

Dissertation

**Zuverlässigkeitsberechnung und vorbeugende Wartung
von komplexen technischen Systemen mittels modifizierter
Markov-Methode**

von

Alexei Konnov

Zuverlässigkeitsberechnung und vorbeugende Wartung von komplexen technischen Systemen mittels modifizierter Markov-Methode

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Informatik
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Diplom-Informatiker Alexei Konnov

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung:	09.02.2007
Erster Gutachter:	Universitätsprofessor Dr.-Ing. Heinz Wörn
Zweiter Gutachter:	Prof. em. Dr.-Ing. Winfried Görke

Kurzfassung

Die modernen technischen Systeme besonders im Bereich Leittechnik und automatisierte Steuerung werden immer komplexer. Von der einwandfreien Funktionalität der Leittechnik hängen oft nicht nur der Betrieb einer gesamten technischen Anlage (z. B. Kraftwerk), sondern auch Menschenleben ab.

Der Zwischenfall im schwedischen Kernkraftwerk Forsmark im Juli 2006 hat deutlich gezeigt, dass die Bedeutung der Zuverlässigkeitsanalyse solcher technischen Systeme nicht zu unterschätzen ist. Bereits in der Entwicklungsphase eines technischen Systems werden mittels Zuverlässigkeitsanalyse mögliche Designfehler bzw. Schwachpunkte entdeckt.

Ein wichtiger Teil der Zuverlässigkeitsanalyse eines technischen Systems ist die Zuverlässigkeitsberechnung. Ziel dabei ist es, aufgrund der Zuverlässigkeitsparameter von Einzelkomponenten bzw. Baugruppen eines technischen Systems die Zuverlässigkeitsparameter des gesamten Systems unter gegebenen Betriebsbedingungen zu ermitteln.

Die klassische Zuverlässigkeitstheorie beschreibt zahlreiche Methoden der Zuverlässigkeitsberechnung. Die Praxis dagegen zeigt, dass bezogen auf die realen technischen Systeme nur die Markov-Methode bzw. Methode der markovschen Minimalschnitte als anwendbar bezeichnet werden kann.

Allerdings hat auch die klassische Markov-Methode gewisse Nachteile. Bestimmte Ausfallarten (z. B. Ausfall infolge gemeinsamer Ursache), die durch die Betriebsbesonderheiten verursacht werden, und zusätzliche Funktionalität moderner Baugruppen (z. B. Selbstdiagnose) werden von der klassischen Markov-Methode nicht erfasst.

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation wurde eine modifizierte Markov-Methode entwickelt, die sowohl den Faktor "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" als auch den Faktor "Diagnose-Aufdeckungsgrad" bei einer Zuverlässigkeitsberechnung berücksichtigt. Dadurch wird die Präzision der Berechnung gegenüber der klassischen Markov-Methode wesentlich verbessert.

Zunächst wurden die beiden neuen Faktoren einzeln untersucht. Ziel dabei ist es, eine im Sinne der Theorie stochastischer Prozesse mathematisch korrekte Definition des jeweiligen Faktors zu formulieren. Die Auswirkung der neuen Faktoren auf die Zuverlässigkeitsberechnung wurde mithilfe von diversen Modellen evaluiert. Als Referenzmodell wurden die klassische Markov-Methode und eine empirische Formel verwendet.

Anschließend wurden die neuen Faktoren und die klassischen Zuverlässigkeitsparameter in einem modifizierten Markov-Modell zusammengefasst. Das modifizierte Markov-Modell weist eine Allgemeingültigkeit auf. Einerseits, falls die Faktoren "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" und "Diagnose-Aufdeckungsgrad" gleich Null sind, geht die modifizierte Markov-Methode in die klassische Markov-Methode über. Andererseits, besonders im Falle eines asymmetrischen Systems (ein technisches System, bestehend aus nicht identischen Komponenten oder Baugruppen), liefert die modifizierte Markov-Methode wesentlich präzisere Ergebnisse als die empirische Formel.

Aufgrund der präzisen Zuverlässigkeitsberechnung bzw. Vorhersage ist eine weitgehende Kostenoptimierung bereits in der Entwicklungs- bzw. Angebotsphase eines technischen Systems möglich. In der Betriebsphase ermöglicht eine präzise Zuverlässigkeitsberechnung die Entwicklung einer optimalen und kosteneffektiven Wartungsstrategie, indem z. B. eine korrigierende Wartung (Reparatur) durch eine vorbeugende Wartung ersetzt wird.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit ist während meiner Tätigkeit bei der Firma Siemens AG entstanden. Die wissenschaftliche Betreuung erfolgte durch die Fakultät für Informatik der Universität Karlsruhe (TH).

Mein erster Dank geht an Herrn Prof. Dr.-Ing. Heinz Wörn, Leiter des Instituts für Prozessrechen-technik, Automation und Robotik, für die Betreuung der Arbeit und die Übernahme des Hauptberichtes. Durch seine Initiative bekam ich, als Mitarbeiter des Instituts, eine Möglichkeit praktische Erfahrungen im Bereich technischer Zuverlässigkeit in verschiedenen Industrie- projekten zu sammeln.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Winfried Görke vom Institut für Rechnerentwurf und Fehlertoleranz an der Fakultät für Informatik danke ich recht herzlich für die Übernahme des Zweitberichtes sowie stetige Unterstützung und sachliche Kritik meiner Arbeit. Seine spannenden Vorlesungen haben im Jahr 1996 erstmals mein Interesse am Thema Zuverlässigkeit und Fehlertoleranz erweckt. Damals wusste ich noch nicht, dass mein weiteres Leben davon so stark geprägt wird.

Bei Herrn Dipl.-Ing. Jürgen Herrmann, Leiter von "Reliability Consult" bei der Firma Siemens AG, möchte ich mich besonders bedanken. Sein reiches praktisches und theoretisches Wissen zum Thema Zuverlässigkeit und Sicherheit von technischen Systemen hat mir während meiner Arbeit im besonderen Maße geholfen. Zahlreiche heftige aber auch konstruktive Diskussionen aufgrund der realen Aufgaben brachten mir manchmal mehr Wissen und Erfahrung als manch ein Lehrbuch.

Der Firma Siemens AG, die mir die Erstellung dieser Arbeit im Rahmen des Doktoranden- programmms erst ermöglicht hat, bin ich zu einem besonderen Dank verpflichtet. Allen Kolleginnen und Kollegen aus der L-University Arbeitsgruppe möchte ich an dieser Stelle Dank sagen. Sie haben alle auf ihre eigene Art und Weise, z. B. durch die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre, zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Besonderer Dank gilt hier Herrn Wolfgang Thiel, Leiter der PG L28, sowie Herrn Detlef Rautmann, Leiter der L-University, die stets für diese Arbeit wichtige administrative Unterstützung geleistet haben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zuverlässigkeit in der modernen Technik	2
1.2	Motivation und Ziele der Arbeit	2
1.3	Gliederung der Arbeit	3
2	Grundlagen	4
2.1	Auszug aus der Wahrscheinlichkeitstheorie	5
2.1.1	Definitionen und Begriffe	5
2.1.1.1	Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	8
2.1.1.2	Bedingte Wahrscheinlichkeit	8
2.1.1.3	Wichtigste Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung	10
2.1.2	Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen	10
2.1.2.1	Binomialverteilung	12
2.1.2.2	Poissonverteilung	13
2.1.2.3	Weibullverteilung	14
2.1.2.4	Exponentialverteilung	15
2.1.2.5	Normalverteilung	16
2.1.3	Stochastische Prozesse	17
2.1.3.1	Markov-Prozess mit endlich vielen Zuständen	18
2.1.3.2	Bezug auf die Markov-Methode	20
2.2	Auszug aus der Zuverlässigkeitstheorie	21
2.2.1	Definitionen und Begriffe	21
2.2.1.1	Bedeutung der Zuverlässigkeit	25
2.2.1.2	Allgemeine Vorgehensweise bei der Zuverlässigkeitsanalyse	27
2.2.1.3	RAM Werte und Kenngrößen	31
2.2.2	Wichtigste Verteilungen	36
2.2.2.1	Weibullverteilung	37
2.2.2.2	Exponentialverteilung	39
2.2.2.3	Normalverteilung	40
2.2.3	Zuverlässigkeitsberechnung von komplexen Systemen	41
2.2.3.1	Zuverlässigkeitsberechnung eines Einzelelementes	45
2.2.3.2	Serien- und Parallelstrukturen	46
2.2.3.3	Redundanz	50
2.2.3.4	Systeme ohne Reparatur	54
2.2.3.5	Reparierbare Systeme	55
2.2.4	Instandhaltungsanalyse	60
2.2.4.1	Strategie der vorbeugenden Wartung	64
2.2.4.2	Optimale Anzahl von Ersatzteilen	66
2.2.4.3	Wirtschaftliche Aspekte	67
2.3	Auszug aus der Komplexitätstheorie	68
2.3.1	Definitionen und Grundlagen	68
2.3.1.1	Umfang, Aufwand und Komplexität eines Problems	69
2.3.1.2	Asymptotische Notation	69
2.3.1.3	Schrankenfunktionen	73
2.3.2	Rekursionen	74
2.3.2.1	Allgemeine Methode (master method)	74
2.3.2.2	Rekursionsbäume	75
3	Stand der Forschung	77
3.1	Verfahren der Zuverlässigkeitsberechnung	78
3.2	Verfahren der Markovschen Prozesse	79

3.3	Verfahren der Minimalschnitte	83
3.4	Verfahren der Markovschen Minimalschnitte	88
4	Konzept der neuen Methodik	91
4.1	Anforderungen an die Methodik der Zuverlässigkeitsberechnung	91
4.2	Vergleich mit dem Stand der Forschung	92
4.3	Vergleich mit dem Stand der Technik.....	93
5	Die modifizierte Methodik im Detail	95
5.1	Neuer Faktor: Ausfall infolge gemeinsamer Ursache	95
5.1.1	Einfluss von CCF auf die Markov-Methode	98
5.1.1.1	Modell 1: nicht konstante Ausfallraten	100
5.1.1.2	Modell 2: Semi-Markov	101
5.1.1.3	CCF: allgemeine Formel für die Ausfallrate λ_{CCF}	103
5.1.2	Beispiel: Markov-Methode mit CCF	106
5.1.2.1	Modell 1	106
5.1.2.2	Modell 2	114
5.2	Neuer Faktor: Diagnose-Aufdeckungsgrad	121
5.2.1	Einfluss von DC auf die Markov-Methode	123
5.2.1.1	DC Faktor: Einzelkomponente	123
5.2.1.2	DC Faktor: ein redundantes System.....	125
5.2.2	Beispiel: Markov-Methode mit DC	129
5.2.2.1	Modell 1	129
5.2.2.2	Modell 2	134
5.3	Modifizierte Übergangsmatrix.....	138
5.4	Kalkulation der RAM Werte nach neuer Methodik.....	142
6	Praktischer Einsatz: Projekt ACoRAM	143
6.1	Ausgangssituation	143
6.2	Ziele des Projektes	145
6.3	Lösungseinsatz.....	146
7	Zusammenfassung und Ausblick	147
8	Appendix	149
8.1	Abkürzungen	149
8.2	Formelzeichen	151
8.3	Modell von Kochs	152
9	Literaturverzeichnis	153

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1 Basis der modifizierten Markov-Methode.....	4
Abb. 2 Relative Häufigkeit.....	7
Abb. 3 Binomialverteilung.....	12
Abb. 4 Poissonverteilung.....	13
Abb. 5 Weibullverteilung.....	14
Abb. 6 Exponentialverteilung.....	15
Abb. 7 Normalverteilung.....	16
Abb. 8 Übergangswahrscheinlichkeiten.....	20
Abb. 9 Zuverlässigkeit und Kosten.....	27
Abb. 10 Begriff "Dependability".....	28
Abb. 11 Allgemeine Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse.....	29
Abb. 12 Dependability management.....	31
Abb. 13 Bestandsfunktion.....	32
Abb. 14 Zeitlicher Verlauf der Ausfallrate.....	36
Abb. 15 Weibullverteilung: $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ und $\lambda(t)$	38
Abb. 16 Exponentialverteilung: $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ und $\lambda(t)$	40
Abb. 17 Normalverteilung: $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ und $\lambda(t)$	41
Abb. 18 Top-Down Aufstellung.....	42
Abb. 19 Aufstellung eines Zuverlässigkeitsblockdiagramms.....	43
Abb. 20 Seriensystem: Verlauf der Funktion $R(t)$	47
Abb. 21 Parallelsystem: Verlauf der Funktion $R(t)$	48
Abb. 22 Vermischte Systeme: Verlauf der Funktion $R(t)$	49
Abb. 23 Kalte Redundanz, sicherer Umschalter: Verlauf der Funktion $R(t)$	51
Abb. 24 Kalte Redundanz, realer Umschalter: Verlauf der Funktion $R(t)$	52
Abb. 25 Majoritätsredundanz: Verlauf der Funktion $R(t)$	52
Abb. 26 Kalte, heiße Redundanz und Einzelelement: $R(t)$	53
Abb. 27 Kalte, heiße Redundanz und Einzelelement: $f(t)$	53
Abb. 28 Kalte, heiße Redundanz und Einzelelement: $\lambda(t)$	54
Abb. 29 Sofortige Verfügbarkeit: Einzelkomponente mit Reparatur.....	57
Abb. 30 Sofortige Verfügbarkeit: Einzelkomponente mit Reparatur ($\mu = 3\lambda$), α -Faktor.....	57
Abb. 31 Redundanz und Instandhaltungsmaßnahmen.....	61
Abb. 32 Instandhaltung.....	62
Abb. 33 Instandhaltungsanalyse in der Entwicklungsphase, IEC 60300-3-10.....	63
Abb. 34 Vorbeugende und korrigierende Wartung IEC 60300-3-10.....	64
Abb. 35 Vorbeugende Wartung: Einsatzprinzip, IEC 60300-3-14.....	65
Abb. 36 Lebenszyklus und Wartung, IEC 60300-3-14.....	67

Abb. 37 Θ -Notation.....	70
Abb. 38 O-Notation.....	71
Abb. 39 Ω -Notation.....	72
Abb. 40 Rekursionsbaum, Schritt 1.....	75
Abb. 41 Vollständiger Rekursionsbaum	76
Abb. 42 Verfahren der Zuverlässigkeitsberechnung	78
Abb. 43 Zustandsdiagramm einer reparierbaren Einheit.....	82
Abb. 44 Ermittlung der Minimalschnitte.....	85
Abb. 45 Ausfall-Logik	86
Abb. 46 Betriebslogik	87
Abb. 47 Betriebslogik: Elemente 1, 2, 3 sind stochastisch abhängig	88
Abb. 48 Markovsche Minimalschnitte.....	90
Abb. 49 ACoRAM: Architektur der Software	93
Abb. 50 Klassisches Markov-Modell	99
Abb. 51 Modell 1: nicht konstante Ausfallraten	100
Abb. 52 Modell 2: Semi-Markov	102
Abb. 53 Modell 1, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten	107
Abb. 54 Modell 1, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4.....	108
Abb. 55 Modell 1, Versuch 1: Ausfallwahrscheinlichkeiten	108
Abb. 56 Modell 1, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten	109
Abb. 57 Modell 1, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4.....	110
Abb. 58 Modell 1, Versuch 2: Ausfallwahrscheinlichkeiten	110
Abb. 59 Modell 1, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten	112
Abb. 60 Modell 1, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4.....	112
Abb. 61 Modell1, Versuch 3: Ausfallwahrscheinlichkeiten	113
Abb. 62 Modell 2, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten	115
Abb. 63 Modell 2, Versuch 1: Ausfallwahrscheinlichkeiten	115
Abb. 64 Modell 2, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten	117
Abb. 65 Modell 2, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4.....	117
Abb. 66 Modell 2, Versuch 2: Ausfallwahrscheinlichkeiten	118
Abb. 67 Modell 2, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten	119
Abb. 68 Modell 2, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4.....	119
Abb. 69 Modell 2, Versuch 3: Ausfallwahrscheinlichkeiten	120
Abb. 70 DC Faktor: Zustandsgraph.....	122
Abb. 71 DC Faktor, Zustandsgraph: Einzelkomponente mit Selbstdiagnose.....	124
Abb. 72 DC Faktor: Ausfallwahrscheinlichkeiten.....	125
Abb. 73 DC Faktor, Zustandsgraph: redundantes System.....	127
Abb. 74 Modell 1, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten	130

Abb. 75 Modell 1, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten	131
Abb. 76 Modell 1, Versuch 2: Zustand 2, 3 sowie gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit	131
Abb. 77 Modell 1, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten	132
Abb. 78 Modell 1, Versuch 3: Zustand 2, 3 sowie gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit	133
Abb. 79 Modell 2, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten	134
Abb. 80 Modell 2, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten	135
Abb. 81 Modell 2, Versuch 2: Zustand 2 bis 5, gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit.....	136
Abb. 82 Modell 2, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten	137
Abb. 83 Modell 2, Versuch 3: Zustand 2 bis 5, gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit.....	138
Abb. 84 CCF und DC Faktoren: Zustandsgraph	139
Abb. 85 Leittechnisches System	144

Tabellenverzeichnis

Tab. 1 Operationen der Ereignisalgebra	6
Tab. 2 Gesetze der Ereignisalgebra.....	6
Tab. 3 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	8
Tab. 4 Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung.....	10
Tab. 5 Eigenschaften einer Verteilungsfunktion.....	11
Tab. 6 Binomialverteilung.....	12
Tab. 7 Poissonverteilung.....	13
Tab. 8 Weibullverteilung.....	14
Tab. 9 Exponentialverteilung.....	15
Tab. 10 Normalverteilung.....	16
Tab. 11 Bedingungen eines Markov-Prozesses.....	18
Tab. 12 Ableitungen eines Markov-Prozesses.....	18
Tab. 13 Eigenschaften der Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeiten	19
Tab. 14 IEC Normen	23
Tab. 15 MIL Normen	23
Tab. 16 Andere Normen.....	23
Tab. 17 Begriffe der Zuverlässigkeitsanalyse	25
Tab. 18 Bedeutung der Zuverlässigkeit.....	26
Tab. 19 Faktoren der Zuverlässigkeitsanalyse.....	28
Tab. 20 Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse	30
Tab. 21 Zuverlässigkeitskenngrößen	33
Tab. 22 MTTF, MTBF, MTTR, MDT	34
Tab. 23 Stressfaktoren	36
Tab. 24 Früh-, Zufalls- und Verschleißausfälle	37
Tab. 25 Weibullverteilung: Zuverlässigkeitseigenschaften.....	38
Tab. 26 Exponentialverteilung: Zuverlässigkeitseigenschaften.....	39
Tab. 27 Normalverteilung: Zuverlässigkeitseigenschaften.....	41
Tab. 28 Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse.....	44
Tab. 29 Seriensystem: Zuverlässigkeitseigenschaften	46
Tab. 30 Parallelsystem: Zuverlässigkeitseigenschaften.....	48
Tab. 31 Vermischte Systeme	49
Tab. 32 Redundanzarten und deren Eigenschaften.....	51
Tab. 33 Nicht reparierbare Systeme	55
Tab. 34 Arten der Verfügbarkeit.....	56
Tab. 35 Reparierbares Einzelelement.....	58
Tab. 36 Reparierbares System ohne Redundanz	59

Tab. 37 Grundmodelle der reparierbaren Systeme	60
Tab. 38 Vorbeugende vs. korrigierende Wartung	65
Tab. 39 Begriffe der Komplexitätstheorie	69
Tab. 40 Notationseigenschaften.....	73
Tab. 41 Schrankenfunktionen	74
Tab. 42 Asymptotische Grenze	74
Tab. 43 Zustandsraumverfahren	79
Tab. 44 Netzwerkverfahren	79
Tab. 45 Vor- und Nachteile der Markov-Methode	83
Tab. 46 Vor- und Nachteile der Minimalschnitt-Methode	88
Tab. 47 Vor- und Nachteile der Methode der markovschen Minimalschnitte.....	90
Tab. 48 Anforderungen an eine Methode der Zuverlässigkeitsberechnung.....	92
Tab. 49 Funktionalität von Modulen	94
Tab. 50 Verschiedene Arten von Mehrfachausfällen	96
Tab. 51 Faktor CCF, Eigenschaften.....	98
Tab. 52 Modell 1: Eigenschaften.....	101
Tab. 53 Modell 2: Eigenschaften.....	103
Tab. 54 Modell 1, Versuch 1: Eingaben	107
Tab. 55 Modell 1, Versuch 1: Ergebnisse	107
Tab. 56 Modell 1, Versuch 2: Eingaben	109
Tab. 57 Modell 1, Versuch 2: Ergebnisse	111
Tab. 58 Modell 1, Versuch 3: Eingaben	111
Tab. 59 Modell 1, Versuch 3: Ergebnisse	113
Tab. 60 Modell 1: Fazit.....	114
Tab. 61 Modell 2, Versuch 1: Eingaben	114
Tab. 62 Modell 2, Versuch 1: Ergebnisse	116
Tab. 63 Modell 2, Versuch 2: Eingaben	116
Tab. 64 Modell 2, Versuch 2: Ergebnisse	116
Tab. 65 Modell 2, Versuch 3: Eingaben	118
Tab. 66 Modell 2, Versuch 3: Ergebnisse	120
Tab. 67 Modell 2: Fazit.....	121
Tab. 68 Festgestellte und nicht festgestellte Ausfälle	122
Tab. 69 DC Faktor: Eigenschaften.....	122
Tab. 70 Modell 1, Versuch 1: Eingaben	129
Tab. 71 Modell 1, Versuch 2: Eingaben	130
Tab. 72 Modell 1, Versuch 2: Ergebnisse	132
Tab. 73 Modell 1, Versuch 3: Eingaben	132
Tab. 74 Modell 1, Versuch 3: Ergebnisse	133

Tab. 75 Modell 2, Versuch 1: Eingaben	134
Tab. 76 Modell 2, Versuch 2: Eingaben	135
Tab. 77 Modell 2, Versuch 2: Ergebnisse	136
Tab. 78 Modell 2, Versuch 3: Eingaben	137
Tab. 79 Modell 2, Versuch 3: Ergebnisse	137
Tab. 80 Modifizierte Übergangsmatrix, Eigenschaften.....	141
Tab. 81 Kalkulation der RAM Werte.....	142
Tab. 82 Projekt ACoRAM: Ziele	145
Tab. 83 Projekt ACoRAM: Ergebnisse	146

1 Einleitung

Steigende Größe und Komplexität technischer Anlagen, insbesondere elektronischer Anlagen, und die zum Teil extrem hohen Zuverlässigkeitsanforderungen rücken die Notwendigkeit zuverlässigkeitstechnischer Analysen immer mehr in den Vordergrund ingenieurmäßiger Betrachtung. Um die Zuverlässigkeit elektronischer Anlagen beurteilen zu können, reichen qualitative Überlegungen und verbale Beschreibungen nicht aus. Es werden deshalb, besonders zum Vergleich verschiedener Systemkonzepte, in Angeboten bzw. bei der Vergabe von Aufträgen und in Sicherheitsanalysen immer häufiger quantitative Zuverlässigkeitsausagen gefordert, wozu eine wahrscheinlichkeitstheoretisch unterstützte Zuverlässigkeitsanalyse notwendig ist.

In den vergangenen Jahrzehnten hat die Bedeutung der Zuverlässigkeitstechnik sprunghaft zugenommen. Dies hat verschiedene Gründe. Bedingt durch wachsenden technischen Fortschritt, steigendes Anspruchsdenken und die Notwendigkeit, Kosten zu reduzieren, wurden in allen technischen Bereichen die Anforderungen und der Aufgabenumfang immer größer. Beispiele dafür sind:

1. dauernde Betriebsbereitschaft (elektrische Energieversorgungssysteme, Kommunikationssysteme, zentrale Leitsysteme)
2. keine Möglichkeit zur Reparatur während des Betriebs (Luft - und Raumfahrt)
3. die Übertragung von Sicherheitsfunktionen auf technische Einrichtungen (Sicherheits-einrichtungen in der Chemie und der Nukleartechnik)
4. die Notwendigkeit, technische Anlagen aus wirtschaftlichen Gründen besser auszunutzen (Materialeinsparung, Verminderung von Reserven und Redundanzen)

Dadurch werden technische Anlagen immer leistungsstärker, größer und komplexer ausgelegt und der Automatisierungsgrad wird immer mehr gesteigert.

Die Kehrseite des technischen Fortschrittes liegt darin, dass ein Versagen bzw. Ausfall der Technik oft zu katastrophalen Konsequenzen führt. Deswegen sind Entwicklung der heutigen technischen Systeme ohne Zuverlässigkeitsanalyse und Betrieb der modernen Technik ohne entsprechende Sicherheits- und Wartungskonzepte undenkbar.

1.1 Zuverlässigkeit in der modernen Technik

Während bei der einfachen Technik früherer Jahrhunderte eine hohe Zuverlässigkeit durch Einfachheit und hohe Materialreserven erzielt wurde, kann bei heutigen Produkten eine hohe Zuverlässigkeit unter Berücksichtigung wirtschaftlicher Gesichtspunkte nur durch ein gutes Konzept, durch hohe Qualität der eingesetzten Bausteine und durch eine wohldurchdachte Systemstruktur erreicht werden.

Moderne Anlagen und besonders elektrotechnische Anlagen sind aus vielen Bausteinen mit unterschiedlicher Abhängigkeit (Komplexität) aufgebaut, wobei auch in Zukunft der Trend zu immer größeren Anlagen anhalten wird. Als Folge davon werden das Ausfallverhalten komplexer und die Auswirkungen von Ausfällen schwerwiegender.

Besonders in der Entwicklungsphase dient die Zuverlässigkeitsanalyse in erster Linie der rechtzeitigen Erkennung und Beseitigung von Schwachstellen und der Durchführung von Vergleichsstudien. Dabei besteht ein wichtiger Teil der Zuverlässigkeitsanalyse in der Untersuchung der Ausfallraten von Komponenten eines technischen Systems. Dies führt zur Berechnung der vorausgesagten Zuverlässigkeit, die anhand der Struktur des technischen Systems und der Zuverlässigkeitscharakteristiken ihrer Komponenten rechnerisch bestimmt wird.

1.2 Motivation und Ziele der Arbeit

Ein komplexes technisches System (z.B. Leittechnik von Siemens TXP, PCS7, etc.) mit ihren Komponenten kann derzeit im Betriebszustand durch kontinuierliche Erfassung von Betriebsdaten überwacht werden, indem regelmäßig einzelne Komponenten auf ihren Status hin überprüft werden. Fehler durch den Ausfall von Bauteilen oder Baugruppen (Komponenten) werden auf diese Weise festgestellt, können aber im Einzelfall nicht prognostiziert werden.

Zurzeit sind Fehlfunktionen oder das Versagen einer oder mehrerer Komponenten erst nach dem Schadensereignis zu diagnostizieren. Es vergeht wertvolle Zeit zur Behebung des Schadens, was die Verfügbarkeit deutlich beeinträchtigt und somit Produktionsverlust bedeutet. Hinzu kommt, dass die Auswertung des Ausfalls erst nach dem Ereignis Ausfall der Komponente beginnen kann.

Die Auswertung der Ausfälle oder das Beurteilen der Versagensumstände erfolgt vor Ort. Eine Online-Rückkopplung der kontinuierlich gewonnenen Daten (Ausfallrate, Verfügbarkeit, Wartbarkeit) zum Anlagenhersteller erfolgt in der Regel nicht. Ein online FAT (field acceptance test) der Leittechnischen Komponenten ist somit auch nicht möglich.

Um die genannten Probleme lösen zu können, wurde im Juni 2005 in Rahmen der Zusammenarbeit zwischen L-University und PG L5 (Siemens AG) das Projekt ACoRAM (Automatic Calculation of Reliability-Availability-Maintainability) gestartet (s. Kapitel 6).

1.3 Gliederung der Arbeit

Im zweiten Kapitel dieser Arbeit werden die Grundlagen, die die Basis der modifizierten Markov-Methode bilden, kurzgefaßt dargelegt und erläutert. Dabei liegt der Schwerpunkt auf den notwendigen Begriffen, Methoden und Prinzipien, die später in dieser Arbeit verwendet werden.

Im Kapitel 3 wird der aktuelle Stand der Forschung analysiert. Dabei werden die am meisten verwendenden Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse und Zuverlässigkeitsberechnung von technischen Systemen sowie deren Vor- und Nachteile bezogen auf die praktische Anwendung ausführlich beschrieben.

Im Kapitel 4 wird ein Vorschlag für eine modifizierte Methodik der Zuverlässigkeitsberechnung von technischen Systemen vorgestellt und im darauf folgenden Kapitel im Detail erläutert.

Kapitel 6 ist dem praktischen Einsatz der modifizierten Markov-Methode gewidmet. Dabei werden die Ziele und Aufgaben des Projektes ACoRAM aus dem Bereich Leittechnik sowie die Ergebnisse der Anwendung der modifizierten Markov-Methode dargelegt.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

2 Grundlagen

Die praktische Arbeit bei der Firma Siemens AG im Bereich technischer Zuverlässigkeit (Zuverlässigkeitsanalyse und Zuverlässigkeitsberechnung von komplexen technischen Systemen) hat mir deutlich gezeigt, welche gravierenden Unterschiede manchmal zwischen der Theorie und der Praxis liegen können.

Die Methoden der Zuverlässigkeitsberechnung, die sich seit Jahren in der Zuverlässigkeitstheorie etabliert haben, waren in der Praxis entweder kaum anwendbar oder haben Ergebnisse geliefert, die im Durchschnitt um den Faktor 22,5 schlechter sind als die entsprechenden Messwerte aus dem Feld. Außerdem sind gewisse Aspekte der realen technischen Systeme, wie z. B. Selbstdiagnose von Baugruppen, von der Theorie nicht erfasst.

Daher entstand eine Notwendigkeit, eine Methode der Zuverlässigkeitsberechnung (Markov-Methode) zu modifizieren. Die Grundlagen (s. Abb. 1) der modifizierten Markov-Methode bilden die Wahrscheinlichkeitstheorie (unter anderem auch die Theorie stochastischer Prozesse) und die Zuverlässigkeitstheorie (allgemeine Vorgehensweise und diverse Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse). Außerdem werden die Hauptalgorithmen der vorliegenden Methodik mit Hilfe der Komplexitätstheorie analysiert.

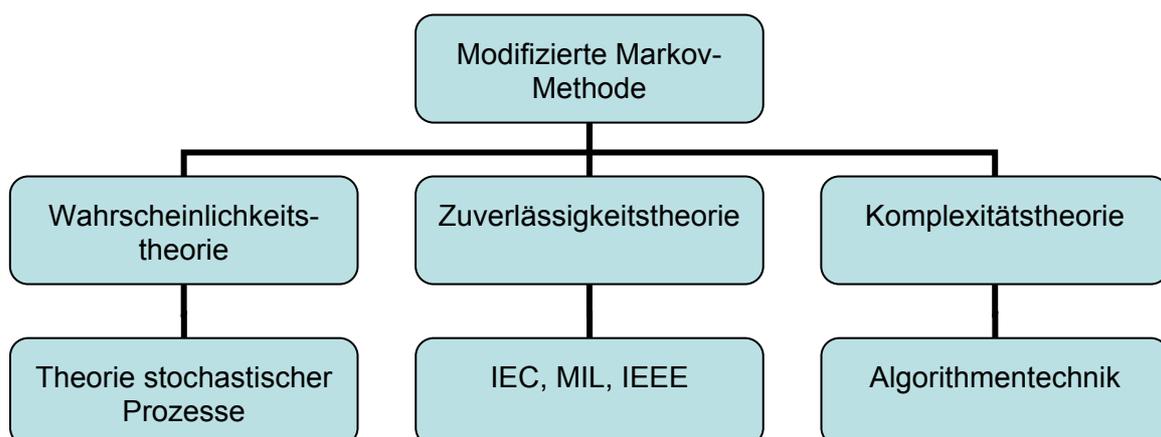


Abb. 1 Basis der modifizierten Markov-Methode

In den nachfolgenden Kapiteln wird die Basis der modifizierten Markov-Methode ausführlich beschrieben.

2.1 Auszug aus der Wahrscheinlichkeitstheorie

Viele Prozesse in der Natur und Technik unterliegen dem Zufall, d. h. es ist unmöglich vorherzusagen, welchen Zustand so ein Prozess für jeden Zeitpunkt annimmt. Es zeigt sich jedoch, dass man auch über solche Vorgänge quantitative Aussagen machen kann, wenn man eine genügende Anzahl davon unter gleich bleibenden Bedingungen beobachten kann. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert mathematische Modelle für derartige zufällige Ereignisse in der objektiven Realität.

Während die Wahrscheinlichkeitstheorie nur zeitunabhängige Ereignisse beschreibt, befasst sich die Theorie stochastischer Prozesse mit den zeitabhängigen Ereignissen, wie sie in technischen Systemen auftreten.

Zur ausreichenden Beurteilung zeitabhängiger Ereignisse sind neben den Wahrscheinlichkeitskenngrößen weitere Kenngrößen notwendig. Die Theorie stochastischer Prozesse liefert zur Bewertung zeitabhängiger Ereignisse u. a. die zusätzlichen Kenngrößen mittlere Häufigkeit und mittlere Dauer.

2.1.1 Definitionen und Begriffe

Das mathematische Modell eines Versuchs mit zufälligem Ergebnis wurde im Jahr 1930 von A. Kolmogorov entwickelt. Dabei wurde ein Begriff des Wahrscheinlichkeitsraumes eingeführt.

Der Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Tripel $[\Omega, F, Pr]$.
 Ω - eine Menge aller möglichen Versuchsergebnisse, sie stellt das sichere Ereignis dar. Die Elemente aus Ω werden auch Elementarereignisse genannt und mit ω bezeichnet.
 F - Ereignisfeld, ein System von Teilmengen von Ω , für jede von welcher eine Wahrscheinlichkeit Pr definiert werden kann.

Def. 1 Wahrscheinlichkeitsraum

Ein solches Ereignisfeld F hat folgende Eigenschaften [2]:

1. Ω ist Element von F
2. Mit A aus F liegt auch das Komplement \bar{A} in F
3. Wenn A_1, A_2, \dots, A_n Elemente von F sind, so enthält F auch deren Vereinigung
 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$

Daraus folgt:

1. Die leere Menge $\emptyset = \bar{\Omega}$ ist ein Element von F
2. Mit A_1, A_2, \dots, A_n aus F liegt auch der Durchschnitt $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ in F

Die Teilmengen von F bezeichnet man als (zufällige) Ereignisse. Die wichtigsten Operationen mit Ereignissen sind folgende:

Vereinigung	Ein aus den Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_n zusammengesetztes Ereignis, das dann eintritt, wenn mindestens eines der Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n eintritt; es wird mit $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ bezeichnet
Durchschnitt	Ein aus den Ereignissen A_1, A_2, \dots, A_n zusammengesetztes Ereignis, das dann eintritt, wenn alle A_1, A_2, \dots, A_n eintreten; es wird mit $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ bezeichnet.
Komplement	\bar{A} ist komplementär zu A , falls $A \cup \bar{A} = \Omega$ und $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Tab. 1 Operationen der Ereignisalgebra

Folgende Gesetze sind für die Ereignisalgebra gültig:

Kommutativgesetz	$A_1 \cup A_2 = A_2 \cup A_1$ $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_1$
Assoziativgesetz	$(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$ $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3)$
Distributivgesetz	$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3)$ $A_1 \cap (A_2 \cup A_3) = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)$
Idempotenzgesetz	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
De Morgan-Gesetz	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
Identitätsgesetz	$\overline{\bar{A}} = A; A \cup \bar{A} = \Omega; A \cap \bar{A} = \emptyset$ $A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$

Tab. 2 Gesetze der Ereignisalgebra

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, also $\Pr\{A\}$, basiert auf dem Begriff der relativen Häufigkeit. [15]

Relative Häufigkeit: wenn ein Ereignis A in Folge von n statistisch identischen Versuchen k mal aufgetreten ist, dann ist die relative Häufigkeit von A gleich k/n .

Def. 2 Relative Häufigkeit

Aus der Praxis ist bekannt, dass die relative Häufigkeit k/n eines Ereignisses A bei der Wiederholung von n statistisch identischen Versuchen anders ausfallen wird. Fakt ist, dass mit einer "genug großen" Anzahl n von Versuchen, die relative Häufigkeit k/n eines Ereignisses A immer weniger von einer festen Zahl abweicht. Die Abbildung (s. Abb. 2) zeigt ein mögliches Ergebnis der relativen Häufigkeit beim Werfen einer homogenen Münze.

Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Grenzwert deren relativer Häufigkeit zu bezeichnen.

Die statistische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses: $\Pr\{A\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n}$

Def. 3 Statistische Wahrscheinlichkeit

Es zeigt sich, dass man die Klasse der zufälligen Ereignisse in der Regel so auswählen kann, dass einerseits keine mathematischen Schwierigkeiten bei der Einführung der Wahrscheinlichkeit auftreten, andererseits alle in der Praxis interessierenden Ereignisse in der gewählten Klasse sind.

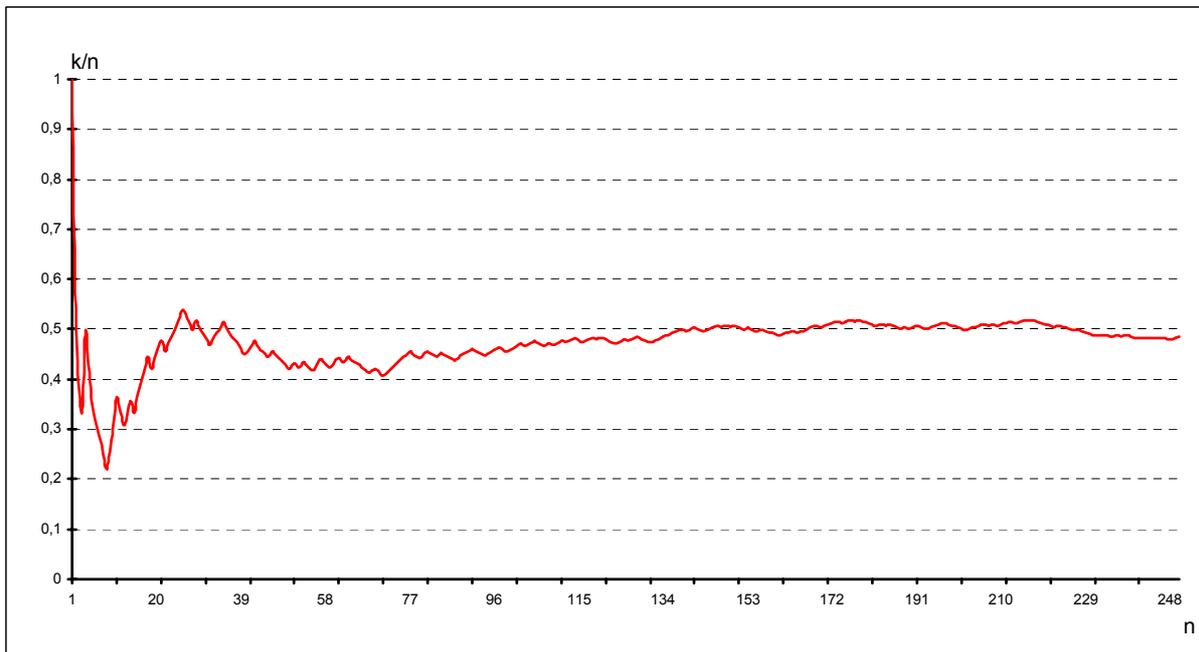


Abb. 2 Relative Häufigkeit

2.1.1.1 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Nach Kolmogorovschen Prinzipien [15] betrachtet man die Wahrscheinlichkeit $\Pr\{A\}$ als eine Funktion auf dem Ereignisfeld F von Teilmengen von Ω , für die folgende Axiome gültig sind:

Axiom 1:	$\forall A \in F \text{ ist } \Pr\{A\} \geq 0$
Axiom 2:	$\Pr\{\Omega\} = 1$
Axiom 3:	Sind die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n paarweise unvereinbar, so ist $\Pr\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\}$

Tab. 3 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Daraus folgt:

1. $\Pr\{\emptyset\} = 0$
2. $\Pr\{A\} \leq \Pr\{B\}$, falls $A \subseteq B$
3. $\Pr\{\bar{A}\} = 1 - \Pr\{A\}$
4. $0 \leq \Pr\{A\} \leq 1$

2.1.1.2 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses A ändert sich im Allgemeinen, wenn bereits bekannt ist, dass ein anderes zufälliges Ereignis B eingetreten ist. Die Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung, dass B mit $\Pr\{B\} \neq 0$ bereits eingetreten ist, wird mit $\Pr\{A | B\}$ bezeichnet und als bedingte Wahrscheinlichkeit definiert.

$$\text{Bedingte Wahrscheinlichkeit: } \Pr\{A | B\} = \frac{\Pr\{A \cap B\}}{\Pr\{B\}}, \Pr\{B\} \neq 0$$

Def. 4 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Daraus folgt auch die Multiplikationsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{B\} \Pr\{A | B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B | A\}$$

Aus dem letzten Ausdruck folgt die Definition von unabhängigen Ereignissen.

Unabhängige Ereignisse: zwei zufällige Ereignisse A und B sind voneinander unabhängig, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des anderen nicht beeinflusst. In anderen Worten $\Pr\{A \mid B\} = \Pr\{A\}$

Def. 5 Unabhängige Ereignisse

Die Multiplikationsregel lautet in diesem Fall:

$$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$$

Dies kann man auch auf n zufällige Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n erweitern [2].

Die Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n heißen vollständig oder stochastisch unabhängig, wenn für jedes k ($1 < k \leq n$) und jede Auswahl $i_1 \dots i_k \in \{1, \dots, n\}$ gilt $\Pr\{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}\} = \Pr\{A_{i_1}\} \dots \Pr\{A_{i_k}\}$

Def. 6 Stochastisch unabhängige Ereignisse

Auf dieser Basis ist es möglich, den Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit zu formulieren. Es wird angenommen, dass ein sicheres Ereignis Ω sich als Summe von n paarweise unvereinbaren Ereignissen darstellen lässt, also $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Für ein beliebiges zufälliges Ereignis B gilt dann:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

Nach dem Additionsaxiom folgt heraus:

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{B \cap A_i\}$$

Verwendet man die Multiplikationsregel, so wird der Satz der totalen Wahrscheinlichkeit formuliert.

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\} \Pr\{B \mid A_i\}$$

Def. 7 Totale Wahrscheinlichkeit

Wenn die Wahrscheinlichkeit a posteriori ermittelt wird, dann gilt die Formel von Bayes.

Formel von Bayes:

$$\Pr\{A_i \mid B\} = \frac{\Pr\{A_i\} \Pr\{B \mid A_i\}}{\sum_{j=1}^n \Pr\{A_j\} \Pr\{B \mid A_j\}}$$

Def. 8 Formel von Bayes

2.1.1.3 Wichtigste Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

In diesem Abschnitt werden die Grundregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung in tabellarischer Form zusammengefasst.

Addition	Ereignisse A und B sind unvereinbar Wenn A_1, A_2, \dots, A_n paarweise unvereinbar sind, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$	$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\}$ $\Pr\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\}$
Multiplikation	Ereignisse A und B sind unabhängig	$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{A\} \Pr\{B\}$
Addition	Ereignisse A und B sind beliebig	$\Pr\{A \cup B\} = \Pr\{A\} + \Pr\{B\} - \Pr\{A \cap B\}$
Multiplikation	Ereignisse A und B sind beliebig, $\Pr\{A\} > 0, \Pr\{B\} > 0$ Wenn A_1, A_2, \dots, A_n vollständig unabhängig sind	$\Pr\{A \cap B\} = \Pr\{B\} \Pr\{A B\}$ $= \Pr\{A\} \Pr\{B A\}$ $\Pr\{A_1 \cap \dots \cap A_n\} = \Pr\{A_1\} \dots \Pr\{A_n\}$
Totale Wahrscheinlichkeit	A_1, A_2, \dots, A_n paarweise unvereinbar, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, und $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ mit $\Pr\{A_i\} > 0$	$\Pr\{B\} = \sum_{i=1}^n \Pr\{A_i\} \Pr\{B A_i\}$ für ein beliebiges Ereignis B
Formel von Bayes	Wahrscheinlichkeit a posteriori	$\Pr\{A_i B\} = \frac{\Pr\{A_i\} \Pr\{B A_i\}}{\sum_{j=1}^n \Pr\{A_j\} \Pr\{B A_j\}}$

Tab. 4 Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

2.1.2 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Den Begriff einer Zufallsvariable kann man wie folgt definieren [15]:

Zufallsvariable: eine reelle Variable, die je nach dem Ausgang eines Versuchs, also in Abhängigkeit vom Zufall, verschiedene Werte annimmt.

Def. 9 Zufallsvariable

Auch für die technischen Systeme sind die Zufallsvariablen anwendbar. Beispiele dafür sind die ausfallfreie Betriebszeit einer Betrachtungseinheit, die Dauer einer Reparatur, die Anzahl defekter Bauteile in einem Los usw.

Eine Zufallsvariable wird in der Regel durch eine entsprechende Verteilungsfunktion charakterisiert.

Verteilungsfunktion: wenn X eine Zufallsvariable ist, dann ist $F(x) = \Pr\{X < x\}$ eine Verteilungsfunktion von X .

Def. 10 Verteilungsfunktion

Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable hat folgende Eigenschaften: [15]

1.	$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
2.	$F(x)$ ist monoton nicht fallend, also für $x_1 < x_2$ gilt $F(x_1) \leq F(x_2)$
3.	$F(x)$ ist linksseitig stetig
4.	$\Pr\{a \leq X < b\} = F(b) - F(a)$

Tab. 5 Eigenschaften einer Verteilungsfunktion

In den nachfolgenden Kapiteln werden die Verteilungsfunktionen der diskreten (Kap. 2.1.2.1 und 2.1.2.2) und der stetigen (Kap. 2.1.2.3 – 2.1.2.5) Zufallsvariablen beschrieben.

Diskrete Zufallsvariable: eine Zufallsvariable, die nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte x_1, x_2, \dots , mit der Wahrscheinlichkeit $p_i = \Pr\{X = x_i\}$ annehmen kann.

Die p_i erfüllen die Bedingung $\sum p_i = 1$. Für die Verteilungsfunktion einer diskreten Zufallsvariable gilt:

$$F(x) = \sum_{x_j < x} p_i$$

Stetige Zufallsvariable: eine Zufallsvariable mit der Verteilungsfunktion vom Typ:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy$$

Def. 11 Diskrete und stetige Zufallsvariable

Ein weiteres Charakteristikum einer stetigen Zufallsvariable ist die Verteilungsdichtefunktion:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \text{ für die gilt } F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy \text{ und } \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$$

Def. 12 Verteilungsdichtefunktion

2.1.2.1 Binomialverteilung

Binomialverteilung beschreibt im Allgemeinen das Auftreten eines qualitativen Merkmals in einer Stichprobe vom Umfang n mit Zurücklegen.

Verteilungsfunktion	$\Pr\{x \leq k\} = \sum_{i=0}^k p_i, \quad p_i = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$
Verteilungsdichtefunktion	s. Abb. 3; $n = 20, p = 0.1; 0.3; 0.5; 0.7; 0.9$
Wertebereich	$k = 0, \dots, n; 0 < p < 1$
Erwartungswert	$E(x) = np$
Varianz	$\text{Var}(x) = np(1 - p)$
Eigenschaften	$p_k = \Pr\{k \text{ Erfolge in } n \text{ unabhängigen Versuchen mit } \Pr\{A\} = p\}$

Tab. 6 Binomialverteilung

Die Abb. 3 zeigt den Verlauf der Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0.1 \dots 0.9$

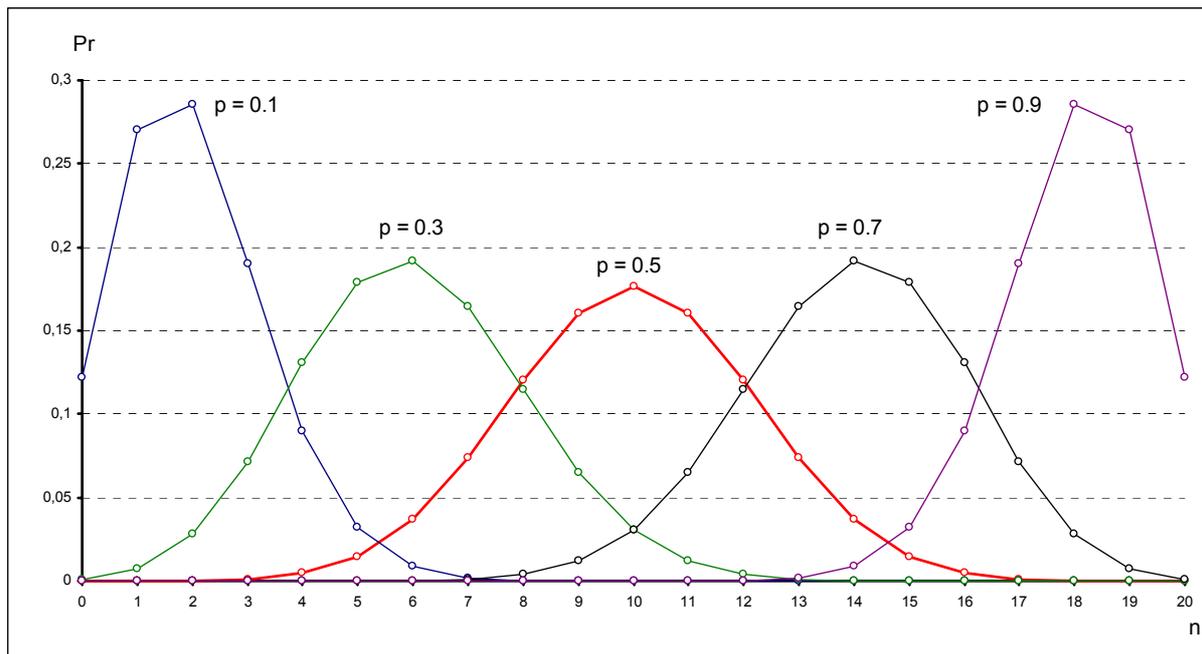


Abb. 3 Binomialverteilung

2.1.2.2 Poissonverteilung

Die Poissonverteilung wird dann verwendet, wenn die Ereignisse selten sind und die entsprechende Stichprobe groß ist.

Verteilungsfunktion	$\Pr\{x \leq k\} = \sum_{i=0}^k p_i, \quad p_i = \frac{m^i}{i!} e^{-m}$
Verteilungsdichtefunktion	s. Abb. 4; $m = 3$ [2]
Wertebereich	$k = 0, 1, \dots; m > 0$
Erwartungswert	$E(x) = m$
Varianz	$\text{Var}(x) = m$
Eigenschaften	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$ $\Pr\{i \text{ Ereignisse in } (0, t]\} = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$

Tab. 7 Poissonverteilung

Die Abb. 4 zeigt den Verlauf der Poissonverteilung mit dem Erwartungswert $m = 3$

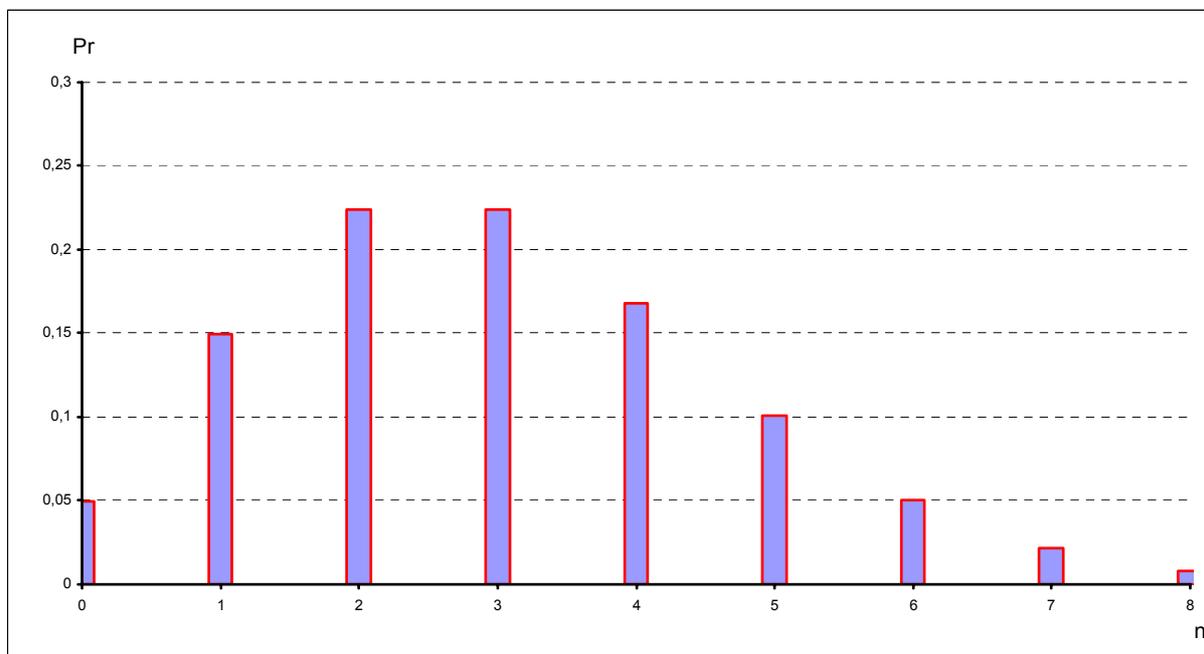


Abb. 4 Poissonverteilung

2.1.2.3 Weibullverteilung

In den 40er Jahren im Zusammenhang mit der Untersuchung von Werkstoffermüdung wurde von W. Weibull eine Potenzfunktion entwickelt, die die zeitabhängige Ausfallrate beschrieb.

Verteilungsfunktion	$F(t) = 1 - e^{-(\lambda t)^\beta}$
Verteilungsdichtefunktion	$f(t) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} e^{-(\lambda t)^\beta}$ s. Abb. 5; $\beta = 3$ [2]
Wertebereich	$\lambda, \beta > 0; t \geq 0$
Erwartungswert	$E(t) = \frac{\Gamma(1 + \frac{1}{\beta})}{\lambda}$
Varianz	$Var(t) = \frac{\Gamma(1 + \frac{2}{\beta}) - \Gamma^2(1 + \frac{1}{\beta})}{\lambda^2}$
Eigenschaften	Monotone Ausfallrate λ ist - wachsend für $\beta > 1$ - konstant für $\beta = 1$ - fallend für $\beta < 1$

Tab. 8 Weibullverteilung

Die Abb. 5 zeigt den Verlauf der Weibullverteilung mit $\beta = 3$. Die Achsen sind auf λ normiert.

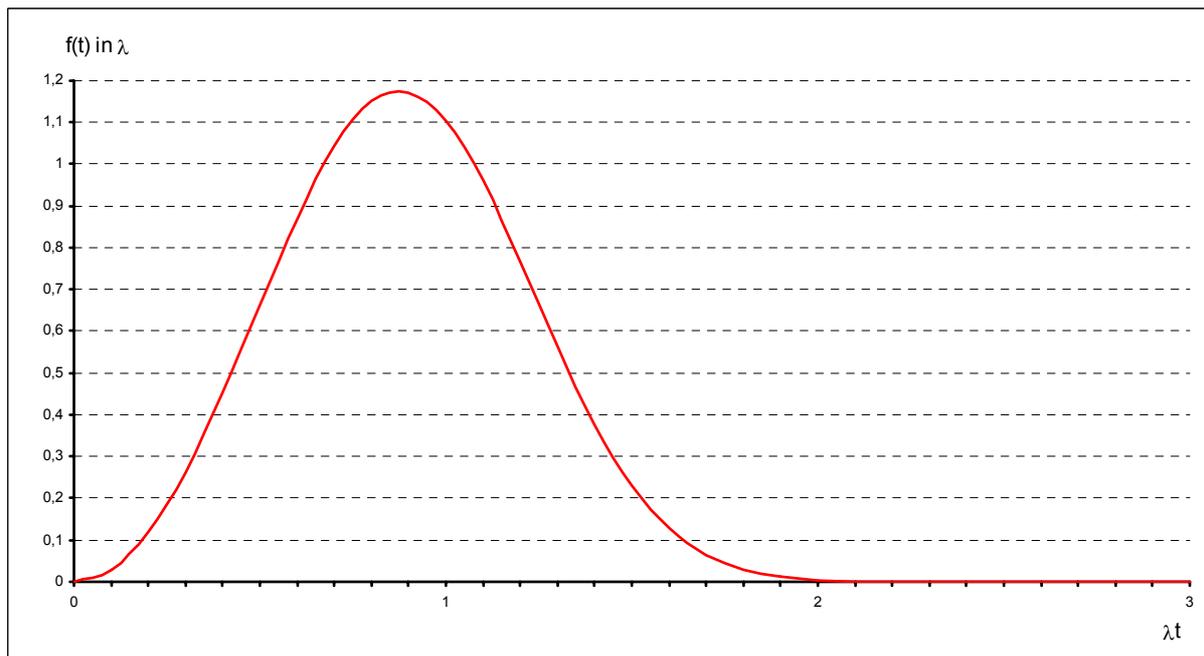


Abb. 5 Weibullverteilung

2.1.2.4 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung hat eine wichtige Eigenschaft: der Formparameter λ ist konstant. Dies erleichtert die Berechnungen bei einer Analyse von technischen Systemen wesentlich.

Verteilungsfunktion	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
Verteilungsdichtefunktion	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ s. Abb. 6; [2]
Wertebereich	$\lambda > 0; t \geq 0$
Erwartungswert	$E(t) = \frac{1}{\lambda}$
Varianz	$Var(t) = \frac{1}{\lambda^2}$
Eigenschaften	Gedächtnislos: $Pr\{\tau > t + x_0 \mid \tau > x_0\} = Pr\{\tau > t\} = e^{-\lambda t}$

Tab. 9 Exponentialverteilung

Die Abb. 6 zeigt den Verlauf der Exponentialverteilung. Die Achsen sind auf λ normiert.

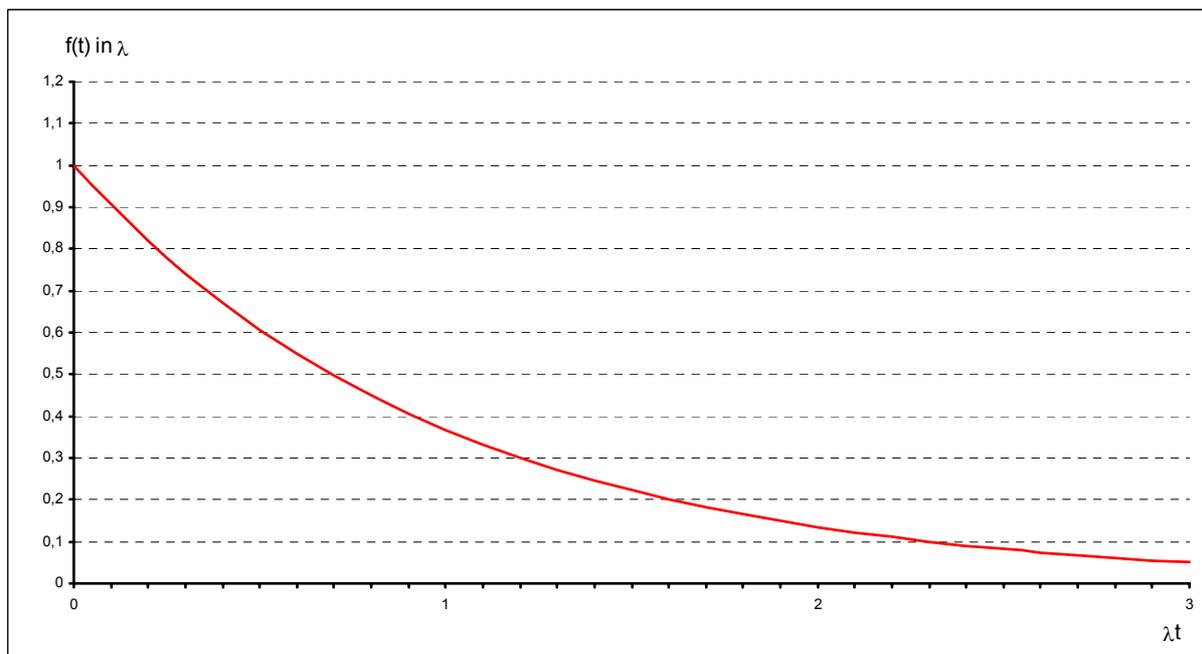


Abb. 6 Exponentialverteilung

2.1.2.5 Normalverteilung

Bei einer mathematischen Analyse (z. B. Zuverlässigkeitsanalyse) von technischen Systemen, wird die Normalverteilung ziemlich oft verwendet. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass die Verteilungsfunktion der Summe einer großen Anzahl statistisch unabhängigen Zufallsvariablen unter relativ allgemeinen Bedingungen gegen eine Normalverteilung konvergiert. [2]

Verteilungsfunktion	$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$
Verteilungsdichtefunktion	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$ s. Abb. 7; $m = 300$ h, $\sigma = 80$ h [2]
Wertebereich	$\sigma > 0$; $-\infty < m, t < +\infty$
Erwartungswert	$E(t) = m$
Varianz	$\text{Var}(t) = \sigma^2$
Eigenschaften	$F(t) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)$, wobei $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Tab. 10 Normalverteilung

Die Abb. 7 zeigt den Verlauf der Normalverteilung mit $m = 300$ und $\sigma = 80$ Stunden.

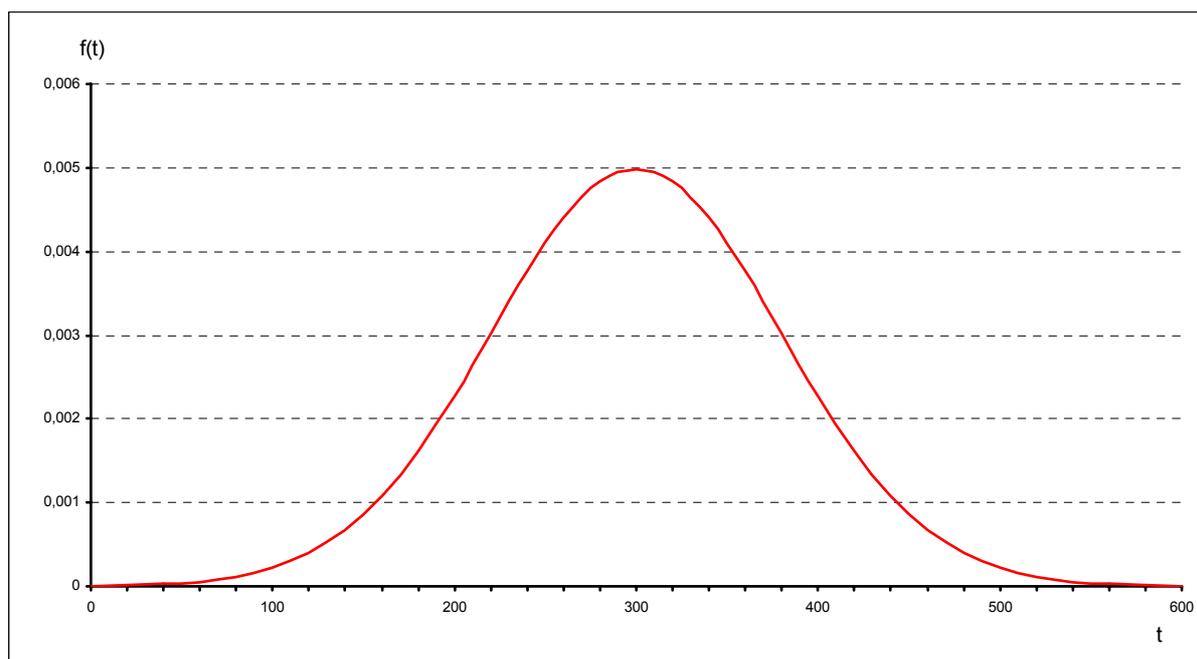


Abb. 7 Normalverteilung

2.1.3 Stochastische Prozesse

Bei technischen Systemen hängt das Eintreten gewisser Ereignisse oft von der Zeit ab. Aus diesem Grund spricht man nicht mehr von Ereignissen, sondern von Zuständen. Die bedeutendsten Zustände sind der Betrieb (man sagt auch ein System ist intakt) und der Ausfall.

Das Betriebs- und Ausfallverhalten lässt sich durch stochastische Prozesse beschreiben. Eine Definition eines stochastischen Prozesses wird wie folgt formuliert: [2]

Stochastischer Prozess: eine Schar von Zufallsgrößen (Zufallsvariablen) $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots$, die von der Zeit abhängig sind. Für diese Zufallsvariablen wird angenommen, dass für $n = 1, 2, \dots$ und beliebige Werte $t_1, \dots, t_n \in \tau$ die n -dimensionale Verteilungsfunktionen $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \Pr\{\xi(t_1) \leq x_1, \dots, \xi(t_n) \leq x_n\}$ existieren und die Konsistenzbedingung sowie Symmetriebedingung erfüllen.

Def. 13 Stochastischer Prozess

In anderen Worten, ein stochastischer Prozess ist eine Abbildung $\xi(\omega, t)$ aus $\Omega \times \tau$ in die Menge der reellen Zahlen, die für jeden festen nichtzufälligen Parameter $t \in \tau$ eine Zufallsgröße $\xi(t)$ und für jedes fixierte $\omega \in \Omega$ eine reelle Funktion $\xi(t)$ darstellt.

Aus dieser Definition erkennt man zwei wichtige Merkmale eines stochastischen Prozesses: Zeitbereich τ (stetig oder diskret, endlich oder unendlich) und Zustandsraum Ω (stetig oder diskret).

Weitere Eigenschaften eines stochastischen Prozesses sind Nachwirkungsgrad (Abhängigkeit zwischen z. B. aufeinander folgenden Zuständen) und die Invarianz des Prozesses bezüglich der Zeitverschiebungen (stationäre oder zeithomogene Prozesse). [16, 17]

Stationärer stochastischer Prozess: ein Prozess $\xi(t)$ heißt stationär, wenn sich die n -dimensionalen Verteilungsfunktionen zu beliebigen Parameterwerten $t_1, \dots, t_n \in \tau$ ($n = 1, 2, \dots$) bei Verschiebung dieser Werte längst der Parameterachse um einen beliebigen Wert a nicht ändern.

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1+a, \dots, t_n+a) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

Damit sind alle Momente $E(\xi(t))$, $\text{Var}(\xi(t))$ usw. zeitunabhängig.

Def. 14 Stationärer stochastischer Prozess

Das Fehlen einer Nachwirkung besagt, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintritts einer bestimmten Anzahl von Ereignissen in einem beliebigen Zeitabschnitt $[t_i, t_{i+1})$ mit $0 \leq t_i < t_{i+1} < +\infty$ nicht davon abhängt, wie viele Ereignisse vor dem Zeitpunkt t_i aufgetreten sind. [16, 17]

Die Homogenität besagt, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintritts einer bestimmten Anzahl von Ereignissen in einem beliebigen Zeitabschnitt $[t_i, t_{i+1})$ mit $0 \leq t_i < t_{i+1} < +\infty$ nur von der Länge, nicht aber von der speziellen Lage des Zeitintervalls abhängig ist.

2.1.3.1 Markov-Prozess mit endlich vielen Zuständen

Markovsche Prozesse besitzen eine signifikante Eigenschaft: jede wahrscheinlichkeitstheoretische Aussage über den zukünftigen Prozessablauf hängt bei bekanntem Wert in der Gegenwart nicht vom Prozessablauf in der Vergangenheit ab. [2, 16]

Markov-Prozess: ein stochastischer Prozess mit endlich vielen Zuständen ist ein Markov-Prozess, falls für $n = 1, 2, \dots$ und beliebige Zeitpunkte $t+a > t > t_n > \dots > t_1 \in \tau$ und beliebige $i, j, i_1 \dots i_n \in \{0, \dots, m\}$ gilt

$$\Pr\{\xi(t+a) = Z_j \mid \xi(t) = Z_i \cap \xi(t_n) = Z_{i_n} \cap \dots \cap \xi(t_1) = Z_{i_1}\} = \Pr\{\xi(t+a) = Z_j \mid \xi(t) = Z_i\}$$

Übergangswahrscheinlichkeit:

$$P_{ij}(t, t+a) = \Pr\{\xi(t+a) = Z_j \mid \xi(t) = Z_i\}$$

Def. 15 Markov-Prozess

Diese Definition macht deutlich, dass ein Markov-Prozess von zwei Bedingungen geprägt wird: [12]

Zustandsbedingung	Ein Übergang von einem Zustand Z_i in einen anderen Zustand Z_{i+1} nur vom letzten Zustand Z_i und nicht von Zuständen davor, d. h. von Zuständen Z_k mit $k < i$ abhängt.
Zeitbedingung	Ein Zustandsübergang im ausreichend kleinen Zeitintervall $(t, t+\Delta t)$ nur vom Zeitpunkt t und nicht von weiter zurückliegenden Zeitpunkten $x < t$ abhängt.

Tab. 11 Bedingungen eines Markov-Prozesses

Je nachdem, welche von diesen Bedingungen erfüllt bzw. nicht erfüllt ist, lassen sich die abgeleiteten Prozesstypen definieren: [12]

Prozesstyp	Zustandsbedingung	Zeitbedingung
Homogener Markov-Prozess	Wird automatisch durch die Zeitbedingung erfüllt, denn bei hinreichend kleinen $\Delta t \rightarrow dt$ nur ein stochastischer Zustandsübergang auftreten kann.	Erfüllt
Semi-Markov-Prozess	Erfüllt	Nicht erfüllt
Nicht-Markov-Prozess	Nicht erfüllt	Wird automatisch durch Zustandsbedingung nicht erfüllt.

Tab. 12 Ableitungen eines Markov-Prozesses

Im Weiteren werden nur zeithomogene Markov-Prozesse betrachtet. [16, 17]

Ein Markov-Prozess ist dann zeithomogen, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}(t, t+a)$ unabhängig von t sind, d. h.
 $P_{ij}(t, t+a) = P_{ij}(a)$

Def. 16 Zeithomogener Markov-Prozess

Die Übergangswahrscheinlichkeiten und die Zustandswahrscheinlichkeiten eines zeithomogenen Markov-Prozesses haben folgende Eigenschaften: [2]

Anfangszustand	$P_i(0) = \Pr\{\xi(0) = Z_i\}$
Zustandswahrscheinlichkeit	$P_j(t) = \Pr\{\xi(t) = Z_j\}$ mit $j = 0, \dots, m$ $P_j(t) = \sum_{i=0}^m P_i(0)P_{ij}(t)$
Übergangswahrscheinlichkeit	$P_{ij}(a) \geq 0$ $\sum_{i=0}^m P_{ij}(a) = 1 \text{ mit } i = 0, \dots, m$
Übergangswahrscheinlichkeit	Falls $P_{ij}(t)$ differenzierbar sind: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = p_{ij} \text{ für } i \neq j$ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - P_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = p_i$ $p_i = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m p_{ij} \text{ mit } i = 0, \dots, m$ $\Pr\{\text{mehr als ein Übergang in } (t, t+\Delta t)\} = o(\Delta t)$, d. h. die Wahrscheinlichkeit für mehr als einen Übergang in Δt geht schneller gegen null, als Δt .

Tab. 13 Eigenschaften der Zustands- und Übergangswahrscheinlichkeiten

Man bezeichnet p_{ij} und p_i als Übergangsraten mit der Bedeutung:

$$p_{ij}\Delta t = \Pr\{\text{Übergang von } Z_i \text{ nach } Z_j \text{ in } (t, t+\Delta t)\}$$

$$p_i\Delta t = \Pr\{Z_i \text{ wird verlassen in } (t, t+\Delta t)\}$$

2.1.3.2 Bezug auf die Markov-Methode

Bei der Zuverlässigkeitsanalyse von technischen Systemen spielt die Markov-Methode eine Schlüsselrolle. Markov-Prozesse können zur Untersuchung des Zeitverhaltens der reparierbaren Systeme eingesetzt werden, wenn alle auftretenden Zufallsgrößen unabhängig und exponentiell verteilt (gedächtnislos) sind.

Bei der Modellierung ist es nützlich, die in einem Intervall $(t, t+\Delta t]$ möglichen Übergänge und die dazugehörigen Übergangsraten p_{ij} durch ein Diagramm abzubilden. Dieses Diagramm (s. Abb. 8) ist ein gerichteter Graph mit den Zuständen Z_0, \dots, Z_m als Knoten und den Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ij}(\Delta t)$ als Kanten. [2]

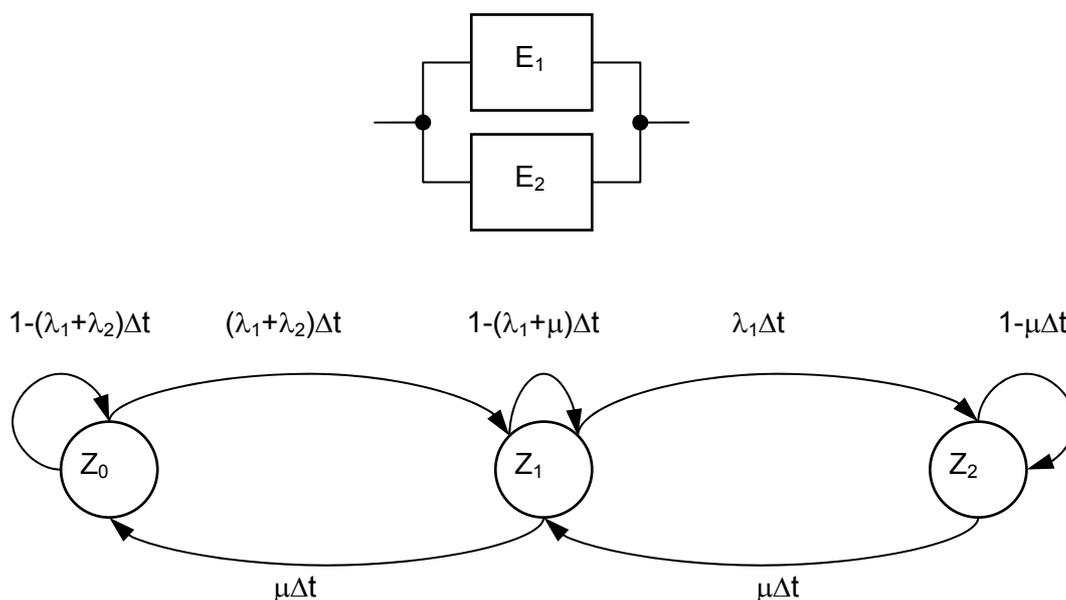


Abb. 8 Übergangswahrscheinlichkeiten

Die Abb. 8 zeigt die möglichen Zustände (Z_0, Z_1, Z_2) eines redundanten Systems mit zwei Komponenten E_1 und E_2 . Bezogen auf die Markov-Methode werden die Übergangsraten p_{01} und p_{12} in diesem Fall als Ausfallraten bezeichnet und durch λ_1 und λ_2 ersetzt. Die Übergangsraten p_{21} und p_{10} werden dann Reparaturraten genannt und durch μ ersetzt (Annahme: die Komponenten werden gleich schnell durch eine Reparaturmannschaft repariert).

Wie die Abb. 8 darstellt, lässt sich ein stochastischer Prozess durch den Tripel (Zustand, Zustandsdauer, Zustandsübergang) vollständig kennzeichnen. Für die Zuverlässigkeitsberechnung mittels Markov-Methode (s. Abschnitt 3.2) werden dann die Wahrscheinlichkeiten der Zustände $Z_0 \dots Z_2$ aufgrund der Übergangsraten errechnet.

2.2 Auszug aus der Zuverlässigkeitstheorie

Verfahren zur Analyse der Zuverlässigkeit werden für die Vorhersage, Bewertung und Verbesserung der Funktionsfähigkeit, Verfügbarkeit und Instandhaltbarkeit einer Einheit verwendet.

Zuverlässigkeitsanalysen werden während der Konzept- und Definitionsphase, Entwurfs- und Entwicklungsphase, Betriebs- und Instandhaltungsphase in verschiedenen Systemebenen und Analysetiefen durchgeführt, um die Zuverlässigkeit einer Einheit oder des Gesamtsystems zu beurteilen, zu bestimmen und zu verbessern. Sie könnten auch dafür verwendet werden, die Ergebnisse der Analyse mit den festgelegten Anforderungen zu vergleichen.

Zuverlässigkeitsvorhersagen werden bei der Planung der Logistik und der Instandhaltung verwendet, um die Instandhaltungshäufigkeit und den Teiletasch (also vorbeugende Wartung) zu schätzen. Diese Schätzungen beeinflussen häufig wichtige Kostenelemente des Lebenszyklus eines technischen Systems und sollen bei Untersuchungen sorgfältig angewendet werden.

Um aussagekräftige Ergebnisse zu erhalten, sollen bei Zuverlässigkeitsanalysen alle zur Zuverlässigkeit eines technischen Systems beitragenden Faktoren betrachtet werden: Hardware, Software als auch menschliche und organisatorische Aspekte.

2.2.1 Definitionen und Begriffe

Die vorliegende Dissertation basiert nicht nur auf den theoretischen Quellen aus dem Bereich Zuverlässigkeit, sondern im Wesentlichen auch auf den internationalen und industriellen Normen. Die nachfolgenden Tabellen (s. Tab. 14 - Tab. 16) schaffen einen Überblick über die normativen Dokumenten, die verwendet worden sind.

Dependability management	
IEC 60300-1 (1993)	Dependability management. Part 1: Dependability programme management.
IEC 60300-2 (1995)	Dependability management. Part 2: Dependability programme elements and tasks.
Specification	
IEC 60300-3-4 (1996)	Dependability management. Part 3: Application guide. Section 4: Guide to the specification of dependability requirements.
Prediction	
IEC 60863 (1986)	Presentation of reliability, maintainability and availability predictions.

IEC 61709 (1996)	Electronic components – Reliability – Reference conditions for failure rates and stress models for conversion.
Design review	
IEC 61160 (1992)	Formal design review.
Analytical techniques	
IEC 60300-3-1 (1991)	Dependability management. Part 3: Application guide. Section 1: Analysis techniques for dependability: Guide on methodology.
IEC 61078 (1991)	Analysis techniques for dependability – Reliability block diagram method.
IEC 61165 (1995)	Application of Markov techniques.
Reliability stress screening	
IEC 60300-3-7 (1999)	Dependability management. Part 3-7: Application guide – Reliability stress screening of electronic hardware.
IEC 61163-1 (1995)	Reliability stress screening. Part 1: Repairable items manufactured in lots.
IEC 61163-2 (1998)	Reliability stress screening. Part 2: Electronic components.
Software aspects of dependability	
IEC 60300-3-6 (1997)	Dependability management. Part 3: Application guide. Section 6: Software aspects of dependability.
Maintainability and maintenance support	
IEC 60300-3-10 (2001)	Dependability management. Part 3-10: Application guide – Maintainability.
IEC 60706-1 (1982)	Guide on maintainability of equipment. Part 1: Sections one, two and three – Introduction, requirements and maintainability programme.
IEC 60706-2 (1990)	Guide on maintainability of equipment. Part 2: Section five – Maintainability studies during the design phase.
IEC 60706-3 (1987)	Guide on maintainability of equipment. Part 3: Sections six and seven – Verification and collection, analysis and presentation of data.
IEC 60706-4 (1992)	Guide on maintainability of equipment. Part 4: Section eight – Maintenance and maintenance support planning.
IEC 60706-5 (1994)	Guide on maintainability of equipment. Part 5: Section four – Diagnostic testing.

IEC 60706-6 (1994)	Guide on maintainability of equipment. Part 6: Section nine – Statistical methods in maintainability evaluation.
Collection and presentation of dependability data	
IEC 60300-3-2 (1993)	Dependability management. Part 3: Application guide. Section 2: Collection of dependability data from the field.
IEC 61069-5	Industrial-process measurement and control Evaluation of system properties for the purpose of system assessment Part 5: Assessment of system dependability
IEC 60319 (1999)	Presentation and specification of reliability data for electronic components.

Tab. 14 IEC Normen

Die möglichen Stressfaktoren und Randbedingungen, die bei der Zuverlässigkeitsanalyse berücksichtigt werden müssen, sind in Military Handbook (s. Tab. 15) ausführlich beschrieben.

MIL-STD 756B	Reliability Modelling and Prediction
MIL-STD 882C	Systems Safety Program Requirements
MIL-STD 1629A	Procedures for performing failure mode
MIL-HDBK 338B	Electronic Reliability Design Handbook (RMA)
MIL-HDBK 217-F	Reliability Prediction of Electronic Equipment

Tab. 15 MIL Normen

Außerdem sind während der Arbeit auch die industriebezogene Normen verwendet (s. Tab. 16).

SN29500	Reliability Prediction of Electronic Equipment (Siemens AG standard)
IEEE 352	Guide for General Principles of Reliability Analysis

Tab. 16 Andere Normen

Die nachfolgende Tabelle (s. Tab. 17) fasst die wichtigsten Begriffe der allgemeinen Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse zusammen. Damit jegliche Fehlinterpretation ausgeschlossen bleibt, sind die Originaldefinitionen für Begriffe und Objekte der Zuverlässigkeitsanalyse aus der Normenserie IEC 60300 gegeben.

1	<p>Dependability</p> <p>collective term used to describe the availability performance and its influencing factors: reliability performance, maintainability performance and maintenance support performance</p> <p>NOTE Dependability is used only for general descriptions in non-quantitative terms.</p>
2	<p>Reliability (performance)</p> <p>ability of an item to perform a required function under given conditions for a given time interval</p>
3	<p>Maintainability (performance)</p> <p>ability of an item under given conditions of use, to be retained in, or restored to, a state in which it can perform a required function, when maintenance is performed under given conditions and using stated procedures and resources</p>
4	<p>Maintenance support performance</p> <p>ability of a maintenance organization, under given conditions, to provide upon demand, the resources required to maintain an item, under a given maintenance policy</p>
5	<p>Dependability management</p> <p>coordinated activities to direct and control an organization with regard to dependability</p>
6	<p>System</p> <p>set of interrelated or interacting elements</p> <p>NOTE 1 In the context of dependability, a system will have</p> <ul style="list-style-type: none"> – a defined purpose expressed in terms of intended functions; – stated conditions of operation/use (191-01-12); – defined boundaries. <p>NOTE 2 The structure of a system may be hierarchical.</p>
7	<p>Item, entity</p> <p>any part, component, device, subsystem, functional unit, equipment or system that can be individually considered</p>
8	<p>Component</p> <p>item on the lowest level considered in the analysis</p>
9	<p>Life cycle</p> <p>time interval between a product's conception and its disposal</p>
10	<p>Allocation</p> <p>procedure applied during the design of an item intended to apportion the requirements for performance measures for an item to its sub-items according to given criteria</p>

11	<p>Failure</p> <p>termination of the ability of an item to perform a required function</p> <p>NOTE 1 After failure the item has a fault.</p> <p>NOTE 2 'Failure' is an event, as distinguished from 'fault', which is a state.</p>
12	<p>Fault</p> <p>state of an item characterized by inability to perform a required function, excluding the inability during preventive maintenance or other planned actions, or due to lack of external resources</p> <p>NOTE A fault is often the result of a failure of the item itself, but may exist without prior failure.</p>

Tab. 17 Begriffe der Zuverlässigkeitsanalyse

Die eigentliche Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse wird im Abschnitt 2.2.1.2 beschrieben.

2.2.1.1 Bedeutung der Zuverlässigkeit

Als "zuverlässig" bezeichnet man im allgemeinen Sprachgebrauch ein technisches System, auf das man sich verlassen kann. Zum Beispiel, laut ADAC Pannenstatistik, wurde Toyota Corolla mehrmals als zuverlässigstes Auto seiner Klasse bezeichnet. Das bedeutet aber nicht, dass eine Panne bei diesem Auto ausgeschlossen ist, sondern dass die Wahrscheinlichkeit einer Panne wesentlich geringer ist, als bei den anderen Marken.

Deswegen wird im technischen Bereich der Begriff "Zuverlässigkeit" als eine quantitative Größe im Sinne einer Wahrscheinlichkeit aufgefasst und verwendet.

Die technischen Systeme werden immer komplexer und, was noch wichtiger ist, ein Ausfall von manchen technischen Systemen kann weitgehende katastrophale Konsequenzen haben. Aus diesen Gründen (s. Tab. 18) ist die Zuverlässigkeit und Sicherheit von solchen technischen Systemen und Anlagen so bedeutsam geworden.

Lebenswichtige Anlagen	<p>Das sind die Anlagen und technischen Systeme, deren Ausfall Gesundheit und Leben von Menschen gefährden kann.</p> <p>Als Beispiel an der Stelle können medizinische Anlagen oder Verkehrssteuerungsanlagen erwähnt werden.</p>
Außergewöhnlich teure Anlagen	<p>Das sind die Anlagen, deren Ausfall möglicherweise jahrelange Arbeit zunichte machen kann.</p> <p>Zum Beispiel Raumfahrtanlagen, Satelliten, Forschungsapparatur usw.</p>

Anlagen mit hohem Komplexitätsgrad	Spätestens seit der Raumfahrttechnik hat man begriffen und bestätigt gefunden, dass man komplexe Anlagen mit sehr vielen Bauelementen nicht für längere Zeit funktionsfähig aufbauen kann, ohne entsprechende Maßnahmen zur Erhöhung der Zuverlässigkeit zu ergreifen.
Lebensdauerprognosen	Ein Kunde, der ein technisches System kauft (egal ob es eine Waschmaschine oder ein System für Computertomographie ist), verlangt nicht nur Auskunft über die technischen Kennwerte. Er fragt auch, wie lange solch ein System unter gegebenen Randbedingungen seine Funktion erfüllen wird. Außerdem will der Kunde anhand der Zuverlässigkeitskenndaten die vorliegende Systemkonzeption mit Wettbewerbsprodukten vergleichen.
Vermeidung von Reparaturen	Je zuverlässiger ein technisches System ist, desto weniger Reparaturkosten und Stillstandzeiten entstehen. Zum Beispiel, ein stehendes Fließband bei einer Autoherstellungsfabrik verursacht große finanzielle Verluste.
Zuverlässiger heißt billiger	Gerätekonzeptionen, die infolge aufwendigerer Zuverlässigkeitsmaßnahmen in der Anschaffung zwar teurer waren, erweisen sich nach längerem Zeitraum infolge ausbleibender Reparaturen preiswerter als die billigeren Alternativen (s. Abb. 9).
Zuverlässiger heißt sicherer	Sicherheitseinrichtungen findet man vor allem in Kernkraftwerken sowie in Steuerungssystemen für Flug-, Raum- und Bahnverkehr. Sicherheitsmaßnahmen verlängern nicht unbedingt die Lebensdauer eines technischen Systems, aber höhere Zuverlässigkeit bedeutet immer höhere Sicherheit.

Tab. 18 Bedeutung der Zuverlässigkeit

Die Abb. 9 zeigt die Relation Kosten-Zuverlässigkeit in Form des MTBF-Wertes. [23]

Dabei stellt die blaue Kurve die Gesamtkosten (also Anschaffungs- sowie Instandhaltungskosten) eines Geräts dar. Aus dem Verlauf dieser Kurve kann man einen Punkt mit minimalen Kosten ermitteln, der einem optimalen MTBF-Wert entspricht.

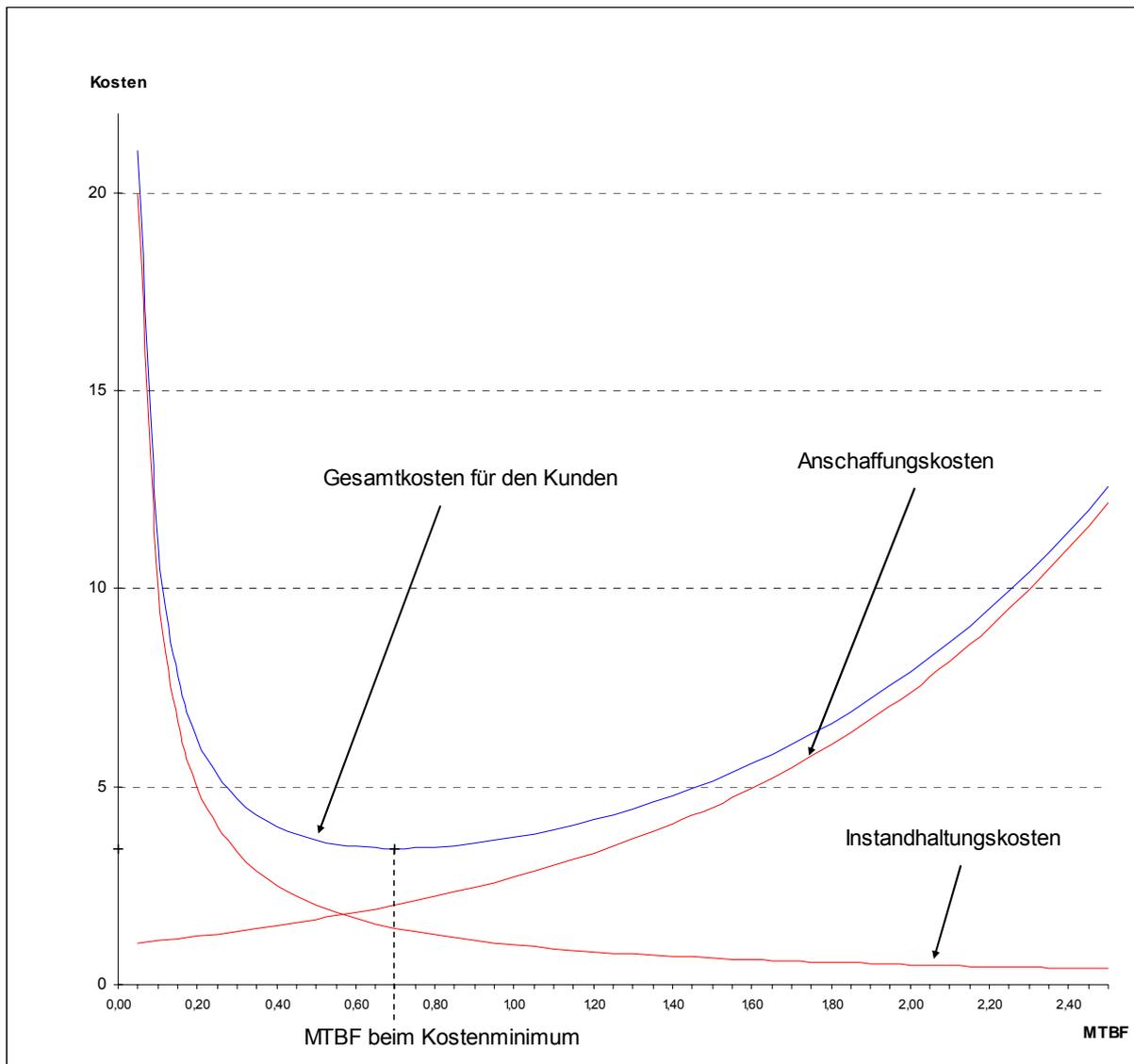
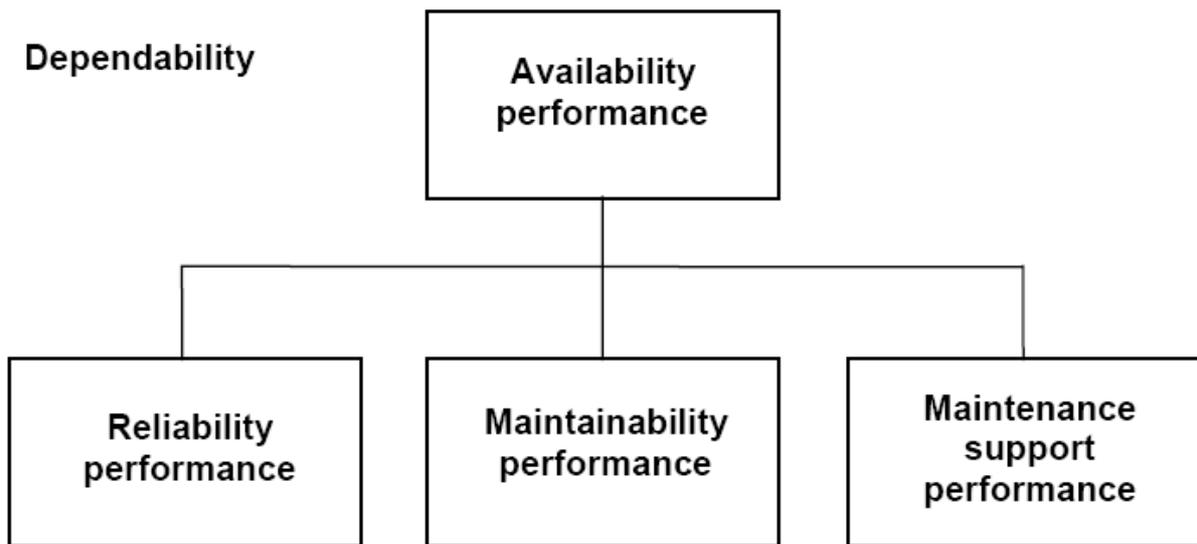


Abb. 9 Zuverlässigkeit und Kosten

2.2.1.2 Allgemeine Vorgehensweise bei der Zuverlässigkeitsanalyse

Aus der Definition (s. Tab. 17) des Begriffs "Dependability" folgt, dass die Zuverlässigkeitsanalyse (dependability analysis) eines technischen Systems vor allem die Frage der Verfügbarkeit dieses Systems beantworten muss.

Die wichtigsten Faktoren, die die Verfügbarkeit eines technischen Systems stark beeinflussen, sind in Abb. 10 dargestellt.



IEC 1748/03

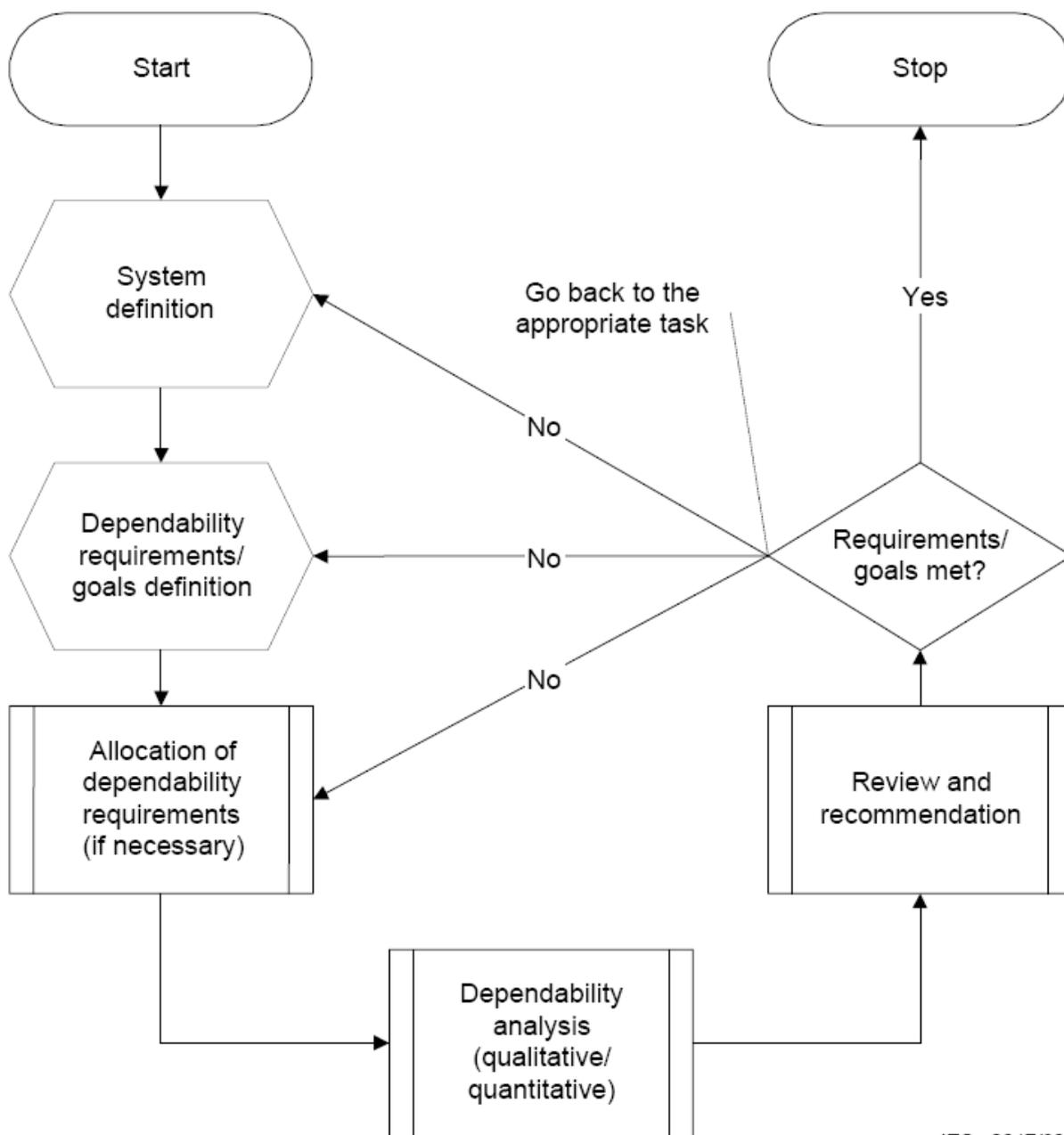
Abb. 10 Begriff "Dependability"

Die Tabelle (s. Tab. 19) enthält die entsprechenden Definitionen aus der IEC 60300-1.

<p>Availability performance is the ability of an item to be in a state to perform a required function under given conditions at a given instant of time or over a given time interval, assuming that the required external resources are provided.</p>
<p>Reliability performance is the ability of an item to perform a required function under given conditions for a given time interval.</p>
<p>Maintainability performance is the ability of an item under given conditions of use, to be retained in, or restored to a state in which it can perform a required function, when maintenance is performed under given conditions and using stated procedures and resources.</p>
<p>Maintenance support performance is the ability of a maintenance organization, under given conditions, to provide upon demand, the resources required to maintain an item, under a given maintenance policy.</p>

Tab. 19 Faktoren der Zuverlässigkeitsanalyse

Die Zuverlässigkeitsanalyse ist ein iterativer Prozess (s. Abb. 11), der jede Phase des Lebenszyklus eines technischen Systems begleitet.



IEC 3217/02

Abb. 11 Allgemeine Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse

Die einzelnen Schritte dieser Prozedur haben folgende Bedeutung:

1.	System defini- tion	Definiere das zu analysierende System, seine Betriebszustände, seine funktionalen Beziehungen mit seiner Umgebung einschließlich der Schnittstellen und Prozesse. Im Allgemeinen ist die Systemdefinition eine aus der Systementwicklung folgende Angabe. Informationsquelle: Konstruktionsplan des Systems, Expertenwissen vom Systementwickler.
2.	Dependability requirements / goals definition	Liste alle Anforderungen an die Funktionsfähigkeit und Verfügbarkeit oder an Ziele, Eigenschaften und Merkmale des Systems auf, zusammen mit Umgebungs- und Betriebsbedingungen sowie Anforderungen

		<p>an die Instandhaltung. Definiere Systemausfall, Ausfallkriterien und Ausfallbedingungen auf der Grundlage funktionaler Systemspezifikationen, erwarteter Betriebsdauer und Betriebsumgebung (Missionsprofil und Missionsdauer).</p> <p>Informationsquelle: Expertenwissen in Form einer System FMEA (failure mode and effects analysis).</p>
3.	Allocation of dependability requirements	<p>Weise Zuverlässigkeitsanforderungen an die verschiedenen Subsysteme (Teilsysteme) bereits in der frühen Entwicklungsphase zu.</p> <p>Im Grunde genommen, wird eine Dekomposition des Systems nach dem "Top-Down" Prinzip durchgeführt. Die Schritte 1 und 2 werden für alle Subsysteme wiederholt.</p> <p>Informationsquelle: FMEA vom jeweiligen Subsystem.</p>
4.	Dependability analysis (qualitative / quantitative)	<p>Analysiere das System mittels Zuverlässigkeitstechniken und relevanten Leistungsdaten.</p> <p>Qualitative Analyse: analysiere die funktionale Struktur des Systems; ermittle die Fehlzustandsarten des Systems und seiner Komponenten, Ausfallmechanismen, Urdachen, Auswirkungen und Folgen von Ausfällen; ermittle die Abnutzungsmechanismen die zu Ausfällen führen können; analysiere Ausfall bzw. Fehlzustandspfade; beachte die Instandhaltbarkeit; analysiere Möglichkeiten zur Vermeidung von Fehlzuständen; bestimme mögliche Instandhaltungs- und Reparaturstrategien.</p> <p>Quantitative Analyse: entwickle Zuverlässigkeitsmodelle; lege zu verwendende numerische Referenzdaten fest; führe Zuverlässigkeitsberechnungen durch; führe Analysen zur kritischen und empfindlichen Bauelementen durch.</p>
5.	Review and recommendation	<p>Analysiere ob die Zuverlässigkeitsanforderungen und Ziele erfüllt sind und ob alternative Entwürfe in wirksamer und kostengünstiger Weise die Zuverlässigkeit des Systems verbessern können.</p> <p>Sofern zutreffend, können dazu folgende Aufgaben gehören: beurteile die Verbesserung der Systemzuverlässigkeit als Ergebnis von Verbesserungen im Entwurf und der Fertigung (z. B. Redundanz, Verringerung der Beanspruchung, Verbesserung der Instandhaltungsstrategien, Prüf- und Diagnosesysteme, technologische Prozesse und Qualitätslenkungssystem).</p>

Tab. 20 Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse

Damit die Ziele und Vorteile der Anwendung der Zuverlässigkeitsmaßnahmen bei einem technischen System realisiert werden, muss die Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse konsequent eingesetzt und verwaltet werden.

Die Prozedur der Verwaltung der Zuverlässigkeitsanalyse (dependability management) ist in Abb. 12 schematisch dargestellt.

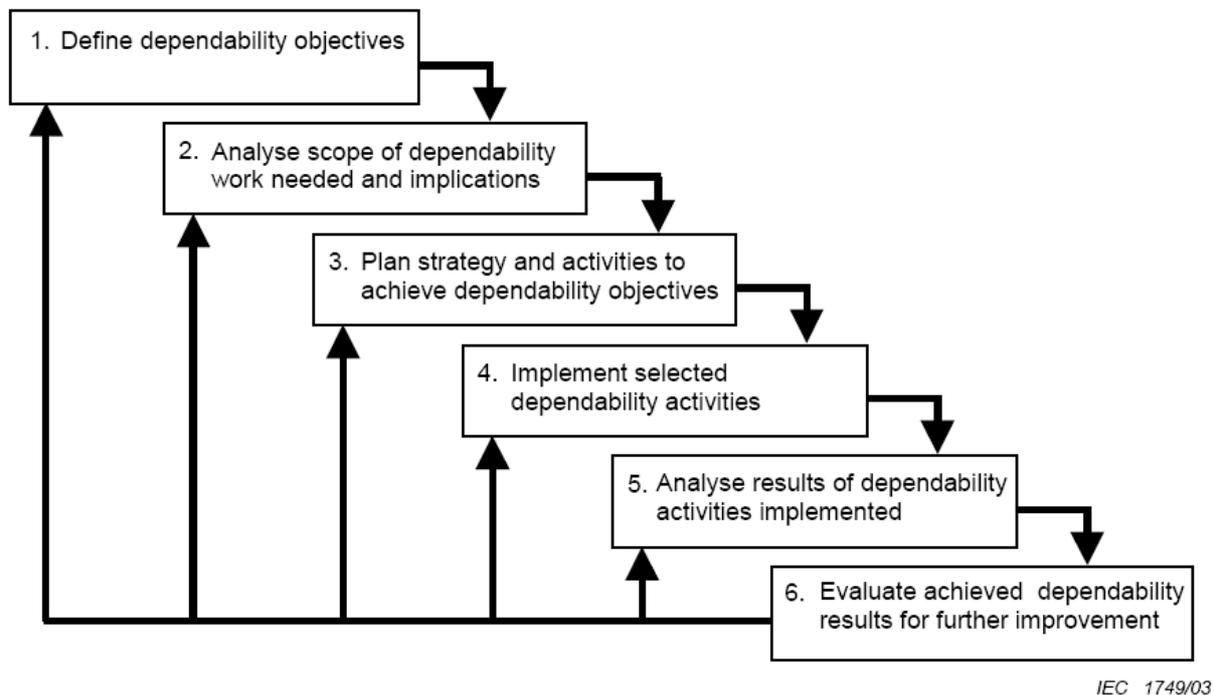


Abb. 12 Dependability management

2.2.1.3 RAM Werte und Kenngrößen

Wie Abb. 11 zeigt, enthält die Prozedur der Zuverlässigkeitsanalyse einen wichtigen Schritt, nämlich quantitative Analyse oder Zuverlässigkeitsberechnung.

Die Zuverlässigkeitsberechnung eines technischen Systems liefert als Ergebnis die s. g. RAM-Werte, dabei steht die Abkürzung RAM für reliability, availability und maintainability.

An der Stelle ist es notwendig die Kenngrößen einzufügen, die man bei der Zuverlässigkeitsberechnung verwendet.

Es ist oft unmöglich die Zuverlässigkeitskenngrößen einer Komponente (s. Tab. 17, Punkt 8) zu errechnen. Stattdessen wird ein Los von solchen identischen Komponenten (z. B. Widerstände) getestet und statistisch untersucht. Dabei wird die s. g. Bestandsfunktion (s. Abb. 13) aufgebaut.

Bestandsfunktion $B(t)$: der Zusammenhang zwischen relativem Bestand und der Zeit.

Relativer Bestand B_r : Quotient aus einem Bestand (Zeitpunkt t_1) zum Anfangsbestand (Zeitpunkt t_0)

$$B_r = \frac{B(t_1)}{B(t_0)}$$

Def. 17 Bestandsfunktion

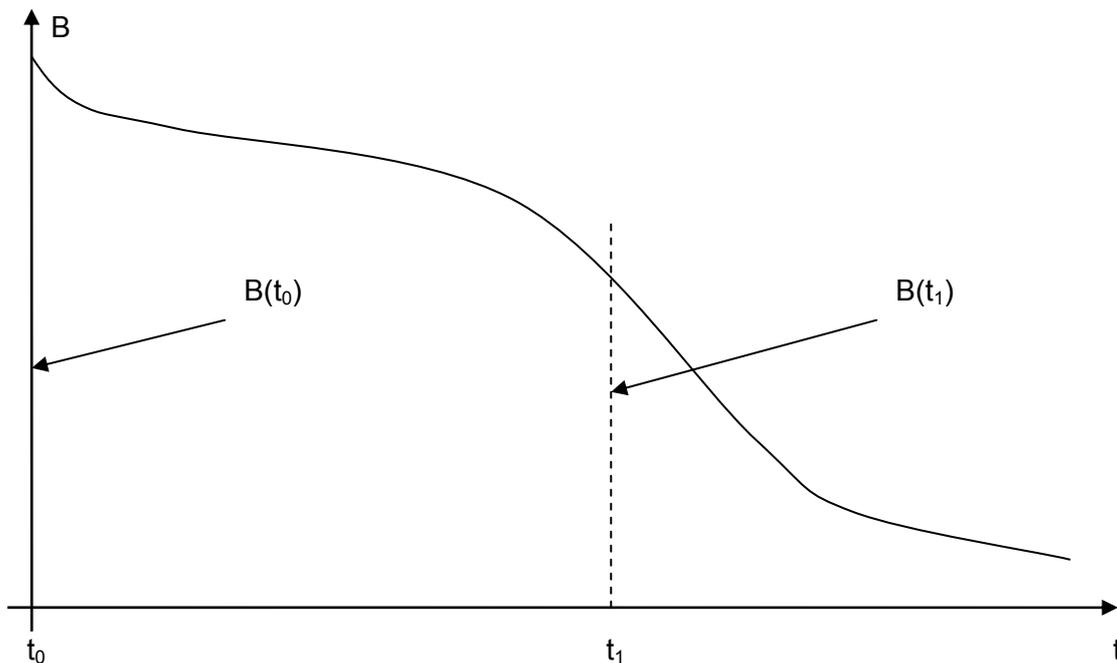


Abb. 13 Bestandsfunktion

Daraus werden folgende Zuverlässigkeitskenngrößen abgeleitet (s. Tab. 21) [23]

1	Ausfallhäufigkeit (failure frequency)	Die Differenz der relativen Bestände am Anfang und Ende des betrachteten Zeitintervalls. $a = \frac{B(t_i) - B(t_{i+1})}{B(t_0)}$
2	Ausfallhäufigkeitsdichte (failure density)	Der Quotient aus Ausfallhäufigkeit und betrachtetem Zeitintervall. $d = \frac{B(t_i) - B(t_{i+1})}{B(t_0)\Delta t_i} = \frac{a}{\Delta t_i}$
3	Ausfallquote (failure quota)	Der Quotient aus temporärer Ausfallhäufigkeit und betrachtetem Zeitintervall. Die Ausfallquote q ist ein Schätzwert für die Ausfallrate λ . $q = \frac{B(t_i) - B(t_{i+1})}{B(t_i)\Delta t_i} \approx \lambda$
4	Ausfallwahrscheinlichkeit (probability of failure)	Die Wahrscheinlichkeit $F(t)$ einer Komponente des Bestandes zum Zeitpunkt $T < t_i$ auszufallen (s. auch Def. 10 Verteilungsfunktion).
5	Überlebenswahrscheinlichkeit (probability of survival)	Die Wahrscheinlichkeit $R(t)$ einer Komponente des Bestandes, dass der Ausfall nach dem Zeitpunkt t_i erfolgt. Bei nicht-reparierbaren Systemen $R(t)$ ist eine monoton fallende Funktion $R(t) = 1 - F(t)$

6	Ausfallwahrscheinlichkeitsdichte (failure probability density)	Die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls im Zeitintervall Δt (s. auch Def. 12 Verteilungsdichtefunktion). $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$
7	Ausfallrate (failure rate)	Der negative Wert der bis zum betrachteten Zeitpunkt t_i differenzierbaren logarithmischen Bestandsfunktion. $\lambda(t) = - \left[\frac{d \ln R(t)}{dt} \right]_{t=t_i} = \frac{f(t)}{R(t)}$ <p>Oft wird die Ausfallrate auch wie folgt definiert: [2]</p> $\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr\{t < \tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t\}}{\Delta t} = - \frac{dR(t)}{R(t) dt}$ <p>In der Praxis wird die Ausfallrate als eine Abschätzung definiert:</p> $\lambda \approx \frac{c}{N\Delta t}, \text{ wobei}$ <p>c – Anzahl der Ausfälle in einer Stichprobe N – Umfang der Stichprobe Δt – Prüfzeit</p>

Tab. 21 Zuverlässigkeitskenngrößen

Die Zuverlässigkeitskenngrößen aus der Tab. 21 bilden eine Basis für eine Reihe von den Mittelwerten (s. Tab. 22).

MTTF (mean time to failure)	Mittelwert der ausfallfreien Arbeitszeit einer Betrachtungseinheit. Dieser Begriff bezieht sich auf die nichtreparierbaren Systeme. [IEEE352] $MTTF = \int_0^{\infty} R(t) dt$ <p>Laut [2] ist dieser Begriff auch auf die reparierbaren Systeme anwendbar, wenn die Betrachtungseinheit nach der Reparatur als neuwertig gilt.</p> <p>Als Abschätzung der MTTF kann folgende Formel verwendet werden:</p> $MTTF = \frac{t_1 + \dots + t_n}{n}, \text{ wobei } t_1, \dots, t_n \text{ unabhängige Realisierungen von ausfallfreien Arbeitszeiten statistisch identischer Betrachtungseinheiten sind.}$
--------------------------------	---

<p>MTBF (mean time between failures)</p>	<p>Der MTBF-Wert ist die mittlere Zeit zwischen aufeinander folgenden Ausfällen bei einer reparierbaren Betrachtungseinheit. [IEEE352]</p> <p>Laut [2] soll dieser Begriff nur im Zusammenhang mit Betrachtungseinheiten mit konstanter Ausfallrate verwendet werden. Dann gilt:</p> $MTBF = \frac{1}{\lambda}$ <p>Als Abschätzung der MTBF gilt:</p> $MTBF = \frac{T}{k}$, wobei T eine kumulierte Betriebszeit und k eine Anzahl der Ausfälle ist.
<p>MTTR (mean time to repair)</p>	<p>Mittelwert der Reparaturzeit einer Betrachtungseinheit. Dabei werden die Zeiten für die Ausfalllokalisierung sowie Ermittlung des technischen Personals und logistische Unterstützung nicht mitberechnet.</p> <p>Als Abschätzung der MTTR gilt:</p> $MTTR = \frac{t_1 + \dots + t_n}{n}$, wobei t_1, \dots, t_n unabhängige Realisierungen von Reparaturzeiten statistisch identischer Betrachtungseinheiten sind.
<p>MDT (mean down time)</p>	<p>Mittelwert der Ausfallzeit einer Betrachtungseinheit. Zusätzlich zu reiner MTTR werden auch die Zeiten für die Ausfalllokalisierung sowie Ermittlung des technischen Personals und logistische Unterstützung mitberechnet. [MIL-HDBK-338A]</p> <p>In manchen Fällen, z. B. bei den Rechnern, werden auch die Zeiten des Neustartens nach der Reparatur mitgezählt.</p>

Tab. 22 MTF, MTBF, MTTR, MDT

Die meist angewendete Zuverlässigkeitskenngröße, die bei der Zuverlässigkeitsberechnung von Baugruppen und Geräten benötigt wird, ist die Ausfallrate. Die Ausfallraten für typische Komponenten (z. B: integrierte Schaltkreise, diskrete Halbleiter, passive Bauelemente usw.) sind in verschiedenen Normen bzw. direkt von dem entsprechenden Hersteller bekannt gegeben. [SN29500, MIL-HDBK-217F]

Allerdings entsteht in jedem konkreten Fall der Zuverlässigkeitsberechnung eines technischen Systems ein Problem, dass die Angaben für Ausfallraten aus einer Norm oder von einem Hersteller umgerechnet werden müssen.

Es liegt daran, dass solche "Standardwerte" für Ausfallraten (λ_{ref}) sich auf die s. g. Referenzbedingungen beziehen. Deswegen fügen die realen Betriebsbedingungen gewisse π -Faktoren (auch Stressfaktoren genannt) noch dazu:

$$\lambda = \lambda_{ref} \pi_U \pi_I \pi_T \pi_W$$

Die empirischen Formeln für die Stressfaktoren sind in Tab. 23 dargestellt. [SN29500]

Faktor für Spannungsabhängigkeit	$\pi_U = \exp\{C_1(U^{C_2} - U_{ref}^{C_2})\}, \text{ oder auch}$ $\pi_U = \exp\left\{C_3\left[\left(\frac{U}{U_{max}}\right)^{C_2} - \left(\frac{U_{ref}}{U_{max}}\right)^{C_2}\right]\right\}$ <p>Hierin bedeuten:</p> <p>U – Betriebsspannung in Volt</p> <p>U_{ref} – Referenzspannung in Volt</p> <p>U_{max} – maximal zulässige Spannung in Volt</p> <p>C₁ – Konstante, $C_1 = \frac{C_3}{(U_{max})^{C_2}}$</p> <p>C₂, C₃ – Konstanten</p>
Faktor für Stromabhängigkeit	$\pi_I = \exp\left\{C_4\left[\left(\frac{I}{I_{max}}\right)^{C_5} - \left(\frac{I_{ref}}{I_{max}}\right)^{C_5}\right]\right\}$ <p>Hierin bedeuten:</p> <p>I – Betriebsstrom in Ampere</p> <p>I_{ref} – Referenzstrom in Ampere</p> <p>I_{max} – maximal zulässiger Strom in Ampere</p> <p>C₄, C₅ – Konstanten</p>
Faktor für Temperaturabhängigkeit	$\pi_T = \frac{Ae^{Ea_1z} + (1-A)e^{Ea_2z}}{Ae^{Ea_1z_{ref}} + (1-A)e^{Ea_2z_{ref}}}, \text{ wobei}$ $z = 11605 \cdot \left(\frac{1}{T_{U,ref}} - \frac{1}{T_2}\right) \text{ in (1/eV) und}$ $z_{ref} = 11605 \cdot \left(\frac{1}{T_{U,ref}} - \frac{1}{T_1}\right) \text{ in (1/eV)}$ <p>Hierin bedeuten:</p> <p>A – Konstante</p> <p>Ea₁, Ea₂ – Aktivierungsenergien in Elektronvolt</p> <p>θ_{U,ref} – Referenz-Umgebungstemperatur in °C</p> <p>T_{U,ref} = θ_{U,ref} + 273 in Kelvin</p> <p>T₁ = θ₁ + 273 in Kelvin</p> <p>T₂ = θ₂ + 273 in Kelvin</p> <p>Bedeutung von den Temperaturen θ₁ und θ₂ hängt von dem Typ der jeweiligen Komponenten ab.</p>

Aussetzbetriebsfaktor (Betriebsprofil)	$\pi_W = W + R \frac{\lambda_0}{\lambda} (1 - W), \text{ wobei } 0 \leq W \leq 1, 0 \leq R \leq 1$ <p>W – Quotient von der Beanspruchungsdauer einer Komponente und der Betriebszeit des Gesamtsystems</p> <p>R – Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls einer nicht beanspruchten Komponente</p> <p>$\lambda_0 = \lambda_{ref} \pi_T(\theta_0)$ - Ausfallrate bei Stillstandtemperatur θ_0, jedoch unter elektrischer Last</p> <p>$\lambda = \lambda_{ref} \pi_U \pi_I \pi_T$ - Ausfallrate bei Betriebs- bzw. Referenztemperatur</p>
---	---

Tab. 23 Stressfaktoren

Die Ausfallrate einer Komponente hat noch einen wesentlichen Aspekt, nämlich Abhängigkeit von der Zeit.

2.2.2 Wichtigste Verteilungen

Der zeitliche Verlauf der Ausfallrate wird wegen der typischen Form "Badewannekurve" (s. Abb. 14) genannt. Dieser Verlauf ist aufschlussreicher als die Bestandfunktion, weil er die drei typischen aufeinander folgenden Bereiche Frühausfälle, Zufallsausfälle und Verschleißausfälle abgrenzt.

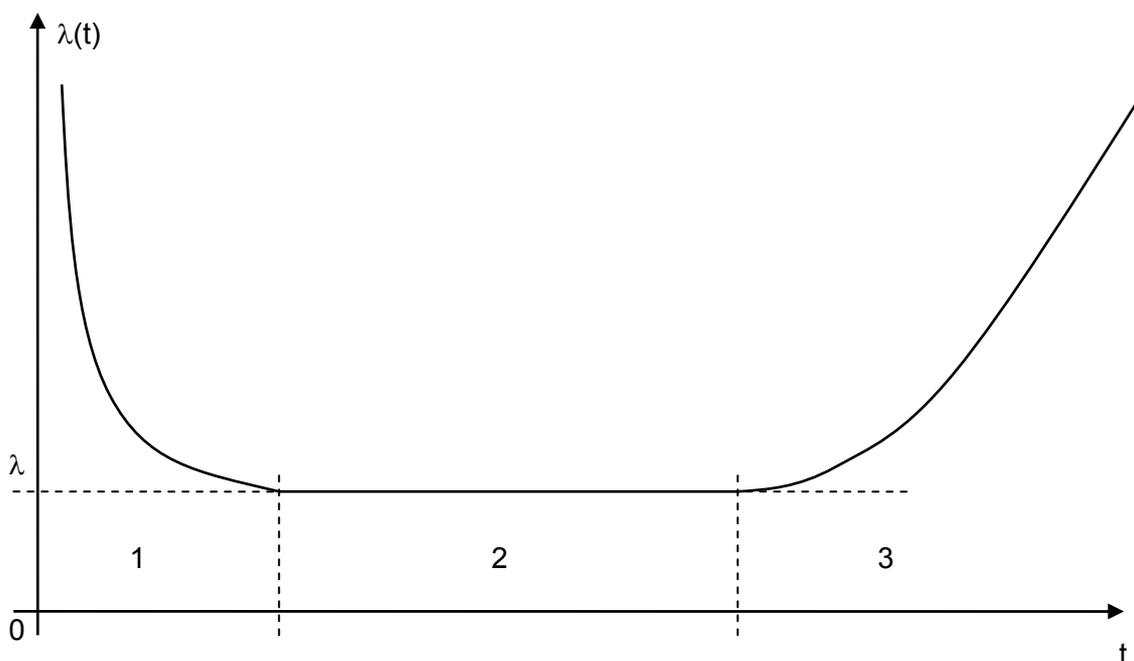


Abb. 14 Zeitlicher Verlauf der Ausfallrate

Folgende Tabelle (s. Tab. 24) fasst die Eigenschaften vom jeweiligen Bereich der "Badewannekurve" zusammen.

1	Frühausfälle (early failures)	<p>Der Bereich der Frühausfälle wird durch die Ausfallrate charakterisiert, die mit der Zeit stark abnimmt. Die entsprechende Ausfallratekurve wird mittels Weibullverteilung mit dem Parameter $\beta < 1$ (dazu s. Tab. 8) definiert. [3]</p> <p>Die Ausfälle in dieser Phase lassen sich in der Regel auf eine zufällig verteilte Schwäche in Materialien, Bauteilen oder Fertigungsprozessen zurückführen. [2]</p> <p>Ideal für technische Systeme wäre es, wenn das Ende der Frühausfallphase mit dem Verlassen des Prüffeldes zeitlich übereinstimmen würde. [23]</p>
2	Zufallsausfälle (random failures)	<p>Die Ausfallrate in dieser Phase ist näherungsweise konstant, deswegen wird die entsprechende Ausfallratekurve mittels Weibullverteilung dem Parameter $\beta = 1$ (dazu s. Tab. 8) oder Exponentialverteilung (dazu s. Tab. 9) definiert. [3]</p> <p>Diese Phase soll die normale Betriebsdauer umfassen. Die Ausfälle sind rein zufällig und erfolgen durch unetworfene Schadensursachen.</p>
3	Verschleißausfälle (wearout failures)	<p>Die Ausfallrate steigt mit zunehmender Betriebszeit immer schneller an. Die entsprechende Ausfallratekurve wird mittels Weibullverteilung mit dem Parameter $\beta > 1$ (dazu s. Tab. 8) oder auch Normalverteilung (s. Tab. 10) definiert. [3]</p> <p>Ausfälle in dieser Phase sind auf Alterung, Abnutzung usw. zurückzuführen.</p>

Tab. 24 Früh-, Zufalls- und Verschleißausfälle

2.2.2.1 Weibullverteilung

Die Weibullverteilung ist universell in der Zuverlässigkeitstechnik anwendbar. Mit dieser Verteilung lassen sich alle drei Bereiche der Badewannekurve approximieren und zahlenmäßig erfassen.

Die Weibullverteilung ist eine Verteilung mit drei Parametern:

- η : Maßstabsparameter oder charakteristische Lebensdauer. Bei $t = \eta$ hat sich die Überlebenswahrscheinlichkeit auf 37% verringert, wenn $\gamma = 0$ ist.
- β : Formparameter oder Weibull-Exponent, dadurch wird die Kurvenform festgelegt.
- γ : Lageparameter, der den Zeitpunkt bestimmt, an dem die Ausfälle beginnen. Es handelt sich um eine Zeitverschiebung längst der t-Achse

Die Zuverlässigkeitskenngrößen werden mittels Weibullverteilung wie folgt definiert (s. Tab. 25):

Überlebenswahrscheinlichkeit	$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$, wobei $t > \gamma$
Ausfallwahrscheinlichkeit	$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$, wobei $t > \gamma$
Ausfalldichte	$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta}$
Ausfallrate	$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1}$
Erwartungswert	$m = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

Tab. 25 Weibullverteilung: Zuverlässigkeitseigenschaften

Das Bild (s. Abb. 15) zeigt den Verlauf der Funktionen R(t), F(t), f(t) und λ(t) bei der Weibullverteilung mit γ = 0, η = 1 und β = 2.

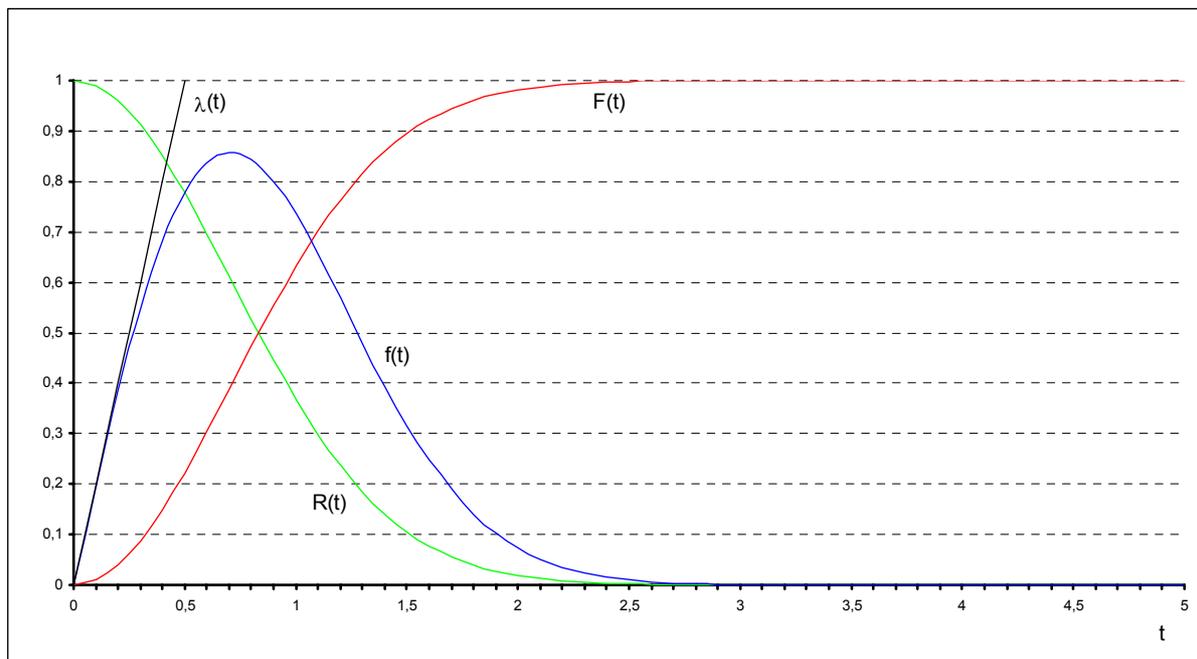


Abb. 15 Weibullverteilung: R(t), F(t), f(t) und λ(t)

Die Weibullverteilung erfasst folgende Betriebsfälle: [23]

- $\gamma > 0$: Betriebsfall, bei dem die Ausfälle erst nach einiger Zeit, nämlich $t = \gamma$ einsetzen. Dies ist der Fall bei Korrosion, Ausfall von Batterien, Bildung von Deckschichten an Steckern usw.
- $\gamma = 0$: Betriebsfall, bei dem von Beanspruchungsbeginn an Ausfälle zu beobachten sind.
- $\beta < 1$: Phase der Frühausfälle (s. Tab. 24)
- $\beta = 1$: Phase der Zufallsausfälle, Nutzungsdauer (s. Tab. 24)
- $\beta > 1$: Phase der Verschleißausfälle (s. Tab. 24)

2.2.2.2 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung spielt in der Zuverlässigkeitstheorie eine besondere Rolle. Diese Verteilung gilt für die Phase der Zufallsausfälle (s. Tab. 24), die Ausfallrate ist von der Nutzungsdauer unabhängig, d. h. während der Betriebszeit fallen pro Mengeneinheit gleichviel Komponenten aus.

Die mathematischen Grundlagen der Exponentialverteilung sind bereits in der Tab. 9 dargestellt. Die Eigenschaften der Exponentialverteilung im Sinne der Zuverlässigkeitstheorie sind in der Tab. 26 zusammengefasst.

Überlebenswahrscheinlichkeit	$R(t) = e^{-\lambda t}$
Ausfallwahrscheinlichkeit	$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$
Ausfalldichte	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$
Ausfallrate	$\lambda = \text{Konstante}$
Erwartungswert	$E(t) = \frac{1}{\lambda}$

Tab. 26 Exponentialverteilung: Zuverlässigkeitseigenschaften

Das Bild (s. Abb. 16) zeigt den Verlauf der Funktionen $R(t)$, $F(t)$, $f(t)$ und $\lambda(t)$.

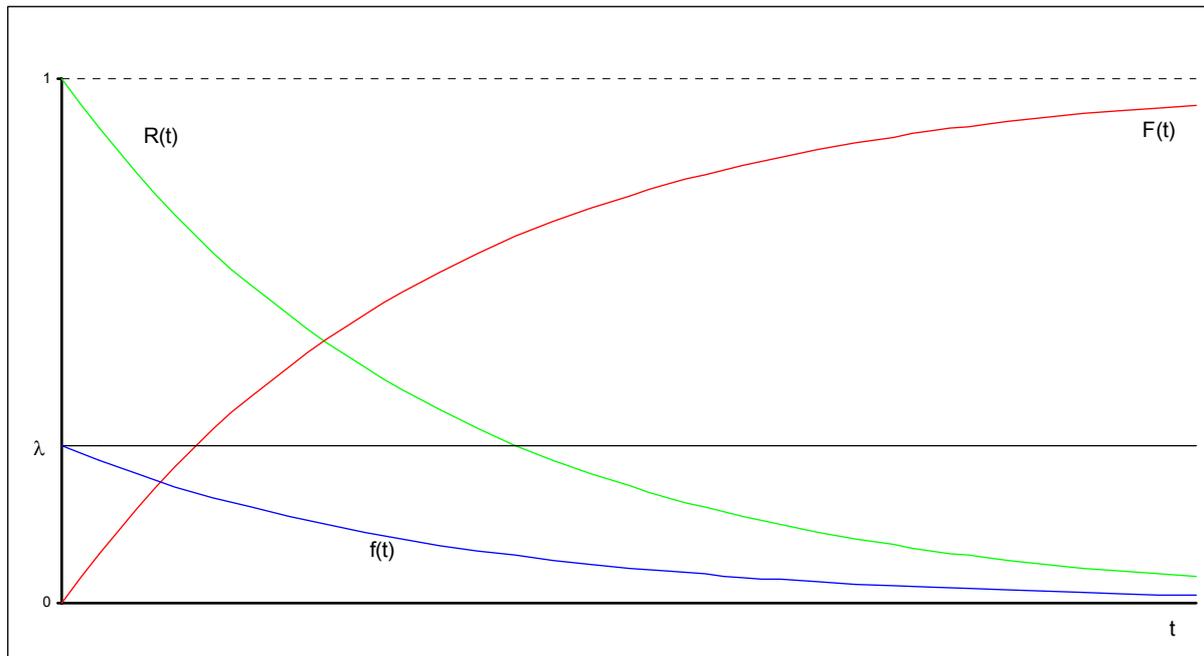


Abb. 16 Exponentialverteilung: R(t), F(t), f(t) und $\lambda(t)$

Bei der Zuverlässigkeitsanalyse von technischen Systemen wird die Exponentialverteilung typischerweise an die Elektronik angewendet.

2.2.2.3 Normalverteilung

Die Normalverteilung charakterisiert die Phase der Verschleißausfälle (s. Tab. 24). Diese Verteilung wird mittels zwei Parameter definiert (s. Tab. 10): Formparameter (Standardabweichung σ) und Lageparameter (mittlere Lebensdauer m).

Die Tab. 27 stellt die Eigenschaften der Normalverteilung im Sinne der Zuverlässigkeitstheorie dar.

Überlebenswahrscheinlichkeit	$R(t) = 1 - \int_0^t f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$
Ausfallwahrscheinlichkeit	$F(t) = \int_0^t f(t)dt$
Ausfalldichte	$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$
Ausfallrate	$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}}{\int_t^{\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt}$

Erwartungswert	$m = \int_0^{\infty} R(t) dt$
----------------	-------------------------------

Tab. 27 Normalverteilung: Zuverlässigkeitseigenschaften

Das Bild (s. Abb. 17) zeigt den Verlauf der Funktionen R(t), F(t), f(t) und λ(t), wobei σ = 1 und m = 2,5. Man sieht deutlich, dass bei t = m die Überlebenswahrscheinlichkeit R(t) = 0,5 ist.

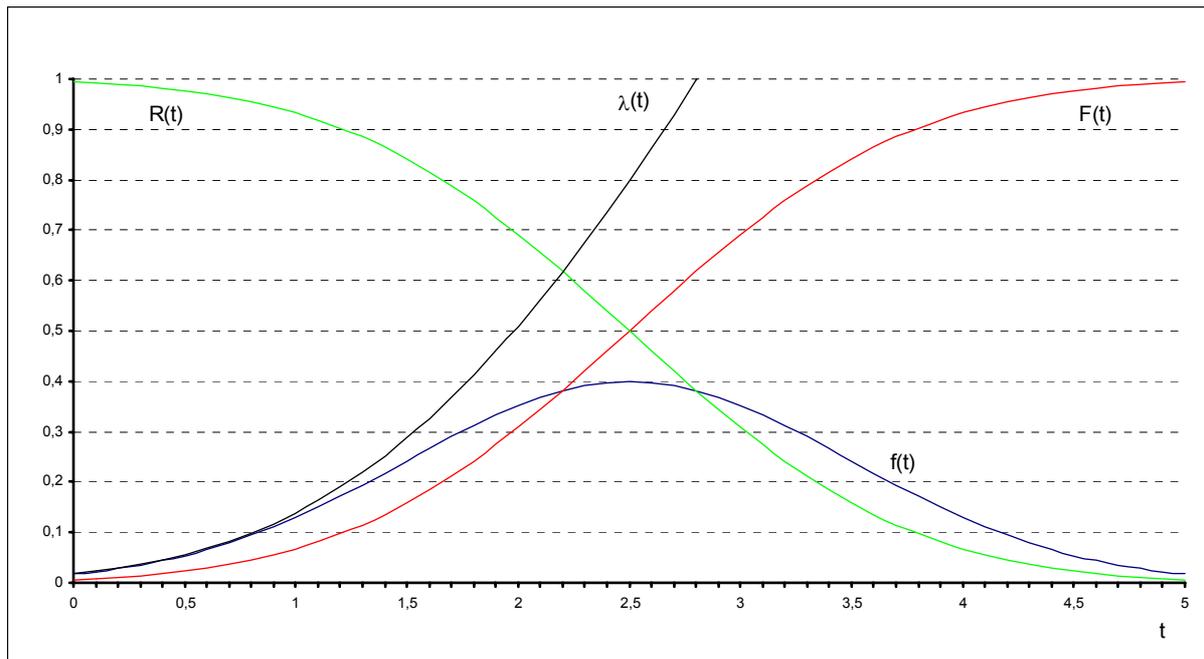


Abb. 17 Normalverteilung: R(t), F(t), f(t) und λ(t)

Die Normalverteilung ist sinnvoll bei Röhren, Elektromotoren mit Kohlenbürsten, Steckern, Relais und ähnlichen Komponenten zu verwenden. Da die Gaußfunktion exakt bei -∞ beginnt und bei +∞ endet, kann sie als Ausfall dichtefunktion nur näherungsweise gelten, wenn der Variationskoeffizient

$$\frac{\sigma}{m} < \frac{1}{3}, \text{ d. h. die Streuung klein ausfällt.}$$

2.2.3 Zuverlässigkeitsberechnung von komplexen Systemen

Eigentliche Berechnung der Zuverlässigkeit eines technischen Systems ist ohne entsprechendes Modell unmöglich. Einer der Schritte der allgemeinen Prozedur der Zuverlässigkeitsberechnung (s. Tab. 20, Punkt 2 und 3) besteht in der Entwicklung des Zuverlässigkeitsmodells für jede Dekompositionsebene (s. Abb. 18) der Top-Down Aufstellung. [2, 22]

Die Top-Down Aufstellung ermöglicht die Komplexität der realen technischen Systeme zu bewältigen, indem nach "Teile und Herrsche" Prinzip eine große Aufgabe in mehrere kleine und leicht lösbare Aufgaben unterteilt wird.

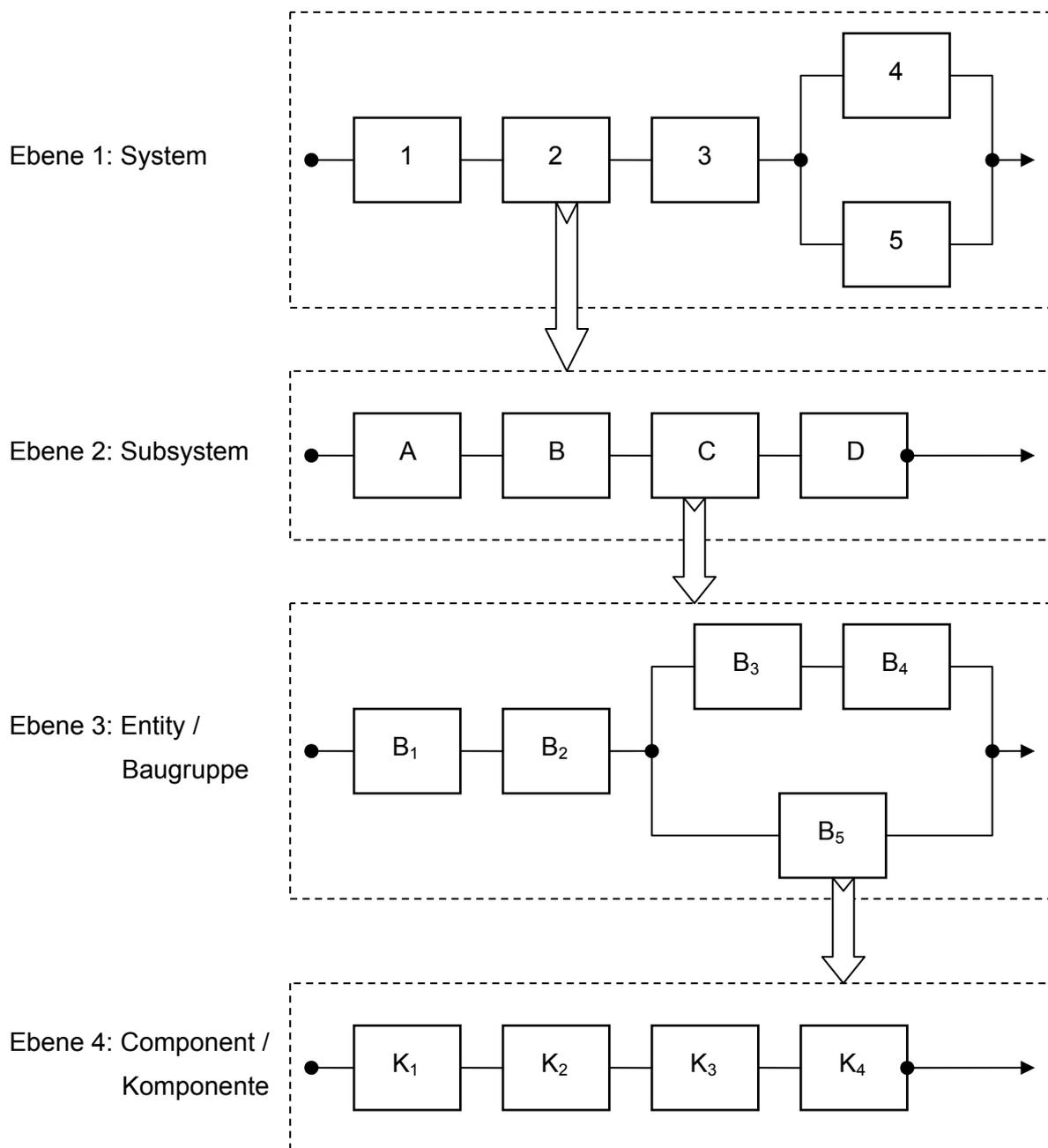


Abb. 18 Top-Down Aufstellung

Bei der Top-Down Aufstellung wird stets bei der höchsten Dekompositionsebene (oder wie bei [2] umgekehrt Integrationsebene) begonnen. Für jede tiefere Ebene wird die entsprechende geforderte Funktion formuliert und das entsprechende Zuverlässigkeitsmodell aufgestellt. Dies hinunter bis zu der Ebene, wo die Zuverlässigkeitsangaben jede Komponente bekannt sind. In der Praxis wird diese Ebene oft als Ersatzteileebene bezeichnet.

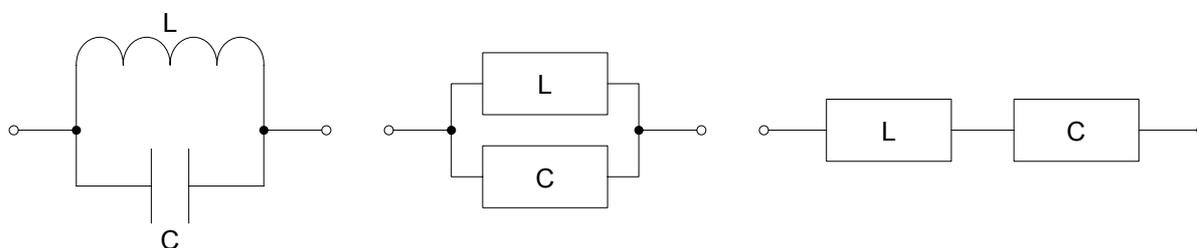
Als Zuverlässigkeitsmodell wird oft das Zuverlässigkeitsblockdiagramm (ZBD) verwendet.

Ein Zuverlässigkeitsblockdiagramm oder auch reliability block diagram (RBD) ist ein Ereignisdiagramm. Es repräsentiert die logische Struktur eines technischen Systems bezüglich der Erfüllung der geforderten Funktion.

Def. 18 Zuverlässigkeitsblockdiagramm

Dabei werden die für die Funktionserfüllung notwendige Elemente (Subsysteme, Baugruppen oder Komponenten) seriell verknüpft. Die Elemente, die ausfallen dürfen, werden parallel verknüpft und bilden die s. g. Redundanz (s. Abschnitt 2.2.3.3).

Ein Zuverlässigkeitsblockdiagramm eines technischen Systems muss immer mit Hilfe von Systemexperten entwickelt werden. Es liegt daran, dass ein Schaltbild oder ein Konstruktionsplan eines technischen Systems die komplizierten Abhängigkeiten zwischen den Subsystemen, Baugruppen oder Komponenten sowie die Auswirkung des Ausfalls eines Elementes auf das Gesamtsystem nicht eindeutig darstellt (s. Abb. 19).



Schaltbild: Parallelschwingkreis

ZBD: falsche Darstellung

ZBD: korrekte Darstellung

Abb. 19 Aufstellung eines Zuverlässigkeitsblockdiagramms

Ein Zuverlässigkeitsblockdiagramm ist nicht die einzige Methode für die Zuverlässigkeitsanalyse. Ein Zuverlässigkeitsmodell eines technischen Systems kann auch in Form eines Fehler- oder Ereignisbaums sowie eines Zustandsgraphen usw. dargestellt werden.

Die gängigen Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse bzw. der Entwicklung eines Zuverlässigkeitsmodells sind in der Tab. 28 zusammengefasst. [IEC60300-3-1]

Method	Suitable for complex systems	Suitable for novel system designs	Quantitative analysis	Suitable for combination of faults	Suitable to handle sequence-dependence	Can be used for dependent events	Bottom-up or top-down	Suitable for dependability allocation	Mastery required (from low to high)	Acceptance and commonality	Need for tool support	Plausibility checks	Availability of tools	IEC standard
Failure rate prediction	No	Yes	Yes	No	No	No	BU	Yes	Low	High	Avg	Yes	High	61709
Fault tree analysis (FTA)	Yes	Yes	Yes	Yes	No	No	TD	Yes	Avg	High	Avg	Yes	High	61025
Event tree analysis (ETA)	NR	NR	Yes	NR	Yes	Yes	BU	NR	High	Avg	Avg	Yes	Avg	
Reliability block diagram analysis (RBD)	NR	NR	Yes	Yes	No	No	TD	Yes	Low	Avg	Avg	Yes	Avg	61078
Markov analysis	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	TD	Yes	High	Avg	High	No	Avg	61165
Petri net analysis	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	TD	Yes	High	Low	High	No	Low	
Failure mode and effects analysis (FMEA)	NR	NR	Yes	No	No	No	BU	NR	Low	High	Low	Yes	High	60812
HAZOP studies	Yes	Yes	No	No	No	No	BU	No	Low	Avg	Low	Yes	Avg	61882
Human reliability analysis	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	BU	No	High	High	Avg	Yes	Avg	
Stress-strength analysis	NA	NA	Yes	NA	NA	No	NA	No	High	Avg	High	Yes	Avg	
Truth table	No	Yes	Yes	Yes	No	No	NA	Yes	High	Avg	High	No	Low	
Statistical reliability methods	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	NA	NR	High	Avg	High	Avg	Low	60300-3-5
NR May be used for simple systems, Not recommended as a stand-alone method, to be used jointly with other methods. TD Top-down. BU Bottom-up. Avg Average. NA The criterion is not applicable with respect to this method.														

Tab. 28 Methoden der Zuverlässigkeitsanalyse

Wenn das Zuverlässigkeitsmodell von den Experten genehmigt ist und die Zuverlässigkeitsparametern (z. B. Ausfallrate, MDT, Betriebsprofil usw.) aller Komponenten bekannt sind, dann wird beim nächsten Schritt die Zuverlässigkeitsberechnung durchgeführt.

2.2.3.1 Zuverlässigkeitsberechnung eines Einzelementes

Das nichtreparierbare Einzelement (z. B. Widerstand oder Kondensator) wird durch die Ausfallwahrscheinlichkeitsfunktion $F(t) = \Pr\{\tau \leq t\}$ charakterisiert, wobei die Zuverlässigkeitsfunktion (Überlebenswahrscheinlichkeit) ist gegeben durch $R(t) = \Pr\{\tau > t\} = 1 - F(t)$.

In der Regel wird $R(0) = 1$ angenommen. Der Mittelwert der ausfallfreien Arbeitszeit MTTF (Mean Time To Failure) lässt sich berechnen aus (s. auch Tab. 22)

$$MTTF = E[\tau] = \int_0^{\infty} R(t) dt$$

Gl. 2.2—1

Die Gl. 2.2—1 gilt nicht nur für ein Einzelement, sondern auch für eine beliebige Betrachtungseinheit (eines beliebigen Systems) [2]. In diesem Fall wird MTTF definiert als

$$MTTF_S = E[\tau] = \int_0^{\infty} R_S(t) dt$$

Gl. 2.2—2

Laut [2], kann diese Formel auch auf die reparierbaren Systeme angewendet werden, wenn das System nach der Reparatur als neuwertig betrachtet werden kann. In diesem Fall läuft nach der Erneuerung wieder eine ausfallfreie Arbeitszeit τ mit der gleichen Verteilungsfunktion und damit mit dem gleichen Erwartungswert an.

Die Zuverlässigkeitsfunktion (also Überlebenswahrscheinlichkeit) eines Einzelementes ist durch die entsprechende Ausfallrate $\lambda(t)$ vollständig bestimmt.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Pr\{t < \tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t\}}{\Delta t} = - \frac{dR(t)}{R(t) dt}$$

Mit $R(0) = 1$ folgt:

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}$$

Im Falle verschleißfreier elektronischer Komponenten ist die Ausfallrate $\lambda(t) = \lambda$ konstant. Dann gilt:

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \quad MTBF = \frac{1}{\lambda}$$

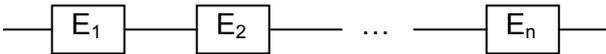
Gl. 2.2—3

Auf den Unterschied zwischen MTTF und MTBF wurde in Tab. 22 hingewiesen. Für eine nicht konstante Ausfallrate kann die Verteilungsfunktion der ausfallfreien Arbeitszeit mit einer gewichteten Summe verschiedener Verteilungsfunktionen (z. B. Weibullverteilung) approximiert werden.

2.2.3.2 Serien- und Parallelstrukturen

Ein technisches System, bestehend aus $E_1 \dots E_n$ Elementen (Subsysteme, Baugruppen oder Komponenten), ist im Sinne der Zuverlässigkeit dann seriell, wenn für die Erfüllung der geforderten Funktion alle Elemente $E_1 \dots E_n$ funktionieren müssen.

Die Tab. 29 fasst die Eigenschaften eines Seriensystems zusammen.

1	Das System hat endlich viele Elemente $E_1 \dots E_n$.
	
2	Ausfall eines Elementes führt zum totalen Ausfall des Gesamtsystems. Es werden nur Totalausfälle erfasst, keine Driftausfälle. Die Ausfälle der Elementen $E_1 \dots E_n$ sind voneinander unabhängig.
3	Die Ausfallrate der Elemente ist konstant. Es gilt die Exponentialverteilung.
4	Überlebenswahrscheinlichkeit des Gesamtsystems: $R_S = \prod_{i=1}^n R_i, \text{ oder } R_S = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} = e^{-\lambda_S t}$
5	Ausfallrate des Gesamtsystems: $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$
6	MTBF des Gesamtsystems: $MTBF_S = \frac{1}{\lambda_S}$

Tab. 29 Seriensystem: Zuverlässigkeitseigenschaften

Die Abb. 20 zeigt den Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion $R(t)$ für ein Seriensystem mit $n = 1 \dots 5$ gleichartigen Elementen.

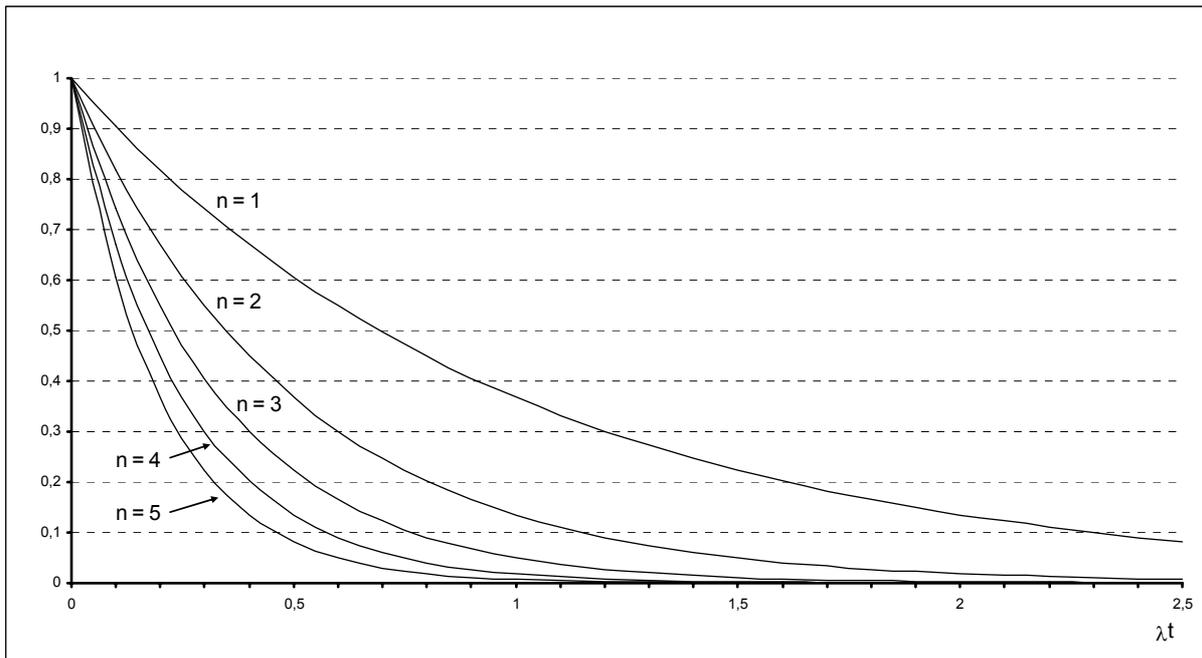
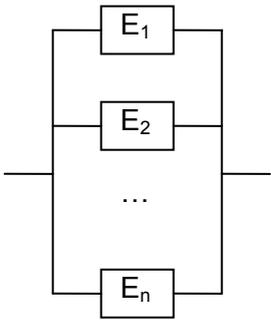


Abb. 20 Seriensystem: Verlauf der Funktion R(t)

Ein technisches System, bestehend aus $E_1 \dots E_n$ Elementen (Subsysteme, Baugruppen oder Komponenten), hat im Sinne der Zuverlässigkeit eine parallele Struktur, wenn für die Erfüllung der geforderten Funktion k Elemente funktionieren müssen. Die übrigen $n-k$ Elemente bilden eine Reserve (Redundanz k aus n).

Die Tab. 30 fasst die Eigenschaften eines Parallelsystems zusammen.

1	<p>Das System hat endlich viele Elemente $E_1 \dots E_n$.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
2	<p>In Abhängigkeit davon, wie die geforderte Funktion formuliert ist, dürfen $n-1$ Elemente ausfallen. Die Ausfälle der Elementen $E_1 \dots E_n$ sind voneinander unabhängig.</p>
3	<p>Die Ausfallrate der Elemente ist konstant. Es gilt die Exponentialverteilung.</p>
4	<p>Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems:</p> $F_S = \prod_{i=1}^n F_i$ <p>Überlebenswahrscheinlichkeit des Gesamtsystems:</p>

	$R_S = 1 - F_S$, oder bei den gleichartigen Elementen $R_S = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$ Eine Verallgemeinerung zur heißen Redundanz (s. auch 2.2.3.3) k aus n für die gleichartige Elemente ergibt: $R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$
5	Ausfallrate des Gesamtsystems: $\lambda_S = \frac{1}{MTBF_S}$
6	MTBF des Gesamtsystems: $MTBF_S = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \dots$, oder bei den gleichartigen Elementen $MTBF_S = \sum_{q=1}^n \frac{1}{q\lambda}$

Tab. 30 Parallelsystem: Zuverlässigkeitseigenschaften

Die Abb. 21 zeigt den Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion $R(t)$ für ein Parallelsystem mit $n = 1 \dots 5$ gleichartigen Elementen.

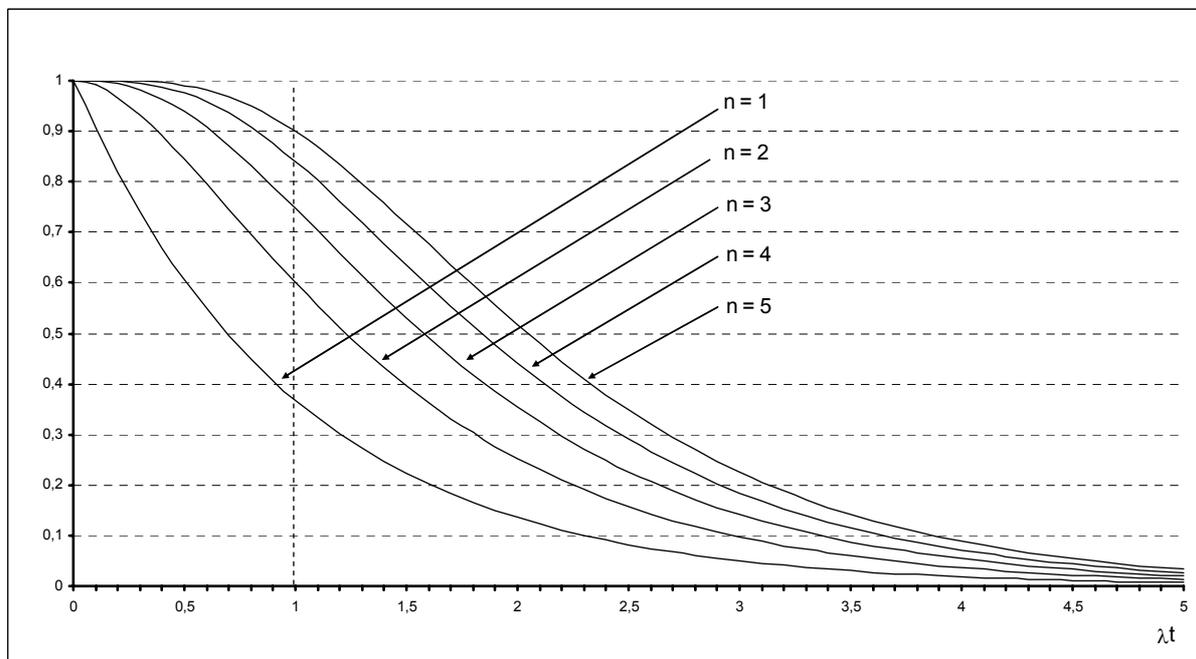
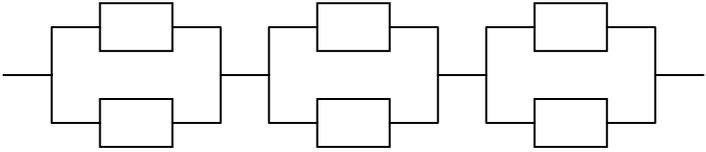
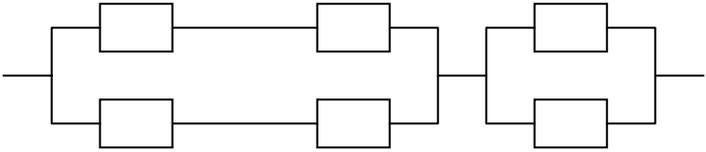
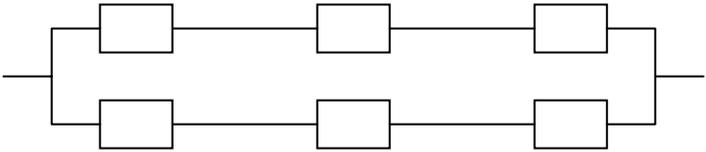


Abb. 21 Parallelsystem: Verlauf der Funktion $R(t)$

Aus Serien- und Parallelstrukturen lassen sich verschiedene Kombinationen bilden. Folgende Tabelle (s. Tab. 31) stellt typische vermischte Systeme dar.

1	Serien-Parallelsystem	
2	Mischsystem	
3	Parallel-Seriensystem	

Tab. 31 Vermischte Systeme

Die Abb. 22 zeigt den Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion $R(t)$ für die Systeme aus der Tab. 31, dabei repräsentiert die rote Kurve die Überlebenswahrscheinlichkeit eines Einzelelementes.

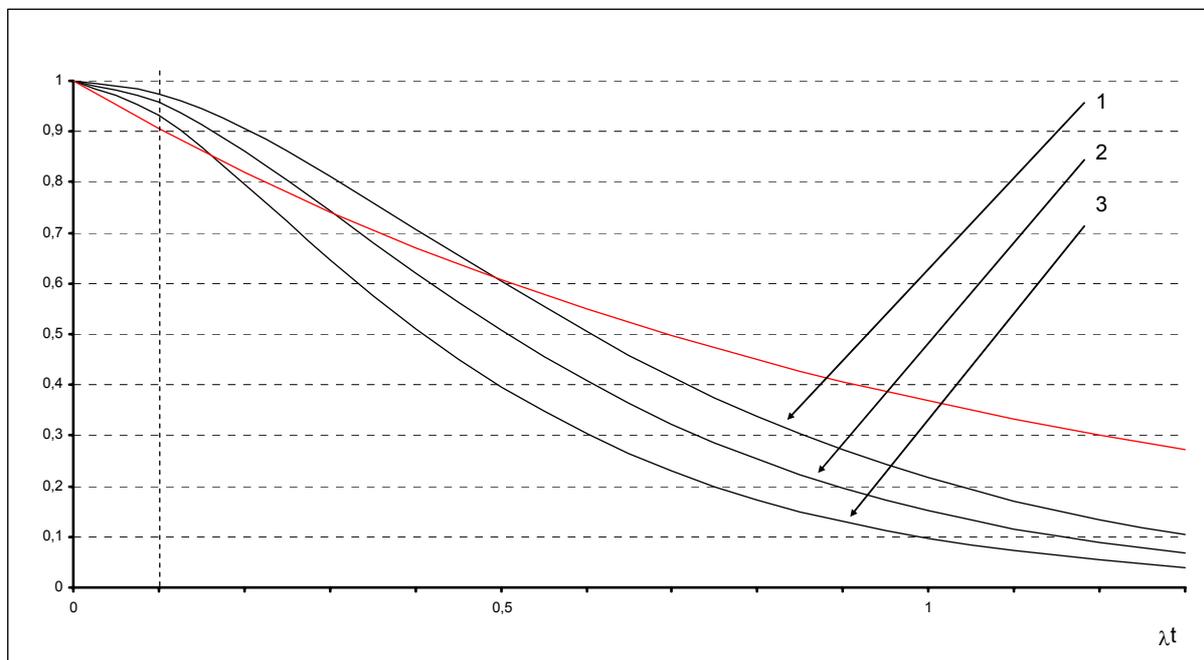


Abb. 22 Vermischte Systeme: Verlauf der Funktion $R(t)$

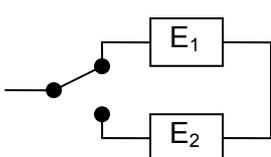
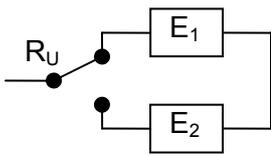
2.2.3.3 Redundanz

Unter dem Begriff Redundanz versteht man das Einführen von zusätzlichen Elementen (Subsystemen, Baugruppen oder Komponenten), welche dieselbe Funktion ausführen. Die Redundanz erhöht grundsätzlich die Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit oder Sicherheit eines technischen Systems und ist dann notwendig, wenn z. B. die postulierte Zuverlässigkeit nicht erreicht wird.

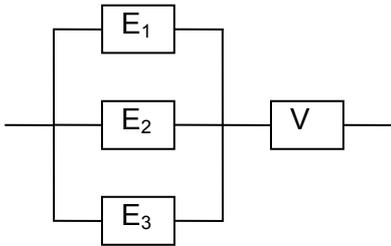
Eine Redundanz, egal ob in Form einer Hard- oder Software, bedeutet immer einen Mehraufwand. Im Weiteren wird nur die Hardwareredundanz betrachtet.

Auf einem Zuverlässigkeitsblockdiagramm erscheint eine Redundanz immer als eine Parallelschaltung, aber nicht jede Parallelschaltung bedeutet Redundanz (s. z. B. Abb. 19).

Die Tab. 32 fasst die wichtigsten Redundanzarten und deren Eigenschaften zusammen.

1	<p>Heiße oder aktive Redundanz: das Redundanzelement ist von Anfang an der gleichen Belastung wie das arbeitende Element ausgesetzt. Die entsprechenden Gleichungen für die Zuverlässigkeitsparameter ($R(t)$, MTBF, usw.) sind bereits in der Tab. 30 bzw. auf der Abb. 21 dargestellt.</p>
2	<p>Warme Redundanz: das Redundanzelement ist bis zum Ausfall des arbeitenden Elementes oder bis zu seinem eigenen Ausfall einer geringeren Belastung ausgesetzt. Die Ausfallrate im Reservezustand ist kleiner als im Arbeitszustand. Für die Zuverlässigkeitsparameter gelten die Gleichungen aus der Tab. 30.</p>
3	<p>Kalte (stand-by) Redundanz: das Redundanzelement ist bis zum Ausfall des Arbeitselementes keiner Belastung ausgesetzt. Die Ausfallrate im Reservezustand ist gleich null. Die Umschaltung erfolgt entweder manuell oder automatisch. Generell ist die Zuverlässigkeit einer kalten Redundanz auch von der Zuverlässigkeit des Umschalters abhängig.</p> <p>"Nie versagender" oder sicherer Umschalter: [23, 10]</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$:</p> $R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \text{ und } MTTF_S = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$ <p>Falls $\lambda_1 = \lambda_2$:</p> $R_S(t) = e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) \text{ und } MTTF_S = \frac{2}{\lambda}, \text{ s. auch Abb. 23}$ </div> </div> <p>Realer Umschalter: [23]</p> <div style="display: flex; align-items: flex-start;"> <div style="margin-right: 20px;">  </div> <div> <p>Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2$:</p> $R_S(t) = e^{-\lambda_1 t} + R_U \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}), \text{ wobei } R_U \text{ die Zuverlässigkeit des Umschalters ist.}$ <p>Falls $\lambda_1 = \lambda_2$:</p> $R_S(t) = e^{-\lambda t} (1 + R_U \lambda t), \text{ s. auch Abb. 24}$ </div> </div>

4 Majoritätsredundanz: eine spezielle Ausführung der Redundanz k aus n. Für die Erfüllung der geforderten Funktion werden 2n+1 gleiche Elemente in heißer Redundanz verwendet. Die 2n+1 Ausgänge werden durch ein Vergleichselement (Voter) miteinander verglichen. Die Majoritätsredundanz realisiert damit in einfacher Weise eine Fehler-tolerante Struktur mit automatischer korrekter Weiterführung der geforderten Funktion.



$$R_S = \left(\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i} \right) R_V$$

Falls $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ und 2-aus-3 Redundanz:

$$R_S = (3R^2 - 2R^3)R_V, \text{ s. auch Abb. 25}$$

Tab. 32 Redundanzarten und deren Eigenschaften

Der Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion R(t) bei kalter Redundanz mit einem sicheren Umschalter (s. Tab. 32, Punkt 3) ist in Abb. 23 dargestellt.

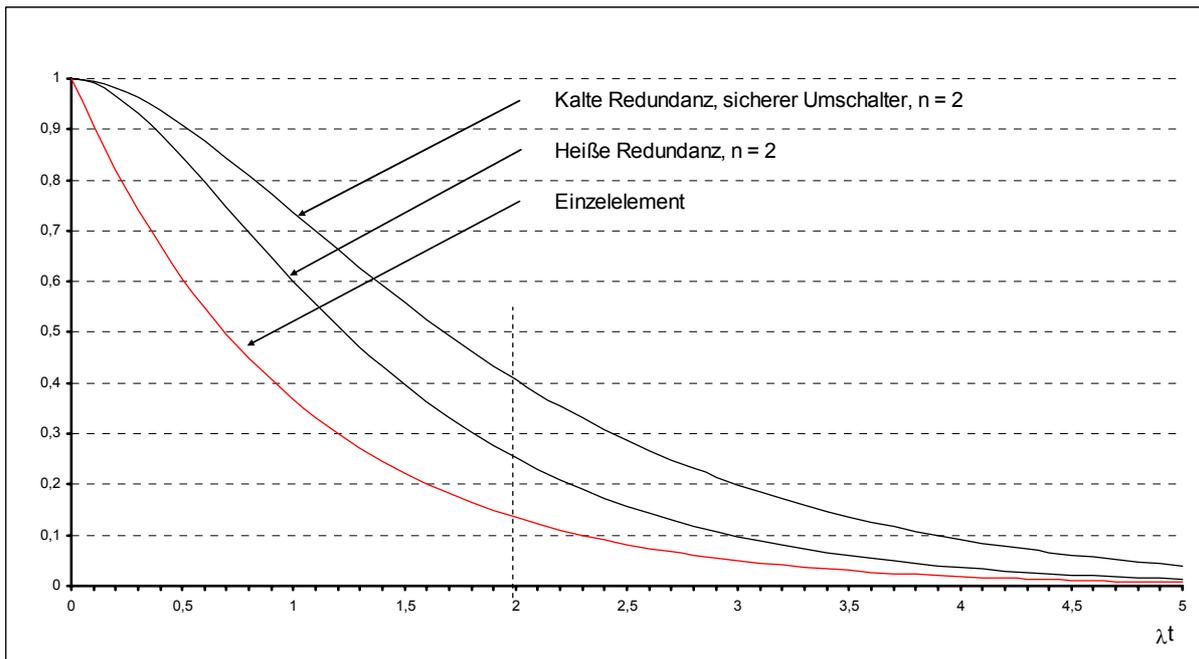


Abb. 23 Kalte Redundanz, sicherer Umschalter: Verlauf der Funktion R(t)

Der Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion R(t) bei kalter Redundanz mit einem realen Umschalter ($R_u = 0.8$ und $R_v = 0.5$, s. auch Tab. 32, Punkt 3) ist in Abb. 24 dargestellt.

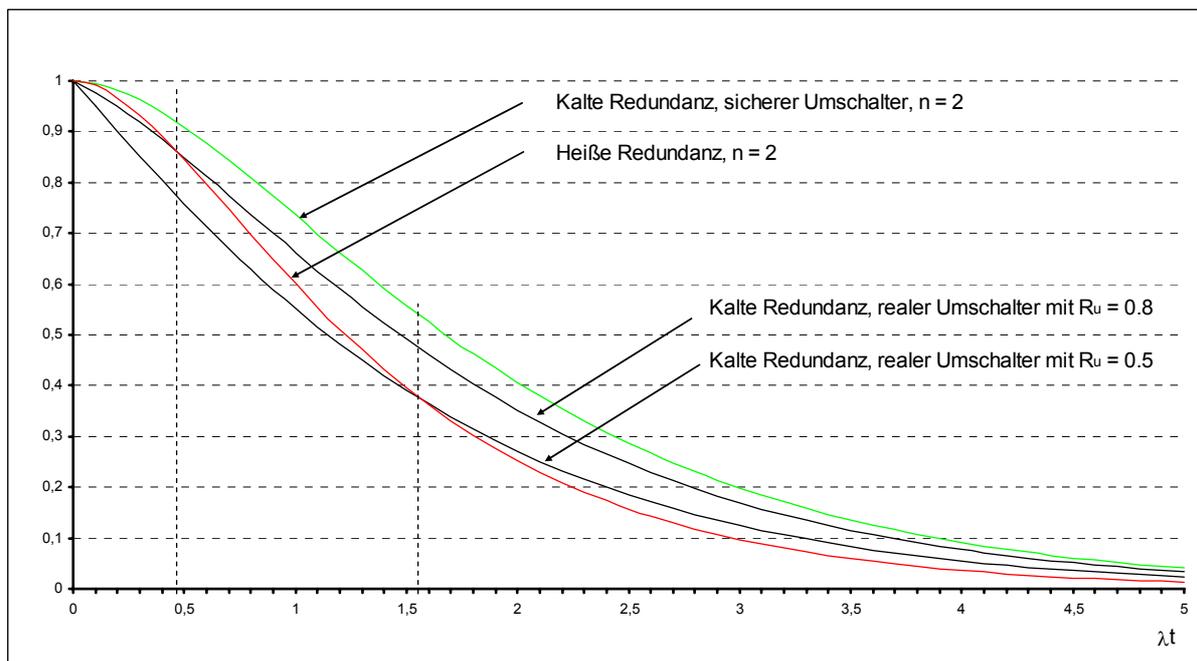


Abb. 24 Kalte Redundanz, realer Umschalter: Verlauf der Funktion R(t)

Der Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktion R(t) bei 2 aus 3 Majoritätsredundanz mit einem sicheren und einem realen (Überlebenswahrscheinlichkeit 80%) Voter ist in Abb. 25 dargestellt.

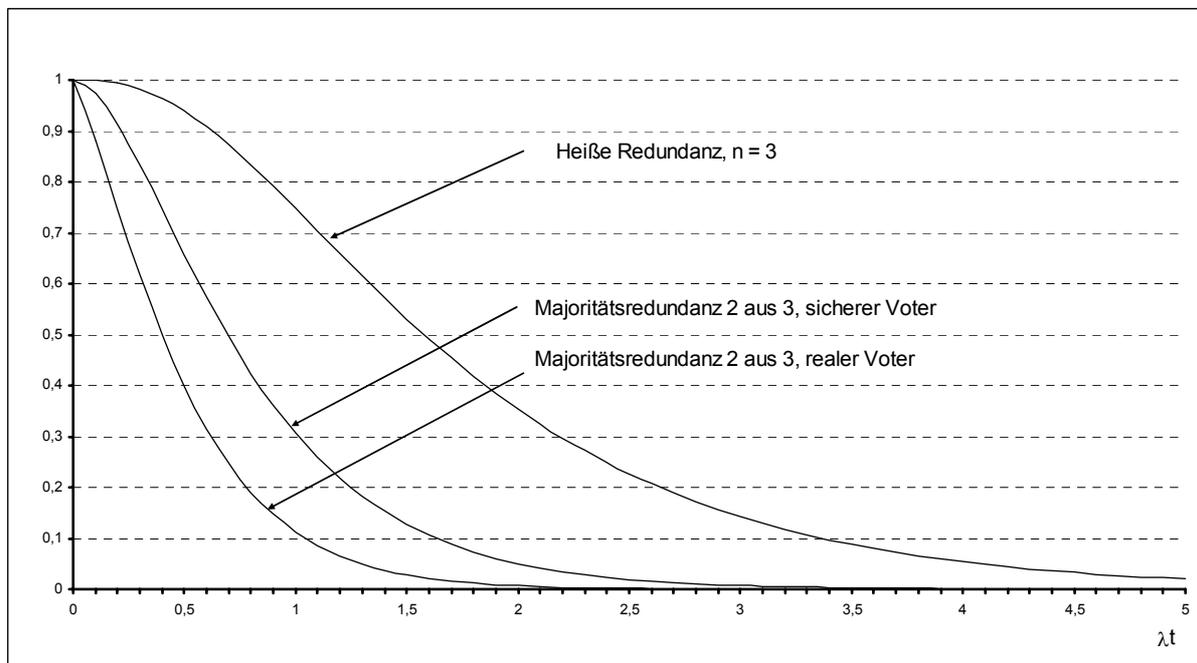


Abb. 25 Majoritätsredundanz: Verlauf der Funktion R(t)

Zusammenfassend werden eine kalte Redundanz (n = 2, sicherer Umschalter), eine heiße Redundanz (n = 2) sowie ein Einzelelement miteinander verglichen.

Die Abb. 26 stellt den Verlauf der entsprechenden Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktionen R(t) dar.

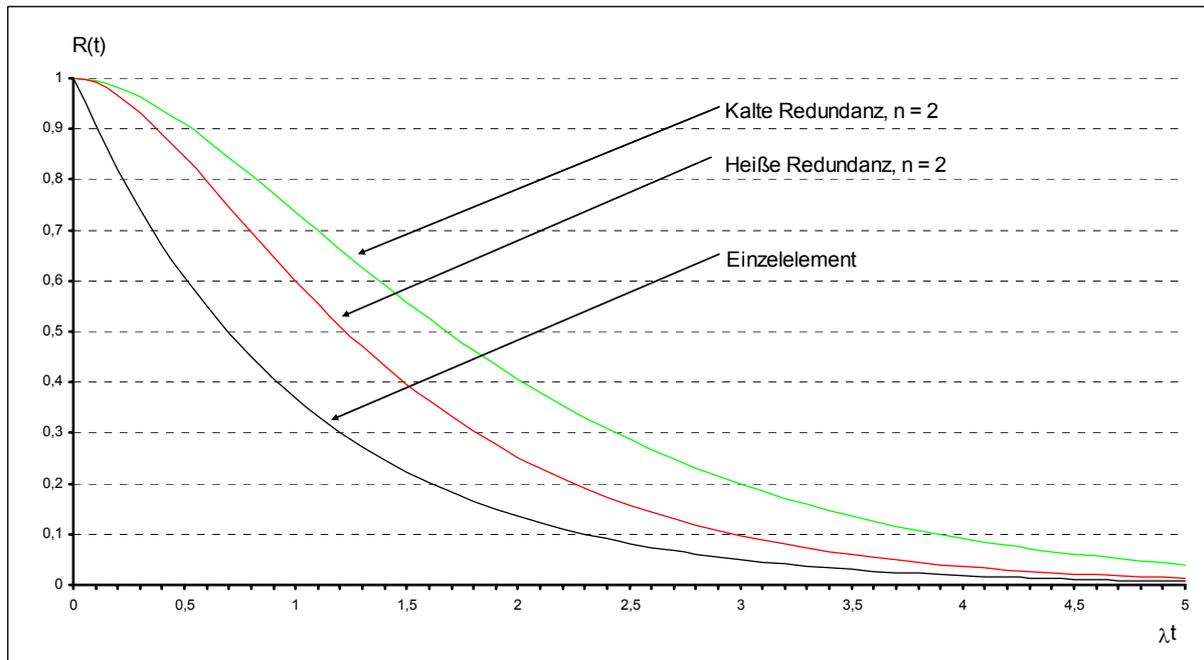


Abb. 26 Kalte, heiße Redundanz und Einzelement: $R(t)$

Die Abb. 27 stellt den Verlauf der entsprechenden Ausfalldichtefunktionen $f(t)$ dar.

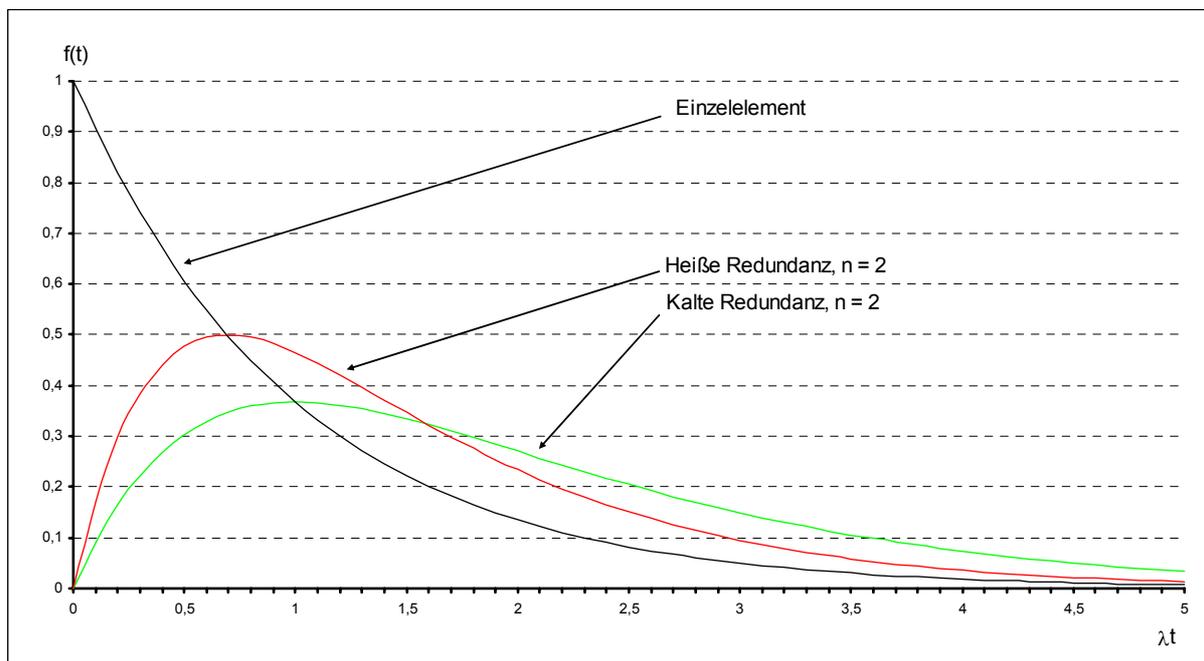


Abb. 27 Kalte, heiße Redundanz und Einzelement: $f(t)$

Und die Abb. 28 stellt den Verlauf der entsprechenden Ausfallraten $\lambda(t)$ dar. Die Ausfallrate eines Einzelementes bleibt zeitunabhängig (konstant). Dagegen ist die Ausfallrate eines Systems mit heißer oder kalter Redundanz zeitabhängig und konvergiert im Laufe der Zeit (bei heißer Redundanz schneller, bei kalter Redundanz langsamer) gegen die Ausfallrate eines Einzelementes.

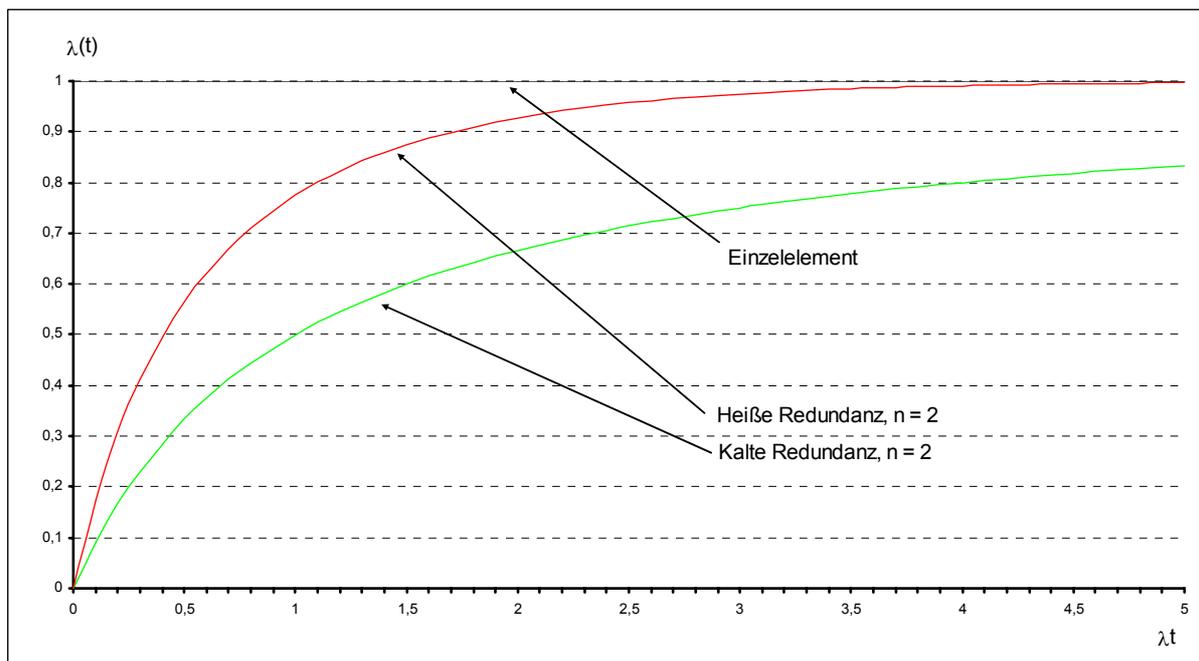
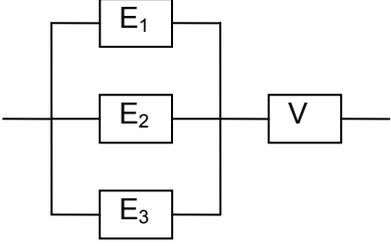
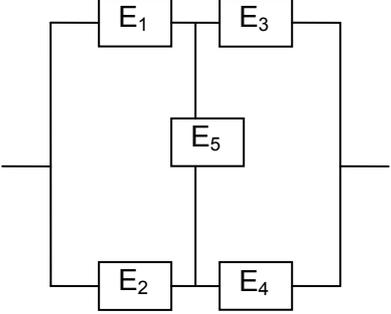
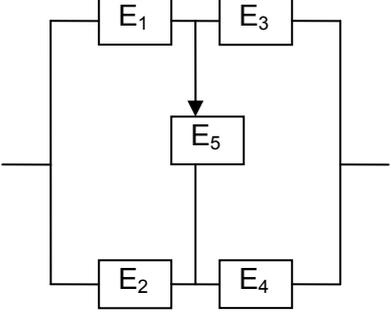


Abb. 28 Kalte, heiße Redundanz und Einzelement: $\lambda(t)$

2.2.3.4 Systeme ohne Reparatur

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Strukturen sowie die Gleichungen für die Zuverlässigkeitskenngrößen der nicht reparierbaren Systeme zusammengefasst (s. Tab. 33)

	<p>Einzelement:</p> $\lambda(t) = \lambda \text{ und } R(t) = e^{-\lambda t}$
	<p>Seriensystem:</p> $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ und } R_S = \prod_{i=1}^n R_i, \text{ oder } R_S = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t} = e^{-\lambda_S t}$
	<p>Parallelsystem:</p> $R_S = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^n$ $MTBF_S = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} + \dots, \text{ oder}$ $MTBF_S = \sum_{q=1}^n \frac{1}{q\lambda} \text{ bei gleichartigen Komponenten}$ $\lambda_S = \frac{1}{MTBF_S}$ <p>Falls es eine Redundanz k aus n ist:</p>

	$R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i}$
	<p>Majoritätsredundanz 2 aus 3:</p> $R_S = (3R^2 - 2R^3)R_V$
	<p>Brückenschaltung mit Zweiwegverbindung:</p> $R_S = R_5(R_1 + R_2 - R_1R_2)(R_3 + R_4 - R_3R_4) + (1 - R_5)(R_1R_3 + R_2R_4 - R_1R_2R_3R_4)$
	<p>Brückenschaltung mit Einwegverbindung:</p> $R_S = R_4(R_2 + R_1(R_3 + R_5 - R_3R_5) - R_1R_2(R_3 + R_5 - R_3R_5)) + (1 - R_4)R_1R_3$

Tab. 33 Nicht reparierbare Systeme

2.2.3.5 Reparierbare Systeme

Die Zuverlässigkeitsanalyse der reparierbaren Systeme ist wesentlich komplexer und basiert auf der Theorie stochastischer Prozesse. Dabei wird in der Regel von einem Zuverlässigkeitsblockdiagramm und von den Ausfall- bzw. Reparaturraten jedes Elementes ausgegangen.

Aus diesem Grund wird bei den reparierbaren Systemen nicht mehr die Verteilungsfunktion der ausfallfreien Arbeitszeit, sondern die Verfügbarkeit als eine signifikante Kenngröße verwendet.

Verfügbarkeit: die Wahrscheinlichkeit, dass ein technisches System zu einem vorgegebenen Zeitpunkt in einem funktionsfähigen Zustand angetroffen wird bzw. die geforderte Funktion erfüllt wird.

Def. 19 Verfügbarkeit

Die Tab. 34 fasst die Arten der Verfügbarkeit zusammen, die bei der Zuverlässigkeitsanalyse eines technischen Systems am meisten verwendet werden.

<p>Sofortige Verfügbarkeit (point availability)</p>	<p>Die sofortige Verfügbarkeit $A(t)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein System sofort betriebsfähig ist, sobald es zu einem beliebigen Zeitpunkt benötigt wird.</p> $A(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\mu + \lambda)t}$ <p>wobei μ die Reparaturrate und λ die Ausfallrate des Systems ist (s. Abb. 29).</p> <p>Oder</p> $A(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda} + \left(\alpha - \frac{\mu}{\mu + \lambda} \right) e^{-(\mu + \lambda)t}$ <p>wobei α - die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ das System intakt ist (s. Abb. 30).</p>
<p>Missionsverfügbarkeit (operational availability)</p>	<p>Die Missionsverfügbarkeit ist der zeitliche Anteil im Intervall $[t_1, t_2]$, in dem die geforderte Funktion erfüllt sein muss.</p> $A_m(t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A(t) dt$ <p>wobei t_1 – Missionsbeginn und t_2 – Ende der Mission</p>
<p>Dauerverfügbarkeit (steady state availability)</p>	<p>Die Dauerverfügbarkeit ist die Wahrscheinlichkeit, mit der ein System über ein sehr langes Zeitintervall verfügbar sein muss.</p> $A_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \frac{\mu}{\mu + \lambda}$ <p>Der A_{ss} Wert hat bei den reparierbaren Systemen die Bedeutung des MTTF Wertes der nichtreparierbaren Systeme.</p> $A_{ss} = \frac{MTBF}{MTBF + MDT}$ <p>Die technische Bedeutung von A_{ss} zeigt sich darin, dass man durch Verkleinern von MDT auch bei niedrigen MTBF Werten eine hohe Dauerverfügbarkeit erhalten kann.</p>

Tab. 34 Arten der Verfügbarkeit

Die Abb. 29 zeigt, dass die Verfügbarkeitsfunktion gegen einen bestimmten Wert μ/λ konvergiert.

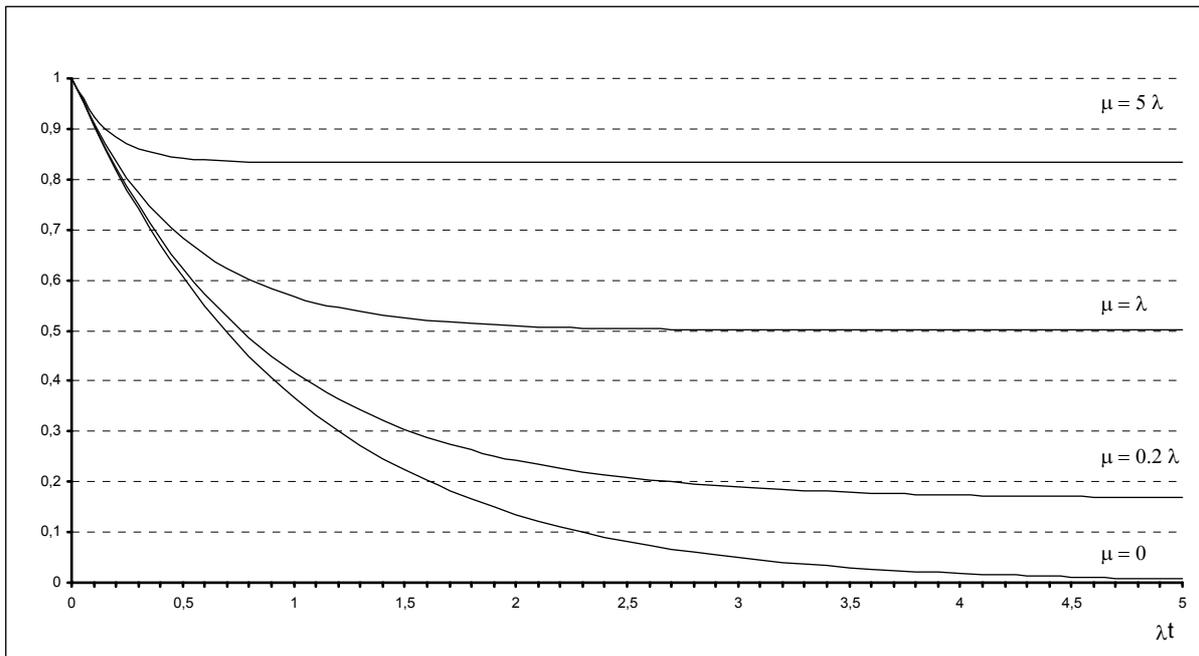


Abb. 29 Sofortige Verfügbarkeit: Einzelkomponente mit Reparatur

Die Abb. 30 zeigt den Einfluss des α -Faktors auf die sofortige Verfügbarkeit. Ein α -Faktor bedeutet die Wahrscheinlichkeit, dass ein Element zum Zeitpunkt $t = 0$ intakt ist. Man sieht deutlich, dass die sofortige Verfügbarkeit nach ca. vierfacher MTTR gegen die Dauerverfügbarkeit konvergiert.

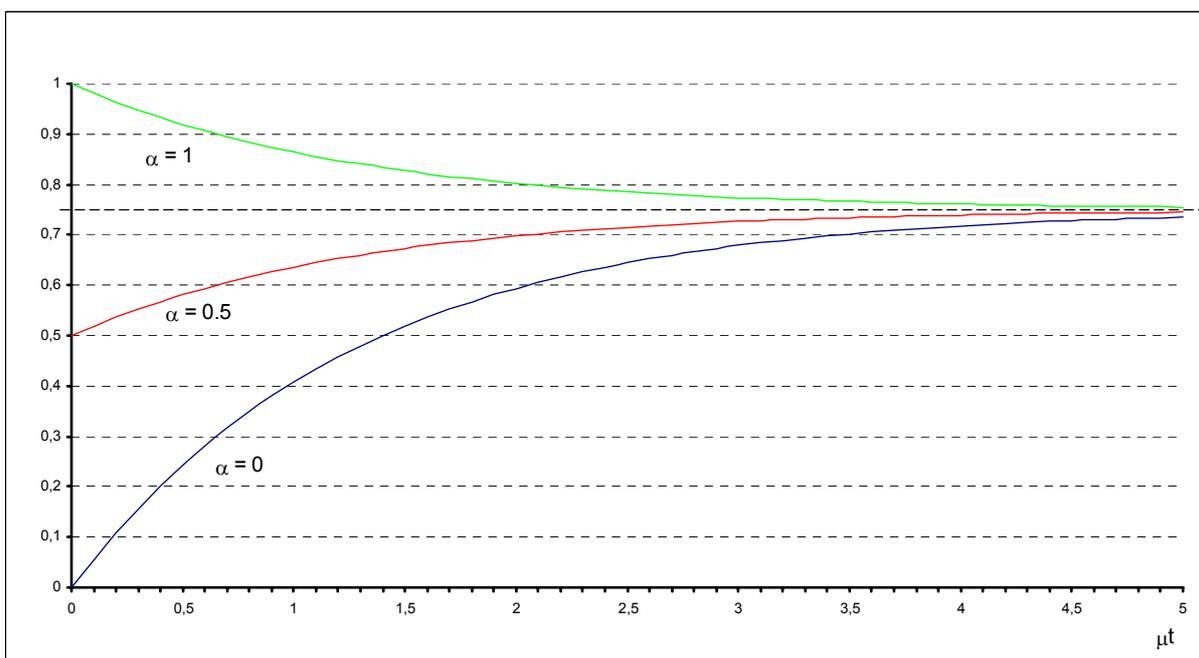


Abb. 30 Sofortige Verfügbarkeit: Einzelkomponente mit Reparatur ($\mu = 3\lambda$), α -Faktor

Die Tab. 35 fasst die Gleichungen für die Zuverlässigkeitskenngrößen eines reparierbaren Einzelelementes zusammen. [2, 23, 22]

Pr{im Arbeitszustand zur Zeit t = 0}	<p>Falls λ und μ beliebig sind:</p> $\frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$ <p>Falls λ und μ konstant sind:</p> $\frac{\mu}{\mu + \lambda}$
Verteilungsfunktion der ersten ausfallfreien Arbeitszeit	<p>Falls λ und μ beliebig sind:</p> $\frac{1}{MTTF} \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt$ <p>Falls λ und μ konstant sind:</p> $1 - e^{-\lambda t}$
Sofortige Verfügbarkeit	<p>Falls λ und μ beliebig sind:</p> $\frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$ <p>Falls λ und μ konstant sind:</p> $\frac{\mu}{\mu + \lambda}$
Dauerverfügbarkeit	<p>Falls λ und μ beliebig sind:</p> $\frac{MTTF}{MTTF + MTTR}$ <p>Falls λ und μ konstant sind:</p> $\frac{\mu}{\mu + \lambda}$
Intervallverfügbarkeit	<p>Falls λ und μ beliebig sind:</p> $\frac{1}{MTTF + MTTR} \int_{t_1}^{t_2} (1 - F(t)) dt$ <p>Falls λ und μ konstant sind:</p> $\frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$

Tab. 35 Reparierbares Einzelement

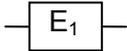
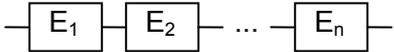
Die Tab. 36 stellt die Gleichungen für die Zuverlässigkeitskenngrößen eines reparierbaren Systems ohne Redundanz dar. [2]

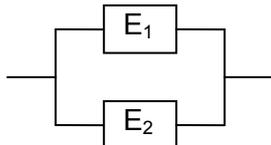
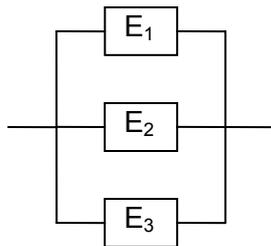
Zuverlässigkeitsfunktion $R_s(t)$	Falls jedes Element unabhängig von den anderen arbeitet: $R_s(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}$
Mittelwert der ausfallfreien Arbeitszeit $MTTF_s$	$MTTF_s = \int_0^{\infty} R_s(t) dt = \frac{1}{\lambda_s}$
Die Ausfallrate λ_s	$\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)$
Sofortige Verfügbarkeit und Dauer- verfügbarkeit im stationären Zustand	Falls λ und μ konstant sind: $A(t) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}} \approx 1 - \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ Falls λ konstant und μ beliebig ist: $A(t) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i MTTR_i} \approx 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i MTTR_i$
Intervallverfügbarkeit	Falls λ_i konstant im $[t_1, t_2]$ sind: $\frac{\mu}{\mu + \lambda} e^{-\lambda_s(t_2 - t_1)}$

Tab. 36 Reparierbares System ohne Redundanz

Für eine analytische Zuverlässigkeitsberechnung eines reparierbaren technischen Systems werden in der Regel Zustandsverfahren (z. B. Markov-Methode, s. Abschnitt 3.2) verwendet. Und die Lösung an sich kann sehr aufwendig sein.

Es existieren allerdings die Grundmodelle zur Vereinfachung der Zuverlässigkeitsberechnung der reparierbaren Systeme. Die Tab. 37 fasst die wichtigsten Modelle zusammen. [2]

	Einzelelement Dauerverfügbarkeit: $A_{ss}(t) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} \approx 1 - \frac{\lambda}{\mu}$
	Seriensystem Ausfallrate: $\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ Dauerverfügbarkeit:

	$A_{ss}(t) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_1}{\mu_1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 + \frac{\lambda_n}{\mu_n}} \approx 1 - \left(\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu_n} \right)$ <p>Reparaturrate: $\mu_s = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{\frac{\lambda_1}{\mu_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu_n}} \approx \frac{\lambda_s}{1 - A(t)}$</p>
	<p>Parallelsystem</p> <p>Ausfallrate: $\lambda_s = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2}$</p> <p>Dauerverfügbarkeit:</p> $A_{ss} = 1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2 + \mu_2 \lambda_1} \approx 1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2}$ <p>Reparaturrate: $\mu_s = \frac{\lambda_s}{1 - A_{ss}(t)} \approx \mu_1 + \mu_2$</p>
	<p>Majoritätsredundanz 2 aus 3:</p> <p>Ausfallrate: $\lambda_s = \frac{6\lambda^2}{\mu}$</p> <p>Dauerverfügbarkeit: $A_{ss} = 1 - \frac{3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{1 + \frac{3\lambda}{\mu}} \approx 1 - 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$</p> <p>Reparaturrate: $\mu_s = \frac{\lambda_s}{1 - A_{ss}(t)} \approx 2\mu$</p>

Tab. 37 Grundmodelle der reparierbaren Systeme

Im Kapitel 3 wird ein Überblick über die meist verwendenden Methoden der Zuverlässigkeitsberechnung von komplexen reparierbaren Systemen gegeben.

2.2.4 Instandhaltungsanalyse

Um die Zuverlässigkeit bzw. Verfügbarkeit eines technischen Systems signifikant zu verbessern, reicht die Einführung der Redundanz alleine nicht aus. Wesentlich effizienter in diesem Sinne sind die durchdachten Instandhaltungsmaßnahmen.

Die Abb. 31 zeigt den Verlauf der Überlebenswahrscheinlichkeitsfunktionen (Annahme: $\lambda = 7 \cdot 10^{-3} \text{ h}^{-1}$ und $\mu = 0,5 \text{ h}^{-1}$) bei:

- 1 Einzelement: $R_S(t) = e^{-\lambda t}$
- 2 Heiße Redundanz ohne Reparatur: $R_S(t) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
- 3 Kalte Redundanz ohne Reparatur: $R_S(t) = e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$
- 4 Heiße Redundanz mit Reparatur, Näherungsformel: [23, 10]
- 5 Kalte Redundanz mit Reparatur, Näherungsformel: [23, 10]

$$R_S(t) = e^{-\frac{2\lambda^2}{\mu}t}$$

$$R_S(t) = e^{-\frac{\lambda^2}{\mu}t}$$

Die entsprechenden Überlebenswahrscheinlichkeitskurven (1 bis 5) sind in der Abb. 31 dargestellt. Deutlich zu sehen ist die Verbesserung der Überlebenswahrscheinlichkeit für Systeme mit Redundanz und Reparatur einem Einzelement gegenüber.

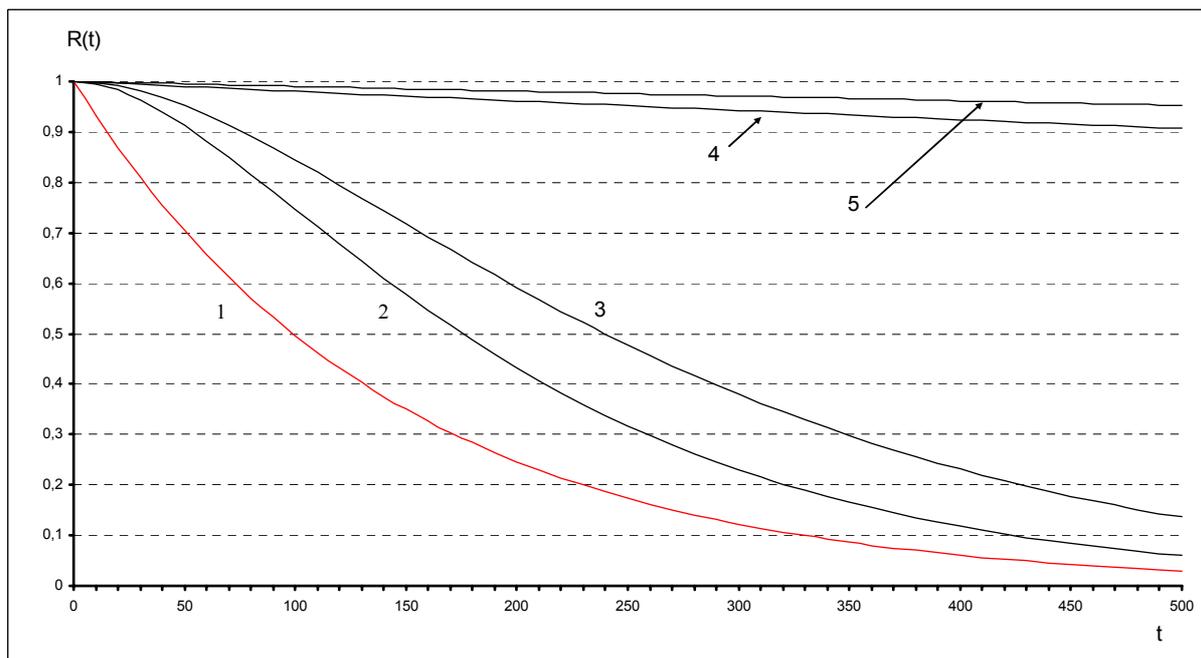


Abb. 31 Redundanz und Instandhaltungsmaßnahmen

Unter Instandhaltung versteht man die Maßnahmen zur Erhaltung bzw. Wiederherstellung der spezifizierten Eigenschaften eines technischen Systems. Dieser Begriff bezieht sich auf die Nutzungsphase. Die Abb. 32 stellt den logischen Aufbau der Instandhaltung dar. [2]

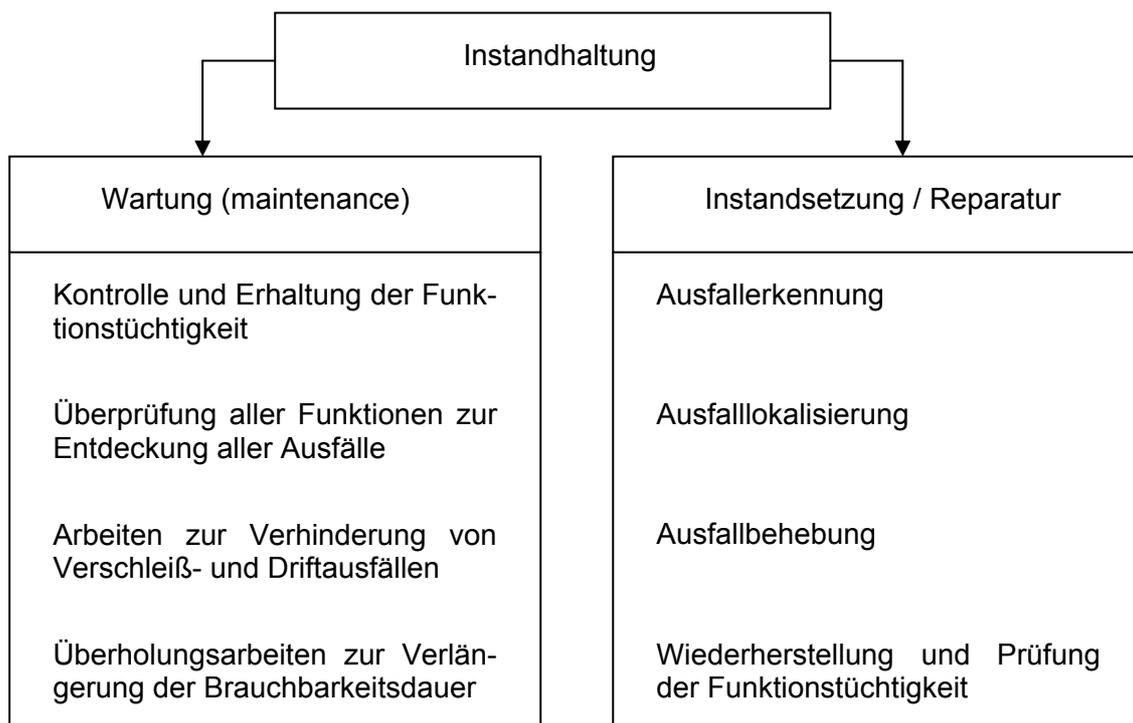
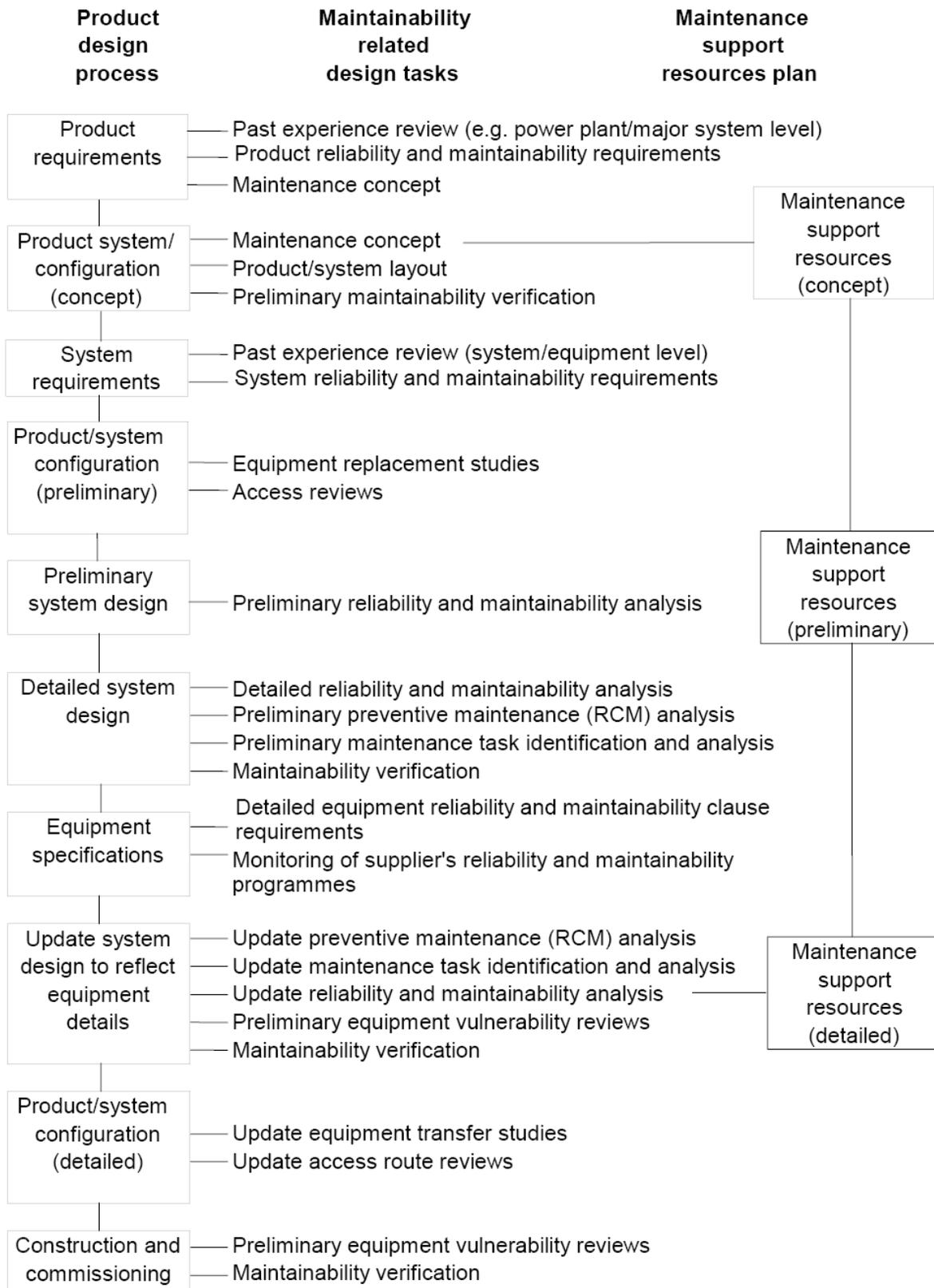


Abb. 32 Instandhaltung

Die Instandhaltbarkeit dagegen ist eine Eigenschaft von technischen Systemen, die bereits in der Entwicklungsphase (s. Abb. 33) festgelegt wird.



IEC 2427/2000

Abb. 33 Instandhaltungsanalyse in der Entwicklungsphase, IEC 60300-3-10

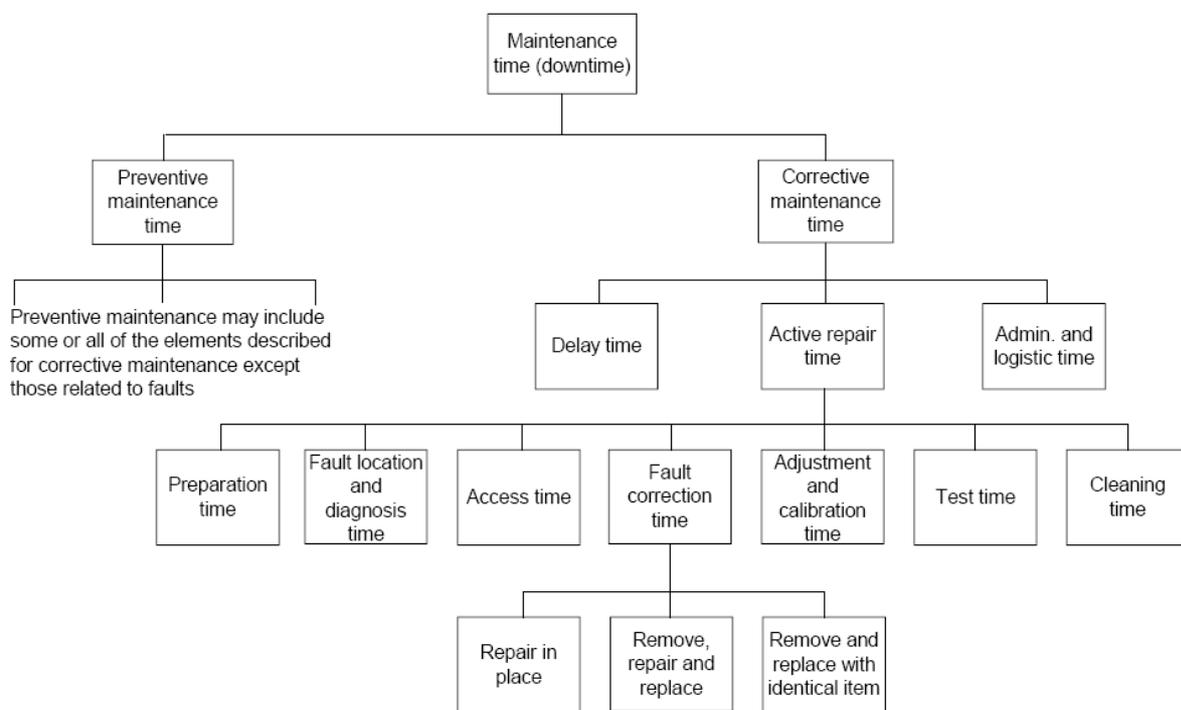
Wirksame (im Sinne des Designs eines technischen Systems) Maßnahmen zur Erhöhung der Instandhaltbarkeit sind z. B. modulare Struktur und Einbau von Selbstdiagnosemechanismen (diagnostic coverage). In anderen Worten, gutes Design eines technischen Systems

bildet eine Basis für die effektiven Wartungskonzepte sowie Konzepte der logistischen Unterstützung der Wartung.

2.2.4.1 Strategie der vorbeugenden Wartung

Ziel der Wartung ist es, die Verfügbarkeit eines technischen Systems zu erhöhen. Auf einer Seite wird es durch die Erhöhung der MTBF, also der ausfallfreien Zeiten des Systems, erreicht, in dem man z. B. gewisse Verschleißteile regelmäßig schmiert. Auf der anderen Seite kann man durch Wartung auch die MDT, also die Ausfallzeiten des Systems, erheblich verkürzen.

Der Zeitfaktor spielt eine Schlüsselrolle. Bezogen auf die Zeit, kann man Wartung in zwei Typen unterteilen (s. Abb. 34). Einer davon ist die vorbeugende oder planmäßige Wartung (preventive maintenance). Und der andere ist korrigierende oder außerplanmäßige Wartung (corrective maintenance).



IEC 2428/2000

Abb. 34 Vorbeugende und korrigierende Wartung IEC 60300-3-10

Die Vorteile (s. Abb. 34 und Tab. 38) einer vorbeugenden Wartung liegen auf der Hand: sie wird gezielt und planmäßig (oft in der Zeiten, wann eine Anlage nicht betrieben wird oder befindet sich in s. g. Ruhephase) durchgeführt.

	Vorbeugende Wartung	Korrigierende Wartung
Allgemeine Verzögerung	entfällt	vorhanden
Administrative bzw. logistische Verzögerung	entfällt	vorhanden

Zeit der aktiven Reparatur	evtl. vorhanden	vorhanden
Zeit der Fehlerbehebung	evtl. vorhanden	vorhanden
Zeit für Fehlerlokalisierung und Diagnose	evtl. vorhanden	vorhanden
Justierung und Kalibrierung	vorhanden	vorhanden
Testzeit	vorhanden	vorhanden
Zeit für Zugangsbeschaffung (sehr kritisch bei den Kraftwerken)	entfällt	vorhanden
Zeit für Vorbereitung	entfällt	vorhanden

Tab. 38 Vorbeugende vs. korrigierende Wartung

Wie die Abb. 35 zeigt, besteht die Bedeutung der vorbeugenden Wartung darin, einen möglichen Ausfall gar nicht erst zuzulassen.

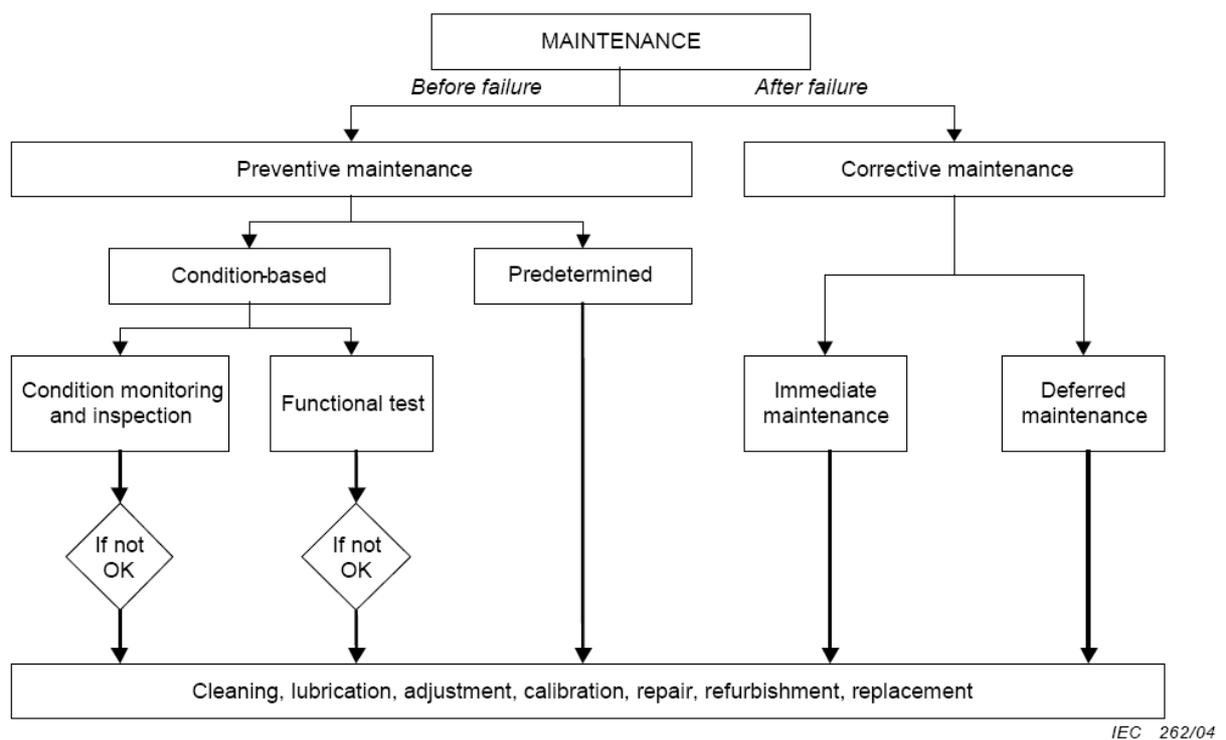


Abb. 35 Vorbeugende Wartung: Einsatzprinzip, IEC 60300-3-14

Die Frage, wann die Prozedur der vorbeugenden Wartung gestartet werden muss, lässt sich sehr flexibel beantworten (s. Abb. 35):

Vordefinierte Zeitpunkte Solche Zeitpunkte werden aufgrund der MTBF der Einzelelemente bzw. des Gesamtsystems errechnet. Die Ergebnisse hängen im jeden konkreten Fall von den Betriebsbedingungen ab.

Der Mittelwert der Reparaturzeit eines technischen Systems wird wie folgt berechnet: [2]

$$MTTR_s = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{MTTR_i}{MTBF_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{MTBF_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i MTTR_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\lambda_s} \sum_{i=1}^n \lambda_i MTTR_i$$

Der Mittelwert der Wartung eines technischen Systems: [2]

$$MTPM_s = \sum_{i=1}^n MTPM_i$$

Zustandsbedingt In diesem Fall wird die Entscheidung von einem Diagnosesystem oder einem intelligenten Stundenzähler getroffen.

In beiden Fällen müssen Expertenkenntnisse über das jeweilige System berücksichtigt werden.

Die logistische Unterstützung (maintenance support) muss u. a. auch die Frage der optimalen Anzahl der Ersatzteile beantworten.

2.2.4.2 Optimale Anzahl von Ersatzteilen

In der Praxis werden die defekten Elemente (Komponenten oder Baugruppen) oft nicht repariert, sondern durch neue ersetzt. Dieser Fall liegt vor, wenn wegen geschlossener Bauform eine Reparatur nicht möglich oder aber der Austausch billiger als Reparatur ist.

Gesucht wird also die Anzahl der Ersatzteile n , die in Reserve gelegt werden müssen, damit der Bedarf während der kumulierten Betriebszeit T mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit γ abgedeckt werden kann:

$\Pr\{\tau_1 + \dots + \tau_n > T\} \geq \gamma$, wobei τ_1, \dots, τ_n sind die Zeitpunkte der Ausfälle.

Aus diesem Grund kann man die Anzahl der Ersatzteile als $n = \frac{T}{E[\tau_i]} = \frac{T}{MTTF}$ berechnen,

aber so kann der Bedarf nur mit der Wahrscheinlichkeit $\gamma = 0.5$ abgedeckt werden. Man muss also mehr Ersatzteile reservieren, um mit einer größeren Wahrscheinlichkeit dem Bedarf entsprechen zu können.

Falls die Ausfälle exponentiell verteilt sind, dann kann die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Anzahl der Ausfälle in einem bestimmten Zeitintervall nach der Poissonverteilung wie folgt berechnet werden: [23]

$$\Pr\{n, T\} = \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}$$

Es gibt auch eine Verallgemeinerung für beliebige Verteilungsfunktionen und gegebene Werte γ , T , $E[\tau]$ und $\text{Var}[\tau]$: [2]

$$n = \left(\frac{dk}{2} + \sqrt{\left(\frac{dk}{2}\right)^2 + \frac{T}{E[\tau]}} \right)^2, \text{ wobei } d = -\frac{T - nE[\tau]}{\sqrt{nVar[\tau]}} \text{ und } k = \frac{\sqrt{Var[\tau]}}{E[\tau]}$$

2.2.4.3 Wirtschaftliche Aspekte

Die Entwicklung des Wartungskonzeptes begleiten ein technisches System während des gesamten Lebenszyklus (s. Abb. 36)

Life cycle phase Task or process	Concept and definition	Design and development	Manufacturing	Installation	Operation and maintenance	Disposal
1. General customer needs, constraints and requirements	↔					
2. Required reliability, maintainability and testability	↔					
3. General maintenance support definition	↔					
4. Failure mode and effects analysis		↔			↔	
5. Definition of maintenance concept		↔			↔	
6. Planning of maintenance support resources		↔				
7. Reliability Centred Maintenance		↔			↔	
8. Preparation of technical documentation		↔				
9. Preparation and provision of training		↔				
10. Verification of maintenance activities and maintenance			↔			
11. Provision of spare parts, tools, support equipment, information systems and facilities			↔			
12. Gathering of maintenance-related information			↔			
13. Management of maintenance					↔	
14. Maintenance preparation					↔	
15. Maintenance execution					↔	
16. Measurement and analysis of maintenance performance					↔	
17. Maintenance improvement/modification					↔	
18. Elimination of maintenance activities and support resources						↔

Abb. 36 Lebenszyklus und Wartung, IEC 60300-3-14

Bei einem gut organisierten Wartungskonzept sinken mit höherer Zuverlässigkeit die Instandhaltungskosten (s. Abb. 9). Der Kunde hat weniger Ausfallzeiten, die Wartung ist bei den langlebigen Teilen billiger.

Mit dem weiteren technischen Fortschritt ist es zu erwarten, dass bei einer Geräteserie der MTBF-Wert steigt und gleichzeitig die Gerätekosten sinken.

Auf der anderen Seite, wie z. B. die wirtschaftliche Studie zum Industrieprojekt ProServ am IPR (Institut für Prozessrechen-technik, Automation und Robotik) gezeigt hat, verdient ein Gerätehersteller mit Wartung von Geräten mehr Geld, als mit eigentlichem Verkauf von Geräten. Also müssen die Geräte scheinbar "unzuverlässig genug" sein, damit die Wartungsfälle so oft wie möglich eintreten.

Doch das ist eine Täuschung, denn schlechtere Zuverlässigkeit von Geräten, sogar mit gutem Wartungskonzept und Service, bei einem Hersteller ist für den Kunden ein Grund zur Konkurrenz zu wechseln.

2.3 Auszug aus der Komplexitätstheorie

Ziel dieses Kapitels ist es, die Grundlagen der sowohl qualitativen als auch quantitativen Bewertung von Algorithmen zu beschreiben. Da die in dieser Dissertation vorgeschlagene Methode der Zuverlässigkeitsberechnung in der Praxis eingesetzt wird, muss man klare Vorstellung über die Anwendbarkeitsgrenzen der Methode haben.

Vor allem wird die Frage des maximalen Umfanges eines Problems beantwortet. In anderen Worten, wie komplex darf ein technisches System sein, damit es von der modifizierten Markov-Methode bearbeitet werden kann.

2.3.1 Definitionen und Grundlagen

Die Komplexitätstheorie gilt neben der Berechenbarkeitstheorie und den Formalen Sprachen als einer der drei Hauptbereiche der Theoretischen Informatik. Zu ihren wesentlichen Forschungszielen gehört die Klassifizierung des Umfanges eines Problems im Hinblick auf den zu ihrer Lösung notwendigen Aufwand. Eine besondere Rolle spielt dabei die Abgrenzung der praktisch effizient lösbaren Probleme.

Speziell für diese Arbeit ist es wichtig, die Abhängigkeit $T(u)$ der Laufzeit der Algorithmen der modifizierten Markov-Methode vom Umfang der Eingabe (z. B. Anzahl der Komponenten in einem Schnitt) zu ermitteln.

2.3.1.1 Umfang, Aufwand und Komplexität eines Problems

In diesem Abschnitt werden die Begriffe der Komplexitätstheorie definiert, auf deren Grundlage die Laufzeit von Algorithmen der Markov-Methode abgeschätzt wird. [32]

Umfang eines Problems	Der Umfang n eines Problems ist die Anzahl der Eingabewerte (seltener und nur bei ausdrücklicher Erwähnung die Anzahl der Bits in der Eingabe). Noch seltener wird Umfang als Umfang der Ausgabe gebraucht.
Aufwand eines Algorithmus	Der Aufwand eines Algorithmus ist die Anzahl der Zeit- bzw. Speichereinheiten, die der Algorithmus zur Lösung eines Problems braucht, gemessen am Umfang der Eingabe.
Komplexität eines Problems	Die Komplexität eines Problems ist der geringstmögliche Aufwand, den man mit irgendeinem Algorithmus für das Problem erreichen kann.

Tab. 39 Begriffe der Komplexitätstheorie

Die letzte Definition macht deutlich, dass nur eine asymptotische Abschätzung der Komplexität eines Problems möglich ist.

2.3.1.2 Asymptotische Notation

Die Notation, die für die Bezeichnung der asymptotischen Laufzeit eines Algorithmus verwendet wird, bezieht sich auf den s. g. schlechtesten Fall (worst-case) einer Laufzeitfunktion $T(n)$.

Für die Abschätzung einer Laufzeitfunktion $T(n)$ wird typischerweise Θ -, O - oder Ω -Notation benutzt. [19]

Θ -Notation: für eine gegebene Funktion $g(n)$ bezeichnet die Notation $\Theta(g(n))$ eine Menge von Funktionen, für die gilt

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \exists c_1, c_2 \text{ und } n_0 > 0, \text{ so dass } 0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

Def. 20 Θ -Notation

Das Bild (s. Abb. 37) macht deutlich, dass für alle $n \geq n_0$ die Funktion $f(n)$ bis auf einen konstanten Faktor äquivalent zu der Funktion $g(n)$ ist.

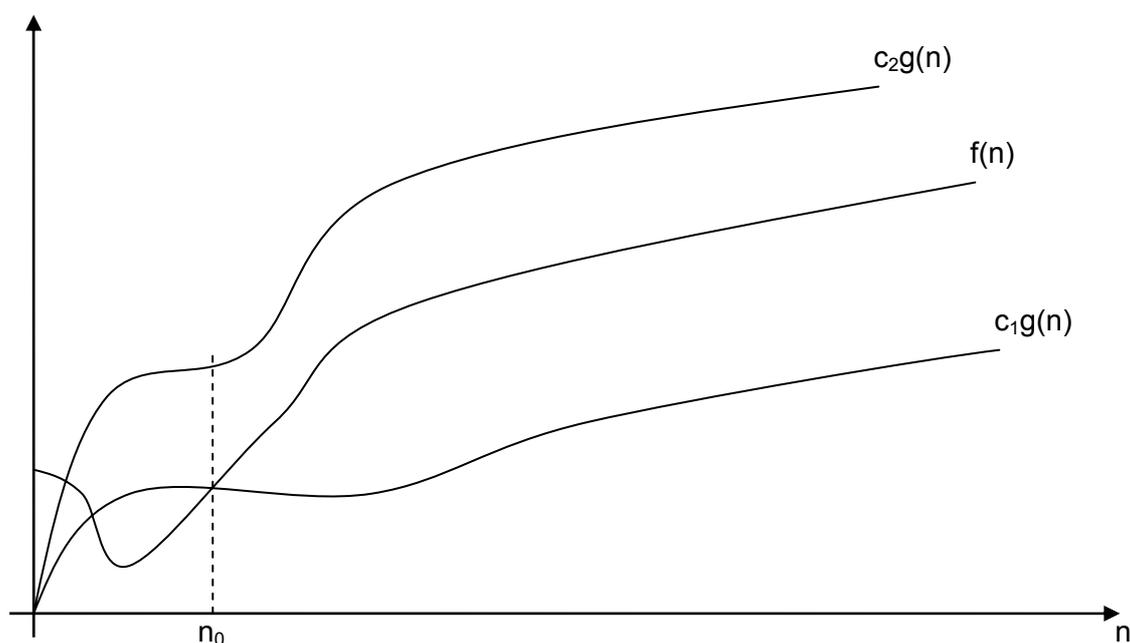


Abb. 37 Θ -Notation

Da die Notation $\Theta(g(n))$ eine Menge der Funktionen bezeichnet, musste man schreiben $f(n) \in \Theta(g(n))$. Stattdessen schreibt man üblicherweise $f(n) = \Theta(g(n))$.

Wenn die Θ -Notation die obere und untere Grenze einer Funktion angibt, definiert die O -Notation nur die obere Grenze. [19]

O -Notation: für eine gegebene Funktion $g(n)$ bezeichnet die Notation $O(g(n))$ eine Menge von Funktionen, für die gilt

$O(g(n)) = \{f(n) : \exists c \text{ und } n_0 > 0, \text{ so dass } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$

Def. 21 O -Notation

Die O -Notation (s. Abb. 38) hat eine wichtige Bedeutung: dadurch wird die obere Grenze (worst-case) der Laufzeit eines Algorithmus definiert.

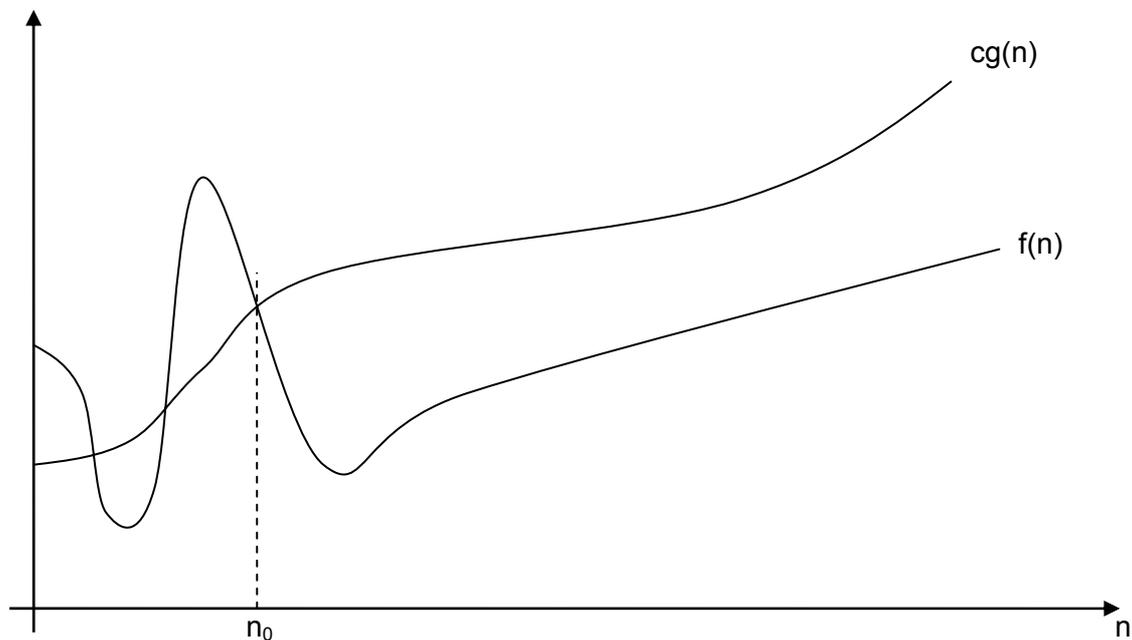


Abb. 38 O-Notation

Im Unterschied zu O-Notation beschreibt die Ω -Notation die asymptotische untere Grenze einer Funktion. [19]

Ω -Notation: für eine gegebene Funktion $g(n)$ bezeichnet die Notation $\Omega(g(n))$ eine Menge von Funktionen, für die gilt

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \exists c \text{ und } n_0 > 0, \text{ so dass } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$$

Def. 22 Ω -Notation

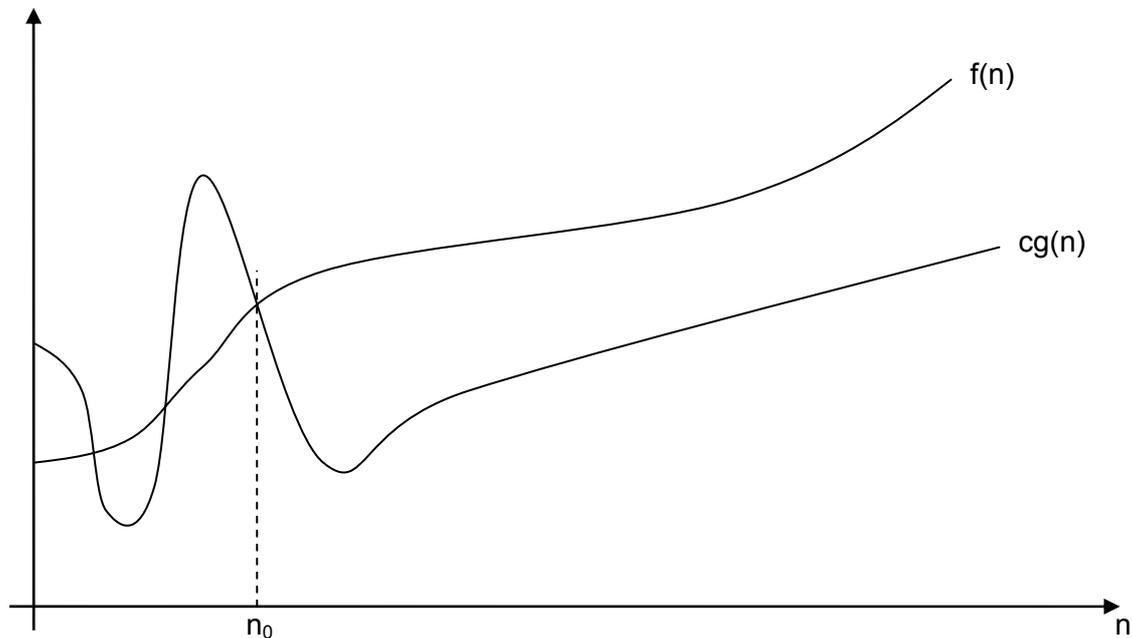


Abb. 39 Ω -Notation

Die Ω -Notation (s. Abb. 39) gibt die untere Grenze (also best-case) der Laufzeit eines Algorithmus an.

Wenn die Ungleichung (s. Def. 21) strikt wird, dann spricht man von der o -Notation. [19]

o -Notation: für eine gegebene Funktion $g(n)$ bezeichnet die Notation $o(g(n))$ eine Menge von Funktionen, für die gilt

$o(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0, \exists n_0 > 0, \text{ so dass } 0 \leq f(n) < cg(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Def. 23 o -Notation

Eine ähnliche Definition gibt es auch für die ω -Notation. [19]

ω -Notation: für eine gegebene Funktion $g(n)$ bezeichnet die Notation $\omega(g(n))$ eine Menge von Funktionen, für die gilt

$\omega(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0, \exists n_0 > 0, \text{ so dass } 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ für alle } n \geq n_0\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Def. 24 ω -Notation

Die nachfolgende Tabelle (s. Tab. 40) fasst die Notationseigenschaften zusammen: [32, 19]

Transitivität	$f(n) = \Theta(g(n))$ und $g(n) = \Theta(h(n)) \rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$ $f(n) = O(g(n))$ und $g(n) = O(h(n)) \rightarrow f(n) = O(h(n))$ $f(n) = \Omega(g(n))$ und $g(n) = \Omega(h(n)) \rightarrow f(n) = \Omega(h(n))$ $f(n) = o(g(n))$ und $g(n) = o(h(n)) \rightarrow f(n) = o(h(n))$ $f(n) = \omega(g(n))$ und $g(n) = \omega(h(n)) \rightarrow f(n) = \omega(h(n))$
Reflexivität	$f(n) = \Theta(f(n))$ $f(n) = O(f(n))$ $f(n) = \Omega(f(n))$
Symmetrie	$f(n) = \Theta(g(n)) \leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$
Trans-Symmetrie	$f(n) = O(g(n)) \leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$ $f(n) = o(g(n)) \leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$
O-Kalkül	$h + g \in \Phi(f + g)$ $h \cdot g \in \Phi(f \cdot g)$ $h / g \in \Phi(f / g)$ $h \pm k \in \Phi(f)$ $h \cdot k \in \Phi(f)$
<p>Es sei Φ eine Notation ist (s. Def. 20 - Def. 24), $k > 0$ sei eine Konstante, $h \in \Phi(f)$ und g sei eine beliebige Funktion, die für $n \geq n_0$ nicht negativ ist, dann gilt:</p>	

Tab. 40 Notationseigenschaften

2.3.1.3 Schrankenfunktionen

Eine Schrankenfunktion wird in der Komplexitätstheorie wie folgt definiert:

Schrankenfunktion: eine Funktion $f(n)$, für die gilt
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,
 $f(n+1) \geq f(n)$ monotoner Wachstum
 Die Funktion f muss selbst in Zeit $O(f)$ berechenbar sein.

Def. 25 Schrankenfunktion

Es folgt eine Übersicht der wichtigsten Schrankenfunktionen (s. Tab. 41):

Konstant	$O(1)$
Logarithmisch	$O(\log n)$
Polylogarithmisch	$O(\log^k n), k \geq 1$
Linear	$O(n)$

n-log-n	$O(n \log n)$
Quadratisch	$O(n^2)$
Polynomial	$O(n^k), k \geq 1$
Exponentiell	$O(d^n), d > 1$

Tab. 41 Schrankenfunktionen

2.3.2 Rekursionen

Eine Rekursion entsteht, wenn eine Funktion während der Laufzeit sich selbst aufruft. Um die asymptotischen Grenzen der Laufzeitfunktion einer Rekursion abschätzen zu können, wird entweder die allgemeine Methode (master method) oder die Methode der Rekursionsbäume verwendet.

2.3.2.1 Allgemeine Methode (master method)

Die asymptotische Notation des schlechtesten Falls (also worst-case) der Laufzeitfunktion $T(n)$ einer Rekursion kann im Allgemeinen wie folgt definiert werden: [19, 32]

Laufzeit einer Rekursion: wenn $a \geq 1$, $b > 1$, dann ist die Laufzeit $T(n)$ für eine gegebene Funktion $f(n)$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Def. 26 Laufzeit einer Rekursion

In Abhängigkeit von der gegebenen Funktion $f(n)$, wird das asymptotische Wachstum von $T(n)$ wie folgt definiert: [19, 32]

$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon}), \epsilon > 0$	$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$	$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon}), \epsilon > 0$ und $af(n/b) \leq cf(n)$ für $c < 1$	$T(n) = \Theta(f(n))$

Tab. 42 Asymptotische Grenze

2.3.2.2 Rekursionsbäume

Diese Methode wird an einem Beispiel betrachtet. Es sei die obere Grenze der Laufzeit einer Rekursion $T(n) = 3T(n/4) + cn^2$ gesucht. [19]

Beim ersten Schritt der Rekursion (s. Abb. 40) wird das Gesamtproblem in 3 Subprobleme mit jeweiligem Umfang $n/4$ zerlegt. Der Term cn^2 repräsentiert den zusätzlichen Aufwand, der beim Ausstieg aus der Rekursion entsteht.

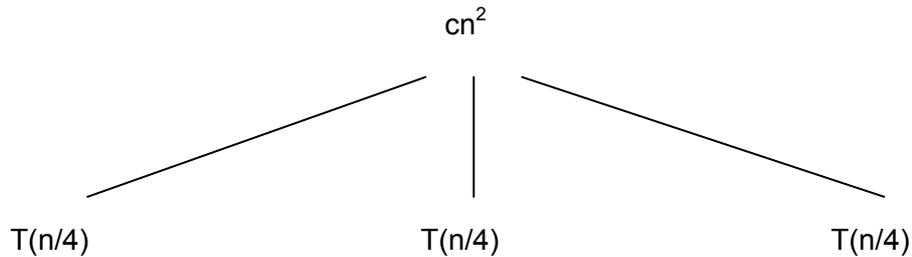


Abb. 40 Rekursionsbaum, Schritt 1

Für jedes Subproblem wird diese Vorgehensweise (s. Abb. 41) bis auf die unterste Rekursionsebene L_i wiederholt.

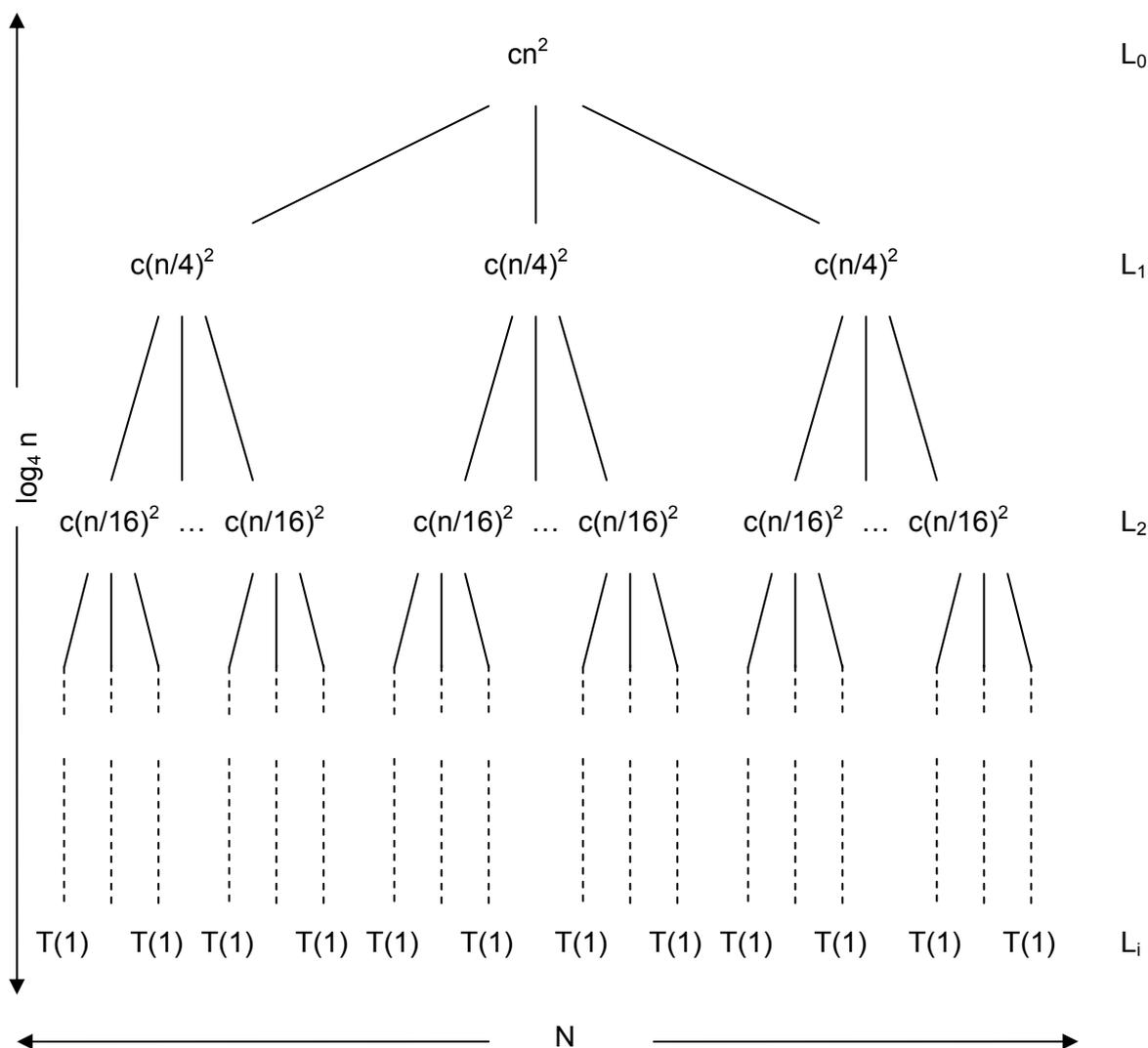


Abb. 41 Vollständiger Rekursionsbaum

Mit jedem Schritt i der Rekursion wird der Umfang der jeweiligen Subprobleme auf $n/4^i$ reduziert. Auf der untersten Rekursionsebene L_i muss der Umfang aller Subprobleme gleich 1 sein. Daraus folgt die Tiefe der Rekursion $i = \log_4 n$.

Die Anzahl der Knoten auf jeder Rekursionsebene i ist 3^i und die Laufzeitfunktion $T_i(n) = c(n/4^i)^2$.

Auf der letzten Rekursionsebene ist die Anzahl der Knoten $N = 3^{\log_4 n} = n^{\log_4 3}$ mit der Laufzeit $T(1)$ pro Knoten. Daraus folgt die obere Grenze der Laufzeit: [19]

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) = O(n^2)$$

Gl. 2.3—1

Die Gl. 2.3—1 wird im Abschnitt 4.3 verwendet.

3 Stand der Forschung

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über die am meisten benutzten Methoden der Zuverlässigkeitsberechnung zu geben. Dabei werden die Vor- und Nachteile der vorhandenen Methoden nach folgenden Kriterien analysiert:

1. Komplexität des Modells, das für die Zuverlässigkeitsberechnung notwendig ist
2. Komplexität der mathematischen Basis des Modells
3. Komplexität der Algorithmen
4. Praktische Anwendbarkeit

Die Frage der praktischen Anwendbarkeit einer oder anderen Methode für Zuverlässigkeitsberechnung ist besonders wichtig und bildet einen Sammelbegriff für folgende Probleme:

- Welche Systemtypen (Serien-, Parallel- oder vermischte Strukturen) können damit bearbeitet werden?
- Werden die Systeme mit und ohne Reparatur damit erfasst?
- Wie kompliziert (Anzahl der Komponenten) darf ein System sein?
- Softwareimplementierung einer Methode: in wie weit lässt sich die Methode formalisieren?

3.1 Verfahren der Zuverlässigkeitsberechnung

Die Liste der am meisten verwendenden Methoden für Zuverlässigkeitsanalyse wurde im Abschnitt 2.2.3 (s. Tab. 28) dargestellt. Im Sinne der mathematischen Basis kann man all diese Methoden prinzipiell in zwei große Gruppen unterteilen (s. Abb. 42):

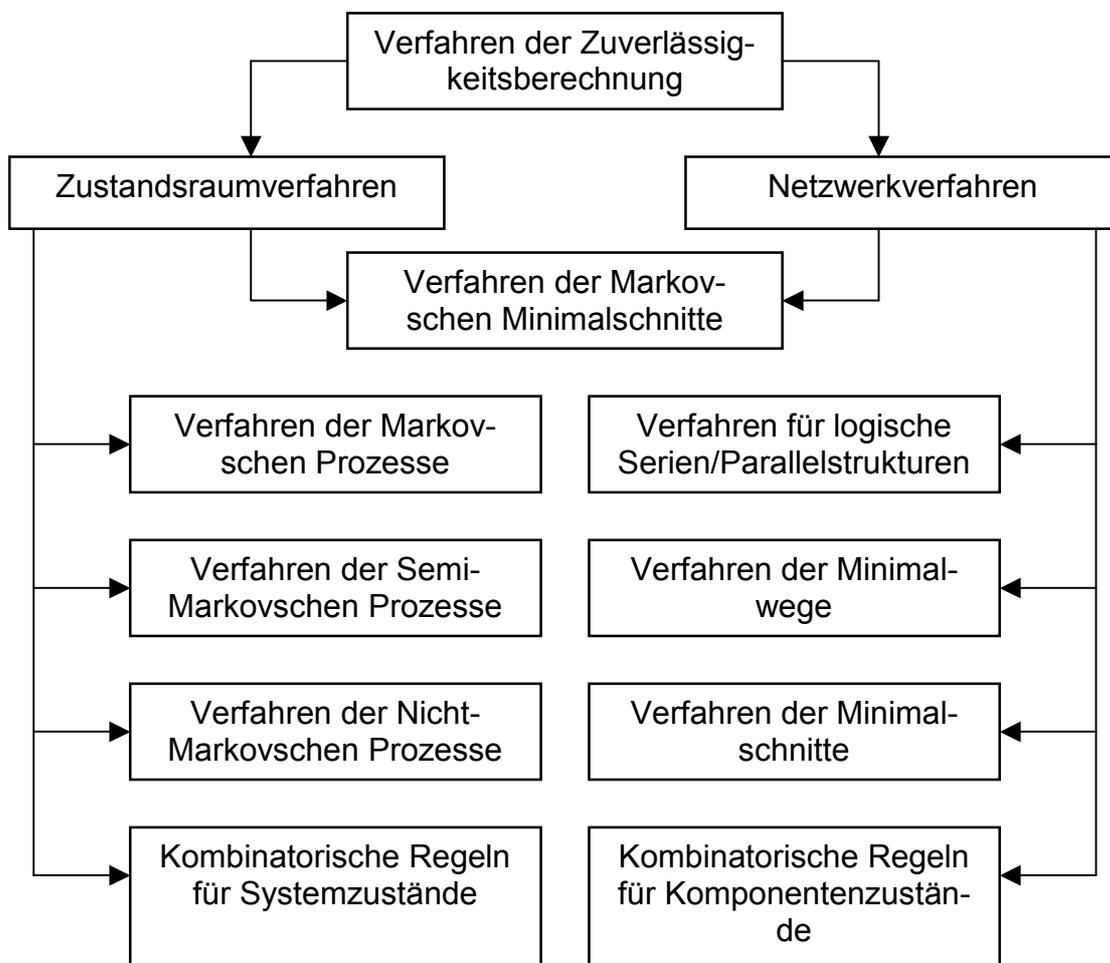


Abb. 42 Verfahren der Zuverlässigkeitsberechnung

Mit Zustandsraum-Verfahren bezeichnet man eine Gruppe von Verfahren zur Komponenten- und Systemberechnung, bei denen Zustände bzw. Zustandskombinationen und gegebenenfalls deren Übergänge als stochastischer Prozess betrachtet werden. Zu den Zustandsraum-Verfahren gehören [12]:

Verfahren der Markovschen Prozesse (Markov-Methode)	Ein Markov-Prozess besteht aus Markov-Zuständen (Komponenten- oder Systemzustände) und zeitabhängigen Zustandsübergängen, die durch konstante Übergangsraten gekennzeichnet sind.
Verfahren der Semi-Markov-Prozesse	Ein Semi-Markov-Prozess besteht aus Markov-Zuständen und zeitabhängigen Zustandsübergängen, die durch nicht konstante Übergangsraten gekennzeichnet sind.

Verfahren der Nicht-Markov-Prozesse	Ein Nicht-Markov-Prozess besteht aus Nicht-Markov-Zuständen und zeitabhängigen Zustandsübergängen, die durch nicht konstante Übergangsraten gekennzeichnet sind. Es handelt sich im Allgemeinen um komplizierte Verfahren.
Kombinatorische Regeln für Systemzustände (Zustandsbäume)	Es werden die elementaren Verknüpfungsregeln der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Systemzustände angewandt.

Tab. 43 Zustandsraumverfahren

Mit Netzwerkverfahren bezeichnet man eine Gruppe von Verfahren für Systemberechnungen, in denen die zu untersuchenden Systemzustände als logische Aneinanderkettung von Komponentenzuständen gebildet werden. Zu den Netzwerkverfahren gehören [12]:

Verfahren für logische Serien- und Parallelstrukturen	Dies sind leicht anwendbare Zuverlässigkeitsverfahren für einfache serielle und parallele Systemstrukturen.
Minimalwegverfahren	Dies ist ein spezielles Zuverlässigkeitsverfahren, das die Komponentenbetriebszustände betrachtet, die zum Betrieb des Systems führen.
Minimalschnittverfahren	Dies ist ein spezielles Zuverlässigkeitsverfahren, das die Komponentenausfallzustände betrachtet, die zum Ausfall des Systems führen
Kombinatorische Regeln für Komponentenzustände	Hierbei werden die elementaren Verknüpfungsregeln der Wahrscheinlichkeitstheorie auf Komponentenzustände angewandt.

Tab. 44 Netzwerkverfahren

Das Verfahren der markovschen Minimalschnitte ist eine Kombination des Verfahrens der Minimalschnitte mit dem Verfahren der Markov-Prozesse.

Um die Anwendbarkeit der oben genannten Verfahren abschätzen zu können, werden die typischen bzw. am meisten verwendeten Verfahren jeder Gruppe betrachtet: Verfahren der markovschen Prozesse, Verfahren der Minimalschnitte und Verfahren der markovschen Minimalschnitte.

3.2 Verfahren der Markovschen Prozesse

Die Grundgedanken des Verfahrens der Markovschen Prozesse seien an einem Beispiel aufgezeigt: Eine einzelne Betrachtungseinheit A , die in Betrieb genommen wird, soll nacheinander zwei Zustände annehmen, nämlich Zustand 1: Einheit intakt, Zustand 2: Einheit ausgefallen. Die Möglichkeit einer Reparatur ist zunächst ausgeschlossen und die Ausfallrate λ von A wird als konstant vorausgesetzt. Gesucht sind die Wahrscheinlichkeiten $P_1(t)$ bzw.

$P_2(t)$, dass Betrachtungseinheit A sich zu einem beliebigen Zeitpunkt t im Zustand 1 bzw. 2 befindet. $P_1(t) = R(t)$ entspricht dann der Überlebenswahrscheinlichkeit der Betrachtungseinheit im Zeitintervall $[0, t]$ (Zuverlässigkeit), $P_2(t) = F(t)$ ihrer Ausfallwahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeit $P_{12}(\Delta t)$, dass A im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ vom Zustand 1 in den Zustand 2 übergeht (ausfällt), ist unter der Voraussetzung ihres Überlebens bis zum Zeitpunkt t gegeben durch

$$P_{12}(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

Dabei ist λ die konstante Ausfallrate von A und das Symbol $o(\Delta t)$ die Abkürzung für eine Summe von Gliedern, in denen der Faktor Δt in zweiter und höherer Potenz auftritt. Die Wahrscheinlichkeit, dass im selben Zeitintervall keine Änderung des Zustands von A eintritt, also A intakt bleibt, ist dann das Komplement zu $P_{12}(\Delta t)$:

$$1 - P_{12}(\Delta t) = 1 - [\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$$

Einheit A ist bis zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ intakt, wenn sie bis zum Zeitpunkt t noch intakt war und während des Zeitraumes $[t, t+\Delta t]$ intakt bleibt. Der Zusammenhang zwischen den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ist gegeben durch

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)[1 - P_{12}(\Delta t)]$$

oder

$$P_1(t + \Delta t) = P_1(t)(1 - [\lambda \Delta t + o(\Delta t)])$$

Hieraus erhalten wir:

$$P_1(t + \Delta t) - P_1(t) = -\lambda P_1(t) \Delta t - o(\Delta t) P_1(t) \Rightarrow \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = -\lambda P_1(t) - \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} P_1(t)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_1(t + \Delta t) - P_1(t)}{\Delta t} = \frac{dP_1(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \Rightarrow \frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t)$$

Gl. 3.2—1

Analog kann man die Wahrscheinlichkeit $P_2(t+\Delta t)$ erhalten, dass Einheit A bis zur Zeit $t+\Delta t$ ausgefallen ist. Die Betrachtungseinheit A fällt im Zeitintervall $[0, t+\Delta t]$ aus, wenn entweder A im Zeitintervall $[0, t]$ ausfällt oder A im Zeitintervall $[0, t]$ intakt war und danach zwischen $[t, t+\Delta t]$ ausfällt.

$$P_2(t + \Delta t) = P_2(t) + P_1(t)P_{12}(\Delta t) \Rightarrow P_2(t + \Delta t) = P_2(t) + P_1(t)[\lambda \Delta t + o(\Delta t)]$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_2(t + \Delta t) - P_2(t)}{\Delta t} = \frac{dP_2(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda P_1(t)$$

Gl. 3.2—2

Für den Fall konstanter Ausfallraten lassen sich die Differentialgleichungen Gl. 3.2—1 und Gl. 3.2—2 durch Integration leicht nach den gesuchten Wahrscheinlichkeiten $P_1(t)$ und $P_2(t)$ auflösen.

$$\int \frac{dP_1(t)}{P_1(t)} = -\lambda \int dt \Rightarrow \ln P_1(t) = -\lambda t + C \Rightarrow P_1(t) = e^{-\lambda t + C} = c_1 e^{-\lambda t}$$

Gl. 3.2—3

Die Integrationskonstante c_1 ergibt sich aus der Voraussetzung, dass Einheit A zum Zeitpunkt $t = 0$ intakt ist, also $P_1(0) = 1$.

$$P_1(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 1$$

Die Wahrscheinlichkeit $P_2(t)$, dass A innerhalb des Zeitraumes t ausfällt, ergibt sich entweder durch Integration von Gl. 3.2—2 oder aufgrund der Voraussetzung, dass A sich zu einem beliebigen Zeitpunkt nur in einem der beiden Zustände 1 oder 2 befinden kann

$$P_2(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Allgemein ist bei derartigen Systemen von Differentialgleichungen eine Gleichung stets von den anderen linear abhängig und kann durch die Bedingung $\sum P_i = 1$ ersetzt werden, da sich das System stets in genau einem der möglichen Zustände befinden muss.

Ein Vorteil der Markov-Methode liegt darin, dass sie sich, durch Anwendung der Matrizenrechnung, weitgehend schematisieren lässt.

Die Differentialgleichungen Gl. 3.2—1 und Gl. 3.2—2 bilden ein lineares System. In Matrixschreibweise hat dieses folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \frac{dP_1}{dt} \\ \frac{dP_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{pmatrix}$$

Gl. 3.2—4

Lässt man die Einschränkung fallen, dass Einheit A nicht repariert werden kann, nachdem sie ausgefallen ist, dann tritt an die Stelle der ersten Matrix auf der rechten Seite von Gl. 3.2—4 der Ausdruck

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix}$$

Gl. 3.2—5

Dabei ist μ die Reparaturrate von A, die ebenfalls als konstant vorausgesetzt ist. Sie bestimmt die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von Zustand 2 zum Zustand 1. Das Gleichungssystem für P_1 und P_2 ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -\lambda P_1(t) + \mu P_2(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} &= \lambda P_1(t) - \mu P_2(t) \end{aligned}$$

Gl. 3.2—6

Die Ausfallrate λ und die Reparaturrate μ kann man unter dem übergeordneten Begriff "Übergangsraten" zusammenfassen, denn die Zustände 1 (Einheit intakt) und 2 (Einheit ausgefallen) von A gehen aufgrund von λ und μ ineinander über.

Dieser Prozess wird durch ein Zustandsdiagramm (s. Abb. 43) dargestellt. Eine Matrix der Form Gl. 3.2—5 nennt man "Übergangsmatrix". Zu beachten ist, dass die Summe der Elemente in jeder Spalte verschwindet.

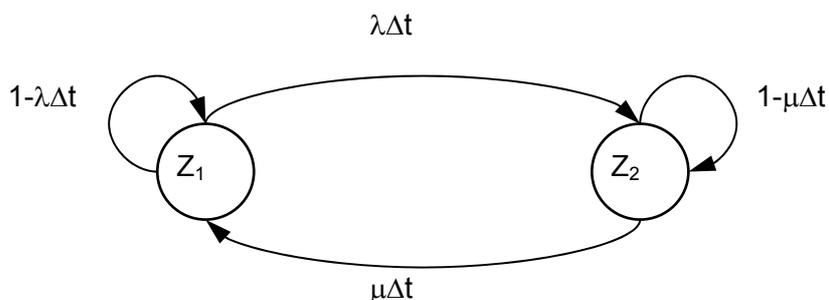


Abb. 43 Zustandsdiagramm einer reparierbaren Einheit

Die bisherigen Betrachtungen lassen sich auf eine Anordnung, die N Zustände annehmen kann, erweitern. Wird der Übergang der Anordnung vom Zustand i in den Zustand k ($k \leq n$) durch die Übergangsraten c_{ik} charakterisiert, wobei immer $i \neq k$ sein soll, dann ist die Übergangsmatrix C gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} b_1 & c_{21} & c_{31} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & b_2 & c_{32} & \dots & c_{n2} \\ c_{13} & c_{23} & b_3 & \dots & c_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Gl. 3.2—7

In der ersten Spalte von Gl. 3.2—7 stehen in aufsteigender Zahlenfolge k alle Übergangsraten c_{1k} , die vom Zustand 1 in die Zustände k ($k = 2, 3, \dots, n$) führen, in der zweiten Spalte alle Übergangsraten c_{2k} ($k = 1, 3, \dots, n$), durch die sich Zustand 2 verändert, usw.

Der Wert von b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) kann man auf folgende Weise ermitteln:

$$b_i = - \sum_{k=1, k \neq i}^n c_{ik}$$

Das der betrachteten Anordnung entsprechende Gleichungssystem für die Wahrscheinlichkeiten P_1, P_2, \dots, P_n hat in Matrixschreibweise folgende Form:

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1(t)}{dt} \\ \frac{dp_2(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dp_n(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=2}^n c_{1k} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & -\sum_{k=1, k \neq 2}^n c_{2k} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & -\sum_{k=1}^{n-1} c_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_n(t) \end{pmatrix}$$

Gl. 3.2—8

Die Lösung der Gl. 3.2—8 ergibt durch den Wert $p_n(t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Betrachtungseinheit zu einem Zeitpunkt t sich in einem Zustand n befinden wird.

In folgendem werden die Vor- und Nachteile des Verfahrens der Markovschen Prozesse zusammengefasst:

Vorteil	Nachteil
Berechnet mehrstufige stochastische Prozesse; Bearbeitet technische Systeme ohne und mit Reparatur auf gleiche Art und Weise; Berücksichtigt die Abhängigkeiten im Betriebsverhalten von Systemkomponenten; Lässt sich weitgehend schematisieren und übersichtlich darstellen; Der Aufbau der Übergangsmatrix (s. Gl. 3.2—8) lässt sich gut algorithmisieren und in einem Programm implementieren; Die Lösung der Gl. 3.2—8 ist mit Hilfe von mathematischen Software (z. B. MathCAD) unproblematisch;	Die Anzahl der möglichen Zustände hat eine exponentielle (worst case) Abhängigkeit von der Anzahl der Systemkomponenten, was den Aufbau des Zustandsgraphen bzw. der Übergangsmatrix erheblich erschwert.

Tab. 45 Vor- und Nachteile der Markov-Methode

3.3 Verfahren der Minimalschnitte

Im Unterschied von Zustandsraum-Verfahren basieren die Netzwerk-Verfahren auf den Algorithmen der Suche der Minimalwege bzw. Minimalschnitte. Bei der Anwendung der Netzwerk-Verfahren kann das System sowohl als logische Struktur in Form von Zuverlässigkeitsblockdiagramm als auch als funktionale Struktur (Konstruktionsplan) vorliegen.

Zur Beschreibung des Verfahrens wird das Zuverlässigkeitsblockdiagramm (s. Abb. 44) zugrunde gelegt. Solche logischen Strukturen treten z. B. in Energieversorgungssystemen und Automatisierungssystemen auf. Zur Ermittlung der Minimalschnitte wird das System gedanklich durch Komponentenausfälle derart aufgeschnitten, dass eine Versorgungsunterbre-

chung zwischen dem Eingang und dem Ausgang besteht. Die logische UND-Verknüpfung der Komponentenausfallzustände bezeichnet man als Schnitt bzw. Minimalschnitt. Diese sind folgendermaßen definiert:

Unter einem Schnitt (S) versteht man eine Kombination von Komponentenausfallzuständen, die zum Ausfall des Systems führen.

Unter einem Minimalschnitt (MS) versteht man eine Kombination von Komponentenausfallzuständen (Schnitt), die für den Systemausfall über diesen Schnitt notwendig und hinreichend sind. In einem Minimalschnitt führt der Betrieb jeder in ihm enthaltenen Komponente zur Aufhebung dieses Schnittes.

Def. 27 Schnitt bzw. Minimalschnitt

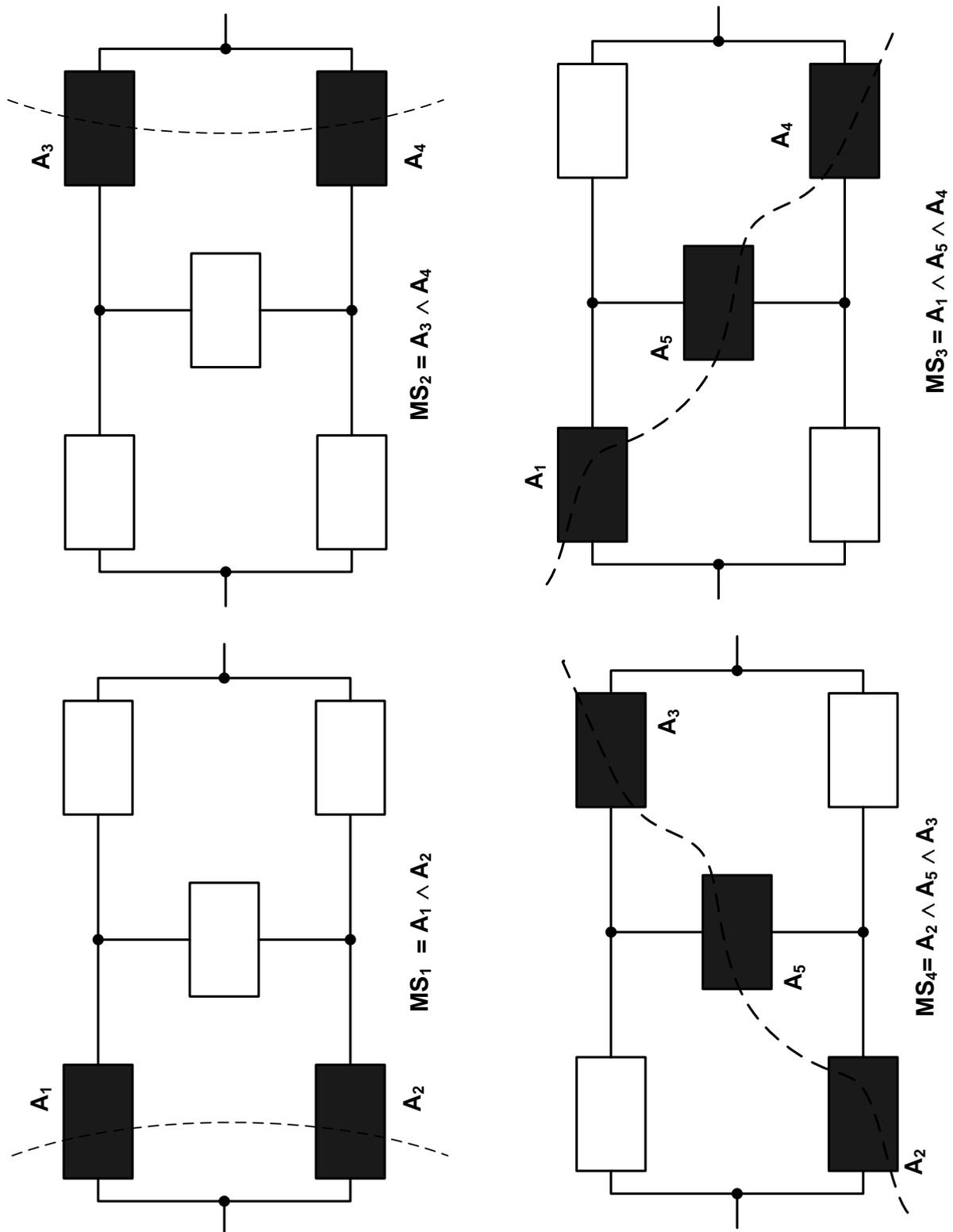


Abb. 44 Ermittlung der Minimalschnitte

Zur Ermittlung der Minimalschnitte lässt man die Komponenten in allen Kombinationen ausfallen und prüft, ob das System ausfällt. Anhand der Minimalschnittdefinition lässt sich feststellen, ob ein Minimalschnitt vorliegt.

In dem Beispiel ist $MS_1 = A_1 \wedge A_2$ ein Minimalschnitt, weil der Ausfall beider Komponenten für den Systemausfall über diesen Schnitt unbedingt notwendig ist. Der Betrieb der Komponente 1 oder 2 führt nämlich zur Aufhebung dieses Schnittes oder anders ausgedrückt, der Betrieb einer der beiden Komponenten führt zum Betrieb des Systems. Dagegen ist $S = A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$ kein Minimalschnitt, sondern nur ein Schnitt, weil der Betrieb der Komponente 3 den Schnitt nicht aufhebt.

In Minimalschnitten ist die Kenntnis der Zustände der restlichen, nicht enthaltenen Komponenten ohne Bedeutung, weshalb deren Zustände nicht betrachtet werden. Sie werden jedoch indirekt durch die Minimalschnitte berücksichtigt.

In einem Minimalschnitt sind die Komponentenausfallzustände logisch UND-verknüpft. Entsprechend der Anzahl der logisch UND-verknüpften Komponentenausfallzustände in einem Minimalschnitt unterscheidet man zwischen Minimalschnitten unterschiedlicher Ordnung:

$$MS = \begin{cases} A_i & \text{1. Ordnung} \\ A_i \wedge A_j & \text{2. Ordnung} \\ A_i \wedge A_j \wedge A_k & \text{3. Ordnung} \\ \vdots & \\ A_i \wedge A_j \wedge A_k \wedge \dots & \text{n. Ordnung} \end{cases}$$

In Abb. 44 treten nur Minimalschnitte 2. und 3. Ordnung auf.

Der Systemausfall A_S tritt in diesem Beispiel dann auf, wenn mindestens einer der vier Minimalschnitte auftritt. Der Systemausfallzustand wird deshalb durch folgende logische ODER-Verknüpfung ausgedrückt:

$$A_S = MS_1 \vee MS_2 \vee MS_3 \vee MS_4$$

Der Systemausfall stellt eine logische Parallel-Serien-Struktur bezüglich des Ausfalls (s. Abb. 45) dar.

Der Systemausfall wird allgemein als logische ODER-Verknüpfung über alle Minimalschnitte ausgedrückt. Die Beziehung dazu lautet

$$A_S = \bigvee_k MS_k$$

Gl. 3.3—1

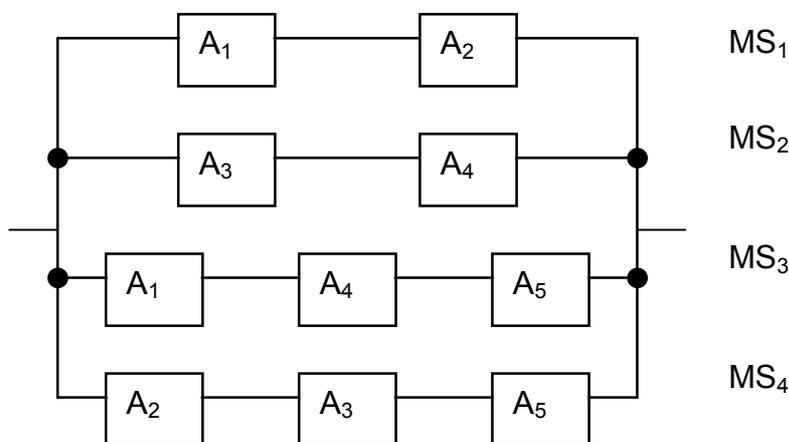


Abb. 45 Ausfall-Logik

Der Systembetrieb B_S ist das Komplement zum Systemausfall A_S

$$B_S = \overline{A_S} = \overline{MS_1} \wedge \overline{MS_2} \wedge \overline{MS_3} \wedge \overline{MS_4}$$

Durch Negieren der Minimalschnitte erhält man

$$\overline{MS_1} = B_1 \vee B_2$$

$$\overline{MS_2} = B_3 \vee B_4$$

$$\overline{MS_3} = B_1 \vee B_4 \vee B_5$$

$$\overline{MS_4} = B_2 \vee B_3 \vee B_5$$

Nach diesen Gleichungen stellt der Systembetrieb eine logische Serien-Parallel-Struktur bezüglich des Betriebs dar (s. Abb. 46).

Für stochastisch-unabhängige Komponenten gelten folgende Beziehungen: [12, 23]

$$P(A_S) = P(\bigvee_k MS_k)$$

$$P(B_S) = 1 - P(A_S)$$

Gl. 3.3—2

Alle vermischten logischen Strukturen und r-aus-k-Strukturen lassen sich auf diese Weise in logische Parallel-Serien- bzw. Serien-Parallel-Strukturen umformen. Ein wesentliches Merkmal ist dabei das Auftreten identischer Komponentenzustände an verschiedenen Plätzen innerhalb der logischen Strukturen. Dadurch wird die Berechnung erheblich erschwert, weil die Idempotenzrelationen beachtet werden müssen. [12]

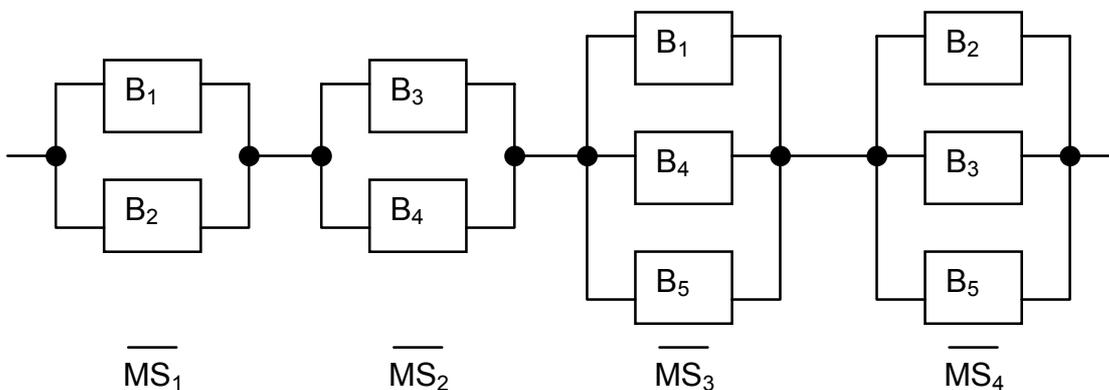


Abb. 46 Betriebslogik

Im Folgenden werden die Vor- und Nachteile des Verfahrens der Minimalschnitte zusammengefasst:

Vorteil	Nachteil
Bearbeitet relativ einfach technische Systeme mit einer statischen Struktur; In der Gl. 3.3—1 wird die minimale Anzahl der Zustände zur Systemberechnung benö-	Mit wachsender Anzahl der Systemkomponente wird es immer komplizierter alle Minimalschnitte zu ermitteln; Für die Systeme mit Reparatur ist das Ver-

<p>tigt;</p> <p>Die möglichen Minimalschnitte werden aufgrund Expertenwissen bzw. System FMEA relativ leicht ermittelt;</p>	<p>fahren kaum anwendbar, denn nach jeder Reparatur müssen alle Minimalschnitte und die entsprechenden logischen Verknüpfungen für A_s und B_s neu ermittelt werden;</p> <p>Es ist nicht immer möglich die Minimalschnitte direkt aus dem Bauplan zu ermitteln (z. B. Parallelschwingkreis, s. Abb. 19);</p>
---	--

Tab. 46 Vor- und Nachteile der Minimalschnitt-Methode

3.4 Verfahren der Markovschen Minimalschnitte

Bei Berechnung von Systemen mit stochastisch-abhängigen Komponenten gilt die Gl. 3.3—2 nicht mehr, denn stochastische Abhängigkeiten in logischen Serien- und Parallelstrukturen unterschiedliche Auswirkungen haben: [12, 10, 22]

- In Reihe liegende Betriebszustände werden schwach beeinflusst
- Parallel liegende Betriebszustände werden stark beeinflusst

In Systemen mit stochastisch-abhängigen Komponenten kann man davon ausgehen, dass die Minimalschnitte niedrigster Ordnung die Zuverlässigkeit des Systems bestimmen, deswegen gilt: [Kochs]

$$P(A_s) \approx \sum_k P(MS_k)$$

Gl. 3.4—1

In anderen Worten wird die stochastische Abhängigkeit zwischen den Minimalschnitten vernachlässigt, wobei die stochastische Abhängigkeit innerhalb der Minimalschnitten berücksichtigt wird. Das bedeutet, dass die Minimalschnitte über einen Markovschen Prozess unabhängig voneinander modelliert und berechnet werden können.

Im Folgenden wird die Methodik an einem Beispiel betrachtet (s. Abb. 47).

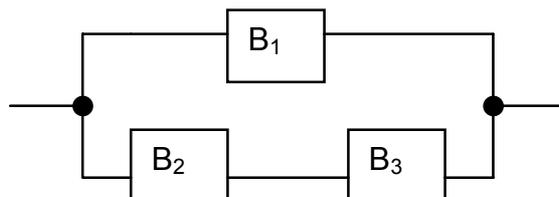


Abb. 47 Betriebslogik: Elemente 1, 2, 3 sind stochastisch abhängig

In diesem Beispiel soll die stochastische Abhängigkeit zwischen den Komponenten 1 und 2 bzw. 1 und 3 darin bestehen, dass nur eine Reparaturmannschaft eingesetzt wird. Der Einsatz nur einer Reparaturmannschaft führt dazu, dass bei einem Mehrfachausfall die Reparatur der zuletzt ausgefallenen Komponente so lange verschoben wird, bis die zuerst ausgefallene Komponente repariert worden ist. Dadurch wird die Dauer des Systemausfalls länger.

Ermittlung der Minimalschnitte und des Systemausfalls:

$$MS_1 = A_1 \wedge A_2$$

$$MS_2 = A_1 \wedge A_3$$

$$A_s = MS_1 \vee MS_2$$

Nach Gl. 3.4—1

$$P(A_s) \approx P(MS_1) + P(MS_2)$$

$$P(A_s) \approx P(A_1 \wedge A_2) + P(A_1 \wedge A_3)$$

Die beiden Minimalschnitte werden jeweils mit dem Verfahren der Markovschen Prozesse berechnet (s. Abb. 48).

Es wird ein geeignetes Modell gebildet, das den Minimalschnitt MS_k als Markovschen Zustand (oder Zustände) MZ_l mit der logischen UND-Verknüpfung enthält:

$$MZ_l = \bigwedge_{i, i \in l} A_i$$

$$MS_k = \bigvee_{l, l \in k} MZ_l$$

Daraus folgt:

$$P(MS_k) = P\left(\bigvee_{l, l \in k} MZ_l\right)$$

Zusammenfassend kann man sagen, dass diese Methode alle Vorteile des Verfahrens der Markovschen Prozesse und des Verfahrens der Minimalschnitte geerbt hat. Auf der anderen Seite werden aber auch die Nachteile der beiden Verfahren übernommen.

Vorteil	Nachteil
<p>Die möglichen Minimalschnitte werden aufgrund Expertenwissen bzw. System FMEA relativ leicht ermittelt;</p> <p>Die Theorie besagt, dass für die Zuverlässigkeitsberechnung nur die Minimalschnitte höchstens 3. Ordnung von Bedeutung sind;</p> <p>Die stochastischen Abhängigkeiten innerhalb eines Schnittes mit 3 Komponenten werden mit Markov-Methode modelliert und die Zustandswahrscheinlichkeiten unproblematisch berechnet.</p>	<p>Nach wie vor ist es nicht immer möglich die Minimalschnitte direkt aus dem Bauplan zu ermitteln;</p> <p>Die stochastischen Abhängigkeiten zwischen den Minimalschnitten werden nicht berücksichtigt.</p>

Tab. 47 Vor- und Nachteile der Methode der markovschen Minimalschnitte

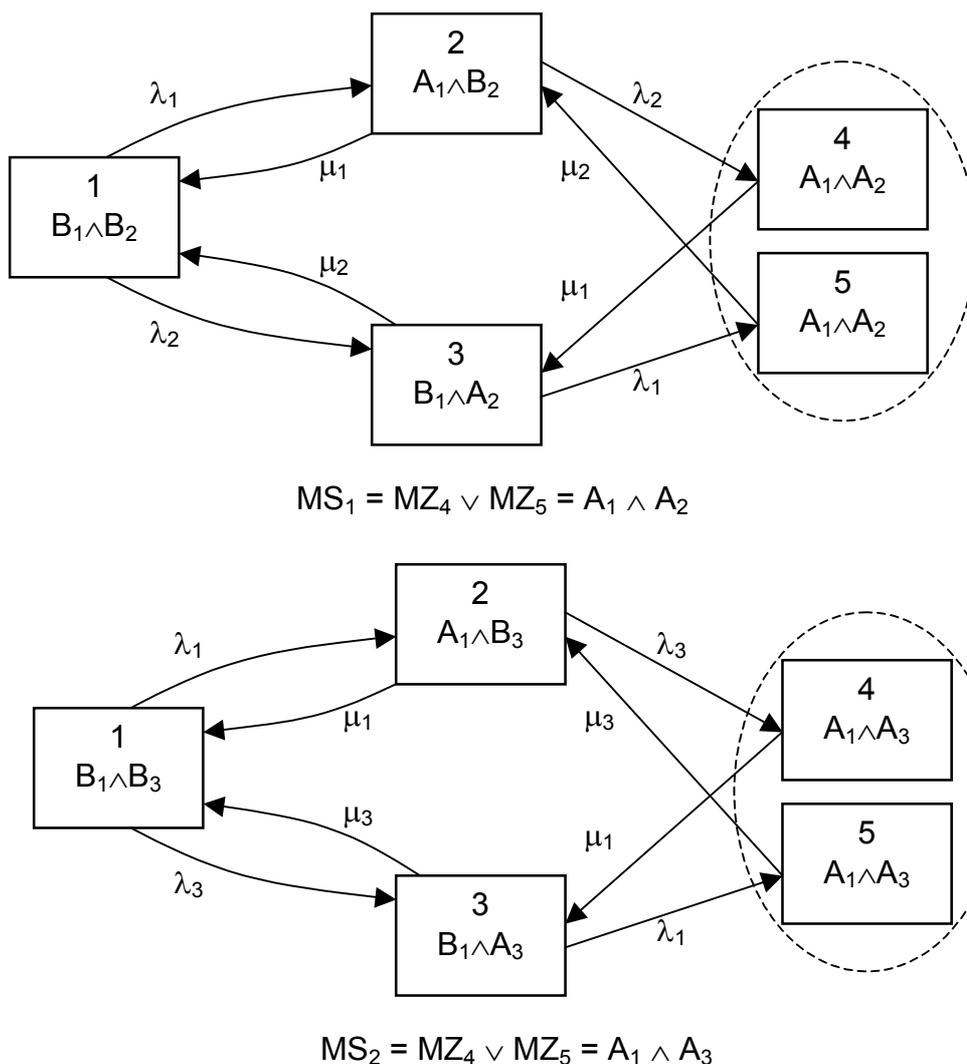


Abb. 48 Markovsche Minimalschnitte

4 Konzept der neuen Methodik

In diesem Kapitel werden die Grundideen der überarbeiteten Markov-Methode skizziert, sowie die Notwendigkeit der Modifizierung der Markov-Methode begründet. Dafür werden zunächst die Anforderungen an eine solche Methode der Zuverlässigkeitsberechnung dargestellt, wie sie sich aufgrund praktischer Erfahrung ergeben. Auf diese Anforderungen wird der heutige Stand der Zuverlässigkeitstheorie projiziert und die zusätzlichen Faktoren bei dem Modellaufbau nach der Markov-Methode zusammengefasst.

4.1 Anforderungen an die Methodik der Zuverlässigkeitsberechnung

Bei der Entwicklung einer Methode der Zuverlässigkeitsberechnung, die nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch für reale technische Systeme geeignet ist, hat man grundsätzlich zwei Hauptprobleme:

- 1 Das mathematische Modell der Methode
- 2 Die Algorithmen, die die Methode softwaremäßig implementieren

Damit eine Methode der Zuverlässigkeitsberechnung als "geeignet für reale technische Systeme" bezeichnet wird, muss sie folgende Anforderungen erfüllen:

Mathematik	1	Das mathematische Modell der Methode soll die technischen Systeme sowohl mit als auch ohne Reparatur auf gleiche Art und Weise berechnen können.
	2	Das mathematische Modell der Methode soll besonders bei komplexen Systemen die stochastischen Abhängigkeiten zwischen den Systemzuständen (z. B. Ausfall infolge gemeinsamer Ursache) berücksichtigen.

	3	Das mathematische Modell der Methode soll verschiedene Ausfallarten einer Komponente berücksichtigen. Man unterscheidet z. B. für die Baugruppen mit Selbstdiagnose zwischen den s. g. festgestellten (en: detected) und nicht festgestellten (en: undetected) Ausfällen.
Algorithmen	4	Die Methode muss leicht algorithmisierbar und in Form eines Softwareproduktes implementierbar sein.
	5	Die Softwareimplementierung der Methode muss mit den bereits existierenden Softwareprodukten (z. B. OM690 für die Überwachung der leittechnischen Systeme) nahtlos integrierbar sein.
	6	Die Algorithmen sollen eine höchstens polynomial beschränkte Laufzeit haben (s. Tab. 41).

Tab. 48 Anforderungen an eine Methode der Zuverlässigkeitsberechnung

Im folgenden Kapitel werden die genannten Anforderungen mit dem heutigen Stand der Forschung und Technik verglichen.

4.2 Vergleich mit dem Stand der Forschung

Für die Zuverlässigkeitsberechnung von realen technischen Systemen hat sich heutzutage die Methode der markovschen Minimalschnitte (s. Kap. 3 und Abschnitt 3.4) als am besten passende etabliert.

Das mathematische Modell dieser Methode entspricht bereits dem Punkt 1 der Anforderungen (s. Tab. 48). Der Verbesserungsbedarf besteht darin, dass die Funktionalität der modernen Baugruppen (z. B. Selbstdiagnose) sowie deren komplexes Verhalten zusätzliche Faktoren in das Modell einfügen.

Ziel der modifizierten Methode ist es, die aus der Praxis bekannten Faktoren wie Diagnose-Aufdeckungsgrad (DC) und Ausfall infolge gemeinsamer Ursache (CCF) in der für die Markov-Methode typischen Übergangsmatrix zu berücksichtigen. In anderen Worten Punkt 2 und 3 der Tab. 48 soll erfüllt werden.

Die Problematik, die dabei entsteht, wird ausführlich im Abschnitt 5.1 beschrieben. Besondere Aufmerksamkeit wird auf den CCF-Faktor gerichtet, denn bisherige Versuche [12, 10, 22] diesen Faktor in die Markov-Methode einzufügen, verstoßen gegen die Definition eines markovschen Prozesses.

Um den Einfluss von DC- und CCF-Faktoren auf das mathematische Modell der Markov-Methode abschätzen zu können, werden im Abschnitt 5.1 und 5.2 zwei alternative Modelle sowie die Übergangsmatrizen und die entsprechenden Systeme von Differentialgleichungen dargestellt. Anschließend werden an einem Beispiel die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsberechnung mit der klassischen Markov-Methode verglichen.

4.3 Vergleich mit dem Stand der Technik

In diesem Kapitel werden die technologischen Aspekte der Softwareimplementierung sowie die Grundalgorithmen der vorgeschlagenen Methode der Zuverlässigkeitsberechnung betrachtet.

Die Software, die in Rahmen des Projektes ACoRAM (Automatic Calculation of Reliability-Availability-Maintainability, s. Kap. 6) entwickelt wurde, hat eine modulare Architektur (s. Abb. 49) und basiert auf Microsoft .NET Framework.

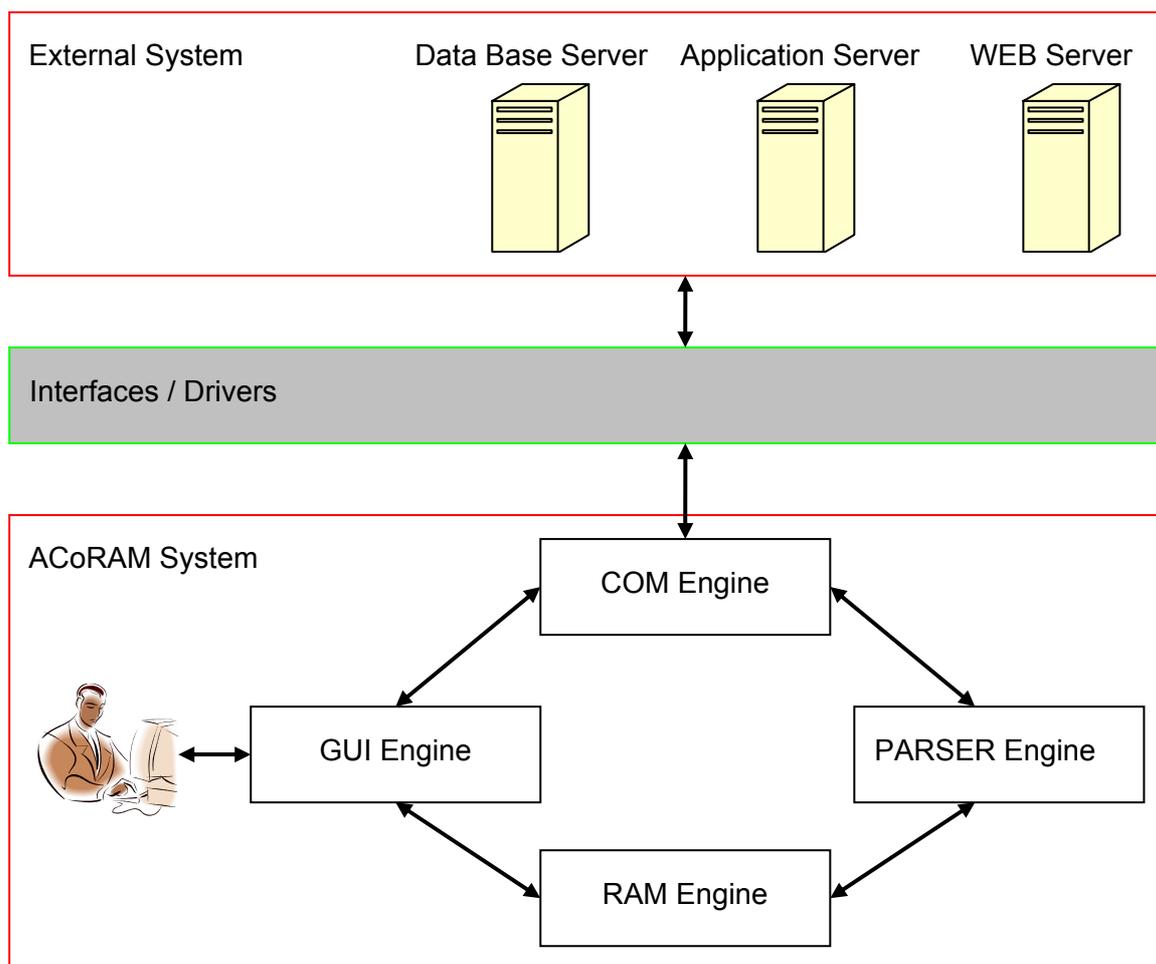


Abb. 49 ACoRAM: Architektur der Software

Die einzelnen Module (Engines, s. Abb. 49) des ACoRAM Systems unterstützen die DCOM Technologie und standardisierte Protokolle des Datentransfers. Dies ermöglicht nicht nur eine nahtlose Integration mit den Fremdsystemen (Punkt 5, Tab. 48), sondern wandelt auch die ACoRAM Software zu einer universellen Plattform für Zuverlässigkeitsberechnungssoftware um.

Folgende Tabelle (s. Tab. 49) fasst die Funktionalität von Modulen der ACoRAM Software zusammen:

COM Engine	Ermöglicht die Zusammenarbeit von ACoRAM Software mit Fremdsystemen. Dabei wird mittels standardisierten Schnittstellen und Protokollen des Datentransfers (Stack TCP/IP) der Zugriff auf die Datenbank-, Application- sowie WEB-Server gewährleistet.
PARSER Engine	Ermöglicht die syntaktische Analyse und Umwandlung des Datenformats eines Fremdsystems in das Datenformat des ACoRAM Systems. Die gesammelte Information, z. B. Statistik über die Ausfall- bzw. Reparaturraten, wird an das Modul "RAM Engine" weitergeleitet.
RAM Engine	Bereitet die eigentliche Zuverlässigkeitsberechnung vor. Dabei wird zunächst ein vollständiger Zustandsgraph eines Minimalschnittes erzeugt. Danach wird eine entsprechende Übergangsmatrix aufgebaut und an den Application-Server mit der mathematischen Software wie z. B. MathCAD weitergeleitet.
GUI Engine	Die graphische Benutzeroberfläche basiert auf der HTML-Technologie und ermöglicht dank dem WEB-Server die Unabhängigkeit vom Betriebssystem und den Zugang zu ACoRAM Software von mehreren Benutzern gleichzeitig.

Tab. 49 Funktionalität von Modulen

Die Grundalgorithmen, die die Funktionalität des Moduls "RAM Engine" gewährleisten, sind in der Algorithmentechnik bekannt. Dabei handelt es sich um einen QuickSort-Algorithmus und einen rekursiven Algorithmus mit der Rekursionsformel (s. Abschnitt 2.3.2)

$$T(n) = aT(n/b) + n^2 = O(n^{\log_b a})$$

Daraus folgt, dass die Laufzeit des rekursiven Algorithmus polynomial beschränkt ist. Damit ist auch Punkt 6 der Anforderungen (s. Tab. 48) erfüllt.

5 Die modifizierte Methodik im Detail

Ziel dieses Kapitels ist es, die Bedeutung der Faktoren "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" (CCF) und "Diagnose-Aufdeckungsgrad" (DC) zu erläutern sowie deren Einfluss auf die Zuverlässigkeitsberechnung nach der Markov-Methode zu evaluieren.

Die modifizierten Modelle werden im Abschnitt 5.1 und 5.2 analysiert und mit dem klassischen Markov-Modell verglichen. Die entsprechenden Systeme von Differentialgleichungen (DGL-Systeme) werden numerisch aufgelöst und die Ergebnisse werden in Form der zeitlichen Funktionsabhängigkeiten dargestellt.

Für die numerische Auflösung der DGL-Systeme wurden folgende mathematische Softwareprodukte benutzt:

Software	Version	Methode	Zeitintervall (Stunden)	Sampling
MathCAD	12	Runge-Kutta, adaptiv	8760	50000
CARMS	1.1	Runge-Kutta, adaptiv	8760	automatisch

5.1 Neuer Faktor: Ausfall infolge gemeinsamer Ursache

Das Phänomen "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" ist sowohl in der Praxis, als auch in der Theorie bekannt. Die internationalen Normen IEC 61508 und IEC 61511 enthalten zahlreiche praktische Beispiele dafür, wie der Faktor "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" die Sicherheit aber auch im Allgemeinen die Zuverlässigkeit (RAM Werte) eines technischen Systems beeinflussen kann. Außerdem stellen diese Normen die quantitative Auswertung dieses Faktors (CCF oder auch β genannt) in Form statistischer Tabellen zur Verfügung.

In der Theorie [12, 2, 10, 22] dagegen wurde das Thema "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" relativ wenig untersucht. Als Folge dessen fehlt ein klares Konzept dafür, wie der Faktor "Ausfall infolge gemeinsamer Ursache" bei der Zuverlässigkeitsberechnung z. B. mittels Markov-Modells berücksichtigt werden kann.

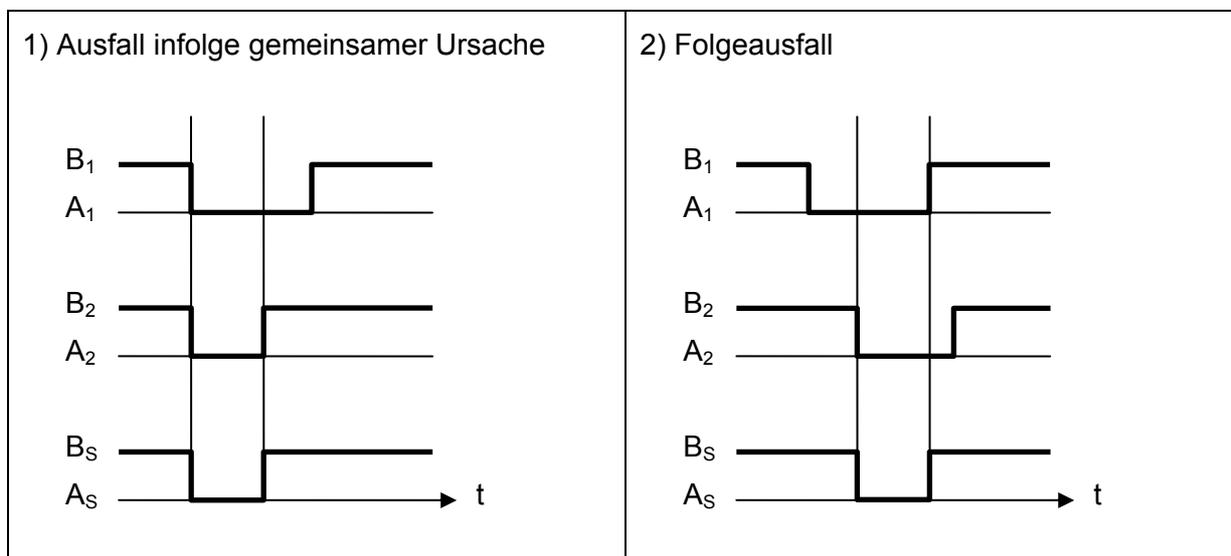
Laut IEC 61508-4 (deutsche Fassung) wird ein Ausfall infolge gemeinsamer Ursache wie folgt definiert:

Ausfall infolge gemeinsamer Ursache (en: common cause failure): Ausfall, der das Ergebnis eines oder mehrerer Ereignisse ist, die gleichzeitige Ausfälle von zwei oder mehreren getrennten Kanälen in einem mehrkanaligen System verursachen und zu einem Systemausfall führen.

Def. 28 Ausfall infolge gemeinsamer Ursache

In anderen Worten, unter einem Ausfall infolge gemeinsamer Ursache ist der gleichzeitige Ausfall mehreren Komponenten zu verstehen, der durch ein einziges stochastisches Ereignis hervorgerufen wird. In den Automatisierungssystemen können z. B. elektromagnetische Störungen oder Busausfälle zum gleichzeitigen Ausfall von mehreren Komponenten (Mehrfachausfall) führen.

An dieser Stelle ist es notwendig verschiedene Arten von Mehrfachausfällen darzustellen:



Tab. 50 Verschiedene Arten von Mehrfachausfällen

Aus der Def. 28 und Tab. 50 wird eine wesentliche Eigenschaft des Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache deutlich: in einem unendlich kleinen Zeitintervall (also Δt) tritt mehr als ein Ereignis auf, was gegen der Definition (s. Def. 15) eines markovschen Prozesses verstößt.

Im Falle eines Folgeausfalls sind die aufeinander folgenden und voneinander abhängigen Ausfälle dagegen zeitlich getrennt. Folgeausfälle können z. B. dadurch hervorgerufen werden, dass durch Ausfall einer Komponente die andere überlastet wird und später ausfällt.

Außerdem, laut [12]

Bei Berücksichtigung von Ausfällen infolge gemeinsamer Ursache sind die Komponenten nicht mehr als stochastisch-unabhängig zu betrachten. Es wird angenommen:

$\mu \gg \lambda \gg \lambda_{CCF}$, wobei λ_{CCF} - die Ausfallrate bei einem Ausfall infolge gemeinsamer Ursache ist.

Dies ist noch ein Widerspruch zu der Definition eines markovschen Prozesses (Ereignisse sind stochastisch-unabhängig).

Nicht desto trotz, ist aus der Praxis bekannt, dass Ausfälle infolge gemeinsamer Ursache (CCF) stattfinden und besonders in der Leitechchnik gravierende Auswirkung auf das Gesamtsystem haben können. Eine entsprechende Statistik kann man in diversen Berichten finden. So z. B. im Jahr 2000 wurde in einem internen Bericht der Firma TÜV Product Service GmbH aufgrund der Statistik über leitechtechnische Komponenten eine empirische Formel (im Weiteren TÜV Formel) für die Ausfallrate eines reparierbaren redundanten Systems mit 2 identischen Komponenten mit Berücksichtigung des CCF-Faktors dargestellt:

$$\lambda_S = \frac{2\lambda^2}{\mu} + \beta\lambda$$

Gl. 5.1—1

In dieser Formel sind λ und μ die Ausfall- bzw. Reparaturraten der Einzelkomponente, β ist der Tabellenwert (IEC 61508-6) des CCF-Faktors. Der erste Summand in der Gl. 5.1—1 entspricht einer klassischen Formel für die Ausfallrate λ_S eines redundanten Systems (s. Tab. 37). Der zweite Summand bildet die Auswirkung des CCF-Faktors ab: dadurch wird λ_S wesentlich höher als in der Theorie (z. B. für typische Werte von $\lambda = 10^{-6} h^{-1}$, $\mu = 0,01 h^{-1}$ und $\beta = 0,02$ um Faktor ca. 100).

Im Falle eines symmetrischen Systems (also ein reparierbares redundantes System mit 2 identischen Komponenten) liefert Gl. 5.1—1 die RAM Werte, die nahezu den Feldwerten entsprechen. Das Problem besteht darin, dass solche empirischen Formeln immer noch keine mathematische Begründung haben.

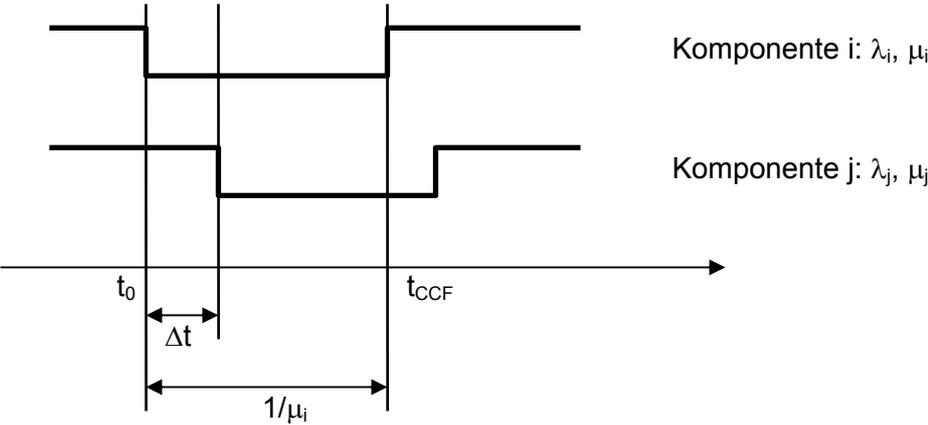
In Abschnitt 5.1.1 werden modifizierte Modelle der Markov-Methode dargestellt, die mathematisch begründet sind, aber den CCF-Faktor berücksichtigen und Ergebnisse liefern, die eine gute Korrelation mit den Feldwerten aufweisen.

Dafür werden zunächst folgende Eigenschaften eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache postuliert:

1 CCF bedeutet nicht den gleichzeitigen (also im Sinne Δt) Ausfall von 2 oder mehreren Komponenten. Es genügt, wenn die zweite Komponente während der Reparatur der ersten ausfallen wird.

Ein Ausfall infolge gemeinsamer Ursache ist der Grenzfall eines Folgeausfalls, wenn das Zeitintervall zwischen den Einzelereignissen gleich Δt ist. In diesem Sinne wird der CCF-Faktor wie folgt definiert:

$\Pr\{CCF\} = \Pr\{A_j \wedge A_i\} = \Pr\{A_i \wedge A_j\} = \Pr\{A_j | A_i\} \Pr\{A_i\} = \Pr\{A_i | A_j\} \Pr\{A_j\}$, in einem Zeitintervall $[t_0, t_0+t_{CCF}]$



	$t_{CCF} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(t_0 + \frac{1}{\mu_i} - t_0 - \Delta t \right) = \frac{1}{\mu_i}$
2	CCF bezieht sich nur auf die Komponenten, die eine Parallelanordnung haben. Der Folgeausfall bezieht sich dagegen auf die Komponenten mit Serienanordnung.
3	<p>CCF hängt nicht von den Ausfallraten der Einzelkomponenten [12], sondern einzig und allein von der jeweiligen Implementierung eines technischen Systems ab:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Betriebsbedingungen (Intensität) - Randbedingungen (Stressfaktoren) <p>Daraus folgt, dass CCF in jedem konkreten Fall aus der Statistik ermittelt werden muss.</p>
4	<p>CCF wird quantitativ durch λ_{CCF} charakterisiert. Da die Reihenfolge der ausfallenden Komponenten von Bedeutung ist:</p> <p>$\lambda_{CCF} = \lambda_{ij} + \lambda_{ji}$, wobei im Allgemeinen $\lambda_{ij} \neq \lambda_{ji}$</p> <p>$\lambda_{ij} \approx \frac{n_{ij}}{N\Delta t}$, wobei n_{ij} – Anzahl der Fälle, wo die Komponente i ausgefallen ist, während die Komponente j repariert wurde.</p> <p>$\lambda_{ji} \approx \frac{n_{ji}}{N\Delta t}$, wobei n_{ji} – Anzahl der Fälle, wo die Komponente j ausgefallen ist, während die Komponente i repariert wurde.</p> <p>N – die Anzahl der Systeme, die in einem Zeitintervall Δt getestet worden sind.</p>
5	<p>Die Übergangswahrscheinlichkeit p_{ij} unter Berücksichtigung von CCF wird wie folgt definiert:</p> <p>$p_{ij} = \Pr\{A_i \vee A_{ij}\} = (\lambda_i + \lambda_{ij})\Delta t - \lambda_i\lambda_{ij}(\Delta t)^2 \approx (\lambda_i + \lambda_{ij})\Delta t$</p>

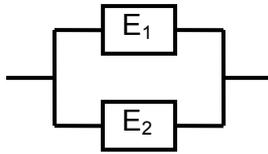
Tab. 51 Faktor CCF, Eigenschaften

Daraus folgen zwei alternative Modelle, die die Berücksichtigung des CCF Faktors bei der Zuverlässigkeitsberechnung nach Markov-Methode ermöglichen müssen.

5.1.1 Einfluss von CCF auf die Markov-Methode

In diesem Abschnitt wird die Auswirkung des CCF Faktors auf die Zuverlässigkeitsberechnung mittels Markov-Methode untersucht. Dabei werden zunächst zwei alternativen Modelle dargestellt (s. Abschnitt 5.1.1.1 und 5.1.1.2). Im Abschnitt 5.1.2 werden diese Modelle für verschiedene Grenzfälle des CCF Faktors (z. B. 100%, 2% oder 0% von der Ausfallrate einer Komponente) und verschiedene Systemkonfigurationen (Systeme mit identischen und nicht identischen Komponenten) evaluiert.

Grundsätzlich wird ein reparierbares redundantes System bezüglich des Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache analysiert:



Die Komponenten E₁ und E₂ sind im Allgemeinen nicht identisch und werden durch die entsprechenden Zuverlässigkeitsparameter $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ charakterisiert.

Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr\{A_1\} = 1 - e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Pr\{A_2\} = 1 - e^{-\lambda_2 t}$$

Dieses System bildet ein klassisches Markov-Modell (Zustandsgraph) vom Typ:

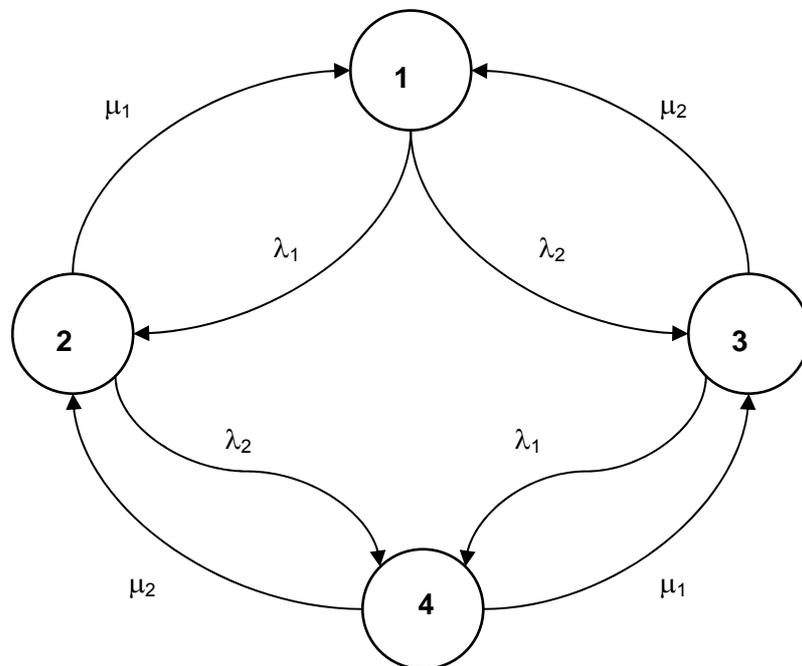


Abb. 50 Klassisches Markov-Modell

Die Zustände auf der Abb. 50 haben folgende Bedeutung:

- 1 Beide Komponenten E₁ und E₂ sind intakt, Gesamtsystem intakt.
- 2 Komponente E₁ ist ausgefallen, Komponente E₂ ist intakt, Gesamtsystem intakt.
- 3 Komponente E₂ ist ausgefallen, Komponente E₁ ist intakt, Gesamtsystem intakt.
- 4 Beide Komponenten E₁ und E₂ sind ausgefallen, Ausfall des Gesamtsystems.

5.1.1.1 Modell 1: nicht konstante Ausfallraten

Als Ausgangsmodell wird das markovsche Modell (s. Abb. 50) zugrunde gelegt. Die Berücksichtigung des Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache führt auf das Modell in der Abb. 51:

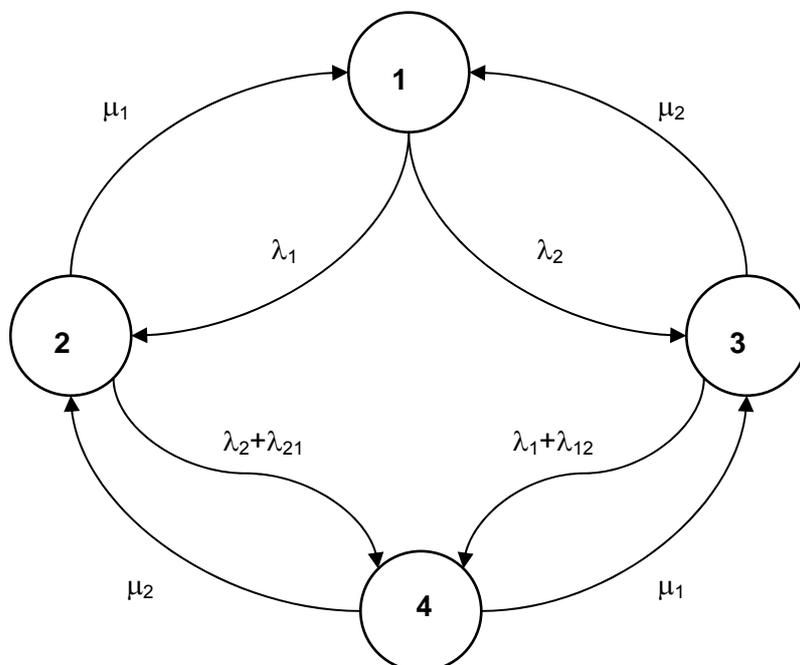


Abb. 51 Modell 1: nicht konstante Ausfallraten

Der Ausfall infolge gemeinsamer Ursache wird in diesem Modell als eine bedingte Wahrscheinlichkeit (s. auch Punkt 1 Tab. 51) berücksichtigt. Das bedeutet: wenn sich das System zu einem gewissen Zeitpunkt im Zustand 2 bzw. 3 (also die Komponente E_1 bzw. E_2 ist bereits ausgefallen) befindet, dann entsteht eine zusätzliche Wahrscheinlichkeit (z. B. infolge erhöhter Belastung), dass auch die Komponente E_2 bzw. E_1 ausfallen wird.

Solche bedingte Wahrscheinlichkeit wird durch die Übergangsraten λ_{21} bzw. λ_{12} charakterisiert. Die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit p_{24} bzw. p_{34} wird dann durch die kombinierte Übergangsraten $(\lambda_2 + \lambda_{21})$ bzw. $(\lambda_1 + \lambda_{12})$ charakterisiert.

Das Modell 1 wird durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 P_1'(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)P_1(t) + \mu_1 P_2(t) + \mu_2 P_3(t) \\
 P_2'(t) &= \lambda_1 P_1(t) - (\lambda_2 + \lambda_{21} + \mu_1)P_2(t) + \mu_2 P_4(t) \\
 P_3'(t) &= \lambda_2 P_1(t) - (\lambda_1 + \lambda_{12} + \mu_2)P_3(t) + \mu_1 P_4(t) \\
 P_4'(t) &= (\lambda_2 + \lambda_{21})P_2(t) + (\lambda_1 + \lambda_{12})P_3(t) - (\mu_1 + \mu_2)P_4(t)
 \end{aligned}$$

Gl. 5.1—2

Oder in der Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \lambda_{21} + \mu_1) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_{12} + \mu_2) & \mu_1 \\ 0 & +(\lambda_2 + \lambda_{21}) & +(\lambda_1 + \lambda_{12}) & -(\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}$$

Gl. 5.1—3

Falls die Komponenten E₁ und E₂ völlig unabhängig ausfallen (also λ₂₁ = 0 und λ₁₂ = 0), dann stimmt dieses Modell (s. Abb. 51) mit dem klassischen Markov-Modell (s. Abb. 50) überein.

Die Tabelle (s. Tab. 52) fasst die Eigenschaften des Modells 1 zusammen:

1	Basis-Modell	Klassisches Markov-Modell
2	Basis-Prozess	Ein zeithomogener Markov-Prozess mit nicht konstanten Übergangsraten
3	Berücksichtigung von CCF	Der CCF Faktor wird als eine bedingte Wahrscheinlichkeit mit der charakteristischen Übergangsrate λ ₂₁ bzw. λ ₁₂ berücksichtigt. Die gesamte Übergangswahrscheinlichkeit p ₂₄ bzw. p ₃₄ wird dann durch die kombinierte Übergangsrate (λ ₂ +λ ₂₁) bzw. (λ ₁ +λ ₁₂) charakterisiert.
4	Konvergenz gegen Markov-Modell	Falls der CCF Faktor nicht vorhanden ist (also λ ₂₁ = 0 und λ ₁₂ = 0), dann stimmt dieses Modell (s. Abb. 51) mit dem klassischen Markov-Modell (s. Abb. 50) exakt überein. Die Auswirkung des CCF Faktors mit den Werten 2% und 100% von der Ausfallrate der Einzelkomponente wird im Abschnitt 5.1.2.1 evaluiert.

Tab. 52 Modell 1: Eigenschaften

5.1.1.2 Modell 2: Semi-Markov

Auch in diesem Fall wird das markovsche Modell (s. Abb. 50) als Ausgangsmodell zugrunde gelegt. Die Berücksichtigung des Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache führt auf das Modell in der Abb. 52.

An dieser Stelle möchte ich darauf hinweisen, dass ein ähnliches Modell in [12, s. auch Kap. 8.3] dargestellt wurde. Allerdings sind die eigentlichen Ausfallraten der Einzelkomponenten wegen der Berücksichtigung des CCF Faktors in dem Modell von Kochs um λ_{CCF} reduziert. Dies ist ein Widerspruch zu dem Unabhängigkeitsprinzip (s. Punkt 3, Tab. 51).

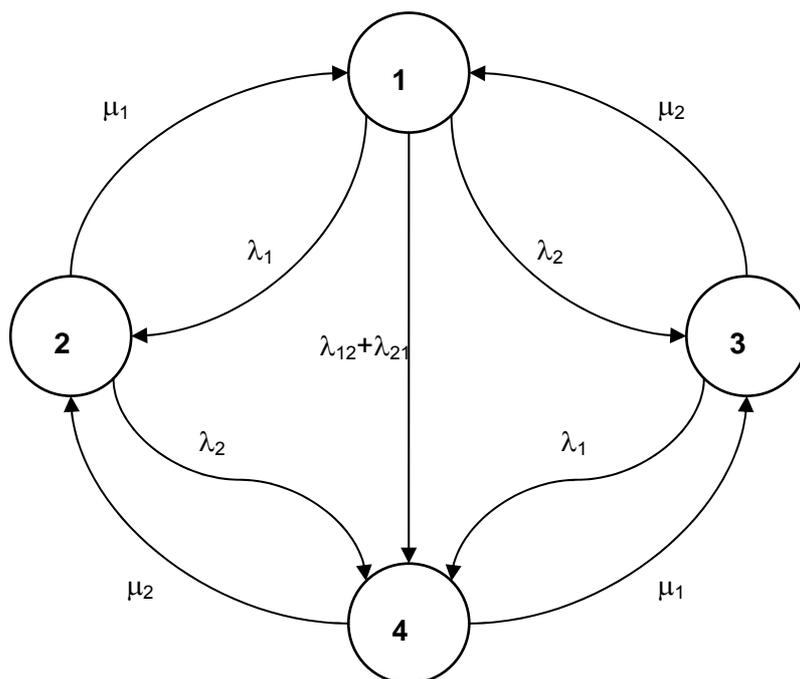


Abb. 52 Modell 2: Semi-Markov

Der Ausfall infolge gemeinsamer Ursache wird in diesem Modell als ein direkter Übergang vom Zustand 1 nach Zustand 4 berücksichtigt. Das bedeutet nämlich, dass die zeitliche Homogenität eines Markov-Prozesses (s. Tab. 11 und Def. 16) nicht mehr erfüllt wird. Im Unterschied zum Modell 1 (s. Abb. 51) bleiben die Übergangsraten konstant.

Die Übergangswahrscheinlichkeit bei dem direkten Übergang vom Zustand 1 nach Zustand 4 wird durch die Übergangsrates $\lambda_{CCF} = \lambda_{21} + \lambda_{12}$ charakterisiert (s. Punkt 4, Tab. 51).

Das Modell 2 wird durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 P_1'(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_{21})P_1(t) + \mu_1 P_2(t) + \mu_2 P_3(t) \\
 P_2'(t) &= \lambda_1 P_1(t) - (\lambda_2 + \mu_1)P_2(t) + \mu_2 P_4(t) \\
 P_3'(t) &= \lambda_2 P_1(t) - (\lambda_1 + \mu_2)P_3(t) + \mu_1 P_4(t) \\
 P_4'(t) &= (\lambda_{12} + \lambda_{21})P_1(t) + \lambda_2 P_2(t) + \lambda_1 P_3(t) - (\mu_1 + \mu_2)P_4(t)
 \end{aligned}$$

Gl. 5.1—4

Oder in der Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_2 + \lambda_{21}) & \mu_1 & \mu_2 & 0 \\ \lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_1) & 0 & \mu_2 \\ \lambda_2 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_2) & \mu_1 \\ +(\lambda_{12} + \lambda_{21}) & \lambda_2 & \lambda_1 & -(\mu_1 + \mu_2) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}$$

Gl. 5.1—5

Falls die Komponenten E_1 und E_2 völlig unabhängig ausfallen (also $\lambda_{21} = 0$ und $\lambda_{12} = 0$), dann stimmt dieses Modell (s. Abb. 52) mit dem klassischen Markov-Modell (s. Abb. 50) überein.

Die Tabelle (s. Tab. 53) fasst die Eigenschaften des Modells 2 zusammen:

1	Basis-Modell	Klassisches Markov-Modell
2	Basis-Prozess	Ein nicht zeithomogener Markov-Prozess mit konstanten Übergangsraten
3	Berücksichtigung von CCF	Der CCF Faktor wird als einen direkten Übergang vom Zustand 1 nach Zustand 4 berücksichtigt. Die Übergangswahrscheinlichkeit p_{14} wird dann durch die kombinierte Übergangsrate $(\lambda_{21} + \lambda_{12})$ charakterisiert.
4	Konvergenz gegen Markov-Modell	Falls der CCF Faktor nicht vorhanden ist (also $\lambda_{21} = 0$ und $\lambda_{12} = 0$), dann stimmt dieses Modell (s. Abb. 52) mit dem klassischen Markov-Modell (s. Abb. 50) exakt überein. Die Auswirkung des CCF Faktors mit den Werten 2% und 100% von der Ausfallrate der Einzelkomponente wird im Abschnitt 5.1.2.2 evaluiert.

Tab. 53 Modell 2: Eigenschaften

5.1.1.3 CCF: allgemeine Formel für die Ausfallrate λ_{CCF}

In der Praxis wird die Ausfallrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache aus der Statistik ermittelt (s. Punkt 3 und 4, Tab. 51). Nicht desto trotz könnte man versuchen, eine allgemeine Formel für die Ausfallrate λ_{CCF} zu entwickeln. In diesem Abschnitt werden die Grundideen und anschließend auch die Formel dargestellt, die aufgrund der Zuverlässigkeitsparameter der Einzelkomponenten (λ_1, μ_1) und (λ_2, μ_2) die Ausfallrate λ_{CCF} errechnen lässt.

Ein Ausfall infolge gemeinsamer Ursache ist ein Ereignis vom Typ "Ausfall der Komponente 1 (A_1) und Ausfall der Komponente 2 (A_2)" (s. Tab. 51, Punkt 1), dann gilt:

$$\begin{aligned} \Pr\{A_1 \wedge A_2\} &= \Pr\{A_1 | A_2\} \Pr\{A_2\} \\ \Pr\{A_2 \wedge A_1\} &= \Pr\{A_2 | A_1\} \Pr\{A_1\} \\ &\Rightarrow \\ \frac{\Pr\{A_1 | A_2\}}{\Pr\{A_2 | A_1\}} &= \frac{\Pr\{A_1\}}{\Pr\{A_2\}} \\ &\Rightarrow \\ \frac{X_{12}}{X_{21}} &= \frac{C_1}{C_2} \end{aligned}$$

Gl. 5.1—6

In dieser Gleichung sind X_{12} und X_{21} die gesuchten Wahrscheinlichkeiten eines bedingten Ausfalls. Dabei bilden folgende Ereignisse eine volle Gruppe:

Ereignis	Wahrscheinlichkeit
Ausfall A_1 in t_{CCF}	$\Pr\{A_1\} = 1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} = C_1$, wobei $t_{CCF} = \max\{1/\mu_1, 1/\mu_2\}$
Bedingter Ausfall A_{12} in t_{CCF}	$\Pr\{A_1 A_2\} = X_{12}$, wobei $t_{CCF} = \max\{1/\mu_1, 1/\mu_2\}$
Ausfall A_2 in t_{CCF}	$\Pr\{A_2\} = 1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} = C_2$, wobei $t_{CCF} = \max\{1/\mu_1, 1/\mu_2\}$
Bedingter Ausfall A_{21} in t_{CCF}	$\Pr\{A_2 A_1\} = X_{21}$, wobei $t_{CCF} = \max\{1/\mu_1, 1/\mu_2\}$
Kein Ausfall in t_{CCF}	$\Pr\{\bar{A}\} = \Pr\{\bar{A}_1 \wedge \bar{A}_2 \wedge \bar{A}_{12} \wedge \bar{A}_{21}\} = k_0$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \Pr\{A_{12} \vee A_{21} \vee A_1 \vee A_2\} &= 1 - k_0 \\ \Rightarrow \\ (X_{12} + X_{21} - X_{12}X_{21}) + (C_1 + C_2 - C_1C_2) - (X_{12} + X_{21} - X_{12}X_{21})(C_1 + C_2 - C_1C_2) &= 1 - k_0 \\ \Rightarrow \\ (X_{12} + X_{21} - X_{12}X_{21})(1 - (C_1 + C_2 - C_1C_2)) &= 1 - k_0 - (C_1 + C_2 - C_1C_2) \\ \Rightarrow \\ X_{12} + X_{21} - X_{12}X_{21} &= \frac{1 - k_0 - (C_1 + C_2 - C_1C_2)}{1 - (C_1 + C_2 - C_1C_2)} = k_1 \end{aligned}$$

Gl. 5.1—7

Aus der Gl. 5.1—6 und Gl. 5.1—7 folgt ein algebraisches Gleichungssystem:

$$\begin{cases} X_{12} = \frac{C_1}{C_2} \\ X_{21} + X_{12} - X_{12}X_{21} = k_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_{12} = \frac{C_1}{C_2} X_{21} \\ X_{12} + X_{21} - X_{12}X_{21} = k_1 \end{cases}$$

Gl. 5.1—8

Daraus wird eine quadratische Gleichung abgeleitet:

$$-\frac{C_1}{C_2} X_{21}^2 + \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) X_{21} - k_1 = 0$$

Gl. 5.1—9

Die Gl. 5.1—9 wird bezüglich X_{21} aufgelöst:

$$X_{21} = -\frac{C_2}{2C_1} \left[\left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \pm \sqrt{\left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right)^2 + 4k_1 \frac{C_1}{C_2}} \right]$$

Gl. 5.1—10

Einer von beiden Wurzeln aus der Gl. 5.1—10 ist negativ und muss verworfen werden (weil X_{21} eine Wahrscheinlichkeit ist und kann nicht negativ sein). Dann gilt:

$$X_{21} = -\frac{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)}{2 \left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)} \left[\left(1 + \frac{\left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)}{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)}{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)} \right)^2 + 4k_1 \frac{\left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)}{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)}} \right]$$

$$X_{12} = -\frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{\left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)}{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)} \right) - \sqrt{\left(1 + \frac{\left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)}{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)} \right)^2 + 4k_1 \frac{\left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}} \right)}{\left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}} \right)}} \right]$$

Gl. 5.1—11

Wenn die Wahrscheinlichkeiten eines bedingten Ausfalls A_{12} bzw. A_{21} bekannt sind (s. Gl. 5.1—11), dann kann man die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache errechnen:

$$\Pr\{CCF\} = \Pr\{A_1 | A_2\} \Pr\{A_2\} = \Pr\{A_2 | A_1\} \Pr\{A_1\} = 1 - e^{-\lambda_{CCF} t_{CCF}}$$

Gl. 5.1—12

Dies ermöglicht die Ermittlung der gesuchten Ausfallrate λ_{CCF} eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache:

$$\begin{aligned} \Pr\{CCF\} &= \Pr\{A_1 | A_2\} \Pr\{A_2\} = \Pr\{A_2 | A_1\} \Pr\{A_1\} = 1 - e^{-\lambda_{CCF} t_{CCF}} \\ \Rightarrow \\ e^{-\lambda_{CCF} t_{CCF}} &= 1 - \Pr\{CCF\} \\ \Rightarrow \\ -\lambda_{CCF} t_{CCF} &= \ln(1 - \Pr\{CCF\}) \end{aligned}$$

Gl. 5.1—13

Und dann gilt (s. auch Gl. 5.1—11 für X_{12} und X_{21}):

$$\lambda_{CCF} = -\frac{\ln(1 - \Pr\{CCF\})}{t_{CCF}} = -\frac{\ln\left(1 - X_{21} \left(1 - e^{-\lambda_1 t_{CCF}}\right)\right)}{t_{CCF}} = -\frac{\ln\left(1 - X_{12} \left(1 - e^{-\lambda_2 t_{CCF}}\right)\right)}{t_{CCF}}$$

Gl. 5.1—14

Falls die Wahrscheinlichkeiten eines bedingten Ausfalls $\Pr\{A_{12}\} = 0$ bzw. $\Pr\{A_{21}\} = 0$, dann ist auch $\lambda_{CCF} = 0$. Der entscheidende Vorteil der Gl. 5.1—14 liegt daran, dass die Ausfallrate λ_{CCF} insbesondere im Falle eines "asymmetrischen" Systems wesentlich präziser bestimmt wird, als in der Gl. 5.1—1 (zweiter Summand, s. auch IEC 61508-6).

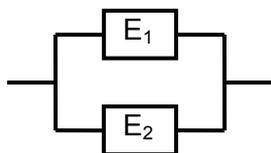
5.1.2 Beispiel: Markov-Methode mit CCF

In diesem Abschnitt werden die Modelle aus 5.1.1.1 und 5.1.1.2 bzw. die entsprechenden Systeme von Differentialgleichungen (s. Gl. 5.1—3 und Gl. 5.1—5) an mehreren Beispielen numerisch aufgelöst. Als Ergebnis sind die zeitlichen Abhängigkeiten für die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten der Systemzustände entstanden. Die Abhängigkeiten werden für jedes Modell in Form eines Diagramms dargestellt. Damit man die Dynamik von Prozessen besser abschätzen kann, wurde der Zustand 4 in jedem Modell als absorbierender Zustand definiert. Außerdem werden die Modelle sowohl für ein "symmetrisches" System (identische Komponenten), als auch für ein "asymmetrisches" System (nicht identische Komponenten) getestet.

Ziel dabei ist es, den Einfluss des CCF Faktors in jedem Modell zu evaluieren. Die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsberechnung nach jeweiligem Modell werden mit dem klassischen Markov-Modell (s. Abb. 50) sowie mit der empirischen Formel (s. Gl. 5.1—1) verglichen. Auf dieser Basis wird ein Modell ausgewählt, dass den Ausfall infolge gemeinsamer Ursache adäquat (nah zur Realität) abbildet. Dieses Modell wird später in der modifizierten Markov-Methode für die Erfassung des Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache verwendet.

5.1.2.1 Modell 1

Folgendes System wird mittels Modell 1 analysiert:



Die Komponenten E_1 und E_2 sind im Allgemeinen nicht identisch und werden durch die entsprechenden Zuverlässigkeitsparameter $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ charakterisiert.

Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr\{A_1\} = 1 - e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Pr\{A_2\} = 1 - e^{-\lambda_2 t}$$

Beim ersten Versuch wird das Modell 1 (s. Abb. 51, Gl. 5.1—3) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_1 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$ $\mu_2 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$
CCF Ausfallraten	$\lambda_{12} = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_{21} = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$
CCF Faktor (β)	$\beta = 1$ (also $\lambda_1 = \lambda_{12}$; $\lambda_2 = \lambda_{21}$)
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3, P_4)	(1,0,0,0)

Zeit (in Stunden) / Sampling	8760 / 50000
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 54 Modell 1, Versuch 1: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung sind in Abb. 53 dargestellt. Wichtig ist dabei der Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeitskurve. Daraus lässt sich der Wert der Ausfallrate λ_S bzw. $MTBF_S$ des Gesamtsystems ablesen:

$$\Pr\{\text{Zustand 4}\} = 1 - e^{-\lambda_S t}, \text{ bei } t = MTBF_S, \Pr\{\text{Zustand 4}\} \approx 0,63$$

	Zustand 4	Zustand 4 (TÜV Formel)	Zustand 4 (klassisch Markov)
$\Pr\{\text{Zustand 4}\} = 0,63$	$MTBF_S = 1196 \text{ h}$ $\lambda_S = 8,36E-04 \text{ h}^{-1}$	$MTBF_S = 1662 \text{ h}$ $\lambda_S = 6,02E-04 \text{ h}^{-1}$	$MTBF_S = 2286 \text{ h}$ $\lambda_S = 4,37E-04 \text{ h}^{-1}$

Tab. 55 Modell 1, Versuch 1: Ergebnisse

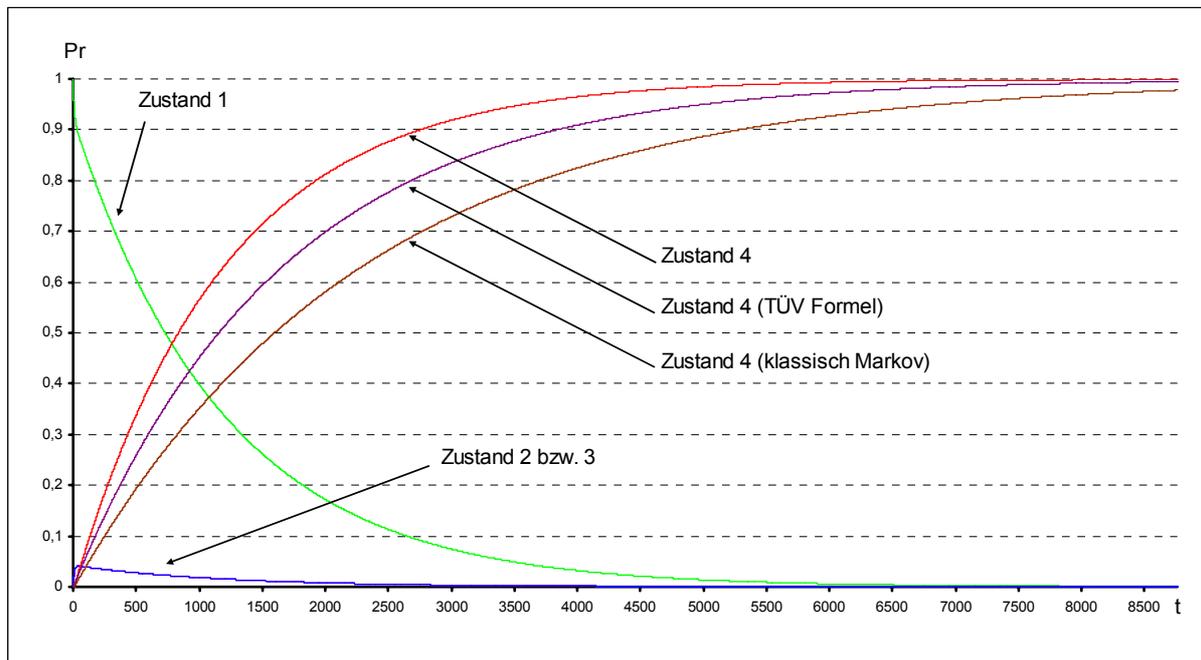


Abb. 53 Modell 1, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten

Wie aus der Tab. 55 folgt, ist der Einfluss des CCF Faktors auf die Zuverlässigkeitsberechnung nach Markov-Methode wesentlich. Wenn die Raten der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten vergleichbar mit den Ausfallraten von Einzelkomponenten sind, dann ist der $MTBF_S$ Wert nach dem Modell 1 praktisch doppelt so klein wie der $MTBF_S$ Wert nach dem klassischen Markov-Modell.

In der Abb. 54 sind die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 4 vergrößert dargestellt:

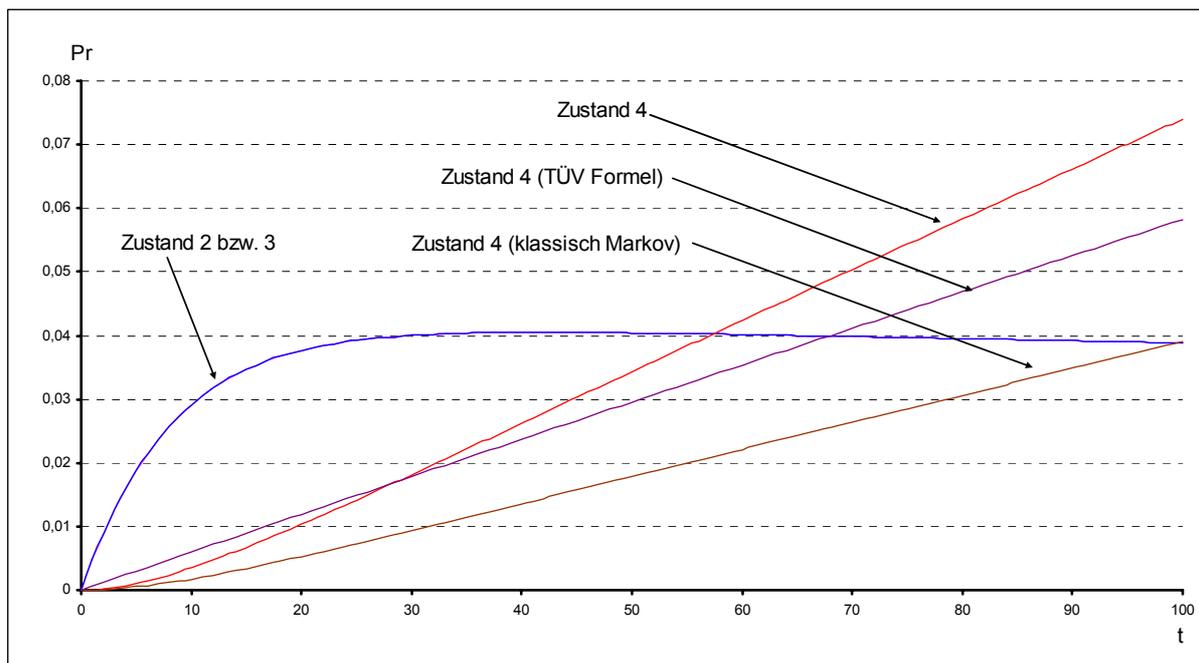


Abb. 54 Modell 1, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4

Damit man die Steigung der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven besser abschätzen kann, sind die entsprechenden Kurven in der Abb. 55 stark vergrößert dargestellt. Für die Ordinate wurde ein logarithmischer Maßstab verwendet.

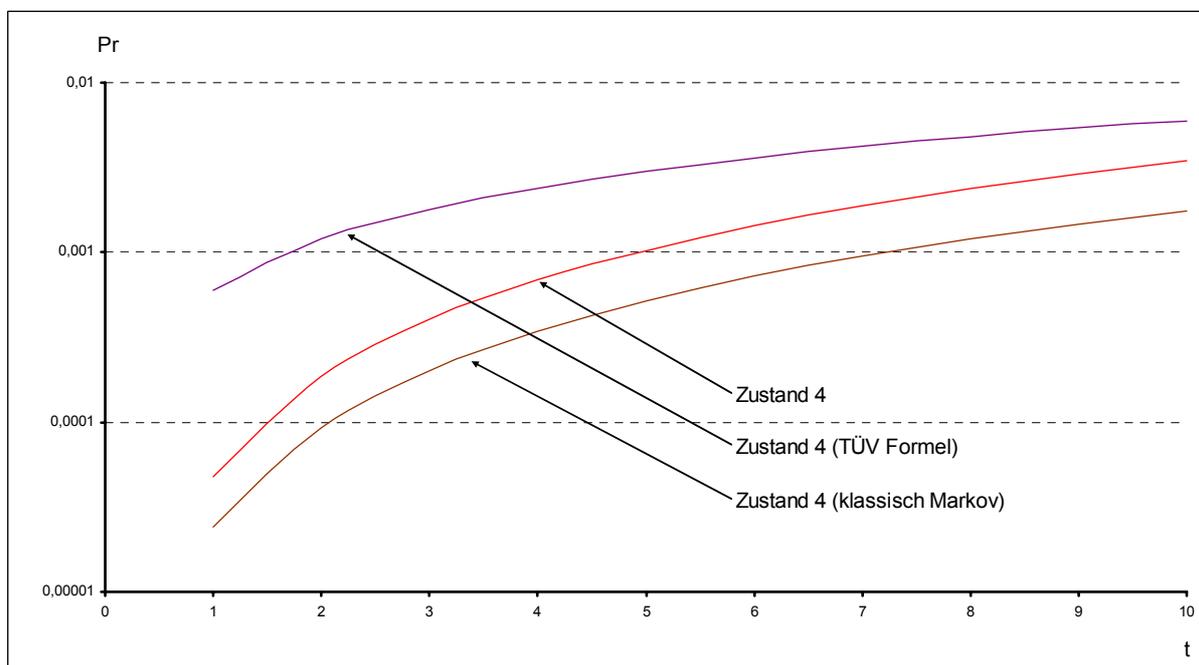


Abb. 55 Modell 1, Versuch 1: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Man sieht deutlich, dass unter gegebenen Anfangsbedingungen (s. Tab. 54) die Ausfallwahrscheinlichkeitskurve im Modell 1 durch die Berücksichtigung des CCF Faktors im Vergleich zur Ausfallwahrscheinlichkeitskurve aus dem klassischen Markov-Modell in Richtung Ausfallwahrscheinlichkeitskurve aus der Gl. 5.1—1 parallel verschoben wurde. Das bedeutet, dass in diesem Extremfall die Ergebnisse aus dem Modell 1 näher zur Realität sind, als die aus dem klassischen Markov-Modell.

In der Praxis wird aber der Prozentsatz des CCF Faktors nicht bei 100%, sondern bei 2% liegen (s. IEC 61508-6). Deswegen wird das Modell 1 (s. Abb. 51, Gl. 5.1—3) beim zweiten Versuch mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_1 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$ $\mu_2 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$
CCF Ausfallraten	$\lambda_{12} = 1,00E-04 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_{21} = 1,00E-04 \text{ h}^{-1}$
CCF Faktor (β)	$\beta = 0,02$ (also $\lambda_{12} = 0,02\lambda_1$; $\lambda_{21} = 0,02\lambda_2$)
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3, P_4)	(1,0,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	8760 / 50000
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 56 Modell 1, Versuch 2: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung sind in Abb. 56 dargestellt.

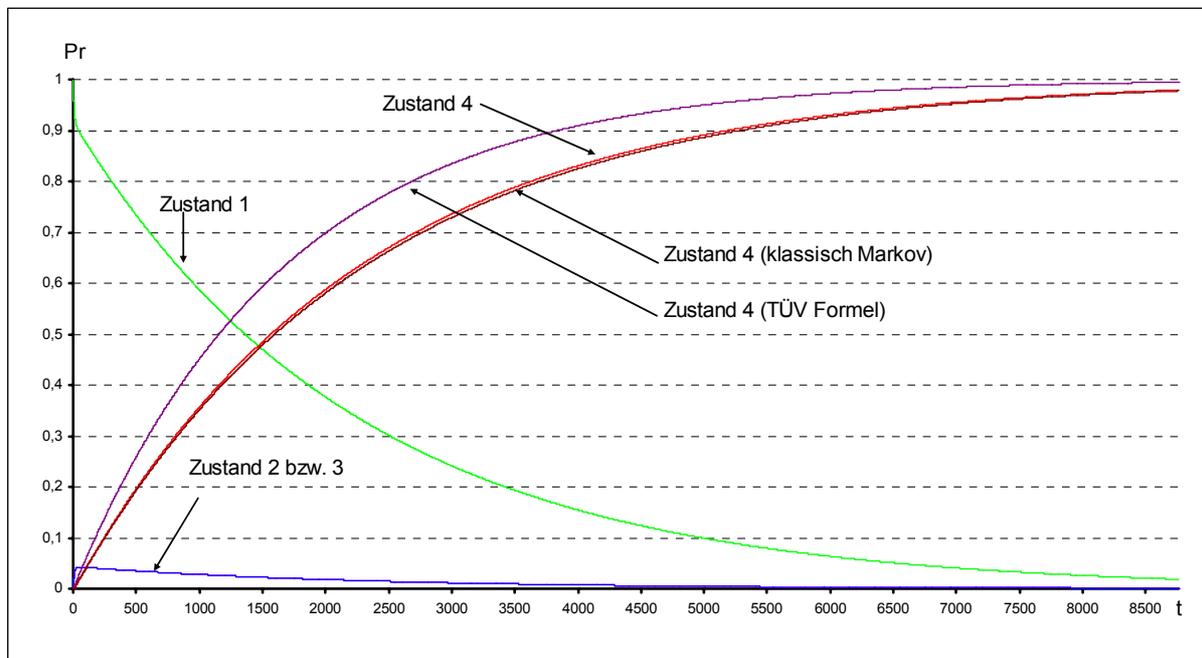


Abb. 56 Modell 1, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten

In der Abb. 57 sind die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 4 vergrößert dargestellt:

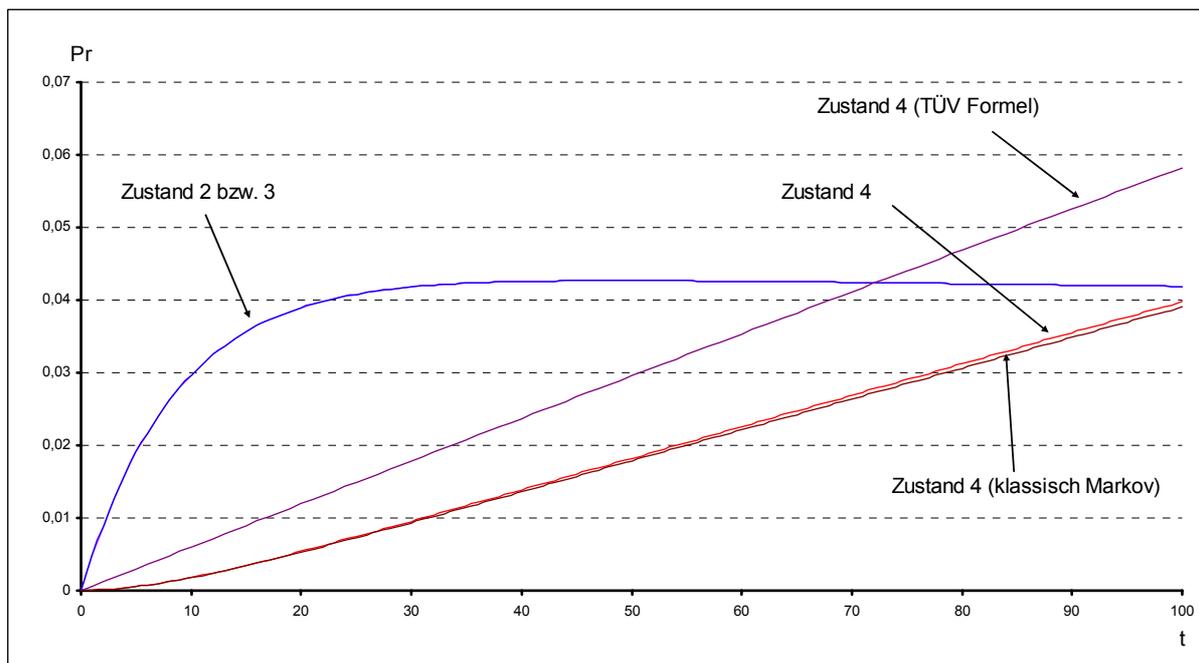


Abb. 57 Modell 1, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4

Damit man die Steigung der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven besser abschätzen kann, sind die entsprechenden Kurven in der Abb. 58 stark vergrößert dargestellt. Für die Ordinate wurde ein logarithmischer Maßstab verwendet.

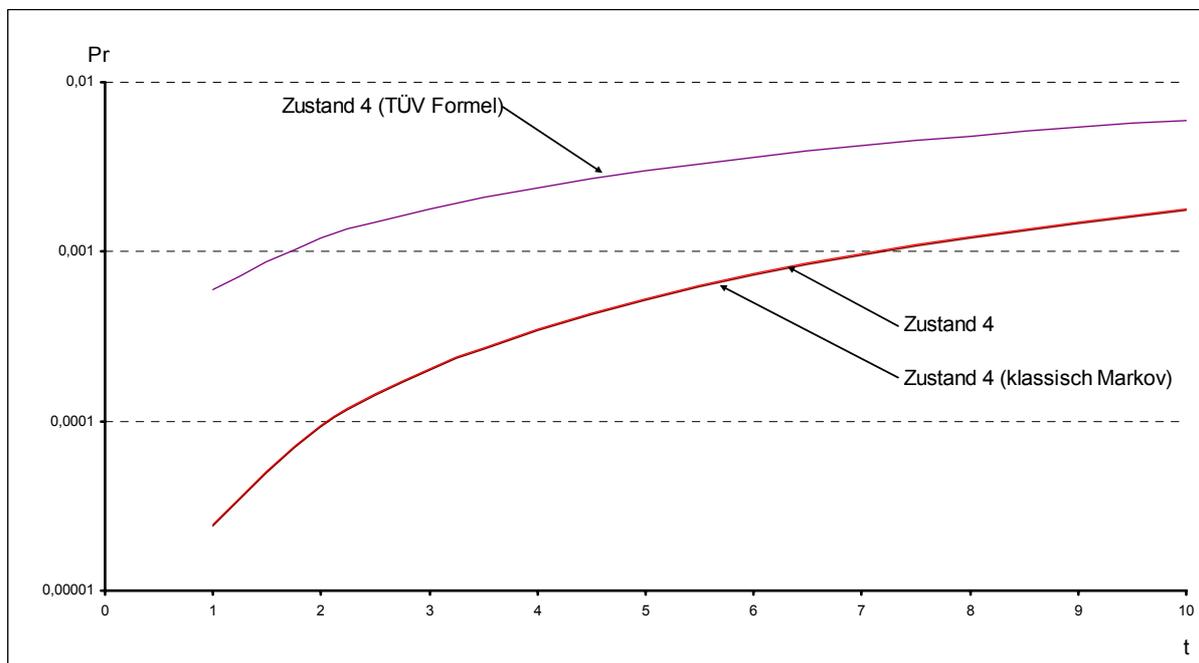


Abb. 58 Modell 1, Versuch 2: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Man sieht deutlich, dass unter gegebenen Anfangsbedingungen (s. Tab. 56) die Ausfallwahrscheinlichkeitskurven aus dem Modell 1 eine starke Korrelation mit dem klassischen Markov-Modell und eine gravierende Diskrepanz mit der empirischen Formel (s. Gl. 5.1—1) aufweisen. Das bedeutet, dass das Modell 1 die Auswirkung eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache nicht adäquat abbildet.

Aus der Abb. 56 folgt:

	Zustand 4	Zustand 4 (TÜV Formel)	Zustand 4 (klassisch Markov)
Pr{Zustand 4} = 0,63	MTBF _S = 2294 h $\lambda_S = 4,36E-04 \text{ h}^{-1}$	MTBF _S = 1660 h $\lambda_S = 6,02E-04 \text{ h}^{-1}$	MTBF _S = 2304 h $\lambda_S = 4,34E-04 \text{ h}^{-1}$

Tab. 57 Modell 1, Versuch 2: Ergebnisse

Wie die Abb. 56 bzw. Tab. 57 zeigt, korrelieren die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsberechnung nach dem Modell 1 mit den Ergebnissen der Zuverlässigkeitsberechnung nach dem klassischen Markov-Modell. Der Unterschied beträgt weniger als 0,5%. In anderen Worten die Auswirkung des CCF Effektes im Modell 1 im Normalfall (s. Tab. 56, Wert des CCF Faktors) sehr schwach ist.

Beim dritten Versuch wird die Effektivität des Modells 1 im Falle eines "asymmetrischen" Systems untersucht, deswegen wird das Modell 1 (s. Abb. 51, Gl. 5.1—3) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 1,00E-03 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_1 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$ $\mu_2 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$
CCF Ausfallraten	$\lambda_{12} = 1,00E-04 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_{21} = 2,00E-05 \text{ h}^{-1}$
CCF Faktor (β)	$\beta = 0,02$ (also $\lambda_{12} = 0,02\lambda_1$; $\lambda_{21} = 0,02\lambda_2$)
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3, P_4)	(1,0,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	8760 / 50000
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 58 Modell 1, Versuch 3: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung sind in Abb. 59 dargestellt.

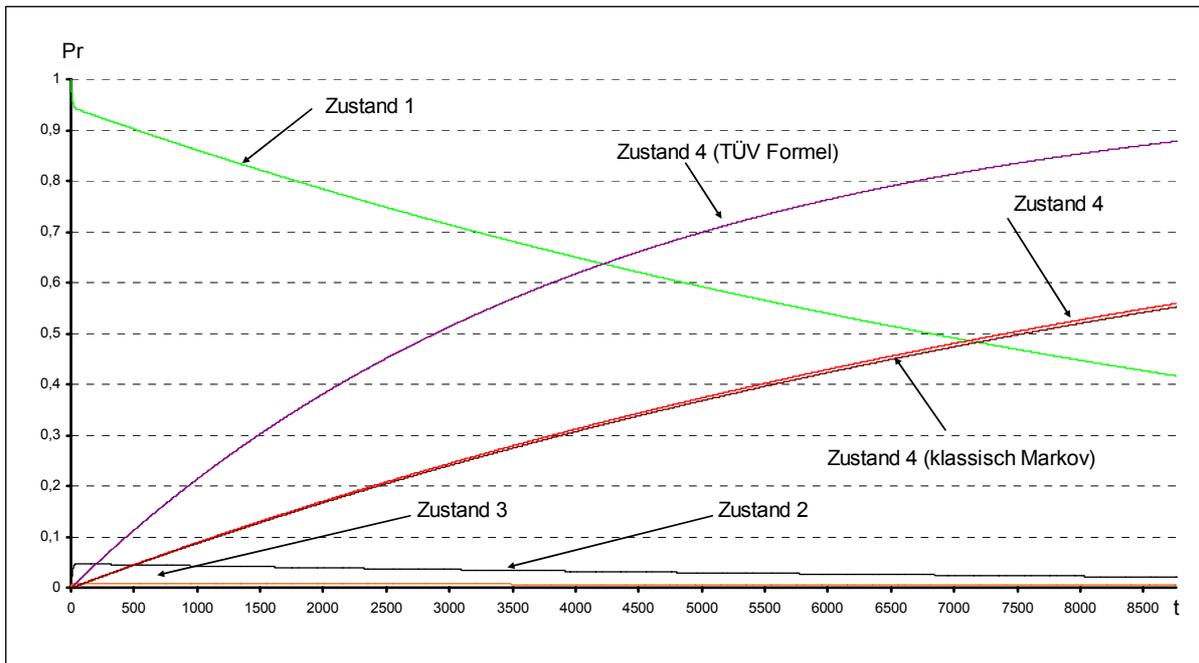


Abb. 59 Modell 1, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten

In der Abb. 60 sind die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 4 vergrößert dargestellt:

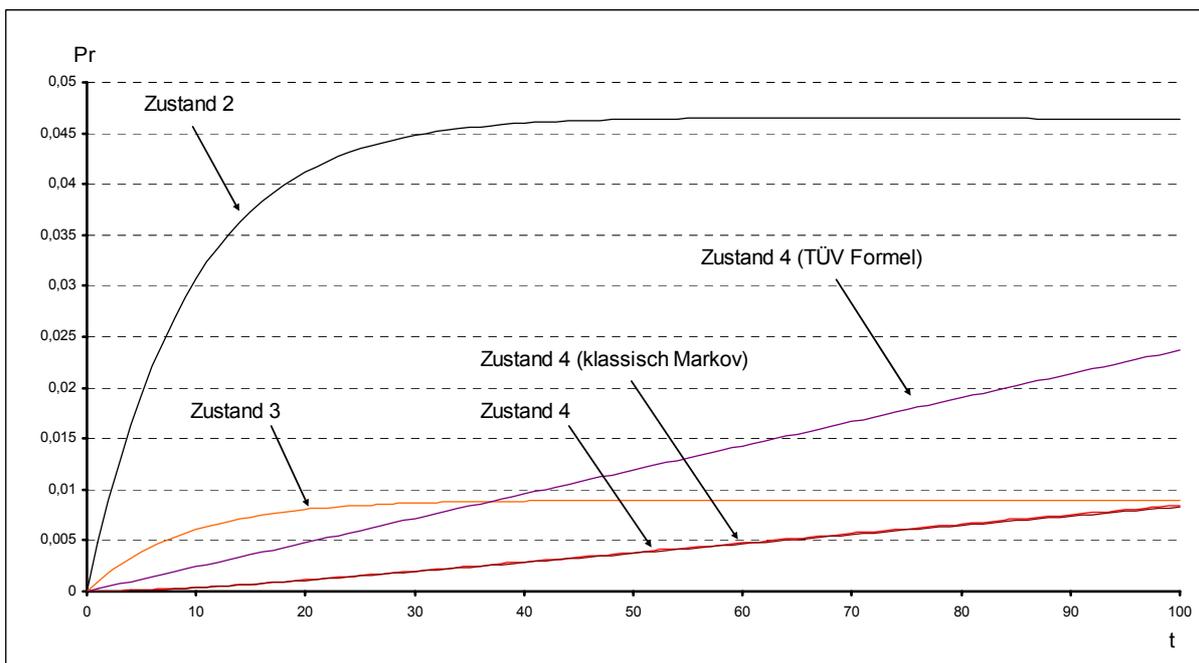


Abb. 60 Modell 1, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4

Damit man die Steigung der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven besser abschätzen kann, sind die entsprechenden Kurven in der Abb. 61 stark vergrößert dargestellt. Für die Ordinate wurde ein logarithmischer Maßstab verwendet.

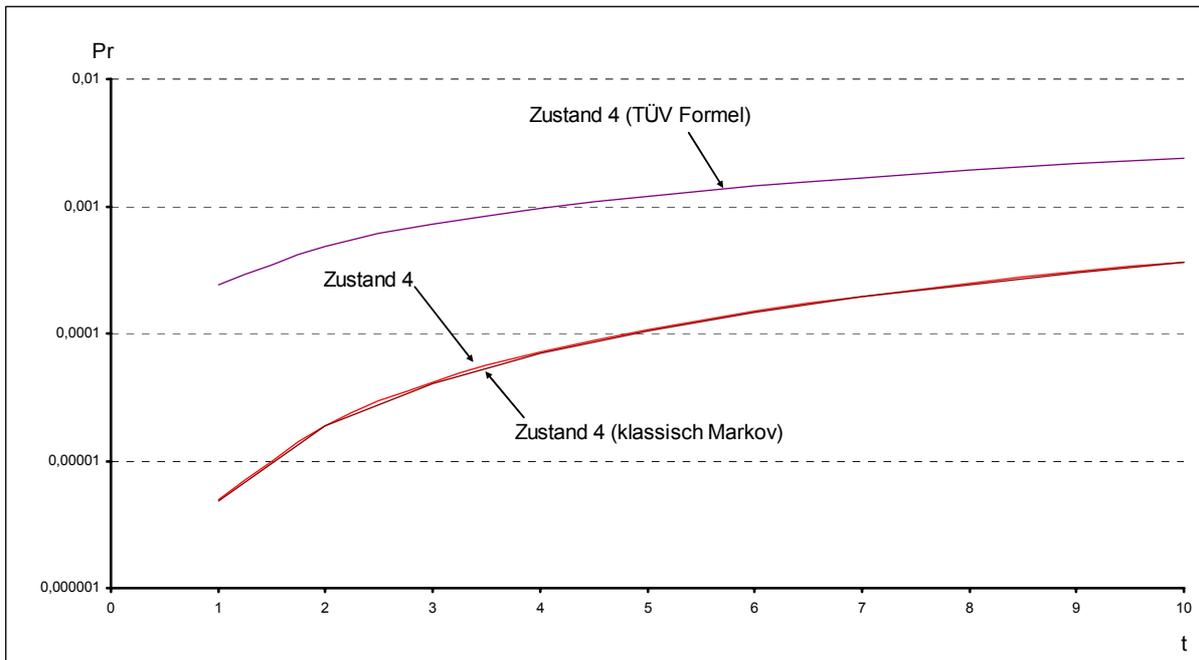


Abb. 61 Modell1, Versuch 3: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Aus der Abb. 59 folgt:

	Zustand 4	Zustand 4 (TÜV Formel)	Zustand 4 (klassisch Markov)
$Pr\{\text{Zustand 4}\} = 0,63$	$MTBF_S = 10613 \text{ h}$ $\lambda_S = 9,42E-05 \text{ h}^{-1}$	$MTBF_S = 4138 \text{ h}$ $\lambda_S = 2,42E-04 \text{ h}^{-1}$	$MTBF_S = 10847 \text{ h}$ $\lambda_S = 9,22E-05 \text{ h}^{-1}$

Tab. 59 Modell 1, Versuch 3: Ergebnisse

Nach wie vor korrelieren die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsberechnung aus dem Modell 1 und die Ergebnisse aus dem klassischen Markov-Modell stark miteinander. Der Unterschied der MTBF-Werte beträgt 2,2%. Dagegen beträgt die Diskrepanz zu der TÜV Formel den Faktor ca. 2,6.

Die Hauptmerkmale des Modells 1 sind in der Tab. 60 zusammengefasst:

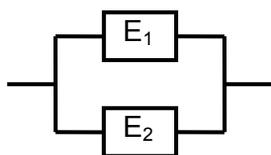
CCF Faktor entfällt ($\beta = 0$)	Modell 1 geht in das klassische Markov-Modell über.
Versuch 1: symmetrisches System, CCF Faktor $\beta = 1$	Die Ergebnisse aus dem Modell 1 sind um den Faktor ca. 2 schlechter (s. Tab. 55) als die aus dem klassischen Markov-Modell. Die Ergebnisse aus dem Modell 1 sind um den Faktor ca. 1,4 schlechter (s. Tab. 55) als die aus der TÜV Formel.
Versuch 2: symmetrisches System, CCF Faktor $\beta = 0,02$	Die Ergebnisse aus dem Modell 1 korrelieren sehr stark (s. Tab. 57) mit den Ergebnissen aus dem klassischen Markov-Modell. Die Ergebnisse aus dem Modell 1 sind um den Faktor ca. 1,4 besser (s. Tab. 57) als die aus der TÜV Formel.

Versuch 3: asymmetrisches System, CCF Faktor $\beta = 0,02$	Die Ergebnisse aus dem Modell 1 korrelieren relativ stark (s. Tab. 59) mit den Ergebnissen aus dem klassischen Markov-Modell. Die Ergebnisse aus dem Modell 1 sind um den Faktor ca. 2,6 besser (s. Tab. 59) als die aus der TÜV Formel.
Fazit	Das Modell 1 bei den realen Werten des CCF Faktors konvergiert gegen das Markov-Modell, unterscheidet sich jedoch sehr stark von der TÜV Formel und folglich von den Feldwerten. Das Modell 1 ist für die Verwendung in der modifizierten Markov-Methode nicht geeignet.

Tab. 60 Modell 1: Fazit

5.1.2.2 Modell 2

Folgendes System wird mittels Modell 2 analysiert:



Die Komponenten E_1 und E_2 sind im Allgemeinen nicht identisch und werden durch die entsprechenden Zuverlässigkeitsparameter $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ charakterisiert.

Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr\{A_1\} = 1 - e^{-\lambda_1 t}$$

$$\Pr\{A_2\} = 1 - e^{-\lambda_2 t}$$

Beim ersten Versuch wird das Modell 2 (s. Abb. 52, Gl. 5.1—5) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_1 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$ $\mu_2 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$
CCF Ausfallraten	$\lambda_{12} = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_{21} = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$
CCF Faktor (β)	$\beta = 1$ (also $\lambda_1 = \lambda_{12}$; $\lambda_2 = \lambda_{21}$)
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3, P_4)	(1,0,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	8760 / 50000
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 61 Modell 2, Versuch 1: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung sind in Abb. 62 dargestellt.

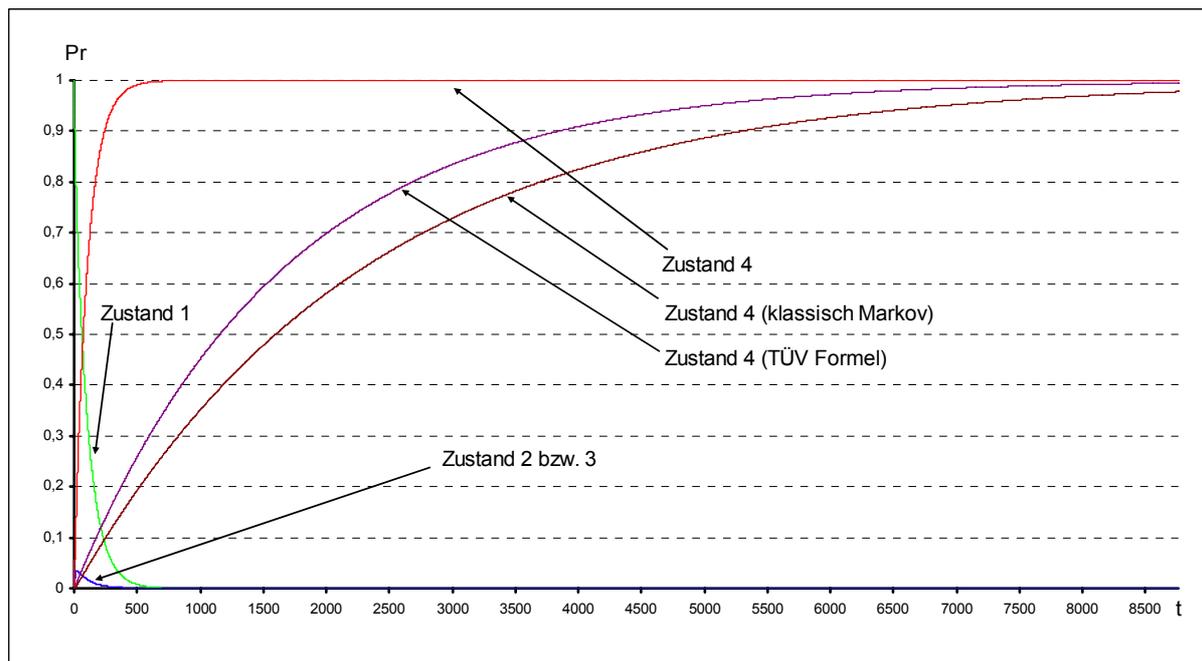


Abb. 62 Modell 2, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten

Damit man die Steigung der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven besser abschätzen kann, sind die entsprechenden Kurven in der Abb. 63 stark vergrößert dargestellt. Für die Ordinate wurde ein logarithmischer Maßstab verwendet.

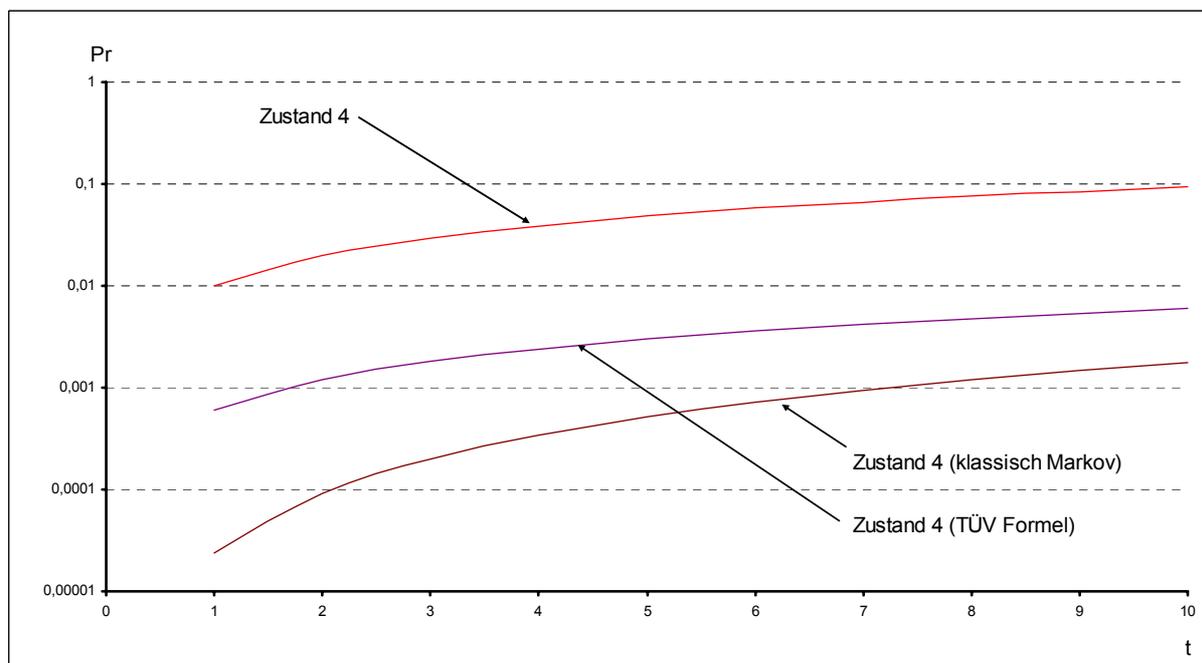


Abb. 63 Modell 2, Versuch 1: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Die entsprechende (s. Abb. 62) $MTBF_S$ bzw. λ_S Werte sind in der Tab. 62 dargestellt:

	Zustand 4	Zustand 4 (TÜV Formel)	Zustand 4 (klassisch Markov)
Pr{Zustand 4} = 0,63	MTBF _S = 104 h $\lambda_S = 9,62E-03 \text{ h}^{-1}$	MTBF _S = 1651 h $\lambda_S = 6,06E-04 \text{ h}^{-1}$	MTBF _S = 2286 h $\lambda_S = 4,37E-04 \text{ h}^{-1}$

Tab. 62 Modell 2, Versuch 1: Ergebnisse

Die Abb. 62 und Tab. 62 zeigen, dass die Berücksichtigung des CCF Faktor im Modell 2 unter angegebenen Anfangsbedingungen (s. Tab. 61) eine gravierende Auswirkung auf die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsberechnung hat. Die Ausfallrate des Gesamtsystems aus dem Modell 2 ist um den Faktor 22 schlechter als aus dem klassischen Markov-Modell. In der Praxis findet solch ein Extremfall nie statt. Deswegen ist es wesentlich interessanter das Modell 2 mit einem "typischen" Wert des CCF Faktors zu untersuchen.

Bei dem zweiten Versuch liegt der Prozentsatz des CCF Faktors bei 2% (s. IEC 61508-6). Das Modell 2 (s. Abb. 52, Gl. 5.1—5) wird mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-03 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_1 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$ $\mu_2 = 1,00E-01 \text{ h}^{-1}$
CCF Ausfallraten	$\lambda_{12} = 1,00E-04 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_{21} = 1,00E-04 \text{ h}^{-1}$
CCF Faktor (β)	$\beta = 0,02$ (also $\lambda_{12} = 0,02\lambda_1$; $\lambda_{21} = 0,02\lambda_2$)
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3, P_4)	(1,0,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	8760 / 50000
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 63 Modell 2, Versuch 2: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung sind in Abb. 64 bzw. Tab. 64 dargestellt. Deutlich zu sehen ist die Konvergenz der Ergebnisse aus dem Modell 2 gegen die Ergebnisse aus der TÜV Formel.

	Zustand 4	Zustand 4 (TÜV Formel)	Zustand 4 (klassisch Markov)
Pr{Zustand 4} = 0,63	MTBF _S = 1607 h $\lambda_S = 6,22E-04 \text{ h}^{-1}$	MTBF _S = 1656 h $\lambda_S = 6,04E-04 \text{ h}^{-1}$	MTBF _S = 2283 h $\lambda_S = 4,38E-04 \text{ h}^{-1}$

Tab. 64 Modell 2, Versuch 2: Ergebnisse

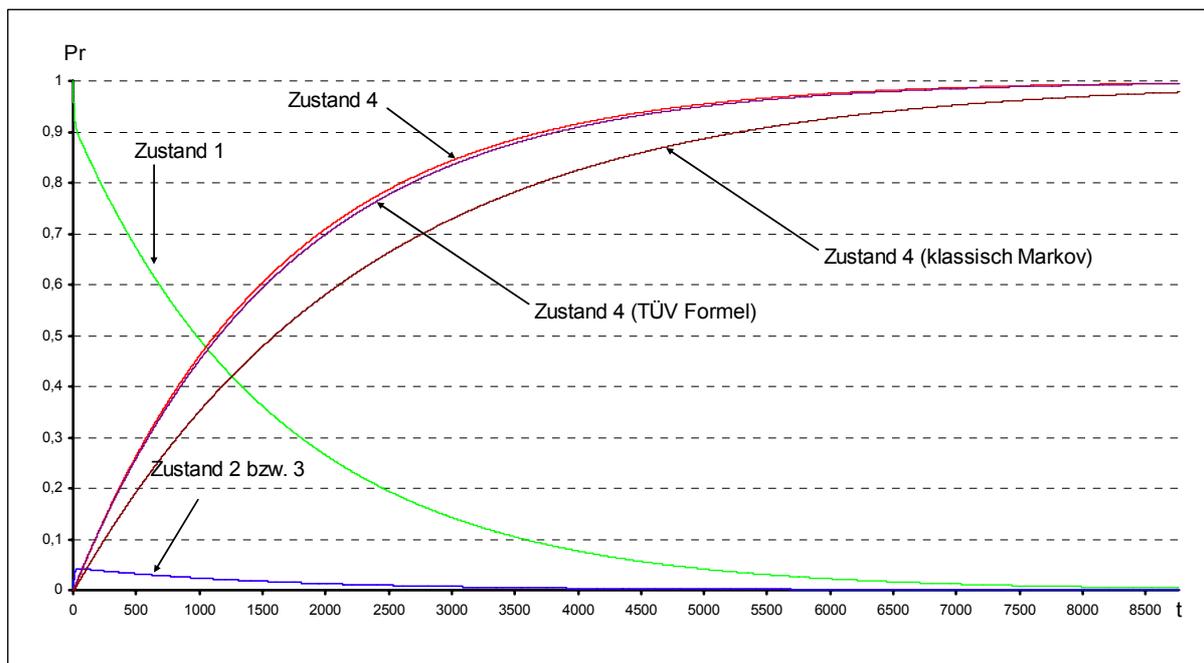


Abb. 64 Modell 2, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten

In der Abb. 65 sind die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 4 vergrößert dargestellt:

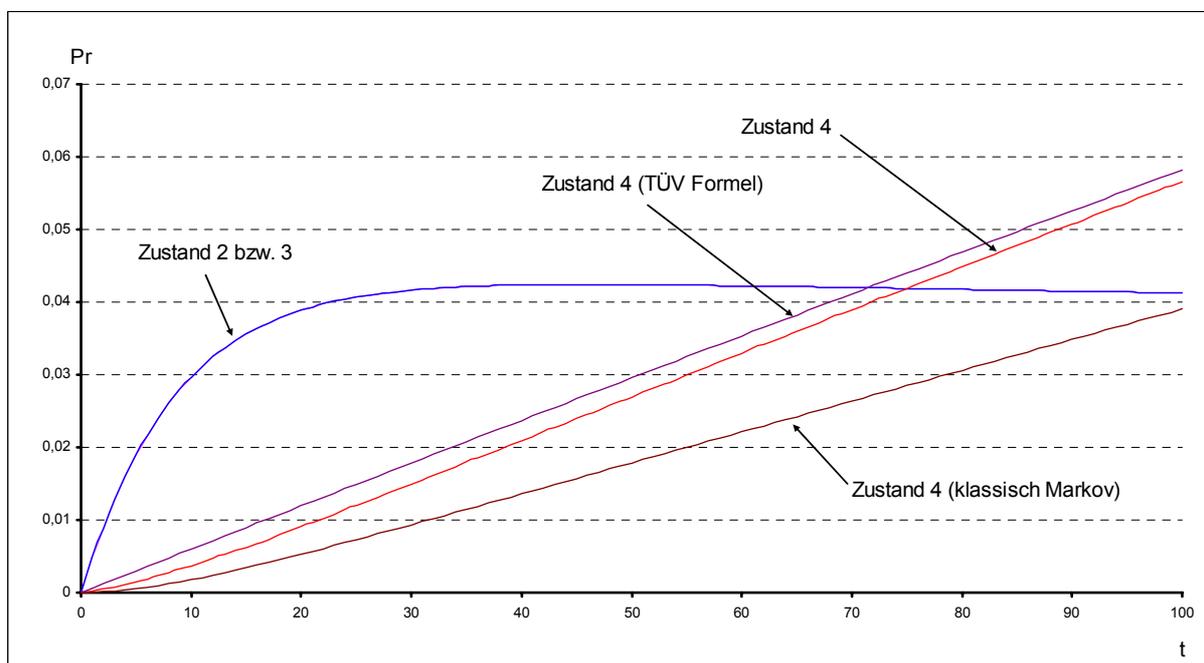


Abb. 65 Modell 2, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4

Damit man die Steigung der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven besser abschätzen kann, sind die entsprechenden Kurven in der Abb. 66 stark vergrößert dargestellt. Für die Ordinate wurde ein logarithmischer Maßstab verwendet.

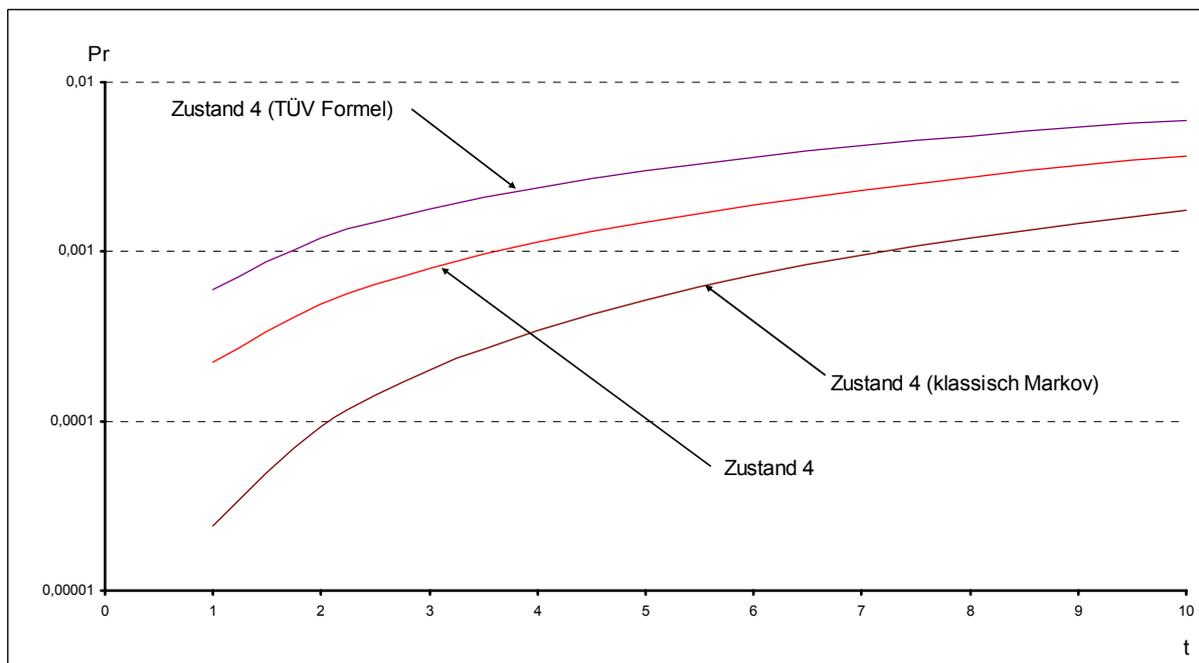


Abb. 66 Modell 2, Versuch 2: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Aufgrund der sehr starken Korrelation (im Falle eines symmetrischen Systems, s. Tab. 63) zwischen den Ausfallwahrscheinlichkeitskurven aus dem Modell 2 und aus der TÜV Formel kann man das Modell 2 als eine mathematische Begründung der TÜV Formel bezeichnen.

Für symmetrische Systeme liefert das Modell 2 die Ergebnisse, die nahe zu den Feldwerten sind. Dagegen sind die MTBF_s bzw. λ_s Werte aus dem klassischen Markov-Modell um den Faktor 1,4 besser. Man rechnet also viel zu optimistisch.

Beim dritten Versuch wird ein "asymmetrisches" System betrachtet, deswegen wird das Modell 2 (s. Abb. 52, Gl. 5.1—5) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	λ ₁ = 5,00E-03 h ⁻¹ λ ₂ = 1,00E-03 h ⁻¹
Reparaturraten der Einzelkomponenten	μ ₁ = 1,00E-01 h ⁻¹ μ ₂ = 1,00E-01 h ⁻¹
CCF Ausfallraten	λ ₁₂ = 1,00E-04 h ⁻¹ λ ₂₁ = 2,00E-05 h ⁻¹
CCF Faktor (β)	β = 0,02 (also λ ₁₂ = 0,02λ ₁ ; λ ₂₁ = 0,02λ ₂)
Anfangsbedingungen (P ₁ , P ₂ , P ₃ , P ₄)	(1,0,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	8760 / 50000
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 65 Modell 2, Versuch 3: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung sind in Abb. 67 dargestellt.

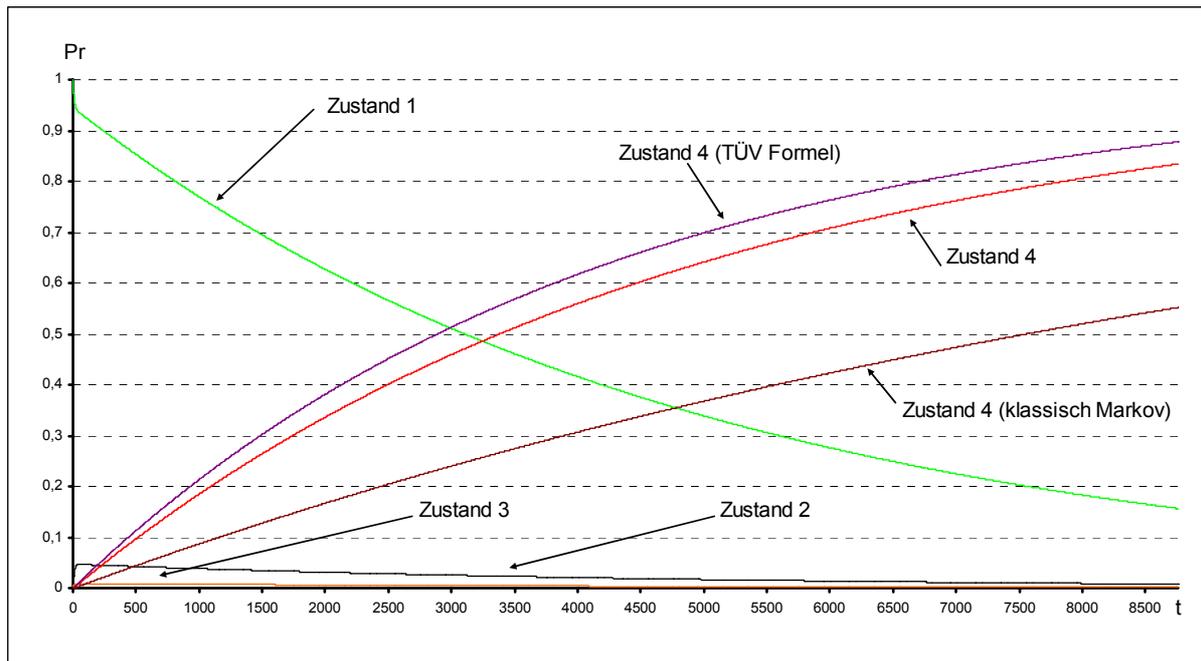


Abb. 67 Modell 2, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten

In der Abb. 68 sind die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 4 vergrößert dargestellt:

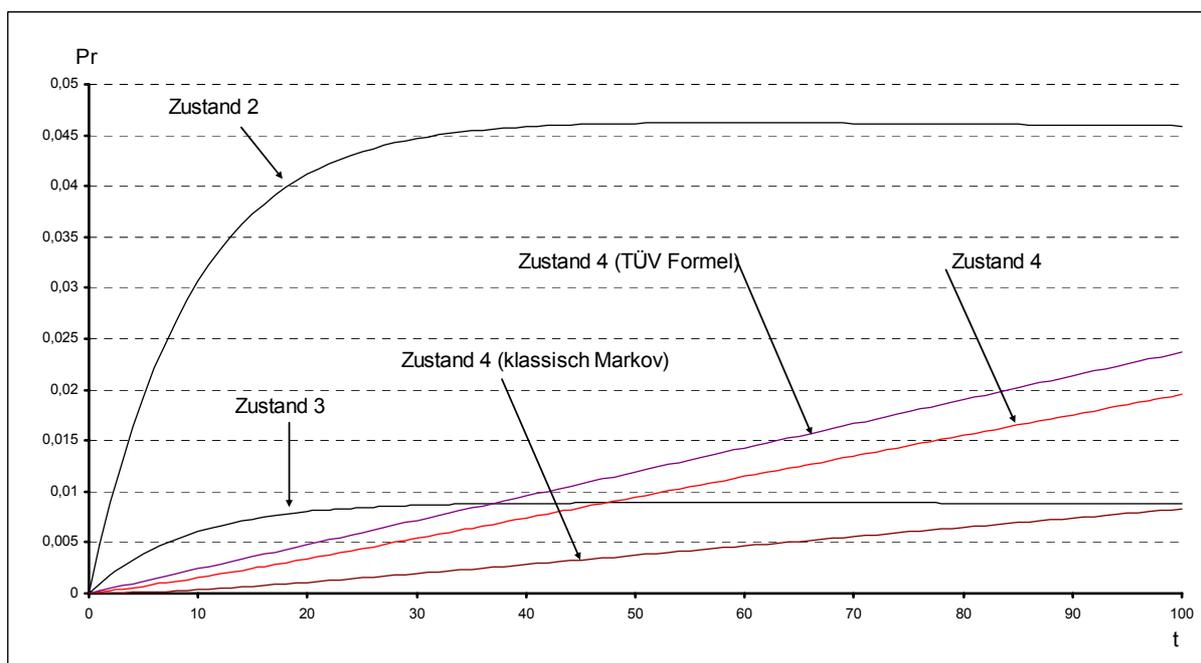


Abb. 68 Modell 2, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten 2 bis 4

Damit man die Steigung der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven besser abschätzen kann, sind die entsprechenden Kurven in der Abb. 69 stark vergrößert dargestellt. Für die Ordinate wurde ein logarithmischer Maßstab verwendet.

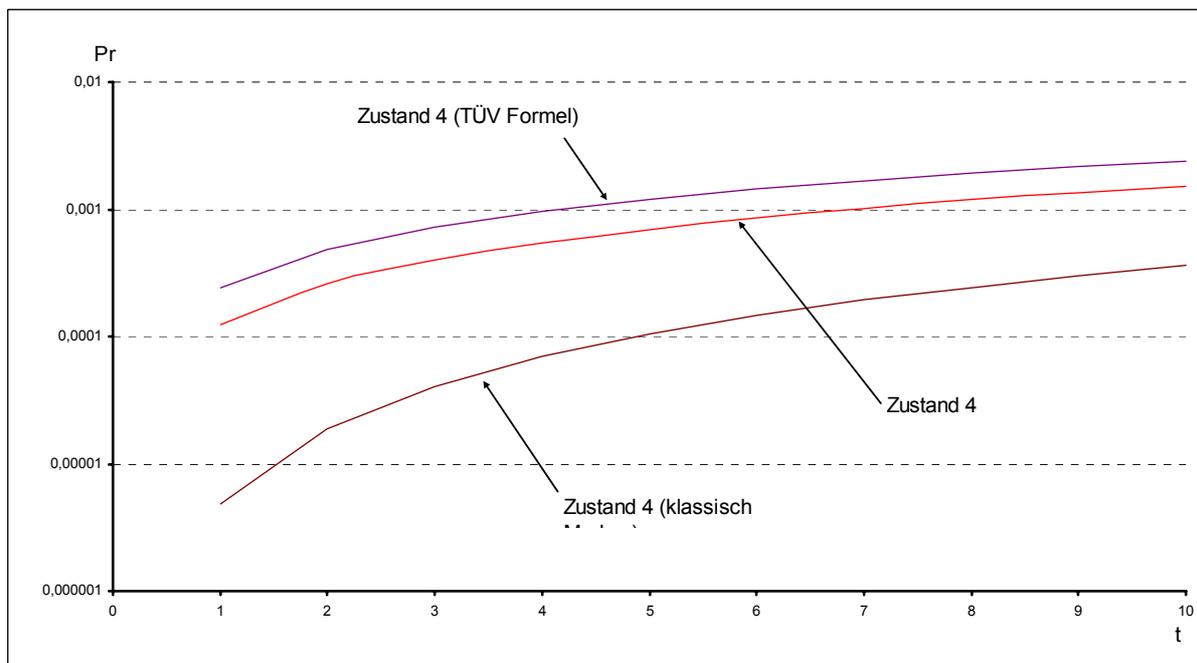


Abb. 69 Modell 2, Versuch 3: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Der Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven aus dem Modell 2 und aus der TÜV Formel weist auch für die asymmetrischen Systeme eine gute Korrelation auf. Das klassische Markov-Modell liefert die $MTBF_S$ bzw. λ_S Werte (s. Tab. 66), die im Durchschnitt um den Faktor 2,6 besser sind.

	Zustand 4	Zustand 4 (TÜV Formel)	Zustand 4 (klassisch Markov)
$Pr\{Zustand\ 4\} = 0,63$	$MTBF_S = 4855\ h$ $\lambda_S = 2,06E-04\ h^{-1}$	$MTBF_S = 4148\ h$ $\lambda_S = 2,41E-04\ h^{-1}$	$MTBF_S = 10847\ h$ $\lambda_S = 9,22E-05\ h^{-1}$

Tab. 66 Modell 2, Versuch 3: Ergebnisse

Die Hauptmerkmale des Modells 2 sind in der Tab. 67 zusammengefasst:

CCF Faktor entfällt ($\beta = 0$)	Modell 2 geht in das klassische Markov-Modell über.
Versuch 1: symmetrisches System, CCF Faktors $\beta = 1$	Die Ergebnisse aus dem Modell 2 sind um den Faktor ca. 22 schlechter (s. Tab. 62) als die aus dem klassischen Markov-Modell. Die Ergebnisse aus dem Modell 2 sind um den Faktor ca. 16 schlechter (s. Tab. 62) als die aus der TÜV Formel.
Versuch 2: symmetrisches System, CCF Faktors $\beta = 0,02$	Die Ergebnisse aus dem Modell 2 korrelieren sehr stark (s. Tab. 64) mit den Ergebnissen aus der TÜV Formel. Die Ergebnisse aus dem Modell 2 sind um den Faktor ca. 1,4 schlechter (s. Tab. 64) als die aus dem klassischen Markov-Modell.

<p>Versuch 3: asymmetrisches System, CCF Faktors $\beta = 0,02$</p>	<p>Die Ergebnisse aus dem Modell 2 korrelieren relativ stark (s. Tab. 66) mit den Ergebnissen aus der TÜV Formel. Die Ergebnisse aus dem Modell 2 sind um den Faktor ca. 2,6 schlechter (s. Tab. 66) als die aus dem klassischen Markov-Modell.</p>
<p>Fazit</p>	<p>Das Modell 2 liefert besonders bei den symmetrischen Systemen die Ergebnisse, die nahe zu den Ergebnissen nach der TÜV Formel und folglich zu der Statistik aus dem Feld sind. Das Modell 2 ist für die Erfassung des CCF Faktors in der modifizierten Markov-Methode geeignet.</p>

Tab. 67 Modell 2: Fazit

5.2 Neuer Faktor: Diagnose-Aufdeckungsgrad

Ein weiterer Faktor, der von der klassischen Markov-Methode nicht erfasst ist, ist der Diagnose-Aufdeckungsgrad.

Laut IEC 61511-1:

Diagnose-Aufdeckungsgrad (en: diagnostic coverage, DC): derjenige Anteil der vielen Zustände, der durch die Ausführung einer diagnostischen Prüfung festgestellt wurde. Die diagnostische Aufdeckung eines Bauteils oder einer Baugruppe ist das Verhältnis der festgestellten Ausfallraten zu den Gesamtausfallraten des Bauteils oder der Baugruppe. Diagnostische Prüfungen können automatische Prüfungen sein oder durch Bedienereingriff regelmäßig anhand eines Zeitplans ausgelöst werden.

Def. 29 Diagnose-Aufdeckungsgrad

In anderen Worten der Diagnose-Aufdeckungsgrad ist die Eigenschaft einer Komponente oder Baugruppe mit Selbstdiagnose. Bei der statistischen Ermittlung der Ausfallrate solcher Komponente wird zwischen festgestellten (detected, λ_D) und nicht festgestellten (undetected, λ_U) Ausfällen unterschieden:

<p>Gesamtausfallrate</p>	<p>Es werden N Baugruppen mit Selbstdiagnose in einem Zeitintervall t getestet:</p> $\lambda \approx \frac{n}{N\Delta t}, \text{ wobei } n - \text{ die Gesamtanzahl der Ausfälle ist.}$ $\lambda = \lambda_D + \lambda_U$
--------------------------	--

Ausfallrate der festgestellten Ausfälle	$\lambda_D \approx \frac{n_D}{N\Delta t}$, wobei n_D – die Anzahl der festgestellten Ausfälle ist.
Ausfallrate der nicht festgestellten Ausfälle	$\lambda_U \approx \frac{n_U}{N\Delta t} = \frac{n - n_D}{N\Delta t}$, wobei n_U – die Anzahl der nicht festgestellten Ausfälle ist.

Tab. 68 Festgestellte und nicht festgestellte Ausfälle

Folgende Eigenschaften des DC Faktors werden postuliert:

1	Quantitativ wird DC wie folgt definiert: $DC = \frac{n_D}{n}$ Daraus folgt: $\lambda_D = DC\lambda$ und $\lambda_U = (1 - DC)\lambda$
2	Da der Diagnose-Aufdeckungsgrad in der Praxis hoch ist, gilt $\lambda_D \gg \lambda_U$
3	Die Reparaturrate einer Baugruppe mit Selbstdiagnose hängt von dem Typ des Ausfalls ab (s. Abb. 70). In der Praxis (besonders in der Leittechnik) gilt $\mu_D \gg \mu_U > 0$ Es liegt daran, dass im Falle eines nicht festgestellten Ausfalls die Entdeckungs- und Lokalisierungszeitspanne wesentlich größer ist, als bei einem festgestellten Ausfall. Die nicht festgestellten Ausfälle werden nicht durch die Baugruppe selbst, sondern durch eine übergeordnete Diagnoseeinheit bzw. durch Personal entdeckt.
4	Im Unterschied zu CCF, ist der DC Faktor von der Struktur eines technischen Systems unabhängig und bezieht sich auf eine einzelne Komponente oder Baugruppe.

Tab. 69 DC Faktor: Eigenschaften

Der Zustandsgraph einer Baugruppe mit Selbstdiagnose ist in der Abb. 70 dargestellt:

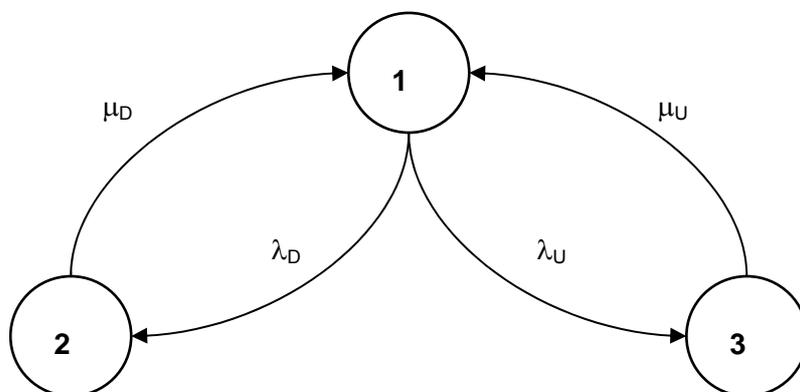


Abb. 70 DC Faktor: Zustandsgraph

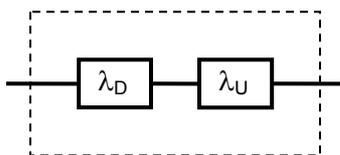
Dabei haben die Zustände folgende Bedeutung:

- 1 Die Baugruppe mit Selbstdiagnose ist intakt.
- 2 Ein festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit hängt von der Ausfallrate $\lambda_D = DC\lambda$ und von der Dauer des Testzyklus der Baugruppe ab. Die Reparaturrate μ_D , dank den kurzen Entdeckungs- bzw. Lokalisierungszeiten, ist in der Regel hoch.
- 3 Ein nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_U = (1-DC)\lambda$ charakterisiert und bezieht sich auf die gesamte Missionszeit. Die Reparaturrate μ_U hängt sehr stark davon ab, wie schnell der nicht festgestellte Ausfall entdeckt und lokalisiert wird (z. B. durch die übergeordneten Diagnoseeinheiten bzw. Personal).

5.2.1 Einfluss von DC auf die Markov-Methode

In diesem Abschnitt wird die Auswirkung des DC Faktors auf die Zuverlässigkeitsberechnung mittels Markov-Methode analysiert. Im Abschnitt 5.2.1.1 wird eine Einzelkomponente mit Selbstdiagnose untersucht. Und im Abschnitt 5.2.1.2 wird dann ein Modell für ein reparierbares redundantes System von zwei Komponenten mit Selbstdiagnose dargestellt.

Im Sinne der Zuverlässigkeitsanalyse kann man eine Komponente mit Selbstdiagnose wie folgt darstellen:



Eine Komponente mit Selbstdiagnose weist zwei Arten der Ausfälle auf: festgestellte mit der Ausfallrate λ_D und nicht festgestellte mit der Ausfallrate λ_U (s. Tab. 69).

Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr\{A_D\} = 1 - e^{-\lambda_D T}, \text{ wobei } T - \text{ die Dauer eines Testzyklus}$$

$$\Pr\{A_U\} = 1 - e^{-\lambda_U t}, \text{ wobei } t - \text{ die gesamte Missionszeit}$$

5.2.1.1 DC Faktor: Einzelkomponente

Als Basismodell wird das Modell aus der Abb. 70 zugrunde gelegt. Die Berücksichtigung des Diagnose-Aufdeckungsgrades führt auf das Modell in der Abb. 71:

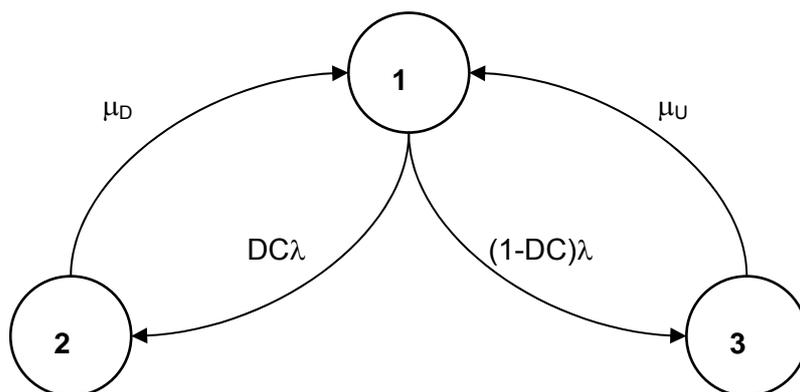


Abb. 71 DC Faktor, Zustandsgraph: Einzelkomponente mit Selbstdiagnose

Die Bedeutung der Zustände 2 und 3 ist bereits beschrieben (s. Abb. 70). Der entscheidende Unterschied zwischen diesen Zuständen liegt in den Ausfall- bzw. Reparaturraten.

Dieses Modell wird durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 P_1'(t) &= -\lambda P_1(t) + \mu_D P_2(t) + \mu_U P_3(t) \\
 P_2'(t) &= DC\lambda P_1(t) - \mu_D P_2(t) \\
 P_3'(t) &= (1-DC)\lambda P_1(t) - \mu_U P_3(t)
 \end{aligned}$$

Gl. 5.2—1

Oder in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu_D & \mu_U \\ DC\lambda & -\mu_D & 0 \\ (1-DC)\lambda & 0 & -\mu_U \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{bmatrix}$$

Gl. 5.2—2

Generell stößt die Berücksichtigung des DC Faktors in einem Markov-Modell an keine mathematischen Schwierigkeiten. Das einzige Problem besteht darin, dass die Anzahl der Zustände wesentlich größer wird und die Modelle dadurch komplexer werden.

Der prinzipielle Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven für den Zustand 2 und 3 ist in der Abb. 72 dargestellt. Dieses Bild zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit eines festgestellten Ausfalls eine sägeförmige Funktion aufweist, die durch die Dauer T des Testzyklus bestimmt wird. Dagegen steigt die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls kontinuierlich an.

Für die Abb. 72 gelten folgende Angaben: $\lambda_D = 10^{-5} \mu\text{s}^{-1}$, $\lambda_U = 10^{-6} \mu\text{s}^{-1}$, Missionszeit 10^6 Mikrosekunden, Testzyklus 10^5 Mikrosekunden.

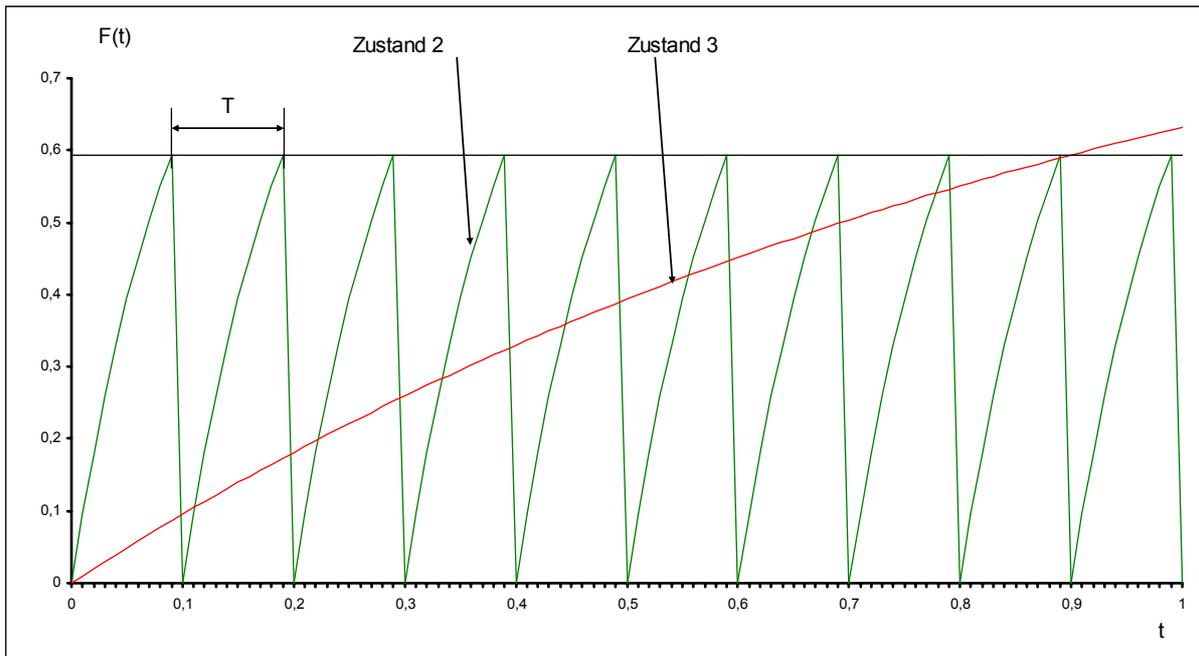
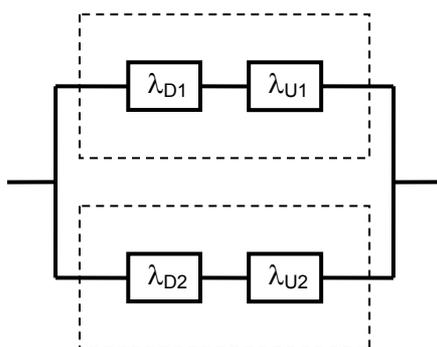


Abb. 72 DC Faktor: Ausfallwahrscheinlichkeiten

Im Abschnitt 5.2.2.1 wird die Auswirkung des DC Faktors bei diesem Modell an einem Zahlenbeispiel evaluiert und mit dem klassischen Markov-Modell verglichen.

5.2.1.2 DC Faktor: ein redundantes System

In diesem Abschnitt wird ein redundantes reparierbares System, bestehend aus 2 Komponenten mit Selbstdiagnose, untersucht:



Die Komponenten werden durch die Zuverlässigkeitsparameter $(\lambda_{D1}, \lambda_{U1}, \mu_{D1}, \mu_{U1})$ und $(\lambda_{D2}, \lambda_{U2}, \mu_{D2}, \mu_{U2})$ charakterisiert (s. Tab. 69). Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr\{A_{D1}\} = 1 - e^{-\lambda_{D1}T} \quad \text{und} \quad \Pr\{A_{D2}\} = 1 - e^{-\lambda_{D2}T}, \quad \text{wobei } T - \text{die Dauer eines Testzyklus}$$

$$\Pr\{A_{U1}\} = 1 - e^{-\lambda_{U1}t} \quad \text{und} \quad \Pr\{A_{U2}\} = 1 - e^{-\lambda_{U2}t}, \quad \text{wobei } t - \text{die gesamte Missionszeit}$$

Der entsprechende Zustandsgraph ist in der Abb. 73 dargestellt. In diesem Graphen haben die Zustände folgende Bedeutung:

- 1 Die beiden Baugruppen mit Selbstdiagnose sind intakt. Das Gesamtsystem ist intakt.
- 2 Ein festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{D1} = DC\lambda_1$ charakterisiert. Das Gesamtsystem bleibt intakt.
- 3 Ein nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{U1} = (1-DC)\lambda_1$ charakterisiert. Das Gesamtsystem bleibt intakt.
- 4 Ein nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{U2} = (1-DC)\lambda_2$ charakterisiert. Das Gesamtsystem bleibt intakt.
- 5 Ein festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{D2} = DC\lambda_2$ charakterisiert. Das Gesamtsystem bleibt intakt.
- 6 Ein weiterer festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{D2} = DC\lambda_2$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 7 Ein weiterer festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{D1} = DC\lambda_1$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 8 Ein weiterer nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{U2} = (1-DC)\lambda_2$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 9 Ein weiterer nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{U1} = (1-DC)\lambda_1$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 10 Ein weiterer festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{D2} = DC\lambda_2$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 11 Ein weiterer festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{D1} = DC\lambda_1$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 12 Ein weiterer nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{U1} = (1-DC)\lambda_1$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.
- 13 Ein weiterer nicht festgestellter Ausfall ist aufgetreten. Die Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallrate $\lambda_{U1} = (1-DC)\lambda_1$ charakterisiert. Ausfall des Gesamtsystems.

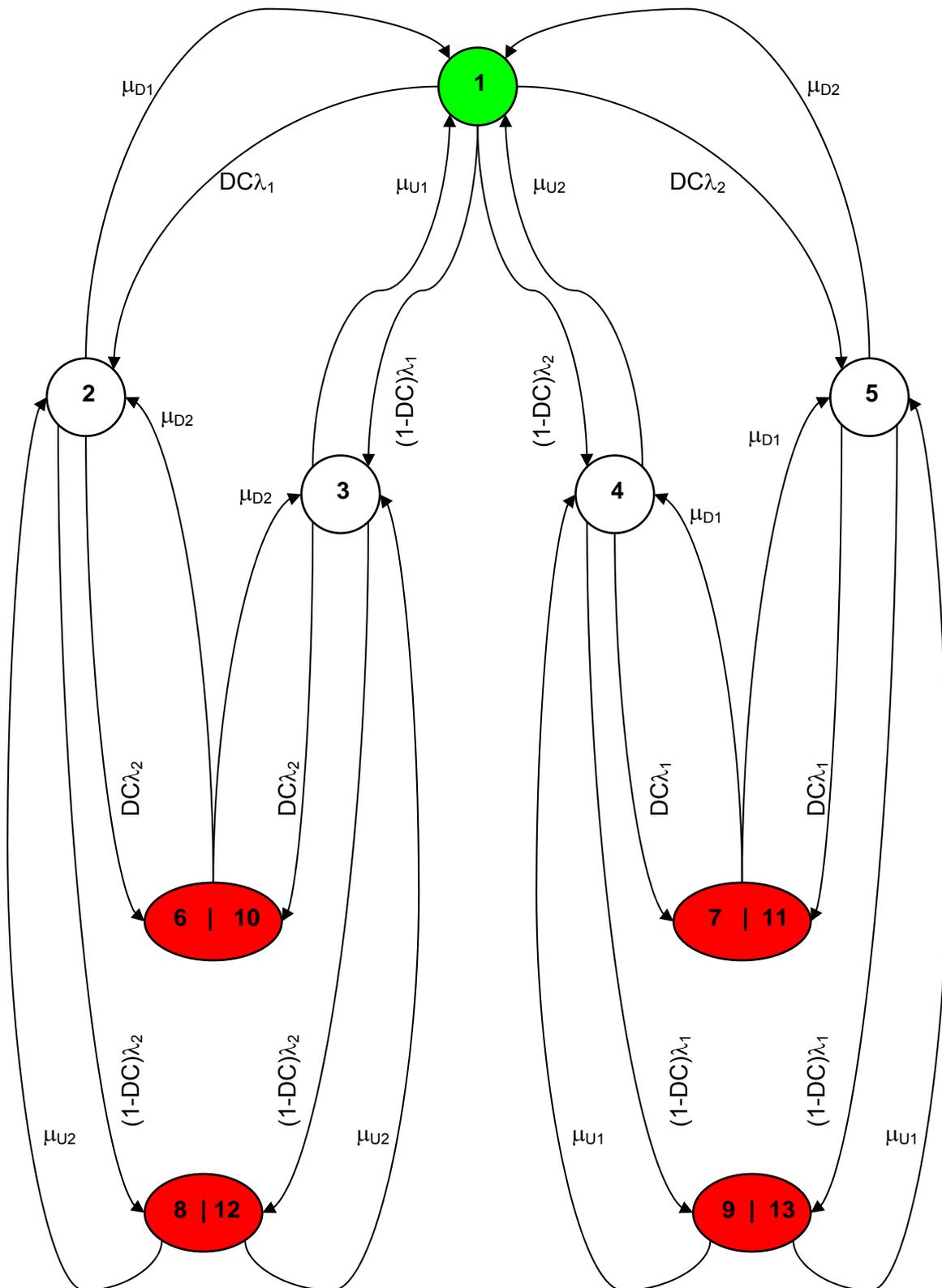


Abb. 73 DC Faktor, Zustandsgraph: redundantes System

Dieses Modell wird durch folgendes System von Differentialgleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}
 P_1'(t) &= -(\lambda_1 + \lambda_2)P_1(t) + \mu_{D1}P_2(t) + \mu_{U1}P_3(t) + \mu_{U2}P_4(t) + \mu_{D2}P_5(t) \\
 P_2'(t) &= DC\lambda_1P_1(t) - (\lambda_2 + \mu_{D1})P_2(t) + \mu_{D2}P_6(t) + \mu_{U2}P_8(t) \\
 P_3'(t) &= (1-DC)\lambda_1P_1(t) - (\lambda_2 + \mu_{U1})P_3(t) + \mu_{D2}P_{10}(t) + \mu_{U2}P_{12}(t) \\
 P_4'(t) &= (1-DC)\lambda_2P_1(t) - (\lambda_1 + \mu_{U2})P_4(t) + \mu_{D1}P_7(t) + \mu_{U1}P_9(t) \\
 P_5'(t) &= DC\lambda_2P_1(t) - (\lambda_1 + \mu_{D2})P_5(t) + \mu_{D1}P_{11}(t) + \mu_{U1}P_{13}(t) \\
 P_6'(t) &= DC\lambda_2P_2(t) - \mu_{D2}P_6(t) \\
 P_7'(t) &= DC\lambda_1P_4(t) - \mu_{D1}P_7(t) \\
 P_8'(t) &= (1-DC)\lambda_2P_2(t) - \mu_{U2}P_8(t) \\
 P_9'(t) &= (1-DC)\lambda_1P_4(t) - \mu_{U1}P_9(t) \\
 P_{10}'(t) &= DC\lambda_2P_3(t) - \mu_{D2}P_{10}(t) \\
 P_{11}'(t) &= DC\lambda_1P_5(t) - \mu_{D1}P_{11}(t) \\
 P_{12}'(t) &= (1-DC)\lambda_2P_3(t) - \mu_{U2}P_{12}(t) \\
 P_{13}'(t) &= (1-DC)\lambda_1P_5(t) - \mu_{U1}P_{13}(t)
 \end{aligned}$$

Gl. 5.2—3

Oder in Matrizenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ P_4'(t) \\ P_5'(t) \\ P_6'(t) \\ P_7'(t) \\ P_8'(t) \\ P_9'(t) \\ P_{10}'(t) \\ P_{11}'(t) \\ P_{12}'(t) \\ P_{13}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\lambda_1 + \lambda_2) & \mu_{D1} & \mu_{U1} & \mu_{U2} & \mu_{D2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ DC\lambda_1 & -(\lambda_2 + \mu_{D1}) & 0 & 0 & 0 & \mu_{D2} & 0 & \mu_{U2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1-DC)\lambda_1 & 0 & -(\lambda_2 + \mu_{U1}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{D2} & 0 & \mu_{U2} & 0 \\ (1-DC)\lambda_2 & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_{U2}) & 0 & 0 & \mu_{D1} & 0 & \mu_{U1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ DC\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & -(\lambda_1 + \mu_{D2}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{D1} & 0 & \mu_{U1} \\ 0 & DC\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{D2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & DC\lambda_1 & 0 & 0 & -\mu_{D1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-DC)\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{U2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-DC)\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{U1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & DC\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{D2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & DC\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{D1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1-DC)\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{U2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-DC)\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu_{U1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \\ P_5(t) \\ P_6(t) \\ P_7(t) \\ P_8(t) \\ P_9(t) \\ P_{10}(t) \\ P_{11}(t) \\ P_{12}(t) \\ P_{13}(t) \end{bmatrix}$$

Gl. 5.2—4

Im Abschnitt 5.2.2.2 wird die Auswirkung des DC Faktors bei diesem Modell an einem Zahlenbeispiel evaluiert und mit dem klassischen Markov-Modell verglichen.

5.2.2 Beispiel: Markov-Methode mit DC

In diesem Abschnitt wird die numerische Auflösung der Systeme von Differentialgleichungen aus dem Abschnitt 5.2.1.1 (s. Gl. 5.2—1) bzw. 5.2.1.2 (s. Gl. 5.2—3) in Form eines Zeitdiagramms dargestellt.

Um die Auswirkung des DC Faktors auf die Markov-Modelle abschätzen zu können, wird dieser Parameter in jedem Modell mit drei charakteristischen Werten belegt:

- 1 DC = 0, $\mu_D = 0$; Also keine Selbstdiagnose ist möglich. In diesem Fall müssen die modifizierten Modelle mit dem klassischen Markov-Modell übereinstimmen.
- 2 DC = 0,9; Typischer DC Wert einer Baugruppe mit Selbstdiagnose.
- 3 DC = 0,99; Typischer DC Wert für die s. g. "failsafe" Baugruppen.

5.2.2.1 Modell 1

Beim ersten Versuch wird das Modell 1 (s. Abschnitt 5.2.1.1) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallrate der Einzelkomponente	$\lambda = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten	$\mu_D = 0$ $\mu_U = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$
DC Faktor	DC = 0
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3)	(1,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	200 / 2500
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 70 Modell 1, Versuch 1: Eingaben

Die entsprechende Ausfallwahrscheinlichkeitskurve ist in der Abb. 74 dargestellt:

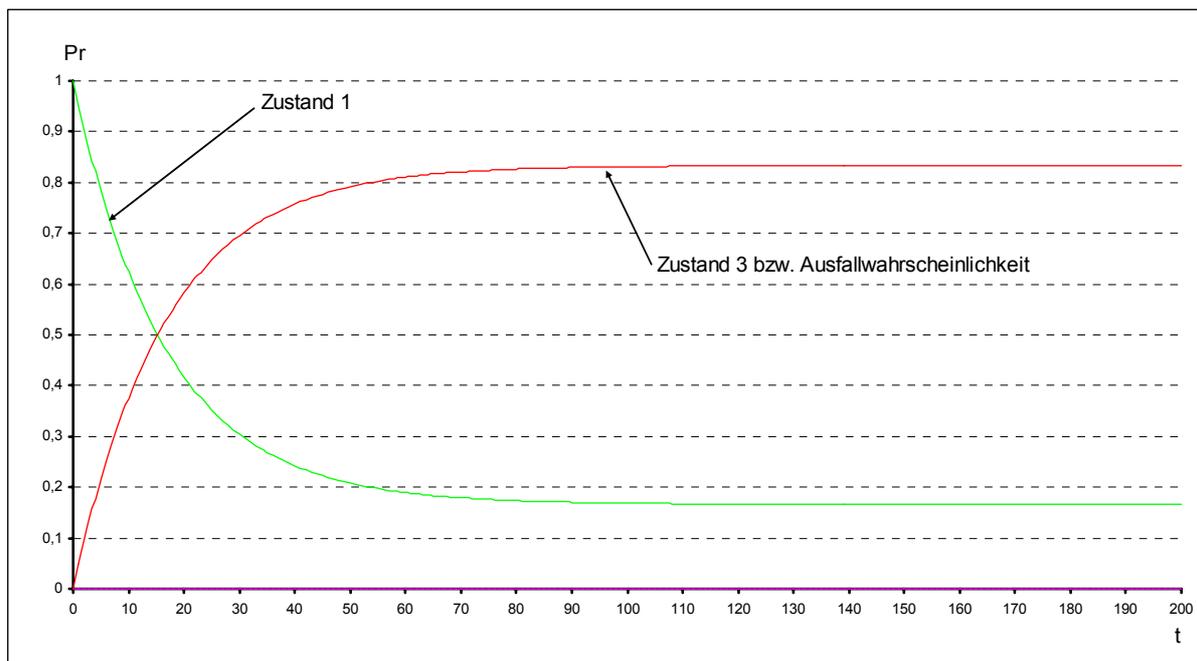


Abb. 74 Modell 1, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten

Da der Übergang in den Zustand 2 nicht möglich ist ($DC = 0$ und $\mu_D = 0$), stimmen die Ergebnisse aus dem modifizierten Modell mit den Ergebnissen aus dem klassischen Markov-Modell exakt überein.

Der Zustand 3 ist in diesem Fall kein absorbierender Zustand, deswegen konvergiert die Ausfallwahrscheinlichkeit nach einem bestimmten Zeitpunkt nicht gegen 1, sondern gegen 0,83.

Beim zweiten Versuch wird das Modell 1 (s. Abschnitt 5.2.1.1) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallrate der Einzelkomponente	$\lambda = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten	$\mu_D = 5,00E-01 \text{ h}^{-1}$ $\mu_U = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$
DC Faktor	$DC = 0,9$
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3)	(1,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	200 / 2500
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 71 Modell 1, Versuch 2: Eingaben

Die entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten sind in der Abb. 75 dargestellt:

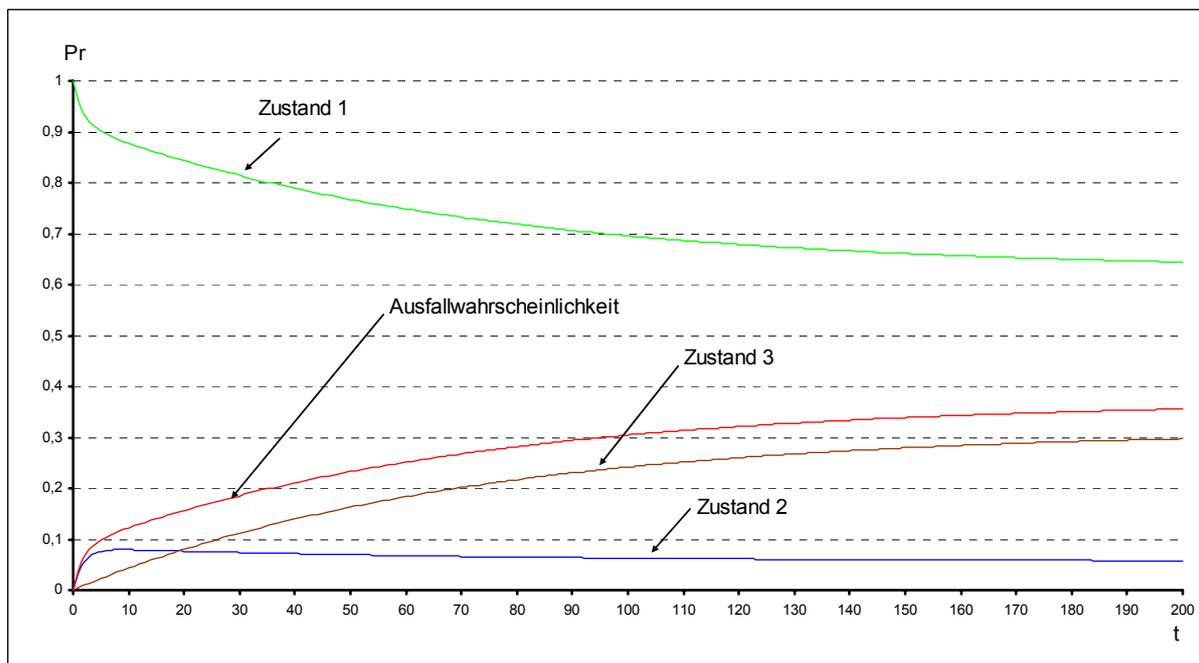


Abb. 75 Modell 1, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten

Die Zustandswahrscheinlichkeiten der Zustände 2 und 3 sowie die gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit sind vergrößert in der Abb. 76 gezeigt:

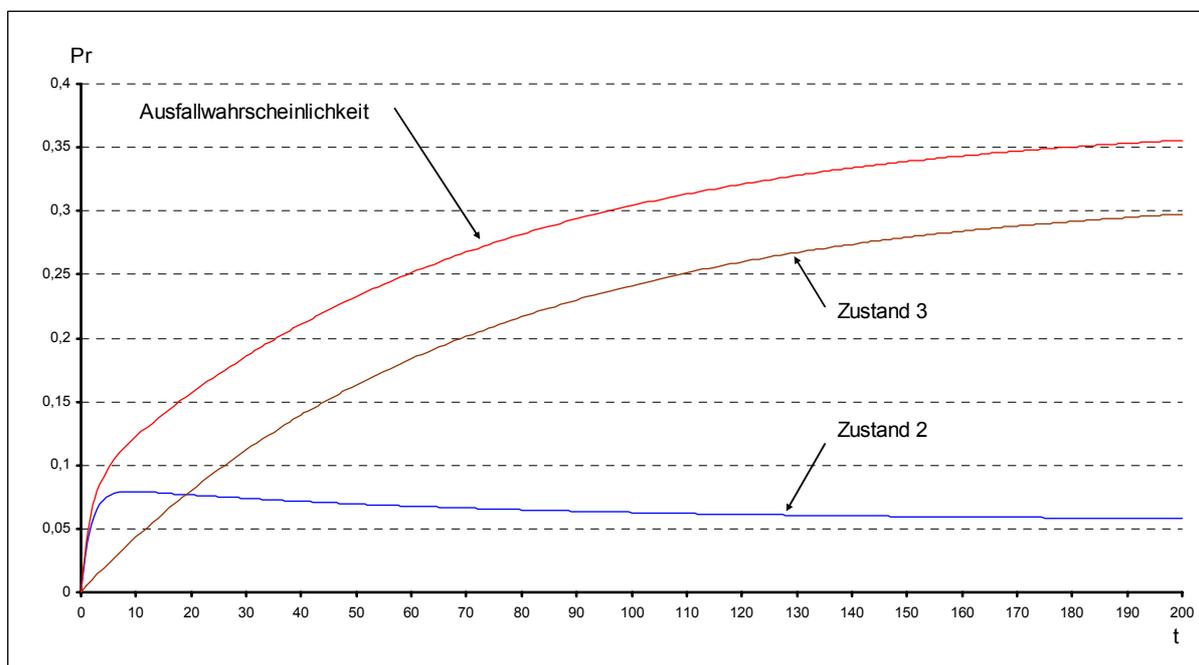


Abb. 76 Modell 1, Versuch 2: Zustand 2, 3 sowie gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit

Die Abb. 75 und Abb. 76 zeigen folgende bedeutende Punkte:

1	Die Wahrscheinlichkeit eines festgestellten Ausfalls konvergiert gegen einen konstanten Wert (in diesem Fall 0,06, vergl. auch Abb. 72). Dagegen steigt die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls kontinuierlich. Ab einem bestimmten Zeitpunkt (in diesem Fall 20 Stunden), wird die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Baugruppe mit Selbstdiagnose im Wesentlichen durch die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls geprägt.
2	Seinerseits hängt die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls von dem Wert des DC Faktors ab. Der Vergleich mit der Ausfallwahrscheinlichkeitskurve einer Baugruppe ohne Selbstdiagnose (vergl. Abb. 75 und . Abb. 74) zeigt gravierende Unterschiede: die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Baugruppe ohne Selbstdiagnose ist um den Faktor ca. 2,37 höher als bei einer Baugruppe mit Selbstdiagnose.

Tab. 72 Modell 1, Versuch 2: Ergebnisse

Wie stark hängt die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls von dem Wert des DC Faktors ab, wird im dritten Versuch analysiert:

Ausfallrate der Einzelkomponente	$\lambda = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten	$\mu_D = 5,00E-01 \text{ h}^{-1}, \mu_U = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$
DC Faktor	DC = 0,99 (Failsafe-Baugruppe)
Anfangsbedingungen (P_1, P_2, P_3)	(1,0,0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	200 / 2500
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 73 Modell 1, Versuch 3: Eingaben

Die Ergebnisse sind in der Abb. 77 dargestellt:

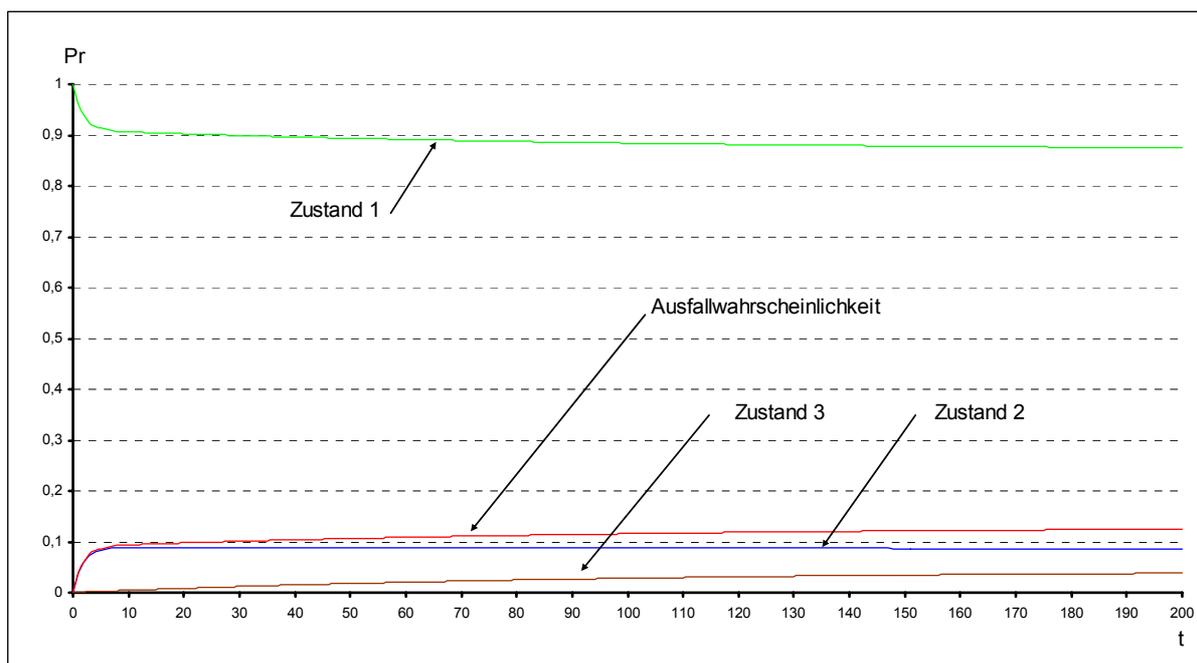


Abb. 77 Modell 1, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten

Die Zustandswahrscheinlichkeiten der Zustände 2 und 3 sowie die gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit sind vergrößert in der Abb. 78 gezeigt:

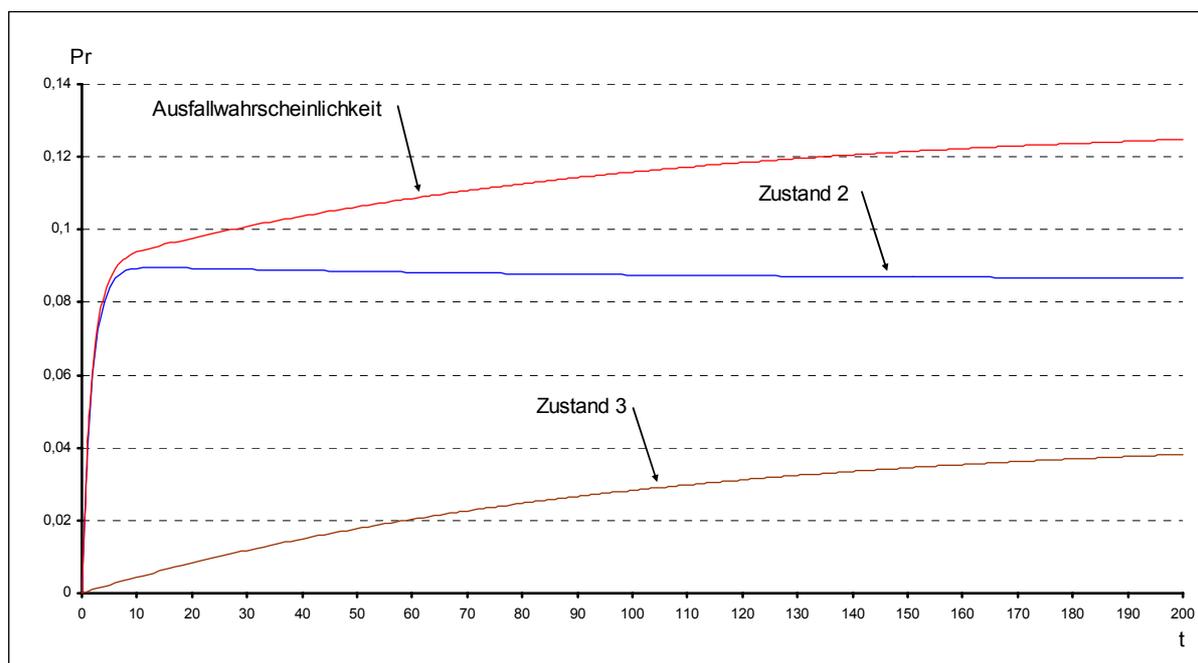


Abb. 78 Modell 1, Versuch 3: Zustand 2, 3 sowie gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit

Aus der Abb. 77 und Abb. 78 folgt:

1	<p>Nach wie vor konvergiert die Wahrscheinlichkeit eines festgestellten Ausfalls gegen einen konstanten Wert, der um ca. 48% größer ist als bei einer Baugruppe mit DC = 0,9 (s. auch Abb. 76; 0,06 bei DC = 0,9 und 0,086 bei DC = 0,99). Die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls steigt wesentlich langsamer.</p> <p>Die Form der Ausfallwahrscheinlichkeitskurve solcher Baugruppe wird durch die Ausfallwahrscheinlichkeitskurve eines nicht festgestellten Ausfalls geprägt. Der Wert der Ausfallwahrscheinlichkeit wird durch die Ausfallwahrscheinlichkeit eines festgestellten Ausfalls definiert.</p>
2	<p>Die Vergrößerung des DC Faktors von 0,9 auf 0,99 führt zur Senkung der gesamten Ausfallwahrscheinlichkeit der Baugruppe um ca. 65% (vergl. Abb. 76 und Abb. 78, Ausfallwahrscheinlichkeit bei DC = 0,9 ist 0,35, dagegen bei DC = 0,99 ist die Ausfallwahrscheinlichkeit 0,12).</p>

Tab. 74 Modell 1, Versuch 3: Ergebnisse

5.2.2.2 Modell 2

Beim ersten Versuch wird das Modell 2 (s. Abschnitt 5.2.1.2) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_{D1} = 0, \mu_{U1} = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$ $\mu_{D2} = 0, \mu_{U2} = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$
DC Faktor	DC = 0
Anfangsbedingungen (P_1, \dots, P_{13})	(1, ..., 0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	200 / 2500
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 75 Modell 2, Versuch 1: Eingaben

Die Ergebnisse der numerischen Auflösung des Systems von Differentialgleichungen (s. Gl. 5.2—3) sind in der Abb. 79 dargestellt:

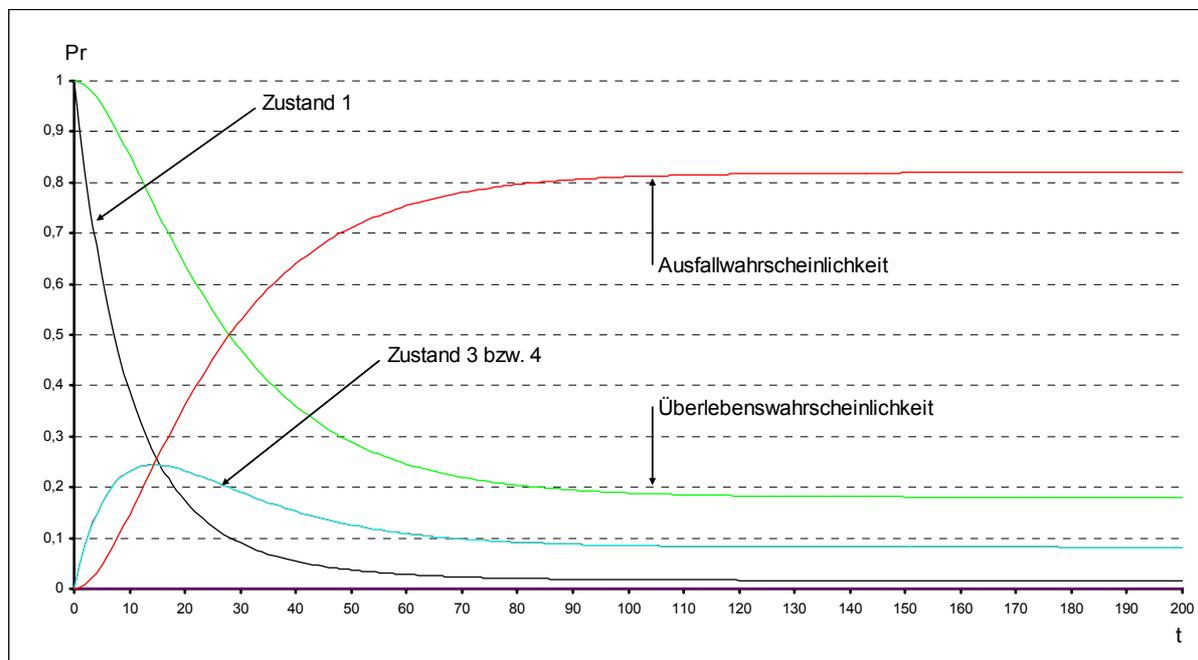


Abb. 79 Modell 2, Versuch 1: Zustandswahrscheinlichkeiten

In diesem Bild sind die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 1 bis 5 sowie die gesamte Überlebens- bzw. Ausfallwahrscheinlichkeit dargestellt. Da der Übergang in die Zustände 2 und 5 nicht mehr möglich ist ($DC = 0, \mu_{D1} = 0, \mu_{D2} = 0$), sind die entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten gleich Null und das Modell 2 stimmt mit dem klassischen Markov-Modell eines redundanten Systems überein.

Als nächstes muss der Einfluss des DC Faktors auf die gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit eines redundanten Systems aus zwei Baugruppen mit Selbstdiagnose untersucht werden.

Beim zweiten Versuch wird das Modell 2 (s. Abschnitt 5.2.1.2) mit folgenden Zahlen belegt:

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_{D1} = 5,00E-01 \text{ h}^{-1}, \mu_{U1} = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$ $\mu_{D2} = 5,00E-01 \text{ h}^{-1}, \mu_{U2} = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$
DC Faktor	DC = 0,9
Anfangsbedingungen (P_1, \dots, P_{13})	(1, ..., 0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	200 / 2500
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 76 Modell 2, Versuch 2: Eingaben

Die entsprechenden Zustandswahrscheinlichkeiten sind in der Abb. 80 dargestellt:

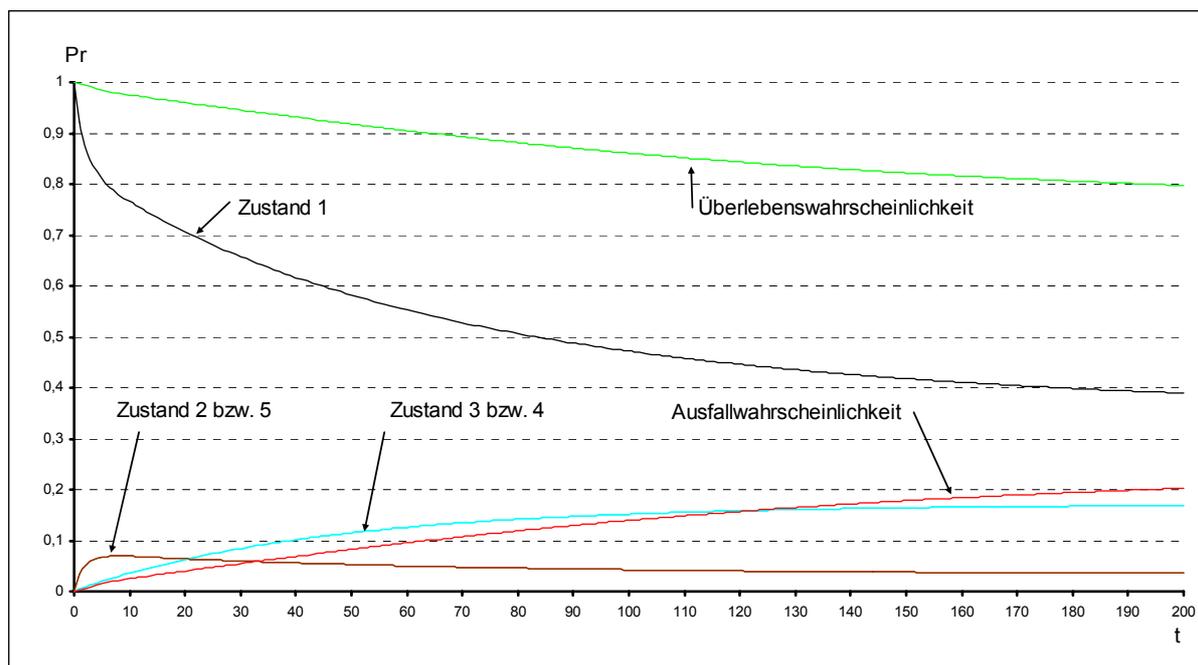


Abb. 80 Modell 2, Versuch 2: Zustandswahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 5 sowie die gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit sind in der Abb. 81 vergrößert dargestellt:

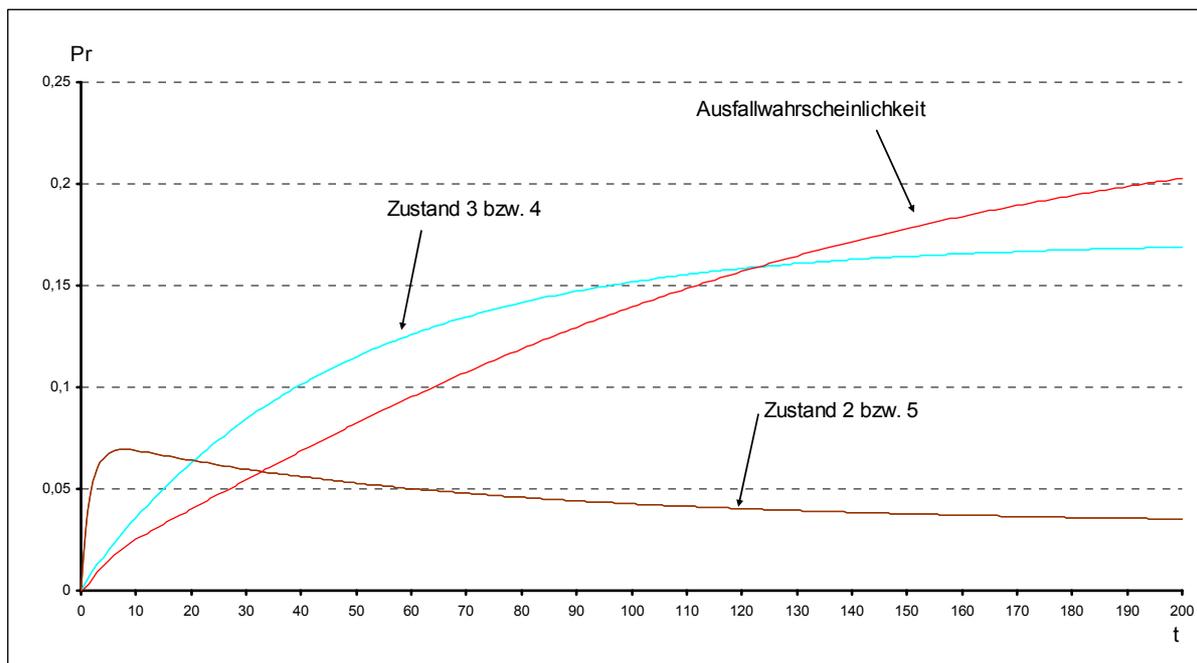


Abb. 81 Modell 2, Versuch 2: Zustand 2 bis 5, gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit

Der Verlauf der Ausfallwahrscheinlichkeitskurven auf der Abb. 80 bzw. Abb. 81 weist auf die folgenden Punkte auf:

1	Auch wie im Falle einer Einzelkomponente mit Selbstdiagnose konvergiert die Wahrscheinlichkeit eines festgestellten Ausfalls gegen einen konstanten Wert (0,23). Dagegen steigt die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls kontinuierlich. Ab einem bestimmten Zeitpunkt (in diesem Fall 33 Stunden), wird die Ausfallwahrscheinlichkeit eines reparierbaren redundanten Systems von zwei Baugruppen mit Selbstdiagnose im Wesentlichen durch die Wahrscheinlichkeit eines nicht festgestellten Ausfalls geprägt.
2	Ein redundantes System aus zwei Baugruppen mit Selbstdiagnose (DC = 0,9) weist die Ausfallwahrscheinlichkeit auf, die um den Faktor ca. 3,6 (ab dem Zeitpunkt 200 Stunden) besser ist als die von einem System mit den Baugruppen ohne Selbstdiagnose (vergl. Abb. 79 und Abb. 81)

Tab. 77 Modell 2, Versuch 2: Ergebnisse

Beim dritten Versuch wird ein redundantes System aus zwei s. g. F-Baugruppen (failsafe, DC = 99%) untersucht.

Ausfallraten der Einzelkomponenten	$\lambda_1 = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$ $\lambda_2 = 5,00E-02 \text{ h}^{-1}$
Reparaturraten der Einzelkomponenten	$\mu_{D1} = 5,00E-01 \text{ h}^{-1}, \mu_{U1} = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$ $\mu_{D2} = 5,00E-01 \text{ h}^{-1}, \mu_{U2} = 1,00E-02 \text{ h}^{-1}$
DC Faktor	DC = 0,99

Anfangsbedingungen (P_1, \dots, P_{13})	(1, ..., 0)
Zeit (in Stunden) / Sampling	200 / 2500
Methode der numerischen Lösung	Runge-Kutta, adaptiv

Tab. 78 Modell 2, Versuch 3: Eingaben

Die Ergebnisse sind in der Abb. 82 dargestellt:

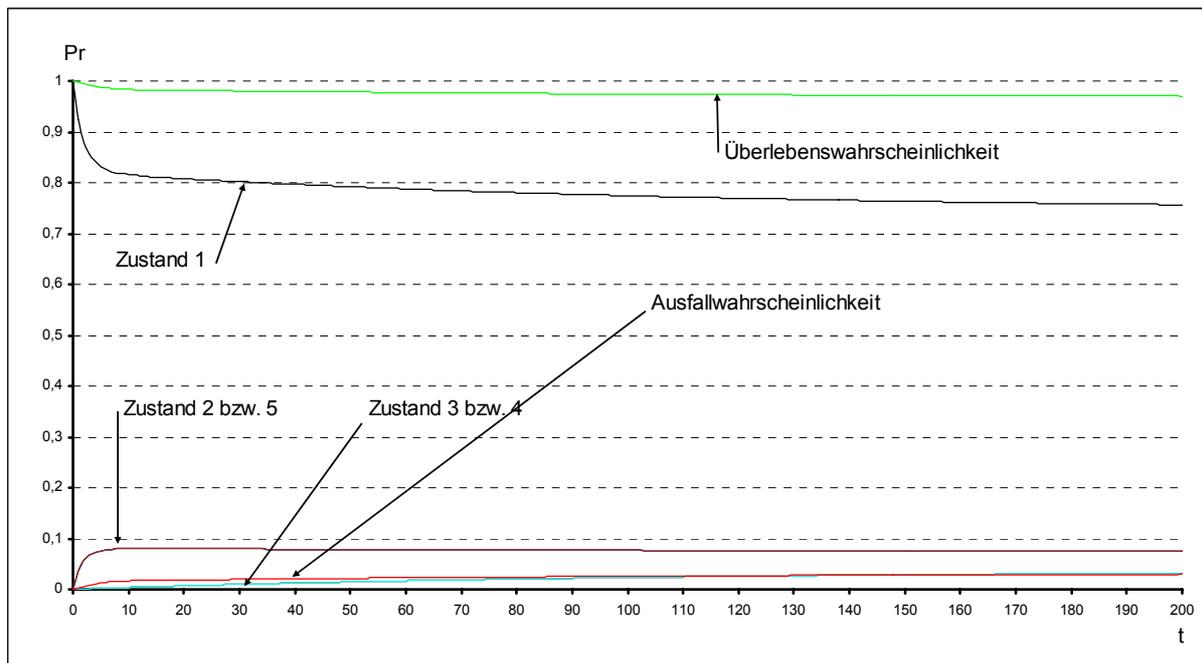


Abb. 82 Modell 2, Versuch 3: Zustandswahrscheinlichkeiten

Die Wahrscheinlichkeiten der Zustände 2 bis 5 sowie die gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit sind in der Abb. 83 vergrößert dargestellt.

Aus der Abb. 82 und Abb. 83 folgt:

1	Die Wahrscheinlichkeit eines festgestellten Ausfalls (0,075, s. Abb. 83) bei den Failsafe-Baugruppen ist um den Faktor ca. 2,5 größer als die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems (0,03, s. Abb. 83). Ab einem gewissen Zeitpunkt erreicht die Ausfallwahrscheinlichkeit des Gesamtsystems einen maximalen Wert und bleibt dann konstant. Das bedeutet: die festgestellten Ausfälle bei den Failsafe-Baugruppen haben keine bedeutende Auswirkung auf die Ausfallwahrscheinlichkeit des gesamten Systems.
2	Ein redundantes System aus zwei Failsafe-Baugruppen ($DC = 0,99$) weist die Ausfallwahrscheinlichkeit auf, die um den Faktor ca. 7,6 besser ist als die von einem System mit dem Diagnose-Aufdeckungsgrad $DC = 0,9$ (vergl. Abb. 81 und Abb. 83; 0,03 gegen 0,23 ab 200 Stunden)

Tab. 79 Modell 2, Versuch 3: Ergebnisse

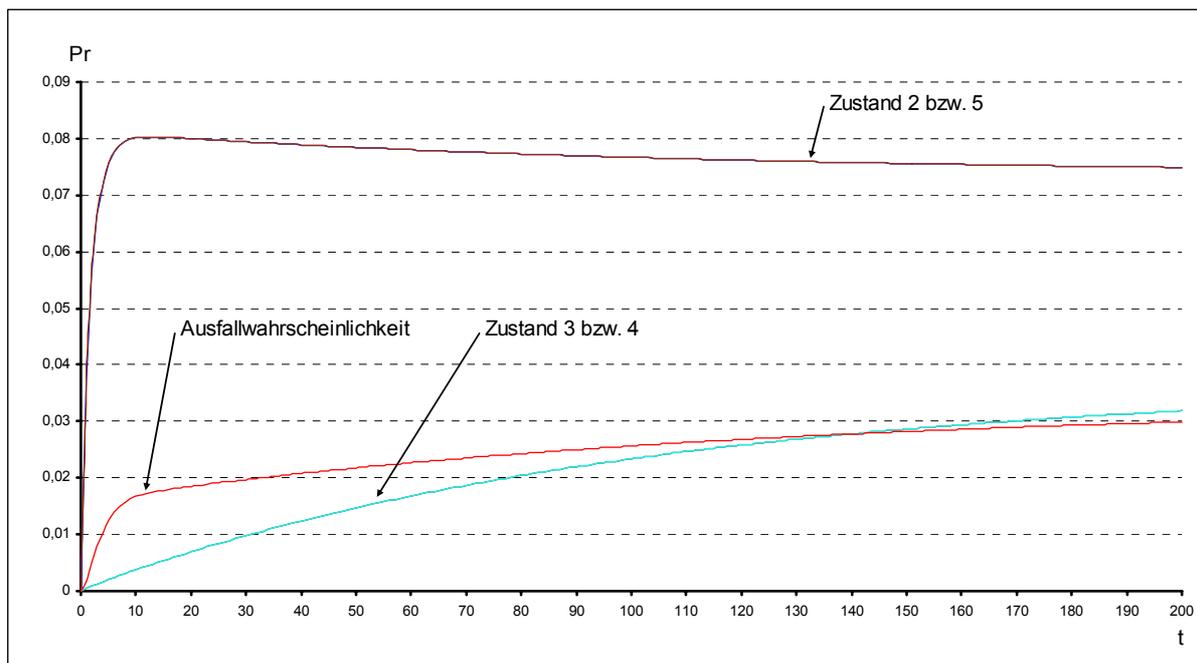
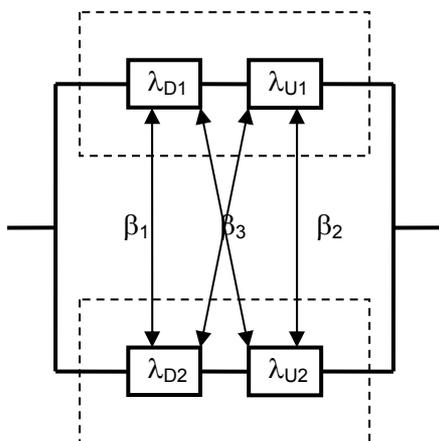


Abb. 83 Modell 2, Versuch 3: Zustand 2 bis 5, gesamte Ausfallwahrscheinlichkeit

5.3 Modifizierte Übergangsmatrix

In diesem Kapitel werden beide neuen Faktoren CCF und DC zusammen betrachtet und eine entsprechende modifizierte Übergangsmatrix wird aufgebaut.

Dafür wird ein redundantes reparierbares System bestehend aus zwei Baugruppen mit Selbstdiagnose analysiert:



Die Komponenten werden durch die Zuverlässigkeitsparameter $(\lambda_{D1}, \lambda_{U1}, \mu_{D1}, \mu_{U1})$ und $(\lambda_{D2}, \lambda_{U2}, \mu_{D2}, \mu_{U2})$ charakterisiert (s. Tab. 69). Die jeweiligen Ausfallwahrscheinlichkeiten:

$$\Pr\{A_{D1}\} = 1 - e^{-\lambda_{D1}T} \quad \text{und} \quad \Pr\{A_{D2}\} = 1 - e^{-\lambda_{D2}T}, \quad \text{wobei } T - \text{ die Dauer eines Testzyklus}$$

$$\Pr\{A_{U1}\} = 1 - e^{-\lambda_{U1}t} \quad \text{und} \quad \Pr\{A_{U2}\} = 1 - e^{-\lambda_{U2}t}, \quad \text{wobei } t - \text{ die gesamte Missionszeit}$$

$$\Pr\{A_{D1D2}\} = \Pr\{A_{D2D1}\} = 1 - e^{-\beta_1 \lambda_{CCF} \mu_{CCF}^{-1}},$$

$$\Pr\{A_{U1U2}\} = \Pr\{A_{U2U1}\} = 1 - e^{-\beta_2 \lambda_{CCF} \mu_{CCF}^{-1}},$$

$$\Pr\{A_{DiUj}\} = \Pr\{A_{UjDi}\} = 1 - e^{-\beta_3 \lambda_{CCF} \mu_{CCF}^{-1}}, \quad \text{wobei } \lambda_{CCF} - \text{ die Ausfallrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache (s. Abschnitt 5.1)}$$

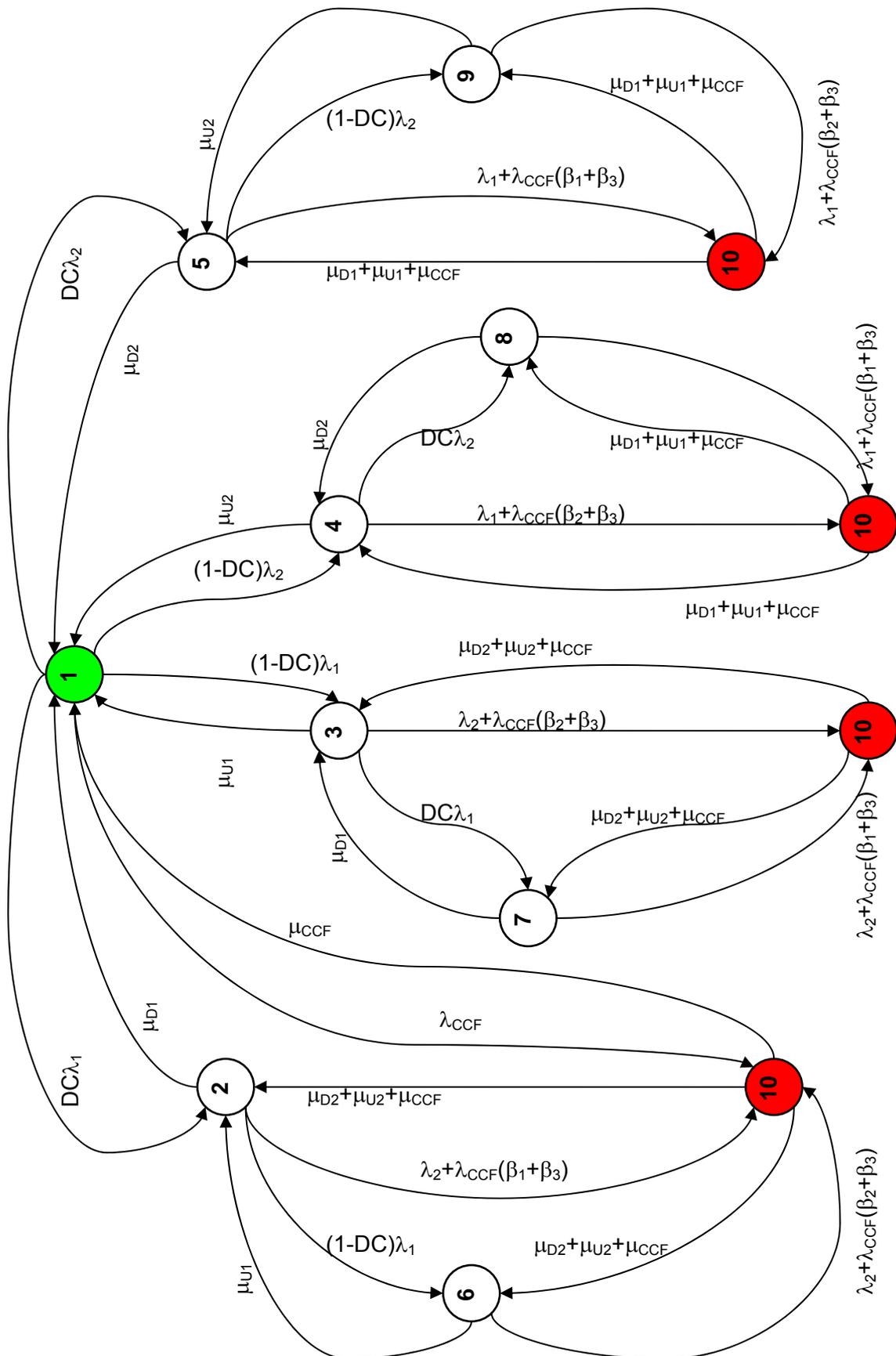


Abb. 84 CCF und DC Faktoren: Zustandsgraph

Folgende Tabelle fasst die wichtigsten Eigenschaften der modifizierten Übergangsmatrix bzw. der modifizierten Markov-Methode zusammen:

1. Basis	Methode der markovschen Minimalschnitten.
2. CCF Faktor	Der CCF Faktor wird mittels Modell 2 (s. Kap. 5.1, Abschnitt 5.1.1.2) erfasst.
3. DC Faktor	Der DC Faktor wird mittels Modell 2 (s. Kap. 5.2, Abschnitt 5.2.1.2) erfasst.
4. Allgemeingültigkeit	<p>Falls die CCF und DC Faktoren gleich Null sind, stimmt die modifizierte Markov-Methode mit der klassischen Markov-Methode überein.</p> <p>Da das System von Differentialgleichungen (s. Gl. 5.3—1) numerisch aufgelöst wird, müssen die Baugruppen eines technischen Systems nicht unbedingt identisch sein. Dies ist ein wichtiger Vorteil gegenüber den bisherigen Näherungsformeln.</p> <p>Außerdem ist die Zuverlässigkeitsberechnung nach der modifizierten Markov-Methode auch dann möglich, wenn die Ausfall- und Reparaturraten miteinander vergleichbar sind.</p>
5. Präzision der Berechnungen	<p>Die Modelle zur Erfassung der CCF und DC Faktoren sind ausführlich in den Kapiteln 5.1 und 5.2 dargestellt und in der Reihe von Versuchen analysiert. Die Ergebnisse (s. Abschnitt 5.1.2 und 5.2.2) zeigen in Abhängigkeit von der Anfangsbedingungen eine starke Konvergenz gegenüber den realen Feldwerten (z. B. im Falle eines symmetrischen Systems).</p> <p>Da die CCF und DC Faktoren von der klassischen Markov-Methode nicht berücksichtigt sind, rechnet die Methode oft viel zu optimistisch.</p> <p>Die empirische TÜV Formel (s. Gl. 5.1—1), besonders im Falle eines asymmetrischen Systems, rechnet viel zu konservativ.</p>

Tab. 80 Modifizierte Übergangsmatrix, Eigenschaften

5.4 Kalkulation der RAM Werte nach neuer Methodik

Die allgemeine Vorgehensweise bei der Kalkulation von RAM Werten nach der modifizierten Markov-Methode fasst folgende Schritte um:

1	Zuverlässigkeitsanalyse (FMEA, FTA) eines technischen Systems, dessen RAM Werte berechnet werden müssen.
2	Ermittlung aller relevanten Minimalschnitte (bis maximal dritter Ordnung).
3	Ermittlung der Werte der Zuverlässigkeitsparameter (unter Berücksichtigung eines Vertrauensbereiches) für alle Komponenten (Baugruppen) innerhalb eines Schnittes.
4	In Abhängigkeit davon, ob eine Selbstdiagnose bzw. ein Ausfall infolge gemeinsamer Ursache möglich sind, werden in der modifizierten Übergangsmatrix (s. Gl. 5.3—1) die entsprechende Parameter eingestellt.
5	Das System von Differentialgleichungen (s. Gl. 5.3—1) wird numerisch mit Hilfe von MathCAD aufgelöst. Als Ergebnis bekommt man die zeitlichen Abhängigkeiten der Wahrscheinlichkeiten der Systemzustände, woraus auch die entsprechende RAM Werte ablesen werden können.

Tab. 81 Kalkulation der RAM Werte

Die Tab. 81 zeigt deutlich, dass die Vorgehensweise bei der Zuverlässigkeitsberechnung nach modifizierter Methodik mit der allgemeinen Vorgehensweise aus der IEC 60300 im Wesentlichen übereinstimmt (s. auch Kap. 2.2.1.2).

6 Praktischer Einsatz: Projekt ACoRAM

Ein komplexes technisches System (hier z.B. Leittechnik von Siemens TXP, PCS7 etc.) mit ihren Komponenten kann derzeit im Betriebszustand durch kontinuierliche Erfassung von Betriebsdaten überwacht werden, indem regelmäßig einzelne Komponenten auf ihren Status hin überwacht werden. Fehler durch den Ausfall von Bauteilen oder Baugruppen (Komponenten) werden auf diese Weise festgestellt, können aber nicht prognostiziert werden.

Zurzeit sind Fehlfunktionen oder das Versagen einer oder mehrerer Komponenten erst nach dem Schadensereignis zu diagnostizieren. Es vergeht wertvolle Zeit zur Behebung des Schadens, was die Verfügbarkeit deutlich beeinträchtigt und somit Produktionsverlust bedeutet. Hinzu kommt, dass die Auswertung des Ausfalls erst nach dem Ereignis Ausfall der Komponente beginnen kann.

Die Auswertung der Ausfälle oder das Beurteilen der Versagensumstände erfolgt vor Ort. Eine Online-Rückkopplung der kontinuierlich gewonnenen Daten (Ausfallrate, Verfügbarkeit, Wartbarkeit) zum Anlagenhersteller erfolgt in der Regel nicht. Ein echtzeitiger Feldakzeptanztest (online field acceptance test, FAT) der Leittechnischen Komponenten ist somit auch nicht möglich.

Um die genannten Probleme lösen zu können, wurde innerhalb der Firma Siemens AG in Juni 2004 in Rahmen der Zusammenarbeit zwischen Reliability Consult (L28) und Nuklearleittechnik (L4) das Projekt ACoRAM (Automatic Calculation of Reliability-Availability-Maintainability) gestartet.

6.1 Ausgangssituation

Das Projekt ACoRAM ist vor allem auf die leittechnischen Systeme von Siemens AG wie z. B. TXP, T2000, T3000, PCS7 gerichtet. Diese Systeme weisen gewisse Ähnlichkeit in der strukturellen Organisation (s. Abb. 85) auf, was auch die Integration und die Zusammenarbeit mit der ACoRAM Software unifiziert.

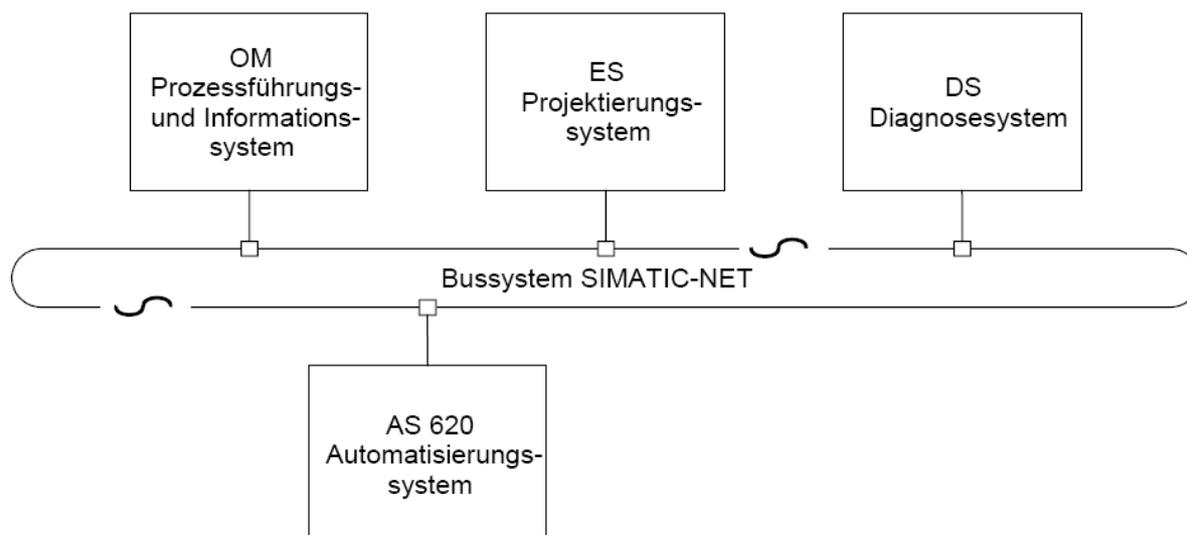


Abb. 85 Leittechnisches System

In modernen leittechnischen Systemen von der Firma Siemens (s. Abb. 85) werden die Prozessdaten bzw. Parameterwerte von allen Baugruppen aus dem Automatisierungssystem (AS) kontinuierlich erfasst und an das Prozessführungs- und Informationssystem (OM) zum Zweck der Visualisierung und Auswertung weitergeleitet.

Eine fehlerhafte bzw. ausgefallene Baugruppe wird aufgrund von Prozessdaten automatisch erkannt und dank der Zusammenarbeit zwischen dem Projektierungssystem (ES, hier wird die Struktur des Gesamtsystems entworfen und abgespeichert) und dem Diagnosesystem (DS) lokalisiert.

Das Problem besteht darin, dass solch eine Diagnose nur "post mortem" möglich ist. Wesentlich effizienter wäre es die Baugruppen, deren Ausfallwahrscheinlichkeit sich in einem kritischen Bereich befindet, im Voraus aus dem Betrieb zu ziehen. Damit wird eine korrektive Wartung durch eine vorbeugende (präventive) Wartung ersetzt, was eine erhebliche Steigerung der gesamten Verfügbarkeit eines leittechnischen Systems verspricht (s. auch Abschnitt 2.2.4 und Tab. 38).

In anderen Worten, es besteht ein Bedarf, die Funktionalität der heutigen leittechnischen Systeme um einen Modul für die Zuverlässigkeitsvorhersage zu erweitern. Genau diese Funktionalitätslücke soll das Projekt ACoRAM auffüllen.

Eine weitere Anforderung besteht darin, dass eine solche Zuverlässigkeitsvorhersage unbedingt auf den Feldwerten bzw. auf den aktuellen Prozessdaten der jeweiligen Komponente oder Baugruppe basieren muss. Die pauschalen Angaben (z. B. λ oder MTBF Werte aus SN29500, MIL-HDBK-217F, etc.) über die Zuverlässigkeitsparameter einer Baugruppe reichen nicht mehr aus und können nur für die Anfangskalibrierung des ACoRAM Moduls benutzt werden.

6.2 Ziele des Projektes

Die Ziele des Projektes ACoRAM werden in tabellarischer Form zusammengefasst:

1	<p>Hauptziel des Projektes besteht darin, eine Plattform (Framework) für die Zuverlässigkeitsberechnung bzw. Zuverlässigkeitsvorhersage der Einzelbaugruppen sowie der gesamten leittechnischen Systeme zu entwickeln.</p>
2	<p>Softwaremäßig muss die ACoRAM Plattform so flexibel sein, dass eine nahtlose Integration mit den bereits existierenden leittechnischen Systemen ermöglicht wird. Dafür ist folgendes notwendig:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Unterstützung der Datentransferprotokolle, die in einem leittechnischen System benutzt sind; - Erkennung und Umwandlung der Datenformaten; - Kommunikation mit den anderen Modulen (z. B. Diagnose- oder Projektierungssystem) eines leittechnischen Systems;
3	<p>Kalkulation der RAM Werte</p> <p>Die Zuverlässigkeitsberechnung mithilfe von ACoRAM wird in zwei Phasen durchgeführt:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Prognose; Dies ist bereits in der Projektierungsphase eines leittechnischen Systems möglich. Dafür wird die Struktur des leittechnischen Systems aus dem ES entnommen, ein entsprechendes Modell wird aufgebaut (s. Kap. 5.3), die Zuverlässigkeitsparameter der Baugruppen werden mit "Standardwerten" belegt. - Verifizierung; In dieser Phase werden die Werte der Zuverlässigkeitsparameter der jeweiligen Baugruppen aus den Prozessdaten bzw. aus der Statistik mit einem Vertrauensintervall 95% ermittelt. Diese Feldwerte der Zuverlässigkeitsparameter werden in das Zuverlässigkeitsmodell eingeführt, die Ergebnisse aus der Verifizierungsphase werden mit den Ergebnissen aus der Prognosephase verglichen. <p>Diese Vorgehensweise hat folgende Vorteile:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Die groben Designfehler bzw. Schwachstellen im Sinne der Zuverlässigkeit können bereits in der Projektierungsphase erkannt werden. - Im Weiteren wird das Zuverlässigkeitsmodell eines leittechnischen Systems nur mit den aktuellen Werten (also Feldwerten, die Betriebsbedingungen werden mitberücksichtigt) der Zuverlässigkeitsparameter von Komponenten und Baugruppen gespeist. - Als Folge dessen und dank der modifizierten Markov-Methode wird die Kalkulation der RAM Werte einer Einzelbaugruppe oder des gesamten leittechnischen Systems wesentlich präziser und näher zur Realität sein.
4	<p>Kostenoptimierung</p> <p>Präzise RAM Werte können als ein entscheidendes Argument besonders in der Angebotsphase eines leittechnischen Systems gegenüber der Konkurrenz agieren (s. Abb. 9). In der Betriebsphase ermöglichen die präzisen RAM Werte die Entwicklung einer optimalen und kosteneffektiven Wartungsstrategie (s. Kap. 2.2.4).</p>

Tab. 82 Projekt ACoRAM: Ziele

6.3 Lösungseinsatz

Als eine Pilot-Anlage für den Projekt ACoRAM ist ein leittechnisches Systems, bestehend aus OM690 und TXP, vorgesehen.

Die technischen Aspekte und technologischen Besonderheiten der Implementierung des Projektes ACoRAM sind bereits im Kapitel 4 beschrieben. Ob die Ziele aus der Tab. 82 erreicht sind, fasst folgende Tabelle zusammen:

1	Dank dem modularen Aufbau und verteilter Architektur (s. Abb. 49), kann man die Funktionalität der einzelnen Module der ACoRAM Software (z. B. RAM Engine) als Basis für die Entwicklung anderer Softwareprodukte zum Thema Zuverlässigkeitsberechnung benutzen.
2	Die ACoRAM Plattform unterstützt vollständig die DCOM Technologie sowie standardisierte Protokolle zum Datentransfer (COM Engine). Die Erkennung und Umwandlung von Datenformaten erfolgt mittels des PARSER Moduls (s. Abb. 49 und Tab. 49). Die Integration mit bereits existierenden leittechnischen Systemen ist über entsprechende Anpassung der Schnittstellen möglich.
3	Die Kalkulation der RAM Werte für die einzelnen Baugruppen sowie für ein gesamtes leittechnisches System erfolgt mittels modifizierter Markov-Methode (s. Kap. 5.3). Dabei werden die Zuverlässigkeitsparameter (Ausfallrate, Ausfallrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache, Reparaturrate, Diagnose-Aufdeckungsgrad) der Einzelkomponenten aus den Fehlermeldungen bzw. aus den Prozessdaten eines leittechnischen Systems entnommen. Eine solche Statistik (Rohdaten) wird zunächst in einer ACoRAM Datenbank abgelegt und beim nächsten Schritt bereinigt (z. B. durch Einführung eines Vertrauensintervalls). In dieser Datenbank wird auch die strukturelle Darstellung des leittechnischen Systems im Sinne der Zuverlässigkeit abgespeichert. Die modifizierte Markov-Methode liefert Ergebnisse, die eine gute Korrelation mit den Feldwerten aufweisen. Deswegen ist eine präzise Aussage über die Ausfallwahrscheinlichkeit der Einzelbaugruppen sowie des gesamten leittechnischen Systems möglich.
4	Die Frage der Kostenoptimierung und generell die kaufmännischen Aspekte der Zuverlässigkeitsanalyse werden in Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

Tab. 83 Projekt ACoRAM: Ergebnisse

7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Dissertation werden diverse Aspekte der Zuverlässigkeitsanalyse und insbesondere der Zuverlässigkeitsberechnung von komplexen technischen Systemen betrachtet. Die bereits existierenden Methoden für Zuverlässigkeitsberechnung wurden vor allem im Sinne der praktischen Anwendbarkeit analysiert.

Die Analyse hat jedoch gezeigt, dass die vorhandenen Methoden im Bezug auf die realen technischen Systeme schwer anwendbar sind. Dies liegt daran, dass die Struktur, Funktionalität sowie der Betriebsmodus der modernen technischen Systeme (z. B. Leitetchnik) durch die zusätzlichen Zuverlässigkeitsparameter geprägt wird, die von den bisherigen Methoden der Zuverlässigkeitsberechnung nicht erfasst sind.

Als Folge dessen weisen die Ergebnisse der Zuverlässigkeitsberechnung nach einer "klassischen" Methode in der Regel gravierende Unterschiede zu den Feldwerten auf. Um die Lücke zwischen den "theoretischen" und den Feldwerten schließen zu können, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Methode der Zuverlässigkeitsberechnung entwickelt, die auf der Markov-Methode basiert und die zusätzlichen Zuverlässigkeitsparameter berücksichtigt.

Die Schwerpunkte der Arbeit wurden dabei wie folgt formuliert:

- 1 Stand der Forschung, Analyse
 - 1.1 Auswahl einer Basismethode der Zuverlässigkeitsberechnung
 - 1.2 Ermittlung der zusätzlichen Faktoren, die bei der Zuverlässigkeitsberechnung mitberücksichtigt werden müssen
- 2 Untersuchung des Faktors "Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache" (CCF)
 - 2.1 Mathematische Aspekte der Definition des CCF Faktors im Bezug auf die Theorie stochastischer Prozesse
 - 2.2 Auswahl eines Modells, das die Auswirkung des CCF Faktors auf die Zuverlässigkeitsberechnung präzise (nah zu Realität) widerspiegelt
 - 2.3 Ermittlung einer allgemeinen Formel für die Ausfallrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache

- 3 Untersuchung des Faktors "Diagnose-Aufdeckungsgrad" (DC)
 - 3.1 Mathematische Aspekte der Definition des DC Faktors im Bezug auf die Theorie stochastischer Prozesse
 - 3.2 Auswahl eines Modells, das die Auswirkung des DC Faktors auf die Zuverlässigkeitsberechnung präzise (nah zu Realität) widerspiegelt
 - 3.3 Verlauf der Wahrscheinlichkeitskurven eines "festgestellten" und "nicht festgestellten" Ausfalls, Analyse
- 4 Modifizierung der ausgewählten Basismethode (Methode der markovschen Minimal-schnitte)
 - 4.1 Zusammenfassung der klassischen (Ausfallrate, Reparaturrate) und der neuen (CCF, DC) Zuverlässigkeitsparameter
 - 4.2 Modifizierter Zustandsgraph, modifizierte Übergangsmatrix
- 5 Allgemeine Vorgehensweise bei der Zuverlässigkeitsberechnung nach modifizierter Markov-Methode

Die entscheidenden Vorteile der modifizierten Methode lassen sich wie folgt formulieren:

- 1 Universalität und Allgemeingültigkeit
 - Die modifizierte Übergangsmatrix umfasst sowohl die klassischen (Ausfallrate, Reparaturrate) als auch die neuen (CCF, DC) Zuverlässigkeitsparameter.
 - Falls die Faktoren CCF und DC gleich Null sind, stimmt die modifizierte Methodik mit der klassischen Markov-Methode überein.
 - Die Zuverlässigkeit von technischen Systemen sowohl mit als auch ohne Reparatur kann auf die gleiche Art und Weise berechnet werden.
- 2 Präzision
 - Das aus der modifizierten Übergangsmatrix abgeleitete System von Differentialgleichungen beschreibt das komplexe Verhalten von modernen technischen Systemen wesentlich präziser als die klassische Markov-Methode oder die empirische Formel.
 - Da das System von Differentialgleichungen numerisch aufgelöst wird, fallen die üblichen Beschränkungen (z. B. identische Komponenten, $\mu \gg \lambda$) der analytischen Lösungen bzw. der empirischen Formel weg.
- 3 Wirtschaftliche Aspekte

Aufgrund der präzisen RAM Werte sind eine weitgehende Kostenoptimierung eines technischen Systems sowie die Entwicklung einer kosteneffektiven Wartungsstrategie möglich.

Ich hoffe, dass die Ergebnisse aus dem Projekt ACoRAM eine breite Anwendung der modifizierten Markov-Methode bzw. der entsprechenden Software nicht nur in der Leittechnik sondern auch in diversen technischen Systemen (Robotik, Flugtechnik, etc.) ermöglichen.

8 Appendix

8.1 Abkürzungen

Bezeichnung	Bedeutung
.NET	Softwareplattform von Microsoft
ACoRAM	Automatic Calculation of Reliability-Availability-Maintainability
ADAC	Allgemeiner Deutscher Automobil-Club e. V.
AS	Automatisierungssystem, z. B. AS620 in Siemens Leittechnik
CARMS	Computer-Aided Rate Modelling and Simulation
CCF	Common Cause Failure
DC	Diagnostic Coverage
DCOM	Distributed Component Object Model
DGL	Differentialgleichung
DS	Diagnosesystem, z. B. DS670 in Siemens Leittechnik
ES	Engineering System, z. B. ES680 in Siemens Leittechnik
FAT	Field Acceptance Test
FMEA	Failure Modes and Effects Analysis
FMECA	Failure Modes, Effects and Criticality Analysis
FTA	Fault Tree Analysis

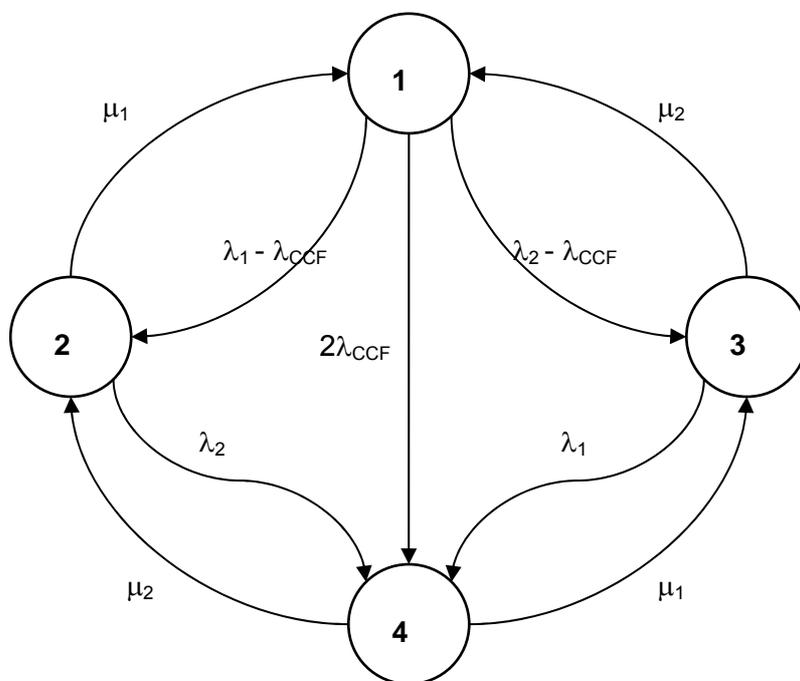
GmbH	Gesellschaft mit beschränkter Haftung
GUI	Graphical User Interface
h	(Betriebs-)Stunde
HDBK	Handbook
HTML	Hypertext Markup Language
IEC	International Electrotechnical Commission
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.
MathCAD	Rechensoftware für Techniker und Ingenieure
MDT	Mean Down Time
MIL	Military
MTBF	Mean Time Between Failures
MTBF _s	Mean Time Between Failures (System)
MTTF	Mean Time To Failure
MTTR	Mean Time To Repair
OM	Operating and Monitoring System, z. B. OM650 in Siemens Leittechnik
PCS7	Ein leittechnisches System der Firma Siemens AG
RAM	Reliability, Availability, Maintainability
RBD	Reliability Block Diagramm
STD	Standard
T2000	Ein leittechnisches System der Firma Siemens AG
T3000	Ein leittechnisches System der Firma Siemens AG
TCP/IP	Transmission Control Protocol / Internet Protocol
TÜV	Technischer Überwachungsverein
TXP	Ein leittechnisches System der Firma Siemens AG
VDI	Verein Deutscher Ingenieure
XML	eXtensible Markup Language
ZBD	Zuverlässigkeitsblockdiagramm

8.2 Formelzeichen

Bezeichnung	Bedeutung
A	Verfügbarkeit
A_{ij}	Bedingter Ausfall einer Komponente i infolge des Ausfalls einer Komponente j
β	Wert eines CCF-Faktors
$\beta_1, \beta_2, \beta_3$	Gewichtungskoeffiziente, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1$
λ	Ausfallrate
λ_{CCF}	Ausfallrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache
λ_D	Ausfallrate eines festgestellten Ausfalls
λ_{ij}	Ausfallrate eines bedingten Ausfalls A_{ij}
λ_s	Ausfallrate eines Gesamtsystems
λ_U	Ausfallrate eines nicht festgestellten Ausfalls
μ	Reparaturrate
μ_{CCF}	Reparaturrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache
μ_D	Reparaturrate eines festgestellten Ausfalls
μ_U	Reparaturrate eines nicht festgestellten Ausfalls
p_{ij}	Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand i nach Zustand j
P_i	Wahrscheinlichkeit eines Systemzustandes i

8.3 Modell von Kochs

In diesem Abschnitt wird ein Modell von Kochs [12] für die Erfassung eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache dargestellt.



Die Ausfallraten λ_1 und λ_2 werden jeweils um die Ausfallrate eines Ausfalls infolge gemeinsamer Ursache λ_{CCF} reduziert. Diesem Vorgehen liegt folgende Überlegung zugrunde. Die Ausfallraten λ_1 und λ_2 kennzeichnen die gesamten Ausfälle der einzelnen, isoliert betrachteten Komponenten. In einem System können nun ein Teil dieser Ausfälle Einfachausfälle und der andere Teil die Ausfälle infolge gemeinsamer Ursache hervorrufen. Beide Ausfallarten werden im Systemmodell durch getrennte Übergänge berücksichtigt. Deshalb müssen für die Übergänge von Zustand 1 nach Zustand 2 und von Zustand 1 nach Zustand 3 die λ_{CCF} von den einzelnen Ausfallraten λ_1 und λ_2 abgezogen werden.

9 Literaturverzeichnis

- [1] Birolini, Alessandro *Quality and reliability of technical systems: theory, practice, management* 2. ed.. - Berlin ; Heidelberg : Springer, 1997, ISBN 3-540-63310-3
- [2] Birolini, Alessandro *Zuverlässigkeit von Geräten und Systemen* : mit 50 Tabellen / A. Birolini. - 4. Aufl.. - Berlin ; Heidelberg : Springer, 1997, ISBN 3-540-60997-0
- [3] Görke, Winfried *Zuverlässigkeitsprobleme elektronischer Geräte* : nach Unterlagen und Verlauf im WS 1987/88 bzw. 1988/89; überarb. und. erg. im WS 89/90 und 90/91 / Vorlesungsskript
- [4] Görke, Winfried *Digitale Fehlerdiagnose* : Vorlesungsskript SS 1998 - Karlsruhe, 1998
- [5] Heidtmann, Klaus *Zuverlässigkeitsbewertung technischer Systeme : Modelle für Zuverlässigkeitsstrukturen und ihre analytische Auswertung* - Stuttgart ; Leipzig : Teubner, 1997, ISBN 3-8154-2306-6
- [6] Beljaev, Jurij K. *Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik bei der Analyse von Zuverlässigkeitsdaten* - 1. Aufl.. - Stuttgart : Teubner, 2000, ISBN 3-519-02396-2
- [7] Woltereck, Martin *Dynamische Zuverlässigkeitsanalyse mit anlagenspezifischen Störfallsimulatoren* - Düsseldorf : VDI-Verl., 2001, ISBN 3-18-333220-5
- [8] Zacks, Shelemyahu *Introduction to reliability analysis : probability models and statistical methods* - New York ; Berlin ; Heidelberg : Springer, 1992, ISBN 0-387-97718-X, 3-540-97718-X
- [9] Yang, Wei *Mechatronic reliability : electric failures, mechanical electrical coupling, domain switching, mass flow instabilities* ; Berlin ; Heidelberg : Springer, 2002, ISBN 3-540-42283-8, 7-302-04768-5
- [10] Pham, Hoang *Handbook of reliability engineering* - London ; Berlin ; Heidelberg : Springer, 2003, ISBN 1-85233-453-3

- [11] Neubeck, Ken *Practical reliability analysis* - Upper Saddle River, NJ : Pearson, 2004, ISBN 0-13-042020-4
- [12] Kochs, Hans-Dieter *Zuverlässigkeit elektrotechnischer Anlagen* - Berlin ; Heidelberg : Springer, 1984, ISBN 3-540-13475-1, 0-387-13475-1
- [13] Gaede, Karl-Walter *Zuverlässigkeit, mathematische Modelle* - München : Hanser, 1977, ISBN 3-446-12370-9
- [14] Echtle, Klaus *Fehlertoleranzverfahren* - Berlin ; Heidelberg : Springer, 1990, ISBN 3-540-52680-3, 0-387-52680-3
- [15] Bronstein, Semendjajew *Taschenbuch der Mathematik* – Thun : Deutsch, 1980, ISBN 3-871-44492-8
- [16] Beyer, Girlich, Zschesche *Stochastische Prozesse und Modelle* – Leipzig : BSB B. G. Teubner, 1988, ISBN 3-322-00470-8
- [17] Härtler, Gisela *Statistische Methoden für die Zuverlässigkeitsanalyse* – Berlin : VEB Verlag Technik, 1983
- [18] Pukite, Jan; Pukite, Paul *Modeling for Reliability Analysis* – New York : IEEE Press, 1998, ISBN 0-7803-3482-5
- [19] Cormen, Thomas H. *Algorithmen - eine Einführung* - München; Wien : Oldenbourg, 2004, ISBN: 3-486-27515-1
- [20] Endrenyi, J. *Reliability modeling in electric power systems* - Chichester : Wiley, 1978, ISBN: 0-471-99664-5
- [21] O'Connor, Patrick D. T. *Practical reliability engineering* - London : Heyden, 1981, ISBN: 0-85501-496-2
- [22] Kececioglu, Dimitri *Reliability engineering handbook* - Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall. Vol. 1, 1991, ISBN 0-13-772294-X
- [23] Schaefer, Eugen *Zuverlässigkeit, Verfügbarkeit und Sicherheit in der Elektronik : eine Brücke von der Zuverlässigkeitstheorie zu den Aufgaben der Zuverlässigkeitspraxis* - Würzburg : Vogel, 1979, ISBN: 3-8023-0586-8
- [24] Schrüfer, Elmar *Zuverlässigkeit von Meß- und Automatisierungseinrichtungen* : mit 50 Tab. - München [u.a.] : Hanser, 1984, ISBN: 3-446-14190-1
- [25] Friedman, Michael A. *Reliability of software intensive systems* / by Michael A. Friedman ; Phuong Y. Tran ; Peter L. Goddard. - Park Ridge, NJ : Noyes Data Corp., 1995, ISBN: 0-8155-1361-5
- [26] Jensen, Finn *Electronic component reliability : fundamentals, modelling, evaluation, and assurance* - Wiley, 1995, ISBN: 0-471-95296-6
- [27] Harold Ascher ; Feingold, Harry *Repairable systems reliability : modeling, inference misconceptions and their causes* - New York u.a. : Dekker, 1984, ISBN 0-8247-7276-8

-
- [28] Barlow, Richard E. *Engineering reliability* - Philadelphia, PA : Society for Industrial and Applied Mathematics; Alexandria, VA : American Statistical Association, 1998, ISBN: 0-89871-405-2
- [29] Beichelt, Frank *Zuverlässigkeits- und Instandhaltungstheorie* - Stuttgart : Teubner, 1993, ISBN: 3-519-02985-5
- [30] Dhillon, Balbir S. *Engineering reliability : new techniques and applications* / B. S. Dhillon ; Chanan Singh. - New York : Wiley, 1981, ISBN: 0-471-05014-8
- [31] Nelson, Wayne *Accelerated testing : statistical models, test plans, and data analyses* - Hoboken, N.J. : Wiley, 2004, ISBN: 0-471-69736-2
- [32] Goos, Gerhard; Zimmermann, Wolf *Algorithmentechnik* : Vorlesungsskript WS 1994/95 - Karlsruhe, 1994
- [33] Benker, Hans *Differentialgleichungen mit Mathcad und Matlab* / Hans Benker. - 1. Aufl.. - Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 2005, ISBN: 3-540-23440-3
- [34] Heuser, Harro *Gewöhnliche Differentialgleichungen : Einführung in Lehre und Gebrauch* ; Stuttgart : Teubner, 1989, ISBN: 3-519-02227-3
- [35] Kunick, Albrecht *Gewöhnliche Differentialgleichungen : mit Übungen und ausführlichen Lösungen* - Mannheim : BI-Wiss.-Verl., 1989, ISBN: 3-411-03193-X
- [36] Wirsching, Günther J. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*; B.G. Teubner, 2006 ; ISBN: 3519005158

Eigene Veröffentlichungen

Data Model for Integration of PDC and Diagnosis in Service-Applications

Autoren: T. Längle, A. Konnov, M. Guillaume, H. Wörn

Beitrag für CSIT 04 in Budapest

Service-Engineering in Productive Industry with the "PROSERV" Architecture

Autoren: M. Guillaume, A. Konnov, T. Längle, H. Wörn

Beitrag zum "International IMS Forum 2004"

Projektinformationen online für den Service

Frankfurt am Main, VDMA Verlag GmbH, 2005, ISBN 3-8163-0499-0

Lebenslauf

Alexei Konnov

geboren am 14. März 1975 in Ufa, Russland

Schulbildung

1982 - 1992 Phys.-Math. Schule, Ufa, Russland
Abschluss: Reifezeugnis mit Auszeichnung, Silbermedaille

Hochschulstudium

1992 - 1996 Informatik an der Staatliche Flugtechnische Universität Ufa
Abschluss: Bachelor der Technik und Technologien, Diplom

1996 - 1998 Informatik an der Staatliche Flugtechnische Universität Ufa
Thema der Examenarbeit: "Zuverlässigkeitsberechnung von inhomogenen technischen Systemen"
Abschluss: Magister der Technik und Technologien, Diplom mit Auszeichnung

1999 - 2001 Informatik an der Universität Karlsruhe
Thema der Examenarbeit: "Algorithmisierung und Implementation der Markov-Methode"
Abschluss: Zeugnis über das Aufbaustudium Informatik

seit Dez. 2004 Promotion an der Universität Karlsruhe
Thema der Dissertation: "Zuverlässigkeitsberechnung und vorbeugende Wartung von komplexen technischen Systemen mittels modifizierter Markov-Methode"

Beruf

seit Juni 2005 Doktorand bei der Siemens AG
Bereich Zuverlässigkeits- und Sicherheitsanalyse
Abteilung L-University, Reliability Consult