Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

02. April 2004

Aufgabe / Punkte

Name: .... 1) ....

Vorname: .... 2) ....

Matrikel-Nr.: .... 3) ....

Fachrichtung: .... 4) ....

Fachsemester: .... 5) ....

6) ....

Note: .... Σ ....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (17)

Ein instationärer, ebener Prallstrahl in der x, y-Ebene habe die Geschwindigkeitskomponenten:

$$u = -\mathrm{k} \cdot x \cdot t \quad , \qquad v = \mathrm{k} \cdot y \cdot t$$

für $t \geq 0$ und $x \leq 0$ (k ist eine positive Konstante).

Die Wand als Begrenzung des Stromfeldes sei gegeben durch $x = 0$.

a) Wie viele Staupunkte existieren im gegebenen Stromfeld? Geben Sie die Koordinaten an.

b) Bestimmen Sie die Gleichung $y_\mathrm{s} = f(x)$ der Stromlinie, die zu einem beliebigen, aber festen Zeitpunkt $t > 0$ durch einen beliebigen Punkt $P(x_\mathrm{p}, y_\mathrm{p})$ geht. Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf der Stromlinie durch den Punkt $P_\mathrm{s}(-2, 2)$ und benachbarter Stromlinien, und geben Sie die Strömungsrichtung an.

c) Bestimmen Sie die Komponenten des Bahnkurvenvektors $x(t)$ und $y(t)$ für das Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am beliebigen Punkt $P(x_\mathrm{p}, y_\mathrm{p})$ befindet.

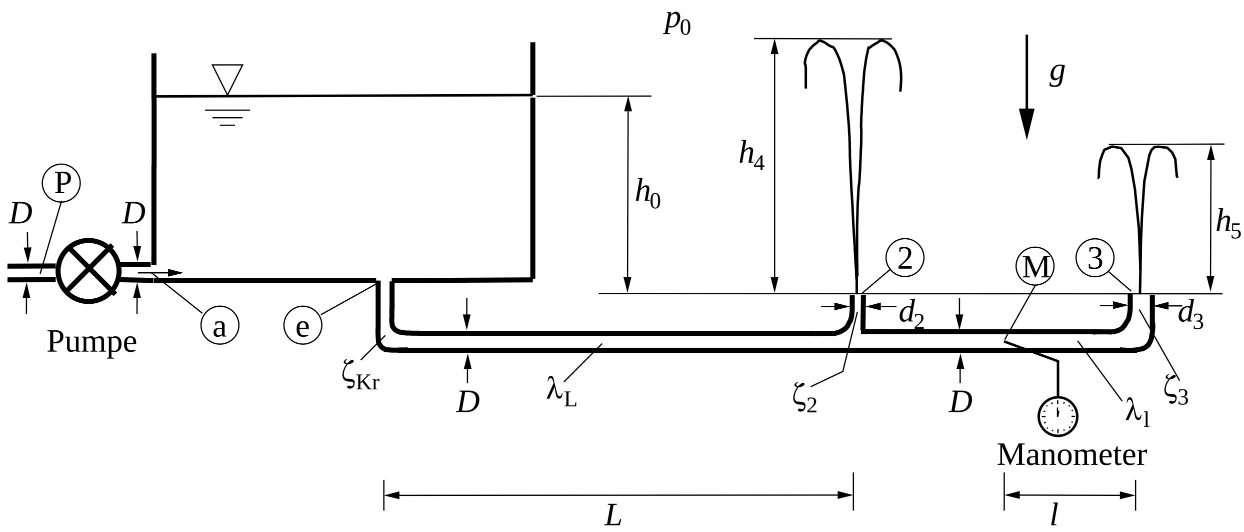
d) Bestimmen Sie die Gleichung $y_\mathrm{t} = f(x)$ der Teilchenbahn des Teilchens, das sich zu einem beliebigen aber festen Zeitpunkt $t > 0$ am Punkt $P(x_\mathrm{p}, y_\mathrm{p})$ befindet. Welcher Grenzfall im Bezug auf Stationarität liegt vor?

e) In welcher Zeit bewegt sich ein Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Punkt $P_1(x_1, y_1)$ befindet, zum Punkt $P_2(x_2, y_2)$?

Hinweis: Die Teilchen werden schlupffrei mit der Strömung mitbewegt.

Gegeben: k, x_1, y_1, x_2, y_2, x_p, y_p

Aufgabe 2 (17)



In einen großen Behälter wird Wasser (Dichte ρ, kinematische Viskosität ν) mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ gepumpt (s. Abbildung). Der Druck vor der Pumpe ist $p_P = 115000\ Pa$. Zwei Springbrunnen werden durch eine Rohrleitung (Durchmesser $D = 50\ mm$) aus dem Behählter gespeist. Die Länge des Rohres bis zum ersten Springbrunnen beträgt $L = 40\ m$. Der Wasserspiegel des Behälters hat die Höhe h_0 über den Düsenmündungen mit den Durchmessern $d_2 = 20\ mm$ und $d_3 = 30\ mm$). Im Rohrstück zwischen den beiden Springbrunnen wird der Druck p_M an der Stelle M mit einem Manometer gemessen. Die Rohrlänge von der Messstelle bis zur Düsenmündung 3 beträgt $l = 2\ m$. Strömungsverluste treten auf Grund der Reibung sowohl entlang des Rohres (Verlustkoeffizient $\lambda_L = 0.03$ bis zum ersten Springbrunnen, Verlustkoeffizient $\lambda_l = 0.01$ zwischen den beiden Springbrunnen), als auch in dem 90°-Krümmer auf (Verlustkoeffizient $\zeta_{Kr} = 0.3$). In beiden Düsenmündungen treten ebenfalls Verluste auf (Verlustkoeffizienten $\zeta_2 = 0.5$ und $\zeta_3 = 0.6625$ bezogen auf den dynamischen Druck der zugehörigen Ausströmgeschwindigkeiten an den Stellen 2 und 3). Für die Ausströmungen selber gilt die Freistrahlbedingung. Die Strömung in den beiden Springbrunnen nach dem Austritt ist verlustfrei. Die Pumpe arbeitet verlustfrei und die Strömung im Pumprohr von P nach a ist ebenfalls verlustfrei. Bei a strömt das Wasser als Freistrahl in den Behälter. Die Strömung im Behälter ist verlustfrei und am Eintritt in die Rohrleitung (Stelle e) können die Eintrittsverluste vernachlässigt werden.

a) Wie groß muss die Höhe h_0 sein, damit die zwei Fontänen bei dem Düsendurchmesser d_2 bzw. d_3 eine Höhe $h_4 = 8\ m$ bzw. $h_5 = 7\ m$ erreichen?

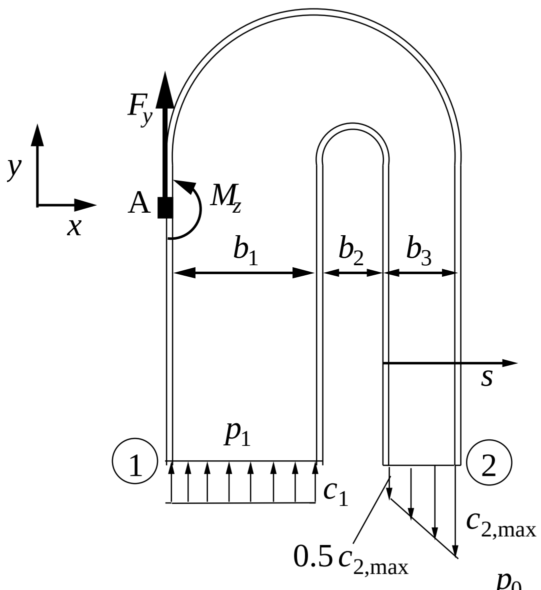
b) Berechnen Sie den statischen Druck p_M am Manometer. Dabei kann die Höhendifferenz zwischen der Messstelle und dem Düsenaustritt 3 vernachlässigt werden.

c) Wie groß muss die Leistung L_P der Pumpe sein, um die Höhe h_0 des Wasserspiegels im Behälter konstant zu halten?

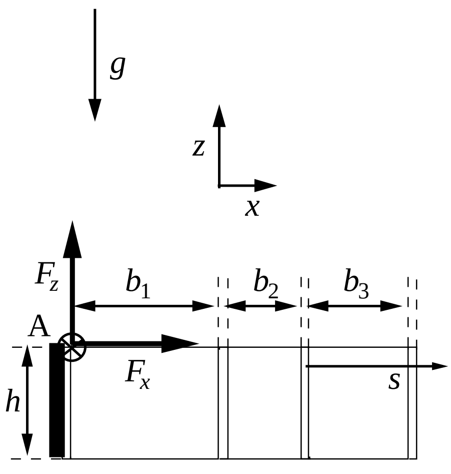
d) Ist die Strömung in der Rohrleitung bis zum ersten Springbrunnen laminar oder turbulent?

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $g = 9.8\ m/s^2$, $p_0 = 101300\ Pa$, $p_P = 115000\ Pa$, $D = 50\ mm$, $d_2 = 20\ mm$, $d_3 = 30\ mm$, $L = 40\ m$, $l = 2\ m$, $\zeta_{Kr} = 0.3$, $\zeta_2 = 0.5$, $\zeta_3 = 0.6625$, $\lambda_L = 0.03$, $\lambda_l = 0.01$, $h_4 = 8\ m$, $h_5 = 7\ m$

Aufgabe 3 (17)



Draufsicht



Vorderansicht

Wasser (Dichte ρ) fließt mit einem Volumenstrom $\dot{V}$ durch einen 180°-Krümmer (siehe Abbildung). Der Krümmer hat die konstante Höhe h, die Breite verkleinert sich von b_1 auf b_2. Im Querschnitt 1 sind die Geschwindigkeit c_1 und der Druck p_1 konstant über den Querschnitt. Im Querschnitt 2 tritt das Wasser als Freistrahl in die Umgebung aus. Der Umgebungsdruck ist p_0. Durch die Umlenkung und durch Reibung bildet sich am Austritt eine Geschwindigkeitsverteilung aus, die durch das skizzierte lineare Profil angenähert werden kann. Der gesamte durchströmte Krümmer hat das Volumen V. Die Rohrwand des Krümmers hat das Gewicht G_K. Der Krümmer ist bei A befestigt. Die Strömung ist stationär und inkompressibel!

a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $c_2(s)$ als Funktion der eingetragenen Koordinate s.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten c_1 und $c_{2,\max}$ in Abhängigkeit gegebener Größen.

c) Bestimmen Sie die Komponenten der Haltekraft $\vec{F}$ (F_x, F_y, F_z) in Abhängigkeit gegebener Größen.

d) Bestimmen Sie die eingetragene Komponente des Drehmoments M_z das auf die Befestigung wirkt in Abhängigkeit gegebener Größen.

Hinweis: Die Wandstärken sind bei der Momentenberechnung vernachlässigbar.

Gegeben: $\dot{V}$, ρ, V, p_1, p_0, b_1, b_2, b_3, G_K, g

Aufgabe 4 (11)

Gegeben ist die eindimensionale inkompressible Navier-Stokes-Gleichung (1), sowie die zeitlich gemittelte Navier-Stokes-Gleichung (2).

(1) $$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - g \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

(2) $$\rho \cdot \overline{u} \cdot \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \cdot \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \rho \cdot g \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \mu \cdot \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \frac{\partial \overline{(u')^2}}{\partial x}$$

a) Von welcher Annahmen muß aussgegangen werden, um Gleichung (1) in Gleichung (2) zu überführen? Welcher Ansatz wird verwendet um (1) in (2) zu überführen. Geben Sie den Ansatz an. Welche spezielle Gegebenheiten gelten für das Mittelungsintervall T? Erläutern Sie den Begriff **Reynoldsche scheinbare Normal- und Schubspannung**.

b) Geben Sie den dreidimensionalen Spannungstensor τ' bestehend aus 3 scheinbaren Normalspannungen und 6 scheinbaren Schubspannungen in Abhängigkeit der Schwankungsgrößen an.

c) Wenden Sie die Boussinesq-Annahme auf τ' einer 3-dimensionalen inkompressiblen Strömung an und setzen das Ergebnis in den Tensor ein.

d) Mit welchem Ansatz kann μ_t bestimmt werden?

Nun wird die Navier-Stokes-Gleichung für eine inkompressible Strömung in Blutgefäßen betrachtet (R Radius des Blutgefäßes), die Blut als ein Nicht-Newtonsches Fluid behandelt.

(3) $$\rho \cdot \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \right) = -\nabla p + \mu_{\text{eff}} \cdot \Delta \vec{v} + \vec{F} \quad ,$$

wobei

(4) $$\mu_{\text{eff}} = \frac{(\mathrm{K} \cdot \sqrt{\dot{\gamma}} - \mathrm{C})}{\dot{\gamma}}$$

und

(5) $$\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

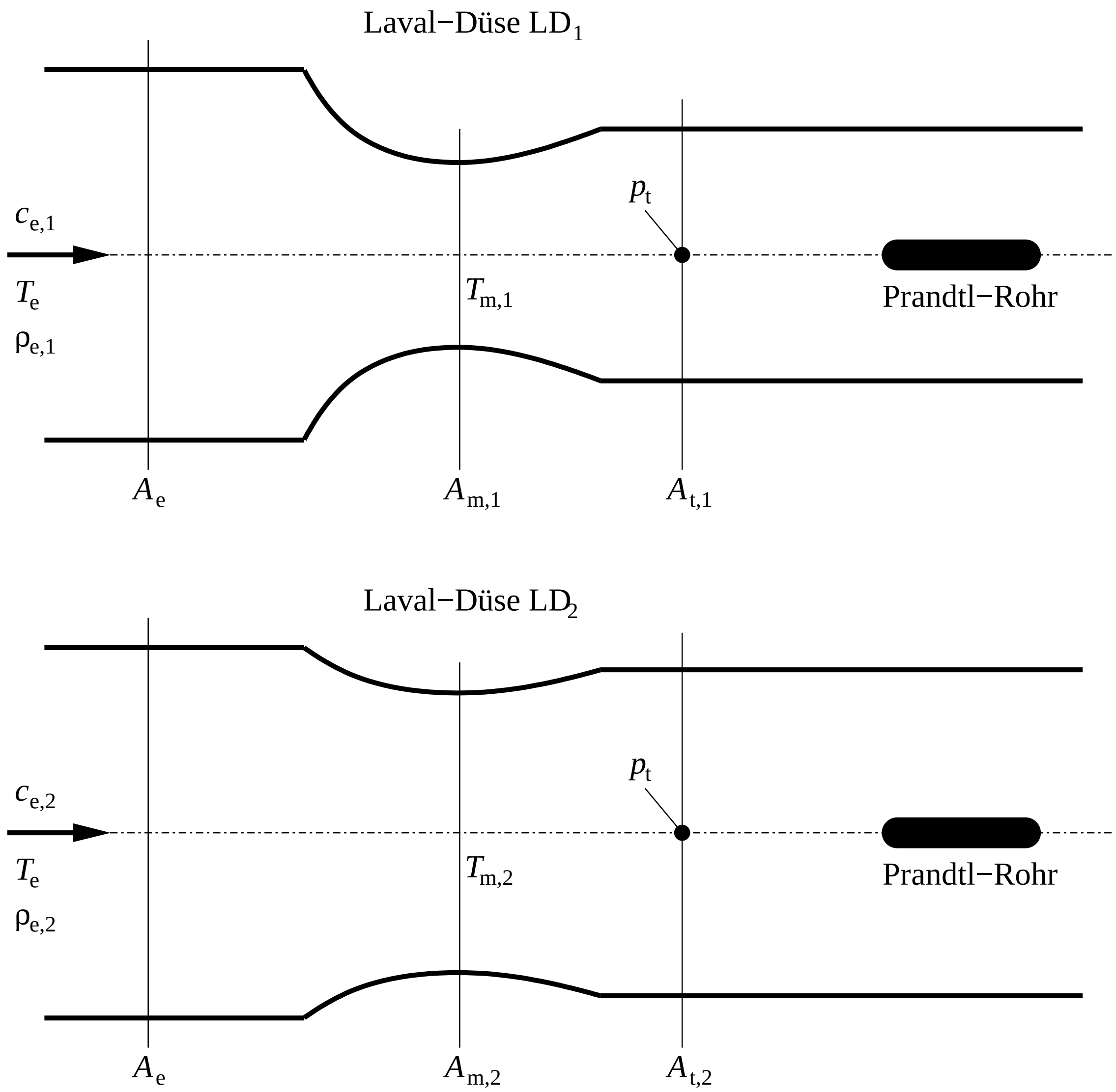
gilt, mit der Radialkoordinate r des Blutgefäßes.

e) Berechnen Sie mit den Gleichungen (4), (5) und den gegebenen Größen $u(r)$. Dabei gilt die Haftbedingung an der Wand des Blutgefäßes $u(r = R) = 0$.

Hinweis: Verwenden Sie für die Berechnung nur die Gleichungen (4) und (5).

Gegeben: $\mathrm{K} = 0.01\sqrt{kg/(ms)}$, $\mu_{\text{eff}} = \mathrm{K}^2$, C

Aufgabe 5 (17)



Es wird ein ideales, kompressibles Gas, eindimensionale, reibungsfreie und stationäre Strömung vorausgesetzt und die Schwerkraft vernachlässigt.

Die Düsen LD_1 und LD_2 (siehe Abbildung) bestehen aus einem Einlauf mit konstantem Querschnitt A_e der eigentlichen Laval-Düse mit den engsten Querschnitten $A_{m,1}$ und $A_{m,2}$ und einer anschließenden Teststrecke mit ebenfalls konstanten Querschnitten $A_{t,1}$ und $A_{t,2}$. Die Temperatur im Einlauf der beiden Laval-Düsen ist gleich und beträgt $T_e = 280\ K$. Die jeweiligen Einströmgeschwindigkeiten $c_{e,1}$ und $c_{e,2}$ und die jeweiligen Dichten $\rho_{e,1}$ und $\rho_{e,2}$ im Einströmquerschnitt sind gegeben. In den engsten Querschnitten sind die beiden Temperaturen $T_{m,1}$ und $T_{m,2}$ durch Messung bekannt. In den Teststrecken der beiden Düsen wird der gleiche statische Druck $p_t = 0.85\ bar$ gemessen.

Zur Bestimmung des Staudruckes wird in beide Teststrecken ein Pitot-Rohr eingebracht. Ohne die Pitot-Rohre ist die Strömung in beiden Düsen isentrop. Treten durch das einbringen der Pitot-Rohre Verdichtungsstöße auf, sind diese nicht-isentrop. Der Rest der Strömung bleibt isentrop.

a) Berechnen Sie die Mach-Zahlen $M_{e,1}$ und $M_{e,2}$ im Einströmquerschnitt A_e für die beiden Düsen.

b) Berechnen Sie die Mach-Zahlen $M_{\mathrm{m},1}$ und $M_{\mathrm{m},2}$ im engsten Querschnitt ($A_{\mathrm{m},1}$ und $A_{\mathrm{m},2}$) für die beiden Düsen.

c) Wie groß sind die Mach-Zahlen $M_{\mathrm{t},1}$ und $M_{\mathrm{t},2}$ in der Teststrecke (Querschnitte $A_{\mathrm{t},1}$ und $A_{\mathrm{t},2}$) an der Stelle der statischen Druckmessung.

d) Bestimmen Sie die Ruhedrücke $p_{\mathrm{e0},1}$ und $p_{\mathrm{e0},2}$ und die Ruhetemperaturen $T_{\mathrm{e0},1}$ und $T_{\mathrm{e0},2}$ im Einströmquerschnitt für beide Düsen.

e) Bestimmen Sie die Drücke $p_{\mathrm{s},1}$ und $p_{\mathrm{s},2}$ und die Temperaturen $T_{\mathrm{s},1}$ und $T_{\mathrm{s},2}$ die sich im Staupunkt der beiden Pitot-Rohre ergeben.

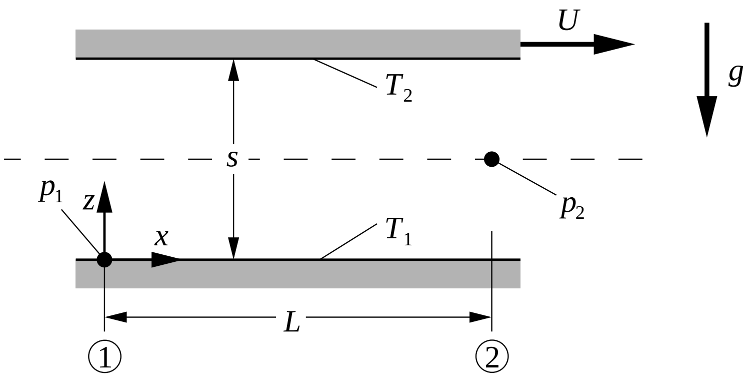
Die Strömung durch beide Düsen soll nun numerisch mit einem Programm, das die eindimensionale Stromfadentheorie verwendet, berechnet werden.

f) Welche Einstellungen wählen Sie bei der Auswahl der physikalischen Parameter.

g) Wie groß müssen die Gegendrücke $p_{\mathrm{g},1}$ und $p_{\mathrm{g},2}$ am Ende der Teststrecken in dem Programm gewählt werden damit sich in beiden Düsen die isentrope Strömung mit den gegebenen Werten einstellt. Dabei sollen sich keine Pitot-Rohre in der Teststrecke befinden.

Gegeben: $T_{\mathrm{e}} = 280\ K$, $c_{\mathrm{e},1} = 103,979\ m/s$, $c_{\mathrm{e},2} = 167,708\ m/s$, $\rho_{\mathrm{e},1} = 1.174\ kg/m^3$, $\rho_{\mathrm{e},2} = 3.273\ kg/m^3$, $T_{\mathrm{m},1} = 240\ K$, $T_{\mathrm{m},2} = 245\ K$, $p_{\mathrm{t}} = 0.85\ bar$, $\kappa = 1.4$, $R = 287\ m^2 s^{-2} K^{-1}$

Aufgabe 6 (21)



Durch einen horizontalen Kanal (Breite b senkrecht zur Zeichenebene) mit der konstanten Spalthöhe s strömt ein Newtonsches Medium (konstante dynamische Zähigkeit, konstante Wärmeleitfähigkeit, konstante spezifische Wärmekapazität c_{v}) in ausgebildeter, stationärer, laminarer Strömung. Die obere Wand bewegt sich mit der Geschwindigkeit $U > 0$ in positive x-Richtung, die untere Wand ist in Ruhe. Die Querschnitte 1 und 2 haben den Abstand L voneinander. Der statische Druck im Querschnitt 1 an der unteren Wand ($z = 0$) hat den Wert p_1. Die untere Wand wird auf der konstanten Temperatur T_1 gehalten, während die obere Wand die konstante Temperatur T_2 hat ($T_2 > T_1$). In Strömungsrichtung kann die Temperaturverteilung ebenfalls als ausgebildet betrachtet werden. Durch die sich daraus ergebende Temperaturverteilung im Fluid ändert sich die Dichte in z-Richtung und wird durch die Funktion:

$$\rho(z) = \rho_{\mathrm{m}} + \alpha \cdot [T_{\mathrm{m}} - T(z)]$$

mit der Dichte ρ_{m} bei der Temperatur $T_{\mathrm{m}} = 0.5 \cdot (T_1 + T_2)$ beschrieben. Es soll keine zusätzliche Energiezu- oder abfuhr durch Strahlung etc. stattfinden. Die Gravatation kann nicht vernachlässigt werden.

a) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für kompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie daraus die z-Komponente der Geschwindigkeit in Abhängigkeit gegebener Größen.

Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

b) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Energiegleichung für kompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von Aufgabenteil a) die Temperaturverteilung $T(z)$ und die Dichteverteilung $\rho(z)$ in Abhängigkeit gegebener Größen. Dabei kann die Dissipation gegenüber der Wärmeleitung durch den Temperaturgradienten vernachlässigt werden.

Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

c) Vereinfachen Sie die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für kompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(z)$ in Abhängigkeit gegebener Größen und des noch unbekannten Druckgradienten $\partial p/\partial x$.

Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

d) Berechnen Sie unter Verwendung des Hinweises die Druckverteilung $p(x, z)$ im Kanal in Abhängigkeit gegebener Größen, wenn die Geschwindigkeit in der Mitte des Kanals ($z = s/2$) gleich Null sein soll.

e) Skizzieren Sie das mit der Bedingung von Aufgabenteil d) vorliegende Geschwindigkeitsprofil im Kanal.

f) Wie groß ist der Druck p_2 im Querschnitt 2 in der Mitte des Kanals ($z = s/2$)?

g) Wie ändert sich das Ergebnis von Teilaufgabe b) wenn die obere Wand in Ruhe bleibt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Eine partielle Differentialgleichung $\partial h(x,z)/\partial z = a(z)$ hat die allgemeine Lösung $\int a(z)\mathrm{d}z + f(x)$

Gegeben: ρ_m, μ, λ, U, p_1, T_1, T_2, α, g, s, L, b

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

07. September 2004

Aufgabe / Punkte
1) ....
2) ....
3) ....
4) ....
5) ....
6) ....
Σ ....

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Fachrichtung: ....

Fachsemester: ....

Note: ....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (17)

Ein zwei-dimensionales Strömungsfeld in der x-y-Ebene hat die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} u &= 2 \cdot \mathrm{A} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \quad , \\ v &= \mathrm{A} \cdot x \quad , \end{aligned}$$

für $t \geq 0$, mit den positiven Konstanten α und A.

a) Bestimmen Sie die Gleichung $y_\mathrm{S} = \mathrm{f}(x)$ der Stromlinie, die zum Zeitpunkt $t = t_0$ durch den Punkt $x_\mathrm{Q} = 1$ und $y_\mathrm{Q} = 1$ geht.

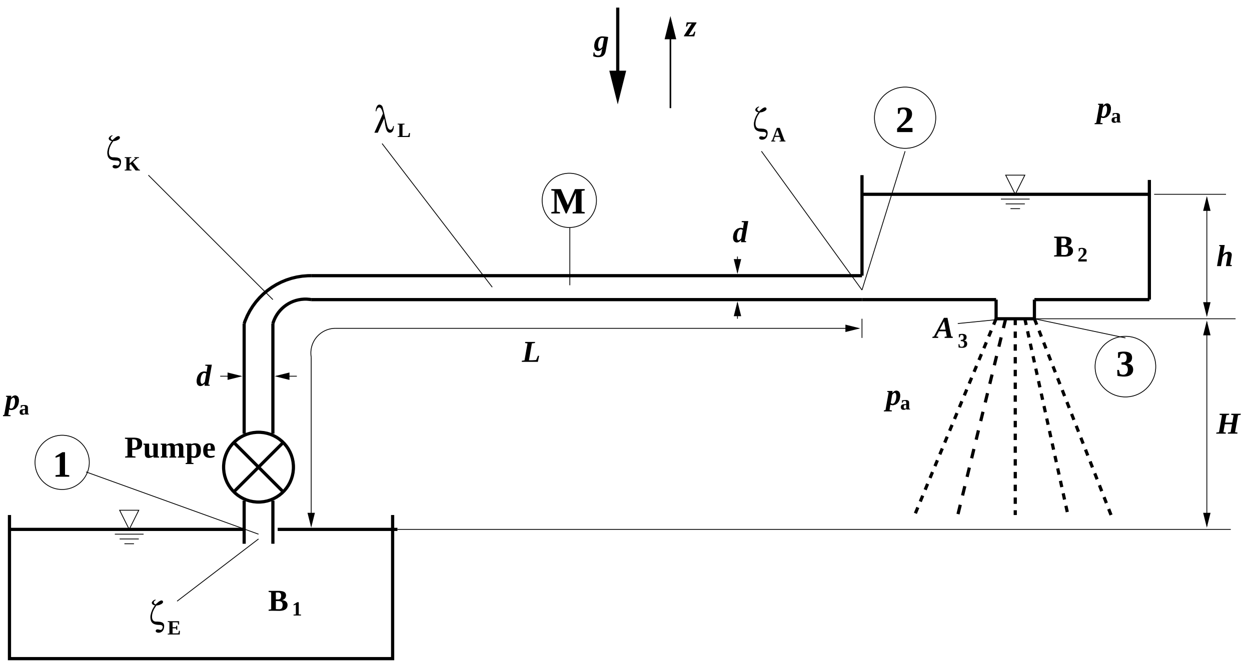
b) Bestimmen Sie die Komponenten des Bahnkurvenvektors $x(t)$ und $y(t)$ für das Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Punkt $x_\mathrm{P} = -2 \cdot \mathrm{A}/\alpha$ und $y_\mathrm{P} = 2 \cdot (\mathrm{A}/\alpha)^2$ befindet.

c) Bestimmen Sie die Teilchenbahn $y_\mathrm{T} = \mathrm{f}(x)$ für das Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Punkt $x_\mathrm{P} = -2 \cdot \mathrm{A}/\alpha$ und $y_\mathrm{P} = 2 \cdot (\mathrm{A}/\alpha)^2$ befindet.

d) Erfüllt das Geschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung? Man begründe die Antwort.

Gegeben: A, α, $x_\mathrm{Q} = 1$, $y_\mathrm{Q} = 1$, $x_\mathrm{P} = -2 \cdot \mathrm{A}/\alpha$, $y_\mathrm{P} = 2 \cdot (\mathrm{A}/\alpha)^2$

Aufgabe 2 (17)



Eine verlustfreie Pumpe fördert Wasser (Dichte ρ, kinematische Viskosität ν) aus einem großen Behälter B_1 (s. Abbildung) durch ein Rohr des Durchmessers d, der Länge L und der Sandkornrauhigkeit k_s in einen höher liegenden Behälter B_2. Aus dem Hochbehälter B_2 strömt das Wasser unter der Freistrahlbedingung durch einen Duschkopf ins Freie. Der Duschkopf am Boden des Behälters B_2 (Stelle 3) liegt um die Höhe H über der Wasserspiegeloberfläche des Behälters B_1. Die Wasserspiegeloberfläche des Behälters B_2 hat die Höhe h gegenüber dem Austritt des Duschkopfes. Der gesamte Austrittsquerschnitt der Löcher des Duschkopfes an der Stelle 3 beträgt A_3. Es treten folgende Verluste in dem Rohrleitungssystem auf: Rohrreibungsverluste λ_L in dem Rohr von der Stelle 1 bis zur Stelle 2, Eintrittsverluste ζ_E beim Eintritt der Strömung in das Rohr an der Stelle 1, Krümmerverluste ζ_K und Austrittsverluste ζ_A beim Ausströmen an der Stelle 2. Der Außendruck beträgt p_a. Die auf das Volumen bezogene Arbeit der Pumpe ist Δl. Für den Fall, dass die Pumpe genau so viel Wasser fördert, dass die Spiegelhöhe h im Behälter B_2 konstant bleibt, berechne man die folgenden Werte:

a) Die gemittelte Geschwindigkeit c_M im Rohr (Stelle M).

b) Die Austrittsgeschwindigkeit c_3 aus dem Duschkopf (Stelle 3).

c) Den Ausströmquerschnitt A_3 am Duschkopf (Stelle 3).

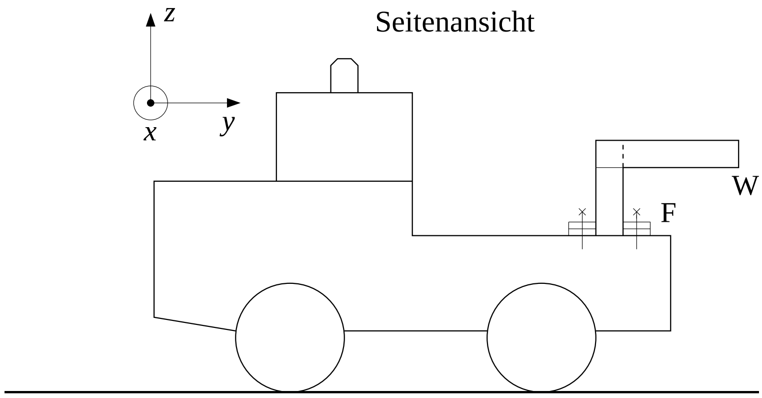
d) Ist die Strömung in dem Rohr der Länge L laminar oder turbulent?

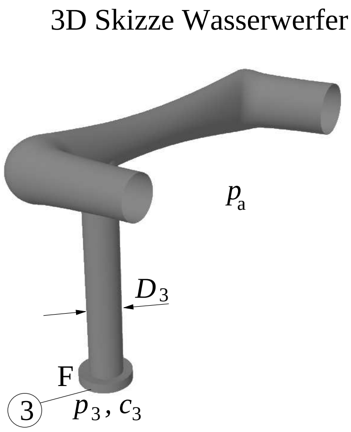
e) Ist die Innenwand des Rohres hydraulisch glatt?

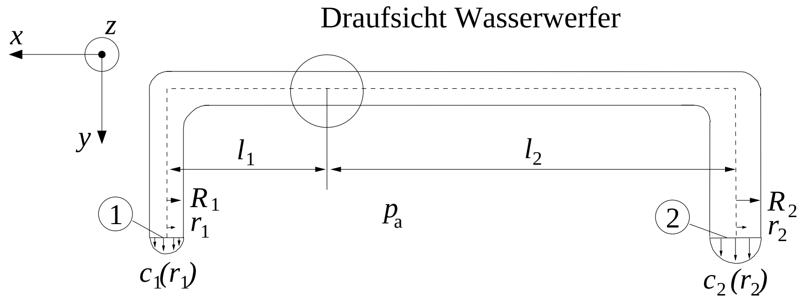
Hinweis: Beim Austritt an der Stelle 2 ist <u>keine</u> Freistrahlbedingung zu verwenden. Die Verluste in der Strömung im Duschkopf sind vernachlässigbar. Die Strömung im Behälter B_2 ist verlustfrei. Die gesamte Strömung kann mit der eindimensionalen Stromfadentheorie beschrieben werden.

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $g = 9.8\ m/s^2$, $d = 60\ mm$, $L = 10\ m$, $d/k_s = 400$, $\zeta_K = 0.6$, $\zeta_A = 1.3$, $\zeta_E = 0.5$, $\lambda_L = 0.04$, $H = 20\ m$, $h = 1\ m$, $\Delta l = 300 \cdot 10^3\ N/m^2$

Aufgabe 3 (18)







Die Polizei setzt bei großen Veranstaltungen mit gewaltbereiten Personen sog. Wasserwerfer ein. Der Wasserwerfer W ist über eine Schraubenverbindung an einen Tank im Heckbereich des Fahrzeugs F angeflanscht (Innendurchmesser des Rohres D_3). Aus Platzgründen kann der Aufbau des Wasserwerfers nicht symmetrisch erfolgen. In der Umgebung herrscht der Umgebungsdruck p_a. In der Rohrströmung im Bereich des Flansches (Stelle 3) herrscht der Druck p_3. Die Geschwindigkeitsprofile am Rand der Rohraustritte 1 und 2 mit den Radien R_1 und R_2 werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_1(r) &= c_{\max} \cdot (1 - \frac{r_1^2}{R_1^2}) \quad , \\ c_2(r) &= c_{\max} \cdot (1 - \frac{r_2^2}{R_2^2}) \end{aligned}$$

beschrieben. Die Strömung tritt als Freistrahl aus dem Wasserwerfer aus.

a) Berechnen Sie die Massenströme $\dot{m}_1$ und $\dot{m}_2$ an den Rohraustritten 1 und 2, sowie den gesamten Massenstrom $\dot{m}_{\mathrm{ges}}$.

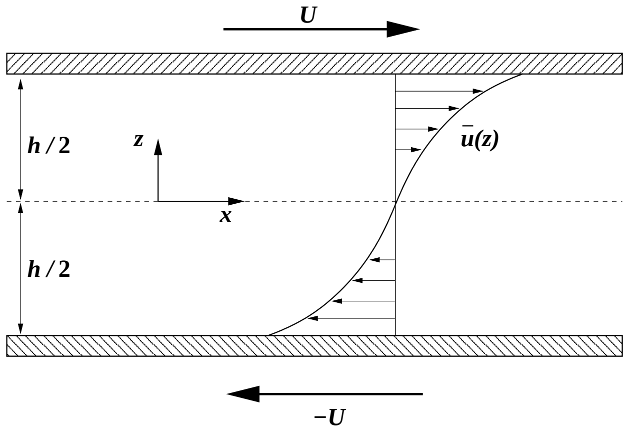
b) Berechnen Sie die Kräfte die von der Strömung auf die Flanschverbindung in x-, y- und z-Richtung ausgeübt werden, wobei das Geschwindigkeitsprofil des Wassers im Bereich des Flansches (Stelle 3) als konstant ($c_3 = \text{konst.}$) betrachtet werden kann.

c) Berechnen Sie das resultierend Moment M_z, das auf den Flansch wirkt mit den in Aufgabenteil b) berechneten Kräften. Dabei kann vorausgesetzt werden, dass $r_1 \ll l_1$ und $r_2 \ll l_2$ ist.

Hinweis: Die Schwerkraft kann in der Berechnung vernachlässigt werden.

Gegeben: ρ, l_1, l_2, R_1, R_2, $c_{\max}$, p_3, p_a, D_3, c_3

Aufgabe 4 (11)



Gegeben sei eine inkompressible, turbulente und in der x-z-Ebene ebene Strömung zwischen zwei mit der Geschwindigkeit U gegeneinander bewegten, unendlich ausgedehnten Platten.

Das Geschwindigkeitsprofil ist in Strömungsrichtung ausgebildet. Die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit ist

$$\vec{\bar{u}} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}$$

mit

$$\bar{u} = f(z) \quad , \qquad \bar{v} = 0 \quad .$$

Der Prandtlsche Mischungsweg ist gegeben durch:

$$l(z) = \frac{\kappa}{h} \cdot \left(h^2 - z^2\right) \quad ,$$

mit der Konstanten κ und dem Abstand h der beiden Platten.

a) Bestimmen Sie mit der Boussinesq-Annahme die turbulente Schubspannung $\tau_t = -\rho\overline{u'w'}$ in Abhängigkeit des gegebenen Mischungsweges und des Geschwindigkeitsgradienten.

b) Bei konstantem Druck $\bar{p}$ und ohne Massenkräfte ist in der Strömung die Schubspannung konstant und es gilt:

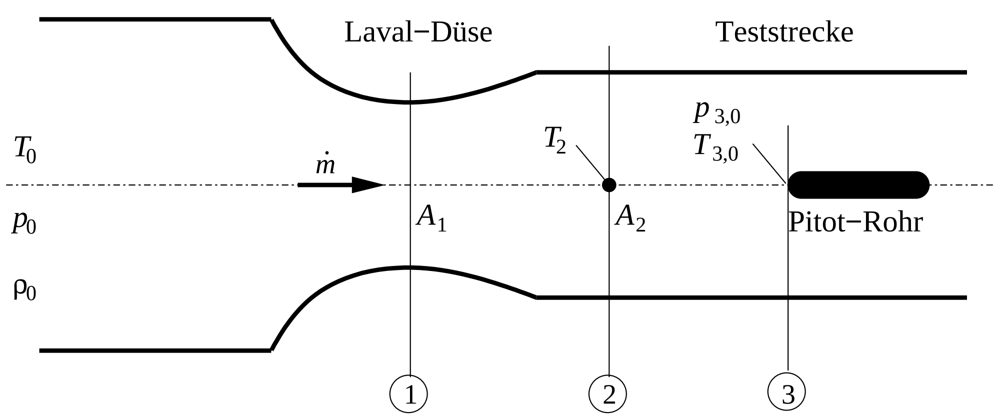
$$\mu\frac{d\bar{u}}{dz} - \rho\overline{u'w'} = konst. \quad .$$

Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}(z)$ außerhalb der viskosen Unterschicht.

Hinweis: Außerhalb der viskosen Unterschicht kann der Reibungsanteil der Schubspannung vernachlässigt werden. $u(z = 0)$ ergibt sich aus der Symmetrie.

Gegeben: ρ = konst, κ = konst, h = konst

Aufgabe 5 (17)



Mit Hilfe des in der Abbildung gezeigten Messsystems sollen die Ruhebedingungen in einem Kessel bestimmt werden. Das Messsystem besteht aus einer überkritisch durchströmten Laval-Düse und einem in die Teststrecke eingebrachten Pitot-Staurohr. Am Pitot-Staurohr wird eine Ruhetemperatur $T_{3,0} = 563\ K$ und ein Staudruck $p_{3,0} = 0,78\ bar$ gemessen. Der Durchmesser am Ende der Laval-Düse (Stelle 2) beträgt $D_2 = 0,15\ m$. Dort wird eine Temperatur von $T_2 = 388\ K$ gemessen.

Die Luft wird als ideales Gas betrachtet (Isentropenexponent κ, Gaskonstante R). Die Strömung ist kompressibel, eindimensional, stationär, reibungsfrei und bis zur Teststrecke (Stelle 2) isentrop. Die Wände sind adiabat. Auftretende Stöße sind als nicht isentrop und als eindimensional zu betrachten. Querschnittsänderungen durch das Einbringen des Pitot-Staurohrs können vernachlässigt werden.

a) Berechnen Sie die Ruhewerte p_0, ρ_0 und T_0 im Kessel.

b) Berechnen Sie den Durchmesser D_1 im engsten Querschnitt der Düse.

c) Berechnen Sie den Massenstrom $\dot{m}$ durch die Düse.

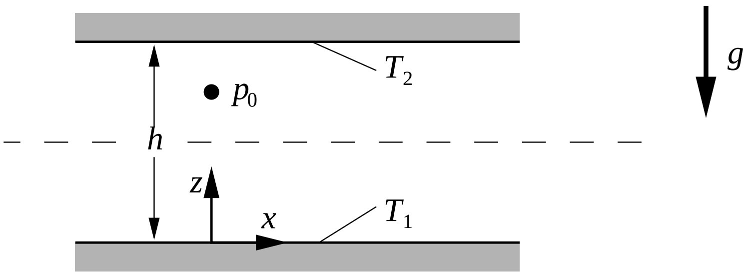
Die Strömung durch die Laval-Düse vom Kessel bis zur Stelle 2 soll mit einem numerischen Programm, das die eindimensionale kompressible Stromfadentheorie verwendet, nachgerechnet werden.

d) Welche Einstellungen wählen Sie bei der Auswahl der physikalischen Parameter?

e) Wie groß muss das Druckverhältnis p_2/p_0 vom Druck an der Stelle 2 zum Ruhedruck p_0 gewählt werden, damit zwischen dem Kessel und der Stelle 2 eine ideale Laval-Düsenströmung berechnet wird.

Gegeben: $p_{3,0} = 0,78 bar$, $T_{3,0} = 563K$, $D_2 = 0,15m$, $T_2 = 388K$, $\kappa = 1,4$, $R = 287 m^2/(s^2 \cdot K)$

Aufgabe 6 (20)



Durch einen ebenen Spalt zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten (Spalthöhe h) strömt ein inkompressibles Newtonsches Medium (Dichte ρ) in ausgebildeter, stationärer, laminarer Strömung (siehe Abbildung). Die obere Platte hat die konstante Temperatur T_2, die untere Platte die konstante Temperatur T_1 ($T_2 > T_1$). Ohne den Einfluss der Dissipation stellt sich eine lineare Temperaturverteilung in dem Spalt ein:

(1) $$T(z) = T_1 + \Delta T \cdot \frac{z}{h}$$

mit $\Delta T = T_2 - T_1$. Die dynamische Viskosität ändert sich mit der Temperatur nach folgendem Gesetz:

(2) $$\mu(T) = \mu_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot (T - T_1)}$$

mit der Konstanten α. Dabei ist μ_0 die dynamische Viskosität bei der Temperatur T_1 der unteren Platte. In Strömungsrichtung ist sowohl die Temperaturverteilung als auch die Geschwindigkeitsverteilung ausgebildet. Der die Strömung treibende Druckgradient ist gegeben durch:

(3) $$\frac{\partial p}{\partial x} = -\mathrm{K}$$

mit der Konstanten K (K > 0). Die Gravitation soll berücksichtigt werden.

a) Wie lauten die allgemeinen inkompressiblen zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen x-z-Koordinaten für die laminare Strömung eines Newtonschen Mediums, wenn die Zähigkeit $\mu = \mathrm{f}(x, z)$ infolge von Temperaturschwankungen von x und z abhängt. Dabei ist für den Spannungstensor der Stokessche Reibungsansatz anzuwenden.

b) Leiten Sie unter Verwendung des in der Abbildung gegebenen Koordinatensystems und unter Berücksichtigung der von der Temperatur abhängigen Zähigkeit aus der Erhaltungsgleichung der Masse und den unter a) hergeleiteten Navier-Stokes-Gleichungen die Gleichungen her, die die oben genannte Strömung beschreiben.

   Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

c) Skizzieren Sie qualitativ den Geschwindigkeitsverlauf $u(z)$ in der Strömung.

d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit gegebener Größen die Geschwindigkeit $u(z)$ im strömenden Medium.

e) Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(x, z)$ im Spalt wenn an der Stelle $x = 0$, $z = 0.75 \cdot h$ der Druck p_0 ist.

Gegeben: ρ, μ_0, p_0, α, h, T_1, T_2, g, K

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

06. April 2005

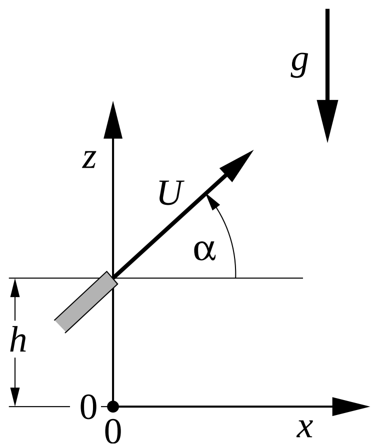
Aufgabe / Punkte

Name:	....	1)	....
Vorname:	....	2)	....
Matrikel-Nr.:	....	3)	....
Fachrichtung:	....	4)	....
Fachsemester:	....	5)	....
		6)	....
Note:	....	Σ	....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (17)



Die Düse eines Wasserschlauchs ist bei $x_0 = 0$ und $z_0 = h$ unter dem zeitabhängigen Winkel $\alpha(t)$ befestigt. Aus der Düse tritt Wasser mit der konstanten Geschwindigkeit U aus.

Die Geschwindigkeit der Wasserteilchen ergibt sich unter Vernachlässigung der Luftreibung als Wurfparabeln:

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathrm{C}_1 \quad , \\ w(t) &= \mathrm{C}_2 - g \cdot t \quad . \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten $u(t)$ und $w(t)$ eines Teilchens, das die Düse zum Zeitpunkt t_0 verlassen hat.

b) Der Winkel $\alpha(t)$ ist durch die Funktion $\alpha(t) = \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gegeben. Berechnen Sie die Komponenten $x(t)$ und $z(t)$ des Bahnkurvenvektors (Teilchenbahn) eines Teilchens, das zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $\mathrm{P}(x_1, z_1)$ ist.

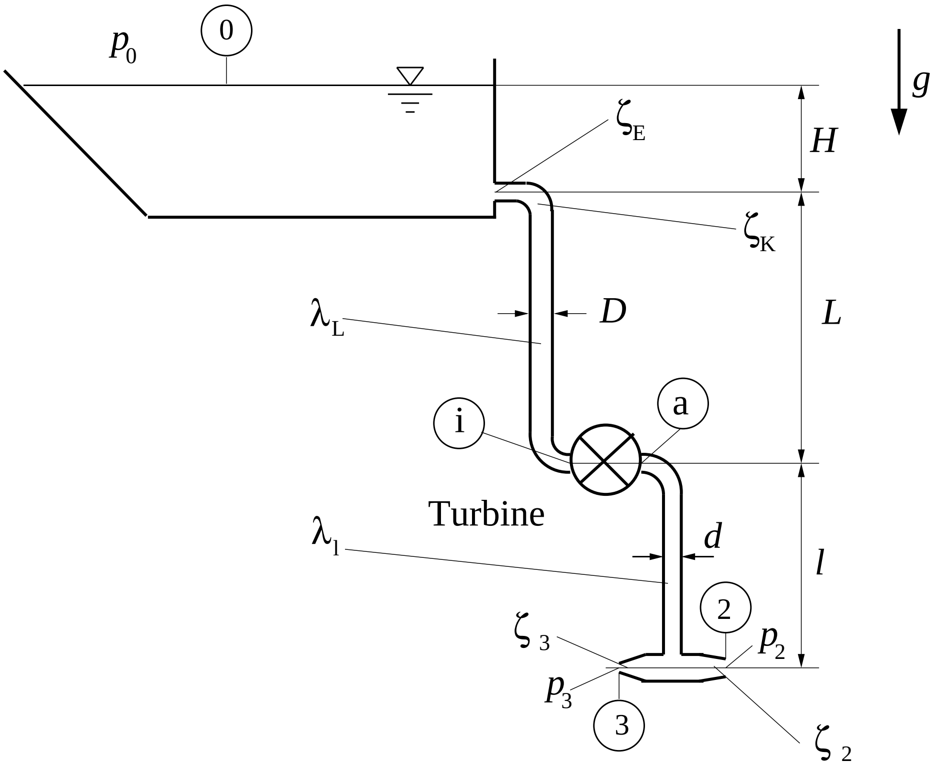
c) Skizzieren Sie eine Streichlinie.

d) Berechnen Sie eine Stromlinie $z = \mathrm{f}(x)$ für den Fall eines nicht zeitabhängigen Winkels $\alpha = \alpha_0 = \text{konst.} = \pi/4$.

Hinweis: Da es sich bei den gegebenen Geschwindigkeitskomponenten um Teilchengeschwindigkeiten in Abhängigkeit der Zeit handelt und nicht um die zeitliche Änderung der Geschwindigkeiten eines Stromfeldes, ist bei der Berechnung der Stromlinie in Aufgabenteil d) die Zeitabhängigkeit durch geeignete Umformungen zu eliminieren.

Gegeben: U, $\alpha_0 = \pi/4$, t_0, x_1, z_1, g, $\alpha(t)$

Aufgabe 2 (17)



Aus einem sehr großen Speicherbehälter wird Wasser (Dichte ρ, kinematische Viskosität ν) über eine Rohrleitung der Länge $L = 20\ m$ (Durchmesser $D = 500\ mm$) zu einer Turbine geführt, in der die kinetische Energie in elektrische Energie umgewandelt wird. Aus der Turbine wird das Wasser durch eine Rohrleitung (Durchmesser $d = 100\ mm$, Länge $l = 12\ m$) in einen Behälter über zwei Düsenmündungen 2 und 3 geführt. Die Strömung im Speicherbehälter kann als reibungsfrei angenommen werden. Der Wasserspiegel des Behälters hat die Höhe $H = 15\ m$ über dem Einlauf in die Rohrleitung. Die Turbine wird verlustfrei behandelt, ebenso die beiden Krümmer unmittelbar vor und nach der Turbine. Strömungsverluste treten sowohl auf Grund der Reibung in beide Rohren (Verlustkoeffizienten $\lambda_L = 0.03$ und $\lambda_l = 0.04$), als auch in dem 90°-Krümmer (Verlustkoeffizient $\zeta_K = 0.3$) nach dem Rohreintritt und am Rohreintritt (Verlustkoeffizient $\zeta_E = 0.4$) auf. Bei beiden Düsenmündungen treten Austrittsverluste bezogen auf den dynamischen Druck der zugehörigen Ausströmgeschwindigkeiten auf, mit den Verlustkoeffizienten $\zeta_2 = 0.5$ und $\zeta_3 = 0.2$. Der Druck vor bzw. nach der Turbine ist $p_\mathrm{i} = 444000\ Pa$ und $p_\mathrm{a} = 150000\ Pa$. Die Drücke an den Düsenaustritten 2 und 3 sind $p_2 = 102000\ Pa$ bzw. $p_3 = 107000\ Pa$.

a) Wie groß ist die Leistung der Turbine?

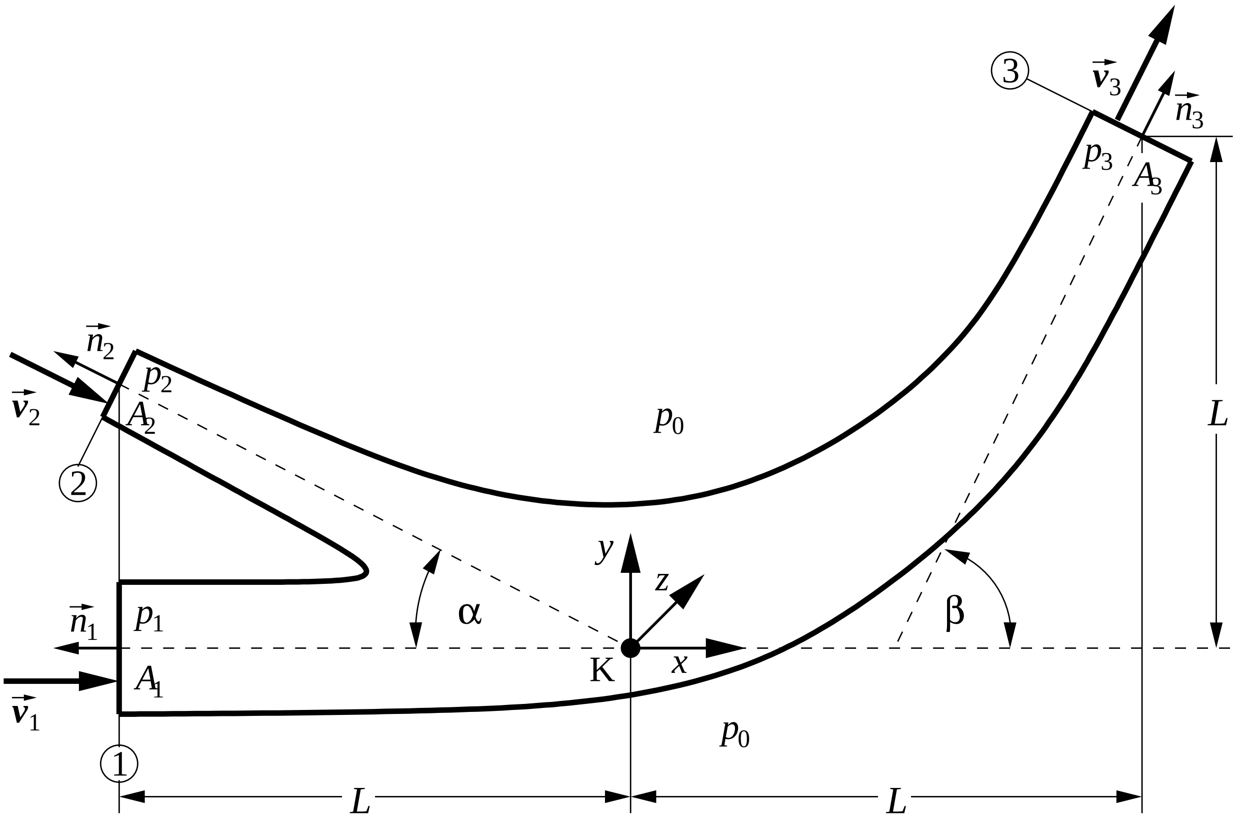
b) Berechnen Sie die Austrittsgeschwindigkeiten c_2 und c_3 an den Düsenmündungen.

c) Ist die Strömung in der Rohrleitung der Länge L laminar oder turbulent?

d) Ist auf Basis der in Aufgabenteil c) berechneten Reynolds-Zahl das Rohr der Länge L hydraulisch glatt? Begründen Sie ihre Antwort.

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $g = 9.8\ m/s^2$, $l = 12\ m$, $L = 20\ m$, $H = 15\ m$, $p_0 = 101300\ Pa$, $p_\mathrm{i} = 444000\ Pa$, $p_\mathrm{a} = 150000\ Pa$, $D = 500\ mm$, $d = 100\ mm$, $\zeta_K = 0.3$, $\zeta_E = 0.4$, $\zeta_2 = 0.5$, $\zeta_3 = 0.2$, $\lambda_L = 0.1$, $\lambda_l = 0.04$, $p_2 = 102000 Pa$, $p_3 = 107000 Pa$

Aufgabe 3 (17)



Wasser (Dichte ρ) strömt durch eine Rohrverzweigung (siehe Abbildung). Die Rohrverzweigung hat eine konstante Höhe in z-Richtung und ist bei K befestigt. Wasser strömt durch die Einlässe 1 und 2 mit den Querschnitten A_1 und A_2 in die Verzweigung. Die entsprechenden Einströmgeschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sind konstant über die Querschnitte und parallel zu den Flächennormalen der Einströmflächen. Durch den Austritt 3 mit dem Querschnitt A_3 strömt Wasser mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}_3$ parallel zur Flächennormalen aus. Die statischen Drücke an den Ein- und Austrittsquerschnitten betragen p_1, p_2 und p_3. Der Außendruck hat den Wert p_0. Die Flächenmittelpunkte der Querschnittsflächen A_1 und A_2 befinden sich in x-Richtung in der Entfernung L von der Befestigung. Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Fläche A_2 und der x-Achse ist α. Der Flächenmittelpunkt der Querschnittsfläche A_3 befindet sich in x-Richtung und in y-Richtung in der Entfernung L von der Befestigung. Der Winkel zwischen dem Normalenvektor der Fläche A_3 und der x-Achse ist β.

a) Bestimmen Sie die x- und y-Komponenten der Austrittstrittsgeschwindigkeit $\vec{v}_3$ in Abhängigkeit gegebener Größen.

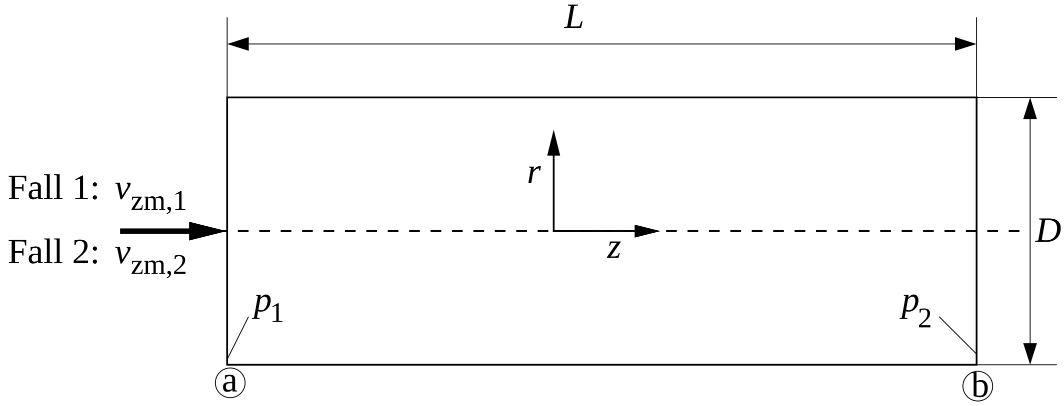
b) Bestimmen Sie die Komponenten der Haltekraft $\vec{F}$ (F_x, F_y) an der Befestigung in Abhängigkeit gegebener Größen.

c) Bestimmen Sie die Komponente M_z des Drehmoments das auf die Befestigung wirkt in Abhängigkeit gegebener Größen.

Hinweis: Die Strömung ist inkompressibel und stationär. Die Wandstärken sind bei der Momentenberechnung vernachlässigbar. Massenkräfte treten nur in z-Richtung auf.

Gegeben: ρ, p_0, p_1, p_2, p_3, A_1, A_2, A_3, v_1, v_2, α, β

Aufgabe 4 (13)



Vorgegeben sei ein zylindrisches Koordinatensystem mit den Koordinaten r, ϕ und z und den entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten v_r, v_ϕ, v_z.

Die Aufgabe behandelt eine ausgebildete Strömung durch einen Rohrabschnitt eines Rohrleitungssystems. Es sollen die Fälle 1 und 2 betrachtet werden. Das Rohrstück hat die Länge L und den Durchmesser D. Das Fluid mit der Dichte ρ besitzt die konstante kinematische Viskosität ν und strömt im Fall 1 mit der volumetrisch gemittelten Geschwindigkeit $\bar{v}_{\text{zm},1}$ und im Fall 2 mit der volumetrisch gemittelten Geschwindigkeit $\bar{v}_{\text{zm},2}$ durch das Rohr.

An der Stelle a wird der Druck p_1 und an der Stelle b der Druck p_2 gemessen. Die Drücke seien konstant über die Querschnitte.

a) Berechnen Sie den Druckverlust der Fälle 1 und 2 der Strömung im Rohrstück.

b) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsprofile der Fälle 1 und 2. Erläutern Sie den Unterschied und die physikalische Herkunft des Unterschiedes.

Bei der folgenden Berechnung brauchen die Zahlenwerte **nicht** verwendet werden. Stellen Sie das Ergebnis nur mit Parametern dar.

c) Die Schubspannung in der Strömung sei konstant und es gilt:

$$\mu \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{v}_z}{\mathrm{d}z} - \rho \cdot \overline{v_z{}' \cdot v_r{}'} = \text{konst.} = -\text{K}$$

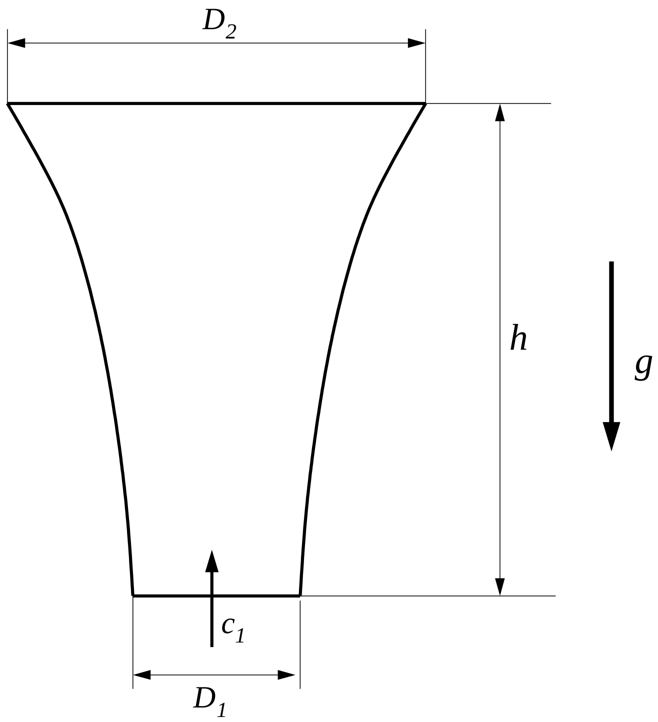
Berechnen Sie unter Vorgabe des 1/7-Potenzgesetzes

$$\overline{v}_z(r) = \bar{v}_{z2,\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

außerhalb der viskosen Unterschicht mit dem Prandtlschen Mischungswegansatz die Mischungsweglänge l. Außerhalb der viskosen Unterschicht kann der Reibungsanteil der Schubspannung vernachlässigt werden.

Gegeben: K, $\bar{v}_{\text{zm},1} = 3.4 \cdot 10^{-3}\ m/s$, $\bar{v}_{\text{zm},2} = 0.1\ m/s$, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $L = 3\ m$, $D = 0.5\ m$, $\rho = 1000\ kg/m^3$

Aufgabe 5 (17)



In dem oben skizzierten divergenten Kamin befinden sich Sandkörner (Dichte $\rho_{\text{Sand}} = 1500\ kg/m^3$) mit unterschiedlichen Durchmessern, die von einer von unten kommenden Luftströmung (Dichte $\rho_{\text{Luft}} = 1,205\ kg/m^3$, Viskosität $\mu_{\text{Luft}} = 1,5 \cdot 10^{-5}\ kg/(m \cdot s)$) nach oben geblasen werden. Der Kamin hat im engsten Querschnitt einen Durchmesser von $D_1 = 0,1\ \ m$ und am oberen Ende einen Durchmesser von $D_2 = 0.3\ m$, wobei sich die Fläche linear nach oben vergrößert. Die Geschwindigkeit in diesem engsten Querschnitt beträgt $c_1 = 50\ m/s$. Der Kamin hat eine Höhe von $h = 1\ m$. Die Strömung kann als inkompressibel und stationär betrachtet werden.

Die Strömung im Kamin soll numerisch berechnet werden. Hierfür werden die Sandkörner im ersten Schritt vernachlässigt.

a) Welche Einstellungen wählen Sie bei der Auswahl der physikalischen Parameter?

b) Als Randbedingung für die Numerik benötigen Sie den Massenstrom. Bestimmen Sie den Massenstrom für die Kaminströmung.

c) Tritt im betrachteten Fall des divergenten Kamins ein Verdichtungsstoss auf? Begründung!

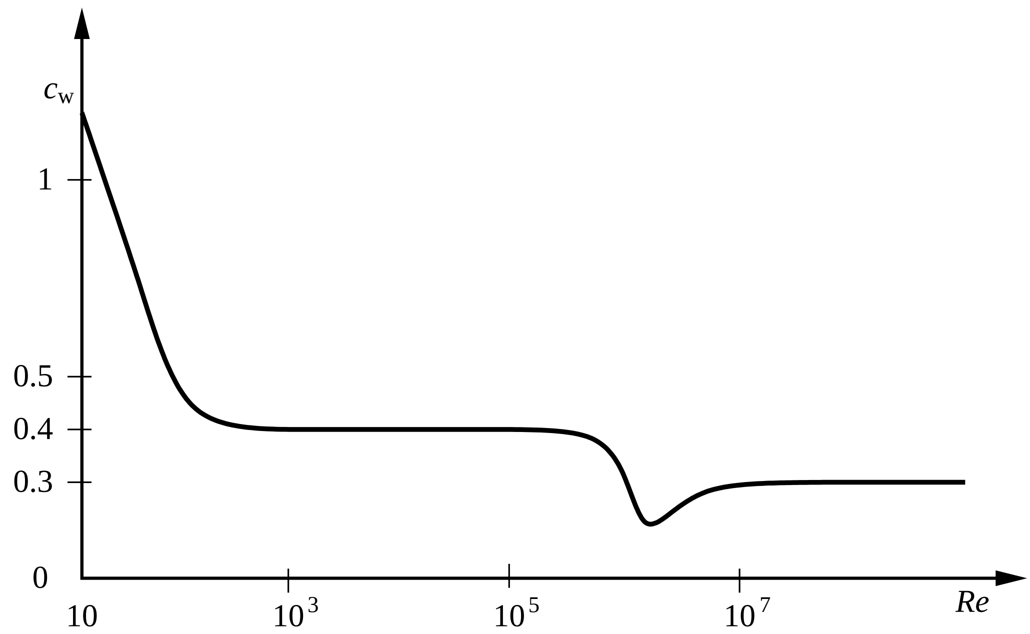
In dem betrachteten Kamin werden jetzt Sandkörner mit Durchmessern zwischen $d_{\text{Sand(min)}} = 1,5\ mm$ und $d_{\text{Sand(max)}} = 20\ mm$ nach oben geblasen.

d) Berechnen Sie die Reynolds-Zahl im engsten Querschnitt und am oberen Ende des Kamins für die Kaminströmung. Ist die Strömung laminar oder turbulent?

e) Berechnen Sie die Fläche des Kamins bei der Höhe $h/2$.

f) Berechnen Sie für die kleinsten und die größten Teilchen die für die Umströmung charakteristische Reynolds-Zahl bei dieser Höhe.

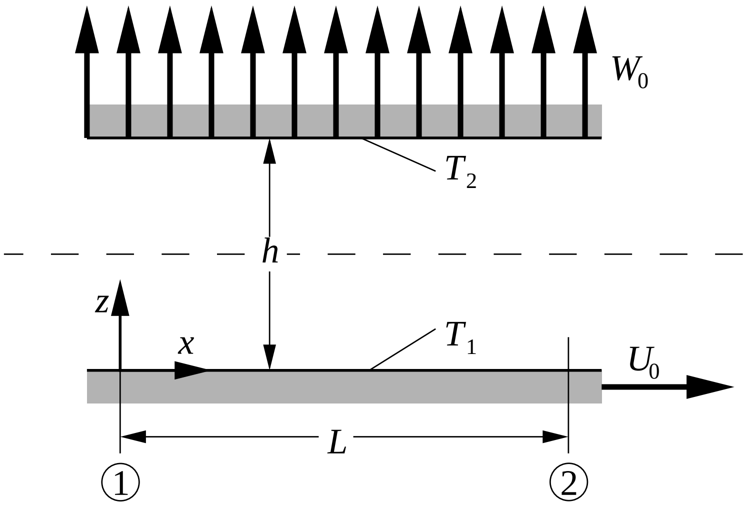
g) Berechnen Sie mit Hilfe des unten gezeigten Diagramms für den c_w-Wert der Kugelumströmung den Durchmesser der Sandkörner, die in dieser Höhe $h/2$ schweben.



Hinweis: Der hydrostatische Auftrieb der Luft kann vernachlässigt werden. Effekte durch die Versperrung des Luftstroms aufgrund schwebender Teilchen können ebenfalls vernachlässigt werden. Die Sandkörner sollen als Kugeln betrachtet werden. Die Anzahl der Sandkörner in der Luftströmung ist so gering, dass weiterhin gilt: $\rho_{\text{Gemisch}} = \rho_{\text{Luft}}$

Gegeben: $\rho_{\text{Sand}} = 1500\ kg/m^3$, $\rho_{\text{Luft}} = 1.205\ kg/m^3$, $\mu_{\text{Luft}} = 1.5 \cdot 10^{-5}\ kg/(m \cdot s)$, $D_1 = 0.1\ m$, $D_2 = 0,3\ m$, $c_1 = 50\ m/s$, $h = 1\ m$, $d_{\text{Sand(min)}} = 1.5\ mm$, $d_{\text{Sand(max)}} = 20\ mm$, $g = 9.81\ m/s^2$

Aufgabe 6 (19)



Zwischen zwei horizontalen, porösen Platten (Breite b senkrecht zur Zeichenebene) strömt im Spalt (konstante Spalthöhe h) ein Newtonsches Medium (konstante kinematische Zähigkeit ν, konstante Dichte ρ, konstante spezifische Wärmekapazität c_v) in ausgebildeter, stationärer und laminarer Strömung. Die untere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit $U_0 > 0$ in positive x-Richtung, die obere Platte ist in Ruhe. Durch Druckabsenkung über der oberen porösen Platte wird Medium aus dem Spalt mit der konstanten Geschwindigkeit $W_0 > 0$ parallel zur z-Achse abgesaugt (siehe Abbildung). Durch die poröse untere Platte kann Medium parallel zur z-Achse nachfließen. Der statische Druck im Spalt selber bleibt konstant. Die Querschnitte 1 und 2 im Spalt (siehe Abbildung) haben den Abstand L voneinander. Die untere Wand wird auf der konstanten Temperatur T_1 gehalten, während die obere Wand die konstante Temperatur T_2 hat ($T_2 > T_1$). In Strömungsrichtung kann die Temperaturverteilung im Spalt ebenfalls als ausgebildet betrachtet werden. Es soll keine zusätzliche Energiezu- oder abfuhr durch Strahlung etc. stattfinden. Durch die Absaugung ändert sich die Wärmeleitfähigkeit λ nach der folgenden Funktion:

$$\lambda(z) = \lambda_0 + \rho \cdot W_0 \cdot c_\mathrm{v} \cdot z \quad .$$

a) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie daraus die z-Komponente der Geschwindigkeit in Abhängigkeit gegebener Größen.

b) Vereinfachen Sie die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(z)$ in Abhängigkeit gegebener Größen.

c) Berechnen Sie den Betrag der Kraft die durch Reibung von der Strömung auf die obere Platte zwischen den Querschnitten 1 und 2 ausgeübt wird.

d) Welche Strömung ergibt sich für $W_0 \to 0$?

e) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Energiegleichung für inkompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie unter Verwendung der Ergebnisses von Aufgabenteil a) die Temperaturverteilung $T(z)$ in Abhängigkeit gegebener Größen. Dabei kann die Dissipation gegenüber der Wärmeleitung durch den Temperaturgradienten vernachlässigt werden.

Die vorgenommenen Vereinfachungen in den Aufgabenteilen a), b) und e) sind zu begründen.

Hinweis: Wegen der porösen Wände ist die Haftbedingung an den Wänden nur für die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit zu erfüllen. Die Gravatation kann vernachlässigt werden.

Gegeben: W_0, U_0, ν, ρ, T_1, T_2, h, L, b

Lehrstuhl und Institut Platz-Nr.: ....
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel 19. September 2005

Aufgabe / Punkte

Name: .... 1) ....

Vorname: .... 2) ....

Matrikel-Nr.: .... 3) ....

Fachrichtung: .... 4) ....

Fachsemester: .... 5) ....

6) ....

Note: .... Σ ....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (15)

Ein 2-dimensionales Strömungsfeld in der x-y-Ebene ist für die Zeit $t \geq t_0$ durch die folgenden x- und y-Komponenten der Geschwindigkeit gegeben:

(1) $$u(x, y, t) = \frac{t_0 y}{U_0 t^2}$$

(2) $$v(x, y, t) = V_0 \cos(\omega\ t)$$

a) Bestimmen Sie die Stromlinie, die zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ durch den Ort $(x_1, 0)$ geht.
b) Ist die Luft-Strömung drehungsfrei? Begründen Sie Ihre Antwort.
c) Bestimmen Sie die y-Komponente des Bahnkurvenvektors eines Luftteilchens, das sich zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ am Ort $(x_2, 0)$ befand.
d) Ist das Strömungsfeld stationär oder instationär? Begründen Sie die Antwort.
e) Bestimmen Sie die einzelnen Komponenten der substanziellen Beschleunigung der Luft ab dem Zeitpunkt t_0.

Hinweis: Es handelt sich um eine reibungsfreie Strömung. Die Konstanten U_0, V_0, t_0, x_1, x_2 und ω sind ungleich Null.

Gegeben: U_0, V_0, t_0, x_1, x_2, ω

Aufgabe 2 (18)

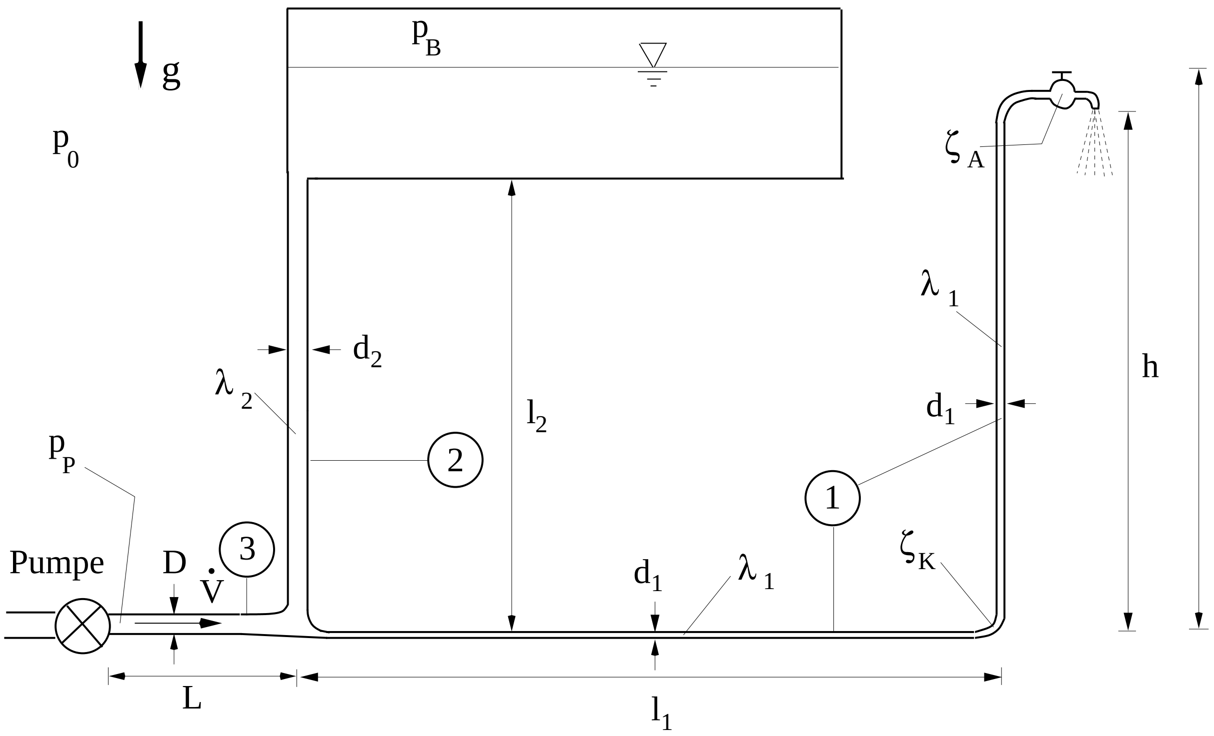


Abbildung 1: Skizze

In ein Rohrleitungssystem des Durchmessers D und der Länge L (Rohr 3 in der Abbildung 1) wird Wasser (Dichte ρ, kinematische Viskosität ν) mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ gepumpt (s. Abb.). Durch eine Verzweigung strömt das Wasser entlang einer Rohrleitung des Durchmessers d_1 und der Länge $l_1 + h$ (Rohr 1 in Abb.) zu einem Abstellhahn (Austrittsdurchmesser d_A des Hahns ist gleich dem Durchmesser d_1) und durch eine Rohrleitung des Durchmessers d_2 und der Länge l_2 (Rohr 2 in Abb.) in einen sehr großen Behälter. Die Änderung des Wasserspiegels im Behälter ist sehr gering und daher vernachlässigbar. Der Wasserspiegel des Behälters hat die Höhe $H = 18\ m$ über der Pumpe. Am Einlauf in den Behälter gilt für das Rohr 2 die Freistrahlbedingung. Strömungsverluste treten sowohl aufgrund der Reibung entlang beider Rohre (Verlustkoeffizient $\lambda_1 = 0.03$, $\lambda_2 = 0.001$), als auch in dem 90°-Krümmer des Rohres 1 auf (Verlustkoeffizient $\zeta_K = 0.3$). Außerdem treten Verluste aufgrund der Reibung in der Rohrleitung 3 vor der Verzweigung auf. In Rohrleitung 3 hat die mittlere Sandkornrauhigkeit den Wert $k = 0.002666\ m$. Der Druck direkt hinter der Pumpe beträgt $p_P = 600000\ Pa$. Die Krümmer- und Ventilverluste im Abstellhahn werden durch den Verlustkoeffizienten ζ_A beschrieben.

a) Wählen Sie aus dem Nikuradse-Diagramm den Reibungverlustkoeffizienten λ_D der Rohrleitung 3 und begründen Sie die Wahl.

b) Man berechne die Austrittsgeschwindigkeit am Abstellhahn unter der Voraussetzung, dass die Strömung als Freistrahl austritt.

c) Man berechne den Druck p_B im Behälter.

d) Ist die Strömung in beiden Rohren 1 und 2 laminar oder turbulent?

Gegeben:
$\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $g = 9.8\ m/s^2$, $l_1 = 12\ m$, $l_2 = 3\ m$, $L = 10\ m$, $H = 18\ m$, $h = 15\ m$, $p_0 = 101300\ Pa$, $p_\mathrm{P} = 600000\ Pa$, $D = 80\ mm$, $d_1 = 20\ mm$, $d_2 = 70\ mm$, $\zeta_\mathrm{K} = 0.3$, $\zeta_\mathrm{A} = 0.1$, $\lambda_1 = 0.03$, $\lambda_2 = 0.001$, $k = 2.6\ mm$, $\dot{V} = 4.5 \cdot 10^{-2}\ m^3/s$

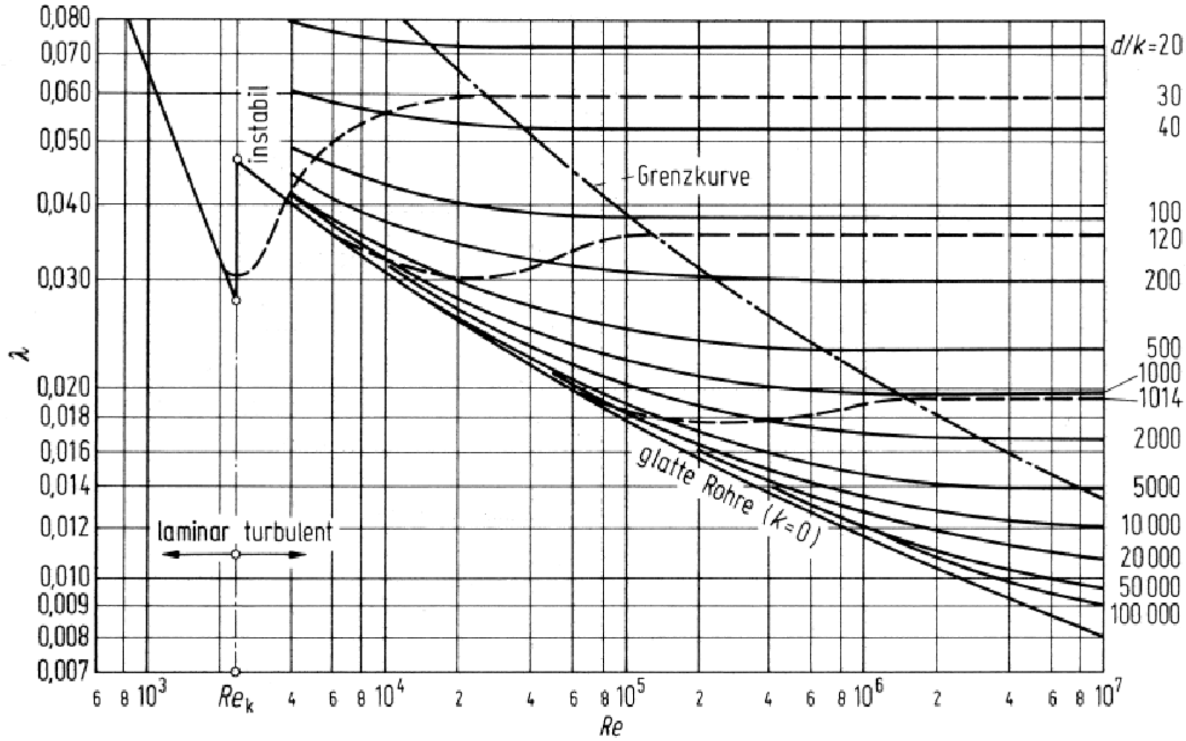


Abbildung 2: Nikuradse-Diagramm

Aufgabe 3 (15)

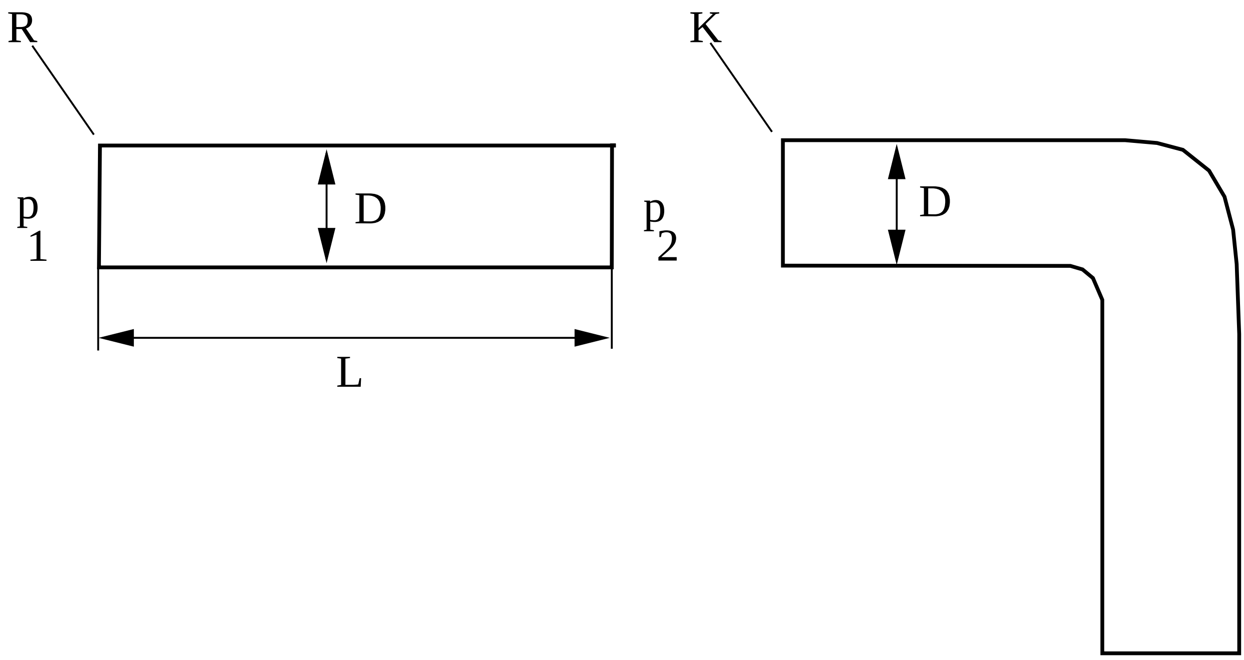


Abbildung 3: Skizze

In technischen Anwendungen spielt der Einsatz von Rohrkrümmern eine entscheidende Rolle. Im ersten Teil dieser Aufgabe soll das Verhalten des Rohrkrümmers K, diskutiert werden. Im zweiten Teil der Aufgabe wird der Druckverlust in einem vorgeschalteten Rohr R betrachtet.

a) Skizzieren Sie charakteristische Ablösegebiete im Krümmer K und erläutern Sie ihre Entstehung.

b) Welches charakteristische Strömungsphänomen tritt bei einer Krümmerströmung auf. Erläutern Sie kurz die Entstehung.

Nun wird vor den Krümmer ein Rohr der Länge l und dem Verlustbeiwert λ_{lam} angebracht. In der Folge sei nur das laminar durchströmte Rohr R betrachtet.

c) Berechnen Sie den Druckverlust Δp bei einer laminaren Strömung durch das Rohr bei gegebenem Volumenstrom $\dot{V}$.

d) Berechnen Sie das Vehältnis der Druckverluste Δp zu Δp_{neu}, wenn der Volumenstrom $\dot{V}$ erhalten bleibt und sich der Durchmesser D verdoppelt ($D_{neu} = 2 \cdot D$).

e) Skizzieren Sie für laminare Strömung den Volumenstrom $\dot{V}$ für konstanten Rohrdurchmesser D und konstante Länge l, in Abhänigkeit des Druckverlustes Δp qualitativ in ein Diagramm.

f) Skizzieren Sie für laminare Strömung den Volumenstrom $\dot{V}$ für konstanten Druckverlust Δp und konstante Länge l des Rohres, in Abhängikeit vom Durchmesser D qualitativ in ein Diagramm.

g) Skizzieren Sie qualitativ den Unterschied zwischen dem Geschwindigkeitsprofil einer Hagen-Poiseuille-Gleichung und dem Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Rohrströmung, gleichen Volumenstroms und erläutern Sie diesen kurz.

Gegeben: l, D, $\dot{V}$, ρ, ν

Aufgabe 4 (18)

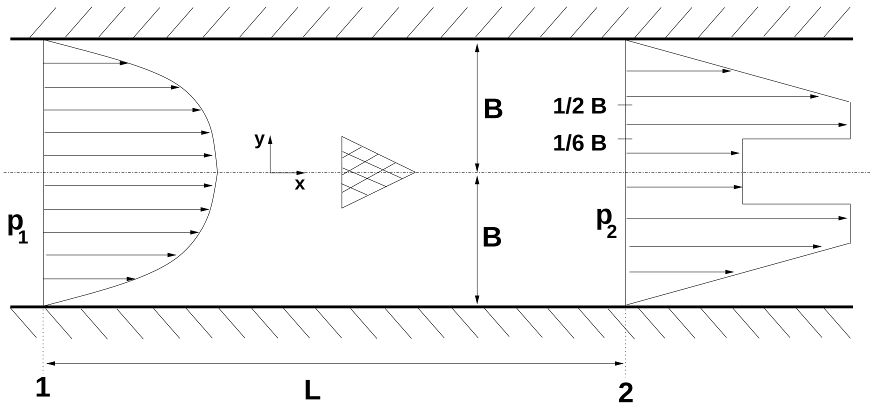


Abbildung 4: Skizze

In einem Rechteckkanal der Breite $2 \cdot B$ und der Tiefe t (senkrecht zur Zeichenebene) ist ein dreiecksförmiger Körper eingespannt, dessen Achse senkrecht zur Zeicheneben steht (siehe Abbildung 4). Die gezeigte Form ist konstant über die Tiefe t. Der Kanal wird von einem inkompressiblen, reibungsbehafteten Medium (Dichte ρ, Viskosität μ) stationär durchströmt. Im Querschnitt 1 findet man eine Geschwindigkeitsverteilung entsprechend dem Poiseuille-Profil:

$$c_1(y) = \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) \cdot c_{1,max}.$$

Im Querschnitt 2 entsteht durch Ablösung bei der Umströmung des Körpers eine Verformung des Geschwindigkeitsprofiles, welche näherungsweise durch die folgende (in Abbildung 4 skizzierte) Verteilung wiedergegeben werden kann:

$$c_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot c_{2,max} & ; 0 \leq |y| \leq \dfrac{B}{6} \\ c_{2,max} & ; \dfrac{B}{6} \leq |y| \leq \dfrac{B}{2} \\ a \cdot |y| + b & ; \dfrac{B}{2} \leq |y| \leq B \end{cases}$$

Die Drücke p_1 und p_2 seien jeweils konstant über dem Querschnitt und bekannt.

Mit Hilfe einer Impulsbilanzbetrachtung soll der Widerstand des Staukörpers berechnet werden. Die Reibung infolge der Schubspannungsverteilung auf der Wand kann <u>nicht</u> vernachlässigt werden.

Hinweis:

Man kann davon ausgehen, dass der Geschwindigkeitsgradient an der Wand über die ganze Messstrecke **konstant** ist. Wegen $t \gg B$ ist die Reibung an den Stirnseiten des Rechteckkanals vernachlässigbar. Der Einfluss der Erdschwere kann vernachlässigt werden.

a) Bestimmen Sie unter Verwendung bekannter Größen die Geschwindigkeit $c_2(y)$ hinter dem Staukörper im Bereich $B/2 \leq |y| \leq B$.

b) Bestimmen Sie den Volumenstrom im Kanal unter Verwendung bekannter Größen.

c) Bestimmen Sie mittels des Impulssatzes unter der Voraussetzung $c_{2,max} = c_{1,max}$ den Widerstand des dreiecksförmigen Körpers im Kanal unter Verwendung bekannter Größen.

Gegeben: B, t, L, ρ, μ, p_1, p_2, $c_{1,max}$

Aufgabe 5 (15)

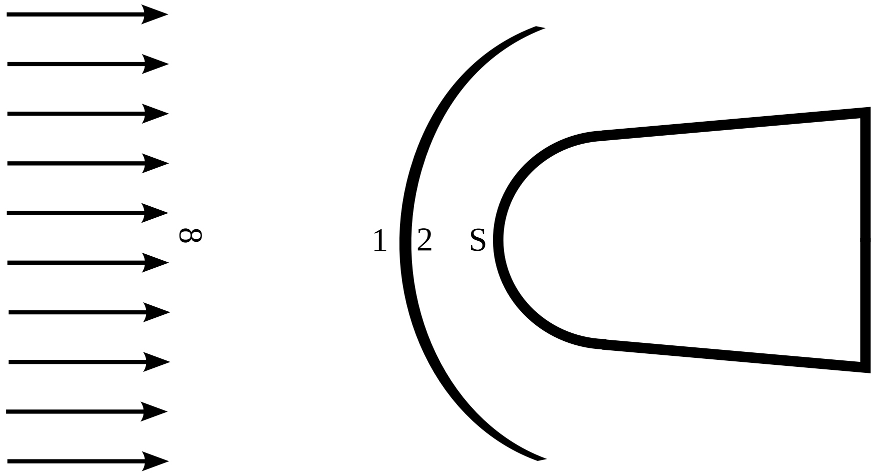


Abbildung 5: Skizze

Eine rotationssymmetrische Wiedereintrittskapsel mit einer stumpfen Nase bewegt sich mit hoher Überschallgeschwindigkeit (M_∞) in der Erdatmosphäre (siehe Abbildung 5). Die Luft kann als ideales Gas (κ, spezifische Gaskonstante R) bei Druck p_∞ und Temperatur T_∞ betrachtet werden.

a) Berechnen Sie die Temperatur und den Druck vor und nach dem senkrechten Verdichtungsstoß (Positionen 1 und 2), sowie im Staupunkt (S) des Flugkörpers in Abhängigkeit gegebener Größen.

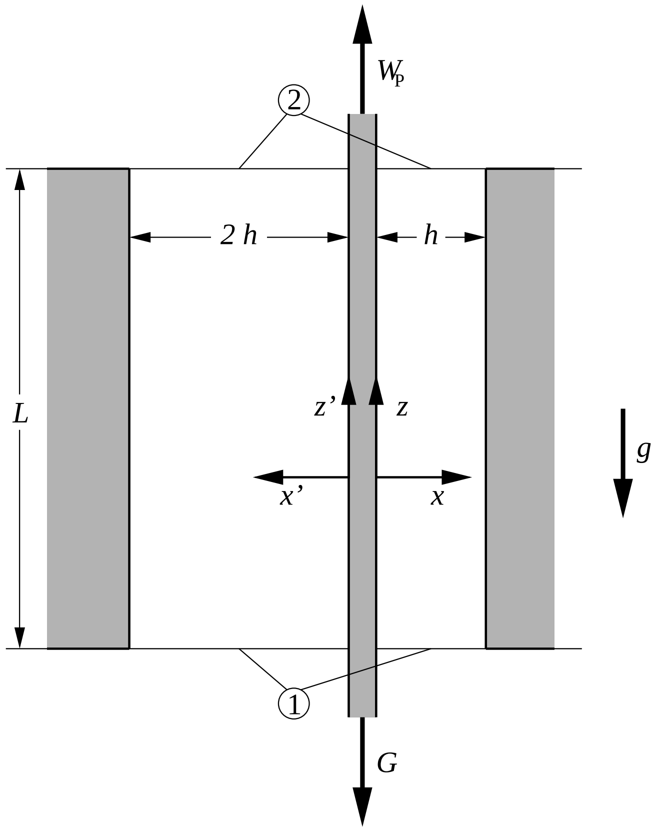
Gegeben: κ, M_∞, p_∞, T_∞

b) Aus Sicherheitsgründen muss die Staupunktstemperatur unterhalb einer Maximaltemperatur $T_{S,max}$ bleiben. Berechnen Sie die maximal zulässige Anströmmachzahl $M_{\infty,max}$ und die maximal zulässige Anströmgeschwindigkeit $U_{\infty,max}$ in Abhängigkeit gegebener Größen.

Gegeben: κ, T_∞, $T_{S,max}$, R

Hinweis: Die Kopfwelle kann auf der Staupunktstromlinie als senkrechter Verdichtungsstoß betrachtet werden!

Aufgabe 6 (19)



Eine ebene Platte der Breite b (senkrecht zur Zeichenebene) wird so zwischen zwei vertikalen Wänden geführt, dass sich auf der rechten Plattenseite ein Spalt mit der Weite h und auf der linken Plattenseite ein Spalt mit der Weite $2 \cdot h$ ergibt. Diese beiden Spalte werden von Öl durchströmt, dass im Querschnitt 1 unter dem Druck p_1 eintritt und im Querschnitt 2 unter dem Druck p_2 wieder austritt. Das Öl zieht dabei die Platte mit dem Gewicht G durch Reibung mit der Geschwindigkeit W_P nach oben. Die Strömung in den beiden Spalten sei über die ganze Länge L der Platte ausgebildet, eben, stationär und laminar. Die außerhalb des Spaltes vom Öl auf die Platte ausgeübten Reibungskräfte seien vernachlässigbar klein. Das Öl kann als Newtonsches Medium mit konstanter dynamischer Zähigkeit μ und konstante Dichte ρ behandelt werden.

a) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung und die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen unter den gegebenen Voraussetzungen. Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen! Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $w(x)$ in Abhängigkeit gegebener Größen und des noch unbekannten Druckgradienten im rechten Spalt. Verwenden Sie hierzu das in der Abbildung angegebene raumfeste x-z-Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $w(x')$ in Abhängigkeit gegebener Größen und des noch unbekannten Druckgradienten im linken Spalt. Verwenden Sie hierzu das in der Abbildung angegebene raumfeste x'-z'-Koordinatensystem.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit gegebener Größen die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$ wenn die Platte sich mit der vorgegebenen Geschwindigkeit W_P nach oben bewegen soll.

d) Welcher Ansatz zur Beschreibung der Strömungsgrößen muss verwendet werden, wenn statt der laminaren Strömung durch die Spalte eine turbulente Strömung fließt. Geben Sie den Ansatz für die Strömungsgrößen an.

e) Geben Sie den dreidimensionalen Spannungstensor τ' in Abhängigkeit der Schwankungsgrößen an.

f) Wenden Sie die Boussinesq-Annahme auf den dreidimensionalen Spannungstensor τ' an und vereinfachen Sie die Terme mit den unter Teil a) verwendeten Voraussetzungen für die jetzt zeitlich gemittelten Größen. Setzen Sie das Ergebnis in den Spannungstensor τ' ein.

Hinweis: Wegen $L \gg h$ kann die dreidimensionale Strömung am Eintritt und am Austritt aus den Spalten vernachlässigt werden. Ebenso kann die Einlaufströmung in den Spalten vernachlässigt werden.

Gegeben: b, h, L, ρ, μ, G, W_P, g

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

18. April 2006

Aufgabe / Punkte

Name: ....

1) ....

Vorname: ....

2) ....

Matrikel-Nr.: ....

3) ....

Fachrichtung: ....

4) ....

Fachsemester: ....

5) ....

6) ....

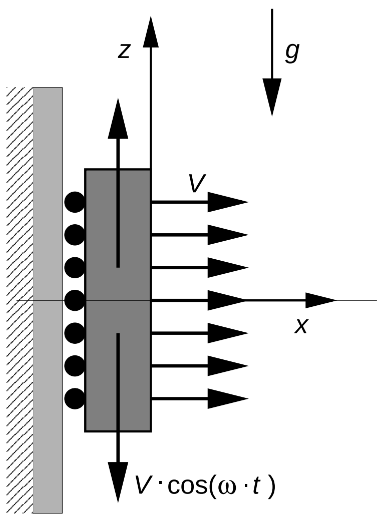
Note: ....

Σ ....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (16)



In einer Lackieranlage kommt zur gleichmäßigen Farbverteilung der in der Abbildung dargestellte Sprühschlitten zum Einsatz. Aus den auf der z-Achse angebrachten Düsen tritt Lack in x-Richtung mit der konstanten Geschwindigkeit V aus. Aufgrund einer oszillierenden Auf- und Abbewegung des Schlittens entlang der z-Achse sowie der wirkenden Erdbeschleunigung g ergibt sich im raumfesten

x-z-Koordinatensystem ein zweidimensionales Strömungsfeld mit den folgenden Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} u &= V \quad , \\ w &= V \cdot \cos\left(\omega \cdot \left(t - \frac{x}{V}\right)\right) - g \cdot \frac{x}{V} \quad . \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie aus den angegebenen Geschwindigkeiten die Komponenten der substantiellen Beschleunigung $a_x(x,z,t)$ und $a_z(x,z,t)$.

Benennen Sie die Ursachen für die im Geschwindigkeitsfeld enthaltenen Beschleunigungsanteile.

b) Berechnen Sie die Drehung des Strömungsfeldes in der x-z-Ebene zum Zeitpunkt $t = 0$.

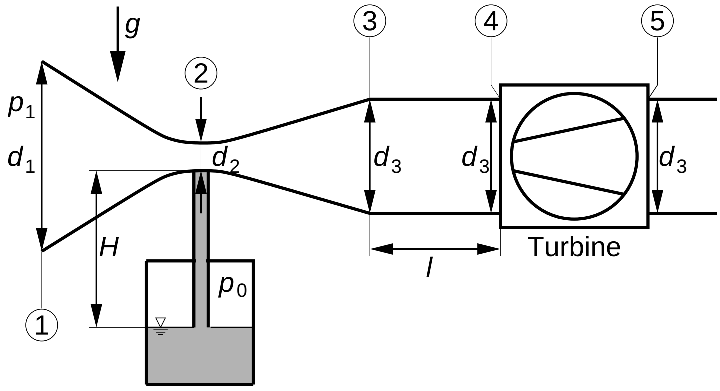
c) Bestimmen Sie die Gleichung $z = z(x,t)$ jener Stromlinie, die zum Zeitpunkt $t = \pi/(2 \cdot \omega)$ durch den Koordinatenursprung ($x = 0$, $z = 0$) geht.

d) Bestimmen Sie die Komponenten $x(t)$ und $z(t)$ des Bahnkurvenvektors für jenes Fluidteilchen, das sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $\mathrm{P}(x = x_\mathrm{p}, z = 0)$ befindet.

e) Wie lautet die zu Teilaufgabe d) gehörige Teilchenbahn $z = z(x)$.

Gegeben: V, ω, g, x_p

Aufgabe 2 (16)



In einer Venturi-Düse mit kreisförmigem Querschnitt (Eintrittsdurchmesser d_1, Halsdurchmesser d_2, Austrittsdurchmesser d_3) strömt Luft (Dichte ρ_L, kinematische Viskosität ν_L) bis zu einer Turbine mit der Leistung L (siehe Abbildung). Der Druck an der Stelle 1 ist mit p_1 gegeben. Im engsten Querschnitt der Düse (Stelle 2 in der Abbildung (nicht maßstäblich)) ist ein Rohr angeschlossen, dessen Eintritt um die Höhe H über dem Wasserspiegel eines geschlossenen Behälters liegt. Der Behälter ist mit Wasser (Dichte ρ_W) gefüllt und steht über der Wasseroberfläche unter dem Druck p_0. Die Venturi-Düse ist durch eine Rohrleitung der Länge l (Strecke 3 - 4 in der Abbildung) und dem Durchmesser d_3 mit der Turbine verbunden. In dieser Rohrleitung treten Reibungsverluste auf. Die Strömung sei in der ganzen Anlage inkompressibel. Unter der Voraussetzung, dass sowohl die Venturi-Düse als auch die Turbine verlustfrei arbeiten und mit der Annahme, dass die Rohrleitung der Länge l hydraulisch glatt ist und keine Einlaufverluste auftreten, berechne man:

a) Die Geschwindigkeit c_2 (an der Stelle 2 der Venturi-Düse), die erforderlich ist, um das Wasser in dem Rohr genau in der Höhe H zu halten.

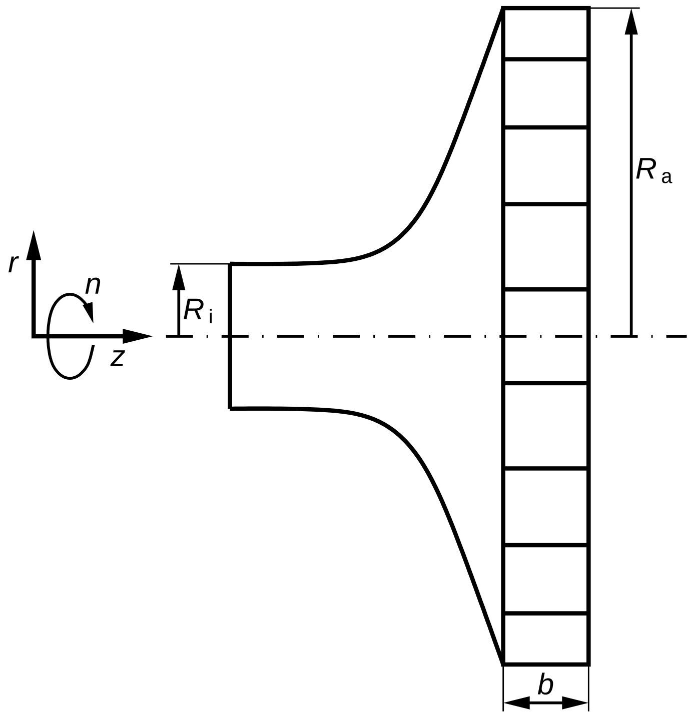
b) Den Reibungsverlustbeiwert λ entlang der Rohrleitung der Länge l.

c) Den Druck p_5 am Austritt aus der Turbine (Stelle 5 in der Abbildung).

Hinweis: Die gesamte Strömung kann als eindimensional betrachtet werden.

Gegeben: $\rho_L = 1,205\ kg/m^3$, $\nu_L = 1,503 \cdot 10^{-5}\ m^2/s$, $\rho_W = 1000\ kg/m^3$, $g = 9,8\ m/s^2$, $p_0 = 108540\ Pa$, $p_1 = 101012\ Pa$, $d_1 = 80\ mm$, $d_2 = 60\ mm$, $d_3 = 70\ mm$, $l = 500\ mm$, $H = 800\ mm$, $L = 5\ kW$

Aufgabe 3 (15)



Eine Radialpumpe fördert einen konstanten Volumenstrom von $\dot{V} = 10\ l/s$ eines inkompressiblen Mediums der Dichte ρ. Die Strömung tritt gleichförmig und bzgl. eines ruhenden ortsfesten Koordinatensystems drallfrei durch einen axialen Ansaugstutzen mit dem Durchmesser $2 \cdot R_\mathrm{i} = 1\frac{1}{4}\ Zoll = 31,75\ mm$ in das Laufrad ein. Der Ausströmrand des Laufrades hat einen Durchmesser von $2 \cdot R_\mathrm{a} = 100\ mm$. Die Strömung verlässt das Laufrad bei einer Drehzahl von $n = 3540\ min^{-1}$ mit einer Relativgeschwindigkeit (Geschwindigkeit im mitrotierenden Koordinatensystem) von $w_{\mathrm{rel,a}} = 3\ m/s$ tangential zu den Laufradschaufeln. Die Laufradschaufeln verlaufen am Austrittsquerschnitt radial. Die Dicke der Laufradschaufeln kann im Austrittsquerschnitt vernachlässigt werden. Außerdem ist auch der Einfluss der Gravitation zu vernachlässigen.

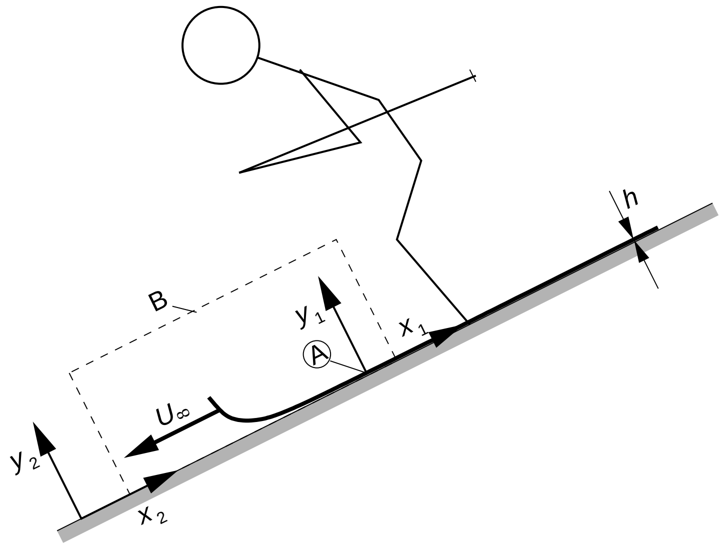
a) Berechnen Sie die notwendige Schaufelhöhe b am Austrittsquerschnitt.

b) Bestimmen Sie das notwendige Wellendrehmoment M.

c) Berechnen Sie die Druckerhöhung $\Delta p = p_\mathrm{a} - p_\mathrm{i}$ zwischen Eintritt und Austritt, die die Radialpumpe erzeugt. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Pumpe verlustfrei arbeitet und die Strömung kann mit der eindimensionalen Stromfadentheorie beschrieben werden.

Gegeben: $\dot{V} = 10\ l/s$, $2 \cdot R_\mathrm{i} = 1\frac{1}{4}\ Zoll = 31,75\ mm$, $2 \cdot R_\mathrm{a} = 100\ mm$, $n = 3540\ min^{-1}$, $w_{\mathrm{rel,a}} = 3\ m/s$, $\rho = 1000\ kg/m^3$

Aufgabe 4 (15)



12. Februar 2006, Sestrière, Abfahrtslauf der Herren im Rahmen der Olympischen Winterspiele in Turin. Auf dem Zielhang haben die Fahrer eine Geschwindigkeit von U_∞. Die Fahrer haben perfekte Bedingungen, da es im Zielhang absolut windstill ist.

An der Stelle A (Skioberseite, siehe Abbildung) ist die Strömung der Luft turbulent und liegt vollständig auf dem Ski an. Sie kann hier als Strömung auf einer Platte behandelt werden. Der Ski hat die Höhe h und liegt direkt auf dem Schnee auf.

a) Skizzieren Sie die Strömung im Bereich der gestrichelt eingezeichneten mitbewegten Box B.

b) Skizzieren Sie an der Stelle A das Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}(y_1)$ der Strömung auf dem Ski, das der Skifahrer sieht (mitbewegtes, auf der Oberseite des Skis liegendes x_1-y_1-Koordinatensystem).

c) Sie sind Zuschauer bei diesem Spektakel. Welches Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}(y_2)$ der Strömung sehen Sie an der Stelle A? Skizzieren Sie dieses Profil bezüglich des ortsfesten, auf der Oberfläche des Schnees liegenden x_2-y_2-Koordinatensystems und begründen Sie Ihre Skizze.

Tragen Sie in diese Skizze die Bereichseinteilung der turbulenten Grenzschichtströmung ein.

d) Für die Geschwindigkeitsverteilung $\bar{u}(y_1)$ in Wandnähe außerhalb der viskosen Unterschicht bis zum Rand der Grenzschicht gilt an der Stelle A:

$$\bar{u}(y_1) = U_\infty \cdot \left(\frac{y_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \quad .$$

Bestimmen Sie $\bar{u}(y_2)$ für das ortsfeste x_2-y_2-Koordinatensystem.

Die Höhe h des Skis ist im Weiteren vernachlässigbar.

e) Aus Messungen ist bekannt, dass sich der Mischungsweg entspechend der Gleichung $l(y_2) = 0,41 \cdot y_2$ näherungsweise ermitteln läßt. Bestimmen Sie entsprechend der von Prandtl getroffenen Annahmen den Verlauf der turbulenten Spannung in Wandnähe außerhalb der viskosen Unterschicht $\bar{\tau}_t(y_2)$ an der Stelle A.

f) Das logarithmische Wandgesetz im Bereich der Wandturbulenz lautet:

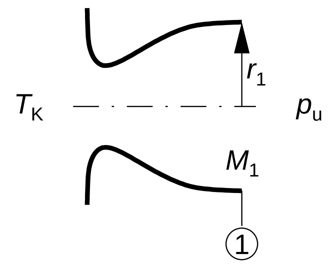
$$u^+(y_2) = \frac{1}{k} \cdot ln(y^+) + 5,5 \qquad \text{mit} \quad y^+ = \frac{y_2 \cdot \bar{u}_\tau}{\nu} \quad .$$

Nach Prandtl ist die Schubspannung am Rand der viskosen Unterschicht gleich der Wandschubspannug, d.h. es gilt $\bar{\tau}_\mathrm{t}(y_2 = \Delta) = \bar{\tau}_\mathrm{w}$. Die Dicke der viskosen Unterschicht Δ beträgt $1,5$ % der Grenzschichtdicke δ. Bestimmen Sie $u^+(y_2)$ in Abhängigkeit bekannter Größen.

Ab welchem y^+ benutzt man das logarithmische Wandgesetz?

Gegeben: U_∞, $\bar{u}(y_1)$, ρ, ν, δ, $l(y_1)$, $\Delta = 0,015 \cdot \delta$, k, h, u^+, y^+

Aufgabe 5 (19)



Aus einem großem Kessel mit der konstanten Temperatur $T_K = 500\ K$ strömt Luft ($R = 287\ m^2/(s^2 \cdot K)$, $\kappa = 1,4$) durch eine kreisrunde Laval-Düse in die Umgebung (siehe obere Abbildung). Der dort herrschende Druck beträgt $p_u = 1,01\ bar$. Am Austritt der Laval-Düse (Stelle 1) mit dem Radius $r_1 = 4\ cm$ stellt sich eine Mach-Zahl $M_1 = 2$ ein. Die Strömung ist stationär, eindimensional und abgesehen von auftretenden Verdichtungsstößen isentrop.

a) Bestimmen sie den Kesseldruck p_K, die Kesseldichte ρ_K und den Massenstrom $\dot{m}$ für die ideal durchströmte Laval-Düse.

b) Wie groß ist der Radius r^* im engsten Querschnitt der Laval-Düse?

Der Kesseldruck wird nun bei gleichbleibender Temperatur T_K geändert, sodass am Austritt der Laval-Düse (Stelle 1) ein senkrechter Verdichtungsstoß entsteht.

c) Wie groß ist die Mach-Zahl M_S unmittelbar vor dem Stoß? Welche Werte haben jetzt der Druck p_K und die Dichte ρ_K im Kessel. Wie groß ist in diesem Fall der Massenstrom $\dot{m}$?

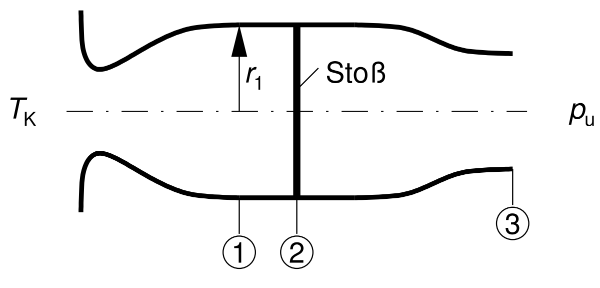
d) Berechnen sie den Druck p'_S und die zugehörige Mach-Zahl M'_S direkt hinter dem Stoß.

e) Zeichnen Sie qualitativ die beiden Druckverläufe aus Aufgabenteil a) und c), d) entlang der Düse.

Die Laval-Düse wird nun durch ein Teilstück mit konstantem Querschnitt (Radius r_1) und anschließendem Diffusor ergänzt, der die Strömung vor dem Austritt in die Umgebung (Stelle 3) auf eine definierte Mach-Zahl $M_3 = 0,8$ verzögert (siehe Abbildung unten). Im Teilstück mit konstantem Querschnitt (Stelle 2) stellt sich auch hierbei ein senkrechter Verdichtungstoß ein.

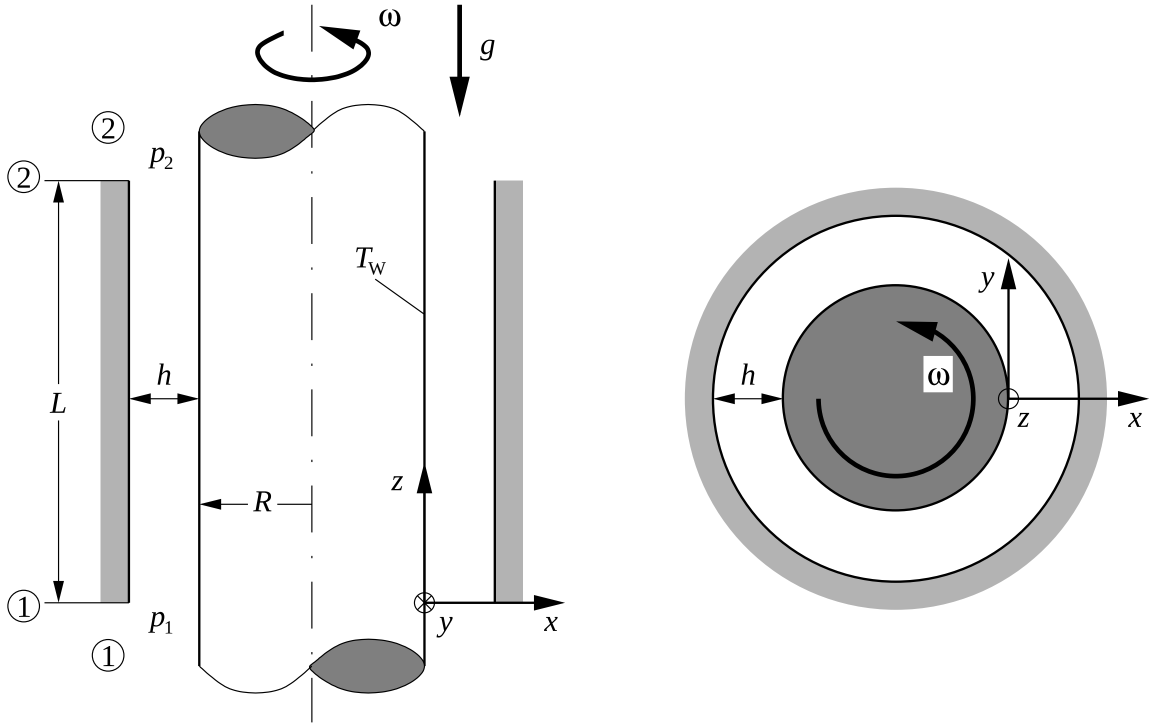
f) Welcher Druck p_K herrscht jetzt im Kessel? Wie groß ist der Austrittsradius r_3 des Diffusors?

g) Zeichen Sie qualitativ die Druckverteilung entlang der Düse und des Diffusors.



Gegeben: $T_K = 500\ K$, $p_u = 1,01\ bar$, $M_1 = 2$, $M_3 = 0,8$, $r_1 = 4\ cm$, $\kappa = 1,4$, $R = 287\ m^2/(s^2 \cdot K)$

Aufgabe 6 (19)



Eine Welle (Radius R) rotiert in einem Gleitlager (Länge L) mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω (siehe Abbildung). In dem Spalt (konstante Spalthöhe h) zwischen Welle und ruhender äußerer Lagerwand befindet sich Öl (Newtonsches Medium mit konstanter dynamischer Zähigkeit μ, konstanter Dichte ρ und konstanter spezifischer Wärmekapazität c_v). Das Öl wird in der unteren Kammer 1 unter dem konstanten Druck p_1 zugeführt, strömt dann durch den Spalt und wird in der oberen Kammer 2 unter dem konstanten Druck p_2 wieder abgesaugt. Die Achse der Welle steht vertikal und die Gravitation ist zu berücksichtigen. Die Welle hat die konstante Temperatur T_W, während die äußere Lagerwand wärmeisoliert (adiabat) ist.

Wegen $h \ll R$ und $h \ll L$ kann die Strömung als eine Strömung zwischen zwei vertikalen Platten betrachtet werden, bei der sich eine Wand bewegt. Dreidimensionale Effekte an den Rändern beim Ein- und Ausströmen in den Spalt können vernachlässigt werden. Es ist das gegebene x-y-z-Koordinatensystem zu verwenden. Die Strömung im Spalt ist über die ganze Länge stationär, laminar und in y- und z-Richtung ausgebildet. Die Temperaturverteilung im Spalt ist ebenfalls über die ganze Länge in y- und z-Richtung ausgebildet. Es soll keine zusätzliche Energiezu- oder abfuhr durch Strahlung etc. stattfinden. Die Wärmeleitfähigkeit λ hängt im interessierenden Temperaturbereich nach der folgenden linearen Funktion von der Temperatur ab:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{T}{T_0} \quad ,$$

mit den Konstanten λ_0 und T_0.

a) Vereinfachen Sie die inkompressible dreidimensionale Kontinuitätsgleichung unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie daraus die x-Komponente der Geschwindigkeit in Abhängigkeit gegebener Größen.

b) Vereinfachen Sie die inkompressiblen dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen unter den gegebenen Voraussetzungen und mit dem Ergebnis von a) und bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten v und w in y- bzw. z-Richtung in Abhängigkeit gegebener Größen.

c) Vereinfachen Sie die dreidimensionale Energiegleichung unter den gegebenen Voraussetzungen und bestimmen Sie, unter Verwendung der Ergebnisse von den Aufgabenteilen a) und b), die Temperaturverteilung T im Spalt in Abhängigkeit gegebener Größen. Hierbei kann der Gradient der Geschwindigkeitskomponente w in x-Richtung gegenüber dem Gradienten der Geschwindigkeitskomponente v in x-Richtung vernachlässigt werden!

Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

Hinweis: Beachten Sie bei der Bestimmung der Druckgradienten die Rotationssymmetrie.

Gegeben: ω, p_1, p_2, μ, ρ, λ_0, T_W, T_0, h, L, R, g

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

06. Oktober 2006

Aufgabe / Punkte

Name:	....	1)	....
Vorname:	....	2)	....
Matrikel-Nr.:	....	3)	....
Fachrichtung:	....	4)	....
Fachsemester:	....	5)	....
		6)	....
Note:	....	Σ	....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (14)

Gegeben ist eine instationäre Strömung eines Fluids in der x,y-Ebene mit den Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{A} \quad , \\ v &= -e^{-x} \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad , \end{aligned}$$

für $t \geq 0$, mit $\omega = \pi/2$ und der positiven Konstanten A.

a) Man bestimme die Gleichung jener Stromlinie $y = \mathrm{f}(x,t)$, die zum Zeitpunkt $t = 2$ durch den Punkt $\mathrm{P}_2 = (x_2, y_2)$ geht.

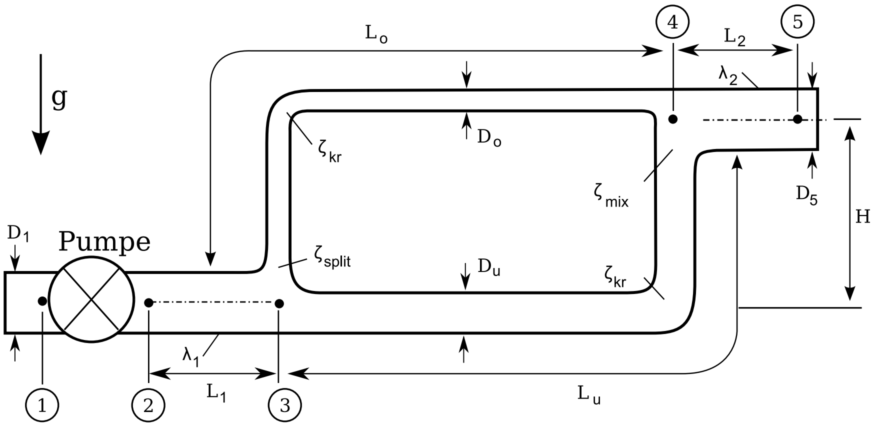
b) Bestimmen Sie die Komponenten $x(t)$ und $y(t)$ des Bahnkurvenvektors für das Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ am Punkt $\mathrm{P}_0(x_0 = 0, y_0 = 0)$ befindet.

c) Bestimmen Sie die x- und y-Komponente der substantiellen Beschleunigung $b_x(x,y,t)$ und $b_y(x,y,t)$

d) Wie groß ist die Drehung des Strömungsfeldes?

Gegeben: A, $\omega = \pi/2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, y_2

Aufgabe 2 (20)



In ein Rohrleitungssystem des Durchmessers D_1 wird Wasser (Dichte ρ, kinematische Viskosität ν) mit dem Volumenstrom $\dot{V}_1$ und dem Druck p_1 gepumpt. (siehe Abbildung). An der Stelle ③ verzweigt sich die Rohrleitung in ein Rohr mit dem Durchmessers D_o und der Länge L_o und in ein Rohr des Durchmessers D_u und Länge L_u (siehe Abbildung). An der Stelle ④ vereinigen sich diese beiden Rohre wieder.

In den beiden Rohren zwischen ③ und ④ treten unterschiedliche Strömungsverluste auf:

- Strömungsverluste aufgrund von Reibung entlang beider Rohre (Verlustkoeffizient im unteren Rohr $\lambda_u = 0,05$ und im oberen Rohr $\lambda_o = 0,032$),
- Strömungsverluste in den beiden 90 °-Krümmern (Verlustkoeffizient $\zeta_{kr} = 0,2$),
- Strömungsverluste im oberen Rohr bei der Verzweigung an der Stelle ③ ($\zeta_{split} = 9,3$ bzgl. der mittleren Geschwindigkeit im oberen Rohr), sowie im unteren Rohr bei der Vereinigung an der Stelle ④ ($\zeta_{mix} = 5$ bzgl. der mittleren Geschwindigkeit im unteren Rohr). Die Verluste bei der Verzweigung an Stelle ③ für das untere Rohr bzw. bei der Vereinigung an Stelle ④ für das obere Rohr sind schon in den beschriebenen Rohrreibungsverlustbeiwerten λ_u bzw. λ_o enthalten!

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Pumpe verlustfrei arbeitet.

a) Man berechne den Druck p_2 nach der Pumpe, wenn die Leistung der Pumpe $L = 0,06\ kW$ ist .

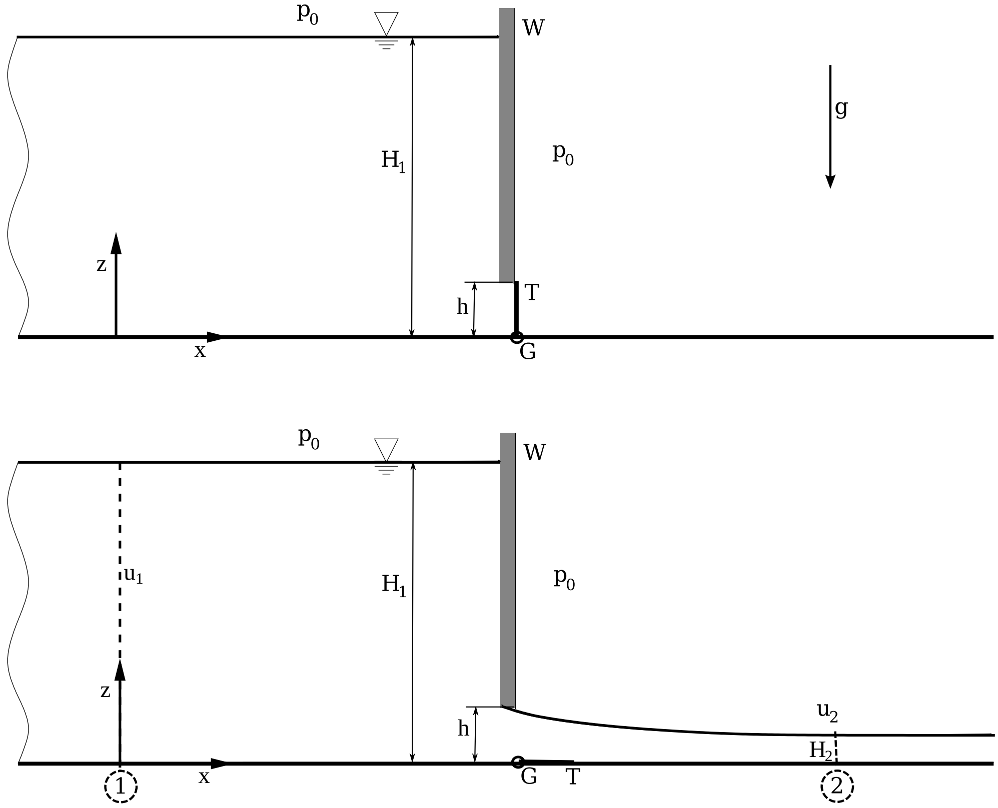
b) Bestimmen Sie die Reynolds-Zahlen für das Rohr zwischen den Stellen ② und ③ und für das Rohr zwischen den Stellen ④ und ⑤. Bestimmen Sie damit die zugehörigen Rohrreibungsverlustbeiwerte λ_1 und λ_2 unter der Voraussetzung, dass beide Rohre hydraulisch glatt sind.

c) Man berechne den Druck p_5 nach der Vereinigung der Rohre (Stelle ⑤ in der Abbildung).

d) Welche Aussage läßt sich bezüglich Turbulenz im oberen und unteren Rohr machen?

Gegeben: $\dot{V}_1 = 0,0012\ m^3/s$, $p_1 = 1,3\ bar$, $\lambda_u = 0,05$, $\lambda_o = 0,032$, $\zeta_{kr} = 0,2$, $\zeta_{split} = 9,3$, $\zeta_{mix} = 5$, $L_1 = L_2 = L = 0,3\ m$, $L_u = L_o = 3\ m$, $D_1 = D_2 = D_5 = 0,13\ m$, $D_u = 0,1\ m$, $D_o = 0,03\ m$, $H = 0,5\ m$, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $\rho = 1000\ kg/m^3$, $g = 9,81\ m/s^2$, $L = 0,06\ kW$

Aufgabe 3 (14)



In einem nach oben offenen Kanal der Breite $B = 10\ m$ wird Wasser durch eine Schleuse aufgestaut. Die Schleuse besteht aus der Schleusenwand W und dem unten im Drehgelenk G gelagerten Kipptor T. Das Wasser stromauf der Schleuse hat eine konstante Spiegelhöhe von H_1. Die vom Kipptor unter der Schleusenwand freigegebene Höhe beträgt h.

Zu Beginn ist das Kipptor geschlossen (obere Skizze der Abbildung). Das Wasser ruht.

a) Berechnen Sie die Horizontalkomponente $F_{x,\mathrm{a}}$ der Kraft, die auf die Schleusenwand W wirkt.

b) Bestimmen Sie das Moment, das in G aufgebracht werden muss, um das Kipptor geschlossen zu halten.

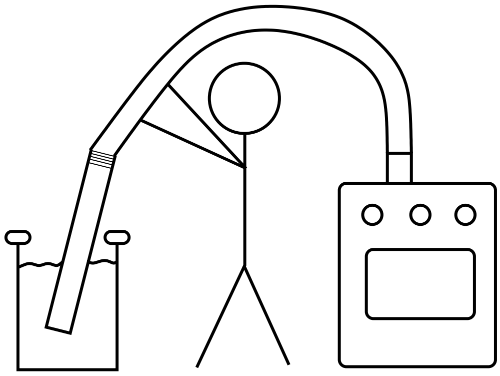
Bei geöffnetem Kipptor stellt sich ein stationärer Endzustand gemäß der unteren Skizze der Abbildung ein. Die Spiegelhöhe H_1 vor der Schleuse bleibt konstant. Das Wasser strömt bei 1 mit der über den Querschnitt konstanten Geschwindigkeit u_1 auf die Schleuse zu und fließt dann durch die vom Kipptor freigegebene Fläche weiter stromab. Bei 2 liegt eine Strömung mit der über den Querschnitt konstanten Geschwindigkeit $u_2 = 7\ m/s$ vor. Die Spiegelhöhe bei 2 beträgt $H_2 = 0{,}8 \cdot h$.

c) Berechnen Sie die Horizontalkomponente $F_{x,\mathrm{c}}$ der Kraft, die bei geöffnetem Kipptor auf die Schleusenwand wirkt. Erklären Sie die Differenz zu $F_{x,\mathrm{a}}$.

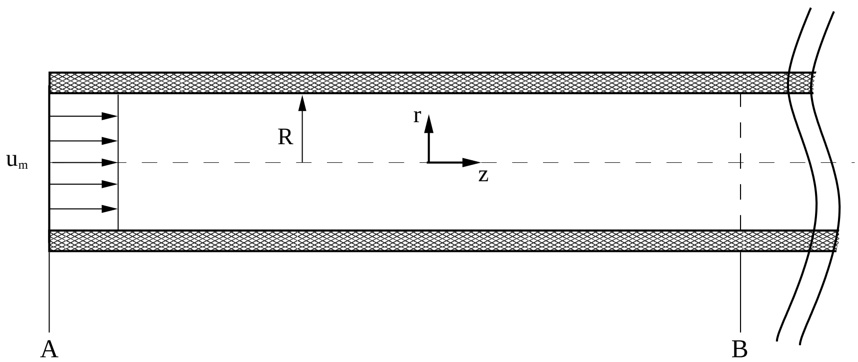
Hinweis: Die Reibung auf dem Boden des Kanals kann vernachlässigt werden. Behandeln Sie alle Drücke als Relativdrücke zu p_0.

Gegeben: $H_1 = 3\ m$, $h = 0{,}5\ m$, $H_2 = 0{,}8 \cdot h$, $B = 10\ m$, $u_2 = 7\ m/s$, $g = 9{,}81\ m/s^2$, $\rho = 1000\ kg/m^3$

Aufgabe 4 (16)



Zum Auspumpen von Chemiefässern soll in einem Industrieunternehmen die oben skizzierte Anlage zum Einsatz kommen. Die dabei verwendete Pumpe gewährleistet das Absaugen zweier unterschiedlicher Arten Flüssigkeiten mit gleicher Dichte ρ aber unterschiedlicher molekularer Viskosität μ_1, μ_2 bei gleichbleibender mittlerer Geschwindigkeit u_{m}. Die untere Abbildung zeigt den vorderen Teil des geraden Absaugrohres mit Radius $R = 50\ mm$, der sich während des gesamten Pumpvorgangs vollständig in der Flüssigkeit befinden soll. Einflüsse der Schwerkraft sollen vernachlässigt werden, das Rohr wird als starr und ideal glatt angenommen.



Unter Vernachlässigung von Einlaufeffekten kann an der Stelle A näherungsweise das dargestellte Blockprofil (u_{m}) angenommen werden. Weiter stromab soll an der Stelle B das Geschwindigkeitsprofil als voll eingelaufen betrachtet werden.

Ein erstes Fass enthält die Flüssigkeit 1 mit den Stoffeigenschaften $\rho_1 = \rho = 1000\ kg/m^3$ und $\mu_1 = 1,0\ mPa \cdot s$. An der Stelle B wird ein turbulentes Geschwindigkeitsprofil festgestellt; die Wandschubspannung wird mit $|\bar{\tau}_{\mathrm{W}}| = 0,17\ Pa$ angenommen.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Abschätzung

$$\frac{\mu_{\mathrm{t}}}{\mu} = \frac{y^+ \cdot (\bar{u}_\tau \cdot R - y^+ \cdot \nu)}{2,5 \cdot \bar{u}_\tau \cdot R} - 1$$

das Verhältnis von turbulenter zu molekularer Viskosität an der Stelle B bei $r = (3 \cdot R)/4$ unter Verwendung des dimensionslosen Wandabstandes y^+ sowie der Wandschubspannungsgeschwindigkeit $\bar{u}_\tau$.

Die Auswertung des Geschwindigkeitsprofils an der Stelle B ergibt mit $\bar{u}_{\max} = 3,673 \cdot 10^{-2}\ m/s$:

$$\bar{u}(r) = \bar{u}_{\max} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}}$$

b) Bestimmen Sie den Betrag der Prandtlschen Mischungsweglänge an der Stelle B bei $r = (3 \cdot R)/4$.

c) Berechnen Sie die querschnittsgemittelte Geschwindigkeit $\bar{u}_{\mathrm{m}}(\bar{u}_{\mathrm{max}})$ als Funktion der Größe $\bar{u}_{\mathrm{max}}$ an der Stelle B.

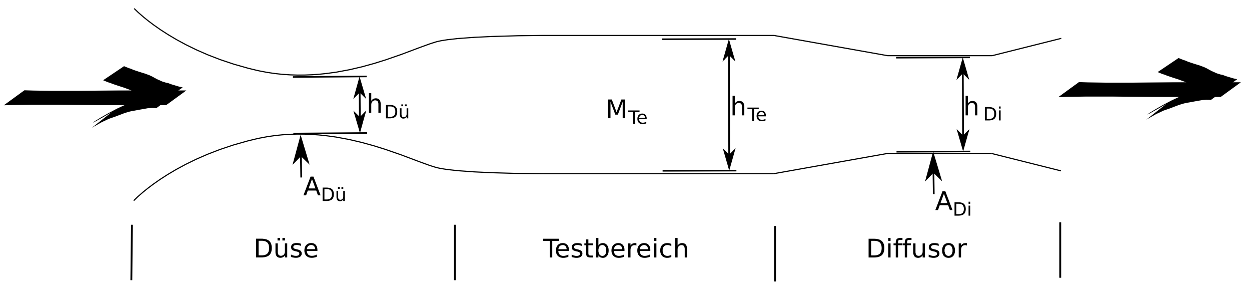
Ein zweites Fass enthält die Flüssigkeit 2 mit den Stoffeigentschaften $\rho_2 = \rho = 1000\ kg/m^3$ und $\mu_2 = 15,0\ mPa \cdot s$.

d) Überprüfen Sie, ob die Strömung an der Stelle B immer noch turbulent ist.

e) Zeichnen Sie sowohl das Blockprofil an der Stelle A als auch die Profile für Flüssigkeit 1 und 2 an der Stelle B in ein gemeinsames u-r-Diagramm ($0 \leq u \leq 2 \cdot u_{\mathrm{m}}$, $0 \leq r \leq +R$).

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\mu_1 = 1,0\ mPa \cdot s$, $\mu_2 = 15,0\ mPa \cdot s$, $R = 50\ mm$, $|\bar{\tau}_{\mathrm{W}}| = 0,17\ Pa$

Aufgabe 5 (16)



Die Abbildung zeigt einen Teil eines Überschallwindkanals, der von links nach rechts mit Luft durchströmt wird. Der gesamte Bereich hat rechteckige Strömungsquerschnitte der Breite b (senkrecht zur Zeichnungsebene). Der Testbereich des Kanals hat die konstante Höhe $h_{\mathrm{Te}} = 2\ m$. Die Durchströmung der Konfiguration sei stationär, eindimensional, adiabat und - abgesehen von Verdichtungsstößen - reversibel (also isentrop). Weiterhin soll Luft als perfektes Gas mit dem Isentropenexponenten κ angesehen werden. Der Windkanal soll für die Machzahl $M_{\mathrm{Te}} = 2,5$ im Testbereich ausgelegt werden.

a) Bestimmen Sie die Höhe $h_{\mathrm{Dü}}$ des engsten Querschnitts der Düse, die benötigt wird, damit sich die Machzahl M_{Te} im Testbereich einstellt.

b) Nehmen Sie an, dass sowohl im engsten Querschnitt der Düse als auch im engsten Querschnitt des Diffusors Schallgeschwindigkeit herrscht, also $A_{\mathrm{Dü}} = A^*_{\mathrm{Dü}}$ und $A_{\mathrm{Di}} = A^*_{\mathrm{Di}}$. Leiten Sie folgendes Verhältnis der engsten Querschnittsfächen zum Ruhedruckverhältnis über die Konfiguration her:

(1) $$\frac{A^*_{\mathrm{Di}}}{A^*_{\mathrm{Dü}}} = \frac{p_{0,\mathrm{Dü}}}{p_{0,\mathrm{Di}}} \quad .$$

Sie können hierfür mit der Massenbilanz $\rho^*_{\mathrm{Dü}} \cdot A^*_{\mathrm{Dü}} \cdot a^*_{\mathrm{Dü}} = \rho^*_{\mathrm{Di}} \cdot A^*_{\mathrm{Di}} \cdot a^*_{\mathrm{Di}}$ zwischen den beiden engsten Querschnitten beginnen.

Damit die Ausbildung einer Überschallströmung im Testbereich überhaupt möglich wird, muss der engste Diffusorquerschnitt A_{Di} groß genug sein, um einen überkritischen Betrieb der Düse zu gewährleisten, selbst wenn sich ein Verdichtungsstoß im Testbereich befinden sollte.

c) Welche Höhe h_{Di} muss der Diffusor im engsten Querschnitt mindestens haben, wenn sich ein senkrechter Verdichtungsstoß im Testbereich (mit M_{Te} direkt vor dem Stoß) befindet und die Strömung im Diffusor noch im Unterschall bleiben soll?

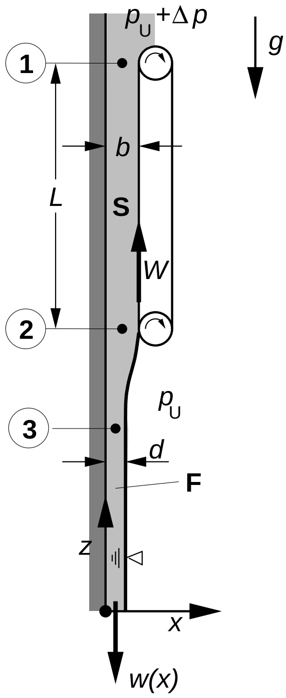
Verwenden Sie zur Lösung die in Gleichung (1) gefundene Beziehung zur Ermittlung der hierzu minimal möglichen Diffusorfläche A^*_{Di}, bei der die Mach-Zahl im engsten Querschnitt des Diffusors gerade $M_{\mathrm{Di}} = 1$ ist.

d) Warum führt der Verdichtungsstoß zu dem berechneten Unterschied zwischen der Düsenhöhe $h_{\mathrm{Dü}}$ aus a) und der minimalen Diffusorhöhe h_{Di} aus c).

Welcher hier vernachlässigte Effekt führt in der Praxis dazu, dass die engste Diffusorhöhe h_{Di} immer (auch wenn kein Verdichtungsstoß vorliegt) größer sein muss, als die engste Düsenhöhe $h_{\mathrm{Dü}}$?

Gegeben: $\kappa = 1,4$, $M_{\mathrm{Te}} = 2,5$, $h_{\mathrm{Te}} = 2\ m$

Aufgabe 6 (20)



Flüssiger Kunststoff der unter dem Druck $p_U + \Delta p$ (Stelle **1**) steht, wird durch einen vertikalen, rechteckigen Spalt **S** der Breite b und der Länge L gepresst (s. Abb.). Dabei ist die linke Wand des Spaltes starr und die rechte Wand wird durch ein Förderband mit der konstanten Geschwindigkeit W nach oben bewegt. Nach Verlassen des Spaltes bei **2** (Druck p_U) fließt der Kunstoff unter dem Einfluss der Erdschwere g mit einer freien Oberfläche an der linken ebenen Wand herab. Nach einer Übergangszone bildet sich ab der Stelle **3** ein Film **F** mit der konstanten Schichtdicke d aus. Auf die freie Oberfläche des flüssigen Kunststoffs soll von der umgebenden Luft mit dem konstanten Druck p_U keine Schubspannung übertragen werden.

Der flüssige Kunststoff kann als inkompressibles Newtonsches Medium der Dichte ρ und konstanter dynamischer Zähigkeit μ betrachtet werden. Die Strömung sei stationär, eben, laminar und sowohl im Spalt als auch im Film ab der Stelle **3** in z-Richtung ausgebildet.

a) Wie lauten die allgemeinen inkompressiblen zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen x-z-Koordinaten für die laminare Strömung eines Newtonschen Mediums.

b) Leiten Sie unter Verwendung des in der Abbildung gegebenen Koordinatensystems aus der Erhaltungsgleichung der Masse und den unter a) hergeleiteten Navier-Stokes-Gleichungen die Differentialgleichungen her, die die Strömung im Spalt und im Film ab der Stelle **3** beschreiben.

Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

c) Skizzieren Sie qualitativ die Geschwindigkeitsverläufe der Strömung im Spalt $w_S(x)$ und im Film $w_F(x)$ ab der Stelle **3**.

d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit gegebener Größen und der noch unbekannten Geschwindigkeit W die Geschwindigkeitsverläufe im Spalt $w_S(x)$ und im Film $w_F(x)$ ab der Stelle **3**.

e) Wie groß muss die Geschwindigkeit W sein, damit sich eine vorgegebene Schichtdicke d des Films **F** einstellt?

Gegeben: ρ, g, μ, L, b, d, Δp

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

28. März 2007

Aufgabe / Punkte

Name: ....

Vorname: ....

Matrikel-Nr.: ....

Fachrichtung: ....

Fachsemester: ....

Note: ....

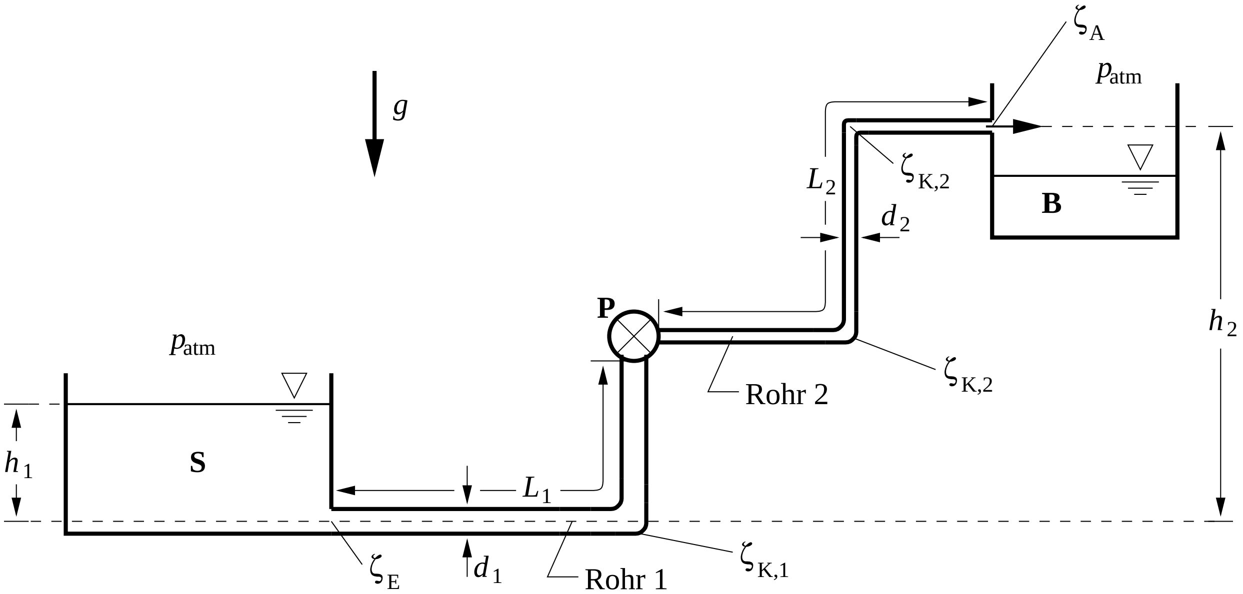
1) ....
2) ....
3) ....
4) ....
5) ....
6) ....

Σ ....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (16)



Wasser (Dichte ρ, kinematische Viscosität ν) wird mittels einer Pumpe **P** (Leistung L) durch eine Rohrsystem mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ aus dem Behälter **S** in den Behälter **B** gepumpt (siehe Abbildung). Die Strömung durch das Rohrsystem ist reibungsbehaftet. Das Rohrsystem besteht aus zwei Rohren mit unterschiedlichen Durchmessern und mehreren Krümmern mit den Verlustbeiwerten $\zeta_{K,1}$ und $\zeta_{K,2}$. Rohr 1 hat den Durchmesser d_1, die Länge L_1 und die Rauigkeit $K_{s,1}$, Rohr 2 hat den Durchmesser d_2, die Länge L_2 und die Rauigkeit $K_{s,2}$. Beim Einströmen in das Rohr 1 und beim Ausströmen aus dem Rohr 2 entstehen zusätzliche Druckverluste mit den Druckverlustbeiwerten ζ_E und ζ_A. Der Behälter **S** ist so groß, das man eine konstante Höhe h_1 des Wasserspiegels voraussetzen kann. Die Verluste in der Pumpe **P** und beim Ein- und Austritt der Strömung in bzw. aus der Pumpe können vernachlässigt werden.

a) Berechnen Sie die Einströmgeschwindigkeit c_E am Eintritt von Rohr1 und die Ausströmgeschwindigkeit c_A am Austritt von Rohr 2.

Unter Berücksichtigung der Pumpe und der Reibungsverluste berechne man in den Aufgabenteilen b) und c) die Druckverluste $\Delta p_{V,\text{ges}}$ und $\Delta p_{V,\text{Rohre}}$. Dabei sind die Verlustbeiwerte der beiden Rohre λ_1 und λ_2 nicht bekannt, so dass man eine andere Möglichkeit zur Berechnung der gesuchten Druckverluste finden muss.

b) Berechnen Sie den gesamten Druckverlust $\Delta p_{V,\text{ges}}$ des Rohrleitungssystems.

c) Berechnen Sie die Summe $\Delta p_{V,\text{Rohre}}$ der Druckverluste in beiden Rohren die nur durch die Reibung in Folge der Länge der Rohre hervorgerufen werden ($\Delta p_{V,\text{Rohre}} = \Delta p_{V,\text{Rohr1}} + \Delta p_{V,\text{Rohr2}}$).

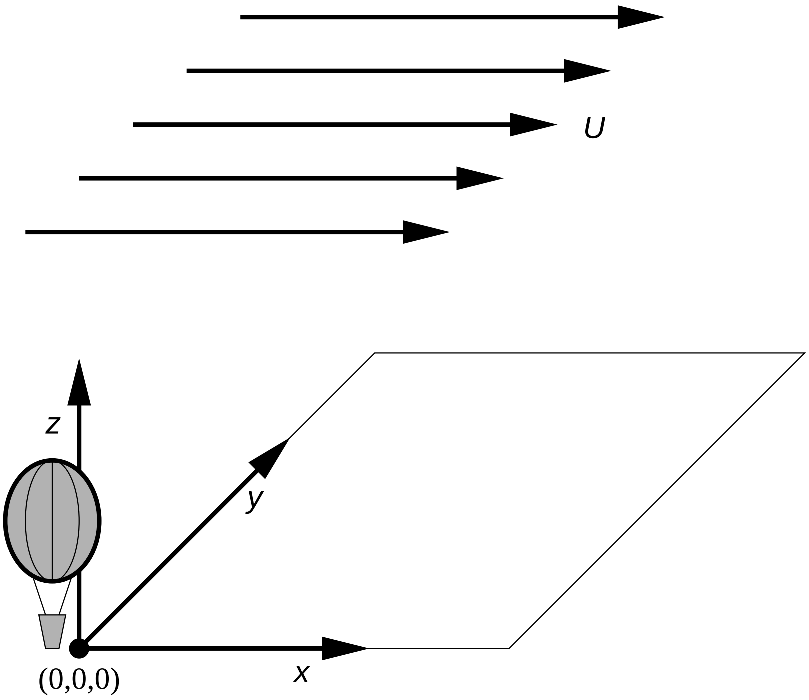
In der letzten Teilaufgabe d) sollen nun die noch unbekannten Verlustbeiwerte der beiden Rohre λ_1 und λ_2 bestimmt werden

d) Berechnen Sie die Dicke Δ der viskosen Unterschicht in beiden Rohren und entscheiden Sie nun ob die Rohre hydraulisch glatt sind oder nicht. Berechnen Sie nun ohne Verwendung eines Nikuradse-Diagramms die beiden Verlustbeiwerte λ_1 und λ_2 der beiden Rohre.

Hinweis: Die Strömung im Behälter **S** kann als reibungsfrei angenommen werden. Die gesamte Strömung kann als eindimensional betrachtet werden.

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1.28 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $g = 10\ m/s^2$, $h_1 = 15\ m$, $h_2 = 60\ m$, $\dot{V} = 0.008\ m^3/s$, $d_1 = 0.16\ m$, $d_2 = 0.08\ m$, $L_1 = 50\ m$, $L_2 = 80\ m$, $\zeta_{K,1} = 0.2$, $\zeta_{K,2} = 0.3$, $\zeta_E = 0.98$, $\zeta_A = 0.98$, $K_{s,1} = 2.67 \cdot 10^{-4}\ m$, $K_{s,2} = 6.67 \cdot 10^{-4}\ m$, $L = 4 \cdot 10^3 W$

Aufgabe 2 (15)



Stellen Sie sich vor, dass sie zum Geburtstag eine Fahrt in einem Heißluftballon geschenkt bekommen. Sie fragen sich, wie man als Ballonfahrer Einfluss auf die Richtung nehmen kann, in die sich ein solcher Ballon bewegt. Nehmen Sie in dieser Aufgabe an, dass sich der Heißluftballon in x- und y-Richtung ohne Schlupf mit der jeweiligen Windströmung mitbewegt. In einem Buch lesen Sie, dass innerhalb der sogenannten planetaren Grenzschicht, die sich vom Boden bis zu einer gewissen Höhe erstreckt, Betrag und Richtung der Windgeschwindigkeit parallel zur x-y-Ebene von der Höhe z über dem Boden (x-y-Ebene) abhängen. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v des Windes in x- bzw. y-Richtung können in dieser Schicht nach den folgenden analytischen Gleichungen bestimmt werden.

$$\begin{aligned} u &= U \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{H}} \cdot \cos(\frac{z}{H})\right) \quad , \\ v &= U \cdot e^{-\frac{z}{H}} \cdot \sin(\frac{z}{H}) \quad . \end{aligned}$$

U ist hierbei der Geschwindigkeitsbetrag des Windes oberhalb der planetaren Grenzschicht, der, wie in der Abbildung dargestellt, nur eine Komponente in x-Richtung besitzt. H ist eine Konstante.

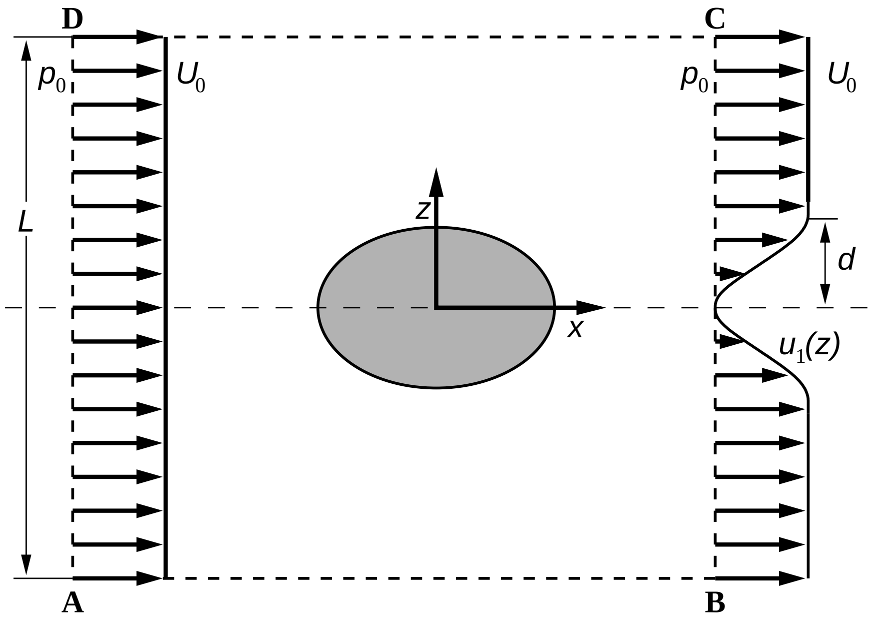
a) Bestimmen Sie die Gleichung der Stromlinien in einer Höhe von $z = 50\ m$ über dem Boden.

b) Um welchen Winkel α weicht die Strömungsrichtung bei $z = 50\ m$ von der Richtung von U ab?

c) Bestimmen Sie die Komponenten $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$ des Bahnkurvenvektors des Ballons im Windfeld, der sich zum Zeitpunkt $t_0 = 0\ s$ am Ort $(x_0, y_0, 0)$ befindet und mit der konstanten Geschwindigkeit W in z-Richtung aufsteigt.

Gegeben: $H = 417\ m$, U, W, x_0, y_0, $z_0 = 0$, $t_0 = 0\ s$

Aufgabe 3 (16)



Der Widerstand eines umströmten Körpers der Tiefe T soll berechnet werden. Hierzu wird das ungestörte Geschwindigkeitsprofil vor und nach dem Körper entlang der Linien $\overline{DA}$ und $\overline{BC}$ gemessen (siehe Abbildung).

Das Anströmprofil ist konstant mit der Geschwindigkeit U_0. Am Auströmrand $\overline{BC}$ ergibt sich ein Profil, das näherungsweise durch folgende Funktion dargestellt wird:

$$u_1(z) = \begin{cases} \frac{U_0}{2} \cdot \left[1 - \cos\left(\pi \cdot \frac{z}{d}\right)\right] & \text{für} \quad 0 \leq |z| \leq d \\ U_0 & \text{für} \quad |z| \geq d \end{cases} \quad .$$

a) Berechnen Sie den Massenstrom, der vom Körper verdrängt wird und jeweils durch die Berandung $\overline{AB}$ bzw. $\overline{CD}$ ausströmt.

b) Berechnen Sie die Widerstandskraft, die von der Strömung auf den Körper übertragen wird.

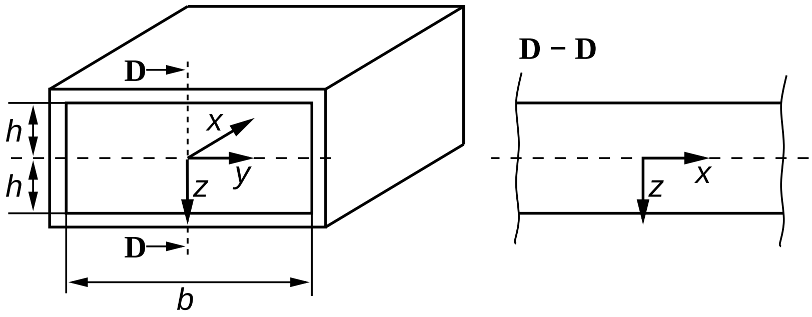
c) Bei der Umströmung des Körpers kommt es zur Ablösung der Strömung. Wie lautet das Ablösekriterium?

d) Sie wollen die Umströmung des Körpers numerisch berechnen. Welche Einstellungen bei den physikalischen Vorgaben müssen Sie vornehmen?

Hinweis: Die Strömung sei zweidimensional in x- und z-Richtung, inkompressibel (Dichte des Fluids ρ) und reibungsbehaftet. Die x-Komponente der Geschwindigkeit an den Berandungen $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ sei U_0. Der Druck an der Berandung $ABCD$ sei p_0.

Gegeben: ρ, U_0, T, d, $u_1(z)$

Aufgabe 4 (15)



Gegeben ist ein mit Wasser (Dichte ρ, kinematische Viskosität ν) durchströmter Kanal mit der Breite b und der Höhe $2 \cdot h$ ($b = 0.015\ m$, $h = 0.00375\ m$) (siehe Abbildung). Die Strömung ist mit $Re_d = 4000$ turbulent, bezüglich des zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofils stationär und in Strömungsrichtung (x-Richtung) ausgebildet. Im Bereich der viskosen Unterschicht steigt das Geschwindigkeitsprofil vom Wert 0 linear auf den Wert $0.5 \cdot U_\infty$ an.

Das Strömungsprofil außerhalb der viskosen Unterschicht lässt sich in einiger Entfernung von den Seitenwänden näherungsweise wie folgt mit dem 1/7-Potenzgesetz beschreiben:

$$\frac{u^*(z)}{u_\tau} = k \cdot \left(\frac{u_\tau \cdot h}{\nu} - \frac{u_\tau \cdot z}{\nu}\right)^{\frac{1}{7}}$$

a) Mit Hilfe des hydraulischen Durchmessers $d = 4 \cdot A/U$ (A ist die durchströmte Fläche, U der durchströmte Umfang) lassen sich Kanäle mit nicht-rundem Querschnitt berechnen. Ermitteln Sie die Dicke der viskosen Unterschicht Δ an der oberen bzw. unteren Wand.

b) Ermitteln Sie die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ und den Reibungswiderstandsbeiwert c_f an der oberen bzw. unteren Wand.

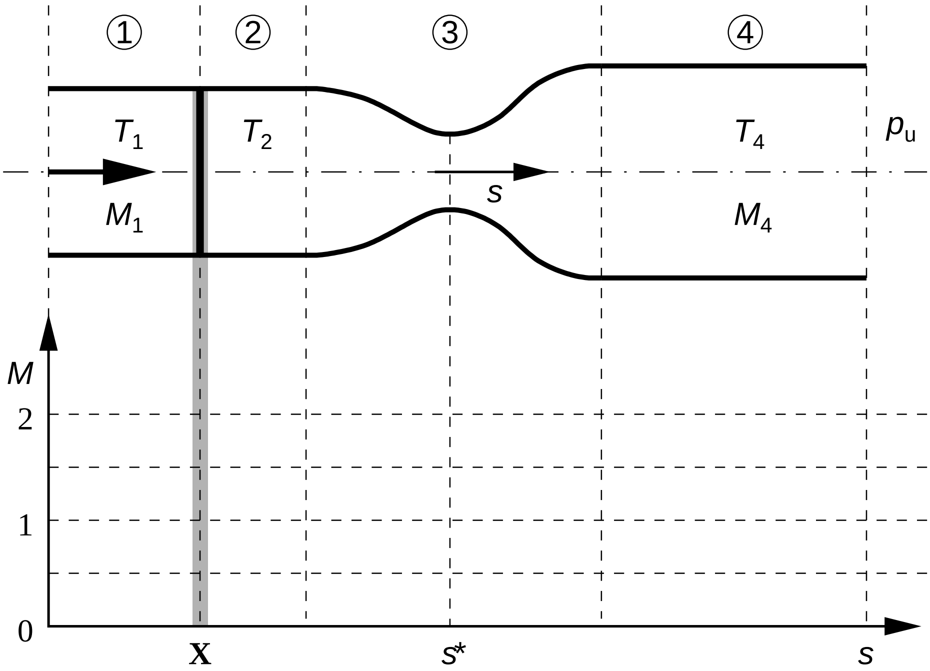
c) Bestimmen sie am Rand der viskosen Unterschicht die Konstante k mit Hilfe der beiden Geschwindigkeitsprofile. Wie groß ist die prozentuale Abweichung der Steigung des 1/7-Potenzgesetzes in diesem Punkt? Wie lässt sich die Abweichung erklären?

Im Folgenden wird in der Kanalmitte (Schnitt **D-D**) eine ebene, ausgebildete Strömung angeommen ($v = 0$).

d) Ermitteln Sie die turbulente Schubspannung $\tau_\mathrm{t}(z)$ im Bereich des Wandturbulenz in Abhängigkeit der Mischungsweglänge $l(z)$. Da sich die Strömung außerhalb der viskosen Unterschicht befindet, kann der reibungsbehaftete Anteil vernachlässigt werden.

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1.01 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $b = 0.015\ m$, $h = 0.00375\ m$, $Re = 4000$, $l(z)$

Aufgabe 5 (18)



Die Abbildung zeigt einen strömungsmechanischen Versuchsaufbau bestehend aus vier Abschnitten. An ein gerades Rohrstück (Abschnitt ① und ②) schließt sich eine ideale Lavaldüse (Abschnitt ③) an, welche wiederum in ein gerades Rohrstück (Abschnitt ④) übergeht. Der Durchmesser der Lavaldüse im engsten Querschnitt ($s = s^*$) beträgt $D^* = 0.15\ m$. Luft strömt von der linken Seite mit der Mach-Zahl M_1 ($1.0 < M_1 < M_4 = 2.0$) in den Versuchaufbau ein, wobei sich beim Übergang von Abschnitt ① nach Abschnitt ② ($s = \mathbf{X}$) der eingezeichnete senkrechte Verdichtungsstoß einstellt. An den angebrachten Messpunkten liegen die Temperaturen $T_1 = 370\ K$, $T_2 = 491\ K$ und $T_4 = 300\ K$ vor. Am Ende des Versuchsaufbaus kann man von einem geraden Freistrahl in die Umgebung mit Umgebungsdruck $p_u = 1.0\ bar$ ausgehen. Die Strömung ist stationär, eindimensional und abgesehen vom eingezeichneten Verdichtungsstoß isentrop. Der Isentropenexponent ist mit $\kappa = 1.4$ und die spezifische Gaskonstante mit $R = 287\ m^2/(s^2 \cdot K)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie die Ruhewerte $T_{0,3}$, $p_{0,3}$ und $\rho_{0,3}$ der Strömung in Abschnitt ③.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der kritischen Werte im engsten Querschnitt den Massenstrom $\dot{m}$ durch die Versuchsanlage.

c) Bestimmen Sie auf explizitem Weg die Mach-Zahlen M_1 und M_2 in den Abschnitten ① und ②.

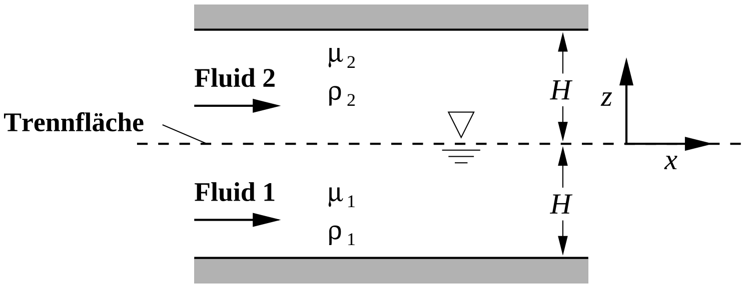
d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit c_2 sowie die Querschnittsfläche A_2 im Abschnitt ②.

e) Bestimmen Sie zunächst die Größen p_2 und ρ_2 in Abschnitt ② nach dem Verdichtungsstoß und hiermit die Größen p_1 und ρ_1 vor dem Verdichtungsstoß in Abschnitt ①.

f) Skizzieren Sie qualitativ die bestimmte Mach-Zahlverteilung des Versuchsaufbaus in das vorgegebene Diagramm.

Gegeben: $D^* = 0.15\ m$, $T_1 = 370\ K$, $T_2 = 491\ K$, $T_4 = 300\ K$, $M_4 = 2.0 > M_1 > 1.0$, $p_u = 1.0\ bar$, $\kappa = 1.4$, $R = 287\ m^2/(s^2 \cdot K)$

Aufgabe 6 (20)



Zwei nicht mischbare, inkompressible Newtonsche Flüssigkeiten fließen unter dem Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ stationär und laminar durch einen ebenen horizontale Spalt. Die Strömung beider Flüssigkeiten ist eben und in x-Richtung ausgebildet. In der unteren Hälfte des Spaltes fließt das Fluid 1 (dynamische Zähigkeit μ_1) in der oberen Hälfte das Fluid 2 (dynamische Zähigkeit μ_2). Die Trennfläche beider Flüssigkeiten ist eben und hat den Abstand H von der oberen und von der unteren Wand. Für die Dichten der Fluide gilt $\rho_1 > \rho_2$ und für die dynamischen Zähigkeiten $\mu_1 > \mu_2$. Der Einfluss der Gravitation kann vernachlässigt werden.

a) Vereinfachen Sie die inkompressible dreidimensionale Kontinuitätsgleichung unter den gegebenen Voraussetzungen für beide Fluide und bestimmen Sie daraus die z-Komponenten der Geschwindigkeiten beider Fluide.

b) Vereinfachen Sie die inkompressiblen dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen unter den gegebenen Voraussetzungen und mit dem Ergebnis von a) und bestimmen Sie die Differentialgleichungen, die die Geschwindigkeitsverteilungen in beiden Fluide beschreiben.

Die in den Aufgabenteilen a) und b) vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

In den folgenden Aufgabenteilen gilt für die dynamischen Zähigkeiten $\mu_1 = 3 \cdot \mu$ und $\mu_2 = \mu$.

c) Berechnen Sie aus den Differentialgleichungen die Geschwindigkeitsverteilungen $u(z)$ der beiden Flüssigkeiten in Abhängigkeit gegebener Größen und des noch unbekannten Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten in beiden Fluiden an der Trennfläche keinen Schlupf aufweisen, d. h. gleich groß sind und Spannungsgleichgewicht herrscht.

d) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilungen $u(z)$ und die Schubspannungsverteilung $\tau(z)$ im gesamten Spalt.

e) In welcher Ebene $z =$ konst. ist die Schubspannung im Spalt gleich Null ($\tau = 0$)?

Gegeben: μ, H

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

Platz-Nr.: ....

15. Oktober 2007

Aufgabe / Punkte

Name: .... 1) ....

Vorname: .... 2) ....

Matrikel-Nr.: .... 3) ....

Fachrichtung: .... 4) ....

Fachsemester: .... 5) ....

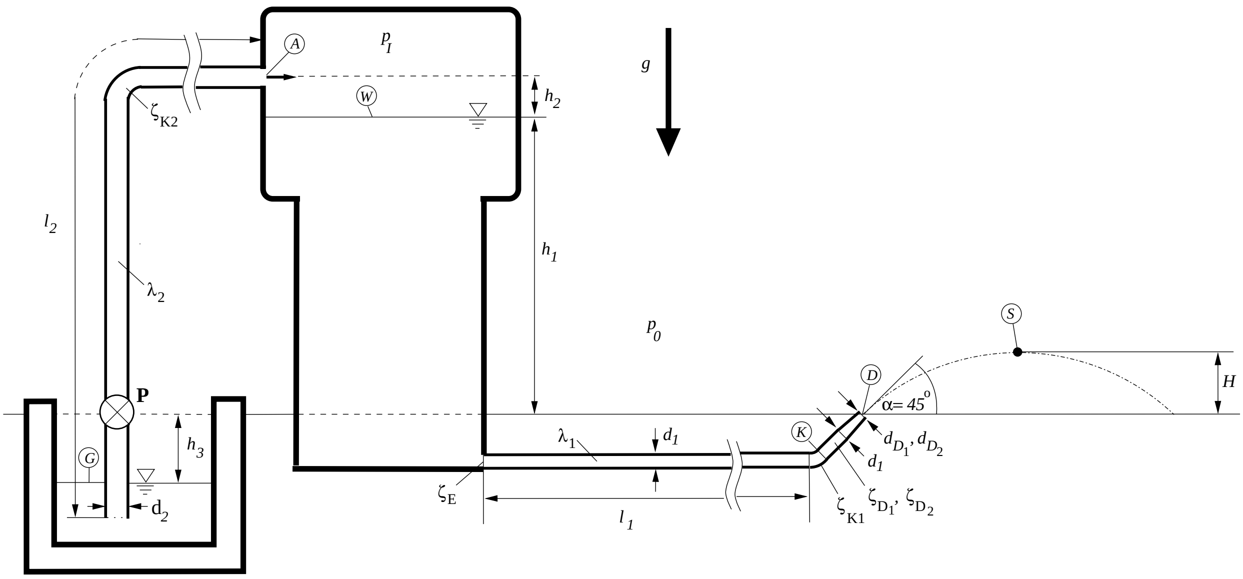
6) ....

Note: .... Σ ....

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (18)



Die Abbildung zeigt schematisch den Zu- und Ablauf eines Wasserspeichers, in welchem **stets** der konstante Druck p_I herrscht; der Umgebungsdruck ist mit $p_0 = 1\ bar$ gegeben.

Das **ausströmende Wasser** verlässt den Speicher über eine unterirdische Rohrleitung der Länge $l_1 = 20\ m$, dem Durchmesser $d_1 = 25\ mm$ und der Sandkornrauhigkeit k_s. Dabei stellen sich Einströmverluste ($\zeta_E = 0,3$) sowie Verluste infolge der Reibung entlang der Rohrinnenwand

($\lambda_1 = 0,05$) ein. Am Ende der Rohrleitung befindet sich ein 45°-Krümmer ($\zeta_{\mathrm{K1}} = 0,15$) gefolgt von einer Düse, die schließlich eine Querschnittsverengung auf $d_{\mathrm{D}_1} = 20\ mm$ verursacht. Die zwischen den Punkten K und D auftretenden Verluste ($\zeta_{\mathrm{D}_1} = 0,4$) wurden mit Hilfe der Geschwindigkeit c_{D_1} am **Ende der Düse** bestimmt. Das hier als Freistrahl unter dem Winkel $\alpha = 45°$ austretende Wasser beschreibt unter Vernachlässigung weiterer Verluste die dargestellte Parabelform.

Der **Zulauf in den Wasserspeicher** ist über ein Schwimmer-Pumpen-System geregelt, das den Speicherwasserspiegel konstant auf $h_1 = 10\ m$ hält. Aus einem Brunnen (Grundwasserspiegel G befindet sich $h_3 = 1\ m$ unter dem Erdboden) fördert hierfür die verlustfrei arbeitende Pumpe P Wasser durch eine $l_2 = 15\ m$ lange Rohrleitung mit dem Durchmesser $d_2 = 50\ mm$ nach oben, so dass es oberhalb des Wasserspiegels W ($h_2 = 0,5\ m$) als Freistrahl in den Speicher einfließt. Hierbei ist mit Verlusten aufgrund der Reibung entlang des Rohres ($\lambda_2 = 0,03$) sowie in Folge eines 90°-Krümmers ($\zeta_{\mathrm{K2}} = 0,3$) zu rechnen.

a) Berechnen Sie den Druck p_{I} unter der Annahme, dass das Wasser die Düse an der Stelle D mit der Geschwindigkeit $c_{\mathrm{D}_1} = 3,42\ m/s$ verlässt.

b) Ist die Strömung innerhalb des unterirdischen Rohres laminar oder turbulent? Kann die Rohrinnenwand als hydraulisch glatt bezeichnet werden?

c) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Stromfadens von D nach S die maximale Parabelhöhe H.

Die Düse stromab des 45°-Krümmers wird nun durch ein gerades **verlustfreies Rohrstück** ($\zeta_{\mathrm{D}_2} = 0$) gleicher Länge und Durchmesser $d_{\mathrm{D}_2} = d_1$ ersetzt.

d) Wie groß ist **nun** die sich einstellende Austrittsgeschwindigkeit c_{D_2} im Punkt D?

e) Wie groß ist **nun** der Betrag L_{p} der Brunnenpumpleistung?

Gegeben: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $\nu = 1,28 \cdot 10^{-6}\ m^2/s$, $g = 10\ m/s^2$, $h_1 = 10\ m$, $h_2 = 0,5\ m$, $h_3 = 1\ m$, $d_1 = 25\ mm$, $d_2 = 50\ mm$, $d_{\mathrm{D}_1} = 20\ mm$, $d_{\mathrm{D}_2} = 25\ mm$, $l_1 = 20\ m$, $l_2 = 15\ m$, $c_{\mathrm{D}_1} = 3,42\ m/s$, $\zeta_{\mathrm{E}} = 0,3$, $\lambda_1 = 0,05$, $\lambda_2 = 0,03$, $\zeta_{\mathrm{K1}} = 0,15$, $\zeta_{\mathrm{K2}} = 0,3$, $\zeta_{\mathrm{D}_1} = 0,4$, $\zeta_{\mathrm{D}_2} = 0$, $p_0 = 1\ bar$, $d_1/k_{\mathrm{s}} = 400$, $\alpha = 45°$

Aufgabe 2 (16)

Gegeben ist die Strömung eines Fluids in der x,y-Ebene mit den Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned} u &= \frac{2 \cdot t - 1}{x} \quad , \\ v &= 4 \cdot y \quad . \end{aligned}$$

für $t > 0$.

a) Bestimmen Sie die Drehung des Strömungsfeldes. Ist die Strömung rotationsfrei?

b) Ist die Strömung stationär oder instationär?

c) Man bestimme die Gleichung der Stromlinien $y = \mathrm{f}(x, t)$ die zu einem beliebigen Zeitpunkt $t_0 > 0$ durch den Punkt $\mathrm{P} = (x_0, y_0)$ gehen.

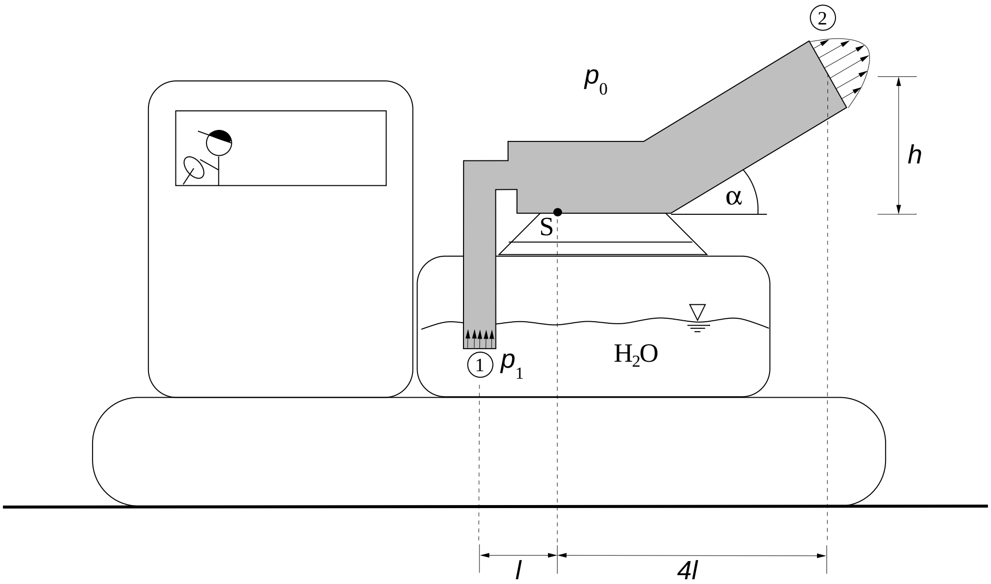
d) Bestimmen Sie die Komponenten $x(t)$ und $y(t)$ des Bahnkurvenvektors für das Teilchen, das sich zum Zeitpunkt $t_0 > 0$ am Punkt $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ befindet.

e) Bestimmen Sie die Gleichung der Streichlinie $x = \mathrm{f}(y, t)$ durch den Punkt $\mathrm{P}(x_0 = 1, y_0 = 1)$ zum Zeitpunkt $t > 0$. Wie lautet die Gleichung für $t = 1/2$?

f) Berechnen Sie die x- und y-Komponente der substantiellen Beschleunigung eines Partikels im Punkt $\mathrm{Q}(x_\mathrm{Q} = 2, y_\mathrm{Q} = 1)$ zum Zeitpunkt $t = 5$, das sich schlupffrei mit der Strömung mitbewegt.

Gegeben: x_0, y_0, x_Q, y_Q, t_0, P, Q

Aufgabe 3 (15)



In den unteren Bereichen der Skigebiete ist man in den letzten Jahren immer mehr auf künstlichen Schnee angewiesen, um ein Skifahren zu ermöglichen. Dabei kommen so genannte portable Schneekanonen (siehe Abbildung) zum Einsatz. Über einen Propeller, dessen Einfluss auf das System vernachlässigt werden kann, wird Wasser ($\rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$) zu Schnee ($\rho_{Schnee} = 400\ kg/m^3$) gewandelt, welcher die Kanone an der Stelle 2 in der Höhe $h = 0,6\ m$ mit einem Volumenstrom von $\dot{V}_2 = 63\ m^3/h$ verlässt. Aufgrund von Reibungseinflüssen bildet sich am Kanonenausgang ein parabolisches Profil aus. Die runden Ein- und Auslassöffnungen haben einen Durchmesser von $D_1 = 0,2\ m$ und $D_2 = 0,4\ m$. Der Schwerpunkt des Systems liegt bei $l = 0,5\ m$. Das Gewicht des Wasser- Schneegemisches in der Kanone kann mit 10 kg angenommen werden. An der Stelle 1 herrscht ein Druck von $p_1 = 4\ bar$ in der Umgebung ein Druck von $p_0 = 1\ bar$.

Hinweis: Das Gewicht der Kanone kann vernachlässigt werden.

a) Wieviel Volumenstrom an Wasser wird benötigt, um Schnee mit $\dot{V}_2$ auswerfen zu können. Welche mittleren Geschwindigkeiten stellen sich an den Stellen 1 und 2 ein? Ermitteln Sie die maximale Geschwindigkeit an der Stelle 2.

b) Bestimmen Sie die an der grau hinterlegten Schneekanone (siehe Abbildung) angreifenden Haltekräfte $\vec{F}(F_x, F_y)$. Skizzieren Sie hierfür zuerst den Kontrollraum und bringen Sie die angreifenden Käfte an.

c) Wie groß ist das im Schwerpunkt S angreifende Moment?

Gegeben: $\rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$, $\rho_{Schnee} = 400\ kg/m^3$, $p_0 = 1\ bar$, $p_1 = 4\ bar$, $\dot{V}_2 = 63\ m^3/s$, $D_1 = 0,2\ m$, $R_2 = 0,4\ m$, $G = 10\ kg$, $g = 9,8\ m/s^2$, $h = 0,6\ m$, $l = 0,5\ m$, $\alpha = 30°$

Aufgabe 4 (15)

Die Reynolds gemittelte Form der Grenzschichtgleichungen für eine inkompressible, parallele, ebene, stationäre und in x-Richtung bezüglich der gemittelten Größen ausgebildete Strömung lauten

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0 \quad , \tag{1}$$

$$\bar{u} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u' \cdot v'}\right) \quad , \tag{2}$$

wobei ρ die (konstante) Dichte, $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die zeitlich gemittelten x- und y-Komponenten der Geschwindigkeit, u' und v' die fluktuierenden Komponenten der Geschwindigkeit, x die hauptströmungsparallele, y die hauptsrömungsnormale Koordinatenrichtung und $\bar{p}$ den Reynolds gemittelten Druck darstellen. ν ist die (konstante) kinematische Viskosität und $\tau_{xy} = -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'}$ ist die Reynoldsche scheinbare Schubspannung.

In dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass die Impulsgleichung in x-Richtung (2) vereinfacht ausgedrückt werden kann durch

$$\left(1 + \mu_{\mathrm{t}}^{+}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{u}^{+}}{\mathrm{d}y^{+}} = 1 \quad , \tag{3}$$

wobei die dimensionslosen $^{+}$Größen wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} \bar{u}^{+} &= \bar{u}/u_{\tau} \quad , \\ y^{+} &= u_{\tau} \cdot y/\nu \quad , \\ \mu_{\mathrm{t}}^{+} &= \mu_{\mathrm{t}}/\mu \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist μ die molekulare dynamische Viskosität und μ_{t} die turbulente Viskosität (oder auch Wirbelviskosität). u_{τ} ist die so genannte Wandschubspannungsgeschwindgkeit.

Gehen Sie hierzu wie folgt vor und begründen Sie alle Annahmen und Vereinfachungen, die Sie treffen:

a) Nehmen Sie eine Grenzschichtströmung über eine parallele horizontale ebene Platte in x-Richtung an, bei der der Druckgradient in x-Richtung vernachlässigt werden kann.

   Vereinfachen Sie Gleichung (2) unter Mitverwendung der Boussinesq-Annahme für die Reynoldsche scheinbare Schubspannung und unter Beachtung von Gleichung (1), sodass Sie eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\bar{u}$ in Abhängigkeit von y erhalten.

b) Reduzieren sie die Ordnung der aus a) erhaltenen Differentialgleichung durch einmaliges Integrieren und lösen Sie das entstehende Randwertproblem, indem Sie die Definition der Wandschubspannung τ_{w} benutzen.

c) Leiten Sie aus dem Ergebnis von b) nun Gleichung (3) mit den dimensionslosen Größen her.

d) 1. Erklären sie kurz, wozu der Prandtlsche Mischungswegansatz dient.

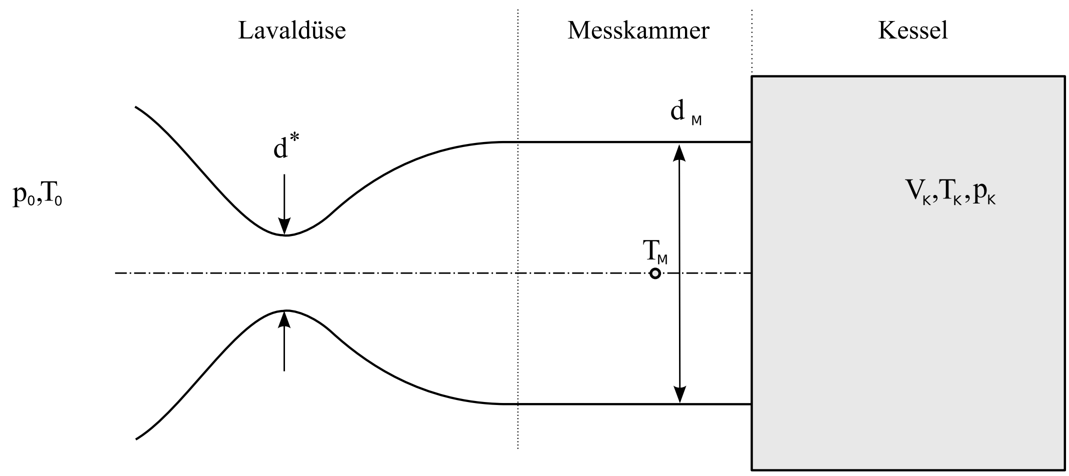
   2. Wie kann mit seiner Hilfe die turbulente Viskosität μ_{t} ausgedrückt werden?

   3. Erläutern Sie (in Worten), wie die Prandtlsche Mischungsweglänge l definiert ist.

e) Wie vereinfacht sich Gleichung (3) weiter für den Bereich nahe an der Wand, wenn man annimmt, dass dort die Prandtlsche Mischungsweglänge Null wird ($l \to 0$)?

Hinweis: Die Aufgabeteile d) und e) lassen sich auch ohne die Aufgabenteile a) - c) lösen.

Aufgabe 5 (18)



Ein Überschallwindkanal besteht aus einer Laval-Düse, einer Messkammer (Durchmesser $d_M = 0,58\ m$) und einem großen Kessel (siehe Abbildung). Mit Beginn der Messung zum Zeitpunkt $t = 0$ strömt Luft aus der Umgebung ($p_0 = 1\ bar$, $T_0 = 293\ K$) durch die Laval-Düse und die Messkammer in den Kessel.

Das Volumen des Kessels V_K beträgt 400 m^3. Die Temperatur T_K im Kessel wird konstant auf 293 K gehalten. Der Druck p_K im Kessel beträgt zu Beginn der Messung $0,05\ bar$.

Die Strömung ist stationär, eindimensional und abgesehen von auftretenden Verdichtungsstößen isentrop. Die Luft kann als ideales Gas betrachtet werden.

Während der Messung ist die Laval-Düse und die Messkammer stoßfrei. In der Messkammer wird eine Temperatur T_{M1} von 130 K abgelesen.

a) Bestimmen Sie die Machzahl M_M und die Strömungsgeschwindigkeit c_M in der Messkammer.

b) Wie groß ist der Durchmesser d^* im engsten Querschnitt der Laval-Düse?

c) Bestimmen Sie den Massenstrom durch den Überschallwindkanal.

Im Verlauf der Messung steigt der Druck im Kessel, bis am Ende der Messkammer ein senkrechter Verdichtungsstoß auftritt.

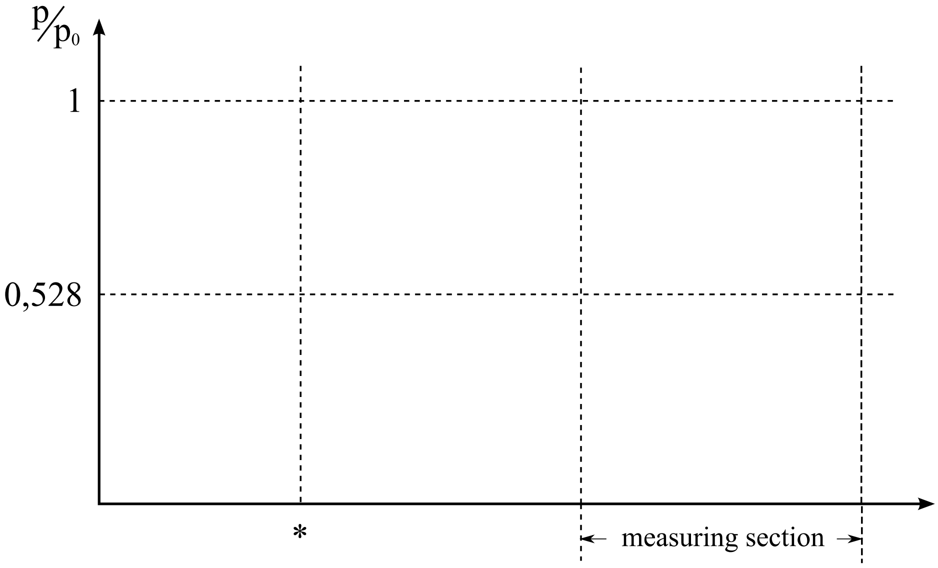
d) Wie groß ist bei Auftreten des Verdichtungsstoßes der Druck p_K im Kessel? Bestimmen Sie die Masse der Luft m_K, die sich zu diesem Zeitpunkt im Kessel befindet.

e) Wie lange kann im Windkanal gemessen werden, bis der Verdichtungsstoß auftritt?

Hinweis: Die folgenden Aufgabenteile können unabhängig von Aufgabenteil d) und e) bearbeitet werden.

f) Ab welchem Kesseldruck ist der gesamte Windkanal erstmals wieder vollkommen stoßfrei? Die gemessene Temperatur T_{M2} beträgt zu diesem Zeitpunkt 290 K. Wie hoch ist dann der Massenstrom?

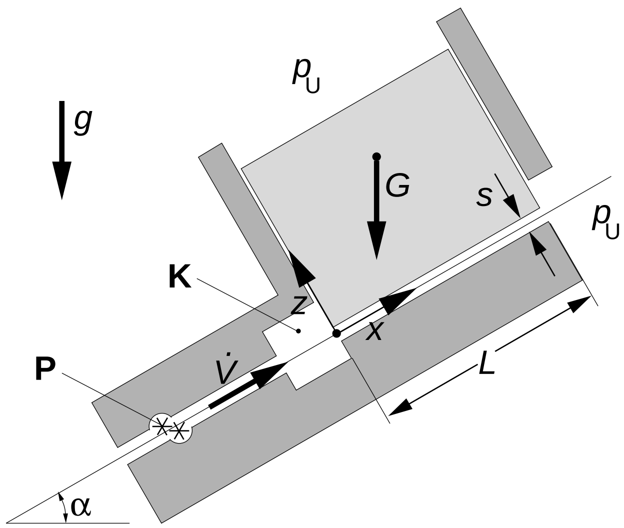
g) Sie wollen diese Strömungen mit einem numerischen Verfahren berechnen. Welche Einstellungen bei den physikalischen Vorgaben müssen Sie vornehmen?



h) Zeichnen Sie die Druckverläufe aus Aufgabenteil a), d) und f) entlang der Laval-Düse und der Messkammer in obenstehendes Diagramm.

Gegeben: $T_0 = 293\ K$, $p_0 = 1\ bar$, $T_{\mathrm{M1}} = 130\ K$, $T_{\mathrm{M2}} = 290\ K$, $d_{\mathrm{M}} = 0,58\ m$, $V_{\mathrm{K}} = 400\ m^3$, $T_{\mathrm{K}} = 293\ K$, $p_{\mathrm{K}}(t=0) = 0,05\ bar$, $\kappa = 1,4$, $R = 287\ m^2/(s^2 \cdot K)$

Aufgabe 6 (18)



Eine Zahnradpumpe **P** fördert Öl mit einem konstanten Volumenstrom $\dot{V}$ in eine Vorkammer **K**. Von dort strömt das Öl durch eine schmalen Spalt der Länge L in die Umgebung mit dem Druck p_U aus. Die obere Wand des Spaltes wird durch die Unterseite (Tiefe T senkrecht zur Zeichenebene, Länge L) eines Quarders mit dem Gewicht G gebildet. Dieser wird normal zum Spalt reibungsfrei geführt. Auf seine Oberseite wirkt der konstante Umgebungsdruck p_U (siehe Abbildung). Der Spalt hat die Spalthöhe s, die Tiefe T (senkrecht zur Zeichenebene) und ist um den Winkel α gegen die horizontale geneigt.

Das Öl kann als inkompressibles Newtonsches Medium der Dichte ρ und konstanter dynamischer Zähigkeit μ betrachtet werden. Die Strömung sei stationär, eben, laminar und im gesamten Spalt, d. h. über die Länge L in x-Richtung ausgebildet. Wegen der geringen Spalthöhe s kann der Einfluss der Schwerkraft auf das Öl **normal zur Strömungsrichtung** im Spalt vernachlässigt werden.

a) Wie lauten die allgemeinen inkompressiblen zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen in kartesischen x-z-Koordinaten für die laminare Strömung eines Newtonschen Mediums.

b) Leiten Sie unter Verwendung des in der Abbildung gegebenen Koordinatensystems aus der Erhaltungsgleichung der Masse und den unter a) hergeleiteten Navier-Stokes-Gleichungen die Differentialgleichung her, die die Strömung im Spalt beschreibt.

Die vorgenommenen Vereinfachungen sind zu begründen.

c) Berechnen Sie die Druckdifferenz $\Delta p = p_\mathrm{K} - p_\mathrm{U}$ zwischen dem Druck p_K in der Vorkammer **K** und dem Umgebungsdruck p_U in Abhängigkeit gegebener Größen über eine Kräftebilanz am Quarder.

d) Bestimmen Sie in Abhängigkeit gegebener Größen den Geschwindigkeitsverlauf im Spalt $u_\mathrm{S}(z)$.

e) Wie groß muss der Volumenstrom $\dot{V}$ sein, damit sich eine vorgegebene Spalthöhe s einstellt? Geben sie das Ergebnis in Abhängigkeit gegebener Größen an.

Gegeben: ρ, g, μ, L, s, α, T, G