Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

02. April 2004

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a) 1 Staupunkt bei $x = 0$, $y = 0$. (Bedingung $\vec{v} = 0$.)

b) Die dreidimensionale Energiegleichung lautet:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{u}$$

Integration

$$y = \frac{C}{x}$$

Mit R.B. $y(x_P) = y_p$

$$y = \frac{x_P \cdot y_P}{x}$$

Die Kurven sind Hyperbeln. Gleichung der Stromlinie durch P(-2|2):

$$y = -\frac{4}{x}$$

c) Für $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u = -k \cdot x \cdot t$$

Integration

$$x(t) = C_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

Mit R.B. $x(t = 0) = x_P$ folgt $C_1 = x_P$. Ergebnis:

$$x(t) = x_P \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

Für $y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v = k \cdot y \cdot t$$

Integration

$$y(t) = C_2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

Mit R.B. $y(t = 0) = y_P$ folgt $C_2 = y_P$. Ergebnis:

$$y(t) = y_P \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

d) Aus

$$x(t) = x_P \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

folgt

$$\ln \frac{x}{x_P} = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2$$

und aus

$$y(t) = y_P \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2}$$

folgt

$$\ln \frac{y}{y_P} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot t^2$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$\ln \frac{y}{y_P} + \ln \frac{x}{x_P} = 0$$

oder

$$\frac{y}{y_P} = -\frac{x}{x_P}$$

Damit lautet die Gleichung

$$y = \frac{x_P \cdot y_P}{x}$$

Die Teilchenbahnen sind Hyperbeln, die nicht von der Zeit abhängen, d. h. sie sind richtungsstationär.

e) Es gilt $x(t = 0) = x_1$ und $x(t = \Delta t) = x_2$

$$x_1 = x_P$$

$$x_2 = x_P \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta t)^2}$$

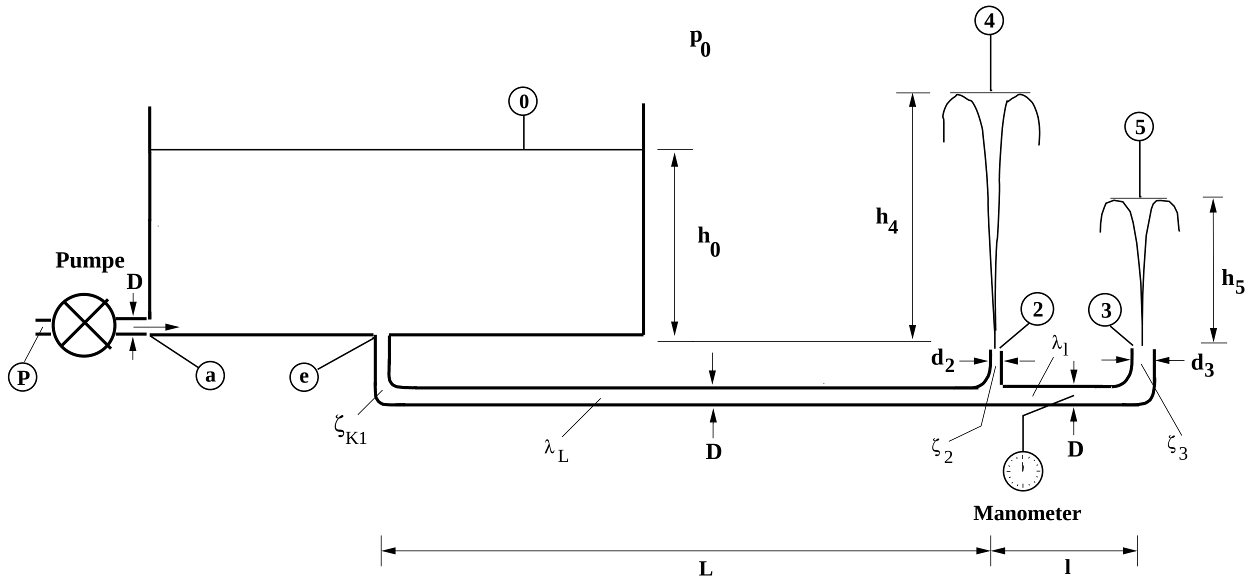
Daraus folgt:

$$x_2 = x_1 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta t)^2}$$

Nach Δt aufgelöst:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{K} \cdot \ln \frac{x_1}{x_2}}$$

Lösung Aufgabe 2:



a) Zur Lösung können zuerst die Geschwindigkeiten an den Stelle 2 und 3 berechnet werden. Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle 2 und 4 (s. Abb.) angewendet ergeben sich:

$$p_2 + \rho \frac{c_2^2}{2} = p_4 + \rho \frac{c_4^2}{2} + \rho g h_4 \tag{1}$$

Die Bernoulli-Gleichung ist hier verlustlos geschrieben worden. Da die Strömung verlustfrei ausströmt. Für dei Drücke p_2 und p_3 gilt: $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_0$, wobei p_0 der Drück der Atmosphäre ist. Die Geschwindigkeit c_4 am Ende der Fontäne ist ungefähr Null. Die Geschwindigkeit c_2 gilt dann:

$$c_2 = \sqrt{2gh_4} = 12.522 m/s \tag{2}$$

Mit einem Stromfaden vom Punkt 3 bis Punkt 5 und die selbe Betrachtungen vorher gemacht erhalt man für die Geschwindigkeit c_3:

$$c_3 = \sqrt{2gh_5} = 11.71324 m/s \tag{3}$$

Um die Verluste entlang des Rohrs zu betrachten, muss man die Innengeschwindigkeit kennen. Unmittelbar vor der Verzweigung des Rohrs (Stelle 1 in Abb.) kann man diese Geschwindikeit berechnen, mit einem Volumenstrom Bilanz. Mit der Konti-Gleichung erhalt man:

$$\frac{\pi D^2 c_1}{4} = \frac{\pi d_2^2 c_2}{4} + \frac{\pi d_3^2 c_3}{4} \tag{4}$$

Wo c_1 ist die gesuchte Geschwindigkeit. Damit gilt es:

$$c_1 = \frac{d_2^2 c_2 + d_3^2 c_3}{D^2} = 6.2202864 m/s \tag{5}$$

Um die Höhe h_0 zu bestimmen, kann man jetzt die Bernoulli-Gleichung mit Verlustglied entlang eines Stromfadens von der Stelle 0 bis einer beliebigen Stelle 2 oder 3:

$$p_0 + \rho\frac{c_0^2}{2} + \rho g h_0 = p_2 + \rho\frac{c_2^2}{2} + \Delta p_{v_{1-2}} \tag{6}$$

Die Verluste sind in Reibungsverluste und Krümmerverluste unterteilt. Die Rohrreibungsverluste gelten $\Delta p_{v,R}$ betragen $\Delta p_{v,R} = \lambda_L(L/D)\cdot(\rho/2\cdot c_1^2) + (\rho/2\cdot c_2^2)\cdot\zeta_2$ und die Verluste in dem Krümmer gilt $\rho/2\cdot c_1^2)\cdot\zeta_{K1}$. Die enzige unbekannte in der Gleichung (6) ist h_0. Die Gescwindigkeit c_0 ist Null. Da der Wasserspiegel konstant bleibt. Für die statischen Drücke gilt $p_0 = p_2$. Man erhalt dann:

$$h_0 = \frac{\frac{\rho}{2}\cdot c_2^2 + \lambda_L(\frac{L}{D})\cdot\frac{\rho}{2}\cdot c_1^2 + (\frac{\rho}{2}\cdot c_2^2)\cdot\zeta_2 + (\frac{\rho}{2}\cdot c_1^2)\cdot\zeta_{K1}}{\rho g} = 59.97m \tag{7}$$

b) Um der statischen Druck zu berechnen muss man zuerst die Geschwindigkeit in den Rohr der Länge l berechnen. Mit der Hilfe der Konti-Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\pi D^2}{4}c_M = \frac{\pi d_3^2}{4}c_3 \tag{8}$$

wo c_M ist die gesuchte Geschwindigkeit. Man erhalt:

$$c_M = \frac{d_3^2}{D^2}c_3 = 4.2167664m/s \tag{9}$$

Mit der Anwendung der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle M zur Stelle 3 hat man:

$$p_M + \frac{\rho c_M^2}{2} = p_3 + \frac{\rho c_3^2}{2} + \Delta p_{M-3} \tag{10}$$

wo die Verluste gelten:

$$\Delta p_{M-3} = (\frac{\rho c_M^2}{2})(\frac{\lambda_l\cdot l}{D}) + \frac{\rho c_3^2}{2}\cdot\zeta_3 \tag{11}$$

So erhalt man für den gesuchten Druck:

$$p_M = 210013.1571Pa \tag{12}$$

c) Die Leistung der Pumpe L_P berechnet sich aus:

$$L_P = \dot{V}\Delta l_P \tag{13}$$

Die Pumpe ist Verlustfrei und die Eintrittsgeschwindikeit an der Stelle a ist gleich die Austrittsgechwindigkeit c_1. Mit der Anwendung der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfaden von Stelle P zur Stelle a erhalt man:

$$p_P + \rho\frac{c_1^2}{2} = p_a + \rho\frac{c_1^2}{2} + \rho g h_0 - \Delta l_P \tag{14}$$

Da gilt es für den Druck pa: $p_a = p0 + \rho g h_0$. Die Energiezufuhr gilt dann:

$$\Delta l_P = p_0 - p_P + \rho g h_0 = 574006 Pa \tag{15}$$

Die Volumenstrom $\dot{V}$ berechnet sich aus:

$$\dot{V} = \frac{\pi D^2}{4} c_1 = 0.012207312 m^3/s \tag{16}$$

Die Leistung der Pumpe gilt denn:

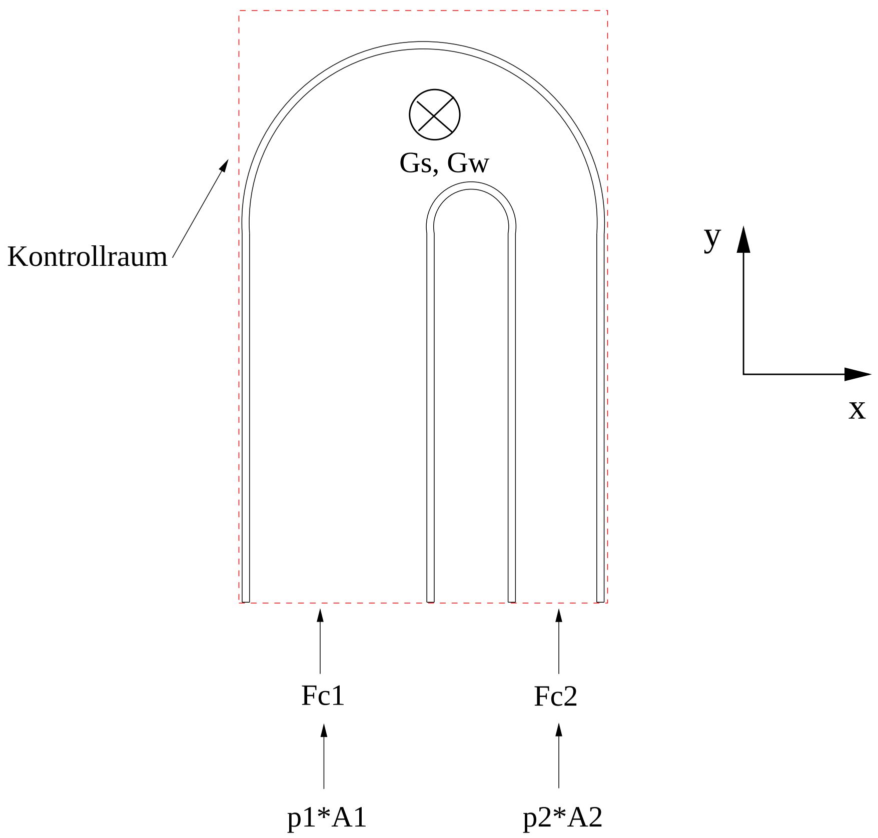
$$L_P = \dot{V} \Delta l_P = 7007.07 W \tag{17}$$

d) Um zu bestimmen ob die Strömung in dem Rohr der Länge L laminar oder turbulent ist, muss man die Reynoldszahl bezüglich die Geschwindigkeit c_1 berehnen. Nach die Definition hat man:

$$Re = \frac{c_1 D}{\nu} = \frac{\mu c_1 D}{\rho} = 311014.32 > 2300 \tag{18}$$

wo $\nu = \rho/\mu$. Die Strömung ist dann turbulent.

Lösung Aufgabe 3:



a) $c_2(s) = \frac{\frac{1}{2}\cdot c_{2max}}{b_3} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot c_{2max}$

b) $\dot{V} = A \cdot c = konstant! = A_1 \cdot c_1 = \int\limits_A c_2(s)\,\mathrm{d}A$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{\dot{V}}{h \cdot l_1}$$

$$\dot{V} = h \cdot \int\limits_0^{b_3} \left(\frac{c_{2max}}{2 \cdot b_3} \cdot s + \frac{1}{2} \cdot c_{2max}\right) \mathrm{d}s$$

$$= h \cdot \left[\frac{c_{2max}}{4 \cdot b_3} \cdot s^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \cdot x\right]_0^{b_3}$$

$$= h \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot c_{2max} \cdot b_3 + \frac{1}{2} \cdot c_{2max} \cdot b_3\right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot h \cdot c_{2max} \cdot b_3$$

$$\Rightarrow c_{2max} = \frac{4 \cdot \dot{V}}{3 \cdot b_3 \cdot h}$$

c) Impulssatz allgemein: $F_c = -\int\limits_A \rho \cdot \vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}A \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$F_{c1} = \int_x \rho \cdot \vec{c_1}^2 \cdot h \cdot \mathrm{d}x \qquad c_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{c1} = \rho \cdot h \cdot b_1 \cdot {c_1}^2$$

$$F_{c2} = \int_x \rho \cdot c_2\vec{(x)}^2 \cdot h \cdot \mathrm{d}x \qquad c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_{c2} = \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} (\tfrac{c_{2max}}{2 \cdot b_3} \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot c_{2max})^2 \,\mathrm{d}x$$

$$= \rho \cdot h \cdot \int_0^{b_3} (\tfrac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot x^2 + \tfrac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot x + \tfrac{1}{4} \cdot c_{2max}^2) \,\mathrm{d}x$$

$$= \rho \cdot h \cdot \left[(\tfrac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot x^3 + \tfrac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3} \cdot x^2 + \tfrac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot x \right]_0^{b_3}$$

$$= \rho \cdot h \cdot \left(\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 + \tfrac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 + \tfrac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 \tfrac{c_{2max}^2}{b_3} \right)$$

$$\Rightarrow F_{c2} = \tfrac{7}{12} \cdot \rho \cdot h \cdot b_3 \cdot c_{2max}^2 = \tfrac{28}{27} \cdot \rho \cdot \tfrac{\dot{V}^2}{h \cdot b_3}$$

Kräftebilanz in y-Richtung:

$$\sum F_x = 0 = F_x$$

$$\sum F_y = 0 = (p_1 - p_0) \cdot A_1 + F_{c1} + F_{c2} + F_y$$

$$A_1 = b_1 \cdot h$$

$$\Rightarrow F_y = -(p_1 - p_0) \cdot b_1 \cdot h - F_{c1} - F_{c2}$$

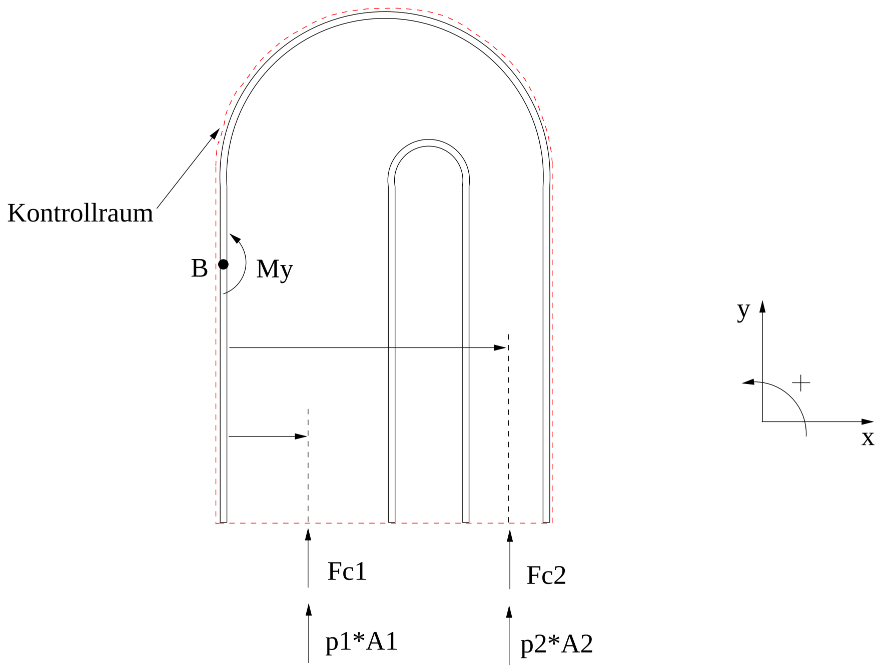
$$\Rightarrow F_y = -(p_1 - p_0) \cdot b_1 \cdot h - \rho \cdot h \cdot b_1 \cdot {c_1}^2 - \tfrac{28}{27} \cdot \rho \cdot \tfrac{\dot{V}^2}{h \cdot b_3}$$

Kräftebilanz in z-Richtung:

$$\sum F_z = 0 = F_z - G - G_W$$

$$\Rightarrow F_z = -G - V \cdot \rho \cdot g$$

d) Berechnung des Moments M_a



Momentenbilanz um Punkt A:

Impulssatz allgemein: $M = -\int\limits_A \rho \cdot (\vec{r} \times \vec{c}) \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}A \qquad n = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\sum M = 0 = M_z + M_{p1} + M_{c1} + M_{c2}$$

$$M_{p1} = (p_1 - p_0) \cdot A_1 \cdot r_1 = (p_1 - p_0) \cdot h \cdot l_1 \cdot r_1 = \tfrac{1}{2} \cdot (p_1 - p_0) \cdot h \cdot l_1^2$$

$$M_{c1} = -\int\limits_A \rho \cdot (\vec{r} \times \vec{c_1}) \cdot (\vec{v_1} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}A \qquad r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{c1} = \int\limits_0^{l_1} \rho \cdot r \cdot {c_1}^2 \cdot h \,\mathrm{d}r$$

$$M_{c1} = \tfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot {c_1}^2 \cdot h \cdot {l_1}^2$$

$$M_{c2} = -\int\limits_A \rho \cdot (\vec{r} \times \vec{c_1}) \cdot (\vec{v_1} \cdot \vec{n}) \,\mathrm{d}A \qquad r = \begin{pmatrix} r+a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zur Vereinfachung: $a = l_1 + l_3$

$$M_{c2} = \rho \cdot h \cdot \int\limits_0^{b_3} (\tfrac{c_{2max}}{2 \cdot b_3} \cdot x + \tfrac{1}{2} \cdot c_{2max})^2 \cdot (a + r) \,\mathrm{d}r$$

$$= \rho \cdot h \cdot \int\limits_0^{b_3} (\tfrac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot r^2 + \tfrac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot r + \tfrac{1}{4} \cdot c_{2max}^2) \cdot (a + r) \, \mathrm{d}r$$

$$= \rho \cdot h \cdot \int\limits_0^{b_3} (\frac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot r^2 \cdot a + \frac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot r \cdot a + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot a) \, \mathrm{d}r$$
$$+ \rho \cdot h \cdot \int\limits_0^{b_3} (\frac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot r^3 + \frac{c_{2max}^2}{2 \cdot b_3} \cdot r^2 + \frac{1}{4} \cdot {c_{2max}}^2 \cdot r) \, \mathrm{d}r$$

$$= \rho \cdot h \cdot \left[\frac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot a + \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3} \cdot r^2 \cdot a + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot r \cdot a \right]_0^{b_3}$$
$$+ \rho \cdot h \cdot \left[\frac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot r^4 + \frac{c_{2max}^2}{6 \cdot b_3} \cdot r^3 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot r^2 \right]_0^{b_3}$$

$$= \rho \cdot h \cdot \left(\frac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot {b_3}^3 \cdot a + \frac{c_{2max}^2}{4 \cdot b_3} \cdot {b_3}^2 \cdot a + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 \cdot a \right)$$
$$+ \rho \cdot h \cdot \left(\frac{c_{2max}^2}{4 \cdot {b_3}^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot {b_3}^4 + \frac{c_{2max}^2}{6 \cdot b_3} \cdot {b_3}^3 + \frac{1}{4} \cdot c_{2max}^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot {b_3}^2 \right)$$

$$\Rightarrow M_{c2} = \rho \cdot h \cdot c_{2max}^2 \cdot \big(a \cdot b_3 \cdot (\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}) + {b_3}^2 \cdot (\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{8}) \big)$$

$$\Rightarrow M_{c2} = \rho \cdot h \cdot c_{2max}^2 \cdot b_3 \cdot \big(\tfrac{7}{12} \cdot a + \tfrac{17}{48} \cdot b_3 \big)$$

$$\Rightarrow M_y = M_{c1} + M_{c2} + M_{p1} + M_{p2}$$

Lösung Aufgabe 4:

a) Ausgehen von quasi-stationärer turbulenter Strömung und Reynoldsansatz

T muß so gewählt werden, dass die Schwankungsgrößen herausgemittelt werden. Scheinbare Normal- und Schubspannungen: Zusätzlicher Term durch Quer- und Längsimpulsaustausch und nicht durch molekulare Viskosität.

b)

$$\begin{pmatrix} -\overline{\rho u'^2} & -\overline{\rho v'u'} & -\overline{\rho w'u'} \\ -\overline{\rho u'v'} & -\overline{\rho v'^2} & -\overline{\rho w'v'} \\ -\overline{\rho u'w'} & -\overline{\rho v'w'} & -\overline{\rho w'^2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 2\mu_t(\frac{\partial\overline{u'}}{\partial x}) & \mu_t(\frac{\partial\overline{v'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'}}{\partial y}) & \mu_t(\frac{\partial\overline{w'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'}}{\partial z}) \\ \mu_t(\frac{\partial\overline{u'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v'}}{\partial x}) & 2\mu_t(\frac{\partial\overline{v'}}{\partial y}) & \mu_t(\frac{\partial\overline{w'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{v'}}{\partial z}) \\ \mu_t(\frac{\partial\overline{u'}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w'}}{\partial x}) & \mu_t(\frac{\partial\overline{v'}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{w'}}{\partial y}) & 2\mu_t(\frac{\partial\overline{w'}}{\partial z}) \\ & & \end{pmatrix} \tag{2}$$

d) Prandtlscher Mischungswegansatz

e) K=0.01 $\sqrt{\frac{kg}{\mathbf{ms}}}$; $\mu_{eff} = K^2$

in (4) -> $\dot{\gamma} = -\frac{\sqrt{\dot{\gamma}}}{K} + \frac{C}{K^2} = 0$

-> $\sqrt{\dot{\gamma}} = \frac{1}{2K} \pm \sqrt{\frac{1}{4K^2} - \frac{C}{K^2}}$

-> $\dot{\gamma} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = \left(\frac{1}{2K} \pm \sqrt{\frac{1}{4K^2} - \frac{C}{K^2}}\right)^2$

Lösen der DGL und Einsetzen der Randbedingung

-> $u(r) = \frac{1}{4K^2} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1-4C}\right)^2 \cdot (r - R)$

Lösung Aufgabe 5:

a) Machzahl Bestimmung am Eingang: Gleichung (2.73, Seite 91) und (2.75, Seite 92)

$$M_{e,1} := \frac{c_{e,1}}{\sqrt{\kappa R T_{e,1}}} = 0.31 \tag{1}$$

$$M_{e,2} := \frac{c_{e,2}}{\sqrt{\kappa R T_{e,2}}} = 0.5 \tag{2}$$

b) Machzahl Bestimmung an engster Stelle: Da Isentrop: Gleichung (2.79, Seite 97)

$$a_{m,1} = \sqrt{\kappa R T_{m,1}} = 310.54ms^{-1} \tag{3}$$

$$a_{m,2} = \sqrt{\kappa R T_{m,2}} = 313.75ms^{-1} \tag{4}$$

$$\frac{c_{e,1}^2}{2} + \frac{a_{e,1}^2}{\kappa - 1} = \frac{c_{m,1}^2}{2} + \frac{a_{m,1}^2}{\kappa - 1} \tag{5}$$

$$\frac{c_{e,2}^2}{2} + \frac{a_{e,2}^2}{\kappa - 1} = \frac{c_{m,2}^2}{2} + \frac{a_{m,2}^2}{\kappa - 1} \tag{6}$$

BEKANNT: $c_{e,1}, a_{e,1}$ und $a_{m,1}$ für LD1 und $c_{e,2}, a_{e,2}$ und $a_{m,2}$ für LD2

$$c_{m,1} = \sqrt{c_{e,1}^2 + \frac{2\kappa R(T_{1,e} - T_{1,m})}{\kappa - 1}} \tag{7}$$

$$c_{m,1} = 301.95ms^{-1} \tag{8}$$

$$M_{m,1} = \frac{c_{m,1}}{a_{m,1}} = 0.97 \tag{9}$$

$$c_{m,2} = \sqrt{c_{e,2}^2 + \frac{2\kappa R(T_{2,e} - T_{2,m})}{\kappa - 1}} \tag{10}$$

$$c_{m,2} = 313.75ms^{-1} \tag{11}$$

$$M_{m,2} = \frac{c_{m,2}}{a_{m,2}} = 1.0 \tag{12}$$

c) Machzahl Bestimmung an der Stelle mit $A_{t,1}$ und $A_{t,2}$
Weg: Ideale Gas-Glg. direkt unter Glg.(2.79 Seite 97), isentrope Gleichung (2.84, Seite 98)

$$p = R\rho T \tag{13}$$

$$p_{e,1} = 0,943bar \tag{14}$$

$$\frac{p_{e,1}}{p_t} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2}M_{t,1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2}M_{e,1}^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{15}$$

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2}M_{t,1}^2 = \left(\frac{p_{e,1}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M_{e,1}^2\right) \tag{16}$$

$$M_{t,1} = 0,5 \tag{17}$$

$$p_{e,2} = R\rho_{e,2}T_{e,2} \tag{18}$$

$$p_{e,2} = 2,63bar \tag{19}$$

$$\frac{p_t}{p_{e,2}} = \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2}M_{t,2}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2}M_{e,2}^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{20}$$

$$1 + \frac{\kappa - 1}{2}M_{t,2}^2 = \left(\frac{p_{e,2}}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}M_{e,2}^2\right) \tag{21}$$

$$M_{t,2} = 1,5 \tag{22}$$

d) Ruhegrössen bei Isentropie Gleichung (2.82, 2.84 auf Seite 98)

$$T_{o,1} = T_{e,1}\Big(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{e,1}^2\Big) \tag{23}$$
$$T_{o,1} = 285,38K \tag{24}$$
$$P_{o,1} = P_{e,1}\Big(\frac{T_{o,1}}{T_{e,1}}\Big)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{25}$$
$$P_{o,1} = 1bar \tag{26}$$
$$T_{o,2} = T_{e,2}\Big(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{e,2}^2\Big) \tag{27}$$
$$T_{o,2} = 294K \tag{28}$$
$$P_{o,2} = P_{e,2}\Big(\frac{T_{o,2}}{T_{e,2}}\Big)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \tag{29}$$
$$P_{o,2} = 3,12bar \tag{30}$$

e) LD1 kein Stoss: Bernoulli Staudruck ist Summe vom statischen und dynamischen Anteil, LD2 Stoss-Glg. wegen Überschall vor Pitot-Rohr
Für LD1:
durch $\rho_{e,1}$ und $c_{e,1}$ gegeben:

$$P_{s,1} = P_{e,1} + \frac{\rho_{e,1}}{2} c_{e,1}^2 \tag{31}$$
$$P_{s,1} = 1bar \tag{32}$$

Die Staupunkttemperatur ist bei dem isentropen Übergang die Ruhe-Temperatur $T_{s,1} = T_{o,1} = 285K$

Für LD2 sind nicht-isentrope Stoss-Glg. relevant. Konvention: alle Grössen nach Stoss haben jeweils ein Dach
Der Druck nach dem Stoss ergibt sich aus Glg.(2.94, Seite 108)

$$\frac{\hat{P}_{s,2}}{P_t} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa + 1}(M_{t,2}^2 - 1) \tag{33}$$
$$\hat{P}_{s,2} = 2,09bar \tag{34}$$

Die Temperatur nach dem Stoss ergibt sich aus Glg.(2.95, Seite 108)

$$\frac{\hat{T}_{s,2}}{T_t} = \Big(1 + \frac{2\kappa(M_{t,2}^2 - 1)}{\kappa + 1}\Big) mal \tag{35}$$
$$\Big(1 - \frac{2}{\kappa + 1}\Big(1 - \frac{1}{M_{t,2}^2}\Big)\Big) \tag{36}$$

Um die Temperatur vor Stoss zu berechnen:

$$T_{o,2} = T_t\Big(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{t,2}^2\Big) \tag{37}$$
$$T_t = 202,76K \tag{38}$$

$$\hat{T}_{s,2} = 267,63K \tag{39}$$

f) kompressibel, reibungsfrei, stationär

g) $Gegendruck = p_t$ damit es isentrop bleibt und kein V.Stoss entsteht

Lösung Aufgabe 6:

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad . \tag{1}$$

Die Strömung ist eben, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} = 0 \quad , \qquad v = 0 \quad . \tag{2}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \tag{3}$$

Damit folgt aus (1):

$$u \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \cdot w)}{\partial z} = 0 \quad . \tag{4}$$

Die Strömung ist in x-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in x-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{5}$$

Mit den Gleichungen (2) und (5) und $\rho(z) \neq \mathrm{f}(x)$ folgt aus (4):

$$\frac{\mathrm{d}(\rho \cdot w)}{\mathrm{d}z} = 0 \quad . \tag{6}$$

Daraus folgt $\rho \cdot w = \mathrm{C}$ mit der Intergrationskonstanten C. An den Wänden gilt die Haftbedingung, d. h. $w(z=0) = w(z=s) = 0$ bzw $\rho(z=0) \cdot w(z=0) = \rho(z=s) \cdot w(z=s) = 0$. Die Lösung (6) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $\rho(z) \cdot w(z) = 0$ bzw. zu $w(z) = 0$.

b) Die dreidimensionale Energiegleichung lautet:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) \\ &- p \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \cdot \dot{q}_{\mathrm{s}} + \mu \cdot \left(2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Mit $\lambda = $ konst., der Vernachlässigung der Dissipation $\Phi = 0$, keiner weiteren Wärmezu -oder abfuhr $\dot{q}_{\mathrm{s}} = 0$, $w = 0$ und den Gleichungen (2) und (3) folgt daraus:

$$\rho \cdot u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - p \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad . \tag{8}$$

Mit Gleichung (4) und $T(z) \neq \mathrm{f}(x)$ folgt daraus:

$$\rho \cdot u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad . \tag{9}$$

Für Wasser gilt $e = c_v \cdot T$ mit $c_v = \text{konst.}$.. Damit ergibt sich:

$$\rho \cdot u \cdot c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad . \tag{10}$$

Damit ergibt sich mit einem in x-Richtung ausgebildetes Temperaturprofil ($\partial T/\partial x) = 0$:

$$\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = 0 \quad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{11}$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$T(z) = \mathrm{C}_1 \cdot z + \mathrm{C}_2 \tag{12}$$

Mit den Randbedingungen $T(z=0) = T_1$ und $T(z=s) = T_2$ ergibt sich die Lösung:

$$T(z) = (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{s} + T_1 \tag{13}$$

Für die Dichte folgt damit:

$$\rho(z) = \rho_\mathrm{m} + \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (T_1 + T_2) - (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{s} - T_1 \right)$$

und nach einer Umformung:

$$\rho(z) = \rho_\mathrm{m} + \alpha \cdot (T_2 - T_1) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{z}{s} \right) \tag{14}$$

c) Die dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , & (15) \\
\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad , & (16) \\
\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad . & (17)
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (2), (3), (5) und $w = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
0 &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \\
0 &= f_y \quad , \\
0 &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad .
\end{aligned}$$

Als Massenkraft tritt nur die Schwerkraft in negative z-Richtung auf, sodass gilt $f_x = f_y = 0$ und $f_z = -\rho \cdot g$. Wegen der ausgebildeten Strömung ist u keine Funktion von x und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y. Damit gilt $u = u(z)$ und $\partial u/\partial z = \mathrm{d}u/\mathrm{d}z$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad , & (18) \\
0 &= 0 \quad , & (19) \\
\frac{\partial p}{\partial z} &= -\rho \cdot g \quad . & (20)
\end{aligned}$$

Gleichung (19) fällt weg. Aus Gleichung (18) ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = konst. \quad .$$

Damit ist $\partial p / \partial x$ keine Funktion von z. Damit kann die Gleichung 2 mal intergriert werden und es ergibt sich:

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot z^2 + \mathrm{C}_3 \cdot z + \mathrm{C}_4 \quad . \tag{21}$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der unteren Wand $u(z = 0) = 0$. Daraus folgt $\mathrm{C}_4 = 0$. An der oberen Wand ergibt sich mit der Haftbedingung $u(z = s) = U$. Eingesetzt in Gleichung (21) folgt mit $\mathrm{C}_4 = 0$:

$$\mathrm{C}_3 = \frac{U}{s} - \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot s^2 \quad .$$

C_3 eingesetzt in (21) ergibt für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von $\partial p 7 \partial x$:

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \left(z^2 - s \cdot z\right) + U \cdot \frac{z}{s} \quad . \tag{22}$$

d) Wegen der ebenen Strömung kann der Druck p keine Funktion von y sein. Aus Gleichung (20) folgt damit durch partielle Integration:

$$p(x, z) = -\rho \cdot g \cdot z + \mathrm{h}(x) \quad . \tag{23}$$

Dabei ist h eine noch zu bestimmende Funktion die nur von x abhängt. Setzt man Gleichung (23) jetzt in Gleichung (22) ein erhält man:

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}x} \cdot \left(z^2 - s \cdot z\right) + U \cdot \frac{z}{s} \quad . \tag{24}$$

Mit der Randbedingung, dass die Geschwindigkeit in der Mitte des Kanals gleich Null sein soll ($u(z = s/2) = 0$) folgt aus Gleichung (24):

$$\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{d}x} = 4 \cdot U \cdot \mu \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung führt zu:

$$\mathrm{h}(x) = 4 \cdot U \cdot \mu \cdot x + \mathrm{C}_5 \quad . \tag{25}$$

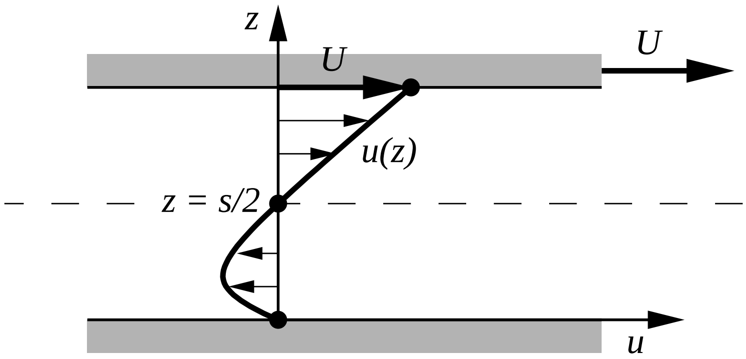
Gleichung (25) eingesetzt in Gleichung (23) ergibt für die Druckverteilung:

$$p(x, z) = -\rho \cdot g \cdot z + 4 \cdot U \cdot \mu \cdot x + \mathrm{C}_5 \quad . \tag{26}$$

Die Bedingung, dass der Druck an der Stelle 1 der unteren Wand gleich p_1 ist führt auf die Randbedingung $p(x = 0, z = 0) = p_1$. Eingesetzt in Gleichung (26) folgt $\mathrm{C}_5 = p_1$. Damit ergibt sich die Druckverteilung im Kanal zu:

$$p(x, z) = p_1 + 4 \cdot U \cdot \mu \cdot x - \rho \cdot g \cdot z \quad . \tag{27}$$

e) Die Haftbedingung ergibt $u(z = s) = U$ und $u(z = 0) = 0$. In der Mitte des Kanal ist die Geschwindigkeit Null $u(z = s/2) = 0$. Die Lösung der Geschwindigkeit $u(z)$ (Gleichung (21)) ist eine Parabel. Damit ergibt sich folgende Skizze des Geschwindigkeitsprofils $u(z)$:



f) Der Druck an der Stelle 2 in der Strömung ergibt sich über $p_2 = p(x = L, z = s/2)$:

$$p_2 = p_1 + 4 \cdot U \cdot \mu \cdot L - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot s \quad .$$

g) Das Ergebnis ändert sich nicht, da die Dissipationsterme in der Energiegleichung vernachlässigt werden und somit keine Geschwindigkeitsabhängigkeit der Lösung auftritt.

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

07. September 2004

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a) Definition Stromlinie:

$$\frac{dy}{du} = \frac{v}{u} = \frac{Ax}{2Ae^{-\alpha t}} \tag{1}$$

$$dy = \frac{e^{\alpha t} x dx}{2} \tag{2}$$

Durch Integration mit t als konstant und C als Integrationskonstante:

$$y = \frac{e^{\alpha t} x^2}{4} + C \tag{3}$$

Mit den gegebenen Bedingungen $x_Q = 1$, $y_Q = 1$ zur Zeit $t = t_0$, Bestimmung von C :

$$y = \frac{e^{\alpha t} x^2}{4} + 1 - \frac{e^{\alpha t_0}}{4} \tag{4}$$

Diese Gleichung beschreibt die Stromlinie zur festen Zeit t.

b) Definition der Teilchenbahn:

$$\frac{dx(t)}{dt} = u = 2Ae^{-\alpha t} \tag{5}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = v = Ax(t) \tag{6}$$

Mit den gegebenen Gleichungen für u und v folgt

$$dx = 2Ae^{-\alpha t} dt \tag{7}$$

$$dy = Axdt \tag{8}$$

Integration über x ergibt mit der Integrationskonstanten C_1

$$x(t) = \frac{-2Ae^{-\alpha t}}{\alpha} + C_1 \tag{9}$$

Mit der Anfangsbedingung für $t = 0$ wird $C_1 = 0$ bestimmt. Es folgt

$$x(t) = \frac{-2Ae^{-\alpha t}}{\alpha} \tag{10}$$

$x(t)$ wird in die Gleichung für $y(t)$ eingesetzt

$$dy = \frac{-2A^2 e^{-\alpha t}}{\alpha} dt \tag{11}$$

Die Integration der Gleichung führt zur Lösung für $y(t)$ mit der Integrationskonstanten C_2

$$y(t) = \frac{2A^2 e^{-\alpha t}}{\alpha^2} + C_2 \tag{12}$$

Mit der Anfangsbedingung für $t = 0$ wird $C_2 = 0$ bestimmt. Es folgt

$$y(t) = \frac{2A^2 e^{-\alpha t}}{\alpha^2} \tag{13}$$

c) Teilchenbahn bedeutet t aus $x(t)$ und $y(t)$ zu eliminieren, z. Bsp. über $y(t)/x(t)$

$$y = \frac{-Ax}{\alpha} \tag{14}$$

d) Kontinuitätsgleichung mit konstanter Dichte im ebenen Fall:

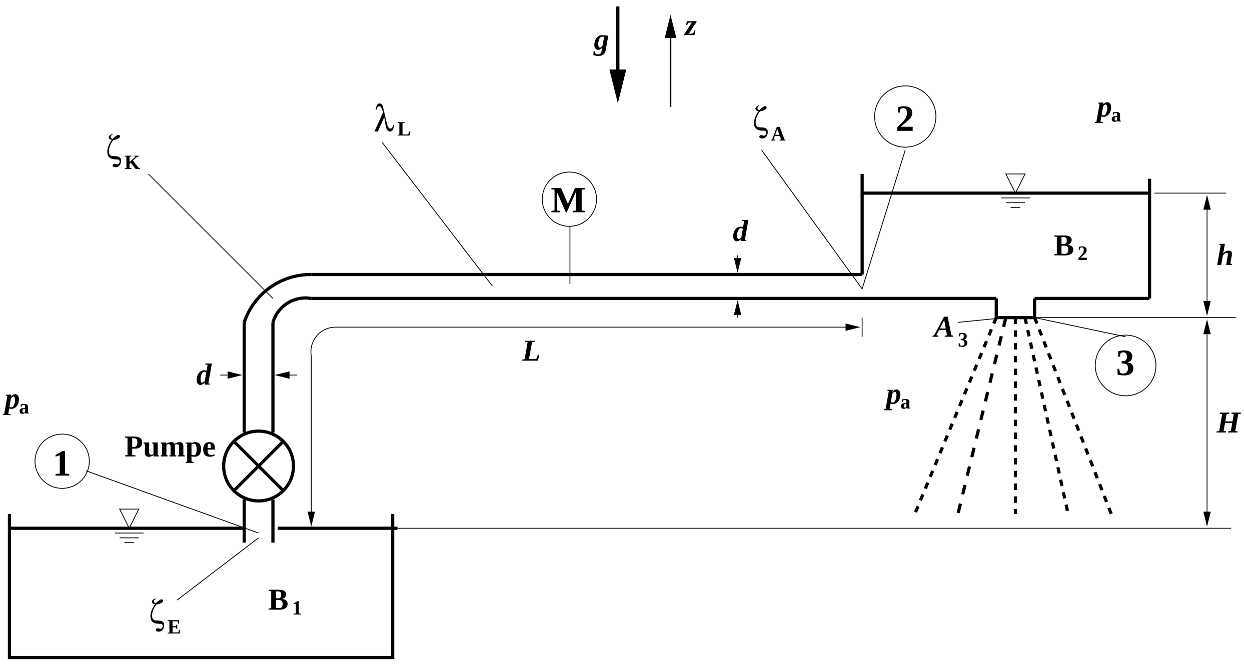
$$\nabla \mathbf{v} = 0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial 2Ae^{-\alpha t}}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial Ax(t)}{\partial y} = 0 \tag{17}$$

Damit ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

Lösung Aufgabe 2:



a) Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle 1 und 0 (s. Abb.) angewendet ergeben sich:

$$p_0 + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} + \Delta l = p_0 + \rho \cdot \frac{c_0^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (h + H) + \Delta p_{1-0} \tag{18}$$

wo Δl ist die Arbeit der Pumpe und Δp_{1-0} die Strömungsverluste. Die Geschwindigkeiten c_1 und c_0 an der Stelle 1 bzw. 0 (s. Abb.) ist ungefähr Null. Da beide Behälter große sind. Man hat denn:

$$\Delta l = \rho \cdot g \cdot (h + H) + \Delta p_{1-0} \tag{19}$$

Die Verluste entlang des Rohr der Länge L sind auf der Innengeschwindigkeit bezogen die die Unbekannte ist. Die Geschwindigkeit unmittelbar vor und nach die Pumpe ist gleich. Da die Pumpe verlustfrei arbeitet. Für Δp_{1-0} gilt denn:

$$\Delta p_{1-0} = \rho \cdot \frac{c_M^2}{2} \cdot (\lambda_L \cdot \frac{L}{d} + \zeta_E + \zeta_A + \zeta_K) \tag{20}$$

Die Geschwindigkeit c_M beträgt dann:

$$c_M = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta l - 2 \cdot \rho \cdot g \cdot (h + H)}{\rho \cdot (\lambda_L \frac{L}{d} + \zeta_E + \zeta_A + \zeta_K)}} = 4.55\ m/s \tag{21}$$

b) Um die Geschwindigkeit an der Stelle 3 zu berechnen kann man die Bernoulli Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle 0 zur Stelle 3 anwenden:

$$p_0 + \rho \cdot \frac{c_0^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h = p_0 + \frac{c_3^2}{2} \tag{22}$$

An der Stelle 0 ist $c_0 = 0$, sodaß erhalt man:

$$c_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 4.43 \ m/s \tag{23}$$

c) Um die gesuchte Oberfläche zu bestimmen kann man die Konti-Gleichung zwischen die Stelle 2 und 3 anwenden. So erhalt man:

$$c_2 \cdot A_2 = c_3 \cdot A_3 \tag{24}$$

Die Geschwindigkeiten c_2 und c_3 sind bekannt. Die Oberfläche A_2 gilt:

$$A_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 0.002827433 \ m^2 \tag{25}$$

Die gesuchte Oberfläche gilt denn:

$$A_3 = 0.002904023 \ m^2 \tag{26}$$

d) Um zu bestimmen ob die Strömung in dem Rohr der Länge L laminar oder turbulent ist, muss man die Reynoldszahl bezüglich die Geschwindigkeit c_M berehnen. Nach die Definition hat man:

$$Re = \frac{\rho \cdot c_M \cdot d}{\mu} = \frac{c_M \cdot d}{\nu} = 273000 > 2300 \tag{27}$$

wo $\nu = \rho/\mu$. Die Strömung ist dann turbulent.

e) Um zu klären ob die Innenwand des Rohres hydraulisch glatt ist muss man der Dicke Δ der viskosen Unterschicht berechnen. Nach die folgende Formel hat man:

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{12.64}{{Re_d}^{3/4}} \tag{28}$$

$$Re_d = \frac{c_M \cdot d}{\nu} \tag{29}$$

Mit der berechnete Reynoldzahl Re_d erhält man:

$$\frac{\Delta}{d} = \frac{12.64}{{Re_d}^{3/4}} = 0.00105834 \tag{30}$$

Das Verhältnis k_s/d beträgt $k_s/d = 1/400 = 0.0025$, d.h. die mittlere Sandkornrauhigkeit k_s ist größer als die Dicke Δ der viskosen Unteschicht. Die Innenwand des Rohres ist also NICHT hydraulisch glatt.

Lösung Aufgabe 3:

$$\dot{m}_1 = 2\rho\pi c_{max} \int_0^{R_1} (1 - \frac{r_1^2}{R_1^2}) dr_1 \tag{31}$$

$$\dot{m}_1 = 2\rho\pi c_{max} [\frac{{r_1}^2}{2} - \frac{{r_1}^4}{4{R_1}^2}]_0^{R_1} \tag{32}$$

$$\dot{m}_1 = 2\rho\pi c_{max} [\frac{{r_1}^2}{2} - \frac{{r_1}^4}{4{R_1}^2}]_0^{R_1} \tag{33}$$

$$\dot{m}_1 = \frac{\rho\pi c_{max}}{2} {R_1}^2 \tag{34}$$

$$\dot{m}_2 = \frac{\rho\pi c_{max}}{2} {R_2}^2 \tag{35}$$

$$\dot{m}_{ges} = \frac{\rho\pi c_{max}}{2} ({R_1}^2 + {R_2}^2) \tag{36}$$

Aufgabenteil b)

x-Richtung

$$\sum F_x = 0 = F_{Flanschx} \tag{37}$$

y-Richtung

$$\sum F_y = 0 = F_{Flanschy} - F_{i1} - F_{i2} \tag{38}$$

$$F_{i1} = 2\pi\rho {c_{max}}^2 \int_0^{R_1} (1 - \frac{r_1^2}{R_1^2})^2 r_1 dr_1 \tag{39}$$

$$F_{i2} = 2\pi\rho {c_{max}}^2 \int_0^{R_2} (1 - \frac{r_2^2}{R_2^2})^2 r_2 dr_2 \tag{40}$$

$$F_{i1} = 2\pi\rho {c_{max}}^2 (\frac{{R^2}_1}{6}) \tag{41}$$

$$F_{i2} = 2\pi\rho {c_{max}}^2 (\frac{{R^2}_2}{6}) \tag{42}$$

$$F_{Flanschy} = \frac{\rho\pi {c_{max}}^2}{3} \cdot [{R_1}^2 + {R_2}^2] \tag{43}$$

z-Richtung

$$\sum F_z = 0 = F_p + F_{iz} - F_{Flanschz} \tag{44}$$

$$F_p = (p_3 - p_a) \cdot \frac{\pi {D_3}^2}{4} \tag{45}$$

$$F_{iz} = \rho {c_3}^2 \cdot \frac{\pi {D_3}^2}{4} \tag{46}$$

$$F_{Flanschz} = \frac{\pi {D_3}^2}{4} \cdot (p_3 - pa + \rho {c_3}^2) \tag{47}$$

Aufgabenteil c)

$$\sum M_z = 0 = M_z - M_{i1} + M_{i2} \tag{48}$$

$$M_z = \frac{\rho \pi {c_{max}}^2}{3} \cdot ({R_1}^2 l_1 - {R_2}^2 l_2) \tag{49}$$

Lösung Aufgabe 4:

a)

$$\tau_t = -\rho\overline{u'w'} = \rho l^2 \left|\frac{du}{dz}\right| \frac{du}{dz}$$
$$\left|\frac{du}{dz}\right| > 0$$

für alle z:

$$\rightarrow \left|\frac{du}{dz}\right| \frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)^2$$
$$\tau_t = -\rho\overline{u'w'} = \rho l^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2$$
$$l(h) = \frac{\kappa}{h}\left(h^2 - z^2\right)$$
$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2$$
$$\Rightarrow \tau_t = \rho \left(\frac{\kappa}{h}\left(h^2 - z^2\right)\right)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2$$

b)

$$\mu\frac{d\bar{u}}{dz} - \rho\overline{u'w'} = konst. > 0$$

Vernachlässige $\mu\frac{d\bar{u}}{dz}$ außerhalb der viskosen Unterschicht. ($\mu\frac{d\bar{u}}{dz} << \rho\overline{u'w'}$)

$$-\rho\overline{u'w'} = konst. > 0$$
$$\rho l^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz}\right)^2 = konst.$$
$$\rho = konst.!$$
$$l\frac{d\bar{u}}{dz} = \sqrt{konst.} = konst$$

Integration:

$$\int d\bar{u} = konst \cdot \int \frac{1}{l} dz$$
$$\bar{u} = C_1 \cdot \int \frac{1}{\frac{\kappa}{h} \cdot (h^2 - z^2)} dz$$
$$\bar{u} = \frac{h}{\kappa} \cdot C_1 \cdot \int \frac{1}{(h^2 - z^2)} dz$$

Es gilt: z < h

Damit ergibt sich nach der Integration:

$$\bar{u} = \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot C_1 \cdot \ln \frac{h+z}{h-z} + C_2$$

Randbedingung 1:

$$\bar{u}(0) = 0 = \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot C_1 \cdot \ln \frac{h}{h} + C_2$$

$$\Rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{u}(z) = \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot C_1 \cdot \ln \frac{h+z}{h-z}$$

Randbedingung 2:

$$\bar{u}\left(\frac{h}{2}\right) = U = \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot C_1 \cdot \ln \frac{h+\frac{h}{2}}{h-\frac{h}{2}}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot C_1 \cdot \ln \frac{\frac{3}{2} \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot h}$$

$$\Leftrightarrow U = \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot C_1 \cdot \ln 3$$

$$\Rightarrow C_1 = U \cdot \frac{2 \cdot \kappa}{h \cdot \ln 3}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(z) = U \cdot \frac{2 \cdot \kappa}{h \cdot \ln 3} \cdot \frac{h}{2 \cdot \kappa} \cdot \ln \frac{h+z}{h-z}$$

$$\Rightarrow \underline{\bar{u}(z) = \frac{U}{\ln 3} \cdot \ln \frac{h+z}{h-z}}$$

Lösung Aufgabe 5:

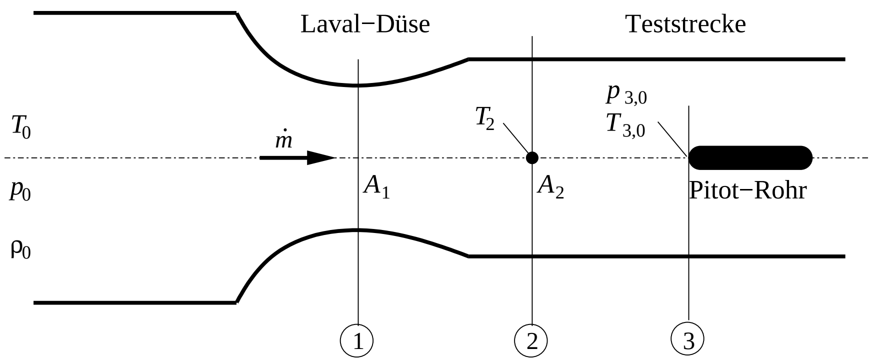


Abbildung 1: Skizze

Gegeben:

- $p_{3,0} = 0,78 bar$
- $T_2 = 388K$
- $T_{3,0} = 563K$
- $D_2 = 0,15m$
- $\kappa = 1,4$
- $R = 287 \frac{m^2}{s^2 \cdot K}$
- $A_{min} = A_1$
- $M_1 = 1$

- Lösung Aufgabenteil a.)

$$\Rightarrow \underline{A_2} = \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} = \underline{0,01767 m^2}$$

Die Staupunktstemperatur ist über den Stoß konstant!

$$\Rightarrow T_{3,0} \stackrel{!}{=} \underline{T_0 = 563K}$$

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \cdot M_2^2}$$
$$\Leftrightarrow M_2^2 = \left(\frac{T_0}{T_2} - 1\right) \cdot \frac{2}{\kappa - 1}$$
$$\Leftrightarrow M_2^2 = 2,255$$

$$\Rightarrow \underline{M_2 = 1,502}$$

Der Ruhedruck vor dem Stoß ist gleich dem Ruhedruck p_0 im Kessel. Die Formel 2.94 (S.104 im SM) gilt nur für statische Drücke, <u>nicht</u> für Ruhedrücke. Entweder verwendet man die Formel aus dem Übungsbuch (a.), oder man berechnet den Druck vor dem Stoß mittels der Isentropenbeziehung (b.):

1.

$$\frac{p_{0,3}}{p_0} = \left[1 + \frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_2^2-1\right)\right]^{-\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \left[1 - \frac{2}{\kappa+1}\cdot\left(1-\frac{1}{M_2^2}\right)\right]^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{p_{3,0}}{\left[1 + \frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_2^2-1\right)\right]^{-\frac{1}{\kappa-1}} \cdot \left[1 - \frac{2}{\kappa+1}\cdot\left(1-\frac{1}{M_2^2}\right)\right]^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

$$\Rightarrow \underline{p_0 = 0,839 bar}$$

2. Berechnung der Machzahl nach dem Stoß

$$M_{2,Sto}^2 = \frac{1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\cdot(M_2^2-1)}{1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot(M_2^2-1)}$$

$$M_{2,Sto}^2 = 0,4905$$

$$\Rightarrow \underline{M_{2,Sto} = 0,7004}$$

Mit der Isentropenbeziehung läßt sich nun der Druck nach dem Stoß berechnen

$$\frac{p_{2,Sto}}{p_{0,3}} = \frac{1}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_{2,Sto}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

$$p_{2,Sto} = \frac{1}{1,3875}\cdot p_{0,3}$$

$$\Rightarrow \underline{p_{2,Sto} = 0,562 bar}$$

Mit dem Druck nach dem Stoß kann mam nun den Druck vor dem Stoß berechnen

$$\frac{p_{2,Sto}}{p_2} = 1 + \frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot(M_2^2-1)$$

$$\Rightarrow \underline{p_2 = 0,228 bar}$$

Wiederum mit der Isentropenbeziehung kann nun der Ruhedruck im Kessel berechnet werden.

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{1}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

$$\Rightarrow \underline{p_0 = 0,839 bar}$$

Da es sich um ein ideales Gas handelt, gilt die Gleichung: $p\cdot\frac{1}{\rho} = R\cdot T$. Damit ergibt sich für ρ_0:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R \cdot T_0}$$
$$\Rightarrow \underline{\rho_0 = 0,5192 \frac{kg}{m^3}}$$

- Lösung Aufgabenteil b.)

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{1}{M_2} \cdot \left[1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \cdot \left(M_2^2 - 1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}}$$
$$\Rightarrow A_1 = \frac{A_2 \cdot M_2}{\left[1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \left(M_2^2 - 1\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}}}$$
$$\Rightarrow \underline{A_1 = 0,015 m^2}$$
$$\Rightarrow \underline{D_1 = 0,138 m}$$

- Lösung Aufgabenteil c.)

  Der Massenstrom durch die Lavaldüse ist konstant und läßt sich daher an jeder beliebigen Stelle berechnen. Da die Ruhewerte bekannt sind (Aufgabenteil a.)) und sowohl die Machzahl als auch der Querschnitt in der engsten Stelle bekannt ist, wird der Massenstrom dort bestimmt.

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1$$

Die Geschwindigkeit läßt sich aus der Machzahl berechnen, wobei im engsten Querschnitt bei überkritisch durchströmten Lavaldüsen $M_1 = 1$ gilt:

$$M_1 = \frac{c_1}{a_1}$$
$$\Rightarrow c_1 = M_1 \cdot a_1$$

$$a_1 = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1}$$

$$\Rightarrow c_1 = M_1 \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_1}$$

Die Temperatur T_1 und die Dichte ρ_1 lassen sich mit Hilfe der schon berechneten Ruhewerte im Kessel berechnen:

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$\rho_1 = 0,3291 \frac{kg}{m^3}$$

$$T_1 = T_0 \cdot \frac{2}{\kappa+1}$$

$$\Rightarrow T_1 = 469,167K$$

$$\Rightarrow a_1 = 434,18 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow c_1 = 434,18 \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{m} = 2,1436 \frac{kg}{s}}$$

- Lösung Aufgabenteil d.)

  $\Rightarrow kompressibel, stationr, reibungsfrei$

- Lösung Aufgabenteil e.)

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{0,228bar}{0,839bar} = 0,271$$

Lösung Aufgabe 6:

a) Die Strömung ist eben, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad v = 0 \quad . \tag{50}$$

Damit ergibt sich für die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho \quad \cdot \quad & \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ & \frac{\partial}{\partial x}\left(2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad , \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} \rho \quad \cdot \quad & \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) = k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & \frac{\partial}{\partial z}\left(2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad . \end{aligned} \tag{52}$$

b) Die zweidimensionale Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{53}$$

Es wirkt die Erdschwere und kein anderes Kraftfeld, das bedeutet:

$$k_x = 0 \quad , \qquad k_z = -\rho \cdot g \quad . \tag{54}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \tag{55}$$

Die Strömung ist in x-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in x-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{56}$$

Die Bedingungen (54) - (56) in die Gleichungen (51) - (53) eingesetzt ergibt:

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = K + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad , \tag{57}$$

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \quad , \tag{58}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{59}$$

Wegen den Bedingungen (50) und (56) sind die Geschwindigkeitskomponenten u und w nur Funktionen von x. Damit können die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten als totale Ableitungen geschrieben werden. Mit dem Zusammenhang, das die dynamische Zähigkeit nur eine Funktion von z ist, erhält man aus (57), (58) und (59):

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = K + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) \quad , \tag{60}$$

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(2 \cdot \mu \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right) \quad , \tag{61}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 0 \quad . \tag{62}$$

Aus der Kontinuität (62) folgt durch Integration:

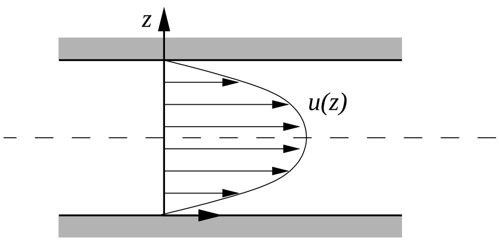
$$w(z) = \mathrm{C} \tag{63}$$

mit der Intergrationskonstanten C. An der Wand gilt die Haftbedingung, d. h. $w(z=0) = w(z=h) = 0$. Die Lösung (63) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $w(z) = 0$. Setzt man dieses in die Navier-Stokes-Gleichungen (60) und (61) ein ergibt sich:

$$0 = K + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) \quad , \tag{64}$$

$$0 = -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} \quad . \tag{65}$$

c)



d)

$$\mu(T) = \mu_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot (T - T_1)} \tag{66}$$

$$\mu(T) = \mu_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} \tag{67}$$

$$-K = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\mu_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\right) \tag{68}$$

$$-K \cdot z + C_1 = \mu_0 \cdot \mathrm{e}^{-\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} \tag{69}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = (-K \cdot z + C_1) \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} \tag{70}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = -K \cdot z \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} + C_1 \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} \tag{71}$$

$$u(z) = -K \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{h \cdot y}{\alpha \cdot \Delta T} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} + K \cdot \frac{h^2}{\alpha^2 \cdot (\Delta T)^2} \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} + C_1 \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{h}{\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot \Delta T \cdot \frac{z}{h}} + C_2 \tag{72}$$

Randbedingungen $u(z=0) = 0$ und $u(z=h) = 0$

$$u(z) = \frac{-K}{\mu_0} \cdot \frac{h^2}{\alpha \cdot (T_2 - T_1)} \cdot \left(\frac{y}{h} \cdot \mathrm{e}^{\alpha \cdot (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{h}} + \frac{\mathrm{e}^{\alpha \cdot (T_2 - T_1)}}{1 - \mathrm{e}^{\alpha \cdot (T_2 - T_1)}} \cdot \left(\mathrm{e}^{\alpha \cdot (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{h}} - 1\right)\right) \tag{73}$$

e)

$$\frac{\partial p(x,z)}{\partial x} = -K \tag{74}$$

$$p(x,z) = -K \cdot x + C_3(z) \tag{75}$$

$$\frac{\partial p(x,z)}{\partial z} = \frac{\partial C_3(z)}{\partial z} = -\rho \cdot g \tag{76}$$

$$\partial C_3(z) = -\rho \cdot g \cdot z + C_4 \tag{77}$$

$$p(x,z) = -K \cdot x + C_3(z) = -K \cdot x - \rho \cdot g \cdot z + C_4 \tag{78}$$

Randbedingung $p(x = 0, z = 0.75 \cdot h) = p_0$

$$p_0 = -\rho \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot h + C_4 \tag{79}$$

$$C_4 = p_0 + \rho \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot h \tag{80}$$

$$p(x,z) = p_0 - K \cdot x - \rho \cdot g \cdot z + \rho \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot h \tag{81}$$

$$p(x,z) = p_0 - K \cdot x + \rho \cdot g \cdot (\frac{3}{4} \cdot h - z) \tag{82}$$

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

06. April 2005

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a)

$$u(t) = U \cdot \cos\alpha(t)$$
$$w(t) = U \cdot \sin\alpha(t)$$

$$C_1 = U \cdot \cos\alpha(t_0)$$
$$C_2 = U \cdot \sin\alpha(t_0) - gt_0$$

$$u(t) = U \cdot \cos\alpha(t_0)$$
$$w(t) = U \cdot \sin\alpha(t_0) - g(t - t_0)$$

b)

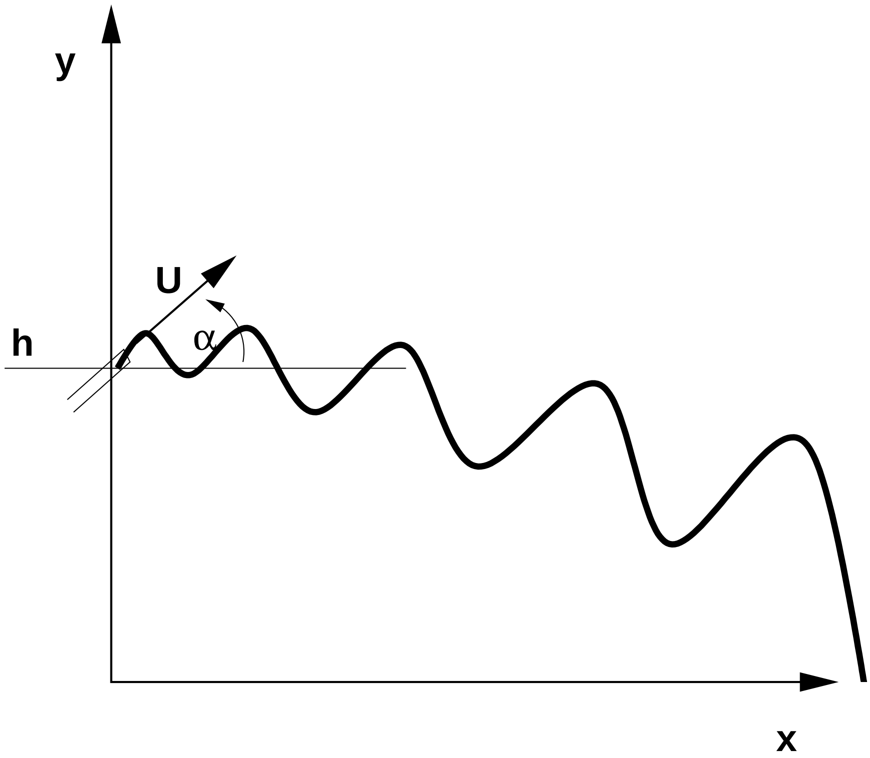
$$u = U \cdot \cos\alpha(t_0) = konst.$$
$$w = U \cdot \sin\alpha(t_0) - g(t - t_0)$$
$$\frac{dx}{dt} = u; \frac{dz}{dt} = w$$
$$dx = U \cdot \cos\alpha(t_0)dt$$
$$x(t) = U \cdot \cos\alpha(t_0) \cdot t + C_4$$

$$dz = [U \cdot \sin\alpha(t_0) - g(t - t_0)]\, dt$$
$$z(t) = U \cdot \sin\alpha(t_0) \cdot t - \frac{1}{2}g(t^2 - 2 \cdot t_o \cdot t) + C_4$$

RB:

$$x(0) = x_1 = C_3$$
$$z(0) = z_1 = C_4$$

$$x(t) = U \cdot \cos\alpha(t_0) \cdot t + x_1$$
$$z(t) = U \cdot \sin\alpha(t_0) \cdot t - \frac{1}{2}g(t^2 - 2 \cdot t_o \cdot t) + z_1$$



c)

d)

$$t - t_0 = \frac{x}{U \cdot \cos(\alpha_0)}$$

$$u(x) = U \cdot \cos(\alpha_0)$$

$$w(x) = U \cdot \sin(\alpha_0) - g\left(\frac{x}{U \cdot \cos(\alpha_0)}\right)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{w}{u}$$

$$dz = \frac{U \cdot \sin(\alpha_0) - g\left(\frac{x}{U \cdot \cos(\alpha_0)}\right)}{U \cdot \cos(\alpha_0)} dx$$

$$dz = 1 - g\frac{2 \cdot x}{U^2} dx$$

$$z = x - g\frac{x^2}{U^2} + C_3$$

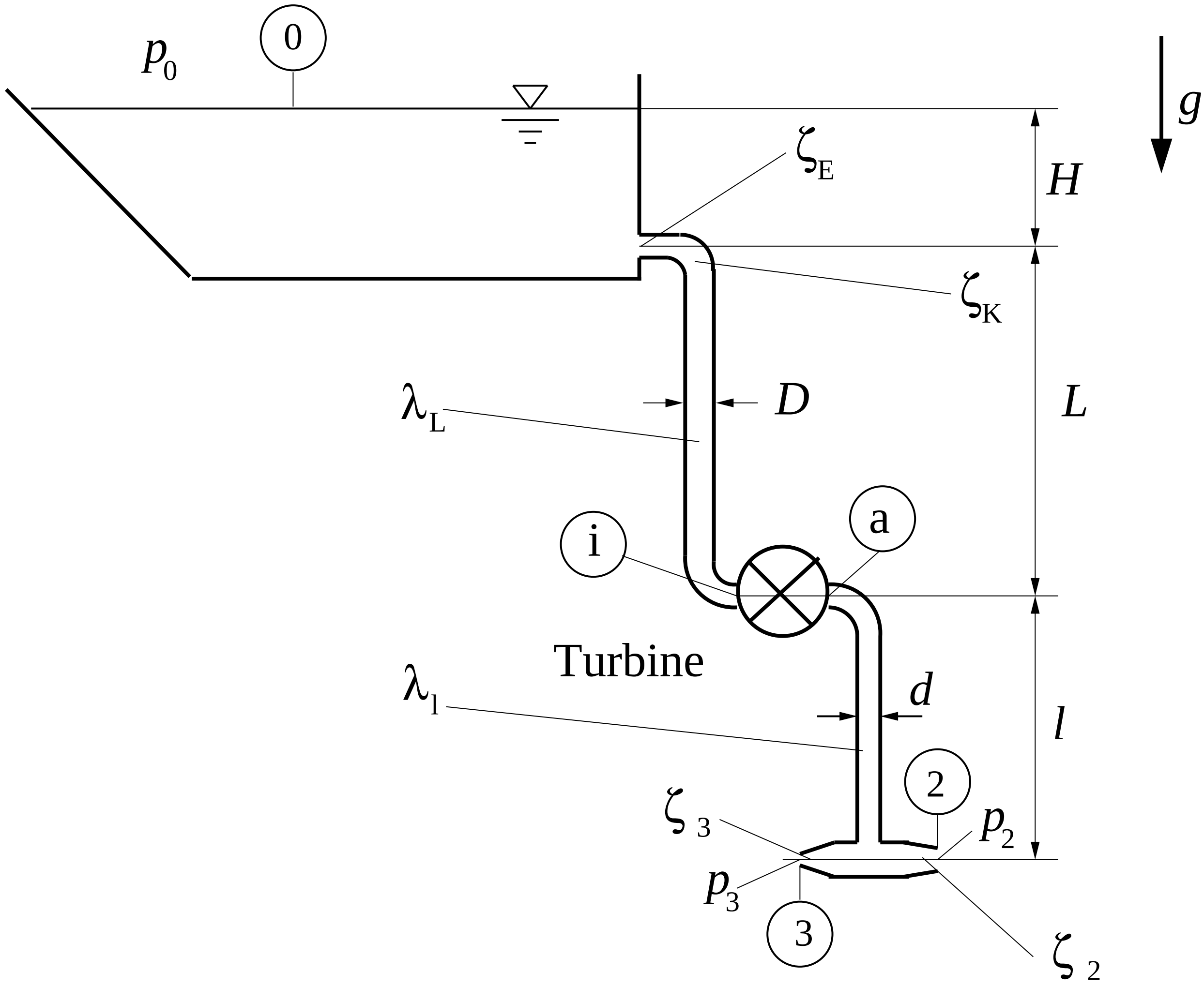
Randbedingung:

$$z(0) = h$$

$$C_3 = h$$

$$z = x - g\frac{x^2}{U^2} + h$$

Lösung Aufgabe 2:



a) Um die Leistung der Turbine berechnen zu können müssen zuerst die Geschwindigkeiten c_i und c_a in beiden Rohren der Länge L bzw. l auswerten. Die können durch die Bernoulli- bzw. Kontinuitätsgleichung berechnet werden. Für den Rohr der Länge L hat man:

$$p_0 + \rho \cdot \frac{c_0^2}{2} + \rho \cdot g \cdot (H + L) = p_i + \rho \cdot \frac{c_i^2}{2} + \Delta p_{v_{0-i}} \tag{1}$$

wo $\Delta p_{v_{0-i}}$ sind die Verluste entlang des Rohres (Reibungs-, Eintritts- und Krümmengsverluste). Die gelten:

$$\Delta p_{v_{0-i}} = (\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_i^2) \cdot (\lambda_L (L/D) + \zeta_E + \zeta_K) \tag{2}$$

Man hat denn:

$$c_i = \sqrt{\frac{2 \cdot [p_0 - p_i + \rho \cdot g \cdot (H + L)]}{\rho \cdot (1 + \lambda_L (L/D) + \zeta_E + \zeta_K)}} = 0.324443 \ m/s \tag{3}$$

Durch die Konti-Gleichung für den Rohr der Länge l hat man:

$$\rho \cdot (\pi \cdot D^2/4) \cdot c_i = \rho \cdot (\pi \cdot d^2/4) \cdot c_a \tag{4}$$

c_a gilt denn:

$$c_a = \frac{D^2}{{d_1}^2} \cdot c_i = 8.111\ m/s \tag{5}$$

Die Leistung der Turbine ist so definiert:

$$N = \dot{V} \cdot \Delta e \tag{6}$$

Die spezifischen Arbeit Δe, die die aufgennomene Fluid pro Volumeneinheit der Turbine entspricht, ist aber noch unbekannt. Um die zu rechnen kann man die Bernoulli-Gleichung durch ein Stromfaden zwischen die Stelle i und a anwenden:

$$p_i + \rho \cdot \frac{c_i^2}{2} - \Delta e = p_a + \rho \cdot \frac{c_a^2}{2} \tag{7}$$

Die gilt denn:

$$\Delta e = p_i - p_a + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot ({c_i}^2 - {c_a}^2) = 261158.47\ Pa \tag{8}$$

Der Volumstrom $\dot{V}$ gilt:

$$\dot{V} = c_i \cdot \pi \cdot D^2/4 = 0.0637\ m^3/s \tag{9}$$

Die Leistung der Turbine gilt denn:

$$N = 16635.8\ W = 16.6358 kW \tag{10}$$

b) Zur Berechnung der Geschwindigkeiten, können zwei Bernoulli-Gleichung entlang zwei Stromfäden zwischen die Stelle a und 2 bzw. 3 berechnet werden. Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle a und 2 (s. Abb.) angewendet ergeben sich:

$$p_a + \rho \cdot \frac{c_a^2}{2} + \rho \cdot g \cdot l = p_2 + \rho \cdot \frac{c_2^2}{2} + \Delta p_{v_{a-2}} \tag{11}$$

wo $\Delta p_{v_{a-2}}$ ist der Anteil der Verluste entlang des Rohres der Länge l. Man hat:

$$\Delta p_{v_{a-2}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_a^2 \cdot \lambda_l (l/d) + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_2^2 \cdot \zeta_2 \tag{12}$$

Die Geschwindigkeit c_2 gilt denn:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2[p_a - p_2 + \rho g \cdot l + 1/2 \rho {c_a}^2 (1 - \lambda_l (\frac{l}{d}))]}{\rho (1 + \zeta_2)}} \tag{13}$$

Man hat denn:

$$c_2 = 7.3577\ m/s \tag{14}$$

Mit einem Stromfaden vom Punkt a bis Punkt 3 und die selbe Betrachtungen vorher gemacht erhalt man für die Geschwindigkeit c_3:

$$c_3 = \sqrt{\frac{2[p_a - p_3 + \rho g \cdot l + 1/2 \rho {c_a}^2 (1 - \lambda_l (l/d))]}{\rho(1+\zeta_3)}} \tag{15}$$

Man hat denn:

$$c_3 = 7.703\ m/s \tag{16}$$

c) Um zu prüfen ob die Strömung in dem Rohr der Länge L laminar oder turbulent ist muss man die Reynoldszahl auf Grund der Durchmesser D berechnen. Die ist:

$$Re_D = \frac{\mu \cdot c_i \cdot D}{\rho} = \frac{c_i \cdot D}{\nu} = 162221.5 > 2300 \tag{17}$$

wo $\nu = \rho/\mu$. Die Strömung ist dann turbulent.

d) Die Reynoldszahl ist näherungsweise der Grössenordnung 10^5 $(Re_D = 1.6 \cdot 10^5)$. Darf man dann die folgende Formel nach Blasius benutzen um die λ_L Wert zu schätzen:

$$\lambda_L = \frac{0.3164}{{Re_D}^{1/4}} = 0.01576 \tag{18}$$

Die λ_L Wert ist dann richtig. Da die gegebene Wert von λ_L überschreit nicht den berechnete Wert. Das Rohr ist denn hydraulisch rauh.

Lösung Aufgabe 3:

a) Einströmende Massenstrom muss gleich ausströmenden Massenstrom sein, oder anderes ausgedrückt, der gesamte Massenstrom ist im Kontrollvolumen Null. Die Geschwindigkeiten $\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$ sind parallel sowie $\vec{v_3}$ antiparallel zur jeweiligen Fläche, somit folgt aus der Massenerhaltung

$$-\rho v_1 A_1 - \rho v_2 A_2 + \rho v_3 A_3 = 0 \tag{1}$$

$$v_3 = \frac{v_1 A_1 + v_2 A_2}{A_3} \tag{2}$$

b) Die Summe der Haltekraft $\vec{F}$ und von der Strömung ausgeübten Druck- $\vec{F_D}$ sowie Impulskraft $\vec{F_I}$ muss Null sein. Die Massenkraft wirkt nur in der z- Richtung, ist dehalb für die Haltekraft in der x- und y-Richtung unwichtig. Die Druckkraft $\vec{F_D}$ ist die Summe durch die Drücke auf einzelne Flächen im Kontrollvolumen.

$$\vec{F_D} = -\sum_{i=1}^{3} (p_i - p_0) n_i dA_i \tag{3}$$

Dies ergibt sich durch die folgende Überlegung in vektorieller Schreibweise. Auf dem gesamten geschlossenen Kontrollraum wirkt der Umgebungsdruck, also auch auf der Restoberfläche $\vec{A_R}$, ausser $\vec{A_1}$, $\vec{A_2}$ und $\vec{A_3}$. Somit ist die gesamte Druckkraft $\vec{F_D}$:

$$\vec{F_D} = -(p_1 - p_0)\vec{A_1} - (p_2 - p_0)\vec{A_2} - (p_3 - p_0)\vec{A_3} + p_0\vec{A_1} + p_0\vec{A_2} + p_0\vec{A_3} + p_0\vec{A_R} \tag{4}$$

$$\vec{F_0} = p_0\vec{A_1} + p_0\vec{A_2} + p_0\vec{A_3} + p_0\vec{A_R} \tag{5}$$

Die Oberflächenkraft $\vec{F_0}$ wirkt mit gleichem Druck auf einer geschlossenenen Oberfläche und ist deshalb Null.
Die resultierende Druckkraft ergibt sich deshalb in der x- und y- Richtung als

$$\vec{F_{Dx}} = (p_1 - p_0)A_1 + (p_2 - p_0)A_2 \cos\alpha - (p_3 - p_0)A_3 \cos\beta \tag{6}$$

$$\vec{F_{Dy}} = -(p_2 - p_0)A_2 \sin\alpha - (p_3 - p_0)A_3 \sin\beta \tag{7}$$

Die Impulskraft $\vec{F_I}$ ist die Summe durch die Geschwindigkeiten durch die einzelnen Flächen im Kontrollvolumen.

$$\vec{F_I} = -\rho \sum_{i=1}^{3} \vec{v_i}\vec{v_i} \cdot \vec{A_i} \tag{8}$$

Für $\vec{A_1}$ ergibt sich nur die Komponente in x-Richtung ungleich Null

$$\vec{F_{I1x}} = \rho A_1 v_1^2 \tag{9}$$

Für $\vec{A_2}$ ergibt sich

$$\vec{F_{I2x}} = -\rho v_2 \cos\alpha(-v_2 A_2) = \rho A_2 v_2^2 \cos\alpha \tag{10}$$

$$\vec{F_{I2y}} = -\rho(-v_2 \sin\alpha)(-v_2 A_2) = -\rho A_2 v_2^2 \sin\alpha \tag{11}$$

Für $\vec{A_3}$ ergibt sich

$$\vec{F_{I3x}} = -\rho(v_3 \cos\beta)(v_3 A_3) = -\rho A_3 v_3^2 \cos\beta \tag{12}$$
$$\vec{F_{I3y}} = -\rho(v_3 \sin\beta)(v_3 A_3) = -\rho A_3 v_3^2 \sin\beta \tag{13}$$

Die nötige Haltekraft in der x-Richtung ist entgegengesetzt der Summe der resultierenden Druck- sowie Impulskraft

$$\vec{F_x} =$$

$$-((p_1 - p_0)A_1 + (p_2 - p_0)A_2 \cos\alpha - (p_3 - p_0)A_3 \cos\beta + \rho A_1 v_1^2 + \rho A_2 v_2^2 \cos\alpha - \rho A_3 v_3^2 \cos\beta)) \tag{14}$$

Die nötige Haltekraft in der y-Richtung ist entgegengesetzt der Summe der resultierenden Druck- sowie Impulskraft

$$\vec{F_y} =$$

$$-(-(p_2 - p_0)A_2 \sin\alpha - (p_3 - p_0)A_3 \sin\beta - \rho A_2 v_2^2 \sin\alpha - \rho A_3 v_3^2 \sin\beta) \tag{15}$$
$$= (p_2 - p_0)A_2 \sin\alpha + (p_3 - p_0)A_3 \sin\beta + \rho A_2 v_2^2 \sin\alpha + \rho A_3 v_3^2 \sin\beta) \tag{16}$$

c) Allgemein ergibt sich das Drehmoment $\vec{M}$ aus der Druck- sowie Impulskraft und dem Hebelarm r

$$\vec{M} = -\rho \sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} \times \vec{v_i}(\vec{v_i} \cdot \vec{A_i}) \tag{17}$$

Bei 1 ist das Moment durch die Druckkraft in der z-Richtung Null, weil die Fläche nur x-Komponente ungleich Null hat und somit parallel zum Hebelarm L ist. Das Produkt Hebelarm mal Einströmgeschwindigkeit ergibt aus demselben Grund den Wert Null.
Bei 2 ist der Hebelarm parallel zur Fläche und anti-parallel zur Geschwindigkeit, somit trägt 2 nicht zum Moment bei.

$$\vec{r_2} = (-L\cos\alpha; L\sin\alpha; 0) \tag{18}$$

Bei 3 ergibt durch die Druckkraft und Impulskraft jeweils

$$\vec{M_3} = -\rho(L;L;0) \times (v_3\cos\beta; v_3\sin\beta; 0)v_3 A_3 - (L;L;0) \times (p_3 - p_0)(A_3\cos\beta; A_3\sin\beta; 0) \tag{19}$$

Das Moment in der z-Richtung bleibt als einziger ungleich Null

$$M_{3z} = -LA_3(\sin\beta - \cos\beta)(\rho v_3^2 + (p_3 - p_0)) \tag{20}$$

Lösung Aufgabe 4:

a) Fall 1:

$$Re_D = \frac{v_{zm1} \cdot D}{\nu} = 1700 => laminar \tag{1}$$

$$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re_D} = 0.0377 \tag{2}$$

$$\Delta p_v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {v_{zm1}}^2 \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda_{lam} = 0.00131 Pa \tag{3}$$

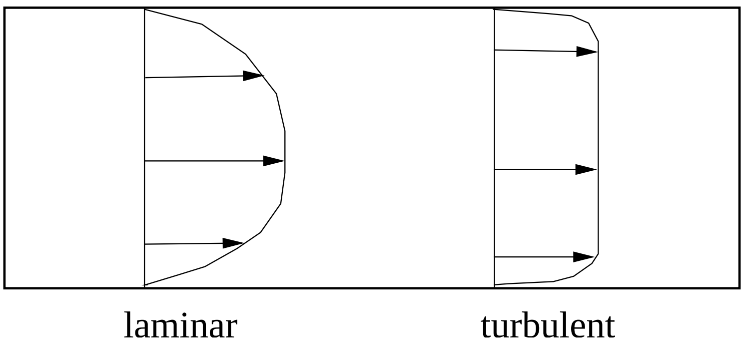
Fall 2:

$$Re_D = \frac{v_{zm2} \cdot D}{\nu} = 50000 => turbulent, Blasius \tag{4}$$

$$\lambda_{turb} = \frac{0.3164}{{Re_D}^{0.25}} = 0.0212 \tag{5}$$

$$\Delta p_v = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {v_{zm2}}^2 \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda_{turb} = 0.636 Pa \tag{6}$$

b) Flacheres Profil und höhere Gradienten in Wandnähe beim turbulenten Profil, wegen zusätzlichem Längs- und Querimpulsaustausch.



c)

$$-\rho \cdot \overline{v_z' v_r'} = konst = -K = \tau_t' \tag{7}$$

$$-K = \rho \cdot l^2 \cdot (\frac{d\overline{v_{z2}}}{dr})^2 \tag{8}$$

$$\frac{d\overline{v_{z2}}}{dr} = -\frac{1}{l} \cdot \sqrt{\frac{-K}{\rho}} \tag{9}$$

$$\frac{d\overline{v_{z2}}}{dr} = -\frac{\overline{v}_{zmax}}{7 \cdot R} \cdot (1 - \frac{r}{R})^{\frac{-6}{7}} \tag{10}$$

$$l = \frac{7 \cdot R}{\overline{v}_{zmax}} \cdot (1 - \frac{r}{R})^{\frac{6}{7}} \cdot \sqrt{\frac{-K}{\rho}} \tag{11}$$

Lösung Aufgabe 5:

a) inkompressibel, stationär, reibungsbehaftet

b)

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \rho_{Luft} \cdot c_1 \cdot A_1 \\
\Rightarrow \dot{m} &= 0,47 \frac{kg}{s}
\end{aligned}$$

c) nein!

Grund: Es handelt sich um eine inkompressible Strömung.

d)

$$\begin{aligned}
Re_1 &= \frac{c_1 \cdot D_1}{\nu_{Luft}} = \frac{c_1 \cdot D_1 \cdot \rho_{Luft}}{\mu_{Luft}} \\
\Rightarrow Re_1 &= 401.666
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 0,00785 m^2 \\
A_2 &= \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} = 0,0707 m^2
\end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit im Ausströmquerschnitt läßt sich mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung berechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \Rightarrow c_1 \cdot A_1 &= c_2 \cdot A_2 \\
\Rightarrow c_2 &= \frac{A_1 \cdot c_1}{A_2} \\
\Rightarrow c_2 &= 5,55 \frac{m}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re_2 &= \frac{c_2 \cdot D_2 \cdot \rho_{Luft}}{\mu_{Luft}} \\
\Rightarrow Re_2 &= 133.755
\end{aligned}$$

e) Die Fläche ändert sich linear!

$$\begin{aligned}
A(h) &= a \cdot h + b \\
A(h = 0) &= b = A_1 = 0,00785 \ m^2 \\
\Rightarrow b &= 0,00785 \ m^2 \\
A(h = 1 \ m) &= a \cdot 1 \ m + 0,00785 \ m^2 = A_2 = 0,0707 \ m^2 \\
\Rightarrow a &= 0,0628 \ m
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow A(h) = 0,0628 \ m \cdot h + 0,00785 \ m^2$$

$$\Rightarrow A(h = h/2) = 0,039 \ m^2$$

f) $d_{min} = 0,0015\ m$; $d_{max} = 0,02\ m$

$$\begin{aligned} Re_{min} &= \frac{c_{h/2} \cdot d_{min} \cdot rho_{Luft}}{\mu_{Luft}} \\ Re_{min} &= 1.212 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re_{max} &= \frac{c_{h/2} \cdot d_{max} \cdot rho_{Luft}}{\mu_{Luft}} \\ c_{h/2} &= \frac{A_1 \cdot c_1}{A_{h/2}} \\ c_{h/2} &= 10,06\ \frac{m}{s} \\ Re_{max} &= 16.163 \end{aligned}$$

g) Abgelesen aus Diagramm: $\underline{c_W = 0,4}$

Es gilt die Gleichgewichtsbedingung:

Widerstandskraft = Gewichtskraft

$$\begin{aligned} W &= G \\ \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot c_{h/2}^2 \cdot c_W \cdot A_{Kugel} &= V_{Kugel} \cdot \rho_{Sand} \cdot g \\ \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot c_{h/2}^2 \cdot c_W \cdot \pi \cdot \frac{D_{Kugel}^2}{4} &= \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{D_{Kugel}^3}{8} \cdot \rho_{Sand} \cdot g \\ \frac{1}{2} \cdot \rho_{Luft} \cdot c_W \cdot c_{h/2}^2 &= \frac{1}{6} \cdot \rho_{Sand} \cdot g \cdot D_{Kugel} \\ \Rightarrow D_{Kugel} &= \frac{6}{8} \cdot \frac{\rho_{Luft}}{\rho_{Sand}} \cdot \frac{c_W}{g} \cdot c_{h/2}^2 \\ \Rightarrow D_{Kugel} &= 0,0025m \end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 6:

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{1}$$

Die Strömung ist eben, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} = 0 \quad , \qquad v = 0 \quad . \tag{2}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \tag{3}$$

Damit folgt aus (1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{4}$$

Die Strömung ist in x-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in x-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{5}$$

Mit den Gleichungen (2) und (5) folgt aus (4):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 0 \quad . \tag{6}$$

Daraus folgt $w = \mathrm{C}$ mit der Intergrationskonstanten C. An den Wänden gilt wegen der Porösität $w(z=0) = w(z=h) = W_0$. Die Lösung von (6) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $w(z) = W_0$.

b) Die dreidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}\right) &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad , & (7)\\
\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}\right) &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad , & (8)\\
\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z}\right) &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad . & (9)
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (2), (3), (5) und $w = W_0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot W_0 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \\
0 &= f_y \quad , \\
0 &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} \quad .
\end{aligned}$$

Die Gravitation ist vernachlässigbar, sodass gilt $f_x = f_y = f_z = 0$. Wegen der ausgebildeten Strömung ist u keine Funktion von x und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y. Damit gilt $u = u(z)$ und $\partial u/\partial z = \mathrm{d}u/\mathrm{d}z$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad , & (10)\\
0 &= 0 \quad , & (11)\\
\frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \quad . & (12)
\end{aligned}$$

Gleichung (11) fällt weg. Aus Gleichung (12) ergibt sich, dass p keine Funktion von z und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y ist. Damit gilt $p = p(x)$ und $\partial p/\partial x = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Damit ergibt sich Gleichung (10) zu:

$$\rho \cdot W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} \quad .$$

Da der Druck im Spalt konstant ist hängt er auch nicht von x ab, sodass man folgende Gleichung erhält:

$$W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \nu \cdot \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} \quad .$$

Die Substitution $f(z) = \mathrm{d}u/\mathrm{d}z$ führt auf die Gleichung

$$W_0 \cdot f = \nu \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} \quad .$$

oder nach Umformung auf:

$$\frac{1}{f} \cdot \mathrm{d}f = \frac{W_0}{\nu} \cdot \mathrm{d}z \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\ln f(z) = \frac{W_0}{\nu} \cdot z + \mathrm{C}_1$$

oder nach Anwendung der Exponentialfunktion

$$f(z) = \mathrm{C}_2 \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} \quad .$$

Die Rücksubstitution ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \mathrm{C}_2 \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} \quad .$$

Daraus folgt nach nochmaliger Integration:

$$u(z) = \mathrm{C}_2 \cdot \frac{\nu}{W_0} \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} + \mathrm{C}_3 \quad . \tag{13}$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der unteren Wand $u(z = 0) = U_0$ und an der oberen Wand $u(z = h) = 0$. Eingesetz in Gleichung (13) erhält man:

$$U_0 = \mathrm{C}_2 \cdot \frac{\nu}{W_0} + \mathrm{C}_3 \quad , \tag{14}$$

$$0 = \mathrm{C}_2 \cdot \frac{\nu}{W_0} \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h} + \mathrm{C}_3 \quad . \tag{15}$$

Gleichung (14) minus Gleichung (15) ergibt:

$$U_0 = \mathrm{C}_2 \cdot \frac{\nu}{W_0} \cdot \left(1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}\right) \quad .$$

Nach C_2 aufgelöst folgt:

$$\mathrm{C}_2 = \frac{U_0 \cdot W_0}{\nu} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad . \tag{16}$$

C_2 eingesetzt in (14) ergibt für C_3

$$C_3 = U_0 - \frac{U_0 \cdot W_0}{\nu} \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \cdot \frac{\nu}{W_0} = -U_0 \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad . \tag{17}$$

Werden die Gleichungen (16) und (17) in Gleichung (13) eingesetzt ergibt sich:

$$u(z) = U_0 \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} - U_0 \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad .$$

Damit ist erhält man für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von z:

$$u(z) = U_0 \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad . \tag{18}$$

c) Die Kraft auf die obere Platte berechnet sich für ein Newtonsches Medium aus:

$$F_{\mathrm{R,oben}} = \tau(z = h) \cdot b \cdot L = \rho \cdot \nu \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(z = h) \cdot b \cdot L \quad . \tag{19}$$

Für den Geschwindigkeitsgradienten erhält man aus Gleichung (18):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = U_0 \cdot \frac{W_0}{\nu} \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad .$$

Damit ergibt sich an der oberen Wand für den Geschwindigkeitsgradienten:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}(z = h) = U_0 \cdot \frac{W_0}{\nu} \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad .$$

Eingesetzt in Gleichung (19) ergibt sich für die Kraft:

$$F_{\mathrm{R,oben}} = \rho \cdot U_0 \cdot W_0 \cdot b \cdot L \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \quad .$$

d) Für $W_0 \to 0$ ergibt sich aus Gleichung (18):

$$u(z) = \lim_{W_0 \to 0} \left(U_0 \cdot \frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \right) = U_0 \cdot \lim_{W_0 \to 0} \left(\frac{e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{1 - e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \right) \quad .$$

Mit der l'Hospitalschen Regel erhält man:

$$u(z) = U_0 \cdot \lim_{W_0 \to 0} \left(\frac{\frac{z}{\nu} \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot z} - \frac{h}{\nu} \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}}{-\frac{h}{\nu} \cdot e^{\frac{W_0}{\nu} \cdot h}} \right) = U_0 \cdot \frac{\frac{z}{\nu} - \frac{h}{\nu}}{-\frac{h}{\nu}} = U_0 \cdot \frac{z - h}{-h} = U_0 \cdot \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad .$$

Es handelt sich um eine Couette-Strömung.

e) Die dreidimensionale Energiegleichung lautet:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) \\ & -p \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \cdot \dot{q}_{\mathrm{s}} + \mu \cdot \left(2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right) \quad . \end{aligned} \tag{20}$$

Mit der Vernachlässigung der Dissipation $\Phi = 0$, keiner weiteren Wärmezu -oder abfuhr $\dot{q}_\mathrm{s} = 0$, $w = W_0$ und den Gleichungen (2), (3) und (5) folgt daraus:

$$\rho \cdot \left(u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + W_0 \cdot \frac{\partial e}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) \quad .$$

Für ein inkompressibles Medium gilt $e = c_v \cdot T$ mit $c_v = \text{konst.}$. Damit ergibt sich:

$$\rho \cdot c_v \cdot \left(u \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + W_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right) \quad . \tag{21}$$

Die Temperaturverteilung ist in x-Richtung ausgebildet, daraus folgt $\partial T/\partial x = 0$. Hieraus und mit Gleichung (2) folgt das die Temperatur nur ein Funktion von z ist: $T = T(z)$. Damit gilt $\partial T/\partial z = \mathrm{d}T/\mathrm{d}z$. Eingesetzt in Gleichung (21) erhält man:

$$\rho \cdot c_v \cdot W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \right) \quad .$$

Da auch λ nur ein Funktion von z ist ergibt sich:

$$\rho \cdot c_v \cdot W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left(\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} \right) \quad .$$

Hieraus folgt:

$$\rho \cdot c_v \cdot W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + \lambda \cdot \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = \rho \cdot c_v \cdot W_0 \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} + (\lambda_0 + \rho \cdot c_v \cdot W_0 \cdot z) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} \quad .$$

Durch Umformung erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} = 0 \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$T(z) = \mathrm{C}_4 \cdot z + \mathrm{C}_5 \quad .$$

Mit den Randbedingungen $T(z = 0) = T_1$ und $T(z = h) = T_2$ ergibt sich die Lösung:

$$T(z) = (T_2 - T_1) \cdot \frac{z}{h} + T_1 \quad .$$

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel 19. September 2005

Musterlösung

Schriftliche Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Aufgabe 1 (15)

(1) $$u(x,y,t) = \frac{t_0 y}{U_0 t^2}$$

(2) $$v(x,y,t) = V_0 \cos(\omega t)$$

Stromlinie Definition mit t: fest

(3) $$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

(4) $$y dy = \frac{U_0 V_0 \cos(\omega t) t^2}{t_0} dx$$

Integration ergibt

(5) $$\frac{y^2}{2} = \frac{U_0 V_0 \cos(\omega t) t^2}{t_0} x + I_1$$

Mit I_1: Integrations-Konstante
Durch die gegebene Bedingung zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ ergibt sich

(6) $$0 = -\frac{U_0 V_0 \pi^2 x_1}{\omega^2 t_0} + I_1$$

Somit ist die Integrations-Konstante bekannt und die Stromlinien für festes t:

(7) $$y^2 = 2\frac{U_0 V_0}{t_0}\Big(\cos(\omega t) t^2 x + \frac{\pi^2 x_1}{\omega^2}\Big)$$

Für die angegebene Zeit t_1 ergibt sich

(8) $$y^2 = 2\frac{U_0 V_0 \pi^2}{\omega^2 t_0}\Big(x_1 - x\Big)$$

2) Drehungsfrei ? Der Drall muss dafür in Z-Ebene den Wert Null haben

(9) $$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{t_0}{U_0 t^2} - 0 \neq 0$$

Das Strömungsfeld ist nicht drehungsfrei, ist also Drall behaftet.
3) Definition der y-Komponente des Bahnvektors

$$\frac{dy}{dt} = v(x,y,t) = V_0 \cos(\omega t) \tag{10}$$

Integration ergibt mit I_2 Integrations-Konstante

$$y(t) = \frac{V_0 \sin(\omega t)}{\omega} + I_2 \tag{11}$$

Durch die angegebene Bedingung für t_2 folgt für I_2

$$0 = 0 + I_2 \tag{12}$$

Somit ist

$$y(t) = \frac{V_0 \sin(\omega t)}{\omega} \tag{13}$$

4) Die partielle Ableitung nach der Zeit von den Geschwindigkeitskomponenten ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-2t_0 y(t)}{U_0 t^3} \quad i.a. \quad \neq 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -V_0 \omega \sin(\omega t) \quad i.a. \quad \neq 0 \tag{15}$$

Das Strömungsfeld ist deshalb instationär (wegen expliziter Zeitabhängigkeit).
5) Die X-Komponente der substanziellen Beschleunigung ist

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{16}$$

$$a_x = -\frac{2t_0 y(t)}{U_0 t^3} + V_0 \cos(\omega t)\frac{t_0}{U_0 t^2} \tag{17}$$

Die Y-Komponente der substanziellen Beschleunigung ist

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{18}$$

$$a_y = -V_0 \omega \sin(\omega t) \tag{19}$$

Aufgabe 2 (18)

a) Die Geschwindigkeit c_D des Rohres 3 ist mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ bekannt. Man hat:

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot c_D}{4} \tag{1}$$

Die gesuchte Geschwindigkeit gilt denn:

$$c_D = \frac{4 \cdot \dot{V}}{\pi \cdot D^2} = 8.9524\ m/s \tag{2}$$

Mit dieser Geschwindigkeit kann man denn die Reynoldzahl in der Mitte des Rohres 3 berechnen. Die gilt:

$$Re_D = \frac{\mu \cdot c_D \cdot D}{\rho} = \frac{c_D \cdot D}{\nu} = 716197.244 = 7.162 \cdot 10^5 \tag{3}$$

Um die Reibungskoeffizient aus dem Nikuradse - Diagramm bestimmen zu können muss man das Verhältnis D/k berechnen. Das gilt:

$$\frac{D}{k} = 30 \tag{4}$$

Aus dem Diagramm kann man der Wert der gesuchte Koeffizient auslesen.

Der Wert von λ gilt denn:

$$\lambda = 0.06 \tag{5}$$

b) Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle P und 1 (s. Abb.) angewendet ergeben sich:

$$p_P + \rho \cdot \frac{c_D^2}{2} - \Delta p_{vD} = p_1 + \rho \cdot \frac{c_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + \Delta p_{v1} \tag{6}$$

wobei p_1 gleich der Atmosphäre Druck ist. Die Verlustterme gelten:

$$\Delta p_{vD} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_D^2 \cdot \lambda_D(L/D) \tag{7}$$

$$\Delta p_{v1} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_1^2 \cdot (\lambda_1 \cdot \frac{l_1 + h}{d_1} + \zeta_K + \zeta_A) \tag{8}$$

Damit gilt die gesuchte Geschwindigkeit:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot [p_P - p_1 - \rho \cdot g \cdot h + \rho \cdot \frac{c_D^2}{2} \cdot (1 - \lambda_D(L/D))]}{\rho \cdot (1 + \zeta_K + \zeta_A + \lambda_1 \cdot \frac{l_1 + h}{d_1})}} = 2.08675\ m/s \tag{9}$$

c) Um der Druck in dem Behälter berechnen zu können muss man zuerst die Geschwindigkeit c_2 bestimmen. Die Verluste in den Rohren 2 müssen mitbetrachtet werden. Da ist am Behälter die Freistrahl-Bedingung gültig.

Durch die Konti-Gleichung an der Verzweigung hat man:

$$\rho \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4} \cdot c_D = \frac{\rho \cdot \pi \cdot {d_1}^2}{4} \cdot c_1 + \frac{\rho \cdot \pi \cdot {d_2}^2}{4} \cdot c_2 \tag{10}$$

wobei c_2 die Unbekannte ist. Man hat denn:

$$c_2 = \frac{D^2 \cdot c_D - {d_1}^2 \cdot c_1}{{d_2}^2} = 11.5226\ m/s \tag{11}$$

Jetzt kann die Bernoulli-Gleichung angewendet werden. Das Stromfaden darf nicht von die Stelle P bis die Stelle B gelegt werden! Da gilt an der Stelle 2 die Freistrahl-Bedingung. Entlang eines Stromfadens von der Stelle P und 2 hat man:

$$p_P + \rho \cdot \frac{c_D^2}{2} - \Delta p_{vD} = p_2 + \rho \cdot \frac{c_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot l_2 + \Delta p_{v2} \tag{12}$$

wobei

$$\Delta p_{v2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_2^2 \cdot (\lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2}) \tag{13}$$

die Reibungsverluste entlang des Rohres 2 sind.

Damit kann man der Druck an der Stelle 2 auswerten:

$$p_2 = p_P + \rho \cdot \frac{c_D^2}{2} \cdot (1 - \lambda_D \cdot \frac{L}{D}) - \rho \cdot g \cdot l_2 - \rho \cdot \frac{c_2^2}{2} \cdot (1 + \lambda_2 \cdot \frac{l_2}{d_2}) = 240897.00281\ Pa \tag{14}$$

Die gesuche Druck p_B gilt denn:

$$p_2 = p_B + \rho \cdot g \cdot (H - l_2) => p_B = p_2 - \rho \cdot g \cdot (H - l_2) = 93897.00281\ Pa \tag{15}$$

d) Um zu prüfen ob die Strömung in beiden Rohren laminar oder turbulent ist muss man die Reynoldszahl auf Grund der Durchmesser beides Rohres berechnen. Die sind:

$$Re_{d_1} = \frac{\mu \cdot c_1 \cdot d_1}{\rho} = \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu} = 41735.2 > 2300 \tag{16}$$

wo $\nu = \rho/\mu$. Die Strömung in dem Rohr 1 ist dann turbulent.

Analog für den zweiten Rohr:

$$Re_{d_2} = \frac{\mu \cdot c_2 \cdot d_2}{\rho} = \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu} = 806582 > 2300 \tag{17}$$

Die Strömung in dem Rohr 2 ist dann turbulent.

Aufgabe 3 (15)

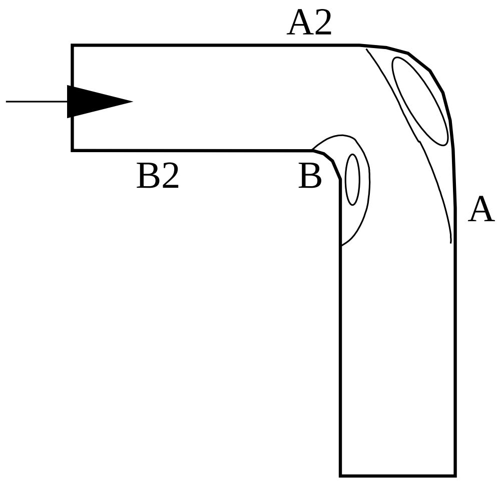


Abbildung 1: Skizze

a) Siehe Skizze. Druckanstieg in Strömungsrichtung -> Ablösung, im weiteren Verlauf Druckausgleich quer zur Strömung bei Austritt aus Krümmer.->Druck steigt an Innenwand und fällt außen wieder ab.-> Wiederanlegen etc.

b) Sekundärströmung -> Enstehen durch Zentrifugalkräfte (In der Mitte größer als Außen -> Bewegung nach Außen).

c) $\Delta p = 1/2 \cdot \rho \cdot {u^2}_{m1} \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda_{lam1} = \frac{128}{\pi} \cdot \rho \frac{\dot{V}}{D^4} \cdot \nu \cdot l$

d) laminare Strömung:

$\lambda_{lam} = \frac{64}{Re_D}$

$\Delta p = 1/2 \cdot \rho \cdot {u^2}_{m1} \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda_{lam1}$

$\Delta p_{neu} = 1/2 \cdot \rho \cdot {u^2}_{m2} \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda_{lam2}$

$\frac{\Delta p}{\Delta p_{neu}} = 2 \cdot \frac{{u^2}_{m1}}{{u^2}_{m2}} \cdot \frac{\lambda_{lam1}}{\lambda_{lam2}}$

$\frac{\Delta p}{\Delta p_{neu}} = 4 \cdot \frac{{u^2}_{m1}}{{u^2}_{m2}}$

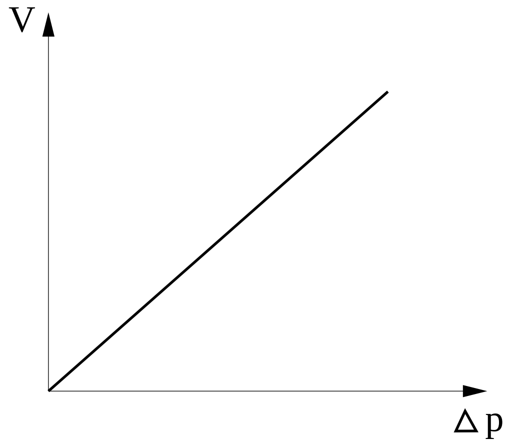
über konstanten Volumenstrom

$\dot{V}_1 = \dot{V}_2$

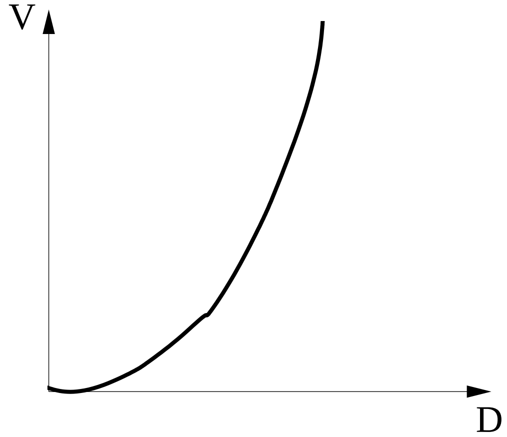
$u_{m1} = 4 \cdot u_{m2}$

$\frac{\Delta p}{\Delta p_{neu}} = 16$

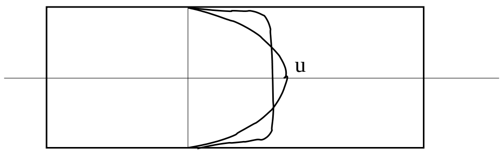
e)



f)



g)



Der Unterschied entsteht durch den zusätzlichen Längs- und Querimpulsaustausch (charakterisiert durch die zusätzlichen Terme der Reynoldsgleichung)

Aufgabe 4 (18)

- Lösung Aufgabenteil a.)

  Für das gesuchte, lineare Geschwindigkeitsprofil gilt:

$$\begin{aligned}
c_2(y) &= a \cdot |y| + b \\
c_2(y = \frac{B}{2}) &= c_{2,max} = a \cdot \frac{B}{2} + b \\
c_2(y = B) &= 0 = a \cdot B + b \\
\Rightarrow b &= -a \cdot B
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad c_{2,max} = a \cdot \frac{B}{2} - a \cdot B$$

$$\Rightarrow \quad c_{2,max} = -a \cdot \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{2 \cdot c_{max,2}}{B}$$

$$\Rightarrow \quad b = 2 \cdot c_{2,max}$$

(1) $$\underline{c_2(y) = -2 \cdot c_{2,max} \left(\frac{|y|}{B} - 1 \right)}$$

Laut Aufgabenstellung ist der Geschwindigkeitsgradient (die Ableitung der Geschwindigkeit an der Wand) an der Wand über die gesamte Messstrecke konstant. Der Geschwindigkeitsgradient an der Stelle 1 ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
c_1(y) &= \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) \cdot c_{max,1} \\
\Rightarrow \frac{\partial c_1(y)}{\partial y}|_{y=B} &= -\frac{2}{B} \cdot c_{1,max} = a \\
\Rightarrow c_{1,max} &= c_{2,max} \\
\Rightarrow c_2(y) &= -2 \cdot c_{1,max} \left(\frac{|y|}{B} - 1 \right)
\end{aligned}$$

- Lösung Aufgabenteil b.) Da die Kontinuitätsgleichung hier gilt, ist der Volumenstrom im Kanal konstant und kann sowohl an Stelle 1 als auch an Stelle 2 berechnet werden.

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_1 &= \int_{-B}^{B} c_1(y) \cdot t d(y) \\
&= t \cdot \int_{-B}^{B} c_1(y) d(y) \\
&= t \cdot \int_{-B}^{B} \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) \cdot c_{1,max} d(y) \\
&= c_{1,max} \cdot t \cdot \int_{-B}^{B} \left(1 - \frac{y^2}{B^2}\right) d(y) \\
&= c_{1,max} \cdot t \cdot \left[y - \frac{y^3}{3 \cdot B^2}\right]_{-B}^{B} \\
&= c_{1,max} \cdot t \cdot \left(2 \cdot B - \frac{2 \cdot B}{3}\right) \\
\Rightarrow \underline{\dot{V}_1} &= \underline{\frac{4}{3} \cdot c_{1,max} \cdot t \cdot B}
\end{aligned}
$$

- Lösung Aufgabenteil c.)

  Da außerhalb des Kanals Umgebungsdruck herrscht, heben sich die Kräfte sowohl in y- als auch in z-Richtung auf. Um den Widerstand des Körpers zu berechnen, betrachtet man daher nur die Impulsbilanz in x-Richtung:

$$
F_{D1} + F_{I1} + F_R + F_{D2} + F_{I2} + F_W = 0
$$

$$
\begin{aligned}
F_{D1} &= 2 \cdot p_1 \cdot t \cdot B \\
F_{D2} &= -2 \cdot p_2 \cdot t \cdot B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &= -\int\limits_{-B}^{B} \rho \cdot \vec{c}_1(y) \cdot (\vec{c}_1(y) \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}A \\
&= -\rho \cdot \int\limits_{-B}^{B} \begin{pmatrix} c_1(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} c_1(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}A \\
&= \rho \cdot t \cdot \int\limits_{-B}^{B} \vec{c}_1(y)^2 \, \mathrm{d}y \\
&= \rho \cdot t \cdot \int\limits_{-B}^{B} \left(\left(1 - \frac{y^2}{B^2} \right) \cdot c_{1,max} \right)^2 \mathrm{d}y \\
&= \rho \cdot t \cdot c_{1,max}^2 \cdot \int\limits_{-B}^{B} \left(1 - 2 \cdot \frac{y^2}{B^2} + \frac{y^4}{B^4} \right) \mathrm{d}y \\
&= \rho \cdot t \cdot c_{1,max}^2 \cdot \left[y - \frac{2}{3} \cdot \frac{y^3}{B^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{y^5}{B^4} \right]_{-B}^{B} \\
&= \rho \cdot t \cdot c_{1,max}^2 \cdot 2 \cdot \left(B - \frac{2}{3} \cdot B + \frac{1}{5} \cdot B \right) \\
&= 2 \cdot \rho \cdot t \cdot c_{1,max}^2 \cdot \frac{8}{15} \cdot B \\
\Rightarrow I_1 &= \frac{16}{15} \cdot \rho \cdot t \cdot B \cdot c_{1,max}^2
\end{aligned}
$$

$I_2 = I_{2,1} + I_{2,2} + I_{2,3}$

$$
\begin{aligned}
I_{2,1} &= -2 \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \rho \cdot \vec{c}_2(y) \cdot (\vec{c}_2(y) \cdot \vec{n}) \, \mathrm{d}A \\
&= -2 \cdot \rho \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \begin{pmatrix} c_2(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} c_2(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \mathrm{d}A \\
&= -2 \cdot \rho \cdot t \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \vec{c}_2(y)^2 \, \mathrm{d}y \\
&= -2 \cdot \rho \cdot t \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \left(\frac{c_{2,max}}{2} \right)^2 \mathrm{d}y \\
&= -2 \cdot \rho \cdot t \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \left(\frac{c_{2,max}^2}{4} \right) \mathrm{d}y \\
&= -2 \cdot \rho \cdot t \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \left(\frac{c_{1,max}^2}{4} \right) \mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot t \cdot c_{1,max}^2 \cdot \int\limits_{0}^{\frac{B}{6}} \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich für den die Widerstandskraft F_W:

$$F_W = -(F_{D1} + F_{I1} + F_R + F_{D2} + F_{I2})$$

$$\begin{aligned} F_W = & - 2 \cdot p_1 \cdot t \cdot B - \frac{16}{15} \cdot \rho \cdot t \cdot B \cdot c_{1,max}^2 \\ & + \mu \cdot t \cdot \frac{4}{B} \cdot c_{1,max} \cdot L + 2 \cdot p_2 \cdot t \cdot B \\ & + \frac{13}{12} \cdot \rho \cdot t \cdot B \cdot c_{1,max}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_W = & - 2 \cdot t \cdot B \cdot (p_1 - p_2) \\ & + \frac{1}{60} \cdot \rho \cdot t \cdot B \cdot c_{1,max}^2 \\ & + \frac{4}{B} \cdot \mu \cdot t \cdot L \cdot c_{1,max} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (15)

a)

Im Punkt 1 entsprechen die Werte denen der ungestörten Anströmung, da in der Überschallströmung keine Stromaufwirkung existiert:

$$p_1 = p_\infty$$
$$T_1 = T_\infty$$

Die Werte am Punkt 2 direkt nach dem Stoß berechnen sich aus den Stoßgleichungen:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_2}{p_\infty} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_\infty^2 - 1\right)$$
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_2}{T_\infty} = \frac{a_2^2}{a_\infty^2} = \left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_\infty^2 - 1\right)\right]\left[1 - \frac{2}{\kappa+1}\left(1 - \frac{1}{M_\infty^2}\right)\right]$$

zu:

$$p_2 = p_\infty\left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_\infty^2 - 1\right)\right]$$
$$T_2 = T_\infty\left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_\infty^2 - 1\right)\right]\left[1 - \frac{2}{\kappa+1}\left(1 - \frac{1}{M_\infty^2}\right)\right]$$

Ausgehend vom Punkt 2 berechnet sich der Staudruck aus den Isentropen-Gleichungen:

$$\frac{p_S}{p_2} = \left[\frac{\kappa-1}{2}M_2^2 + 1\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

mit:

$$M_2^2 = \frac{\kappa+1+(\kappa-1)\left(M_\infty^2-1\right)}{\kappa+1+2\kappa\left(M_\infty^2-1\right)}$$

zu:

$$p_S = p_\infty\left[1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_\infty^2 - 1\right)\right]\left[\frac{\kappa-1}{2}\frac{\kappa+1+(\kappa-1)\left(M_\infty^2-1\right)}{\kappa+1+2\kappa\left(M_\infty^2-1\right)} + 1\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Die Gesamtenthalpie bleibt über den Stoß konstant:

$$h_S = h_\infty + \frac{1}{2}u_\infty^2$$
$$c_pT_S = c_pT_\infty + \frac{1}{2}u_\infty^2 = c_pT_\infty + \frac{1}{2}M_\infty^2\kappa\Re T_\infty$$

mit:

$$\frac{\kappa \Re}{c_p} = \kappa - 1$$

folgt:

$$T_S = T_\infty \left[1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_\infty^2 \right]$$

b)

$$\frac{T_{S,max}}{T_\infty} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{\infty,max}^2$$

$$M_{\infty,max} = \sqrt{\left(\frac{T_{S,max}}{T_\infty} - 1 \right) \frac{2}{\kappa - 1}}$$

$$a := \sqrt{\kappa R T}$$

$$u = M \cdot a$$

Daraus folgt:

$$u_{\infty,max} = \sqrt{\kappa R T_\infty} M_{\infty,max} = \sqrt{\kappa R T_\infty \left(\frac{T_{S,max}}{T_\infty} - 1 \right) \frac{2}{\kappa - 1}}$$

Aufgabe 6 (19)

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen lautet:

(1) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad .$$

Die Strömung ist eben, d. h.:

(2) $$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad v = 0 \quad .$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

(3) $$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad .$$

Damit folgt aus (1):

(4) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad .$$

Die Strömung ist in z-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in z-Richtung nicht:

(5) $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad .$$

Mit den Gleichungen (2) und (5) folgt aus (4):

(6) $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 0 \quad .$$

Daraus folgt $u = \mathrm{C}$ mit der Intergrationskonstanten C. An den Wänden gilt wegen der Haftbedingung $u(z=0) = u(z=h) = 0$. Die Lösung von (6) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $u(z) = 0$.

Die dreidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

(7) $$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad ,$$

(8) $$\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) = f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad ,$$

(9) $$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad .$$

Mit Gleichung (2), (3), (5) und $u = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} \quad , \\ 0 &= f_y \quad , \\ 0 &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad . \end{aligned}$$

Die Gravitation ist nicht vernachlässigbar und wirkt in negative z-Richtung, sodass gilt $f_x = f_y = 0$ und $f_z = -\rho \cdot g$. Wegen der ausgebildeten Strömung ist w keine Funktion von z und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y. Damit gilt $w = w(x)$ und $\partial w/\partial x = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned}
(10) \qquad 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \\
(11) \qquad 0 &= 0 \quad , \\
(12) \qquad 0 &= -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \quad .
\end{aligned}$$

Gleichung (11) fällt weg. Aus Gleichung (10) ergibt sich, dass p keine Funktion von x und wegen der ebenen Strömung keine Funktion von y ist. Damit gilt $p = p(z)$ und $\partial p/\partial z = \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$. Damit ergibt sich Gleichung (12) zu:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \quad .$$

Nach einer Umformung ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot x + \mathrm{C}_1$$

Daraus folgt nach nochmaliger Integration:

$$(13) \qquad w(x) = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{x^2}{2} + \mathrm{C}_1 \cdot x + \mathrm{C}_2 \quad .$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der Platte $w(x = 0) = W_{\mathrm{P}}$ und an der rechten Wand $w(x = h) = 0$. Eingesetz in Gleichung (13) erhält man:

$$\begin{aligned}
(14) \qquad W_{\mathrm{P}} &= \mathrm{C}_2 \quad , \\
(15) \qquad 0 &= \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathrm{C}_1 \cdot h + \mathrm{C}_2 \quad .
\end{aligned}$$

Gleichung (14) in Gleichung (15) eingesetzt ergibt:

$$0 = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{h^2}{2} + \mathrm{C}_1 \cdot h + W_{\mathrm{P}} \quad .$$

Nach C_1 aufgelöst folgt:

$$(16) \qquad \mathrm{C}_1 = -\frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{h}{2} - \frac{W_{\mathrm{P}}}{h} \quad .$$

C_1 und C_2 eingesetzt in (13) ergibt:

$$w(x) = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{h \cdot x}{2} - W_{\mathrm{P}} \cdot \frac{x}{h} + W_{\mathrm{P}} \quad .$$

Damit ist erhält man für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von z:

$$(17) \qquad w(x) = \frac{h^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(\frac{x}{h} - 1 \right) + W_{\mathrm{P}} \cdot \left(1 - \frac{x}{h} \right)$$

b) Für die linke Spaltströmung gilt Gleichung (13) in entsprechender Form:

(18) $$w(x') = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{x'^2}{2} + \mathrm{C}_1 \cdot x' + \mathrm{C}_2 \quad .$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der Platte $w(x' = 0) = W_\mathrm{P}$ und an der linken Wand $w(x' = 2 \cdot h) = 0$. Eingesetz in Gleichung (18) erhält man in Analogie zu Gleichung (17):

$$w(x') = \frac{(2 \cdot h)^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{x'}{2 \cdot h} \cdot \left(\frac{x'}{2 \cdot h} - 1 \right) + W_\mathrm{P} \cdot \left(1 - \frac{x'}{2 \cdot h} \right)$$

oder

(19) $$w(x') = \frac{h^2}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{x'}{h} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x'}{h} - 1 \right) + W_\mathrm{P} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x'}{h} \right)$$

c) An der Platte muss Kräftegleichgewicht zwischen Reibung und Gewicht sein. Die Reibungskräfte werden über die Schubspannung berechnet. Man erhält hierausDie Kraft auf die obere Platte berechnet sich für ein Newtonsches Medium aus:

(20) $$F_\text{R,rechts} + F_\text{R,links} = G \quad .$$

Für den Geschwindigkeitsgradienten auf der rechten Seite erhält man aus Gleichung (17):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{h}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2} \right) - \frac{W_\mathrm{P}}{h}$$

Damit ergibt sich an der Platte für den Geschwindigkeitsgradienten:

(21) $$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(x = 0) = -\frac{h}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{W_\mathrm{P}}{h} \quad .$$

Die Reibungskraft auf die rechte Plattenseite berechnet sich dann aus

$$F_\text{R,rechts} = \tau(x = 0) \cdot L \cdot b = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}(x = 0) \cdot L \cdot b \quad .$$

mit Gleichung (21) zu:

(22) $$F_\text{R,rechts} = L \cdot b \cdot \left(-\frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{W_\mathrm{P}}{h} \right) \quad .$$

Für den Geschwindigkeitsgradienten auf der linken Seite erhält man aus Gleichung (19):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x'} = \frac{h}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) \cdot \left(\frac{x'}{h} - 1 \right) - \frac{W_\mathrm{P}}{2 \cdot h}$$

Damit ergibt sich an der Platte für den Geschwindigkeitsgradienten:

(23) $$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x'}(x' = 0) = -\frac{h}{\mu} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) - \frac{W_\mathrm{P}}{2 \cdot h} \quad .$$

Die Reibungskraft auf die linke Plattenseite berechnet sich dann aus

$$F_\text{R,links} = \tau(x' = 0) \cdot L \cdot b = \mu \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x'}(x' = 0) \cdot L \cdot b \quad .$$

mit Gleichung (21) zu:

$$F_{\mathrm{R,links}} = L \cdot b \cdot \left(-h \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{2 \cdot h} \right) \quad . \tag{24}$$

Die Gleichungen (22) und (24) in die Gleichung (20) eingesetzt liefern die Bestimmungsgleichung für den Druckgradienten.

$$L \cdot b \cdot \left(-\frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{h} \right) + L \cdot b \cdot \left(-h \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z'} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{2 \cdot h} \right) = G \quad .$$

Mit $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = \mathrm{d}p/\mathrm{d}z'$ erhält man:

$$L \cdot b \cdot \left(-\frac{h}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{h} \right) + L \cdot b \cdot \left(-h \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{2 \cdot h} \right) = G \quad .$$

Eine Umformung ergibt:

$$L \cdot b \cdot \left(-\frac{3 \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \rho \cdot g \right) - \mu \cdot \frac{3 \cdot W_{\mathrm{P}}}{2 \cdot h} \right) = G \quad .$$

Eine weitere Umformung liefert:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{G}{h \cdot L \cdot b} - \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{h^2} - \rho \cdot g \quad . \tag{25}$$

Für den Druckgradienten gilt:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{p_2 - p_1}{L} \quad .$$

Daraus folgt:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \cdot L \quad .$$

Gleichung (25) eingesetz ergibt für den Druckgradienten:

$$\Delta p = L \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{G}{h \cdot L \cdot b} + \mu \cdot \frac{W_{\mathrm{P}}}{h^2} + \rho \cdot g \right) \quad .$$

d) Bei einer inkompressiblen Strömung wird der Reynolds-Ansatz zur Beschreibung der turbulenten Strömungsgrößen verwendet. Dabei setzt sich eine Strömungsgröße aus der zeitlich gemittelten Größe plus eine Schwankungsgröße zusammen.

Der Reynolds-Ansatz für die Strömungsgrößen lautet:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \quad , \\ v &= \bar{v} + v' \quad , \\ w &= \bar{w} + w' \quad , \\ p &= \bar{p} + p' \quad . \end{aligned}$$

e) Der dreidimensionale Spannungstensor der Reynoldsschen scheinbaren Schubspannungen τ' lautet:

$$\tau' = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho \cdot \overline{u'^2} & -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'} & -\rho \cdot \overline{u' \cdot w'} \\ -\rho \cdot \overline{v' \cdot u'} & -\rho \cdot \overline{v'^2} & -\rho \cdot \overline{v' \cdot w'} \\ -\rho \cdot \overline{w' \cdot u'} & -\rho \cdot \overline{w' \cdot v'} & -\rho \cdot \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad . \tag{26}$$

f) Die Boussinesq-Annahme geht von der Annahme aus, dass die Reynoldsschen scheinbaren Schubspannung wie die eigentlichen Schubspannung aus den gemittelten Geschwindigkeit bestimmt werden können. Als Proportionalitätsfaktor tritt hierbei jedoch nicht die dynamische Viskosität auf, sondern ein Faktor der als Austauschgröße bzw. turbulente Viskosität bezeichnet wird. Dieser steht in keinem Zusammenhang mit der molekularen Viskosität. Die Boussinesq-Annahme für eine inkompressible Strömung lautet:

$$-\rho \cdot \overline{u_\mathrm{i}' \cdot u_\mathrm{j}'} = \mu_\mathrm{t} \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}_\mathrm{i}}{\partial x_\mathrm{j}} + \frac{\partial \bar{u}_\mathrm{j}}{\partial x_\mathrm{i}} \right)$$

Eingesetzt in Gleichung (26) erhält man:

$$\begin{aligned}
\tau' &= \mu_\mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= \mu_\mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & 2 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} & 2 \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad .
\end{aligned}$$

Mit den Voraussetzungen (2) und (2) ergibt sich hieraus:

$$\tau' = \mu_\mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}x} & 0 & \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Mit Gleichung (6) ergibt sich schließlich der Spannungstensor zu:

$$\tau' = \mu_\mathrm{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mathrm{d}\bar{w}}{\mathrm{d}x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

18. April 2006

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a) Das Ergebnis dieser Überprüfung sollte die Erdbeschleunigung als Ergebnis liefern. Für die x-Komponente der substantiellen Beschleunigung gilt:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Entsprechend gilt für die z-Komponente:

$$\begin{aligned} a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \\ &= -\omega \cdot V \cdot sin(\omega(t - \frac{x}{V})) + V \cdot (V \cdot sin(\omega(t - \frac{x}{V})) \cdot \frac{\omega}{V} - \frac{g}{V} \\ &= -g \end{aligned}$$

b) Die dreidimensionale Drehung reduziert sich in diesem Fall zu:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \\ &= \left(0, \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, 0 \right)^T \\ &= \left(0, -\left[\omega \cdot \ sin \left(\frac{\omega \cdot x}{V} \right) + \frac{g}{V} \right], 0 \right)^T \end{aligned}$$

c) Die entsprechende Stromlinie erhält man aus der Definition:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{u}{w}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \int \left[V \cdot cos \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right) - g \frac{x}{V} \right] dx &= \int V dz \\ \frac{-V^2}{\omega} \cdot sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right) - \frac{g \cdot x^2}{2V} &= V \cdot z + C_1 \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen aus der Aufgabenstellung ($x = 0, z = 0, t = \frac{\pi}{2\omega}$) folgt:

$$\frac{-V^2}{\omega} \cdot sin \left(\omega \cdot \left(\frac{\pi}{2\omega} \right) \right) = \frac{-V^2}{\omega} = C_1$$

Womit sich für die gesuchte Funktion ergibt:

$$z(x,t) = \frac{V}{\omega} \cdot \left[1 - sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{V} \right) \right) \right] - \frac{gx^2}{2V^2}$$

d) Für die Komponente $x(t)$ ergibt sich laut Definition:

$$\int dx = \int u \cdot dt$$

und damit:

$$x(t) = V \cdot t + C_2$$

Nach Anpassung dieser Gleichung an die Randbedingungen folgt:

$$x(t) = V \cdot t + x_P$$

Zur Bestimmung der Komponente $z(t)$ muss $x(t)$ entsprechend in $z(t)$ eingesetzt werden. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} z(t) &= \int \left[V \cdot cos \left[\omega \left(t - \frac{1}{V} \left(x_P + V \cdot t \right) \right) \right] - \frac{g}{V} \left(x_P + V \cdot t \right) \right] dt \\ &= \int \left[V \cdot cos \left(\frac{\omega \cdot x_P}{V} \right) - \frac{g}{V} \left(x_P + V \cdot t \right) \right] dt \end{aligned}$$

Die anschließende Intergration führt zu:

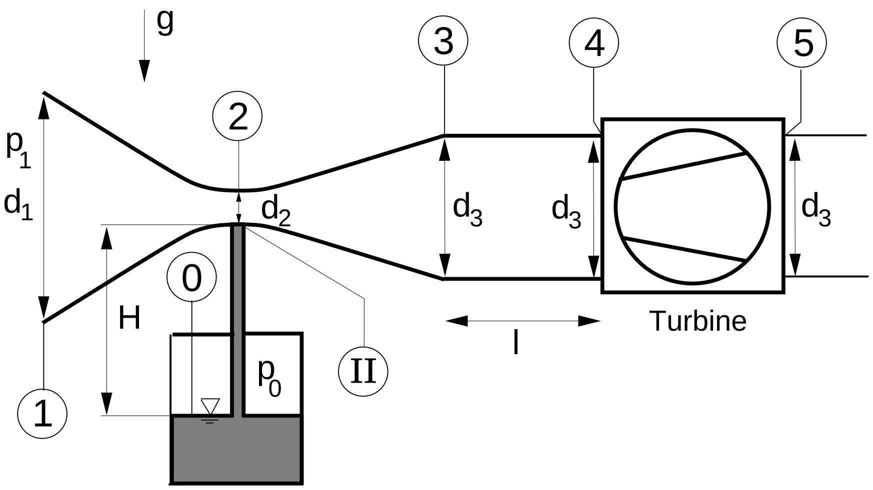
$$z(t) = -\frac{g}{2} t^2 + \left(V \cdot cos \frac{\omega \cdot x_P}{V} - \frac{g \cdot x_P}{V} \right) \cdot t + C_3$$

Da $z(t=0) = 0$ vorausgesetzt wird ist entsprechend auch $C_3 = 0$ anzunehmen.

e) Um die Gleichung der Teilchenbahn aus den Komponenten des Bahnverktors zu erhalten bietet es sich an, die Gleichung für $x(t)$ nach der Zeit t aufzulösen und dies in die Gleichung für $z(t)$ einzusetzen. Hierdurch erreicht man die gewünschte Elimination der Zeit und es folgt:

$$z(t) = -\frac{g}{2} \cdot \left(\frac{x - x_P}{V} \right)^2 + \left(V \cdot cos \frac{\omega \cdot x_P}{V} - \frac{g \cdot x_P}{V} \right) \cdot \left(\frac{x - x_P}{V} \right)$$

Lösung Aufgabe 2:



a) Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle 0 und II (s. Abb.) angewendet ergeben sich:

$$p_0 + \rho_W \cdot \frac{c_0^2}{2} = p_2 + \rho_W \cdot \frac{c_{II}^2}{2} + \rho_W \cdot g \cdot H \quad . \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit c_{II}, die der Wasser auf der Niveau H besitzt, muss Null sein. Da der Wasser genau an der Höhe H bleiben muss.

Damit gilt der Druck p_2:

$$p_2 = p_0 - \rho_W \cdot g \cdot H = 100700 \ Pa \quad . \tag{2}$$

Durch die Konti-Gleichung hat man:

$$\frac{\rho_L \cdot \pi \cdot {d_1}^2}{4} \cdot c_1 = \frac{\rho_L \cdot \pi \cdot {d_2}^2}{4} \cdot c_2 \tag{3}$$

oderist annäherend

$$c_1 = \frac{{d_2}^2}{{d_1}^2} \cdot c_2 \quad , \tag{4}$$

wobei c_1 und c_2 Unbekannten sind. Durch eine Bernoulli-Gleichung zwischen die Stelle 1 und 2 ergeben sich:

$$p_1 + \rho_L \cdot \frac{c_1^2}{2} = p_2 + \rho_L \cdot \frac{c_2^2}{2} \quad . \tag{5}$$

Beim Einsetzten der Konti-Gleichung in der Bernoulli-Gleichung ergibt sich:

$$\underline{c_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho_L} + {c_1}^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho_L \cdot (1 - \frac{{d_2}^4}{{d_1}^4})}} = \underline{27,5 \ m/s} \quad . \tag{6}$$

b) Um der Verlustbeiwert λ berechnen zu können muss zuerst die Reynoldszahl in der Rohrleitung (Strecke 3 - 4 in der Abbildung) berechnet werden. Mit der Konti-Gleichung kann man die Geschwindigkeit an der Stelle 3 berechnen:

$$c_3 = \frac{{d_2}^2}{{d_3}^2} \cdot c_2 = 20,2 \ m/s \quad . \tag{7}$$

Die Reynoldszahl in der Rohrleitung (entlag deren der Durchmesser konstant bleibt) gilt:

$$Re_{d_3} = \frac{c_3 \cdot d_3}{\nu_L} = 94112,57 < 10^5 \quad . \tag{8}$$

Für Reynoldsanzahlen im Bereich $3 \cdot 10^3 \leq Re \leq 10^5$ gilt für das λ Wert das Blasius-Gesetz

$$\lambda = \frac{0,3164}{{Re_{d_3}}^{\frac{1}{4}}} \tag{9}$$

das liefert zu einem Verlustbeiwert von

$$\underline{\lambda = 0,018} \quad . \tag{10}$$

c) Mit der Bernoulli-Gleichung entlang eines Stromfadens von der Stelle 2 bis zu der Stelle 5, unter Betrachtung der Energieabführ der Turbine und der Reibungsverluste in der Strecke 3 - 4, berechnet man die gesuchte Druck p_5:

$$p_2 + \rho_L \cdot \frac{c_2^2}{2} - \Delta l_T = p_5 + \rho_L \cdot \frac{c_5^2}{2} + \Delta p_V \quad . \tag{11}$$

In dieser Gleichung steht auf der linken Seite $-\Delta l_T$, die die spezifische Arbeit, die die Turbine pro Volumeneinheit Fluid aufnimmt, entspricht. Diese Term ist bekannt durch die Gleichung der Leistungaufnahme der Turbine:

$$L = \Delta l_T \cdot \dot{V} \quad , \tag{12}$$

wobei $\dot{V}$ der Volumenstrom durch die Turbine ist. Man hat denn:

$$\Delta l_T = \frac{L}{\dot{V}} = 64318,02\ Pa \quad . \tag{13}$$

Der Verlustterm Δp_V kann so ausgedruckt und berechnet werden:

$$\Delta p_V = \frac{1}{2} \cdot \rho_L \cdot {c_3}^2 \cdot \lambda \cdot \frac{l}{d_3} = 31,7\ Pa \quad . \tag{14}$$

Der gesuchter Druck p_5 gilt denn:

$$\underline{p_5 = 36560,07\ Pa} \quad . \tag{15}$$

Lösung Aufgabe 3:

a) aus der Kontigleichung folgt:

$$\dot{m}_{\text{ein}} = \dot{m}_{\text{aus}}$$

inkomprssibel:

$$\dot{V}_{\text{ein}} = \dot{V}_{\text{aus}}$$

$$\dot{V} = \dot{V}_{\text{aus}} = w_{\text{rel,a}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{a}} \cdot b$$

$$b = \frac{\dot{V}}{w_{\text{rel,a}} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{\text{a}}} = \frac{10\frac{l}{s}}{3\frac{m}{s}\pi 0.1m} = 2.65mm$$

b) Eulersche Turbinengleichung für stationäre Strömung oder Drehimpulsbilanz liefert:

$$M = \left(R_{\text{a}} \cdot c_{\text{abs,t,a}} - R_{\text{i}} \cdot c_{\text{abs,t,i}}\right) \dot{m}$$

axialer Einlass: $c_{\text{abs,t,i}} = 0$

$$c_{\text{abs,t,a}} = u_a = \omega \cdot R_a$$

$$c_{\text{abs,r,a}} = w_{rel,a}$$

$$M = (R_{\text{a}}^2 \cdot \omega) \cdot \dot{m} = (R_{\text{a}}^2 \cdot \omega) \cdot \rho \cdot \dot{V}$$

oder über Drehimpulssatz (ruhender Kontrollraum um das ganze Laufrad). Für den ruhenden Kontrollraum um das ganze Laufrad müssen die Absolutgeschwindigkeiten c_{abs} verwendet werden. Das Impulsmoment am Eintritt um die φ- und die z-Koordinate ist wegen der axialen Zuströmrichtung gleich 0. Das Impulsmoment am Eintritt um die r-Koordinate ist wegen der Symmetrie der Zuströmung gleich 0. Die Momente der Druckkräfte und Massenkräfte heben sich aus Symmetriegründen auf. bzw. der entsprechende Hebelarm ist gleich 0. Damit tritt als äußere Kraft nur das Moment von der Welle auf den Kontrollraum auf, welches das gesucht Wellendrehmoment $\vec{M}$ ist. Damit ergibt sich:

$$\vec{M} = -\vec{M}_{\text{I,a}} = \int_{A_{\text{a}}} \rho \cdot (\vec{r}_{\text{a}} \times \vec{v}_{\text{a}}) \cdot (\vec{v}_{\text{a}} \bullet \vec{n}_{\text{a}}) \cdot \mathrm{d}A \quad .$$

In Zylinderkoordinaten r, φ, z folgt für die Vektoren:

$$\vec{r}_{\text{a}} = \begin{pmatrix} R_{\text{a}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_{\text{a}} = \begin{pmatrix} c_{\text{abs,r,a}} \\ c_{\text{abs,t,a}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{\text{rel,a}} \\ u_{\text{a}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{n}_{\text{a}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

$$\vec{M} = \int_{A_{\text{a}}} \rho \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R_{\text{a}} \cdot u_{\text{a}} \end{pmatrix} \cdot w_{\text{rel,a}} \cdot \mathrm{d}A \quad .$$

$$M = \int_{A_{\text{a}}} \rho \cdot (R_{\text{a}} \cdot u_{\text{a}}) \cdot w_{\text{rel,a}} \cdot \mathrm{d}A = \rho \cdot (R_{\text{a}} \cdot u_{\text{a}}) \cdot w_{\text{rel,a}} \cdot A_{\text{a}} = \rho \cdot R_{\text{a}} \cdot u_{\text{a}} \cdot \dot{V} \quad .$$

$$M = \rho \cdot R_{\text{a}}^2 \cdot \omega \cdot \dot{V} \quad .$$

$$\omega = 2\pi n = 2\pi 3540 min^{-1} = 2\pi \frac{3540}{60} \frac{1}{s}$$

$$M = \left(0.05^2 m^2 \frac{3540}{60} \frac{1}{s} 2\pi\right) 1000 \frac{kg}{m^3} 10 \cdot 10^{-3} \frac{m^3}{s}$$

$$M = 37.06 \frac{kgm^2}{s^2} = 9.27Nm$$

c) Bernoulli-Gleichung im Absolutsystem:

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_{abs,i}^2 + p_i = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_{abs,a}^2 + p_a - \Delta l_{\mathrm{P}}$$

$$\Delta p = p_a - p_i = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_{abs,i}^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_{abs,a}^2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left(c_{abs,i}^2 - c_{abs,a}^2\right) + \Delta l_{\mathrm{P}}$$

$$c_{abs,i} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot R_i^2}$$

$$\Delta l_{\mathrm{P}} = \frac{L}{\dot{V}} = \frac{M \cdot \omega}{\dot{V}} = \frac{M \cdot 2 \cdot \pi \cdot n}{\dot{V}}$$

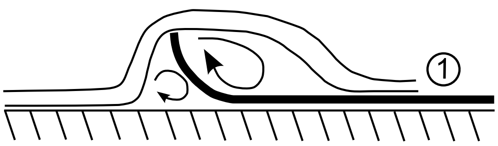
$$c_{abs,a}^2 = w_{rel,a}^2 + u_a^2 = w_{rel,a}^2 + (\omega \cdot R_a)^2 = w_{rel,a}^2 + (2 \cdot \pi \cdot n \cdot R_a)^2$$

$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left[\left(\frac{\dot{V}}{\pi \cdot R_i^2}\right)^2 - w_{rel,a}^2 - (2 \cdot \pi \cdot n \cdot R_a)^2\right] + \rho \cdot (2 \cdot \pi \cdot n \cdot R_a)^2$$

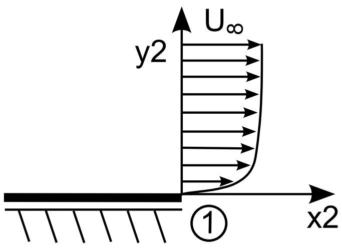
$$\Delta p = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \left[\left(\frac{\dot{V}}{\pi \cdot R_i^2}\right)^2 - w_{rel,a}^2 + (2 \cdot \pi \cdot n \cdot R_a)^2\right] = 247000\ N/m^2 = 2,47 bar$$

Lösung Aufgabe 4:

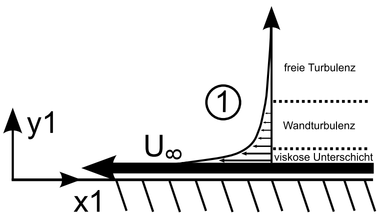
a)



b) Haftbedingung an der Wand, U_∞ ausserhalb der Grenzschicht.



c) Der Ski bewegt sich mit der Geschwindigkeit U_∞. Damit ist die Geschwindigkeit der Wand gleich U_∞. Ausserhalb der Grenzschicht ist $\bar{u_2}(y_2) = 0$.



d) Der Ski bewegt sich mit der Geschwindigkeit U_∞. Damit ist die Geschwindigkeit der Wand gleich U_∞. Ausserhalb der Grenzschicht ist $\bar{u_2}(y_2) = 0$.

Die Höhe h des Skis ist gegeben. Damit ist $y_2 = y_1 + h$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow u_2(y_2) &= -U_\infty + U_\infty \cdot \left(\frac{y_1}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \\
\Rightarrow u_2(y_2) &= -U_\infty + U_\infty \cdot \left(\frac{y_2 - h}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \\
\Rightarrow u_2(y_2) &= U_\infty \cdot (\left(\frac{y_2 - h}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} - 1)
\end{aligned}$$

e) Für τ_w gilt:

$$\tau_t(y_2) = -\rho \cdot \overline{u' \cdot v'} = \mu_t \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

Für den Wirbelviskosität gilt nach Prandtl:

$$\begin{aligned}
\mu_t &= \rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \\
\Rightarrow \tau_t(y_2) &= \rho \cdot l^2 \cdot \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right| \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right) \\
\Rightarrow \tau_t(y_2) &= \rho \cdot l^2 \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar{u_2}}{\partial y_2}\right) &= \frac{U_\infty}{7 \cdot \delta^{1/7}} \cdot y_2^{\frac{-6}{7}} \\
\left(\frac{\partial \bar{u_2}}{\partial y_2}\right)^2 &= \frac{U_\infty^2}{49 \cdot \delta^{2/7}} \cdot y_2^{\frac{-12}{7}} \\
\Rightarrow \tau_t(y_2) &= \rho \cdot (0,41)^2 \cdot y_2^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{49 \cdot \delta^{2/7}} \cdot y_2^{\frac{-12}{7}} \\
\Rightarrow \tau_t(y_2) &= \rho \cdot (0,41)^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{49 \cdot \delta^{2/7}} \cdot y_2^{\frac{2}{7}}
\end{aligned}$$

f) Das logarithmische Wandgesetz gilt für $y+ \geq 26$.

$$\begin{aligned}
u^+ &= \frac{1}{k} \cdot \ln(y^+) + 5,5 \\
y^+ &= \frac{y_2 \cdot u_\tau}{\nu} \\
\Rightarrow u^+ &= \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{y_2 \cdot u_\tau}{\nu}\right) + 5,5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_w &= \tau_t(y_2 = \Delta) = \rho \cdot (0,41)^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{49 \cdot \delta^{2/7}} \cdot y_2^{\frac{2}{7}} = \rho \cdot (0,41)^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{49 \cdot \delta^{2/7}} \cdot \Delta^{\frac{2}{7}} \\
&= \rho \cdot (0,41)^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{49 \cdot \delta^{2/7}} \cdot (0.015 \cdot \delta)^{\frac{2}{7}} = \rho \cdot (0,41)^2 \cdot \frac{U_\infty^2}{49} \cdot 0.015^{\frac{2}{7}} \\
\Rightarrow \tau_w &= 0,001 \cdot \rho \cdot U_\infty^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = \sqrt{0,001 \cdot U_\infty^2} \\
\Rightarrow u^+ &= \frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{y_2 \cdot \sqrt{0,001 \cdot U_\infty^2}}{\nu}\right) + 5,5
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 5:

a) Für die ideal ausgerichtete Lavaldüse gilt: $p_1 = p_u = 1,01bar$

$$\frac{p_1}{p_K} = \frac{1}{(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \qquad \Rightarrow \underline{p_K = 7,9bar}$$

$$\rho_K = \frac{p_K}{R\cdot T_K} \qquad \Rightarrow \underline{\rho_K = 5,5kg/m^3}$$

Der Massenstrom $\dot{m}$ wird an der Stelle 1 berechnet:

$$\frac{T_1}{T_K} = \frac{1}{(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2)} \qquad \Rightarrow T_1 = 277,78K$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R\cdot T_1} \qquad \Rightarrow \rho_1 = 1,267kg/m^3$$

$$a_1 = \sqrt{\kappa\cdot R\cdot T_1} \qquad \Rightarrow a_1 = 334,08m/s$$

$$c_1 = M_1\cdot a_1 \qquad \Rightarrow c_1 = 668,16m/s$$

$$A = \pi\cdot r^2 \qquad \Rightarrow A = 50,265cm^2$$

$$\dot{m}_1 = \rho_1\cdot c_1\cdot A_1 \qquad \Rightarrow \underline{\dot{m} = 4,25kg/s}$$

b)

$$\frac{A_1}{A^*} = \frac{1}{M_1}\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\cdot(M_1^2-1)\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \qquad \Rightarrow A^* = 29,79cm^2$$

$$\Rightarrow \underline{r^* = 3,08cm}$$

c) Da im engsten Querschnitt die Machzahl $M = 1$ ist, gilt die in Aufgabenteil b) verwendete Flächengleichung für die eindimensionale, isentrope Strömung. Danach ist die Machzahl einzig von der Geometrie der Düse abhängig.
Es gilt: $M_s = M_1$

$$p_u = 1,01bar$$

$$\frac{p_u}{p_S} = 1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\left(M_1^2-1\right) \qquad \Rightarrow p_S = 0,224bar$$

$$\frac{p_S}{p_K} = \frac{1}{(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \qquad \Rightarrow \underline{p_K = 1,753bar}$$

$$\rho_K = \frac{p_K}{R\cdot T_K} \qquad \Rightarrow \underline{\rho_K = 1,22kg/m^3}$$

Der Massenstrom $\dot{m}$ wird an der Stelle S unmittelbar vor dem Stoß berechnet:
Da sich die Ruhetemperatur T_K und die Machzahl $M_S = M_1 = 2$ nicht ändern, bleiben die

Schallgeschwindigkeit und somit auch Ausströmgeschwindigkeit konstant.
Es gilt: $c_{\mathrm{S}} = c_1 = \ 668,16\ m/s$

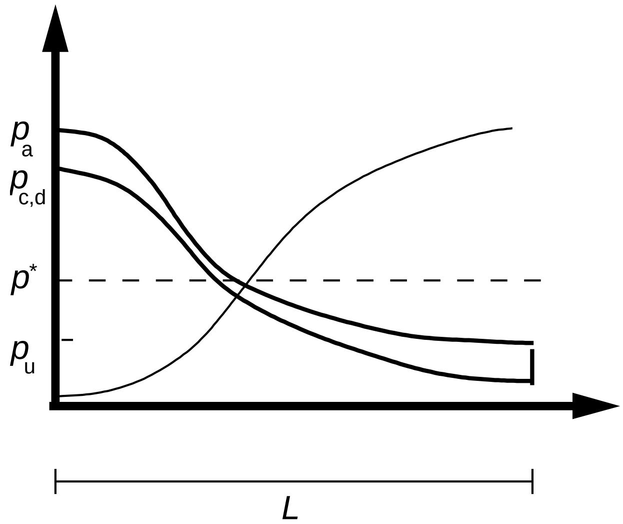
$$\frac{\rho_{\mathrm{S}}}{\rho_{\mathrm{K}}} = \frac{1}{(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_{\mathrm{S}}^2)^{\frac{1}{\kappa-1}}} \qquad \Rightarrow \rho_{\mathrm{S}} = \ 0,28\ kg/m^3$$

$$\dot{m} = \rho_{\mathrm{S}} \cdot c_{\mathrm{S}} \cdot A_1 \qquad \Rightarrow \underline{\dot{m} = \ 0,94\ kg/s}$$

d) Der Druck am Ende der Düse ist gleich der der Umgebung: $\underline{p_{\mathrm{S}} = p_u = 1,01 bar}$

$${M_{\mathrm{S}}'}^2 = \frac{1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}(M_{\mathrm{S}}^2-1)}{1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}(M_{\mathrm{S}}^2-1)} \qquad \Rightarrow \underline{M_{\mathrm{S}}' = 0,577}$$

e) Am Ende der Düse stellt sich für beide Düsenkonfigurationen der gleiche Umgebungsdruck p_{u} ein. Da ein Verdichtungsstoß immer eine Druckerhöhung bewirkt muss der Druck aus Aufgabenteil c), d) im Kessel und entlang der Düse vor dem Stoß geringer sein, als der aus Aufgabe a). Zudem gilt, dass das Verhältnis zum Druck p^* im engsten Querschnitt nur von der Machzahl abhängt. Da diese konstant bleibt, ist auch dort der Druck aus c),d) geringer.



f)

$$\underline{p_3 = p_u = 1,01 bar}$$

$$\frac{p_3}{p_{\mathrm{S}}'} = \left(\frac{1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_{\mathrm{S}}'^2}{1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_3^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \qquad \Rightarrow p_{\mathrm{S}}' = 1,229 bar$$

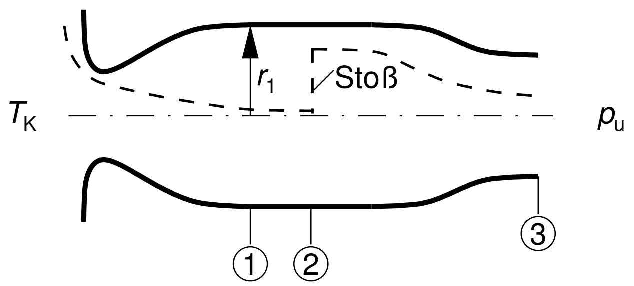
$$\frac{p_{\mathrm{S}}'}{p_{\mathrm{S}}} = 1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_{\mathrm{S}}^2-1\right) \qquad \Rightarrow p_{\mathrm{S}} = 0,273 bar$$

$$\frac{p_{\mathrm{S}}}{p_K} = \frac{1}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \qquad \Rightarrow \underline{p_K = 2,136 bar}$$

$$\frac{A'_S}{A_3} = \frac{M_3}{M'_S} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+2} \cdot (M'_S - 1)}{1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+2} \cdot (M_3 - 1)} \right)^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}} \qquad \Rightarrow A_3 = 42,88cm^2$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{A_3}{\pi}} \qquad \Rightarrow \underline{r_3 = 3,69cm}$$

g)



Lösung Aufgabe 6:

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad . \tag{1}$$

Die Strömung ist in y-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in y-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad . \tag{2}$$

Die Strömung ist in z-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in z-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \quad . \tag{3}$$

Mit den Gleichungen (2) und (3) folgt aus (1):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0 \quad . \tag{4}$$

Daraus folgt $u = \mathrm{C}$ mit der Intergrationskonstanten C. An den Wänden gilt die Haftbedingung $u(x=0)=w(x=h)=0$. Die Lösung von (4) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $\underline{u(x)=0}$.

b) Die dreidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen bei konstanter dynamischer Zähigkeit lauten:

$$\begin{aligned}
\rho\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right) &= f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad ,\\
\rho\cdot\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}\right) &= f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \quad ,\\
\rho\cdot\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right) &= f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (2), (3), und $u=0$ folgt:

$$0 = f_x-\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \tag{5}$$

$$\rho\cdot\frac{\partial v}{\partial t} = f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , \tag{6}$$

$$\rho\cdot\frac{\partial w}{\partial t} = f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad . \tag{7}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}=0 \quad . \tag{8}$$

Die Gravitation wirkt nur in negative z-Richtung, sodass gilt $f_x=f_y=0$ und $f_z=-\rho\cdot g$. Damit und mit Gleichung (8) folgt aus den Gleichungen (5) - (7):

$$0 = frac\partial p\partial x \quad , \tag{9}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , \tag{10}$$

$$0 = -\rho\cdot g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad . \tag{11}$$

Aus Gleichung (10) folgt $\partial p/\partial y = konst. = \mathrm{C}_1$. Wegen der Rotationssymmetrie kann sich der Druck in y-Richtung nicht ändern, sodass die Konstante zu Null wird und es gilt $\partial p/\partial y = 0$. Damit ist der Druck keine Funktion von y. Gleichzeitig ist der Druck wegen den Gleichungen (8) und (9) keine Funktion von t und x. Damit gilt $p = p(z)$ und $\partial p/\partial z = \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$. Eingesetzt in die Gleichungen (9) - (11) erhält man:

$$0 = 0 \quad , \tag{12}$$

$$0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad , \tag{13}$$

$$0 = -\rho \cdot g - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad . \tag{14}$$

Gleichung (12) fällt weg. Wegen der Gleichungen (2), (3) und (8) sind die Geschwindigkeiten v und w keine Funktionen von y, z und t. Damit gilt $v = v(x)$ und $w = w(x)$ und somit auch $\partial v/\partial x = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$ und $\partial w/\partial x = \mathrm{d}w/\mathrm{d}x$. Mit den Gleichungen (13) und (14) erhält man dann:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = 0 \quad , \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \quad . \tag{16}$$

Die zweimalige Integration von Gleichung (15) ergibt:

$$v(x) = \mathrm{C}_2 \cdot x + \mathrm{C}_3 \quad . \tag{17}$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der Welle $v(x = 0) = \omega \cdot R$ und an der Lagerwand $v(x = h) = 0$. Eingesetz in Gleichung (17) erhält man:

$$\omega \cdot R = \mathrm{C}_3 \quad , \tag{18}$$

$$0 = \mathrm{C}_2 \cdot h + \mathrm{C}_3 \quad . \tag{19}$$

Gleichung (18) minus Gleichung (19) ergibt:

$$\mathrm{C}_2 = -\frac{\omega \cdot R}{h} \quad .$$

Die Konstanten in die Gleichung (17) eingesetzt führt zur Lösung:

$$\underline{v(x) = \omega \cdot R \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)} \quad . \tag{20}$$

Die zweimalige Integration von Gleichung (16) ergibt:

$$w(x) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot x^2 + \mathrm{C}_4 \cdot x + \mathrm{C}_5 \quad . \tag{21}$$

Die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der Welle $w(x = 0) = 0$ und an der Lagerwand $w(x = h) = 0$. Eingesetz in Gleichung (21) erhält man:

$$0 = \mathrm{C}_5 \quad , \tag{22}$$

$$0 = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot h^2 + \mathrm{C}_4 \cdot h + \mathrm{C}_5 \quad . \tag{23}$$

Gleichung (22) in Gleichung (23) eingesetzt und nach C_4 aufgelöst ergibt:

$$\mathrm{C}_4 = -\frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot h \quad .$$

Die Konstanten in die Gleichung (21) eingesetzt führt auf:

$$w(x) = \frac{h^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot \left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{x}{h}\right] \quad . \tag{24}$$

Für den Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ folgt nach Gleichung (18) $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = konst.$. Mit den Randbedingungen $p(z=0) = p_1$ und $p(z=L) = p_2$ folgt hieraus:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{p_2 - p_1}{L} \quad .$$

Dieses in Gleichung (24) eingesetzt führt schließlich zur Lösung:

$$w(x) = \frac{h^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{p_2 - p_1}{L}\right) \cdot \left[\left(\frac{x}{h}\right)^2 - \frac{x}{h}\right] \quad ,$$

$$\underline{w(x) = \frac{h^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{p_1 - p_2}{L} - \rho \cdot g\right) \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right)} \quad , \tag{25}$$

c) Die dreidimensionale Energiegleichung lautet:

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial e}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right]\right)$$
$$-p \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + \rho \cdot \dot{q}_{\mathrm{s}} + \mu \cdot \left(2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) \quad .$$

Mit keiner Wärmezu -oder abfuhr $\dot{q}_{\mathrm{s}} = 0$, $u = 0$ und den Gleichungen (2), (3) und (8) folgt daraus:

$$\rho \cdot \left(v \cdot \frac{\partial e}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial e}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right]\right)$$
$$+\mu \cdot \left(2 \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \quad .$$

Für ein inkompressibles Medium gilt $e = c_v \cdot T$ mit $c_v =$ konst.. Damit ergibt sich:

$$\rho \cdot c_v \cdot \left(v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z}\right]\right)$$
$$+\mu \cdot \left(\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right) \quad . \tag{26}$$

Die Temperaturverteilung ist in y- und z-Richtung ausgebildet, daraus folgt $\partial T/\partial y = \partial T/\partial z = 0$. Hieraus und mit Gleichung (8) folgt das die Temperatur nur ein Funktion von x ist: $T = T(x)$ und damit gilt auch $\lambda = \lambda(x)$. Damit gilt $\partial T/\partial x = \mathrm{d}T/\mathrm{d}x$. Eingesetzt in Gleichung (26) erhält man:

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] + \mu \cdot \left(\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right) \quad .$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] = -\mu \cdot \left(\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\right) \quad .$$

Mit $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x \gg \mathrm{d}w/\mathrm{d}x$ erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] = -\mu \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)^2 \quad . \tag{27}$$

Aus Gleichung (20) ergibt sich $\mathrm{d}v/\mathrm{d}x = -\omega \cdot R/h$. In Gleichung (27) eingesetzt ergibt sich:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right] = -\mu \cdot \left(\frac{\omega \cdot R}{h}\right)^2 \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$\lambda \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\mu \cdot \left(\frac{\omega \cdot R}{h}\right)^2 \cdot x + \mathrm{C}_6 \quad .$$

Mit der gegebenen Beziehung $\lambda = \lambda_0 \cdot T/T_0$ ergibt sich:

$$\lambda_0 \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\mu \cdot \left(\frac{\omega \cdot R}{h}\right)^2 \cdot x + \mathrm{C}_6 \quad ,$$

oder

$$T \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mu \cdot T_0}{\lambda_0} \cdot \left(\frac{\omega \cdot R}{h}\right)^2 \cdot x + \mathrm{C}_7 \quad . \tag{28}$$

Wegen der adiabaten Lagerwand gilt als Randbedingung $\mathrm{d}T/\mathrm{d}x(x = h) = 0$. Damit folgt aus Gleichung (28):

$$\mathrm{C}_7 = \frac{\mu \cdot T_0}{\lambda_0 \cdot h} \cdot (\omega \cdot R)^2 \quad .$$

Eingesetzt in Gleichung (28) ergibt sich:

$$T \cdot \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu \cdot T_0}{\lambda_0 \cdot h} \cdot (\omega \cdot R)^2 \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad .$$

Die Integration dieser Gleichung führt auf:

$$\frac{1}{2} \cdot T^2 = \frac{\mu \cdot T_0}{\lambda_0} \cdot (\omega \cdot R)^2 \cdot \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{h^2}\right) + \mathrm{C}_8 \quad . \tag{29}$$

Mit der Randbedingung der Temperatur an der Welle $T(x = 0) = T_\mathrm{W}$ folgt daraus für die Integrationskonstante:

$$\mathrm{C}_8 = \frac{1}{2} \cdot T_\mathrm{W}^2 \quad .$$

Eingesetzt in Gleichung (29) erhält man:

$$\frac{1}{2} \cdot T^2 = \frac{\mu \cdot T_0}{\lambda_0} \cdot (\omega \cdot R)^2 \cdot \left(\frac{x}{h} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{h^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot T_\mathrm{W}^2 \quad .$$

Nach T aufgelöst erhält man für die Temperaturverteilung im Spalt:

$$\underline{T(x) = \sqrt{T_\mathrm{W}^2 + \frac{\mu \cdot T_0}{\lambda_0} \cdot (\omega \cdot R)^2 \cdot \frac{x}{h} \cdot \left(2 - \frac{x}{h}\right)}} \quad .$$

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

06. Oktober 2006

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a) Die entsprechende Gleichung für die Stromlinie erhält man aus der Definition:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{-e^{-x} sin(\omega t)}{A} \\ \int dy &= -\frac{sin(\omega t)}{A} \cdot \int e^{-x} dx \\ y &= \frac{sin(\omega t)}{A} e^{-x} + C_1 \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen: $t = 2\ s$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ ergibt sich für den Integradtionskoeffizienten C_1:

$$y(t = 2\ s) = 0 + C_1 = y_2$$

Somit lautet die zu bestimmende Stromlinie:

$$y(x,t) = \frac{sin(\omega t)}{A} e^{-x} + y_2$$

b) Mit der Definition der Bahnlinie

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

ergibt sich für die x- Komponente:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u = A \\ \int dx &= \int A dt \\ x(t) &= At + C_2 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung folgt:

$$\begin{aligned} x(t = 0\ s) &= 0 = C_2 \\ x(t) &= At \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis wird benötigt, um die y- Komponente zu ermitteln:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -e^{-x} sin(\omega t) \\ &= -e^{-At} sin(\omega t) \\ \int dy &= \int -e^{-At} sin(\omega t) dt \end{aligned}$$

Das zu berechnende Integral lässt sich durch zweimalige Anwendung der partiellen Integration ermitteln:

$$\begin{aligned} \int -e^{-At} sin(\omega t) dt &= \frac{1}{A} e^{-At} sin(\omega t) - \int \frac{1}{A} e^{-At} \omega cos(\omega t) dt \\ &= \frac{1}{A} e^{-At} sin(\omega t) + \frac{1}{A^2} e^{-At} \omega cos(\omega t) + \int \frac{\omega^2}{A^2} e^{-At} sin(\omega t) dt \\ \left(1 + \frac{\omega^2}{A^2}\right) \cdot \int -e^{-At} sin(\omega t) dt &= \frac{1}{A} e^{-At} sin(\omega t) + \frac{1}{A^2} e^{-At} \omega cos(\omega t) \\ \int -e^{-At} sin(\omega t) dt &= \left(\frac{1}{\omega^2 + A^2}\right) e^{-At} \left(A sin(\omega t) + \omega cos(\omega t)\right) \end{aligned}$$

Damit für die Bahnline $y(t)$:

$$y(t) = \left(\frac{1}{\omega^2 + A^2}\right) e^{-At} \left(Asin(\omega t) + \omega cos(\omega t)\right) + C_3$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen

$$\begin{aligned} y(t = 0\ s) &= \frac{\omega}{\omega^2 + A^2} + C_3 = 0 \\ C_3 &= -\frac{\omega}{\omega^2 + A^2} \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{1}{\omega^2 + A^2}\right) e^{-At} \left(Asin(\omega t) + \omega cos(\omega t)\right) - \frac{\omega}{\omega^2 + A^2} \\ &= \left(\frac{1}{\omega^2 + A^2}\right) \left(e^{-At} \left(Asin(\omega t) + \omega cos(\omega t)\right) - \omega\right) \end{aligned}$$

c) Durch substantielles differenzieren der Geschwindigkeitskomponenten u 8und v erhält man für die entsprechenden Komponenten

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \\ b_y &= \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

Mit $\partial u/\partial t = 0$, $\partial u/\partial x = 0$ und $\partial u/\partial y = 0$ ergibt sich für die x- Komponente:

$$b_x = 0$$

Mit $\partial v/\partial t = -e^{-x}\omega cos(\omega t)$, $u\partial v/\partial x = Ae^{-x}sin(\omega t)$ und $v\partial u/\partial y = 0$ ergibt sich für die y-Komponente:

$$b_y = -e^{-x}\omega cos(\omega t) + Ae^{-x}sin(\omega t)$$

d) Die Drehung in der $x-, y-$ Ebene ist wie folget definiert:

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Somit ergibt sich für das Strömungsfeld:

$$\Omega = e^{-x}sin(\omega t)$$

Lösung Aufgabe 2:

a) Energiegleichung über die Pumpe (laut Aufgabenstellung arbeitet die Pumpe verlustfrei!):

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + p_1 = \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 - \Delta l_p \tag{1}$$

Aus dem vorgegebenen Volumenstrom und dem gegebenen Durchmesser ergibt sich die Geschwindigkeit c_1 zu:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= c_1 \cdot A_1 \\ \Rightarrow \underline{c_1} &= \underline{0,09}\ \frac{m}{s} \end{aligned} \tag{2}$$

Aus der Massenerhaltung folgt:

$$\dot{V} = konst = c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2 \tag{3}$$

Da sich der Querschnitt des Rohres nicht ändert, ergibt sich:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 \\ \Rightarrow \underline{c_2} &= \underline{0,09}\ \frac{m}{s} \end{aligned} \tag{4}$$

Damit ergibt sich für die Energiegleichung:

$$p_1 = p_2 - \Delta l_p \tag{5}$$

Die Leistung der Pumpe ist mit $L = 0,06\ KW$ gegeben. Für die Energiegleichung benötigt man jedoch die spezifische Pumpenenergie Δl_p. Diese berechnet sich aus:

$$L = \dot{V} \cdot \Delta l_p \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta l_p &= \frac{L}{\dot{V}} \\ \Rightarrow \underline{\Delta l_p} &= \underline{50.000}\ \frac{kg}{m \cdot s^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Damit ergibt sich der Druck p_2 nach der Pumpe zu:

$$\underline{p_2} = 180.000\ \frac{kg}{m \cdot s^2} = \underline{1,8\ bar} \tag{8}$$

b) Aufgrund der Volumenerhaltung gilt:

$$\begin{aligned} c_2 \cdot A_2 &= c_u \cdot A_u + c_o \cdot A_o \\ c_5 \cdot A_5 &= c_u \cdot A_u + c_o \cdot A_o \end{aligned}$$

Da $A_2 = A_5$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_2 &= c_5 \\ \Rightarrow \underline{c_5} &= \underline{0,09}\ \frac{m}{s} \end{aligned} \tag{9}$$

Die Reynoldszahl ergibt sich zu

$$Re_1 = Re_2 = \frac{c_2 \cdot D_2}{\nu} = 7.800 \tag{10}$$

Somit ergibt sich der Reibungsbeiwert

$$\underline{\lambda_1} = \underline{\lambda_2} = \frac{0,3164}{Re_1^{1/4}} = \underline{0,034} \tag{11}$$

c) Es gibt 2 Möglichkeiten um von ② nach ⑤ zu kommen. Man benötigt beide Bernoulli-Gleichungen, um den Druck p_5 bestimmen zu können.

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 - \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot L}{D_2} = \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 + p_5 + \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot L}{D_5} + \rho \cdot g \cdot H + \frac{\rho}{2} c_u^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right) \quad (12)$$

$$\frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + p_2 - \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot L}{D_2} = \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 + p_5 + \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot L}{D_5} + \rho \cdot g \cdot H + \frac{\rho}{2} c_o^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right) \quad (13)$$

Subtrahiert man Gleichung 12 von 13 erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{2} c_o^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right) &= \frac{\rho}{2} c_u^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right) \\
c_o^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right) &= c_u^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right) \\
\Rightarrow c_u^2 &= c_o^2 \cdot \frac{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right)}{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right)} \\
\Rightarrow c_u &= c_o \cdot \sqrt{\frac{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right)}{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right)}} \quad (14)
\end{aligned}$$

Aus der Volumenerhaltung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= konst \\
\Rightarrow c_2 \cdot A_2 &= c_u \cdot A_u + c_o \cdot A_o \\
\Rightarrow c_2 \cdot \pi \cdot \frac{D_2^2}{4} &= c_u \cdot \pi \cdot \frac{D_u^2}{4} + c_o \cdot \pi \cdot \frac{D_o^2}{4} \\
\Rightarrow c_2 \cdot D_2^2 &= c_u \cdot D_u^2 + c_o \cdot D_o^2 \quad (15)
\end{aligned}$$

Setzt man Gleichung 14 in Gleichung 15 ein, ist die resultierende Gleichung nur noch von c_4 abhängig.

$$\begin{aligned}
c_2 \cdot D_2^2 &= c_o \cdot \sqrt{\frac{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right)}{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right)}} \cdot D_u^2 + c_o \cdot D_o^2 \quad (16) \\
\Rightarrow c_2 \cdot D_2^2 &= c_o \cdot \left(D_o^2 + D_u^2 \cdot \sqrt{\frac{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right)}{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right)}} \right) \\
\Rightarrow c_o &= \frac{c_2 \cdot D_2^2}{D_o^2 + D_u^2 \cdot \sqrt{\frac{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{split} + \frac{\lambda_o \cdot L_o}{D_o} \right)}{\left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u} \right)}}} \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_o = \frac{0,001521\ \frac{m^3}{s}}{0,0009\ m^2 + 0,01\ m^2 \cdot \sqrt{\frac{0,2+9,3+3,2}{0,2+5+1,5}}}$$

$$\Rightarrow c_o = \frac{0,001521\ \frac{m^3}{s}}{0,0009\ m^2 + 0,013768\ m^2}$$

$$\Rightarrow \underline{c_o} = \underline{0,1037}\ \frac{m}{s} \tag{18}$$

$$\Rightarrow c_u = \frac{c_2 \cdot A_2 - c_o \cdot A_o}{A_u}$$

$$\Rightarrow \underline{c_u} = \underline{0,1428}\ \frac{m}{s} \tag{19}$$

Der Druck nach der Vereinigung läßt sich nun entweder aus Gleichung 12 oder 13 berechnen.

$$p_5 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 - \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot L}{D_2} - \\ \left[\frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot L}{D_5} + \rho \cdot g \cdot H + \frac{\rho}{2} c_u^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u}\right)\right]$$

$$\Rightarrow p_5 = p_2 - \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 \cdot \frac{\lambda_1 \cdot L}{D_2} - \frac{\rho}{2} \cdot c_5^2 \cdot \frac{\lambda_2 \cdot L}{D_5} \\ -\rho \cdot g \cdot H - \frac{\rho}{2} c_u^2 \cdot \left(\zeta_{kr} + \zeta_{mix} + \frac{\lambda_u \cdot L_u}{D_u}\right)$$

$$\Rightarrow p_5 = 1,8\ bar - 1\ \frac{kg}{ms^2} - 4905\ \frac{kg}{ms^2} - 2\ \frac{kg}{ms^2} - 51\ \frac{kg}{ms^2} - 15\ \frac{kg}{ms^2}$$

$$\Rightarrow \underline{p_5} = \underline{1,75}\ bar \tag{20}$$

d) **Reynoldszahl im Rohr ③**:

$$Re_3 = \frac{c_u \cdot D_u}{\nu} = 9.518 \tag{21}$$

$Re_u > Re_{krit} = 2.300$
$\Rightarrow$ turbulente Strömung im unteren Rohr.

Reynoldszahl im Rohr ④:

$$Re_4 = \frac{c_o \cdot D_o}{\nu} = 2.074 \tag{22}$$

$Re_o < Re_{krit} = 2.300$
$\Rightarrow$ laminare Strömung im oberen Rohr.

Lösung Aufgabe 3:

a)

$$F_{x,a} = B \int_h^{H_1} p_{rel}(z) dz$$

$$p_{rel}(z) = \rho \cdot g \cdot (H_1 - z)$$

$$F_{x,a} = B \int_h^{H_1} \rho \cdot g \cdot (H_1 - z) dz$$

$$F_{x,a} = B \cdot \left[\rho \cdot g \cdot H_1 z - \frac{1}{2} \rho \cdot g \cdot z^2 \right]_h^{H_1}$$

$$F_{x,a} = \frac{1}{2} B \cdot \rho \cdot g \cdot (H_1 - h)^2$$

$$F_{x,a} = 306,562 kN$$

b)

$$M_{y,G} = B \int_0^h p_{rel} \cdot z dz = B \int_0^h \rho \cdot g \cdot (H_1 - z) \cdot z dz$$

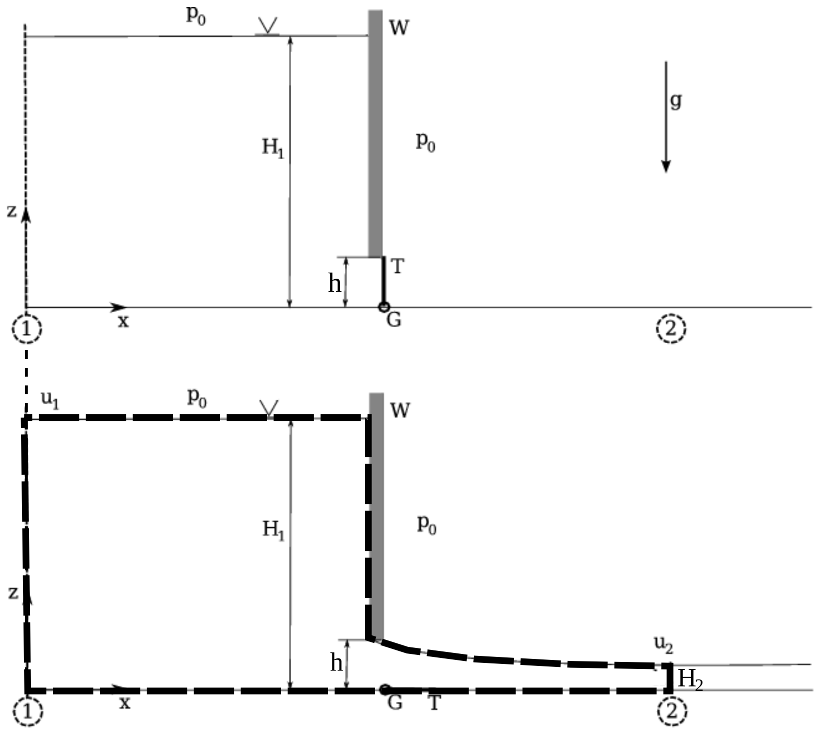
$$M_(y,G) = B \left[1/2 \cdot \rho \cdot g \cdot H_1 \cdot z^2 - 1/3 \cdot \rho \cdot g \cdot z^3 \right]_0^h$$

$$M_{y,G} = B \left(1/2 \cdot \rho \cdot g \cdot H_1 \cdot h^2 - 1/3 \cdot \rho \cdot g \cdot h^3 \right)$$

$$M_{y,G} = 32,7 kNm$$

c) Impulssatz:

Kontrollvolumen z.B. entlang der Wasseroberfläche:



$$F_{x,c} = F_{p,1} + F_{I,1} - F_{p,2} - F_{I,2}$$

$$F_{p,1} = B \int_0^{H_1} \rho \cdot g \cdot (H_1 - z) dz = 1/2 \cdot B \cdot \rho \cdot g \cdot H_1^2$$

$$F_{p,2} = B \int_0^{H_2} \rho \cdot g \cdot (H_2 - z) dz = 1/2 \cdot B \cdot \rho \cdot g \cdot H_2^2$$

$$F_{I,1} = \rho \cdot u_1^2 \cdot H_1 \cdot B$$

$$F_{I,2} = \rho \cdot u_2^2 \cdot H_2 \cdot B$$

$$F_{x,c} = B \cdot \rho \left(1/2 g \cdot \left(H_1^2 - H_2^2\right) + u_1^2 \cdot H_1 - u_2^2 \cdot H_2\right)$$

mit

$$u_1 = u_2 \cdot \frac{H_2}{H_1}$$

$$F_{x,c} = B \cdot \rho \left(1/2 g \cdot \left(H_1^2 - H_2^2\right) + \left(u_2 \cdot \frac{H_2}{H_1}\right)^2 \cdot H_1 - u_2^2 \cdot H_2\right)$$

$$F_{x,c} = 263,735 kN < F_{x,a}!$$

Lösung Aufgabe 4:

a) Für die gegebene Beziehung

$$\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{y^+ \cdot (u_\tau \cdot R - y^+ \cdot \nu)}{2.5 \cdot u_\tau \cdot R} - 1 \tag{1}$$

sind zunächst die Größen u_τ sowie y^+ zu bestimmen. Es gilt:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_W}{\rho}} = \sqrt{\frac{0.17\ Pa \cdot s}{1000\ \frac{kg}{m^3}}} = 0.0130\ \frac{m}{s} \tag{2}$$

Daraus folgt für y^+:

$$y^+ = \frac{u_\tau \cdot y}{\nu} = \frac{u_\tau \cdot \frac{R}{4}}{\frac{\mu}{\rho}} = \frac{0.0130\ \frac{m}{s} \cdot 0.0125m}{1 \cdot 10^{-6} \frac{m^2}{s}} = 162.5 \tag{3}$$

Diese Werte in Gleichung 4 eingesetzt ergibt:

$$\frac{\mu_t}{\mu} = 48.75 \tag{4}$$

b) Für die turbulente Viskosität μ_t gilt die Beziehung:

$$\mu_t = \rho \cdot l^2 \cdot |\frac{du}{dr}| \tag{5}$$

mit der Prandtl'schen Mischungsweglänge l. Die Ableitung des angegebenen Geschwindigkeitsprofils an der Stelle $r = \frac{R}{4}$ ergibt:

$$\left(|\frac{du}{dr}|\right)_{\frac{3R}{4}} = -\left(\frac{du}{dr}\right)_{\frac{3R}{4}} = -\left(-\frac{u_{max}}{7R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)^{-\frac{6}{7}}\right)_{\frac{3R}{4}} \tag{6}$$

Nach der Prandtl'schen Mischungsweglänge l in Gleichung 5 aufgelöst ergibt sich nun:

$$l = \sqrt{\frac{\mu_t}{\rho \cdot \left(|\frac{du}{dr}|\right)_{\frac{3R}{4}}}} = \sqrt{\frac{48.75 \cdot \mu}{\rho \cdot \left(|\frac{du}{dr}|\right)_{\frac{3R}{4}}}} = 0.0119\ m \tag{7}$$

c) Die Berechnung der querschnittsgemittelten Geschwindigkeit $\overline{u}$ ist nötig für die korrekte Skizzierung der Profile in Aufgabenteil e). Es gilt

$$\overline{u} = \frac{1}{A}\int_0^A u(r)\ dA^* = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R u(r) \cdot 2\pi r\ dr = \frac{2}{R^2}\int_0^R u(r) \cdot r\ dr \tag{8}$$

In Gleichung 8 das angegebene Geschwindigkeitsprofil $u(r)$ eingesetzt und partiell integriert ergibt:

$$\overline{u} = \frac{2 \cdot u_{max}}{R^2} \int_0^R r \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} \; dr = \frac{2 \cdot u_{max}}{R^2} \left([0] - \int_0^R \frac{7}{8} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{8}{7}} \cdot (-R) \; dr \right) \tag{9}$$

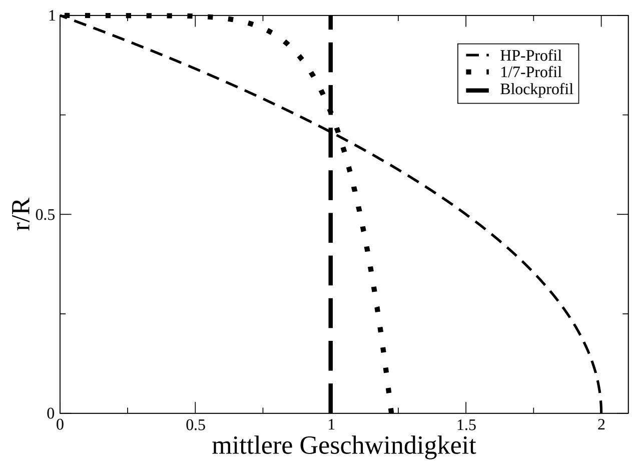
Das nun noch bestehende Integral ergibt:

$$\overline{u} = \frac{7 \cdot u_{max}}{4R} \left[\frac{7}{15} \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{\frac{15}{7}} \cdot (-R) \right]_0^R = \frac{49}{60} \cdot u_{max} \tag{10}$$

d) Zur Überprüfung der vorliegenden Strömung muss die Re-Zahl herangezogen werden.

$$Re = \frac{\overline{u} \cdot D}{\nu_2} = \frac{\overline{u} \cdot 2 \cdot R \cdot \rho_2}{\mu_2} = 200 \Longrightarrow laminar \tag{11}$$

e) Bei der Skizzierung der verschiedenen Profile gilt es zu beachten, dass für das Blockprofil gilt $u_{max} = \overline{u}$, für das laminare Profil $u_{max} = 2 \cdot \overline{u}$ und für das turbulente Profil $u_{max} = \frac{60}{49} \cdot \overline{u}$. Darüberhinaus ist das turbulente 1/7-Profil breiter zu skizzieren als das laminare Hagen-Poiseuille-Profil.



Lösung Aufgabe 5:

- Lösung Aufgabenteil a.)

$$
\begin{aligned}
M_{Te} &= 2,5 \quad \Rightarrow \quad A_{Dü} = A^*_{Dü} \\
\frac{A_{Te}}{A^*_{Dü}} &= \frac{1}{M_{Te}} \cdot \left(1 + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \cdot \left(M^2_{Te} - 1\right)\right)^{\frac{\kappa+1}{2\cdot(\kappa-1)}} = 2,637 \\
\Rightarrow h_{Dü} &= \frac{h_{Te} \cdot b}{2,637 \cdot b} = \underline{0,759\ m}
\end{aligned}
$$

- Lösung Aufgabenteil b.)

$$
\begin{aligned}
\rho^*_{Dü} \cdot A^*_{Dü} \cdot a^*_{Dü} &= \rho^*_{Di} \cdot A^*_{Di} \cdot a^*_{Di} \\
\frac{A^*_{Di}}{A^*_{Dü}} &= \frac{\rho^*_{Dü}}{\rho^*_{Di}} \cdot \frac{a^*_{Dü}}{a^*_{Di}}, \text{ adiabate Strömung } \Rightarrow a^* = \sqrt{\kappa R T^*} = konst. \\
\Rightarrow \frac{A^*_{Di}}{A^*_{Dü}} &= \frac{\rho^*_{Dü}}{\rho^*_{Di}}, \text{ mit Zustandsgl. } \rho^* = \frac{p^*}{R \cdot T^*} \\
\Rightarrow \frac{A^*_{Di}}{A^*_{Dü}} &= \frac{p^*_{Dü} \cdot R \cdot T^*_{Di}}{R \cdot T^*_{Dü} \cdot p^*_{Di}}, \text{ adiabate Strömung } \Rightarrow T^* = konst. \\
\Rightarrow \frac{A^*_{Di}}{A^*_{Dü}} &= \frac{p^*_{Dü}}{p^*_{Di}}, \text{ und mit } M_{Dü} = M_{Di} = 1, \text{ folgt} \\
\frac{p^*_{Dü}}{p_{0,Dü}} &= \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \frac{p^*_{Di}}{p_{0,Di}}, \text{ und damit} \\
\Rightarrow \frac{A^*_{Di}}{A^*_{Dü}} &= \underline{\frac{p_{0,Dü}}{p_{0,Di}}} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

- Lösung Aufgabenteil c.)

  Die Zustandsänderungen von der Düse bis unmittelbar vor dem Verdichtungsstoß im Testbereich können als isentrop betrachtet werden. Der Zustand direkt vor dem Stoß sei Zustand 1, derjenige direkt hinter dem Stoß sei Zustand 2. Die Zustandsänderung über den Stoß ist adiabat aber nicht reversibel. Die Zustandsänderungen im Bereich vom Diffusor bis direkt hinter dem Stoß sind ebenfalls isentrop.

  Damit gilt folgendes:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= M_{Te} = 2,5 \\
p_{0,1} &= p_{0,Dü} \\
p_{0,2} &= p_{0,Di}
\end{aligned}
$$

  Die minimale Fläche A^*_{Di} des engsten Querschnitts des Diffusors, bei der der Diffusor gerade nicht mehr unterkritisch ist, ergibt sich aus Gleichung (1), die in Aufgabenteil b) hergeleitet bzw. angegeben ist:

$$
A^*_{Di} = A^*_{Dü} \cdot \frac{p_{0,Dü}}{p_{0,Di}}
$$

Die Fläche A^*_{Di} hängt also vom Totaldruckverlust über den Stoß ab, der im folgenden berechnet werden muss. Für die Machzahl M_2 hinder dem Stoß ergibt sich aus der entsprechenden Stoßgleichung

$$\begin{aligned} M_2^2 &= \frac{1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\cdot\left(M_1^2-1\right)}{1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_1^2-1\right)} \\ &= \frac{1,875}{7,125} = 0,26 \end{aligned}$$

Die Total- bzw. Ruhedrücke vor und hinter dem Stoß $p_{0,1}$ und $p_{0,2}$ lassen sich durch die Isentropenbeziehungen ausdrücken und ins Verhältnis setzen:

$$\begin{aligned} p_{0,1} &= p_1\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\ p_{0,2} &= p_2\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\ \Rightarrow \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} &= \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}, \text{ wobei } \frac{p_1}{p_2} \text{ aus der Stoßgleichung} \\ \frac{p_1}{p_2} &= \frac{1}{1+\frac{2\cdot\kappa}{\kappa+1}\cdot\left(M_1^2-1\right)} = \frac{1}{7,125} = 0,1403 \text{ gewonnen wird.} \\ \Rightarrow \frac{p_{0,1}}{p_{0,2}} &= 0,1403\cdot\frac{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot M_1^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot 0,26\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} = 2,0074 \\ \Rightarrow A^*_{Di} &= A^*_{Dü}\cdot 2,0074 \\ \Rightarrow h^*_{Di}\cdot b &= h^*_{Dü}\cdot b\cdot 2,0074 \\ \Rightarrow h_{Di} &> \underline{1,52\ m} \end{aligned}$$

- Lösung Aufgabenteil d.)

  Durch den Verdichtungsstoß kommt es zu einem Totaldruckverlust zwischen der Düse und dem Diffusor (Energie wird dissipiert und die Entropie erhöht), sodass in diesem Beispiel die Diffusorfläche fast doppelt so groß sein muss, wie die Düsenfläche, damit eine Überschalldurchströmung des Testbereichs möglich wird. Sobald ein Totaldruckverlust auftritt, wird $\frac{A^*_{Di}}{A^*_{Dü}} > 1$.

  Auch ohne einen Verdichtungsstoß wird durch Reibung in der Strömung (z.B. in der Grenzschicht) Energie dissipiert, wodurch ein Totaldruckverlust hervorgerufen wird.

Lösung Aufgabe 6:

a) Die Strömung ist eben, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad v = 0 \quad . \tag{1}$$

Damit ergibt sich für die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen mit konstanter Zähigkeit :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \quad (2) \\ \rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad . \quad (3) \end{aligned}$$

b) Die zweidimensionale Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{4}$$

Es wirkt die Erdschwere und kein anderes Kraftfeld, das bedeutet:

$$k_x = 0 \quad , \qquad k_z = -\rho \cdot g \quad . \tag{5}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \tag{6}$$

Die Strömung ist in z-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in z-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0 \quad . \tag{7}$$

Die Bedingungen (5) - (7) in die Gleichungen (2) - (4) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \rho \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad (8) \\ \rho \cdot u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} &= -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad , \quad (9) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \quad . \quad (10) \end{aligned}$$

Wegen den Bedingungen (1) und (7) sind die Geschwindigkeitskomponenten u und w nur Funktionen von x. Damit können die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten als totale Ableitungen geschrieben werden. Man erhält aus (8) - (10):

$$\begin{aligned} \rho \cdot u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \quad , \quad (11) \\ \rho \cdot u \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \quad , \quad (12) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 0 \quad . \quad (13) \end{aligned}$$

Aus der Kontinuität (13) folgt durch Integration:

$$u(x) = \mathrm{C} \tag{14}$$

mit der Intergrationskonstanten C. An der Wand gilt die Haftbedingung, d. h. $u(x = 0) = 0$. Die Lösung (14) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $u(x) = 0$. Setzt man dieses in die Navier-Stokes-Gleichungen (11) und (12) ein ergibt sich:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad , \tag{15}$$

$$0 = -\rho \cdot g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \quad , \tag{16}$$

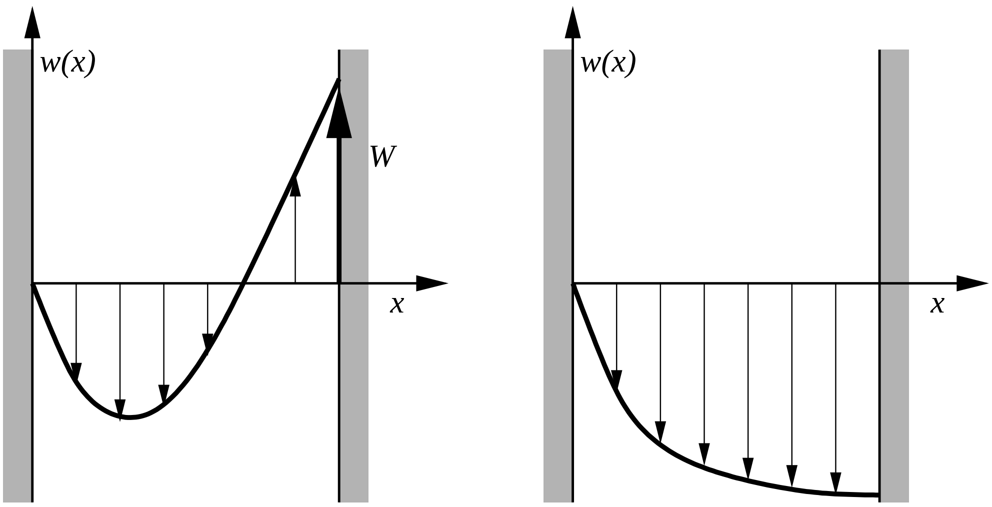
Mit Gleichung (15) und der Bedingung (1) ist der Druck keine Funktion von x und y. Damit gilt $p = p(z)$ und $\partial p/\partial z = \mathrm{d}p/\mathrm{d}z$. Eingesetzt in die Gleichung (16) erhält man:

$$0 = -\rho \cdot g - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} \quad ,$$

oder umgeformt

$$\underline{\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right)} \quad . \tag{17}$$

c)



Spalt Film

d) Die Integration von Gleichung (17) ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot x + \mathrm{C}_1 \quad . \tag{18}$$

Mit einer weiteren Integration erhält man:

$$w(x) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot x^2 + \mathrm{C}_1 \cdot x + \mathrm{C}_2 \quad . \tag{19}$$

Für den Spalt ergibt die Haftbedingung als Randbedingung ergibt an der linken Wand $w_\mathrm{S}(x = 0) = 0$ und am Förderband $w_\mathrm{S}(x = b) = W$. Eingesetz in Gleichung (19) erhält man:

$$0 = \mathrm{C}_2 \quad , \tag{20}$$

$$W = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\right) \cdot b^2 + \mathrm{C}_1 \cdot b + \mathrm{C}_2 \quad . \tag{21}$$

Gleichung (20) in Gleichung (21) eingesetzt und nach C_1 aufgelöst ergibt:

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \right) \cdot b + \frac{W}{b} \quad .$$

Die Konstanten in die Gleichung (21) eingesetzt führt auf:

$$w_{\mathrm{S}}(x) = \frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \right) \cdot \left[\left(\frac{x}{b} \right)^2 - \frac{x}{b} \right] + W \cdot \frac{x}{b} \quad . \tag{22}$$

Für den Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ folgt nach Gleichung (17) $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = konst.$. Mit den Randbedingungen $p(z=0) = p_{\mathrm{U}}$ und $p(z=L) = p_{\mathrm{U}} + \Delta p$ folgt hieraus:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \frac{p_{\mathrm{U}} + \Delta p - p_{\mathrm{U}}}{L} = \frac{\Delta p}{L} \quad .$$

Dieses in Gleichung (22) eingesetzt führt schließlich zur Lösung:

$$w_{\mathrm{S}}(x) = \frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L} \right) \cdot \left[\left(\frac{x}{b} \right)^2 - \frac{x}{b} \right] + W \cdot \frac{x}{b} \quad ,$$

$$\underline{w_{\mathrm{S}}(x) = \left[\frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\frac{\Delta p}{L} + \rho \cdot g \right) \cdot \left(\frac{x}{b} - 1 \right) + W \right] \cdot \frac{x}{b}} \quad , \tag{23}$$

Für den Kunststofffilm ergibt die Haftbedingung als Randbedingung an der linken Wand $w_{\mathrm{F}}(x=0) = 0$. Eingesetz in Gleichung (19) erhält man:

$$0 \quad = \quad \mathrm{C}_2 \quad . \tag{24}$$

An der freien Oberfläche gilt $\tau_{\mathrm{F}}(x=d) = \mu \cdot (\mathrm{d}w_{\mathrm{F}}/\mathrm{d}x)(x=d) = 0$. Daraus folgt $\mathrm{d}w_{\mathrm{F}}/\mathrm{d}x(x = d) = 0$. Eingesetz in Gleichung (17) erhält man:

$$0 = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \right) \cdot d + \mathrm{C}_1 \quad .$$

Nach C_1 aufgelöst ergibt:

$$\mathrm{C}_1 = -\frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \right) \cdot d \quad . \tag{25}$$

Die Konstanten in die Gleichung (19) eingesetzt führt auf:

$$w_{\mathrm{F}}(x) = \frac{d^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} \right) \cdot \left[\left(\frac{x}{d} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{d} \right] \quad . \tag{26}$$

Für den Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ folgt wegen des konstanten Umgebungsdruckes $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z = 0$. Man erhält somit aus Gleichung (26):

$$w_{\mathrm{F}}(x) = \frac{d^2}{2 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \left[\left(\frac{x}{d} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{d} \right] \quad ,$$

oder umgeformt:

$$\underline{w_{\mathrm{F}}(x) = \frac{d^2}{2 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \frac{x}{d} \cdot \left(\frac{x}{d} - 2 \right)} \quad . \tag{27}$$

e) Die Volumenströme im Spatt und im Film müssen gleich sein. Der Volumenstrom berechnet sich mit der Tiefe t senkrecht zur Zeichenebene aus:

$$\dot{V} = \int_x w(x) \cdot t \cdot \mathrm{d}x \quad . \tag{28}$$

Gleichung (23) in Gleichung (28) eingesetzt führt zum Volumenstrom $\dot{V}_\mathrm{S}$ im Spalt:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\mathrm{S} &= \int_0^b \left[\frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right) \cdot \left[\left(\frac{x}{b}\right)^2 - \frac{x}{b}\right] + W \cdot \frac{x}{b}\right] \cdot t \cdot \mathrm{d}x \\
&= \frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right) \cdot \left[\left(\frac{x}{b}\right)^2 \cdot \frac{x}{3} - \frac{x}{b} \cdot \frac{x}{2}\right]_0^b \cdot t + W \cdot \left[\frac{x}{b} \cdot \frac{x}{2}\right]_0^b \cdot t \\
&= \frac{b^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right) \cdot \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2}\right) \cdot t + W \cdot \frac{b}{2} \cdot t \\
&= \frac{1}{2} \cdot b \cdot t \cdot \left[W - \frac{b^2}{6 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right)\right] \quad .
\end{aligned} \tag{29}$$

Gleichung (27) in Gleichung (28) eingesetzt führt zum Volumenstrom $\dot{V}_\mathrm{F}$ im Film:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_\mathrm{F} &= \int_0^d \left(\frac{d^2}{2 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \left[\left(\frac{x}{d}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{d}\right]\right) \cdot t \cdot \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{d^2}{2 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \left[\left(\frac{x}{d}\right)^2 \cdot \frac{x}{3} - 2 \cdot \frac{x}{d} \cdot \frac{x}{2}\right]\right]_0^d \cdot t \\
&= \frac{d^2}{2 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot g \cdot \left(\frac{d}{3} - 2 \cdot \frac{d}{2}\right) \cdot t \\
&= -\frac{1}{3} \cdot d \cdot t \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \rho \cdot g \quad .
\end{aligned} \tag{30}$$

Gleichsetzen der Volumenströme $\dot{V}_\mathrm{S} = \dot{V}_\mathrm{F}$ fürht auf die Gleichung:

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot t \cdot \left[W - \frac{b^2}{6 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right)\right] = -\frac{1}{3} \cdot d \cdot t \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \rho \cdot g \quad .$$

Nach der Geschwindigkeit aufgelöst erhält man:

$$W = \frac{b^2}{6 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{b} \cdot \frac{d^2}{\mu} \cdot \rho \cdot g \quad ,$$

oder nach einer Umformung:

$$\underline{W = \frac{2}{3 \cdot \mu \cdot b} \cdot \left[\frac{b^3}{4} \cdot \left(\rho \cdot g + \frac{\Delta p}{L}\right) - d^3 \cdot \rho \cdot g\right]} \quad . \tag{31}$$

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

28. März 2007

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a) Velocity at inlet of Pipe 1, c_E

$$c_E = \frac{\dot{V}_E}{A_E} \tag{1}$$

$$\dot{V}_E = \dot{V}; \qquad A_E = A_1 = \frac{\pi \cdot (d_1)^2}{4} \tag{2}$$

$$c_E = \underline{0.4\ m/s} \tag{3}$$

Velocity at outlet of Pipe 2, c_A

$$c_A = \frac{\dot{V}_A}{A_A} \ = \ \underline{1.6\ m/s}; \qquad (\dot{V}_A = \dot{V};\ A_A = A_2 = \frac{\pi \cdot {d_2}^2}{4}) \tag{4}$$

b) Total Pressure Loss in the Flow System, $\Delta p_{V_{ges}}$

Bernoulli (0 - 2) + Friction + Pump Work

$$p_0 + \frac{\rho \cdot {c_0}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_0 + \Delta l_p = p_2 + \frac{\rho \cdot {c_2}^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_2 + \Delta p_{V_{ges}} \tag{5}$$

$$(p_0 = p_2 = p_{atm};\ c_0 = 0;\ z_0 = h_1,\ z_2 = h_2)$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta p_{V_{ges}} = \rho \cdot g \cdot (h_1 - h_2) + \Delta l_p - \frac{\rho \cdot {c_2}^2}{2} \tag{6}$$

$$c_2 = c_A = 1.6\ m/s$$

$$\Delta l_p = \frac{L}{\dot{V}} = \frac{4 \times 10^3}{0.008} = 5 \times 10^5\ N/m^2 \tag{7}$$

$$\underline{\Delta p_{V_{ges}} = 48720\ N/m^2} \tag{8}$$

c) Total Pressure Loss in both pipes due to friction caused by the pipe lengths only, $\sum \Delta p_{V_R}$

Total Pressure Loss (System) = $\sum$ Pressure Loss in pipes + $\sum$ Minor Losses

$$\Delta p_{V_{ges}} = \sum \Delta p_{V_R} + \sum \Delta p_{V_M} \tag{9}$$

$$\sum \Delta p_{V_R} = \Delta p_{V_{ges}} - \sum \Delta p_{V_M} \tag{10}$$

$$where; \qquad \sum \Delta p_{V_M} = \Delta p_{V_E} + \Delta p_{V_A} + \Delta p_{V_K} \tag{11}$$

Minor Losses at Inlet:

$$\Delta p_{V_E} = \zeta_E \cdot \frac{\rho \cdot {c_E}^2}{2} = \frac{0.98 \cdot (1000) \cdot (0.4)^2}{2} = 78.4 \ N/m^2 \tag{12}$$

Minor Losses at Outlet:

$$\Delta p_{V_A} = \zeta_A \cdot \frac{\rho \cdot {c_A}^2}{2} = \frac{0.98 \cdot (1000) \cdot (1.6)^2}{2} = 1254.4 \ N/m^2 \tag{13}$$

Minor Losses at Bends:

$$\Delta p_{V_K} = \Delta p_{V_{K_1}} + \Delta p_{V_{K_2}} = \zeta_{K_1} \cdot \frac{\rho \cdot {c_1}^2}{2} + 2 \cdot \zeta_{K_2} \cdot \frac{\rho \cdot {c_2}^2}{2} = 16 + 768 = 784 \ N/m^2 \tag{14}$$

Total Minor Losses:

$$\sum \Delta p_{V_M} = 78.4 + 1254.4 + 784 = 2116.8 \ N/m^2 \tag{15}$$

Total Pressure Loss in both Pipes:

$$\sum \Delta p_{V_R} = 48720 - 2116.8 = \underline{46603.2 \ N/m^2} \tag{16}$$

d) Viscous Sublayer Thicknesses Δ_1 and Δ_2, Pressure Loss coefficients λ_1 and λ_2

Total Pressure Loss in Pipes = Pressure Loss in Pipe 1 + Pressure Loss in Pipe 2

$$\sum \Delta p_{V_R} = \Delta p_{V_{R1}} + \Delta p_{V_{R2}} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {c_1}^2 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \lambda_1 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {c_2}^2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \lambda_2 \tag{17}$$

For Pipe 1:

$$R_{e_{d_1}} = \frac{c_1 \cdot d_1}{\nu} = \frac{0.4 \times 0.16}{1.28 \times 10^{-6}} = 5 \times 10^4 \tag{18}$$

Flow is Turbulent in Pipe 1; $\Rightarrow$ $\lambda_1 = \lambda_{t_1}$

Check for the hydraulic smoothness of Pipe 1

For hydraulically smooth pipe:

$$\Delta > K_s \tag{19}$$

$$\frac{\Delta_1}{d_1} = \frac{12.64}{(R_{e_{d_1}})^{3/4}} \tag{20}$$

$$\Delta_1 = \underline{6.05 \times 10^{-4} \ m} \tag{21}$$

Since $\Delta_1 > K_{s_1}$, so Pipe 1 is hydraulically smooth.

Blasius law can be used to find λ_{t_1} :

$$\lambda_{t_1} = \frac{0.3164}{(R_{e_{d_1}})^{1/4}} = \frac{0.3164}{(5 \times 10^4)^{1/4}} = \underline{0.021} \tag{22}$$

<u>For Pipe 2</u>:

$$R_{e_{d_2}} = \frac{c_2 \cdot d_2}{\nu} = \frac{1.6 \times 0.08}{1.28 \times 10^{-6}} = 1 \times 10^5 \tag{23}$$

So flow is Turbulent in Pipe 2; $\Rightarrow$ $\lambda_2 = \lambda_{t_2}$

Check for the hydraulic smoothness of Pipe 2:

$$\frac{\Delta_2}{d_2} = \frac{12.64}{(R_{e_{d_2}})^{3/4}} \tag{24}$$

$$\Delta_2 = 1.8 \times 10^{-4}\ m \tag{25}$$

Since $\Delta_2 < K_{s_2}$, so <u>Pipe 2 is not hydraulically smooth</u>.

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {c_2}^2 \cdot \frac{L_2}{d_2} \cdot \lambda_{t_2} = \sum \Delta p_{V_R} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {c_1}^2 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \lambda_{t_1} \tag{26}$$

$$\lambda_{t_2} = \frac{2 \cdot d_2}{\rho \cdot {c_2}^2 \cdot L_2} \cdot (\sum \Delta p_{V_R} - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot {c_1}^2 \cdot \frac{L_1}{d_1} \cdot \lambda_{t_1}) \tag{27}$$

$$\lambda_{t_2} = \underline{0.036} \tag{28}$$

Lösung Aufgabe 2:

a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{Ue^{-\frac{z}{H}} sin \frac{z}{H}}{U\left(1 - e^{-\frac{z}{H}} cos \frac{z}{H}\right)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^{-\frac{z}{H}} sin \frac{z}{H}}{\left(1 - e^{-\frac{z}{H}} cos \frac{z}{H}\right)} x + C \tag{1}$$

Es ergibt sich für jede Höhe z also ein aus parallelen Geraden bestehendes Stromlinienfeld, wobei jede Stromlinie durch ein anderes C (Integrationskonstante) berechnet wird. Bei Gleichung 1 handelt es sich also um eine Geradengleichung der allgemeinen Form

$$y = m \cdot x + C \ .$$

b) Da der Wind außerhalb der planetaren Grenzschicht in x-Richtung bläst, kann der Winkel zwischen dieser Richtung und der Stromlinienrichtung in der Höhe von $z = 50\ m$, direkt durch die Steigung m aus Aufgabe a.) berechnet werden: Für $m$ergibt sich durch Einsetzen der Zahlenwerte
$m = 0,8889$.

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{180°}{\pi} \cdot arctan(m) \\ &= 41,63° \end{aligned}$$

c) Durch die Vorgabe einer konstanten Aufstiegsgeschwindigkeit w folgt

$$z(t) = W \cdot t + z_0$$

Bahnlinien $x(t)$ und $y(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u(t) \\ \Rightarrow dx &= u(t)dt \Rightarrow \int dx = \int u(t)dt \\ \Rightarrow \int dx &= U \int \left[1 - e^{-(\frac{W}{H} \cdot t + \frac{z_0}{H})} cos\left(\frac{W}{H} \cdot t + \frac{z_0}{H}\right)\right] dt; \text{ mit } a = \frac{W}{H}, b = \frac{z_0}{H} \\ &= U \left(\int 1dt - \int \left[e^{-(at+b)} cos(at+b)\right] dt\right) \end{aligned}$$

Das rechte Integral kann nach Substitution von $(at + b)$ z.B. mit Hilfe des mathematischen Taschenbuchs von Bronstein bestimmt oder per Hand durch zweimalige partielle Integration berechnet werden, sodass sich

$$x(t) = U\left[t - \frac{e^{-(at+b)}}{2a} \left(sin(at+b) - cos(at+b)\right)\right] + C_1$$

ergibt. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 folgt durch Einsetzen von $t = t_0$

$$\begin{aligned} x_0 &= U\left[0 - \frac{e^{-b}}{2a}(sin(b) - cos(b))\right] + C_1 \\ \Rightarrow C_1 &= x_0 + U\frac{e^{-b}}{2a}(sin(b) - cos(b)) \\ \Rightarrow x(t) &= Ut - \frac{Ue^{-b}}{2a}\left[e^{-at}\left(sin(at+b) - cos(at+b)\right) - sin(b) + cos(b)\right] + x_0 \end{aligned}$$

$y(t)$ wird analog zu $x(t)$ berechnet und es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
dy &= U\int\left[e^{-(at+b)}sin(at+b)\right]dt \\
y(t) &= U\frac{e^{-(at+b)}}{2a}\left(-sin(at+b)-cos(at+b)\right)+C_2 \\
y_0 &= U\frac{e^{-b}}{2a}(-sin(b)-cos(b))+C_2 \\
\Rightarrow C_2 &= y_0+U\frac{e^{-b}}{2a}(sin(b)+cos(b)) \\
\Rightarrow y(t) &= \frac{Ue^{-b}}{2a}\left[e^{-at}\left(-sin(at+b)-cos(at+b)\right)+sin(b)+cos(b)\right]+y_0
\end{aligned}
$$

Lösung Aufgabe 3:

a)

$$\dot{m}_{CD} = T\left(\int_0^d \rho \cdot U_0 dz - \int_0^d \rho \cdot u_1(z)dz\right)$$

$$\dot{m}_{CD} = \frac{1}{2}\rho \cdot U_0 \cdot d \cdot T$$

$$\dot{m}_{AB} = \dot{m}_{CD}$$

$$\dot{m} = \rho \cdot U_0 \cdot d \cdot T$$

b)

$$F_{d_x} = T \cdot \left(\int\limits_S \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})dS + \int\limits_S p \cdot \vec{n}dS\right)$$

$$\int\limits_S p \cdot \vec{n}dS = 0$$

$$F_{d_x} = T \cdot \left(\int\limits_S \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})dS\right)$$

$$F_{d_x} = T \cdot \left(\int\limits_{AB} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})dS + \int\limits_{BC} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})dS + \int\limits_{CD} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})dS + \int\limits_{DA} \rho\vec{u}(\vec{u}\cdot\vec{n})dS\right)$$

$$u_{x,AB} = u_{x,CD} = U_0$$

$$F_{d_x} = 2T \cdot \left(\int\limits_{DA} \rho U_0^2 dS - \int\limits_{BC} \rho u_1^2 dS - U_0\left(\int\limits_{AB} \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})dS + \int\limits_{CD} \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})dS\right)\right)$$

$$T \cdot \int\limits_{AB} \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})dS = \dot{m}_{AB}, \quad T \cdot \int\limits_{CD} \rho(\vec{u}\cdot\vec{n})dS = \dot{m}_{CD}$$

$$\int\limits_{BC} \rho u_1^2 dS = 2 \cdot \int\limits_0^d \rho u_1(z)^2 dz$$

, etc.

$$F_{d_x} = \frac{1}{4}\rho U_0^2 T d$$

c) Das Ablösekriterium lautet $\tau_w = 0$.

d) Die physikalischen Einstellungen sind: stationär, reibungsbehaftet, inkompressibel, 2-dimensional

Lösung Aufgabe 4:

a) Berechnen Sie mit Hilfe des äquivalenten Durchmessers $d = (4 \cdot A)/(U)$ die Dicke der viskosen Unterschicht Δ.

$$d = \frac{4 \cdot A}{U} = \frac{4 \cdot 2h \cdot b}{2 \cdot 2h + 2 \cdot b} = 0,01m$$

Die Strömung ist mit $Re = 4000$ turbulent liegt jedoch unter $Re = 10^5$ und somit im Gültigkeitsbereich der Blasiusgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta}{d} &= \frac{4}{Re \cdot \lambda_t} \\
\lambda_t &= \frac{0,3164}{Re^{3/4}} \\
\frac{\Delta}{d} &= \frac{12,64}{Re^{3/4}} \\
\Delta &= 0,0002513
\end{aligned}$$

b) Ermitteln Sie die Schubspannungsgeschwindigkeit u_τ und den Druckwiderstand c_f in der viskosen Unterschicht.

$$\begin{aligned}
Re &= \frac{U_\infty \cdot d}{\nu} \\
U_\infty &= 0,404\ m/s \\
\tau_w &= \mu \cdot |\frac{du}{dz}| = \rho \cdot \nu \cdot |\frac{0,5 \cdot U_\infty}{\Delta}| \\
\tau_w &= 0,8119 N/m^2 \\
u_\tau &= \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \\
u_\tau &= 0,02849 m/s \\
c_f &= \frac{\tau_w}{1/2 \cdot \rho \cdot U_\infty^2} \\
c_f &= 0,009948
\end{aligned}$$

c) Bestimmen sie an der Stelle Δ die Konstante k mit Hilfe der beiden Gechwindigkeitsprofile. Wie groß ist die prozentuale Abweichung der Steigung des $1/7$-Potenzgesetzes in diesem Punkt? Wie lässt sich die Abweichung erklären?

In Höhe der viskosen Unterschicht Δ müssen beide Profile die gleiche Geschwindigkeit haben. Für das Linear-Profil gilt somit:

$$u(\Delta) = 0,5 \cdot U_\infty = 0,202\ m/s$$

Für die Bestimmung der Geschwindigkeit an der Stelle Δ im 1/7-Potensgesetz gilt $z = h - \Delta$. Durch Einsetzen in (1) erhält man den Wert für k:

$$\begin{aligned} u(z = h - \Delta) &= k \cdot u_\tau \cdot (\frac{u_\tau \cdot \Delta}{\nu})^{1/7} = 0,202\ m/s \\ k &= 5,36 \end{aligned}$$

Zur Berechnugn der Steigung wird Gleichung (1) nach z abgeleitet:

$$\frac{du^*(z)}{dz} = -\frac{k \cdot u_\tau^2}{7 \cdot \nu} \cdot (\frac{u_\tau \cdot h}{\nu} - \frac{u_\tau \cdot z}{\nu})^{-6/7}$$

Durch Einsetzen der Randbedingung und des Wertes k erhält man:

$$\frac{du^*(z = h - \Delta)}{dz} = -\frac{k \cdot u_\tau^2}{7 \cdot \nu} \cdot (\frac{u_\tau \cdot \Delta}{\nu})^{-6/7} = -114,84$$

Die Steigung des linearen Geschwindigkeitsprofils wird wie folgt ermittelt:

$$\frac{du(\Delta)}{dz} = \frac{0,5 \cdot U_\infty}{\Delta} = -803,82$$

Die prozentuale Abweichung lässt sich somit berechnen:
Zur Bestimmung der prozentualen Abeichung wird die Steigung des linearen Profils als Absolutwert angenommen: 803.82. Der ermittelte Wert aus dem 1/7- Potenzgesetz lautet: $114,84$ Daraus ergibt sich die prozentuale Abweichung mit

$$x = \frac{|114,84 - 803,82|}{803,82} \cdot 100\% = 85.71\%$$

Das 1/7-Potenzgesetz verliert in Wandnähe seine Gültigkeit, da dort die Ableitung gegen∞ geht. Aus diesem Grund muss dieser Bereich gesondert modellert werden, in diesem fall mit einem linearen geschwindigkeitsporfil.

d) Ermitteln Sie die turbulente Schubspannung an der Stelle $\Delta < x < \delta$ (δ = Grenzschichtdicke) in Abhängigkeit der Mischungsweglänge l. Da sich die Strömung außerhalb der viskosen Unterschicht befindet, kann der reibungsbehaftete Anteil vernachlässigt werden.

$$\begin{aligned} \tau_t &= -\rho \cdot \overline{u'w'} \\ \tau_t &= \rho \cdot l^2 \cdot (\frac{du^*}{dz})^2 \\ \tau_t &= \rho \cdot l^2 \cdot (\frac{u_\tau^2 \cdot k}{7 \cdot \nu})^2 \cdot (\frac{u_\tau \cdot h}{\nu} - \frac{u_\tau \cdot z}{\nu})^{-12/7} \end{aligned}$$

mit $z = h - x$ folgt:

$$\tau_t = \rho \cdot l^2 \cdot (\frac{u_\tau^2 \cdot k}{7 \cdot \nu})^2 \cdot (\frac{u_\tau \cdot x}{\nu})^{-12/7}$$

Lösung Aufgabe 5:

a) Die Ruhewerte in Abschnitt 3 entsprechen den Ruhewerten in Abschnitt 4. Daher gilt:

$$T_0^3 = T_0^4 = T_4 \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_4^2\right) = 1.8 \cdot T_4 = 540 \ K \tag{1}$$

$$p_0^3 = p_0^4 = p_4 \cdot \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 7.82 \cdot p_u = 7.82 \ bar \tag{2}$$

$$\rho_0^3 = \rho_0^4 = \frac{p_0}{RT_0} = 5.05 \ \frac{kg}{m^3} \tag{3}$$

b) Da der engste Querschnitt gegeben ist, bietet es sich an, den Massenstrom folgendermaßen zu bestimmen:

$$\dot{m} = \rho^* \cdot c^* \cdot A^* = \frac{\rho^*}{\rho_0} \cdot \frac{c^*}{a_0} \cdot A^* \cdot \rho_0 \cdot a_0 \tag{4}$$

$$= 0.634 \cdot \sqrt{0.833} \cdot \frac{\pi D^{*2}}{4} \cdot \rho_0 \cdot \sqrt{\kappa R T_0} = 24.05 \ \frac{kg}{s} \tag{5}$$

c) Die Machzahl M_1 ergibt sich mit Hilfe der über den Stoß konstanten Ruhetemperatur T_0:

$$M_1 = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right)} = 1.52 \tag{6}$$

Die Machzahl M_2 ergibt analog zu

$$M_2 = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left(\frac{T_0}{T_2} - 1\right)} = 0.71 \tag{7}$$

d) Somit ergibt sich die Geschwindigkeit c_2 zu:

$$c_2 = M_2 \cdot a_2 = M_2 \cdot \sqrt{\kappa R T_2} = 310.90 \ \frac{m}{s} \tag{8}$$

und die Querschnittsfläche A_2 zu:

$$A_2 = \frac{A^*}{M_2}\left(1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\left(M_2^2 - 1\right)\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} = 1.09 \cdot A^* = 0.019 \ m^2 \tag{9}$$

e) Wir betrachten zunächst die gesuchten Größen im Abschnitt 2:

$$\rho_2 = \frac{\dot{m}}{c_2 \cdot A_2} = 4.07 \ \frac{kg}{m^3} \tag{10}$$

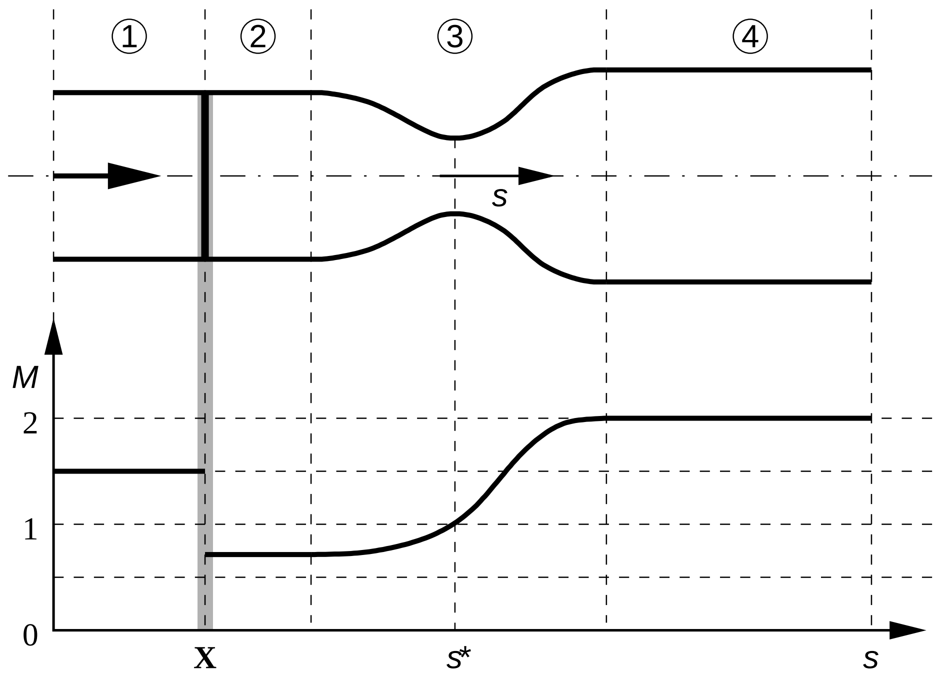
$$p_2 = \rho_2 R T_2 = 5.74 \ bar \tag{11}$$

Die Stoßgleichungen liefern anschließend:

$$p_1 = \frac{p_2}{1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_1^2 - 1\right)} = 2.34 \ bar \tag{12}$$

$$\rho_1 = \rho_2 \left(1 - \frac{2}{\kappa + 1}\left(1 - \frac{1}{M_1^2}\right)\right) = 2.15 \ \frac{kg}{m^3} \tag{13}$$

f)



Lösung Aufgabe 6:

a) Die dreidimensionale Kontinuitätsgleichung für inkompressible Strömungen lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{1}$$

Die Strömung ist in x-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in x-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{2}$$

Die Strömung ist in eben in x- und z-Richtung:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \qquad v = 0 \quad . \tag{3}$$

Mit den Gleichungen (2) und (3) folgt aus (1):

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 0 \quad . \tag{4}$$

Daraus folgt $w = \mathrm{C}$ mit der Intergrationskonstanten C. An den Wänden gilt die Haftbedingung $w(z = -H) = w(z = H) = 0$. Die Lösung von (4) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $\underline{w(z) = 0}$.

b) Die dreidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen bei konstanter dynamischer Zähigkeit lauten:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \\
\rho \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad , \\
\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad .
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (2), (3), $w = 0$ und ohne Massenkräfte (Gravitation vernachlässigbar) $f_x = f_y = f_z = 0$ folgt:

$$\begin{aligned}
\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , && (5) \\
0 &= 0 \quad , && (6) \\
0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \quad . && (7)
\end{aligned}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \tag{8}$$

Damit folgt aus den Gleichungen (5) - (7):

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , && (9) \\
0 &= 0 \quad , && (10) \\
0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} \quad . && (11)
\end{aligned}$$

Gleichung (10) fällt weg. Aus Gleichung (11) folgt $\partial p/\partial z = 0$. Damit ist der Druck keine Funktion von z. Gleichzeitig ist der Druck wegen den Gleichungen (8) und (3) keine Funktion von t und y. Damit gilt $p = p(x)$ und $\partial p/\partial x = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Eingesetzt in die Gleichung (9) erhält man:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad . \tag{12}$$

Wegen der Gleichungen (2), (3) und (8) ist die Geschwindigkeit u keine Funktionen von x, y und t. Damit gilt $u = u(z)$ und somit auch $\partial u/\partial z = \mathrm{d}u/\mathrm{d}z$. Mit der Gleichung (12) erhält man dann:

$$0 = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad . \tag{13}$$

Aus Gleichung (13) erhält man die beiden Differentialgleichungen die die Strömung der beiden Fluide beschreiben zu:

$$\underline{\frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}} \quad , \tag{14}$$

$$\underline{\frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}} \quad . \tag{15}$$

c) Die zweimalige Integration der Gleichungen (14) und (15) ergibt:

$$u_1(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu_1} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot z^2 + \mathrm{C}_1 \cdot z + \mathrm{C}_2 \quad , \tag{16}$$

$$u_2(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot z^2 + \mathrm{C}_3 \cdot z + \mathrm{C}_4 \quad . \tag{17}$$

Die Haftbedingung an den Wänden ergibt als Randbedingung $u_1(z = -H) = 0$ und $u_2(z = H) = 0$. An der Trennfläche $z = 0$ lauten die Randbedingungen $u_1(z = 0) = u_2(z = 0)$ und wegen dem Spannungsgleichgewicht $\tau_1(z = 0) = \tau_2(z = 0)$. Eingesetz in die Gleichungen (16) und (17) erhält man:

$$0 = \frac{1}{2 \cdot \mu_1} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H^2 - \mathrm{C}_1 \cdot H + \mathrm{C}_2 \quad , \tag{18}$$

$$0 = \frac{1}{2 \cdot \mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H^2 + \mathrm{C}_3 \cdot H + \mathrm{C}_4 \quad , \tag{19}$$

$$\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_4 \quad , \tag{20}$$

$$\mu_1 \cdot \mathrm{C}_1 = \mu_2 \cdot \mathrm{C}_3 \quad . \tag{21}$$

Die Gleichungen (18) - (21) nach den Konstanten aufgelöst ergibt (mit $\mu_1 = 3 \cdot \mu$ und $\mu_2 = \mu$):

$$\mathrm{C}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{H}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = \left(-\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H\right) \quad ,$$

$$\mathrm{C}_2 = -\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H^2 = \left(-\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H^2\right) \quad ,$$

$$\mathrm{C}_3 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{H}{2} \cdot \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}\right) = \left(-\frac{3}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H\right) \quad ,$$

$$\mathrm{C}_4 = -\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H^2 = \left(-\frac{1}{4 \cdot \mu} \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot H^2\right) \quad .$$

Die Konstanten in die Gleichungen (16) und (17) eingesetzt ergibt:

$$u_1(z) = -\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot H^2\cdot\left[1+\frac{\mu_1-\mu_2}{2\cdot\mu_1}\cdot\frac{z}{H}-\frac{\mu_1+\mu_2}{2\cdot\mu_1}\cdot\left(\frac{z}{H}\right)^2\right] \quad , \tag{22}$$

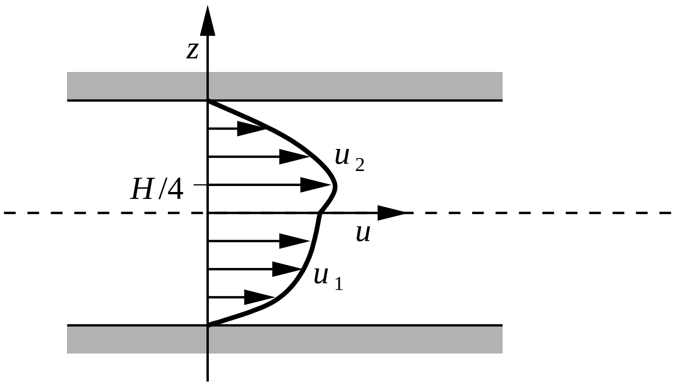
$$u_2(z) = -\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot H^2\cdot\left[1+\frac{\mu_1-\mu_2}{2\cdot\mu_2}\cdot\frac{z}{H}-\frac{\mu_1+\mu_2}{2\cdot\mu_2}\cdot\left(\frac{z}{H}\right)^2\right] \quad . \tag{23}$$

Mit $\mu_1 = 3\cdot\mu$ und $\mu_2 = \mu$ erhält man als Ergebnis:

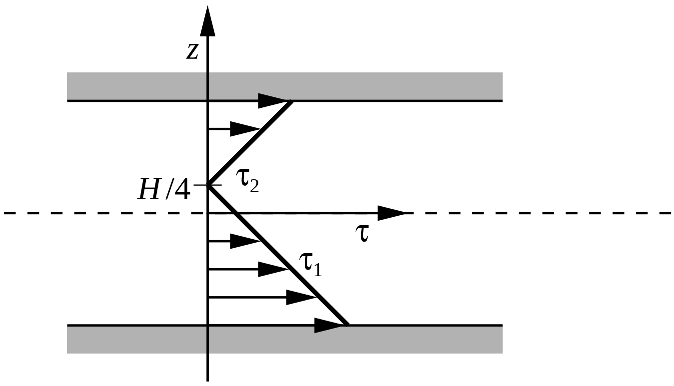
$$\underline{u_1(z) = -\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot H^2\cdot\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{H}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{z}{H}\right)^2\right]} \quad , \tag{24}$$

$$\underline{u_2(z) = -\frac{1}{4\cdot\mu}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot H^2\cdot\left[1+\frac{z}{H}-2\cdot\left(\frac{z}{H}\right)^2\right]} \quad . \tag{25}$$

d) Da das Fluid 1 eine höhere Zähigkeit als Fluid 2 besitzt wird Fluid 2 stärker beschleunigt, sodass sich die folgende Geschwindigkeitsverteilung ergibt:



Aus dem Geschwindigkeitsprofil folgt die skizzierte Schubspannungsverteilung:



e) Nach der Skizze für die Schubspannungsverteilung muss die Stelle bei der $\tau = 0$ ist im Bereich des Fluids 2 liegen, da sich dort das Geschwindigkeitsmaximum befindet. Aus Gleichung (25) folgt dann für die Schubspannungsverteilung im Fluid 2:

$$\tau_2(z) = \mu_2\cdot\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot H\cdot\left[1-4\cdot\frac{z}{H}\right] \quad .$$

Die Stelle z an der $\tau_2(z) = 0$ ist folgt dann aus der Gleichung

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\cdot H\cdot\left[1-4\cdot\frac{z}{H}\right] = 0 \quad .$$

Nach z aufgelöst erhält man:

$$\underline{z = \frac{H}{4}} \quad .$$

Lehrstuhl und Institut
für Strömungslehre
o. Prof. Dr.-Ing. H. Oertel

15. Oktober 2007

Lösung der schriftlichen Prüfung im Pflichtfach

Strömungslehre

Lösung Aufgabe 1:

a) Mit einem Stromfaden von der Speicherwasseroberfläche zum Düsenende ergibt sich folgende Bilanz:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2}\rho c_1^2 = p_D + \rho g h_D + \frac{1}{2}\rho c_D^2 + \triangle p_V \tag{1}$$

$$p_I + \rho g h_1 = p_U + \frac{1}{2}\rho c_{D1}^2 + \triangle p_V \tag{2}$$

Für $\triangle p_V$ gilt:

$$\triangle p_V = \frac{1}{2}\rho c_{rohr}^2 \cdot (\lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + \zeta_E + \zeta_{K1}) + \frac{1}{2}\rho c_{D1}^2 \cdot \zeta_D \tag{3}$$

Durch die Kontinuitätsbedingung gilt:

$$c_{rohr} = c_{D1} \cdot \left(\frac{d_D}{d_{rohr}}\right)^2 \tag{4}$$

Somit folgt:

$$p_I = p_U - \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho c_{D1}^2 \cdot \left[1 + \zeta_D + \left(\frac{d_D}{d_1}\right)^4 \cdot \left[\lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + \zeta_E + \zeta_{K1}\right]\right] \tag{5}$$

Mit den angegebenen Werten folgt hierdurch:

$$p_I = 100.000\frac{N}{m^2} - 100.000\frac{kg}{ms^2} + 5848\frac{kg}{ms^2} \cdot (1 + 0.4 + 0.4096 \cdot 40.45) \tag{6}$$

Und es folgt:

$$\underline{p_I = 1.05\ bar} \tag{7}$$

b) Zur Beantwortung dieser Frage muss zunächst die entsprechende Reynoldszahl berechnet werden:

$$Re_D = \frac{c_{rohr} \cdot d_1}{\nu} \tag{8}$$

Wie aus Teil a) bekannt beträgt c_{rohr}

$$c_{rohr} = c_{D1} \cdot \left(\frac{d_D}{d_1}\right)^2 = 2.19\frac{m}{s} \tag{9}$$

Hieraus ergibt sich für die Reynoldszahl ein Wert von $\underline{Re_D \approx 42.750}$. Somit muss man von einer turbulenten Strömung ausgehen. Bei der Frage nach der hydraulischen Glattheit muss anschließend die Dicke der viskosen Unterschicht bestimmt werden:

$$\frac{\triangle}{d_1} = \frac{12.64}{Re_d^{3/4}} = 0.00425 > 0.0025 = \frac{k_s}{d_1} \tag{10}$$

Die Dicke der viskosen Unterschicht ist folglich größer als die mittlere Sandkornrauhigkeit. Die Innenwand des Rohrs ist folglich **hydraulisch glatt**.

c) Mit Hilfe eines Stromfaden vom Düsenende D zum Scheitelpunkt der Parabel S kann die maximale Höhe der Parabel bestimmt werden:

$$p_D + \rho g z_D + \frac{1}{2}\rho c_D^2 = p_S + \rho g z_S + \frac{1}{2}\rho c_S^2 \tag{11}$$

Da das Düsenende in einem Winkel von 45° angenommen ist. Ergibt sich eine gleichmäßige Aufteilung der Austrittgeschwindigkeit in Vertikal- und Horizontelkomponente:

$$c_D^H = c_D^V = \frac{1}{\sqrt{2}} c_{D1} = c_S \tag{12}$$

Im Verlauf der Parabel nimmt die Horizontalgeschwindigkeit bis zum Scheitel auf den Wert Null ab so dass hier nur noch der Betrag der Horizontalgeschwindigkeit vorhanden ist.

Somit folgt:

$$\frac{1}{2}\rho c_{D1}^2 = \rho g H + \frac{1}{2}\rho(\frac{1}{2}c_{D1}^2) \tag{13}$$

Und für die maximale Scheitelhöhe

$$H = \frac{c_{D1}^2}{4g} = 0.3\ m \tag{14}$$

d) Erneut mit einem Stromfaden von der Speicherwasseroberfläche zum Austritt ergibt sich:

$$p_I + \rho g h_1 = p_U + \frac{1}{2}\rho c_{D2}^2 \cdot (1 + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + \zeta_E + \zeta_{K1}) \tag{15}$$

Daraus folgt für

$$c_{D2} = \sqrt{\frac{p_i - p_U + \rho g h_1}{\frac{1}{2}\rho \cdot (1 + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{d_1} + \zeta_E + \zeta_{K1})}} = 2.69\frac{m}{s} \tag{16}$$

Durch den Wegfall des Verlustes durch die Düse müsste die Austittsgeschwindigkeit zunehmen. Der Volumenstrom mit Düse beträgt:

$$\dot{V}_1 = 0.00107\frac{m^3}{s} \tag{17}$$

Nach dem Ersetzen der Düse beträgt er:

$$\dot{V}_2 = 0.00132\frac{m^3}{s} \tag{18}$$

Das sich also der Volumenstrom kaum ändert, der Querschnitt der Austrittsfläche jedoch zunimmt, muss die Austrittsgeschwindigkeit abnehmen.

e) Über den Volumenstrom $\dot{V}_2 = 0.00132\frac{kg}{s}$ ergibt sich die Geschwindigkeit am Austritt der Steigleitung zu:

$$c_2 = \frac{4 \cdot \dot{V}_2}{\pi \cdot d_2^2} = 0.67\frac{m}{s} \tag{19}$$

Ein Stromfaden von der Brunnenwasseroberfläche bis zum Freistrahl in den Speicher ergibt:

$$p_3 + \rho g z_3 + \frac{1}{2}\rho c_3^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho c_2^2 + \triangle p_V - \triangle l_p \tag{20}$$

$$p_U - \rho g h_3 = p_I + \rho g \cdot (h_1 + h_2) + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \cdot (1 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_{K2}) - \triangle l_p \tag{21}$$

Für die volumenstromspezifische Pumpleistung ergibt sich folgich:

$$\triangle l_p = (p_I - p_U) + \rho g \cdot (h_1 + h_2 + h_3) + \frac{1}{2}\rho c_2^2 \cdot (1 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_{K2}) \tag{22}$$

$$\triangle l_p = 5000\frac{N}{m^2} + 115.000\frac{kg}{ms^2} + 224.45\frac{kg}{ms^2}(1 + 6.3) = 121.638\frac{kg}{ms^2} \tag{23}$$

Damit ergibt sich die Leisung der Pumpe zu

$$L = \dot{V}_1 \cdot \triangle l_p = 160,56\ W \tag{24}$$

Lösung Aufgabe 2:

$$u = \frac{(2t-1)}{x} \tag{1}$$
$$v = 4y \tag{2}$$

a.)

Vorticity:

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

Flow is irrotational as the vorticity is zero.

b.)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{2}{x} \neq 0 \quad ; \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

Flow is unsteady.

c.)

Equation of Streamlines:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \tag{5}$$
$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{4}{2t-1}\right) \cdot x dx$$
$$\ln y = \frac{2x^2}{2t-1} + \ln C_1 \tag{6}$$
$$y = C_1 \cdot e^{\left(\frac{2x^2}{2t-1}\right)} \tag{7}$$

where C_1 is the integration constant.

At time $t_0 > 0$, for $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{\left(\frac{2{x_0}^2}{2t-1}\right)} \tag{8}$$
$$y = y_0 \cdot e^{\left(\frac{2(x^2-{x_0}^2)}{2t-1}\right)} \tag{9}$$

d.)

Path line vector components:

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{(2t-1)}{x} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} xdx &= (2t-1)\,dt, \\ \frac{x^2}{2} &= t^2 - t + C_2, \\ x^2 &= 2t^2 - 2t + C_3 \end{aligned}$$

$$x(t) = \left(2t^2 - 2t + C_3\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt} = v = 4y \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= 4dt, \\ \ln y &= 4t + \ln C_4 \end{aligned}$$

$$y(t) = C_4 \cdot e^{4t} \tag{13}$$

At time $t_0 > 0$, for P$(x_0,\ y_0)$:

$$x_0 = \left(2{t_0}^2 - 2t_0 + C_3\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

$$y_0 = C_4 \cdot e^{4t_0} \tag{15}$$

Eliminating the integration constants C_3 and C_4 from (11), (13), (14) and (15):

$$x(t) = [x_0^2 + 2(t^2 - t - t_0^2 + t_0)]^{\frac{1}{2}} \tag{16}$$

$$y(t) = y_0 \cdot e^{4(t-t_0)} \tag{17}$$

e.)

Equation of Streakline:

For P$(x_0{=}1,\ y_0{=}1)$ at any time $t > 0$:

$$x(t) = [1 + 2(t^2 - t - t_0^2 + t_0)]^{\frac{1}{2}} \tag{18}$$

$$y(t) = e^{4(t-t_0)} \tag{19}$$

Eliminating t_0:

Substituing $\quad t_0 = t - \frac{1}{4} \cdot \ln y \quad$ in (18)

$$x = \left[1 + t \cdot \ln y - \frac{1}{2} \cdot \ln y - \frac{1}{8} \cdot (\ln y)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

For $t = \frac{1}{2}$:

$$x = \left[1 - \frac{1}{8} \cdot (\ln y)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

h.)

Acceleration at Q($x = 2$, $y = 1$) for $t = 5$:

x-component;

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \tag{22}$$

$$a_x = \frac{2}{x} - \frac{(2t-1)^2}{x^3} = -\frac{73}{8} \quad L/T^2$$

y-component;

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \tag{23}$$

$$a_y = 16y = 16 \quad L/T^2$$

$$a = \sqrt{({a_x}^2 + {a_y}^2)} = 18.42 \quad L/T^2 \tag{24}$$

Lösung Aufgabe 3:

a)

$$\begin{aligned}
\dot{m}_2 &= \rho_{Schnee} \cdot \dot{V}_2 \\
&= 7\ kg/s \\
\dot{m}_2 &= \dot{m}_1 = \rho_{H_2O} \cdot \dot{V}_2 \\
\dot{V}_2 &= \frac{\dot{m}_1}{\rho_{H_2O}} = 0,007\ kg/s \\
A_1 &= \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 0,0314\ m^2 \\
A_2 &= \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} = 0,126\ m^2 \\
\bar{c}_1 &= \frac{\dot{m}_1}{\rho_{H_2O} \cdot A_1} = 0,22\ m/s \\
\bar{c}_2 &= \frac{\dot{m}_2}{\rho_{Schnee} \cdot A_2} = 0,14\ m/s
\end{aligned}$$

Ein parabolisches, symmetrisches Profil lässt sich mit der Gleichung $c(r) = -ar^2 + b$ beschreiben. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen $c(0) = c_{max}$ und $c(R) = 0$ ergibt sich das folgende Geschwindigkeitsprofil:

$$c(r) = c_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2})$$

Daraus lässt sich mit der Formel für den Massenstrom die maximale Geschwindigkeit ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\dot{m}_2 &= \int_{-R_2}^{R_2} \rho_{Schnee} \cdot c(r) \cdot A_2 \\
\dot{m}_2 &= 2 \cdot \rho_{Schnee} \int_0^{R_2} c_{max}(1 - \frac{r^2}{R^2}) \cdot \pi r dr \\
\dot{m}_2 &= 2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot c_{max} \cdot \pi \int_0^{R_2} (r - \frac{r^3}{R_2^2}) dr \\
\dot{m}_2 &= 2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot c_{max} \cdot \pi \left[(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_2^4}{4R_2^2}) \right] \\
\dot{m}_2 &= \frac{\rho_{Schnee} \cdot c_{max} \cdot \pi \cdot R_2^2}{2} \\
c_{max} &= \frac{\dot{m}_2 \cdot 2}{\rho_{Schnee} \cdot \pi \cdot R_2^2} = 2 \cdot \bar{c}_2 = 0,28\ m/s
\end{aligned}$$

b) Kontrollraum:

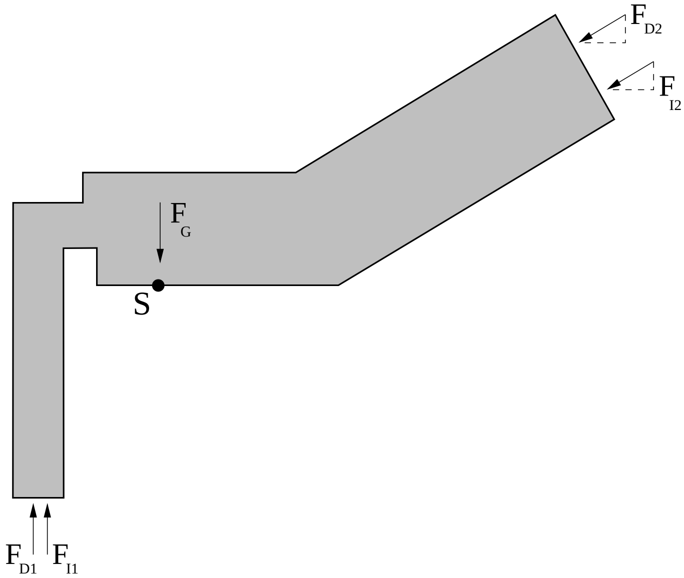


Abbildung 1: Kontrollraum

allgemeine Formel für den Impulssatz: $F_I = -\int_A \rho \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi}{4} D_1^2 \\ &= 0.0314\ m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{\pi}{4} D_2^2 \\ &= 0.1257\ m^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{I1} &= \rho_{H_2O} \cdot c_1^2 \cdot A_1 \\ &= 1,52\ N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{D_1} &= (p_1 - p_0) \cdot A_1 \\ &= 9420\ N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_G &= g \cdot G \\ &= 98\ N \end{aligned}$$

$$F_{D_2} = 0$$

$$
\begin{aligned}
F_{I2} &= \rho_{Schnee} \cdot c(r)_2^2 \cdot A_2 \\
&= 2 \cdot \rho_{Schnee} \int_0^{R_2} c_{max}^2 (1 - \frac{r^2}{R^2})^2 \cdot \pi r dr \\
&= 2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot c_{max}^2 \cdot \pi \int_0^{R_2} (r - \frac{2r^3}{R_2^2} - \frac{r^5}{R_2^4}) dr \\
&= 2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot c_{max}^2 \cdot \pi \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2r^4}{4R_2^2} + \frac{r^6}{6R_2^4} \right]_0^{R_2} \\
&= 2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot c_{max}^2 \cdot \pi (\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_2^2}{4} + \frac{R_2^2}{6}) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \rho_{Schnee} \cdot c_{max}^2 \cdot R_2^2 \\
&= 1,3136 \ N
\end{aligned}
$$

Kräftebilanz in x-Richtung:

$$
\begin{aligned}
\sum F_x &= -F_{I2} \cdot cos\alpha \\
\Rightarrow F_x &= -1,3136 \cdot cos(30) = 1,1376 \ N
\end{aligned}
$$

Kräftebilanz in y-Richtung:

$$
\begin{aligned}
\sum F_y &= F_{I1} + F_{D1} - F_{I2} \cdot sin\alpha - F_{G_{Fl}} \\
&= 1,52 \ N + 9420 \ N - 0,6568 \ N - 98 \ N \\
\Rightarrow F_y &= 9322,86 \ N
\end{aligned}
$$

c) Momentenbilanz um den Schwerpunkt S:

$$
\sum M = M_{I1} + M_{D1} + M_{I2_x} + M_{I2_y}
$$

$$
M_{D1} = -(p_1 - p_0) \cdot A_1 \cdot l = -F_{D1} \cdot l = -4710 \ Nm
$$

$$
\begin{aligned}
M_{I1} &= -\int_A \rho_{H_2O} \cdot (\vec{r} \times \vec{c}_1) \cdot (\vec{c}_1 \cdot \vec{n}) dA \\
M_{I1} &= -\int_A \rho_{H_2O} \cdot \left[\begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) dA \\
M_{I1} &= -\rho_{H_2O} \cdot l \cdot c_1^2 \cdot A_1 = -F_{I1} \cdot l \Rightarrow M_{I1} = -0,76 \ Nm
\end{aligned}
$$

$$M_{I2} = -\int_A \rho_{Schnee} \left[\begin{pmatrix} 4l \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_2(r)cos\alpha \\ c_2(r)sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \left(\begin{pmatrix} c_2(r)cos\alpha \\ c_2(r)cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} cos\alpha \\ sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \right) dA$$

$$M_{I_2} = -\rho_{Schnee} \int_A \begin{pmatrix} 0 \\ 4lc_2(r)sin\alpha - hc_2(r)cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \cdot c_2(r)dA$$

$$M_{I_2} = -\rho_{Schnee} \int_{-R_2}^{R_2} 4l \cdot c_2(r)^2 \cdot sin\alpha \cdot \pi r dr + \rho_{Schnee} \int_{-R_2}^{R_2} h \cdot c_2(r)^2 \cdot cos\alpha \cdot \pi r dr$$

$$M_{I_2} = -2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot 4l \cdot sin\alpha \int_0^{R_2} c_2(r)^2 \cdot \pi r dr + 2 \cdot \rho_{Schnee} \cdot h \cdot cos\alpha \int_0^{R} c_2(r)^2 \cdot \pi r dr$$

Mit der Intergration aus Aufgabenteil c ergibt sich:

$$M_{I_2} = -F_{I2_y} \cdot 4l + F_{I2_x} \cdot h$$

$$M_{I_2} = -1,3136\ Nm + 0,68256\ Nm$$

$$\Longrightarrow \sum M = M_{I_1} + M_{I_2} = -4711,39\ Nm$$

Lösung Aufgabe 4:

- Lösung Aufgabenteil a.)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \overbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}}^{=0} = 0 \tag{1}$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \overline{u'v'}\right) \tag{2}$$

Der letzte Term der Gleichung entspricht der turbulenten scheinbaren Schubspannung τ'_{xy} und kann durch die Boussinesq-Annahme wie folgt ausgedrückt werden

$$\tau'_{xy} = -\rho\overline{u'v'} = \mu_t \cdot \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)$$

Setzt man diese in Gl. (2) ein, folgt

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \nu_t\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)\right) \tag{3}$$

Es gibt keine zeitlich gemittelte vertikale Strömungskomponente, weil die Platte parallel in x-Richtung überströmt wird ($\bar{v} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = 0$). Dadurch und durch Einsetzen von Gl. (1) in Gl. (3) vereinfacht sich Gl. (3) zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(\nu + \nu_t)\right)$$

item Lösung Aufgabenteil b.)
Die Integration $\int dy$ liefert

$$C = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(\nu + \nu_t)$$

Wertet man diese Gleichung an der Wand aus, verschwindet der Einfluß von ν_t und man erhält mit der Definition der Wandschubspannung

$$\begin{aligned}
\tau_w &= \rho\nu \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|_{y=0} + \rho \underbrace{\left.\nu_t\right|_{y=0}}_{=0} \cdot \left.\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right|_{y=0} = \rho \cdot C \\
C &= \frac{\tau_w}{\rho} \quad \text{mit} \quad \tau_w = \rho u_\tau^2 \\
C &= u_\tau^2
\end{aligned}$$

item Lösung Aufgabenteil c.)

und damit

$$
\begin{aligned}
u_\tau^2 &= \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}_{I}\underbrace{(\nu + \nu_t)}_{II} \\
I \quad : \quad & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial(\bar{u}^+ u_\tau)}{\partial\left(\frac{y^+\nu}{u_\tau}\right)} = \overbrace{\frac{u_\tau^2}{\nu}}^{=konst.}\ \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \\
II \quad : \quad & \nu + \nu_t = \frac{1}{\rho}(\mu + \mu_t) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\mu_t}{\mu_t^+} + \frac{\mu_t\ \mu_t^+}{\mu_t^+}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\mu_t(1+\mu_t^+)}{\mu_t^+} \\
&= \frac{\mu}{\rho}(1+\mu_t^+) = \nu(1+\mu_t^+) \\
\Rightarrow u_\tau^2 &= \frac{u_\tau^2}{\nu}\frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \cdot \nu(1+\mu_t^+) \\
\Rightarrow &\ \underline{\underline{1 = \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+}(1+\mu_t^+)}} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

- Lösung Aufgabenteil d.)

Der Prandtlsche Mischungswegansatz ist ein Ansatz zur Bestimmung von μ_t.

$$\mu_t = \rho \cdot l^2 \cdot \frac{d\bar{u}}{dy} \qquad (5)$$

Die Prandtlsche Mischungsweglänge l ist definiert als die Weglänge, die ein Fluidelement zurücklegt, bis es sich durch den turbulenten Prozess vollständig mit seiner Umgebung vermischt hat und nicht mehr zu identifizieren ist.

item Lösung Aufgabenteil e.)
Setzt man $l = 0$ in (5) ein, folgt $\mu_t = 0$, sodass sich Gl. (4) zu

$$1 = \frac{\partial \bar{u}^+}{\partial y^+} \qquad (6)$$

vereinfacht.

Lösung Aufgabe 5:

a.) Gesucht: Machzahl M_M und Strömungsgeschwindigkeit c_M in der Messkammer.

$$\begin{aligned} \frac{T_{M1}}{T_0} &= \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_M^2\right)^{-1} \\ \Rightarrow M_M^2 &= \left(\frac{T_0}{T_{M1}} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{\kappa - 1}\right) \\ M_M^2 &= \left(\frac{293K}{130K} - 1\right) \cdot \left(\frac{2}{\kappa - 1}\right) \\ M_M &= \mathbf{2{,}50} \end{aligned} \tag{1}$$

$$a = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{\kappa \cdot R \cdot 293K} \\ a_0 &= \mathbf{343{,}11\ m/s} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{\kappa \cdot R \cdot 130K} \\ a_M &= \mathbf{228{,}55\ m/s} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot c_M^2 + \frac{a_M^2}{\kappa - 1} &= \frac{a_0^2}{\kappa - 1} \\ \Rightarrow c_M^2 &= \frac{2}{\kappa - 1}\left(a_0^2 - a_M^2\right) \\ c_M^2 &= \frac{2}{\kappa - 1}\left((343,11 m/s)^2 - (228,55 m/s)^2\right) \\ \Rightarrow c_M &= \mathbf{572{,}23\ m/s} \end{aligned} \tag{5}$$

Alternativ aus Machzahl und Schallgeschwindigkeit!

b.) Gesucht: Durchmesser d^* im engsten Querschnitt der Laval-Düse

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{\pi}{4} \cdot d_M^2 \\ A_M &= \frac{\pi}{4} \cdot (0.58m)^2 \\ A_M &= 0,26m^2 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A_M}{A^*} &= \frac{1}{M_M}\left(1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left[M_M^2-1\right]\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}} \qquad (7)\\
\Rightarrow A^* &= A_M \cdot M_M \left(1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left[M_M^2-1\right]\right)^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}}\\
A^* &= 0,26m^2 \cdot 2,5 \cdot \left(1+\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\left[2,5^2-1\right]\right)^{\frac{\kappa+1}{2(1-\kappa)}}\\
A^* &= 0,1m^2 \Rightarrow d^* = \mathbf{0{,}36\ m}
\end{aligned}$$

Alternativ über Massenstrom:

$$\begin{aligned}
\rho^* \cdot c^* \cdot \frac{\pi \cdot d^*}{4} &= \rho_m \cdot c_m \cdot \frac{\pi \cdot d_m}{4} \qquad (8)\\
\Rightarrow a^* = 313,2m/s, \quad \rho^* &= 0,7537kg/m^3, \quad d^* = 0,356m
\end{aligned}$$

c.) Gesucht: Massenstrom durch den Überschallwindkanal

$$\dot{m} = \rho \cdot c \cdot A \qquad (9)$$

Wird hier mit Werten in der Messkammer berechnet.

$$\frac{\rho_M}{\rho_0} = \left(\frac{T_{M1}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \qquad (10)$$

mit

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \frac{p_0}{R \cdot T_0} \qquad (11)\\
\rho_0 &= \frac{1bar}{R \cdot 293K}\\
\rho_0 &= 1,189kg/m^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_M}{\rho_0} &= \left(\frac{T_{M1}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \qquad (12)\\
\Rightarrow \rho_M &= \rho_0 \cdot \left(\frac{T_{M1}}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}\\
\rho_M &= 0,156kg/m^3
\end{aligned}$$

Werte für ρ_M und A_M aus vorherigen Aufgabenteilen.

$$\begin{aligned}
\dot{m} &= \rho_M \cdot c_M \cdot A_M \qquad (13)\\
\dot{m} &= 0,156kg/m^3 \cdot 572,23m/s \cdot 0,26m^2\\
\dot{m} &= 23,21kg/s
\end{aligned}$$

d.) Gesucht: Druck p_K im Kessel, Masse der Luft im Kessel m_K bei Auftreten des Verdichtungsstoßes

Vor Stoß: p_{Mv}

$$\begin{aligned}
\frac{p_{Mv}}{p_0} &= \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_M^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} &(14)\\
\frac{p_{Mv}}{p_0} &= \left(1+\frac{\kappa-1}{2}2,5^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}}\\
\frac{p_{Mv}}{p_0} &= 0,0585\\
\Rightarrow p_{Mv} &= 5852,77Pa
\end{aligned}$$

Nach Stoß: p_{Mn}

$$\begin{aligned}
\frac{p_{Mv}}{p_{Mn}} &= 1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(M_M^2-1\right) &(15)\\
\frac{p_{Mv}}{p_{Mn}} &= 7,125\\
\Rightarrow p_{Mn} &= 0,417bar
\end{aligned}$$

$$p_{Mn} = p_K$$

Masse im Kessel:

$$\begin{aligned}
p_K \cdot V &= m \cdot R \cdot T_K \Longrightarrow m_K &(16)\\
\Rightarrow m_K &= \frac{p_K \cdot V_K}{R \cdot T_K}\\
m_K &= \frac{0,417bar \cdot 400m^3}{R \cdot 293K}\\
m_K &= \mathbf{198{,}36kg}
\end{aligned}$$

e.) Gesucht: Messdauer im Windkanal bis Verdichtungsstoß auftritt.

Masse der Luft im Kessel bei t=0

$$p_{K_0} \cdot V = m \cdot R \cdot T_K \Longrightarrow m_0 = 23,78kg \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{m} \cdot \Delta t &= m_K - m_{K_0} &(18)\\
\Rightarrow \Delta t &= \frac{m_K - m_{K_0}}{\dot{m}}\\
\Rightarrow \Delta t &= \frac{198,36kg - 23,78kg}{23,21kg/s}\\
\Delta t &= \mathbf{7{,}52s}
\end{aligned}$$

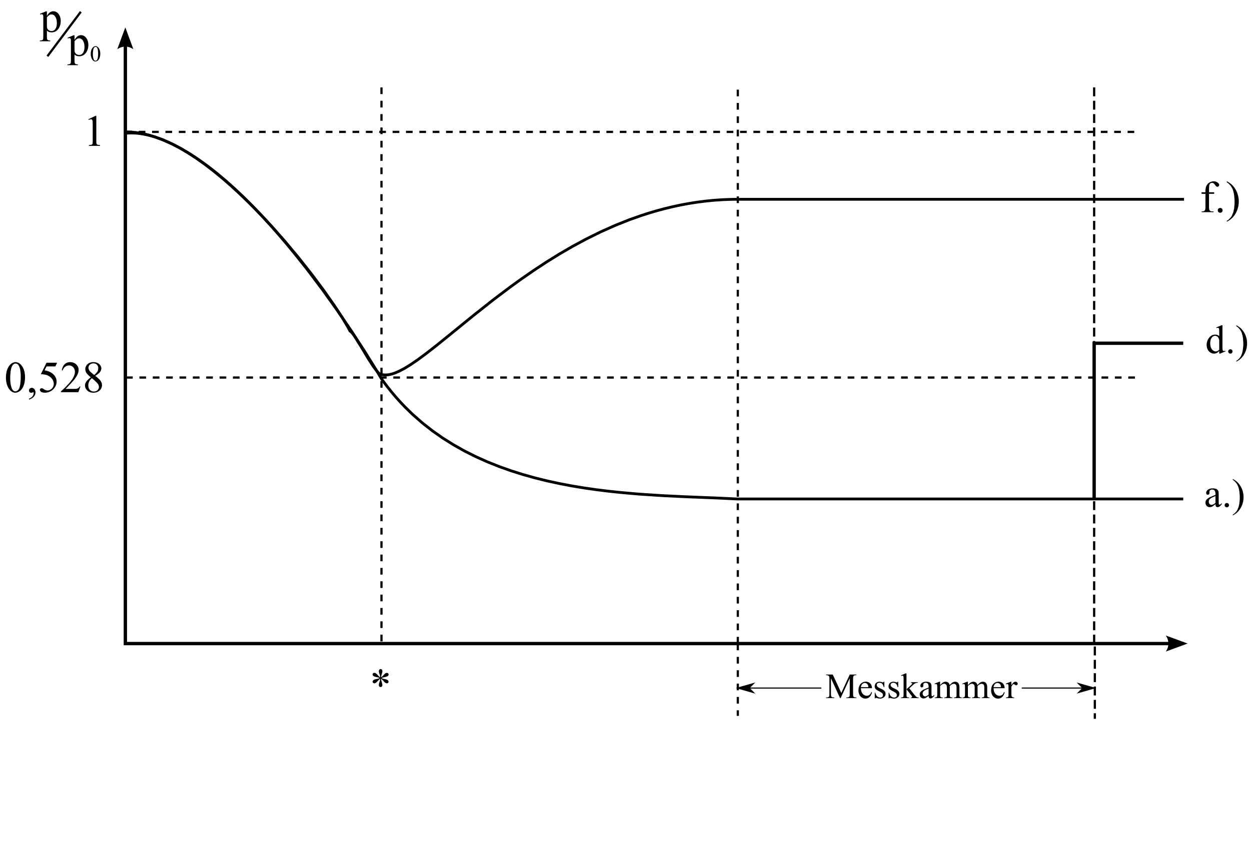
f.) Gesucht: Kesseldruck ab dem der gesamte Windkanal erstmals wieder vollkommen stoßfrei ist, Massenstrom

$$\begin{aligned}
\frac{T_{M2}}{T_0} &= \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_M^2\right)^{-1} \\
\Rightarrow M_M^2 &= \left(\frac{T_0}{T_{M2}}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{\kappa-1}\right) \\
M_M^2 &= \left(\frac{293K}{290K}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{\kappa-1}\right) \\
M_M &= \mathbf{0{,}227}
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{p_M}{p_0} &= \left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_M^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\
\Rightarrow p_M &= p_0\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}M_M^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\
p_M &= 1bar\cdot\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\cdot 0,227^2\right)^{-\frac{\kappa}{\kappa-1}} \\
p_M &= 0,965bar
\end{aligned} \tag{20}$$

Massenstrom ist gleich, wie der in c.) berechnete.

g.) Gesucht: Druckverläufe über Windkanal



Lösung Aufgabe 6:

a) Die Strömung ist eben, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 0 \quad , \qquad v = 0 \quad . \tag{1}$$

Damit ergibt sich für die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen mit konstanter Zähigkeit :

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad , \tag{2}$$

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) = k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad . \tag{3}$$

b) Die zweidimensionale Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{4}$$

Es wirkt die Erdschwere und kein anderes Kraftfeld, das bedeutet:

$$k_x = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \quad , \qquad k_y = 0 \quad , \qquad k_z = -\rho \cdot g \cdot \cos(\alpha) \quad .$$

Da der Einfluss der Schwerkraft normal zur Strömungsrichtung im Spalt, d. h. in z-Richtung vernachlässigbar ist folgt hieraus:

$$k_x = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \quad , \qquad k_y = 0 \quad , \qquad k_z = 0 \quad . \tag{5}$$

Die Strömung ist stationär und damit gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad . \tag{6}$$

Die Strömung ist in x-Richtung ausgebildet, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten ändern sich in x-Richtung nicht:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \tag{7}$$

Die Bedingungen (5) - (7) in die Gleichungen (2) - (4) eingesetzt ergibt:

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad , \tag{8}$$

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad . \tag{9}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad . \tag{10}$$

Wegen den Bedingungen (1) und (7) sind die Geschwindigkeitskomponenten u und w nur Funktionen von z. Damit können die partiellen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten als totale Ableitungen geschrieben werden. Man erhält aus (8) - (10):

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad , \tag{11}$$

$$\rho \cdot w \cdot \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} \quad . \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = 0 \quad . \tag{13}$$

Aus der Kontinuität (13) folgt durch Integration:

$$w(z) = \mathrm{C} \tag{14}$$

mit der Intergrationskonstanten C. An der Wand gilt die Haftbedingung, d. h. $w(z = -s/2) = w(z = s/2) = 0$. Die Lösung (14) in die Randbedingung eingesetzt führt zu $w(z) = 0$. Setzt man dieses in die Navier-Stokes-Gleichungen (11) und (12) ein ergibt sich:

$$0 = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad , \tag{15}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial z} \quad . \tag{16}$$

Mit Gleichung (16) und der Bedingung (1) ist der Druck keine Funktion von y und z. Damit gilt $p = p(x)$ und $\partial p/\partial x = \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Eingesetzt in die Gleichung (15) erhält man:

$$0 = -\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \mu \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} \quad ,$$

oder umgeformt

$$\underline{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \right)} \quad . \tag{17}$$

c) Für den Druckgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$ folgt nach Gleichung (17) $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x = konst.$. Mit den Randbedingungen $p(x = 0) = p_\mathrm{K}$ und $p(x = L) = p_\mathrm{U}$ folgt hieraus:

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{p_\mathrm{U} - p_\mathrm{K}}{L} = -\frac{\Delta p}{L} \tag{18}$$

und

$$p(x) = p_\mathrm{K} + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \cdot x = p_\mathrm{K} - \frac{\Delta p}{L} \cdot x \quad . \tag{19}$$

Die Druckkraft $|F_{\mathrm{p_s}}|$ auf die Unterseite des Quarders in z-Richtung berechnet sich damit zu

$$|F_{\mathrm{p_s}}| = \int_0^L p(x) \cdot T \cdot dx = \left[p_\mathrm{K} \cdot x - \frac{\Delta p}{2 \cdot L} \cdot x^2 \right]_0^L \cdot T = p_\mathrm{K} \cdot L - \frac{\Delta p}{2} \cdot L \cdot T = \frac{p_\mathrm{U} + p_\mathrm{K}}{2} \cdot L \cdot T \quad .$$

Eine Kräftbilanz am Quader in z-Richtung ergibt damit:

$$-p_\mathrm{U} \cdot L \cdot T + \frac{p_\mathrm{U} + p_\mathrm{K}}{2} \cdot L \cdot T - G \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad ,$$

$$\frac{p_\mathrm{K} - p_\mathrm{U}}{2} \cdot L \cdot T - G \cdot \cos(\alpha) = \frac{\Delta p}{2} \cdot L \cdot T - G \cdot \cos(\alpha) = 0 \quad .$$

Daraus folgt für die Druckdifferenz:

$$\underline{\Delta p = 2 \cdot \frac{G}{L \cdot T} \cdot \cos(\alpha)} \quad . \tag{20}$$

d) Die Integration von Gleichung (17) ergibt:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \right) \cdot z + \mathrm{C}_1 \quad . \tag{21}$$

Mit einer weiteren Integration erhält man:

$$u(z) = \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \right) \cdot z^2 + \mathrm{C}_1 \cdot z + \mathrm{C}_2 \quad . \tag{22}$$

Für den Spalt ergibt die Haftbedingung als Randbedingung an der oberen Wand $u(z = s/2) = 0$ und an der unteren Wand $u_\mathrm{S}(z = -s/2) = 0$. Eingesetz in Gleichung (22) erhält man:

$$0 = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(\rho\cdot g\cdot\sin(\alpha)+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^2 + \mathrm{C}_1\cdot\frac{s}{2}+\mathrm{C}_2 \quad , \tag{23}$$

$$0 = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(\rho\cdot g\cdot\sin(\alpha)+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^2 - \mathrm{C}_1\cdot\frac{s}{2}+\mathrm{C}_2 \quad . \tag{24}$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen von einander und löst nach C_1 auf ergibt sich:

$$\mathrm{C}_1 = 0 \quad .$$

Addiert man Gleichung (23) und Gleichung (24) und löst nach C_1 auf erhält man:

$$\mathrm{C}_2 = -\frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(\rho\cdot g\cdot\sin(\alpha)+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad .$$

Die beiden Konstanten in die Gleichung (22) eingesetzt führt auf:

$$u(z) = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(\rho\cdot g\cdot\sin(\alpha)+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left[z^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2\right] \quad . \tag{25}$$

Setzt man den Druckgradienten aus Gleichung (18) in Gleichung (25) ein ergibt sich

$$u(z) = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(\rho\cdot g\cdot\sin(\alpha)-\frac{\Delta p}{L}\right)\cdot\left[z^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2\right] \quad . \tag{26}$$

Mit Gleichung (20) folgt hieraus schließlich

$$\underline{u(z) = \frac{1}{2\cdot\mu}\cdot\left(\rho\cdot g\cdot\sin(\alpha)-2\cdot\frac{G}{L^2\cdot T}\cdot\cos(\alpha)\right)\cdot\left[z^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2\right]} \quad . \tag{27}$$

e) Der Volumenstrom im Spalt berechnet sich mit der Tiefe T senkrecht zur Zeichenebene aus:

$$\dot{V} = \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} u(z)\cdot T\cdot\mathrm{d}z \quad . \tag{28}$$

Wegen der Symmetrie zur x-Achse von $u(z)$ folgt hieraus

$$\dot{V} = 2\cdot\int_{0}^{\frac{s}{2}} u(z)\cdot T\cdot\mathrm{d}z \quad . \tag{29}$$

Gleichung (26) in Gleichung (29) eingesetzt führt zum Volumenstrom $\dot{V}$ im Spalt:

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= 2 \cdot \int\limits_0^{\frac{s}{2}} \frac{1}{2 \cdot \mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\Delta p}{L} \right) \cdot \left[z^2 - \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right] \cdot T \cdot \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\Delta p}{L} \right) \cdot T \cdot \int\limits_0^{\frac{s}{2}} \left[z^2 - \left(\frac{s}{2} \right)^2 \right] \cdot \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\Delta p}{L} \right) \cdot T \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot z^3 - \left(\frac{s}{2} \right)^2 \cdot z \right]_0^{\frac{s}{2}} \\
&= \frac{1}{\mu} \cdot \left(\rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) - \frac{\Delta p}{L} \right) \cdot T \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{s}{2} \right)^3 - \left(\frac{s}{2} \right)^3 \right] \\
&= \frac{1}{\mu} \cdot \left(\frac{\Delta p}{L} - \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \right) \cdot T \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{s}{2} \right)^3 \\
&= \frac{1}{12} \cdot \frac{s^3 \cdot T}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} - \rho \cdot g \cdot \sin(\alpha) \right) \quad .
\end{aligned}$$

Mit Gleichung (20) folgt hieraus schließlich

$$\underline{\dot{V} = \frac{1}{12} \cdot \frac{s^3}{\mu \cdot L^2} \cdot \left(2 \cdot G \cdot \cos(\alpha) - \rho \cdot g \cdot L^2 \cdot T \cdot \sin(\alpha) \right)} \quad .$$