

# Stoppmengen und Palm'sche Maße für Poissonsche Modelle der Stochastischen Geometrie

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN  
von der Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe genehmigte  
DISSERTATION

von

Dipl.-Math. oec. Volker Baumstark  
aus Baden-Baden

Tag der mündlichen Prüfung: 18.07.2007

Referent: Prof. Dr. Günter Last  
Korreferent: Prof. Dr. Wolfgang Weil



# Vorwort

Diese Dissertation entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Stochastik an der Universität Karlsruhe.

Bedanken möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Günter Last für die Anregung und Betreuung dieser Arbeit, bei Herrn Prof. Dr. Wolfgang Weil für die Übernahme des Korreferats. Weiterhin gilt mein Dank meinem ehemaligen Kollegen Lars Michael Hoffmann, welcher nicht nur Teile dieser Arbeit Korrektur gelesen hat, sondern stets mit Rat und Tat zur Seite stand.

Abschließend will ich an dieser Stelle ein herzliches Dankeschön meiner Familie aussprechen, besonders meiner Frau Julia und meinen Eltern, für ihr Verständnis und ihre Unterstützung.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Das Konzept der Stoppmengen</b>	<b>5</b>
1.1 Grundlagen . . . . .	5
1.1.1 Einige Notationen . . . . .	5
1.1.2 Topologische Grundbegriffe und einige Eigenschaften topologischer Räume . . . . .	6
1.1.3 Der Raum der abgeschlossenen Mengen . . . . .	7
1.1.4 Der Raum der lokalendlichen und einfachen Maße . . . . .	9
1.1.5 Markierte einfache Zählmaße . . . . .	10
1.2 Definition und Charakterisierung von Stoppmengen . . . . .	12
1.2.1 Kompakte Stoppmengen . . . . .	12
1.2.2 Abgeschlossene Stoppmengen . . . . .	15
1.2.3 Stoppmengen auf einem kanonischen Messraum . . . . .	18
1.2.4 Charakterisierungen von Stoppmengen . . . . .	21
1.2.5 Beispiele und weitere Ergebnisse . . . . .	25
<b>2 Beispiele zu Stoppmengen</b>	<b>29</b>
2.1 Rekursive Konstruktion von Stoppmengen . . . . .	29
2.1.1 Einige vorbereitende Aussagen . . . . .	29
2.1.2 Beschreibung der rekursiven Konstruktion . . . . .	31

2.1.3	Eine Modifikation . . . . .	35
2.1.4	Ein Beispiel . . . . .	35
2.2	Ein Vorschlag zum Lilypond-Modell . . . . .	41
2.2.1	Definitionen . . . . .	41
2.2.2	Eine rekursive Konstruktion . . . . .	43
2.3	k-Flower in Voronoi-Mosaiken . . . . .	44
2.3.1	Allgemeine Lage . . . . .	44
2.3.2	Voronoi-Mosaik . . . . .	45
2.3.3	k-Seiten eines Voronoi-Mosaiks . . . . .	46
2.3.4	Definition und Stoppmengeneigenschaft der k-Flower . . . . .	47
2.3.5	Weitere Eigenschaften der k-Flower und Abschätzungen . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Stoppmengen und Punktprozesse</b>	<b>57</b>
3.1	Punktprozesse . . . . .	57
3.1.1	Poissonprozesse . . . . .	58
3.1.2	Coxprozesse . . . . .	59
3.2	Verteilungsaussagen zu Stoppmengen . . . . .	60
3.2.1	Resultate zu Coxprozessen . . . . .	60
3.2.2	Resultate zu Bernoulliprozessen . . . . .	64
3.2.3	Beweise . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Stoppmengen und Palmsche Maße</b>	<b>77</b>
4.1	Stationarität und Palmsche Maße im euklidischen Raum . . . . .	77
4.1.1	Stationäre Maße . . . . .	77
4.1.2	Definition und Eigenschaften Palmscher Maße . . . . .	78
4.2	Stoppmengen und Palmsche Maße . . . . .	79
4.2.1	Das Maß $M$ . . . . .	79
4.2.2	Resultate . . . . .	82
4.2.3	Eine Erweiterung unseres Ansatzes auf den Fall $n = 0$ . . . . .	83
4.2.4	Beweise . . . . .	85
4.2.5	Vergleich und Diskussion der Ansätze . . . . .	88

<b>5</b>	<b>Verteilungsaussagen zur typischen k-Seite</b>	<b>93</b>
5.1	Gamma-Resultate . . . . .	93
5.1.1	Maße zu den k-Seiten . . . . .	93
5.1.2	Gamma-Resultate und Abschätzungen für $M_k$ und $M_{k,m}$ . . . . .	97
5.1.3	Weitere Definitionen . . . . .	100
5.1.4	Gamma-Resultate und Abschätzungen für $N_k$ und $N_{k,m}$ . . . . .	100
5.2	Weitere Resultate . . . . .	103
5.2.1	Verknüpfungen von $M_k$ und $N_k$ . . . . .	103
5.2.2	Weitere Abschätzungen . . . . .	105
5.2.3	Die Verteilung des $k$ -dimensionalen Hausdorffmaßes der typischen k-Seite für $1 \leq k \leq d - 1$ . . . . .	111
5.2.4	Die Verteilung des Volumens der Nullpunktzelle und der typischen Zelle . . . . .	120
<b>A</b>	<b>Ergänzungen</b>	<b>125</b>
A.1	Ergänzungen zu Kapitel 1 . . . . .	125
A.1.1	Ergänzungen zu Unterabschnitt 1.1.4 . . . . .	125
A.1.2	Ergänzungen zu Unterabschnitt 1.1.5 . . . . .	126
A.2	Ergänzungen zu Kapitel 2 . . . . .	128
A.2.1	Ergänzungen zu Unterabschnitt 2.1.4 . . . . .	128
A.2.2	Ergänzungen zu Unterabschnitt 2.3.1 . . . . .	131
A.2.3	Ergänzungen zu Unterabschnitt 2.3.4 . . . . .	132
A.3	Ergänzungen zu Kapitel 3 . . . . .	133
A.3.1	Ergänzungen zu Unterabschnitt 3.2.1 . . . . .	133
A.4	Ergänzungen zu Kapitel 4 . . . . .	134
A.4.1	Ergänzungen zu Unterabschnitt 4.2.4 . . . . .	134
A.5	Ergänzungen zu Kapitel 5 . . . . .	135
A.5.1	Ergänzungen zu Unterabschnitt 5.1.1 . . . . .	135
A.5.2	Ergänzungen zu Unterabschnitt 5.1.2 . . . . .	137
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>139</b>



# Einleitung

Voronoi-Mosaik spielen in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle, beispielsweise in der Kristallographie, Geographie oder in den Materialwissenschaften. Bei einem Voronoi-Mosaik wird der gesamte  $\mathbb{R}^d$  ausgehend von einer lokalendlichen Teilmenge  $A$  in Polytope unterteilt, den sogenannten Voronoi-Zellen. Die Voronoi-Zelle des Punktes  $x$  aus  $A$  wird dabei als die Menge aller  $y \in \mathbb{R}^d$  definiert, welche  $x$  als nächsten Nachbarn in  $A$  besitzen.

Von einem Poisson-Voronoi-Mosaik spricht man, wenn die Menge  $A$  durch einen Poissonprozesses gegeben ist. Das Poisson-Voronoi-Mosaik ist ohne Zweifel ein viel studiertes Objekt der Stochastischen Geometrie, zu welchem sich in der Literatur bereits eine Vielzahl von Ergebnissen finden lässt. Wir wollen unser Hauptaugenmerk auf die typische Voronoi-Zelle oder allgemeiner auf die typische  $k$ -Seite eines Poisson-Voronoi-Mosaiks legen. Anschaulich erhält man die typische  $k$ -Seite, indem man jede  $k$ -Seite gleich gewichtet und anschließend zufällig eine  $k$ -Seite auswählt. Gewichtet man jede  $k$ -Seite mit ihrem  $k$ -dimensionalen Hausdorff-Maß, so ergibt sich die sogenannte typische volumengewichtete  $k$ -Seite. Formal wird die Verteilung der typischen (volumengewichteten)  $k$ -Seite mittels Palmischer Maße definiert.

Hinde und Miles simulierten die typische Voronoi-Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks und approximierten die Verteilung ihres Volumens in ihrer Arbeit *Monte Carlo Estimates of the Distributions of the Random Polygons of the Voronoi Tessellation with Respect to a Poisson Process* ([15]) von 1980 mittels einer sogenannten verallgemeinerten Gamma Verteilung mit drei Parameter. Simulationsstudien zu Verteilungen in einem Poisson-Voronoi-Mosaik und Anpassungen an Gamma-Verteilungen oder Abwandlungen der Gamma-Verteilung findet man ferner in [20] und [42]. Unter Verwendung von Russo's Formel wies Zuyev 1992 in [44] eine bedingte Gamma-Verteilung des Volumens einer Obermenge der typischen Voronoi-Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks nach, wobei nach der Anzahl der Facetten der typischen Zelle zu bedingen ist. Diese Obermenge nannte er *Fundamental Region*, später *Voronoi-Flower*. Aus Zuyevs Resultaten zu Stoppmengen in [45] erhält man die bedingte Gamma-Verteilung des Volumens der Voronoi-Flower erneut. Die Feststellung, dass sie zu den Stoppmengen zählt, finden wir in eben zitiertem Artikel. Die Verteilung der typischen Voronoi-Zelle eines Poisson-Voronoi-Mosaiks in der Ebene gab

schließlich Calka 2003 in seiner Arbeit *Precise formulae for the distribution of the principal geometric characteristics of the typical cells of a two-dimensional Poisson-Voronoi tessellation and a Poisson line process* ([2]) an. Er bediente sich bei der Herleitung seiner Integralausdrücke der Voronoi-Flower und zeigte die bedingte Gamma-Verteilung ihres Volumens mittels der Formel von Mecke-Slivnyak und einer geeigneten Reskalierung. Der in [2] hergeleitete Integralausdruck führt ein Problem deutlich vor Augen, welches nicht selten bei der Untersuchung zufälliger geometrischer Objekte auftritt. Die Verteilung der typischen Zelle lässt sich nur mittels eines Mehrfachintegrals darstellen, welches weitere Berechnungen kaum zulässt.

In unserer Arbeit wollen wir unter anderem die typische (volumengewichtete)  $k$ -Seite eines Poisson-Voronoi-Mosaiks untersuchen. Es liegt nahe, der typischen  $k$ -Seite analog zur typischen Voronoi-Zelle eine Stoppmenge zuzuordnen, welche wir *k-Flower* nennen in Anlehnung an den Begriff der Voronoi-Flower.

Mittels dieser Vorgehensweise erlangen wir unter anderem konkrete, wenn auch nicht immer explizite Verteilungsaussagen sowie einfache Abschätzungen zu der Verteilung des  $k$ -dimensionalen Hausdorff-Maßes der typischen (volumengewichteten)  $k$ -Seite eines Poisson-Voronoi-Mosaiks.

Der Weg dorthin gliedert sich in fünf Kapitel. Im ersten Kapitel stellen wir Stoppmengen als zufällige kompakte Mengen vor, wie sie auch in [45] betrachtet werden, und erweitern den Stoppmengenbegriff anschließend auf zufällige abgeschlossene Mengen. Ergebnisse und Charakterisierungen zu Stoppmengen liefern wir für den Fall, dass der Definitionsbereich der betrachteten Stoppmengen durch den Raum aller markierten einfachen Zählmaße auf einem geeigneten Grundraum gegeben ist.

In Kapitel 2 geben wir eine sehr allgemeine rekursive Konstruktion von Stoppmengen an. Die zugehörige Rekursion liefert einen Vorschlag für eine mögliche Stoppmenge im Lilypond-Modell. Im dritten Abschnitt dieses Kapitels definieren wir die bereits erwähnte  $k$ -Flower und leiten später benötigte Eigenschaften her. Kapitel 1 und 2 bilden den ersten Teil dieser Arbeit, welcher Stoppmengen ohne Verwendung der Wahrscheinlichkeits- oder Maßtheorie thematisiert.

Der Stochastik wenden wir uns im dritten Kapitel zu. Dort werden die Ergebnisse zu den Stoppmengen aus Kapitel 1 benutzt, um Zuyevs Gamma-Resultate zu (kompakten) Stoppmengen aus [45] auf unsere abgeschlossene Stoppmengen zu übertragen. Zuyev betrachtet in eben zitierter Arbeit Poissonprozesse, etwas allgemeiner formulieren wir unsere Ergebnisse für Coxprozesse. Zusätzlich findet der Leser ein analoges Resultat zu Bernoulliprozessen.

Eine Erweiterung von Miles *Complementary Theorem* aus [28] erhalten wir in Kapitel 4, indem wir die Konzepte des Palmschen Maßes und der Stoppmenge geeignet verknüpfen.

Zur Verfügung stellen wir ein Resultat, welches nicht nur die Gamma-Resultate zu Stoppmengen und den in [6] und [28] betrachteten Abbildungen von Tupeln für den Spezialfall eines homogenen Poissonprozesses beinhaltet, sondern als adäquates Werkzeug bei der Betrachtung der typischen  $k$ -Seite eines Poisson-Voronoi-Mosaiks dienen wird.

Die typische (volumengewichtete)  $k$ -Seite eines Poisson-Voronoi-Mosaiks ist Thema von Kapitel 5. Mittels der Ergebnisse aus Kapitel 2 werden verschiedene Verteilungsaussagen zu dem  $k$ -dimensionalen Hausdorff-Maß  $\mathcal{H}^k(C_k)$  der typischen (volumengewichteten)  $k$ -Seite  $C_k$  hergeleitet. Neben einer Dichte für  $\mathcal{H}^k(C_k)$  in Integralform können wir eine Reihe von Abschätzungen zum Tail der Verteilung von  $\mathcal{H}^k(C_k)$  angeben, welche auf der Stoppmengeneigenschaft der  $k$ -Flower als auch auf dem allgemeinen Gamma-Resultat aus Kapitel 4 basieren.

In den Anhang sind unter anderem eine Reihe von technischen Beweisen ausgelagert, um diese Arbeit übersichtlich zu gestalten. Wir wollen an dieser Stelle anmerken, dass nicht alle in dieser Arbeit eingefügten Grafiken mit Zirkel und Lineal konstruiert wurden.



# Kapitel 1

## Das Konzept der Stoppmengen

### 1.1 Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen grundlegende Konzepte vorgestellt werden, soweit sie zur Betrachtung von Stoppmengen als Abbildungen auf einem Messraum in Abschnitt 1.2 benötigt werden. In den Unterabschnitten 1.1.3 und 1.1.4 orientieren wir uns dabei an [40], Kapitel 2 und 3. Ab Unterabschnitt 1.1.3 bis zum Ende dieses Abschnittes 1.1 sei  $E$  stets ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

#### 1.1.1 Einige Notationen

Einige Notationen werden uns in dieser Arbeit immer wieder begegnen, weshalb wir sie gleich zu Anfang einführen. Ist  $A$  eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so sei  $\text{cl}A$  ihr Abschluss. In einem metrischen Raum bezeichnen wir die zugehörige Metrik stets mit  $d$ . Ist  $A$  Teilmenge eines metrischen Raumes  $E$ , so definieren wir für  $x \in E$

$$d(A, x) := \inf\{d(a, x) : a \in A\}.$$

Wir setzen dabei  $\inf \emptyset := \infty$ . Ferner seien  $B(x, r)$  die abgeschlossene Kugel und  $B^0(x, r)$  die offene Kugel um  $x$  mit Radius  $r$ . Für die Norm und das Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^d$  verwenden wir  $\|\cdot\|$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Die konvexe Hülle einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnen wir mit  $\text{conv}A$ . Unter  $A \oplus B$  verstehen wir die *Minkowski-Summe* zweier Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^d$ , sie ist definiert durch

$$A \oplus B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Wir schreiben  $A + x$  statt  $A \oplus \{x\}$  und  $A - x$  statt  $A \oplus \{-x\}$ . Sind  $A \subset \mathbb{R}^d$  und  $r \in \mathbb{R}$ , so setzen wir

$$r \cdot A := \{r \cdot a : a \in A\}.$$

Mit  $V_d(A)$  sei das Volumen einer Lebesgue-messbaren Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnet, mit  $\mathcal{H}^k(A)$  ihr  $k$ -dimensionales Hausdorff-Maß. Das Volumen  $\kappa_d$  der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^d$  berechnet sich zu

$$\kappa_d = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{d}{2})}.$$

Statt  $[0, \infty)$  schreiben wir  $\mathbb{R}_+$ . Für die Kardinalität einer Menge  $A$  verwenden wir die Bezeichnung  $\text{card } A$ , für das Dirac-Maß in einem Punkt  $x$  stets das Symbol  $\delta_x$ .

### 1.1.2 Topologische Grundbegriffe und einige Eigenschaften topologischer Räume

Gegeben sei ein Raum  $E$  mit Topologie  $\mathcal{T}$ . Ein System  $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}$  heißt *Basis* von  $\mathcal{T}$ , falls sich jede Menge  $T \in \mathcal{T}$  als Vereinigung von Mengen aus  $\mathcal{D}$  schreiben lässt. Besitzt jeder Punkt  $x \in E$  eine kompakte Umgebung, so nennt man  $E$  *lokalkompakt*. Der Raum  $E$  wird als *Hausdorffraum* bezeichnet, wenn je zwei Punkte aus  $E$  disjunkte Umgebungen besitzen. Existiert eine Metrik  $d$  auf  $E$ , so dass die durch  $d$  erzeugte Topologie mit  $\mathcal{T}$  übereinstimmt und  $E$  bezüglich  $d$  vollständig ist, so nennt man  $E$  *vollständig metrisierbar*. Findet man zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y$  aus  $E$  Umgebungen, welche den jeweils anderen Punkt nicht enthalten, und findet man ferner zu jeder abgeschlossenen Menge  $F \subset E$  und jedem Punkt  $x \in E \setminus F$  disjunkte Umgebungen, so heißt  $E$  *regulär*.

**Satz 1.1.1** *Ein lokalkompakter Hausdorffraum  $E$  mit abzählbarer Basis besitzt eine abzählbare Basis  $\mathcal{D}$  aus relativ kompakten Mengen derart, dass jede offene Menge  $G$  aus  $E$  die Vereinigung aller  $D \in \mathcal{D}$  mit  $\text{cl } D \subset G$  ist. Insbesondere existiert eine aufsteigende Folge  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von offenen, relativ kompakten Mengen aus  $E$  mit  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ .*

Beweis: Vgl. Satz 2.1.1 in [40]. □

**Satz 1.1.2** *Jeder lokalkompakte Hausdorffraum  $E$  ist regulär. Besitzt zusätzlich  $E$  eine abzählbare Basis, so ist  $E$  vollständig metrisierbar.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 1.1.1 und [35], Sätze 8.15, 10.15, 13.17. □

Jede kompakte Menge kann in einem lokalkompakten Hausdorffraum mit abzählbarer Basis im folgenden Sinn durch eine feste Folge  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von Kompakta approximiert werden. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C}$  das System aller kompakten Teilmengen von  $E$ .

**Lemma 1.1.3** *Sei  $E$  ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Dann existiert eine Folge  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von Mengen aus  $\mathcal{C}$ , so dass für alle  $C \in \mathcal{C}$*

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}: C \subset C_n} C_n \tag{1.1.1}$$

*gilt.*

**Beweis:** Nach Satz 1.1.1 existiert eine abzählbare Basis  $\mathcal{D}$  von  $E$  aus relativ kompakten, offenen Mengen. Das abzählbare System der Abschlüsse aller endlichen Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{D}$  sei mit  $\mathcal{D}' = \{C_n, n \in \mathbb{N}\}$  bezeichnet. Betrachte ein festes  $C \in \mathcal{C}$  sowie ein  $x \notin C$ . Da  $E$  ein Hausdorffraum ist, existieren Umgebungen  $G_x$  von  $x$  und  $G_y$  von  $y \in C$  mit  $G_x \cap G_y = \emptyset$ . Nach Satz 1.1.1 finden wir Umgebungen  $D_y$  von  $y \in C$  aus  $\mathcal{D}$  mit  $\text{cl } D_y \subset G_y$ ,  $y \in C$ . Aus der Kompaktheit von  $C$  folgt die Existenz einer endlichen Teilmenge  $J$  von  $C$  mit

$$C \subset \bigcup_{y \in J} \text{cl } D_y =: C' \in \mathcal{D}'.$$

Nach Wahl der  $D_y$ ,  $y \in C$ , ist  $x \notin C'$ , folglich  $x \notin \bigcap_{C \subset C_n} C_n$ . □

**Satz 1.1.4 (Cantorscher Durchschnittssatz)** *Es seien  $E$  ein topologischer Raum und  $F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Folge von abgeschlossenen, nichtleeren Mengen aus  $E$  mit  $F_{n+1} \subset F_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ist  $F_k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  kompakt, so gilt*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset.$$

**Beweis:** Vgl. [36], 21.24. □

**Lemma 1.1.5** *Enthält in einem metrischen Raum  $E$  eine Menge  $F \subset E$  mit jeder konvergenten Folge auch ihren Grenzwert, so ist  $F$  abgeschlossen.*

**Beweis:** Vgl. [35], Satz 2.15(a). □

### 1.1.3 Der Raum der abgeschlossenen Mengen

Sei bis zum Ende dieses Abschnittes 1.1  $E$  stets ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Nach Satz 1.1.2 ist  $E$  vollständig metrisierbar. Die Beweise zu den Sätzen in diesem Unterabschnitt sind, soweit nicht anders angegeben, in [40] zu finden. Mit  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir im Folgenden das System aller abgeschlossenen Teilmengen von  $E$ , mit  $\mathcal{C}$  weiterhin das System aller kompakten Teilmengen von  $E$ , mit  $\mathcal{G}$  das System aller offenen Teilmengen von  $E$  und mit  $\mathcal{B}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $E$ . Für  $A \subset E$  sei

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^A &:= \{F \in \mathcal{F} : F \cap A = \emptyset\}, \\ \mathcal{F}_A &:= \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

In einem Hausdorffraum ist jede kompakte Menge abgeschlossen, folglich  $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ . Auf  $\mathcal{F}$  betrachten wir die durch

$$\{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\} \cup \{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{G}\}$$

erzeugte Topologie.

**Satz 1.1.6**  $\mathcal{F}$  ist ein kompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis.

Wir statten  $\mathcal{F}$  aus mit der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ . Sie wird erzeugt von den offenen Mengen in der Topologie von  $\mathcal{F}$ , jedoch auch von jedem der Systeme

$$\{\mathcal{F}_C : C \in \mathcal{C}\}, \quad \{\mathcal{F}^C : C \in \mathcal{C}\}, \quad \{\mathcal{F}_G : G \in \mathcal{G}\} \quad \text{und} \quad \{\mathcal{F}^G : G \in \mathcal{G}\}.$$

Nach Satz 1.1.1 existiert eine aufsteigende Folge von offenen, relativ kompakten Mengen  $G_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$ . Setze  $V_n := (\text{cl } G_n)^c$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Für jede kompakte Menge  $C$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $C \subset G_n$ , folglich  $C \in \mathcal{F}^{V_n}$ . Ist dagegen  $F \in \mathcal{F}^{V_n}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $F \subset \text{cl } G_n$  und  $F$  ist kompakt. Wir erhalten

$$\mathcal{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}^{V_n} \in \mathcal{B}(\mathcal{F}). \quad (1.1.2)$$

**Satz 1.1.7** Die Abbildungen

$$(F, F') \mapsto F \cup F', \quad (F, F') \mapsto F \cap F', \quad F \mapsto \text{cl } F^c, \quad F, F' \in \mathcal{F},$$

sowie

$$(F, x) \mapsto \mathbf{1}_F(x), \quad (F, x) \in \mathcal{F} \times E$$

sind messbar.

Bei der Behandlung von Stoppmengen in Abschnitt 1.2 werden wir die Messbarkeit der in folgendem Lemma betrachteten Menge benötigen. Nützlich hierfür ist unten stehendes Kriterium zur Konvergenz in  $\mathcal{F}$ .

**Satz 1.1.8** Eine Folge  $(F_n)_{n \geq 1}$  in  $\mathcal{F}$  konvergiert genau dann gegen  $F \in \mathcal{F}$ , wenn folgende beiden Bedingungen erfüllt sind:

- i) Aus  $G \cap F \neq \emptyset$ ,  $G \in \mathcal{G}$ , folgt  $G \cap F_n \neq \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- ii) Aus  $C \cap F = \emptyset$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , folgt  $C \cap F_n = \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Mittels Satz 1.1.8 und Lemma 1.1.5 kann nun folgendes Lemma bewiesen werden.

**Lemma 1.1.9** Für jedes  $K \in \mathcal{F}$  ist die Menge  $\{F \in \mathcal{F} : K \subset F\}$  abgeschlossen, insbesondere messbar.

**Beweis:** Es seien  $K, F \in \mathcal{F}$  und  $F_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Folge aus  $\mathcal{F}$  mit  $F_n \rightarrow F$  und  $K \subset F_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Angenommen, es existiere ein  $x \in K \setminus F$ . Die Trennungseigenschaften regulärer Räume sichert zusammen mit Satz 1.1.1 die Existenz einer kompakten Umgebung  $C$  von  $x$  mit  $F \cap C = \emptyset$ . Nach Satz 1.1.8 gilt nun  $F_n \cap C = \emptyset$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , insbesondere  $K \not\subset F_n$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , Widerspruch.  $\square$

**Satz 1.1.10** Sei  $E = \mathbb{R}^d$ . Sind  $F \in \mathcal{F}$  und  $K \in \mathcal{C}$ , so ist  $F \oplus K = K \oplus F \in \mathcal{F}$ . Die Abbildung  $(F, K) \mapsto F \oplus K$  von  $\mathcal{F} \times \mathcal{C}$  nach  $\mathcal{F}$  ist stetig, insbesondere messbar

**Beweis:** Vgl. [23], S. 19.  $\square$

### 1.1.4 Der Raum der lokalendlichen und einfachen Maße

Ein Maß  $\eta$  auf  $E$  heißt *lokalendlich*, falls  $\eta(C) < \infty$  ist für alle Kompakta  $C \in \mathcal{C}$ . Nach Satz 1.1.1 lässt sich  $E$  als Vereinigung abzählbar vieler Kompakta darstellen, jedes lokalendliche Maß ist folglich auch  $\sigma$ -endlich. Den Raum aller lokalendlichen Maße auf  $E$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{M}$ . Es sei  $\mathcal{M}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbf{M}$ , so dass für alle  $B \in \mathcal{B}$  die Abbildung

$$\eta \mapsto \eta(B), \quad \eta \in \mathbf{M},$$

messbar bezüglich  $(\mathcal{M}, \mathcal{B}([0, \infty]))$  ist, wobei  $\mathcal{B}([0, \infty])$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $[0, \infty]$  sei. Wir merken hier an, dass  $\mathbf{M}$  bezüglich der vagen Topologie vollständig metrisierbar ist und dass die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{M}$  übereinstimmt, vgl. [19], Abschnitt A2.

**Lemma 1.1.11** Die Abbildung  $(\eta, F) \mapsto \eta(F)$ ,  $(\eta, F) \in \mathbf{M} \times \mathcal{F}$ , ist messbar.

**Beweis:** Sei  $K_n, n \in \mathbb{N}$ , eine aufsteigende Folge aus  $\mathcal{C}$  mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = E$ , vgl. Satz 1.1.1. Es reicht, für  $n \in \mathbb{N}$  die Messbarkeit von  $(\eta, F) \mapsto \eta(F \cap K_n)$  zu zeigen. Mittels der in Lemma 1.1.3 nachgewiesenen Folge  $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definieren wir zunächst das abzählbare System  $\mathcal{D}^*$  aller endlichen Schnitte von Mengen  $C_k, k \in \mathbb{N}$ . Aus

$$F \cap K_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcap_{\substack{F \cap K_n \subset C_k \\ k \leq m}} C_k,$$

vgl. (1.1.1), erhält man

$$\{(\eta, F) \in \mathbf{M} \times \mathcal{F} : \eta(F \cap K_n) < t\} = \bigcup_{C \in \mathcal{D}^*} \{(\eta, F) \in \mathbf{M} \times \mathcal{F} : F \cap K_n \subset C, \eta(C) < t\}$$

für beliebiges  $t > 0$ . Die Messbarkeit der rechten Seite obiger Gleichung folgt aus der Definition von  $\mathcal{M}$  und der Messbarkeit von  $\{F \in \mathcal{F} : F \cap K_n \subset C\}$ , welche man aus Satz 1.1.7 erhält.  $\square$

Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $\eta \in \mathbf{M}$ . Neben dem Produkt-Maß  $\eta^n := \eta^{\otimes n}$  benötigen wir in dieser Arbeit das sogenannte *faktorielle Produkt-Maß*  $\eta^{(n)}$ , welches durch

$$\eta^{(n)}(A) := \eta^n(A \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in E^n : x_i \text{ paarweise verschieden}\}), \quad A \in \mathcal{B}^{\otimes n},$$

definiert wird.

Unter einem *Zählmaß*  $\phi$  auf  $E$  verstehen wir ein lokalendliches Maß auf  $E$  mit  $\phi(B) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  für alle  $B \in \mathcal{B}$ . Ein Zählmaß  $\phi$  heißt *einfach*, falls  $\phi(\{x\}) \in \{0, 1\}$  für alle  $x \in E$  gilt. Es sei  $\mathbf{N}$  der Raum aller einfachen Zählmaße auf  $E$ . Wir definieren die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}$  auf  $\mathbf{N}$  als die kleinste  $\sigma$ -Algebra, so dass für alle  $B \in \mathcal{B}$  die Abbildung

$$\phi \mapsto \phi(B), \quad \phi \in \mathbf{N},$$

messbar bezüglich  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}([0, \infty]))$  ist. Es gelten  $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ , vgl. Lemma A.4.3. Wir geben noch einen einfachen Erzeuger von  $\mathcal{N}$  an.

**Lemma 1.1.12** *Das Mengensystem  $\{\phi \in \mathbf{N} : \phi(C) = 0\}$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , ist ein Erzeuger von  $\mathcal{N}$ .*

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus Satz 3.1.2 in [40], da  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  von  $\{\mathcal{F}^C, C \in \mathcal{C}\}$  erzeugt wird.  $\square$

Ein einfaches Zählmaß  $\phi$  ist eindeutig gegeben durch seinen *Träger*  $\{x \in E : \phi(\{x\}) = 1\}$ . Wir können folglich  $\phi \in \mathbf{N}$  mit seinem Träger identifizieren und als lokalendliche Menge in  $E$  auffassen. So beziehen sich beispielsweise die Notationen  $\varphi \subset K$ ,  $\varphi \subset \psi$  und  $x \in \varphi$  auf den jeweiligen Träger von  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}$ . Mit  $\phi \cap K$  oder  $\phi_K$  bezeichnen wir die Einschränkung von  $\phi$  auf  $K \subset E$ .

### 1.1.5 Markierte einfache Zählmaße

Sei  $(Y, \mathcal{Y})$  ein weiterer Messraum, der sogenannte *Markenraum*. Ist  $(x, y) \in E \times Y$ , so bezeichnet man  $y$  als die *Marke* von  $x$ . Das in obigem Unterabschnitt 1.1.4 vorgestellte Konzept der einfachen Zählmaße kann dahingehend verallgemeinert werden, dass jeder Punkt  $x$  aus dem Träger eines  $\phi \in \mathbf{N}$  mit einer *Marke*  $y \in Y$  versehen wird. Ein *Y-markiertes einfaches Zählmaß*  $\varphi$  ist ein Zählmaß auf  $E \times Y$  mit folgenden Eigenschaften: Für alle  $C \in \mathcal{C}$  gilt  $\varphi(C \times Y) < \infty$  und für alle  $x \in E$  ist  $\varphi(\{x\} \times Y) \in \{0, 1\}$  (vgl. [19],

S. 234). Insbesondere ist  $\varphi(\cdot \times Y) \in \mathbf{N}$ . Wir bezeichnen mit  $\mathbf{N}_Y$  den Raum aller  $Y$ -markierten einfachen Zählmaße und statten ihn aus mit der von den Abbildungen

$$\varphi \mapsto \varphi(B \times H), \quad B \in \mathcal{B}, H \in \mathcal{Y},$$

erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}_Y$ . Auch für  $\mathcal{N}_Y$  kann ein einfacher Erzeuger angegeben werden.

**Lemma 1.1.13** *Das Mengensystem  $\{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi(C \times H) = 0\}$ ,  $C \in \mathcal{C}, H \in \mathcal{Y}$ , ist ein Erzeuger von  $\mathcal{N}_Y$ .*

**Beweis:** Sei  $H \in \mathcal{Y}$  fest. Durch  $\pi_H(\varphi) := \varphi(\cdot \times H)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , wird eine Abbildung  $\pi_H : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathbf{N}$  definiert. Es gilt für  $B \in \mathcal{B}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$

$$\{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi(B \times H) = k\} = \pi_H^{-1}(\{\phi \in \mathbf{N} : \phi(B) = k\}) \in \pi_H^{-1}(\mathcal{N}).$$

Insbesondere ergibt sich nach Lemma 1.1.12

$$\begin{aligned} \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi(B \times H) = k\} &\in \pi_H^{-1}(\sigma(\{\phi \in \mathbf{N} : \phi(C) = 0\}, C \in \mathcal{C})) \\ &= \sigma(\pi_H^{-1}(\{\phi \in \mathbf{N} : \phi(C) = 0\}), C \in \mathcal{C}) \\ &= \sigma(\{\varphi \in \mathbf{N} : \varphi(C \times H) = 0\}, C \in \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Da  $H \in \mathcal{Y}$ ,  $B \in \mathcal{B}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  beliebig waren, ergibt sich die Behauptung aus der Definition von  $\mathcal{N}_Y$ .  $\square$

Ist  $Y$  fest gegeben, so sprechen wir schlicht von *markierten einfachen Zählmaßen*. Ein  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  kann wieder mit seinem Träger in  $E \times Y$  identifiziert und als Teilmenge von  $E \times Y$  mit lokalendlicher Projektion in  $E$  aufgefasst werden. Somit lassen sich auch in diesem Rahmen Schreibweisen wie beispielsweise  $\varphi \subset A$ ,  $\varphi \subset \psi$  und  $z \in \varphi$  für  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$ ,  $A \subset E \times Y$  und  $z \in E \times Y$  über den jeweiligen Träger erklären.

Sind  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $K \subset E$ , so schreiben wir  $\varphi \cap K$  oder  $\varphi_K$  abkürzend für die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $K \times Y$ . Anschaulich entfernen wir bei dem Schnitt von  $\varphi$  und  $K$  alle Punkte  $(x, y)$  mit  $x \notin K$  aus dem Träger von  $\varphi$ . Umgekehrt wird es nützlich sein, aus einem  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  ein neues  $\tilde{\varphi} \in \mathbf{N}_Y$  bilden zu können, indem Punkte  $(x, y) \in E \times Y$  zu dem Träger von  $\varphi$  hinzugefügt werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass das so gewonnene  $\tilde{\varphi}$  nicht nur ein einfaches Zählmaß auf  $E \times Y$  sein muss, sondern auch  $\tilde{\varphi}(\cdot \times Y)$  ein einfaches Zählmaß auf  $E$ . Wir definieren folglich

$$\varphi \cup \psi := \varphi + \psi$$

nur für  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  mit der Eigenschaft, dass  $\varphi(\cdot \times Y)$  und  $\psi(\cdot \times Y)$  disjunkten Träger in  $E$  haben.

## 1.2 Definition und Charakterisierung von Stoppmengen

Zur Untersuchung von zufälligen Prozessen mit reeller Indexmenge können *Stoppzeiten* herangezogen werden, man vergleiche beispielsweise [19]. Verallgemeinerungen des Begriffs einer Stoppzeit mit Werten in einer teilgeordneten und gerichteten Menge finden sich u.a. in [3], [16] oder [21]. *Stoppmengen* lassen sich in diesem Sinn auffassen als mengenwertige Stoppzeiten, vgl. [29] oder [45]. Legt man die Interpretation zugrunde, dass eine Stoppzeit nicht in die Zukunft sieht, vgl. Theorem 2.2.12 in [22], so sieht eine Stoppmenge nicht über den eigenen Rand hinaus. Stoppmengen werden im Zusammenhang mit Poissonprozessen bei Zuyev betrachtet, vgl. [5], [45] oder [46], man vergleiche aber auch [32] und [44], wo er den Begriff der Stoppmenge noch nicht benutzt. Wir orientieren uns an dem Stoppmengenbegriff aus [45]. Anderslautende Definitionen von Stoppmengen findet man beispielsweise in [18] oder [38].

In [5], [29], [45], und [46] werden Stoppmengen analog zu Stoppzeiten im Rahmen zufälliger kompakter Mengen eingeführt und untersucht. Die derart definierten Stoppmengen mit Werten in  $\mathcal{C}$  betrachten wir in Unterabschnitt 1.2.1 und bezeichnen sie als *kompakte Stoppmengen*. In Unterabschnitt 1.2.2 verallgemeinern wir den Stoppmengenbegriff auf Abbildungen mit Werten in  $\mathcal{F}$  und untersuchen ihn im Fall eines kanonischen Grundraums in Unterabschnitt 1.2.3. Während bei der Behandlung kompakter Stoppmengen auf die Ergebnisse aus [45] zurückgegriffen werden kann, muss das Konzept der Stoppmengen mit Werten in  $\mathcal{F}$  vollständig in den Unterabschnitten 1.2.2 und 1.2.3 entwickelt werden. In Unterabschnitt 1.2.4 liefern wir charakterisierende Eigenschaften von Stoppmengen. Abschließend werden in Unterabschnitt 1.2.5 Beispiele zu den Resultaten aus Unterabschnitt 1.2.4 aufgeführt.

Gegeben sei wieder ein lokalkompakter Hausdorffraum  $E$  mit abzählbarer Basis. Mit  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir weiterhin das System der abgeschlossen, mit  $\mathcal{C}$  das System der kompakten und mit  $\mathcal{G}$  das System der offenen Teilmengen von  $E$  und mit  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathcal{F}$ . Messbarkeit in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{C}$  sei stets bezüglich  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  verstanden, man beachte hierbei  $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ , vgl. (1.1.2).

### 1.2.1 Kompakte Stoppmengen

Der Begriff einer Stoppmenge soll zunächst anhand der Definitionen und Ergebnisse von Zuyev in [45] vorgestellt werden.

Gegeben seien ein Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  und eine Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  mit  $\mathcal{A} = \sigma(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} \mathcal{A}_C)$ , welche die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt:

- i) Die Familie  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$  ist *monoton*, d.h.  $\mathcal{A}_{C_1} \subset \mathcal{A}_{C_2}$  für alle  $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$  mit  $C_1 \subset C_2$ .
- ii) Die Familie  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$  ist *stetig von oben* (auf  $\mathcal{C}$ ), d.h.  $\mathcal{A}_C = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{C_n}$  für alle Folgen  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{C}$  und  $C \in \mathcal{C}$  mit  $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ .

Eine derartige Familie von  $\sigma$ -Algebren wird in Definition 2.2.25 in [29] als *Mengenindizierte Filtration* bezeichnet, in [46] schlicht als Filtration. Zusätzlich betrachtet Zuyev in [45] ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\Omega, \mathcal{A})$  und setzt voraus, dass die  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{A}_C$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , vollständig sind bezüglich  $\mathbb{P}$ , was ihm erlaubt, einige Voraussetzungen nur  $\mathbb{P}$ -f.s. fordern zu müssen. Wir gehen im Folgenden darauf nicht weiter ein.

Wir nennen eine messbare Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  *kompakte Stoppmenge* (bezüglich  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$ ), falls

$$\{S \subset C\} \in \mathcal{A}_C, \quad C \in \mathcal{C}. \quad (1.2.1)$$

In der Literatur, man vergleiche beispielsweise [29], versteht man unter einer Stoppmenge eine  $\mathcal{C}$ -wertige Abbildung mit der Eigenschaft (1.2.1). Da wir in Unterabschnitt 1.2.2 den Stoppmengenbegriff auf  $\mathcal{F}$ -wertige Abbildungen verallgemeinern wollen, sprechen wir im Zusammenhang mit der Eigenschaft (1.2.1) von *kompakten Stoppmengen*.

Das System der kompakten Mengen  $\mathcal{C}$  hat im Gegensatz zu  $\mathcal{F}$  folgende angenehme Eigenschaft. Nach Lemma 1.1.3 existiert eine Folge  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , von Mengen aus  $\mathcal{C}$ , so dass für alle  $C \in \mathcal{C}$

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}: C \subset C_n} C_n \quad (1.2.2)$$

gilt. Kurtz ([21]) nennt diese Eigenschaft *Separabilität von oben*.

Die  $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{A}_S := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{S \subset C\} \in \mathcal{A}_C \text{ für alle } C \in \mathcal{C}\} \quad (1.2.3)$$

wird mit *Stopp- $\sigma$ -Algebra* bezeichnet. Diese Definition orientiert sich an der üblichen Definition für Stoppzeiten, vgl. [19], [21]. Eine anderslautende Definition ist in [37] zu finden.

**Lemma 1.2.1** *Eine kompakte Stoppmenge  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  ist stets messbar bezüglich  $\mathcal{A}_S$ .*

Statt eines Beweises von Lemma 1.2.1 verweisen wir auf Unterabschnitt 1.2.2, wo nach Lemma 1.2.10 die Behauptung in einem allgemeineren Rahmen bewiesen wird.

Ivanoff und Merzbach bezeichnen in [18] messbare Abbildungen  $S' : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  als Stoppmengen, falls  $\{C \subset S'\} \in \mathcal{A}_C$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  und eine Bedingung zur Beschränktheit von  $S'$  gelten. Diese Definition ist eine Verschärfung von (1.2.1), vgl. Lemma 1.5.8 in [18], und

hat den Vorteil, dass in dieser Definition das System aller Stoppmengen durchschnittstabil ist. Einfache Beispiele zeigen, dass das System aller gemäß (1.2.1) definierten kompakten Stoppmengen nicht durchschnittstabil ist, insbesondere ist  $S \cap C$  für eine kompakte Stoppmenge  $S$  und ein  $C \in \mathcal{C}$  im Allgemeinen keine kompakte Stoppmenge mehr. Stattdessen werden in [45] folgende Hilfskonstruktionen betrachtet. Sei für  $K \in \mathcal{F}$  und  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  die Abbildung  $S^K : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  definiert durch ( $\omega \in \Omega$ )

$$S^K(\omega) = \begin{cases} S(\omega) & \text{falls } S(\omega) \subset K, \\ K, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.2.4)$$

**Lemma 1.2.2** *Die Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  ist genau dann eine kompakte Stoppmenge, falls  $S^C$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  messbar ist bezüglich  $\mathcal{A}_C$ . In diesem Fall ist  $S^C$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  eine kompakte Stoppmenge.*

**Beweis:** Vergleiche den Beweis von Proposition 1 sowie Lemma 2 in [45]. □

Gegeben sei nun eine messbare Abbildung  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$ , welche  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$ -adaptiert sei, d.h. die Abbildung  $\omega \mapsto \Theta(\omega) \cap C$ ,  $\omega \in \Omega$ , sei messbar bezüglich  $\mathcal{A}_C$  für alle  $C \in \mathcal{C}$ . Ersetzt man  $C$  durch eine kompakte Stoppmenge  $S$ , so ist  $\Theta \cap S$  messbar bezüglich der Stopp- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_S$ , wie unten stehender Satz feststellt.

**Satz 1.2.3** *Für eine kompakte Stoppmenge  $S$  gilt*

$$\sigma(\Theta \cap S) \subset \mathcal{A}_S. \quad (1.2.5)$$

*Ist  $\mathcal{A}_C$  zusätzlich die natürliche Filtration von  $\Theta$ , d.h. gilt  $\mathcal{A}_C = \sigma(\Theta \cap C)$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , so ist*

$$\mathcal{A}_S = \sigma(\{\Theta \cap C \cap L = \emptyset\} \cap \{C \subset S\} : C, L \in \mathcal{C})$$

Für den Beweis des ersten Teil des oben stehenden Satzes betrachte  $C, L \in \mathcal{C}$ . Nach Voraussetzung und Lemma 1.2.2 sind  $\Theta \cap C$ ,  $S^C \cap L$  und  $\{S \subset C\}$  messbar bezüglich  $\mathcal{A}_C$ . Mit  $\Theta \cap C$  und  $S^C$  ist auch  $\Theta \cap C \cap S^C$  messbar bezüglich  $\mathcal{A}_C$ , folglich gilt

$$\{\Theta \cap S \cap L = \emptyset\} \cap \{S \subset C\} = \{(\Theta \cap C \cap S^C) \cap L = \emptyset\} \cap \{S \subset C\} \in \mathcal{A}_C.$$

Nach Definition (1.2.3) ist somit  $\{\Theta \cap S \cap L = \emptyset\} \in \mathcal{A}_S$ . Da  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  von  $\mathcal{F}^L$ ,  $L \in \mathcal{C}$ , erzeugt wird, folgt die erste Behauptung. Der Beweis des zweiten Teils ist in [45], S. 366 zu finden. Er benutzt die Stetigkeit von oben der Filtration  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$  sowie die Separabilität von oben des Systems  $\mathcal{C}$ , vgl. (1.2.2).

**Satz 1.2.4** *Es seien  $S$  eine kompakte Stoppmenge und  $\mathcal{A}_C = \sigma(\Theta \cap C)$ ,  $C \in \mathcal{C}$ . Dann ist  $S$  genau dann messbar bezüglich  $\sigma(\Theta \cap S)$ , falls  $\mathcal{A}_S = \sigma(\Theta \cap S)$  ist.*

**Beweis:** Gilt  $\mathcal{A}_S = \sigma(\Theta \cap S)$ , so ist insbesondere  $\sigma(S) \subset \mathcal{A}_S = \sigma(\Theta \cap S)$ , vgl. Lemma 1.2.1. Seien nun umgekehrt  $S$  messbar bezüglich  $\sigma(\Theta \cap S)$  und  $C, L \in \mathcal{C}$ . Zunächst ist

$$\{\Theta \cap S \cap C \cap L = \emptyset\} = (\Theta \cap S)^{-1}(\mathcal{F}^{C \cap L}) \in \sigma(\Theta \cap S).$$

Nach Lemma 1.1.9 gilt  $\{C \subset S\} \in \sigma(S) \subset \sigma(\Theta \cap S)$ . Folglich ist

$$\{\Theta \cap C \cap L = \emptyset\} \cap \{C \subset S\} = \{\Theta \cap S \cap C \cap L = \emptyset\} \cap \{C \subset S\} \in \sigma(\Theta \cap S)$$

und aus Satz 1.2.3 ergibt sich  $\mathcal{A}_S = \sigma(\Theta \cap S)$ .  $\square$

Die in Proposition 2.29 in [29], S. 335, behauptete allgemeine Gültigkeit der Gleichung  $\mathcal{A}_S = \sigma(\Theta \cap S)$  im Fall von  $\mathcal{A}_C = \sigma(\Theta \cap C)$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , kommt ohne die zusätzliche Voraussetzung  $\{C \subset S\} \in \sigma(\Theta \cap S)$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , nicht aus, wie folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 1.2.5:** Seien  $E := \mathbb{R}$  und  $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$ . Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  auf  $\Omega$  sei die Potenzmenge von  $\Omega$ . Wir definieren eine Abbildung  $\Theta : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  durch  $\Theta(\omega_1) := \{0, 1\}$  und  $\Theta(\omega_2) := \{-1, 0\}$ . Ferner sei die Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch

$$S(\omega_1) := C_1 := [-1, 0], \quad S(\omega_2) := C_2 := [0, 1].$$

Die Filtration  $(\mathcal{A}_C)_{C \in \mathcal{C}}$  auf  $\Omega$  sei gegeben durch  $\mathcal{A}_C := \sigma(\Theta \cap C)$ .

Die Abbildung  $S$  ist eine kompakte Stoppmenge: Ist  $C \in \mathcal{C}$  mit  $C_1, C_2 \not\subset C$  oder  $C_1 \cup C_2 \subset C$ , so ist  $\{S \subset C\} = \emptyset$  bzw.  $\Omega$ . Gilt dagegen  $C_1 \subset C$  und  $C_2 \not\subset C$ , so folgt

$$\{S \subset C\} = \{\omega_1\} = \{\Theta(C_1) = 1\} \in \sigma(\Theta \cap C_1) \subset \mathcal{A}_C,$$

wegen  $\Theta(\omega_1)(C_1) = 1$  und  $\Theta(\omega_2)(C_1) = 0$ . Analog ist für  $C \in \mathcal{C}$  mit  $C_2 \subset C$  und  $C_1 \not\subset C$

$$\{S \subset C\} = \{\omega_2\} = \{\Theta(C_2) = 1\} \in \sigma(\Theta \cap C_2) \subset \mathcal{A}_C.$$

Es folgt  $\mathcal{A}_S = \mathcal{A}$ . Nun ist aber  $\Theta \cap S = \{0\}$  auf  $\Omega$ , folglich  $\sigma(\Theta \cap S) = \{\emptyset, \Omega\} \neq \mathcal{A}_S$ .

## 1.2.2 Abgeschlossene Stoppmengen

Wir betrachten wieder einen Messraum  $(\Omega, \mathcal{A})$  und auf diesem eine Familie von  $\sigma$ -Algebren  $(\mathcal{A}_K)_{K \in \mathcal{F}}$ . Man beachte, dass im Gegensatz zu vorigem Unterabschnitt über  $\mathcal{F}$  statt  $\mathcal{C}$  indiziert wird. Wir setzen die Monotonie der Familie  $(\mathcal{A}_K)_{K \in \mathcal{F}}$  voraus, d.h. es gelte  $\mathcal{A}_{K_1} \subset \mathcal{A}_{K_2}$  für alle  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$  mit  $K_1 \subset K_2$ . Wir fordern jedoch nicht ihre Stetigkeit von oben auf  $\mathcal{F}$  oder auf  $\mathcal{C}$ , vgl. Seite 13. Der Rahmen aus Unterabschnitt 1.2.1 wird nun in zwei Hinsichten verallgemeinert. Zum einen werden wir völlig analog zu (1.2.1) den Begriff der *abgeschlossenen Stoppmenge* definieren. Zum anderen betrachten wir am Ende dieses Unterabschnittes statt  $\mathcal{A}_C$ -messbaren Abbildungen  $\Theta \cap C : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$ ,  $C \in \mathcal{C}$ , etwas

allgemeiner eine Familie von  $\mathcal{A}_K$ -messbaren Abbildungen  $\pi_K : \Omega \rightarrow W$ ,  $K \in \mathcal{F}$ , mit Werten in einem Messraum  $(W, \mathcal{W})$ .

**Beispiel 1.2.6:** Man betrachte den Raum  $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$  aller lokalendlichen einfachen Zählmaße auf  $\mathbb{R}^d$ , die durch  $\pi_K(\phi) := \phi \cap K$  definierten messbaren Abbildungen  $\pi_K : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  und die Filtration  $\mathcal{A}_K := \sigma(\pi_K)$ ,  $K \in \mathcal{F}$ . Setzt man  $K_n := \mathbb{R}^d \setminus (-n, n)^d$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $A := \{\phi \in \mathbf{N} : \phi(\mathbb{R}^d) = \infty\}$ , so ist  $A \in \mathcal{A}_{K_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , aber es gilt  $A \notin \mathcal{A}_\emptyset$ . Somit ist  $(\mathcal{A}_K)_{K \in \mathcal{F}}$  nicht stetig von oben auf  $\mathcal{F}$ .

Wir wenden uns nun dem Begriff der Stoppmenge zu. Eine Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  heiße *Stoppmenge* (bezüglich  $(\mathcal{A}_K)_{K \in \mathcal{F}}$ ), falls

$$\{S \subset K\} \in \mathcal{A}_K, \quad K \in \mathcal{F}. \quad (1.2.6)$$

Die Eigenschaft (1.2.6) bezeichnen wir auch als *Stoppmengeneigenschaft*.

**Lemma 1.2.7** *Stoppmengen sind messbar.*

**Beweis:** Das System

$$\{\{F \in \mathcal{F} : F \subset K\}, K \in \mathcal{F}\} = \{\{F \in \mathcal{F} : F \cap G = \emptyset\}, G \in \mathcal{G}\}$$

ist ein Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ , vgl. Abschnitt 1.1.3. □

Im Gegensatz zu [29] und [45] fordern wir  $\{S \subset K\} \in \mathcal{A}_K$  nicht nur für alle kompakten Mengen  $K \in \mathcal{C}$ , sondern für alle abgeschlossenen Mengen  $K \in \mathcal{F}$ . Obige Definition verallgemeinert den Stoppmengenbegriff ebengenannter Referenzen, wie folgendes Lemma feststellt.

**Lemma 1.2.8** *Eine Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$  ist genau dann eine Stoppmenge bezüglich  $(\mathcal{A}_K)_{K \in \mathcal{F}}$ , wenn sie eine kompakte Stoppmenge ist bezüglich  $(\mathcal{A}_K)_{K \in \mathcal{C}}$ .*

**Beweis:** Zu zeigen ist nur eine Richtung. Seien  $S$  eine kompakte Stoppmenge und  $K \in \mathcal{F}$ . Gemäß Satz 1.1.1 existiert eine Folge offener, relativ kompakter Mengen  $G_n$  aus  $E$  mit  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ . Nach Voraussetzung findet man für alle  $\omega \in \Omega$  ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $S(\omega) \subset \bigcup_{n=1}^m G_n =: D_m$ . Folglich gilt

$$\{S \subset K\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{S \subset K \cap \text{cl } D_m\} \in \mathcal{A}_K,$$

wegen  $\{S \subset K \cap \text{cl } D_m\} \in \mathcal{A}_{K \cap \text{cl } D_m} \subset \mathcal{A}_K$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ . □

**Lemma 1.2.9** *Sind  $S$  eine Stoppmenge und  $K \in \mathcal{F}$ , so ist  $S^K$  eine  $\mathcal{A}_K$ -messbare Stoppmenge.*

**Beweis:** Für  $G \in \mathcal{G}$  und  $K \in \mathcal{F}$  gelten

$$\{S^K \cap G = \emptyset\} \cap \{S \subset K\} = \{S \subset K \setminus G\} \in \mathcal{A}_{K \setminus G} \subset \mathcal{A}_K,$$

sowie

$$\{S^K \cap G = \emptyset\} \cap \{S \subset K\}^c = \{K \cap G = \emptyset\} \cap \{S \subset K\}^c \in \mathcal{A}_K.$$

Wir erhalten  $\{S^K \cap G = \emptyset\} \in \mathcal{A}_K$  für alle  $G \in \mathcal{G}$ . Das System  $\{\mathcal{F}^G, G \in \mathcal{G}\}$  ist ein Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ , folglich ist  $S^K$  messbar bezüglich  $\mathcal{A}_K$ . Ferner gelten für  $K, L \in \mathcal{F}$

$$\{S^K \subset L\} \cap \{S \subset K\} = \{S \subset K \cap L\} \in \mathcal{A}_{K \cap L} \subset \mathcal{A}_L$$

und im Fall von  $K \subset L$

$$\{S^K \subset L\} \cap \{S \subset K\}^c = \{S \subset K\}^c \in \mathcal{A}_K \subset \mathcal{A}_L$$

sowie im Fall von  $K \not\subset L$

$$\{S^K \subset L\} \cap \{S \subset K\}^c = \emptyset \in \mathcal{A}_L.$$

Folglich ist  $\{S^K \subset L\} \in \mathcal{A}_L$  für abgeschlossenes  $L$ ,  $S^K$  somit eine Stoppmenge.  $\square$

Für eine messbare Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  definieren wir das Mengensystem  $\mathcal{A}_S$  durch

$$\mathcal{A}_S := \{A \in \mathcal{A} : A \cap \{S \subset K\} \in \mathcal{A}_K \text{ für alle } K \in \mathcal{F}\}. \quad (1.2.7)$$

Analog zum Beweis von Lemma 1.2.8 ergibt sich, dass für Stoppmengen  $S$  mit Werten in  $\mathcal{C}$  in Definition (1.2.7)  $\mathcal{F}$  durch  $\mathcal{C}$  ersetzt werden darf.

**Lemma 1.2.10** *Es ist  $S$  genau dann eine Stoppmenge, falls  $\mathcal{A}_S$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. In diesem Fall ist  $S$  messbar bezüglich  $\mathcal{A}_S$ .*

**Beweis:** Zu zeigen ist nur der Nachsatz. Seien  $S$  eine Stoppmenge,  $G \in \mathcal{G}$  und  $K \in \mathcal{F}$ . Dann gilt

$$\{S \cap G = \emptyset\} \cap \{S \subset K\} = \{S \subset K \setminus G\} \in \mathcal{A}_{K \setminus G} \subset \mathcal{A}_K.$$

Folglich ist  $\{S \cap G = \emptyset\} \in \mathcal{A}_S$  für alle  $G \in \mathcal{G}$ . Das System  $\{\mathcal{F}^G, G \in \mathcal{G}\}$  ist ein Erzeuger von  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ , somit ist  $S$  messbar bezüglich  $\mathcal{A}_S$ .  $\square$

Wir wollen uns abschließend überlegen, inwiefern sich Satz 1.2.3 auf den Rahmen dieses Unterabschnittes übertragen lässt. Betrachte hierfür  $\mathcal{A}_K$ -messbare Abbildungen  $\pi_K : \Omega \rightarrow W$ ,  $K \in \mathcal{F}$ , mit Werten in einem Messraum  $(W, \mathcal{W})$ . Für eine messbare Abbildung  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  sei die Abbildung  $\pi_S : \Omega \rightarrow W$  definiert durch

$$\pi_S(\omega) := \pi_{S(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega.$$

**Lemma 1.2.11** *Ist  $S$  eine Stoppmenge und gilt  $\sigma(\pi_{SK}) \subset \mathcal{A}_K$ ,  $K \in \mathcal{F}$ , so ist  $\sigma(\pi_S) \subset \mathcal{A}_S$ .*

**Beweis:** Seien  $S$  eine Stoppmenge und  $\pi_{SK}$  messbar bezüglich  $\mathcal{A}_K$  für alle  $K \in \mathcal{F}$ . Unter Beachtung der Definition (1.2.4) und der Stoppmengeneigenschaft von  $S$  erhalten wir für  $K \in \mathcal{F}$  und  $A \in \mathcal{W}$

$$\{\pi_S \in A\} \cap \{S \subset K\} = \{\pi_{SK} \in A\} \cap \{S \subset K\} \in \mathcal{A}_K.$$

Nach Definition (1.2.7) ergibt sich  $\{\pi_S \in A\} \in \mathcal{A}_S$  und hieraus die Behauptung.  $\square$

Um weitere Ergebnisse erhalten zu können, müssen  $(\Omega, \mathcal{A})$  und  $(W, \mathcal{W})$  geeignet gewählt werden. Dies geschieht im folgenden Unterabschnitt.

### 1.2.3 Stoppmengen auf einem kanonischen Messraum

Nachdem wir das Konzept der Stoppmengen im vorigen Unterabschnitt in zwei Hinsichten verallgemeinert haben, wollen wir nun die Untersuchung von Stoppmengen in zweifacher Weise vereinfachen. Zum einen betrachten wir den kanonischen Fall  $(\Omega, \mathcal{A}) := (\mathbf{N}_Y, \mathcal{N}_Y)$  für einen gegebenen Markenraum  $(Y, \mathcal{Y})$ . Zum anderen definieren wir für  $K \in \mathcal{F}$  die Abbildung  $\pi_K : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathbf{N}_Y$  durch

$$\pi_K(\varphi) := \varphi \cap K, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y, \quad (1.2.8)$$

sowie

$$\mathcal{N}_K := \sigma(\pi_K).$$

Wir erinnern an die Definition von  $\varphi \cap K$  für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $K \in \mathcal{F}$  in Unterabschnitt 1.1.5. Den Begriff der Stoppmenge verstehen wir in diesem Rahmen stets mit Bezug auf die Filtration  $(\mathcal{N}_K)_{K \in \mathcal{F}}$ . Die Familie  $\pi_K : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathbf{N}_Y$ ,  $K \in \mathcal{F}$ , besitzt die *Projektionseigenschaft*, d.h. es gilt

$$\pi_{K_1} \circ \pi_{K_2} = \pi_{K_1}, \quad K_1 \subset K_2. \quad (1.2.9)$$

Wegen

$$\mathcal{N}_{K_1} = \pi_{K_1}^{-1}(\mathcal{N}_Y) = (\pi_{K_1} \circ \pi_{K_2})^{-1}(\mathcal{N}_Y) = \pi_{K_2}^{-1}(\pi_{K_1}^{-1}(\mathcal{N}_Y)) \subset \mathcal{N}_{K_2}$$

für Mengen  $K_1 \subset K_2$  aus  $\mathcal{F}$  ist  $(\mathcal{N}_K)_{K \in \mathcal{F}}$  monoton. Die Messbarkeit von  $\pi_K$  ergibt sich dabei sofort aus Lemma A.1.5. Um zu verdeutlichen, dass die Resultate dieses Unterabschnitts von (1.2.9), jedoch nicht von der speziellen Definition (1.2.8) der  $\pi_K$  abhängen, schreiben wir weiterhin  $\pi_K(\varphi)$  statt  $\varphi \cap K$ . Messbarkeit bezüglich  $\mathcal{N}_K$  kann beispielsweise unabhängig von ebengenannter Definition sehr einfach beschrieben werden.

**Lemma 1.2.12** *Es seien  $K \in \mathcal{F}$ ,  $(X, \mathcal{X})$  ein Messraum mit  $\{x\} \in \mathcal{X}$  für alle  $x \in X$  sowie  $F : \mathbf{N}_Y \rightarrow X$  eine messbare Abbildung. Dann ist  $F$  genau dann  $(\mathcal{N}_K, \mathcal{X})$ -messbar, falls  $F = F \circ \pi_K$  gilt.*

**Beweis:** Zu zeigen ist nur eine Richtung. Es seien  $F$  messbar bezüglich  $(\mathcal{N}_K, \mathcal{X})$  und  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Nach Voraussetzung ist  $\{F(\varphi)\} \in \mathcal{X}$ , somit existiert ein  $A \in \mathcal{N}_K$  mit

$$F^{-1}(\{F(\varphi)\}) = \pi_K^{-1}(A). \quad (1.2.10)$$

Aus (1.2.10) folgt  $\varphi \in \pi_K^{-1}(A)$  und aus der Projektionseigenschaft (1.2.9) ergibt sich  $\pi_K(\pi_K(\varphi)) = \pi_K(\varphi) \in A$ , folglich  $\pi_K(\varphi) \in \pi_K^{-1}(A)$ . Wiederum aus (1.2.10) folgt nun  $F(\pi_K(\varphi)) = F(\varphi)$ .  $\square$

Mit Blick auf den Beweis kann dieses Resultat allgemeiner formuliert werden. Die Messbarkeit von  $\pi_S$  wird dabei nicht benötigt.

**Lemma 1.2.13** *Es seien  $(X, \mathcal{X})$  ein Messraum mit  $\{x\} \in \mathcal{X}$  für alle  $x \in X$  sowie  $F : \mathbf{N}_Y \rightarrow X$  und  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  messbare Abbildungen. Gilt  $\pi_S \circ \pi_S = \pi_S$ , so ist  $F$  messbar bezüglich  $(\sigma(\pi_S), \mathcal{X})$  genau dann, falls  $F = F \circ \pi_S$  gilt.*

Ist  $X$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{X}$  die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra, so enthält  $\mathcal{X}$  alle einpunktigen Mengen  $\{x\}$ ,  $x \in X$ . Das Beispiel  $\mathcal{X} := \{\emptyset, X\}$  zeigt, dass man in Lemmata 1.2.12 und 1.2.13 nicht ohne Voraussetzungen an  $\mathcal{X}$  auskommt, man vergleiche auch [19], Lemma 1.13. Für Stoppmengen  $S$  ist die Stopp- $\sigma$ -Algebra

$$\mathcal{N}_S := \{A \in \mathcal{N} : A \cap \{S \subset K\} \in \mathcal{N}_K \text{ für alle } K \in \mathcal{F}\}.$$

gerade die durch die Abbildung  $\pi_S$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathcal{A}$ . Die Messbarkeit von  $\pi_S$  wird in Lemma A.1.5 gesichert.

**Lemma 1.2.14** *Ist  $S$  eine Stoppmenge, so gilt  $\mathcal{N}_S = \sigma(\pi_S)$ .*

**Beweis:** Seien  $A \in \mathcal{N}_S$ ,  $K \in \mathcal{F}$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Nach Definition von  $\mathcal{N}_S$  ist  $\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}\{S \subset K\}$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_K$  und nach Lemma 1.2.12 gilt

$$\mathbf{1}_A(\varphi) \cdot \mathbf{1}\{S(\varphi) \subset K\} = \mathbf{1}_A(\pi_K(\varphi)) \cdot \mathbf{1}\{S(\pi_K(\varphi)) \subset K\}. \quad (1.2.11)$$

Für  $A = \mathbf{N}_Y$  folgt insbesondere

$$\mathbf{1}\{S(\varphi) \subset K\} = \mathbf{1}\{S(\pi_K(\varphi)) \subset K\}. \quad (1.2.12)$$

Durch Setzen von  $K := S(\varphi)$  erhalten wir aus (1.2.11) und (1.2.12)

$$\mathbf{1}_A(\varphi) = \mathbf{1}_A(\pi_S(\varphi)) \quad (1.2.13)$$

und hieraus  $A = \pi_S^{-1}(A) \in \pi_S^{-1}(\mathcal{N}_Y) = \sigma(\pi_S)$ .

Um die Darstellungen für den Beweis der umgekehrten Teilmengenbeziehung übersichtlich zu halten, schreiben wir im Folgenden auch

$$\varphi_K := \pi_K(\varphi), \quad \pi(S^K(\psi), \varphi) := \pi_{S^K(\psi)}(\varphi), \quad \varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y, K \in \mathcal{F}. \quad (1.2.14)$$

Seien  $K \in \mathcal{F}$  und  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Nach Lemma 1.2.9 ist  $S^K : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_K$  und nach Definition (1.2.4) gilt stets  $S^K \subset K$ . Aus Lemma 1.2.12 folgt  $S^K(\varphi) = S^K(\varphi_K)$  und aus der Projektionseigenschaft (1.2.9) erhalten wir

$$\pi_{S^K}(\varphi) = \pi(S^K(\varphi), \varphi) = \pi(S^K(\varphi_K), \varphi) = \pi(S^K(\varphi_K), \varphi_K) = \pi_{S^K} \circ \pi_K(\varphi). \quad (1.2.15)$$

Lemma A.1.5 sichert die Messbarkeit von  $\pi_{S^K}$  und (1.2.15) liefert die  $\mathcal{A}_K$ -Messbarkeit von  $\pi_{S^K}$ . Aus Lemma 1.2.11 folgt nun  $\sigma(\pi_S) \subset \mathcal{A}_S$ .  $\square$

Bis zum Ende dieses Unterabschnittes 1.2.3 sei  $S$  eine Stoppmenge. Das untenstehende Resultat verallgemeinert Theorem 2.2.12 in [22].

**Folgerung 1.2.15** *Für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  gilt*

$$S(\varphi) = S(\pi_S(\varphi)). \quad (1.2.16)$$

und es ist  $\pi_S \circ \pi_S = \pi_S$ .

**Beweis:** Für festes  $K \in \mathcal{F}$  setze  $A := \{S \subset K\} \in \mathcal{N}_S$ , vgl. Lemma 1.2.10. Wir erhalten aus (1.2.13) für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$

$$S(\varphi) \subset K \quad \Leftrightarrow \quad S(\pi_S(\varphi)) \subset K.$$

Da  $K \in \mathcal{F}$  beliebig war, folgt  $S(\varphi) = S(\pi_S(\varphi))$ . Wir erinnern an die Schreibweise (1.2.14). Die Projektionseigenschaft (1.2.9) liefert zusammen mit der ersten Behauptung

$$\pi_S(\varphi) = \pi(S(\varphi), \varphi) = \pi(S(\varphi), \pi_S(\varphi)) = \pi(S(\pi_S(\varphi)), \pi_S(\varphi)) = \pi_S(\pi_S(\varphi)).$$

Das ist die zweite Behauptung.  $\square$ .

**Satz 1.2.16** *Es seien  $(X, \mathcal{X})$  ein Messraum mit  $\{x\} \in \mathcal{X}$  für alle  $x \in X$  sowie  $F : \mathbf{N}_Y \rightarrow X$  eine messbare Abbildung. Dann ist  $F$  genau dann  $\mathcal{N}_S$ -messbar oder äquivalent hierzu  $\sigma(\pi_S)$ -messbar, falls  $F = F \circ \pi_S$  gilt. In diesem Fall ist  $F(\varphi) = F(\pi_S(\varphi))$  für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $K \in \mathcal{F}$  mit  $S(\varphi) \subset K$ .*

**Beweis:** Die erste Behauptung folgt sofort aus Lemmata 1.2.13 und 1.2.14 sowie Folgerung 1.2.15. Für den Nachsatz setze  $A := F^{-1}(\{F(\varphi)\}) \in \mathcal{N}_S$  für festes  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  in (1.2.11) und nutze (1.2.12).  $\square$

Nach Lemma 1.2.10 ist  $S$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_S$ . Wir halten diesen Fall gesondert fest.

**Folgerung 1.2.17** Für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $K \in \mathcal{F}$  gilt

$$S(\varphi) \subset K \quad \Leftrightarrow \quad S(\pi_K(\varphi)) \subset K. \quad (1.2.17)$$

Falls  $S(\varphi) \subset K$ , so ist

$$S(\varphi) = S(\pi_K(\varphi)). \quad (1.2.18)$$

**Beweis:** Zu zeigen ist nur noch (1.2.17), was jedoch sofort aus (1.2.12) folgt.  $\square$

### 1.2.4 Charakterisierungen von Stoppmengen

Wir schreiben von nun an  $\varphi \cap S(\varphi)$  statt  $\pi_S(\varphi)$  und  $\varphi_K := \varphi \cap K$  statt  $\pi_K(\varphi)$ , da im Folgenden von der speziellen Form (1.2.8) Gebrauch gemacht wird. Wir betrachten weiterhin nur den markierten Fall  $(W, \mathcal{W}) = (\mathbf{N}_Y, \mathcal{N}_Y)$  und erinnern an die Definition von  $\varphi \cap K$  und  $\varphi \cup \psi$  für  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  und  $K \subset E$  in Abschnitt 1.1.5. Stoppmengen sind diejenigen Mengen, welche sich selbst festlegen. Die Art und Weise, in welcher das geschieht, ist Inhalt des folgenden Satzes 1.2.18.

**Satz 1.2.18** Eine messbare Abbildung  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann eine Stoppmenge, falls eine der folgenden Aussagen richtig ist.

i) Für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi \subset S(\varphi)^c \times Y$  ist

$$S(\varphi) = S((\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi). \quad (1.2.19)$$

ii) Für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  ist

$$\varphi \cap S(\varphi) = \varphi \cap S(\varphi \cap S(\varphi)), \quad (1.2.20)$$

und es gilt für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$

$$\psi = \varphi \cap S(\psi) \quad \Rightarrow \quad S(\psi) = S(\varphi). \quad (1.2.21)$$

iii) Für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  gilt (1.2.20) und es ist für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$

$$\varphi \subset S(\varphi) \times Y, \quad \psi \subset S(\varphi)^c \times Y \quad \Rightarrow \quad S(\varphi) = S(\varphi \cup \psi). \quad (1.2.22)$$

**Beweis:** Es sei  $S$  zunächst eine Stoppmenge.

- ii) Es sei  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ . Wir setzen  $K := S(\psi)$  in (1.2.17) und erhalten aus  $\psi = \varphi_K$  und  $S(\varphi_K) = S(\psi) \subset K$  ebenfalls  $S(\varphi) \subset K$ . Mit (1.2.18) ergibt sich nun

$$S(\varphi) = S(\varphi_K) = S(\psi).$$

Ferner folgt (1.2.20) sofort aus (1.2.16).

- i) Es sei  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi \subset S(\varphi)^c \times Y$ . Aus (1.2.16) erhält man zunächst

$$S(\varphi \cap S(\varphi)) = S(\varphi), \quad (1.2.23)$$

insbesondere ist  $\psi \subset S(\varphi \cap S(\varphi))^c \times Y$ . Folglich gilt

$$\varphi \cap S(\varphi) = ((\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi) \cap S(\varphi \cap S(\varphi)). \quad (1.2.24)$$

Wir wollen die bereits nachgewiesene Implikation (1.2.21) benutzen und setzen

$$\psi' := \varphi \cap S(\varphi), \quad \varphi' := (\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi.$$

Die Gleichung (1.2.24) liest sich

$$\psi' = \varphi' \cap S(\psi').$$

Die Implikation (1.2.21) und (1.2.23) liefern

$$S(\varphi) = S(\varphi \cap S(\varphi)) = S(\psi') = S(\varphi') = S((\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi).$$

- iii) Es gelte  $\varphi \subset S(\varphi) \times Y$  und  $\psi \subset S(\varphi)^c \times Y$ , insbesondere ist

$$\varphi = (\varphi \cup \psi) \cap S(\varphi).$$

Wir setzen  $\psi' := \varphi$ ,  $\varphi' := \varphi \cup \psi$  und erhalten wegen

$$\psi' = \varphi' \cap S(\psi')$$

die Behauptung sofort aus der bereits gezeigten Implikation (1.2.21).

Wir beweisen nun, dass aus jeder der Bedingungen i)-iii) die Stoppmengeneigenschaft von  $S$  folgt.

- ii) Seien (1.2.20) und (1.2.21) für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  richtig. Wir erhalten sofort

$$S(\varphi) = S(\varphi \cap S(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (1.2.25)$$

Seien  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $K \in \mathcal{F}$  mit  $S(\varphi) \subset K$ . Wir definieren  $\psi := \varphi \cap S(\varphi)$ . Dann gilt  $S(\psi) = S(\varphi) \subset K$  nach (1.2.25) und es ist

$$\psi = \varphi_K \cap S(\varphi) = \varphi_K \cap S(\psi).$$

Existiert umgekehrt ein  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $S(\psi) \subset K$  und  $\psi = \varphi_K \cap S(\psi)$ , so ist ebenfalls

$$\psi = \varphi \cap S(\psi)$$

und aus (1.2.21) folgt

$$S(\varphi) = S(\psi) \subset K. \quad (1.2.26)$$

Es gilt somit

$$S(\varphi) \subset K \Leftrightarrow \exists \psi \in \mathbf{N}_Y \text{ mit } S(\psi) \subset K \text{ und } \psi = \varphi_K \cap S(\psi). \quad (1.2.27)$$

Unter Beachtung von  $(\varphi_K)_K = \varphi_K$  erhalten wir aus (1.2.27)

$$S(\varphi) \subset K \Leftrightarrow S(\varphi_K) \subset K. \quad (1.2.28)$$

Folglich gilt  $\{S \subset K\} = \pi_K^{-1}(\{S \subset K\}) \in \mathcal{N}_K$  und  $S$  ist eine Stoppmenge, da  $K \in \mathcal{F}$  beliebig war. Wir erinnern daran, dass die Messbarkeit von  $S$  die Messbarkeit von  $\{S \subset K\} = S^{-1}(\mathcal{F}^{K^c})$  impliziert.

- iii) Seien nun (1.2.20) und (1.2.22) richtig für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$ . Betrachte  $\tilde{\varphi}, \varphi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \cap S(\varphi)$  sowie  $\psi := \tilde{\varphi} \cap S(\varphi)^c$ . Es ist  $\varphi \subset S(\varphi) \times Y$  und aus (1.2.22) erhalten wir

$$S(\tilde{\varphi}) = S(\varphi \cup \psi) = S(\varphi).$$

Somit gilt auch (1.2.21) für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  und  $S$  ist nach ii) eine Stoppmenge.

- i) Aus der Gültigkeit von (1.2.19) folgen sofort (1.2.20) sowie die Richtigkeit der Implikation (1.2.22). Nach eben Gezeigtem ist  $S$  dann eine Stoppmenge.  $\square$

Die Forderung (1.2.20) sichert für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  die Existenz eines  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ . Die Aussage ii) in Satz 1.2.18 lässt sich in folgender Weise modifizieren.

**Satz 1.2.19** *Eine messbare Abbildung  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann eine Stoppmenge, falls  $S(\varphi) = S(\varphi \cap S(\varphi))$  für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  gilt und für  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  folgende Implikation richtig ist:*

$$\psi = \varphi \cap S(\psi) \Rightarrow S(\varphi) \subset S(\psi). \quad (1.2.29)$$

**Beweis:** Ist  $S$  eine Stoppmenge, so gelten (1.2.29) nach Satz 1.2.18 ii) und  $S(\varphi) = S(\varphi \cap S(\varphi))$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , nach Folgerung 1.2.15. Gelten nun umgekehrt (1.2.16) und (1.2.29) für eine messbare Abbildung  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$ , so zeigt man analog zu dem Beweis von Satz 1.2.18, dass  $S$  eine Stoppmenge ist. Mittels (1.2.29) anstelle von (1.2.21) erhält man dabei im Beweis von Satz 1.2.18 statt (1.2.26) die Teilmengenbeziehung  $S(\varphi) \subset S(\psi) \subset K$ . Diese ist jedoch für eben genannten Beweis völlig ausreichend.  $\square$

Eine einfache Folgerung aus Satz 1.2.18, ii) ist die folgende Feststellung.

**Satz 1.2.20** *Eine messbare Abbildung  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann eine Stoppmenge, falls für jedes  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  die Gleichung*

$$\psi = \varphi \cap S(\psi) \tag{1.2.30}$$

die eindeutige Lösung  $L(\varphi) := \varphi \cap S(\varphi)$  in  $\mathbf{N}_Y$  besitzt und  $S(L(\varphi)) = S(\varphi)$  gilt.

Mittels Satz 1.2.18 kann ferner unten stehende Verbesserung von Satz 1.2.16 gefunden werden. Sei dabei bis zum Ende dieses Unterabschnittes  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  stets eine Stoppmenge.

**Satz 1.2.21** *Es seien  $(X, \mathcal{X})$  ein Messraum mit  $\{x\} \in \mathcal{X}$  für alle  $x \in X$  sowie  $F : \mathbf{N}_Y \rightarrow X$  eine messbare Abbildung. Dann ist  $F$  genau dann  $\mathcal{N}_S$ -messbar oder äquivalent hierzu  $\sigma(\pi_S)$ -messbar, falls  $F = F \circ \pi_S$  gilt. In diesem Fall ist*

$$F(\varphi) = F((\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi)$$

für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi \subset S(\varphi)^c \times Y$ .

**Beweis:** Zu zeigen ist nur Nachsatz. Seien  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi \subset S(\varphi)^c \times Y$  sowie

$$\varphi' := (\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi.$$

Nach Satz 1.2.18 gilt  $S(\varphi') = S(\varphi)$ , es ergibt sich

$$\varphi' \cap S(\varphi') = \varphi' \cap S(\varphi) = \varphi \cap S(\varphi).$$

Wir erhalten aus  $F = F \circ \pi_S$

$$F(\varphi') = F(\varphi' \cap S(\varphi')) = F(\varphi \cap S(\varphi)) = F(\varphi).$$

Das ist die Behauptung.  $\square$

Abschließend behandeln wir die Frage, ob mit einer Stoppmenge  $S$  auch ihre konvexe Hülle oder ihre Umkugel eine Stoppmenge ist.

**Satz 1.2.22** Sei  $h : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  eine messbare Abbildung mit

$$F \subset h(F), \quad F \in \mathcal{F}.$$

Dann ist auch  $h \circ S$  eine Stoppmenge.

**Beweis:** Wir setzen  $T := h \circ S$ . Nach Voraussetzung gilt  $S \subset T$ . Seien  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $\psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi \subset T(\varphi)^c \times Y$  sowie

$$\varphi' := (\varphi \cap T(\varphi)) \cup \psi, \quad \psi' := (\varphi \cap T(\varphi) \cap S(\varphi)^c) \cup \psi.$$

Dann gelten  $\psi' \subset S(\varphi)^c \times Y$  und

$$\varphi' = (\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi'.$$

Nach Satz 1.2.18 gilt  $S(\varphi') = S(\varphi)$ , was  $T(\varphi') = T(\varphi)$  impliziert. Erneutes Anwenden von Satz 1.2.18 liefert die Behauptung.  $\square$

### 1.2.5 Beispiele und weitere Ergebnisse

In diesem Unterabschnitt wollen wir der Frage nachgehen, inwiefern die Eigenschaften zur Charakterisierbarkeit von Stoppmengen in Satz 1.2.18 abgeschwächt werden können und inwieweit die eindeutige Lösbarkeit von (1.2.30) die Stoppmengeneigenschaft impliziert.

**Beispiel 1.2.23:** Die Eigenschaft (1.2.16) für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  impliziert nicht die Stoppmengeneigenschaft. Seien  $K_1, K_2 \in \mathcal{F}$  mit  $K_1 \subset K_2$ ,  $K_1 \neq K_2$  und

$$S(\varphi) := \begin{cases} K_1, & \text{falls } \varphi_{K_2 \setminus K_1} = \emptyset, \\ K_2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$S(\varphi) \subset K_1 \Leftrightarrow \varphi_{K_2 \setminus K_1} = \emptyset,$$

insbesondere ist  $\{S(\varphi) \subset K_1\}$  nicht  $\mathcal{N}_{K_1}$ -messbar. Die Bedingung (1.2.16) ist erfüllt: Gilt  $\varphi_{K_2 \setminus K_1} = \emptyset$ , so ist

$$S(\varphi \cap S(\varphi)) = S(\varphi_{K_1}) = K_1 = S(\varphi),$$

andernfalls gilt wegen  $(\varphi_{K_2})_{K_2 \setminus K_1} = \varphi_{K_2 \setminus K_1}$  auch

$$S(\varphi \cap S(\varphi)) = S(\varphi_{K_2}) = K_2 = S(\varphi).$$

In den folgenden beiden Beispielen betrachten wir  $E := \mathbb{R}^d$  und den Raum der einfachen, nicht markierten Zählmaße  $\mathbf{N}$ . Von unserer gewohnten Notation abweichend schreiben wir

jedoch weiterhin  $\varphi$  statt  $\phi$ . Mit  $d(\varphi)$  sei der Abstand des Trägers von  $\varphi$  zum Ursprung bezeichnet, d.h.  $d(\varphi) := \inf\{d(x, 0) : x \in \varphi\}$ .

**Beispiel 1.2.24:** Die Eigenschaft (1.2.21) für alle  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  impliziert nicht die Stoppmengeneigenschaft. Seien  $K := [0, 1]^d$  und  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  definiert durch

$$S(\varphi) := \begin{cases} K, & \text{falls } \varphi(K) = 0, \\ B(0, 2^{-1}d(\varphi)), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Gelten  $\psi(\{0\}) = 1$  und  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ , so folgen  $S(\psi) = \{0\}$ ,  $\varphi(\{0\}) = 1$  und hieraus

$$S(\varphi) = \{0\} = S(\psi).$$

Gelten  $\psi(\mathbb{R}^d) = 0$  und  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ , so folgt  $S(\psi) = K$  und hieraus  $\varphi(K) = 0$  sowie

$$S(\varphi) = K = S(\psi).$$

Andernfalls gilt  $\psi \not\subset S(\psi)$ , folglich existiert kein  $\varphi \in \mathbf{N}$  mit  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ . Die Implikation (1.2.21) gilt demnach auch in diesen Fällen.  $S$  ist jedoch nach Satz 1.2.18 keine Stoppmenge, da (1.2.20) für  $\varphi \in \mathbf{N}$  mit  $\varphi(K) \geq 1$  und  $\varphi(\{0\}) = 0$  nicht richtig ist.

**Beispiel 1.2.25:** Ist  $S(\cdot \cap S)$  eine Stoppmenge, so muss  $S$  keine Stoppmenge sein. Besitzt die Gleichung (1.2.30) für alle  $\varphi \in \mathbf{N}$  die eindeutig Lösung  $L(\varphi) = \varphi \cap S(\varphi)$ , so muss  $S$  ebenfalls keine Stoppmenge sein. Hierfür setzen wir

$$d^*(\varphi) := \frac{d(\varphi) + d(\varphi \cap B(0, d(\varphi))^c)}{2}.$$

Die Abbildung  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  sei definiert durch

$$S(\varphi) := \begin{cases} B(0, d(\varphi)), & \text{falls } \varphi \text{ endlich,} \\ B(0, d^*(\varphi)), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt dann stets

$$\varphi \cap S(\varphi) = \varphi \cap B(0, d(\varphi)).$$

Folglich ist

$$\varphi \cap S(\varphi \cap S(\varphi)) = \varphi \cap S(\varphi \cap B(0, d(\varphi))) = \varphi \cap B(0, d(\varphi)) = \varphi \cap S(\varphi).$$

Es ist somit  $L(\varphi) := \varphi \cap S(\varphi)$  eine Lösung von (1.2.30) für  $\varphi \in \mathbf{N}$ . Es gelte  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ . Ist  $S(\psi) = \mathbb{R}^d$ , so ist  $\psi = \varphi$ , somit auch  $S(\varphi) = \mathbb{R}^d$  und  $\psi = L(\varphi)$ . Andernfalls ist  $S(\psi)$  kompakt,  $\psi$  also endlich. Aus  $\psi \subset \varphi$  folgt

$$\varphi \cap B(0, d(\varphi)) \subset \varphi \cap B(0, d(\psi)) = \varphi \cap S(\psi) \subset S(\psi).$$

Folglich ist  $S(\psi) = B(0, d(\varphi))$  und

$$\psi = \varphi \cap S(\psi) = \varphi \cap B(0, d(\varphi)) = \varphi \cap S(\varphi).$$

Die Gleichung (1.2.30) hat somit für jedes  $\varphi \in \mathbf{N}$  die eindeutige Lösung  $L(\varphi) = \varphi \cap S(\varphi)$ . Wegen  $S(\varphi) \neq S(\varphi \cap S(\varphi))$  für nicht endliches  $\varphi$  ist  $S$  jedoch keine Stoppmenge.

In obigem Beispiel ist  $\varphi \mapsto S(\varphi \cap S(\varphi))$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}$ , eine Stoppmenge, wie folgender Satz feststellt.

**Satz 1.2.26** *Die Gleichung (1.2.30) habe für jedes  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  eine eindeutige Lösung  $L(\varphi)$  in  $\mathbf{N}_Y$ . Ist  $S \circ L$  messbar, so ist  $S \circ L$  eine Stoppmenge.*

**Beweis:** Seien  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ ,  $K \in \mathcal{F}$  und  $S(L(\varphi)) \subset K$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.26 gilt zunächst

$$L(\varphi) = \varphi \cap S(L(\varphi)) = \varphi_K \cap S(L(\varphi)).$$

Aus der Eindeutigkeit der Lösung von (1.2.30) ergibt sich  $L(\varphi_K) = L(\varphi)$ , insbesondere ist  $S(L(\varphi_K)) \subset K$ . Gilt umgekehrt  $S(L(\varphi_K)) \subset K$ , so folgt analog

$$L(\varphi_K) = \varphi_K \cap S(L(\varphi_K)) = \varphi \cap S(L(\varphi_K))$$

und hieraus  $L(\varphi) = L(\varphi_K)$  sowie  $S(L(\varphi)) \subset K$ . Insgesamt erhalten wir

$$\{S \circ L \subset K\} = \{S \circ L \circ \pi_K \subset K\} \in \mathcal{N}_K, \quad K \in \mathcal{F}.$$

Das ist die Behauptung. □

**Beispiel 1.2.27:** Man beachte, dass im Fall eindeutiger Lösbarkeit von (1.2.30) keinesfalls stets  $L(\varphi) = \varphi \cap S(\varphi)$  zu gelten braucht. Wir fixieren ein  $K \in \mathcal{C}$  und setzen für  $\varphi \in \mathbf{N}$

$$S(\varphi) := \begin{cases} K, & \text{falls } \varphi \text{ endlich,} \\ B(0, d(\varphi)), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.2.31)$$

Aus  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$  folgt sofort die Endlichkeit von  $\psi$ , somit  $\psi = \varphi_K$ . Umgekehrt ist  $\varphi_K$  endlich, somit gilt

$$\varphi_K = \varphi \cap K = \varphi \cap S(\varphi_K).$$

Es existiert folglich für jedes  $\varphi \in \mathbf{N}$  genau eine Lösung  $L(\varphi) := \varphi_K$  von  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ . Jedoch gilt  $\varphi_K \neq \varphi \cap S(\varphi)$ , falls  $\varphi$  nicht endlich und  $\varphi(K) = 0$  ist.

**Lemma 1.2.28** *Die Gleichung (1.2.30) habe für jedes  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  eine eindeutige Lösung  $L(\varphi)$  in  $\mathbf{N}_Y$ . Dann ist  $L$  idempotent, d.h. es gilt  $L(L(\varphi)) = L(\varphi)$  für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ .*

**Beweis:** Aus  $L(\varphi) = \varphi \cap S(L(\varphi))$  folgt  $L(\varphi) \subset \varphi$  und hieraus  $L(\varphi) = L(\varphi) \cap S(L(\varphi))$ .  $\square$

**Folgerung 1.2.29** *Die Gleichung (1.2.30) habe für jedes  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  eine eindeutige Lösung  $L(\varphi)$  in  $\mathbf{N}_Y$ . Ist  $S \circ L$  messbar, so ist  $S : L(\mathbf{N}_Y) \rightarrow \mathcal{F}$  eine Stoppmenge bezüglich  $(\mathcal{N}_K \cap L(\mathbf{N}_Y))_{K \in \mathcal{F}}$ .*

**Beweis:** Aus Lemma 1.2.28 folgt  $S(\varphi) = S(L(\varphi))$  für  $\varphi \in L(\mathbf{N}_Y)$ . Somit gilt für  $K \in \mathcal{F}$

$$\{S \subset K\} \cap L(\mathbf{N}_Y) = \{S \circ L \subset K\} \cap L(\mathbf{N}_Y) \in \mathcal{N}_K \cap L(\mathbf{N}_Y)$$

gemäß Satz 1.2.26.  $\square$

# Kapitel 2

## Beispiele zu Stoppmengen

### 2.1 Rekursive Konstruktion von Stoppmengen

Wir wollen in diesem Abschnitt rekursiv eine Folge  $(S_n)_{n \geq 0}$  aufsteigender Stoppmengen mit Werten in  $\mathcal{C}^* := \mathcal{C} \cup \{E\}$  konstruieren. Dabei bezeichne  $E$  wieder einen lokalkompakten Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Ausgehend von einem nichtleeren Startwert  $S_0 \in \mathcal{C}^*$  wird die Menge  $S_1$  stetig aufgeblasen gemäß einer gegebenen Vorschrift  $f_1$  und einer Stoppbedingung  $\tau_1$ . Mittels weiterer Wachstumsvorschriften  $f_{n+1}$  und Stoppbedingungen  $\tau_{n+1}$  wird induktiv für  $n \in \mathbb{N}$  ausgehend von  $S_n$  die Stoppmenge  $S_{n+1}$  definiert. Wir betrachten dabei wieder den Raum  $(\mathbf{N}_Y, \mathcal{N}_Y)$  für einen gegebenen Markenraum  $(Y, \mathcal{Y})$ . Zunächst benötigen wir jedoch Eigenschaften von Funktionen mit Werten im Raum der abgeschlossenen Mengen  $\mathcal{F}$ .

#### 2.1.1 Einige vorbereitende Aussagen

Der Raum  $\mathcal{F}$  besitzt eine Topologie, der Begriff der Stetigkeit von Funktionen definiert sich in der üblichen Weise über die offenen Mengen von  $\mathcal{F}$ . Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}$  heißt *nach oben halbstetig*, falls das Urbild  $f^{-1}(\mathcal{F}^C)$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  offen ist in  $\mathbb{R}_+$ . Jede stetige Abbildung ist insbesondere nach oben halbstetig.

Für eine Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{F}$  bezeichnet  $\limsup_{n \rightarrow \infty} F_n$  die Menge aller  $x \in E$  mit der Eigenschaft, dass jede Umgebung von  $x$  unendlich viele  $F_n$  trifft. Eine Abbildung  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}$  ist genau dann nach oben halbstetig, wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \subset f(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_+$  und alle gegen  $t$  konvergenten Folgen  $(t_n)$  aus  $\mathbb{R}_+$  gilt, vgl. [40], S. 1.1.5(a).

Wir nennen eine Abbildung  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{F}$  *monoton wachsend*, falls  $f(s) \subset f(t)$  für alle

$s \leq t$  aus  $\mathbb{R}_+$  gilt. In diesem Fall setzen wir

$$f(\infty) := \text{cl} \bigcup_{k=1}^{\infty} f(k).$$

**Lemma 2.1.1** *Seien  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{C}^*$  eine stetige und monoton wachsende Abbildung sowie  $K \subset E$  abgeschlossen. Dann gelten für  $s \in [0, \infty)$*

$$K \cap f(s) \neq \emptyset \Leftrightarrow s \geq \inf\{t \geq 0 : K \cap f(t) \neq \emptyset\}$$

und für  $s \in [0, \infty]$

$$f(s) \subset K \Leftrightarrow s \leq \inf\{t \geq 0 : K^c \cap f(t) \neq \emptyset\}.$$

**Beweis:** Zum Nachweis der ersten Behauptung reicht es, den Fall

$$\tau := \inf\{t \geq 0 : K \cap f(t) \neq \emptyset\} < \infty$$

zu betrachten, insbesondere gelte  $K \neq \emptyset$ . Aus der Monotonie von  $f$  folgt

$$t > \tau \Rightarrow K \cap f(t) \neq \emptyset \Rightarrow t \geq \tau. \quad (2.1.1)$$

Sei  $(t_n)$  eine Folge aus  $(\tau, \infty)$  mit  $t_n \downarrow \tau$ . Aus (2.1.1) ergibt sich  $K \cap f(t_n) \neq \emptyset$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und mittels des Cantorschen Durchschnittssatzes, vgl. Satz 1.1.4, und der Halbstetigkeit nach oben von  $f$  folgt

$$\emptyset \neq K \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} f(t_n) \subset K \cap \limsup_{n \rightarrow \infty} f(t_n) \subset K \cap f(\tau).$$

Der Cantorsche Durchschnittssatz ist wegen  $f(t_n) \in \mathcal{C}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , in der Tat anwendbar. Damit ist  $K \cap f(\tau) \neq \emptyset$ , was die erste Behauptung zeigt.

Zum Nachweis der zweiten Behauptung nehmen wir zunächst

$$\delta_K := \inf\{t \geq 0 : K^c \cap f(t) \neq \emptyset\} < \infty$$

an. Aus der Monotonie von  $f$  folgt

$$\delta_K > t \Rightarrow f(t) \subset K \Rightarrow \delta_K \geq t.$$

In der Topologie von  $\mathcal{F}$  ist  $\mathcal{F}_{K^c}$  offen, folglich ist

$$\{t \geq 0 : K^c \cap f(t) \neq \emptyset\} = f^{-1}(\mathcal{F}_{K^c})$$

aufgrund der Stetigkeit und der Monotonie von  $f$  ein offenes Intervall in  $\mathbb{R}_+$ . Wir erhalten

$$\{t \geq 0 : K^c \cap f(t) \neq \emptyset\} = (\delta_K, \infty).$$

Damit ist auch die zweite Behauptung im Fall  $\delta_K < \infty$  bewiesen. Ist  $\delta_K = \infty$ , so folgt  $f(t) \subset K$  für alle  $t \geq 0$  und hieraus  $f(\infty) \subset K$ .  $\square$

### 2.1.2 Beschreibung der rekursiven Konstruktion

Unsere Konstruktion basiert auf folgenden, während der Rekursion bereitzustellenden Größen:

- i) Zu Beginn der Rekursion sei eine *erste maximale Wachstumszeit*  $\sigma_1 \in [0, \infty]$  gegeben.
- ii) Zu Beginn der Rekursion sei ferner eine stetige und monoton wachsende Abbildung  $f_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{C}^*$  mit *Startwert*  $f_1(0) = S_0 \in \mathcal{C}^* \setminus \{\emptyset\}$  vorgelegt.
- iii) Im  $n$ -ten Schritt der Rekursion,  $n \geq 2$ , sei eine messbare Abbildung  $\sigma_n : \mathbf{N}_Y \rightarrow [0, \infty]$  bereitgestellt.
- iv) Im  $n$ -ten Schritt der Rekursion,  $n \geq 2$ , ist ferner rekursiv eine messbare Abbildung  $f_n : \mathbf{N}_Y \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{C}^*$  einzuführen, so dass die *Fortsetzungsbedingung* (2.1.3) erfüllt ist. Die Abbildung  $t \mapsto f_n(\varphi, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , sei stetig und monoton wachsend für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ .

Ausgehend von diesen Größen werden induktiv Konfigurationen  $\varphi_n$  und Abbildungen  $\tau_n : \mathbf{N}_Y \rightarrow [0, \infty]$ ,  $S_n : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  für  $n \geq 1$  definiert.

Wir setzen  $\varphi_0 := \varphi \cap S_0 \in \mathbf{N}_Y$  für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und definieren Abbildungen  $\tau_1 : \mathbf{N}_Y \rightarrow [0, \infty]$  und  $S_1 : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  durch

$$\tau_1(\varphi) := \inf\{t \geq 0 : (\varphi \setminus \varphi_0) \cap f_1(t) \neq \emptyset\}, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y, \quad (2.1.2)$$

und ( $s \wedge t := \min(s, t)$ )

$$S_1(\varphi) := f_1(\tau_1(\varphi) \wedge \sigma_1), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y.$$

Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1} \in \mathbf{N}_Y$  und

$$\tau_1(\varphi), \dots, \tau_n(\varphi), S_1(\varphi), \dots, S_n(\varphi)$$

bereits berechnet. Bereitzustellen sind nun messbare Abbildungen  $\sigma_{n+1} : \mathbf{N}_Y \rightarrow [0, \infty]$  und  $f_{n+1} : \mathbf{N}_Y \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{C}^*$ , so dass die Abbildung  $t \mapsto f_{n+1}(\varphi, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , stetig und monoton wachsend für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  ist. Wir fassen  $f_{n+1}$  auf als *Wachstum von  $S_{n+1}$*  ausgehend von  $S_n$  und fordern folgerichtig, dass die Abbildung  $f_{n+1}$  folgende Fortsetzungsbedingung erfüllt:

$$f_{n+1}(\varphi, 0) = S_n(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (2.1.3)$$

Setze ferner

$$\varphi_n := \varphi \cap S_n(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (2.1.4)$$

Die Größen  $\tau_{n+1}$  und  $S_{n+1}$  werden schließlich für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  definiert durch

$$\begin{aligned} \tau_{n+1}(\varphi) &:= \inf\{t \geq 0 : (\varphi \setminus \varphi_n) \cap f_{n+1}(\varphi_n, t) \neq \emptyset\}, \\ S_{n+1}(\varphi) &:= f_{n+1}(\varphi_n, \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \sigma_{n+1}(\varphi_n)), \end{aligned}$$

sowie die Menge  $S(\varphi)$  durch

$$S(\varphi) := \text{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(\varphi), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y.$$

**Lemma 2.1.2** *Die Folge  $(S_n)_{n \geq 0}$  ist eine Folge aufsteigender Stoppmengen.*

**Satz 2.1.3**  *$S$  ist eine Stoppmenge.*

**Beweis:** Aus obigem Lemma 2.1.2 folgt

$$\{S \subset K\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{S_n \subset K\}, \quad K \in \mathcal{F}.$$

Das ist die Behauptung. □

**Beweis von Lemma 2.1.2:** Nach Konstruktion der  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und wegen der Monotonie von  $f_1$  und (2.1.3) gilt

$$S_0 = f_1(0) \subset S_1(\varphi) \subset S_n(\varphi), \quad n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbf{N}_Y.$$

Somit ist  $\{S_n \subset K\} = \emptyset$ , falls  $S_0 \not\subset K$ . Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion. Seien  $K \in \mathcal{F}$  mit  $S_0 \subset K$  und

$$\delta_K := \inf\{t \geq 0 : K^c \cap f_1(t) \neq \emptyset\}.$$

Die zweite Aussage von Lemma 2.1.1 liefert

$$f_1(\delta_K) \subset K. \quad (2.1.5)$$

Gilt  $\delta_K \geq \sigma_1$ , so folgt für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  aus der Monotonie von  $f_1$

$$S_1(\varphi) = f_1(\tau_1(\varphi) \wedge \sigma_1) \subset f_1(\tau_1(\varphi) \wedge \delta_K) \subset K,$$

insbesondere ist  $\{S_1 \subset K\} = \mathbf{N}_Y$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_K$ . Es gelte  $\delta_K < \sigma_1$ . Die zweite Aussage von Lemma 2.1.1 liefert

$$S_1(\varphi) \subset K \Leftrightarrow f_1(\tau_1(\varphi) \wedge \sigma_1) \subset K \Leftrightarrow \tau_1(\varphi) \wedge \sigma_1 \leq \delta_K \Leftrightarrow \tau_1(\varphi) \leq \delta_K. \quad (2.1.6)$$

Der Träger von  $(\varphi \setminus \varphi_0) \cap f_1(\delta_K)$  ist genau dann nichtleer, falls dies für die zugehörige Projektion auf  $E$  gilt. Wir können also Lemma 2.1.1 erneut anwenden, nun jedoch die erste Aussage, um zusammen mit (2.1.6) und  $\delta_K < \infty$

$$S_1(\varphi) \subset K \Leftrightarrow \tau_1(\varphi) \leq \delta_K \Leftrightarrow (\varphi \setminus \varphi_0) \cap f_1(\delta_K) \neq \emptyset$$

zu erhalten. Mittels (2.1.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} \{S_1 \subset K\} &= \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi \cap f_1(\delta_K) \cap \varphi_0^c \neq \emptyset\} \\ &= \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi_K \cap f_1(\delta_K) \cap S_0^c \neq \emptyset\} \in \mathcal{N}_K. \end{aligned}$$

Es seien nun  $n \in \mathbb{N}$  und  $S_n$  eine Stoppmenge. Gemäß Folgerung 1.2.15 gilt zunächst

$$S_n(\varphi_n) = S_n(\varphi \cap S_n(\varphi)) = S_n(\varphi). \quad (2.1.7)$$

Aus der Monotonie von  $f_{n+1}(\varphi_n, \cdot)$  und (2.1.3) folgt nun für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$

$$S_n(\varphi) = S_n(\varphi_n) = f_{n+1}(\varphi_n, 0) \subset f_{n+1}(\varphi_n, \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \sigma_{n+1}(\varphi_n)) = S_{n+1}(\varphi)$$

und hieraus

$$\{S_{n+1} \subset K\} = \{S_n \subset K\} \cap \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : f_{n+1}(\varphi_n, \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \sigma_{n+1}(\varphi_n)) \subset K\}.$$

Setze

$$\delta_{K,n}(\varphi) := \inf\{t \geq 0 : K^c \cap f_{n+1}(\varphi_n, t) \neq \emptyset\}, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (2.1.8)$$

Aus (2.1.7) erhalten wir für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , vgl. (2.1.4),

$$(\varphi_n)_n = \varphi_n \cap S_n(\varphi_n) = \varphi_n \cap S_n(\varphi) = \varphi_n,$$

und hieraus

$$\delta_{K,n}(\varphi) = \delta_{K,n}(\varphi_n), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (2.1.9)$$

Sei  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Die zweite Aussage von Lemma 2.1.1 liefert

$$f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi)) \subset K. \quad (2.1.10)$$

Gilt  $\delta_{K,n}(\varphi) \geq \sigma_{n+1}(\varphi_n)$ , so folgt aus der Monotonie von  $f_{n+1}(\varphi_n, \cdot)$

$$S_{n+1}(\varphi) = f_{n+1}(\varphi_n, \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \sigma_{n+1}(\varphi_n)) \subset f_{n+1}(\varphi_n, \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \delta_{K,n}(\varphi)) \subset K.$$

Insbesondere ergibt sich zusammen mit (2.1.9)

$$\begin{aligned} \{S_{n+1} \subset K\} \cap \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \delta_{K,n}(\varphi) \geq \sigma_{n+1}(\varphi_n)\} \\ = \{S_n \subset K\} \cap \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \delta_{K,n}(\varphi_n) \geq \sigma_{n+1}(\varphi_n)\}. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Es gelte  $\delta_{K,n}(\varphi) < \sigma_{n+1}(\varphi_n)$ . Wie im Fall  $n = 0$  (Induktionsanfang) ausgeführt, erhalten wir aus Lemma 2.1.1

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\varphi_n, \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \sigma_{n+1}(\varphi_n)) \subset K &\Leftrightarrow \tau_{n+1}(\varphi) \wedge \sigma_{n+1}(\varphi_n) \leq \delta_{K,n}(\varphi) \\ &\Leftrightarrow \tau_{n+1}(\varphi) \leq \delta_{K,n}(\varphi) \\ &\Leftrightarrow (\varphi \setminus \varphi_n) \cap f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi)) \neq \emptyset. \end{aligned}$$

Aus (2.1.9) und (2.1.10) folgt nun

$$\begin{aligned} \{S_{n+1} \subset K\} \cap \{\varphi : \delta_{K,n}(\varphi) < \sigma_{n+1}(\varphi_n)\} \\ = \{S_n \subset K\} \cap \{\varphi : (\varphi_K \setminus \varphi_n) \cap f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi_n)) \neq \emptyset\} \\ \cap \{\varphi : \delta_{K,n}(\varphi_n) < \sigma_{n+1}(\varphi_n)\}. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Nach Voraussetzung ist  $S_n$  eine Stoppmenge. Mittels (1.2.17) in Folgerung 1.2.17 erhalten wir

$$\{\varphi \in \mathbf{N}_Y : S_n(\varphi) \subset K\} = \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : S_n(\varphi_K) \subset K\}.$$

Nach eben genannter Folgerung ergibt sich für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $S_n(\varphi) \subset K$  oder äquivalenterweise mit  $S_n(\varphi_K) \subset K$

$$\varphi_n = \varphi \cap S_n(\varphi) = \varphi_K \cap S_n(\varphi_K) = (\varphi_K)_n.$$

Aus (2.1.11) und (2.1.12) folgt nun mit oben angestellten Überlegungen

$$\{\varphi \in \mathbf{N}_Y : S_{n+1}(\varphi) \subset K\} = \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : S_{n+1}(\varphi_K) \subset K\}.$$

Es bleibt noch die Messbarkeit von  $\{S_{n+1} \subset K\}$  zu zeigen. Mit Blick auf (2.1.11) und (2.1.12) folgt diese jedoch aus den nachfolgenden Lemmata 2.1.4 und 2.1.5.  $\square$

**Lemma 2.1.4** *Seien  $n \geq 1$  und  $S_n$  messbar. Dann sind die Abbildungen  $\delta_{K,n}$  und  $\varphi \mapsto \varphi_n$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , messbar.*

**Beweis:** Die Messbarkeit der Abbildung  $\varphi \mapsto \varphi_n$ , vgl. (2.1.4), folgt aus Lemma A.1.5. Die Messbarkeit von  $\delta_{K,n}$  folgt gemäß der zweiten Aussage in Lemma 2.1.1 aus der Definition (2.1.8) von  $\delta_{K,n}$  und der Messbarkeit der Abbildung  $f_{n+1}(\cdot, t)$ , ( $t \geq 0$ ).  $\square$

**Lemma 2.1.5** *Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $S_n$  messbar. Dann ist*

$$\{\varphi : (\varphi_K \setminus \varphi_n) \cap f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi_n)) \neq \emptyset\} \in \mathcal{N}_Y.$$

**Beweis:** Gemäß Lemma 2.1.4 und der Messbarkeitsvoraussetzung an  $f_{n+1}$  ist die Abbildung  $\varphi \mapsto f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi_n))$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , messbar. Aus Lemma A.1.6 erhalten wir nun die Messbarkeit der Abbildung

$$\varphi \mapsto h(\varphi) := \varphi \cap K \cap f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi_n)) \cap S_n(\varphi)^c, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y.$$

Insbesondere ist das Ereignis

$$\{\varphi : (\varphi_K \setminus \varphi_n) \cap f_{n+1}(\varphi_n, \delta_{K,n}(\varphi_n)) \neq \emptyset\} = \{h \in \mathcal{F}_E\}$$

messbar. □

### 2.1.3 Eine Modifikation

Wir erwähnen noch eine Modifikation unserer Rekursion. In manchen Fällen ist es besser, statt  $\tau_1$  die Größe

$$\tau_1^*(\varphi) := \inf\{t \geq 0 : \varphi \cap f_1(t) \neq \emptyset\}, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y, \quad (2.1.13)$$

zu verwenden. Am Beweis und an den Ergebnissen ändern sich dabei nichts. Die kleinste Kugel um den Ursprung beispielsweise, welche mindestens eine gegebene Anzahl  $k$  Punkte aus dem Träger von  $\varphi$  enthält, bedarf zur entsprechenden rekursiven Beschreibung dieser Modifikation. In diesem Fall kann man  $S_0 := \{0\}$  setzen. Befindet sich im Ursprung bereits ein Punkt, so ignoriert das gemäß (2.1.2) definierte  $\tau_1$  den Punkt im Ursprung im Gegensatz zu einem gemäß (2.1.13) definierten  $\tau_1^*$ .

### 2.1.4 Ein Beispiel

Es seien  $E = \mathbb{R}^d$ , versehen mit der euklidischen Metrik,  $Y := [0, R]$  für eine reelle Zahl  $R \geq 0$  sowie  $\mathcal{Y}$  die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra. Setze

$$B(\varphi) := \bigcup_{(x,r) \in \varphi} B(x, r), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y.$$

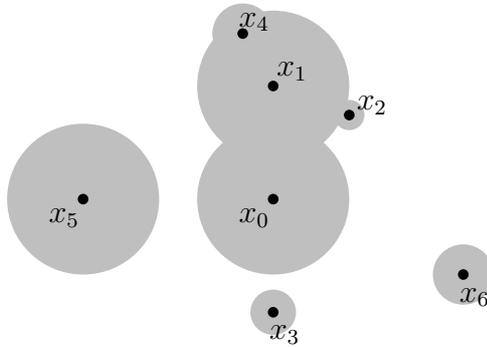
Wir fixieren  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ,  $r_0 \in [0, R]$  und bezeichnen für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  mit

$$\varphi^* := (\varphi \cap (\{x_0\} \times Y)^c) \cup \{(x_0, r_0)\}$$

die markierte Punktconfiguration, welche in  $x_0$  die Marke  $r_0$  besitzt und außerhalb von  $\{x_0\} \times Y$  durch  $\varphi$  gegeben ist. Ohne weitere Erwähnung werden wir für  $K \in \mathcal{F}$  mit  $x_0 \in K$  die folgende Gleichheit benutzen:

$$(\varphi \cap K)^* = \varphi^* \cap K$$

Als Beispiel für eine mit den Methoden aus Unterabschnitt 2.1.2 konstruierbare Stoppmenge soll hier zu  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  eine möglichst kleine Menge  $S(\varphi)$  definiert werden, welche das  $x_0$  enthaltende Cluster  $C(\varphi^*, x_0)$  in  $B(\varphi^*)$  überdeckt. Das Cluster  $C(\varphi^*, x_0)$  ist dabei die größte zusammenhängende Teilmenge von  $B(\varphi^*)$ , die  $x_0$  enthält. Wir bezeichnen mit  $C^*(x_0)$  die Abbildung  $\varphi \mapsto C(\varphi^*, x_0)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , und bemerken, dass die Menge  $C(\varphi^*, x_0)$  für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  abgeschlossen ist, vgl. Lemma A.2.1.



Das  $x_0$  enthaltende Cluster ist die Vereinigung der (grauen) Kugeln um  $x_0, x_1, x_2$  und  $x_4$ .

**Satz 2.1.6** Die durch  $S := C^*(x_0) \oplus B(0, R)$  definierte Abbildung  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  ist eine Stoppmenge und  $C^*(x_0)$  ist messbar bezüglich  $\mathcal{N}_S$ . Ist  $T : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  eine weitere Stoppmenge mit  $C^*(x_0) \subset T$ , so gilt auch  $S \subset T$ .

Die oben stehende Abbildung  $S$  kann mittels der in Unterabschnitt 2.1.2 vorgestellten rekursiven Konstruktion beschrieben werden. Wir fixieren hierfür ein  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $(x_0, r_0) \in \varphi$  und definieren  $S_0(\varphi) := \{x_0\}$ ,  $\sigma_1 := r_0 + R$  sowie  $f_1(t) := B(x_0, t)$ ,  $t \geq 0$ . Nun seien  $\varphi_0 := \varphi \cap S_0(\varphi) = \{(x_0, r_0)\}$  und

$$\tau_1 := \inf\{t \geq 0 : (\varphi \setminus \varphi_0) \cap f_1(t) \neq \emptyset\}.$$

Definiere  $s_1 := \tau_1 \wedge \sigma_1$  und  $S_1(\varphi) := f_1(s_1) = B(x_0, s_1)$  sowie

$$\varphi_1 := \varphi \cap S_1(\varphi), \quad G_0 := \{(x_0, r_0)\}.$$

Sind  $\psi \subset \varphi$  und  $(x, r), (x', r') \in \psi$ , so nennen wir  $(x, r)$  mit  $(x', r')$  in  $\psi$  verbindbar, falls  $B(x', r') \cap B(x, r) \neq \emptyset$  gilt oder falls Punkte  $(x_1, r_1), \dots, (x_j, r_j)$  in  $\psi$  existieren mit

$$B(x', r') \cap B(x_1, r_1) \neq \emptyset, \quad B(x_l, r_l) \cap B(x_{l+1}, r_{l+1}) \neq \emptyset, \quad B(x_j, r_j) \cap B(x, r) \neq \emptyset$$

für  $l = 1, \dots, j - 1$ . Mit dieser Bezeichnung setzen wir

$$G_1 := \{(x, r) \in \varphi_1 \cap G_0^c : (x, r) \text{ ist in } \varphi_1 \text{ mit } (x_0, r_0) \text{ verbindbar}\}.$$

Die Menge  $G_1$  enthält offensichtlich nur Punkte  $(x, r) \in \varphi$ , die zu  $C(\varphi, x_0)$  gehören.

Ist  $n \geq 1$  und sind  $G_n, s_n, \varphi_n$  erklärt, so bilden wir hieraus wie folgt die Größen für den nächsten Schritt  $n + 1$ . Wir definieren noch  $t_{n,n} := 0$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  und

$$t_{n,k} := \sum_{j=k+1}^n s_j, \quad k = 0, \dots, n - 1,$$

die „verstrichene Zeit nach dem  $k$ -ten Schritt“. Mit dieser Notation seien

$$f_{n+1}(t) := \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{(x,r) \in G_k} B(x, (t_{n,k} + t) \wedge (r + R))$$

und

$$\sigma_{n+1} := \sup\{r + R - t_{n,k} : (x, r) \in G_k, k \in \{0, \dots, n\}\}.$$

Ferner definiere

$$\tau_{n+1} := \inf\{t \geq 0 : (\varphi \setminus \varphi_n) \cap f_{n+1}(t) \neq \emptyset\}$$

und  $s_{n+1} := \tau_{n+1} \wedge \sigma_{n+1}$ ,  $S_{n+1}(\varphi) := f_{n+1}(s_{n+1})$  sowie  $\varphi_{n+1} := \varphi \cap S_{n+1}(\varphi)$  und

$$H_n := \bigcup_{k=0}^n G_k.$$

Die Größe  $H_n$  beschreibt die Menge aller nach dem  $n$ -ten Schritt gefundenen Punkte von  $\varphi \cap C(\varphi, x_0)$ . Wir setzen

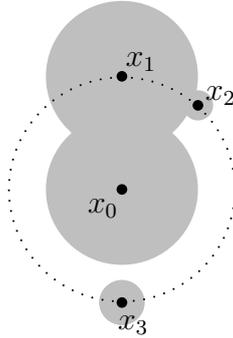
$$G_{n+1} := \{(x, r) \in \varphi_{n+1} \cap H_n^c : (x, r) \text{ ist in } \varphi_{n+1} \text{ mit } (x', r') \text{ verbindbar} \\ \text{für ein } (x', r') \in H_n\}.$$

Die Menge aller derart auffindbaren Punkte von  $\varphi \cap C(\varphi, x_0)$  ist gegeben durch

$$H_\infty := \bigcup_{k=0}^{\infty} G_k.$$

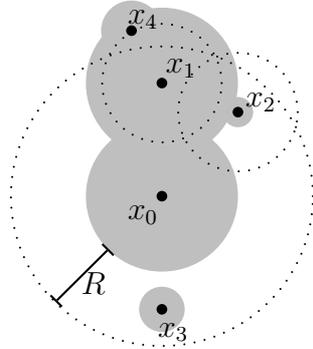
### Beispiel 2.1.7:

Ein kleines Beispiel soll die ersten zwei Schritte der oben dargestellten rekursiven Konstruktion veranschaulichen.



Die Suchmenge  $S_1$  ist der Kreis mit gestricheltem Rand. Ausgehend von  $x_0$  wurden  $x_1, x_2, x_3$  gefunden.  $x_1$  und  $x_2$  sind in  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  mit  $x_0$  verbindbar und gehören zu  $G_1$ . Der Punkt  $x_3$  ist nicht in  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  mit  $x_0$  verbindbar und gehört nicht zu  $G_1$ .

Im nächsten Schritt wird ein weiterer Punkt gefunden.



Im zweiten Schritt wird ausgehend von  $x_0, x_1, x_2$  gesucht. Die Suchkugeln um  $x_1$  und  $x_2$  begannen mit Radius 0, die Suchkugel um  $x_0$  mit dem im ersten Schritt erreichten Radius. Die Suchkugel (gestrichelt) um  $x_0$  stoppte das weitere Wachstum vorzeitig. Die Suchkugel (gestrichelt) um  $x_1$  findet  $x_4$  und stoppt mit allen anderen Suchkugeln das Wachstum. Die Suchmenge  $S_2$  ist die Vereinigung aller im zweiten Schritt gestoppten Suchkugeln.  $x_4$  ist im Gegensatz zu  $x_3$  in  $\{x_0, \dots, x_4\}$  mit  $x_0$  verbindbar, somit  $G_2 = \{x_4\}$ .

**Lemma 2.1.8** Es ist  $\varphi \cap C(\varphi, x_0) = H_\infty$ . Gilt ferner  $\sigma_{m+1} < \tau_{m+1}$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , so sind  $\varphi \cap C(\varphi, x_0) = H_m$  und  $S_n(\varphi) = S_{m+1}(\varphi)$ ,  $n \geq m + 1$ .

**Beweis:** Siehe Abschnitt A.2.1. □

Wir halten fest, dass die Rekursion im Fall von  $\sigma_{m+1} < \tau_{m+1}$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$  endet. Das folgende Lemma sichert, dass unsere Rekursion die Menge  $S(\varphi)$  aus Satz 2.1.6 liefert.

**Lemma 2.1.9** Es gilt

$$S(\varphi) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(\varphi).$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus Lemma A.2.4. □

Wir halten  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  nicht mehr fixiert. Es sei hier angemerkt, dass  $C(\varphi^*, x_0)$  in folgendem Sinn monoton in  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  ist. Sind  $\varphi, \varphi' \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\varphi \subset \varphi'$ , so gilt  $C(\varphi^*, x_0) \subset C(\varphi'^*, x_0)$ .

Man beachte ferner

$$C(\varphi^*, x_0) = C(\varphi^* \cap C(\varphi^*, x_0), x_0). \quad (2.1.14)$$

Die  $C(\varphi^*, x_0)$  suchende Menge  $S(\varphi) = C(\varphi^*, x_0) \oplus B(0, R)$  wurde nicht zu groß konstruiert, wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 2.1.10** *Ist  $T : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  eine Stoppmenge mit  $C^*(x_0) \subset T$ , so gilt  $S \subset T$ .*

**Beweis:** Es sei  $T$  eine Stoppmenge mit  $C^*(x_0) \subset T$  und es existiere für ein  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  ein  $x \in S(\varphi) \cap T(\varphi)^c$ . Gemäß Definition von  $S$  gilt  $B(x, R) \cap C(\varphi^*, x_0) \neq \emptyset$ . Aus (2.1.14) erhalten wir

$$B(x, R) \cap C(\varphi^* \cap C(\varphi^*, x_0), x_0) \neq \emptyset,$$

folglich

$$x \in C((\varphi^* \cap C(\varphi^*, x_0)) \cup \{(x, R)\}, x_0) \subset C((\varphi^* \cap T(\varphi)) \cup \{(x, R)\}, x_0). \quad (2.1.15)$$

Wir haben dabei  $C^*(x_0) \subset T$  und oben erwähnte Monotonie von  $C(x_0)$  benutzt. Aus  $C^*(x_0) \subset T$  und (2.1.15) folgt ferner  $x \in T((\varphi \cap T(\varphi)) \cup \{(x, R)\})$ . Nach Satz 1.2.18 ist  $T(\varphi) = T((\varphi \cap T(\varphi)) \cup \{(x, R)\})$  und wir erhalten insgesamt  $x \in T(\varphi)$ , Widerspruch.  $\square$

**Lemma 2.1.11** *Die Abbildung  $S$  ist eine Stoppmenge und  $C^*(x_0)$  ist messbar bezüglich der Stopp- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}_S$ .*

**Beweis:** Die Messbarkeit von  $S$  ergibt sich aus Satz 1.1.10 und Lemma A.2.5. Aus

$$\varphi^* \cap C(\varphi^*, x_0) \subset \varphi^* \cap S(\varphi) \subset \varphi^*,$$

der Gleichung 2.1.14 und der Monotonie von  $C^*(x_0)$  folgt

$$C(\varphi^*, x_0) = C(\varphi^* \cap S(\varphi), x_0), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (2.1.16)$$

Wir erhalten die Messbarkeit von  $C^*(x_0)$  bezüglich  $\sigma(\pi_S)$ . Betrachte  $\varphi, \psi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $\psi \subset S(\varphi)^c \times Y$ . Wegen

$$d(y, C(\varphi^* \cap S(\varphi), x_0)) > R \geq r, \quad (y, r) \in \psi,$$

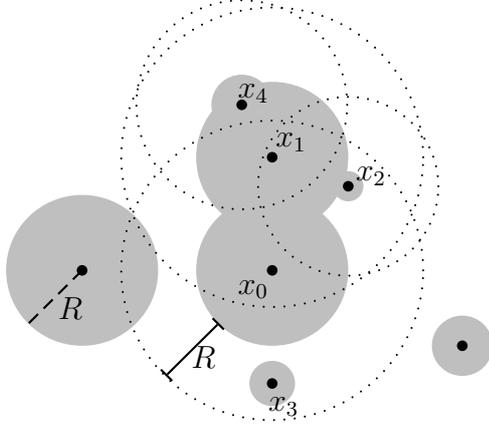
ist kein Punkt  $(y, r)$  von  $\psi$  in  $(\varphi^* \cap S(\varphi)) \cup \psi$  mit  $(x_0, r_0)$  verbindbar. Wir erhalten zusammen mit (2.1.16)

$$C(\varphi^*, x_0) = C(\varphi^* \cap S(\varphi), x_0) = C((\varphi^* \cap S(\varphi)) \cup \psi, x_0)$$

und hieraus

$$S(\varphi) = S((\varphi \cap S(\varphi)) \cup \psi).$$

Nach Satz 1.2.18 ist somit  $S$  eine Stoppmenge. Nun folgt  $\sigma(\pi_S) = \mathcal{N}_S$  aus Lemma 1.2.14 und die Behauptung ist bewiesen.  $\square$



*Punkte außerhalb der Vereinigung der gestrichelten Kugeln haben keinen Einfluss auf das Cluster zu  $x_0$ . Die Radien der gestrichelten Kugeln ergeben sich, indem man zum Radius der jeweiligen grauen Kugel  $R$  hinzu addiert.*

Ist  $A \subset \mathbb{R}^d$  Lebesgue-messbar, so bezeichnen wir mit  $V_d(A)$  das Volumen von  $A$ .

**Lemma 2.1.12** *Es seien  $\phi \in \mathbf{N}$ ,  $\varphi = \{(x, R) : x \in \phi\}$  sowie  $x_0 \in \phi$ . Dann gilt*

$$V_d(S(\varphi)) \leq 2^d V_d(C(\varphi, x_0)).$$

**Beweis:** Es sei  $\phi \cap C(\varphi, x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  abzählbar unendlich. Den endlichen Fall erhält man, indem man im Folgenden  $\infty$  durch eine geeignete natürliche Zahl  $n$  ersetzt. Wir definieren eine Abbildung  $f : \bigcup_{i=0}^{\infty} B(x_i, 2R) \rightarrow \bigcup_{i=0}^{\infty} B(2x_i, 2R)$  durch  $f(y) := x_i + y$  für  $y \in B(x_i, 2R) \cap \bigcap_{j=0}^{i-1} B(x_j, 2R)^c$ . Dabei sei  $\bigcap_{\emptyset} := \mathbb{R}^d$ . Angenommen, es existieren  $i < j$  und  $y' \in B(x_i, 2R)$ ,  $y \in B(x_j, 2R) \cap B(x_i, 2R)^c$  mit  $x_i + y' = x_j + y$ . OBdA sei  $x_i = 0$ . Wir erhalten  $|y - x_j| \leq 2R$  und  $|y| > 2R$ . Folglich ist

$$4R^2 \geq |y - x_j|^2 = |y|^2 + |x_j|^2 - 2\langle y, x_j \rangle > 4R^2 + |x_j|^2 - 2\langle y, x_j \rangle,$$

insbesondere gelten  $2\langle y, x_j \rangle > |x_j|^2 \geq 0$  und

$$|y + x_j|^2 = |y|^2 + |x_j|^2 + 2\langle y, x_j \rangle > 4R^2.$$

Widerspruch zu  $y + x_j = y' + x_i = y'$  und  $|y'| \leq 2R$ . Die Abbildung  $f$  ist somit injektiv und wir können wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
2^d V_d(C(\varphi, x_0)) &= \int \mathbf{1}\{y \in \bigcup_{i=0}^{\infty} B(2x_i, 2R)\} dy \geq \int \mathbf{1}\{y \in f(\bigcup_{i=0}^{\infty} B(x_i, 2R))\} dy \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int \mathbf{1}\left\{y \in f\left(B(x_i, 2R) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} B(x_j, 2R)^c\right)\right\} dy \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int \mathbf{1}\{y \in (B(x_i, 2R) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} B(x_j, 2R)^c) + x_i\} dy \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \int \mathbf{1}\{y \in B(x_i, 2R) \cap \bigcap_{j=1}^{i-1} B(x_j, 2R)^c\} dy.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1.9 berechnet sich der letzte Ausdruck zu  $V_d(S(\varphi))$ .  $\square$

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Abbildung  $S$  nicht skalierungskovariant ist, d.h. im allgemeinen gilt nicht  $S(r \cdot \varphi) = r \cdot S(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $r > 0$ . Hierbei setzt man

$$r \cdot \varphi := \{(rx, y) \in \mathbb{R}^d \times Y : (x, y) \in \varphi\}, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y, r > 0.$$

## 2.2 Ein Vorschlag zum Lilypond-Modell

In diesem Unterabschnitt stellen wir anhand unserer rekursiven Konstruktion von Stoppmengen aus Abschnitt 2.1 einen Vorschlag für eine mögliche Stoppmenge zum Lilypond-Modell vor. Hierfür sei  $E$  ein metrischer Raum mit Metrik  $d$ . Unter einem  $\phi$  stellen wir uns in diesem Abschnitt eine lokalendliche Teilmenge von  $E$  vor. Zu einem solchen  $\phi$  sollen aufsteigende Mengen konstruiert werden, welche das sogenannte absteigende Cluster zu einem vorgegebenen Punkt von  $\phi$  suchen. Die Konstruktion basiert auf einem Algorithmus aus einem nicht veröffentlichten Arbeitspapier zu [9].

### 2.2.1 Definitionen

Wir betrachten eine lokalendliche Teilmenge  $\phi$  von  $E$  mit mindestens zwei Punkten und stellen uns vor, zum Zeitpunkt 0 beginne jeder Punkt  $x \in \phi$  sich auszudehnen. Nach  $t$  Zeiteinheiten wächst aus diesem Punkt  $x$  eine Kugel  $B(x, t)$ , vorausgesetzt, das Wachstum der Kugel wurde nicht bereits zu einem Zeitpunkt  $s < t$  gestoppt. Das Wachstum der Kugel um  $x$  wird zum Zeitpunkt  $s > 0$  gestoppt, sobald die Kugel  $B(x, s)$  mit einer

weiteren Kugel  $B(y, s')$ ,  $y \in \phi \setminus \{x\}$ ,  $0 \leq s' \leq s$ , kollidiert, d.h. sobald  $B(x, s) \cap B(y, s') \neq \emptyset$  gilt. Ist  $s' = s$ , so stoppen sich  $x$  und  $y$  gegenseitig. Ist  $s' < s$ , so war die Kugel um  $y$  bereits gestoppt, als  $B(x, s)$  mit ihr kollidierte. In beiden Fällen gilt  $s + s' = d(x, y)$ . Diese Dynamik wird mit *Lilypond Growth Protocol* bezeichnet, vgl. [9]. Man ordnet so den Punkten  $x \in \phi$  für endliches  $\phi \subset E$  mit mindestens zwei Punkten Radien  $r(x)$  zu mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- i) Für alle  $x, y \in \phi$ ,  $x \neq y$ , gilt  $r(x) + r(y) \leq d(x, y)$ .
- ii) Für alle  $x \in \phi$  existiert ein  $y \in \phi \setminus \{x\}$  mit  $r(x) + r(y) = d(x, y)$  und  $r(y) \leq r(x)$ .

Eigenschaft i) sichert die *Hard-Sphere-Eigenschaft*, d.h. es gilt

$$B^0(x, r(x)) \cap B^0(y, r(y)) = \emptyset, \quad x, y \in \phi, x \neq y.$$

Ein markierter Prozess  $\varphi := \{(x, r(x)) : x \in \phi\}$  mit obigen beiden Eigenschaften i) und ii) heißt *das durch  $\phi$  generierte Lilypond-System oder Lilypond-Modell*. Lilypond-Modelle wurden bereits in [8] und in [12] untersucht.

Zu jeder lokalendlichen Teilmenge  $\phi$  von  $E$  mit mindestens zwei Punkten existiert ein eindeutig gegebenes Lilypond-System, vgl. [13], Th. 4.1. Falls  $\phi = \{x\}$ , so sei  $r(x) := \infty$  definiert. Wir nennen  $r(x, \phi) := r(x)$  den *Lilypondradius* von  $x \in \phi$ . Ein von  $x$  verschiedener Punkt  $y \in \phi$  mit Lilypondradius  $r(y)$  heißt *kleinerer Nachbar* von  $x \in \phi$ , falls  $r(x) + r(y) = d(x, y)$  und  $r(y) \leq r(x)$  gelten. In diesem Fall ergeben sich die Ungleichungen  $2r(y) \leq d(x, y) \leq 2r(x)$ . Eigenschaft ii) sichert, dass für jedes  $\phi$  mit mindestens zwei Punkten jeder Punkt  $x \in \phi$  mindestens einen kleineren Nachbarn besitzt. Werden verschiedene Punktfigurationen betrachtet, so schreiben wir im Folgenden auch *kleinerer Nachbar in  $\phi$* . Der Lilypondradius eines Punktes  $x \in \phi$  wird durch seine kleineren Nachbarn und ihre Radien festgelegt.

**Lemma 2.2.1** *Für alle  $\phi \in E$  mit mindestens zwei Punkten und alle  $x \in \phi$  gilt*

$$r(x) = \min \left\{ \max \left( \frac{d(x, y)}{2}, d(x, y) - r(y) \right), y \in \phi \text{ ist ein kleinerer Nachbar von } x \right\}.$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus Lemma 2.4, Proposition 2.5 und (2.1) in [13].  $\square$

Wir betrachten eine feste lokalendliche Teilmenge  $\phi$  von  $E$  und ein  $x_0 \in \phi$ . Das *absteigende Cluster*  $C(x_0)$  von  $x_0$  wird wie folgt eingeführt. Es sei  $\phi'_0 := \{x_0\}$ . Ist  $\phi'_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  definiert, so sei  $\phi'_{n+1}$  die Menge aller kleineren Nachbarn von Punkten  $x \in \phi'_n$ . Wir setzen

$$C(x_0) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{x \in \phi'_n} B(x, r(x)).$$

In [13] findet man einen Algorithmus, welcher nach endlich vielen Iterationsschritten das Lilypond-Modell einer endlichen Menge  $\phi$  bestimmt. Dieser Algorithmus verwendet in jedem Schritt die gesamte Information über die Punktconfiguration  $\phi$ , d.h. die Lage aller Punkte  $x \in \phi$  sowie den zu  $x$  und dem vorigen Iterationsschritt gehörenden approximativen Radius. Wie schon in Unterabschnitt 2.1.4 geschehen, soll auch hier eine Folge von Suchmengen gefunden werden, welche nur *lokale Information* benutzt, d.h. nur auf die Punkte und Radien zurückgreift, welche bereits durch die vorige Suchmenge erfasst wurden. Gesucht werden soll dabei das absteigende Cluster  $C(x_0)$ .

### 2.2.2 Eine rekursive Konstruktion

Seien  $\phi$  weiterhin eine feste lokalendliche Teilmenge von  $E$  und  $x_0 \in \phi$ . Wir starten mit  $s_0 := 0$  und  $S_0 := \{x_0\}$ . Sind  $s_n$  und  $S_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}_0$  bereits erklärt, so seien zunächst für  $x \in \phi_n := \phi \cap S_n$  und  $\psi \subset S_n^c$

$$G_n(x, \psi) := \{y \in \phi_n \setminus \{x\} : y \text{ ist ein kleinerer Nachbar von } x \text{ in } \phi_n \cup \psi\}$$

und

$$b_n(x) := 2 \sup_{\psi \subset S_n^c} \inf \left\{ \max \left( \frac{d(x, y)}{2}, d(x, y) - r(y, \phi_n \cup \psi) \right) : y \in G_n(x, \psi) \right\}.$$

Die Konstruktion kompensiert das fehlende Wissen über  $\phi \cap S_n^c$ , indem sie alle möglichen Konfigurationen auf  $S_n^c$  betrachtet. Die Größe  $2^{-1}b_n(x)$  ist nach Lemma 2.2.1 eine obere Schranke für  $r(x, \phi')$  für alle  $\phi'$  mit  $\phi' \cap S_n = \phi_n$ . Es ist möglich, dass ein noch nicht erfasster Punkt  $y \in \phi \cap S_n^c$  ein kleinerer Nachbar von  $x$  ist. Aus

$$\frac{d(x, y)}{2} + \frac{b_n(x)}{2} \geq r(y) + r(x) = d(x, y)$$

für derartiges  $y$  erhalten wir  $d(x, y) \leq b_n(x)$ . Diese Überlegung liefert die Stoppbedingung  $(t_{n,k} + t) \wedge b_n(x)$  in nachfolgender Definition (2.2.1) von  $f_{n+1}$ . Dabei seien wieder  $t_{n,n} := 0$  und

$$t_{n,k} := \sum_{j=k+1}^n s_j, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Mit der Bezeichnung  $\phi_{-1} := \emptyset$  definieren wir nun

$$f_{n+1}(t) := \bigcup_{k=0}^n \bigcup_{x \in \phi_k \cap \phi_{k-1}^c} B(x, (t_{n,k} + t) \wedge b_n(x)). \quad (2.2.1)$$

Abschließend seien

$$\tau_{n+1} := \inf\{t \geq 0 : (\phi \setminus \phi_n) \cap f_{n+1}(t) \neq \emptyset\}$$

und

$$\sigma_{n+1} := \sup\{b_n(x) - t_{n,k} : x \in \phi_k \cap \phi_{k-1}^c, k \in \{0, \dots, n\}\}$$

sowie  $s_{n+1} := \tau_{n+1} \wedge \sigma_{n+1}$  und  $S_{n+1} := f_{n+1}(s_{n+1})$ .

Für festes  $x_0 \in E$  scheint uns die durch

$$S(\phi) := \text{cl} \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(\phi \cup \{x_0\}), \quad \phi \subset E \text{ lokalendlich,}$$

definierte Abbildung ein guter Kandidat für eine das absteigende Cluster  $C(x_0)$  enthaltende Stoppmenge zu sein. Wir wollen es in diesem Rahmen bei einem Vorschlag belassen.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass im Fall von  $x_0 = 0$  die Abbildung  $S$  skalierungskovariant ist, d.h. es gilt  $S(r \cdot \phi) = r \cdot S(\phi)$  für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  und  $r > 0$ . Somit können die Gamma-Resultate aus Kapitel 3 auf dieses Beispiel angewendet werden, wobei hierfür noch die Stoppmengeneigenschaft von  $S$  nachgewiesen werden muss.

## 2.3 k-Flower in Voronoi-Mosaiken

Wir definieren in diesem Abschnitt die *k-Flower* in Verallgemeinerung der *Voronoi-Flower*, vgl. [2], [44], dort *fundamental domain* bzw. *fundamental region*, oder [5], S. 58. Im Folgenden sei  $E = \mathbb{R}^d$ , versehen mit der euklidischen Metrik. Wir fassen  $\mathbf{N}$  auf als die Menge aller lokalendlichen Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$ .

### 2.3.1 Allgemeine Lage

Es seien  $k \in \{2, \dots, d+1\}$  und  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^d$ . Diese Punkte liegen in *allgemeiner Lage*, falls sie nicht in einem  $(k-2)$ -dimensionalen affinen Unterraum des  $\mathbb{R}^d$  liegen. Ein einzelner Punkt ist immer in allgemeiner Lage.

Punkte von  $\phi \in \mathbf{N}$  liegen in allgemeiner Lage, falls für alle  $k \in \{2, \dots, d+1\}$   $k$  Punkte aus  $\phi$  stets in allgemeiner Lage sind, und in *allgemeiner quadratischer Lage*, vgl. [31], falls darüber hinaus keine  $d+2$  Punkte von  $\phi$  auf dem Rand einer Kugel liegen. Mit  $\mathbf{N}_g$  bezeichnen wir die Menge aller  $\phi \in \mathbf{N}$ , deren Punkte in allgemeiner Lage sind, und mit  $\mathbf{N}_q$  die Menge aller  $\phi \in \mathbf{N}$ , deren Punkte in allgemeiner quadratischer Lage sind.

**Lemma 2.3.1** *Es sind  $\mathbf{N}_g \in \mathcal{N}$  und  $\mathbf{N}_q \in \mathcal{N}$ .*

**Beweis:** Vgl. Abschnitt A.2.2. □

### 2.3.2 Voronoi-Mosaik

Voronoi-Mosaik spielen in der Stochastischen Geometrie und in Anwendungen eine wichtige Rolle, vgl. [34] oder [41] sowie die dort angegebenen Referenzen, und wurden eingehend untersucht, u.a. in [26], [30], [31], [33] oder [17]. In diesem Zusammenhang muss auch Meckes Arbeit *Palm methods for stationary random mosaics* ([25]) erwähnt werden, in welcher die Theorie Palmscher Maße als adäquates Werkzeug für die Untersuchung zufälliger Mosaik vorgestellt wird. Palmsche Maße führen wir erst in Kapitel 4 ein.

Ausgehend von einem  $\phi \in \mathbf{N}$  wird die *Voronoi-Zelle*  $C(\phi, x)$  von  $x \in \phi$  definiert als die Menge aller  $y \in \mathbb{R}^d$ , für welche  $x$  der nächste Nachbar in  $\phi$  ist, d.h. es ist

$$C(\phi, x) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq \|y - x'\| \text{ für alle } x' \in \phi\}.$$

Als Schnitt von abgeschlossenen Halbebenen sind die Voronoi-Zellen konvex.

**Lemma 2.3.2** *Ist  $\text{conv}\phi = \mathbb{R}^d$ , so sind alle Zellen  $C(\phi, x)$ ,  $x \in \phi$ , beschränkt.*

**Beweis:** Vgl. [40], S. 256. □

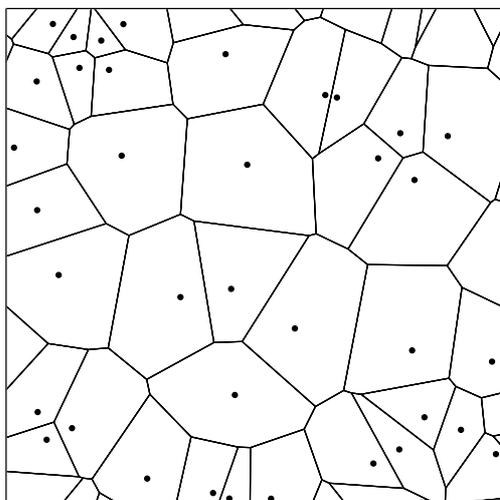


Abbildung 2.1: Ausschnitt aus einem Voronoi-Mosaik

Der Rand einer Voronoi-Zelle  $C(\phi, x)$  ist die Vereinigung niederdimensionaler konvexer abgeschlossener Mengen, den Seiten von  $C(\phi, x)$ . Eine  $k$ -dimensionale Seite von  $C(\phi, x)$

heißt  $k$ -Seite von  $C(\phi, x)$ . Die 0-Seiten heißen *Ecken*, die 1-Seiten *Kanten*, die  $d-1$ -Seiten *Facetten*. Verschiedene  $k$ -Seiten von  $C(\phi, x)$  haben disjunktes relativ Inneres. Ist  $C(\phi, x)$  beschränkt, so sind alle Seiten von  $C(\phi, x)$  Polytope. Wir definieren für  $k \in \{0, \dots, d-1\}$

$$\mathcal{S}_k(\phi) := \{L : L \text{ ist eine } k\text{-Seite einer Voronoi-Zelle } C(\phi, x), x \in \phi\}.$$

Unter dem von  $\phi$  erzeugten *Voronoi-Mosaik* versteht man das System

$$\mathcal{S}_d(\phi) := \{C(\phi, x) : x \in \phi\}.$$

Wir sprechen statt von Voronoi-Zellen auch von  $d$ -Seiten eines Voronoi-Mosaiks. Man beachte, dass das Voronoi-Mosaik  $\mathcal{S}_d(\phi)$  folgende Eigenschaften besitzt. Die Zellen von  $\mathcal{S}_d(\phi)$  haben paarweise disjunktes Inneres und die Vereinigung aller Zellen überdeckt im Fall  $\phi \neq \emptyset$  den gesamten  $\mathbb{R}^d$ . Ferner trifft jede kompakte Teilmenge  $K$  des  $\mathbb{R}^d$  nur endlich viele Zellen, vgl. [40], S. 256. Ein Voronoi-Mosaik ist stets *seitentreu*, d.h. der Schnitt zweier Zellen ist entweder leer oder eine gemeinsame  $k$ -Seite dieser beiden Zellen für ein geeignetes  $k$ , in Formeln

$$C(\phi, x) \cap C(\phi, x') \subset \{\emptyset\} \cup \bigcup_{k=0}^d \bigcup_{F \in \mathcal{S}_k(\phi), F \subset C(\phi, x) \cap C(\phi, x')} F \quad (2.3.1)$$

für alle  $x, x' \in \phi$ . Einen Beweis hierfür findet man beispielsweise in [40], S. 256.

**Lemma 2.3.3** *Ist  $\phi \in \mathbf{N}_q$ , so liegt jede  $j$  Seite in genau*

$$\binom{d-j+1}{k-j} k\text{-Seiten}, \quad 0 \leq j \leq k \leq d. \quad (2.3.2)$$

**Beweis:** Vgl. [40], S. 258. □

Seitentreue Voronoi-Mosaik mit der Eigenschaft (2.3.2) nennt man *normal*, vgl. [40], S. 235.

### 2.3.3 $k$ -Seiten eines Voronoi-Mosaiks

Sei  $k \in \{0, \dots, d\}$ . Sind die Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  in allgemeiner Lage, so bezeichne  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  das Zentrum der eindeutig bestimmten  $(d-k)$ -dimensionalen Kugel  $B(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ , auf deren Rand  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  liegen. Es sei  $Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  der eindeutig bestimmte  $k$ -dimensionale affine Unterraum des  $\mathbb{R}^d$  senkrecht zu der Kugel  $B(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  mit  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ .

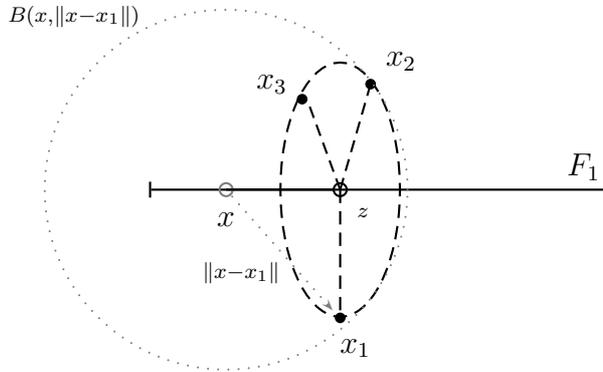
Sind  $\phi \in \mathbf{N}$  und  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$ , so existieren  $d - k + 1$  Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  in allgemeiner Lage mit

$$F_k = \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset\}. \quad (2.3.3)$$

Wir nennen derartige Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  aus  $\phi$  *Nachbarn* der k-Seite  $F_k$  (in  $\phi$ ) und  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  das *Zentrum* der k-Seite  $F_k$ . Sind umgekehrt  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  in allgemeiner Lage, so dass  $F_k$  wie in (2.3.3) definiert ein nichtleeres relativ Inneres besitzt, so ist  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$ . Gilt für ein  $x$  im relativ Inneren einer k-Seite  $F_k$

$$\phi(B(x, \|x - x_1\|)) = d - k + 1, \quad (2.3.4)$$

so sind die Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  mit der Eigenschaft (2.3.3) eindeutig bestimmt. Für ein normales Voronoi-Mosaik ist dies stets der Fall.



**Bild 1:**

Eine Kante  $F_1$  mit Nachbarn  $x_1, x_2, x_3$  und Zentrum  $z$  im  $\mathbb{R}^3$  sowie  $x$  im relativ Inneren von  $F_1$ .

### 2.3.4 Definition und Stoppmengeneigenschaft der k-Flower

Sei  $k \in \{0, \dots, d\}$  fest. Wir definieren in diesem Unterabschnitt zu gegebenem  $\phi$  und einer gegebenen k-Seite  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$  eine Menge  $S(F_k, \phi)$ , die anschaulich gegeben ist durch die Menge aller Punkte des  $\mathbb{R}^d$ , welche zu  $\phi$  hinzugefügt oder von  $\phi$  entfernt Einfluss haben auf die Gestalt von  $F_k$ .

Zu  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$  existieren  $d - k + 1$  Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  in allgemeiner Lage mit (2.3.3). Für jede Ecke  $y$  von  $F_k$  betrachten wir die Kugel mit Zentrum  $y$  sowie Radius  $\|y - x_1\|$  und definieren die *k-Flower von  $F_k$*  durch

$$S(F_k, \phi) := \bigcup_{y \in S_0(\phi) \cap F_k} B(y, \|y - x_1\|). \quad (2.3.5)$$

Dabei sei  $S_0(\phi) := \{y \in \mathbb{R}^d : \{y\} \in \mathcal{S}_0(\phi)\}$  die Menge aller Ecken des durch  $\phi$  erzeugten Voronoi-Mosaiks. Die k-Flower von  $F_k$  besteht aus der Vereinigung aller Kugeln um die

Ecken von  $F_k$ , wobei der Radius einer Kugel durch den Abstand der zugehörigen Ecke zum Nachbarn  $x_1$  gegeben ist. Dabei kann  $x_1$  in der Definition (2.3.5) durch jeden anderen Nachbarn von  $F_k$  ersetzt werden.

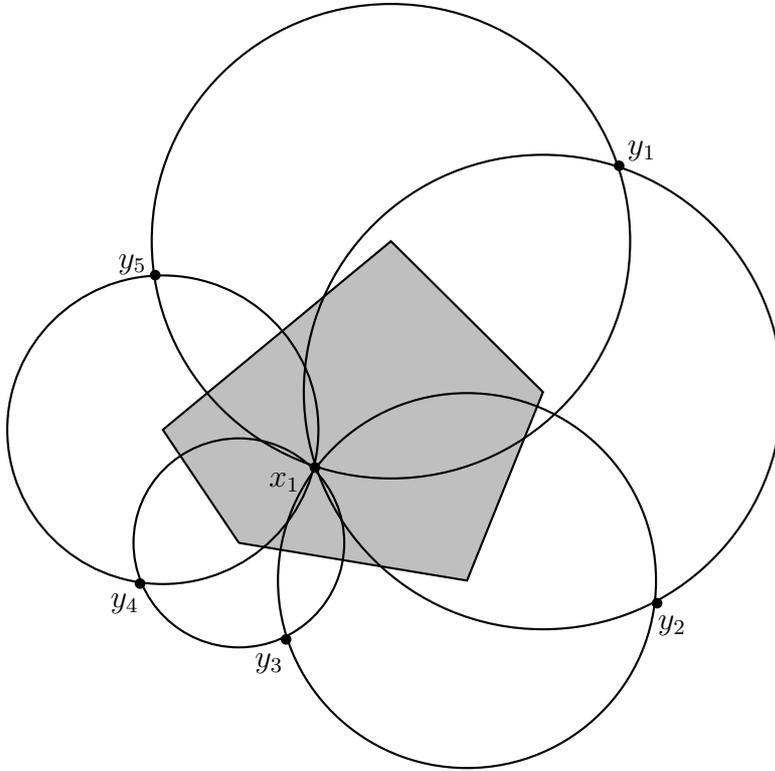


Abbildung 2.2: Die  $d$ -Flower der (grauen) Zelle zu  $x_1$  im  $\mathbb{R}^2$ .

Seien nun  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in E$  in allgemeiner Lage fest gewählt. Wir wollen eine  $k$ -Flower definieren zu derjenigen  $k$ -Seite, zu welcher  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  Nachbarn sind. Um sicher zu stellen, dass  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  der zu Grunde gelegten Punktconfiguration angehören, betrachten wir statt  $\phi \in \mathbf{N}$  die erweiterte Konfiguration

$$\phi^* := \phi \cup \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}.$$

Besitzt die abgeschlossene Menge

$$F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) := \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset\}$$

nichtleeres relativ Inneres, so ist sie eine  $k$ -Seite des durch  $\phi^*$  erzeugten Voronoi-Mosaiks. Da  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  fixiert sind, kann abkürzend

$$F_k^*(\phi) := F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$$

geschrieben werden. Die Voronoi-Flower zu  $F_k^*(\phi)$  führen wir nun im Einklang mit (2.3.5) durch

$$S^*(\phi) := S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) := \begin{cases} S(F_k^*(\phi), \phi^*), & \text{falls } F_k^*(\phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}, \\ \mathbb{R}^d, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ein. Die Größen  $F_k^*(\phi)$  und  $S^*(\phi)$  sind also mit Bezug auf das durch  $\phi^*$  erzeugte Voronoi-Mosaik definiert. Wir benötigen zunächst zwei Eigenschaften von  $F_k^*(\phi)$  und  $S^*(\phi)$ .

**Lemma 2.3.4** *Ein  $x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  liegt bereits dann in  $F_k^*(\phi)$ , falls*

$$B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi \cap S(\phi)^* = \emptyset$$

*gilt.*

**Beweis:** Wir können  $F_k^*(\phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$  annehmen. Im anderen Fall ist nach Definition  $S^*(\phi) = \mathbb{R}^d$  und es ist nichts zu zeigen. Die  $k$ -Seite  $F_k^*(\phi)$  ergibt sich als Schnitt der Mengen

$$\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : \|x - x_1\| \leq \|x - y\|\},$$

wobei  $y$  alle Nachbarn aller  $k-1$ -Seiten von  $F_k^*(\phi)$  durchläuft. Jeder Nachbar einer  $k-1$ -Seite von  $F_k^*(\phi)$  ist auch Nachbar einer Ecke von  $F_k^*(\phi)$  und umgekehrt. Die Nachbarn der Ecken von  $F_k^*(\phi)$  liegen  $\phi \cap S^*(\phi)$ . Somit gilt

$$\begin{aligned} F_k^*(\phi) &= \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : \|x - x_1\| \leq \|x - y\| \text{ für alle } y \in \phi \cap S^*(\phi)\} \\ &= \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi \cap S^*(\phi) = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

**Lemma 2.3.5** *Für alle  $x \in F_k^*(\phi)$  gilt  $B(x, \|x - x_1\|) \subset S^*(\phi)$ .*

**Beweis:** Seien  $F_k^*(\phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $x \in F_k^*(\phi)$ ,  $z := z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  und  $\tilde{x} \in B(x, \|x - x_1\|)$ , d.h.

$$\|\tilde{x} - x\|^2 \leq \|x - x_1\|^2 = \|x - z\|^2 + \|x_1 - z\|^2, \quad (2.3.6)$$

wobei wir die Orthogonalität der Vektoren  $x - z$  und  $x_1 - z$  benutzt haben. Da  $x$  in der konvexen Hülle der Eckenmenge von  $F_k^*(\phi)$  enthalten ist, existiert ein Ecke  $y$  von  $F_k^*(\phi)$  mit

$$0 \leq \langle z - \tilde{x}, x - y \rangle,$$

d.h. mit

$$\langle \tilde{x} - x, x - y \rangle \leq \langle z - x, x - y \rangle. \quad (2.3.7)$$

Wir erhalten aus (2.3.6) und (2.3.7)

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - y\| &= \|\tilde{x} - x\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle \tilde{x} - x, x - y \rangle \\ &\leq \|x - z\|^2 + \|x_1 - z\|^2 + \|x - y\|^2 + 2\langle z - x, x - y \rangle \\ &= \|y - z\|^2 + \|x_1 - z\|^2 = \|y - x_1\|^2. \end{aligned}$$

Somit ist  $\tilde{x} \in B(y, \|y - x_1\|) \subset S^*(\phi)$ .  $\square$

Lemma 2.3.4 lässt bereits einen engen Zusammenhang zwischen  $F_k^*$  und  $S_k^*$  ahnen. Mittels des in Abschnitt 1.2 vorgestellten Konzepts der Stoppmengen können wir diese Vermutung präzisieren.

**Satz 2.3.6** *Die Abbildung  $S^* : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  ist eine Stoppmenge und  $F_k^* : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  ist messbar bezüglich  $\sigma(\pi_{S^*})$ .*

**Beweis:** Die Messbarkeit von  $S^*$  und  $F_k^*$  ist eine Folgerung aus Lemma A.2.7. Sei  $\phi \in \mathbf{N}$ . Lemma 2.3.4 liefert

$$\begin{aligned} F_k^*(\phi) &= \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset\} \\ &= \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi \cap S^*(\phi) = \emptyset\}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.3.5 gilt

$$B(x, \|x - x_1\|) \subset S^*(\phi)$$

für alle  $x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  mit  $B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset$ . Für  $\psi \subset S^*(\phi)^c$  folgt

$$\begin{aligned} F_k^*(\phi) &= \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset\} \\ &= \{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap ((\phi \cap S^*(\phi)) \cup \psi) = \emptyset\} \\ &= F_k^*((\phi \cap S^*(\phi)) \cup \psi). \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Wir erhalten  $F_k^*(\phi) = F_k^*((\phi \cap S^*(\phi)) \cup \psi)$ , insbesondere haben beide k-Seiten dieselben Ecken. Nach Konstruktion von  $S^*(\phi)$  ergibt sich hieraus

$$S^*(\phi) = S^*((\phi \cap S^*(\phi)) \cup \psi).$$

Gemäß Satz 1.2.18 i) ist  $S^*$  eine Stoppmenge. Setzen von  $\psi := \emptyset$  in (2.3.8) liefert die  $\sigma(\pi_{S^*})$ -Messbarkeit der Abbildung  $F_k^*$ .  $\square$

Die Gleichung (2.3.8) ist die interessante Eigenschaft der k-Flower  $S^*(\phi)$  im Hinblick auf die zugehörige k-Seite  $F_k^*(\phi)$ . Diese ist festgelegt bereits durch  $\phi^* \cap S^*(\phi)$ . Punkte, die außerhalb von  $S^*(\phi)$  der Konfiguration  $\phi$  hinzugefügt werden, haben dagegen keinen Einfluß auf  $F_k^*(\phi)$ .

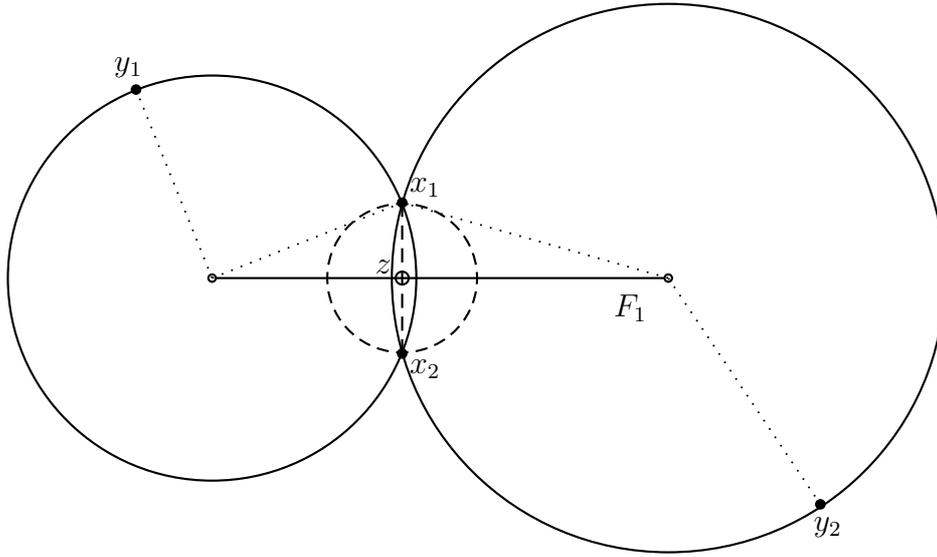


Abbildung 2.3: Die 1-Flower der durch  $x_1$  und  $x_2$  erzeugten Kante  $F_1$ . Die Ecken werden durch  $y_1, x_1, x_2$  und  $y_2, x_1, x_2$  erzeugt. Die Punkte  $y_1, y_2$  sind nicht im Inneren des kleinen gestrichelten Kreises und das Zentrum  $z$  von  $F_1$  liegt auf  $F_1$ . Man vergleiche auch die Abbildung auf Seite 54

### 2.3.5 Weitere Eigenschaften der k-Flower und Abschätzungen

Wir wollen später ähnlich argumentieren wie Zuyev in [44] für den Fall  $k = d$ . Dort benutzt er im Fall von  $\text{conv}\phi = \mathbb{R}^d$ , dass die um den Punkt  $x \in \phi$  mit Faktor 2 gestreckte Voronoi-Zelle  $C(\phi, x)$  von  $x$  vollständig in der Voronoi-Flower  $S(C(\phi, x), \phi)$  enthalten ist. Wir betrachten wieder feste  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in E$ . Sind  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  nicht in allgemeiner Lage, so setzen wir für  $\phi \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) &:= \emptyset, & Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) &:= \emptyset, \\ S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) &:= \mathbb{R}^d, & z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) &:= \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne  $\infty$  einen Punkt außerhalb des  $\mathbb{R}^d$ . Wir bemerken, dass  $F_k^*(\phi)$  im Fall von  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) = \infty$  nach Definition leer ist. Sei  $\phi$  stets in  $\mathbf{N}$ .

**Lemma 2.3.7** *Es gilt*

$$2F_k^*(\phi) - z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \subset S^*(\phi).$$

**Beweis:** Seien  $F_k^*(\phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$  und  $x \in F_k^*(\phi)$ . Wir setzen  $z := z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ . Da  $x$  in der konvexen Hülle der Eckenmenge von  $F_k^*(\phi)$  enthalten ist, findet man eine Ecke  $y$

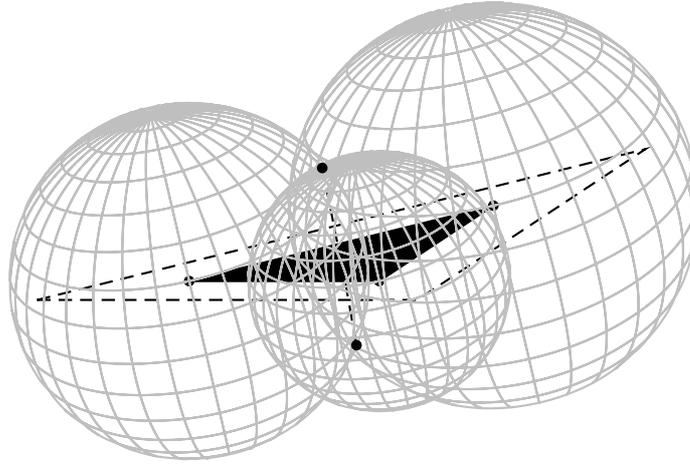


Abbildung 2.4: Die mit Faktor 2 um ihr Zentrum gestreckte 2-Seite. Die 2-Seite ist dabei schwarz dargestellt, die gestreckte Seite mit gestrichelter Kontur. Die Zentren der Kugeln der 2-Flower zur 2-Seite sind gegeben durch die Ecken der 2-Seite. Die Nachbarn der 2-Seite (die beiden schwarze Punkte außerhalb der 2-Seite) liegen auf dem Rand der drei Kugeln.

von  $F_k^*(\phi)$  mit

$$\langle x - z, x - y \rangle \leq 0. \quad (2.3.9)$$

Nun gilt unter Beachtung von (2.3.9)

$$\begin{aligned} \|2x - z - y\|^2 &= \langle 2x - z, 2x \rangle - \langle 2x, z \rangle + \|z\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle 2x - z, y \rangle \\ &= 2\langle 2x - z, x - y \rangle - 2\langle x, z \rangle + \|y\|^2 + \|z\|^2 \\ &= 2\langle 2x - z, x - y \rangle - 2\langle x - y, z \rangle + \|y\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle y, z \rangle \\ &= 2\langle 2x - 2z, x - y \rangle + \|y - z\|^2 \\ &\leq 4\langle x - z, x - y \rangle + \|y - z\|^2 + \|z - x_1\|^2 \\ &\leq \|y - x_1\|^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$2x - z \in B(y, \|y - x_1\|) \subset S^*(\phi),$$

was die Behauptung beweist.  $\square$

Ist  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k^*(\phi)$ , so kann auch eine einfache Teilmenge von  $F_k^*$  gefunden werden. Wir erinnern an die Definition von  $Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  in Unterabschnitt 2.3.3.

**Lemma 2.3.8** *Ist  $z := z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k^*(\phi)$ , so gelten*

$$2r := \inf_{x \in \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}} (\|x - z\| - \|z - x_1\|) \geq 0$$

und  $B(z, r) \cap Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \subset F_k(\phi^*)$ .

**Beweis:** Aus  $z := z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k^*(\phi)$  folgt

$$B^0(z, \|z - x_1\|) \cap \phi = \emptyset,$$

somit ist  $\|z - x\| \geq \|z - x_1\|$  für alle  $x \in \phi$ . Sei nun  $y \in B(z, r) \cap Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  und  $x \in \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x - y\| &\geq \|x - z\| - \|y - z\| \geq 2r + \|z - x_1\| - r \\ &= r + \|z - x_1\| \geq \|y - z\| + \|z - x_1\| \geq \|y - x_1\|, \end{aligned}$$

folglich sind

$$B^0(y, \|y - x_1\|) \cap \phi = \emptyset,$$

und  $y \in F_k^*(\phi)$ . □

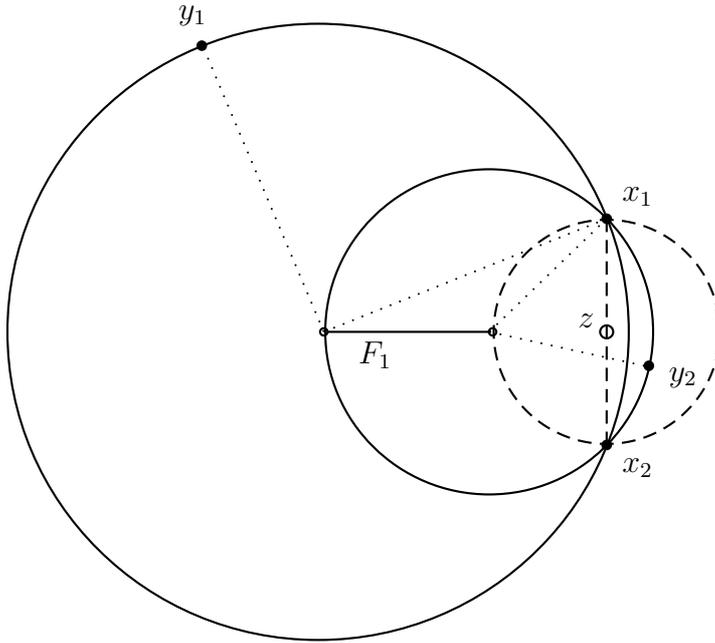
Wir erinnern an die Notationen aus Unterabschnitt 1.1.1. Mit  $\mathcal{H}^k$  wird das  $k$ -dimensionale Hausdorff-Maß bezeichnet und mit  $\kappa_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitskugel.

**Folgerung 2.3.9** *Es gilt*

$$\mathcal{H}^k(F_k^*(\phi)) \leq 2^{-k} \mathcal{H}^k(S^*(\phi) \cap Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})).$$

*Ist  $z := z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k^*(\phi)$ , so gilt ferner*

$$\mathcal{H}^k(F_k^*(\phi)) \geq \kappa_k \left( \frac{1}{2} \inf_{x \in \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}} (\|x - z\| - \|z - x_1\|) \right)^k.$$



Die 1-Flower der durch  $x_1$  und  $x_2$  erzeugten Kante  $F_1$ . Die Ecken werden durch  $y_1, x_1, x_2$  und  $y_2, x_1, x_2$  erzeugt. Der Punkt  $y_2$  liegt im Inneren des kleinen gestrichelten Kreises und das Zentrum  $z$  von  $F_1$  liegt nicht auf  $F_1$ , vgl. die Abbildung auf Seite 51.

Wir setzen für den Rest dieses Unterabschnittes 2.3.5 voraus, dass  $\phi^*$  in allgemeiner quadratischer Lage ist. Ferner seien  $F_k^*(\phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$  und die  $k$ -Flower  $S^*(\phi)$  die Vereinigung von  $l \in \mathbb{N}$  Kugeln  $B(y_i, r_i)$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Man beachte, dass die Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  im Rand jeder Kugel  $B(y_i, r_i)$  liegen. Wir setzen

$$\psi := \phi \cap S^*(\phi) \cap \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}^c$$

und  $m := \text{card } \psi$ . Es liegen  $k$  verschiedene Punkte aus  $\psi$  auf maximal einer der  $l$  Kugeln. Andernfalls enthalten zwei verschiedene Kugeln dieselben  $d+1$  Punkte aus  $\phi^* \cap S^*(\phi)$  in ihrem Rand. Da die Kugeln zu verschiedenen Ecken gehören, besitzt mindestens eine der beiden Kugeln  $d+2$  Punkte aus  $\phi^*$  in ihrem Rand im Widerspruch zur allgemeinen quadratischen Lage von  $\phi^*$ . Folglich gilt

$$l \leq \binom{m}{k}.$$

Es bezeichne  $R := \max_{1 \leq i \leq l} r_i$  den maximalen Radius unter den  $l$  Kugeln. Wir erhalten

$$\kappa_d R^d \leq V_d(S^*(\phi)) \leq \binom{m}{k} \kappa_d R^d, \quad (2.3.10)$$

wobei  $V_d(B)$  das Volumen von  $B \in \mathcal{B}$  bezeichnet. Alle Zentren  $y_i$  der  $l$  Kugeln liegen in  $Z := Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ , insbesondere ist

$$S_Z^*(\phi) := S^*(\phi) \cap Z$$

die Vereinigung von  $l$  Kugeln der Dimension  $k$  mit Zentren  $y_i$  und Radien  $r_i$ , somit gilt

$$\kappa_k R^k \leq \mathcal{H}^k(S_Z^*(\phi)) \leq \binom{m}{k} \kappa_k R^k. \quad (2.3.11)$$

Aus (2.3.10) und (2.3.11) ergibt sich die folgende Abschätzung

$$\kappa_k \left( \frac{V_d(S^*(\phi))}{\binom{m}{k} \kappa_d} \right)^{k/d} \leq \mathcal{H}^k(S_Z^*(\phi)) \leq \kappa_k \binom{m}{k} \left( \frac{V_d(S^*(\phi))}{\kappa_d} \right)^{k/d}. \quad (2.3.12)$$

Eine von  $m$  unabhängige untere Schranke kann wie folgt angegeben werden. Wegen  $y_i \in Z$  für alle  $i \in \{1, \dots, l\}$  und (2.3.10) gilt

$$\begin{aligned} V_d(S^*(\phi)) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}\{\exists i : \|x - y_i\|^2 \leq r_i^2\} dx \\ &= \int_{Z^\perp} \int_Z \mathbf{1}\{\exists i : \|u - y_i\|^2 + \|v\|^2 \leq r_i^2\} du dv \\ &\leq \int_{Z^\perp} \mathbf{1}\{\|v\| \leq R\} dv \int_Z \mathbf{1}\{\exists i : \|u - y_i\| \leq r_i\} du \\ &= \kappa_{d-k} R^{d-k} \mathcal{H}^k(S_Z^*(\phi)) \\ &\leq \kappa_{d-k} \left( \frac{V_d(S^*(\phi))}{\kappa_d} \right)^{\frac{d-k}{d}} \mathcal{H}^k(S_Z^*(\phi)), \end{aligned}$$

folglich

$$\mathcal{H}^k(S_Z^*(\phi)) \geq \frac{\kappa_d^{1-k/d}}{\kappa_{d-k}} \cdot V_d(S^*(\phi))^{k/d}.$$

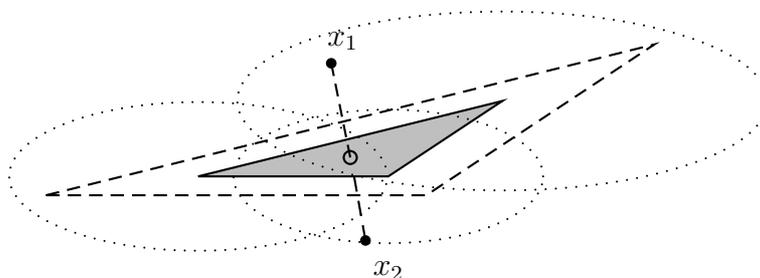


Abbildung 2.5: Eine mit Faktor 2 um ihr Zentrum gestreckte 2-Seite mit Nachbarn  $x_1, x_2$  eines Voronoi-Mosaiks im  $\mathbb{R}^3$  sowie die auf  $Z(x_1, x_2)$  projizierte 2-Flower dieser 2-Seite. Die 2-Seite ist dabei grau dargestellt, die gestreckte Seite mit gestrichelter Kontur.

# Kapitel 3

## Stoppmengen und Punktprozesse

Bisher wurden Stoppmengen als Abbildungen von Konfigurationen in einem deterministischen Rahmen untersucht. Aus den Ergebnissen zu Stoppmengen lassen sich nun Verteilungsaussagen zu verschiedenen zufälligen geometrischen Objekten herleiten. Der Zufall wird mittels markierter Punktprozesse eingeführt. Wir fixieren zwei lokalkompakte Hausdorffräume  $E$  und  $Y$ , jeweils mit abzählbarer Basis und Borelscher  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  bzw.  $\mathcal{Y}$  und einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Mit  $\mathcal{F}$  bezeichnen wir wieder das System der abgeschlossenen Teilmengen von  $E$  und mit  $\mathcal{C}$  das System der kompakten Teilmengen von  $E$ . Der Raum  $Y$  wird als Markenraum dienen.

### 3.1 Punktprozesse

Wir wollen in diesem Abschnitt zufällige Maße und Punktprozesse auf  $E \times Y$  einführen, wobei wir bemerken, dass neben  $E$  und  $Y$  auch  $E \times Y$  ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis ist. Zufällige Maße und Punktprozesse auf  $E$  lassen sich als Spezialfall entsprechender Größen auf  $E \times Y$  auffassen, weshalb wir im Folgenden nur den Produktraum  $E \times Y$  betrachten. Der Raum aller lokalendlichen Maße auf  $E \times Y$  sei mit  $\mathbf{M}(E \times Y)$  bezeichnet, die zugehörige  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{M}(E \times Y)$  und der Raum aller einfachen Zählmaße auf  $E \times Y$  mit  $\mathbf{N}(E \times Y)$ . Man beachte, dass  $\mathbf{N}_Y$  eine Teilmenge von  $\mathbf{N}(E \times Y)$  ist, im Allgemeinen jedoch keinesfalls mit  $\mathbf{N}(E \times Y)$  übereinstimmt, da ein einfaches Zählmaß  $\varphi$  auf  $E \times Y$  im Allgemeinen weder  $\varphi(C \times Y) < \infty$  für alle  $C \in \mathcal{C}$  noch  $\varphi(\{x\} \times Y) \in \{0, 1\}$  für alle  $x \in E$  erfüllt.

Eine messbare Abbildung  $M : \Omega \rightarrow \mathbf{M}(E \times Y)$  wird *zufälliges Maß* auf  $E \times Y$  genannt. Unter einem *Punktprozess* auf  $E \times Y$  verstehen wir ein zufälliges Maß  $\Phi$ , so dass  $\Phi(\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$  ein Zählmaß auf  $E \times Y$  ist. Eine messbare Abbildung  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}(E \times Y)$

heißt *einfacher Punktprozess*. Das *Intensitätsmaß* eines zufälligen Maßes  $M$  definiert man durch

$$\Lambda(A) := \mathbb{E}M(A), \quad A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{Y}.$$

Ein  $Y$ -markierter einfacher Punktprozess auf  $E$  ist eine messbare Abbildung  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_Y$ . Insbesondere ist jeder  $Y$ -markierte einfache Punktprozess  $\Phi$  auf  $E$  ein einfacher Punktprozess auf  $E \times Y$ . Ferner ist  $\Phi(\cdot \times Y)$  für jeden  $Y$ -markierten einfachen Punktprozess  $\Phi$  ein einfacher Punktprozess auf  $E$ , d.h. eine messbare Abbildung  $\Omega \rightarrow \mathbf{N}$ .

### 3.1.1 Poissonprozesse

Sei im Folgenden  $\Lambda$  ein Maß auf  $E \times Y$ . Ein *Poissonprozess*  $\Phi$  auf  $E \times Y$  mit Intensitätsmaß  $\Lambda$  ist ein Punktprozess mit folgenden beiden Eigenschaften:

- i) Für  $k \in \mathbb{N}$  und disjunkte Mengen  $A_1, \dots, A_k$  aus  $\mathcal{B} \otimes \mathcal{Y}$  sind  $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_k)$  unabhängig. Man sagt auch,  $\Phi$  hat *unabhängige Zuwächse*.
- ii) Für festes  $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{Y}$  besitzt die Zufallsgröße  $\Phi(A)$  eine Poisson-Verteilung mit Parameter  $\Lambda(A)$ . Dies bedeutet insbesondere  $\mathbb{P}(\Phi(A) = 0) = 1$ , falls  $\Lambda(A) = 0$ , und  $\mathbb{P}(\Phi(A) = \infty) = 1$ , falls  $\Lambda(A) = \infty$  gilt.

Das Maß  $\Lambda$  heißt *atomfrei* oder *diffus*, falls  $\Lambda(\{z\}) = 0$  für alle  $z \in E \times Y$  gilt.

**Satz 3.1.1** *Ein Poissonprozess  $\Phi$  mit Intensitätsmaß  $\Lambda \in \mathbf{M}(E \times Y)$  ist genau dann  $\mathbb{P}$ -f.s. einfach, wenn  $\Lambda$  diffus ist.*

Der obige Satz folgt aus Lemma 3.2.1 in [40]. Die Slivnyak-Mecke-Formel ist Inhalt des folgenden Lemmas.

**Lemma 3.1.2** *Seien  $\Phi$  ein Poissonprozess mit  $\sigma$ -endlichem Intensitätsmaß  $\Lambda$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbf{N}(E \times Y) \times (E \times Y)^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int f(\Phi - \delta_{z_1} - \dots - \delta_{z_n}, z_1, \dots, z_n) \Phi^{(n)}(d(z_1, \dots, z_n)) \\ = \mathbb{E} \left[ \int f(\Phi, z_1, \dots, z_n) \Lambda^n(d(z_1, \dots, z_n)) \right]. \end{aligned}$$

**Beweis:** Nach [24], Satz 3.1 gilt für messbares  $f : \mathbf{N}(E \times Y) \times E \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E} \int f(\Phi - \delta_z, z) \Phi(dz) = \mathbb{E} \int f((\Phi + \delta_z) - \delta_z, z) \Lambda(dz) = \mathbb{E} \int f(\Phi, z) \Lambda(dz).$$

Die Behauptung ergibt sich nun mittels vollständiger Induktion.  $\square$

Die Verteilung eines Poissonprozesses  $\Phi$  mit Intensitätsmaß  $\Lambda$  bezeichnen wir im Folgenden mit  $\Pi_\Lambda$ . Zu jedem  $\sigma$ -endlichen Maß  $\Lambda$  findet man eine solche Verteilung, sie ist eindeutig durch  $\Lambda$  festgelegt, vgl. [24], Satz 3.1 und den zugehörigen Beweis. Die Abbildung  $\eta \mapsto \Pi_\eta(A)$ ,  $\eta \in \mathbf{M}(E \times Y)$ , ist für festes  $A \in \mathcal{M}(E \times Y)$  messbar, vgl. [19], Theorem 12.7 und den zugehörigen Beweis.

### 3.1.2 Coxprozesse

Es sei  $M$  ein zufälliges Maß auf  $E \times Y$ . Ein *Coxprozess*  $\Phi$  auf  $E \times Y$  mit *zufälligem Intensitätsmaß*  $M$  ist ein Punktprozess mit

$$\mathbb{P}(\Phi \in A \mid M) = \Pi_M(A) \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}, \quad A \in \mathcal{M}(E \times Y).$$

Mittels Satz 3.1.1 erhalten wir folgende Bedingung für die Einfachheit eines Coxprozesses.

**Lemma 3.1.3** *Ein Coxprozess  $\Phi$  mit zufälligem Intensitätsmaß  $M$  ist genau dann  $\mathbb{P}$ -f.s. einfach, wenn  $M$   $\mathbb{P}$ -f.s. diffus ist.*

Lemma 3.1.2 lässt sich für Coxprozesse wie folgt formulieren.

**Lemma 3.1.4** *Seien  $\Phi$  ein Coxprozess mit zufälligem Intensitätsmaß  $M$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbf{M}(E \times Y) \times \mathbf{N}(E \times Y) \times (E \times Y)^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int f(M, \Phi - \delta_{z_1} - \cdots - \delta_{z_n}, z_1, \dots, z_n) \Phi^{(n)}(d(z_1, \dots, z_n)) \\ &= \mathbb{E} \left[ \int f(M, \Phi, z_1, \dots, z_n) M^n(d(z_1, \dots, z_n)) \right]. \end{aligned}$$

Die Definition und Eigenschaften von Poissonprozessen und Coxprozessen auf  $E$  erhält man aus den entsprechenden Definitionen und Aussagen zum Produktraum  $E \times Y$ , wenn an den jeweiligen Stellen  $E \times Y$  und  $\mathcal{B} \times \mathcal{Y}$  durch  $E$  und  $\mathcal{B}$  ersetzt werden. Da wir in diesem Kapitel den markierten Fall untersuchen, verzichten wir darauf, den unmarkierten gesondert darzustellen.

Im folgenden Abschnitt 3.2 untersuchen wir zu einer Stoppmenge  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  die Zufallsvariable  $S(\Phi)$ , wobei  $\Phi$  ein Coxprozess auf  $E \times Y$  sein soll. Nach unserer Definition markierter einfacher Punktprozesse ist jedoch nicht jeder Coxprozess  $\Phi$  auf  $E \times Y$  ein  $Y$ -markierter einfacher Punktprozess auf  $E$ . Wir geben in dem unten stehenden Lemma Bedingungen an das zufällige Intensitätsmaß  $M$  eines Coxprozesses  $\Phi$  auf  $E \times Y$  an, so dass fast sicher  $\Phi \in \mathbf{N}_Y$  gilt.

**Lemma 3.1.5** *Sei  $\Phi$  ein Coxprozess auf  $E \times Y$  mit zufälligem Intensitätsmaß  $M$ . Das zufällige Maß  $M(\cdot \times Y)$  sei  $\mathbb{P}$ -f.s. diffus und das Maß  $\mathbb{E}M(\cdot \times Y)$  sei lokalendlich. Dann ist  $\Phi$   $\mathbb{P}$ -f.s. ein  $Y$ -markierter einfacher Punktprozess auf  $E$ .*

**Beweis:** Es gelten die Voraussetzungen des zu beweisenden Lemmas. Nach Satz 1.1.1 existiert eine Folge von offenen, relativ kompakten Mengen  $G_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = E$ . Wir erhalten

$$\mathbb{E}\Phi(G_n \times Y) = \mathbb{E}M(G_n \times Y) < \infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Folglich gilt  $\Phi(G_n \times Y) < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$   $\mathbb{P}$ -f.s. Da jedes  $C \in \mathcal{C}$  in einem  $G_n$  enthalten ist, ergibt sich  $\Phi(C \times Y) < \infty$  für alle  $C \in \mathcal{C}$   $\mathbb{P}$ -f.s. Wir können also oBdA annehmen, dass  $\Phi(\cdot \times Y)$  ein Coxprozess auf  $E$  mit zufälligem Intensitätsmaß  $M(\cdot \times Y)$  ist. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 3.1.3.  $\square$

## 3.2 Verteilungsaussagen zu Stoppmengen

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Stoppmenge  $S : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$ . Es sollen unter anderem Resultate zum zufälligen Maß  $M(S(\Phi))$  von  $S(\Phi)$  vorgestellt werden, wobei  $\Phi$  ein  $Y$ -markierter einfacher Coxprozess auf  $E$  mit zufälligem Intensitätsmaß  $M$  ist, sowie ähnliche Ergebnisse zu Bernoulliprozessen. Im Gegensatz zu [45] bedienen wir uns im Beweis nicht der Resultate zu Martingalen in [21], sondern beweisen zunächst mittels der Ergebnisse in Abschnitt 1.2 eine allgemeine Verteilungsaussage zu Stoppmengen für Coxprozesse. Unsere Vorgehensweise betrachtet Stoppmengen mit Argumenten im Raum der markierten einfachen Zählmaße, benötigt jedoch weder die Separabilität von  $\mathcal{C}$ , vgl. Lemma 1.1.3, noch die Stetigkeit von oben der zu Grunde gelegten Filtration, vgl. Abschnitt 1.2.1. Alle betrachteten Zufallsvariablen leben auf  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Die Beweise zu den Ergebnissen in den Unterabschnitten 3.2.1 und 3.2.2 findet der Leser in Unterabschnitt 3.2.3.

### 3.2.1 Resultate zu Coxprozessen

Sei  $\Phi$  zunächst ein markierter einfacher Coxprozess auf  $E$  mit Markenraum  $Y$  und zufälligem Intensitätsmaß  $M$ . Dabei sei  $M$  ein fixiertes zufälliges Maß auf  $E \times Y$ , welches  $\mathbb{P}$ -fast sicher diffus ist, vgl. Lemma 3.1.3. Wir setzen abkürzend

$$\varphi \cap S := \varphi \cap S(\varphi), \quad \varphi \cap S^c := \varphi \cap S(\varphi)^c, \quad \varphi(S) := \varphi(S(\varphi) \times Y)$$

für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Um die Darstellung zu vereinfachen, bezeichnen wir die Elemente aus  $E \times Y$  weiterhin mit  $z$  statt mit  $(x, y)$ . Ist  $\{z_1, \dots, z_k\} \subset E \times Y$  der Träger eines  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , so setzen wir  $S(\{z_1, \dots, z_k\}) := S(\varphi)$ , andernfalls sei  $S(\{z_1, \dots, z_k\}) := \emptyset$ .

**Satz 3.2.1** *Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbf{M}(E \times Y) \times \mathbf{N}_Y \times \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(M, \Phi \cap S, \Phi \cap S^c, S(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int f(M, \{z_1, \dots, z_k\}, \Phi \cap S(\{z_1, \dots, z_k\})^c, S(\{z_1, \dots, z_k\})) \\ & \quad \exp(-M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} M^k(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

Man erhält den Cox-Prozess  $\Phi$  mit zufälligem Intensitätsmaß  $M$  auf einer messbaren Teilmenge  $A$  von  $E \times Y$  bekanntlich dadurch, dass man zunächst  $M$  gemäß seiner Verteilung auswürfelt, dann die Anzahl  $k$  der Punkte von  $\Phi$  auf  $A$  anhand einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter  $M(A)$ , und anschließend  $k$  unabhängige  $M(A \cap \cdot)/M(A)$ -verteilte Punkte auswählt. Eine ähnliche Vorgehensweise ist nach Satz 3.2.1 auch für Stoppmengen möglich, wobei die Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(\Phi(S) = k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , nach Satz 3.2.1 gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Phi(S) = k) &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \exp(-M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} M^k(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Wir wollen noch den Fall  $k = 0$  behandeln.

**Satz 3.2.2** *Sei  $f : \mathbf{M}(E \times Y) \times \mathbf{N}_Y \times \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(M, \Phi \cap S, \Phi \cap S^c, S(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = 0\} \right] \\ &= E \left[ f(M, \emptyset, \Phi \cap S(\emptyset)^c, S(\emptyset)) \exp(-M(S(\emptyset) \times Y)) \right]. \end{aligned}$$

Ein Ansatz bei der Betrachtung durch einen Coxprozess erzeugter Stoppmengen besteht darin, das zufällige Intensitätsmaß  $M$  zu wechseln, vgl. [45] für den Fall eines Poissonprozesses. Wir halten weiterhin das zufällige Maß  $M$  auf  $E \times Y$  fixiert. Statt  $\Phi$  betrachten wir ab jetzt für ein gegebenes  $\rho > 0$  den markierten einfachen Coxprozess  $\Phi_\rho$  mit zufälligem Intensitätsmaß  $\rho M$ . Der Coxprozess  $\Phi_1$  besitzt das zufällige Intensitätsmaß  $M$ , wir schreiben in diesem Fall weiterhin  $\Phi$  statt  $\Phi_1$ .

Aus den Sätzen 3.2.1 und 3.2.2 erhält man die folgende Relation zwischen  $\mathbb{P}^{\Phi_\rho}$  und  $\mathbb{P}^{\Phi_\gamma}$  auf  $\sigma(\pi_S)$  für  $\rho, \gamma > 0$ .

**Lemma 3.2.3** *Für  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\gamma, \rho > 0$  und  $A \in \mathcal{N}_Y$  gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k, \Phi_\rho \cap S \in A) \\ &= \left( \frac{\rho}{\gamma} \right)^k \mathbb{E} \left[ \exp((\gamma - \rho)M(S(\Phi_\gamma) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi_\gamma(S) = k, \Phi_\gamma \cap S \in A\} \right]. \end{aligned}$$

Wir erwähnen, dass  $\mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k)$  genau dann von dem Parameter  $\rho > 0$  unabhängig ist, wenn auf der rechten Seite von (3.2.1) für beliebiges  $\rho > 0$  das zufällige Intensitätsmaß  $M$  durch  $\rho M$  ersetzt werden kann. In diesem Fall kann mittels Satz 3.2.1 die Verteilung von

$$M(S) := M(S(\Phi) \times Y)$$

bedingt unter  $\{\Phi(S) = k\}$  als eine  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung identifiziert werden. Die Messbarkeit von  $M(S)$  wird dabei durch Lemma 1.1.11 gesichert.

**Satz 3.2.4** *Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k)$  unabhängig von  $\rho > 0$  und positiv. Dann besitzt  $M(S)$  eine  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$ .*

Wir wollen ferner zeigen, dass Größen, die in skalierungsinvarianter Weise von  $\Phi \cap S$  abhängen, unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.4 unabhängig sind von  $M(S)$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$ . Wir setzen hierfür

$$\mathcal{I}_S := \{A \in \mathcal{N}_Y : \mathbb{P}(\Phi_\rho \cap S \in A, \Phi_\rho(S) = k) \text{ ist unabhängig von } \rho > 0\}$$

und erinnern an die Definitionen  $\varphi \cap S := \varphi \cap S(\varphi)$  sowie  $\varphi(S) := \varphi(S(\varphi) \times Y)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ .

**Satz 3.2.5** *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.4 sind  $\sigma(M(S))$  und  $(\Phi \cap S)^{-1}(\mathcal{I}_S)$  unabhängig unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$ .*

Wir formulieren Satz 3.2.5 im interessanten Fall eines homogenen Poissonprozesses im  $\mathbb{R}^d$  gesondert. Eine Abbildung  $F$  mit Argumenten in  $\mathbf{N}_Y$  heißt *skalierungsinvariant*, wenn  $F(r \cdot \varphi) = F(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $r > 0$  gilt. Hierbei sei

$$r \cdot \varphi := \{(rx, y) \in \mathbb{R}^d \times Y : (x, y) \in \varphi\}, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y, r > 0.$$

Gilt  $S(r \cdot \varphi) = r \cdot S(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $r > 0$ , so nennen wir  $S$  *skalierungskovariant*.

Ein Poissonprozess auf dem  $\mathbb{R}^d$  ist *homogen*, falls sein Intensitätsmaß ein Vielfaches des Lebesgue-Maßes über dem  $\mathbb{R}^d$  ist. Mit  $V_d(S)$  sei das zufällige Volumen von  $S(\Phi)$  bezeichnet.

**Folgerung 3.2.6** *Seien  $E = \mathbb{R}^d$ ,  $\Phi$  ein homogener Poissonprozess mit Intensität  $\gamma > 0$  und  $S$  skalierungskovariant. Ferner seien ein Messraum  $(X, \mathcal{X})$  und eine skalierungsinvariante Abbildung  $F : \mathbf{N}_Y \rightarrow X$  gegeben. Ist  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\mathbb{P}(\Phi(S) = k) > 0$ , so sind  $V_d(S)$  und  $F(\Phi \cap S)$  unabhängig unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$  und  $V_d(S)$  besitzt eine  $\Gamma(k, \gamma)$ -Verteilung unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$ .*

Ist  $\Phi$  ein beliebiger Poissonprozess oder allgemeiner ein Coxprozess mit zufälligem Intensitätsmaß  $M$ , so reichen die Voraussetzungen aus Folgerung 3.2.6 nicht aus um eine

Gamma-Verteilung für  $M(S)$  zu sichern. Wir geben nachfolgend ein Beispiel zu Coxprozessen an.

**Beispiel 3.2.7:** Seien  $E = \mathbb{R}^d$  und  $S$  skalierungskovariant mit  $V_d(S(\varphi)) \in (0, \infty)$  für alle  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Dann ist die durch

$$F(\varphi) := V_d(S(\varphi))^{-1/d}(\varphi \cap S(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y,$$

definierte Abbildung  $F : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathbf{N}_Y$  skalierungsinvariant. Sei ferner  $\Phi$  ein markierter einfacher Coxprozess auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit Marken in  $Y$  und es gelte zusätzlich  $\varphi(S) = k$  für  $\mathbb{P}^\Phi$ -f.a.  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Lemma 3.2.3 liefert  $\mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k) = 1$  für alle  $\rho > 0$ . Aus Satz 3.2.5 erhalten wir nun die Unabhängigkeit von  $F(\Phi \cap S)$  und  $M(S)$  und aus Satz 3.2.4 die  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung von  $M(S)$  unter  $\mathbb{P}$ . Insbesondere gilt  $EM(S) = k$ .

Bis zum Ende dieses Unterabschnittes sei  $\Phi$  ein markierter einfacher Poissonprozess auf  $E$  mit Marken in  $Y$  und lokalendlichem Intensitätsmaß  $\Lambda$ . Ferner sei eine weitere Stoppmenge  $T : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $S(\varphi) \subset T(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , und  $\mathbb{P}(\Phi(T(\Phi)) < \infty) = 1$  gegeben. Die Größen

$$\Phi \cap T \cap S^c := \Phi \cap T(\Phi) \cap S(\Phi)^c, \quad \Phi(T \setminus S) := \Phi((T(\Phi) \cap S(\Phi)^c) \times Y)$$

sind nach Lemma A.1.6 messbar.

**Satz 3.2.8** *Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & E \left[ f(\Phi \cap T \cap S^c, T(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T \setminus S) = k\} \mid \Phi \cap S \right] \\ &= \frac{1}{k!} \int f(\{z_1, \dots, z_k\}, T((\Phi \cap S) \cup \{z_1, \dots, z_k\})) \\ & \quad \exp(-\Lambda((T[(\Phi \cap S) \cup \{z_1, \dots, z_k\}] \setminus S(\Phi)) \times Y)) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in (T[(\Phi \cap S) \cup \{z_1, \dots, z_k\}] \setminus S(\Phi)) \times Y\} \Lambda^k(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

Man beachte in Satz 3.2.8, dass  $S(\Phi)$  messbar ist bezüglich  $\sigma(\Phi \cap S)$ , vgl. Folgerung 1.2.15. Wir setzen noch  $\Lambda(S) := \Lambda(S(\Phi) \times Y)$  und  $\Lambda(T) := \Lambda(T(\Phi) \times Y)$ .

**Satz 3.2.9** *Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Ist  $\mathbb{P}(\Phi_\rho(T \setminus S) = k \mid \Phi_\rho \cap S)$  unabhängig von  $\rho > 0$  und positiv  $\mathbb{P}$ -f.s., so besitzt  $\Lambda(T) - \Lambda(S)$  eine  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung unter  $\mathbb{P}(\cdot \mid \Phi(T \setminus S) = k, \Phi \cap S)$ . Gilt  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k) = 1$ , so sind  $\Lambda(T) - \Lambda(S)$  und  $\Phi \cap S$  unabhängig und  $\Lambda(T) - \Lambda(S)$  besitzt eine  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung unter  $\mathbb{P}$ .*

Die Resultate dieses Unterabschnittes 3.2.1 sind für Poissonprozesse  $\Phi$  mit Intensitätsmaß  $\Lambda$  und kompakte Stoppmengen  $S$  in [5], [32] und [45] aufgeführt. Die Aussage von Satz 3.2.1 erinnert an den Beweis von Theorem 1 in [32]. Die Formel von Satz 3.2.1 ist für den Spezialfall einer Voronoi-Flower in [2], Prop. 1, aufgeführt. Die Gamma-Verteilung

von  $\Lambda(S)$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$  wird in [45], Th. 2, nachgewiesen sowie ohne Verwendung des Stoppmengenbegriffs in [32], Th. 2 (ii). In Abschnitt A.3.1 zeigen wir, dass in eben genannter Referenz in der Tat Stoppmengen betrachtet werden. Die Unabhängigkeit unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$  von  $\Lambda(S)$  und Größen, die in skalierungsinvarianter Weise von  $\Phi \cap S$  abhängen, wird in [32], Th. 2 (i), festgestellt. Stoppmengen  $S, T$  mit  $S \subset T$  werden in [5] für einen homogenen Poissonprozess ausführlich behandelt.

### 3.2.2 Resultate zu Bernoulliprozessen

Die Gamma-Resultate aus dem vorigen Unterabschnitt wurden mittels charakteristischer Eigenschaften von Stoppmengen als auch unter Ausnutzung der unabhängigen Zuwächse eines Poissonprozesses hergeleitet. Es liegt nun nahe, eine weitere Klasse von Punktprozessen zu untersuchen, welche ebenfalls unabhängige Zuwächse aufweist, die Rede ist von den sogenannten Bernoulliprozessen. Wir werden die Ergebnisse zu Coxprozessen auf Bernoulliprozesse übertragen, an die Stelle der Gamma-Verteilung tritt dabei die negative Binomialverteilung.

Seien  $E$  eine abzählbare Menge, versehen mit der diskreten Topologie und  $p_x \in [0, 1]$ ,  $x \in E$ . Gegeben seien ferner unabhängige Folgen unabhängiger Zufallsvariablen  $(H_x)_{x \in E}$ ,  $(V_x)_{x \in E}$ , wobei  $H_x$  Bernoulli-verteilt sei mit Parameter  $p_x$  und  $V_x$  eine Zufallsvariable mit Werten in  $Y$ . Wir definieren einen  $Y$ -markierten einfachen Punktprozess  $\Phi$  auf  $E$  durch

$$\Phi := \sum_{x \in E} H_x \cdot \delta_{(x, V_x)}$$

und nennen ihn *Bernoulliprozess*. Für festes  $k \in \mathbb{N}$  setze

$$E_{\neq}^k := \{(x_1, \dots, x_k) \in E^k : x_1, \dots, x_k \text{ paarweise verschieden}\}.$$

**Satz 3.2.10** *Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap S, \Phi \cap S^c, S(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} f \left[ \{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\}, \Phi \cap S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})^c, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\}) \right] \right. \\ & \quad \left. \prod_{i=1}^k p_{x_i} \prod_{x \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\}) \setminus \{x_1, \dots, x_k\}} (1 - p_x) \right. \\ & \quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\} \right]. \end{aligned}$$

Der Ansatz, bei der Betrachtung von Stoppmengen einen Parameter zu wechseln, vgl. Unterabschnitt 3.2.1, kann auch bei Bernoulliprozessen gewinnbringend genutzt werden. Wir schreiben  $\Phi = \Phi_p$ , falls  $p_x = p$  für alle  $x \in E$  und ein  $p \in (0, 1)$  gilt. Eine Erweiterung von Satz 3.2.10 auf den Fall  $k = 0$  soll hier nur für  $\Phi = \Phi_p$  angegeben werden.

**Satz 3.2.11** *Seien  $p \in (0, 1)$  und  $\Phi = \Phi_p$ . Für messbares  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap S, \Phi \cap S^c, S(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = 0\} \right] \\ &= (1 - p)^{\text{card } S(\emptyset)} \cdot \mathbb{E} \left[ f(\emptyset, \Phi \cap S(\emptyset)^c, S(\emptyset)) \right]. \end{aligned}$$

Aus den Sätzen 3.2.10 und 3.2.11 erhält man für  $p, q \in (0, 1)$  die folgende Relation zwischen  $\mathbb{P}^{\Phi_q}$  und  $\mathbb{P}^{\Phi_p}$  auf  $\sigma(\pi_S)$ .

**Lemma 3.2.12** *Seien  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $p, q \in (0, 1)$ . Es gilt für  $A \in \mathcal{N}_Y$*

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi_q(S) = k, \Phi_q \cap S \in A) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^k \mathbb{E} \left[ \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{\text{card } S(\Phi_p) - k} \cdot \mathbf{1}\{\Phi_p(S) = k, \Phi_p \cap S \in A\} \right]. \end{aligned}$$

Satz 3.2.4 zeigt die Bedeutung von Gamma-Verteilungen bei Stoppmengen im Fall eines Coxprozesses. Liegt dagegen ein Bernoulliprozess vor, so erhält man im analogen Zusammenhang die negative Binomialverteilung, wie unten stehender Satz ausführt.

**Satz 3.2.13** *Es seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Phi = \Phi_p$  für ein  $p \in (0, 1)$ . Ist  $\mathbb{P}(\Phi_q(S) = k)$  unabhängig von  $q \in (0, 1)$  und positiv, so besitzt  $\text{card } S(\Phi) - k$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$  eine negative Binomialverteilung mit Parameter  $k$  und  $p$ .*

Folgendes Bild wird hier für den Fall  $\Phi(S) = k$  durch oben stehenden Satz vermittelt. Man sucht  $k$  Punkte in  $E$  aus  $\Phi$  gemäß eines durch die Stoppmenge festgelegten Algorithmus. Ein gefundener Punkt aus  $E \setminus \Phi$  kann als Niete aufgefasst werden, ein Punkt aus  $E \cap \Phi$  als Treffer. Gestoppt wird bei dem  $k$ -ten Treffer und die Stoppmenge besteht aus der Menge aller gefundenen Punkte, namentlich aus den  $k$ - Treffern und den  $\text{card } S(\Phi) - k$  Nieten.

Wir setzen

$$\mathcal{J}_S := \{A \in \mathcal{N}_Y : P(\Phi_q \cap S \in A, \Phi_q(S) = k) \text{ ist unabhängig von } q \in (0, 1)\}$$

und erinnern an die Definitionen  $\varphi \cap S := \varphi \cap S(\varphi)$  sowie  $\varphi(S) := \varphi(S(\varphi) \times Y)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ .

**Satz 3.2.14** *Es seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Phi = \Phi_p$  für ein  $p \in (0, 1)$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.13 sind  $\sigma(\text{card } S(\Phi))$  und  $(\Phi \cap S)^{-1}(\mathcal{J}_S)$  unabhängig unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$ .*

Gegeben sei nun eine weitere Stoppmenge  $T : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  mit  $S(\varphi) \subset T(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , und  $\mathbb{P}(\Phi(T(\Phi)) < \infty) = 1$ . Satz 3.2.8 lässt sich auch im Fall eines Bernoulliprozesses formulieren.

**Satz 3.2.15** *Sei  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap T \cap S^c, T(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T \setminus S) = k\} \mid \Phi \cap S \right] \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} f \left[ \{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\}, T((\Phi \cap S) \cup \{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\}) \right] \right. \\ & \quad \prod_{i=1}^k p_{x_i} \prod_{x \in T((\Phi \cap S) \cup \{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_1, V_{x_k})\}) \setminus (S(\Phi) \cup \{x_1, \dots, x_k\})} (1 - p_x) \\ & \quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in T((\Phi \cap S) \cup \{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\}) \setminus S(\Phi)\} \right]. \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass  $S(\Phi)$  messbar ist bezüglich  $\sigma(\Phi \cap S)$ , vgl. Folgerung 1.2.15.

**Satz 3.2.16** *Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\Phi = \Phi_p$  für ein  $p \in (0, 1)$ . Ist die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\mathbb{P}(\Phi_q(T \setminus S) = k \mid \Phi_q \cap S)$  unabhängig von  $q \in (0, 1)$  und positiv  $\mathbb{P}$ -f.s., so besitzt die Zufallsvariable  $\text{card}(T \setminus S)(\Phi) - k$  unter  $\mathbb{P}(\cdot \mid \Phi(T \setminus S) = k, \Phi \cap S)$  eine negative Binomialverteilung mit Parameter  $k$  und  $p$ . Gilt  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k) = 1$ , so sind  $\text{card}(T \setminus S)(\Phi)$  und  $\Phi \cap S$  unabhängig und  $\text{card}(T \setminus S)(\Phi) - k$  besitzt eine negative Binomialverteilung mit Parameter  $k$  und  $p$  unter  $\mathbb{P}$ .*

### 3.2.3 Beweise

Grundlage der hier angegebenen Beweise ist folgendes Lemma.

**Lemma 3.2.17** *Seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine Abbildung. Dann gilt*

$$\begin{aligned} & f(\varphi \cap S, S(\varphi)) \cdot \mathbf{1}\{\varphi(S) = k\} \\ &= \frac{1}{k!} \int f(\{z_1, \dots, z_k\}, S(\{z_1, \dots, z_k\})) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} \\ & \quad \mathbf{1}\{(\varphi - \delta_{z_1} - \dots - \delta_{z_k})(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y) = 0\} \varphi^{(k)}(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

**Beweis:** Zunächst gilt

$$\begin{aligned} & f(\varphi \cap S, S(\varphi)) \cdot \mathbf{1}\{\varphi(S) = k\} \\ &= \frac{1}{k!} \int f(\{z_1, \dots, z_k\}, S(\varphi)) \\ & \quad \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} = \varphi \cap S(\varphi)\} \varphi^{(k)}(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.20 besitzt die Gleichung  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$  die eindeutige Lösung  $\psi_* := \varphi \cap S(\varphi)$ , und es gilt  $S(\psi_*) = S(\varphi)$ . Hieraus erhalten wir für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$

$$\{z_1, \dots, z_k\} = \varphi \cap S(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \{z_1, \dots, z_k\} = \varphi \cap S(\{z_1, \dots, z_k\}),$$

so wie  $S(\varphi) = S(\{z_1, \dots, z_k\})$ , falls eine der beiden Aussagen richtig ist. Folglich gilt

$$\begin{aligned} & f(\varphi \cap S, S(\varphi)) \cdot \mathbf{1}\{\varphi(S) = k\} \\ &= \frac{1}{k!} \int f(\{z_1, \dots, z_k\}, S(\{z_1, \dots, z_k\})) \\ & \quad \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} = \varphi \cap S(\{z_1, \dots, z_k\})\} \varphi^{(k)}(d(z_1, \dots, z_k)) \\ &= \frac{1}{k!} \int f(\{z_1, \dots, z_k\}, S(\{z_1, \dots, z_k\})) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} \\ & \quad \mathbf{1}\{(\varphi - \delta_{z_1} - \dots - \delta_{z_k})(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y) = 0\} \varphi^{(k)}(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.2:** Mittels Satz 1.2.20 man erhält analog zu obigem Beweis für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$f(\varphi \cap S, S(\varphi)) \cdot \mathbf{1}\{\varphi(S) = 0\} = f(\emptyset, S(\emptyset)) \cdot \mathbf{1}\{\varphi \cap S(\emptyset) = \emptyset\}. \quad (3.2.2)$$

Die unabhängigen Zuwächse eines Poissonprozesses liefern die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.1:** Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $f : \mathbf{M}(E \times Y) \times \mathbf{N}_Y \times \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar. Aus den Lemmata 3.2.17 und 3.1.4 folgt zunächst

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(M, \Phi \cap S, \Phi \cap S^c, S(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int f(M, \{z_1, \dots, z_k\}, \Phi \cap S(\{z_1, \dots, z_k\})^c, S(\{z_1, \dots, z_k\})) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} \\ & \quad \mathbf{1}\{\Phi(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y) = 0\} M^k(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit der Zuwächse eines Poissonprozesses liefert die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Lemma 3.2.3:** Sei zunächst  $k \in \mathbb{N}$ . Aus Satz 3.2.1 erhält man für  $\rho, \gamma > 0$  und  $A \in \mathcal{N}_Y$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k, \Phi_\rho \cap S \in A) \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} \in A\} \exp(-\rho M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \\
&\quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} (\rho M)^k(d(z_1, \dots, z_k)) \\
&= \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^k \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} \in A\} \exp((\gamma - \rho)M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \\
&\quad \exp(-\gamma M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \mathbf{1}\{M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y) < \infty\} \\
&\quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} (\gamma M)^k(d(z_1, \dots, z_k)).
\end{aligned}$$

Nochmaliges Anwenden von Satz 3.2.1 liefert

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k, \Phi_\rho \cap S \in A) \\
&= \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^k \mathbb{E} \left[ \exp((\gamma - \rho)M(S(\Phi) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{M(S(\Phi) \times Y) < \infty\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{\Phi_\gamma(S) = k, \Phi_\gamma \cap S \in A\} \right] \tag{3.2.3}
\end{aligned}$$

Eine einfache Folgerung aus den Sätzen 3.2.1 und 3.2.2 ist

$$\mathbb{P}(M(S(\Phi_\gamma) \times Y) = \infty, \Phi_\gamma(S) < \infty) = 0. \tag{3.2.4}$$

Aus (3.2.3) und (3.2.4) ergibt sich nun wie behauptet

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k, \Phi_\rho \cap S \in A) \\
&= \left(\frac{\rho}{\gamma}\right)^k \mathbb{E} \left[ \exp((\gamma - \rho)M(S(\Phi) \times Y)) \mathbf{1}\{\Phi_\gamma(S) = k, \Phi_\gamma \cap S \in A\} \right].
\end{aligned}$$

Sei  $k = 0$ . Nach Satz 3.2.2 gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = 0, \Phi_\rho \cap S \in A) \\
&= \mathbb{E} \exp(-\rho M(S(\emptyset) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{\emptyset \in A\} \\
&= \mathbb{E} \left[ \exp(-\gamma M(S(\emptyset) \times Y)) \cdot \exp((\gamma - \rho)M(S(\emptyset) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{\emptyset \in A\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{M(S(\emptyset) \times Y) < \infty\} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \exp((\gamma - \rho)M(S(\Phi_\gamma) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{M(S(\Phi_\gamma) \times Y) < \infty\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{\Phi_\gamma \cap S \in A, \Phi_\gamma(S) = 0\} \right].
\end{aligned}$$

Wegen (3.2.4) ist die Behauptung auch für  $k = 0$  gezeigt.  $\square$

Für den Beweis von Satz 3.2.4 benutzen wir den Parameterwechsel aus Lemma 3.2.3, man vergleiche auch [32] und [45].

**Beweis der Sätze 3.2.4 und 3.2.5:** Seien  $\rho < 1$  und  $M_{1-\rho} := (1 - \rho) \cdot M$  sowie  $A \in \mathcal{I}_S$ . Es gilt nach Satz 3.2.1

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \exp(\rho M(S)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi \cap S \in A\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \exp((\rho - 1)M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} \in A\} \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} M^k(d(z_1, \dots, z_k)) \\ &= (1 - \rho)^{-k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \exp(-M_{1-\rho}(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) \cdot \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} \in A\} \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} M_{1-\rho}^k(d(z_1, \dots, z_k)). \end{aligned}$$

Setzen von  $\rho = 0$  liefert

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi \cap S \in A, \Phi(S) = k) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} \in A\} \cdot \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} \\ & \quad \exp(-M(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) M^k(d(z_1, \dots, z_k)) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\{z_1, \dots, z_k\} \in A\} \cdot \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_k \in S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y\} \\ & \quad \exp(-M_{1-\rho}(S(\{z_1, \dots, z_k\}) \times Y)) M_{1-\rho}^k(d(z_1, \dots, z_k)), \end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung an  $A$  benutzt haben. Folglich ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \exp(\rho M(S)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi \cap S \in A\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\ &= (1 - \rho)^{-k} \cdot \mathbb{P}(\Phi \cap S \in A, \Phi(S) = k). \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Da nach Voraussetzung  $\mathbb{P}(\Phi_r(S) = k)$  unabhängig von  $r > 0$  ist, können wir insbesondere  $A := \mathcal{N}_Y$  setzen. Wir erhalten

$$\mathbb{E} \left[ \exp(\rho M(S)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] = (1 - \rho)^{-k} \cdot \mathbb{P}(\Phi(S) = k). \quad (3.2.6)$$

Die momentenerzeugende Funktion einer  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung berechnet sich zu

$$\rho \mapsto (1 - \rho)^{-k},$$

somit ist Satz 3.2.4 bewiesen. Satz 3.2.5 erhält man sofort aus (3.2.5) und (3.2.6).  $\square$

**Beweis von Folgerung 3.2.6** Seien  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  und  $\rho > 0$ . Wir setzen  $\varphi_\rho := \rho^{-1/d}\varphi$ . Die Skalierungskovarianz von  $S$  und die Skalierungsinvarianz von  $F$  liefern

$$\varphi_\rho(S(\varphi_\rho) \times Y) = k \Leftrightarrow \varphi(S(\varphi) \times Y) = k, \quad F(\varphi_\rho \cap S(\varphi_\rho)) = F(\varphi \cap S(\varphi)).$$

Es folgt  $\sigma(F) \subset \mathcal{I}_S$  und aus den Sätzen 3.2.4 und 3.2.5 ergeben sich die Unabhängigkeit von  $F(\Phi \cap S)$  und  $V_d(S)$  als auch die  $\Gamma(k, 1)$ -Verteilung von  $\gamma V_d(S)$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$ . Das ist die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.8:** Nach Folgerung 1.2.17 ist zunächst

$$S(\varphi) = S(\varphi \cap S(\varphi)) = S(\varphi \cap T(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y. \quad (3.2.7)$$

Die Voraussetzung  $S \subset T$  liefert ferner

$$\varphi \cap S(\varphi) = \varphi \cap T(\varphi) \cap S(\varphi \cap T(\varphi)) = \pi_S(\varphi \cap T(\varphi)), \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y.$$

Wir setzen  $\Phi \cap T := \Phi \cap T(\Phi)$  und  $\Phi(T) := \Phi(T(\Phi) \times Y)$ . Für messbare Abbildungen  $f : \mathbf{N}_Y \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $h : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar sowie  $k, l \in \mathbb{N}$  gilt nach Satz 3.2.1

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap T, T(\Phi)) \cdot h(\Phi \cap S) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T) = k + l\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = l\} \right] \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \cdot \mathbb{E} \int f(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}, T(\{z_1, \dots, z_{k+l}\})) \\ & \quad \mathbf{1}\{\text{card } \pi_S(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) = l\} \cdot h(\pi_S(\{z_1, \dots, z_{k+l}\})) \\ & \quad \exp(-\Lambda(T(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) \times Y)) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_{k+l} \in T(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) \times Y\} \Lambda^{k+l}(d(z_1, \dots, z_{k+l})) \\ &= \frac{\binom{k+l}{l}}{(k+l)!} \cdot \mathbb{E} \int f(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}, T(\{z_1, \dots, z_{k+l}\})) \\ & \quad \mathbf{1}\{\pi_S(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) = \{z_1, \dots, z_l\}\} \cdot h(\{z_1, \dots, z_l\}) \\ & \quad \exp(-\Lambda(T(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) \times Y)) \\ & \quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_{k+l} \in T(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) \times Y\} \Lambda^{k+l}(d(z_1, \dots, z_{k+l})). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.20 ist  $\psi_* := \varphi \cap S(\varphi)$  die eindeutige Lösung der Gleichung  $\psi = \varphi \cap S(\psi)$ , und es gilt  $S(\psi_*) = S(\varphi)$ . Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \{z_1, \dots, z_l\} &= \pi_S(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) \\ &\Leftrightarrow \{z_1, \dots, z_l\} = \{z_1, \dots, z_{k+l}\} \cap S(\{z_1, \dots, z_l\}) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

und

$$S(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) = S(\{z_1, \dots, z_l\}),$$

falls eine der beiden Aussagen obiger Äquivalenz (3.2.8) richtig ist. Aus diesen Überlegungen ergibt sich

$$\begin{aligned} \{z_1, \dots, z_l\} &= \{z_1, \dots, z_{k+l}\} \cap S(\{z_1, \dots, z_{k+l}\}) \\ &\Leftrightarrow \{z_1, \dots, z_l\} \subset S(\{z_1, \dots, z_l\}) \quad \text{und} \quad \{z_{l+1}, \dots, z_{k+l}\} \subset S(\{z_1, \dots, z_l\})^c \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap T, T(\Phi)) \cdot h(\Phi \cap S) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T) = k+l\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = l\} \right] \\ &= \frac{1}{k! \cdot l!} \cdot \mathbb{E} \iint f(\{z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{k+l}\}, T(\{z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{k+l}\})) \\ &\quad \mathbf{1}\{z_1, \dots, z_l \in S(\{z_1, \dots, z_l\})\} \cdot h(\{z_1, \dots, z_l\}) \\ &\quad \exp(-\Lambda(T(\{z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{k+l}\}) \times Y)) \\ &\quad \mathbf{1}\{z_{l+1}, \dots, z_{k+l} \in T(\{z_1, \dots, z_l, z_{l+1}, \dots, z_{k+l}\}) \setminus S(\{z_1, \dots, z_l\}) \times Y\} \\ &\quad \Lambda^k(d(z_{l+1}, \dots, z_{k+l})) \Lambda^l(d(z_1, \dots, z_l)). \end{aligned}$$

Wir wenden Satz 3.2.1 auf das äußere Integral an und erhalten

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap T, T(\Phi)) \cdot h(\Phi \cap S) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T) = k+l\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = l\} \right] \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \int f((\Phi \cap S) \cup \{v_1, \dots, v_k\}, T((\Phi \cap S) \cup \{v_1, \dots, v_k\})) \cdot h(\Phi \cap S) \\ &\quad \exp(-\Lambda(T[(\Phi \cap S) \cup \{v_1, \dots, v_k\}] \setminus S(\Phi) \times Y)) \\ &\quad \mathbf{1}\{v_1, \dots, v_k \in T[(\Phi \cap S) \cup \{v_1, \dots, v_k\}] \setminus S(\Phi) \times Y\} \\ &\quad \mathbf{1}\{\Phi(S) = l\} \Lambda^k(d(v_1, \dots, v_k)). \end{aligned}$$

Den Fall  $l = 0$  zeigt man mit Satz 3.2.2 analog. Aufsummieren beider Seiten über  $l \in \mathbb{N}_0$  liefert unter Beachtung von  $S(\Phi) = S(\Phi \cap S)$ , vgl. Folgerung 1.2.15, die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.9:** Wie im Beweis von Satz 3.2.4 ergibt sich mittels Satz 3.2.8 für  $\rho > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \exp(\rho(\Lambda(T) - \Lambda(S))) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T \setminus S) = k\} \mid \Phi \cap S \right] \\ &= (1 - \rho)^{-k} \cdot \mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k \mid \Phi \cap S), \end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt. Gelte nun  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k) = 1$ . Nach Lemma 3.2.3 ist  $\mathbb{P}^{\Phi_\rho}$  für  $\rho > 0$  absolutstetig bezüglich  $\mathbb{P}^\Phi$  auf  $\sigma(\pi_T)$ . Aus (3.2.7) ergibt sich die Messbarkeit von  $S$  bezüglich  $\sigma(\pi_T)$ . Folglich gilt

$$\mathbb{P}(\Phi_\rho(T \setminus S) = k) = \mathbb{P}((\Phi_\rho \cap T)(E) - (\Phi_\rho \cap T)(S(\Phi)) = k) = 1, \quad \rho > 0.$$

Somit ist  $\mathbb{P}(\Phi_\rho(T \setminus S) = k)$  unabhängig von  $\rho > 0$  und positiv. Ferner erhält man aus  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k) = 1$  auch  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k \mid \Phi \cap S) = 1$   $\mathbb{P}$ -f.s., somit gilt

$$\mathbb{E}\left[\exp(\rho(\Lambda(T) - \Lambda(S))) \mid \Phi \cap S\right] = (1 - \rho)^{-k} \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Hieraus ergibt sich die zweite Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.10:** Die Behauptung folgt analog zum Beweis von Satz 3.2.1 aus Lemma 3.2.17 und der Definition eines Bernoulliprozesses, vgl. Unterabschnitt 3.2.2.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.11:** Aus (3.2.2) folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[f(\Phi \cap S, \Phi \cap S^c, S(\Phi)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = 0\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[f(\emptyset, \Phi \cap S(\emptyset)^c, S(\emptyset)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S(\emptyset) \times Y) = 0\}\right]. \end{aligned}$$

Die unabhängigen Zuwächse eines Bernoulliprozesses liefern nun die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Lemma 3.2.12:** Aus Satz 3.2.10 erhält man für  $k \in \mathbb{N}$  und  $q \in (0, 1)$  mit der Abkürzung  $\text{card } S := \text{card } S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi_q \cap S \in A, \Phi_q(S) = k) \\ &= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} q^k (1 - q)^{\text{card } S - k} \cdot \mathbf{1}\{\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\} \in A\}\right. \\ & \quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\}\right] \\ &= \frac{q^k}{p^k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E}\left[\sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} p^k (1 - p)^{\text{card } S - k} \cdot \left(\frac{1 - q}{1 - p}\right)^{\text{card } S - k} \cdot \mathbf{1}\{\text{card } S < \infty\}\right. \\ & \quad \mathbf{1}\{\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\} \in A\} \\ & \quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\}\right], \end{aligned}$$

Nochmaliges Anwenden von Satz 3.2.10 liefert

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi_q(S) = k, \Phi_q \cap S \in A) \\ &= \left(\frac{q}{p}\right)^k \mathbb{E}\left[\left(\frac{1 - q}{1 - p}\right)^{\text{card } S(\Phi_p) - k} \mathbf{1}\{\text{card } S(\Phi_p) < \infty, \Phi_p(S) = k, \Phi_p \cap S \in A\}\right]. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Aus Satz 3.2.10 erhält man überdies

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\text{card } S(\Phi_p) = \infty, \Phi_p(S) = k) \\ & \leq \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} p^k (1-p)^{\text{card } S-k} \cdot \mathbf{1}\{\text{card } S = \infty\} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Aus (3.2.9) und (3.2.10) folgt die Behauptung für  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $k = 0$ . Nach Satz 3.2.11 gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\Phi_q(S) = 0, \Phi_q \cap S \in A) = (1-q)^{\text{card } S(\emptyset)} \cdot \mathbf{1}\{\emptyset \in A\} \\ & = (1-p)^{\text{card } S(\emptyset)} \cdot \left( \frac{1-q}{1-p} \right)^{\text{card } S(\emptyset)} \cdot \mathbf{1}\{\text{card } S(\emptyset) < \infty\} \cdot \mathbf{1}\{\emptyset \in A\} \\ & = \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1-p}{1-p} \right)^{\text{card } S(\Phi_p)} \cdot \mathbf{1}\{\text{card } S(\Phi_p) < \infty, \Phi_p(S) = 0, \Phi_p \cap S \in A\} \right]. \end{aligned}$$

Aus Satz 3.2.11 erhält man überdies

$$\mathbb{P}(\text{card } S(\Phi_p) = \infty, \Phi_p(S) = 0) = (1-p)^{\text{card } S(\emptyset)} \cdot \mathbf{1}\{\text{card } S(\emptyset) = \infty\} = 0.$$

Somit ist die Behauptung auch für  $k = 0$  gezeigt.  $\square$

**Beweis der Sätze 3.2.13 und 3.2.14:** Seien  $t \in (0, 1]$ ,  $q := 1 - t(1-p)$  und  $A \in \mathcal{J}_S$ . Wir benutzen wieder die Abkürzung  $\text{card } S := \text{card } S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})$ . Es gilt nach Satz 3.2.10

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ t^{\text{card } S(\Phi)-k} \cdot \mathbf{1}\{\Phi \cap S \in A\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\ & = \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} p^k (t(1-p))^{\text{card } S-k} \cdot \mathbf{1}\{\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\} \in A\} \right. \\ & \quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\} \right] \\ & = \left( \frac{p}{1-t(1-p)} \right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} q^k (1-q)^{\text{card } S-k} \right. \\ & \quad \left. \mathbf{1}\{\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\} \in A\} \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\} \right]. \end{aligned}$$

Setzen von  $t = 1$  liefert

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\Phi \cap S \in A, \Phi(S) = k) \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} p^k (1-p)^{\text{card } S-k} \cdot \mathbf{1}\{\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\} \in A\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\} \right] \\
&= \frac{1}{k!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_k) \in E_{\neq}^k} q^k (1-q)^{\text{card } S-k} \cdot \mathbf{1}\{\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\} \in A\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_k \in S(\{(x_1, V_{x_1}), \dots, (x_k, V_{x_k})\})\} \right],
\end{aligned}$$

wobei wir die Voraussetzung an  $A$  benutzt haben. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ t^{\text{card } S(\Phi)-k} \cdot \mathbf{1}\{\Phi \cap S \in A\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] \\
&= \left( \frac{p}{1-t(1-p)} \right)^k \cdot \mathbb{P}(\Phi \cap S \in A, \Phi(S) = k), \tag{3.2.11}
\end{aligned}$$

Da  $\mathbb{P}(\Phi_a(S) = k)$  unabhängig von  $a \in (0, 1)$  ist, gilt insbesondere  $\mathbf{N}_Y \in \mathcal{J}_S$ , und wir erhalten

$$\mathbb{E} \left[ t^{\text{card } S(\Phi)-k} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \right] = \left( \frac{p}{1-t(1-p)} \right)^k \cdot \mathbb{P}(\Phi(S) = k). \tag{3.2.12}$$

Somit stimmt die erzeugende Funktion von  $\text{card } S(\Phi) - k$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S) = k)$  mit der erzeugenden Funktion einer negativen Binomial-Verteilung mit Parameter  $k$  und  $p$  auf  $(0, 1]$  überein und Satz 3.2.13 ist bewiesen. Satz 3.2.14 erhält man sofort aus (3.2.11) und (3.2.12).  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.15:** Wir setzen wieder  $\Phi \cap T := \Phi \cap T(\Phi)$ ,  $\Phi(T) := \Phi(T(\Phi) \times Y)$  sowie abkürzend

$$w_i := (x_i, V_i), \quad i = 1, \dots, k+l, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Völlig analog zum Beweis von Satz 3.2.8 erhält man zunächst für messbares  $h : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap T, T(\Phi)) \cdot h(\Phi \cap S) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(T) = k + l\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = l\} \right] \\
&= \frac{1}{k! \cdot l!} \cdot \mathbb{E} \left[ \sum_{(x_1, \dots, x_l) \in E_{\neq}^l} \sum_{(x_{l+1}, \dots, x_{k+l}) \in E_{\neq}^k} f \left[ \{w_1, \dots, w_{k+l}\}, T(\{w_1, \dots, w_{k+l}\}) \right] \right. \\
&\quad \prod_{i=1}^l p_{x_i} \prod_{x \in S(\{w_1, \dots, w_l\}) \setminus \{x_1, \dots, x_l\}} (1 - p_x) \\
&\quad \prod_{i=l+1}^{k+l} p_{x_i} \prod_{x \in T(\{w_1, \dots, w_{k+l}\}) \setminus (S(\{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{x_{l+1}, \dots, x_{k+l}\})} (1 - p_x) \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{x_1, \dots, x_l \in S(\{w_1, \dots, w_l\})\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{x_{l+1}, \dots, x_{k+l} \in T(\{w_1, \dots, w_{k+l}\}) \setminus S(\{w_1, \dots, w_l\})\} \right].
\end{aligned}$$

Anwenden von Satz 3.2.10 auf die äußere Summe liefert analog zum Beweis von Satz 3.2.8 die Behauptung.  $\square$

**Beweis von Satz 3.2.16:** Wie im Beweis von Satz 3.2.13 ergibt sich mittels Satz 3.2.15 für  $q \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ t^{\text{card}(T \setminus S)(\Phi) - k} \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S) = k\} \mid \Phi \cap S \right] \\
&= \left( \frac{p}{1 - t(1 - p)} \right)^k \cdot \mathbb{P}(\Phi(S) = k \mid \Phi \cap S),
\end{aligned}$$

woraus die erste Behauptung folgt. Gelte nun  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k) = 1$ . Mittels Lemma 3.2.12 erhält man wie im Beweis von Satz 3.2.9  $\mathbb{P}(\Phi_q(T \setminus S) = k) = 1$  für alle  $q \in (0, 1)$ , insbesondere ist  $\mathbb{P}(\Phi_q(T \setminus S) = k)$  positiv und unabhängig von  $q \in (0, 1)$ . Ferner folgt  $\mathbb{P}(\Phi(T \setminus S) = k \mid \Phi \cap S) = 1$   $\mathbb{P}$ -f.s., folglich gilt

$$\mathbb{E} \left[ t^{\text{card}(T \setminus S)(\Phi) - k} \mid \Phi \cap S \right] = \left( \frac{p}{1 - t(1 - p)} \right)^k.$$

Hieraus ergibt sich die zweite Behauptung.  $\square$



# Kapitel 4

## Stoppmengen und Palmsche Maße

Ziel dieses Kapitels ist es, die Resultate zu Gammaverteilungen von Zuyev aus [45] und das *Complementary Theorem* von Miles aus [27] für homogene Poissonprozesse im  $\mathbb{R}^d$  mittels eines gemeinsamen Ansatzes herzuleiten. Dabei werden die Konzepte der Stoppmengen und des Palmschen Maßes miteinander verknüpft. Im Gegensatz zu Kapitel 3 beschränken wir uns nun auf homogene Poissonprozesse, untersuchen jedoch eine Klasse von Abbildungen, welche sowohl Stoppmengen als auch Abbildungen von Tupeln umfasst, wie sie beispielsweise in [6] und [27] betrachtet werden. Wir arbeiten auf  $E = \mathbb{R}^d$ , versehen mit der euklidischen Metrik, und bezeichnen mit  $\lambda$  das Lebesgue-Maß über  $\mathbb{R}^d$ . Statt eines allgemeinen Wahrscheinlichkeitsraumes sei in diesem Kapitel ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$  gegeben.

Bevor wir oben genannten Ansatz in Abschnitt 4.2 vorstellen, führen wir zunächst noch Stationarität und Palmsche Maße ein.

### 4.1 Stationarität und Palmsche Maße im euklidischen Raum

#### 4.1.1 Stationäre Maße

Für  $x \in \mathbb{R}^d$  wird durch

$$\theta_x(\phi) := \phi(\cdot + x), \quad \phi \in \mathbf{N},$$

eine bijektive Abbildung  $\theta_x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  definiert. Die Abbildung  $\theta_x$  verschiebt den Träger des Arguments um  $-x$ . Die Familie  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  heißt *messbarer Fluss* auf  $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ . Sie erfüllt die *Flusseigenschaft*

$$\theta_x \circ \theta_y = \theta_{x+y}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

und es ist  $\theta_0$  die Identität auf  $\mathbf{N}$ . Ferner ist die Abbildung  $(x, \phi) \mapsto \theta_x(\phi)$ ,  $(x, \phi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbf{N}$ , messbar, vgl. [14], Prop. 2.2.2.

Sei  $M : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$  ein zufälliges Maß auf  $\mathbb{R}^d$ . Wir schreiben im Folgenden  $M(\phi, B)$  statt  $M(\phi)(B)$ . Im Fall von

$$M(\phi, B + x) = M(\theta_x(\phi), B), \quad \phi \in \mathbf{N}, x \in \mathbb{R}^d, B \in \mathcal{B},$$

heißt  $M$  *adaptiert* (bezüglich  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$ ). Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  wird *invariant bezüglich*  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  oder *stationär* genannt, falls  $\theta_x(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt. Ist  $\mathbb{P}$  invariant bezüglich  $(\theta_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  und  $M$  ein adaptiertes zufälliges Maß, so bezeichnen wir  $M$  auch als *stationäres zufälliges Maß*. In diesem Fall ist die Verteilung des „verschobenen Maßes“  $M(\cdot + x)$  unabhängig von  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Das Intensitätsmaß  $\Lambda$  eines stationären zufälligen Maßes  $M$  ist gegeben durch

$$\Lambda = \gamma_M \cdot \lambda,$$

vgl. [19], Th. 2.6. Hierbei ist

$$\gamma_M := \mathbb{E}[M([0, 1]^d)]$$

die *Intensität* von  $M$ .

### 4.1.2 Definition und Eigenschaften Palmischer Maße

Es seien  $\mathbb{P}$  stationär und  $M$  ein stationäres zufälliges Maß. Das *Palmische Maß* von  $M$  wird definiert durch

$$\mathbb{P}_M(A) := \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\theta_x \in A, x \in [0, 1]^d\} M(dx), \quad A \in \mathcal{N}. \quad (4.1.1)$$

Gilt  $0 < \gamma_M < \infty$ , so heißt das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}_M^0 := \gamma_M^{-1} \mathbb{P}_M$$

das *Palmische Wahrscheinlichkeitsmaß* von  $M$ . Wegen der Stationarität von  $M$  kann in (4.1.1) die Menge  $[0, 1]^d$  durch ein beliebiges  $B \in \mathcal{B}$  mit  $V_d(B) \in (0, \infty)$  in nachfolgender Weise ersetzt werden. Es gilt für ein solches  $B \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{P}_M(A) = V_d(B)^{-1} \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\theta_x \in A, x \in B\} M(dx). \quad (4.1.2)$$

Aus (4.1.2) erhält man mittels Approximation messbarer Abbildungen durch Treppenfunktionen unten stehenden Satz. Es bezeichne dabei  $\mathbb{E}_M$  die Integration bezüglich  $\mathbb{P}_M$ . Für den Erwartungswert bezüglich  $\mathbb{P}_M^0$  verwenden wir  $\mathbb{E}_M^0$ .

**Satz 4.1.1 (Verfeinerter Satz von Campbell)** Für alle messbaren Abbildungen  $f : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  gilt

$$\mathbb{E} \int f(\theta_x, x) M(dx) = \mathbb{E}_M \int f(\theta_0, x) dx. \quad (4.1.3)$$

Das Palmische Maß  $\mathbb{P}_M$  von  $M$  ist  $\sigma$ -endlich und eindeutig gegeben durch (4.1.3), vgl. [7], Th. 12.2.II.

## 4.2 Stoppmengen und Palmische Maße

Wir kommen nun zu unserem eingangs erwähnten allgemeinen Ansatz zur Herleitung von Gamma-Resultaten. Hierfür betrachten wir Abbildungen  $S : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  mit der Eigenschaft, dass für festgehaltene  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  die Abbildung  $\phi \mapsto S(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$  eine Stoppmenge ist. Zu einer solchen Abbildung  $S$  konstruieren wir ein Maß  $M$  und definieren mittels eines stationären Poissonprozesses  $\Phi$  eine Zufallsvariable  $S_*(\Phi, 0)$ . Wir berechnen die gemeinsame Verteilung des zufälligen Volumens von  $S_*(\Phi, 0)$  und der Teilkonfiguration  $\Phi \cap S_*(\Phi, 0)$  unter dem Palmischen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_M^0$  von  $M$ . Dieser Ansatz wird sich bei der Betrachtung von Voronoi-Mosaiken in Abschnitt 5.1 als sehr geeignet erweisen. Definitionen und Voraussetzungen sind Inhalt von Unterabschnitt 4.2.1. Die Resultate werden in Unterabschnitt 4.2.2 aufgeführt, die zugehörigen Beweise findet der Leser in Unterabschnitt 4.2.4.

### 4.2.1 Das Maß $M$

Seien zunächst  $V, V'$  Mengen, so dass  $rv + x$  für alle  $v \in V \cup V', x \in \mathbb{R}^d, r > 0$  definiert und ein Element von  $V$  bzw.  $V'$  ist, und  $f : V \rightarrow V'$  eine Abbildung.

- Die Abbildung  $f$  heißt *skalierungsinvariant*, falls  $f(rv) = f(v)$  und *skalierungskovariant*, falls  $f(rv) = rf(v)$  für alle  $v \in V, r > 0$  gilt.
- Die Abbildung  $f$  heißt *translationsinvariant*, falls  $f(v+x) = f(v)$  und *translationskovariant*, falls  $f(v+x) = f(v) + x$  für alle  $v \in V, x \in \mathbb{R}^d$  gilt.
- Die Abbildung  $f$  heiße *homothetisch invariant*, falls  $f$  translations- und skalierungsinvariant ist und *homothetisch kovariant*, falls  $f$  translations- und skalierungskovariant ist.

Wir wollen in diesem Zusammenhang auch  $V = \mathbf{N}$  zulassen. Hierfür seien  $\phi + x$  und  $r \cdot \phi$  durch die zugehörige Translation bzw. Skalierung des Trägers von  $\phi$  erklärt. Es ist dann

$$\phi + x = \theta_{-x}(\phi) = \phi(\cdot - x), \quad \phi \in \mathbf{N}, x \in \mathbb{R}^d.$$

Eine Abbildung  $f : \mathbf{N} \times V \rightarrow V'$  ist somit genau dann translationskovariant, falls

$$f(\theta_x(\phi), 0) = f(\phi, x) - x$$

für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  und  $x \in V$  gilt. Wir schreiben weiterhin  $\theta_x(\phi)$  statt  $\phi + (-x)$ .

Ein zufälliges adaptiertes Maß soll nun mittels folgender gegebener Größen definiert werden:

- $j, m \in \mathbb{N}_0$  und  $n \in \mathbb{N}$ .
- Eine messbare und homothetisch kovariante Abbildung  $S : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  mit der Eigenschaft, dass für alle  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  die Abbildung

$$\phi \mapsto S(x_1, \dots, x_n, x, \phi), \quad \phi \in \mathbf{N}, \quad (4.2.1)$$

eine Stoppmenge ist. Wir definieren für  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_n, x} := \sigma(\pi_{S(x_1, \dots, x_n, x, \cdot)})$$

und benutzen im Folgenden für gegebene  $x_1, \dots, x_n$  und  $\phi \in \mathbf{N}$  die Abkürzung

$$\phi_{x_1, \dots, x_n}^! := \phi \setminus \{x_1, \dots, x_n\}.$$

- Eine homothetisch kovariante messbare Abbildung  $Z : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathcal{F}$  mit der Eigenschaft, dass das Maß

$$A \mapsto \int \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap A\} \mathcal{H}^j(dx), \quad A \in \mathcal{B}, \quad (4.2.2)$$

für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  lokalendlich ist.

- Eine homothetisch invariante messbare Abbildung  $R : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit der Eigenschaft, dass für feste  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  die Abbildung  $\phi \mapsto R(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ , messbar bezüglich  $\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_n, x}$  ist.

Eine weitere homothetisch invariante Abbildung  $\tilde{R} : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  wird durch

$$\tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \phi) := \mathbf{1}\{\phi(S(x_1, \dots, x_n, x, \phi)) = m\} \cdot R(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$$

für  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  und  $\phi \in \mathbf{N}$  definiert. Die Abbildung  $\phi \mapsto \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ , ist für feste  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_n, x}$ .

Betrachte nun für  $\phi \in \mathbf{N}$

$$M(\phi, \cdot) := \iint \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap \cdot\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \phi_{x_1, \dots, x_n}^!) \mathcal{H}^j(dx) \phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)). \quad (4.2.3)$$

Wir setzen im Weiteren voraus, dass das in (4.2.3) definierte Maß  $M(\phi, \cdot)$  lokalendlich ist für alle  $\phi \in \mathbf{N}$ .

**Lemma 4.2.1** *Die Abbildung  $M : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$  ist ein zufälliges adaptiertes Maß.*

Den Beweis von Lemma 4.2.1 liefern wir auf Seite 85 nach. Gibt es im Fall von  $j = 0$  für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  und  $\phi \in \mathbf{N}$  ein  $z(x_1, \dots, x_n, \phi)$  aus  $Z(x_1, \dots, x_n)$  mit

$$\tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \phi) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = z(x_1, \dots, x_n, \phi)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , so lässt sich mit der Bezeichnung  $(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d, \phi \in \mathbf{N})$

$$\tilde{R}(x_1, \dots, x_n, \phi) := \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, z(x_1, \dots, x_n, \phi), \phi),$$

die einfachere Darstellung

$$M(\phi, \cdot) := \int \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_n, \phi_{x_1, \dots, x_n}^!) \in \cdot\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, \phi_{x_1, \dots, x_n}^!) \phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n))$$

gewinnen.

Wir setzen im Folgenden zusätzlich die Existenz translationskovarianter, messbarer Abbildungen  $g_1, \dots, g_n : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit folgender Eigenschaft voraus. Für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  und alle  $(x_1, \dots, x_n) \in \phi^{(n)}$  gilt

$$\{g_1(\phi, x), \dots, g_n(\phi, x)\} = \{x_1, \dots, x_n\} \quad (4.2.4)$$

für  $\mathcal{H}^j$ -fast alle  $x \in Z(x_1, \dots, x_n)$  mit  $\tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \phi_{x_1, \dots, x_n}^!) > 0$ . Wir fordern anschaulich, dass für alle „interessanten“ Tupel  $(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$  die Punkte  $x_1, \dots, x_n$  in messbarer Weise festgelegt sind durch  $\phi$  und  $x$ . Mittels dieser Abbildungen  $g_1, \dots, g_n$  kann

$$S_*(\phi, x) := S(g_1(\phi, x), \dots, g_n(\phi, x), x, \phi \setminus \{g_1(\phi, x), \dots, g_n(\phi, x)\}) \quad (4.2.5)$$

definiert werden. Aus  $g_i(\theta_x(\phi), 0) = g_i(\phi, x) - x$  für  $i = 1, \dots, n$  und der Translationskovarianz von  $S$  ergibt sich

$$S_*(\theta_x(\phi), 0) + x = S_*(\phi, x). \quad (4.2.6)$$

### 4.2.2 Resultate

Betrachte einen stationären Poissonprozess  $\Phi$  mit Intensität  $\gamma \in (0, \infty)$ . Die Intensität  $\gamma_M$  von  $M(\Phi, \cdot)$  sei endlich und positiv.

**Satz 4.2.2** *Das Volumen von  $S_*(\Phi, 0)$  besitzt unter  $\mathbb{P}_M^0$  eine  $\Gamma(m + n - 1 + j/d, \gamma)$ -Verteilung.*

Satz 4.2.2 erweitert Miles *Complementary Theorem*, vgl. [27], (5.20C), für den Fall, dass der zu Grunde gelegte Prozess ein homogener Poissonprozess im  $\mathbb{R}^d$  ist. Miles betrachtet in [27] allgemeiner homogene Poissonsche  $s$ -Ebenen Prozesse, ohne jedoch das Konzept der Stoppmengen miteinzubeziehen. Eine Herleitung des Complementary Theorems mittels Palmischer Maße findet man in [6], wo auch Probleme im Zusammenhang mit Miles Complementary Theorem diskutiert und ein *Complementary Theorem Revisited* sowie ein *Revised Complementary Theorem* vorgestellt werden, vgl. [6], Th. 1 und Th. 3.

Größen, die in skalierungsinvarianter Weise die Konfiguration  $\Phi \cap S_*(\Phi, 0)$  beschreiben, sind unabhängig vom Volumen von  $S_*(\Phi, 0)$  unter  $\mathbb{P}_M^0$ , wie folgender Satz feststellt.

**Satz 4.2.3** *Es sei  $F : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine homothetisch invariante Abbildung, so dass die Abbildung  $\phi \mapsto F(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$  für alle  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_n, x}$  ist. Dann ist die Zufallsvariable*

$$F_*(\Phi) := F(g_1(\Phi, 0), \dots, g_n(\Phi, 0), 0, \Phi \setminus \{g_1(\Phi, 0), \dots, g_n(\Phi, 0)\})$$

*unabhängig von  $V_d(S_*(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_M^0$ .*

Ein Analogon zu Satz 3.2.1 lässt sich ebenfalls formulieren. Wir definieren abkürzend

$$\Phi^\dagger := \Phi \setminus \{g_1(\Phi, 0), \dots, g_n(\Phi, 0)\}$$

und für  $m \in \mathbb{N}$  ein Maß  $\nu_m$  auf  $\mathbf{N}$  durch

$$\nu_m(A) := \int \cdots \int \mathbf{1} \left\{ \sum_{i=1}^m \delta_{y_i} \in A \right\} dy_1 \cdots dy_m, \quad A \in \mathcal{N}.$$

Im Fall  $m = 0$  setzen wir  $\nu_0 := \delta_{\mathbf{0}}$ , dabei sei  $\mathbf{0}$  das Nullmaß über  $\mathbb{R}^d$ . Das Maß  $\nu_m$  ist konzentriert auf  $N_m := \{\phi \in \mathbf{N} : \phi(\mathbb{R}^d) = m\}$  und  $\sigma$ -endlich, man betrachte hierfür die messbaren Mengen  $A_n := N_m^c \cup \{\phi \in \mathbf{N} : \phi([-n, n]^d) = m\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 4.2.4** *Seien  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar und  $B \in \mathcal{B}$  mit  $V_d(B) \in (0, \infty)$ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_M f(\Phi^! \cap S_*(\Phi, 0), \Phi^! \cap S_*(\Phi, 0)^c, S_*(\Phi, 0)) \\ &= \frac{\gamma^{n+m}}{m! V_d(B)} \int \dots \int \mathbb{E} \left[ f(\psi_m, \Phi \cap S(x_1, \dots, x_n, x, \psi_m)^c, S(x_1, \dots, x_n, x, \psi_m)) \right] \\ & \quad \exp(-\gamma V_d(S(x_1, \dots, x_n, x, \psi_m))) \cdot R(x_1, \dots, x_n, x, \psi_m) \\ & \quad \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(x_1, \dots, x_n, x, \psi_m)\} \cdot \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap B\} \\ & \quad \nu_m(d\psi_m) \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Liegt ein stationärer, markierter Poissonprozess  $\Phi$  mit Marken in einem lokalkompakten Hausdorffraum  $Y$  mit abzählbarer Basis vor, so lassen sich zu den Sätzen 4.2.2 bis 4.2.4 analoge Aussagen herleiten. Ein messbarer Fluss auf  $(\mathbf{N}_Y, \mathcal{N}_Y)$  kann in üblicher Weise angegeben werden, man vergleiche beispielsweise [40], S. 88.

### 4.2.3 Eine Erweiterung unseres Ansatzes auf den Fall $n = 0$

Wir wollen abschließend den Fall betrachten, dass  $S$  und  $R$  Abbildungen mit Argumenten in  $\mathbb{R}^d \times \mathbf{N}$  sind. Da wir bisher  $n = 0$  ausgeschlossen haben, geben wir diesen Fall nun gesondert an.

Gegeben sei eine messbare und homothetisch kovariante Abbildung  $S : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  sei die Abbildung  $\phi \mapsto S(x, \phi)$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ , eine Stoppmenge. Ferner sei  $R : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  eine messbare, homothetisch invariante Abbildung mit der Eigenschaft, dass für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  die Abbildung  $\phi \mapsto R(x, \phi)$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ , messbar ist bezüglich  $\sigma(\pi_{S(x, \cdot)})$ . Wir definieren für festes  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\tilde{R}(x, \phi) := \mathbf{1}\{\phi(S(x, \phi)) = m\} \cdot R(x, \phi), \quad \phi \in \mathbf{N},$$

und betrachten das Maß

$$M_0(\phi, \cdot) = \int \mathbf{1}\{x \in \cdot\} \tilde{R}(x, \phi) dx, \quad \phi \in \mathbf{N}. \quad (4.2.7)$$

Wir setzen wieder voraus, dass  $M_0(\phi, \cdot)$  für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  lokalendlich ist. Hinreichend hierfür ist die Beschränktheit von  $R$ . Ferner sei die Intensität von  $M_0(\Phi, \cdot)$  positiv und endlich. Der folgende Satz lässt sich wie Satz 4.2.2 beweisen. Man setze dabei  $Z = \mathbb{R}^d$  und  $j = d$ .

**Satz 4.2.5** *Sei  $m \in \mathbb{N}_0$ . Dann besitzt das Volumen von  $S(0, \Phi)$  unter  $\mathbb{P}_{M_0}^0$  eine  $\Gamma(m, \gamma)$ -Verteilung.*

Ist eine homothetisch kovariante Stoppmenge  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  gegeben und  $R \equiv 1$ , so ist

$$M_0(\phi) = \mathbf{1}\{\phi(S(\phi)) = m\} \cdot \lambda$$

und man erhält Satz 3.2.4 für den Spezialfall eines stationären Poissonprozesses sofort aus Satz 4.2.5.

Neben dem in (4.2.7) vorgestellten Maß  $M_0$  bietet sich im Rahmen dieses Unterabschnittes das durch

$$N_0(\phi, \cdot) := \int \mathbf{1}\{x \in \cdot \cap S(x, \phi)\} \tilde{R}(x, \phi) \phi(dx), \quad \phi \in \mathbf{N},$$

definierte Maß  $N_0$  an. Man beachte

$$N_0(\phi, \cdot) = \int \mathbf{1}\{x \in \cdot\} \mathbf{1}\{x \in \phi \cap S(x, \phi)\} \tilde{R}(x, \phi) \mathcal{H}^0(dx), \quad \phi \in \mathbf{N}. \quad (4.2.8)$$

Das Maß  $N_0(\phi, \cdot)$  sei für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  lokalendlich. Hinreichend hierfür ist die Beschränktheit von  $R$ . Ferner sei die Intensität von  $N_0(\Phi, \cdot)$  positiv und endlich. Der folgende Satz lässt sich wie Satz 4.2.2 beweisen. Man setze dabei  $Z = \mathbb{R}^d$  und  $j = 0$ .

**Satz 4.2.6** *Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt das Volumen von  $S(0, \Phi)$  unter  $\mathbb{P}_{N_0}^0$  eine  $\Gamma(m-1, \gamma)$ -Verteilung.*

Ist  $R \equiv 1$  und ist eine skalierungskovariante Stoppmenge  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  mit der Eigenschaft  $0 \in S(\phi)$  für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  gegeben, so kann via

$$S'(x, \phi) := S(\theta_x(\phi)) + x, \quad x \in \mathbb{R}^d, \phi \in \mathbf{N},$$

eine homothetisch kovariante Abbildung  $S' : \mathbb{R}^d \times \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  definiert werden, so dass  $S'(x, \cdot)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  eine Stoppmenge ist und stets  $x \in S'(x, \phi)$  gilt. Der Nachweis der Stoppmengeneigenschaft von  $S'(x, \cdot)$  kann leicht mit Satz 1.2.18 geführt werden. Unter Berücksichtigung von  $S(\phi) = S'(0, \phi)$  und

$$N_0(\phi, dx) = \mathbf{1}\{\phi(S'(x, \phi)) = m\} \cdot \phi(dx) = \mathbf{1}\{\theta_x(\phi)(S(\theta_x(\phi))) = m\} \cdot \phi(dx)$$

ergibt sich in diesem Fall folgendes Resultat.

**Satz 4.2.7** *Seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\Phi(S(\Phi)) = m) > 0$ . Dann besitzt das Volumen von  $S(\Phi)$  unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\cdot | \Phi(S(\Phi)) = m)$  eine  $\Gamma(m-1, \gamma)$ -Verteilung.*

Die Sätze 4.2.3 und 4.2.4 gelten mit entsprechenden Modifikationen für die beiden oben betrachteten Maße (4.2.7) und (4.2.8).

## 4.2.4 Beweise

**Beweis von Lemma 4.2.1:** Es ist für  $y \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathcal{B}$  und  $\phi \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}
M(\theta_y(\phi), A) &= \iint \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap A\} \\
&\quad \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, (\theta_y(\phi))!_{x_1, \dots, x_n}) \mathcal{H}^j(dx) \theta_y(\phi)^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) \\
&= \iint \mathbf{1}\{x \in Z(x_1 - y, \dots, x_n - y) \cap A\} \\
&\quad \tilde{R}(x_1 - y, \dots, x_n - y, x, \theta_y(\phi) \setminus \{x_1 - y, \dots, x_n - y\}) \\
&\quad \mathcal{H}^j(dx) \phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) \\
&= \iint \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) - y \cap A\} \\
&\quad \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x + y, \phi \setminus \{x_1, \dots, x_n\}) \mathcal{H}^j(dx) \phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) \\
&= \iint \mathbf{1}\{x' \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap A + y\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x', \phi!_{x_1, \dots, x_n}) \\
&\quad \mathcal{H}^j(dx') \phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) \\
&= M(\phi, A + y).
\end{aligned}$$

Die Abbildung  $M$  ist folglich adaptiert. Es wurden dabei lediglich die Translationskovarianz von  $Z$  und die Translationsinvarianz von  $\tilde{R}$  benutzt. Wenden wir uns der Messbarkeit von  $M$  zu. Das  $j$ -dimensionale Hausdorffmaß  $\mathcal{H}^j$  ist ein äußeres Maß über dem  $\mathbb{R}^d$ , die Einschränkung von  $\mathcal{H}^j$  auf  $\mathcal{B}$  ist ein Maß, vgl. [10], S. 171. Nach Voraussetzung ist für alle  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$  das Maß (4.2.2) lokalendlich. Für  $A, B \in \mathcal{B}$  ist die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \int \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap A\} \cdot \mathbf{1}\{x \in B\} \mathcal{H}^j(dx)$$

messbar nach [43], Cor. 2.1.4. Die Messbarkeit von

$$(x_1, \dots, x_n, \phi) \mapsto \int \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap A\} \cdot \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \phi) \mathcal{H}^j(dx) \quad (4.2.9)$$

folgt nun aus Lemma A.4.1. Nach Lemma A.4.2 sowie [35], Satz 13.16 ist nämlich  $T := (\mathbb{R}^d)^n \times \mathbf{M}$  polnisch und besitzt insbesondere eine abzählbare Basis. Ferner ist  $T' := (\mathbb{R}^d)^n \times \mathbf{N}$  gemäß Lemma A.4.3 eine messbare Teilmenge von  $T$ . Die Messbarkeit von  $\phi \mapsto M(\phi, A)$  ergibt sich nun aus der Messbarkeit von (4.2.9). Man setze hierfür  $T := \mathbf{M}$ ,  $T' := \mathbf{N}$ ,  $X := (\mathbb{R}^d)^n$ ,  $\eta(\phi, \cdot) := \phi^{(n)}$  sowie  $f$  gemäß der Zuordnungsvorschrift (4.2.9) und benutze wieder Lemma A.4.1. Da  $A \in \mathcal{B}$  beliebig war, folgt die Messbarkeit von  $\phi \mapsto M(\phi, \cdot)$  nach Definition von  $\mathcal{M}$ .  $\square$

Seien  $\mathbb{P}$  die Verteilung auf  $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$  eines Poissonprozesses im  $\mathbb{R}^d$  mit Intensitätsmaß  $\gamma \cdot \lambda$  und  $\Phi$  die Identität auf  $\mathbf{N}$ .

**Beweis von Satz 4.2.2:** Seien  $s < \gamma$ ,  $\rho := (\gamma - s)/\gamma$  und  $\hat{C} := [0, 1]^d$  sowie  $C_\rho := \rho^{-1/d}\hat{C}$ . Unter Beachtung von (4.1.3), (4.2.5) und (4.2.6) gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] \\ &= \rho \cdot \mathbb{E} \iint \exp\{sV_d[S(\Phi, x)]\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_{x_1, \dots, x_n}^\dagger) \\ & \quad \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \mathcal{H}^j(dx) \Phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) \\ &= \rho \cdot \mathbb{E} \iint \exp\{sV_d[S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_{x_1, \dots, x_n}^\dagger)]\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_{x_1, \dots, x_n}^\dagger) \\ & \quad \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \mathcal{H}^j(dx) \Phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Die multivariate Version der Formel von Mecke-Slivnyak, vgl. Lemma 3.1.2, liefert

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] \\ &= \rho \cdot \gamma^n \cdot \mathbb{E} \int \dots \int \exp\{sV_d[S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi)]\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi) \\ & \quad \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Wegen der  $\sigma$ -Endlichkeit des Maßes (4.2.2) kann der Erwartungswert nach innen gezogen werden. Damit folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] \\ &= \rho \cdot \gamma^n \cdot \int \dots \int \mathbb{E} \left[ \exp\{sV_d[S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi)]\} \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi) \right] \\ & \quad \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Der Prozess  $\Phi_\rho := \rho^{-1/d}\Phi$  ist ein homogener Poissonprozess mit Intensität  $\rho\gamma$ . Nach Voraussetzung ist für alle  $x_1, \dots, x_n, x \in \mathbb{R}^d$  die Abbildung  $\phi \mapsto S(x_1, \dots, x_n, x, \phi)$  eine Stoppmenge. Mit Lemma 3.2.3 erhält man

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] \\ &= \rho \cdot \gamma^n \cdot \left( \frac{\gamma}{\rho\gamma} \right)^m \cdot \int \dots \int \mathbb{E} \left[ \exp\{(\rho\gamma - \gamma + s)V_d[S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_\rho)]\} \right. \\ & \quad \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_\rho) \left. \right] \\ & \quad \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Nun ist  $\rho\gamma = \gamma - s$  und obiger Ausdruck vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] \\ &= \frac{\gamma^n}{\rho^{m-1}} \cdot \int \dots \int \mathbb{E}[\tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_\rho)] \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \\ & \quad \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Aufgrund der Skalierungsinvarianz von  $\tilde{R}$  und der Skalierungskovarianz von  $Z$  ist

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_\rho)] \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap C_\rho\} \\ &= \mathbb{E}[\tilde{R}(y_1, \dots, y_n, y, \Phi)] \mathbf{1}\{y \in Z(y_1, \dots, y_n) \cap \hat{C}\} \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

mit  $(y_1, \dots, y_n, y) := \rho^{1/d}(x_1, \dots, x_n, x)$  und  $\hat{C} = [0, 1]^d = \rho^{1/d}C_\rho$ . Die zur entsprechenden Substitution gehörende Jacobi-Determinante  $J$  lautet

$$J = \rho^{-(n \cdot d + j)/d}.$$

Mit der Bezeichnung

$$\rho_{\tilde{R}, Z} := \int \dots \int \mathbb{E}[\tilde{R}(y_1, \dots, y_n, y, \Phi)] \mathbf{1}\{y \in Z(y_1, \dots, y_n) \cap \hat{C}\} \mathcal{H}^j(dy) dy_1 \dots dy_n$$

folgt

$$\mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] = \frac{\gamma^n}{\rho^{m-1+n+j/d}} \cdot \rho_{\tilde{R}, Z}. \quad (4.2.13)$$

Setzen von  $s = 0$  liefert die Intensität  $\gamma_M$  von  $M(\Phi, \cdot)$ , es ist

$$\gamma_M = \gamma^n \cdot \rho_{\tilde{R}, Z}. \quad (4.2.14)$$

Gilt  $0 < \gamma_M < \infty$ , so ergibt sich nach Division beider Seiten von (4.2.13) durch  $\gamma_M$

$$\mathbb{E}_M^0 \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] = \rho^{-(m-1+n+j/d)} = \left( \frac{\gamma}{\gamma - s} \right)^{m+n-1+j/d}. \quad (4.2.15)$$

Aus (4.2.15) erhalten wir die Behauptung.  $\square$

Auf die Skalierungskovarianz von  $S$  und  $Z$  sowie die Skalierungsinvarianz von  $R$  kann verzichtet werden, wenn stattdessen (4.2.12) für alle  $\rho > 0$  vorausgesetzt wird. Hängt  $\tilde{R}$  nur von  $\phi \in \mathbf{N}$  ab und ist  $Z$  skalierungskovariant, so gilt (4.2.12) genau im Fall der Unabhängigkeit des Erwartungswertes  $\mathbb{E}\tilde{R}(\Phi_\rho)$  von  $\rho > 0$ . Die Voraussetzung in Satz 3.2.4, dass  $\mathbb{P}(\Phi_\rho(S) = k)$  unabhängig von  $\rho > 0$  ist, kann folglich als ein Spezialfall von (4.2.12) angesehen werden.

**Beweis von Satz 4.2.3:** Sei  $t \in \mathbb{R}$ . Ersetze  $\tilde{R}$  in den Rechnungen des Beweises von Satz 4.2.2 durch  $e^{tF} \cdot \tilde{R}$  und erhalte

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0)) + tF_*(\Phi)\} \right] \\ = \frac{\gamma^n}{\rho^{m-1+n+j/d}} \int \dots \int \mathbb{E} \left[ \exp\{tF(y_1, \dots, y_n, y, \Phi)\} \tilde{R}(y_1, \dots, y_n, y, \Phi) \right] \\ \mathbf{1}\{y \in Z(y_1, \dots, y_n) \cap \hat{C}\} \mathcal{H}^j(dy) dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Setzen von  $s = 0$  liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_M \left[ \exp\{tF_*(\Phi)\} \right] = \gamma^n \int \dots \int \mathbb{E} \left[ \exp\{tF(y_1, \dots, y_n, y, \Phi)\} \tilde{R}(y_1, \dots, y_n, y, \Phi) \right] \\ \mathbf{1}\{y \in Z(y_1, \dots, y_n) \cap \hat{C}\} \mathcal{H}^j(dy) dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (4.2.15) ergibt sich hieraus

$$\mathbb{E}_M \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0)) + tF_*(\Phi)\} \right] = \mathbb{E}_M^0 \left[ \exp\{sV_d(S_*(\Phi, 0))\} \right] \mathbb{E}_M \left[ \exp\{tF_*(\Phi)\} \right].$$

Nach Division mit  $\gamma_M$  faktorisiert die momentenerzeugende Funktion des Zufallsvektors  $(V_d(S_*(\Phi, 0)), F_*(\Phi))$  unter  $\mathbb{P}_M^0$ , woraus die Behauptung folgt.  $\square$

**Beweis zu Satz 4.2.4:** Analog zum Beweis von Satz 4.2.2 ergibt sich für messbares  $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $B \in \mathcal{B}$  mit  $V_d(B) \in (0, \infty)$ , vgl. (4.2.11),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_M f(\Phi^! \cap S_*(\Phi, 0), \Phi^! \cap S_*(\Phi, 0)^c, S_*(\Phi, 0)) \\ = V_d(B)^{-1} \cdot \gamma^n \cdot \int \dots \int \mathbb{E} \left[ f(\Phi \cap S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi), \dots) \right. \\ \left. \mathbf{1}\{\Phi(S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi)) = m\} \cdot R(x_1, \dots, x_n, x, \Phi) \right] \\ \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap B\} \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Satz 3.2.1, angewendet auf den Ausdruck in den eckigen Klammern, liefert die Behauptung. Man beachte hierbei Satz 1.2.16 und die Messbarkeit von  $R(x_1, \dots, x_n, x, \cdot)$  bezüglich der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_n, x}$ .  $\square$

## 4.2.5 Vergleich und Diskussion der Ansätze

In Unterabschnitt 4.2.3 wurde aufgezeigt, dass sich die Gamma-Resultate aus Kapitel 3 für den Spezialfall eines stationären Poissonprozesses und einer homothetisch kovarianten

Stoppmenge in Satz 4.2.2 wiederfinden lassen. Die in [6] und [27] betrachteten homothetisch kovarianten Abbildungen der Form  $S' : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathcal{F}$  sind in unserem Ansatz ebenfalls enthalten. Man setze hierfür

$$Z(x_1, \dots, x_n) := \{x_1\}, \quad j := 0,$$

in (4.2.3) und betrachte das so definierte Maß

$$M(\Phi, \cdot) := \int \mathbf{1}\{x_1 \in \cdot\} \cdot \mathbf{1}\{\Phi_{x_1, \dots, x_n}^!(S(x_1, \dots, x_n)) = m\} \\ R(x_1, \dots, x_n, x_1, \Phi_{x_1, \dots, x_n}^!) \Phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)). \quad (4.2.16)$$

Wir bemerken, dass in unserem Ansatz auf die Existenz messbarer Abbildungen  $g_1, \dots, g_n : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit der Eigenschaft (4.2.4) verzichtet werden kann.

Seien nämlich  $S : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  wie eingangs des Unterabschnittes 4.2.1 betrachtet und  $\Phi$  wie zuvor ein stationärer Poissonprozess mit Intensität  $\gamma > 0$ . Liegen Abbildungen  $g_1, \dots, g_n$  mit (4.2.4) nicht vor, so kann die Zufallsvariable  $S_*(\Phi, 0)$  nicht mehr gemäß (4.2.5) definiert werden. Im Fall von  $\gamma_M \in (0, \infty)$  lässt sich jedoch  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , definiert durch

$$F(t) := \gamma_M^{-1} \mathbb{E} \iint \mathbf{1}\{V_d(S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_{x_1, \dots, x_n}^!)) \leq t\} \cdot \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap [0, 1]^d\} \\ \tilde{R}(x_1, \dots, x_n, x, \Phi_{x_1, \dots, x_n}^!) \mathcal{H}^j(dx) \Phi^{(n)}(d(x_1, \dots, x_n)) \quad (4.2.17)$$

als die *Verteilungsfunktion des typischen Volumens von  $S$  unter  $\mathbb{P}_M^0$*  interpretieren, man vergleiche auch [6], Kapitel 3. Der Beweis von Satz 4.2.2, insbesondere die Rechnungen ab (4.2.10), zeigt, dass sich  $F$  als Verteilungsfunktion einer  $\Gamma(m+n-1+j/d, \gamma)$ -Verteilung erweist.

**Beispiel 4.2.8:** Beispiele von homothetisch kovarianten Abbildungen der Form  $S' : (\mathbb{R}^d)^n \rightarrow \mathcal{F}$ , welchen keine translationskovariante Abbildung der Form  $S : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{F}$  zugeordnet werden kann, findet man in [6]. In Anlehnung an Example 9 ebengenannter Referenz betrachten wir folgende Abbildung  $((x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^d)$

$$S_1(x_1, x_2, x_3) \\ := \text{cl}(B(x_1, \max(\|x_3 - x_1\|, \|x_2 - x_1\|)) \setminus B(x_1, \min(\|x_3 - x_1\|, \|x_2 - x_1\|))). \quad (4.2.18)$$

Für jedes  $m \geq 0$  und für jedes nicht endliche  $\phi \in \mathbf{N}$  findet man zu jedem  $x_1 \in \phi$  unendlich viele  $(x_2, x_3)$  im Träger von  $\phi^{(2)}$  mit

$$\phi(S_1(x_1, x_2, x_3)) = m + 2. \quad (4.2.19)$$

Ein eindeutige Zuordnung der Form  $(x_1, \phi) \mapsto (x_2, x_3)$  ist auf

$$\{(x_1, \phi) : x_1 \in \phi \text{ und es ex. paarweise verschiedene } x_2, x_3 \in \phi \text{ mit (4.2.19)}\}$$

somit nicht möglich. Abbildungen  $g_i$  mit (4.2.4) werden sich folglich nicht finden lassen.

Wir müssen an dieser Stelle eingestehen, dass unsere Gamma-Resultate im Gegensatz zu denjenigen aus [6] obiges Beispiel (4.2.18) nicht enthalten. Eine Vorgehensweise analog zu (4.2.17) ist nicht möglich, da die Intensität  $\gamma_M$  des zugehörigen Maßes (4.2.16) nicht endlich ist, vgl. [6], S. 592. Cowan löst in [6] das Problem nicht endlicher Intensität, indem er für  $R > 0$  zunächst den Prozess  $\Psi_R$  aller Tupel  $(x_1, x_2, x_3)$  aus dem Träger von  $\Phi^{(3)}$  auswertet, für welche  $x_2, x_3$  in der Kugel  $B(x_1, R)$  liegen, und den Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  untersucht. Derart verfahrend gibt Cowan als Verteilung des typischen Volumens von  $S_1$  die Gamma-Verteilung  $\Gamma(m+1, \gamma)$  an.

Wir wollen den Formparameter  $m+1$  mit Hilfe zweier Stoppmengen begründen. Unser Plan besteht anschaulich darin, für ein Tupel  $(x_1, x_2, x_3)$  aus dem Träger von  $\Phi^{(3)}$  die Anzahl der Punkte von  $\Phi$  in

$$B_1(x_1, x_2, x_3) := B(x_1, \min(\|x_2 - x_1\|, \|x_3 - x_1\|))$$

zu fixieren. Wir betrachten also den Prozess aller Tupel  $(x_1, x_2, x_3)$  aus dem Träger von  $\Phi^{(3)}$ , für welche die innere Kugel  $B_1(x_1, x_2, x_3)$  eine feste Anzahl  $k \in \mathbb{N}_0$  von Punkten aus  $\Phi \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$  besitzt. Für solche Tupel sind  $x_2$  und  $x_3$  für  $\mathbb{P}^\Phi$ -f.a.  $\phi \in \mathbf{N}$  eindeutig durch  $x_1$  und  $\phi$  bestimmt.

Es seien  $T_1(\phi)$  die kleinste Kugel um den Ursprung, welche mindestens  $k+2$  Punkte aus  $\phi$  enthält, und  $T_2(\phi)$  die kleinste Kugel um den Ursprung, welche mindestens  $k+m+3$  Punkte aus  $\phi$  enthält. Die Abbildungen  $T_1$  und  $T_2$  sind bekanntlich Stoppmengen. Wir definieren

$$S(\phi) := \text{cl}(T_2(\phi) \setminus T_1(\phi)), \quad \phi \in \mathbf{N}.$$

Nach [5], Theorem 5, besitzt  $V_d(S(\Phi))$  eine  $\Gamma(m+1, \gamma)$ -Verteilung unter  $\mathbb{P}_\Phi^0$  für jede Wahl von  $k$ . Der Formparameter ergibt sich dabei aus  $\Phi(S) = m+1$   $\mathbb{P}^\Phi$ -f.s. Somit ist uns eine Begründung für den Formparameter  $m+1$  gelungen, welche ohne Rechnung und ohne Grenzübergang auskommt.

Miles und Cowan betrachten in [27] bzw. [6] bei der Berechnung der Verteilung des typischen Volumens der betrachteten Abbildung  $S'$  stets nur solche Tupel  $(x_1, \dots, x_n)$  mit der Eigenschaft  $V_d(S'(x_1, \dots, x_n)) > 0$ , vgl. (4) in [6]. Sie umgehen damit Probleme, welche entstehen, wenn  $S' = \emptyset$  auf einer Teilmenge des  $(\mathbb{R}^d)^n$  gilt.

**Beispiel 4.2.9:** Die Menge  $A \subset \mathbb{R}^d$  bestehe aus allen Punkten  $x$ , welche lexikographisch kleiner sind als  $-x$ . Wir definieren eine Abbildung  $S_2 : (\mathbb{R}^d)^2 \rightarrow \mathcal{F}$  durch

$$S_2(x_1, x_2) := \begin{cases} B(x_1, \|x_2 - x_1\|), & \text{falls } x_2 - x_1 \in A, \\ \emptyset, & \text{falls } x_2 - x_1 \in A^c. \end{cases}$$

Die Abbildung  $S_2$  ist homothetisch kovariant. Man betrachte für  $m \in \mathbb{N}$  das zufällige Maß (4.2.16) mit  $R \equiv 1$ . Die Intensität  $\gamma_M$  dieses Maßes berechnet sich zu  $\gamma/2$ . Nach Satz 4.2.2 und den zu (4.2.17) gemachten Bemerkungen erweist sich die Verteilung des typischen Volumens von  $S_2$  unter  $\mathbb{P}_M^0$  als eine  $\Gamma(m+1, \gamma)$ -Verteilung. Sind  $m = 0$  und

$$R(x_1, x_2) := \mathbf{1}\{V_d(S(x_1, x_2)) > 0\},$$

so ist die Intensität des Maßes (4.2.16) ebenfalls  $\gamma/2$ . Nach Satz 4.2.2 erweist sich die Verteilung des typischen Volumens von  $S_2$  unter  $\mathbb{P}_M^0$  als eine  $\Gamma(1, \gamma)$ -Verteilung. Sind jedoch  $m = 0$  und  $R \equiv 1$  in (4.2.16), so ist  $\gamma_M$  nicht endlich.

Die Intuition legt nahe, dass dem Volumen von  $S_2$  in Fall  $m = 0$  und  $R \equiv 1$  keine Gamma-Verteilung zugeordnet werden kann. Sind nämlich  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$  verschieden und gilt  $S(x_1, x_2) = B(x_1, \|x_2 - x_1\|)$ , so ist  $S(-x_1, -x_2) = \emptyset$ . Anschaulich gesprochen ist  $S(x_1, x_2)$  für die „Hälfte“ aller Tupel  $(x_1, x_2)$  die Kugel um  $x_1$  mit Radius  $\|x_2 - x_1\|$  und für die andere „Hälfte“ aller Tupel die leere Menge.

In unserem Ansatz hätten wir dieses Problem mittels

$$R(x_1, \dots, x_n, x, \phi) := \mathbf{1}\{V_d(S(x_1, \dots, x_n, x, \phi)) > 0\} \quad (4.2.20)$$

umgehen können. Da wir aber obigen Indikator nicht in unsere Voraussetzungen einbezogen haben, stellt man zu Recht die Frage, inwiefern unser Ansatz das Problem leerer Mengen erkennt. Als Antwort hierauf rechnen wir folgendes Beispiel.

**Beispiel 4.2.10:** Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen von Unterabschnitt 4.2.1 mit  $R \equiv 1$  und  $m = 0$  gelten. Nach (4.2.14) berechnet sich die Intensität von  $M$  durch

$$\begin{aligned} \gamma_M &= \gamma^n \int \dots \int \mathbb{P}(\Phi(S(y_1, \dots, y_n, y, \Phi)) = 0) \\ &\quad \mathbf{1}\{y \in Z(y_1, \dots, y_n) \cap \hat{C}\} \mathcal{H}^j(dy) dy_1 \dots dy_n \\ &\geq \gamma^n \int \dots \int \mathbb{P}(S(y_1, \dots, y_n, y, \Phi) = \emptyset) \\ &\quad \mathbf{1}\{y \in Z(y_1, \dots, y_n) \cap \hat{C}\} \mathcal{H}^j(dy) dy_1 \dots dy_n. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $S(y_1, \dots, y_n, y, \cdot)$  ist nach Folgerung 1.2.15 für alle  $y_1, \dots, y_n, y \in \mathbb{R}^d$  messbar bezüglich  $\mathcal{N}_{y_1, \dots, y_n, y} = \sigma(\pi_{S(y_1, \dots, y_n, y, \cdot)})$ . Aus Lemma 3.2.3 (setze dort  $k = 0$ ) ergibt sich für alle  $r > 0$

$$\mathbb{P}(S(y_1, \dots, y_n, y, \Phi) = \emptyset) = \mathbb{P}(S(y_1, \dots, y_n, y, r \cdot \Phi) = \emptyset). \quad (4.2.21)$$

Die Skalierungskovarianz von  $Z$  und  $S$  liefert nach Substitution  $y_i = rx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,

und  $y = rx$  unter Beachtung von (4.2.21) für festes  $r > 0$

$$\begin{aligned}
\gamma_M &\geq \gamma^n \cdot r^{dn+j} \int \dots \int \mathbb{P}(S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi) = \emptyset) \\
&\quad \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap r^{-1}\hat{C}\} \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n \\
&= \gamma^n \cdot r^{dn+j} \int \dots \int \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}\{\Phi(S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi)) = 0, S(x_1, \dots, x_n, x, \Phi) = \emptyset\} \right. \\
&\quad \left. \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_n) \cap r^{-1}\hat{C}\} \mathcal{H}^j(dx) dx_1 \dots dx_n \right] \\
&= r^{d(n-1)+j} \cdot \mathbb{P}_M(S_*(\Phi, 0) = \emptyset).
\end{aligned}$$

Für den letzten Schritt vergleiche man (4.2.11) und beachte  $V_d(r^{-1}\hat{C}) = r^{-d}$ . Da  $r > 0$  beliebig war, erhalten wir im Fall von  $d(n-1) + j \neq 0$  die Alternative

$$\gamma_M = \infty \quad \text{oder} \quad \mathbb{P}_M(S_*(\Phi, 0) = \emptyset) = 0.$$

Die Annahme  $\gamma_M < \infty$  in Unterabschnitt 4.2.2 erübrigt somit in diesem Beispiel zusätzliche Indikatoren der Form (4.2.20).

Die Voraussetzung  $R \equiv 1$  in obigem Beispiel ist unerheblich und diene einer einfacheren Darstellung. Dagegen ist die Forderung  $d(n-1) + j \neq 0$  sehr wohl zu beachten. Setzt man beispielsweise

$$S(x_1, \phi) := \emptyset, \quad x_1 \in \mathbb{R}^d, \phi \in \mathbf{N},$$

und betrachtet für  $n = 1$ ,  $m = 0$  sowie  $R \equiv 1$  das Maß (4.2.16), so ergeben sich  $\gamma_M = \gamma$  und  $\mathbb{P}_M^0(S(0, \Phi) = \emptyset) = 1$ .

# Kapitel 5

## Verteilungsaussagen zur typischen k-Seite

In diesem Kapitel werden zu der in Abschnitt 2.3 definierten k-Flower im Fall eines Poisson-Voronoi-Mosaiks Verteilungsaussagen hergeleitet. Dabei greifen wir im ersten Abschnitt auf die in Kapitel 4 vorgestellten Methoden und Resultate zurück. Insbesondere werden Abschätzungen zu der Verteilung der *typischen k-Seite eines Poisson-Voronoi-Mosaiks* angegeben, vgl. [1]. Gearbeitet wird auf dem Raum  $E = \mathbb{R}^d$ , welchen wir mit der euklidischen Metrik ausstatten.

### 5.1 Gamma-Resultate

#### 5.1.1 Maße zu den k-Seiten

Seien stets  $\phi \in \mathbf{N}$  und  $k \in \{0, \dots, d\}$ . Wir erinnern an die Definitionen aus Abschnitt 2.3. Für das auf dem System aller k-Seiten  $\mathcal{S}_k(\phi)$  eingeschränkte k-dimensionale Hausdorffmaß

$$\sum_{F \in \mathcal{S}_k(\phi)} \mathcal{H}^k(F \cap \cdot)$$

findet man im Fall von  $\phi \in \mathbf{N}_q$  die Darstellung

$$\begin{aligned} M_k(\phi, \cdot) &:= \frac{1}{(d-k+1)!} \iint \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap \cdot\} \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^\dagger(B(x, \|x - x_1\|)) = 0\} \\ &\quad \mathcal{H}^k(dx) \phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})). \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Wir erinnern dabei an die Definition von  $Z$  in Unterabschnitt 2.3.3. Dabei ist wieder

$$\phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^! := \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}.$$

Das Maß  $M_k(\phi, \cdot)$  besitzt für  $\phi \in \mathbf{N}$  eine Darstellung der Form (4.2.3), man setze dort  $n := d - k + 1$ ,  $m = 0$  und verwende statt  $R$  und  $S$  die Abbildungen

$$\begin{aligned} R'(x_1, \dots, x_{d-k+1}, x, \phi) &:= 1/(d - k + 1)!, \\ S'(x_1, \dots, x_{d-k+1}, x, \phi) &:= B(x, \|x - x_1\|). \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Statt der in (5.1.2) definierten Größe  $S'$  betrachten wir die Abbildung

$$S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) := \bigcup_{y \in S_0(\phi \cup \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}) \cap F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)} B(y, \|y - x_1\|)$$

mit  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ . Die Menge  $S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$  ist die  $k$ -Flower zu der potentiellen  $k$ -Seite  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$  des zu  $\phi \cup \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}$  gehörenden Voronoi-Mosaiks, vgl. Abschnitt 2.3. Zu festem  $m \in \mathbb{N}_0$  definieren wir

$$\begin{aligned} M_{k,m}(\phi, \cdot) &:= \frac{1}{(d - k + 1)!} \iint \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap \cdot\} \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!(B(x, \|x - x_1\|)) = 0\} \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!)) = m\} \\ &\quad \mathcal{H}^k(dx) \phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})). \end{aligned}$$

Das Maß  $M_{k,m}(\phi, \cdot)$  lebt auf denjenigen  $k$ -Seiten  $F_k$  des Voronoi-Mosaiks zu  $\phi$ , deren  $k$ -Flower  $S(F_k, \phi)$  neben den  $d - k + 1$  Nachbarn der  $k$ -Seite  $F_k$  weitere  $m$  Punkte aus  $\phi$  in ihrem Rand enthält. Es besitzt ebenfalls eine Darstellung der Form (4.2.3), man setze hierfür

$$\begin{aligned} R(x_1, \dots, x_{d-k+1}, x, \phi) &:= \\ &\frac{1}{(d - k + 1)!} \cdot \mathbf{1}\{\phi(B(x, \|x - x_1\|)) = 0\} \cdot \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})\}. \end{aligned}$$

**Lemma 5.1.1** *Die Abbildungen  $R'$  und  $R$  sind homothetisch invariant, die Abbildungen  $S'$ ,  $S$ ,  $Z$  homothetisch kovariant. Alle genannten Abbildungen sind messbar. Darüber hinaus ist  $R(x_1, \dots, x_{d-k+1}, x, \cdot)$  für alle  $x, x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  messbar bezüglich der von*

$$\phi \mapsto \phi \cap S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi), \quad \phi \in \mathbf{N},$$

erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}$  auf  $\mathcal{N}$ . Das Maß

$$A \mapsto \int \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap A\} \mathcal{H}^k(dx), \quad A \in \mathcal{B},$$

ist für alle  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  lokalendlich.

**Beweis:** Zu zeigen ist nur die Messbarkeit von  $R$  und  $S'$ , vgl. Lemma A.2.7 und den zugehörigen Beweis, sowie die Messbarkeit von  $R(x_1, \dots, x_{d-k+1}, x, \cdot)$  bezüglich  $\mathcal{N}_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}$ . Für  $G \subset \mathbb{R}^d$  offen ist die Menge aller  $(x, x_1) \in (\mathbb{R}^d)^2$  mit

$$B(x, \|x - x_1\|) \cap G \neq \emptyset$$

offen, folglich ist die Abbildung  $(x, x_1) \mapsto B(x, \|x - x_1\|) \in \mathcal{F}$ ,  $(x, x_1) \in (\mathbb{R}^d)^2$ , messbar. Hieraus folgt die Messbarkeit von  $S'$ . Aus Lemma A.1.1 ergibt sich die Messbarkeit der ersten der beiden Indikatorfunktionen aus der Definition von  $R$ , mittels der Messbarkeit von  $Z$  und Satz 1.1.7 erhält man die Messbarkeit der zweiten Indikatorfunktion, somit ist  $R$  messbar.

Wir fixieren  $x, x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  und lassen diese im Folgenden im Argument von  $R, S, Z$  und  $F_k$  weg. Offensichtlich folgt  $R(\phi \cap S(\phi)) > 0$  aus  $R(\phi) > 0$ . Es gelte umgekehrt  $R(\phi \cap S(\phi)) > 0$ . Dann ist

$$x \in F_k(\phi \cap S(\phi)) = F_k(\phi),$$

vgl. (2.3.8), und wir folgern mit Lemma 2.3.5

$$\emptyset = \phi \cap S(\phi) \cap B(x, \|x - x_1\|) = \phi \cap B(x, \|x - x_1\|)$$

und hieraus  $R(\phi) > 0$ . Somit ist  $R = R \circ \pi_S$ , was den Beweis abschließt.  $\square$

Wir wollen an dieser Stelle anmerken, dass für  $\phi \in \mathbf{N}$ ,  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  und  $x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  stets

$$\phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!(B(x, \|x - x_1\|)) = 0 \quad \Rightarrow \quad B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset$$

gilt.

**Lemma 5.1.2** *Für alle  $\phi \in \mathbf{N}$  sind  $M_k(\phi, \cdot)$  und  $M_{k,m}(\phi, \cdot)$  lokalendlich.*

**Beweis:** Sei  $\phi \in \mathbf{N}$ . Wegen der Adaptiertheit von  $M_k$ , vgl. Lemma 4.2.1, reicht es,  $M_k(\phi, B(0, 1)) < \infty$  zu zeigen. Zunächst gilt für alle  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{H}^k(Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap B(0, 1)) \leq \kappa_k.$$

Seien  $y \in \phi$  fest und  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  Punkte aus  $\phi$  in allgemeiner quadratischer Lage. Gilt

$$B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset$$

für ein  $x \in B(0, 1) \cap Z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ , so ist auch

$$B^0(x, \|x - x_j\|) \cap \phi = \emptyset, \quad j = 1, \dots, d - k + 1,$$

insbesondere ist

$$y \notin B^0(x, \|x - x_j\|), \quad j = 1, \dots, d - k + 1.$$

Es ergibt sich mit  $a := \|y\|$

$$a + 1 \geq \|y - x\| \geq \|x_j - x\| \geq \|x_j\| - 1, \quad j = 1, \dots, d - k + 1,$$

folglich  $\|x_j\| \leq a + 2$  für alle  $j = 1, \dots, d - k + 1$ . Wir erhalten

$$M(\phi, B(0, 1)) \leq \kappa_k \phi(B(0, a + 2))^{d-k+1} < \infty.$$

Wegen  $M_{k,m}(\phi, A) \leq M_k(\phi, A)$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , ist auch  $M_{k,m}(\phi)$  lokalendlich.  $\square$

Insgesamt ergibt sich nach Lemma 4.2.1, dass  $M_k$  und  $M_{k,m}$  zufällige adaptierte Maße sind. Man beachte, dass  $M_d(\phi, \cdot)$  für  $\phi \neq \emptyset$  das Lebesgue-Maß  $\lambda$  auf dem  $\mathbb{R}^d$  ist.

Wir erinnern an die Notationen aus Unterabschnitt 2.3.3. Sind die Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  in allgemeiner Lage, so bezeichnet  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  das Zentrum der eindeutig bestimmten  $(d - k)$ -dimensionalen Kugel  $B(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ , auf deren Rand  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  liegen. Betrachte vorläufig

$$N_{k,*}(\phi, \cdot) := \frac{1}{(d - k + 1)!} \int \mathbf{1}\{F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!) \neq \emptyset\} \\ \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in \cdot\} \phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})).$$

Wir bemerken, dass  $z$  messbar ist, vgl. Lemma A.5.3. Für alle Kompakta  $K$  und  $\phi \in \mathbf{N}$  ist  $N_{k,*}(\phi \cap K, \cdot)$  ein endliches Zählmaß und  $\phi \mapsto N_{k,*}(\phi \cap K, \cdot)$  messbar. Einfache Beispiele zeigen, dass  $N_{k,*}(\phi, \cdot)$  nicht für alle  $\phi \in \mathbf{N}_q$  ein lokalendliches Maß ist, vgl. Beispiel A.5.1. Sei  $A_{k,lok}$  die Menge aller  $\phi \in \mathbf{N}$ , für welche  $N_{k,*}(\phi, \cdot)$  lokalendlich ist. Mit der Bezeichnung  $K_n := [-n, n]^d$  ist

$$A_{k,lok} = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\phi \in \mathbf{N} : N_{k,*}(\phi \cap K_n, K_l) \leq m\}, \quad (5.1.3)$$

folglich gilt  $A_{k,lok} \in \mathcal{N}$ . Sei  $N_k(\phi, \cdot) := N_{k,*}(\phi, \cdot)$  auf  $A_{k,lok}$  und das Nullmaß  $\mathbf{0}$  auf  $A_{k,lok}^c$ . Man beachte  $\theta_x(A_{k,lok}) = A_{k,lok}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ . Zusammen mit der Translationskovarianz von  $F_k$  und  $z$  erhält man die Adaptiertheit von  $N_k$ .

Analog zu  $M_{k,m}$  definieren wir  $N_{k,m}$  für  $m \in \mathbb{N}_0$  durch

$$N_{k,m}(\phi, \cdot) := \frac{1}{(d - k + 1)!} \int \mathbf{1}\{F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!) \neq \emptyset\} \\ \mathbf{1}\{\phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_{x_1, \dots, x_{d-k+1}}^!)) = m\} \\ \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in \cdot\} \phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1}))$$

auf  $A_{k,lok}$  und  $N_{k,m} = \mathbf{0}$  auf  $A_{k,lok}^c$ . Es gilt wieder  $N_{k,m}(\phi, B) \leq N_k(\phi, B)$ ,  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ . Auch  $N_k$  und  $N_{k,m}$  besitzen eine Darstellung der Form (4.2.3), man setze dort  $j = 0$  und  $Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) := \{z(x_1, \dots, x_{d-k+1})\}$ .

**Lemma 5.1.3** *Die Abbildungen  $N_k, N_{k,m} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$  sind zufällige, adaptierte Zählmaße.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt unter Beachtung von Satz 2.3.6 und Lemma A.2.7 aus Lemma 4.2.1.  $\square$

Sind  $\phi \in \mathbf{N}_q$ ,  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  lexikographisch geordnet und liegt  $x$  im relativ Inneren von  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$ , so sind  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  eindeutig bestimmt durch

$$B^0(x, \|x - x_j\|) \cap \phi = \emptyset.$$

Wir definieren Abbildungen  $g_{k,i} : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  durch  $g_{k,i}(\phi, x) := x_i$ ,  $i = 1, \dots, d - k + 1$ , falls  $\phi \in \mathbf{N}_q$  ist und  $x$  im relativ Inneren einer  $k$ -Seite  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$  liegt. Andernfalls setzen wir  $g_{k,i}(\phi, x) = x$ ,  $i = 1, \dots, d - k + 1$ .

**Lemma 5.1.4** *Die Abbildungen  $g_{k,i}$  sind homothetisch kovariant und messbar.*

**Beweis:** Zu zeigen ist nur die Messbarkeit. Diese wird durch Lemma A.5.2 gesichert.  $\square$

Mittels der Abbildungen  $g_{k,1}, \dots, g_{k,d-k+1}$  kann nun eine homothetisch kovariante, messbare Abbildung  $S_k : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{F}$  durch  $(\phi \in \mathbf{N}, x \in \mathbb{R}^d)$

$$S_k(\phi, x) := S(g_{k,1}(\phi, x), \dots, g_{k,d-k+1}(\phi, x), \phi \setminus \{g_{k,1}(\phi, x), \dots, g_{k,d-k+1}(\phi, x)\})$$

angegeben werden. Für  $\phi \in \mathbf{N}_q$  und  $x$  im relativ Inneren einer  $k$ -Seite  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$  ist  $S_k(\phi, x)$  die  $k$ -Flower von  $F_k$ , vgl. Unterabschnitt 2.3.4. Diese  $k$ -Seite ist gegeben durch

$$F_k(\phi, x) := F_k(g_{k,1}(\phi, x), \dots, g_{k,d-k+1}(\phi, x), \phi).$$

## 5.1.2 Gamma-Resultate und Abschätzungen für $M_k$ und $M_{k,m}$

Seien  $\Phi$  ein stationärer Poissonprozess auf dem  $\mathbb{R}^d$  mit Intensität  $\gamma > 0$  und Verteilung  $\mathbb{P}$  auf  $(\mathbf{N}, \mathcal{N})$ . Wir halten zunächst für die Betrachtung der Poisson-Voronoi-Mosaike wichtige Eigenschaften eines stationären Poissonprozesses fest.

**Lemma 5.1.5** *Es gelten*

$$\mathbb{P}(\text{conv}\Phi = \mathbb{R}^d) = \mathbb{P}(\Phi \in \mathbf{N}_q) = 1.$$

*Ist  $M : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$  ein adaptiertes, zufälliges Maß, so gelten*

$$\mathbb{P}_M(\text{conv}\Phi \neq \mathbb{R}^d) = \mathbb{P}_M(\Phi \notin \mathbf{N}_q) = 0.$$

**Beweis:** Der erste Teil folgt aus [31], Prop. 4.1.2. Der zweite Teil ergibt sich aus der Translationsinvarianz von  $\mathbf{N}_q$  und von  $\{\phi \in \mathbf{N} : \text{conv}\phi = \mathbb{R}^d\}$ .  $\square$

Lemma 2.3.2 sichert zusammen mit oben stehendem Lemma 5.1.5, dass das im Folgenden betrachtete Poisson-Voronoi-Mosaik  $S_d(\Phi)$  fast sicher keine unbeschränkten Zellen besitzt.

Das zufällige Maß  $M_k(\Phi)$  wurde in [1] untersucht, es besitzt die Intensität (vgl. [30], [40])

$$\rho_k := \gamma^{\frac{d-k}{d}} \frac{2^{d-k+1} \pi^{\frac{d-k}{2}}}{d(d-k+1)!} \frac{\Gamma(d-k+\frac{k}{d})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})} \frac{\Gamma(\frac{d^2-dk+k+1}{2})}{\Gamma(\frac{d^2-dk+k}{2})} \frac{\Gamma(1+\frac{d}{2})^{d-k+\frac{k}{d}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})^{d-k}}. \quad (5.1.4)$$

Zwischen den Palmischen Maßen  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}$  und  $\mathbb{P}_{M_k}$  besteht der folgende Zusammenhang, welcher sich sofort aus den Definitionen von  $M_k$  und  $M_{k,m}$  ergibt.

**Lemma 5.1.6** *Für  $A \in \mathcal{N}$  gilt*

$$\mathbb{P}_{M_{k,m}}(\Phi \in A) = \mathbb{P}_{M_k}(\Phi \in A, \Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1).$$

Die Intensität  $\rho_{k,m}$  von  $M_{k,m}(\Phi, \cdot)$  ist somit endlich und es gilt

$$\rho_{k,m} = \rho_k \cdot \mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1). \quad (5.1.5)$$

**Folgerung 5.1.7** *Für  $A \in \mathcal{N}$  gilt*

$$\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(\Phi \in A) = \mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi \in A \mid \Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $\rho_{k,m} > 0$ .

Unter  $\mathbb{P}_{M_k}$  liegt der Ursprung in der eindeutig bestimmten  $k$ -Seite  $F_k(\Phi, 0)$ , der sogenannten *typischen volumengewichteten  $k$ -Seite*.

Die typische volumengewichtete Ecke  $F_0(\Phi, 0)$  liegt unter  $\mathbb{P}_{M_0}$  im Ursprung und  $S_0(\Phi, 0)$  ist die Kugel um den Ursprung, welcher die  $d+1$  Nachbarn der typischen volumengewichteten Ecke in ihrem Rand enthält. Insbesondere gilt  $\rho_{0,m} > 0$  genau für  $m = 0$ . Im Fall von  $k = 1$  ist  $\rho_{1,m}$  nur für  $m = 2$  positiv, da die typische volumengewichtete Kante fast sicher von genau  $d$  Punkten aufgespannt wird und jede der beiden Ecken jeweils genau einen weiteren Nachbarn besitzt. Im Fall  $k = d$  beschreibt  $m$  die Anzahl der Facetten der typischen volumengewichteten Zelle  $F_d(\Phi, 0)$ , diese beträgt mindestens  $d + 1$ . Man überlegt sich leicht, dass  $\rho_{d,m} > 0$  genau für  $m \geq d + 1$  gilt. Im Fall  $k \geq 2$  beschreibt  $m$  die Anzahl aller  $k - 1$ -Seiten der typischen volumengewichteten  $k$ -Seite  $F_k(\Phi, 0)$ , diese beträgt mindestens  $k + 1$ . Man überlegt sich für  $k \geq 2$  wieder leicht, dass  $\rho_{k,m} > 0$  genau für  $m \geq k + 1$  gilt, vgl. Lemma A.5.5. Es werden im Folgenden für festes  $k$  ohne weitere Erwähnung nur  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $\rho_{k,m} > 0$  betrachtet.

Mittels der in Kapitel 4 hergeleiteten Resultate, insbesondere Satz 4.2.2, lassen sich nun folgende Gamma-Verteilungen identifizieren.

**Satz 5.1.8** *Das Volumen der Kugel um den Ursprung zu seinem nächsten Nachbarn in  $\Phi$  besitzt unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  eine  $\Gamma(d-k+k/d, \gamma)$ -Verteilung. Das Volumen  $V_d(S_k(\Phi, 0))$  der  $k$ -Flower der typischen volumengewichteten  $k$ -Seite besitzt unter  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0$  eine  $\Gamma(d-k+m+k/d, \gamma)$ -Verteilung.*

**Beweis:** Nach Satz 2.3.6 ist  $S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \cdot)$  für feste  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  eine Stoppmenge. Wende nun Satz 4.2.2 an. Für die Kugel um den Ursprung zu seinem nächsten Nachbarn in  $\Phi$  betrachte statt  $S$  die Abbildung  $S'$ , vgl. (5.1.2).  $\square$

Die Gamma-Verteilung der Kugel um den Ursprung zu seinem nächsten Nachbarn in  $\Phi$  unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  ist wohlbekannt, man findet sie beispielsweise in [1], Th. 1.1 (ii). Im Fall  $k = d$  sind  $M_d = \lambda$ ,  $\mathbb{P}_{M_d}^0 = \mathbb{P}$  und  $S_d(\Phi, 0)$  die  $d$ -Flower oder *Voronoi-Flower* der Zelle  $F_d(\Phi, 0)$ , welche den Ursprung enthält. Sie wird *Nullpunktzelle* genannt, vgl. [40], S. 252. Wir wollen diesen Fall gesondert festhalten.

**Satz 5.1.9** *Für  $l \geq d + 2$  gilt  $\mathbb{P}(\Phi(S_d(\Phi, 0)) = l) > 0$  und das Volumen  $V_d(S_d(\Phi, 0))$  der Voronoi-Flower der Nullpunktzelle  $F_d(\Phi, 0)$  besitzt unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S_d(\Phi, 0)) = l)$  eine  $\Gamma(l, \gamma)$ -Verteilung.*

Folgerung 2.3.9 ermöglicht nun zusammen mit Satz 5.1.9 eine Abschätzung zu der Verteilung von  $V_d(F_d(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S_d(\Phi, 0)) = l)$ . Wir definieren

$$\Gamma_{r,\gamma}^*(t) := \int_t^\infty \frac{\gamma^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\gamma x} dx$$

für  $r > 0$  und  $t \geq 0$ . Offensichtlich ist  $\Gamma_{r,\gamma}^*(t) = \mathbb{P}(X > t)$  für eine  $\Gamma(r, \gamma)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$ .

**Satz 5.1.10** *Für alle  $t \geq 0$  und  $l \geq d + 2$  gilt*

$$\mathbb{P}(V_d(F_d(\Phi, 0)) > t | \Phi(S_d(\Phi, 0)) = l) \leq \Gamma_{l,\gamma}^*(2^d t).$$

Für  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  muss neben Satz 5.1.8 und Folgerung 2.3.9 noch die Abschätzung (2.3.12) für das folgende Resultat über die Verteilung des  $k$ -dimensionalen Hausdorffmaßes  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  der typischen volumengewichteten  $k$ -Seite  $F_k(\Phi, 0)$  herangezogen werden.

**Satz 5.1.11** *Für  $k \in \{1, \dots, d-1\}$  und  $t \geq 0$  gilt*

$$\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t) \leq \Gamma_{d-k+m+k/d,\gamma}^* \left( 2^d \kappa_d \left( \kappa_k \binom{m}{k} \right)^{-d/k} t^{d/k} \right).$$

### 5.1.3 Weitere Definitionen

Wir definieren noch weitere Größen, welche im folgenden Unterabschnitt 5.1.4 benötigt werden. Seien  $\phi \in \mathbf{N}_q$ ,  $N_k(\phi, \cdot)$  einfach und  $z$  im Träger von  $N_k(\phi, \cdot)$ . In diesem Fall existieren in eindeutig bestimmter Weise  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \phi$  mit  $z = z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$ . Wir definieren

$$C_k(\phi, z) := F_k(x_1, \dots, x_{d-k}, \phi)$$

und

$$D_k(\phi, z) := S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}).$$

Für alle anderen  $\phi \in \mathbf{N}$  und  $z \in \mathbb{R}^d$  setzen wir

$$C_k(\phi, z) := \emptyset, \quad D(\phi, z) := \mathbb{R}^d.$$

Die Messbarkeit von  $C_k$  und  $D_k$  wird in Lemma A.5.4 nachgewiesen. Man beachte, dass  $F_k(\phi, x)$ , sofern nichtleer, diejenige  $k$ -Seite ist, welche  $x$  in ihrem relativ Inneren enthält und  $C_k(\phi, z)$ , sofern nichtleer, diejenige  $k$ -Seite mit Zentrum  $z$ . Ferner ist  $S_k(\phi, x)$  die  $k$ -Flower von  $F_k(\phi, x)$  und  $D_k(\phi, z)$  die  $k$ -Flower von  $C_k(\phi, z)$ .

Das Zentrum von  $F_k(\phi, x)$  ist gegeben durch

$$z_k(\phi, x) := z(g_{k,1}(\phi, x), \dots, g_{k,d-k+1}(\phi, x)).$$

Wir bemerken, dass die Abbildung  $z : (\mathbb{R}^d)^{d-k+1} \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  messbar ist, vgl. Lemma A.5.3. Nach Lemma 5.1.4 ist folglich auch  $z_k : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  messbar. Wir bemerken ferner, dass  $S_k(\phi, x)$  und  $D_k(\phi, x)$  stets volldimensionale Mengen sind. Der Index bezieht sich bei diesen beiden Mengen auf die Dimension der zugehörigen  $k$ -Seite.

### 5.1.4 Gamma-Resultate und Abschätzungen für $N_k$ und $N_{k,m}$

Wir wenden uns nun den Zählmaßen  $N_k$  und  $N_{k,m}$  zu. Es soll zuerst sichergestellt werden, dass für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\phi \in \mathbf{N}$  die Größe  $N_{k,*}(\phi, \cdot)$  ein einfaches Zählmaß ist und folglich für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\phi \in \mathbf{N}$  mit  $N_k(\phi, \cdot)$  übereinstimmt.

**Lemma 5.1.12** *Es gelten  $\mathbb{P}(\Phi \in A_{k,lok}) = 1$  und das Maß  $N_{k,*}(\phi, \cdot)$  ist für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\phi \in \mathbf{N}$  einfach und lokalendlich.*

**Beweis:** Wegen  $N_d = \Phi$   $\mathbb{P}$ -fast sicher können wir  $k < d$  annehmen. Sei

$$\gamma^{(k)} := \mathbb{E}N_{k,*}([0, 1]^d).$$

Dann gelten  $\gamma^{(0)} = \rho_0 < \infty$  und  $\gamma^{(k)} \leq \binom{d+1}{k} \gamma^{(0)} < \infty$ , vgl. [40], Kor. 6.1.5. Folglich ist  $N_{k,*}$   $\mathbb{P}$ -fast sicher lokalendlich. Ist  $N_{k,*}(\phi, \cdot)$  für ein  $\phi \in \mathbf{N}_q$  nicht einfach, so existieren

Punkte  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  aus  $\phi$  und  $y_1, \dots, y_{d-k+1}$  aus  $\phi \setminus \{x_1\}$  mit  $z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) = z(y_1, \dots, y_{d-k+1}) =: z$ . Folglich ist

$$x_1 \in H(x_2) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - z\| = \|x_2 - z\|\}.$$

Es gilt  $\mathcal{H}^d(H(x_2)) = 0$ , und die Behauptung ergibt sich nun analog zum Beweis von [31], Prop. 4.1.2.  $\square$

Aus oben stehendem Lemma 5.1.12 und dem zugehörigen Beweis erhält man, dass die Intensität  $\gamma_k$  von  $N_k(\Phi, \cdot)$  positiv und endlich ist. Aus  $N_d = \Phi$  und  $N_0 = M_0$  fast sicher ergeben sich  $\gamma_d = \gamma$  und  $\gamma_0 = \rho_0$ . Mittels der Relation  $2\gamma_1 = (d+1)\gamma_0$ , vgl. [40], S. 262, erhält man

$$\gamma_1 = \gamma \cdot \frac{2^d \pi^{\frac{d-1}{2}}}{d^2} \cdot \left[ \frac{\Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \right]^d \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2}{2}\right)}. \quad (5.1.6)$$

Die Palmschen Maßen  $\mathbb{P}_{N_{k,m}}$  und  $\mathbb{P}_{N_k}$  lassen sich analog zu  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}$  und  $\mathbb{P}_{M_k}$  verknüpfen.

**Lemma 5.1.13** *Für  $A \in \mathcal{N}$  gilt*

$$\mathbb{P}_{N_{k,m}}(\Phi \in A) = \mathbb{P}_{N_k}(\Phi \in A, \Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1).$$

Die Intensität  $\gamma_{k,m}$  von  $N_{k,m}(\Phi, \cdot)$  ist somit endlich und es gilt

$$\gamma_{k,m} = \gamma_k \cdot \mathbb{P}_{N_k}^0(\Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1). \quad (5.1.7)$$

**Folgerung 5.1.14** *Für  $A \in \mathcal{N}$  gilt*

$$\mathbb{P}_{N_{k,m}}^0(\Phi \in A) = \mathbb{P}_{N_k}^0(\Phi \in A \mid \Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1)$$

für alle  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $\gamma_{k,m} > 0$ .

Bezüglich der Wahl von  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\gamma_{k,m} > 0$  für festes  $k \in \{0, \dots, d\}$  gelten dieselben Überlegungen wie an entsprechender Stelle in Unterabschnitt 5.1.2 angestellt. Es werden im Folgenden für festes  $k$  ohne weitere Erwähnung nur  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $\gamma_{k,m} > 0$  betrachtet. Unter  $\mathbb{P}_{N_k}$  liegt der Ursprung im Zentrum von  $C_k(\Phi, 0)$ , der sogenannten *typischen  $k$ -Seite*. Satz 4.2.2 liefert auch in diesem Fall (setze  $j = 0$ ) Gamma-Verteilungen. Der Beweis des unten stehenden Satzes ist völlig analog zum Beweis von Satz 5.1.8.

**Satz 5.1.15** *Das Volumen der Kugel um den Ursprung zu seinem nächsten Nachbarn in  $\Phi$  besitzt unter  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  eine  $\Gamma(d - k, \gamma)$ -Verteilung. Das Volumen  $V_d(D_k(\Phi, 0))$  der  $k$ -Flower der typischen  $k$ -Seite besitzt unter  $\mathbb{P}_{N_{k,m}}^0$  eine  $\Gamma(d - k + m, \gamma)$ -Verteilung.*

Im Fall  $k = d$  sind  $N_d = \Phi$   $\mathbb{P}$ -fast sicher,  $\mathbb{P}_{N_d}^0$  das Palm'sche Maß  $\mathbb{P}_{\Phi}^0$  von  $\Phi$  und  $D_d(\Phi, 0)$  die  $d$ -Flower oder *Voronoi-Flower* der Zelle  $C_d(\Phi, 0)$ , deren Zentrum der Ursprung ist. Sie wird *typische Zelle* genannt, vgl. [40], S.252. Wir wollen diesen Fall gesondert festhalten.

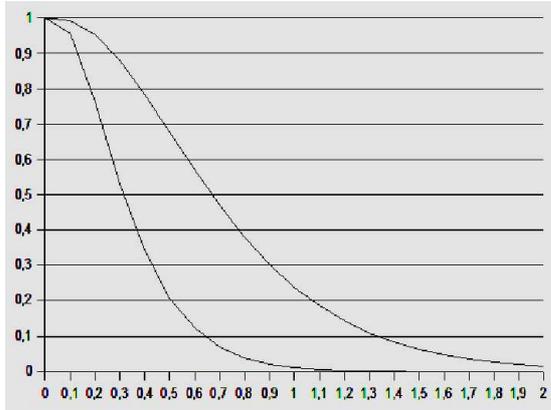
**Satz 5.1.16** *Für  $l \geq d + 2$  gilt  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\Phi(D_d(\Phi, 0)) = l) > 0$  und das Volumen  $V_d(D_d(\Phi, 0))$  der Voronoi-Flower der typischen Zelle  $C_d(\Phi, 0)$  besitzt unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\cdot | \Phi(D_d(\Phi, 0)) = l)$  eine  $\Gamma(l - 1, \gamma)$ -Verteilung.*

Die Gamma-Verteilung von  $V_d(D_d(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\cdot | \Phi(D_d(\Phi, 0)) = l)$  ist wohlbekannt. In [44] wird sie bewiesen mittels einer Version von Russo's Formel für Poissonprozesse, vgl. [44], Th. 3.3. Calka nutzt in [2] zu ihrem Nachweis eine zum Beweis von Satz 3.2.4 analoge Vorgehensweise.

Mittels Folgerung 2.3.9 und Satz 5.1.16 erhalten wir eine Abschätzung zu der Verteilung von  $V_d(C_d(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\cdot | \Phi(D_d(\Phi, 0)) = m)$ .

**Satz 5.1.17** *Für alle  $t \geq 0$  und  $l \geq d + 2$  gilt*

$$\mathbb{P}_{\Phi}^0(V_d(C_d(\Phi, 0)) > t | \Phi(D_d(\Phi, 0)) = l) \leq \Gamma_{l-1, \gamma}^*(2^d t). \quad (5.1.8)$$



*Gegenüberstellung der linken Seite (untere Linie) und der rechten Seite (obere Linie) der Abschätzung (5.1.8) für  $\gamma = 1$ ,  $d = 2$  und  $l = 4$ . Die linke Seite wurde dabei mittels Corollar 1 (ii) aus [2] berechnet.*

Ungleichung (5.1.8) findet man bereits in [44]. Für  $k \in \{1, \dots, d - 1\}$  folgt aus Satz 5.1.15 und der Abschätzung (2.3.12) das folgende Resultat über die Verteilung des  $k$ -dimensionalen Hausdorffmaßes  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  der typischen  $k$ -Seite  $C_k(\Phi, 0)$ .

**Satz 5.1.18** *Für  $k \in \{1, \dots, d - 1\}$  und  $t \geq 0$  gilt*

$$\mathbb{P}_{N_{k,m}}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t) \leq \Gamma_{d-k+m, \gamma}^* \left( 2^d \kappa_d \left( \kappa_k \binom{m}{k} \right)^{-d/k} t^{d/k} \right). \quad (5.1.9)$$

## 5.2 Weitere Resultate

### 5.2.1 Verknüpfungen von $M_k$ und $N_k$

Folgende Relationen zwischen  $N_k$  und  $M_k$  findet man in [1], Prop. 2.1.

**Lemma 5.2.1** Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  und  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar gelten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{M_k} f(\Phi - z_k(\Phi, 0)) &= \mathbb{E}_{N_k} [\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) f(\Phi)], \\ \mathbb{E}_{N_k} f(\Phi) &= \mathbb{E}_{M_k} [\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} f(\Phi - z_k(\Phi, 0))].\end{aligned}\tag{5.2.1}$$

Lemma 5.2.1 bleibt richtig, wenn man  $M_k$  und  $N_k$  durch  $M_{k,m}$  und  $N_{k,m}$  ersetzt.

**Lemma 5.2.2** Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  und  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar gelten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\Phi - z_k(\Phi, 0)) &= \mathbb{E}_{N_{k,m}} [\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) f(\Phi)], \\ \mathbb{E}_{N_{k,m}} f(\Phi) &= \mathbb{E}_{M_{k,m}} [\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} f(\Phi - z_k(\Phi, 0))].\end{aligned}$$

**Beweis:** Wir zeigen zuerst die zweite Behauptung. Nach Lemmata 5.1.6, 5.1.13 und 5.2.1 gilt für messbares  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{N_{k,m}} f(\Phi) &= \mathbb{E}_{N_k} f(\Phi) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1\} \\ &= \mathbb{E}_{M_k} \left[ f(\Phi - z(\Phi, 0)) \cdot \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} \right. \\ &\quad \left. \mathbf{1}\{(\Phi - z(\Phi, 0))(D_k(\Phi - z(\Phi, 0), 0)) = m + d - k + 1\} \right] \\ &= \mathbb{E}_{M_k} f(\Phi - z(\Phi, 0)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(D_k(\Phi, z(\Phi, 0))) = m + d - k + 1\} \cdot \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} \\ &= \mathbb{E}_{M_k} f(\Phi - z(\Phi, 0)) \cdot \mathbf{1}\{\Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1\} \cdot \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} \\ &= \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\Phi - z(\Phi, 0)) \cdot \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1}.\end{aligned}$$

Wir haben dabei die Translationskovarianz der Abbildung  $D_k$  benutzt. Die erste Behauptung erhält man nun, indem man  $f(\Phi)$  durch  $f(\Phi) \cdot \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  ersetzt sowie

$$F_k(\Phi, 0) = C_k(\Phi, z_k(\Phi, 0)) = C_k(\Phi - z_k(\Phi, 0), 0) + z_k(\Phi, 0)\tag{5.2.2}$$

ausnutzt. □

Setzt man  $f \equiv 1$  in (5.2.1), so erhält man

$$\rho_k = \gamma_k \cdot \mathbb{E}_{N_k}^0 \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)).\tag{5.2.3}$$

Gleichung (5.2.1) besagt, dass  $\mathbb{P}_{M_k}$  eine volumengewichtete Version von  $\mathbb{P}_{N_k}$  ist. Sie erklärt auch die Bezeichnungen *volumengewichtete typische k-Seite* bei Verwendung von  $\mathbb{P}_{M_k}$  und *typische k-Seite* bei Verwendung von  $\mathbb{P}_{N_k}$ . Ferner kann der rationale Anteil  $k/d$  im Parameter der Gamma-Verteilung von  $V_d(S_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  in Satz 5.1.8 interpretiert werden als Volumengewichtung durch Integration über  $F_k(\Phi, 0)$ , man vergleiche auch den zugehörigen Parameter in Satz 5.1.15.

Die Verteilung von  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  lässt sich in folgender Weise durch die Verteilung von  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  abschätzen. Der Beweis zu unten stehendem Satz 5.2.3 ist einfache Modifikation des Beweises von [40], Satz 6.1.12.

**Satz 5.2.3** *Für  $k \in \{0, \dots, d\}$  und alle  $t \geq 0$  gilt*

$$\mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t) \geq \max \left\{ 1, \frac{\gamma_k}{\rho_k} t \right\} \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t).$$

**Beweis:** Zunächst folgt aus Lemma 5.2.1 unter Beachtung von (5.2.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t) &= \frac{\gamma_k}{\rho_k} \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t\} \cdot \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \right] \\ &\geq \frac{\gamma_k t}{\rho_k} \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t). \end{aligned}$$

Für  $t \geq 0$  gilt ferner, wieder nach Lemma 5.2.1,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq t) - \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq s) \, ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}_{[0,t]}(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) - \mathbf{1}_{[0,s]}(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \right] \, ds \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}_{[0,t]}(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \mathbf{1}_{(s,t]}(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \right] \, ds \\ &= \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}_{[0,t]}(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \int_0^t \mathbf{1}\{s < \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))\} \, ds \right] \\ &= \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}_{[0,t]}(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \right] \\ &= \frac{\rho_k}{\gamma_k} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t) \\ &= \mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t). \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Man beachte hierbei (5.2.3). Sei abkürzend

$$G_{N_k}(t) := \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq t), \quad t \geq 0.$$

Nun ist

$$\mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) = \int_0^\infty (1 - G_{N_k}(s)) \, ds,$$

woraus sich zusammen mit (5.2.4)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t) \mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \\ &= \int_0^t G_{N_k}(t) - G_{N_k}(s) \, ds \\ &= G_{N_k}(t) \int_0^t (1 - G_{N_k}(s)) \, ds - (1 - G_{N_k}(t)) \int_0^t G_{N_k}(s) \, ds \\ &= G_{N_k}(t) \mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) - G_{N_k}(t) \int_t^\infty \bar{G}_{N_k}(s) \, ds - \bar{G}_{N_k}(t) \int_0^t G_{N_k}(s) \, ds, \end{aligned}$$

ergibt, wobei  $\bar{G}_{N_k}(t) := 1 - G_{N_k}(t)$  sei. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \left[ G_{N_k}(t) - \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t) \right] \mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \\ &= G_{N_k}(t) \int_t^\infty \bar{G}_{N_k}(s) \, ds + \bar{G}_{N_k}(t) \int_0^t G_{N_k}(s) \, ds \geq 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

## 5.2.2 Weitere Abschätzungen

Eine Abschätzung für die Verteilung des Volumens der typischen Voronoi-Zelle  $C(\Phi, 0)$  unter dem Palm'schen Wahrscheinlichkeitsmaß von  $\mathbb{P}_\Phi^0$  ist in [11] aus dem Jahr 1962 zu finden, es gilt für  $t > \gamma^{-1}$

$$e^{-2^d \gamma t} \leq \mathbb{P}_\Phi^0(V_d(C_d(\Phi, 0)) > t) < \frac{\gamma t - 1}{e^{\gamma t - 1} - 1}. \quad (5.2.5)$$

Die linke Ungleichung gilt für alle  $t \geq 0$  und ist eine Folgerung aus  $B(0, r) \subset C(\phi, 0)$  für  $\phi \in \mathbf{N}$  mit  $0 \in \phi$ , falls  $2r \leq \min_{x \in \phi \setminus \{0\}} \|x\|$  gilt, vgl. Lemma 2.3.8.

Mittels Satz 5.2.3 erhält man aus (5.2.5) zusätzlich die folgende Abschätzung. Man beachte hierfür  $\mathbb{P}_{M_d}^0 = \mathbb{P}$  und  $\mathbb{P}_{N_d}^0 = \mathbb{P}_\Phi^0$  sowie  $\rho_d = 1$  und  $\gamma_d = \gamma$ .

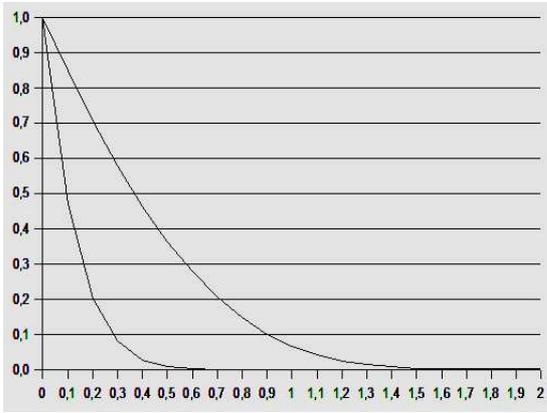
**Satz 5.2.4** *Für alle  $t \geq 0$  gilt*

$$\mathbb{P}(V_d(F_d(\Phi, 0)) > t) \geq \max\{1, \gamma t\} e^{-2^d \gamma t}. \quad (5.2.6)$$

Zu den Verteilungen von  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  und  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_k, m}^0$  bzw.  $\mathbb{P}_{N_k, m}^0$  wurden in den Sätzen 5.1.11 und 5.1.18 bereits Abschätzungen nach oben zu den jeweiligen Tail-Wahrscheinlichkeiten angegeben. Wir wollen nun die unten stehende Abschätzung (5.2.7) herleiten mittels des zweiten Teils von Folgerung 2.3.9.

**Satz 5.2.5** Für alle  $t \geq 0$  und  $1 \leq k \leq d - 1$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t \mid 0 \in C_k(\Phi, 0)) \\ \geq \frac{d(\kappa_d \gamma)^{d-k}}{(d-k-1)!} \int_0^\infty r^{d(d-k)-1} \exp\left(-\gamma \kappa_d (2(t/\kappa_k)^{1/k} + r)^d\right) dr. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$



Gegenüberstellung der linken Seite (obere Linie) und der rechten Seite (untere Linie) der Abschätzung (5.2.7) für  $\gamma = 1$ ,  $d = 3$  und  $k = 1$ . Die linke Seite wurde unter Verwendung der Formeln aus [33] berechnet.

Den Beweis von Satz 5.2.5 liefern wir am Ende dieses Unterabschnittes. Er ist in der Tat eine Verallgemeinerung der ersten Ungleichung in (5.2.5) auf den Fall  $1 \leq k \leq d - 1$ , da  $C_d(\Phi, 0)$  ihr Zentrum  $0$   $\mathbb{P}_{N_k}^0$ -fast sicher enthält. Um Satz 5.2.5 auf  $F_k(\Phi, 0)$  unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  übertragen zu können, müssen wir erst Satz 5.2.3 in folgender Weise modifizieren.

**Satz 5.2.6** Für alle  $k \in \{0, \dots, d\}$  und  $t \geq 0$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t \mid z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \\ \geq \max\{1, c_k t\} \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t \mid 0 \in C_k(\Phi, 0)) \end{aligned}$$

mit

$$c_k := \mathbb{E}_{N_k}^0\left(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mid 0 \in C_k(\Phi, 0)\right)^{-1} \in (0, \infty). \quad (5.2.8)$$

Den Beweis von Satz 5.2.6 liefern wir ebenfalls am Ende dieses Unterabschnittes nach. Aus den Sätzen 5.2.5 und 5.2.6 erhalten wir nun eine zu (5.2.7) analoge Abschätzung für  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$ .

**Folgerung 5.2.7** Für alle  $t \geq 0$  und  $1 \leq k \leq d-1$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t \mid z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \\ \geq \max\{1, c_k t\} \frac{d(\kappa_d \gamma)^{d-k}}{(d-k-1)!} \int_0^\infty r^{d(d-k)-1} \exp\left(-\gamma \kappa_d (2(t/\kappa_k)^{1/k} + r)^d\right) dr \end{aligned}$$

mit  $c_k$  gemäß (5.2.8).

Vorhin genannte Folgerung 2.3.9 setzt im zweiten Teil voraus, dass die betrachtete Seite  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$  ihr Zentrum  $z := z(x_1, \dots, x_{d-k+1})$  enthält. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Größe

$$\tau(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}) := \inf_{x \in \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}} (\|x - z\| - \|x_1 - z\|)$$

nichtnegativ ist. Man vergleiche in diesem Zusammenhang auch die Abbildungen auf den Seiten 51 und 54. Wir definieren

$$\tau(\phi, z) := \tau(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}),$$

falls  $\phi \in \mathbf{N}_q$  und  $N_k(\phi, \cdot)$  einfach sind und  $z$  das Zentrum einer Seite  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$ . Andernfalls setzen wir  $\tau(\phi, z) := 0$ . Die Abbildung  $\tau$  ist translationsinvariant und für  $t \geq 0$  gilt  $\tau(\phi, 0) > t$  genau dann, wenn  $N_k(\phi, \cdot)$  einfach und  $\phi$  aus  $\mathbf{N}_q$  sind, der Ursprung in  $C_k(\phi, 0)$  liegt und

$$\phi(B(0, t + d(0, \phi))) = 0$$

gilt, woraus man leicht die Messbarkeit von  $\{\phi : \tau(\phi, 0) > t\}$  erhält.

**Lemma 5.2.8** Für  $t \geq 0$  und  $1 \leq k \leq d-1$  gilt

$$\mathbb{P}_{N_k}^0(\tau(\Phi, 0) > t) = \frac{c^* \gamma^{d-k+1}}{\gamma_k} \int_0^\infty r^{d(d-k)-1} \exp(-\gamma \kappa_d (t+r)^d) dr.$$

Dabei ist

$$c^* := \frac{2^{d-k+1}}{(d-k+1)!} \cdot \frac{\pi^{\frac{d^2+d-dk-k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right)}.$$

**Beweis:** Aus der Definition von  $N_k$  und  $\tau$  ergibt sich mit  $c := 1/(d-k+1)!$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) > t) &= c \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{\tau(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}) > t\} \\ &\quad \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in [0, 1]^d\} \Phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})). \end{aligned}$$

Man beachte hierbei, dass  $\tau(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}) > t$

$$z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi \setminus \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\}) \neq \emptyset$$

impliziert. Anwenden von Lemma 3.1.2 liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) > t) &= c\gamma^{d-k+1} \mathbb{E} \int \dots \int \mathbf{1}\{\tau(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi) > t\} \\ &\quad \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in [0, 1]^d\} dx_1 \dots dx_{d-k+1}. \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

Es gilt für  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  in allgemeiner Lage

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\tau(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi) > t) \\ &= \mathbb{P}(\Phi(B(z(x_1, \dots, x_{d-k+1}), t + \|x_1 - z(x_1, \dots, x_{d-k+1})\|))) = 0 \\ &= \exp(-\gamma\kappa_d(t + \|x_1 - z(x_1, \dots, x_{d-k+1})\|)^d). \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Setzt man (5.2.10) in (5.2.9) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) > t) &= c\gamma^{d-k+1} \int \dots \int \exp(-\gamma\kappa_d(t + \|x_1 - z(x_1, \dots, x_{d-k+1})\|)^d) \\ &\quad \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in [0, 1]^d\} dx_1 \dots dx_{d-k+1}. \end{aligned}$$

Mittels der Sätze [40], 7.2.1 (Blaschke-Petkantschin-Formel) und 7.2.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) > t) &= c' \int_{\mathcal{E}_{d-k}^d} \int_0^\infty \int_{S_E^{d-k-1}} \dots \int_{S_E^{d-k-1}} \int r^{d(d-k)-1} \Delta_{d-k}^{k+1}(u_1, \dots, u_{d-k+1}) \\ &\quad \mathbf{1}\{z \in [0, 1]^d \cap E\} \exp(-\gamma\kappa_d(t+r)^d) \\ &\quad \mathcal{H}^{d-k}(dz) \mathbb{S}_E(du_1) \dots \mathbb{S}_E(du_{d-k+1}) dr \mu_{d-k}(dE). \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

Dabei sind  $\mu_{d-k}$  das translations- und rotationsinvariante Maß auf dem Raum aller  $d-k$ -dimensionalen affinen Ebenen des  $\mathbb{R}^d$  aus [39], Satz 1.3.4,  $S_E^{d-k-1}$  die Einheitssphäre des zu  $E$  parallelen  $d-k$ -dimensionalen linearen Unterraums und  $\mathbb{S}_E$  das sphärische Lebesgue-Maß auf  $S_E^{d-k-1}$ . Ferner sind  $\Delta_{d-k}(u_1, \dots, u_{d-k+1})$  das  $d-k$ -dimensionale Hausdorffmaß des durch die Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_{d-k+1}$  aufgespannten Simplex und

$$c' = \frac{\gamma^{d-k+1}((d-k)!)^{k+1}}{(d-k+1)!} \cdot \binom{d}{k} \cdot \frac{\kappa_{k+1} \dots \kappa_d}{\kappa_1 \dots \kappa_{d-k}}.$$

Der Ausdruck (5.2.11) vereinfacht sich zu

$$\mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) > t) = c'' \int_0^\infty r^{d(d-k)-1} \exp(-\gamma\kappa_d(t+r)^d) dr$$

mit (vgl. [40], Satz 7.2.3)

$$\begin{aligned}
c'' &= c' \cdot \frac{((d+1)\kappa_{d+1})^{d-k+1}}{((d-k)!)^{k+1}} \cdot \frac{\kappa_{d^2-dk-2}}{\kappa_{d^2-dk+k-1}} \cdot \left(\frac{d+1}{d-k}\right)^{-1} \cdot \frac{\kappa_1 \cdots \kappa_{d-k}}{\kappa_{k+2} \cdots \kappa_{d+1}} \\
&= \frac{\gamma^{d-k+1} ((d+1)\kappa_{d+1})^{d-k}}{(d-k+1)!} \cdot \frac{\kappa_{d^2-dk-2}}{\kappa_{d^2-dk+k-1}} \cdot (k+1)\kappa_{k+1} \\
&= \frac{(2\gamma)^{d-k+1}}{(d-k+1)!} \cdot \frac{\pi^{\frac{d^2+d-dk-k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right)},
\end{aligned}$$

mit  $\kappa_n = \pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ . □

Unter  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  ist der Ursprung das Zentrum von  $C_k(\Phi, 0)$ . Das Zentrum liegt genau dann in  $C_k(\Phi, 0)$ , wenn  $\tau(\Phi, 0) \geq 0$  ist. Mittels Lemma 5.2.8 können wir hierfür die Wahrscheinlichkeit unter  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  bestimmen.

**Folgerung 5.2.9** *Es gilt für  $1 \leq k \leq d-1$*

$$\mathbb{P}_{N_k}^0(0 \in C_k(\Phi, 0)) = \frac{2^{d-k+1} \pi^{\frac{d-k}{2}} \gamma}{d(d-k+1)(d-k)\gamma_k} \cdot \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\right)^{d-k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right) \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

**Beweis:** Ersetzt man in (5.2.10)  $\tau(\dots) > t$  durch  $\tau(\dots) \geq t$  und  $B$  durch  $B^0$ , so zeigt sich  $\mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) \geq t) = \mathbb{P}_{N_k}(\tau(\Phi, 0) > t)$  für  $t \geq 0$ . Zusammen mit dieser Überlegung erhalten wir aus Lemma 5.2.8

$$\mathbb{P}_{N_k}^0(\tau(\Phi, 0) \geq 0) = \frac{c^* \gamma^{d-k+1}}{\gamma_k} \int_0^\infty r^{d(d-k)-1} \exp(-\gamma \kappa_d r^d) dr = \frac{c^* \gamma}{d \kappa_d^{d-k} \gamma_k} \cdot (d-k-1)!.$$

Hieraus ergibt sich die Behauptung. □

Die Intensität  $\gamma_1$  ist bekannt, vgl. (5.1.6). Wir erhalten aus Folgerung 5.2.9

$$\mathbb{P}_{N_1}^0(0 \in C_1(\Phi, 0)) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d^2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d^2+1}{2}\right)}.$$

Man vergleiche auch [33], S. 286.

**Beweis von Satz 5.2.5:** Nach Folgerung 2.3.9 gilt zunächst

$$\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \geq \kappa_k 2^{-k} \tau(\Phi, 0)^k \quad \mathbb{P}_{N_k}^0(\cdot \cap \{0 \in C_k(\Phi, 0)\})\text{-f.s.}$$

Ferner folgt  $0 \in C_k(\Phi, 0)$  aus  $\tau(\Phi, 0) \geq 0$ . Mittels Lemma 5.2.8 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t, 0 \in C_k(\Phi, 0)) &\geq \mathbb{P}_{N_k}^0(\tau(\Phi, 0) > 2(t/\kappa_k)^{1/k}) \\ &= \frac{c^* \gamma^{d-k+1}}{\gamma_k} \int_0^\infty r^{d(d-k)-1} \exp(-\gamma \kappa_d (2(t/\kappa_k)^{1/k} + r)^d) dr. \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Folgerung 5.2.9.  $\square$

**Beweis von Satz 5.2.6:** Wir arbeiten wieder mit Lemma 5.2.1 und erhalten unter Beachtung von (5.2.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t, z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \\ &= \frac{\gamma_k}{\rho_k} \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t, 0 \in C_k(\Phi, 0)\} \cdot \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \right] \\ &\geq \frac{\gamma_k t}{\rho_k} \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t, 0 \in C_k(\Phi, 0)). \end{aligned}$$

Ferner ist nach Lemma 5.2.1

$$\mathbb{P}_{M_k}^0(z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) = \frac{\gamma_k}{\rho_k} \mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right).$$

Hieraus folgt

$$\mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t \mid z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \geq c_k t \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) > t \mid 0 \in C_k(\Phi, 0))$$

mit

$$c_k = \frac{\mathbb{P}_{N_k}^0(0 \in C_k(\Phi, 0))}{\mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right)}.$$

Aus Folgerung 5.2.9 erhält man  $c_k \in (0, \infty)$ .

Für  $t \geq 0$  ergibt sich analog zum Beweis von Satz 5.2.3

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq s, 0 \in C_k(\Phi, 0)) - \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq s, 0 \in C_k(\Phi, 0)) ds \\ &= \mathbb{E}_{N_k}^0 \left[ \mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq t, 0 \in C_k(\Phi, 0)\} \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \right] \\ &= \frac{\rho_k}{\gamma_k} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t, z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \\ &= \mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t, z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)). \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Wir setzen

$$G_{N_k}^*(t) = \mathbb{P}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \leq t, 0 \in C_k(\Phi, 0)), \quad t \geq 0,$$

und

$$p := \mathbb{P}_{N_k}^0(0 \in C_k(\Phi, 0)).$$

Nun ist

$$\mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right) = \int_0^\infty (p - G_{N_k}^*(s)) \, ds,$$

woraus sich zusammen mit (5.2.12)

$$\begin{aligned} p \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t, z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) &= \mathbb{E}_{N_k}^0(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \\ &= p \int_0^t G_{N_k}^*(t) - G_{N_k}^*(s) \, ds \\ &= G_{N_k}^*(t) \int_0^t (p - G_{N_k}^*(s)) \, ds - (p - G_{N_k}^*(t)) \int_0^t G_{N_k}^*(s) \, ds \\ &= G_{N_k}^*(t) \mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right) \\ &\quad - G_{N_k}^*(t) \int_t^\infty (p - G_{N_k}^*(s)) \, ds - (p - G_{N_k}^*(t)) \int_0^t G_{N_k}^*(s) \, ds \end{aligned}$$

ergibt. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t, z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \\ \leq \frac{G_{N_k}^*(t) \mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right)}{p \mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \right)}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.2.1 ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{M_k}^0(z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) &= \frac{\gamma_k}{\rho_k} \mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right) \\ &= \frac{\mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right)}{\mathbb{E}_{N_k}^0 \left( \mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0)) \right)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\mathbb{P}_{M_k}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) \leq t | z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \leq \frac{G_{N_k}^*(t)}{p}.$$

Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

### 5.2.3 Die Verteilung des $k$ -dimensionalen Hausdorffmaßes der typischen $k$ -Seite für $1 \leq k \leq d - 1$

Die Dichte von  $\mathcal{H}^1(C_1(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{N_1}^0$  ist bekannt, vgl. [1] oder [33]. In letztgenannter Referenz findet man überdies eine Dichte für  $\mathcal{H}^1(C_1(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{N_1}^0(\cdot | 0 \in C_1(\Phi, 0))$ .

Die Verteilung von  $V_d(C_d(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_\Phi^0$  wird für  $d = 2$  in [2] angegeben. Wir wollen uns im Folgenden mit dem Fall  $1 \leq k \leq d - 1$  beschäftigen. Hierfür erinnern wir an das Maß

$$\nu_m(A) := \int \cdots \int \mathbf{1} \left\{ \sum_{i=1}^m \delta_{y_i} \in A \right\} dy_1 \cdots dy_m, \quad A \in \mathcal{N},$$

aus Unterabschnitt 4.2.2. Es ist konzentriert auf  $N_m := \{\phi \in \mathbf{N} : \phi(\mathbb{R}^d) = m\}$  und  $\sigma$ -endlich. Wir fixieren einen  $d - k$ -dimensionalen Unterraum  $L$  des  $\mathbb{R}^d$  sowie  $d - k + 1$  Einheitsvektoren  $v_1, \dots, v_{d-k+1}$  aus  $L$  in allgemeiner Lage und setzen

$$\bar{S}(\phi) := S(v_1, \dots, v_{d-k+1}, \phi), \quad \bar{F}_k(\phi) := F_k(v_1, \dots, v_{d-k+1}, \phi), \quad \phi \in \mathbf{N}.$$

Für  $t > 0$  und  $m \geq k + 1$  definieren wir abschließend

$$H_m(t) := \int_{\mathbf{N}} \mathcal{H}^k(\bar{F}_k(\psi_m))^{-d(d-k+m)/k} \exp\left(-\gamma t^{d/k} \frac{V_d(\bar{S}(\psi_m))}{\mathcal{H}^k(\bar{F}_k(\psi_m))^{d/k}}\right) \mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(\bar{F}_k(\psi_m)) > 0, \psi_m \subset \bar{S}(\psi_m)\} \nu_m(d\psi_m).$$

**Satz 5.2.10** *Seien  $k \in \{2, \dots, d - 1\}$  und  $m \geq k + 1$  oder  $k = 1$  und  $m = 2$ .*

i) *Unter  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0$  besitzt  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  die Dichte  $h_m$ , gegeben durch*

$$h_m(t) := \frac{a_m}{b_m} \cdot t^{d(d-k+m)/k} \cdot H_m(t) \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

mit

$$a_m := \gamma^{d-k+m+k/d} \cdot \frac{d\pi^{(d^2-dk)/2}}{m! k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)^{d-k+k/d} \Gamma\left(d - k + \frac{k}{d}\right)}$$

und

$$b_m := \mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1).$$

ii) *Unter  $\mathbb{P}_{N_{k,m}}^0$  besitzt  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  die Dichte  $h_m^*$ , gegeben durch*

$$h_m^*(t) := \frac{a_m^*}{b_m^*} \cdot t^{d(d-k+m)/k-1} \cdot H_m(t) \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

mit

$$a_m^* := \frac{\gamma^{d-k+1+m}}{\gamma_k} \cdot \frac{2^{d-k+1} \pi^{\frac{d^2+d-dk-k}{2}}}{(d-k+1)! m! k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

und

$$b_m^* := \mathbb{P}_{N_k}^0(\Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1).$$

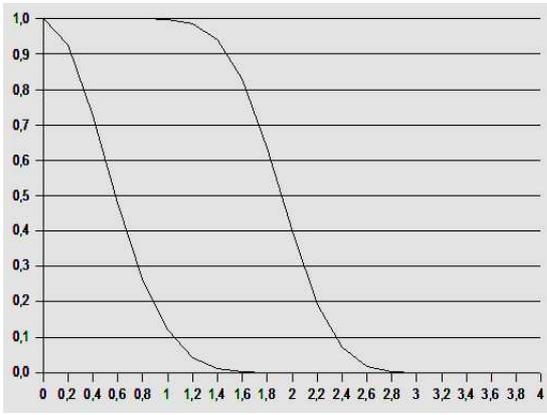
Den Beweis liefern wir nach auf Seite 115. Die Dichte  $h_m$  von  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0$  ist von der Form

$$h_m(t) = c \cdot \mathbf{1}\{t > 0\} \cdot t^{d(d-k+m)/k} \int \xi_1(\psi_m) \cdot \exp(-\gamma t^{d/k} \cdot \xi_2(\psi_m)) \nu_m(d\psi_m)$$

für eine geeignete Konstante  $c > 0$  und geeignete Abbildungen  $\xi_1, \xi_2$ . Leitet man aus der oberen Schranke von  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0)) > t)$  in Satz 5.1.11 eine Dichte  $f$  ab, so erhält man

$$f(t) = c_1 \cdot \mathbf{1}\{t > 0\} \cdot t^{d(d-k+m)/k} \cdot \exp(-\gamma t^{d/k} \cdot c_2)$$

für geeignete Konstanten  $c_1, c_2 > 0$ . Eine analoge Beobachtung lässt sich zu Satz 5.1.18 und der Dichte von  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{N_{k,m}}^0$  anstellen.



*Gegenüberstellung der linken Seite (untere Linie) und der rechten Seite (obere Linie) der Abschätzung (5.1.9) aus Satz 5.1.18 für  $\gamma = 1$ ,  $d = 3$ ,  $k = 1$  und  $m = 2$ . Die linke Seite wurde unter Verwendung der Formeln aus [33] berechnet.*

Die Ähnlichkeit oben abgebildeter Tail-Wahrscheinlichkeiten kann analog zu oben angeführtem Vergleich von  $h_m$  und  $f$  begründet werden, die Lage-Verschiedenheit der Tail-Wahrscheinlichkeiten erklärt sich durch die „grobe“ Abschätzung in Satz 5.1.18.

Gemäß Folgerung 5.1.7 gilt für  $k \geq \{2, \dots, d\}$  und  $A \in \mathcal{N}$

$$\mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi \in A) = \sum_{m=k+1}^{\infty} \mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(\Phi \in A) \cdot \mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1). \quad (5.2.13)$$

Analoges gilt für  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  nach Folgerung 5.1.14. Wir können aus (5.2.13) und Satz 5.2.10 Dichten für  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  und analog für  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  herleiten.

**Satz 5.2.11** Sei  $k \in \{2, \dots, d - 1\}$ .

*i) Unter  $\mathbb{P}_{M_k}^0$  besitzt  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  die Dichte  $h$ , gegeben durch*

$$h(t) := a \cdot \mathbf{1}\{t > 0\} \cdot t^{d^2/k-d} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\gamma^m \cdot t^{dm/k}}{m!} \cdot H_m(t)$$

mit

$$a := \gamma^{d-k+k/d} \cdot \frac{d\pi^{(d^2-dk)/2}}{k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right)^{d-k+k/d} \Gamma\left(d - k + \frac{k}{d}\right)}.$$

ii) Unter  $\mathbb{P}_{N_k}^0$  besitzt  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  die Dichte  $h^*$ , gegeben durch

$$h^*(t) := a^* \cdot \mathbf{1}\{t > 0\} \cdot t^{d^2/k-d-1} \sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{\gamma^m \cdot t^{dm/k}}{m!} \cdot H_m(t)$$

mit

$$a^* := \frac{\gamma^{d-k+1}}{\gamma_k} \cdot \frac{2^{d-k+1} \pi^{\frac{d^2+d-dk-k}{2}}}{(d-k+1)! k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Das Ereignis  $\{\phi \in \mathbf{N} : z(\phi, 0) \in F_k(\phi, 0)\}$  ist invariant unter Translation und Skalierung, nach Satz 4.2.3 sind  $V_d(S_k(\Phi, 0))$  und  $\mathbf{1}\{z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)\}$  unabhängig unter  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0$ . Das jedoch trifft nicht zu auf die Zufallsvariablen  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  und  $\mathbf{1}\{z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)\}$ . Wir fragen uns daher nach der Verteilung von  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  unter  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(\cdot | z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0))$ . Hierfür definieren wir für  $t > 0$  und  $m \geq k + 1$

$$H_{m,z}(t) := \int_{\mathbf{N}} \mathcal{H}^k(\bar{F}_k(\psi_m))^{-d(d-k+m)/k} \exp\left(-\gamma t^{d/k} \frac{V_d(\bar{S}(\psi_m))}{\mathcal{H}^k(\bar{F}_k(\psi_m))^{d/k}}\right) \mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(\bar{F}_k(\psi_m)) > 0, \psi_m \subset \bar{S}(\psi_m), \|y\| \geq 1 \forall y \in \psi_m\} \nu_m(d\psi_m).$$

**Satz 5.2.12** Seien  $k \in \{2, \dots, d-1\}$  und  $m \geq k+1$  oder  $k=1$  und  $m=2$ .

i) Unter  $\mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(\cdot | z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0))$  besitzt  $\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))$  die Dichte  $h_{m,z}$ , gegeben durch

$$h_{m,z}(t) := \frac{a_m}{b_{m,z}} \cdot t^{d(d-k+m)/k} \cdot H_{m,z}(t) \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

mit

$$b_{m,z} := \mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1, z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)).$$

ii) Unter  $\mathbb{P}_{N_{k,m}}^0(\cdot | 0 \in C_k(\Phi, 0))$  besitzt  $\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))$  die Dichte  $h_{m,z}^*$ , gegeben durch

$$h_{m,z}^*(t) := \frac{a_m^*}{b_{m,z}^*} \cdot t^{d(d-k+m)/k-1} \cdot H_{m,z}(t) \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

mit

$$b_{m,z}^* := \mathbb{P}_{N_k}^0(\Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1, 0 \in C_k(\Phi, 0)).$$

Wir erinnern daran, dass die Konstanten  $a_m$  und  $a_m^*$  in Satz 5.2.10 definiert wurden. Den Beweis von Satz 5.2.12 findet man auf Seite 119.

**Beweis von Satz 5.2.10:** Gemäß den Sätzen 1.2.16 und 2.3.6 sowie der Definition von  $F_k$  gilt

$$F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) = F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi \cap S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi))$$

für alle  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  und  $\phi \in \mathbf{N}$ . Aus den Aussagen von Satz 4.2.4 und des zugehörigen Beweises folgt für messbares  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= \frac{\gamma^{d-k+1+m}}{m!(d-k+1)!} \\ &\int \dots \int f(\mathcal{H}^k(F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m))) \exp(-\gamma V_d(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m))) \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_m(B(x, \|x - x_1\|)) = 0\} \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap [0, 1]^d\} \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_m \subset S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m)\} \nu_m(d\phi_m) \mathcal{H}^k(dx) dx_1 \dots dx_{d-k+1}. \end{aligned}$$

Nun ist für alle  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  und  $\nu_m$ -fast alle  $\phi_m \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{1}\{\phi_m \cap B(x, \|x - x_1\|) = \emptyset\} \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap [0, 1]^d\} \mathcal{H}^k(dx) \\ &= \mathcal{H}^k(F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m) \cap [0, 1]^d). \end{aligned}$$

Wir erinnern daran, dass für alle  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d$  das Maß

$$A \mapsto \int \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap A\} \mathcal{H}^k(dx), \quad A \in \mathcal{B},$$

lokalendlich ist, folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= \frac{\gamma^{d-k+1+m}}{m!(d-k+1)!} \\ &\int \dots \int f(\mathcal{H}^k(F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m))) \exp(-\gamma V_d(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m))) \\ &\quad \mathcal{H}^k(F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m) \cap [0, 1]^d) \mathbf{1}\{\phi_m \subset S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m)\} \\ &\quad \nu_m(d\phi_m) dx_1 \dots dx_{d-k+1}. \end{aligned}$$

Mittels der Sätze [40], 7.2.1 (Blaschke-Petkantschin-Formel) und 7.2.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) = & \\ c' \int_{\mathcal{E}_{d-k}^d} \int_0^\infty \int_{S_E^{d-k-1}} \cdots \int_{S_E^{d-k-1}} \int_E \int_{\mathbf{N}} & r^{d(d-k)-1} \Delta_{d-k}^{k+1}(u_1, \dots, u_{d-k+1}) \\ & f(\mathcal{H}^k(F_k(z + ru_1, \dots, z + ru_{d-k+1}, \phi_m))) \\ & \mathcal{H}^k(F_k(z + ru_1, \dots, z + ru_{d-k+1}, \phi_m) \cap [0, 1]^d) \\ & \exp(-\gamma V_d(S(z + ru_1, \dots, z + ru_{d-k+1}, \phi_m))) \\ & \mathbf{1}\{\phi_m \subset S(z + ru_1, \dots, z + ru_{d-k+1}, \phi_m)\} \\ & \nu_m(\phi_m) \mathcal{H}^{d-k}(dz) \mathbb{S}_E(du_1) \dots \mathbb{S}_E(du_{d-k+1}) dr \mu_{d-k}(dE). \end{aligned}$$

Dabei sind  $\mu_{d-k}$  das translations- und rotationsinvariante Maß auf dem Raum  $\mathcal{E}_{d-k}^d$  aller  $d - k$ -dimensionalen affinen Ebenen des  $\mathbb{R}^d$  aus [39], Satz 1.3.4,  $S_E^{d-k-1}$  die Einheitskugel des zu  $E$  parallelen  $d - k$ -dimensionalen linearen Unterraums und  $\mathbb{S}_E$  das sphärische Lebesgue-Maß auf  $S_E^{d-k-1}$ . Ferner ist  $\Delta_{d-k}(u_1, \dots, u_{d-k+1})$  das  $d - k$ -dimensionale Hausdorffmaß des durch die Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_{d-k+1}$  aufgespannten Simplex. Die Konstante  $c'$  berechnet sich zu

$$c' = \frac{\gamma^{d-k+1+m} ((d-k)!)^{k+1}}{m! (d-k+1)!} \cdot \binom{d}{k} \cdot \frac{\kappa_{k+1} \cdots \kappa_d}{\kappa_1 \cdots \kappa_{d-k}}.$$

Aus der Translations- und Skalierungskovarianz von  $F_k$  und  $S$  folgt mit der Substitution  $\phi_m := r\psi_m + z$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) = & \\ c' \int_{\mathcal{E}_{d-k}^d} \int_0^\infty \int_{S_E^{d-k-1}} \cdots \int_{S_E^{d-k-1}} \int_E \int_{\mathbf{N}} & r^{d(d-k+m)-1} \Delta_{d-k}^{k+1}(u_1, \dots, u_{d-k+1}) \\ & f(r^k \mathcal{H}^k(F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \psi_m))) \\ & \mathcal{H}^k(r F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \psi_m) \cap ([0, 1]^d - z)) \\ & \exp(-\gamma r^d V_d(S(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \psi_m))) \\ & \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \psi_m)\} \\ & \nu_m(d\psi_m) \mathcal{H}^{d-k}(dz) \mathbb{S}_E(du_1) \dots \mathbb{S}_E(du_{d-k+1}) dr \mu_{d-k}(dE). \end{aligned}$$

Wir wollen uns jetzt überlegen, dass für festes  $E \in \mathcal{E}_{d-k}^d$  und  $\phi_m \in \mathbf{N}$  die Größen  $S(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi)$  und  $F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi)$  nicht von der speziellen Wahl der Punkte  $u_1, \dots, u_{d-k+1} \in S_E^{d-k-1}$  abhängen, sofern  $u_1, \dots, u_{d-k+1}$  in allgemeiner Lage sind.

Seien  $E \in \mathcal{E}_{d-k}^d$  und  $\phi \in \mathbf{N}$  fest gewählt,  $u_1, \dots, u_{d-k+1} \in S_E^{d-k-1}$  in allgemeiner Lage, sowie  $y \in Z(u_1, \dots, u_{d-k+1})$ . Man beachte, dass  $Z(u_1, \dots, u_{d-k+1})$  der zu  $E$  orthogonale  $k$ -dimensionale Unterraum ist und somit nicht von der speziellen Wahl der Punkte  $u_1, \dots, u_{d-k+1} \in S_E^{d-k-1}$  abhängt.

Es liegt  $y$  genau dann in  $F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi)$ , wenn  $B^0(y, \|y - u_1\|) \cap \phi = \emptyset$  gilt, d.h. wenn

$$\|x - y\|^2 \geq \|y - u_1\|^2 = \|y\|^2 + 1 \quad \text{für alle } x \in \phi \text{ gilt.}$$

Folglich ist  $F_k(E, \phi) := F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi)$  unabhängig von der speziellen Wahl der  $u_1, \dots, u_{d-k+1} \in S_E^{d-k-1}$ , insbesondere gilt dies für die Eckenmenge von  $F_k(E, \phi)$ . Die Menge  $S(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi)$  besteht im Fall von  $F_k(E, \phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$  aus Kugeln, deren Zentren durch jeweils eine Ecke  $e$  von  $F_k(E, \phi)$  und deren Radius durch

$$\|e - u_1\| = \sqrt{\|e\|^2 + 1}$$

gegeben sind, andernfalls ist  $S(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi) = \mathbb{R}^d$  nach Definition von  $S$ . Somit ist auch  $S(E, \phi) := S(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \phi)$  unabhängig von der speziellen Wahl der Einheitsvektoren  $u_1, \dots, u_{d-k+1} \in S_E^{d-k-1}$ , sofern diese in allgemeiner Lage sind.

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich noch auf folgende wichtige Eigenschaft hingewiesen. Seien  $E \in \mathcal{E}_{d-k}^d$  und  $L$  der zu  $E$  parallele  $d - k$ -dimensionale lineare Unterraum. Dann gelten

$$F_k(E, \phi) = F_k(L, \phi), \quad S(E, \phi) = S(L, \phi)$$

für alle  $\phi \in \mathbf{N}$ .

Wir erhalten mit eben eingeführter Notation

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= \\ c'' \int_{\mathcal{E}_{d-k}^d} \int_0^\infty \int_E \int_{\mathbf{N}} r^{d(d-k+m)-1} f(r^k \mathcal{H}^k(F_k(E, \psi_m))) &\mathcal{H}^k(rF_k(E, \psi_m) \cap ([0, 1]^d - z)) \\ \exp(-\gamma r^d V_d(S(E, \psi_m))) \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(E, \psi_m)\} & \\ \nu_m(d\psi_m) \mathcal{H}^{d-k}(dz) dr \mu_{d-k}(dE). & \end{aligned}$$

mit (vgl. Beweis zu Lemma 5.2.8)

$$c'' = \frac{2^{d-k+1} \gamma^{d-k+1+m}}{(d-k+1)! m!} \cdot \frac{\pi^{\frac{d^2+d-dk-k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)^{d-k} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right)}. \quad (5.2.14)$$

Sei  $L$  ein fester  $d - k$ -dimensionaler linearer Unterraum des  $\mathbb{R}^d$ . Das Maß  $\mu_{d-k}$  lässt sich wie folgt zerlegen, vgl. [39], S. 29. Für  $f : \mathcal{E}_{d-k}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar gilt

$$\int f(E) \mu_{d-k}(dE) = \int_{SO_d} \int_{L^\perp} f(\vartheta(L+x)) \mathcal{H}^k(dx) \mu_{SO_d}(d\vartheta).$$

Dabei sei  $\mu_{SO_d}$  die Gleichverteilung auf der Drehgruppe  $SO_d$  des  $\mathbb{R}^d$ , vgl. [39], Satz 1.2.4. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= \\ c'' \int_{SO_d} \int_{L^\perp} \int_0^\infty \int_{\vartheta(L+x)} \int_{\mathbf{N}} &r^{d(d-k+m)-1} f(r^k \mathcal{H}^k(F_k(\vartheta L, \psi_m))) \\ &\mathcal{H}^k(r F_k(\vartheta L, \psi_m) \cap ([0, 1]^d - z)) \\ &\exp(-\gamma r^d V_d(S(\vartheta L, \psi_m))) \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(\vartheta L, \psi_m)\} \\ &\nu_m(d\psi_m) \mathcal{H}^{d-k}(dz) dr \mathcal{H}^k(dx) \mu_{SO_d}(d\vartheta). \end{aligned}$$

Die Invarianz der Maße  $\mathcal{H}^k$ ,  $V_d$  und  $\nu_m$  unter Drehungen liefert nach Substitution von  $z$  durch  $\vartheta(z+x)$  und  $\psi_m$  durch  $\vartheta\psi_m$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= \\ c'' \int_{SO_d} \int_{L^\perp} \int_0^\infty \int_L \int_{\mathbf{N}} &r^{d(d-k+m)-1} f(r^k \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))) \\ &\mathcal{H}^k(r F_k(L, \psi_m) \cap (\vartheta^{-1}([0, 1]^d) - x - z)) \\ &\exp(-\gamma r^d V_d(S(L, \psi_m))) \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(L, \psi_m)\} \\ &\nu_m(d\psi_m) \mathcal{H}^{d-k}(dz) dr \mathcal{H}^k(dx) \mu_{SO_d}(d\vartheta). \end{aligned}$$

Wir rechnen mit [39], Satz 1.2.7,

$$\begin{aligned} &\int_{SO_d} \int_{L^\perp} \int_L \mathcal{H}^k(r F_k(L, \psi_m) \cap (\vartheta^{-1}([0, 1]^d) - x - z)) \mathcal{H}^{d-k}(dz) \mathcal{H}^k(dx) \mu_{SO_d}(d\vartheta) \\ &= \int_{SO_d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{H}^k(r F_k(L, \psi_m) \cap (\vartheta^{-1}([0, 1]^d) - y)) dy \mu_{SO_d}(d\vartheta) \\ &= \int_{SO_d} \mathcal{H}^k(r F_k(L, \psi_m)) V_d(\vartheta^{-1}([0, 1]^d)) \mu_{SO_d}(d\vartheta) \\ &= r^k \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m)) \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= c'' \int_0^\infty \int_{\mathbf{N}} r^{d(d-k+m)+k-1} f(r^k \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))) \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m)) \\ &\exp(-\gamma r^d V_d(S(L, \psi_m))) \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(L, \psi_m)\} \nu_m(d\psi_m) dr. \end{aligned}$$

Mittels der Substitution  $t := r^k \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))$ ,  $t > 0$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) &= \frac{c''}{k} \int_0^\infty \int_{\mathbf{N}} f(t) t^{d(d-k+m)/k} \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))^{-d(d-k+m)/k} \\ &\exp(-\gamma t^{d/k} V_d(S(L, \psi_m)) / \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))^{d/k}) \\ &\mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m)) > 0\} \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(L, \psi_m)\} \nu_m(d\psi_m) dt. \end{aligned}$$

Man rechnet

$$\frac{c''}{k\rho_k} = \frac{d\gamma^{d-k+m+k/d}\pi^{(d^2-dk)/2}}{m!k} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{d^2-dk+k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d^2-dk}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{d}{2}\right)^{d-k+k/d}\Gamma\left(d-k+\frac{k}{d}\right)},$$

und die Behauptung i) von Satz 5.2.10 ist wegen

$$\rho_{k,m} = \rho_k \cdot \mathbb{P}_{M_k}^0(\Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1)$$

vgl. (5.1.5), gezeigt. Nach Lemma 5.2.2 und eben gezeigtem gilt für  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  messbar

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{N_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) &= \mathbb{E}_{M_{k,m}} f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} \\ &= \rho_{k,m} \int_0^\infty f(t) t^{-1} h_m(t) dt, \end{aligned}$$

woraus unter Beachtung von (5.1.5), (5.1.7) und (5.2.14) die Behauptung ii) von Satz 5.2.10 folgt.  $\square$

**Beweis von Satz 5.2.12:** Für messbares  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  gilt zunächst

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{k,m}} \left[ f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) \cdot \mathbf{1}\{z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)\} \right] &= \frac{\gamma^{d-k+1+m}}{m!(d-k+1)!} \\ &\int \dots \int f(\mathcal{H}^k(F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m))) \exp(-\gamma V_d(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m))) \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_m(B(x, \|x - x_1\|)) = 0\} \mathbf{1}\{x \in Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap [0, 1]^d\} \\ &\quad \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m)\} \\ &\quad \mathbf{1}\{\phi_m \subset S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m)\} \nu_m(d\phi_m) \mathcal{H}^k(dx) dx_1 \dots dx_{d-k+1}. \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m) \mapsto \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m)\}$$

ist translations-, skalierungs- und rotationsinvariant. Sind folglich  $L$  ein  $d-k$ -dimensionaler linearer Unterraum,  $x_i = z + ru_i$  für geeignete  $r > 0$ ,  $z \in \mathbb{R}^d$  sowie  $u_1, \dots, u_{d-k+1} \in S_L^{d-k-1}$  in allgemeiner Lage und ist  $\phi_m = r\psi_m + z$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi_m)\} \\ &= \mathbf{1}\{z(u_1, \dots, u_{d-k+1}) \in F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \psi_m)\}. \end{aligned}$$

Es ist  $z(u_1, \dots, u_{d-k+1}) = 0$ , und 0 liegt genau dann in  $F_k(u_1, \dots, u_{d-k+1}, \psi_m)$ , falls  $u_1$  der nächste Nachbar von 0 ist, d.h. wenn  $\|y\| \geq 1$  für alle  $y \in \psi_m$  gilt. Man vergleiche

in diesem Zusammenhang auch die Abbildungen auf den Seiten 51 und 54. Wir erhalten völlig analog zum Beweis von Satz 5.2.10

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{M_{k,m}} \left[ f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) \cdot \mathbf{1}\{z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)\} \right] \\ &= \frac{c''}{k} \int_0^\infty \int_{\mathbf{N}} f(t) t^{d(d-k+m)/k} \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))^{-d(d-k+m)/k} \\ & \quad \exp(-\gamma t^{d/k} V_d(S(L, \psi_m)) / \mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m))^{d/k}) \\ & \quad \mathbf{1}\{\mathcal{H}^k(F_k(L, \psi_m)) > 0\} \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(L, \psi_m)\} \\ & \quad \mathbf{1}\{\|y\| \geq 1 \forall y \in \psi_m\} \nu_m(d\psi_m) dt. \end{aligned}$$

Die Behauptung i) folgt aus

$$\mathbb{P}_{M_{k,m}}(z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) = \rho_k \cdot \mathbb{P}_{M_k}^0(z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0), \Phi(S_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1), \quad (5.2.15)$$

vgl. Lemma 5.1.6. Nach Lemma 5.2.2 und eben gezeigtem gilt für messbares  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{N_{k,m}} \left[ f(\mathcal{H}^k(C_k(\Phi, 0))) \cdot \mathbf{1}\{0 \in C_k(\Phi, 0)\} \right] \\ &= \mathbb{E}_{M_{k,m}} \left[ f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) \cdot \mathbf{1}\{z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)\} \cdot \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} \right] \\ &= \mathbb{E}_{M_{k,m}} \left[ f(\mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))) \cdot \mathcal{H}^k(F_k(\Phi, 0))^{-1} \mid z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0) \right] \\ & \quad \mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \\ &= \rho_{k,m} \cdot \mathbb{P}_{M_{k,m}}^0(z(\Phi, 0) \in F_k(\Phi, 0)) \cdot \int_0^\infty f(t) t^{-1} h_{m,z}(t) dt. \end{aligned}$$

Die Behauptung ii) folgt aus (5.2.14) und (5.2.15) sowie

$$\mathbb{P}_{N_{k,m}}(0 \in C_k(\Phi, 0)) = \gamma_k \cdot \mathbb{P}_{N_k}^0(0 \in C_k(\Phi, 0), \Phi(D_k(\Phi, 0)) = m + d - k + 1),$$

vgl. Lemma 5.1.13. □

## 5.2.4 Die Verteilung des Volumens der Nullpunktzelle und der typischen Zelle

Wir wollen uns im Folgenden mit dem im vorigen Unterabschnitt 5.2.3 nicht betrachteten Fall  $k = d$  beschäftigen. Hierfür fixieren wir einen Einheitsvektor  $\tilde{v}$  des  $\mathbb{R}^d$  und definieren für  $m \geq d + 1$  ein Maß  $\tilde{\nu}_m$  auf  $\mathbf{N}$  durch

$$\tilde{\nu}_m(A) := \int \cdots \int \mathbf{1} \left\{ \delta_{\tilde{v}} + \sum_{i=1}^{m-1} \delta_{y_i} \in A \right\} dy_1 \cdots dy_{m-1}, \quad A \in \mathcal{N}.$$

Es ist ebenfalls konzentriert auf  $N_m := \{\phi \in \mathbf{N} : \phi(\mathbb{R}^d) = m\}$  und  $\sigma$ -endlich. Wir setzen

$$\bar{S}(\phi) := S(0, \phi), \quad \bar{F}_k(\phi) := F_k(0, \phi), \quad \phi \in \mathbf{N}.$$

Für  $t > 0$  und  $m \geq d + 1$  definieren wir abschließend

$$\begin{aligned} \tilde{H}_m(t) := & \int_{\mathbf{N}} V_d(\bar{F}_d(\psi_m))^{-m} \exp\left(-\gamma t \frac{V_d(\bar{S}(\psi_m))}{V_d(\bar{F}_d(\psi_m))}\right) \\ & \mathbf{1}\{V_d(\bar{F}_d(\psi_m)) > 0, \psi_m \subset \bar{S}(\psi_m)\} \tilde{\nu}_m(d\psi_m). \end{aligned}$$

**Satz 5.2.13** Sei  $m \geq d + 1$ .

i) Unter  $\mathbb{P}(\cdot | \Phi(S_d(\Phi, 0)) = m + 1)$  besitzt  $V_d(F_d(\Phi, 0))$  die Dichte  $h_m$ , gegeben durch

$$h_m(t) := \frac{a_m}{b_m} \cdot t^m \cdot \tilde{H}_m(t) \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

mit

$$a_m := \frac{\gamma^{m+1} \kappa_d}{m!}, \quad b_m := \mathbb{P}(\Phi(S_d(\Phi, 0)) = m + 1).$$

ii) Unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0(\cdot | \Phi(D_d(\Phi, 0)) = m + 1)$  besitzt  $V_d(C_d(\Phi, 0))$  die Dichte  $h_m^*$ , gegeben durch

$$h_m^*(t) := \frac{a_m^*}{b_m^*} \cdot t^{m-1} \cdot \tilde{H}_m(t) \cdot \mathbf{1}\{t > 0\}$$

mit

$$a_m^* := \frac{\gamma^m \kappa_d}{m!}, \quad b_m^* := \mathbb{P}_{\Phi}^0(\Phi(D_d(\Phi, 0)) = m + 1).$$

Den Beweis liefern wir nach auf Seite 122. Satz 5.2.11 lautet im Fall  $k = d$  wie unten angegeben.

**Satz 5.2.14** Die Verteilung des Volumens der Nullpunktzelle unter  $\mathbb{P}$  und der typischen Zelle unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0$  sind gegeben durch:

i) Unter  $\mathbb{P}$  besitzt  $V_d(F_d(\Phi, 0))$  die Dichte  $h$ , gegeben durch

$$h(t) := \gamma \kappa_d \cdot \mathbf{1}\{t > 0\} \sum_{m=d+1}^{\infty} \frac{\gamma^m \cdot t^m}{m!} \cdot \tilde{H}_m(t).$$

ii) Unter  $\mathbb{P}_{\Phi}^0$  besitzt  $V_d(C_d(\Phi, 0))$  die Dichte  $h^*$ , gegeben durch

$$h^*(t) := \kappa_d \cdot \mathbf{1}\{t > 0\} \cdot \sum_{m=d+1}^{\infty} \frac{\gamma^m \cdot t^{m-1}}{m!} \cdot \tilde{H}_m(t).$$

**Beweis von Satz 5.2.13:** In Anlehnung an den Beweis von Satz 5.2.10 schreiben wir  $\mathcal{H}^d(F_d(\dots))$  anstelle von  $V_d(F_d(\dots))$ . Analog zu eben genanntem Beweis gilt für messbares  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) = \frac{\gamma^{1+m}}{m!} \iint f(\mathcal{H}^d(F_d(x, \phi_m))) \exp(-\gamma V_d(S(x, \phi_m))) \mathcal{H}^d(F_d(x, \phi_m) \cap [0, 1]^d) \mathbf{1}\{\phi_m \subset S(x, \phi_m)\} \nu_m(d\phi_m) dx.$$

Die Translationskovarianz von  $F_k$  und  $S$  liefert nach der Substitution  $\phi_m := \psi_m + x$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) &= \frac{\gamma^{1+m}}{m!} \iint f(\mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m))) \exp(-\gamma V_d(S(0, \psi_m))) \\ &\quad \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m) \cap ([0, 1]^d - x)) \\ &\quad \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(0, \psi_m)\} \nu_m(d\psi_m) dx. \end{aligned}$$

Aus [39], Satz 1.2.7, folgt

$$\int \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m) \cap ([0, 1]^d - x)) dx = \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m))$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) &= \frac{\gamma^{1+m}}{m!} \int f(\mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m))) \exp(-\gamma V_d(S(0, \psi_m))) \\ &\quad \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m)) \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(0, \psi_m)\} \nu_m(d\psi_m). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Definition von  $\nu_m$  können wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) &= \frac{\gamma^{1+m}}{m!} \\ &\quad \int \dots \int f(\mathcal{H}^d(F_d(0, \{y_1, \dots, y_m\}))) \exp(-\gamma V_d(S(0, \{y_1, \dots, y_m\}))) \\ &\quad \mathcal{H}^d(F_d(0, \{y_1, \dots, y_m\})) \mathbf{1}\{\{y_1, \dots, y_m\} \subset S(0, \{y_1, \dots, y_m\})\} \\ &\quad dy_1 \dots dy_m \end{aligned}$$

schreiben. Verwendung von Polarkoordinaten für  $y_1$  liefert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) &= \frac{d\kappa_d \gamma^{1+m}}{m!} \\ &\quad \int_{SO_d} \int_0^\infty \int \dots \int f(\mathcal{H}^d(F_d(0, \{r\vartheta\tilde{v}, y_2, \dots, y_m\}))) r^{d-1} \\ &\quad \exp(-\gamma V_d(S(0, \{r\vartheta\tilde{v}, y_2, \dots, y_m\}))) \\ &\quad \mathcal{H}^d(F_d(0, \{r\vartheta\tilde{v}, y_2, \dots, y_m\})) \\ &\quad \mathbf{1}\{\{r\vartheta\tilde{v}, y_2, \dots, y_m\} \subset S(0, \{r\vartheta\tilde{v}, y_2, \dots, y_m\})\} \\ &\quad dy_2 \dots dy_m dr \mu_{SO_d}(d\vartheta). \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\tilde{v}$  der eingangs dieses Unterabschnittes fixierte Einheitsvektor und  $\mu_{SO_d}$  die Gleichverteilung auf der Drehgruppe  $SO_d$  des  $\mathbb{R}^d$ , vgl. [39], Satz 1.2.4. Wir substituieren  $y_i := r\vartheta x_i$ ,  $i = 2, \dots, m$ , und erhalten unter Ausnutzung der Rotationskovarianz von  $F_d$  und  $S$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) &= \frac{d\kappa_d \gamma^{1+m}}{m!} \\ &\int_{SO_d} \int_0^\infty \int \dots \int f(r^d \mathcal{H}^d(F_d(0, \{\tilde{v}, x_2, \dots, x_m\}))) r^{dm+d-1} \\ &\quad \exp(-\gamma r^d V_d(S(0, \{\tilde{v}, x_2, \dots, x_m\}))) \\ &\quad \mathcal{H}^d(F_d(0, \{\tilde{v}, x_2, \dots, x_m\})) \\ &\quad \mathbf{1}\{\{\tilde{v}, x_2, \dots, x_m\} \subset S(0, \{\tilde{v}, x_2, \dots, x_m\})\} \\ &\quad dx_2 \dots dx_m dr \mu_{SO_d}(d\vartheta). \end{aligned}$$

Unter Beachtung der Definition von  $\tilde{\nu}_m$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{M_{d,m}} f(\mathcal{H}^d(F_d(\Phi, 0))) &= \frac{d\kappa_d \gamma^{1+m}}{m!} \int r^{dm+d-1} f(r^d \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m))) \\ &\quad \exp(-\gamma r^d V_d(S(0, \psi_m))) \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m)) \\ &\quad \mathbf{1}\{\psi_m \subset S(0, \psi_m)\} \tilde{\nu}_m(d\psi_m). \end{aligned}$$

Die Substitution  $t := r^d \mathcal{H}^d(F_d(0, \psi_m))$  liefert die erste Behauptung i). Man beachte hierbei

$$\mathbb{P}_{M_{d,m}}^0 = \mathbb{P}(\cdot \mid \Phi(S_d(\Phi, 0)) = m + 1),$$

vgl. Folgerung 5.1.7. Die zweite Behauptung erhält man wie im Beweis von Satz 5.2.10. Man beachte dabei

$$\mathbb{P}_{N_{d,m}}^0 = \mathbb{P}_\Phi^0(\cdot \mid \Phi(D_d(\Phi, 0)) = m + 1),$$

vgl. Folgerung 5.1.14. □



# Anhang A

## Ergänzungen

### A.1 Ergänzungen zu Kapitel 1

#### A.1.1 Ergänzungen zu Unterabschnitt 1.1.4

Es seien  $\mathcal{F}_{le}$  das System aller lokalendlichen Mengen in  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{B}(\mathcal{F})_{le}$  die Spur- $\sigma$ -Algebra von  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  auf  $\mathcal{F}_{le}$ . Nach [40], Satz 3.1.2, gilt  $\mathcal{F}_{le} \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$  und gemäß eben genanntem Satz ist die bijektive Abbildung  $i : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}_{le}$ , welche jedem  $\phi \in \mathbf{N}$  seinen Träger in  $E$  zuordnet, messbar bezüglich  $(\mathcal{N}, \mathcal{B}(\mathcal{F})_{le})$ . Ferner ist  $i^{-1} : \mathcal{F}_{le} \rightarrow \mathbf{N}$  messbar bezüglich  $(\mathcal{B}(\mathcal{F}_{le}), \mathcal{N})$ , wieder nach Satz 3.1.2 in [40].

**Lemma A.1.1** *Es seien  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum,  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$  und  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbare Abbildungen. Dann ist die durch*

$$\pi_S(\omega) := \Phi(\omega) \cap S(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

*definierte Abbildung  $\pi_S : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$  messbar.*

**Beweis:** Die durch  $f_1(\omega) := (i(\Phi(\omega)), S(\omega))$  definierte Abbildung  $f_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_{le} \times \mathcal{F}$  ist messbar bezüglich  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{F})_{le} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{F}))$ . Nach Satz 1.1.7 ist die durch  $f_2(F_1, F_2) := F_1 \cap F_2$  definierte Abbildung  $f_2 : \mathcal{F}_{le} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{le}$  messbar bezüglich  $(\mathcal{B}(\mathcal{F})_{le} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{F}), \mathcal{B}(\mathcal{F})_{le})$ . Aus  $\pi_S = i^{-1} \circ f_2 \circ f_1$  folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma A.1.2** *Es seien  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum,  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$  und  $S, T : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbare Abbildungen. Dann ist die durch*

$$p_S(\omega) := \Phi(\omega) \cap T(\omega) \cap S(\omega)^c, \quad \omega \in \Omega,$$

*definierte Abbildung  $p_S : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$  messbar.*

**Beweis:** Nach Satz 1.1.7 ist  $\omega \mapsto T(\omega) \cap S(\omega)$  messbar. Für  $C \in \mathcal{C}$  und  $\omega \in \Omega$  gilt

$$p_S(\omega)(C) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\Phi(\omega) \cap T(\omega))(C) = (\Phi(\omega) \cap T(\omega) \cap S(\omega))(C).$$

Aus Lemma A.1.1 folgt die Messbarkeit von  $\Phi \cap T$  als auch von  $\Phi \cap T \cap S$ , somit ist  $\{p_S(C) = 0\} \in \mathcal{A}$ . Nach Lemma 1.1.12 ist  $p_S$  messbar.  $\square$

### A.1.2 Ergänzungen zu Unterabschnitt 1.1.5

Es sei  $\pi_1 : E \times Y \rightarrow E$  die Projektion von  $E \times Y$  auf  $E$ , d.h. es gelte  $\pi_1((x, y)) = x$  für  $(x, y) \in E \times Y$ . Mit  $\mathcal{F}_{le, Y}$  bezeichnen wir die Menge der Träger der markierten einfachen Zählmaße  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Es ist das System aller Mengen  $A \subset E \times Y$  mit  $\pi_1(A) \in \mathcal{F}_{le}$  und  $\text{card}(A \cap (\{x\} \times Y)) = 1$  für alle  $x \in \pi_1(A)$ . Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_{le, Y}$  zu  $\mathcal{F}_{le, Y}$  werde erzeugt durch die Mengen

$$\mathbf{A}_{C, H} := \{A \in \mathcal{F}_{le, Y} : \text{card}(A \cap (C \times H)) = 0\}, \quad C \in \mathcal{C}, H \in \mathcal{Y}.$$

**Lemma A.1.3** Die bijektive Abbildung  $i_Y : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}_{le, Y}$ , definiert durch

$$i_Y(\varphi) := \{z \in E \times Y : \varphi(\{z\}) = 1\}, \quad \varphi \in \mathbf{N}_Y,$$

ist messbar. Ferner sind auch die Umkehrabbildung  $i_Y^{-1} : \mathcal{F}_{le, Y} \rightarrow \mathbf{N}_Y$  und  $\pi_1 : \mathcal{F}_{le, Y} \rightarrow \mathcal{F}_{le}$  messbar.

**Beweis:** Sei  $\mathbf{N}_{C, H} := \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi(C \times H) = 0\}$  für  $C \in \mathcal{C}$ ,  $H \in \mathcal{Y}$ . Die Messbarkeit von  $i_Y$  und  $i_Y^{-1}$  folgt nach Lemma 1.1.13 sowie Definition von  $\mathcal{A}_{le, Y}$  aus  $i_Y^{-1}(\mathbf{A}_{C, H}) = \mathbf{N}_{C, H}$  und  $i_Y(\mathbf{N}_{C, H}) = \mathbf{A}_{C, H}$ . Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{F})_{le} = \mathcal{B}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{F}_{le}$  wird erzeugt durch das System  $\mathcal{F}^C \cap \mathcal{F}_{le}$ ,  $C \in \mathcal{C}$ . Somit ergibt sich aus

$$\pi_1^{-1}(\mathcal{F}^C \cap \mathcal{F}_{le}) = \mathbf{A}_{C, Y}, \quad C \in \mathcal{C},$$

die Messbarkeit von  $\pi_1$ .  $\square$

Sind  $F_1 \in \mathcal{F}_{le, Y}$  und  $F_2 \subset E$ , so definieren wir  $F_1 \cap F_2 := F_1 \cap (F_2 \times Y)$ .

**Lemma A.1.4** Die durch  $c_Y(F_1, F_2) := F_1 \cap F_2$  definierte Abbildung  $c_Y : \mathcal{F}_{le, Y} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{le, Y}$  ist messbar bezüglich  $(\mathcal{A}_{le, Y} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{F}), \mathcal{A}_{le, Y})$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Folge  $C_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , aus Lemma 1.1.3. Für  $C \in \mathcal{C}$ ,  $H \in \mathcal{Y}$  gilt

$$\begin{aligned} c_Y^{-1}(\mathbf{A}_{C,H}) &:= \{(A, F) \in \mathcal{F}_{le,Y} \times \mathcal{F} : \text{card}(A \cap ((F \cap C) \times H)) = 0\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(A, F) \in \mathcal{F}_{le,Y} \times \mathcal{F} : F \cap C \subset C_n, \text{card}(A \cap (C_n \times H)) = 0\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(A, F) \in \mathcal{F}_{le,Y} \times \mathcal{F} : F \cap C \cap C_n^c = \emptyset, \text{card}(A \cap (C_n \times H)) = 0\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathcal{F}_{le,Y} \times \mathcal{F}^{C \cap C_n^c}) \cap (\mathbf{A}_{C_n,H} \times \mathcal{F}) \in \mathcal{A}_{le,Y} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{F}), \end{aligned}$$

dabei ist

$$\mathcal{F}^{C \cap C_n^c} = \bigcap_{D \in \mathcal{D}, \text{cl } D \subset C_n^c} \mathcal{F}^{C \cap \text{cl } D} \in \mathcal{B}(\mathcal{F}),$$

wobei  $\mathcal{D}$  die abzählbare Basis von  $E$  aus offenen, relativ kompakten Mengen aus Satz 1.1.1 bezeichne. Damit ist die Messbarkeit von  $c_Y$  gezeigt.  $\square$

**Lemma A.1.5** *Es seien  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum,  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_Y$  und  $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbare Abbildungen. Dann ist die durch*

$$\pi_S(\omega) := \Phi(\omega) \cap S(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

*definierte Abbildung  $\pi_S : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_Y$  messbar.*

**Beweis:** Die Abbildung  $f_1 : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_{le,Y} \times \mathcal{F}$ , definiert durch  $f_1(\omega) := (i_Y(\Phi(\omega)), S(\omega))$  ist messbar bezüglich  $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_{le,Y} \otimes \mathcal{B}(\mathcal{F}))$  nach Lemma A.1.3. Aus  $\pi_S = i_Y^{-1} \circ c_Y \circ f_1$  sowie Lemmata A.1.3 und A.1.4 folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma A.1.6** *Es seien  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Messraum,  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_Y$  und  $S, T : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  messbare Abbildungen. Dann ist die durch*

$$p_{S,Y}(\omega) := \Phi(\omega) \cap T(\omega) \cap S(\omega)^c, \quad \omega \in \Omega,$$

*definierte Abbildung  $p_{S,Y} : \Omega \rightarrow \mathbf{N}_Y$  messbar.*

**Beweis:** Der Nachweis kann unter Verwendung der Lemmata 1.1.13 und A.1.5 analog zum Beweis von Lemma A.1.2 geführt werden.  $\square$

## A.2 Ergänzungen zu Kapitel 2

### A.2.1 Ergänzungen zu Unterabschnitt 2.1.4

In Lemmata A.2.1 bis A.2.4 betrachten wir ein festes  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  mit  $(x_0, r_0) \in \varphi$ .

**Lemma A.2.1** *Die Mengen  $B(\varphi)$  und  $C(\varphi, x_0)$  sind abgeschlossen.*

**Beweis:** Seien  $(x_n)_n$  eine konvergente Folge aus  $B(\varphi)$  und  $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Die Menge  $X := \{x, x_1, x_2, \dots\}$  ist kompakt, folglich gilt  $\varphi((X \oplus B(0, R)) \times [0, R]) < \infty$ . Somit trifft  $X$  nur endlich viele Kugeln  $B(y_1, r_1), \dots, B(y_n, r_n)$  aus  $B(\varphi)$  und wir erhalten  $x \in \bigcup_{i=1}^n B(y_i, r_i) \subset B(\varphi)$ . Der Beweis für  $C(\varphi, x_0)$  kann analog geführt werden.  $\square$

**Lemma A.2.2** *Sei  $(x, r) \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ ,  $(x, r) \neq (x_0, r_0)$ . Es existiert ein minimales  $m \in \mathbb{N}$ , so dass sich Punkte  $(x_1, r_1), \dots, (x_m, r_m) = (x, r)$  in  $\varphi \cap C(\varphi, x_0)$  finden lassen mit  $B(x_i, r_i) \cap B(x_{i+1}, r_{i+1}) \neq \emptyset$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ .*

**Beweis:** Seien  $C_1$  die Vereinigung von  $B(x_0, r_0)$  und den Kugeln  $B(x, r)$  aller  $(x, r) \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ , für welche ein  $m \in \mathbb{N}$  wie in Lemma A.2.2 angegeben existiert und  $C_2$  die Vereinigung der Kugeln  $B(x, r)$  aller übrigen  $(x, r) \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ . Die Mengen  $C_1$  und  $C_2$  sind offensichtlich disjunkt. Wie im Beweis von Lemma A.2.1 zeigt man, dass  $C_1$  und  $C_2$  abgeschlossen sind. Da disjunkte abgeschlossene Teilmengen des  $\mathbb{R}^d$  disjunkte Umgebungen besitzen und  $C_1 \cup C_2$  zusammenhängend ist, muss  $C_2$  leer sein.  $\square$

**Lemma A.2.3** *Es ist  $\varphi \cap C(\varphi, x_0) = H_\infty$ . Gilt ferner  $\sigma_{m+1} < \tau_{m+1}$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , so sind  $\varphi \cap C(\varphi, x_0) = H_m$  und  $S_n(\varphi) = S_{m+1}(\varphi)$ ,  $n \geq m+1$ .*

**Beweis:** Zunächst gilt nach Definition  $G_0 \subset \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ . Ist nun  $H_n \subset \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ , so ergibt sich nach Konstruktion auch  $G_{n+1} \subset \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ . Wir erhalten  $H_\infty \subset \varphi \cap C(\varphi, x_0)$  durch vollständige Induktion.

Sei  $(x, r) \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ , oBdA  $(x, r) \neq (x_0, r_0)$ . Nach Lemma A.2.2 existiert ein minimales  $m \in \mathbb{N}$ , so dass sich Punkte  $(x_1, r_1), \dots, (x_m, r_m) = (x, r)$  in  $\varphi \cap C(\varphi, x_0)$  finden lassen mit  $B(x_i, r_i) \cap B(x_{i+1}, r_{i+1}) \neq \emptyset$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ . Wir nehmen zunächst

$$(x_{m-1}, r_{m-1}) \in G_k \tag{A.2.1}$$

für ein  $k \in \mathbb{N}$  an und setzen  $d := \|x_m - x_{m-1}\|$ . Sei  $n \geq k$ . Aus

$$d \leq r_{m-1} + r_m \leq r_{m-1} + R \leq t_{n,k} + \sigma_{n+1}$$

folgt

$$(x, r) \in \varphi \cap B(x_{m-1}, d) \subset \varphi \cap B(x_{m-1}, r_{m-1} + R) \subset \varphi \cap f_{n+1}(\sigma_{n+1}).$$

Angenommen,  $x \notin S_{n+1}(\varphi)$  für alle  $n \geq k$ . Wegen  $(x_{m-1}, r_{m-1}) \in G_k \subset S_k(\varphi) \times [0, R]$  und  $x \notin S_{k+1}(\varphi)$  ist  $\tau_{k+1} < d$ . Aus  $(x, r) \in f_{n+1}(\sigma_{n+1}) \cap (\varphi \setminus \varphi_n)$  und  $x \notin S_{n+1}(\varphi)$ ,  $n \geq k$ , folgt  $\tau_{n+1} < \sigma_{n+1}$ , und für alle  $n \geq k$  existieren

$$y_n \in f_{n+1}(\tau_{n+1}) \cap (\varphi \setminus \varphi_n) = \varphi \cap S_{n+1}(\varphi) \cap S_n^c(\varphi).$$

Wir erhalten  $S_k(\varphi) \neq E$ , folglich gelten  $S_k(\varphi) \in \mathcal{C}$  und  $c := \sup_{a \in S_k(\varphi)} \|x_0 - a\| < \infty$  sowie  $y_i \neq y_j$  für  $i \neq j$ . Induktiv ergibt sich

$$d(x_0, y_n) \leq c + \sum_{j=k+1}^{n+1} \tau_j.$$

Die Lokalendlichkeit von  $\varphi(\cdot \times [0, R])$  liefert ein  $\nu \geq k$  mit

$$t_{\nu,k} + \tau_{\nu+1} = t_{\nu+1,k} = \sum_{j=k+1}^{\nu+1} \tau_j \geq d.$$

Wir erhalten

$$(x, r) \in \varphi \cap B(x_{m-1}, d) \subset B(x_{m-1}, (t_{\nu,k} + \tau_{\nu+1}) \wedge (r_{m-1} + R)) \subset S_{\nu+1}(\varphi),$$

ein Widerspruch. Folglich gilt  $(x, r) \in \varphi_{n+1} = \varphi \cap S_{n+1}(\varphi)$  für ein  $n \geq k$ . Ist  $(x, r) \notin \varphi \cap G_j$  für alle  $j \leq n$ , so erhält man  $(x, r) \in G_{n+1}$  aus  $B(x, r) \cap B(x_{m-1}, r_{m-1}) \neq \emptyset$  und  $(x_{m-1}, r_{m-1}) \in G_k \subset H_n$ .

Wir zeigen jetzt, dass die Forderung (A.2.1) keine Beschränkung der Allgemeinheit darstellt. Hierfür seien  $m \geq 2$  und  $(x_{m-1}, r_{m-1}) \notin H_\infty$  angenommen. Wegen  $(x_0, r_0) \in G_0 \subset H_\infty$  existiert ein kleinstes  $i \in \{1, \dots, m-1\}$  mit  $(x_i, r_i) \notin H_\infty$  und  $(x_{i-1}, r_{i-1}) \in H_\infty$ . Ersetze in obigem Teil des Beweises  $m$  durch  $i$  und erhalte den Widerspruch  $(x_i, r_i) \in H_\infty$ . Insgesamt folgt  $\varphi \cap C(\varphi, x_0) \subset H_\infty$ .

Gilt  $\sigma_{m+1} < \tau_{m+1}$  für ein  $m \in \mathbb{N}_0$ , so ist

$$f_{m+1}(s_{m+1}) \cap (\varphi \setminus \varphi_m) = f_{m+1}(\sigma_{m+1}) \cap (\varphi \setminus \varphi_m) = \emptyset,$$

folglich  $\varphi_{m+1} = \varphi \cap f_{m+1}(s_{m+1}) = \varphi_m$ . Angenommen  $G_{m+1} \neq \emptyset$  und  $(x, r) \in G_{m+1}$ . Ist  $m = 0$ , so  $(x, r) \in \varphi_1 = \varphi_0 = G_0$ , insbesondere  $(x, r) \notin G_1$ , ein Widerspruch. Sei  $m \geq 1$ . Nach Definition von  $G_{m+1}$  ist  $(x, r)$  verbindbar in  $\varphi_{m+1}$  mit einem  $(x', r') \in H_m$  und  $(x', r')$  ist verbindbar in  $\varphi_m$  mit einem  $(\tilde{x}, \tilde{r}) \in H_{m-1}$ . Nun ist  $\varphi_{m+1} = \varphi_m$ , somit ist  $(x, r)$  verbindbar in  $\varphi_m$  mit  $(\tilde{x}, \tilde{r})$ . Folglich gilt  $(x, r) \in H_m$ , ein Widerspruch. Wir erhalten  $G_{m+1} = \emptyset$ ,  $H_{m+1} = H_m$  und  $f_{m+2}(t) = S_{m+1}(\varphi)$  für alle  $t \geq 0$ . Hieraus folgen sukzessive  $S_n(\varphi) = S_{m+1}(\varphi)$ ,  $\varphi_n = \varphi_m$ ,  $G_n = \emptyset$  und  $H_n = H_m$ ,  $n \geq m+1$ . Folglich ist  $H_\infty = H_m$ , was die zweite Behauptung beweist.  $\square$

**Lemma A.2.4** Die Menge  $S_\infty(\varphi) := \bigcup_{n=1}^\infty S_n(\varphi)$  enthält das Cluster  $C(\varphi, x_0)$ . Für alle  $x \in \mathbb{R}^d$  gilt ferner  $x \in S_\infty(\varphi)$  genau dann, wenn  $B(x, R) \cap C(\varphi, x_0) \neq \emptyset$  ist.

**Beweis:** Sei  $(x', r') \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$ . Nach Lemma A.2.3 existiert ein  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $(x', r') \in G_k$ . Man beweise nun

$$t_{\nu,k} + \tau_{\nu+1} = t_{\nu+1,k} = \sum_{j=k+1}^{\nu+1} \tau_j \geq r' + R \quad (\text{A.2.2})$$

für ein  $\nu \geq k$  analog zum Beweis des ersten Teils von Lemma A.2.3 mittels der Lokalendlichkeit von  $\varphi(\cdot \times [0, R])$ . Die Definition von  $\sigma_{\nu+1}$  liefert

$$t_{\nu,k} + \sigma_{\nu+1} \geq r' + R. \quad (\text{A.2.3})$$

Aus (A.2.2) und (A.2.3) ergibt sich

$$B(x', r' + R) \subset f_{\nu+1}(\tau_{\nu+1} \wedge \sigma_{\nu+1}) = S_{\nu+1}(\varphi).$$

Nach Konstruktion und Lemma A.2.3 ist  $S_n(\varphi)$  für festes  $n \in \mathbb{N}_0$  die Vereinigung von Kugeln  $B(\tilde{x}, t)$ , wobei  $(\tilde{x}, \tilde{r}) \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$  und  $t \leq \tilde{r} + R$  sind. Insbesondere existiert für  $x \in S_n(\varphi)$  ein  $(\tilde{x}, \tilde{r}) \in \varphi \cap C(\varphi, x_0)$  mit

$$\emptyset \neq B(x, R) \cap B(\tilde{x}, \tilde{r}) \subset B(x, R) \cap C(\varphi, x_0).$$

Nun gelte umgekehrt  $B(x, R) \cap B(\tilde{x}, \tilde{r}) \neq \emptyset$  für ein  $(\tilde{x}, \tilde{r}) \in \varphi \cap C(x_0) = H_\infty$  und ein  $x \in \mathbb{R}^d$ . Wie bereits nachgewiesen, ist  $B(\tilde{x}, \tilde{r} + R) \subset S_{\nu+1}(\varphi)$  für ein  $\nu \in \mathbb{N}_0$ , somit gilt

$$x \in B(\tilde{x}, \tilde{r} + R) \subset S_{\nu+1}(\varphi) \subset S_\infty(\varphi).$$

Insgesamt folgt die zweite Behauptung, welche die erste impliziert.  $\square$

**Lemma A.2.5** Die Abbildung  $C^*(x_0) : \mathbf{N}_Y \rightarrow \mathcal{F}$  ist messbar.

**Beweis:** Für  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$  setze zunächst  $C_0^*(\varphi) := B(x_0, r_0)$ . Ist  $C_n^*(\varphi)$  erklärt, so sei  $C_{n+1}^*(\varphi)$  die Vereinigung aller Kugeln  $B(x, r)$ ,  $(x, r) \in \varphi_* := \varphi \cap \{x_0\}^c$  mit  $B(x, r) \cap C_n^*(\varphi) \neq \emptyset$ . Wir zeigen induktiv die Kompaktheit von  $C_n^*(\varphi)$ ,  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ , und die Messbarkeit der zugehörigen Abbildung  $C_n^*$ . Für  $n = 0$  ist nichts zu zeigen. Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $C_n^*$  messbar mit Bild in  $\mathcal{C}$  und  $\varphi \in \mathbf{N}_Y$ . Wegen  $C_{n+1}^*(\varphi) \subset C_n^*(\varphi) \oplus B(0, R)$  ist  $C_{n+1}^*(\varphi)$  beschränkt und Vereinigung nur endlich vieler Kugeln. Somit ist  $C_{n+1}^*(\varphi)$  auch abgeschlossen. Wir setzen

$$H_{m,k,a,q} := (B(a, 1/k) \cap \{x_0\}^c \cap [-m, m]^d) \times B(q, 1/k).$$

Die Messbarkeit von  $C_{n+1}^*$  folgt aus

$$\begin{aligned} \{C_{n+1}^* \cap F \neq \emptyset\} &= \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \exists(x, r) \in \varphi_* : B(x, r) \cap C_n^*(\varphi) \neq \emptyset, B(x, r) \cap F \neq \emptyset\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{a \in \mathbb{Q}^d, q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}} \{\varphi \in \mathbf{N}_Y : \varphi(H_{m,k,a,q}) \geq 1, B(a, q + 2/k) \cap C_n^*(\varphi) \neq \emptyset, \\ &\quad B(a, q + 2/k) \cap F \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

für beliebiges  $F \in \mathcal{F}$ . Wir erhalten somit induktiv die Messbarkeit der  $C_n^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und hieraus mittels Satz 1.1.7 die Messbarkeit von  $C^*(x_0) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n^*$ , vgl. Lemma A.2.2.  $\square$

## A.2.2 Ergänzungen zu Unterabschnitt 2.3.1

**Lemma A.2.6** *Es sind  $\mathbf{N}_g \in \mathcal{N}$  und  $\mathbf{N}_q \in \mathcal{N}$ .*

**Beweis:** Sei  $k \in \{3, \dots, d+1\}$ . Wir definieren Abbildungen  $f_k : (\mathbb{R}^d)^k \rightarrow \{0, 1\}$  und  $h_k : \mathbf{N} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$  durch

$$f_k(x_1, \dots, x_k) := \mathbf{1}\{x_k \in \text{Aff}(\{x_1, \dots, x_{k-1}\})\}$$

und

$$h(\phi) := \int f_k(x_1, \dots, x_k) \phi^{(k)}(d(x_1, \dots, x_k)).$$

Mit  $\text{Aff}(B)$  sei dabei die affine Hülle von  $B \subset \mathbb{R}^d$  bezeichnet. Das Urbild von  $\{0\}$  unter  $f_k$  ist offen in  $(\mathbb{R}^d)^k$ , die Messbarkeit von  $f$  somit gesichert. Lemma A.4.1 liefert zusammen mit Lemmata A.4.2 und A.4.3 die Messbarkeit von  $h$ . Die Menge  $A_k$  aller  $\phi \in \mathbf{N}$ , für welche  $x_1, \dots, x_k \in \phi$  stets in allgemeiner Lage sind, ist wegen

$$A_k = \{\phi \in \mathbf{N} : h(\phi) = 0\}$$

ebenfalls messbar. Die Messbarkeit von  $\mathbf{N}_g$  ergibt sich aus

$$\mathbf{N}_g = \bigcap_{k=3}^{d+1} A_k \in \mathcal{N}.$$

Die Menge aller  $(x_1, \dots, x_{d+2})$ , so dass  $x_1, \dots, x_{d+2}$  nicht auf dem Rand einer Kugel liegen, ist ebenfalls offen in  $(\mathbb{R}^d)^{d+2}$ , und wir folgern analog, dass die Menge  $A_{d+2}$  aller  $\phi \in \mathbf{N}$ , für welche keine  $x_1, \dots, x_{d+2} \in \phi$  auf dem Rand einer Kugel liegen, messbar ist. Man erhält wie behauptet  $\mathbf{N}_q = \mathbf{N}_g \cap A_{d+2} \in \mathcal{N}$ .  $\square$

### A.2.3 Ergänzungen zu Unterabschnitt 2.3.4

**Lemma A.2.7** Die Abbildungen  $S, F_k : (\mathbb{R}^d)^{d-k+1} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $Z : (\mathbb{R}^d)^{d-k+1} \rightarrow \mathcal{F}$  sind messbar.

**Beweis:** Zunächst gilt für  $x_1, \dots, x_{d-k+1} \in \mathbb{R}^d, \phi \in \mathbf{N}$ ,

$$\begin{aligned} F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) &= Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap \{x \in \mathbb{R}^d : B^0(x, \|x - x_1\|) \cap \phi = \emptyset\} \\ &= Z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \cap C(\phi \cup \{x_1\}, x_1). \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

Das Urbild von  $Z \cap G \neq \emptyset$  ist für  $G \in \mathcal{G}$  offen in  $(\mathbb{R}^d)^{d-k+1}$ , folglich ist  $Z : (\mathbb{R}^d)^{d-k+1} \rightarrow \mathcal{F}$  messbar.

Für festes  $q \in \mathbb{Q}^d$  ist die Abbildung  $x_1 \mapsto B(q, \|q - x_1\|) \in \mathcal{F}$  messbar, da für festes  $G \in \mathcal{G}$  die Menge aller  $x_1 \in \mathbb{R}^d$  mit  $B(q, \|q - x_1\|) \cap G \neq \emptyset$  offen ist. Ferner gilt für  $G \in \mathcal{G}$

$$C(\phi \cup \{x_1\}, x_1) \cap G \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Q}^d \cap G : \phi \cap B(q, \|q - x_1\|) \cap \{x_1\}^c = \emptyset.$$

Nach Lemma A.1.2 ist für alle  $q \in \mathbb{Q}^d$  die Abbildung  $(x_1, \phi) \mapsto \phi \cap B(q, \|q - x_1\|) \cap \{x_1\}^c$  messbar, folglich auch  $(x_1, \phi) \mapsto C(\phi \cup \{x_1\}, x_1)$ . Insgesamt erhalten wir mittels (A.2.4) die Messbarkeit von  $F_k$ , wieder nach Satz 1.1.7.

Sei zunächst  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}$ . Es gilt  $S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) \cap G \neq \emptyset$  für  $G \in \mathcal{G}$  genau dann, wenn ein  $q \in \mathbb{Q}^d \cap G$  und ein Ecke  $y$  von  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$  existieren mit  $q \in B(y, \|y - x_1\|)$ , letzteres bedeutet gerade  $\|q - y\| \leq \|y - x_1\|$ , und das ist äquivalent zu

$$\langle y, x_1 - q \rangle \leq \frac{\|x_1\|^2 - \|q\|^2}{2}. \quad (\text{A.2.5})$$

Es sei

$$H(x_1, q) := \{x \in E : \langle x, x_1 - q \rangle \leq 2^{-1}(\|x_1\|^2 - \|q\|^2)\}.$$

Nach den oben angestellten Überlegungen gilt  $q \in S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$  folglich genau dann, wenn der Halbraum  $H(x_1, q)$  und die Eckenmenge des Polytops  $F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)$  nichtleeren Schnitt haben. Dies ist äquivalent zu

$$H(x_1, q) \cap F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) \neq \emptyset.$$

Wir zeigen die Messbarkeit von  $H(\cdot, q)$ . Gilt  $H(x_1, q) \cap G \neq \emptyset$  für ein  $G \in \mathcal{G}$  und ein  $x_1 \in \mathbb{R}^d$ , so existiert ein  $x \in G$  mit

$$\langle x, q - x_1 \rangle < 2^{-1}(\|x_1\|^2 - \|q\|^2). \quad (\text{A.2.6})$$

Folglich existiert ein Umgebung  $U$  von  $x_1$ , so dass (A.2.6) richtig bleibt, wenn man  $x_1$  durch  $x' \in U$  ersetzt. Insbesondere gilt  $H(x', q) \cap G \neq \emptyset$  für alle  $x' \in U$  und das Urbild von

$H(\cdot, q) \cap G \neq \emptyset$  ist offen. Die Abbildung  $H$  ist somit messbar. Wir erhalten aus Satz 1.1.7, der Messbarkeit von  $F_k$ ,  $H(\cdot, q)$  und  $\mathcal{C}$  die Messbarkeit der Menge

$$\{S \cap G \neq \emptyset\} \cap \{F_k \in \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap G} \{F_k \cap H(\cdot, q) \neq \emptyset\} \cap \{F_k \in \mathcal{C}\}.$$

Auf  $\{F_k \notin \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}\}$  gilt  $S \equiv \mathbb{R}^d$  gemäß Definition von  $S$ , somit ergibt sich aus der Messbarkeit von  $F_k$

$$\{S \cap G \neq \emptyset\} \cap \{F_k \notin \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}\} = \{F_k \notin \mathcal{C} \setminus \{\emptyset\}\} \in \mathcal{B}^{\otimes(d-k+1)} \otimes \mathcal{N},$$

und die Messbarkeit von  $S$  ist gezeigt.  $\square$

## A.3 Ergänzungen zu Kapitel 3

### A.3.1 Ergänzungen zu Unterabschnitt 3.2.1

In [32] wird zu einer gegebenen Menge  $H \in \mathcal{N}$  und einer gegebenen messbaren Abbildung  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{C}$  für  $\phi \in \mathbf{N}$  ein endlicher Subprozess  $\psi \subset \phi$  betrachtet, welcher durch die Forderungen  $\psi \in H$  und  $(\phi - \psi)(S(\psi)) = 0$  eindeutig festgelegt ist. Existiert zu jedem  $\phi$  ein derartiges  $\psi =: \Psi(\phi)$ , so nennen wir die Abbildung  $\Psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  *eindeutiger Subprozess zu  $S$  und  $H$* . Wir wollen hier beweisen, dass dieser Ansatz zuzüglich einer weiteren Bedingung äquivalent zum Konzept der kompakten Stoppmengen ist. Der Grundraum sei ein lokalkompakter Hausdorffraum  $E$  mit abzählbarer Basis.

**Lemma A.3.1** *Ist die Abbildung  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{C}$  eine kompakte Stoppmenge, so ist die durch  $\Psi(\phi) := \phi \cap S(\phi)$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ , definierte Abbildung  $\Psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  ein eindeutiger Subprozess zu  $S$  und  $H := \{\psi \in \mathbf{N} : \psi \subset S(\psi)\}$ . Sind umgekehrt  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{C}$  eine messbare Abbildung,  $H \in \mathcal{N}$  und  $\Psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  ein eindeutiger Subprozess zu  $S$  und  $H$  mit  $\Psi(\phi) \subset S(\Psi(\phi))$ ,  $\phi \in \mathbf{N}$ , so ist  $S \circ \Psi$  eine kompakte Stoppmenge.*

**Beweis:** Sei  $S$  zunächst eine Stoppmenge. Nach Satz 1.2.20 ist  $\psi = \phi \cap S(\psi)$  für alle  $\phi, \psi \in \mathbf{N}$  äquivalent zu  $\psi = \phi \cap S(\phi)$ . Hieraus folgt wegen

$$\psi \subset S(\psi), \quad (\phi - \psi)(S(\psi)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \phi \cap S(\psi)$$

für  $\phi, \psi \in \mathbf{N}$  mit  $\psi \subset \phi$ , dass  $\Psi(\phi) := \phi \cap S(\phi)$  ein eindeutiger Subprozess zu  $S$  und

$$H := \{\psi \in \mathbf{N} : \psi \subset S(\psi)\} = \{\psi \in \mathbf{N} : \psi = \psi \cap S(\psi)\} \in \mathcal{N}$$

ist. Die Endlichkeit von  $\Psi(\phi)$  folgt aus  $S(\phi) \in \mathcal{C}$ .

Umgekehrt sei  $\Psi$  ein eindeutiger Subprozess zu  $H \in \mathcal{N}$  und einer messbaren Abbildung  $S : \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $\Psi \subset S \circ \Psi$ . Es gelte  $S(\Psi(\phi)) \subset K$  für ein  $\phi \in \mathbf{N}$  und ein  $K \in \mathcal{C}$ . Folglich sind

$$\Psi(\phi) \subset \phi \cap S(\Psi(\phi)) \subset \phi_K$$

und

$$(\phi_K - \Psi(\phi))(S(\Psi(\phi))) = (\phi - \Psi(\phi))(S(\Psi(\phi))) = 0.$$

Aus der Eindeutigkeit des Subprozesses zu  $\phi_K$  folgt  $\Psi(\phi_K) = \Psi(\phi)$ . Insbesondere ist

$$S(\Psi(\phi_K)) = S(\Psi(\phi)) \subset K.$$

Gilt umgekehrt  $S(\Psi(\phi_K)) \subset K$ , so erhalten wir analog  $\Psi(\phi) = \Psi(\phi_K)$  und  $S(\Psi(\phi)) \subset K$ . Insgesamt ergibt sich

$$S(\Psi(\phi)) \subset K \quad \Leftrightarrow \quad S(\Psi(\phi_K)) \subset K. \quad (\text{A.3.1})$$

Es bleibt noch die Messbarkeit von  $\Psi$  zu zeigen. Für festes  $K \in \mathcal{C}$  gilt  $\Psi(\phi) \subset K$  genau dann, wenn ein  $\psi \subset \phi_K$  existiert mit  $\psi \in H$  und  $\phi(S(\phi)) = \psi(S(\phi))$ , folglich wenn eine kompakte Menge  $L \subset K$  existiert mit  $\phi_L \in H$  und  $\phi(S(\phi)) = \phi(S(\phi) \cap L)$ . Sei  $\mathcal{D}$  eine abzählbare Basis von  $E$  aus relativ kompakten Mengen, vgl. Satz 1.1.1, und  $\mathcal{D}'$  das System aller endlichen Vereinigungen von Mengen aus  $\mathcal{D}$ . Aus den Sätzen 1.1.1 und 1.1.2 erhält man

$$\{\Psi \subset K\} = \bigcup_{\substack{G \in \mathcal{D}' \\ G \subset K}} \{\phi \in \mathbf{N} : \phi_{\text{cl}G} \in H, \phi(S(\phi)) = \phi(S(\phi) \cap \text{cl}G)\} \in \mathcal{N},$$

Die Stoppmengeneigenschaft von  $S \circ \Psi$  folgt nun aus (A.3.1).  $\square$

Setzt man die Messbarkeit von  $\Psi$  in der Definition eines eindeutigen Subprozesses voraus, so kann auf die Endlichkeit von  $\Psi$  als auch auf die Kompaktheit von  $S$  verzichtet werden.

## A.4 Ergänzungen zu Kapitel 4

### A.4.1 Ergänzungen zu Unterabschnitt 4.2.4

**Lemma A.4.1** *Seien  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und  $T$  ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Die jeweilige Borelsche  $\sigma$ -Algebra sei mit  $\mathcal{B}(X)$  bzw.  $\mathcal{B}(T)$  bezeichnet. Ferner seien  $T' \in \mathcal{B}(T)$  und*

$$\eta : T' \times \mathcal{B}(X) \rightarrow [0, \infty]$$

eine Abbildung derart, dass  $\eta(t, \cdot)$  für jedes  $t \in T'$  ein lokalendliches Maß auf  $X$  ist. Ist für jedes kompakte  $C \subset X$  die Abbildung

$$t \mapsto \eta(t, C), \quad t \in T',$$

messbar, so ist auch

$$t \mapsto \int_X f(t, x) \eta(t, dx), \quad t \in T',$$

für jede nichtnegative, messbare Abbildung  $f$  auf  $T' \times X$  messbar.

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus den Hilfssätzen 7.2.2 und 7.2.3 in [39]. Man beachte, dass die lokale Kompaktheit von  $T$  nicht erforderlich ist, vgl. [4], S. 242. Die Verallgemeinerung von  $T$  auf  $T' \in \mathcal{B}(T)$  ist trivial.  $\square$

Seien  $E$  ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis und  $\mathbf{M}, \mathbf{N}$  wie gewohnt die Menge aller lokalendlichen Maße bzw. einfachen Zählmaße auf  $E$ .

**Lemma A.4.2** *Der Raum  $\mathbf{M}$  lässt sich derart metrisieren, dass  $\mathbf{M}$  polnisch ist und die zugehörige Borelsche  $\sigma$ -Algebra mit  $\mathcal{M}$  übereinstimmt. Insbesondere besitzt die zugehörige Topologie von  $\mathbf{M}$  eine abzählbare Basis.*

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus [19], Th. A2.3.  $\square$

**Lemma A.4.3** *Es gelten  $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$  und  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ , insbesondere ist  $\mathbf{N} \in \mathcal{M}$ .*

**Beweis:** Vgl. [7], Prop. 7.1.III.  $\square$

## A.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

### A.5.1 Ergänzungen zu Unterabschnitt 5.1.1

**Beispiel A.5.1:** Betrachte  $d = 2$  und

$$\phi := \{(n^{-1}, -n) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{(n^{-1}, n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei  $n \geq 2$  und  $x_1 := (n^{-1}, -n)$  sowie  $x_2 := (n^{-1}, n)$ . Die Kante  $C(\phi, x_1) \cap C(\phi, x_2)$  ist gegeben durch  $[a_n, a_{n+1}] \times \{0\}$  mit

$$a_n := \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{2}, \quad n \geq 2.$$

Das Zentrum der Kante  $[a_n, a_{n+1}] \times \{0\}$  berechnet sich zu  $z(x_1, x_2) = (n^{-1}, 0)$ , der Träger von  $N_{1,*}(\phi, \cdot)$  enthält somit die nicht lokalendliche Menge  $\{(n^{-1}, 0), n \in \mathbb{N}\}$ .

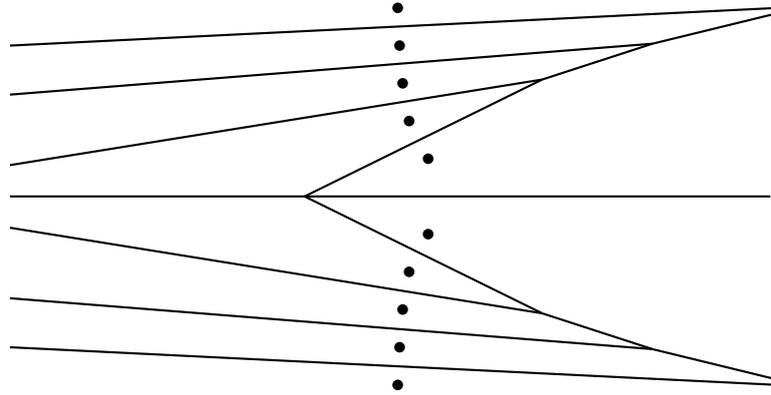


Abbildung A.1: Ausschnitt aus dem Voronoi-Mosaik zu  $\phi := \{(n^{-1}, n), (n^{-1}, -n) : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Lemma A.5.2** Die Abbildungen  $g_{k,i}$ ,  $k = 0, \dots, d$ ,  $i = 1, \dots, d - k + 1$ , sind messbar.

**Beweis:** Sei  $k \in \{0, \dots, d\}$ . Wir bemerken zuerst, dass die Abbildung  $h : (x, t) \mapsto B(x, t) \in \mathcal{F}$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$  messbar ist, da  $h^{-1}(\mathcal{F}_G)$  für alle  $G \in \mathcal{G}$  offen ist. Sei  $\phi \in \mathbf{N}$ . Ein Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  liegt im Fall von  $k \geq 1$  genau dann im relativ Inneren einer  $k$ -Seite  $F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)$ , wenn ein  $q \in \mathbb{Q}^d$  existiert mit

$$M_k(\phi, B(x, q)) = q^k \kappa_k. \quad (\text{A.5.1})$$

Ferner ist  $x$  genau dann eine Ecke, falls  $M_0(\phi, \{x\}) = 1$  gilt. Aus (A.5.1) und Lemma 1.1.11 folgt die Messbarkeit von

$$A_k := \{(\phi, x) \in \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d : x \text{ liegt im relativ Inneren einer } k\text{-Seite } F_k \in \mathcal{S}_k(\phi)\}.$$

Da  $g_{k,i}(\phi, x) = x$  auf  $A_k^c \cup (\mathbf{N}_q \times \mathbb{R}^d)^c$  definiert wurde, reicht es, die Messbarkeit von  $g_{k,i}$  auf  $A \cap (\mathbf{N}_q \times \mathbb{R}^d)$  zu zeigen. Wegen

$$d(\phi, x) \leq t \Leftrightarrow \phi \cap B(x, t) \neq \emptyset, \quad x \in \mathbb{R}^d, \phi \in \mathbf{N}, t \geq 0,$$

ist  $(\phi, x) \mapsto d(\phi, x)$ ,  $(\phi, x) \in \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d$ , messbar nach Lemma A.1.1, folglich auch

$$(\phi, x) \mapsto B(x, d(\phi, x)), \quad (\phi, x) \in A \cap (\mathbf{N}_q \times \mathbb{R}^d).$$

Lemma A.1.1 liefert nun die Messbarkeit von

$$\{g_{k,1}(\phi, x), \dots, g_{k,d-k+1}(\phi, x)\} = \phi \cap B(x, d(\phi, x)), \quad (\phi, x) \in A \cap (\mathbf{N}_q \times \mathbb{R}^d).$$

Hieraus erhält man leicht die Messbarkeit der  $g_{k,i}$ ,  $i = 1, \dots, d - k + 1$ .  $\square$

**Lemma A.5.3** Die Abbildung  $z : (\mathbb{R}^d)^{d-k+1} \rightarrow \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$  ist messbar.

**Beweis:** Sei  $D$  die offene Menge aller  $(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in (\mathbb{R}^d)^{d-k+1}$ , so dass  $x_1, \dots, x_{d-k+1}$  in allgemeiner Lage sind. Die Abbildung  $z$  ist stetig auf  $D$  und konstant auf  $D^c$ . Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Lemma A.5.4** Die Abbildungen  $C_k, D_k : \mathbf{N} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{F}$  sind messbar.

**Beweis:** Sei  $\mathbf{M}_2$  der Raum aller lokalendlichen Maße über  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ . Wir definieren eine Abbildung  $M_{k,z} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}_2$  durch  $(\phi \in \mathbf{N}, B_1, B_2 \in \mathcal{B})$

$$M_{k,z}(\phi, B_1 \times B_2) := \int \mathcal{H}^k(F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) \cap B_1) \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in B_2\} \phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})).$$

Mit den Methoden aus dem Beweis von Lemma 4.2.1 zeigt man die Messbarkeit von  $M_{k,z}$ . Die Messbarkeit von  $F_k$  und  $z$  erhält man dabei aus den Lemmata A.2.7 und A.5.3. Wir erinnern an die Definition von  $A_{k,lok}$  aus Unterabschnitt 5.1.1. Für  $G \subset \mathbb{R}^d$  offen,  $\phi \in \mathbf{N}_q \cap A_{k,lok} \cap \{N_k \in \mathbf{N}\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , gilt nun

$$C_k(\phi, x) \cap G \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad M_{k,z}(\phi, G \times \{x\}) > 0.$$

Die Abbildung  $(\phi, x) \mapsto M_{k,z}(\phi, G \times \{x\})$  ist nach Lemma 1.1.11 messbar. Folglich ist auch  $C_k$  messbar auf  $A_k \times \mathbb{R}^d$ , wobei  $A_k := \mathbf{N}_q \cap A_{k,lok} \cap \{N_k \in \mathbf{N}\}$  sei. Wegen  $C_k \equiv \emptyset$  auf  $A_k^c \times \mathbb{R}^d$  ist die Messbarkeit von  $C_k$  nachgewiesen. Man beachte  $A_k \in \mathcal{N}$ , vgl. Lemmata 5.1.3 und A.2.6 sowie (5.1.3). Der Nachweis der Messbarkeit von  $D_k$  lässt sich analog führen, man betrachte statt  $M_{k,z}$  das Maß

$$M'_{k,z}(\phi, B_1 \times B_2) := \int \mathcal{H}^d(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) \cap B_1) \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in B_2\} \phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})).$$

Die Messbarkeit von  $S$  wird dabei in Lemma A.2.7 gesichert.  $\square$

## A.5.2 Ergänzungen zu Unterabschnitt 5.1.2

**Lemma A.5.5** Für alle  $k \in \{2, \dots, d\}$  und  $m \geq k+1$  sind  $\rho_{k,m}$  und  $\gamma_{k,m}$  positiv.

**Beweis:** Seien  $k \in \{2, \dots, d\}$  und  $m \geq k+1$ . Nach Lemma 5.2.2 reicht es, die Behauptung für  $\gamma_{k,m}$  zu zeigen. Es seien  $\varepsilon \in (0, 1)$  und  $\xi_1, \dots, \xi_{d-k+1} \in B(0, 1)$  in allgemeiner Lage mit

$z(\xi_1, \dots, \xi_{d-k+1}) \in B(0, \varepsilon)$ . Wir wählen Punkte  $v_1, \dots, v_m \in B(0, 6) \setminus B(0, 5)$  derart, dass  $\xi_1, \dots, \xi_{d-k+1}, v_j$  jeweils eine  $k - 1$ -Seite von

$$\hat{F}_k := F_k(\xi_1, \dots, \xi_{d-k+1}, \{v_1, \dots, v_m\})$$

erzeugen, d.h. derart, dass  $\hat{F}_k$  kompakt ist und  $m$   $k - 1$ -Seiten besitzt. Es existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\hat{F}_k \subset B(0, n)$ . Ferner existiert ein  $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ , so dass die Kugeln

$$B(\xi_1, \varepsilon_2), \dots, B(\xi_{d-k+1}, \varepsilon_2), B(v_1, \varepsilon_2), \dots, B(v_m, \varepsilon_2)$$

paarweise disjunkt sind und für alle  $x_i$  und  $y_j$  mit  $x_i \in B(\xi_i, \varepsilon_2)$  und  $y_j \in B(v_j, \varepsilon_2)$

$$\begin{aligned} z &:= z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in B(0, 1), & \{x_1, \dots, x_{d-k+1}\} &\in \mathbf{N}_g, \\ F_k &:= F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \{y_1, \dots, y_m\}) \in B(0, n+1) \end{aligned}$$

gelten und  $F_k$  genau  $m$   $k - 1$ -Seiten besitzt. Abschließend sei eine Konfiguration  $\psi$  auf  $B(0, 2n+5)^c$  gewählt. Seien  $y \in \psi$  und

$$\phi := \{y_1, \dots, y_m\} \cup \psi.$$

Wegen

$$\|x_1 - z\| \leq 1 + \varepsilon_2 + 1 \leq 2n + 5 - 1 \leq \|y - z\|$$

ist

$$z \in F'_k := F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi) \neq \emptyset.$$

Man beachte ferner

$$F'_k \subset F_k \subset B(0, n+1).$$

Sei nun  $x \in F_k$ . Aus

$$\|x_1 - x\| \leq 1 + \varepsilon_2 + n + 1 < 2n + 5 - (n + 1) \leq \|y - x\| \quad (\text{A.5.2})$$

erhält man  $F'_k = F_k$ .  $F'_k$  besitzt folglich genau  $m$   $k - 1$ -Seiten. Die Abschätzung (A.5.2) liefert überdies

$$\psi \cap B(x, \|x - x_1\|) = \emptyset$$

für alle Ecken  $x$  von  $F'_k$ . Folglich gilt

$$\phi(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \phi)) = d - k + 1 + m.$$

Insgesamt erhalten wir mit  $c := \kappa_d(d - k + 1)!$

$$\begin{aligned}
 c \cdot \gamma_{k,m} &= \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{z(x_1, \dots, x_{d-k+1}) \in B(0, 1)\} \\
 &\quad \mathbf{1}\{F_k(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi) \neq \emptyset\} \\
 &\quad \mathbf{1}\{\Phi(S(x_1, \dots, x_{d-k+1}, \Phi)) = d - k + 1 + m\} \Phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})) \\
 &\geq \mathbb{E} \int \mathbf{1}\{x_i \in B(\xi_i, \varepsilon_2), i = 1, \dots, d - k + 1\} \\
 &\quad \mathbf{1}\{\Phi(B(v_j, \varepsilon_2)) = 1, j = 1, \dots, m\} \\
 &\quad \mathbf{1}\{\Phi(B(0, 2n + 5)) = d - k + 1 + m\} \Phi^{(d-k+1)}(d(x_1, \dots, x_{d-k+1})) > 0.
 \end{aligned}$$

Das ist die Behauptung. □

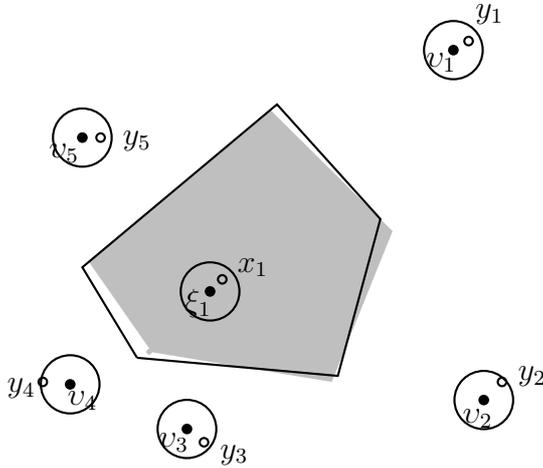


Abbildung A.2: Die graue Zelle gehört zu  $\xi_1$  und  $v_1, \dots, v_5$ . Die nicht gefüllte, umrandete Zelle gehört zu den Punkten  $x_1$  und  $y_1, \dots, y_5$ , welche aus der jeweiligen Umgebung von  $x_1, v_1, \dots, v_5$  gewählt wurden.



# Literaturverzeichnis

- [1] Baumstark, V., Last, G., (2007). Some distributional results for Poisson-Voronoi tessellations. *Adv. Appl. Prob.* **39**, 16–40.
- [2] Calka, P. (2003). Precise formulae for the distribution of the principal geometric characteristics of the typical cells of a two-dimensional Poisson-Voronoi tessellation and a Poisson line process. *Adv. Appl. Prob.* **35**, 551–562.
- [3] Chow, Y. S. (1960). Martingales in a  $\sigma$ -finite measure space indexed by directed sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **97**, 254–285.
- [4] Cohn, D. L. (1980). *Measure Theory*. Birkhäuser, Boston.
- [5] Cowan, R., Quine, M., Zuyev, S. (2003). Decomposition of gamma-distributed domains constructed from Poisson point processes. *Adv. Appl. Prob.* **35**, 56–69.
- [6] Cowan, R. (2006). A more comprehensive complementary theorem for the analysis of Poisson point processes. *Adv. Appl. Prob.* **38**, 581–601.
- [7] Daley, D. J., Vere-Jones, D. (1988). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer, New York.
- [8] Daley, D. J., Stoyan, H., Stoyan, D. (1999). The volume fraction of a Poisson germ model with maximally non-overlapping spherical grains. *Adv. Appl. Prob.* **31**, 610–624.
- [9] Daley, D. J., Last, G. (2005). Descending chains, the lilypond model, and mutual-nearest-neighbour matching. *Adv. Appl. Prob.* **37**, 604–628.
- [10] Federer, H. (1969). *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [11] Gilbert, E. N. (1962). Random subdivisions of space into crystals. *Ann. Math. Stat.* **33**, 958–972.

- [12] Häggström, O., Meester, R. (1996). Nearest Neighbor and Hard Sphere Models in Continuum Percolation. *Random Structures Algorithms* **9**, 295–315.
- [13] Heveling, M., Last, G. (2006). Existence, uniqueness and algorithmic computation of general lilypond systems. *Random Structures Algorithms* **29**, 338–350.
- [14] Heveling, M. (2006). *Bijective point maps, point-stationarity and characterization of Palm measures*. Universitätsverlag Karlsruhe.
- [15] Hinde, A. L., Miles R. E. (1980). Monte Carlo Estimates of the Distributions of the Random Polygons of the Voronoi Tessellation with Respect to a Poisson Process. *J. Statist. Comput. Simul.* **10**, 205–223.
- [16] Hürzeler, H. (1985). The optional sampling theorem for processes indexed by a partially ordered set. *Ann. Probab.* **13**, 1224–1235.
- [17] Isokawa, Y. (2000). Poisson-Voronoi Tessellations in Three-Dimensional Hyperbolic Spaces. *Adv. Appl. Prob.* **32**, 648–662.
- [18] Ivanoff, G., Merzbach, E. (2000). *Set-Indexed Martingales*. Chapman & Hall/CRC.
- [19] Kallenberg, O. (2002). *Foundations of Modern Probability*. Second Edition, Springer, New York.
- [20] Kumar, S., Kurtz, S. K., Banavar, J. R., Sharma, M. G. (1992). Properties of a Three-Dimensional Poisson-Voronoi Tessellation: A Monte Carlo Study. *J. Statist. Phys.* **67**, 523–551.
- [21] Kurtz, G. Th. (1980). The optional sampling theorem for martingales indexed by directed sets. *Ann. Probab.* **8**, 675–681.
- [22] Last, G., Brandt, A. (1995). *Marked Point Processes on The Real Line. The Dynamic Approach*. Springer, New York, Heidelberg.
- [23] Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York.
- [24] Mecke, J. (1967). Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrsch. verw. Geb.* **9**, 36–58.
- [25] Mecke, J. (1980). Palm methods for stationary random mosaics. In *Combinatorial Principles in Stochastic Geometry*. ed. R. V. Ambartzumian. Armenian Academy of Sciences Publishing House, Erevan.
- [26] Mecke, J., Muche, L. (1995). The Poisson Voronoi tessellation. I. A basic identity. *Math. Nachr.* **176**, 199–208.

- [27] Miles, R. E. (1971). Poisson flats in Euclidean spaces. Part II: Homogeneous Poisson flats and the complementary theorem. *Adv. Appl. Prob.* **3**, 1–43.
- [28] Miles, R. E. (1974). A synopsis of ‘Poisson flats in Euclidean spaces’. In *Stochastic Geometry*, ed. E. F. Harding and D. G. Kendall, Wiley, New York.
- [29] Molchanov, I. (2005). *Theory of Random Sets*. Springer, London.
- [30] Møller, J. (1989). Random tessellations in  $\mathbb{R}^d$ . *Adv. Appl. Prob.* **21**, 37–73.
- [31] Møller, J. (1994). *Lectures on Random Voronoi Tessellations*. Lecture Notes Statist. **87**. Springer, New York.
- [32] Møller, J., Zuyev, S. (1996). Gamma-type results and other related properties of Poisson process. *Adv. Appl. Prob.* **28**, 662–673.
- [33] Muche, L. (2005). The Poisson-Voronoi tessellation: relationships for edges. *Adv. Appl. Prob.* **37**, 279–296.
- [34] Okabe, A., Boots, B., Sugihara, K. (1992). *Spatial Tessellations; Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley, Chichester.
- [35] Querenburg, B. v. (2001). *Mengentheoretische Topologie*. 3. Auflage, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [36] Rinow, W. (1975). *Lehrbuch der Topologie*. Dt. Verl. d. Wiss., Berlin.
- [37] Rozanov, Y. A. (1982). *Markov random fields*. Springer, New York.
- [38] Rozanski, R. (1992). Random stopping sets in a sequential analysis of random measures and fields. *J. Statist. Plann. Inference* **30**, 401–412.
- [39] Schneider, R., Weil, W. (1992). *Integralgeometrie*. Teubner, Stuttgart.
- [40] Schneider, R., Weil, W. (2000). *Stochastische Geometrie*. Teubner, Stuttgart.
- [41] Stoyan, D., Kendall, W.S., Mecke, J. (1995). *Stochastic Geometry and Its Applications*. Second Edition, Wiley, Chichester.
- [42] Tanemura, M. (2003). Statistical Distributions of Poisson Voronoi Cells in Two and Three Dimensions. *Forma* **18**, 221–247.
- [43] Zähle, M. (1982). Random processes of Hausdorff rectifiable closed sets. *Math. Nachr.* **108**, 49–72.
- [44] Zuyev, S. (1992). Estimate for Distributions of the Voronoi Polygon’s Geometric Characteristics. *Random Structures Algorithms* **3**, 149–162.

- [45] Zuyev, S. (1999). Stopping sets: gamma-type results and hitting properties. *Adv. Appl. Prob.* **31**, 355–366.
- [46] Zuyev, S. (2006). *Strong Markov property of Poisson processes and Slivnyak formula*. Lecture Notes Statist. **185**. Springer, New York.





# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Volker Baumstark  
Geburtsdatum: 02.06.1977  
Geburtsort: Baden-Baden  
Familienstand: verheiratet  
Staatsangehörigkeit: deutsch

## Schulausbildung

1988-1991 Gymnasium Kolleg St. Sebastian Stegen  
1991-1997 Gymnasium Don-Bosco Distedde  
Juni 1997 Abitur

## Grundwehrdienst

1997-1998 Wehrdienst in Ellwangen und Immendingen

## Studium

1998-2003 Studium der Mathematik, Universität Karlsruhe (TH)  
Februar 2003 Diplom in Wirtschaftsmathematik, Universität Karlsruhe (TH)

## Berufstätigkeit

seit Mai 2003 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der  
Universität Karlsruhe (TH)