

Dipl.-Ing. Thomas Erhard Hodrus
Karlsruhe

Prozessführungsstrategien für hybride Systeme



Thomas Erhard Hodrus

Prozessführungsstrategien für hybride Systeme

Schriften des
Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme,
Universität Karlsruhe (TH)

Band 03

Prozessführungsstrategien für hybride Systeme

von

Thomas Erhard Hodrus



universitätsverlag karlsruhe

Dissertation, Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, 2007

Impressum

Universitätsverlag Karlsruhe
c/o Universitätsbibliothek
Straße am Forum 2
D-76131 Karlsruhe
www.uvka.de



Dieses Werk ist unter folgender Creative Commons-Lizenz
lizensiert: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.0/de>

Universitätsverlag Karlsruhe 2008
Print on Demand

ISSN 1862-6688
ISBN 978-3-86644-227-6

Prozessführungsstrategien für hybride Systeme

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Universität Fridericiana Karlsruhe
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Thomas Erhard Hodrus
aus Isny im Allgäu

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 2008

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing Volker Krebs

Korreferent: Prof. Dr.-Ing Jan Lunze

Karlsruhe, den 14. März 2008

Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS) der Universität Karlsruhe (TH).

Dem Leiter des Instituts, Herrn Professor Dr.-Ing. Volker Krebs danke ich recht herzlich für seine Anregungen und den Rückhalt während der Promotion. Stets zum Gespräch bereit, schuf er ein sehr angenehmes Arbeitsklima.

Zu Dank verpflichtet bin ich Herrn Professor Dr.-Ing. Jan Lunze für die freundliche Übernahme des Korreferats und die konstruktiven Hinweise.

Mein herzlicher Dank richtet sich an Michael und Florian für die vielen anregenden Diskussionen. Weiterhin bedanke ich mich bei Michael, Jens, Peter und Estelle für die kritische Durchsicht dieser Arbeit. Frau Doris Bickel gebührt mein Dank für die Unterstützung bei den Zeichnungen.

Ich bedanke mich weiterhin bei allen Mitarbeitern und Mitarbeiterinnen des IRS; darüber hinaus bei allen Studentinnen und Studenten, die mit ihren Studien- und Diplomarbeiten zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen haben.

Auch eine Enttäuschung, wenn sie nur gründlich und endgültig ist, bedeutet einen Schritt vorwärts.

Max Planck, 23.04.1858 - 04.10.1947

Begründer der Quantentheorie & Nobelpreisträger

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen hybrider Systeme	5
2.1	Einführung in hybride Systeme	6
2.1.1	Hybrides Systemmodell durch physikalische Modellierung . . .	9
2.1.2	Hybrides Systemmodell durch vereinfachte physikalische Modellierung	11
2.1.3	Hybrides Systemmodell durch stückweise affine Approximation nichtlinearer Dynamik	11
2.1.4	Hybrides Systemmodell durch diskrete Eingangsgrößen	12
2.2	Beschreibung der Systemdynamik	13
2.2.1	Zeitgetriebene Modellierung	13
2.2.2	Ereignisgetriebene Modellierung	13
2.3	Hybride Modellformen	14
2.3.1	Formulierung hybrider Phänomene	14
2.3.2	Modellform Netz-Zustands-Modell [Nen01]	16
2.3.3	Modellform des Mixed Logical Dynamical (MLD) Systems . . .	18
2.3.4	Stückweise affine Systeme	22
2.4	Charakterisierung hybrider Modellformen	23
2.4.1	Zustandsraumbeschränkungen	23
2.4.2	Stellgrößenbeschränkungen	24
2.4.3	Allgemeine Eigenschaften der Beschränkungen	24
2.4.4	Vergleich zur linearen Systemtheorie	25
2.5	Beschreibung der Gebiete im Zustandsraum	27
2.5.1	Polytope und Simplexe	27
2.5.2	Baryzentrische Koordinaten	29
2.6	Besonderheiten zeitdiskreter hybrider Systeme	30
2.6.1	Motivation durch die Realisierungsproblematik	30
2.6.2	Zeitdiskretisierung hybrider Systeme	31
2.6.3	Zeitdiskrete Phänomene	33
2.7	Zusammenfassung	34

3	Gezielte Beeinflussung der Systemdynamik	37
3.1	Überblick über die klassischen Regelungsverfahren	37
3.1.1	Verfahren zur Ermittlung des dynamischen Reglers R_D . . .	38
3.1.2	Verfahren zur Ermittlung des Zustandsreglers R_Z	39
3.2	Dynamische Programmierung	39
3.3	Bekannte Regelungsverfahren für hybride Systeme	41
3.3.1	Modellbasierte prädiktive Regelung auf Basis der MLD-Systembeschreibung [BM99]	41
3.3.2	Affines Regelungsgesetz	43
3.3.3	Multiparametrische Programmierung	44
3.3.4	Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex	45
3.3.5	Regelung durch Anpassung von Linkseigenvektoren	47
3.3.6	Sektorkriterium [Nen01]	48
3.4	Zustandsbeobachtung hybrider Systeme	49
3.5	Vergleich der Ziele hybrider und klassischer Regelungsverfahren . . .	50
3.6	Zusammenfassung	52
4	Globale Prozessführungsstrategie für hybride Systeme	55
4.1	Erstellung eines Modells für die globale Prozessführungsstrategie . .	56
4.1.1	Gebietsaufteilung	56
4.1.2	Graph für die globale Prozessführungsstrategie	58
4.2	Aufgabe und Durchführung der globalen Prozessführungsstrategie .	67
4.2.1	Wegsuche im Graphen	67
4.2.2	Vorgehensweise beim gebietsorientierten Graphen	67
4.2.3	Vorgehensweise beim dynamikorientierten Graphen	68
4.3	Einarbeiten von Heuristiken in die Prozessführung	69
4.3.1	Markieren von verbotenen Gebieten im Zustandsraum	70
4.3.2	Markieren von verbotenen Gebietsübertritten	72
4.3.3	Maßnahmen zum Erreichen des Endzustandes	72
4.4	Zusammenfassung	77
5	Lokale Regelungsstrategien	79
5.1	Überblick über Regelungsaufgaben und lokale Regelungsverfahren . .	80
5.2	Eigenschaften des Regelkreises	81
5.3	Allgemeine Bedingungen an den zeitdiskreten Gradienten	82
5.3.1	Mathematische Beschreibung des Winkelbereichs durch Ungleichungen	83
5.3.2	Winkelbereiche für die Übertrittsregelung	85
5.3.3	Zeitdiskrete Bedingungen im Polytop P	86
5.3.4	Zusätzliche Bedingungen für Länge und Richtung der zeitdiskreten Gradienten	87
5.3.5	Zeitdiskrete Bedingungen im Nachbarpolytop \hat{P}	88
5.3.6	Das Ungleichungssystem zur Übertrittsregelung	89

5.4	Regelungen zum Gebietsübertritt im Simplex	92
5.4.1	Gütemaße zur numerischen Bestimmung einer Lösung durch Optimierung	93
5.4.2	Allgemeine Aussagen über Ruhelagen	94
5.4.3	Vorgabe von Stellgrößen in den Eckpunkten	96
5.4.4	Verfahren zur Eigenwert- und Linkseigenvektor-Vorgabe . . .	98
5.5	Endgebietsregelung im Simplex	120
5.5.1	Allgemeine Bedingungen an die Gradienten bei der Endge- bietsregelung im Simplex	120
5.5.2	Endgebietsregelung mit dem VSE-Verfahren im Simplex . . .	122
5.5.3	Endgebietsregelung mit dem ELV-Verfahren im Simplex . . .	123
5.6	Erweiterung der lokalen Regelstrategien für Polytope	125
5.6.1	Erweiterung des VSE-Verfahrens für Polytope	126
5.6.2	Erweiterung des ELV-Verfahrens für Polytope	131
5.7	Endgebietsregelung im Polytop	134
5.7.1	Allgemeine Bedingungen an die Gradienten bei der Endge- bietsregelung im Polytop	134
5.7.2	Endgebietsregelung mit dem VSE-Verfahren	134
5.7.3	Endgebietsregelung mit dem ELV-Verfahren	135
5.8	Vergleich des VSE-Verfahrens mit dem ELV-Verfahren	135
5.9	Vergleich mit existierenden Verfahren	136
5.9.1	Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex bei zeit- kontinuierlichen stückweise affinen Systemen	136
5.9.2	Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren bei zeitkon- tinuierlichen stückweise affinen und hybriden Systemen . . .	137
5.9.3	Multiparametrische Programmierung bei zeitdiskreten stück- weise affinen Systemen	137
5.9.4	Vergleich mit weiteren Verfahren	138
5.10	Erweiterungen des Entwurfs	139
5.11	Zusammenfassung	140
6	Anwendungsbeispiele	143
6.1	Prozessführung	144
6.1.1	Zwei-Tank-System	147
6.1.2	Drei-Tank-System	152
6.1.3	Druckregelung einer Kupplung	163
6.2	Lokale Regelung am Beispiel einer Lose im Antriebsstrang	165
6.3	Zusammenfassung	172
7	Zusammenfassung	175
A	Anmerkungen	177
A.1	Partikelschwarm-Optimierung (PSO)	177
A.1.1	PSO für Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen . . .	178
A.1.2	Modifizierter PSO-Algorithmus	179
A.2	Inhärente Systemgrenzen bei komplexen Eigenwerten	180

B Beweise	183
B.1 Verallgemeinerung der Bedingungen an den Gradienten eines beliebigen Zustandspunkts im Simplex	183
B.2 Eindeutigkeit der Lösung im Polytop	185
B.3 Inhärente Systemgrenzen	187
B.3.1 Existenz der inhärenten Systemgrenzen	188
B.3.2 Systembewegung relativ zu den Systemgrenzen	191
B.3.3 Inhärente Systemgrenzen durch den aktuellen Zustandspunkt [Buc04b, Wol05]	193
B.4 Rückschluss von den Projektionen auf den zeitdiskreten Gradienten .	195
Literatur	197

Kapitel 1

Einleitung

Die Regelungstechnik beschäftigt sich mit der gezielten Beeinflussung von technischen Prozessen. Dabei werden zur Regelung von Größen, die wichtig für den ablaufenden Prozess sind, überwiegend klassische Regelungskonzepte eingesetzt.

Ein klassisches Regelungskonzept stellt zum Beispiel ein Regler mit Proportional- und Integrierglied dar. Dieser findet sich in vielen Regelungen, da er äußerst einfach zu realisieren ist und auch ohne spezielle regelungstechnische Kenntnisse so betrieben werden kann, dass die gewünschten Sollwerte des Prozesses eingehalten werden. Zur Regelung von Systemen mit mehreren Eingangs- und Ausgangsgrößen wird häufig ein Zustandsregler eingesetzt, der aufgrund der höheren Komplexität oft von Fachpersonal bedient werden muss.

Parallel zum Einhalten von Sollwerten müssen in der Automatisierungstechnik Prozesse durch den Einsatz einer Steuerung geführt werden, damit sie einem ganz bestimmten Ablauf folgen. Eine Steuerung wird üblicherweise mit einem ereignisdiskreten Modell in Form eines Automaten oder Petri-Netzes auf einem Prozessleitsystem realisiert. Eine Abänderung des komplexen Steuerungsalgorithmus ist dabei in der Regel nicht vorgesehen, da dies nur vom Fachpersonal bewerkstelligt werden kann.

Die ganzheitliche Betrachtung des Gesamtprozesses, der sich aus unterlagerten Regelungen für das Halten von Sollwerten und einer übergeordneten Steuerung für den Prozessablauf zusammensetzt, erfordert neuartige Regelungskonzepte, die im Folgenden vorgestellt werden.

Der komplexe Gesamtprozess kann als hybrides System modelliert werden. Hybride Systeme werden durch zeitgetriebene und ereignisgetriebene Teilsysteme beschrieben, die in Wechselwirkung miteinander stehen. Damit können Anfahrvorgänge oder Arbeitspunktwechsel mithilfe bestehender Analysemethoden für hybride Systeme ganzheitlich untersucht werden. Mit Synthesemethoden für hybride Systeme kann die Prozessführung insgesamt verbessert werden, wie es durch eine gesonderte Optimierung des zeitgetriebenen oder des ereignisgetriebenen Teilsystems nicht möglich

wäre. Die Kosten für den Betrieb des komplexen hybriden Prozesses, wie zum Beispiel von Kraftwerksanlagen [GSC⁺03], können durch den Einsatz hybrider Methoden oft stark gesenkt werden.

Hybride Systeme stellen strenge Forderungen an den Entwurf einer Prozessführung, da Stellgrößen- und Zustandsgrößenbeschränkungen berücksichtigt und eine Einhaltung dieser Beschränkungen garantiert werden muss.

Die Prozessführung hybrider Systeme hat aufgrund verbesserter Analyse- und Synthesemethoden in den vergangenen Jahren reges Interesse auf sich gezogen. Das ereignisdiskrete Teilmodell wird häufig als Zustandsgraph, Petri-Netz oder durch logische Verknüpfungen realisiert. Das zeitgetriebene Teilsystem wird entweder als zeitkontinuierliches oder zeitdiskretes Teilmodell beschrieben.

Um die Prozessführungsstrategie auf einem Steuergerät realisieren zu können, muss berücksichtigt werden, dass Zeitsignale dort nur zu Abtastzeitpunkten vorliegen. Der Entwurf der Prozessführung muss bei der in dieser Arbeit untersuchten Systemklasse der zeitdiskreten stückweise affinen Systeme an einem zeitdiskreten Modell durchgeführt werden, da die Möglichkeit besteht, dass eine Umschaltung in der Systemdynamik zwischen zwei Abtastzeitpunkten auftritt. Es treten deshalb bestimmte Effekte durch die verspätete Detektion einer Umschaltung ein.

Bei Verfahren, die zeitkontinuierliche hybride Modelle als Grundlage für die Prozessführung verwenden, wird diese Eigenschaft der zeitdiskreten Signale nicht beachtet, so dass das Ergebnis des Entwurfs bei der Anwendung am realen Prozess nicht immer zufriedenstellend ist. Bei Umschaltungen treten dann oft schwerwiegende Fehler im Prozessablauf auf. Die Verfahren, die zeitkontinuierliche Modelle nutzen, sind für den praktischen Einsatz deshalb wenig geeignet. Es sollen aus diesem Grund effiziente Verfahren für zeitdiskrete Prozessmodelle entwickelt werden, die die Eigenschaften abgetasteter Signale schon beim Entwurf mit berücksichtigen.

Aus der Literatur [Bor02, BM99] bekannte Verfahren, die ein zeitdiskretes Systemmodell für den Entwurf einer Prozessführung für hybride Systeme einsetzen, sind für die praktische Anwendung sehr rechen- und speicheraufwändig.

In dieser Arbeit wird nun eine neue Prozessführungsstrategie vorgestellt, die auf Basis eines zeitdiskreten hybriden Systemmodells in der Lage ist, Beschränkungen der Stellgrößen und des Zustandsraums einzuhalten und dabei in der Realisierung einen geringen Speicheraufwand und einen geringen Rechenaufwand benötigt.

Alle bekannten und die im Weiteren entwickelten Verfahren setzen ein affines Zustandsraummodell mit messbaren Zustandsgrößen voraus.

Die Arbeit ist formal wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird die Einführung hybrider Systeme mit einfachen Beispielen motiviert, und es werden sowohl die Eigenschaften als auch die Modellformen für hybride Systeme eingeführt. Es schließt sich nach der Charakterisierung der Systemeigenschaften ein Vergleich zur klassischen Systemtheorie an. Mathematisch wird die Dynamik des Systems durch zeitdiskrete, stückweise affine Systeme dargestellt, die jeweils in einem Gebiet im Zustandsraum gültig sind. Diese Gebiete werden im Folgenden durch Polytope beschrieben. Das Kapitel schließt mit der Zusammenstellung einiger Besonderheiten, die speziell bei zeitdiskreten hybriden Systemen zu beobachten sind.

Die gezielte Beeinflussung der Systemdynamik durch eine Regelung bzw. eine Steuerung wird in Kapitel 3 untersucht. Zunächst wird ein Überblick über klassische Regelungsverfahren gegeben, anschließend werden bekannte Regelungsverfahren für hybride Systeme erläutert. Das Kapitel schließt mit einem Vergleich der klassischen und der hybriden Regelungsverfahren.

In Kapitel 4 wird die neu entwickelte globale Prozessführungsstrategie für hybride Systeme vorgestellt. Das Modell für die globale Prozessführung wird durch einen Graphen repräsentiert, bei dem ein Knoten einer auf einem Gebiet im Zustandsraum definierten Dynamik zugeordnet ist. Die Kanten im Graphen geben an, ob eine Trajektorie aus einem Gebiet in das Nachbargebiet, in dem eine andere Dynamik gilt, überführt werden kann. Die globale Prozessführungsstrategie wird so durch eine Wegsuche im Graphen abgebildet. In der Graphenstruktur können Gebiete als verboten deklariert und somit als mögliche Teile von Ergebnissen bei der Wegsuche ausgeschlossen werden. Das Einnehmen eines gewünschten Zustandspunkts in einem Gebiet wird durch eine sogenannte Endgebietsregelung vorgenommen.

Die lokalen Regelstrategien werden in Kapitel 5 vorgestellt, mit deren Hilfe die Übertrittsregelung und die Endgebietsregelung berechnet werden können. Für beide Regelungen werden dabei zwei Verfahren zunächst auf simplexförmigen, dann auf polytopförmigen Gebieten beschrieben. Hierzu sind Bedingungen an die Stellgrößen in den Ecken der Simplexe beziehungsweise Polytope zu erfüllen. Anschließend werden die beiden neu entwickelten Verfahren mit den existierenden verglichen. Zum Ende des Kapitels werden für diese Verfahren noch Erweiterungsmöglichkeiten vorgeschlagen.

In Kapitel 6 werden mehrere Anwendungsbeispiele solcher Systeme beschrieben, die sich in hybride und stückweise affine Systeme aufteilen lassen. Es werden ein Zwei-Tank-System und ein Drei-Tank-System als hybride Systeme vorgestellt. Bei den

stückweise affinen Systemen werden die Druckregelung einer Kupplung und die Regelung einer Lose im Antriebsstrang eines Fahrzeugs untersucht. Die erzielten Ergebnisse unterstreichen die Relevanz der Prozessführungsstrategien in der Praxis.

In Kapitel 7 wird die Arbeit zusammengefasst. Im Anhang sind Anmerkungen und Beweise zusammengestellt.

Kapitel 2

Grundlagen hybrider Systeme

In diesem Kapitel werden die Grundlagen für die im weiteren Verlauf der Arbeit untersuchte Systemklasse der hybriden Systeme gelegt, die im Wesentlichen durch Wechselwirkungen zwischen einer sogenannten zeitgetriebenen und einer ereignisgetriebenen Dynamik beschrieben werden kann. Es folgt zunächst eine Einführung in diese Systemklasse.

Die Merkmale dieser beiden speziellen Systemdynamiken werden anschließend beschrieben.

Damit ist es möglich, Modellformen für hybride Systeme anzugeben. Ein wichtiger Aspekt dabei ist die mögliche Berücksichtigung von Stellgrößen- und Zustandsraumbeschränkungen. Um diese Beschränkungen geeignet darstellen zu können, wird der Zustandsraum in Gebiete aufgeteilt.

Diese Gebietsbeschränkungen stellen an den Reglerentwurf, der einen wesentlichen Teil der vorgestellten Prozessführungsstrategien repräsentiert, durch die heute übliche zeitdiskrete Realisierung auf einem Steuergerät eine besondere Herausforderung dar. Häufig ist das Ziel einer Regelung, ausgewählte Größen des Systems in bestimmten Wertebereichen zu halten oder diese gezielt zu verändern. Wird bei diesem Regeleingriff die zeitdiskrete Realisierung des Reglers nicht beachtet, so kann das Regelungsziel unter Umständen nicht erfüllt werden. Deshalb soll in dieser Arbeit eine Prozessführungsstrategie entwickelt werden, die das zeitdiskrete Verhalten der Strecke schon beim Entwurf berücksichtigt, sodass eine erfolgreiche Realisierung der Regelung gewährleistet wird.

2.1 Einführung in hybride Systeme

In der Regelungstechnik wird üblicherweise versucht, ein möglichst einfaches Modell anzugeben, das geeignet ist, das dynamische Verhalten zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen der realen Strecke geeignet nachzubilden. Ist ein späterer Reglerentwurf beabsichtigt, dann bietet sich zur Beschreibung des Systems ein lineares zeitinvariantes Modell an, wenn sich damit das Verhalten geeignet nachbilden lässt. Es existieren hierfür aufgrund der einfachen linearen Zusammenhänge sehr viele Analysemethoden und Reglerentwurfsmethoden (siehe z.B. [Fö94, Lun05]).

Oftmals reicht die Genauigkeit der linearen Modelle für die Modellbildung aber nicht aus, und es muss auf nichtlineare Modelle [Fö98, Fö93b] zurückgegriffen werden. Zwar kann mit nichtlinearen Modellen eine höhere Genauigkeit erzielt werden, allerdings ist die Modellbildung, die Systemanalyse und die Reglersynthese weitaus schwieriger und führt sehr oft zu keinem befriedigenden Ergebnis.

Für die Modellierung dynamischer Systeme ist das Zustandsraummodell weit verbreitet. Das zeitkontinuierliche Zustandsraummodell eines nichtlinearen Systems ist wie folgt definiert:

Definition 2.1 (Nichtlineares zeitkontinuierliches Zustandsraummodell):

Das nichtlineare zeitkontinuierliche Zustandsraummodell setzt sich aus einer nichtlinearen Zustandsdifferenzialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}_x(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \text{ mit } \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \quad (2.1)$$

und einer nichtlinearen Ausgangsgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{f}_y(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \quad (2.2)$$

zusammen, wobei $\underline{f}_x(\cdot)$ und $\underline{f}_y(\cdot)$ beliebige nichtlineare Funktionen darstellen. Der Anfangszustand \underline{x}_0 wird als bekannt vorausgesetzt.

Eine weitere Möglichkeit zur Modellierung dynamischer Systeme stellen die hybriden Systeme dar, die auch als eine Erweiterung der nichtlinearen Systeme aufgefasst werden können. Zusätzlich zu der Differenzialgleichung (2.1) und der Ausgangsgleichung (2.2) wird häufig eine Sprunggleichung angegeben, mit der sich Sprünge im Zustand realisieren lassen. Sprünge werden zusammen mit Umschaltungen später auch als hybride Phänomene bezeichnet.

Zusammen mit der Möglichkeit, die dynamischen Eigenschaften des Systems in der Differenzialgleichung (2.1) durch nichtlineare Zusammenhänge in der Zustandsübergangsfunktion $\underline{f}_x(\cdot)$ abrupt ändern zu können, lassen sich sehr komplexe dynamische Systeme mit Hilfe der Klasse der hybriden Systeme abbilden. Das Auftreten eines

Sprungs im Zustand oder die Änderung der Dynamik wird nicht abhängig vom zeitlichen Verlauf, sondern durch den Eintritt eines Ereignisses hervorgerufen und modelliert. Dies erfordert, dass parallel zum Zustandsraummodell eine übergeordnete Instanz existiert, die Ereignisse auslösen kann. Diese Instanz wird in Form eines Petri-Netzes [Abe90] oder eines Zustandsgraphen [Lun06] realisiert.

Hybride Systemmodelle bestehen also grundsätzlich aus einem zeitgetriebenen Modell, das mit einem ereignisgetriebenen Modell in Wechselwirkung steht und so das hybride Gesamtmodell bildet. In [WB04, Nen01] werden zum Beispiel auch nichtlineare Zustandsraummodelle für die Modellierung des zeitgetriebenen Systemanteils vorgeschlagen.

Wird das nichtlineare zeitgetriebene Modell in einem Arbeitspunkt linearisiert, so erhält man ein affines Zustandsraummodell, das durch eine einfache Transformation in ein lineares Zustandsraummodell überführt werden kann. Für lineare Modelle stehen ausgereifte Analyse- und Synthesewerkzeuge zum Beispiel in [Fö94, Lun05] zur Verfügung.

Das lineare zeitinvariante Zustandsraummodell wird wie folgt definiert:

Definition 2.2 (Lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell):

Ein lineares zeitinvariantes Zustandsraummodell besteht aus einer linearen Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) \text{ mit } \underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) \quad (2.3)$$

und einer linearen Ausgangsgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) + \underline{D} \underline{u}(t) \quad (2.4)$$

mit den zeitinvarianten Matrizen \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} und \underline{D} . Der Anfangszustand \underline{x}_0 wird als bekannt vorausgesetzt.

Im Weiteren soll die Zustandsdifferentialgleichung (2.3) um einen konstanten Vektor \underline{a} erweitert und ein möglicher Durchgriff in der Ausgangsgleichung (2.4) vernachlässigt werden, es gilt $\underline{D} = \underline{0}$. Das Ergebnis ist die Definition für das affine Zustandsraummodell.

Definition 2.3 (Affines zeitinvariantes Zustandsraummodell):

Das affine zeitinvariante Zustandsraummodell besteht aus einer affinen Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \underline{x}(t) + \underline{B} \underline{u}(t) + \underline{a} \text{ mit } \underline{x}_0 = \underline{x}(t_0) \quad (2.5)$$

und einer linearen Ausgangsgleichung

$$\underline{y}(t) = \underline{C} \underline{x}(t) \quad (2.6)$$

mit den zeitinvarianten Matrizen \underline{A} , \underline{B} und \underline{C} und dem zeitinvarianten Vektor \underline{a} . Der Anfangszustand \underline{x}_0 wird als bekannt vorausgesetzt.

Für eine zeitdiskrete Betrachtung der Systemdynamik, wie sie zum Beispiel für lineare Systeme nach Definition 2.2 in [Fö93a, Lun04] hergeleitet werden, ergibt sich bei Anwendung auf das affine System nach Definition 2.3 folgende Definition für zeitdiskrete affine Zustandsraummodelle:

Definition 2.4 (Affines zeitdiskretes Zustandsraummodell):

Ein affines zeitdiskretes Zustandsraummodell besteht aus einer affinen Zustandsdifferenzgleichung

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi} \underline{x}_k + \underline{H} \underline{u}_k + \underline{\varphi} \text{ mit } \underline{x}_0 = \underline{x}(0) \quad (2.7)$$

und einer linearen Ausgangsgleichung

$$\underline{y}_k = \underline{C} \underline{x}_k \quad (2.8)$$

mit den zeitinvarianten Matrizen $\underline{\Phi}$, \underline{H} und \underline{C} und dem konstanten Vektor $\underline{\varphi}$. Der Anfangswert \underline{x}_0 wird für $t_0 = 0$ als bekannt vorausgesetzt.

Der Index k bzw. $k + 1$ repräsentiert den zugehörigen Wert der Zeitfunktion zum Zeitpunkt kT bzw. $(k + 1)T$, wobei T für die Abtastzeit steht. Es gilt so zum Beispiel $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}((k + 1)T)$.

Diese Darstellung für das zeitdiskrete affine Zustandsraummodell kann leicht mit den Berechnungsvorschriften

$$\underline{\Phi} = e^{-\underline{A}T}, \quad \underline{H} = \int_0^T e^{-\underline{A}\nu} d\nu \underline{B} \quad \text{und} \quad \underline{\varphi} = \int_0^T e^{-\underline{A}\nu} d\nu \underline{a} \quad (2.9)$$

aus den Parametern \underline{A} , \underline{B} und \underline{a} der zeitkontinuierlichen affinen Zustandsraumdarstellung nach Definition 2.3 berechnet werden. Die Berechnung von $\underline{\Phi}$ und \underline{H} wird in [Fö93a, Lun04] und die von $\underline{\varphi}$ in [Sch04b] ausführlich hergeleitet.

In Weiteren beschränkt man sich auf die Darstellung von Systemen mithilfe affiner zeitdiskreter Zustandsraummodelle nach Definition 2.4, die strukturell dem linearen Zustandsraummodell sehr ähnlich sind. Es können so Analyse- und Synthesemethoden der linearen Systemtheorie unter Vernachlässigung etwaiger Beschränkungen der Zustands- und Stellgrößen für eine lokale Aussage, in einer kleinen Umgebung nahe der Ruhelage des Systems, verwendet werden [Son81].

Die Modellierung eines Systems durch ein hybrides Systemmodell kann sich

- durch exakte physikalische Modellbildung,
- durch vereinfachte physikalische Modellbildung,
- durch stückweise affine Approximation nichtlinearer Dynamik und
- durch diskrete Eingangsgrößen

ergeben.

Jede dieser vier Modellierungsmöglichkeiten wird im Folgenden mit mindestens einem Beispiel näher erläutert.

2.1.1 Hybrides Systemmodell durch exakte physikalische Modellierung

Als erstes Beispiel wird die Lose in einem Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs aus [HWBK06] betrachtet. Der Antriebsstrang leitet das vom Verbrennungsmotor aufgebraachte Moment an die Räder weiter. Dabei werden in mehreren Getrieben die Drehzahl und das Moment angepasst. Die Lose stellt dabei den auftretenden Zwischenraum zwischen den Zähnen zweier Zahnräder dar, wenn diese ineinander greifen.

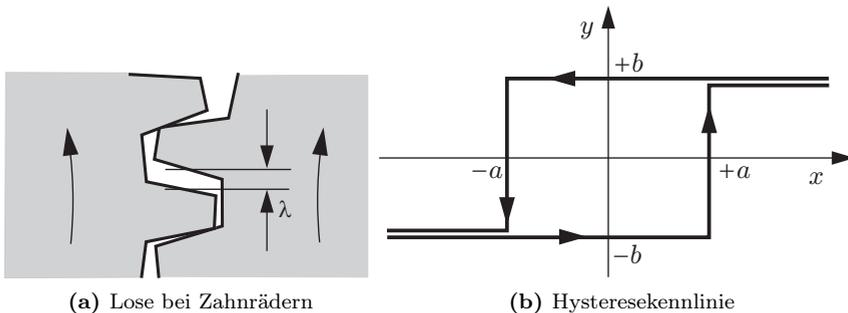


Abbildung 2.1: Beispiele zur exakten physikalischen Modellierung von hybriden Systemen

In Abbildung 2.1(a) ist die Lose als Spalt mit der Breite λ zwischen den Zahnrädern dargestellt. Haften die Zahnräder aneinander, dann kann man dies mit einer bestimmten Dynamik beschreiben. Lösen sich die Zähne voneinander, ändert sich diese Dynamik abrupt, da die Kopplung zwischen Last und Motor verloren geht. Verdrehen sich die Zahnräder noch weiter gegeneinander, wird der Kontakt und da-

mit die Kopplung nach Durchlaufen der Lose wiederhergestellt. Es ergeben sich so insgesamt drei unterschiedliche Bereiche für die Dynamiken im Zustandsraum.

Ein weiteres Beispiel stellt die Hysteresekennlinie dar, die zum Beispiel zur Modellierung des Verhaltens magnetischer Werkstoffe benötigt wird. In Abbildung 2.1(b) ist die Hysteresekennlinie abgebildet, sie kann durch die Funktion

$$y = \begin{cases} b & \text{für } x > a \\ -b & \text{für } x < a \\ b & \text{für } -a \leq x \leq a \wedge \dot{x} \leq 0 \\ -b & \text{für } -a \leq x \leq a \wedge \dot{x} \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

beschrieben werden. Im Bereich $-a \leq x \leq a$ existieren zwei unterschiedliche Werte für $y(x, \dot{x})$, je nachdem, ob die Äste der Hysterese positiv mit $\dot{x} \geq 0$ oder negativ mit $\dot{x} \leq 0$ durchlaufen werden.

Ein abschließendes Beispiel für die exakte physikalische Modellierung stellt das Tank-System aus [HSK04b, HM03] dar, wie es in Abbildung 2.2(a) dargestellt ist. Der Tank verfügt über einen Zulauf mit $0 \leq q \leq q_{\max}$, jedoch über keinen Ablauf. Wird die Füllhöhe von $h = h_1$ überschritten, dann vergrößert sich abrupt die Grundfläche, wodurch sich die Dynamik des Systems ändert.

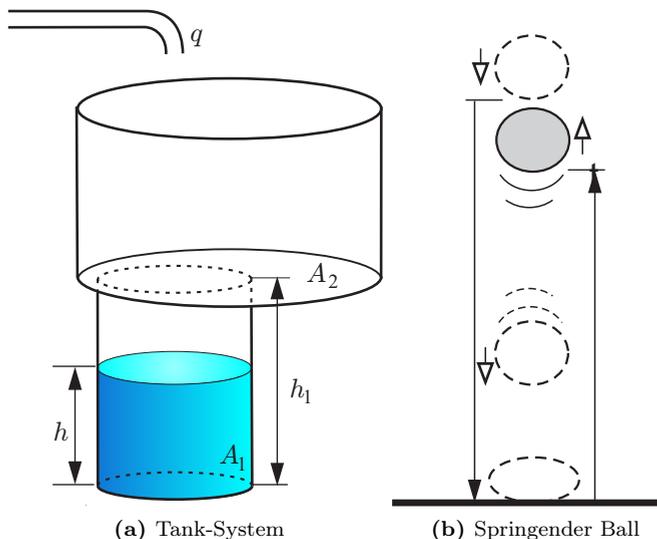


Abbildung 2.2: Beispiele zur exakten und vereinfachten physikalischen Modellierung von hybriden Systemen

Bei diesen drei Beispielen wurden bei der makroskopischen Betrachtungsweise keine Vereinfachungen gemacht. Natürlich wurden mikroskopische Effekte vernachläss-

sigt, wie Deformationsvorgänge der Zähne beim Kontakt unterschiedlicher Zahnräder oder Kohäsionseffekte an der Oberfläche der Flüssigkeiten im Tanksystem.

Im nächsten Abschnitt soll ein Beispiel dargestellt werden, bei dem die Vereinfachung makroskopischer Effekte einen wesentlichen Teil der Modellierung darstellt.

2.1.2 Hybrides Systemmodell durch vereinfachte physikalische Modellierung

Betrachtet man den springenden Ball aus [HSK04b], so umfasst das hybride Modell zwei wesentliche Teilaspekte.

In Abbildung 2.2(b) ist die Position des Balls über dem Grund dargestellt. Ein Teil der Bewegung findet oberhalb der Grundfläche statt, der andere Teil besteht aus der Kontaktsituation mit dem Grund selbst. Oberhalb der Grundfläche kann die Bewegung mit einem einfachen linearen Modell dargestellt werden, bei dem die Position über dem Grund und die Geschwindigkeit des Balls zwei Zustandsgrößen darstellen. Bei Eintreten der Kontaktsituation, die als Ereignis in Abhängigkeit der Ballhöhe modelliert wird, bleibt die Position konstant, und die Geschwindigkeit ändert das Vorzeichen.

Bei dieser Art der Modellierung wird der komplizierte Deformationsvorgang beim Kontakt mit dem Grund als makroskopischer Effekt betrachtet und durch die Modellierung mit einem Ereignis stark vereinfacht.

2.1.3 Hybrides Systemmodell durch stückweise affine Approximation nichtlinearer Dynamik

Als Beispiel für eine affine Approximation einer nichtlinearen Dynamik wird das Tanksystem in Abbildung 2.3(a) betrachtet. Es verfügt über einen Zulauf q und einen Ablauf Q , die Höhe im Tank folgt dabei einer nichtlinearen Dynamik, d.h. die Änderung der Höhe \dot{h} im Tank hängt nichtlinear von der Höhe h selbst ab, es gilt $\dot{h} \sim \sqrt{h}$. Die zugehörige nichtlineare Kennlinie, die sich aus dem Gesetz von Torricelli ergibt, ist in Abbildung 2.3(b) dargestellt.

Wird nun der nichtlineare Verlauf der Kennlinie durch Geradenstücke stückweise affin approximiert, wie in Abbildung 2.3(b) dargestellt, dann stellt dies ein hybrides System dar. Diese Approximation von nichtlinearen Systemen wird in [Son81] vorgeschlagen. Die nichtlineare Dynamik wird dabei um mehrere Zustandspunkte linearisiert, die nicht unbedingt Ruhelagen des Systems darstellen müssen. Bei einer Linearisierung eines nichtlinearen Systems um den Arbeitspunkt [Fö94], der eine

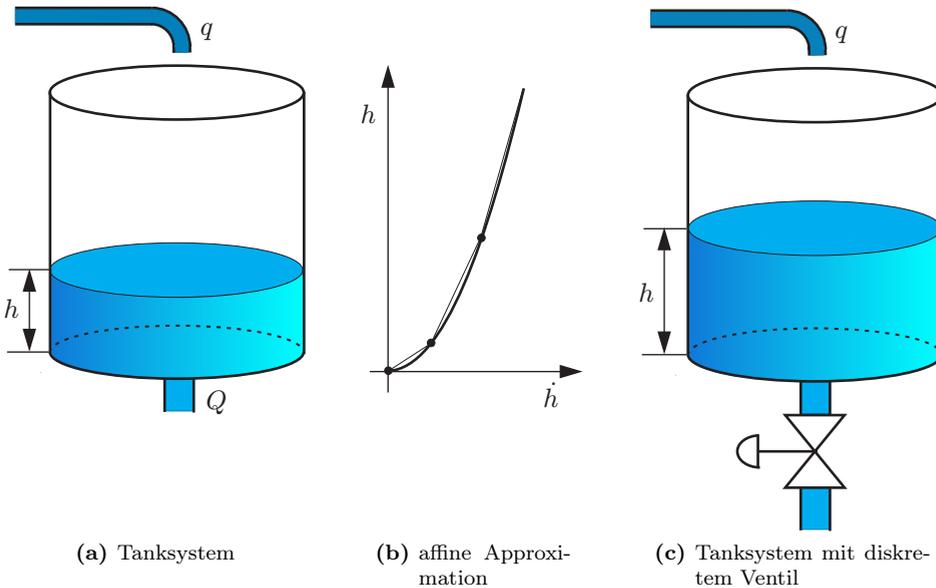


Abbildung 2.3: Beispiele zur Modellierung von hybriden Systemen durch stückweise affine Approximation und durch diskrete Eingangsgrößen

Ruhelage des Systems darstellt, wird der Ursprung des ursprünglichen Koordinatensystems in die Ruhelage verschoben, und anschließend werden die Abweichungen der Zustandsgrößen um diese Ruhelage für weitere Berechnungen verwendet. Unterbleibt diese Verschiebung des Ursprungs, erhält man automatisch eine affine Zustandsdifferentialgleichung als Ergebnis der Linearisierung, die mittels einer Taylorreihenentwicklung und Abbruch der Taylorreihe nach dem linearen Glied durchgeführt wird. Der affine Anteil entspricht dabei dem ersten Entwicklungsterm der Taylorreihenentwicklung der Funktion $f_x(\underline{x}_{\text{Ruhe}}, \underline{u}_{\text{Ruhe}}, t)$ aus Gleichung (2.1) um den Entwicklungspunkt $(\underline{x}_{\text{Ruhe}}, \underline{u}_{\text{Ruhe}})$. Jedem Zustandspunkt wird anschließend ein kleiner beschränkter Bereich zugeordnet. Durch das Aneinandersetzen der einzelnen Bereiche kann für den betrachteten Gesamtbereich im Zustandsraum eine stückweise affine Approximation der nichtlinearen Dynamik angegeben werden.

2.1.4 Hybrides Systemmodell durch diskrete Eingangsgrößen

In Abbildung 2.3(c) ist das Tanksystem aus Abbildung 2.3(a) dargestellt, allerdings verfügt es nun über ein Ventil im Ablauf, das nur diskret geschaltet werden kann. Die Dynamik kann hier direkt durch eine Eingangsgröße umgeschaltet werden. Dieses Umschalten kann durch ein hybrides Modell sehr einfach nachgebildet werden.

Im nächsten Abschnitt werden die zwei Beschreibungen für zeitgetriebene und ereignisgetriebene Systemdynamiken erläutert, die speziell bei der Modellierung hybrider Systeme verwendet werden.

2.2 Beschreibung der Systemdynamik

Bei den hybriden Systemen stehen zeitgetriebene und ereignisgetriebene Dynamiken in Wechselwirkung miteinander. Es werden deshalb zunächst die Begriffe der zeitgetriebenen und der ereignisgetriebenen Modellierung eingeführt und deren Merkmale erläutert.

2.2.1 Zeitgetriebene Modellierung

In der Physik [GKV86] und Chemie ist es bei der Erstellung eines dynamischen Modells üblich, dieses mit nichtlinearen Differenzialgleichungen zu beschreiben. Diese Differenzialgleichungen können von hoher Ordnung sein. In der Systemtheorie werden sie in ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung umgewandelt und als Zustandsdifferenzialgleichungen bezeichnet.

Nach der Umwandlung in ein System von Differenzialgleichungen erhält man das in Definition 2.1 erwähnte nichtlineare Zustandsraummodell. Die Veränderung der Zustandsgrößen hängt vom Parameter Zeit ab, woraus sich der Begriff der zeitgetriebenen Modellierung ableitet.

Im Weiteren werden die affinen Systeme, die auf das affine zeitkontinuierliche Zustandsraummodell aus Definition 2.3 führen, für den zeitgetriebenen Systemanteil des hybriden Systems verwendet. Die zeitdiskreten affinen Systeme nach Definition 2.4 zählen ebenfalls zur zeitgetriebenen Modellierung.

Die in der Regelungstechnik verwendeten Übertragungsfunktionen zählen auch zu den zeitgetriebenen Modellen, da diese durch eine einfache Transformation aus den linearen Zustandsraummodellen nach Definition 2.2 gewonnen werden können.

2.2.2 Ereignisgetriebene Modellierung

Die ereignisgetriebene Modellierung stellt eine besondere Modellform dar, die aus diskreten Zuständen und Zustandsübergängen besteht. Sowohl die Zustände als auch die Zustandsübergänge stellen dabei eine abzählbare Menge dar. Die Analyse dieser Systeme wird dadurch erschwert, dass keine natürliche Ordnung [Eng97] zwischen den Zuständen besteht und so kein Maß für Nähe oder Nachbarschaft existiert. Für

die Beschreibung von ereignisdiskreten Systemen werden überwiegend Automaten und Petri-Netze verwendet.

In [Kie97, Lun06] werden als typische Beispiele für die Modellierung mit einem Automaten ein Getränke- und ein Fahrkartenautomat aufgeführt. Automaten [Kie97, Lun06, Lip95] werden durch Graphen beschrieben, deren Knoten meist über gerichtete Kanten verknüpft sind. Die diskreten Zustände stellen bei hybriden Systemen Zustände des Prozesses in konzentrierter Form [Nen01] dar.

Mit Petri-Netzen lassen sich hingegen Nebenläufigkeiten im Prozess durch die verteilte Struktur transparent nachbilden. Das Petri-Netz nutzt hierzu zwei unterschiedliche Arten von Knoten, die Stellen und die Transitionen, die über gerichtete Kanten verbunden sind. Das Petri-Netz wird in [Abe90, Kie97, Lun06, Lip95] ausführlich beschrieben.

Die zeitgetriebene und die ereignisdiskrete Modellbildung werden im Weiteren für die Modellierung hybrider dynamischer Systeme verwendet.

2.3 Hybride Modellformen

Hybride Systeme zeichnen sich durch genau vier Phänomene aus, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden sollen.

2.3.1 Formulierung hybrider Phänomene

Die vier hybriden Phänomene nach [Bra95] sind

- das autonome Umschalten der Systemdynamik,
- das gesteuerte Umschalten der Systemdynamik,
- der autonome Sprung im Zustand und
- der gesteuerte Sprung im Zustand.

In Abbildung 2.4 ist gezeigt, was für Auswirkungen diese hybriden Phänomene auf den Verlauf der Trajektorie eines zeitkontinuierlichen Systems haben können.

In Abbildung 2.4(a) ist das autonome Umschalten der Systemdynamik dargestellt. Erreicht der zeitkontinuierliche Zustand x eine Umschaltlinie, in Abbildung 2.4(a) als gepunktete Linie mit $x = \text{konst.}$ eingezeichnet, dann wird das autonome Ereignis ausgelöst. Man kann deutlich erkennen, dass die Ableitungen des Zustands \dot{x} vor und nach dem Ereignis voneinander verschieden sind. Die Steigungen direkt vor und nach dem Umschalten sind mit gestrichelten Linien eingezeichnet.

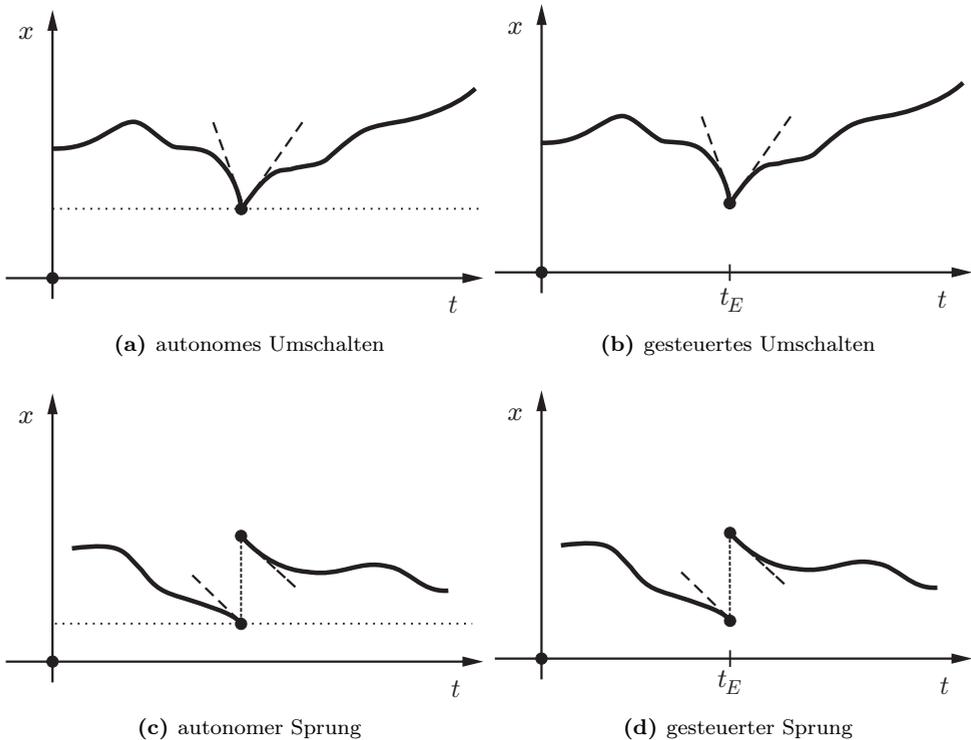


Abbildung 2.4: Hybride Phänomene

In Abbildung 2.4(b) ist das gesteuerte Umschalten dargestellt, das durch ein zum Zeitpunkt t_E von außen durch die diskrete Stellgröße verursachtes Ereignis ausgelöst wird. Die Steigungen verhalten sich wie beim autonomen Umschalten.

In Abbildung 2.4(c) ist der autonome Sprung dargestellt. Bei Erreichen eines bestimmten Wertes, wiederum als gepunktete Linie dargestellt, wird ein Ereignis ausgelöst, das den Wert des Zustands sprunghaft ändert. Die Ableitung des Zustands bleibt dabei unverändert.

In Abbildung 2.4(d) ist der gesteuerte Sprung dargestellt. Das Ereignis wird zum Zeitpunkt t_E ausgelöst. Dies führt dazu, dass sich der Zustand sprunghaft ändert. Die Ableitung des Zustands bleibt dabei unverändert.

Bei einem hybriden dynamischen System können diese vier grundlegenden Phänomene in beliebiger Kombination gleichzeitig eintreten.

In der Literatur werden viele unterschiedliche Modellformen für die Modellierung hybrider dynamischer Systeme angegeben. Um hybride dynamische Systeme beschrei-

ben zu können, werden einzelne zeitgetriebene Systeme durch eine übergeordnete ereignisgetriebene Struktur koordiniert und zu einem hybriden dynamischen System miteinander vernetzt. Es werden nun drei Modelle ausführlicher beschrieben:

- Netz-Zustands-Modell [Nen01]
- Mixed Logical Dynamical (MLD) Systeme [BM99]
- Stückweise affine Systeme [Bor02, Son81]

Beim Netz-Zustands-Modell wird der zeitgetriebene Systemanteil mit einem zeitkontinuierlichen Systemmodell dargestellt, während die MLD-Systeme und die stückweise affinen Systeme ein zeitdiskretes Modell verwenden.

2.3.2 Modellform Netz-Zustands-Modell [Nen01]

Das Netz-Zustands-Modell in Abbildung 2.5 besteht zum einen aus einem interpretiertes Petri-Netz und zum anderen aus einem erweiterten Zustandsraummodell.

Die Verkopplung von ereignisdiskretem und kontinuierlichem Systemanteil wird durch zwei Interfaces ermöglicht. Wenn die Systemtrajektorie des zeitkontinuierlichen Systemanteils bestimmte Grenzen, so genannte Schaltebenen, in dem um den Eingangsraum erweiterten Zustandsraum überschreitet, erzeugt das **K**ontinuierlich/**D**iskrete-Interface (K/D-Interface) Ereignisse und beeinflusst damit die ereignisgetriebene Dynamik des Petri-Netzes. Dabei tritt der zeitkontinuierliche Zustand in sogenannte Triggermengen ein. Das **D**iskret/**K**ontinuierliche-Interface (D/K-Interface) bildet die Stellenbelegung des Petri-Netzes über logische oder algebraische Verknüpfungen auf den Vektor $\underline{v}_K(t)$ ab, der auf die Zustandsgleichungen einwirkt. Die Elemente des Vektors $\underline{v}_K(t)$ können dabei boolesche oder aber auch reelle Werte annehmen.

Das auftretende Ereignis $b_i(t)$ oder $b_j(t)$ veranlasst die jeweilige Transition zum Schalten, wenn die Stellen vor der Transition geeignet markiert sind. Der diskrete Zustand $\underline{x}_D(t)$ hängt dabei vom Vorzustand $\underline{x}_D(t^-)$ und der geschalteten Transition $b(t^-)$ ab; diese wiederum vom diskreten Zustand $\underline{x}_D(t)$ und der Schaltbedingung $\underline{v}_D(t)$ aus dem K/D-Interface.

Das erweiterte Zustandsraummodell besteht aus einer Zustandsgleichung mit der Abbildungsfunktion $\underline{f}_{Kx}(\cdot)$, einer Ausgangsgleichung mit der Funktion $\underline{f}_{Ky}(\cdot)$ und einer Sprunggleichung mit der Funktion $\underline{g}(\cdot)$. Die Zustands- und die Ausgangsgleichung des erweiterten Zustandsraummodells hängen im Gegensatz zur gewöhnlichen Zustands- und Ausgangsgleichung zusätzlich von den Signalen $\underline{v}_K(t)$ ab.

Um Unstetigkeiten des Zustands bei einem Ereignis zu ermöglichen, ist die Sprunggleichung im erweiterten Zustandsraummodell eingefügt. Der Zustand $\underline{x}(t)$ hängt

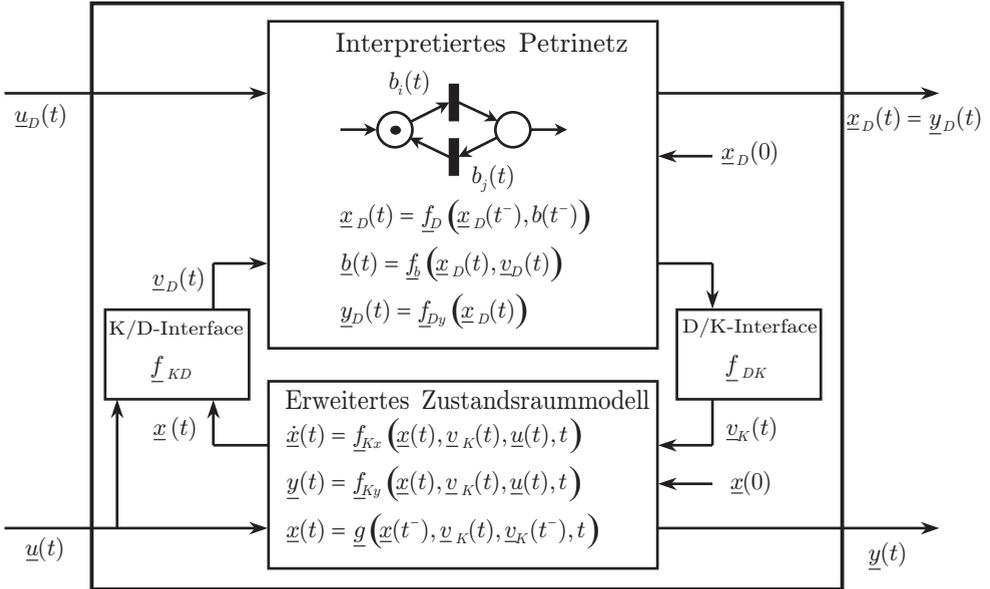


Abbildung 2.5: Netz-Zustands-Modell

dann vom zeitkontinuierlichen Zustand $\underline{x}(t^-)$ und dem zeitkontinuierlichen Signal $\underline{v}_K(t^-)$ zum vorherigen Zeitpunkt t^- sowie von $\underline{v}_K(t)$ ab.

Die typische Form des gewöhnlichen Zustandsmodells mit Zustandsgleichung und Ausgangsgleichung nach Definition 2.2 wird durch die zusätzliche Sprunggleichung und die Abhängigkeit von den booleschen Signalen $\underline{v}_K(t)$ erweitert.

Das Netz-Zustands-Modell besitzt einen zeitkontinuierlichen Ausgang $\underline{y}(t)$ und einen ereignisdiskreten Ausgang $\underline{y}_D(t)$. Üblicherweise gilt $\underline{y}_D(t) = \underline{x}_D(t)$. Als Eingänge besitzt es den zeitkontinuierlichen Eingang $\underline{u}(t)$ und den ereignisdiskreten Eingang $\underline{u}_D(t)$. Es wird hierdurch ein modularer Aufbau ermöglicht.

Für das Netz-Zustands-Modell wird nun ein Beispiel angegeben:

Beispiel 2.1 (Netz-Zustands-Modell des Tank-Systems):

Der Tank aus Abbildung 2.2(a) wird über den Zulauf q mit $0 \leq q \leq q_{max}$ gefüllt. Da kein Ablauf vorhanden ist, ergibt sich die Füllstandshöhe durch Integration der Zustandsgleichung

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{A}q. \quad (2.11)$$

Die Modellierung dieses Systems liefert das stückweise lineare Modell mit den zwei kontinuierlichen Zustandsgleichungen

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{A_1}q & \text{für } 0 < x \leq h_1 \\ \frac{1}{A_2}q & \text{für } h_1 < x \leq h_{max} \end{cases} \quad (2.12)$$

mit $A_2 > A_1$ und $x = h$.

Das Netz-Zustands-Modell des Tank-Systems ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Für die Ausgangsgleichung gilt $y = x = h$. Für die kontinuierliche Eingangsgröße gilt $u = q$. Die Sprunggleichung entfällt, da kein Sprung im Zustand möglich ist. Das K/D-Interface ist durch die sogenannten Triggermengen Ω_1 und Ω_2 repräsentiert. Ist eine der beiden Stellen x_{D1} oder x_{D2} im Petri-Netz belegt, dann ist der zugehörige Wert des diskreten Zustands $x_{Di} = 1, i \in \{1; 2\}$, sonst $x_{Di} = 0$. Überschreitet die Füllhöhe h den Wert $h = h_1$, dann tritt die Zustandstrajektorie in die Triggermenge Ω_1 ein, wodurch die erste Komponente des Vektors \underline{v}_D aktiviert wird, also den Wert $v_{D1} = 1$ annimmt. Der logische Ausdruck $[v_{D1}]$ ist somit wahr und die zugehörige Transition schaltet, sodass die Marke auf die Stelle x_{D2} weitergeleitet wird. Die Anfangsmarkierung des interpretierten Petri-Netzes ist $x_{D1} = 1, x_{D2} = 0$ und der Anfangswert des Zustands im erweiterten Zustandsraummodell ist $x = 0$.

2.3.3 Modellform des Mixed Logical Dynamical (MLD) Systems

In [BM99] wird eine Modellform vorgestellt, die einen dynamischen und einen logikbasierten Anteil besitzt, woraus sich der Name dieses Modells ableitet. Ergänzt werden diese zwei Teile durch lineare Beschränkungen.

Allgemein lassen sich diese Systeme in der Form

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A} \underline{x}_k + \underline{B}_1 \underline{u}_k + \underline{B}_2 \delta_k + \underline{B}_3 \underline{z}_k \quad (2.13a)$$

$$\underline{y}_k = \underline{C} \underline{x}_k + \underline{D}_1 \underline{u}_k + \underline{D}_2 \delta_k + \underline{D}_3 \underline{z}_k \quad (2.13b)$$

$$\underline{E}_2 \delta_k + \underline{E}_3 \underline{z}_k \leq \underline{E}_1 \underline{u}_k + \underline{E}_4 \underline{x}_k + \underline{E}_5 \quad (2.13c)$$

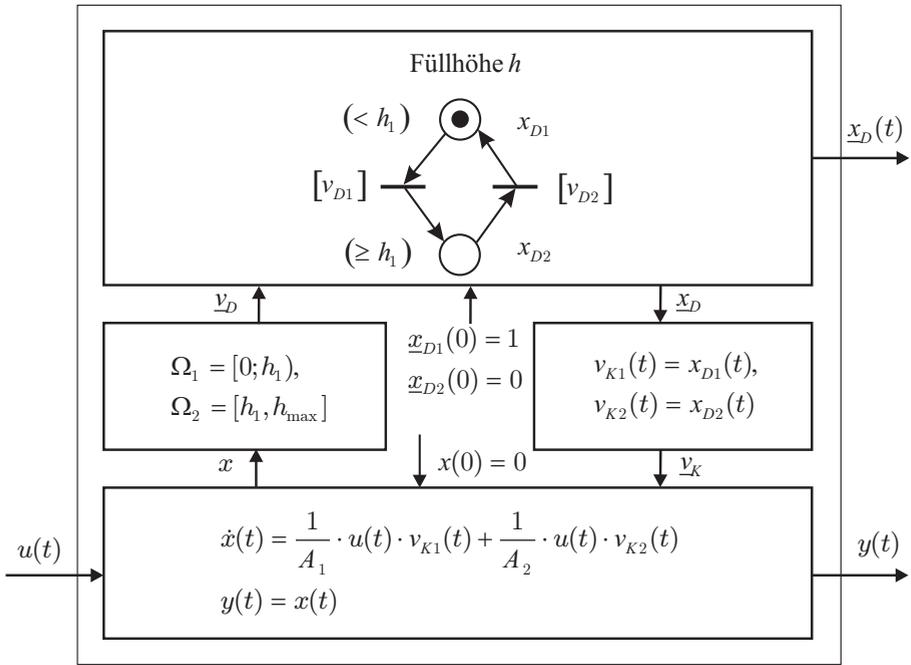


Abbildung 2.6: Netz-Zustands-Modell für ein Tank-System

darstellen. Das MLD-Modell wird üblicherweise in zeitdiskreter Form angegeben. In der Zustandsdifferenzgleichung (2.13a) des MLD-Systems wird der Zustand zum nächsten Abtastzeitpunkt \underline{x}_{k+1} abhängig vom Zustand \underline{x}_k , dem Systemeingang \underline{u}_k , der logischen Variablen $\underline{\delta}_k$ und dem Hilfszustand \underline{z}_k berechnet.

Die einzelnen Elemente des logischen Variablenvektors $\underline{\delta}_k$ werden verwendet, um Teile der rechten Seite oder die ganze rechte Seite der Zustandsdifferenzgleichung abhängig von den Zustands- und Eingangsgrößen mit einer Eins oder einer Null zu multiplizieren. Die dadurch entstandenen nichtlinearen Terme, die durch die Multiplikation der logischen Variablen mit der Zustands- oder der Eingangsgröße entstanden sind, werden durch die einzelnen Elemente des Hilfsvariablenvektors \underline{z}_k substituiert. Der Vektor $\underline{\delta}_k$ übernimmt damit eine ähnliche Eigenschaft wie der Vektor \underline{v}_K beim Netz-Zustands-Modell aus Abschnitt 2.3.2.

In der Ausgangsgleichung (2.13b) treten für den Ausgang \underline{y}_k wieder die gleichen Abhängigkeiten auf, wie zuvor schon in der Zustandsdifferenzgleichung (2.13a).

Die Gleichungen, die durch die Substitutionen mit der Hilfsvariablen \underline{z}_k entstanden sind, werden in Ungleichungen umgeformt. Deshalb ergeben sich zusammen mit den Beschränkungen für die Zustands- und Eingangsgrößen eine Vielzahl an Bedin-

gungen, die in der Ungleichung (2.13c) zusammengefasst sind.

Die Klasse der MLD-Systeme schließt darüber hinaus eine Vielzahl anderer Modellformen ein, wie zum Beispiel Automaten und bilineare Systeme [BM99].

Als Beispiel für die Modellierung eines Systems mit den MLD-Systemen wird das Beispiel 2.1 betrachtet, um den direkten Vergleich zu ermöglichen.

Beispiel 2.2 (Tank-System mit MLD-Systemmodell):

Es wird wieder der Tank aus Abbildung 2.2(a) mit dem Zulauf $0 \leq q_k \leq q_{max}$ betrachtet. Da zeitdiskrete Signale betrachtet werden, wird der zeitkontinuierliche Zufluss q zum zeitdiskreten Durchfluss q_k .

Die zeitkontinuierlichen affinen Zustandsgleichungen (2.12) können dabei mit den Berechnungsvorschriften (2.9) in zeitdiskrete affine Zustandsdifferenzgleichungen überführt werden, wie es für das MLD-System gefordert wird.

Die zeitdiskreten linearen Zustandsdifferenzgleichungen des Tank-Systems ergeben sich damit zu

$$h_{k+1} = \begin{cases} h_k + \frac{T}{A_1} q_k & \text{für } 0 < h_k \leq h_1 \\ h_k + \frac{T}{A_2} q_k & \text{für } h_1 < h_k \leq h_{max} \end{cases} . \quad (2.14)$$

Drückt man die Gleichung (2.14) mit der zugehörigen Zustandsgröße $x_k = h_k$ und der Eingangsgröße $u_k = q_k$ aus und ordnet den Bereichen $0 < h_k \leq h_1$ und $h_1 < h_k \leq h_{max}$ die binären Variablen $\delta_{1,k} \in \{0; 1\}$ und $\delta_{2,k} \in \{0; 1\}$ zu, ergeben sich die Zustandsdifferenzgleichungen

$$x_{k+1} = \begin{cases} \Phi_1 x_k + H_1 u_k & \text{für } \delta_{1,k} = 1 \\ \Phi_2 x_k + H_2 u_k & \text{für } \delta_{2,k} = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

mit $H_i = \frac{T}{A_i}$, $\Phi_i = 1$ und der Bedingung $\delta_{1,k} + \delta_{2,k} = 1$. Im zugeordneten Bereich gilt $\delta_{i,k} = 1$, $i \in \{1; 2\}$. Außerhalb der zugeordneten Bereiche gilt $\delta_{i,k} = 0$, $i \in \{1; 2\}$.

Das Einführen der binären Variablen ermöglicht es nun, die Gleichungen (2.15) in der Form $x_{k+1} = (\Phi_1 x_k + H_1 u_k) \delta_{1,k} + (\Phi_2 x_k + H_2 u_k) \delta_{2,k}$ zu schreiben. Dabei repräsentiert $\delta_{i,k}$ das i -te Element des Vektors $\underline{\delta}_k$.

Setzt man nun den Ausdruck $(\Phi_i x_k + H_i u_k) \delta_{i,k} = z_{i,k}$, ergibt sich

$$x_{k+1} = z_{1,k} + z_{2,k} \quad (2.16)$$

mit $\underline{z}_k = [z_{1,k}, z_{2,k}]^T$. Die Zustandsdifferenzgleichung in der Form der MLD-Systeme nach Gleichung (2.13a) wird dann zu

$$x_{k+1} = \underline{B}_3 \underline{z}_k, \quad (2.17)$$

wobei $\underline{B}_3 = [1 \ 1]$, $A = 0$, $B_1 = 0$ und $\underline{B}_2 = [0 \ 0]$ gilt.

Die Ausdrücke

$$z_{i,k} = (\Phi_i x_k + H_i u_k) \delta_{i,k} \quad (2.18)$$

können mittels den Ungleichungen

$$z_{i,k} \leq M \delta_{i,k} \quad (2.19a)$$

$$z_{i,k} \geq m \delta_{i,k} \quad (2.19b)$$

$$z_{i,k} \leq \Phi_i x_k + H_i u_k - m(1 - \delta_{i,k}) \quad (2.19c)$$

$$z_{i,k} \geq \Phi_i x_k + H_i u_k - M(1 - \delta_{i,k}) \quad (2.19d)$$

dargestellt werden, wobei M eine obere Schranke von $\Phi_i x_k + H_i u_k$ und m eine untere Schranke von $\Phi_i x_k + H_i u_k$ darstellt. Für dieses Beispiel ergibt sich

$$M = h_{max} + \frac{T}{A_2} q_{max} \quad \text{und} \quad m = \frac{T}{A_1} q_{max}. \quad (2.20)$$

Der nichtlineare Zusammenhang (2.18) wird so durch ein lineares Ungleichungssystem (2.19) ersetzt. Näheres zur Berechnung findet sich in [BM99, Buc04a].

Die Bedingung $\delta_{1,k} + \delta_{2,k} = 1$ kann leicht in zwei Ungleichungen

$$\delta_{1,k} + \delta_{2,k} \leq 1 \quad \text{und} \quad (2.21a)$$

$$\delta_{1,k} + \delta_{2,k} \geq 1 \quad (2.21b)$$

aufgespalten werden, die gleichzeitig erfüllt werden müssen.

Die Bedingungen (2.19) und (2.21) können nun in Form der Gleichung (2.13c) zusammengefasst werden, es ergibt sich dadurch

$$\begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & -M \\ m & 0 \\ 0 & m \\ -m & 0 \\ 0 & -m \\ M & 0 \\ 0 & M \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \delta_k + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z_k \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ -\Phi_1 \\ -\Phi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_1 \\ H_2 \\ -H_1 \\ -H_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m \\ -m \\ M \\ M \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Die Ausgangsgleichung (2.13b) soll wie im vorherigen Beispiel 2.1 nicht beachtet werden. Damit ist die Modellierung des Tank-Systems als MLD-System abgeschlossen.

2.3.4 Stückweise affine Systeme

Stückweise affine Systeme werden in [Son81] eingeführt und in [Hv04, Bor02, Tob03] verwendet. Sie sind im Vergleich zum Netz-Zustands-Modell und den MLD-Systemen sehr einfach definiert. Die zeitdiskrete Dynamik wird definiert zu

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{cases} \underline{\Phi}_1 \underline{x}_k + \underline{H}_1 \underline{u}_k + \underline{\varphi}_1 & \text{für } \underline{x}_k \in P_1 \\ \vdots & \\ \underline{\Phi}_s \underline{x}_k + \underline{H}_s \underline{u}_k + \underline{\varphi}_s & \text{für } \underline{x}_k \in P_s \end{cases}, \quad (2.23)$$

wobei P_1, \dots, P_s Bereiche im Zustandsraum darstellen.

Beispiel 2.3 (Tank-System mit stückweise affinem Modell):

Es wird wieder der Tank aus Abbildung 2.2(a) mit dem Zulauf $0 \leq q_k \leq q_{max}$ in der zeitdiskreten Form aus Gleichung (2.14) im Beispiel 2.2 betrachtet.

Die zeitdiskreten linearen Zustandsdifferenzgleichungen des Tank-Systems ergeben sich damit zu

$$h_{k+1} = \begin{cases} h_k + \frac{T}{A_1} q_k & \text{für } h_k \in P_1 = \{h_k | 0 < h_k \leq h_1\} \\ h_k + \frac{T}{A_2} q_k & \text{für } h_k \in P_2 = \{h_k | h_1 < h_k \leq h_{max}\} \end{cases}, \quad (2.24)$$

mit $h_k = x_k$ und $q_k = u_k$ nach Gleichung (2.23). Die Bereiche P_1 und P_2 sind in diesem Beispiel durch Mengen darstellbar. In der Gleichung (2.24) sind diese mit aufgeführt.

In den Beispielen 2.2 und 2.3 wird eine zeitdiskrete Beschreibung der Dynamik verwendet, die aber im Vergleich zur zeitkontinuierlichen Dynamik in Beispiel 2.1 keine genaue Detektion des Ereignisses ermöglicht, wenn die Füllhöhe h den Wert h_1 überschreitet und sich damit die Querschnittsfläche des Tanks abrupt ändert. Dies bedeutet, dass die Trajektorie des hybriden Modells zu den Abtastzeitpunkten, die nach dem Ereignis aufgezeichnet werden, in der Regel vom zeitkontinuierlichen Verlauf der Trajektorie abweicht.

Nach diesen Beispielen wird eine geeignete Charakterisierung für die hybriden Modellformen angegeben.

2.4 Charakterisierung hybrider Modellformen

Die hybriden Modellformen zeichnen sich vor allem durch die Berücksichtigung von

- Zustandsraum- und
- Stellgrößenbeschränkungen

bereits in der Modellierungsphase aus, wodurch beim Entwurf einer Regelung oder einer Steuerung diese Beschränkungen dann berücksichtigt werden können.

Einige Zustandsraum- und Stellgrößenbeschränkungen sollen im Weiteren genauer beschrieben werden.

2.4.1 Zustandsraumbeschränkungen

Die Zustandsraumbeschränkungen folgen aus der physikalischen Modellierung eines Prozesses. So gibt es untere und obere Schranken, die die Zustandsgrößen einnehmen können. Es gibt aber auch die Möglichkeit, dass der Zustand bestimmte Bereiche im Zustandsraum nicht erreichen darf, da sonst zum Beispiel sicherheitsrelevante Schranken verletzt werden können. Bei der Herstellung eines bestimmten Produktes, zum Beispiel in einer chemischen Anlage, müssen die Zustandsgrößen für den Produktionsablauf in bestimmten Grenzen vorgegeben werden, damit das Produkt überhaupt in der geforderten Qualität produziert werden kann.

Anhand der schon eingeführten Beispiele aus Abschnitt 2.1.1 und 2.1.2 werden nun mögliche Beschränkungen der Zustandsgrößen erläutert.

Das Tanksystem aus Abschnitt 2.1.1, das in Abbildung 2.2(a) dargestellt ist, verfügt einerseits über die Beschränkungen des Zustandsraums mit $0 \leq h \leq h_{max}$, da der Tank leer oder maximal gefüllt sein kann, ein Überlaufen des Tanks ist nicht erlaubt,

und andererseits über die Umschaltgerade $h = h_1$, bei der sich die Dynamik des Systems abrupt verändert.

Die Dynamik des springenden Balls, der in Abschnitt 2.1.2 als hybrides System eingeführt wurde und in Abbildung 2.2(b) dargestellt ist, kann so zum Beispiel mit einem affinen zeitinvarianten Zustandsraummodell

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

mit dem Zustand $\underline{x} = [h \quad \dot{h}]^T$ und dem Anfangszustand $\underline{x}_0 = [h_0 \quad 0]^T$, $h_0 > 0$ beschrieben werden, wobei h die Höhe über dem Grund und $\dot{h} = v$ die Geschwindigkeit des Balls darstellt. Beim Ball ist der Zustandsraum durch die Gerade $h = 0$ zu einem Halbraum $h \geq 0$ beschränkt.

2.4.2 Stellgrößenbeschränkungen

Die Stellgrößen unterliegen in technischen Prozessen immer Beschränkungen. Das Tanksystem aus Abschnitt 2.1.1, das in Abbildung 2.2(a) abgebildet ist, unterliegt so einer Stellgrößenbeschränkung. Der minimale Zulauf ist $u(t) = 0$ und der maximale Zulauf ist $u(t) = q_{max}$.

Bei Anwendungen, bei denen ein Elektromotor genutzt wird um Momente zu erzeugen, wird hingegen überwiegend mit symmetrischen Stellgrößenbeschränkungen für den Strom $-I_{max} \leq I \leq I_{max}$ gearbeitet [PM82].

2.4.3 Allgemeine Eigenschaften der Beschränkungen

Allgemein wird der Zustandsraum \mathcal{X} mit dem Eingangsraum \mathcal{U} zum sogenannten erweiterten Zustandsraum $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ zusammengefasst und es werden dort Bereiche definiert, in denen eine affine Beschreibung für die Dynamik gültig ist.

Kommt man allerdings von der physikalischen Modellierung her und stellt fest, dass Beschränkungen vorliegen, so sind diese oft parallel zu den Achsen des kartesischen Koordinatensystems, die den zugehörigen Eingangsraum oder Zustandsraum aufspannen. Es genügt deshalb oft, die Beschränkungen zunächst gesondert im Eingangsraum und Zustandsraum zu definieren und danach die beschränkten Räume zusammenzufügen, falls dies nötig ist. Diese Maßnahme ist besonders deshalb zu erwägen, weil dadurch die Darstellung anschaulich gehalten werden kann.

Manchmal werden Beschränkungen auch als Ebenen durch den Ursprung dargestellt und verlaufen dann nicht mehr parallel zu den Koordinatenachsen. Durch eine Trans-

formation kann man versuchen diese Ebenen im neuen Koordinatensystem parallel zu den Achsen darzustellen¹.

Welche Auswirkungen die Beschränkungen der Stell- und Zustandsgrößen, wie sie für hybride Systeme typisch sind, für die Anwendbarkeit von Methoden zur Analyse von Systemen aus der linearen Systemtheorie haben, wird im Folgenden kurz diskutiert.

2.4.4 Vergleich zur linearen Systemtheorie

Zwar beschränkt sich diese Arbeit auf die Darstellung von Systemen mithilfe des affinen zeitdiskreten Zustandsraummodells, das der linearen Systemtheorie theoretisch am nächsten ist, da die affinen Systeme durch eine einfache Transformation in lineare Systeme überführbar sind; die Begriffe, wie

- Steuerbarkeit,
- Beobachtbarkeit und
- Stabilität

sind trotzdem nicht ohne weiteres übertragbar.

Steuerbarkeit

Bei der Steuerbarkeit eines linearen Systems in [Fö94, Lun04] wird für die Steuerbarkeit gefordert, dass das System aus jedem beliebigen Anfangszustand \underline{x}_0 in endlicher Zeit in den Endzustand $\underline{x}_e = \underline{0}$ überführt werden kann. Diese Forderung ist gleich bedeutend damit, dass jeder beliebige Endzustand, auch wenn dieser keine Ruhelage des Systems darstellt, vom Anfangszustand aus erreicht werden kann. Dabei macht diese Forderung keine Aussagen über den Verlauf der Trajektorie vom Anfangszustand zum Endzustand und auch nicht darüber, wie groß die Stellgrößen werden dürfen. Da diese Forderung aus der linearen Systemtheorie stammt, wird stets ein unbeschränkter Eingangsraum \mathcal{U} und ein unbeschränkter Zustandsraum \mathcal{X} vorausgesetzt.

Es ist also schnell einzusehen, dass diese Forderung in dieser Form für hybride Systeme nicht einsetzbar ist, da nur noch bestimmte Trajektorien wegen der Zustandsraum- und der Stellgrößenbeschränkungen möglich sind. Dies bedeutet aber auch, dass zum Beispiel nicht jeder Endzustand aufgrund der Begrenzung erreichbar sein muss, selbst wenn dieser im gleichen Gebiet liegt wie der Anfangszustand.

Für hybride Systeme wird deshalb oft der Begriff der Erreichbarkeit [Nen01] verwendet. Er sagt aus, ob ein Zustand von einem Anfangszustand aus erreichbar ist.

¹In Abschnitt 6.2 ist hierzu ein Beispiel zu finden.

In [Nen01] wird eine bidirektionale Erreichbarkeitsanalyse für hybride Systeme vorgestellt. Dabei ist die Erreichbarkeit eines beliebigen Zustands von einem festen Anfangszustand und gleichzeitig die Steuerbarkeit eines beliebigen Zustands in den Endzustand zu erfüllen.

Beobachtbarkeit

Die Beobachtbarkeit eines linearen Systems nach [Fö94, Lun04] ist gegeben, wenn der Anfangszustand aus bekannter Ausgangsgröße und bekannter Eingangsgröße rekonstruiert werden kann. Aufgrund der Zustandsraum- und der Stellgrößenbeschränkungen ist dabei nicht garantiert, dass die Trajektorie des Prozesses im erlaubten Gebiet des Zustandsraumes bleibt. In [Cv04] wird deshalb gefordert, dass auch alle Ereignisse während des Trajektorienverlaufs bekannt sein müssen, damit eine Rekonstruktion des Anfangszustands bewerkstelligt werden kann. Im Weiteren wird vorausgesetzt, dass alle, sowohl die diskreten als auch die zeitkontinuierlichen Zustände des hybriden Systems messbar sind.

Stabilität

In der Regelungstechnik wird die Stabilität durch die Zustands- oder Übertragungsstabilität definiert [Fö94, Lun05]. Bei der Zustandsstabilität oder auch Stabilität nach Ljapunow [Fö98, Lun05, Nen01] wird ein System dann als stabil bezeichnet, wenn durch eine Auslenkung des Zustands aus einer Ruhelage, dieser anschließend wieder sicher der Ruhelage zustrebt. Unter der Übertragungsstabilität wird die Eingangs-Ausgangs-Stabilität verstanden, bei der ein System auf eine beschränkte Eingangsgröße immer mit einer beschränkten Ausgangsgröße antwortet.

Für hybride Systeme kann die Zustandsstabilität direkt für den Zielzustand der Trajektorie angegeben werden. Für den Verlauf der Trajektorie bis zum Erreichen des Endgebietes muss nicht zwingend ein stabiles Verhalten gefordert werden. In [Nen01] werden zum Beispiel für das Erreichen von Triggermengen, die dann ein Ereignis auslösen, auch instabile Systeme erfolgreich eingesetzt.

In der Literatur werden die Begriffe Stabilität, Steuerbarkeit [BFM00, Nen01] und Beobachtbarkeit [Cv04] für hybride Systeme angegeben.

Auf die Beschreibung von Gebieten und deren Beschränkungen wird nun näher eingegangen.

2.5 Beschreibung der Gebiete im Zustandsraum

Zur Beschreibung der Gebiete im Zustandsraum werden nun das Polytop und das Simplex, welches ein Sonderfall des Polytops darstellt, betrachtet. Beiden Beschreibungsformen ist gemeinsam, dass sie konvexe Gebiete bilden. Dies bedeutet, dass alle Punkte auf einer Verbindungsstrecke zwischen zwei beliebigen Punkten im Polytop oder auf dessen Rand immer im Polytop oder auf dem Rand verlaufen. Bei der Beschreibung der Simplexe werden darüber hinaus die baryzentrischen Koordinaten eingeführt.

2.5.1 Polytope und Simplexe

Das Polytop kann nach [Hv04] wie folgt definiert werden:

Definition 2.5 (Volldimensionales Polytop):

Gegeben seien $M \geq n + 1$ Punkte im \mathbb{R}^n , die nicht alle in einer Hyperebene liegen. Ein volldimensionales Polytop ist dann definiert als konvexe Hülle dieser M Punkte. Alle Punkte der Menge M , die nicht als konvexe Kombination der anderen Punkte dargestellt werden, heißen Eckpunkte des Polytops.

Die konvexe Hülle der Eckpunkte des Polytops ist das Polytop selbst, es genügt deshalb die Eckpunkte des Polytops anzugeben [Hv04]. Es ist auch möglich, ein Polytop als Schnittmenge von Halbräumen zu definieren [Hv04, Buc04b, Wol05].

Ein Polytop ist durch die Angabe seiner Eckpunkte zwar eindeutig festgelegt, allerdings ist es für die weitere Arbeit erforderlich, dass die Seiten und Ecken des Polytops eindeutig referenziert werden können.

Die Seiten und Eckpunkte müssen daher in geeigneter Weise durchnummeriert werden. Zur Verarbeitung eines Polytops müssen also neben den Eckpunkten noch weitere Daten gespeichert werden. Es gelten dabei die folgenden Festlegungen:

- Die Ecken \underline{x}_{v_j} werden von 1 bis M durchnummeriert.
- Die Seiten F_i werden von 1 bis K durchnummeriert.
- Die Menge der Ecken eines Polytops wird mit \mathcal{V} bezeichnet.
- Die Menge der Seiten eines Polytops wird mit \mathcal{F} bezeichnet.
- Die Menge der Ecken \underline{x}_{v_j} , die zur Seite F_i gehören, wird mit \mathcal{V}_i bezeichnet.
- Die Menge der Seiten F_i , die die Ecke \underline{x}_{v_j} enthalten, wird mit \mathcal{F}_j bezeichnet.
- Die Normalenvektoren \underline{n}_{F_i} der Seiten F_i des Polytops zeigen immer nach außen.

Beispiel 2.4 (Benennung eines Polytops):

Für das Polytop aus Abbildung 2.7 ergeben sich folgende Mengen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{ \underline{x}_{v_1}, \underline{x}_{v_2}, \underline{x}_{v_3}, \underline{x}_{v_4}, \underline{x}_{v_5} \}, \\ \mathcal{F} &= \{ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \}, \\ \mathcal{V}_1 &= \{ \underline{x}_{v_1}, \underline{x}_{v_2} \}, \mathcal{V}_2 = \{ \underline{x}_{v_2}, \underline{x}_{v_3} \}, \mathcal{V}_3 = \{ \underline{x}_{v_3}, \underline{x}_{v_4} \}, \mathcal{V}_4 = \{ \underline{x}_{v_4}, \underline{x}_{v_5} \}, \\ \mathcal{V}_5 &= \{ \underline{x}_{v_5}, \underline{x}_{v_1} \}, \\ \mathcal{F}_1 &= \{ F_5, F_1 \}, \mathcal{F}_2 = \{ F_1, F_2 \}, \mathcal{F}_3 = \{ F_2, F_3 \}, \mathcal{F}_4 = \{ F_3, F_4 \}, \mathcal{F}_5 = \{ F_4, F_5 \}. \end{aligned}$$

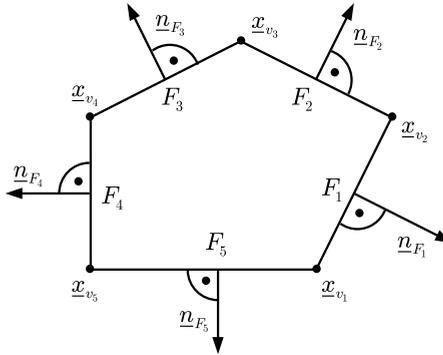


Abbildung 2.7: Benennung eines Polytops im zweidimensionalen Raum

Im Weiteren wird auch das Simplex verwendet. Das Simplex stellt einen Spezialfall des Polytops dar.

Definition 2.6 (Volldimensionales Simplex):

Ein volldimensionales Simplex ist ein volldimensionales Polytop mit genau $n + 1$ Eckpunkten im \mathbb{R}^n .

Die Benennung eines Simplex ist aufgrund der speziellen Struktur einfacher als die eines Polytops. Das Simplex ist in Abbildung 2.8 dargestellt.

Dabei gelten folgende Vereinbarungen, die identisch mit denen für das Polytop sind:

- Die Menge der Ecken \underline{x}_{v_j} , $j = 1 \dots n + 1$ eines Simplex wird mit \mathcal{V} bezeichnet.
- Die Menge der Seiten F_i , $i = 1 \dots n + 1$ eines Simplex wird mit \mathcal{F} bezeichnet.
- Die Normalenvektoren \underline{n}_{F_i} der Seiten des Simplex zeigen immer nach außen.

Es gilt die folgende Vereinbarung, die sich von denen des Polytops unterscheidet:

- Die Seite F_i ist die Seite des Simplex, welche die Ecke \underline{x}_{v_i} nicht enthält. Anschaulich ist dies die Seite, die der Ecke \underline{x}_{v_i} gegenüberliegt.

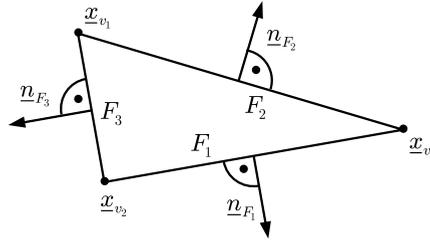


Abbildung 2.8: Benennung eines Simplex im zweidimensionalen Raum

Im Vergleich zur Bezeichnung des Polytops sind beim Simplex die Mengen \mathcal{V}_i , $i = 1, \dots, M$ und \mathcal{F}_j , $j = 1, \dots, K$ überflüssig und können deshalb entfallen.

Für ein volldimensionales Simplex lassen sich die baryzentrischen Koordinaten wie folgt angeben.

2.5.2 Baryzentrische Koordinaten

Jeder beliebige Punkt im Simplex lässt sich mithilfe der *baryzentrischen Koordinaten* [HL92] eindeutig als Linearkombination der Simplexecken schreiben [Hv04].

Die baryzentrischen Koordinaten \underline{b}_i eines Punktes \underline{x}_i ergeben sich aus

$$\underline{b}_i = \underline{T}_B \begin{bmatrix} \underline{x}_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

mit

$$\underline{T}_B = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1} & \cdots & \underline{x}_{v_{n+1}} \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.27)$$

Die Matrix \underline{T}_B entsteht also durch Inversion einer Matrix, die sich aus den Ortsvektoren der Simplexecken zusammensetzt, die jeweils um eine 1 erweitert sind. Die Inversion ist immer durchführbar, wenn die Ortsvektoren linear unabhängig sind. Dies ist bei einem volldimensionalen Simplex immer der Fall.

Sind die baryzentrischen Koordinaten \underline{b} eines Punktes \underline{x} alle im Bereich

$$0 \leq b_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (2.28)$$

so ist der Punkt \underline{x} ein Punkt des Simplex. Der Punkt \underline{x} liegt also im Simplex oder

auf dem Rand des Simplex. Dies wird durch die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 1 \quad (2.29)$$

erreicht, die in der letzten Zeile der Gleichung (2.26) implizit enthalten ist und so für eine Normierung sorgt.

Für Polytope kann man ebenfalls baryzentrische Koordinaten einführen, allerdings sind diese nicht eindeutig definiert, da es mehrere Möglichkeiten gibt, $n + 1$ Eckpunkte aus den M Polytopecken zu kombinieren. Dort gilt dann auch die Bedingung (2.28) für die baryzentrischen Koordinaten nicht mehr.

2.6 Besonderheiten zeitdiskreter hybrider Systeme

Es wird die Verwendung der zeitdiskreten hybriden Systeme zunächst durch die Realisierungsproblematik motiviert. Im nächsten Schritt soll geklärt werden, wie man die zeitdiskrete Beschreibung der Systemdynamik ermitteln kann. Danach werden besondere Phänomene beschrieben, wie sie nur bei zeitdiskreten Systemen auftreten.

2.6.1 Motivation durch die Realisierungsproblematik

Die Prozessführung mit einem hybriden Systemmodell besteht in der Regel darin, die Trajektorie über mehrere Gebiete zu führen und damit gezielt autonome Ereignisse auszulösen. Zur Prozessführung können zusätzlich noch gesteuerte Ereignisse eingesetzt werden.

Wird nun die Prozessführung auf einem Digitalrechner realisiert, dann können Informationen aus dem Prozess nur zu vorgegebenen Abtastzeiten aufgenommen und verarbeitet werden.

Benutzt man zum Entwurf der Prozessführung ein zeitdiskretes Modell, so ist im Modell schon berücksichtigt, dass Informationen nur zu den Abtastzeitpunkten aufgenommen werden können und die Stellgrößen, die auf das System geschaltet werden, zwischen zwei Abtastzeitpunkten konstant gehalten werden.

Wird von der Trajektorie ein Ereignis ausgelöst, indem diese, wie in Abbildung 2.9(a) dargestellt ist, eine Gebietsgrenze erreicht, dann wirkt bei der zeitkontinuierlichen Trajektorie sofort nach dem Ereignis eine neue Dynamik. Bei der abgetasteten Trajektorie hingegen tritt die Detektion des Ereignisses erst verspätet ein. Die zeitkontinuierliche Trajektorie ist hierbei mit einer gestrichelten Linie dargestellt, während

die Abtastzeitpunkte durch Kreuze (\times) markiert werden. Die Trajektorie des Modells aufgrund der verspäteten Detektion des Ereignisses ist gepunktet dargestellt.

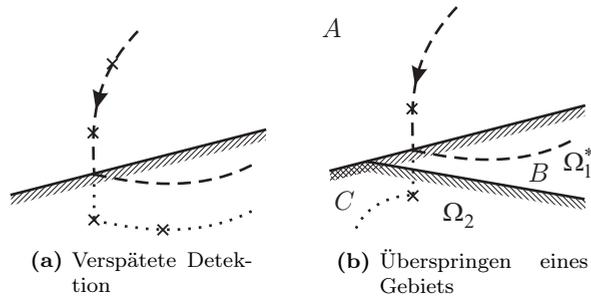


Abbildung 2.9: Probleme bei der Realisierung

Dies kann nun dazu führen, dass Ereignisse beim zeitdiskreten Verlauf erst gar nicht erkannt werden, weil diese zu den Abtastzeitpunkten schon von anderen Ereignissen überdeckt werden. In Abbildung 2.9(b) ist ein solcher Fall dargestellt. Die Gebiete sind mit A , B und C markiert. Die kontinuierliche Trajektorie löst bei Eintritt in die aktive Triggermenge Ω_1^* das zugehörige Ereignis e_1 aus. Die zeitdiskrete Trajektorie, die im oberen Bereich noch exakt mit der kontinuierlichen übereinstimmt, tritt direkt in die Triggermenge Ω_2 ein, der das Ereignis e_2 zugeordnet ist. Demzufolge stimmen die Verläufe und Gebietsübergänge aufgrund der zeitdiskreten Realisierung nicht mehr mit der zeitkontinuierlichen überein.

Um eine zeitdiskrete Prozessführung für zeitkontinuierliche Prozesse vorschlagen zu können, besteht nun die Aufgabe einer adäquaten Zeitdiskretisierung dieser Prozesse.

2.6.2 Zeitdiskretisierung hybrider Systeme

Für die Zeitdiskretisierung hybrider Systeme werden zwei unterschiedliche Verfahren vorgeschlagen. Es gibt einen Ansatz, der eine exakte Lösung verfolgt, während der zweite Ansatz von einer einfachen Approximation der zeitdiskreten Dynamik ausgeht.

Exakte Zeitdiskretisierung

In [HM03] wird beschrieben, welche Effekte bei der Zeitdiskretisierung hybrider Systeme auftreten, wenn eine stückweise affine zeitkontinuierliche Systembeschreibung zugrunde liegt. Ziel der Zeitdiskretisierung ist es, das zeitkontinuierliche System so mit dem zeitdiskreten System nachzubilden, dass beide Trajektorien den gleichen

Verlauf haben. Unterschiedliche Verläufe, wie in Abbildung 2.9 dargestellt, sind dann nicht mehr möglich.

In [HM03, Sch04b, SKHK05, HSK04a] wird dies dadurch erreicht, dass zwischen den Gebieten, auf denen ursprünglich die zeitkontinuierlichen stückweise affinen Systeme definiert waren, sogenannte Übergangsbereiche eingefügt werden. Die Übergangsbereiche verkleinern dabei die Bereiche der ursprünglichen stückweise affinen Gebiete. Die Dynamik auf den Übergangsbereichen ist in der Regel *nichtlinear* [Sch04b, SKHK05, HSK04a], während die Dynamik auf dem verbleibenden stückweise affinen Anteil mit dem Zusammenhang aus Gleichung (2.9) bestimmt werden kann.

Die Zusammenhänge sollen anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht werden:

Beispiel 2.5 (Exakte Zeitdiskretisierung):

In Abbildung 2.10(a) ist die zeitkontinuierliche Dynamik des Tank-Systems aus Beispiel 2.1 als Kennlinie dargestellt.

In Abbildung 2.10(b) sieht man die zugehörige zeitdiskrete Dynamik. Diese ist von der Abtastzeit abhängig. Die approximierte zeitdiskrete Dynamik aus Gleichung (2.24) ist in Abbildung 2.10(c) zum Vergleich dargestellt.

Für $h = h_1$ und $h_{k+1} = h_1$ sind in den Abbildungen 2.10(b) und 2.10(c) gestrichelte Linien eingezeichnet, die die h_{k+1} - h_k -Ebene in vier Quadranten aufteilen.

In Abbildung 2.10(b) sind für die Abtastzeiten $T_1 > T_2$ die Übergangsbereiche im Bereich $h_{k+1} > h_1 \wedge h_k < h_1$, also im Quadranten links oben, deutlich erkennbar. Aus ursprünglich zwei zeitkontinuierlichen stückweise affinen Systemen in Abbildung 2.10(a) entstehen in diesem Beispiel so durch die Zeitdiskretisierung drei affine zeitdiskrete Systeme.

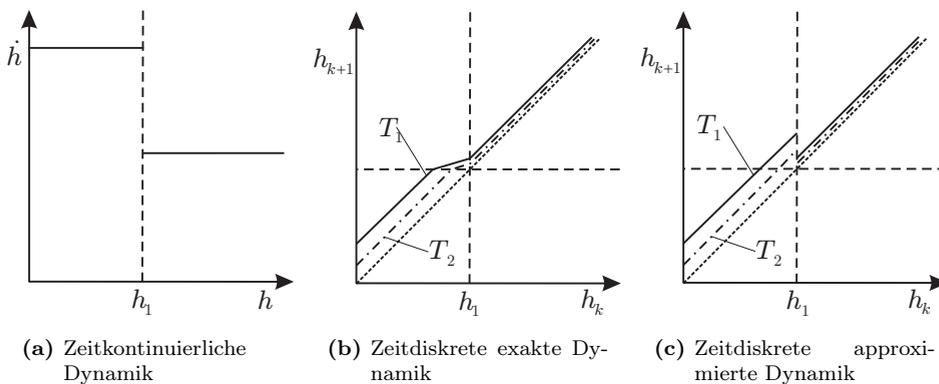


Abbildung 2.10: Vergleich der zeitkontinuierlichen Dynamik mit den zugehörigen zeitdiskreten Dynamiken

Die Entstehung der Übergangsgebiete wird in den Anwendungsbeispielen in der Literatur, zum Beispiel in [BFM00] vernachlässigt. Die zeitdiskrete Dynamik wird in diesen Fällen nur approximiert.

Approximierte zeitdiskrete Dynamik

Für die Approximation der zeitdiskreten Dynamik wird mithilfe der Gleichung (2.9) die affine zeitkontinuierliche Dynamik zeitdiskretisiert. Dabei ist die zeitdiskrete Dynamik auf dem gleichen Grundgebiet im Zustandsraum gültig wie die ursprüngliche zeitkontinuierliche Dynamik. In Abbildung 2.10(c) ist die Approximation der zeitdiskreten Dynamik dargestellt. Deutlich ist zu erkennen, dass der Unterschied zwischen der exakten Zeitdiskretisierung und der Approximation immer kleiner wird, desto kleiner die Abtastzeit wird. Dies liegt daran, dass sich der Zustandspunkt auf der Trajektorie in einer festen Zeitspanne eine bestimmte Strecke weiter bewegt. Ist die Zeitspanne kürzer, dann ist auch die Strecke kürzer und das Übergangsgebiet von seiner Ausdehnung her kleiner.

Alternativ zur physikalischen Modellbildung und anschließender Zeitdiskretisierung bietet sich die experimentelle Modellbildung für hybride Systeme [Mün06, MHK04, MHK03a, MHK03b, FMLM01, Hof99] durch Identifikation an. Diese Verfahren liefern dabei auch nur eine Approximation der realen hybriden Dynamik, da eine genaue Anzahl der Bereiche im Voraus nicht bekannt ist.

Durch die Zeitdiskretisierung ergeben sich zwei besondere Merkmale für die zeitdiskreten Systeme.

2.6.3 Zeitdiskrete Phänomene

Als zeitdiskrete Phänomene werden in [HM03] das

- Entstehen von Übergangsgebieten und
- der Wegfall der Sprunggleichung beim Netz-Zustands-Modell aus Abschnitt 2.3.2, bei hybriden Systemen mit einem Sprung im Zustand,

bezeichnet.

Entstehung von Übergangsgebieten

Die Entstehung der Übergangsgebiete wurde in Abschnitt 2.6.2 erläutert.

Wegfall der Sprunggleichung beim Netz-Zustands-Modell

In [HM03] wird am Beispiel des springenden Balls aus Abschnitt 2.1.2 der Wegfall der Sprunggleichung demonstriert. Es wird im Folgenden nur kurz darauf eingegangen.

Betrachtet man die zeitkontinuierliche Zustandsgleichung (2.3) ohne Sprunggleichung, so ist diese nur dann in der Lage einen Sprung im Zustand auszuführen, wenn in der rechten Seite der Zustandsdifferenzialgleichung (2.1) Dirac-Impulse vorhanden sind, die vom Zustand und vom Eingang abhängen. Um mit Dirac-Impulsen zu rechnen, muss man sich aber der Distributionentheorie [Pre85, Zem65] bedienen. Einfacher ist es deshalb eine Sprunggleichung anzufügen und auf die Dirac-Impulse zu verzichten.

Wird ein System zeitdiskret dargestellt, dann wird der Folgezustand in der Differenzengleichung in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand und Eingang berechnet. Stellt man die rechte Seite der Zustandsdifferenzengleichung abschnittsweise definiert dar, so kann man damit leicht Sprünge im Zustand modellieren. Eine Sprunggleichung ist damit in der zeitdiskreten Darstellung hybrider Systeme überflüssig.

2.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die Grundlagen für hybride Systeme eingeführt. Anhand einfacher Beispiele wurde verdeutlicht, wie nützlich die hybride Modellform eingesetzt werden kann, um komplexe Systemeigenschaften darstellen zu können.

Hybride Systeme setzen sich dabei immer aus einem ereignisgetriebenen und einem zeitgetriebenen Anteil zusammen. Es wurden die drei gebräuchlichsten Modellformen für hybride Systeme vorgestellt, das Netz-Zustands-Modell, das MLD-Systemmodell und das stückweise affine Systemmodell. Es wurde deutlich herausgestellt, dass Zustandsraum- und Stellgrößenbeschränkungen ein wesentliches Merkmal hybrider Systeme und deren Modelle darstellt.

Zusätzlich dazu wurden die wichtigen Systemeigenschaften, wie Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilität der hybriden Systeme im Vergleich zur linearen Systemtheorie angesprochen.

Zur Darstellung der Beschränkungen im Zustandsraum und der Stellgröße im Eingangsraum wurden die geometrischen Begriffe Polytop und Simplex sowie die baryzentrischen Koordinaten eingeführt.

Für die Realisierung der Prozessführung werden im Weiteren zeitdiskrete Systemmodelle verwendet, weshalb genau untersucht wurde, wie man diese Systemmodelle aus zeitkontinuierlichen stückweise affinen Systemmodellen ableiten kann. Da die

exakte Zeitdiskretisierung, wie in Abschnitt 2.6 beschrieben, auf Probleme führen kann, wird im Weiteren die approximierete Zeitdiskretisierung verwendet.

Nachdem in diesem Kapitel die Grundlagen zur Beschreibung der hybriden Systeme als zeitdiskrete stückweise affine Systeme gelegt worden sind, soll im nächsten Kapitel untersucht werden, wie die Dynamik dieser Systeme durch eine Regelung aktiv beeinflusst werden kann.

Kapitel 3

Gezielte Beeinflussung der Systemdynamik

Nachdem in Kapitel 2 vor allem Modellierungsaspekte behandelt wurden, soll in diesem Kapitel die gezielte Beeinflussung der Systemdynamik im Vordergrund stehen. In der Automatisierungstechnik wird die gezielte Einflussnahme auf Systeme mit den Begriffen der Regelung und Steuerung verknüpft. Die Prozessführung stellt eine übergeordnete Einheit dar und schließt so die Begriffe der Regelung und der Steuerung mit ein.

Im ersten Teil des Kapitels wird zunächst ein Überblick über die klassischen Regelungsverfahren gegeben. Unter den klassischen Regelungsverfahren werden der Standard-PID-Regler und der Zustandsregler für lineare Systeme verstanden. Danach wird kurz auf das moderne Regelungsverfahren der Dynamischen Programmierung als Sonderfall einer Zustandsrückführung eingegangen. Anschließend werden bekannte Regelungsverfahren für hybride Systeme aufgeführt. Die Ziele der klassischen Regelungsverfahren werden abschließend mit denen der hybriden Prozessführung verglichen.

3.1 Überblick über die klassischen Regelungsverfahren

In der klassischen Regelungstechnik werden zwei unterschiedliche Reglerkonzepte für lineare Strecken angegeben. Das erste Konzept stellt der zum Beispiel aus [Fö94, Lun05] bekannte Standardregelkreis dar, der in Abbildung 3.1 dargestellt ist. Der Standardregelkreis besteht aus dem Modell der Strecke und dem dynamischen Regler R_D , dessen Parameter durch den Regelungsentwurf festgelegt werden sollen. Das Modell der Strecke und des Reglers wird durch eine Übertragungsfunktion be-

geschrieben. Im Folgenden wird nur auf zeitkontinuierliche Modelle eingegangen. Die Methoden können aber leicht auf zeitdiskrete Modelle übertragen werden.

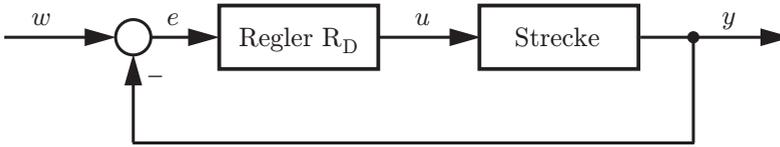


Abbildung 3.1: Standardregelkreis mit dynamischem Regler

Die zurückgeführte Größe ist der Ausgang y . Der Standardregelkreis wird nur bei SISO-Systemen¹ eingesetzt, oder bei Systemen, deren Struktur sich so verändern lässt, dass man diese als SISO-System betrachten kann. Unter letztere Klasse fallen zum Beispiel die Kaskadenregelungen oder Systeme, bei denen weitere Systemeingänge als eine Störgröße aufgefasst werden können und so in einer Störgrößenaufschaltung den Standardregelkreis ergänzen.

Das zweite Konzept stellt die Verwendung eines Zustandsreglers dar, wie er in Abbildung 3.2 zusammen mit Strecke, Vorfilter und Beobachter gezeigt ist. Beim Zustandsregler werden die Zustandsgrößen \underline{x} zurückgeführt, die aber nur in seltenen Fällen direkt messbar sind. Zur Rekonstruktion der nicht messbaren Zustandsgrößen wird deshalb ein Beobachter eingesetzt, der die Zustände unter Kenntnis der Ausgangsgröße \underline{y} und der Eingangsgröße \underline{u} der Strecke zu $\underline{\hat{x}}$ berechnet. Üblicherweise wird ein Vorfilter \underline{V}_z für das Erreichen der stationären Genauigkeit vorgesehen. Der vom Vorfilter berechnete Wert wird mit dem Wert, den der Regler liefert, verglichen und ergibt dann die neue Stellgröße. Es wird somit das Regelgesetz

$$\underline{u} = -\underline{R}_z \underline{x} + \underline{V}_z \underline{w} \quad (3.1)$$

ausgewertet. Der Zustandsregler ist im Vergleich zum Standard-PID-Regler für MIMO-Systeme² einsetzbar.

Sowohl zur Ermittlung des dynamischen Reglers R_D als auch des Zustandsreglers R_Z kann zwischen unterschiedlichen Verfahren ausgewählt werden.

3.1.1 Verfahren zur Ermittlung des dynamischen Reglers R_D

Übliche Verfahren zur Ermittlung des dynamischen Reglers sind das Frequenzkennlinienverfahren, der Entwurf eines Kompensationsreglers oder die Untersuchung der

¹SISO steht für Single Input Single Output, also Systeme mit einem Ein- und einem Ausgang.

²MIMO steht für Multiple Input Multiple Output, also Systeme mit mehreren Ein- und Ausgängen.

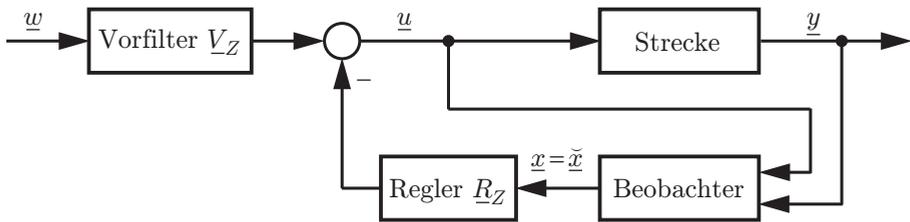


Abbildung 3.2: Geregelt System im Zustandsraum mit Zustandsregler und Beobachter

Wurzelortskurve. Alle Verfahren liefern Regler, die als Standard-PID-Regler [Fö94, Lun05] implementiert werden können.

Der Regler wird allgemein als Übertragungsfunktion

$$R_D(s) = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0} \quad (3.2)$$

beschrieben. Damit der Regler realisierbar ist, muss $m \leq n$ gelten, da sonst ein akausaler Regler vorliegt.

3.1.2 Verfahren zur Ermittlung des Zustandsreglers \underline{R}_Z

Der Zustandsregler wird durch eine Matrix $\underline{R}_Z \in \mathbb{R}^{p \times n}$ repräsentiert. Diese kann durch übliche Verfahren [Fö94, Lun04], wie der Polvorgabe, der vollständigen modalen Synthese oder dem Riccati-Entwurf bestimmt werden. Für die Anwendbarkeit des Zustandsreglers ist es unabdingbar, dass die Zustände entweder messbar oder durch einen Beobachter rekonstruierbar sind.

Für die Zustandsbeobachtung linearer Systeme eignet sich der Luenberger-Beobachter [Fö94, Lun04].

3.2 Dynamische Programmierung als Beispiel eines modernen Regelverfahrens

Eine besondere Form des Zustandsreglers gewinnt man mittels der Methode der Dynamischen Programmierung. Die Dynamische Programmierung beruht auf dem Optimalitätsprinzip von Bellman [Bel52]. Dabei ist jede Resttrajektorie einer optimalen Trajektorie wiederum optimal im Sinne der Überführung des Zwischenzustands in den Endzustand, von dem aus die Resttrajektorie betrachtet wird.

Für die Anwendung der Dynamischen Programmierung in der Automatisierungstechnik werden der Zustands- und Eingangsraum als beschränkt angenommen. In dem vorgegebenen Bereich werden sowohl die Zustandsgrößen als auch die Eingangsgrößen wertdiskretisiert.

Von jedem Zustandsrasterpunkt aus, werden mit Hilfe aller gerasterten Stellgrößen die zugehörigen Folgezustandspunkte durch die Darstellung der Systemdynamik mit einer im allgemeinen nichtlinearen Differenzgleichung berechnet und mittels eines Gütemaßes gewichtet. Dabei wird vom Endzustand aus rückwärts gerechnet.

Die sogenannten Übergangskosten, die sich für jeden Schritt ergeben und die Endkosten, die den Endzustand gewichten, werden in jedem Schritt dem sogenannten Summengütemaß hinzuaddiert. Für jeden Schritt und jeden Zustandsrasterpunkt wird so die optimale Stellgröße für das Erreichen des Endzustandes abgelegt.

Häufig kommen die berechneten Folgezustandspunkte zwischen dem angenommenen Raster zu liegen. In [SM72] wird deshalb bei der Berechnung des Summengütemaßes in jedem Zeitschritt eine Interpolation der Übergangskosten durchgeführt. Der Einfachheit halber wird eine lineare Interpolation vorgeschlagen.

Zusätzlich muss beachtet werden, dass ein durch die Systemgleichung abgebildeter Zustandspunkt außerhalb des Zustandsrasters liegen kann. Das Übergangsgütemaß wird dann wesentlich größer gewählt als der im gültigen Zustandsbereich maximale Wert, damit die zugehörigen Stellgrößen keine Beachtung in der Lösung finden können. Von einem Startzustand ist somit der optimale Verlauf der Trajektorie in den Endzustand bestimmt.

Die berechnete Lösung zum Erreichen des Endzustands, ausgehend vom gewählten Startzustand, ist im allgemeinen aber zeitvariant [Pap91], da die Lösung für jeden Berechnungsschritt neu bestimmt wird.

Für die automatisierungstechnische Praxis ist ein zeitinvariantes Regelgesetz anzustreben. In [SM72] wird die Rückwärtsrechnung so lange durchgeführt, bis die optimalen, den Zustandspunkten zugeordneten Stellgrößen, sich zum nächsten Zeitschritt im Rahmen einer angestrebten Genauigkeit nicht mehr verändern. Jedem Zustandspunkt ist somit eine Stellgröße zugeordnet. Dies entspricht dann einem zeitinvarianten Regelgesetz $\underline{u} = \underline{f}(\underline{x})$, das einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Stellgröße und Zustand herstellt. Üblicherweise wird dieser Zusammenhang als Kennfeld abgelegt. Bei der Reglerauswertung wird dann zwischen den Stützstellen linear interpoliert.

Die Lösung, die durch die Dynamische Programmierung erhalten wird, ist optimal in Bezug auf das gewählte Gütemaß und hält dabei immer die Zustandsraum- und die Stellgrößenbeschränkungen ein. Das Verfahren ist dabei sowohl auf lineare als auch auf nichtlineare Systeme anwendbar. Allerdings ist der Aufwand für die Be-

rechnung erheblich. Da Rechenkapazität und Speicher in immer größerem Umfang zur Verfügung stehen, wurde das Verfahren vor allem in den letzten Jahren immer populärer.

In [Lis06] wird ein Verfahren zur Reduktion des Speicheraufwands der durch die Dynamische Programmierung berechneten Kennfelder angegeben. In [Sch04a] wird die Dynamische Programmierung so zum Beispiel für die Regelung einer Druckregelstrecke verwendet. In [Har06] wird ein Verfahren zur methodischen Ermittlung der Parameter bei der Dynamischen Programmierung vorgestellt.

In [Sch01] wird die Dynamische Programmierung für hybride Systeme vorgestellt. Dieses Verfahren soll im Weiteren aber nicht näher erläutert werden.

3.3 Bekannte Regelungsverfahren für hybride Systeme

Es werden nun im Folgenden die bekannten Verfahren zur Regelung und Steuerung hybrider Systeme kurz zusammengestellt:

- Modellbasierte prädiktive Regelung auf Basis der MLD-Systembeschreibung [BM99]
- Multiparametrische Programmierung [Bor02]
- Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex [Hv04]
- Regelung durch Anpassung von Linkseigenvektoren [Nen01]
- Sektorkriterium [Nen01]

3.3.1 Modellbasierte prädiktive Regelung auf Basis der MLD-Systembeschreibung [BM99]

Auf Basis des zeitdiskreten Systemmodells (2.13) wird zum Zeitpunkt $t_0 = kT$ versucht eine Steuerung zu finden, die den Zustand $\underline{x}(t_0)$ in N_p Schritten auf den Sollwert \underline{x}_{soll} steuert. Für die ersten N_c Schritte kann die Stellgröße variieren, während sie aber dann für die restlichen $N_p - N_c$ Schritte als konstant angenommen wird. Die erste berechnete Stellgröße wird anschließend aufgeschaltet. Zum Zeitpunkt $t_1 = (k + 1)T$ wird von Neuem eine Steuerung berechnet, wiederum mit dem Prädiktionshorizont N_p und dem Steuerhorizont N_c . Die Steuerung wird durch Lösung eines Optimierungsproblems ermittelt [RP04].

In Abbildung 3.3(a) ist der Prädiktionshorizont $N_p = 3$ und der aufgrund der Steuerung berechnete Verlauf der Istgröße \underline{x}_{ist} eingezeichnet. Der prädizierte optimale Systemverlauf ist mit einer fetten durchgezogenen Linie markiert. Mögliche untere und obere Grenzen sind gestrichelt markiert. Der Sollwert \underline{x}_{soll} ist gepunktet eingezeichnet. In Abbildung 3.3(b) wird wiederum der Verlauf der Prädiktion betrachtet, allerdings jetzt schon zum Zeitpunkt $t_1 = (k + 1)T$.

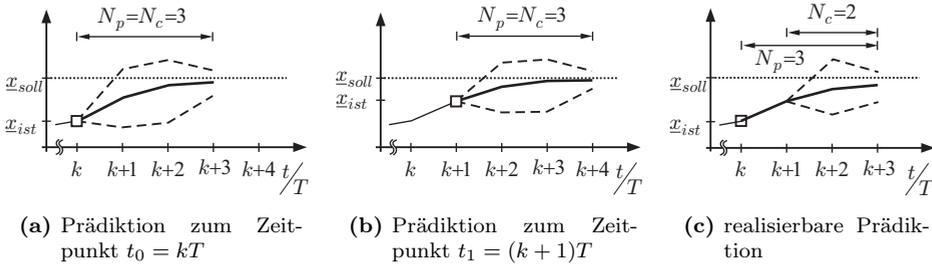


Abbildung 3.3: Modellprädiktive Regelung

Da die Prädiktion des Zustands eine gewisse Zeit benötigt, ist davon auszugehen, dass das Ergebnis erst zum nächsten Abtastzeitpunkt vorliegt. In Abbildung 3.3(c) ist genau dieser Fall dargestellt [Buc04a].

Für ein MLD-Systemmodell muss zur Ermittlung der Stellgrößen, die den prädierten Zustand auf die Sollgröße führen, ein Gütemaß minimiert werden, wobei der Variablenvektor aus reellen und ganzzahligen Elementen besteht. Häufig wird deshalb vorgeschlagen, dies als gemischt ganzzahliges quadratisches Problem (*mixed-integer quadratic problem (MIQP)*) [BM99] zu formulieren, wobei die Systembeschreibung des MLD-Systems aus Gleichung (2.13) für N_p aufeinander folgende Schritte als Nebenbedingungen bei der Optimierung eingehalten werden muss.

In [Buc04a] wird die modellbasierte prädiktive Regelung an einem Zwei-Tank-System, das als MLD-Systemmodell beschrieben wird, vorgestellt. Die Abtastzeit musste bei dem relativ einfachen Zwei-Tank-System auf $T = 0,75$ s gewählt werden, da für kleinere Abtastzeiten nicht garantiert werden konnte, dass die Lösung des MIQP rechtzeitig zur Verfügung stand³.

Die modellbasierte prädiktive Regelung ist von der Berechnung her sehr aufwändig, dabei steigt der Rechenaufwand mit Anzahl der Prädiktionsschritte und mit Anzahl der betrachteten Gebiete, in die das hybride System aufgeteilt wird, explosionsartig an. Dennoch findet das Verfahren in der Kraftwerksplanung [GSC⁺03] Anwendung, da hier die Abtastzeiten genügend groß sind.

³Die Berechnung wurde auf einem Pentium 4 mit 2,8 GHz unter Windows 2000 mit dem Cplex 9.0/Tomlab unter Matlab 12.1 durchgeführt.

3.3.2 Affines Regelungsgesetz

Für die übrigen Verfahren wird auf Basis eines affinen zeitkontinuierlichen Zustandsraummodells nach Definition 2.3 oder des zeitdiskreten affinen Zustandsraummodells nach Definition 2.4 ein affines Regelungsgesetz

$$\underline{u} = -\underline{R}\underline{x} + \underline{\varphi}_u \quad (3.3)$$

angegeben. Dieses Gesetz kann für zeitkontinuierliche als auch für zeitdiskrete Systeme angegeben werden. Für zeitkontinuierliche Systeme gelten \underline{x} und \underline{u} , die bei zeitdiskreten Systemen durch \underline{x}_k und \underline{u}_k ersetzt werden.

Die Reglerstruktur, die sich mit dem Regelgesetz (3.3) ergibt, ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Vergleicht man die Struktur des affinen Regelkreises in Abbildung 3.4 mit der Struktur des Zustandsregelkreises in Abbildung 3.2, so sieht man, dass der Einfluss der sich ändernden Führungsgröße $\underline{V}_z \underline{w}$ durch den affinen Anteil des Regelgesetzes $\underline{\varphi}_u$ ersetzt wird.

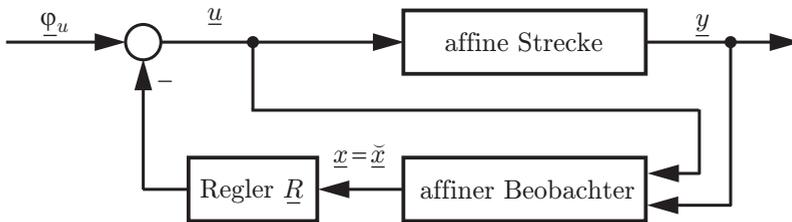


Abbildung 3.4: Affiner Regelkreis mit Zustandsrückführung und affinem Beobachter

Wird nun die im Weiteren verwendete zeitdiskrete affine Zustandsdifferenzgleichung (2.7)

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi} \underline{x}_k + \underline{H} \underline{u}_k + \underline{\varphi} \quad \text{mit } \underline{x}_0 = \underline{x}(0) \quad (3.4)$$

mit der zeitdiskreten Variante des affinen Regelgesetzes (3.3) geregelt, erhält man das autonome System

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}_R \underline{x}_k + \underline{\varphi}_R \quad (3.5)$$

mit

$$\underline{\Phi}_R = \underline{\Phi} - \underline{H} \underline{R} \quad (3.6)$$

und

$$\underline{\varphi}_R = \underline{H} \underline{\varphi}_u + \underline{\varphi}. \quad (3.7)$$

3.3.3 Multiparametrische Programmierung

In [Bor02] wird der modellbasierte prädiktive Ansatz aus Abschnitt 3.3.1 unter der Annahme eines stückweise affinen Systemmodells aus Abschnitt 2.3.4 weiterentwickelt. Das gemischt ganzzahlige quadratische Optimierungsproblem wird so formuliert, dass es in den Nebenbedingungen zusätzlich zur Abhängigkeit von den Optimierungsvariablen \underline{z} die Abhängigkeit vom Parametervektor \underline{x}_p aufweist. Das Optimierungsproblem erhält dann die Form

$$J^*(\underline{x}_p) = \min_{\underline{z}} J(\underline{z}, \underline{x}_p) = \underline{c}^T \underline{z} \quad (3.8a)$$

$$\text{unter den Nebenbedingungen: } \underline{G} \underline{z} \leq \underline{W} + \underline{S} \underline{x}_p. \quad (3.8b)$$

Entspricht nun der Parametervektor \underline{x}_p dem Zustandsvektor \underline{x} des zeitkontinuierlichen Zustandsraumes, so ist eine Lösung des Optimierungsproblems (3.8) für einen kleinen Bereich, einem sogenannten *kritischen Bereich* [Bor02] des Zustandsraumes gültig. Die Lösung für den ersten Schritt des Prädiktionshorizonts wird dann in Form eines affinen Regelgesetzes diesem kritischen Bereich zusammen mit einer diskreten Stellgröße zugeordnet.

Der Zustandsraum wird im Verlauf der Reglerberechnung so weit wie möglich lückenlos mit diesen Bereichen überdeckt. Da zwischen jedem Schritt eine Umschaltung der diskreten Stellgröße vorgenommen werden kann, nimmt die Anzahl an Möglichkeiten sehr schnell zu. In [BBBM05] wird deshalb ein Vorgehen basierend auf der dynamischen Programmierung vorgeschlagen, um den Berechnungsaufwand in Grenzen zu halten.

In [Krü04] wird das Verfahren am Beispiel eines Zwei-Tank-Systems erprobt. Das Verfahren zeigt besonders für einen wachsenden Prädiktionshorizont die Schwäche, dass immer weniger kritische Bereiche und damit Lösungen für die Regelungsaufgabe gefunden werden. Der Rechenzeitbedarf ist vergleichbar mit dem modellprädiktiven Ansatz auf Basis der MLD-Systembeschreibung aus Abschnitt 3.3.1, allerdings fällt dieser Berechnungsaufwand nur einmal bei der Berechnung der affinen Regelgesetze an. Bei der Verwendung der Regler muss nur bestimmt werden, welches Regelungsgesetz jeweils gültig ist.

3.3.4 Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex

In [Hv04] wird ein Verfahren zur Reglerberechnung vorgeschlagen, das darauf basiert, an die Stellgrößen in den Ecken eines Simplex Bedingungen zu stellen. Dabei wird eine zeitkontinuierliche affine Dynamik nach Definition 2.3 als im Simplex gültig angenommen.

In Abbildung 3.5 ist ein Simplex dargestellt, in dessen Ecken Winkelbereiche markiert sind. Für die Austrittsseite gilt $F_a = F_3$.

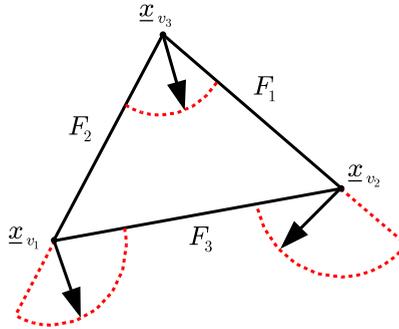


Abbildung 3.5: Bedingungen und zeitkontinuierliche Gradienten in den Eckpunkten des Simplex

Diese Winkelbereiche stellen Bedingungen an den zeitkontinuierlichen Gradienten $\dot{\underline{x}}(\underline{x}_{v_i}) = \underline{A}\underline{x}_{v_i} + \underline{B}u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{a}$ dar, der in der Ecke \underline{x}_{v_i} ausgewertet wird. Diese Bereiche können durch die folgenden Ungleichungen beschrieben werden:

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \quad \underline{n}_{F_a}^T (\underline{A}\underline{x}_{v_i} + \underline{B}u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{a}) > 0 \quad (3.9a)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V}_a : \quad \forall F_j \in \mathcal{F}_i \setminus \{F_a\} : \quad \underline{n}_{F_j}^T (\underline{A}\underline{x}_{v_i} + \underline{B}u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{a}) \leq 0 \quad (3.9b)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \quad \forall F_j \in \mathcal{F}_i : \quad \underline{n}_{F_j}^T (\underline{A}\underline{x}_{v_i} + \underline{B}u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{a}) \leq 0 \quad (3.9c)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \quad \sum_{\substack{j=1 \\ F_j \in \mathcal{F}_i}}^K \underline{n}_{F_j}^T (\underline{A}\underline{x}_{v_i} + \underline{B}u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{a}) < 0 \quad (3.9d)$$

Die anschauliche Bedeutung der Ungleichungen ist wie folgt:

- (3.9a) Die Gradienten in allen Ecken des Simplex zeigen bezüglich der Austrittsseite F_a nach außen⁴.
- (3.9b) Die Gradienten der Ecken, die auf der Austrittsseite liegen, zeigen bezüglich der angrenzenden Seitenflächen in das Simplex.
- (3.9c) Die Gradienten in den Ecken, die nicht auf der Austrittsseite liegen, zeigen bezüglich der angrenzenden Seitenflächen in das Simplex.
- (3.9d) Die Summe der Projektion der Gradienten bezüglich der angrenzenden Seitenflächen zeigen in den Ecken, die nicht zur Austrittsseite gehören, nach innen. Der Fall, dass die Summe aller Komponenten Null ist, und die Ecke folglich eine Ruhelage darstellt, wird damit ausgeschlossen.

Die Ungleichungen (3.9) hängen nur noch von der jeweiligen Stellgröße $\underline{u}(\underline{x}_{v_i})$ in den $n + 1$ Ecken des Simplex ab.

Die Stellgröße in einer Ecke entspricht beim geregelten System mit der Gleichung (3.3) gerade

$$\underline{u}(\underline{x}_{v_i}) = -\underline{R}\underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_u \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad . \quad (3.10)$$

Schreibt man die Gleichungen (3.10) in Vektorform und transponiert diese anschließend ergibt sich

$$\underline{u}^T(\underline{x}_{v_i}) = [\underline{x}_{v_i}^T \quad 1] \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad . \quad (3.11)$$

Fasst man die $n + 1$ Gleichungen (3.11) zu einer Matrixgleichung zusammen erhält man

$$\begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_{n+1}}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix} . \quad (3.12)$$

Die Gleichung (3.12) kann anschließend durch Inversion nach den Reglerparametern \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ aufgelöst werden, es ergibt sich

$$\begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_{n+1}}^T & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\underline{X}_B^T} \begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} . \quad (3.13)$$

⁴In Abschnitt 2.5 wird definiert, dass der Normalenvektor aus dem Polytop bzw. Simplex zeigt. Die Projektion ist dann positiv, wenn sie in den gleichen Halbraum zeigt, wie der Normalenvektor.

Die Stellgrößen in den Ecken werden durch das Bestimmen einer gültigen Lösung für die Ungleichungen (3.9) bestimmt. Die Eckpunkte selbst sind bekannt. Da die Eckpunkte eines volldimensionalen Simplex verwendet wurden, ist die zu invertierende Matrix $(\underline{T}_B^T)^{-1}$ immer invertierbar. Die Matrix \underline{T}_B wird in Gleichung (2.26) eingeführt.

Um das Verfahren bei volldimensionalen Polytopen anwenden zu können, wird in [Hv04] eine Triangulierung des Polytops in Simplexe mithilfe der Delaunay-Triangulierung [Tol04] vorgeschlagen. In jedem Simplex kann anschließend das Verfahren angewendet werden. Jedes Simplex erhält dadurch sein eigenes Regelgesetz. Das Polytop wird dadurch immer noch auf der gewünschten Austrittsseite verlassen.

3.3.5 Regelung durch Anpassung von Linkseigenvektoren

In [Nen01] wird die Regelung hybrider und stückweise affiner zeitkontinuierlicher Systeme durch Anpassung der Linkseigenvektoren der Dynamikmatrix des geregelten Systems eingeführt.

In Abbildung 3.6 ist ein möglicher Verlauf für die Trajektorie dargestellt, der bei der Regelung eines Systems durch die Anpassung von Linkseigenvektoren entsteht.

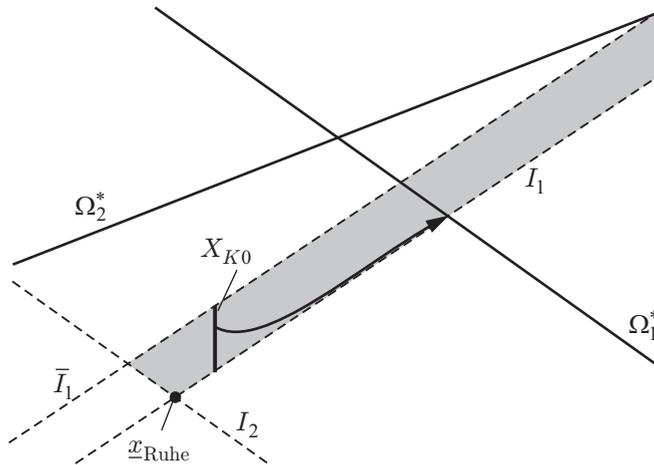


Abbildung 3.6: Trajektorienverlauf bei Anpassung der Linkseigenvektoren

Trajektorien, die in der Zustandsmenge X_{K0} starten, sind dabei gezielt auf die Triggermenge Ω_1^* zu führen, weil dort ein Ereignis ausgelöst werden soll.

Das autonome geregelte System besitzt Systemgrenzen in Form von Hyperebenen, die den Zustandsraum aufteilen, wenn dem geregelten System reelle Eigenwerte vorgegeben werden. Diese Systemgrenzen können von der Trajektorie des geregelten

Systems nicht überwunden werden. Sie werden im Folgenden *inhärente Systemgrenzen* genannt. Durch die stationäre Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ des Systems verlaufen immer inhärente Systemgrenzen.

In Abbildung 3.6 stellt so zum Beispiel I_1 eine solche inhärente Systemgrenze dar, die nicht überschritten werden kann.

Die Normalenvektoren dieser inhärenten Systemgrenzen sind identisch mit den Linkseigenvektoren des Systems. Da der zugehörige Eigenwert λ_1 zur inhärenten Systemgrenze I_1 stabil ist, bewegt sich die Trajektorie auf I_1 zu. Der Eigenwert λ_2 zur inhärenten Systemgrenze I_2 ist instabil, die Trajektorie bewegt sich deshalb von dieser weg. Bei stabilen Eigenwerten, wie zum Beispiel dem Eigenwert λ_1 , kann man die parallelen Hyperebenen⁵ \bar{I}_1 auch als inhärente Systemgrenze auffassen, da sich eine Trajektorie immer von dieser fort bewegt. Bei stabilen reellen Eigenwerten kann man so mit den inhärenten Systemgrenzen und dem Startzustand $\underline{x}_0 \in X_{K0}$ sowie der Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ des Systems einen Spat aufspannen. Der Startzustand und die Ruhelage bilden dabei zwei gegenüberliegende Ecken des Spats.

3.3.6 Sektorkriterium [Nen01]

In Abbildung 3.7 sollen die zeitkontinuierlichen Trajektorien von der Zustandsmenge X_{K0} in die Zustandsmenge X_{Ke} überführt werden, ohne einen bestimmten Sektor zu verlassen. Dieser konisch zulaufende Sektor ergibt sich aus dem Schnitt von mehreren Hyperebenen im spitzen Winkel, die durch die Normalenvektoren $\underline{\eta}_i, i = 1, \dots, k$ definiert werden. Die Öffnung des Konus wird durch die Hyperebene H_0 abgeschlossen, die durch den Normalenvektor $\underline{\omega}_e$ definiert ist. Parallel zu H_0 verläuft H_e .

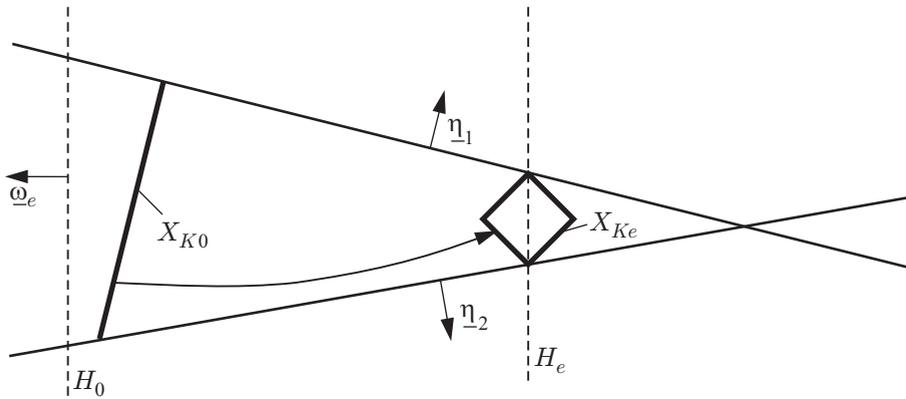


Abbildung 3.7: Trajektorienverlauf beim Sektorkriterium

⁵Dies entspricht einer inhärenten Systemgrenze durch den Zustandspunkt \underline{x}_0 aus Anhang B.3.3.

Es werden nun die Forderung $\eta_i^T \dot{x} \leq 0$, $i = 1, \dots, k$ mit x auf den jeweiligen, den Konus bildenden Hyperebenen gestellt. Gleichzeitig werden die Forderungen $\omega_e^T \dot{x} \leq 0$ mit x auf den Zustandsmengen X_{K_0} und X_{K_e} gestellt. Wird in diesen zwei Ungleichungen die Systemgleichung $\dot{x} = Ax + Bu + a$ mit dem Regelgesetz $u = -Rx + \varphi_u$ eingesetzt, so sind die Ungleichungen nur noch von den unbekanntem Parametern R und φ_u abhängig, die über ein lineares Programm bestimmt werden können [Pap91].

Die bekannten Regelungsverfahren für hybride Systeme benötigen einen messbaren Zustandsvektor. Ist eine direkte Messung der Zustandsgrößen nicht möglich, dann kann versucht werden, mit einem Zustandsbeobachter die fehlenden Zustandsinformationen zu rekonstruieren. Im Folgenden wird kurz auf die Zustandsbeobachtung hybrider Systeme eingegangen.

3.4 Zustandsbeobachtung hybrider Systeme

Es wird zwar in dieser Arbeit vorausgesetzt, dass alle Zustandsgrößen, die für die Prozessführung verwendet werden, messbar sind; für den Fall, dass dennoch ein Beobachter benötigt wird, wird im Folgenden kurz auf die aktuellen Methoden in der Literatur zur Beobachtbarkeitsanalyse und Beobachtersynthese für hybride Systeme eingegangen.

Die Zustandsbeobachtung hybrider Systeme wird in zahlreichen Publikationen behandelt [BFM00, DDGP03, DDP03, Cv04]. Im Gegensatz zu linearen Systemen existiert für hybride Systeme weder ein Verfahren, mit dem für alle Arten von hybriden Systemen die Beobachtbarkeit überprüft werden kann, noch der Entwurf eines stabilen hybriden Beobachters gewährleistet ist. Dies ist hauptsächlich auf die Vielfalt der verwendeten Modellformen und die Tatsache zurückzuführen, dass Modelle für hybride Systeme mit wachsender Anzahl von Gebieten und wachsender Systemordnung extrem komplexe Formen annehmen.

Für die Untersuchung der Beobachtbarkeit wird in [BFM00] die sogenannte *inkrementelle Beobachtbarkeit* definiert. Erfüllt ein System für einen beliebigen Zeitpunkt die Eigenschaft, dann erfüllt das System diese Eigenschaft auch zu jedem späteren Zeitpunkt. Das Verfahren selbst nutzt die MLD-Systembeschreibung und basiert auf einem Testverfahren, das mit Hilfe eines gemischt ganzzahligen linearen Programms (*mixed-integer linear program* (MILP)) ausgewertet werden kann. In [BFM00] wird darüber hinaus gezeigt, dass, wenn die Teilsysteme eines stückweise affinen Systems beobachtbar sind, dies nicht für das hybride Gesamtsystem erfüllt sein muss, ebenso der umgekehrte Fall, in dem die Teilsysteme nicht beobachtbar sind, aber das hybride Gesamtsystem.

In [DDGP03] wird ein Überblick über hybride Beobachter gegeben. In diesem Überblick wird der Ansatz zur Ermittlung der Beobachtbarkeit bzw. des Beobachterentwurfs auf der Basis von geschalteten linearen Systemen [DDP03] näher erläutert.

Aufgrund der hohen Komplexität in hybriden Systemen wird man in der Praxis meist sehr einfache Systeme mit kleiner Systemordnung und wenigen Gebieten im Zustandsraum betrachten. Es ist dann sinnvoll, wie beim klassischen Luenberger-Beobachter [Fö94, Lun04] vorzugehen und die Stabilität des Beobachtungsfehlers zum Beispiel mit nichtlinearen Methoden nachzuweisen. Ein Beispiel für den Entwurf eines schaltenden Beobachters ist in [Lun00] dargestellt.

3.5 Vergleich der Ziele eines hybriden mit denen der klassischen Regelungsverfahren

Stellvertretend für die vorgestellten hybriden Regelungsverfahren soll im Weiteren nur das hybride Regelungsverfahren der Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex aus Abschnitt 3.3.4 den klassischen Regelungsverfahren gegenübergestellt werden.

Die klassische Regelung hat die folgenden wesentlichen Ziele:

- Ausregelung von Störungen
- Gutes Führungsverhalten

Beide Ziele sind dabei auch für die hybriden Regelungsverfahren interessant, die ebenfalls auftretende Störungen ausregeln können sollen. Zusätzlich sollen sie ein gutes Führungsverhalten aufweisen. Betrachtet man das Regelgesetz eines klassischen Zustandsreglers nach Gleichung (3.1), bei dem

$$\underline{u} = -\underline{R}_z \underline{x} + \underline{V}_z \underline{w} \quad (3.14)$$

gilt, so reagiert das System zu jedem beliebigen Zeitpunkt auf die Führungsgröße \underline{w} . Vergleicht man hierzu das affine Regelgesetz aus Gleichung (3.3), für das

$$\underline{u} = -\underline{R} \underline{x} + \underline{\varphi}_u \quad (3.15)$$

gilt, so erkennt man, dass die Führungsgröße \underline{w} nicht in das affine Regelgesetz eingeht. Sind die Parameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ festgelegt, dann verhält sich das geregelte System autonom.

Ziel des hybriden Regelungsverfahrens ist

- A) das aktuelle Gebiet im Zustandsraum über eine ausgewählte Begrenzungsseite zu verlassen, oder
- B) im aktuellen Gebiet des Zustandsraums zu verweilen.

Für die Dynamik des geregelten Systems gibt es dabei zwei Möglichkeiten. Entweder prägt die Rückführmatrix dem geregelten System ein

- stabiles oder
- instabiles Verhalten auf.

Wird ein stabiles Verhalten aufgeprägt, dann befindet sich die zugehörige Ruhelage des geregelten Systems beim hybriden Regelungsziel A) immer außerhalb des aktuellen Gebiets selbst, nur dann kann das aktuelle Gebiet verlassen werden.

Für das hybride Regelungsziel B) ist gefordert, dass die Ruhelage im aktuellen Gebiet selbst liegt, da die Trajektorien dieser immer zustreben werden.

Wird hingegen ein instabiles Verhalten aufgeprägt, dann führt jede Trajektorie von der Ruhelage weg. In diesem Fall kann über die Lage der Ruhelage keine Aussage gemacht werden. Sie kann im Gebiet selbst, aber auch genauso gut außerhalb des Gebiets liegen. Die instabile Dynamik des Systems muss dabei so gewählt werden, dass die ausgewählte Begrenzungsseite des Gebiets erreicht wird und damit das Ziel A) erreicht wird. Für ein instabiles Verhalten kann in einfachen Fällen sogar die unveränderte unregelmäßige Systemdynamik verwendet werden, sofern das Ziel der Regelung damit erreichbar ist.

Das hybride Regelungsverfahren kann also im Vergleich zur klassischen Regelung nur bei stabiler Dynamik bezogen auf die zu erreichende Ruhelage auf Störungen reagieren. Solange der Zustand in einem bestimmten Gebiet verweilt, wird die hybride Regelung versuchen, die Zustandstrajektorie so zu beeinflussen, dass die Trajektorie das Gebiet wie gewünscht verlässt. Nachdem das Gebiet im Zustandsraum verlassen wurde, wird ein anderes affines Regelgesetz ausgewertet, das wieder das Ziel hat, die Trajektorie aus dem neuen Gebiet über eine ausgewählte Seitenfläche zu führen. Die übergeordnete Koordination wird dabei durch die hybride Prozessführungsstrategie bewerkstelligt.

Erst wenn die Führungsgröße, die das System einnehmen soll, im selben Gebiet liegt, wird das System versuchen die Führungsgröße, die dann üblicherweise eine Ruhelage darstellt, zu stabilisieren. Für diesen Fall sind die klassische Regelung und das hybride Regelungsverfahren vergleichbar.

Während dem sequentiellen Umschalten des affinen Regelgesetzes beim Überqueren der Gebiete wird durch die Prozessführungsstrategie ein gänzlich anderes Ziel verfolgt. Dieses sequentielle Führen der Zustandstrajektorie über eine ausgewählte

Gebietsfolge kann so zum Beispiel dazu genutzt werden, die Trajektorie in einem definierten Bereich im Zustandsraum vorzugeben. Damit kann zum Beispiel verhindert werden, dass die Zustandstrajektorie in Bereiche des Zustandsraumes vordringt, die für den realen Prozess kritisch beziehungsweise verboten sind.

Im Kern entspricht die Vorgabe von Gebietssequenzen, wie die Trajektorie die Gebiete im Zustandsraum durchlaufen soll, einer Trajektoriefolgeregulation, bei der aber nicht die Solltrajektorie selbst, sondern nur ein gültiger Bereich um diese vorgegeben wird.

3.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein Überblick über die klassischen Regelungsverfahren gegeben. Der Entwurf eines dynamischen Reglers mit Ausgangsrückführung und der Entwurf eines Zustandsreglers wurden kurz erläutert.

Die Dynamische Programmierung stellt dabei einen Sonderfall eines Zustandsreglers dar, und führt im Allgemeinen auf einen zeitdiskreten nichtlinearen Regler. Dieser Regler kann, ähnlich wie die meisten hybriden Regelungsverfahren Stellgrößen- und Zustandsraumbeschränkungen berücksichtigen.

Danach wurden bekannte Verfahren zum Reglerentwurf für hybride Systeme vorgestellt. Das erste Verfahren nutzt einen modellprädiktiven Ansatz auf Basis der zeitdiskreten MLD-Beschreibung, um in jedem Abtastintervall eine affine Steuerung zu berechnen. Dabei wird nur die Steuergröße für den ersten Abtastschritt auf das hybride System aufgeschaltet und dann der Berechnungsvorgang mit aktuellen Messgrößen von Neuem gestartet.

Das zweite Verfahren basiert auf multiparametrischer Programmierung unter der Verwendung von zeitdiskreten stückweise affinen Systemmodellen und liefert ein stückweise affines Regelgesetz. Die durch die Modellierung gegebenen Gebiete werden bei diesem Ansatz in eine Vielzahl von kleineren Gebieten unterteilt; auf jedem dieser Gebiete gilt dabei ein anderes Regelgesetz.

Die dritte, vierte und fünfte Verfahren nutzen zeitkontinuierliche stückweise affine Systemmodelle. Das dritte Verfahren legt die Stellgröße in den Ecken eines Simplex fest, wodurch die Reglerparameter durch eine einfache Matrixinversion erhalten werden. Das vierte Verfahren passt die Linkseigenvektoren des geregelten Systems an und nutzt dabei systeminhärente Grenzen. Das fünfte und letzte vorgestellte Verfahren führt die Trajektorie in einem Sektor, dabei wird das affine Regelgesetz durch eine lineare Optimierung gefunden.

Alle Verfahren nutzen zum Reglerentwurf die als bekannt vorausgesetzten Zustandsgrößen. Die Zustandsbeobachtung hybrider Systeme wurde nur kurz angesprochen.

Abschließend wurden die Ziele der hybriden und der klassischen Regelungsverfahren am Beispiel des Verfahrens zur Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex miteinander verglichen. Es zeigte sich, dass sich die Ziele grundlegend voneinander unterscheiden können. Die hybride Prozessführung zeichnet sich dabei durch eine große Vielfalt an Möglichkeiten aus.

Im nächsten Kapitel soll nun auf die globalen Prozessführungsstrategien für hybride Systeme eingegangen werden.

Kapitel 4

Globale Prozessführungsstrategie für hybride Systeme

In diesem Kapitel wird die globale Prozessführungsstrategie vorgestellt. Die globale Prozessführungsstrategie hat eine übergeordnete Funktion.

Das Ziel der globalen Prozessführungsstrategie ist es, den Anfangszustand der Zustandstrajektorie in den gewünschten Endzustand, der eine Ruhelage des Systems darstellt, zu überführen. Dabei liegen Anfangs- und der Endzustand der Zustandstrajektorie nicht im gleichen Gebiet im Zustandsraum, das heißt zwischen diesen beiden Gebieten liegt noch eine endliche Anzahl anderer Gebiete.

In dem Gebiet, in dem der Endzustand liegt, soll dann die Zustandstrajektorie stabilisiert werden. Dieses Gebiet wird im Weiteren *Endgebiet* genannt. Dies bedeutet, dass der Zustand, um dieses Endgebiet überhaupt erreichen zu können, über mehrere Gebiete geführt werden muss.

Die Aufgabe der globalen Prozessführungsstrategie ist es, eine geeignete Sequenz von Gebieten vorzugeben, auf der die Zustandstrajektorie so in das Endgebiet überführt wird, dass ein zugehöriges Gütemaß, zum Beispiel die benötigte Zeit oder auch die quadratische Summe der erforderlichen Stelleingriffe, minimiert wird. Dies wird dadurch möglich, dass jedem möglichen Gebietswechsel ein Wert für die Kosten zugeordnet wird. Im Endgebiet muss dann ein lokaler Regler ausgewählt werden, der das Erreichen des Endzustands ermöglicht.

Für die erste Aufgabe, die globale Prozessführungsstrategie, wird angenommen, dass ein geeigneter Regler für das Endgebiet existiert, oder dass das Ziel darin besteht, nur dieses Gebiet zu erreichen. In der Tat ist die Existenz eines Reglers im Endgebiet nicht immer gesichert. Im Abschnitt 4.3.3 werden deshalb geeignete Heuristiken angegeben, um dem gewünschten Endzustand, auch ohne geeigneten Regler im Endgebiet, so nahe wie möglich zu kommen.

Die globale Prozessführungsstrategie benötigt ein Modell in Form einer Graphenstruktur. Im nächsten Abschnitt wird auf die Erstellung des Modells eingegangen, da dieses Modell als Grundlage für die Anwendung der Prozessführungsstrategie dient.

4.1 Erstellung eines Modells für die globale Prozessführungsstrategie

Die benötigten Schritte für die Ermittlung des Modells in Form einer Graphenstruktur werden im Folgenden durch ein Ablaufdiagramm veranschaulicht.

In Abbildung 4.1 sind die Schritte dargestellt, die zum Modell für die globale Prozessführungsstrategie führen. Ausgehend von einer Aufteilung des Zustandsraums in Gebiete, werden die Knoten des Graphen bestimmt. Wenn eine Übertrittsregelung existiert, um die Trajektorie aus einem Gebiet unter der dort gültigen Systemdynamik in das benachbarte Gebiet zu überführen, dann werden die Knoten mit einer gerichteten und bewerteten Kante verbunden.

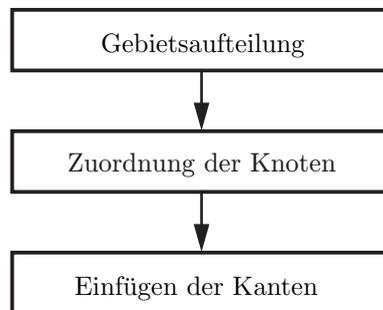


Abbildung 4.1: Ablaufdiagramm zur Erstellung des Modells für die globale Prozessführungsstrategie in Form eines Graphen

Auf die einzelnen Schritte wird nun genau eingegangen. Jeder Schritt wird dabei mit einem kurzen Beispiel erläutert.

4.1.1 Gebietsaufteilung

Die Grundaufteilung des Zustandsraumes ist in den häufigsten Fällen, wie zum Beispiel bei der physikalischen Modellierung in Abschnitt 2.1.1 oder der vereinfachten Modellierung in Abschnitt 2.1.2, fest vorgegeben.

Eine zusätzliche feinere Unterteilung der Gebiete wird für die praktische Realisierung der Prozessführungsstrategie häufig benötigt¹. Dies kann zum einen den Grund haben, dass es gewünscht wird, kleinere Polytope zu verwenden oder es kann einfach das Problem vorliegen, dass die Grundaufteilung des Zustandsraumes durch die Modellierung nicht konvexe Gebiete liefert, die dann durch eine zusätzliche Aufteilung in Polytope zerlegt werden müssen.

Die Gebiete werden im Folgenden mit Buchstaben aus der Menge $\mathcal{G} = \{A, B, C, \dots\}$ dargestellt. Die Anzahl aller Gebiete wird mit $n_{\mathcal{G}} = |\mathcal{G}|$ bezeichnet.

Auf jedem Gebiet ist durch die Gebietsaufteilung schon mindestens eine Dynamik vorgesehen, die sich von der Dynamik der anderen Gebiete unterscheidet. Durch diskrete Stellgrößen $\underline{u}_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{p_{\mathcal{D}}}$ ist es nun zusätzlich möglich, jedem Gebiet mehrere unterschiedliche Dynamiken zuzuordnen. Häufig stellen die einzelnen Elemente des diskreten Stellgrößenvektors $\underline{u}_{\mathcal{D}} = [u_{\mathcal{D}_1}, \dots, u_{\mathcal{D}_{p_{\mathcal{D}}}}]^T$ binäre Variablen dar, so dass sich die maximale Anzahl der möglichen Dynamiken berechnen lässt zu $n_{\mathcal{D}} = 2^{p_{\mathcal{D}}} = |\mathcal{D}|$.

Unter der Annahme, dass auf allen Gebieten alle Dynamiken möglich sind, ergibt sich $\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, n_{\mathcal{D}}\}$. Die Dynamiken auf einem Gebiet sind dann in Bezug auf mögliche Kombinationen der diskreten Eingangsgrößen durchnummeriert.

Man kann aber jedes Element der diskreten Stellgröße $\underline{u}_{\mathcal{D}}$ auch aus dem Bereich der natürlichen Zahlen \mathbb{N} wählen, wobei die Menge nach oben abgeschlossen ist. Es kann so zum Beispiel bei einem Vektor für die diskreten Stellgrößen mit zwei Elementen das erste Element $u_{\mathcal{D}_1} \in \sqcap_{\mathcal{D}_1} = \{0, 1, 2\}$ und das zweite Element $u_{\mathcal{D}_2} \in \sqcap_{\mathcal{D}_2} = \{0, 1, 2, 3\}$ gewählt werden. Die Anzahl aller Möglichkeiten berechnet sich dann allgemein zu $n_{\mathcal{D}} = |\sqcap_{\mathcal{D}_1}| \cdot \dots \cdot |\sqcap_{\mathcal{D}_{p_{\mathcal{D}}}}|$.

Einem Gebiet wird eine bestimmte Untermenge $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$, $i = 1, \dots, n_{\mathcal{G}}$ aller möglichen Dynamiken zugeordnet, wobei sinnvollerweise jedem Gebiet i mindestens eine Dynamik $|\mathcal{D}_i| \geq 1$ zugeordnet werden sollte. Die Dynamiken, für die ein Gebietsübertritt gelingt, stellen eine Untermenge $\mathcal{D}_i^* \subseteq \mathcal{D}_i$ der auf einem Gebiet möglichen Dynamiken dar und können deshalb auch eine leere Menge sein.

Zusätzlich zu der Möglichkeit, einem Gebiet über die diskrete Stellgröße [Nen01] unterschiedliche Dynamiken zuzuordnen, kann durch Auslösen unterschiedlicher Triggermengen [Nen01, Sch04b] eine unterschiedliche Zuordnung von Dynamiken auf einem ausgewählten Gebiet erfolgen. Ein Beispiel hierfür ist das geregelte Ein-Tank-System aus [Sch04b], bei dem bei Überschreiten der maximalen Füllhöhe automatisch ein Ventil im Boden des Tanks geöffnet wird. Bei Unterschreiten der minimalen Füllhöhe wird dieses Ventil wieder geschlossen. Üblicherweise wird eine Regelung dieser Art als Zwei-Punkt-Regler bezeichnet. Das Ventil kann dabei entweder ganz

¹Die Regelung des Antriebsstrangs in Abschnitt 6.2 stellt hierfür ein Beispiel dar.

geöffnet oder ganz geschlossen sein. Das geregelte System verhält sich also auf demselben Gebiet im Zustandsraum unterschiedlich, je nach dem, ob die Füllhöhe zuletzt die obere oder die untere Schranke erreicht hat.

Auch im Fall des soeben beschriebenen geregelten Ein-Tank-Systems mithilfe eines Zwei-Punkt-Reglers kann die Ansteuerung des diskreten Ventils als eine diskrete Eingangsgröße betrachtet werden. Unterschiedliche Dynamiken auf dem gleichen Bereich im Zustandsraum sind deshalb in der Regel auf veränderte Werte von diskreten Eingangsgrößen \underline{u}_D zurückzuführen.

An einem theoretischen Beispiel sollen nun die Mengen \mathcal{G} , \mathcal{D} , \mathcal{D}_i und \mathcal{D}_i^* konkretisiert werden.

Beispiel 4.1 (Gebietsaufteilung):

In Abbildung 4.2 ist ein Bereich des Zustandsraums in die vier Gebiete A, B, C und D eingeteilt.

Die Menge der Gebiete ergibt sich so zu $\mathcal{G} = \{A, B, C, D\}$ mit $n_{\mathcal{G}} = |\mathcal{G}| = 4$. Insgesamt sollen $n_{\mathcal{D}} = 3$ unterschiedliche Dynamiken existieren. Die Menge der möglichen Dynamiken in den Gebieten A-D lässt sich darstellen, indem man die Gebietsbezeichnung in den Index der Mengen \mathcal{D}_i , $i \in \{A, B, C, D\}$ schreibt. In Tabelle 4.1 sind diese Mengen dargestellt.

Die realisierbaren Gebietsübertritte sind durch die Mengen mit (*) gegeben und sind in Abbildung 4.2 durch Pfeile dargestellt, die mit der Nummer der Dynamik in dem Gebiet markiert sind, aus dem der Pfeil herausführt. Für das Gebiet A bedeutet dies zwar, dass die Dynamiken '1' und '3' definiert sind, ein Gebietsübertritt in das benachbarte Gebiet B aber nur unter der Dynamik '1' gelingt. Das Gebiet D ist vom Gebiet A aus nicht erreichbar.

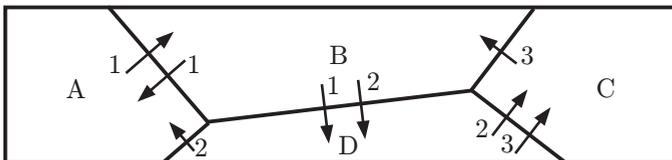


Abbildung 4.2: Gebiete im Zustandsraum

4.1.2 Graph für die globale Prozessführungsstrategie

Für die Erstellung des Graphen kann eine *gebietsorientierte* oder eine *dynamikorientierte* Darstellung gewählt werden. Diese Kennzeichnung charakterisiert die Art des Informationsgehaltes der zugeordneten Knoten im Graphen. Die Existenz von

Tabelle 4.1: Mengen möglicher Dynamiken in den Gebieten

Gebiet i	Menge der möglichen Dynamiken im Gebiet i	Menge der möglichen Dynamiken im Gebiet i , mit denen ein Gebietsübertritt möglich ist
A	$\mathcal{D}_A = \{1, 3\}$	$\mathcal{D}_A^* = \{1\}$
B	$\mathcal{D}_B = \{1, 2, 3\}$	$\mathcal{D}_B^* = \{1, 2\}$
C	$\mathcal{D}_C = \{3\}$	$\mathcal{D}_C^* = \{3\}$
D	$\mathcal{D}_D = \{2, 3\}$	$\mathcal{D}_D^* = \{2, 3\}$

Kanten wird für die folgenden Betrachtungen genau dann vorausgesetzt, wenn ein Übertritt der Trajektorie zwischen benachbarten Gebieten möglich ist. Dies ist immer dann möglich, wenn ein Regelgesetz der Art gefunden werden kann, dass jede mögliche Trajektorie, die im Gebiet startet, in das benachbarte Gebiet überführt werden kann. In Abbildung 4.2 ist es so zum Beispiel möglich, einen Übertritt vom Gebiet A ins Gebiet B unter der Dynamik 1 im Gebiet A zu bewerkstelligen.

Mit der lokalen Regelung aus Kapitel 5 wird bestimmt, mit welchen Kosten ein Übertritt ins Nachbarpolytop möglich ist. Ist kein Übertritt möglich, dann sind die Kosten für diesen Übertritt unendlich groß.

Gebietsorientierter Graph

Bei der gebietsorientierten Darstellung des Graphen wird jedem Gebiet ein Knoten im Graphen zugewiesen. Sind mehrere Übertritte zwischen benachbarten Gebieten möglich, so werden parallele und gleichgerichtete Kanten zwischen den zugehörigen Knoten im Graphen eingezeichnet. Die parallelen Kanten bilden so die Alternativen ab. Da es dennoch wichtig ist, dass man die Kanten unterscheiden kann, müssen die Kanten zusätzlich zum Gewicht eine Kennzeichnung erhalten.

In Abbildung 4.3 ist je ein Multigraph mit den zwei Knoten L und M dargestellt.

Die parallelen Kanten führen vom Knoten L zum Knoten M . In Abbildung 4.3(a) sind die Kanten mit den Tupeln (χ, K) bezeichnet. Dabei stellt χ die Kennzeichnung und K die zugehörigen Kosten dar. Im Beispiel ist der Weg $\chi = 2$ mit den Kosten $K = 1,8$ günstiger als der Weg $\chi = 1$ mit den Kosten $K = 2,1$.

Durch eine geeignete Indizierung der Kosten kann die umständliche Schreibweise mit Tupeln umgangen werden. Die Abbildung 4.3(b) zeigt den Graphen aus Abbildung 4.3(a) mit den Variablen J , deren Wert direkt den Kosten K entspricht. Die Kennzeichnung kann eindeutig im Index der Variablen J abgelegt werden. Die

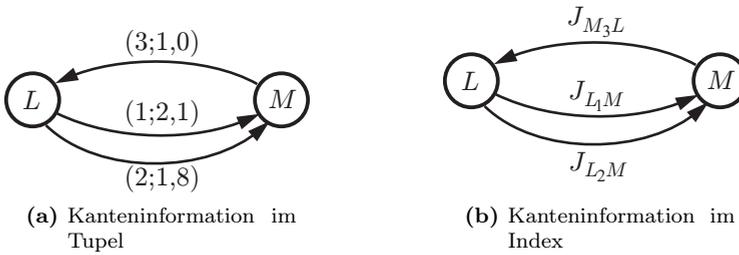


Abbildung 4.3: Kennzeichnung der Kanten eines Multigraphen

parallelen Kanten vom Knoten L zum Knoten M werden mit J_{L_xM} gekennzeichnet. Im konkreten Fall gilt $J_{L_1M} = 2,1$ und $J_{L_2M} = 1,8$.

Durch die zusätzliche Kennzeichnung der Kanten könnte man so von einem *gerichteten, gekennzeichneten und gewichteten Multigraphen* sprechen. In der Literatur wird alternativ die Kennzeichnung mit farbigen Kanten vorgeschlagen [JT95].

Beispiel 4.2 (Gebietsorientierter Graph):

In Abbildung 4.4 wird der gebietsorientierte Graph für die Gebietsaufteilung aus Abbildung 4.2 angegeben. In Tabelle 4.2 sind die für dieses Beispiel gewählten Gewichte der einzelnen Kanten zusammengestellt. In Tabelle 4.3 sind alle möglichen Wege des Graphen aus Abbildung 4.4 von jedem Knoten zu jedem Knoten zusammengestellt.

Die Gesamtkosten können mit den Kosten der einzelnen Übergänge aus Tabelle 4.2 berechnet werden. Die kürzesten Wege zwischen zwei Knoten, d.h. die Wege mit den geringsten Kosten, sind in Tabelle 4.3 fett hervorgehoben.

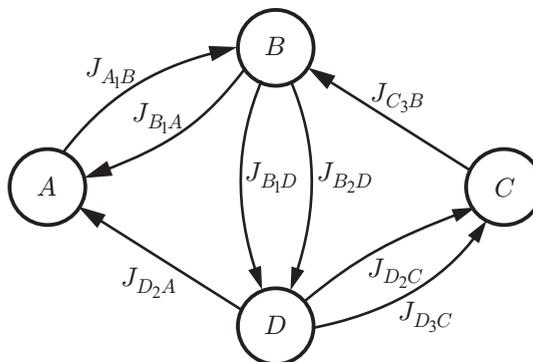


Abbildung 4.4: Gebietsorientierter Graph mit Gewichten

Tabelle 4.2: Gewichte und Kennzeichnungen der Kanten

Kennzeichnung	J_{A_1B}	J_{B_1A}	J_{B_1D}	J_{B_2D}	J_{C_3B}	J_{D_2A}	J_{D_2C}	J_{D_3C}
Startknoten i	A	B	B	B	C	D	D	D
Zielknoten j	B	A	D	D	B	A	C	C
Dynamik in i	1	1	1	2	3	2	2	3
Gewicht	1,2	2,3	1,0	1,5	2,1	3,1	0,8	0,9

Dynamikorientierter Graph

Bei der dynamikorientierten Darstellung des Graphen wird jeder einzelnen Dynamik ein Knoten im Graphen zugewiesen. Da für ein Gebiet i genau $n_{\mathcal{D}_i} = |\mathcal{D}_i|$ Dynamiken definiert sind, werden für jedes Gebiet $n_{\mathcal{D}_i}$ -Knoten verwendet. Die Bezeichnung der Knoten setzt sich aus der Gebietsbezeichnung und der Dynamikbezeichnung zusammen. Für den Knoten, der Gebiet C zugeordnet ist und für den die Dynamik '3' gilt, wird die Knotenbezeichnung C_3 verwendet, indem so die Dynamikbezeichnung als Index der Knotenbezeichnung dient.

Diese etwas umständliche Vervielfachung von Knoten und Kanten hat den Hintergrund, dass in der lokalen Regelung in Kapitel 5 nur untersucht wird, ob die im aktuellen Gebiet startenden Trajektorien so geführt werden können, dass ausgewählte Nachbargebiete erreicht werden. Tritt die Trajektorie letztendlich in dieses Nachbargebiet ein, so ist zu diesem Zeitpunkt nicht bestimmt, welche Dynamik in diesem Nachbargebiet im Weiteren gilt, wenn mehrere Dynamiken zur Auswahl stehen. Es sind folglich alle Übertritte vom aktuellen Gebiet zu allen Dynamiken des betrachteten Nachbargebietes möglich. Dies gilt auch dann, wenn das Nachbargebiet das zu erreichende Endgebiet darstellt, weil von vorne herein nicht klar ist, für welche Dynamik im Endgebiet ein geeigneter Regler existiert.

Um die Zugehörigkeit der Knoten zu einem Gebiet zu veranschaulichen, sind die Knoten mit einer gestrichelten Linie zu einem Verbund zusammengefasst. Dieser Verbund wird mit der Gebietsbezeichnung beschriftet. Die Kanten werden mit den Gewichten beschriftet.

Die Untersuchung, ob eine lokale Regelung existiert, muss natürlich für alle Dynamiken in einem Gebiet durchgeführt werden. Dies bedeutet, dass alle Knoten des Verbundes auf denselben Übertritt hin untersucht werden müssen. Die Knoten eines Verbundes besitzen dabei untereinander keine Kanten, da der Wechsel von diskreten Eingangsgrößen nur zu dem Zeitpunkt erlaubt sein soll, wenn die Trajektorie die Gebietsgrenze schneidet².

²Ein Wechsel der diskreten Eingangsgrößen ist darüber hinaus nur einmal ganz zu Beginn und zum Ende der gesamten Prozessführungsstrategie möglich.

Tabelle 4.3: Gesamtkosten möglicher Wege im gebietsorientierten Graphen, der günstigste Weg ist **fett** gedruckt.

von \ nach	A	B
A	-	$J_{A_1B} = 1,2$
B	$J_{B_1A} = 2,3$ $J_{B_1D} + J_{D_2A} = 4,1$ $J_{B_2D} + J_{D_2A} = 4,6$	-
C	$J_{C_3B} + J_{B_1A} = 4,4$ $J_{C_3B} + J_{B_1D} + J_{D_2A} = 6,2$ $J_{C_3B} + J_{B_2D} + J_{D_2A} = 6,7$	$J_{C_3B} = 2,1$
D	$J_{D_2A} = 3,1$ $J_{D_2C} + J_{C_3B} + J_{B_1A} = 5,2$ $J_{D_3C} + J_{C_3B} + J_{B_1A} = 5,3$	$J_{D_2A} + J_{A_1B} = 4,3$ $J_{D_2C} + J_{C_3B} = 2,9$ $J_{D_3C} + J_{C_3B} = 3,0$
von \ nach	C	D
A	$J_{A_1B} + J_{B_1D} + J_{D_2C} = 3,0$ $J_{A_1B} + J_{B_2D} + J_{D_2C} = 3,5$ $J_{A_1B} + J_{B_1D} + J_{D_3C} = 3,1$ $J_{A_1B} + J_{B_2D} + J_{D_3C} = 3,6$	$J_{A_1B} + J_{B_1D} = 2,2$ $J_{A_1B} + J_{B_2D} = 2,7$
B	$J_{B_1D} + J_{D_2C} = 1,8$ $J_{B_2D} + J_{D_2C} = 2,3$ $J_{B_1D} + J_{D_3C} = 1,9$ $J_{B_2D} + J_{D_3C} = 2,4$	$J_{B_1D} = 1,0$ $J_{B_2D} = 1,5$
C	-	$J_{C_3B} + J_{B_1D} = 3,1$ $J_{C_3B} + J_{B_2D} = 3,6$
D	$J_{D_2C} = 0,8$ $J_{D_3C} = 0,9$	-

Die Zuordnung einer Bezeichnung zu jeder Kante, wie dies beim gebietsorientierten Graphen nötig war, ist nun nicht mehr notwendig, da es sich hier um einen einfachen gerichteten und gewichteten Graphen handelt. Das Gewicht heißt so allgemein $J_{i_\chi j_\xi}$, wobei der Index den Startknoten i mit der dort herrschenden Dynamik χ und den Zielknoten j mit der Dynamik ξ bezeichnet. Gilt $\chi = \xi$, dann wird die diskrete Stellgröße bei diesem Gebietsübertritt nicht verändert. Gilt hingegen $\chi \neq \xi$ dann muss sich die diskrete Eingangsgröße beim Gebietsübertritt verändern.

Die Kosten für die Veränderung der diskreten Stellgröße werden dann berücksichtigt, indem man die Kostenvariable $J_{\chi \rightarrow \xi}$ addiert. Durch eine starke Gewichtung der Veränderung der diskreten Stellgrößen kann das Schalten der diskreten Eingänge minimiert und so unnötiger Verschleiß der Stellglieder verhindert werden.

Beispiel 4.3 (Dynamikorientierter Graph):

In Abbildung 4.5 ist der dynamikorientierte Graph für das System mit der Gebietsaufteilung aus Abbildung 4.2 dargestellt. In diesem Beispiel werden Kosten für diskrete Stellgrößen noch nicht berücksichtigt. Für das Gebiet A werden die zwei Knoten A_1 und A_3 im Verbund A angegeben. Für das Gebiet B werden die drei Knoten B_1 , B_2 und B_3 im Graphen eingezeichnet und im Verbund B zusammengefasst. Für das Gebiet C gibt es nur den Knoten C_3 , der im Verbund C liegt. Die Knoten D_1 und D_2 liegen im Verbund D und sind so Gebiet D zugeordnet.

Es soll in diesem Beispiel angenommen werden, dass die Veränderung der diskreten Stellgrößen keine Kosten verursacht. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
 J_{A_1 B_1} = J_{A_1 B_2} = J_{A_1 B_3} = \mathbf{J_{A_1 B}} \quad , \quad & J_{B_1 A_1} = J_{B_1 A_3} = \mathbf{J_{B_1 A}} \quad , \\
 J_{B_1 D_2} = J_{B_1 D_3} = \mathbf{J_{B_1 D}} \quad , \quad & J_{B_2 D_2} = J_{B_2 D_3} = \mathbf{J_{B_2 D}} \quad , \\
 J_{C_3 B_1} = J_{C_3 B_2} = J_{C_3 B_3} = \mathbf{J_{C_3 B}} \quad , \quad & J_{D_2 A_1} = J_{D_2 A_3} = \mathbf{J_{D_2 A}} \quad , \\
 J_{D_2 C_3} = \mathbf{J_{D_2 C}} \quad \text{und} \quad & J_{D_3 C_3} = \mathbf{J_{D_3 C}} \quad .
 \end{aligned}$$

Die **fett** gedruckten rechten Seiten der hier aufgeführten Gleichungen und Gleichungsketten stellen die Kennzeichnungen aus Tabelle 4.2 dar, in der auch die zugehörigen Kosten angegeben sind. Die Kosten und damit auch die günstigsten Wege für das Erreichen eines anderen Gebietes sind identisch mit denen in Tabelle 4.3 aus Beispiel 4.2.

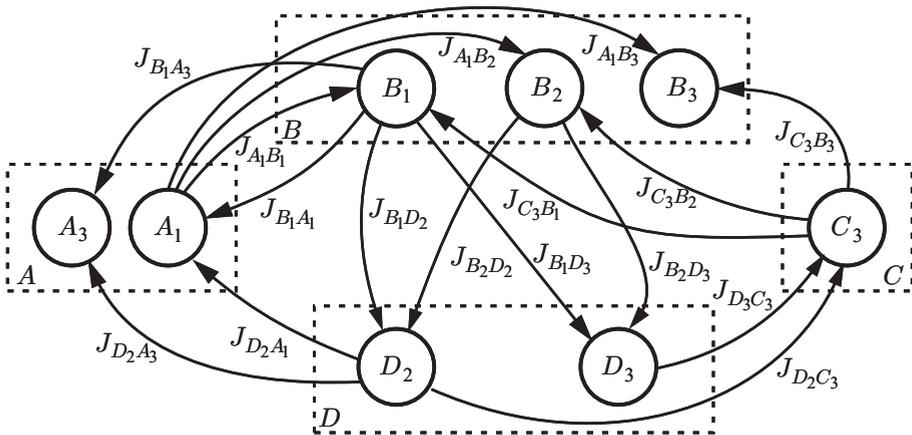


Abbildung 4.5: Dynamikorientierter Graph mit Gewichten

Im folgenden Beispiel soll die Veränderung der diskreten Eingangsgröße mit berücksichtigt werden. Die Kosten an den Kanten $J_{i_x j_\xi} = \bar{J}_{i_x j_\xi} + \bar{J}_{x \rightarrow \xi}$ bezeichnen nun die Kosten für den Gebietsübertritt $\bar{J}_{i_x j_\xi}$ addiert mit den Kosten für die Veränderung der diskreten Eingangsgröße $\bar{J}_{x \rightarrow \xi}$.

Beispiel 4.4 (Kosten für die Veränderung der diskreten Stellgrößen):

Betrachtet wird das Beispiel aus Beispiel 4.3, allerdings werden jetzt die Veränderungen der diskreten Stellgrößen zusätzlich bestraft. Gilt $\chi = \xi$ wird der Übergang nicht bestraft, für $\chi \neq \xi$ gilt $\bar{J}_{\chi \rightarrow \xi} = 1$. Für die Kosten der Gebietsübertritte gilt dann analog zum Beispiel 4.3

$$\begin{aligned} \bar{J}_{A_1 B_1} = \bar{J}_{A_1 B_2} = \bar{J}_{A_1 B_3} = \mathbf{J}_{A_1 B} & \quad , & \bar{J}_{B_1 A_1} = \bar{J}_{B_1 A_3} = \mathbf{J}_{B_1 A} & \quad , \\ \bar{J}_{B_1 D_2} = \bar{J}_{B_1 D_3} = \mathbf{J}_{B_1 D} & \quad , & \bar{J}_{B_2 D_2} = \bar{J}_{B_2 D_3} = \mathbf{J}_{B_2 D} & \quad , \\ \bar{J}_{C_3 B_1} = \bar{J}_{C_3 B_2} = \bar{J}_{C_3 B_3} = \mathbf{J}_{C_3 B} & \quad , & \bar{J}_{D_2 A_1} = \bar{J}_{D_2 A_3} = \mathbf{J}_{D_2 A} & \quad , \\ \bar{J}_{D_2 C_3} = \mathbf{J}_{D_2 C} & \quad \text{und} & \bar{J}_{D_3 C_3} = \mathbf{J}_{D_3 C} & \quad . \end{aligned}$$

In Tabelle 4.4 sind alle möglichen Wege des Graphen aus Abbildung 4.5 von jedem Knoten zu jedem Knoten zusammengestellt. Die Gesamtkosten können mit den Kosten der einzelnen Übergänge aus Tabelle 4.2 und den Kosten für die Änderung der diskreten Eingangsgrößen berechnet werden. Die Gesamtkosten sind in Tabelle 4.4 mit $\bar{J}_{i_\chi \rightarrow j_\xi}^{[\psi]}$ bezeichnet. Sie stellen die Wege vom Gebiet i mit der Dynamik χ zum Gebiet j mit der Dynamik ξ dar. Da es häufig mehrere Wege mit identischen Gebieten und Dynamiken im Start- und Endgebiet gibt, werden die unterschiedlichen Wege mit der Bezeichnung ψ unterschieden. Die kürzesten Wege zwischen zwei Knoten sind fett hervorgehoben. Wege, die Schleifen bezogen auf Verbünde darstellen, werden vernachlässigt.

Die Berücksichtigung der Änderung der diskreten Stellgrößen im Kantengewicht verändert die Kosten für die Wege. Betrachtet man so zum Beispiel den Weg von Knoten D nach Knoten C in Tabelle 4.4, so stellt $\bar{J}_{D_2 C_3}$ dieselben Kosten dar wie $J_{D_2 C}$ in Tabelle 4.3. Die Änderung der diskreten Stellgröße wird durch die Addition der Kosten $\bar{J}_{2 \rightarrow 3}$ berücksichtigt.

Die Gesamtkosten können sich dadurch so verändern, dass zwischen zwei Knoten ein neuer kürzester Weg, also der mit den geringsten Kosten, entsteht. Dies geschieht in Tabelle 4.4 im Vergleich zu Tabelle 4.2 in fünf Fällen, die in Tabelle 4.5 zusammengestellt sind. Die Änderungen in den Gebietssequenzen, die den kürzesten Weg durch die Gewichtung der Änderung der diskreten Eingangsgröße ergeben, sind in Tabelle 4.5 fett hervorgehoben.

Tabelle 4.4: Gesamtkosten möglicher Wege im dynamikorientierten Graphen mit Bewertung der Änderung der diskreten Eingangsgrößen, der günstigste Weg ist **fett** gedruckt

von \ nach	A	B
A	-	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow B_1}^{[1]} = \bar{J}_{A_1 B_1} = \mathbf{1,2}$ $\bar{J}_{A_1 \rightarrow B_2}^{[1]} = \bar{J}_{A_1 B_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} = 2,2$ $\bar{J}_{A_1 \rightarrow B_3}^{[1]} = \bar{J}_{A_1 B_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 2,2$
B	$\bar{J}_{B_1 \rightarrow A_1}^{[1]} = \bar{J}_{B_1 A_1} = \mathbf{2,3}$ $\bar{J}_{B_1 \rightarrow A_3}^{[1]} = \bar{J}_{B_1 A_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 3,3$ $\bar{J}_{B_1 \rightarrow A_1}^{[2]} = \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} = 6,1$ $\bar{J}_{B_1 \rightarrow A_3}^{[2]} = \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{D_2 A_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 6,1$ $\bar{J}_{B_2 \rightarrow A_1}^{[1]} = \bar{J}_{B_2 D_2} + \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} = 5,6$ $\bar{J}_{B_2 \rightarrow A_3}^{[1]} = \bar{J}_{B_2 D_2} + \bar{J}_{D_2 A_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 5,6$	-
C	$\bar{J}_{C_3 \rightarrow A_1}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 A_1} = \mathbf{5,4}$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow A_3}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 A_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 6,4$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow A_1}^{[2]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} = 9,2$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow A_3}^{[2]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{D_2 A_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 9,2$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow A_1}^{[3]} = \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_2} + \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} = 8,7$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow A_3}^{[3]} = \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_2} + \bar{J}_{D_2 A_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 8,7$	$\bar{J}_{C_3 \rightarrow B_1}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} = 3,1$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow B_2}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} = 3,1$ $\bar{J}_{C_3 \rightarrow B_3}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_3} = \mathbf{2,1}$
D	$\bar{J}_{D_2 \rightarrow A_1}^{[1]} = \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} = \mathbf{4,1}$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow A_3}^{[1]} = \bar{J}_{D_2 A_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = \mathbf{4,1}$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow A_1}^{[2]} = \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 A_1} = 7,2$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow A_3}^{[2]} = \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 A_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 8,2$ $\bar{J}_{D_3 \rightarrow A_1}^{[1]} = \bar{J}_{D_3 C_3} + \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 A_1} = 6,3$ $\bar{J}_{D_3 \rightarrow A_3}^{[1]} = \bar{J}_{D_3 C_3} + \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 A_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 7,3$	$\bar{J}_{D_2 \rightarrow B_1}^{[1]} = \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} + \bar{J}_{A_1 B_1} = 5,3$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow B_2}^{[1]} = \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} + \bar{J}_{A_1 B_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} = 6,3$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow B_3}^{[1]} = \bar{J}_{D_2 A_1} + \bar{J}_{2 \rightarrow 1} + \bar{J}_{A_1 B_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 6,3$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow B_1}^{[2]} = \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} = 4,9$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow B_2}^{[2]} = \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} = 4,9$ $\bar{J}_{D_2 \rightarrow B_3}^{[2]} = \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{C_3 B_3} = 3,9$ $\bar{J}_{D_3 \rightarrow B_1}^{[1]} = \bar{J}_{D_3 C_3} + \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} = 4,0$ $\bar{J}_{D_3 \rightarrow B_2}^{[1]} = \bar{J}_{D_3 C_3} + \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} = 4,0$ $\bar{J}_{D_3 \rightarrow B_3}^{[1]} = \bar{J}_{D_3 C_3} + \bar{J}_{C_3 B_3} = \mathbf{3,0}$

Tabelle 4.4: Gesamtkosten möglicher Wege im dynamikorientierten Graphen mit Bewertung der Änderung der diskreten Eingangsgrößen, der günstigste Weg ist **fett gedruckt** (Fortsetzung)

von \ nach	C	D
A	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow C_3}^{[1]} = \bar{J}_{A_1 B_1} + \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 5,0$	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow D_2}^{[1]} = \bar{J}_{A_1 B_1} + \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} = \mathbf{3,2}$
	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow C_3}^{[2]} = \bar{J}_{A_1 B_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_2} + \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 5,5$	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow D_3}^{[1]} = \bar{J}_{A_1 B_1} + \bar{J}_{B_1 D_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = \mathbf{3,2}$
	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow C_3}^{[3]} = \bar{J}_{A_1 B_1} + \bar{J}_{B_1 D_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} + \bar{J}_{D_3 C_3} = 4,1$	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow D_2}^{[2]} = \bar{J}_{A_1 B_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_2} = 3,7$
	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow C_3}^{[4]} = \bar{J}_{A_1 B_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{D_3 C_3} = 5,6$	$\bar{J}_{A_1 \rightarrow D_3}^{[2]} = \bar{J}_{A_1 B_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 4,7$
B	$\bar{J}_{B_1 \rightarrow C_3}^{[1]} = \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} + \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 3,8$	$\bar{J}_{B_1 \rightarrow D_2}^{[1]} = \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} = 2,0$
	$\bar{J}_{B_2 \rightarrow C_3}^{[1]} = \bar{J}_{B_2 D_2} + \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 3,3$	$\bar{J}_{B_1 \rightarrow D_3}^{[1]} = \bar{J}_{B_1 D_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 2,0$
	$\bar{J}_{B_1 \rightarrow C_3}^{[2]} = \bar{J}_{B_1 D_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} + \bar{J}_{D_3 C_3} = \mathbf{2,9}$	$\bar{J}_{B_2 \rightarrow D_2}^{[1]} = \bar{J}_{B_2 D_2} = \mathbf{1,5}$
	$\bar{J}_{B_2 \rightarrow C_3}^{[2]} = \bar{J}_{B_2 D_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} + \bar{J}_{D_3 C_3} = 3,4$	$\bar{J}_{B_2 \rightarrow D_3}^{[1]} = \bar{J}_{B_2 D_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 2,5$
C	-	$\bar{J}_{C_3 \rightarrow D_2}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 D_2} + \bar{J}_{1 \rightarrow 2} = 5,1$
		$\bar{J}_{C_3 \rightarrow D_3}^{[1]} = \bar{J}_{C_3 B_1} + \bar{J}_{3 \rightarrow 1} + \bar{J}_{B_1 D_3} + \bar{J}_{1 \rightarrow 3} = 5,1$
		$\bar{J}_{C_3 \rightarrow D_2}^{[2]} = \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_2} = \mathbf{4,6}$
		$\bar{J}_{C_3 \rightarrow D_3}^{[2]} = \bar{J}_{C_3 B_2} + \bar{J}_{3 \rightarrow 2} + \bar{J}_{B_2 D_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 5,6$
D	$\bar{J}_{D_2 \rightarrow C_3}^{[1]} = \bar{J}_{D_2 C_3} + \bar{J}_{2 \rightarrow 3} = 1,8$	-
	$\bar{J}_{D_3 \rightarrow C_3}^{[1]} = \bar{J}_{D_3 C_3} = \mathbf{0,9}$	

Tabelle 4.5: Vergleich der kürzesten Wege mit und ohne Gewichtung der Änderung der diskreten Eingänge, Veränderungen in den Gebietssequenzen sind **fett** hervorgehoben

von\nach Knoten bzw. Verbund	kürzester Weg ohne Gewichtung der Änderung der diskreten Eingänge	kürzester Weg bei Gewichtung der Änderung der diskreten Eingänge
$D \rightarrow B$	$D_2 \rightarrow C_3 \rightarrow B$	$D_3 \rightarrow C_3 \rightarrow B_3$
$A \rightarrow C$	$A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow D_2 \rightarrow C$	$A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow$ D_3 $\rightarrow C_3$
$B \rightarrow C$	$B_1 \rightarrow D_2 \rightarrow C$	$B_1 \rightarrow$ D_3 $\rightarrow C_3$
$B \rightarrow D$	$B_1 \rightarrow D$	$B_2 \rightarrow D$
$C \rightarrow D$	$C_3 \rightarrow B_1 \rightarrow D$	$C_3 \rightarrow$ B_2 $\rightarrow D_2$
$D \rightarrow C$	$D_2 \rightarrow C$	$D_3 \rightarrow C_3$

4.2 Aufgabe und Durchführung der globalen Prozessführungsstrategie

Die Aufgabe der globalen Prozessführungsstrategie ist

- festzustellen, ob ein Weg von einem Startknoten zu einem Zielknoten überhaupt existiert, und
- falls mehrere Wege zwischen diesem Startknoten und dem Zielknoten existieren, den günstigsten davon auszuwählen.

Durch die Modellierung als Graph beschränkt sich die Durchführung der globalen Prozessführungsstrategie auf eine einfache Wegsuche in diesem Graphen.

4.2.1 Wegsuche im Graphen

Das Ziel der Wegsuche ist den Weg mit den geringsten Kosten, bezogen auf die Kantengewichte, zu finden. Beim gebietsorientierten Graphen und beim dynamikorientierten Graphen gibt es allerdings Unterschiede bei der Vorgehensweise. Bei beiden Verfahren soll im letzten Schritt der Dijkstra-Algorithmus [NM93], der einen Standardalgorithmus zur Wegsuche darstellt, auf einem einfachen, gerichteten und gewichteten Graphen Anwendung finden.

4.2.2 Vorgehensweise beim gebietsorientierten Graphen

Für die Anwendung des Dijkstra-Algorithmus zur Bestimmung der kostengünstigsten Pfade im Graphen muss der gebietsorientierte Multigraph in einen einfachen

Graphen umgewandelt werden. Dies gelingt dadurch, dass man die parallelen Kanten zwischen den Knoten i und j streicht, die ein größeres Gütemaß bzw. Gewicht haben als die restlichen verbleibenden Kanten. Damit der Dijkstra-Algorithmus überhaupt angewendet werden kann, müssen alle Kantengewichte nicht negativ sein.

Wiederholt man diesen Vorgang, dann bleibt letztendlich maximal eine Kante zwischen zwei beliebigen Knoten des Graphen übrig. Der Graph genügt dann den Anforderungen des Dijkstra-Algorithmus.

Beispiel 4.5 (Streichen der Kanten im gebietsorientierten Graphen):

In Abbildung 4.6 ist der Graph aus Abbildung 4.4 mit einfachen Kanten dargestellt.

Da $J_{B_2D} > J_{B_1D}$ gilt, wird die Kante zwischen dem Knoten B und D mit J_{B_1D} gewichtet. Bei der Kante zwischen Knoten D und C gilt $J_{D_2C} < J_{D_3C}$ und sie wird deshalb mit J_{D_2C} gewichtet. Die Werte der Gewichtungen sind der Tabelle 4.2 zu entnehmen. Der jeweils kürzeste Weg, der sich bei der Berechnung mit dem Dijkstra-Algorithmus ergibt, ist in Tabelle 4.3 fett markiert.

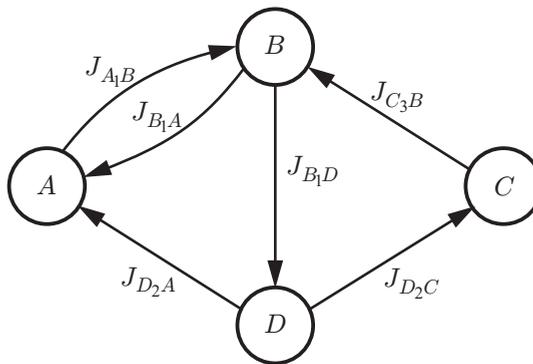


Abbildung 4.6: Gebietsorientierter Graph für die Wegsuche nach Streichen der Kanten

4.2.3 Vorgehensweise beim dynamikorientierten Graphen

Der dynamikorientierte Graph liegt bereits in der Form vor, dass der Dijkstra-Algorithmus angewendet werden kann. Für die Interpretation der Ergebnisse muss aber beachtet werden, dass der Algorithmus für alle Knoten eines Verbundes durchgeführt werden muss, wenn der Startknoten ein Knoten aus einem Verbund mit mehreren Knoten darstellt. Wenn der Zielknoten so von mehreren Startknoten eines Verbundes aus erreichbar ist, dann muss derjenige Startknoten gewählt werden, der die kleinsten Kosten zum Zielknoten verursacht.

Beispiel 4.6 (Günstigster Startknoten aus einem Verbund):

Betrachtet man die möglichen Wege von Verbund B in den Verbund C zu Knoten C_3 aus Tabelle 4.4, so ist der Knoten C_3 von dem Knoten B_1 einmal mit den Kosten³ $J_{B_1 \rightarrow C_3}^{[1]} = 3,8$ und $J_{B_1 \rightarrow C_3}^{[2]} = 2,9$ erreichbar. Der kürzeste Weg ist also der mit den Kosten $J_{B_1 \rightarrow C_3}^{[2]}$. Der Knoten C_3 im Verbund C ist aber auch vom Knoten B_2 auf einem Weg mit den Kosten $J_{B_2 \rightarrow C_3}^{[1]} = 3,3$ und $J_{B_2 \rightarrow C_3}^{[2]} = 3,4$ erreichbar. Hier besitzt der Weg $J_{B_2 \rightarrow C_3}^{[1]}$ die geringsten Kosten. Für den Verbund muss nun in einem abschließenden Berechnungsschritt das Minimum der Pfade $J_{B_1 \rightarrow C_3}^{[2]}$ und $J_{B_2 \rightarrow C_3}^{[1]}$ bestimmt werden. Der Weg mit den geringsten Kosten vom Verbund B in den Verbund C stellt somit der Pfad $J_{B_1 \rightarrow C_3}^{[2]} = 2,9$ dar.

4.3 Einarbeiten von Heuristiken in die Prozessführung

Im Folgenden werden Heuristiken formuliert und in die Prozessführung eingearbeitet. Es werden dabei zwei Ursachen für dieses Vorgehen unterschieden.

Zum einen kann es nötig sein, dass bestimmte Gebiete im Zustandsraum nicht erreicht werden dürfen, da dort zum Beispiel bei einem chemischen Reaktor ein Produkt nur in mangelhafter Qualität produziert werden kann, oder sogar die Gefahr besteht, dass die ganze Reaktion instabil wird und es im schlimmsten Fall zur Zerstörung der Produktionsanlage kommen kann. Diese Gebiete sollen im Weiteren *verbotene Gebiete* genannt werden.

Ein Spezialfall tritt auf, wenn Trajektorien in ein Gebiet nur von einer bestimmten Seitenfläche eintreten dürfen. Man kann so die Gebietsübertritte, die durch andere Seitenflächen möglich sind, als unerlaubte Gebietsübertritte markieren und damit für die Prozessführung ausschließen.

Zum anderen kann das Erreichen eines gewünschten Endzustands im Zustandsraum eine Herausforderung darstellen. Es kann so zum Beispiel der Fall auftreten, dass die Zustandstrajektorie zwar sicher in ein Gebiet überführt wird, dort aber der gewünschte Endzustand nicht erreicht werden kann. Mögliche Ursachen und Maßnahmen zur Abhilfe sollen kurz vorgestellt werden.

³Zur Bezeichnung siehe Beispiel 4.4.

4.3.1 Markieren von verbotenen Gebieten im Zustandsraum

Um zu vermeiden, dass die Trajektorie des geregelten Systems in verbotene Gebiete eintritt, muss die Struktur des Graphen verändert werden. Durch das Entfernen von Kanten, die zu den verbotenen Gebieten bzw. den Gebieten zugeordneten Verbänden führen, werden diese Gebiete von vornherein unerreichbar.

Das Entfernen von Kanten wird in dem Graphen vorgenommen, der für die Wegsuche mit dem Dijkstra-Algorithmus verwendet wird. Im gebietsorientierten Graphen kann das Entfernen von Kanten direkt erfolgen.

Durch Störungen kann es vorkommen, dass sich ein Zustand plötzlich in einem verbotenen Gebiet befindet. Dann ist es wichtig, dass der Zustand so schnell wie möglich aus dem Gebiet wieder herausgeführt wird. Kanten, die von Knoten bzw. Verbänden aus dem verbotenen Gebiet in nicht verbotene Gebiete führen, werden deshalb nicht entfernt.

Diese einfache Regel, alle zum verbotenen Gebiet führenden Kanten zu entfernen, verhindert auch, dass Trajektorien von einem verbotenen Gebiet in das nächste verbotene Gebiet führen können. Knoten bzw. Verbände, die Gebieten zugeordnet sind, die in ihrer Lage weiter von erlaubten Bereichen entfernt im verbotenen Bereich des Zustandsraumes liegen, haben dann keine Kanten und können aus dem Graphen entfernt werden.

Beispiel 4.7 (Verbotene Gebiete im gebietsorientierten Graphen):

In Abbildung 4.7 ist der gebietsorientierte Graph aus Abbildung 4.6 mit dem verbotenen Gebiet D dargestellt. Die Kante J_{B_1D} die in Abbildung 4.6 noch vom Knoten B nach D führt, fehlt nun in Abbildung 4.7. Die vom Gebiet D wegführenden Kanten sind nun gestrichelt dargestellt, um diese Kanten, die von einem verbotenen Gebiet in nicht verbotene Gebiete zeigen, kenntlich zu machen.

Beispiel 4.8 (Verbotene Gebiete im dynamikorientierten Graphen):

In Abbildung 4.8 ist der dynamikorientierte Graph aus Abbildung 4.5 mit dem verbotenen Gebiet bzw. Verbund D dargestellt.

Wiederum sind Kanten, die vom Verbund D wegführen, gestrichelt eingezeichnet. Vergleicht man den dynamikorientierten Graphen in Abbildung 4.5 mit dem Graphen in Abbildung 4.8 so erkennt man, dass die Kanten $J_{B_1D_1}$, $J_{B_2D_1}$, $J_{B_2D_1}$ und $J_{B_2D_2}$ entfernt wurden.

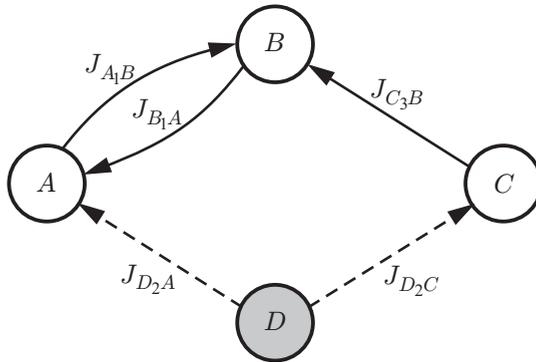


Abbildung 4.7: Gebietsorientierter Graph für die Wegsuche mit dem als verboten markierten Gebiet D

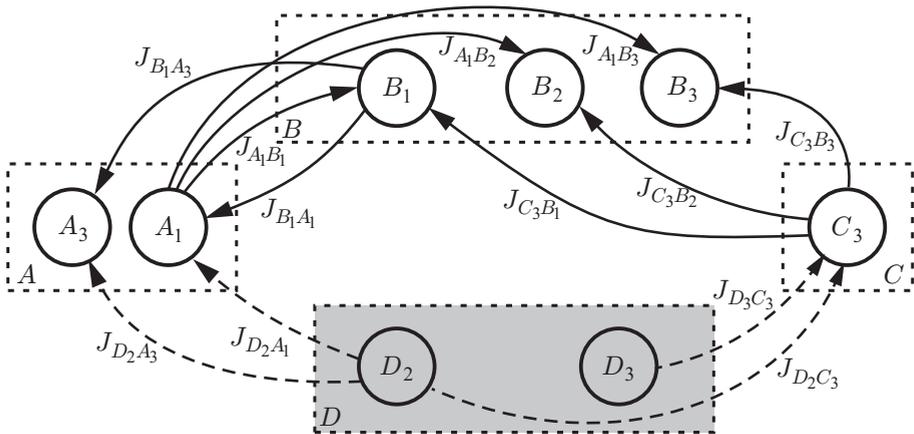


Abbildung 4.8: Dynamikorientierter Graph für die Wegsuche mit dem als verboten markierten Verbund D

4.3.2 Markieren von verbotenen Gebietsübertritten

Wird beabsichtigt, dass Trajektorien in ein bestimmtes Gebiet nur durch bestimmte ausgewählte Seitenflächen eintreten dürfen, so kann dies durch Entfernen von Verbindungen in der jeweiligen Graphenstruktur erreicht werden. Die Kanten in den Graphen, die den Gebietsübertritten zugeordnet sind, die zwar möglich, aber nicht erwünscht sind, stellen *verbotene Gebietsübertritte* dar und werden vor der Wegsuche aus dem Graphen entfernt.

Beispiel 4.9 (Verbotene Gebietsübertritte):

Soll das Gebiet A in Abbildung 4.2 nur über das Gebiet D erreichbar sein, dann sind alle anderen Kanten zu entfernen, die ins Gebiet A führen. Dies bedeutet so zum Beispiel, dass die Kante J_{B_1A} im gebietsorientierten Graphen für die Wegsuche in Abbildung 4.6 entfernt werden muss. Im dynamikorientierten Graphen in Abbildung 4.5 sind so zum Beispiel die Kanten $J_{B_1A_1}$ und $J_{B_1A_3}$ zu entfernen.

4.3.3 Maßnahmen zum Erreichen des Endzustandes

In Abbildung 4.9 ist ein Ablaufdiagramm für das Anwenden der Heuristiken, wie sie im Folgenden beschrieben werden, dargestellt.

Gewöhnlich wird das Erreichen des Endzustandes im Endgebiet durch ein affines Regelgesetz gewährleistet. Jedoch kann dieses Regelgesetz nicht angegeben werden, wenn im Endgebiet keine Ruhelage des Systems existiert. In [Klo07] wird gezeigt, dass die möglichen Ruhelagen des unregulierten Systems in Abhängigkeit der Stellgröße \underline{u} die Ruhelage des geregelten Systems enthalten, wenn das affine Regelgesetz nach Gleichung (3.3) die Stellgrößenbeschränkungen einhält. Die Ruhelage des geregelten Systems wird dabei durch den affinen Anteil $\varphi_{\underline{u}}$ im Regelgesetz nach Gleichung (3.3) im Zustandsraum verschoben.

Notwendige Bedingung 4.1:

Das geregelte System kann nur dann eine Ruhelage im Gebiet aufweisen, wenn das unregelte System mögliche Ruhelagen im Gebiet aufweist.

Wenn diese notwendige Bedingung erfüllt ist, dann kann versucht werden, einen Regler für das Gebiet, in dem der Endzustand liegt, zu berechnen.

Existiert der Regler nicht, obwohl die notwendige Bedingung erfüllt ist, dann ist entweder der gewünschte Endzustand keine Ruhelage oder das Regelgesetz ist nicht bestimmbar, da zusätzliche Bedingungen erfüllt werden müssen. Im ersten Fall wird die Ruhelage, die dem Endzustand am nächsten liegt, als alternative Lösung vorgeschlagen und mit dieser neuen Ruhelage das affine Regelgesetz bestimmt.

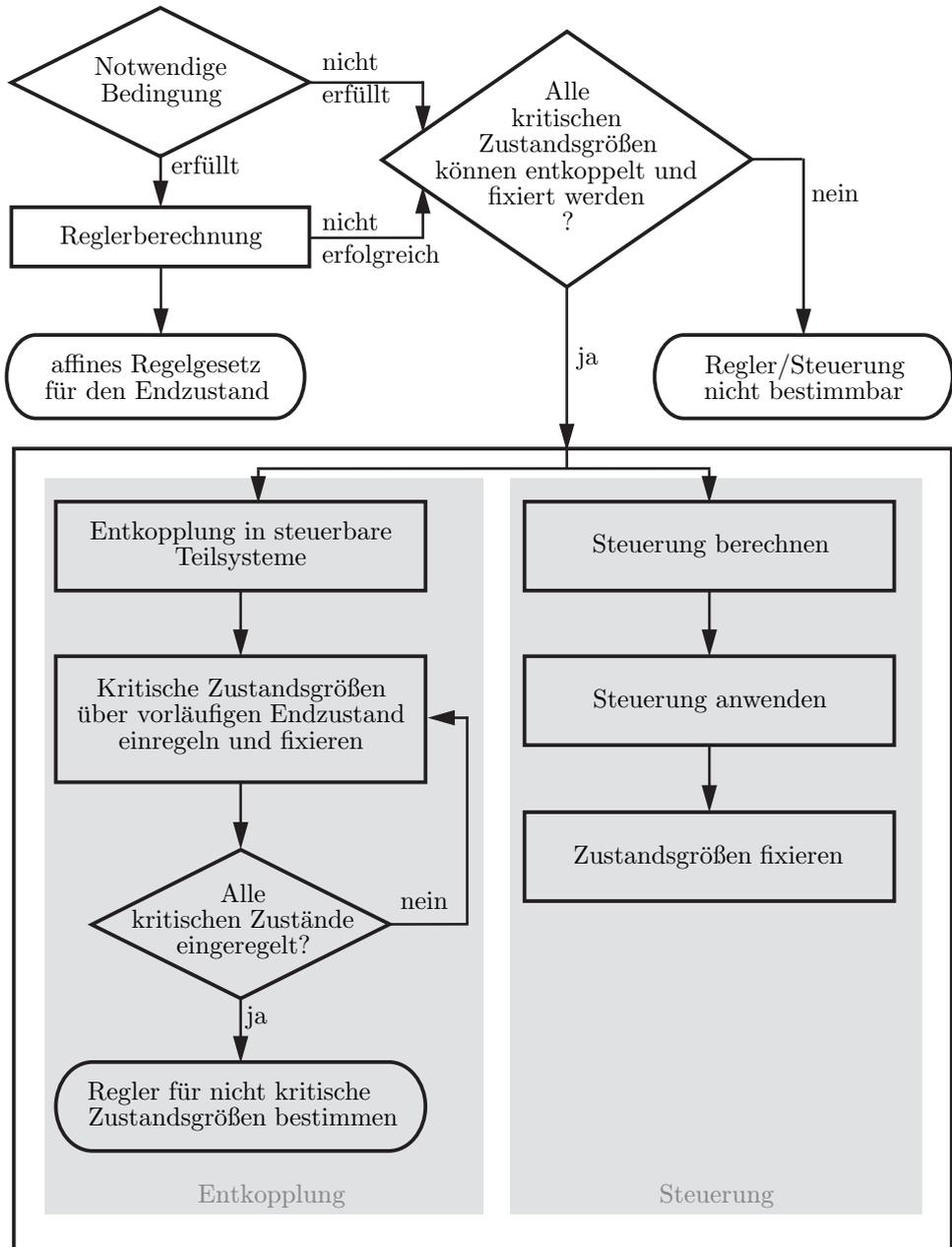


Abbildung 4.9: Ablaufdiagramm für die Regelung bzw. Steuerung des Zustands in einen gewünschten Endzustand

Im zweiten Fall, wenn also die zusätzlichen Bedingungen nicht erfüllbar sind, kann über den Entwurf einer *Steuerung* oder über eine geeignete *Entkopplung* des Systems nachgedacht werden. In Abbildung 4.9 sind die zwei Pfade der beiden Verfahren zusammengestellt.

Beide Verfahren können aber nur dann erfolgreich eingesetzt werden, wenn der Zustand bei Erreichen des Endzustandes fixiert werden kann. Dies ist oft bei Systemen möglich, deren Zustände zum Beispiel durch geeignete Wahl diskreter Eingänge zum einen vollständig entkoppelbar sind, und zum anderen bestimmte, sogenannte *kritische Zustandsgrößen* ein integrierendes Verhalten aufweisen. Die zeitkontinuierlichen bzw. zeitdiskreten Eingangsgrößen müssen zusätzlich den Wert Null annehmen können. Ein System mit integrierendem Verhalten, das über keine Eingangsgrößen verfügt, hält somit den aktuellen Wert bei und fixiert damit die Zustandsgröße.

Ist die Fixierung nicht möglich, dann muss das Verfahren ergebnislos abgebrochen werden.

Entkopplung

Eine mögliche Vorgehensweise ist, das System zunächst in vollständig steuerbare Teilsysteme zu entkoppeln. Im reduzierten Zustandsraum wird dann untersucht, ob der gewünschte Endzustand einer Ruhelage entspricht, zum Beispiel durch Prüfen der notwendigen Bedingung 4.1.

Stellt der gewünschte Endzustand keine Ruhelage des Systems dar, wird das Teilsystem vollständig entkoppelt. Die Zustände, die dann nicht mehr steuerbar sind und ein integrierendes Verhalten aufweisen, werden wiederum als kritische Zustände bezeichnet. Treten hier Zustände auf, die kritisch sind, aber denen kein integrierendes Verhalten aufgezwungen werden kann, dann ist der gewünschte Endzustand weder durch eine Regelung noch durch eine Steuerung erreichbar und der Algorithmus muss abgebrochen werden.

Ist die Fixierung eines kritischen Zustandes möglich, dann wird ein sogenannter vorläufiger Endzustand definiert, dessen Komponenten des Zustandsvektors so angepasst werden, dass das Teilsystem in der kritischen Zustandsgröße die gewünschte Ruhelage besitzt. Dieser vorläufige Endzustand wird anschließend eingeregelt und das System wird so entkoppelt, dass dadurch die kritische Zustandsgröße fixiert wird. Die restlichen nicht kritischen Zustandsgrößen werden danach eingeregelt, ohne dabei die Entkopplung und damit die Fixierung der bereits eingeregelteten Zustandsgrößen wieder aufzuheben.

Treten mehrere kritische Zustände in einem Teilsystem auf, kann durch rekursives Vorgehen für jeden kritischen Zustand ein vorläufiger Endzustand definiert und aus-

geregelt werden, danach wird der kritische Zustand fixiert und der Zustand vom Teilsystem abgespaltet. Mit dem verbleibenden Teilsystem wird dieses Vorgehen so lange wiederholt, bis alle Zustände entweder fixiert oder eingeregelt sind.

Steuerung

Eine Alternative stellt die Steuerung der Trajektorie in den gewünschten Endzustand dar. Die Trajektorie darf dabei das Endgebiet nicht verlassen und wird häufig während des Betriebes bestimmt [Klo07]. So kann noch auf kleine Störungen reagiert werden. Nach Erreichen des Endzustandes müssen alle Zustände fixiert werden. Da kein affines Regelgesetz, das auf dem ganzen Gebiet seine Gültigkeit hat, gefunden werden muss, kann so im Vergleich zur Regelung für weitaus mehr Endzustände eine Steuerung bestimmt werden.

Erweiterungen

Tritt eine Störung auf, die den aktuellen Zustand zu weit von dem gewünschten Endzustand entfernt oder dieser sogar außerhalb des Gebiets platziert wird, dann wird die Prozessführungsstrategie von neuem gestartet, um das Endgebiet oder den Endzustand zu erreichen.

Wird im Verlaufe des Betriebs ein anderer Endzustand gewählt, dann wird die Prozessführungsstrategie ebenfalls neu gestartet.

Beispiel 4.10 (Vier-Tank-System):

Das Vier-Tank-System aus Abbildung 4.10 soll auf den Endzustand

$$\underline{x}_E = [h_{1,soll} \quad h_{2,soll} \quad h_{3,soll} \quad h_{4,soll}]^T$$

geregelt werden.

Der vierdimensionale Zustandsraum ist dabei in Hyperwürfel mit der Kantenlänge $h_{i,max}/5$, $i = 1, \dots, 4$ eingeteilt. Das System hat zwei kontinuierliche Zuflüsse und die diskreten Ventile V_i , $i = 1, \dots, 4$, V_{12} , V_{23} und V_{34} .

Sind alle Ventile geschlossen, dann hat jeder Tank ein integrierendes Verhalten.

Es soll jetzt die Entkopplung in steuerbare Teilgebiete nach Abbildung 4.9 betrachtet werden.

Das System wird beispielsweise in die zwei Teilsysteme Tank 1 - Tank 2 - Tank 3 und Tank 4 aufgeteilt. Für den Tank 4 kann leicht eine Regelung für den Endzustand $x_4 = h_{4,soll}$ angegeben werden.

Für das Teilsystem Tank 1 - Tank 2 - Tank 3 stellen sich die Füllhöhen in Tank 2 und Tank 3 als kritische Zustandsgrößen heraus, da nach einer vollständigen Entkopplung aller Teilsysteme diese zwei Tanks ihre Füllhöhen nur noch durch Öffnen der Ventile V_2 bzw. V_3 verringern können. Die Füllhöhe h_3 in Tank 3 kann dabei nur durch Kopplung zum Tank 2 erhöht werden. Deshalb soll zuerst die Füllhöhe in Tank 3 eingeregelt und anschließend fixiert werden. Als vorläufiger Endzustand wird so $\underline{x} = [h_{3,soll} \ h_{3,soll} \ h_{3,soll}]^T$ gewählt und eingeregelt. Nach Erreichen des vorläufigen Endzustands werden die Ventile V_{23} und V_3 geschlossen und damit die Füllhöhe h_3 fixiert.

Im nächsten Schritt wird der Zustand x_2 eingeregelt und fixiert, dazu wird der vorläufige Endzustand $\underline{x} = [h_{2,soll} \ h_{2,soll}]^T$ gewählt. Die Ventile V_{12} und V_2 werden nach Erreichen des vorläufigen Endzustands ebenfalls geschlossen. Für die Füllhöhe in Tank 1 kann dann leicht ein Regelgesetz angegeben werden.

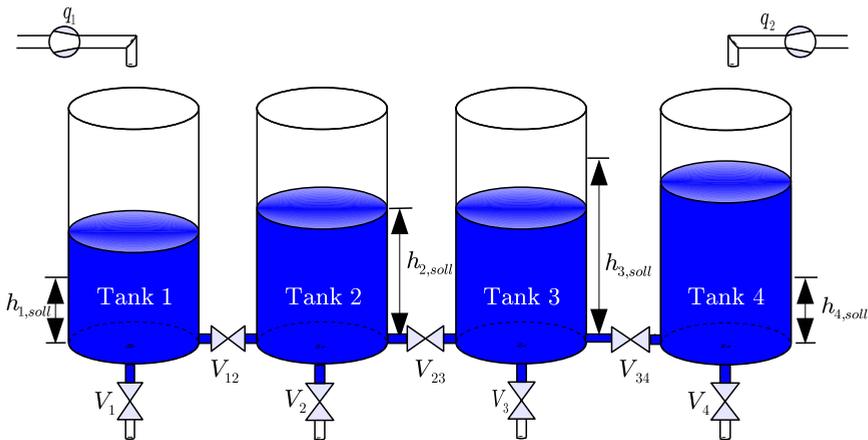


Abbildung 4.10: Vier-Tank-System

Wie man sieht, kann das Einregeln eines Endzustandes sehr schnell sehr kompliziert werden. Die Vorzüge der hier vorgestellten Prozessführungsstrategie liegen daher eher im Erreichen eines Gebietes im Zustandsraum.

Alternativ zum Erreichen eines Endzustandes kann es auch ausreichend sein, das Gebiet zu erreichen, in dem der Endzustand liegt, wenn die Ausmaße des Gebietes nur klein genug sind.

In [Bor02] wird für die dort vorgestellte multiparametrische Programmierung aus Abschnitt 3.3.3 immer ein Zielgebiet definiert, gleiches gilt für den modellprädiktiven Ansatz nach [BM99], der in Abschnitt 3.3.1 kurz vorgestellt wurde. Über das Halten des Zustands im Zielgebiet soll im Weiteren keine Aussage gemacht werden.

Beispiel 4.11 (Wahl eines kleinen Endgebiets):

Wird für das Vier-Tank-System eine Kantenlänge der Hyperwürfel von $h_{i,max}/100$, $i = 1, \dots, 4$ gewählt, so liegt der maximale Fehler $\leq 1\%$ zwischen dem aktuellen Zustand beim Eintritt ins Endgebiet im Vergleich zum gewünschten Endzustand selbst. Um den Berechnungsaufwand klein zu halten bietet es sich an, nur Teile des betrachteten Zustandsraumes in kleinere Gebiete aufzuteilen.

4.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden mögliche Modelle in Form von Graphen für die globale Prozessführungsstrategie beschrieben.

Es wurden dabei der gebietsorientierte und der dynamikorientierte Graph betrachtet. Die Durchführung der Prozessführungsstrategie in Form einer Wegsuche wurde für beide Arten von Graphen behandelt.

Anschließend wurden Heuristiken für die Prozessführung diskutiert. Dabei spielte das Markieren sowohl von verbotenen Gebieten im Zustandsraum als auch von verbotenen Gebietsübertritten eine wichtige Rolle. Abschließend wurden Möglichkeiten diskutiert, um den Endzustand möglichst gut zu erreichen, auch wenn der Endzustand keiner möglichen Ruhelage entspricht.

Im nächsten Kapitel werden nun lokale Regelungen für den Gebietsübertritt und für die Regelung im Endgebiet behandelt.

Kapitel 5

Lokale Regelungsstrategien

Die in Kapitel 4 vorgestellte globale Prozessführungsstrategie muss im Zielgebiet um eine lokale Strategie erweitert werden, um die Prozessführungsstrategie insgesamt erfüllen zu können. Im lokalen Anteil werden mehrere mögliche Regelungsverfahren zusammengefasst.

Die beiden folgenden *lokalen Regelungsaufgaben* sind durch lokale Regelungsstrategien zu lösen und werden wie folgt definiert.

Definition 5.1 (Übertrittsregelung):

Die Zustandstrajektorie soll gezielt über eine vorgegebene Fläche in ein angrenzendes Nachbargebiet überführt werden.

Definition 5.2 (Endgebietsregelung):

Die Zustandstrajektorie soll im gewählten Gebiet verbleiben, und der Zustand soll eine mögliche Ruhelage einnehmen.

In Abbildung 5.1 sind erlaubte und verbotene Trajektorienverläufe bei der Lösung der jeweiligen Regelungsaufgabe dargestellt.

Ziel der Übertrittsregelung nach Definition 5.1 in Abbildung 5.1(a) ist, dass jede Trajektorie, die im aktuellen Gebiet P startet, das gewählte Nachbargebiet \tilde{P} erreicht und dabei das aktuelle Gebiet P nur durch die mit dem Nachbargebiet \tilde{P} gemeinsame Seitenfläche verlässt. Verlässt eine Trajektorie das Gebiet P durch eine andere Seitenfläche, dann stellt dies einen verbotenen Verlauf dar; die Regelungsaufgabe, Trajektorien sicher vom Gebiet P ins Gebiet \tilde{P} zu überführen, gilt dann als nicht erfüllt. Im Allgemeinen wird die verbotene Trajektorie nur in seltenen Fällen das Gebiet \tilde{P} erreichen, wie es in Abbildung 5.1(a) skizziert ist, sondern auf Grund der Dynamik im Außengebiet von P und \tilde{P} einen Verlauf in eine völlig andere Richtung einnehmen.

Bei der Endgebietsregelung nach Definition 5.2 in Abbildung 5.1(b) soll jede im aktuellen Gebiet startende Trajektorie dieses nicht mehr verlassen und eine mögliche

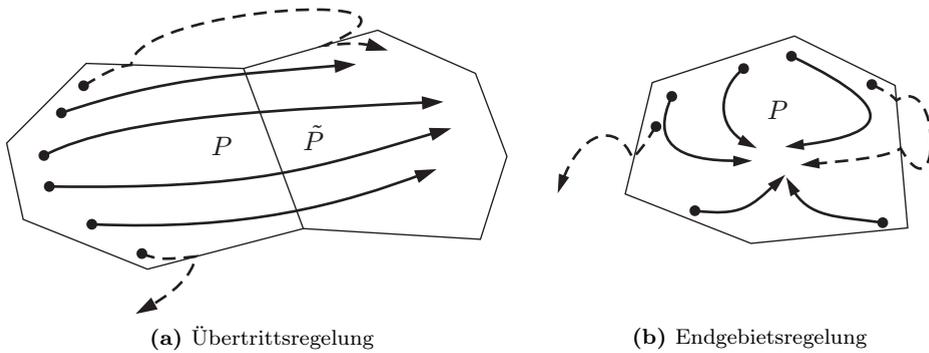


Abbildung 5.1: Erlaubte (—) und verbotene (- - -) Trajektorienverläufe bei den beiden lokalen Regelungsaufgaben

Ruhelage des Systems einnehmen. Verlässt eine beliebige Trajektorie das Endgebiet, gilt die Regelungsaufgabe als nicht erfüllt. Für den Verlauf verbotener Trajektorien gilt dasselbe wie bei der Übertrittsregelung.

Zur Lösung dieser beiden Regelungsaufgaben werden im Folgenden mehrere Regelungsverfahren vorgeschlagen und diskutiert. Die Zusammenhänge sollen im nächsten Abschnitt anhand eines Überblicks kurz erläutert werden.

5.1 Überblick über Regelungsaufgaben und lokale Regelungsverfahren

Sowohl die *Übertrittsregelung* als auch die *Endgebietsregelung* kann mit Hilfe des Verfahrens zur **Eigenwert- und Linkseigenvektor-Vorgabe (ELV)** und auch mit Hilfe des Verfahrens zur **Vorgabe von Stellgrößen in den Eckpunkten (VSE)** entworfen werden.

Zunächst werden die Eigenschaften des Regelkreises im nächsten Abschnitt vorgestellt.

5.2 Eigenschaften des Regelkreises

In Abbildung 5.2 ist die Struktur der Regelung dargestellt.

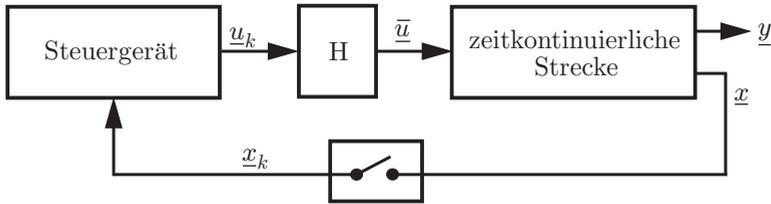


Abbildung 5.2: Steuergerät im Regelkreis

Der Regelkreis besteht aus einer zeitkontinuierlichen Strecke, deren Zustände \underline{x} zur Regelung herangezogen werden. Im Steuergerät wird die Stellgröße \underline{u}_k durch das Regelungsgesetz aus dem abgetasteten Messsignal \underline{x}_k berechnet und auf das Halteglied (H) gegeben, sodass es als Treppenfunktion \underline{u} auf die zeitkontinuierliche Strecke wirkt.

In Abbildung 5.3 sind nun für erlaubte Trajektorien aus Abbildung 5.1(a) die jeweiligen Abtastzeitpunkte mit einem Kreuz (\times) gekennzeichnet.

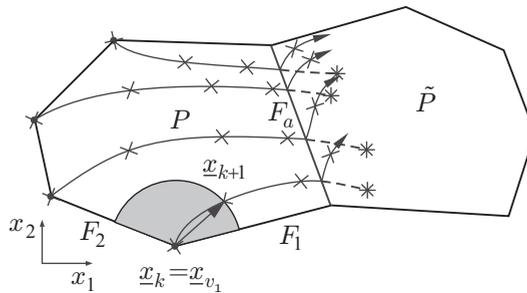


Abbildung 5.3: Zeitkontinuierliche Trajektorien und zeitdiskrete Abtastwerte

Betrachtet man nun den Verlauf einer Trajektorie in Abbildung 5.3 genauer, so stellt man fest, dass zu einem Zeitpunkt t^* die gemeinsame Seitenfläche F_a der Polytope P und \tilde{P} durchstoßen wird. Im Allgemeinen fällt dabei der Durchtrittszeitpunkt t^* nicht mit einer Abtastung $t = kT, k = 0, 1, 2, \dots$ des Messsignals zusammen. Dies bedeutet, dass sich die Trajektorie für ein festes k im Zeitintervall $t \in I_1 = [kT; t^*]$ im Polytop P befindet und dementsprechend der dazugehörige Regler aufgeschaltet wird. Für den noch verbleibenden Rest der Abtastzeit, also im Zeitintervall $t \in I_2 = [t^*; (k+1)T]$, befindet sich die Trajektorie zwar schon im Nachbarypolytop \tilde{P} und ist damit dessen veränderter Dynamik ausgesetzt, allerdings wirkt immer

noch der für das Polytop P berechnete Regler. Die zeitkontinuierlichen Trajektorien in Abbildung 5.3 knicken deshalb direkt beim Überschreiten der Seitenfläche (in diesem Beispiel) nach oben ab, da der Regler vom Polytop P auf die Dynamik des Nachbarypolytops \tilde{P} wirkt.

In Abbildung 5.3 ist auch der Fall eingezeichnet, dass die Dynamik im Nachbarypolytop \tilde{P} mit der des Polytops P identisch ist. Es ergibt sich dann der gestrichelte Verlauf der Trajektorie nach Durchstoßen der gemeinsamen Seitenfläche F_a . Der nächste Abtastzeitpunkt ist hierbei mit einem Stern (*) gekennzeichnet.

Damit der Regler, der für das Polytop P berechnet wird, im Zeitintervall I_2 die Trajektorie nicht aus dem Nachbarypolytop \tilde{P} herausführt, werden im Folgenden Bedingungen hergeleitet, die genau diesen fehlerhaften Verlauf der Trajektorie unterbinden, da sonst die Regelungsaufgabe nicht erfüllt wäre. Beim Reglerentwurf werden deshalb sowohl die Dynamik vom Polytop P als auch die vom Polytop \tilde{P} berücksichtigt.

5.3 Allgemeine Bedingungen an den zeitdiskreten Gradienten für die Übertrittsregelung

Die allgemeinen Bedingungen werden auf polytopförmigen Gebieten hergeleitet. Die Bezeichnung Polytop wurde dazu in Abschnitt 2.5.1 eingeführt.

Für jedes Polytop wird eine zeitdiskrete affine Dynamik in zeitdiskreter Zustandsraumdarstellung nach Definition 2.4 angenommen. Im Folgenden wird die affine Differenzgleichung (2.7)

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi} \underline{x}_k + \underline{H} u_k + \underline{\varphi} \quad (5.1)$$

im Polytop P unter Vernachlässigung der Ausgangsgleichung (2.8) betrachtet. In Abschnitt 5.2 wurde schon darauf hingewiesen, dass für ein kleines Zeitintervall I_2 der Regler, der für das Polytop P entworfen wurde, auf dem Polytop \tilde{P} wirken wird. Für einen korrekten Entwurf der Übertrittsregelung ist also auch die Dynamik

$$\underline{x}_{k+1} = \tilde{\underline{\Phi}} \underline{x}_k + \tilde{\underline{H}} u_k + \tilde{\underline{\varphi}} \quad (5.2)$$

im Polytop \tilde{P} zu beachten.

Die Trajektorien in Abbildung 5.3 beginnen zu den Abtastzeitpunkten, die mit einem Kreuz (\times) markiert sind, in den Ecken des Polytops P , die nicht auf der gemeinsamen Seitenfläche F_a der zwei Polytope P und \tilde{P} liegen. Damit nun das Regelungsziel der Übertrittsregelung erfüllt werden kann, muss die Trajektorie, wenn sie in einem dieser Eckpunkte startet, in das Polytop P führen. Der erlaubte Bereich für die Rich-

tung, in die der zeitdiskrete Gradient in der Ecke \underline{x}_{v_1} zeigen darf, ist in Abbildung 5.3 durch den grau hinterlegten Winkelbereich gekennzeichnet.

5.3.1 Mathematische Beschreibung des Winkelbereichs durch Ungleichungen

Die mathematische Beschreibung des Winkelbereichs wird exemplarisch an der Ecke \underline{x}_{v_1} in Abbildung 5.3 beschrieben.

Der *zeitdiskrete Gradient* $\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$ ergibt sich mit Gleichung (5.1) zu

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k = \underline{\Phi} \underline{x}_k + \underline{H} \underline{u}_k + \underline{\varphi} - \underline{x}_k. \quad (5.3)$$

Dieser zeitdiskrete Gradient

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}} = (\underline{\Phi} - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi} \quad (5.4)$$

wird in einer Ecke \underline{x}_{v_i} des Polytops ausgewertet. Die Matrix \underline{I}_n stellt die Einheitsmatrix im \mathbb{R}^n dar. In Abbildung 5.3 ist in der Ecke \underline{x}_{v_1} beispielhaft der zeitdiskrete Gradient

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_1}} \quad (5.5)$$

als Pfeil eingezeichnet. Dieser Ausschnitt ist in Abbildung 5.4(a) stark vergrößert dargestellt.

Da im Folgenden geregelte Systeme betrachtet werden, wird mithilfe einer affinen Zustandsrückführung (siehe auch Gleichung (3.3))

$$\underline{u}_k = -\underline{R} \underline{x}_k + \underline{\varphi}_u \quad (5.6)$$

ein geschlossener Regelkreis erzeugt. Im Gegensatz zur klassischen Zustandsrückführung in Abschnitt 3.1.2 wird — anstelle der über einen Vorfilter gewichteten Führungsgröße — der affine Wert $\underline{\varphi}_u$ auf den Systemeingang geführt.

Der zeitdiskrete Gradient des geregelten Systems ergibt sich nun zu

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}} = (\underline{\Phi} - \underline{H} \underline{R} - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{\varphi}_u + \underline{\varphi}. \quad (5.7)$$

Setzt man darin die Zusammenhänge

$$\underline{\Phi} - \underline{H} \underline{R} = \underline{\Phi}_R \quad (5.8)$$

aus Gleichung (3.6) und

$$\underline{H} \underline{\varphi}_u + \underline{\varphi} = \underline{\varphi}_R \quad (5.9)$$

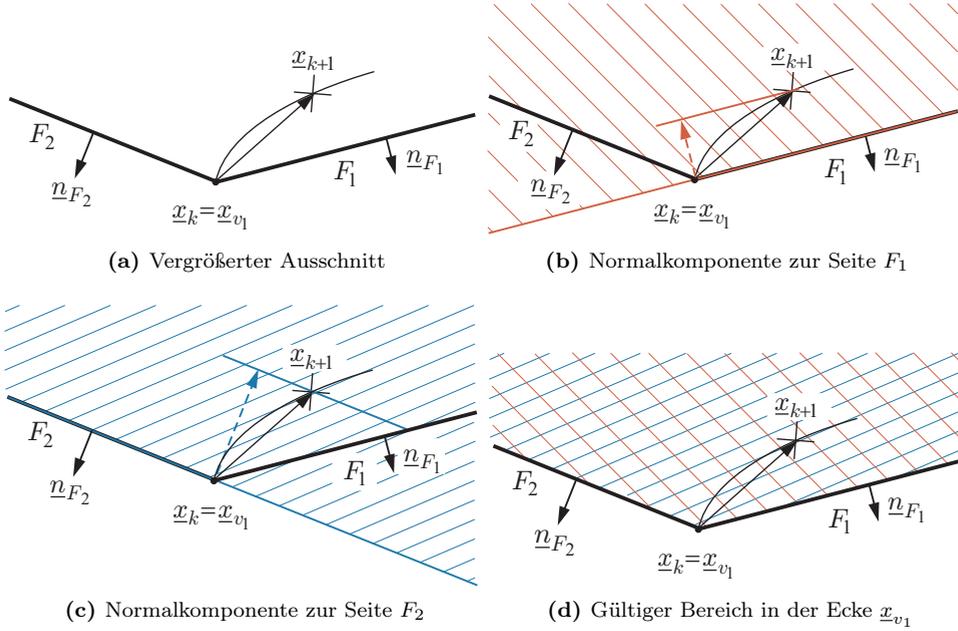


Abbildung 5.4: Entstehung des Winkelbereichs

aus Gleichung (3.7) ein, so folgt für den zeitdiskreten Gradienten in der Ecke \underline{x}_{v_i}

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}} = (\underline{\Phi}_R - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R. \quad (5.10)$$

Für die Dynamik des Nachbarpolytops \tilde{P} wird der zeitdiskrete Gradient zu

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \tilde{\underline{x}}_{v_i}} = (\tilde{\underline{\Phi}} - \tilde{\underline{H}} \underline{R} - \underline{I}_n) \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \tilde{\underline{H}} \underline{\varphi}_u + \tilde{\underline{\varphi}}, \quad (5.11)$$

der sich mit

$$\tilde{\underline{\Phi}} - \tilde{\underline{H}} \underline{R} = \tilde{\underline{\Phi}}_R \quad (5.12)$$

und

$$\tilde{\underline{H}} \underline{\varphi}_u + \tilde{\underline{\varphi}} = \tilde{\underline{\varphi}}_R \quad (5.13)$$

als

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \tilde{\underline{x}}_{v_i}} = (\tilde{\underline{\Phi}}_R - \underline{I}_n) \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \tilde{\underline{\varphi}}_R \quad (5.14)$$

schreiben lässt.

Der zeitdiskrete Gradient wird in Abbildung 5.4(a) nun in der Ecke \underline{x}_{v_1} untersucht. Die angrenzenden Seitenflächen F_1 und F_2 sind durch ihre nach außen zeigenden

Normalenvektoren \underline{n}_{F_1} und \underline{n}_{F_2} definiert.

Das Skalarprodukt des Normalenvektors \underline{n}_{F_1} mit dem zeitdiskreten Gradienten ergibt die Komponente des zeitdiskreten Gradienten in Richtung des Normalenvektors, die in Abbildung 5.4(b) als gestrichelter Pfeil dargestellt ist. Diese Komponente soll im folgenden *Normalkomponente* bezüglich der entsprechenden Seitenfläche genannt werden. Ist diese Komponente positiv, dann zeigt die Komponente aus dem Polytop heraus, andernfalls zeigt sie in das Polytop hinein. In Abbildung 5.4(b) zeigt diese Komponente in das Polytop hinein. Die Komponente muss also negativ sein, damit sie ins Polytop zeigt. Mathematisch kann dies leicht durch die Ungleichung

$$\underline{n}_{F_1}^T \left((\Phi_R - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_1} + \underline{\varphi}_R \right) < 0 \quad (5.15)$$

ausgedrückt werden. Diese Ungleichung beschreibt im Zustandsraum eine Halbebene, die in Abbildung 5.4(b) durch eine Schraffur angedeutet ist.

In Abbildung 5.4(c) wird die Normalkomponente bezüglich F_2 untersucht; auch diese Komponente muss negativ sein, damit sie ins Polytop zeigt. Wiederum kann der Bereich als Ungleichung angegeben werden. Er wird in Abbildung 5.4(c) mit einer Schraffur grafisch als Halbebene veranschaulicht.

Ist das daraus resultierende Ungleichungssystem erfüllt, dann lässt sich der in Abbildung 5.4(d) schraffierte Bereich als gültigen Winkelbereich für den zeitdiskreten Gradienten angeben.

5.3.2 Winkelbereiche für die Übertrittsregelung

In Abbildung 5.5 sind nun alle Winkelbereiche eingetragen, die notwendig sind, damit eine Übertrittsregelung garantiert werden kann. Die Bereiche werden mit der

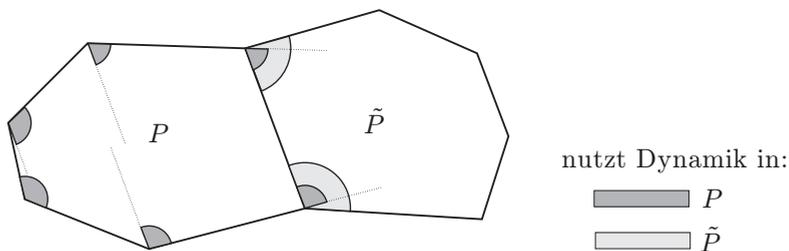


Abbildung 5.5: Winkelbereiche für die Übertrittsregelung

Dynamik des Polytops P und des Nachbarpolytops \tilde{P} beschrieben.

Diese Winkelbereiche lassen sich genau so, wie in Abschnitt 5.3.1 in einer Ecke gezeigt wurde, in allen Ecken als Ungleichungen formulieren. Unter der Annahme

einer zeitkontinuierlichen Dynamik im Polytop P wurden im Abschnitt 3.3.4 schon Bedingungen nach [Hv04] in Gleichung (3.9) angegeben. Diese stellen die Basis für das weitere Vorgehen dar.

5.3.3 Zeitdiskrete Bedingungen im Polytop P

Formuliert man diese Bedingungen aus Gleichung (3.9) mit dem zeitdiskreten Gradienten, ergeben sich daraus die folgenden Ungleichungen:

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{n}_{F_a}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) > 0, \quad (5.16)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V}_a : \forall F_j \in \mathcal{F}_i \setminus \{F_a\} : \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) \leq 0, \quad (5.17)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \forall F_j \in \mathcal{F}_i : \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) \leq 0, \quad (5.18)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \sum_{\substack{j=1 \\ F_j \in \mathcal{F}_i}}^K \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) < 0. \quad (5.19)$$

Um diese Ungleichungen zu erhalten, wurde $\dot{\underline{x}}$ in den Gleichungen (3.9) mit dem zeitdiskreten Gradienten $(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}}$ aus Gleichung (5.10) ersetzt. Die Ungleichungen (5.16-5.19) stellen dabei die Winkelbereiche in Abbildung 5.5 dar, in die der zeitdiskrete Gradient unter der Verwendung der Dynamik im Polytop P zeigen darf.

Allerdings sagen diese Bereiche zum Beispiel nicht aus, wie lang der Vektor des zeitdiskreten Gradienten ist. Damit wäre es möglich, dass ein Polytop zum Beispiel vollständig übersprungen und damit unbeabsichtigt verlassen wird. Auch an die Richtung müssen im nächsten Abschnitt weitere Forderungen gestellt werden.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang anzumerken, dass es sich dabei für jeden Zustandspunkt im Polytop zeigen lässt, dass die Bedingungen, die an die Eckpunkte des Polytops gestellt werden, auch für das Innere des Polytops gelten. Ein Polytop lässt sich nach [Hv04] durch eine Triangulierung in mehrere Simplexe aufteilen, so dass folgender Satz angewendet werden kann.

Satz 5.1 (Gradientenbedingungen eines beliebigen Zustandspunkts):

Fordert man in allen Ecken eines Simplex bei zugrunde liegender linearer bzw. affiner Dynamik das Vorhandensein einer positiven (negativen) Komponente des zeitdiskreten Gradienten bezüglich einer Austrittsseite, so besitzt der zeitdiskrete Gradient in einem beliebigen Zustandspunkt im Simplex auch eine positive (negative) Komponente bezüglich der gewünschten Austrittsseite.

Der zugehörige Beweis ist in Anhang B.1 abgedruckt. Der Beweis ist für die Bedingung (5.16) gültig. Für die anderen hier in diesem Kapitel verwendeten Bedingungen ist dieser Beweis auf das Verhalten des zeitdiskreten Gradienten auf den Begrenzungsflächen des Polytops übertragbar.

5.3.4 Zusätzliche Bedingungen für Länge und Richtung der zeitdiskreten Gradienten

Es sollen im Folgenden drei Fälle untersucht werden, bei denen zusätzliche Bedingungen an den zeitdiskreten Gradienten gestellt werden müssen.

In Abbildung 5.6(a) ist der erste Fall dargestellt, bei dem eine zusätzliche Bedingung an die Länge des zeitdiskreten Gradienten gestellt werden muss.

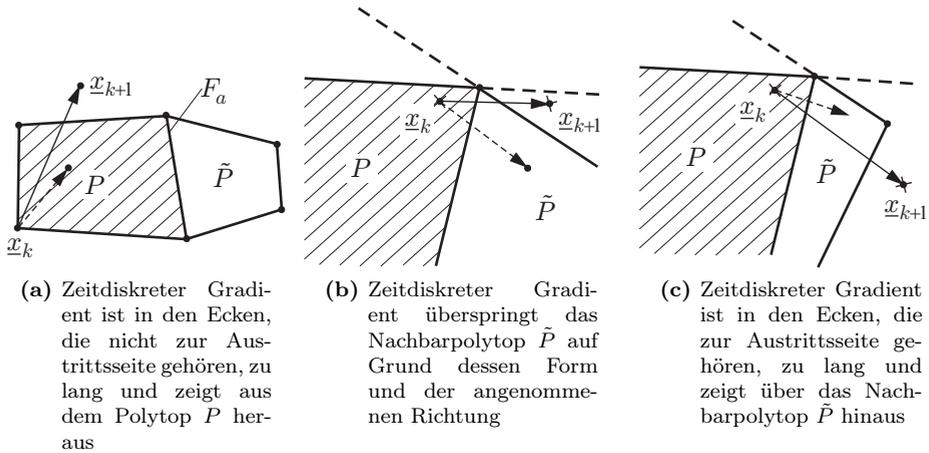


Abbildung 5.6: Der fehlerhafte zeitdiskrete Gradient, als Pfeil mit durchgezogener Linie eingezeichnet, kann durch zusätzliche Forderungen an die Richtung und an die Länge vermieden werden. Der neue zeitdiskrete Gradient, als Pfeil mit gestrichelter Linie eingezeichnet, hält die zusätzlichen Bedingungen ein.

Die Richtung des zeitdiskreten Gradienten wird zwar eingehalten, allerdings ist der Vektor so lang, dass das Polytop P statt durch die Seitenfläche F_a durch eine andere Seite verlassen wird. Dieses Problem kann bei allen Ecken auftreten, die nicht auf der Seitenfläche F_a liegen.

Um dies zu verhindern wird die Forderung gestellt, dass der Differenzvektor zwischen dem Punkt \underline{x}_{k+1} und einem beliebigen Punkt \underline{x}_{v_k} auf den Seitenflächen, die nicht an die betrachtete Ecke grenzen, nicht aus dem Polytop zeigt. Dies kann durch die

Ungleichung

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \forall F_j \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i : \underline{x}_{v_k} \in \mathcal{V}_j : \underline{n}_{F_j}^T \left(\Phi_R \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R - \underline{x}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.20)$$

formuliert werden.

Der zweite Fall ist in Abbildung 5.6(b) dargestellt. Man sieht deutlich, was passiert, wenn die Bedingungen nahe einer Ecke der Austrittsseite bezüglich des Polytops P eingehalten werden, für die angrenzenden Seiten im Nachbarpolytop aber keine Bedingungen aufgestellt wurden. Es besteht dann die Möglichkeit, dass der Folgezustand \underline{x}_{k+1} außerhalb des Nachbarpolytops \tilde{P} zu liegen kommt. Mit der Ungleichung

$$\forall \tilde{\underline{x}}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}}_i \setminus \left\{ \tilde{F}_a \right\} : \tilde{\underline{n}}_{F_j}^T \left((\Phi_R - \underline{I}_n) \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) \leq 0 \quad (5.21)$$

wird gefordert, dass auch die angrenzenden Seitenflächen des Nachbarpolytops \tilde{P} an die Ecken $\tilde{\underline{x}}_{v_i}$ bezüglich der Dynamik im Polytop P erfüllt werden.

Mit der Bedingung (5.21) kann zwar erreicht werden, dass die Trajektorie unter ausschließlicher Betrachtung der Dynamik aus dem Polytop P in das Polytop \tilde{P} zeigt, es ist dennoch möglich, dass das Polytop \tilde{P} dabei übersprungen wird. Dies ist in Abbildung 5.6(c) für den dritten Fall dargestellt.

Durch die Ungleichung

$$\forall \tilde{\underline{x}}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \tilde{\mathcal{F}}_i : \tilde{\underline{x}}_{v_k} \in \tilde{\mathcal{V}}_j : \tilde{\underline{n}}_{F_j}^T \left(\Phi_R \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \underline{\varphi}_R - \tilde{\underline{x}}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.22)$$

kann dieser Fall vermieden werden, da gefordert wird, dass im Polytop \tilde{P} der zeitdiskrete Gradient nur so lang ist, dass er im Polytop \tilde{P} bleibt.

Diese drei hier vorgestellten Fälle stellen die ersten wesentlichen Änderungen bei der Umsetzung der Bedingungen des kontinuierlichen Verfahrens aus Abschnitt 3.3.4 ins Zeitdiskrete dar.

Durch die zeitdiskrete Systemklasse ist es aber auch erforderlich, die Dynamik und die Begrenzungen des Nachbarpolytops \tilde{P} genauer zu untersuchen. Dies führt dann zu den im nächsten Abschnitt folgenden abschließenden Erweiterungen.

5.3.5 Zeitdiskrete Bedingungen im Nachbarpolytop \tilde{P}

In Abbildung 5.5 sind die Winkelbereiche bezüglich der Dynamik im Nachbarpolytop \tilde{P} dargestellt. Wie für die Dynamik im Polytop P lassen sich diese Winkelbereiche und Beschränkungen der Längen als Ungleichungen mithilfe des zeitdiskreten Gra-

dienten (5.14) bezüglich der Dynamik im Polytop \tilde{P} schreiben:

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V}_a : \underline{n}_{F_a}^T \left(\left(\tilde{\Phi}_R - I_n \right) \underline{x}_{v_i} + \tilde{\varphi}_R \right) > 0 \quad (5.23)$$

$$\forall \tilde{\underline{x}}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}}_i \setminus \{ \tilde{F}_a \} : \tilde{\underline{n}}_{F_j}^T \left(\left(\tilde{\Phi}_R - I_n \right) \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \tilde{\varphi}_R \right) \leq 0 \quad (5.24)$$

$$\forall \tilde{\underline{x}}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \tilde{\mathcal{F}}_i : \tilde{\underline{x}}_{v_k} \in \tilde{\mathcal{V}}_j : \tilde{\underline{n}}_{F_j}^T \left(\tilde{\Phi}_R \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \tilde{\varphi}_R - \tilde{\underline{x}}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.25)$$

Die Gleichungen (5.23-5.25) entsprechen dabei den Gleichungen (5.16), (5.17) und (5.22). Im nächsten Abschnitt werden nun abschließend alle Ungleichungen zu einem Ungleichungssystem zusammengefasst.

5.3.6 Das Ungleichungssystem zur Übertrittsregelung

Die Ungleichungen (5.16-5.25) werden in den jeweiligen Ecken der Polytope ausgewertet und hängen alle implizit von der Stellgröße $\underline{u}_k(\underline{x}_k)$ aus Gleichung (5.6) ab, jeweils ausgewertet in den Polytopeckpunkten $\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}$.

Die Stellgröße \underline{u}_k unterliegt bei realen Problemen immer Beschränkungen, die ebenfalls als Ungleichungen

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : -\underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq -\underline{u}_{min}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.26)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq \underline{u}_{max}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.27)$$

dargestellt werden können. Dabei könnten bei Bedarf in jeder Ecke unterschiedliche Beschränkungen der Stellgröße gewählt werden.

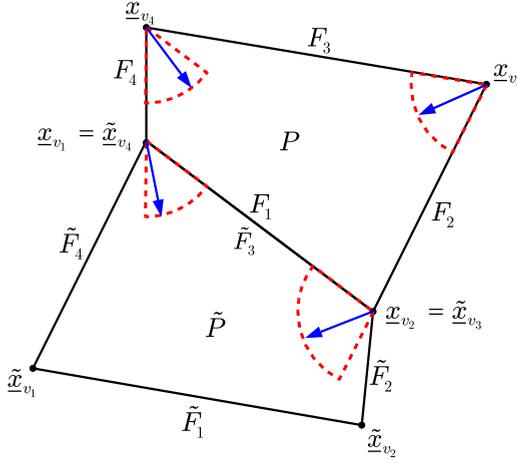


Abbildung 5.7: Bedingungen in einem Polytop

Fasst man nun die einzelnen Ungleichungen (5.16-5.27) zusammen, so ergibt sich folgendes System von Ungleichungen:

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{n}_{F_a}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \varphi_R \right) > 0 \quad (5.28a)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V}_a : \forall F_j \in \mathcal{F}_i \setminus \{F_a\} : \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \varphi_R \right) \leq 0 \quad (5.28b)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \forall F_j \in \mathcal{F}_i : \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \varphi_R \right) \leq 0 \quad (5.28c)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \sum_{\substack{j=1 \\ F_j \in \mathcal{F}_i}}^K \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \varphi_R \right) < 0 \quad (5.28d)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{V}_a : \forall F_j \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_i : \underline{x}_{v_k} \in \mathcal{V}_j :$$

$$\underline{n}_{F_j}^T \left(\Phi_R \underline{x}_{v_i} + \varphi_R - \underline{x}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.28e)$$

$$\forall \tilde{x}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}}_i \setminus \{\tilde{F}_a\} : \tilde{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \tilde{x}_{v_i} + \varphi_R \right) \leq 0 \quad (5.28f)$$

$$\forall \tilde{x}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \tilde{\mathcal{F}}_i : \tilde{x}_{v_k} \in \tilde{\mathcal{V}}_j :$$

$$\tilde{n}_{F_j}^T \left(\Phi_R \tilde{x}_{v_i} + \varphi_R - \tilde{x}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.28g)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V}_a : \underline{n}_{F_a}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \tilde{\varphi}_R \right) > 0 \quad (5.28h)$$

$$\forall \tilde{x}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}}_i \setminus \{\tilde{F}_a\} : \tilde{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \tilde{x}_{v_i} + \tilde{\varphi}_R \right) \leq 0 \quad (5.28i)$$

$$\forall \tilde{\underline{x}}_{v_i} \in \tilde{\mathcal{V}}_a : \forall \tilde{F}_j \in \tilde{\mathcal{F}} \setminus \tilde{\mathcal{F}}_i : \tilde{\underline{x}}_{v_k} \in \tilde{\mathcal{V}}_j : \quad \tilde{\underline{n}}_{F_j}^T \left(\tilde{\Phi}_R \tilde{\underline{x}}_{v_i} + \tilde{\varphi}_R - \tilde{\underline{x}}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.28j)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : -\underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq -\underline{u}_{min}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.28k)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq \underline{u}_{max}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.28l)$$

In Abbildung 5.7 werden diese Ungleichungen an einem zweidimensionalen Beispiel veranschaulicht. Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \{\underline{x}_{v_1}, \underline{x}_{v_2}, \underline{x}_{v_3}, \underline{x}_{v_4}\}, & \tilde{\mathcal{V}} &= \{\tilde{\underline{x}}_{v_1}, \tilde{\underline{x}}_{v_2}, \tilde{\underline{x}}_{v_3}, \tilde{\underline{x}}_{v_4}\}, & \mathcal{V}_a &= \{\underline{x}_{v_1}, \underline{x}_{v_2}\}, \\ \tilde{\mathcal{V}}_a &= \{\tilde{\underline{x}}_{v_3}, \tilde{\underline{x}}_{v_4}\}, & \mathcal{F} &= \{F_1, F_2, F_3, F_4\}, & \mathcal{F}_1 &= \{F_1, F_4\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{F_1, F_2\}, & \mathcal{F}_3 &= \{F_2, F_3\}, & \mathcal{F}_4 &= \{F_3, F_4\}, \\ \tilde{\mathcal{F}} &= \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \tilde{F}_4\}, & \tilde{\mathcal{F}}_1 &= \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_4\}, & \tilde{\mathcal{F}}_2 &= \{\tilde{F}_1, \tilde{F}_2\}, \\ \tilde{\mathcal{F}}_3 &= \{\tilde{F}_2, \tilde{F}_3\}, & \tilde{\mathcal{F}}_4 &= \{\tilde{F}_3, \tilde{F}_4\}, & F_a &= F_1 \text{ und } \tilde{F}_a = \tilde{F}_3. \end{aligned}$$

Die Bedeutungen der Bedingungen (5.28) sind wie folgt:

- (5.28a) Die zeitdiskreten Gradienten in den Polytopecken haben eine bezüglich der Austrittsseite nach außen zeigende Normalkomponente.
- (5.28b) Die zeitdiskreten Gradienten in den Ecken der Austrittsseite weisen keine nach außen zeigende Normalkomponente bezüglich der übrigen angrenzenden Polytopseiten auf.
- (5.28c) Die zeitdiskreten Gradienten in den Ecken, die nicht zur Austrittsseite gehören, besitzen bezüglich der angrenzenden Seitenflächen keine Normalkomponenten, die nach außen zeigen.
- (5.28d) Die Summe der Normalkomponenten bezüglich aller angrenzenden Seiten, in den Ecken, die nicht zur Austrittsseite gehören, zeigen nach innen.
- (5.28e) Die zeitdiskreten Gradienten in den Ecken, die nicht zur Austrittsseite gehören, sind maximal so lang, dass die zugehörigen Folgezustände noch innerhalb des Polytops P liegen¹. Dabei ist \underline{x}_{v_k} eine beliebige Ecke aus \mathcal{V}_j .
- (5.28f) Die zeitdiskreten Gradienten in den Ecken der Austrittsseite (diese entsprechen den Ecken der Eintrittsseite bezüglich des Nachbarpolytops) besitzen keine Normalkomponenten bezüglich der angrenzenden Seiten im Nachbarpolytop, die aus dem Nachbarpolytop herauszeigen.
- (5.28g) Die zeitdiskreten Gradienten in den Ecken der Austrittsseite (diese entsprechen den Ecken der Eintrittsseite bezüglich des Nachbarpolytops) sind maximal so lang, dass die entsprechenden Folgezustände noch im Nachbarpolytop liegen.
- (5.28h) Entspricht der Bedingung (5.28a) unter Verwendung der Dynamik des Nachbarpolytops \tilde{P} .

¹Der Folgezustand der Ecke \underline{x}_{v_4} aus Abbildung 5.7 darf so zum Beispiel nicht über die Seiten F_1 und F_2 hinausragen.

- (5.28i) Entspricht der Bedingung (5.28f) unter Verwendung der Dynamik des Nachbarpolytops \tilde{P} .
- (5.28j) Entspricht der Bedingung (5.28g) unter Verwendung der Dynamik des Nachbarpolytops \tilde{P} .
- (5.28k) Der Stellgrößenvektor ist in jeder Ecke des Polytops nach unten beschränkt.
- (5.28l) Der Stellgrößenvektor ist in jeder Ecke des Polytops nach oben beschränkt.

Diese im Ungleichungssystem (5.28) zusammengefassten Bedingungen müssen sowohl für das ELV- als auch für das VSE-Verfahren erfüllt sein.

Im nächsten Abschnitt werden die Regelungen zum Gebietsübertritt im Simplex vorgestellt. Das Simplex stellt dabei einen Spezialfall des Polytops dar.

5.4 Regelungen zum Gebietsübertritt im Simplex

Im Folgenden wird der Gebietsübertritt bei simplexförmigen Gebieten untersucht. In Abbildung 5.8 sind das Simplex P und das zu erreichende Nachbarsimplex \tilde{P} dargestellt.

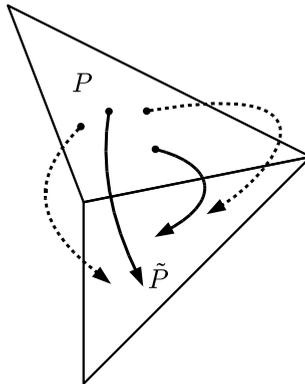


Abbildung 5.8: Erlaubte (—) und nicht erlaubte (- - -) Trajektorien beim Simplexübertritt

Im Weiteren werden zur Lösung der Regelungsaufgaben Optimierungsalgorithmen zur numerischen Bestimmung einer Lösung für das Ungleichungssystem verwendet. Die Optimierungsverfahren benötigen hierzu ein Gütemaß, das minimiert werden soll. Mögliche Gütemaße werden nun vorgestellt.

5.4.1 Gütemaße zur numerischen Bestimmung einer Lösung durch Optimierung

Die Lösung von Ungleichungssystemen soll für den Reglerentwurf numerisch erfolgen. Besitzen Systeme mehr als genau eine Lösung, dann gilt es, eine Lösung aus der Lösungsmenge auszuwählen. Diese Wahl wird durch die Minimierung eines Gütemaßes festgelegt. Dazu werden ein lineares und ein nichtlineares Gütemaß angegeben.

Lineares Gütemaß

Das lineare Gütemaß

$$J = \sum_{i=1}^{n+1} \underline{n}_{F_a}^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}} \quad (5.29)$$

stellt die Summe der Komponenten der Dynamik in den Ecken des Simplex dar, die in Richtung des Normalenvektors der Austrittsseite \underline{n}_{F_a} aus dem Simplex P heraus zeigen. Setzt man in Gleichung (5.29) den Zusammenhang aus Gleichung (5.4) ein, so erhält man

$$J = \sum_{i=1}^{n+1} \underline{n}_{F_a}^T ((\Phi - I)\underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi}) \quad (5.30)$$

mit $\underline{H} = [\underline{h}_1 \ \cdots \ \underline{h}_p]$. Die Vektoren \underline{h}_i , $i = 1, \dots, p$ stellen die Spaltenvektoren der Matrix \underline{H} dar. Ersetzt man nun die freien Parameter $\underline{u}_k(\underline{x}_{v_i})$ durch den Parameter $\underline{\gamma}^T = [\underline{u}_k^T(\underline{x}_{v_1}) \ \cdots \ \underline{u}_k^T(\underline{x}_{v_{n+1}})]$, dann erhält man ein lineares Gütemaß der Form

$$J(\underline{\gamma}) = \underline{f}^T \underline{\gamma} + c. \quad (5.31)$$

Der Vektor \underline{f} berechnet sich mit Gleichung (5.30) zu

$$\underline{f} = \left[\begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \underline{n}_{F_a}^T \underline{h}_1 \\ \vdots \\ \underline{n}_{F_a}^T \underline{h}_p \end{array} \right\} \text{Ecke } 1 \\ \vdots \\ \left. \begin{array}{c} \underline{n}_{F_a}^T \underline{h}_1 \\ \vdots \\ \underline{n}_{F_a}^T \underline{h}_p \end{array} \right\} \text{Ecke } n+1 \end{array} \right],$$

wobei die p einzelnen Dimensionen der Stellgröße in den Ecken $\underline{u}_k(\underline{x}_{v_i})$ gleich gewichtet werden. Mit geschweiften Klammern sind in \underline{f} die Gewichtungsfaktoren grup-

piert, die zu einer Ecke gehören. Es wird dabei nur die Ecke '1' und die Ecke 'n+1' dargestellt.

Für eine eindimensionale Eingangsgröße u_k würde die Stellgröße in jeder Ecke des Simplex \underline{x}_{v_i} , $i = 1, \dots, n + 1$ mit dem Faktor $\underline{n}_{F_a}^T \underline{h}$ gewichtet werden. Bei überschaubaren Problemstellungen kann es natürlich auch interessant sein, die Gewichtungsfaktoren im Vektor \underline{f} individuell festzulegen, wie es zum Beispiel in Abschnitt 6.2 der Fall ist.

Nichtlineares Gütemaß

Die Normalkomponente der Dynamik bezogen auf die Austrittsseite kann bei insgesamt möglichst kleinen Stellgrößen durch das nichtlineare Gütemaß

$$J = \sum_{i=1}^{n+1} \underline{u}(\underline{x}_{v_i})^T \underline{Q}_u \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) + \frac{Q_g}{\underline{n}_{F_a}^T \left((\underline{\Phi}_R - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) + 1} \quad (5.32)$$

maximiert werden. Das Gütemaß muss zu diesem Zweck minimiert werden, da die Normalkomponente reziprok in das Gütemaß eingeht. Es ist dabei wiederum von den Stellgrößen $\underline{u}(\underline{x}_{v_i})$ in den Ecken \underline{x}_{v_i} , $i = 1, \dots, n + 1$ abhängig.

Es stehen nun ein lineares und ein nichtlineares Gütemaß für die numerische Lösung der Ungleichungssysteme durch Optimierungsalgorithmen zur Verfügung.

Im nächsten Abschnitt wird kurz auf die Wahl von Ruhelagen eingegangen, da diese beim ELV-Verfahren und bei der Endgebietsregelung eine große Rolle spielen.

5.4.2 Allgemeine Aussagen über Ruhelagen

Die allgemeinen Aussagen über Ruhelagen werden im Folgenden zunächst am unregulierten System getroffen, um dann Aussagen über das geregelte System zu ermöglichen.

Ruhelagen des unregulierten Systems

Löst man die im Simplex P definierte affine Zustandsdifferenzgleichung (5.1) für $\underline{x}_{\text{Ruhe}} = \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k$ und eine beliebige konstante Stellgröße $\underline{u}_{\text{Ruhe}} = \underline{u}_k$, ergibt sich die Gleichung

$$(\underline{I}_n - \underline{\Phi}) \underline{x}_{\text{Ruhe}} = \underline{H} \underline{u}_{\text{Ruhe}} + \underline{\varphi}. \quad (5.33)$$

Wenn $(\underline{I}_n - \underline{\Phi})$ nicht invertierbar ist, dann gibt es entweder keine oder unendlich viele Lösungen. Dies tritt zum Beispiel bei integrierenden Systemen auf. Es gibt dabei

keine Lösung, wenn die Stellgröße nicht verschwindet, da der Wert der Zustandsgrößen durch die Integration immer weiter anwächst. Es gibt unendlich viele Lösungen, wenn $\underline{u}_{\text{Ruhe}} \equiv \underline{0}$ ist und der Integrator damit auf dem aktuellen Wert verharrt.

Ist $(\underline{I}_n - \underline{\Phi})$ invertierbar, so kann die Ruhelage bestimmt werden zu

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}} = (\underline{I}_n - \underline{\Phi})^{-1} (\underline{H}\underline{u}_{\text{Ruhe}} + \underline{\varphi}). \quad (5.34)$$

Bei $p = n$ ist der Bereich möglicher Ruhelagen mit dem Zustandsraum identisch. Für $p < n$ reduziert sich der Bereich möglicher Ruhelagen auf eine lineare Mannigfaltigkeit im Zustandsraum mit der Dimension p . Dies soll an einem kleinen Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 5.1 (Mannigfaltigkeiten im dreidimensionalen Zustandsraum):

Ist die Dimension des Zustandsraums $n = 3$ und die Dimension des Eingangsraums $p = 3$, dann stellt das ganze Volumen des Zustandsraums den Bereich möglicher Ruhelagen dar.

Betrachtet man das gleiche System mit $p = 2$, so beschränkt sich der Bereich möglicher Ruhelagen auf eine Ebene im Raum \mathbb{R}^3 .

Wird abschließend $p = 1$ betrachtet, dann kann nur noch eine Gerade im Raum als Bereich für mögliche Ruhelagen angegeben werden.

Diese Mannigfaltigkeiten besitzen aber auf Grund der beschränkten Stellgrößen² $\underline{u}_{\min} \leq \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq \underline{u}_{\max}$, $i = 1, \dots, n + 1$ nur eine begrenzte Ausdehnung.

Ruhelagen des geregelten Systems

Die Ruhelage des geregelten Systems lässt sich nun durch Einsetzen der Gleichung (5.6) in Gleichung (5.34) zu

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}} = (\underline{I} - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})^{-1} (\underline{H}\underline{\varphi}_u + \underline{\varphi}) \quad (5.35)$$

berechnen.

In Abschnitt 4.3.3 wurde darauf hingewiesen, dass die Ruhelage des geregelten Systems einer möglichen Ruhelage des unregulierten Systems entspricht, wenn das affine Regelgesetz nach Gleichung (3.3) die Stellgrößenbeschränkungen einhält [Klo07].

Die notwendige Bedingung 4.1 kann deshalb insbesondere für eine effektive Verarbeitung der Algorithmen verwendet werden.

²Im Vergleich zu den beliebigen Beschränkungen der Stellgrößen in den verschiedenen Ecken des Simplex in Abschnitt 5.3.6 wird für die Untersuchung der Ruhelage der Einfachheit halber eine identische Beschränkung der Stellgrößen in allen Ecken betrachtet.

Schneidet die Mannigfaltigkeit der möglichen Ruhelagen des ungerichteten Systems das Polytop bzw. Simplex mit der gewünschten Ruhelage nicht, dann braucht die aufwändige Berechnung der Reglerparameter erst gar nicht durchgeführt werden, da klar ist, dass diese nicht existieren.

5.4.3 Vorgabe von Stellgrößen in den Eckpunkten (VSE)

In Abbildung 5.9 sind für ein zweidimensionales Beispiel gestrichelt die Winkelbereiche eingezeichnet, die sich aus den Ungleichungen (5.28) ergeben.

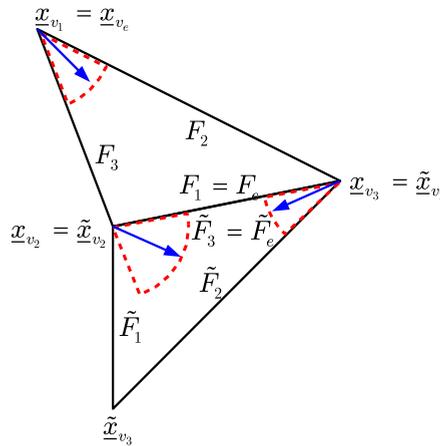


Abbildung 5.9: Zugelassene Bereiche für die Gradienten des geregelten Systems für den Simplexübertritt

Alle diese Ungleichungen sind von der Stellgröße $\underline{u}(x_{v_i})$ abhängig, ausgewertet in den Eckpunkten

$$\underline{x}_{v_i}, \quad i = 1, \dots, n + 1$$

des Simplex. Dies wird deutlich, wenn man die Gleichung (5.4) betrachtet.

Das Ungleichungssystem kann so leicht zu

$$\underline{A} \underline{v} \leq \underline{b} \quad (5.36)$$

mit

$$\underline{v}^T = \left[\underline{u}^T(x_{v_1}), \dots, \underline{u}^T(x_{v_{n+1}}) \right] \quad (5.37)$$

vereinfacht werden, wenn zusätzlich die drei Ungleichungen (5.28a), (5.28d) und (5.28h) durch Addition oder Subtraktion der Rechenungenauigkeit³ ϵ um das Gleich-

³ ϵ entspricht dabei der Rechenungenauigkeit des zur Lösung eingesetzten Rechners.

heitszeichen erweitert werden. Mithilfe eines Optimierungsalgorithmus wird eine, bezogen auf ein Gütemaß aus Abschnitt 5.4.1, optimale Lösung \underline{v}^* des Ungleichungssystems (5.36) bestimmt.

Die eingezeichneten Pfeile in Abbildung 5.9 stellen eine mögliche Lösung \underline{v}^* des Ungleichungssystems dar.

Unter Verwendung der Gleichung (5.6) ergibt sich für jede Ecke die folgende Gleichungsbeziehung

$$\underline{u}(\underline{x}_{v_i}) = -\underline{R}\underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_u, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (5.38)$$

Die Summe auf der rechten Seite der Gleichungen lässt sich als Skalarprodukt zweier Vektoren ausdrücken. Nach dem Transponieren der Gleichungen ergibt sich

$$\underline{u}(\underline{x}_{v_i})^T = \left[\underline{x}_{v_i}^T \quad 1 \right] \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n+1. \quad (5.39)$$

Fasst man nun diese $n+1$ Gleichungen in Vektor-Matrix-Notation zusammen, ergibt sich folgender Zusammenhang

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix}}_{\underline{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_{n+1}}^T & 1 \end{bmatrix}}_{(\underline{T}_B^T)^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix}}_{\underline{C}_R}. \quad (5.40)$$

Die Matrix $(\underline{T}_B^T)^{-1}$ ist immer invertierbar, wenn das zugrunde liegende Simplex volldimensional ist. Die Bezeichnung $(\underline{T}_B^T)^{-1}$ rührt daher, dass es sich dabei um die Inverse der transponierten Matrix der baryzentrischen Koordinatentransformation aus Gleichung (2.27) handelt.

Die Parameter \underline{C}_R der Regelung lassen sich dann eindeutig bestimmen zu

$$\underline{C}_R = \underline{T}_B^T \underline{U}. \quad (5.41)$$

An einem Beispiel soll nun der Reglerentwurf verdeutlicht werden.

Beispiel 5.2 (Reglerentwurf mit dem VSE-Verfahren):

Gegeben sind die Simplexe P und \tilde{P} aus Abbildung 5.8. Für die Dynamik in Simplex P gelte

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,01 \\ 0,01 & 0,85 \end{bmatrix}, \quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

und für die Dynamik im Nachbarsimplex \tilde{P} gilt

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,01 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}, \tilde{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Der mit dem VSE-Verfahren bestimmte Regler ergibt sich zu

$$\underline{r}^T = [0,18 \quad -0,32]$$

mit dem affinen Anteil

$$\varphi_u = -0,12.$$

In diesem Beispiel wird zur Lösung des Ungleichungssystems (5.28) der Einfachheit halber ein lineares Programm mit dem Gütemaß $J_{lin} = \underline{f}\underline{v}$ aus Gleichung (5.41) verwendet, wobei der Vektor \underline{v} aus der Matrix \underline{U} durch Umsortieren erhalten wird. Für die Parameter des Gütemaßes nach Gleichung (5.32) gilt $f = [0 \ 0 \ 1]$ und $c = 0$, um eine mögliche Lösung aus dem Lösungsraum zu bestimmen.

In Abbildung 5.10 sind beide Simplexe dargestellt. In Abbildung 5.10(a) ist die ungerichtete Dynamik eingezeichnet, im Vergleich dazu ist die gerichtete Dynamik in Abbildung 5.10(b) veranschaulicht.

Es ist deutlich erkennbar, dass die zeitdiskreten Gradienten im ungerichteten System das Simplex über mehrere Seiten verlassen, während im gerichteten System Trajektorien, die im Simplex P starten, gezielt in das Nachbarsimplex \tilde{P} überführt werden. Dabei werden die Dynamik im Simplex P und die Dynamik im Nachbarsimplex \tilde{P} berücksichtigt. Die Pfeile, welche die Dynamik des Nachbarsimplex repräsentieren, starten dabei nur auf der gemeinsamen Seitenfläche⁴ F_a .

5.4.4 Verfahren zur Eigenwert- und Linkseigenvektor-Vorgabe (ELV)

Dieses Verfahren nutzt Grenzen im Zustandsraum, die durch die Dynamik eines autonomen Systems gegeben sind. Diese Grenzen werden im Folgenden *inhärente Systemgrenzen* genannt.

Inhärente Systemgrenzen bei autonomen Systemen

In Abschnitt 3.3.5 wurden die inhärenten Systemgrenzen bei zeitkontinuierlichen Systemen bereits eingeführt.

⁴Zur Bezeichnung siehe Abbildung 5.9.

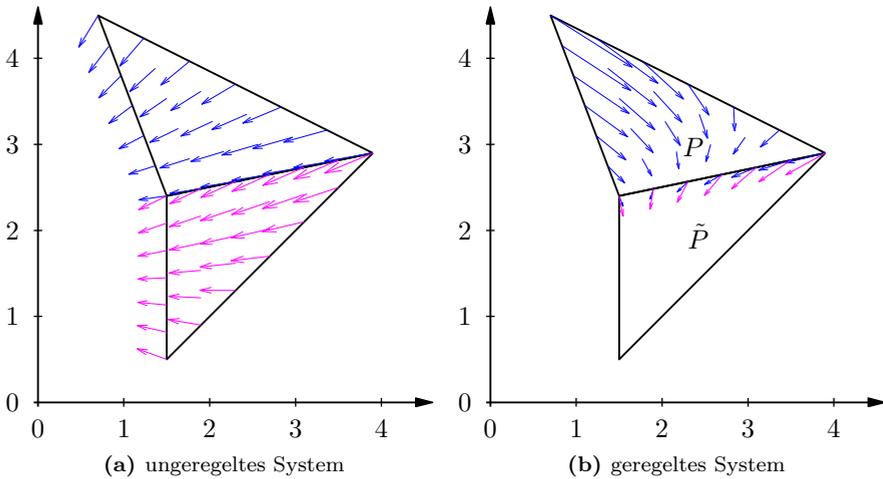


Abbildung 5.10: Entwurf einer Regelung durch das VSE-Verfahren

Für ein zeitdiskretes autonomes System mit reellen und positiven Eigenwerten wird in Anhang B.3 gezeigt, dass dieses System ebenfalls inhärente Systemgrenzen besitzt, deren Normalenvektoren mit den Linkseigenvektoren des Systems übereinstimmen.

In Abbildung 5.11(a) ist ein stabiles autonomes System dargestellt. Die Dynamik des Systems zur Ruhelage hin ist mithilfe von Pfeilen gekennzeichnet.

Es handelt sich um ein System zweiter Ordnung, folglich existieren zwei Eigenwerte mit zugehörigen Linkseigenvektoren und den inhärenten Systemgrenzen I_1 und I_2 . In der Abbildung 5.11 genügen die Eigenwerte der Forderung, dass sie stabil und nicht identisch sind. Die inhärenten Systemgrenzen schneiden sich in der Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ des Systems. Die inhärenten Systemgrenzen sind in den Abbildungen 5.11(b) und 5.11(a) mit durchgezogenen Linien repräsentiert.

Eine Trajektorie, die nicht auf der inhärenten Systemgrenze startet, wird unter Voraussetzung einer stabilen Systemdynamik auf die Ruhelage zustreben. Die inhärenten Systemgrenzen werden von dieser Trajektorie aber nie überschritten. Ein anschaulicher Beweis findet sich dazu in Anhang B.3.1. Startet die Trajektorie auf der inhärenten Systemgrenze, so verlässt die Trajektorie diese nicht mehr und bewegt sich auf ihr in die Ruhelage des Systems.

In Abbildung 5.11(b) sind mehrere ausgewählte Trajektorien dargestellt. Wie aus Abbildung 5.11(a) schon zu erwarten ist, bewegen sich die Trajektorien aufgrund der stabilen Systemdynamik auf die Ruhelage des Systems $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ zu.

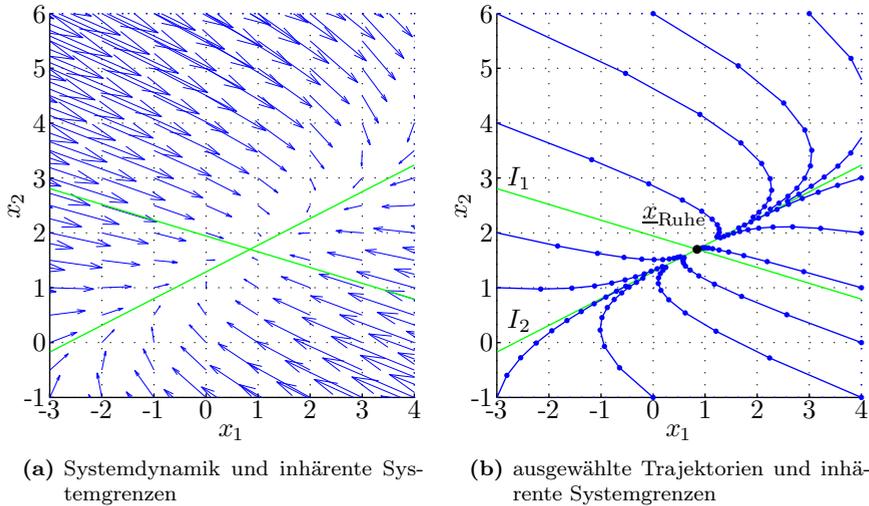


Abbildung 5.11: Inhärente Systemgrenzen

Mithilfe der inhärenten Systemgrenzen wird nun im nächsten Abschnitt die zugrunde liegende Idee des Reglerentwurfs nach dem ELV-Verfahren präsentiert.

Idee der Regelung mit dem ELV-Verfahren

In Abbildung 5.12 werden im Weiteren die Trajektorien in dem von den Systemgrenzen I_1 und I_2 gebildeten oberen Quadranten betrachtet. Um die Idee der Regelung zu veranschaulichen, wurde ein Simplex P und ein Nachbarsimplex \tilde{P} eingezeichnet.

Kommt nun die Ruhelage des Systems im Nachbarsimplex zu liegen und die inhärenten Systemgrenzen werden durch die Ecken des Simplex P gelegt, so erkennt man anhand dieses einfachen Beispiels, wie der Gebietsübertritt bewerkstelligt werden kann.

In Abbildung 5.12(a) verlässt nur noch eine einzige der eingezeichneten Trajektorien das Simplex P auf der falschen Seite. Dies bedeutet, dass der Gebietsübertritt nicht für alle möglichen Startpunkte einer Trajektorie im Simplex P erzielt werden kann.

In Abbildung 5.12(b) wurde die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ und die Systemdynamik verändert. Nach dieser Veränderung verlassen alle eingezeichneten Trajektorien das Simplex auf der Seite, die zum Nachbarsimplex \tilde{P} angrenzt.

Es stellt sich die Frage, ob es möglich ist, ein Kriterium anzugeben, das eine Aussage darüber macht, ob alle im Simplex P startenden Trajektorien, dieses nur über die

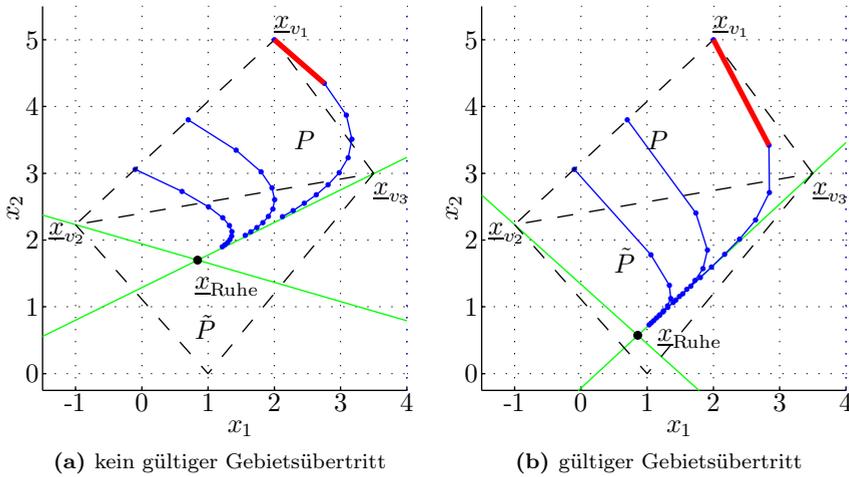


Abbildung 5.12: Gebietsübertritt mit inhärenten Systemgrenzen

gemeinsame Seite hin zum Nachbarsimplex \tilde{P} verlassen, ohne dabei unendlich viele Trajektorien überprüfen zu müssen.

Der zeitdiskrete Gradient $(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k)|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_1}}$, in der Ecke \underline{x}_{v_1} ausgewertet, zeigt in Abbildung 5.12(a) aus dem Simplex heraus, während er in Abbildung 5.12(b) in das Simplex zeigt. Betrachtet man nun die übrig gebliebenen Ecken \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_3} des Simplex, so liegen diese auf den inhärenten Systemgrenzen.

In Abbildung 5.13 sind die zwei Fälle aus Abbildung 5.12 nochmals ohne Trajektorien wiedergegeben.

Die zeitdiskreten Gradienten sind in den Ecken \underline{x}_{v_1} , \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_3} mit Pfeilen eingezeichnet. In den Ecken \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_3} liegt der zeitdiskrete Gradient jeweils auf der inhärenten Systemgrenze, die durch diese Ecke verläuft.

Um nun zu prüfen, ob der zeitdiskrete Gradient in das Simplex zeigt oder nicht, kann man ebenso wie in Abschnitt 5.3.6 Bedingungen aufstellen.

In der Ecke \underline{x}_{v_1} ist nun der gültige Winkelbereich eingezeichnet, der aus den Bedingungen (5.28) resultiert, in den der zeitdiskrete Gradient zeigen muss, wenn dieser in der Ecke \underline{x}_{v_1} ausgewertet wird.

In Abbildung 5.13(a) liegt der Pfeil, der den zeitdiskreten Gradienten repräsentiert, nicht im erlaubten Bereich; ein gültiger Gebietsübertritt ist dann mit dieser Dynamik und Lage der Ruhelage im Simplex nicht erreichbar. In Abbildung 5.13(b) liegt der Pfeil im gültigen Bereich, damit ist ein gültiger Gebietsübertritt für jede mögliche Trajektorie gegeben.

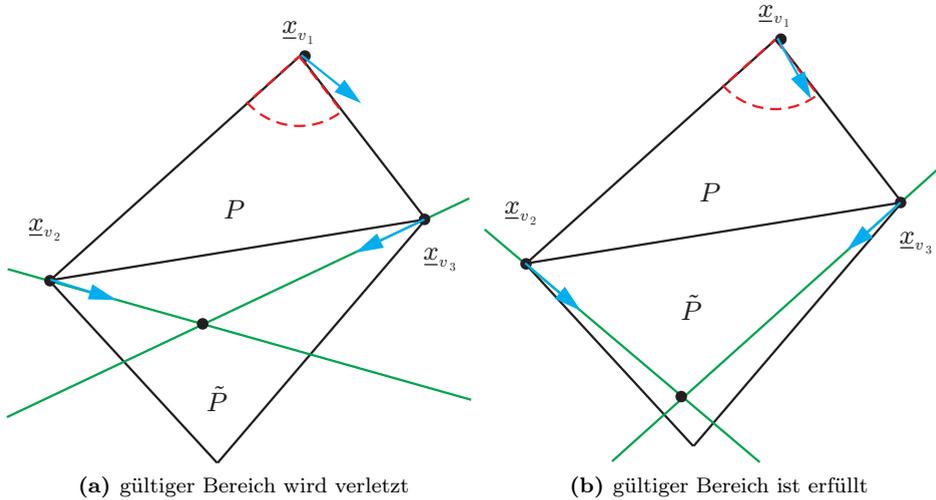


Abbildung 5.13: Gebietsübertritt mit inhärenten Systemgrenzen und zu erfüllendem Winkelbereich

Im Folgenden werden allgemein gültige Berechnungsvorschriften für die Reglerparameter hergeleitet.

Berechnung der Reglerparameter

Die Normalenvektoren der inhärenten Systemgrenzen fallen mit den Linkseigenvektoren des Systems zusammen. Die n Linkseigenvektoren $\underline{w}_{R,i}^T$ des geregelten Systems sind definiert durch die Gleichungen

$$\lambda_{R,i} \underline{w}_{R,i}^T = \underline{w}_{R,i}^T \Phi_R \quad \text{für } i = 1, \dots, n. \quad (5.42)$$

Die Systemgleichungen werden in der Form angenommen, dass die ersten p Eigenwerte und ihre zugehörigen Linkseigenvektoren vorgegeben werden, wobei mit p die Dimension des Eingangsraums bezeichnet wird. Fällt die Wahl bei der Vorgabe von Eigenwerten auf Eigenwerte, die nicht die ersten p Eigenwerte der Systemmatrix sind, so sind die Systemgleichungen durch zeilenweises Vertauschen in die oben geforderte Form zu bringen.

Allgemein lässt sich die Matrix der Linkseigenvektoren des geregelten Systems schreiben als

$$\underline{W}_R = \begin{bmatrix} \underline{w}_{R,1}^T \\ \vdots \\ \underline{w}_{R,p}^T \\ \underline{w}_{R,p+1}^T \\ \vdots \\ \underline{w}_{R,n}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{W}_{R,p} \\ \underline{W}_{R,n-p} \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

wobei im Fall $n = p$ die Untermatrix $\underline{W}_{R,n-p}$ verschwindet und

$$\underline{W}_R = \begin{bmatrix} \underline{w}_{R,1}^T \\ \vdots \\ \underline{w}_{R,p}^T \end{bmatrix} = \underline{W}_{R,p} \quad (5.44)$$

gilt.

Zusammengefasst für alle p Eigenwerte und Linkseigenvektoren ergibt sich aus den Gleichungen (5.42) die Matrixgleichung

$$\underline{\Lambda}_{R,p} \underline{W}_{R,p} = \underline{W}_{R,p} \underline{\Phi}_R \quad (5.45)$$

mit

$$\underline{\Lambda}_{R,p} = \begin{bmatrix} \lambda_{R,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{R,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{R,p} \end{bmatrix}.$$

Nach Einsetzen von $\underline{\Phi}_R = \underline{\Phi} - \underline{H} \underline{R}$ und Umstellen ergibt sich die Gleichung

$$\underline{W}_{R,p} \underline{H} \underline{R} = \underline{W}_{R,p} \underline{\Phi} - \underline{\Lambda}_{R,p} \underline{W}_{R,p}. \quad (5.46)$$

Um die Reglermatrix \underline{R} bestimmen zu können, muss nach \underline{R} aufgelöst werden. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $\underline{W}_{R,p} \underline{H}$ invertierbar ist. Dies ist gleich bedeutend mit der Forderung, dass $\det(\underline{W}_{R,p} \underline{H}) \neq 0$ gilt. Im Folgenden sollen die zwei Fälle $p = n$ und $p < n$ unterschieden werden. Für $p = n$ müssen unabhängige Linkseigenvektoren vorgegeben werden, damit das Regelgesetz berechnet werden kann. Für $p < n$ können nur p Linkseigenvektoren vorgegeben werden, über das Verhalten der nicht vorgebbaren Linkseigenvektoren und den nicht vorgebbaren Eigenwerten kann

keine Aussage gemacht werden.

Anmerkung 5.1 (Nicht vorgebbare Eigenwerte und Linkseigenvektoren):

In [Nen01] wurde bei der Vorgabe von Linkseigenvektoren für den Fall $p < n$ gezeigt, dass die $n - p$ nicht vorgebbaren Eigenwerte und Linkseigenvektoren sich unkontrolliert verändern können. Dies kann sogar zu instabilen Eigenwerten führen.

Zusätzlich zur geforderten Berechenbarkeit der Reglermatrix R müssen für beide Fälle die Bedingungen (5.28) nach Einsetzen des affinen Regelgesetzes (3.3) und der berechneten Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ für beide Regelungsaufgaben nach den Definitionen 5.1 und 5.2 erfüllt sein.

Für die Berechenbarkeit der Rückführmatrix kann Folgendes festgehalten werden:

$p = n$: Die Matrizen $\underline{W}_{R,p}$ und \underline{H} sind für den Fall $n = p$ quadratisch. Es folgt daraus, dass $\det(\underline{W}_{R,p} \underline{H}) = \det(\underline{W}_{R,p}) \cdot \det(\underline{H}) \neq 0$ gilt (vgl. [ZF92]). Für den Entwurf wird gefordert, dass die p Linkseigenvektoren für den Fall $p = n$ linear unabhängig vorgegeben werden. Dies führt auf $\det(\underline{W}_{R,p}) \neq 0$. Besitzt die Matrix \underline{H} Höchststrang p , dann wird die Forderung $\det(\underline{H}) \neq 0$ immer erfüllt. Besitzt die Matrix \underline{H} keinen Höchststrang, dann kann unter der ausschließlichen Berücksichtigung relevanter Stellgrößen eine neue Matrix \underline{H}^* mit niedrigerem Rang $p^* < p$ erzielt werden, die ihrerseits immer den Höchststrang p^* besitzt. Muss der Rang der Matrix von p auf p^* erniedrigt werden, so gilt der nächste betrachtete Fall $p < n$.

$p < n$: Für den Fall $p < n$ besitzt die Matrix $\underline{W}_{R,p}$ die Dimension $p \times n$ und die Matrix \underline{H} die Dimension $n \times p$. Eine Prüfung der Invertierbarkeit muss jetzt direkt anhand der Matrix $\det(\underline{W}_{R,p} \underline{H})$ erfolgen. Stehen die Vektoren der Eingangsmatrix \underline{H} und die Linkseigenvektoren $\underline{W}_{R,p}$ sämtlich aufeinander senkrecht, dann existiert die Inverse der Matrix $\underline{W}_{R,p} \underline{H}$ sicher nicht, da die Matrix dann eine reine Nullmatrix mit der Dimension $p \times p$ darstellt, deren Determinante immer Null ist.

Kann die Forderung $\det(\underline{W}_{R,p} \underline{H}) \neq 0$ eingehalten werden, dann ergibt sich das Rückführgesetz \underline{R} zu

$$\underline{R} = (\underline{W}_{R,p} \underline{H})^{-1} (\underline{W}_{R,p} \underline{\Phi} - \underline{\Lambda}_R \underline{W}_{R,p}) . \quad (5.47)$$

Die Berechnung für $\underline{\varphi}_u$ lässt sich durch Einsetzen von Gleichung (5.6) in Gleichung (5.1) durchführen, welche

$$\underline{x}_{k+1} = (\underline{\Phi} - \underline{H} \underline{R}) \underline{x}_k + \underline{H} \underline{\varphi}_u + \underline{\varphi} \quad (5.48)$$

ergibt. Setzt man nun $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k = \underline{x}_{\text{Ruhe}}$ für die Ruhelage ein, dann folgt

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}} = (\underline{\Phi} - \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} + \underline{H}\underline{\varphi}_u + \underline{\varphi}. \quad (5.49)$$

Das Auflösen dieser Gleichung nach $\underline{H}\underline{\varphi}_u$ ergibt

$$\underline{H}\underline{\varphi}_u = (\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}. \quad (5.50)$$

Für $p = n$ wird vorausgesetzt, dass \underline{H} regulär ist und $\underline{\varphi}_u$ leicht zu

$$\underline{\varphi}_u = \underline{H}^{-1}((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}) \quad (5.51)$$

berechnet werden kann.

Für $p < n$ ist \underline{H} keine quadratische Matrix. Wird die Gleichung (5.50) mit \underline{H}^T von links multipliziert erhält man

$$\underline{H}^T \underline{H} \underline{\varphi}_u = \underline{H}^T ((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}). \quad (5.52)$$

Daraus lässt sich $\underline{\varphi}_u$ zu

$$\underline{\varphi}_u = \left(\underline{H}^T \underline{H} \right)^{-1} \underline{H}^T ((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}) \quad (5.53)$$

bestimmen. Die Gleichung (5.53) stellt dabei die allgemeinere Lösung dar, da diese leicht in die Form der Gleichung (5.51) überführt werden kann. Für $n = p$ gilt $(\underline{H}^T \underline{H})^{-1} \underline{H}^T = \underline{H}^{-1}$.

Wird $\underline{\varphi}_u$ für eine Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ berechnet, die das System nicht einnehmen kann, die Gleichung (5.50) also nicht gelöst wird, dann liefert die Berechnung der Pseudoinversen [Fö94] in $\underline{\varphi}_u$ eine Lösung für einnehmbare Ruhelagen in der Nähe der verlangten Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$, die den Wert

$$\left(\underline{H}\underline{\varphi}_u - ((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}) \right)^T \left(\underline{H}\underline{\varphi}_u - ((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}) \right) \quad (5.54)$$

minimiert.

Die Parameter des affinen Regelungsgesetzes nochmals zusammengefasst ergeben dann

$$\underline{R} = (\underline{W}_{\text{R},p} \underline{H})^{-1} (\underline{W}_{\text{R},p} \underline{\Phi} - \underline{\Lambda}_{\text{R},p} \underline{W}_{\text{R}}), \quad (5.55a)$$

$$\underline{\varphi}_u = \left(\underline{H}^T \underline{H} \right)^{-1} \underline{H}^T ((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi}). \quad (5.55b)$$

Für die Berechnung der Reglerparameter müssen die Ruhelage, die Lage der inhärenten Systemgrenzen und die Eigenwerte der geregelten Dynamik so bestimmt werden, dass die Bedingungen (5.28) erfüllt werden.

Schritte beim Entwurf einer Regelung basierend auf inhärenten Systemgrenzen

Die folgenden Schritte sind beim Entwurf einer Regelung durchzuführen:

- Wahl der Ruhelage
- Wahl der Lage der inhärenten Systemgrenzen durch die Ruhelage
- Wahl der Eigenwerte

Sind die Ruhelage des Systems, die Lage der inhärenten Systemgrenzen und die Eigenwerte bekannt, so können daraus leicht die Reglerparameter bestimmt werden.

Erst wenn die Bedingungen (5.28) nach Einsetzen des Regelgesetzes (3.3) und der gefundenen Reglerparameter noch erfüllt sind, hat man einen gültigen Regler gefunden, der die beiden Regelungsaufgaben nach den Definitionen 5.1 und 5.2 erfüllt. Für den Fall $p < n$ können sich die nicht vorgebbaren Linkseigenvektoren und Eigenwerte, wie in Anmerkung 5.1 angegeben, beliebig verändern. Im Allgemeinen werden geregelte Systeme, bei denen Eigenwerte instabil werden, nicht mehr in der Lage sein die Bedingungen (5.28) zu erfüllen. Die Stabilität des geregelten Systems wird, bezogen auf ein spezielles Simplex, nicht gefordert, wenn dieses Simplex verlassen werden soll. Das Einhalten der Bedingungen (5.28) muss jedoch immer gewährleistet sein.

Im Folgenden werden diese Schritte ausführlich diskutiert.

Wahl der Ruhelage

Bei der Wahl der Ruhelage beim ELV-Verfahren ist zusätzlich zu den Erläuterungen aus Abschnitt 5.4.2 darauf zu achten, dass die gewünschte Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ auch vom System einnehmbar ist, da dann die Gleichung (5.50) exakt gelöst werden kann. Ist die gewünschte Ruhelage nicht vom System einnehmbar, dann wird ein affiner Anteil $\underline{\varphi}_u$ nach Gleichung (5.55b) berechnet, der zwar zu einer realisierbaren Ruhelage führt. Diese kann aber erheblich von der gewünschten Ruhelage abweichen, da die Berechnung der Pseudoinversen lediglich den Wert des Ausdrucks in Gleichung (5.54) minimiert.

Wahl der inhärenten Systemgrenzen

Die Wahl der Systemgrenzen kann nach unterschiedlichen Kriterien erfolgen. Im Folgenden sollen drei Fälle⁵ zur Vorgabe inhärenter Systemgrenzen genauer untersucht werden:

A) Vorgabe inhärenter Systemgrenzen durch Kanten des Simplex:

In Abbildung 5.14(a) sind die Bedingungen bezüglich des Simplex P (5.28a-5.28g, 5.28k, 5.28l) in allen Ecken des Simplex eingezeichnet. Die zu wählende inhärente Systemgrenze muss dabei durch die Ecke \underline{x}_{v_2} so gelegt werden, dass sie innerhalb des eingezeichneten Winkelbereichs bleibt. Ist dies erfüllt, sind damit auch automatisch die Stellgrößenbeschränkungen erfüllt.

Die gewünschte Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ muss sich zum einen auf der Gerade der möglichen Ruhelagen, die in Abbildung 5.14(b) durch eine gestrichelte Gerade eingezeichnet ist, zum anderen muss sie sich im gültigen Winkelbereich der Ecke \underline{x}_{v_2} befinden, welcher in Abbildung 5.14(b) als graue Fläche markiert ist.

Die vorgebbaren p Linkseigenvektoren können so gewählt werden, dass die zugehörigen inhärenten Systemgrenzen durch die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ und jeweils eine Seite einer Simplexseite verlaufen. Die inhärente Systemgrenze verläuft so z.B. im zweidimensionalen Fall in Abbildung 5.14(c) durch die Ecke \underline{x}_{v_2} des Simplex. Im dreidimensionalen Fall verlief die Ebene der inhärenten Systemgrenze durch eine Kante des Simplex, welches ein Tetraeder darstellt.

Für den Übertritt vom Simplex P in das Nachbarsimplex \tilde{P} aus Abbildung 5.14(a) bewegt sich die Trajektorie des Systems in Abbildung 5.14(c) in der Ecke \underline{x}_{v_2} auf der inhärenten Systemgrenze auf die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ zu, falls der zugehörige Eigenwert zu der gewählten inhärenten Systemgrenze stabil ist. Durch die Festlegung der inhärenten Systemgrenze sind die Bedingungen in der Ecke \underline{x}_{v_2} sicher erfüllt. Die Richtung des zeitdiskreten Gradienten ist durch einen Pfeil in Abbildung 5.14(c) gekennzeichnet.

Die vorgebbaren stabilen Eigenwerte werden schließlich so gewählt, dass die verbleibenden Gradientenbedingungen in den Ecken \underline{x}_{v_1} und \underline{x}_{v_3} , die in Abbildung 5.14 ebenfalls als Winkelbereiche dargestellt sind, eingehalten werden. Die Richtungen der zeitdiskreten Gradienten in den Ecken \underline{x}_{v_1} und \underline{x}_{v_3} sind durch Pfeile in der Abbildung 5.14(d) dargestellt. Werden durch die Wahl der frei wählbaren Eigenwerte alle Bedingungen eingehalten, dann können die Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ mittels der Gleichungen (5.55) bestimmt werden.

Nach der Berechnung der Reglerparameter kann nun im letzten Schritt überprüft werden, ob die Bedingungen bezüglich des Nachbarytopps \tilde{P} (5.28h-

⁵Zur Illustration werden hier die Dynamiken aus Beispiel 5.2 verwendet, dabei gilt $p = 1$.

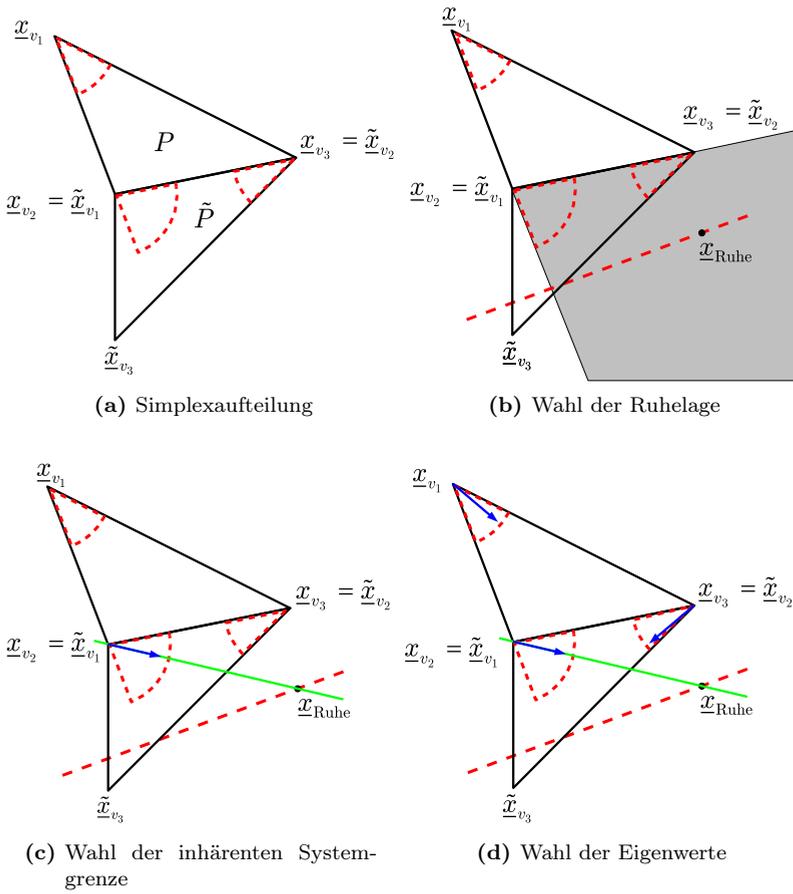


Abbildung 5.14: Entwurf einer Regelung mit dem ELV-Verfahren: Vorgabe der inhärenten Systemgrenze durch eine Simplexecke

5.28j) in den Ecken \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_3} eingehalten werden. Alternativ können hier alle Bedingungen in Gleichung (5.28) überprüft werden.

B) Vorgabe inhärenter Systemgrenzen parallel zu Simplexseiten:

Die vorgebbaren inhärenten Systemgrenzen können auch parallel zu den Simplexseiten gewählt werden, die nicht der Austrittsseite⁶ F_a entsprechen. Dabei wird ausgenutzt, dass parallel zur inhärenten Systemgrenze durch die Ruhelage auch eine inhärente Systemgrenze durch den Anfangszustand verläuft. Dies ist im Anhang B.3.3 näher erläutert.

Die inhärente Systemgrenze durch einen möglichen Anfangszustand ist in Abbildung 5.15(a) dargestellt. In Abbildung 5.15(b) ist nun zusätzlich zur Abbildung 5.15(a) die parallele inhärente Systemgrenze durch die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ eingezeichnet.

Die inhärenten Systemgrenzen werden also zunächst parallel zu verschiedenen frei wählbaren Simplexseiten gelegt, wobei die Austrittsseite selbst nicht als frei wählbar gilt.

Anschließend muss durch die geeignete Wahl der Ruhelage und der Eigenwerte sichergestellt werden, dass alle Gradientenbedingungen erfüllt werden. Dies sind die Bedingungen in den Ecken \underline{x}_{v_1} und \underline{x}_{v_3} des Simplex P und die Bedingungen in den Ecken $\tilde{\underline{x}}_{v_1}$ und $\tilde{\underline{x}}_{v_2}$ des Nachbarsimplex \tilde{P} .

In Abbildung 5.15(b) ist die gewählte Ruhelage definiert durch den Schnittpunkt der Gerade der möglichen Ruhelagen, die gestrichelt skizziert ist, mit der inhärenten Systemgrenze durch die Ecke \underline{x}_{v_2} , deren Richtung parallel zur Simplexseite F_2 und damit fest vorgegeben ist.

In Abbildung 5.15(c) sind mögliche zeitdiskrete Gradienten in den Ecken \underline{x}_{v_1} und \underline{x}_{v_3} eingezeichnet, die alle geforderten Bedingungen durch geeignete Wahl der Eigenwerte einhalten.

Nach der Berechnung der Reglerparameter kann nun im letzten Schritt überprüft werden, ob die Bedingungen bezüglich des Nachbarpolytops \tilde{P} (5.28h-5.28j) in den Ecken \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_3} eingehalten werden. Alternativ können auch hier alle Bedingungen in Gleichung (5.28) überprüft werden.

Beide Vorgehensweisen in A) und B) zur Wahl der inhärenten Systemgrenzen können bei einfachen Systemen bis zur Systemordnung $n = 3$ noch von Hand durchgeführt werden. Nach Wahl der inhärenten Systemgrenzen und der Ruhelage bleiben dann oft nur wenige Eigenwerte übrig, die gewählt werden müssen. Ein Probiervorgehen mit anschließendem Prüfen der Ungleichungen ist hierzu geeignet.

⁶Siehe Abbildung 5.9 für die Bezeichnungen.

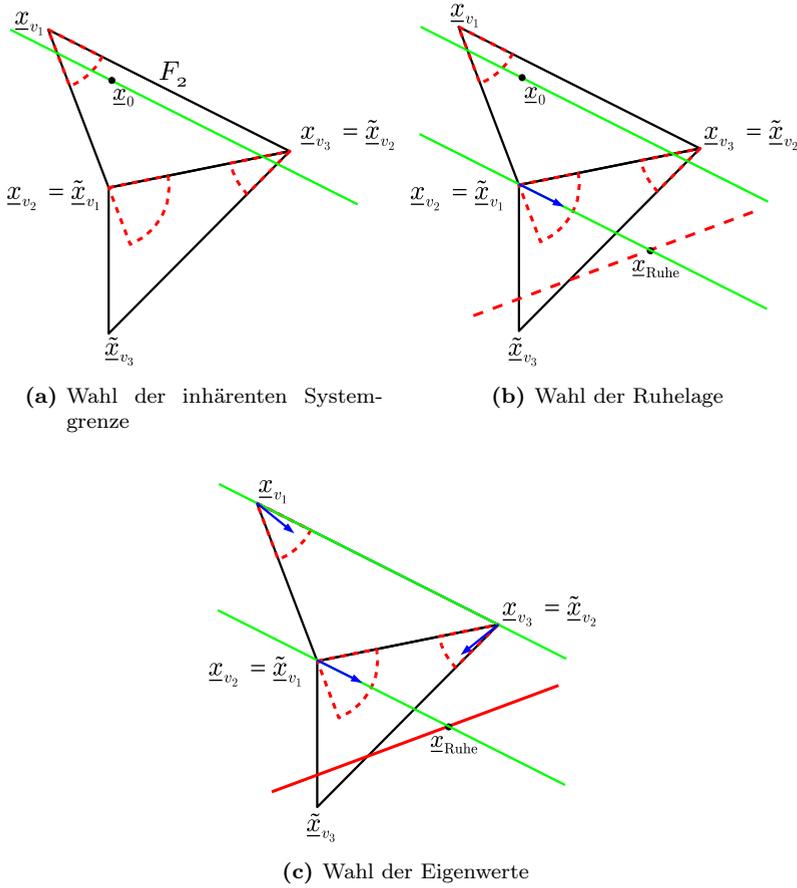


Abbildung 5.15: Entwurf einer Regelung mit dem ELV-Verfahren: Vorgabe der inhärenten Systemgrenze parallel zu einer ausgewählten Simplexseite

Führen die gewählte Ruhelage und die anschließend gewählten inhärenten Systemgrenzen und Eigenwerte zu keinem Erfolg, dann kann durch die Wahl neuer Ruhelagen, inhärenter Systemgrenzen und Eigenwerte das Verfahren aus A) oder B) so lange wiederholt werden, bis sich entweder der Erfolg einstellt oder eine maximale Anzahl von Iterationen durchlaufen wurde.

Um schnell die Einhaltung aller Gradientenbedingungen, vor allem die der Dynamik im Nachbarsimplex \bar{P} überprüfen zu können, bietet es sich besonders im Hinblick auf mehrere durchzuführende Iterationen an, den Entwurf am Rechner durchführen zu lassen. Ein rechnerbasierter Entwurf eröffnet darüber hinaus die Möglichkeit, die Reglerparameter direkt durch eine Optimierung zu bestimmen.

C) Vorgabe inhärenter Systemgrenzen durch Optimierung

Die Reglerparameter werden nach den Gleichungen (5.55) bestimmt. Diese Gleichungen sind im folgenden nochmals abgedruckt. Die Reglermatrix bestimmt sich zu

$$\underline{R} = (\underline{W}_{R,p} \underline{H})^{-1} (\underline{W}_{R,p} \underline{\Phi} - \underline{\Lambda}_{R,p} \underline{W}_{R,p}). \quad (5.56)$$

Dabei ist die Matrix mit den Linkseigenvektoren $\underline{W}_{R,p}$ und die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten⁷ $\underline{\Lambda}_{R,p}$ zu wählen. Für die Berechnung des affinen Regleranteils $\underline{\varphi}_u$ gilt

$$\underline{\varphi}_u = \left(\underline{H}^T \underline{H} \right)^{-1} \underline{H}^T \left((\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H} \underline{R}) \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi} \right). \quad (5.57)$$

Dabei geht die Rückführmatrix \underline{R} aus Gleichung (5.56), mit ihrer Abhängigkeit von den Parametern $\underline{W}_{R,p}$ und $\underline{\Lambda}_{R,p}$, in die Gleichung (5.57) ein. Zusätzlich ist der Parameter der Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ zu wählen.

Die Rückführmatrix \underline{R} aus Gleichung (5.56) ist anschließend in Gleichung (5.8) und der affine Anteil $\underline{\varphi}_u$ in die Gleichung (5.9) einzusetzen. Beide Ergebnisse werden in die Ungleichungen (5.28) eingesetzt. Diese Ungleichungen sind nun aber *nichtlinear* in den Parametern $\underline{W}_{R,p}$, $\underline{\Lambda}_{R,p}$ und $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$.

Die nichtlinearen Gradientenbedingungen werden als nichtlineare Nebenbedingungen in ein demzufolge nichtlineares Optimierungsproblem aufgenommen. Das Gütemaß kann wie in Abschnitt 5.4.1 vorgeschlagen, geeignet gewählt werden.

Wenn es bei einem gegebenen System nicht möglich ist, mit der Vorgehensweise A) oder B) zu einer zufriedenstellenden Lösung zu kommen, dann stellt die Vorgehens-

⁷Bei der Optimierung schneiden die zu wählenden inhärenten Systemgrenzen im Vergleich zu den Vorgehensweisen in A) oder B) nur die Ruhelage, die Richtung bleibt frei wählbar. Deshalb ist es möglich, dass in der Diagonalmatrix mit den Eigenwerten auch instabile Eigenwerte auftauchen.

weise mit der Optimierung in C) eine mögliche Alternative dar.

Werden die einzelnen Elemente der Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}$ direkt durch eine Optimierung bestimmt, bis die Stellgrößen in den Ecken des Simplex alle Bedingungen (5.28) einhalten, dann ergeben sich theoretisch die gleichen Ergebnisse wie beim VSE-Verfahren aus Abschnitt 5.4.3. Im Vergleich zum Verfahren in C), bei dem reelle Eigenwerte gefordert werden, sind beim VSE-Verfahren auch komplexe Eigenwerte möglich. Eine anschauliche Interpretation der Parameter und vor allem der Startparameter für die Optimierung geht dadurch allerdings verloren.

Nichtlineare Optimierungsprobleme mit nichtlinearen Nebenbedingungen sind üblicherweise schwierig zu lösen. Klassische Optimierungsverfahren scheitern in der Regel daran, dass das nichtlineare Optimierungsproblem ein Gütemaß mit mehreren lokalen Minima aufweist und der auf dem Gradienten dieser Funktion basierende Algorithmus schließlich in einem der lokalen Minima abbricht. Um das globale Minimum finden zu können, benötigt man dann einen geeigneten Startwert, damit das gefundene lokale Minimum das globale Minimum darstellt. Dieser Startwert ist hier aber nicht bekannt.

Eine Alternative zu den klassischen Optimierungsverfahren stellen deshalb evolutionäre Algorithmen dar, die sich in ihrer Vorgehensweise an Phänomenen orientieren, die in der Natur auftreten. Bei diesen Algorithmen wird die Zielfunktion sehr oft ausgewertet, was die Wahrscheinlichkeit, die globale Lösung zu finden, stark erhöht. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die *Partikelschwarm-Optimierung* zur Lösung dieser Optimierungsprobleme verwendet. Der Algorithmus wird in Anhang A.1 vorgestellt.

Indirekte Wahl der Eigenwerte

Die p zu wählenden Eigenwerte werden für die Verfahren A), B) und C) reell und positiv vorgegeben, da bei zeitdiskreten Systemen nur für reelle und positive Eigenwerte die inhärenten Systemgrenzen in Form von Hyperebenen existieren. Inhärente Systemgrenzen, die sich bei komplexen Eigenwerten ergeben, werden im Anhang A.2 kurz vorgestellt.

Die Eigenwerte müssen nun so gewählt werden, dass die Ungleichungen (5.28) erfüllt sind. Dabei werden die Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ aus den Gleichungen (5.55) mit vorgegebenen Werten für die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$, für die Eigenwerte $\lambda_{R,i}$, $i = 1, \dots, p$ und den Linkseigenvektoren $\underline{w}_{R,i}$, $i = 1, \dots, p$ bestimmt. Danach werden die Parameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ zuerst in die Gleichungen (5.8) und (5.9) eingesetzt, bevor das Ergebnis in den Ungleichungen (5.28) verwendet wird. Zwar kann man damit die Bedingungen, die durch die Ungleichungen ausgedrückt werden, überprüfen, allerdings ist eine Aussage über die Wahl der Eigenwerte nur indirekt möglich.

Direkte Wahl der Eigenwerte

Mit dem Zusammenhang

$$\underline{w}_{R,i}^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) = (\lambda_{R,i} - 1) (\underline{w}_{R,i}^T \underline{x}_k - \underline{w}_{R,i}^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}) , \quad (5.58)$$

der in Anhang B.3.2 in Gleichung (B.28) hergeleitet wird, kann man die Eigenwerte direkt bestimmen. Schreibt man nun die Gleichung (5.58) für alle n Eigenwerte auf, dann lässt sich unter Verwendung der Voraussetzung $\underline{W}_R = \underline{V}_R^{-1}$ aus Anhang B.4 der zeitdiskrete Gradient schreiben als

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k = \sum_{i=1}^n (\lambda_i - 1) \underline{v}_{R,i} \underline{w}_{R,i}^T (\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) . \quad (5.59)$$

Dieser zeitdiskrete Gradient kann nun in den betreffenden Ungleichungen (5.28a-5.28d,5.28f) eingesetzt werden, die auf Grund der Wahl der Linkseigenvektoren und der Ruhelage noch nicht erfüllt sind. Wird so zum Beispiel die inhärente Systemgrenze durch eine Ecke des Simplex gelegt, dann wird damit der zeitdiskrete Gradient in dieser Ecke bestimmt. Bedingungen, die diese Ecke betreffen, entfallen somit. Bei geeigneter Wahl der inhärenten Systemgrenzen kommt es deshalb zu einer sehr begrenzten Anzahl von Ungleichungen. Gültige Bereiche für die Eigenwerte, die diese Ungleichungen erfüllen müssen, können dann sogar von Hand bestimmt werden.

Nach der Wahl der inhärenten Systemgrenzen und geeigneter Eigenwerte sind anschließend noch die Einhaltung der Bedingungen an die Länge des Gradienten in den Ungleichungen (5.28e) und (5.28g) sowie die Einhaltung der Bedingungen bezogen auf das Nachbarsimplex \tilde{P} in den Ungleichungen (5.28h-5.28j) und die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkungen in den Ungleichungen (5.28k-5.28l) zu überprüfen. In Beispiel 5.3 wird diese Methode kurz vorgestellt.

Berücksichtigung von Stellgrößenbeschränkungen

Die Einhaltung der Stellgrößenbeschränkungen muss in allen drei Vorgehensweisen des Reglerentwurfs durch die Überprüfung der Ungleichungen (5.28k-5.28l) gewährleistet werden.

Abschließend soll der Reglerentwurf an zwei Beispielen veranschaulicht werden:

Beispiel 5.3 (Reglerentwurf für ein System mit $p = n$):

Für dieses Beispiel werden die zwei Simplexe P und \tilde{P} aus Abbildung 5.14(a) weiter verwendet. Für die Eckpunkte gilt

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 3,9 \\ 2,9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,7 \\ 4,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{V}} = \left\{ \begin{bmatrix} 3,9 \\ 2,9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,5 \\ 2,4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Im Simplex P gilt

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ -0,2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix};$$

im Nachbarsimplex \tilde{P} gilt

$$\tilde{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0,1 & 0,85 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ -0,2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,3 \end{bmatrix}.$$

Die Simplexe und die Dynamik des unregulierten Systems sind in Abbildung 5.16(a) dargestellt. Gesucht ist eine affine Zustandsrückführung zur Überführung des Zustands von einem beliebigen Anfangszustand innerhalb des Simplex P in das Nachbarsimplex \tilde{P} mithilfe des ELV-Verfahrens.

Die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ kann beliebig vorgegeben werden, da $p = n$ gilt und die Eingangsmatrix \underline{H} regulär ist. Weiterhin können beide Linkseigenvektoren und die dazu gehörigen Eigenwerte vorgegeben werden. Es muss lediglich darauf geachtet werden, dass die Linkseigenvektoren linear unabhängig voneinander vorgegeben werden, damit die zugehörigen inhärenten Systemgrenzen in der Lage sind, unterschiedliche Ecken bzw. Kanten des Simplex zu schneiden.⁸

Die Linkseigenvektoren sollen durch die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ und die Simplexecken \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_3} verlaufen. Die Ruhelage wird sinnvollerweise so gewählt, dass die durch den Linkseigenvektor $\underline{w}_{R,2}$ vorgegebene inhärente Systemgrenze I_2 , die durch die Simplexecke \underline{x}_{v_2} verläuft, gleichzeitig parallel zur Simplexseite F_2 ist.

⁸In [Fö94] ist gezeigt, dass bei der Wahl unterschiedlicher Eigenwerte, die zugehörigen Linkseigenvektoren immer linear unabhängig sind. Nur bei der Wahl identischer Eigenwerte können linear abhängige Linkseigenvektoren auftreten.

Deshalb wird $\underline{x}_{\text{Ruhe}} = [2,3 \quad 2]^T$ vorgegeben. Die vorgegebene Ruhelage und die entsprechenden inhärenten Systemgrenzen sind in Abbildung 5.16(b) dargestellt.

Die Trajektorie des geregelten Systems wird damit in das durch die inhärenten Systemgrenzen I_1, I'_1, I_2 und I'_2 gebildete Parallelogramm eingeschlossen. Das Nachbarsimplex kann dann nicht übersprungen werden und auch ein Verlassen von P über F_2 ist ausgeschlossen. Durch geeignete Wahl der Eigenwerte muss nun noch sichergestellt werden, dass das Simplex nicht über die Seite F_3 verlassen wird oder gleich bedeutend, dass die Gradientenbedingungen in der Simplexecke \underline{x}_{v_1} eingehalten werden.

Einer der beiden Eigenwerte kann beliebig gewählt werden, wenn damit der andere Eigenwert noch so bestimmt werden kann, dass die Bedingungen erfüllbar sind. Es wird deshalb $\lambda_{R,1} = 0,8$ vorgegeben.

Es muss nun versucht werden, den zweiten Eigenwert geeignet zu wählen. Dazu wird die Simplexecke \underline{x}_{v_1} betrachtet. Die noch zu erfüllende Bedingung an die Gradientenrichtung lautet

$$\underline{n}_{F_3}^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_1}} \leq 0. \quad (5.60)$$

Mit Gleichung (5.59) erhält man daraus die Ungleichung

$$(\lambda_{R,1} - 1) \underline{n}_{F_3}^T \underline{v}_{R,1} \underline{w}_{R,1}^T (\underline{x}_{v_1} - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) + (\lambda_{R,2} - 1) \underline{n}_{F_3}^T \underline{v}_{R,2} \underline{w}_{R,2}^T (\underline{x}_{v_1} - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) \leq 0, \quad (5.61)$$

in der alle Größen bis auf den Eigenwert $\lambda_{R,2}$ bekannt sind. Löst man diese Gleichung nach $\lambda_{R,2}$ auf und setzt die bekannten Größen ein, so erhält man $\lambda_{R,2} \leq 0,85$. Wird der Eigenwert $\lambda_{R,2}$ also so gewählt, dass er diese Bedingung erfüllt, so wird auch die Bedingung an die Gradientenrichtung in \underline{x}_{v_1} erfüllt, wobei für den Grenzfall $\lambda_{R,2} = 0,85$ der Folgezustand $\underline{x}_{k+1} \Big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_1}}$ genau auf der Simplexseite F_3 liegt. Der Eigenwert λ_2 wird deshalb etwas kleiner gewählt, beispielsweise zu $\lambda_{R,2} = 0,75$. Die Zustandsrückführung kann nun berechnet werden. Das geregelte System in Simplex P ist in Abbildung 5.16(c) dargestellt. Schließlich bleibt noch zu überprüfen, ob auch die Bedingungen auf Basis der Dynamik des Nachbarsimplex \tilde{P} erfüllt sind. Wie man aus Abbildung 5.16(d) erkennen kann, sind bereits alle Bedingungen erfüllt, so dass keine weiteren Modifikationen der Entwurfparameter notwendig sind. Die Reglerparameter aus den Gleichungen (5.55) ergeben sich damit zu

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 0,13 & 0,06 \\ 0,01 & 0,04 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\varphi}_u = \begin{bmatrix} 0,68 \\ 0,25 \end{bmatrix}.$$

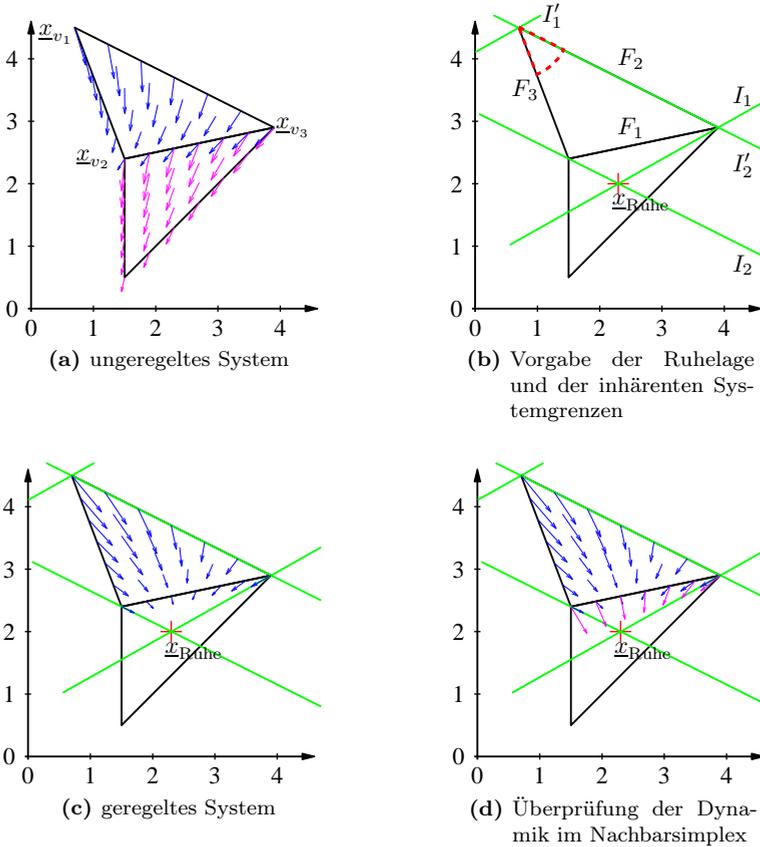


Abbildung 5.16: Entwurf einer Regelung mit dem ELV-Verfahren für ein System mit $p = n$

Beispiel 5.4 (Reglerentwurf für ein System mit $p < n$):

In diesem Beispiel werden drei unterschiedliche Regler berechnet. Die Regelparameter und die Eigenwerte sowie Linkseigenvektoren sind deshalb durch mehrfache Überstreichungen gekennzeichnet. Parameter des unregulierten Systems erhalten den zusätzlichen Index 's'. Vorgegebene Größen werden mit einem zusätzlichen römischen Index versehen.

Gegeben sind die Simplexe P und \tilde{P} aus Beispiel 5.3. Für die Dynamik in P und \tilde{P} gilt jetzt

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,01 \\ 0,01 & 0,85 \end{bmatrix}, \underline{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

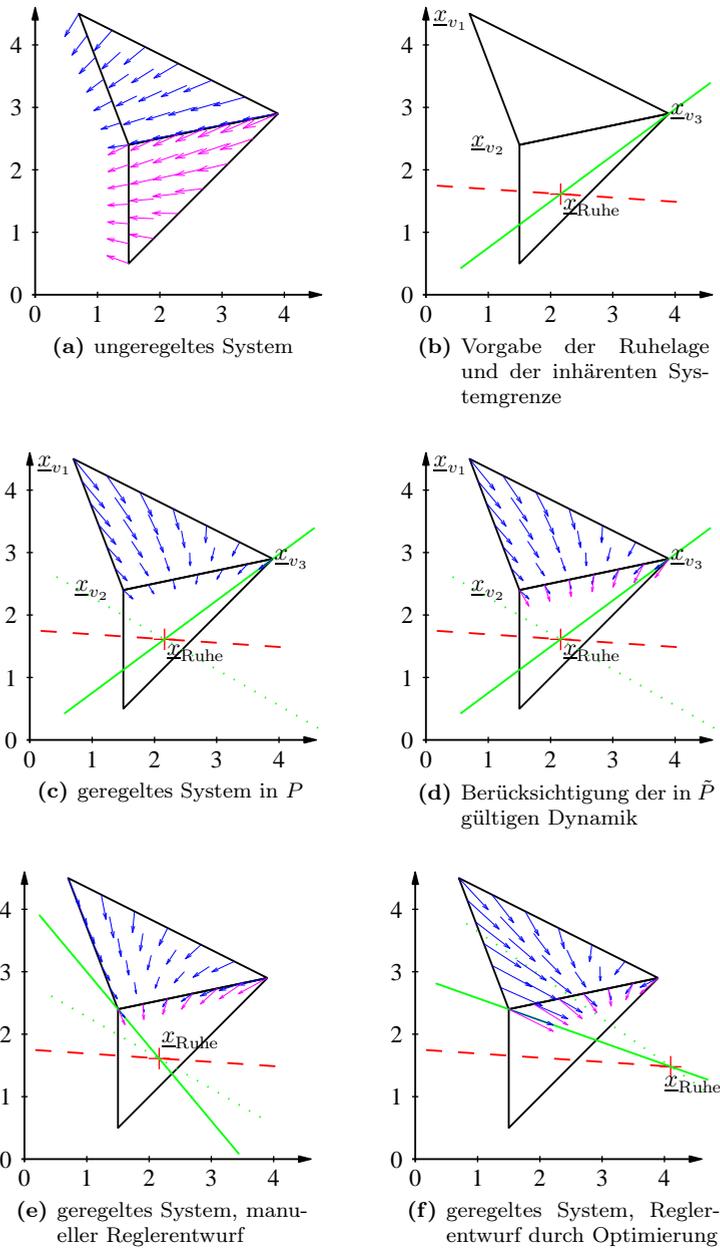


Abbildung 5.17: Entwurf einer Regelung mit dem ELV-Verfahren für ein System mit $p < n$

und

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,01 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}, \tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \tilde{\varphi} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,2 \end{bmatrix}.$$

Die Simplexe und die ungerichtete Dynamik sind in Abbildung 5.17(a) dargestellt.

Mit dem ELV-Verfahren soll eine affine Zustandsrückführung zur Überführung des Zustands von einem beliebigen Anfangszustand innerhalb des Simplex P in das Nachbarsimplex \tilde{P} gefunden werden, dabei soll eine vorgebbare inhärente Systemgrenze durch eine Ecke des Simplex P verlaufen, wie es in der Vorgehensweise A) beschrieben ist.

Die Eigenwerte und Linkseigenvektoren des ungerichteten Systems ergeben sich zu

$$\lambda_{s,1} = 0,85, \lambda_{s,2} = 0,90, \underline{w}_{s,1}^T = [0,19 \quad -0,98] \text{ und } \underline{w}_{s,2}^T = [-0,98 \quad -0,19].$$

Die Ruhelage wird aus den möglichen Ruhelagen (gestrichelte Gerade) so gewählt, dass sie innerhalb des Nachbarsimplex liegt. Der vorgebbare Linkseigenvektor wird darüber hinaus in Abbildung 5.17(b) in der Art und Weise bestimmt, dass die zugehörige inhärente Systemgrenze als durchgezogene Linie durch die Ecke \underline{x}_{v_3} verläuft. Es werden

$$\underline{x}_{\text{Ruhe},I} = \begin{bmatrix} 2,16 \\ 1,61 \end{bmatrix} \text{ und } \underline{w}_{R,1,I}^T = [-0,60 \quad 0,80]$$

vorgegeben. Der vorgebbare Eigenwert wird zu $\lambda_{R,I,1} = 0,8$ gewählt. Die daraus resultierende Dynamik im Simplex P ist in Abbildung 5.17(c) dargestellt. Die nicht vorgebbare inhärente Systemgrenze des geregelten Systems ist gepunktet eingezeichnet.

Die Reglerparameter aus den Gleichungen (5.55) ergeben sich damit zu

$$\bar{r}^T = [0,07 \quad -0,05] \text{ und } \bar{\varphi}_u = [0,47].$$

Die Eigenwerte und Linkseigenvektoren des geregelten Systems in Abbildung 5.17(c) ergeben sich zu

$$\bar{\lambda}_{R,1} = 0,80, \bar{\lambda}_{R,2} = 0,87, \bar{\underline{w}}_{R,1}^T = [-0,60 \quad 0,80] \text{ und } \bar{\underline{w}}_{R,2}^T = [-0,50 \quad -0,87].$$

Wie zu erwarten ist, stimmen der gewählte Eigenwert $\lambda_{R,1,I} = \bar{\lambda}_{R,1}$ und der gewählte Linkseigenvektor $\underline{w}_{R,1,I}^T = \bar{\underline{w}}_{R,1}^T$ überein. Allerdings verändert sich der nicht vorgebbare Eigenwert, wie in Anmerkung 5.1 dargestellt, zu $\lambda_{s,2} \neq \bar{\lambda}_{R,2}$ und Linkseigenvektor $\underline{w}_{s,2}^T \neq \bar{\underline{w}}_{R,2}^T$. Beide Eigenwerte sind in diesem Fall stabil.

Es muss jedoch auch die Dynamik im benachbarten Simplex \tilde{P} berücksichtigt werden.

Dabei erkennt man in Abbildung 5.17(d), dass unter Umständen das Simplex \tilde{P} übersprungen werden kann, wie dies zum Beispiel in der Ecke \underline{x}_{v_3} geschieht.

Um dies zu verhindern, wird die inhärente Systemgrenze durch geeignete Wahl des Linkseigenvektors durch \underline{x}_{v_2} gelegt mit

$$\underline{w}_{1,II}^T = [0,77 \quad 0,64] .$$

Die Ruhelage bleibt unverändert bei $\underline{x}_{\text{Ruhe},II} = \underline{x}_{\text{Ruhe},I}$. Das mit diesem Regler geregelte System, dargestellt in Abbildung 5.17(e), erfüllt alle Anforderungen.

Die Reglerparameter aus den Gleichungen (5.55) ergeben sich damit zu

$$\bar{\underline{r}}^T = [0,13 \quad 0,06] \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_u = [0,78] .$$

Die Eigenwerte und Linkseigenvektoren des geregelten Systems in Abbildung 5.17(f) ergeben sich zu

$$\bar{\lambda}_{R,1} = 0,80 \quad , \quad \bar{\lambda}_{R,2} = 0,83 \quad , \quad \bar{\underline{w}}_{R,1}^T = [0,77 \quad 0,64] \quad \text{und} \quad \bar{\underline{w}}_{R,2}^T = [-0,50 \quad -0,87] .$$

Den bisherigen Ergebnissen wird jetzt noch ein geregeltes System gegenüber gestellt, dessen Reglerparameter mithilfe einer Optimierung bestimmt werden. Der Linkseigenvektor wird so gewählt, dass die inhärente Systemgrenze stets durch die Ruhelage und die Ecke \underline{x}_{v_2} verläuft. Die Ruhelage selbst und der vorgebbare Eigenwert werden als Freiheitsgrade bei der Optimierung nach der Vorgehensweise C) betrachtet. Als zu minimierendes Gütemaß wird das nichtlineare Gütemaß aus Gleichung (5.32) verwendet. Dieses Gütemaß wird unter Beachtung aller Bedingungen (5.28), die als nichtlineare Nebenbedingungen in dieses nichtlineare Optimierungsproblem eingehen, minimiert. Das in dieser Art und Weise geregelte System ist in Abbildung 5.17(e) dargestellt. Die optimalen Parameter sind

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}}^* = \begin{bmatrix} 4,10 \\ 1,48 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_1^* = 0,81 .$$

Die Reglerparameter ergeben sich nach den Gleichungen (5.55) zu

$$\bar{\underline{r}}^T = [0,27 \quad 0,26] \quad \text{und} \quad \bar{\varphi}_u = 2,08 .$$

Die Eigenwerte und Linkseigenvektoren des geregelten Systems in Abbildung 5.17(f)

ergeben sich zu

$$\bar{\bar{\lambda}}_{R,1} = 0,72, \quad \bar{\bar{\lambda}}_{R,2} = 0,81, \quad \bar{\bar{w}}_{R,1}^T = [0,57 \quad 0,82] \quad \text{und} \quad \bar{\bar{w}}_{R,2}^T = [0,33 \quad 0,94].$$

5.5 Endgebietsregelung im Simplex

Für die Endgebietsregelung nach Definition 5.2 gilt, dass jede im Simplex startende Trajektorie die Ruhelage im Simplex erreicht, ohne dabei das Simplex zu verlassen. Diese Forderung hat mit der Forderung, die in Definition 5.1 und später in Abschnitt 5.4 an die *Regelung zum Gebietsübertritt im Simplex* gestellt wird, zunächst wenig gemein. Betrachtet man aber die Bedingungen, die beim Reglerentwurf eingehalten werden müssen, so stellt man fest, dass diese auf das strukturell gleiche Ungleichungssystem führen.

Die Wahl der Ruhelage im Simplex spielt eine wichtige Rolle. Die Lage der möglichen Ruhelagen aus Abschnitt 5.4.2 entscheidet darüber, ob eine Endgebietsregelung überhaupt möglich ist. Die Existenz einer Ruhelage im Simplex stellt aber nur eine notwendige Bedingung dafür dar, dass auch eine Endgebietsregelung für diese Ruhelage existiert.

5.5.1 Allgemeine Bedingungen an die Gradienten bei der Endgebietsregelung im Simplex

Wie bereits erläutert, darf die Trajektorie des geregelten Systems das Endsimplex nicht verlassen. Diese Forderung lässt sich analog zu den Bedingungen für den Gebietsübertritt mithilfe von Ungleichungen⁹ formulieren:

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \forall F_j \in \mathcal{F} \setminus \{F_i\} : \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \varphi_R \right) \leq 0 \quad (5.62a)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{x}_{v_j} \in \mathcal{V} \setminus \{\underline{x}_{v_i}\} : \underline{n}_{F_i}^T \left(\Phi_R \underline{x}_{v_i} + \varphi_R - \underline{x}_{v_j} \right) \leq 0 \quad (5.62b)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : -\underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq -\underline{u}_{min}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.62c)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq \underline{u}_{max}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.62d)$$

⁹Man beachte die Benennung eines Simplex nach Abschnitt 2.5.

Diese Bedingungen haben anschaulich folgende Bedeutung:

- (5.62a) Die Gradienten in allen Simplexecken zeigen bezüglich jeder angrenzenden Simplexseite nach innen oder auf den Rand.
- (5.62b) Die Gradienten in allen Simplexecken ragen nicht über die jeweils gegenüberliegende Seite hinaus. Dabei ist \underline{x}_{v_j} eine (mit Ausnahme von \underline{x}_{v_i}) beliebige Simplexecke.
- (5.62c) Der Stellgrößenvektor ist in jeder Ecke des Simplex nach unten beschränkt.
- (5.62d) Der Stellgrößenvektor ist in jeder Ecke des Simplex nach oben beschränkt.

Die zulässigen Bereiche, die man aus den Bedingungen (5.62) erhält, sind für die Richtung des zeitdiskreten Gradienten in Abbildung 5.18 eingezeichnet.

Mithilfe der baryzentrischen Koordinaten aus Gleichung (2.26) können die Bedingungen (5.62a-5.62b) für ein Simplex auch mit der Gleichung

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underbrace{\underline{T}_B \begin{bmatrix} \Phi_{\mathbb{R}} \underline{x}_{v_i} + \varphi_{\mathbb{R}} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \geq \underline{0} \quad (5.63)$$

dargestellt werden. Für die einzelnen Elemente b_i , $i = 1, \dots, n + 1$ der baryzentrischen Koordinaten $\underline{b} = [b_1 \ \dots \ b_{n+1}]^T$ gilt im Simplex immer der Zusammenhang $0 \leq b_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n + 1$.

Es wird dabei gefordert, dass der nächste Zustand $\underline{x}_{k+1} \big|_{\underline{x}_k = \underline{x}_{v_i}}$ jeder Ecke \underline{x}_{v_i} , $i = 1, \dots, n + 1$ im Simplex liegt.

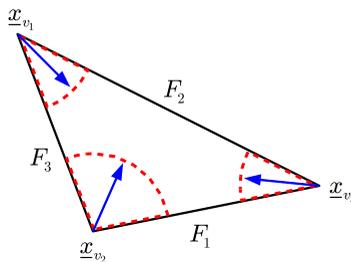


Abbildung 5.18: Zugelassene Bereiche für die Gradienten des geregelten Systems im Endsimplex

5.5.2 Endgebietsregelung mit dem VSE-Verfahren im Simplex

Aus der Systemgleichung (5.1) erhält man durch Einsetzen der Beziehung (5.6) die Differenzgleichung des geregelten Systems

$$\underline{x}_{k+1} = (\underline{\Phi} - \underline{H}\underline{R})\underline{x}_k + \underline{H}\underline{\varphi}_u + \underline{\varphi}, \quad (5.64)$$

das ein autonomes System darstellt. Die Ruhelage dieses Systems berechnet sich mit $\underline{x}_{\text{Ruhe}} = \underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k$ zu

$$(\underline{I}_n - \underline{\Phi} + \underline{H}\underline{R})\underline{x}_{\text{Ruhe}} = \underline{H}\underline{\varphi}_u + \underline{\varphi}. \quad (5.65)$$

Formt man die Gleichung (5.65) weiter um, so erhält man

$$(\underline{I}_n - \underline{\Phi})\underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{\varphi} = -\underline{H}\underline{R}\underline{x}_{\text{Ruhe}} + \underline{H}\underline{\varphi}_u \quad (5.66)$$

und schließlich

$$[\underline{I}_n - \underline{\Phi}, \quad -\underline{\varphi}] \begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{Ruhe}} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{H} \begin{bmatrix} -\underline{R}, & \underline{\varphi}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{Ruhe}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.67)$$

Setzt man in Gleichung (5.67) die transponierte Berechnungsvorschrift für die Parameter des Reglers $\underline{C}_R^T = \begin{bmatrix} -\underline{R} & \underline{\varphi}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) & \dots & \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} \underline{T}_B$ nach Gleichung (5.41) unter Beachtung der Zusammenhänge aus Gleichung (5.40) ein, so erhält man

$$-[\underline{\Phi} - \underline{I}_n, \quad \underline{\varphi}] \begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{Ruhe}} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{H} \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) & \dots & \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} \underline{T}_B \begin{bmatrix} \underline{x}_{\text{Ruhe}} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

Dem geregelten System kann also eine gewünschte Ruhelage $\underline{x}_{R,gew.}$ vorgegeben werden, wenn die Stellgrößen in den Simplexecken so gewählt werden, dass die Gleichung

$$\left(\underline{H} \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) & \dots & \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} \underline{T}_B + [\underline{\Phi} - \underline{I}_n, \quad \underline{\varphi}] \right) \begin{bmatrix} \underline{x}_{R,gew.} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.69)$$

erfüllt wird. Die Gleichung (5.69) muss nun als weitere Bedingung zusätzlich zu den Bedingungen (5.62) bei der Wahl der Stellgrößen in den Simplexecken berücksichtigt werden. Es ist bei der Wahl der gewünschten Ruhelage $\underline{x}_{R,gew.}$ darauf zu achten, dass diese wirklich eine Ruhelage des Systems darstellt und im Endsimplex liegt. Nur dann sind alle Bedingungen lösbar.

Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Beispiel 5.5 (Reglerentwurf im Endsimplex mit dem VSE-Verfahren):

Es wird das System aus Beispiel 5.4 betrachtet. Es soll ein Regler entworfen werden, der den Zustand innerhalb des Simplex \tilde{P} stabilisiert. Als gewünschte Ruhelage wird

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}} = \begin{bmatrix} 1,69 \\ 0,85 \end{bmatrix}$$

aus den in den Abbildungen 5.19 eingezeichneten möglichen Ruhelagen des Systems gewählt, die sich auf der gestrichelten Linie befinden. Die Bestimmung der Stellgrößen in den Ecken wird mithilfe eines linearen Programms mit linearem Gütemaß aus Abschnitt 5.4.1 bewerkstelligt. In Abbildung 5.19(a) ist der Vektor \underline{f} aus dem Gütemaß (5.31) zu $\underline{f}^T = [1 \quad 1 \quad 1]$ gewählt worden. Die berechneten Reglerparameter sind

$$\underline{r}^T = [0,41 \quad -0,13] \quad \text{und} \quad \varphi_u = 0,94 .$$

Da $\underline{f}^T \underline{u}$ minimiert wird, ergibt dies die Lösung mit der minimalen Summe der Stellgrößen in den Simplexecken.

In Abbildung 5.19(b) ist der Vektor \underline{f} aus dem Gütemaß (5.31) zu

$$\underline{f}^T = [-1 \quad -1 \quad -1]$$

gewählt worden. Die zugehörigen Reglerparameter sind

$$\underline{r}^T = [0,15 \quad -0,12] \quad \text{und} \quad \varphi_u = 0,51 ,$$

da \underline{f} negativ ist, wird die Summe der Stellgrößen maximiert.

Man erkennt, dass durch den entworfenen Regler der Zustand von einem beliebigen Anfangszustand innerhalb des Endsimplex in die gewünschte Ruhelage überführt und dort gehalten wird.

5.5.3 Endgebietsregelung mit dem ELV-Verfahren im Simplex

Der Entwurf einer Regelung im Endsimplex durch Linkseigenvektor- und Eigenwertvorgabe wird fast wie der Entwurf für den Simplexübertritt in Abschnitt 5.4.4 durchgeführt.

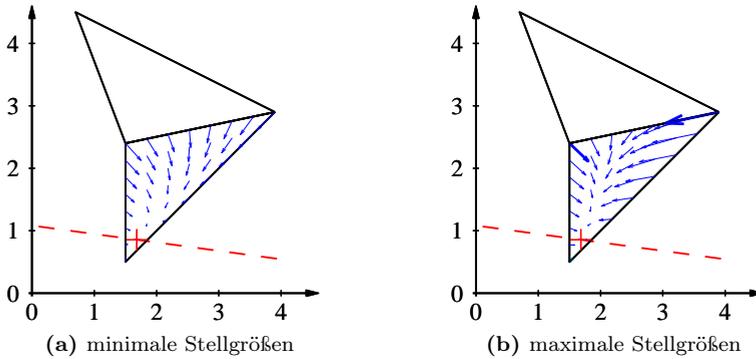


Abbildung 5.19: Entwurf einer Endregelung mit dem VSE-Verfahren

Es gibt dabei aber zwei wesentliche Änderungen:

- Statt den Bedingungen (5.28) müssen die Bedingungen (5.62) verwendet werden.
- Die Ruhelage muss im Endsimplex gewählt werden und auch vom System einnehmbar sein.

Analog zur Vorgehensweise A) beim Reglerentwurf für den Simplexübertritt in Abschnitt 5.4.4 kann auch bei der Endgebietsregelung im Simplex die inhärente Systemgrenze so gewählt werden, dass sie durch die Ruhelage und eine Seite einer Simplexseite verläuft. Dadurch wird der Gradient in der entsprechenden Simplexecke festgelegt.

Auch ist es denkbar, die inhärenten Systemgrenzen parallel zu einer oder mehreren Seiten des Endsimplex wie in der Vorgehensweise B) aus Abschnitt 5.4.4 zu wählen. Für beide Vorgehensweisen müssen die vorgebbaren Eigenwerte schließlich so gewählt werden, dass die übrigen Gradientenbedingungen erfüllt werden. Dabei werden nur stabile Eigenwerte zur Einhaltung der Gradientenbedingungen führen.

Wie im Fall C) besteht darüber hinaus die Möglichkeit, die Entwurfsparameter im Rahmen einer Optimierung zu wählen.

Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Beispiel 5.6 (Reglerentwurf im Endsimplex):

Es wird das System aus Beispiel 5.5 betrachtet. Es soll ein Regler entworfen werden, der den Zustand innerhalb des Simplex \tilde{P} stabilisiert. Als gewünschte Ruhelage wird

$$\underline{x}_{Ruhe} = \begin{bmatrix} 1,69 \\ 0,85 \end{bmatrix}$$

aus den eingezeichneten möglichen Ruhelagen des Systems in Abbildung 5.20(a) gewählt. Die möglichen Ruhelagen liegen auf einer Geraden, die als gestrichelte Linie dargestellt ist. Der vorgebbare Linkseigenvektor wird so gewählt, dass die inhärente Systemgrenze, die mit einer durchgezogenen Linie dargestellt ist, durch die Ecke¹⁰ \tilde{x}_{v_3} verläuft. Der vorgebbare Eigenwert wird zu $\lambda_{R,1} = 0,8$ gewählt. Die nicht vorgebbare inhärente Systemgrenze ist mit einer gepunkteten Linie dargestellt. Damit ergeben sich die Reglerparameter¹¹ nach den Gleichungen (5.55) zu

$$\underline{r}^T = [0,09 \quad -0,02] \quad \text{und} \quad \varphi_u = 0,5 .$$

Das geregelte System ist in Abbildung 5.20(b) dargestellt. Man erkennt, dass durch den entworfenen Regler der Zustand von einem beliebigen Anfangszustand innerhalb des Endsimplex in die gewünschte Ruhelage überführt und dort gehalten wird.

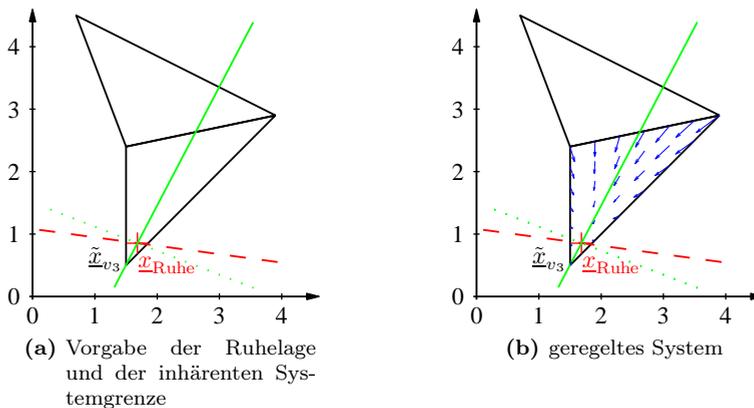


Abbildung 5.20: Entwurf einer Endregelung mit dem ELV-Verfahren

5.6 Erweiterung der lokalen Regelstrategien für Polytope

In den Abschnitten 5.4 und 5.5 werden das VSE- und das ELV-Verfahren sowohl für die Gebietsübertrittsregelung als auch für die Endgebietsregelung für Simplexe beschrieben.

¹⁰Zur Benennung der Ecken siehe Abbildung 5.9.

¹¹In diesem Beispiel ist wiederum der Zusammenhang aus Anmerkung 5.1 zu beachten.

Beide Verfahren sollen im Folgenden für Polytope erweitert werden. Die Bedingungen an den zeitdiskreten Gradienten aus den Ungleichungen (5.28) nehmen bei beiden Verfahren eine Schlüsselrolle beim Entwurf ein.

5.6.1 Erweiterung des VSE-Verfahrens für Polytope

Ein Polytop hat im Gegensatz zum Simplex $M > n + 1$ Ecken. Dabei ist das Simplex ein spezielles Polytop mit genau $M = n + 1$ Ecken. Betrachtet man nun Gleichung (5.40) und ersetzt darin und in den zwei vorangegangenen Gleichungen (5.38) und (5.39) den Index $n + 1$ mit M , dann erhält man

$$\begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_M}^T & 1 \end{bmatrix}}_{(*)} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix}. \quad (5.70)$$

Die Matrix (*) ist nur dann invertierbar, wenn $M = n + 1$ gilt, also das Polytop ein Simplex ist. Dann können die Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ nach Gleichung (5.41) berechnet werden.

Für $M > n + 1$ ist eine Invertierung der Matrix (*) jedoch nicht möglich. Um dennoch zu einem Regelgesetz zu gelangen, hilft man sich damit, in Gleichung (5.70) eine Zweiteilung vorzunehmen. Dies führt zu der Gleichung

$$\begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+1}}) \\ \text{---} \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_{n+1}}^T & 1 \\ \text{---} & \text{---} \\ \underline{x}_{v_{n+2}}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_M}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix}. \quad (5.71)$$

Die oberen $n + 1$ Zeilen der Gleichung (5.71) stellen dabei exakt den Zusammenhang aus Gleichung (5.40) dar. Die Reglerparameter können mit diesem Zusammenhang leicht nach Gleichung (5.41) bestimmt werden. Aus den in Gleichung (5.41) bestimmten Parametern $-\underline{R}^T$ und $\underline{\varphi}_u^T$ können dann die dazu gehörigen Stellgrößen in den Ecken $\underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+2}}), \dots, \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M})$ mithilfe der unteren $M - (n + 1)$ Zeilen der Gleichung (5.71) berechnet werden. Diese unteren $M - (n + 1)$ Zeilen sind in der

Gleichung

$$\begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_{n+2}}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_M}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

nochmals zusammengefasst.

Da nur die ersten $n + 1$ Eckpunkte betrachtet werden, sind zwar die zugehörigen Bedingungen durch Auswertung der Ungleichungen (5.28) erfüllt, allerdings ist es sehr wahrscheinlich, dass die übrigen Stellgrößen $\underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+2}}), \dots, \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M})$ nach Gleichung (5.72) ihre zugehörigen Bedingungen durch Auswertung der Ungleichungen (5.28) nicht einhalten.

Eliminiert man nun die Abhängigkeit der Gleichung (5.72) von den Reglerparametern \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ durch Einsetzen der Gleichung (5.41), so erhält man

$$\begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{x}_{v_{n+2}}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_M}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{v_{n+1}}^T & 1 \end{bmatrix}^{-1}}_{\underline{B}} \begin{bmatrix} \underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Die Matrix \underline{B} in Gleichung (5.73) bildet dann die Stellgrößen $\underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}), \dots, \underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+1}})$ auf die Stellgrößen $\underline{u}^T(\underline{x}_{v_{n+2}}), \dots, \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M})$ ab. Diese Matrix \underline{B} gibt darüber hinaus die baryzentrischen Koordinaten \underline{b} aus Gleichung (2.26) der Ecken $\underline{x}_{v_{n+2}}, \dots, \underline{x}_{v_M}$ zeilenweise an, es gilt

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \underline{b}_{n+2}^T \\ \vdots \\ \underline{b}_M^T \end{bmatrix}. \quad (5.74)$$

Jede Ecke \underline{x}_{v_i} , $i = n + 2, \dots, M$ des Polytops, die nicht Ecke des Simplex ist, kann wie jeder andere beliebige Zustandspunkt damit als Linearkombination der Ecken des Simplex \underline{x}_{v_i} , $i = 1, \dots, n + 1$ geschrieben werden, es gilt

$$\underline{x}_{v_i} = b_{i,1} \underline{x}_{v_1} + \dots + b_{i,n+1} \underline{x}_{v_{n+1}}, \quad i = n + 2, \dots, M. \quad (5.75)$$

Um eine eindeutige Lösung für die Parameter

$$\underline{b}_i^T = [b_{i,1}, \dots, b_{i,n+1}] , \quad i = n+2, \dots, M \quad (5.76)$$

zu erhalten wird gefordert, dass

$$\sum_{y=1}^{n+1} b_{i,y} = 1 , \quad i = n+2, \dots, M \quad (5.77)$$

gilt. Für einen Punkt im Simplex oder auf dem Rand des Simplex gilt $0 \leq b_i \leq 1$ für die baryzentrischen Koordinaten b_i , $i = 1, \dots, n+1$. Diese Bedingung gilt für Polytope nun nicht mehr.

Die zugehörige Stellgröße $\underline{u}(\underline{x}_{v_i})$ in einer der Ecken \underline{x}_{v_i} , $i = n+2, \dots, M$ kann wiederum als Linearkombination der Stellgrößen $\underline{u}(\underline{x}_{v_1}), \dots, \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}})$ in den Ecken des Simplex geschrieben werden. Dies ergibt

$$\underline{u}(\underline{x}_{v_i}) = b_{i,1} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) + \dots + b_{i,n+1} \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \quad (5.78)$$

mit $i = n+2, \dots, M$.

Die Anzahl der Variablen im Ungleichungssystem in Gleichung (5.36) kann nun mithilfe der Matrix \underline{B}' , die man durch Umsortieren der Matrix \underline{B} aus Gleichung (5.72) erhält, berechnet werden. Jedes Element der Matrix

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} b_{n+2,1} & \cdots & b_{n+2,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M,1} & \cdots & b_{M,n+1} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

wird mit der Einheitsmatrix \underline{I}_p der Dimension p multipliziert und dann in der Matrix

$$\underline{B}' = \begin{bmatrix} b_{n+2,1} \underline{I}_p & \cdots & b_{n+2,n+1} \underline{I}_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{M,1} \underline{I}_p & \cdots & b_{M,n+1} \underline{I}_p \end{bmatrix} \quad (5.80)$$

neu angeordnet. Es gilt nun der Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} = \underline{B}' \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} , \quad (5.81)$$

welcher der Gleichung (5.73) entspricht.

Stellt man nun alle Bedingungen für das Polytop, wie in Gleichung (5.36), zu einer Ungleichung zusammen, so gilt

$$\underline{A} \underline{v} \leq \underline{b} \quad , \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{g \times p \cdot n} \quad , \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^{g \times 1} \quad (5.82)$$

mit $\underline{v}^T = [\underline{u}^T(\underline{x}_{v_1}), \dots, \underline{u}^T(\underline{x}_{v_M})]$. Die Anzahl der Zeilen in der Matrix \underline{A} wird mit g bezeichnet. Spaltet man nun die Matrix \underline{A} auf, gilt

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p \cdot (n+1)} & a_{1,p \cdot (n+1)+1} & \cdots & a_{1,p \cdot M} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{g,1} & \cdots & a_{g,p \cdot (n+1)} & a_{g,p \cdot (n+1)+1} & \cdots & a_{g,p \cdot M} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

$$= \left[\begin{array}{cc} \underline{A}_1 & \underline{A}_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} = \underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} + \underline{A}_2 \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+2}}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_M}) \end{bmatrix} \leq \underline{b} \quad (5.84)$$

Setzt man nun die Gleichung (5.81) in die Ungleichung (5.84) ein, ergibt sich das reduzierte Ungleichungssystem

$$\underline{A}_1 \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} + \underline{A}_2 \underline{B}' \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix} = \underbrace{(\underline{A}_1 + \underline{A}_2 \underline{B}')}_{\underline{A}'} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix}}_{\underline{v}'} \leq \underline{b} \quad (5.85)$$

Die Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}$ werden bestimmt, indem man die Ungleichung $\underline{A}' \underline{v}' \leq \underline{b}$ für $(\underline{v}')^T = [\underline{u}(\underline{x}_{v_1}^T), \dots, \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}^T)]$ löst und nach Umformung von \underline{v}' in Matrixform

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{u}(\underline{x}_{v_1}) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{x}_{v_{n+1}}) \end{bmatrix}$$

in Gleichung (5.41) einsetzt.

Welche $n + 1$ Eckpunkte für die Reduktion des Ungleichungssystems verwendet werden, ist dabei für das resultierende Regelungsgesetz nicht von Bedeutung. Es gilt der folgende Satz:

Satz 5.2 (Eindeutigkeit der Reglerparameter beim Polytop):

Die Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}$ berechnet für ein Polytop, sind genau dann eindeutig, wenn die zur Reduktion und Berechnung der Parameter verwendeten $n + 1$ Eckpunkte des Polytops ein volldimensionales Simplex aufspannen und in das Gütemaß und in die Nebenbedingungen alle M Ecken einfließen.

Der zugehörige Beweis zu Satz 5.2 ist im Anhang B.2 angegeben.

Der Satz 5.2 sagt aus, dass die Wahl der $n + 1$ Eckpunkte zur Berechnung der Reglerparameter beliebig ist. Der Einfachheit halber wird, wie schon in [Hv04], eine Delaunay-Triangulierung für das Polytop vorgeschlagen, da hierfür ausgereifte Algorithmen existieren. Das gesamte Polytop wird dabei mit sich nicht überlappenden Simplexen ausgefüllt, wovon üblicherweise das erste Simplex gewählt wird. Natürlich kann man auch manuell die $n + 1$ Eckpunkte für ein Simplex wählen.

An einem Beispiel soll der Zusammenhang nun verdeutlicht werden.

Beispiel 5.7 (Stellgrößenvorgabe):

Gegeben sind zwei Polytope P und \tilde{P} mit den Eckpunkten

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} 4,5 \\ 3,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,6 \\ 1,5 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{V}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3,6 \\ 1,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Die Nummerierung der Ecken und Seiten der Polytope wird wie in Abbildung 5.7 gewählt. Im Polytop P gilt

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,01 & 0,85 \end{bmatrix}, \quad \underline{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,3 \end{bmatrix}$$

und im Nachbarypolytop \tilde{P} gilt

$$\tilde{\underline{\Phi}} = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,01 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{\varphi}} = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,25 \end{bmatrix}.$$

Gesucht ist eine affine Zustandsrückführung, die den Zustand von einem beliebigen Anfangszustand innerhalb des Polytops P in das Polytop \tilde{P} überführt. Für den Reglerentwurf wird das VSE-Verfahren verwendet.

In Abbildung 5.21(a) ist das ungeregelte System dargestellt. Für den Reglerentwurf werden zunächst die Polytopecken \underline{x}_{v_4} , \underline{x}_{v_1} und \underline{x}_{v_2} ausgewählt.

Die Polytopecke \underline{x}_{v_3} besitzt bezüglich der übrigen Ecken von P die baryzentrischen Koordinaten

$$\underline{b} = [2,64 \quad -3,07 \quad 1,43]^T.$$

Die Stellgrößen in den gewählten Polytopecken werden zu

$$u(\underline{x}_{v_4}) = 0,5, \quad u(\underline{x}_{v_1}) = 0,4 \quad \text{und} \quad u(\underline{x}_{v_2}) = 0$$

bestimmt. Die Stellgröße $u(\underline{x}_{v_3})$ ergibt sich damit zu

$$u(\underline{x}_{v_3}) = \begin{bmatrix} u(\underline{x}_{v_4}) \\ u(\underline{x}_{v_1}) \\ u(\underline{x}_{v_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_4} & \underline{x}_{v_1} & \underline{x}_{v_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_3} \\ 1 \end{bmatrix} = 0,09.$$

Die resultierenden zeitdiskreten Gradienten in den Ecken \underline{x}_{v_4} , \underline{x}_{v_1} und \underline{x}_{v_2} sind in Abbildung 5.21(b) mit einem durchgezogenen Pfeil eingezeichnet, der zeitdiskrete Gradient in \underline{x}_{v_3} , der durch die Wahl der drei Stellgrößen ebenfalls festgelegt ist, ist mit einem gestrichelten Pfeil dargestellt. Da offensichtlich alle Gradientenbedingungen erfüllt sind, kann mit $u(\underline{x}_{v_4})$, $u(\underline{x}_{v_1})$, und $u(\underline{x}_{v_2})$ eine affine Zustandsrückführung berechnet werden, die den gewünschten Polytopübertritt bewirkt:

$$\begin{bmatrix} -\underline{R} & \underline{\varphi}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\underline{x}_{v_4}) \\ u(\underline{x}_{v_1}) \\ u(\underline{x}_{v_2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_4} & \underline{x}_{v_1} & \underline{x}_{v_2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = [0,12 \quad -0,1 \quad 0,28].$$

Das geregelte System ist in Abbildung 5.21(c) dargestellt. Es bleibt noch zu überprüfen, ob die Bedingungen (5.28) vom geregelten System auch unter Berücksichtigung der Dynamik des Nachbarypolytops erfüllt werden. In Abbildung 5.21(d) ist dargestellt, dass das Ziel wie gewünscht erreicht wird. Auch in diesem Beispiel könnte für die Wahl der Stellgrößen wieder ein Optimierungsverfahren verwendet werden.

5.6.2 Erweiterung des ELV-Verfahrens für Polytope

Das vorgestellte ELV-Verfahren aus Abschnitt 5.4.4 muss für eine Anwendung mit Polytopen nicht erweitert werden. Die Anzahl der Bedingungen (5.28) bleibt gleich, jedoch erhöht sich die Anzahl der Unbekannten je Ungleichung.

Beispiel 5.8 (Linkseigenvektor- und Eigenwertvorgabe):

Betrachtet wird das System aus Beispiel 5.7. Der Regler für den Polytopübertritt vom Polytop P in das Nachbarypolytop \dot{P} soll nun mithilfe der Linkseigenvektor- und Eigenwertvorgabe entworfen werden.

Das unregelte System ist in Abbildung 5.22(a) dargestellt.

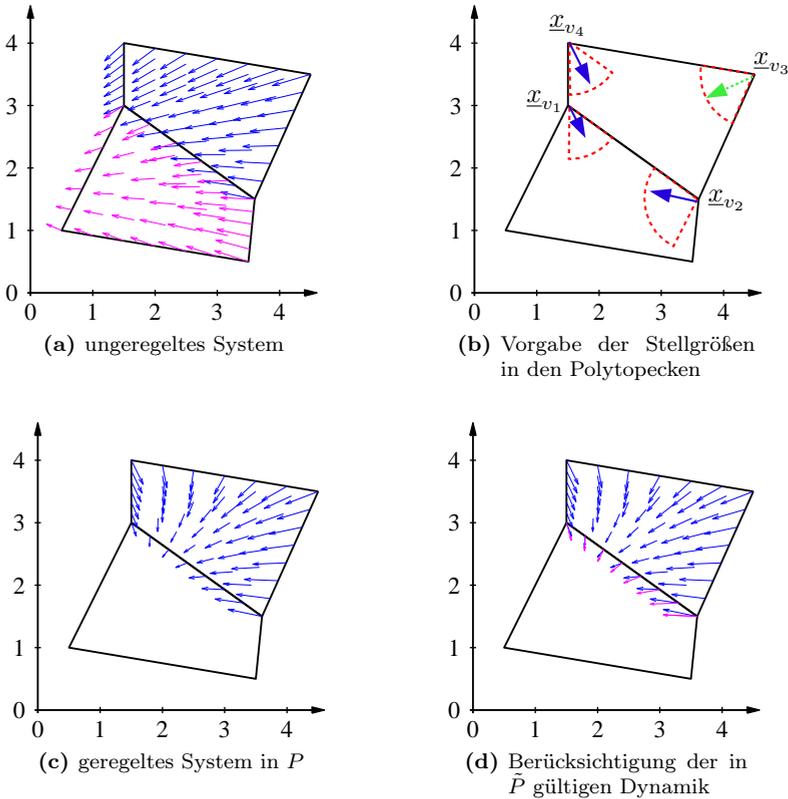


Abbildung 5.21: Entwurf einer Regelung für den Polytopübertritt mit dem VSE-Verfahren

Aus den möglichen Ruhelagen, die in Abbildung 5.22(b) mit einer gestrichelten Linie eingezeichnet sind, wird

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}} = \begin{bmatrix} 2,16 \\ 1,61 \end{bmatrix}$$

als gewünschte Ruhelage ausgewählt.

Die inhärente Systemgrenze, als durchgezogene Linie eingezeichnet, soll durch die Polytopecke \underline{x}_{v3} verlaufen. Es wird also der Linkseigenvektor

$$\underline{w}_{R,1}^T = [0,63 \quad -0,78]$$

vorgegeben. Wird der zugehörige Eigenwert zu $\lambda_{R,1} = 0,8$ gewählt, so ergibt sich das in Abbildung 5.22(c) dargestellte Systemverhalten. Die durch den nicht vorgebbaren Linkseigenvektor bedingte inhärente Systemgrenze ist gepunktet eingezeichnet. Über-

prüft man schließlich noch, wie in Abbildung 5.22(d) dargestellt, die Bedingungen auf Basis der in \tilde{P} gültigen Dynamik, so stellt man fest, dass die entworfene Zustandsrückführung

$$\begin{aligned} r^T &= (\underline{w}_{R,1} \underline{H})^{-1} (\underline{w}_{R,1} \underline{\Phi} - \lambda_{R,1} \underline{w}_{R,1}) = [0,07 \quad -0,041] \\ \varphi_u &= (\underline{H}^T \underline{H})^{-1} \underline{H}^T ((I_2 - \underline{\Phi} + \underline{H} R) \underline{x}_{Ruhe} - \underline{\varphi}) = 0,49 \end{aligned}$$

den gewünschten Polytopübertritt¹² bewirkt¹³.

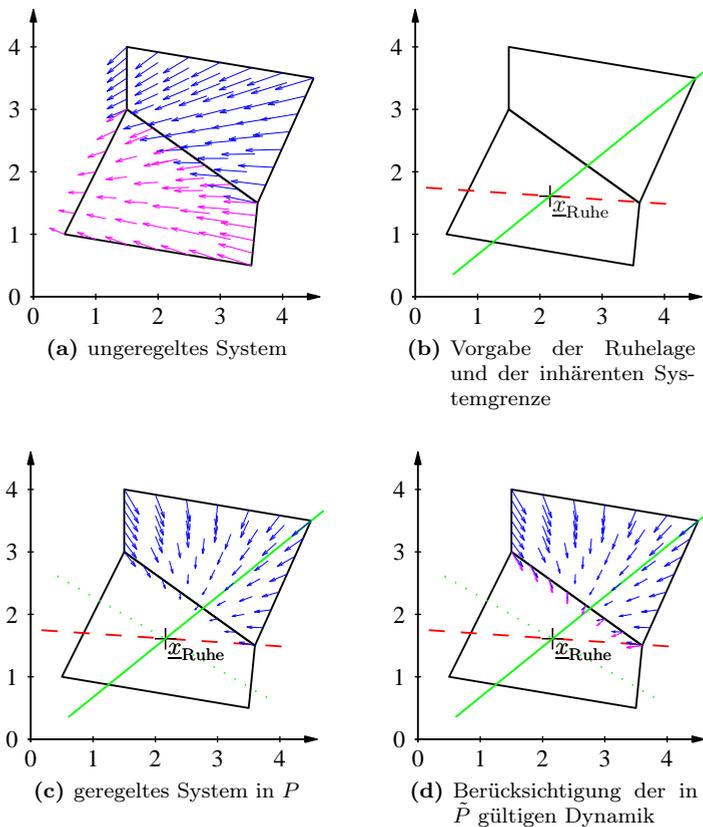


Abbildung 5.22: Entwurf einer Regelung für den Polytopübertritt mit dem ELV-Verfahren

¹²In diesem Beispiel ist wiederum der Zusammenhang aus Anmerkung 5.1 zu beachten.

¹³Da bei der Berechnung von φ_u eine mögliche Ruhelage \underline{x}_{Ruhe} gewählt wurde, löst das berechnete φ_u die Gleichung (5.50) exakt.

5.7 Endgebietsregelung im Polytop

Für die Endgebietsregelung im Polytop ist die Vorgehensweise für Simplexe aus Abschnitt 5.5 zu verallgemeinern.

5.7.1 Allgemeine Bedingungen an die Gradienten bei der Endgebietsregelung im Polytop

Die Trajektorie des geregelten Systems kann das Endpolytop nicht verlassen. Dies lässt sich für ein Polytop mithilfe der folgenden Ungleichungen formulieren:

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \forall F_j \in \mathcal{F}_i : \underline{n}_{F_j}^T \left((\Phi_R - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R \right) \leq 0 \quad (5.86a)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{x}_{v_k} \in \mathcal{V} \setminus \{ \underline{x}_{v_i} \} : \forall F_j \in \mathcal{F} \setminus \{ \mathcal{F}_i \} : \\ \underline{n}_{F_j}^T \left(\Phi_R \underline{x}_{v_i} + \underline{\varphi}_R - \underline{x}_{v_k} \right) \leq 0 \quad (5.86b)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : -\underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq -\underline{u}_{\min}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.86c)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{u}_k(\underline{x}_{v_i}) \leq \underline{u}_{\max}(\underline{x}_{v_i}) \quad (5.86d)$$

Diese Bedingungen haben anschaulich folgende Bedeutung:

- (5.86a) Die Gradienten in allen Polytopecken zeigen bezüglich jeder angrenzenden Polytopseite nach innen oder auf den Rand.
- (5.86b) Die Gradienten in allen Polytopecken ragen nicht über die jeweils gegenüberliegenden Seiten hinaus. Dabei ist \underline{x}_{v_k} eine (mit Ausnahme von \underline{x}_{v_i}) beliebige Simplexecke.
- (5.86c) Der Stellgrößenvektor in jeder Ecke des Simplex ist nach unten beschränkt.
- (5.86d) Der Stellgrößenvektor in jeder Ecke des Simplex ist nach oben beschränkt.

Darüber hinaus muss wiederum eine Ruhelage gewählt werden; es gelten die gleichen Betrachtungen wie im Abschnitt 5.4.2.

5.7.2 Endgebietsregelung mit dem VSE-Verfahren

Auf das Ungleichungssystem (5.86) wird das Verfahren zur Reduktion der Anzahl der Variablen des Ungleichungssystems aus Abschnitt 5.6.1 angewendet. Um die Abhängigkeit von der Stellgröße in den Ecken $\underline{u}(\underline{x}_{v_i})$, $i = 1, \dots, M$ deutlich herauszustellen, ersetzt man dazu Φ_R und $\underline{\varphi}_u$ durch die Zusammenhänge aus den Glei-

chungen (5.8) und (5.9). Klammert man in den resultierenden Ungleichungen die Matrix \underline{H} aus, so folgt mit dem Regelgesetz (5.6) die explizit von der Stellgröße in den Ecken \underline{x}_{v_i} , $i = 1, \dots, M$ abhängige Form

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \forall F_j \in \mathcal{F}_i : \underline{n}_{F_j}^T ((\underline{\Phi} - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi}) \leq 0 \quad (5.87a)$$

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{x}_{v_k} \in \mathcal{V} \setminus \{\underline{x}_{v_i}\} : \forall F_j \in \mathcal{F} \setminus \{\mathcal{F}_i\} : \underline{n}_{F_j}^T (\underline{\Phi} \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi} - \underline{x}_{v_k}) \leq 0 \quad (5.87b)$$

der Ungleichungen (5.86a-5.86b).

Auch hier werden, wie in Abschnitt 5.6.1, die Ecken eines beliebigen Simplex gewählt und damit eine Reduktion der Variablen des Gleichungssystems erreicht.

Die Bedingung für die Ruhelage in Gleichung (5.69) kann dann direkt zu den Bedingungen, die von den $n + 1$ gewählten Ecken aus der Reduktion abhängen, hinzugefügt werden. Die Berechnung der Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}_u$ wird dann wie in Abschnitt 5.4.3 durchgeführt.

5.7.3 Endgebietsregelung mit dem ELV-Verfahren

Für die Endgebietsregelung mit dem ELV-Verfahren kann die in Abschnitt 5.5.3 vorgestellte Methode unter Verwendung der Bedingungen (5.86) angewendet werden. Statt eines Polytops mit genau $n + 1$ Ecken, das dem Simplex entspricht, wird jetzt ein Polytop mit M Ecken betrachtet.

5.8 Vergleich des VSE-Verfahrens mit dem ELV-Verfahren

Mit beiden Verfahren kann ein affines Regelungsgesetz je Polytop für die Übertrittsregelung und für die Endgebietsregelung bestimmt werden.

Das VSE-Verfahren hat im Vergleich zum ELV-Verfahren den großen Vorteil, dass das zur Bestimmung einer Lösung des Ungleichungssystems verwendete Optimierungsproblem nur lineare Nebenbedingungen besitzt.

Beim ELV-Verfahren muss hingegen immer eine bestimmte Lösung eines nichtlinearen Ungleichungssystems bestimmt werden. Das hierfür verwendete Optimierungsproblem hat nichtlineare Nebenbedingungen, die die Lösbarkeit enorm erschweren.

Das ELV-Verfahren hat gegenüber dem VSE-Verfahren allerdings den Vorteil, dass die inhärenten Systemgrenzen eine anschauliche Interpretation ermöglichen und so

leichter einer Grenze im Zustandsraum zuzuordnen sind. Die Winkelbereiche beim VSE-Verfahren sind zwar auch anschaulich, es ist aber nicht möglich diesen direkt Grenzen im Zustandsraum zuzuordnen.

Die Dynamik des geregelten Systems kann beim VSE-Verfahren auch komplexe Eigenwerte besitzen, während das ELV-Verfahren immer reelle Eigenwerte fordert.

5.9 Vergleich mit existierenden Verfahren

Für die Übertrittsregelung zwischen zwei Polytopen existieren für zeitkontinuierliche Systeme das sehr weit entwickelte Verfahren zur Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken des Polytops nach [Hv04] und die Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren nach [Fre99, Nen01]. Beide kontinuierlichen Verfahren konnten dabei nicht nur für zeitdiskrete Systeme erweitert werden, sondern es wurden auch die Verfahren an sich weiterentwickelt. Darauf wird in den nächsten zwei Teilabschnitten eingegangen.

Die multiparametrische Programmierung nach [Bor02] kann nicht direkt dazu genutzt werden, um eine Übertrittsregelung zu realisieren. Es wird bei dem Verfahren lediglich ein Zielgebiet definiert, das erreicht werden soll. Das Verfahren scheint deshalb für eine Endgebietsregelung geeignet zu sein, allerdings kann nicht immer jede Trajektorie im Endgebiet gehalten werden. Für eine Übertrittsregelung legt man das Zielgebiet außerhalb des betrachteten Polytops und gibt im wesentlichen ein erlaubtes Polytop vor. Leider kann auch bei der Übertrittsregelung ein Verlassen des erlaubten Polytops durch eine falsche Seite nicht immer verhindert werden. Das Verfahren wird trotz dieser Schwäche im Entwurf in der Literatur sehr häufig zitiert.

5.9.1 Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken eines Simplex bei zeitkontinuierlichen stückweise affinen Systemen

In Abschnitt 3.3.4 wurde das Verfahren zur Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken nach [Hv04] bereits vorgestellt. Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte VSE-Verfahren stellt eine Verallgemeinerung dieses Verfahrens auf zeitdiskrete stückweise affine Systeme dar. Während die Verfahren für die Übertrittsregelung im Simplex sehr ähnlich sind, gibt es für die Übertrittsregelung im Polytop doch deutliche Unterschiede. Das VSE-Verfahren besitzt bei der Übertrittsregelung im Simplex lediglich mehr Bedingungen, um den zeitdiskreten Systemeigenschaften Rechnung zu tragen. Bei der Übertrittsregelung im Polytop schlägt [Hv04] hingegen eine Triangulierung des Polytops in Simplexe mit der Delaunay-Triangulierung vor, um dann für jedes Simplex einen Regler zu berechnen.

Die beiden hier vorgestellten Verfahren, das VSE- und das ELV-Verfahren, begnügen sich aber mit der Berechnung eines Reglers, der auf dem gesamten Polytop seine Gültigkeit hat. Für die anschließende Speicherung der Regler stellt dies eine deutliche Reduktion des Speicheraufwands im Vergleich zu dem Verfahren aus [Hv04] dar. Für ein viereckförmiges Polytop im zweidimensionalen Zustandsraum benötigt man so zum Beispiel zwei Simplexe mit je einem Regelgesetz. Dies bedeutet schon doppelten Speicheraufwand. Für ein Polytop mit acht Ecken im dreidimensionalen Raum, zum Beispiel einem Würfel oder Spat, ist der Bedarf an Speicherplatz je nach Triangulierung schon fünf bis sechs¹⁴ mal so hoch.

5.9.2 Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren bei zeitkontinuierlichen stückweise affinen und hybriden Systemen

In Abschnitt 3.3.5 wurde das Verfahren zur Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren nach [Fre99, Nen01] vorgestellt. Eine Aussage über den Verlauf einer Trajektorie war dabei nur innerhalb eines spatförmigen Gebietes möglich. Die Ruhelage des geregelten Systems wird von einer Ecke des Spates repräsentiert. Die inhärenten Systemgrenzen stellen die durch die Ruhelage verlaufende Seitenflächen des Spats dar. Das in Abschnitt 5.4.4 eingeführte ELV-Verfahren entspricht dabei der Verallgemeinerung dieses Verfahrens auf zeitdiskrete Systeme. Darüber hinaus ist es jetzt beim ELV-Verfahren möglich, durch das Verwenden der zusätzlichen Bedingungen (5.28) Regelgesetze für beliebige Polytope und nicht nur für Spate angeben zu können.

Das ELV-Verfahren kombiniert sozusagen die Vorzüge der Verfahren zur Vorgabe von Eigenwerten und Linkseigenvektoren nach [Fre99, Nen01] und des Sektorkriteriums aus Abschnitt 3.3.6 nach [Fre99, Nen01], das ebenfalls Bedingungen, allerdings an den zeitkontinuierlichen Gradienten auf den Rändern des zur Überführung der Trajektorie notwendigen Sektorabschnittes stellt.

5.9.3 Multiparametrische Programmierung bei zeitdiskreten stückweise affinen Systemen

In Abschnitt 3.3.3 wird das Verfahren zum Reglerentwurf nach [Bor02] vorgestellt. Hierbei wird auf ein Regelgesetz derart geschlossen, dass der erste Schritt in einem modellprädiktiven Ansatz einem oftmals winzigen Gebiet im Zustandsraum zugeordnet wird. Dadurch werden für ein durch die Modellierung gegebenes stückweise

¹⁴Die Triangulierung ist in höheren Dimensionen nicht mehr eindeutig.

affines System sehr viele, wiederum auf Polytopen gültige affine Regelgesetze berechnet und abgespeichert.

Während bei den zwei Verfahren, die in dieser Arbeit vorgeschlagen werden, genau so viele Regelungsgesetze gespeichert werden müssen, wie Polytope vorhanden sind, ist der Speicheraufwand bei den Verfahren in [Hv04] und [Bor02] wesentlich größer. In [Hv04] wird ein Polytop in mehrere Simplexe aufgeteilt. In [Bor02] wird ein Polytop in eine sehr große Anzahl winziger Polytope aufgeteilt, mit denen versucht wird das ursprüngliche Polytop so gut wie möglich auszufüllen. Der Speicheraufwand für die Simplexe in [Hv04] ist im Vergleich zum Speicheraufwand bei [Bor02] vernachlässigbar.

In [Bor02] liegt die Lösung, den Startzustand \underline{x}_0 in den Endzustand $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ über mehrere, durch die Modellierung gegebene Polytope zu überführen, der theoretisch besten Trajektorie viel näher, da die zusätzliche Aufteilung des Zustandsraumes in die winzigen Polytope sehr viel mehr Freiheitsgrade in der Prozessführung erlauben. In einem Polytop kann so durch die vielen winzigen Polytope quasi ein nichtlineares optimales Regelgesetz realisiert werden. Im Vergleich dazu ist festzustellen, dass für die hier vorgestellten Verfahren die gefundene Sequenz von Polytopen bezogen auf eine feste Polytopstruktur ebenfalls optimal ist:

Ein wesentlicher Nachteil des Verfahrens der multiparametrischen Programmierung ist, dass die Regelgesetze üblicherweise nicht das gesamte durch die Modellierung bestimmte Polytop abdecken. Darüber hinaus kann der Fall auftreten, dass ein winziges Polytop mit einem Regelgesetz angegeben wird, aber eine Trajektorie, die in diesem winzigen Polytop startet, schon nach wenigen Schritten in einen Teil des Zustandsraumes abgebildet wird, für den kein Regelgesetz mehr existiert, und damit das angestrebte Ziel überhaupt nicht erreicht werden kann. Dieses schließt auch den Fall mit ein, dass dieses Gebiet, in dem kein weiterführendes Regelgesetz zur Anwendung auf die Trajektorie existiert, außerhalb des durch die Modellierung gegebenen Polytops liegt. Die multiparametrische Programmierung ist deshalb nicht in der Lage, einen Polytopübertritt nach Definition 5.1 oder eine Endgebietsregelung nach Definition 5.2, wie zum Beispiel in Abbildung 5.1 gefordert, garantieren zu können.

5.9.4 Vergleich mit weiteren Verfahren

In [Imu04, AI06] wird ein Optimalregler für zeitdiskrete stückweise affine hybride Systeme mithilfe von Riccati-Gleichungen (siehe [Fö94]) für die einzelnen Moden des Systems gesucht. Die Beachtung von Stellgrößenbeschränkungen ist hierbei nur indirekt über das beim Entwurf verwendete Gütemaß möglich.

In [HTK99, HTK00] werden polynomiale Systeme für den Reglerentwurf eines Systems mit beschränkten Stellgrößen verwendet. Dieses Verfahren hat eine Ähnlichkeit

mit der Regelung im Endgebiet. Dabei startet die Trajektorie in einem Polytop im Zustandsraum, in dem der Ursprung liegt. Es kann das Erreichen der Ruhelage im Ursprung und damit die Stabilität garantiert werden, allerdings kann die Trajektorie das Polytop dazu auch verlassen.

5.10 Erweiterungen des Entwurfs

Liegt dem betrachteten zeitdiskreten affinen System ein reales kontinuierliches affines System zu Grunde, dann wirkt ein zeitdiskreter Regler auf eine zeitkontinuierliche Strecke ein. Zwischen den Abtastzeitpunkten verläuft somit eine zeitkontinuierliche Trajektorie. Die Abtastwerte liegen bei einer Zeitdiskretisierung affiner Systeme exakt auf der zeitkontinuierlichen Trajektorie.

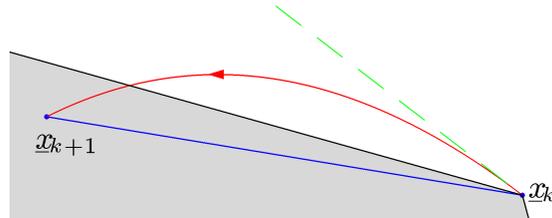


Abbildung 5.23: Vergleich der zeitdiskreten und der zugehörigen kontinuierlichen Trajektorie

In Abbildung 5.23 ist die kontinuierliche affine Trajektorie in Form einer Kurve gegeben, die mit einem Pfeil gekennzeichnet ist. Die zeitdiskrete Trajektorie ist durch die zwei Abtastzeitpunkte \underline{x}_{k+1} und \underline{x}_k dargestellt. Beide Abtastzeitpunkte liegen auf der zeitkontinuierlichen Trajektorie. Die Tangente an die zeitkontinuierliche Trajektorie in \underline{x}_k ist durch die gestrichelte Linie dargestellt. Darüber hinaus ist die Fläche eines Polytops grau markiert, wobei \underline{x}_k eine Ecke des Polytops darstellt.

Deutlich ist zu erkennen, dass die zeitdiskrete Trajektorie im Polytop verläuft, während die zeitkontinuierliche Trajektorie das Polytop verlässt, um dann im späteren Verlauf wieder in das Polytop einzudringen. Wird nun eine andere zeitkontinuierliche Dynamik außerhalb des Polytops angenommen, so kann es passieren, dass die Trajektorie einen völlig veränderten Verlauf annimmt, als durch das zeitdiskrete Regelgesetz beabsichtigt wurde. Die zeitkontinuierliche Trajektorie stellt somit einen verbotenen Verlauf dar, wie in Abbildung 5.1 gezeigt wurde.

Eine Berücksichtigung der kontinuierlichen Dynamik ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn diese bekannt ist und diese für den Reglerentwurf zeitdiskretisiert wurde. Ist die zeitkontinuierliche Dynamik bekannt, dann können zu den Bedingungen (5.28)

die zeitkontinuierlichen Bedingungen (3.9) hinzugefügt werden. Anschaulich wird dann gefordert, dass die gestrichelte Linie, die in \underline{x}_k startet, mit der Begrenzung des Polytops zusammenfällt.

Im Allgemeinen soll in dieser Arbeit davon ausgegangen werden, dass nur die exakte zeitdiskrete Systemdarstellung gegeben ist.

5.11 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die zwei Regelungsaufgaben der Übertrittsregelung und der Endgebietsregelung mit den Verfahren der *Vorgabe von Stellgrößen in den Ecken (VSE)* und dem Verfahren der *Eigenwert- und Linkseigenvektor-Vorgabe (ELV)* vorgestellt. Beide Verfahren wurden dabei zuerst am Simplex für jede der Regelungsaufgaben eingeführt und an Beispielen erläutert.

Beim ELV-Verfahren ist für den Fall $n > p$ zu beachten, dass die nicht vorgebbaren Eigenwerte und Linkseigenvektoren sich unkontrolliert verändern können. Auswirkungen sind in Anmerkung 5.1 zusammengefasst.

Beide Verfahren haben gemeinsam, dass sie Bedingungen an die Stellgrößen in den Ecken des Polytops stellen. Diese Bedingungen stellen allerdings nur ein im mathematischen Sinn notwendiges Kriterium dar, da das Berechnen von Reglerparametern dadurch nicht garantiert ist. Es ist immer noch möglich, dass kein Regelungsgesetz existiert, das alle Bedingungen des Ungleichungssystems gleichzeitig erfüllt, obwohl die Bedingungen, gruppiert nach den Ecken des Polytops, in jeder Ecke erfüllbar sind. Diese Bedingungen sind für beide Verfahren identisch und müssen deshalb für beide Verfahren nur einmal aufgestellt werden (siehe Abschnitt 5.3).

In Tabelle 5.4 sind die zwei hier vorgestellten Verfahren mit den Verfahren aus [Hv04], [Nen01] und [Bor02] für einen abschließenden Vergleich zusammengestellt.

Ein wesentlicher Vorteil beider hier vorgestellten Verfahren ist deren Anschaulichkeit, die bei höherer Systemordnung aber verloren gehen kann. So kann es schnell passieren, dass einige Bedingungen nicht erfüllbar sind und damit die Berechnung eines Regelgesetzes nicht möglich ist. Bei niedriger Systemordnung kann dieses Problem durch die Anschaulichkeit der Polytopstruktur leicht einer Ecke zugeordnet werden, wenn die Bereiche für die Bedingungen in den Eckpunkten eingezeichnet und ausgewertet werden. Damit ist meistens sehr schnell klar, ob durch das Verschieben einer Ecke – dies führt zu einer anderen Polytopaufteilung – die Bedingungen erfüllt werden können oder nicht.

Es ist zwar auch bei Systemen höherer Ordnung noch leicht möglich herauszufinden, in welcher Ecke Bedingungen nicht erfüllbar sind, allerdings ist nicht klar, in welche

Tabelle 5.4: Vergleich der Verfahren

Verfahren	VSE	ELV	[Hv04]	[Nen01], Abs. 3.3.5	[Bor02]
Speicher- aufwand	gering, da nur ein Regelgesetz je Polytop benötigt wird		mittel, da für jeden Simplex des Polytops nach Triangulierung ein Regelgesetz berechnet wird	gering, da nur ein Regelgesetz in einem Bereich angegeben wird	sehr hoch, da sehr viele Regelgesetze je Polytop bestimmt werden müssen
Berechnung der Regler- parameter	sehr einfach, Matrixinversion auf Basis $n + 1$ Stellgrößen in den Ecken, lineares Ungleichungssystem	aufwändig, Wahl von Systemgrenzen und Ruhelage führt zur Lösung eines nichtlinearen Ungleichungssystems	mittel, Triangulierung und Matrixinversion auf Basis jedes Simplexes, lineares Ungleichungssystem	aufwändig, Wahl von Systemgrenzen und Ruhelage führt zur Lösung eines nichtlinearen Ungleichungssystems	hoch, Reglerparameter gewonnen aus erstem Schritt eines mehrschrittigen modellprädiktiven Ansatzes, Lösung eines multiparametrischen Optimierungsproblems
Nebenbedingungen für Optimierung	linear	nichtlinear	linear	nichtlinear	linear
Gütemaß für Optimierung	linear oder nichtlinear	nichtlinear	linear oder nichtlinear	nichtlinear	linear oder nichtlinear
Optimalität der Lösung	Optimal bezüglich Wahl der Polytopstruktur			Regelung nur in einem lokalen Bereich, Optimalitätsaussage nicht möglich	Naheliegender optimalen nichtlinearen Lösung, da unabhängig von der vorgegebenen Polytopstruktur durch Wahl neuer sehr kleiner Polytope
Systemklasse	zeitdiskret		zeitkontinuierlich		zeitdiskret

Richtung die betroffenen Ecken verschoben werden müssen, um die Lösbarkeit des Ungleichungssystems zu erreichen. Dies kann nur durch eine nichtlineare Optimierung erfolgen, die iterativ die Ecke verschiebt und die Bedingungen auswertet, bis entweder eine maximale Anzahl an Iterationen durchlaufen ist oder alle Bedingungen des Ungleichungssystems eingehalten werden können [Str05].

Im nächsten Kapitel werden die vorgestellten neuen Verfahren nun an Anwendungsbeispielen demonstriert.

Kapitel 6

Anwendungsbeispiele

Die Anwendung der Prozessführungsstrategie als Ganzes, bestehend aus der in Kapitel 4 beschriebenen globalen Prozessführung und den in Kapitel 5 vorgestellten Verfahren zur lokalen Regelung, wird nun anhand von mehreren Beispielen aufgezeigt.

Zunächst wird eine Anwendung und Demonstration der Verfahren an einem Tank-System untersucht, das als Pilotanlage dient. Diese Anlage kann als

- Zwei-Tank-System und
- Drei-Tank-System

betrieben werden. Ziel der Verfahren ist, die Höhen in den Tanks einzustellen. Die nichtlineare Dynamik der Systeme wird dabei durch eine hybride, stückweise affine Dynamik approximiert. Der Zustandsraum wird deshalb in Falle des Zwei-Tank-Systems in Simplexe und beim Drei-Tank-System in Würfel unterteilt. Eine wesentliche Einflussnahme auf die Systemdynamik besteht hierbei durch die Möglichkeit diskrete Ventile, die ganz geschlossen oder ganz geöffnet sein können, im Boden der Tanks und zwischen den Tanks zu schalten. Die Verfügbarkeit der Anlage ermöglicht es Ergebnisse aus Messungen an der realen Strecke denen aus Simulationen gegenüber zu stellen.

Desweiteren werden die Verfahren an den zwei automotive Anwendungen

- Druckregelung einer Kupplung und
- Dämpfung von Lastschlag und Ruckelschwingungen im Antriebsstrang

untersucht. Bei der Druckregelung einer Kupplung wird der Druck eingestellt, der zur hydraulischen Betätigung einer Kupplung verwendet wird. Der dynamische Zusammenhang zwischen dem Ist-Druck und dem Soll-Druck in der Druckregelstrecke verhält sich stark nichtlinear. Diese nichtlineare Dynamik wird durch eine stückweise affine Dynamik approximiert.

Zum Abschluss wird die Dämpfung von Lastschlag und Ruckelschwingungen im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs untersucht. Durch die Modellierung des Systems ergibt sich ein stückweise affines System, da zwei Massenträgheiten über eine Lose und eine Drehfeder gekoppelt sind. Um den Lastschlag zu verkleinern und dabei trotzdem ein agiles System zu erhalten, wird einerseits versucht, den Bereich der Lose, in dem kein Gegenmoment von der beschleunigten Drehmasse wirkt, durch eine hohe Differenzdrehzahl schnell zu durchlaufen, andererseits wird kurz vor dem Kontakt der Zahnflanken nach Durchlaufen der Lose die Differenzdrehzahl so stark wie möglich verkleinert. Durch den nun verminderten Lastschlag werden dann die Ruckelschwingungen im Antriebsstrang weniger stark angeregt.

In Abschnitt 6.1 sind die Anwendungsbeispiele zur Prozessführung zusammengestellt, in denen die Prozessführungsstrategie die übergeordnete Koordination übernimmt und die lokale Regelung dafür sorgt, dass sowohl die Übertrittsregelung als auch die Endgebietsregelung erfolgreich ist. Hier werden insbesondere die Anwendungsbeispiele Zwei-Tank-/Drei-Tank-System und die Druckregelung einer Kuppelung untersucht.

Im Abschnitt 6.2 wird die Dämpfung von Lastschlag und Ruckelschwingungen im Antriebsstrang vorgestellt, wobei nur die lokale Regelung für das erfolgreiche Lösen dieser herausfordernden Regelungsaufgabe verwendet wird. Eine Wegsuche im Graphen ist bei diesen konkreten Anforderungen des technischen Problems nicht notwendig.

6.1 Prozessführung

Die Prozessführung wird im Folgenden an einem Zwei-Tank-System und einem Drei-Tank-System demonstriert. Das Drei-Tank-System stellt im Rahmen des Automatisierungstechnischen Praktikums am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme an der Universität Karlsruhe (TH) einen realen Versuchsaufbau dar [Pra03]. Es konnten so Messdaten an der realen Strecke aufgenommen werden, die im Folgenden den Simulationsdaten vom nichtlinearen und stückweise affinen Simulationsmodell gegenübergestellt werden.

In Abbildung 6.1 ist eine schematische Zeichnung des Drei-Tank-Systems dargestellt. Es besteht aus drei Tanks, die über Verbindungsrohre miteinander gekoppelt sind. Jeder Tank besitzt einen Ausfluss. Die Verbindungsrohre und die Ausflüsse können mit Ventilen, die entweder ganz geöffnet oder ganz geschlossen sind, verschlossen werden. Diese Ventile stellen diskrete Eingangsgrößen mit dem Wert 1 bei geöffnetem und dem Wert 0 bei geschlossenem Ventil dar. Das Drei-Tank-System stellt somit ein vollwertiges hybrides System im Gegensatz zu den stückweise affinen Systemen dar, da diesen in der Regel die diskreten Eingangsgrößen fehlen.

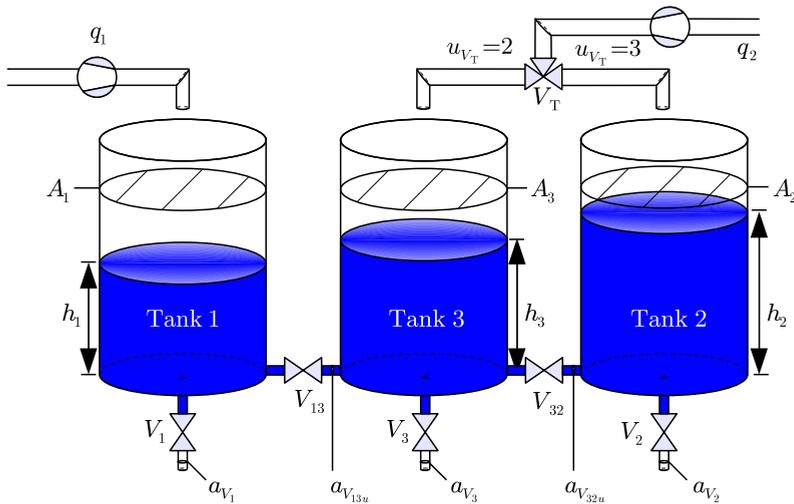


Abbildung 6.1: Schematische Zeichnung des Drei-Tank-Systems

Durch Umschalten des Dreiwegeventils V_T kann das Drei-Tank-System auch als Zwei-Tank-System betrieben werden. Wird das Drei-Tank-System als Zwei-Tank-System betrieben, dann werden nur der Tank 1 und der Tank 3 verwendet. Steht das Dreiwegeventil auf der Position $u_{V_T} = 2$, dann wird mit dem Zufluss q_2 Tank 3 gefüllt und das Tank-System wird als Zwei-Tank-System mit geschlossenem Verbindungsventil V_{32} verwendet. Ist die Position auf $u_{V_T} = 3$, dann wird Tank 2 gefüllt und es wird das Drei-Tank-System betrachtet. Die Zuflüsse q_1 und q_2 können über kontinuierlich verstellbare Pumpen im Bereich $0 \leq q_i \leq q_{i,max}$, $i \in \{1; 2\}$ variiert werden. Die Zuflüsse stellen die Eingangsgrößen und die Höhen in den Tanks die Zustandsgrößen des Systems dar.

Im Falle des Zwei-Tank-Systems gilt demnach $p = n$, es sind also die n Zustandsgrößen und die p Eingangsgrößen in gleicher Anzahl vorhanden. Das Drei-Tank-System verfügt über $n = 3$ Zustandsgrößen und $p = 2$ Eingangsgrößen, es gilt also $n > p$. In diesem Fall reduziert sich die Anzahl möglicher Ruhelagen für den Zustand auf beschränkte lineare Mannigfaltigkeiten im Zustandsraum, wie dies in Abschnitt 5.4.2 erläutert wurde. Für die Berechnung der Übertrittsregelung nach dem ELV-Verfahren und für die Berechnung der Endgebietsregelungen mit beiden Verfahren, dem ELV- und dem VSE-Verfahren, wird unbedingt eine geeignete Ruhelage benötigt. Oft ist diese geeignete Ruhelage nicht vorhanden, weshalb hier beim Drei-Tank-System Probleme auftreten können.

Beide Tanksysteme müssen aufgrund ihres nichtlinearen Systemverhaltens in unterschiedlichen Arbeitspunkten linearisiert werden, damit eine stückweise affine Sys-

temdynamik angenommen werden kann. Auf einem Polytop sind dann verschiedene Dynamiken definiert, die nur noch von den diskreten Stellgrößen abhängen. Durch die Kombination aller Werte der diskreten Eingangsgrößen müssen eine Vielzahl unterschiedlicher Dynamiken in einem Polytop angegeben werden. Für die Prozessführung muss jede dieser Dynamiken in der lokalen Regelstrategie für die Übertritts- und Endgebietsregelung untersucht werden.

Die physikalische Modellierung der Tanksysteme liefert, sobald Ventile geöffnet sind, ein nichtlineares System, da der Durchfluss aus einem Tank Q nach dem Gesetz von Torricelli

$$Q = a_0 \sqrt{2gh} \quad (6.1)$$

mit der freien Fallhöhe h im Tank bestimmt werden kann. Dabei gibt a_0 die Querschnittsfläche der Öffnung beziehungsweise des Ventils im Tank und g die Gravitationskonstante an. Die Änderung der Höhe im Tank ergibt sich dann zu

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Q}{A}, \quad (6.2)$$

wobei A die Querschnittsfläche des Tanks darstellt.

Für die Beschreibung des Systems im Zustandsraum werden die Höhen der Tanks als Zustandsgrößen

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_3 \\ h_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{x} \in [0, h_{1,max}] \times [0, h_{2,max}] \times [0, h_{3,max}] \subset \mathbb{R}^3 \quad (6.3)$$

und die Zufüsse als Eingangsgrößen

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} \in [0, q_{1,max}] \times [0, q_{2,max}] \subset \mathbb{R}^2 \quad (6.4)$$

betrachtet. Die diskreten Ventile stellen dabei ebenso wie das Dreiwegeventil diskrete Eingangsgrößen

$$u_{V_1}, u_{V_2}, u_{V_3}, u_{V_{13}}, u_{V_{32}} \in \{0, 1\} \quad (6.5)$$

und

$$u_{V_T} \in \{2, 3\} \quad (6.6)$$

dar.

6.1.1 Zwei-Tank-System

Das nichtlineare, zeitkontinuierliche Zustandsraummodell¹ des Zwei-Tank-Systems ergibt sich mit $u_{V_T} = 2$ und $V_{32} = 0$ zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{-a_{V1}}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{x_1} \\ 0 \end{bmatrix} u_{V1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a_{V3}}{A_3} \sqrt{2g} \sqrt{x_2} \end{bmatrix} u_{V3} \\ &+ \begin{bmatrix} -\text{sign}(x_1 - x_2) \frac{a_{V13}}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{|x_1 - x_2|} \\ \text{sign}(x_1 - x_2) \frac{a_{V13}}{A_3} \sqrt{2g} \sqrt{|x_1 - x_2|} \end{bmatrix} u_{V13} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{q_{1,max}}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{q_{2,max}}{A_2} \end{bmatrix} \underline{u}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Kombiniert man die drei diskreten Ventile $u_{D_1} = u_{V_1}$, $u_{D_2} = u_{V_3}$ und $u_{D_3} = u_{V_{13}}$, so lassen sich damit $n_{\mathcal{D}} = 8$ unterschiedliche Dynamiken mit der Gleichung (6.7) angeben. Diese unterschiedlichen Dynamiken sind durch den diskreten Zustand

$$u_{\text{Vent}} \in \mathcal{D} = \{1, \dots, 8\} \quad (6.8)$$

dargestellt. Die zugehörigen Kombinationen der Ventile sind in der Tabelle 6.1 zusammengestellt, wobei der Wert 1 dem geöffneten Ventil entspricht.

Tabelle 6.1: Diskreter Zustand für die unterschiedlichen Ventilstellungen des Zwei-Tank-Systems

u_{Vent}	1	2	3	4	5	6	7	8
u_{V_1}	0	0	0	0	1	1	1	1
u_{V_3}	0	0	1	1	0	0	1	1
$u_{V_{13}}$	0	1	0	1	0	1	0	1

Um die nichtlineare Dynamik, die in Gleichung (6.7) angegeben ist, in eine stückweise affine Dynamik umzuwandeln, wird zunächst der Zustandsraum in Simplexe aufgeteilt. In Abbildung 6.2 ist die verwendete Aufteilung mit $n_{\mathcal{G}} = 56$ Simplexen dargestellt. Durch die Einführung eines diskreten Zustands $z_{\text{Simp}} \in \mathcal{G} = \{1, \dots, 56\}$ kann eindeutig auf den jeweiligen Simplex verwiesen werden. Die aktuelle Ventilstellung u_{Vent} und der aktuelle Simplex z_{Simp} stellen gemeinsam den aktuellen diskreten Zustand $\underline{z} = [u_{\text{Vent}} \ z_{\text{Simp}}]^T$ dar. Es ergeben sich so $n_{\mathcal{D}} \cdot n_{\mathcal{G}} = 448$ diskrete Zustände, denen 448 Knoten im dynamikorientierten Graphen entsprechen.

¹Die Parameter des Zustandsraummodells sind in [Buc04a] zusammengestellt.

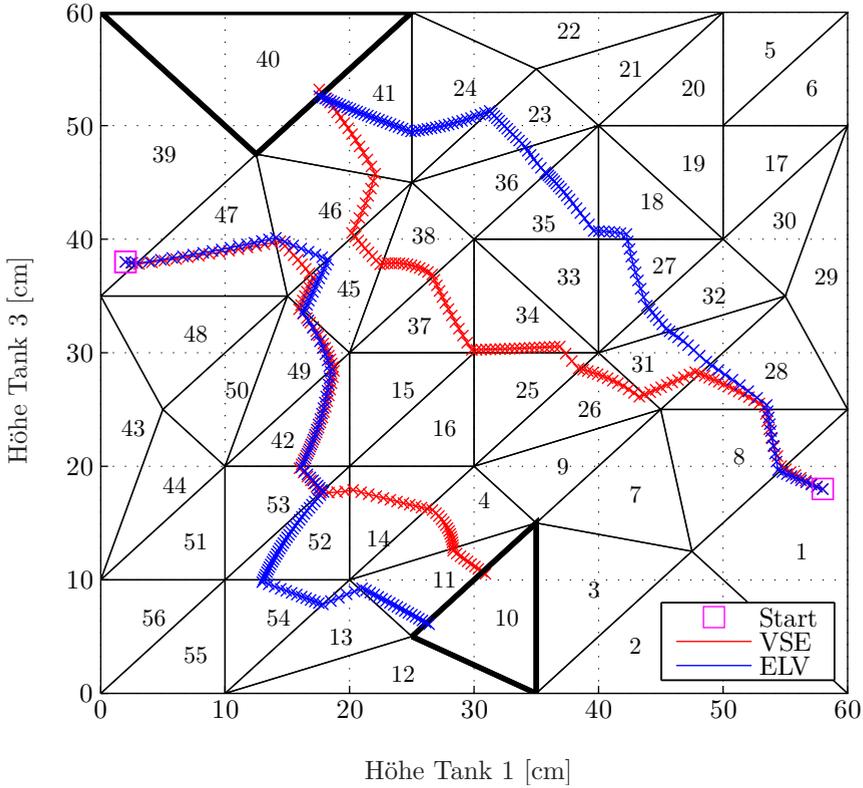


Abbildung 6.2: Experimente A bis D: Verlauf der Trajektorien bei der Simulation des affinen Modells des Zwei-Tank-Systems ($u_{VT} = 2$) ohne Endgebietsregelung

Die nichtlineare Zustandsdifferenzialgleichung wird nun in jedem diskreten Zustand linearisiert, so dass ein kontinuierliches affines Zustandsraummodell nach Definition 2.3 entsteht. Im vorliegenden Fall des Zwei-Tank-Systems wird die Linearisierung nach [Buc04b, HBK05b, HBK05a] so gewählt, dass die drei Eckpunkte des Simplex durch die linearisierte Dynamik exakt abgebildet werden. Mit den Zusammenhängen aus Gleichung (2.9) kann nun aus der affinen zeitkontinuierlichen Zustandsdifferenzialgleichung die affine zeitdiskrete Differenzengleichung (2.7) für jeden diskreten Zustand \underline{z} berechnet werden. Es wird dabei angenommen, dass die zeitkontinuierliche und die zeitdiskrete Beschreibung auf demselben simplexförmigen Zustandsraum gelten. Das Entstehen von Übergangsgebieten, wie dies in Abschnitt 2.6.2 beschrieben wurde, wird nicht beachtet. Es wird also nur die approximierte zeitdiskrete Dynamik verwendet.

Die Anwendung des VSE- und des ELV-Verfahrens liefern dabei genügend Übertrittsregelungen, um aus jedem Simplex jedes andere Simplex zu erreichen. Für die Berechnung der Übertrittsregelungen wurde dabei das nichtlineare Gütemaß aus Gleichung (5.32) mit $Q_u = 1$ und $Q_g = 100$ verwendet.

In Tabelle 6.2 sind vier Experimente zusammengestellt. Die Start- und Zielpunkte der Trajektorien sind in den Experimenten A und B sowie in den Experimenten C und D identisch. Bei gleichem Start- und Zielpunkt der Trajektorie werden unterschiedliche Verfahren betrachtet. Das jeweils zu erreichende Endsimplex ist in Abbildung 6.2 fett umrandet. Die Regelung im Endsimplex soll hier der Übersicht halber nicht untersucht werden.

Tabelle 6.2: Zusammenstellung der Experimente beim Zwei-Tank-System

Experiment	Verfahren	Start	Ziel	zugehörige Abbildung	
				Zeitverlauf	Trajektorie
A	VSE	$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 38 \end{bmatrix}$	$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 31,7 \\ 6,7 \end{bmatrix}$	6.3	6.2
B	ELV	$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 38 \end{bmatrix}$	$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 31,7 \\ 6,7 \end{bmatrix}$	6.3	6.2
C	VSE	$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 12,5 \\ 55,8 \end{bmatrix}$	$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 55,8 \\ 12,5 \end{bmatrix}$	6.4	6.2
D	ELV	$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 12,5 \\ 55,8 \end{bmatrix}$	$\underline{x}_e = \begin{bmatrix} 55,8 \\ 12,5 \end{bmatrix}$	6.4	6.2

In den Abbildungen 6.3 und 6.4 sind die Zeitverläufe der Höhen in den Tanks, die Pumpleistungen und die Schaltstellungen der diskreten Stellgrößen, der Ventile,

dargestellt. Die Zielhöhen sind mit gepunkteten horizontalen Linien eingezeichnet. Der durchgezogene Balken repräsentiert ein geöffnetes Ventil.

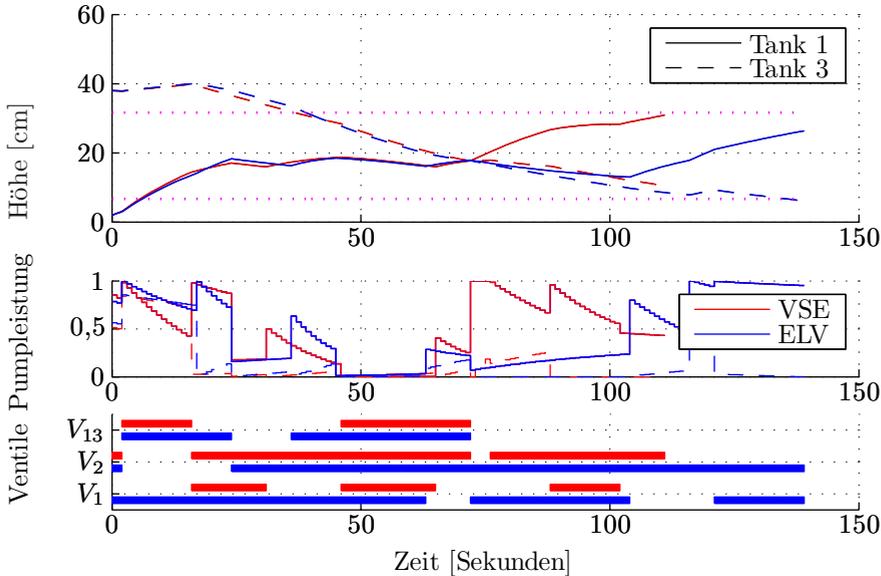


Abbildung 6.3: Experimente A und B: Verlauf der Füllhöhen bei der Simulation des affinen Modells des Zwei-Tank-Systems ($u_{V_T} = 2$) ohne Endgebietsregelung

Vergleicht man die Verläufe in den Experimenten A und B, dann fällt zuerst auf, dass die Trajektorien in Abbildung 6.2 unterschiedliche Sequenzen von Simplex durchlaufen. In Abbildung 6.3 erkennt man deutlich, dass unter der Verwendung des VSE-Verfahrens das Zielsimplex früher erreicht wird.

Auch bei den Experimenten C und D werden unterschiedliche Sequenzen von Simplex durchlaufen und wiederum wird unter der Verwendung des VSE-Verfahrens das Zielsimplex schneller erreicht.

In Tabelle 6.3 sind die Sequenzen der überschrittenen Simplexe mit den dazu nötigen Ventilstellungen zusammengefasst. Das Gütemaß für den Weg vom Startsimplex bis zum Endsimplex ist jeweils in der Form $J_{\text{Startsimplex} \rightarrow \text{Endsimplex}}$ angegeben.

Vergleicht man die ersten drei Simplexe in den Experimenten A und B und die ersten sechs Simplexe in den Experimenten C und D, dann kann man erkennen, dass die überschrittenen Simplexe in den Experimenten A und B sowie C und D identisch sind, aber die dazugehörigen Ventilstellungen sich teils stark unterscheiden. Trotz dieser Unterschiede in den Ventilstellungen sind aber die Trajektorien in den ersten zwei Simplexen der Experimente A und B fast identisch. Bei den Experimenten C

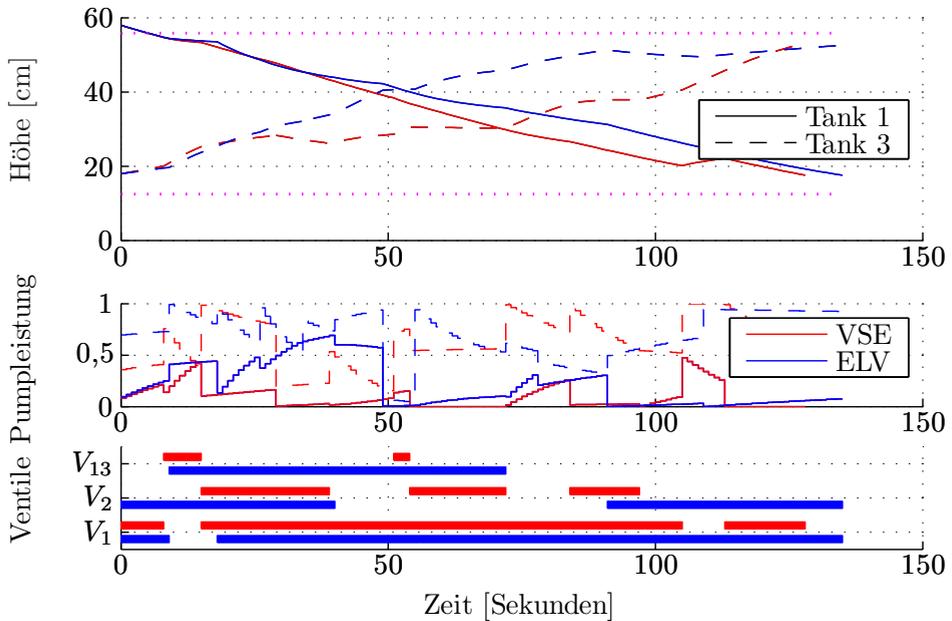


Abbildung 6.4: Experimente C und D: Verlauf der Füllhöhen bei der Simulation des affinen Modells des Zwei-Tank-Systems ($u_{V_T} = 2$) ohne Endgebietsregelung

Tabelle 6.3: Sequenzen der durchschrittenen Simplexe unter Angabe der dafür nötigen Ventilstellung bei der Simulation des affinen Modells des Zwei-Tank-Systems

Experiment A, VSE, $J_{1 \rightarrow 40} = 2410,5$												
Simplex	1	8	28	31	26	25	34	37	38	45	46	41
Ventilstellung	5	2	7	7	5	6	7	5	7	5	1	5

Experiment B, ELV, $J_{1 \rightarrow 40} = 2923,1$												
Simplex	1	8	28	31	32	27	18	35	36	23	24	41
Ventilstellung	7	4	8	8	8	6	6	6	5	5	7	7

Experiment C, VSE, $J_{39 \rightarrow 10} = 2261,7$											
Simplex	39	47	46	45	49	42	53	52	14	4	11
Ventilstellung	3	2	7	7	3	8	4	1	3	7	3

Experiment D, ELV, $J_{39 \rightarrow 10} = 2664,4$											
Simplex	39	47	46	45	49	42	53	52	54	13	11
Ventilstellung	7	6	6	7	8	8	4	7	3	3	7

und D sind die Trajektorien in den Simplexen 39, 47, 49 und 42 fast identisch, während sie sich in den Simplexen 46 und 45 deutlich unterscheiden.

Die Unterschiede in den Sequenzen und in den Trajektorien sind vorwiegend auf die unterschiedlichen Verfahren zurückzuführen. Während das VSE-Verfahren durch eine Optimierung gelöst wird, die relativ leicht gute Ergebnisse liefert, hat das ELV-Verfahren die Schwierigkeit, dass die dort verwendete Optimierung zusätzlich nicht-lineare Nebenbedingungen erfüllen muss. Für das ELV-Verfahren sind deshalb Lösungen mit größerem Gütemaß bei der numerischen Lösung zu erwarten als dies theoretisch möglich ist.

Die Abweichungen in den Sequenzen sind demnach darauf zurückzuführen, dass beim VSE-Verfahren eine Lösung und beim ELV-Verfahren keine Lösung oder eine mit einem größerem Gütemaß für einen bestimmten Gebietsübertritt gefunden wurde, dadurch schlägt die globale Prozessführung bei der Wegsuche eine andere Sequenz zum Endsimplex vor.

Die Abweichung in der Trajektorie im Simplex ist darauf zurückzuführen, dass die beim ELV-Verfahren gefundene Lösung zwar das Problem löst, allerdings keine optimale Lösung darstellt. Auch ist es möglich, dass in der Ventilstellung 7 in Simplex 46 keine Lösung für das ELV-Verfahren existiert, allerdings in den anderen Ventilstellungen Lösungen gefunden wurden und die Ventilstellung 6 letztendlich ausgewählt wurde, da diese den kleinsten Beitrag zum Gütemaß $J_{39 \rightarrow 10}$ liefert.

Das Zwei-Tank-System konnte auch mit dem modellprädiktiven Ansatz aus Abschnitt 3.3.1 erfolgreich geregelt werden. Dieser Ansatz, der auf [BM99] basiert, und die Ergebnisse am Zwei-Tank-System sind in [Buc04a] genauer beschrieben.

Der multiparametrische Ansatz nach [Bor02] aus Abschnitt 3.3.3 wurde in [Krü04] ebenfalls am Zwei-Tank-System untersucht und erfolgreich angewendet.

6.1.2 Drei-Tank-System

Das nichtlineare, zeitkontinuierliche Zustandsraummodell² des Drei-Tank-Systems ergibt sich mit $u_{V_T} = 3$ zu

²Die Parameter des Zustandsraummodells sind in [Wol05] zusammengestellt.

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{x}} = & \begin{bmatrix} \frac{-a_{V1}}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{x_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_{V1} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-a_{V3}}{A_3} \sqrt{2g} \sqrt{x_2} \\ 0 \end{bmatrix} u_{V3} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-a_{V2}}{A_2} \sqrt{2g} \sqrt{x_3} \end{bmatrix} u_{V2} \\
& + \begin{bmatrix} -\text{sign}(x_1 - x_2) \frac{a_{V13}}{A_1} \sqrt{2g} \sqrt{|x_1 - x_2|} \\ \text{sign}(x_1 - x_2) \frac{a_{V13}}{A_3} \sqrt{2g} \sqrt{|x_1 - x_2|} \\ 0 \end{bmatrix} u_{V13} \\
& + \begin{bmatrix} 0 \\ \text{sign}(x_3 - x_2) \frac{a_{V32}}{A_3} \sqrt{2g} \sqrt{|x_3 - x_2|} \\ -\text{sign}(x_3 - x_2) \frac{a_{V32}}{A_2} \sqrt{2g} \sqrt{|x_3 - x_2|} \end{bmatrix} u_{V32} \\
& + \begin{bmatrix} \frac{q_{1,max}}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{q_{2,max}}{A_2} \end{bmatrix} \underline{u}.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Kombiniert man die fünf diskreten Ventile $u_{D_1} = u_{V_1}$, $u_{D_2} = u_{V_2}$, $u_{D_3} = u_{V_3}$, $u_{D_4} = u_{V_{13}}$ und $u_{D_5} = u_{V_{32}}$, so lassen sich damit 32 unterschiedliche Dynamiken mit der Gleichung (6.9) angeben. Diese unterschiedlichen Dynamiken sind durch den diskreten Zustand $u_{\text{Vent}} \in \mathcal{D} = \{1, \dots, 32\}$ dargestellt. Die zugehörigen Kombinationen der Ventile sind in der Tabelle 6.4 zusammengestellt, wobei der Wert 1 dem geöffneten Ventil entspricht.

Tabelle 6.4: Diskreter Zustand für die unterschiedlichen Ventilstellungen des Drei-Tank-Systems

u_{Vent}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
u_{V_1}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{V_2}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
u_{V_3}	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$u_{V_{13}}$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$u_{V_{32}}$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

u_{Vent}	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
u_{V_1}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
u_{V_2}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
u_{V_3}	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
$u_{V_{13}}$	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
$u_{V_{32}}$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Um die nichtlineare Dynamik, die in Gleichung (6.9) angegeben ist, in eine stück-

weise affine Dynamik umzuwandeln, wird zunächst der dreidimensionale Zustandsraum mit $h_{i,max} = 60 \text{ cm}$, $i = 1, \dots, 3$ in Würfel mit der Seitenlänge 12 cm aufgeteilt. Es ergeben sich daraus $n_G = 125$ Würfel, auf die durch den diskreten Zustand $z_{\text{Würfel}}$ eindeutig verwiesen werden kann. Die aktuelle Ventilstellung u_{Vent} und der aktuelle Würfel $z_{\text{Würfel}}$ stellen gemeinsam den aktuellen diskreten Zustand $\underline{z} = [u_{\text{Vent}} \ z_{\text{Würfel}}]^T$ dar. Es ergeben sich so $n_D \cdot n_G = 4000$ diskrete Zustände \underline{z} , die 4000 Knoten in 125 Verbänden zu je 32 Knoten im dynamikorientierten Graphen darstellen. Im Vergleich dazu benötigt man beim gebietsorientierten Graphen lediglich 125 Knoten.

Die nichtlineare Zustandsdifferenzialgleichung wird nun in jedem diskreten Zustand \underline{z} um den Mittelpunkt des Würfels linearisiert und anschließend zeitdiskretiert, wie dies in Abschnitt 6.1.1 bereits für das Zwei-Tank-System durchgeführt wurde.

Die Anwendung des VSE- und des ELV-Verfahrens liefern dabei genügend Übertrittsregelungen, um aus jedem Würfel jeden anderen Würfel zu erreichen. Für die Berechnung der Übertrittsregelungen wurde dabei das nichtlineare Gütemaß aus Gleichung (5.32) mit $Q_u = 1$ und $Q_g = 100$ verwendet.

Um die unterschiedlichen Verfahren miteinander vergleichen zu können, wird ein Zyklus im Zustandsraum abgefahren, der aus zwei Teilstrecken besteht und die dem der Startpunkt der einen Strecke dem Endpunkt der anderen Strecke entspricht.

Der untere Punkt besitzt dabei die Koordinaten $\underline{x}_u = [5 \ 5 \ 5]^T$ und der obere Punkt die Koordinaten $\underline{x}_o = [55 \ 55 \ 55]^T$. In den Abbildungen 6.5 bis 6.10 ist der zeitliche Verlauf der Zustände und die Trajektorie dargestellt. Für den Übergang vom Punkt \underline{x}_u nach \underline{x}_o wurde beim zeitlichen Verlauf der Zustände eine durchgezogene Linie verwendet, während für den Übergang vom Punkt \underline{x}_o zum \underline{x}_u eine gestrichelte Linie verwendet wird. Die Sollwerte sind gepunktet eingezeichnet.

Die Punkte \underline{x}_u und \underline{x}_o sind in den Abbildungen 6.5 bis 6.10 im Trajektorienverlauf durch ein + gekennzeichnet. Die Sequenz von Polytopen, die den Zustand \underline{x}_u in den Zustand \underline{x}_o überführt, ist durch die grünen Polytope und einen grünen Pfeil nach oben gekennzeichnet. Die Sequenz von Polytopen, die den Zustand \underline{x}_o in den Zustand \underline{x}_u überführt, ist durch blaue Polytope und einen blauen Pfeil nach unten markiert.

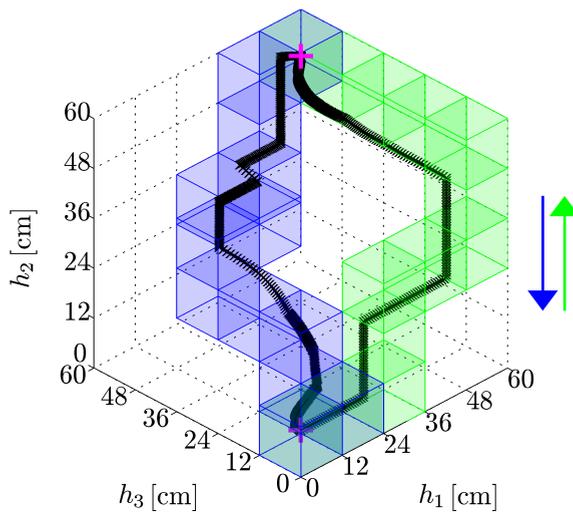
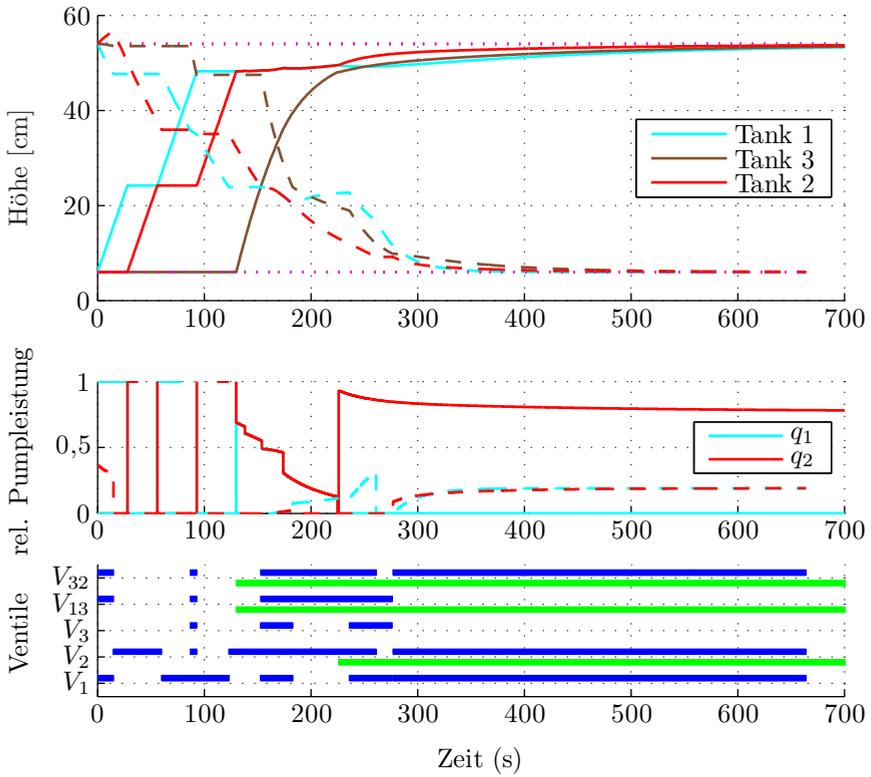


Abbildung 6.5: Experiment 1A: Prozessführung mit dem VSE-Verfahren: Simulation am affinen Modell des Drei-Tank-Systems ($u_{V_T} = 3$)

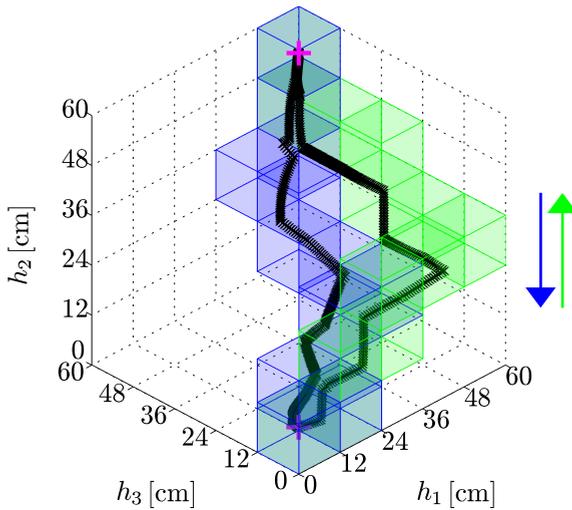
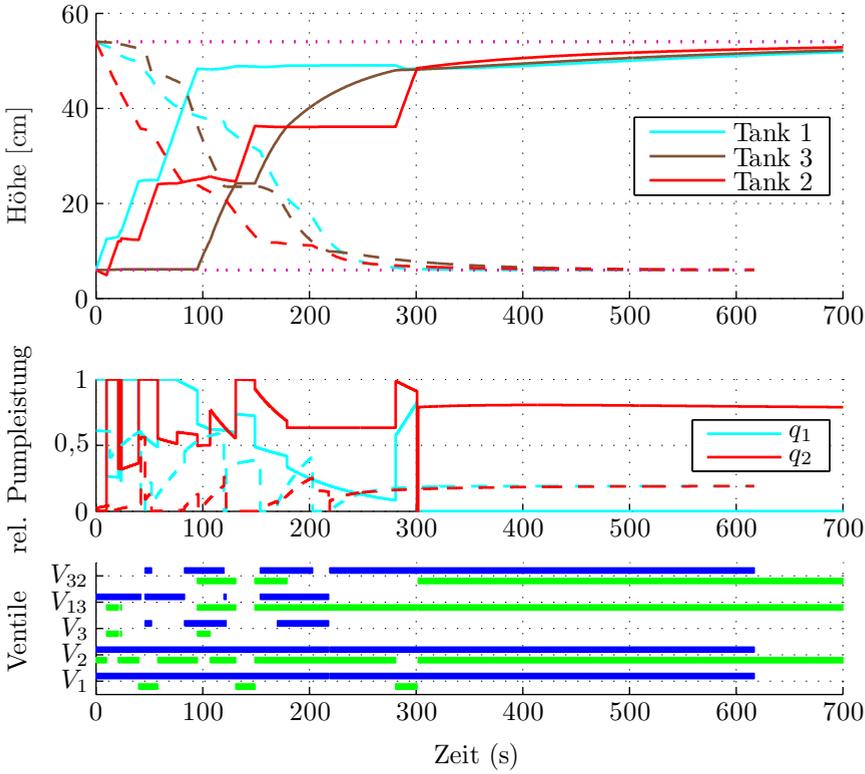


Abbildung 6.6: Experiment 1B: Prozessführung mit dem ELV-Verfahren: Simulation am affinen Modell des Drei-Tank-Systems ($u_{V_T} = 3$)

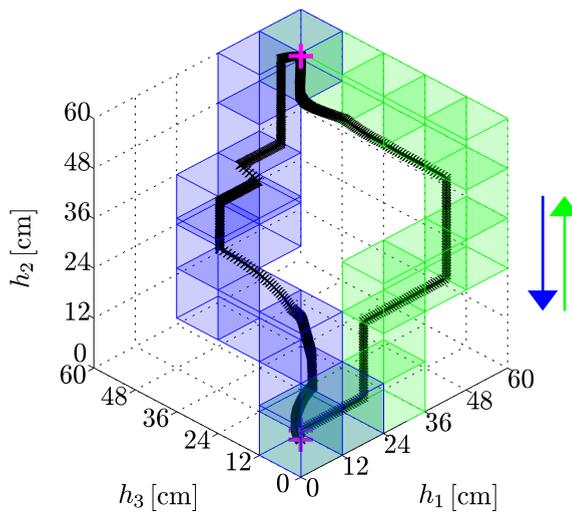
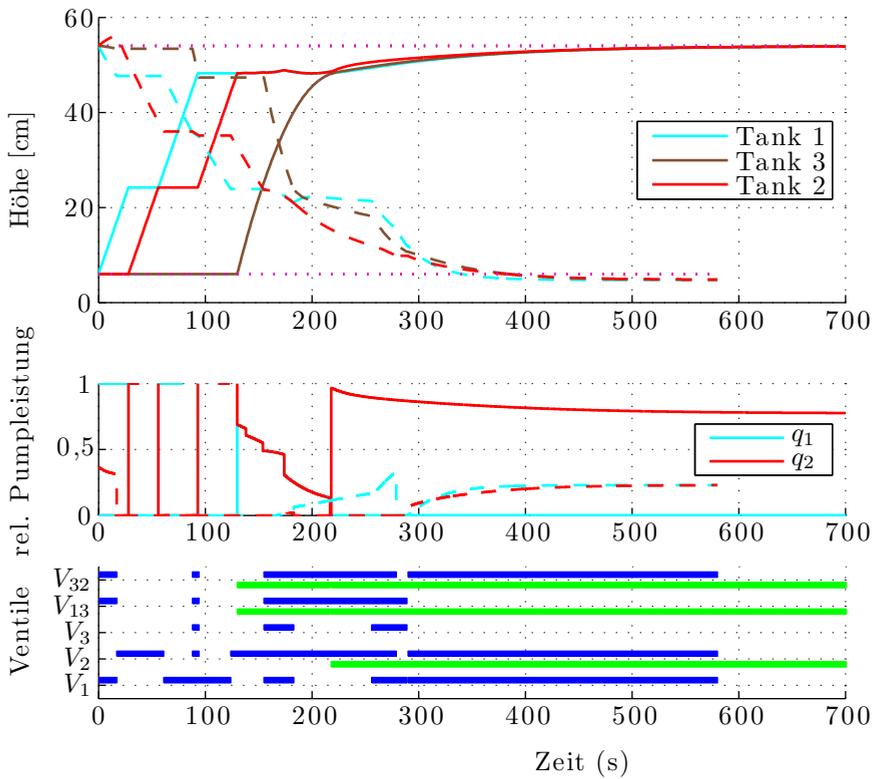


Abbildung 6.7: Experiment 2A: Prozessführung mit dem VSE-Verfahren: Simulation am nichtlinearen Modell des Drei-Tank-Systems ($u_{V_T} = 3$)

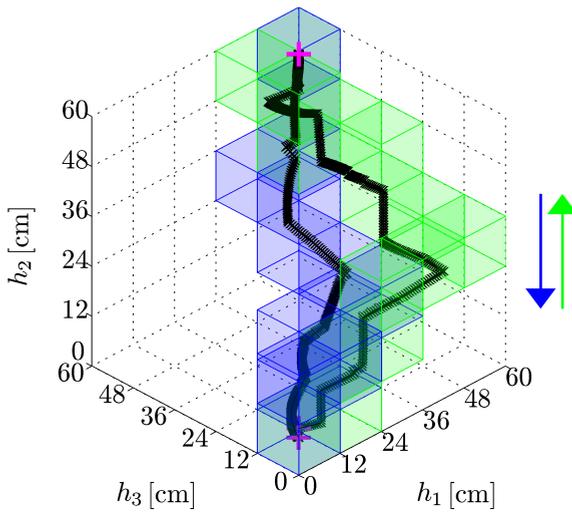
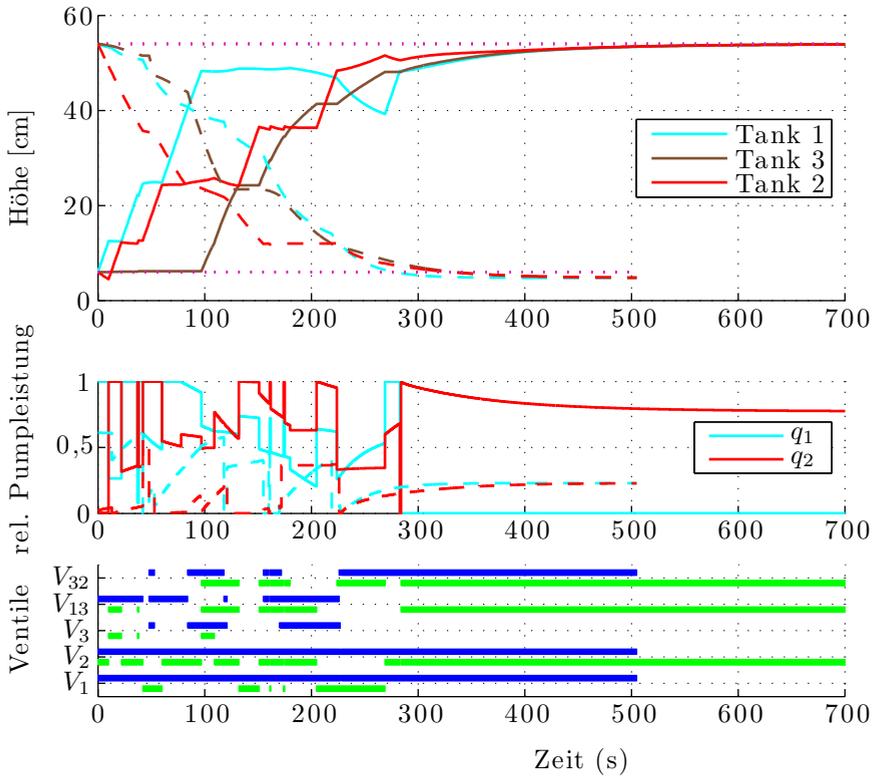


Abbildung 6.8: Experiment 2B: Prozessführung mit dem ELV-Verfahren: Simulation am nichtlinearen Modell des Drei-Tank-Systems ($u_{V_T} = 3$)

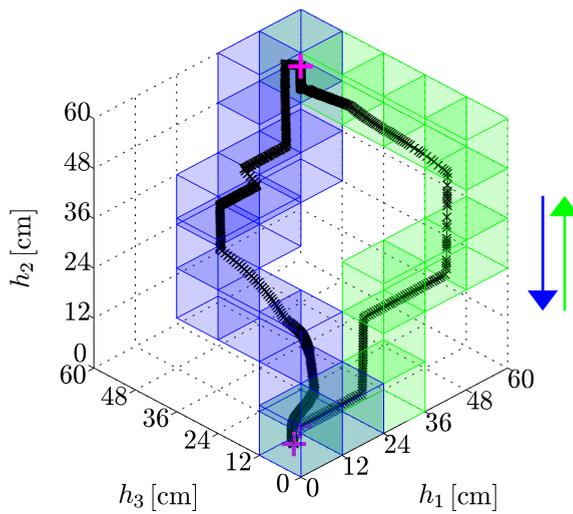
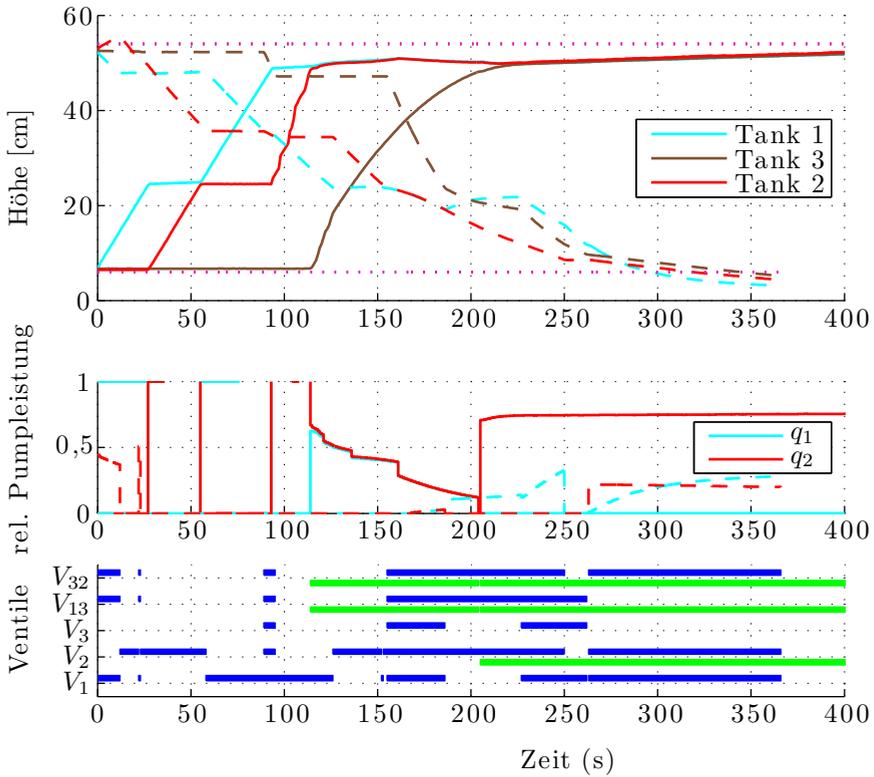


Abbildung 6.9: Experiment 3A: Prozessführung mit dem VSE-Verfahren: Messung am Drei-Tank-System ($u_{V_T} = 3$)

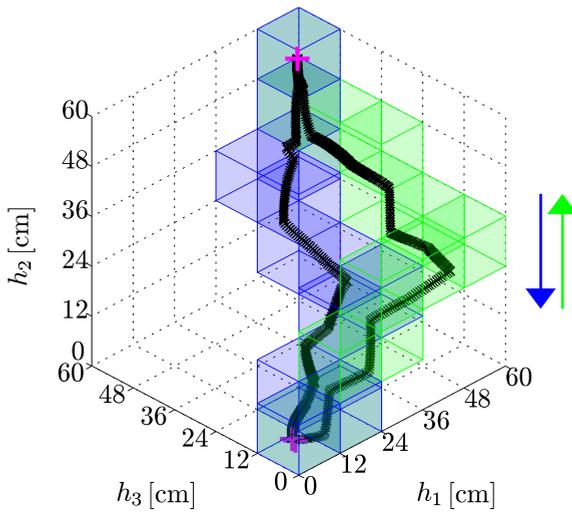
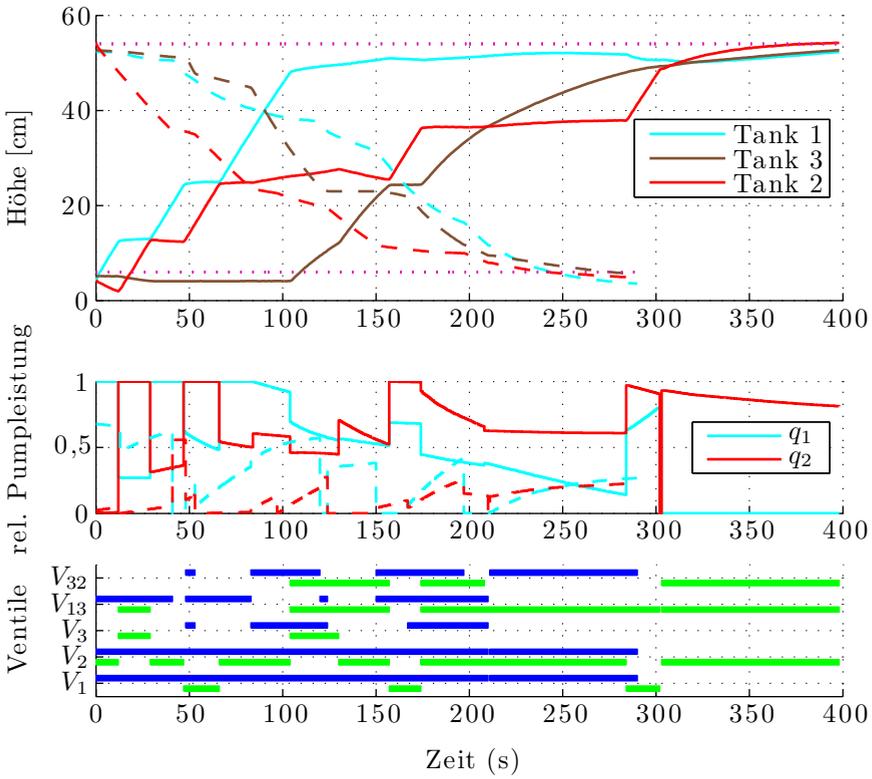


Abbildung 6.10: Experiment 3B: Prozessführung mit dem ELV-Verfahren: Messung am Drei-Tank-System ($u_{V_T} = 3$)

Tabelle 6.5: Zusammenstellung der Experimente beim Drei-Tank-System

Experiment	Verfahren	Strecke	Abb.	benötigte Zeit	
				↑	↓
1A	VSE	stückweise affines Modell	6.5	226s	276s
1B	ELV	stückweise affines Modell	6.6	301s	219s
2A	VSE	nichtlineares Modell	6.7	218s	289s
2B	ELV	nichtlineares Modell	6.8	278s	229s
3A	VSE	reale Strecke	6.9	205s	263s
3B	ELV	reale Strecke	6.10	303s	210s

Im Gegensatz zu den Trajektorien in Abschnitt 6.1.1 wird jetzt bei der Betrachtung des Zyklus eine Endregelung verwendet. Die Punkte \underline{x}_u und \underline{x}_o wurden dabei so gewählt, dass eine Endregelung für beide Punkte mit beiden Verfahren existiert.

In Tabelle 6.5 sind sechs Experimente zusammengestellt.

In den Experimenten 1A und 1B werden die Regler, die durch das VSE- bzw. das ELV-Verfahren gewonnen wurden, am stückweise affinen Modell validiert. Die Abbildungen 6.5 und 6.6 zeigen, dass die jeweiligen Punkte \underline{x}_u und \underline{x}_o exakt erreicht werden.

In den Experimenten 2A und 2B werden die Regler, die durch das VSE- bzw. das ELV-Verfahren gewonnen wurden, am nichtlinearen Modell validiert. In den Abbildungen 6.7 und 6.8 wird der Punkt \underline{x}_u bei beiden Verfahren nicht exakt erreicht. Diese Ungenauigkeiten in der stationären Genauigkeit sind auf Linearisierungsfehler zurückzuführen, die bei kleinen Höhen aufgrund der Linearisierung einer Wurzelfunktion, wie sie in Abbildung 2.3(b) dargestellt ist, stärker ausfallen als bei großen Höhen.

In den Experimenten 3A und 3B werden die Regler, die durch das VSE- bzw. das ELV-Verfahren gewonnen wurden, an der realen Strecke validiert. Wie man in den Abbildungen 6.9 und 6.10 sehen kann, ist die Endregelung nicht stationär genau. Zu den Linearisierungsfehlern aus den Experimenten 2A und 2B kommen jetzt noch Modellierungsfehler hinzu. Die Modellierungs- und die Linearisierungsfehler können sich dabei zum Teil aufheben oder auch verstärken.

Vergleicht man den Verlauf der Trajektorie vom Punkt \underline{x}_o zum Punkt \underline{x}_u in Experiment 2A mit dem in Experiment 3A, so kann man deutlich erkennen, wie in 3A wesentlich mehr Polytope durchlaufen werden, da die Trajektorie aufgrund der akkumulierten Fehler nicht mehr im Polytop gehalten werden kann und dieses dann unbeabsichtigt auf einer nicht gewünschten Seite verlässt. In diesem unbeabsichtigt durchlaufenen Polytop wird der zugehörige Regler aufgeschaltet, der für das Erreichen des Zielpolytops nötig ist. Oft wird die Trajektorie in das fälschlicherweise

verlassene Polytop zurückgeführt, woraufhin es an einer anderen Stelle wieder unbeabsichtigt das Polytop verlässt; es kommt so zu einem hybriden Gleitzustand [Nen01]. In diesem Falle sind die Sequenzen überschrittener Polytope deshalb ähnlich.

Durch diese unbeabsichtigten Polytopübertritte kommt es häufig zu einem zusätzlichen kurzen Schalten der Ventile V_1 , V_{13} und V_{32} , die in Experiment 3A in Abbildung 6.9 nach 22 Sekunden für die Dauer von einer Sekunde geöffnet sind. Obwohl im unteren Verlauf der Trajektorie keine zusätzlichen Polytope sichtbar sind, wird ebenfalls das Ventil V_1 nach 152 Sekunden für die Dauer von einer Sekunde geöffnet. Dies lässt auch auf einen unbeabsichtigten Polytopübertritt schließen.

Vergleicht man den Verlauf der Trajektorie vom Punkt \underline{x}_u nach \underline{x}_o in den Experimenten 1B, 2B und 3B, so kann man erkennen, dass im Experiment 2B in Abbildung 6.8 das Ventil nach einer Zeit von 161 und 174 Sekunden jeweils für die Dauer von einer Sekunde geöffnet ist. Die Ventile V_3 und V_{13} sind nach 37 Sekunden für die Dauer von einer Sekunde geöffnet. Im Vergleich zu den Experimenten 1A, 2A und 3A, wo die Modellierungsfehler der realen Strecke in der Messung an der Strecke selbst zu diesen zusätzlichen Schaltvorgängen führte, ist es nun die Simulation am nichtlinearen Modell, die zusätzliche Schaltvorgänge aufweist, die dann in der Messung wieder verschwinden. In diesem Fall verhält sich das Drei-Tank-System gutmütiger als die Simulation am nichtlinearen Modell, da sich die Modellierungsfehler teilweise mit den Linearisierungsfehlern ausgleichen.

In Tabelle 6.5 sind zum Vergleich die Zeiten angegeben, die die jeweilige Simulation bzw. Messung für den Aufwärtsweg (\uparrow), also vom Punkt \underline{x}_u zum Endpolytop, in dem der Zustandspunkt \underline{x}_o liegt, benötigt. Gleiches gilt für den Abwärtsweg (\downarrow).

Untersucht man die benötigten Zeiten, so ist z.B. in Experiment 3A zu erwarten, dass das Endpolytop durch die zusätzlichen Schalteingriffe erst später als in den Experimenten 1A oder 2A erreicht wird, aber genau das Gegenteil ist der Fall. Durch das unbeabsichtigte Verlassen des Polytops wurde demnach ein langsames, kriechendes Verhalten der Trajektorie umgangen. Es ist deshalb kein Schluss aus den benötigten Zeiten möglich.

Soll die Höhe h_3 im mittleren Tank 3 höher sein als in den anderen zwei Tanks, es gilt also für die Höhen $h_3 > h_1 \wedge h_3 > h_2$, dann ist schon anschaulich klar, dass keine Endregelung existieren kann. Grund hierfür ist, dass keine Ruhelage im Polytop liegt. Dieser etwas problematische Fall, der in [Wol05, HWK06] genauer beschrieben ist, kann nur im Drei-Tank-System nicht aber im Zwei-Tank-System auftreten. Um dem Endzustand trotzdem so nahe wie möglich zu kommen, können Maßnahmen angewendet werden, wie sie in Abschnitt 4.3.3 beschrieben werden.

6.1.3 Druckregelung einer Kupplung

In Automatikgetrieben für Kraftfahrzeuge werden Drucksteller eingesetzt, um die hydraulisch betätigten Nasskupplungen zu betätigen. Im Wandlerautomaten, werden mehrere Drucksteller eingesetzt, die durch Einregeln eines Druckniveaus das Öffnen oder Schließen der Schaltkupplungen und der Wandlerüberbrückungskupplung veranlassen. In den neuartigen Doppelkupplungen werden nur noch zwei nasse Kupplungen mit höherer Genauigkeit als beim Wandlerautomaten hydraulisch angesteuert.

Die Modellierung der hydraulischen Druckregelstrecke ist sehr komplex, weshalb in dieser Arbeit ein reduziertes Modell [TRN⁺99] angenommen wird, das in unterschiedlichen Arbeitspunkten \underline{x}_j $j \in \{(i), (ii), (iii)\}$ identifiziert wird. Für die Praxis ist diese Art der Modellbildung üblich und führt so auf ein stückweise affines System, für das sich die Anwendung der Prozessführungsstrategie anbietet.

Im Weiteren wird ein lineares Modell

$$\begin{bmatrix} \ddot{p} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,j} & a_{2,j} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p} \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,j} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.10)$$

im jeweiligen Arbeitspunkt \underline{x}_j und dem Zustand $\underline{x} = [\dot{p} \ p]^T$ betrachtet. Die Gültigkeitsbereiche der linearen Modelle, die in den Arbeitspunkten identifiziert werden, sind in der Phasenebene in Abbildung 6.11 unten, rot gestrichelt umrandet, dargestellt.

Die Bereiche erstrecken sich in der Druckableitung im Bereich $-50 \text{ bar/s} < \dot{p} < 50 \text{ bar/s}$. Im Druckbereich selbst gibt es die drei Bereiche

- $1 \text{ bar} < p \leq 1,45 \text{ bar}$ für (i) ,
- $1,45 \text{ bar} < p \leq 2,3 \text{ bar}$ für (ii) und
- $2,3 \text{ bar} < p < 8 \text{ bar}$ für (iii) .

Für eine erfolgreiche Anwendung der Prozessführungsstrategie müssen diese Bereiche weiter in Gebiete unterteilt werden, wie dies ebenfalls in der Phasenebene in Abbildung 6.11 dargestellt ist [Ros06]. Es werden $n_G = 16$ Gebiete angelegt, die von $1, \dots, 16$ durchnummeriert sind. Der Bereich (i) wird so in die Gebiete 1 und 2 aufgeteilt, der Bereich (ii) in die Gebiete 2 und 3 und der Bereich (iii) in die Gebiete 4 – 16.

Wird ein aktuelles Druckniveau verändert, dann muss die Druckableitung entweder größer oder kleiner als Null sein. In Abbildung 6.11 ist der Verlauf der Trajektorie in der Phasenebene für eine positive Druckableitung dargestellt. Die Trajektorie startet bei $\underline{x} = [0 \ 1,35]^T$ und soll den Arbeitspunkt $\underline{x}_{\text{Ruhe}} = [0 \ 7,3]^T$ erreichen, der auf

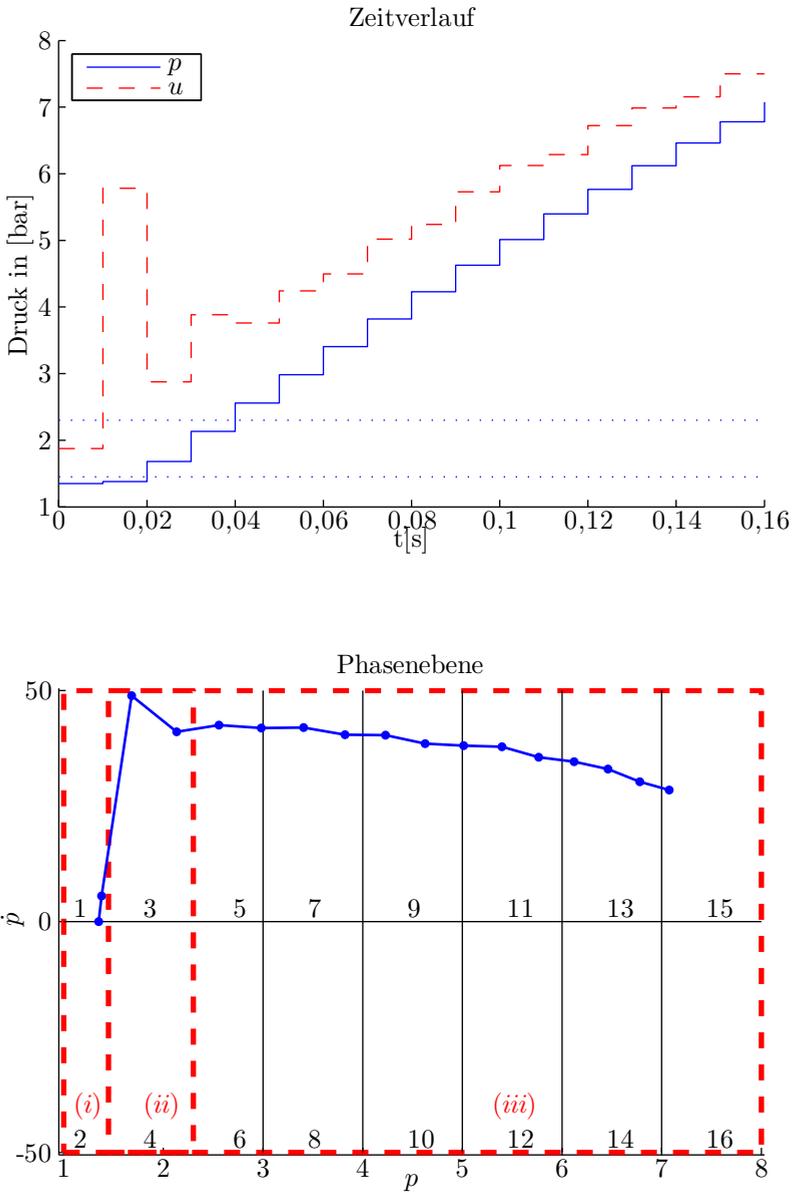


Abbildung 6.11: Zeitverlauf und Trajektorie bei der Simulation der geregelten linearen Druckregelstrecke mit Prozessführungsstrategie

dem Rand der zwei Gebiete 15 und 16 liegt. Nach dem Erreichen des Zielpolytops in Gebiet 15 wird die Prozessführung beendet.

Im zeitlichen Verlauf des Druckniveaus p und der Stellgröße u in Abbildung 6.11 erkennt man deutlich, wie die Stellgrößenbeschränkung $0 \leq u \leq 8$ und die Begrenzung im Zustand $0 \leq u \leq 8$ eingehalten werden können. Um das Gebiet 15 rasch zu erreichen, muss die Druckableitung \dot{p} stark erhöht werden. Das Gütemaß wurde dabei so gewählt, dass versucht wird, die in den Ecken startenden Trajektorien so ins Nachbarpolytop zu führen, dass diese auf den Winkelhalbierenden verlaufen. Da die Gebiete Rechtecke sind, stellen die Winkelhalbierenden Geraden dar, die in einen Winkel von je 45° zu den Austrittsflächen und Seitenflächen verlaufen. Damit lässt sich erklären, warum die Druckableitung nicht direkt auf 50 bar/s ansteigt und bis zum Erreichen des Gebiets 15 dort verharret (siehe [Ros06]). Da die Trajektorie nicht am Rand des erlaubten Gebietes verläuft, verhält sich das System robuster in Bezug auf Störungen.

6.2 Lokale Regelung am Beispiel einer Lose im Antriebsstrang

Bei der folgenden Anwendung stellt die lokale Regelung für die Übertrittsregelung nach dem VSE-Verfahren den Schwerpunkt der Untersuchungen dar.

Der Antriebsstrang bei Kraftfahrzeug mit Verbrennungsmotor überträgt das erzeugte Moment im Zugbetrieb über das Schalt- und das Differenzialgetriebe auf die Antriebsräder. In diesen zwei Getrieben werden Zahnradverbindungen eingesetzt um eine bestimmte Drehzahl- und Momentenübersetzung zu erzeugen. Aufgrund ihrer Herstellungsmethoden weisen Zahnradverbindungen immer ein gewisses Spiel beim Ineinandergreifen auf. Dieses Spiel wird weitläufig auch als Lose bezeichnet. Praktisch wirkt sich diese Lose bei zwei ineinandergreifenden und zu Beginn stillstehenden Zahnradern dadurch aus, dass man ein Zahnrad drehen kann ohne dass sich das andere Zahnrad mitdreht, da der Luftspalt zwischen den eingreifenden Zahnradern keine sofortige Drehmomentübertragung ermöglicht.

Losen treten im Antriebsstrang zwischen allen Zahnradpaarungen auf. Der Antriebsstrang wird dadurch zu einem sehr komplexen Gebilde, weshalb er ein reges Interesse in der Literatur findet. Verschiedene Regelungs- und Modellierungsansätze sind in [LE02, LE04, LE05, Bac05, BTK04, Hel06] und [TBK04] zu finden.

Für den Antriebsstrang mit Lose aus [HWBK06] soll das in Abbildung 6.12 vereinfachte Modell verwendet werden. Dieses Modell besteht aus zwei rotierenden Massen, die über eine Lose miteinander verkoppelt sind. Eine Masse stellt dabei die

motorseitige Trägheitsmasse J_M dar, die andere Masse repräsentiert die radseitige Trägheitsmasse J_R . Die Kennlinie der Lose ist in Abbildung 6.13 dargestellt.

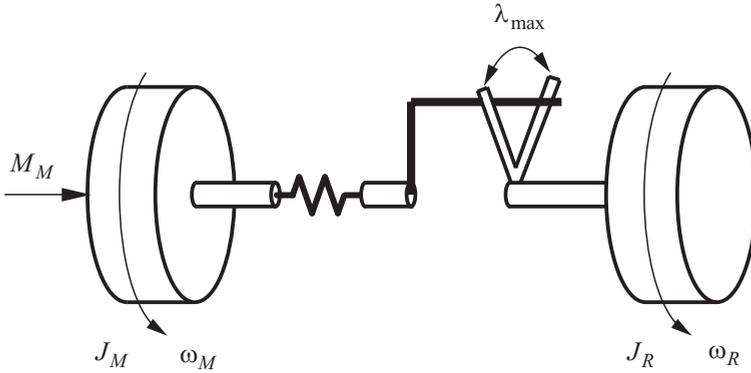


Abbildung 6.12: Antriebsstrang mit Lose

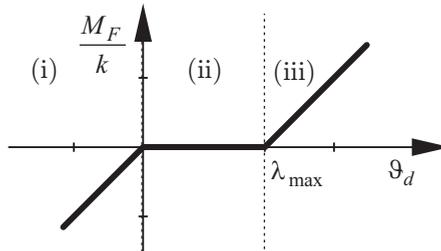


Abbildung 6.13: Kennlinie der Lose

Das durch die Lose übertragene Moment ist von der Zustandsgröße $\vartheta_d = \omega_M - \omega_R$ abhängig und lässt sich als

$$M_F = k \begin{cases} \vartheta_d & \text{für } \vartheta_d < 0 & \text{(i)} \\ 0 & \text{für } 0 \geq \vartheta_d \geq \lambda_{max} & \text{(ii)} \\ \vartheta_d - \lambda_{max} & \text{für } \vartheta_d > \lambda_{max} & \text{(iii)} \end{cases} \quad (6.11)$$

angeben.

Die Änderung der Drehzahl ω_M kann durch

$$J_M \dot{\omega}_M = -M_{Reib,M} - M_F + M_M \quad (6.12)$$

berechnet werden, wobei auf das Reibmoment $M_{Reib,M} = b_M \omega_M + b_{R,M} \omega_R$ beide Drehzahlen Einfluss haben. Das Moment M_F gibt das Moment durch die Federkoppelung an, während das Moment M_M das Motormoment darstellt.

Für die Änderung der Drehzahl ω_R gilt

$$J_R \dot{\omega}_R = -M_{Reib,M} + M_F, \quad (6.13)$$

mit $M_{Reib,R} = b_R \omega_R + b_{M,R} \omega_M$.

Das stückweise affine Modell des Antriebsstrangs ergibt sich somit zu:

$$(i) : \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b_M}{J_M} & -\frac{b_{R,M}}{J_M} & -\frac{k}{J_M} \\ -\frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_R}{J_R} & +\frac{k}{J_R} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.14a)$$

$$(ii) : \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b_M}{J_M} & -\frac{b_{R,M}}{J_M} & 0 \\ -\frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_R}{J_R} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.14b)$$

$$(iii) : \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b_M}{J_M} & -\frac{b_{R,M}}{J_M} & -\frac{k}{J_M} \\ -\frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_R}{J_R} & +\frac{k}{J_R} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ + \begin{bmatrix} -\frac{k\lambda_{max}}{J_M} \\ \frac{k\lambda_{max}}{J_R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.14c)$$

mit dem Zustand $\underline{x} = [\omega_M \quad \omega_R \quad \vartheta_d]^T$ und der Eingangsgröße $u = M_M$.

Für die weiteren Betrachtungen wird angenommen, dass alle Zustände messbar sind. Diese Annahme ist bei einer Anwendung häufig schwierig zu erfüllen. Wird eine Realisierung der Regelung angestrebt, dann kann diese Annahme nicht getroffen werden, und die nicht messbaren Zustände müssen durch einen Beobachter, wie in [HK07] gezeigt wird, rekonstruiert werden.

Im Bereich der Lose wirkt das Motormoment vorwiegend auf die motorseitig angenommene rotierende Masse, da die Drehfeder kein Moment überträgt. Eine geringe Kopplung besteht durch die angenommenen Reibeinflüsse bezogen auf die Raddrehzahl ω_R . Wird das Motormoment sprunghaft erhöht, dann muss die Lose zwangsweise durchlaufen werden.

In Abbildung 6.14 ist dieses Durchlaufen der Lose in drei Momentaufnahmen dargestellt.

Ist der Momentensprung positiv und befindet sich der Antriebsstrang zuvor im Schubtrieb, wie in Abbildung 6.14(a) dargestellt, dann wird die Lose in Abbild-

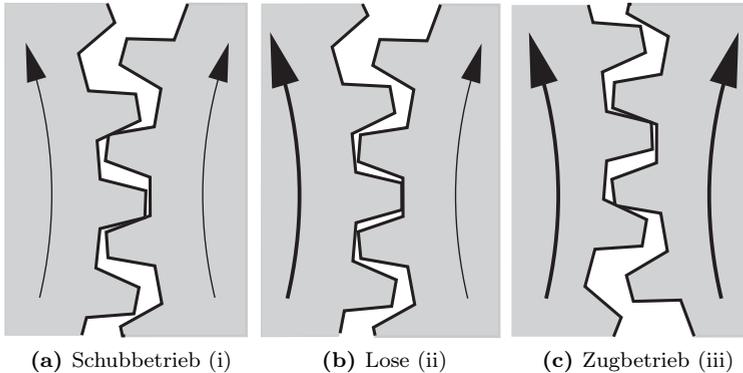


Abbildung 6.14: Drei Betriebsbereiche des Antriebsstrangs

ung 6.14(b) durchlaufen und es wird der Betriebszustand des Zugbetriebs in 6.14(c) eingenommen. Das höhere Moment auf der Motorseite ist in Abbildung 6.14(b) durch einen fetten Pfeil für die Drehrichtung markiert. Der Schubbetrieb stellt dabei den Betriebszustand dar, bei dem die bereits beschleunigte Fahrzeugmasse den Antriebsstrang und den Motor antreibt und damit das Fahrzeug langsam abbremst. Im Zugbetrieb treibt der Motor das Fahrzeug an.

Da beim Durchlaufen der Lose von Gebiet (i) nach (iii) eine im Vergleich kleine Motorträgheitsmasse beschleunigt werden muss und die Reibung nicht ins Gewicht fällt, wird der Motor sehr stark beschleunigt. Die Differenzdrehzahl $\Delta\omega$ zwischen Motordrehzahl ω_M und Raddrehzahl ω_R wird deshalb bei λ_{max} am größten. Mit maximaler Differenzdrehzahl treffen die Zahnräder dann aufeinander und es kommt zum sogenannten *Lastschlag*, der eine akustische Beeinträchtigung der Fahrzeuginsassen bedeutet. Ist der Kontakt zwischen den Zahnradern für $\vartheta_d > \lambda_{max}$ wieder hergestellt, entsteht durch die sprunghafte Anregung eine Schwingung im Antriebsstrang, die üblicherweise innerhalb von Sekunden abklingt. Diese Schwingung macht sich für den Fahrzeuginsassen als starkes Ruckeln in Fahrzeuglängsrichtung bemerkbar und wird deshalb auch als Bonanza-Effekt bezeichnet.

Der Bonanza-Effekt würde auch bei einem Antriebsstrang ohne Lose auftreten. Durch das starke Beschleunigen des Motors beim Durchlaufen der Lose wird dieser Effekt aber deutlich verstärkt. Im schlimmsten Falle tritt das System, ausgelöst durch die Schwingung, wieder für kurze Zeit in den Bereich der Lose ein, so dass ein wiederholter Lastschlag auftritt. Insbesondere der Lastschlag hat zudem eine starke Erhöhung des Verschleißes zur Folge, wodurch die Breite der Lose sich über die Zeit verändert. Da der Lastschlag durch die Regelung klein gehalten werden kann, wird im Folgenden von einer konstanten Breite der Lose ausgegangen.

Das Regelungsziel lässt sich nun wie folgt formulieren: Das starke Beschleunigen des Motors beim Durchlaufen der Lose in Bereich (ii) soll nun durch eine Regelung in der Art und Weise beeinflusst werden, dass die Lose zwar einerseits schnell durchlaufen wird, die Differenzdrehzahl beim Erreichen von $\vartheta_d = \lambda_{max}$ beim Wechsel von Schub- in Zugbetrieb bzw. $\vartheta_d = 0$ beim Wechsel von Zug- in Schubbetrieb so klein wie möglich ist.

Da die Differenzdrehzahl eine entscheidende Aussage über die Güte der Regelung macht, wird das stückweise affine System (6.14) so umgeformt, dass der Zustand $x_1 = \omega_M$ durch $x_1 = \Delta\omega = \omega_M - \omega_R$ ersetzt wird:

$$(i) : \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b_M}{J_M} + \frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_{R,M}}{J_M} + \frac{b_R}{J_R} & -\frac{k}{J_M} - \frac{k}{J_R} \\ -\frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_R}{J_R} & +\frac{k}{J_R} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.15a)$$

$$(ii) : \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b_M}{J_M} + \frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_{R,M}}{J_M} + \frac{b_R}{J_R} & 0 \\ -\frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_R}{J_R} & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (6.15b)$$

$$(iii) : \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{b_M}{J_M} + \frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_{R,M}}{J_M} + \frac{b_R}{J_R} & -\frac{k}{J_M} - \frac{k}{J_R} \\ -\frac{b_{M,R}}{J_R} & -\frac{b_R}{J_R} & +\frac{k}{J_R} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ + \begin{bmatrix} \frac{-k\lambda_{max}}{J_M} - \frac{k\lambda_{max}}{J_R} \\ \frac{k\lambda_{max}}{J_R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.15c)$$

mit dem Zustand $\underline{x} = [\Delta\omega \quad \omega_R \quad \vartheta_d]^T$ und der Eingangsgröße $u = M_M$.

Das zeitkontinuierliche stückweise affine System (6.15c) entspricht dabei genau der Gleichung (2.1). Damit können die Koeffizienten der zeitdiskreten affinen Zustandsdifferenzgleichung (2.7) mit Gleichung (2.9) berechnet werden. Dasselbe gilt für die Systeme (6.15a) und (6.15b), nur dass hier der affine Anteil verschwindet und es sich damit um lineare Systeme handelt.

In Abbildung 6.15 sind im Bereich der Lose zwei Polytope im Zustandsraum dargestellt. Das grün eingefärbte Polytop mit den Ecken $1, \dots, 8$ wird beim Wechsel vom Schub- in den Zugbetrieb von der Trajektorie des geregelten Systems durchlaufen, wenn dieses System im Bereich der Lose mit dem VSE-Verfahren geregelt wird. Außerhalb der Lose, also oberhalb der blau markierten oberen Ebene und unterhalb der unteren Ebene, wird ein Polvorgaberegler zur Schwingungsdämpfung eingesetzt.

Beim Wechsel vom Zug- in den Schubetrieb wird das gelb gefärbte Polytop mit den Ecken a, \dots, h sowohl von dem System, das mit der Kombination aus VSE-Verfahren und Polvorgaberegler geregelt wird, als auch von dem System, das nur durch den Polvorgaberegler geregelt wird, durchlaufen. Bestimmte Ecken des grün und des gelb eingefärbten Polytops entsprechen sich, es gilt $b = 1$, $d = 3$, $f = 5$ und $h = 7$.

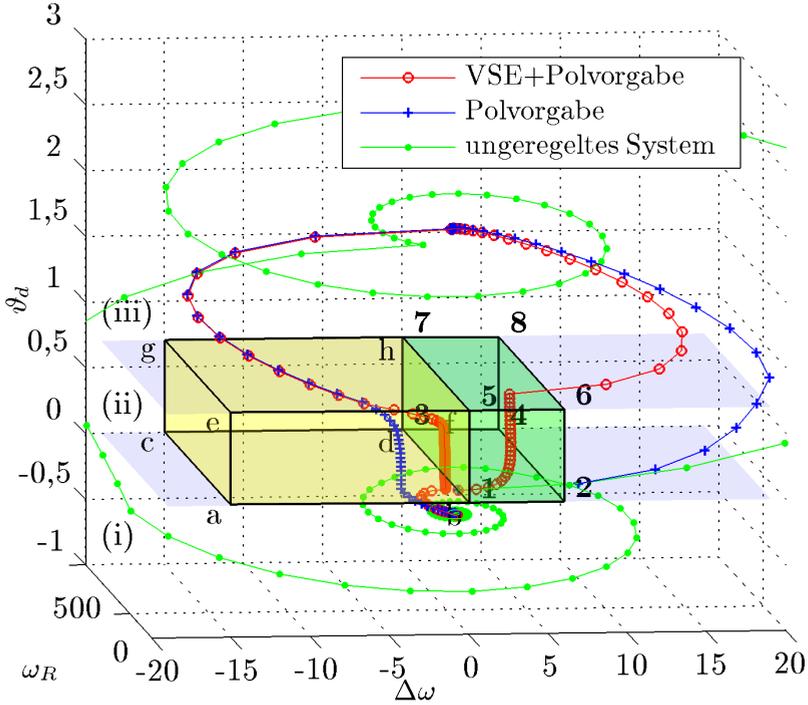


Abbildung 6.15: Verlauf der Trajektorien bei der Simulation des Antriebsstrangs mit Lose

In Abbildung 6.15 sind die folgenden drei Trajektorien dargestellt:

Kombination des VSE-Verfahrens mit einem Polvorgaberegler:

Im grün und gelb eingefärbten Polytop sind zwei affine Regelungsgesetze gültig, die mithilfe des VSE-Verfahrens berechnet worden sind. Diese affinen Regelungsgesetze sorgen dafür, dass die Trajektorien vom Gebiet (ii) ins Gebiet (iii) und vom Gebiet (ii) ins Gebiet (i) geführt werden. Außerhalb der zwei Polytope ist ein einfacher Polvorgaberegler gültig, der auf Basis des Systems in Gebiet (i) so entworfen wurde, dass er in der Lage ist, die Schwingungen auf dem Antriebsstrang zu dämpfen.

Polvorgaberegler:

Der bereits eingeführte einfache Polvorgaberegler ist nun auf dem gesamten Zustandsraum gültig. Die Einteilung in Polytope und Gebiete wird vernachlässigt.

ungeregeltes System:

Das unregelte System wird auf Basis der Dynamiken in den drei Gebieten (i), (ii) und (iii) simuliert.

Im grün eingefärbten Polytop wird das System mit dem VSE-Verfahren geregelt. Die Trajektorie wird dabei sicher auf die Seitenfläche geführt, die durch die Ecken 5, 6, 7 und 8 gebildet wird. Da die Austrittsfläche im grün eingefärbten Polytop damit bestimmt ist, kann in diesem konkreten Beispiel, für den Wechsel von Schub- in Zugbetrieb und umgekehrt, von einer globalen Prozessführung mit Wegsuche abgesehen werden. Man sieht deutlich, dass die Trajektorie zuerst in Richtung großer $\Delta\omega$ beschleunigt wird und sich dann auf einen fast konstanten Wert in $\Delta\omega$ für den Rest der Trajektorie im Polytop einstellt.

Der erste Teil des Regelungsziels, also die Trajektorie schnell aus dem Bereich der Lose herauszuführen, wird durch ein möglichst großes $\Delta\omega$ erreicht. Allerdings steht das im direkten Gegensatz zum zweiten Teil des Regelungsgesetzes, das fordert, dass $\Delta\omega$ beim Verlassen des Polytops klein sein soll. Dies wird durch den beinahe konstanten Wert in der Zustandsgröße $\Delta\omega$ ermöglicht und stellt einen Kompromiss dar.

Durch die Kombination des VSE-Verfahrens mit dem Polvorgaberegler kann ein viel kleineres $\Delta\omega$ nach dem Durchlaufen der Lose zu dem Zeitpunkt erreicht werden, bei dem der Lastschlag auftritt. Dies ist durch den Verlauf der Trajektorien sichtbar. Im Zeitverlauf in Abbildung 6.16 ist der Unterschied deutlich erkennbar. Beim Wechsel von Gebiet (ii) nach Gebiet (iii) und beim Wechsel von Gebiet (ii) nach Gebiet (i) ist für alle drei Zeitverläufe eine senkrechte gestrichelte Linie eingezeichnet, die den Zeitpunkt markiert, zu dem das Polytop verlassen wird und somit ein möglicher Lastschlag auftritt. An der Stelle, an der sich die senkrechte gestrichelte

Linie mit dem Kurvenverlauf schneidet, ist das zum jeweiligen Verlauf zugehörige $\Delta\omega$ abzulesen.

Die Regelung mit der Kombination aus VSE-Verfahren und Polvorgaberegler benötigt zum Erreichen von $\vartheta_d = \lambda_{max}$ bzw. $\vartheta_d = 0$, je nachdem, ob es sich um einen Wechsel vom Schubetrieb in den Zugbetrieb oder umgekehrt handelt, immer die längste Zeit, liefert aber dann den kleinsten Wert für $\Delta\omega$.

Das Regelungsziel kann mit der Kombination aus VSE-Verfahren und Polvorgaberegler sehr gut erreicht werden. Es ist dabei anzumerken, dass das VSE-Verfahren am erzielten kleinen Lastschlag den Hauptanteil hat.

In [LE04] und [LE05] wurde dieses Regelungsziel mit Hilfe des Ansatzes aus Abschnitt 3.3.3 an einer ähnlichen Strecke erfolgreich umgesetzt. Leider konnte das Regelungsziel mit der vorliegenden Strecke nicht mehr erreicht werden, da die Anwendung des Verfahrens unter Verwendung der multiparametrischen Toolbox [KBC05] im besten Fall nur in einem Bruchteil der Lose zu Ergebnissen führt. Das Ergebnis ist für die Prozessführung deshalb unbrauchbar.

Mit dem VSE-Verfahren kann mit zwei einfachen affinen Regelgesetzen, die je auf einem Polytop gültig sind, das Problem des Lastschlags einfach und effektiv gelöst werden.

Der Polvorgaberegler ist sehr gut geeignet die im unregulierten System vorhandenen Schwingungen zu beseitigen, wobei der Lastschlag im Vergleich zum unregulierten System fast halbiert wird.

Die Verminderung des Lastschlags wird im Serienfahrzeug häufig durch eine Steuerung erreicht, die das geforderte Motormoment erst nach Ablauf einer bestimmten Zeitspanne an die Motorsteuerung durchgibt. Die Lose wird so mit einem relativ kleinen Moment durchlaufen. Mit diesem hier vorgestellten Ansatz können die Fahrzeugeigenschaften beim Lastschlag deutlich verbessert werden. Die Agilität des Fahrzeugs bleibt dabei so weit wie möglich erhalten.

6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die Prozessführungsstrategie an mehreren Anwendungsbeispielen validiert. Beim Zwei- und Drei-Tank-System liegt jeweils ein hybrides System vor, während die Druckregelung und die Regelung des Antriebsstrangs stückweise affine Systeme ohne Einfluss diskreter Stellgrößen darstellen.

Beim Zwei-Tank-System wurde der Zustandsraum in Simplexe aufgeteilt. Das System hat dabei die Eigenschaft, dass ebenso viele zeitdiskrete Stellgrößen wie Zustandsgrößen vorhanden sind. Beide vorgestellten Verfahren, das ELV- und das VSE-

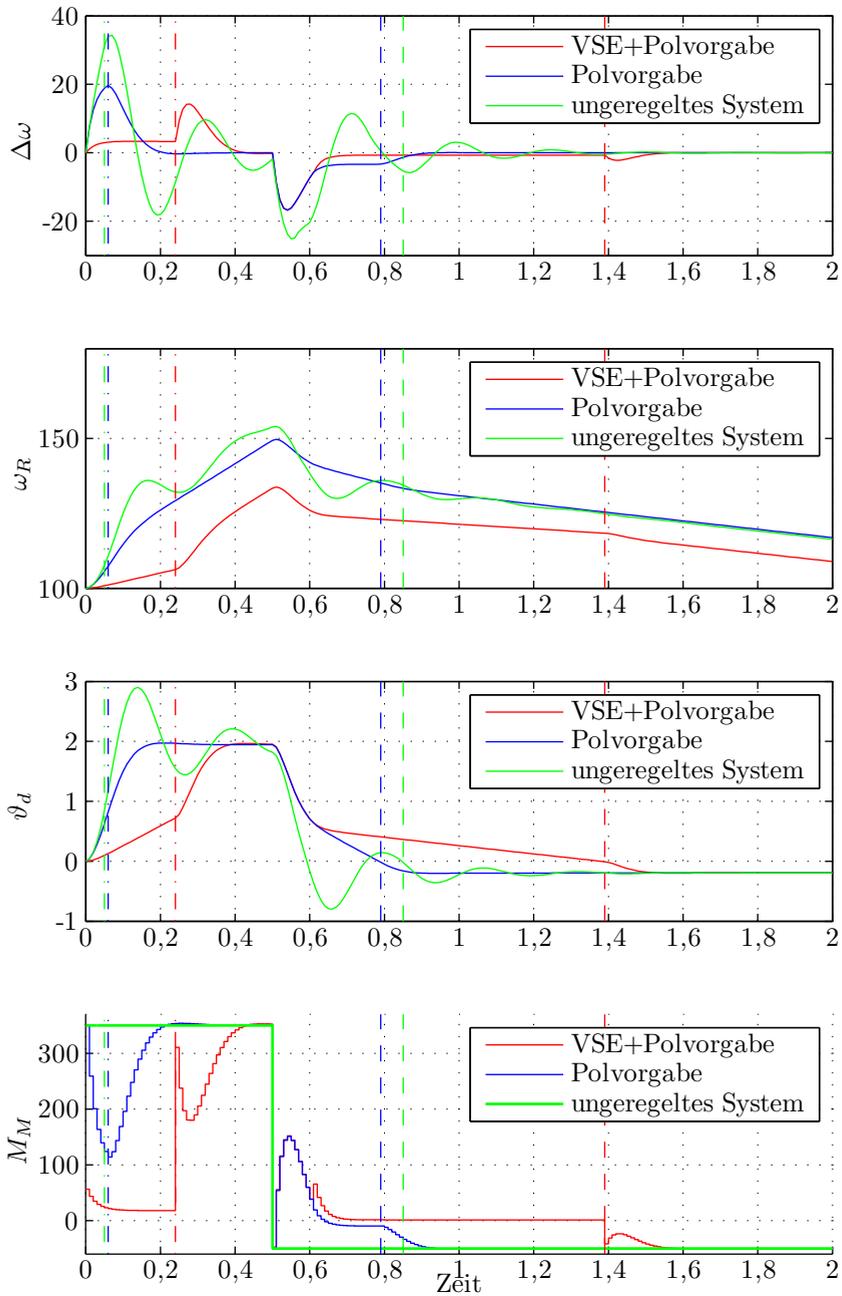


Abbildung 6.16: Zeitlicher Verlauf der Zustände und der Eingangsgröße bei der Simulation des Antriebsstrangs mit Lose

Verfahren, werden für die Gebietsübertritte miteinander verglichen und liefern unterschiedliche Ergebnisse. Diese Ergebnisse werden ausführlich diskutiert. Die Unterschiede in den Lösungen lassen sich auf die unterschiedlichen Optimierungsprobleme zurückführen. Eine Endregelung wird der Übersicht halber nicht durchgeführt.

Beim Drei-Tank-System liegen mehr Zustandsgrößen als Eingangsgrößen vor. Es wird ein Zyklus mit beiden Verfahren an drei unterschiedlichen Strecken vorgestellt. Dabei wird die affine Simulation, die nichtlineare Simulation und das reale Tank-system unterschieden. Bei der nichtlinearen Simulation und der Messung am realen Tanksystem kann festgestellt werden, dass die gewünschten Endzustände aufgrund von Modellierungs- und Linearisierungsfehlern nicht exakt erreicht werden können. Alle drei Beispiele werden mit beiden Verfahren erfolgreich in die gewünschten Endpunkte geführt.

Die Regelung eines Druckregelventils wird an einem stückweise affinen System ohne Endregelung untersucht. Hier wird das Endpolytop sehr schnell erreicht. Eine Endregelung wurde dabei nicht betrachtet, da der Endzustand auf dem Rand des Endpolytops liegt. Eine spezielle Gewichtung im Gütemaß hat zur Folge, dass die Trajektorie nicht am Rand der Polytope sondern etwas innerhalb verläuft, und so unempfindlicher gegen Störungen ist.

Die lokale Regelung bei der Lose im Antriebsstrang zeigt eindrucksvoll, wie der Lastschlag und die Schwingungen auf dem Antriebsstrang elegant mit dem VSE-Verfahren beseitigt werden können. Das VSE-Verfahren wird dabei mit einem Polvorgaberegler kombiniert. Im Vergleich zu dieser Kombination zeigt der reine Polvorgaberegler ein wesentlich schlechteres Verhalten.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden neuartige Verfahren zur Prozessführung zeitdiskreter hybrider Systeme entwickelt. Diese neuartigen Prozessführungsstrategien für hybride Systeme gliedern sich in einen globalen und einen lokalen Anteil auf. Der globale Anteil übernimmt die übergeordnete Koordination.

Die lokalen Regelungen werden einerseits verwendet, um die Zustandstrajektorie gezielt über eine ausgewählte Seitenfläche eines Polytops in das benachbarte Polytop zu führen, oder andererseits, um die Zustandstrajektorie im Polytop in eine Ruhelage zu führen und dort zu stabilisieren. Man unterscheidet deshalb die Begriffe Übertrittsregelung und Endgebietsregelung. Beide Regelungen haben gemeinsam, dass sie für jeden beliebigen Startpunkt der Zustandstrajektorie im Polytop gelten müssen. Es wurde das VSE- und das ELV-Verfahren für die Bestimmung geeigneter lokaler Regelungen vorgestellt. Beide Verfahren liefern affine Regelgesetze, falls die Aufgabe unter den angegebenen Beschränkungen überhaupt lösbar ist. Die Systemdynamik kann sich in jedem Polytop unterscheiden und liegt als zeitdiskretes affines System in Zustandsraumdarstellung vor.

In dieser Arbeit wurden bereits vorhandene Ansätze für Regelungen, die in der Lage sind, den Polytopübertritt bei zeitkontinuierlicher Systemdynamik zu gewährleisten, auf zeitdiskrete Systemdynamiken erweitert. In einem weiteren Schritt konnten die Verfahren so modifiziert und verbessert werden, dass diese genau ein affines Regelgesetz je Polytop liefern. Für beide Verfahren konnte zusätzlich eine Berechnungsvorschrift für die Regelung im Zielpolytop angegeben werden.

Für die übergeordnete Aufgabe wurde ein Konzept erarbeitet, das nach der Modellierung als Graphenstruktur mithilfe einer einfachen Wegsuche eine optimale Sequenz von Polytopen definiert, über die die Zustandstrajektorie vom Anfangszustand in das Zielpolytop und dort in den Endzustand gesteuert werden kann. Die Prozessführungsstrategien wurden sowohl an hybriden als auch an stückweise affinen Systemen in der Simulation validiert. Zusätzlich wurden die Methoden am Drei-Tank-System untersucht, der ein reales System darstellt.

Als hybrides System wurde zuerst das Zwei-Tank-System mit einer Simplexaufteilung des Zustandsraums und gleich vielen Eingangsgrößen wie Zustandsgrößen betrachtet. Danach wurde das Drei-Tank-System mit zwei Eingangsgrößen und drei Zustandsgrößen betrachtet. Der Zustandsraum des Drei-Tank-Systems wurde in Würfel unterteilt. Beide Systeme konnten mit beiden Verfahren erfolgreich ins gewählte Zielsimplex bzw. in die Endzustände geführt werden.

Als stückweise affine Systeme wurde die Druckregelung einer Kupplung und die Lose in einem Antriebsstrang eines Fahrzeugs untersucht. Die Lose in einem Antriebsstrang konnte sehr eindrucksvoll mit nur zwei Polytopen, für die eine geeignete Übertrittsregelung entworfen wurde, so beeinflusst werden, dass die zwei störenden Effekte Lastschlag und Schwingungen im Antriebsstrang unterdrückt wurden.

Im Laufe der Untersuchungen zeigte sich, dass die Endregelung, hin auf einen Endzustand, sich als schwierig erweist, da der gewünschte Endzustand oft nicht realisiert werden kann. Dies liegt an der Tatsache, dass der gewünschte Endzustand keine Ruhelage des Systems darstellt. In diesen Fällen können mit einer heuristischen Herangehensweise dennoch überzeugende Ergebnisse erzielt werden.

Mit der Übertrittsregelung kann eine Trajektorie in ein Zielpolytop überführt werden. Dabei können gefährliche Prozesszustände von Anfang an markiert werden und somit aus dem Lösungsraum für die optimale Sequenz von Polytopen entfernt werden. Die Lösung ist in Bezug auf die gewählte Polytopstruktur und das gewählte Gütemaß für die Übertrittsregelung optimal.

Ein wesentlicher Vorteil der Prozessführung ist, dass alle Berechnungsschritte vorab, d.h. offline, durchgeführt werden können. Dies schließt die Untersuchung jeder Polytopseite in jedem Polytop und jeder diskreten Eingangsgröße auf eine geeignete Übertrittsregelung, die Modellierung des Graphen mit den Reglerinformationen und die Wegsuche im Graphen mit ein.

Bei der Anwendung der Prozessführung ist in einem ersten Schritt zu bestimmen, in welchem Polytop der aktuelle Zustand liegt. Im zweiten Schritt ist der zugehörige affine Regler zu aktivieren, der die Trajektorie in das Zielpolytop führt. Nach Erreichen des Nachbarpolytops wird dann der dort gültige affine Regler aktiviert. Dieser Vorgang wird so lange durchgeführt, bis das Endpolytop erreicht wird.

Mit der hier vorgestellten Prozessführungsstrategie wurde erstmals ein Verfahren für die Regelung von hybriden Systemen vorgestellt, das auf Basis der gewählten Polytopstruktur eine optimale Betriebsführung bei einem minimalen Speicheraufwand und Rechenaufwand erreicht. Das Verfahren benötigt dabei nur ein affines Regelgesetz je Polytop. Bei der Realisierung müssen anschließend nur Polytopdaten ausgelesen werden. Das Verfahren ist deshalb für die Verwendung auf einem Steuergerät mit wenig Speicher- und Rechenkapazität besonders geeignet.

Anhang A

Anmerkungen

A.1 Partikelschwarm-Optimierung (PSO)

Die Partikelschwarm-Optimierung ist ein Optimierungsalgorithmus, der das Schwarmverhalten von Insekten zum Vorbild hat und wird deshalb zu den evolutionären Algorithmen gezählt.

Im Vergleich zu anderen evolutionären Algorithmen, wie zum Beispiel den bekannten genetischen Algorithmen, und vor allem im Vergleich zu den klassischen deterministischen Algorithmen, wie die Gradientenabstiegsverfahren oder die Nichtlineare Programmierung, ist der PSO eher einfach aufgebaut.

Ein Vorteil ist, dass nur wenige Parameter bei der Durchführung des Algorithmus gewählt werden müssen [PSO]. Als Parameter muss lediglich ein beschränktes Gebiet angegeben werden, da der Algorithmus mit zufälligen Werten initialisiert wird. Deterministische Algorithmen benötigen im Gegensatz dazu immer einen geeigneten Startwert, der oft nur sehr schwer zu finden ist.

Wie alle evolutionären Algorithmen kann jedoch die PSO, ebenso wie die klassischen Verfahren, bei einer nichtlinearen Kostenfunktion nicht garantieren, dass die gefundene Lösung tatsächlich optimal ist. In vielen Fällen hat sich jedoch gezeigt, dass durch Einsatz der PSO sehr gute Ergebnisse, d. h. Ergebnisse sehr nahe dem theoretischen Optimum, in kurzer Zeit erzielt werden können.

Der PSO-Algorithmus wird in Abschnitt A.1.1 vorgestellt und es wird die Vorgehensweise bei der Berücksichtigung von Nebenbedingungen erläutert. In Abschnitt A.1.2 werden einige Modifikationen des PSO-Algorithmus aus [Wol05] vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit zur Anwendung kamen.

A.1.1 PSO für Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

In [HE02] wurde der ursprüngliche PSO-Algorithmus aus [PSO] für Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen erweitert. In jedem Iterationsschritt werden zwei einfache Gleichungen

$$\underline{v}_{k+1} = w\underline{v}_k + c_1r_1(\underline{x}_{p,Best} - \underline{x}_k) + c_2r_2(\underline{x}_{g,Best} - \underline{x}_k) \quad (\text{A.1a})$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{v}_{k+1} \quad (\text{A.1b})$$

ausgewertet, mit denen die Geschwindigkeit v und die Position x eines Partikels im Parameterraum berechnet werden.

Während den Iterationen wird die beste jemals von einem Partikel erreichte Position $\underline{x}_{g,Best}$ und die beste jemals vom Partikel selbst erreichte Position $\underline{x}_{p,Best}$ berechnet. Die skalaren Werte r_1 und r_2 sind Zufallszahlen zwischen 0 und 1, die mittels einer Gleichverteilung in jeder Iteration initialisiert werden. Die Parameter w , c_1 und c_2 sind frei wählbar für den Algorithmus: w heißt *Inertialgewicht* und wird zum Beispiel in [HE02] oft zwischen 0,5 und 1 gewählt, c_1 heißt *Erkenntnis-Lernrate* und c_2 *soziale Lernrate*, für beide Parameter gilt $c_1, c_2 \in [0, 4]$.

In der Praxis wird das Inertialgewicht oft mit der Anzahl der Iterationen verringert und die Geschwindigkeit eines Partikels auf einen Maximalwert begrenzt. Es ergibt sich damit der folgende Algorithmus:

Algorithmus (PSO mit Nebenbedingungen):

Initialisierung:

Für jedes Partikel

Wiederhole

Initialisiere Partikel mit zufälligen Werten

solange Partikel nicht alle Nebenbedingungen erfüllt

Optimierung:

Wiederhole

Für jedes Partikel

Berechne Gütemaß J

*Wenn Güte besser als beste bisher erreichte Güte dieses Partikels
und Partikel erfüllt alle Nebenbedingungen*

Speichere aktuelle Position als neue beste Position ($p,Best$)

Bestimme global bestes Partikel ($g,Best$)

Für jedes Partikel

Berechne neue Geschwindigkeit nach Gleichung (A.1a)

*Berechne neue Position nach Gleichung (A.1b)
solange Abbruchkriterium nicht erfüllt*

Als Abbruchkriterium eignet sich das Erreichen einer Anzahl an Iterationen oder das Unterschreiten einer Fehlerschranke. Die Anzahl der Partikel hängt von der Komplexität des Problems ab, in vielen Fällen reichen bereits 20 bis 40 Partikel aus.

Dieser Algorithmus hat einen Nachteil, da in der Initialisierung ein Partikel solange mit zufälligen Werten belegt wird, bis alle Nebenbedingungen erfüllt sind. Dies kann bei einer kleinen Menge an gültigen Lösungen im Suchraum sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. In [Wol05] wurden daher einige Änderungen am PSO-Algorithmus vorgenommen.

A.1.2 Modifizierter PSO-Algorithmus

Die k (nichtlinearen) Nebenbedingungen werden in der Form

$$\underline{c}(\underline{x}) \leq \underline{0} \quad (\text{A.2})$$

dargestellt. Mithilfe einer Diagonalmatrix

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & w_{kk} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

lässt sich der Vektor $\underline{c}(\underline{x})$ gemäß

$$J_{NB} = \underline{c}^T(\underline{x}) \underline{W} \underline{c}(\underline{x}) \quad (\text{A.4})$$

in eine skalare Form überführen [DMW05]. Dabei gilt

$$w_{ii} = \begin{cases} 1 & \text{für } c_i(\underline{x}) > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Es werden durch die Matrix \underline{W} lediglich die nicht erfüllten Nebenbedingungen zur Berechnung von J_{NB} verwendet. Sind alle Nebenbedingungen erfüllt, gilt in diesem Teilgebiet des Suchraums $J_{NB} = 0$, sonst $J_{NB} > 0$.

Der PSO-Algorithmus sucht nun zunächst eine Lösung, die alle Nebenbedingungen erfüllt. Ist eine solche Lösung gefunden, so wird innerhalb der Beschränkungen eine optimale Lösung gesucht.

Algorithmus (Modifizierte PSO):

Initialisierung:

*Für jedes Partikel**Initialisiere Partikel mit zufälligen Werten*

Optimierung:

*Wiederhole**Für jedes Partikel**Berechne J_{NB} nach Gleichung (A.4)**Wenn $J_{NB} < J_{NB,p,Best}$ und $J_{NB,p,Best} \neq 0$* *neues $J_{NB,p,Best}$ und Position speichern**Wenn $J_{NB} = 0$* *Berechne Gütemaß J* *Wenn $J < J_{p,Best}$* *neues $J_{p,Best}$ und Position speichern**Bestimme global bestes Partikel ('g,Best')**Für jedes Partikel**Berechne neue Geschwindigkeit nach Gleichung (A.1a)**Berechne neue Position nach Gleichung (A.1b)**solange Abbruchkriterium nicht erfüllt*

Es werden zur Bestimmung des global besten Partikels ('g,Best') zunächst nur die Partikel herangezogen, die alle Nebenbedingungen erfüllen. Gibt es kein solches Partikel, so wird das Partikel mit dem kleinsten $J_{NB,p,Best}$ als global bestes Partikel verwendet.

Mit diesen Modifikationen kann der PSO-Algorithmus erfolgreich zur Lösung von nichtlinearen Optimierungsproblemen mit nichtlinearen Nebenbedingungen bei der hier betrachteten Komplexität der Optimierungsprobleme eingesetzt werden.

A.2 Inhärente Systemgrenzen bei komplexen Eigenwerten

Es wird ein zeitdiskretes autonomes System (3.5) mit negativ reellen oder konjugiert komplexen Eigenwerten betrachtet. Die Linkseigenvektoren sind dann konjugiert komplex und die zugehörigen inhärenten Systemgrenzen stellen folglich Quadriken dar. In [Fre99] wurden hierzu erste Untersuchungen für zeitkontinuierliche Systeme angestellt, welche dann in [Wol05] für zeitdiskrete Systeme erweitert wurden.

Quadriken der Form

$$(\underline{x} - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) = (\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) \quad (\text{A.6})$$

bilden für ein autonomes zeitdiskretes System mit reeller Transitionsmatrix $\underline{\Phi}_R$ und komplexen oder negativ reellen Eigenwerten inhärente Systemgrenzen. Dabei ist \underline{x}_k ein beliebiger Punkt der Trajektorie und $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$ die Ruhelage des Systems, die den Mittelpunkt der Quadrik \underline{x}_M darstellt.

Für die Matrix \underline{Q} gilt

$$\underline{Q} = \underline{W}^T \underline{W}$$

mit der (komplexen) Linkseigenvektormatrix \underline{W} . Sind alle Eigenwerte λ_i stabil, so gilt

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) < (\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}})$$

mit Ausnahme von $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k = \underline{x}_{\text{Ruhe}}$. Sind alle Eigenwerte λ_i instabil, so gilt

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) > (\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x}_k - \underline{x}_{\text{Ruhe}})$$

mit Ausnahme von $\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k = \underline{x}_{\text{Ruhe}}$. Gilt für alle Eigenwerte $\lambda_i = 1$, so gilt

$$(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_M)^T \underline{Q}(\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_M) = (\underline{x}_k - \underline{x}_M)^T \underline{Q}(\underline{x}_k - \underline{x}_M)$$

mit dem Quadrikmittelpunkt \underline{x}_M . Ist nur ein Teil der Eigenwerte stabil und die übrigen instabil, so können einige Abtastpunkte innerhalb der Quadrik

$$(\underline{x} - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x} - \underline{x}_{\text{Ruhe}}) = (\underline{x}_0 - \underline{x}_{\text{Ruhe}})^T \underline{Q}(\underline{x}_0 - \underline{x}_{\text{Ruhe}})$$

liegen. In diesem Fall stellt die Quadrik also keine inhärente Systemgrenze dar.

In Abbildung A.1 sind für ein System zweiter Ordnung mögliche Trajektorien und die zugehörigen Systemgrenzen eingezeichnet.

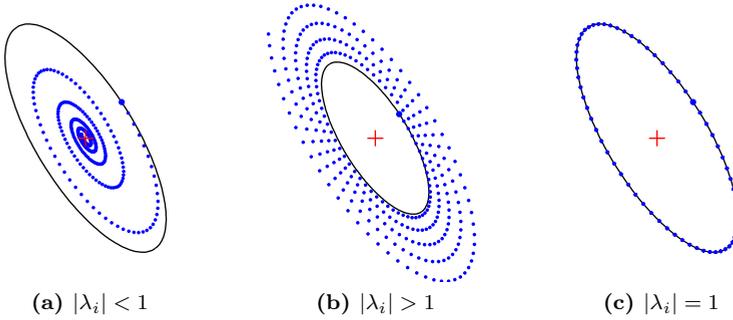


Abbildung A.1: Inhärente Systemgrenzen (—) und mögliche Trajektorien eines Systems zweiter Ordnung mit komplexen Eigenwerten

Leider ist es nicht möglich mit Hilfe von Quadriken Regelungen zu finden, die die Bedingungen an die Übertrittsregelung oder die Endregelung erfüllen. In [Wol05] werden die Quadriken als Systemgrenzen für zeitdiskrete Systeme weiterführend untersucht.

Anhang B

Beweise

B.1 Verallgemeinerung der Bedingungen an den Gradienten eines beliebigen Zustandspunkts im Simplex

Es soll der Satz 5.1 bewiesen werden, der hier noch einmal angegeben ist.

Satz B.1 (Gradientenbedingungen eines beliebigen Zustandspunkts):

Fordert man in allen Ecken eines Simplex bei zugrunde liegender linearer bzw. affiner Dynamik das Vorhandensein einer positiven (negativen) Komponente des zeitdiskreten Gradienten bezüglich einer Austrittsseite, so besitzt der zeitdiskrete Gradient in einem beliebigen Zustandspunkt im Simplex auch eine positive (negative) Komponente bezüglich der gewünschten Austrittsseite.

Der Beweis für diesen Satz ist wie folgt:

Beweis (Beweis von Satz B.1):

Gegeben ist ein Simplex \mathcal{S} im Zustandsraum der Dimension \mathbb{R}^n mit den Eckpunkten \underline{x}_{v_i} , $i = 1, \dots, n + 1$. Für jeden Zustandspunkt \underline{x} soll der zeitdiskrete Gradient in diesem Zustandspunkt eine Komponente bezüglich der Austrittsseite F_a besitzen, die aus dem Simplex zeigt. Dies lässt sich durch den Zusammenhang

$$\forall \underline{x} \in \mathcal{S} : \underline{n}_{F_a}^T ((\Phi - I_n) \underline{x} + \underline{H} u(\underline{x}) + \underline{\varphi}) > 0 \quad (\text{B.1})$$

darstellen. Für die Eckpunkte des Simplex gilt dabei

$$\forall \underline{x}_{v_i} \in \mathcal{V} : \underline{n}_{F_a}^T ((\Phi - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi}) > 0, \quad (\text{B.2})$$

was der Gleichung (5.28a) entspricht. Die Menge \mathcal{V} bezeichnet dabei die Menge der Eckpunkte des Simplex.

In [Hv04] wird gezeigt, dass ein Zustandspunkt \underline{x} in einem Simplex eindeutig durch eine Linearkombination der Eckpunkte des Simplex dargestellt werden kann, es gilt also

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \underline{x}_{v_i} \quad (\text{B.3})$$

für bestimmte b_i , $i = 1, \dots, n + 1$. Dieser Zusammenhang ist in einer anderen Darstellung auch in Gleichung (5.75) zu finden. Für die Stellgröße in diesem Zustandspunkt gilt unter Annahme eines linearen bzw. affinen Regelgesetzes [Hv04] der Zusammenhang

$$\underline{u}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} b_i \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) \quad (\text{B.4})$$

aus Gleichung (5.78). Für die Eindeutigkeit der Lösung wird weiterhin gefordert, dass der Zusammenhang

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 1 \quad (\text{B.5})$$

aus Gleichung (5.77) gilt. Für Zustandspunkte im Simplex gilt dann $0 \leq b_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n + 1$.

Setzt man nun die Zusammenhänge aus den Gleichungen (B.3), (B.4) und (B.5) in den Ausdruck aus Gleichung (B.1)

$$\underline{n}_{F_a}^T ((\underline{\Phi} - \underline{I}_n) \underline{x} + \underline{H} \underline{u}(\underline{x}) + \underline{\varphi}) \quad (\text{B.6})$$

ein, so erhält man

$$\underline{n}_{F_a}^T \left((\underline{\Phi} - \underline{I}_n) \sum_{i=1}^{n+1} b_i \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \sum_{i=1}^{n+1} b_i \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) + \sum_{i=1}^{n+1} b_i \underline{\varphi} \right). \quad (\text{B.7})$$

Nach Umformen der Gleichung (B.7) folgt daraus

$$\sum_{i=1}^{n+1} (b_i \underline{n}_{F_a}^T ((\underline{\Phi} - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi})). \quad (\text{B.8})$$

Da der Ausdruck $\underline{n}_{F_a}^T ((\underline{\Phi} - \underline{I}_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} \underline{u}(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi})$ in der Summe von Gleichung (B.8) nach Bedingung (B.2) größer Null ist, ist auch das Produkt dieses Ausdrucks mit $0 \leq b_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n + 1$ größer Null. Für den Ausdruck in

Gleichung (B.8) gilt demnach

$$\sum_{i=1}^{n+1} (b_i n_{F_a}^T ((\Phi - I_n) \underline{x}_{v_i} + \underline{H} u(\underline{x}_{v_i}) + \underline{\varphi})) > 0, \quad (\text{B.9})$$

somit ist die Bedingung (B.1) erfüllt. ■

Der Beweis lässt sich leicht auf die Bedingungen (5.28b-5.28j) übertragen. In diesen Bedingungen wird immer nur eine positive bzw. negative Komponente des zeitdiskreten Gradienten bezüglich der Begrenzungsseite in den Eckpunkten der jeweiligen Begrenzungsseite gefordert. Es lässt sich bei gleicher Vorgehensweise wie im Beweis zum Satz B.1 zeigen, dass diese positive bzw. negative Komponente in jedem Punkt auf der betrachteten Begrenzungsseite des Simplex gilt. Da es sich um Simplexe handelt, liegen immer n Eckpunkte auf der betrachteten Begrenzungsseite. Der Eckpunkt $n + 1$ liegt nicht auf der betrachteten Begrenzungsseite. Die Komponente der zeitdiskreten Dynamik bezüglich der betrachteten Begrenzungsseite im Eckpunkt $n + 1$ kann sowohl negativ als auch positiv sein. Für den Beweis ist die Richtung der Komponente nicht von Bedeutung, da der Eckpunkt $n + 1$ keinen Einfluss auf den Wert des Ausdrucks in Gleichung (B.8) für Zustandspunkte auf der betrachteten Begrenzungsseite hat, da der Faktor b_{n+1} für die Linearkombination des Eckpunkts $n + 1$ immer verschwindet, es gilt dann $b_{n+1} = 0$.

B.2 Eindeutigkeit der Lösung im Polytop

Es soll der Satz 5.2 bewiesen werden, der hier noch einmal angegeben ist:

Satz B.2 (Eindeutigkeit der Reglerparameter beim Polytop):

Die Reglerparameter \underline{R} und $\underline{\varphi}$ berechnet für ein Polytop, sind genau dann eindeutig, wenn die zur Reduktion und Berechnung der Parameter verwendeten $n + 1$ Eckpunkte des Polytops ein volldimensionales Simplex aufspannen und in das Gütemaß und in die Nebenbedingungen alle M Ecken einfließen.

Der Beweis für diesen Satz ist wie folgt:

Beweis (Beweis von Satz B.2):

Gegeben ist ein Polytop mit M Ecken im Zustandsraum, das eindeutig durch das Regelgesetz

$$\underline{u}^T(\underline{x}_{v_i}) = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_i}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

aus Gleichung (5.39) direkt in ein Polytop mit den Eckpunkten $\underline{u}(\underline{x}_{v_i})$, $i = 1, \dots, M$ abgebildet wird.

Statt nun diesen direkten Weg der Abbildung zu wählen, soll im Weiteren gezeigt werden, dass bei einer Abbildung des Polytops über baryzentrische Koordinaten, unter der Verwendung beliebiger $n + 1$ Eckpunkte, das gleiche Polytop mit den Eckpunkten $\underline{u}(\underline{x}_{v_i})$, $i = 1, \dots, M$ wie bei der direkten Abbildung entsteht.

Dieses Polytop gibt den gültigen Bereich für zulässige Lösungen an. Da es sich immer um das gleiche Polytop handelt, ist die Lösung dann auch immer gleich.

Durch die Wahl von $n + 1$ Ecken kann zu den baryzentrischen Koordinaten dieser $n + 1$ Ecken übergegangen werden. In Abbildung B.1 ist ein Beispiel mit zwei Zuständen dargestellt, bei dem die Ecken \underline{x}_{v_1} , \underline{x}_{v_2} und \underline{x}_{v_5} als Basis für die baryzentrischen Koordinaten, einem Simplex, gewählt werden.

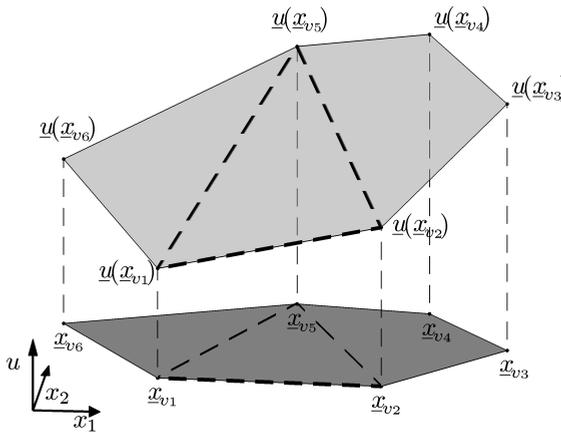


Abbildung B.1: Eindeutigkeit der Lösung im Polytop

Alle M Ecken können dann durch die baryzentrische Koordinatentransformationsmatrix \underline{T}_B aus Gleichung (2.26) in diesen baryzentrischen Koordinaten \underline{b} dargestellt werden. Im Beispiel ergibt sich so die baryzentrische Transformationsmatrix zu

$$\underline{T}_B = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_1}^\top & 1 \\ \underline{x}_{v_2}^\top & 1 \\ \underline{x}_{v_5}^\top & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Jede der M Ecken sind dann baryzentrische Koordinaten \underline{b}_i , $i = 1, \dots, M$ zugeordnet. Die Stellgröße $\underline{u}(\underline{x}_{v_j})$, in einer Ecke, die nicht zum gewählten Simplex gehört, lässt sich durch eine Linearkombination der Stellgrößen in den Ecken des

Simplex \bar{u}_k , $k = 1, \dots, n+1$ schreiben zu

$$\underline{u}^T(\underline{x}_{v_j}) = \underline{b}_j^T \begin{bmatrix} \bar{u}_1^T \\ \vdots \\ \bar{u}_{n+1}^T \end{bmatrix}.$$

Ersetzt man nun hierin \underline{b}_j durch den Zusammenhang aus Gleichung (2.26), ergibt sich

$$\underline{u}^T(\underline{x}_{v_j}) = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_j}^T & 1 \end{bmatrix} \underline{T}_B^T \begin{bmatrix} \bar{u}_1^T \\ \vdots \\ \bar{u}_{n+1}^T \end{bmatrix}.$$

Ersetzt man nun den Vektor mit den Stellgrößen $[\bar{u}_1 \ \dots \ \bar{u}_{n+1}]^T$ durch den Zusammenhang aus Gleichung (5.40), so folgt

$$\underline{u}^T(\underline{x}_{v_j}) = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_j}^T & 1 \end{bmatrix} \underline{T}_B^T (\underline{T}_B^T)^{-1} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix}.$$

Vereinfacht man dies so weit wie möglich, ergibt sich

$$\underline{u}^T(\underline{x}_{v_j}) = \begin{bmatrix} \underline{x}_{v_j}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\underline{R}^T \\ \underline{\varphi}_u^T \end{bmatrix}.$$

Dies entspricht genau der Gleichung (B.10). Da jede Kombination von Eckpunkten, die ein Simplex bilden, dasselbe Ergebnis liefern, ist obiger Satz bewiesen. ■

B.3 Inhärente Systemgrenzen

In [Fre99, Buc04b] wurde bewiesen, dass ein autonomes zeitkontinuierliches affines System inhärente Systemgrenzen besitzt. Diese inhärenten Systemgrenzen sind durch so genannte Hyperebenen beschreibbar, wenn das System nur reelle Eigenwerte besitzt, deren Normalenvektoren die Linkseigenvektoren darstellen. Die Ruhelage des Systems liegt dabei auf den inhärenten Systemgrenzen. Für stabile Eigenwerte bewegt sich die Trajektorie auf die zugehörige inhärente Systemgrenze zu, für instabile Eigenwerte von dieser weg, und für den zeitkontinuierlichen Eigenwert $s = 0$ bleibt der Abstand zu dieser Hyperebene konstant. Außerdem wird in [Fre99, Buc04b, Wol05] auch die Existenz von Systemgrenzen durch den aktuellen Zustand bewiesen.

Zu den Abtastzeitpunkten ist der zeitdiskrete Zustand mit dem zeitkontinuierlichen Zustand identisch. Es ist damit anschaulich klar, dass die zeitdiskrete Systembe-

schreibung ebenfalls über eine inhärente Systemgrenze verfügen muss, die sich wiederum als Hyperebenen darstellen lässt.

Im Folgenden soll die Existenz der inhärenten Systemgrenzen unabhängig von der zeitkontinuierlichen Betrachtungsweise in [Fre99, Buc04b] bewiesen werden.

B.3.1 Existenz der inhärenten Systemgrenzen

Das autonome zeitdiskrete affine System (3.5)

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{\Phi}_R \underline{x}_k + \underline{\varphi}_R \quad (\text{B.12})$$

mit reeller Transitionsmatrix $\underline{\Phi}_R$ und mit positiven reellen Eigenwerten $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, denen im Zeitkontinuierlichen reelle Eigenwerte entsprechen, wird betrachtet.

Mit diesen Voraussetzungen gilt:

Satz B.3 (Inhärente Systemgrenzen durch die Ruhelage $\underline{x}_{\text{Ruhe}}$):

Beim autonomen System (B.12) mit reeller Transitionsmatrix $\underline{\Phi}_R$, mit reellen und positiven Eigenwerten λ_i , bilden alle Hyperebenen der Form $\underline{w}_i^T \underline{x} = \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}$ inhärente Systemgrenzen.

Für $i = 1, \dots, n$ gelten folgende Implikationen:

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_0 < \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \longrightarrow \underline{w}_i^T \underline{x}_k < \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{B.13a})$$

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_0 > \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \longrightarrow \underline{w}_i^T \underline{x}_k > \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{B.13b})$$

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_0 = \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \longrightarrow \underline{w}_i^T \underline{x}_k = \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{B.13c})$$

Die Implikationen lassen sich leicht durch vollständige Induktion beweisen.

Beweis (Beweis von Satz B.3):

Für die Implikation (B.13a) ergibt sich der Induktionsanfang

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_0 < \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}, \quad (\text{B.14})$$

der nach der Voraussetzung erfüllt ist. Es folgt der Induktionsschritt. Als Induktionsannahme wird angenommen, dass die Gleichung

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_k < \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad (\text{B.15})$$

für ein $k \in \mathbb{N}_0$ erfüllt ist. Nun ist zu zeigen, dass damit auch die Induktionsbe-

hauptung

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_{k+1} \stackrel{!}{<} \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad (\text{B.16})$$

erfüllt ist.

Dafür werden folgende Zusammenhänge benötigt:

- Die Ungleichung der Induktionsannahme (B.15) gilt auch, wenn beide Seiten mit einem konstanten positiven Faktor multipliziert werden:

$$\lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_k < \lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{B.17})$$

- Für die Ruhelage gilt

$$\underline{x}_{\text{Ruhe}} = \Phi \underline{x}_{\text{Ruhe}} + \underline{\varphi}, \quad (\text{B.18})$$

nach $\underline{\varphi}$ aufgelöst ergibt sich daraus

$$\underline{\varphi} = \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \Phi \underline{x}_{\text{Ruhe}}. \quad (\text{B.19})$$

Zum Beweis des Induktionsschritts wird die Systemgleichung (B.12) in die Induktionsbehauptung (B.16) eingesetzt

$$\underline{w}_i^T (\Phi \underline{x}_k + \underline{\varphi}) \stackrel{!}{<} \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}. \quad (\text{B.20})$$

Durch Ausmultiplizieren und Umsortieren ergibt sich daraus

$$\underline{w}_i^T \Phi \underline{x}_k \stackrel{!}{<} \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{w}_i^T \underline{\varphi}. \quad (\text{B.21})$$

Durch Gleichsetzen der linken Seiten der Gleichungen (B.17) und (B.21) ergibt sich

$$\lambda_i \underline{w}_i^T = \underline{w}_i^T \Phi. \quad (\text{B.22})$$

Es wird dabei schon in [Fre99] gefordert, dass der Zustand \underline{x}_k in beide Gleichungen in der gleichen Art und Weise eingeht.

Die Gleichung (B.22) ist die Bestimmungsgleichung für den Linkseigenvektor \underline{w}_i^T zum Eigenwert λ_i und somit auf jeden Fall erfüllt. Unter Verwendung dieser nicht notwendigen Bedingung sowie Einsetzen der Gleichung (B.19) erhält man aus Ungleichung (B.21) den Zusammenhang

$$\lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_k \stackrel{!}{<} \underbrace{\underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}}_{\equiv 0} + \underline{w}_i^T \Phi \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad (\text{B.23})$$

Unter nochmaliger Anwendung des Zusammenhangs (B.22) ergibt sich die Ungleichung zu

$$\lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_k \stackrel{!}{<} \lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}}. \quad (\text{B.24})$$

Da $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$ vorausgesetzt wurde, kann die Ungleichung nun noch durch λ_i dividiert werden:

$$\underline{w}_i^T \underline{x}_k \stackrel{!}{<} \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \quad (\text{B.25})$$

Dies ist genau die Induktionsannahme (B.15) und somit wurde der Induktionsschritt bewiesen. Es wurde damit gezeigt, dass die Implikation (B.13a) erfüllt ist. Analog können die Implikationen (B.13b) bzw. (B.13c) bewiesen werden. Hierfür ist nur in jeder Ungleichung des Beweises das Zeichen „<“ durch das Zeichen „>“ bzw. „=“ auszutauschen. ■

Im Folgenden wird die Systembewegung relativ zu den Systemgrenzen untersucht.

B.3.2 Systembewegung relativ zu den Systemgrenzen

Die zum Eigenwert λ_i gehörende inhärente Systemgrenze besitzt als Normalenvektor den Linkseigenvektor \underline{w}_i . Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt B.3.1.

Satz B.4 (Systembewegung relativ zu den inhärenten Systemgrenzen):

Das System bewegt sich bei stabilem Eigenwert vom Ausgangszustand \underline{x}_0 , der nicht auf der Systemgrenze liegt, auf die zugehörige Systemgrenze zu. Der Abstand zur zugehörigen Systemgrenze bleibt für den Eigenwert $\lambda_i = 1$ konstant. Für instabile Eigenwerte bewegt sich die Systemtrajektorie von der zugehörigen Systemgrenze weg. Der Betrag des zeitdiskreten Gradienten relativ zur Systemgrenze hängt dabei proportional vom Abstand des aktuellen Zustands von dieser Systemgrenze ab.

Für den Beweis wird der Anteil des zeitdiskreten Gradienten $\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$ in Richtung des Normalenvektors der Systemgrenze betrachtet. Dabei werden auch Zusammenhänge aus dem Beweis in Abschnitt B.3.1 benötigt.

Beweis (Beweis von Satz B.4):

Die Projektion des zeitdiskreten Gradienten $\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$ in Richtung des Normalenvektors \underline{w}_i der zum Eigenwert λ_i gehörenden Systemgrenze ergibt sich zu

$$\underline{w}_i^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) = \underline{w}_i^T (\underline{\Phi} \underline{x}_k + \underline{\varphi} - \underline{x}_k). \quad (\text{B.26})$$

Ersetzt man nun φ mit dem Zusammenhang aus Gleichung (B.19), so erhält man

$$\begin{aligned}\underline{w}_i^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) &= \underline{w}_i^T (\Phi \underline{x}_k - \underline{x}_k + \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \Phi \underline{x}_{\text{Ruhe}}) \\ &= \underline{w}_i^T \Phi \underline{x}_k - \underline{w}_i^T \underline{x}_k + \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \underline{w}_i^T \Phi \underline{x}_{\text{Ruhe}}.\end{aligned}\quad (\text{B.27})$$

Der projizierte zeitdiskrete Gradient lässt sich mit dem Zusammenhang aus Gleichung (B.22) umformen zu

$$\begin{aligned}\underline{w}_i^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) &= \lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_k - \underline{w}_i^T \underline{x}_k + \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} - \lambda_i \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \\ &= (\lambda_i - 1) \underline{w}_i^T \underline{x}_k + (1 - \lambda_i) \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}} \\ &= \underbrace{(\lambda_i - 1)}_{(*)} \underbrace{(\underline{w}_i^T \underline{x}_k - \underline{w}_i^T \underline{x}_{\text{Ruhe}})}_{(**}).\end{aligned}\quad (\text{B.28})$$

Der Ausdruck $(**)$ in Gleichung (B.28) ist proportional zum Abstand des Punktes \underline{x}_k zur Systemgrenze. Der Betrag des Normalenvektors \underline{w}_i stellt dabei den Proportionalitätsfaktor dar. Der Ausdruck $(*)$ in (B.28) ist somit nicht vom aktuellen Zustand abhängig, die Änderung des Zustands relativ zu einer Systemgrenze ist demnach proportional zum Abstand des aktuellen Zustands von dieser Systemgrenze.

Damit bleibt noch zu zeigen, dass die angegebene Richtung der Bewegung in Satz B.4 in Abhängigkeit des zugehörigen Eigenwertes korrekt ist. Für den Eigenwert $\lambda_i = 1$ ist offensichtlich, dass keine Bewegung senkrecht zur Systemgrenze stattfindet, da der Ausdruck $(*)$ und damit auch die rechte Seite der Gleichung (B.28) zu 0 wird.

Als erstes soll nun der Fall betrachtet werden, wenn der Ausdruck $(**)$ einen positiven Wert hat. Der Wert des Ausdrucks $(**)$ ist genau dann positiv, wenn \underline{x}_k in dem Halbraum liegt, in den der Normalenvektor zeigt. Liegt \underline{x}_k im anderen Halbraum, so ist der Wert negativ.

- Ist der zur Systemgrenze gehörende Eigenwert stabil, d.h. $0 < \lambda_i < 1$, so ist der Ausdruck $(*)$ negativ. Dies bedeutet, dass die gesamte rechte Seite der Gleichung (B.28) negativ ist. Damit zeigt der projizierte zeitdiskrete Gradient in die entgegengesetzte Richtung wie der Normalenvektor der Systemgrenze und damit zur Systemgrenze hin.
- Gilt für den Eigenwert $\lambda_i > 1$, so ist der Ausdruck $(*)$ und damit auch die ganze rechte Seite der Gleichung (B.28) positiv. Dies bedeutet, dass sich die Systemtrajektorie von der Systemgrenze weg bewegt.

Ähnlich sieht es bei dem Fall aus, wenn der Ausdruck (**) einen negativen Wert hat:

- Ist der zur Systemgrenze gehörige Eigenwert stabil, d.h. $0 < \lambda_i < 1$, so ist der Ausdruck (*) negativ. Dies bedeutet, dass die gesamte rechte Seite der Gleichung (B.28) positiv ist. Damit zeigt der projizierte zeitdiskrete Gradient in die gleiche Richtung wie der Normalenvektor der Systemgrenze und damit zur Systemgrenze hin.
- Gilt für den Eigenwert $\lambda_i > 1$, so ist der Ausdruck (*) positiv und damit die ganze rechte Seite der Gleichung (B.28) negativ. Dies bedeutet, dass sich die Systemtrajektorie von der Systemgrenze weg bewegt.

Man kann also zusammenfassen, dass für $0 < \lambda_i < 1$ sich die Systemtrajektorie auf die Systemgrenze zu bewegt und für $\lambda_i > 1$ sich von der Systemgrenze entfernt. Für $\lambda = 1$ gibt es keine Bewegung in Richtung des Normalenvektors der Systemgrenze. Im Gesamtsystem überlagern sich im allgemeinen mehrere Bewegungen, die sich aus den Bewegungen einzelner Eigenwerte λ_i zusammensetzen, für die die obigen Betrachtungen gelten. ■

B.3.3 Inhärente Systemgrenzen durch den aktuellen Zustandspunkt [Buc04b, Wol05]

Aus den beiden nun bewiesenen Sätzen B.3 und B.4 lässt sich die Existenz weiterer inhärenter Systemgrenzen ableiten, wie dies in [Fre99] schon für zeitkontinuierliche Systeme gezeigt wurde. Diese Systemgrenzen verlaufen durch den aktuellen Zustandspunkt.

Satz B.5 (Inhärente Systemgrenzen durch \underline{x}_0):

Die Hyperebenen $\underline{w}_i^T \underline{x} = \underline{w}_i^T \underline{x}_0$, $i = 1, \dots, n$ bilden für den weiteren Verlauf ($k > 0$) der Systemtrajektorie ebenfalls inhärente Systemgrenzen. Dabei bewegt sich die Systemtrajektorie außer für den Fall $\lambda_i = 1$ immer von einer dieser Systemgrenzen weg, und zwar

- in den Halbraum, der die Ruhelage enthält, wenn der zugehörige reelle Eigenwert stabil ($0 < \lambda_i < 1$) ist,
- in den Halbraum, der die Ruhelage nicht enthält, wenn $\lambda_i > 1$ gilt.

Beweis (Beweis von Satz B.5):

Die in Satz B.5 genannten Systemgrenzen durch den Zustandspunkt \underline{x}_0 haben dieselben Normalenvektoren, wie die Systemgrenzen in Satz B.3. Die in Satz B.4 gefundenen Bewegungsrichtungen der Systemtrajektorie können deshalb auch auf diese Systemgrenzen übertragen werden. Ist $\lambda_i = 1$, dann bleibt der Abstand zur

Systemgrenze, die durch die Ruhelage verläuft, konstant. Folglich ändert sich auch der Abstand von der Systemgrenze $\underline{w}_i^T \underline{x} = \underline{w}_i^T \underline{x}_0$ nicht und die Systemgrenze schneidet den Zustandspunkt \underline{x}_0 parallel zur Systemgrenze durch die Ruhelage.

Handelt es sich um einen stabilen Eigenwert, dann verringert sich der Abstand der Systemtrajektorie zur Systemgrenze, die durch die Ruhelage verläuft und muss deshalb von der Hyperebene $\underline{w}_i^T \underline{x} = \underline{w}_i^T \underline{x}_0$ weg in Richtung der Ruhelage streben.

Für instabile Eigenwerte bewegt sich die Systemtrajektorie von der Hyperebene $\underline{w}_i^T \underline{x} = \underline{w}_i^T \underline{x}_0$ in den Halbraum, der die Ruhelage nicht enthält. ■

An einem kleinen Beispiel soll dieser Satz B.5 nun veranschaulicht werden.

Beispiel B.1 (Inhärente Systemgrenzen durch \underline{x}_0):

Ausgehend von einem autonomen System zweiter Ordnung mit den reellen Eigenwerten λ_1 und λ_2 mit $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$ sowie den zugehörigen Linkseigenvektoren \underline{w}_1 und \underline{w}_2 wird der Verlauf der Trajektorie ausgehend vom Anfangspunkt \underline{x}_0 betrachtet.

In Abbildung B.2 sind die inhärenten Systemgrenzen mit gestrichelten Linien eingezeichnet. Die Projektionen des zeitdiskreten Gradienten auf die Normalenvektoren sind durch dünne durchgezogene Linien markiert. Die Linkseigenvektoren sind im Zustandspunkt \underline{x}_0 als fette Pfeile dargestellt. Deutlich erkennt man die Abhängigkeit der Relativbewegung vom zugehörigen Eigenwert und dem jeweiligen Abstand zur Systemgrenze.

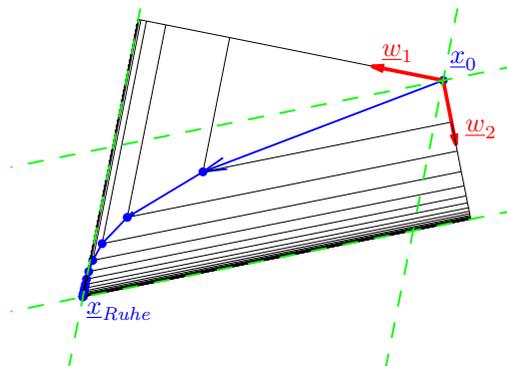


Abbildung B.2: Inhärente Systemgrenzen eines Systems zweiter Ordnung und Projektion des Gradienten auf die Normalenvektoren

B.4 Rückschluss von den Projektionen auf den zeitdiskreten Gradienten

Es soll nun gezeigt werden, wann von den Projektionen des zeitdiskreten Gradienten aus Anhang B.3.2 auf den zeitdiskreten Gradienten $\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$ selbst geschlossen werden kann. Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie in Abschnitt B.3.1.

Satz B.6 (Rückschluss von der Projektion auf den Gradienten):

Wenn die Linkseigenvektoren eines autonomen affinen Systems der Form (B.12) linear unabhängig sind, so lässt sich von der Projektion des zeitdiskreten Gradienten $\underline{w}_i^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k)$ ($i = 1, \dots, n$) in Richtung der Normalenvektoren der Systemgrenzen auf den zeitdiskreten Gradienten $\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$ zurückschließen. Dabei wird die Linearkombination der Rechtseigenvektoren gebildet, wobei als Faktor vor dem Rechtseigenvektor \underline{v}_i der Wert $\underline{w}_i^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k)$ zu wählen ist.

Für den Beweis wird verwendet, dass sich der Gradient als eine Linearkombination von n linear unabhängigen Vektoren \underline{v}_i schreiben lässt (siehe [Fö93a]).

Beweis (Beweis von Satz B.6):

Wird der zeitdiskrete Gradienten $\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k$ als Linearkombination noch unbestimmter Vektoren \underline{v}_i ($i = 1, \dots, n$) betrachtet, so gilt

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k = \eta_1 \underline{v}_1 + \dots + \eta_n \underline{v}_n = \underline{v}_1 \eta_1 + \dots + \underline{v}_n \eta_n ,$$

da Skalar und Vektor vertauscht werden dürfen. Fordert man nun, dass der Faktor $\eta_i = \underline{w}_i^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k)$, $i = 1, \dots, n$ der Projektion des zeitdiskreten Gradienten entspricht, erhält man

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k &= \underline{v}_1 \underline{w}_1^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) + \dots + \underline{v}_n \underline{w}_n^T (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) \\ &= (\underline{v}_1 \underline{w}_1^T + \dots + \underline{v}_n \underline{w}_n^T) (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) . \end{aligned}$$

Fasst man die Vektoren \underline{v}_i zu einer Matrix $\underline{V} = [\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n]$ und die Vektoren \underline{w}_i zu einer Matrix $\underline{W} = [\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n]^T$ zusammen, so gilt

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k = \underline{V} \underline{W} (\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k) . \quad (\text{B.29})$$

Damit der Rückschluss auf den zeitdiskreten Gradienten möglich ist, muss

$$\underline{V} \underline{W} = \underline{I}_n \quad (\text{B.30})$$

gelten. Dies ist genau dann erfüllt, wenn man die Matrix \underline{V} als Inverse der Matrix \underline{W} wählt. Dazu muss $\det(\underline{W}) \neq 0$ gelten, die Vektoren \underline{w}_i müssen also linear unabhängig sein. Die Matrix \underline{V} stellt die Matrix der Rechtseigenvektoren dar. ■

Literatur

- [Abe90] Abel, D.: *Petri-Netze für Ingenieure*. Springer Verlag, 1990.
- [AI06] Azuma, Shun-ichi und Imura, Jun-ichi : *Synthesis of optimal controllers for piecewise affine systems with sampled-data switching*. *Automatica*, 42:697–710, 2006.
- [Bac05] Back, Michael.: *Prädiktive Antriebsregelung zum energieoptimalen Betrieb von Hybridfahrzeugen*. Dissertation, Universitätsverlag Karlsruhe, Karlsruhe, 2005.
- [BBBM05] Borrelli, F, Baotić, M., Bemporad, A. und Morari, M.: *Dynamic programming for constrained optimal control of discrete-time linear hybrid systems*. *Automatica*, 41:1709–1721, 2005.
- [Bel52] Bellman, R. E.: *On the theory of Dynamic Programming*. Proceedings of National Academic Science, USA, 1952.
- [BFM00] Bemporad, A., Ferrari-Trecate, G. und Morari, M.: *Observability and Controllability of Piecewise Affine and Hybrid Systems*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45, 2000.
- [BM99] Bemporad, A. und Morari, M.: *Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints*. *Automatica*, 35:407–427, 1999.
- [Bor02] Borrelli, F.: *Discrete Time Constrained Optimal Control*. Dissertation, Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Oktober 2002.
- [Bra95] Branicky, M. S.: *Studies in Hybrid Systems: Modeling, Analysis, and Control*. Doktorarbeit, MIT, 1995.
- [BTK04] Back, M., Terwen, S. und Krebs, V.: *Predictive powertrain control for hybrid electric vehicles*. Proceedings of IFAC Symposium in Advances in Automotive Control, S. 451-457, Salerno, Italy, 2004.
- [Buc04a] Buchholz, Michael: *Modellprädiktive Regelung eines hybriden Systems am Beispiel eines Zwei-Tanks*. Studienarbeit 175, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), März 2004.

- [Buc04b] Buchholz, Michael: *Zeitdiskrete Prozessführung eines hybriden Systems mit diskreten Stelleingriffen*. Diplomarbeit 767, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Oktober 2004.
- [Cv04] Collins, P. und van Schuppen, Jan. H. : *Oberservability of Piecewise-Affine Hybrid Systems*. 2004.
- [DDGP03] De Santis, E., Di Benedetto, M. D., Gennaro, S. und Pola, G.: *Hybrid Observer Design Methodology*. HYBRIDGE, WP7, Error Evolution Control, Report to European Commission, 2003.
- [DDP03] De Santis, E., Di Benedetto, M. D. und Pola, G.: *On Observability and Detectability of Continuous-time Linear Switching Systems*. Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [DMW05] Dennis, J. E., Mahmoud, El-Alem und Williamson, Karen: *A trust-region approach to nonlinear systems of equalities and inequalities*. SIAM J. Optim, Vol. 9, No. 2, Seiten 291–315, 2005.
- [Eng97] Engell, Sebastian: *Modellierung und Analyse hybrider dynamischer Systeme*. at-Automatisierungstechnik, 45:152–162, 1997.
- [FMLM01] Ferrari-Trecate, G., Muselli, M., Liberati, D. und Morari, M.: *Identification of Piecewise Affine and Hybrid Systems*. Proceedings of the American Control Conference, Arlington, USA, 2001.
- [Fö93a] Föllinger, Otto: *Lineare Abtastsysteme*. 5. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, München, 1993.
- [Fö93b] Föllinger, Otto: *Nichtlineare Regelungen II*. 7. Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1993.
- [Fö94] Föllinger, Otto: *Regelungstechnik*. 8. Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994.
- [Fö98] Föllinger, Otto: *Nichtlineare Regelungen I*. 8. Auflage, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1998.
- [Fre99] Frehse, Goran: *Prozessführung einer Klasse hybrider Systeme auf der Basis von Netz-Zustands-Modellen*. Diplomarbeit 714, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), 1999.
- [GKV86] Gerthsen, Kneser und Vogel: *Physik*. Springer Verlag, Berlin, 1986.
- [GSC⁺03] Gallestey, E., Stothert, A., Castagnoli, D. , Ferrari-Trecate, G. und Morari, M. : *Using Model Predictive Control and Hybrid Systems for Optimal Scheduling of Industrial Processes*. at-Automatisierungstechnik, 51(6):574–582, 2003.
- [Har06] Hardy, Sandrine: *Methodische Ermittlung von Parametern zur Durchführung einer Dynamischen Programmierung am Beispiel einer Druck-*

- regelung. Diplomarbeit 780, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), 2006.
- [HBK05a] Hodrus, Thomas Erhard, Buchholz, Michael und Krebs, Volker: *Control of Discrete-Time Piecewise Affine Systems*. Proceedings of IFAC World Congress, Prag, 2005.
- [HBK05b] Hodrus, Thomas Erhard, Buchholz, Michael und Krebs, Volker: *A New Local Control Strategy for Control of Discrete-Time Piecewise Affine Systems*. Proceedings of European Control Conference (ECC), Sevilla, Spanien, 2005.
- [HE02] Hu, Xiaohui und Eberhart, Russell: *Solving constrained nonlinear optimization problems with particle swarm optimization*. Proceedings of the Sixth World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics 2002 (SCI 2002), Orlando, USA, 2002.
- [Hel06] Held, Michael: *Regelung einer Lose im Antriebsstrang eines Kraftfahrzeugs*. Studienarbeit 196, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Januar 2006.
- [HK07] Haschka, M. und Krebs, V.: *Beobachtung der Verdrillung in einem Kfz-Antriebsstrang mit Lose*. at-Automatisierungstechnik, 55(3), 2007.
- [HL92] Hoschek, J. und Lasser, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Teubner Verlag, Stuttgart, 1992.
- [HM03] Hodrus, T. und Münz, E.: *Hybride Phänomene in zeitdiskreter Darstellung*. at-Automatisierungstechnik, 51(12):574–582, 2003.
- [Hof99] Hoffmann, I.: *Identifikation hybrider dynamischer Systeme*. Shaker Verlag, Aachen, 1999.
- [HSK04a] Hodrus, Thomas Erhard, Schwarz, Michael und Krebs, Volker: *A Time Discretization Method for a Class of Hybrid Systems*. Proceedings of NOLCOS, IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Volume 2, S. 977-982, Stuttgart, 2004.
- [HSK04b] Hodrus, Thomas Erhard, Schwarz, Michael und Krebs, Volker: *A Time Discretization Method For a Class of Hybrid Systems With Jumps*. Proceedings of IAR Annual Meeting, Karlsruhe, 2004.
- [HTK99] Henrion, Didier, Tarbouriech, Sophie und Kučera, Vladimír: *Control of linear systems subject to input constraints: a polynomial approach. Part I - SISO Plants*. Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA, 1999.
- [HTK00] Henrion, Didier, Tarbouriech, Sophie und Kučera, Vladimír: *Control of linear systems subject to input constraints: a polynomial approach. MIMO Case*. Proceedings of the American Control Conference, Chicago, Illinois, USA, 2000.

- [Hv04] Habets, Luc C. G. J. M. und van Schuppen, Jan H.: *A Control Problem for Affine Dynamical Systems on a Full-Dimensional Polytope*. *Automatica* (40), Seiten 21–35, 2004.
- [HWBK06] Hodrus, Th. E., Wolff, F., Buchholz, M. und Krebs, Volker : *A Local Control Strategy for the Control of Discrete-Time Piecewise Affine Systems on Full Dimensional Polytopes*. Proceedings of IECON, IEEE, Paris, 2006.
- [HWK06] Hodrus, Thomas Erhard, Wolff, Florian und Krebs, Volker: *A Control Strategy for Control of Discrete-Time Piecewise Affine Systems on Polytopes Using System Inherent Bounds*. Proceedings of CCA/CACSD/ISIC06, S. 1499-1504, München, 2006.
- [Imu04] Imura, Jun-ichi: *Optimal Control of Sampled-data Piecewise Affine System*. *Automatica*, 40:661–669, 2004.
- [JT95] Jensen, T. R. und Toft, B.: *Graph coloring problems*. Wiley-Interscience, New York, 1995.
- [KBC05] Kvasnica, M., Baotic, M. und Christophersen, F.J.: *Multi Parametric Toolbox (MPT)*. <http://control.ee.ethz.ch/~mpt/>, Eidgenössische Hochschule, Zürich, Schweiz, 2005.
- [Kie97] Kienke, U: *Ereignisdiskrete Systeme*. Oldenbourg Verlag, München, 1997.
- [Klo07] Klotz, Dino: *Erweiterung einer globalen Strategie für die Prozessführung hybrider Systeme*. Diplomarbeit 792, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), März 2007.
- [Krü04] Krüger, Kim Michael: *Optimale Regelung eines hybriden Systems mittels multiparametrischer Optimierung*. Studienarbeit 179, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), September 2004.
- [LE02] Lagerberg, Adam und Egardt, Bo: *Evaluation of Control Strategies for Automotive Powertrains with Backlash*. Proceedings of 6th International Symposium on Advanced Vehicle Control, Hiroshima, Japan, Seiten 517–522, 2002.
- [LE04] Lagerberg, Adam und Egardt, Bo: *Model predictive control of automotive powertrains with backlash*. Technical Report R010/2004. Department of Signals and Systems, Calmers University of Technology, 2004.
- [LE05] Lagerberg, Adam und Egardt, Bo: *Model predictive control of automotive powertrains with backlash*. Proceedings of IFAC World Congress, Praha, 2005.
- [Lip95] Lipp, Hans Martin: *Grundlagen der Digitaltechnik*. Oldenbourg Verlag, München, 1995.

- [Lis06] Liske, Michael: *Optimale Approximation von Reglerkennfeldern*. Studienarbeit 190, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Januar 2006.
- [Lun00] Lunze, Jan: *Ein Beispiel für den Entwurf schaltender Beobachter*. at-Automatisierungstechnik, 48(11):556–562, 2000.
- [Lun04] Lunze, J.: *Regelungstechnik*, Band 2. Springer Verlag, Berlin, 2004.
- [Lun05] Lunze, J.: *Regelungstechnik*, Band 1. Springer Verlag, Berlin, 2005.
- [Lun06] Lunze, J.: *Ereignisdiskrete Systeme*. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [MHK03a] Münz, Eberhard, Hodrus, Thomas Erhard und Krebs, Volker: *A Gradient Based Method for the Identification of Hybrid Systems*. Proceedings of 4th MATHMOD, S.766-775, Wien, 2003.
- [MHK03b] Münz, Eberhard, Hodrus, Thomas Erhard und Krebs, Volker: *Top-Down Identification of Hybrid Characteristic Maps*. Proceedings of ADHS 03, S. 34-39, Saint Malo, Frankreich, 2003.
- [MHK04] Münz, Eberhard, Hodrus, Thomas Erhard und Krebs, Volker: *Gradient Based Identification of Hybrid Systems*. Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, Vol 10, Nr. 1, S. 25-40, Taylor & Francis, 2004.
- [Mün06] Münz, Eberhard: *Identifikation und Diagnose hybrider dynamischer Systeme*. Schriften des Instituts für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Band 01, Universitätsverlag Karlsruhe, Karlsruhe, 2006.
- [Nen01] Nenninger, Gero Michael: *Modellbildung und Analyse hybrider dynamischer Systeme als Grundlage für den Entwurf hybrider Steuerungen*. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 8, Nr. 902, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [NM93] Neumann, K. und Morlock, M. : *Operations Research*. Hanser Verlag, München, 1993.
- [Pap91] Papageorgiou, M.: *Optimierung*. Oldenbourg Verlag, München, 1991.
- [PM82] Pfaff, G. und Meier, C.: *Geregelte Gleichstromantriebe*, Band 2. Oldenbourg Verlag, München, 1982.
- [Pra03] *Automatisierungstechnisches Praktikum, Versuch 7: Regelung eines 3-Tank-Systems*. Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), August 2003. Versuchsanleitung.
- [Pre85] Preuß, W.: *Distributionen und Operatoren*. Springer Verlag, Wien - New York, 1985.
- [PSO] *Particle Swarm Optimization*. <http://www.swarmintelligence.org>.

- [Ros06] Roshau, Viktor: *Steuerung eines Druckreglers mit Prozessführungsstrategien für hybride Systeme*. Studienarbeit 187, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Dezember 2006.
- [RP04] Rainer, D. und Pfeiffer, B.: *Modellbasierte prädiktive Regelung: eine Einführung für Ingenieure*. Oldenbourg Verlag, München, 2004.
- [Sch01] Schnabel, Mark: *Diskret-kontinuierliche dynamische Systeme: Optimale Steuerung und Regelung*. Fortschritt-Berichte VDI: Reihe 8, Nr. 900, VDI-Verlag, Düsseldorf, 2001.
- [Sch04a] Schneider, Matthias: *Entwicklung einer robusten Regelung für einen hydraulischen Aktor*. Studienarbeit 174, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), Januar 2004.
- [Sch04b] Schwarz, Michael: *Zeitdiskretisierung stückweise affiner kontinuierlicher Systeme*. Diplomarbeit 762, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), 2004.
- [SKHK05] Schwarz, Michael, Kiencke, Uwe, Hodrus, Thomas Erhard und Krebs, Volker: *Time Discretization of Piecewise Affine Systems With Sliding Modes*. Proceedings of IFAC World Congress 2005, Praha, 2005.
- [SM72] Schneider, G. und Mikolčić, H.: *Einführung in die Methode der dynamischen Programmierung*. Oldenbourg Verlag, München, 1972.
- [Son81] Sontag, E. D. : *Nonlinear Regulation: The Piecewise Linear Approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, 26:346–358, 1981.
- [Str05] Ströhle, Christian: *Entwicklung von Verfahren zur Partitionierung des Zustandsraumes für hybride Systeme*. Diplomarbeit 775, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), 2005.
- [TBK04] Terwen, S., Back, M. und Krebs, V.: *Predictive powertrain control for heavy duty trucks*. Proceedings of IFAC Symposium in Advances in Automotive Control, S. 121-126, Salerno, Italy, 2004.
- [Tob03] Tobing, Tahan Martamba Tohap Nauli Lumban: *Entwicklung von zeitdiskreten Regelstrategien zur Prozessführung eines hybriden Systems*. Diplomarbeit 760, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), 2003.
- [Tol04] Tolle, Henning: *Über einige lokal verallgemeinernde Speicher und ihre Weiterentwicklung: Teil 2: Delaunay Triangulierung*. at-Automatisierungstechnik, 52(4):174–179, 2004.
- [TRN⁺99] Tenbrock, F., Rossmann, T., Neumann, D., Jauch, F. und Gierer, G.: *Modellbasierte Funktionsentwicklung und Applikation am Beispiel einer Wandlerüberbrückungskupplung*. IAV Symposium Berlin, Steuerungssysteme für den Antriebsstrang von Kraftfahrzeugen, 1999.

-
- [WB04] Wolff, J und Buss, M.: *Invariance Control Design for Constrained Nonlinear Systems*. In Proceedings of the NOLCOS'2004 Symposium on Nonlinear Control Systems, Stuttgart, Germany, 2004.
- [Wol05] Wolff, Florian: *Lokale Regelstrategien zur zeitdiskreten Prozessführung stückweise affiner hybrider Systeme*. Diplomarbeit 777, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (TH), 2005.
- [Zem65] Zemanian, A. H.: *Distribution theory and transform analysis*. McGraw-Hill Book Comp., New York, 1965.
- [ZF92] Zurmühl, Rudolf und Falk, Sigurd: *Matrizen 1*. 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1992.

Schriften des Instituts für
Regelungs- und Steuerungssysteme,
Universität Karlsruhe (TH), Band 03



Viele Systeme in der Praxis lassen sich als hybride Systeme modellieren, wodurch sich dem Anwender eine völlig neuartige Herangehensweise für die Entwicklung effizienter Prozessführungsstrategien erschließt.

Stückweise affine Systeme, die auf Polytopen im Zustandsraum definiert sind, werden genutzt, um Trajektorien auf dem Abstraktionsniveau dieser Polytope, gezielt in einen ausgewählten Bereich im Zustandsraum oder in eine Ruhelage zu überführen.

Für die Überführung von einem Polytop zum nächsten und zum Erreichen der gewünschten Ruhelage werden mehrere Verfahren vorgestellt, die ein einfaches affines Regelungsgesetz auf dem zugehörigen affinen System liefern. Die Auswahl der Polytopreihenfolge wird durch eine einfache Wegsuche in einer Graphenstruktur ermittelt.

Die beeindruckenden Ergebnisse der neuen Prozessführungsstrategie werden an mehreren Anwendungsbeispielen aus der Theorie und Praxis ausführlich demonstriert.

ISSN 1862-6688

ISBN 978-3-86644-227-6

www.uvka.de