Oskulationen von Dispersionskurven

Thomas Forbriger

21. Dezember 2001

1 Hintergrund

Abhängig vom Ausbreitungsmedium können sich die Dispersionskurven der Phasen-Geschwindigkeit verschiedener Rayleigh-Moden sehr nahe kommen, sich fast berühren. Diese Berührpunkte sind in der englischsprachigen Literatur als „osculation points“ bekannt. Geläufig sind sie im Zusammenhang mit der Stoneley-Mode an der Kern-Mantel-Grenze. Deren Dispersionskurve wird aus Teilen der Dispersionskurven mehrerer Normalmoden aufgebaut. Jeweils an einer Oskulation wechselt die Stoneley-Mode zur nächsthöheren Normalmode.

Im Gegensatz zur globalen Erde ist der Verlauf der Dispersionskurven für flachseismische Medien vor einer Inversion unbekannt und kann von einem Untersuchungsgebiet zum anderen stark variieren. Oskulationen können dann problematisch werden, wenn sie nicht als solche erkannt werden, weil jeweils nur ein Teilast der beteiligten Moden angeregt ist. Das ist ein typisches Erscheinungsbild. Andererseits können Oskulationen Informationen über tiefer liegende Materialeigenschaften enthalten, die von den angeregten Oberflächenwellen nicht voll erfasst werden. Dies wird anhand von Feldbeispielen erläutert.

In extremen Fällen kann man den Eindruck gewinnen, Dispersionskurven würden sich kreuzen. Dann läge Entartung zweier Normalmoden vor. Bei genauer Betrachtung wechseln an Oskulationen tatsächlich meistens die physikalischen Eigenschaften der Wellenausbreitung von einem Modenast zum anderen. Dazu gehören die Gruppengeschwindigkeit, die Anregungskoeffizienten und die Form der Eigenfunktionen.

2 Beispiele

Oskulationen von Dispersionskurven sind in der seismologischen Literatur durchaus bekannt, auch wenn ihre Natur selten diskutiert wird.

- Okal (1978) Diskutiert eine neue Klassifikation der sphäroidalen Moden der Erde. Diese orientiert sich nicht an der klassischen Oberton-Zählung, sondern sortiert die Moden in Gruppen mit physikalisch ähnlichen Eigenschaften und numeriert innerhalb dieser Gruppen. Er beschreibt eingehend, dass die physikalischen Eigenschaften an Oskulationen typischerweise den Modenast der klassischen Zählung wechseln. Eine von ihm ad hoc eingeführte Deutung der Oskulationen als Kopplung von Moden gab die Anregung zu den unten angestellten Überlegungen.

- Sezawa und Kanai (1935) behandeln den einfachsten Fall dispergierter Rayleigh-Moden in einem geschichteten Halbraum. Es handelt sich um eine homogene Schicht über einem nach unten unendlich ausgedehnten homogenen Halbraum. Die Schicht wird nach oben durch eine freie Oberfläche abgeschlossen. Beide Medien besitzen ein Poisson-Verhältnis von 0,25 ($\lambda = \mu$). Dieses Modell wird von den Autoren mathematisch exakt behandelt. Sie weisen eine Oskulation von Dispersionskurven nach. Für den Grenzübergang zu einem unendlich starren Halbraum (es verbleibt die Schicht als homogener Wellenleiter) gibt es eine Frequenz bei der Entartung von zwei Moden auftritt. Der Übergang zur Entartung ist offenbar kontinuierlich, es tritt eine Oskulation auf. Selbst in diesem einfachen Fall sind die Gleichungen, mit denen elastische Wellenausbreitung und deren Randbedingungen beschrieben werden muss, jedoch so komplex, dass eine weitere, elementare Betrachtung des Phänomens kaum möglich erscheint.

- Kennett (1983, Abschnitt 11.4.1) beschreibt den wechselnden Charakter von Moden in der Nähe von Oskulationen und zeigt Beispiele der Dispersion der Phasen-Geschwindigkeit für ein Mantelmodell in zwei Abbildungen.

- Dahlen und Tromp (1998, Abschnitt 11.6.2) beschreiben die Oskulationen, die durch die Stoneley-Mode an der Kern-Mantel-Grenze hervorgerufen werden. Sie diskutieren auch den Verlauf der Gruppengeschwindigkeit, der sich an den Oskulationen der Phasen-Geschwindigkeits-Dispersionskurven drastisch ändert. Sie zeigen sowohl die Dispersionskurven der Phasengeschwindigkeit, wie auch der Gruppengeschwindigkeit.

- Nolet und Dorman (1996, Abbildung 3.a) zeigen

Dispersionskurven der Gruppen- und Phasengeschwindigkeit für ein marines Modell. Darin sind deutlich Oskulationen der Phasengeschwindigkeit zu erkennen. Auch das typische Verhalten der Gruppengeschwindigkeits-Sprünge ist dort zu sehen.

- Buchen und Ben-Hador (1996, Abbildung 3.b) zeigen Dispersionskurven der Phasengeschwindigkeit mit deutlichen Oskulationen.

- Bohlen et al. (1999, Abbildung 2) zeigen Dispersionskurven der Phasenlangsamkeit für ein marines Modell, die sich scheinbar schneiden.

- Woodhouse (1988) beschreibt die Komplikationen, die aufgrund von Oskulationen bei der numerischen Suche nach Nullstellen der Rayleigh-Determinante auftreten. Um die Berechnung von Eigenschwingungen robust zu machen, wurde von ihm die Methode des „root count“ entwickelt.

Für globale Erdmodelle bezieht sich die Diskussion von Oskulationen hauptsächlich auf die Stoneley-Mode an der Kern-Mantel-Grenze. Deren Lage ist relativ gut bekannt und ändert sich im Rahmen von Inversionen nur unwesentlich. Für flachseismische Medien werden Oskulationen in Zusammenhängen beobachtet, die (mangels Erfahrung) bisher noch als überraschend empfunden werden. Da insbesondere die Anregung der Moden an einer Oskulation von einem Modenast auf einen anderen wechselt, können bei der Interpretation erhebliche Probleme auftreten (Forbriger, 1996). Einige Beispiele findet man bei Forbriger (2001):

- Die Datensätze BERKHEIM (Abbildungen VI.14, Seite 153 und VI.19, Seite 157) und HILZINGEN (Abbildungen VI.36, Seite 186 und VI.37, Seite 187) zeigen Oskulationen im Zusammenhang mit einer Zone erniedrigter Geschwindigkeit.

- Im Datensatz KÖRSCHTAL ist ebenfalls eine Oskulation zu erkennen.

- Anhand eines synthetischen Beispiels (Abbildungen VI.49, Seite 204 und VI.51) wird gezeigt, dass eine Oskulation möglicherweise im aufgezeichneten Wellenfeld auch bei idealer Datenqualität nicht erkennbar ist.

3 Fragen

Die Beispiele, in denen Oskulationen sehr eng werden werfen Fragen grundsätzlicher Natur auf. Im Grenzfall (von Sezawa und Kanai vollzogen) geht eine Oskulation in eine Entartung[1] zweier Moden über. Das heißt es existieren verschiedene Eigenfunktionen zum selben Eigenwert. Es ist bisher nicht formal untersucht worden, ob eine solche Entartung für ein realistisches, elastisches Medium überhaupt möglich ist[2]. Der von Sezawa und Kanai nachgewiesene Fall erfordert einen unendlich starren Halbraum (mit Poisson-Verhältnis 0.25), was nicht als realistisches Modell für die Erde betrachtet werden kann. Die unten angestellten Überlegungen bieten einen ersten Ansatz dafür, diese Frage dahingehend zu beantworten, dass physikalische Gründe gegen die Möglichkeit einer vollkommenen Entartung von Eigenschwingungen unterschiedlicher Eigenfunktionen sprechen.

Da die physikalischen Eigenschaften an einer Oskulation von einem Modenast auf einen anderen wechseln, ist die Natur des Phänomens für eine Interpretation der Oberflächenwellen-Dispersion interessant. Insbesondere scheint das Phänomen in den Fällen BERKHEIM und HILZINGEN (Forbriger, 2001) darauf hinzuweisen, dass Oskulationen einen Hinweis auf tiefer liegende Strukturen geben können, die von den unmittelbar beobachtbaren Oberflächenwellen nicht erfasst werden. Jedoch allein die Gefahr einer Fehlinterpretation, die sich durch eine nicht erkannte Oskulation ergibt, mag als Begründung dienen, dass eine Untersuchung des Phänomens nicht allein von akademischem Interesse ist.

Literatur

Bohlen T., Klein G., Duveneck E., Milkereit B. und Franke D., 1999. Analysis of dispersive seismic surface waves in submarine permafrost. In: *61st Conference and Technical Exhibitions, Expanded Abstracts*. EAGE.

Buchen P. und Ben-Hador R., 1996. Free-mode surface-wave computations. Geophys. J. Int., 124: 869–887.

Dahlen F.A. und Tromp J., 1998. Theoretical Global Seismology. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[1] Der Begriff Entartung, so wie er hier benutzt wird, muss etwas klarer gefasst werden: In der Literatur wird insbesondere im Zusammenhang mit „mode-splitting“ die Entartung von Eigenschwingungen bezüglich der azimutalen Ordnung m gemeint. Diese Entartung wird durch laterale Heterogenität aufgehoben, was zum Moden-Splitting führt. Moden unterschiedlicher Ordnung m aber gleicher Ordnung l (sphärische Modelle) oder Wellenzahl k (ebene Modelle), haben aber dieselbe Eigenfunktion für die Radialabhängigkeit bzw. Tiefenabhängigkeit.

Hier wird dagegen die Entartung von Moden unterschiedlicher Kugelfunktionsordnung l bzw. unterschiedlicher Wellenzahl k betrachtet. Diese haben Eigenfunktionen in r- bzw. z-Richtung, die sich voneinander unterscheiden.

[2] Persönliche Mitteilung von Peter Malischewsky.

Forbriger T., 1996. Zum Problem der Modenidentifikation in der Flachseismik. In: *Kolloquium: Seismik im Flachbereich*. Bucha/Sachsen.

Forbriger T., 2001. Inversion flachseismischer Wellenfeldspektren. Dissertation, Institut für Geophysik, Universität Stuttgart. <URL: http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2001/861>.

Kennett B.L.N., 1983. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge University Press.

Nolet G. und Dorman L.M., 1996. Waveform analysis of Scholte modes in ocean sediment layers. Geophys. J. Int., 125: 385–396.

Okal E., 1978. A physical classification of the earth's spheroidal modes. J. Phys. Earth, 26: 75–103.

Sezawa K. und Kanai K., 1935. Discontinuity in the dispersion curves of Rayleigh waves. Bull. Earthq. Res. Inst., 13: 237–244.

Woodhouse J., 1988. The calculation of eigenfrequencies and eigenfunctions of the free oscillations of the earth and the sun. In: D.J. Doornbos (Herausgeber), *Seismological Algorithms*, Academic Press, London, Kapitel IV.2, Seiten 321–370.