

Über die Dehn-Funktion von S -arithmetischen Gruppen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Mathematik der
Universität Karlsruhe
vorgelegte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Anastasia August
aus Gurjew

Tag der mündlichen Prüfung:

11. Juli 2007

Referent:

Prof. Dr. Enrico Leuzinger

Korreferent:

HDoz. Dr. Oliver Baues

Karlsruhe
2007

Danksagungen

Ich danke Herrn Prof. Dr. Enrico Leuzinger ganz herzlich für den Themenvorschlag, für die freundliche und entgegenkommende Betreuung, für die vielen wertvollen Literaturempfehlungen und für die stets konstruktive und hilfreiche Kritik.

Ich danke den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Differentialgeometrie für ihr Interesse für die für mich wichtigen mathematischen Themen, für ihre kritischen Fragen und ihre Diskussionsbereitschaft.

Ich danke Stefan Kühnlein, Oliver Baues und Andreas Weber für ihre Hilfe in Verständnisfragen und ihre Literaturempfehlungen. Ich danke Stefan Kühnlein ganz besonders für das Gegenbeispiel in 3.6.

Ich danke allen Kollegen, ganz besonders Klaus Spitzmüller, für ihre Unterstützung im Übungsbetrieb, die mir erlaubt hat, mehr Zeit meiner Dissertation zu widmen.

Ich danke Lars Hoffmann und besonders meinem Mann Sadeeb Ottenburger für das Korrekturlesen.

Ich danke Sadeeb für die vielen mathematischen Gespräche, seine Kenntnisse der Riemann'schen Geometrie und der homogenen Räume, die mir stets zur Verfügung standen, sein unermüdliches Interesse für meine Arbeit und seine Hilfe bei den Probevorträgen unterschiedlicher Art sowie bei der Literatursuche.

Ich danke Sadeeb, meinen Eltern, meinen Großeltern und meinem Bruder für die liebevolle vielseitige Unterstützung.

Ich danke ganz besonders meiner Mama für die Übernahme eines großen Teils der Kinderbetreuung, die mir die Promotion überhaupt erst ermöglicht hat.

Ich danke meiner kleinen Tochter Celine Marie dafür, dass es sie gibt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Die Dehn-Funktion	8
2.1	Definitionen	8
2.2	Einige bekannte Dehn- und isoperimetrische Funktionen	10
2.3	Der Zusammenhang mit dem Wortproblem	19
3	S-arithmetische Gruppen	21
3.1	Bewertungen	21
3.2	S -ganze Zahlen und weitere Bezeichnungen	22
3.3	Definition von S -arithmetischen Gruppen	23
3.4	S -arithmetische Gruppen als Gitter	26
3.5	Räume, auf denen S -arithmetische Gruppen operieren	29
3.6	Unser Spezialfall	30
4	Ein quasi-isometrisches Modell für Γ	32
4.1	Bruhat-Tits-Bäume	32
4.2	Quasi-Isometrien und das Milnor-Svarc-Kriterium	37
4.3	Horosphären in $CAT(0)$ -Räumen	38
4.4	Konstruktion von Ω	44
4.5	Eine Metrik auf Ω	47
5	Das Combing	49
5.1	Grundlegende Begriffe	49
5.2	Konstruktion eines Combing auf Ω	50
5.3	Vergleichsgeodätische im Modellraum	52
5.4	Die Länge des Combing	55
5.5	Die asynchrone Breite des Combing	58
6	Eine obere Grenze der Dehn-Funktion von Γ	60
6.1	Der Übergang zum Combing auf Γ	60
6.2	Der Satz von Bridson	61
6.3	Gibt es eine exponentielle untere Grenze?	62
7	Literaturverzeichnis	63

1 Einführung

Es seien eine endlich präsentierte Gruppe und zwei Wörter aus einer Präsentation dieser Gruppe gegeben. Stellen diese Wörter dasselbe Element der Gruppe dar? Diese Frage wird in der Abstrakten Algebra das Wortproblem für Gruppen genannt. Für viele Gruppen ist dieses Problem lösbar, aber nicht für alle, wie P. S. Novikov 1955 (und W. W. Boone 1959 in einem viel einfacheren Beweis) gezeigt hat. Wir werden uns mit einer Abbildung beschäftigen, die Aussagen über die Komplexität des Wortproblems von Gruppen ermöglicht, etwa darüber, viele Algorithmenschritte für die Lösung erforderlich sind. Es handelt sich um die sogenannte Dehn-Funktion. Dehn-Funktionen werden nach Max Dehn genannt, der 1911 das erste Wortproblem formulierte. Es war eines der ersten Beispiele unlösbarer Probleme, die weder aus der Mathematischen Logik noch aus der Algorithmentheorie, sondern aus der Algebra kamen. Als ein Ergebnis seiner Unlösbarkeit konnte man die Unlösbarkeit vieler Probleme aus der Kombinatorischen Gruppentheorie nachweisen.

Man kann eine Dehn-Funktion sowohl für endlich präsentierte Gruppen als auch für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten definieren, was wir in Kapitel 2 zeigen werden. Die Dehn-Funktion wurde bereits für einige Gruppen und Räume untersucht. Um nur wenige Beispiele zu nennen:

- * Die Dehn-Funktion einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit X mit nicht-positiver Schnittkrümmung wächst quadratisch [LeuzPit1996, Chapter 1, Example 2],
- * die Dehn-Funktion der Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$ wächst exponentiell [Taback 2003, Theorem 4.1]
- * die Dehn-Funktion von nicht-kompakten Gittern einer zusammenhängenden halbeinfachen Lie-Gruppe mit endlichem Zentrum wächst exponentiell, falls der reelle Rang der Lie-Gruppe gleich zwei ist [LeuzPit1996, Theorem 1.1].
- * die Dehn-Funktion von Automaten-Gruppen wächst quadratisch [CEHLPT, Theorem 2.3.12]
- * Die Dehn-Funktion der Baumslag-Solitar-Gruppe

$$BS(m, n) : \langle x, y | yx^m y^{-1} = x^n \rangle$$

wächst quadratisch für $m = n$ [CEHLPT, Example 7.4.1, Theorem 2.3.12] und exponentiell für $m \neq n$ [CEHLPT, Example 7.4.1] und [Gersten1, Theorem B, §4].

Bemerkenswert ist auch, dass

1 Einführung

- * ...kommensurable Gruppen die gleichen Dehn-Funktionen haben [GhH], [Alonso]
- * ...es (endlich präsentierte) Gruppen mit nicht-rekursiven Dehn-Funktionen gibt [Miller],
- * ...es Gruppen gibt, deren Dehn-Funktion wie n^q wächst, wobei $q \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ [Bridson95] und
- * ...die Dehn-Funktionen quasi-isometrischer Räume übereinstimmen [Gr91].

In dieser Arbeit zeigen wir, dass die Dehn-Funktionen von S -arithmetischen Untergruppen halbeinfacher \mathbb{Q} -Gruppen vom reellen und p_i -adischen Rang 1 höchstens exponentiell wachsen.

Einige Grundlagen der S -arithmetischen Gruppen werden in Kapitel 3 vorgestellt. Eine S -arithmetische Gruppe bekommt man zum Beispiel, wenn man eine algebraische Untergruppe G von $GL_n(\mathbb{K})$ (\mathbb{K} ist ein algebraischer Zahlkörper) mit der Untergruppe $GL_n(\mathcal{O}(S))$ schneidet, wobei $\mathcal{O}(S)$ die Menge der sogenannten S -ganzen Zahlen ist, d.h. die Menge der Elemente aus \mathbb{K} , die bezüglich jeder Bewertung aus der endlichen Menge $S := \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_{p_1}, \dots, |\cdot|_{p_r}\}$ größer oder gleich eins sind. In dieser Arbeit ist G so gewählt, dass $G_{\mathbb{R}}^0 = \text{Isom}(X)$ die Isometriegruppe eines Rang 1 symmetrischen Raums X vom nicht-kompakten Typ ist. Die S -arithmetische Gruppe $\Gamma = G_{\mathcal{O}(S)}$ ist zum Beispiel im Falle $X = \mathbb{R}H^m$ die Gruppe $SO(m, 1)(\mathbb{Z}[\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_r}])$.

Eine Methode zur Berechnung einer oberen Grenze der Dehn-Funktion von Γ bietet ein Satz von M. R. Bridson (s. Kapitel 6) an. Er garantiert unter bestimmten Voraussetzungen, die sich auf gewisse Konstruktionen im Cayley-Graphen von Γ beziehen, dass die Dehn-Funktion von Γ höchstens exponentiell wächst. Ob diese Voraussetzungen erfüllt sind, prüfen wir in Kapitel 5, wobei wir die entsprechende Konstruktion (das sogenannte Combing) nicht in Γ , sondern in einem zu Γ quasi-isometrischen Raum Ω durchführen. Die Existenz und die wesentlichen Eigenschaften dieses Combing stellen sich nämlich als quasi-isometrische Invarianten heraus.

In Kapitel 4 wird ein geeigneter Raum Ω konstruiert. Nach dem Milnor-Svarc-Kriterium [Milnor] ist ein Raum, auf dem Γ eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien operiert, quasi-isometrisch zu Γ . Als Gitter von $G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{Q}_{p_1}} \times \dots \times G_{\mathbb{Q}_{p_r}}$ operiert Γ in natürlicher Weise auf dem Raum $X \times T$, wobei X der symmetrische Raum von oben und T das Produkt von r Bäumen ist (darauf gehen wir in Kapitel 3 ein.). Diese Operation ist zwar eigentlich diskontinuierlich, aber nicht kokompakt, da der Fundamentalbereich nicht beschränkt ist. Bei der Kompaktifizierung des Fundamentalbereichs - man „schneidet“ einfach die Spitzen „ab“ - entstehen gewisse Horobälle in $X \times T$ und der Raum Ω ergibt sich als $X \times T$ ohne diese Horobälle. Auf Ω operiert Γ eigentlich diskontinuierlich und kokompakt und ist somit zu Ω quasi-isometrisch.

Ein Combing ordnet jedem Punkt α aus Ω einen Weg von einem festen Punkt $\alpha_0 \in \Omega$ nach α zu. Bei der Konstruktion eines solchen Combing müssen wir darauf achten, dass die Wege nicht zu lang sind, und dass zwei vergleichbar lange Wege nicht zu weit auseinander laufen, auch wenn sie mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten (also asynchron)

durchlaufen werden. Das größte Problem stellen dabei Horobälle dar, denn sie „stehen“ immer wieder „im Wege“. Das Ausweichen hat eine Vergrößerung der Länge und der asynchronen Breite (s. 5.4 und 5.5) des Combings zur Folge. Wir werden in Kapitel 5 zeigen, dass diese Verlängerung sich jedoch in für den Satz von Bridson ausreichenden Grenzen hält. Ein Übergang zu einem Combing auf Γ liefert mit dem Satz von Bridson eine obere Grenze für die Dehn-Funktion: die Exponentialfunktion in n .

2 Die Dehn-Funktion

2.1 Definitionen

Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und $\langle S|R \rangle$ eine (endliche) Präsentation von G . Das heißt $G \cong F(S)/\langle R \rangle$, wobei $F(S)$ die durch $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ erzeugte freie Gruppe (=die Menge aller „Wörter“ mit „Buchstaben“ b_i aus $S \cup S^{-1}$ mit $b_{i+1} \neq b_i^{-1}$), R eine Menge von Wörtern in $F(S)$ und $\langle R \rangle$ das von R erzeugte Ideal sind. Ist $w \in F(S)$ ein Wort, das in der Äquivalenzklasse von 1_G liegt (d.h. ein *triviales Wort*), so kann man w wie folgt schreiben:

$$w = \prod_{i=1}^N u_i R_i u_i^{-1} \quad \text{mit } u_i \in F(S), R_i \in R.$$

Beispiel Wir betrachten die sogenannte Baumslag-Solitar-Gruppe

$$BS(1, 2) := \langle \{x, y\} \mid yxy^{-1} = x^2 \rangle.$$

In diesem Fall kann man $S = \{x, y\}$ und $R = \{yxy^{-1}x^{-2}\}$ wählen. Sei $w = yxy^{-2}x^{-4}y \in BS(1, 2)$. w ist ein triviales Wort; man erkennt das leicht anhand der Skizze auf der nächsten Seite, die einen Ausschnitt aus dem Cayley-Graphen von $BS(1, 2)$ zeigt. Wir formen um:

$$\begin{aligned} w &= yxy^{-2}x^{-4}y \\ &= yxy^{-1}(x^{-2}x^2)y^{-1}x^{-4}y \\ &= (yxy^{-1}x^{-2})xy^{-1}(x^{-2}(yx^{-1}xy^{-1})x^{-2})y \\ &= (yxy^{-1}x^{-2}) \cdot x(xy^{-1}x^{-2}y)x^{-1} \cdot (xy^{-1}x^{-2}y), \end{aligned}$$

und erhalten so ein Produkt, wie oben.

Die Dehn-Funktion einer Präsentation einer Gruppe

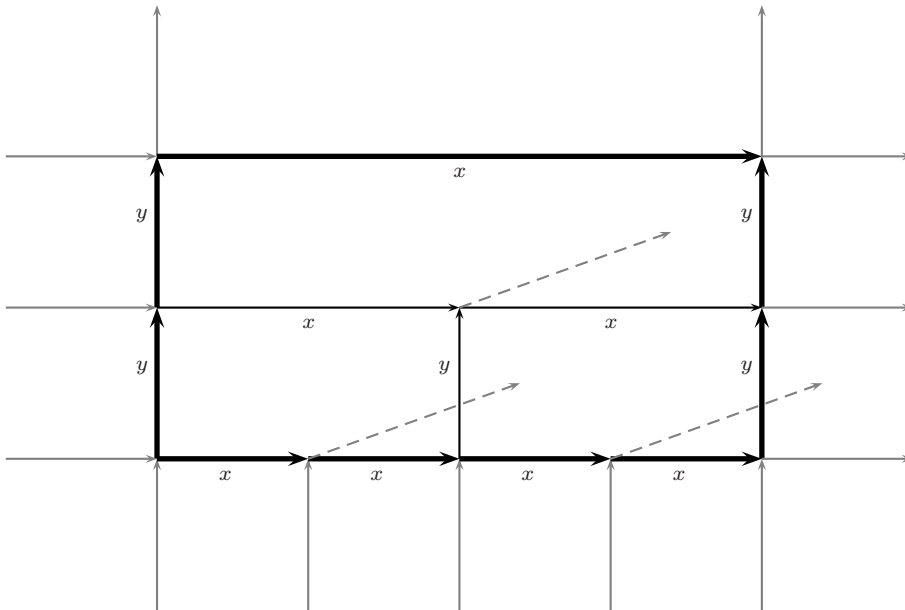
Sei $A(w)$ minimale Anzahl N der erforderlichen Konjugationen in

$$w = \prod_{i=1}^N u_i R_i u_i^{-1} \quad \text{mit } u_i \in F(S), R_i \in R.$$

Die *Dehn-Funktion* von $\langle S|R \rangle$ ist definiert durch

$$\delta(n) = \max_{|w| \leq n} A(w),$$

wobei $|w|$ die Länge von w in der Wortmetrik in dem zu $\langle S|R \rangle$ gehörigen Cayley-Graphen ist.



Die Dehn-Funktion einer Gruppe

Wir betrachten die folgende Äquivalenzrelation auf der Menge der Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$: Sind f und g solche Abbildungen, so schreiben wir $f \prec g$, falls Konstanten A, B, C, D und E aus \mathbb{N} existieren, sodass

$$f(n) \leq Ag(Bn + C) + Dn + E.$$

Gilt $f \prec g$ und $g \prec f$, so heißen f und g äquivalent ($f \sim g$).

Es ist bekannt, dass die Dehn-Funktionen von Präsentationen von quasi-isometrischen Gruppen (s. Kapitel 4) äquivalent sind [Alonso] und [BurTab, Section 1], und dass verschiedene Präsentationen einer Gruppe quasi-isometrische Cayley-Graphen liefern [BurTab, Section 1]. Aus diesem Grund nennt man die Äquivalenzklasse der Dehn-Funktionen, die von verschiedenen Präsentationen einer Gruppe G stammen, die *Dehn-Funktion* von G .

Nach dieser Definition ist die Dehn-Funktion einer Gruppe also unabhängig von der Wahl der erzeugenden Menge S .

Die Dehn-Funktion einer Riemann'schen Mannigfaltigkeit

Seien M eine einfach zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit, S^1 die Einsphäre und $f : S^1 \rightarrow M$ eine Lipschitz-Abbildung. Nach dem Fortsetzungssatz von Whitney [Malgrange, Theorem 4.1] kann f zu einer Lipschitz-Abbildung $\hat{f} : D^2 \rightarrow M$ auf der abgeschlossenen Einheitscheibe D^2 fortgesetzt werden. Seien $\gamma = f(S^1)$, $l(\gamma)$ die Länge von γ und $A(\gamma)$ die minimale Fläche von allen Lipschitz-Kreisscheiben, die von γ begrenzt werden. Dann heißt

$$\delta_M(n) := \sup_{l(\gamma) \leq n} A(\gamma)$$

die *Dehn-Funktion* der Mannigfaltigkeit M .

Die Äquivalenz der geometrischen und der kombinatorischen Dehn-Funktionen

Ähnlich lässt sich die Dehn-Funktion eines einfach zusammenhängenden 2-Komplexes M definieren. J. Burrillo und J. Taback haben die Äquivalenz dieser Dehn-Funktion mit der Dehn-Funktion einer endlich präsentierten auf M eigentlich diskontinuierlich operierenden Gruppe G nachgewiesen [BurTab, Theorem 1.1].

Unser Ziel

In dieser Arbeit wollen wir eine obere Grenze für die Dehn-Funktion von S -arithmetischen Gruppen vom reellen sowie p_i -adischen Rang 1 berechnen. Es handelt sich um die Untergruppe der S -ganzen Zahlen $G_{\mathcal{O}(S)}$ von $G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{Q}_{p_1}} \times \dots \times G_{\mathbb{Q}_{p_r}}$, sodass

$$\text{Rang}_{\mathbb{R}}(G_{\mathbb{R}}) = 1.$$

sowie für jedes $i \in 1, 2, \dots, r$

$$\text{Rang}_{\mathbb{Q}_{p_i}}(G_{\mathbb{Q}_{p_i}}) = 1$$

gilt. Wir zeigen, dass die Dehn-Funktion eine in n exponentiell wachsende obere Grenze hat. Dafür betrachten wir zunächst ein geometrisches Modell für $G_{\mathcal{O}(S)}$, nämlich einen Raum, auf dem diese Gruppe eigentlich diskontinuierlich und kokompakt operiert. Nach dem Milnor-Svarc-Kriterium ist dieser dann zu $G_{\mathcal{O}(S)}$ quasi-isometrisch. Wir werden zeigen, dass die Existenz einer geeigneten Hilfskonstruktion eine quasi-isometrische Invariante ist.

Was S -arithmetische Gruppen genau sind und welches geometrische Modell in Frage kommt, erklärt das Kapitel 2.

2.2 Einige bekannte Dehn- und isoperimetrische Funktionen

Unter einer *isoperimetrischen Funktion* einer Präsentation einer endlich erzeugten Gruppe versteht man eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$, die für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Unglei-

chung erfüllt:

$$\delta(n) = \max_{|w| \leq n} A(w) \leq f(n).$$

Die Dehn-Funktion δ ist somit die minimale isoperimetrische Funktion einer Präsentation. Analog definiert man isoperimetrische Funktionen für Riemann'sche Mannigfaltigkeiten.

Ist δ die Dehn-Funktion einer Gruppe, dann sagen wir „ G erfüllt eine lineare/quadratische/exponentielle *isoperimetrische Ungleichung*“, wenn

$$\delta(n) \prec n, \text{ bzw. } \delta(n) \prec n^2, \text{ bzw. } \delta(n) \prec e^n.$$

In diesem Abschnitt wollen wir die in der Einführung angegebene Liste der bekannten Dehn-Funktionen durch weitere wichtige Beispiele ergänzen.

Lineare isoperimetrische und Dehn-Funktionen

Für Präsentationen von endlich präsentierten Gruppen, die eine (höchstens) linear wachsende Dehn-Funktion haben, gibt es eine schöne Charakterisierung. Um sie anzugeben, müssen wir einige Begriffe erklären.

Seien G und $\langle S|R \rangle$ wie in 2.1, Γ der damit assoziierte Cayley-Graph, versehen mit der Wortmetrik $|\cdot|$. Die Gruppe G heißt *Wort-hyperbolisch* (andere Namen: *hyperbolisch*, *negativ gekrümmt*, *Gromov-hyperbolisch*, *δ -hyperbolisch*), wenn der geodätische metrische Raum Γ δ -hyperbolisch ist, das heißt wenn jede Seite eines Dreiecks von Γ in einer δ -Umgebung der beiden anderen Seiten liegt. Der Begriff „Wort-hyperbolisch“ geht auf Gromov ([Gr87]) zurück. Man sagt, die Präsentation $\langle S|R \rangle$ *erfüllt den Dehn-Algorithmus*, wenn für jedes nicht-leere triviale Wort w ein Relator $R_i \in R$ existiert, von dem ein zusammenhängender Teil aus mehr als die Hälfte der Buchstaben ein Teilwort von w ist. Ist S eine endliche Menge von Erzeugern von G , dann existiert zu einer genügend großen Zahl $N \in \mathbb{N}$ eine Präsentation \mathcal{P}_N mit Erzeugern S und Relatoren der Länge höchstens N , die eine Präsentation von G ist.

Satz 2.1. *Für eine endlich präsentierte Gruppe G sind folgende vier Aussagen äquivalent:*

- (1) *G hat eine lineare isoperimetrische Funktion.*
- (2) *G ist Wort-hyperbolisch.*
- (3) *G hat eine endliche Präsentation, die den Dehn-Algorithmus erfüllt.*
- (4) *Ist S eine endliche Menge von Erzeugern von G , dann erfüllt \mathcal{P}_N den Dehn-Algorithmus für jedes genügend große N .*

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [ABC].

Um ein Beispiel für eine Gruppe mit linearer Dehn-Funktion anzugeben, betrachten wir ein kokompaktes Gitter Γ in einer halbeinfachen Lie-Gruppe G (Das heißt, Γ ist

eine diskrete Untergruppe von G und G/Γ hat ein endliches G -invariantes Maß). Γ ist quasi-isometrisch zu dem nicht-positiv gekrümmten symmetrischen Raum G/K , wobei K eine maximale kompakte Untergruppe von G ist. (Die Definition einer Quasi-Isometrie findet man in 4.2.) Ist der reelle Rang von G gleich 1, so ist die Schnittkrümmung von G/K strikt negativ, was zur Folge hat, dass Γ δ -hyperbolisch ist ([LeuzPit2004, 1.2, p. 726-727]). Ist der reelle Rang größer oder gleich 2, erhält man eine quadratische Dehn-Funktion ([LeuzPit2004, 1.2, p. 726-727]), worauf wir später genauer eingehen.

Subquadratische isoperimetrische Funktionen

Gromov behauptete, dass endliche Präsentationen, die subquadratische isoperimetrische Funktionen haben, auch lineare isoperimetrische Funktionen besitzen, also Wort-hyperbolisch sind [Gr87, 2.3.F]. A. Olshanskii fand 1991 einen Beweis dieses Resultats [Ol91].

Quadratische isoperimetrische und Dehn-Funktionen

Die Dehn-Funktion der Fundamentalgruppe einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M mit einer Riemann'schen Metrik mit nicht-positiver Krümmung ist höchstens quadratisch. Eine anschauliche Begründung dafür findet man in [LeuzPit2004, 1.2]: Ist c eine Schleife der Länge n in der universellen Überlagerung von M , so wählen wir einen Punkt $x_0 \in c$ und betrachten für jeden anderen Punkt $x \in c$ das eindeutige geodätische Segment zwischen x und x_0 . Diese Geodätischen bilden wegen der Konvexität der Abstandsfunktion ([BGroS]) eine von c eingeschlossene Fläche. Unterteilt man c in n Teilkurven (angefangen bei x_0), so setzt sich diese Fläche im Wesentlichen aus 2 „Zweiecken“ und $n - 2$ „Dreiecken“ zusammen, jeweils mit einem Flächeninhalt von höchstens n Einheiten. Der Gesamtinhalt der Fläche ist somit höchstens $n \cdot n = n^2$.

Wie bereits oben erwähnt, ist ein kokompaktes Gitter Γ einer halbeinfachen Lie-Gruppe G quasi-isometrisch (Def. s. 4.2) zum nicht-positiv gekrümmten symmetrischen Raum G/K , wobei K eine maximale kompakte Untergruppe von G ist. Also ist die Dehn-Funktion von Γ höchstens quadratisch. Ist der reelle Rang von G mindestens 2, so enthält der symmetrische Raum G/K total geodätische euklidische Unterräume der Dimension 2. Daher ist die Dehn-Funktion von Γ mindestens und somit exakt quadratisch ([LeuzPit2004, 1.2, p. 726-727]).

Die Dehn-Funktionen von nicht-kompakten Gittern Γ von halbeinfachen reellen Lie-Gruppen G sind höchstens exponentiell ([Gr91]) (Darauf gehen wir später ein.). Ist der \mathbb{Q} -Rang von Γ gleich 1 und der reelle Rang von G größer oder gleich 3, so ist die Dehn-Funktion quadratisch ([Dru04, Theorem 1.2]). Diese Eigenschaften hat zum Beispiel die Hilbert-modulare Gruppe $PSL_2(\mathcal{O}_{\mathbb{K}})$, wobei $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ der Ring der ganzen Zahlen eines sogenannten total reellen Körpers K (das heißt das Bild jeder Einbettung von K in \mathbb{C} liegt in \mathbb{R}) mit $[K : \mathbb{Q}] \geq 3$ [Dru04, S. 986]. Weitere Beispiele findet man in [Morris] und [Tits66].

Offen bleibt die Frage, welches Wachstum die Dehn-Funktion der Gruppe $SL(n, \mathbb{Z})$ für $n \geq 4$ aufweist ($SL(3, \mathbb{Z})$ hat eine exponentielle Dehn-Funktion ([Thurston], [Gersten93,

Theorem 3.3])). Thurstons Vermutung ist, dass die Dehn-Funktion von $SL(n, \mathbb{Z})$ für $n \geq 4$ quadratisch wächst [Gersten93, S. 7].

Eine Methode, nicht-kompakte Gitter Γ von halbeinfachen Lie-Gruppen G mit endlichem Zentrum zu untersuchen, besteht darin, einen bestimmten Teilraum X_0 des symmetrischen Raums G/K zu betrachten. Dieser sogenannte kokompakte Kern X_0 entsteht aus X durch das Entfernen einer bestimmten Menge von Horobällen (Def. vgl. 4.3) und ist Γ -invariant. Da Γ auf X_0 nach Konstruktion eigentlich diskontinuierlich und kokompakt operiert, sind sie quasi-isometrisch zueinander. Also genügt es, die Dehn-Funktion von X_0 zu untersuchen. Ist der rationale Rang von Γ gleich 1, so sind diese Horosphären disjunkt, und das Problem reduziert sich im Wesentlichen auf die Betrachtung der Schleifen auf dem Rand von X_0 , also auf den Horosphären, die durch das Entfernen der Horobälle entstehen. So wäre eine notwendige Bedingung für das quadratische Wachstum von $SL(n, \mathbb{Z})$ für $n \geq 4$, dass die Schleifen auf den Horosphären im Verhältnis zu ihren Längen quadratische Flächen einschließen [LeuzPit2004, S.728]. Eine weitere Folgerung aus [LeuzPit2004, Theorem 2.1] ist, dass die Dehn-Funktion der Gruppe Sol_{2n-1} für $n \geq 3$ quadratisch wächst [LeuzPit2004, Corollary 2.1], in Übereinstimmung mit der Vermutung von Gromov [Gr91, 5A9]. Die Gruppe Sol_{2n-1} hat die folgende Matrizendarstellung:

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} e^{t_1} & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & e^{t_2} & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t_n} & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) : t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n t_i = 0, x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

G ist das semidirekte Produkt $G = NA$, wobei A die abelsche Untergruppe, definiert durch die Bedingung $x_i = 0$ für alle i , und N die durch die Bedingung „ $t_i = 0$ für alle i “ definierte nilpotente normale Untergruppe von G ist. An der Form der Matrizen von N wird in [Pit95] erkannt, dass Sol_{2n-1} zu einer Horosphäre im Riemann'schen Produkt $(\mathbb{H}^2)^n$ von n Kopien der hyperbolischen Ebene isometrisch ist. Ebenfalls isometrisch zu einer Horosphäre (und zwar zu einer im symmetrischen Raum $SL(4, \mathbb{R})/SO(4, \mathbb{R})$) ist die mit einer passenden links-invarianten Riemann'schen Metrik versehene Gruppe

$$G = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} e^{t_1} & x_1 & x_4 & x_6 \\ 0 & e^{t_2} & x_2 & x_5 \\ 0 & 0 & e^{t_n} & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) : t_i, x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^3 t_i = 0 \right\}.$$

([Leuzinger95]) Auch diese Gruppe hat eine quadratische Dehn-Funktion [LeuzPit2004, Corollary 2.3].

Mit der Methode des kokompakten Kerns beweist Gromov das folgende Resultat für nicht-kompakte Gitter Γ in halbeinfachen Lie-Gruppen G mit dem reellen Rang 1 (so ein Gitter operiert eigentlich diskontinuierlich durch Isometrien auf einem symmetrischen Raum X mit negativer Krümmung, und der Quotientenraum ist zwar nicht kompakt, hat aber endliches Volumen):

Satz 2.2 ([Gr91][5A₆]). Γ erfüllt eine quadratische isoperimetrische Ungleichung, **es sei denn** X ist zu einem der folgenden drei Räume isometrisch:

- (1) X ist der vierdimensionale komplexe hyperbolische Raum,
- (2) X ist der achtdimensionale quaternionische Raum,
- (3) X ist die hyperbolische Cayley-Ebene.

Inzwischen ist bekannt, dass die Dehn-Funktion von Γ wie im Satz 2.2 genau quadratisch wächst ([Pit97, Theorem 8.1, 3.]), bis auf den Fall, dass X die hyperbolische Ebene ist (In diesem Fall ist Γ Wort-hyperbolisch und hat folglich lineare Dehn-Funktion ([Pit97, Theorem 8.1, 1.])). Ist X wie in den Fällen (1) und (2) von Satz 2.2, dann wächst die Dehn-Funktion kubisch ([Pit97, Theorem 8.1, 2.]). Der Fall (3) ist noch nicht gelöst (vgl. [LeuzPit2004, 1.4]).

Schließlich kann man zu jedem $n \geq 3$ ein semidirektes Produkt $\Gamma_n \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^{n-1}$ finden, dessen Dehn-Funktion quadratisch ist. Seien etwa K ein total reeller Körper (Def. oben) mit $n = [K : \mathbb{Q}]$ und \mathcal{O}_K der Ring der ganzen Zahlen in K . Die Untergruppe

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \epsilon & a \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} : \epsilon \text{ ist eine Einheit in } \mathcal{O}_K, a \in \mathcal{O}_K \right\}$$

von $SL(2, \mathcal{O}_K)$ ist so eine Gruppe [LeuzPit2004, Corollary 2.2].

Es gibt aber auch unendlich viele paarweise nicht quasi-isometrische einfach zusammenhängende auflösbare Lie-Gruppen, die nicht quasi-isometrisch zu Horosphären in symmetrischen Räumen sind, und quadratische Dehn-Funktionen haben [LeuzPit2004, Theorem 2.2].

Die nächste Beispielklasse bilden die $(2n + 1)$ -dimensionalen Heisenberg-Gruppen H_{2n+1} für $n \geq 2$. Eine Heisenberg-Gruppe ist eine zusammenhängende einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit der Lie-Algebra \mathfrak{h}_{2n+1} , deren $2n + 1$ Basisvektoren $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, z$ folgende Relationen erfüllen:

$$[a, b] = \begin{cases} z, & \text{für } a = x_i, b = y_i, i = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D. Allcock konstruiert in [All98] eine links-invariante Riemann'sche Metrik auf H_{2n+1} , indem er diese $2n + 1$ Basisvektoren von \mathfrak{h}_{2n+1} zu einer Orthonormalbasis erklärt und das entsprechende innere Produkt zu den anderen Punkten der Gruppe durch die Linksmultiplikation verschiebt ([All98, 3, p. 4-5]). Für die mit dieser Metrik g versehene Riemann'sche Mannigfaltigkeit H_{2n+1} beweist Allcock die quadratische isoperimetrische Ungleichung ([All98, 4, Theorem 4.1]). Da Längen und Flächeninhalte, gemessen in einer anderen Metrik von H_{2n+1} , sich von den in g gemessenen höchstens durch eine Konstante unterscheiden, gilt die quadratische isoperimetrische Ungleichung auch für die mit einer beliebigen links-invarianten Riemann'schen Metrik versehene Mannigfaltigkeit H_{2n+1} . Einen kombinatorischen Beweis für die quadratische obere Grenze der Dehn-Funktion

von H_5 findet man in [Ol99, Theorem 1]. In [CEHLPT, Theorem 3.4.5] wird bewiesen, dass H_{2n+1} nicht Wort-hyperbolisch ist. Somit kann diese Gruppe keine subquadratische isoperimetrische Ungleichung erfüllen [Gr87, 2.3.F]. Somit hat H_{2n+1} eine quadratische Dehn-Funktion.

Eine allgemeine Charakterisierung der Gruppen bzw. Räume mit quadratischen (oder quadratisch beschränkten) Dehn-Funktionen (etwa wie in Satz 2.1) scheint es nicht zu geben. Manche endlich erzeugte Gruppen besitzen jedoch eine geometrische Eigenschaft, die das quadratische Wachstum der Dehn-Funktion zur Folge hat. Es handelt sich um die Existenz des sogenannten linear beschränkten k -Comblings. Eine genaue Definition eines Comblings befindet sich in 5.1. In einer endlich erzeugten Gruppe G mit der Präsentation $\langle S|R \rangle$ ist ein *Combing* eine Abbildung \mathbf{c} von G in die von S erzeugte freie Gruppe $F(S)$, die jedem $g \in G$ ein Wort w aus $F(S)$ zuordnet, das g repräsentiert. Ein Combing ist somit ein Schnitt der natürlichen Abbildung $F(S) \rightarrow G$. Dieses Wort w ist ein Weg von 1 zu g im Cayley-Graphen von G , den man für $t \leq l(w)$ nach Bogenlänge parametrisieren kann: Jede Kante wird in einer Zeiteinheit durchlaufen, für $t = l(w)$ erreicht man g und für $t \geq l(w)$ bleibt man in g . Sind alle Combing-Wege so parametrisiert, so nennen wir das Combing \mathbf{c} ein k -Combing, wenn \mathbf{c} die folgende Bedingung erfüllt (*k-fellow traveller condition*):

Es gibt eine Konstante $k > 0$, sodass $\forall g \in G, \forall s \in S, \forall t \geq 0$

$$|\mathbf{c}(gs)(t) - \mathbf{c}(g)(t)| \leq k \text{ gilt,}$$

wobei $|x - y|$ der Abstand zwischen x und y im Cayley-Graphen von G ist. Schließlich nennen wir ein Combing *linear beschränkt*, wenn Konstanten C und D existieren, so dass

$$l(\mathbf{c}(g)) \leq C|g| + D \text{ für alle } g \in G.$$

Satz 2.3 ([Gersten1] Theorem 3.3). *Ist G eine endlich erzeugte Gruppe mit einem linear beschränkten k -Combing, dann ist G endlich präsentiert und hat eine quadratische isoperimetrische Funktion.*

Eine weitere Klasse von Gruppen mit quadratischen Dehn-Funktionen bilden die sogenannten Automaten­gruppen (Def.: s. [CEHLPT, Chapters 1, 2]).

Satz 2.4 ([CEHLPT] Theorem 2.3.12). *Jede Automaten­gruppe ist endlich präsentiert und erfüllt eine quadratische isoperimetrische Ungleichung.*

Wieder nach [CEHLPT], Theorem 12.4.7, ist die Fundament­gruppe einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit, die die Thurston-Vermutung erfüllt und keine Nil- und Sol-Teile enthält, eine Automaten­gruppe.

Kubische und andere polynomiale isoperimetrische und Dehn-Funktionen

Einige Gruppen mit kubischen Dehn-Funktionen haben wir bereits erwähnt (vgl. die Bemerkung nach Satz 2.2).

2 Die Dehn-Funktion

Sei nun G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe. Die Vermutung, dass G eine polynomiale Dehn-Funktion hat (die sogenannte $c+1$ -Vermutung, [Gr91, 5A₅], [Bridson93]) wurde von Gersten, Holt und Riley bewiesen:

Satz 2.5 ([GHR] Theorem A). *Jede endlich erzeugte nilpotente Gruppe G erfüllt eine polynomiale isoperimetrische Ungleichung vom Grad $c+1$, wobei c die Nilpotenzklasse von G ist.*

Der Beweis ist im Wesentlichen die Induktion nach c einer allgemeineren Aussage [GHR, Theorem B]. Unter Umständen ist auch die untere Grenze der Dehn-Funktion ein Polynom vom Grad $c+1$:

Satz 2.6 ([Gersten93] Proposition 5.5). *Sei G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe der Klasse c , gegeben durch die exakte Sequenz $1 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 1$, wobei F endlich erzeugt und frei ist. Sei F_c definiert durch $F_0 = F, F_{n+1} = [F, F_n]$. Hat die kanonische Abbildung $F_c \rightarrow N/[F, N]$ ein endliches Bild, dann wächst die Dehn-Funktion von G mindestens so schnell, wie ein Polynom vom Grad $c+1$.*

Ein Beispiel für eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, die auch die Voraussetzungen von Satz 2.6 erfüllt, ist die dreidimensionale Heisenberg-Gruppe H_3 . Ihre Nilpotenzklasse ist 2, also ist ihre Dehn-Funktion ein Polynom des 3. Grades. (Dass H_3 eine kubische isoperimetrische Ungleichung erfüllt, ist bereits seit mindestens 1991 bekannt [CEHLPT], [Gersten1]).

Ist G eine freie nilpotente Gruppe der Klasse c , so ist ihre Dehn-Funktion ebenfalls ein Polynom vom Grad $c+1$. Den Beweis für die untere Grenze findet man in [BMS, Theorem 7], den für die untere Grenze bei [Pittet].

Sei nun F_n eine freie Gruppe vom Rang n . Dann existiert zu jeder ganzen Zahl $m \leq n-1$ eine endlich präsentierte Untergruppe U der Gruppe der äußeren Automorphismen $\text{Out}(F_n)$, sodass die Dehn-Funktion von U ein Polynom vom Grad m ist [Bridson02, Corollary B].

Exponentielle isoperimetrische und Dehn-Funktionen

Thurston bewies in [CEHLPT, Chapter 10], dass die Dehn-Funktion von $SL(3, \mathbb{Z})$ exponentiell wächst. E. Leuzinger und Ch. Pittet bewiesen 1996, dass dies für jedes nicht-kompakte Gitter Γ in jeder halbeinfachen Lie-Gruppe vom reellen Rang 2 gilt [LeuzPit1996, Theorem 1.1]. Der Beweis ([LeuzPit1996]) besteht darin, eine Horosphäre \mathcal{H} (vgl. 4.3) im symmetrischen Raum $X = G/K$ mit dem Basispunkt $x_0 = K$ zu finden, die

- (1) exponentielle Dehn-Funktion hat und
- (2) Schleifen enthält, die im Verhältnis zu ihrer Länge exponentielle Flächen einschließen, und in einer kleinen Umgebung vom Orbit Γx_0 liegen.

Die Autoren betrachten eine lineare algebraische \mathbb{Q} -Gruppe \mathbf{G} (vgl. 3.3), deren Gruppe der reellen Punkte zu G und deren Gruppe der ganzen Punkte zu Γ isomorph sind. Die Identitätskomponente S der reellen Punkte eines eindimensionalen über \mathbb{Q} zerfallenden Torus \mathbf{S} von S liefert die Geodätische $c = Sx_0$, die der Zentralstrahl der gesuchten Horosphäre ist. Die Irreduzibilität von Γ hat zur Folge, dass Horosphären mit dem Zentralstrahl c exponentielle Dehn-Funktionen haben. Aus Eigenschaften von arithmetischen Gruppen folgt, dass man die Horosphäre \mathcal{H} so wählen kann, dass Γx_0 komplett in einer der beiden Komponenten von $X - \mathcal{H}$ liegt. Eine weitere Folge ist, dass die senkrechte Projektion der Punkte von Γx_0 auf \mathcal{H} die Abstände nicht wesentlich vergrößern. Also ist die Dehn-Funktion von Γx_0 und somit die (kombinatorische) Dehn-Funktion von Γ mindestens exponentiell. Eine exponentielle obere Grenze existiert nach [Gr91, 5A7], [Leuzinger04, 4.2].

In seiner nicht veröffentlichten Arbeit [Gersten2] bewies Gersten, dass Gruppen, die ein k -Combing (vgl. oben) haben (sogenannte *k -Combing-fähige Gruppen*) eine exponentielle isoperimetrische Ungleichung erfüllen. Die Frage, ob die Gruppe $SL(3, \mathbb{Z})$ k -Combing-fähig ist, ist offen [Gersten93, p. 7, 2. Remark]. In [CEHLPT, Theorem 10.4.14] wird bewiesen, dass die Gruppen $SL(n, \mathbb{Z})$ für $n \geq 3$ kein linear beschränktes k -Combing haben können (Die Definition von *Combing* ist in [CEHLPT] etwas anders; man kann zeigen, dass Epstein's Combing ein linear beschränktes k -Combing im Sinne der Definition von Thurston (vgl. oben) ist).

Eine weitere Eigenschaft einer endlich erzeugten Gruppe, die ggf. eine exponentielle isoperimetrische Ungleichung zur Folge hat, ist die sogenannte asynchrone Automatenstruktur. Um sie zu definieren, schwächt man zunächst die k -Combing-Fähigkeit, indem man die ' k -fellow-travellers'-Bedingung (vgl. oben) durch eine *asynchrone ' k -fellow-travellers'-Bedingung* ersetzt. Danach dürfen die Combing-Wege monoton unparametrisiert werden. Hat eine Gruppe so ein asynchrones k -Combing \mathbf{c} , und ist $\mathbf{c}(G)$ eine *reguläre Sprache* (Def. s. [CEHLPT, pp. 6, 24]), dann heißt \mathbf{c} *asynchrone Automatenstruktur*.

Satz 2.7 ([CEHLPT] Theorem 7.3.4). *Jede Gruppe, die eine asynchrone Automatenstruktur besitzt, ist endlich präsentiert und erfüllt eine exponentielle isoperimetrische Ungleichung.*

Beispiele für Gruppen mit einer asynchronen Automatenstruktur sind die semidirekten Produkte $\mathbb{Z}^n \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}$, und zwar für alle $\phi \in GL(n, \mathbb{Z})$ [Bridson92]. Auch alle kompakten 3-Mannigfaltigkeiten, die Thurstons Vermutung erfüllen, haben eine asynchrone Automatenstruktur [Bridson92] (und sie sind Automatengruppen, wenn sie keine Nil- und Sol-Teile enthalten, vgl. oben).

In Übereinstimmung damit, dass Heisenberg-Gruppen quadratische Dehn-Funktionen haben (vgl. oben), haben diese Gruppe eine asynchrone Automatenstruktur. Ob Heisenberg-Gruppen k -Combing-fähig sind, ist unklar. Viele Argumente dafür sind in [Gr87] skizziert.

Seien nun G eine endlich präsentierte Gruppe, S die Menge der Erzeuger und Γ der dazugehörige Cayley-Graph. Weiter seien B_n (Bzw. S_n) die Menge der Ecken im Ball

2 Die Dehn-Funktion

(bzw. der Sphäre) mit Radius n ums Neutralelement in Γ . Man nennt Γ *fast konvex*, wenn für alle n und für alle Paare von Punkten $x, y \in S_n$, die durch einen Weg in Γ von der Länge höchstens 3 verbunden sind, gilt: Es gibt einen Weg von x nach y in B_n , dessen Länge durch eine von n, x und y unabhängige Konstante beschränkt ist.

Satz 2.8 ([Gersten93] Corollary 4.3). *Hat G einen fast konvexen Cayley-Graphen, dann besitzt G eine exponentielle isoperimetrische Funktion.*

Sei F_n eine freie Gruppe vom Rang n . Wir haben bereits erwähnt, dass $\text{Out}(F_n)$ zu jeder ganzen Zahl $m \leq n - 1$ eine endlich präsentierte Untergruppe U enthält, deren Dehn-Funktion ein Polynom vom Grad m ist [Bridson02, Corollary B]. Welche isoperimetrischen Funktionen erfüllen nun $\text{Aut}(F_n)$ und $\text{Out}(F_n)$ selbst? Gersten zeigte 1993, dass diese beiden Gruppe eine doppeltexponentielle isoperimetrische Funktion haben ($n \mapsto A^{B^n}$) [Gersten93, Theorem 4.4]. Inzwischen ist genaueres bekannt:

Satz 2.9 ([HaVo] Theorem 1.1). *Die Dehn-Funktionen von Gruppen der Automorphismen $\text{Aut}(F_n)$ und der äußeren Automorphismen $\text{Out}(F_n)$ einer endlich erzeugten freien Gruppe F_n wachsen höchstens exponentiell.*

Für $n = 2$ und $n = 3$ erhält man sogar „bessere“ obere Grenzen für die Dehn-Funktionen von $\text{Aut}(F_n)$ und $\text{Out}(F_n)$ [HaVo, p. 426]: $\text{Out}(F_2)$ ist isomorph zu $GL(2, \mathbb{Z})$ und erfüllt daher eine lineare isoperimetrische Ungleichung. Dies folgt daraus, dass $GL(2, \mathbb{Z})$ kokompakt auf einem Baum operiert. $\text{Aut}(F_2)$ ist eine Automatengruppe, aber nicht Wort-hyperbolisch [Gersten94], hat daher quadratische Dehn-Funktion. Für $n = 3$ hat $GL(n, \mathbb{Z})$ eine zumindest exponentielle isoperimetrische Ungleichung [CEHLPT], dasgleiche folgt für $\text{Aut}(F_3)$ und $\text{Out}(F_3)$: Es gibt nämlich in $GL(3, \mathbb{Z})$ eine Schleife, die schwer exponentiell zu füllen ist; diese Schleife lässt sich zu einer entsprechenden in $\text{Aut}(F_3)$ liften [HaVo].

In 2.1 haben wir die spezielle Baumslag-Solitar-Gruppe $BS(1, 2) := \langle \{x, y\} \mid yxy^{-1} = x^2 \rangle$ erwähnt. Die Definition einer allgemeinen Baumslag-Solitar-Gruppe ist

$$BS(m, n) := \langle \{x, y\} \mid yx^m y^{-1} = x^n \rangle.$$

Dass $BS(m, n)$ für beliebige natürlichen Zahlen m und n eine exponentielle isoperimetrische Ungleichung erfüllen, wurde in [CEHLPT, Theorem 7.3.4] und unabhängig davon von Gersten in [Gersten1] bewiesen. Für $m \neq n$ kann $BS(m, n)$ keine polynomiale isoperimetrische Funktion haben [CEHLPT, Example 7.4.1]. Für $m = n$ liegt eine Automatengruppe vor, somit auch eine Gruppe mit quadratischer Dehn-Funktion [CEHLPT, Theorem 2.3.12, Example 7.4.1].

Hyperexponentielle isoperimetrische und Dehn-Funktionen

Es gibt ein einfaches Beispiel für eine Gruppe, deren isoperimetrische Funktion schneller, als jede iterierte Exponentialfunktion wächst. Das ist die von nur zwei Elementen und nur eine Relation erzeugte Gruppe $\langle x, y \mid yxy^{-1}xyx^{-1}y^{-1} = x^2 \rangle$ [Gersten3, p. 4, Example].

Exotische isoperimetrische und Dehn-Funktionen

Für die Ein-Relator-Gruppen (wie etwa das vorherige Beispiel) bewies Gersten in einer unveröffentlichten Arbeit, dass die Ackermanns-Funktion f_ω eine obere Grenze der Dehn-Funktion ist.

Eine *Ackermann-Funktion* definiert man induktiv wie folgt: Für Ordinalzahlen $\alpha \leq \omega$ sei zunächst $f_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung mit $f_1(s) = 2s$, $f_{n+1}(s) = f_n^{(s)}(s)$, wobei $f_n^{(s)}$ das s -fache von f_n ist. Der Wert der Ackermann-Funktion f_ω an der Stelle s ist dann $f_\omega(s) = f_s(s)$.

Seien nun G eine endlich erzeugte Gruppe, $\mathcal{P} = \langle S | R \rangle$ eine (endliche) Präsentation von G und Γ der damit assoziierte Cayley-Graph. Für $w \in F(S)$ bezeichne \bar{w} die Äquivalenzklasse von w in $G \cong F(S)/\langle R \rangle$. Sei weiter $\mu : G \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion, so dass $\tilde{S} := \{g \in G \mid \mu(g) = 0\}$ eine endliche Untergruppe von G ist mit $\tilde{S} \subset S$. Man sagt „ \mathcal{P} ermöglicht einen *Spitzenreduktions-Algorithmus* bzgl. μ “, wenn gilt:

Für $w \in F(S)$ mit $\mu(\bar{w}) \leq \mu(\bar{w}a) > \mu(\bar{w}aa')$ für ein Paar $a, a' \in S$, dann gibt es einen Relator in R von der Form $a'^{-1}a^{-1}a_1a_2\dots a_k$ mit $a_i \in S$, sodass

$$\mu(\bar{w}a_1\dots a_i) < \mu(\bar{w}a) \text{ für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Sei $f_\mu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion, definiert durch

$$f_\mu(n) = \sup_{|g| \leq n} \mu(g).$$

Satz 2.10 ([Gersten93] Theorem 4.1). *Sei M die Länge des längsten Relators von R . Ermöglicht \mathcal{P} den Spitzenreduktions-Algorithmus bzgl. einer Funktion μ , dann ist die Funktion*

$$n \mapsto nM^{f_\mu(n)+1}$$

eine isoperimetrische Funktion für \mathcal{P} .

2.3 Der Zusammenhang mit dem Wortproblem

Wie bereits in der Einführung angedeutet, spielen isoperimetrische Funktionen eine große Rolle für die Untersuchung der Komplexität des Wortproblems für endlich präsentierte Gruppen. Genauer ist die Lösbarkeit des Wortproblems äquivalent mit der Existenz einer rekursiven isoperimetrischen Funktion. Da für den Beweis dieser Tatsache die sogenannte isodiametrische Funktion wichtig ist, geben wir hier die entsprechende Definition an:

Es seien G eine endlich präsentierte Gruppe, $\mathcal{P} = \langle S | R \rangle$ eine (endliche) Präsentation von G , \mathcal{D} ein van Kampen-Diagramm mit dem Randwort w und $d_{\mathcal{D}(1)}$ die Wortmetrik

2 Die Dehn-Funktion

auf dem 1-Skelett $\mathcal{D}^{(0)}$ von \mathcal{D} . Wir halten einen Basispunkt v_0 auf dem Rand von \mathcal{D} fest und definieren

$$\text{Diam}_{v_0}(\mathcal{D}) = \max_{v \in \mathcal{D}^{(0)}} d_{\mathcal{D}^{(1)}}(v_0, v).$$

Die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ heißt eine *isodiametrische Funktion* für \mathcal{P} , wenn für alle n und alle reduzierten Wörter w mit $|w| \leq n$ und $\bar{w} = 1_G$ ein van Kampen-Diagramm (\mathcal{D}) für w und ein Basispunkt v_0 existieren mit

$$\text{Diam}_{v_0}(\mathcal{D}) \leq f(n).$$

Seien nun M die Länge des längsten Relators von R , f eine isodiametrische Funktion für \mathcal{P} . Für $\bar{w} = 1_G$ schreibt sich w wie folgt:

$$w = \prod_{i=1}^N u_i R_i u_i^{-1} \quad \text{mit } u_i \in F(S), R_i \in R.$$

mit $|u_i| \leq f(|w|) + M$ [Gersten93, p. 2].

Lemma 2.11 ([Gersten93] Lemma 2.2). *Ist f eine isoperimetrische Funktion für \mathcal{P} , dann ist*

$$n \mapsto Mf(n) + n$$

eine isodiametrische Funktion für \mathcal{P} , wobei M die Länge des längsten Relators von \mathcal{P} ist.

Satz 2.12 ([Gersten93] Theorem 2.1). *Für eine endliche Präsentation \mathcal{P} einer endlich präsentierten Gruppe G sind folgende drei Aussagen äquivalent:*

- (1) *G hat ein lösbares Wortproblem.*
- (2) *\mathcal{P} hat eine rekursive isoperimetrische Funktion.*
- (3) *\mathcal{P} hat eine rekursive isodiametrische Funktion.*

Beweisskizze [Gersten93, p. 3-4]:

(1) \Rightarrow (2): Man berechnet $f(n)$, indem man das Wortproblem für alle Wörter der Länge n löst. Diese Lösung liefert nämlich für jedes Wort w mit $|w| \leq n$ und $\bar{w} = 1_G$ einen Ausdruck

$$w = \prod_{i=1}^{k(w)} u_i R_i u_i^{-1}$$

in der freien Gruppe $F(S)$. Der Wert von f an der Stelle n ist dann:

$$f(n) = \sup_{\substack{|w| \leq n \\ \bar{w} = 1_G}} k(w).$$

2.3 Der Zusammenhang mit dem Wortproblem

(2) \Rightarrow (3) folgt aus Lemma 2.11.

(3) \Rightarrow (1): Seien f eine isodiametrische Funktion für \mathcal{P} und w ein Wort mit $|w| = n$, $\bar{w} = 1_G$. Dann gibt es eine Darstellung

$$w = \prod_{i=1}^m u_i R_i u_i^{-1}$$

mit $|u_i| \leq f(n) + M$ und mit M wie in Lemma 2.11. Die Menge

$$S_m = \{uR'u^{-1} \mid R' \text{ ist ein Relator, } |u| \leq m\}$$

ist endlich und erzeugt eine endlich erzeugte Untergruppe $N_m < N < F(S)$. Man berechnet nun $m = f(n) + M$ und die Fragestellung reduziert sich auf das (effektiv lösbare) Problem zu entscheiden, ob w in N_m liegt oder nicht. Das löst das Wortproblem.

3 S -arithmetische Gruppen

Sei \mathbb{K} ein algebraischer Zahlkörper, das heißt eine endliche Erweiterung von \mathbb{Q} .

3.1 Bewertungen

Definition Eine *Bewertung* von \mathbb{K} ist eine Funktion $|\cdot|_v : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(1) |x|_v \geq 0 \text{ und } |x|_v = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

$$(2) |xy|_v = |x|_v |y|_v \text{ und}$$

$$(3) |x + y|_v \leq |x|_v + |y|_v.$$

Ersetzt man (3) durch

$$(3') |x + y|_v \leq \max(|x|_v, |y|_v), \text{ so heißt die Bewertung } \textit{nicht-archimedisch}, \text{ sonst heißt sie } \textit{archimedisch}.$$

Beispiel einer nicht-archimedischen Bewertung

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Für jedes $x \in \mathbb{Q}$ existieren eine ganze Zahl a und eine natürliche Zahl b , beide teilerfremd mit p , sodass $x = p^r \frac{a}{b}$ für ein $r \in \mathbb{Z}$. Durch $|x|_{v_p} := p^{-r}$ wird die p -adische Bewertung auf \mathbb{Q} definiert.

Bemerkung: Wir schreiben oft $|\cdot|_p$ statt $|\cdot|_{v_p}$.

Bezeichnung: Zwei Bewertungen $|\cdot|_v$ und $|\cdot|_{v'}$ heißen *äquivalent*, wenn es reelle Zahlen C und D gibt, sodass

$$C|x|_v \leq |x|_{v'} \leq D|x|_v \quad \forall x \in \mathbb{K}.$$

Einige Eigenschaften von Bewertungen

- * **Satz von Ostrowski:** Jede nicht-triviale Bewertung von \mathbb{Q} ist entweder zu der archimedischen Bewertung $|\cdot|_\infty$ (Absolutbetrag von \mathbb{Q}) oder zu einer p -adischen Bewertung $|\cdot|_p$ äquivalent.
- * Für $p \neq q$ sind $|\cdot|_p$ und $|\cdot|_q$ nicht äquivalent.
- * Jede Bewertung $|\cdot|_v$ von \mathbb{K} ist eine Fortsetzung einer Bewertung von $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ auf \mathbb{K} .

Nachlesen kann man all das in [Neukirch, Kapitel II].

Bezeichnungen:

- * \mathbb{K}_v ist die Vervollständigung von \mathbb{K} bezüglich $|\cdot|_v$.
- * Für eine nicht-archimedische Bewertung v heißt

$$\mathcal{O}_v := \{x \in \mathbb{K} \mid |x|_v \leq 1\}$$

der *Bewertungsring* von \mathbb{K}_v .

Beispiel: $|\cdot|_v = |\cdot|_p$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Der Bewertungsring von \mathbb{Q}_p ist

$$\mathcal{O}_v = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, p \nmid b\}.$$

3.2 S -ganze Zahlen und weitere Bezeichnungen

Die oben erwähnten Eigenschaften von Bewertungen machen folgende Bezeichnungen sinnvoll:

$V_\infty^\mathbb{K}$ sei eine (im Weiteren fest gewählte) maximale Menge von paarweise nicht-äquivalenten archimedischen Bewertungen von \mathbb{K} ,

$V_f^\mathbb{K}$ sei eine (im Weiteren fest gewählte) maximale Menge von paarweise nicht-äquivalenten nicht-archimedischen Bewertungen von \mathbb{K} ,

$$V^\mathbb{K} := V_\infty^\mathbb{K} \cup V_f^\mathbb{K}.$$

Sei S eine endliche Menge mit $V_\infty^\mathbb{K} \subset S \subset V^\mathbb{K}$. Der *Ring der S -ganzen Zahlen* $\mathcal{O}(S)$ ist definiert durch

$$\mathcal{O}(S) := \{x \in \mathbb{K} \mid |x|_v \leq 1 \forall v \in V^\mathbb{K} \setminus S\}.$$

Beispiele:

- (1) $\mathcal{O} := \mathcal{O}(V_\infty^{\mathbb{K}})$ ist der 'übliche' Ring der ganzen Zahlen in \mathbb{K} . Etwa $\mathcal{O}(V_\infty^{\mathbb{K}}) = \mathbb{Z}$ für $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.
- (2) $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}] \subset \mathbb{Q}$ ist der Ring $\mathcal{O}(S)$ der S -ganzen Zahlen von \mathbb{Q} für $S = V_\infty^{\mathbb{K}} \cup \{ | _p \}$.

3.3 Definition von S -arithmetischen Gruppen

Vorbemerkung

Seien \mathbb{K} ein algebraischer Zahlkörper und $\mathbf{K} \supseteq \mathbb{K}$ ein Universalbereich, d.h. ein algebraisch abgeschlossener Körper, dessen Transzendenzgrad über seinem Primkörper unendlich ist. Wir identifizieren die Gruppe $GL_n(\mathbf{K}) = \{A \in \mathbf{K}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$ mit ihrer Einbettung in $\mathbf{K}^{(n+1) \times (n+1)}$ via

$$g \longmapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & (\det g)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten:

$$GL_n(\mathbf{K}) \cong \{A \in \mathbf{K}^{(n+1) \times (n+1)} \mid a_{i,n+1} = a_{n+1,i} = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \\ a_{n+1,n+1} \det((a_{ij})_{i,j=1, \dots, n+1}) - 1 = 0\}.$$

Ist R ein Unterring von \mathbf{K} , so ist

$$GL_n(R) = \{A \in R^{n \times n} \mid \det A^{-1} \in R \setminus \{0\}\}$$

eine Untergruppe von $GL_n(\mathbf{K})$. Ist G eine Untergruppe von $GL_n(\mathbf{K})$, so ist $G_R := G \cap GL_n(R)$ ebenfalls eine Untergruppe.

Algebraische Gruppen

Es sei eine endliche Menge $\mathcal{Q} \subset \mathbb{Q}[x_{11}, x_{12}, \dots, x_{nn}, (\det(x_{ij}))^{-1}]$ von Polynomen gegeben. Für jede Erweiterung E von \mathbb{Q} definieren wir die *Untergruppe der E -Punkte* G_E von $GL_n(E)$ wie folgt:

$$G_E = \{g = (x_{ij})_{i,j=1, \dots, n} \in GL_n(E) \mid Q(g) = 0 \ \forall Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Die Gruppen G_E 's sind Halme von der Garbe einer algebraischen Varietät G , die mit

- einem Element $e \in G$,
- einem Morphismus $\mu : G \times G \rightarrow G, (x, y) \mapsto xy$ und
- einem Morphismus $\iota : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1}$

versehen ist, die G zu einer Gruppe machen. So ein G heißt eine *über \mathbb{Q} definierte lineare algebraische Gruppe* (kurz: \mathbb{Q} -Gruppe). Leider können wir hier nicht erklären, was eine Varietät, eine Garbe oder ein Halm ist, denn dafür sind viele Begriffe aus der Kategorien- und Garbentheorie notwendig. Eine Einführung in dieses Thema findet man in [Borel, Chapter AG, Chapter I].

Im Mittelpunkt unseres Interesses stehen die Gruppen der reeller Punkte $G_{\mathbb{R}}$ bzw. der p -adischen Punkte $G_{\mathbb{Q}_p}$ einer zusammenhängenden einfach zusammenhängenden halbeinfachen \mathbb{Q} -Gruppe.

Eine \mathbb{Q} -Gruppe heißt *zusammenhängend*, wenn G als algebraische Varietät irreduzibel ist ([Borel, Chapter I]).

Ein surjektiver Morphismus zweier algebraischen Gruppen, der einen endlichen Kern hat, heißt eine *Isogenie*. Eine \mathbb{Q} -Gruppe G heißt *einfach zusammenhängend*, wenn für jede zu G isogene zusammenhängende \mathbb{Q} -Gruppe H jede Isogenie von H nach G ein Isomorphismus ist.

Eine zusammenhängende \mathbb{Q} -Gruppe G heißt *halbeinfach*, wenn jeder maximale zusammenhängende auflösbare Normalteiler von G trivial ist.

Arithmetische Untergruppen von $GL_n(E)$

Sei G eine \mathbb{Q} -Gruppe. Eine Untergruppe Γ von G heißt *arithmetisch*, wenn Γ mit $G_{\mathbb{Z}} = G_E \cap GL_n(\mathbb{Z})$ kommensurabel ist (d.h. $\Gamma \cap G_{\mathbb{Z}}$ hat endlichen Index in Γ sowie in $G_{\mathbb{Z}}$).

Beispiel: $E = \mathbb{C}$, $\mathcal{Q} = \{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} - 1\}$, $G = SL_2(\mathbb{C})$, $\Gamma = SL_2(\mathbb{Z})$.

Bemerkung Man kann statt \mathbb{Q} einen beliebigen algebraischen Zahlkörper \mathbb{K} , statt \mathbb{Z} den Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O} \subset \mathbb{K}$ von \mathbb{K} betrachten. Seien G algebraisch über \mathbb{K} und $G_{\mathcal{O}} := G_{\mathbb{K}} \cap GL_n(\mathcal{O})$. Eine Untergruppe Γ von G heißt dann *arithmetisch*, wenn Γ mit $G_{\mathcal{O}}$ kommensurabel ist.

So ein G ist aber isomorph zu einer \mathbb{Q} -Gruppe $H < GL_{nd}(\mathbb{K})$ (Man bekommt H mit Hilfe der Einschränkung der Skalare), und Γ ist isomorph zu $H_{\mathbb{Z}}$. Mit anderen Worten: der Übergang von \mathbb{Q} zu \mathbb{K} liefert keine wirklich neuen arithmetischen Gruppen.

Arithmetische Untergruppen von Lie-Gruppen

Sei G eine zusammenhängende halbeinfache Lie-Gruppe mit trivialem Zentrum und ohne kompakte Faktoren. Sei $\Gamma \subset G$ ein Gitter. Γ heißt *arithmetisch*, wenn eine halbeinfache \mathbb{Q} -Gruppe H und ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : H_{\mathbb{R}}^0 \rightarrow G$ mit kompaktem Kern existiert, sodass $\varphi(H_{\mathbb{Z}})$ und Γ kommensurabel sind.

S -arithmetische Gruppen

Man betrachte statt \mathcal{O} den Ring $\mathcal{O}(S)$ der S -ganzen Zahlen eines algebraischen Zahl-

3 S -arithmetische Gruppen

körpers \mathbb{K} . S ist dabei eine endliche Teilmenge von $V^{\mathbb{K}}$, die $V_{\infty}^{\mathbb{K}}$ enthält:

Ist $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ eine lineare algebraische Gruppe über \mathbb{K} und

$$G_{\mathcal{O}(S)} := G_{\mathbb{K}} \cap GL_n(\mathcal{O}(S)),$$

dann heißt eine Untergruppe Γ von G S -arithmetisch, wenn sie mit $G_{\mathcal{O}(S)}$ kommensurabel ist.

Bemerkung Wir werden in 3.4 sehen, dass S -arithmetische Gruppen Gitter sind. Insbesondere sind sie Spezialfälle einer allgemeineren Definition, die wir hier vollständigheitshalber angeben. Der ungeduldige Leser kann diese Definition jedoch überspringen, denn alle S -arithmetischen Gruppen, die uns interessieren, sind von der oben genannten speziellen Art.

Allgemeine S -arithmetische Gruppen

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und seien S und $\mathcal{O}(S)$ wie in 3.2. Für jedes $p \in \{\infty, p_1, \dots, p_r\}$ sei G_p eine zusammenhängende halbeinfache \mathbb{Q}_p -Gruppe, sodass $(G_p)_{\mathbb{Q}_p}$ keine kompakten Faktoren hat. Seien

$$\mathbf{G} := \prod_{p \in S} (G_p)_{\mathbb{Q}_p}$$

und $\Gamma \subset \mathbf{G}$ ein Gitter. Γ heißt *allgemein S -arithmetisch*, wenn existieren:

- (1) eine halbeinfache \mathbb{Q} -Gruppe H ,
- (2) für jedes $v_p \in S$ die Zerlegung

$$H = H_{1,p} \times H_{2,p},$$

wobei $H_{1,p}$ und $H_{2,p}$ halbeinfache \mathbb{Q}_p -Gruppen sind,

- (3) eine kompakte offene Untergruppe $K \subset \prod_{v_p \in S} (H_{2,p})_{\mathbb{Q}_p}$ und
- (4) ein Isomorphismus der topologischen Gruppen

$$\prod_{v_p \in S} (H_{1,p})_{\mathbb{Q}_p} \rightarrow \mathbf{G},$$

sodass für

$$H^* := \prod_{v_p \in S} (H_{1,p})_{\mathbb{Q}_p} \times K \subset \prod_{v_p \in S} H_{\mathbb{Q}_p}$$

und die Projektion $\varphi : H^* \rightarrow \mathbf{G}$ gilt:

$$\varphi(H^* \cap H_{\mathcal{O}(S)}) \text{ und } \Gamma \text{ sind kommensurabel.}$$

Über allgemeine S -arithmetische Gruppen kann man bei [Zimmer, Kap. 10] nachlesen. Von besonderem Interesse sind die irreduziblen S -arithmetischen Gitter.

Definition Sei \mathbf{G} wie oben in der allgemeinen Definition. Ein Gitter $\Gamma \subset \mathbf{G}$ heißt *irreduzibel*, wenn ΓN dicht in \mathbf{G} ist für alle N von der Form $(L)_{\mathbb{Q}_p}$, wobei $L \subset G_p$ eine unendliche echte normale \mathbb{Q}_p -Untergruppe ist ($p \in \{\infty, p_1, \dots, p_r\}$).

3.4 S -arithmetische Gruppen als Gitter

Vorbemerkung

Sei $S \subset V^{\mathbb{K}}$ endlich mit $V_{\infty}^{\mathbb{K}} \subset S$. Eine wichtige Rolle spielt im Weiteren das (endliche) Produkt

$$G_S := \prod_{v \in S} G_{\mathbb{K}_v}.$$

Bezeichnen wir die Diagonaleinbettung von $G_{\mathcal{O}(S)}$ in G_S wieder mit $G_{\mathcal{O}(S)}$, so ist $G_{\mathcal{O}(S)}$ eine diskrete Untergruppe von G_S [PlatRap, 5.4, S. 267]. Wir formulieren in diesem Abschnitt einen Satz, der besagt, dass $G_S/G_{\mathcal{O}(S)}$ unter gewissen Voraussetzungen sogar ein endliches invariantes Maß hat.

Invariantes Volumen

Sei Y ein lokal kompakter topologischer Raum, G eine auf Y via Homöomorphismen operierende Gruppe. Dann heißt ein Borelmaß μ auf Y G -invariant, wenn für alle messbaren Mengen $M \subset Y$ und alle $\gamma \in G$ die Mengen $\gamma(M)$ messbar sind und $\mu(\gamma(M)) = \mu(M)$ gilt.

So ein Maß existiert und heißt ein (*Links-, Rechts-*) *Haarmaß*, wenn $Y = G$ eine lokal kompakte topologische Gruppe ist, die auf sich selbst via Links- (bzw. Rechts-) Multiplikation operiert [PlatRap, Theorem 3.16].

Als *Gitter* einer Lie-Gruppe bezeichnet man eine diskrete Untergruppe Γ einer Lie-Gruppe, falls G/Γ ein endliches G -invariantes Maß (man sagt auch „endliches invariantes Volumen“) hat.

Charaktere

Ein *Charakter* einer algebraischen Gruppe $G \subset GL_n(\mathbf{K})$ ist ein Morphismus algebraischer Gruppen $\chi : G \rightarrow G_m := GL_1(\mathbf{K})$ (m steht für „multiplikativ“). Die Charaktere von G erzeugen eine kommutative Gruppe $\mathbf{Char}(G)$ mit der Verknüpfung

$$(\chi_1 + \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g), \quad g \in G.$$

Beispiel: $\mathbf{Char}(SO(n, 1)) = \{\mathbf{1}\}$ für $n > 2$.

Fundamentalmenge

$\Phi \subset G_S$ heißt eine *Fundamentalmenge* von $G_{\mathcal{O}(S)}$, wenn

(F1) $\Phi G_{\mathcal{O}(S)} = G_S$ und

(F2) für alle $a, b \in G_{\mathbb{K}}$ die Menge $\{x \in G_{\mathcal{O}(S)} \mid \Phi a x b \cap \Phi \neq \emptyset\}$ endlich ist.

3 S -arithmetische Gruppen

Eine Fundamentalmenge enthält einen Fundamentalbereich, erlaubt also Aussagen über die Endlichkeit seines Volumens.

Satz 3.1 ([PlatRap] Theorem 5.7). (1) $G_S/G_{\mathcal{O}(S)}$ hat genau dann ein endliches invariantes Volumen, wenn die Gruppe der Charaktere $\mathbf{Char}(G^0)$ der Zusammenhangskomponente von $\text{id} \in G$ gleich $\{1\}$ ist.

(2) $G_S/G_{\mathcal{O}(S)}$ ist genau dann kompakt, wenn der \mathbb{R} -Rang der reduktiven Komponente von G gleich Null ist.

Der Beweis dieses Satzes liefert eine Idee zur Konstruktion des geometrischen Modells von $G_{\mathcal{O}(S)}$, das wir in Kapitel 2 angesprochen haben. Deswegen werden wir einen Teil des Beweises ausführen. Wir fassen zunächst die Beweisschritte von Satz 3.1 zusammen und gehen anschließend auf Schritt 3 genauer ein.

Beweisskizze zu Satz 3.1 (1)

Schritt 1

Die Existenz eines G -invariantes Maßes ist klar. Die Endlichkeit des Volumens von $G_S/G_{\mathcal{O}(S)}$ ist mit der Invarianz dieses Maßes äquivalent. Die Letztere ist mit der Unimodularität von G äquivalent. [Raghun], Kap.I

Schritt 2

G_S ist genau dann unimodular, wenn $G_\infty := \prod_{v \in V_\infty^\mathbb{K}} G_{\mathbb{K}_v}$ unimodular ist.

Schritt 3

Sei $\mathcal{O} := \{x \in \mathbb{K} \mid |x|_v \leq 1 \ \forall v \in V_f^\mathbb{K}\}$. Wir bezeichnen die Diagonaleinbettung von $G_{\mathcal{O}}$ in G_∞ (vgl. Schritt 2) ebenfalls mit $G_{\mathcal{O}}$.

Eine Fundamentalmenge B für $G_{\mathcal{O}}$ in G_∞ lässt sich durch eine offene kompakte Teilmenge C von

$$G_{S \setminus V_\infty^\mathbb{K}} := \prod_{v \in S \setminus V_\infty^\mathbb{K}} G_{\mathbb{K}_v}$$

zu einer Fundamentalmenge $B \times C$ für $G_{\mathcal{O}(S)}$ in G_S ergänzen.

Schritt 4

Insgesamt also: $G_S/G_{\mathcal{O}(S)}$ hat genau dann endliches (invariantes) Volumen, wenn $G_\infty/G_{\mathcal{O}}$ endliches (invariantes) Volumen hat.

Schritt 5

$G_\infty/G_{\mathcal{O}}$ hat genau dann endliches (invariantes) Volumen, wenn

$$\mathbf{Char}(G^0)_\mathbb{K} = \{1\}.$$

Man konstruiert eine Gruppe $H \subset GL_{nd}(\mathbf{K})$, sodass $G_\infty \cong H_\mathbb{R}$ und $G_\mathcal{O} \cong H_\mathbb{Z}$ (Diese Beweistechnik nennt man auch die „Reduktion der Skalare“). Wegen

$$\mathbf{Char}(H^0)_\mathbb{Q} = \mathbf{Char}(G^0)_\mathbb{K}$$

folgt $\mathbf{Char}(G^0)_\mathbb{K} = \{\mathbf{1}\}$ mit

Schritt 6

$H_\mathbb{R}/H_\mathbb{Z}$ hat genau dann endliches (invariantes) Volumen, wenn

$$\mathbf{Char}(H^0)_\mathbb{Q} = \{\mathbf{1}\}.$$

Zu Schritt 3:

Sei B eine Fundamentalmenge von $G_\mathcal{O}$ in G_∞ . Die Mengen

$$D := G_\infty \times \underbrace{\prod_{v \in S \setminus V_\infty^\mathbb{K}} G_{\mathcal{O}(S)}}_{:=U} \text{ und } G_{\mathcal{O}(S)}$$

sind Untergruppen von G_S .

Da \mathbb{K} endliche Erweiterung von \mathbb{Q} ist, ist die Zerlegung

$$G_S = \bigcup_{i=1}^r Dx_i G_{\mathcal{O}(S)}$$

in die Doppelnebenklassen endlich. Mit $U = \prod_{v \in S \setminus V_\infty^\mathbb{K}} G_{\mathcal{O}(S)}$ (kompakt und offen) ist auch die Menge

$$C := \bigcup_{i=1}^r Ux_i U$$

kompakt und offen.

Klar ist: Für $\Phi := B \times C$ gilt $G_S = \Phi G_{\mathcal{O}(S)}$.

Die Eigenschaft (F2), (d.h. dass

$$\Sigma := \{x \in G_{\mathcal{O}(S)} \mid \Omega \cap \Omega axb \neq \emptyset\}$$

für alle $a, b \in G_\mathbb{K}$ endlich ist) rechnet man nach: Für $x \in \Sigma$ ergibt sich nach der Projektion auf den nicht-archimedischen Teil:

$$x \in a^{-1}C^{-1}Cb^{-1} \text{ und } x^{-1} \in bC^{-1}Ca.$$

Da $C^{-1}C$ kompakt ist und $x, x^{-1} \in G_{\mathcal{O}(S)}$, gilt:

$$\exists r \in \mathcal{O} \text{ sodass } \Sigma \subset G_r := \{x \in G_\mathbb{K} \mid rx, rx^{-1} \in \mathcal{O}^{n \times n}\}.$$

Somit folgt die Behauptung aus dem folgenden

Lemma 3.2. $\Omega^{-1}\Omega \cap \tilde{a}G_r\tilde{b}$ ist endlich für alle $\tilde{a}, \tilde{b} \in G_{\mathbb{K}}$.

Beweis: Da $C^{-1}C$ kompakt, B eine Fundamentalmenge für $G_{\mathcal{O}}$ in G_{∞} und $\tilde{a}G_{\mathcal{O}}\tilde{b}$ diskret ist, ist

$$\underbrace{\Omega^{-1}\Omega}_{(B^{-1}B) \times (C^{-1}C)} \cap \tilde{a}G_{\mathcal{O}}\tilde{b}$$

endlich. Es bleibt zu zeigen, dass G_r in einer endlichen Vereinigung von Nebenklassen von $G_{\mathcal{O}}$ in G_S enthalten ist:

$x \in G_r$ bedeutet

$$r\mathcal{O}^n \subset x\mathcal{O}^n \subset \frac{1}{r}\mathcal{O}^n.$$

Da es zwischen $r\mathcal{O}^n$ und $\frac{1}{r}\mathcal{O}^n$ in \mathbb{K}^n nur endlich viele Zwischengitter geben kann, gibt es auch nur endlich viele Möglichkeiten für $x\mathcal{O}^n$. Also:

$$G_r \subset \bigcup_i^{\text{endlich}} g_i G_{\mathcal{O}}$$

(g_i so gewählt, dass $g_i\mathcal{O}^n$ alle möglichen Zwischengitter $g\mathcal{O}^n$ für $g \in G$ zwischen $r\mathcal{O}^n$ und $\frac{1}{r}\mathcal{O}^n$ durchläuft). \square

3.5 Räume, auf denen S -arithmetische Gruppen operieren

In diesem Abschnitt fassen wir einige Tatsachen über die Operation von S -arithmetischen Gruppen auf metrischen Räumen zusammen und beziehen uns dabei in der ersten Linie auf [Serre, §2 und §5]. Im nächsten Abschnitt gehen wir darauf ein, welche Räume für unseren Spezialfall in Frage kommen.

Wir behandeln zuerst den einfacheren Fall, bei dem $S := \{|\cdot|_{\infty}\}$ aus nur einer (archimedischen) Bewertung besteht, d.h. Γ ist **arithmetisch**. Sei also G eine lineare über \mathbb{Q} definierte algebraische Gruppe, dann hat die reelle Lie-Gruppe $G_{\mathbb{R}}$ endlich viele Komponenten. $G_{\mathbb{R}}$ hat maximale kompakte Untergruppen und diese sind untereinander konjugiert. Sei K eine von ihnen, dann ist der homogene Raum $G_{\mathbb{R}}/K$ diffeomorph zu \mathbb{R}^d , wobei $d := \dim G_{\mathbb{R}} - \dim K$, und $G_{\mathbb{R}}$ operiert auf natürliche Weise auf $G_{\mathbb{R}}/K$. Ist G halbeinfach, dann ist $G_{\mathbb{R}}/K$ der entsprechende symmetrische Raum. Ist Γ eine arithmetische Untergruppe von $G_{\mathbb{Q}}$, dann ist Γ diskret und operiert eigentlich diskontinuierlich durch Isometrien auf $G_{\mathbb{R}}/K$.

Im allgemeineren Fall ist $V_{\infty}^{\mathbb{K}} \subset S \subset V^{\mathbb{K}}$ zwar endlich, enthält aber mindestens eine nicht-archimedische Bewertung. Statt \mathbb{Q} betrachtet man einen beliebigen algebraischen Zahlkörper \mathbb{K} . Sei \mathbb{K}_v die Vervollständigung von \mathbb{K} bzgl. der Bewertung $v \in S \supset V_{\infty}^{\mathbb{K}}$. Sei

Γ eine S -arithmetische Untergruppe von $G_{\mathbb{K}}$, wobei G halbeinfach ist. Wie bereits in 3.4 erwähnt, ist Γ eine diskrete Untergruppe der lokal kompakten Gruppe

$$G_S := \underbrace{\prod_{v \in V_{\infty}^{\mathbb{K}}} G_{\mathbb{K}_v}}_{=: G_{\infty}} \times \prod_{v \in S \setminus V_{\infty}^{\mathbb{K}}} G_{\mathbb{K}_v}.$$

Dann gibt es eine natürliche Operation von Γ auf dem Raum

$$X_S := X \times \prod_{v \in S \setminus V_{\infty}^{\mathbb{K}}} X_v,$$

die eigentlich ist, wobei X der zu G_{∞} gehörende symmetrische Raum und X_v ein Bruhat-Tits-Gebäude, d.h. ein zusammenziehbarer simplizialer Komplex, deren Dimension gleich dem \mathbb{K}_v -Rang von G ist. [Serre, 5.2 und 5.3]

3.6 Unser Spezialfall

Sei $S := \{|\cdot|_{\infty}, |\cdot|_{p_1}, \dots, |\cdot|_{p_r}\}$ die Menge der (paarweise nicht-äquivalenten) p_i -adischen Bewertungen zusammen mit dem üblichen Absolutbetrag $|\cdot|_{\infty}$ von \mathbb{Q} . In dieser Arbeit untersuchen wir S -arithmetische Untergruppen zusammenhängender halbeinfacher \mathbb{Q} -Gruppen vom reellen und für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ vom p_i -adischen Rang 1 (das heißt $\text{Rang}_{\mathbb{R}}(G_{\mathbb{R}}) = 1$ und $\text{Rang}_{\mathbb{Q}_{p_i}}(G_{\mathbb{Q}_{p_i}}) = 1$). Nach Satz 3.1 [PlatRap, Theorem 5.7] ist $G_S/G_{\mathcal{O}(S)}$ von endlichem G -invariantem Volumen, aber nicht kompakt. Nach [Serre, 5.3] ist $G_{\mathbb{R}}$ eine reelle Lie-Gruppe, und ist also aus Rang-Gründen isomorph zu einer der Gruppen $SO(n, 1)^0$, $SU(n, 1)$, $Sp(n, 1)$ oder F_4^* . $G_{\mathbb{R}}$ enthält eine maximale kompakte Untergruppe K und $G_{\mathbb{R}}/K$ ist ein Rang 1 symmetrischer Raum vom nicht-kompakten Typ. Also ist $X := G_{\mathbb{R}}/K$ einer der Räume

$$\begin{aligned} \mathbb{R}H^m &= SO(m, 1)^0/SO(m), \\ \mathbb{C}H^m &= SU(m, 1)/U(m), \\ \mathbb{H}H^m &= Sp(m, 1)/(Sp(m) \times Sp(1)) \text{ oder} \\ \mathbb{O}H^2 &= F_4^*/Spin(9), \end{aligned}$$

vgl. [Helgason, Tabelle auf Seite 518].

X ist eine Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit negativ gepinchter Krümmung $-b^2 \leq \kappa \leq -a^2$ mit $0 \leq a < \infty$ und $0 \leq b \leq \infty$. Seien p_1, \dots, p_r paarweise verschiedene Primzahlen. Ist $S := \{|\cdot|_{\infty}, |\cdot|_{p_1}, \dots, |\cdot|_{p_r}\}$ wie oben, so bezeichnen wir mit Γ sowohl die S -arithmetische Gruppe $G_{\mathcal{O}(S)}$, als auch ihre Diagonaleinbettung in $G_S := G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{Q}_{p_1}} \times \dots \times G_{\mathbb{Q}_{p_r}}$. Nach einem Satz von Borel und Serre [Serre, §1, S. 108-110] ist Γ endlich präsentiert.

Nach 3.4 ist Γ ein Gitter in G_S , d.h. Γ ist diskret in G_S und G_S/Γ hat ein endliches

3 S -arithmetische Gruppen

invariantes Volumen. Γ operiert eigentlich diskontinuierlich durch Isometrien auf dem Raum

$$X_S := X \times \prod_{v \in S \setminus V_\infty^{\mathbb{K}}} T_v,$$

wobei jeder Faktor im Produkt $\prod_{v \in S \setminus V_\infty^{\mathbb{K}}} T_v$ ein Bruhat-Tits-Baum ist, denn der \mathbb{Q}_{p_i} -Rang von T_v für $v = |_{p_i}$ ist gleich 1 für $i = 1, \dots, r$ [Serre, 5.2 und 5.3]. Das gesamte Produkt der Bäume kürzen wir mit T ab.

Bemerkung 3.3. Man beachte, dass aus $\text{Rang}_{\mathbb{R}} G = 1$ nicht automatisch $\text{Rang}_{\mathbb{Q}_{p_i}} G = 1$ folgt. Man kann sich das etwa anhand des folgenden Beispiels klarmachen:

Beispiel 3.4. Seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und G eine \mathbb{Q} -Gruppe mit

$$G_{\mathbb{R}} \cong SO(3, 1) = SO(A)(\mathbb{R}).$$

Dann ist

$$G_{\mathbb{Q}_p} \cong SO(A)(\mathbb{Q}_p) := \{g \in \mathbb{Q}_p^{4 \times 4} \mid g^T A g = A, \det g = 1\}$$

die Gruppe der \mathbb{Q}_p -Punkte von G . Sei nun $p = 5$. \mathbb{Q}_5 hat ein Element γ mit $\gamma^2 = -1$. Genauer ist das das Element

$$\gamma = 2 + 5 + 5^3 + 5^5 + 5^7 + 5^9 + \dots$$

von \mathbb{Q}_5 . Man rechnet nämlich leicht nach, dass $\gamma^2 = 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + \dots$ die Gleichung

$$5 + x = 4$$

löst. Die Untergruppe

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \gamma^{-1}b_1 & 0 & 0 \\ \gamma b_1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{pmatrix} \mid a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2 = 1 \right\}$$

von $SO(A)(\mathbb{Q}_5)$ ist eine zweidimensionale abelsche Gruppe. Das charakteristische Polynom

$$((a_1 - x)^2 + b_1^2)((a_2 - x)^2 - b_2^2) = (x - a_1 + \gamma b_1)(x - a_1 - \gamma b_1)(x - a_2 + b_2)(x - a_2 - b_2)$$

jeder Matrix aus D zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren, also ist jedes Element von D über \mathbb{Q}_5 diagonalisierbar. Da D kommutativ ist, sind alle Matrizen aus D simultan diagonalisierbar [PlatRap, 2.1.7], das heißt, D ist konjugiert zu einer Untergruppe aus lauter diagonalen Matrizen. Also ist $\text{Rang}_{\mathbb{Q}_5} G \geq 2$.

Bemerkung 3.5. Die einfache Konstruktion der Untergruppe T von $G_{\mathbb{Q}_5}$ im oberen Beispiel begründet die folgende Tatsache: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine halbeinfache algebraische über \mathbb{Q} definierte Gruppe G mit $\text{Rang}_{\mathbb{R}} G = 1$ und $\text{Rang}_{\mathbb{Q}_5} G \geq n$.

4 Ein quasi-isometrisches Modell für Γ

Das Ziel dieses Kapitels ist, die Geometrie der Gruppe Γ aus 3.6 bis auf Quasi-Isometrie zu verstehen. Eine Möglichkeit besteht darin, einen metrischen Raum Ω zu finden, der aus einer sehr weiten Entfernung wie ein Cayley-Graph von Γ aussieht. Man spricht von einem zu Γ *quasi-isometrischen* Raum. Eigenschaften einiger Hilfskonstruktionen auf Ω (z.B. des in Kapitel 5 beschriebenen Combings) sind quasi-isometrische Invarianten, lassen sich also auf Γ (genauer auf ihren Cayley-Graphen) übertragen.

4.1 Bruhat-Tits-Bäume

In diesem Abschnitt wollen wir die einzelnen Faktoren T_{p_i} von T in $X \times T$ besser verstehen. Jedes T_{p_i} ist der mit der p_i -adischen Gruppe $G_{\mathbb{Q}_{p_i}}$ assoziierte Bruhat-Tits-Baum T_{p_i} ist.

Ein *Baum* ist ein zusammenhängender nicht leerer Graph, in dem je zwei Ecken durch genau einen Pfad miteinander verbunden werden können.

Bruhat-Tits-Bäume sind spezielle Bäume. Sie stellen das kombinatorische Analogon symmetrischer Räume (denen halbeinfache reelle Lie-Gruppen zu Grunde liegen) dar, und verdanken ihre besondere Struktur im Wesentlichen den Eigenschaften des nicht-archimedischen Betrags des entsprechenden p -adischen Körpers.

Seien also \mathbb{K} ein lokal kompakter nicht-archimedischer Körper (zum Beispiel \mathbb{Q}_p für eine Primzahl p) und \mathbf{G} eine halbeinfache zusammenhängende algebraische \mathbb{K} -Gruppe vom \mathbb{K} -Rang 1. Die Gruppe der \mathbb{K} -Punkte $\mathbf{G}_{\mathbb{K}}$ von \mathbf{G} bezeichnen wir in diesem Abschnitt zur Vereinfachung der Notation mit G . Es gibt einen Baum, den wir in diesem Abschnitt mit T bezeichnen, auf dem G operiert.

A. Lubotzky gibt in seiner Arbeit [Lubotzky, 2.] eine kurze und prägnante Beschreibung von dem mit G assoziierten Bruhat-Tits-Baum T an: G hat zwei Konjugationsklassen von maximal kompakten Untergruppen. Ist R eine solche, so wählt man einen Repräsentanten S der anderen Konjugationsklasse, sodass der Index von $R \cap S$ in R minimal ist. Die Menge der Ecken von T ist dann durch

$$V(T) = G/R \cup G/S$$

und die Menge der Kanten durch

$$E(T) = G/I \text{ mit } I := R \cap S$$

gegeben. Die Kante gI verbindet die zwei Ecken gR und gS . Der Grad der Ecke gR (das heißt die Anzahl der Kanten, die sich in dieser Ecke treffen) ist also gleich dem Index von I in R , etwa $r + 1$. Genauso ist der Grad von gS gleich $[S : I] = s + 1$. Im Allgemeinen ist $r \neq s$, sodass es sich bei T um einen semiregulären Baum handelt.

Die Aktion von G auf der Menge der Ecken von T hat zwei Orbits.

Eine andere Möglichkeit, so einen Baum zu definieren, ist, ihn als einen Spezialfall eines Bruhat-Tits-Gebäudes zu sehen, das heißt eines simplizialen Komplexes, der mit einer p -adischen Gruppe G wie oben, jedoch ohne Einschränkung an den Rang, assoziiert wird. Dieser Weg ermöglicht eine bessere Einsicht in die Geometrie von dem entstehenden Gebilde. Wir skizzieren hier die Konstruktion eines Bruhat-Tits-Baums und beziehen uns dabei auf das zweite Kapitel vom Buch von [Macdonald]. Den allgemeinen Fall (\mathbb{K} -Rang(G) ≥ 1) findet man ebenfalls in [Macdonald, Kapitel 2] bzw. im Buch von [Steinberg].

Affine Weyl-Gruppe

Wir betrachten einen reellen eindimensionalen Vektorraum, etwa die reelle Achse $V = \mathbb{R}$, und geben uns zwei Punkte von V vor, etwa 1 und 2. Mit a_i bezeichnen wir die Spiegelung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an i für $i \in \{1, 2\}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir $\alpha := a_i + k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto a_i(x) + k$. Die Menge der affinen Spiegelungen

$$\{\alpha = a_i + k \mid i \in \{1, 2\}, k \in \mathbb{Z}\}$$

bildet die sogenannte *affine Weyl-Gruppe* \mathbf{W} von V . Die Gruppe \mathbf{W} wird von $\mathcal{R} = \{a_1, a_2\}$ erzeugt.

Sei nun \mathbf{T} ein maximaler über \mathbb{K} zerfallender Torus von \mathbf{G} und \mathbf{N} der Normalisator von \mathbf{T} in \mathbf{G} . Sei $N := \mathbf{N}_{\mathbb{K}}$. Es gibt zwei injektive Homomorphismen $u_{a_1} : \mathbb{K} \rightarrow G$ und $u_{a_2} : \mathbb{K} \rightarrow G$, sodass die Untergruppen

$$U_\alpha = U_{a_i+k} := \{u_{a_i}(x) \mid x \in \mathbb{K}, |x| \leq p^k\}$$

von G zusammen mit der Untergruppe N die gesamte Gruppe G erzeugen ([Macdonald, Theorem (2.5.2)]):

$$G = \langle \{U_\alpha, \alpha \in \mathbf{W}\}, N \rangle.$$

Es gibt einen Homomorphismus $\nu : N \rightarrow \mathbf{W}$ von N in die Weyl-Gruppe \mathbf{W} von V [Macdonald, (2.6.8)]. Setzt man

$$H := \text{Kern}(\nu) \text{ und } B := \langle U_{a_2}, H \rangle,$$

so gilt außerdem

$$H = B \cap N \quad [\text{Macdonald, (2.6.8)}].$$

Wir identifizieren im Weiteren \mathbf{W} mit N/H . Es gilt:

$$G = \mathbf{W}B$$

und die Abbildung $w \mapsto BwB$ ist eine Bijektion von \mathbf{W} in die Menge der Doppelnebenklassen $B \backslash G / B$ von G [Macdonald, (2.3.1)].

Parahorische Untergruppen

Die Untergruppen gBg^{-1} für $g \in G$ heißen *Iwahori-Untergruppen* von G . Eine echte Untergruppe von G , die eine Iwahori-Untergruppe enthält, heißt *parahorische Untergruppe* von G .

Beispiele für parahorische Untergruppen sind die folgenden Standard-Untergruppen:

$$P_0 := B$$

und

$$P_i := B \langle a_i \rangle B$$

für $i \in \{1, 2\}$. Dabei ist $\langle a_i \rangle$ die von $a_i \in N/H$ erzeugte Untergruppe von N/H , als eine Teilmenge von G gesehen.

Wir betrachten nun das Intervall $[1, 2]$ in \mathbb{R} , als eine *Kammer* C in V . Die Bestandteile von C , das heißt die *Ecken* 1 und 2, sowie die *Kante* $(1, 2)$ bezeichnen wir mit *Facetten* F von C . Wenn wir von der abgeschlossenen Kante von C sprechen, meinen wir $[1, 2]$. Eine abgeschlossene Facette von C ist dann 1, 2 oder $[1, 2]$.

Bemerkung 4.1 ([Macdonald] (2.3)-(2.6)). *Parahorische Untergruppen von G haben folgende Eigenschaften:*

- (1) *Jede parahorische Untergruppe P von G ist konjugiert zu einem P_i für genau ein $i \in \{0, 1, 2\}$.*
- (2) *Jeder parahorischen Untergruppe P von G entspricht wegen (1) genau eine Facette $F(P)$ der Kammer C , genauer:*

$$\begin{aligned} P &\leftrightarrow 1, \text{ falls } P \text{ konjugiert zu } P_1 \text{ ist,} \\ P &\leftrightarrow 2, \text{ falls } P \text{ konjugiert zu } P_2 \text{ ist und} \\ P &\leftrightarrow (1, 2), \text{ falls } P \text{ konjugiert zu } P_0 = B \text{ ist.} \end{aligned}$$

Definition: Bruhat-Tits-Baum

Ein *Bruhat-Tits-Baum* von G ist die Menge T aller Paare

$$\{(P, x) \mid P < G \text{ parahorisch, } x \in F(P) \text{ ein Punkt.}\}$$

Die Menge $\mathcal{F}(P) := \{(P, x) \mid x \in F(P)\}$ ist eine *Kante*, falls P zu B konjugiert ist, bzw. ist eine *Ecke*, falls P zu einem P_i für $i \in \{1, 2\}$ konjugiert ist.

4 Ein quasi-isometrisches Modell für Γ

Jede Iwahori-Untergruppe liegt in genau zwei größeren parahorischen Untergruppen. Daher ist T ein simplizialer Komplex mit offenen Simplizes $\mathcal{F}(P)$ und geschlossenen Simplizes

$$\overline{\mathcal{F}(P)} := \bigcup_{\substack{Q \supset P, \\ Q \text{ parahorisch}}} \mathcal{F}(P),$$

die entweder eine Ecke oder eine Kante zusammen mit zwei sich anschließenden Ecken sind.

G operiert auf T wie folgt:

$$g(P, x) = (gPg^{-1}, x).$$

Geometrie von T

Wendet man die affine Spiegelungsgruppe $\langle \{\alpha = a_i + k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid i = 1, 2, k \in \mathbb{Z}\} \rangle$ auf die Kammer $[1, 2]$ von $V = \mathbb{R}$ an, so bekommt man die ganze reelle Achse: den Coxeterkomplex von \mathbf{W} . Auch im Bruhat-Tits-Baum T findet man \mathbb{R} als isometrisches (bzgl. der unten angegebenen Metrik) Bild von V wieder, etwa die *Standard-Linie*

$$\mathcal{A}_0 := \bigcup_{w \in \mathbf{W}} \overline{F(wBw^{-1})} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{n\mathcal{F}(P)}.$$

Es gilt nämlich die

Proposition 4.2 ([Macdonald] (2.4.1)). *Es gibt genau eine Bijektion $j : V \rightarrow \mathcal{A}_0$, sodass folgende zwei Aussagen gelten:*

(1) *Für jede Facette F von $C = [1, 2]$ und jedes $x \in F$ gilt:*

$$j(x) = (P_F, x),$$

dabei ist $P_F = P_1$, wenn $F = 1$, $P_F = P_2$, wenn $F = 2$, und $P_F = 0$, wenn $F = (1, 2)$ ist.

(2) *$j \circ w = w \circ j$ für alle $w \in \mathbf{W}$.*

Die Teilkomplexe $\mathcal{A} := g\mathcal{A}_0$ von T , $g \in G$ heißen *Apartments* von T . Die einzelnen Punkte $(P, x), (P', y)$ usw. von \mathcal{A} bezeichnen wir zur Vereinfachung der Notation mit \bar{x}, \bar{y} usw.

Bemerkung 4.3. *Auf jedem Apartment $\mathcal{A} = g\mathcal{A}_0$ kann man eine euklidische Metrik definieren, und zwar:*

$$d_{\mathcal{A}}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{g\mathcal{A}_0}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{\text{eukl.}}(j^{-1}(g^{-1}\bar{x}), j^{-1}(g^{-1}\bar{y})) \text{ für } \bar{x} = (P, x), \bar{y} = (P', y) \in \mathcal{A}.$$

In dieser Metrik hat jede Kante von T die Länge 1.

Da $g\mathcal{A}_0$, $g \in G$, Kopien von \mathbb{R} sind, nennen wir sie auch *Linien* von T .

Proposition 4.4. *Je zwei Simplizes von T , also je zwei Ecken, oder je zwei Kanten, oder eine Ecke und eine Kante, liegen auf einer gemeinsamen Linie von T .*

Beweis: Seien $\mathcal{F}(P)$ und $\mathcal{F}(P')$ zwei beliebige Simplizes, dann existieren $g_1, g_2 \in G$ und Facetten F_1, F_2 von C in V , sodass $P = g_1 P_{F_1} g_1^{-1}$ und $P' = g_2 P_{F_2} g_2^{-1}$. Wegen $G = BWB$ gibt es b_1 und $b_2 \in B$ mit $g_1^{-1} g_2 = b_1 n b_2$. Setze $g := g_1 b_1$, dann:

$$P = g P_{F_1} g^{-1}, \quad P' = g (n P_{F_2} n^{-1}) g^{-1}.$$

Da $P_{F_1} \in \mathcal{A}_0$ und $n P_{F_2} n^{-1} \in \mathcal{A}_0$, folgt $P, P' \in g \mathcal{A}_0$. □

Man rechnet leicht nach, dass G transitiv auf der Menge

$$\{(\mathcal{A}, b) \mid \mathcal{A} \text{ ist eine Linie, } b \text{ ist eine Kante von } \mathcal{A}\}$$

operiert. Aus dieser Eigenschaft ergibt sich die Existenz der sogenannten *Retraktion* ρ von T auf eine Linie \mathcal{A} :

Proposition 4.5 ([Macdonald] (2.4.5)). *Seien \mathcal{A} eine Linie, $b \subset \mathcal{A}$ eine Kante in T . Dann existiert genau eine Abbildung $\rho : T \rightarrow \mathcal{A}$, sodass für jede andere Linie \mathcal{A}' mit $b \subset \mathcal{A}'$*

$$\rho|_{\mathcal{A}'} : \mathcal{A}' \rightarrow \mathcal{A}$$

eine Bijektion ist mit folgenden Eigenschaften:

- (1) *Es gibt ein $g \in G$ mit $\rho \bar{x} = g \bar{x}$ für alle $\bar{x} \in \mathcal{A}'$.*
- (2) *$\rho \bar{x} = \bar{x}$ für alle $\bar{x} \in b$.*

Sogar: $\rho \bar{x} = \bar{x}$ für alle $\bar{x} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ und $d_{\mathcal{A}'}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{\mathcal{A}}(\rho \bar{x}, \rho \bar{y})$ für alle $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{A}'$.

Diese Abbildung heißt die *Retraktion auf \mathcal{A} mit dem Zentrum b* . Um zu verdeutlichen, dass es sich um eine Abbildung auf die Linie \mathcal{A} handelt, und dass die Kante b festgehalten wird, verwenden wir nach Bedarf auch die Bezeichnungen $\rho_{\mathcal{A}}$ und $\rho_{\mathcal{A}, b}$.

Bemerkung 4.6 ([Macdonald] (2.4.7),(2.4.8)). *$\rho_{\mathcal{A}, b}$ hat folgende Eigenschaften:*

- (1) *$\rho \bar{x} = \bar{x}$ für alle $\bar{x} \in \mathcal{A}$.*
- (2) *Für jede Kante $b' \in T$ ist $\rho|_{b'}$ eine Isometrie von \bar{b}' nach $\overline{\rho b'}$ bezüglich der euklidischen Metrik.*
- (3) *Für $\bar{x} \in \bar{b}$ gilt: $\rho^{-1}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.*
- (4) *$d(\rho \bar{x}, \rho \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$ für alle $\bar{x}, \bar{y} \in T$.*

4 Ein quasi-isometrisches Modell für Γ

Mit Hilfe von ρ konstruiert man eine G -invariante Metrik d auf T , die, eingeschränkt auf \mathcal{A} , mit $d_{\mathcal{A}}$ übereinstimmt: Sind \bar{x} und \bar{y} zwei Ecken in T , so findet man eine Linie \mathcal{A}_1 mit $\mathcal{A}_1 \supset \bar{x}, \bar{y}$ und setzt:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := d_{\mathcal{A}_1}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Angenommen, \bar{x} und \bar{y} liegen auch auf einer anderen gemeinsamen Linie \mathcal{A}_2 . Sei b_1 eine Kante in \mathcal{A}_1 mit $\bar{x} \in b_1$ und b_2 eine Kante in \mathcal{A}_2 mit $\bar{y} \in b_2$. Sei \mathcal{A} eine Linie, die b_1 und b_2 enthält. Wir betrachten die Retraktionen $\rho = \rho_{\mathcal{A}} : T \rightarrow \mathcal{A}$. Es gilt:

$$d_{\mathcal{A}_1}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{\mathcal{A}}(\rho\bar{x}, \rho\bar{y}) = d_{\mathcal{A}}(\bar{x}, \bar{y})$$

und

$$d_{\mathcal{A}_2}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{\mathcal{A}}(\rho\bar{x}, \rho\bar{y}) = d_{\mathcal{A}}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Also ist d wohldefiniert und G -invariant. Ebenfalls mit Hilfe einer Retraktion zeigt man, dass T bezüglich d vollständig ist [Macdonald, (2.4.10)].

Proposition 4.7. *Zwischen je zwei Punkten von T gibt es eine eindeutige Geodätische.*

Beweis: Seien $\bar{x} = (P, x)$ und $\bar{y} = (P', y)$ zwei Punkte in T . Sie liegen auf einer gemeinsamen Linie \mathcal{A} , also gibt es ein Geradenstück $[\bar{x}, \bar{y}] \supset \mathcal{A}$, das sie verbindet. Sei \bar{z} ein Punkt auf einer Geodätischen zwischen \bar{x} und \bar{y} . Dann gilt: $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$. Sei $\bar{z}_0 \in [\bar{x}, \bar{y}]$, sodass $d(\bar{x}, \bar{z}_0) = d(\bar{x}, \bar{z})$, also nach der Konstruktion der Metrik: $d(\bar{z}_0, \bar{y}) = d(\bar{z}, \bar{y})$. Seien $b \supset \mathcal{A}$ eine Kante mit $\bar{z}_0 \in b$ und $\rho := \rho_{\mathcal{A}, b}$ die Retraktion auf \mathcal{A} mit dem Zentrum b . Dann:

$$\begin{aligned} d(\bar{x}, \bar{y}) &\leq d(\bar{x}, \rho\bar{z}) + d(\rho\bar{z}, \bar{y}) \\ &\leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y}) \text{ wegen Bemerkung 4.6 (4)} \\ &= d(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \rho\bar{z}) + d(\rho\bar{z}, \bar{y}).$$

und mit $d(\bar{x}, \rho\bar{z}) \leq d(\bar{x}, \bar{z})$ und $d(\rho\bar{z}, \bar{y}) \leq d(\bar{z}, \bar{y})$ (nach Bemerkung 4.6 (4)):

$$d(\bar{x}, \bar{z}) \leq d(\bar{x}, \rho\bar{z}).$$

Da $\bar{x}, \bar{y}, \rho\bar{z} \in \mathcal{A}$, gilt $\rho(\bar{z}) = \bar{z}_0$. Also $z \in \rho^{-1}(\bar{z}_0)$ (nach Bemerkung 4.6 (3)) und somit $\bar{z} = \bar{z}_0$. \square

Bemerkung Ein Bruhat-Tits-Baum T ist ein Baum. In der Tat, T ist ein simplizialer Komplex, der nach Bemerkung 4.1 nur zwei Arten von Simplizes hat. Die Apartments sind isometrische Kopien von \mathbb{R} , also sind diese Simplizes Ecken und Kanten: der simpliziale Komplex ist eindimensional. Und die Eindeutigkeit der Geodätischen zwischen je zwei Punkten von T (Proposition 4.7) garantiert, dass T keine geschlossenen Schleifen hat.

4.2 Quasi-Isometrien und das Milnor-Svarc-Kriterium

Definition Seien (X_1, d_1) , (X_2, d_2) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ heißt eine (A, B) -quasi-isometrische Einbettung, wenn Konstanten $A \geq 1$ und $B \geq 0$ existieren, sodass für alle $x, y \in X_1$

$$\frac{1}{A}d_1(x, y) - B \leq d_2(f(x), f(y)) \leq Ad_1(x, y) + B$$

gilt. Falls es noch zusätzlich eine Konstante $C \geq 0$ gibt, sodass jeder Punkt von X_2 in einer C -Umgebung des Bildes von f liegt, so heißt f eine (A, B) -Quasi-Isometrie.

Existiert eine Quasi-Isometrie zwischen X_1 und X_2 , so heißen diese Räume *quasi-isometrisch*.

Zum Beispiel sind ein Punkt und die Einheitsphäre von \mathbb{R}^3 quasi-isometrisch oder die euklidische Ebene \mathbb{R}^2 und die Menge der Punkte dieser Ebene mit ganzzahligen Koordinaten.

Definition Eine Gruppe G von Isometrien von (X, d) operiert *eigentlich diskontinuierlich* auf X , falls für jedes Element $x \in X$ die Bahn $Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ lokal endlich ist .

Man kann zeigen, dass G genau dann eigentlich diskontinuierlich auf X operiert, wenn jeder Punkt von X eine Umgebung V besitzt, sodass $\{g \in G \mid gV \cap V \neq \emptyset\}$ endlich ist.

Definition Eine Operation von G auf X heißt *kompakt*, wenn es eine kompakte Menge $K \subset X$ gibt, sodass $X = \Gamma \cdot K$.

Das sogenannte **Milnor-Svarc-Kriterium** [Milnor] besagt: Operiert eine endlich erzeugte Gruppe $\Gamma \subset \text{Isom}(X)$ auf einem metrischen Längenraum X eigentlich diskontinuierlich und kompakt, so sind Γ und X quasi-isometrisch.

Es gilt also, einen metrischen Raum Ω zu finden, auf dem Γ eigentlich diskontinuierlich und kompakt operiert. Auf dem Raum $\tilde{\Omega} = X \times T$ aus 3.6 operiert Γ zwar eigentlich diskontinuierlich, aber nicht kompakt, denn die Projektion der Fundamentalmenge $\Phi = B \times C$ (der Operation von Γ auf G_S , vgl. 3.4) auf X enthält den Fundamentalbereich der Operation von Γ auf X , welche bekannterweise nicht unbedingt kompakt sein muss.

Unser Zwischenziel ist also, die Fundamentalmenge Φ zu kompaktifizieren. Dies erreichen wir, wenn wir, einfach gesprochen, ihre „Spitzen“ (von denen es nur endlich viele gibt, s. [BGroS, Theorem 10.4]) entlang der sogenannten Horosphären abschneiden. Mit dem Begriff „Horosphäre“ und seinen Eigenschaften befassen wir uns im nächsten Abschnitt.

4.3 Horosphären in $CAT(0)$ -Räumen

4.3.1 Definition und Beispiele

$CAT(0)$ -Räume

Eine gute Einführung in die $CAT(\kappa)$ -Räume gibt es in [BriHaefl, Chapter II.1].

Ein *geodätisches Dreieck* $\Delta (=:\Delta(p, q, r))$ eines metrischen Raumes Y besteht aus drei Punkten $p, q, r \in Y$, seinen *Ecken*, und aus drei fest gewählten geodätischen Segmenten $[p, q]$, $[q, r]$, $[r, p]$, seinen *Seiten*. Liegt ein Punkt $y \in Y$ auf $[p, q]$, $[q, r]$ oder $[r, p]$, so schreiben wir $y \in \Delta$.

Sei M_κ^2 eine zweidimensionale vollständige einfach zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung $-\kappa^2$. Ein Dreieck $\bar{\Delta} = \Delta(\bar{p}, \bar{q}, \bar{r})$ in M_κ^2 nennen wir ein *Vergleichsdreieck* für $\Delta \subset Y$, wenn

$$d(\bar{p}, \bar{q}) = d(p, q), \quad d(\bar{q}, \bar{r}) = d(q, r) \quad \text{und} \quad d(\bar{p}, \bar{r}) = d(p, r).$$

So ein Dreieck $\bar{\Delta} \subset M_\kappa^2$ existiert, wenn der Umfang $d(p, q) + d(q, r) + d(r, p)$ von Δ kleiner ist als der zweifache Durchmesser $2D_\kappa$ von M_κ^2 , und ist bis auf eine Isometrie eindeutig. Ein Punkt $\bar{y} \in [\bar{q}, \bar{r}]$ heißt ein *Vergleichspunkt* für $y \in [q, r]$, wenn

$$d(q, y) = d(\bar{q}, \bar{y}).$$

Vergleichspunkte auf $[p, q]$ und $[p, r]$ sind in analoger Weise definiert.

Definition Seien Y ein metrischer Raum und $\kappa \leq 0$. Seien Δ ein geodätisches Dreieck in Y und $\bar{\Delta} \subset M_\kappa^2$. Wir sagen Δ *erfüllt die $CAT(\kappa)$ -Ungleichung*, wenn für alle $x, y \in \Delta$ und alle Vergleichspunkte $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta}$

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$$

gilt.

Y heißt ein *$CAT(\kappa)$ -Raum*, wenn Y ein geodätischer Raum ist und alle geodätischen Dreiecke von Y die $CAT(\kappa)$ -Ungleichung erfüllen.

$CAT(\kappa)$ -Räume sind also metrische Räume, deren Dreiecke „schlanker“ sind, als die „Vergleichsdreiecke“ im Modellraum M_κ^2 . Eine alternative Beschreibung ist die folgende: Geodätische γ_1 und γ_2 eines $CAT(\kappa)$ -Raums, die im selben Punkt starten, laufen „langsamer“ auseinander, als die entsprechenden Vergleichsgeodätischen γ'_1 und γ'_2 in M_κ^2 (γ'_1 und γ'_2 starten ebenfalls im selben Punkt, und ihre Geschwindigkeitsvektoren schließen den gleichen Winkel ein, wie $\dot{\gamma}_1(0)$ und $\dot{\gamma}_2(0)$).

Beispiele für $CAT(-a^2)$ -Räume sind Räume mit negativ gepinchter Krümmung ($-b^2 \leq \kappa \leq -a^2$) (wie z.B. unser Raum X aus 3.6), Bäume oder Produkte von $CAT(-a^2)$ -Räumen.

Horosphären

Horosphären sind Niveaumengen von sogenannten Horofunktionen, auf deren genaue Definition wir hier verzichten, da man zeigen kann, dass in vollständigen $CAT(0)$ -Räumen jede Horofunktion eine Busemann-Funktion ist [BriHaefl, S. 269-273].

Definition Seien Y ein metrischer Raum und $c : [0, \infty) \rightarrow Y$ ein geodätischer Strahl. Die Funktion $b_c : Y \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$b_c(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, c(t)) - t)$$

heißt *Busemann-Funktion*, assoziiert mit dem geodätischen Strahl c . Dass der Grenzwert existiert, zeigt das folgende Lemma [BriHaefl, Lemma 8.18, (1)].

Lemma 4.8. *Seien Y ein metrischer Raum und $c : [0, \infty) \rightarrow Y$ ein geodätischer Strahl. Für jedes $x \in Y$ ist die Funktion $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto d(x, c(t)) - t$ nicht-steigend und von unten durch $-d(x, c(0))$ beschränkt.*

Beweis Nach der Dreiecksungleichung gilt für $0 \leq t' < t$:

$$d(x, c(t)) \leq d(x, c(t')) + t - t',$$

und somit

$$d(x, c(t)) - t \leq d(x, c(t')) - t'.$$

Andererseits gilt nach der Dreiecksungleichung

$$t - t' = d(x, c(t')) + d(x, c(t)).$$

Für $t' = 0$ erhalten wir

$$-d(x, c(0)) \leq d(x, c(t)) - t.$$

□

Wir nennen c den *Zentralstrahl* und $c(\infty)$ den *Basispunkt* der Busemann-Funktion b_c . Die Niveaumengen von b_c heißen die *Horosphären* mit dem Zentralstrahl c und dem Basispunkt $c(\infty)$.

Ziemlich anschaulich ist der folgende Satz (Beweis: [BriHaefl, S. 269]):

Satz 4.9. *Sei Y ein vollständiger metrischer Raum. Sind ξ_1, ξ_2 zwei asymptotische geodätische Strahlen, d.h. geodätische Strahlen in Y mit $\xi_1(\infty) = \xi_2(\infty)$, so unterscheiden sich zwei Busemann-Funktionen b_{ξ_1} und b_{ξ_2} höchstens um eine Konstante c :*

$$b_{\xi_1} = b_{\xi_2} + c.$$

Beispiele

- (1) Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^n sei $c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $c(t) = a + te$, wobei $a \in \mathbb{R}^n$ fest und $e \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor ist. Die mit c assoziierte Busemann-Funktion b_c ist gegeben durch $b_c(x) = \langle a - x, e \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt von \mathbb{R}^n ist. Die Horosphären sind affine Hyperebenen, die senkrecht auf e stehen.

- (2) Seien \mathbb{H}^2 die Poincaré-Halbebene mit der hyperbolischen Metrik $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$, $\partial_\infty \mathbb{H}^2 := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ der Rand von \mathbb{H}^2 im Unendlichen und $c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$ der geodätische Strahl mit $c(0) = i$, $c(\infty) = \infty$. Dann ist die Busemann-Funktion b_c gegeben durch $b_c(x + iy) = -\ln y$. Die Horosphären sind Geraden, die senkrecht auf der y -Achse stehen.

Wählt man statt c einen geodätischen Strahl \tilde{c} mit $\tilde{c}(0) \in \mathbb{H}^2$ und $\tilde{c}(\infty) \in \mathbb{R} \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2$, so sind die entsprechenden Horosphären euklidische Kreise, die die x -Achse im Punkt $\tilde{c}(\infty)$ berühren. Eine Busemann-Funktion dazu ist $b_c(x + iy) = -\ln(\text{Im}(T(x + iy)))$, wobei $T \in PSL_2(\mathbb{R}) < \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ mit $T(\tilde{c}(0)) = i$ und $T(\tilde{c}(\infty)) = \infty$.

- (3) Sei $Y = Y_1 \times Y_2$ das Produkt zweier $CAT(0)$ -Räume Y_1 und Y_2 . Seien c_1 und c_2 geodätische Strahlen in Y_1 bzw. Y_2 . Ist $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, dann ist

$$c(t) = (c_1(t \cos \theta), c_2(t \sin \theta))$$

ein nach der Bogenlänge parametrisierter geodätischer Strahl in Y . Sind b_1, b_2 und b die mit c_1, c_2 und c assoziierten Busemann-Funktionen, dann gilt

$$b = (\cos \theta)b_1 + (\sin \theta)b_2.$$

In der Tat, wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, c(t)) + t)/2t = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} b(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, c(t)) - t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} (d(x, c(t))^2 - t^2) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} [d(x_1, c_1(t \cos \theta))^2 - t^2 \cos^2 \theta \\ &\quad + d(x_2, c_2(t \sin \theta))^2 - t^2 \sin^2 \theta] \\ &= (\cos \theta)b_1(x_1) + (\sin \theta)b_2(x_2). \end{aligned}$$

Horosphären zu einer festen Busemann-Funktion auf einem metrischen Raum Y bilden als Niveaumengen einer auf ganz Y definierten Funktion eine disjunkte Zerlegung von Y .

4.3.2 Geometrie der Horosphären in gepinchten Räumen

E. Heintze und H.-C. Im Hof zeigen in ihrer Arbeit 'Geometry of Horospheres' [H/IH], wie geometrische Eigenschaften der Horosphären von Hadamard-Mannigfaltigkeiten M (genauer, zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden vollständigen Riemann'schen Mannigfaltigkeiten mit der Krümmung $-b^2 \leq \kappa \leq -a^2$) mit solchen in den Räumen $M_a^2 =: M_a$ und $M_b^2 =: M_b$ konstanter Krümmung $-a^2$ bzw. $-b^2$ verglichen werden können.

Wir fassen einige Resultate dieses Artikels, die wir später immer wieder brauchen werden, zusammen.

Da Busemann-Funktionen und daher auch Horosphären von (der zusammenhängenden Riemann'schen Mannigfaltigkeit) M zumindest zweimal stetig differenzierbar sind, sind Abstände und Geodätische in Horosphären bzgl. der induzierten Metrik (wohl-)definiert. Als Niveaumengen einer Busemann-Funktion sind Horosphären abgeschlossen und daher vollständig, insbesondere existieren kürzeste Geodätische zwischen je zwei Punkten.

Sei γ_0 eine Geodätische von M . Mit σ_t bezeichnen wir die Horosphäre durch $\gamma_0(t)$ mit dem Basispunkt $\gamma_0(\infty)$. Für ein $p \in M$ sei γ^p eine Geodätische mit

$$\gamma^p(0) = p \text{ und } \gamma^p(\infty) = \gamma_0(\infty).$$

(Man nennt γ_0 und γ^p *asymptotisch* zueinander.) Der *radiale Fluss in die Richtung* $\gamma_0(\infty)$ ist die Abbildung

$$\psi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, (t, p) \mapsto \psi_t(p) := \gamma^p(t).$$

Offensichtlich gilt $\sigma_t = \psi_t(\gamma_0)$. Ist γ_1 eine zu γ_0 asymptotische Geodätische mit $\gamma_1(0)$, so gilt $\gamma_1(t) \in \sigma_t$. Wir bezeichnen den σ_t -Abstand zwischen $\gamma_0(t)$ und $\gamma_1(t)$ mit $h(t)$.

Proposition 4.10. *Für $t \geq 0$ gilt*

$$h(0)e^{-bt} \leq h(t) \leq h(0)e^{-at}.$$

Wir betrachten nun eine Busemann-Funktion F mit dem Zentralstrahl in Richtung $\gamma_0(\infty)$. Sei $f = F \circ \gamma$ die Einschränkung von F auf eine gegebene Geodätische γ . f misst die „Abweichung“ von $\gamma(t)$ von einer festen Horosphäre mit dem Basispunkt $\sigma_0(\infty)$. $f' = \langle \dot{\gamma}, \text{grad } F \rangle$ misst den Winkel zwischen γ und den Horosphären mit Basispunkt $\gamma_0(\infty)$. Seien im Folgenden f_a und f_b analog definierte Funktionen in M_a bzw. M_b .

Lemma 4.11. *Im Fall $f(0) = f_a(0) = f_b(0)$ und $f'(0) = f'_a(0) = f'_b(0)$ gilt*

$$\begin{aligned} f'_a(s) &\leq f'(s) \leq f'_b(s) \quad \text{für } s \geq 0 \text{ und} \\ f_a(s) &\leq f(s) \leq f_b(s) \quad \text{für } s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lemma 4.12. *Im Fall $f(0) = f_a(0) = f_b(0)$ und $f(l) = f_a(l) = f_b(l)$ gilt*

$$f_b(s) \leq f(s) \leq f_a(s) \quad \text{für } s \in [0, l].$$

4 Ein quasi-isometrisches Modell für Γ

Der nächste Satz vergleicht den (induzierten) σ -Abstand $h(p, q)$ zweier Punkte $p, q \in \sigma$ einer gegebenen Horosphäre mit ihrem Abstand $d(p, q)$ in M .

Satz 4.13.

$$\frac{2}{a} \sinh\left(\frac{a}{2}d(p, q)\right) \leq h(p, q) \leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(p, q)\right).$$

Die nächste Bezeichnung wird für uns im Weiteren eine wesentliche Rolle spielen.

Sei F die auf σ verschwindende Busemann-Funktion mit dem Basispunkt z . Die Projektion $\eta : M \rightarrow \sigma$ auf die Horosphäre σ in Richtung ihres Zentralstrahls (oder entlang ihres Zentralstrahls) ist definiert durch

$$p \mapsto \eta(p) := \psi(F(p), p),$$

wobei ψ der Radialfluss in Richtung z ist.

Sei nun eine beliebige Geodätische γ gegeben mit $\gamma(0) \in \sigma$. Wir interessieren uns für die Länge ihrer Projektionskurve $\mu = \eta \circ \gamma$ und für den (induzierten) σ -Abstand zwischen $\mu(0) = \gamma(0)$ und $\mu(s)$.

Proposition 4.14. *Sei β der Winkel zwischen $\dot{\gamma}(0)$ und $\text{grad}_{\gamma(0)}F$. Bezeichne mit $l(s)$ die Länge von $\mu|_{[0,s]}$ und mit $h(s)$ den σ -Abstand zwischen $\mu(0) = \gamma(0)$ und $\mu(s)$. Falls $\beta \leq \frac{\pi}{2}$, dann gilt für $s \geq 0$:*

$$\frac{1}{b} \left(\frac{\sin \beta}{\coth(bs) + \cos \beta} \right) \leq h(s) \leq l(s) \leq \frac{1}{a} \left(\frac{\sin \beta}{\coth(as) + \cos \beta} \right).$$

4.3.3 Beispiel

Um den Begriff Horosphäre in einem Produktraum, deren Faktoren zum Teil Bäume sind, mehr Anschaulichkeit zu verleihen, betrachten wir den Raum $\mathbb{H}^2 \times T_p$, wobei \mathbb{H}^2 die Poincaré-Halbebene und T_p der zu $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ assoziierte Bruhat-Tits-Baum. J. Taback [Taback 2000, 3.2] gibt eine schöne Beschreibung einer Familie von Horosphären auf diesem Raum, die wir hier kurz vorstellen wollen.

Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ operiert eigentlich diskontinuierlich via Isometrien auf $\mathbb{H}^2 \times T_p$. Eine Fundamentalmenge dieser Operation $\Phi = B \times l_0$ setzt sich aus dem Fundamentaltbereich B der Operation von $PSL_2(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H}^2 und einer Kante l_0 von T_p (vgl. 3.4) zusammen. Φ hat eine „Spitze“, die wir entlang einer Horosphäre σ , deren Zentralstrahl zu dieser „Spitze“ läuft, abschneiden. Lässt man auf der „Schnittstelle“ $S = \Phi \cap \sigma$ die Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ operieren, so entsteht eine $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ -äquivalente Familie Σ von Horosphären in $\mathbb{H}^2 \times T_p$ (mit Basispunkten aus $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ in jeder Kopie von \mathbb{H}^2 in $\mathbb{H}^2 \times T_p$). Wie diese Horosphären aussehen, verrät uns unsere Kenntnis der Operation von $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ auf $\mathbb{H}^2 \times T_p$, zum Beispiel die Tatsache, dass der Stabilisator einer Ecke $[L]$ im Baum T_p genau $PSL_2(\mathbb{Z})$ ist. Schneidet man also die Elemente von Σ mit einer beliebigen Kopie von \mathbb{H}^2 in $\mathbb{H}^2 \times T_p$, so erhält man eine disjunkte Menge von Horokreisen in \mathbb{H}^2 mit Basispunkten aus $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Betrachtet man die Teilmenge $\mathbb{H}^2 \times l$ für

eine Kante $l \subset T_p$, so sieht der darin liegende Teil einer Horosphäre wie ein abgeschnittener Kegel oder wie eine Ebene aus. Handelt es sich dabei um einen abgeschnittenen Kegel, so verbindet er zwei i. A. unterschiedlich große Kreise mit dem gleichen Basispunkt $\alpha \in \mathbb{Q}$ in \mathbb{H}^2 miteinander. Liegt dagegen eine Ebene vor, so verbindet es zwei zur x -Achse parallele i. A. in unterschiedlicher Höhe verlaufende Geraden in den beiden Grenzkopien von \mathbb{H}^2 in $\mathbb{H}^2 \times T_p$.

4.4 Konstruktion von Ω

Wir wollen einen Raum Ω konstruieren, der quasi-isometrisch zu Γ ist.

Zuerst fassen wir zusammen, was wir bis jetzt über Γ und die Räume, auf denen Γ operiert, wissen.

Jeder Faktor im Produkt $G_S = G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{Q}_{p_1}} \times \dots \times G_{\mathbb{Q}_{p_r}}$ hat eine links-invariante Metrik d_i ($i \in \{0, 1, \dots, r\}$), die wie folgt definiert ist:

- * Es gibt eine $G_{\mathbb{R}}$ -invariante Riemann'sche Metrik auf dem symmetrischen Raum $G_{\mathbb{R}}/K$, wobei K eine maximale kompakte Untergruppe von $G_{\mathbb{R}}$ ist. Wir können diese Metrik zu einer links-invarianten Riemann'schen Metrik d_0 auf $G_{\mathbb{R}}$ liften.
- * Für $i \in \{1, \dots, r\}$ liften wir die natürliche kombinatorische Metrik auf den Ecken des Baums T_i zu einer links-invarianten Metrik d_i auf $G_{\mathbb{Q}_{p_i}}$.

Die Metrik d_R , definiert durch

$$d_R((g_i)_{i=0,\dots,r}, (h_i)_{i=0,\dots,r}) := \sum_{i=0}^r d_i(g_i, h_i)$$

für alle $(g_i)_{i=0,\dots,r}, (h_i)_{i=0,\dots,r} \in G_S$,

ist eine links-invariante Metrik auf G_S .

Bemerkung Die d_i 's sind nicht eindeutig, jedoch ist d_R bis auf die Lipschitz-Äquivalenz eindeutig bestimmt [LuMoRag, S.6].

Γ ist eine diskrete Untergruppe der lokal kompakten Gruppe $G_S = G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{Q}_{p_1}} \times \dots \times G_{\mathbb{Q}_{p_r}}$ (als das Bild der Diagonaleinbettung, s. 3.6). G_S (und Γ) operieren in natürlicher Weise auf $X \times T$ aus 3.6. $X := G_{\mathbb{R}}/K$ ist ein symmetrischer Raum, der zu \mathbb{R}^d mit $d = \dim G_{\mathbb{R}} - \dim K$ diffeomorph ist, und T ist ein Produkt von Bäumen T_1, T_2, \dots, T_r (vgl. 3.6). Da Γ diskret in G_S ist, operiert Γ eigentlich diskontinuierlich via Isometrien auf $X \times T$. Die Operation ist nicht immer kokompakt. Nach 3.4 hat ihr Fundamentalbereich aber ein beschränktes Volumen.

Nun gehen wir zur eigentlichen Konstruktion von Ω über.

Das folgende Lemma gibt eine Fundamentalmenge Φ der Operation von Γ auf $\tilde{\Omega} := X \times T$. Dabei ist $\tilde{\Omega}$ mit der Produktmetrik $d = d_X \times d_T$ versehen (vgl. 4.5).

Lemma 4.15. *Eine Fundamentalmenge Φ der Operation von Γ auf $\tilde{\Omega}$ kann als Produkt $\Phi = B \times C$ gewählt werden, wobei $B \subset X$ eine Fundamentalmenge der Aktion von $G_{\mathbb{Z}}$ auf X und C eine kompakte Teilmenge von T ist.*

Beweis Wie im Beweis von Satz 3.1 (Schritt 3) lässt sich eine Teilmenge $\Phi' = B' \times C'$ von $G_{\mathcal{O}(S)}$ finden mit den Eigenschaften:

- (1) $G_{\mathcal{O}(S)}\Phi' = G_S$,
- (2) B' ist eine Fundamentalmenge für $G_{\mathcal{O}}(= G_{\mathbb{Z}})$ in $G_{\infty}(= G_{\mathbb{R}})$ und
- (3) $C' = C'_1 \times \dots \times C'_r$, wobei C'_i kompakt und offen ist für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$.

Ist $\pi : G_{\mathbb{R}} \rightarrow G_{\mathbb{R}}/K = X$ die natürliche Projektion, so lässt sich also $B = \pi(B')$ wählen.

Als offene kompakte Teilmenge von $G_{\mathbb{Q}_{p_i}}$ liegt jedes C'_i in einer endlichen Vereinigung von parahorischen Untergruppen von $G_{\mathbb{Q}_{p_i}}$. Jede dieser parahorischen Untergruppen liegt in einer maximalen parahorischen Untergruppe, das heißt C'_i liegt in einer Vereinigung von Stabilisatoren von endlich vielen Ecken von T_i . Sei l_i eine kompakte Teilmenge von T_i , die alle diese Ecken und mindestens eine Kante enthält. Da $G_{\mathcal{O}(S)}C'_i = G_{\mathbb{Q}_{p_i}}$, und der Fundamentalbereich der Operation von $G_{\mathbb{Q}_{p_i}}$ auf T_i eine (beliebige) Kante ist, gilt

$$G_{\mathcal{O}(S)}C'_i l_i = T_i,$$

also enthält die kompakte Menge $C_i := C'_i l_i$ den Fundamentalbereich der Aktion von $G_{\mathcal{O}(S)}$ auf T_i . Wir wählen $C = C_1 \times \dots \times C_r$. C ist eine kompakte Teilmenge von T und ergänzt B zu einer Fundamentalmenge $B \times C$ von $\tilde{\Omega} = X \times T$. \square

Im Weiteren bezeichnen wir mit $\Phi = B \times C$ nicht die Fundamentalmenge selbst, sondern den Fundamentalbereich, den sie enthält.

B hat nach [BGroS, Theorem 10.5] nur endlich viele „Spitzen“ z_1, \dots, z_s . Wir betrachten einen Punkt x im Inneren von Φ . Sei z_1 eine Spitze in B , ξ_1 der entsprechende geodätische Strahl in B , der von x zu z_1 führt. Sei ψ_1 ein geodätischer Strahl in T , der in x startet. Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ fest. Wir betrachten die Busemann-Funktion $b = (\cos \theta)b_{\xi_1} + (\sin \theta)b_{\psi_1}$, wobei b_{ξ_1} und b_{ψ_1} Busemann-Funktionen in X bzw. T mit Zentralstrahlen ξ_1 bzw. ψ_1 sind. Zu b wählen wir eine Horosphäre σ_1 .

$\Gamma \cdot (\sigma_1 \cap \Phi)$ ist eine abzählbare Menge von Horosphären σ_{1j} in $\tilde{\Omega}$.

Lemma 4.16. *Die Menge von Horosphären $\Gamma \cdot (\sigma_1 \cap \Phi)$ ist disjunkt.*

Beweis: Sind T_1 und T_2 zwei verschiedene Elemente von Γ , dann gilt $T_1(\dot{\Phi}) \cap T_2(\dot{\Phi}) = \emptyset$. Sei $\mathcal{H} := ((\sigma_1 \cap \Phi))$ und $T_1, T_2 \in \Gamma$ beliebig. Angenommen, $T_1(\mathcal{H}) \cap T_2(\mathcal{H}) \neq \emptyset$, dann können nur die folgenden beiden Fälle eintreten:

Fall 1: $T_1(\mathcal{H})$ und $T_2(\mathcal{H})$ sind Teile derselben Horosphäre Hor . Dann ist der Beweis zu

Ende.

Fall 2: $T_1(\mathcal{H})$ und $T_2(\mathcal{H})$ sind Teile verschiedener Horosphären, dann muss für ein $p \in T_1(\mathcal{H}) \cap T_2(\mathcal{H})$ gelten: $p \in \partial T_1(\mathcal{H})$ und $p \in \partial T_2(\mathcal{H})$. $T_2(\Phi)$ enthält einen Teil der Horosphäre Hor , etwa $T_3(\mathcal{H})$ für ein $T_3 \in \Gamma$. $T_2(\mathcal{H})$ und $T_3(\mathcal{H})$ liegen beide in $T_2(\Phi)$ und haben einen gemeinsamen Punkt p . Es muss also gelten, dass $T_2 = T_3$ ist, dass heißt $T_1(\mathcal{H})$ und $T_2(\mathcal{H}) = T_3(\mathcal{H})$ sind Teile derselben Horosphäre Hor , ein Widerspruch. \square

Gibt es weitere Spitzen z_2, \dots, z_s in B , so konstruieren wir zu jeder eine Horosphäre σ_i in $\tilde{\Omega}$, sodass $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ sich paarweise nicht schneiden. Dies kann man stets erreichen, indem man weit genug in die Richtung des Strahls ξ_i läuft, das heißt, den Betrag des Niveaus der Horosphäre hoch genug wählt.

$\Gamma \cdot (\sigma_i \cap \Phi)$ liefert für jedes $i \in 1, \dots, r$ eine abzählbare disjunkte Menge von Horosphären $\Sigma := \{\sigma_{ij} \mid i = 1, \dots, s, j \in \mathbb{N}\}$ in $\tilde{\Omega}$. Σ ist disjunkt, weil zwei verschiedene Horosphären, die sich schneiden, sich auch bereits in Φ schneiden müssen, was aber nicht der Fall ist. Die Menge der offenen *Horobälle*, die von Horosphären aus Σ eingeschlossen werden, bezeichnen wir mit Σ_B .

Das nächste Lemma besagt, dass jede Horosphäre $\sigma \in \Sigma$ in $\tilde{\Omega}$ sich aus Horosphären von (X, \mathbf{t}) für $\mathbf{t} \in T$ zusammensetzt.

Lemma 4.17. *Seien $\mathbf{t} \in T$ ein Punkt im Produkt der Bäume, $\sigma \in \Sigma$ eine Horosphäre. Gilt $\varrho := \sigma \cap (X \times \mathbf{t}) \neq \emptyset$, so ist ϱ eine Horosphäre in X . Der Basispunkt von ϱ hängt nicht von der Wahl von \mathbf{t} ab.*

Beweis: Seien ξ der Zentralstrahl von σ und b die damit assoziierte Busemann-Funktion, dann existieren nach Konstruktion von Σ geodätische Strahlen $\xi_1 \in X$, $\xi_2 \in T$ und ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ sodass $\xi(t) = (\xi_1(t \cos \theta), \xi_2(t \sin \theta))$. Wir betrachten die mit ξ_1 bzw. ξ_2 assoziierten Busemann-Funktionen b_1 in X bzw. b_2 in T . Nach 4.3.1 Beispiel (3) ist

$$b = (\cos \theta)b_1 + (\sin \theta)b_2.$$

Gilt $\varrho := \sigma \cap (X \times \mathbf{t}) \neq \emptyset$, so ist ϱ eine Teilmenge einer Niveaumenge von b . Da \mathbf{t} fest ist, ist ϱ die Niveaumenge der Funktion $(\cos \theta)b_1 + c$, wobei c eine Konstante ist. Somit ist ϱ Niveaumenge der Busemann-Funktion b_1 , also eine Horosphäre in X mit Basispunkt $b_1(\infty)$, der nicht von der Wahl von \mathbf{t} abhängt. \square

Bezeichnung $\Omega := \tilde{\Omega} \setminus \Sigma_B$.

Nach Konstruktion operiert Γ eigentlich diskontinuierlich und kokompakt via Isometrien auf Ω . Nach dem Milnor-Svarc-Kriterium (vgl. 4.2) sind Γ und Ω quasi-isometrisch zueinander.

4.5 Eine Metrik auf Ω

Vorbemerkung

Ab jetzt werden wir immer wieder von der „Wortmetrik von Γ “ Gebrauch machen. Dieser Begriff scheint zunächst etwas ungenau, weil sich eine Wortmetrik in der Regel auf einen Cayley-Graphen bezieht und eine (endlich erzeugte) Gruppe i.A. mehrere Cayley-Graphen hat. Da aber zwei verschiedene Wortmetriken einer (endlich erzeugten) Gruppe Lipschitz-äquivalent sind, reden wir im Weiteren unbesorgt von „der Wortmetrik d_W von Γ “.

In diesem Abschnitt geben wir eine Metrik auf Ω an, die zur Wortmetrik auf Γ Lipschitz-äquivalent ist. Wir verwenden diese Metrik, um in Kapitel 5 ein Combing auf Ω zu konstruieren.

Eine wichtige Rolle spielt dabei der

Rang von G_S

Sind \mathbf{K} ein lokal kompakter nicht-diskreter Körper, $\mathbb{K} \subset \mathbf{K}$ ein algebraischer Zahlkörper, so ist der \mathbf{K} -Rang einer linearen algebraischen \mathbb{K} -Gruppe die Dimension eines maximalen über \mathbf{K} -zerfallenden Torus der Gruppe der \mathbb{K} -Punkte $G_{\mathbf{K}}$. Der Rang von G_S ist definiert durch

$$\text{Rang } G_S := \text{Rang}_{\mathbb{R}} G_{\mathbb{R}} + \sum_{i=1}^r \text{Rang}_{\mathbb{Q}_{p_i}} G_{\mathbb{Q}_{p_i}}.$$

Es gilt also

$$\text{Rang } G_S \geq 2,$$

darum ist unser Γ (als irreduzibles Gitter in G_S , s. 3.6) endlich erzeugt [LuMoRag, S.5].

Der nächste Satz wurde 2000 von Lubotzky, Mozes und Raghunathan bewiesen. Der Beweis verwendet vielfach die Arithmetizität von Γ . Inzwischen soll Margulis einen geometrischeren Beweis gefunden haben, der nur teilweise auf der Arithmetizität von Γ beruht.

Satz 4.18 ([LuMoRag], Theorem A). *Es seien*

$$\mathbf{G} := \prod_{p \in \{\infty, p_1, \dots, p_r\}} (G_p)_{\mathbb{Q}_p}$$

wie in 3.3 mit lauter einfachen Faktoren G_p , $\Gamma \subset \mathbf{G}$ ein irreduzibles Gitter. Sei \mathbf{d}_R analog zu $d_{\mathbb{R}}$ aus 4.4 definiert. Gilt

$$\text{Rang}(\mathbf{G}) := \sum_{p \in \{\infty, p_1, \dots, p_r\}} \text{Rang}_{\mathbb{Q}_p} (G_p)_{\mathbb{Q}_p} \geq 2,$$

so ist \mathbf{d}_R , eingeschränkt auf Γ , Lipschitz-äquivalent zur Wortmetrik d_W auf Γ .

Der Satz liefert eine für unsere Zwecke sehr sinnvolle **Metrik auf Ω** :

Ist d_X eine links-invariante Riemann'sche Metrik eines symmetrischen Raums X von Rang 1 und d_T die natürliche Metrik auf $T = T_1 \times \dots \times T_r$, d.h.

$$d_T((t_i)_{i=1,\dots,r}, (t'_i)_{i=1,\dots,r}) = \sum_{i=1}^r d_i(t_i, t'_i)$$

für alle $(t_i)_{i=1,\dots,r}, (t'_i)_{i=1,\dots,r} \in T$,

so ist die Produktmetrik $d := d_X \times d_T$, eingeschränkt auf Ω , Lipschitz-äquivalent zur Wortmetrik d_W von Γ .

5 Das Combing

Um eine obere Grenze der Dehn-Funktion von Γ anzugeben, wollen wir einen Satz von Bridson (s. Kapitel 6) anwenden. Eine in diesem Satz vorkommende Konstruktion ist das sogenannte Combing: Man hält einen Punkt x_0 eines metrischen Raumes Y fest und ordnet jedem anderen Punkt $x \in Y$ einen Weg von x_0 zu x zu. Ähnlich kann man auch ein Combing für eine Gruppe G definieren: Man ordnet jedem $g \in G$ ein Wort zu, das g repräsentiert. Dies ist dann ein Weg von id zu g im Cayley-Graphen von G . Sind Y und G quasi-isometrisch, so lässt sich auf G ein Combing konstruieren, das einige Eigenschaften von einem entsprechenden Combing auf Y „erbt“ (s. 5.4 und 5.5). Dies gilt z.B. für die oberen Grenzen der Länge und der sogenannten asynchronen Breite des Combing (s. 5.1). Im Abschnitt 5.2 finden wir ein Combing mit höchstens (in n) exponentiell wachsender Länge und höchstens linear wachsender asynchroner Breite. Somit stehen diese Grenzen dann auch für die Anwendung des Satzes von Bridson zur Verfügung.

5.1 Grundlegende Begriffe

Combing auf endlich erzeugten Gruppen

Definition Sei G eine endlich erzeugte Gruppe und $\langle S|R \rangle$ eine (endliche) Präsentation von G . Ein *Combing* von G ordnet jedem $g \in G$ ein Wort aus der von S erzeugten freien Gruppe $F(S)$ zu, das g repräsentiert.

Bemerkung Ein Combing ist somit ein Schnitt der natürlichen Abbildung $F(S) \rightarrow G$.

Wie oben bemerkt, kann ein Combing als eine Menge der Wege im Cayley-Graphen von G gesehen werden: Jedem $g \in G$ entspricht ein Weg von id zu g . Ist $\mathbf{c} : G \rightarrow F(S)$ ein Combing, so bezeichnen wir mit $\mathbf{c}_g(t)$ den (parametrisierten) Combing-Weg von id zu $g \in G$.

Definition Die *Länge des Combing* \mathbf{c} ist definiert durch

$$L(n) := \max_{g \in G} \{l(\mathbf{c}_g) \mid d_W(\text{id}, g) \leq n\},$$

wobei $l(\mathbf{c}_g)$ die Anzahl der Buchstaben in dem g zugeordneten Wort und $d_W(\text{id}, g)$ den Abstand zwischen id und g bzgl. der Wortmetrik im Cayley-Graphen angibt.

Als nächstes fragen wir danach, wie weit zwei Combing-Wege, die im Abstand eins enden, auseinander laufen. Eine Möglichkeit ist, den (maximalen) Abstand zwischen zwei Punkten, die mit gleicher Geschwindigkeit entlang der beiden Wege laufen, zu betrachten. Weniger naheliegend, aber für unsere Zwecke nützlicher ist es jedoch, auch

unterschiedliche Geschwindigkeiten der beiden Punkte zuzulassen, sodass sie sich „asynchron“ (aber stets nach vorne) bewegen und zwischendurch (evtl. auch abwechselnd) stehen bleiben können. Wir brauchen also alle möglichen *Umparametrisierungen* unserer Combing-Wege, nämlich die Menge

$$\mathcal{R} := \{ \rho : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \mid \rho(0) = 0, \rho(n+1) \in [\rho(n), \rho(n) + 1] \forall n, \\ \rho \text{ nicht beschränkt} \}.$$

und den sogenannten *kleinsten Maximalunterschied* zwischen \mathbf{c}_g und \mathbf{c}_h für beliebige g und h aus G :

$$D_{\mathbf{c}}(g, h) := \min_{\rho, \rho' \in \mathcal{R}} \{ \max_{t \in \mathbb{N}} \{ d_W(\mathbf{c}_g(\rho(t)), \mathbf{c}_h(\rho'(t))) \} \}.$$

Beide Begriffe fließen in die nächste sehr wichtige Definition ein.

Definition Die *asynchrone Breite* von \mathbf{c} ist die Funktion

$$\phi(n) := \max \{ D_{\mathbf{c}}(g, h) \mid d_W(\text{id}, g) \leq n, d_W(\text{id}, h) \leq n, d(g, h) = 1 \}.$$

Combing auf metrischen Räumen

Ist (Y, d_Y) ein metrischer Raum und $x_0 \in Y$ ein fester Punkt, so bezeichnen wir mit Combing eine Zuordnung eines Weges von x_0 nach x für alle x aus Y . Die Länge und die asynchrone Breite von \mathbf{c} definieren wir, indem wir in den oberen Definitionen id durch x_0 , \mathbb{N}_0 durch \mathbb{R} und d_W durch d_Y ersetzen.

Mit einer expliziten Konstruktion eines Combings auf $\Omega = X \times T$ beschäftigen wir uns im nächsten Abschnitt.

5.2 Konstruktion eines Combings auf Ω

Metriken

Es ist für den weiteren Verlauf sinnvoll, eine Übersicht nützlicher Metriken anzugeben.

Mit d_X bezeichnen wir eine feste links-invariante Riemann'sche Metrik des Rang 1 Raumes X .

Besteht T aus nur einem Baum, so bezeichnen wir mit d_T diejenige kanonische Metrik auf dem Baum T , in der jede Kante von T die Länge eins hat.

Ist T ein Produkt von mehreren Bäumen, so definieren wir d_T wie folgt:

$$d_T((t_i)_{i=1, \dots, r}, (t'_i)_{i=1, \dots, r}) := \sum_{i=1}^r d_i(t_i, t'_i) \\ \text{für alle } (t_i)_{i=1, \dots, r}, (t'_i)_{i=1, \dots, r} \in T,$$

wobei d_i die kanonische Metrik auf dem Baum T_i ist für $i = 1, \dots, r$.

Nach Satz 4.18 [LuMoRag, Theorem A] ist die Produktmetrik $d := d_X \times d_T$, eingeschränkt auf den in 4.4 konstruierten Raum Ω , Lipschitz-äquivalent mit der Wortmetrik von Γ .

Mit l bezeichnen wir die Länge bzgl. d .

Nicht angepasste Wege

Wir halten einen Punkt $\alpha_0 = (x_0, t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,r}) \in \Omega \subset X \times T$ fest. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Sei $\alpha = (x_1, t_1, t_2, \dots, t_r) \in \Omega$ ein beliebiger weiterer Punkt mit $d(\alpha_0, \alpha) \leq n$. Mit $\tilde{\gamma}$ bezeichnen wir die Geodätische zwischen x_0 und x_1 in X , mit $\tilde{\mu}$ die Geodätische in T zwischen $(t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,r})$ und (t_1, t_2, \dots, t_r) . Wir laufen zuerst den Weg $\mu := \{(x_0, t) \mid t \in \tilde{\mu}\}$ von $(x_0, t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,r})$ zu $(x_0, t_1, t_2, \dots, t_r)$, dann den Weg $\gamma := \{(x, t_1, t_2, \dots, t_r) \mid x \in \tilde{\gamma}\}$ von $(x_0, t_1, t_2, \dots, t_r)$ zu $(x_1, t_1, t_2, \dots, t_r)$.

Den gesamten Weg bezeichnen wir mit $\gamma\mu$. Er startet und endet zwar in Ω , verläuft aber unter Umständen zum Teil in ganz $X \times T$. Darum sprechen wir vom *nicht-angepassten* Weg $\gamma\mu$ und von den *nicht-angepassten* Weg(teil)en γ, μ . Daraus basteln wir einen Combing-Weg $\mathbf{c}_\alpha \subset \Omega$ von α_0 zu α , indem wir die Teilwege μ und γ abändern, sobald sie eine Horosphäre aus Σ schneiden.

Anpassung von μ

Wie bereits angedeutet, liegt die Geodätische μ eventuell nicht ganz in Ω , sondern teilweise im Inneren einiger Horosphären. Schneidet μ irgendwo eine Horosphäre σ , so bezeichnen wir den maximalen im Inneren von σ liegenden Teil von μ mit I . Seien $v_1 \in \sigma$ der Anfangspunkt und v_2 der Endpunkt von I . Liegt v_2 auf σ , so ersetzen wir I durch eine Geodätische I' in σ (bzgl. der von d auf σ induzierten Metrik) zwischen v_1 und v_2 . Liegt $v_2 \in X \times T$ nicht in σ , sondern im Inneren von σ , so ist v_2 der Endpunkt von μ , und wir ersetzen v_2 durch seine Projektion auf $\sigma' := \sigma \cap (X \times \{(t_1, \dots, t_r)\})$ entlang des Zentralstrahls von σ' (nach Lemma 4.17 ist σ' eine Horosphäre in $X \times \{(t_1, \dots, t_r)\}$). Anschließend verbinden wir die Punkte v_1 und v'_2 durch eine Geodätische I' in σ .

Für die Berechnung der Länge $l(I')$ von I' ist eine längere Vorbereitung notwendig, wir führen sie in 5.3 und 5.4 durch. Wir können jedoch bereits jetzt den Abstand zwischen v_1 und v_2 bzw. zwischen v_1 und v'_2 bzgl. d angeben.

Liegt v_2 auf σ , so gilt:

$$d(v_1, v_2) \leq l(\mu) \leq n.$$

Liegt v_2 im Inneren von σ , so liegen v_2 und α in derselben Kopie von X in Ω . Da $d(v_2, v'_2)$ Abstand von v_2 zur Horosphäre σ' ist, und α in Ω liegt, gilt:

$$d(v_2, v'_2) \leq d(v_2, \alpha) \leq l(\gamma) \leq n.$$

Daraus folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$d(v_1, v'_2) \leq l(\mu) + d(v_2, v'_2) \leq l(\mu) + l(\gamma) = l(\gamma\mu) (\leq 2n).$$

Die letzte Abschätzung ($\leq 2n$) ergibt sich aus $l(\gamma\mu) = l(\gamma) + l(\mu)$ und der Tatsache, dass wir die Produktmetrik auf $\tilde{\Omega}$ benützen.

Auf diese Art und Weise ändern wir jedes Stück von μ ab, das im Inneren einer Horosphäre aus Σ liegt. Den abgeänderten Weg nennen wir μ' .

Anpassung von γ

Auch γ verläuft unter Umständen teilweise im Inneren einiger Horosphären. Sei σ eine der Horosphären, die von γ geschnitten werden. Nach Lemma 4.17 ist $\sigma' := \sigma \cap (X \times \{(t_1, \dots, t_r)\})$ eine Horosphäre in $X \times \{(t_1, \dots, t_r)\}$. Seien $J \subset \gamma$ der Teil von γ , der im Inneren von σ' liegt, $w_2 \in \sigma'$ der Anfangs- und w_3 der Endpunkt von J . Liegt w_3 auf σ' , so ersetzen wir J durch die σ' -Geodätische J' zwischen w_2 und w_3 bzgl. der von d_X auf σ' induzierter Metrik. Liegt w_2 im Inneren von σ , so ist w_2 der Anfangspunkt von γ . Wir ersetzen w_2 durch seine Projektion w'_2 auf σ' entlang des Zentralstrahls von σ' und J durch die σ' -Geodätische J' zwischen w'_2 und w_3 . Wichtig dabei ist, dass in diesem Fall der Endpunkt v_2 von μ ebenfalls im Inneren von σ liegt, denn er fällt mit dem Anfangspunkt von γ zusammen. Also gilt nach der Konstruktion von v'_2 (s. „Anpassung von μ “):

$$v'_2 = w'_2. \quad (*)$$

Die Länge $l(J')$ von $J' \subset \sigma'$ bzgl. der Produktmetrik d (also bzgl. d_X , da γ ganz in einer Kopie von X in $\tilde{\Omega}$ liegt) können wir leicht angeben. Zunächst gilt nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(w'_2, w_3) &\leq d(w'_2, w_2) + d(w_2, w_3) \\ &= d_X(w'_2, w_2) + d_X(w_2, w_3) \\ &\leq 2d_X(w_2, w_3). \end{aligned}$$

Nach Satz 4.13 ergibt sich:

$$\begin{aligned} l(J') &\leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2} 2d_X(w_2, w_3)\right) \\ &\leq \frac{1}{b} e^{\frac{b}{2} 2d_X(w_2, w_3)} \\ &\leq e^{(\frac{1}{b} + b)d_X(w_2, w_3)}, \end{aligned}$$

wobei $-b^2$ die untere Grenze der Krümmung von X ist (vgl. 3.6). Ändert man γ auf jedem Durchschnitt mit dem Inneren einer Horosphäre ab, wie oben beschrieben, so ist leicht nachzurechnen, dass die Gesamtlänge des so erhaltenen Teilwegs γ' höchstens e^{b^*n} beträgt, wobei b^* nur von der unteren Krümmungsgrenze $-b^2$ von X abhängt.

Den abgeänderten Weg nennen wir γ' . Wegen (*) ist der Endpunkt von μ' gleich dem Anfangspunkt von γ' , und zwar in beiden Fällen.

5.3 Vergleichsgeodätische im Modellraum

In diesem Abschnitt beweisen wir eine für die Berechnung der Länge und der asynchronen Breite unseres Combings wichtige Abschätzung: Wir geben an, wie weit eine

Geodätische einer Hadamard-Mannigfaltigkeit von einer Horosphäre abweicht, die sie in zwei Punkten schneidet. Dazu bedienen wir uns unserer Kenntnisse über die uns eher vertrauten Geodätischen und Horosphären der hyperbolische Ebene mit der Krümmung $-b^2$.

Sind die Grenzen der Krümmung κ von X durch $-b^2 \leq \kappa \leq -a^2$ gegeben, so bezeichnen wir mit M_b den entsprechenden Modellraum (d.h. eine zweidimensionale vollständige einfach zusammenhängende Riemann'sche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung $-b^2$ (vgl. 4.3.1 und 4.3.2)). Wir benützen das Poincaré-Halbebene-Modell für M_b und betrachten die spezielle Horosphäre σ_b in M_b mit dem Basispunkt $\infty \in \partial_\infty \mathbb{H}^2$ und der "euklidischen Höhe" eins. Mit d_b bezeichnen wir die hyperbolische Metrik in M_b .

Lemma 5.1. *Sei $n \geq \frac{2}{b}$. Weiter seien Y eine Hadamard-Mannigfaltigkeit mit der Krümmung $\kappa \geq -b^2$, σ eine Horosphäre in Y und s_1, s_2 zwei Punkte auf σ mit $d_Y(s_1, s_2) \leq n$. Ist γ eine Geodätische in Y durch die Punkte s_1 und s_2 , so gilt:*

$$d_Y(\gamma(t), \eta(\gamma(t))) \leq n\left(\frac{1}{b} + 1\right) \text{ für alle } \gamma(t) \text{ zwischen } s_1 \text{ und } s_2.$$

Beweis: Sei γ_b ein geodätisches Segment in M_b mit Endpunkten s_1^b und s_2^b , die in σ_b (s.o.) liegen, sodass $d_b(s_1^b, s_2^b) = d_Y(s_1, s_2) (\leq n)$. Nach Lemma 4.12 gilt

$$d_Y(\gamma(t), \eta(\gamma(t))) \leq d_b(\gamma_b(t), \eta_b(\gamma_b(t))),$$

für alle $\gamma(t)$ zwischen s_1 und s_2 , wobei η_b die Projektion auf σ_b in M_b entlang des Zentralstrahls von σ_b ist. \square

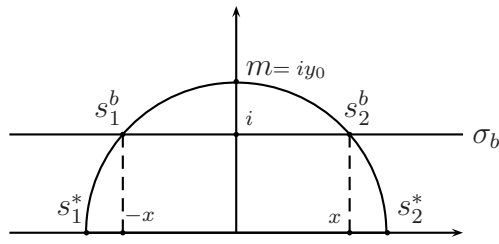
(Bemerkung: Wir projizieren aus dem Inneren von σ , darum müssen wir die Ungleichung von Lemma 4.12 „umkehren“.)

Die Behauptung folgt daher aus dem folgenden Lemma.

Lemma 5.2.

$$d_b(\gamma_b(t), \eta_b(\gamma_b(t))) \leq n\left(\frac{1}{b} + 1\right) \text{ für } n \geq \frac{2}{b}.$$

Beweis: Wir betrachten das Poincaré-Modell von M_b : das Modell der oberen Halbebene mit der Metrik $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Punkte s_1^b, s_2^b aus dem Beweis von Lemma 5.1 die Koordinaten $(-x, 1)$ und $(x, 1)$ für ein $x > 0$ haben. Seien $(0, y_0)$ die Koordinaten der Mitte m von γ_b .



Es gilt:

$$d_b(\gamma_b(t), \eta_b(\gamma_b(t))) \leq d_b(m, \eta_b(m)) = \frac{1}{b} \ln \frac{y_0}{1}$$

für alle $t \in [0, l(\gamma_b)]$.

Andererseits rechnet man leicht nach, dass

$$\frac{1}{b} \ln \frac{y_0 + x}{y_0 - x} \leq n.$$

(Dazu:

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{1}{b} \ln \frac{(s_2^b - s_1^*)(s_1^b - s_2^*)}{(s_1^* - s_1^b)(s_2^* - s_2^b)} = \frac{1}{b} \ln \frac{(x + i + y_0)(-x + i - y_0)}{(-y_0 + x - i)(y_0 - x - i)} \\ &= \frac{1}{b} \ln \frac{(x + y_0)^2 + 1}{(x - y_0)^2 + 1} = \frac{1}{b} \ln \frac{x^2 + 2xy_0 + y_0^2 + 1}{x^2 - 2xy_0 + y_0^2 + 1} \\ &= \frac{1}{b} \ln \frac{y_0^2 - 1 + 2xy_0 + y_0^2 + 1}{y_0^2 - 1 - 2xy_0 + y_0^2 + 1} = \frac{1}{b} \ln \frac{2y_0^2 + 2xy_0}{2y_0^2 - 2xy_0} \\ &= \frac{1}{b} \ln \frac{y_0 + x}{y_0 - x}, \end{aligned}$$

wobei s_1^* und s_2^* Schnittpunkte der Geodätischen γ_b mit der x -Achse sind.)

Also gilt: $y_0 \leq \frac{x(e^{bn} + 1)}{e^{bn} - 1}$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} d_b(\gamma_b(t), \eta_b(\gamma_b(t))) &\leq d_b(m, \eta_b(m)) = \frac{1}{b} \ln y_0 \\ &\leq \frac{1}{b} \ln \frac{x(e^{bn} + 1)}{e^{bn} - 1}. \end{aligned}$$

Der euklidische (!) Wert von x ist $\leq \frac{e^n}{2}b$. Eine Kurvendiskussion der Funktion $\frac{e^{bn} + 1}{e^{bn} - 1}$ ergibt

$$\frac{e^{bn} + 1}{e^{bn} - 1} \leq 2 \text{ für alle } n \geq \frac{2}{b}.$$

Daher:

$$\begin{aligned}
 d_b(\gamma_b(t), \eta_b(\gamma_b(f))) &\leq d_b(m, \eta_b(m)) = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{e^n b}{2} \cdot 2\right) \\
 &= \frac{1}{b} (\ln e^n + \ln b) \leq n\left(\frac{1}{b} + \frac{\ln b}{b}\right) \\
 &\leq n\left(\frac{1}{b} + 1\right).
 \end{aligned}$$

□

5.4 Die Länge des Combings

Wir haben bereits bei der Konstruktion von $\gamma'\mu'$ gesehen, dass $l(\gamma') \leq e^{b^*n}$. In diesem Abschnitt wollen wir $l(\mu')$ abschätzen. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass μ' aus mehr als nur einem Punkt besteht, und setzen $\tilde{\mu} := \mu' \cap T$.

$\tilde{\mu} \subset T$ ist ein geodätisches Segment in T . Wir nennen jede (unendliche) Geodätische \mathbf{k} in T mit $\tilde{\mu} \subset \mathbf{k}$ eine $\tilde{\mu}$ -Geodätische. Sei $\sigma \in \Sigma$ eine Horosphäre, die von μ geschnitten wird. Sei ξ ein Zentralstrahl von σ und b die damit assoziierte Busemann-Funktion. Seien ξ_X und ξ_T zwei Strahlen in X bzw. T mit der Eigenschaft, dass es ein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ gibt mit

$$\xi(t) = (\xi_X(t \cos \theta), \xi_T(t \sin \theta)).$$

Seien b_X und b_T die mit ξ_X und ξ_T assoziierten Busemann-Funktionen.

Lemma 5.3. *Es gibt einen Strahl $\tilde{\xi}_T$ in T mit*

- (1) $\tilde{\xi}_T(\infty) = \xi_T(\infty)$ (d.h. $\tilde{\xi}_T$ ist parallel zu ξ_T),
- (2) $d_T(\tilde{\xi}_T \cap \tilde{\mu}) \neq 0$, d.h. $\tilde{\xi}_T$ enthält einen nicht-trivialen Teil von $\tilde{\mu}$.

Gilt noch zusätzlich $d_T(\tilde{\xi}_T \cap \tilde{\mu}) < l(\tilde{\mu})$, dann existiert ein weiterer Strahl $\tilde{\xi}_T^2$ mit den Eigenschaften (1) und (2), der das Reststück von $\tilde{\mu}$ enthält, d.h.

- (3) $(\tilde{\mu} \setminus \tilde{\xi}_T) \subset \tilde{\xi}_T^2$.

Beweis:

Schritt 1 Besteht T aus nur einem Baum, so ergibt sich die Behauptung sofort.

Schritt 2 Besteht T aus mehreren Bäumen, so seien $\xi_{T_1}(t), \dots, \xi_{T_r}(t)$ die Projektionen des nach der Bogenlänge parametrisierten Strahls $\xi_T(t)$ auf T_1, \dots, T_r und $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_r$ die Projektionen der Geodätischen $\tilde{\mu}$ auf T_1, \dots, T_r . Man bemerke, dass sowohl ξ_{T_i} als auch $\tilde{\mu}_i$ i. A. nicht mehr nach der Bogenlänge parametrisiert sind für $i = 1, \dots, r$. Jede dieser Projektionen ist ein Strahl im Baum T_i , also existieren wie in Schritt 1 Strahlen $\tilde{\xi}_{T_i}$ und eventuell $\tilde{\xi}_{T_i}^2$, sodass (1)-(3) gelten. Seien $s_1, \dots, s_r \in (0, \infty)$ die Zeitpunkte, ab denen $\tilde{\mu}_i$ nicht mehr in $\tilde{\xi}_{T_i}$ enthalten ist, d.h. $\tilde{\xi}_{T_i}(t) \cap \tilde{\mu}_i = \emptyset$ für $t > s_i$. Durch das eventuelle

Verschieben der Anfangspunkte der Strahlen („Verlängern“ der Strahlen!) $\tilde{\xi}_{T_i}$ erreichen wir, dass $s_1 = s_2 = \dots = s_r =: s$. Der gesuchte Strahl $\tilde{\xi}_T$ ergibt sich dann als

$$\tilde{\xi}_T(t) = (\tilde{\xi}_{T_1}(t), \dots, \tilde{\xi}_{T_r}(t)).$$

Analog konstruieren wir ggf. den Strahl $\tilde{\xi}_T^2$:

$$\tilde{\xi}_T^2(t) = (\tilde{\xi}_{T_1}^2(t), \dots, \tilde{\xi}_{T_r}^2(t)).$$

Dazu verwenden wir die eventuell verlängerten Strahlen $\tilde{\xi}_{T_i}^2(t)$, falls sie existieren. Existiert $\tilde{\xi}_{T_j}^2(t)$ für ein $j \in \{1, \dots, r\}$ nicht, so setzen wir $\tilde{\xi}_{T_j}^2(t) := \tilde{\xi}_{T_j}^2(s)$ für alle $t \in [0, l(\tilde{\mu})]$. \square

Bemerkung 5.4. Die Strahlen $\tilde{\xi}_T(t)$ und $\tilde{\xi}_T^2(t)$ sind parallel und fallen für $t > s$ zusammen.

Abschätzung der Länge von μ'

Wir halten die beiden Strahlen $\tilde{\xi}_T$ und $\tilde{\xi}_T^2$ in T aus Lemma 5.3 fest.

Zwei Fälle können auftreten:

Fall 1

$\tilde{\mu}$ liegt vollständig in $\tilde{\xi}_T$. Dann ist $\tilde{\xi}_T \subset \mathbf{k}$, wobei \mathbf{k} eine $\tilde{\mu}$ -Geodätische ist. Sei \tilde{b}_T die mit $\tilde{\xi}_T$ assoziierte Busemann-Funktion. Da $\tilde{\xi}_T(\infty) = \xi_T(\infty)$, gilt nach Satz 4.9:

$$\tilde{b}_T = b + c,$$

wobei $c \geq 0$ eine Konstante ist. Der Strahl $\tilde{\xi} := (\xi_X(t \cos \theta), \xi_T(t \sin \theta))$ liegt ganz in der Riemann'schen Mannigfaltigkeit $X \times \tilde{\mathbf{k}}$, wobei $\tilde{\mathbf{k}}$ eine $\tilde{\mu}$ -Geodätische ist, die $\tilde{\xi}_T$ enthält. Die mit $\tilde{\xi}$ assoziierte Busemann-Funktion

$$\tilde{b} = \cos \theta b_X + \sin \theta b_T + \sin \theta c = b + \text{Konstante}$$

hat die gleiche Horosphärenmenge in $\tilde{\Omega}$, wie b . Da $\sigma' := \sigma \cap (X \times \tilde{\mathbf{k}})$ eine Teilmenge einer Niveaumenge von \tilde{b} ist, ist σ' eine Horosphäre der Busemann-Funktion $\tilde{b}|_{(X \times \tilde{\mathbf{k}})}$, assoziiert mit dem geodätischen Strahl $\tilde{\xi}$ in der Riemann'schen Mannigfaltigkeit $X \times \tilde{\mathbf{k}}$ mit der Krümmung $\geq -b^2$. Somit ist σ' eine Horosphäre in $X \times \tilde{\mathbf{k}}$. Nach Satz 4.13 gilt für die Länge der Geodätischen I' in σ zwischen v_1 und v_2 (bzw. v'_2 , vgl. 5.2):

$$l(I') \leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(v_1, v_2)\right) \leq e^{(\frac{1}{b} + \frac{b}{2})d(v_1, v_2)} = e^{(\frac{1}{b} + \frac{b}{2})l(I)}$$

bzw.

$$l(I') \leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(v_1, v'_2)\right) \leq e^{(\frac{1}{b} + \frac{b}{2})d(v_1, v'_2)} = e^{(\frac{1}{b} + \frac{b}{2})(l(I) + l(\gamma))}.$$

Fall 2

$\tilde{\mu}$ liegt nicht vollständig in $\tilde{\xi}_T$. Wir benennen um: $\tilde{\xi}_T =: \tilde{\xi}_T^1$. Sei $\tilde{\mu}(s)$ der Punkt, ab dem

$\tilde{\xi}_T^1$ die $\tilde{\mu}$ verlässt. Dann enthält der Strahl $\tilde{\xi}_T^2$ aus Lemma 5.3 das Reststück $(\tilde{\mu} \setminus \tilde{\xi}_T^1)$ von $\tilde{\mu}$. Der Strahl

$$\tilde{\xi}^i := (\xi_X(t \cos \theta), \tilde{\xi}_T^i(t \sin \theta)), \quad i = 1, 2,$$

liegt ganz in der Riemann'schen Mannigfaltigkeit $X \times \tilde{\mathbf{k}}^i$, wobei $\tilde{\mathbf{k}}^i$ eine Geodätische in T ist, die $\tilde{\xi}_T^i$ enthält. Eine zu der in Fall 1 analoge Überlegung liefert: $\sigma^i := \sigma \cap (X \times \tilde{\mathbf{k}}^i)$ ist eine Horosphäre einer Busemann-Funktion in $X \times \tilde{\mathbf{k}}^i$, assoziiert mit dem geodätischen Strahl $\tilde{\xi}^i$. Sei nun $\eta_{\tilde{\xi}_T^i}$ eine Projektion in $X \times \tilde{\mathbf{k}}^i$ auf σ^i für $i = 1, 2$. Es seien $\mu(s) := (x_0, \tilde{\mu}(s)) \in \mu$, I'_1 eine Geodätische in σ^1 zwischen v_1 und $\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s))$, und I'_2 eine Geodätische in σ^2 zwischen $\eta_{\tilde{\xi}_T^2}(\mu(s))$ und v_2 (bzw. v'_2). Es gilt wegen $\tilde{\xi}^1(\infty) = \tilde{\xi}^2(\infty)$ und $\tilde{\xi}^1(\tilde{\mu}(s)) = \tilde{\xi}^2(\tilde{\mu}(s))$:

$$\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)) = \eta_{\tilde{\xi}_T^2}(\mu(s)),$$

d.h. der Endpunkt von I'_1 ist der Anfangspunkt von I'_2 oder umgekehrt. Daraus folgt für die Geodätische I zwischen v_1 und v_2 (bzw. v'_2 , vgl. 5.2):

$$l(I') \leq l(I'_1) + l(I'_2)$$

und mit Satz 4.13:

$$l(I') \leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(v_1, \eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)))\right) + \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)), v_2)\right)$$

bzw.

$$l(I') \leq \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(v_1, \eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)))\right) + \frac{2}{b} \sinh\left(\frac{b}{2}d(\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)), v'_2)\right).$$

Nach Lemma 5.1 gilt:

$$d(\mu(s), \eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s))) \leq l(I)\left(\frac{1}{b} + 1\right).$$

Daraus ergibt sich jeweils nach der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(v_1, \eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s))) &\leq d(v_1, \mu(s)) + d(\mu(s), \eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s))) \leq l(I) + l(I)\left(\frac{1}{b} + 1\right) \\ &\leq \left(\frac{1}{b} + 2\right)l(I), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)), v_2) &\leq d(\mu(s), \eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s))) + d(\mu(s), v_2) \leq l(I)\left(\frac{1}{b} + 1\right) + l(I) \\ &\leq \left(\frac{1}{b} + 2\right)l(I), \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} d(\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)), v'_2) &\leq d(\eta_{\tilde{\xi}_T^1}(\mu(s)), v_2) + d(v_2, v'_2) \\ &\leq \left(\frac{1}{b} + 2\right)l(I) + l(\gamma). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} l(I') &\leq \frac{1}{b} e^{\frac{b}{2}(\frac{1}{b}+2)l(I)} + \frac{1}{b} e^{\frac{b}{2}(\frac{1}{b}+2)(l(I)+l(\gamma))} \\ &\leq e^{(\frac{2}{b}+\frac{1}{2}+b)(l(I)+l(\gamma))}. \end{aligned}$$

Fasst man beide Fälle zusammen, so gilt für die Gesamtlänge des abgeänderten Weges μ' :

$$l(\mu') \leq e^{(\frac{2}{b} + \frac{1}{2} + b)(n+n)} \leq e^{2(\frac{2}{b} + \frac{1}{2} + b)n}$$

Für die Länge des Combings hat man dann:

$$L(n) = l(\mu') + l(\gamma') \leq e^{b^*n} + e^{2(\frac{2}{b} + \frac{1}{2} + b)n} \leq e^{C(b)n},$$

wobei $C(b)$ nur von den unteren Krümmungsschranke $-b^2$ von X abhängt. □

5.5 Die asynchrone Breite des Combings

In diesem Abschnitt wollen wir eine andere wichtige Größe abschätzen: Die asynchrone Breite von \mathbf{c} .

Sei $n \geq \frac{2}{b}$. Weiter seien α_1 und α_2 zwei Punkte in Ω mit Abstand eins und $\mathbf{c}_{\alpha_1} = \gamma'_{\alpha_1} \mu'_{\alpha_1}$, $\mathbf{c}_{\alpha_2} = \gamma'_{\alpha_2} \mu'_{\alpha_2}$ Combing-Wege, die wir aus den nicht-angepassten Wegen $\gamma_{\alpha_1} \mu_{\alpha_1}$ und $\gamma_{\alpha_2} \mu_{\alpha_2}$ in 5.2 konstruiert haben.

Wir wählen solche Umparametrisierungen $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{R}$ der Combing-Wege \mathbf{c}_{α_1} und \mathbf{c}_{α_2} , dass

$$\mu_{\alpha_1}(\rho_1(t_0)) = \mu_{\alpha_2}(\rho_2(t_0)) \text{ für } t_0 = 0 \text{ und } t_0 = \max\{l(\mu_{\alpha_1}), l(\mu_{\alpha_2})\}.$$

Für die folgenden Abschätzungen ist entscheidend, dass wir die auf Ω eingeschränkte Produktmetrik d von $\tilde{\Omega} = X \times T$ benutzen, und nicht etwa die von d induzierte Metrik auf Ω .

Wir schätzen zunächst den kleinsten Maximalunterschied zwischen μ'_{α_1} und μ'_{α_2} ab. Seien v'_{2,α_1} und v'_{2,α_2} die Endpunkte von μ'_{α_1} bzw. μ'_{α_2} . Seien $p' \in \mu'_{\alpha_1}$ und $q' \in \mu'_{\alpha_2}$ beliebig. Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(p', q') &\leq d(p', \alpha_0) + d(\alpha_0, q') \leq \\ &\leq d(\alpha_0, v'_{2,\alpha_1}) + d(\alpha_0, v'_{2,\alpha_2}) \\ &\leq 2n + 2n \\ &= 4n. \end{aligned} \tag{*}$$

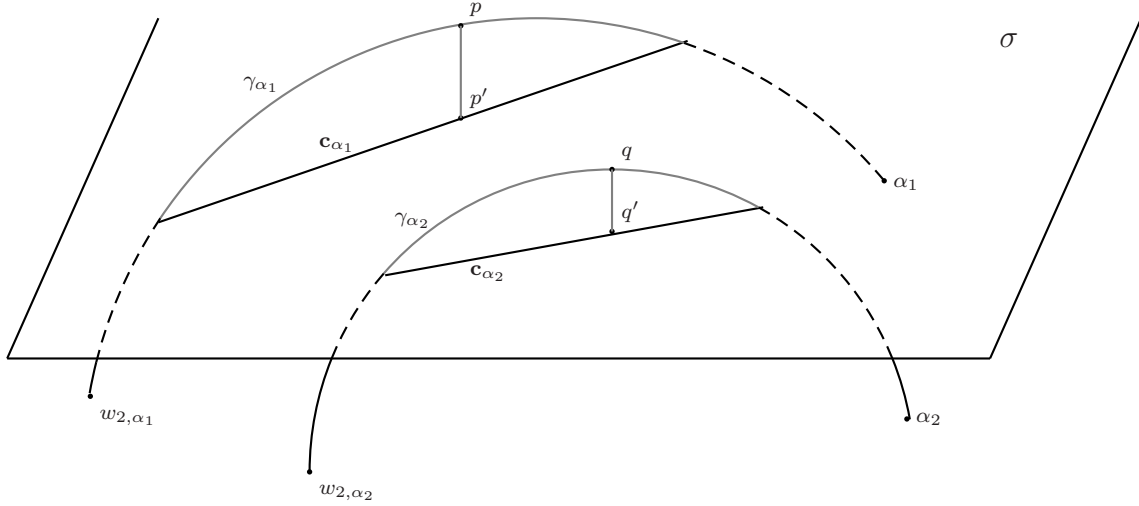
Als nächstes interessieren wir uns für den kleinsten Maximalunterschied zwischen γ_{α_1}' und γ_{α_2}' . Seien $w_{2,\alpha_1} := (x_1, t_{1,1}, \dots, t_{1,r})$ und $w_{2,\alpha_2} := (x_2, t_{2,1}, \dots, t_{2,r})$ die Anfangspunkte von γ_{α_1}' bzw. γ_{α_2}' . Da dies gleichzeitig die Endpunkte von μ_{α_1}' und μ_{α_2}' sind, ergibt sich nach (*): $d(w_{2,\alpha_1}, w_{2,\alpha_2}) \leq 4n$. Seien $p' \in \gamma_{\alpha_1}'$, $q' \in \gamma_{\alpha_2}'$ beliebig. Wir definieren den Punkt $p \in \gamma_{\alpha_1}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} p' &= p, & \text{falls } p' \in \gamma'_{\alpha} \text{ und} \\ p' &= \eta(p), & \text{falls } p' \text{ im Inneren einer Horosphäre } \sigma \in \Sigma \text{ liegt.} \end{aligned}$$

5 Das Combing

Dabei ist η die Projektion aus dem Inneren von $\sigma' := \sigma \cap (X \times (t_{1,1}, \dots, t_{1,r}))$ auf σ' entlang des Zentralstrahls von σ' (vgl. Lemma 4.17) ist, in Übereinstimmung mit der Konstruktion von γ' in 5.1.

Analog sei q' definiert.



Eine mehrfache Anwendung der Dreiecksungleichung liefert:

$$d(p', q') \leq d(p', p) + d(p, w_{2,\alpha_1}) + d(w_{2,\alpha_1}, w_{2,\alpha_2}) + d(w_{2,\alpha_2}, q) + d(q, q').$$

Für die einzelnen Summanden gilt:

$$d(p, p') \leq n\left(\frac{1}{b} + 1\right) \text{ und}$$

$$d(q, q') \leq n\left(\frac{1}{b} + 1\right) \text{ nach Lemma 5.1;}$$

$$d(p, w_{2,\alpha_1}) \leq n, \text{ da } d(p, w_{2,\alpha_1}) \leq (\gamma_{\alpha_1}) \leq d(\alpha_0, \alpha_1) \leq n,$$

$$d(w_{2,\alpha_2}, q) \leq n, \text{ da } d(p, w_{2,\alpha_2}) \leq (\gamma_{\alpha_1}) \leq d(\alpha_0, \alpha_2) \leq n \text{ und schließlich}$$

$$d(w_{2,\alpha_1}, w_{2,\alpha_2}) \leq 4n \text{ nach } (*).$$

Also:

$$d(p', q') \leq n\left(\frac{1}{b} + 1\right) + n + 4n + n + n\left(\frac{1}{b} + 1\right) = n\left(8 + \frac{2}{b}\right).$$

Insgesamt ergibt sich für die asynchrone Breite von \mathbf{c} :

$$\phi(n) \leq \max\left\{n\left(8 + \frac{2}{b}\right), 4n\right\} = n\left(8 + \frac{2}{b}\right) =: K(b) \cdot n.$$

6 Eine obere Grenze der Dehn-Funktion von Γ

In Kapitel 5 haben wir auf Ω einen Combing mit höchstens exponentiell in n wachsender Länge und höchstens linear in n wachsender asynchroner Breite konstruiert. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, dass auch auf Γ ein Combing mit diesen Eigenschaften existiert. Somit sind die Voraussetzungen des Satzes von Bridson erfüllt, den wir in Abschnitt 6.2 formulieren. Dieser Satz liefert eine exponentielle obere Grenze für die Dehn-Funktion von Γ .

6.1 Der Übergang zum Combing auf Γ

Zur Konstruktion eines Combing auf (einem Cayley-Graphen von) Γ ist es naheliegend, die Bilder der Combing-Wege von Ω unter einer Quasi-Isometrie $f : \Omega \rightarrow \Gamma$ zu verwenden. Damit jedoch zu jedem Punkt von Γ tatsächlich ein Weg führt, muss jeder Punkt ein Urbild unter f haben. Da f nicht notwendigerweise surjektiv ist, konstruieren wir zunächst eine sogenannte δ -Verdickung f_δ von f . So ein f_δ ist in der Regel keine Abbildung, da ein Element der Quelle mehrere „Bilder“ haben kann. Man spricht von einer *Pseudo-* bzw. einer *Quasi-Abbildung* [CEHLPT, 3.3].

Lemma 6.1. *Seien (Y, d) und (Y', d') zwei quasi-isometrische Räume. Dann existiert eine Teilmenge \mathcal{T} von $Y \times Y'$, sodass gilt:*

- (1) *Zu jedem $y \in Y$ existiert ein $y' \in Y'$ mit $(y, y') \in \mathcal{T}$. (So ein y' nennen wir dann ein Bild von y und bezeichnen es mit $\tilde{f}(y)$.)*
- (2) *Zu jedem $y' \in Y'$ existiert ein $\bar{y} \in Y$ mit $\tilde{f}(\bar{y}) = y'$.*
- (3) *Es gibt reelle Zahlen $k \geq 1$ und $\epsilon \geq 0$, sodass für alle y_1, y_2 , für alle $\tilde{f}(y_1)$ und für alle $\tilde{f}(y_2)$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:*

$$\frac{1}{k}d(y_1, y_2) - \epsilon \leq d(\tilde{f}(y_1), \tilde{f}(y_2)) \leq kd(y_1, y_2) + \epsilon.$$

Beweis: Sei $f : Y \rightarrow Y'$ eine (A, B) -Quasi-Isometrie. Es existiert weiter ein $C \geq 0$, sodass jeder Punkt von Y' in einer C -Umgebung des Bildes von f liegt (vgl. Definition von Quasi-Isometrien in 4.2). Für ein $\delta \geq 0$ konstruieren wir eine Quasi-Abbildung \tilde{f} wie folgt:

$$\tilde{f}(y) = y' \iff \text{es gibt ein } y'' \in B_\delta(y') \text{ mit } f(y) = y''.$$

Wir zeigen, dass die Menge $\{(y, \tilde{f}(y)), y \in Y'\} \subset Y \times Y'$ die Eigenschaften (1)-(3) erfüllt.

(1) ist nach Konstruktion von f klar. (2) gilt, weil sich (wegen der Existenz von C wie oben) durch eine geeignete Wahl von $\delta \leq C$ jeder Punkt von Y' als ein Bild eines $y \in Y$ schreiben lässt. Seien nun y'_1 und $y'_2 \in Y'$ beliebig, y_1 und $y_2 \in Y$ so, dass $y'_1 = \tilde{f}(y_1)$ und $y'_2 = \tilde{f}(y_2)$ jeweils ein Bild von y_1 und y_2 . Dann gilt:

$$d'(f(y_1), f(y_2)) - 2\delta \leq d'(\tilde{f}(y_1), \tilde{f}(y_2)) \leq d'(f(y_1), f(y_2)) + 2\delta.$$

Da f eine (A, B) -Quasi-Isometrie ist, ergibt sich daraus:

$$\left(\frac{1}{A}d(y_1, y_2) - B\right) - 2\delta \leq d'(\tilde{f}(y_1), \tilde{f}(y_2)) \leq (Ad(y_1, y_2) + B) + 2\delta.$$

Mit $k = A$ und $\epsilon = B + 2\delta$ ist somit (3) erfüllt. □

So ein \tilde{f} nennen wir eine δ -Verdickung von f und bezeichnen sie auch mit f_δ .

Proposition 6.2. *Die Gruppe Γ hat ein Combing mit der in n linear beschränkten asynchronen Breite und mit der in n exponentiell beschränkten Länge.*

Beweis: Ω und Γ sind quasi-isometrisch. Wir wählen eine endliche Erzeugendenmenge S von Γ und betrachten eine (A, B) -Quasi-Isometrie f von Ω in den von S erzeugten Cayley-Graphen von Γ (Eine andere Wahl der erzeugenden Menge würde einfach nur eine andere Quasi-Isometrie bedeuten.). Sei ohne Einschränkung $f(\text{id}) = \alpha_0$, wobei α_0 der Basispunkt des Combing auf Ω ist. Die Abbildung f kann so abgeändert werden, dass sie stetig ist, indem man das sogenannte Connect-the-Dots-Verfahren (s. z.B. [FarbSch, 5.4]) anwendet. Für ein passendes δ sei $f_\delta =: \tilde{f}$ eine δ -Verdickung von f wie in Lemma 6.1. Für $g \in \Gamma$ betrachten wir ein Urbild $\omega \in \Omega$ unter \tilde{f} . Das Bild vom Combing-Pfad \mathbf{c}_x unter \tilde{f} besteht aus einer Menge von Wegen im Cayley-Graphen von Γ , denn jeder Punkte y von \mathbf{c}_x hat unter Umständen mehrere Bilder $\tilde{f}(y)$ im Cayley-Graphen von Γ . Wir wählen aus jeder Menge $\{\tilde{f}(y)\}$, $y \in \mathbf{c}_x$ einen Bildpunkt aus und setzen diese Bilder zu einem Combing-Weg von id zu g im Cayley-Graphen von Γ zusammen. Für dieses Combing existieren zwei von den Quasi-Isometrie-Konstanten A, B , von der Verdickungskonstante δ sowie von den Konstanten $C(b)$ aus 5.4 und $K(b)$ aus 5.5 abhängige Konstanten M und N , sodass für die Länge L_Γ und für die asynchrone Breite ϕ_Γ des Combing auf Γ gilt:

$$L_\Gamma < e^{Nn} \text{ und } \phi_\Gamma < Mn.$$

6.2 Der Satz von Bridson

Den folgenden Satz hat Martin R. Bridson 1993 in [Bridson93] bewiesen.

Satz 6.3 ([Bridson93] 5.2 (A), 6.1). *Sei $\mathbf{c} : G \rightarrow F(G)$ ein Combing mit der asynchronen Breite $\phi(n)$ und der Länge $L(n)$. Gibt es Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta > 1$, sodass die Ungleichungen*

$$L(n) \leq e^{\alpha n} \text{ und } \phi(n) < \beta n$$

6.3 Gibt es eine exponentielle untere Grenze?

für große n gelten, dann gibt es eine Konstante $\lambda > 0$, sodass $e^{\lambda n}$ eine isoperimetrische Funktion für eine endliche Präsentation von G ist. (D.h. $e^{\lambda n}$ ist eine obere Grenze der Dehn-Funktion von G .)

Mit Proposition 6.2 folgt aus diesem Satz das nächste Korollar.

Korollar 1. Die Dehn-Funktion von Γ hat eine exponentielle obere Grenze.

Korollar 2. Seien G eine zusammenhängende einfach zusammengebaute \mathbb{Q} -Gruppe vom reellen Rang 1 und $S := \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_{p_1}, \dots, |\cdot|_{p_r}\}$ die Menge der (paarweise nicht-äquivalenten) p_i -adischen Bewertungen zusammen mit dem üblichen Absolutbetrag $|\cdot|_\infty$ von \mathbb{Q} . Für jedes $i \in 1, \dots, r$ gelte ebenfalls $\text{Rang}_{\mathbb{Q}_{p_i}}(\mathbb{Q}_{p_i}) = 1$. Sei Γ' eine S -arithmetische Untergruppe von $G_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{Q}_{p_1}} \times \dots \times G_{\mathbb{Q}_{p_r}}$. Dann hat die Dehn-Funktion von Γ' eine höchstens exponentiell wachsende obere Grenze.

Beweis: Γ' ist nach Definition kommensurabel mit $\Gamma = G_{\mathcal{O}(S)}$. Da nach [GhH] und [Alonso] kommensurable Gruppen die gleichen Dehn-Funktionen haben, ergibt sich die Behauptung sofort.

Bemerkung Da es sich bei Dehn-Funktionen um Quasi-Isometrie-Invarianten handelt, hat jede zu $\Gamma = G_{\mathcal{O}(S)}$ quasi-isometrische Gruppe eine höchstens exponentiell wachsende Dehn-Funktion. Jede solche Gruppe ist isomorph zu einer Matrizen-Gruppe, die, als eine Untergruppe H von \mathbf{GL}_n fast kommensurabel mit $G_{\mathcal{O}(S)}$ ist, das heißt es gibt eine mit $G_{\mathcal{O}(S)}$ kommensurable Gruppe H' und eine Konstante $C \geq 0$, sodass jedes Element von H in einer C -Umgebung von einem Element von H' liegt [Wortman].

6.3 Gibt es eine exponentielle untere Grenze?

Die Antwort lautet Ja im Fall G mit $G_{\mathbb{R}} = SO(2, 1)$ und $S := \{|\cdot|_\infty, |\cdot|_p\}$. Dies folgt direkt aus [Taback 2003]. Unter Verwendung eines Resultats von Epstein [CEHLPT, 7.4, S.154] beweist J. Taback, dass die untere Grenze der Dehn-Funktion von $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$ exponentiell wächst.

Die Idee von J. Taback ist, Lipschitz-Schleifen in der Standardhorosphäre σ_∞ zu betrachten. Sie beweist in ihrem Lemma 4.2: Projiziert man eine von einer Schleife f aus σ_∞ begrenzte Fläche auf σ_∞ , so ändert sich die Fläche höchstens um eine additive Konstante. Findet man also in σ_∞ Schleifen, deren σ_∞ -Minimalflächen exponentiell in $n := \text{Länge}(f)$ sind, so sind auch ihre Ω_p -Minimalflächen exponentiell in n . Man kann σ_∞ mit einer sogenannten Baumslag-Solitar-Gruppe $BS(1, p^2) := \langle x, y | yxy^{-1} = x^{p^2} \rangle$ identifizieren, denn die Untergruppe

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} \right\rangle (\cong BS(1, p^2)) \text{ von } SL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$$

operiert eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf σ_∞ . Ein Resultat aus [CEHLPT, 7.4, S.154] besagt: Es gibt Schleifen in $BS(1, p^2)$, deren Minimalflächen exponentiell in ihrem Umfang sind. Diese Aussage überträgt sich offensichtlich auf σ_∞ , also auch nach [Taback 2003, Lemma 4.2] auf Ω_p und schließlich auch auf die dazu quasi-isometrische Gruppe $PSL_2(\mathbb{Z}[\frac{1}{p}])$.

Epsteins Analyse der unteren Grenze der Dehn-Funktion von $BS(1, p^2)$ (genauer von $BS(k, l) := \langle x, y | yx^k y^{-1} = x^l \rangle$) geht auf Thurston zurück, der einen direkteren Beweis geliefert hat. Unabhängig von Thurston hat **Gersten** 1991 [Gersten1, Theorem B, §4] bewiesen, dass jede isoperimetrische Funktion von $BS(k, l)$ für $k \neq l$ schneller, als jede in n polynomiale Funktion wächst, woraus sich eine exponentielle untere Grenze der Dehn-Funktion ergibt. Epsteins Vorgehen basiert auf der Konstruktion des sogenannten gefüllten Cayley-Graphen von $(BS(m, n), \{x, y\})$. Dieser ist ein zweidimensionaler Komplex \tilde{K} mit der Eigenschaft, dass jedes triviale Wort eine nullhomotope Schleife in \tilde{K} bildet. Der gefüllte Cayley-Graph \tilde{K} hat die Topologie von $T \times \mathbb{R}$, ist insbesondere zusammenziehbar. Ein *Blatt* in \tilde{K} ist definiert wie das Urbild eines unendlichen langen, stets „aufwärts laufenden“ Weges in T unter der Projektion auf T . Ein Blatt ist homöomorph zu \mathbb{R}^2 , und kann derart auf $\mathbb{H}^2 (= \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\})$ abgebildet werden, dass die Abbildung $z \mapsto \frac{z}{n}$ jede horizontale Strecke auf die Strecke abbildet, die unmittelbar über ihr liegt. Ein *oberes Blatt* ist der Teil eines Blattes oberhalb einer *horizontalen Linie*, des Urbilds von $\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \text{Im}(z) = \text{const}\}$ unter dem o.g. Homöomorphismus. Man findet leicht zwei obere Blätter S_1 und S_2 mit einer gemeinsamen unteren Grenzlinie. (Epstein empfiehlt, sich $S_1 \cup S_2$ wie zwei Seiten eines aufgeschlagenes Buches vorzustellen.) Hat man eine Schleife in $S_1 \cup S_2$, so liegt die davon begrenzte Minimalfläche ganz in $S_1 \cup S_2$. Aufgrund der Homöomorphie mit \mathbb{H}^2 findet man eine Folge von Schleifen in $S_1 \cup S_2$, deren Längen linear und deren Flächen exponentiell wachsen!

Offen bleibt die Frage, ob die Dehn-Funktion von $\Gamma = G_{\mathcal{O}(S)}$ für beliebige G mit $G_{\mathbb{R}} \in \{SO(m, 1), SU(m, 1), Sp(m, 1), F_4^*\}$ und $S := \{|\infty, |p_1, \dots, |p_r\}$ eine exponentielle untere Grenze hat. Die Erweiterung der Ideen von Epstein auf diese allgemeineren Fälle scheitert an der Komplexität des entsprechenden Cayley-Graphen. Bereits bei den einfachsten Verallgemeinerungen $SO(2, 1) \times T_p \times T_q$ und $SO(3, 1) \times T_p$ haben die entsprechenden Horosphären die Struktur

$$\{\langle x, y, z | yxy^{-1} = x^{p^2}, zxz^{-1} = x^{q^2}, yz = zy \rangle\}$$

bzw.

$$\left\langle \left(\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Diese Gruppen haben wesentlich kompliziertere gefüllte Cayley-Graphen, die z.B. keine zusammenziehbaren topologischen Räume sind.

Literaturverzeichnis

- [ABC] J. Alonso, T. Brady, D. Cooper, V. Ferlini, M. Lustig, M. Mihalik, M. Shapiro, H. Short, Notes on word hyperbolic groups, *Group Theory from a Geometrical Viewpoint*, World Scientific, 3-63, 1991.
- [All98] D. Allcock, An isoperimetric inequality of the Heisenberg groups, *Geom. Funct. Anal.*, **8**(2), 219-233, 1998.
- [Alonso] J. M. Alonso, Inégalités isopérimétriques et quasi-isométries, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **311**, 761-764, 1990.
- [BMS] G. Baumslag, C. F. Miller and H. Short, Isoperimetric inequalities and the homology of groups, *Inventiones Mathematicae* **113**(1), Springer Berlin / Heidelberg, 1-670, 2005.
- [Borel] A. Borel, Linear Algebraic Groups, Series: Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer, 1991.
- [BGroS] W. Ballmann, A. Gromov, V. Schroeder, Manifolds of Nonpositive Curvature, Birkhäuser 1985.
- [Bridson92] M. Bridson, Combing of the fundamental group of a Haken 3-manifold, preprint, Princeton Univ., April 1992.
- [Bridson93] M. Bridson, On the geometry of normal forms in discrete groups, *Pro. London Math. Soc.* **63**(3), 596-616, 1993.
- [Bridson95] M. Bridson, Fractional isoperimetric inequalities and subgroup distortion, *Journal of the American Mathematical Society* **12**(4), 1103-1118, 1999.
- [Bridson02] M. Bridson, Fractional isoperimetric inequalities and subgroup distortion, *Proceedings of the London Mathematical Society* **85**, 441-466, Cambridge University Press, 2002.
- [BriHaefl] M. R. Bridson, A. Haefliger, Metric Spaces of Non-positive Curvature, Springer 1999.
- [BrTi 1967] F. Bruhat, J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local, *Proc. Conf. Local Fields*, Springer 1967.
- [BrTi 1972] F. Bruhat, J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local, Chap. I, *Publ. Math. IHES* **41**, 1-251, 1972.

- [BrVo] M. Bridson, K. Vogtmann, On the geometry of the automorphism group of a free group, *Bulletin London Math. Soc* **27**, 544-552, 1995.
- [BurTab] J. Burillo, J. Taback, Equivalence of Geometric and Combinatorial Dehn Functions, *New York J. Math.* **8**, 169-179, 2002.
- [CEHLPT] D. B. A. Epstein, J. Cannon, D. F. Holt, S. Levy, M. S. Patterson, W. Thurston, Word Processing in Groups, Jones and Barlett, Boston, MA, 1992.
- [Dru04] C. Drutu, Filling in solvable groups and in lattices in semisimple groups, *Topology*, **43**(5), 983-1033, 2004
- [FarbSch] B. Farb, R. Schwarz, The large scale geometry of Hilbert modular groups, *J. Differential Geom.* **44**(3), 435-478, 1996.
- [Gersten1] S. M. Gersten, Dehn functions and l_1 -norms of finite presentations. In C. F. Miller III and G. Baumslag, editors, *Proceedings of the workshop on algorithmic problems*, Springer-Verlag, MSRI series, 1991.
- [Gersten2] S. M. Gersten, Bounded cohomology und combings of groups, preprint, Univ. of Utah, 1991.
- [Gersten3] S. M. Gersten, Isodiametric and isoperimetric inequalities in group extensions, preprint, Univ. of Utah, 1991.
- [Gersten93] S. M. Gersten, Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations, in: G.A. Niblo, M.A. Roller (Eds.), *Geometric Group Theory 1*, Proceedings of the Symposium held in Sussex, 79-96, 1991, *LMS Lecture Notes Series* **181**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [Gersten94] The automorphism group of a free group is not a CAT(0) group, *Proceedings of the American Mathematical Society* **121**(4), 999-1002, 1994.
- [GHR] S. M. Gersten, D. F. Holt, T.R. Riley, Isoperimetric inequalities for nilpotent groups, *Geometric And Functional Analysis* **13**(4), 671-933, 2003.
- [GhH] E. Ghys, P. de la Harpe, Sur les groupes hyperboliques d'après M. Gromov, Birkhäuser, 1990.
- [Gr87] M. Gromov, Hyperbolic groups, *Essays in group theory*, MSRI series **8**, Springer, New York, 75-263, 1987.
- [Gr91] M. Gromov, Asymptotic invariants of infinite groups, in: G.A. Niblo, M.A. Roller (Eds.), *Geometric Group Theory*, **2**, Proceedings of the Symposium held in Sussex, LMS Lecture Notes Series, **182**, Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [HaVo] A. Hatcher, K. Vogtmann, Isoperimetric inequallities for automorphism groups of free groups, *Pacific Journal of Math.* **173**(2), 425-441, 1996.

- [Helgason] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [H/IH] E. Heintze, H.-C. Im Hof, Geometry of Horospheres, *J. Differential Geom.* **12**, 481-491, 1977.
- [Leuzinger95] E. Leuzinger, An exhaustion of locally symmetric spaces by compact submanifolds with corners, *Invent. Math.* **121**(2), 389-410, 1995.
- [Leuzinger04] E. Leuzinger, Polyhedral retracts and compactifications of locally symmetric spaces, *J. Diff. Geom. Appl.* **20**, 293-318, 2004.
- [LeuzPit1996] E. Leuzinger, C. Pittet, Isoperimetric inequalities for lattices in semisimple Lie groups of rank 2, *Geometric and Functional Analysis* **6**(3), 489-511, 1996.
- [LeuzPit2004] E. Leuzinger, C. Pittet, On quadratic Dehn functions, *Mathematische Zeitschrift* **248**, 725-755, 2004.
- [Lubotzky] A. Lubotzky, Lattices in rank one Lie groups over local fields, *Geometric And Functional Analysis* **1**(4), 406-431, 1991.
- [LuMoRag] A. Lubotzky, S. Mozes, M. S. Raghunathan, The word and Riemannian Metrics on lattices of semisimple groups, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **91**, 5-53, 2000.
- [Macdonald] I. G. Macdonald, Spherical functions on a group of p-adic type, Ramanujan Institute, University of Madras, 1971.
- [Malgrange] B. Malgrange, Ideals of Differentiable Functions, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, Oxford University Press, 1996.
- [Miller] Ch. F. Miller, III, Decision problems for groups - survey and reflections, Proceedings of the Workshop on Algorithms, Word Problems and Classification in Combinatorial Group Theory (G. Baumslag, Ch. F. Miller, eds.), MSRI Publications **23**, Springer-Verlag, 1-60, 1991.
- [Milnor] J. Milnor, A note on curvature and fundamental group, *J. Differential Geom.* **2**, 1-7, 1968.
- [Morris] Dave Witte Morris, Introduction to Arithmetic Groups, Preliminary version, 2003.
- [Neukirch] J. Neukirch, Algebraische Zahlentheorie, Springer 1992.
- [Ol91] A. Olshanskii, Hyperbolicity of groups with subquadratic isoperimetric inequality, *Internat. J. Algebra und Comput.* **1**, 281-289, 1991.

- [Ol99] A. Olshanskii, M. Sapir, Quadratic isometric functions of the Heisenberg groups. A combinatorial proof. *Algebra*, 11, *Internat. J. Math. Sci. (New York)* **93**(6), 921-927, 1999.
- [Pittet] Ch. Pittet, Isoperimetric inequalities for homogeneous nilpotent groups, in *Geometric Group Theory III*, (R. Charney, M. Davis, M. Shapiro, eds.), Ohio State University, Math. Res. Inst. Publ., de Gruyter, 159-164, 1995.
- [Pit95] Ch. Pittet, Hilbert modular groups and isoperimetric inequalities, L.N.S. Cambridge University Press, L.M.S. 1995.
- [Pit97] Ch. Pittet, Isoperimetric inequalities in nilpotent groups, *Journal of the London Mathematical Society* **55**, 588-600, Cambridge University Press, 1997.
- [PlatRap] V. Platonov, A. Rapinchuk, Algebraic groups and number theory, Boston: Academic Press, 1994.
- [Raghun] M. S. Raghunathan, Discrete Subgroups of Lie Groups, Springer, 1972.
- [Serre] J-P. Serre, Arithmetic Groups, *London Math. Soc.* **36**, 105-136, 1979.
- [Steinberg] R. Steinberg, Lectures on Chevalley groups, Yale University, 1967.
- [Taback 2000] J. Taback, Quasi-isometric rigidity for $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$, *Duke Math. J.* **101**(2), 335-357, 2000.
- [Taback 2003] J. Taback, The Dehn Function of $PSL_2(\mathbb{Z}[1/p])$, *Geometriae Dedicata* **102**, 179-195, 2003.
- [Thurston] W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6**, 357-381, 1982.
- [Tits66] J. Tits, Classification of algebraic semisimple groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, **9**, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Boulder, 1965, *Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 33-62, 1966.
- [Wortman] K. Wortman, Quasi-isometric rigidity of rank one S-arithmetic lattices, Arxiv preprint math.GR/0504207, 2005.
- [Zimmer] R. J. Zimmer, Ergodic Theory and Semisimple Groups, Birkhäuser, *Monographs in Mathematics*, **81**, 1984.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Anastasia August
Geburtsdatum	18. Februar 1977
Geburtsort	Gurjew
Eltern	Valentina und Alexander August

Schulbildung

September 1983 - September 1992	Mittelschule in Gurjew
September 1992 - Juni 1993	Mittelschule in Moskau
Juni 1993	mittlere Reife
Mai 1995 - Oktober 1995	Intensivsprachkurs in Schweinfurt
Februar 1996 - Februar 1998	Gymnasium in Würzburg
Februar 1998	allgemeine Hochschulreife

Studium

September 1993 - August 1994	Maschinenbau in Gurjew
November 1998 - Dezember 2003	Studium des Lehramts für Mathematik und Physik, Universität Bayreuth
Dezember 2003	Staatsexamen
April 2000 - Juni 2003	Studium der Mathematik, Universität Bayreuth
Juni 2003	Diplomarbeit über „Poisson homogene Räume“
Juni 2003	Diplom in Mathematik, Universität Bayreuth

Berufstätigkeit

seit Dezember 2003	Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Universität Karlsruhe (TH)
--------------------	---