

Universität Karlsruhe (TH)

Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik  
Bd. 7

Pierre Barthels

**Zur Modellierung, dynamischen  
Simulation und Schwingungs-  
unterdrückung bei nichtglatten,  
zeitvarianten Balkensystemen**





Pierre Barthels

**Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungs-  
unterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen**

**Universität Karlsruhe (TH)**

**Schriftenreihe des Instituts für Technische Mechanik**

Band 7

# **Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungs- unterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen**

von  
Pierre Barthels



---

universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)  
Fakultät für Maschinenbau, 2007

## Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe  
c/o Universitätsbibliothek  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe  
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz  
lizenziert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de/>

Universitätsverlag Karlsruhe 2008  
Print on Demand

ISSN: 1614-3914  
ISBN: 978-3-86644-217-7





# Zur Modellierung, dynamischen Simulation und Schwingungsunterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten Balkensystemen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Ingenieurwissenschaften**

von der Fakultät für Maschinenbau  
der Universität Karlsruhe (TH),  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT),

genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Pierre Barthels**

aus Bourscheid / Luxembourg

Tag der mündlichen Prüfung:  
Hauptreferent:  
Korreferent:

20. November 2007  
Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Jörg Wauer  
Prof. Dr.-Ing. Rainer Bruns



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Jörg Wauer möchte ich herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit, die wissenschaftliche Förderung, die Übernahme des Hauptreferates und ganz besonders für das mir entgegengebrachte Vertrauen danken.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Rainer Bruns vom Lehrstuhl für Maschinenelemente und Technische Logistik der Helmut-Schmidt-Universität Hamburg danke ich für die Übernahme des Korreferates und das entgegengebrachte Interesse. Dem Vorsitzenden des Prüfungsausschusses, Herrn Prof. Dr.-Ing. Kai Furmans vom Institut für Fördertechnik und Logistiksysteme der Universität Karlsruhe (TH) gilt ebenfalls mein Dank.

Den Mitarbeitern und Kollegen am Institut für Technische Mechanik möchte ich für das angenehme Arbeitsklima danken. Herrn Dr.-Ing. Rainer Keppler, Herrn Dr.-Ing. Bernd Waltersberger und den Herren Diplomingenieuren Daniel Schwarzer, Christian Simonidis, Günther Stelzner und Christian Wetzel gilt mein besonderer Dank, da Ihre stete Diskussionsbereitschaft nicht nur die hier vorliegende Arbeit sondern insbesondere auch meine Zeit am ITM geprägt hat. Herrn Holger Scheurenbrand danke ich für die sehr effektive Zusammenarbeit. Die Ergebnisse der von ihm durchgeführten FEM-Berechnungen haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Den Herren Professoren Jean-Luc Bauchat und Hubert Mertz von der ENSAM Metz, Arnaud Sandel vom INSA Lyon, Martin Gabi und Wolfgang Seemann von der Universität Karlsruhe (TH) sowie Frau Isabelle Hornik danke ich für die gute Zusammenarbeit im deutsch-französischen Studiengang.

Meinen Eltern Claire und Roger sowie meinen beiden Schwestern Anne und Catherine danke ich von tiefstem Herzen für ihre fortwährende Unterstützung und den Rückhalt, auf den ich mich stets verlassen konnte. *Villmols Merci!*

Ebenfalls möchte ich mich bei meinem ständigen Weggefährten Hurricane bedanken, der mich vom ersten Tag an durch mein Studium und durch meine Promotion begleitet hat.

Heidelberg, im Januar 2008  
Pierre Barthels

*Fir meng Elteren, d'Claire an den Roger*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelsymbole</b>	<b>1</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1 Motivation der Arbeit . . . . .	5
1.2 Literaturübersicht . . . . .	6
1.3 Thema der Arbeit . . . . .	9
1.4 Gliederung der Arbeit . . . . .	11
<b>2 Modellbildung</b>	<b>13</b>
2.1 Physikalisches Modell . . . . .	13
2.2 Undehnbarkeit der Balkenlängsachsen . . . . .	15
2.3 Drehmatrizen . . . . .	17
2.4 Mathematische Formulierung . . . . .	18
2.4.1 Lagrangescher Verzerrungstensor . . . . .	18
2.4.2 Verschiebungsvektor eines beliebigen materiellen Balkenpunktes	20
2.4.3 Elastisches Potential . . . . .	23
2.4.4 Schwerepotential . . . . .	25
2.4.5 Kinetische Energie . . . . .	28
2.4.6 Virtuelle Arbeit . . . . .	30
2.4.7 Systemgleichungen . . . . .	31
2.5 Diskretisierung . . . . .	33
<b>3 Validierung des Modells</b>	<b>38</b>
3.1 Eigenfrequenzvergleich . . . . .	38
3.1.1 Freie Zielfahrt (FZ) . . . . .	38
3.1.2 Gesteuerte Zielfahrt (GZ) . . . . .	43
3.2 Einfluss der Exzentrizität der Ladeinheit . . . . .	46
3.3 Einfluss der Vorspannung . . . . .	50
3.4 Doppelte Eigenwerte . . . . .	51
<b>4 Aktive Schwingungsunterdrückung</b>	<b>53</b>
4.1 Freie Zielfahrt (FZ) . . . . .	53
4.1.1 Modellreduktion . . . . .	54
4.1.2 Schwingungsunterdrückung durch Zustandsregelung . . . . .	62
4.1.3 Linear-Quadratisch-Optimale Zustandsrückführung . . . . .	63
4.1.4 Luenberger Beobachter . . . . .	64
4.1.5 Instabilitäten durch Spillover . . . . .	67

4.1.6	Teleskopierbewegung und Spiel . . . . .	70
4.1.7	Simulationsergebnisse . . . . .	72
4.1.8	Störgrößenaufschaltung . . . . .	79
4.2	Gesteuerte Zielanfahrt (GZ) . . . . .	81
4.2.1	Schwingungsunterdrückung durch Zustandsregelung . . . . .	82
4.2.2	Direkte Polvorgabe . . . . .	84
4.2.3	Simulationsergebnisse . . . . .	84
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>89</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>91</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>93</b>

# Formelsymbole

## Lateinische Buchstaben

$A_{1,2}$	Querschnittsflächen
$\mathbf{A}$	Systemmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{A}_h$	Systemmatrix (hochfrequent)
$a_L$	Exzentrizität der Ladeinheit
$\mathbf{b}_R$	Systemeingangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{b}_{Rh}$	Systemeingangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{b}_R^*$	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}_R^{**}$	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}_{Rh}^{**}$	reduzierte Systemeingangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{b}_{Rr}^{**}$	reduzierte Systemeingangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{b}_T$	Systemeingangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{b}_{Th}$	Systemeingangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{b}_T^*$	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}_T^{**}$	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}_{Th}^{**}$	reduzierte Systemeingangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{b}_{Tr}^{**}$	reduzierte Systemeingangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{b}_0$	Systemeingangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{b}_{0h}$	Systemeingangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{b}_0^*$	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}_0^{**}$	Systemeingangsmatrix
$\mathbf{b}_{0h}^{**}$	reduzierte Systemeingangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{b}_{0r}^{**}$	reduzierte Systemeingangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{C}$	Steifigkeitsmatrix
$c$	Federsteifigkeit (Kontakt)
$\mathbf{c}_M$	Systemausgangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{c}_{Mh}$	Systemausgangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{c}_M^*$	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}_M^{**}$	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}_{Mh}^{**}$	reduzierte Systemausgangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{c}_{Mr}^{**}$	reduzierte Systemausgangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{c}_R$	Systemausgangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{c}_{Rh}$	Systemausgangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{c}_R^*$	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}_R^{**}$	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}_{Rh}^{**}$	reduzierte Systemausgangsmatrix (hochfrequent)

$\mathbf{c}_{Rr}^{**}$	reduzierte Systemausgangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{c}_T$	Systemausgangsmatrix (tieffrequent)
$\mathbf{c}_{Th}$	Systemausgangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{c}_T^*$	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}_T^{**}$	Systemausgangsmatrix
$\mathbf{c}_{Th}^{**}$	reduzierte Systemausgangsmatrix (hochfrequent)
$\mathbf{c}_{Tr}^{**}$	reduzierte Systemausgangsmatrix (tieffrequent)
$d$	Dämpferkonstante (Kontakt)
$d_R$	Durchgriffsterm
$d_T$	Durchgriffsterm
$d_0$	Durchgriffsterm
$E$	Elastizitätsmodul
${}^{1,2}\vec{e}_k$	Einheitsvektoren eines körperfesten, kartesischen Koordinatensystems
$F_{K,i}$	Kontaktkräfte
$F_R$	Aktorkraft
$F_{Rr}$	Aktorkraft
$F_{Rs}$	Aktorkraft durch Störgrößenaufschaltung
$F_T$	Antriebskraft
$G$	Schubmodul
$G(s)$	Übertragungsfunktion
$g$	Erdbeschleunigung
$h(t)$	Sprungantwort von $G(s)$ im Zeitbereich
${}^{1,2}\vec{h}_k$	Einheitsvektoren eines körperfesten, kartesischen Koordinatensystems
$I_{1,2}$	Flächenmomente 2. Grades
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\vec{i}_k$	Einheitsvektoren eines raumfesten, kartesischen Koordinatensystems
$k$	skalärer Gewichtungsparmeter
$\mathbf{k}$	Rückführmatrix des Beobachters
$l$	Balkenlänge
$l_A(t)$	Ausfahrlänge des oberen Segmentes
$l_L(t)$	Ausfahrlänge der Ladeinheit
$l_M$	Sensorposition
$l_R$	Aktorposition (Sensorposition)
$l_S$	Spiel zwischen den beiden Segmenten
$l_T(t)$	gesamte Ausfahrlänge
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$m_{kl}$	Richtungskosinus
$m_L$	Masse der Ladeinheit
$m_T$	Masse des Trägerfahrzeuges
$m_1$	Masse von Balken 1
$m_2$	Masse von Balken 2
$N_h$	Anzahl der hochfrequenten Moden
$N_r$	Anzahl der tieffrequenten Moden
$N_1$	Anzahl der Ansatzfunktionen für Balken 1
$N_2$	Anzahl der Ansatzfunktionen für Balken 2
$n$	Anzahl der Kontaktpunkte
$n_e$	Vielfachheit von Eigenwerten

$\mathbf{n}$	Gewichtungsmatrix
$\mathbf{P}$	Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung
$\mathbf{Q}$	Gewichtungsmatrix
$q_k(t)$	zeitabhängige Koeffizienten
$\mathbf{q}$	Koordinatenmatrix (freie Zielfahrt)
$\mathbf{q}_l$	Koordinatenmatrix (freie Zielfahrt)
$\mathbf{q}_0$	statische Ruhelage (freie Zielfahrt)
$\tilde{\mathbf{q}}$	Koordinatenmatrix (gesteuerte Zielfahrt)
$\tilde{\mathbf{q}}_l$	Koordinatenmatrix (gesteuerte Zielfahrt)
$\tilde{\mathbf{q}}_0$	statische Ruhelage (gesteuerte Zielfahrt)
$R(s)$	Übertragungsfunktion
$\mathbf{r}$	Reglermatrix
$\vec{r}_{1,2}(z'_{1,2})$	Punkte auf den Balkenzentrallinien
$T$	kinetische Energie
$T_e$	Zeitkonstante
$T_L$	kinetische Energie der Ladeinheit
$T_T$	kinetische Energie des Trägerfahrzeuges
$T_1$	kinetische Energie von Balken 1
$T_2$	kinetische Energie von Balken 2
$\mathbf{T}$	Richtungskosinusmatrix
$t_e$	beliebig wählbarer Zeitpunkt
${}^{1,2}\vec{t}_k$	Einheitsvektoren eines körperfesten, kartesischen Koordinatensystems
$U_{1,2,i}(z_{1,2})$	Ansatzfunktionen
$u_{M_0}$	statische Ruhelage
$u_{R_0}$	statische Ruhelage
$u_S$	Sensorrauschen
$u_0(t)$	horizontale Verschiebung des Trägerfahrzeuges
$u_{1,2}(z_{1,2}, t)$	horizontale Verschiebungen (Balkenzentrallinien)
$\bar{u}_{1,2}(z_{1,2}, t)$	Näherungslösungen für $u_{1,2}(z_{1,2}, t)$
$u_i^*$	Abstand zwischen den beiden Segmenten im Kontaktpunkt $i$
$\mathbf{u}_{1,2}$	Koordinatenmatrix von $\vec{u}_{1,2}$
$\vec{u}_{1,2}$	Verschiebung eines materiellen Balkenpunktes
$V$	potentielle Energie
$V_E$	elastisches Potential
$V'_E$	auf ein Volumenelement bezogenes elastisches Potential
$V_S$	Schwerepotential
$V_{SL}$	Schwerepotential der Ladeinheit
$V_{S1}$	Schwerepotential von Balken 1
$V_{S2}$	Schwerepotential von Balken 2
$v_R$	Vorfilter
$W_{virt}$	virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte
$w_{1,2}(z_{1,2}, t)$	vertikale Verschiebungen (Balkenzentrallinien)
$\vec{x}_{1,2}$	Ort eines materiellen Balkenpunktes im Ausgangszustand
$\mathbf{y}$	Koordinatenmatrix (modale Koordinaten)
$\mathbf{y}_h$	reduzierte Koordinatenmatrix (hochfrequente modale Koordinaten)
$\mathbf{y}_r$	reduzierte Koordinatenmatrix (tieffrequente modale Koordinaten)
$z_{1,2}$	Bogenlängen der Balkenzentrallinien im Ausgangszustand

$z'_{1,2}$	Bogenlängen der Balkenzentrallinien im verformten Zustand
$\mathbf{z}$	Koordinatenmatrix (tieffrequente Zustandskoordinaten)
$\mathbf{z}_h$	Koordinatenmatrix (hochfrequente Zustandskoordinaten)
$\mathbf{z}_0$	Anfangswerte (Zustandskoordinaten)
$\hat{\mathbf{z}}$	rekonstruierte Koordinatenmatrix (Zustandskoordinaten)

## Griechische Buchstaben

$\alpha_{1,2}(z_{1,2}, t)$	Verdrehungen der Balkenquerschnitte
$\bar{\alpha}_{1,2}(z_{1,2}, t)$	Näherungslösungen für $\alpha_{1,2}(z_{1,2}, t)$
$\delta(\cdot)$	Diracsche Impulsfunktion
$\delta_{kl}$	Kronecker-Symbol
$\varepsilon_e$	relative Abweichung zu vorgegebenem Endwert zum Zeitpunkt $t = t_e$
$\varepsilon_{jk}$	Koordinaten des Lagrangeschen oder Greenschen Verzerrungstensors
$\varepsilon$	Koordinatenmatrix des Lagrangeschen Verzerrungstensors
$\eta_{jk}$	Koordinaten des Eulerschen oder Almansischen Verzerrungstensors
$\Theta$	Modalmatrix
$\Theta_r$	reduzierte Modalmatrix
$\theta_i$	Eigenvektoren
$\kappa$	skalärer Gewichtungparameter
$\kappa^*$	skalärer Gewichtungparameter
$\kappa^{**}$	skalärer Gewichtungparameter
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\vec{\xi}_L$	Ort der Ladeinheit im verformten Zustand
$\vec{\xi}_{1,2}$	Ort eines materiellen Balkenpunktes im verformten Zustand
$\rho$	Materialdichte
$\sigma(\cdot)$	Sprungfunktion
$\sigma_{ij}$	Koordinaten des Spannungstensors
$\Phi_{1,2,i}(z_{1,2})$	Ansatzfunktionen
$\Omega$	Diagonalmatrix der Eigenwerte des Systems
$\Omega_h$	Diagonalmatrix der hohen Eigenwerte des Systems
$\Omega_r$	Diagonalmatrix der tiefen Eigenwerte des Systems
$\omega_i$	Eigenkreisfrequenzen

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Modellierung, der dynamischen Simulation und der Schwingungsunterdrückung bei nichtglatten, zeitvarianten Systemen elastischer Balken mit nichtlinearer Verformungsgeometrie. Die Arbeit ist durch Problemstellungen motiviert, die im Rahmen der Arbeiten am DFG-Projekt 160/15-1 "Elastokinetische Modellierung mehrfach gestufter, teleskopierbarer, spielbehafteter, fördertechnischer Maschinenelemente und Untersuchung ihres dynamischen Verhaltens" entstanden sind. Dieses Projekt wurde als Gemeinschaftsantrag des Instituts für Technische Mechanik und des Instituts für Fördertechnik und Logistiksysteme, beides Institute der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe, zwischen dem 01.01.2003 und dem 30.04.2005 bearbeitet. Untersucht wurden spielbehaftete, teleskopierbare Systeme, wie man sie z.B. bei Hubgerüsten von Flurförderzeugen, Stapelkränen oder Teleskopgabeln von Regalbediengeräten findet. Durch die Hauptaufgabe dieser Maschinen, das Be- und Entladen von Lagerfächern, kommt es zu zahlreichen Beschleunigungsvorgängen die, zusammen mit der überlagerten Teleskopierbewegung der einzelnen Mastsegmente und der üblicherweise exzentrisch angebrachten Ladeinheit, zu Schwingungen führen. Notwendige Ausschwingzeiten vor dem Be- oder Entladen der Lagerfächer führen zu einer Reduzierung der Leistungsfähigkeit der Maschinen und ein mögliches Herabfallen der Ladeinheiten stellt ein Sicherheitsproblem dar. Um die Wirtschaftlichkeit der Maschinen durch eine Verkürzung der Ausschwingzeiten zu verbessern und um die Sicherheit zu erhöhen, muss ein Konzept zur Schwingungsvermeidung oder zur Schwingungsunterdrückung erarbeitet werden. Das Vermeiden von Schwingungen ist durch passive Maßnahmen, wie z.B. eine Reduktion der Masse der zu transportierenden Ladeinheiten, eine "langsamere" Zielfahrt oder durch eine stärkere Profildimensionierung möglich. Die ersten beiden Maßnahmen stehen in direktem Konflikt zu einer höheren Wirtschaftlichkeit und eine Vergrößerung der Profilquerschnitte führt zu einem schlechten Verhältnis zwischen Nutzlast und Eigengewicht und somit zu höheren Betriebskosten. Der Wunsch nach Leichtbauweise und gleichzeitiger Schwingungsreduzierung macht den Einsatz aktiver Systeme notwendig, bei denen geregelte Aktoren und Sensoren in das mechanische System integriert werden.

## 1.2 Literaturübersicht

Zum Schwingungsverhalten fördertechnischer Maschinen existieren zahlreiche Vorarbeiten. Im Bereich der Gabelstapler macht bereits Kemme 1974 experimentelle und rechnergestützte Untersuchungen zur statischen und dynamischen Beanspruchung von Hubgerüsten [35], wobei bei der theoretischen Betrachtung die Vertikalbewegung der Last berücksichtigt wird. Kemme kommt zu dem Ergebnis, dass als größte Beanspruchung die Biegebeanspruchung in Fahrtrichtung auftritt. Maische [43] untersucht 1980 und gemeinsam mit Beisteiner [10] 1981 die Biege- und Torsionsbeanspruchung von Mastrahmenprofilen, mit analytischen Ansätzen für Schnittlasten und Spannungen. 1987 werden von Beisteiner und von Beha umfangreiche experimentelle Untersuchungen an Staplern durchgeführt und für typische Bewegungszustände Schwingbeiwerte, d.h. Verhältnisse der dynamischen zur statischen Last, angegeben [9]. Diese Schwingbeiwerte können von Beha 1989 in [7] und 1990 in [8] durch Berechnungsergebnisse bestätigt werden. Hierzu werden Simulationen an einem ebenen Mehrkörpermodell mit symmetrischem Geräteaufbau durchgeführt. Das Spiel in den Führungen wird dabei vernachlässigt. Ebenfalls 1990 nutzt Huang die Finite Elemente Methode (FEM) zur Dimensionierung von Hubgerüsten [32]. 1993 stellen Beisteiner, Messerschmidt und Hesse in [11] ein Verfahren zur Finite Elemente Modellierung aus bestehenden CAD Daten vor, bei dem das Hubgerüst durch eine Struktur aus Balken und Stäben ersetzt wird und 1998 stellt Messerschmidt in [46] weiterführende Untersuchungen zur Dimensionierung von Hubgerüsten vor. Bruns befasst sich 1994 in [18] mit passiven Maßnahmen zur Reduzierung der Hubgerüstschwingungen eines Schubmaststaplers. Hierzu wird ein Feder-Dämpfer-System in den Verschiebemechanismus des Staplerhubgerüstes implementiert. In seiner Arbeit von 2002 [74] stellt Witala detaillierte Modelle eines Schmalgangstaplers vor, wobei sowohl die Finite Elemente Methode als auch Methoden der Mehrkörpersimulation (MKS) genutzt werden. Bei diesen Modellen werden Nichtlinearitäten durch das Spiel in den Mastführungen und Reibungseinflüsse berücksichtigt. Auch Mittwollen untersucht 2006 die Schwingungseigenschaften eines Gabelstapler-Hubgerüstes [48]. Neben experimentellen Untersuchungen werden Simulationen an einem ebenen Fünfmassenschwinger und einem Zweimassenschwinger durchgeführt, um das Verhalten des Hubgerüstes bei einer vorgegebenen, konstanten Ausfahrlänge zu beschreiben. Auch hier wird Spiel in einem der beiden Kontaktpunkte der zwei Segmente des Hubgerüstes berücksichtigt. Ebenfalls im Jahr 2006 untersucht Schmalzl den Zusammenhang von Bodenunebenheiten und dem Schwingungsverhalten eines Schmalgangstaplers [58]. Die Modellierung erfolgt hier in dem kommerziellen Softwarepaket MSC.ADAMS. Die flexiblen Körper werden in dem ebenfalls kommerziellen Softwarepaket I-deas modelliert, modal reduziert und nach ADAMS exportiert. Auf diesem Weg entsteht ein Hybridmodell, bei dem auch das Spiel zwischen den einzelnen Segmenten des Hubgerüstes berücksichtigt wird. Auch bei dieser Arbeit ist die Ausfahrlänge vorgegeben und konstant. Die Arbeiten von Shibli [63] aus dem Jahr 1985 und Bruns [19] aus dem Jahr 2002 befassen sich mit der Kippsicherheit bei Gabelstaplern.

Im Bereich der Regalbediengeräte macht Heptner [30] 1970 rechnergestützte Untersuchungen an einem Zweimassenschwinger und führt zur Schwingungsunterdrückung Dämpferelemente am Mastkopf ein. Bitsch [14], Peters [53] und Schumacher [59] un-

tersuchen in den Jahren 1981, 1983 und 1994 den positiven Einfluss speziell gestalteter Beschleunigungsprofile auf die Anregung von Mastschwingungen. Bitsch ermittelt ein "cosinusverschliffenes" Beschleunigungsprofil als ideale Fahrkurve und nach Schumacher werden bei richtig gewählten Umschlagzeiten bei einem trapezförmigen Beschleunigungsprofil keine Schwingungen angeregt. Oser, Reisinger und Vössner kommen 1995 in [51] durch ein Optimierungsverfahren für das Beschleunigungsprofil zum gleichen Ergebnis wie Schumacher. Bopp [16] untersucht im Jahr 1993 das Biegelängsschwingungsverhalten von Regalbediengeräten an einem FEM-Modell. 1999 untersucht Dietzel [23] unterschiedliche Regelungsstrategien zur Schwingungsreduzierung an einem Zweimassenschwinger, wobei die Zustandsregelung die besten Ergebnisse liefert. Kühn [36] modelliert 2001 ein Mehrkörpersystem mit sechs Freiheitsgraden zur Simulation von Regalbediengeräten und bestimmt Schwingbeiwerte anhand von Einmassenschwingern.

Die Vorarbeiten zu der vorliegenden Problematik lassen ein Hauptmerkmal, das sich gegeneinander Verschieben der einzelnen Segmente, also die Teleskopierbewegung, außer Acht und auch der Einfluss des Spiels in den Kontaktbereichen zwischen den einzelnen Segmenten wird nicht in allen Arbeiten berücksichtigt. Gerade die Teleskopierbewegung ist aber, neben den Beschleunigungsvorgängen des Trägerfahrzeuges, ausschlaggebend für die entstehenden Schwingungen und durch die starke Abhängigkeit des Systemverhaltens von der Ausfahrlänge ist es notwendig, dieses zeitvariante Verhalten bei der Entwicklung eines Berechnungsmodells zu berücksichtigen. Die in den Kontaktbereichen durch das immer vorhandene Spiel auftretenden Stöße regen hochfrequente Schwingungen an. Ein Berechnungsmodell muss diese Schwingungen abbilden können, um deren störenden Einfluss auf eine aktiv geregelte Schwingungsunterdrückung untersuchen zu können. Auch für die Untersuchung von Spillover-Effekten, also das Aufklingen nicht geregelter Moden durch die Einwirkung einer aktiven Regelung auf ein System, muss ein Berechnungsmodell das reale System in einem ausreichend großen Frequenzbereich beschreiben können.

Drei unterschiedliche Modellierungsmethoden kommen bei den Vorarbeiten zu dem hier behandelten Thema zum Einsatz. Die am meisten genutzte Methode besteht darin, die flexiblen Maschinensegmente durch starre Körper zu diskretisieren, die über Drehgelenke und Drehfedern miteinander verbunden sind. Die Forderung nach Abdeckung eines möglichst großen Frequenzbereichs durch das Modell führt bei dieser physikalischen Diskretisierung zwangsläufig zu einem Mehrkörpersystem mit einer Vielzahl an Freiheitsgraden. Probleme entstehen bei der Kontaktformulierung, insbesondere während der Teleskopiervorgänge. Durch die Aufspaltung der flexiblen Segmente in starre Körper beziehen sich die Kontaktformulierungen (mit und ohne Spiel) jeweils auf zwei "gegenüberliegende" starre Körper, welche zu unterschiedlichen Segmenten gehören. Durch das Teleskopieren verschieben sich diese Körper relativ zueinander, wodurch die Kontaktpaare wechseln. Dieser Wechsel der Kontaktpaare führt zu aufwendigen Kontaktformulierungen mit Umschaltbedingungen, welche einen realen, kontinuierlichen Teleskopiervorgang nur bedingt abbilden können. Fujita, Shiona, Koike und Koseki [27] nutzen diese Vorgehensweise im Jahr 2003 zur Modellierung eines Leiterfahrzeuges mit teleskopierbarer Leiter, die aus zwei Segmenten besteht. Beide Segmente werden durch eine Unterteilung in jeweils 20 starre Körper diskretisiert und die Bewegungsgleichungen werden als DAEs (Differential Algebraic Equations) formuliert. Bei der

numerischen Simulation von Teleskopiervorgängen wird das vorgesehene Spiel zu null gesetzt, um die numerischen Berechnungen zu vereinfachen und zu stabilisieren [27, S.5]. Auch Witala berichtet von numerischen Problemen durch die Kontaktformulierung bei der Berechnung mit Mehrkörpersystemen [74, S.112] und nach Schmalzl ist die Modellierung flexibler Körper als diskretes Mehrkörpermodell "für eine effiziente Untersuchung nicht empfehlenswert" [58, S.49].

Eine weitere, häufig verwendete Vorgehensweise ist die Modellierung unter Zuhilfenahme kommerzieller FEM-Software. Die Finite Elemente Methode erlaubt eine sehr detaillierte Modellierung der elastischen Strukturen. Dynamische Berechnungen mit großen Verschiebungen und Kontaktformulierungen zwischen einzelnen flexiblen Körpern führen jedoch zu sehr langen Rechenzeiten [74, S.112]. Des Weiteren sind nach Weiß [73, S.2 und 31-33] Anfangs-Randwert-Probleme mit nichtmateriellen Rand- bzw. Übergangsbedingungen, wie sie durch das Teleskopieren bei der hier vorliegenden Problematik auftreten, nicht oder nur unzureichend mit Standard-Software wie ANSYS zu bearbeiten (siehe hierzu auch [37], [12] und [52]).

Die dritte Methode besteht aus der Kombination kommerzieller FEM-Software mit kommerzieller MKS-Software. Durch eine Reduktion der Freiheitsgrade der flexiblen Körper erreicht man bei solchen Hybridmodellen deutlich kürzere Rechenzeiten als bei direkten FEM-Berechnungen. In einer Arbeit aus dem Jahr 2000 [2] wird von Ambrogio, Braccisi und Cianetti ein Verfahren vorgestellt, welches die Simulation der Bewegung eines Körpers entlang eines flexiblen Körpers in ADAMS ermöglicht und somit von Nutzen sein kann, um das von Schmalzl entwickelte Modell [58] auf dynamisches Teleskopieren zu erweitern. Auch Beuse, Lutz, Nösner, Wöhrmann, Zeischka und Zimmermann behandeln in ihrer Arbeit aus dem Jahr 2004 [13] den Kontakt zwischen flexiblen Körpern in ADAMS am Beispiel eines Federbeins. Ein Zugriff auf die Systemgleichungen ist bei diesen Modellen allerdings nicht gegeben [58, S.103], wodurch die Auslegung von Reglern zur Schwingungsunterdrückung nach bewährten Regelungsstrategien nicht möglich ist.

Neben diesen Methoden finden sich in der Literatur interessante Ansätze für die vorliegende Problematik, deren Anwendungen sich nicht auf Problemstellungen der Förder-technik beziehen, sondern größtenteils in der Robotik, in der Raumfahrt oder z.B auch in der Meerestechnik eingesetzt werden. So untersuchen schon 1978 Lips und Modi [39] den Einfluss der Ausfahrbewegung flexibler Aufbauten auf die Taumelbewegung von Satelliten und aus dem Jahr 1991 stammt von Kalaycioglu und Misra [33] eine analytische Näherungslösung für Schwingungen, die beim Ausfahren flexibler Aufbauten von Raumfahrzeugen entstehen. Mote untersucht schon 1965 [49] das dynamische Verhalten von Bandsägen und 1990 zusammen mit Yang [78] Möglichkeiten zur aktiven Schwingungsunterdrückung bei Bandsägen. 1975 untersuchen Book, Maizza-Netto und Whitney [15] eine aktive Regelung von Roboterarmen mit zwei Drehgelenken. Die Regelung wird für ein Starrkörpermodell ausgelegt und an einem flexiblen Modell, bei dem die beiden Segmente des Armes als Bernoulli-Balken modelliert werden, auf ihre Leistungsfähigkeit überprüft. 1979 schlagen Dubowsky und Des Forges [24] eine adaptive Regelung für Roboterarme vor, deren Systemverhalten von dem zu bearbeitenden Objekt abhängt und auf Grund großer räumlicher Bewegungen nichtlinear ist. Zwischen

1986 und 1998 untersuchen Chalhoub und Ulsoy in [20], Wang und Wei in [70] und [71], Al-Bedoor und Khulief in [1], Matsuzaki, Taki und Toyama in [44] und Zhang, Matsuo, Morita und Yamakawa in [79] und in [80] die Dynamik eines flexiblen Balkens, welcher über ein Schubgelenk mit einer starren Führung verbunden ist. 1988 befassen sich Riemer und Wauer in [55] und in [56] mit der Behandlung von Schubgelenken in Mehrkörpersystemen mit verformbaren Teilstrukturen. Die Dynamik von zwei, über ein Schubgelenk gegeneinander gelagerten, flexiblen Balken wird 1991 von Azhdari, Chalhoub und Gordaninejad in [4] und 1993 von Amos und Qu in [3] behandelt. Chen, Delfour, Krall und Payre [21] untersuchen im Jahr 1987 zu einer Kette verbundene Euler-Bernoulli-Balken, wobei durch eine aktive Regelung über ein an einem Ende der Kette angebrachtes Aktor-Sensor Paar, auftretende Schwingungen unterdrückt werden. Zwischen 1996 und 1999 befassen sich Söffker und Müller in [60], [61] und [62] mit der Modellierung und der Regelung längenvariabler elastischer Roboterarme. Das Auftreten von Spiel zwischen den einzelnen Segmenten und dadurch auch die Auswirkung von Kontaktstößen auf den geschlossenen Regelkreis wird in diesen Arbeiten vernachlässigt. 2001 stellt Fard [25] unterschiedliche, zum Teil nichtlineare Balkenmodelle und Regelungsansätze zur aktiven Schwingungsunterdrückung vor. Meyer [47] simuliert im Jahr 2002 die aeroelastische Wechselwirkungen von Windkraftanlagen, wobei der Turm und die Rotorblätter als geometrisch nichtlineare Balken modelliert werden. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der projektionsbasierten Modellreduktion zur Steigerung der Effizienz von Langzeitsimulationen. 2003 stellen Maczynski und Wojciech [42] ein flexibles, dreidimensionales Modell eines Drehkrans vor. Für ein vereinfachtes, starres Modell werden über ein Optimierungsverfahren Standardbewegungen bestimmt, bei denen minimale Schwingungen beim Positionieren auftreten. Diese Bewegungen werden dem flexiblen Modell aufgeprägt und über einen PID-Regler werden die hierdurch und durch äußere Störungen auftretenden Schwingungen im Schwenkarm gedämpft. Torrez-Torres [67] untersucht im Jahr 2003 die automatisierte Positionierung und gleichzeitige Unterdrückung von Torsions-Biegeschwingungen bei Bestückungsmaschinen. Über eine experimentelle Modalanalyse wird ein Modell 5. Ordnung und ein Modell 7. Ordnung erstellt und zur Schwingungsunterdrückung wird eine gesteuert adaptive Zustandsregelung vorgeschlagen. Liu [40] befasst sich im Jahr 2005 mit der aktiven Schwingungsunterdrückung bei flexiblen Platten.

Während bei den hier vorgestellten Arbeiten das mechanische Modell im Vordergrund steht, gehen Arbeiten die sich vermehrt mit der Regelung der betrachteten Systeme beschäftigen (siehe z.B. [66]) selten von komplexen mechanischen Strukturen aus. Arbeiten, die sich mit aktiver Schwingungsunterdrückung befassen und bei der Modellbildung sowohl die dynamische Ausfahrbewegung der einzelnen flexiblen Segmente als auch das Spiel in den Kontaktbereichen berücksichtigen, sind nicht bekannt.

### 1.3 Thema der Arbeit

Zur Steigerung der Leistungsfähigkeit und der Sicherheit spielbehafteter Systeme elastischer Balken, bei denen sich die einzelnen Segmente nach einer vorgegebenen Funktion der Zeit relativ zueinander verschieben können, wird anhand eines Berechnungsmodells eine aktive Regelung zur Unterdrückung der im Betrieb auftretenden Schwin-

gungen entwickelt. Durch die variable Geometrie, und dem damit verbundenen zeitvarianten Verhalten der betrachteten Systeme, muss die Schwingungsunterdrückung über eine adaptive Regelung erfolgen. Um bewährte Regelungsstrategien nutzen zu können, muss ein direkter Zugriff auf die Systemgleichungen gegeben sein, und das Modell muss auf seine wesentlichen Eigenschaften reduziert werden können. Der entwickelte Regler soll dann durch dynamische Berechnungen auf seine Leistungsfähigkeit im Betrieb untersucht werden. Hierfür muss das Modell das reale System in einem möglichst großen Frequenzbereich abbilden können, um sowohl die Auswirkung der durch das Spiel bedingten Stöße in den Kontaktbereichen, als auch das Auftreten von möglichen Spillover-Effekten durch die aktive Regelung, untersuchen zu können. Die Auswirkung der dynamischen, relativen Verschiebungen der einzelnen Segmente zueinander muss von dem Modell abgebildet werden können, um eine zuverlässige Beschreibung der realen Maschine zu garantieren.

Durch diese komplexe Problemstellung werden in der vorliegenden Arbeit Methoden der Kontinuumsmechanik zur Modellierung eingesetzt, die, wie aus der Literaturübersicht ersichtlich wird, insbesondere auf dem Gebiet der fördertechnischen Maschinen bisher nur wenig genutzt wurden. Aus Sicht der Mechanik handelt es sich bei der vorliegenden Problematik um nichtlineare Feldprobleme mit variabler Geometrie der betreffenden Festkörpersysteme. Materielle Begrenzungen einzelner Komponenten verschieben sich entlang der Begrenzung anderer Bauteile und definieren so komplizierte, nichtmaterielle Rand- bzw. Übergangsbedingungen. Das erwähnte Spiel führt zu nichtlinearen Effekten. Je nach anwendungsbedingter Ausrichtung im Schwerfeld der Erde können die unterschiedlichen Maschinensegmente durch ihr Eigengewicht und durch das Gewicht der zu transportierenden Last vorgespannt sein.

Basierend auf einem physikalischen Modell werden über das Prinzip von Hamilton die zugehörigen Systemgleichungen hergeleitet. Für die einzelnen Segmente wird eine geometrisch-nichtlineare Formulierung gewählt, damit auch große Verformungen gut abgebildet werden können. Die diskreten Punktkontakte zwischen den Segmenten werden als einseitige Feder-Dämpferelemente modelliert. Eine Diskretisierung führt auf ein gekoppeltes, nichtlineares, zeitvariantes System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das die Grundlage für den Entwurf einer Zustandsregelung zur aktiven Schwingungsunterdrückung bildet.

Als Anwendungsbeispiel wird in der vorliegenden Arbeit ein Gabelstapler gewählt, wie er in Abbildung 2.1 dargestellt ist. Da hier eine Bedienperson die Positionierung der Ladeinheit übernimmt, wird die Bewegung des Trägerfahrzeuges als beliebige aber vorgegebene Funktion der Zeit angesehen. Zur aktiven Schwingungsunterdrückung wird ein geregeltes Aktor-Sensor Paar in das System integriert. Im Gegensatz zu dieser sogenannten "freien Zielfahrt" sind bei einer "gesteuerten Zielfahrt" nur die Anfangs- und die Endlage bekannt. Sowohl die Positionierung, also die Starrkörperbewegung, als auch die Schwingungsunterdrückung erfolgen dann durch eine Antriebsregelung. Beide Arten der Zielfahrt werden in der vorliegenden Arbeit behandelt.

## 1.4 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel. Das in die Thematik einleitende Kapitel 1 erläutert den Ausgangspunkt und die Motivation der Arbeit und beschreibt über eine Literaturübersicht den aktuellen Stand der Forschung auf dem betrachteten Gebiet. Auf dieser Basis werden die zu untersuchenden Themenbereiche und somit der Inhalt dieser Arbeit definiert.

Das Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Modellbildung. Als Anwendungsbeispiel dient ein auf die wesentlichen Merkmale eines Gabelstaplers reduziertes System. Die zur Beschreibung des Modells notwendigen Geometrie- und Materialparameter werden bestimmt und zur Beschreibung der Freiheitsgrade des Systems werden Lage- und Orientierungsgrößen über hierzu eingeführte Koordinatensysteme definiert. Zur Beschreibung der Kinematik der verwendeten Balkenmodelle werden notwendige Hypothesen getroffen. Die mathematische Formulierung des Problems erfolgt über das Prinzip von Hamilton. Das hierfür zu formulierende elastische Potential basiert auf dem durch den Lagrangeschen Verzerrungstensor gegebenen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen und dem durch das verallgemeinerte Hookesche Gesetz beschriebenen Materialverhalten. Das Schwerepotential, die kinetische Energie und die virtuelle Arbeit der am Trägerfahrzeug wirkenden Antriebskraft, der geregelten Aktorkraft und der über einseitige Feder-Dämpferelemente modellierten Kontaktkräfte werden bestimmt. Die Ausdrücke für das Potential, die kinetische Energie und die virtuelle Arbeit werden in kubischer Näherung in eine Reihe entwickelt und in das Prinzip von Hamilton eingesetzt. Die anschließende Variation führt zu den gesuchten, bis zur 2. Ordnung konsistenten Systemgleichungen. Die Diskretisierung der partiellen Differentialgleichungen erfolgt über Reihenansätze, wobei als Ansatzfunktionen die Eigenformen entsprechend gelagerter Timoshenko-Balken genutzt werden. Bedingt durch das gewählte Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Fördertechnik wird zwischen zwei Arten der Zielfahrt unterschieden, die zu zwei unterschiedlichen Systemen von Bewegungsgleichungen führen. Bei der "freien Zielfahrt" wird die Positionierung der zu transportierenden Ladeinheit durch eine Bedienperson übernommen, wodurch die Bewegung des Trägerfahrzeuges eine beliebige aber vorgegebene Funktion der Zeit ist. Bei der "gesteuerten Zielfahrt" hingegen stellt die Verschiebung des Trägerfahrzeuges einen zusätzlichen Freiheitsgrad dar.

Das 3. Kapitel beschäftigt sich mit der Validierung der im Kapitel 2 hergeleiteten Systemgleichungen. Sowohl für die "freie Zielfahrt" als auch für die "gesteuerte Zielfahrt" werden die Eigenfrequenzen des um die Ruhelage linearisierten Systems mit Werten aus entsprechenden FEM-Berechnungen verglichen. Zusätzlich wird der Einfluss der Exzentrizität der Ladeinheit und die Auswirkung der Vorspannung durch die Schwerkraft auf die erzielten Berechnungsergebnisse auf Plausibilität überprüft, und das Auftreten doppelter Eigenwerte wird untersucht.

Im Kapitel 4 werden Methoden zur Schwingungsunterdrückung untersucht, mit denen das dynamische Verhalten der betrachteten Systeme aktiv beeinflusst werden kann. Bei der "freien Zielfahrt", bei der eine Bedienperson die Bewegung des Trägerfahrzeuges vorgibt, wird ein geregeltes Aktor-Sensor Paar zwischen dem untersten Segment

und dem Trägerfahrzeug angebracht. Für die "gesteuerte Zielanfahrt" erfolgen sowohl die Positionierung als auch die Schwingungsunterdrückung durch eine Antriebsregelung. Zur aktiven Beeinflussung des Systems wird eine Zustandsregelung eingeführt, deren Auslegung an einem reduzierten Modell erfolgt, bei dem die modalen Massen hochfrequenter Moden gegenüber den modalen Steifigkeiten vernachlässigt werden. Die Einstellung der Regelung erfolgt für die "freie Zielanfahrt" über die Methode der Linear-Quadratisch-Optimalen Zustandsrückführung und für die "gesteuerte Zielanfahrt" durch direkte Polvorgabe über ein dominantes Polpaar mit aperiodischem Verhalten. Die Gefahr von Spillover-Instabilitäten wird diskutiert und zur Rekonstruktion des nicht direkt messbaren Zustandsvektors wird ein Luenberger-Beobachter genutzt. Aufgrund des zeitvarianten Verhaltens der betrachteten Systeme wird ein gesteuert adaptiver Regler und ein gesteuert adaptiver Beobachter eingeführt, und es wird der Einfluss des zeitvarianten Verhaltens der zu regelnden Strecke auf die Beobachtbarkeit und auf die Steuerbarkeit untersucht. Der an einem linearen und reduzierten System entwickelte, gesteuert adaptive Regler wird dann auf das deutlich kompliziertere, nicht-lineare und zeitvariante System angewandt. Der Einfluss des immer vorhandenen Spiels und der dynamischen Teleskopiervorgänge auf die aktive Schwingungsunterdrückung wird sowohl für die "freie Zielanfahrt" als auch für die "gesteuerte Zielanfahrt" durch numerische Simulationen eines realen Positioniervorgangs untersucht. Für die "freie Zielanfahrt" wird zusätzlich eine Störgrößenaufschaltung zur aktiven Schwingungsunterdrückung eingeführt.

Die Arbeit schließt mit einer kurzen Zusammenfassung im 5. Kapitel.

# Kapitel 2

## Modellbildung

### 2.1 Physikalisches Modell

Das physikalische Modell für ein aus zwei Segmenten bestehendes, teleskopierbares System ist in der Abbildung 2.1 am Beispiel eines Gabelstaplers dargestellt. Die im Folgenden geschilderte Vorgehensweise kann problemlos für andere fördertechnische Systeme, wie z.B. Teleskopgabeln von Regalbediengeräten, genutzt werden, wobei in erster Linie die Ausrichtung im Schwerfeld der Erde angepasst werden muss. Auch für Probleme aus anderen Anwendungsgebieten, wie z.B. der Robotik oder auch der Raumfahrttechnik, kann die hier dargestellte Vorgehensweise beibehalten werden. Da die größte Beanspruchung bei dem hier betrachteten Anwendungsbeispiel die Biegebeanspruchung in Fahrtrichtung ist [35], wird im Folgenden ein ebenes Modell betrachtet.

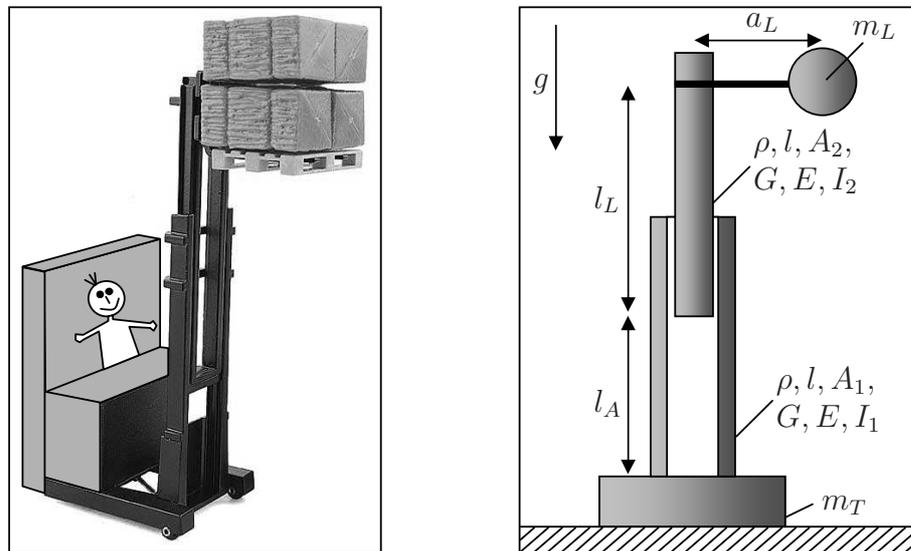


Abbildung 2.1: Gabelstapler und Modell

Das System besteht aus zwei flexiblen Balken. Balken 1 ist an einem Trägerfahrzeug eingespannt und über ein gewisses Spiel gegen den axial verschiebbaren Balken 2 gelagert, an dem exzentrisch eine Last befestigt ist. Das System, das sich unter dem Einfluss der Schwerkraft befindet, wird durch folgende Parameter beschrieben: Länge  $l$  der beiden Segmente (in vielen Anwendungen sind beide Segmente gleich lang), konstante

Querschnittsflächen  $A_{1,2}$ , konstante Flächenmomente 2. Grades  $I_{1,2}$ , Dichte  $\rho$ , Elastizitätsmodul  $E$  und Schubmodul  $G$  der beiden Balken, Masse  $m_L$  und Exzentrizität  $a_L$  der Ladeeinheit, Masse  $m_T$  des Trägerfahrzeuges und die beiden Ausfahrlängen  $l_A(t)$  und  $l_L(t)$ . Die diskreten Punktkontakte zwischen den beiden Körpern werden als einseitige Feder-Dämpferelemente über eine Ortsbedingung [69] (keine Kraftbedingung) modelliert und sind über ihre Anzahl  $n$ , das Spiel  $l_S$  zwischen den beiden Segmenten, eine Federsteifigkeit  $c$  und eine Dämpferkonstante  $d$  definiert. Während die Federsteifigkeit  $c$  in vielen Anwendungen sehr gut anhand von Geometrie- und Materialparametern der beiden Kontaktpartner bestimmt werden kann, gestaltet sich eine Abschätzung der Dämpferkonstanten  $d$  im Allgemeinen deutlich schwieriger. Da die durch das Spiel auftretenden Kontaktstöße im geregelten System jedoch als äußere Störung aufgefasst werden können, und die Regelung unabhängig von der Kontaktformulierung robust gegen diese Störungen sein muss, ist eine genaue Abschätzung von  $d$  nicht notwendig. Die Ausfahrbewegung zwischen den beiden Balken soll reibungsfrei sein und der Kraftfluss soll vollständig über den unteren Kontaktpunkt verlaufen.

Abbildung 2.2 zeigt das System in seiner unverformten Ausgangslage und in einem verformten Zustand. Zur Beschreibung der kinematischen Zusammenhänge werden ein raumfestes, kartesisches Koordinatensystem mit den Einheitsvektoren  $\vec{i}_k$  und körperfeste Koordinatensysteme mit den Einheitsvektoren  ${}^j\vec{h}_k$ ,  ${}^j\vec{t}_k$  und  ${}^j\vec{e}_k$  ( $j = 1, 2$ ;  $k = 1, 2, 3$ ) eingeführt. Der Index oben links steht bei den Einheitsvektoren der körperfesten Koordinatensysteme für den jeweiligen Balken und der Pfeil kennzeichnet hier und im Folgenden Größen mit Vektoreigenschaften. Schneidet man einen Balken an einer beliebigen Stelle normal zur Tangente an die Zentrallinie, die mit der Schwereachse und der Schubmittelpunktachse der hier betrachteten symmetrischen Querschnitte zusammenfallen soll, im unverformten Zustand frei, so besitzt der Einheitsvektor  ${}^j\vec{h}_3$  die momentane Richtung der Tangente. Die Einheitsvektoren  ${}^j\vec{h}_1$  und  ${}^j\vec{h}_2$  liegen in der Schnittfläche, die mit dem Querschnitt identisch ist und werden durch die beiden Hauptträgheitsachsen festgelegt [22]. In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Balken betrachtet die im Ausgangszustand nicht vorgekrümmt und nicht vorverwunden sind, wodurch die Einheitsvektoren der  ${}^j\vec{h}_k$ -Systeme mit denen des raumfesten Koordinatensystems zusammenfallen:

$${}^1\vec{h}_k = {}^2\vec{h}_k = \vec{i}_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Im verformten Zustand werden die Zentrallinien der Balken durch die  ${}^j\vec{t}_k$ -Systeme, und die Ausrichtung der Balkenquerschnitte, die im unverformten Zustand senkrecht auf den Zentrallinien stehen, durch die  ${}^j\vec{e}_k$ -Systeme beschrieben. Die Bogenlängen der Zentrallinien werden im Ausgangszustand mit  $z_1$  und  $z_2$  und im verformten Zustand mit  $z'_1$  und  $z'_2$  bezeichnet. Die Verformung des Systems wird durch die horizontalen Verschiebungen  $u_0(t)$ ,  $u_1(z_1, t)$  und  $u_2(z_2, t)$ , die vertikalen Verschiebungen  $l_A(t)$ ,  $l_L(t)$ ,  $w_1(z_1, t)$  und  $w_2(z_2, t)$  und die Verdrehungen  $\alpha_1(z_1, t)$  und  $\alpha_2(z_2, t)$  der Balkenquerschnitte beschrieben. Es wird angenommen dass die Querschnitte bei Deformation eben bleiben (Hypothese von Bernoulli) und dass die Querschnittsform bei Deformation unverändert bleibt (Hypothese von St. Venant).

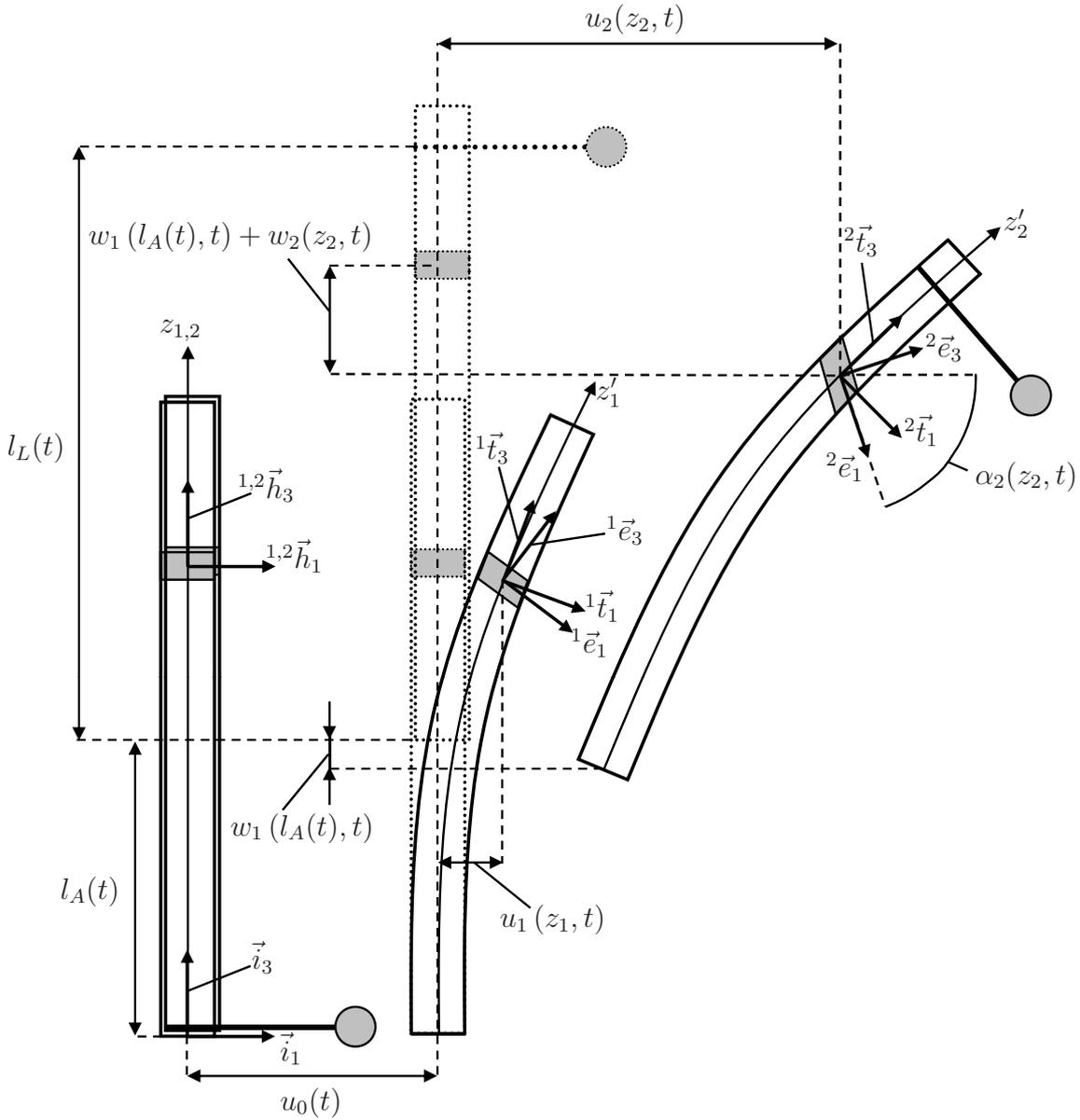


Abbildung 2.2: Modell im Ausgangszustand und in verformtem Zustand

## 2.2 Undehnbarkeit der Balkenlängsachsen

Im Folgenden wird angenommen, dass die Balkenlängsachsen im Vergleich zu den horizontalen und den vertikalen Verschiebungen sehr kleine Längenänderungen erfahren und somit in guter Näherung als undeformbar angenommen werden können. Die Zentrallinien der Balken lassen sich mit Methoden der Differentialgeometrie beschreiben. Sind die Zentrallinien der Balken in der Parameterdarstellung  $\vec{r}_j = \vec{r}_j(z'_j)$  gegeben, so sind für jeden Kurvenpunkt  $\vec{r}_j(z'_j)$  der Tangenteneinheitsvektor  ${}^j\vec{t}_3$  und der Normaleneinheitsvektor  ${}^j\vec{t}_1$  wie folgt definiert [17]:

$${}^j\vec{t}_3 = \frac{d\vec{r}_j(z'_j)}{dz'_j} = \vec{r}_{j,z'_j} \quad (j = 1, 2), \quad (2.2)$$

$${}^j\vec{t}_1 = \frac{\vec{r}_{j,z'_j z'_j}}{\left| \vec{r}_{j,z'_j z'_j} \right|} \quad (j = 1, 2). \quad (2.3)$$

Beschreibt man den verformten Zustand von Balken 1 mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}_1 = (u_0(t) + u_1)\vec{i}_1 + (z_1 + w_1)\vec{i}_3 \quad (2.4)$$

und den verformten Zustand von Balken 2 mit dem Ortsvektor

$$\vec{r}_2 = (u_0(t) + u_2)\vec{i}_1 + (l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + z_2 + w_2)\vec{i}_3 \quad (2.5)$$

so erhält man nach Differentiation nach den unverformten Bogenlängen  $z_1$  und  $z_2$  und mit Gleichung (2.2)

$$\frac{d\vec{r}_j}{dz_j} = \frac{d\vec{r}_j}{dz'_j} \frac{dz'_j}{dz_j} = {}^j\vec{t}_3 \frac{dz'_j}{dz_j} = u_{j,z_j} \vec{i}_1 + (1 + w_{j,z_j}) \vec{i}_3 \quad (j = 1, 2). \quad (2.6)$$

Betragsbildung in dieser Vektorgleichung liefert

$$\frac{dz'_j}{dz_j} = \sqrt{u_{j,z_j}^2 + (1 + w_{j,z_j})^2} \quad (j = 1, 2). \quad (2.7)$$

Die Forderung nach einer Undehnbarkeit der Zentrallinien der betrachteten Balken

$$dz_j = dz'_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.8)$$

führt mit Gleichung (2.7) auf

$$1 + w_{j,z_j} = \pm \sqrt{1 - u_{j,z_j}^2} \quad (j = 1, 2). \quad (2.9)$$

Das richtige Vorzeichen in Gleichung (2.9) wird durch die Bedingungen

$$0 \geq dw_j \geq -dz_j \quad (j = 1, 2) \quad (2.10)$$

bestimmt, die ebenfalls auf der Undehnbarkeit der Zentrallinien beruhen.

Zwischen den horizontalen Verschiebungen  $u_j(z_j, t)$  und den vertikalen Verschiebungen  $w_j(z_j, t)$  erhält man so die folgenden kinematischen Beziehungen:

$$w_{j,z_j} = -1 + \sqrt{1 - u_{j,z_j}^2} \quad (j = 1, 2). \quad (2.11)$$

## 2.3 Drehmatrizen

In diesem und im folgenden Kapitel wird die Einsteinsche Summationskonvention befolgt, gemäß derer über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist. Die Verdrehung eines kartesischen Koordinatensystems mit den Einheitsvektoren  $\vec{e}_k$  gegenüber einem zweiten System mit den Einheitsvektoren  $\vec{i}_k$  (Abbildung 2.3) kann über die mathematische Beziehung

$$\vec{e}_k = m_{kl} \vec{i}_l \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (2.12)$$

formuliert werden [22], [75]. Hierbei stellen die skalaren Größen  $m_{kl}$ , welche auch Richtungskosinus genannt werden, die Projektionen der Einheitsvektoren  $\vec{e}_k$  auf die Einheitsvektoren  $\vec{i}_l$  dar:

$$m_{kl} = \vec{e}_k \vec{i}_l = \cos(\vec{e}_k, \vec{i}_l) \quad (k, l = 1, 2, 3). \quad (2.13)$$

Analog dazu können die Einheitsvektoren  $\vec{i}_k$  über den Zusammenhang

$$\vec{i}_k = m_{lk} \vec{e}_l \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (2.14)$$

im  $\vec{e}_k$ -System ausgedrückt werden.

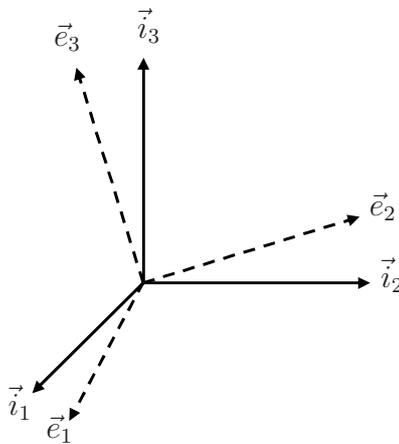


Abbildung 2.3: Relative Verdrehung von zwei Koordinatensystemen

Da die resultierende Drehung nur durch drei unabhängige Parameter beschrieben wird, gelten für die neun Richtungskosinus aus Gleichung (2.13) die sechs Nebenbedingungen

$$m_{ki} m_{li} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l. \end{cases} \quad (2.15)$$

Die neun Richtungskosinus können in einer orthogonalen Matrix, der Dreh- oder auch Richtungskosinusmatrix, zusammengefasst werden:

$$\mathbf{T}^{ei} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Es gilt

$$(\mathbf{T}^{ei})^{-1} = (\mathbf{T}^{ei})^T = \mathbf{T}^{ie}. \quad (2.17)$$

Die Koordinaten  $\mathbf{v}^e$  im Koordinatensystem  $\vec{e}_k$  und die Koordinaten  $\mathbf{v}^i$  im Koordinatensystem  $\vec{i}_k$  eines beliebigen Vektors  $\vec{v}$  werden nach der folgenden Vorschrift aus dem einen Koordinatensystem in das andere transformiert:

$$\mathbf{v}^e = \mathbf{T}^{ei} \mathbf{v}^i. \quad (2.18)$$

## 2.4 Mathematische Formulierung

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen des in Abbildung 2.2 dargestellten Modells erfolgt über das Prinzip von Hamilton

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - V) dt + \int_{t_0}^{t_1} W_{virt} dt = 0. \quad (2.19)$$

In Gleichung (2.19) steht  $T$  für die kinetische und  $V$  für die potentielle Energie des Systems und  $W_{virt}$  ist die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte. In den folgenden Abschnitten werden diese Ausdrücke für das betrachtete Modell hergeleitet, wobei die potentielle Energie in einen elastischen Anteil  $V_E$  und in das Schwerepotential  $V_S$  aufgeteilt wird. Für das elastische Potential muss zunächst ein Zusammenhang zwischen Verschiebungen und Verzerrungen hergeleitet werden.

### 2.4.1 Lagrangescher Verzerrungstensor

Abbildung 2.4 zeigt einen Körper in seiner unverformten Ausgangslage und in einem verformten Zustand. Ein beliebiger materieller Punkt  $A$  des Körpers wird im Ausgangszustand durch den Ortsvektor  $\vec{x}$  mit den materiellen Koordinaten (Lagrangesche Koordinaten)  $x_i = \xi_i(t_0)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gekennzeichnet. Durch die Verformung erfährt  $A$  eine Verschiebung  $\vec{u}$  und befindet sich dann am Ort  $A'$ .  $A'$  wird durch die Ortskoordinaten (Eulersche Koordinaten)  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) festgelegt [28]. In der Lagrangeschen Betrachtungsweise ist der Ort eines materiellen Punktes im verformten Zustand durch

$$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.20)$$

gegeben. Als unabhängige Variablen werden die Lagrangeschen Koordinaten  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) verwendet. Für die Verschiebung erhält man

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \xi_i(x_1, x_2, x_3, t) - x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.21)$$

so dass

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} - \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.22)$$

ist [38].

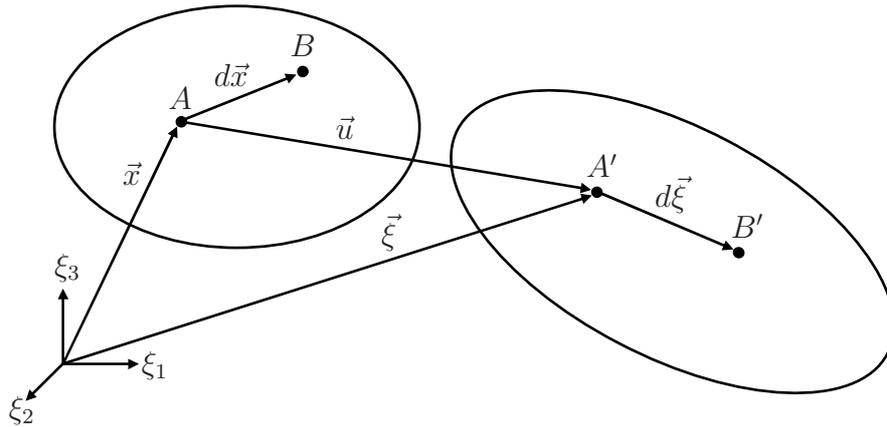


Abbildung 2.4: Körper im Ausgangszustand und in verformtem Zustand

In der Eulerschen Betrachtungsweise werden die an einem Beobachtungspunkt  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) vorbeiziehenden materiellen Punkte mit

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.23)$$

gekennzeichnet und die Eulerschen Koordinaten  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) werden als unabhängige Variablen verwendet. Für die Verschiebung erhält man

$$u_i = u_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \xi_i - x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.24)$$

so dass

$$\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij} - \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.25)$$

gilt [38].

Im Folgenden wird das materielle Linienelement  $\overline{AB}$  betrachtet, das durch die Verformung in  $\overline{A'B'}$  übergeht (siehe Abbildung 2.4).  $\overline{AB}$  wird durch den Vektor  $d\vec{x}$  und  $\overline{A'B'}$  durch den Vektor  $d\vec{\xi}$  beschrieben. Als Maß für auftretende Verzerrungen wird  $d\vec{\xi}^2 - d\vec{x}^2$  gewählt. In der Lagrangeschen Betrachtungsweise schreibt sich das Quadrat des Linienelementes vor der Verformung

$$d\vec{x}^2 = dx_j dx_j = \delta_{jk} dx_j dx_k \quad (j, k = 1, 2, 3) \quad (2.26)$$

und nach der Verformung

$$d\vec{\xi}^2 = d\xi_i d\xi_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} dx_j dx_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.27)$$

Als Maß für auftretende Verzerrungen erhält man

$$d\vec{\xi}^2 - d\vec{x}^2 = \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right) dx_j dx_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.28)$$

Als Lagrangescher oder Greenscher Verzerrungstensor  $\varepsilon_{jk}$  wird

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \delta_{jk} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

eingeführt und mit Gleichung (2.22) erhält man

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.30)$$

Durch eine analoge Vorgehensweise erhält man in der Eulerschen Betrachtungsweise den Eulerschen oder Almansischen Verzerrungstensor

$$\eta_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial \xi_k} + \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} - \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_k} \right) \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.31)$$

Im Gegensatz zur Strömungsmechanik, wo insbesondere die Eulersche Betrachtungsweise häufig Verwendung findet, wird in der Elastizitätstheorie, und auch bei der vorliegenden Arbeit, die Lagrangesche Betrachtungsweise bevorzugt.

## 2.4.2 Verschiebungsvektor eines beliebigen materiellen Balkenpunktes

Die Verschiebung eines beliebigen materiellen Balkenpunktes  $P_1$  auf Balken 1 und eines beliebigen materiellen Balkenpunktes  $P_2$  auf Balken 2 soll im Folgenden beschrieben werden. Die Vorgehensweise wird stellvertretend für die beiden Balken des in Kapitel 2.1 vorgestellten Modells an dem in der Abbildung 2.5 dargestellten Balken verdeutlicht. Ganz wesentlich sind bei einer Beschreibung der Verschiebungen die für das Balkenmodell getroffenen Annahmen. In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, dass die Querschnitte bei Deformation eben bleiben (Hypothese von Bernoulli) und dass die Querschnittsform bei Deformation unverändert bleibt (Hypothese von St. Venant).

Die beliebigen materiellen Punkte  $P_1$  auf Balken 1 und  $P_2$  auf Balken 2 werden im unverformten Ausgangszustand durch die Ortsvektoren

$$\vec{x}_1 = x_1^1 \vec{h}_1 + z_1^1 \vec{h}_3 \quad (2.32)$$

und

$$\vec{x}_2 = x_2^2 \vec{h}_1 + z_2^2 \vec{h}_3 \quad (2.33)$$

beschrieben und unter Berücksichtigung der Gleichung (2.1) folgt

$$\vec{x}_1 = x_1 \vec{i}_1 + z_1 \vec{i}_3 \quad (2.34)$$

und

$$\vec{x}_2 = x_2 \vec{i}_1 + z_2 \vec{i}_3. \quad (2.35)$$

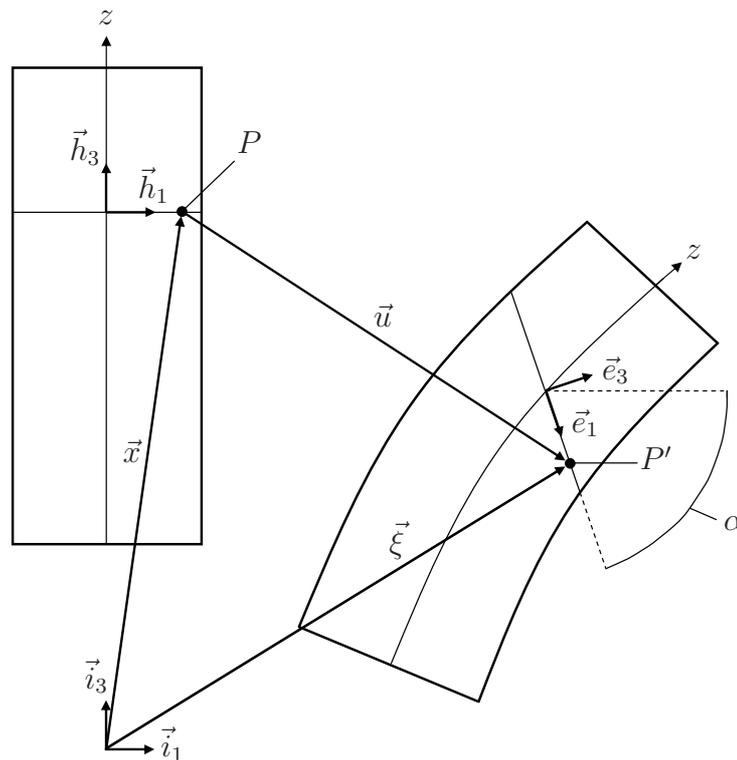


Abbildung 2.5: Verschiebungsvektor eines beliebigen materiellen Balkenpunktes

Durch die Verformung erfährt  $P_1$  eine Verschiebung  $\vec{u}_1$  und befindet sich dann am Ort  $P'_1$ ,  $P_2$  wird durch  $\vec{u}_2$  nach  $P'_2$  verschoben.  $P'_1$  und  $P'_2$  werden durch die Ortsvektoren

$$\vec{\xi}_1 = (u_0(t) + u_1) \vec{i}_1 + (z_1 + w_1) \vec{i}_3 + x_1^1 \vec{e}_1 \quad (2.36)$$

und

$$\vec{\xi}_2 = (u_0(t) + u_2)\vec{i}_1 + (l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + z_2 + w_2)\vec{i}_3 + x_2{}^2\vec{e}_1 \quad (2.37)$$

beschrieben. In den Gleichungen (2.36) und (2.37) kommen die getroffenen Hypothesen zur Geltung, dass die betrachteten Querschnitte auch im verformten Zustand eben bleiben und ihre ursprüngliche Form beibehalten (siehe Abbildung 2.5).

Mit Gleichung (2.12) können die Einheitsvektoren  ${}^1\vec{e}_1$  und  ${}^2\vec{e}_1$  durch

$${}^1\vec{e}_1 = \cos(\alpha_1)\vec{i}_1 - \sin(\alpha_1)\vec{i}_3 \quad (2.38)$$

und

$${}^2\vec{e}_1 = \cos(\alpha_2)\vec{i}_1 - \sin(\alpha_2)\vec{i}_3 \quad (2.39)$$

über die Einheitsvektoren  $\vec{i}_1$  und  $\vec{i}_3$  ausgedrückt werden. Für die Gleichungen (2.36) und (2.37) folgt schließlich

$$\vec{\xi}_1 = (u_0(t) + u_1 + x_1 \cos(\alpha_1))\vec{i}_1 + (z_1 + w_1 - x_1 \sin(\alpha_1))\vec{i}_3 \quad (2.40)$$

und

$$\vec{\xi}_2 = (u_0(t) + u_2 + x_2 \cos(\alpha_2))\vec{i}_1 + (l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + z_2 + w_2 - x_2 \sin(\alpha_2))\vec{i}_3. \quad (2.41)$$

Für die gesuchten Verschiebungen erhält man mit Gleichung (2.21) für den Balken 1

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_0(t) + u_1(z_1, t) + x_1(\cos(\alpha_1(z_1, t)) - 1) \\ 0 \\ w_1(z_1, t) - x_1 \sin(\alpha_1(z_1, t)) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

und für den Balken 2

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_0(t) + u_2(z_2, t) + x_2(\cos(\alpha_2(z_2, t)) - 1) \\ 0 \\ l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + w_2(z_2, t) - x_2 \sin(\alpha_2(z_2, t)) \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Mit den Beziehungen (2.42) und (2.43) erhält man mit der Bedingung (2.11) für die Undehnbarkeit der Balkenlängsachsen eingesetzt in Gleichung (2.30) die Koordinaten des Lagrangeschen Verzerrungstensors

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{31} & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

für jeden der beiden Balken (auf Indizes zur Kennzeichnung des jeweiligen Balkens wird in den Gleichungen (2.45), (2.46) und im folgenden Kapitel 2.4.3 verzichtet) mit

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \cos(\alpha)u_z - \sin(\alpha)\sqrt{1 - u_z^2} \right) \quad (2.45)$$

und

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{2}x^2\alpha_z^2 - x\alpha_z \left( \sin(\alpha)u_z + \cos(\alpha)\sqrt{1 - u_z^2} \right). \quad (2.46)$$

### 2.4.3 Elastisches Potential

Im Folgenden werden im Material auftretende Spannungen durch die Koordinaten des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) beschrieben. Die Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen beruhen auf Eigenschaften von Werkstoffen, die experimentell ermittelt werden müssen. In der vorliegenden Arbeit wird ein linear-elastisches Materialverhalten vorausgesetzt, das durch das verallgemeinerte Hookesche Gesetz [77]

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[ \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right] \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.47)$$

beschrieben wird. In Gleichung (2.47) steht  $E$  für den Elastizitätsmodul und  $\nu$  für die Querkontraktionszahl.

Das auf ein Volumenelement bezogene elastische Potential  $V'_E$  eines dreidimensionalen Kontinuums ist für linear-elastisches Materialverhalten durch

$$V'_E = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.48)$$

gegeben und lautet mit Gleichung (2.47) in Abhängigkeit der Elemente des Verzerrungstensors

$$V'_E = \frac{E}{2(1 + \nu)} \left[ \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1 - 2\nu)} (\varepsilon_{kk})^2 \right] \quad (i, j, k = 1, 2, 3). \quad (2.49)$$

An dieser Stelle muss gesagt werden, dass eine Inkonsistenz zwischen dem vorgestellten Balkenmodell und dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz (2.47) besteht. Während beim verallgemeinerten Hookeschen Gesetz davon ausgegangen wird, dass ein einachsiger Spannungszustand Verzerrungen in drei Raumrichtungen hervorruft, wird bei dem

vorgestellten Balkenmodell davon ausgegangen, dass die Querschnittsform bei Deformation unverändert bleibt (Hypothese von St. Venant). Im Folgenden wird angenommen, wie es auch in der Literatur üblich ist [22], dass statt den Verzerrungen aus dem Verzerrungstensor (2.44)

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \quad (2.50)$$

die zum verallgemeinerten Hookeschen Gesetz konsistente Annahme

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu\varepsilon_{33} \quad (2.51)$$

gilt. Mit (2.51) und den Ergebnissen (2.44) für den Verzerrungstensor schreibt sich das auf ein Volumenelement bezogene elastische Potential

$$V'_E = \frac{E}{2}\varepsilon_{33}^2 + \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{31}^2 \quad (2.52)$$

oder

$$V'_E = \frac{E}{2}\varepsilon_{33}^2 + 2G\varepsilon_{31}^2 \quad (2.53)$$

mit dem Schubmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.54)$$

Das gleiche Ergebnis (2.52) bzw. (2.53) erhält man, wenn man die Verzerrungen (2.44) in Gleichung (2.48) einsetzt und beim Materialgesetz, getreu den beim Balkenmodell getroffenen Annahmen, davon ausgeht, dass ein einachsiger Spannungszustand einen einachsigen Verzerrungszustand hervorruft (Hookesches Gesetz für eindimensionale Deformationen).

Mit den Ausdrücken (2.45) und (2.46) für die Verzerrungen erhält man

$$\begin{aligned} V'_E &= \frac{E}{2} \left( \frac{1}{2}x^2\alpha_z^2 - x\alpha_z \left( \sin(\alpha)u_z + \cos(\alpha)\sqrt{1-u_z^2} \right) \right)^2 \\ &+ \frac{G}{2} \left( \cos(\alpha)u_z - \sin(\alpha)\sqrt{1-u_z^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

In der vorliegenden Arbeit sollen für das vorgestellte Modell bis zur 2. Ordnung konsistente Bewegungsgleichungen hergeleitet werden. Der Ausdruck (2.55) kann also in kubischer Näherung in eine Reihe entwickelt werden. Nach einer Integration über das Volumen eines jeden Balkens erhält man den Ausdruck

$$V_E^{(3)} = \int_0^l \int_{(A)} \left( \frac{G}{2} (u_z - \alpha)^2 + \frac{E}{2} x^2 \alpha_z^2 - \frac{E}{2} x^3 \alpha_z^3 \right) dA dz. \quad (2.56)$$

In Gleichung (2.56) beschreibt

$$\int_{(A)} dA = A \quad (2.57)$$

die Querschnittsfläche des jeweiligen Balkens,

$$\int_{(A)} x^2 dA = I \quad (2.58)$$

das Flächenmoment 2. Ordnung und wegen der angenommenen Symmetrie der Balkenquerschnitte verschwindet der Ausdruck

$$\int_{(A)} x^3 dA = 0. \quad (2.59)$$

Das elastische Potential lautet dann für beide Balken in einer Näherung 3. Ordnung

$$V_E^{(3)} = \int_0^l \left( \frac{GA}{2} (u_z - \alpha)^2 + \frac{EI}{2} \alpha_z^2 \right) dz. \quad (2.60)$$

Dieses Ergebnis (2.60) kann durch eine Arbeit von Karch und Wauer von 1993 [34] bestätigt werden, bei der an einem rotierenden und axial vorgespannten Timoshenko-Balken Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt werden.

#### 2.4.4 Schwerepotential

Das Schwerepotential  $V_S$  wird in das Schwerepotential  $V_{S1}$  für den Balken 1,  $V_{S2}$  für den Balken 2 und  $V_{SL}$  für die Ladeinheit unterteilt. Das Nullniveau (NN) wird in die  $\vec{i}_{1,2}$ -Ebene gelegt (siehe Abbildung 2.6). Für den Balken 1 schreibt sich demnach das Schwerepotential

$$V_{S1} = \int_0^l \int_{(A_1)} \rho g \vec{\xi}_1 \vec{i}_3 dA_1 dz_1. \quad (2.61)$$

Mit  $\vec{\xi}_1$  aus Gleichung (2.40) und dem durch die angenommene Symmetrie der Balkenquerschnitte verschwindenden Ausdruck

$$\int_{(A_1)} x_1 dA_1 = 0, \quad (2.62)$$

erhält man, nach Auswertung des Skalarproduktes,

$$V_{S1} = \int_0^l \rho A_1 g (z_1 + w_1(z_1)) dz_1 = \frac{l}{2} m_1 g + \rho A_1 g \int_0^l w_1(z_1) dz_1 \quad (2.63)$$

mit

$$m_1 = \rho A_1 l. \quad (2.64)$$

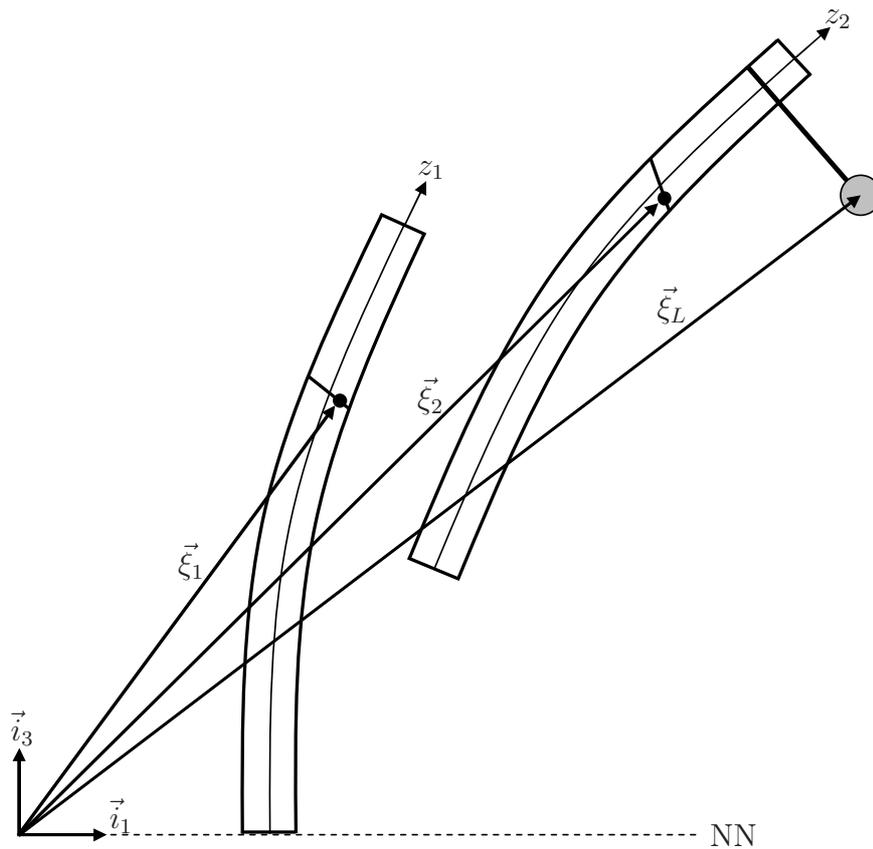


Abbildung 2.6: Lage des Nullniveaus zur Bestimmung des Schwerepotentials

Die vertikale Verschiebung  $w_1(z_1)$  an der Stelle  $z_1$  wird nach Integration der Gleichung (2.11) durch den Ausdruck

$$w_1(z_1) = \int_0^{z_1} \left( -1 + \sqrt{1 - u_{1,\zeta_1}^2} \right) d\zeta_1 + w_1(0) \quad (2.65)$$

beschrieben. Durch Einsetzen von Gleichung (2.65) in Gleichung (2.63) mit der allgemein gültigen Regel

$$\int_0^l \left( \int_0^z f(\zeta) d\zeta \right) dz = \int_0^l (l - z) f(z) dz \quad (2.66)$$

und der Randbedingung

$$w_1(0) = 0 \quad (2.67)$$

erhält man für das Schwerepotential von Balken 1

$$V_{S1} = \frac{l}{2}m_1g + \rho A_1g \int_0^l (l - z_1) \left(-1 + \sqrt{1 - u_{1,z_1}^2}\right) dz_1. \quad (2.68)$$

Eine Reihenentwicklung bis zur 3. Ordnung liefert den Ausdruck

$$V_{S1}^{(3)} = \frac{l}{2}m_1g - \frac{1}{2}\rho A_1g \int_0^l (l - z_1)u_{1,z_1}^2 dz_1. \quad (2.69)$$

Durch eine analoge Vorgehensweise erhält man mit  $\vec{\xi}_2$  aus der Gleichung (2.41) den Ausdruck

$$V_{S2} = \left(l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + \frac{l}{2}\right) m_2g + \rho A_2g \int_0^l (l - z_2) \left(-1 + \sqrt{1 - u_{2,z_2}^2}\right) dz_2 \quad (2.70)$$

für das Schwerepotential von Balken 2 mit

$$w_1(l_A(t), t) = \int_0^{l_A} \left(-1 + \sqrt{1 - u_{1,z_1}^2}\right) dz_1. \quad (2.71)$$

Eine Reihenentwicklung bis zur 3. Ordnung liefert für das genäherte Schwerepotential von Balken 2

$$V_{S2}^{(3)} = \left(l_A(t) + \frac{l}{2}\right) m_2g - \frac{1}{2}m_2g \int_0^{l_A} u_{1,z_1}^2 dz_1 - \frac{1}{2}\rho A_2g \int_0^l (l - z_2)u_{2,z_2}^2 dz_2. \quad (2.72)$$

Das Schwerepotential der Ladeinheit  $V_{SL}$  wird mit

$$\vec{\xi}_L = (u_0(t) + u_2(l_L(t), t))\vec{i}_1 + (l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + l_L(t) + w_2(l_L(t), t))\vec{i}_3 + a_L^2\vec{e}_1 \quad (2.73)$$

durch den Ausdruck

$$V_{SL} = m_Lg\vec{\xi}_L\vec{i}_3 \quad (2.74)$$

beschrieben. Mit Gleichung (2.39) erhält man nach Auswertung des Skalarproduktes

$$V_{SL} = m_Lg (l_A(t) + w_1(l_A(t), t) + l_L(t) + w_2(l_L(t), t) - a_L \sin(\alpha_2(l_L(t), t))) \quad (2.75)$$

und mit Gleichung (2.71) und dem Ausdruck

$$w_2(l_L(t), t) = \int_0^{l_L} \left( -1 + \sqrt{1 - u_{2,z_2}^2} \right) dz_2 \quad (2.76)$$

schreibt sich das Schwerepotential der Ladeinheit

$$\begin{aligned} V_{SL} = & m_L g \left( l_A(t) + \int_0^{l_A} \left( -1 + \sqrt{1 - u_{1,z_1}^2} \right) dz_1 \right. \\ & \left. + l_L(t) + \int_0^{l_L} \left( -1 + \sqrt{1 - u_{2,z_2}^2} \right) dz_2 - a_L \sin(\alpha_2(l_L(t), t)) \right). \end{aligned} \quad (2.77)$$

Eine Reihenentwicklung bis zur 3. Ordnung liefert für das genäherte Schwerepotential der Ladeinheit

$$\begin{aligned} V_{SL}^{(3)} = & m_L g (l_A(t) + l_L(t)) - \frac{1}{2} m_L g \int_0^{l_A} u_{1,z_1}^2 dz_1 - \frac{1}{2} m_L g \int_0^{l_L} u_{2,z_2}^2 dz_2 \\ & - m_L g a_L \left( \alpha_2(l_L(t), t) - \frac{1}{6} \alpha_2^3(l_L(t), t) \right). \end{aligned} \quad (2.78)$$

### 2.4.5 Kinetische Energie

Die im System enthaltene kinetische Energie  $T$  wird in die Komponenten  $T_1$  für den Balken 1,  $T_2$  für den Balken 2,  $T_L$  für die Ladeinheit und  $T_T$  für das Trägerfahrzeug (siehe Abbildung 2.1) zerlegt. Es wird angenommen, dass die vertikalen Geschwindigkeitskomponenten  $w_{1,t}$  und  $w_{2,t}$  sehr klein, und die aus ihnen resultierenden Beiträge zur kinetischen Energie, vernachlässigbar sind. Balken 1 besitzt die kinetische Energie

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A_1)} \rho \left( \frac{d\vec{\xi}_1}{dt} \right)^2 dA_1 dz_1. \quad (2.79)$$

Durch totale Differentiation nach der Zeit des Ausdrucks für  $\vec{\xi}_1$  aus Gleichung (2.40) erhält man mit den Gleichungen (2.57), (2.58) und (2.62) den Ausdruck

$$T_1 = \frac{1}{2} \rho I_1 \int_0^l \alpha_{1,t}^2 dz_1 + \frac{1}{2} \rho A_1 \int_0^l (u_{0,t} + u_{1,t})^2 dz_1. \quad (2.80)$$

Durch eine analoge Vorgehensweise erhält man mit  $\vec{\xi}_2$  aus Gleichung (2.41)

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho I_2 \int_0^l \alpha_{2,t}^2 dz_2 + \frac{1}{2} \rho A_2 \int_0^l \left( (u_{0,t} + u_{2,t})^2 + (l_{A,t} + w_{1,z_1}(l_A(t), t) l_{A,t})^2 \right) dz_2 \quad (2.81)$$

für die kinetische Energie von Balken 2, die mit Gleichung (2.11) schließlich die Form

$$T_2 = \frac{1}{2}\rho I_2 \int_0^l \alpha_{2,t}^2 dz_2 + \frac{1}{2}\rho A_2 \int_0^l ((u_{0,t} + u_{2,t})^2 + (1 - u_{1,z_1}^2(l_A(t), t)) l_{A,t}^2) dz_2 \quad (2.82)$$

annimmt. Die Ladeinheit hat die kinetische Energie

$$T_L = \frac{1}{2}m_L \left( \frac{d\vec{\xi}_L}{dt} \right)^2. \quad (2.83)$$

Totale Differentiation der Gleichung (2.73) nach der Zeit und anschließendes Einsetzen in Gleichung (2.83) liefert

$$\begin{aligned} T_L = & \frac{1}{2}m_L \left( \left[ u_{0,t} + u_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + u_{2,t}(l_L(t), t) \right. \right. \\ & - a_L \sin(\alpha_2(l_L(t), t)) \left( \alpha_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + \alpha_{2,t}(l_L(t), t) \right) \left. \right]^2 \\ & + \left[ l_{A,t} + w_{1,z_1}(l_A(t), t)l_{A,t} + l_{L,t} + w_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} \right. \\ & \left. \left. - a_L \cos(\alpha_2(l_L(t), t)) \left( \alpha_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + \alpha_{2,t}(l_L(t), t) \right) \right]^2 \right), \end{aligned} \quad (2.84)$$

woraus durch eine Reihenentwicklung bis zur 3. Ordnung schließlich

$$\begin{aligned} T_L^{(3)} = & \frac{1}{2}m_L \left( \left( u_{0,t} + u_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + u_{2,t}(l_L(t), t) \right)^2 \right. \\ & - 2a_L \alpha_2(l_L(t), t) \left( u_{0,t} + u_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + u_{2,t}(l_L(t), t) \right) \\ & * \left( \alpha_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + \alpha_{2,t}(l_L(t), t) \right) \\ & + \left[ l_{A,t} + l_{L,t} - a_L \left( \alpha_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + \alpha_{2,t}(l_L(t), t) \right) \right]^2 \\ & - \left( u_{1,z_1}^2(l_A(t), t)l_{A,t} + u_{2,z_2}^2(l_L(t), t)l_{L,t} \right) \\ & * \left[ l_{A,t} + l_{L,t} - a_L \left( \alpha_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + \alpha_{2,t}(l_L(t), t) \right) \right] \\ & \left. + a_L \alpha_2^2(l_L(t), t) \left( l_{A,t} + l_{L,t} \right) \left( \alpha_{2,z_2}(l_L(t), t)l_{L,t} + \alpha_{2,t}(l_L(t), t) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.85)$$

folgt. Die kinetische Energie des Trägerfahrzeuges beträgt

$$T_T = \frac{1}{2}m_T u_{0,t}^2. \quad (2.86)$$

### 2.4.6 Virtuelle Arbeit

Als "worst case" für eine aktive Schwingungsunterdrückung wird bei dem vorliegenden Modell auf eine Berücksichtigung von Materialdämpfung verzichtet. Die virtuelle Arbeit setzt sich aus den Anteilen einer Antriebskraft  $F_T$  am Trägerfahrzeug, der Kontaktkräfte  $F_{K,i}$  ( $i = 1..n$ ) zwischen den einzelnen Segmenten, sowie der von einem geregelten Aktor auf das unterste Segment an der Stelle  $z_1 = l_R$  aufgebrachten Kraft  $F_R$  zusammen:

$$\begin{aligned} W_{virt} &= \sum_{i=1}^n \left( \delta u_0 + \delta u_1 \left( (l - l_A(t)) \left( \frac{i-1}{n-1} \right) + l_A(t), t \right) \right) F_{K,i} \\ &- \sum_{i=1}^n \left( \delta u_0 + \delta u_2 \left( (l - l_A(t)) \left( \frac{i-1}{n-1} \right), t \right) \right) F_{K,i} \\ &+ \delta u_0(t) F_T + \delta u_1(l_R, t) F_R. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Die Kontaktkräfte  $F_{K,i}$  ( $i = 1..n$ ) in Gleichung (2.87) werden mittels einseitiger Feder-Dämpferelemente modelliert:

$$F_{K,i} = C_K(u_i^*) + u_{i,t}^* D_K(u_i^*). \quad (2.88)$$

Dabei gilt (siehe Abbildung 2.7)

$$C_K(u_i^*) = c \left[ u_i^* - \frac{1}{2} \left( u_i^* + \frac{l_S}{2} \right) \text{sign} \left( u_i^* + \frac{l_S}{2} \right) + \frac{1}{2} \left( u_i^* - \frac{l_S}{2} \right) \text{sign} \left( u_i^* - \frac{l_S}{2} \right) \right], \quad (2.89)$$

$$D_K(u_i^*) = d \left[ 1 - \frac{1}{2} \text{sign} \left( u_i^* + \frac{l_S}{2} \right) + \frac{1}{2} \text{sign} \left( u_i^* - \frac{l_S}{2} \right) \right] \quad (2.90)$$

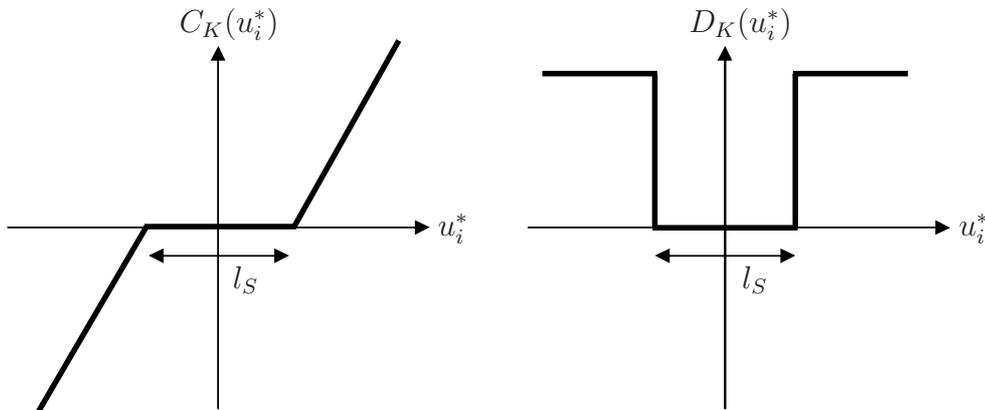


Abbildung 2.7: Kontaktformulierung über einseitige Feder- Dämpferelemente

und

$$u_i^*(t) = u_2 \left( (l - l_A(t)) \left( \frac{i-1}{n-1} \right), t \right) - u_1 \left( (l - l_A(t)) \left( \frac{i-1}{n-1} \right) + l_A(t), t \right). \quad (2.91)$$

In den Gleichungen (2.89) und (2.90) stehen  $c$  und  $d$  für die Federsteifigkeit und die Dämpferkonstante der einseitigen Feder-Dämpferelemente und  $l_S$  ist die Größe des Spiels zwischen den beiden Segmenten. Die Kontaktformulierung wurde schon 2005 in [6] erstmals vorgestellt und später beispielsweise in [48] von Mittwollen übernommen.

### 2.4.7 Systemgleichungen

Einsetzen der Ausdrücke (2.60), (2.69), (2.72), (2.78), (2.80), (2.82), (2.85), (2.86) und (2.87) in Gleichung (2.19), Variation und anschließende Produktintegration führen unter Berücksichtigung der Umformungen

$$f(a) = \int_0^l \delta(z-a) f(z) dz \quad (2.92)$$

und

$$\int_0^a f(z) dz = \int_0^l [1 - \sigma(z-a)] f(z) dz \quad (2.93)$$

mit der Diracschen Impulsfunktion  $\delta(\cdot)$  und der Sprungfunktion  $\sigma(\cdot)$  und mit

$$0 \leq a \leq l \quad (2.94)$$

zu der das System beschreibenden Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( \delta u_1 G l_1 + \delta u_{1,z_1} G l_2 + \delta \alpha_1 G l_3 \right) dz_1 \\ & + \int_0^l \left( \delta u_2 G l_4 + \delta u_{2,z_2} G l_5 + \delta \alpha_2 G l_6 + \delta \alpha_{2,z_2} G l_7 \right) dz_2 + \delta u_0 G l_8 + R b_1 + R b_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Die darin auftretenden Abkürzungen  $G l_1, \dots, R b_2$  sind über die Ausdrücke

$$\begin{aligned} G l_1 &= \rho A_1 (u_{0,tt} + u_{1,tt}) + G A_1 (\alpha_{1,z_1} - u_{1,z_1 z_1}) + \rho A_1 g \left[ (l - z_1) u_{1,z_1} \right]_{z_1} \\ &+ \left[ 1 - \sigma(z_1 - l_A) \right] g (m_L + \rho A_2 l) u_{1,z_1 z_1} - \delta(z_1 - l_A) g (m_L + \rho A_2 l) u_{1,z_1} \\ &- \sum_{i=1}^n \delta \left( z_1 - \left( (l - l_A) \left( \frac{i-1}{n-1} \right) + l_A \right) \right) F_{K,i} - \delta(z_1 - l_R) F_R, \end{aligned} \quad (2.96)$$

$$\begin{aligned}
Gl_2 &= \delta(z_1 - l_A) \left[ (m_L + \rho A_2 l) l_{A,t}^2 u_{1,z_1} \right. \\
&\quad \left. - m_L l_{A,t} u_{1,z_1} \left( a_L \alpha_{2,t}(l_L, t) + a_L \alpha_{2,z_2}(l_L, t) l_{L,t} - l_{L,t} \right) \right], \tag{2.97}
\end{aligned}$$

$$Gl_3 = \rho I_1 \alpha_{1,tt} + GA_1 (\alpha_1 - u_{1,z_1}) - EI_1 \alpha_{1,z_1 z_1}, \tag{2.98}$$

$$\begin{aligned}
Gl_4 &= \rho A_2 (u_{0,tt} + u_{2,tt}) + GA_2 (\alpha_{2,z_2} - u_{2,z_2 z_2}) + \rho A_2 g \left[ (l - z_2) u_{2,z_2} \right]_{z_2} \\
&\quad + \left[ 1 - \sigma(z_2 - l_L) \right] g m_L u_{2,z_2 z_2} - \delta(z_2 - l_L) g m_L u_{2,z_2} \\
&\quad + \delta(z_2) g (m_L + \rho A_2 l) u_{2,z_2} \\
&\quad + \delta(z_2 - l_L) m_L \left[ u_{0,tt} + u_{2,tt} + u_{2,z_2 z_2} l_{L,t}^2 + 2u_{2,z_2 t} l_{L,t} + u_{2,z_2} l_{L,tt} \right. \\
&\quad \left. - a_L \alpha_{2,z_2} (\alpha_{2,z_2} l_{L,t}^2 + 2\alpha_{2,t} l_{L,t}) \right. \\
&\quad \left. - a_L \alpha_2 (\alpha_{2,tt} + \alpha_{2,z_2 z_2} l_{L,t}^2 + 2\alpha_{2,z_2 t} l_{L,t} + \alpha_{2,z_2} l_{L,tt}) - \alpha_{2,t}^2 a_L \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \delta \left( z_2 - (l - l_A) \left( \frac{i-1}{n-1} \right) \right) F_{K,i}, \tag{2.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Gl_5 &= -\delta(z_2 - l_L) m_L l_{L,t} \left[ u_{0,t} + u_{2,t} \right. \\
&\quad \left. + a_L (u_{2,z_2} - \alpha_2) (\alpha_{2,z_2} l_{L,t} + \alpha_{2,t}) - u_{2,z_2} l_{A,t} \right], \tag{2.100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Gl_6 &= \rho I_2 \alpha_{2,tt} + GA_2 (\alpha_2 - u_{2,z_2}) - EI_2 \alpha_{2,z_2 z_2} \\
&\quad + \delta(z_2 - l_L) a_L m_L \left[ -g \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha_2^2 \right) \right. \\
&\quad \left. - l_{A,tt} \left( 1 - \frac{u_{1,z_1}^2(l_A, t)}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) - l_{L,tt} \left( 1 - \frac{u_{2,z_2}^2}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + u_{1,z_1}(l_A, t) l_{A,t} \left( u_{1,z_1 z_1}(l_A, t) l_{A,t} + u_{1,z_1 t}(l_A, t) \right) \right. \\
&\quad \left. + u_{2,z_2} l_{L,t} (u_{2,z_2 z_2} l_{L,t} + u_{2,z_2 t}) \right. \\
&\quad \left. - \alpha_2 (u_{0,tt} + u_{2,tt} + u_{2,z_2 z_2} l_{L,t}^2 + 2u_{2,z_2 t} l_{L,t} + u_{2,z_2} l_{L,tt}) \right. \\
&\quad \left. + a_L (\alpha_{2,tt} + \alpha_{2,z_2 z_2} l_{L,t}^2 + 2\alpha_{2,z_2 t} l_{L,t} + \alpha_{2,z_2} l_{L,tt}) \right], \tag{2.101}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Gl_7 &= \delta(z_2 - l_L) m_L l_{L,t} a_L \left[ l_{A,t} \left( 1 - \frac{u_{1,z_1}^2(l_A, t)}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) \right. \\
&\quad \left. + l_{L,t} \left( 1 - \frac{u_{2,z_2}^2}{2} - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) + \alpha_2 (u_{0,t} + u_{2,t} + u_{2,z_2} l_{L,t}) - a_L (\alpha_{2,t} + \alpha_{2,z_2} l_{L,t}) \right], \tag{2.102}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Gl_8 &= \int_0^l \left( \rho A_1 (u_{0,tt} + u_{1,tt}) + \delta(z_1) m_T u_{0,tt} - \delta(z_1) F_T \right) dz_1 \\
&+ \int_0^l \left( \rho A_2 (u_{0,tt} + u_{2,tt}) \right. \\
&+ \delta(z_2 - l_L) m_L \left[ u_{0,tt} + u_{2,tt} + u_{2,z_2 z_2} l_{L,t}^2 + 2u_{2,z_2 t} l_{L,t} + u_{2,z_2} l_{L,tt} \right. \\
&- a_L \alpha_{2,z_2} \left( \alpha_{2,z_2} l_{L,t}^2 + 2\alpha_{2,t} l_{L,t} \right) \\
&\left. \left. - a_L \alpha_2 \left( \alpha_{2,tt} + \alpha_{2,z_2 z_2} l_{L,t}^2 + 2\alpha_{2,z_2 t} l_{L,t} + \alpha_{2,z_2} l_{L,tt} \right) - \alpha_{2,t}^2 a_L \right] \right) dz_2,
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$Rb_1 = \left[ GA_1 (u_{1,z_1} - \alpha_1) \delta u_1 + EI_1 \alpha_{1,z_1} \delta \alpha_1 \right]_0^l \tag{2.104}$$

und

$$Rb_2 = \left[ GA_2 (u_{2,z_2} - \alpha_2) \delta u_2 + EI_2 \alpha_{2,z_2} \delta \alpha_2 \right]_0^l \tag{2.105}$$

erklärt. Für ein vereinfachtes System mit einer Modellierung der einzelnen Segmente als Euler-Bernoulli-Balken sind entsprechende Gleichungen bereits in [72] formuliert worden.

## 2.5 Diskretisierung

Die in den Kapiteln 2.3 und 2.4 eingeführte Einsteinsche Summationskonvention wird hier und im Folgenden nicht mehr befolgt. Für die gesuchten Lösungen  $u_1(z_1, t)$ ,  $u_2(z_2, t)$ ,  $\alpha_1(z_1, t)$  und  $\alpha_2(z_2, t)$  in (2.95) werden Näherungslösungen  $\bar{u}_1(z_1, t)$ ,  $\bar{u}_2(z_2, t)$ ,  $\bar{\alpha}_1(z_1, t)$  und  $\bar{\alpha}_2(z_2, t)$  verwendet, die auf den Ritz-Ansätzen

$$\bar{u}_1(z_1, t) = \sum_{i=1}^{N_1} q_i(t) U_{1_i}(z_1), \tag{2.106}$$

$$\bar{\alpha}_1(z_1, t) = \sum_{i=1}^{N_1} q_i(t) \Phi_{1_i}(z_1), \tag{2.107}$$

$$\bar{u}_2(z_2, t) = \sum_{i=1}^{N_2} q_{N_1+i}(t) U_{2_i}(z_2), \tag{2.108}$$

und

$$\bar{\alpha}_2(z_2, t) = \sum_{i=1}^{N_2} q_{N_1+i}(t) \Phi_{2_i}(z_2) \quad (2.109)$$

mit hinreichend großen, endlichen Obergrenzen  $N_1$  und  $N_2$  basieren. Durch die Vorgabe der Ansatzfunktionen  $U_{1_i}(z_1)$ ,  $\Phi_{1_i}(z_1)$  ( $i = 1..N_1$ ),  $U_{2_j}(z_2)$  und  $\Phi_{2_j}(z_2)$  ( $j = 1..N_2$ ) liegt die Lösung des Problems dann in der Bestimmung der zeitabhängigen Koeffizienten  $q_k(t)$  ( $k = 1..(N_1 + N_2)$ ). Geeignete Ansatzfunktionen findet man am besten durch Lösen eines einfachen, aber doch der ursprünglichen Aufgabe noch ähnlichen Problems [57]. In der vorliegenden Arbeit wird als Ersatzproblem für den Balken 1 ein einseitig fest eingespannter Timoshenko-Balken und für den Balken 2 ein beidseitig freier Timoshenko-Balken gewählt. Beide Ersatzprobleme werden durch die gleichen Feldgleichungen

$$\rho A_j u_{j,tt} + G A_j (\alpha_{j,z_j} - u_{j,z_j z_j}) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.110)$$

$$\rho I_j \alpha_{j,tt} + G A_j (\alpha_j - u_{j,z_j}) - E I_j \alpha_{j,z_j z_j} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad (2.111)$$

beschrieben und unterscheiden sich lediglich in den Randbedingungen

$$u_1(0, t) = 0, \alpha_1(0, t) = 0, u_{1,z_1}(l, t) = \alpha_1(l, t), \alpha_{1,z_1}(l, t) = 0 \quad (2.112)$$

für das Ersatzproblem von Balken 1 und

$$u_{2,z_2}(0, t) = \alpha_2(0, t), \alpha_{2,z_2}(0, t) = 0, u_{2,z_2}(l, t) = \alpha_2(l, t), \alpha_{2,z_2}(l, t) = 0 \quad (2.113)$$

für das Ersatzproblem von Balken 2. Zum besseren Verständnis werden für die Ersatzprobleme die Koordinatenbezeichnungen des ursprünglichen Systems gewählt. Einsetzen der Separationsansätze

$$u_j(z_j, t) = T_j(t) U_j(z_j) \quad (j = 1, 2) \quad (2.114)$$

und

$$\alpha_j(z_j, t) = T_j(t) \Phi_j(z_j) \quad (j = 1, 2) \quad (2.115)$$

in die Gleichungen (2.110) bis (2.113) führt mit den Konstanten

$$-\omega_j^2 = \frac{T_{j,tt}}{T_j} \quad (j = 1, 2) \quad (2.116)$$

zu den zugehörigen Eigenwertproblemen

$$-\omega_j^2 \rho A_j U_j + G A_j (\Phi_{j,z_j} - U_{j,z_j z_j}) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.117)$$

$$-\omega_j^2 \rho I_j \Phi_j + G A_j (\Phi_j - U_{j,z_j}) - E I_j \Phi_{j,z_j z_j} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (2.118)$$

$$U_1(0) = 0, \Phi_1(0) = 0, U_{1,z_1}(l) = \Phi_1(l), \Phi_{1,z_1}(l) = 0, \quad (2.119)$$

$$U_{2,z_2}(0) = \Phi_2(0), \Phi_{2,z_2}(0) = 0, U_{2,z_2}(l) = \Phi_2(l), \Phi_{2,z_2}(l) = 0. \quad (2.120)$$

Einsetzen der Exponentialansätze

$$U_j(z_j) = \tilde{U}_j e^{i\gamma_j z_j} \quad (j = 1, 2) \quad (2.121)$$

und

$$\Phi_j(z_j) = \tilde{\Phi}_j e^{i\gamma_j z_j} \quad (j = 1, 2) \quad (2.122)$$

in die Beziehungen (2.117) und (2.118) führt zu den sog. Dispersionsgleichungen

$$\gamma_j^4 - \gamma_j^2 \rho \omega_j^2 \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{G} \right) + \omega_j^2 \left( \frac{\rho^2 \omega_j^2}{EG} - \frac{\rho A_j}{E I_j} \right) = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (2.123)$$

Mit

$$a_j = \frac{\rho \omega_j^2 (E + G)}{2EG} \quad (j = 1, 2) \quad (2.124)$$

und

$$b_j = \frac{\omega_j}{2} \sqrt{\frac{\rho^2 \omega_j^2 (E - G)^2}{E^2 G^2} + \frac{4\rho A_j}{E I_j}} \quad (j = 1, 2) \quad (2.125)$$

erhält man für die Wurzeln in (2.123) die Ergebnisse

$$\begin{aligned} \gamma_{j1} &= \sqrt{b_j + a_j} = s_j, & \gamma_{j2} &= -\sqrt{b_j + a_j} = -s_j, \\ \gamma_{j3} &= i\sqrt{b_j - a_j} = ir_j, & \gamma_{j4} &= -i\sqrt{b_j - a_j} = -ir_j, \end{aligned} \quad (j = 1, 2) \quad (2.126)$$

für

$$b_j > a_j \quad \text{bzw.} \quad \frac{GA_j}{\rho I_j} > \omega_j^2 \quad (j = 1, 2). \quad (2.127)$$

Die Ansätze (2.121), (2.122) führen mit (2.126) auf die allgemeine Lösung

$$U_j(z_j) = C_{j_1} \cosh(r_j z_j) + C_{j_2} \sinh(r_j z_j) + C_{j_3} \cos(s_j z_j) + C_{j_4} \sin(s_j z_j) \quad (j = 1, 2) \quad (2.128)$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_j(z_j) &= C_{j_1} \left( r_j + \frac{\rho \omega_j^2}{G r_j} \right) \sinh(r_j z_j) + C_{j_2} \left( r_j + \frac{\rho \omega_j^2}{G r_j} \right) \cosh(r_j z_j) \\ &\quad - C_{j_3} \left( s_j - \frac{\rho \omega_j^2}{G s_j} \right) \sin(s_j z_j) + C_{j_4} \left( s_j - \frac{\rho \omega_j^2}{G s_j} \right) \cos(s_j z_j) \quad (j = 1, 2) \end{aligned} \quad (2.129)$$

der Differentialgleichungen (2.117) und (2.118). Einsetzen der Lösungen (2.128) und (2.129) (mit  $j = 1$ ) in die Randbedingungen (2.119) liefert schließlich, durch Nullsetzen der Koeffizientendeterminante des entstehenden algebraischen Gleichungssystems, die Eigenwertgleichung zur Bestimmung der Eigenwerte  $\omega_{1_k}$  ( $k = 1.. \infty$ ) des Ersatzproblems von Balken 1. Durch Einsetzen der Lösungen (2.128) und (2.129) (mit  $j = 2$ ) in die Randbedingungen (2.120), erhält man eine entsprechende Gleichung für die Eigenwerte  $\omega_{2_k}$  ( $k = 1.. \infty$ ) des Ersatzproblems von Balken 2. Beide Eigenwertgleichungen werden u.a. in [65] angegeben. Mit den Eigenwerten  $\omega_{j_k}$  ( $j = 1, 2; k = 1, 2, \dots, \infty$ ) können die für die Lösungsansätze (2.106) bis (2.109) gesuchten Koordinatenfunktionen  $U_{j_k}$  und  $\Phi_{j_k}$  ( $j = 1, 2; k = 1, 2, \dots, \infty$ ) bestimmt werden.

Der hier diskutierte Fall  $b_j > a_j$  (siehe Gleichung (2.127)) beschreibt dominante Biegeschwingungen, während der Fall  $b_j < a_j$  dominante Scherschwingungen kennzeichnet. Dieser zweite Fall, der ebenfalls in [65] beschrieben wird, ist allerdings nur bei extrem kurzen und dicken Balken von Bedeutung, bei denen die Anwendbarkeit der Timoshenko-Theorie ohnehin fraglich ist. Bei der Anwendung der hier vorgestellten Theorie auf reale Systeme muss stets sichergestellt sein, dass die Werte  $\omega_{j_k}$  der Ansatzfunktionen  $U_{j_k}$  und  $\Phi_{j_k}$  ( $j = 1, 2; k = 1..N_j$ ) die durch die Bedingungen (2.127) gegebenen Obergrenzen nicht überschreiten.

Durch Einsetzen der Ritz-Ansätze (2.106) bis (2.109) für die Näherungslösungen  $\bar{u}_1(z_1, t)$ ,  $\bar{u}_2(z_2, t)$ ,  $\bar{\alpha}_1(z_1, t)$  und  $\bar{\alpha}_2(z_2, t)$  in die Systemgleichung (2.95) erhält man durch die gewählten Randbedingungen (2.112) und (2.113) der Ersatzprobleme

$$Rb_1 = Rb_2 = 0 \quad (2.130)$$

und

$$\begin{aligned} &\delta \mathbf{q}^T \{ \mathbf{M}(\mathbf{q}, l_L) \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, u_{0,t}, u_{0,tt}, l_A, l_{A,t}, l_{A,tt}, l_L, l_{L,t}, l_{L,tt}, F_R) \} \\ &+ \delta u_0 \{ (m_1 + m_2 + m_L + m_T) u_{0,tt} - f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, l_{L,t}, l_{L,tt}, F_T) \} = 0. \end{aligned} \quad (2.131)$$

In der vorliegenden Arbeit wird zwischen einer "freien Zielfahrt" und einer "gesteuerten Zielfahrt" unterschieden. Bei der "freien Zielfahrt" wird die Positionierung der zu transportierenden Ladeinheit durch eine Bedienperson übernommen, wodurch die Bewegung des Trägerfahrzeuges eine beliebige aber vorgegebene Funktion  $u_0(t)$  der Zeit ist. Damit gilt

$$\delta u_0 = 0 \quad (2.132)$$

und man erhält durch die lineare Unabhängigkeit der verbleibenden Freiheitsgrade  $q_i(t)$  ( $i = 1..(N_1 + N_2)$ ) das gekoppelte, nichtlineare und zeitvariante System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}, l_L)\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, u_{0,t}, u_{0,tt}, l_A, l_{A,t}, l_{A,tt}, l_L, l_{L,t}, l_{L,tt}, F_R) \quad (2.133)$$

zur Beschreibung des dynamischen Systemverhaltens.

Bei der "gesteuerten Zielfahrt" wird dem System eine gewünschte Endlage vorgegeben und sowohl die Positionierung, also die Bewegung des Trägerfahrzeuges, als auch die Schwingungsunterdrückung erfolgen dann durch eine Antriebsregelung. In diesem Fall gilt

$$\delta u_0 \neq 0, \quad (2.134)$$

d.h. es tritt ein weiterer Freiheitsgrad auf, und das System wird durch

$$\widetilde{\mathbf{M}}(\mathbf{q}, l_L) \underbrace{\begin{pmatrix} u_{0,tt} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} = \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, u_{0,t}, l_A, l_{A,t}, l_{A,tt}, l_L, l_{L,t}, l_{L,tt}, F_T) \quad (2.135)$$

beschrieben.

# Kapitel 3

## Validierung des Modells

Die Validierung des Modells basiert auf numerischen Simulationen, die für ein System durchgeführt werden, das durch die folgenden Parameter beschrieben wird:  $l = 1.35\text{m}$ ,  $A_{1,2} = 0.001\text{m}^2$ ,  $I_{1,2} = 0.83 \cdot 10^{-8}\text{m}^4$ ,  $\rho = 7850\text{kg/m}^3$ ,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$ ,  $G = 0.8 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$ ,  $m_L = 17.897\text{kg}$ ,  $m_T = 20\text{kg}$ ,  $a_L = 0.5\text{m}$ ,  $l_S = 0\text{m}$ ,  $c = 10^8\text{N/m}$ ,  $d = 0\text{Ns/m}$ ,  $n = 3$ ,  $g = 9.81\text{m/s}^2$ . Die Werte stammen aus einem geplanten Prüfstand des Instituts für Fördertechnik und Logistiksysteme. Neben der Abbildung aller wesentlichen Merkmale eines Hubgerüsts stand bei der Planung dieses Modells auch eine möglichst gute Handhabbarkeit im Vordergrund, wodurch die einzelnen Parameter deutlich von gängigen Systemparametern fördertechnischer Maschinen abweichen. Beim Ablauf der finanziellen Förderung des gemeinsamen DFG-Projektes war dieser Prüfstand nicht fertiggestellt und stand für Messungen leider nicht zur Verfügung.

### 3.1 Eigenfrequenzvergleich

Für eine Validierung des Modells durch einen Eigenfrequenzvergleich wird das System für unterschiedliche Ausfahrlängen  $l_A$  und  $l_L$  um die jeweilige statische Ruhelage linearisiert und es werden die Eigenfrequenzen berechnet. Als Vergleich werden Modalanalysen an einem entsprechenden FEM-Modell, bestehend aus 5400 SOLID45-Elementen, zwei MASS21-Elementen (Ladeinheit und Trägerfahrzeug) und insgesamt 8976 Knoten, in dem kommerziellen Softwarepaket ANSYS durchgeführt. Auch hier wird die statische Ruhelage durch eine geometrisch-nichtlineare Berechnung bestimmt.

#### 3.1.1 Freie Zielfahrt (FZ)

Zur Generierung der zugrunde liegenden Systemgleichungen (2.133) wird für den Balken 1 ein 4-gliedriger Ansatz ( $N_1 = 4$ ) und für den Balken 2 ein 6-gliedriger Ansatz ( $N_2 = 6$ ) gewählt, wobei sich der 6-gliedrige Ansatz aus zwei Starrkörpermoden und 4 flexiblen Moden zusammensetzt. Die Berechnungen erfolgen bei festgehaltenem Trägerfahrzeug ( $u_0 = u_{0,t} = u_{0,tt} = 0$ ).

Die ersten 7 Eigenfrequenzen des hier vorgestellten Modells (2.133) und des FEM-Modells werden in den Abbildungen 3.1 bis 3.7 über der Ausfahrlänge  $l_T = l_A + l_L$  (mit  $l_A = 0$  für  $0 \leq l_L < l$ ) im 5cm-Schritten aufgetragen. Die Abbildung 3.1 zeigt, dass die erste Eigenfrequenz über die gesamte Ausfahrlänge  $l_L$  nahezu identisch zu den

Vergleichswerten aus der FEM-Berechnung ist. Auch die höheren Frequenzen stimmen in den Abbildungen 3.2 bis 3.7 sehr gut mit den Vergleichswerten überein, wobei die Frequenzen des hier vorgestellten Modells, bedingt durch die Diskretisierung mit nur 10 Ansatzfunktionen, stets über den Werten des deutlich feiner diskretisierten FEM-Modells liegen. Durch eine Steigerung der Anzahl der Ansatzfunktionen ( $N_1$  und  $N_2$ ) ist es möglich, das reale Systemverhalten noch genauer abzubilden.

Die  $n = 3$  Kontaktbedingungen stellen streng genommen eine Reduktion der Freiheitsgrade des Systems von 10 auf 7 dar. Durch die Formulierung des Kontaktes über Federelemente bleiben diese 3 Freiheitsgrade jedoch bestehen. Die mit diesen verbleibenden Freiheitsgraden verbundenen Eigenfrequenzen und -formen haben allerdings keine physikalische Bedeutung und liegen durch die sehr hoch gewählte Steifigkeit in den Kontaktpunkten deutlich über der 8., 9. und 10. Eigenfrequenz des betrachteten FEM-Modells.

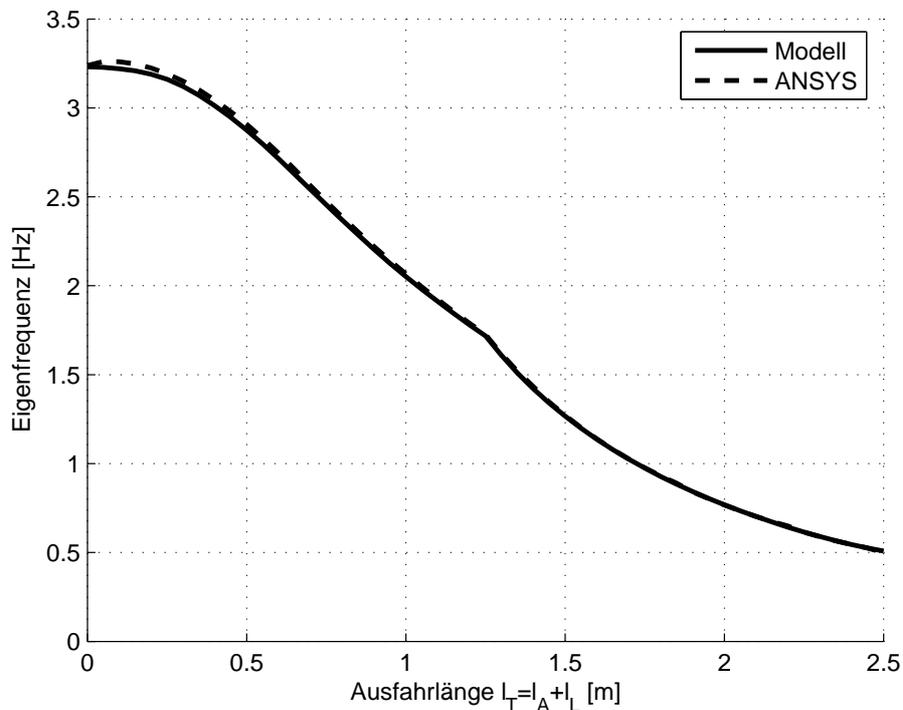


Abbildung 3.1: Vergleich der 1. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

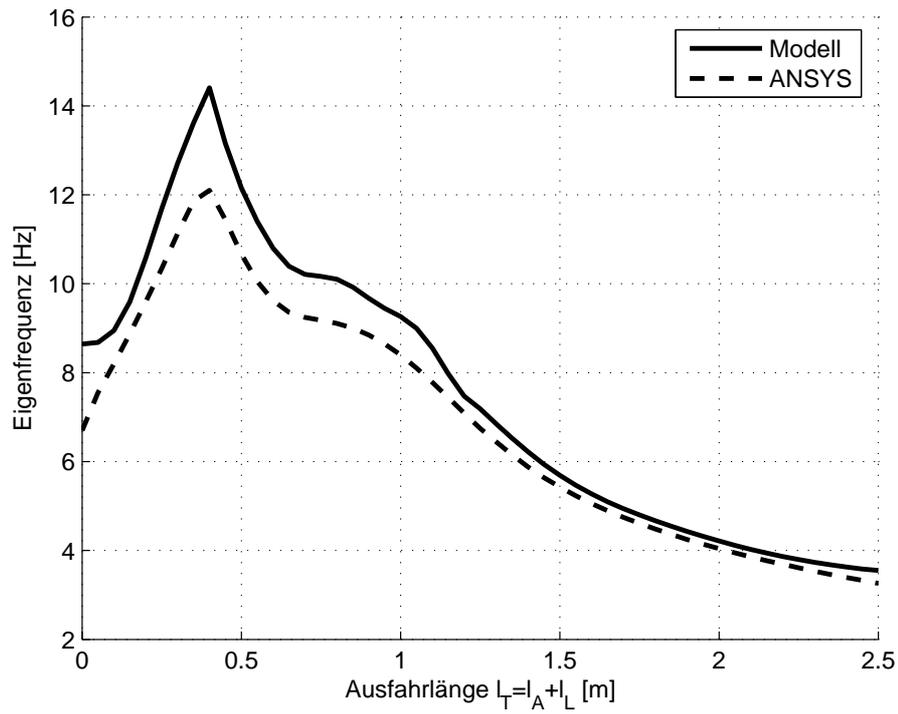


Abbildung 3.2: Vergleich der 2. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

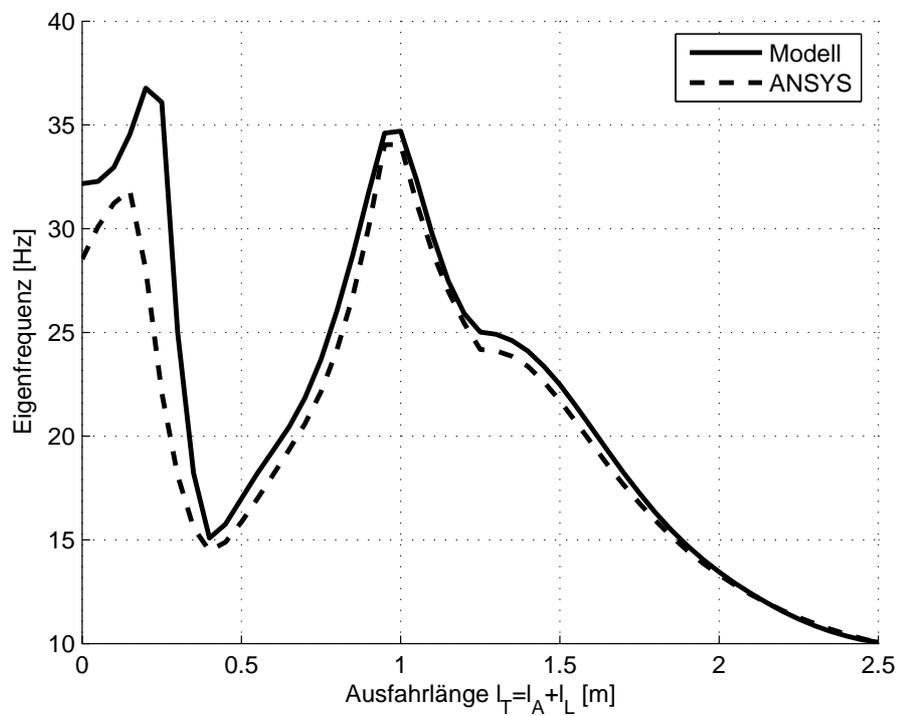


Abbildung 3.3: Vergleich der 3. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

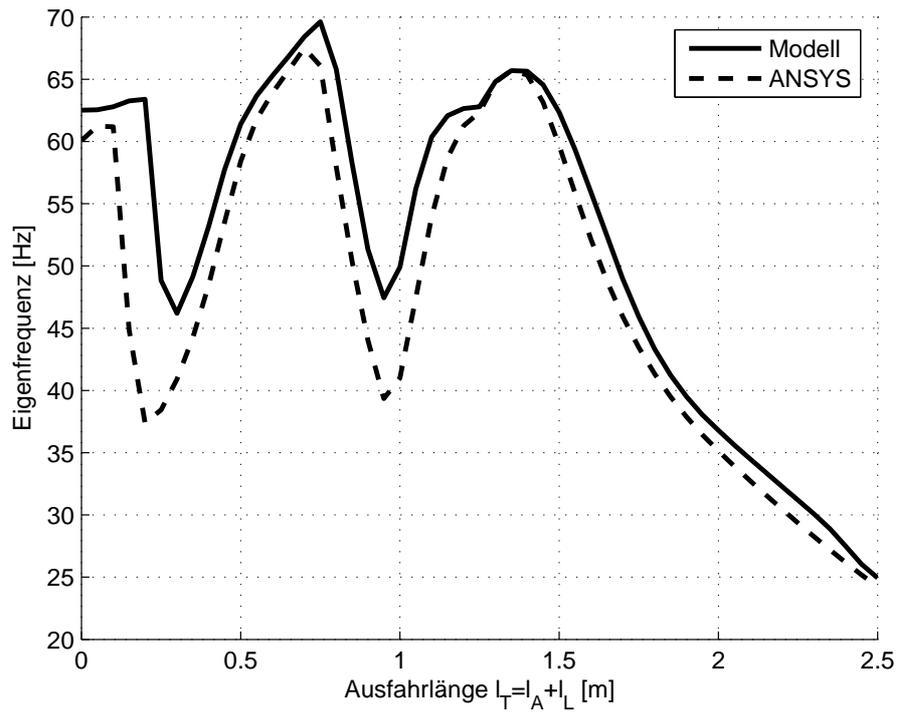


Abbildung 3.4: Vergleich der 4. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

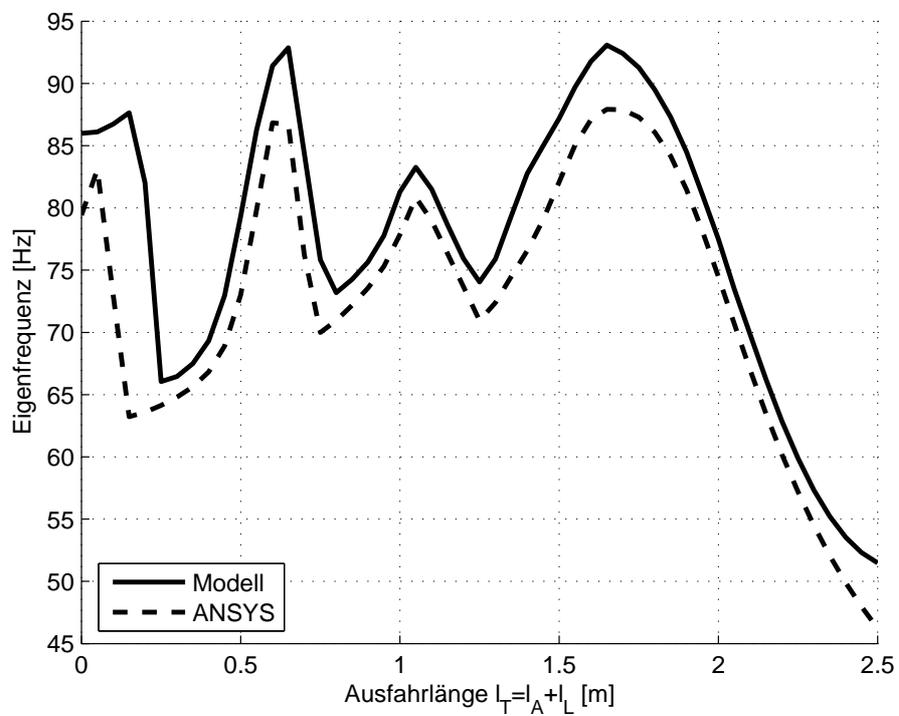


Abbildung 3.5: Vergleich der 5. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

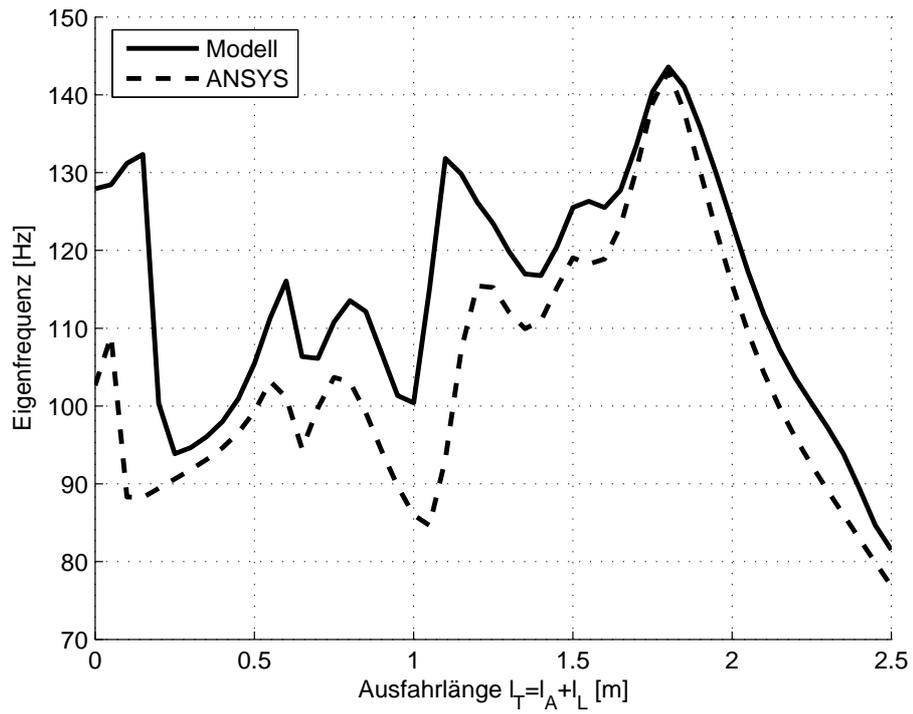


Abbildung 3.6: Vergleich der 6. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

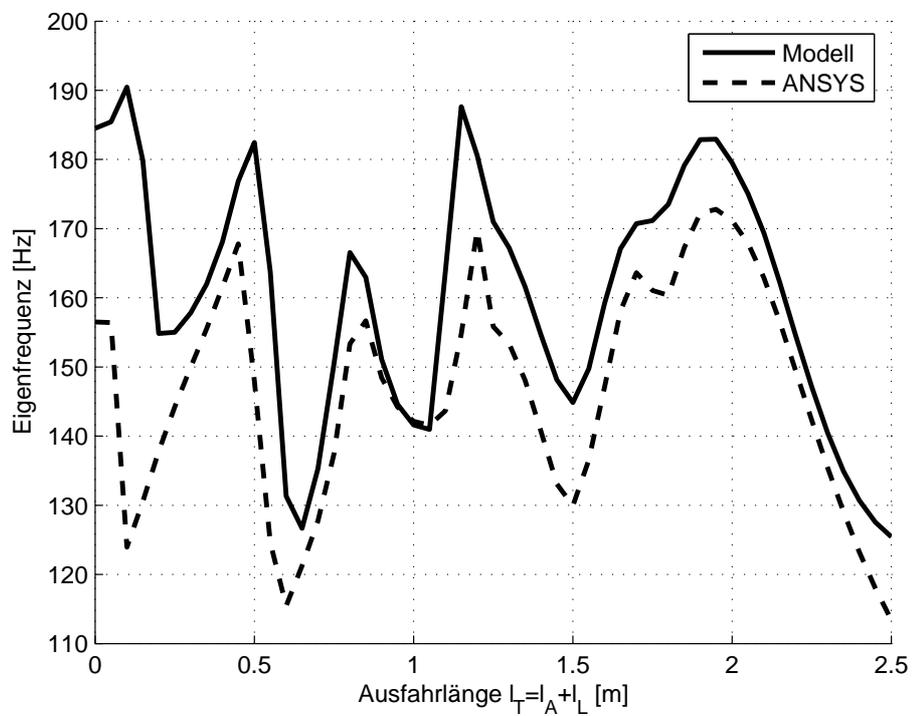


Abbildung 3.7: Vergleich der 7. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ)

### 3.1.2 Gesteuerte Zielfahrt (GZ)

Zur Generierung der zugrunde liegenden Systemgleichungen (2.135) wird für den Balken 1 ein 3-gliedriger Ansatz ( $N_1 = 3$ ) und für den Balken 2 ein 5-gliedriger Ansatz ( $N_2 = 5$ ) gewählt, wobei sich der 5-gliedrige Ansatz aus zwei Starrkörpermoden und 3 flexiblen Moden zusammensetzt. Zusammen mit der Koordinate  $u_0$  für die Bewegung des Trägerfahrzeuges hat das System 9 Freiheitsgrade. Von den zugehörigen 9 Eigenfrequenzen ist eine gleich null (Starrkörperbewegung) und 3 werden durch die gewählte Kontaktformulierung zu hohen Werten verschoben und haben keine physikalische Bedeutung. Die verbleibenden 5 Eigenfrequenzen des hier vorgestellten Modells (2.135) und des entsprechenden FEM-Modells werden in den Abbildungen 3.8 bis 3.12 über der Ausfahrlänge  $l_T = l_A + l_L$  (mit  $l_A = 0$  für  $0 \leq l_L < l$ ) im 5cm-Schritten aufgetragen. Wie bei der "freien Zielfahrt" ist auch hier ein sehr gutes Übereinstimmen der Ergebnisse zu erkennen.

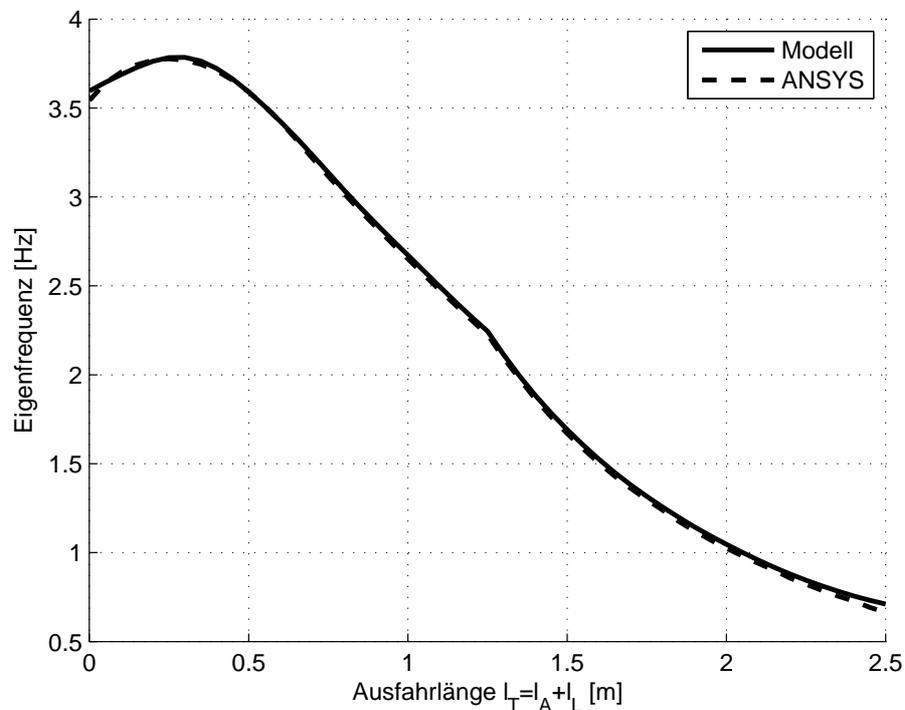


Abbildung 3.8: Vergleich der 1. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ)

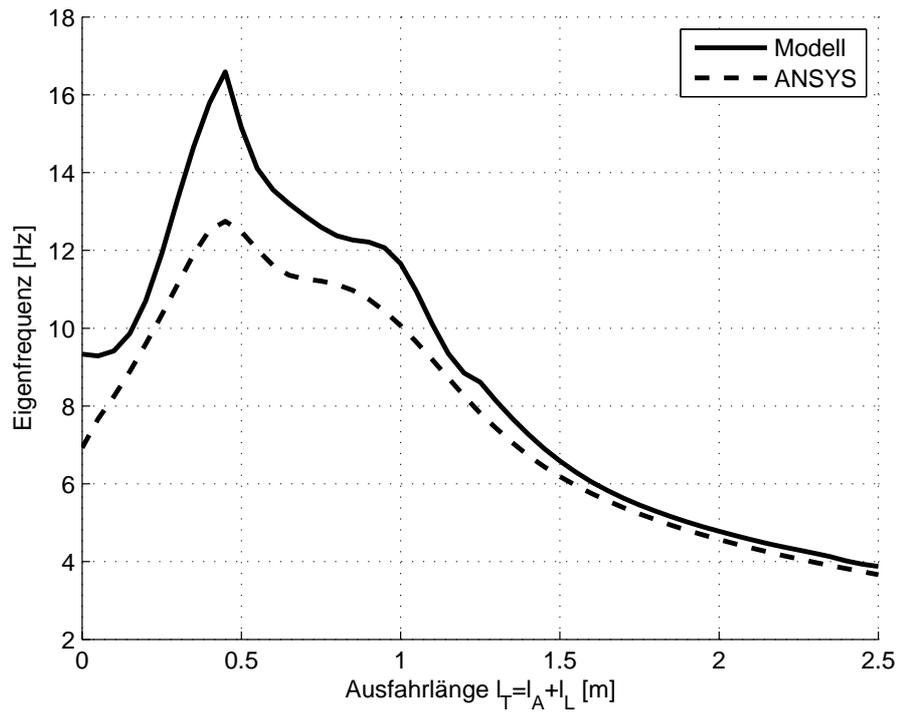


Abbildung 3.9: Vergleich der 2. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ)

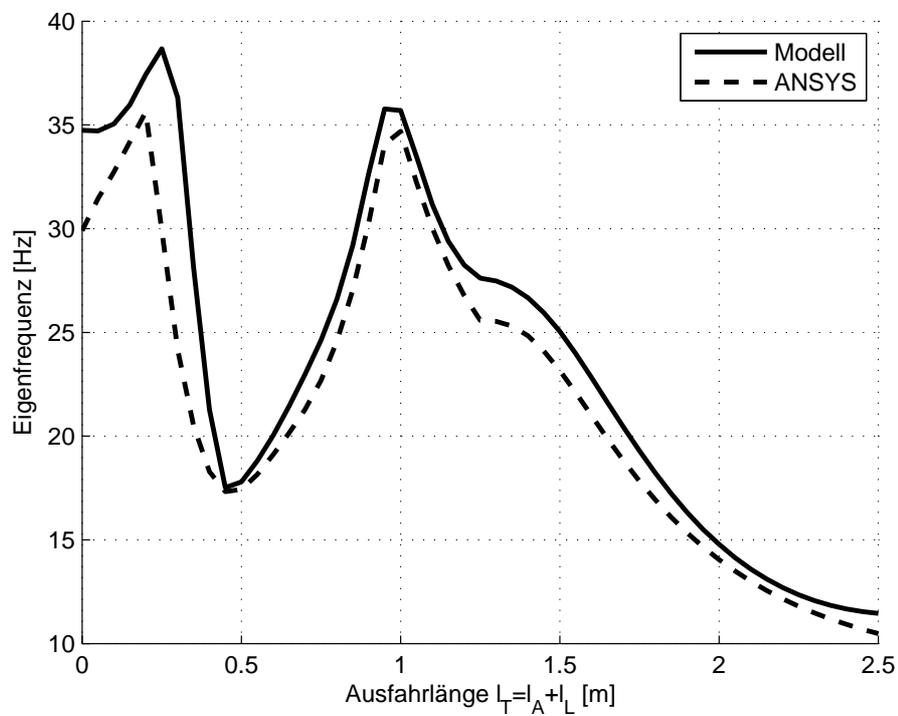


Abbildung 3.10: Vergleich der 3. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ)

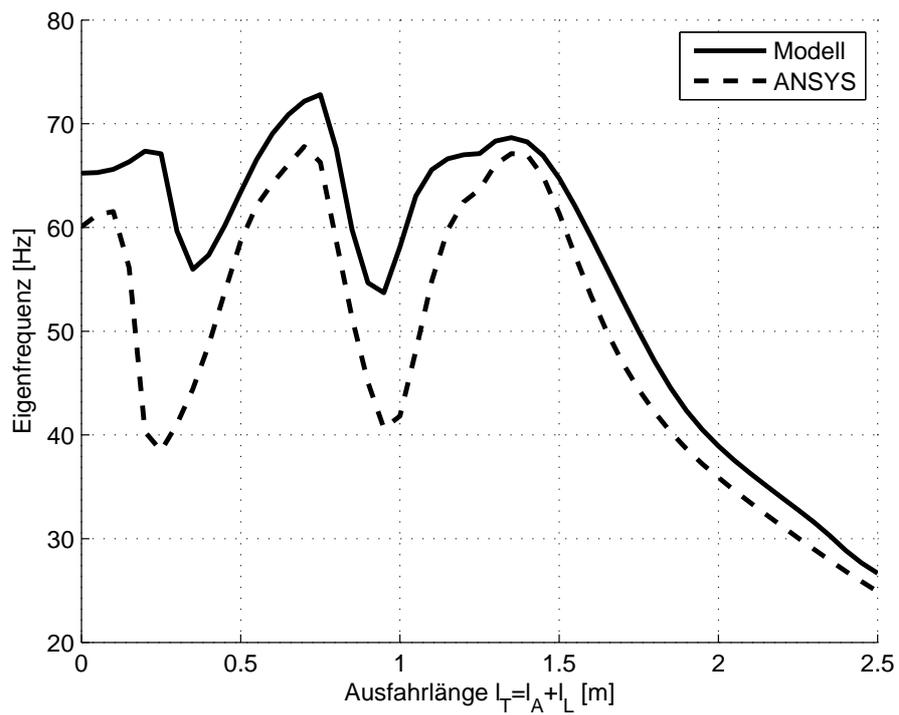


Abbildung 3.11: Vergleich der 4. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ)

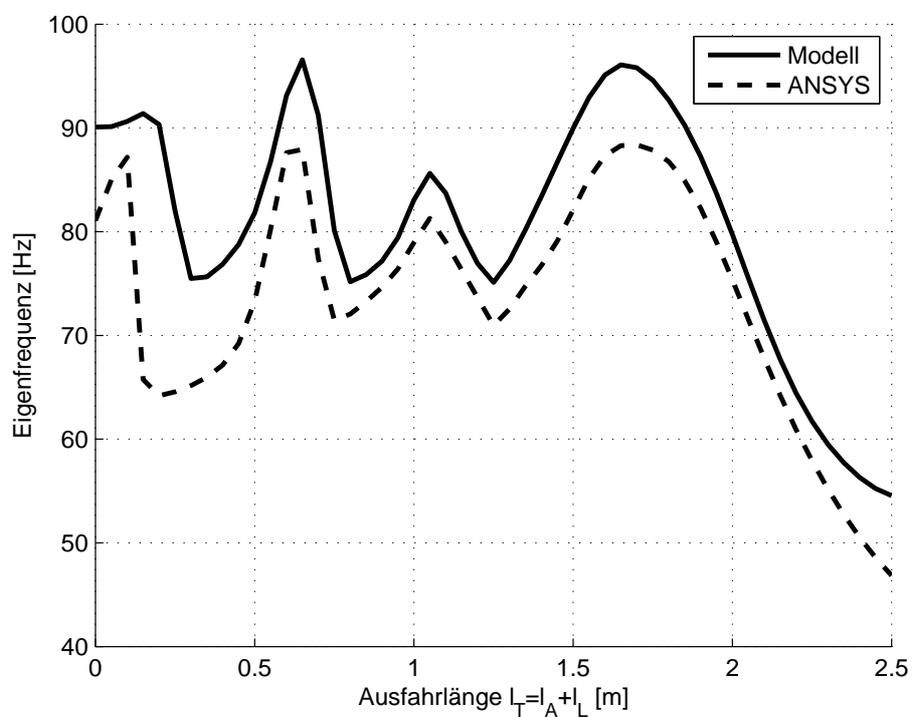


Abbildung 3.12: Vergleich der 5. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ)

### 3.2 Einfluss der Exzentrizität der Ladeinheit

Die Ergebnisse der im Folgenden durchgeführten Untersuchungen zum Einfluss der Exzentrizität der Ladeinheit und der Vorspannung sowie zum Auftreten doppelter Eigenwerte stimmen qualitativ für beide Arten der Zielfahrt überein. Die präsentierten Ergebnisse basieren auf dem Modell (2.133) für die "freie Zielfahrt".

Der Einfluss der Exzentrizität der Ladeinheit ( $a_L$ ) auf das Systemverhalten soll in den Abbildungen 3.13 bis 3.19 verdeutlicht werden. Durch das exzentrische Anbringen der Ladeinheit wird, über den Steinerschen Anteil, ein zusätzliches Massenträgheitsmoment in das System eingeführt, wodurch die Eigenfrequenzen sinken und unter den Eigenfrequenzen eines Systems ohne Exzentrizität liegen. In den Abbildungen 3.14 bis 3.19 stimmen die Eigenfrequenzen der beiden betrachteten Systeme offenbar an unterschiedlichen diskreten Stellen überein. Dieser Tatbestand beruht darauf, dass die Eigenformen, welche die Verdrehung der Balkenquerschnitte beschreiben, an diesen Stellen einen Knoten haben, und somit der Einfluss des zusätzlichen Massenträgheitsmomentes verschwindet.

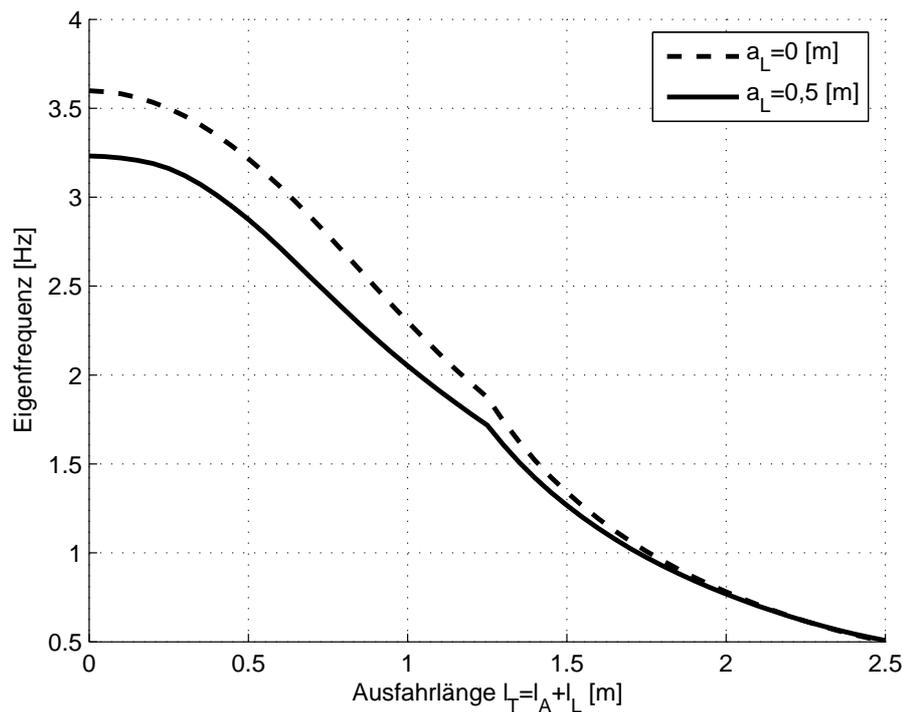
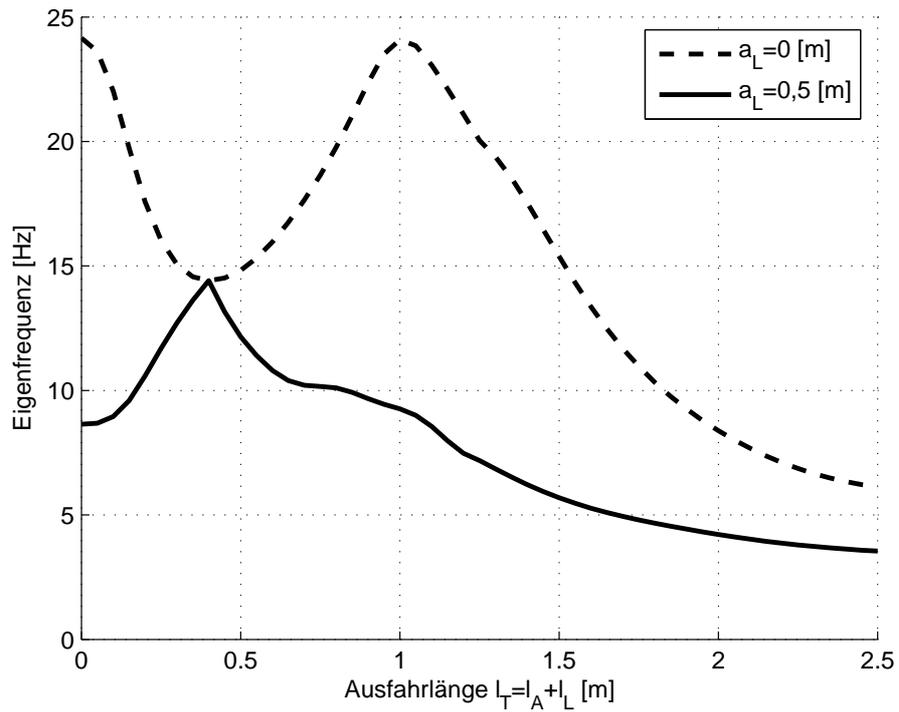
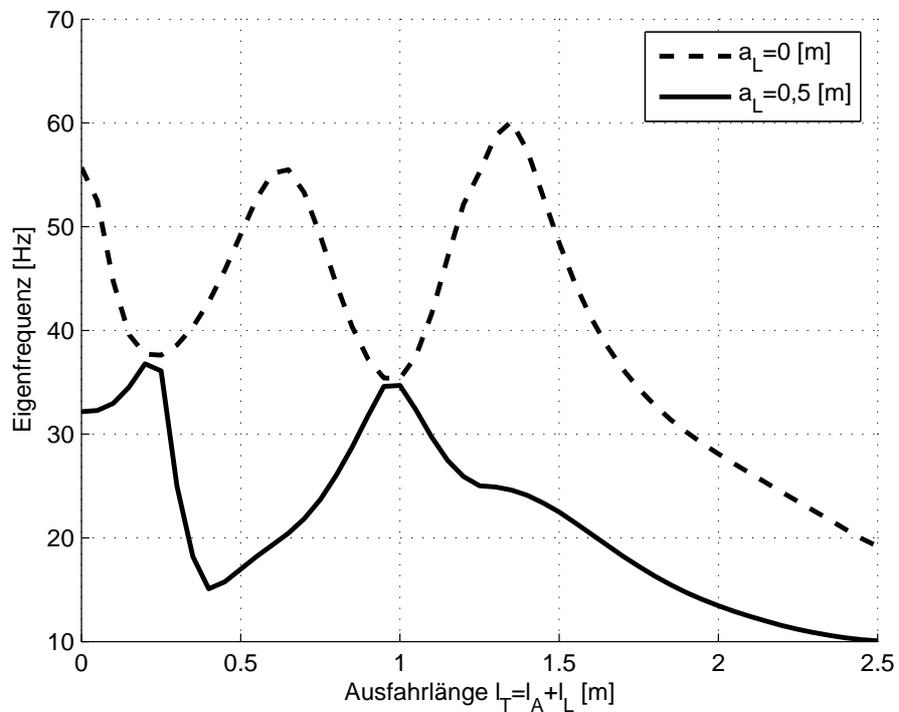
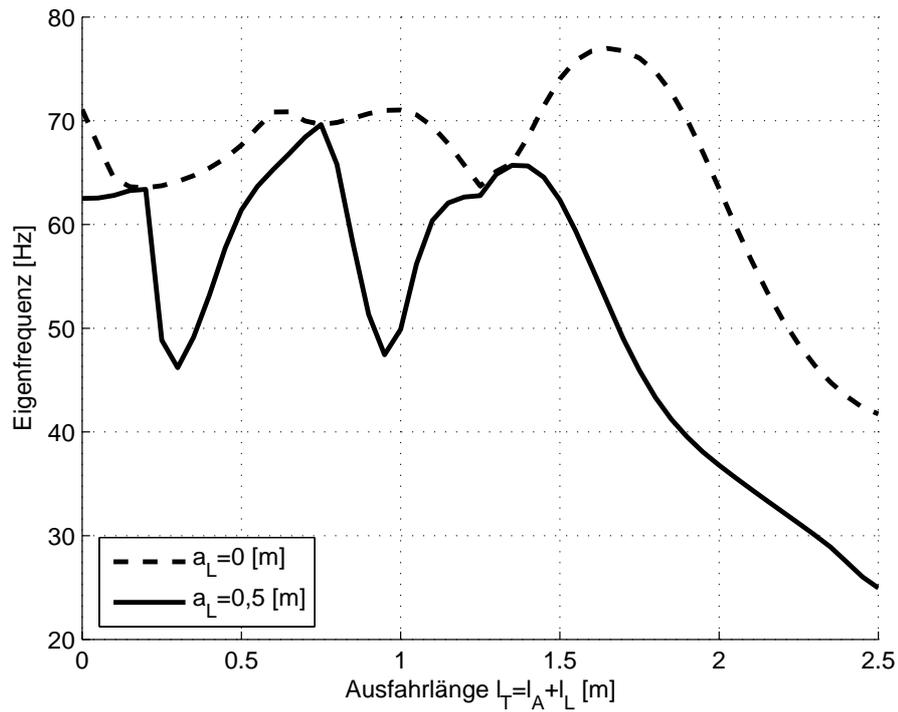
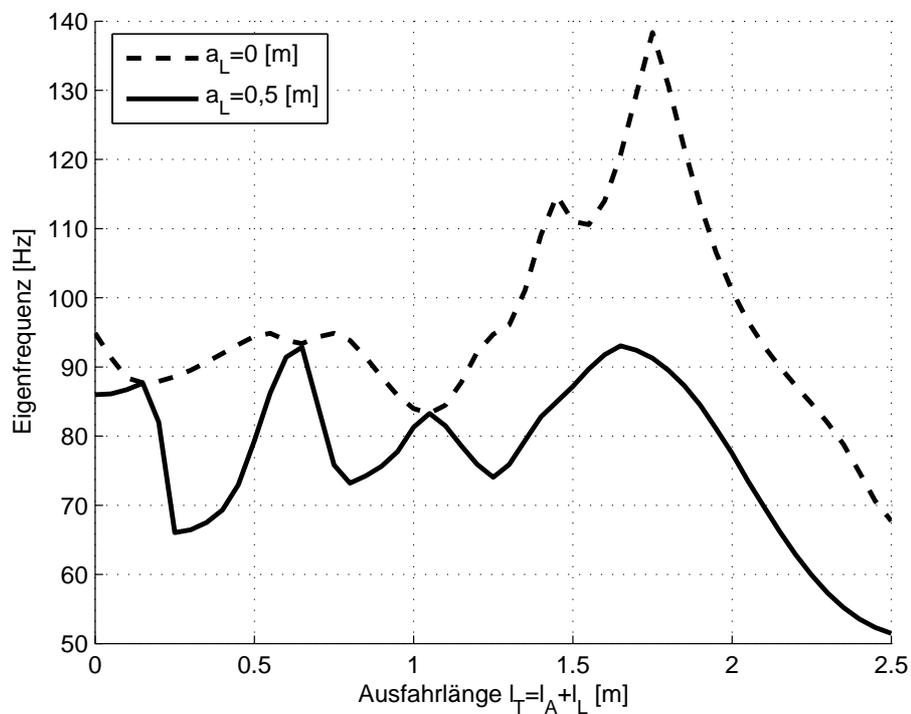
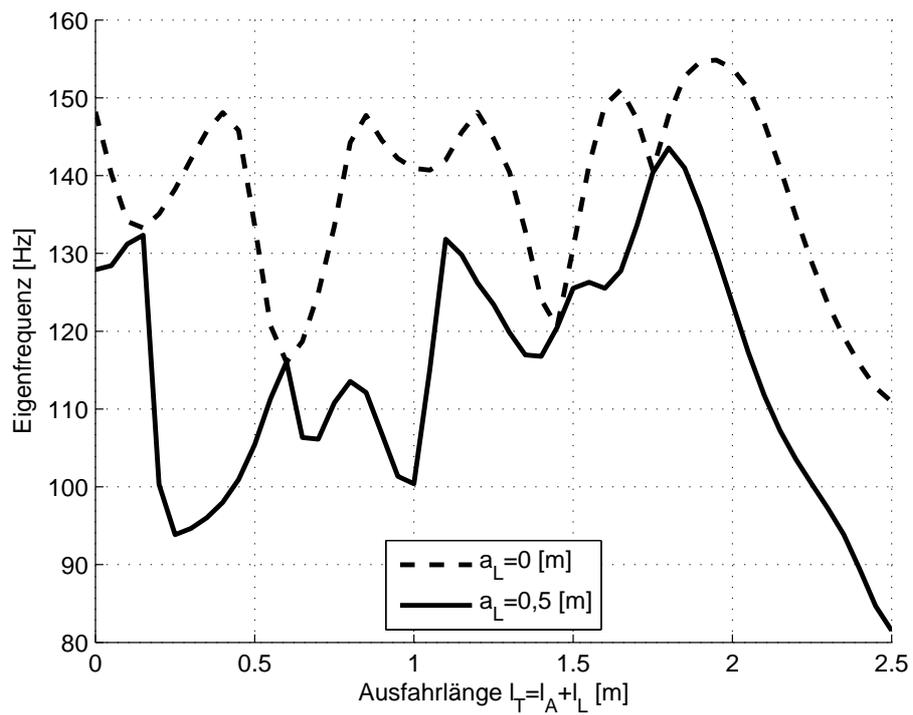
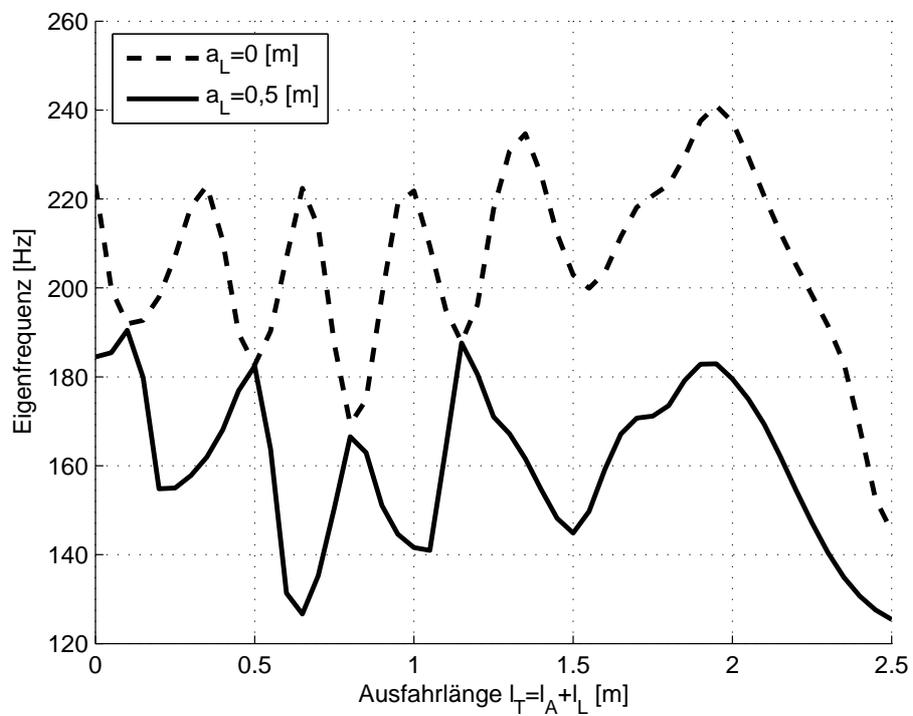


Abbildung 3.13: Vergleich der 1. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$

Abbildung 3.14: Vergleich der 2. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0,5\text{m}$ Abbildung 3.15: Vergleich der 3. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0,5\text{m}$

Abbildung 3.16: Vergleich der 4. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0,5\text{m}$ Abbildung 3.17: Vergleich der 5. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0,5\text{m}$

Abbildung 3.18: Vergleich der 6. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0,5\text{m}$ Abbildung 3.19: Vergleich der 7. Eigenfrequenz:  $a_L = 0\text{m}/a_L = 0,5\text{m}$

### 3.3 Einfluss der Vorspannung

Die Vorspannung durch das Eigengewicht der beiden Segmente und durch das Gewicht der zu transportierenden Ladeeinheit bewirkt eine Absenkung der Eigenfrequenzen, sowohl für ein System mit exzentrischer Ladeeinheit (Abbildung 3.20), als auch für ein System ohne Exzentrizität (Abbildung 3.21). Durch die Wahl der Systemparameter ist der Einfluss der Schwerkraft auf das hier betrachtete System recht gering und für höhere Frequenzen gar vernachlässigbar. Bei entsprechender Wahl der Parameter ist allerdings ein beliebiges Absenken der ersten Eigenfrequenz möglich, wobei ein Null-durchgang Instabilität durch Knicken und somit ein Versagen des Systems beschreibt.

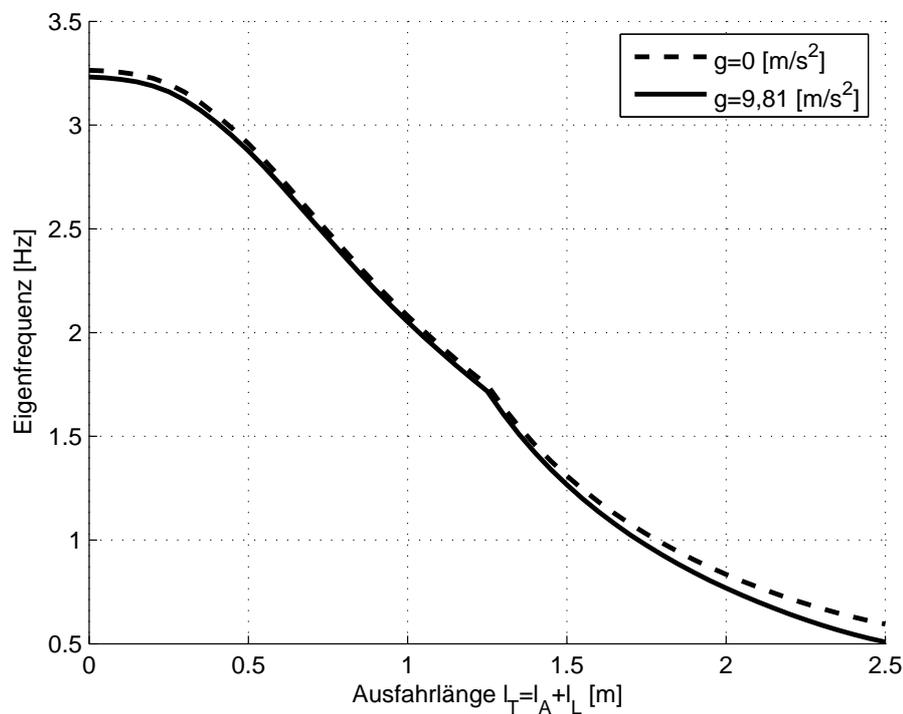
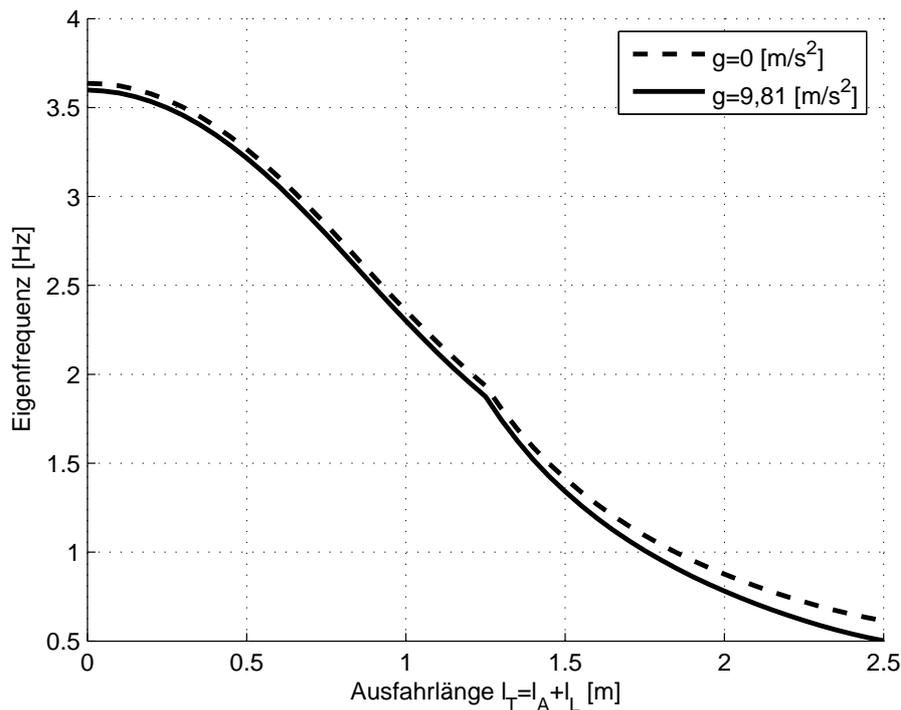
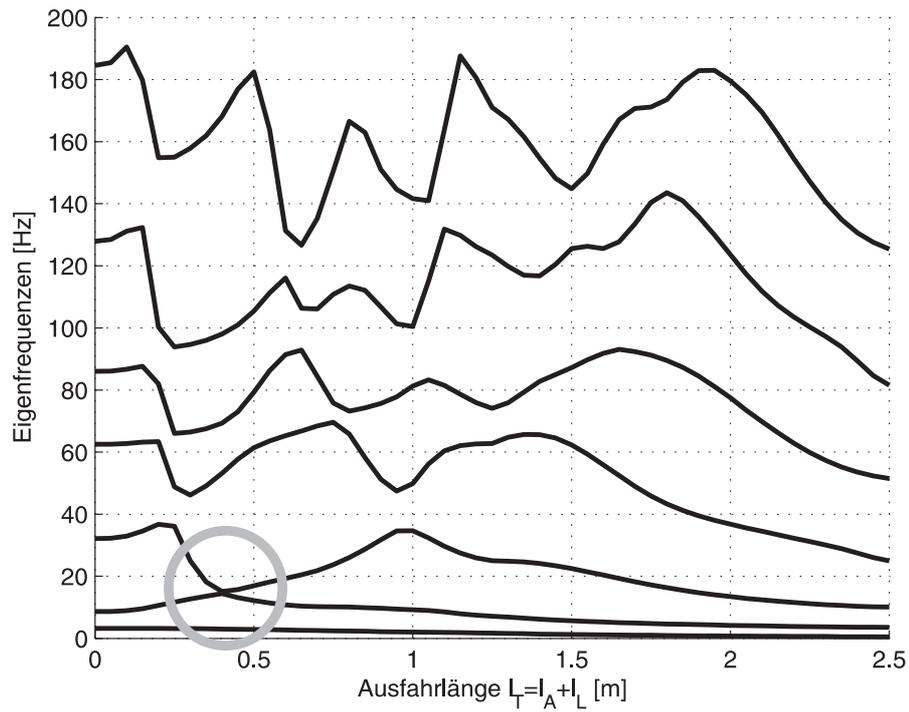
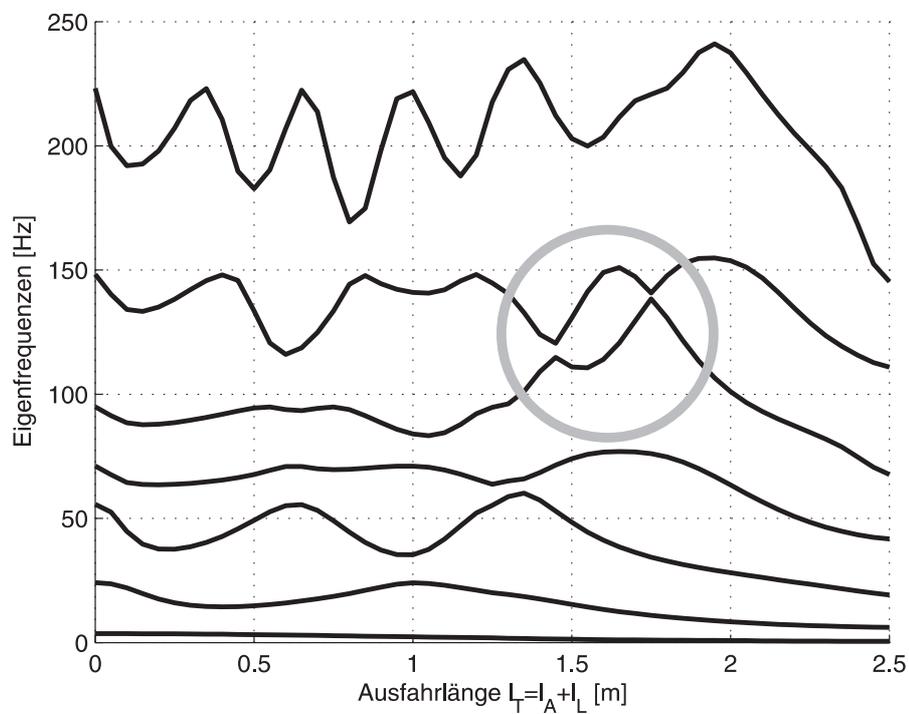


Abbildung 3.20: Einfluss der Vorspannung:  $a_L = 0.5\text{m}$

Abbildung 3.21: Einfluss der Vorspannung:  $a_L = 0\text{m}$ 

### 3.4 Doppelte Eigenwerte

Die Abbildungen 3.22 und 3.23 zeigen den Verlauf der ersten 7 Eigenfrequenzen über der Ausfahrlänge  $l_T$  mit exzentrischer ( $a_L = 0.5\text{m}$ ) und nicht exzentrischer ( $a_L = 0\text{m}$ ) Ladeeinheit. In den mit einem grauen Kreis markierten Bereichen schneiden sich offensichtlich zwei Eigenfrequenz-Verläufe, so dass an diesen Stellen zusammenfallende Eigenfrequenzen auftreten. (Anm.: Auch in anderen als den hier markierten Bereichen kann es Überschneidungen der Eigenfrequenz-Verläufe geben. Durch die hier gewählte Auflösung der Ausfahrlänge in 5cm-Schritte kann diese Aussage jedoch nicht verifiziert werden, was für die weitere Arbeit aber auch nicht von Interesse ist.) Durch die Tatsache, dass bei dem vorliegenden System die Massen- und die Steifigkeitsmatrix stets reell und symmetrisch sind und dass die Massenmatrix stets positiv definit ist, ist sichergestellt, dass für Eigenwerte mit der Vielfachheit  $n_e$  die Konstruktion von  $n_e$  unabhängigen, zur Massenmatrix orthogonalen Eigenvektoren mit jeweils beliebigem Betrag möglich ist [76]. Dies bedeutet, dass zu jeder doppelt auftretenden Eigenfrequenz zwei verschiedene Eigenformen gehören. Jede Linearkombination der beiden Eigenformen ist dann ebenfalls eine Eigenform, die der gleichen Eigenfrequenz zugeordnet ist (siehe auch [29]).

Abbildung 3.22: Verlauf der ersten 7 Eigenfrequenzen:  $a_L = 0.5\text{m}$ Abbildung 3.23: Verlauf der ersten 7 Eigenfrequenzen:  $a_L = 0\text{m}$

# Kapitel 4

## Aktive Schwingungsunterdrückung

In diesem Kapitel werden Methoden untersucht, mit denen das dynamische Verhalten spielbehafteter Systeme mit verschiebbaren, flexiblen Segmenten aktiv beeinflusst werden kann. Durch eine aktive Unterdrückung der im Betrieb auftretenden Schwingungen sollen die Leistungsfähigkeit und die Sicherheit der betrachteten Maschinen gesteigert werden. Es wird zwischen einer "freien Zielfahrt", beschrieben durch die Systemgleichungen (2.133), und einer "gesteuerten Zielfahrt" mit den zugehörigen Bewegungsgleichungen (2.135) unterschieden.

### 4.1 Freie Zielfahrt (FZ)

Bei der "freien Zielfahrt" übernimmt eine Bedienperson die Positionierung der Ladeeinheit, wodurch die Bewegung des Trägerfahrzeuges als Funktion der Zeit vorgeschrieben wird. Zur Schwingungsunterdrückung wird ein geregeltes Aktor-Sensor Paar in das System integriert, wobei der Aktor zwischen dem unteren Segment (Balken 1) und dem Trägerfahrzeug angebracht wird und mit der geregelten Kraft  $F_R$  an der Stelle  $z_1 = l_R$  auf das untere Segment und auf das Trägerfahrzeug wirkt. In diesem Kapitel wird also davon ausgegangen, dass die Bewegung des Trägerfahrzeuges nicht durch das dynamische Verhalten des flexiblen Aufbaus beeinflusst wird, der Antrieb somit hinreichend stark ist, jede Vorgabe  $u_0(t)$  zu realisieren.

Ausgangspunkt für eine aktive Schwingungsunterdrückung sind die gekoppelten, nicht-linearen und zeitvarianten, gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.133), die das dynamische Verhalten des mechanischen Systems beschreiben. Für konstante Ausfahrlängen  $l_A = konst.$ ,  $l_L = konst.$ , konstante Geschwindigkeit des Trägerfahrzeuges  $u_{0,t} = konst.$  und mit  $F_R = 0$  stellt (2.133) ein gekoppeltes, nichtlineares aber zeitinvariantes System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar, für das eine statische Ruhelage  $\mathbf{q}_0$  berechnet werden kann. Linearisierung um  $\mathbf{q}_0$  und die anschließende Koordinatentransformation  $\mathbf{q}_l = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0$  führen auf das lineare und zeitinvariante System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_l + \mathbf{C}\mathbf{q}_l = \mathbf{b}_R^* F_R + \mathbf{b}_0^* u_{0,tt} \quad (4.1)$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$ . Die Verschiebung an der Stelle  $z_1 = l_M$ , die im Folgenden durch einen Sensor gemessen werden soll, wird durch

$$\bar{u}_1(l_M, t) = [U_{1_1}(l_M), \dots, U_{1_{N_1}}(l_M), 0, \dots, 0] (\mathbf{q}_l + \mathbf{q}_0) = \mathbf{c}_M^{*T} \mathbf{q}_l + u_{M_0} \quad (4.2)$$

ausgedrückt.

### 4.1.1 Modellreduktion

Durch die Wahl von  $N_1$  und  $N_2$  kann die Zahl der Freiheitsgrade systematisch variiert werden. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  (siehe Gl. (2.133) oder (2.135)) und alle übrigen (nichtlinearen) Einflüsse wie Steifigkeit, Kontakt, etc. werden systematisch erfasst. Die (teilweise willkürliche) Formulierung im Rahmen einer physikalischen Diskretisierung durch starre Körper und Federn (siehe z.B. [27] oder [48]) entfällt. Gleichung (4.1) stellt ein lineares, zeitinvariantes System mit  $N_1 + N_2$  Freiheitsgraden dar. Ziel einer Modellreduktion ist es, für ein gegebenes Modell mit einer großen Anzahl an Freiheitsgraden ein reduziertes System zu finden, das das ursprüngliche Verhalten in einem bestimmten Frequenzbereich möglichst gut abbildet. Für dieses Vorhaben wird (4.1) zunächst über die Koordinatentransformation

$$\mathbf{q}_l = \Theta \mathbf{y} \quad (4.3)$$

auf modale Koordinaten  $\mathbf{y}$  umgeformt. Die  $(N_1 + N_2) \times (N_1 + N_2)$ -Matrix  $\Theta$  wird Modalmatrix genannt. Ihre Spalten werden von den reellen, zur Massenmatrix und zur Steifigkeitsmatrix orthogonalen Eigenvektoren  $\boldsymbol{\theta}_i$  ( $i = 1..N_1 + N_2$ ) des Systems (4.1) gebildet, wobei zweckmäßig eine Sortierung nach den zugehörigen Eigenkreisfrequenzen  $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{N_1+N_2}$  erfolgt. Die Normierung der Eigenvektoren und die Orthogonalitätseigenschaften werden durch

$$\Theta^T \mathbf{M} \Theta = \mathbf{I} \quad (4.4)$$

und

$$\Theta^T \mathbf{C} \Theta = \text{diag}(\omega_i^2) = \mathbf{\Omega} \quad (4.5)$$

zusammengefasst, wobei  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix und  $\mathbf{\Omega}$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte des Systems (4.1) ist. Einsetzen der Transformation (4.3) in die Bewegungsgleichung (4.1) und Multiplikation von links mit der Transponierten der Modalmatrix liefert

$$\underbrace{\Theta^T \mathbf{M} \Theta}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\Theta^T \mathbf{C} \Theta}_{\mathbf{\Omega}} \mathbf{y} = \underbrace{\Theta^T \mathbf{b}_R^*}_{\mathbf{b}_R^{**}} F_R + \underbrace{\Theta^T \mathbf{b}_0^*}_{\mathbf{b}_0^{**}} u_{0,tt}. \quad (4.6)$$

Für die Verschiebung an der Stelle  $z_1 = l_M$  erhält man

$$\bar{u}_1(l_M, t) = \mathbf{c}_M^{*T} \Theta \mathbf{y} + u_{M_0} = \mathbf{c}_M^{**T} \mathbf{y} + u_{M_0}. \quad (4.7)$$

Eine im Bereich der Technischen Mechanik gängige Art der Modellreduktion ist die so genannte modale Reduktion. Hierbei werden aus der Modalmatrix  $\Theta$  diejenigen Eigenvektoren  $\theta_i$  ( $i = N_r + 1 \dots N_1 + N_2$ ) entfernt, die zu den  $N_h = N_1 + N_2 - N_r$  höchsten Eigenwerten des Systems gehören. Mit der reduzierten  $(N_1 + N_2) \times N_r$ -Modalmatrix  $\Theta_r$  und der Koordinatentransformation

$$\mathbf{q}_l = \Theta_r \mathbf{y}_r \quad (4.8)$$

erhält man für das auf  $N_r$  Freiheitsgrade reduzierte Modell

$$\ddot{\mathbf{y}}_r + \Omega_r \mathbf{y}_r = \mathbf{b}_{Rr}^{**} F_R + \mathbf{b}_{0r}^{**} u_{0,tt} \quad (4.9)$$

und für die Verschiebung an der Stelle  $z_1 = l_M$

$$\bar{u}_1(l_M, t) = \mathbf{c}_M^{*T} \Theta_r \mathbf{y}_r + u_{M_0} = \mathbf{c}_{Mr}^{**T} \mathbf{y}_r + u_{M_0}. \quad (4.10)$$

Die Zustandsform von (4.9) lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_r \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\Omega_r & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}_r \\ \dot{\mathbf{y}}_r \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{Rr}^{**} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_R} F_R + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{0r}^{**} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_0} u_{0,tt}, \quad (4.11)$$

so dass  $\bar{u}_1(l_M, t)$  gemäß (4.10) über

$$\bar{u}_1(l_M, t) = \underbrace{\left[ \mathbf{c}_{Mr}^{**T}, 0, \dots, 0 \right]}_{\mathbf{c}_M^T} \mathbf{z} + u_{M_0} \quad (4.12)$$

auszudrücken ist.

Eine in der Regelungstechnik häufig verwendete Art der Modellreduktion basiert ebenfalls auf den in modalen Koordinaten formulierten Systemgleichungen (4.6). Eine Unterteilung der Koordinaten  $\mathbf{y}$  in einen tieffrequenten Anteil  $\mathbf{y}_r$  und einen hochfrequenten Anteil  $\mathbf{y}_h$  führt auf

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Omega_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_r \\ \mathbf{y}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{Rr}^{**} \\ \mathbf{b}_{Rh}^{**} \end{pmatrix} F_R + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0r}^{**} \\ \mathbf{b}_{0h}^{**} \end{pmatrix} u_{0,tt} \quad (4.13)$$

mit der Verschiebung an der Stelle  $z_1 = l_M$

$$\bar{u}_1(l_M, t) = \mathbf{c}_{Mr}^{**T} \mathbf{y}_r + \mathbf{c}_{Mh}^{**T} \mathbf{y}_h + u_{M_0}. \quad (4.14)$$

Die Modellreduktion erfolgt hier durch ein Vernachlässigen der modalen Massen der hochfrequenten Moden gegenüber den zugehörigen modalen Steifigkeiten:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_r \\ \mathbf{y}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{Rr}^{**} \\ \mathbf{b}_{Rh}^{**} \end{pmatrix} F_R + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0r}^{**} \\ \mathbf{b}_{0h}^{**} \end{pmatrix} u_{0,tt}. \quad (4.15)$$

Die reduzierten Systemgleichungen lauten in Zustandsform

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}_R F_R + \mathbf{b}_0 u_{0,tt} \quad (4.16)$$

und unterscheiden sich nicht von den modal reduzierten Gleichungen (4.11). Der Ausdruck für die Verschiebung

$$\bar{u}_1(l_M, t) = \mathbf{c}_M^T \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{c}_{Mh}^{**T} \boldsymbol{\Omega}_h^{-1} \mathbf{b}_{Rh}^{**}}_{d_R} F_R + \underbrace{\mathbf{c}_{Mh}^{**T} \boldsymbol{\Omega}_h^{-1} \mathbf{b}_{0h}^{**}}_{d_0} u_{0,tt} + u_{M_0} \quad (4.17)$$

an der Stelle  $z_1 = l_M$  ist gegenüber dem Ausdruck (4.12) um zwei Durchgriffsterme erweitert.

Die Unterschiede zwischen den Modellgleichungen (4.11) mit (4.12) und (4.16) mit (4.17) werden im Folgenden an einem Beispiel erläutert. Abbildung 4.1 vergleicht die Vergrößerungsfunktion eines nicht reduzierten Systems mit derjenigen des entsprechenden modal reduzierten Systems. Als Systemparameter werden die numerischen Werte aus Kapitel 3 mit zusätzlich  $l_T = 2\text{m}$ ,  $l_R = l_M = l/2 = 0.675\text{m}$ ,  $u_{0,tt} = 0\text{m/s}^2$  und  $N_r = 2$  gewählt. Während die ersten beiden Eigenfrequenzen des reduzierten Modells genau mit denen des nicht reduzierten Systems übereinstimmen, weicht die Nullstelle deutlich von der ersten Nullstelle des ursprünglichen Systems ab. Abbildung 4.2 vergleicht die Vergrößerungsfunktion eines "mit Durchgriff" reduzierten Modells mit derjenigen des nicht reduzierten Modells. Anders als das modal reduzierte System besitzt dieses Modell zwei Nullstellen, die beide sehr gut mit den ersten beiden Nullstellen des ursprünglichen Systems übereinstimmen. Die Eigenfrequenzen stimmen mit denjenigen des modal reduzierten und des ursprünglichen Modells genau überein.

Während das dynamische Verhalten eines mechanischen Systems in erster Linie durch die Lage der Eigenfrequenzen beeinflusst wird, spielt die Lage der Nullstellen bei der Auslegung einer aktiven Regelung eine wichtige Rolle [54], was im Folgenden an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden soll. Für das den Vergrößerungsfunktionen gemäß Abbildung 4.1 und 4.2 zugrunde liegende System soll eine aktive Regelung zur Schwingungsunterdrückung entwickelt werden. Hierzu soll die von dem Sensor gemessene Verschiebung über einen (idealen) PD-Regler zurückgeführt werden. Die Auslegung des PD-Reglers soll über das Wurzelortverfahren an einem auf  $N_r = 2$  Freiheitsgrade reduzierten Modell erfolgen. Der PD-Regler habe die Übertragungsfunktion

$$R(s) = k(1 + 2s). \quad (4.18)$$

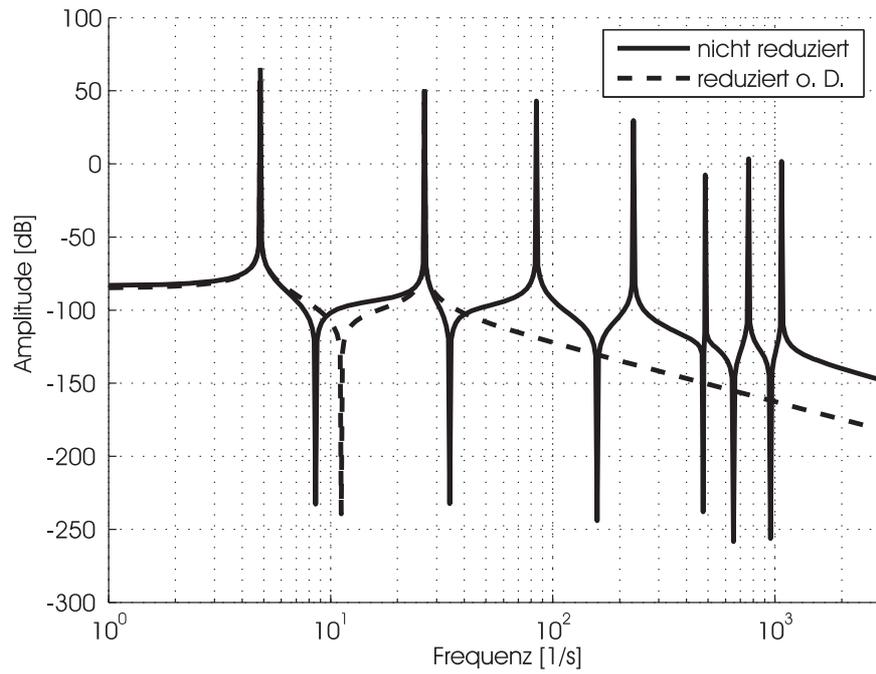


Abbildung 4.1: Vergrößerungsfunktion eines reduzierten Modells ohne Durchgriff

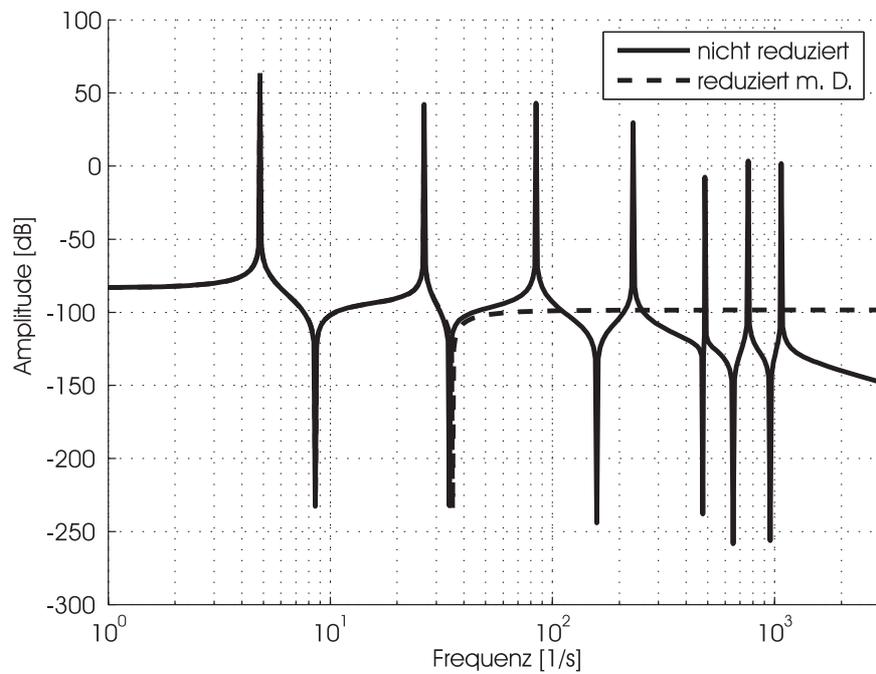


Abbildung 4.2: Vergrößerungsfunktion eines reduzierten Modells mit Durchgriff

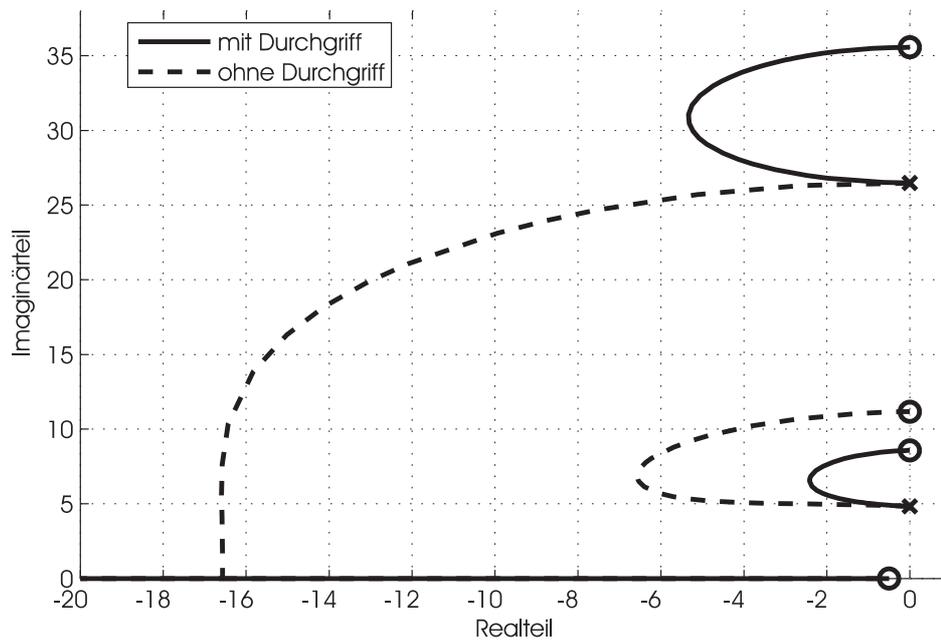


Abbildung 4.3: Wurzelortkurve für zwei reduzierte Modelle mit und ohne Durchgriff

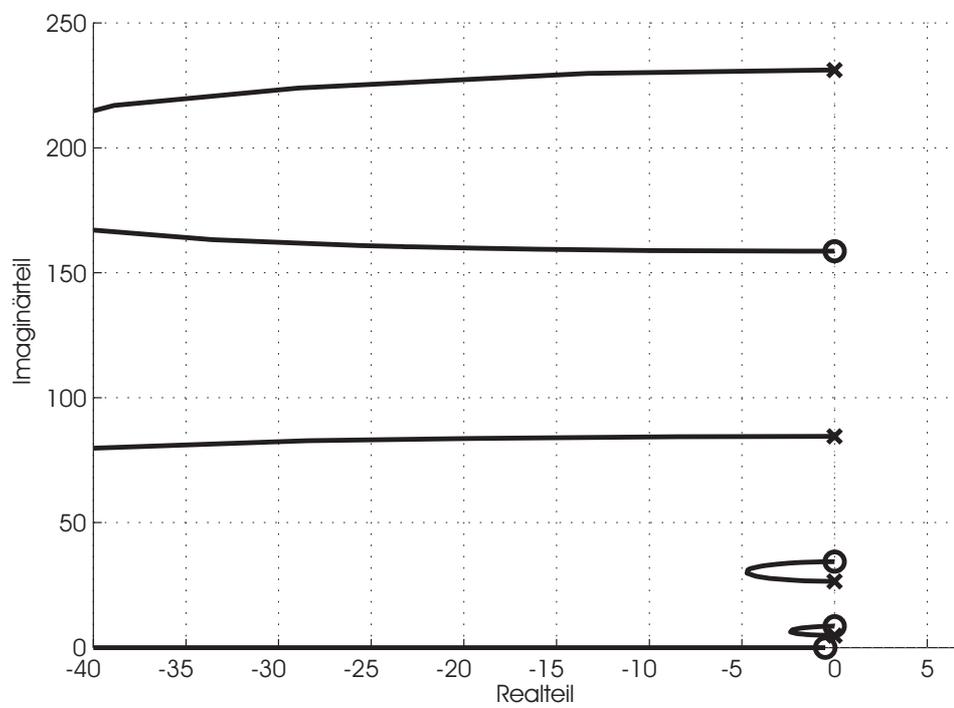


Abbildung 4.4: Wurzelortkurve für nicht reduziertes Modell

Abbildung 4.3 zeigt die oberen Hälften der Wurzelortkurven des modal reduzierten Systems (4.11)/(4.12) und des "mit Durchgriff" reduzierten Systems (4.16)/(4.17), die durch Variation des Parameters  $k$  von 0 bis  $+\infty$  entstehen. Die Wurzelortkurven, die den Verlauf der Eigenwerte des geschlossenen Regelkreises (im Folgenden Pole genannt) als Funktion des Parameters  $k$  darstellen, beginnen für  $k = 0$  in den Eigenkreisfrequenzen des offenen Kreises ( $\times$ ) und enden für  $k = +\infty$  in den Nullstellen des offenen Kreises ( $\circ$ ) [26]. Die unterschiedlichen Verläufe der Wurzelortkurven zeigen deutlich, dass es durch eine durch die Reduktionsmethode bedingte Ungenauigkeit in der Abbildung der Nullstellen des offenen Kreises zu starken Abweichungen zwischen dem vorhergesagten und dem realen Systemverhalten des geschlossenen Regelkreises kommen kann.

In Abbildung 4.4 sind die Verläufe der ersten vier Pole des mit Hilfe des Reglers (4.18) geschlossenen Regelkreises des nicht reduzierten Systems dargestellt. Neben der sehr guten Übereinstimmung der Kurven der beiden ersten Pole mit denen des "mit Durchgriff" reduzierten Systems aus Abbildung 4.3 ist leicht zu erkennen, dass sämtliche Pole für beliebige Werte des Parameters  $k$  negativen Realteil besitzen. Dies trifft auch für die verbleibenden sechs Pole zu. Auch die grafische Darstellung der Vergrößerungsfunktion des nicht reduzierten Systems (Abbildung 4.1 oder 4.2) zeigt eine Besonderheit auf: eine alternierende Abfolge von Polen und Nullstellen. Sowohl der garantiert stabile Verlauf der Wurzelortkurven als auch die alternierenden Pol- und Nullstellen beruhen auf der im vorliegenden Fall gegebenen Übereinstimmung der Aktorposition mit der Sensorposition ( $l_R = l_M = l/2$ ) [54]. Dies kann durch Fouriertransformation der Gleichungen (4.6) und (4.7) gezeigt werden. Hierdurch erhält man (bei Vernachlässigung der Störung  $u_{0,tt}$ )

$$\mathbf{Y} = \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \mathbf{b}_R^{**T} F_R \quad (4.19)$$

und

$$\bar{U}_1(l_M) - u_{M_0} = \mathbf{c}_M^{**T} \mathbf{Y}. \quad (4.20)$$

Einsetzen von (4.19) in (4.20) liefert die Übertragungsfunktion

$$G_{MR}(\omega) = \frac{\bar{U}_1(l_M) - u_{M_0}}{F_R} = \mathbf{c}_M^{**T} \text{diag} \left( \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \mathbf{b}_R^{**}. \quad (4.21)$$

Für Systeme, bei denen die Aktorposition und die Sensorposition gleich sind, erhält man mit

$$\mathbf{c}_R^{**T} = [U_{1_1}(l_R), \dots, U_{1_{N_1}}(l_R), 0, \dots, 0] \Theta = \mathbf{b}_R^{**T} \quad (4.22)$$

und

$$u_{R_0} = [U_{1_1}(l_R), \dots, U_{1_{N_1}}(l_R), 0, \dots, 0] \mathbf{q}_0 \quad (4.23)$$

die Vergrößerungsfunktion

$$G_{RR}(\omega) = \frac{\bar{U}_1(l_R) - u_{R0}}{F_R} = \mathbf{b}_R^{**T} \operatorname{diag} \left( \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2} \right) \mathbf{b}_R^{**} = \sum_{i=1}^{N_1+N_2} \frac{b_{R_i}^{**2}}{\omega_i^2 - \omega^2}, \quad (4.24)$$

woraus sich mit

$$\frac{dG_{RR}(\omega)}{d\omega} > 0 \quad (4.25)$$

der Beweis für alternierende Pole und Nullstellen ergibt [54].

Die garantierte Stabilität des geschlossenen Regelkreises und der damit verbundene Verlauf der Wurzelortkurven in der linken Hälfte der komplexen Ebene basieren ebenfalls auf der Übereinstimmung der beiden Matrizen  $\mathbf{b}_R^{**}$  und  $\mathbf{c}_R^{**}$ . Durch die Rückführung des Sensorausgangs über den PD-Regler (4.18) erhält man für die geregelte Kraft

$$F_R = -k(\mathbf{c}_R^{**T} \mathbf{y} + 2\mathbf{c}_R^{**T} \dot{\mathbf{y}}) \quad (4.26)$$

und mit  $\mathbf{b}_R^{**} = \mathbf{c}_R^{**}$  für den geschlossenen Regelkreis

$$\ddot{\mathbf{y}} + 2k\mathbf{b}_R^{**}\mathbf{b}_R^{**T} \dot{\mathbf{y}} + \left( \boldsymbol{\Omega} + k\mathbf{b}_R^{**}\mathbf{b}_R^{**T} \right) \mathbf{y} = 0. \quad (4.27)$$

Die Matrix  $\mathbf{b}_R^{**}\mathbf{b}_R^{**T}$  ist stets positiv semidefinit, wodurch die Stabilität des geschlossenen Regelkreises für beliebige positive Werte des Parameters  $k$  garantiert ist.

Abbildung 4.5 zeigt die Vergrößerungsfunktion des hier betrachteten Systems bei nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition ( $l_R = l/2$  und  $l_M = 3l/4$ ). Während die Lage der Pole unabhängig von der Aktor- und der Sensorposition ist, ist eine deutliche Verschiebung der Nullstellen zu erkennen, wodurch Pole und Nullstellen nicht mehr alternieren. Die Wurzelortkurven (Abbildung 4.6) des über den PD-Regler (4.18) geschlossenen Regelkreises zeigen jetzt instabiles Verhalten für beliebige positive Werte des Parameters  $k$ .

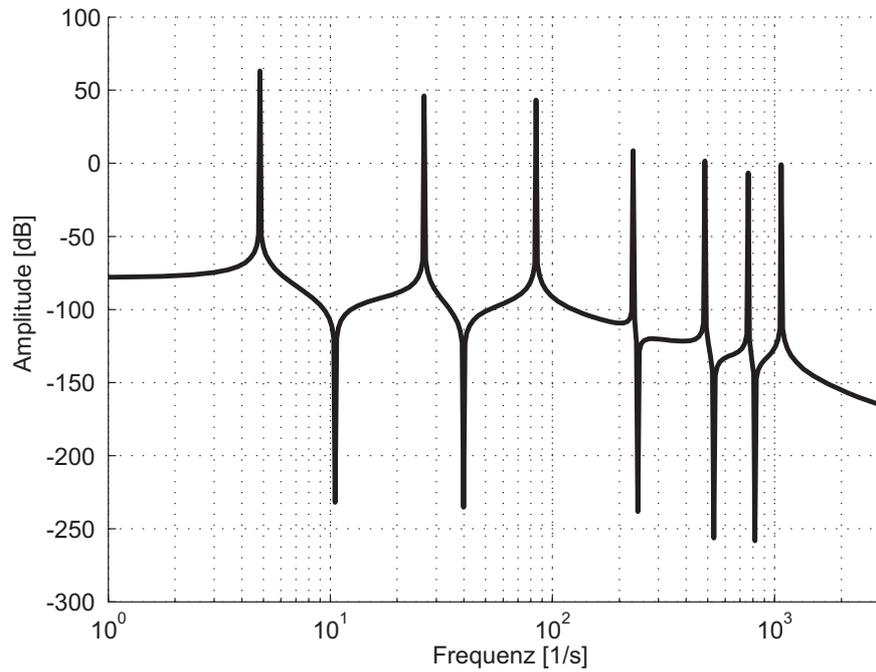


Abbildung 4.5: Vergrößerungsfunktion bei nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition

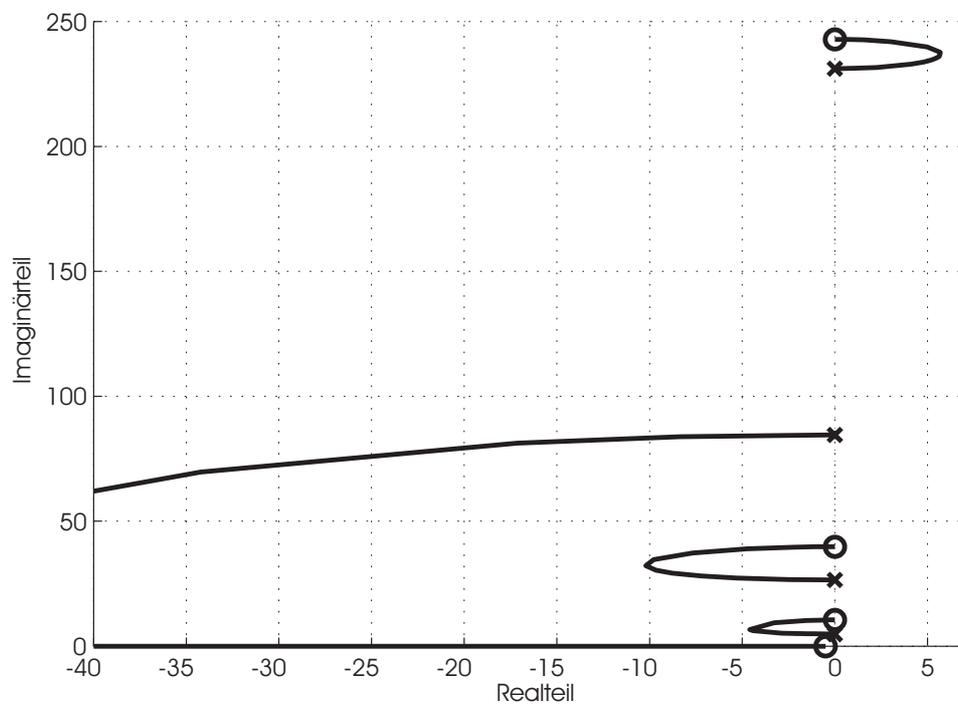


Abbildung 4.6: Wurzelortkurve bei nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition

Im Folgenden werden in der vorliegenden Arbeit nur Systeme mit übereinstimmender Aktor- und Sensorposition betrachtet. Der zu entwickelnde Regler soll gezielt auf die Dämpfung tieffrequenter Schwingungen ausgelegt werden, da hochfrequente Schwingungen bei der vorliegenden Problematik im Allgemeinen kleine Amplituden besitzen, durch die in der Realität immer vorhandene Materialdämpfung schnell abklingen und somit weder zu einer Reduzierung der Leistungsfähigkeit noch zu Sicherheitsproblemen führen. Die Auslegung des Reglers soll an einem reduzierten Modell erfolgen, bei dem die modalen Massen hochfrequenter Moden gegenüber den modalen Steifigkeiten vernachlässigt werden. Im Gegensatz zu der in diesem Kapitel diskutierten Schwingungsunterdrückung über einen PD-Regler soll im Folgenden eine Zustandsregelung genutzt werden, durch die die Pole des geschlossenen Regelkreises theoretisch beliebig vorgegeben werden können.

### 4.1.2 Schwingungsunterdrückung durch Zustandsregelung

Ausgangspunkt für eine Zustandsregelung sind die Systemgleichungen (4.16)/(4.17). Die Aufgabe besteht darin, den Systemzustand  $\mathbf{z}$  aus einem vorliegenden Anfangszustand  $\mathbf{z}_0$  in einen gewünschten Betriebszustand zu überführen. Den Anfangszustand  $\mathbf{z}_0$  kann man sich durch impulsartige Störungen entstanden denken, die von Zeit zu Zeit kurzzeitig auf das System wirken und es dadurch aus seinem Betriebszustand entfernen. Durch das Eingreifen des Reglers wird das System in den gewünschten Betriebszustand zurückgeführt. Um dies zu erreichen und um dabei dynamische Forderungen zu erfüllen, die an den Übergangsvorgang gestellt werden, wird der Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  erfasst und über einen Regler  $\mathbf{r}^T$  zurückgeführt [26] (siehe Abbildung 4.7):

$$F_R = -\mathbf{r}^T \mathbf{z}. \quad (4.28)$$

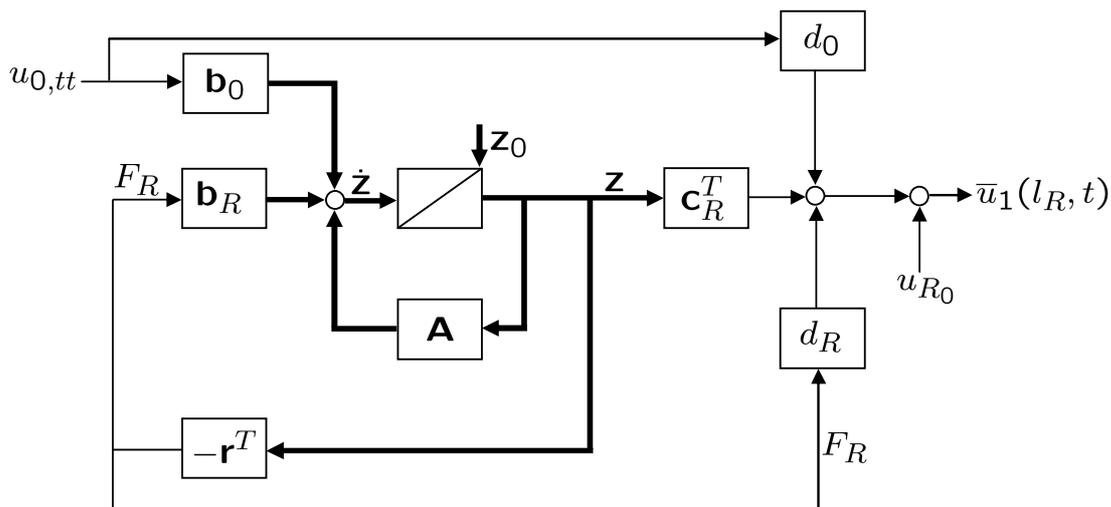


Abbildung 4.7: Geschlossener Regelkreis (FZ)

Da das System linear ist und es allein um die Reaktion des Systems auf die Anfangsbedingung  $\mathbf{z}_0$  geht, darf bei der Bestimmung von  $\mathbf{r}$  der zweite Systemeingang zu null

gesetzt werden ( $u_{0,tt} = 0$ ). Einsetzen der Bedingung (4.28) in Gleichung (4.16) führt auf

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T) \mathbf{z}. \quad (4.29)$$

Unter der Forderung, dass das betrachtete System steuerbar ist, was hier der Bedingung entspricht, dass die Matrix  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  voll besetzt ist, können die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T)$ , die gleich den Polen des geschlossenen Regelkreises sind, beliebig vorgegeben werden. Die Nullstellen des Systems werden hierbei nicht verändert. Aufgabe der Reglereinstellung ist es nun, die Pole so vorzugeben, dass der gewünschte Betriebszustand hinreichend schnell und gut gedämpft erreicht wird. Einen möglichst schnellen Einschwingvorgang erreicht man dadurch, dass man die Pole möglichst weit in die linke Hälfte der komplexen Ebene verschiebt. Diese Vorgehensweise führt allerdings zu einem sehr starken Anwachsen der Elemente der Reglermatrix  $\mathbf{r}$  und kann so zu heftigen Stellbefehlen und zu einer Übersteuerung des Aktors führen. Zusätzlich wird die Bandbreite des Systems vergrößert, wodurch der Einfluss stochastischer Störungen verstärkt wird [41]. Eine Möglichkeit, die Pole des geschlossenen Regelkreises so zu platzieren, dass das System möglichst robust gegen äußere Störungen und gegen Modellunsicherheiten ist, bietet die Linear-Quadratisch-Optimale Zustandsrückführung (LQR).

### 4.1.3 Linear-Quadratisch-Optimale Zustandsrückführung

Bei einer Linear-Quadratisch-Optimalen Zustandsrückführung, die der Klasse der so genannten deterministischen, optimalen Regelungssysteme angehört, wird diejenige Reglermatrix  $\mathbf{r}$  gesucht, die die Zielfunktion

$$J = \int_0^\infty \left( \mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z} + \frac{1}{\kappa} F_R^2 + 2 \mathbf{z}^T \mathbf{n} F_R \right) dt \quad (4.30)$$

minimiert. In Gleichung (4.30) ist  $\mathbf{Q}$  eine  $2N_r \times 2N_r$ -Matrix,  $\mathbf{n}$  ist eine  $2N_r$ -Spaltenmatrix und  $\kappa$  ist eine skalare Gewichtungsgröße. Die Lösung dieses Problems lautet

$$\mathbf{r}^T = \kappa (\mathbf{b}_R^T \mathbf{P} + \mathbf{n}^T), \quad (4.31)$$

wobei  $\mathbf{P}$  die symmetrische und positiv definite Lösung der so genannten algebraischen Riccati-Gleichung

$$\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} - \kappa (\mathbf{P} \mathbf{b}_R + \mathbf{n})(\mathbf{b}_R^T \mathbf{P} + \mathbf{n}^T) = \mathbf{0} \quad (4.32)$$

ist. Die Existenz einer eindeutigen Lösung der nichtlinearen Gleichung (4.32) ist bei positiv semidefiniter Matrix  $(\mathbf{Q} - \kappa \mathbf{n} \mathbf{n}^T)$  und positivem  $\kappa$ , d.h.

$$(\mathbf{Q} - \kappa \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \geq 0, \kappa > 0, \quad (4.33)$$

sichergestellt für den Fall, dass das System stabilisierbar und detektierbar ist. Die Stabilisier- und Detektierbarkeit sind eine Lockerung der Bedingungen der Steuer- und

Beobachtbarkeit. Es müssen nur die instabilen Pole des Systems steuer- und beobachtbar sein [31]. Unter diesen Bedingungen ist der geschlossene Regelkreis (4.29) asymptotisch stabil. Automatisierte Lösungsverfahren für die algebraische Riccati-Gleichung (4.32) werden von zahlreichen kommerziellen Softwarepaketen bereitgestellt und werden in der vorliegenden Arbeit nicht weiter behandelt.

Im Folgenden wird die Gewichtungsmatrix  $\mathbf{Q}$  so gewählt, dass  $\mathbf{z}^T \mathbf{Q} \mathbf{z}$  die totale (potentielle und kinetische) Energie des Systems beschreibt,  $\mathbf{n}$  wird zu Null gesetzt, d.h.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \Omega_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

und  $\kappa$  wird so bestimmt, dass der Einschwingvorgang des geschlossenen Regelkreises bei möglichst moderaten Stellgrößen ausreichend schnell ist [54].

#### 4.1.4 Luenberger Beobachter

Bei der in den Kapiteln 4.1.2 und 4.1.3 besprochenen Zustandsregelung wird davon ausgegangen, dass alle Zustandsgrößen  $\mathbf{z}$  bekannt sind. Beim realen System können jedoch nur die Verschiebung  $u_1(l_R, t)$  des unteren Segmentes und die Beschleunigung des Trägerfahrzeuges  $u_{0,tt}$  gemessen werden. Aufgabe eines Beobachters ist es, basierend auf diesen Messungen, den Zustandsvektor  $\mathbf{z}$  durch einen rekonstruierten Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{z}}$  zu approximieren. Als Luenberger Beobachter wird das System

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}_R F_R + \mathbf{b}_0 u_{0,tt} + \mathbf{k} (u_1(l_R, t) - \hat{u}_1(l_R, t)) \quad (4.35)$$

mit

$$\hat{u}_1(l_R, t) = \mathbf{c}_R^T \hat{\mathbf{z}} + d_R F_R + d_0 u_{0,tt} + u_{R_0} \quad (4.36)$$

formuliert (siehe Abbildung 4.8). Aus den Gleichungen (4.16)/(4.17) und (4.35)/(4.36) ergibt sich

$$\left( \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}} \right) = (\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T) (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}). \quad (4.37)$$

Unter der Bedingung dass das betrachtete System beobachtbar ist, was der Forderung entspricht, dass die Matrix  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$  voll besetzt ist, können die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T)$  beliebig vorgegeben werden. Werden die Eigenwerte so eingestellt, dass sie negative Realteile besitzen, so ist das System (4.37) asymptotisch stabil und der rekonstruierte Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{z}}$  konvergiert gegen den Zustandsvektor  $\mathbf{z}$ . Ähnlich wie bei der Polplatzierung des geschlossenen Regelkreises (4.29) erhält man ein möglichst schnelles Abklingen des Fehlers  $(\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}})$  dadurch, dass man die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T)$  möglichst weit in die linke Hälfte der komplexen Ebene verschiebt. Aber auch hier führt diese Vorgehensweise zu einem sehr starken Anwachsen der Elemente der Rückführmatrix  $\mathbf{k}$ . Berücksichtigt man nun, dass schon durch die Diskretisierung

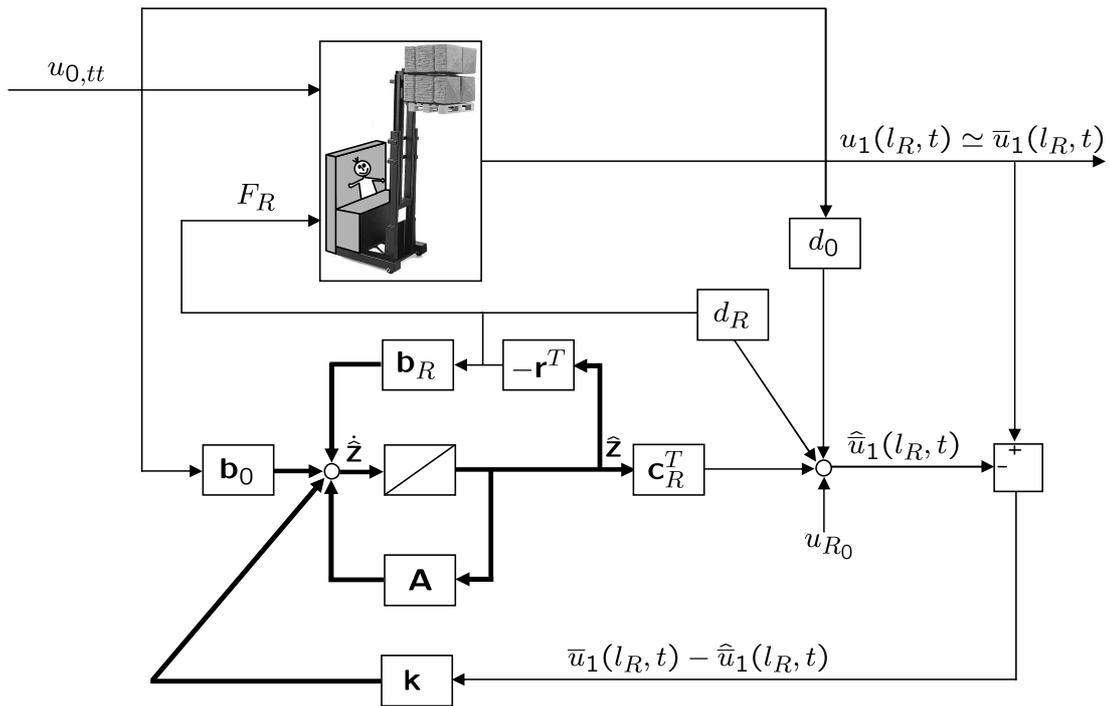


Abbildung 4.8: Geschlossener Regelkreis mit Beobachter (FZ)

(2.106) bis (2.109) das ursprüngliche System (2.95) mit einer theoretisch unendlichen Anzahl an Freiheitsgraden auf  $N_1 + N_2$  Freiheitsgrade beschränkt wird und dass durch die Modellreduktion (4.15) zusätzlich die Dynamik der  $N_h$  hochfrequenten Moden vernachlässigt wird, so wird deutlich, dass die reale, vom Sensor gemessene Größe  $u_1(l_R, t)$  hochfrequente Anteile enthält, die in der berechneten Größe  $\bar{u}_1(l_R, t)$  nicht vorkommen. Unter Berücksichtigung solcher hochfrequenten Anteile  $u_S$ , die im Folgenden auch als klassisches Sensorrauschen interpretiert werden können, erhält man für den realen Sensorausgang

$$u_1(l_R, t) = \bar{u}_1(l_R, t) + u_S = \mathbf{c}_R^T \mathbf{z} + d_R F_R + d_0 u_{0,tt} + u_{R0} + u_S \quad (4.38)$$

und mit den Gleichungen (4.16) und (4.35)/(4.36) ergibt sich

$$\left( \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}} \right) = \left( \mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T \right) \left( \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \right) - \mathbf{k} u_S. \quad (4.39)$$

Der Zusammenhang (4.39) macht deutlich, dass bei der Platzierung der Eigenwerte des Beobachters das Sensorrauschen  $u_S$  berücksichtigt werden muss. Bei wenig verrauschten Messsignalen können die Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T)$  möglichst weit in die linke Hälfte der komplexen Ebene verschoben werden, wodurch der Einfluss der Dynamik des Beobachters auf den geschlossenen Regelkreis minimiert wird, die Elemente der Rückführmatrix  $\mathbf{k}$  jedoch stark anwachsen und somit den Einfluss des Sensorrauschens verstärken. Bei stark verrauschten Messsignalen ist es unter Umständen günstiger, die Eigenwerte des Beobachters näher an die Pole des geschlossenen

Regelkreises zu platzieren, wodurch der Einfluss des Sensorrauschens minimiert wird, der Einfluss des Beobachters auf den geschlossenen Regelkreis jedoch steigt. In beiden Fällen muss sichergestellt sein, dass die Eigenwerte des Beobachters in der komplexen Ebene links von denen des geschlossenen Regelkreises liegen, um zu erreichen, dass der Beobachter schneller ist als der geschlossene Regelkreis [54].

Durch die übereinstimmende Aktor- und Sensorposition ( $\mathbf{b}_R^{**} = \mathbf{c}_R^{**}$ ) sind die Eigenwerte des Beobachters gleich den Polen des geschlossenen Regelkreises für

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{r}. \quad (4.40)$$

Die Bedingung, dass die beiden Matrizen  $(\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}_R^T)$  und  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}_R\mathbf{r}^T)^T$  (Eigenwerte bleiben invariant bei Transposition der Matrix) die gleichen Eigenwerte haben und es sich somit um ähnliche Matrizen handelt, besteht darin, dass eine invertierbare Matrix  $\mathbf{D}$  existiert, für die

$$\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}_R^T = \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{A} - \mathbf{b}_R\mathbf{r}^T)^T \mathbf{D} \quad (4.41)$$

gilt [45]. Mit

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

gilt dann auch

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T = \mathbf{D}^{-1} \quad (4.43)$$

und eingesetzt in Gleichung (4.41) erhält man

$$\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}_R^T = \mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{D} - \mathbf{D}\mathbf{r}\mathbf{b}_R^T\mathbf{D}. \quad (4.44)$$

Mit

$$\mathbf{D}\mathbf{A}^T\mathbf{D} = \mathbf{A} \quad (4.45)$$

und

$$\mathbf{b}_R^T\mathbf{D} = \mathbf{c}_R^T \quad (4.46)$$

erhält man als Bedingung für übereinstimmende Eigenwerte des Beobachters und des geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{k} = \mathbf{D}\mathbf{r}, \quad (4.47)$$

was Gleichung (4.40) entspricht.

Durch dieses Ergebnis kann die Einstellung des Beobachters gemäß der gleichen Vorgehensweise erfolgen, die schon für die Platzierung der Pole des geschlossenen Regelkreises genutzt wurde (Kapitel 4.1.3). Die Bedingung, dass der Beobachter schneller ist als der geschlossene Regelkreis, wird dadurch erfüllt, dass die Einstellung des Beobachters mit  $\kappa^* > \kappa$  erfolgt (siehe Gleichung (4.30)). Durch diese Vorgehensweise können für die Einstellung des Beobachters die gleichen Wurzelortkurven wie für den geschlossenen Regelkreis genutzt werden.

Die Einführung eines Beobachters beeinflusst nicht die Eigenwerte des bereits entworfenen geschlossenen Regelkreises [26]. Der über den Beobachter geschlossene Regelkreis wird über die Gleichungen (4.16), (4.38), (4.35) und (4.36) sowie über die Rückführung

$$F_R = -\mathbf{r}^T \hat{\mathbf{z}} \quad (4.48)$$

beschrieben, die in einem System mit  $4N_r$  Zustandsgrößen zusammengefasst werden können:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{z}} - \hat{\dot{\mathbf{z}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T & \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u_{0,tt} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} u_S. \quad (4.49)$$

Die Systemmatrix von (4.49) ist eine Blockdreiecksmatrix, deren Eigenwerte die Eigenwerte der auf der Diagonalen stehenden Matrizen  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T)$  und  $(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T)$  sind. Die getrennte Lösbarkeit des Regelungsproblems und des Beobachtungsproblems wird "Separationsprinzip" genannt [26].

### 4.1.5 Instabilitäten durch Spillover

Durch die Anwendung eines Zustandsreglers und eines Zustandsbeobachters zur Unterdrückung dominanter und tieffrequenter Schwingungen in einem realen System werden auch hochfrequente Moden beeinflusst, deren Dynamik bisher vernachlässigt wurde oder, wie bei der Auslegung des Beobachters, als Sensorrauschen Berücksichtigung fand. Analog zu den tieffrequenten Schwingungen, die durch die Systemgleichung (4.16) beschrieben werden, wird die Dynamik der hochfrequenten Moden durch

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{y}}_h \\ \ddot{\mathbf{y}}_h \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{z}}_h} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}_h & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_h} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{y}_h \\ \dot{\mathbf{y}}_h \end{pmatrix}}_{\mathbf{z}_h} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{Rh}^{**} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{Rh}} F_R + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{0h}^{**} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_{0h}} u_{0,tt} \quad (4.50)$$

wiedergegeben (vgl. Gleichung (4.13)). Unter Berücksichtigung der Dynamik der hochfrequenten Moden und zusätzlichem Sensorrauschen  $u_S$  erhält man

$$u_1(l_R, t) = \bar{u}_1(l_R, t) + u_S = \mathbf{c}_R^T \mathbf{z} + \mathbf{c}_{Rh}^T \mathbf{z}_h + u_{R_0} + u_S \quad (4.51)$$

für den Sensorausgang, der bisher durch Gleichung (4.38) ausgedrückt wurde.

Mit den Gleichungen (4.35) und (4.36) zur Beschreibung des Beobachters und der Rückführung der rekonstruierten Zustandsgrößen (4.48) erhält man zusammen mit den Gleichungen (4.50) und (4.51) das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \dot{\mathbf{z}} - \dot{\hat{\mathbf{z}}} \\ \dot{\mathbf{z}}_h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T & \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T & \mathbf{0} \\ -d_R \mathbf{k} \mathbf{r}^T & \mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T + d_R \mathbf{k} \mathbf{r}^T & -\mathbf{k} \mathbf{c}_{Rh}^T \\ -\mathbf{b}_{Rh} \mathbf{r}^T & \mathbf{b}_{Rh} \mathbf{r}^T & \mathbf{A}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{z}_h \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{b}_{0h} \end{pmatrix} d_0 u_{0,tt} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u_S \end{aligned} \quad (4.52)$$

zur Beschreibung des kompletten geschlossenen Regelkreises. Für Systeme mit übereinstimmender Aktor- und Sensorposition, wie sie in der vorliegenden Arbeit ausschließlich betrachtet werden, ergibt sich

$$\mathbf{c}_{Rh}^{**} = \mathbf{b}_{Rh}^{**} \quad (4.53)$$

mit  $\mathbf{c}_{Rh}^{**}$  aus

$$\mathbf{c}_{Rh}^T = [\mathbf{c}_{Rh}^{**T}, 0, \dots, 0]. \quad (4.54)$$

Wenn die hochfrequenten Moden nicht beobachtbar sind, was bei Systemen mit übereinstimmender Aktor- und Sensorposition auch bedeutet, dass sie nicht steuerbar sind, gilt

$$\mathbf{c}_{Rh} = \mathbf{b}_{Rh} = \mathbf{0}. \quad (4.55)$$

Dies führt auch dazu (siehe (4.17)), dass

$$d_R = d_0 = 0 \quad (4.56)$$

wird. In diesem Fall stimmen die Eigenwerte der Systemmatrix aus Gleichung (4.52) mit den Eigenwerten der Matrizen  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T)$ ,  $(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T)$  und  $\mathbf{A}_h$  überein. Bei Systemen mit nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition erhält man das gleiche Ergebnis, wenn die hochfrequenten Moden nicht beobachtbar oder nicht steuerbar sind. Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass für ein System mit nicht beobachtbaren aber steuerbaren hochfrequenten Moden das Ergebnis

$$\mathbf{c}_{Mh} = \mathbf{0}, \mathbf{b}_{Rh} \neq \mathbf{0} \quad (4.57)$$

folgt und die Durchgriffsterme verschwinden. Bei Systemen mit beobachtbaren aber nicht steuerbaren hochfrequenten Moden dagegen gilt

$$\mathbf{c}_{Mh} \neq \mathbf{0}, \mathbf{b}_{Rh} = \mathbf{0}, \quad (4.58)$$

und der Durchgriffsterm  $d_0$  verschwindet nicht:

$$d_R = 0, d_0 \neq 0. \quad (4.59)$$

Dadurch verbleibt der Ausdruck  $d_0 u_{0,tt}$  genau wie das Sensorrauschen  $u_S$  als Einwirkung auf das System.

Da in realen Systemen auch bei nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition immer hochfrequente Moden existieren werden, die sowohl steuerbar als auch beobachtbar sind, wird es immer zu einer Verschiebung der "gewünschten" Eigenwerte der Matrizen  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T)$ ,  $(\mathbf{A} - \mathbf{k} \mathbf{c}_R^T)$  und  $\mathbf{A}_h$  kommen. Da die hier betrachteten Systeme zwar über stets vorhandene aber nur sehr geringe Materialdämpfung verfügen, besitzen die Eigenwerte der hochfrequenten Moden einen betragsmäßig sehr kleinen, negativen Realteil. Schon ein leichtes Verschieben dieser Eigenwerte nach rechts in der komplexen Ebene kann dazu führen, dass das Vorzeichen eines Realteils wechselt, woraus instabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises folgt. Diese Instabilitäten werden auch "Spillover" genannt. Durch Vernachlässigung jeglicher Materialdämpfung in dem hier vorgestellten Modell liegen die Eigenwerte direkt auf der Achse verschwindender Realteile oder durch den Einfluss der Dämpfung in der Kontaktformulierung (2.90) sehr nahe dieser Achse. Die Gefahr von Spillover-Instabilitäten ist deshalb bei den im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit durchgeführten Simulationen größer, als es in der Realität zu erwarten ist.

Zur Unterdrückung von Spillover-Effekten, die erstmals 1978 von Balas in [5] untersucht wurden, gibt es zahlreiche Ansätze wie z.B. den Einsatz eines Tiefpassfilters [5], die Rückführung einer räumlich verteilten statt einer diskreten Lagemessung [50] oder den Einsatz räumlich verteilter, piezoelektrischer Aktoren ([64] und [68]). In der vorliegenden Arbeit wird nicht weiter auf dieses Thema eingegangen.

### 4.1.6 Teleskopierbewegung und Spiel

Die Kapitel 4.1.1 bis 4.1.4 zeigen den Entwurf einer optimalen Zustandsregelung mit Zustandsbeobachter für ein lineares und zeitinvariantes System. Da die Ausfahrlänge  $l_T = l_A + l_L$  (mit  $l_A = 0$  für  $0 \leq l_L < l$ ) im realen Betrieb nicht konstant bleibt, und die zu regelnde Strecke somit zeitvariantes Verhalten aufweist, müssen auch die Parameter des Reglers und des Beobachters an die sich ändernde Systemgeometrie angepasst werden. Wenn die sich verändernden Eigenschaften der Regelstrecke, durch eine messbare Größe (die Ausfahrlänge  $l_T$  in der vorliegenden Arbeit) erfasst werden können, und wenn bekannt ist, wie die Regelung in Abhängigkeit dieser Größe angepasst werden muss, wird von einer so genannten gesteuert adaptiven Regelung gesprochen [67]. Die Parameter des Reglers und des Beobachters werden für unterschiedliche Ausfahrlängen  $l_T$  bestimmt (in 5cm-Schritten über die gesamte Ausfahrlänge bei den im Folgenden betrachteten numerischen Simulationen) und durch Interpolation erhält man den adaptiven Regler  $\mathbf{r}(l_T)$  und den adaptiven Beobachter  $\mathbf{A}(l_T)$ ,  $\mathbf{k}(l_T)$ ,  $\mathbf{b}_R(l_T)$ ,  $\mathbf{b}_0(l_T)$ ,  $\mathbf{c}_R(l_T)$ ,  $d_R(l_T)$ ,  $d_0(l_T)$  sowie  $u_{R0}(l_T)$ .

Die Position  $z_1 = l_R$  des Aktor-Sensor Paares muss so gewählt werden, dass das System für jede Ausfahrlänge beobachtbar und steuerbar ist, was der Forderung entspricht, dass die Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$ , die bei Systemen mit übereinstimmender Aktor- und Sensorposition stets gleich sind, für jede Ausfahrlänge voll besetzt sind. Die Abbildungen 4.9, 4.10 und 4.11 zeigen den Verlauf der Elemente der Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$  über der Ausfahrlänge  $l_T$ . Auch bei diesem Beispiel wurden als Systemparameter die numerischen Werte aus Kapitel 3, mit zusätzlich  $l_T = konst.$ ,  $u_{0,tt} = 0\text{m/s}^2$ ,  $N_1 = N_2 = 4$  und  $N_r = 2$  gewählt.

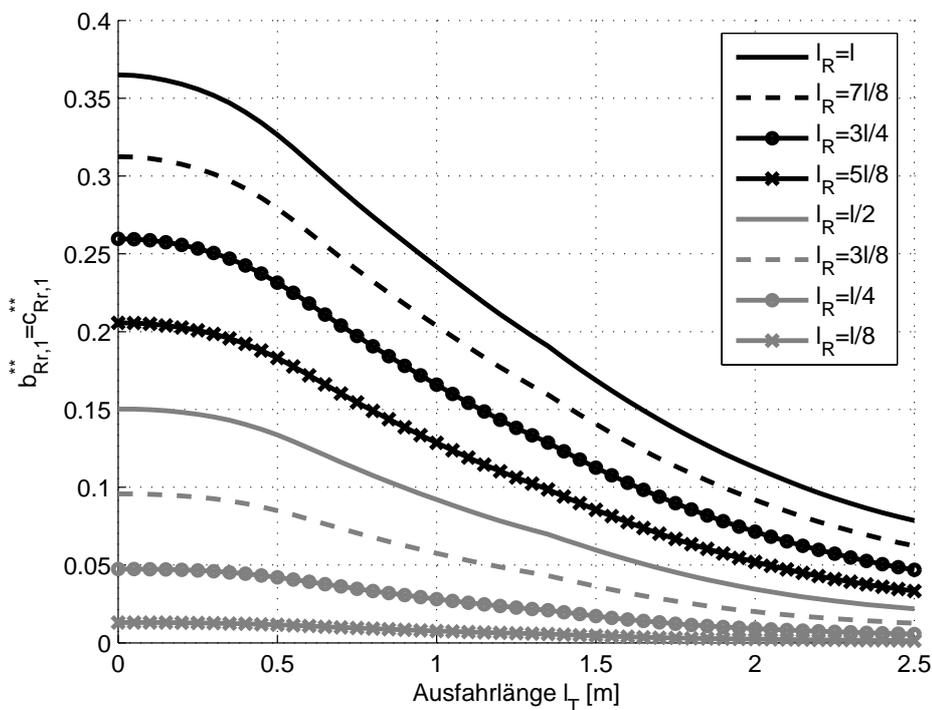
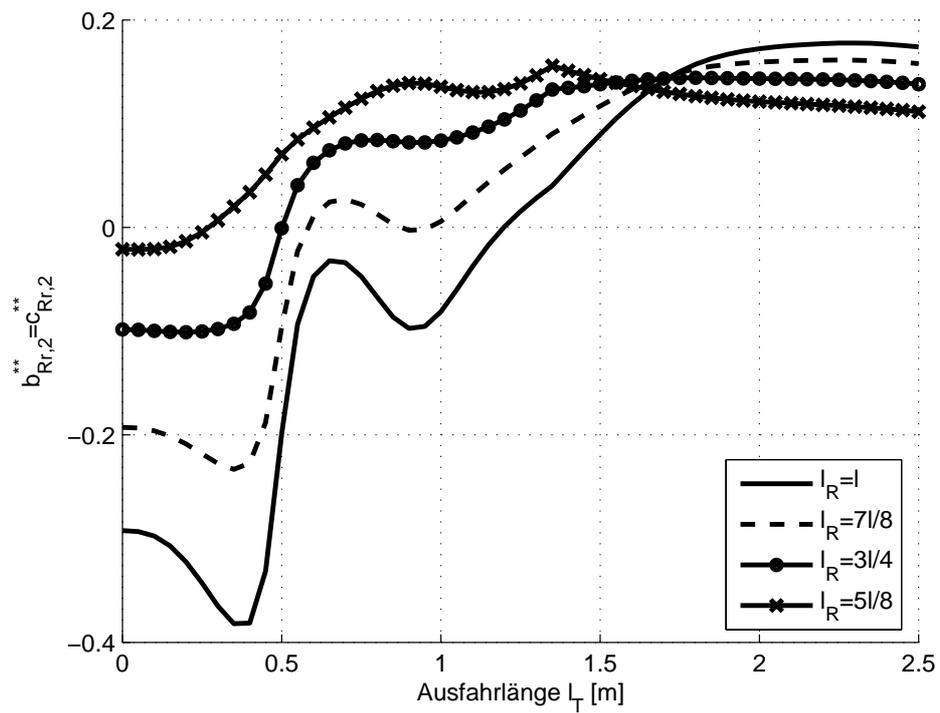
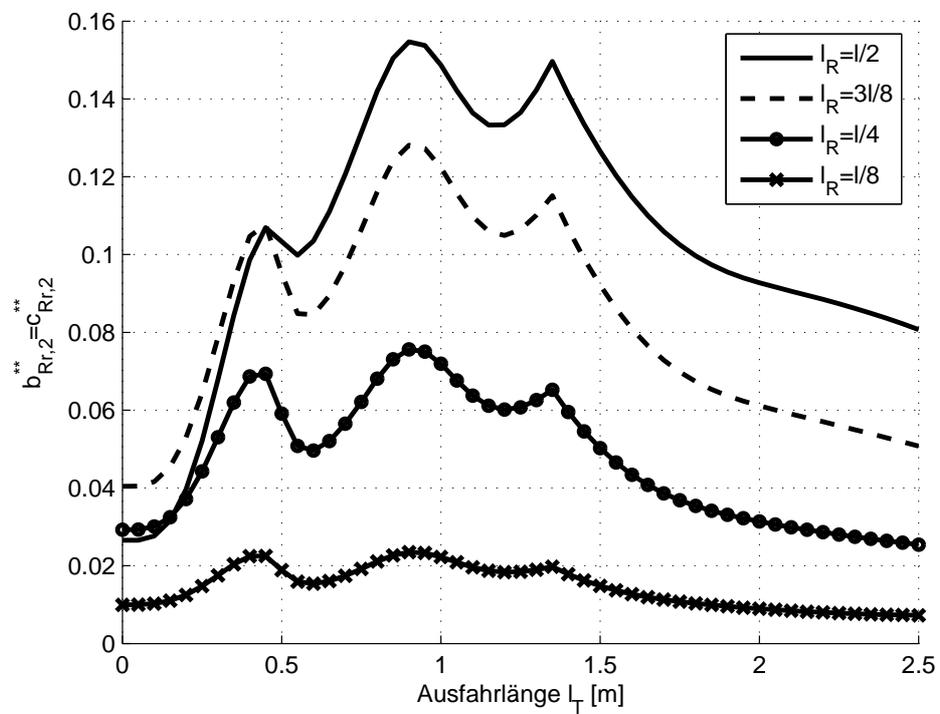


Abbildung 4.9: Erstes Element der Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$

Abbildung 4.10: Zweites Element der Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$  (nicht steuerbar)Abbildung 4.11: Zweites Element der Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$  (steuerbar)

Der Verlauf des ersten Elements der Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$  (Abbildung 4.9) zeigt, dass die erste Eigenschwingung des betrachteten Systems für jede der acht betrachteten Aktor-Sensor-Positionen steuerbar und beobachtbar ist und dass die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit mit zunehmendem Wert für  $l_R$  steigt.

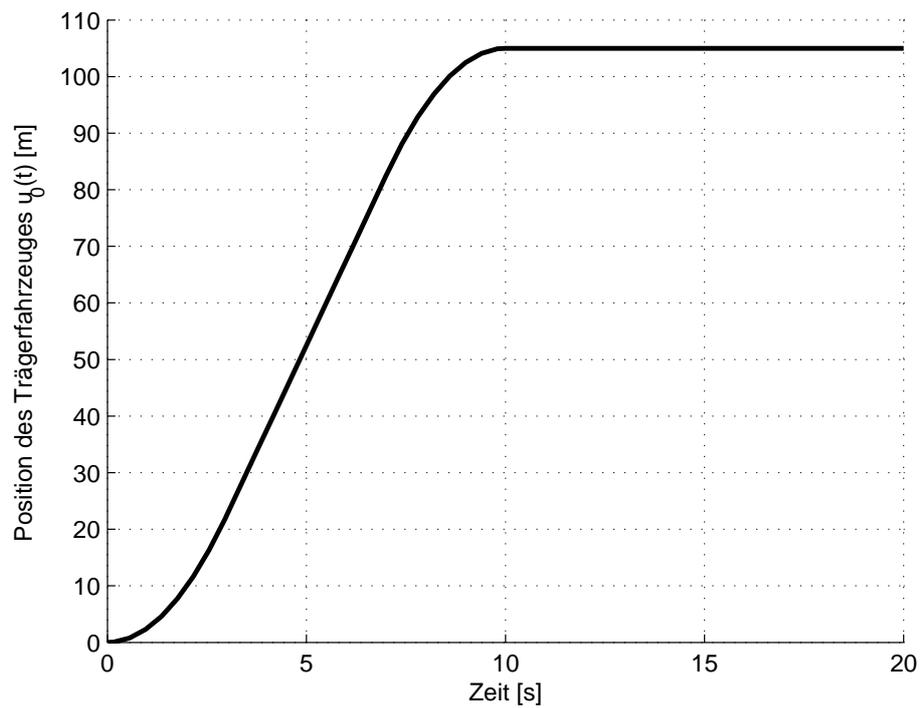
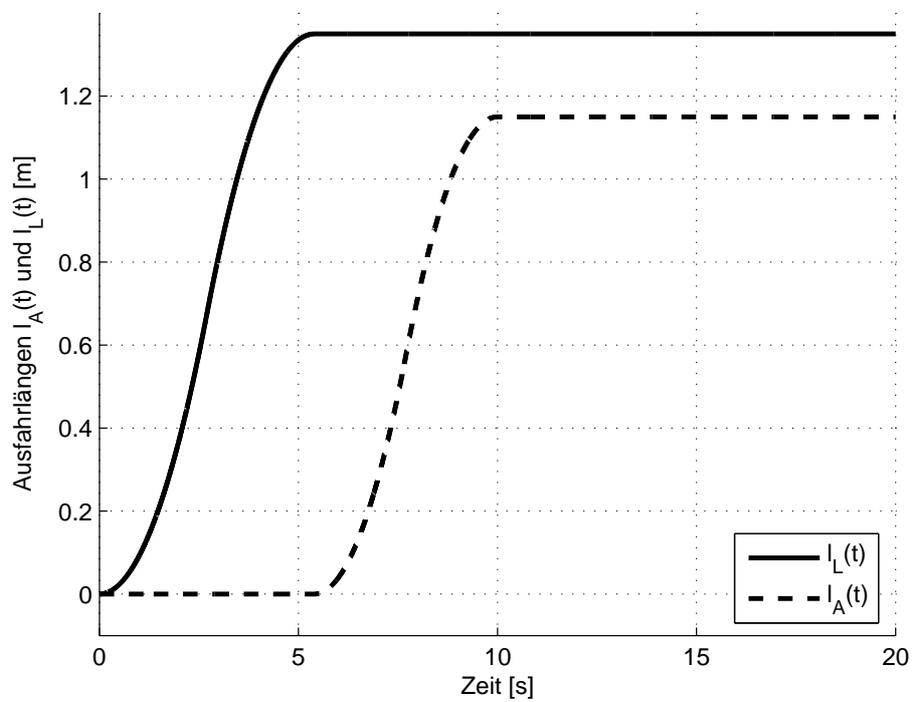
Die zweite Eigenschwingung ist nicht für jede Aktor-Sensor-Position steuer- und beobachtbar, was aus den Nulldurchgängen der in der Abbildung 4.10 dargestellten Verläufe des zweiten Elementes der Matrizen  $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$  und  $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$  hervorgeht. Ein Nulldurchgang bedeutet, dass die zu beeinflussende zweite Eigenschwingung für diese Ausfahrlänge einen Schwingungsknoten besitzt, der mit der Aktor-Sensor-Position übereinstimmt. Die Steuer- und Beobachtbarkeit der zweiten Eigenschwingung ist lediglich für die untersten vier der acht betrachteten Positionen für jede Ausfahrlänge sichergestellt, wobei das beste Ergebnis bei dem vorliegenden Beispiel für eine Positionierung des Aktor-Sensor Paares an der Stelle  $z_1 = l_R = l_M = l/2$  vorliegt (siehe Abbildung 4.11).

Durch die Einführung eines gesteuert adaptiven Beobachters sind Messungen der Verschiebung  $u_1(l_R, t)$  des unteren Segmentes, der Beschleunigung des Trägerfahrzeuges  $u_{0,tt}$  und der Ausfahrlänge  $l_T$  ausreichend, um den gesteuert adaptiven Zustandsregler zu betreiben. Der an einem linearen und reduzierten System entwickelte gesteuert adaptive Regler kann so auf das deutlich kompliziertere, nichtlineare und zeitvariante Modell (2.133) angewandt werden. Der Einfluss des nichtlinearen Verhaltens der Strecke durch das im realen System immer vorhandenen Spiel und der Einfluss dynamischer Telekopiervorgänge auf die aktive Schwingungsunterdrückung können durch diese Vorgehensweise anhand von numerischen Simulationen untersucht werden.

#### 4.1.7 Simulationsergebnisse

Die hier vorgestellten Simulationsergebnisse beruhen auf einem Modell, dem die in Kapitel 3 angegebenen Systemparameter sowie  $l_R = l_M = l/2 = 0.675\text{m}$ ,  $l_S = 0.01\text{m}$ ,  $d = 10^3\text{Ns/m}$ ,  $N_1 = N_2 = 4$ ,  $N_r = 2$ ,  $\kappa = 1500$  und  $\kappa^* = 3000$  zugrunde liegen. Berechnet wird ein typischer Positioniervorgang. Das System startet ohne Anfangsgeschwindigkeit von einem beliebigen Startpunkt, wird während 3 Sekunden beschleunigt ( $u_{0,tt} = 5\text{m/s}^2$ ), bewegt sich dann während 4 Sekunden mit konstanter Geschwindigkeit und wird schließlich während 3 Sekunden bis zum Stillstand abgebremst ( $u_{0,tt} = -5\text{m/s}^2$ ). Der sich hierdurch ergebende zeitliche Verlauf der Position des Trägerfahrzeuges ist in Abbildung 4.12 dargestellt. Die Ausfahrlängen  $l_A(t)$  und  $l_L(t)$  werden dem System, wie in der Abbildung 4.13 dargestellt, vorgegeben.

Abbildung 4.14 zeigt die horizontale Komponente  $u_2(l_L(t), t) + a_L \cos(\alpha_2(l_L(t), t))$  der relativen Lage der Ladeeinheit bezüglich des Trägerfahrzeuges für ein aktiv gedämpftes und für ein nicht geregelt System. Durch die Bewegung des Trägerfahrzeuges und durch die überlagerte, dynamische Teleskopierbewegung werden Schwingungen im System angeregt, deren Amplituden mit zunehmender Ausfahrlänge  $l_T$  ansteigen, bei gleichzeitiger Abnahme der zugehörigen Frequenzen. Durch die gesteuert adaptive Regelung wird über den gesamten Teleskopiervorgang eine gute Schwingungsunterdrückung erzielt, wobei sich der geschlossene Regelkreis als robust bezüglich des mit

Abbildung 4.12: Position des Trägerfahrzeuges  $u_0(t)$  (FZ)Abbildung 4.13: Ausfahrlängen  $l_A(t)$  und  $l_L(t)$

$l_S = 0.01\text{m}$  sehr ausgeprägten Spiels in den Kontaktbereichen erweist. Der Verlauf der relativen Lage der Spitze des unteren Segments aus Abbildung 4.15 bestätigt dieses Verhalten. Zusätzlich kann man hier in der zweiten Hälfte des nicht geregelten Verlaufs erkennen, dass durch immer wieder auftretende Kontaktstöße zwischen den beiden Segmenten (vgl. Abbildung 4.17 und 4.21) hochfrequente Schwingungen angeregt werden.

Abbildung 4.16 zeigt den Verlauf der geregelten Kraft, mit der der Aktor auf das System einwirkt. Es ist zu erkennen, dass die Kraft am Ende des Eingriffs gegen einen konstanten Wert (und nicht wie zu erwarten gegen Null) konvergiert, was damit zusammenhängt, dass sich die statische Ruhelage des geregelten, spielbehafteten Systems von der Ruhelage  $\mathbf{q}_0$  des Systems ohne Spiel, für das der Regler ausgelegt ist, unterscheidet. Bei vielen realen Systemen, bei denen sowohl das Spiel  $l_S$  als auch die maximale, auf die untere Segmentlänge bezogene Ausfahrlänge  $l_A/l$  kleiner als in dem vorliegenden Beispiel sein werden, wird diese statische Abweichung vernachlässigbar klein sein.

Die Abbildungen 4.17 bis 4.22 zeigen die relative Lage  $u_i^*(t)$  der beiden Segmente zueinander in den  $i = 3$  Kontaktpunkten (siehe Gleichung 2.91). Neben der Einhaltung der Kontaktbedingung ist auch hier der Einfluss der aktiven Schwingungsunterdrückung gut zu erkennen. Während beim geregelten System der Kontakt praktisch über den gesamten Bewegungsablauf hinweg geschlossen bleibt, öffnet sich der Kontakt durch die ausgeprägten Schwingungen des nicht geregelten Systems, wodurch immer wieder Kontaktstöße zwischen den beiden Segmenten auftreten.

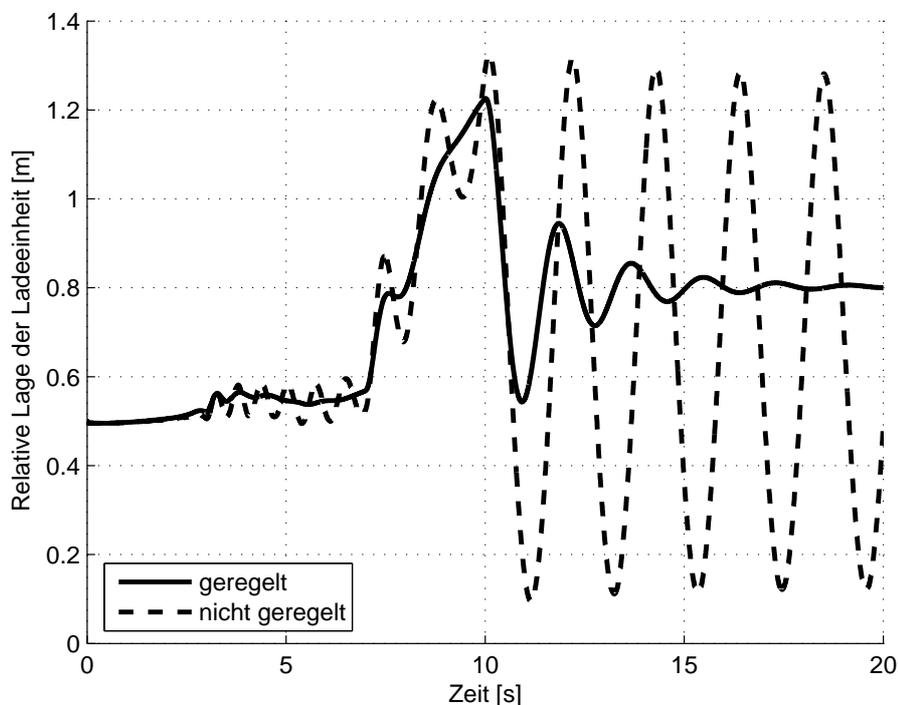


Abbildung 4.14: Relative Lage der Ladeinheit (FZ)

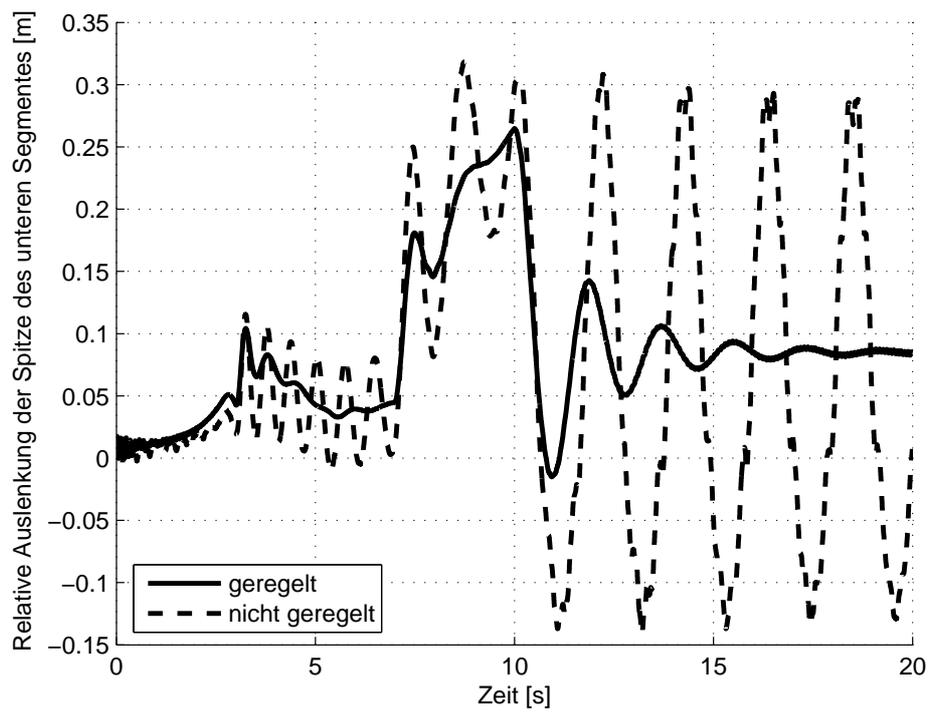


Abbildung 4.15: Relative Lage der Spitze des unteren Segmentes

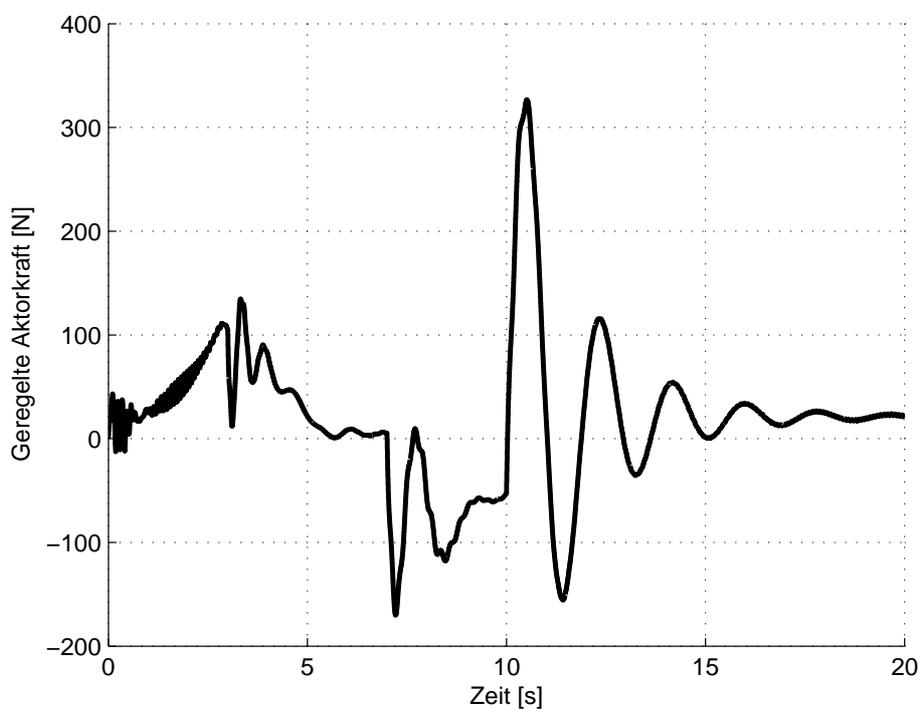


Abbildung 4.16: Geregelte Aktorkraft (FZ)

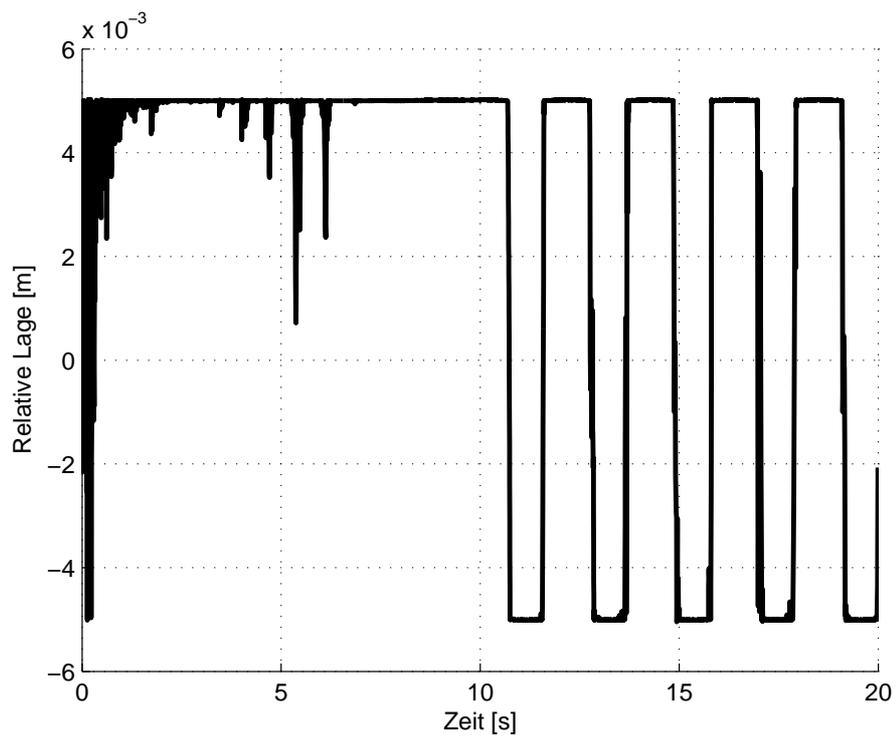


Abbildung 4.17: Relative Lage der oberen Kontaktpunkte (nicht geregelt)

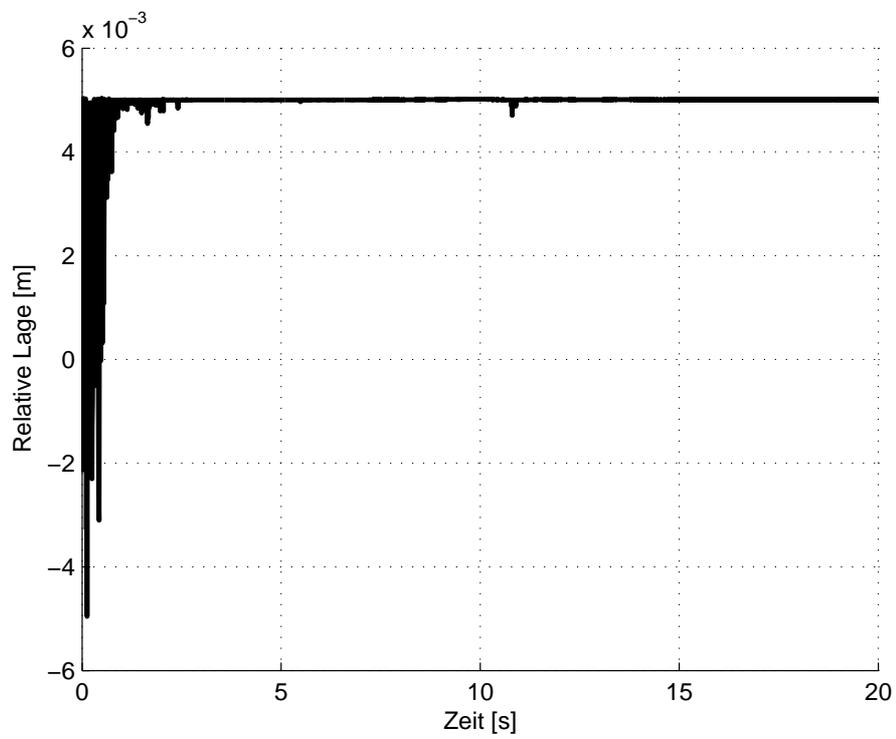


Abbildung 4.18: Relative Lage der oberen Kontaktpunkte (geregelt)

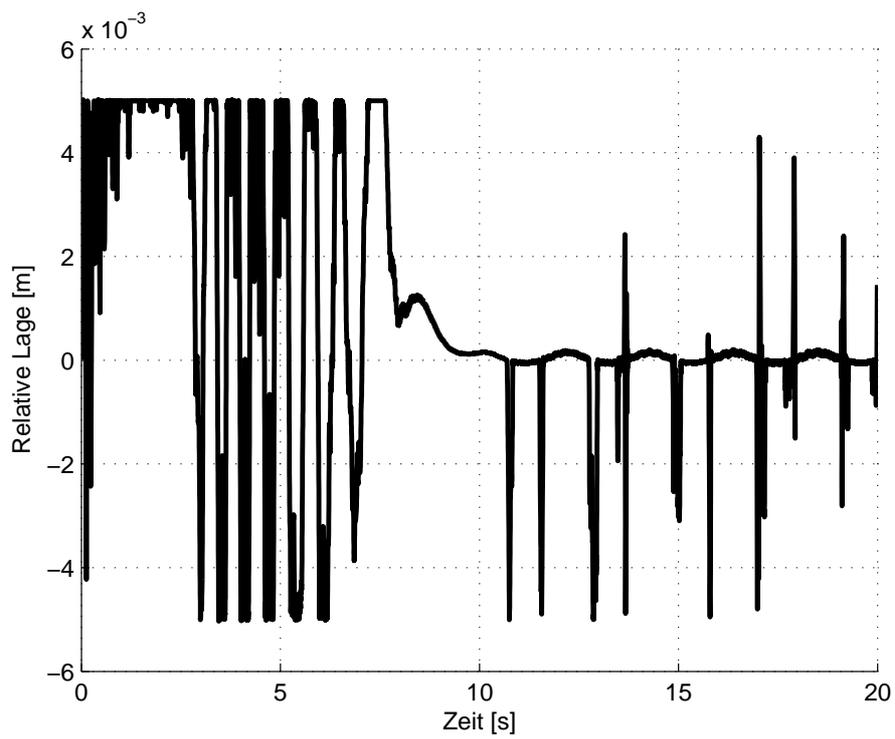


Abbildung 4.19: Relative Lage der mittleren Kontaktpunkte (nicht geregelt)

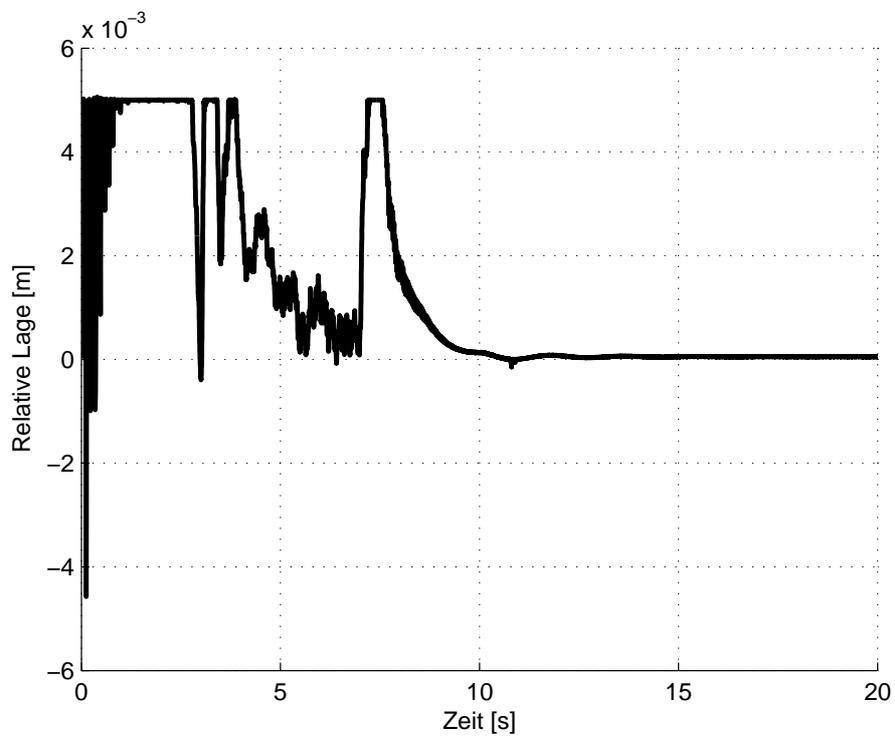


Abbildung 4.20: Relative Lage der mittleren Kontaktpunkte (geregelt)

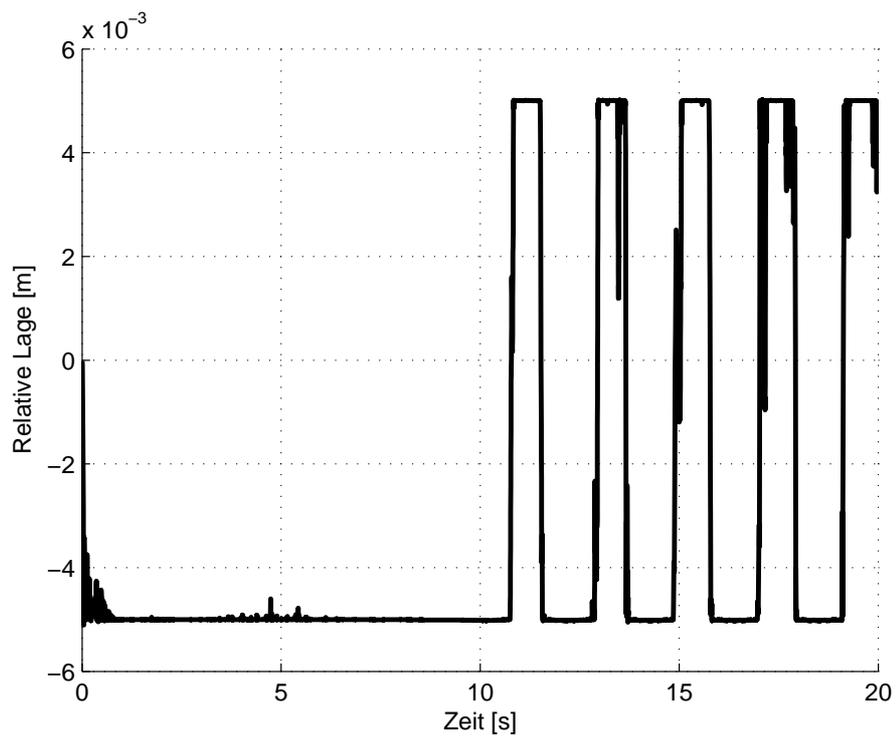


Abbildung 4.21: Relative Lage der unteren Kontaktpunkte (nicht geregelt)

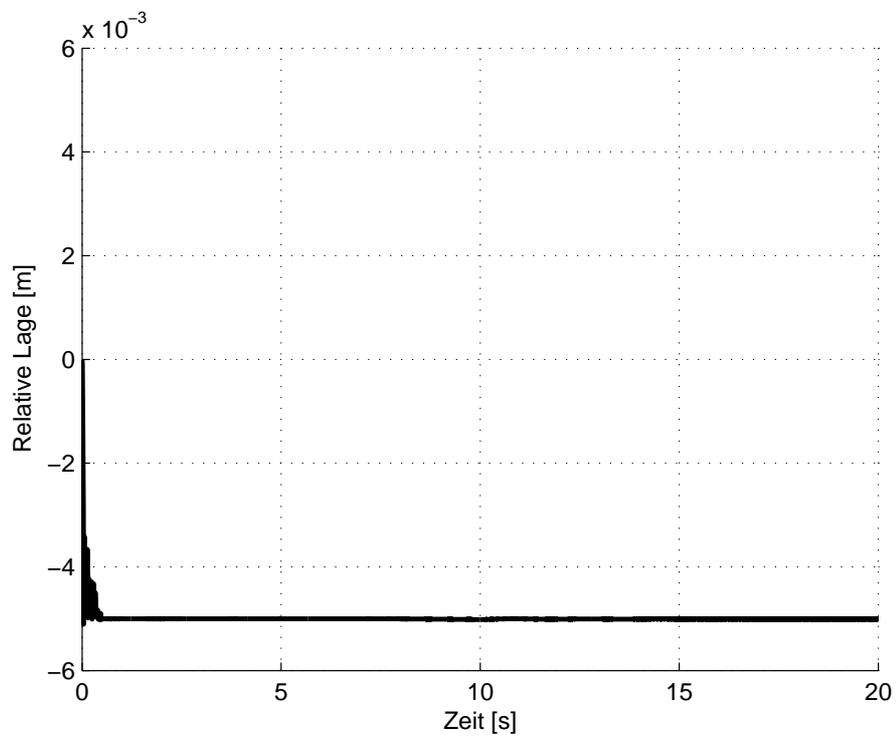


Abbildung 4.22: Relative Lage der unteren Kontaktpunkte (geregelt)

### 4.1.8 Störgrößenaufschaltung

Die Beschleunigung  $u_{0,tt}$  des Trägerfahrzeuges wirkt in Gleichung (4.16) über den Vektor  $\mathbf{b}_0$  als Störung auf das zu regelnde System. Bei der hier betrachteten "freien Zielanfahrt" wird  $u_{0,tt}$  als beliebige Funktion der Zeit vorgegeben und ist somit bekannt. Während kurzzeitige, impulsartige Störungen als Anfangswerte interpretiert werden (siehe Kapitel 4.1.2) und so durch den Regler kompensiert werden, müssen länger andauernde Störungen, wie z.B. die Beschleunigung des Trägerfahrzeuges  $u_{0,tt}$ , durch eine so genannte Störgrößenaufschaltung berücksichtigt werden. Hierzu wird die Kraft  $F_R$  aus Gleichung (4.16) in zwei Anteile

$$F_R = F_{Rr} + F_{Rs} \quad (4.60)$$

zerlegt, wobei man

$$F_{Rr} = -\mathbf{r}^T \mathbf{z} \quad (4.61)$$

nach wie vor durch eine Rückführung des Zustandsvektors  $\mathbf{z}$  (oder des rekonstruierten Zustandsvektors  $\hat{\mathbf{z}}$ ) über den Regler  $\mathbf{r}^T$  erhält. Einsetzen der Beziehungen (4.60) und (4.61) in Gleichung (4.16) führt auf

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T) \mathbf{z} + (\mathbf{b}_R F_{Rs} + \mathbf{b}_0 u_{0,tt}). \quad (4.62)$$

Während die Einstellung des Reglers weiterhin durch Vorgabe der Eigenwerte der Matrix  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}_R \mathbf{r}^T)$  vorgenommen wird, z.B. durch die LQR-Methode aus Kapitel 4.1.3, wird die Größe  $F_{Rs}$  so gewählt, dass nach Möglichkeit

$$\mathbf{b}_R F_{Rs} + \mathbf{b}_0 u_{0,tt} = \mathbf{0} \quad (4.63)$$

ist. Da es sich bei der Forderung gemäß Gleichung (4.63) um ein System von  $N_r$  Gleichungen mit nur einer Unbekannten handelt, kann die Störung  $u_{0,tt}$  nicht vollständig kompensiert werden. Mit der durch die Methode der kleinsten Quadrate erzielten Näherungslösung

$$F_{Rs} = -(\mathbf{b}_R^T \mathbf{b}_R)^{-1} \mathbf{b}_R^T \mathbf{b}_0 u_{0,tt} \quad (4.64)$$

für das System (4.63) wird die Störung bestmöglich unterdrückt [26].

Der Ausdruck  $(\mathbf{b}_R^T \mathbf{b}_R)^{-1} \mathbf{b}_R^T \mathbf{b}_0$  wird wie die Parameter des Reglers und des Beobachters für unterschiedliche Ausfahrlängen  $l_T$  bestimmt (siehe Kapitel 4.1.6) und durch Interpolation erhält man eine gesteuert adaptive Störgrößenaufschaltung.

Die Abbildungen 4.23 und 4.24 zeigen die Auswirkung einer Störgrößenaufschaltung bei dem Positionierungsbeispiel aus dem Kapitel 4.1.7 anhand der zeitlichen Verläufe der relativen Lage der Ladeeinheit und der geregelten Aktorkraft.

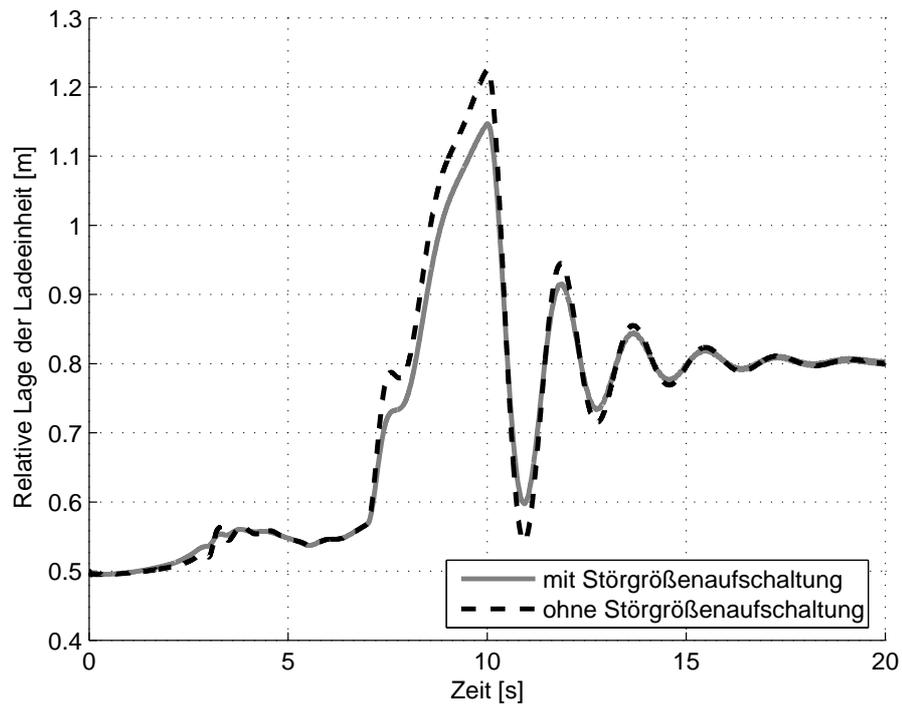


Abbildung 4.23: Relative Lage der Ladeinheit mit und ohne Störgrößenaufschaltung

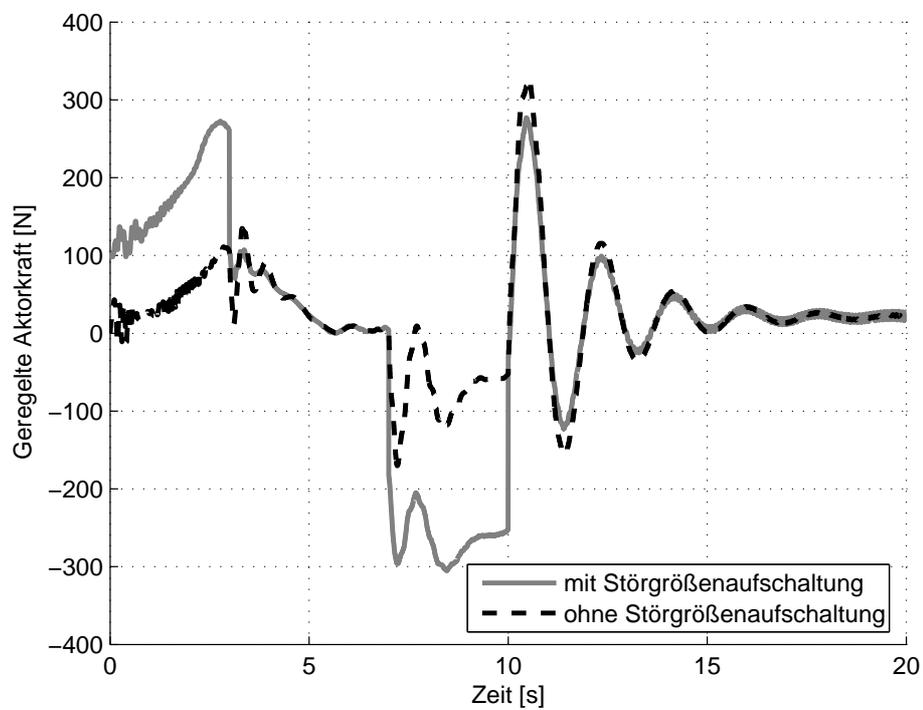


Abbildung 4.24: Geregelte Aktorkraft mit und ohne Störgrößenaufschaltung

## 4.2 Gesteuerte Zielfahrt (GZ)

Bei der "gesteuerten Zielfahrt" wird dem System eine gewünschte Endlage vorgegeben und sowohl die Positionierung, also die Bewegung des Trägerfahrzeuges, als auch die Schwingungsunterdrückung erfolgen dann durch eine geregelte Antriebskraft  $F_T$  die auf das Trägerfahrzeug wirkt.

Ausgangspunkt für eine aktive Schwingungsunterdrückung sind die gekoppelten, nichtlinearen und zeitvarianten, gewöhnlichen Differentialgleichungen (2.135), die das dynamische Verhalten des mechanischen Systems beschreiben. Wie bei der "freien Zielfahrt" stellt auch hier das Modell (2.135) für konstante Ausfahrlängen  $l_A = konst.$ ,  $l_L = konst.$  und mit  $F_T = 0$  ein gekoppeltes, nichtlineares aber zeitinvariantes System gewöhnlicher Differentialgleichungen dar, für das eine statische Ruhelage  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  berechnet werden kann. Linearisierung um  $\tilde{\mathbf{q}}_0$  und die anschließende Koordinatentransformation  $\tilde{\mathbf{q}}_l = \tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}}_0$  führen zu den linearen und zeitinvarianten Systemgleichungen

$$\mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_l + \mathbf{C}\tilde{\mathbf{q}}_l = \mathbf{b}_T^* F_T, \quad (4.65)$$

mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$ . Die Verschiebung des Trägerfahrzeuges wird durch

$$u_0(t) = [1, 0, \dots, 0] (\tilde{\mathbf{q}}_l + \tilde{\mathbf{q}}_0) = \mathbf{c}_T^{*T} \tilde{\mathbf{q}}_l \quad (4.66)$$

ausgedrückt. Analog zu der im Kapitel 4.1.1 beschriebenen Vorgehensweise wird auch das System (4.65)/(4.66) durch die Koordinatentransformation

$$\tilde{\mathbf{q}}_l = \mathbf{\Theta} \mathbf{y} \quad (4.67)$$

auf modale Koordinaten  $\mathbf{y}$  transformiert:

$$\underbrace{\mathbf{\Theta}^T \mathbf{M} \mathbf{\Theta}}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\mathbf{\Theta}^T \mathbf{C} \mathbf{\Theta}}_{\mathbf{\Omega}} \dot{\mathbf{y}} = \underbrace{\mathbf{\Theta}^T \mathbf{b}_T^*}_{\mathbf{b}_T^{**}} F_T, \quad (4.68)$$

$$u_0(t) = \mathbf{c}_T^{*T} \mathbf{\Theta} \mathbf{y} = \mathbf{c}_T^{**T} \mathbf{y}. \quad (4.69)$$

Anschließend wird  $\mathbf{y}$  in einen tieffrequenten Anteil  $\mathbf{y}_r$  und einen hochfrequenten Anteil  $\mathbf{y}_h$  unterteilt. Durch Vernachlässigung der modalen Massen der hochfrequenten Moden gegenüber den zugehörigen modalen Steifigkeiten wird das System wieder reduziert:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{y}}_r \\ \ddot{\mathbf{y}}_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_r \\ \mathbf{y}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{Tr}^{**} \\ \mathbf{b}_{Th}^{**} \end{pmatrix} F_T, \quad (4.70)$$

$$u_0(t) = \mathbf{c}_{Tr}^{**T} \mathbf{y}_r + \mathbf{c}_{Th}^{**T} \mathbf{y}_h. \quad (4.71)$$

In Zustandsform lauten die Systemgleichungen

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}_T F_T, \quad (4.72)$$

und die Verschiebung des Trägerfahrzeuges wird durch den Ausdruck

$$u_0(t) = \mathbf{c}_T^T \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{c}_{Th}^{**T} \boldsymbol{\Omega}_h^{-1} \mathbf{b}_{Th}^{**}}_{d_T} F_T \quad (4.73)$$

beschrieben.

### 4.2.1 Schwingungsunterdrückung durch Zustandsregelung

Abbildung 4.25 zeigt das Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises mit integrierendem Beobachter. Um eine Sollwertfolge bei der hier betrachteten Festwertregelung sicherzustellen, wird ein Vorfilter

$$v_R = \left( \mathbf{c}_T^T (\mathbf{b}_T \mathbf{r}^T - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b}_T \right)^{-1} \quad (4.74)$$

eingeführt (siehe z.B. [26]).

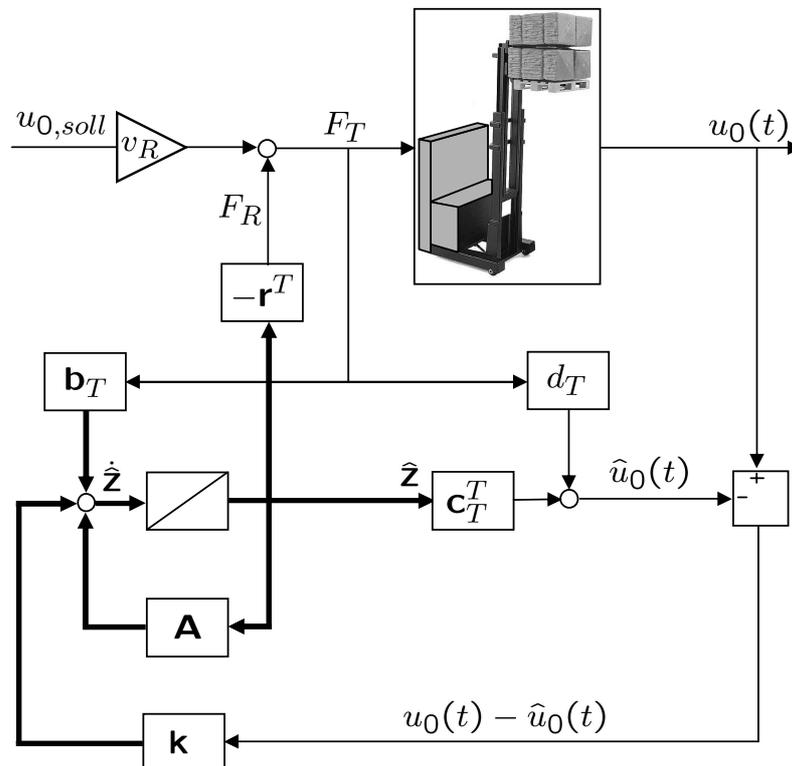


Abbildung 4.25: Geschlossener Regelkreis mit Beobachter (GZ)

Die Rückführung erfolgt über die konstante Reglermatrix  $\mathbf{r}$  (siehe Gleichung (4.48)) und der Beobachter wird durch die Gleichungen

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b}_T F_T + \mathbf{k}(u_0(t) - \hat{u}_0(t)) \quad (4.75)$$

und

$$\hat{u}_0(t) = \mathbf{c}_T^T \hat{\mathbf{z}} + d_T F_T \quad (4.76)$$

beschrieben. Unter der Bedingung, dass das System steuerbar und beobachtbar ist, was durch die übereinstimmende Position des Aktors und des Sensors am Trägerfahrzeug immer gleichzeitig erfüllt ist, und der Forderung entspricht, dass die Matrix

$$\mathbf{b}_{Tr}^{**} = \mathbf{c}_{Tr}^{**} \quad (4.77)$$

voll besetzt ist, können die Pole des geschlossenen Regelkreises durch Vorgabe der Matrizen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{k}$  beliebig eingestellt werden. Eine zu Kapitel 4.1.3 analoge Vorgehensweise besteht gemäß der Methode der Linear-Quadratisch-Optimalen Zustandsrückführung in der Suche nach derjenigen Reglermatrix  $\mathbf{r}$ , die die Zielfunktion

$$J = \int_0^\infty \left( u_0^2 + \frac{1}{\kappa^{**}} F_T^2 \right) dt \quad (4.78)$$

minimiert. Dies entspricht der Forderung, dass das Trägerfahrzeug möglichst schnell aus einer "gestörten Position" in seine "Nullposition" zurückgeführt wird, und zwar bei minimaler Einwirkung der geregelten Aktorkraft. Hierbei ist  $\kappa^{**}$  ein Gewichtungsfaktor zur Steuerung der zulässigen Aktoreinwirkung. Gleichung (4.78) entspricht Gleichung (4.30) mit

$$\mathbf{Q} = \mathbf{c}_T \mathbf{c}_T^T, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{c}_T d_T \quad (4.80)$$

und

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\kappa^{**}} + d_T^2. \quad (4.81)$$

Die Bestimmung der Matrizen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{k}$  erfolgt wie in den Kapiteln 4.1.3 und 4.1.4. Es sei noch angemerkt, dass die Bestimmungsgleichungen (4.80) und (4.81) durch das Auftreten des Durchgriffsterms  $d_T$  den schon in Kapitel 4.1.1 diskutierten Einfluss der Art der Modellreduktion auf die Reglereinstellung verdeutlichen.

Aus praktischen Gründen ist eine Reglereinstellung über die Methode der Linear-Quadratisch-Optimalen Zustandsrückführung, wie sie in dem vorangehenden Abschnitt

diskutiert wurde, für die hier betrachteten Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Fördertechnik jedoch ungeeignet. Neben der Tatsache, dass ein Überschwingen nicht verhindert wird, was bei Positionierungsaufgaben zu fatalen Konsequenzen führen würde, kann auch die Dauer des Regelvorganges nicht vorgegeben werden. Dies wiederum führt zu Logistikproblemen. Aus diesen Gründen wird im Folgenden für die "gesteuerte Zielfahrt" eine direkte Polvorgabe in Form eines dominanten Polpaares zur Einstellung der Regelung genutzt.

### 4.2.2 Direkte Polvorgabe

Dem System wird ein dominantes Polpaar sowie ein  $(2N_r - 2)$ -facher, reeller Pol vorgegeben [26]. Um ein Überschwingen und damit ein Hinausfahren über die gewünschte Position zu vermeiden, wird dem dominanten Polpaar ein aperiodisches Verhalten aufgeprägt, das durch die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{(T_e s + 1)^2} \quad (4.82)$$

beschrieben wird. Die Sprungantwort dieser Übertragungsfunktion lautet im Zeitbereich

$$h(t) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T_e}\right) e^{-\frac{t}{T_e}}. \quad (4.83)$$

Durch die Vorgabe einer maximalen relativen Abweichung  $\varepsilon_e$  vom Endwert zu einem beliebig wählbaren Zeitpunkt  $t = t_e$  kann die Zeitkonstante  $T_e$  aus Gleichung (4.83) bestimmt werden, wodurch das dominante Polpaar eindeutig gegeben ist. Die restlichen Pole werden genügend weit vom dominanten Polpaar positioniert, so dass ihr Einfluss auf das Übertragungsverhalten möglichst gering ist.

Die Pole des Beobachters werden in der komplexen Ebene links von denen des Reglers platziert, um zu garantieren dass der Beobachter schneller ist als der Regler.

Wie schon in den Kapiteln 4.1.2 und 4.1.4 angesprochen wurde, muss auch hier ein Kompromiss zwischen einem möglichst schnellen Führungsverhalten (kleine Werte für  $t_e$  und  $\varepsilon_e$ ) und dem Vermeiden von Messrauschverstärkung durch eine wachsende Bandbreite des Systems getroffen werden. Die Aussagen zu Spillover-Instabilitäten für die "freie Zielfahrt" gelten auch für die "gesteuerte Zielfahrt" und können mit  $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_{0h} = \mathbf{0}$  und  $d_0 = 0$  aus Kapitel 4.1.5 übernommen werden. Auch die Einführung eines gesteuert adaptiven Reglers und eines gesteuert adaptiven Beobachters erfolgt analog zu der Vorgehensweise aus Kapitel 4.1.6.

### 4.2.3 Simulationsergebnisse

Die hier vorgestellten Simulationsergebnisse beruhen auf einem Modell, dem die in Kapitel 3 angegebenen Systemparameter und weiterhin  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 5$ ,  $N_r = 2$ ,  $\varepsilon_e = 0.1\%$  und  $t_e = 5\text{s}$  zugrunde liegen. Simulationen werden jeweils für ein System

ohne Spiel ( $l_S = 0\text{m}$ ,  $d = 0\text{Ns/m}$ ) und für ein System mit Spiel ( $l_S = 0.01\text{m}$ ,  $d = 10^3\text{Ns/m}$ ) durchgeführt. Berechnet wird wie bei der "freien Zielanfahrt" im Kapitel 4.1.7 ein typischer Positioniervorgang. Für den nicht geregelten Fall wird das ohne Anfangsgeschwindigkeit von einem beliebigen Startpunkt startende System während 3 Sekunden beschleunigt ( $F_T = 300\text{N}$ ). Dann bewegt es sich während 4 Sekunden mit konstanter Geschwindigkeit und wird schließlich während 3 Sekunden bis zum Stillstand abgebremst ( $F_T = -300\text{N}$ ). Der sich hierdurch ergebende zeitliche Verlauf der Position des Trägerfahrzeuges ist für die beiden betrachteten Systeme (mit und ohne Spiel) nahezu identisch und in Abbildung 4.26 dargestellt. Die Ausfahrlängen  $l_A(t)$  und  $l_L(t)$  werden dem System, wie in der Abbildung 4.13 dargestellt, vorgegeben.

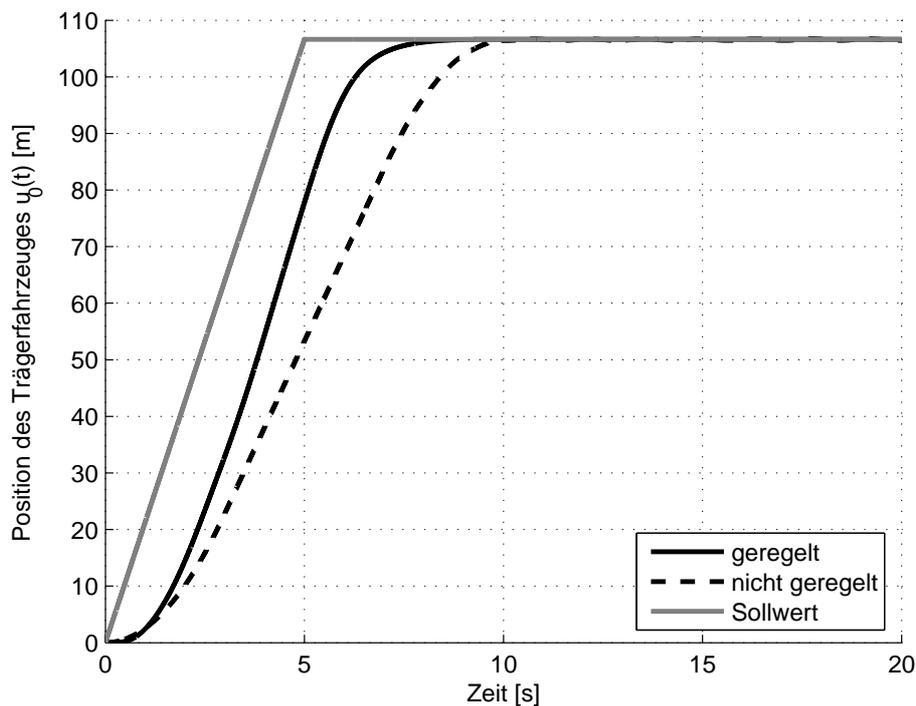


Abbildung 4.26: Position des Trägerfahrzeuges  $u_0(t)$  (GZ)

Die gleiche Positionierung soll dann über die Antriebsregelung erfolgen. Hierfür wird dem System die in der Abbildung 4.26 dargestellte Rampe als Sollwert vorgegeben, wodurch sichergestellt wird, dass das geregelte System zur gleichen Zeit die gleiche Position erreicht wie das nicht geregelte System.

Abbildung 4.27 zeigt die horizontale Komponente  $u_2(l_L(t), t) + a_L \cos(\alpha_2(l_L(t), t))$  der relativen Lage der Ladeeinheit bezüglich des Trägerfahrzeuges für das aktiv gedämpfte und für das nicht geregelte System ohne Spiel und Abbildung 4.28 zeigt die entsprechenden zeitlichen Verläufe für das betrachtete System mit Spiel. Durch die Bewegung des Trägerfahrzeuges und durch die überlagerte, dynamische Teleskopierbewegung werden Schwingungen angeregt, deren Amplituden mit zunehmender Ausfahrlänge  $l_T$  ansteigen, bei gleichzeitiger Abnahme der zugehörigen Frequenzen. Durch die gesteuert adaptive Regelung wird für das Modell ohne Spiel (Abbildung 4.27) über den gesamten Teleskopiervorgang eine gute Schwingungsunterdrückung erzielt. Die durch den grau-

en Kreis markierte Auslenkung resultiert aus dem Übergang des Sollwertverlaufs von einer Rampe zu einem konstanten Wert. Für das Modell mit Spiel (Abbildung 4.28) zeigen die Simulationsergebnisse des aktiv geregelten Systems in dem durch einen grauen Kreis markierter Bereich ein deutlich schlechteres Ergebnis als die Berechnungsergebnisse ohne Regelung. Dieses Verhalten ist auf Kontaktstöße zurückzuführen, die durch das vorhandene Spiel zwischen den beiden Segmenten auftreten. Die Abbildungen 4.29 und 4.30 sollen dies verdeutlichen. Abbildung 4.29 zeigt den zeitlichen Verlauf der geregelten Aktorkraft für das Modell ohne Spiel und für das Modell mit Spiel. Die heftigen Ausschläge im Kraftverlauf des spielbehafteten Systems fallen direkt mit den in der Abbildung 4.30 erkennbaren Kontaktstößen im mittleren Kontaktpunkt zusammen.

Diese Ergebnisse zeigen deutlich, dass durch konstruktionsbedingtes Spiel zwischen einzelnen Segmenten Kontaktstöße auftreten, die eine aktive Schwingungsunterdrückung beeinträchtigen können. Der Einfluss dieser Kontaktstöße ist durch die direkte Polvorgabe bei der "gesteuerten Zielfahrt" größer als bei der "freien Zielfahrt", bei der die Reglereinstellung über die Methode der Linear-Quadratisch-Optimalen Zustandsrückführung erfolgt. Durch das Tiefpassverhalten des in der vorliegenden Arbeit als ideal angenommenen realen Aktors [54] ist anzunehmen, dass der Einfluss dieser Störungen bei realen Systemen schwächer sein wird.

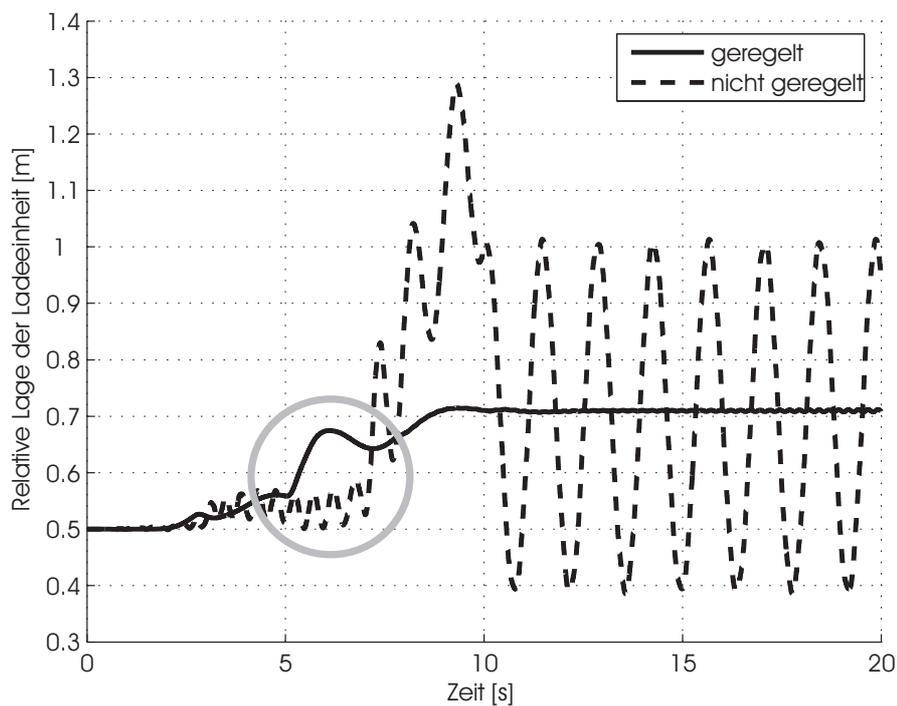


Abbildung 4.27: Relative Lage der Ladeinheit (ohne Spiel, GZ)

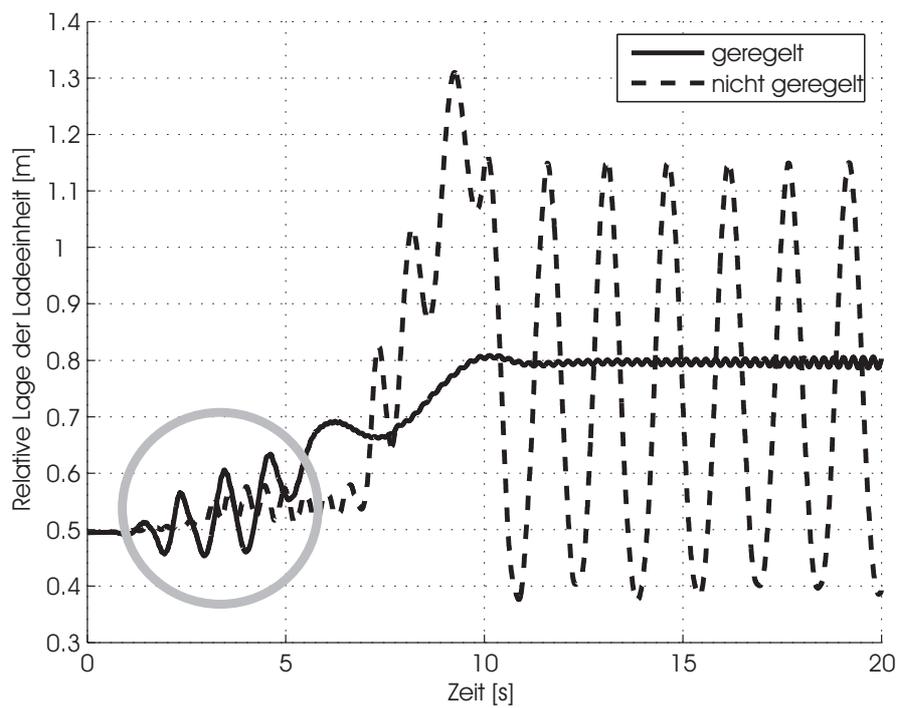


Abbildung 4.28: Relative Lage der Ladeinheit (mit Spiel, GZ)

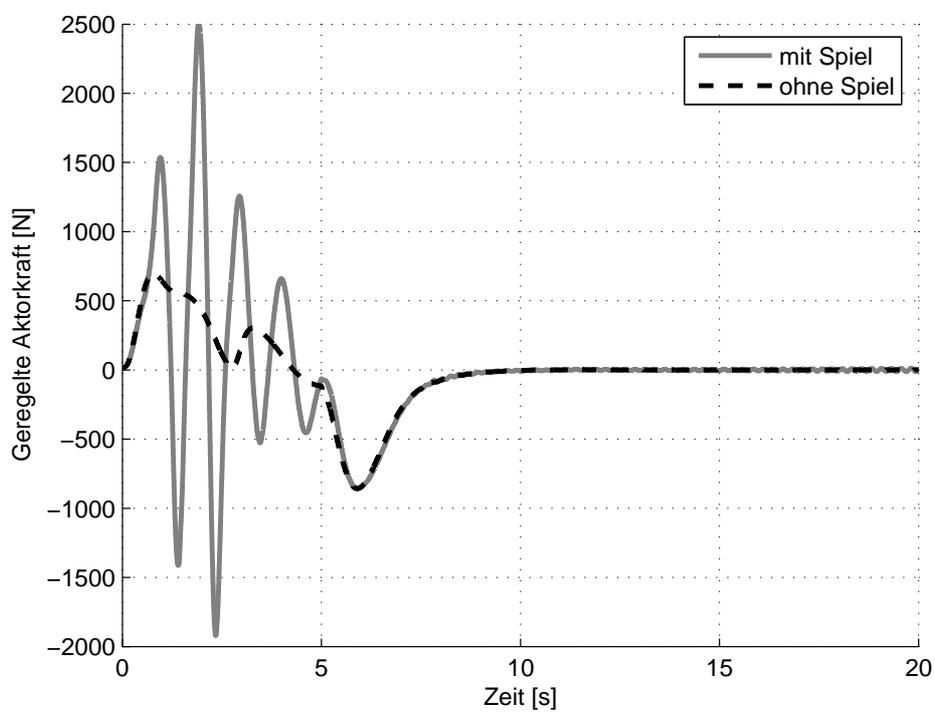


Abbildung 4.29: Geregelte Aktorkraft (mit und ohne Spiel, GZ)

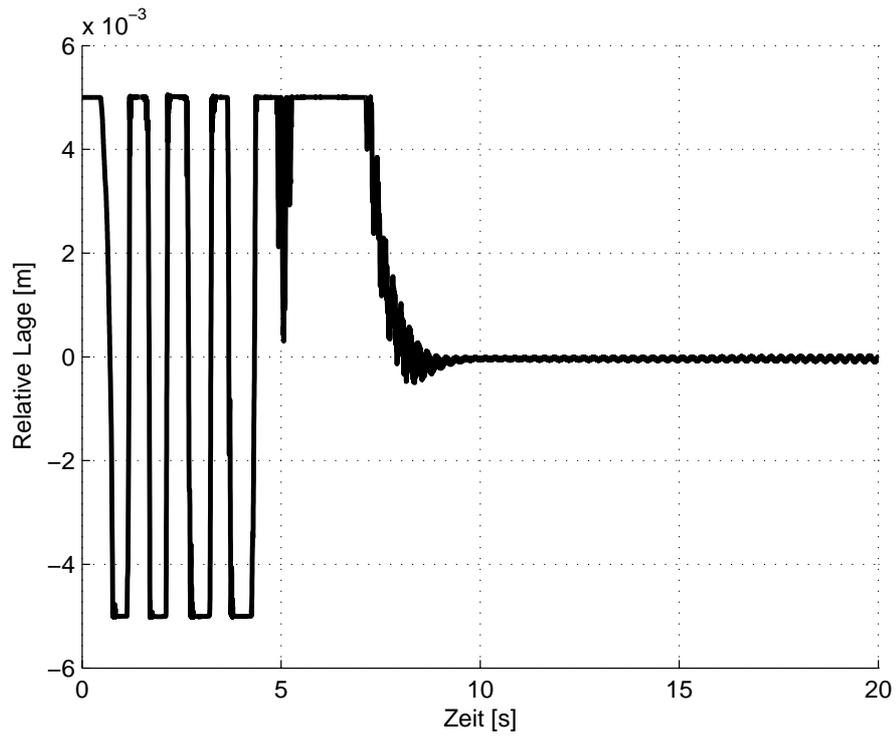


Abbildung 4.30: Relative Lage der mittleren Kontaktpunkte (geregelt, GZ)

# Kapitel 5

## Zusammenfassung

Am Anwendungsbeispiel eines Gabelstaplers werden spielbehaftete Systeme elastischer Balken behandelt, bei denen sich die einzelnen Segmente nach einer vorgegebenen Funktion der Zeit relativ zueinander verschieben können. Die betrachtete Klasse von Problemen, deren Anwendungsgebiete neben der Fördertechnik z.B. auch in der Robotik und in der Raumfahrttechnik zu finden sind, wird durch das Auftreten nichtmaterieller Rand- bzw. Übergangsbedingungen zusammen mit nichtlinearen Kontaktformulierungen zur Berücksichtigung des immer vorhandenen Spiels definiert. Durch den Wunsch nach Leichtbauweise treten beim Betrieb der betrachteten Maschinen Schwingungen auf, die zu einer Reduzierung der Leistungsfähigkeit und zu Sicherheitsproblemen führen.

Die vorliegende Arbeit, die sich grob in zwei Teile gliedert, leistet einen Beitrag, wie eine Schwingungsunterdrückung durch aktive Regelung derartige Probleme systematisch und gezielt reduzieren kann. Der erste Teil beschäftigt sich mit der Modellbildung. Basierend auf einem physikalischen Modell erfolgt die mathematische Formulierung der Systemgleichungen über das Prinzip von Hamilton. Im zweiten Teil steht die angesprochene aktive Schwingungsunterdrückung im Vordergrund. Hierzu werden geregelte Aktoren und Sensoren in das mechanische System integriert. Arbeiten zu diesem Thema, die sich mit aktiver Schwingungsdämpfung befassen und bei der Modellierung alle wesentlichen Effekte berücksichtigen, sind in der existierenden Literatur nicht bekannt.

Durch Vereinfachung der Geometrie und durch Annahmen zur Kinematik und zu geltenden Materialgesetzen wird in der ersten Abstraktionsstufe ein physikalisches Modell erarbeitet. Die mathematische Formulierung erfolgt dann mit Methoden der Kontinuumsmechanik, die insbesondere auf dem Gebiet fördertechnischer Maschinen bisher nur wenig genutzt wurden. Durch die Diskretisierung der Systemgleichungen über gemischte Ritz-Ansätze ist die Zahl der Freiheitsgrade frei wählbar, wobei alle Einflüsse wie Steifigkeit, Kontakt, etc. systematisch erfasst werden. Eine aufwändige (und teilweise willkürliche) Formulierung im Rahmen einer physikalischen Diskretisierung durch starre Körper und Federn entfällt. Sowohl die Auswirkung der vorgegebenen, dynamischen Verschiebungen der einzelnen Segmente als auch der Einfluss der auftretenden Kontaktstöße werden von dem vorgestellten Modell in einem hinreichend großen Frequenzbereich abgebildet. Durch eine geometrisch-nichtlineare Formulierung der einzelnen Segmente können auch große Verformungen gut dargestellt werden.

Das Berechnungsmodell wird validiert, und basierend auf den Systemgleichungen werden Methoden zur aktiven Schwingungsunterdrückung entwickelt. Bedingt durch das betrachtete Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Fördertechnik, werden zwei unterschiedliche Arten der Positionierung betrachtet. Bei der "freien Zielfahrt" gibt eine Bedienperson die Bewegung des Trägerfahrzeuges vor und zur aktiven Dämpfung wird ein geregeltes Aktor-Sensor Paar zwischen dem untersten Segment und dem Trägerfahrzeug angebracht. Für die "gesteuerte Zielfahrt" wird dem System eine gewünschte Endlage vorgegeben und sowohl die Positionierung, also die Bewegung des Trägerfahrzeuges, als auch die Schwingungsunterdrückung erfolgen dann durch eine Antriebsregelung. Die aktive Beeinflussung des Systems erfolgt über eine gesteuert adaptive Zustandsregelung mit integriertem Beobachter, die für ein reduziertes Modell zur Dämpfung tieffrequenter Moden ausgelegt wird. Die Auswirkung der geregelten Aktorkraft auf nicht geregelte, hochfrequente Moden (Spillover-Instabilitäten) sowie der Einfluss von Kontaktstößen, der Bewegung des Trägerfahrzeuges und der dynamischen Segmentverschiebungen auf die aktive Schwingungsunterdrückung, werden durch numerische Simulationen eines realen Positioniervorgangs untersucht.

Die Berechnungsergebnisse zeigen, dass eine aktive Schwingungsunterdrückung auch während dynamischen Teleskopiervorgängen bei den betrachteten Systemen durch eine gesteuert adaptive Regelung möglich ist. Durch die im Modell als "worst case" vernachlässigte aber bei realen Systemen stets vorhandene Materialdämpfung ist die Gefahr von Spillover-Instabilitäten hierbei höher einzuordnen, als es in der Realität zu erwarten ist. Die durchgeführten Simulationen bestätigen, dass durch konstruktionsbedingtes Spiel zwischen einzelnen Segmenten Kontaktstöße auftreten, die eine aktive Schwingungsunterdrückung beeinträchtigen können. Durch das Tiefpassverhalten des in der vorliegenden Arbeit als ideal angenommenen realen Aktors ist anzunehmen, dass der Einfluss dieser Störungen bei realen Systemen schwächer sein wird. Bei der Auslegung einer Regelung für ein reales System sollte dies, sowie der generelle Einfluss der Aktor- und der Sensordynamik auf den geschlossenen Regelkreis, durch zusätzliche numerische Simulationen überprüft werden.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Gabelstapler und Modell . . . . .	13
2.2	Modell im Ausgangszustand und in verformtem Zustand . . . . .	15
2.3	Relative Verdrehung von zwei Koordinatensystemen . . . . .	17
2.4	Körper im Ausgangszustand und in verformtem Zustand . . . . .	19
2.5	Verschiebungsvektor eines beliebigen materiellen Balkenpunktes . . . . .	21
2.6	Lage des Nullniveaus zur Bestimmung des Schwerepotentials . . . . .	26
2.7	Kontaktformulierung über einseitige Feder- Dämpferelemente . . . . .	30
3.1	Vergleich der 1. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	39
3.2	Vergleich der 2. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	40
3.3	Vergleich der 3. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	40
3.4	Vergleich der 4. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	41
3.5	Vergleich der 5. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	41
3.6	Vergleich der 6. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	42
3.7	Vergleich der 7. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (FZ) . . . . .	42
3.8	Vergleich der 1. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ) . . . . .	43
3.9	Vergleich der 2. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ) . . . . .	44
3.10	Vergleich der 3. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ) . . . . .	44
3.11	Vergleich der 4. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ) . . . . .	45
3.12	Vergleich der 5. Eigenfrequenz: Modell/ANSYS (GZ) . . . . .	45
3.13	Vergleich der 1. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	46
3.14	Vergleich der 2. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	47
3.15	Vergleich der 3. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	47
3.16	Vergleich der 4. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	48
3.17	Vergleich der 5. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	48
3.18	Vergleich der 6. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	49
3.19	Vergleich der 7. Eigenfrequenz: $a_L = 0\text{m}/a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	49
3.20	Einfluss der Vorspannung: $a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	50
3.21	Einfluss der Vorspannung: $a_L = 0\text{m}$ . . . . .	51
3.22	Verlauf der ersten 7 Eigenfrequenzen: $a_L = 0.5\text{m}$ . . . . .	52
3.23	Verlauf der ersten 7 Eigenfrequenzen: $a_L = 0\text{m}$ . . . . .	52
4.1	Vergrößerungsfunktion eines reduzierten Modells ohne Durchgriff . . . . .	57
4.2	Vergrößerungsfunktion eines reduzierten Modells mit Durchgriff . . . . .	57
4.3	Wurzelortkurve für zwei reduzierte Modelle mit und ohne Durchgriff . . . . .	58
4.4	Wurzelortkurve für nicht reduziertes Modell . . . . .	58

4.5	Vergrößerungsfunktion bei nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition . . . . .	61
4.6	Wurzelortkurve bei nicht übereinstimmender Aktor- und Sensorposition . . . . .	61
4.7	Geschlossener Regelkreis (FZ) . . . . .	62
4.8	Geschlossener Regelkreis mit Beobachter (FZ) . . . . .	65
4.9	Erstes Element der Matrizen $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$ und $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$ . . . . .	70
4.10	Zweites Element der Matrizen $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$ und $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$ (nicht steuerbar) . . . . .	71
4.11	Zweites Element der Matrizen $\mathbf{b}_{Rr}^{**}$ und $\mathbf{c}_{Rr}^{**}$ (steuerbar) . . . . .	71
4.12	Position des Trägerfahrzeuges $u_0(t)$ (FZ) . . . . .	73
4.13	Ausfahrlängen $l_A(t)$ und $l_L(t)$ . . . . .	73
4.14	Relative Lage der Ladeeinheit (FZ) . . . . .	74
4.15	Relative Lage der Spitze des unteren Segmentes . . . . .	75
4.16	Geregelte Aktorkraft (FZ) . . . . .	75
4.17	Relative Lage der oberen Kontaktpunkte (nicht geregelt) . . . . .	76
4.18	Relative Lage der oberen Kontaktpunkte (geregelt) . . . . .	76
4.19	Relative Lage der mittleren Kontaktpunkte (nicht geregelt) . . . . .	77
4.20	Relative Lage der mittleren Kontaktpunkte (geregelt) . . . . .	77
4.21	Relative Lage der unteren Kontaktpunkte (nicht geregelt) . . . . .	78
4.22	Relative Lage der unteren Kontaktpunkte (geregelt) . . . . .	78
4.23	Relative Lage der Ladeeinheit mit und ohne Störgrößenaufschaltung . . . . .	80
4.24	Geregelte Aktorkraft mit und ohne Störgrößenaufschaltung . . . . .	80
4.25	Geschlossener Regelkreis mit Beobachter (GZ) . . . . .	82
4.26	Position des Trägerfahrzeuges $u_0(t)$ (GZ) . . . . .	85
4.27	Relative Lage der Ladeeinheit (ohne Spiel, GZ) . . . . .	86
4.28	Relative Lage der Ladeeinheit (mit Spiel, GZ) . . . . .	87
4.29	Geregelte Aktorkraft (mit und ohne Spiel, GZ) . . . . .	87
4.30	Relative Lage der mittleren Kontaktpunkte (geregelt, GZ) . . . . .	88

# Literaturverzeichnis

- [1] B. O. Al-Bedoor und Y. A. Khulief. *Dynamic analysis of mechanical systems with elastic telescopic members*. In *ASME, Design Engineering Division DE*, volume 71, Seiten 337–342, 1994.
- [2] F. Ambrogi, C. Braccisi und F. Cianetti. *Simulation of Moving Parts on Flexible Bodies using Multibody Approach. Test Case on a Reinforced Concrete Highway Bridge*. In *15th ADAMS European User's Conference*, Roma, Nov. 15-17 2000.
- [3] A. K. Amos und B. Qu. *Dynamic equations of motion for a deploying telescopic beam*. *Collection of Technical Papers-AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, 4:2028–2038, 1993.
- [4] A. Azhdari, N. G. Chalhoub und F. Gordaninejad. *Dynamic modeling of a revolute-prismatic flexible robot arm fabricated from advanced composite materials*. *Nonlinear Dynamics*, 2(3):171–186, 1991.
- [5] M. J. Balas. *Modal Control of Certain Flexible Dynamic Systems*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 16(3):450–462, 1978. doi: 10.1137/0316030. URL <http://link.aip.org/link/?SJC/16/450/1>.
- [6] P. Barthels und J. Wauer. *Modeling and Dynamic Analysis of Telescopic Systems of Structural Members with Clearance*. *Nonlinear Dynamics*, 42(4):371–382, 2005. doi: 10.1007/s11071-005-6788-7.
- [7] E. Beha. *Dynamische Beanspruchung und Bewegungsverhalten von Gabelstaplern*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1989.
- [8] E. Beha. *Simulation unterstützt Ermittlung von Schwingbeiwerten an Gabelstaplern*. *Fördern und Heben*, 40(5):293–301, 1990.
- [9] F. Beisteiner und E. Beha. *Dynamische Beanspruchung der Hubgerüste und Fahrzeugrahmen von Gabelstaplern*. *Fördern und Heben*, 37(5):334–343, 1987.
- [10] F. Beisteiner und E. Maisch. *Die Beanspruchung in Gabelstapler-Hubgerüsten*. *Fördern und Heben*, 31(6), 1981.
- [11] F. Beisteiner, D. Messerschmidt und M. Hesse. *Staplerhubgerüste mit CAD und FEM berechnen*. *Fördern und Heben*, 43(7-8):492–495, 1993.
- [12] R. Berger. *Instationäre Bewegung und Stabilitätsverhalten eindimensionaler Kontinua*. In *Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 189*. VDI Verlag, Düsseldorf, 1996.

- [13] J. Beuse, D. Lutz, R. Nösner, M. Wöhrmann, J. Zeischka und G. Zimmermann. *Neue Ansätze zur flexiblen Mehrkörpermodellierung und Topologieoptimierung mit überlagerten Kräften eines radführenden Federbeins*. In *VDI-Berichte Nr. 1846*. VDI Verlag, 2004.
- [14] H. Bitsch. *Schneller Lagerumschlag. Fördern und Heben*, 31, 1981.
- [15] W. J. Book, O. Maizza-Netto und D. E. Whitney. *Feedback control of two beams, two joint systems with distributed flexibility*. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 97(4):424–431, 1975.
- [16] W. Bopp. *Untersuchung der statischen und dynamischen Positionsgenauigkeit von Einmastregalbediengeräten*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1993.
- [17] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 1999.
- [18] R. Bruns. *Verbesserung des Betriebsverhaltens durch gezielte Beeinflussung von Schwingeffekten*. In *Stapler : Beanspruchungen, Betriebsverhalten und Einsatz, Kontakt + Studium*, Seiten 96–111, 1994.
- [19] R. Bruns. *Sicherheitsnachweis für Stapler. Hebezeuge und Fördermittel*, Berlin 42 (7-8):392ff., 2002.
- [20] N. G. Chalhoub und A. G. Ulsoy. *Dynamic simulation of lead screw driven flexible robot arm and controller*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 108:119–126, June 1986.
- [21] G. Chen, M. C. Delfour, A. M. Krall und G. Payre. *Modeling, Stabilization and Control of Serially Connected Beams*. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 25(3):526–546, 1987.
- [22] H. Clemens. *Stabilitätsprobleme elastischer Stäbe und Platten mit nichtlinearer Verformungsgeometrie*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1983.
- [23] M. Dietzel. *Beeinflussung des Schwingungsverhaltens von Regalbediengeräten durch Regelung des Fahrtriebs*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999.
- [24] S. Dubowsky und D. T. DesForges. *The Application of Model-Referenced Adaptive Control to Robotic Manipulators*. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 101:193–200, September 1979.
- [25] M. Fard. *Modelling and Control of Mechanical Flexible Systems*. Dissertation, Norwegian University of Science and Technology Trondheim, 2001.
- [26] O. Föllinger. *Regelungstechnik*. Elitera-Verl., 2. völlig überarb. Auflage, 1978. ISBN 3-87087-093-1.
- [27] K. Fujita, Y. Shiona, K. Koike und T. Koseki. *Multibody Dynamics of the 2 Section Ladder Model Extending and Retracting Each Other*. In *Proceedings of ASME-DECT'03*, Chicago (USA), Sept. 2-6 2003.

- [28] D. Gross, W. Hauger, W. Schnell und P. Wriggers. *Technische Mechanik 4*. Springer, 2004.
- [29] P. Hagedorn. *Technische Schwingungslehre Band 2*. Springer, 1989.
- [30] K. Heptner. *Dynamisches Verhalten von Regalförderzeugen und Dämpfung ihrer Schwingungen. Fördern und Heben*, 16, 1970.
- [31] J. Hoffmann und U. Brunner. *Matlab und Tools*. Addison-Wesley, 2002. ISBN 3-8273-1895-5.
- [32] Y. Huang. *Deformation und Beanspruchung von Stapler-Hubgerüsten unter Berücksichtigung von Imperfektionen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1990.
- [33] S. Kalaycioglu und A. K. Misra. *Approximate Solutions for Vibrations of Deploying Appendages. Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 14(2):287–293, 1991.
- [34] G. Karch und J. Wauer. *Rotating, axially loaded Timoshenko shaft: modeling and stability*. In K. W. Wang und D. Segalman, editors, *Vibration of Rotating Systems*, volume 60, Seiten 307–313, Albuquerque, Mexico, september 1993.
- [35] H. J. Kemme. *Beanspruchung der Hubgerüste von Gabelstaplern*. Dissertation, Universität Hannover, 1974.
- [36] I. Kühn. *Untersuchung der Vertikalschwingungen von Regalbediengeräten*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2001.
- [37] A. Kuhn, W. Steiner, J. Zemann, D. Dinevski und H. Troger. *A Comparison of Various Mathematical Formulations and Numerical Solution Methods for the Large Amplitude Oscillations of a String Pendulum. Applied Mathematics and Computation*, 67:227–264, 1995.
- [38] H. Leipholz. *Einführung in die Elastizitätstheorie*. G. Braun Karlsruhe, 1968.
- [39] K. W. Lips und V. J. Modi. *Transient Attitude Dynamics of Satellites with Deploying Flexible Appendages. Acta Astronautica*, 5(10):797–815, 1978.
- [40] W. Liu. *Vibration Control of Large Scale Flexible Structures Using Magnetorheological Dampers*. Dissertation, Worcester Polytechnic Institute, 2005.
- [41] J. Lunze. *Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer, 3., erw. und bearb. Auflage, 2001. ISBN 3-540-42178-5.
- [42] A. Maczynski und S. Wojciech. *Dynamics of a Mobile Crane and Optimisation of the Slewing Motion of Its Upper Structure. Nonlinear Dynamics*, 32:259–290, 2003.
- [43] E. Maisch. *Zur Beanspruchung der Hubgerüste von Gabelstaplern - Ein Beitrag unter Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1980.

- [44] Y. Matsuzakit, Y. Taki und M. Toyama. *Vibration of a cantilevered beam during deployment and retrieval: analysis and experiment*. *Smart Materials and Structures*, 4(4):334–339, 1995.
- [45] G. Merziger. *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik*. Binomi, 2. Auflage, 1996. ISBN 3-923923-35-X.
- [46] D. Messerschmidt. *Beanspruchungskollektive von Staplerhubgerüsten. Hebezeuge und Fördermittel*, Berlin 38 1-2:29ff, 1998.
- [47] M. Meyer. *Reduktionsmethoden zur Simulation des aeroelastischen Verhaltens von Windkraftanlagen*. Dissertation, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 2002.
- [48] M. Mittwollen. *Untersuchung der Schwingungseigenschaften von teleskopierbaren Maschinenelementen mit Spiel am Beispiel eines Gabelstapler-Hubgerüstes*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2006.
- [49] C. D. Mote. *A Study of Band Saw Vibrations*. *Journal of the Franklin Institute*, 279(6):430–444, 1965.
- [50] S. P. Nagarkatti, C. D. Rahn, D. M. Dawson und E. Zergeroglu. *Observer-based modal control of flexible systems using distributed sensing*. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 4268–4273, Orlando, Florida USA, December 2001.
- [51] J. Oser, K. Reisinger und S. Vössner. *Anwendung genetischer Optimierungsverfahren - Untersuchung des Schwingungsverhaltens von zugmittelgeführten Regalbediengeräten mit Hilfe genetischer Optimierungsverfahren*. *Deutsche Hebe- und Fördertechnik*, Seiten 32–40, Juli/Aug 1995.
- [52] C. Pedrazzi. *Dog on Lead Minehunting underwater cable simulation*. In *12th ADAMS European User's Conference*, Marburg, 1997.
- [53] H. Peters. *Probleme dynamischer Beanspruchung von Regalbediengeräten und deren Auswirkung auf die Regalkonstruktion*. In *Schriftreihen des Instituts für Fördertechnik*. Universität Karlsruhe, 1983.
- [54] A. Preumont. *Vibration control of active structures*. Kluwer Academic Publishers, 2. Auflage, 2002. ISBN 1-4020-0496-6.
- [55] M. Riemer und J. Wauer. *Flexible robot models with revolute and prismatic joints. Handling of closed loops*. *Mechanics research communications*, 15(6):381–387, 1988.
- [56] M. Riemer und J. Wauer. *Zur Behandlung von Schubgelenken in Mehrkörper-systemen mit verformbaren Teilstrukturen*. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 68(4):111–113, 1988.
- [57] M. Riemer, J. Wauer und W. Wedig. *Mathematische Methoden der technischen Mechanik*. Springer, 1993. ISBN 3-540-55741-5.

- [58] J. Schmalzl. *Simulation des dynamischen Verhaltens von Flurförderzeugen in der Lagertechnik*. Dissertation, Technische Universität München, 2006.
- [59] M. Schumacher. *Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Einmastregalbediengeräten*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1994.
- [60] D. Söffker. *Automatic generation of the equations of motion of the moving nonlinear elastic beam*. *Systems Analysis Modelling Simulation*, 35(1):61–74, 1999.
- [61] D. Söffker. *Zur Modellbildung und Regelung längenvariabler, elastischer Roboterarme*. VDI-Verl., als ms. gedr. Auflage, 1996. ISBN 3-18-358408-5.
- [62] D. Söffker und P. Müller. *Modeling and control of elastic robot arms with varying length*. *ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 76(5):489–490, 1996.
- [63] F. Shibli. *Untersuchung zur Erhöhung der Kippstabilität von Gabelstaplern*. Technical report, Bundesanstalt für Arbeitsschutz, Dortmund, 1985.
- [64] R. E. Skelton und P. W. Likins. *Orthogonal filters for model error compensation in the control of nonrigid spacecraft*. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1:41–49, 1978.
- [65] W. Stephan und R. Postl. *Schwingungen elastischer Kontinua*. Teubner, 1995. ISBN 3-519-02377-6.
- [66] D. Thull, D. Wild und A. Kugi. *Infini-dimensional control of a bridge crane with heavy chains*. *at - Automatisierungstechnik*, 53(8):400–410, 2005. doi: 10.1524/auto.2005.53.8.400.
- [67] J. Torrez-Torres. *Aktive Regelung eines Linearmotors mit dominanten mechanischen Resonanzstellen*. Dissertation, Universität Braunschweig, 2003.
- [68] H. S. Tzou und J. J. Hollkamp. *Collocated independent modal control with self-sensing orthogonal piezoelectric actuators (theory and experiment)*. *Smart Materials and Structures*, 3(3):277–284, 1994.
- [69] B. Waltersberger und J. Wauer. *Stoßsimulation mittels einseitiger Feder-Dämpfer Kontakte*. *PAMM*, 4(1):119–120, December 2004.
- [70] P. K. C. Wang und J.-D. Wei. *Feedback control of vibrations in a moving flexible robot arm with rotary and prismatic joints*. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Seiten 1683–1689, Raleigh, North Carolina, March 1987.
- [71] P. K. C. Wang und J.-D. Wei. *Vibrations in a moving flexible robot arm*. *Journal of Sound and Vibration*, 116(1):149–160, 1987.
- [72] J. Wauer, P. Barthels, M. Mittwollen und D. Arnold. *Vibration Suppression for Telescopic Systems of Structural Members with Clearance*. In A. El-Sharkawy und R. Kummel, editors, *Proc. 9th Int. Conf. on Energy and Environment, Cairo/Shram El-Sheikh, Egypt*, 2005.

- [73] H. Weiß. *Zur Dynamik geometrisch nichtlinearer Balken*. Dissertation, Technische Universität Chemnitz, 1999.
- [74] C. Witala. *Simulationsmodelle zur Analyse des nichtlinearen Schwingungsverhaltens von Staplerhubgerüsten*. Dissertation, Universität der Bundeswehr Hamburg, 2002.
- [75] J. Wittenburg. *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B. G. Teubner Stuttgart, 1977.
- [76] J. Wittenburg. *Schwingungslehre*. Springer, 1996. ISBN 3-540-61004-9.
- [77] J. Wittenburg und E. Pestel. *Festigkeitslehre*. Springer, 2001.
- [78] B. Yang und C. D. Mote. *Vibration control of band saws: Theory and experiment*. *Wood Science and Technology*, 24(4):355–373, 1990.
- [79] H. Zhang, H. Matsuo, Y. Morita und H. Yamakawa. *Stability and Stabilization of A Deployable Flexible Structure*. In *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision & Control*, volume 4, Seiten 4541–4542, Tampa, Florida USA, December 1998.
- [80] H. Zhang, H. Matsuo, Y. Morita und H. Yamakawa. *Stabilization of A Deployable Flexible Structure*. *Acta Astronautica*, 43:369–376, 1998.



Schriftenreihe des Instituts für  
Technische Mechanik



ISSN: 1614-3914

ISBN: 978-3-86644-217-7

---

[www.uvka.de](http://www.uvka.de)