splines verwendet und in Abschnitt 2.3 vorgestellt.

### 2.2.3 Hierarchische B-Spline Flächen

Die Methodik der hierarchischen B-Splines wurde entwickelt, um lokale Besonderheiten innerhalb einer B-Spline-Fläche, die bei fester Knotenwahl nicht approximiert werden können, exakt wiedergeben zu können. Die bessere Approximation wird durch ein feineres Kontrollgitter erreicht. Es wird deshalb eine Overlayfläche definiert, die die lokal zu verfeinernde Fläche in einem vorgegebenen Parameterbereich ersetzt [FORSEY U. BARTELS 1988]. Hierzu wird in diesem Parameterbereich das Kontrollpunktgitter der Ausgangsfläche durch zusätzliche Kontrollpunkte verfeinert, siehe Abbildung 2.5. Um

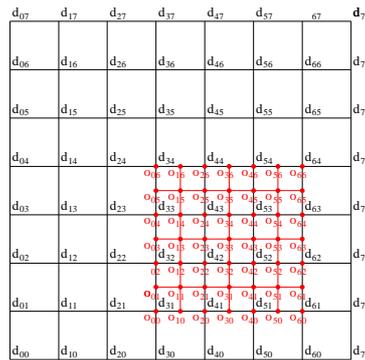


Abb. 2.5: Kontrollpunktgitter und Gitter der Overlayfläche

die Overlayfläche in die Ausgangsfläche einpassen zu können, wird die Offsetreferenzierung benutzt [FORSEY U. BARTELS 1995].

Auf der Ausgangsfläche gilt Gleichung (2.10)

$$\mathbf{d}(u, v) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \mathbf{d}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u &\in [u_n, u_{N+1}] \\ v &\in [v_m, v_{M+1}] \end{aligned}$$

für die Berechnung eines Punktes. Innerhalb der Parameter  $u_a$ ,  $u_e$ ,  $v_a$  und  $v_e$  wird die Ausgangsfläche mit der Overlayfläche verfeinert. Diese ist über den Offsetvektoren  $\mathbf{o}_{ij}$  durch

$$\mathbf{o}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{i=0}^{\bar{N}} \sum_{j=0}^{\bar{M}} \mathbf{o}_{ij} N_i^{\bar{n}}(\bar{u}) N_j^{\bar{m}}(\bar{v}) \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \bar{u} &\in [\bar{u}_{\bar{n}}, \bar{u}_{\bar{N}+1}] \\ \bar{v} &\in [\bar{v}_{\bar{m}}, \bar{v}_{\bar{M}+1}] \end{aligned} \quad (2.12)$$

definiert. Der Zusammenhang der Parameter  $u$  und  $v$  der Ausgangsfläche sowie  $\bar{u}$  und  $\bar{v}$  der Overlayfläche ist durch

$$u = u_a + \frac{(\bar{u} - \bar{u}_{\bar{n}})(u_e - u_a)}{\bar{u}_{\bar{N}+1} - \bar{u}_{\bar{n}}} \quad \text{und} \quad (2.13)$$

$$v = v_a + \frac{(\bar{v} - \bar{v}_{\bar{m}})(v_e - v_a)}{\bar{v}_{\bar{M}+1} - \bar{v}_{\bar{m}}} \quad (2.14)$$

gegeben. Somit gilt für die gesamte Fläche

$$\mathbf{c}(u, v) = \mathbf{d}(u, v) + \mathbf{o}(\bar{u}, \bar{v}). \quad (2.15)$$

Die Einführung der Offsetflächen auf Basis von Offsetvektoren stellt eine einfache Methode zur lokalen Verfeinerung von B-Spline-Flächen dar [BERKHAHN 2005]. Eine B-Spline-Fläche kann auch durch mehrere sich überschneidende Overlayflächen verfeinert werden. Für eine derartige B-Spline-Fläche gilt somit

$$\mathbf{c}(u, v) = \mathbf{d}(u, v) + \sum_{h=0}^H \mathbf{o}_h(\bar{u}, \bar{v}), \quad (2.16)$$

wobei  $H + 1$  die Anzahl der Offsetflächen angibt. Für detailliertere Ausführungen zu hierarchischen B-Spline- und Bézier-Flächen sei auf [FORSEY U. BARTELS 1988] und [FORSEY U. BARTELS 1995] verwiesen. Die Grundidee dieses Verfahren ist in modifizierter Form in die Algorithmen der Multilevel B-Spline Approximation (im Abschnitt 2.3) eingeflossen.

## 2.2.4 NURBS-Flächen

Eine *Non Uniform Rational B-Spline* (NURBS)-Fläche ist als bivariate vektorwertige stückweise rationale Funktion definiert [PIEGL U. TILLER 1997]

$$\mathbf{S}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M w_{ij} \mathbf{c}_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}. \quad (2.17)$$

Hierbei bilden die  $\mathbf{c}_{ij}$  das Kontrollnetz,  $w_{ij}$  sind die Gewichte der Kontrollpunkte und  $N_i^n(u)$  bzw.  $N_j^m(v)$  bezeichnen die nicht-rationalen B-Spline-Funktionen nach Gleichung (2.3) über den Trägervektoren

$$U = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{n+1}, u_{n+1}, \dots, u_{r-n-1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{n+1} \quad \text{und}$$

$$V = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{m+1}, v_{m+1}, \dots, v_{s-m-1}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{m+1}.$$

Durch die Einführung einer stückweise rationalen Basisfunktion

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{w_{ij} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^M w_{kl} N_k^n(u) N_l^m(v)} \quad (2.18)$$

kann Gleichung (2.17) umformuliert werden zu

$$\mathbf{S}(u, v) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \mathbf{c}_{ij} R_{i,j}(u, v). \quad (2.19)$$

Die Eigenschaften der NURBS-Flächen können wie folgt zusammengefasst werden [PIEGL 1991]:

i. Generalisierung: wenn alle Gewichte auf 1 gesetzt sind, dann ist

$$R_{i,j}(u, v) = \begin{cases} B_{i,j}^{n,m}(u, v) & \text{falls } U = V = \{0, 0, \dots, 0, 1, 1, \dots, 1\} \\ N_{i,j}^{n,m}(u, v) & \text{sonst} \end{cases},$$

ii. Es gelten die Eigenschaften der B-Spline-Funktionen aus Kapitel 2.2.1.2, z. B. Positivität oder Partition der Eins, denn es sind die selben Funktionen,

iii. Bézier- und (nicht-rationale) B-Spline-Flächen sind Spezialfälle,

iv. Lokale Approximation: die Veränderung eines Kontrollpunktes oder dessen Gewichts beeinflusst die Fläche nur in  $(n + 1)$  bzw.  $(m + 1)$  Segmenten,

v. konvexe Hülle,

vi. affine Invarianz,

vii. ein Punkt mit Gewicht gleich Null hat keinen Einfluss auf den Verlauf der Fläche.

NURBS-Flächen können unter Verwendung *homogener* Koordinaten dargestellt und wie integrale Splines berechnet werden. Beschreibungen des Auswertalgorithmus sowie der Beeinflussung des Kurven- und Flächenverlaufs durch Manipulation der Gewichte  $w$  finden sich in [PIEGL 1991] und [PIEGL U. TILLER 1997].

Im CAGD avancierten die NURBS-Techniken in den letzten Jahren zum gängigsten Verfahren hinsichtlich Design und Konstruktion von Formen und Objekten. Scattered Data Approximation mit NURBS ist möglich, wenn eine Kurve oder Fläche eine große Punktwolke beschreiben soll [SCHMÄLZLE 2001], [GRIMM-PITZINGER U. RUDIG 2005]. Bei einer Punktwolke aus Laser Scanner Daten liegen in der Regel mindestens mehrere Tausend Messpunkte vor, z. B. über 20.000 Punkte für eine Staumauer in [GRIMM-PITZINGER U. RUDIG 2005]. Hier können die sehr dicht und regelmäßig angeordneten Messpunkte sofort als Kontrollnetz fungieren, aus dem die NURBS-Fläche abgeleitet wird.

In einem anderen Ansatz wird aus dem Gros der Messpunkte durch Vorverarbeitungsalgorithmen ein Datensatz erzeugt, der anschließend durch eine NURBS-Fläche dargestellt wird [SCHMÄLZLE 2001]. Die Approximation der Scattered Data erfolgt dabei also nicht mit den NURBS-Techniken selbst.

Deshalb ist ein Einsatz von NURBS-Flächen zur Bearbeitung der Aufgabenstellung dieser Arbeit nicht möglich, wenngleich die NURBS-Techniken Möglichkeiten für Weiterentwicklungen der Approximationstechniken eröffnen.

## 2.2.5 Dreiecks-Bézier-Flächen

Tensorprodukt- und NURBS-Flächen sind über einem viereckigen Parametergebiet definiert. Dem gegenüber ist das Parametergebiet der Dreiecks-Bézier-Flächen dreieckig, was eine größere topologische Flexibilität ermöglicht [GREINER 2006].

Für die Parameter von Dreiecks-Bézier-Flächen werden *homogene* Koordinaten benutzt. Ein beliebiger Punkt  $\mathbf{p}$  innerhalb des Dreiecks  $\Delta(R, S, T)$  in Abbildung 2.6 ergibt sich als Affinkombination

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{R} + \sigma \mathbf{S} + \tau \mathbf{T}, \quad \rho + \sigma + \tau = 1. \quad (2.20)$$

Die Koeffizienten  $\rho$ ,  $\sigma$  und  $\tau$  werden als *baryzentrische Koordinaten* bezeichnet. Sie werden für  $\mathbf{p}$  bezüglich des Dreiecks  $\Delta(R, S, T)$  berechnet mit

$$\rho = \frac{d(\mathbf{p}, \mathbf{S}, \mathbf{T})}{d(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T})}, \quad \sigma = \frac{d(\mathbf{R}, \mathbf{p}, \mathbf{T})}{d(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T})}, \quad \tau = \frac{d(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{p})}{d(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T})}, \quad (2.21)$$

wobei

$$d(\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}) = \det \begin{bmatrix} R_x & S_x & T_x \\ R_y & S_y & T_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

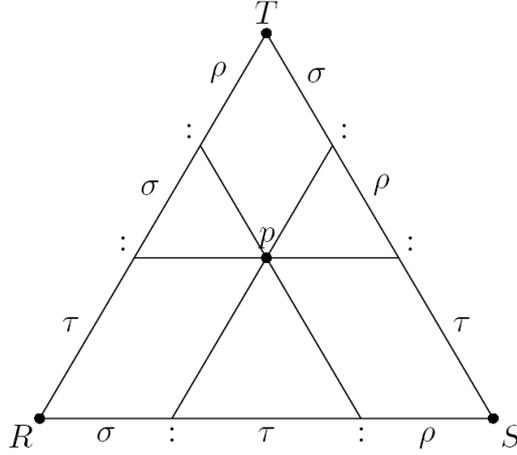


Abb. 2.6: Teilungsverhältnisse und baryzentrische Koordinaten, [GREINER 2006] S. 97

Baryzentrische Koordinaten sind invariant unter affinen Transformationen. Die *verallgemeinerten Bernstein-Polynome* vom Grad  $n$

$$B_{ijk}^n(\rho, \sigma, \tau) = \frac{n!}{i!j!k!} \rho^i \sigma^j \tau^k \quad (2.23)$$

mit

$$i + j + k = n, \quad i, j, k > 0, \quad \rho + \sigma + \tau = 1, \quad \rho, \sigma, \tau > 0$$

sind definiert als Basisfunktionen für die Bézier-Fläche [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Die Parameterdarstellung  $\mathbf{s}(\rho, \sigma, \tau)$  einer Dreiecks-Bézier-Fläche (*patch*) vom Grad  $n$  über dem Dreieck  $\Delta(R, S, T)$  mit den Kontrollpunkten  $\mathbf{c}_{ijk}$  hat die Gestalt

$$\mathbf{s}(\rho, \sigma, \tau) = \sum_{i+j+k=n} \mathbf{c}_{ijk} B_{ijk}^n(\rho, \sigma, \tau). \quad (2.24)$$

Analog zu den Tensorprodukt-Bézier-Flächen wird der de Casteljau-Algorithmus in einer adaptierten Form zur Bestimmung eines Flächenpunktes benutzt [HOSCHEK U. LASSER 1992]. Ebenfalls analog zu den Tensorprodukt-Bézier-Flächen müssen auch für die Dreiecks-Bézier-Flächen Übergangs- und Anschlussbedingungen formuliert werden, um einen stetigen Verlauf einer aus mehreren Dreiecks-Patches zusammengesetzten Fläche zu gewährleisten. Zudem muss die Segmentierung in Dreiecks-Bézier-Flächen auf geeignete Weise erfolgen. Unterschiedliche Konfigurationen des Dreiecks-Bézier-Netzes resultieren in unterschiedlichen Bézier-Flächen [ABELE 2001]. Aus diesen Gründen scheidet auch dieses Verfahren zur Lösung des im Rahmen dieser Arbeit gestellten Approximationsproblems aus.

Für detaillierte Beschreibungen der Übergangsbedingungen, des de Casteljau-Algorithmus und weiteren Algorithmen zu Dreiecks-Bézier-Flächen sei wiederum auf [HOSCHEK U. LASSER 1992] und [PRAUTZSCH ET AL. 2002] sowie [GREINER 2006] verwiesen.

## 2.3 Scattered Data Approximation mit Multilevel B-Splines

In den vorherigen Abschnitten des Kapitels sind einige Grundlagen zur Scattered Data Approximation und zu Freiformflächen wiederholt worden. In diesem Abschnitt wird nun ein Algorithmus beschrieben, der Prinzipien der Scattered Data Approximation mit den Methoden der hierarchischen Tensorprodukt-B-Spline-Flächen vereinigt. Das Verfahren wurde zunächst in den 1990er Jahren für spezifische Anwendungen in der Bildverarbeitung, beispielsweise das *Image Morphing*, entwickelt [LEE ET AL. 1995], [LEE ET AL. 1996B] und für allgemeine Aufgaben der Scattered Data Approximation modifiziert [LEE ET AL. 1997]. Zudem konnte es mehrfach erfolgreich adaptiert werden [HJELLE 2001], [WEIS U. LEWIS 2001], [BICEGO ET AL. 2003].

### 2.3.1 B-Spline Approximation

In einem rechteckigen Gebiet  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq n\}$  seien die Punkte  $P = \{(x_c, y_c, z_c)\}$  ungleichmäßig verteilt. Es wird eine Approximationsfunktion  $f$  dieser Daten als eine gleichmäßige bikubische B-Spline Funktion über einem Kontrollgitter  $\Phi$  definiert, welches das Gebiet  $\Omega$  überlagert (siehe Abb. 2.7). Das Kontrollgitter ist ein Set von  $(m + 3) \times (n + 3)$  Punkten.  $\phi_{ij}$  bezeichnet den

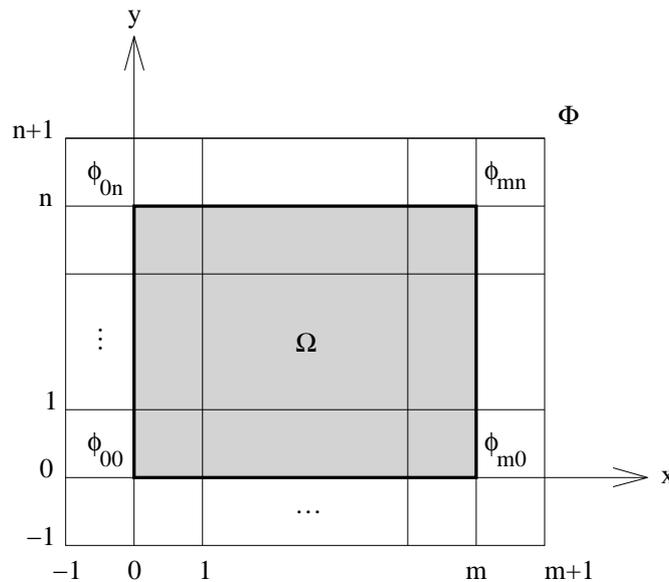


Abb. 2.7: Konfiguration des Kontrollgitters

$ij$ -ten Kontrollpunkt des Rasters an der Stelle  $(i, j)$  für  $i = -1, 0, \dots, m + 1$  und  $j = -1, 0, \dots, n + 1$ . Die Approximationsfunktion  $f$  ist bezüglich der Kontrollpunkte definiert als

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 N_k^3(s) N_l^3(t) \phi_{(i+k)(j+l)} \quad (2.25)$$

mit

$$\begin{aligned} i &= \lfloor x \rfloor - 1, \\ j &= \lfloor y \rfloor - 1, \\ s &= x - \lfloor x \rfloor, \\ t &= y - \lfloor y \rfloor, \end{aligned}$$

wobei die Gitterkoordinaten  $(x, y)$  durch die Transformationen

$$x = \frac{M_x - 3}{X_{max} - X_{min}} \cdot X - (M_x - 3) \frac{X_{min}}{X_{max} - X_{min}} \quad \text{und} \quad (2.26)$$

$$y = \frac{M_y - 3}{Y_{max} - Y_{min}} \cdot Y - (M_y - 3) \frac{Y_{min}}{Y_{max} - Y_{min}}. \quad (2.27)$$

aus den „realen“ Koordinaten  $(X, Y)$  erhalten werden. Mit  $M_x = m + 3$  und  $M_y = n + 3$  wird dabei die Anzahl der Gitter- bzw. Kontrollpunkte in  $x$ - und  $y$ -Richtung entsprechend Abbildung 2.7 angegeben. Die kubischen B-Spline-Funktionen  $N_k^3$  und  $N_l^3$  sind definiert als

$$\begin{aligned} N_0^3(t) &= (1 - t)^3/6, \\ N_1^3(t) &= (3t^3 - 6t^2 + 4)/6, \\ N_2^3(t) &= (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)/6, \\ N_3^3(t) &= t^3/6 \end{aligned}$$

mit  $0 \leq t \leq 1$ . Diese Funktionen dienen zur Gewichtung des Einflusses der Kontrollpunkte auf  $f(x, y)$  entsprechend ihres Abstandes zu  $(x, y)$ . Mit dieser Formulierung reduziert sich die Ableitung der Funktion  $f(x, y)$ , welche die Datenpunkte  $P$  bestmöglich approximiert, auf die Berechnung der Kontrollpunkte des Rasters  $\Phi$ .

Zur Bestimmung des Kontrollgitters  $\Phi$  wird zunächst ein Datenpunkt  $(x_c, y_c, z_c)$  betrachtet. Gemäß Gleichung (2.25) bezieht sich der Funktionswert  $f(x_c, y_c)$  auf die 16 benachbarten Kontrollpunkte. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann  $1 \leq x_c, y_c \leq 2$  angenommen werden. Dann bestimmen die Kontrollpunkte  $\phi_{kl}$  für  $k, l = 0, 1, 2, 3$  die Funktionswerte  $f$  in  $(x_c, y_c)$ . Damit die Funktion  $f$  in  $(x_c, y_c)$  die Werte  $z_c$  annimmt, müssen die Kontrollpunkte  $\phi_{kl}$

$$z_c = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 \omega_{kl} \phi_{kl} \quad (2.28)$$

erfüllen, wobei  $\omega_{kl} = N_k^3(s)N_l^3(t)$  und  $s = x_c - 1, t = y_c - 1$ .

Viele Werte für  $\phi_{kl}$  erfüllen Gleichung (2.28), deshalb wird im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate

$$\sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 \phi_{kl}^2 = \min \quad (2.29)$$

minimiert, d. h. die Abweichung von  $f$  über dem Gebiet  $\Omega$  soll null sein. Die Lösung wird geliefert durch den Einsatz von Pseudoinversen [HSU ET AL. 1992]

$$\phi_{kl} = \frac{\omega_{kl} z_c}{\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \omega_{ab}^2}. \quad (2.30)$$

In dieser Lösung erhalten die Kontrollpunkte in der Nähe von  $(x_c, y_c)$  größere Werte, weil sie auf größere  $\omega_{kl}$  bezogen sind. Die resultierende Funktion  $f$  hat den Wert  $z_c$  an der Stelle  $(x_c, y_c)$  und klingt langsam ab.

Nun werden alle Datenpunkte betrachtet. Für jeden Datenpunkt kann mit Gleichung (2.30) in seiner Nachbarschaft ein Satz von  $4 \times 4$  Kontrollpunkten erzeugt werden. Für entsprechend dicht benachbarte Datenpunkte werden sich diese Nachbarschaften überlagern. Durch die unterschiedlichen Werte der Datenpunkte erhalten die koinzidierenden Kontrollpunkte verschiedene Werte. Die multiplen Wertzuweisungen eines Kontrollpunktes werden gelöst, in dem nur Datenpunkte in seiner  $4 \times 4$ -Nachbarschaft einbezogen werden.

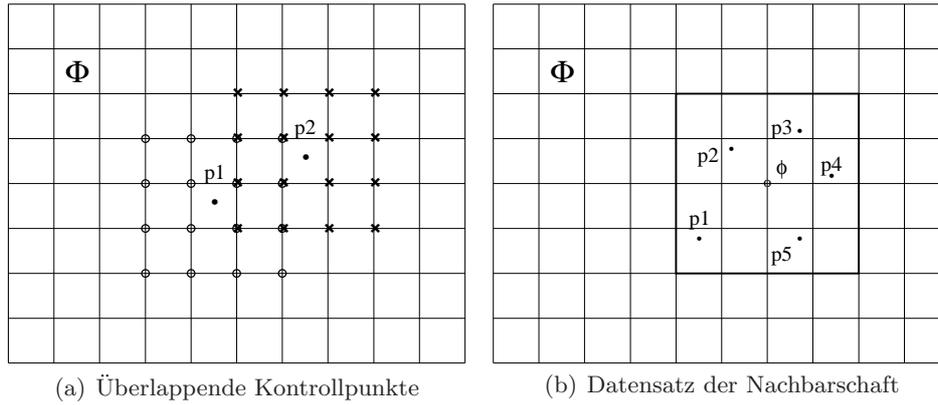


Abb. 2.8: Lagebeziehungen zwischen Daten- und Kontrollpunkten

Mit  $P_{ij}$  wird ein Satz von Datenpunkten bezeichnet, die einen Kontrollpunkt beeinflussen

$$P_{ij} = \{(x_c, y_c, z_c) \mid i - 2 \leq x_c \leq i + 2, j - 2 \leq y_c \leq j + 2\}. \quad (2.31)$$

Für jeden Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P_{ij}$  ergibt Gleichung (2.30) jeweils einen Wert für  $\phi_c$

$$\phi_c = \frac{\omega_c z_c}{\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \omega_{ab}^2} \quad (2.32)$$

mit

$$\omega_c = \omega_{kl} = N_k^3(s)N_l^3(t), \quad (2.33)$$

$$k = (i + 1) - \lfloor x_c \rfloor, \quad (2.34)$$

$$l = (j + 1) - \lfloor y_c \rfloor, \quad (2.35)$$

$$s = x_c - \lfloor x_c \rfloor, \quad (2.36)$$

$$t = y_c - \lfloor y_c \rfloor. \quad (2.37)$$

Für den Vergleich der unterschiedlichen Werte wird  $\phi_{ij}$  herangezogen, um den Fehler

$$e(\phi_{ij}) = \sum_c (\omega_c \phi_{ij} - \omega_c \phi_c)^2 \quad (2.38)$$

zu minimieren. Der Term  $(\omega_c \phi_{ij} - \omega_c \phi_c)$  ist die Differenz zwischen tatsächlichem und erwartetem Einfluss von  $\phi_{ij}$  auf die Funktion  $f$  an der Stelle  $(x_c, y_c)$ . Er ist somit der Approximationsfehler aufgrund von  $\phi_{ij}$  unter der Annahme, dass die Werte der anderen Kontrollpunkte um  $(x_c, y_c, z_c)$  herum ebenfalls unter Hinzunahme dieses Datenpunktes berechnet wurden. Die Differentiation von  $e(\phi_{ij})$  nach  $\phi_{ij}$  ergibt

$$\phi_{ij} = \frac{\sum_c \omega_c^2 \phi_c}{\sum_c \omega_c^2}. \quad (2.39)$$

Nur für die umgebenden Datenpunkte  $P_{ij}$  beeinflusst ein Kontrollpunkt  $\phi_{ij}$  die Funktion  $f$ . Besteht  $P_{ij}$  aus mehreren Punkten, wird eine kleinste-Quadrate-Lösung gemäß Gleichung (2.39) ermittelt. Für nur einen Punkt in  $P_{ij}$  wird die Approximation nach Gleichung (2.30) durchgeführt. Enthält  $P_{ij}$  keine Datenpunkte bedeutet dies, dass der Kontrollpunkt keinen Einfluss auf  $f(x_c, y_c)$  in irgendeinem Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P$  hat. Das impliziert, dass  $\phi_{ij}$  einen beliebigen Wert zugewiesen bekommen kann, beispielsweise null oder einen Durchschnittswert aller  $z_c$ , ohne den Approximationsfehler zu beeinflussen.

Dieser beschriebene Ansatz wurde in [LEE ET AL. 1997] im B-Spline Approximation (BA)-Algorithmus folgendermaßen formuliert:

**BA-Algorithmus**Input: ungleichmäßig verteilte Punkte  $P = \{(x_c, y_c, z_c)\}$ Output: Kontrollgitter  $\Phi = \{\phi_{ij}\}$ **for all**  $i, j$  **do** let  $\delta_{ij} = 0$  und  $\omega_{ij} = 0$ **for** jeden Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P$  **do**let  $i = \lfloor x \rfloor - 1$  und  $j = \lfloor y \rfloor - 1$ let  $s = x_c - \lfloor x_c \rfloor$  und  $t = y_c - \lfloor y_c \rfloor$ berechne  $\omega_{kl}$  und  $\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \omega_{ab}^2$ **for**  $k, l = 0, 1, 2, 3$  **do**berechne  $\phi_{kl}$  mit Gleichung (2.30) $\omega_{kl}^2 \phi_{kl}$  zu  $\delta_{(i+k)(j+l)}$  hinzufügen $\omega_{kl}^2$  zu  $\omega_{(i+k)(j+l)}$  hinzufügen**end****end****for all**  $i, j$  **do****if**  $\omega_{ij} \neq 0$  **then**berechne  $\phi_{ij} = \delta_{ij} / \omega_{ij}$ **else** let  $\phi_{ij} = 0$ **end**

Um das Kontrollgitter zu bestimmen, ist es nun nicht erforderlich, die zugehörigen Datenpunkte eines Kontrollpunktes zu identifizieren. Da jeder Datenpunkt alle Kontrollpunkte in seiner  $4 \times 4$  Nachbarschaft beeinflusst, gehört er ausschließlich zu den entsprechenden Datensätzen dieser Kontrollpunkte. Daher ist eine Aufaddierung von Zähler und Nenner der Gleichung (2.39) für jeden Kontrollpunkt sehr effektiv. Der Wert für einen Kontrollpunkt entspricht dann dem Quotient der Summen, wenn der Nenner ungleich null ist. Der Nenner nimmt nur dann den Wert null an, wenn ein Kontrollpunkt nicht in der  $4 \times 4$ -Umgebung eines Datenpunktes liegt.

Dadurch, dass die Kontrollpunktwerte lokal bestimmt werden, wird der Approximationsfehler so minimiert, dass die Funktion  $f$  die Ausgangsdaten richtig wiedergibt. Die Dichte des Kontrollgitters  $\Phi$  beeinflusst die Gestalt der Approximationsfunktion  $f$ . Die Funktion besitzt  $C^2$ -Stetigkeit, denn sie ist eine auf dem Kontrollgitter generierte bikubische B-Spline-Fläche.

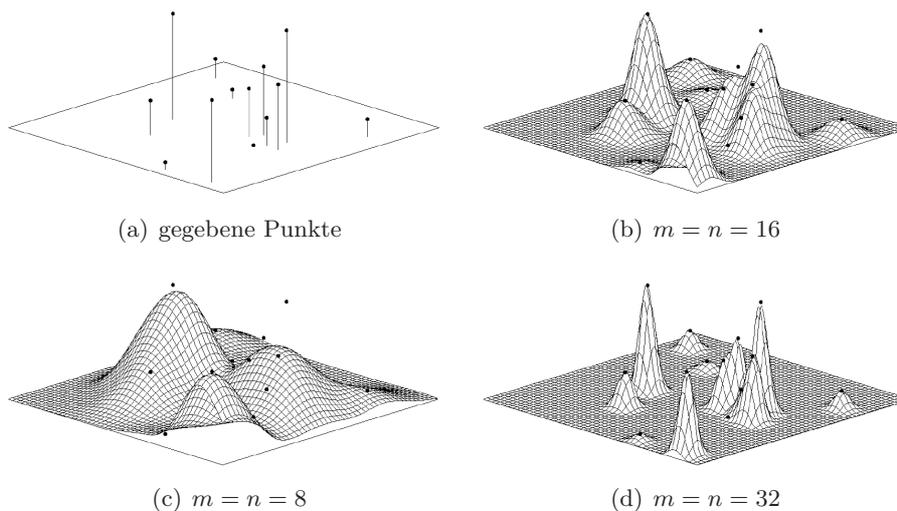


Abb. 2.9: B-Spline Approximationen mit verschiedenen Kontrollgittern, [LEE ET AL. 1997] S. 232

In Abbildung 2.9 sind Ergebnisse dargestellt, die [LEE ET AL. 1997] für verschieden dichte Gitter mit dem BA-Algorithmus aus einem Testdatensatz erhalten haben.

### 2.3.2 Multilevel B-Spline Approximation

Die B-Spline Approximation führt zu einem Kompromiss zwischen hoher Genauigkeit und glattem Verlauf der Approximationsfläche. Der Approximationsalgorithmus mit *Multilevel B-Splines* umgeht diesen Kompromiss und ermöglicht sowohl einen glatten Flächenverlauf als auch eine bestmögliche Annäherung an die Datenpunkte. Dieser Algorithmus nutzt hierarchische Kontrollgitter zur Generierung einer Reihe von Funktionen  $f_k$ , deren Summe sich der Approximationsfunktion annähert.

Bei dieser Erweiterung des B-Spline Approximation-Algorithmus werden hierarchische Kontrollgitter eingeführt mit der Annahme, dass der Abstand zweier Gitterpunkte mit jeder Hierarchiestufe halbiert wird. Wenn  $\Phi_k$  ein  $(m+3) \times (n+3)$  Kontrollgitter ist, besitzt das nächstdichtere Gitter  $\Phi_{k+1}$   $(2m+3) \times (2n+3)$  Kontrollpunkte, wobei der  $ij$ -te Kontrollpunkt in  $\Phi_k$  mit dem  $(2i, 2j)$ -ten Kontrollpunkt in  $\Phi_{k+1}$  übereinstimmt.

Zunächst wird der BA-Algorithmus angewendet, um das gröbste Kontrollgitter  $\Phi_0$  zu bestimmen. Die resultierende Funktion  $f_0$  ermöglicht eine erste Annäherung, jedoch unter Umständen mit starken Diskrepanzen für die Werte der Datenpunkte. Insbesondere liefert  $f_0$  die Abweichung

$$\Delta^1 z_c = z_c - f_0(x_c, y_c) \quad (2.40)$$

für jeden Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P$ . Das nächst dichtere Gitter wird nun benutzt, um die Funktion  $f_1$  zu bestimmen, welche die Differenz

$$P_1 = (x_c, y_c, \Delta^1 z_c) \quad (2.41)$$

approximiert. Die Summe  $f_0 + f_1$  führt dann zu einer geringeren Abweichung

$$\Delta^2 z_c = z_c - f_0(x_c, y_c) - f_1(x_c, y_c) \quad (2.42)$$

für jeden Punkt in  $P$ . Letztendlich wird die Funktion  $f_k$  vom Kontrollgitter  $\Phi_k$  abgeleitet, um

$$P_k = (x_c, y_c, \Delta^k z_c) \quad (2.43)$$

zu approximieren mit

$$\Delta^k z_c = z_c - \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x_c, y_c) = \Delta^{k-1} z_c - f_{k-1}(x_c, y_c), \quad (2.44)$$

$$\Delta^0 z_c = z_c. \quad (2.45)$$

Der Prozess beginnt beim größten Raster  $\Phi_0$  und wird schrittweise fortgesetzt bis zum dichtesten Gitter  $\Phi_h$ . Die endgültige Approximationsfunktion  $f$  ist die Summe der einzelnen Funktionen  $f_k$

$$f = \sum_{k=0}^h f_k. \quad (2.46)$$

Dieser schrittweise Prozess wird im Multilevel B-Spline Approximation (MBA)-Algorithmus realisiert:

#### MBA-Algorithmus

Input: ungleichmäßig verteilte Punkte  $P = \{(x_c, y_c, z_c)\}$

Output: hierarchische Kontrollgitter  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_h$

let  $k = 0$

**while**  $k \leq h$  **do**

    let  $P_k = \{(x_c, y_c, \Delta^k z_c)\}$

    berechne  $\Phi_k$  von  $P_k$  mit dem BA-Algorithmus

    berechne  $\Delta^{k+1} z_c = \Delta^k z_c - f_k(x_c, y_c)$  für jeden Datenpunkt

    let  $k = k + 1$

**end**

Auch die mit dem MBA-Algorithmus ermittelte Funktion  $f$  ist  $C^2$ -stetig, da sie eine Summe von  $C^2$ -stetigen Funktionen ist. Der Verlauf der Funktion ist glatter und genauer als derjenige der Funktion aus dem BA-Algorithmus.

Die Dichte des größten Kontrollgitters  $\Phi_0$  bestimmt den Einfluss der Datenpunkte auf die Approximationsfunktion  $f$ . Größere Abstände führen zu einer stärkeren Überlagerung der Einflüsse der Datenpunkte und somit zu einem glatteren Verlauf. Die Genauigkeit, mit der  $f$  die Datenpunkte approximiert, hängt von der Dichte des feinsten Gitters  $\Phi_h$  ab. Ist  $\Phi_h$  hinlänglich dichter als die Verteilung der Datenpunkte, kann  $f$  die Daten fehlerfrei approximieren.

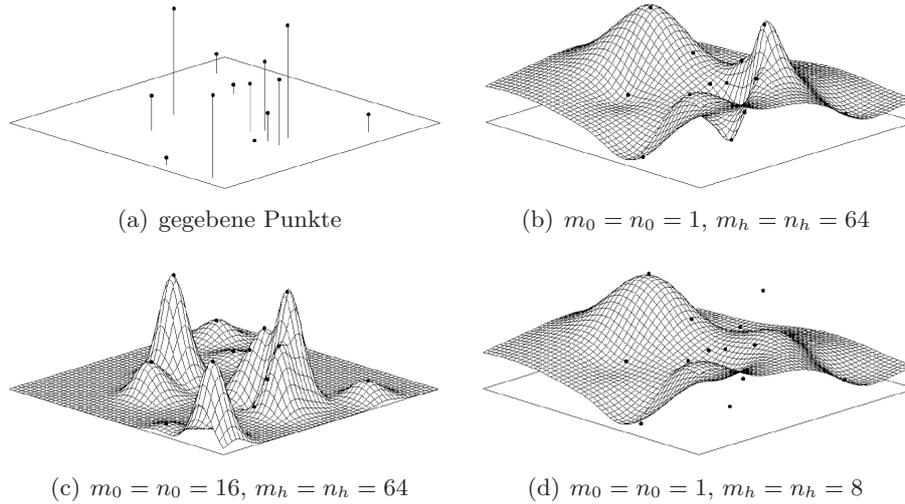


Abb. 2.10: Beispiele für Multilevel B-Spline Approximationen mit verschiedenen größten und feinsten Kontrollgittern, [LEE ET AL. 1997] S. 233

Abbildung 2.10 zeigt einige Beispiele für die Anwendung des MBA-Algorithmus auf den selben Datensatz wie in Abbildung 2.9. Für die Größe eines Kontrollgitters  $\Psi_k$  gilt  $(m_k + 3) \times (n_k + 3)$ . In Abbildung 2.10 (b) mit  $m_0 = n_0 = 1$ ,  $m_h = n_h = 64$  ist ein sehr glatter Verlauf der Fläche mit Interpolation der Datenpunkte zu sehen. Abbildung 2.10 (c) verdeutlicht den Effekt, wenn  $\Psi_0$  mit  $m_0 = n_0 = 16$  gewählt wird. Der Approximationsfehler, der durch ein zu grobes Gitter  $\Psi_h$  mit  $m_h = n_h = 8$  verursacht wird, ist in Abbildung 2.10 (d) dargestellt.

Die Berechnung von  $f$  erfordert die Bestimmung von  $f_k$  in jeder Hierarchiestufe  $k$ . Durch Einführen der *B-Spline Verfeinerung* [LEE ET AL. 1997] wird der MBA-Algorithmus zusätzlich optimiert und  $f$  nur noch durch eine B-Spline-Funktion gebildet. Die B-Spline Verfeinerung wird in jeder Hierarchiestufe durchgeführt.

$F(\Phi)$  bezeichnet die B-Spline-Funktion eines Kontrollgitters  $\Phi$  und  $|\Phi|$  die Größe von  $\Phi$ . Mit der B-Spline Verfeinerung können die Kontrollgitter  $\Phi'_0$  vom größten Gitter  $\Phi_0$  abgeleitet werden, sodass  $F(\Phi'_0) = f_0$  und  $|\Phi'_0| = |\Phi_1|$ . Dann kann die Summe von  $f_0$  und  $f_1$  ausgedrückt werden durch das Kontrollgitter  $\Psi_1$ , welches durch Addition aller entsprechenden Kontrollpunktpaare in  $\Phi'_0$  und  $\Phi_1$  entsteht, also

$$F(\Psi_1) = g_1 = f_0 + f_1 \quad \text{mit} \quad \Psi_1 = \Phi'_0 + \Phi_1. \quad (2.47)$$

Die Summe der Funktionen  $f_i$  bis zur Hierarchiestufe  $k$  ist

$$g_k = \sum_{i=0}^k f_i. \quad (2.48)$$

Da  $g_{k-1}$  durch das Kontrollgitter  $\Psi_{k-1}$  dargestellt wird, gilt

$$|\Psi_{k-1}| = |\Phi_{k-1}|. \quad (2.49)$$

In gleicher Weise wie bei der Berechnung von  $\Psi_1$  kann auch  $\Psi_{k-1}$  verfeinert werden, um  $\Psi'_{k-1}$  zu erhalten und wiederum zu  $\Phi_k$  zu addieren. Dadurch wird  $\Psi_k$  erhalten mit  $F(\Psi_k) = g_k$  und  $|\Psi_k| = |\Phi_k|$  sowie  $\Psi_k = \Psi'_{k-1} + \Phi_k$ . Mit  $g_0 = f_0$  und  $\Psi_0 = \Phi_0$  können die Kontrollgitter  $\Psi_k$  schrittweise berechnet werden, um dann letztendlich  $\Psi_h$  zu erhalten und die endgültigen Approximationsfunktion zu bestimmen  $f = g_h$ .

Ein  $(m + 3) \times (n + 3)$  Kontrollgitter  $\Phi$  wird jeweils zu einem  $(2m + 3) \times (2n + 3)$  Kontrollgitter  $\Phi'$  verfeinert, dessen Punktabstand halb so groß wie bei  $\Phi$  ist. Sind  $\phi_{ij}$  und  $\phi'_{ij}$  die  $ij$ -ten Kontrollpunkte in  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$ , dann koinzidieren die Positionen von  $\phi'_{2i,2j}$  in  $\Phi'$  und  $\phi_{ij}$  in  $\Phi$ . Die Werte für die Punkte in  $\Phi'$  können aus  $\Phi$  abgeleitet werden, sie werden berechnet mit

$$\phi'_{2i,2j} = \frac{1}{64} [\phi_{i-1,j-1} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j+1} + 6(\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j}) + 36\phi_{ij}], \tag{2.50}$$

$$\phi'_{2i,2j+1} = \frac{1}{16} [\phi_{i-1,j} + \phi_{i-1,j+1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1} + 6(\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1})], \tag{2.51}$$

$$\phi'_{2i+1,2j} = \frac{1}{16} [\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i+1,j+1} + 6(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j})], \tag{2.52}$$

$$\phi'_{2i+1,2j+1} = \frac{1}{4} [\phi_{ij} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j+1}]. \tag{2.53}$$

In Abbildung 2.11 ist veranschaulicht, wie ein Punkt  $\phi'_{ij}$  gemäß der Gleichungen (2.50) bis (2.53) aus dem größeren Gitter  $\Phi$  abgeleitet wird.

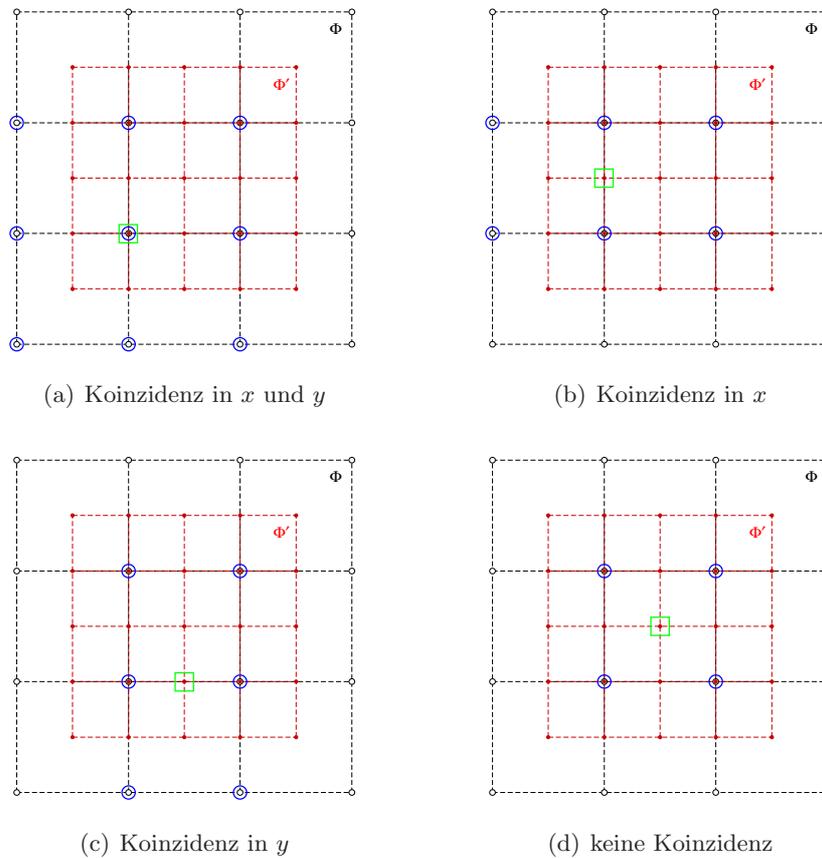


Abb. 2.11: Lagebeziehungen zwischen den Gitterpunkten bei der B-Spline Verfeinerung (grobes Gitter: schwarz, feines Gitter: rot, betrachteter Beispielpunkt des feinen Gitters: grün, dazu korrespondierende Punkte des groben Gitters: blau)

Um das Kontrollgitter  $\Psi_h$  aus den Punkten  $P$  zu generieren, brauchen nicht mehr alle Elemente von  $\Phi_k, \Psi_k, \Psi'_k$  und  $P_k$  für alle  $k$  gespeichert werden. Wenn die B-Spline Approximation und die Verfeinerung für jede Hierarchiestufe zusammen angewandt werden, kann  $\Psi_h$  aus der schrittweisen Berechnung der hierarchischen Kontrollgitter (vom größten zum feinsten) abgeleitet werden. Beim Durchlauf ist nur eine Variable für die Daten und Kontrollgitter notwendig, um die Berechnung durchzuführen und Zwischenergebnisse zu erzeugen. Die B-Spline Verfeinerung ist im modifizierten MBA-Algorithmus implementiert, dabei bezeichnet  $P - F(\Phi)$  die aktualisierten Datenpunkte  $\{(x_c, y_c, \Delta^{k+1} z_c)\}$  mit  $P = \{(x_c, y_c, \Delta^k z_c)\}$  und  $f_k = F(\Phi)$ .

### Modifizierter MBA-Algorithmus

Input: ungleichmäßig verteilte Punkte  $P = \{(x_c, y_c, z_c)\}$

Output: Kontrollgitter  $\Psi$

$\Phi$  ist das größte Raster

let  $\Psi' = 0$

**while**  $\Phi$  ist größer als das dichteste Kontrollgitter **do**

    berechne  $\Phi$  von  $P$  mit dem BA-Algorithmus

    berechne  $P = P - F(\Phi)$

    berechne  $\Psi = \Psi' + \Phi$

$\Phi$  ist das nächst dichtere Kontrollgitter

    verfeinere  $\Psi$  zu  $\Psi'$  mit  $F(\Psi') = F(\Psi)$  und  $|\Psi'| = |\Phi|$

**end**

Ein Schema des mit der B-Spline Verfeinerung modifizierten MBA-Algorithmus ist in Abb. 2.12 dargestellt.

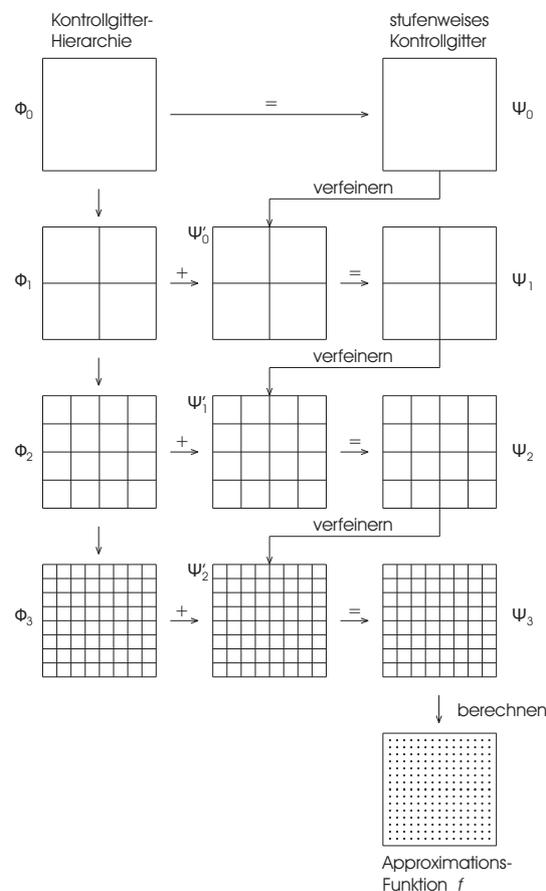


Abb. 2.12: Berechnung der Approximationsfunktion mit dem MBA-Algorithmus

### 2.3.3 Multilevel B-Spline Interpolation

Mit dem MBA-Algorithmus wird eine Approximationsfunktion  $f$  generiert, die sich an die Datenpunkte  $P$  annähert, jedoch nicht zwangsläufig durch diese verläuft. Durch Wiederaufruf der Funktion  $f_k$  für die Hierarchiestufen  $k > 0$  werden die Restfehler  $\Delta^k z_c$  für jeden Datenpunkt approximiert. Mit einer hinreichenden Bedingung für das Kontrollgitter  $\Phi_k$  kann  $f_k$  derart generiert werden, dass alle Restfehler beseitigt werden können.

Es sind  $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$  und  $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$  zwei Punkte in  $P_k$ . Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann angenommen werden, dass  $\Phi_k$  den gleichen horizontalen und vertikalen Abstand zwischen zwei Kontrollpunkten besitzt. Der Abstand zwischen  $p_1$  und  $p_2$  wird definiert als

$$d = \max\left(\left|\left\lfloor \frac{x_2}{s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x_1}{s} \right\rfloor\right|, \left|\left\lfloor \frac{y_2}{s} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y_1}{s} \right\rfloor\right|\right), \quad (2.54)$$

wobei  $s$  den Abstand der Kontrollpunkte angibt. Der Abstand entspricht der maximalen Anzahl von horizontalen und vertikalen Gitterlinien in  $\Phi_k$  zwischen  $p_1$  und  $p_2$  nach der Projektion auf die Fläche  $\Omega$ . Dadurch werden die Interpolationseigenschaften bezüglich der Dichte des Kontrollgitters und der Datenverteilung festgelegt. Der kleinste Abstand zweier Punkte in  $P_k$  wird der Variablen  $d$

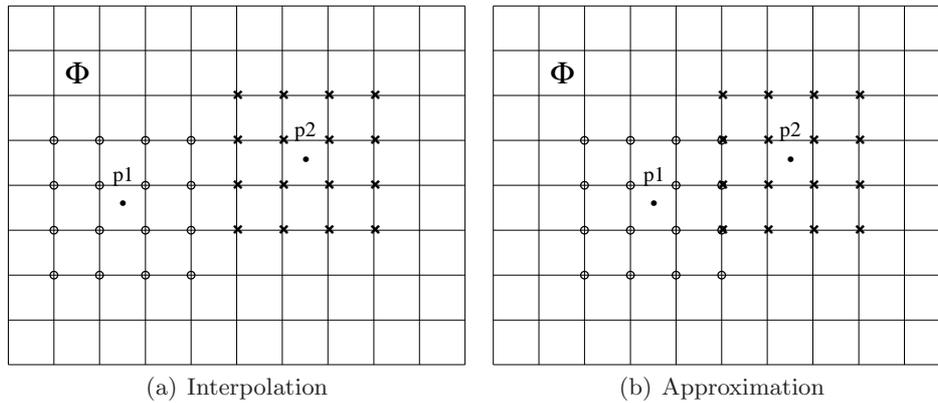


Abb. 2.13: Beispiele für eine Interpolations- und Approximationssituation

zugewiesen. Ist  $d \geq 4$ , liegt kein Kontrollpunkt in der  $4 \times 4$  Nachbarschaft von zwei Datenpunkten. In diesem Fall handelt es sich dann um eine reine Interpolation, da jeder Kontrollpunkt jeweils nur von einem einzigen Datenpunkt abhängt. Für  $d < 4$  ist mindestens ein Kontrollpunkt abhängig von zwei Datenpunkten. In diesem Fall müssen die Einflüsse der beiden Punkte überlagert werden, um den Wert dieses Kontrollpunktes zu ermitteln. Das führt dazu, dass die Funktion  $f_k$  diese Datenpunkte nur noch approximiert.

Um diese Interpolationsbedingung zu berücksichtigen, muss das dichteste Kontrollgitter  $\Phi_h$  so fein sein, dass  $d \geq 4$  erfüllt ist. Es ist möglich, dass durch ein Paar von Datenpunkten ein sehr dichtes Kontrollgitter erfordert wird, obwohl alle anderen Punkte weiter auseinander liegen. Das führt dazu, dass Kontrollpunkte angelegt werden, die nicht in der  $4 \times 4$  Nachbarschaft eines Datenpunktes liegen. Deshalb ist der Algorithmus derart modifiziert, dass nur noch Kontrollpunkte einer Hierarchiestufe innerhalb der Nachbarschaftsumgebung gespeichert werden und somit die Funktion  $f$  auch nur aus diesen Kontrollpunkten generiert wird. Somit wird das Kontrollgitter besser als Satz von erforderlichen Punkten wiedergegeben als durch ein Gitter mit allen Punkten.

In der Hierarchiestufe  $k$  können die Werte der notwendigen Kontrollpunkte im Gitter  $\Phi_k$  durch einen modifizierten BA-Algorithmus effektiv berechnet werden. Die Variablen  $\delta_{ij}$  und  $\omega_{ij}$  werden als Vektor belegt, anstelle einer zweidimensionalen Matrix. Für einen Datenpunkt wird dann sein jeweiliger Einfluss auf die benachbarten Kontrollpunkte zusammen mit deren Indizes gespeichert. Die Vektoren werden anschließend nach den Indizes sortiert und zusammengefasst, um mit Gleichung (2.39)

die betreffenden (d. h. beeinflussten) Kontrollpunkte zu berechnen. Unberücksichtigte Kontrollpunkte bekommen Null zugewiesen.

### Modifizierter BA-Algorithmus

Input: ungleichmäßig verteilte Punkte  $P = \{(x_c, y_c, z_c)\}$

Output: Satz von Kontrollpunkten  $\{\phi_{ij}\}$

let  $r = 0$

**for** jeden Punkt  $(x_c, y_c, z_c)$  in  $P$  **do**

    setze  $i, j, s, t, \omega_{kl}, \sum \sum \omega_{ab}^2$  wie im BA-Algorithmus

**for**  $k, l = 0, 1, 2, 3$  **do**

        berechne  $\phi_{kl}$  mit Gleichung (2.30)

        speichere  $\omega_{kl}^2 \phi_{kl}$  und Index  $(i + k, j + l)$  in  $\delta_r$

        speichere  $\omega_{kl}^2$  und Index  $(i + k, j + l)$  in  $\omega_r$

        let  $r = r + 1$

**end**

**end**

sortiere  $\delta_r$  und  $\omega_r$  nach den Indizes

**for** jeden Index  $(i, j)$  in  $\omega_r$  **do**

    setze  $r_1, r_2$  so, dass der  $Index(\omega_r) = (i, j)$  für  $r_1 \leq r \leq r_2$

    berechne  $\phi_{ij} = \sum_{r=r_1}^{r_2} \delta_r / \sum_{r=r_1}^{r_2} \omega_r$

**end**

Die Anordnung der Kontrollgitterpunkte in einem Vektor der Länge  $(m + 3) \times (n + 3)$  statt einer  $[(m + 3), (n + 3)]$ -Matrix lässt sich entsprechend auf weitere Dimensionen erweitern. Die Länge Vektors für ein Kontrollgitter  $\Phi$  im  $\mathbb{R}^d$  kann allgemein formuliert werden als

$$(m_0 + 3) \times (m_1 + 3) \times \cdots \times (m_{d-1} + 3). \quad (2.55)$$

Diese Struktur der Speicherung erlaubt eine weitere Erweiterung. BA- und MBA-Algorithmus gelten in der bisher vorgestellten Form für den allgemeinen Fall, dass nur eine Größe  $z$  zu approximieren ist, sie gelten somit für einen eindimensionalen Wertebereich  $\mathbb{R}^1$ . Indem eine weitere Schleife in die Algorithmen eingefügt wird, kann der Wertebereich verallgemeinert mit  $\mathbb{R}^r$  definiert werden [WEIS U. LEWIS 2001]. Für die Länge des Vektors der Kontrollpunkte gilt somit

$$(m_0 + 3) \times (m_1 + 3) \times \cdots \times (m_{d-1} + 3) \times r. \quad (2.56)$$

Die Form der Speicherung und Struktur der Algorithmen ermöglichen eine große Flexibilität dieses Verfahrens, da es im Prinzip keine Limitierungen für den Definitions- und den Wertebereich der zu approximierenden Punkte gibt.

### 2.3.4 Beurteilung des Approximationsverfahrens

Die Multilevel B-Spline Approximation ist ein sehr geeignetes Verfahren, die Daten ungleichmäßig verteilter Punkte durch eine Fläche zu approximieren. Aus diesem Grund ist dieses Verfahren ausgewählt worden, um aus den Bewegungen der GPS-Stationen im rumänischen Untersuchungsgebiet ein kontinuierliches Geschwindigkeitsfeld zu generieren.

Die Vorteile dieses Verfahrens sollen im Folgenden nochmal zusammengefasst werden:

- i. Die Approximationsfläche ist  $C^2$ -stetig, was einen glatten Verlauf gewährleistet.
- ii. Das erste, initialisierende Kontrollgitter entspricht einer mittleren Fläche durch alle Punkte, wodurch ausgeschlossen ist, dass es Bereiche ohne Wertzuweisung geben kann.

- iii. Durch Verfeinerung der Kontrollgitter schmiegt sich die Approximationsfläche den Datenpunkte immer besser an; eine lokal bestanpassendste Fläche wird erzeugt.
- iv. Durch hinreichend feine Kontrollgitter wird eine Interpolationsfläche erzeugt.
- v. In den Approximationsalgorithmus kann durch den Anwender eingegriffen werden, entweder durch Vorgabe einer Abbruchbedingung, beispielsweise in Form einer maximalen Differenz zwischen Original- und Approximationswert, oder Festlegung der Anzahl der Verfeinerungen der Kontrollgitter.
- vi. Die Datenpunkte können im  $\mathbb{R}^n$  definiert werden, es gibt keine Beschränkung der Dimension.
- vii. Der Wertebereich ist ebenfalls im  $\mathbb{R}^n$  definiert, was bedeutet, dass mehrere Größen simultan approximiert werden können.

Einige dieser Eigenschaften können bei Verwendung anderer Techniken nur durch Mehraufwand erreicht werden. Beispielsweise kann bei Bézier-Techniken die globale Wirkung der Kontrollpolygone bzw. -netze auf die Bézier-Fläche nur durch Segmentierung in kleine Patches umgangen werden, die aber wiederum nur durch zusätzliche Übergangsbedingungen zusammengefügt werden können.

Einige Eigenschaften der Multilevel B-Spline Approximation sind essentielle Bedingungen im Hinblick auf die weiteren Aufgaben, die Durchführung der Strainanalyse und Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes. Die Anwendung der Theorie der Kontinuumsmechanik erfordert eine hinreichend oft differenzierbare Beschreibung des deformierbaren Körpers, was durch die  $C^2$ -Stetigkeit gewährleistet ist. Zudem ist die Differentiation der Approximationsfläche unproblematisch. Wie die Theorie der Kontinuumsmechanik auf Basis einer B-Spline-Fläche umgesetzt werden kann, wird in Abschnitt 3.2 detailliert behandelt.

Bei der Varianzfortpflanzung ist eine mögliche Korrelation zwischen den verschiedenen zu approximierenden Größen zu berücksichtigen. Durch die Möglichkeit, simultan mehrere Größen approximieren zu können, wird auch die Varianzfortpflanzung vereinfacht. Die für das allgemeine Varianzfortpflanzungsgesetz notwendigen Funktionalmatrizen können während des Approximationsalgorithmus direkt aufgestellt werden. In Abschnitt 4 wird dies ausführlich vorgestellt.

Die Multilevel B-Spline Approximation konnte zur Generierung eines Geschwindigkeitsfeldes bereits erfolgreich eingesetzt werden [NUCKELT 2006]. Ein Vergleich mit der Kollokation ergab dabei, dass regionale Besonderheiten durch die Multilevel B-Spline Approximation besser behandelt werden. Ausreißer haben ebenfalls nur einen begrenzten lokalen Einfluss.

Der Einsatz dieses Verfahrens für andere Interpolations- bzw. Approximationsaufgaben ist denkbar. Von großem Vorteil ist dabei die erwähnte Variabilität des Algorithmus hinsichtlich der Dimension der Daten.

### 3. Kontinuumsmechanik

Die Theorien der Kontinuumsmechanik werden im Bereich der Geodäsie oft angewandt, um Deformationsmaße zu berechnen. Diese beruhen auf Punktverschiebungen, welche oftmals aus epochalen Messungen abgeleitet werden, z. B. [STRAUB 1996], [PETER 2001] und [RAWIEL 2001]. In Abgrenzung zur geodätischen Deformationsanalyse wird dies deshalb auch als Strainanalyse bezeichnet. In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Kontinuumsmechanik vorgestellt. Danach folgen vier Abschnitte, die sich der Umsetzung der theoretischen Modelle widmen. Die Ableitung des Verschiebungsgradiententensorfeldes auf Basis einer Multilevel B-Spline Approximationsfläche und die anschließenden Berechnungen der Haupt- und Scherdehnungen sollen darin explizit herausgearbeitet werden.

#### 3.1 Einführung in die Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik (Strömungslehre) beschäftigt sich mit deformierbaren Körpern, die sich aus kleinsten, infinitesimalen Volumenelementen zusammensetzen. Diese Volumenelemente zeichnen sich durch jeweils drei Freiheitsgrade der Translation, Rotation und Deformation aus, was durch *Helmholtz* im Fundamentalsatz der Kinematik [HELMHOLTZ 1858] formuliert wurde:

Die allgemeine Ortsveränderung eines deformierbaren Körpers lässt sich für ein hinreichend kleines Volumen desselben darstellen als Summe

- i. einer Translation,
- ii. einer Rotation
- iii. und je einer Deformation (Dehnung oder Stauchung) in drei zueinander senkrechten Richtungen.

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Grundbegriffe und Theorien der Kontinuumsmechanik gegeben. Auf ausführliche Herleitungen wird jedoch bewusst verzichtet, es sollen in diesem Abschnitt nur die notwendigen Größen definiert und deren mathematische Zusammenhänge veranschaulicht werden. Für detaillierte Herleitungen und Erklärungen sei auf die Fachliteratur [BETTEN 1993], [KLAUSNER 1991], [HAUPT 1993] und [BOWEN 1989] verwiesen. In der geodätischen Literatur finden sich ebenfalls umfangreiche Behandlungen dieses Themas in [MARTINEC 1999] und [WOLF 2003].

Nach der Aufbereitung der notwendigen Grundlagen zu den Theorien der Kontinuumsmechanik in den Abschnitten 3.1.1 bis 3.1.3 wird im Abschnitt 3.1.4 deren Anwendung auf die Ergebnisse geodätischer Messverfahren diskutiert.

##### 3.1.1 Grundbegriffe

Als materieller Körper  $\mathcal{M}$  (mit der Oberfläche  $\partial\mathcal{M}$ ) wird eine zusammenhängende Menge von materiellen Punkten bezeichnet, die zu jedem Zeitpunkt einen Teilbereich des dreidimensionalen Euklidischen Raumes bedeckt [LENZ 1995]. In der Bezugsplatzierung zum Zeitpunkt  $t = 0$  wird jedem materiellen Punkt  $P$  ein Ortsvektor  $\bar{\xi}$  mit den materiellen (Langrangeschen) Koordinaten  $\xi_i$  zugeordnet

$$\bar{\xi} = \xi_i \bar{e}_i. \quad (3.1)$$

Zu einem späteren Zeitpunkt  $t > 0$ , der Momentanplatzierung, beschreibt der Ortsvektor  $\bar{x}$  mit den räumlichen (Eulerschen) Koordinaten  $x_i$  die Lage des selben Punktes

$$\bar{x} = x_i \bar{e}_i. \quad (3.2)$$

Durch die vektorwertige, eindeutige Abbildung  $\bar{\mathcal{X}}$  bzw. durch deren Umkehrabbildung  $\bar{\mathcal{X}}^{-1}$  ist der Zusammenhang zwischen materiellen und räumlichen Koordinaten hergestellt

$$\bar{x} = \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}), \quad (3.3)$$

$$\bar{\xi} = \bar{\mathcal{X}}^{-1}(\bar{x}). \quad (3.4)$$

Die Lage des materiellen Punktes in der Momentanplatzierung

$$\bar{x} = \bar{x}(\bar{\xi}, t) = \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) \quad (3.5)$$

hängt natürlich von seiner Bezugsplatzierung zum Zeitpunkt  $t = 0$  ab. Durch einmalige Differentiation von Gleichung (3.5) wird der Geschwindigkeitsvektor  $\bar{v}$  für einen materiellen Punkt, der zur Zeit  $t = 0$  an der Stelle  $\bar{\xi}$  lag, zum Zeitpunkt  $t$  erhalten

$$\bar{v} = \dot{\bar{x}} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) \right|_{\bar{\xi}=\text{const.}} \quad (3.6)$$

Zweimalige Differentiation von Gleichung (3.5) führt zum Beschleunigungsvektor  $\bar{a}$  für  $\bar{x}(\bar{\xi}, t = 0) = \bar{\xi}$

$$\bar{a} = \ddot{\bar{x}} = \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) \right|_{\bar{\xi}=\text{const.}} \quad (3.7)$$

Der unbelastete Zustand eines materiellen Körpers ist definiert durch seine Bezugsplatzierung. Infolge von Belastungen verändert sich die Lage des Körpers im Raum (Momentanplatzierung), d. h. alle materiellen Punkte (Teilchen) des Körpers erleiden Verschiebungen  $\bar{u}(\bar{\xi}, t)$

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{\xi}, t) = \bar{\mathcal{X}}(\bar{\xi}, t) - \bar{\xi}. \quad (3.8)$$

Der Nabla-Operator für ein dreidimensionales, kartesisches Koordinatensystem

$$\nabla = \bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \bar{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \bar{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (3.9)$$

ist ein vektorähnlicher Differentialoperator. Das Tensorprodukt aus Nabla-Operator und Verschiebungsvektorfeld führt auf das Verschiebungsgradiententensorfeld

$$\text{Grad } \bar{u} = \nabla \otimes \bar{u} = \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k. \quad (3.10)$$

Das Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u}$ , die Gesamtheit aller Verschiebungsvektoren eines belasteten Körpers, beschreibt den durch Translation, Rotation und Verformung charakterisierten Verschiebungszustand. Diese Charakterisierung erfolgt durch den Deformationsgradienten bzw. das Deformationsgradiententensorfeld  $\underline{F}$ .

Dazu werden zwei Punkte  $A$  und  $P$  betrachtet, die infinitesimal benachbart seien

$$d\bar{\xi} = \bar{\xi}_P - \bar{\xi}_A \quad \text{für } t = 0, \quad (3.11)$$

$$d\bar{x} = \bar{x}_P - \bar{x}_A \quad \text{für } t > 0. \quad (3.12)$$

Durch die Abbildung  $\underline{F}$  lässt sich der Vektor  $d\bar{\xi}$  in den Vektor  $d\bar{x}$  durch

$$d\bar{x} = \underline{F} d\bar{\xi} \quad (3.13)$$

überführen. Die Abbildung  $\underline{F}$  hat die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \det \underline{F} \neq 0 &\Rightarrow \underline{F}^{-1} \text{ existiert,} \\ d\bar{\xi} &= \underline{F}^{-1} d\bar{x}, \\ d\bar{\xi} \neq \bar{0} &\Rightarrow \underline{F} d\bar{\xi} \neq \bar{0}. \end{aligned}$$

Für den infinitesimalen Abstand  $d\bar{x}$  gilt

$$d\bar{x} = dx_i \bar{e}_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} d\xi_k \bar{e}_i, \quad (3.14)$$

$$d\bar{x} = \underline{F} d\bar{\xi} = (F_{ik} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k) d\xi_l \bar{e}_l = F_{ik} d\xi_k \bar{e}_i. \quad (3.15)$$

Daraus kann

$$F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \quad (3.16)$$

gefolgert werden. Für das Deformationsgradiententensorfeld ergibt sich somit die Formulierung

$$\underline{F} = F_{ik} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \bar{e}_i \otimes \bar{e}_k = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\xi}}. \quad (3.17)$$

Der Deformationsgradient  $\underline{F}$  ist ein Tensor zweiter Stufe und im Allgemeinen nicht symmetrisch. Er ist orts- und zeitabhängig:  $\underline{F} = \underline{F}(\bar{\xi}, t)$ . Ein ortsunabhängiger Tensor  $\underline{F} = \underline{F}(t)$  wird als *homogen* bezeichnet. Desweiteren ist der Tensor *orthogonal* für den isometrischen Fall, d. h. für eine starre Bewegung des Körpers. Fehlt hingegen die Starrkörperbewegung ist  $\underline{F}$  *symmetrisch*.

Durch den Deformationsgradiententensor  $\underline{F}$  wird die gesamte Bewegung des Körpers beschrieben. Da sowohl Verzerrungen als auch die Starrkörperbewegungen enthalten sind, ist  $\underline{F}$  für eine Beurteilung der Verzerrungen des Körpers nicht geeignet. Der Tensor muss in eine „reine“ Drehung (Starrkörperbewegung) und „reine“ Streckung (Verzerrung) aufgespalten werden.

Analog zur polaren Darstellung  $z = r e^{i\phi}$  einer komplexen Zahl gibt es eine Produktzerlegung gemäß dem *Polarzerlegungstheorem* für den Deformationsgradiententensor  $\underline{F}$ . Es existieren die zwei Zerlegungen für  $\underline{F}$

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{U} \quad \text{und} \quad (3.18)$$

$$\underline{F} = \underline{V} \underline{R}. \quad (3.19)$$

Die starre Drehung des Körpers wird in beiden Gleichungen (3.18) und (3.19) durch den *orthogonalen Drehtensor*  $\underline{R}$  beschrieben.

$\underline{U}$  und  $\underline{V}$ , bezeichnet als *Rechter* und *Linker Streckungstensor*, sind zwei symmetrische, positiv definite Tensoren

$$\underline{U} \underline{U} = \underline{F}^T \underline{F} =: \underline{C}, \quad (3.20)$$

$$\underline{V} \underline{V} = \underline{F} \underline{F}^T =: \underline{B}. \quad (3.21)$$

Die ebenfalls symmetrischen und positiv definiten Tensoren  $\underline{C}$  und  $\underline{B}$  werden *Rechter* bzw. *Linker Cauchy-Green Tensor* genannt.

Für die Tensoren  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}$ ,  $\underline{B}$  und  $\underline{C}$  gilt, dass sie für eine reine Starrkörperbewegung zum Einheitstensor  $\underline{1}$  werden. Demzufolge gilt

$$\underline{F} = \underline{R} \underline{1} = \underline{R}. \quad (3.22)$$

Mit dem *Greenschen Verzerrungstensor*  $\underline{E}$  wird ein symmetrischer Tensor definiert

$$\underline{E} = \frac{1}{2} (\underline{C} - \underline{1}), \quad (3.23)$$

der bei einer starren Bewegung verschwindet.

### 3.1.2 Infinitesimale Deformationen

Die *lineare Theorie* der Kontinuumsmechanik [LENZ 1995] beruht auf der Voraussetzung, dass die Verschiebungsänderungen sehr klein sind

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \right| \cong \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right| \ll 1. \quad (3.24)$$

Mit Hilfe des Kroneckersymbols

$$\delta_{ij} =: \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

und dem Zusammenhang

$$\bar{x} = \bar{\xi} + \bar{u} \quad \text{bzw.} \quad x_i = \xi_i + u_i$$

kann formuliert werden

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} = F_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} = \delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k}. \quad (3.25)$$

Dadurch kann der Deformationsgradiententensor  $\underline{F}$  geschrieben werden als

$$\underline{F} = \underline{1} + (\text{Grad } \bar{u})^T. \quad (3.26)$$

In der linearen Theorie werden die Randbedingungen in der Bezugsplatzierung formuliert, da diese nur geringfügig von der Momentanplatzierung abweicht

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} = \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \left( \delta_{lk} + \frac{\partial u_l}{\partial \xi_k} \right). \quad (3.27)$$

Aufgrund der Voraussetzung in Gleichung (3.24) dürfen die Ableitungen nach den materiellen Koordinaten  $\xi_k$  näherungsweise mit den Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten  $x_k$  vertauscht werden

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \delta_{lk} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (3.28)$$

Damit ergibt sich der Greensche Verzerrungstensor  $\underline{E}$  zu

$$\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{C} - \underline{1}) = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{1}) = \frac{1}{2}[(\underline{1} + \text{Grad } \bar{u})(\underline{1} + (\text{Grad } \bar{u})^T) - \underline{1}] \quad (3.29)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}[\text{Grad } \bar{u} + (\text{Grad } \bar{u})^T]}_{\underline{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\text{Grad } \bar{u})(\text{Grad } \bar{u})^T}_{\text{klein von 2. Ordnung in den Verschiebungsableitungen}}. \quad (3.30)$$

Der zweite Summand in Gleichung (3.30) kann in der linearen Theorie vernachlässigt werden. Der symmetrische infinitesimale Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  wird deshalb definiert durch

$$\underline{\varepsilon} := \frac{1}{2}[\text{Grad } \bar{u} + (\text{Grad } \bar{u})^T], \quad \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^T. \quad (3.31)$$

Die Hauptdiagonalelemente  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  und  $\varepsilon_{33}$  beschreiben die Dehnungen, d. h. die Längenänderungen von infinitesimalen Strecken, die in der Bezugsplatzierung parallel zu den Achsen des Koordinatensystems  $\bar{e}_1$ ,  $\bar{e}_2$  und  $\bar{e}_3$  ausgerichtet waren. Die anderen Tensorelemente  $\varepsilon_{ik}$  mit  $i \neq k$  beschreiben

halbe Winkeländerungen von rechten Winkeln, die in der Bezugplatzierung von Parallelen zur  $\bar{e}_i$ - und  $\bar{e}_k$ -Achse gebildet wurden.

In der linearen Theorie gelten

$$\underline{U} = \underline{1} + \underline{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \underline{U}^{-1} = \underline{1} - \underline{\varepsilon}. \quad (3.32)$$

Aus Gleichung (3.18) ergibt sich für den Drehtensor  $\underline{R}$  zu

$$\underline{R} = \underline{F}\underline{U}^{-1} = \left[ \underline{1} + (\text{Grad } \bar{u})^T \right] \left[ \underline{1} - \frac{1}{2} \left( \text{Grad } \bar{u} + (\text{Grad } \bar{u})^T \right) \right] \quad (3.33)$$

$$= \underline{1} - \frac{1}{2} \text{Grad } \bar{u} - \frac{1}{2} (\text{Grad } \bar{u})^T - \dots \quad (3.34)$$

$$\approx \underline{1} - \frac{1}{2} \underbrace{[\text{Grad } \bar{u} - (\text{Grad } \bar{u})^T]}_{\underline{\Omega}}. \quad (3.35)$$

Unter Vernachlässigung höherer Glieder wird aus dem Drehtensor  $\underline{R}$  der infinitesimale Drehtensor  $\underline{\Omega}$  abgeleitet

$$\underline{\Omega} := \frac{1}{2} [\text{Grad } \bar{u} - (\text{Grad } \bar{u})^T], \quad \underline{\Omega} = -\underline{\Omega}^T. \quad (3.36)$$

Daraus folgt

$$\text{Grad } \bar{u} = \underline{\varepsilon} + \underline{\Omega}. \quad (3.37)$$

Der Drehtensor beschreibt die starre Drehung der infinitesimalen Umgebung des Punktes, ist *schief-symmetrisch* und im Allgemeinen orts- und zeitabhängig  $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(\bar{\xi}, t)$ . Für den ortsunabhängigen Fall  $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(t)$  ist der Drehtensor *homogen* und beschreibt die globale Starrkörperbewegung des Kontinuums.

Dem Tensor  $\underline{\Omega}$  ist ein Drehvektor  $\bar{\omega}$  zugeordnet, dessen Richtung die Drehachse und dessen Betrag den Drehwinkel angibt

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{u} \quad \text{mit} \quad \text{rot } \bar{u} = \nabla \times \bar{u}, \quad (3.38)$$

dabei sind die einzelnen Komponenten

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial u_3 / \partial x_2 - \partial u_2 / \partial x_3 \\ \partial u_1 / \partial x_3 - \partial u_3 / \partial x_1 \\ \partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{23} \\ \Omega_{31} \\ \Omega_{12} \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Im Allgemeinen sind die Richtungen gesucht, in denen die Dehnungen extremal werden. Diese Hauptdehnungsrichtungen und Hauptdehnungen werden durch die Hauptachsentransformation des infinitesimalen Deformationstensors  $\underline{\varepsilon}$  erhalten. Im Abschnitt 3.3 wird dies sowohl für den zweidimensionalen als auch den dreidimensionalen Deformationstensor vorgestellt.

### 3.1.3 Spannungen

Auf einen materiellen Körper können räumlich verteilte Volumenkräfte  $\bar{F}$  und an seiner Oberfläche verteilte Flächenlasten wirken, wodurch im Inneren des Körpers Spannungen hervorgerufen werden [BETTEN 1993].

In einer gedachten Schnittfläche  $\Delta A$  durch die Materie übt die in Gedanken weggeschnittene Materie auf die verbliebene Materie eine Kraft  $\Delta \bar{F}$  aus, die sich als Spannungsvektor  $\bar{\sigma}$  aus einer Zugspannungskomponente (rechtwinklig zur Schnittfläche wirkend) und zwei Schubspannungskomponenten (in der Schnittfläche wirkend) zusammensetzt [LENZ 1995].

Der Spannungsvektor  $\bar{\sigma}$  hängt von der Lage  $\bar{x}$  des Flächenelements und dessen Orientierung  $\bar{n}$  (dem zugehörigen äußeren Normaleneinheitsvektor) ab

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{x}, \bar{n}) = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{F}}{\Delta A} = \frac{d\bar{F}}{dA}. \quad (3.40)$$

Für die Schnittebene  $x_1 = \text{const.}$  ergibt sich der Spannungsvektor  $\bar{\sigma}_1(\bar{x})$  zu

$$\bar{\sigma}_1(\bar{x}) = \sigma_{11}(\bar{x})\bar{e}_1 + \sigma_{12}(\bar{x})\bar{e}_2 + \sigma_{13}(\bar{x})\bar{e}_3. \quad (3.41)$$

mit den Normalspannungen  $\sigma_{11}$  und den Tangentialspannungen  $\sigma_{12}$  und  $\sigma_{13}$ . Analoges gilt für die Schnittebenen  $x_2 = \text{const.}$  und  $x_3 = \text{const.}$

$$\bar{\sigma}_2(\bar{x}) = \sigma_{21}(\bar{x})\bar{e}_1 + \sigma_{22}(\bar{x})\bar{e}_2 + \sigma_{23}(\bar{x})\bar{e}_3, \quad (3.42)$$

$$\bar{\sigma}_3(\bar{x}) = \sigma_{31}(\bar{x})\bar{e}_1 + \sigma_{32}(\bar{x})\bar{e}_2 + \sigma_{33}(\bar{x})\bar{e}_3. \quad (3.43)$$

Die  $\sigma_{ik}$  bilden die Komponenten des *Cauchyschen Spannungstensors*  $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(\bar{x}) = \sum_i \sum_k \sigma_{ik}(\bar{x})\bar{e}_i \otimes \bar{e}_k. \quad (3.44)$$

In Analogie zum infinitesimalen Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  beschreiben die Elemente  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  und  $\sigma_{33}$  der Hauptdiagonale die Normalspannungen, wobei  $\sigma_{ii} < 0$  Druck und  $\sigma_{ii} > 0$  Zug impliziert. Die Tensorelemente  $\sigma_{ik}$  mit  $i \neq k$  beschreiben die Tangentialspannungen (auch Schub- oder Scherspannung). Der Spannungstensor ist ebenfalls *symmetrisch*.

Eine weitere Gemeinsamkeit mit dem Deformationstensor ist, dass die Tensorkomponenten auf die Achsen des Koordinatensystems bezogen sind und eine Hauptachsentransformation durchzuführen ist, um die extremalen Werte für die Spannungen und deren korrespondierende Richtungen zu ermitteln.

Mit der Anordnung

$$\sigma_I = \lambda_I > \sigma_{II} = \lambda_{II} > \sigma_{III} = \lambda_{III}$$

kann gezeigt werden, dass in einem Körperpunkt  $\sigma_I$  die maximale und  $\sigma_{III}$  die minimale auftretende Normalspannung ist.

Aus dem Spannungstensor  $\underline{\sigma}$  können ebenso die Spannungsanteile in der Fläche (Schubspannung) sowie in Normalenrichtung (Normalspannung) abgeleitet werden<sup>1</sup>:

$$\text{Spannungsvektor:} \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_n + \bar{\sigma}_t = \underline{\sigma}\bar{n}, \quad (3.45)$$

$$\text{Normalspannungsvektor:} \quad \bar{\sigma}_n = (\bar{n} \circ \bar{\sigma})\bar{n} = (\bar{n} \circ \underline{\sigma}\bar{n})\bar{n}, \quad (3.46)$$

$$\text{Schubspannungsvektor:} \quad \bar{\sigma}_t = \bar{\tau} = \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_n = \underline{\sigma}\bar{n} - (\bar{n} \circ \underline{\sigma}\bar{n})\bar{n}. \quad (3.47)$$

In der *linearen Elastizitätstheorie* werden Materialgesetze eingeführt, um den Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang zu beschreiben. Der allgemeine Zusammenhang zwischen den Komponenten  $\sigma_{ik}$  des Spannungstensors und den Komponenten  $\varepsilon_{lm}$  des Deformationstensors wird hergestellt durch

$$\sigma_{ik} = \underline{\underline{C}}_{iklm}(\bar{x})\varepsilon_{lm} \quad (3.48)$$

<sup>1</sup>  $\bar{x} \circ \bar{y}$  bezeichnet das innere Produkt der beiden Vektoren  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$

mit  $C_{iklm}$ : Tensor der Steifigkeiten (Tensor 4. Stufe, 81 Komponenten).

Um den Steifigkeitstensor und anschließend den Spannungstensor berechnen zu können, sind also weitere Informationen über den deformierten Körper notwendig, bzw. es müssen modellhafte Annahmen getroffen werden.

Ein ideales Modell wäre der *homogene, linearelastische, isotrope Körper*, definiert durch das *Hookesche Materialgesetz*, da sich dadurch die Komponenten von  $\underline{\underline{C}}$  auf zwei reduzieren [LENZ 1995]

$$\underline{\sigma} = 2G \left\{ \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \underline{\underline{1}} \right\} \quad (3.49)$$

mit

$$e = \text{Spur}[\underline{\underline{\varepsilon}}] = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (3.50)$$

und den Stoffkonstanten Schubmodul (*modulus of rigidity*)  $G$  und Querkontraktionszahl (*Poisson's ratio*)  $\nu$ . Es gilt für  $\nu$

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (3.51)$$

Für  $\nu = 0$  ist das Material querkontraktionsfrei, ein Material mit  $\nu = \frac{1}{2}$  gilt als inkompressibel. Oftmals wird statt dieser Stoffkonstanten der Elastizitätsmodul (*Young's modulus*)  $E$  angegeben

$$E = 2G(1 + \nu), \quad (3.52)$$

wodurch sich der Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung vereinfacht zum *Hookschen Gesetz*

$$\underline{\sigma} = E \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (3.53)$$

mit  $E$  als Proportionalitätsfaktor. Für die Anwendung des Hookschen Gesetzes in der Geodynamik sind hypothetische Annahmen für den betrachteten materiellen Körper, in diesem Fall den gesamten Erdkörper bzw. einen Teil dessen, zu treffen.

Eine weitere Beschreibung der Beziehung Dehnung-Spannung ist möglich mit den *Laméschen Konstanten*  $\mu$  und  $\lambda$

$$\underline{\sigma} = 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} + \lambda e \underline{\underline{1}}. \quad (3.54)$$

Die Schubspannung  $G$  entspricht dabei der Laméschen Konstanten  $\mu$ . Die Querkontraktionszahl kann aus den Laméschen Konstanten berechnet werden [TURCOTTE U. SCHUBERT 1982] mit

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (3.55)$$

die wiederum für geophysikalische Anwendungen aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit seismischer Wellen abgeleitet werden können [GRANT U. WEST 1965].

### 3.1.4 Anmerkungen zur Verwendbarkeit der Kontinuumsmechanik in der Geodäsie

Mit den Methoden der Kontinuumsmechanik ist eine Vielzahl von Analysen der Verformung eines materiellen Körpers möglich. Aus einem gegebenen Verschiebungsvektorfeld lassen sich die von Helmholtz definierten drei Komponenten Translation, Rotation und Dehnung für jeden materiellen Punkt des Kontinuums ableiten.

Die Standardmethoden der geodätischen Deformationsanalyse basieren in der Regel auf der Analyse wiederholt gemessener Punkte, wodurch lediglich die Beschreibung der Randfläche des deformierten

Objektes, hier die Erdoberfläche, erfolgt [WITTENBURG 1999]. Dies führt im wesentlichen dazu, dass bei der Bestimmung des Verschiebungsgradiententensorfeldes Grad  $\bar{u}$  Annahmen zu treffen sind (siehe Abschnitt 3.2).

Alternativ kann die Strainanalyse auf die Ebene, also den 2-dimensionalen Fall, beschränkt werden [WELSCH 1982], [STRAUB 1996], [PETER 2001]. Durch differentialgeometrische Ansätze, bei denen Flächendeformationen untersucht werden, die aus den Flächenkrümmungen abgeleitet werden [ALTINER 1996], [VOOSOGHI 2000] und [DROBNIIEWSKI 2005], können die Berechnungen ebenfalls auf die Oberfläche reduziert werden. In weiteren Publikationen, wie z. B. [WITTENBURG 1999] und [WITTENBURG 2005], werden ebenfalls Verfahren vorgestellt, bei denen Beziehungen zwischen Krümmungen einer Fläche und resultierenden Scherdehnungen hergestellt werden.

Die Berechnung von Spannungen mit Gleichung (3.53), basierend auf dem infinitesimalen Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$ , führt im Allgemeinen zu keinem Informationsgewinn. Es wird lediglich eine Faktorisierung des Deformationstensors erreicht. Die Anwendung von Gleichung (3.49) erscheint zweckmäßiger, setzt jedoch ebenfalls voraus, dass die Materialeigenschaften des deformierten Körpers bekannt bzw. bestimmbar sind.

### 3.2 Verschiebungsgradiententensorfeld

In Abschnitt 2.3 wurde das Verfahren der Multilevel B-Spline Approximation vorgestellt, mit dem die Beschreibung eines Kontinuums möglich ist. Auf Basis dieser Beschreibungen erfolgt die Generierung des Verschiebungsgradiententensorfeldes.

Der Ausgangspunkt für die Berechnung von Deformationsmaßen ist das Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u}$  gemäß Gleichung (3.8)

$$\bar{u} = \bar{u}(\bar{\xi}, t) = \bar{u}(X, Y, t) = \begin{bmatrix} u_{Nord}(X, Y, t) \\ u_{Ost}(X, Y, t) \\ u_{Hoch}(X, Y, t) \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit des Ortes  $(X, Y)^2$  und der Zeit  $t$ .

In dieser Arbeit sind lineare Bewegungen von Punkten an der Erdoberfläche zu analysieren, das bedeutet, es wird von einer linearen Zeitfunktion ausgegangen, denn beim Kontinuumsübergang wird ein kontinuierliches, lineares Geschwindigkeitsfeld generiert. Daraus folgt, dass sich die Koordinaten eines Punktes zum Zeitpunkt  $t > t_0$  berechnen mit

$$\bar{x} = \bar{\xi} + \bar{u} = \bar{\xi} + \bar{v}(X, Y) \cdot (t - t_0). \quad (3.56)$$

Das Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u}(X, Y, t)$  ergibt sich damit zu

$$\bar{u} = \bar{v}(X, Y) \cdot (t - t_0). \quad (3.57)$$

mit der Ortsfunktion  $\bar{v}(X, Y)$  und der linearen Zeitfunktion  $(t - t_0)$ . Die Ortsfunktion ist nur abhängig von den Lagekoordinaten  $(X, Y)$  des Punktes. Eine Interpolation bzw. Approximation des Geschwindigkeitsfeldes in Abhängigkeit von  $(X, Y, Z)$  ist wenig sinnvoll, da die berechneten Geschwindigkeiten unabhängig von der Topographie der untersuchten Region sind.

Die (Orts-)Funktion zur Berechnung von  $\bar{v}$  entspricht Gleichung (2.25) und lautet für jede Komponente von  $\bar{v}$

$$v(X, Y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 N_k^3(s) N_l^3(r) \phi_{(i+k)(j+l)}$$

---

<sup>2</sup>  $(X, Y)$  symbolisieren hier die Lagekoordinaten eines Punktes, beispielsweise *Nord*- und *Ost*-Koordinaten in UTM oder *Länge*  $\lambda$  und *Breite*  $\varphi$  in ellipsoidischen oder geografischen Koordinaten. Die *Z*-Komponente entspräche in diesen Fällen der ellipsoidischen Höhe.

mit

$$\begin{aligned} i &= [x] - 1, \\ j &= [y] - 1, \\ s &= x - [x], \\ r &= y - [y], \end{aligned}$$

wobei die Gitterkoordinaten  $(x, y)$  durch Transformation aus den „realen“ Koordinaten  $(X, Y)$  gemäß Gleichung (2.26) und (2.27) erhalten werden

$$\begin{aligned} x &= \frac{M_x - 3}{X_{max} - X_{min}} \cdot X - (M_x - 3) \frac{X_{min}}{X_{max} - X_{min}} \quad \text{und} \\ y &= \frac{M_y - 3}{Y_{max} - Y_{min}} \cdot Y - (M_y - 3) \frac{Y_{min}}{Y_{max} - Y_{min}}. \end{aligned}$$

Aus dem nun vorliegenden Verschiebungsvektorfeld  $\bar{u}(X, Y, t)$  in Abhängigkeit des Ortes und der Zeit kann das Verschiebungsgradiententensorfeld entsprechend Gleichung (3.10) mit

$$\text{Grad } \bar{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{Nord}}{\partial X} & \frac{\partial u_{Ost}}{\partial X} & \frac{\partial u_{Hoch}}{\partial X} \\ \frac{\partial u_{Nord}}{\partial Y} & \frac{\partial u_{Ost}}{\partial Y} & \frac{\partial u_{Hoch}}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_{Nord}}{\partial Z} & \frac{\partial u_{Ost}}{\partial Z} & \frac{\partial u_{Hoch}}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

bestimmt werden. Die räumlichen Ableitungen des Verschiebungsvektorfeldes  $\bar{u}$  nach den Lagekoordinaten  $X$  und  $Y$  ergeben sich aus Gleichung (3.57)

$$\frac{\partial u_i}{\partial X} = (t - t_0) \frac{\partial v_i}{\partial X}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial Y} = (t - t_0) \frac{\partial v_i}{\partial Y}. \quad (3.60)$$

Die Richtungsableitungen der Ortsfunktion lauten

$$\frac{\partial v}{\partial X} = \frac{M_x - 3}{X_{max} - X_{min}} \cdot \sum_{k=0}^2 \sum_{l=0}^3 N_k^2(s) N_l^3(r) (\phi_{(i+k)(j+l)} - \phi_{(i+k-1)(j+l)}), \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial v}{\partial Y} = \frac{M_y - 3}{Y_{max} - Y_{min}} \cdot \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^2 N_k^3(s) N_l^2(r) (\phi_{(i+k)(j+l)} - \phi_{(i+k)(j+l-1)}), \quad (3.62)$$

wobei mit  $N^2$  die quadratischen B-Spline-Funktionen bezeichnet werden, die nach [YAMAGUCHI 1988] definiert sind als

$$\begin{aligned} N_0^2(t) &= (1 - t)^2/2, \\ N_1^2(t) &= -t^2 + t + 1/2, \\ N_2^2(t) &= t^2/2. \end{aligned}$$

In Abbildung 3.1 ist die Berechnung der Richtungsableitungen für den Punkt  $p$  aus den umgebenden 16 Gitterpunkten visualisiert. Gemäß der Gleichungen (3.61) und (3.62) werden aus den Kontrollpunkten  $\phi$  Differenzen gebildet, die dann mit den quadratischen B-Spline-Funktionen multipliziert werden.

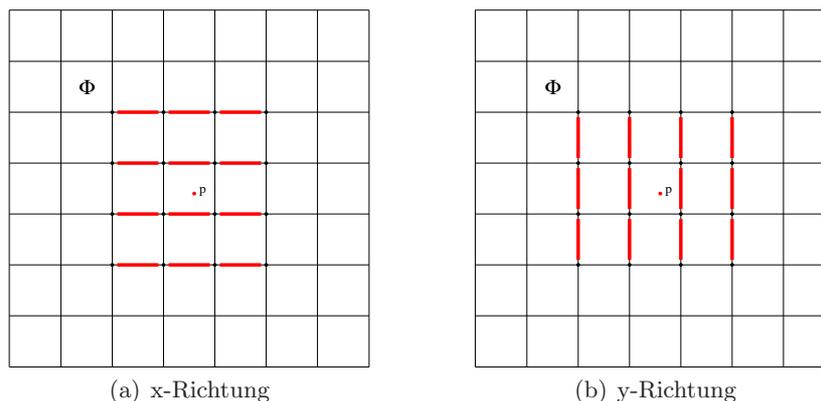


Abb. 3.1: Richtungsableitungen in x- und y-Richtung; aus den Kontrollpunkten abgeleitete Differenzen (rot) fließen in die Berechnung des Punktes  $p$  ein

In Abschnitt 3.1.4 wurde bereits ausgeführt, dass geodätische Standard-Messverfahren keine Möglichkeit zur Bestimmung des Vertikalgradienten  $\frac{\partial u_i}{\partial Z}$  ermöglichen und dieser somit als Unbekannte verbleibt [WITTENBURG 2005].

Die zu analysierenden geodätischen Netze haben im Vergleich zu ihrer horizontalen eine geringe vertikale Ausdehnung, weshalb eine Berechnung vertikaler Gradienten wenig sinnvoll ist [KERSTING 1992].

Da nur Beobachtungen an der Oberfläche vorliegen, somit keine vergleichbare Quantifizierungen des Bewegungsverhaltens im Inneren des (Erd-)Körpers verfügbar sind, wird die Annahme getroffen, dass Punkte im Inneren mit den gleichen Lagekoordinaten  $(X, Y)$  wie der Oberflächenpunkt  $P(X, Y)$  die selbe Bewegung wie  $P$  vollführen. Damit ergibt sich für den vertikalen Gradienten

$$\frac{\partial u_i}{\partial Z} = 0. \quad (3.63)$$

### 3.3 Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen

Die Hauptdehnungen (Eigenwerte) und Hauptdehnungsrichtungen (Eigenvektoren) des Deformationstensors  $\underline{\varepsilon}$  werden durch Hauptachsentransformation erhalten. Die Hauptdehnungsrichtungen eines jeden Punktes entsprechen den Tangenten der Hauptdehnungstrajektorien [LENZ 1995].

In nahezu allen geodätischen Veröffentlichungen zur Strain- bzw. Deformationsanalyse werden lediglich die Lagekomponenten untersucht. Der Grund dafür ist das in den vorangegangenen Abschnitten diskutierte Manko der geodätischen Messverfahren, dass kein vertikaler Gradient ableitbar ist. Der nach Gleichung 3.31 berechnete infinitesimale Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  wird reduziert auf

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}. \quad (3.64)$$

In den folgenden Abschnitten 3.3.1 bis 3.3.3 werden die Berechnungen der Eigenwerte und Eigenvektoren im Allgemeinen und explizit für 2D-Tensoren und 3D-Tensoren vorgestellt.

#### 3.3.1 Das Eigenwertproblem

Dieser Abschnitt dient nur zur kurzen Einführung und allgemeinen Formulierung des Eigenwertproblems. Für weitere Studien und explizite Herleitungen und Erklärungen der Lösungsverfahren sei auf die mathematische Fachliteratur verwiesen, wie z. B. [BRONSTEIN U. SEMENDJAJEW 1996],

[BECKER ET AL. 1985] oder [ENGELN-MÜLLGES ET AL. 2005]. Desweiteren finden sich umfangreiche Aufbereitungen des Themas in [ZURMÜHL U. FALK 1984] und [CASPARY U. WICHMANN 1994].

Für eine gegebene  $(n, n)$ -Matrix  $\underline{A}$  ist der Eigenwert  $\lambda$  gesucht, sodass mit einem Vektor  $\bar{x} \neq \bar{0}$

$$\underline{A}\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (3.65)$$

gilt.  $\bar{x}$  heisst der zum Eigenwert  $\lambda$  gehörende Eigenvektor. Mit der  $(n, n)$ -Einheitsmatrix  $\underline{1}$  kann Gleichung (3.65) umgeschrieben werden zu

$$\underline{A}\bar{x} - \lambda\bar{x} = (\underline{A} - \lambda\underline{1})\bar{x} = \bar{0}. \quad (3.66)$$

Das homogene lineare Gleichungssystem (3.66) besitzt genau dann eine nichttriviale Lösung  $\bar{x} \neq \bar{0}$ , wenn

$$P(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda\underline{1}) = 0 \quad (3.67)$$

ist. Gleichung (3.67) wird bezeichnet als *charakteristische Gleichung*.  $P(\lambda)$  ist ein Polynom in  $\lambda$  vom Grad  $n$  und heißt entsprechend *charakteristisches Polynom*. Die Eigenwerte  $\lambda_i$ ,  $i = 1(1)n$  der Matrix  $\underline{A}$  sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Jedem Eigenwert  $\lambda_i$  kann ein Eigenvektor  $\bar{x}_i$  zugeordnet, so dass gilt

$$\underline{A}\bar{x}_i = \lambda_i\bar{x}_i \quad \text{bzw.} \quad (\underline{A} - \lambda_i\underline{1})\bar{x}_i = \bar{0}. \quad (3.68)$$

Für die Lösung des Eigenwertproblems, d. h. die Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix, werden zwei Klassen von Lösungsverfahren unterschieden [ENGELN-MÜLLGES ET AL. 2005]:

- i. *Iterative Methoden*, bei denen die Aufstellung des charakteristischen Polynoms umgangen und die Eigenwerte und Eigenvektoren schrittweise angenähert werden, z. B. QR-Verfahren oder Jacobi-Verfahren.
- ii. *Direkte Methoden*, bei denen das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  aufgestellt, die Eigenwerte als Nullstellen von  $P(\lambda)$  berechnet und anschließend die Eigenvektoren als Lösungen des Gleichungssystems (3.68) ermittelt werden.

Die in den meisten technischen und physikalischen Anwendungen auftretenden Matrizen sind überwiegend diagonalähnlich oder sogar reellsymmetrisch und diagonalkongruent [ZURMÜHL U. FALK 1984]. Eine symmetrische  $(n, n)$ -Matrix  $\underline{A}$  besitzt stets  $n$  reelle Eigenwerte  $\lambda_i$  und  $n$  orthogonale Eigenvektoren  $\bar{x}_i$  [CASPARY U. WICHMANN 1994].

Aufgrund des niedrigen Rangs (2 bzw. 3) des Tensors  $\underline{\varepsilon}$ , somit eines niedrigen Grades  $n$  des charakteristischen Polynoms, und der Symmetrie werden im Hinblick auf eine zu implementierende Varianzfortpflanzung (Kap. 4.3.3.2 und 4.3.3.3) im Rahmen dieser Arbeit direkte Methoden zur Eigenwert- und Eigenvektorberechnung angewandt.

### 3.3.2 Hauptachsentransformation eines symmetrischen $(3, 3)$ -Tensors

Für die Hauptachsentransformation von  $\underline{\varepsilon}$  mit

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{23} &= \varepsilon_{32} \end{aligned}$$

führt die charakteristische Gleichung auf ein Polynom 3. Grades.

Gleichungen dritten Grades können mit Hilfe der *Cardanischen Formeln* gelöst werden. Benannt sind diese Formeln nach Girolamo Cardano, der diese in seinem 1545 erschienenen Buch *Ars magna de Regulis Algebraicis* angab, in welchem er Methoden zur expliziten Lösung von Gleichungen dritten und vierten Grades vorstellte [CARDANO 1993].

Das charakteristische Polynom

$$a \lambda^3 + b \lambda^2 + c \lambda + d = 0 \quad (3.69)$$

mit

$$a = -1, \quad (3.70)$$

$$b = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (3.71)$$

$$c = -\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{12}^2, \quad (3.72)$$

$$d = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{13}^2\varepsilon_{22} - \varepsilon_{23}^2\varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2\varepsilon_{33} \quad (3.73)$$

hat drei reelle Nullstellen. Durch die Substitution

$$y = \lambda + \frac{b}{3a} \quad (3.74)$$

kann Gleichung (3.69) in die Form

$$y^3 + p \cdot y + q = 0 \quad (3.75)$$

gebracht werden, wobei

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2} = \frac{-3c - b^2}{3} \quad (3.76)$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = -\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} - d \quad (3.77)$$

gilt. Es ergeben sich die drei Lösungen

$$y_1 = \sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \right], \quad (3.78)$$

$$y_2 = -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{\pi}{3} \right], \quad (3.79)$$

$$y_3 = -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) - \frac{\pi}{3} \right]. \quad (3.80)$$

Somit werden die Eigenwerte durch die Rücksubstitution von Gleichung (3.74) erhalten

$$\lambda_I = \sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \right] + \frac{b}{3}, \quad (3.81)$$

$$\lambda_{II} = -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{\pi}{3} \right] + \frac{b}{3}, \quad (3.82)$$

$$\lambda_{III} = -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) - \frac{\pi}{3} \right] + \frac{b}{3}. \quad (3.83)$$

Die Eigenvektoren  $\bar{x}_i$  werden berechnet, indem die Eigenwerte  $\lambda_i$  in das homogene Gleichungssystem (3.68) eingesetzt werden

$$(\varepsilon_{11} - \lambda) \cdot x_1 + \varepsilon_{11} \cdot x_2 + \varepsilon_{13} \cdot x_3 = 0, \quad (3.84)$$

$$\varepsilon_{12} \cdot x_1 + (\varepsilon_{22} - \lambda) \cdot x_2 + \varepsilon_{23} \cdot x_3 = 0, \quad (3.85)$$

$$\varepsilon_{13} \cdot x_1 + \varepsilon_{23} \cdot x_2 + (\varepsilon_{33} - \lambda) \cdot x_3 = 0. \quad (3.86)$$

Als Lösungsvektor des Gleichungssystems mit der Länge eins ergibt sich

$$\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + C^2 + (A + BC)^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ C \\ A + BC \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

mit

$$A = \frac{-\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda} \quad B = \frac{-\varepsilon_{23}}{\varepsilon_{33} - \lambda} \quad C = \frac{-\varepsilon_{12} - \varepsilon_{23} \cdot A}{\varepsilon_{22} - \lambda + \varepsilon_{23} \cdot B} \quad (3.88)$$

Die Möglichkeit in den Gleichungen (3.88), dass die Nenner null werden, ist nicht detailliert untersucht worden. Aufgrund der Festlegung (3.63) ist  $\varepsilon_{33} = 0$ , dadurch gilt für die Eigenwerte einer regulären Matrix  $\lambda \neq 0$ . Der Fall einer Division durch null würde somit nur für singuläre Matrizen auftreten. In sämtlichen Testrechnungen bzw. Anwendungen (Kapitel 5) ist jedoch kein derartiger Fall vorgekommen.

### 3.3.3 Hauptachsentransformation eines symmetrischen (2, 2) -Tensors

Bei der Hauptachsentransformation für den reduzierten infinitesimalen Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$  gemäß Gleichung 3.64 ist die zu lösende charakteristische Gleichung ein quadratisches Polynom

$$\lambda^2 + p \cdot \lambda + q = 0 \quad (3.89)$$

mit

$$p = -\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}, \quad (3.90)$$

$$q = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2. \quad (3.91)$$

Durch die quadratische Lösungsformel kann die Lösung sofort erhalten werden

$$\lambda_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(-\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2}{4} - \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2}. \quad (3.92)$$

Eigenvektoren werden nicht berechnet. Da die Eigenwerte senkrecht zueinander angeordnet sind, ist lediglich das Azimut des größeren Eigenwertes  $\lambda_1$  mit

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2 \cdot \varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} \right) \quad (3.93)$$

zu berechnen [WELSCH 1989], [TURCOTTE U. SCHUBERT 1982], [KERSTING 1992], um die Eigen- und somit Hauptdehnungsrichtungen festzulegen.

## 3.4 Scherdehnung

Allgemein gilt mit (3.37) für eine Verschiebungsänderung  $d\bar{u}$  im Abstand  $d\bar{r}$

$$d\bar{u} = (\text{Grad } \bar{u})d\bar{r} = (\underline{\varepsilon} + \underline{\Omega})d\bar{r}. \quad (3.94)$$

Die allein durch den Deformationstensor hervorgerufene infinitesimale Verschiebung ist somit durch

$$d\bar{u} = \underline{\varepsilon}d\bar{r} \quad (3.95)$$

gegeben. Die Division durch  $|d\bar{r}|$  führt auf den Deformationsvektor  $\bar{d}$

$$\frac{d\bar{u}}{|d\bar{r}|} = \underline{\varepsilon} \frac{d\bar{r}}{|d\bar{r}|} = \bar{d}. \quad (3.96)$$

In Analogie zum Schubspannungvektor in Gleichung (3.47) kann der Scherdehnungsvektor berechnet werden. Dieser liegt in der Ebene, die durch den Rotationsvektor  $\bar{\omega}$  definiert wird. Somit ergibt sich mit

$$\bar{e} = \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} \quad (3.97)$$

der Scherdehnungsvektor  $\bar{s}$

$$\bar{s} = \underline{\varepsilon} \bar{e} - (\bar{e} \circ \underline{\varepsilon} \bar{e}) \bar{e}. \quad (3.98)$$

Analog zu den Hauptdehnungen vereinfacht sich die Berechnung der Scherdehnung für den zwei-dimensionalen Deformationstensor. Die maximale Scherdehnung  $\gamma$  des Tensors kann aus den zwei Hauptdehnungen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  berechnet werden [TURCOTTE U. SCHUBERT 1982]

$$\gamma = \frac{1}{2} (\lambda_1 - \lambda_2). \quad (3.99)$$

Für das Azimut

$$\vartheta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2\varepsilon_{12}} \right) \quad (3.100)$$

der maximalen Scherdehnung  $\gamma$  gilt, dass  $\tan 2\theta$  aus Gleichung (3.93) und  $\tan 2\vartheta$  negative Reziproke sind.

Die Scherdehnung  $\gamma$  bezeichnet die Änderung eines ursprünglich rechten Winkels, dessen Schenkel in einem Winkel von  $\frac{\pi}{4}$  zu den Hauptachsen lagen, und beschreibt die größte Winkeländerung, die in diesem Punkt auftreten kann [WELSCH 1989]. Die maximale Scherdehnung tritt in vier Richtungen, jeweils versetzt um  $\frac{\pi}{2}$ , auf [SCHNEIDER 1982].

### 3.5 Zeitliche Änderung der Deformationen

In nahezu allen veröffentlichten Analysen von Deformationen tektonischer Einheiten werden nicht die eigentlichen Verschiebungen und Verformungen untersucht, sondern deren zeitliche Änderung (*strain rate*). Zu diesem Zweck sind die zu analysierenden Größen nach der Zeit  $t$  zu differenzieren.

Die Voraussetzung einer linearen Zeitfunktion zur Berechnung des Verschiebungsvektorfeldes  $\bar{u}(X, Y, t)$  in Gleichung (3.57) vereinfacht die Differentiation auf

$$\dot{\bar{u}} = \frac{\partial}{\partial t} [\bar{v}(X, Y)(t - t_0)] = \bar{v}(X, Y). \quad (3.101)$$

In gleicher Weise verkürzt sich die Berechnung der Komponenten des Verschiebungsgradiententensorfeldes Grad  $\bar{u}$  in Gleichung (3.59) und (3.60) zu

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial X} = \frac{\partial v_i}{\partial X}, \quad (3.102)$$

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial Y} = \frac{\partial v_i}{\partial Y}, \quad (3.103)$$

was dazu führt, dass bei der Bestimmung des Deformationstensors mit Gleichung (3.31) oder des Rotationstensors mit Gleichung (3.36) sofort die zeitlichen Änderungen dieser Größen vorliegen.

## 4. Varianzfortpflanzung

Zu den wesentlichen Aufgaben in der Geodäsie gehört neben der Bestimmung von Form und Größe jedweder Objekte, beispielsweise Bauwerke, Grundstücke oder das Geoid, auch die Beurteilung der Messgrößen und berechneten Parameter hinsichtlich ihrer Genauigkeit. Dabei wird sich der Methoden der mathematischen Statistik bedient. Im einführenden Abschnitt 4.1 sollen die grundlegenden Begriffe und Methoden zur Varianzfortpflanzung wiederholt werden, um in den anschließenden Abschnitten 4.2 und 4.3 deren Anwendung auf die Multilevel B-Spline Approximation und die Strainanalyse zu erarbeiten.

### 4.1 Grundlagen

Die mathematische Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie beschreibt die Eigenschaften und das Verhalten von Zufallsgrößen bzw. stochastischen Größen. Deren Zahlenwerte sind mehr oder weniger dem Zufall untergeordnet, d. h. es können bei Wiederholungen des Realisierungsprozesses verschiedene Ergebnisse erzielt werden. Geodätische Messwerte jeder Art unterliegen naturgemäß diesen Gesetzmäßigkeiten, ebenso sämtliche daraus abgeleitete Parameter und Funktionen, z. B. Koordinaten, Geschwindigkeiten oder Deformationen. Geeignete statistische Kenngrößen ermöglichen eine Interpretation der Zufallsgrößen hinsichtlich ihrer Genauigkeiten.

Da sich die Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung sehr stark an der mathematischen Statistik orientiert, sei für ausführlichere Einführungen und Erklärungen an dieser Stelle auf die gängige Fachliteratur zur Ausgleichsrechnung, wie [CAROSIO 1999] und [NIEMEIER 2002], verwiesen, des weiteren auf [KOCH 1980] und [MEIER U. KELLER 1990].

#### 4.1.1 Varianz und Kovarianz

Beobachtungen, Parameter und Funktionen dieser gelten als statistisch verteilte Größen. Der Erwartungswert einer derartigen Zufallsvariablen  $X$  ist als

$$\mu_x = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x) dx \quad (4.1)$$

mit der Verteilungsfunktion  $\varphi(x)$  (oftmals auch als Dichtefunktion bezeichnet) definiert. Ferner bezeichnet

$$\sigma_0^2 = D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 \varphi(x) dx \quad (4.2)$$

$$= E((x - \mu_x)^2) = E(x^2) - \mu_x^2 \quad (4.3)$$

die Varianz von  $X$ .

Hiervon ausgehend kann für eine  $n$ -dimensionale Zufallsvariable  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  deren Kovarianzmatrix definiert werden als

$$\mathbf{Q}_{xx} = E \left\{ [\mathbf{x} - E(\mathbf{x})] [\mathbf{x} - E(\mathbf{x})]^T \right\} \quad (4.4)$$

$$= E(\mathbf{x}\mathbf{x}^T) - E(\mathbf{x})E(\mathbf{x})^T. \quad (4.5)$$

Die Kovarianz zweier Komponenten  $x_a$  und  $x_b$  von  $\mathbf{x}$  ergibt sich demnach explizit als

$$\sigma_{ab} = \text{Cov}(x_a, x_b) = E \{ [x_a - E(x_a)] [x_b - E(x_b)] \}. \quad (4.6)$$

Die Korrelation  $\rho_{ab}$  zwischen  $x_a$  und  $x_b$  wird durch die Normierung der Kovarianz erhalten durch

$$\rho_{ab} = \frac{\text{Cov}(x_a, x_b)}{\sqrt{D^2(x_a)}\sqrt{D^2(x_b)}} = \frac{\text{Cov}(x_a, x_b)}{\sigma_a\sigma_b}, \quad -1 \leq \rho_{ab} \leq 1. \quad (4.7)$$

Die Zufallsvariablen  $x_a$  und  $x_b$  sind unabhängig, wenn  $\rho_{ab} = \text{Cov}(x_a, x_b) = 0$ . Die Kovarianzmatrix für eine  $n$ -dimensionale Zufallsvariable hat somit die Gestalt

$$\mathbf{Q}_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

### 4.1.2 Allgemeine Form des Varianzfortpflanzungsgesetzes

Der  $(m, 1)$ -Vektor  $\mathbf{Y}$  enthält die  $m$  linearen Funktionen  $Y_i$  des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$ , wobei

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (4.9)$$

gilt. Die Matrix  $\mathbf{A}$  und der Vektor  $\mathbf{b}$  enthalten nur nichtstochastische Größen. Nach Gleichung (4.4) gilt für die Varianz für  $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Q}_{yy} = E \left\{ [\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})] [\mathbf{Y} - E(\mathbf{Y})]^T \right\}. \quad (4.10)$$

Mit Gleichung (4.9) folgt nun

$$\mathbf{Q}_{yy} = E \left\{ [\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} - E(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b})] [\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b} - E(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b})]^T \right\}. \quad (4.11)$$

Die nichtstochastische Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  kann vor den Operator geschrieben und  $\mathbf{b}$  eliminiert werden

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{A} E \left\{ [\mathbf{X} - E(\mathbf{X})] [\mathbf{X} - E(\mathbf{X})]^T \right\} \mathbf{A}^T. \quad (4.12)$$

Somit ergibt sich die endgültige Form

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T. \quad (4.13)$$

### 4.1.3 Varianzfortpflanzungsgesetz für nichtlineare Funktionen

Ist der funktionale Zusammenhang zwischen den  $n$  Zufallsvariablen  $X_i$  und  $Y$  durch die nichtlineare Funktion

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (4.14)$$

gegeben, kann das allgemeine Varianzfortpflanzungsgesetz (VFG) nach Gleichung (4.13) nicht angewandt werden, da es auf einen linearen Zusammenhang zwischen den Zufallsvariablen basiert.

Die Linearisierung der nichtlinearen Funktion erfolgt durch eine *Taylor*-Reihenentwicklung

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^0) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}^0}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0) + o^2(\mathbf{X} - \mathbf{X}^0). \quad (4.15)$$

Auf die Glieder höherer Ordnung  $o^2$  wird verzichtet. Mit  $\mathbf{X}^0$  sind die genügend guten Näherungswerte für  $\mathbf{X}$  bezeichnet.  $\mathbf{X}$  kann somit zerlegt werden in seinen Näherungswert  $\mathbf{X}_0$  und einen Zuschlag  $\Delta\mathbf{X}$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad \Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0. \quad (4.16)$$

Somit kann die Reihenentwicklung explizit geschrieben werden als

$$f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^0) + \left( \frac{\partial f}{\partial X_1} \right)_{\mathbf{X}^0} \Delta X_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial X_2} \right)_{\mathbf{X}^0} \Delta X_2 + \cdots + \left( \frac{\partial f}{\partial X_n} \right)_{\mathbf{X}^0} \Delta X_n. \quad (4.17)$$

Für  $m$  derartige Funktionen  $f_1(\mathbf{X}), f_2(\mathbf{X}), \dots, f_m(\mathbf{X})$  müssen  $m$  Taylor-Entwicklungen durchgeführt werden. Nach den Linearisierungen werden die partiellen Ableitungen in der *Jacobi*-Matrix zusammengefasst

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_1} \right)_{\mathbf{X}^0} & \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_2} \right)_{\mathbf{X}^0} & \cdots & \left( \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \right)_{\mathbf{X}^0} \\ \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_1} \right)_{\mathbf{X}^0} & \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_2} \right)_{\mathbf{X}^0} & \cdots & \left( \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \right)_{\mathbf{X}^0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\partial f_m}{\partial X_1} \right)_{\mathbf{X}^0} & \left( \frac{\partial f_m}{\partial X_2} \right)_{\mathbf{X}^0} & \cdots & \left( \frac{\partial f_m}{\partial X_n} \right)_{\mathbf{X}^0} \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Für die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{xx}$  von  $\mathbf{X}$  gilt

$$\mathbf{Q}_{xx} = \mathbf{Q}_{\Delta x \Delta x}. \quad (4.19)$$

Da die Näherungswerte  $\mathbf{X}^0$  als nichtstochastische Größen gelten, sind die Kovarianzmatrizen für  $\mathbf{X}$  und  $\Delta\mathbf{X}$  identisch. Unter Berücksichtigung von Gleichung (4.18) und (4.19) kann nun das allgemeine Varianzfortpflanzungsgesetz angewendet werden und es ergibt sich

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\Delta x \Delta x} \mathbf{A}^T. \quad (4.20)$$

## 4.2 Varianzfortpflanzung bei der Multilevel B-Spline Approximation

Im Kapitel 2.3 ist die Multilevel B-Spline Approximation ausführlich vorgestellt worden. Auf diese Algorithmen ist nun das Varianzfortpflanzungsgesetz anzuwenden. Abbildung 2.12 in Abschnitt 2.3.2 veranschaulicht den rekursiven Prozess des Approximationsverfahrens. Aus dem Ablaufschema des Modifizierten MBA-Algorithmus ist zu erkennen, dass insgesamt vier Operationen iterativ durchgeführt werden:

- i. Berechnung eines Gitters  $\Phi$  aus den Datenpunkten  $P$ ,
- ii. Berechnung der neuen Funktionswerte  $P = P - F(\Phi)$  für die Datenpunkte,
- iii. Addition der Gitter  $\Psi = \Psi' + \Phi$ ,
- iv. Verfeinerung von  $\Psi$  zu  $\Psi'$ .

Für jede Operation muss die nicht-stochastische Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  generiert werden, um die Gleichung (4.13) zu erfüllen. Ebenso muss die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{xx}$  erstellt werden. Im Folgenden werden einige Konventionen zur Dimensionierung der Matrizen sowie für jede einzelne Operation des MBA-Algorithmus die notwendigen Schritte der Varianzfortpflanzung erarbeitet.

### 4.2.1 Größe der Funktionalmatrizen und Kovarianzmatrizen

Bei der Varianzfortpflanzung muss Gleichung (4.9) erfüllt sein, bzw.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X}. \quad (4.21)$$

Die Größe der Vektoren hängt von der Anzahl  $N_d$  bzw.  $N_w$  der Punkte und Dimension  $d$  im Definitionsbereich und  $w$  im Wertebereich ab

$$\mathbf{Y}_{(w \cdot N_w, 1)} = \mathbf{A}_{([w \cdot N_w], [d \cdot N_d])} \mathbf{X}_{(d \cdot N_d, 1)}. \quad (4.22)$$

Für die Vektoren  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{Y}$  gilt

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}.$$

Aus Gleichung (4.22) kann abgeleitet werden, dass  $\mathbf{Q}_{xx}$  eine  $([d \cdot N_d], [d \cdot N_d])$ -Matrix und  $\mathbf{Q}_{yy}$  eine  $([w \cdot N_w], [w \cdot N_w])$ -Matrix ist.

### 4.2.2 VFG für die Generierung eines Gitters $\Phi$

Die zu generierende Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  gibt den Zusammenhang zwischen den Komponenten der Datenpunkte und der berechneten Gitterpunkte wieder. Die Anzahl der Spalten von  $\mathbf{A}$  ist konstant, da sie von der Anzahl und Dimension der Datenpunkte abhängt, wohingegen sich die Zeilenanzahl mit jedem Verdichtungsschritt erhöht.

Ein Gitterpunkt  $\phi_{kl}$  wird gemäß der Gleichungen (2.32) und (2.39) in Abhängigkeit von sämtlichen Datenpunkten in der  $4 \times 4$ -Umgebung berechnet. Gleichung (4.22) erfordert eine eindimensionale Indizierung sowohl der Daten- als auch der Gitterpunkte, diese ist realisiert durch

$$\phi'_r = \phi'_{k+M_x l} = \phi_{kl} \quad \text{mit} \quad M_x = m + 3. \quad (4.23)$$

Die Variable  $M_x$  gibt die Anzahl der Gitterpunkte in x-Richtung an, siehe Abbildung 2.7 und Gleichung (2.26). Die Werte  $z_c$  aller Datenpunkte  $P_{ij}$  nach Gleichung (2.31) sind im Vektor  $\mathbf{p}$  angeordnet.

Somit ergibt sich zwischen einem Gitterpunkt  $\phi'_r$  und einem Datenpunkt  $p_q$  der funktionale Zusammenhang

$$A_{rq} = \frac{\omega_c^3}{\sum_{a=0}^3 \sum_{b=0}^3 \omega_{ab}^2} \quad (4.24)$$

in Abhängigkeit von den Koordinaten  $(X, Y)$  von  $p_q$  mit den Gleichungen (2.26), (2.27) und (2.33) bis (2.37).

Für das erste Gitter mit  $m = n = 1$  bzw.  $M_x = M_y = 4$  ist  $\mathbf{A}$  voll besetzt, da alle Datenpunkte im Intervall  $[0, 1]$  liegen und somit jeden Gitterpunkt beeinflussen. Bei allen anderen Gittern mit  $m > 1$  und  $n > 1$  ist dies nicht mehr der Fall und die Matrix ist nicht mehr vollständig besetzt. In Abbildung 4.1 ist dies für 37 Datenpunkte und die drei Verdichtungsstufen  $M_x = M_y = 4$ ,  $M_x = M_y = 5$  und  $M_x = M_y = 7$  veranschaulicht. Es ist deutlich zu erkennen, dass Kontrollpunkte in der Mitte des Gitters von viel mehr Datenpunkten abhängen, als die Punkte am Rand. Hier ist aber lediglich der Fall  $d = w = 1$  illustriert, d. h. die Dimensionen  $d$  und  $w$  im Definitions- und Wertebereich sind eins. Bei der Anwendung der Multilevel B-Spline Approximation zur Generierung von Geschwindigkeitsfeldern in

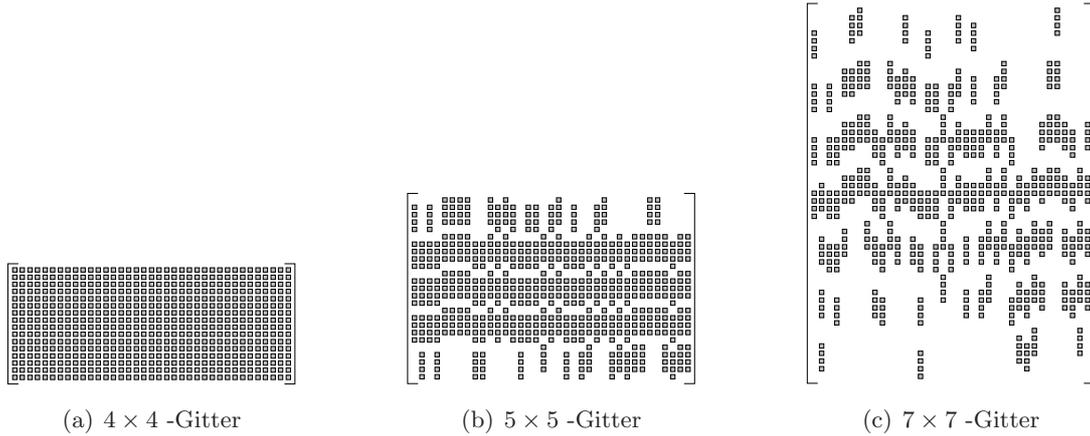


Abb. 4.1: Besetzung der Funktionalmatrix bei der Generierung unterschiedlicher Gitter

Kapitel 5 ist  $d = w = 3$ , da simultan die Punktgeschwindigkeiten in Nord-, Ost- und Vertikalrichtung approximiert werden. Das führt zu einer Verdreifachung der Anzahl der Zeilen und Spalten von  $\mathbf{A}$ . Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{xx}$  enthält die Varianzen und Kovarianzen für die Datenpunkte, somit ist die Berücksichtigung der Korrelationen innerhalb eines Punktes, z.B. zwischen der Geschwindigkeit in Ost- und Nordrichtung, und zwischen den einzelnen Stationspunkten gewährleistet. Durch Anwendung von Gleichung (4.13)

$$\mathbf{Q}_{\phi\phi} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{xx}\mathbf{A}^T$$

wird die Kovarianzmatrix für alle Gitterpunkte erhalten.

### 4.2.3 VFG für die Differenz $P = P - F(\Phi)$

Die Varianzfortpflanzung für die Berechnung der Differenz  $\Delta^k z_c$  für alle Datenpunkte gemäß Gleichung (2.44)

$$\Delta^k z_c = \Delta^{k-1} z_c - f_{k-1}(x_c, y_c)$$

erfolgt in zwei Schritten. Als erstes muss die Kovarianzmatrix für  $f_{k-1}(x_c, y_c)$  bestimmt werden. Der funktionale Zusammenhang ist gegeben durch Gleichung (2.25)

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^3 \sum_{l=0}^3 N_k^3(s) N_l^3(t) \phi_{(i+k)(j+l)}.$$

Dementsprechend bekommen die Elemente der Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  die Werte

$$A_{qr} = N_k^3(s) N_l^3(t) \tag{4.25}$$

zugewiesen. Jedem Punkt  $p_q$  in  $\mathbf{p}$  sind die entsprechenden 16  $\phi'_r$  in seiner  $4 \times 4$ -Nachbarschaft zuzuordnen. Um sämtlichen Korrelationen innerhalb eines Gitters  $\Phi$  und ebenso zwischen den Datenpunkten Rechnung zu tragen, muss die Funktionalmatrix die Beziehungen zwischen allen  $\phi'_r$  und allen  $p_q$  erhalten. Als Analogon zum Beispiel aus dem vorherigen Abschnitt zeigt Abbildung 4.2 die Matrix  $\mathbf{A}$  für die Berechnung von  $f(x, y)$  für die 37 Datenpunkte in einem  $5 \times 5$  und einem  $7 \times 7$ -Gitter. Mit dem allgemeinen VFG

$$\mathbf{Q}_{ff} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\phi\phi}\mathbf{A}^T$$

wird nunmehr die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{ff}$  für die berechneten  $f_{k-1}(x_c, y_c)$  erhalten.

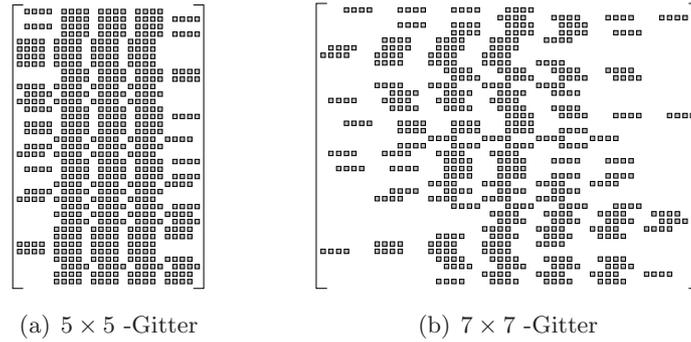


Abb. 4.2: Besetzung der Funktionalmatrix bei der Funktionswertberechnung mit unterschiedlichen Gittern

Im zweiten Schritt ist auf die Differenz  $\Delta^{k-1}z_c - f_{k-1}(x_c, y_c)$  das VFG anzuwenden, was in diesem Fall bedeutet, die Addition

$$\mathbf{Q}_{yy} = \mathbf{Q}_{xx} + \mathbf{Q}_{ff} \quad (4.26)$$

durchzuführen, wobei mit  $\mathbf{Q}_{xx}$  die Kovarianzmatrix von  $\Delta^{k-1}z_c$  und mit  $\mathbf{Q}_{yy}$  diejenige von  $\Delta^k z_c$  bezeichnet ist.

#### 4.2.4 VFG für die Addition zweier Gitter $\Psi = \Psi' + \Phi$

Bei der Addition zweier Gitter  $\Psi'$  und  $\Phi$  zu  $\Psi$  werden lediglich die entsprechenden Werte addiert, weshalb bei der Varianzfortpflanzung ebenfalls nur die Addition

$$\mathbf{Q}_{\psi\psi} = \mathbf{Q}_{\psi'\psi'} + \mathbf{Q}_{\phi\phi} \quad (4.27)$$

durchzuführen ist.

#### 4.2.5 VFG für die Verfeinerung eines Gitters $\Psi$ zu $\Psi'$

Die Werte für die Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  sind direkt aus den Gleichungen (2.50) bis (2.53) ableitbar. Je nach Lage des Punktes  $\psi'_{ij}$  gegenüber dem größeren Gitter  $\Psi$  sind bis zu neun Gitterpunkte  $\psi$  in die Berechnung einzubeziehen, siehe Abbildung 2.11, wobei lediglich die sechs verschiedenen Gewichtungsfaktoren 0.015625 (in Abbildung 4.3 grün), 0.0625 (braun), 0.09375 (blau), 0.25 (rot), 0.375 (gelb), 0.5625 (schwarz), entsprechend dem Abstand zu  $\psi'_{ij}$  möglich sind.

In Abbildung 4.3 sind für zwei B-Spline-Verfeinerungen die Funktionalmatrizen mit entsprechender Farbcodierung für die Werte dargestellt. Die Kovarianzmatrix für das verfeinerte Gitter  $\Psi'$  kann wiederum durch Anwendung des allgemeinen VFG

$$\mathbf{Q}_{\psi'\psi'} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\psi\psi}\mathbf{A}^T$$

berechnet werden.

### 4.3 Varianzfortpflanzung bei der Strainanalyse

Im Folgenden wird das Varianzfortpflanzungsgesetz auf die spezifischen Kenngrößen der linearen Theorie der Kontinuumsmechanik angewandt, die im Einzelnen sind:

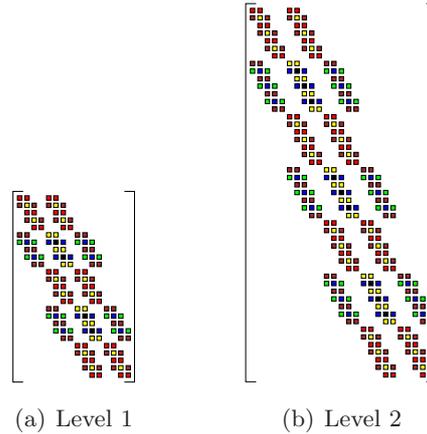


Abb. 4.3: Besetzung der Funktionalmatrix bei der B-Spline-Verfeinerung für a)  $4 \times 4 \implies 5 \times 5$  -Gitter und b)  $5 \times 5 \implies 7 \times 7$  -Gitter

- i. Verschiebungsgradiententensor
- ii. infinitesimaler Deformationstensor
- iii. infinitesimaler Drehtensor
- iv. Drehvektor
- v. Hauptdehnungen im  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^2$
- vi. Scherdehnungsvektor im  $\mathbb{R}^3$  und  $\mathbb{R}^2$

Da sowohl Deformationstensor als auch Drehtensor Ergebnis einfacher Tensorrechnungen sind, wird die Varianzfortpflanzung der entsprechenden Operationen in einem Abschnitt zusammengefasst.

### 4.3.1 VFG für den Verschiebungsgradiententensor

Die Bestimmung der Elemente von  $\text{Grad } \bar{u}$  mit den Gleichungen (3.59) bis (3.62) wird für die Varianzfortpflanzung in zwei Phasen zerlegt:

1. Bildung der Differenzen  $\phi_{(i+k)(j+l)} - \phi_{(i+k-1)(j+l)}$  bzw.  $\phi_{(i+k)(j+l)} - \phi_{(i+k)(j+l-1)}$ ,
2. Multiplikation mit den B-Spline-Funktionen.

In die Berechnungen der ersten Phase sind 16 Gitterpunkte  $\phi$  einbezogen. Für diese Punkte ist zunächst  $\mathbf{Q}_{\phi\phi}$  aus der Kovarianzmatrix für das komplette Gitter  $\Phi$  zu extrahieren. Entsprechend der Differenzen



Kovarianzen. Deshalb hat die Kovarianzmatrix von  $\text{Grad } \bar{u}$  die Gestalt

$$\mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}} = \begin{bmatrix} & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

### 4.3.2 VFG für Tensorrechnungen

Die Anwendung der Varianzfortpflanzung auf die Berechnung des infinitesimalen Deformationstensors  $\underline{\varepsilon}$  (Gleichung (3.31)) und des infinitesimalen Drehtensors  $\underline{\Omega}$  (Gleichung (3.36)) führt auf die entsprechenden Kovarianzmatrizen

$$\mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}} + \mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}}^T) \quad \text{und} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{Q}_{\Omega\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}} - \mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}}^T). \quad (4.35)$$

Um das allgemeine VFG gemäß Gleichung (4.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon} &= \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}} \mathbf{A}^T \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{Q}_{\Omega\Omega} &= \mathbf{B} \mathbf{Q}_{\text{Grad } \bar{u}} \mathbf{B}^T \end{aligned}$$

anwenden zu können, müssen die beiden Gleichungen (4.34) und (4.35) in die Funktionalmatrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  überführt werden

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.37)$$

Die Elemente des Drehvektors  $\bar{\omega}$  ergeben sich nach Gleichung (3.39) aus dem infinitesimalen Drehtensor  $\underline{\Omega}$ . Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\bar{\omega}\bar{\omega}}$  des Drehvektors wird deshalb ebenfalls aus den entsprechenden Elementen von  $\mathbf{Q}_{\Omega\Omega}$  erstellt.

### 4.3.3 VFG für die Hauptachsentransformation

In den Abschnitten 3.3.2 und 3.3.3 ist die Eigenwert-Eigenvektor-Analyse, d. h. die Berechnung der Hauptdehnungen und Hauptdehnungsrichtungen für den 3-dimensionalen und 2-dimensionalen Deformationstensor  $\underline{\varepsilon}$ , vorgestellt worden. Die Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes erfordert nun die Differentiation dieser funktionalen Zusammenhänge zwischen den Eigenvektor-Elementen und den Elementen von  $\underline{\varepsilon}$ . In den Abschnitten 4.3.3.2 und 4.3.3.3 wird das Varianzfortpflanzungsgesetz auf die Eigenwert-Eigenvektor-Analyse angewendet, um die Kovarianzmatrizen der Eigenvektoren zu bestimmen. Im einführenden Abschnitt 4.3.3.1 wird die Varianzfortpflanzung für das inverse Verfahren der Eigenwert-Eigenvektor-Synthese kurz vorgestellt.

#### 4.3.3.1 Varianzfortpflanzung auf Basis der Eigenwert-Eigenvektor-Synthese

Bei der Eigenwert-Eigenvektor-Synthese als inverses Verfahren der Eigenwert-Eigenvektor-Berechnung werden die Elemente eines symmetrischen Tensors aus den entsprechenden Eigenwerten und Eigenvektoren berechnet. Für ausführliche mathematische Herleitungen dieses Verfahrens zur Varianzfortpflanzung bei der Bestimmung des Eigenraums eines Tensors sei auf [XU U. GRAFAREND 1996], [CAI 2004], [CAI ET AL. 2005] verwiesen.

Ein zweidimensionaler, symmetrischer Tensor  $\underline{T}$  kann durch die inverse Operation der Gleichungen (3.92) und (3.93) aus den Eigenwerten  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  und dem Azimut  $\theta$  gebildet werden mit den Parametrisierungen

$$t_{11} = f_1(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta, \quad (4.38)$$

$$t_{21} = f_2(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2\theta, \quad (4.39)$$

$$t_{22} = f_3(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \lambda_1 \sin^2 \theta + \lambda_2 \cos^2 \theta. \quad (4.40)$$

Die Designmatrix  $\mathbf{A}$  enthält die Differentiale der Parametrisierungen  $f_i$  nach  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  und  $\theta$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda_{1.0} \\ \lambda_2 = \lambda_{2.0} \\ \theta = \theta_0 \end{matrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_0 & \sin^2 \theta_0 & (\lambda_{2.0} - \lambda_{1.0}) \sin^2 \theta_0 \\ \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 & -\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 & -(\lambda_{2.0} - \lambda_{1.0}) \cos^2 \theta_0 \\ \sin^2 \theta_0 & \cos^2 \theta_0 & -(\lambda_{2.0} - \lambda_{1.0}) \sin^2 \theta_0 \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

wobei die Näherungen  $\lambda_{1.0}$ ,  $\lambda_{2.0}$  und  $\theta_0$  gemäß Gleichung (3.92) und (3.93) bestimmt werden. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{yy}$  der Eigenwerte und des Azimuts kann nun mit

$$\mathbf{Q}_{yy} = \frac{1}{n} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{TT}^{-1} \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{n} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}_{TT} (\mathbf{A}^{-1})^T \quad (4.42)$$

aus der Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{TT}$  des Tensors berechnet werden [CAI 2004], [CAI ET AL. 2005]. Mit  $n$  wird dabei die Anzahl der Datensätze (Beobachtungen) für den Tensor  $\underline{T}$  bezeichnet.

In äquivalenter Weise kann die Kovarianzmatrix für die Eigenwerte und Eigenvektoren eines dreidimensionalen, symmetrischen Tensors bestimmt werden [CAI 2004]. Wiederum erfolgt eine Synthese des Tensors  $\underline{T}$  aus dessen Eigenwerten  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  und den Eigenrichtungen. Letztere können beispielsweise

durch die Drehwinkel  $\theta_{32}$ ,  $\theta_{31}$ ,  $\theta_{21}$  um die  $x_1$ -,  $x_2$ - und  $x_3$ -Achse des Koordinatensystems angegeben werden. Die Winkel definieren die Drehmatrizen  $\mathbf{U}_{32}(\theta_{32})$ ,  $\mathbf{U}_{31}(\theta_{31})$  und  $\mathbf{U}_{21}(\theta_{21})$  mit

$$\mathbf{U}_{32}(\theta_{32}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{32} & \sin \theta_{32} \\ 0 & -\sin \theta_{32} & \cos \theta_{32} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{U}_{31}(\theta_{31}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{31} & 0 & \sin \theta_{31} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_{31} & 0 & \cos \theta_{31} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\mathbf{U}_{21}(\theta_{21}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{21} & \sin \theta_{21} & 0 \\ -\sin \theta_{21} & \cos \theta_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

die mit

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{32}(\theta_{32})\mathbf{U}_{31}(\theta_{31})\mathbf{U}_{21}(\theta_{21}) \quad (4.46)$$

als Eigenvektoren  $\mathbf{U}_i$  der entsprechenden Eigenwerte  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) das homogene Gleichungssystem (3.66)

$$(\underline{\mathbf{T}} - \lambda_i \underline{\mathbf{1}}) \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (4.47)$$

erfüllen müssen. In Analogie zum zweidimensionalen Fall können ebenfalls Parametrisierungen ( $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ ) für die sechs unabhängigen Tensorelemente  $t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{22}, t_{23}, t_{33}$  formuliert werden [CAI 2004]. Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{A}$  enthält wiederum die Linearisierungen der Funktionale nach den Eigenwerten und Drehwinkeln

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{32}} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{31}} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{21}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_6}{\partial \lambda_2} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_{32}} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_{31}} & \frac{\partial f_6}{\partial \theta_{21}} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

mit vorheriger Bestimmung geeigneter Näherungswerte. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{yy}$  wird durch Einsetzen von  $\mathbf{A}$  in Gleichung (4.42) erhalten.

#### 4.3.3.2 VFG für Hauptachsentransformation 3D

Die Anwendung des allgemeinen VFG auf die Hauptachsentransformation des Deformationstensors  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  in Kap. 3.3.2 erfordert die Linearisierung der Gleichungen (3.81) bis (3.83) zur Eigenwertberechnung und des Gleichungssystems (3.87) zur Bestimmung des Eigenvektors.

Bei der Lösung des Eigenwertproblems mit Hilfe der *Cardanischen Formeln* werden mehrere Substitutionen durchgeführt (Gleichungen (3.70) bis (3.74) sowie (3.76) und (3.77)). Eine Darstellung der Gleichungen (3.81) bis (3.83) mit vollständiger Rücksubstitution ist an dieser Stelle nicht möglich und zweckmäßig, es gilt gemäß Gleichung (3.81) bis (3.83)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}) \\ &= \sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) \right] + \frac{b}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \lambda_2(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}) \\ &= -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) + \frac{\pi}{3} \right] + \frac{b}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \lambda_3(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}) \\ &= -\sqrt{-\frac{4}{3}p} \cdot \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{q}{2} \cdot \sqrt{-\frac{27}{p^3}} \right) - \frac{\pi}{3} \right] + \frac{b}{3}.\end{aligned}$$

Mit (3.88) können die Komponenten  $(x_1, x_2, x_3)$  lt. Gleichung (3.87) des zum Eigenwert  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gehörenden Eigenvektors  $\bar{x}_i$  als Funktionen der Tensorelemente  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}$  formuliert werden

$$\begin{aligned}x_1 &= f_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23} - \lambda_i}\right)^2}{\left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23} - \lambda_i}\right)^2} + \left[ \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23} - \lambda_i} - \frac{\varepsilon_{23} \left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{23} - \lambda_i}\right)}{(\varepsilon_{23} - \lambda_i) \left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{23} - \lambda_i}\right)} \right]^2}},\end{aligned}\tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}x_2 &= f_2(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}) \\ &= \frac{-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}}{\left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)^2}{\left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)^2} + \left[ \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i} - \frac{\varepsilon_{23} \left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)}{(\varepsilon_{33} - \lambda_i) \left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)} \right]^2}},\end{aligned}\tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= f_3(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}) \\ &= \frac{-\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i} - \frac{\varepsilon_{23} \left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)}{(\varepsilon_{33} - \lambda_i) \left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)}}{\sqrt{1 + \frac{\left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)^2}{\left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)^2} + \left[ \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i} - \frac{\varepsilon_{23} \left(-\varepsilon_{12} + \frac{\varepsilon_{23} \varepsilon_{13}}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)}{(\varepsilon_{33} - \lambda_i) \left(\varepsilon_{22} - \lambda_i - \frac{\varepsilon_{23}^2}{\varepsilon_{33} - \lambda_i}\right)} \right]^2}}.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Für die Eigenwerte kann eine Jacobi-Matrix  $\mathbf{A}_\lambda$  und ebenso für jeden Eigenvektor  $\bar{x}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) eine Matrix  $\mathbf{A}_i$  erstellt werden

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{13}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{23}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{33}} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{13}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{23}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{33}} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varepsilon_{13}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varepsilon_{23}} & \frac{\partial \lambda_3}{\partial \varepsilon_{33}} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{13}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{23}} & \frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_{33}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{13}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{23}} & \frac{\partial f_2}{\partial \varepsilon_{33}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{13}} & \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{22}} & \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{23}} & \frac{\partial f_3}{\partial \varepsilon_{33}} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

wobei in Gleichung (4.53) zu beachten ist, dass die Eigenwerte  $\lambda_i$  in den Formeln (4.49) bis (4.51) ebenfalls nach  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{23}$  bzw.  $\varepsilon_{33}$  zu differenzieren sind. Aus  $\mathbf{A}_\lambda$ ,  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{A}_2$  und  $\mathbf{A}_3$  wird nunmehr die endgültige Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  erstellt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_\lambda \\ \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Für die Varianzfortpflanzung kann die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon}$  des Deformationstensors  $\underline{\varepsilon}$  nicht unmittelbar verwendet werden, da sie die Varianzen und Kovarianzen von allen neun Tensorelementen enthält. Aufgrund der Symmetrie beruht die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren jedoch nur auf den sechs unabhängigen Tensorelementen  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{23}$  und  $\varepsilon_{33}$ . Dies erfordert eine Extraktion der entsprechenden Elemente aus  $\mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon}$ . Mit der reduzierten (6, 6)-Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}}$  kann das allgemeine Varianzfortpflanzungsgesetz (4.13)

$$\mathbf{Q}_{\lambda\lambda} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\varepsilon}\hat{\varepsilon}} \mathbf{A}^T \quad (4.55)$$

angewandt werden.

#### 4.3.3.3 VFG für Hauptachsentransformation 2D

Wie auch die eigentliche Hauptachsentransformation des zweidimensionalen Deformationsvektors ist auch deren Varianzfortpflanzung gegenüber dem dreidimensionalen Fall sehr vereinfacht. Die Linearisierungen der quadratischen Lösungsformel (3.92) und der Berechnungsformel (3.93) für das Azimut  $\theta$  werden zur Matrix  $\mathbf{A}$  zusammengefasst

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \varepsilon_{22}} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \varepsilon_{22}} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_{11}} & \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_{12}} & \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon_{22}} \end{bmatrix}, \quad (4.56)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2W} & 2\frac{\varepsilon_{12}}{W} & \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2W} \\ \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2W} & -2\frac{\varepsilon_{12}}{W} & \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}}{2W} \\ -\frac{\varepsilon_{12}}{W^2} & \frac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{W^2} & \frac{\varepsilon_{12}}{W^2} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

mit

$$W = \sqrt{\varepsilon_{11}^2 - 2\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 4\varepsilon_{12}^2}. \quad (4.58)$$

Die reduzierte (3,3)-Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}$  beinhaltet die aus  $\mathbf{Q}_{\varepsilon\varepsilon}$  extrahierten Varianzen und Kovarianzen für  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$  und  $\varepsilon_{22}$ . Das allgemeine VFG liefert die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_{\lambda\lambda}$  der Hauptdehnungen und des Azimuts

$$\mathbf{Q}_{\lambda\lambda} = \mathbf{A}\mathbf{Q}_{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}}\mathbf{A}^T. \quad (4.59)$$

#### 4.3.4 VFG für den Scherdehnungsvektor 3D

Die Berechnungsformel (3.98) des Scherdehnungsvektors  $\bar{s}$  ist für die Anwendung des allgemeinen VFG zu linearisieren. Es ist nach den Elementen des Deformationstensors  $\underline{\varepsilon}$  und denen des Rotationsvektors  $\bar{\omega}$  zu differenzieren. Aufgrund von Gleichung (3.97) und der Symmetrie von  $\underline{\varepsilon}$  kann Gleichung (3.98) umformuliert werden zu

$$s_1 = s_1(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{|\bar{\omega}|} (\varepsilon_{11}\omega_1 + \varepsilon_{12}\omega_2 + \varepsilon_{13}\omega_3) + \frac{1}{|\bar{\omega}|^3} (-\varepsilon_{11}\omega_1^3 - 2\varepsilon_{12}\omega_1^2\omega_2 - 2\varepsilon_{13}\omega_1^2\omega_3 - \varepsilon_{22}\omega_1\omega_2^2 - 2\varepsilon_{23}\omega_1\omega_2\omega_3 - \varepsilon_{33}\omega_1\omega_3^2), \quad (4.60)$$

$$s_2 = s_2(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{|\bar{\omega}|} (\varepsilon_{12}\omega_1 + \varepsilon_{22}\omega_2 + \varepsilon_{23}\omega_3) + \frac{1}{|\bar{\omega}|^3} (-\varepsilon_{11}\omega_1^2\omega_2 - 2\varepsilon_{12}\omega_1\omega_2^2 - 2\varepsilon_{13}\omega_1\omega_2\omega_3 - \varepsilon_{22}\omega_2^3 - 2\varepsilon_{23}\omega_2^2\omega_3 - \varepsilon_{33}\omega_2\omega_3^2), \quad (4.61)$$

$$s_3 = s_3(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{33}, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{1}{|\bar{\omega}|} (\varepsilon_{13}\omega_1 + \varepsilon_{23}\omega_2 + \varepsilon_{33}\omega_3) + \frac{1}{|\bar{\omega}|^3} (-\varepsilon_{11}\omega_1^2\omega_3 - 2\varepsilon_{12}\omega_1\omega_2\omega_3 - 2\varepsilon_{13}\omega_1\omega_3^2 - \varepsilon_{22}\omega_2^2\omega_3 - 2\varepsilon_{23}\omega_2\omega_3^2 - \varepsilon_{33}\omega_3^3) \quad (4.62)$$

mit

$$|\bar{\omega}| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}. \quad (4.63)$$

Die Differentiationen der Gleichungen (4.60) bis (4.62) nach  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{12}$ ,  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{33}$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und  $\omega_3$  werden zur Funktionalmatrix  $\mathbf{A}$  zusammengefasst

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_{11}} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial s_1}{\partial \omega_1} & \dots & \frac{\partial s_1}{\partial \omega_3} \\ \frac{\partial s_2}{\partial \varepsilon_{11}} & \dots & \frac{\partial s_2}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial s_2}{\partial \omega_1} & \dots & \frac{\partial s_2}{\partial \omega_3} \\ \frac{\partial s_3}{\partial \varepsilon_{11}} & \dots & \frac{\partial s_3}{\partial \varepsilon_{33}} & \frac{\partial s_3}{\partial \omega_1} & \dots & \frac{\partial s_3}{\partial \omega_3} \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$



## 5. Dreidimensionale Plattenkinematik in Rumänien

In diesem Kapitel werden die Multilevel B-Spline Approximation und Kontinuumsmechanik auf das GPS-Netz des Untersuchungsgebietes in Rumänien angewendet, die Ergebnisse interpretiert sowie deren Genauigkeiten analysiert.

Für die Algorithmen der Multilevel B-Spline Approximation inklusive der Varianzfortpflanzung wurde ein Programm in der Programmiersprache Java erstellt. Dieses wurde erweitert um selbst geschriebene Routinen zur Strainanalyse. Darin sind die Berechnungen der Deformationsmaße entsprechend der linearen Theorie der Kontinuumsmechanik, die Hauptachsentransformationen etc. zuzüglich Varianzfortpflanzung realisiert. Bei der Programmierung wurde dabei lediglich auf einige JAMPACK-Bibliotheken<sup>1</sup> zurückgegriffen, um Matrizen zu transponieren und zu multiplizieren. Als Programm ApproxNd kann eine Testversion der Software unter <http://www.gik.uni-karlsruhe.de/1644.html> heruntergeladen werden.

In einem einführenden Abschnitt 5.1 wird zunächst die besondere tektonische Situation in den Südostkarpaten vorgestellt. Daran schließt im Abschnitt 5.2 eine kurze Beschreibung der GPS-Datenauswertung und Schätzung der Stationsgeschwindigkeiten an. Die Durchführung von GPS-Prozessierung und Geschwindigkeitsschätzung gehörte nicht zum Aufgabenbereich dieser Arbeit, bildet jedoch deren Ausgangspunkt und Grundlage. Die Entstehung dieses Datenmaterials soll daher explizit erläutert und auf dabei aufgetretene Probleme hingewiesen werden.

In den folgenden Abschnitten 5.3 bis 5.4 werden das approximierte Geschwindigkeitsfeld und die darauf basierenden Ergebnisse der Strainanalysen vorgestellt und diskutiert.

### 5.1 Tektonik und Geodynamik des Untersuchungsgebietes

Das Untersuchungsgebiet mit einer Größe von ca.  $600 \times 400$  km überdeckt das Vrancea-Gebiet in den Südostkarpaten sowie die umgebenden Regionen. Die Südostkarpaten sind eine Region mit sehr eigentümlicher Seismizität. In einem sehr kleinen Volumen des Erdmantels der Größe  $30 \times 70 \times 130$  km in einer Tiefe von 70 bis 200 km treten wiederholt Erdbeben mit Magnituden bis zu 7.5 auf [WENZEL ET AL. 2002], siehe Abbildung 5.1. Tiefere und flachere Beben wurden ebenfalls registriert, hatten aber nur sehr kleine Magnituden. Seit 1940 ereigneten sich in Rumänien vier starke Vrancea-Beben, mit Magnituden größer 6.9 [ONESCU U. BONJER 1997].

#### 5.1.1 Plattentektonik

Das tektonische Szenario der Südostkarpaten wird geprägt durch die drei großen Einheiten, der Osteuropäischen Plattform im Nordosten, der Moesischen Plattform im Süden sowie dem Tisza-Dacia-Block, siehe Abbildung 5.2 und 5.3. Zwischen der Osteuropäischen und Moesischen Platte befindet sich ein System von Störzonen, die Hauptverwerfungen sind in Abbildung 5.3 eingezeichnet.

Die Karpaten sind durch Kollision mehrerer Mikroplatten mit dem Europäischen Kontinentalrand während der Schließung des ozeanischen Bereichs der Thetys entstanden. Im Neogen (vor ca. 23 Millionen Jahren) wurde die Entwicklung hauptsächlich angetrieben vom Rückzug einer nach Südwesten, später nach Westen gerichteten Subduktionszone. Durch den Rückzug der Subduktionszone in Richtung Osten/Südosten wurden die tektonischen Einheiten im Karpatenbereich angelagert und in die heutige Lage transportiert [SANDULESCU 1988], [MATENCO U. BERTOTTI 2000]. Dabei haben sich

---

<sup>1</sup> JAVa Matrix PACKage - A Java Package for Matrix Computations, <ftp://math.nist.gov/pub/Jampack/Jampack/AboutJampack.html>

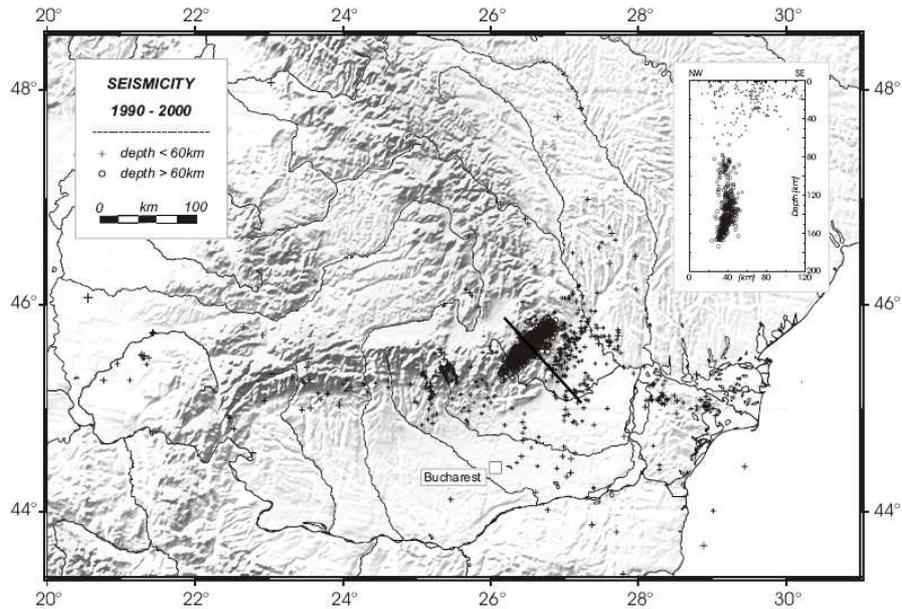


Abb. 5.1: Seismizität der Südostkarpaten für den Zeitraum 1990-2000, [WENZEL ET AL. 2002] S.96

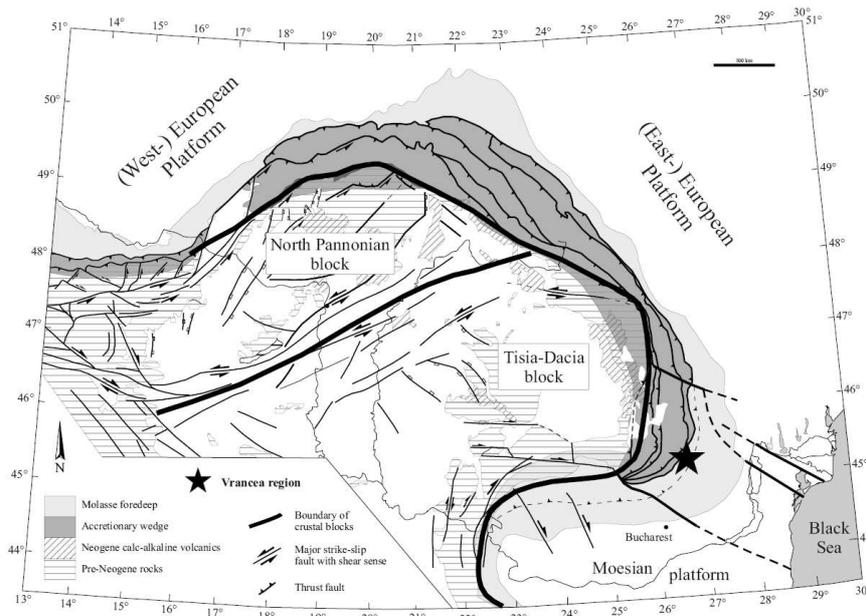


Abb. 5.2: Tektonische Übersichtskarte der Karpatenregion [WENZEL ET AL. 2002] S. 97; mit geologischen Einheiten nach [HORVATH 1993]

die zwei Blöcke der oberen, kontinentalen Platte (Nordpannonischer Block und Tisza-Dacia-Block, siehe Abbildung 5.2) unabhängig in verschiedene Richtungen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegt [SPERNER ET AL. 2001], [WENZEL ET AL. 2002]. Die Kollision des Tisza-Dacia-Blockes mit der Europäischen Kontinentalplatte führte zur Blockierung des Subduktionsprozesses und kontinentalen Aufschiebungen [SPERNER ET AL. 2005]. Die Kollision fand zuerst im nördlichen Teil der Karpaten statt, während im südöstlichen Teil die Subduktion noch fortschritt [SPERNER ET AL. 1999], siehe Abbildung 5.4. Die Aufschiebung des Tisza-Dacia-Blockes führte zu Stauchungen und Verdickungen der Kruste im Kollisionsbereich [ZWEIGEL ET AL. 1998]. Gleichzeitig war im südlichen Teil immer noch dünne kontinentale Kruste vorhanden. Beckenbildung im Akkretionskeil wurde zudem unterstützt

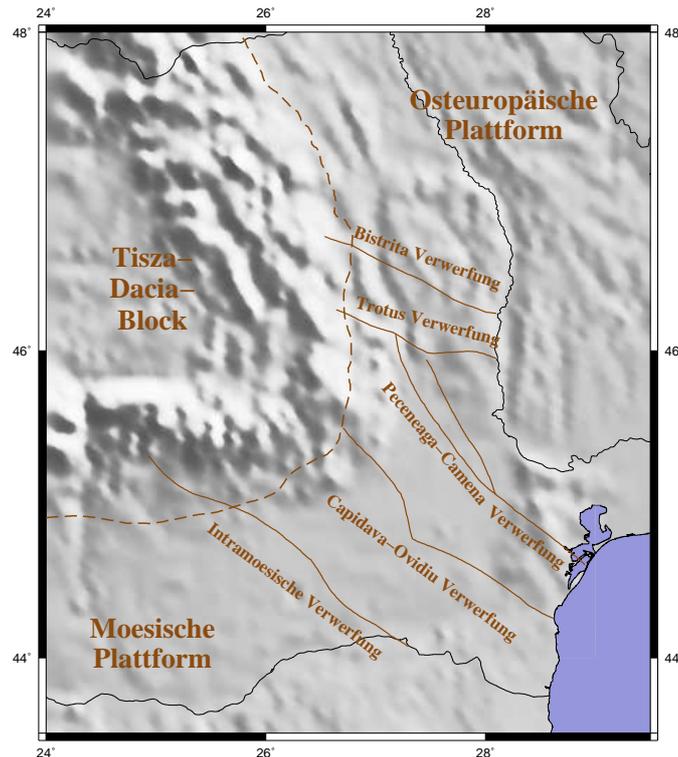


Abb. 5.3: Hauptverwerfungen

durch die Delaminierung der subduzierten Lithosphäre mit anschließendem Aufstieg der Asthenosphäre und Oberflächenhebung in diesem Gebiet [GIRBACEA U. FRISCH 1998].

Der Kollisionsprozess setzte sich nach Süden fort, wo in der Vrancea-Region die jüngste Phase der Kollision erfolgte. Die heutige Form der Karpaten war durch die Form des ozeanischen Bereichs des Thetys vordefiniert [ZWEIGEL ET AL. 1998].

Heute hat sich die subduzierte Lithosphäre (*Slab*) in eine nahezu vertikale Position versteilt, was belegt wird durch die Verteilung der mitteltiefen Erdbeben in Abbildung 5.1 und Ergebnisse der seismischen Tomographie [SPERNER ET AL. 2001], [WORTEL U. SPAKMAN 2000].

### 5.1.2 Geodynamisches Modell

Die Lage des Slab ist gegenüber der Suture um ca. 80-100 km in südöstliche Richtung versetzt, was als Indiz für Delaminierung und *Rollback* der subduzierten Lithosphäre gilt [GIRBACEA U. FRISCH 1998]. Diese Theorie ist völlig kompatibel mit dem Entwicklungsprozess des Abreißen einer subduzierten Platte [WORTEL U. SPAKMAN 2000].

Ausgehend von [GIRBACEA U. FRISCH 1998] wurde im Teilprojekt *A6: Rezentes Spannungsfeld und Geodynamik* des Sonderforschungsbereichs 461 folgendes geodynamisches Modell, siehe Abbildung 5.4, entwickelt [SPERNER ET AL. 2001], [SPERNER ET AL. 2005]:

In der Endphase des Subduktionsprozesses hat sich die Subduktionszone in Richtung Osten zurückgezogen. Diese Rückzugsrichtung hat sich dabei im weiteren Verlauf in Richtung Südosten geändert, was durch die heutige Nordost-Südwest-Ausrichtung des Slab belegt ist. Grund dafür ist die schräge Kollision des aufschiebenden Tisza-Dacia-Blockes auf das Europäische Vorland, verursacht durch die unterschiedliche Ausrichtung der Plattenränder dieser beiden Blöcke. Während der Ostrand des Tisza-Dacia-Blockes in Nord-Süd-Richtung orientiert war, hatte das Europäische Vorland eine Nordwest-Südost-Ausrichtung. Dadurch fand die Kollision zuerst im nördlichen Teil des Karpatenbogens statt.

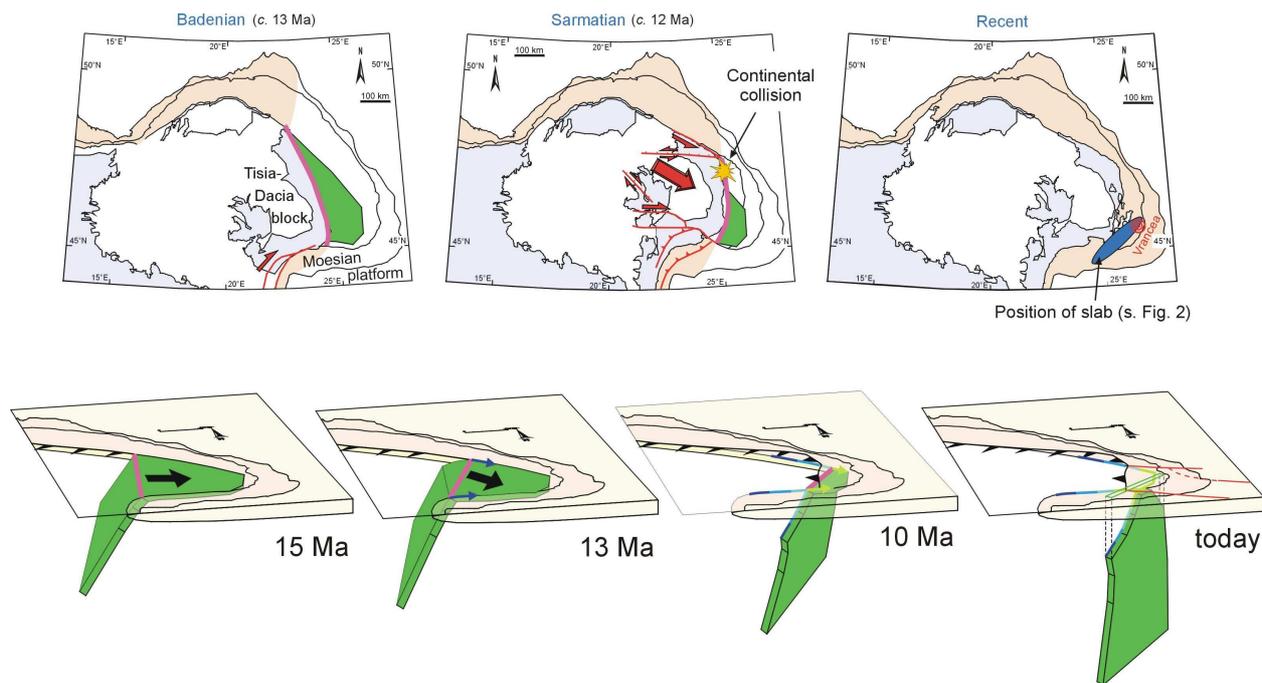


Abb. 5.4: Geodynamisches Modell der Entstehung der Südostkarpaten, [SPERNER ET AL. 2005] S. 195

Die fortschreitende Konvergenz im Süden fand nun zwischen zwei unterschiedlich verlaufenden Begrenzungslinien statt, auf der einen Seite die in Ost-West-Richtung verlaufende Plattengrenze zur Moesischen Platte und auf der anderen Seite der von Nordnordwest nach Südsüdost verlaufende Westrand der Europäischen Platte. Die Rückzugsrichtung folgte nun der Winkelhalbierenden dieser beiden Kanten nach Südosten. Als Konsequenz der Richtungsänderung wurde der bereits subduzierte und abgerissene Teil des Slab unter den Nordrand der moesischen Platte gezogen. Dieser abgelöste Teil des Slab bildet heute den aseismischen südwestlichen Teil der absinkenden Lithosphäre. Der immer noch mit der Kruste verbundene nordöstliche Teil des Slab erfährt Spannungen aufgrund des gravitativen Absinkens der schweren Lithosphäre. Die zugehörige Seismizität ist begrenzt auf mittleren Tiefenbereich im Slab von 70 bis 180 km. Der aseismische Bereich zwischen 40 und 70 km Tiefe (siehe Abbildung 5.1) kann als Zone schwachen Mantel- oder Krustenmaterials interpretiert werden, in der die Delaminierung des Slab stattfindet.

Verschiedene weitere Hypothesen sind publiziert worden, z. B. [CHALOT-PRA U. GIRBACEA 2000], [CLOETINGH ET AL. 2004], [KNAPP ET AL. 2005], um die seismische Aktivität der Vrancea-Region zu erklären. Dabei werden unterschiedliche Modelle für die Geometrie der Kruste herangezogen, was im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter vertieft werden kann und soll.

## 5.2 GPS-Stationsnetz

Das Untersuchungsgebiet ist mit einem Netz von ca. 55 GPS Stationen überdeckt, siehe Abbildung 5.5. Dabei wurde dieses Stationsnetz ausgehend von Stationen des *Central European GPS Geodynamic Reference Network* (CEGRN) im Rahmen der Arbeiten des Sonderforschungsbereiches 461 ab 1997 eingerichtet und ausgebaut. Ab 2002 erfolgten in Kooperation mit der geodätischen Projektgruppe des *Netherlands Research Center for Integrated Solid Earth Sciences* (ISES) am *Department of Earth Observation and Space Systems* (DEOS) der TU Delft weitere Verdichtungen und Erweiterungen. Desweiteren werden seit 2002 vom DEOS permanente GPS-Stationen betrieben. Ebenso ist die GPS-Referenzstation BUCU<sup>2</sup> in dieses Netzwerk eingebunden. Insgesamt stehen für die GPS-Auswertung

<sup>2</sup> eingerichtet und betrieben vom Bundesamt für Kartographie und Geodäsie

die Beobachtungsdaten von 15 Messkampagnen<sup>3</sup> zwischen 1997 und 2006 zur Verfügung.

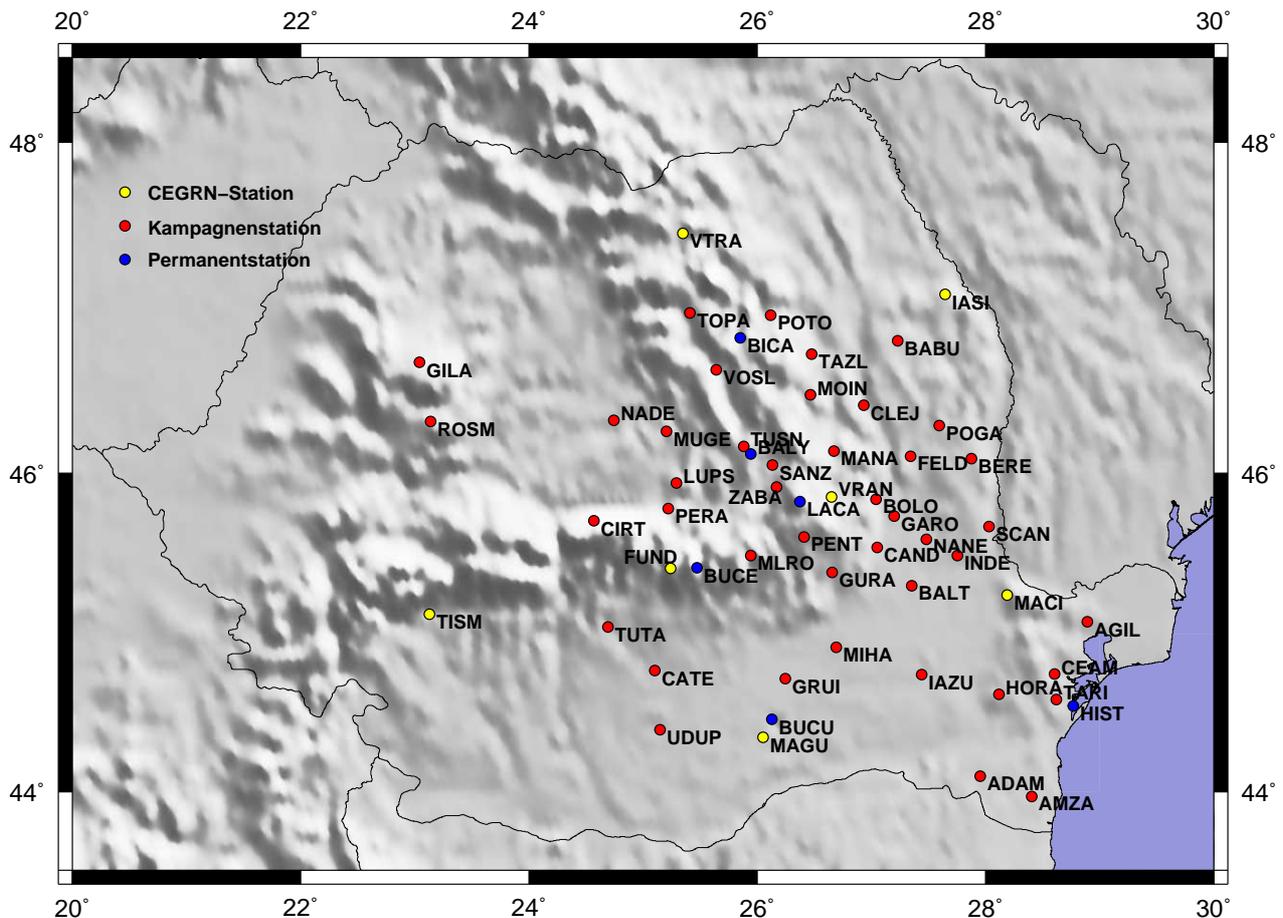


Abb. 5.5: Stationen des Überwachungsnetzes in Rumänien

Das CEGRN-Stationsnetz des 1993 gestarteten *Central European Regional Geodynamic Project* (CERGOP) [SLEDZINSKI 2003] ist eine regionale Verdichtung des *International Terrestrial Reference Frame* (ITRF) und dient als Rahmennetz für regionale geodynamische Forschungsprojekte, wie den Sonderforschungsbereich 461 und ISES. Aus den durch Kampagnenmessungen bestimmten Stationskoordinaten wurden Geschwindigkeitsfelder abgeleitet [BECKER ET AL. 2001], [HEFTY 2005]. Ab 1999 wurde parallel zu den Kampagnenstationen des CEGRN ein Netzwerk von Permanentstationen konzipiert und etabliert [BECKER ET AL. 2003]. Letztgenannte Permanentstationen sind jedoch nicht mehr in das GPS-Netz des Sonderforschungsbereiches 461 integriert worden.

Die Datenprozessierung im Sonderforschungsbereiches 461 erfolgt mit der *Bernese GPS Software 5.0* [HUGENTOBLER ET AL. 2005]. Die Lagerung des Überwachungsnetzes in das ITRF2000 erfolgt durch Anbindung an die umliegenden ITRF-Stationen. Die Auswertung erfolgt nach üblichen Standards, die in Tabelle 5.1 zusammengestellt sind. Für jeden Beobachtungstag wird eine Tageslösung, d. h. Koordinaten der Stationen zzgl. Kovarianzmatrix, berechnet.

Die Elevationmaske von  $15^\circ$  ist aufgrund des Beobachtungsmaterials der frühen Messkampagnen erforderlich, um die Konsistenz der Beobachtungen zu gewährleisten. Aufgrund der limitierten Speicherkapazität der damals eingesetzten GPS-Empfänger war diese Einstellung notwendig.

Als Korrekturwerte für die Satelliten und Empfangsantennen werden azimuth- und elevationsabhängige absolute Kalibrierwerte für jeden Antennentyp im ANTEX-Format [ROTHACHER U. SCHMID 2006]

<sup>3</sup> Die 15 Messkampagnen sind im Detail: CEGRN 1995, 1996, 1997, 1999, 2001; NATO 1999, 2001, SFB461 1997, 1998, 2000; ISES 2002, 2005; SFB+ISES 2003, 2004, 2006

Tab. 5.1: Standards für die GPS-Auswertung

Implementierte Daten und Modelle
<ul style="list-style-type: none"> <li>• präzise Ephemeriden</li> <li>• Erdrotationsparameter</li> <li>• Modelle für Festerdezeiten</li> <li>• Modelle für Auflasten durch Meereszeiten</li> <li>• Kalibrierwerte für die Satelliten- und Empfangsantennen</li> </ul>
Einstellungen für die Prozessierung
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 30 Sekunden Sampling-Rate</li> <li>• 15° Elevationsmaske</li> <li>• Mehrdeutigkeitslösung mit QIF-Strategie (<i>quasi ionosphere free</i>)</li> <li>• A priori-Troposhärenmodell von Saastamoinen</li> <li>• Niell Mapping-Funktionen</li> </ul>

eingeführt.

Weitere Details hinsichtlich des Ablaufs der GPS-Prozessierung im Sonderforschungsbereich 461 sind in [SCHMITT ET AL. 2004] zusammengestellt.

Mit den vorliegenden Tageslösungen aller Messkampagnen wird auf Basis des dreidimensionalen kinematischen Ansatzes

$$\begin{bmatrix} B \\ L \\ h \end{bmatrix}_{i,t} + \begin{bmatrix} v_B \\ v_L \\ v_h \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} B \\ L \\ h \end{bmatrix}_{i,t_0} + \begin{bmatrix} \omega_B \\ \omega_L \\ \omega_h \end{bmatrix}_i (t - t_0) + \underbrace{\begin{bmatrix} dB(B, L, h, d) \\ dL(B, L, h, d) \\ dh(B, L, h, d) \end{bmatrix}_i}_{\text{Datumsanteil}} + \underbrace{\begin{bmatrix} O_B \\ O_L \\ O_h \end{bmatrix}}_{\text{Offset}} \quad (5.1)$$

die Deformationsanalyse durchgeführt, detaillierte Ausführungen zu diesem Ansatz (5.1) finden sich in [DINTER 2002].

Die Eurasische Platte wird dabei als stabil angenommen, d. h. der einheitliche Referenzrahmen wird dadurch realisiert, dass mit den bekannten Geschwindigkeiten der ITRF-Stationen die Tageslösungen auf die gemeinsame Epoche 1997.0 bezogen werden. Die Erweiterung des kinematischen Ansatzes um den Offset-Term war notwendig, um dem Problem der großen Streuung in den Tageslösungen gerecht zu werden [SCHMITT ET AL. 2004].

Die bekannte Problematik der Koordinatenänderung durch Antennenwechsel (insbesondere der Höhenkomponente) bei permanenten GPS-Stationen [WANNINGER ET AL. 2006] tritt ebenso bei Kampagnenmessungen auf. Innerhalb einer Messkampagne können bei Beobachtungen des gleichen Punktes mit zwei baugleichen GPS-Ausrüstungen Differenzen bis zu mehreren Zentimetern in der ellipsoidischen Höhe auftreten. Differenzen in ähnlicher Größenordnung werden auch dadurch verursacht, dass während der Laufzeit des Projektes verschiedene Baureihen von GPS-Systemen zum Einsatz kamen.

Detaillierte Untersuchungen dieser Problematik sind Gegenstand der Forschungsarbeiten im geodätischen Teilprojekt des Sonderforschungsbereiches 461, dennoch soll diese Thematik in dieser Arbeit nicht weiter vertieft sondern auf den Abschlussbericht des Projektes verwiesen werden. Es muss jedoch ausdrücklich betont werden, dass aufgrund dieser Problematik bei der Schätzung der Stationsbewegungen die Genauigkeit und Zuverlässigkeit sämtlicher darauf basierenden Berechnungen und Analysen negativ beeinflusst wird.

### 5.3 Approximiertes Geschwindigkeitsfeld

Als Ergebnisse der GPS-Datenauswertung und Deformationsanalyse liegen für jede Station des Überwachungsnetzes die Geschwindigkeiten  $v_{Nord}$ ,  $v_{Ost}$  und  $v_{Hoehe}$  vor, dargestellt in Abbildung 5.6. Des-

weiteren kann eine entsprechende Kovarianzmatrix, jedoch nur mit besetzter Hauptdiagonale, aus den Ergebnissen der Deformationsanalyse extrahiert werden. Diese Ergebnisse sind als vorläufig zu erachten. Sie sind lediglich die Resultate der Einzelpunktanalyse, bei der nur ein einzelner Punkt untersucht wird. Es werden hierbei keine Korrelationen mit den anderen Punkten des Überwachungsnetzes berücksichtigt. Eine gemeinsame Deformationsanalyse aller Stationen gemäß Gleichung 5.1 soll bis zum Projektende durchgeführt worden sein. Die Ergebnisse werden dann neben den Geschwindigkeiten der GPS-Stationen auch eine vollständige Kovarianzmatrix beinhalten.

Tab. 5.2: Validierung der Geschwindigkeiten der CEGRN-Stationen

Station	SFB 461			CEGRN		
	$v_N$ [mm/y]	$v_O$ [mm/y]	$v_H$ [mm/y]	$v_N$ [mm/y]	$v_O$ [mm/y]	$v_H$ [mm/y]
FUND	-0.49	0.06	4.87	-3.20	-0.40	13.90
IASI	-0.65	-0.47	0.61	3.20	-0.60	-22.2
MACI	-0.60	-0.70	-4.16	3.10	1.20	3.60
MAGU	-1.51	-0.12	3.01	-1.40	0.90	4.40
TISM	-2.18	-0.08	-18.70	2.00	-0.70	7.70
VRAN	-1.65	-0.44	4.10	-0.30	0.50	-2.10

Die im vorherigen Abschnitt 5.2 erwähnten Probleme bei der Schätzung der Stationsgeschwindigkeiten können verdeutlicht werden, indem die geschätzten Werte der CEGRN-Stationen mit Ergebnissen der CEGRN-Auswerte-Center [HEFTY 2005]<sup>4</sup> validiert werden. In Tabelle 5.2 sind die Werte gegenübergestellt. Eine deutliche Diskrepanz zwischen den Ergebnissen ist dabei festzustellen.

Tab. 5.3: Ergebnisvalidierung mit geschätzten Geschwindigkeiten von SFB 461 und ISES nach der GPS-Messkampagne 2004, Einheit der Geschwindigkeiten [mm/y]

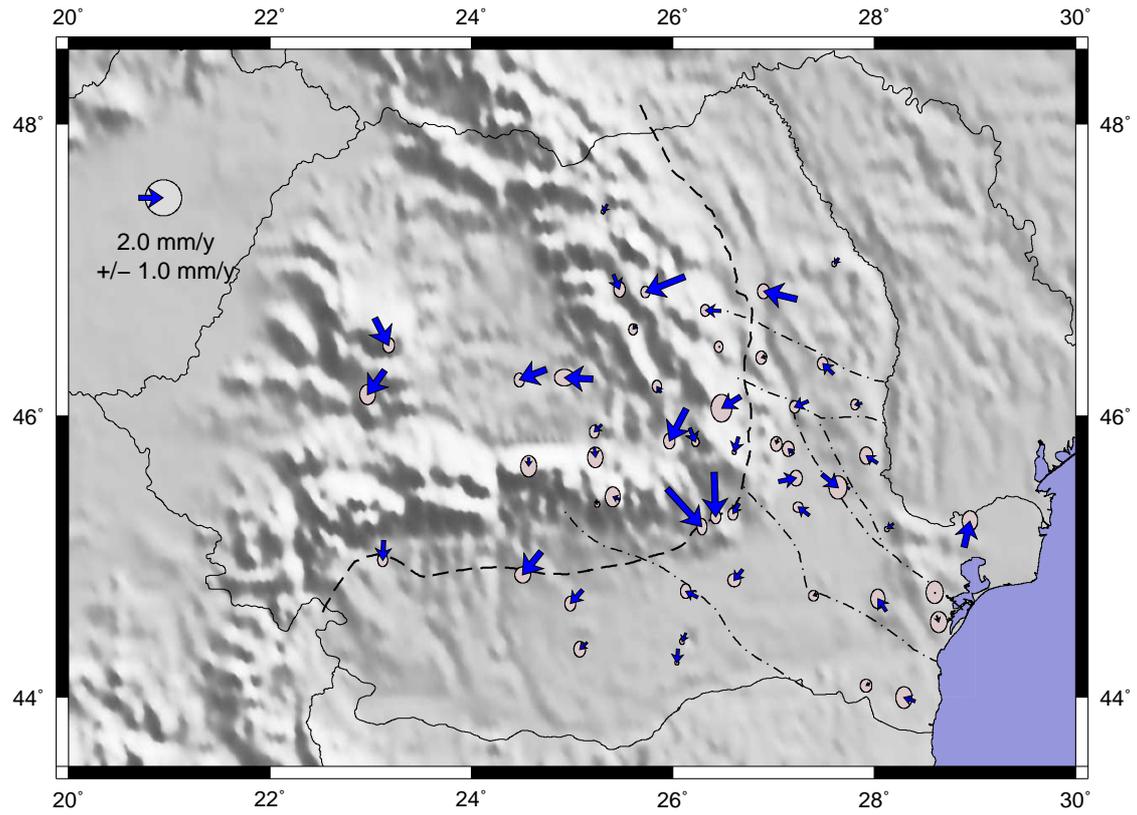
Station	SFB 461 (2007)			SFB 461 (2005)			ISES (2005)		
	$v_N$	$v_O$	$v_H$	$v_N$	$v_O$	$v_H$	$v_N$	$v_O$	$v_H$
FUND	-0.49	0.06	4.87	-0.07	0.86	3.93	-0.77	0.88	2.82
IASI	-0.65	-0.47	0.61	-0.09	-0.51	-0.21	-1.60	0.08	-2.89
MACI	-0.60	-0.70	-4.16	0.20	-0.25	2.46	-0.83	-0.03	1.86
MAGU	-1.51	-0.12	3.01	-1.39	0.69	0.15	-2.47	0.49	-2.36
VRAN	-1.65	-0.44	4.10	-1.56	-0.71	4.39	-2.05	-0.48	1.51

Demgegenüber stimmen die vorläufigen Resultate mit den in [VAN DER HOEVEN ET AL. 2005] und [NUCKELT ET AL. 2005] veröffentlichten Geschwindigkeitsschätzungen nach Auswertung der GPS-Kampagne 2004 besser überein, siehe Tabelle 5.3. Obwohl auch bei diesem Vergleich deutliche Unterschiede feststellbar sind. Mit dem gleichen Beobachtungsmaterial werden aufgrund verschiedener Auswertestrategien und Software-Pakete<sup>5</sup> für die GPS-Prozessierung unterschiedliche Ergebnisse erzielt.

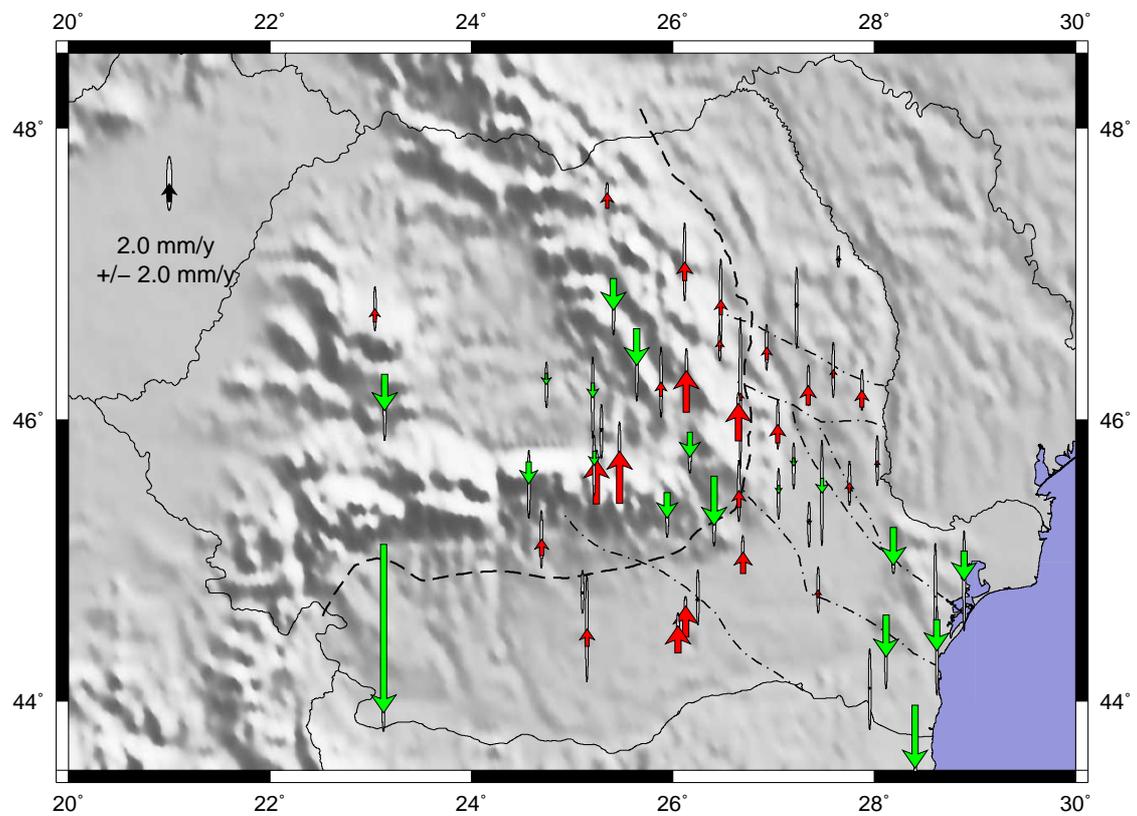
Für die Generierung des Geschwindigkeitsfeldes können nur möglichst zuverlässige Stationsgeschwindigkeiten herangezogen werden. Die geschätzten Bewegungsraten werden zuverlässiger mit zunehmender Anzahl der Messungen. Aus diesem Grund können nicht alle Stationen einbezogen werden. Einige Stationen wurden erst 2003 oder später eingerichtet oder weisen sehr lokale Effekte auf, z. B. Gebäudebewegungen bei der Station BICA [VAN DER HOEVEN ET AL. 2005]. Sie müssen deshalb unberücksichtigt bleiben. Desweiteren sind die drei westlich gelegenen Stationen GILA, ROSM und TISM

<sup>4</sup> abweichende Stationsbezeichnungen in [HEFTY 2005]: FUND=FUN3, IASI=IAS3, MAGU=BUCA, TISM=TIS3, VRAN=VRN1

<sup>5</sup> SFB 461 (2007): Bernese GPS-Software 5.0; SFB 461 (2005): Bernese GPS-Software 4.2; ISES (2005): GIPSY-OASIS II v2.5



(a) Horizontalgeschwindigkeiten



(b) Vertikalgeschwindigkeiten

Abb. 5.6: Vorläufige Ergebnisse der Deformationsanalyse

aufgrund des großen Abstandes zum Untersuchungsgebiet bei der Approximation des Geschwindigkeitsfeldes ausgeschlossen. Die anderen in Abbildung 5.6 dargestellten Stationen bilden die Datenbasis für die Multilevel B-Spline Approximation.

Die Abbildungen 5.7 und 5.8 zeigen die berechneten horizontalen und vertikalen Geschwindigkeitsfelder zuzüglich der Standardabweichungen.

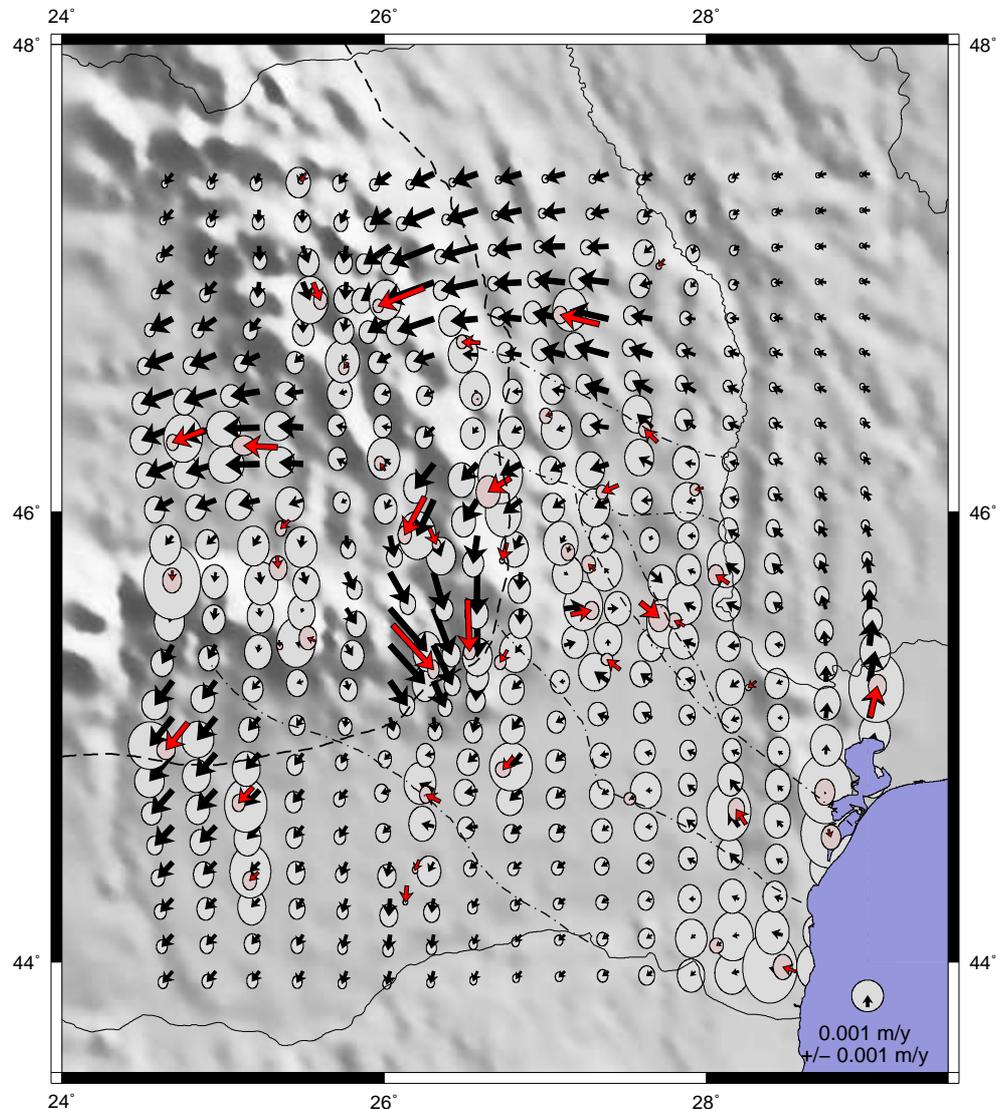


Abb. 5.7: Horizontales Geschwindigkeitsfeld mit Standardabweichungen

Die auffälligsten horizontalen Geschwindigkeiten sind in der Bildmitte von Abbildung 5.7 zu erkennen. In der südöstlichen Spitze des Karpatenbogens treten horizontale Bewegungen mit bis zu 5 mm/Jahr (Stationen MLRO und PENT) auf. Dabei könnte es sich auch um lokale Bewegungen handeln, jedoch entspricht diese Bewegung genau der Rückzugsrichtung der Subduktionszone, was weiteren Spielraum für Interpretationen gibt.

Signifikant erscheint die Horizontalverschiebung der Moesischen Platte in südliche bis südwestliche Richtung mit 1-3 mm/Jahr, was im Gegensatz zu den bisher von SFB 461 und ISES publizierten Bewegungen steht. Nach wenigen Kampagnen wurde zunächst eine Verschiebung der Moesischen Platte in nördliche Richtung angenommen [DINTER U. SCHMITT 2001]. Die geschätzten Stationsgeschwindigkeiten nach den GPS-Messkampagnen 2003 und 2004 deuteten auf Bewegungen in südöstlicher Richtung zum Schwarzen Meer hin [SCHMITT ET AL. 2004], [VAN DER HOEVEN ET AL. 2005].

Zwischen der Capidava-Ovidiu Verwerfung und der Peceneaga-Camena Verwerfung ist im östlichen Teil ein eindeutiger Trend in Richtung Nordwesten zu erkennen. Dies widerspricht jedoch geologischen Studien im Bereich der Intramoesischen Verwerfung [TARAPOANCA ET AL. 2003], die eine südöstliche Bewegung dieses Bereiches ergaben. Im Bereich nördlich der Trotus Verwerfung ist eine Westwärtsbewegung mit ca. 2-3 mm/Jahr bestimmt worden, was mit den geologischen Untersuchungsergebnissen [TARAPOANCA ET AL. 2003] übereinstimmt.

Innerhalb des Karpatenbogens, im Transsylvanischen Becken, sind unterschiedliche Bewegungen zu beobachten. In der Mitte des Beckens ist ebenfalls eine Bewegung mit 2-3 mm/Jahr Richtung Westen zu verzeichnen, während sich der südliche Rand des Beckens in Richtung der Südkarpaten verschiebt.

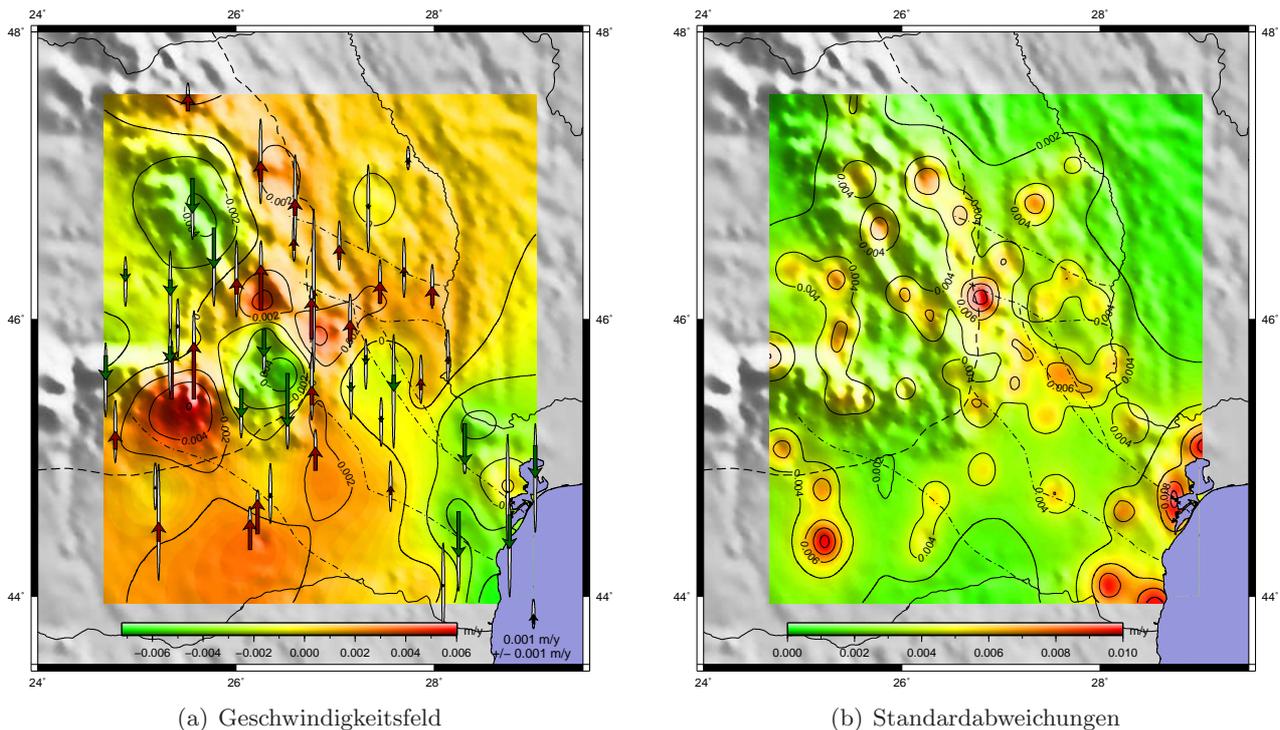


Abb. 5.8: Vertikales Geschwindigkeitsfeld und Standardabweichungen

In der Darstellung des vertikalen Geschwindigkeitsfeldes in Abbildung 5.8 sind Bereiche signifikanter Hebung oder Senkung zu erkennen. Für die Bereiche der Ost- und Südkarpaten sind deutliche Hebungen mit bis zu 6 mm/Jahr festzustellen, ebenso für die Vrancea-Region (2 mm/Jahr) und die Moesische Plattform. Demgegenüber sind Bereiche deutlicher Absenkung im Transsylvanischen Becken (ca. -3 mm/Jahr), Brasov-Becken (-4 mm/Jahr), Focsani-Becken (-2 mm/Jahr) und an der Schwarzmeerküste (-5 mm/Jahr) zu finden. Diese Bewegungen stimmen sehr gut mit geologischen Studien überein, in denen der Karpatenbogen als Gebiet mit Hebung und die direkt östlich und westlich angrenzenden Focsani- und Brasov-Sedimentationsbecken als absinkende Regionen angesehen werden [TARAPOANCA ET AL. 2003], [BERTOTTI ET AL. 2003].

In den Bereichen nördlich der Trotus Verwerfung und westlich der Intramoesischen Verwerfung schreitet die Aufschiebung der Karpaten auf das Vorland fort [TARAPOANCA ET AL. 2003], was mit den detektierten Hebungen in diesen Bereichen koinzidiert.

Die Hebung der Vrancea-Region deutet auf eine fortschreitende Delaminierung des absinkenden Slab hin [SPERNER ET AL. 2005], [WORTEL U. SPAKMAN 2000]. Numerische Modelle ergaben, dass eine feste Kopplung des Slab ein Absinken sowie dessen vollständige Ablösung eine starke Hebung zur Folge hätten [BERTOTTI ET AL. 2003]. Die moderate Hebung der Region impliziert deshalb eine weiche Kopplung des Slab. Die eigentliche Entspannungsbewegung hat noch nicht eingesetzt, jedoch schnürt

sich die Verbindungstelle zwischen Slab und Kruste immer weiter ein, siehe Abbildung 5.9, was die langsame Hebung zur Folge hat.

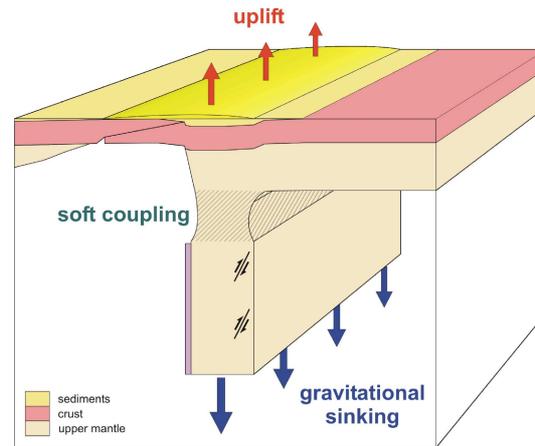


Abb. 5.9: Delaminierung des Slab, Einschnüren der Verbindungsstelle, nach [SPERNER ET AL. 2005]

Die Analyse der in Abbildung 5.7 und 5.8 dargestellten Standardabweichungen führt zu zwei Ergebnissen. Die Genauigkeit der Horizontalgeschwindigkeiten der GPS-Stationen ist gut. Die Vertikalgeschwindigkeiten haben erwartungsgemäß größere Standardabweichungen. Die als letztes eingerichteten Stationen, z. B. in der Nähe des Schwarzen Meeres oder im Transsylvanischen Becken weisen größere Standardabweichungen auf als die anderen Stationen.

In Tabelle 5.4 sind die minimalen, maximalen und durchschnittlichen Standardabweichungen der geschätzten Stationsgeschwindigkeiten zusammengestellt.

Tab. 5.4: Standardabweichungen der GPS-Stationen

	$\sigma_{v_{Nord}}$ [mm/y]	$\sigma_{v_{Ost}}$ [mm/y]	$\sigma_{v_{Hoehe}}$ [mm/y]
minimal	0.17	0.14	0.63
maximal	1.02	0.76	5.59
Durchschnitt	0.53	0.42	2.14

Die Qualität der GPS-Stationen überträgt sich auf das approximiertes Geschwindigkeitsfeld, dessen Genauigkeitsmaße deshalb etwas schlechter werden. Durch die Multilevel B-Spline Approximation erhalten Flächenpunkte in der Nähe einer GPS-Station größere Standardabweichungen als weiter entfernt gelegene Punkte. Durch die Hierarchie der Approximationsgitter und dadurch regionale Begrenzung der Einflussbereiche der GPS-Stationen wird einerseits erreicht, dass sich die Approximationsfläche (das Geschwindigkeitsfeld) regional sehr gut an die vorgegebenen Punkte annähert. Gleichzeitig führt dieser Algorithmus dazu, dass durch die Varianzfortpflanzung öfter berechnete Gitterpunkte in der Nähe der GPS-Stationen deutlich größere Fehlermaße erhalten.

Die minimalen, maximalen und durchschnittlichen Standardabweichungen für das approximiertes Geschwindigkeitsfeld sind in Tabelle 5.5 aufgelistet. Die durchschnittliche Standardabweichung des Ge-

Tab. 5.5: Standardabweichungen des approximierten Geschwindigkeitsfeldes

	$\sigma_{v_{Nord}}$ [mm/y]	$\sigma_{v_{Ost}}$ [mm/y]	$\sigma_{v_{Hoehe}}$ [mm/y]
minimal	0.14	0.11	0.63
maximal	2.38	1.81	10.71
Durchschnitt	0.77	0.61	3.34

schwindigkeitsfeldes ist für die Lagekomponenten ca. 30% und für die Vertikalkomponente ca. 50%

größer als die Durchschnittswerte der GPS-Punkte. Die Maximalwerte werden dort erreicht, wo die GPS-Stationen mit den größten Standardabweichungen liegen, sie sind deshalb akzeptabel.

## 5.4 Abgeleitete Haupt- und Scherdehnungsänderungen

Wie schon in Abschnitt 3.3 und 3.4 vorgestellt, können die Haupt- und Scherdehnung sowohl für den dreidimensionalen als auch den reduzierten zweidimensionalen Deformationstensor berechnet werden. Aufgrund der in Abschnitt 3.1.4 diskutierten, eingeschränkten Verwendbarkeit geodätischer Messsysteme in der Kontinuumsmechanik, sind lediglich die Ergebnisse der zweidimensionalen Strainanalyse im geodynamischen Kontext interpretierbar.

### 5.4.1 Dreidimensionale Dehnungsänderungen

In den Abbildungen 5.10 und 5.11 sind die Haupt- und Scherdehnungsrichtungsänderungen für den dreidimensionalen Deformationstensor dargestellt. Diese Grafiken sind aufgrund der oben erwähnten Problematik wenig aussagekräftig.

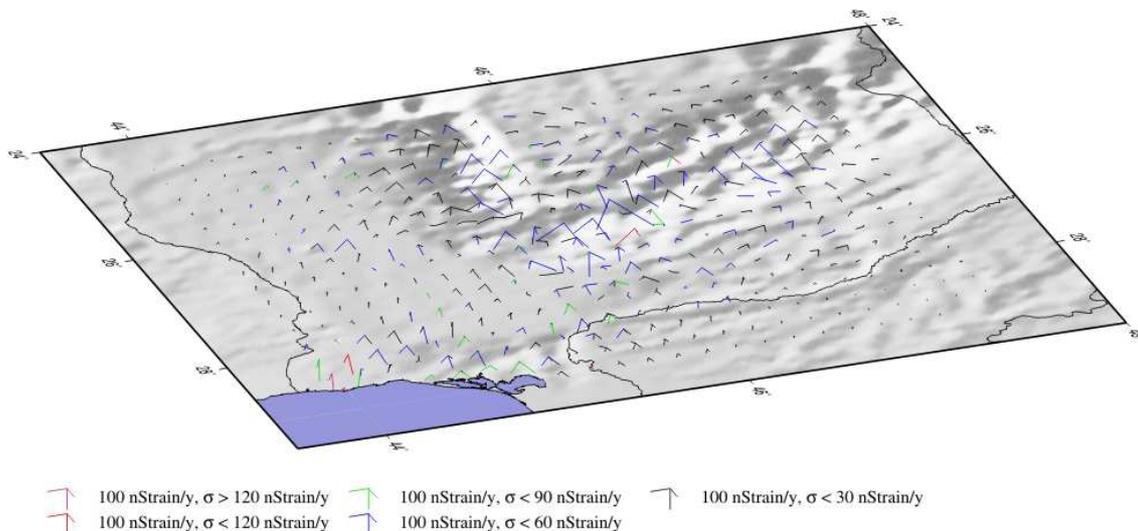


Abb. 5.10: Änderungen der Hauptdehnungsrichtungen der dreidimensionalen Deformationstensoren

Mit der getroffenen Annahme, der Verschiebungsgradient in vertikaler Richtung sei null, können Verschiebungsgradiententensoren gebildet und daraus Deformationstensoren berechnet werden. Jedoch spiegelt dieser Verschiebungsgradient nicht die Realität wieder, was somit auch für den Deformationstensor gilt. Obwohl im Gegensatz zum zweidimensionalen Deformationstensor zusätzliche Informationen in Form von Gradienten der Vertikalgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Lagekoordinaten einfließen, können aus dem dreidimensionalen Deformationstensor keine weiteren Erkenntnisse gewonnen werden.

Die Abbildungen 5.10 und 5.11 sind Versuche, die Änderungen der Hauptdehnungen und Scherdehnungsvektoren zzgl. einer Genauigkeitsinformation darzustellen. Aus den Standardabweichungen der einzelnen Komponenten der darzustellenden Vektoren wird nach dem Prinzip des mittleren Punktfehlers eine Standardabweichung für den Vektor berechnet, auf Basis derer die farbliche Darstellung und somit Klassifizierung erfolgt.

Der Darstellung 5.10 der Hauptdehnungsänderungen kann lediglich entnommen werden, dass die Bereiche des Karpatenbogens und der Schwarzmeerküste schneller und stärker deformiert werden als die

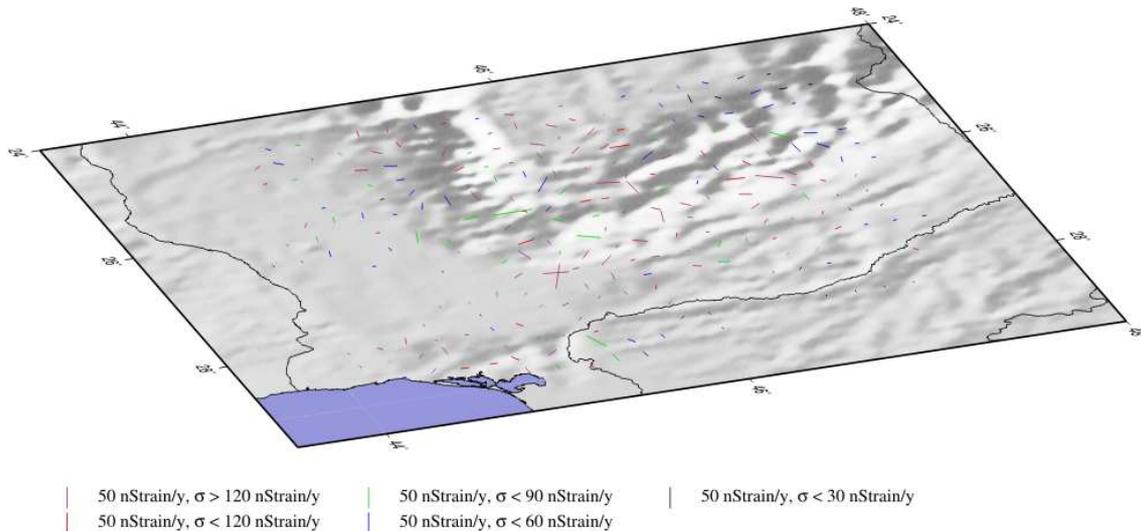


Abb. 5.11: Änderungen der Scherdehnungsvektoren der dreidimensionalen Deformationstensoren

anderen Regionen. Die vergleichsweise großen Vertikalgeschwindigkeiten in diesen Gegenden führen dazu, dass die Hauptdehnungen ebenfalls große Werte in den vertikalen Komponenten aufweisen.

Der Abbildung 5.11 können keine informativen Aussagen über die Veränderung von Scherdehnungen entnommen werden. Es kann nur festgestellt werden, dass bei den Angaben über Scherdehnungsänderungen größere Standardabweichungen auftreten als zu den Hauptdehnungsänderungen. Analog zu Abbildung 5.10 sind die größten Scherdehnungsänderungen im Bereich der Karpaten eingezeichnet.

Es gilt sowohl für die Änderungen der Haupt- als auch für die Scherdehnungen, dass die berechneten Standardabweichungen fast grundsätzlich größer sind als die Dehnungen selbst sind.

## 5.4.2 Horizontale Dehnungsänderungen

Die Änderungen der horizontalen Haupt- und Scherdehnungen beziehen sich auf den reduzierten Deformationstensor und sind in Abbildung 5.12 dargestellt. Die Hauptdehnungen sind als Strainkreuze in Abbildung 5.12 (a) eingezeichnet, wobei positive Hauptdehnungen Extensionen und negative Hauptdehnungen Kompressionen wiedergeben. Die Scherdehnungen werden aufgrund der Symmetrie als Kreuze dargestellt.

Große Dehnungsänderungen werden für Bereiche detektiert, in denen sich die Geschwindigkeitsvektoren stark unterscheiden. Derartige Bereiche sind die Südostspitze des Karpatenbogens, für die Kompressions- und Extensionsänderungen mit bis zu ca. 150 nStrain/Jahr<sup>6</sup> angezeigt werden, und die Region südlich der Trotus-Verwerfung mit Extensionen über 100 nStrain/Jahr.

Im nördlichen Teil der Karpaten sowie nördlich der Bistrita-Verwerfung treten vorwiegend Kompressionen mit bis zu 100 nStrain/Jahr auf. Änderungen der Scherdehnungen mit ähnlichen Größenordnungen sind für die gleichen Gebiete festzustellen. In den anderen Bereichen sind die Horizontalgeschwindigkeitsvektoren sehr klein sowie annähernd gleich ausgerichtet, wodurch keine signifikanten Dehnungen entstehen können.

Die Standardabweichungen der berechneten Dehnungsänderungen bewegen sich größtenteils im gleichen Wertebereich wie die Strainraten selbst. Sie sind in Abbildung 5.12 als farbige Fläche den Strainkreuzen unterlegt.

In der Detaildarstellung 5.13 sind exemplarisch für ein Strainkreuz die Hauptdehnungen mit den entsprechenden Genauigkeiten eingezeichnet.

<sup>6</sup> 1 nStrain/Jahr  $\hat{=}$  1 ppb/Jahr

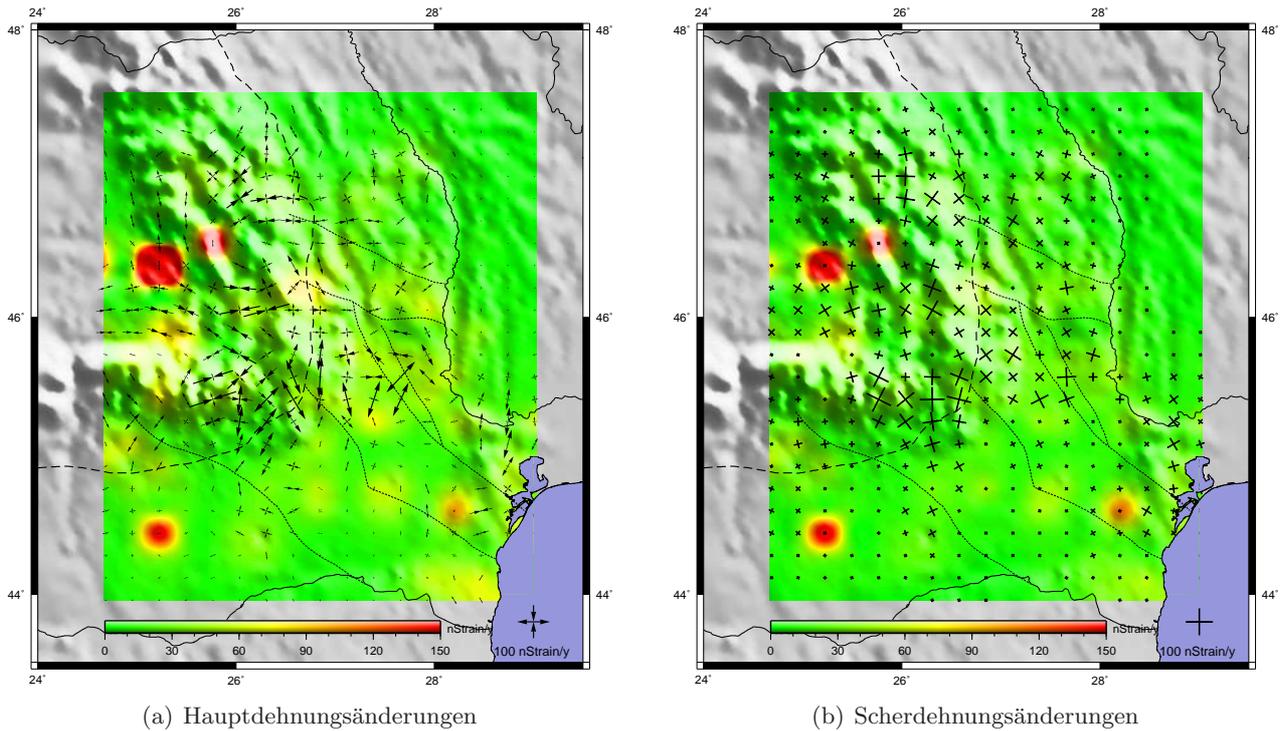


Abb. 5.12: Änderungen der Haupt- und Scherdehnungen der zweidimensionalen Deformationstensoren

Die farbigen Sektoren geben die Bereiche wieder, innerhalb derer die ermittelten Hauptdehnungen variieren können. Nach dem Prinzip des mittleren Punktfehlers wird aus den Standardabweichungen ( $\sigma_{\lambda_1}$ ,  $\sigma_{\lambda_2}$ ,  $\sigma_{\varphi}$  in Abbildung 5.13) der beiden Hauptdehnungen und des Azimuts eine Standardabweichung für das Strainkrenz berechnet.

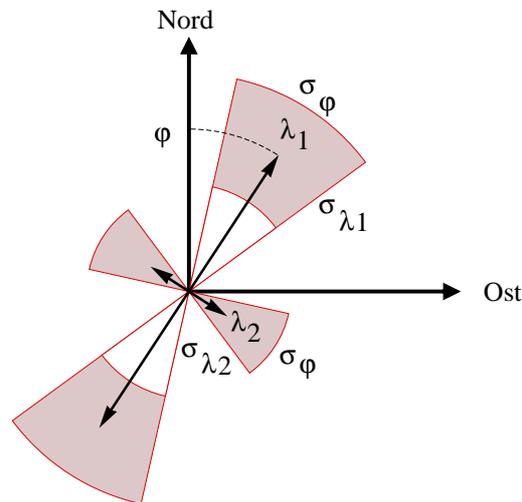


Abb. 5.13: Beispiel für Hauptdehnungen mit Standardabweichungen:  $\lambda_1 = 106.2 \pm 36.3$  nStrain/Jahr,  $\lambda_2 = 29.7 \pm 37.5$  nStrain/Jahr, Azimut  $\varphi = 33.0999^\circ \pm 20.4798^\circ$

Das Muster der Farbflächen in Abbildung 5.12 ähnelt stark den Darstellungen für die Standardabweichungen des Geschwindigkeitsfeldes (Abbildung 5.7 und 5.8 (b)). Da sämtliche Berechnungen auf das gleiche Approximationsgitter zurückzuführen sind, welches wiederum auf den unterschiedlich genauen GPS-Stationen beruht, sind die Bereiche höherer und niedrigerer Genauigkeit stets die selben.

### 5.4.3 Dehnungen an den Verwerfungen

Für die Analyse der Plattengrenzen werden die Strainraten für Punkte bestimmt, die den Verlauf der Hauptverwerfungen aus Abbildung 5.3 wiedergeben. Es können dabei lediglich die Verformungen in der Horizontalen untersucht werden.

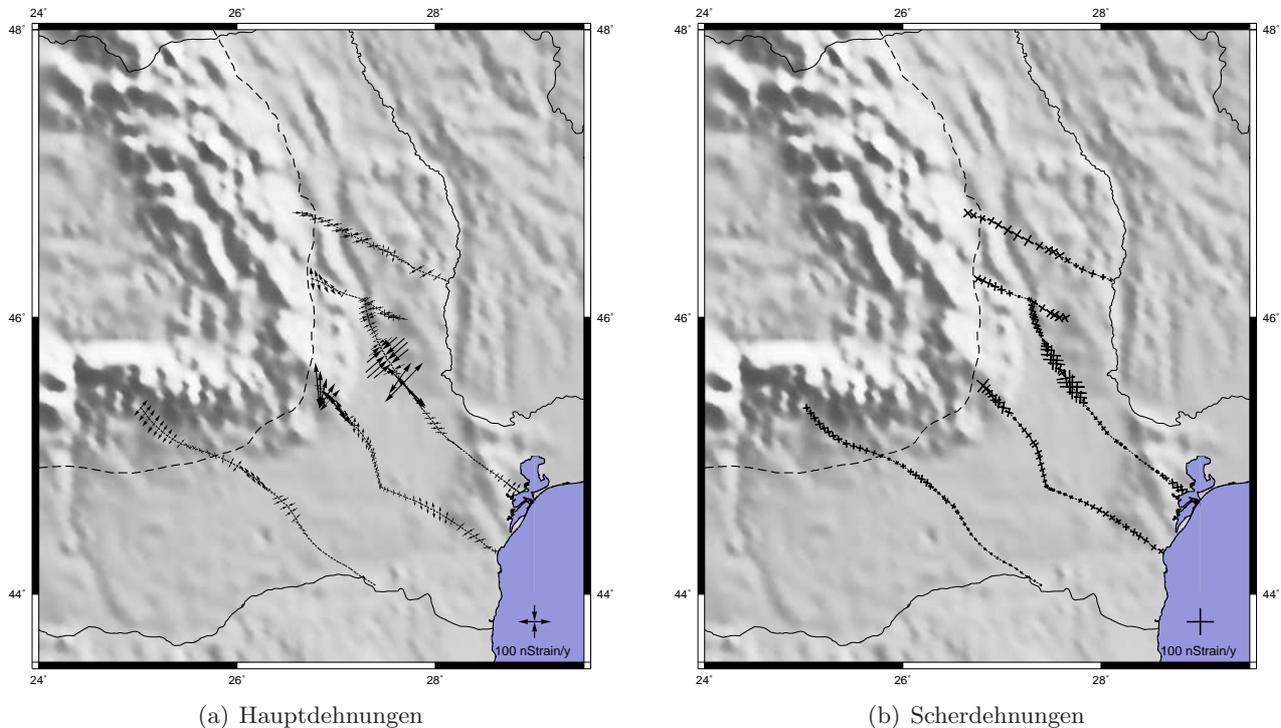


Abb. 5.14: Haupt- und Scherdehnungen an den Hauptverwerfungen

Inwieweit durch die Verwerfungen Bereiche ungleicher Horizontalbewegung separiert sein könnten, stellt das horizontale Geschwindigkeitsfeld (Abbildung 5.7) dar. Durch die eingezeichneten Verwerfungen sind jedoch keine Bereiche mit unterschiedlichem Bewegungsverhalten voneinander getrennt. Einzig für die Bistrita-Verwerfung könnte vermutet werden, dass sich die Region nördlich der Verwerfung schneller westwärts bewegt als die südlich gelegene Scythische Platte.

Dass Bereiche unterschiedlicher Vertikalbewegung durch die Verwerfungen separiert werden, lässt sich in der Darstellung des vertikalen Geschwindigkeitsfeldes (Abbildung 5.8) ebenfalls nicht erkennen.

Die Änderungen der Haupt- und Scherdehnungen für die Verwerfungen sind in Abbildung 5.14 dargestellt.

Die größten Deformationsänderungen mit ca. 150 nStrain/Jahr werden für den nordwestlichen Teil der Peceneaga-Camena Verwerfung detektiert. Hier liegen zwei Bereiche starker Kompression und Extension senkrecht zur Verwerfungsrichtung in unmittelbarer Nachbarschaft. Die Scherdehnungen müssen deshalb in einem Winkel von  $45^\circ$  gegenüber der Verwerfung auftreten.

Die westlichen Enden der Capidavia-Ovidiu Verwerfung und der Intramoesischen Verwerfung sind ebenfalls Bereiche, in denen Extensionen mit ca. 100 nStrain/Jahr auftreten.

Markante Scherdehnungsraten mit ca. 70-80 nStrain/Jahr in Verwerfungsrichtung sind für die Westhälfte der Bistrita Verwerfung eingezeichnet. Ebenso sind für die Trotus Verwerfung Scherdehnungen in Verwerfungsrichtung bestimmbar.

## 6. Reduzierte Kovarianzmatrizen

Die Approximation des Geschwindigkeitsfeldes mit Varianzfortpflanzung ist sehr rechenintensiv. Das drückt sich einerseits durch eine längere Rechenzeit aus. Zum anderen muss beim Programmdurchlauf immer mehr Speicher akquiriert werden, damit die Kovarianzmatrizen berechnet werden können.

Aus diesem Grund sind Testberechnungen durchgeführt worden, bei der jeweils nur Varianzen, also nur die Hauptdiagonalelemente der Kovarianzmatrix, verarbeitet werden. In Tabelle 6.1 sind die Rechenzeiten für die drei Berechnungsvarianten „Ohne Varianzfortpflanzung“, „vollständige Kovarianzmatrix“ und „Diagonalmatrix“ gegenübergestellt. Eine deutliche Zeitersparnis bei der Variante

Tab. 6.1: Vergleich der Rechenzeiten

Berechnungsvariante	Rechenzeit
ohne Varianzfortpflanzung	ca. 3 Sekunden
Diagonalmatrix	ca. 40 Sekunden
vollbesetzte Kovarianzmatrix	ca. 60 Minuten

mit Diagonalmatrix gegenüber der Version mit vollständiger Kovarianzmatrix ist ablesbar. Infolge der in Abschnitt 4.2.1 bereits beschriebenen Größe der Funktional- und Kovarianzmatrizen für die Varianzfortpflanzung werden ab einer entsprechenden Verdichtungsstufe des Approximationsgitters sehr große Matrizen erstellt. In der Tabelle 6.2 ist der Speicherbedarf (Matrizelemente sind vom Typ *double*, Speicherbedarf eines Elements: 8 Byte) für verschiedene Kontrollgitter  $\Phi$  aufgelistet. Der tatsächliche

Tab. 6.2: Speicherbedarf eines Kontrollgitters mit vollbesetzter Kovarianzmatrix

Kontrollgittergröße	Gitter-Vektor $\Phi$		Kovarianzmatrix $\mathbf{Q}_{\phi\phi}$	
	Größe	Speicher	Größe	Speicher
$4 \times 4$	$48 \times 1$	384 Byte	$48 \times 48$	18 kByte
$5 \times 5$	$75 \times 1$	600 Byte	$75 \times 75$	44 kByte
$7 \times 7$	$147 \times 1$	1176 Byte	$147 \times 147$	169 kByte
$11 \times 11$	$363 \times 1$	2904 Byte	$363 \times 363$	1029 kByte
$19 \times 19$	$1083 \times 1$	8.5 kByte	$1083 \times 1083$	9 MByte
$35 \times 35$	$3675 \times 1$	28.7 kByte	$3675 \times 3675$	103 MByte
$67 \times 67$	$13467 \times 1$	105 kByte	$13467 \times 13467$	1384 MByte

Speicherbedarf ist jedoch mehr als das Dreifache. Der Grund dafür ist, dass bei der Multilevel B-Spline Approximation in jeder Verdichtungsstufe mit drei einzelnen Gittern  $\Psi$ ,  $\Psi'$  und  $\Phi$  (siehe Abschnitt 2.3.2) operiert wird, zzgl. der Datenpunkte mit entsprechender Kovarianzmatrix. Der hohe Speicherbedarf führt unter Umständen zu einem Absturz des entwickelten Java-Programms. Ursache dafür ist die Java-interne Limitierung für die Speicher-Akquise auf 1024MByte.

Wird jedoch eine Diagonalmatrix mit den Varianzen verwendet, benötigt diese den gleichen geringen Speicherplatz wie das Kontrollgitter selbst.

Tab. 6.3: Standardabweichungen des approximierten Geschwindigkeitsfeldes bei Varianzfortpflanzung mit Diagonalmatrix

	$\sigma_{v_{Nord}}$ [mm/y]	$\sigma_{v_{Ost}}$ [mm/y]	$\sigma_{v_{Hoehe}}$ [mm/y]
minimal	0.01	0.01	0.04
maximal	1.23	0.92	4.94
Durchschnitt	0.18	0.14	0.74

Die Auswirkung der Verwendung von Diagonalmatrizen anstelle von vollbesetzten Kovarianzmatrizen bei der Varianzfortpflanzung ist in Tabelle 6.3 und Abbildung 6.1 dokumentiert. Die berechneten Standardabweichungen sind deutlich kleiner als bei der Varianzfortpflanzung mit vollständiger Kovarianzmatrix, die Durchschnittswerte entsprechen ca. einem Fünftel der Werte in Tabelle 5.5.

In Abbildung 6.1 wird ähnliches veranschaulicht wie in den Abbildungen 5.7 und 5.8. Den Flächenpunkten in der Nähe der GPS-Stationen sind größere Fehlermaße zugeordnet als den weiter entfernten Punkten. Jedoch wirken die Fehlerellipsen in 6.1 (a) und die Farbfläche in 6.1 (b) herabskaliert.

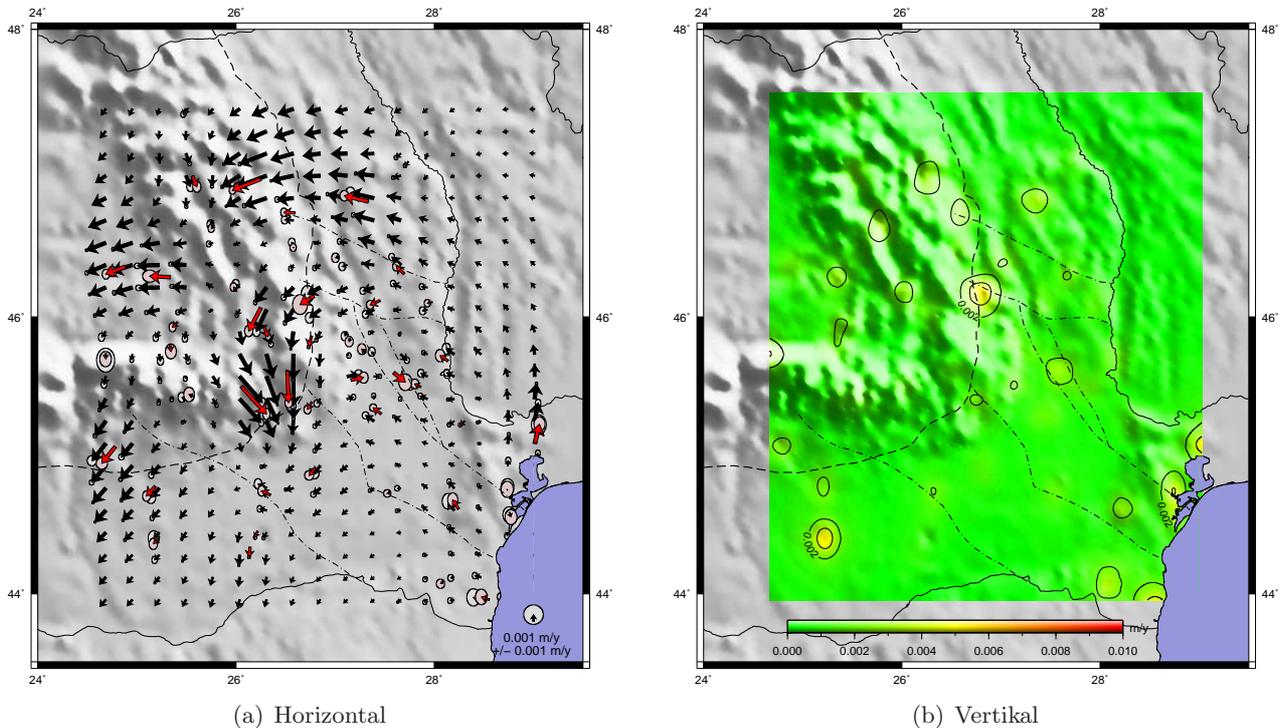


Abb. 6.1: Standardabweichungen nach Varianzfortpflanzung mit Diagonalmatrix: (a) Vektoren der Horizontalgeschwindigkeiten mit Standardabweichungen; (b) Standardabweichungen der Vertikalgeschwindigkeiten, letztere sind die selben wie in Abbildung 5.8

Die Ursache der vermeintlich höheren Genauigkeit der Ergebnisse liegt darin begründet, dass während des Approximationsalgorithmus sämtliche Korrelationen zwischen den Punkten eines Kontrollgitters unterdrückt werden. Durch die hierarchische Strukturierung bei der Multilevel B-Spline Approximation basieren alle Kontrollpunkte der Splinefläche letztendlich auf dem  $4 \times 4$ -Gitter, mit dem der Algorithmus gestartet wurde. Diese 16 Punkte sind hoch korreliert, da sie alle aus den selben Datenpunkten abgeleitet sind. Bei der Ableitung der feineren Kontrollgitter aus diesen 16 Punkten muss auch diese Korrelation übertragen werden.

Die Varianzfortpflanzung mit der reduzierten Kovarianzmatrix ermöglicht einen entscheidenden Gewinn bezüglich der Rechenzeit und des Speicherbedarfs. Sie führt aber auch dazu, dass die berechneten Genauigkeitsmaße in unrealistisch kleinen Größenordnungen liegen.

Daher ist von dieser Berechnungsvariante abzuraten und trotz der längeren Rechenzeit und des enormen Speicherbedarfs die Durchführung der Varianzfortpflanzung mit vollständiger Kovarianzmatrix zu empfehlen.

## 7. Beurteilung der Modelle und Algorithmen

Mit dem entwickelten Verfahren, Bestimmung einer B-Spline-Approximationsfläche zur anschließenden Ableitung von Deformationen bei implementiertem Varianzfortpflanzungsgesetz, können neue Erkenntnisse über das Bewegungs- und Deformationsverhalten des rumänischen Untersuchungsgebietes gewonnen werden.

Bei der Berechnung eines Geschwindigkeitsfeldes auf Basis von ca. 50 Stationen in einem  $400 \times 600$  km großen Gebiet werden starke Vereinfachungen vorgenommen. Sehr regional begrenzte Bewegungen werden möglicherweise nicht erfasst. Ebenso kann die Verschiebung einer GPS-Station lokale Ursachen haben, die nicht bekannt sind. Aus dem vorhandenen geringen Datenmaterial muss eine möglichst reale Beschreibung des Bewegungsverhaltens der untersuchten Regionen abgeleitet werden. Das bedeutet, dass das Geschwindigkeitsfeld durch eine bestanpassende Approximationsfläche erzeugt werden muss, um den Grad der Generalisierung nicht noch weiter zu erhöhen.

### 7.1 Approximation des Geschwindigkeitsfeldes

Die Multilevel B-Spline Approximation hat sich als ein geeignetes Verfahren zur Approximation oder Interpolation unregelmäßig verteilter Daten erwiesen. Die Vorteile des Verfahrens wurden bereits in Abschnitt 2.3.4 zusammengetragen.

Durch die Möglichkeit der simultanen Approximation mehrerer Funktionswerte der Datenpunkte ist das Verfahren besonders geeignet, um Geschwindigkeitsfelder zu generieren. Da die Algorithmen nicht limitiert sind hinsichtlich der Dimensionen  $\mathbb{R}^d$  der Definitions- und Wertebereiche der Datenpunkte, bietet sich das Verfahren für weitere Anwendungsgebiete an, beispielsweise der räumlichen Interpolation von Temperaturfeldern.

Eine Einschränkung der Einsetzbarkeit der Multilevel B-Spline Approximation erfolgt durch die Varianzfortpflanzung. Wird diese auf korrekte Weise mit vollständigen Kovarianzmatrizen durchgeführt, können Speicherprobleme auftreten und es müssen vergleichsweise lange Rechenzeiten in Kauf genommen werden. Hier wirkt sich der Vorteil der Mehrdimensionalität nachteilig aus, da durch die Dimension  $d$  des Wertebereiches die Anzahl der Zeilen und Spalten der Kovarianzmatrizen um den Faktor  $d$  vergrößert wird.

Die Informationen über die Genauigkeit der Datenpunkte wird durch die Varianzfortpflanzung bei dem bestehenden Verfahren auf die Flächenpunkte lediglich übertragen. Hier bietet sich Potential für eine Erweiterung des Algorithmus. Bisher ist der Einfluss eines Punktes in den Berechnungen nur durch seinen Abstand zum Neupunkt bestimmt. Rationale B-Splines, wie bei den NURBS-Flächen in Abschnitt 2.2.4, ermöglichen weitere Gewichtungen, die auf Basis der Standardabweichungen oder Varianzen erfolgen könnten.

### 7.2 Strainanalyse

Die Modelle der Linearen Theorie der Kontinuumsmechanik sind in der Geodäsie seit längerem Standard für die Bestimmung von Verformungen eines Untersuchungsobjektes. Aus den Verschiebungsvektoren der Objektpunkte kann die Deformation des Körpers abgeleitet und durch die Haupt- und Scherdehnungen beschrieben werden. In geodynamischen Anwendungen sind vorwiegend die zeitlichen Dehnungsänderungen von Interesse. Diesem Umstand wurde aufgrund des zur Verfügung stehenden Datenmaterials direkt Rechnung getragen. Da in die Berechnungen bereits zeitliche Verschiebungsänderungen einfließen, sind auch die Resultate zeitliche Änderungen.

Durch die Implementierung der Varianzfortpflanzung ist eine Beurteilung hinsichtlich der Genauigkeit der abgeleiteten Dehnungsänderungen möglich. Die Genauigkeitsmaße der Dehnungsänderungen bewegen sich in der gleichen Größenordnung, wie die Dehnungen selbst. Das spiegelt die mathematische Korrektheit der angewandten Formeln der Kontinuumsmechanik wieder.

Dennoch sind die erhaltenen Ergebnisse kritisch zu beurteilen. Im Folgenden sind die nachteiligen Aspekte zusammengefasst:

- i. Die auf die Oberfläche begrenzte räumliche Verteilung der Messpunkte führt generell dazu, dass nur horizontale Dehnungen und Dehnungsänderungen korrekt bestimmbar sind.
- ii. Die Anzahl der Stationen im Überwachungsnetz des Untersuchungsgebietes ist viel zu gering, um die Bewegungen und Verformungen der tektonischen Einheiten vollständig zu erfassen.
- iii. Detaillierte Untersuchungen der Verwerfungen würden eine Vielzahl von Messpunkten in deren unmittelbarer Nähe erfordern.
- iv. Die Messwerte selbst, d. h. die geschätzten Geschwindigkeiten der GPS-Stationen, bewegen sich im Bereich von 0-5 mm/Jahr mit Standardabweichungen der gleichen Größenordnung. Diese äußerst kleinen Punktbewegungen können nur sehr kleine Deformationen verursachen.

Eine Beurteilung der berechneten Dehnungsänderungen sollte nur qualitativ erfolgen, da bei Betrachtung der ermittelten Standardabweichungen die Orientierung und Skalierung der Strainkreuze sehr veränderlich ist. Sichere Aussagen lassen sich nur dahingehend treffen, dass Bereiche mit größeren Deformationen von Regionen mit geringen bis keinen Deformationen unterschieden werden können.

Dreidimensionale Strainanalysen sind und bleiben problematisch solange keine geeigneten Aussagen über Bewegungen unterhalb der Erdoberfläche, auf Basis von Messungen oder Modellierungen, zur Verfügung stehen. In Abschnitt 3.1.4 wurden bereits Möglichkeiten erwähnt, wie für die Oberfläche 3D-Deformationen bestimmt werden können.

Der in [RAWIEL 2001] angeregte Einsatz rheologischer Modelle zur Modellierung der Bewegungen im Inneren eines Rutschhanges erscheint ebenfalls vielversprechend. Das Hauptproblem dabei wäre die Beschreibung der Materialeigenschaften des deformierten Objektes. Die Untersuchung zur Übertragbarkeit derartiger rheologischer Modellansätze auf die Plattentektonik bietet viel Forschungspotential.

### 7.3 Empfehlungen für zukünftige Projekte

Aufgrund der erhaltenen Ergebnisse in dieser Arbeit können Empfehlungen und Forderungen formuliert werden, die in die Planung und Durchführung zukünftiger Projekte mit vergleichbarem Forschungsschwerpunkt einfließen sollten. Die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes eines Untersuchungsgebietes mit anschließender Strainanalyse erfordert ein bestmögliches Datenmaterial, wie z. B. Bewegungsraten diskreter Punkte. Vor dem geodätischen Hintergrund dieser Arbeit wird durch die Empfehlungen deshalb auf eine qualitative Verbesserung des geodätisch bestimmten Datenmaterials abgezielt.

Grundsätzlich stellt sich das Problem, ein geeignetes Beobachtungsverfahren zu wählen, wenn Bewegungen der Erdoberfläche möglichst hochauflösend erfasst werden sollen. Neben dem Verfahren der SAR-Interferometrie bieten sich dafür nur die GNSS-Verfahren an. Neben der fortschreitenden Verdichtung der Permanentstationsnetze werden auch in Zukunft weiterhin epochale Messungen in kleinräumigen Überwachungsnetzen notwendig bleiben, wenn ein Untersuchungsgebiet mit einer Vielzahl von Messpunkten überdeckt sein soll. Generell sollten möglichst viele permanent betriebene Stationen in das Überwachungsnetz integriert sein, da nur durch sie periodisches Bewegungsverhalten detektierbar ist.

Im Hinblick auf die Bestimmung von Geschwindigkeitsfeldern und Verformungen tektonischer Einheiten können folgende Forderungen für Planung, Durchführung und Auswertung von GNSS-Messkampagnen aufgestellt werden:

- i. vollständige Konzeption des Stationsnetzes zu Beginn des Projektes, um spätere Netzverdichtungen möglichst zu vermeiden,
- ii. zweckmäßige Vermarkung der Punkte an Standorten, die aus geologischen und geodätischen Aspekten geeignet sind,
- iii. Positionierung von Messpunkten in ausreichender Anzahl an den Rändern der tektonischen Einheiten,
- iv. Festlegen eines Geräte-Pools mit einer angemessenen Anzahl von identischen Messausrüstungen, der für alle Messkampagnen zur Verfügung steht,
- v. Besetzung der Beobachtungspunkte ausschließlich mit der selben Messausrüstung in allen Messkampagnen,
- vi. identische Beobachtungs- bzw. Besetzungspläne für die Stationen in allen Messkampagnen,
- vii. Festlegung eines zweckmäßigen und konsistenten Referenzrahmens,
- viii. redundante Datenauswertung,

Durch Berücksichtigung dieser Empfehlungen sollten Unstetigkeiten in den Zeitreihen der Beobachtungspunkte vermeidbar sein, d. h. sprunghafte Veränderungen der berechneten Stationskoordinaten sollten nicht auftreten.

Als Basis für alle Deformationsanalysen sollten die Zeitreihen der Permanentstationsnetze verwendet werden, in welche die epochalen Messkampagnen zu integrieren sind.

Des weiteren sollte ein Schwerpunkt in geodynamischen Forschungsprojekten zukünftig auch auf die Erfassung bzw. Modellierung der Bewegungsabläufe unter der Erdoberfläche gelegt werden.

## 8. Zusammenfassung

Für die vorliegende Arbeit wurde ein Approximationsverfahren aus der Computergraphik mit den Theorien der Kontinuumsmechanik und Varianzfortpflanzung kombiniert, um eine umfassende Analyse der dreidimensionalen Plattenkinematik Rumäniens durchzuführen.

Aufbauend auf den Ergebnissen der geodätischen Deformationsanalyse des GPS-Überwachungsnetzes, den linearen Geschwindigkeiten diskreter Punkte, wurde mit Hilfe von B-Spline-Flächen ein dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld berechnet. Das zu lösende Approximationsproblem bestand darin, aus den Daten ungleichmäßig verteilter, diskreter Punkte analytische Beschreibungen von kontinuierlichen Approximationsflächen abzuleiten. Es wurden verschiedene Verfahren des CAGD diskutiert und mit der Multilevel B-Spline Approximation ein sehr geeignetes Werkzeug zur Lösung des Problems eingesetzt. Durch die Implementierung des Varianzfortpflanzungsgesetzes konnte die Genauigkeit der diskreten Punkte auf das approximierte Geschwindigkeitsfeld übertragen werden.

In der linearen Theorie der Kontinuumsmechanik muss die funktionale Beschreibung der Bewegung des Kontinuums hinreichend oft differenzierbar sein, was bei der Wahl der B-Spline Approximation ein wichtiges Kriterium darstellte. Auf Basis des kontinuierlichen Geschwindigkeitsfeldes konnten die resultierenden Verformungen berechnet und die Haupt- und Scherdehnungen visualisiert werden. Um letztere hinsichtlich ihrer Aussagekraft beurteilen zu können, war auch hier das Varianzfortpflanzungsgesetz anzuwenden.

In der Arbeit wurden entsprechend den in Kapitel 1.1 der Einleitung definierten Zielen drei Themenbereiche unterschieden. Der Übergang von diskreten Punkten zur Kontinuumsfläche ist Gegenstand des Abschnittes 2. Die Ableitung von Verformungen des Kontinuums behandelt Kapitel 3. Dem dritten Aufgabenbereich, der Varianzfortpflanzung, ist Abschnitt 4 gewidmet. Für alle drei Themenbereiche wurden zu Beginn die theoretischen Grundlagen aufbereitet und anschließend deren Applikation vorgestellt.

Die Anwendung der vorgestellten Algorithmen auf die Daten des GPS-Überwachungsnetzes ermöglichte die Analyse des Bewegungsverhaltens der tektonischen Einheiten Rumäniens in Abschnitt 5. Im approximierten Geschwindigkeitsfeld konnten Bereiche signifikanter Verschiebungen detektiert werden. Die erhaltenen Vertikalbewegungen stimmen mit den geologischen Erkenntnissen überein. Ebenso stützen sie das geodynamische Modell der fortschreitenden Delaminierung des subduzierten Slab.

Aus dem reduzierten Deformationstensor, der letztendlich auf die Horizontalgeschwindigkeiten zurückführbar ist, konnten die Bereiche starker horizontaler Kompressionen, Extensionen und Scherungen bestimmt werden. Die Verformungen treten nur dort auf, wo unterschiedliches Bewegungsverhalten für die Oberfläche festgestellt wurde. Durch die Analyse der Standardabweichungen der Haupt- und Scherdehnungen konnte deren Genauigkeit verdeutlicht werden.

Die im Abschnitt 6 vorgestellte Varianzfortpflanzung mit auf die Hauptdiagonale reduzierter Kovarianzmatrix hat sich als ungeeignet erwiesen. Die errechneten Varianzen bzw. Standardabweichungen waren unrealistisch klein. Dieser Nachteil konnte auch nicht durch deutliche Vorteile bezüglich Rechenzeit und Speicherbedarf kompensiert werden.

Zusammenfassend können die gesteckten Ziele als erreicht erachtet werden. Ein geeignetes Verfahren zur Berechnung von Approximationsflächen konnte mit den Modellen der Kontinuumsmechanik verknüpft werden. Durch Einbindung der Varianzfortpflanzung sind die Ergebnisse qualitativ beurteilbar, jedoch sind dabei vollständige Kovarianzmatrizen einzusetzen.

## Dank

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Günter Schmitt für die Übernahme des Hauptreferats und seine Betreuung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. rer. nat. G. Alefeld danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Ebenso bedanke ich mich bei Herrn Prof. Prautzsch und Herrn Dr.-Ing. Dinter für die wertvollen Anregungen und Diskussionen zu Beginn dieser Arbeit. Ein herzlicher Dank gebührt Herrn Dr.-Ing. Kupferer und Herrn Dr.-Ing. Frevert für ihre Mühe beim Korrekturlesen meiner Arbeit.

Ganz besonders danke ich meiner Frau Alexandra, die mich während der Arbeit mit viel Geduld und Verständnis unterstützt hat.

## Literaturverzeichnis

- [ABELE 2001] **Abele, M.:** *Approximation von unregelmäßig verteilten Daten im  $\mathbb{R}^3$  durch Bezier-Spline-Flächen*, Diplomarbeit, Geodätisches Institut, Universität Karlsruhe, Karlsruhe, 2001
- [ALTINER 1996] **Altiner, Y.:** *Geometrische Modellierung innerer und äußerer Deformationen der Erdoberfläche*, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 462, Verlag des Instituts für angewandte Geodäsie, Frankfurt am Main, 1996
- [AUMANN U. SPITZMÜLLER 1993] **Aumann, G.; Spitzmüller, K.:** *Computerorientierte Geometrie*, Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus, Mannheim, 1993
- [BECKER ET AL. 1985] **Becker, J.; Haacke, W.; Nabert, R.; Dreyer, H.-J.:** *Numerische Mathematik für Ingenieure*, Teubner, Stuttgart, 1985
- [BECKER ET AL. 2001] **Becker, M.; Carporali, A.; Figursky, M.; Grenerczy, G.; Kenyeres, A.; Hefty, J.; Marjanovic, M.; Stangl, G.:** *A Regional ITRF Densification by Blending Permanent and Campaign Data - The CEGRN Campaigns and the Central European Velocity Field*, Proc. IAG 2001 Scientific Assembly, Budapest, Ungarn, 02.-07.09.2001
- [BECKER ET AL. 2003] **Becker, J.; Kirchner, M.; Grenrczy, G.:** *Creation of new permanent observation facilities in CEI countries - Network design ans permanentstation configuration*, Reports on Geodesy 3(66), Warschau, 2003, S. 45-53
- [BERKHAHN 2005] **Berkhahn, V.:** *Geometrische Modellierung in der Bauinformatik*, Habilitationsschrift, Shaker-Verlag, Aachen, 2005
- [BERTOTTI ET AL. 2003] **Bertotti, G.; Matenco, L.; Cloetingh, S.:** *Vertical movements in and around the south-east Carpathian foredeep: lithospheric memory and stress field control*, Terra Nova, Vol. 15, 2003, S. 299-305
- [BETTEN 1993] **Betten, J.:** *Kontinuumsmechanik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993
- [BICEGO ET AL. 2003] **Bicego, M.; Iacono, G.; Murino, V.:** *Face Recognition with Multilevel B-Splines and Support Vector Machines*, Proc. of the 2003 ACM SIGMM Workshop on Biometrics Methods and Applications, 2003, S. 17-24
- [DE BOOR 1972] **de Boor, C.:** *On calculating with B-Splines*, Journal of Approximation Theory, 6, 1972, S. 50-62
- [DE BOOR 1978] **de Boor, C.:** *A practical guide to splines*, Springer-Verlag, New York, 1978
- [DE BOOR 1993] **de Boor, C.:** *B(asic)-spline basics*, in: Piegl, L.: *Fundamental Developments of Computer Aided Geometric Modeling*, Academic Press, 1993, S. 27-49
- [BOWEN 1989] **Bowen, R. M.:** *Introduction to Continuum Mechanics for Engineers*, Plenum Press, New York, London, 1989
- [BRONSTEIN U. SEMENDJAJEW 1996] **Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A.:** *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*, Hrsg. von E. Zeidler, Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1996
- [BUHMANN 2000] **Buhmann, M. D.:** *Radial Basis Functions*, Acta Numerica, 2000, S. 1-38

- [CAI 2004] **Cai, J.:** *Statistical Inference of the Eigenspace Components of a Symmetric Random Deformation Tensor*, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 577, 2004
- [CAI ET AL. 2005] **Cai, J.; Grafarend, E. W.; Schaffrin, B.:** *Statistical inference of the eigenspace components of a two-dimensional, symmetric rank-two random tensor*, Journal of Geodesy, 78, 2005, S. 425-436
- [CARDANO 1993] **Cardano, G.:** *Ars Magna or the Rules of Algebra*, Dover Publications Inc., New York, 1993
- [CAROSIO 1999] **Carosio, A.:** *Fehlertheorie und Ausgleichsrechnung*, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Department Geodätische Wissenschaften, Band 1, 1999
- [CASPARY U. WICHMANN 1994] **Caspary, W.; Wichmann, K.:** *Lineare Modelle*, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1994
- [CHALOT-PRA U. GIRBACEA 2000] **Chalot-Pra, F.; Girbacea, R.:** *Partial delamination of continental mantle lithosphere, uplift-related crust-mantle decoupling, volcanism and basin formation: a new model for the Pliocene-Quaternary evolution of the southern East-Carpathians, Romania*, Tectonophysics, 327, 2000, S. 83-107
- [CLOETINGH ET AL. 2004] **Cloetingh, S.; Burov, E.; Matenco, L.; Toussaint, G.; Bertotti, G.; Andriessen, P. A. M.; Wortel, M. J. R.; Spakman, W.:** *Thermo-mechanical controls on the mode of continental collision in the SE Carpathians (Romania)*, Earth and Planetary Science Letters, 218, 2004, S. 57-76
- [COX 1972] **Cox, M. G.:** *The Numerical Evaluation of B-Splines*, Journal of the Institute of Mathematics and its Applications, Vol. 10, 1972, S. 134-149
- [DINTER U. SCHMITT 2001] **Dinter, G.; Schmitt, G.:** *Three Dimensional Plate Kinematics in Romania*, Natural Hazards, Vol 23, 2001, S. 389-406
- [DINTER 2002] **Dinter, G.:** *Generalisierte Orthogonalzerlegungen in der Ausgleichsrechnung*, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 559, 2002
- [DREWES U. HEIDBACH 2004] **Drewes, H.; Heidbach, O.:** *Deformation of the South American Crust estimated from Finite Element and Collocation Methods*, in: Sanso, F. (ed.): *A Window on the Future of Geodesy*, International Association of Geodesy Symposia 128, Springer-Verlag, Berlin, 2004, S. 296-301
- [DROBNIEWSKI 2005] **Drobniewski, M.:** *Integration geodätischer und geotechnischer Beobachtungen und Strukturinformationen für eine 3D-Strainanalyse*, Freiburger Dissertationen On-line, 2005
- [DUCHON 1975] **Duchon, J.:** *Splines Minimizing Rotation-Invariant Semi-Norms in Sobolov Spaces*, in: Chui, C.; Schumaker, L., Ward, J. (eds.): *Multivariate Approximation Theory*, Birkhauser, Basel, 1975, S. 85-100
- [ENGELN-MÜLLGES ET AL. 2005] **Engeln-Müllges, G.; Niederdrenk, K.; Wodicka, R.:** *Numerik-Algorithmen*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005
- [FARIN 1994] **Farin, G.:** *NURB curves and surfaces: from projective geometry to practical use*, A K Peters Ltd., Wellesley, 1994
- [FARIN 1997] **Farin, G.:** *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, 1997

- [FORSEY U. BARTELS 1988] **Forsey, D. R.; Bartels, R. H.:** *Hierarchical B-Spline Refinement*, Computer Graphics, Vol. 22, Nr. 4, 1988, S. 205-212
- [FORSEY U. BARTELS 1995] **Forsey, D. R.; Bartels, R. H.:** *Surface Fitting with Hierarchical Splines*, ACM Transactions on Graphics, Vol. 14, Nr. 2, 1995, S. 134-161
- [FRANKE U. NIELSON 1980] **Franke, R.; Nielson, G. M.:** *Smooth Interpolation of Large Sets of Scattered Data*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, Vol.15, 1980, S. 1691-1704
- [FRANKE 1982] **Franke, R.:** *Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods*, Mathematics of Computation, Vol. 38, Nr. 157, 1982, S. 181-200
- [FRANKE U. NIELSON 1991] **Franke, R.; Nielson, G. M.:** *Scattered Data Interpolation and Applications: A Tutorial and Survey*, in: Hagen, H. und Roller, D. (eds): Geometric Modelling: Methods and Their Application, Springer-Verlag, Berlin, 1991, S. 131-160
- [GIRBACEA U. FRISCH 1998] **Girbacea, R.; Frisch, W.:** *Slab in the wrong place: Lower lithosphere mantle delamination in the last stage of the Eastern Carpathian subduction retreat*, Geology, 26, 7, 1998, S. 611-614
- [GRANT U. WEST 1965] **Grant, F. S.; West, G. F.:** *Interpretation Theory in Applied Geophysics*, McGraw-Hill Inc., New York, 1965
- [GREINER 2006] **Greiner, G.:** *Geometrische Modellierung*, Vorlesungsskript Wintersemester 2006, [http://www9.informatik.uni-erlangen.de:81/Teaching/WS2006/GM/gm\\_de.pdf](http://www9.informatik.uni-erlangen.de:81/Teaching/WS2006/GM/gm_de.pdf) (download 22.01.2007)
- [GRIMM-PITZINGER U. RUDIG 2005] **Grimm-Pitzinger, A.; Rudig, S.:** *Freiformflächen zur Modellierung von Deformationsmessungen*, ZfV, Jg. 130, Heft 3, 2005, S. 180-183
- [HÄHNLE U. GRAFAREND 2002] **Hähnle, H.; Grafarend, E. W.:** *Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM) mit Dreiecks-Bezier-Flächen*, ZfV, Jg. 127, Heft 3, 2002, S. 193-199
- [HAUPT 1993] **Haupt, P.:** *Foundation of Continuum Mechanics*, ed. Hutter, C.: Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics, Springer, Wien, New York, 1993, S. 1-77
- [HEFTY 2005] **Hefty, J.:** *Kinematics of Central European GPS Geodynamic Reference Network as the Result of Epoch Campaigns During Nine Years*, Reports on Geodesy 2(73), Warschau, 2005, S. 23-32
- [HELMHOLTZ 1858] **Helmholtz, H. v.:** *Ueber Wirbelbewegungen (1858)*, in: Helmholtz, H. v.: Zwei hydrodynamische Abhandlungen, Engelmann, Leipzig, 1896
- [HEUNECKE 1995] **Heunecke, O.:** *Zur Identifikation und Verifikation von Deformationsprozessen mittels adaptiver Kalman-Filterung*, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 208, 1995
- [HJELLE 2001] **Hjelle, Ø.:** *Approximation of Scattered Data with Multilevel B-splines*, Technical Report STF42 A01011, SINTEF Applied Mathematics, Oslo, 2001
- [VAN DER HOEVEN ET AL. 2005] **Hoeven, A. G. A. van der; Mocanu, V.; Spakman, W.; Nutto, M.; Nuckelt, A.; Matenco, L.; Munteanu, L.; Marcu, C.; Ambrosius, B. A. C.:** *Observation of present-day tectonic motions in the Southeastern Carpathians: Results of the ISES/CRC 461 GPS-measurements*, Earth and Planetary Science Letters, Vol. 239, 2005, S. 177-184

- [HORVATH 1993] **Horvath, F.:** *Towards a mechanical model for the formation of the Pannonian Basin*, Tectonophysics, 226, 1993, S. 333-357
- [HOSCHEK U. LASSER 1992] **Hoschek, J.; Lasser, D.:** *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, B. G. Teubner Stuttgart, 1992
- [HSU ET AL. 1992] **Hsu, W. M.; Hughes, J. F.; Kaufman, H.:** *Direct Manipulation of Free-Form Deformations*, Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '92), Vol. 26, Nr. 2, 1992, S. 177-184
- [HUGENTOBLER ET AL. 2005] **Hugentobler, U.; Dach, R.; Fridez, P.; Meindl, M.:** *Bernese GPS Software Version 5.0*, Astronomisches Institut, Universität Bern
- [KANIUTH ET AL. 2001] **Kaniuth, K.; Drewes, H.; Stuber, K.; Tremel, H.:** *Bestimmung rezenter Krustendeformationen im zentralen Mittelmeer mit GPS*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002 ZfV, Jg. 126, Heft 5, 2001, S. 256-262
- [KERSTING 1992] **Kersting, N.:** *Zur Analyse rezenter Krustenbewegungen bei Vorliegen seismotektonischer Dislokationen*, Schriftenreihe des Studiengang Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 42, Neubiberg, 1992
- [KLAUSNER 1991] **Klausner, Y.:** *Fundamentals of Continuum Mechanics of Soils*, Springer, London, 1991
- [KLOTZ ET AL. 1995] **Klotz, J.; Angermann, D.; Reinking, J.:** *Großräumige GPS-Netze zur Bestimmung der rezenten Kinematik der Erde*, ZfV, Jg. 120, Heft 9, 1995, S. 449-460
- [KNAPP ET AL. 2005] **Knapp, J. H.; Knapp, C. C.; Raileanu, V.; Matenco, L.; Mocanu, V.; Dinu, C.:** *Crustal constraints on the origin of mantle seismicity in the Vrancea Zone, Romania: The case for active continental lithospheric delamination*, tectonophysics, 410, 2005, S. 311-323
- [KOCH 1980] **Koch, K. R.:** *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*, Dümmler, Bonn, 1980
- [LEE ET AL. 1994] **Lee, S.; Chwa, K.-Y.; Hahn, J.; Shin, S. Y.:** *Image Morphing Using Deformable Surfaces*, Proc. Computer Animation '94, 1994, S. 31-39
- [LEE ET AL. 1995] **Lee, S.; Chwa, K.-Y.; Shin, S. Y.; Wolberg, G.:** *Image Metamorphosis Using Snakes and Free-Form Deformations*, Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '95), 1995, S. 439-448
- [LEE ET AL. 1996A] **Lee, S.; Chwa, K.-Y.; Hahn, J.; Shin, S. Y.:** *Image Morphing Using Deformation Techniques*, Journal of Visualization and Computer Animation, Vol. 7, Nr. 1, 1996, S. 3-23
- [LEE ET AL. 1996B] **Lee, S.; Wolberg, G.; Chwa, K.-Y.; Shin, S. Y.:** *Image Metamorphosis with Scattered Feature Constraints*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol. 2, Nr. 4, 1996, S. 337-354
- [LEE ET AL. 1997] **Lee, S.; Wolberg, G.; Shin, S. Y.:** *Scattered Data Interpolation with Multilevel B-Splines*, IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, Vol. 3, Nr. 3, 1997, S. 229-244
- [LEGRAND ET AL. 2006] **Legrand, J.; Altamimi, Z.; Jamet, O.:** *Interpolating the ITRF velocity field using least squares collocation method*, Geophysical Research Abstracts, Vol. 8, 10187, 2006
- [LENZ 1995] **Lenz, J.:** *Kontinuumsmechanik I und II für Bauingenieurstudenten der Vertiefungsrichtung Grundbau*, Scriptum zur Vorlesung, 4. Auflage, 1995

- [MARTINEC 1999] **Martinec, Z.:** *Continuum Mechanics for Geophysicists and Geodesists*, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Universität Stuttgart, Technical Reports Department of Geodesy and GeoInformatics, 1999
- [MATENCO U. BERTOTTI 2000] **Matenco, L.; Bertotti, G.:** *Tertiary tectonic evolution of the external East Carpathians (Romania)*, *Tectonophysics*, 316, 2000, S. 255-286
- [MAUTZ U. PETROVIC 2005] **Mautz, R.; Petrovic, S.:** *Erkennung von physikalisch vorhandenen Periodizitäten in Zeitreihen*, *ZfV*, Jg. 130, Heft 3, 2005, S. 156-165
- [MEIER U. KELLER 1990] **Meier, S.; Keller, W.:** *Geostatistik*, Springer-Verlag, Wien, New York, 1990
- [MORITZ 1973] **Moritz, H.:** *Least-Squares Collocation*, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe A, Nr. 75, 1973
- [NIEMEIER 2002] **Niemeier, W.:** *Ausgleichsrechnung*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002
- [NUCKELT ET AL. 2005] **Nuckelt, A.; Nutto, M.; Schmitt, G.; Hoeven, A. G. A. van der; Marcu, C.; Mocanu, V.:** *Status report of the CRC 461 subproject „three dimensional plate kinematics in romania“*, *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 7, 00120, 2005
- [NUCKELT 2006] **Nuckelt, A.:** *Multilevel B-Spline Approximation zur Modellierung von Geschwindigkeitsfeldern*, *ZfV*, Jg. 131, Heft 4, 2006, S. 207-215
- [NUCKELT U. KNÖPFLER 2007] **Nuckelt, A.; Knöpfler, A.:** *Time Series Analyses for the GPS Permanent Station Bucharest*, eingereicht bei Survey Review,
- [ONESCU U. BONJER 1997] **Onescu, M. C.; Bonjer, K.-P.:** *A note on the depth recurrence and strain release of large Vrancea earthquakes*, *Tectonophysics*, 272, 1997, S. 291-302
- [PEROVIC 2005] **Perovic, G.:** *Least Squares*, University of Belgrade, Faculty of Civil Engineering, Belgrad, 2005
- [PETER 2001] **Peter, Y.:** *Present-day Crustal Dynamics in the Adriatic-Aegean Plate Boundary Zone inferred from continuous GPS-Measurements*, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Mitteilungen Nr. 71, 2001
- [PIEGL 1991] **Piegl, L.:** *On NURBS: A Survey*, *IEEE Computer Graphics and Applications*, Vol. 10, Nr. 1, 1991, S. 55-71
- [PIEGL U. TILLER 1997] **Piegl, L.; Tiller, W.:** *The NURBS Book*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997
- [PRAUTZSCH ET AL. 2002] **Prautzsch, H.; Boehm, W.; Paluszny, M.:** *Bezier and B-Splines techniques*, Springer, Berlin, 2002
- [RAWIEL 2001] **Rawiel, P.:** *Dreidimensionale kinematische Modelle zur Analyse von Deformationen an Hängen*, Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Reihe C, Nr. 533, 2001
- [ROTHACHER U. SCHMID 2006] **Rothacher, M.; Schmid, R.:** *ANTEX: The Antenna Exchange Format Version 1.3*, <ftp://igscb.jpl.nasa.gov/igscb/station/general/antex13.txt> (download am 03.05.2006)
- [SANDULESCU 1988] **Sandulescu, M.:** *Cenozoic tectonic history of the Carpathians*, in: Royden, L., H.; Horvath, F. (eds.): *The Pannonian Basin, a Study in Basin Evolution*, AAPG Mem., 45, 1988, S. 17-25

- [SCHMÄLZLE 2001] **Schmälzle, S. A.:** *New methods for Nurbs surface approximation to scattered data*, Diss., Technische Wissenschaften ETH Zürich, Nr.14031, 2001, <http://e-collection.ethbib.ethz.ch/show?type=diss&nr=14031>
- [SCHMITT ET AL. 2004] **Schmitt, G.; Nutto, M.; Nuckelt, A.; Hoeven; A. G. A. van der; Marcu, C.; Mocanu, V.:** *Dreidimensionale Plattenkinematik in Rumänien*, Sonderforschungsbereich 461, Bereichsband für die Jahre 2002-2004, Universität Karlsruhe, 2004, S. 179-228
- [SCHNEIDER 1982] **Schneider, D.:** *Complex Crustal Strain Approximation*, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Mitteilungen Nr. 33, 1982
- [SCHOENBERG U. GREVILLE 1967] **Schoenberg, I. J.; Greville, T. N. E.:** *On spline functions*, in: Shiha, O. (ed.): *Inequalities*, Academic Press, 1967, S. 255-291
- [SCHUMAKER 1976] **Schumaker, L.:** *Fitting Surfaces to Scattered Data*, in: Chui, C.; Schumaker, L.; Lorentz, G.: *Approximation Theory II*, Wiley, New York, 1976, S. 203-268
- [SHEPARD 1968] **Shepard, D.:** *A Two Dimensional Interpolation Function for Irregularly Spaced Data*, Proc. 23rd ACM National Conference, 1968, S. 517-524
- [SLEDZINSKI 2003] **Sledzinski, J.:** *Concise overview of activities of the CEI WGST section C „Geodesy“*, Reports on Geodesy 3(66), Warschau, 2003, S. 15-28
- [SPERNER ET AL. 1999] **Sperner, B.; Ratschbacher, L.; Zweigel, P.; Moser, F.; Hettel, S.; Girbacea, R.; Wenzel, F.:** *Lateral extrusion, slab-break-off and subduction retreat: the Oligocene-Recent collision-subduction transition in the Alps and Carpathians*, Penrose Conference „Subduction to Strike-Slip Transitions and Plate Boundaries“, Puerto Plata, Dom. Republik, 1999, S. 103-104, <http://people.uncw.edu/grindlayn/penrose.html>
- [SPERNER ET AL. 2001] **Sperner, B.; Lorenz, F. P.; Bonjer, K.-P.; Hettel, S.; Müller, B.; Wenzel, F.:** *Slab break-off - abrupt cut or gradual detachment ? New insights from the Vrancea Region (SE-Carpathians, Romania)*, Terra Nova, 13 (3), 2001, S. 172-179
- [SPERNER ET AL. 2005] **Sperner, B. & the CRC 461 team:** *Monitoring of Slab Detachment in the Carpathians*, in: Wenzel, F. (ed.): *Perspectives in Modern Seismology*, Springer-Verlag, 2005, S. 187-202
- [STRAUB 1996] **Straub, C.:** *Recent Crustal Deformation and Strain Accumulation in the Marmara Sea Region, N. W. Anatolia, inferred from GPS Measurements*, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie an der Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Mitteilungen Nr. 58, 1996
- [TARAPOANCA ET AL. 2003] **Tarapoanca, M.; Bertotti, G.; Matenco, L., Dinu, C.; Cloetigh, S.:** *Architecture of the Focsani depression: A 13 km deep basin in the Carpathians bend zone (Romania)*, Tectonics, Vol. 22, Nr. 6, 2003
- [TURCOTTE U. SCHUBERT 1982] **Turcotte, D. L.; Schubert, G.:** *Geodynamics, Applications of Continuum Physics to Geological Problems*, John Wiley & Sons, New York, 1982
- [VOOSOGHI 2000] **Voosoghi, B.:** *Intrinsic deformation analysis of the earth surface based on 3-dimensional displacement fields derived from space geodetic measurements*, Dissertation, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Technical Reports Department of Geodesy and GeoInformatics, 2000
- [WÄLDER 2005] **Wälder, O.:** *Oberflächendeformationsanalyse mithilfe von Bezier-Splines: Fallstudie Blockgletscher Reichenklar (Tirol)*, Österreichische Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation, Heft 4, 2005, S. 166-172

- [WANNINGER ET AL. 2006] **Wanninger, L.; Rost, C.; Hartlieb, G.; Köhr, M.:** *Zur Problematik des Antennenwechsels auf GNSS-Referenzstationen*, ZfV, Jg. 131, Heft 4, 2006, S. 171-175
- [WEIS U. LEWIS 2001] **Weis, M. P.; Lewis, R. R.:** *BSPLND, A B-Spline N-Dimensional Package for Scattered Data Interpolation*, Presentation at the Twelfth Western Computer Graphics Symposium, Sun Peaks, British Columbia, March 25-28, 2001
- [WELCH U. WITKIN 1992] **Welch, W.; Witkin, A.:** *Variational Surface Modeling*, Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH '92), Vol. 26, Nr. 2, 1992, S. 157-166
- [WELSCH 1982] **Welsch, W.:** *Zur Beschreibung homogenen Strains oder Einige Betrachtungen zur affinen Transformation*, ZfV, Jg. 107, Heft 5, 1982, S. 173-182
- [WELSCH 1989] **Welsch, W.:** *Strainanalyse aus geodätischen Netzbeobachtungen*, in: Kersting, N.; Welsch, W.: *Rezente Krustenbewegungen*, Schriftenreihe des Studiengang Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr München, Heft 39, Neubiberg, 1989, S. 171-189
- [WELSCH 1999] **Welsch, W.:** *Fortgeschrittene geodätische Deformationsanalyse*, in: Krumm, F., Schwarze, V. S. (Eds.): *Quo vadis geodesia ...? Festschrift for Erik W. Grafarend on the occasion of his 60th birthday*, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Technical Reports Department of Geodesy and GeoInformatics, 1999, S. 505-513
- [WENDLAND 2005] **Wendland, H.:** *Scattered Data Approximation*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 2005
- [WENZEL ET AL. 2002] **Wenzel, F.; Sperner, B.; Lorenz, F. P.; Mocanu, V.:** *Geodynamics, tomographic images and seismicity of the Vrancea region (SE-Carpathians, Romania)*, EGU Stephan Mueller Spec. Publ. Ser., 3, 2002, S. 95-104
- [WITTENBURG 1999] **Wittenburg, R.:** *Zur geodätischen Beschreibung von Deformationsprozessen im 3D-Bereich*, in: Krumm, F., Schwarze, V. S. (Eds.): *Quo vadis geodesia ...? Festschrift for Erik W. Grafarend on the occasion of his 60th birthday*, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Technical Reports Department of Geodesy and GeoInformatics, 1999, S. 515-523
- [WITTENBURG 2005] **Wittenburg, R.:** *Abschluss des DFG-Forschungsprojektes 3D-Strainanalyse (Probleme, Lösungen, Ergebnisse, Ausblick)*, in: Sroda, A., Wittenburg, R. (Eds.): *6. Geokinematischer Tag*, Schriftenreihe des Instituts für Markscheidewesen und Geodäsie an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg, 2005
- [WOLF 2003] **Wolf, D.:** *Continuum Mechanics in Geophysics and Geodesy: Fundamental Principles*, Schriftenreihe der Institute des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, Universität Stuttgart, Technical Reports Department of Geodesy and GeoInformatics, 2003
- [WORTEL U. SPAKMAN 2000] **Wortel, M. J. R.; Spakman, W.:** *Subduction and slab detachment in the Mediterranean-Carpathian region*, Science, 290, 2000, S. 1910-1917
- [XU U. GRAFAREND 1996] **Xu, P.; Grafarend, E. W.:** *Probability distribution of eigenspectra and eigendirections of a twodimensional, symmetric rank two random tensor*, Journal of Geodesy, 70, 1996, S. 419-430
- [YAMAGUCHI 1988] **Yamaguchi, F.:** *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988
- [ZURMÜHL U. FALK 1984] **Zurmühl, R.; Falk, S.:** *Matrizen und ihre Anwendungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1984

- [ZWEIGEL ET AL. 1998] **Zweigel, P.; Ratschenbacher, L.; Frisch, W.:** *Kinematics of an arcuate fold-thrust belt: the southern Eastern Carpathians (Romania)*, Tectonophysics, 297, 1998, S. 177-207



---

ISSN: 1612-9733  
ISBN: 978-3-86644-152-1

---

[www.uvka.de](http://www.uvka.de)