

# Inversion flachseismischer Wellenfeldspektren

Von der Fakultät Geo- und Biowissenschaften der Universität  
Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der  
Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung

Vorgelegt von

Thomas Forbriger

aus Esslingen am Neckar

Hauptberichter: Prof. Dr. Erhard Wielandt  
Mitberichter: PD Dr. Wolfgang Friederich

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Februar 2001

Institut für Geophysik der Universität Stuttgart

2001



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abstract</b>	<b>11</b>
<b>I Einführung in die Thematik</b>	<b>15</b>
1 Wozu Wellenfeldinversion? . . . . .	15
2 Bisherige Entwicklungen . . . . .	17
3 Wozu Inversion von Wellenfeldspektren? . . . . .	20
4 Aufgabenstellung und Gliederung der Arbeit . . . . .	22
<b>II Theoretische Konzepte</b>	<b>25</b>
1 Ausbreitung seismischer Wellen . . . . .	25
2 Das Materialgesetz . . . . .	27
2.1 Viskoelastische Materialgesetze . . . . .	29
2.1.1 Rheologische Modelle . . . . .	30
2.1.2 Allgemeine Bedingungen für $\tilde{M}$ . . . . .	33
2.1.3 Stabilitätsbedingungen . . . . .	35
2.1.4 Anwendbarkeit viskoelastischer Materialgesetze . . . . .	36
2.2 Seismische Geschwindigkeiten im isotropen Material . . . . .	37
2.2.1 Stabilitätskriterien . . . . .	38
2.2.2 Dissipation und komplexe Geschwindigkeiten . . . . .	39
2.2.3 Ein alternativer Satz von Modellparametern . . . . .	40
3 Die Lösung der Wellengleichung . . . . .	41
3.1 Eindimensionales Medium . . . . .	42
3.2 „Vector Surface Harmonics“ . . . . .	44
3.3 Elastische Potentiale . . . . .	45
3.4 Matrixverfahren . . . . .	47
3.5 Entwicklung laufender Wellen nach Besselfunktionen . . . . .	48
4 Inversionstheorie . . . . .	52
4.1 Lineare Inversion exakter Daten . . . . .	53
4.2 Iterative Least-Squares-Inversion . . . . .	54

4.2.1	Charakter der gestellten Aufgabe . . . . .	55
4.2.2	Umgang mit fehlerbehafteten Daten . . . . .	55
4.2.3	Formulierung nach Parker . . . . .	57
4.2.4	Lösung nichtlinearer Inversionsprobleme . . . . .	58
4.2.5	Stabilisierte Least-Squares-Inversion . . . . .	60
<b>III</b>	<b>Erste Stufe: Dispersionsanalyse</b>	<b>63</b>
1	Ziel der Dispersionsanalyse . . . . .	63
1.1	Motivation . . . . .	63
1.2	Aufgabenstellung . . . . .	66
2	Methoden zur Dispersionsanalyse . . . . .	66
2.1	Lineare Inversion für Zylinderwellen . . . . .	66
2.1.1	Die Wahl der Dämpfungsfunktion . . . . .	68
2.1.2	Boxcar als Dämpfungsfunktion . . . . .	71
2.2	Slant Stack . . . . .	71
2.3	Bessel-Transformation . . . . .	72
2.4	Ergänzungen . . . . .	72
3	Abbildungseigenschaften . . . . .	73
3.1	Räumliches Aliasing . . . . .	75
3.2	Die Unschärferelation und Nebenmaxima . . . . .	79
3.3	Wahl der Geophon-Abstände . . . . .	81
3.4	Rekonstruktion des Wellenfeldes . . . . .	84
4	Anatomie des $\omega, p$ -Spektrums . . . . .	85
4.1	Nutzsignale . . . . .	89
4.2	Störsignale . . . . .	90
4.2.1	Elektrische Quellen . . . . .	91
4.2.2	Seismische Quellen . . . . .	92
4.2.3	Heterogenität . . . . .	93
<b>IV</b>	<b>Zweite Stufe: Erdmodell</b>	<b>95</b>
1	Das Problem „auspacken“ . . . . .	95
1.1	Die Modellparameter . . . . .	96
1.2	Die Misfit-Funktion . . . . .	97
1.3	Die Linearisierung . . . . .	98
1.4	Die Strafterme . . . . .	99
1.4.1	Kleine Modelländerungen (Regularisierung) . . . . .	100
1.4.2	Orientierung am Referenzmodell . . . . .	100
1.4.3	A-priori-Korrelationen . . . . .	100
1.4.4	Glättung . . . . .	101
1.5	Das Least-Squares-Gleichungssystem . . . . .	102
1.6	Optimierte Berechnung der Systemmatrix . . . . .	103

2	Auflösungsanalyse . . . . .	104
2.1	Eigenwertanalyse . . . . .	105
2.2	Lineare Auflösungsanalyse nach Wielandt . . . . .	106
2.3	Singular-Value-Decomposition . . . . .	108
2.4	Resolutionsmatrix . . . . .	111
<b>V</b>	<b>Praktische Aspekte</b>	<b>115</b>
1	Behandlung der Datensätze . . . . .	115
1.1	Zusammensetzen von Einzelschüssen . . . . .	115
1.2	Impulsantwort des Mess-Systems . . . . .	116
1.2.1	Bestimmung eines „Quell-Wavelets“ . . . . .	117
1.2.2	Normierung der Daten . . . . .	117
1.3	Manipulation der $\omega, p$ -Spektren . . . . .	118
1.4	Joint-Inversion . . . . .	118
1.4.1	Gewichtung der Daten . . . . .	119
2	Behandlung der Modellparameter . . . . .	120
2.1	Anforderungen an eine Modellparametrisierung . . . . .	120
2.2	Vor- und Nachteile einer strikten Parametrisierung . . . . .	123
2.3	Die Tiefe von Diskontinuitäten als Inversionsparameter . . . . .	124
2.4	Wahl der Inversionsparameter . . . . .	125
2.5	Einschränkungen durch Ungleichungen . . . . .	125
2.6	$Q$ , pragmatisch betrachtet . . . . .	126
<b>VI</b>	<b>Datenbeispiele</b>	<b>129</b>
1	Skalierung der Abbildungen . . . . .	130
2	Vollständige Inversion . . . . .	132
2.1	Datensatz BIETIGHEIM . . . . .	132
2.1.1	Das Untersuchungsgebiet . . . . .	132
2.1.2	Experiment und Interpretation . . . . .	132
2.2	Datensatz BERKHEIM . . . . .	148
2.2.1	Das Untersuchungsgebiet . . . . .	148
2.2.2	Experiment und Interpretation . . . . .	148
2.3	Datensatz WOLFSCHLUGEN . . . . .	159
2.3.1	Das Untersuchungsgebiet . . . . .	159
2.3.2	Experiment und Interpretation . . . . .	159
3	Kleine Spektren-Galerie . . . . .	167
3.1	Beschreibung der Datensätze . . . . .	169
4	Folgen fehlerhafter Interpretation . . . . .	196
4.1	Verwechslung von Fundamentalmode und höherer Mode am Beispiel BIETIGHEIM . . . . .	196

4.2 Erklärung mehrerer Moden durch eine Dispersionskurve am Beispiel BERKHEIM . . . . .	202
<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>207</b>
<b>A Anhang</b>	<b>217</b>
1 Satz für Formelzeichen . . . . .	217
2 Definitionen . . . . .	218
2.1 Fourier-Transformation . . . . .	218
2.2 Parametrisierung nach Polynomen . . . . .	218
3 Least-Squares für komplexe Größen . . . . .	219
4 Zylinderfunktionen . . . . .	220
4.1 Beziehungen zwischen Zylinderfunktionen . . . . .	220
4.2 Symmetrien von Zylinderfunktionen . . . . .	221
4.3 Modifizierte Besselfunktionen . . . . .	221
4.4 Fernfeld-Näherungen . . . . .	221
4.5 Bessel-Transformation und Orthogonalitätsrelation . . . . .	222
4.6 Spezielle Integrale von Zylinderfunktionen . . . . .	223
5 Hilfsmittel und Werkzeuge . . . . .	224
5.1 Hardware . . . . .	224
5.2 Software . . . . .	224
<b>Danksagung</b>	<b>227</b>
<b>Literatur</b>	<b>229</b>

# Abbildungsverzeichnis

II.1	Gedämpftes Masse-Feder-Pendel . . . . .	36
III.1	Analyse eines Test-Wellenfeldes . . . . .	76
III.2	Lineare Inversion eines Test-Wellenfeldes . . . . .	77
III.3	Auflösungsfunktionen . . . . .	78
III.4	Inversion eines Test-Wellenfeldes für zufällige Geophon-Positionen	80
III.5	Auflösungsfunktion für zufällige und äquidistante Geophon- Abstände . . . . .	81
III.6	Transformation eines Test-Wellenfeldes für äquidistante Geophone	82
III.7	Slant Stack für zufällige Geophon-Distanzen . . . . .	83
III.8	Testpuls . . . . .	84
III.9	$\omega, p$ -Spektren des Testpulses . . . . .	86
III.10	Rekonstruktion des Testpulses . . . . .	87
III.11	Anatomie des Spektrums der Greenschen Funktion . . . . .	88
V.1	Der scheinbar geschichtete Halbraum . . . . .	127
VI.1	BIETIGHEIM: Seismogramm-Montage, Hammer . . . . .	136
VI.2	BIETIGHEIM: Ergebnismodell und Laufzeitkurve . . . . .	137
VI.3	BIETIGHEIM: Auflösungsanalyse . . . . .	138
VI.4	BIETIGHEIM: Überschossener Tiefenbereich . . . . .	139
VI.5	BIETIGHEIM: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	140
VI.6	BIETIGHEIM: Spektren der Greenschen Funktion . . . . .	141
VI.7	BIETIGHEIM: Rekonstruierte Seismogramme, Hammer . . . . .	142
VI.8	BIETIGHEIM: Rekonstruierte Seismogramme, S.I.S.Sy. . . . .	143
VI.9	BIETIGHEIM: Synthetische Seismogramme, Einzelkraft . . . . .	144
VI.10	BIETIGHEIM: Synthetische Seismogramme, Explosion . . . . .	145
VI.11	BIETIGHEIM: Quell-Wavelets . . . . .	146
VI.12	BIETIGHEIM: Partielle Ableitungen der Greenschen Funktion . . . . .	147
VI.13	BERKHEIM: Seismogramm-Montage . . . . .	152

VI.14	BERKHEIM: $\omega, p$ -Spektrum des Wellenfeldes . . . . .	153
VI.15	BERKHEIM: Ergebnismodell und Laufzeitkurve . . . . .	154
VI.16	BERKHEIM: Auflösungsanalyse . . . . .	155
VI.17	BERKHEIM: Rekonstruierte Seismogramme . . . . .	156
VI.18	BERKHEIM: Greensche Funktion für das Ergebnismodell . . . . .	157
VI.19	BERKHEIM: Dispersionskurven der Normalmoden des Ergebnismodell . . . . .	157
VI.20	BERKHEIM: Synthetische Seismogramme und Quell-Wavelet . . . . .	158
VI.21	WOLFSCHLUGEN: Auslage . . . . .	161
VI.22	WOLFSCHLUGEN: $\omega, p$ -Spektrum und Greensche Funktion . . . . .	162
VI.23	WOLFSCHLUGEN: Ergebnismodell und Laufzeitkurve . . . . .	163
VI.24	WOLFSCHLUGEN: Auflösungsanalyse . . . . .	164
VI.25	WOLFSCHLUGEN: Partielle Ableitungen . . . . .	165
VI.26	WOLFSCHLUGEN: Synthetische Seismogramme und Quell-Wavelet . . . . .	166
VI.27	RIEDHEIM 1996: $\omega, p$ -Spektrum . . . . .	177
VI.28	RIEDENBERG: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	178
VI.29	RIEDENBERG: Wellenformen (Hammer) . . . . .	179
VI.30	KÖRSCHTAL: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	180
VI.31	KÖRSCHTAL: $\omega, p$ -Spektren (Slant Stack) . . . . .	181
VI.32	KÖRSCHTAL: $\omega, p$ -Spektren (Noise) . . . . .	182
VI.33	RIEDHEIM 1997: $\omega, p$ -Spektrum . . . . .	183
VI.34	WATTERDINGEN: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	184
VI.35	HENGERSBERG: $\omega, p$ -Spektrum . . . . .	185
VI.36	HILZINGEN: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	186
VI.37	HILZINGEN: Inversionsergebnis und Greensche Funktion . . . . .	187
VI.38	GÜLTSTEIN: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	188
VI.39	GÜLTSTEIN: $\omega, p$ -Spektren, Querprofil . . . . .	189
VI.40	LERCHENBERG: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	190
VI.41	BÄRWALDE: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	191
VI.42	BÄRWALDE: Auflösungsanalyse . . . . .	192
VI.43	LAPTEV-SEE: Geführte Wellen (35m Wassertiefe) . . . . .	193
VI.44	LAPTEV-SEE: $\omega, p$ -Spektren (35m Wassertiefe) . . . . .	194
VI.45	LAPTEV-SEE: Scholte-Moden (18m Wassertiefe) . . . . .	195
VI.46	Fehlinterpretation BIETIGHEIM: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	198
VI.47	Fehlinterpretation BIETIGHEIM: Erdmodell und Laufzeitkurve . . . . .	200
VI.48	Fehlinterpretation BIETIGHEIM: Poisson-Verhältnis . . . . .	201
VI.49	Fehlinterpretation BERKHEIM: $\omega, p$ -Spektren . . . . .	204
VI.50	Fehlinterpretation BERKHEIM: Erdmodell und Laufzeitkurven . . . . .	205
VI.51	Fehlinterpretation BERKHEIM: Dispersionskurven der Normalmoden . . . . .	206



# Tabellenverzeichnis

II.1	Rheologisches Element: Elastizität . . . . .	30
II.2	Rheologisches Element: Dynamische Viskosität . . . . .	30
II.3	Rheologischer Körper: Maxwell . . . . .	31
II.4	Rheologischer Körper: Kelvin-Voigt . . . . .	31
II.5	Rheologischer Körper: Standard-Linear-Solid (SLS) . . . . .	32
VI.1	BIETIGHEIM: Inversionsergebnis . . . . .	137
VI.2	BERKHEIM: Inversionsergebnis . . . . .	151
VI.3	WOLFSCHLUGEN: Inversionsergebnis . . . . .	160
VI.4	Fehlinterpretation BIETIGHEIM: Erdmodell . . . . .	199
VI.5	Fehlinterpretation BERKHEIM: Erdmodell . . . . .	205



# Abstract

A new method to infer structural earth models from seismic wavefields is presented. The phase-slowness and frequency spectrum of the wavefield, together with the p-wave arrival times, are inverted jointly for a 1D model of s-wave and p-wave velocities and the depth of bedrock. The inversion may provide some inference on attenuative properties varying with depth. The depth range covered by the method is typically 10m for wavefields in the frequency range from 10Hz to 100Hz and geophone spreads of 50m to 100m length.

Data acquisition, in its simplest form, requires a hammer source and multi-channel recording with vertical geophones. However, horizontal component data and wavefields excited by other source types may complement the dataset and improve the results. The method requires no a priori information about the investigated site. It is designed to be robust when dealing with the extreme wavefield properties met in unconsolidated sediments. Particularly, it avoids some severe weaknesses of conventional methods that interpret surface-wave data in terms of a single (fundamental) normal mode and calculate dispersion curves from phase differences between two receivers. The method has been successfully applied to sites covered with a pavement or compacted gravel, which are strong low-velocity-channel situations.

To the best of my knowledge, this is the first successful approach to quantitative modelling of complete seismograms recorded in shallow seismic experiments.

The inversion of surface waves can reveal the s-wave velocity and the properties of otherwise hidden layers, that cannot be observed as easily with standard body-wave methods. Some promising features are the outstanding signal to noise ratio of surface waves, the direct access to  $v_s$  with a standard hammer source and vertical geophones and the extreme sensitivity of surface waves to shallow features of the investigated site.

Previous methods of using surface waves for shallow seismic investigation have adopted techniques from upper mantle studies of signals from earthquake

sources. These are characterized by the availability of only a limited number of seismometer stations that may be spaced unfavourably. They require the separation of the fundamental mode from other wavefields in the time domain, which is possible for long-period global wavetrains at appropriate epicentral distances. They neglect the great advantage of being able to place a large number of receivers at arbitrary positions in shallow seismic investigations. They also neglect the fact that different overtones in the shallow wavefield may not be separated in the time domain.

The majority of datasets I show in this thesis consist of two (or even more) distinct surface wave modes. The field examples document that higher modes may even dominate the amplitude of shallow wavefields. In low-velocity-channel situations it is essential to distinguish between several excited modes in order to obtain reliable results. Conventional techniques, such as SASW ("spectral analysis of surface waves") that uses only a fundamental mode dispersion curve, are shown to give misleading results.

The most attractive way to overcome these limitations is the inversion of the complete wavefield through modelling with synthetic data. This also has the potential to extract the information available from all features of the data, including leaky modes and guided waves. Due to the computational power of modern desktop computers this approach is now feasible.

I propose a two-stage inversion. The first stage inverts the waveforms to a frequency and phase-slowness spectrum of the wavefield (equivalent to an  $f$ - $k$  spectrum). This may be done by linear inversion or a Fourier-Hankel transform. Both may be applied to the near-field of the source. The spectrum should reproduce the recorded waveforms and interpolate them reasonably between receivers through a Fourier-Bessel expansion. This kind of expansion is the key element of the classical ansatz for solving the elastic wave equation in plane 1D media. The second stage seeks an earth model by means of an iterative least-squares scheme and joint inversion of the spectrum and the  $p$ -wave arrival times. The spectrum has to be matched by the coefficients of a Green's function calculated from the earth model. The reason for adding explicit  $p$ -wave arrival times is that refracted wave onsets are more likely to be hidden by noise in the wavefield spectrum than in the seismograms. They contain unique information but are of very small amplitude.

The two-stage approach has several advantages. Inversion through an iterative least-squares scheme requires the forward modelling to be linearized. Calculating synthetic waveforms from the spectrum would introduce extra harmonic functions for time dependency and cylindrical functions for offset dependency. Their oscillating nature introduces additional extrema at which linearization performs worst. Hence, using the spectrum is superior to using waveforms in a linearized approach. Besides, a misfit function defined to compare two oscillatory functions

has local minima at every  $2\pi$  phase shift. Furthermore, to obtain accurate waveforms from the evaluation of Fourier-Bessel expansion integrals requires more coefficients of Green's function to be calculated, than are needed to explain the full amount of information in the data by comparing spectra. Thus computation times may be reduced by a factor of ten or more compared to waveform inversion. Last but not least: While multiple modes typically interfere in the waveforms, they may be clearly separated in the spectrum. This facilitates the construction of an initial model, which still must be done by trial and error.

Successful inversions of field-datasets are presented including a low-velocity-channel situation. Experience shows that  $v_p$  and  $v_s$  may be well resolved to 10m depth by shallow surface waves in the frequency range from 10Hz to 100Hz. Single-mode inversions require a priori knowledge of  $v_p$ . For each of the resulting models a local resolution analysis gives a valuable measure for the reliability of media properties inferred from the data. In some cases the surface wave modes exhibit comparable sensitivities for  $v_p$  and  $v_s$ . This is neglected by many studies in the literature, where assumed values for  $v_p$  or Poisson's ratio are used for forward modelling. An example of a higher mode that is more sensitive to  $v_s$  than the fundamental mode is also given.

Several field datasets demonstrate the typical multi-mode character of shallow wavefields. The examples show a broad range of seismic parameters which is typical for shallow wavefields that scan the transition from unconsolidated sediments to bedrock. The observed values include phase velocities down to 70m/s and Poisson-ratios that cover the full range of reasonable values from 0.15 to 0.48. Fundamental mode wavelengths cover the range from 1m to 60m. Hence most receivers may lie in the near-field. Velocity-contrasts at discontinuities in resulting earth models may reach a factor of 5 for  $v_p$  and 10 for  $v_s$  respectively.

The material parameters of unconsolidated sediments may vary strongly but continuously with depth. The models are represented either by a stack of many thin layers or by a set of continuous functions. While the former allows larger model variability and closer fits to the data, the latter reduces the number of free inversion parameters and helps to keep computation times manageable.

The datasets show remarkable intrinsic attenuation with  $Q$  possibly below 10. Investigations published by other authors show frequency dependent viscoelastic properties of sediments in the seismic frequency range around 100Hz. However, it is not possible to infer full viscoelastic models from the proposed inversion scheme. This is due to frequency dependency of phase velocities being used to determine the depth dependency of material properties. Nevertheless, the inversion results have to be constrained to lie within the reasonable range of  $1.5 < \frac{v_p}{v_s} < 10$  or  $0.1 < \nu < 0.49$  for Poisson's ratio, respectively. The complex valued bulk modulus and shear modulus, calculated from  $v_p$ ,  $v_s$ ,  $Q_p$ , and  $Q_s$ ,

must have positive real parts and negative imaginary parts<sup>1</sup> at all frequencies to be physically feasible.

With two numerical investigations I demonstrate contradictions that may arise from fitting a fundamental mode dispersion curve to a multimode dataset, as it is done by conventional methods. When using the p-wave travel-time curve in a joint inversion or when working on a low-velocity-channel situation with data of sufficient frequency content, a carefully performed study should run into unresolvable contradictions. The data can not be fitted with model parameters that are physically feasible. However, in situations of normal layering (seismic velocity increases with depth) and without using p-wave travel-time information the violation of the assumption, that the wavefield consists only of one mode, may remain unnoticed. Therefore, a full wavefield inversion is strongly recommended in most cases.

Although the inversion results were derived from wavefield spectra, the rms of the difference between measured waveforms and synthetic seismograms calculated from the resulting models is typically reduced to half the rms of the data. Thus, the models derived from the inversion of wavefield spectra are suitable to be used as initial models for further studies of shallow seismic waveform properties. Particularly, this may include modelling of true amplitude and full waveform body waves as well as scattered waves in laterally heterogeneous media. The method is directly applicable in all cases where shear-wave properties of laterally mostly homogeneous media are of interest. The results may provide static corrections for large-scale reflection seismic surveys. The large amount of publications on conventional SASW studies in civil engineering literature expresses a desire for such methods in technical site investigation applications. In most situations, at least on sites covered by hard surfaces like pavements or frozen sediments, the full wavefield inversion will definitely be superior to conventional dispersion-curve inversion.

---

<sup>1</sup>Notice that the sign of the imaginary part depends on the definition of the Fourier transform pair given in the appendix.

# Kapitel I

## Einführung in die Thematik

Es scheint ein erstrebenswertes und wohl erreichbares Ziel der experimentellen Seismik, jede Zacke, jede Welle der Seismogramme zu erklären und für die Entwirrung der Beschaffenheit der Erdrinde dienstbar zu machen. (Wiechert, 1926)

### 1 Wozu Wellenfeldinversion?

Die klassischen Verfahren der seismischen Erkundung, die Refraktionsseismik und die Reflexionsseismik, nutzen lediglich den hochfrequenten Anteil des seismischen Wellenfeldes, die *Raumwellen*. Diese werden im Sinne einer Strahlen-Näherung geometrisch interpretiert. Die Raumwellen, insbesondere die refraktierten Wellen, sind der Amplituden-schwächste Teil des Wellenfeldes. Die *Oberflächenwellen*<sup>1</sup>, die als resonante Wellenausbreitung verstanden werden können, haben eine wesentlich größere Amplitude und damit auch ein besseres Signal/Stör-Verhältnis. Im Sinne der Raumwellen-Verfahren werden sie als Störsignale aufgefasst. Der Aufwand, der betrieben wird, um sie zu unterdrücken (Knuist, 1995), beweist bereits, wie leicht Oberflächenwellen mit großen Amplituden angeregt werden können.

Einige Eigenschaften der Raumwellen-Verfahren limitieren diese in ihrer Aussagekraft. Bei refraktionsseismischen Interpretationen ergibt sich beispielsweise

---

<sup>1</sup>Im Sprachgebrauch der regionalen Seismologie wird als „Oberflächenwelle“ häufig nur die Fundamentalmode bezeichnet. In flachseismischen Wellenfeldern lassen sich die einzelnen Moden im Zeitbereich nicht trennen, wohl aber nach der Dispersionsanalyse (Kapitel VI). Mit dem Begriff „Oberflächenwellen“ bezeichne ich in der vorliegenden Arbeit den Amplituden-starken, dispergierten Teil des Wellenfeldes, der nicht durch geometrische Überlegungen interpretiert werden kann und der mit der Fundamentalmode abschließt.

das Problem der „überschossenen Schichten“ (Abb. VI.4, S. 139). Im Gegensatz dazu kann aus den Oberflächenwellen sogar Information über Medien gewonnen werden, die einen Niedrig-Geschwindigkeits-Kanal enthalten (Abschnitt VI.2.2, S. 148). Solche Medien werden bei der Untersuchung von Straßen-Fundamenten oder oberflächennah gefrorener Lockersedimente angetroffen.

Werden Oberflächenwellen in die Auswertung seismischer Wellenfelder einbezogen, kann dies nicht nur die Aussagekraft der Interpretation vergrößern, sondern auch ganz neue Aspekte erschließen: Eine wesentliche Eigenschaft von Oberflächenwellen ist ihre große Empfindlichkeit für die Scherfestigkeit des Mediums. Diese Größe ist für viele technische Fragestellungen im Flachbereich von wesentlich größerer Bedeutung als die Kompressibilität<sup>2</sup>. Die Scherwellen-Geschwindigkeit ist außerdem charakteristischer für die Eigenschaften des Substrats, da die Kompressionswellen-Geschwindigkeit, besonders in Lockersedimenten, stark durch die Wassersättigung beeinflusst wird.

Dabei lässt sich die Aufzeichnung von Rayleigh-Wellen in einfacher Hammerschlag-Seismik mit Vertikal-Geophonen bewerkstelligen. Der Aufwand ist mit der Refraktionsseismik vergleichbar. Beide Verfahren lassen sich in der Regel leicht in einer Messung kombinieren. Die quantitative Auswertung der Oberflächenwellen erfordert allerdings einen wesentlich größeren numerischen Aufwand. Werden dabei gleichzeitig mehrere Moden oder zusätzlich die Laufzeitkurve der refraktierten Kompressionswelle invertiert, kann mit einem einzigen Verfahren direkt das Poisson-Verhältnis bestimmt werden, ein wichtiger lithologischer Parameter.

Die extreme Empfindlichkeit der Oberflächenwellen für die seismischen Geschwindigkeiten in kleinen Tiefen machen sie zu einem idealen Werkzeug für die Bestimmung statischer Korrekturen sowohl für die Reflexionsseismik, wie auch die Refraktionsseismik.

Die Lokalisierung lateraler, steil stehender Diskontinuitäten ist mit Oberflächenwellen aufgrund ihrer horizontal gerichteten Ausbreitung in vielen Fällen einfacher als mit Raumwellen-Verfahren (Hsieh, 1979; Stange, 1992; Schneider, 1993; Misiak, 1996; Dombrowski, 1996).

An dieser Stelle muss rechtzeitig darauf hingewiesen werden, dass eine Interpretation der Oberflächenwellen die Raumwellen-Verfahren keinesfalls ersetzen kann. Die aus den unterschiedlichen Verfahren gewonnenen Informationen sind in weiten Teilen komplementär. Erst durch die sinnvolle Kombination mehrerer Aspekte kann das Potential einer seismischen Erkundung voll erschlossen werden. Daher ist es erstrebenswert, im Wiechertschen Sinne das volle Wellenfeld zu interpretieren. In der vorliegenden Arbeit stelle ich ein robustes Verfahren vor, mit

---

<sup>2</sup>Ein Beispiel für eine technisch relevante Fragestellung schildere ich im Zusammenhang mit dem Datensatz BÄRWALDE auf Seite 175.



dem in einer gemeinsamen Inversion sowohl die Laufzeitkurve der Ersteinsätze, wie auch der dispergierte Teil des Wellenfeldes, die Oberflächenwellen, interpretiert werden.

## 2 Bisherige Entwicklungen

Eine vollständige Bibliographie der Arbeiten zur Ausbreitung seismischer Oberflächenwellen, und sei es nur des Teilbereichs „Flachseismik“, würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit bei weitem sprengen. Trotzdem möchte ich wenigstens versuchen, die Entwicklung zu skizzieren, an welche diese Arbeit anschließt.

Rayleigh (1885) und Love (1903), die Namensgeber der Rayleigh- und der Love-Wellen, legten vor gut hundert Jahren das Fundament zum theoretischen Verständnis von elastischen Grenzschichtwellen. Von Lamb (Lamb, 1904) wurde das erste *synthetische Seismogramm* veröffentlicht. Die von ihm mit den damals zur Verfügung stehenden Mitteln geschätzten Wellenformen decken sich verblüffend gut mit den heute problemlos auf Computern berechneten Lösungen (Forbriger, 1996a). Sezawa und Kanai untersuchten erstmals Rayleigh-Wellen in heterogenen seismischen Medien sowohl in regionaler Größenordnung (Sezawa, 1935) als auch im Hinblick auf Anwendungen im Flachbereich (Sezawa und Kanai, 1935a). Bemerkenswert ist, dass in den 30er-Jahren offenbar noch keine klare Vorstellung von der Lösungsmenge des Rayleigh-Eigenwertproblems bestand. Eine von Sezawa und Kanai (1935b) *entdeckte* höhere Mode wurde bis in die 50er-Jahre als „Sezawa-Mode“ bezeichnet.

Ebenfalls in den 30er-Jahren wurde in Zusammenarbeit der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo) und des Instituts für Geophysik in Göttingen unter der Leitung von Gustav Heinrich Angenheister umfangreiche experimentelle Arbeiten zum Einsatz von seismischen Oberflächenwellen bei der Baugrunduntersuchung durchgeführt (Köhler, 1935; Köhler und Ramspeck, 1936). Die Theorie des Rayleigh-Problems war den Autoren durchaus bekannt, es werden auch Vergleiche mit synthetischen Dispersionskurven angestellt. Die starken Idealisierungen, die für eine theoretische Behandlung des Problems mit damaligen Mitteln gemacht werden mussten, führten aber mehrfach zu sehr spekulativen Formulierungen bei der Interpretation der Beobachtungen, wie etwa: „Ob die Vorstellung des Tiefergreifens längerer Wellen, die der Erdbebenseismik entlehnt ist, auf die Untersuchung der oberflächennahen Schichten anwendbar ist, ist noch nicht bewiesen. In Ermangelung einer wirklich befriedigenden Erklärung für den Zusammenhang zwischen Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit wollen wir ihr aber zunächst folgen“ (Köhler und Ramspeck, 1936, Teil B, Abschnitt c).

An die Göttinger Arbeiten wurde in den 50er-Jahren am Institut für Angewandte Geophysik in München unter der Leitung von Gustav Angenheister, dem Sohn von Gustav Heinrich Angenheister, angeknüpft (Förtsch, 1953; Korschunow, 1955; Giese, 1957). In diesem Zeitraum wurden auch von Müller (1957) in Stuttgart Arbeiten zu flachseismischen Oberflächenwellen durchgeführt. Bornmann (1959) erstellte eine umfangreiche Übersicht des damaligen Standes der Baugrundeis- mik.

Ebenfalls in den 50er-Jahren legten Thomson (1950) und Haskell (1953) die Grundlage für das später nach ihnen benannte Verfahren zur Berechnung synthetischer Dispersionskurven in geschichteten Medien. Buchen und Ben-Hador (1996) veröffentlichten einen sehr informativen Review-Artikel über die später auf Grundlage des Thomson-Haskell-Algorithmus entwickelten numerischen Verfahren.

In Hinsicht auf die publizierten Arbeiten scheint es, als habe die Geophysik in den Jahren nach 1960 die flachseismische Anwendung von Oberflächenwellen aus den Augen verloren. Es wurde jedoch eine Fülle von Arbeiten zur Untersuchung des oberen Krustenbereichs bis zu Untersuchungen des Erdkerns mittels Eigenschwingungen publiziert. Exemplarisch nenne ich die Review-Artikel von Oliver (1962), von Seidl und Müller (1977) sowie von Kovach (1978). Okal (1978) wies darauf hin, dass Moden, die rein formal demselben Oberton zugeordnet werden, physikalisch völlig unterschiedliche Eigenschaften haben können (Forbriger, 1996b, sowie Abschnitt VI.4.2, S. 202 in der vorliegenden Arbeit). Auch der Theorie und numerischen Berechnung von Eigenschwingungen (Takeuchi et al., 1964; Takeuchi und Saito, 1972; Gilbert, 1980) und vollständigen Wellenfeldern (Fuchs und Müller, 1971; Kennett und Kerry, 1979; Müller, 1985; Friederich und Dalkolmo, 1995), sowie der numerischen Dispersionsanalyse von Messdaten (Dziewonski et al., 1969; Dziewonski und Hales, 1972) wurden wesentliche Arbeiten hinzugefügt. In den 70er-Jahren wurden erste Bemühungen zur theoretischen Behandlung von Oberflächenwellen in lateral heterogenen Medien unternommen (Woodhouse, 1974; Malischewsky, 1976; Snieder, 1986). Diese trugen später zur erfolgreichen Erstellung von regionalen Strukturmodellen bei (Snieder, 1988a,b; Nolet, 1990; Meier et al., 1997; Friederich, 1998, 1999).

In der Zeit nach 1960 wurde die Idee der Auswertung flachseismischer Oberflächenwellen von Geotechnikern weiter verfolgt. Jones (1958; 1962) publizierte bereits in den 60er-Jahren geotechnische Arbeiten, bei denen seismische Oberflächenwellen eingesetzt wurden. Die Arbeiten von Stokoe und Nazarian (1983) und Nazarian (1984) lösten einen Boom geotechnischer Arbeiten zur sogenannten SASW-Methode (Spectral-Analysis-of-Surface-Waves) aus. In einer von Hiltunen und Gucunski erstellten Bibliographie<sup>3</sup> zu SASW sind 41 Arbeiten aus den

<sup>3</sup>Persönliche Mitteilung von Christian Oelsner (TU Bergakademie Freiberg).

Jahren 1982 bis 1993 verzeichnet. Allein 27 der Arbeiten erschienen in den Jahren 1988 bis 1992. 20 der Arbeiten befassen sich mit der Untersuchung von Straßen-Belägen mit Hilfe von seismischen Oberflächenwellen. Methodisch fügen die meisten Arbeiten nichts wesentlich Neues hinzu.

Die Methodik wird weitgehend aus den Arbeiten der globalen Seismologie entlehnt. Das Wellenfeld wird als unimodal und die Struktur als lateral homogen angenommen. In der Regel wird das Wellenfeld mit zwei Geophonen aufgezeichnet. Häufig wird bereits bei der Messung mit einem Spektralanalysator ein Phasenspektrum bestimmt. Aus den Frequenz-abhängigen Phasendifferenzen zwischen den Signalen der beiden Geophone wird dann *eine* Dispersionskurve bestimmt (Matthews et al., 1996). Ganji et al. (1997) setzen dieses Verfahren bei der Untersuchung lateraler Heterogenitäten ein.

Die Dispersionskurve wird bei der Inversion durch die mit dem Thomson-Haskell-Algorithmus berechnete Grundmode der Eigenschwingungen des Mediums angepasst. Für die Kompressionswellen-Geschwindigkeit und die Dichte, die auch in die Berechnung einfließen, werden in der Regel empirische Werte eingesetzt. Yuan und Nazarian (1993) beanspruchen für sich, dazu erstmals ein iteratives Least-Squares-Verfahren zu benutzen.

Obwohl sich viele der geotechnischen Arbeiten mit der Untersuchung von Straßen-Belägen beschäftigen, weisen nur Gucunski und Wood (1991) sowie Tokimatsu et al. (1992b) auf den Effekt hin, den die Überlagerung höherer Moden auf die Phasendifferenz-Methode haben muss. Sie schlagen vor, für die Inversion numerisch eine scheinbare Dispersionskurve über ein gewichtetes Mittel der Normalmoden zu bestimmen. Als Gewichte dienen dabei die ebenfalls numerisch bestimmten Anregungskoeffizienten.

Gabriels et al. (1987) invertierten ein im Wattenmeer aufgezeichnetes Wellenfeld. Die Dispersionskurven von sechs Moden wurden aus einem f,k-Spektrum (McMechan und Yedlin, 1981) abgelesen und mit Normalmoden des Mediums identifiziert.

Erst in den 90er-Jahren wurden wieder vermehrt geophysikalische Arbeiten zu flachseismischen Oberflächenwellen durchgeführt. Ziel war jetzt häufiger die Abbildung lateraler Strukturen (Schneider, 1993; Dombrowski, 1996; Misiek, 1996; von Hartmann, 1997), wobei die Verfahren in der Mehrzahl nur auf der Inversion einer Normalmode beruhen. Schalkwijk (1996) beschreibt dabei Komplikationen aufgrund der Interferenz mehrerer Moden. Roth et al. (Roth et al., 1998) untersuchten geführte Wellen, die bei reflexionsseismischen Messungen auftrafen. Bohlen et al. (1999) und Klein et al. (2000) untersuchen Sedimente im marinen Flachwasser. Park et al. (1999) benutzen mehrkanalige Aufzeichnungen eines Sweep-Signals. Sie bestimmen eine Dispersionskurve über die Phasengeschwindigkeit von Nulldurchgängen der Seismogramme, welche sie aus der

Seismogramm-Montage ablesen. Xia et al. (1999) beschreiben eine stabilisierte Least-Squares-Inversion der Dispersionskurve einer Fundamentalmode. Miller et al. (1999) wenden diese beiden Verfahren auf ein flachseismisches Untersuchungsgebiet an und zeigen pseudo 2D-Schnitte, die aus mehreren eng nebeneinander liegenden 1D-Modellen erstellt wurden. Von mir wurden erste Versuche unternommen, flachseismische Wellenformen zu modellieren (Forbriger, 1996a). Diese wurden von Reimann (1999) fortgesetzt, wobei ihm Startmodelle zur Verfügung standen, die mit der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Methode bestimmt wurden. Teshler (1999) stellt einen Algorithmus zur Berechnung partieller Ableitungen für die Wellenfeldinversion vor.

### 3 Wozu Inversion von Wellenfeldspektren?

Die meisten der oben zitierten Autoren invertieren die Oberflächenwellen durch eine Anpassung von Dispersionskurven der Normalmoden. Für die Mehrzahl der im Rahmen dieser Arbeit aufgezeichneten Datensätze (Kapitel VI, S. 129) ist eine Inversion der Oberflächenwellen durch Anpassung von Normalmoden nicht möglich oder zumindest heikel. Die Gründe dafür, die ich in den folgenden Absätzen skizziere, legen eine Inversion des vollständigen Wellenfeldes nahe. Gegenüber einer Inversion der Seismogramme, erweist sich eine Anpassung der Wellenfeldspektren als überlegen.

Flachseismische Wellenfelder enthalten typischerweise auswertbare Signale im Frequenzbereich 5Hz bis 100Hz. Diese sind sensitiv für die Materialeigenschaften in den obersten 10m unter der Geländeoberfläche. Dieser Bereich wird meistens durch Lockersedimente gebildet und enthält häufig einen Übergang zu anstehendem Gestein. Dementsprechend nehmen die angetroffenen seismischen Parameter einen großen Wertebereich ein (Abschnitt VI.3, S. 167). Die Vorinformationen sind in der Regel zu vage, um ein verlässliches Startmodell für eine Inversion zu bilden. Dieses muss zunächst durch „Versuch und Irrtum“ gefunden werden.

Die Mehrzahl der untersuchten Datensätze enthält mehr als eine Mode der Oberflächenwellen. Die Moden können jedoch nicht im Zeitbereich getrennt werden. Dazu ist die Dispersion im Offsetbereich der flachseismischen Messung noch nicht weit genug vorangeschritten. Typischerweise liegen die größten Wellenlängen in der Größenordnung der Auslage. Eine Dispersionsanalyse durch die Bestimmung von Phasendifferenzen, wie sie für die geotechnische SASW-Methode üblich ist (Matthews et al., 1996), muss aufgrund der Interferenz mehrere Moden scheitern (Abschnitte VI.4.1, S. 196 und VI.4.2, S. 202).

Dispersionskurven können aus einem  $f,k$ -Spektrum abgelesen werden, wie von Gabriels et al. (1987) durchgeführt. Nicht alle Moden, nicht einmal die Funda-

mentalmode, müssen im ganzen Frequenzband in der Vertikalkomponente an der Oberfläche angeregt und beobachtbar sein. Daher kann die Zuordnung zu Normalmoden des Mediums scheitern. Darauf wurde von mir bereits an anderer Stelle hingewiesen (Forbriger, 1996a,b). In dieser Arbeit gibt unter anderem der Datensatz HILZINGEN ein Beispiel für eine solche Situation (Abb. VI.36, S. 186 und Text S. 172). In jedem Fall müssten die Anregungskoeffizienten der synthetisch berechneten Normalmoden bei der Inversion von Dispersionskurven berücksichtigt werden.

Für die Inversion müssen dann die Dispersionskurven mehrerer Obertöne der Normalmoden numerisch berechnet werden. Die Nullstellen der Rayleigh-Determinante liegen möglicherweise so nahe beieinander, dass die Suche spezieller Algorithmen bedarf, damit keine Mode übersehen wird (Abschnitt VI.4.2, S. 202).

Flachseismische Wellenfelder können aber auch starke Anteile von Nicht-Normalmoden enthalten. Abb. III.11 (S. 88) zeigt die Greensche Funktion eines synthetischen Beispiels. Dort lassen sich verlustbehaftete Moden aufgrund des bekannten, zugrunde liegenden Modells identifizieren. Aber auch die von Roth et al. (1998) untersuchten geführten Wellen gehören nicht zu den Normalmoden des Mediums. Von mir wurden an anderer Stelle Beispiele in einem Datensatz der Modellseismik gezeigt (Forbriger, 1996a).

Besonders elegant wäre die unmittelbare Anpassung der gemessenen Wellenformen durch numerisch berechnete Seismogramme. Die Zerlegung des Wellenfeldes in Normalmoden würde entfallen. Das berechnete Signal gäbe nur die tatsächlich an der Oberfläche beobachtbare Bewegung des Mediums wieder. Die zuverlässige Berechnung synthetischer Seismogramme und ihrer partiellen Ableitungen für variierende Modelle in einer automatischen Inversion erfordert viel Rechenzeit (Reimann, 1999). Dazu müssen wesentlich mehr Koeffizienten der Greenschen Funktion berechnet werden, als dem Informationsgehalt der gemessenen Seismogramme entspräche. Außerdem führt der stark nichtlineare Zusammenhang zwischen Modellparametern und oszillierenden Wellenformen zu Nebenminima des Misfits und Komplikationen bei der Linearisierung des Vorwärtsproblems. Da bei flachseismischen Fragestellungen in der Regel ein verlässliches Vorab-Startmodell oder Referenzmodell fehlt, ist die direkte Inversion von Wellenformen kaum handhabbar. Auf diese Aspekte gehe ich in Abschnitt III.1 (S. 63) näher ein.

Aufgrund der angestellten Überlegungen und der aufgezeichneten Datensätze schlage ich eine Inversion von Wellenfeldspektren vor. Dieses Verfahren macht sich die, für die Lösung der elastischen Wellengleichung in eindimensionalen Medien übliche, Entwicklung nach Zylinderfunktionen zu Nutze (Abschnitt II.3, S. 41). In einer ersten Stufe der Inversion werden Koeffizienten für diese Entwicklung be-

stimmt, die das aufgezeichnete Wellenfeld reproduzieren (z.B. Abb. VI.8, S. 143). Dies geschieht als einfache lineare Inversion oder als Transformation in einem Schritt (Abschnitt III.2, S. 66). Diese Koeffizienten bilden ein Spektrum des Wellenfeldes. Das Spektrum enthält die volle Information aus den Seismogrammen, inklusive Nicht-Normalmoden. In einer zweiten Stufe wird aus dem Spektrum durch eine iterative Least-Squares-Inversion ein Erdmodell bestimmt (Kapitel IV, S. 95). Abschließend können synthetische Wellenformen für das Ergebnismodell berechnet und mit den gemessenen Seismogrammen verglichen werden (z.B. Abb. VI.9, S. 144).

Die erste Stufe der Inversion ist eine Dispersionsanalyse. Diese setzt eine einheitliche Phasenbeziehung der Wellen innerhalb des untersuchten Profils voraus. Damit ist das Verfahren auf die Untersuchung lateral homogener Medien festgelegt. Die Spektren für den Datensatz GÜLTSTEIN zeigen jedoch, dass die Methode auch bei mäßiger Heterogenität einsetzbar ist (Abb. VI.38, S. 188). Es können dann eindimensionale Modelle erstellt werden, die als Startmodelle für eine mehrdimensionale Inversion der Wellenformen dienen (Friederich, 1999).

## **4 Aufgabenstellung und Gliederung der Arbeit**

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein unter flachseismischen Gegebenheiten robustes Inversionsverfahren zu entwickeln. In einfacher Hammerschlag-Seismik mit Vertikal-Geophonen aufgezeichnete Datensätze sollen zu einem Strukturmodell invertiert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass das Medium annähernd lateral homogen ist. Durch eine kombinierte Inversion der Ersteinträge und der dispergierten Oberflächenwellen sollen unabhängige Werte für die Kompressionswellen- und die Scherwellen-Geschwindigkeit ermittelt werden.

### **Kapitel II, Theoretische Konzepte**

In flachseismischen Medien, insbesondere in Lockersedimenten tritt typischerweise starke intrinsische Dämpfung auf. Diese kann bei der Inversion nicht vernachlässigt werden. Außerdem ist der Wertebereich der angetroffenen seismischen Geschwindigkeiten, wie auch des Poisson-Verhältnisses sehr groß (Abschnitt VI.3, S. 167). Sind diese Parameter durch die Daten nur schwach eingeschränkt, so können sie in der Inversion physikalisch unsinnige Werte annehmen. Dieses Kapitel beginne ich daher mit einer kurzen Behandlung viskoelastischer Materialgesetze, die mit einer Definition sinnvoller Wertebereiche für die seismischen Parameter abschließt.

Die in dieser Arbeit entwickelte Inversion von Wellenfeldspektren beruht auf der für eindimensionale Medien üblichen Entwicklung des Wellenfeldes nach Zylinder-

funktionen. Die Verfahren zur Lösung der elastischen Wellengleichung, die diese Entwicklung benutzen, beschreibe ich kurz und weise auf ihre, für die Inversion relevanten, Eigenarten hin.

Das Kapitel wird abgeschlossen durch eine Darstellung grundlegender Gedanken zur Inversion geophysikalischer Daten, wie sie in den nachfolgenden Kapiteln für flachseismische Wellenfelder entwickelt wird.

### **Kapitel III, Dispersionsanalyse**

Die Inversion erfolgt in zwei Stufen. Die Motivation für diese Aufteilung erläutere ich in Abschnitt III.1 (S. 63).

In der ersten Stufe werden für die aufgezeichneten Seismogramme Koeffizienten für eine Entwicklung nach Zylinderfunktionen im Raum und harmonischen Funktionen in der Zeit gesucht. Diesen Schritt bezeichne ich als „Dispersionsanalyse“. Die Abbildungseigenschaften der dargestellten Verfahren sowie die wichtigsten Quellen von Störsignalen und ihre Auswirkung werden näher beschrieben.

### **Kapitel IV, Erdmodell**

In der zweiten Stufe der Inversion wird ein Erdmodell bestimmt. Das Wellenfeldspektrum und die Ankunftszeiten von Raumwellen werden gemeinsam invertiert. Dazu werden die zuvor berechneten Entwicklungskoeffizienten durch die entsprechenden Koeffizienten der Greenschen Funktion des Mediums in einer iterativen Least-Squares-Inversion angepasst.

Ich beschreibe sowohl die Elemente der Inversion speziell in Hinsicht auf die flachseismische Fragestellung als auch verschiedene lokale Auflösungsanalysen für das Ergebnismodell.

### **Kapitel V, Praktische Aspekte**

Über das in den vorangegangenen Kapiteln Beschriebene hinaus, werden hier verschiedene praktische Aspekte diskutiert, die zu einer erfolgreichen Inversion flachseismischer Feld-Daten beitragen können.

### **Kapitel VI, Datenbeispiele**

In diesem Kapitel stelle ich vollständige Inversionen mit Auflösungsanalyse für drei ausgewählte Feld-Datensätze vor. Außerdem werden die Wellenfeldspektren weiterer elf Datensätze dargestellt und ihre spezifischen Eigenarten diskutiert. Damit möchte ich einen Überblick über die Bandbreite der seismischen Parameter in flachen Medien geben. Die Mehrzahl der dargestellten Datensätze weist

mehr als eine Mode auf. Die Moden lassen sich außerdem häufig nicht eindeutig Normalmoden des Mediums zuordnen. Genau diese Beobachtung war der Anlass zur Entwicklung der Inversion von Wellenfeldspektren als Alternative zur Anpassung von Dispersionskurven.

Anhand zweier exemplarischer Datensätze skizziere ich in den Abschnitten VI.4.1 (S. 196) und VI.4.2 (S. 202) mögliche Auswirkungen einer fehlerhaften Inversion der scheinbaren Fundamentalmode nach dem Konzept der SASW-Methode.



# Kapitel II

## Theoretische Konzepte

### 1 Physikalische Beschreibung der Ausbreitung seismischer Wellen

Für eine eingehende mathematische Behandlung der seismischen Wellenausbreitung verweise ich auf die einschlägigen Lehrbücher der Kontinuumsmechanik (Love, 1927; Becker und Bürger, 1975; Sommerfeld, 1978a) und der theoretischen Seismologie (Aki und Richards, 1980; Ben-Menahem und Singh, 1981; Dahlen und Tromp, 1998). Zu einer physikalischen Arbeit gehört es meines Erachtens jedoch, sich die Grunderkenntnisse und die Spezialisierungen und Einschränkungen ins Gedächtnis zu rufen, auf welchen die benutzten theoretischen Konzepte basieren. Für die vorliegende Arbeit ist die lineare, elastische Bewegungsgleichung

$$\rho \ddot{\vec{u}} - \text{Div} \boldsymbol{\sigma} = \vec{f}_V \quad (\text{II.1})$$

mit  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{M} : \boldsymbol{\epsilon}$  und  $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \circ \vec{u} + (\vec{\nabla} \circ \vec{u})^T \right)$

von grundlegender Bedeutung. Die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit will ich summarisch nennen.

**Größen, die der formalen Beschreibung dienen:** Die Bewegung des Mediums wird durch das *Verschiebungsfeld*  $\vec{u}$  beschrieben. Die Verschiebung ist die Observable der seismischen Messungen. Der *symmetrische Dehnungstensor*  $\boldsymbol{\epsilon}$  bemisst den Teil der Verzerrung des Mediums, der für das Entstehen von

Spannungen und damit inneren Kräften verantwortlich ist. Die elastischen Eigenschaften des Mediums, beschrieben durch den *Tensor der elastischen Konstanten*  $\mathbf{M}$ , bestimmen die Größe der daraus resultierenden Spannungen. Diese werden durch den *symmetrischen Spannungstensor*  $\sigma$  in die Theorie eingebracht. In der Kräftebilanz (II.1) wird die Volumendichte der *Spannungskräfte*  $\operatorname{div} \sigma$  der Volumendichte der *Trägheitskräfte*  $\rho \ddot{\mathbf{u}}$  und derjenigen der über endliche Distanzen wirkenden *Volumenkräfte*  $\vec{f}_V$  gegenübergestellt. Eine weitere, für die Wellenausbreitung wesentliche Materialeigenschaft ist die *Massendichte*  $\rho$  im Trägheitsterm. Alle diese Größen sind im Allgemeinen orts- und zeitabhängig.

**Die physikalische Basis** der Theorie bildet die *Impulserhaltung* als elementare *Bilanzgleichung*. Mit Hilfe der *Massenerhaltung* wird der Trägheitsterm umformuliert, so dass die zeitliche Ableitung der Massendichte nicht mehr auftritt, obwohl diese weiterhin zeitabhängig sein darf. Die *Drehimpulserhaltung* führt auf die Bedingung, dass der Spannungstensor  $\sigma$  symmetrisch sein muss. Die *Energieerhaltung* wird nicht explizit verlangt, führt aber zu konkreten Bedingungen für die Elemente des Tensors der elastischen Konstanten (Abschnitt II.2.1.3, S. 35). Soll tatsächlich eine zeitliche Änderung der Massendichte aufgrund der Verzerrung des Mediums berücksichtigt werden, muss als weitere Differentialgleichung die Kontinuitätsgleichung, die aus der Massenerhaltung folgt, hinzugenommen werden. Typischerweise werden die Erhaltungssätze für die extensiven Größen Impuls, Masse und Drehimpuls zunächst als Integralgleichungen über ein Volumen formuliert. Durch Anwendung von Integralsätzen und die Verallgemeinerung des Integrationsvolumens gelangt man zu den genannten, lokal formulierten Differentialgleichungen für die intensiven Größen (wie etwa der Spannung).

**Einige Spezialisierungen** müssen eingeführt werden, um von den elementaren Bilanzgleichungen zu einer Bewegungsgleichung zu gelangen, welche zur Beschreibung der seismischen Wellenausbreitung nützlich ist. Die Spezialisierungen sind immer auch Einschränkungen für die Gültigkeit der theoretischen Beschreibung.

1. Es wird vorausgesetzt, dass das Medium im betrachteten Gebiet einfach zusammenhängend ist. Dies wird als *Geometrisches Grundgesetz* bezeichnet. Versetzungen und Risse werden als Ränder des Gebietes aufgefasst. Angesichts der an die Verschiebung  $\vec{u}$  gestellten Forderungen verbietet sich die Behandlung von Rissen und Versetzungen ohnehin.

2. Die Komponenten von  $\vec{u}$  und ihre Ableitungen müssen klein sein. Es wird  $\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \gg \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_l}$  verlangt, um zu einem in  $\vec{u}$  linearen Dehnungsmaß  $\epsilon$  zu gelangen. Für kleine  $\vec{u}$  ist es außerdem belanglos, ob bezüglich der Koordinaten im

verzerrten Zustand oder im Referenzzustand differenziert wird. Aus Laborexperimenten ist bekannt, dass in typischen seismischen Medien für  $\frac{\partial u_k}{\partial x_j} > 10^{-6}$  nicht-lineare Effekte bedeutsam werden können (Cate und Shankland, 1996). Das Hookesche Gesetz, also ein in  $\epsilon$  lineares Materialgesetz  $\sigma = \mathbf{M} : \epsilon$  ist damit nur für kleine Dehnungen  $\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$  anwendbar. Für  $\vec{v} \cdot (\text{grad} \circ \vec{v}) \ll \partial \vec{v} / \partial t$  kann der Trägheitsterm der Impulsbilanz linearisiert werden. Diese Forderung bedeutet, dass die Beschleunigung, welche ein Massenelement in einem inhomogenen, stationären Geschwindigkeitsfeld erfährt, klein gegen die lokale Beschleunigung sein muss. Dieselbe Forderung ist auch für die Ableitungen von  $\vec{u}$  zu stellen. Das kommt einer Hochfrequenznäherung gleich, die Fließbewegungen im Medium ausschließt.

3. Zur Beschreibung der durch die Dehnung im Medium wirkenden Kräfte wurde das Konzept der Spannungen eingeführt. Nur wenn die inneren Kräfte unmittelbar wirken und von keiner Distanz (beispielsweise zwischen benachbarten Atomen) abhängen, können sie durch einen Spannungstensor  $\sigma$  beschrieben werden. Diese Forderung wird auch als *Nahewirkung der inneren Kräfte* bezeichnet. Sie ist nicht selbstverständlich und ist mit konkreten Vorstellungen vom mikroskopischen Aufbau der Materie verknüpft (Love, 1927, Anhang B). So schließt sie beispielsweise die Behandlung von Ionenkristallen aus.

4. Die Gravitation der Massen im Medium wird vernachlässigt. Sie liefert nur bei tiefen Frequenzen, im Bereich der Eigenschwingungen des gesamten Erdkörpers, einen nennenswerten Beitrag. Denn bei gleichbleibender Amplitude der Verschiebung nehmen Trägheits- und Spannungskräfte mit der Wellenzahl und der Frequenz im Verhältnis zur Änderung der Gravitationskraft ab. Die Vorspannung des Materials durch die Schwerebeschleunigung zum Erdschwerpunkt hin muss durch das Materialgesetz mit beschrieben werden. Damit verbleiben keine relevanten Volumenkräfte  $\vec{f}_V$ . In der Theorie der seismischen Wellenausbreitung dient  $\vec{f}_V$  dazu, einen Quellterm einzubringen, also eine seismische Quelle über ein äquivalentes Kraftfeld zu beschreiben.

## 2 Das Materialgesetz

In Gleichung (II.1) wurde ad hoc ein Zusammenhang der Form

$$\sigma = \mathbf{M} : \epsilon \quad (\text{II.2})$$

zwischen der Spannung  $\sigma$  und der Dehnung  $\epsilon$  eingeführt und damit die beim Durchgang einer seismischen Welle auftretende Verzerrung als alleinige Ursache der Spannung identifiziert. Für *kleine Verschiebungen* lässt sich die Verzerrung

durch einen *linearen Dehnungstensor*

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left( \vec{\nabla} \circ \vec{u} + \left( \vec{\nabla} \circ \vec{u} \right)^T \right)$$

mit sechs unabhängigen Komponenten<sup>1</sup> bemessen. Die Elemente des Tensors  $M$  beschreiben die Eigenschaften des elastischen Materials. Ein seismisches Experiment soll dazu dienen, genau diese zu bestimmen. Damit das dazu benutzte Interpretationsverfahren erfolgreich sein kann, ist es notwendig, dass die theoretische Beschreibung in der Lage ist, die tatsächliche Situation im Material angemessen wiederzugeben. Daher lasse ich hier einige Ausführungen über das zu verwendende *Materialgesetz* folgen.

$M$  hat 81 Elemente, von denen allein aus Symmetriegründen nur 21 unabhängig sein können. Im Falle isotropen Materials sind jedoch nur zwei von ihnen unabhängig (Feynman, 1969; Sommerfeld, 1978b, §39). Dann vereinfacht sich der Zusammenhang von Gl. (II.2) zu

$$\sigma = 2 \mu \epsilon + \lambda \mathbb{1} \text{ Spur}(\epsilon). \quad (\text{II.3})$$

Die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  werden „Lamésche Konstanten“ genannt. Die in dieser Arbeit behandelten Datensätze lassen sich ohne die Annahme von Anisotropie behandeln. Sie wurden allerdings auch nicht speziell auf Anisotropie hin untersucht. Im Folgenden gehe ich von einem isotropen Materialgesetz aus.

Ganz allgemein formuliert, kann die Spannung

$$\sigma = \sigma(\epsilon, \dot{\epsilon}, \epsilon : C : \epsilon, \vec{r}, t, T, p, c, \dots)$$

nicht nur von der Dehnung  $\epsilon$ , sondern auch von deren Änderung  $\dot{\epsilon}$ , von höheren Ordnungen  $\epsilon : C : \epsilon$ , aber auch von Ort und Zeit abhängen. Außerdem werden Größen wie die Temperatur  $T$ , der statische Druck  $p$ , die Wassersättigung  $c$  oder auch das Porenvolumen den funktionalen Zusammenhang beeinflussen. Häufig sollen gerade die letztgenannten Parameter durch eine geophysikalische Messung untersucht werden. Die funktionale Abhängigkeit zwischen ihnen und der Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist nicht Thema dieser Arbeit. Diese kann mit seismischen Feldmessungen auch kaum bestimmt werden. Vielmehr sind aufwendige Laboruntersuchungen (Toksöz und Johnston, 1981) und komplexe theoretische Modelle (Mavko et al., 1998) zu ihrer Behandlung notwendig. Eine umfangreiche Zusammenstellung experimenteller Resultate zu diesem Thema findet man in der Monographie von Schön (1998).

<sup>1</sup>Darin geht die Vorstellung ein, dass eine gleichförmige Drehung eines Teilvolumens keine Spannungen verursacht. Daher muss  $\epsilon$  symmetrisch sein.

Es ist vernünftig, anzunehmen, dass die Eigenschaften des Materials sich während einer seismischen Messung nicht ändern. Außerdem weisen experimentelle Befunde darauf hin, dass der Zusammenhang zwischen  $\sigma$  und  $\epsilon$  für Dehnungsbeträge kleiner  $10^{-6}$  in Gestein linear ist (Savage und Hasegawa, 1967; Cate und Shankland, 1996). Diese wurden bereits in Abschnitt II.1 als klein vorausgesetzt. Ferner soll der Zusammenhang zwischen den elastischen Moduln  $\tilde{M}$  und Einflussgrößen wie der Temperatur und der Wassersättigung nicht parametrisiert werden. Experimentelle Befunde (Burkhardt et al., 1992; Toksöz und Johnston, 1981; Spencer, 1981) weisen aber auch auf eine möglicherweise starke, intrinsische Dämpfung in flachseismischen Medien, speziell Lockersedimenten, hin.

Zur Beschreibung des Materials benutzt man daher häufig eine lineare Beziehung (*Hookesches Gesetz*), die räumlich lokal aber nicht konstant ist und die zeitlich konstant aber *nicht* lokal ist. Ein solches, *viskoelastisches* Materialgesetz lautet

$$\sigma(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} \tilde{M}(\vec{r}, \tau) \epsilon(\vec{r}, t - \tau) d\tau. \quad (\text{II.4})$$

## 2.1 Viskoelastische Materialgesetze

Für die nun folgenden Überlegungen soll beispielhaft der Zusammenhang zwischen einer allgemeinen, skalaren Spannungsgröße  $\sigma$  und einer allgemeinen, skalaren Dehnungsgröße  $\epsilon$  betrachtet werden. In diesem Sinne kann für jedes Tensorelement in Gl. (II.4) exemplarisch

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(\tau) \epsilon(t - \tau) d\tau \quad (\text{II.5a})$$

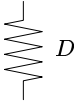
geschrieben werden. Für ein kausales Materialgesetz wird dabei explizit

$$\tilde{M}(\tau) = 0 \quad \text{bei } \tau < 0 \quad (\text{II.5b})$$

gefordert. Das Material besitzt jedoch ein „Gedächtnis“. Die Spannung hängt von allen in der Vergangenheit ( $t < 0$ ) erreichten Dehnungen ab. Dies wird in der Literatur auch als „Nachwirkung“ bezeichnet (Boltzmann, 1876).

Gl. (II.5a) ist ein Faltungsintegral. Zwischen den komplexen Fourier-Koeffizienten  $\tilde{\sigma}$ ,  $\tilde{M}$  und  $\tilde{\epsilon}$  der Größen ergibt sich damit eine besonders einfacher Zusammenhang

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{M}(\omega) \tilde{\epsilon}(\omega). \quad (\text{II.6})$$



$$\begin{aligned}\sigma &= D \epsilon & \tilde{\sigma} &= D \tilde{\epsilon} \\ \tilde{M} &= D & Q &= \infty\end{aligned}$$

**Tabelle II.1:** Rheologisches Element: Elastizität

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).



$$\begin{aligned}\sigma &= \eta \dot{\epsilon} & \tilde{\sigma} &= -i\omega \eta \tilde{\epsilon} \\ \tilde{M} &= -i\omega \eta & Q &= 0\end{aligned}$$

**Tabelle II.2:** Rheologisches Element: Dynamische Viskosität

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).

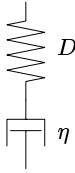
Diese Beziehung lässt sich ganz zwanglos bei der später beschriebenen Lösung der elastischen Wellengleichung berücksichtigen, bei der ein Separationsansatz zu einer Differentialgleichung ausschließlich für die Ortsabhängigkeit der Fourier-Koeffizienten der elastischen Verschiebung führt (Abschnitt II.3.1, S. 43). Allgemeine Materialgesetze dieser Art in nicht transformierter Form zu behandeln, beispielsweise in Finite-Differenzen-Verfahren (Bohlen, 1998), ist wesentlich aufwendiger. Für lateral heterogene Medien wäre das allerdings unumgänglich.

### 2.1.1 Rheologische Modelle

Dass es sich bei dem mit Gl. (II.5) formulierten Materialgesetz um ein allgemeines, viskoelastisches Materialgesetz handelt, wird beim Vergleich mit einfachen rheologischen Modellen (Tab. II.1 bis II.5) klar. Ein elastisches Element  $D$  (Tab. II.1) bildet einen Beitrag zum Realteil von  $\tilde{M}$ . Ein viskoses Element  $\eta$  (Tab. II.2) gibt einen Beitrag zum Imaginärteil von  $\tilde{M}$  und tritt in der Bewegungsgleichung (II.1) als dissipativer Term auf. Die Vorzeichen der Imaginärteile sind dabei durch die Definition der Fourier-Transformation bestimmt (Abschnitt A.2.1, S. 218).

Zur Beschreibung der dissipativen Eigenschaften des Materials wird hier auch die aus der Resonatortheorie bekannte, dimensionslose Güte  $Q$  eingeführt. Es existieren verschiedene Definitionen der elastischen Güte (Toksöz und Johnston, 1981; Mavko et al., 1998). Sie kann als Maß für den relativen Energieverlust pro Wellenlänge verstanden werden. Formal eingeführt wird sie in der Regel über das Verhältnis

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\Re(\tilde{M})}{\Im(\tilde{M})} = -\cot \phi$$



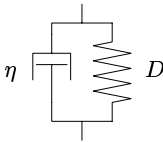
$$\epsilon = \frac{1}{D} \sigma + \frac{1}{\eta} \int \sigma dt \quad \tilde{\sigma} = \frac{1}{\frac{1}{D} + \frac{i}{\omega\eta}} \tilde{\epsilon}$$

$$\tilde{M} = M_\infty \frac{\omega}{\omega + i\omega_0} \quad |\tilde{M}| = M_\infty \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

$$M_\infty = D \quad \omega_0 = \frac{D}{\eta} \quad Q = \frac{\omega}{\omega_0} \propto \omega$$

**Tabelle II.3:** Rheologischer Körper: Maxwell

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).



$$\sigma = D \epsilon + \eta \dot{\epsilon} \quad \tilde{\sigma} = (D - i\omega \eta) \tilde{\epsilon}$$

$$\tilde{M} = M_0 \left( 1 - i \frac{\omega}{\omega_0} \right) \quad |\tilde{M}| = M_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$M_0 = D \quad \omega_0 = \frac{D}{\eta} \quad Q = \frac{\omega_0}{\omega} \propto \omega^{-1}$$

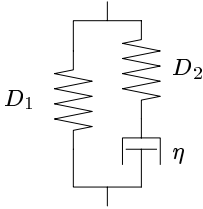
**Tabelle II.4:** Rheologischer Körper: Kelvin-Voigt

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).

von Real- und Imaginärteil<sup>2</sup> des komplexen Moduls  $\tilde{M} = |\tilde{M}| e^{i\phi}$ . Großes  $Q$  bedeutet daher kleine Dämpfung.

Durch Kombination der Grundelemente  $D$  und  $\eta$  ergeben sich Materialien mit Frequenz-abhängigen Eigenschaften. Dies ist exemplarisch anhand des Maxwell-Körpers in Tab. II.3 und des Kelvin-Voigt-Körpers in Tab. II.4 dargestellt. In den Tabellen sind neben den Ausdrücken für den komplexen Modul  $\tilde{M}$  und seinen Betrag auch die Werte für die Güte  $Q$  und die Extremwerte des Moduls  $M_0$  für den statischen Fall und  $M_\infty$  für die Asymptote hoher Frequenzen angegeben. Dabei stellen der Maxwell-Körper und der Kelvin-Voigt-Körper auch Extrema bezüglich der Frequenz-Abhängigkeit von  $Q$  dar. Da in den Definitionsgleichungen eines viskoelastischen Materialgesetzes nur erste Ableitungen nach der Zeit auftreten, muss der Exponent  $\gamma$  der Frequenz-Abhängigkeit von  $Q \propto \omega^\gamma$  zwischen  $-1$  und  $1$

<sup>2</sup>Aufgrund der von mir in Abschnitt A.2.1 (S. 218) gewählten Vorzeichenkonvention für die Fourier-Transformation ist der Imaginärteil des Moduls negativ.



$$\tilde{\sigma} = \left( D_1 + \frac{1}{\frac{i}{\omega\eta} + \frac{1}{D_2}} \right) \tilde{\epsilon} \quad \tilde{M} = M_0 \frac{1 - i\omega\tau_\epsilon}{1 - i\omega\tau_\sigma}$$

$$\sigma + \tau_\sigma \dot{\sigma} = M_0 (\epsilon + \tau_\epsilon \dot{\epsilon}) \quad |\tilde{M}| = M_0 \sqrt{\frac{1 + \omega^2\tau_\epsilon^2}{1 + \omega^2\tau_\sigma^2}}$$

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{D_2}$$

$$\tau_\epsilon = \frac{\eta}{D_2} + \frac{\eta}{D_1}$$

$$\tau = \sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon}$$

$$\xi = \frac{M_\infty}{M_0} = \frac{\tau_\epsilon}{\tau_\sigma}$$

$$M_0 = D_1$$

$$M_\infty = D_1 + D_2$$

$$Q = Q_{\min} \frac{1 + \tau^2\omega^2}{2\omega\tau}$$

$$Q_{\min} = \frac{2\tau}{\tau_\epsilon - \tau_\sigma} = \frac{2\eta^2 M_0^2 \sqrt{\xi}}{(\xi - 1)^3}$$

**Tabelle II.5:** Rheologischer Körper: Standard-Linear-Solid (SLS)

Die verwendeten Größen werden im Text erläutert (Abschnitt II.2.1.1).

liegen. Die Frequenz-Abhängigkeit der seismischen Geschwindigkeit für solche Materialgesetze diskutiert Müller (1983) ausführlich. Der Modul selbst wechselt bei der Frequenz  $\omega_0$  seinen Charakter.

Der Standard-Linear-Solid (Tab. II.5) gilt nach Zener (1948) als einfachstes Modell für die Rheologie eines Festkörpers. Der Standard-Linear-Solid (SLS) besteht aus drei rheologischen Elementen und wird daher durch drei Parameter bestimmt. Als kanonische Parameter können die zwei *Relaxationszeiten*  $\tau_\sigma$  und  $\tau_\epsilon$  betrachtet werden. Dabei ist  $\tau_\sigma$  die Zeitkonstante der Spannungsantwort, wenn dem SLS eine Schrittfunktion für  $\epsilon$  aufgeprägt wird. Umgekehrt ergibt  $\tau_\epsilon$  die Zeitkonstante für die Dehnungsantwort, bei einer Schrittfunktion in der Spannung. Für  $\omega = 1/\sqrt{\tau_\sigma \tau_\epsilon} = 1/\tau$  tritt die größte Dämpfung auf. Und das Verhältnis  $\tau_\epsilon/\tau_\sigma$  ist gleich dem Verhältnis der asymptotischen Werte des Moduls. Sowohl im statischen Grenzfall, wie für die Asymptote hoher Frequenzen ergibt sich jeweils ein rein elastisches Material. Damit ist das der einfachste rheologische Körper, der über den ganzen Frequenzbereich bei endlichem  $|\tilde{M}|$  kein reines Fließverhalten zeigt und damit die Forderung endlicher Dehnung bei endlichen äußeren Kräften implizit erfüllt. Die Frequenz-Abhängigkeit der Güte  $Q$  variiert zwischen den extremen Exponenten  $Q \propto \omega^{-1}$  (Kelvin-Voigt) für kleine Frequenzen und  $Q \propto \omega^1$  (Maxwell) für große Frequenzen. Zur Beschreibung realer Festkörper ist ein einzelner SLS nicht ausreichend. Es wird dazu in der Regel eine Verteilung von Relaxationszeiten angesetzt (Spencer, 1981). Darauf soll hier aber nicht weiter eingegangen werden.



### 2.1.2 Allgemeine Bedingungen für $\tilde{M}$

Aus der kausalen Definition in Gl. (II.5) ergeben sich einige zwingende Forderungen für die Eigenschaften von  $\tilde{M}$ . Außerdem lässt sich für die physikalische Forderung eines stabilen Materials die Bedingung für einen positiven Realteil und einen negativen Imaginärteil von  $\tilde{M}$  ableiten. Da das im seismischen Experiment gesuchte Materialgesetz nicht nur die aufgezeichneten Daten über eine Lösung der Differentialgleichung (II.1) erklären, sondern auch physikalisch sinnvoll sein soll, wird in den folgenden zwei Abschnitten weiter auf die physikalischen Forderungen an  $\tilde{M}$  eingegangen.

Die Kausalitätsbedingung

$$M(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{M}(\omega) e^{-i\omega\tau} \frac{d\omega}{2\pi} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \tau < 0$$

ist nur erfüllt, falls  $\tilde{M}(\omega)$  in der oberen  $\omega$ -Halbebene, also für  $\Im(\omega) > 0$ , analytisch ist. Das folgt unmittelbar aus dem Residuensatz.

Damit lässt sich das Hauptwertintegral

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{M}(\omega)}{\omega - \omega'} d\omega = i\pi (\tilde{M}(\omega') - \tilde{M}(\infty))$$

durch schließen des Integrationsweges in der oberen  $\omega$ -Halbebene berechnen (Ben-Menahem und Singh, 1981, Anhang K.3). Man weicht dazu dem Pol bei  $\omega = \omega'$  in die obere Halbebene hinein aus. Dabei ist  $\tilde{M}(\infty) = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \tilde{M}(\omega)$  der asymptotische Wert des Moduls für große  $\omega$ .

Ganz analog dazu lässt sich eine Integralbeziehung für  $\ln(\tilde{M})$  herleiten. Falls  $\tilde{M}$  keine Nullstellen in der oberen  $\omega$ -Halbebene besitzt, beschreibt es ein „Minimum-Delay-System“. Dann gelten die sogenannten „Kramers-Kronig Dispersionsrelationen“ zwischen Phase und Betrag des Moduls (Ben-Menahem und Singh, 1981; Müller, 1983). Diese lauten

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln|\tilde{M}(\omega)|}{\omega - \omega'} d\omega = \pi (\phi(\infty) - \phi(\omega')) \tag{II.12a}$$

und

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\omega)}{\omega - \omega'} d\omega = \pi (\ln|\tilde{M}(\omega')| - \ln|\tilde{M}(\infty)|) \tag{II.12b}$$

für  $\tilde{M} = |\tilde{M}| e^{i\phi}$ .

Da  $M(\tau)$  eine reelle Größe ist, muss  $\tilde{M}(\omega) = \tilde{M}^*(-\omega)$  gelten. Der Realteil von  $\tilde{M}$  ist also eine gerade Funktion von  $\omega$ , während der Imaginärteil eine ungerade Funktion der Frequenz ist und somit  $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$ . Für  $|\tilde{M}(\omega)| = \text{const}$  verschwindet Gl. (II.12a). Es ist dann  $\phi(\infty) = \phi(\omega)$  für beliebiges  $\omega$ , also  $\phi(\omega) = \text{const}$ . Wegen  $\phi(\omega) = -\phi(-\omega)$  ist dies nur für  $\phi(\omega) = 0$  und damit  $1/Q = 0$  möglich. Ein konstanter Modul impliziert also dämpfungsfreies Material.

Real- und Imaginärteil, wie auch die Phase und der Logarithmus der Amplitude des Moduls sind somit Hilbert-Transformationspaare. Eine qualitative, lokale Beziehung zwischen den beiden Partnern des Transformationspaares lässt sich ableiten, wenn man die Größen um  $\omega'$  nach Taylor entwickelt. Die geraden Ordnungen der Entwicklung heben sich unter dem Integral wegen des antisymmetrischen Nenners heraus. Aufgrund des Pols bei  $\omega'$  wird der Wert von  $\ln|\tilde{M}|$  um den Pol besonders stark zum Wert von Gl. (II.12a) beitragen. Nach Division mit dem Nenner  $(\omega - \omega')$  bleibt aber gerade der Koeffizient der ersten Ordnung der Entwicklung bei  $\omega = \omega'$ . Die Größe des Integrals wird also stark durch den Wert der Ableitung von  $\ln|\tilde{M}|$  bei  $\omega'$  bestimmt. Oder anders ausgedrückt: Je größer  $|\phi|$  und damit die intrinsische Dämpfung, umso stärker muss der Betrag des Moduls mit der Frequenz zunehmen. Ben-Menahem und Singh (1981, Anhang K.4) gelangen nach formaler Rechnung zu der Beziehung<sup>3</sup>

$$\phi(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{d \ln|\tilde{M}(\omega)|}{d \ln \omega}. \quad (\text{II.13})$$

Der Betrag von  $\tilde{M}$  wächst monoton mit der Frequenz, da die viskosen Elemente im Material mit zunehmender Frequenz versteifend wirken. Es gilt also

$$\frac{\partial}{\partial \omega} |\tilde{M}(\omega)| \geq 0 \quad \text{für } \omega > 0.$$

Wie bereits in Abschnitt II.2.1.1 diskutiert wurde, muss außerdem

$$-1 \leq \frac{\partial Q(\omega)}{\partial \omega} \leq 1$$

gelten.

---

<sup>3</sup>Alle in dieser Arbeit gegebenen Beziehungen folgen der von mir in Abschnitt A.2.1 (S. 218) gewählten Vorzeichenkonvention für die Fourier-Transformation. Das Vorzeichen des Phasenwinkels ist daher entgegengesetzt zum von Ben-Menahem und Singh (1981) angegebenen Wert.

### 2.1.3 Stabilitätsbedingungen

Eine Deformation des Materials darf nicht dazu führen, dass spontan Energie frei wird, sonst wäre es in keinem stabilen Zustand. Für das Differential der Arbeit  $A$ , die zu verrichten ist, um das Material aus dem Gleichgewicht auszulenken, also eine Dehnung aufzuprägen, gilt somit

$$dA = \sigma d\epsilon \stackrel{!}{\geq} 0.$$

Für eine periodische Beanspruchung

$$\epsilon = |\tilde{\epsilon}| \sin(\omega t)$$

des Materials folgt

$$\sigma = |\tilde{\epsilon}| |\tilde{M}| \sin(\omega t - \phi)$$

wegen

$$\tilde{\sigma} = \tilde{M} \tilde{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \tilde{M} = |\tilde{M}| e^{i\phi}.$$

Damit ergibt sich für die mechanische Leistung

$$P = \sigma \frac{d\epsilon}{dt} = \omega |\tilde{\epsilon}|^2 |\tilde{M}| \cos(\omega t) \sin(\omega t - \phi).$$

Die aufzuwendende Leistung  $P(t=0) = \omega |\tilde{\epsilon}|^2 |\tilde{M}| \sin(-\phi)$  bei Auslenkung des Materials aus dem Gleichgewicht ist positiv, falls  $-\pi \leq \phi \leq 0$ . Für  $\phi = 0$  erhält man ein rein elastisches Materialgesetz. Die für das Durchlaufen einer Periode aufzuwendende Arbeit

$$A = \int \sigma d\epsilon = |\tilde{\epsilon}|^2 |\tilde{M}| \int_0^{2\pi} \cos(\alpha) \sin(\alpha - \phi) d\alpha$$

verschwindet dann. Die größte Arbeit  $A$  wird für  $\phi = -\pi/2$  verrichtet.

Eine Phase zwischen  $-\pi$  und  $-\pi/2$  führt zwar formal zu einem stabilen Material, ist aber bezüglich Gl. (II.1) unsinnig. Am anschaulichsten wird dies durch die Betrachtung eines viskos gedämpften Masse-Feder-Pendels (Abb. II.1) verdeutlicht. Auf eine anregende Kraft  $F$  reagiert das Pendel mit einer Auslenkung  $x$  gemäß der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + \eta\dot{x} + Dx = F.$$

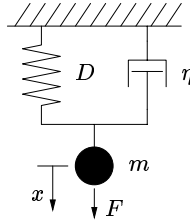


Abbildung II.1: Gedämpftes Masse-Feder-Pendel

Das Verhältnis

$$\frac{\tilde{F}}{\tilde{x}} = \tilde{Z} = |\tilde{Z}| e^{i\phi} = D - i\omega\eta - \omega^2 m \quad \text{mit} \quad \tan \phi = \frac{-\omega\eta}{D - \omega^2 m}$$

entspricht dem komplexen Modul  $\tilde{M}$  (vergleiche mit dem im Pendel enthaltenen Kelvin-Voigt Körper in Tab. II.4). Phasenwinkel  $-\pi \leq \phi < -\pi/2$  für  $\tilde{M}$  zuzulassen würde bedeuten, die Eigenschaft der trägen Masse  $m$  in das Materialgesetz aufzunehmen. Das Material kann dann nicht nur potentielle Energie speichern, sondern auch kinetische. Für  $\eta = 0$  und  $D = \omega^2 m$  und damit  $\tilde{Z} = 0$  (obwohl  $D \neq 0$ ) befindet sich das System in ungedämpfter Resonanz, bei der beide Energieformen ohne äußere Kraft zyklisch ineinander umgewandelt werden. Die Masendichte  $\rho$  wird aber schon wegen ihres skalaren Charakters in der elastischen Differentialgleichung (II.1) getrennt behandelt.

Wäre die Gleichung massebezogen formuliert, so würde  $\tilde{M}/\rho$  als Materialeigenschaft auftreten. Dann würden die kinematische Viskosität  $\eta/\rho$  und das Quadrat der seismischen Geschwindigkeit  $D/\rho$  als Grundelemente dienen.

Abschließend ist

$$\Re(\tilde{M}) \geq 0 \quad \text{und} \quad \Im(\tilde{M}) \leq 0 \quad \text{für} \quad \omega > 0 \quad (\text{II.14})$$

zu fordern (bezogen auf die Definition des Fourier-Integrals in Abschnitt A.2.1, S. 218). Diese Ungleichungen müssen für jedes Element im Tensor  $\tilde{M}$  erfüllt sein.

#### 2.1.4 Anwendbarkeit viskoelastischer Materialgesetze

Aufgrund der Anschauung bei der seismischen Feldmessung selbst, wie auch aufgrund von Laboruntersuchungen (Burkhardt et al., 1992; Toksöz und Johnston, 1981; Spencer, 1981) ist klar, dass typische flachseismische Materialien

stark dissipativ sein können. Es muss also im Allgemeinen ein Frequenz-abhängiger Modul  $\tilde{M}(\omega)$  angesetzt werden. Bei der Untersuchung von Oberflächenwellen soll aber gerade aus der Frequenz-Abhängigkeit der Messgrößen auf eine Tiefen-Abhängigkeit der Materialeigenschaften geschlossen werden. Eine intrinsische Frequenz-Abhängigkeit lässt sich daher nicht unabhängig von der Tiefen-Abhängigkeit bestimmen. Jeder weitere Parameter, mit dem eine kompliziertere Frequenz-Abhängigkeit als  $Q(\omega) = Q_{\text{ref}}\omega^\gamma$  parametrisiert wird, lässt sich kaum aus einer seismischen Feldmessung ableiten. Damit verbleibt man bei der etwas unbefriedigenden Einsicht, dass ein Materialgesetz gemäß Gl. (II.4) physikalisch notwendig ist, aber zu nicht auflösbaren Mehrdeutigkeiten bei der Interpretation der Messung führt. Siehe dazu auch die Bemerkungen in Abschnitt V.2.6 (S. 126).

## 2.2 Seismische Geschwindigkeiten im isotropen Material

Nun will ich die oben aufgezählten Schlussfolgerungen für die allgemeinen viskoelastischen Moduln auf die sogenannten „seismischen Geschwindigkeiten“ übertragen. Mit Gleichung (II.3) wurde bereits ein isotropes Material eingeführt. Für die Verschiebung  $\vec{u}$  werde ich in Gleichung (II.30) Potentiale definieren, für deren Fourier-Koeffizienten sich insbesondere im homogenen Vollraum Helmholtz-Gleichungen der Form

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{\Phi} = 0 \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{C} \quad (\text{II.15a})$$

aus der elastischen Differentialgleichung (II.1) ableiten lassen (Abschnitt II.3.3, S. 45). Für das Kompressionspotential ( $\Phi = \phi$ ) ist  $c$  die Geschwindigkeit

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (\text{II.15b})$$

der Kompressionswellen. Für die Scherpotentiale ( $\Phi = \psi$  oder  $\Phi = \chi$ ) ist  $c$  die Geschwindigkeit

$$v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{II.15c})$$

der Scherwellen.

In den Ausdrücken (II.15b) und (II.15c) für die seismischen Geschwindigkeiten treten die elastischen Moduln auf. In den folgenden Abschnitten zeige ich, welche Implikationen für die seismischen Geschwindigkeiten sich aus den zuvor für die Moduln aufgestellten Bedingungen ergeben.

### 2.2.1 Stabilitätskriterien

Bei der Beanspruchung eines Körpers aus isotropem, elastischem Material wird, je nach Randbedingung, zwischen den vier kanonischen Moduln  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $M$  und  $E$  unterschieden, welche die Spannung  $\sigma$  mit der Dehnung  $\epsilon$  verknüpfen (Mavko et al., 1998; Schön, 1998). Davon sind jeweils nur zwei unabhängig. Die anderen können aus ihnen berechnet werden. Für eine gleichmäßige Kompression von allen Seiten wirkt der Volumenkompressionsmodul (englisch „bulk modulus“)  $\kappa$  gemäß<sup>4</sup>  $\sigma_{kk} = 3\kappa \epsilon_{kk}$  mit  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$  und  $\epsilon_{kl} = 0$  für  $k \neq l$ . Für eine reine Scherbeanspruchung gilt  $\sigma_{kl} = 2\mu \epsilon_{kl}$  für  $k \neq l$  und  $\epsilon_{kk} = 0$  mit dem Schermodul  $\mu$  (englisch „rigidity“). Die Eigenschaft eines eingespannten Körpers unter uniaxialer Beanspruchung (wie beim Durchgang einer ebenen Kompressionswelle) wird durch den Modul  $M$  gemäß  $\sigma_{11} = M \epsilon_{11}$  für  $\epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$  bestimmt. Bei uniaxialer Spannung eines freien Körpers ist der Elastizitätsmodul  $E$  (englisch „Young's modulus“) mit  $\sigma_{11} = E \epsilon_{11}$  und  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$  maßgeblich. Für die letztgenannte Art der Beanspruchung wird die Querkontraktionszahl  $\nu = -\epsilon_{22}/\epsilon_{11}$ , das sogenannte *Poisson-Verhältnis* definiert. Für alle Moduln müssen die oben definierten Stabilitätskriterien unabhängig voneinander gelten. Hier möchte ich speziell darauf hinweisen, dass es sich bei der Laméschen Konstante  $\lambda$  um keinen Modul handelt. Theoretisch kann  $\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu$  durchaus negativ werden!

Als ausgezeichnete Moduln können  $\kappa$  und  $\mu$  betrachtet werden.  $\kappa$  beschreibt die Volumentreue eines Materials, während  $\mu$  ein Maß für die Winkel- oder Formtreue ist. Die anderen beiden genannten Moduln können nur größer oder gleich dem kleineren von  $\kappa$  oder  $\mu$  sein. Während die Scherwellen-Geschwindigkeit  $v_s$  allein durch  $\mu$  (und die Dichte  $\rho$ ) bestimmt wird, gehen in  $v_p$  über den Modul  $M = \kappa + \frac{4}{3}\mu$  zwei elementare Moduln ein.

Zur Charakterisierung der lithologischen Eigenschaften eines Materials wird häufig das Verhältnis der seismischen Geschwindigkeiten  $v_p/v_s$  oder auch die Poisson-Zahl  $\nu$  benutzt. Zwischen diesen Größen und den Moduln  $\kappa$  und  $\mu$  bestehen die Beziehungen

$$\nu = \frac{\frac{3}{2}\kappa - \mu}{3\kappa + \mu} = \frac{\frac{1}{2}v_p^2 - v_s^2}{v_p^2 - v_s^2} \quad \text{und} \quad (\text{II.16a})$$

$$\frac{v_p^2}{v_s^2} = \frac{\kappa}{\mu} + \frac{4}{3} = \frac{2(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)} + \frac{4}{3}. \quad (\text{II.16b})$$

Aus den Stabilitätsüberlegungen und experimentellen Befunden lassen sich ein paar Eckwerte für diese Größen zusammenstellen. Wird allein die physikalische

<sup>4</sup>Die Summenkonvention wende ich in dieser Arbeit an keiner Stelle an.

Stabilität durch  $\kappa > 0$  und  $\mu > 0$  gefordert, ergeben sich die Wertebereiche

$$\begin{aligned} -1 &\leq \nu \leq \frac{1}{2} \quad \text{und} \\ \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1.15 &\leq \frac{v_p}{v_s} \leq \infty. \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

Dabei ergibt sich  $\nu = 1/2$  für eine ideale Flüssigkeit. Der Fall  $\nu = -1$  entspricht einem unendlich formtreuen und dabei vernachlässigbar volumentreuen Material. Ein Material mit  $\nu < 0$ , das bei uniaxialer Zugbeanspruchung auch in die anderen Raumrichtungen expandiert, würde man aber intuitiv ablehnen. Nur für synthetische Materialien (Lakes, 1987) oder ganz spezielle Gitterstrukturen (Kesar und Chelikowsky, 1992) wurde bisher ein negatives Poisson-Verhältnis nachgewiesen. Aus flachseismischen Experimenten bekannte Werte<sup>5</sup> bewegen sich im Bereich

$$\begin{aligned} 0.1 &< \nu < 0.49 \quad \text{entsprechend} \\ 1.5 &< \frac{v_p}{v_s} < 10. \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Als mittlerer Wert für typische Festkörper wird häufig der Poissonsche Wert  $\nu = 0.25$ , also  $v_p/v_s = \sqrt{3}$  angegeben. Für  $\nu = 0.1$  ist  $\kappa/\mu = 11/12$  und somit bereits  $\mu > \kappa$ .

### 2.2.2 Dissipation und komplexe Geschwindigkeiten

Für die Berechnung synthetischer Seismogramme werden die Materialeigenschaften in der Regel in Form der Beträge der seismischen Geschwindigkeiten aus Gl. (II.15b) und (II.15c), der Dichte  $\rho$  und der Güte-Werte  $Q_{v_p}$  und  $Q_{v_s}$  für die seismischen Geschwindigkeiten angegeben. Diese Größen müssen nach einer Inversion auf ihre Sinnhaftigkeit bezüglich der oben aufgestellten Forderungen geprüft werden. Die dafür notwendigen Beziehungen werden hier kurz angegeben.

Mit Gl. (II.15c) lässt sich die komplexe Scherwellen-Geschwindigkeit direkt als

$$\begin{aligned} \tilde{v}_s &= \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\rho}} = |\tilde{v}_s| e^{i\phi_{v_s}} \quad \text{mit} \quad |\tilde{v}_s| = \sqrt{\frac{|\tilde{\mu}|}{\rho}} \\ \text{und} \quad \phi_{v_s} &= \frac{\phi_\mu}{2} = -\arctan\left(\frac{1}{Q_{v_s}}\right) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

angeben. Damit ergibt sich auch der Wert von  $Q_{v_s}$  durch

$$\frac{1}{Q_{v_s}} = \tan\left(\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{Q_\mu}\right)\right). \quad (\text{II.20})$$

<sup>5</sup>Siehe Abschnitt VI.3 (S. 167) und den Artikel von Steeples et al. (1995).

Für große  $Q$  wird dieser Ausdruck durch  $Q_{v_s} \approx 2Q_\mu$  genähert. Zu beachten ist, dass das Stabilitätskriterium  $-\pi/2 \leq \phi_\mu \leq 0$  zwar  $0 \leq Q_\mu \leq \infty$  zulässt, jedoch mit  $1 \leq Q_{v_s} \leq \infty$  bereits für  $Q_{v_s} = 1$  das Materialverhalten einer newtonschen Flüssigkeit erreicht ist.

Analog dazu ergeben sich aus Gl. (II.15b) Beziehungen zwischen der komplexen Geschwindigkeit  $\tilde{v}_p$  und dem komplexen Modul  $\tilde{M} = \tilde{\kappa} + \tilde{\mu}4/3$ . Gleichung (II.16b) lässt sich für die komplexen Größen zu

$$\frac{|\tilde{v}_p|^2}{|\tilde{v}_s|^2} e^{2i\phi_{v_p}} - \frac{4}{3} e^{2i\phi_{v_s}} = \frac{|\tilde{\kappa}|}{|\tilde{\mu}|} e^{i\phi_\kappa} \quad (\text{II.21})$$

umformen. Diese Größe muss aus den Modellparametern berechnet und auf Plausibilität, insbesondere  $-\pi/2 \leq \phi_\kappa \leq 0$  für alle Frequenzen überprüft werden. Damit werden jedoch nur Aussagen über die grundsätzliche physikalische Realisierbarkeit des Materials gemacht. Ob ein Material mit  $\phi_\kappa$  nahe  $-\pi/2$  im Rahmen der untersuchten geologischen/lithologischen Situation sinnvoll ist, bleibt dahingestellt.

Formeln für die Frequenz-Abhängigkeit der komplexen seismischen Geschwindigkeit für ein kausales Materialgesetz mit  $Q \propto \omega^\gamma$  werden von Müller (1983) angegeben.

### 2.2.3 Ein alternativer Satz von Modellparametern

Die angestellten Überlegungen, die in unhandlichen Beziehungen wie Gleichung (II.21) oder Gl. (II.20) gipfeln, legen es nahe, für die Parametrisierung eines voll viskoelastischen Materialgesetzes eher

$$\frac{\Re(\tilde{\kappa})}{\rho}, \frac{\Im(\tilde{\kappa})}{\rho}, \frac{\Re(\tilde{\mu})}{\rho}, \frac{\Im(\tilde{\mu})}{\rho} \quad \text{und} \quad \rho$$

statt  $v_p, v_s, Q_{v_p}, Q_{v_s}$  und  $\rho$  zu benutzen. Es sollten die auf die Massendichte  $\rho$  bezogenen Moduln statt der Moduln selbst benutzt werden, da die seismische Wellenausbreitung hauptsächlich durch diesen Quotienten beeinflusst wird.

Eine Abweichung von der gängigen Parametrisierung hat aber auch Nachteile. Das Ergebnis einer Inversion soll in der Regel in den Werten für die seismischen Geschwindigkeiten und die Güte angegeben werden, um mit anderen Arbeiten vergleichbar zu sein. Ist das Modell nach Basisfunktionen entwickelt (Abschnitt V.2.1, S. 120), so lassen sich die Koeffizienten für den einen Parametersatz nicht exakt in jene für den anderen umrechnen. Die Ursache dafür sind die transzendenten trigonometrischen Funktionen und die Wurzel in Gl. (II.15b) und (II.15c). Generell ist es günstig, das Modell mit den Parametern zu beschreiben,



die für die weitere Interpretation des Inversionsergebnisses benutzt werden sollen (Abschnitt V.2.4, S. 125).

Ein voll tiefenabhängiges viskoelastisches Materialgesetz kann wohl kaum aus seismischen Felddaten bestimmt werden<sup>6</sup>. Die Güte  $Q$  hat daher eher qualitative Bedeutung (Abschnitt V.2.6, S. 126). In der Praxis dient sie als Maß für die Größenordnung der Dämpfung, weniger als exakter viskoelastischer Parameter. Trotzdem muss der Wert von  $Q$  Grenzen einhalten, um in den durchgeführten Berechnungen sinnvoll zu sein.

### 3 Die Lösung der Wellengleichung

Die gängigen Verfahren zur Lösung der elastischen Wellengleichung in eindimensionalen Medien entwickeln die seismische Verschiebung  $\vec{u}$  nach Zylinderfunktionen. Die von mir in den Kapiteln III und IV vorgestellte Inversionsmethode beruht darauf, dass das gemessene Wellenfeld in derselben Weise entwickelt wird. So können ausgewählte Entwicklungskoeffizienten der Daten mit numerisch ermittelten Werten verglichen werden und es ist nicht erforderlich vollständige Wellenformen zu berechnen.

Nimmt man an, dass die Materialeigenschaften nur mit der Tiefe variieren und dass die Oberfläche des Mediums eben ist und verwendet man ferner für die Flachseismik typische zylindersymmetrische Quellen (vertikaler Hammerschlag oder Explosion), so lässt sich das Wellenfeld in einfacher Weise entwickeln. In Zylinderkoordinaten sind die Fourier-Koeffizienten der Vertikalverschiebung

$$u_z(r, z, \omega) = \int_0^{\infty} G_z(p, z, \omega) J_0(p\omega r) p dp, \quad (\text{II.22a})$$

der Radialverschiebung

$$u_r(r, z, \omega) = \int_0^{\infty} G_r(p, z, \omega) J_1(p\omega r) p dp \quad (\text{II.22b})$$

und überall  $u_\varphi = 0$  für die Tangentialverschiebung. Das Wellenfeld ist zylindersymmetrisch also unabhängig vom Azimut  $\varphi$ . In der Praxis befinden sich die Empfänger (Geophone) in der Regel an der Erdoberfläche. Damit ist  $z = 0$ . In

<sup>6</sup>Siehe dazu auch Toksöz und Johnston (1981) zu Untersuchungen mit Raumwellen.

Bezug auf die Messung gibt  $r$  den Offset des Geophons an und  $p$  kann als Phasenlangsamkeit<sup>7</sup> des Wellenzuges im Fernfeld verstanden werden.

Den Weg zu einer Lösung der Form (II.22) will ich hier nur skizzieren und dabei insbesondere auf praktisch relevante Eigenarten der numerischen Lösungsverfahren hinweisen. Für eine eingehende Behandlung der Theorie zur Lösung der elastischen Differentialgleichung (II.1) unter allgemeinen Bedingungen verweise ich auf die Lehrbücher.

Die Verfahren können in zwei Kategorien eingeteilt werden. Im einen Fall wird die Differentialgleichung (II.1) in einer Darstellung des Wellenfeldes nach der Verschiebung und Spannung numerisch integriert (Abschnitt II.3.2). Im anderen Fall wird das Medium in homogene Abschnitte zerlegt und das Wellenfeld durch elastische Potentiale ausgedrückt, für die sich Lösungen unmittelbar angeben lassen (Abschnitt II.3.3). Beide Vorgehensweisen profitieren von einem Separationsansatz, der nur für rein tiefenabhängige Materialeigenschaften zum Ziel führt (Abschnitt II.3.1). Wird das Medium in homogene Schichten zerlegt, führen beide Verfahren jeweils zu Matrixalgorithmen, die sich numerisch bequem realisieren lassen (Abschnitt II.3.4, S. 47).

### 3.1 Eindimensionales Medium

Die Gleichung (II.1) ergibt ein System partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die elastische Verschiebung  $\vec{u}$ . Zusammen mit der Forderung, dass die Erdoberfläche spannungsfrei sein muss und dass alle Verschiebungen physikalisch durch den Quellterm verursacht sein müssen, also keine Wellen von außen in das Untersuchungsgebiet einfallen, ergibt sich ein Randwertproblem. Zum Auffinden der Lösung wird versucht, die partiellen Differentialgleichungen durch einen geeigneten Separationsansatz in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen umzuwandeln. Dies ist nicht in jedem Koordinatensystem

---

<sup>7</sup>Die zum Offset  $r$  konjugierte Größe ist die Wellenzahl  $k = p\omega$ . Hier wird jedoch nicht nach der Wellenzahl, sondern der Phasenslowness  $p$  entwickelt. Diese, für die Reflektivitätsmethode (Müller, 1985) typische, Darstellung wird aus mehreren Gründen gewählt. Wird das Medium durch homogene Schichten beschrieben (Abschnitt II.3.4, S. 47), so werden die Anschlussbedingungen an Schichtgrenzen Frequenz-unabhängig, wenn sie bezüglich der Phasenslowness formuliert werden. Oder anders ausgedrückt: Die Phasenslowness ist gleich dem Strahlparameter der Raumwellen-Näherung. Aus diesem Grund werden homogene Bereiche des Mediums durch horizontale Tangenten in der  $\omega, p$ -Darstellung abgebildet. Das erleichtert die Interpretation der Spektren. Allerdings werden in dieser Darstellung sowohl das Aliasing (Abschnitt III.3.1, S. 75), wie auch die Unschärfe (Abschnitt III.3.2, S. 79) der Dispersionsanalyse Frequenz-abhängig.

Wegen  $k = p\omega$  tritt beim Wechsel von der natürlichen Entwicklungsvariablen  $k$  zu  $p$  eigentlich noch ein Faktor  $\omega^2$  unter dem Integral auf. Aus Gründen der Übersichtlichkeit nehme ich diesen Faktor in das Spektrum  $G$  auf. Erst bei der Umkehroperation (Gl. (III.14), Abschnitt III.2.3, S. 72) tritt der Faktor dann explizit in Erscheinung.

möglich, gelingt aber in den praktisch relevanten Fällen der kartesischen Koordinaten, Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten (Ben-Menahem und Singh, 1981, Abschnitt 2.2 und 2.3).

Durch den Ansatz  $\vec{u}(\vec{r}, t) = \vec{u}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$  wird als erstes die Zeitabhängigkeit separiert. Die Lösung ergibt sich dann in Form der Fourier-Entwicklungskoeffizienten. Ein viskoelastisches Materialgesetz vereinfacht sich dadurch von einem Faltungsintegral (II.5a) zu einem einfachen Produkt Frequenz-abhängiger, komplexer Größen (II.6).

Ist das Material isotrop und hängen seine Eigenschaften nur von der Tiefenkoordinate  $z$  ab, so kann Gl. (II.1) in

$$\rho\omega^2 \vec{u} + \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} + (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \hat{e}_z \frac{d\lambda}{dz} \operatorname{div} \vec{u} + \frac{d\mu}{dz} \left( 2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} + \hat{e}_z \times \operatorname{rot} \vec{u} \right) = -\vec{f}_V \quad (\text{II.23})$$

umgeformt werden. Für ein sphärisch symmetrisches Medium ergibt sich der gleiche Ausdruck, wobei die Koordinate  $z$  durch  $r$  und der Einheitsvektor in  $z$ -Richtung  $\hat{e}_z$  durch  $\hat{e}_r$  zu ersetzen sind (Ben-Menahem und Singh, 1981, Gl. (1.107) und (1.108)).

Ein Medium, dessen Eigenschaften nur von einer Koordinatenrichtung abhängen, wird auch als „eindimensionales Medium“ bezeichnet. Durch die Forderung einer solchen geometrischen Eigenschaft vereinfacht sich die theoretische Formulierung und numerische Lösung des Problems erheblich. Ein eindimensionales Medium muss aber auch aus anderen, praktischen Gründen gefordert werden. Der verfügbare Messdatensatz bildet das seismische Wellenfeld in einer Dimension (maximal zwei Dimensionen) ab, nämlich entlang der Geländeoberfläche. Durch die seismische Messung werden tiefenabhängige Eigenschaften quasi auf die Oberfläche projiziert. Zur Bestimmung seismischer Geschwindigkeiten müssen Wellenlängen entlang der Oberfläche gemessen werden. Die Messung ist aufgrund der Unschärferelation (siehe Abschnitt III.3.2, S. 79) umso genauer, je größer der Offsetbereich ist, über den die Messung erfolgt. Das gilt sowohl für die Bestimmung von Scheingeschwindigkeiten in der Refraktionsseismik, wie für die Bestimmung von Phasengeschwindigkeiten der Oberflächenwellen. Starke laterale Variationen der Materialeigenschaften schränken den Offsetbereich ein, in dem sich Wellen einheitlicher Phasenbeziehung ausbilden. Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Verfahren beruht auf der Messung von Wellenlängen und ist daher eine reine Sondiermethode.

Um endgültig zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zu gelangen, wird der Verschiebungsvektor  $\vec{u}$  bezüglich Basisvektoren dargestellt, die eine Separation erlauben.

### 3.2 „Vector Surface Harmonics“

Als besonders elegant erweist sich der Separationsansatz

$$\vec{u}(z, r, \varphi) = u_1(z) \vec{b}_1(r, \varphi) + u_2(z) \vec{b}_2(r, \varphi) + u_3(z) \vec{b}_3(r, \varphi). \quad (\text{II.24})$$

Das Vektorfeld der Verschiebung wird in Komponenten der ortsabhängigen, orthogonalen Basis (Backus, 1967)

$$\vec{b}_1 = \hat{e}_z \Phi(r, \varphi), \quad \vec{b}_2 = \text{grad } \Phi(r, \varphi) \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \hat{e}_z \times \vec{b}_2 \quad (\text{II.25})$$

dargestellt. Die  $(r, \varphi)$ -Abhängigkeit wird so auf die Basisvektoren abgewälzt. Diese sind keine Einheitsvektoren. Die Komponenten  $u_1$ ,  $u_2$  und  $u_3$  hängen nur von  $z$  ab.

Gl. (II.24) führt, in die Wellengleichung eingesetzt, auf ein Eigenwertproblem

$$(\Delta + k^2) \Phi(r, \varphi) = 0, \quad (\text{II.26})$$

die sogenannte Helmholtzgleichung. Diese wird in Zylinderkoordinaten<sup>8</sup> durch den Produktansatz

$$\Phi(r, \varphi) = e^{im\varphi} Z_m(kr), \quad m \in \mathbb{N} \quad (\text{II.27})$$

gelöst.  $Z_m$  steht dabei für eine der Besselschen Funktionen. Für jedes  $k$  und  $m$  ergibt sich mit Gl. (II.27) eine Basis (II.25), die sogenannten „Vector Surface Harmonics“ (Aki und Richards, 1980, Abschnitt 7.4.2). Die Wellengleichung lässt sich mit dieser Darstellung in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung umformen:

$$\frac{d}{dz} \vec{Y}_{m,k}(z) = A_k(z) \vec{Y}_{m,k}(z) + \vec{F}_{m,k}(z). \quad (\text{II.28})$$

Der Vektor  $\vec{Y}_{m,k}$  hat sechs Elemente, nämlich die je drei Komponenten bezüglich der Basis (II.25) der Verschiebung und der Spannung auf einer horizontalen Fläche.

Der Vektor  $\vec{F}_{m,k}$  ist eine entsprechende Entwicklung des Quellterms  $\vec{f}$  nach dieser Basis (Takeuchi und Saito, 1972, Abschnitt A.1). Aufgrund der einfachen Orthogonalitätsrelationen für die Besselfunktionen erster Art  $J_m$  werden diese

<sup>8</sup>Für ein sphärisch symmetrisches Medium lässt sich die gleiche Schreibweise ableiten, wobei die Zylinderkoordinaten  $z$ ,  $r$  und  $\varphi$  durch die Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$  und  $\varphi$  ersetzt werden müssen. Gl. (II.26) wird dann von Kugelfunktionen erfüllt, wobei  $k^2 = l(l+1)$  gilt und  $l$  die Ordnung der Kugelfunktion ist (Takeuchi und Saito, 1972; Kennett, 1983; Friederich und Dalkolmo, 1995).

in Gl. (II.27) benutzt und die Quellterme nach diesen entwickelt<sup>9</sup>, womit auch die Entwicklung für die Lösungsfunktionen festgelegt ist. Die Zylinderfunktionen (II.27) bilden ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem, so dass sich jedes Wellenfeld nach der Basis (II.25) entlang  $(r, \varphi)$  entwickeln lässt.

Die Matrix  $A_k(z)$  enthält unter anderem die von  $z$  abhängigen Materialparameter und ist unabhängig von  $m$ . Sie lässt sich so partitionieren, dass das gesamte Gleichungssystem in zwei kleinere für PSV-polarisierte und SH-polarisierte Fernfeld-Verschiebung zerfällt.

Die Lösung der elastischen Wellengleichung in Form der Entwicklungskoeffizienten  $\vec{Y}_{m,k}(z)$  wird durch Integration von Gl. (II.28) unter Berücksichtigung der Randbedingungen gefunden. Die Struktur des Problems erfordert es, zunächst oberhalb und unterhalb der Quelle jeweils zwei unabhängige Basislösungen des homogenen Systems zu bestimmen, welche die Randbedingungen erfüllen. Die endgültige Lösung wird dann als eine Linearkombination dieser Basislösungen gebildet, welche das inhomogene System erfüllt. Zur Bestimmung der Koeffizienten, mit denen die Basislösungen in die Gesamtlösung eingehen, muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Lösungsfunktionen enthalten exponentiell anwachsende Terme. Aufgrund der endlichen numerischen Rechengenauigkeit „verschlucken“ diese Terme andere, unabhängige Anteile der Lösung, die um Größenordnungen kleiner sein können. Daher neigt das Gleichungssystem dazu numerisch singular zu sein. Numerisch stabile Verfahren erfordern daher spezielle Lösungstechniken (Friederich und Dalkolmo, 1995; Buchen und Ben-Hador, 1996; Wang, 1999).

### 3.3 Elastische Potentiale

Sind die elastischen Parameter stückweise konstant, so entspricht das einem Stapel homogener Schichten. Dort wo die Schichten aneinander grenzen haben die Materialeigenschaften Diskontinuitäten erster Ordnung in  $z$ -Richtung. Innerhalb der homogenen Schicht entfallen jedoch alle Ableitungen der Materialparameter nach  $z$  in Gleichung (II.23). Zerlegt man das Wellenfeld in einen rotationsfreien Anteil  $\vec{u}_1$  und einen divergenzfreien Anteil  $\vec{u}_2$  (und den Quellterm entsprechend), so ergeben sich die einfachen Wellengleichungen

$$\left(\omega^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta\right) \vec{u}_1 = -\frac{\vec{f}_1}{\rho} \quad \text{und} \quad \left(\omega^2 + \frac{\mu}{\rho} \Delta\right) \vec{u}_2 = -\frac{\vec{f}_2}{\rho}. \quad (\text{II.29})$$

Offenbar beschreibt  $\vec{u}_1$  Wellen, die sich mit der Kompressionswellen-Geschwindigkeit  $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$  ausbreiten, während es sich bei  $\vec{u}_2$  um Scherwellen mit  $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$  handelt.

<sup>9</sup>Siehe Abschnitt II.3.5, S. 48 und A.4.5, S. 222 im Anhang, sowie bei Sommerfeld (1978b, §31).

Diese Zerlegung des Wellenfeldes in Anteile kanonischer Wellentypen führt auf eine Darstellung der drei Komponenten des Verschiebungsvektors  $\vec{u}$  durch drei skalare elastische Potentiale  $\phi$ ,  $\psi$  und  $\chi$  gemäß

$$\vec{u}(\vec{r}) = \text{grad } \phi(\vec{r}) + \text{rot}(\hat{e}_z \psi(\vec{r})) + \text{rot rot}(\hat{e}_z \chi(\vec{r})) \quad (\text{II.30})$$

entsprechend einer Darstellung mit ortsabhängigen Basisvektoren.

Die Wellengleichung (II.23) ist im homogenen Medium erfüllt, falls die elastischen Potentiale die einfachen skalaren Wellengleichungen (II.15) erfüllen. Dabei kann  $\phi$  direkt als Feld sich ausbreitender Kompressionswellen verstanden werden. Entsprechend repräsentieren  $\psi$  und  $\chi$  Scherwellen. Diese skalaren Wellengleichungen können nach einem klassischen Ansatz separiert werden. Dabei tritt wieder die Differentialgleichung (II.26) auf. Anstatt des Gleichungssystems (II.28) erhält man nun nicht gekoppelte, gewöhnliche Differentialgleichungen für die elastischen Potentiale, die durch einen Ansatz mit Exponentialfunktionen gelöst werden.

Die Wellengleichung für das gesamte Medium wird in dieser Darstellung mit der Reflektivitätsmethode (Müller, 1985) gelöst. Dieses Verfahren kann physikalisch sehr anschaulich vollzogen werden. Von der seismischen Quelle ausgehend, werden die Wellenfelder, welche die Quelle im elastischen Vollraum anregt, durch das Medium propagiert. An jeder Diskontinuität wird die physikalisch notwendige Stetigkeit von Verschiebung und Normalspannung dadurch erreicht, dass als sekundäre Wellen transmittierte und reflektierte Kompressions- und Scherwellen erzeugt werden. Im eben geschichteten Fall koppeln auf diese Weise nur  $\phi$  und  $\psi$ . Obwohl alle Potentiale, zumindest im Nahfeld, zu allen Komponenten der Verschiebung beitragen, stellt das Potential  $\chi$  den vollständig entkoppelten Fall für die Ausbreitung von SH-Wellen dar.

Beschreibt man auf diese Weise das komplette Wellenfeld mit allen (unendlich vielen) Mehrfachreflexionen, führt die formale Beschreibung auf eine geometrische Reihe von Matrizen, die analytisch geschlossen ausgedrückt werden kann. Beachtenswert ist, dass dieses Verfahren nicht die am Ende von Abschnitt II.3.2 angesprochenen Instabilitäten zu bewältigen hat. Formal wird das von Kennett und Kerry (1979), von Chin, Hedstrom und Thigpen (1984) sowie von Buchen und Ben-Hador (1996) gezeigt. Der Effekt ist aber auch anschaulich verständlich. Es werden physikalisch sinnvoll von der Quelle ausgehende Wellen propagiert und die Anschlussbedingungen an den Diskontinuitäten werden nur durch ausfallende (konvertierte und reflektierte) Wellen erfüllt. Auf diese Weise werden von vornherein alle physikalisch unsinnigen Lösungen (einfallende Wellen, die nicht von der Quelle ausgehen und exponentiell anwachsende Lösungsfunktionen) ausgeschlossen. Bei der formalen Integration des Differentialgleichungssystems geschieht dies, wie oben beschrieben, erst ganz zum Schluss.

### 3.4 Matrixverfahren

Die Darstellung des Mediums durch homogene Schichten ist bequem und hat auch methodische Vorteile (Abschnitt V.2.1, S. 120). Die Lösungsfunktionen können in homogenen Bereichen analytisch angegeben werden. Die Koeffizienten für die Entwicklung nach diesen elementaren Lösungsfunktionen werden durch die Rand- und Anschlussbedingungen bestimmt. Auf diese Weise entsteht ein Matrizenalgorithmus, wie die oben zitierte Reflektivitätsmethode (Müller, 1985; Ungerer, 1990). Matrizenverfahren lassen sich numerisch sehr effizient umsetzen. Ist das zu beschreibende Medium tatsächlich in weiten Teilen homogen, so genügen wenige homogene Schichten zur Beschreibung, was die Anzahl der notwendigen Rechenschritte drastisch reduziert. Außerdem sind homogene Schichten für die Darstellung des Mediums in einem Inversionsverfahren vorteilhaft. Denn Boxcar-Funktionen, mit denen homogene Schichten dargestellt werden, sind orthogonale Basisfunktionen, die alle den Mittelwert eines Parameters über einen Tiefenbereich darstellen. Polynome beispielsweise sind nicht über jedes Intervall orthogonal und haben Koeffizienten unterschiedlicher physikalischer Einheit.

Sollen auch kontinuierlich veränderliche Medien mit homogenen Schichten dargestellt werden, geschieht dies durch einen Stapel dünner Schichten. Die Schichten müssen so dünn sein, dass sie mit den auftretenden Wellenlängen nicht aufgelöst werden können. Wie fein die Ortsfunktion der Materialeigenschaften abgetastet werden soll, muss auf diese Weise im Voraus festgelegt werden. Das kann ein Nachteil sein. Ein Integrationsalgorithmus zur Lösung von Gl. (II.28) kann hingegen seine Schrittweite der Struktur wellenlängenabhängig anpassen.

Auch die Lösung des Systems von Differentialgleichungen (II.28) für die Totalverschiebung und die Totalspannung kann von den Vorteilen einer Parametrisierung nach homogenen Schichten profitieren. Auch in diesem Fall wird ausgenutzt, dass die Lösungsfunktionen in homogenen Bereichen analytisch bekannt sind. Es ergibt sich wiederum ein Matrixalgorithmus, der als „Thomson-Haskell-Algorithmus“ bekannt ist (Thomson, 1950; Haskell, 1953). Doch auch dieser führt, wie die numerische Integration von Gl. (II.28), auf ein möglicherweise numerisch singuläres Gleichungssystem und erfordert daher spezielle Lösungstechniken (Buchen und Ben-Hador, 1996; Wang, 1999).

Zur Berechnung partieller Ableitungen des Wellenfeldes nach den Materialparametern ist dieses Lösungsverfahren allerdings von erheblichem Nutzen (Tessler, 1999). In vielen Inversionsverfahren wird ein Großteil der Rechenzeit für die Bestimmung dieser Ableitungen verwendet. Das Thomson-Haskell-Verfahren führt auf Basislösungen, die als Produkte endlich vieler, analytisch bekannter Faktoren angegeben werden. Die Materialparameter der homogenen Schichten treten jeweils nur in zwei bis drei dieser Faktoren auf. Die Ausdrücke in denen sie

auftreten sind analytisch bekannt und publiziert (Aki und Richards, 1980; Kennett, 1983). Auf diese Weise können auch die partiellen Ableitungen analytisch geschlossen angegeben werden. Zu ihrer numerischen Berechnung können auf diese Weise viele Zahlenwerte mitverwendet werden, welche zur Bestimmung der Basislösungen selbst bereits berechnet wurden. Das kann den numerischen Gesamtaufwand erheblich reduzieren.

Um eine solche Formulierung mit der Reflektivitätsmethode zu realisieren, müssten viele der üblicherweise numerisch berechneten Ausdrücke analytisch ausgewertet werden. Das würde auf die gleichen Matrizen führen, die auch der Thomson-Haskell-Algorithmus verwendet, allerdings in andere Faktoren zerlegt (Buchen und Ben-Hador, 1996). Der für die Reflektivitätsmethode übliche Rekursionsalgorithmus stellt die notwendigen Ausdrücke nicht zur Verfügung.

### 3.5 Entwicklung laufender Wellen nach Besselfunktionen

Alle beschriebenen Verfahren zur Lösung der elastischen Wellengleichung stellen das Wellenfeld durch eine Entwicklung (II.22) nach Zylinderfunktionen dar. Diese schreibe ich in diesem Abschnitt exemplarisch für  $u_z$  und mit  $k = \omega p$  verkürzt als

$$u(r) = \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k dk. \quad (\text{II.31})$$

Diese Darstellung mache ich mir bei der zweistufigen Inversion zu Nutze. Für die Inversion wird das synthetische Wellenfeld nur in der Form der Entwicklungskoeffizienten  $G(k)$  berechnet. Dafür muss allerdings aus den gemessenen Seismogrammen  $u(r)$  ein entsprechendes Spektrum bestimmt werden. Unabhängig von den Eigenschaften des seismischen Mediums ist aufgrund der durchgeführten Messung bekannt, dass es sich um ein von der Quelle (bei  $r = 0$ ) ausgehendes Wellenfeld handeln muss. Im Zusammenhang mit der in Kapitel III zu besprechenden Dispersionsanalyse tritt die Frage auf, welche Eigenschaften daher für die Entwicklungskoeffizienten  $G(k)$  vorausgesetzt werden können. Unter diesem Gesichtspunkt, also der Forderung, dass die beschriebenen Wellen von einer Punktquelle *auslaufen* sollen, werde ich die Entwicklung (II.31) nun eingehender betrachten.

Sommerfeld (1978b, im Folgenden durch Som78 zitiert) führt die Zylinderfunktionen als Überlagerung ebener Wellen ein (Som78, §19.8). In Polarkoordinaten ist

$$u(r, \varphi) = A e^{i k r \cos(\varphi - \alpha)}$$

eine aus der Richtung  $\alpha$  mit Wellenzahl  $k$  einfallende und am Ort  $(r, \varphi)$  beobach-



tete ebene Welle. In diesem Sinne kann die Besselfunktion (Som78, §19.14)

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$$

als Überlagerung von aus allen Richtungen einfallenden ebenen Wellen verstanden werden, die durch Interferenz ein Feld stehender Wellen erzeugen. Für die Hankelfunktionen (Som78, §19.22)

$$H_0^{(1)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$$

und

$$H_0^{(2)}(kr) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} e^{ikr \cos(\varphi)} d\varphi$$

fallen die ebenen Wellen immer nur aus einer  $(r, \varphi)$ -Halbebene in den Ursprung  $r = 0$  ein und kulminieren dort. Für  $H_0^{(1)}$  ergeben sich aus dem Ursprung auslaufende und für  $H_0^{(2)}$  in den Ursprung einfallende Wellen (positive Wellenzahl  $k$  und  $r \geq 0$  vorausgesetzt). Der Charakter stehender und laufender Wellen spiegelt sich auch in den Fernfeldnäherungen der Zylinderfunktionen wieder, wie sie in Gl. (A.8) auf Seite 221 angegeben sind. Unter diesem Gesichtspunkt ist es verwunderlich, dass mit Gl. (II.31) eine Entwicklung nach stehenden Wellen zur Beschreibung eines laufenden Wellenfeldes gewählt wurde.

Sommerfeld (Som78, §32) weist darauf hin, dass eine Darstellung

$$u(r) = \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) H_0^{(1)}(kr) k dk, \quad (\text{II.32})$$

die für  $G(-k) = G(k)$  möglich ist, den Charakter der Wellenausbreitung deutlicher macht. In der Tat hängen die Entwicklungskoeffizienten der physikalisch relevanten Felder nur von  $k^2$  ab (Lamb, 1904; Forbriger, 1996a; Sommerfeld, 1978b, §31.13a). Allerdings wird dann mit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(k) H_0^{(1)}(kr) k dk = \int_{-\infty}^{+\infty} G(k) H_0^{(2)}(kr) k dk$$

das Feld in mathematisch und optisch identischer Weise auch nach einlaufenden

Wellen entwickelt. Im Gegensatz zur Entwicklung nach ebenen Wellen

$$u(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikr} dk$$

bestehen die Entwicklungskoeffizienten  $G(k)$  nicht aus  $\delta$ -Funktionen, die eine positive oder negative Wellenzahl selektieren. Das wäre auch mit der Bedingung  $G(-k) = G(k)$  nicht vereinbar. Gl. (II.32) trägt also nichts zum Verständnis der physikalischen Natur von  $G(k)$  bei.

Die Ursache der Verwirrung ist, dass wir es bei Gl. (II.31) in Wahrheit mit einer Entwicklung von Kugelwellen nach Zylinderfunktionen zu tun haben. Dies wird etwas verschleiert, weil bereits oben festgelegt wurde, dass die Beobachtung nur in einer Ebene ( $z = 0$ ) erfolgt. Für eine Punktquelle der Zeitabhängigkeit  $q(t)$  im Koordinatenursprung ergibt sich (bis auf einen konstanten Faktor)

$$\Phi(r, t) = \frac{q\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (\text{II.33})$$

als Lösung der skalaren Wellengleichung in Kugelkoordinaten. Das retardierte Potential (II.33) hat bis auf die  $r$ -Abhängigkeit die Form der d'Alembertschen Lösung. Der Charakter der beschriebenen Wellen ergibt sich aus der Bewegung von Flächen konstanter Phase, also für konstantes Argument von  $q$ . Es handelt sich um Wellen, die mit der Geschwindigkeit  $c$  vom Ursprung auslaufen. Die Darstellung Gl. (II.31) ergibt sich, indem die Fourier-Koeffizienten der Kugelwelle Gl. (II.33)

$$\tilde{\Phi}(r, \omega) = \tilde{q}(\omega) \frac{e^{i\omega \frac{r}{c}}}{r}$$

durch das Sommerfeldintegral (Som78, §31.14)

$$\frac{e^{ik_0(\omega)r}}{r} = \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k dk \quad \text{mit} \quad G(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2 - k_0^2(\omega)}}$$

nach Besselfunktionen entwickelt werden. Bei der Integration ist zu beachten, dass  $G(k)$  zweiblättrig ist. Für Integrationswege auf dem Riemannschen Blatt  $\Re(G) \geq 0$  ergeben sich auslaufende Wellen. Dort liegt also der Charakter der laufenden Wellen verborgen.

Eine solche Entwicklung für auslaufende Zylinderwellen mit

$$G(k) = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(k_0 r) J_0(kr) r dr$$

ist nicht bekannt.

Zur Erinnerung sei noch einmal darauf hingewiesen, dass der Separationsansatz für die Wellengleichung eines  $z$ -abhängigen Mediums auf Zylinderfunktionen führt. Eine Behandlung des Problems mit retardierten Potentialen ist daher in heterogenen Medien nicht angebracht. Eine Entwicklung nach Besselfunktionen anstatt nach Hankelfunktionen wird aufgrund der einfachen Orthogonalitätsbeziehung bevorzugt (Abschnitt A.4.5, S. 222). Diese wird von Lamb (1904) unmittelbar benutzt, um die Quelle über die Randbedingung einzubringen. Außerdem führt sie auf die Sommerfeldintegrale. Diese werden in praktisch allen Arbeiten über die Anregung seismischer Wellen durch Punktquellen benutzt, um die retardierten Potentiale im Vollraum nach Bessel-Funktionen zu entwickeln.

Formal kann die von Sommerfeld eingeführte Ausstrahlungsbedingung (Som78, §28.7a)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (II.34)$$

auf das Entwicklungsintegral

$$\begin{aligned} u(r) &= \int_0^{\infty} G(k) J_0(kr) k \, dk \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G(k) H_0^{(1)}(kr) k \, dk + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G(k) H_0^{(2)}(kr) k \, dk \quad (II.35) \end{aligned}$$

angewandt werden. Im  $H^{(1)}$ -Term von Gl. (II.35) wird die Bedingung (II.34) bereits von den Entwicklungsfunktionen erfüllt. Für den  $H^{(2)}$ -Term ist das nicht der Fall. Dessen Beiträge müssen daher im Fernfeld unter dem Integral verschwinden, also

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} G(k) H_0^{(2)}(kr) k \, dk \rightarrow 0. \quad (II.36)$$

Im Nahfeld liefert dieser Term allerdings einen notwendigen Beitrag zur Entwicklung der Kugelwellen. Im Grenzübergang für das Fernfeld erhält man dann eine Entwicklung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^{\infty} G(k) H_0^{(1)}(kr) k \, dk$$

nach auslaufenden Zylinderwellen  $H_0^{(1)}$  zu positiven Wellenzahlen. In der praktischen Anwendung ist die Bedingung Gl. (II.36) für die Entwicklungskoeffizienten  $G(k)$  eines auslaufenden Wellenfeldes leider nahezu nutzlos, weil sich das Integral für die benötigten Fälle nicht analytisch auswerten lässt.

## 4 Inversionstheorie

Die praktischen Fragestellungen der Geophysik führen in der Regel auf sogenannte „Inversionsprobleme“. Die geophysikalische Messung liefert Werte für eine physikalische Observable (im vorliegenden Fall ist das die Verschiebung der Erdoberfläche beim Durchgang eines seismischen Wellenfeldes). Aus diesen Werten sollen Rückschlüsse auf die Beschaffenheit des untersuchten Mediums gezogen werden.

Die physikalische Beschreibung des Vorgangs schlägt den umgekehrten Weg ein. Ausgehend von Grundtatsachen wie der Impulserhaltung lässt sich mathematisch formal ein physikalisches Modell<sup>10</sup> formulieren. Eine Spezialisierung für eine bestimmte Klasse von Fragestellungen (im vorliegenden Fall ist das die Ausbreitung seismischer Wellen in einem viskoelastischen Medium) führt meistens auf eine Differentialgleichung (hier die Wellengleichung (II.23)). Die Lösungsfunktionen der Differentialgleichung sagen Werte für die Observable (hier die Oberflächenverschiebung) voraus, wie sie bei einer Messung erwartet würden. In diese Funktionen, die als Lösung des *Vorwärtsproblems* bezeichnet werden, gehen die Materialeigenschaften ein (im vorliegenden Fall sind das zum Beispiel die strukturellen seismischen Geschwindigkeiten).

Die umgekehrte Frage nach den Materialeigenschaften bei gegebenen Werten der Observablen ist in der Regel nicht analytisch geschlossen beantwortbar. Diese Fragestellung wird als *inverses Problem* und das Auffinden seiner Lösung als *Inversion* bezeichnet. Ganz allgemein formuliert lautet das Inversionsproblem:

Die Lösung des Vorwärtsproblems ist ein Funktional beliebiger, aber gegebener Parameterfunktionen. Einige Werte dieser Lösung sind bekannt. Wie müssen die Parameter gewählt werden, damit sich diese Lösungswerte physikalisch sinnvoll ergeben?

Die Antwort auf diese Frage lässt sich in der Regel nur unter Zuhilfenahme zusätzlicher Annahmen und möglicherweise nur durch einen numerischen Suchprozess finden. Zusätzliche Annahmen sind notwendig, da die praktisch relevanten Inversionsprobleme prinzipiell mehrdeutig sind. Ein numerischer Suchprozess ist notwendig, wenn die gesuchten Parameter nichtlinear in das Vorwärtsproblem eingehen.

Für die Mehrdeutigkeit des Problems gibt es mehrere Ursachen. Erstens resultiert sie aus der Geometrie der Messung. Während sich das zu untersuchende Medium in drei Raumdimensionen erstreckt, werden Messwerte in der Regel

---

<sup>10</sup>Im weiteren Verlauf der Arbeit benutze ich den Begriff „Modell“ in einem anderen Sinne. Während hier die physikalische Vorstellung von Vorgängen in der Natur gemeint ist, wird später mit dem Begriff „Modell“ eine Vorstellung von den Materialeigenschaften des untersuchten Mediums bezeichnet.

nur in einer oder maximal zwei Dimensionen gesammelt (an der Oberfläche oder in einem Bohrloch). Außerdem werden nur einzelne, in Raum und Zeit diskret verteilte Werte (Samples) aufgezeichnet, während sich die gesuchten Parameterfunktionen kontinuierlich verändern. Aus einer reinen Dimensionsbetrachtung ergibt sich damit bereits, dass das Problem unterbestimmt ist.

Zweitens sind die gemessenen Werte mit statistischen oder systematischen, aber immer unbekanntem (sonst ließen sie sich korrigieren) Fehlern behaftet. Bei unterschiedlichen Werten der Fehlergrößen können verschiedene Ergebnisse des Vorwärtsproblems zum selben Messwert führen. Auch aus diesem Grund ist die Fragestellung mehrdeutig.

Die Mehrdeutigkeit lässt sich nur bewältigen, indem weitere Forderungen (Nebenbedingungen) an das Ergebnis der Inversion gestellt werden. Eine sinnvolle und häufig benutzte Forderung ist, dass die Messdaten durch ein Modell erklärt werden sollen, welches möglichst wenig strukturelle Details besitzt. Die im Ergebnis enthaltene Struktur ist dann wirklich *notwendig*, um die Messdaten zu erklären. Dagegen lässt sich immer ein detailreicheres Modell finden, welches die Daten genauso gut erklärt.

In jedes Inversionsverfahren fließen solche Nebenbedingungen ein, auch wenn diese nicht explizit genannt werden. Die zusätzlichen (und nicht aus der Messung begründeten) Forderungen zu benennen, ist eine Voraussetzung für eine verlässliche Interpretation des Ergebnisses.

## 4.1 Lineare Inversion exakter Daten

Im Folgenden werde ich das elementare, theoretische Konzept einführen, dem eine der Dispersionsanalysen folgt, so wie ich sie in Abschnitt III.2.1 diskutiere. Es handelt sich um die Inversion eines linearen Funktionals für exakte Daten, wie sie von Parker (Henry et al., 1980; Parker, 1994) formuliert wird.

Gegeben ist ein Satz von  $M$  Messwerten  $d_l$ . Diese sollen frei von systematischen und statistischen Fehlern sein. Sie können damit exakt durch die physikalische Theorie beschrieben werden. Das Vorwärtsproblem wird als Funktional  $F_l[\mathbf{m}]$  der Parameterfunktion  $\mathbf{m}$  beschrieben. Gesucht wird dasjenige  $\mathbf{m}$ , welches die Beziehung  $d_l = F_l[\mathbf{m}]$  erfüllt. Betrachtet werden außerdem nur Fälle, für welche  $F_l[\mathbf{m}]$  ein lineares Funktional ist. Es soll sich als Skalarprodukt  $F_l[\mathbf{m}] = (\mathbf{g}_l, \mathbf{m})$  eines Hilbertraumes schreiben lassen.  $\mathbf{g}_l$  wird als *Repräsentant* des Datums  $d_l$  bezeichnet. Sowohl  $\mathbf{m}$  als auch  $\mathbf{g}_l$  müssen gültige Elemente des Hilbertraumes sein. Das Skalarprodukt definiert im Hilbertraum außerdem eine Norm  $\|\mathbf{m}\|$  mit  $\|\mathbf{m}\|^2 = (\mathbf{m}, \mathbf{m})$ .

Das Inversionsproblem lautet nun: Suche ein  $\mathbf{m}$ , welches

$$d_l = (\mathbf{g}_l, \mathbf{m}) \quad \forall l \quad (\text{II.37})$$

erfüllt. Dabei sind die Repräsentanten  $\mathbf{g}_l$  durch die physikalische Theorie gegeben und bekannt. Als Ansatz wird die Parameterfunktion

$$\mathbf{m} = \sum_l \alpha_l \mathbf{g}_l \quad (\text{II.38})$$

nach den Repräsentanten entwickelt. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem

$$d_l = \sum_k \underbrace{(\mathbf{g}_l, \mathbf{g}_k)}_{=\Gamma_{lk}} \alpha_k, \quad (\text{II.39})$$

dessen Lösung die Entwicklungskoeffizienten  $\alpha_l$  und damit  $\mathbf{m}$  liefert. Die sogenannte *Gram-Matrix*  $\Gamma$  ist durch die Repräsentanten gegeben und damit, ebenso wie diese, bekannt. Formal lässt sich damit die Lösung

$$\mathbf{m} = \sum_{l,k} \mathbf{g}_l (\Gamma^{-1})_{lk} d_k \quad (\text{II.40})$$

des Inversionsproblems aus Gleichung (II.37) analytisch geschlossen angeben.

Es kann gezeigt werden, dass die Entwicklung nach Gleichung (II.39) vollständig und eindeutig ist und zum Modell kleinster Norm führt (Parker, 1994, Abschnitt 1.12). Die Definition des Skalarprodukts (und damit der Norm im Hilbertraum) wird man daher günstigerweise so wählen, dass die Forderung kleinster Norm eine sinnvolle Nebenbedingung für die Inversion darstellt.

## 4.2 Iterative Least-Squares-Inversion

Als zweite Stufe der Inversion wird in Kapitel IV eine stabilisierte Least-Squares-Inversion beschrieben. Die Behandlung nichtlinearer Inversionsprobleme und fehlerbehafteter Daten ist Lehrbuchstoff, dem ich hier nichts grundsätzlich Neues hinzufügen. Die sorgfältige Formulierung des Problems gibt jedoch bereits wichtige Einblicke in die Aussagekraft der Inversionsergebnisse. Daher stelle ich hier einige Überlegungen zu prinzipiellen Gesichtspunkten des Verfahrens voran. Dies geschieht wieder in starker Anlehnung an die von Parker (1994) benutzten Formulierungen.

### 4.2.1 Charakter der gestellten Aufgabe

Der formale Zusammenhang zwischen Messdaten und Modelleigenschaften wird nun als

$$d_j = F_j(\vec{m}) + n_j \quad (\text{II.41})$$

beschrieben. Darin kommen drei Unterschiede zum vorangegangenen Abschnitt zum Ausdruck:

Der theoretische Zusammenhang zwischen den Modellparametern  $m_l$  und den Daten  $d_j$  wird durch eine allgemeine, beliebig nichtlineare Funktion  $F_j(\vec{m})$  beschrieben. Im Gegensatz dazu wurde im vorigen Abschnitt von einem linearen Zusammenhang ausgegangen. Für eine systematische Lösung des Inversionsproblems muss die Funktion  $F_j(\vec{m})$  linearisiert werden.

Die numerische Lösung des Vorwärtsproblems erfordert eine A-priori-Parametrisierung des Modells. Damit werden die gesuchten Materialeigenschaften nicht mehr durch ortsabhängige Funktionen, sondern durch einen diskreten Satz von Koeffizienten  $m_l$  beschrieben.

Während in Abschnitt II.4.1 (S. 53) und der ersten Stufe der Inversion (Kapitel III) von fehlerfreien Daten ausgegangen wird, muss hier berücksichtigt werden, dass die Daten Signale  $n_j$  enthalten, die durch die vereinfachte physikalische Theorie nicht erklärt werden können. Ursachen für diese, unter dem Begriff „Noise“ zusammengefassten Signale, werden in Abschnitt III.4.2 (S. 90) diskutiert.

### 4.2.2 Umgang mit fehlerbehafteten Daten

Es ist nicht erwünscht die Daten  $d_j$  exakt durch die Vorwärtsbeziehung  $F_j(\vec{m})$  zu erklären, da die  $n_j$  in der physikalischen Vorstellung, die dem Zusammenhang  $F_j(\vec{m})$  zugrunde liegt, nicht existieren. Dies wird in der Regel auch gar nicht oder nur durch eine unrealistische Wahl von  $\vec{m}$  möglich sein. Für einen gegebenen Datensatz  $d_j$  und ein gegebenes Modell  $\vec{m}$  können die Residuen  $R_j = d_j - F_j(\vec{m})$  berechnet werden. Sie geben jetzt ein Maß dafür, wie gut das Modell die Messdaten im Rahmen der physikalischen Theorie erklärt.

Für die Inversion wird eine skalare Funktion<sup>11</sup> gesucht, deren Größe die Qualität der Anpassung bemisst und die für des optimale Modell  $\vec{m}_{\text{opt}}$  (beste Anpassung)

---

<sup>11</sup>In der englischsprachigen Literatur wird diese als „objective function“ bezeichnet.

sung an die Messdaten) ein Extremum annimmt. Beispiele dafür sind

$$\begin{aligned} \text{die Betragssumme} & \quad \sum_j |d_j - F_j(\vec{m})| && \stackrel{!}{=} \min \quad \text{für} \quad \vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}, \\ \text{die Betragsquadratsumme} & \quad \sum_j |d_j - F_j(\vec{m})|^2 && \stackrel{!}{=} \min \quad \text{für} \quad \vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}, \\ \text{oder das Skalarprodukt} & \quad (\text{Frazer und Sun, 1998}) \\ & \quad \frac{\sum_j d_j F_j(\vec{m})}{|\vec{d}| |\vec{F}(\vec{m})|} && \stackrel{!}{=} \max \quad \text{für} \quad \vec{m} = \vec{m}_{\text{opt}}. \end{aligned}$$

Letzteres ist der Wert der normierten Kreuzkorrelierten zum Argument  $\tau = 0$ .

In den weiteren Ausführungen wird nur die Betragsquadratsumme behandelt, da die Extremalbedingung dann für eine lineare Funktion  $F_j(\vec{m}) = (\vec{F}_0 + D\vec{m})_j$  mit der Methode der Gaußschen Fehlerquadrate gelöst werden kann.

Falls die durch  $n_j$  in Gl. (II.41) beschriebenen Messfehler voneinander unabhängig und mit einer Standardabweichung  $\sigma_j$  und dem Erwartungswert 0 statistisch normalverteilt sind, ist

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^M \frac{|d_j - F_j(\vec{m})|^2}{\sigma_j^2} \quad (\text{II.42})$$

eine Chi-Quadrat-Größe im Sinne der Statistik (Press et al., 1992, Abschnitt 15.1). In der Inversionstheorie wird sie als „Misfit“ bezeichnet. Als Maß für die Anpassung beinhaltet sie die Vorstellung, dass durch die Messung schlecht bestimmte Daten ( $\sigma_j$  groß) im Anpassungsmaß schwächer gewichtet werden. Außerdem sind die Terme der Summe jetzt dimensionslos, so dass physikalische Messwerte unterschiedlicher Einheit kombiniert werden können. Werden alle Daten genau im Rahmen der mittleren Toleranzen  $\sigma_j$  angepasst, so ergibt sich  $\chi^2 = M$ . Eine weitere Vertiefung dieses statistischen Ansatzes halte ich für überflüssig, da im vorliegenden Fall über die Messfehler zu wenig bekannt ist. Die Störsignale beruhen größtenteils selber auf seismischer Wellenausbreitung. Das Noise ist damit selbst von den gesuchten Materialeigenschaften abhängig. Die Messfehler (im Sinne der physikalischen Theorie) sind nicht normalverteilt und nicht statistisch unabhängig (Abschnitt III.4.2.2, S. 92). Es handelt sich größtenteils um systematische Fehler, deren Größe aber unbekannt ist und die daher nicht eliminiert werden können. Das ist eine für die Geophysik durchaus typische Situation (Scales und Snieder, 1998).

Trotzdem ist die in Gl. (II.42) definierte Größe eine nützliche Misfit-Funktion. Sie muss aber häufig noch weiter modifiziert werden. Das Signal-/Stör-Verhältnis



$|d_j|/\sigma_j$  hat über den gesamten Datensatz eine enorme Dynamik. Bei gleichem Noisepegel können sich die Amplituden von refraktierten p-Wellen und Oberflächenwellen um Größenordnungen unterscheiden. Eine Gewichtung der Quadratsumme mit den reziproken  $\sigma_j$  würde Anpassungsfehler in den Oberflächenwellen stärker gewichten als in den Raumwellen. Die Oberflächenwellen werden dann auf Kosten der Raumwellen angepasst. Da aber beispielsweise die refraktierten p-Wellen Information über das Medium liefern, die im Sinne der Inversion gleich wertvoll ist, wie die aus den Oberflächenwellen (wobei die eine die andere nicht ersetzen kann), wird man die Terme der Quadratsumme anders gewichten wollen. Dieser Schritt und die Wahl der Gewichtungsfaktoren lässt sich nicht neutral durch physikalische Größen begründen, die in die Messung einfließen, sondern ist eine subjektive Entscheidung des Geophysikers, der die Inversion durchführt. Der Misfit wird daher als „Fehlerquadratsumme“

$$\chi^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2 \quad (\text{II.43})$$

mit einer (in der Regel) diagonalen Gewichtungsmatrix  $W = \text{diag } w_j$  geschrieben, wobei  $w_j$  die reziproke Einheit des Datums  $d_j$  besitzt.

### 4.2.3 Formulierung nach Parker

Wie ich bereits in der Einleitung zu Abschnitt II.4 erläutert habe, sind geophysikalische Inversionsprobleme schon aufgrund einer Dimensionsbetrachtung grundsätzlich unterbestimmt. Eine Parametrisierung, die weniger Modellkoeffizienten  $m_k$  zulässt, als Daten  $d_j$  vorliegen, verschleiert dies und lässt das Problem überbestimmt erscheinen. Parker empfiehlt daher folgenden Weg zu beschreiten:

Zunächst wird eine vernünftige A-priori-Forderung an das Ergebnis der Inversion gestellt. Man sucht beispielsweise nach dem Modell, das die geringsten strukturellen Details aufweist oder das am wenigsten von möglicherweise vorhandenen Referenzwerten abweicht. Dies ist ein Schritt, der notwendig ist, um das Problem zu lösen, der sich aber nicht aus den Messdaten begründen lässt. Er unterliegt der subjektiven Einschätzung des Geophysikers, der die Inversion durchführt. Diese Vorgehensweise ist dazu geeignet, das Problem überbestimmt zu machen.

Formal wird dies wie in Abschnitt II.4.1 durch eine Norm über ein Innenprodukt in einem Hilbertraum beschrieben. Für einen Satz diskreter Modellparameter  $\vec{m}$  ergibt sich diese zu  $\|S\vec{m}\|$  und nimmt für das optimale Modell ein Minimum ein. Die Bedeutung der Norm wird durch die Koeffizienten der Matrix  $S$  bestimmt. Als *Nebenbedingung* fordert Parker, dass das Modell geeignet sein muss, die Messdaten zu erklären. Zur Lösung des Inversionsproblems stellt Parker ein Lagrange-

Funktional

$$L(\nu, \vec{m}) = \|\mathbf{S}\vec{m}\|^2 + \nu \left( \sum_j \left| \frac{d_j - F_j(\vec{m})}{\sigma_j} \right|^2 - M \right)$$

auf, das für das optimale Modell bezüglich aller  $m_k$  und des Lagrange-Parameters  $\nu$  stationär sein muss. Das bedeutet, dass ein Modell gesucht wird, welches die A-priori-Forderung  $\|\mathbf{S}\vec{m}\|^2 \stackrel{!}{=} \min$  möglichst gut erfüllt und die Daten genau im Rahmen der Messfehler  $\sigma_j$  erklärt.

Diese Herangehensweise scheitert im vorliegenden Fall daran, dass die  $\sigma_j$  nahezu unbekannt und auf keinen Fall normalverteilt und unabhängig sind. Das Konzept, die A-priori-Forderung klar verständlich zu formulieren, ohne das Modell durch eine zu willkürliche Parametrisierung von vornherein festzulegen, kann aber angewandt werden und ist geeignet die Aussagekraft des Inversionsergebnisses zu verbessern.

Für das vorliegende Problem wird eine Misfit-Funktion (II.43) um Strafterme erweitert, welche die A-priori-Forderungen beschreiben. Das optimale Modell ergibt sich dann für ein Minimum von

$$E^2 = |\mathbf{W}(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2 + \sum_l |\mathbf{S}_l(\vec{m} - \vec{m}_{\text{ref}})|^2$$

bezüglich aller  $m_k$ . Die Lösung des Inversionsproblems läuft also auf eine Minimierung von  $E^2$  hinaus. Falls  $\vec{F}(\vec{m})$  einen linearen Zusammenhang beschreibt, bildet  $E^2$  ein Paraboloid im Raum der  $\vec{m}$  und hat ein einziges Extremum, nämlich ein globales Minimum.

#### 4.2.4 Lösung nichtlinearer Inversionsprobleme

Die Funktion  $F_j(\vec{m})$  stellt im hier zu behandelnden Fall den Zusammenhang zwischen den Materialparametern des Mediums und den Entwicklungskoeffizienten des seismischen Wellenfeldes dar. Dieser Zusammenhang ist nichtlinear. Für nichtlineare  $F_j(\vec{m})$  kann der Misfit  $\chi^2$  mehrere Minima besitzen. Das gilt ebenso für  $E^2$ . Während ein Mensch durch den visuellen Vergleich von gemessenen und synthetischen Daten sofort zwischen einer guten Anpassung (globales Minimum) und einer Ähnlichkeit (lokales Minimum) unterscheiden kann, ist dies für einen automatischen Algorithmus nur möglich, wenn der gesamte Modellraum abgesucht wird. Umgekehrt ist es aber in der Regel für den Operateur möglich manuell eine Voranpassung vorzunehmen und ein geeignetes Startmodell  $\vec{m}_0$  auszuwählen, für welches  $E^2(\vec{m}_0)$  im Einzugsbereich des globalen Minimums liegt. Von dort

aus ist eine systematische Suche nach dem globalen Minimum mit einem automatischen Verfahren möglich.

Trotzdem werden häufig Zufallsverfahren zur Inversion von Wellenfeldern benutzt. Um die hier gewählte Vorgehensweise zu begründen, insbesondere im Hinblick auf die Möglichkeiten, die sich durch die zweistufige Inversion ergeben (Abschnitt III.1, S. 63), klassifiziere ich hier die wichtigsten Inversionsverfahren für nichtlineare Probleme kurz und stelle sie einander gegenüber. Die ersten drei sind dabei Vertreter einer globalen Suche im Modellraum. Sie müssen benutzt werden, wenn entweder kein brauchbares Startmodell auffindbar ist oder wenn  $F_j(\vec{m})$  nicht differenzierbar ist. Die letzten beiden Verfahren führen eine lokale Optimierung durch und nutzen dazu die Differenzierbarkeit von  $F_j(\vec{m})$ . Für die Bewertung der numerischen Effizienz ist entscheidend, wie oft ein Verfahren  $\vec{F}(\vec{m})$  berechnen muss, da dies wesentlich mehr Rechenzeit erfordert als alle anderen Schritte.

- 1. Systematisches Ausprobieren**  
„Grid Search“

**Vorgehensweise:** Der Modellraum wird regelmäßig gerastert und für jeden Rasterpunkt  $E^2$  berechnet. Der kleinste Wert ergibt sich für  $\vec{m}_{\text{opt}}$ . **Bewertung:** Das Verfahren ist einfach, gründlich und bequem. Es führt bei genügend feiner Rasterung garantiert zum Ziel. Der numerische Aufwand wächst aber mit der Potenz der Dimension des Modellraumes und ist nicht zu bewältigen, wenn der Vektor  $\vec{m}$  mehr als drei oder vier Elemente hat.
- 2. Stichprobensuche**  
„Monte Carlo“

**Vorgehensweise:** Nach einem Zufallskriterium werden beliebige Punkte aus dem Modellraum ausgewählt und  $E^2$  berechnet. Der kleinste Wert ergibt sich wieder für  $\vec{m}_{\text{opt}}$ . **Bewertung:** Der Rechenaufwand ist nur scheinbar kleiner. Für weniger berechnete Modellpunkte entspricht das einem „Grid Search“ mit schlechterer Auflösung. Ein „Grid Search“ ist in jedem Fall vorzuziehen, da er systematisch arbeitet.
- 3. Intelligentes Raten**  
„Genetic Algorithms“  
„Simulated Annealing“

**Vorgehensweise:** Wieder werden Punkte des Modellraumes nach einem Zufallskriterium ausgewählt. Das Kriterium wird aber so modifiziert, dass bevorzugt in der Umgebung bereits gefundener, kleiner Werte von  $E^2(\vec{m})$  gesucht wird. Der kleinste Wert ergibt sich wieder für  $\vec{m}_{\text{opt}}$ . **Bewertung:** Diese Verfahren entfalten ihre volle Stärke für Probleme mit diskretem Modellraum („Travelling-Salesman“-Problem). Für die Wellenfeldinversion erscheinen sie zunächst vielversprechend. Der ganze Modellraum wird abgesucht, die Abtastung wird in erfolgversprechenden Bereichen verfeinert und die Methode ist mühelos zu

implementieren. Sind jedoch die Flanken des Minimums von  $E^2(\vec{m})$  in verschiedenen Richtungen unterschiedlich steil, so wird eine Verringerung des Misfits aufgrund eines zufällig gewählten Schritts sehr unwahrscheinlich (Press et al., 1992, „Continuous Minimization by Simulated Annealing“ in Abschnitt 10.9). Diese Verfahren auf differenzierbare Probleme effizient anzuwenden erfordert mindestens soviel Sorgfalt wie die Aufstellung eines „Least-Squares“-Verfahrens.

4. **Systematische Suche** „Steepest Descent“ „Conjugate Gradients“ **Vorgehensweise:** Für ein vom Operateur ausgewähltes Startmodell  $\vec{m}_0$  werden  $E^2(\vec{m}_0)$  und  $\text{grad } E^2(\vec{m}_0)$  berechnet. Anhand des Gradienten wird bestimmt, in welcher Richtung vom Startmodell aus das Minimum liegt, das in einem iterativen Prozeß gefunden wird. **Bewertung:** Das Verfahren ist sehr robust, aber nicht so effizient, wie eine „Least Squares“-Inversion. Da nur  $\text{grad } E^2(\vec{m}_0)$  für die Linearisierung benötigt wird, ist der Speicherbedarf geringer als bei der Verwendung von „Least Squares“.
5. **Linearisierte Inversion** „Least Squares“ **Vorgehensweise:** Auch in diesem Fall wird, ausgehend von einem gegebenen Startmodell  $\vec{m}_0$ , eine systematische Suche betrieben. Allerdings wird nicht  $E^2(\vec{m})$  linearisiert, sondern direkt  $\vec{F}(\vec{m})$ . Die Extremalbedingung für  $E^2$  führt auf ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung  $\vec{m}_0 + \delta\vec{m}$  näher an  $\vec{m}_{\text{opt}}$  liegt. **Bewertung:** Das Verfahren wird umso effizienter, je besser die Linearisierung das tatsächliche Verhalten von  $\vec{F}(\vec{m})$  beschreibt. Für einen linearen Zusammenhang wird das optimale Modell in nur einem einzigen Schritt gefunden. Der Speicherbedarf kann erheblich sein, da die partiellen Ableitungen  $\partial F_j / \partial m_k$  aller Datenpunkte nach allen Modellwerten benötigt werden. Im vorliegenden Fall kann der Speicherbedarf durch einen geeigneten Aufbau des Algorithmus jedoch deutlich verringert werden (Abschnitt IV.1.6, S. 103).

#### 4.2.5 Stabilisierte Least-Squares-Inversion

Als Ausgangspunkt für die Darstellung in Kapitel IV skizziere ich nun das Konzept der iterativen, stabilisierten Least-Squares-Inversion.

Die  $F_j(\vec{m})$  werden in eine Taylor-Reihe entwickelt. Die Linearisierung ergibt sich, wenn die Reihe

$$F_j(\vec{m}) = F_j(\vec{m}_0) + \sum_k \left. \frac{\partial F_j(\vec{m})}{\partial m_k} \right|_{\vec{m}_0} (m_k - m_{0k}) + \mathcal{O}((\vec{m} - \vec{m}_0)^2) \quad (\text{II.44})$$

nach dem zweiten Glied abgebrochen wird. Gesucht wird das Minimum von

$$E^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}_0 - D\delta\vec{m})|^2 + |S\delta\vec{m}|^2 \quad (\text{II.45a})$$

mit

$$D_{jk} = \frac{\partial F_j(\vec{m})}{\partial m_k}, \quad (\text{II.45b})$$

$$\vec{F}_0 = \vec{F}(\vec{m}_0), \quad (\text{II.45c})$$

$$\delta\vec{m} = \vec{m} - \vec{m}_0 \quad (\text{II.45d})$$

und nur einem exemplarischen Strafterm  $|S\delta\vec{m}|^2$ . Die Bedingung für Stationarität

$$\frac{\partial E^2}{\partial m_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall k$$

führt auf das lineare Gleichungssystem<sup>12</sup>

$$(D^\dagger W^2 D + S^\dagger S) \delta\vec{m} = D^\dagger W^2 (\vec{d} - \vec{F}_0). \quad (\text{II.46})$$

Für ein lineares  $\vec{F}$  würde die Lösung  $\delta\vec{m}$  des Gleichungssystems in einem einzigen Schritt  $\vec{m}_{\text{opt}} = \vec{m}_0 + \delta\vec{m}$  ergeben. Für ein nichtlineares  $\vec{F}$  muss iteriert werden. Das heißt,  $\vec{m}_0$  wird auf den Wert von  $\vec{m}_0 + \delta\vec{m}$  gesetzt. Mit diesem neuen Startmodell wird das Gleichungssystem erneut aufgestellt und gelöst. Dieser Prozess wird so lange fortgesetzt, bis der Misfit oder seine Änderung pro Iterationsschritt einen bestimmten Wert unterschreiten.

Im einfachsten Fall enthält die Matrix  $S = \text{diag}(1/r_k)$  die „Suchbereiche“  $r_k$  (Wielandt, 1991). Dabei besitzt  $r_k$  dieselbe Einheit wie  $m_k$  und gibt die Umgebung um  $m_{0k}$  an, in welcher die Linearisierung eine gute Näherung ist. Der Strafterm erfüllt dann zwei Aufgaben. Einerseits sorgt er dafür, dass die Modelländerung  $\delta\vec{m}$  für jeden Iterationsschritt im Bereich einer guten Linearisierung bleibt, andererseits sorgt  $S^\dagger S$  dafür, dass das Gleichungssystem in jedem Fall regulär ist und mit Standardverfahren gelöst werden kann.

<sup>12</sup>Siehe Abschnitt A.3 (S. 219) zu Least-Squares-Problemen mit komplexwertigen Größen.



# Kapitel III

## Erste Stufe der Inversion: Dispersionsanalyse

### 1 Ziel der Dispersionsanalyse und Motivation für eine zweistufige Inversion

#### 1.1 Motivation

Dieses Kapitel wird sich mit der ersten Stufe der Inversion flachseismischer Wellenfelder befassen, mit der Dispersionsanalyse. Vier wesentliche Gründe haben mich dazu veranlasst, die Inversion in zwei Stufen aufzuteilen. Es handelt sich erstens um die bessere Linearisierbarkeit der Wellenfeldspektren, zweitens um die Reduzierung der Nebenminima in der Misfit-Funktion, drittens um eine deutliche Reduzierung der Rechenzeit und viertens um Erleichterungen beim Auffinden des Startmodells. Die nun folgende Diskussion dieser Gesichtspunkte wird anhand einiger später folgender Abbildungen noch verständlicher. Hilfreich kann die Darstellung der Greenschen Funktion für einen Fall „Schicht über Halbraum“ in Abb. III.11 (S. 88) sein. Die Vergleiche zwischen Wellenform und Spektrum werden anhand einiger Abbildungen in Kapitel VI anschaulich. Zu nennen sind Abb. VI.1 (S. 136) und Abb. VI.5 (S. 140) für den Datensatz BIETIGHEIM, Abb. VI.13 (S. 152) und Abb. VI.14 (S. 153) für den Datensatz BERKHEIM, sowie Abb. VI.43 (S. 193), Abb. VI.44 (S. 194) und Abb. VI.45 (S. 195) für den Datensatz LAPTEV-SEE.

Der Zusammenhang zwischen der Wellenform und den seismischen Modellparametern ( $v_p, v_s, \dots$ ) ist nichtlinear. Ein Großteil der Nichtlinearität liegt in der oszillatorischen Natur der Wellenformen begründet. Bei Anwendung der in Abschnitt II.3 (S. 41) besprochenen Verfahren zur Berechnung synthetischer Seismogramme wird diese Eigenschaft durch die in den Entwicklungsintegralen

$$u_z(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} G_z(\omega, p) S(\omega) J_0(\omega pr) e^{-i\omega t} p dp \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{III.1a})$$

und

$$u_r(r, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} G_r(\omega, p) S(\omega) J_1(\omega pr) e^{-i\omega t} p dp \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{III.1b})$$

auftretenden Besselfunktionen  $J_n(\omega pr)$  und harmonischen Funktionen  $e^{-i\omega t}$  in das Wellenfeld eingeführt. Der Zusammenhang zu den Modellparametern mag zunächst nicht einleuchten, da die Funktionen als Oszillationen bezüglich des Offsets  $r$  und der Zeit  $t$  verstanden werden. Für ein festes Datum (Abstastwert eines Seismogramms für  $r, t = \text{const}$ ) oszillieren diese Funktionen bezüglich der Frequenz  $\omega$  und der Phasenslowness  $p$ . Die Greensche Funktion  $G(\omega, p)$  des Mediums hat die Eigenschaft, Wellen für von den Modellparametern abhängige  $\omega$  und  $p$  zu selektieren. Daher oszilliert der Wert eines Abstastwertes bei Variation der seismischen Parameter.

$S(\omega)$  in Gl. (III.1) ist die Übertragungsfunktion der Messgeräte, also der seismischen Quelle, der Geophone und des Rekorders. Als Impulsantwort des Mediums wird die Greensche Funktion  $G(\omega, p)$  numerisch berechnet. Gemessen wird aber die Wellenform, die Faltung von  $G$  und  $S$ . Wie in Abschnitt V.1.2 (S. 116) beschrieben, kann  $S$  im Rahmen der zweiten Stufe der Inversion bestimmt werden. Für die Diskussion der Dispersionsanalyse wird das Produkt  $\hat{G} = GS$  im Folgenden zusammengefasst und als „ $\omega, p$ -Spektrum des Wellenfeldes“ bezeichnet. Abb. VI.5 (S. 140) zeigt beispielsweise  $\omega, p$ -Spektren des Datensatzes BIETIGHEIM. Entsprechende Spektren  $G$  der Greenschen Funktion, die synthetisch für das Ergebnismodell berechnet wurden, sind in Abb. VI.6 (S. 141) dargestellt. Die dazugehörige Übertragungsfunktion  $S$  ist als Impulsantwort in Abb. VI.11 (S. 146) wiedergegeben.

Für eine Least-Squares-Inversion muss der Zusammenhang zwischen den numerisch vorhergesagten Observablen und den Modellparametern (hier  $v_p, v_s, \dots$ ) durch eine abgebrochene Taylor-Reihe linearisiert werden (Gl. (II.44), Abschnitt II.4.2.5, S. 60). Die Linearisierung einer oszillierenden Funktion ist heikel. Das Spektrum der Greenschen Funktion  $G(\omega, p)$  verhält sich in der Regel gutmütiger, als die Wellenform  $u(r, t)$ .



Wird die in Gl. (II.43) (S. 57) definierte Misfit-Funktion  $\chi^2$  für ein oszillierendes  $\vec{F}(\vec{m})$  gebildet, so ergibt sich für Phasenverschiebungen um  $2\pi$  jeweils ein lokales Minimum. Die Least-Squares-Methode führt immer zum nächsten lokalen Minimum von  $\chi^2$ . Um sicherzustellen, dass das globale Minimum erreicht wird, müsste das Startmodell in diesem Fall viel sorgfältiger ausgewählt werden. Dafür liegen bei flachseismischen Untersuchungen in der Regel keine ausreichenden A-priori-Informationen vor. Eine für das  $\omega, p$ -Spektrum definierte Misfit-Funktion ist weniger heikel.

Falls die partiellen Ableitungen (II.45b) durch Differenzenquotienten genähert werden müssen, ist pro Iterationsschritt des Least-Squares-Verfahrens nicht nur ein Satz synthetischer Daten  $\vec{F}(\vec{m})$  zu berechnen. Die Berechnung muss zusätzlich für jeden Inversionsparameter durchgeführt werden, so dass die gesamte Rechenzeit stark vom Aufwand für eine Vorwärtsrechnung abhängt.

Die Korrespondenz zwischen Paaren der diskreten Fouriertransformation lässt darauf schließen, dass ein Datensatz mit Seismogrammen von  $M$  verschiedenen Offset-Positionen auch nur Information über  $M$  unabhängige Koeffizienten  $\tilde{G}(p)$  pro Frequenz enthält. Es erscheint mir daher nicht sinnvoll, mehr als  $M$  Koeffizienten der Greenschen Funktion  $G(p)$  zur Bestimmung des Erdmodells heranzuziehen. Zur Berechnung brauchbarer Wellenformen durch numerische Integration der Entwicklungintegrale (III.1) müssen allerdings nicht nur zusätzlich Besselfunktionen berechnet werden. Selbst mit optimierten Integrationsverfahren (Frazer und Gettrust, 1984; Frazer, 1988; Wang, 1997; Reimann, 1999) ist die Berechnung von wesentlich mehr als  $M$  Koeffizienten notwendig. Eine Least-Squares-Inversion, die auf die Berechnung der Wellenformen verzichtet und statt dessen die  $\omega, p$ -Spektren benutzt, kann daher um den Faktor 10 bis 20 numerisch effizienter sein als die direkte Inversion der Wellenformen.

Die iterative Least-Squares-Inversion, mit der das Erdmodell bestimmt werden soll, muss mit einem A-priori-Startmodell begonnen werden. Damit die Inversion zum globalen Minimum der Fehlerfunktion  $\chi^2$  und damit zum optimalen Modell konvergieren kann, muss das Startmodell bereits im Einzugsbereich des globalen Minimums liegen. Das heißt, es muss bereits vor der Inversion sichergestellt werden, dass das vom Startmodell aus nächste lokale Minimum auch das globale Minimum ist. Die verfügbaren A-priori-Informationen reichen bei flachseismischen Fragestellungen häufig nicht dazu aus. Das Startmodell muss durch eine manuelle „Versuch-und-Irrtum“-Prozedur gefunden werden. Auch hierbei ist ein Vergleich des  $\omega, p$ -Spektrums der Daten mit einer numerisch berechneten Greenschen Funktion aufschlussreicher. Die in den Wellenformen interferierenden Moden sind in den Spektren klar getrennt<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Siehe dazu auch Abb. III.11 auf Seite 88 und die Erläuterungen in Abschnitt III.4.1, S. 89.

## 1.2 Aufgabenstellung

Zum weiteren Gebrauch in diesem Kapitel werde ich die Entwicklungsintegrale (III.1) für die Fourier-Koeffizienten der Verschiebung an den  $M$  Geophon-Positionen  $r_j$  verkürzt schreiben, nämlich als

$$u_\eta(\omega, r_j) = \int_0^\infty \tilde{G}_\eta(\omega, p) J_\eta(\omega p r_j) p \, dp. \quad (\text{III.2})$$

Für die Radial-Komponente werden  $u_r$ ,  $\tilde{G}_r$  und  $J_1$  eingesetzt, für die Vertikal-Komponente stehen  $u_z$ ,  $\tilde{G}_z$  und  $J_0$ . Das  $\omega, p$ -Spektrum  $\tilde{G}_\eta(\omega, p) = G_\eta(\omega, p) S(\omega)$  fasst die Übertragungsfunktionen der Messapparatur (Quelle, Geophone, etc.) und des Mediums zusammen. Diese lassen sich im ersten Schritt der Inversion noch nicht trennen. Die Berechnung der Fourier-Koeffizienten  $u_\eta(\omega, r_j)$  aus den Abtastwerten der Seismogramme erfolgt über eine diskrete (schnelle) Fourier-Transformation und ist unproblematisch.

Aufgabe der Dispersionsanalyse ist es, ein  $\omega, p$ -Spektrum zu bestimmen, welches in der Beziehung (III.2) die gemessenen Seismogramme reproduziert. Die Aufgabe ist damit noch nicht eindeutig lösbar, da das Wellenfeld nur an den  $r_j$  bekannt ist. Es muss weiter gefordert werden, dass  $\tilde{G}_\eta(\omega, p)$  in Gl. (III.2) das Wellenfeld zwischen den  $r_j$  sinnvoll interpoliert und (streng genommen) hinter dem letzten Geophon (größtes  $r_j$ ) extrapoliert. Nur dann kann es in der zweiten Stufe (Kapitel IV) durch eine numerisch berechnete Greensche Funktion modelliert werden.

## 2 Methoden zur Dispersionsanalyse

### 2.1 Lineare Inversion für Zylinderwellen

Der Zusammenhang (III.2) zwischen den Seismogramm-Koeffizienten und dem  $\omega, p$ -Spektrum ist linear. Daher bietet es sich an, eine lineare Inversion durchzuführen. Das ist im Ergebnis eine Dispersionsanalyse unter Berücksichtigung der zylindersymmetrischen Wellenausbreitung, die zugleich ein  $\omega, p$ -Spektrum liefert, welches geeignet ist, die Seismogramme an den Geophon-Positionen mathematisch exakt zu reproduzieren.

Im Sinne der in Abschnitt II.4.1 (S. 53) eingeführten Grundlagen werden die Fourier-Koeffizienten  $u_\eta(\omega, r_j)$  zu einer Frequenz  $\omega$  als Daten  $d_j$  aufgefasst. In diesem Sinne müssen auch  $\tilde{G}_\eta$  als Modellfunktion und  $\mathbf{J}_\eta$  als Repräsentanten

aufgefasst werden. Der zugehörige Hilbertraum wird dann durch das Skalarprodukt

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^{\infty} a^*(p) b(p) p \, dp \quad (\text{III.3})$$

definiert. Allerdings sind die  $\mathbf{J}_\eta$  keine gültigen Elemente dieses Hilbertraumes, da

$$\|\mathbf{J}_\eta\|^2 = \int_0^{\infty} J_\eta^2(p) p \, dp \rightarrow \infty$$

nicht endlich ist. Das Skalarprodukt

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_0^{\infty} a^*(p) b(p) D(p) p \, dp$$

wird daher um eine Dämpfungsfunktion  $D(p)$  erweitert, die für quadratische Integrierbarkeit sorgt.

Als Elemente der linearen Inversion lassen sich jetzt

$$\begin{aligned} \text{die Modellfunktion} \quad \mathbf{m} &= \frac{\tilde{G}_\eta(\omega, p)}{D(p)}, \\ \text{die Repräsentanten} \quad \mathbf{g}_j &= J_\eta(\omega p r_j), \\ \text{die Daten} \quad d_j &= u_\eta(\omega, r_j) = (\mathbf{g}_j, \mathbf{m}) \quad \text{und} \\ \text{die Gram-Matrix} \quad \Gamma_{kl} &= \int_0^{\infty} J_\eta(\omega p r_k) J_\eta(\omega p r_l) D(p) p \, dp \end{aligned}$$

identifizieren. Wie in Abschnitt II.4.1 (S. 53) beschrieben, ergibt sich dann das gesuchte  $\omega, p$ -Spektrum

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) = D(p) m(p) = D(p) \sum_{j=1}^M \alpha_j J_\eta(\omega p r_j) \quad (\text{III.5})$$

aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$d_k = \sum_{l=1}^M \Gamma_{kl} \alpha_l. \quad (\text{III.6})$$

### 2.1.1 Die Wahl der Dämpfungsfunktion

In Abschnitt II.4.1 (S. 53) habe ich darauf hingewiesen, dass die oben formulierte lineare Inversion auf das Modell  $\mathbf{m}$  mit der kleinsten Norm

$$\|\mathbf{m}\|^2 = \int_0^{\infty} \frac{|\tilde{G}_\eta(\omega, p)|^2}{D(p)} p \, dp$$

führt. Die Wirkung dieser Nebenbedingung wird entscheidend durch die Dämpfungsfunktion  $D(p)$  bestimmt. Oben habe ich  $D(p)$  eingeführt, um  $\|\mathbf{J}_\eta\|$  integrierbar zu machen und somit verlangt, dass  $D(p)$  für große  $p$  rasch genug gegen Null gehen soll. Es werden dadurch  $\omega, p$ -Spektra bevorzugt, deren Wert für große  $p$  rasch gegen 0 konvergiert.

In Abschnitt III.3 (S. 73) zeige ich, dass die diskrete Abtastung des Wellenfeldes in  $r$  zu einem periodischen Spektrum in  $p$  führt (analog zum diskreten Fourier-Spektrum). Dies muss als Aliasing verstanden werden. Die durch  $D(p)$  eingeführte Nebenbedingung ist geeignet, die periodische Fortsetzung in  $\tilde{G}$  zu verhindern und die Inversion auf diese Weise eindeutig zu machen. Das wird in Abb. III.2 (S. 77) und Abb. III.3 (S. 78) veranschaulicht.

Durch eine geschickte Wahl der Norm könnte es außerdem gelingen, Nebenmaxima, die aufgrund der endlichen Länge der Geophon-Auslage entstehen, zu unterdrücken ohne das Wellenfeld durch Fensterung zu verzerren. In der Praxis wird man jedoch in erster Linie darauf Wert legen, ein Skalarprodukt zu wählen, welches auf ein analytisch lösbares Integral für die Gram-Matrix führt. Drei dazu geeignete Dämpfungsfunktionen stelle ich im Folgenden vor.

### Lorentz-Kurve als Dämpfungsfunktion

Henry, Orcutt und Parker (1980) beschreiben ein Methode zur Berechnung von Slant Stacks für die Vertikal-Komponenten zylindersymmetrischer Wellen, welche eine lineare Inversion nach den oben beschriebenen Grundzügen benutzt. In der hier benutzten Bezeichnungsweise verwenden sie eine Dämpfungsfunktion

$$D(p) = \frac{\omega^2}{(p\omega)^2 + \kappa^2}. \quad (\text{III.7})$$

Diese führt auf eine Gram-Matrix

$$\begin{aligned} \Gamma_{kl} &= \int_0^\infty \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^2} J_\eta(\omega p r_k) J_\eta(\omega p r_l) p \, dp \\ &= \begin{cases} I_\eta(\kappa r_k) K_\eta(\kappa r_l) & \text{für } r_k \leq r_l \text{ und} \\ I_\eta(\kappa r_l) K_\eta(\kappa r_k) & \text{für } r_k > r_l, \end{cases} \end{aligned}$$

die hier für Vertikal- und Horizontal-Komponente verallgemeinert ist. Von Gradstein und Ryshik (1981) wird nicht nur eine analytische Lösung des Integrals angegeben (Gl. (A.12c), S. 223), sondern die Matrix ist auch analytisch geschlossen invertierbar. Sie ist außerdem frequenzunabhängig und muss daher für alle Fourier-Koeffizienten nur einmal berechnet werden.

Die Offsetwerte seien in aufsteigender Folge sortiert, also  $r_j < r_{j+1}$ . Die modifizierten Besselfunktionen schreibe ich abgekürzt als  $p_j = I_\eta(\kappa r_j)$  und  $q_j = K_\eta(\kappa r_j)$ . Sie seien von gleicher Ordnung wie die Besselfunktion  $J_\eta(\omega p r_j)$  im Entwicklungsintegral (III.2). Dann lassen sich die von 0 verschiedenen Elemente der Inversen von  $\Gamma$  angeben als (Henry et al., 1980)

$$\begin{aligned} (\Gamma^{-1})_{j,j+1} &= \frac{1}{p_j q_{j+1} - q_j p_{j+1}} \quad \text{für } 1 \leq j < M, \\ (\Gamma^{-1})_{j+1,j} &= (\Gamma^{-1})_{j,j+1} \quad \text{für } 1 \leq j < M, \\ (\Gamma^{-1})_{j,j} &= (\Gamma^{-1})_{j,j-1} (\Gamma^{-1})_{j,j+1} (p_{j+1} q_{j-1} - q_{j+1} p_{j-1}) \\ &\quad \text{für } 1 < j < M, \\ (\Gamma^{-1})_{1,1} &= -(\Gamma^{-1})_{1,2} \frac{p_2}{p_1} \quad \text{und} \\ (\Gamma^{-1})_{M,M} &= -(\Gamma^{-1})_{M,M-1} \frac{q_{M-1}}{q_M}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $\Gamma^{-1}$  ist also tridiagonal und symmetrisch, was aus numerischer Sicht nochmals einen erheblichen Vorteil darstellt.

Damit lässt sich das durch die Inversion bestimmte  $\omega, p$ -Spektrum

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) = \frac{1}{p^2 + \left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^2} \sum_{k=1}^M J_\eta(\omega p r_k) \sum_{l=1}^M (\Gamma^{-1})_{kl} u_\eta(\omega, r_l) \quad (\text{III.8})$$

geschlossen angeben. Diese Form der Dispersionsanalyse werde ich im Folgenden auch als „HOP-Inversion“ bezeichnen. Der Dämpfungsparameter wird, wie in Abschnitt III.3 (S. 73) erläutert, sinnvollerweise als  $\kappa = 1/\overline{\Delta r}$  gewählt, wobei  $\overline{\Delta r}$  der mittlere Geophonabstand ist.

Das so bestimmte  $\tilde{G}_\eta(\omega, p)$  in das Entwicklungsintegral (III.2) eingesetzt, reproduziert die Seismogramme an den Geophon-Positionen  $r_j$  mathematisch exakt. In der Praxis kann dies allerdings auch ungünstig sein, da  $\tilde{G}$  gezwungen wird, auch nicht zylindersymmetrische Störsignale exakt zu reproduzieren. Außerdem wird nicht gefordert, dass das Wellenfeld zwischen den  $r_j$  sinnvoll interpoliert wird.

### Gauß-Kurve als Dämpfungsfunktion

Für

$$D(p) = e^{-(p\omega/\kappa)^2} \quad (\text{III.9})$$

findet man bei Gradstein und Ryshik (1981) ebenfalls ein analytisches Integral (Gl. (A.12), Seite 223), welches es erlaubt, die Gram-Matrix

$$\Gamma_{kl} = \frac{\kappa^2}{2\omega^2} \exp(-\kappa^2(r_k^2 + r_l^2)/4) I_\eta(\kappa^2 r_k r_l / 2) \quad (\text{III.10})$$

geschlossen anzugeben. Die Ordnung der modifizierten Besselfunktion erster Gattung  $I_\eta$  ist dabei identisch mit der Ordnung der Besselfunktion  $J_\eta$  in Gl. (III.2).

Diese Gram-Matrix kann nicht analytisch invertiert werden. Das  $\omega, p$ -Spektrum muss durch numerisches Lösen des linearen Gleichungssystems (III.6) bestimmt werden.

### Modifizierte Besselfunktion als Dämpfungsfunktion

Ein weiteres analytisches Integral welches Gradstein und Ryshik (1981) angeben (Gl. (A.12a), Seite 223) ist nur für die Vertikal-Komponente anwendbar. Die Dämpfungsfunktion

$$D(p) = K_0(p\omega/\kappa) \quad (\text{III.11})$$

führt auf

$$\Gamma_{kl} = \frac{1}{\omega^2 \sqrt{r_k^4 + r_l^4 + \frac{1}{\kappa^4} + 2((r_k^2 + r_l^2)/\kappa^2 - r_k^2 r_l^2)}}. \quad (\text{III.12})$$

Auch in diesem Fall muss das lineare Gleichungssystem (III.6) numerisch gelöst werden.

### 2.1.2 Boxcar als Dämpfungsfunktion

Eine weitere Möglichkeit  $\|\mathbf{J}_\eta\|$  endlich zu machen, ist das Skalarprodukt (III.3) mit einer endlichen oberen Integrationsgrenze zu definieren. Diese Vorgehensweise entspricht der Verwendung einer Boxcar-Dämpfungsfunktion

$$D(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \leq p_{\max} \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei wird für  $p_{\max}$  der Wert gewählt, ab dem mit Aliasing aufgrund der diskreten Offset-Abtastung zu rechnen ist. In diesem Fall muß jedoch nicht nur das Gleichungssystem (III.6) numerisch gelöst werden, sondern auch die Elemente der Gram-Matrix müssen durch numerische Integration berechnet werden. Das Verfahren wird dadurch sehr ineffizient.

## 2.2 Slant Stack

Ein Slant Stack kann auch als Dispersionsanalyse verstanden werden. Mit einer Fourier-Transformation verknüpft, führt er auf ein  $\omega, p$ -Spektrum. Am einfachsten wird das Spektrum

$$\tilde{G}_\eta^{\text{pw}}(\omega, p) = \sum_{j=1}^M u_\eta(\omega, r_j) f_j e^{-i\omega p r_j} \quad (\text{III.13})$$

direkt aus den Fourier-Koeffizienten der Seismogramme berechnet. Der Slant Stack ist eine Analyse nach ebenen Wellen, „pw“ steht für „plane wave“. Daher wird mit  $f_j = \sqrt{r_j}$  die geometrisch bedingte Amplitudenabnahme der Zylinderwellen aus den Daten entfernt. Es kann auch sinnvoll sein, die  $f_j$  so zu bestimmen, dass die einzelnen Seismogramme den gleichen rms-Wert besitzen. In rein elastischen Medien sollte die seismische Energie ebener Wellen nicht mit dem Offset abnehmen. Im Gegensatz zu  $\tilde{G}_\eta(\omega, p)$  ist  $\tilde{G}_\eta^{\text{pw}}(\omega, p)$  nicht unbedingt in der Lage das Wellenfeld zu rekonstruieren. In den Amplituden des so berechneten  $\omega, p$ -Spektrums bilden sich jedoch ebenfalls die Moden der Oberflächenwellen ab. Damit kann dieses auch zur Bestimmung eines Erdmodells herangezogen werden (Abschnitt V.1.3, S. 118).

Anders formuliert ist der Slant Stack (im Gegensatz zur linearen Inversion) nicht dazu gezwungen ein  $\omega, p$ -Spektrum zu erzeugen, welches das Wellenfeld an den Geophon-Positionen  $r_j$  identisch reproduziert. Ist das aufgezeichnete Wellenfeld stark durch Anteile gestört, die nicht durch eine zylindersymmetrische Ausbreitung erklärt werden können, so erweist sich der Slant Stack gegenüber der linearen Inversion in der Regel als robuster.

Abb. VI.31 (S. 181) zeigt zwei durch Slant Stack berechnete Spektren.

### 2.3 Bessel-Transformation

Das Entwicklungsintegral (III.2) kann auch als Integraltransformation<sup>2</sup> verstanden werden, zu der eine Umkehrtransformation<sup>3</sup>

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) = \int_0^\infty u_\eta(\omega, r) J_\eta(\omega pr) \omega^2 r \, dr \quad (\text{III.14})$$

existiert. Werte für den Integranden liegen jedoch nur an den Geophon-Offsets  $r_j$  vor, so dass Gl. (III.14) durch die Trapezregel genähert werden muss. Die Summenformel lautet

$$\tilde{G}_\eta(\omega, p) \approx \sum_{j=1}^M u_\eta(\omega, r_j) J_\eta(\omega pr_j) \omega^2 r_j \Delta r_j \quad (\text{III.15a})$$

mit  $r_{j+1} \geq r_j$  und

$$\Delta r_j = \frac{1}{2} \begin{cases} r_2 - r_1 & \text{für } j = 1, \\ r_M - r_{M-1} & \text{für } j = M \text{ und} \\ r_{j+1} - r_{j-1} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{III.15b})$$

Zunächst ist nicht zu erwarten, dass die bei der Messung gewählte Abtastung  $r_j$  eine gute Näherung durch Gl. (III.15) ermöglicht. Wird jedoch berücksichtigt, dass es sich bei  $u_\eta(\omega, r_j)$  um Wellen handeln muss, die von  $r = 0$  auslaufen, so kann  $J_\eta(\omega pr_j)$  in Gl. (III.15) durch  $\frac{1}{2} H_\eta^{(2)}(\omega pr_j)$  ersetzt werden (Abschnitt III.3.4, S. 84). In der Praxis habe ich damit gute Resultate erzielt. Bis auf Abb. VI.31 (S. 181) wurden alle in Kapitel VI gezeigten  $\omega, p$ -Spektren mit dieser Methode berechnet.

### 2.4 Ergänzungen

Neben den hier beschriebenen Verfahren zur Dispersionsanalyse sind natürlich weitere Ansätze denkbar. Zunächst wurde hier (außer einer Bemerkung zur

<sup>2</sup>Siehe dazu Abschnitt A.4.5 (S. 222) im Anhang.

<sup>3</sup>Hier tritt der Faktor  $\omega^2$  in Erscheinung, der bei der Definition der Wellenfeld-Entwicklung in das Spektrum  $G$  mit aufgenommen wurde (siehe Fußnote auf Seite 42). Er tritt auch in der linearen Inversion auf. Die Dämpfungsfunktionen Gl. (III.7), (III.9) und (III.11) sind bezüglich der Wellenzahl  $k = p\omega$  formuliert. Der Faktor  $\omega^2$  wird im Falle von Gl. (III.10) und (III.12) durch die Inverse der Gram-Matrix in das Spektrum eingebracht. Der Faktor  $\omega^2$  in Gl. (III.8) stammt aus der Dämpfungsfunktion.



Bessel-Transformation) kein Gebrauch von der Tatsache gemacht, dass es sich um ein Feld auslaufender Wellen handelt. Es wurde also nicht verlangt, dass die Wellenformen zwischen den Seismogrammen sinnvoll interpoliert werden können. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt II.3.5 (S. 48) könnte dies als Bedingung eingebracht werden.

Ferner könnte man die Aufgabe im Sinne kleinster Fehlerquadrate formulieren. So wäre eine quantitative Aussage über die Forderungen an das  $\omega, p$ -Spektrum möglich, ohne eine mathematisch exakte Anpassung der Seismogramme zu fordern. Im Gegenzug könnten weitere Forderungen, wie das Verschwinden von Nebenmaxima, an das Spektrum gestellt werden.

Alle Alternativen zu den vorgestellten Ansätzen führen auf Integrale von gemischten Produkten von Zylinderfunktionen, die nicht analytisch geschlossen behandelt werden können. Diese müssen über Summen-Näherungen zeitaufwendig numerisch berechnet werden. Die oben beschriebenen Methoden sind dagegen numerisch sehr effizient. Die damit erzielten Ergebnisse sind im praktischen Einsatz völlig zufriedenstellend.

### 3 Abbildungseigenschaften

Die räumliche Abtastung des Wellenfeldes entlang des Offsets  $r$  wird durch die Geländegegebenheiten und die Anzahl der zur Verfügung stehenden Geophone bestimmt. Im Gegensatz zur Abtastung in der Zeit  $t$ , ist daher nicht davon auszugehen, dass das Abtasttheorem für die räumliche Abtastung in jedem Fall erfüllt ist. Für eine eindeutige Rekonstruktion des Wellenfeldes sind mindestens zwei Geophone pro Wellenlänge erforderlich. Die Verletzung dieser Bedingung führt zu Aliasing. Die Beschränkung der Geophonauslage auf eine maximale Gesamtlänge führt zu Unschärfe und Nebenmaxima im  $\omega, p$ -Spektrum.

Anhand eines Test-Wellenfeldes werde ich das auf den folgenden Seiten näher untersuchen. Ausgehend vom asymptotischen Fernfeldverhalten der Lösung der skalaren Wellengleichung in Polarkoordinaten wird

$$u(\omega, r_j) = \frac{1}{\omega^2} \frac{e^{i\omega p_{\text{ref}} r_j}}{\sqrt{r_j}} F(r_j) \quad (\text{III.16})$$

als Test-Wellenfeld gewählt. Der Faktor  $1/\omega^2$  wurde zur Skalierung der aus  $u(\omega, r_j)$  berechneten Spektren aufgenommen (siehe auch die Fußnote auf Seite 42). Gl. (III.16) beschreibt das zweifache Integral eines  $\delta$ -Pulses, der mit der Geschwindigkeit  $1/p_{\text{ref}}$  vom Ursprung ( $r = 0$ ) fort propagiert und dessen Amplitude mit  $1/\sqrt{r}$  abnimmt. Die Funktion  $F(r_j)$  kann eine Amplitudenabnahme durch

anelastische Dämpfung oder eine, bei der Analyse angebrachte, Fensterfunktion beschreiben.

Die Dispersionsanalyse dieses Wellenfeldes ergibt in Gl. (III.8) eingesetzt als lineare „HOP-Inversion“

$$\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \frac{1}{(\omega p)^2 + \kappa^2} \sum_{k=1}^M J_0(\omega p r_k) \sum_{l=1}^M (\Gamma^{-1})_{kl} \frac{e^{i\omega p_{\text{ref}} r_l}}{\sqrt{r_l}} F(r_l). \quad (\text{III.17a})$$

Mit Gl. (III.13) ergibt sich

$$\tilde{G}^{\text{pw}}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \sum_{j=1}^M e^{i\omega r_j (p_{\text{ref}} - p)} F(r_j) \quad (\text{III.17b})$$

für einen *Slant Stack* mit  $f_j = \sqrt{r_j} \omega^2$ . Der Faktor  $\omega^2$  wurde wieder nur aus Skalierungsgründen eingeführt. Und schließlich ergibt sich aus Gl. (III.15)

$$\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \sum_{l=1}^M J_0(\omega p r_l) e^{i\omega p_{\text{ref}} r_l} F(r_l) \sqrt{r_l} \Delta r_l \quad (\text{III.17c})$$

für die genäherte *Bessel-Transformation*<sup>4</sup>. Aus der Anschauung ist klar, dass sich das in Gl. (III.16) definierte Test-Wellenfeld durch ein Amplitudenmaximum von  $\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}})$  bei  $p = p_{\text{ref}}$  für alle  $\omega$  abbilden muss. Für ein gegebenes  $\omega$  beschreibt  $\tilde{G}(p, p_{\text{ref}})$  die Abbildungseigenschaften der Dispersionsanalyse.

Für eine formale Betrachtung wird  $J_0$  in Gl. (III.17c) durch die Hankel-Funktionen ausgedrückt. Für äquidistante Geophone und  $F(r) = \sqrt{2\pi}$  ergibt sich

$$\tilde{G}(\omega, p, p_{\text{ref}}) = \sum_{l=1}^M \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( H_0^{(1)}(\omega p l \Delta r) + H_0^{(2)}(\omega p l \Delta r) \right) e^{i\omega p_{\text{ref}} l \Delta r} \sqrt{l \Delta r} \Delta r \quad (\text{III.18a})$$

und

$$\approx \frac{\Delta r}{\sqrt{\omega p}} e^{i\pi/4} \sum_{l=1}^M \left( \underbrace{e^{i l \omega \Delta r (p_{\text{ref}} + p)}}_{\textcircled{1}} e^{-i\pi/2} + \underbrace{e^{i l \omega \Delta r (p_{\text{ref}} - p)}}_{\textcircled{2}} \right), \quad (\text{III.18b})$$

wenn die Hankel-Funktionen durch ihre Fernfeldnäherungen<sup>5</sup> ersetzt werden.

<sup>4</sup>Der Übersichtlichkeit halber lasse ich den Faktor 1/2 aus Gl. (III.15) hier aus.

<sup>5</sup>Siehe Gl. (A.8) auf Seite 221 im Anhang.

### 3.1 Räumliches Aliasing und Wellen mit positiver und negativer Phasengeschwindigkeit

Ein Maximum in der Amplitude von  $G(\omega, p, p_{\text{ref}})$  ergibt sich, wenn Exponentialfunktionen gleicher Phase summiert werden. Für den  $H^{(2)}$ -Term ② in Gl. (III.18b) ist das für

$$p = p_{\text{ref}} - n \frac{2\pi}{\omega \Delta r} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.19a})$$

der Fall. Während sich für ① die Bedingung

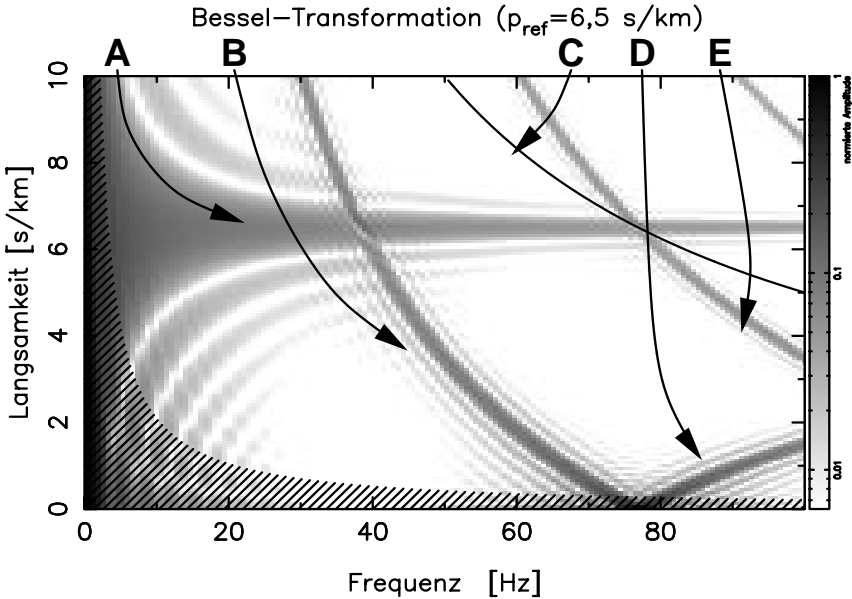
$$p = -p_{\text{ref}} + n \frac{2\pi}{\omega \Delta r} \quad (\text{III.19b})$$

ergibt. Für  $n \neq 0$  hängt der Wert  $p$  in Gl. (III.19) vom Abtastintervall  $\Delta r$  ab. Diese Maxima sind als Aliasing zu verstehen. Für  $n = 0$  ergibt ② das gesuchte Hauptmaximum der Analyse. Charakterisiert ist es dadurch, dass es als einziges Maximum für  $p > 0$  nicht von  $\Delta r$  und damit nur vom Wellenfeld selbst abhängt. Der Term ① ergibt für  $n = 0$  ein Maximum bei negativen  $p$ . Da die Dispersionsanalyse nur Werte  $p \geq 0$  erfasst, stört dies nicht. Aliasingterme mit  $n > 0$  für ① können aber im  $\omega, p$ -Spektrum auftreten. Auch sie stellen Wellen mit negativer Phasengeschwindigkeit dar, wie das rechte Wellenfeld in Abb. III.10 (S. 87) zeigt. Eliminiert werden sie, indem  $J_\eta$  als Entwicklungsfunktion in Gl. (III.5) und als Integralkern in Gl. (III.14) und allen daraus abgeleiteten Gleichungen durch  $\frac{1}{2}H_\eta^{(2)}$  ersetzt wird. Dann verschwindet auch ① in Gl. (III.18b). Durch die Wahl der Exponentialfunktion im Slant Stack Gl. (III.13) tritt dort kein Äquivalent zu Term ① auf.

In Abb. III.1 (S. 76) ist eine Dispersionsanalyse des Test-Wellenfeldes nach Gl. (III.18a) für  $p_{\text{ref}} = 6,5 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  und äquidistantes Sampling mit  $M = 24$  und  $\Delta r = 2\text{m}$  abgebildet. Markierung **A** weist auf das Hauptmaximum des Terms ② für  $n = 0$  und  $p = 6,5 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ . Alle anderen Signale entstehen durch Aliasing aufgrund des endlichen Abtastintervalls  $\Delta r$ . Markierung **D** zeigt das Aliasing für ② mit  $n = 1$ . Markierung **B** und **E** verweisen auf das Aliasing von Term ① für  $n = 1$  und  $n = 2$ . Die mit **C** gekennzeichnete Hyperbel

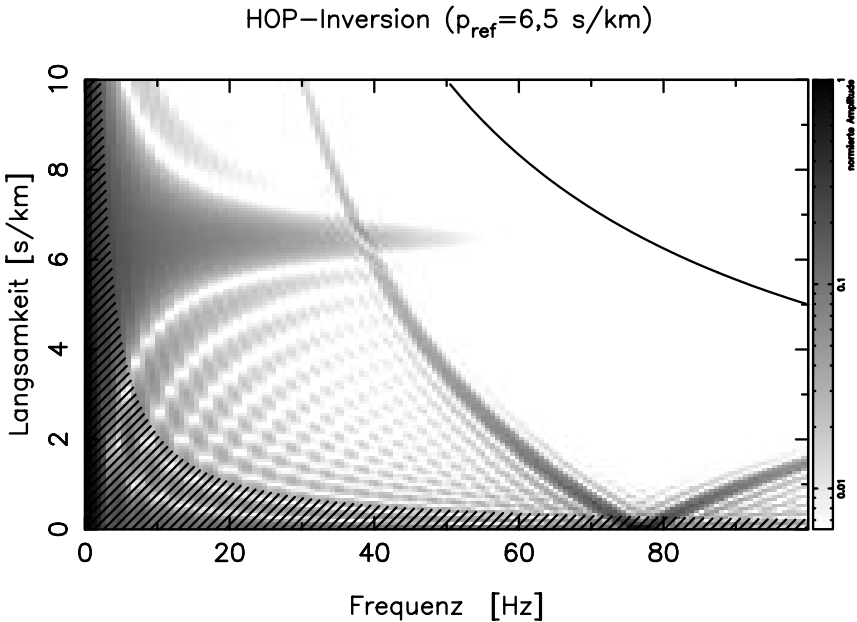
$$p = \frac{2\pi}{\omega \Delta r} \quad (\text{III.20})$$

markiert die *doppelte* Nyquist-Langsamkeit, ab der erstmals Aliasing für ② auftritt. Bei der Frequenz, bei welcher das Maximum **A** die Hyperbel schneidet, tritt der Aliasing-Ast **D** aus der Abszisse heraus. Das Maximum **B** schneidet das Hauptmaximum bereits bei der einfachen Nyquist-Langsamkeit.



**Abbildung III.1:** Ein nach Gl. (III.18a) berechnetes  $\omega, p$ -Spektrum für ein Test-Wellenfeld mit  $p_{\text{ref}} = 6,5 \frac{\text{s}}{\text{km}}$ . Die auf das Maximum normierte Amplitude wird durch die Graustufe wiedergegeben. Das Spektrum wurde für eine äquidistante Geophonauslage mit 24 Geophonen und einem Geophonabstand von 2m berechnet.

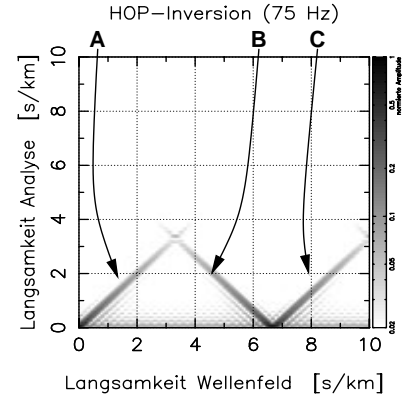
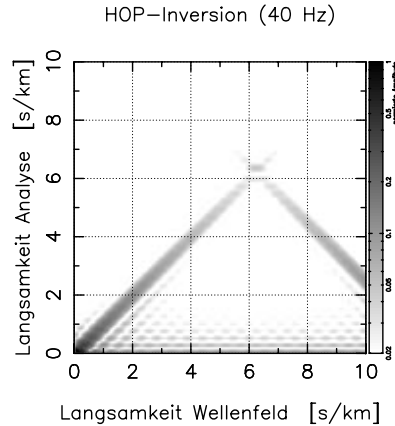
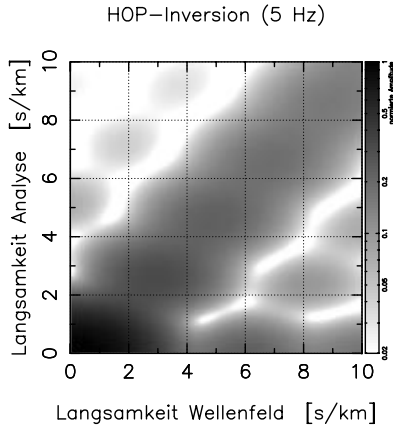
**A** ist das Hauptmaximum der Analyse. Die Hyperbel **C** nach Gl. (III.20) markiert die durch den Geophonabstand bestimmte, Frequenz-abhängige doppelte Nyquist-Langsamkeit, ab der Aliasing für Term ② in Gl. (III.18b) auftritt. Markierung **B** und **E** weisen auf Aliasing-Signale für negative Phasengeschwindigkeiten entsprechend der Bedingung Gl. (III.19b) für  $n = 1$  und  $n = 2$ . Ein Aliasing-Signal nach Gl. (III.19a) für  $n = 1$  wird durch **D** markiert. Die durch eine Hyperbel begrenzte, schraffierte Fläche gibt die Breite des Hauptmaximums an, die sich gemäß Gl. (III.22) aufgrund der Unschärferelation für die Länge der Auslage (48m) ergibt.



**Abbildung III.2:** Lineare Inversion desselben Test-Wellenfeldes wie in Abb. III.1 (S. 76). Allerdings wurde hier die HOP-Inversion nach Gl. (III.17a) zur Dispersionsanalyse benutzt. Hier wird die Wirkung der Dämpfungsfunktion Gl. (III.7) mit  $\kappa = 0,25/\text{m}$  deutlich, welche das Signal auf den Bereich unter der Hyperbel Gl. (III.20) begrenzt und die Inversion auf diese Weise eindeutig macht.

Dasselbe Test-Wellenfeld, aber mit der HOP-Inversion nach Gl. (III.17a) invertiert, ist in Abb. III.2 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die Wirkung der Dämpfungsfunktion (III.7) mit  $\kappa = 0,25/\text{m}$ . Sie unterdrückt alle Signale oberhalb der Nyquist-Langsamkeit (III.20) und macht die Inversion auf diese Weise eindeutig. Ebenfalls mit der HOP-Inversion wurden die Auflösungsfunktionen in Abb. III.3 berechnet. In diesen Darstellungen liegt das Hauptmaximum **A** auf der Diagonalen. Es tritt Aliasing für  $n = 1$  in Gl. (III.19b) (Markierung **B**) und Gl. (III.19a) (Markierung **C**) auf.

Die Herkunft der Aliasing-Signale wird auch in Abb. III.9 (S. 86) deutlich. Dort ist eine Transformation nach Gl. (III.15) sowohl für  $J_0$  als Integralkern, wie auch für  $H_0^{(1)}$  und  $H_0^{(2)}$  dargestellt. Damit wird auch nochmals deutlich, wie die aus Term ① resultierenden Signale durch Verwendung von  $H_\eta^{(2)}$  anstatt  $J_\eta$  eliminiert werden können. Letztendlich ist dann nur noch die doppelte Nyquist-Langsamkeit nach Gl. (III.20) eine effektive Grenze.



**Abbildung III.3:** Auflösungsfunktionen für die HOP-Inversion eines Test-Wellenfeldes nach Gl. (III.17a) für die Frequenzen (von links nach rechts) 5 Hz, 40 Hz und 75 Hz. In der Darstellung wird der Langsamkeit des Test-Wellenfeldes  $p_{\text{ref}}$  (Abszisse) der Wert des Spektrums für eine Analyse-Slowness  $p$  (Ordinate) gegenüber gestellt. Die Berechnung wurde für eine äquidistante Geophonauslage mit 24 Geophonen und einem Geophonabstand von 2m durchgeführt. Die auf das Maximum normierte Amplitude wird durch die Graustufe wiedergegeben.

Das Hauptmaximum **A** verläuft jeweils in der Diagonalen. Parallel zu seinen Rändern sind Nebenmaxima zu erkennen. Diese entstehen aufgrund der auf 48m beschränkten Länge der Auslage, die wie ein Boxcar-Fenster in der Offset-Koordinate wirkt. Die aufgrund der Unschärferelation Gl. (III.22) mögliche Auflösung wird mit abnehmender Frequenz rasch schlechter. Für 5Hz bedeckt das Maximum bereits die Hälfte der Abbildung.

Ein Aliasing-Signal nach Bedingung (III.19b) für negative Phasengeschwindigkeiten ist mit **B** markiert. Bei **C** handelt es sich um Aliasing nach Gl. (III.19a). Deutlich erkennbar ist die Wirkung der Dämpfungsfunktion Gl. (III.7). Diese unterdrückt die Signale für Langsamkeiten größer der Nyquist-Langsamkeit und macht die Inversion auf diese Weise eindeutig.

### 3.2 Die Unschärferelation und Nebenmaxima

Die Summe über die Terme ② in Gl. (III.18b) verschwindet, wenn die Phase der Summanden für  $l = 1 \dots M$  ein Vielfaches von  $2\pi$  durchläuft, also für

$$(p - p_{\text{ref}}) = n \frac{2\pi}{\omega M \Delta r} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{III.21})$$

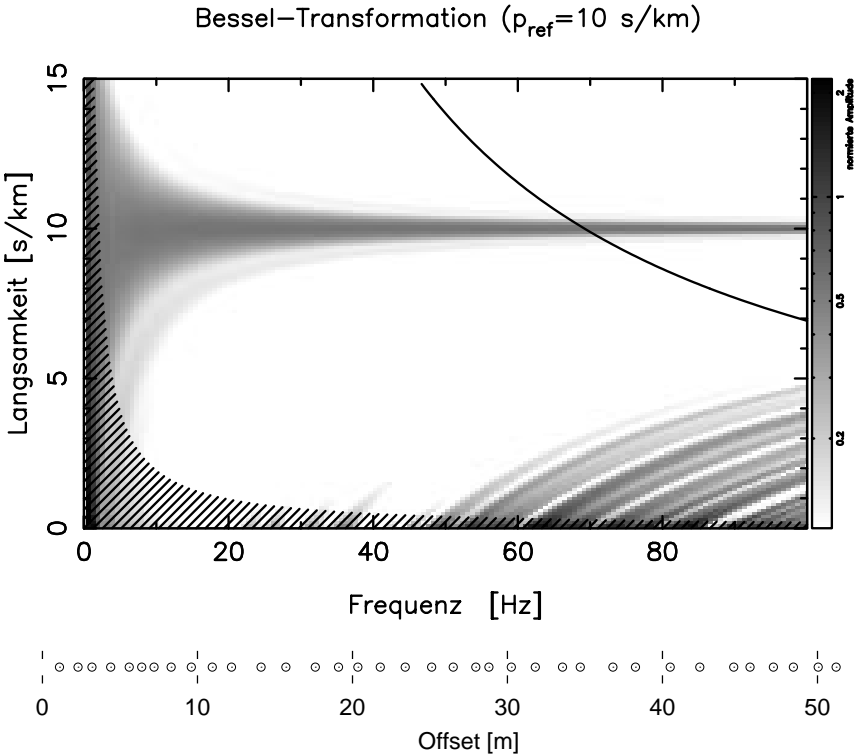
Dazwischen und insbesondere bis zum Erreichen einer Differenz  $|p - p_{\text{ref}}| = (2\pi)/(\omega M \Delta r)$  ist die Auslöschung nur unvollständig. Daraus ergibt sich eine Frequenz-abhängige Unschärfe für das Hauptmaximum bei  $p = p_{\text{ref}}$ , die mit

$$\Delta p = \frac{2\pi}{\omega L} \quad (\text{III.22})$$

und der Länge  $L = M \Delta r$  der Geophon-Auslage angegeben werden kann. Diese prinzipielle Unschärfe ist durch die schraffierte Fläche in Abb. III.1 angegeben. Die mit abnehmender Frequenz zunehmende Unschärfe wird auch in den Auflösungs-funktionen deutlich, die in Abb. III.3 dargestellt sind. Bei der praktischen Anwendung wird die tiefste verwertbare Frequenz (und damit in der Regel die Eindringtiefe der auswertbaren Oberflächenwellen) weniger durch die Übertragungseigen-schaften der Mess-Einrichtung (Geophone, Rekorder, etc.), als vielmehr durch die Unschärfe aufgrund einer endlich langen Geophon-Auslage bestimmt.

Für ganzzahlige  $n$  in Gl. (III.21) entstehen Nebenmaxima. Diese sind als „Schatten“ des Hauptmaximums in Abb. III.1 und auch Abb. III.3 zu erkennen. Sie können als Wirkung eines  $r$ -abhängigen Boxcar-Fensters (die Abtastung erfolgt nur bis  $r = L$ ) verstanden werden und lassen sich durch die Anwendung einer glatten Fensterfunktion, wie aus der Spektralanalyse bekannt, abmildern. In der Dispersionsanalyse wird eine Mode durch die Nebenmaxima quasi vervielfacht. In der zweiten Stufe der Inversion führt dies zu lokalen Minima der Fehlerfunktion (siehe Abschnitt II.4.2.2, S. 56) und kann das Auffinden des globalen Minimums erschweren.

Auch für  $L \rightarrow \infty$  hätte die Analyse eine endliche Auflösung, da die Wellen-ausbreitung in den untersuchten Medien nicht rein elastisch stattfindet. Die Amplituden klingen daher rascher als  $1/\sqrt{r}$  ab. Das wirkt sich in einer Verbreiterung der Maxima im  $\omega, p$ -Spektrum aus. Daraus lässt sich eine Information über die Wellendämpfung im Medium erschließen. Wurde jedoch eine Fensterfunktion angebracht, welche das Maximum künstlich verbreitert, kann diese Information nicht mehr voll genutzt werden. Das betrifft genauso die endliche Länge der Auslage, die ebenfalls wie ein Offset-Fenster wirkt.

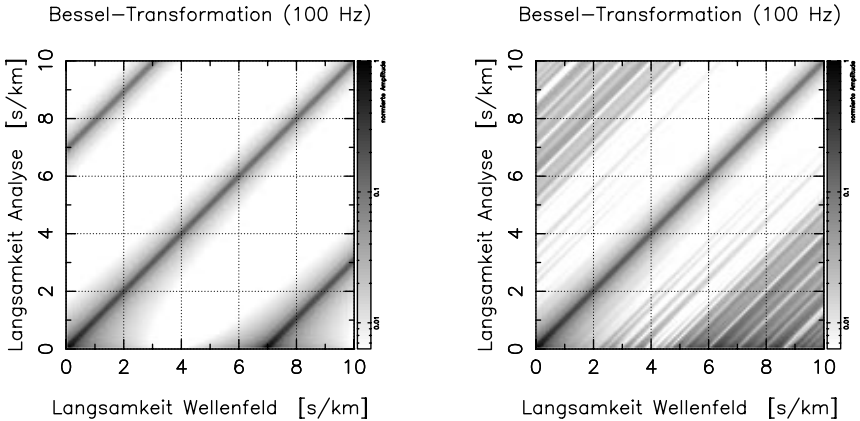


**Abbildung III.4:** Transformation eines Test-Wellenfeldes mit  $p_{\text{ref}} = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  nach Gl. (III.17c) mit  $H^{(2)}$  anstatt  $J$ . Das Wellenfeld wurde mit zufällig gewählten Geophon-Positionen abgetastet. Die Positionen der 36 Geophone sind unter dem  $\omega, p$ -Spektrum dargestellt. Es handelt sich um einen Teil der Auslage für den Datensatz KÖRSCHTAL (Abschnitt VI.3.1, S. 169).

Das Wellenfeld wurde mit einer Funktion  $F(r) = \exp(r/30\text{m})$  multipliziert und die hinteren 40% der Auslage vor der Analyse mit einem Cosinus-Fenster belegt. Die Darstellung wurde Frequenz-abhängig auf das Hauptmaximum der Analyse für  $p = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  normiert. Die Aliasing-Hyperbel ist für einen äquidistanten Geophonabstand  $\Delta r = 1,44\text{m}$  angegeben.

Durch die ungleichmäßige Verteilung der Geophone wird das Aliasing-Signal über einen größeren Bereich des  $\omega, p$ -Spektrums verteilt. Die Zylinderfunktionen der Bessel-Transformation enthalten implizit den Faktor  $1/\sqrt{p}$ . Dieser tritt in Gl. (III.18b) explizit auf. Daher nimmt die Amplitude der „verschmierten“ Aliasing-Maxima für kleine  $p$  zu und kann Raumwellen verdecken, die auch dort abgebildet werden.





**Abbildung III.5:** Gegenüberstellung der Auflösungsfunktionen der Transformation nach Gl. (III.17c) mit  $H^{(2)}$  anstatt  $J$  für äquidistante Abtastung des Wellenfeldes (links) und zufällige Geophon-Distanzen (rechts). Es handelt sich um die Auflösungsfunktionen für die Dispersionsanalysen in Abb. III.4 und III.6.

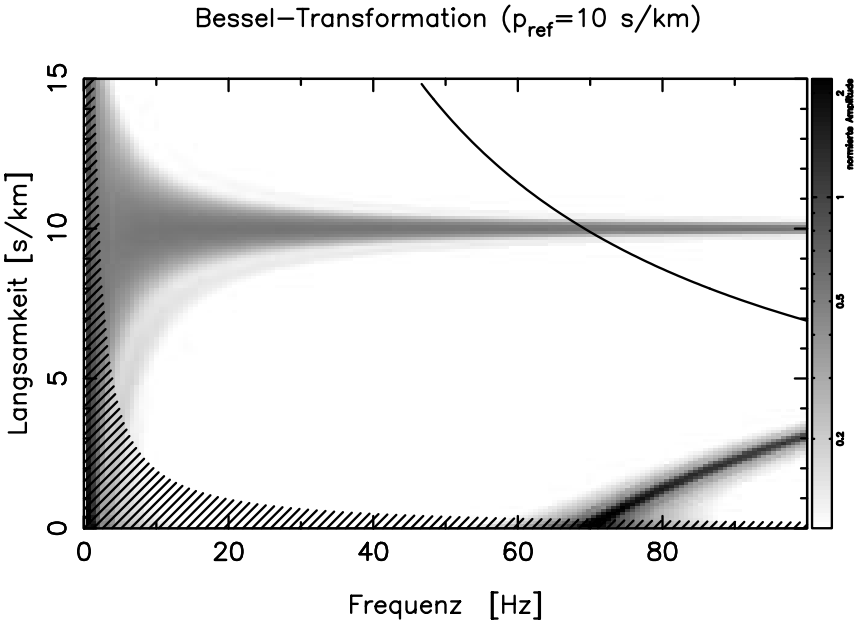
Bei unregelmäßiger Verteilung der Geophone wird das Aliasing-Signal über einen größeren Bereich „verschmiert“.

### 3.3 Wahl der Geophon-Abstände

Unschärfe und Mehrdeutigkeit (Aliasing) der Dispersionsanalyse werden durch die Wahl der Geophon-Positionen  $r_l$  bestimmt. Um ein optimales Ergebnis zu erzielen, ist es also notwendig, die Länge  $L = M \Delta r$  der Auslage entsprechend Gl. (III.22) möglichst groß und die Geophon-Abstände  $\Delta r$  gemäß Gl. (III.20) möglichst klein zu wählen. Bei einer gegebenen Anzahl  $M$  von Geophonen widersprechen sich diese Forderungen.

Neben der in Abschnitt V.1.1 (S. 115) beschriebenen Kombination mehrerer Einzelschüsse besteht die Möglichkeit, die Auslage nicht äquidistant auszuführen und so kleine  $\Delta r$  und ein großes  $L$  zu kombinieren. Eine vollständig konstruktive Summe der Terme in Gl. (III.17c) ergibt sich dann nur noch für  $n = 0$  in Gl. (III.19). Das Aliasing verteilt sich über einen größeren Bereich und seine Amplituden nehmen leicht ab.

In Abb. III.4 ist das  $\omega, p$ -Spektrum eines Test-Wellenfeldes mit  $p_{ref} = 10 \frac{s}{km}$  dargestellt. Die Transformation wurde gemäß Gl. (III.17c) für die in der Abbildung ebenfalls wiedergegebene Geophon-Konfiguration berechnet. Es wurde jedoch  $H_0^{(2)}$  anstatt  $J_0$  als Integralkern benutzt, um Anteile negativer Phasenslowness im Spektrum zu eliminieren. Bei den verwendeten Geophon-Positionen handelt es sich um einen Teil der Auslage für den Datensatz KÖRSCHTAL (Abschnitt VI.3.1,

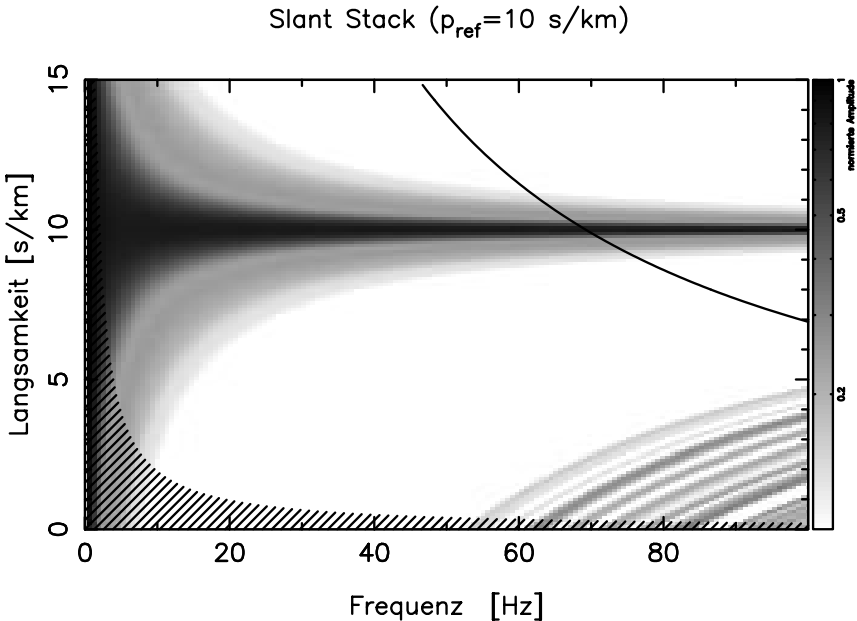


**Abbildung III.6:** Analyse eines Test-Wellenfeldes mit  $p_{\text{ref}} = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  nach Gl. (III.17c) mit  $H^{(2)}$  anstatt  $J$ . Test-Wellenfeld und Fensterfunktion sind identisch mit den Werten in Abb. III.4. Jedoch wurde äquidistant mit 36 Geophonen auf 52m abgetastet. Die Darstellung wurde Frequenz-abhängig auf das Hauptmaximum der Analyse für  $p = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  normiert.

Das Aliasing Signal konzentriert sich auf einen schmalen Bereich und ist anhand der Hyperbel Gl. (III.20) und des Hauptmaximums eindeutig identifizierbar. Die Amplitude des Aliasing ist allerdings um den Faktor zwei größer als die des Nutzsignals.

S. 169). Die Geophone wurden auf einer Strecke von ungefähr 50m Länge an den in Abb. III.4 (S. 80) gezeigt Offsets abgeworfen. Ihre Positionen wurden erst nach dem Stecken eingemessen. Dies lässt sich rascher durchführen und ist flexibler als eine äquidistante Auslage. Allerdings wird die Interpretation von Seismogrammen anhand der Kontrollausdrucke der Messapparatur erschwert.

Zum Vergleich ist in Abb. III.6 (S. 82) und Abb. III.5 (S. 81) eine Test-Analyse desselben Wellenfeldes, aber für eine äquidistante Abtastung dargestellt. Die Maximalamplitude des Aliasing für eine äquidistante Auslage hat eine größere Amplitude als das „verschmierte“ Aliasing in Abb. III.4. Das Signal lässt sich jedoch anhand der Kenntnis der Geophon-Abstände eindeutig identifizieren, während in Abb. III.4 für zufällige Geophon-Abstände ein großer Bereich des  $\omega, p$ -Spektrums

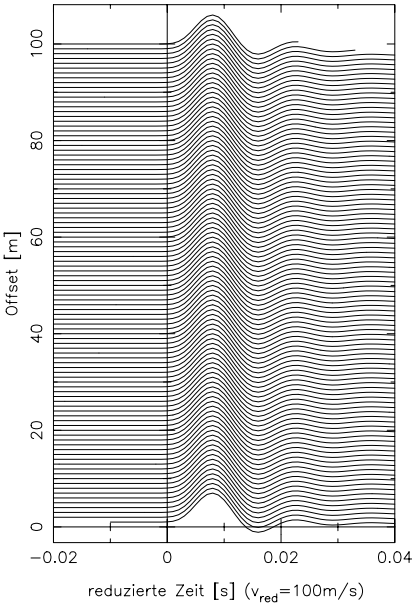


**Abbildung III.7:** Slant Stack eines Test-Wellenfeldes mit  $p_{\text{ref}} = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  gemäß Gl. (III.17b). Wellenfeld und Fensterfunktion sind identisch mit den Werten für Abb. III.4. Die Darstellung ist Frequenz-abhängig auf das Hauptmaximum der Analyse für  $p = 10 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  normiert.

Das Aliasing-Signal, welches für äquidistante Abtastung die gleiche Amplitude wie das Nutzsignal hätte, ist in seiner Amplitude reduziert und über einen größeren Bereich des  $\omega, p$ -Spektrums „verschmiert“.

verdeckt wird, aus dem eventuell wertvolle Information über Scherwellen gewonnen werden könnte. Die Dominanz des Aliasing resultiert aus dem Faktor  $1/\sqrt{p}$ , der in den Zylinderfunktionen implizit enthalten ist. In Gl. (III.18b) tritt der Faktor explizit in Erscheinung. Ein anderes Bild ergibt sich für den Slant Stack in Abb. III.7. Hier kommt die positive Wirkung zufälliger Geophon-Distanzen voll zur Geltung. Das Signal-/Stör-Verhältnis ist deshalb aber nicht unbedingt besser, denn bei der Transformation werden auch die Nutzsignale mit  $1/\sqrt{p}$  skaliert.

Soll bei der Messung auf einen Gegenschuss verzichtet werden, ist es vorteilhaft mit dem Offset anwachsende Geophon-Intervalle zu benutzen, wie beispielsweise für den Datensatz WOLFSCHLUGEN (Abschnitt VI.2.3, S. 159). Dies ist günstig, da die Dämpfung proportional zur Wellenlänge erfolgt. Außerdem wird der stark gekrümmte Teil der Laufzeitkurve so besser abgetastet.



**Abbildung III.8:** Der dargestellte, synthetisch erzeugte  $\delta$ -Puls wurde mit einem 1Hz Butterworth-Hochpass zweiter Ordnung und einem 80Hz Butterworth-Tiefpass sechster Ordnung gefiltert. Er propagiert mit  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Seine Amplitude nimmt mit  $1/\sqrt{r}$  ab, entsprechend dem Fernfeld von Zylinderwellen. Die Wellenformen liegen in Abständen von 1m vor. Die Zeitachse ist Offset-abhängig mit  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  reduziert. Die Amplitude ist Offset-abhängig mit  $\sqrt{r}$  skaliert.

### 3.4 Rekonstruktion des Wellenfeldes

In Abschnitt III.1.2 habe ich die Aufgabe formuliert, ein  $\omega, p$ -Spektrum zu finden, welches in Gl. (III.2) die gemessenen Wellenformen rekonstruiert und diese zwischen den Geophonen sinnvoll, das heißt als auslaufende Wellen, interpoliert. Als Abschluss der methodischen Aspekte untersuche ich in diesem Abschnitt die vorgestellten Verfahren zur Dispersionsanalyse hinsichtlich ihrer Fähigkeit das Wellenfeld zu rekonstruieren.

Dazu benutze ich einem Testimpuls (Abb. III.8, S. 84) mit der für zylindersymmetrische Wellenausbreitung im Fernfeld typischen Amplitudenabnahme  $\propto 1/\sqrt{r}$ . In Abb. III.9 (S. 86) ist die Transformation des Wellenfeldes gemäß Gl. (III.15) zu sehen. Das Spektrum wurde entsprechend der Terme ② und ① in Gl. (III.18b) in den Teil für  $H_0^{(2)}$  als Integralkern (in der Abbildung links oben) und  $H_0^{(1)}$  (rechts oben) zerlegt. Diese Teilspektren wurden in das Entwicklungintegral Gl. (III.2) eingesetzt. Die daraus berechneten Wellenformen und ein Teil des ursprünglichen Wellenfeldes sind in Abb. III.10 (S. 87) dargestellt.

Offenbar ist die Summen-Näherung (III.15) der Bessel-Transformation mit  $H_\eta^{(2)}$  als Kern geeignet ein Spektrum zu erzeugen, welches einerseits die Daten richtig rekonstruiert und andererseits das Wellenfeld zwischen den Geophonen sinnvoll

interpoliert. Im Nahfeld für kleine  $r$  treten allerdings Diskrepanzen auf<sup>6</sup>. Der  $H^{(1)}$ -Term der Dispersionsanalyse erzeugt dagegen ein Wellenfeld, das zwar mit einer Gruppengeschwindigkeit von  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  propagiert, aber aus Wellen negativer Phasengeschwindigkeit aufgebaut ist. Das Signal in Abb. III.10 rechts zeigt, dass die Summenformel (III.15) mit  $J_0$  als Kern nicht einmal in der Lage wäre, die Daten an den Geophon-Positionen zu rekonstruieren.

Ergänzend zur Rekonstruktion des synthetischen Testpulses werden in Abb. VI.7 (S. 142) sowie Abb. VI.8 (S. 143) rekonstruierte Wellenformen für den Datensatz BIETIGHEIM und in Abb. VI.17 (S. 156) für den Datensatz BERKHEIM gezeigt. Die Spektren wurden alle gemäß Gl. (III.15) mit  $H_0^{(2)}$  als Transformations-Kern berechnet.

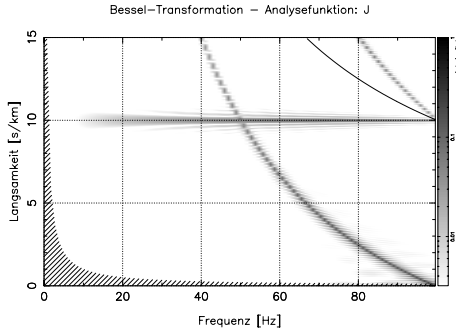
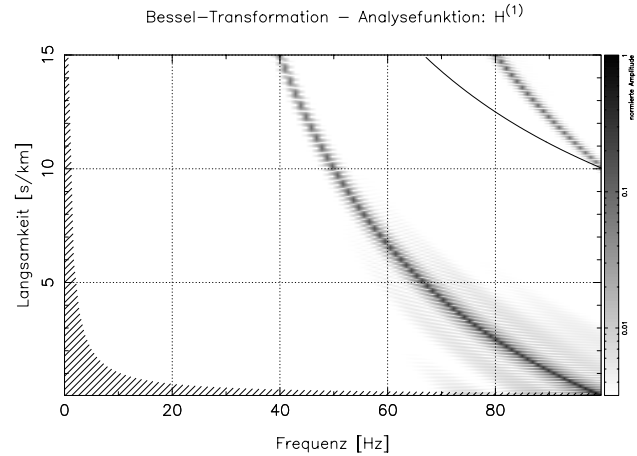
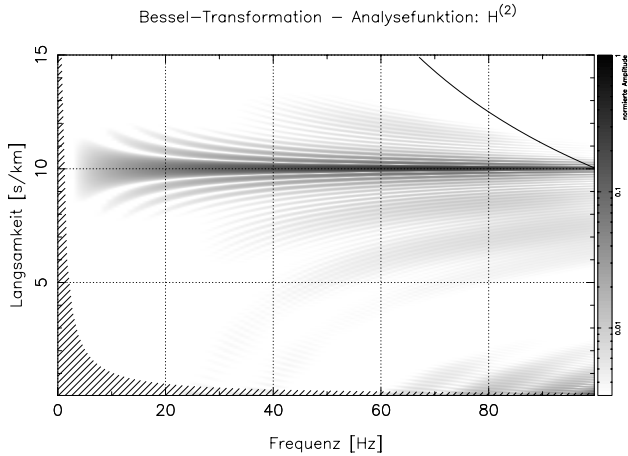
In Abschnitt III.2.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass die lineare Inversion die Eigenschaft hat ein  $\omega, p$ -Spektrum zu erzeugen, welches die Wellenformen an den Geophon-Positionen identisch reproduziert. Dies gilt jedoch nur für die Entwicklung (III.5) nach Bessel-Funktionen. Wird anstelle von  $J_\eta$  in Gl. (III.8)  $H_\eta^{(2)}$  benutzt, so verschwinden zwar die Aliasing-Signale analog zu **B** und **E** in Abb. III.1 (S. 76). Da jedoch das Hauptmaximum durch die Dämpfungsfunktion manipuliert wird, können die Wellenformen nicht mehr rekonstruiert werden. Das Gesamtspektrum (analog Abb. III.2, S. 77) rekonstruiert zwar die Wellenformen an den  $r_i$ , interpoliert dazwischen aber nicht mit auslaufenden Wellen. Damit ist die lineare Inversion nur bis zur einfachen Nyquist-Slowness, also der Hälfte von Gl. (III.20), uneingeschränkt einsetzbar.

Beim Slant Stack Gl. (III.13) treten keine Aliasing-Signale entsprechend **B** und **E** in Abb. III.1 (S. 76) auf. Allerdings ist der allgemeine Slant Stack nicht in der Lage die Wellenformen zu reproduzieren. Dazu fehlen ihm ein Phasenfaktor und ein Faktor  $1/\sqrt{\omega p}$ , wie ein Vergleich zwischen Gl. (III.17b) und Gl. (III.18b) zeigt. Der Slant Stack und die Summen-Näherung der Bessel-Transformation mit  $H_\eta^{(2)}$  sind sich allerdings sehr ähnlich.

## 4 Anatomie des $\omega, p$ -Spektrums

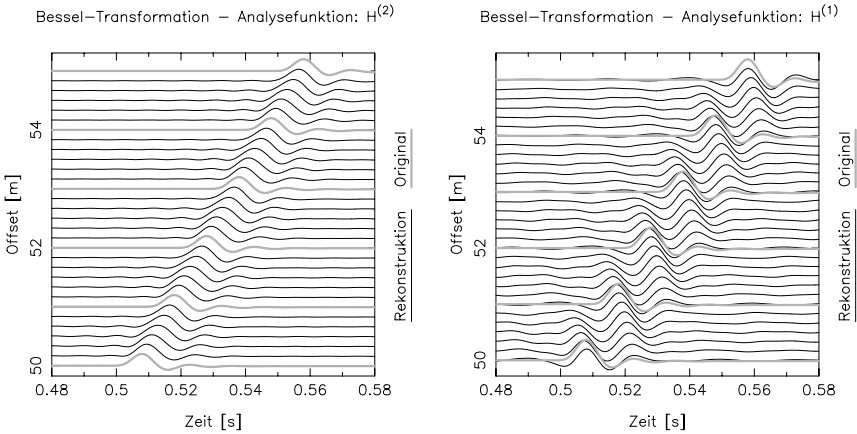
Im Verlauf der Inversion muss das  $\omega, p$ -Spektrum eines Datensatzes mehrfach qualitativ beurteilt werden. Einerseits ist dies bei der Erstellung und manuellen Verbesserung eines Startmodells für die zweite Stufe der Inversion erforderlich. Andererseits ermöglicht ein Verständnis der im  $\omega, p$ -Spektrum abgebildeten Signale eine Einschätzung der Datenqualität und damit der Aussagekraft der Inversion insgesamt. In den folgenden Abschnitten beschreibe ich die Natur der in Erscheinung tretenden Signale und Ihre Lage im  $\omega, p$ -Spektrum.

<sup>6</sup>Der  $H_\eta^{(1)}$ -Term der Integraltransformation (III.14) wird im Nahfeld auch für auslaufende Wellenfelder benötigt.



**Abbildung III.9:** Abgebildet sind die mit der Bessel-Transformation Gl. (III.15) und jeweils einer der Hankel-Funktionen als Kern berechneten  $\omega, p$ -Spektren des Testpulses aus Abb. III.8. Die kleine Abbildung links zeigt das vollständige Spektrum. Wird statt der Bessel-Funktion  $J_0 = \frac{1}{2}(H_0^{(1)} + H_0^{(2)})$  nur jeweils eine Hankel-Funktion verwendet, so zerfällt das Spektrum in die oben dargestellten Summanden entsprechend der Terme ① und ② in Gl. (III.18b). Links ist das Spektrum für  $H_0^{(2)}$  dargestellt, rechts für  $H_0^{(1)}$ . Das linke  $\omega, p$ -Spektrum rekonstruiert den Testpuls korrekt, wenn es in das Entwicklungsintegral Gl. (III.2) eingesetzt wird (siehe Abb. III.10).

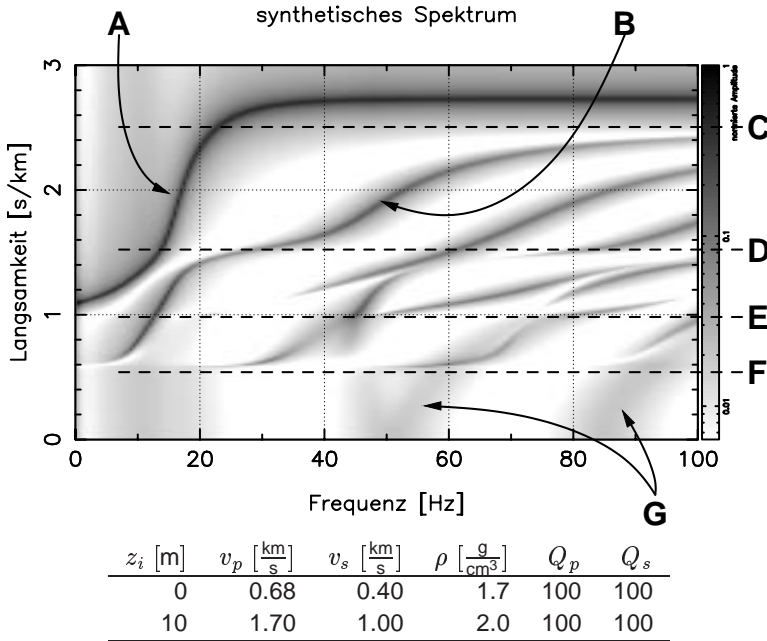
Die Hyperbeln, jeweils in der rechten oberen Ecke der Spektren, geben wieder die doppelte Nyquist-Langsamkeit an.



**Abbildung III.10:** Gezeigt sind zwei Rekonstruktionen des Testpulses (Abb. III.8) aus den  $\omega, p$ -Spektren in Abb. III.9. Dazu wurden die Spektren in das Entwicklungintegral Gl. (III.2) eingesetzt.

Die Amplituden der Seismogramme sind Offset-abhängig mit  $\sqrt{r}$  skaliert. Das mit  $H_0^{(2)}$  berechnete Spektrum (oben links in Abb. III.9) interpoliert das Wellenfeld auch zwischen den Geophon-Positionen korrekt (linkes Bild). Dagegen stellt der zweite Term der Dispersionsanalyse (oben rechts in Abb. III.9) eine Welle mit  $100 \frac{m}{s}$  Gruppengeschwindigkeit, aber negativer Phasengeschwindigkeit dar (rechtes Bild). Die Summe der beiden Spektren beschreibt eine Welle mit unendlicher Phasengeschwindigkeit (stehende Welle) und korrekter Gruppengeschwindigkeit.

Das Auftreten des Terms mit negativer Phasengeschwindigkeit muss als Aliasing, als Artefakt aufgrund der räumlichen Abtastung des Wellenfeldes verstanden werden. Sowohl das Spektrum rechts in Abb. III.9, wie auch das Wellenfeld rechts in dieser Abbildung hängen vom gewählten Geophon-Intervall  $\Delta r$  ab. Das Wellenfeld verschwindet im Fernfeld für  $\Delta r \rightarrow 0$  (Gl. (II.36), S. 51). Der  $H_0^{(2)}$ -Term der Transformation (III.15) ist unabhängig von  $\Delta r$ . Daher wird nur dieser Term für die Dispersionsanalyse eines auslaufenden Wellenfeldes benutzt.



**Abbildung III.11:** Mit der Reflektivitätsmethode berechnetes Spektrum der Greenschen Funktion für das in der Tabelle angegebene Modell einer Schicht über einem Halbraum. Als Quelle wurde eine vertikale Einzelkraft bei  $z = 0\text{m}$  an der Oberfläche des Mediums benutzt. Der Betrag der komplexen Koeffizienten  $G(\omega, p)$  wird durch die Graustufe dargestellt.

**A:** Die Fundamentalmode nähert sich für hohe Frequenzen asymptotisch einem Wert, der ungefähr gleich der Scherwellen-Geschwindigkeit in der Schicht ist. Die Asymptote für kleine Frequenzen ist ungefähr gleich  $v_s$  im Halbraum. Die Frequenz, bei welcher die Mode von der einen zur anderen Asymptote wechselt, wird durch die Mächtigkeit der Schicht bestimmt.

**B:** Erste höhere Mode der Rayleigh-Wellen.

Die höheren Moden bauen mit ihren horizontalen Tangenten nicht dispergierte Raumwellen auf. Die Lage dieser Tangenten ergibt sich daher aus den Geschwindigkeiten des Modells. **C:** Direkte Scherwelle in der Schicht. **D:** Direkte Kompressionswelle in der Schicht. **E:** Refraktierte Scherwelle aus dem Halbraum. **F:** Refraktierte Kompressionswelle aus dem Halbraum.

**G:** Leaky-Moden, die als multiple Reflexionen in der Schicht verstanden werden können. Die reflektierten Signale interferieren konstruktiv, strahlen aber Energie in den Halbraum ab. Auch die Moden zwischen den Tangenten **E** und **F** sind verlustbehaftet. Sie strahlen Scherwellen-Energie in den Halbraum ab.



## 4.1 Nutzsignale

In Abb. III.11 ist das mit der Reflektivitätsmethode berechnete Spektrum einer Greenschen Funktion für eine Schicht über einem Halbraum dargestellt. In diesem Beispiel sind alle theoretisch nutzbaren Signale erkennbar. Das mit **A** markierte Maximum ist die Fundamentalmode der Oberflächenwellen. Die resonanten Eigenschwingungen des Mediums zeichnen sich auch im Spektrum durch große Amplituden aus. Die Markierung **B** bezeichnet die erste höhere Mode der Rayleigh-Wellen. Mit wachsender Frequenz folgen weitere Obertöne. Die Maxima verlaufen entlang der Dispersionskurven für die Eigenschwingungen des Mediums, allerdings nicht mit gleichbleibender Amplitude. Anregung und Beobachtung erfolgen im Falle dieses Beispiels an der Oberfläche ( $z = 0$  m) und in vertikaler Richtung. Moden, die keine Vertikalauslenkung bei  $z = 0$  haben, bilden sich nicht im  $\omega, p$ -Spektrum ab. Das erschwert die Zuordnung der im  $\omega, p$ -Spektrum beobachteten Oberflächenwellen zur Zählweise für die freien Moden des geschichteten Halbraumes und kann bei der Interpretation höherer Moden zu Fehlern führen<sup>7</sup>. Die Dispersionskurven  $p(\omega)$  wachsen monoton mit  $\omega$ . Dies ist typisch für Medien, deren seismische Geschwindigkeit monoton mit der Tiefe  $z$  zunimmt.

Nicht dispergierte Raumwellen erscheinen im Bild der Eigenschwingungen als horizontale Tangenten der Moden. In der Abb. III.11 sind die direkte Scherwelle (**C**), die direkte Kompressionswelle (**D**), die refraktierte Scherwelle (**E**) und die refraktierte Kompressionswelle (**F**) markiert. Die Phasengeschwindigkeit der fundamentalen Rayleigh-Mode wird für große Frequenzen offenbar durch  $v_s$  in der Schicht, für kleine Frequenzen durch  $v_s$  im Halbraum bestimmt. Anschaulich verständlich wird das durch die mit  $1/\omega$  zunehmende Wellenlänge und Eindringtiefe der Moden. Die Frequenz, bei welcher der Wechsel von der Langsamkeit der oberen Asymptote zur unteren Asymptote erfolgt, ist durch das Verhältnis von Schichtmächtigkeit und Eindringtiefe bestimmt.

Aus dem bisher Gesagten lassen sich „Daumenregeln“ für die manuelle Suche nach einem Startmodell für die zweite Stufe der Inversion ableiten: Die  $\omega, p$ -Koeffizienten für große  $\omega$  und große  $p$  werden durch oberflächennahe Bereiche des Mediums beeinflusst, während sich bei kleinen  $\omega$  und kleinen  $p$  tiefer liegende Bereiche abbilden. Die strukturellen seismischen Geschwindigkeiten beeinflussen die Lage der horizontalen Asymptoten der Dispersionskurven. Die Tiefe einer Diskontinuität bestimmt die Lage steil verlaufender Kurvenabschnitte. Über den Grad einer „Daumenregel“ kommen diese Aussagen jedoch nicht hinaus. Für Medien, deren Poisson-Verhältnis deutlich von 0,25 abweicht, unterscheidet sich die Pha-

---

<sup>7</sup>Ein besonders eklatantes Beispiel diskutiere ich in Abschnitt VI.4.2 (S. 202). Aber auch die  $\omega, p$ -Spektrale des Datensatzes RIEDENBERG in Abb. VI.28 (S. 178) und der Niedrig-Geschwindigkeits-Kanäle in BERKHEIM (Abb. VI.14, S. 153) und HILZINGEN (Abb. VI.36, S. 186) veranschaulichen das Problem.

sengeschwindigkeit der Rayleigh-Wellen ebenso deutlich von der Scherwellen-Geschwindigkeit. Der Datensatz BERKHEIM (Abschnitt VI.2.2, S. 148) ist ein schönes Beispiel dafür, dass aufgrund einer Niedrig-Geschwindigkeits-Zone fast alle der genannten Regeln versagen können.

Für die Tiefenreichweite einer Untersuchung ist jedoch immer die Auflösung bei kleinen  $\omega$  und kleinen  $p$  entscheidend. Begrenzend wirken sich hier die Eigenfrequenz der Geophone und die Hochpassfrequenz des Vorverstärkers aus. In der Regel bestimmt allerdings die in Abschnitt 3.2 diskutierte Unschärfe die kleinste nutzbare Frequenz. Die Nutzbarkeit der  $\omega, p$ -Koeffizienten für kleine  $p$  wird durch die in Abschnitt 3.1 diskutierten Aliasing-Signale beeinträchtigt, aber auch dadurch, dass von der Seite einfallende Störwellen mit großen Scheingeschwindigkeiten im Datensatz vertreten sind.

In Abb. III.11 sind mit Markierung **G** Signale bezeichnet, die nicht mit der Theorie der Normalmoden verstanden werden können. Bereits für  $p < 1 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  erfolgt im gezeigten Beispiel Scherwellen-Abstrahlung in den Halbraum. Das heißt, auch die Signale zwischen den Tangenten **E** und **F** sind verlustbehaftet und keine Eigenschwingungen im Sinne der Normalmoden. Sie werden häufig als „Leaky-Moden“ bezeichnet. Unterhalb von **F** erfolgt dann auch Kompressionswellen-Abstrahlung in den Halbraum. Die mit **G** markierten Maxima können jedoch als multiple Reflexionen von Kompressionswellen in der Schicht verstanden werden, welche konstruktiv miteinander interferieren. Während eine Inversion von Dispersionskurven der Normalmoden nicht in der Lage wäre, diese Signale zu Nutzen, können sie bei der Inversion von  $\omega, p$ -Spektren zum Inversionsergebnis beitragen.

## 4.2 Störsignale

The association of noise with nondeterministic processes may be misleading since the concept of noise is also used as the garbage-can of unexplained deterministic phenomena. A treatment of this type of noise on purely statistical grounds may lead to conceptual as well as practical problems. (Scales und Snieder, 1998)

Nach Abschluss der zweiten Stufe der Inversion (Kapitel IV) wird ein Erdmodell, eine Beschreibung des untersuchten Mediums vorliegen. Dieses Erdmodell soll sich dadurch auszeichnen, dass für die Modellparameter synthetisch berechnete Daten mit den gemessenen übereinstimmen. Dies wird nicht vollständig der Fall sein können, da die Messdaten auch Signale enthalten, die nicht modelliert werden können, weil sowohl ihre Natur, wie auch ihre Ursache unbekannt sind (siehe auch Abschnitt II.4.2.2, S. 55). Diese Signale, die größtenteils aus seismischen Fremdquellen, aber auch aus nicht berücksichtigter Heterogenität oder elektri-

schen Quellen stammen, werden unter dem Begriff „Noise“ (Rauschen) oder besser dem deutschen Wort „Störsignale“ zusammengefasst.

Durch die Dispersionsanalyse werden diese Störsignale in das  $\omega, p$ -Spektrum übertragen. Dass dies prinzipiell auch für nicht zylindersymmetrische Signale möglich ist, garantiert der Satz über Bessel-Transformations-Paare (Abschnitt A.4.5, S. 222 im Anhang). Da die meisten Störungen auch einer Wellenausbreitung unterliegen, treten sie im Spektrum nicht als homogener Hintergrundpegel, sondern strukturiert auf. Deshalb will ich die wichtigsten Ursachen von Störsignalen im Folgenden beschreiben.

Eine rein statistische Behandlung der Störsignale ist in der Praxis nicht möglich. Da alle Abtastwerte gleichzeitig aufgezeichnet werden und die Signale einer Wellenausbreitung unterliegen, sind sie stark korreliert. Die Kovarianzen für eine statistische Beschreibung können jedoch nicht bestimmt werden, da weder die Gesetzmäßigkeiten der Wellenausbreitung noch die genauen Quellen a priori bekannt sind. Zwischen zwei Schüssen ist die Phasenbeziehung der Signale externer Quellen zufällig. Daher kann durch Stapelung von Einzelschüssen eine Verbesserung des Signal-/Stör-Verhältnisses erreicht werden. Störungen durch nicht berücksichtigte Heterogenität weisen jedoch in jedem Schuss dieselbe Phasenbeziehung zur Quelle auf. Andererseits kann der Verlust der Phasenbeziehung externer Quellen zwischen zwei Schüssen eine Verminderung des Aliasing durch die in Abschnitt V.1.1 (S. 115) beschriebene Verdichtung der Geophon-Auslage zunichte machen.

#### 4.2.1 Elektrische Quellen

Gegenüber allen anderen Störeinflüssen, sind das Rauschen der Messverstärker und die Verzerrungen durch die Analog-Digital-Wandlung zu vernachlässigen. Die stärksten elektrischen Störsignale beruhen auf externen Quellen und haben typische Frequenzen, wie die Bahnfrequenz von  $16\frac{2}{3}$  Hz, die Netzfrequenz von 50 Hz und deren Obertöne. Sie sind nahezu monochromatisch. Beispiele für 50Hz und 100Hz sind in Abb. VI.32 (S. 182) zu sehen. Durch Isolierung der Geophon-Kontakte vom (oft feuchten) Boden können diese Signale stark vermindert werden.

Beim Einsatz eines Kontaktschlusses als Abriss wird häufig ein sogenannter „seismoelektrischer Effekt“ beobachtet. Das Einpressen der seismischen Quelle in den Boden führt zu Ladungstrennung. Die induzierte Potentialdifferenz gegen den Boden gelangt an die Messapparatur und verursacht ein Störsignal am Anfang jeder Spur, welches die Amplitude des seismischen Signals leicht übersteigt. Durch geeignete galvanische Trennung der Quelle vom Rekorder wird dieser Effekt bereits bei der Messung vermieden.

### 4.2.2 Seismische Quellen

Den bei der Messung gezielt angeregten seismischen Wellen überlagern sich solche, die von externen Quellen angeregt werden. Als Störquellen kommen einerseits die natürliche Mikroseismik und an Geländeunebenheiten, Bäumen und Gebäuden vom Wind angeregte Signale in Betracht. Andererseits können der Straßen- und Schienenverkehr sowie industrielle Anlagen starke Quellen sein. Auch hier können monochromatische Signale angeregt werden, beispielsweise durch vom Wind angeregte Resonanzen, oder beispielsweise bei 2Hz durch Synchronmotoren (Plešinger und Wielandt, 1974).

Da die Störquellen an der Erdoberfläche anregen, ist davon auszugehen, dass die amplitudenstärksten Signale als Oberflächenwellen propagieren. Ihre Dispersion wird durch das Medium bestimmt und ist identisch mit der des Nutzsignals. Fällt die Störwelle unter einem Winkel  $\varphi$  (wobei  $\varphi = 0$  Ausbreitung parallel zum Profil bedeutet) mit einer Phasenslowness  $p_0$  ein, so erscheint sie in der Analyse (in der Projektion auf das Profil) mit einer Phasenslowness  $p = p_0 \cos \varphi$ . Es können also Werte von  $-p_0 \leq p \leq p_0$  eingenommen werden. Bei Gleichverteilung von  $\varphi$  sind die Werte  $-p_0$  und  $p_0$  besonders wahrscheinlich. Dies ist jedoch kaum von Belang, da die Störquellen häufig lokalisiert sind und während einer Einzelmessung nicht statistisch streuen. Von Bedeutung ist dagegen, dass kleine  $p$  für beliebige  $p_0$  hervorgerufen werden können, während  $p_0$  die maximale Slowness angibt, mit der das Störsignal im  $\omega, p$ -Spektrum auftreten kann. Die  $\omega, p$ -Koeffizienten werden bei kleinen Langsamkeiten daher stärker von Fehlern betroffen sein.

Wenn zur Verdichtung der Geophonauslage mehrere Einzelschüsse zu einem Datensatz kombiniert werden, hat das Nutzsignal über den ganzen Datensatz eine feste Phasenbeziehung (Abschnitt V.1.1, S. 115). Die Störsignale haben allerdings nur innerhalb der Einzelschüsse eine feste Phasenbeziehung. Während im zusammengesetzten Datensatz das Aliasing des Nutzsignals erst für größere Frequenzen auftritt, sind für das Aliasing des Störsignals weiterhin die ursprünglichen Geophon-Distanzen maßgeblich. Dieser Effekt ist beispielsweise in Abb. VI.33 (S. 183) für den Datensatz RIEDHEIM 1997 oder Abb. VI.41 (S. 191) für den Datensatz BÄRWALDE zu erkennen. Heterogenität kann aber einen vergleichbaren Effekt haben, wie die Seismogramme in Abb. VI.29 (S. 179) und das  $\omega, p$ -Spektrum in Abb. VI.28 (S. 178) links für den Datensatz RIEDENBERG zeigen.

Das seismische Hintergrundsignal charakterisiere ich hier als Störung. Es kann allerdings auch genutzt werden, um Informationen über die durch das Medium bestimmte Dispersion zu erhalten. Dazu müssen die Geophone jedoch flächenhaft angeordnet werden, um auch die Ausbreitungsrichtung bestimmen zu können (Toksöz, 1964; Asten und Henstridge, 1984; Tokimatsu et al., 1992a). Müssen dann noch mehrere Moden sicher getrennt werden können, nimmt die Anzahl der

notwendigen Geophon-Positionen quadratisch zu.

Seismische Oberflächenquellen (Hammer, Fallgewicht, etc.) regen auch starken Luftschall an, der sich mit ca.  $340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  entlang des Profils ausbreitet und in jedem Einzelschuss die gleiche Phase aufweist. Luftschall kann aber auch von externen Quellen angeregt werden. Da er auf einer großen Fläche einkoppelt, kann der Schall in den Seismogrammen große Amplituden erreichen. Im Datensatz KÖRSCHTAL (Abb. VI.31, S. 181 und Abb. VI.32, S. 182) sind Schall-Signale zu erkennen.

### 4.2.3 Heterogenität

Laterale Heterogenität im Medium kann zu seitlicher Streuung führen. Die von der Seite einfallenden Streuwellen äußern sich im  $\omega, p$ -Spektrum wie andere seitlich einfallende Störwellen. Allerdings treten sie zeitlich nach den direkten Wellen auf. Daher können Streuwellen häufig durch geeignete Fensterung der Seismogramme vor der Dispersionsanalyse unterdrückt werden.

Auch für die direkte Wellenausbreitung kann Heterogenität störend wirken. Statistisch verteilte Variationen der Eigenschaften des Mediums entlang des Profils und Fehler in der Bestimmung der Geophon-Koordinaten werden sich dabei in ähnlicher Weise durch eine Verbreiterung der Maxima im Spektrum auswirken. Ist die Heterogenität zu stark, so wird die Phasenbeziehung der Signale soweit gestört, dass die Dispersionsanalyse zusammenbricht. Im Fall LERCHENBERG (Abschnitt VI.3.1, S. 173 und Abb. VI.40, S. 190) ist eine Interpretation der  $\omega, p$ -Spektren aufgrund oberflächennaher Heterogenität unmöglich. Andererseits zeigt der Datensatz GÜLTSTEIN (Abschnitt VI.3.1, S. 174), dass noch annähernd konstante Phasenbeziehungen über das ganze Profil bestehen, wenn die Heterogenität großskalig genug ist. Einzelne gestörte Geophon-Positionen können beim Zusammensetzen eines Datensatzes aus Einzelschüssen zu unerwünschten Periodizitäten führen, wie im Datensatz WOLFSCHLUGEN (Abb. VI.26, S. 166).

Eine weitere Fehlerquelle darf nicht ungenannt bleiben. Die in der Praxis eingesetzten Geophone sind nicht komponentenrein, sondern im hier ausgewerteten Frequenzbereich bis ca. 100Hz um 10% querempfindlich (Edelmann, 1998). Das heißt, dass ein Vertikal-Geophon auch aufgrund horizontaler Bewegungen ein Ausgangssignal erzeugt, das aber stark nichtlinear mit der Bodenbewegung verknüpft ist. Dieser systematische Fehler ist im Bereich parasitärer Resonanzen besonders stark, kann aber nicht mehr aus dem Messsignal isoliert werden. Schlecht gesetzte Geophone können zudem schräg stehen, was die Komponentenreinheit weiter vermindert. Oder sie sind schlecht an den Boden angekoppelt und zeigen dadurch Resonanzen und damit eine andere Übertragungsfunktion als die anderen Aufnehmer im Profil.



## Kapitel IV

# Zweite Stufe der Inversion: Bestimmung eines Erdmodells durch iterative Least-Squares-Inversion

### 1 Das Problem „auspacken“<sup>1</sup>

Mit der zweiten Stufe der Inversion wird ein Erdmodell bestimmt. Das heißt, sie soll zu einer Aussage über die Materialeigenschaften des seismischen Mediums führen. Als von Störsignalen überlagerte und in diesem Sinne fehlerbehaftete „Daten“ stehen die in der ersten Stufe berechneten  $\omega, p$ -Spektren sowie aus den Seismogrammen abgelesene Ankunftszeiten von Raumwellen zur Verfügung. Der Zusammenhang zwischen den Materialeigenschaften und den  $\omega, p$ -Spektren ist nichtlinear. Daher linearisiere ich die Vorwärtsrechnung und benutze ein iteratives Least-Squares-Schema zur Inversion. In den folgenden Abschnitten werde ich die grundsätzlichen Überlegungen aus Abschnitt II.4.2 (S. 54) auf die Inversion flachseismischer Datensätze übertragen.

Die formale Beschreibung des Inversionsproblems führt zu der Aufgabe, eine

---

<sup>1</sup>Mein Lehrer Friedrich Noack prägte das Wort vom „Auspacken“ eines Problems. Damit meinte er die Spezialisierung einer allgemeinen, elementaren Formulierung bei der Anwendung auf eine konkrete Fragestellung. Wenn elegant durchgeführt, kann das zur Lebensfreude eines Physikers beitragen. Professor Friedrich Noack verstarb am 3. Februar 1997 im Alter von 64 Jahren.

quadratische „Fehlerfunktion“

$$E^2(\vec{m}) = \chi^2(\vec{m}) + \sum_{l=1}^L \xi_l^2(\vec{m}) \quad (\text{IV.1})$$

zu minimieren. Die Misfit-Funktion  $\chi^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2$  bemisst die Anpassung der für das Modell  $\vec{m}$  theoretisch berechneten Daten  $\vec{F}(\vec{m})$  an die gemessenen Daten  $\vec{d}$ . Für eine schlechte Anpassung werden die Residuen  $\vec{R} = \vec{d} - \vec{F}(\vec{m})$  groß und damit auch  $\chi^2$ . Die  $L$  Straffunktionen  $\xi_l^2$  bewerten die Erfüllung von A-priori-Erwartungen an das Modell  $\vec{m}$ . Sie werden umso größer, je weiter das Modell von diesen Erwartungen abweicht.

## 1.1 Die Modellparameter

Die in  $\vec{m}$  zusammengefassten Modellparameter umfassen zunächst natürlich die seismisch wirksamen Materialeigenschaften. Das sind die strukturellen Wellengeschwindigkeiten  $v_p(z)$  und  $v_s(z)$ , die Massendichte  $\rho(z)$ , sowie Parameter, welche die Anelastizität beschreiben, beispielsweise die Güte-Werte  $Q_p(z)$  und  $Q_s(z)$ . Als Ergebnis der Inversion werden konkrete Zahlenwerte für diese Größen gesucht.

Über die genannten Parameter hinaus gibt es weitere unbekannte Größen, die während der Inversion zur Berechnung der synthetisch vorhergesagten Daten  $\vec{F}(\vec{m})$  benötigt werden. Auch diese müssen aus den Messdaten erschlossen werden und sind in diesem Sinne Inversionsparameter. Formal sind daher in  $\vec{m}$  auch die komplexen Koeffizienten  $S(\omega)$  des Fourier-Spektrums der Quelle enthalten (Abschnitt V.1.2, S. 116). Die Charakteristik typischer Explosionsquellen (beispielsweise S.I.S.Sy., siehe Abschnitt VI.2.1.2, S. 132) setzt sich aus einem unbekanntem Verhältnis von Explosionsmoment und Einzelkraftkomponenten zusammen. Ebenso unsicher ist möglicherweise der Wert der wirksamen Quelltiefe. All diese Parameter haben einen wesentlichen Einfluß auf das Wellenfeld und müssen mit bestimmt werden.

Die Beschreibung der Materialeigenschaften muss häufig in zwei unterschiedlichen Formen vorliegen. Wird ein Matrixalgorithmus (Abschnitt II.3.4, S. 47) wie die Reflektivitätsmethode oder ein Abkömmling des Thomson-Haskell-Verfahrens für die Vorwärtsrechnung benutzt, so muss das Material für die Vorwärtsrechnung in Form homogener Schichten  $\vec{m}'$  beschrieben werden. Für die Inversion selbst kann es numerisch effizienter sein, Koeffizienten  $\vec{m}$  einer Entwicklung nach Basisfunktionen zu benutzen (Abschnitt V.2.2, S. 123). Bei gegebener Parametrisierung (Abschnitt V.2.1, S. 120) wird der Parameterwert der homogenen Schicht



$m'_k$  als Mittelwert über den Tiefenbereich des Modellabschnitts von  $z_k$  bis  $z_{k+1}$  bestimmt, nämlich

$$\begin{aligned}
 m'_k &= \frac{1}{z_{k+1} - z_k} \int_{z_k}^{z_{k+1}} m(z) dz \\
 &= \sum_{l=0}^{N-1} m_l \underbrace{\frac{1}{z_{k+1} - z_k} \int_{z_k}^{z_{k+1}} b_l(z) dz}_{=F_{kl}}.
 \end{aligned}$$

Um beide Darstellungen bequem kombinieren zu können verwende ich im Folgenden die  $(N' \times N)$  Parametrisierungsmatrix  $P$  (mit typischerweise  $N' > N$ ), die mit  $\vec{m}' = P\vec{m}$  zwischen beiden Darstellungen vermittelt. Die Tiefen  $z_k$  der Schichtgrenzen und damit die Matrix  $P$  werden Modell-abhängig gewählt. Die Schichten sollten so dünn sein, dass das Modell von den untersuchten Wellen nicht als Stufenfunktion aufgelöst werden kann.

## 1.2 Die Misfit-Funktion

Die quadratische Misfit-Funktion wurde in Abschnitt II.4.2 (S. 54) als

$$\chi^2 = |W(\vec{d} - \vec{F}(\vec{m}))|^2$$

definiert. Dabei ist  $W = \text{diag}(w_j)$  eine Diagonalmatrix reellwertiger Gewichtungsfaktoren  $w_j$ . Der Vektor  $\vec{d}$  enthält die  $M$  Messdaten. Für die in Kapitel VI gezeigten Beispiele sind das die komplexen  $\omega, p$ -Spektralkoeffizienten sowie die Ankunftszeiten der refraktierten Kompressions-Welle. Je mehr Daten hier kombiniert werden (Spektralkoeffizienten, Einsatzzeiten, Wellenform-Abtastwerte, angeregt durch mehrere unterschiedliche Quellen und registriert mit mehreren unterschiedlichen Geophonkomponenten), umso aussagekräftiger kann die Inversion werden (siehe auch Abschnitt V.1.4, S. 118). Um unterschiedliche Daten kombinieren zu können, müssen die Gewichtungsfaktoren  $w_j$  die reziproke Einheit der Daten  $d_j$  haben. Dann enthält die Summe nur einheitenlose Terme, welche von gleicher Größenordnung sein sollten.  $F_j(\vec{m})$  ist der für die Modellkonfiguration  $\vec{m}$  gemäß der physikalischen Theorie synthetisch berechnete Messwert korrespondierend zum realen Datum  $d_j$ .

Um aus dem Wert von  $\chi^2$  eine sinnvolle Aussage ableiten zu können und um Misfit und Strafterme in eine vernünftige Beziehung zu setzen, ist auf eine Normierung der  $w_j$  beispielsweise auf  $|W\vec{d}|^2 = 1$  zu achten. Ebenso sollten auch die

$w_j$  der Teildatensätze normiert werden. Die Argumentation ist ähnlich der Überlegung, die in Abschnitt II.4.2.2 (S. 56) von den  $\sigma_j$  auf die  $w_j$  geführt hat. Die beispielsweise in 100 Punkten der Laufzeitkurve enthaltene Information über die refraktierte Kompressions-Welle kann genauso wertvoll sein, wie die in 20000 Punkten des Spektrums enthaltene Information. Weitere Überlegungen zur Normierung der Daten stelle ich in Abschnitt V.1.4.1 (S. 119) an.

### 1.3 Die Linearisierung

Zur Lösung der Aufgabenstellung mit der Methode der kleinsten Quadrate muss die Vorwärtsrechnung wie in Gl. (II.44) auf Seite 60 linearisiert werden. Es ist dann

$$\vec{F}(\vec{m}) \approx \underbrace{\vec{F}(\vec{m}_0)}_{=\vec{F}_0} + D \underbrace{(\vec{m} - \vec{m}_0)}_{=\delta\vec{m}}$$

mit den partiellen Ableitungen

$$D_{jk} = \left. \frac{\partial F_j}{\partial m_k} \right|_{\vec{m}_0}.$$

Falls D nicht direkt berechenbar ist, kann es über Differenzenquotienten

$$D_{jk} \approx \frac{F_j(\vec{m}_0 + hr_k \vec{e}_k) - F_j(\vec{m}_0)}{hr_k} \quad \text{mit } h \ll 1$$

genähert werden. Die Elemente des Vektors  $\vec{e}_k$  verschwinden alle bis auf das  $k$ -te, welches gleich eins ist. Mit  $r_k$  bezeichne ich den in Abschnitt II.4.2.5 (S. 61) definierten Suchbereich zum Parameter  $m_k$ . Bei der Berechnung der Differenzenquotienten werden möglicherweise kleine Differenzen großer Werte berechnet, was eine Berechnung der  $\vec{F}$  mit doppelt genauer Darstellung erfordern kann. Außerdem ist pro freiem Inversionsparameter, für den eine partielle Ableitung berechnet wird, eine zusätzliche Vorwärtsrechnung notwendig. Dies wirkt sich sehr ungünstig auf die numerische Effizienz des Verfahrens aus und verlangt häufig eine restriktive Parametrisierung, um die Zahl der freien Parameter klein zu halten (Abschnitt V.2.2, S. 123).

Für eine Formulierung des Thomson-Haskell-Verfahrens nach Wang (1999) beschreibt Teshler (1999) die semianalytische Berechnung aller partiellen Ableitungen während einer Vorwärtsrechnung „on-the-fly“. Die dabei berechneten Ableitungen  $D'$  beziehen sich auf die Parameter der Vorwärtsrechnung. Weichen die

Inversionsparameter aufgrund einer Parametrisierung davon ab, so ergibt sich die Linearisierung in Kombination mit der Parametrisierungsmatrix  $P$  zu

$$\vec{F}(\vec{m}) \approx \vec{F}_0 + \underbrace{D'P}_{=D} \delta\vec{m}.$$

Mit der beschriebenen Linearisierung ist die Misfit-Funktion

$$\chi^2 = |W(\underbrace{\vec{d} - \vec{F}_0}_{=\vec{\Delta}} - D\delta\vec{m})|^2$$

eine quadratische Form in  $\delta\vec{m}$ . Die Startresiduen bezeichne ich im Folgenden mit  $\vec{\Delta}$ .

Ist bekannt, dass ein Teil der Parameter  $m_k$  durch die Daten nicht eingeschränkt werden kann, also  $D_{lk} \rightarrow 0 \forall l$  gilt, so ist es sinnvoll, den numerischen Aufwand zur Berechnung der  $D_{lk}$  für diese  $k$  zu sparen. Alle Parameter  $\vec{m}$  sollen aber in den Straftermen wirksam bleiben. Um diese Auswahl in die formale Beschreibung aufzunehmen, wird hier eine  $(N \times N')$  Selektionsmatrix  $X$  mit  $N > N'$  definiert. Jede ihrer Spalten enthält nur eine 1, alle anderen Elemente sind 0. Auf diese Weise bildet sie den reduzierten Parametersatz  $\delta\vec{m}''$  auf den vollen Satz  $\delta\vec{m} = X\delta\vec{m}''$  ab. Bei der Verwendung von Differenzenquotienten wird nun  $D'PX$  direkt berechnet, was die Anzahl der erforderlichen Vorwärtsrechnungen weiter reduziert.

## 1.4 Die Strafterme

Die Strafterme  $\xi_i^2$  in Gl. (IV.1) müssen ebenfalls als quadratische Formen in den Modellparametern in das Least-Squares-Schema eingebracht werden. Ganz allgemein lassen sich für beliebige Linearkombinationen der Parameter Vorgaben  $A\vec{m} = \vec{q}$  formulieren und analog zum Misfit als Strafterm  $\xi^2 = |S(A\vec{m} - \vec{q})|^2$  in die Inversion einbringen. Wie man von integralen Bedingungen für eine Parameterfunktion  $p(z)$  zu einer solchen Formulierung gelangt, ist in Abschnitt V.2.1 (S. 120) skizziert. Alle Strafterme müssen sorgfältig gegeneinander und gegenüber dem Misfit  $\chi^2$  gewichtet werden, damit die Minimierung von  $E^2$  zu einer sinnvollen Modellverbesserung führt.

Im Folgenden werde ich vier Klassen von A-priori-Erwartungen für die Schichtparameter  $\vec{m}'$  formulieren, die mir insbesondere unter den besonderen Gegebenheiten der Flachseismik nützlich erscheinen.

### 1.4.1 Kleine Modelländerungen (Regularisierung)

Bereits in Abschnitt II.4.2.5 (S. 60) wurde ein Strafterm

$$\xi_1^2 = |S_1 \delta \vec{m}'|^2 \quad \text{mit} \quad S_1 = \text{diag} \left( \frac{1}{r_k} \right)$$

eingeführt, der zur Stabilisierung der iterativen Inversion dient. Dabei ist  $r_k$  der sogenannte „Suchbereich“ zum Parameter  $m_k$ . Dieser Strafterm sorgt dafür, dass die Modelländerung pro Iterationsschritt im Bereich der Linearisierung bleibt und dass das Least-Squares-Gleichungssystem regulär ist.

### 1.4.2 Orientierung am Referenzmodell

In der Regel werden einige der Modellparameter durch die Messdaten kaum eingeschränkt. Werden diese Parameter in der Inversion frei gelassen, so entwickeln sie sich häufig aufgrund von Störsignalen oder ungünstiger Parametrisierung zu vollkommen unsinnigen Werten. Gl. (IV.21) in Abschnitt IV.2.4 (S. 111) zeigt das sehr deutlich. Sie einfach auf den Wert des Anfangsmodells festzusetzen, ist allerdings auch nicht gerechtfertigt. Das Startmodell stellt nämlich meistens nur eine vage Schätzung dar. Darum durchlaufen die Modelle auch während der Inversion erhebliche Veränderungen bis zum Ergebnismodell. Aus diesem Grund werden Einschränkungen durch die Daten möglicherweise erst nach mehreren Iterationen wirksam. Beispielsweise kann eine nennenswerte Verringerung des Misfits erst eintreten, wenn eine Mode nahe genug an das Maximum des  $\omega, p$ -Spektrums herangerückt wurde.

Über einen Strafterm können die Parameter  $\vec{m}'$  lose an eine A-priori-Vorgabe  $\vec{m}'_{\text{ref}}$  gekoppelt werden. Dazu wird

$$\xi_2^2 = |S_2 (\vec{m}'_0 + \delta \vec{m}' - \vec{m}'_{\text{ref}})|^2 \quad \text{mit} \quad S_2 = \text{diag}(\eta_k)$$

als Strafterm eingeführt. Die  $\eta_k$  gewichten die A-priori-Information und werden gleich Null für Parameter, die allein aus den Daten bestimmt werden sollen. Ist der Term nicht zu stark gewichtet, so kann sich eine Einschränkung durch die Daten auch nach mehreren Inversionsschritten noch bemerkbar machen.

### 1.4.3 A-priori-Korrelationen

Für manche Materialien existieren empirische  $v_p/v_s$ -Verhältnisse, während Richtwerte für den Absolutwert unbekannt sind. In Fortführung des vorigen Abschnitts kann es dann sinnvoll sein, eine lose Vorgabe für Verhältnisse zwischen freien Parametern vorzugeben.

Dafür kann es auch „kosmetische“ Gründe geben. Kann beispielsweise aus den Daten nur ein Mittelwert für  $v_p$  bestimmt werden, während sich für  $v_s$  starke Variationen ergeben, wird die Kombination beider Modellkurven als wenig realistisch empfunden. In einem solchen Fall ist es erwünscht, miteinander möglichst ähnliche und trotzdem mit den Daten verträgliche Modellkurven zu finden.

Mit

$$\xi_3^2 = |S_3 (\vec{m}'_0 + \delta \vec{m}') - \vec{q}|^2$$

wird eine Linearkombination

$$S_3 \vec{m}' = \vec{q}$$

als Richtwert gegeben. Ohne weitere Einschränkungen für  $S_3$  und  $q$  ist das zugleich die allgemeinste Formulierung, in die auch die anderen Strafterme aufgenommen werden könnten.

Als Beispiel kann

$$v_p = av_s \quad \text{und} \quad \rho = bv_s + c$$

gegeben werden. Dann wäre

$$\xi_3^2 = \eta_1^2 |v_p - av_s|^2 + \eta_2^2 |\rho - bv_s - c|^2$$

mit

$$\vec{m}' = \begin{pmatrix} v_p \\ v_s \\ \rho \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & -b & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_2 c \end{pmatrix}.$$

Dabei dienen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  dazu, das Gewicht dieser Vorgaben einzustellen.

#### 1.4.4 Glättung

Da nur endlich viele Messwerte vorliegen und diese zudem von Störsignalen überlagert werden, sind keine beliebig detaillierten Rückschlüsse auf das untersuchte Medium möglich. Zu jedem Ergebnismodell einer Inversion gibt es weitere, stärker strukturierte Modelle, welche zu einem gleich kleinen oder kleineren Misfit führen<sup>2</sup>. Es ist daher ein Ergebnismodell anzustreben, welches nicht mehr Detail-Struktur aufweist, als notwendig ist, um die Daten unter Berücksichtigung

<sup>2</sup>Ein übermäßig kleiner Misfit wird beispielsweise erreicht, wenn mit einem (unsinnigen) Modell auch Störsignale der Messdaten in den synthetischen Werten erzeugt werden. Die Daten wurden dann „überinterpretiert“.

der Messfehler anzupassen. Es werden also „glatte“ Modellkurven verlangt. Allerdings müssen auch Diskontinuitäten zugelassen werden, um die in der Flachseismik auftretenden enormen Parameterkontraste (siehe Abschnitt VI.3, S. 167) beschreiben zu können.

Es ist ungünstig, die Glattheit des Modells durch eine sparsame Parametrisierung zu erzwingen (Abschnitt V.2.2, S. 123). Falls der Rechenaufwand es zulässt, ist es für ein Modell homogener Schichten zu bevorzugen, die Glattheit über einen Strafterm

$$\xi_4^2 = |S_4 (\vec{m}_0 + \delta \vec{m})|^2$$

zu verlangen.

Für ein Modell aus  $N$  homogenen Schichten der Dicke  $\Delta z$  ist eine einfache  $((N-2) \times N)$ -Glättungsmatrix

$$(S_4)_{kl} = \frac{\eta_k}{\Delta z^2} \begin{cases} 2 & \text{für } k = l + 1, \\ -1 & \text{für } k = l \text{ oder } k = l + 2 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die  $\eta_k$  dienen dazu, die Glättung in verschiedenen Tiefen unterschiedlich zu gewichten. Für  $\eta_k = \eta_{k+1} = 0$  wird in der Tiefe  $z = k\Delta z$  eine Diskontinuität zugelassen.

## 1.5 Das Least-Squares-Gleichungssystem

Die Fehlerfunktion (IV.1) vollständig ausgeschrieben („ausgepackt“) lautet nun

$$\begin{aligned} E^2 = & |W(\vec{d} - \vec{F}_0 - D'PX\delta\vec{m}'')|^2 \\ & + |S_1PX\delta\vec{m}''|^2 + |S_2P(\vec{m}_{\text{ref}} - \vec{m}_0 - X\delta\vec{m}'')|^2 \\ & + |S_3P(\vec{m}_0 + X\delta\vec{m}'') - \vec{q}|^2 + |S_4P(\vec{m}_0 + X\delta\vec{m}'')|^2. \quad (\text{IV.2}) \end{aligned}$$

Wegen der  $\omega, p$ -Spektren sind  $\vec{d}$ ,  $D$  und  $\vec{F}_0$  komplexwertige Größen. Alle anderen Größen sind reellwertig.

Die Least-Squares-Bedingung lautet

$$\frac{\partial E^2}{\partial \delta m_k} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall k.$$

Das ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem (LGS)<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} & \left( \Re \left( X^T P^T D'^{\dagger} W^T W D' P X \right) + \sum_{l=1}^4 X^T P^T S_l^T S_l P X \right) \delta \vec{m}'' \\ & = \Re \left( X^T P^T D'^{\dagger} W^T W \left( \vec{d} - \vec{F}_0 \right) \right) \\ & + X^T P^T S_3^T \vec{q} + X^T P^T S_2^T S_2 P \left( \vec{m}_{ref} - \vec{m}_0 \right) - \sum_{l=3}^4 X^T P^T S_l^T S_l P \vec{m}_0. \quad (IV.3) \end{aligned}$$

Die Lösung  $\delta \vec{m}''$  des LGS liefert das Startmodell  $\vec{m}_0$  für die nächste Iteration, indem  $\vec{m}_0$  auf den Wert von  $\vec{m}_0 + X \delta \vec{m}''$  gesetzt wird. Der Übersichtlichkeit halber werde ich im Folgenden annehmen, dass P und X Einheitsmatrizen sind und sie fortlassen. Werden sie für eine Anwendung benötigt, so kann einfach  $\vec{m} = \vec{m}_0 + \delta \vec{m}$  durch  $\vec{m}' = P(\vec{m}_0 + X \delta \vec{m}'')$  in den Formeln entsprechend ersetzt werden. Damit wird Gl. (IV.3) nun vereinfacht als

$$\left( \Re(D^{\dagger} W^T W D) + S^T S \right) \delta \vec{m} = \Re(D^{\dagger} W^T W \vec{\Delta}) + \vec{S} \quad (IV.4)$$

geschrieben, mit den Abkürzungen

$$S^T S = \sum_{l=1}^4 S_l^T S_l, \quad \vec{\Delta} = \vec{d} - \vec{F}_0 \quad \text{und} \quad \vec{S} = S_3^T \vec{q} + S_2^T S_2 \vec{m}_{ref} - \sum_{l=2}^4 S_l^T S_l \vec{m}_0.$$

Die Matrix  $S^T S$  tritt bei der Lösung des Inversionsproblems nur als Ganzes auf. Die Schreibweise hat daher eher Symbolcharakter und macht deutlich, dass es sich um eine symmetrische, positiv definite Matrix handelt.

Alle Terme von  $\Re(D^{\dagger} W^T W D) + S^T S$  sind positiv definit. Daher garantiert der Term  $S_1^T S_1$ , dass die Gesamtmatrix regulär ist und das Gleichungssystem mit Standardverfahren gelöst werden kann.

## 1.6 Optimierte Berechnung der Systemmatrix

Wird die Methode von Teshler (1999) zur Berechnung der partiellen Ableitungen benutzt, so fallen bei der Berechnung von  $F_{0j}$  auch alle Elemente der  $j$ -ten Zeile von D an. Das  $kl$ -Element der Matrix  $\Re(D^{\dagger} W^T W D)$  ist

$$\begin{aligned} \left( \Re(D^{\dagger} W^T W D) \right)_{kl} & = \Re \left( \sum_{m,n,j} D_{mk}^* W_{nm} W_{nj} D_{jl} \right) \\ & = \sum_j \Re(D_{jk}^* D_{jl}) w_j^2. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Siehe auch Abschnitt A.3 (S. 219) zu komplexwertigen Least-Squares-Problemen.

Ähnlich wird das  $k$ -te Element von  $\Re(D^\dagger W^T W \vec{\Delta})$  als

$$\left( \Re(D^\dagger W^T W \vec{\Delta}) \right)_k = \sum_j \Re(D_{jk}^* (d_j - F_{0j})) w_j^2$$

geschrieben. Auf diese Weise wird nach jeder Vorwärtsrechnung für jeweils ein Datum ein Summand zur Systemmatrix und dem Vektor auf der rechten Seite des LGS addiert. Es muss nur noch eine quadratische Matrix mit der Dimension  $N$  des Modellraumes gespeichert werden, statt einer  $M \times N$  Matrix. Das erfordert wesentlich weniger Speicherbedarf, denn bei typischen Anwendungsbeispielen ist die Dimension  $M$  des Datenraumes um das hundert- bis tausendfache größer als  $N$ .

## 2 Auflösungsanalyse

We do not invert data to find „models“, as much as we might like to; we invert data to make inferences about models. There will usually be an infinity of models that fit the data. (Scales und Snieder, 1997)

Das Ergebnis einer Inversion ist unvollständig, wenn das Resultat  $\vec{m}_{\text{opt}}$  nicht einer Auflösungsanalyse unterzogen wird. Es geht darum, festzustellen wieviel der Information in  $\vec{m}_{\text{opt}}$  tatsächlich aus den Messdaten gewonnen wurde und welche Eigenschaften durch die A-priori-Information bestimmt sind. Anders ausgedrückt, soll untersucht werden welche anderen Modelle die Messdaten gleich gut erklären würden.

Da bei nichtlinearen Problemen der Misfit  $\chi^2$  mehrere lokale Minima besitzen kann, ist es nicht möglich aus seinem lokalen Verlauf alle äquivalenten Modelle zu ermitteln. Aufschluss hierüber erhält man besser durch einen „Grid Search“, der in der Umgebung des als optimal gefundenen Modells  $\chi^2$  durchgeführt wird. Außerdem kann die Inversion mit unterschiedlichen Startmodellen oder A-priori-Annahmen mehrmals durchgeführt werden, um festzustellen, ob so unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden können.

In den folgenden Abschnitten beschreibe ich lokale Auflösungsanalysen, die mit den für die Inversion ohnehin berechneten Größen durchgeführt werden können. Auch damit können gut bestimmte Parameter von schlecht bestimmten getrennt werden. Die Analysen führen zu quantitativen Aussagen über die mögliche Modellstreuung. Für  $\xi^2 = 0$  lassen sich die für  $E^2$  angestellten Überlegungen auf den Misfit  $\chi^2$  und damit allein auf die aus den Messdaten abgeleiteten Aussagen anwenden.



## 2.1 Eigenwertanalyse

Das optimale Modell  $\vec{m}_{\text{opt}}$  ist durch ein Minimum von  $E^2$  definiert. Das heißt, es müssen alle in  $\delta\vec{m}$  linearen Terme von  $E^2$  verschwinden. Damit ist

$$E^2(\delta\vec{m}) \Big|_{\vec{m}_{\text{opt}}} = \delta\vec{m} \Re(D^\dagger W^T W D + S^T S) \delta\vec{m} + E_{\text{opt}}^2, \quad (\text{IV.5})$$

wobei ich die bezüglich  $\delta\vec{m}$  konstanten Terme in

$$E_{\text{opt}}^2 = \underbrace{\vec{\Delta}^* W^T W \vec{\Delta}}_{=\chi^2(\vec{m}_{\text{opt}})} + (\vec{m}_{\text{ref}} - \vec{m}_{\text{opt}}) S_2^T S_2 (\vec{m}_{\text{ref}} - \vec{m}_{\text{opt}}) + \sum_{l=3}^4 \vec{m}_{\text{opt}} S_l^T S_l \vec{m}_{\text{opt}} + \vec{q}\vec{q}$$

zusammengefasst.  $E_{\text{opt}}$  ist der rms-Wert des Restfehlers für  $\vec{m}_{\text{opt}}$ . Von der Least-Squares-Systemmatrix wird eine Eigenwertanalyse

$$\Re(D^\dagger W^T W D + S^T S) = V \Lambda V^T \quad (\text{IV.6})$$

durchgeführt. Dabei sind die Spaltenvektoren der orthonormalen Matrix  $V$  die normierten Eigenvektoren der Systemmatrix. Die Eigenwerte  $\lambda_l$  der Systemmatrix bilden die Diagonalmatrix  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_l)$ .

Die Eigenvektoren sind im Sinne des Least-Squares-Problems zueinander orthogonale Kombinationen von Parameteränderungen. Mit

$$\delta\vec{m} = V \vec{x} \quad (\text{IV.7})$$

beschreibt jedes  $x_k$  eine dieser Kombinationen. Damit ist

$$E^2 = \vec{x} \Lambda \vec{x} + E_{\text{opt}}^2 \quad \text{und} \quad \Delta E = \sqrt{\vec{x} \Lambda \vec{x} + E_{\text{opt}}^2} - E_{\text{opt}}$$

für eine Abweichung von  $\vec{m}_{\text{opt}}$  um  $V \vec{x}$ .

So können einzelne Parameterkombinationen  $x_k$  getestet werden. Wird eine Zunahme von  $E$  um ein gegebenes  $\Delta E$  toleriert, so darf  $\vec{m}_{\text{opt}}$  um

$$\delta\vec{m} = \eta_k V \vec{e}_k \quad \text{mit} \quad \eta_k = \pm \frac{E_{\text{opt}}}{\sqrt{\lambda_k}} \sqrt{\left(\frac{\Delta E}{E_{\text{opt}}} + 1\right)^2 - 1}$$

variiert werden. Das  $k$ -te Element von  $\vec{e}_k$  ist 1, alle anderen sind 0. Wird diese Betrachtung für alle  $k = 1 \dots N$  durchgeführt, zeigen die  $\delta\vec{m}$  die möglichen Streubereiche der Modellparameter.

Während alle  $x_k$  den gleichen Zuwachs  $\Delta E$  des Fehlers verursachen, führen Parameterkombinationen mit kleinen  $\lambda_k$  zu großen Modellstreuungen  $\|\delta\vec{m}\|^2 = \eta_l^2 \propto 1/\lambda_k$ . Diese Kombinationen sind also schlecht bestimmt und es liegt nahe, sie gar nicht zu variieren. Mit Gl. (IV.6) und Gl. (IV.7) kann die Lösung

$$\vec{x} = \Lambda^{-1}V^T \left( \Re(D^\dagger W^T W \vec{\Delta}) + \vec{S} \right) \quad \text{für} \quad \delta\vec{m} = V\vec{x}$$

des Least-Squares-Gleichungssystems (IV.4) unmittelbar angegeben werden. In dieser Darstellung lassen sich die  $x_k$  zu kleinen  $\lambda_k$  auf einfache Weise von der Inversion ausschließen.

## 2.2 Lineare Auflösungsanalyse nach Wielandt<sup>4</sup>

Soll ein einzelner Modellparameter mit  $\delta\vec{m} = \eta_k \vec{e}_k$  getestet werden, so bietet sich ein anderer Weg an, der sich außerdem leicht mit dem für die eigentliche Inversion aufgebauten Algorithmus berechnen lässt.

Es soll ein Parametersatz  $\delta\vec{m}$  für ein gegebenes  $\Delta E$  gefunden werden, bei dem ein ausgewählter Parameter  $\delta m_k$  möglichst groß wird. Dazu wird die Systemmatrix gemäß

$$Q^T Q = \Re(D^\dagger W^T W D + S^T S)$$

zerlegt. Mit  $Q = \Lambda^{\frac{1}{2}}V^T$  könnte dies über die Eigenwertanalyse realisiert werden, was aber nicht erforderlich ist, wie aus den weiteren Ausführungen ersichtlich ist. Die Fehlerfunktion (IV.5) wird bei einer Variation  $\delta\vec{m} = \eta_k \vec{e}_k$  um  $\Delta E^2 = \eta_k^2 (Q^T Q)_{kk}$  wachsen. Dabei wirken sich offenbar nur die Diagonalelemente der Systemmatrix aus. Dies rührt daher, dass alle Parameteränderungen außer  $\delta m_k$  gleich Null sind.

Die Nicht-diagonal-Elemente beschreiben Korrelationen zwischen Parametern, sogenannten „Trade-off“. Wächst die Fehlerfunktion, weil ein Parameter verändert wird, so können in der Regel gleichzeitig die anderen Parameter so optimiert werden, dass die Zunahme von  $E^2$  möglichst klein ausfällt. Erst wenn das berücksichtigt wird, lässt sich erschließen, wie gut ein Parameter wirklich durch die Inversion bestimmt ist.

Der Test wird durchgeführt, indem der zu prüfende Parameter  $\delta m_k$  (das  $k$ -te Element des Vektors  $\delta\vec{m}$ ) aus dem Satz der variierten Parameter herausgenommen wird. Mit  $\delta\vec{m}$  wird  $\delta\vec{m}$  ohne das Element  $\delta m_k$  bezeichnet. Aus der Matrix  $Q$

<sup>4</sup>Nach einer persönlichen Mitteilung von Erhard Wielandt.

wird der Spaltenvektor  $\vec{q}_k$  entfernt. Die verbleibende Matrix bezeichne ich mit  $Q'$ . Die Fehlerfunktion wird damit als

$$E^2(\delta\vec{m}') \Big|_{\vec{m}'_{\text{opt}}} = \delta\vec{m}' Q'^T Q' \delta\vec{m}' + 2\delta\vec{m}' Q'^T \vec{q}_k \delta m_k + \delta m_k \vec{q}_k^T \vec{q}_k \delta m_k + E_{\text{opt}}^2$$

geschrieben.

Während  $\delta m_k$  gegeben sei, soll nun bezüglich der anderen Parameter  $\delta\vec{m}'$  optimiert werden. Die Least-Squares-Bedingung führt dann zu

$$Q'^T Q' \delta\vec{m}' = -Q'^T \vec{q}_k \delta m_k. \tag{IV.8}$$

Die Inhomogenität des Gleichungssystems wird jetzt nicht durch die Messdaten gebildet, sondern durch die vorgegebene Parameteränderung. Gl. (IV.8) lässt sich umformen zu

$$Q'^T \underbrace{(Q' \delta\vec{m}' + \vec{q}_k \delta m_k)}_{=Q' \delta\vec{m}'} = \vec{0}. \tag{IV.9}$$

Zusätzlich wird noch die Bedingung

$$\vec{e}_k \delta\vec{m}' = 1 \tag{IV.10}$$

gegeben, welche den Parameter  $\delta m_k$  (das  $k$ -te Element von  $\delta\vec{m}'$ ) auf eins setzt. Die Gleichungen (IV.9) und (IV.10) lassen sich zu einem Gleichungssystem

$$(Q'^T Q')' \delta\vec{m}'_k = \vec{e}_k \tag{IV.11}$$

zusammenfassen, wobei  $(Q'^T Q')'$  aus  $Q'^T Q'$  hervorgeht, indem die  $k$ -te Zeile gleich null und das  $k$ -te Element der  $k$ -ten Zeile auf eins gesetzt wird. Damit kann die Systemmatrix für Gl. (IV.11) bequem aus der bereits vorliegenden Systemmatrix der Least-Squares-Aufgabe (IV.4) gewonnen und das Gleichungssystem mit dem vorhandenen Algorithmus gelöst werden.  $\delta\vec{m}'_k$  ist die Lösung von Gl. (IV.11). Das  $k$ -te Element von  $\delta\vec{m}'_k$  ist eins.

Nun wird

$$\eta_k = \pm E_{\text{opt}} \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta E}{E_{\text{opt}}} + 1\right)^2 - 1}{\delta\vec{m}'_k Q'^T Q' \delta\vec{m}'_k}}$$

für ein gegebenes  $\Delta E$  berechnet. Daraus ergibt sich dann mit  $\delta\vec{m}' = \eta_k \delta\vec{m}'_k$  die Veränderung *aller* Modellparameter für den Fall, dass der  $k$ -te Parameter  $\delta m_k$ , bis zu einer Zunahme des rms-Fehlers um  $\Delta E$ , maximal variiert wird.  $\delta\vec{m}'$  berücksichtigt damit auch „Trade-off“ zwischen den Modellparametern.

Jackson (1976) hat die Überlegungen dieses und des vorangegangenen Abschnitts unter statistischen Gesichtspunkten vertieft.

### 2.3 Singular-Value-Decomposition

Wird die volle Matrix  $D$  im Speicher gehalten, bietet sich statt der Eigenwertanalyse (IV.6) eine „Singular-Value-Decomposition“ (SVD) an (Press et al., 1992, Abschnitt 2.6). Diese kann als Verallgemeinerung der Eigenwertanalyse auf nicht-quadratische Matrizen verstanden werden.

Für die folgenden Überlegungen gewichte ich die Strafterme in Gl. (IV.2) mit dem Faktor  $\nu$ . Dies wird es erlauben, zwischen starker Gewichtung der Daten und starker Gewichtung der A-priori-Forderungen zu unterscheiden. Außerdem sollen nur reellwertige Größen vorkommen. Das wird erreicht, indem Real- und Imaginärteil der Daten als unabhängige Werte aufgefasst (was sie tatsächlich sind) und in getrennte Elemente des Vektors  $\vec{d}$  eingetragen werden. Damit sind dann auch  $D, \vec{\Delta} \in \mathbb{R}$ . Das Least-Squares-Gleichungssystem lautet nun

$$(D^T W^T W D + \nu S^T S) \delta \vec{m} = D^T W^T W \vec{\Delta} + \nu \vec{S}. \quad (\text{IV.12})$$

Mit  $\vec{x} = S \delta \vec{m}$  wird eine andere Darstellung des Parametersatzes eingeführt. Gl. (IV.12) wird damit zu

$$(S^{-T} D^T W^T W D S^{-1} + \nu \mathbb{1}) \vec{x} = S^{-T} D^T W^T W \vec{\Delta} + \nu S^{-T} \vec{S} \quad (\text{IV.13})$$

wobei  $\mathbb{1}$  die Einheitsmatrix ist. Praktisch berechnen lässt sich  $S$  durch eine Eigenwertanalyse

$$\left( \sum_{l=1}^4 S_l^T S_l \right) = V_S \Lambda_S V_S^T = S^T S.$$

Die Matrix  $\Lambda_S = \text{diag}(s_k)$  enthält die Eigenwerte  $s_k$  und die Spaltenvektoren von  $V_S$  sind die Eigenvektoren der Matrix  $S^T S$  zum jeweiligen Eigenwert. Daraus ergibt sich  $S = \Lambda_S^{-\frac{1}{2}} V_S^T$  und  $S^{-1} = V_S \Lambda_S^{-\frac{1}{2}}$ .

An dieser Stelle wird eine SVD der  $(M \times N)$ -Matrix  $WDS^{-1}$  durchgeführt. Der Datenvektor  $\vec{d}$  hat die Dimension  $M$  und  $N$  ist die Dimension des Modellvektors  $\delta \vec{m}$ . Bei der Inversion von  $\omega, p$ -Spektren ist typischerweise  $M \gg N$ . Die Matrixzerlegung lautet

$$WDS^{-1} = U \Lambda V^T. \quad (\text{IV.14})$$

Die Spaltenvektoren der  $(N \times N)$  Matrix  $V$  sind die orthonormalen Eigenvektoren der Matrix  $S^{-T} D^T W^T W D S^{-1} = V \Lambda^2 V^T$ . Die orthonormalen Eigenvektoren der Matrix  $WDS^{-1} S^{-T} D^T W^T = U \Lambda^2 U^T$  bilden die Spalten der  $(M \times N)$  Matrix

U. Die Matrix  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_l)$  enthält die SVD-Eigenwerte<sup>5</sup>  $\lambda_l$  von  $WDS^{-1}$ . Diese werden als „Singular Values“ bezeichnet. Die  $\lambda_l^2$  mit  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_l)$  sind die  $N$  Eigenwerte der Matrix  $S^{-T}D^TW^TWDS^{-1}$ . Es sind jeweils  $VV^T = V^TV = U^TU = \mathbb{1}$  die  $(N \times N)$ -Einheitsmatrix und  $UU^T = \text{diag}(\zeta_l)$  mit  $\zeta_l = 1$  für  $1 \leq l \leq N$  und  $\zeta_l = 0$  für  $N < l \leq M$ .

Mit

$$\vec{x}' = V^T \vec{x} = V^T S \delta \vec{m}, \quad \vec{\Delta}' = U^T W \vec{\Delta} \quad \text{und} \quad \vec{S}' = V^T S^{-T} \vec{S} \quad (\text{IV.15})$$

werden neue Darstellungen der Modellparameter, der Daten und des „A-priori-Vektors“  $\vec{S}'$  eingeführt. Diese bringen Gl. (IV.13) in die Diagonalfom

$$(\lambda_k^2 + \nu) x'_k = \lambda_k \Delta'_k + \nu S'_k. \quad (\text{IV.16})$$

Somit ist das  $(N \times N)$  Least-Squares-Gleichungssystem (IV.4) in  $N$  unabhängige lineare Gleichungen zerfallen.

Die  $S'_k$  sind Koeffizienten für eine Darstellung der A-priori-Terme  $\vec{S}'$  in der orthogonalen Modell-Basis.

Die dazu führende Transformation (IV.15) lässt sich anschaulich interpretieren. Für jedes nach Gl. (IV.16) bestimmte  $x'_k$  ergibt sich eine Modelländerung  $\delta \vec{m}_k = S^{-1} \vec{v}_k x'_k$ . Die Spaltenvektoren  $\vec{v}_k$  der Matrix  $V$  beschreiben bezüglich der Daten orthonormale Kombinationen von Modelländerungen. Zu jedem  $\vec{v}_k$  gehört ein Eigenwert  $\lambda_k$ , der ein Maß dafür ist, wie gut die Parameterkombination  $\delta \vec{m}_k$  über die Misfit-Funktion  $\chi^2$  bestimmt werden kann. Die Matrix  $S$  gewichtet mit den Suchbereichen und führt A-priori-Korrelationen ein. Auch dadurch wird bestimmt, welche Linearkombinationen von Modellparametern in der Inversion unabhängig voneinander sind.

In ähnlichem Sinn sind die Spaltenvektoren  $\vec{u}_k$  der Matrix  $U$  zueinander orthonormale Kombinationen von Residuen  $\vec{\Delta}'_k = W^{-1} \vec{u}_k \Delta'_k$ . Jede dieser Kombinationen erlaubt eine unabhängige Schlußfolgerung für einen Modellparameter  $x'_k$ . Formal spielt die Matrix  $W$  für die  $\vec{\Delta}'_k$  die gleiche Rolle wie die Matrix  $S$  für die  $\delta \vec{m}_k$ . So ist  $W$  auch dafür geeignet, Kovarianzen zwischen Messwerten in die Rechnung einzubringen.

Alle Anteile in  $W\vec{\Delta}'$ , die orthogonal zu den  $\vec{u}_k$  sind, können nicht durch die synthetischen Daten angepasst werden und nicht zur Verringerung des Misfits beitragen. Von den  $M$  Daten  $d_l$  schränken also nur  $N$  Linearkombinationen das Erdmodell ein. Es wird nicht die volle Information ausgeschöpft. Deshalb ist es

---

<sup>5</sup>Die Zerlegung  $S^{-T}D^TW^TWDS^{-1} = V\Lambda^2V^T$  ist eine Eigenwertanalyse der gesamten Matrix (ähnlich Abschnitt IV.2.1, S. 105) ausgedrückt mit den SVD-Matrizen. Die Eigenwerte sind die Quadrate der SVD-Eigenwerte. Da die Matrix oft schlecht konditioniert ist, also die Eigenwerte sich um mehrere Größenordnungen unterscheiden, kann die SVD numerisch stabiler sein, als eine Eigenwertanalyse der Systemmatrix.

ungünstig, das Problem von vornherein überbestimmt zu formulieren. Statt dessen sollte die Aufgabe mit  $N > M$  gestellt werden. Kombinationen  $S\delta\vec{m}$ , die orthogonal zu den  $\vec{v}_k$  sind, können dann durch die Inversion nicht bestimmt werden. Durch die Strafterme, also die Matrix  $S$ , müssen dann  $M$  Linearkombinationen aus den  $N$  Modellparametern  $\delta\vec{m}_k$  für die Inversion ausgewählt werden. Da aber  $M$  bei typischen Anwendungen in der Größenordnung  $10^4$  liegt, lässt sich das Problem in der Regel nur für  $N < M$  numerisch handhaben. Trotzdem sollte die Zahl der Modellparameter so groß wie möglich gewählt werden (siehe auch Abschnitt V.2.2, S. 123).

Es ist eine wesentliche Besonderheit dieser Zerlegung, dass die Trennung in Misfit  $\chi^2$  und Strafterme  $\xi^2$  erhalten bleibt. Im Gegensatz dazu existiert nach der Eigenwertzerlegung in Abschnitt IV.2.1 (S. 105) nur ein Maß für die Einschränkungen durch alle in der Fehlerfunktion  $E^2 = \chi^2 + \xi^2$  enthaltenen Bedingungen zusammen. Der quadratische Misfit, sowie Gl. (IV.5), die Fehlerfunktion am Optimum, lauten in den transformierten Größen geschrieben

$$\chi^2 = \chi_{\text{const}}^2 + \sum_{k=1}^N (\Delta'_k - \lambda_k^2 x'_k)^2 \quad \text{und}$$

$$E^2(\delta\vec{m})|_{\vec{m}_{\text{opt}}} = E_{\text{opt}}^2 + \sum_{k=1}^N x'_k{}^2 (\lambda_k^2 + \nu).$$

Dabei enthält  $\chi_{\text{const}}^2$  alle Anteile von  $W\vec{\Delta}$ , die orthogonal zu den  $\vec{u}_k$  sind und daher nicht angepasst werden können. Das bestätigt nur ein weiteres Mal, dass erstens Modelländerungen in  $x_k$  zu kleinen  $\lambda_k$  wenig zum Misfit beitragen. Zweitens sollte die Dimension  $N$  des Modellraumes und damit die Anzahl von zur Verfügung stehenden  $\vec{u}_k$  möglichst groß gewählt werden, um den Betrag von  $\chi_{\text{const}}^2$  klein zu halten.

Die Lösung der Least-Squares-Aufgabe ergibt sich unmittelbar, wenn Gl. (IV.16) in den ursprünglichen Größen formuliert und nach

$$\delta\vec{m} = S^{-1}V \operatorname{diag} \left( \frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \nu} \right) U^T W \vec{\Delta} + S^{-1}V \operatorname{diag} \left( \frac{\nu}{\nu + \lambda_k^2} \right) V^T S^{-T} \vec{S} \quad (\text{IV.17})$$

aufgelöst wird.

Die Rolle des Faktors  $\nu$  macht wiederum deutlich, dass die A-priori-Terme für die Kombinationen kleiner oder verschwindender  $\lambda_k$  das Gleichungssystem regulär machen.

## 2.4 Resolutionsmatrix

Die Darstellung (IV.17) erlaubt eine Betrachtung im Sinne einer Auflösungsmatrix. Zu diesem Zweck führe ich ein Gedankenexperiment durch. Das „wahre“ Modell (in diesem Fall die Modelländerung) sei bekannt. Mit diesem Testmodell  $\delta\vec{m}_{\text{test}}$  lassen sich die (synthetischen) Messdaten

$$\vec{d} = \vec{F}_0 + D \delta\vec{m}_{\text{test}} + \vec{n}$$

über die linearisierte Vorwärtsrechnung angeben. Mit  $\vec{n}$  wird unbekanntes Noise (Störsignale) dem Testdatensatz überlagert. Wird dieser Testdatensatz invertiert, so erhält man nach Gl. (IV.17) das Modell

$$\begin{aligned} \delta\vec{m} = S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 + \nu}\right) V^T S \delta\vec{m}_{\text{test}} + \\ S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2 + \nu}\right) U^T W \vec{n} + \\ S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{\nu}{\lambda_k^2 + \nu}\right) V^T S^{-T} \vec{S}. \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Die Matrix

$$R = S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1 + \frac{\nu}{\lambda_k^2}}\right) V^T S, \quad (\text{IV.19})$$

welche das Testmodell  $\delta\vec{m}_{\text{test}}$  auf das invertierte Modell  $\delta\vec{m}$  abbildet, heißt „Resolutionsmatrix“ oder „Auflösungsmatrix“. Die Spaltenvektoren von  $V$  beschreiben Trade-off zwischen Modellparametern. Und Kombinationen  $\vec{v}_k$  zu kleinen  $\lambda_k$  werden für  $\nu \neq 0$  nur ungenügend auf das invertierte Modell übertragen. Deutlich wird auch die Wirkung der A-priori-Forderungen. Die Matrix  $S$  gewichtet und mischt die Parameter zusätzlich.

Für eine starke Gewichtung der Daten ( $\nu = 0$ ) wird  $R$  zur Einheitsmatrix, da das Problem formal überbestimmt ist. Allerdings könnten einige der Eigenwerte  $\lambda_k$  verschwinden, so dass auch in diesem Fall eine Reproduktion des Testmodells unmöglich wäre. Je größer  $\nu$  wird, je stärker also die A-priori-Forderungen gewichtet werden, umso unschärfer wird das Testmodell auf  $\delta\vec{m}$  übertragen. Für  $\nu \rightarrow \infty$  verschwindet die Auflösungsmatrix.

Mit der Resolutionsmatrix  $R$  geschrieben lautet Gl. (IV.18)

$$\delta\vec{m} = R \delta\vec{m}_{\text{test}} + R D^{-1} \vec{n} + S^{-1}V \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1 + \frac{\lambda_k^2}{\nu}}\right) V^T S^{-T} \vec{S}. \quad (\text{IV.20a})$$

Für die Extremfälle verschwindenden und totalen Einflusses der A-priori-Forderungen ergibt das

$$\delta\vec{m} = \delta\vec{m}_{\text{test}} + D^{-1}\vec{n} + 0 \quad \text{für } \nu = 0, \quad (\text{IV.20b})$$

sowie

$$\delta\vec{m} = 0 + 0 + (S^T S)^{-1} \vec{S} \quad \text{für } \nu \rightarrow \infty. \quad (\text{IV.20c})$$

Die Inverse von D existiert formal über die SVD als

$$D^{-1} = S^{-1} V \Lambda^{-1} U^T W$$

und wurde hier nur wegen der übersichtlicheren Darstellung eingeführt.

Gl. (IV.20a) macht deutlich, dass das Modell  $\delta\vec{m}$  nicht nur eine unscharfe Abbildung des Testmodells  $\delta\vec{m}_{\text{test}}$  ist, sondern auch noch konstante Terme aufgrund von Noise und A-priori-Forderungen enthält. Dass sich auch ohne Einfluss der Daten in Gl. (IV.20c) eine endliche Modelländerung ergibt, wird verständlich, wenn man bedenkt, dass das Startmodell  $\vec{m}_0$  auch im Sinne der A-priori-Forderungen nicht optimal sein muss.

Für ungestörte Daten ( $\vec{n} = 0$ ) erhält man bei maximaler Gewichtung der Daten ( $\nu = 0$ ) nach Gl. (IV.20b) eine theoretisch optimale Abbildung des Testmodells. Die Störsignale verursachen jedoch eine Abweichung vom idealen Modell. Diese ist

$$\delta\vec{m}_{\text{test}} - \delta\vec{m} = D^{-1}\vec{n} = S^{-1} V \text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_k}\right) U^T W \vec{n}$$

oder mit  $\vec{x}'_{\text{test}} = V^T S \delta\vec{m}_{\text{test}}$  und  $\vec{n}' = U^T W \vec{n}$  als

$$x'_k - x'_{\text{test}k} = \frac{1}{\lambda_k} n'_k \quad (\text{IV.21a})$$

in den transformierten Größen ausgedrückt. Parameterkombinationen zu kleinen Eigenwerten werden also überproportional vom Noise gestört. Für den Testfall lautet der quadratische Misfit

$$\chi^2 = \left\| W (\vec{d} - \vec{F}) \right\|^2 = \left\| W (D (\delta\vec{m}_{\text{test}} - \delta\vec{m}) + \vec{n}) \right\|^2 = 4 \left\| W \vec{n} \right\|^2$$

und in der transformierten Darstellung

$$= 4 \left\| U \vec{n}' \right\|^2 = 4 \sum_{k=1}^N n'^2_k. \quad (\text{IV.21b})$$



Die SVD-Matrix (IV.14) hängt nicht von den Daten  $\vec{d}$  oder den Startresiduen  $\vec{\Delta}$  ab. Sie ist nur über die Vorgaben durch die Daten-Gewichtung und die Strafterme sowie durch die partiellen Ableitungen bestimmt. Letztere ändern sich von einem Inversionsschritt zum nächsten. Damit ändern sich auch die  $\vec{v}_k$  und  $\vec{u}_k$ . Ebenso können Parameter mit anfangs kleinen Eigenwerten nach einigen Iterationen ein größeres  $\lambda_k$  haben. Es bietet sich an, die Lösung des Least-Squares-Gleichungssystems in der Form (IV.17) zu berechnen. Analog zu den Überlegungen in Abschnitt IV.1.4.2 (S. 100) und Abschnitt V.2.2 (S. 123) lassen sich dann Parameter mit kleinen  $\lambda_k$  anfangs von der Inversion ausschließen und später, wenn der Eigenwert relativ zu den anderen Eigenwerten gewachsen ist, wieder in die Inversion aufnehmen. Dies ist insbesondere günstig, weil Störsignale  $\vec{n}$ , die parallel zu  $\vec{u}_k$  mit kleinen  $\lambda_k$  auftreten, nicht mehr als anderes Noise zum Misfit beitragen, aber zu erheblich größeren Abweichungen vom Idealmodell führen, wie aus Gl. (IV.21) ersichtlich ist.



# Kapitel V

## Praktische Aspekte zur Durchführung der Inversion

### 1 Behandlung der Datensätze

#### 1.1 Zusammensetzen von Einzelschüssen

Für eine erfolgreiche Dispersionsanalyse sollte der Datensatz viele Seismogramme aus einem möglichst großen Offset-Bereich mit möglichst kleinen Geophonabständen enthalten (Abschnitte III.3.1 und III.3.2). Da bei einer Feldmessung nur eine endliche Anzahl von Geophonen zur Verfügung steht, widersprechen sich die Forderungen nach einer möglichst langen Auslage und nach möglichst kleinen Offset-Intervallen. Um diesem Dilemma zu entgehen, besteht beispielsweise die Möglichkeit die Geophone nicht gleichabständig zu stecken (Abschnitt III.3.3). Eine andere Möglichkeit besteht darin, mehrere Einzelschüsse zu kombinieren. Das Umsetzen der Geophone ist wesentlich aufwendiger als das Versetzen des Vorschlaghammers. Daher wird das Wellenfeld an mehreren Schusspunkten angeregt und die Einzeldatensätze entsprechend der *relativen* Offsets zu einem einzigen Datensatz kombiniert.

Diese Vorgehensweise ist gerechtfertigt, wenn das Medium lateral homogen ist. Für die Dispersionsanalyse muss das ohnehin vorausgesetzt werden. Haben die Wellenformen innerhalb eines Einzelschusses eine einheitliche Phasenbeziehung über die ganze Auslage (laterale Homogenität), dann ist nicht zu erwarten, dass diese sich durch das Versetzen des Schusspunktes um einen Bruchteil der Auslagenlänge verändert, falls nicht kleinräumige Heterogenität in unmittelbarer Nähe der Quelle auftritt. Ein Beispiel für diese Ausnahme ist der Datensatz RIE-

DENBERG (Abschnitt VI.3.1, S. 169). Bei den anderen Datensätzen in Kapitel VI habe ich diese Technik mit Erfolg angewendet. Allerdings haben die Störsignale aus externen Quellen keine definierte Phasenbeziehung zwischen zwei Einzelschüssen. Auf diese Weise kann trotz der Verdichtung Aliasing entsprechend der ursprünglichen Geophon-Distanz auftreten (Abschnitt III.4.2.2, S. 92).

Die Einzelschüsse können mit deutlich unterschiedlicher Amplitude angeregt sein. Das führt im zusammengesetzten Datensatz zu unerwünschten Periodizitäten. Daher muss nachträglich für jeden Einzelschuss ein Faktor bestimmt werden, der die Seismogramme so skaliert, dass die Energieabnahme über den Offset möglichst gleichmäßig verläuft. Für die in Kapitel VI vorgestellten Datensätze habe ich

$$\int \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( E(r) r^\kappa \right) \right]^2 dr$$

minimiert, wobei  $E(r)$  die im Seismogramm für den Offset  $r$  enthaltene Gesamtenergie angibt. Der Parameter  $\kappa$  wurde jeweils empirisch so gewählt, dass der Faktor die geometrisch bedingte und durch intrinsische Dämpfung verursachte Amplitudenabnahme ausgleicht. Für ein ideal elastisches Medium wäre  $\kappa = 1$  zu wählen.

## 1.2 Impulsantwort des Mess-Systems

Die gemessenen Seismogramme und damit die daraus berechneten  $\omega, p$ -Spektren enthalten nicht nur die Impulsantwort des seismischen Mediums („Greensche Funktion“), sondern auch die Impulsantwort des Mess-Systems. Darin enthalten sind die Übertragungseigenschaften der Geophone und der Registriereinheit, aber auch der zeitliche Verlauf der Einwirkung der seismischen Quelle. Das Wavelet mit dem das Wellenfeld angeregt wird, hängt von Quelle und Medium ab und kann daher nicht unabhängig von den Messdaten bestimmt werden.

Soll der Misfit zwischen den komplexen Spektralkoeffizienten berechnet werden, so ist zu berücksichtigen, dass die numerisch berechnete Lösung der elastischen Wellengleichung lediglich die Impulsantwort des Mediums darstellt. Das endgültige synthetische Spektrum ergibt sich erst durch Multiplikation mit den Fourier-Koeffizienten  $S(\omega)$  der Impulsantwort des Mess-Systems. Letztere nenne ich im Folgenden „Quell-Wavelet“.

Die Eigenschaften des Mess-Systems können in der Inversion auf zweierlei Weise berücksichtigt werden. Einerseits ist es möglich das „Quell-Wavelet“ aus den Daten zu bestimmen. Andererseits können  $\omega, p$ -Spektrum und Greensche Funktion auf den gleichen Wert normiert werden.

### 1.2.1 Bestimmung eines „Quell-Wavelets“

Da  $S(\omega)$  für alle Seismogramme und somit auch für alle Slowness-Werte des  $\omega, p$ -Spektrums gleich sein muss, kann das „Quell-Wavelet“ aus den Daten bestimmt werden. Das Least-Squares-Kriterium

$$E^2 = \sum_{i,j} \left| w_{ij} \left( \tilde{G}(\omega_i, p_j) - S(\omega_i) G_s(\omega_i, p_j) \right) \right|^2 \stackrel{!}{=} \min$$

lässt sich in diesem Fall direkt auflösen zu

$$S(\omega_i) = \frac{\sum_j w_{ij}^2 G_s^*(\omega_i, p_j) \tilde{G}(\omega_i, p_j)}{\sum_l w_{il}^2 G_s^*(\omega_i, p_l) G_s(\omega_i, p_l)}. \quad (\text{V.1})$$

Dabei sind  $w_{ij}$  die für die Daten festgelegten Gewichte (Abschnitt V.1.4.1),  $\tilde{G}(\omega_i, p_j)$  sind die für die gemessenen Seismogramme berechneten  $\omega, p$ -Koeffizienten und  $G_s(\omega_i, p_j)$  sind die Koeffizienten der synthetisch berechneten Greenschen Funktion.

Für die synthetisch berechneten Wellenformen in Abschnitt VI.2 wurde das „Quell-Wavelet“ auf diese Weise bestimmt. Beispiele sind in den Abbildungen VI.11 (S. 146), VI.20 (S. 158) und VI.26 (S. 166) dargestellt.

### 1.2.2 Normierung der Daten

Innerhalb einer Inversion kann die Verwendung des Least-Squares-Kriteriums zur Behandlung der Impulsantwort des Mess-Systems nachteilig sein. Falls die synthetischen Daten zu Beginn der Inversion noch schlecht zu den Messwerten passen, ist das Least-Squares-Kriterium durch  $S(\omega) \rightarrow 0$  am besten erfüllt. Dann verschwinden aber auch die partiellen Ableitungen und eine Inversion ist nicht mehr möglich.

In diesem Fall ist eine Normierung der Daten und der Synthetics einer Bestimmung des „Quell-Wavelets“ vorzuziehen. Gemäß

$$G'(\omega_j, p_l) = \frac{G(\omega_j, p_l)}{\sum_k w_{kl} G(\omega_k, p_l)}$$

werden das  $\omega, p$ -Spektrum der Messwerte und die synthetisch berechnete Greensche Funktion jeweils so normiert, dass das gewichtete Mittel der Koeffizienten zu einer Frequenz gleich reell eins wird. In ähnlicher Weise kann statt der Laufzeiten die Differenz zur mittleren Laufzeit benutzt werden, um eine konstante Filterlaufzeit oder sonstige Verzögerung (beispielsweise des Triggers) zu berücksichtigen.

Zu beachten ist, dass die Normierung die effektiven Gewichte verändert. Dies muss bei der Wahl der Gewichte  $w_{kl}$  berücksichtigt werden.

### 1.3 Manipulation der $\omega, p$ -Spektren

Laufzeiten und Dispersionskurven sind ein konzentrierter Extrakt des Wellenfeldes unter einem jeweils sehr speziellen Aspekt. Ihre Inversion verläuft in der Regel wesentlich stabiler als die Inversion von  $\omega, p$ -Spektren oder Wellenformen. Das liegt daran, dass bei der Bildung des Extrakts bereits Mehrdeutigkeiten und viele Störsignale eliminiert wurden. Dafür geben sie jeweils nur einen kleinen Teil der Information im Wellenfeld wieder.

So wie Dispersionskurven als Extrakt aus dem  $\omega, p$ -Spektrum verstanden werden können, lassen sich die Daten in vielfältiger Weise manipulieren, um die Stabilität der Inversion zu erhöhen. Man könnte beispielsweise darauf verzichten, komplexe Entwicklungskoeffizienten anzupassen und das Ziel der Inversion wie folgt formulieren: Die großen Amplituden sollen in den synthetischen Daten bei den gleichen  $\omega, p$ -Werten auftreten, wie in die Messdaten.

Dazu können aus einer Dispersionsanalyse Kurven abgelesen werden, auf denen das  $\omega, p$ -Spektrum ein Maximum hat. Daraus wird künstlich eine  $\omega, p$ -Amplitudenfunktion  $A(\omega, p)$  erzeugt, die ein Maximum auf den abgelesenen Kurven hat und zu anderen  $\omega, p$ -Werten hin abklingt. Das synthetische Spektrum der Greenschen Funktion muss dann vor der Berechnung des Misfits ebenfalls entsprechend manipuliert werden (Betragsbildung, Normierung).

Dieses Vorgehen ist hilfreich, wenn die Spektren der Daten starke Artefakte enthalten, die zwar identifiziert werden können, bei einer formalen Misfit-Berechnung jedoch stören. Im Vergleich zur Anpassung von Dispersionskurven hat die beschriebene Vorgehensweise immer noch den Vorteil, dass eine Zuordnung zu Normalmoden weiterhin entfällt.

Die in Abschnitt VI.4 (S. 196) beschriebenen numerischen Experimente wurden auf diese Weise durchgeführt.

### 1.4 Joint-Inversion

Es ist anzustreben, möglichst viel vorhandene Information in einer Inversion auszuschöpfen. Für die in Kapitel VI vorgestellten Datensätze wurden die Zeiten der Ersteinsätze sowie das  $\omega, p$ -Spektrum des Wellenfeldes gleichzeitig invertiert. Die Ersteinsätze haben kleine Amplituden und werden im  $\omega, p$ -Spektrum bei kleinen Langsamkeiten abgebildet, wo sie besonders von Störsignalen betroffen sind (Abschnitt III.4.2.2, S. 92). Aus den Seismogrammen abgelesen, wird die in den Laufzeiten enthaltene, eindeutige Information über  $v_p$  für die Inversion besser genutzt. Dadurch ist es möglich in einer einzigen Inversion  $v_p(z)$  und  $v_s(z)$  gleichzeitig zu bestimmen. Dann sind auch sinnvolle Aussagen über die Poisson-Zahl möglich, die beispielsweise ein wichtiger Indikator für die Wassersättigung ist.

In gleicher Weise könnten weitere Datensätze in die Inversion aufgenommen werden, um deren Aussagekraft zu erhöhen. Verschiedene Quellen können in der Lage sein unterschiedliche Moden anzuregen. Ebenso zeigt die Radialkomponente der Verschiebung oft andere Moden als die Vertikalkomponente. Lovewellen können andere Sensitivitäten für die Struktur aufweisen als Rayleigh-Wellen. In einigen Fällen wurden im Weitwinkelbereich bereits im Einzelschuss deutliche Reflexionen beobachtet, die Informationen über Diskontinuitäten enthalten<sup>1</sup>. Die Inversion von Wellenformen ermöglicht es, stärkeres Gewicht auf amplitudenschwache Raumwellen zu legen. Jedenfalls ist es sinnvoll all diese Datensätze oder unterschiedlichen Darstellungen eines Datensatzes gemeinsam zu invertieren und damit die Modellparameter stärker einzuschränken, anstatt für jeden Datensatz eine eigene Inversion durchzuführen und die Ergebnisse zu mitteln.

#### 1.4.1 Gewichtung der Daten

Die Definition des gewichteten quadratischen Misfits in Gl. (II.43) auf Seite 57 garantiert die Kombinierbarkeit beliebiger Datenwerte, da die Summanden durch die Faktoren  $w_j$  dimensionslos werden. In diesem Sinne besteht kein prinzipieller Unterschied zwischen der Kombination von Laufzeitdaten und Spektralkoeffizienten oder der Kombination mehrerer Spektralkoeffizienten. Dass der Laufzeit-Misfit und der Misfit aus dem  $\omega, p$ -Spektrum relativ zueinander gewichtet werden müssen, ist offensichtlich. Ähnliche Überlegungen müssen jedoch auch für die Gewichtung der Spektralkoeffizienten untereinander angestellt werden.

Sind die für die Messwerte geschätzten Toleranzen  $\sigma_j$  in Gl. (II.42) auf Seite 56 für alle Werte  $d_j$  gleich, so wird der Inversionsalgorithmus zunächst bestrebt sein, die Spektralkoeffizienten größter Amplitude optimal anzupassen. Dies geschieht auf Kosten von Spektralbereichen kleinerer Amplitude, solange weniger Modellparameter als signifikante Daten zur Verfügung stehen (Abschnitt IV.2.3, S. 108). Das ist formal korrekt, da in Gl. (II.42) nur das Signal-/Stör-Verhältnis zur Gewichtung eingeht und dieses ist für die Koeffizienten großer Amplituden am größten.

Intuitiv wird man aber auf amplitudenschwache Koeffizienten, die eine unabhängige Aussage über das Erdmodell zulassen, nicht verzichten und sie ähnlich gewichten wollen, wie die Spektralkoeffizienten großer Amplitude. Daher habe ich die  $\sigma_j$  in Gl. (II.43) durch die Gewichte  $w_j$  ersetzt. Im Gegensatz zu den einigermaßen objektiv aus den Bedingungen der Messung ableitbaren Toleranzen

---

<sup>1</sup>Dies ist beispielsweise im Datensatz RIEDHEIM 1997 (Abschnitt VI.3.1, S. 170) der Fall, wird hier aber nicht gezeigt. Es war auf diese Weise möglich die Mergel der Würm Grundmoräne von den Beckentonen abzugrenzen, die in den Ersteinsätzen überschossen sind (Hecht, 2000). Auch Sain und Reddy (1997) beschreiben den Nutzen von überkritischen Reflexionen zur Abgrenzung überschosser Schichten.

$\sigma_j$  unterliegt diese Gewichtung der rein subjektiven Einschätzung des interpretierenden Geophysikers. Die Wahl der  $w_j$  sollte aber so erfolgen, dass dem Wert  $\chi^2 = 1$  in Gl. (II.43) eine sinnvolle Bedeutung zukommt.

Bei der Berechnung der in Kapitel VI vorgestellten Beispiele habe ich für die Laufzeitwerte

$$w_j = \sqrt{1-\zeta} \frac{1}{\sigma_{tt}} \frac{\gamma_j}{\sqrt{\sum_j \gamma_j^2}} \quad \text{und} \quad w_j = \sqrt{\zeta} \frac{1}{\sigma_{\text{green}}} \frac{\gamma_j}{\sqrt{\sum_j \gamma_j^2}}$$

für die Spektralkoeffizienten gewählt. Die Summe erstreckt sich dabei jeweils nur über den Teildatensatz. Für beide Datensätze werden mittlere Toleranzen  $\sigma_{tt}$  (Laufzeiten) und  $\sigma_{\text{green}}$  (Spektralkoeffizienten) gegeben. Die  $\gamma_j \in [1, 0]$  bestimmen eine relative Gewichtung zwischen den einzelnen Werten und sind im einfachsten Fall alle  $\gamma_j = 1$ . Die Normierung sorgt dafür, dass die effektive Toleranz für kleine  $\gamma_j$  vergrößert und für  $\gamma_j \rightarrow 1$  verkleinert wird. Wollte man gestörte Werte (zum Beispiel durch Aliasing) gezielt ausblenden, wäre es angemessen, für diese die Toleranz zu vergrößern ohne die Normierung der anderen Werte zu beeinflussen.

Die so berechneten Gewichtungsfaktoren  $w_j$  geben dem Misfit der Einzeldatensätze bereits eine sinnvolle Bedeutung. Für  $\chi^2 = 1$  wird die Toleranz  $\sigma$  für jeden Messwert im gewichteten Mittel ausgeschöpft. Der Faktor  $\zeta \in [1, 0]$  bestimmt die relative Gewichtung der Laufzeitwerte zu den Spektralkoeffizienten im Gesamtmissfit. Die Auflösungsanalysen in Abschnitt VI.2 wurden für  $\zeta = 0.5$  berechnet.

Es ist sinnvoll, in einem Inversionsprogramm alle eingelesenen Daten und alle neu berechneten Synthetics sofort mit den Gewichten  $w_j$  zu multiplizieren. Im Inversionsalgorithmus treten Daten und Synthetics nur gewichtet auf. Da die Gewichte aber im Gleichungssystem Gl. (IV.4) (S. 103) an zwei Stellen auftreten und auch zur Berücksichtigung des Quell-Wavelets (Abschnitt V.1.2) benötigt werden, lassen sich auf diese Weise Multiplikationen sparen. Die Gewichte in das Least-Squares-Gleichungssystem einzubringen oder von vornherein mit entsprechend skalierten Daten zu arbeiten, ist vollkommen äquivalent.

## 2 Behandlung der Modellparameter

### 2.1 Anforderungen an eine Modellparametrisierung

An Grenzflächen zwischen zwei Materialien (beispielsweise am anstehenden Festgestein) ändern sich die Materialeigenschaften in der Regel sprunghaft. Insbesondere Lockersedimente weisen aber oft eine ausgeprägte, aber stetige Variation ihrer Materialparameter auf. Diese können am besten durch einen funktionalen Zusammenhang wie  $v_p(\vec{r})$ , oder in einem eindimensionalen Modell  $v_p(z)$ ,



sinnvoll beschrieben werden. Für eine numerische Behandlung ist es notwendig, die Materialeigenschaften durch eine endliche Anzahl diskreter Parameter zu charakterisieren. Man wählt daher immer eine Entwicklung der Materialparameter ( $v_p(z)$ ,  $v_s(z)$ ,  $\rho(z)$ , ...) nach  $N$  Basisfunktionen  $b_i(z)$  in der Form

$$p(z) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i b_i(z).$$

Dabei steht  $p(z)$  stellvertretend für einen Materialparameter. Die Materialeigenschaften werden so durch den diskreten Satz der  $N$  Koeffizienten  $p_i$  beschrieben.

In der Regel ist es notwendig und sinnvoll, eine Diskontinuität erster oder zweiter Ordnung zuzulassen, beispielsweise um die Oberkante anstehenden Festgesteins abzubilden. Dann muss die Parametrisierung in mehrere Sektionen  $i$  unterteilt werden, die jeweils das Intervall  $[z_{i-1}, z_i)$  zwischen zwei möglichen Diskontinuitäten beschreiben. Es ist dann sinnvoll, die Parametrisierung

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N-1} p_i b_i(x)$$

innerhalb des Intervalls mit einem dimensionslosen Parameter

$$x(z) = \frac{2z - (z_{i-1} + z_i)}{z_i - z_{i-1}} \quad \text{mit } z \in [z_{i-1}, z_i) \quad \text{und damit } x \in [-1, 1)$$

zu beschreiben, der sich auf die Größe des Intervalls bezieht. Eine Änderung der Intervallgrenzen hat dann keine Änderung des durchlaufenen Wertebereichs zur Folge. Auf diese Weise wird die Information über die Tiefe von Diskontinuitäten besser von den elastischen Parametern entkoppelt (Abschnitt V.2.3).

Ferner ist es vorteilhaft, wenn die Basisfunktionen auf diesem Intervall orthonormiert sind, also

$$\int_{-1}^{+1} b_k(x) b_l(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \text{ und} \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$$

gilt. Die in Abschnitt IV.1.4 (S. 99) eingeführten Strafterme können für eine parametrisierte Modellfunktion  $p(x)$  über die mittlere quadratische Abweichung von

der Vorgabe  $p(x) = \alpha q(x)$  formuliert werden. Mit

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |p(x) - \alpha q(x)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{N-1} (p_k - \alpha q_k) \underbrace{\left[ \int_{-1}^{+1} b_k(x) b_l(x) dx \right]}_{=H_{kl}} (p_l - \alpha q_l) \\ &= \frac{1}{2} |S(\vec{p} - \alpha \vec{q})|^2 \quad \text{und } H = S^T S \end{aligned}$$

führt das auf eine quadratische Form in den diskreten Modellparametern. Für orthonormierte Basisfunktionen wird  $H$  und damit auch  $S$  zur Einheitsmatrix und damit

$$\xi^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (p_k - \alpha q_k)^2.$$

Außerdem ist darauf zu achten, dass sich die Basisfunktionen in dem Sinne unterscheiden, dass jeweils nur eine Funktion zum Mittelwert, zum mittleren Gradienten und zur mittleren Krümmung beiträgt. Häufig besteht nur eine Sensitivität für den Mittelwert eines Parameters. Kann dieser auch durch Koeffizienten  $p_l$  höherer Ordnung verändert werden, so weist das Inversionsergebnis fast zwangsläufig übertriebene Parametervariationen auf. Ich fordere daher

$$\int_{-1}^{+1} b_l^{(n)}(x) dx = 0 \quad \forall n \neq l,$$

wobei  $b_l^{(n)}(x)$  die  $n$ -te Ableitung von  $b_l(x)$  nach  $x$  ist.

Alle diese Forderungen werden beispielsweise von orthonormierten Legendre-Polynomen

$$b_0(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad b_1(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} x \quad \text{und} \quad b_2(x) = \sqrt{\frac{5}{8}} (3x^2 - 1)$$

bis zur zweiten Ordnung erfüllt. Gegenüber anderen Basisfunktionen haben Polynome zweiter Ordnung den Vorteil, dass sie sich einfach analytisch auflösen lassen. Das ist zur flexiblen Bestimmung von Schichtmächtigkeiten hilfreich, wenn das Modell für Matrix-Methoden (Abschnitt II.3.4, S. 47) in homogene Schichten zerlegt werden muss.

Eine sehr spezielle Klasse von Basisfunktionen sind Boxcar-Funktionen

$$b_l(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } z_l \leq z < z_{l+1} \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zur Darstellung homogener Schichten. Diese erfüllen ebenfalls alle genannten Voraussetzungen. Sie bieten außerdem den Vorzug, dass jeder Parametrisierungs-Koeffizient  $p_l$  dieselbe physikalische Einheit hat, wie der Materialparameter  $p(z)$ . Sollen kontinuierliche Materialveränderungen durch eine Näherung mit homogenen Schichten dargestellt werden, muss das Modell jedoch in sehr viele Teilintervalle zerlegt werden.

## 2.2 Vor- und Nachteile einer strikten Parametrisierung

Müssen die partiellen Ableitungen über Differenzenquotienten genähert werden (Abschnitt IV.1.3, S. 98), so hängt der Rechenaufwand wesentlich von der Anzahl der freien Inversionsparameter ab. Unter diesem Gesichtspunkt ist es günstig, möglichst wenige freie Inversionsparameter zu benutzen. Daher benutze ich für die Beispiele in Kapitel VI eine Parametrisierung nach Polynomen maximal zweiter Ordnung (Abschnitt A.2.2, S. 218). Die Parametrisierung erzwingt dann gleichzeitig die „Glattheit“ der Modellkurven. Damit wird die Forderung erfüllt, dass das Erdmodell nicht mehr Struktur aufweisen soll als nötig.

Diese Eingrenzung der Modellbeschreibung auf einen niedrigdimensionalen Raum schränkt auch die Variabilität der synthetischen Daten ein. Und dies wiederum beschränkt die mögliche Misfit-Reduktion, die durch einen physikalischen Parameter erreicht werden kann, da diese auch von der Anzahl der für eine Linearkombination zur Verfügung stehenden partiellen Ableitungen abhängt (Abschnitt IV.2.3, S. 108). Praktisch führt das zu folgendem Effekt: Die Modellparametrisierung lässt nicht den Kurvenverlauf für  $v_p(z)$  und  $v_s(z)$  zu, der für eine optimale Anpassung notwendig wäre. Weil auch die Dichte einen Einfluss auf die Lage der Moden hat, kann der Misfit durch eine geeignete Wahl von  $\rho(z)$  weiter gesenkt werden. Da aber die Sensitivitäten für die Dichte viel kleiner sind, führt dies zu unsinnig großen Dichteänderungen. Eine Misfit-Reduktion gleicher Größe könnte durch kleine Änderungen der Geschwindigkeiten erreicht werden, falls es die zur Verfügung stehenden Kurvenklassen zulassen würden.

Vor einer Optimierung von  $\rho(z)$  muss also die maximale Misfit-Reduktion ausgeschöpft werden, die durch eine geeignete Wahl der Geschwindigkeiten möglich ist. Das erfordert aber eine Parametrisierung, die weit mehr Kurvenklassen zulässt als nur Polynome bis zur zweiten Ordnung.

### 2.3 Die Tiefe von Diskontinuitäten als Inversionsparameter

Die Tiefe  $z$  ist keine Materialeigenschaft. Sie ist ein Funktionsparameter zur Beschreibung der räumlichen Veränderlichkeit der Materialeigenschaften. Trotzdem wird die Koordinate  $z$  häufig als Inversionsparameter benutzt. Die Ursache dafür liegt in der Form der gewählten Parametrisierung. Für eine Parametrisierung tritt die Tiefen-Koordinate in Form von Intervallgrenzen für die Basisfunktionen auf. Für homogene Schichten sind das die Grenzflächen zwischen den Schichten. Für die in Kapitel VI gewählte Parametrisierung (Abschnitt A.2.2, S. 218) sind das die Grenzen der einzelnen Polynom-Sektionen. Diese Grenzen sind häufig Diskontinuitäten erster Ordnung und stellen damit die Grenze zwischen zwei Materialien mit stark unterschiedlichen Eigenschaften dar.

Besonders für ein Modell aus vielen dünnen homogenen Schichten ist es einleuchtend, dass ein und dieselbe Veränderung des effektiven Modells sowohl durch eine Änderung der Parameterwerte in den Schichten, wie auch durch eine Verschiebung der Schichtgrenzen herbeigeführt werden kann. Formal führt das dazu, dass der Satz der partiellen Ableitungen linear abhängig wird. Die Matrix des Least-Squares-Gleichungssystems hat dann eine große Konditionszahl. Dadurch wird das gesamte Problem instabil. Praktisch kann das dazu führen, dass die stabilisierte Inversion immer zwischen zwei Modellen „hin und her schaukelt“. Der Inversionsparameter „Tiefe“ ist daher nur mit Vorsicht zu gebrauchen.

Trotzdem wird man immer wieder eine  $z$ -Koordinate als Inversionsparameter benutzen. Beispielsweise kann die Tiefe einer Diskontinuität erster Ordnung im Material durchaus als Materialeigenschaft verstanden werden. Dabei ist aber zu berücksichtigen, dass die Koordinate  $z$  zwar als Funktionsparameter für alle physikalischen Materialeigenschaften auftritt, deshalb aber noch lange nicht alle Materialeigenschaften in derselben Tiefe eine Diskontinuität aufweisen müssen. Ein Beispiel: Die Kompressionswellen-Geschwindigkeit hängt stark nichtlinear von der Wassersättigung ab (Schön, 1998). Geht die Wassersättigung in einer bestimmten Tiefe gegen 100%, so kommt das in Lockersedimenten einer Diskontinuität in  $v_p(z)$  gleich. Die Scherwellen-Geschwindigkeit kann davon nahezu unberührt bleiben. Leider wird das manchmal sogar bei der Inversion physikalisch vollkommen verschiedener Eigenschaften übersehen<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>„Completely different physical data can also be integrated into a joint inversion if, at least, the measured data are influenced by a subset of the underground parameters. For example, when using seismic and geoelectrical data the common parameter in both methods is the depth.“ (Hering et al., 1995)

## 2.4 Wahl der Inversionsparameter

Die Materialeigenschaften können durch unterschiedliche, aber äquivalente Parameter beschrieben werden, beispielsweise durch komplexe seismische Geschwindigkeiten und die Dichte einerseits oder andererseits durch komplexe elastische Moduln und die Dichte. Formale Vor- und Nachteile der verschiedenen Darstellungen diskutiere ich in Abschnitt II.2.2.3 (S. 40).

Steht bereits bei der Inversion fest, welche Parameter für eine weitere, lithologische Interpretation des Ergebnismodells benutzt werden sollen, so ist es günstig, diese auch als Inversionsparameter einzusetzen. Soll beispielsweise das Poisson-Verhältnis bestimmt werden, so wird in der Inversion besser nach diesem und einer der Geschwindigkeiten parametrisiert. Insbesondere sollte die Glattheitsbedingung gleich auf das Poisson-Verhältnis angewendet werden. Werden hingegen zunächst möglichst glatte Modellkurven für  $v_s$  und  $v_p$  bestimmt, so kann das daraus berechnete Poisson-Verhältnis durchaus eine ausgeprägte, aber nicht signifikante Tiefen-Abhängigkeit aufweisen.

## 2.5 Einschränkungen durch Ungleichungen

Für alle Modellparameter gibt es in der Regel Wertebereiche, die als „physikalisch sinnvoll“ definiert sind. Für die elastischen Eigenschaften diskutiere ich das ausführlich in Abschnitt II.2. Es kann für jeden Parameter eine obere Grenze und eine untere Grenze für den sinnvollen Wertebereich angegeben werden. Dabei können sich Parameter auch gegenseitig einschränken, zum Beispiel durch die Forderung  $v_p > 1.5 v_s$ .

Die daraus entstehenden Nebenbedingungen für die Inversionsparameter werden durch Ungleichungen ausgedrückt. Diese lassen sich nur schwer rein formal in den Least-Squares-Algorithmus integrieren. Der praktikabelste Weg besteht darin, die Bedingungen nach jedem Inversionsschritt zu prüfen, bevor eine Modelländerung akzeptiert wird. Verletzt ein Parameter die Bedingungen, wird er für den aktuellen Iterationsschritt von der Inversion ausgeschlossen. Dies kann durch Manipulation des Gleichungssystems geschehen, in ähnlicher Weise wie in Abschnitt IV.2.2 (S. 106) beschrieben. Auf diese Weise wird sichergestellt, dass das Inversionsergebnis physikalisch sinnvoll ist. Anschließend muss nur das Gleichungssystem ein weiteres Mal gelöst werden. Die partiellen Ableitungen sind nicht neu zu berechnen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich ein weiterer praktischer Aspekt zur Verwendung der  $z$ -Koordinate als Inversionsparameter. Sollen die Tiefen der Intervallgrenzen für die Basisfunktionen mit invertiert werden, so ist es sinnvoller diese als Schichtdicken oder Dicken von Sektionen zu parametrisieren, anstatt als absolute Tiefen. Die Forderung, dass ein Parameter positiv sein muss (Dicke),

ist im Algorithmus leichter zu handhaben als der Vergleich zweier Parameter ( $z$ -Koordinaten). Werden ferner Basisfunktionen mit einem auf den Definitionsbereich  $[-1, 1)$  normierten Parameter benutzt (Abschnitt V.2.1), so kann eine Änderung der Schichtdicke keine Verletzung der Ungleichung für den Wert des Parameters verursachen.

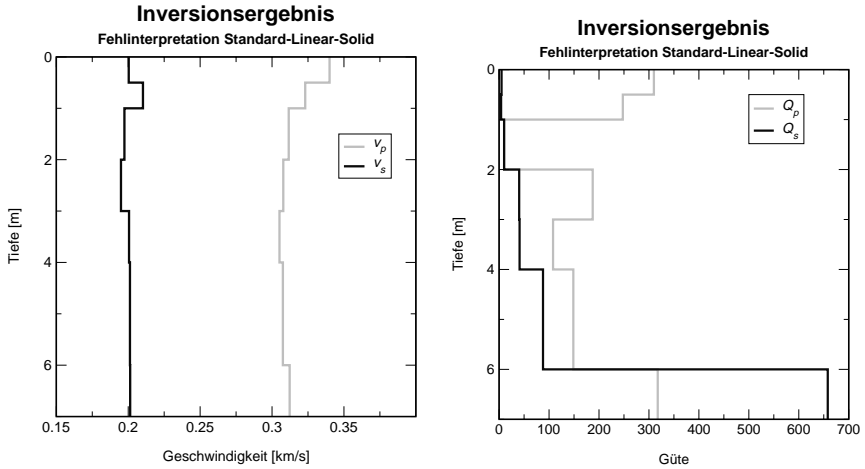
## 2.6 $Q$ , pragmatisch betrachtet

In Abschnitt II.2.1.1 (S. 30) habe ich die Güte  $Q$  als viskoelastischen Materialparameter eingeführt. Doch bereits in Abschnitt II.2.1.4 (S. 36) wird die Verwendung eines voll viskoelastischen Materialgesetzes für die Inversion in Frage gestellt. Der Hintergrund dafür ist, dass viskoelastische Dämpfung zu intrinsischer Dispersion führt. Das heißt, in einem solchen Medium sind die seismischen Wellengeschwindigkeiten auch im homogenen Vollraum von der Frequenz abhängig. In flachseismischen Experimenten trifft man oft stark dämpfende Medien an, so dass auch im schmalen Frequenzband der seismischen Registrierung eine intrinsische Dispersion beobachtbar sein müsste. Für  $Q = 10$  beträgt die Geschwindigkeits-Dispersion über eine Frequenz-Dekade gut 7%.

Die Frequenz-Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit von Oberflächenwellen wird jedoch zur Ermittlung der räumlichen Struktur des Mediums benutzt. Unabhängig davon zugleich ein viskoelastisches (Frequenz-abhängiges) Materialgesetz zu ermitteln, ist aussichtslos. Dazu müssten gleichzeitig sehr viele Moden mit großer Genauigkeit beobachtet werden.

In Abb. V.1 ist das Ergebnis eines numerischen Experiments dargestellt. Für einen homogenen Halbraum mit  $v_p = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_s = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\rho = 1.6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ,  $Q_p = 30$  und  $Q_s = 20$  und der Rheologie eines Standard-Linear-Solid (SLS, Abschnitt II.2.1.1, S. 30) wurde eine Greensche Funktion bis 100Hz berechnet. Die Relaxation des SLS lag bei 800Hz. Damit ist  $Q \propto \omega^{-1}$  im berechneten Frequenzbereich. Die angegebenen Parameter gelten bei 80Hz. Dieses Spektrum habe ich als Datensatz invertiert. Dabei wurde eine vollkommen Frequenz-unabhängige (also akausale) Rheologie zur Anpassung benutzt. Dementsprechend weist das Ergebnismodell in Abb. V.1 eine *scheinbare* Tiefen-Struktur auf. Die Streuungen der seismischen Geschwindigkeiten liegen im Bereich der Toleranzen der Inversionen realer Daten (beispielsweise Abb. VI.3, S. 138). Die ermittelte  $Q$ -Struktur ist jedoch irreführend, wenn auch in diesem Beispiel sichtlich überinterpretiert.

Ich ziehe es daher vor, die Güte eher als qualitatives Maß für die intrinsische Dämpfung zu behandeln, denn als exakten Materialparameter. Bestehen Zweifel am Einfluss der gewählten Rheologie auf die ermittelte Struktur, so sollte die Inversion für die beiden Extremfälle  $\gamma = 1$  und  $\gamma = -1$  mit  $Q(\omega) = Q_{\text{ref}} \left( \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \right)^\gamma$  durchgeführt werden (Abschnitt II.2.2.2, S. 39). Die Unterschiede zwischen den



**Abbildung V.1; Der scheinbar geschichtete Halbraum:** Für einen homogenen Halbraum mit der Rheologie eines Standard-Linear-Solid (SLS) wurde eine Greensche Funktion bis 100Hz berechnet. Die Parameter des Materials sind bei der Referenz-Frequenz 80Hz:  $v_p = 340 \frac{m}{s}$ ,  $v_s = 200 \frac{m}{s}$ ,  $\rho = 1.6 \frac{g}{cm^3}$ ,  $Q_p = 30$ ,  $Q_s = 20$ . Die Relaxation des SLS liegt bei 800Hz. Damit ist  $Q \propto \omega^{-1}$  im berechneten Frequenzband. Soll dieser Datensatz durch ein Medium mit Frequenzunabhängigen Eigenschaften erklärt werden, so wird die beste Anpassung durch die hier dargestellte Tiefen-abhängige Struktur erreicht. Die Dichte wurde nicht verändert.

so erhaltenen Modellen können Aufschluss über die Größenordnung geben, in der die Wahl der Rheologie das Inversionsergebnis beeinflussen kann.

Die iterative Inversion sollte möglichst mit einem Startmodell mit kleinen  $Q$ -Werten begonnen werden. Das  $\omega, p$ -Spektrum lässt sich dann unproblematischer abtasten. Beispielsweise der Datensatz LAPTEV-SEE zeigt sehr scharf begrenzte Maxima im  $\omega, p$ -Spektrum (Abb. VI.44, S. 194 und Abschnitt VI.3.1, S. 175). Wird die Inversion mit einem realistischen  $Q$ -Wert von ca. 1000 begonnen, so muss das Spektrum sehr fein abgetastet werden, damit die linearisierte Vorwärtsrechnung eine verwendbare Näherung ist. Außerdem müssen die Moden der synthetischen Greenschen Funktion schon recht nahe an den Moden des  $\omega, p$ -Spektrums liegen, damit eine merkliche Misfit-Verringerung möglich ist. Unrealistisch kleine Anfangswerte für  $Q$  verbreitern die Maxima des synthetischen Spektrums und erleichtern die Inversion wesentlich. Ist die Lage der synthetisch berechneten Moden zufriedenstellend, so können die  $Q$ -Werte erhöht werden, bis die Breite der Maxima den Daten entspricht. In einem solchen Fall kann es nicht schaden, so-

wohl die Geschwindigkeiten als auch die Güte Frequenz-unabhängig zu halten (akausale Rheologie). Die Manipulation an den  $Q$ -Werten hat dann keinen Einfluss auf die Beträge der seismischen Geschwindigkeiten.



# Kapitel VI

## Datenbeispiele

Zur Entwicklung einer neuen Interpretationsmethode gehört die gründliche Erprobung an Messdaten. Es ist notwendig, dass das Verfahren in sich konsistent und bei der Inversion synthetischer Test-Daten erfolgreich ist. Das ist aber noch keine hinreichende Bedingung für seine Anwendbarkeit auf praktische Fragestellungen. Die Gegebenheiten einer geophysikalischen Feldmessung weichen in mehrfacher Hinsicht von den Idealisierungen ab, deren Gültigkeit für die verwendete Theorie vorausgesetzt wurde. Die flachseismischen Medien sind oft gerade in Oberflächennähe lateral stark heterogen. Auf Hammerschläge reagieren Lockersedimente eher plastisch als elastisch. Und die praktisch verfügbaren Quellen und Empfänger sind nur bis auf einige Prozent komponentenrein.

Aus diesem Grund führte ich im Rahmen der Arbeit zahlreiche Feldmessungen durch und untersuchte sie hinsichtlich der Interpretierbarkeit von Oberflächenwellen. In Abschnitt VI.2 zeige ich beispielhaft drei vollständige Inversionen flachseismischer Datensätze. Um die Bandbreite der Materialeigenschaften im Flachbereich zu illustrieren, stelle ich in Abschnitt VI.3 die Dispersionsanalysen mehrerer Feldbeispiele dar, ohne auf Details der Inversion einzugehen. Diese unterstreichen auch die Notwendigkeit, auf eine Klassifizierung von Oberflächenwellen im Sinne von Normalmoden zu verzichten. Abschließend zeige ich in Abschnitt VI.4 exemplarisch an zwei Datensätzen, wie sich eine falsche Zuordnung der beobachteten Oberflächenwellen zu Normalmoden auf das Ergebnis einer klassischen Dispersionskurven-Inversion auswirken kann.

Bei den seismischen Messungen, aus denen die Datensätze hervorgingen, die ich im Folgenden diskutiere, haben zahlreiche Kollegen mitgewirkt. Zuvorderst sind Stefan Hecht, Erhard Wielandt und Gunther Reimann zu nennen, die jeweils an mehreren Datensätzen beteiligt sind. Die Messungen im Hegau wurden während des gemeinsamen Geländepraktikums der Universitäten Karlsruhe und

Stuttgart durchgeführt. Insbesondere an den Messungen zum Datensatz RIEDHEIM 1996 waren Ruedi Widmer, Walter Zürn und Heinz Otto vom Institut für Geophysik in Karlsruhe, sowie Sven Huesges beteiligt. Die Datensätze HILZINGEN und RIEDENBERG entstanden unter Beteiligung von Studenten des geophysikalischen Feldpraktikums. Jörg Dalkolmo unterstützte mich bei den Messungen in WOLFSCHLUGEN, Hamzjad Tuzlak ist am Datensatz GÜLTSTEIN beteiligt und Ralf Dörschel half bei den Messungen in HENGBERG. Die Messungen in LERCHENBERG wurden in Zusammenarbeit mit Kurt Bram von den „Geowissenschaftlichen Gemeinschaftsaufgaben“ (GGA) und seinen Mitarbeitern durchgeführt. Zu den Messungen in BÄRWALDE hatte ich auf Einladung und unter Mitwirkung von Christian Oelsner und seinen Mitarbeitern von der TU/Bergakademie Freiberg Gelegenheit. Der Datensatz LAPTEV-SEE wurde von der „Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe“ (BGR) aufgezeichnet und mir von Thomas Bohlen und Gerald Klein (Universität Kiel) zur Verfügung gestellt. Ihnen allen will ich an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Ohne ihre Hilfe wären Untersuchungen an Messdaten nicht in diesem Umfang möglich gewesen.

## 1 Skalierung der Abbildungen

In den folgenden Abschnitten werden eine Vielzahl von Datensätzen in gleicher Weise dargestellt. Um die entsprechenden Hinweise nicht jedes Mal wiederholen zu müssen, stelle ich hier einige Erläuterungen insbesondere zur Skalierung der Abbildungen voran:

**Seismogramm-Montagen:** Die Seismogramme sind Offset-abhängig mit einem Faktor  $r^\kappa$  skaliert. Der Parameter  $\kappa$  wird für jeden Datensatz empirisch bestimmt und im Untertitel der Grafik angegeben. Auf diese Weise sind alle Spuren in etwa gleich gut angesteuert und die absoluten Amplituden können weiterhin miteinander verglichen werden. Dies ist besonders für die Gegenüberstellung von synthetischen Seismogrammen und Messdaten notwendig.

Für Seismogramm-Montagen wird in der Regel eine reduzierte Zeit-Skala verwendet. Die Zeit  $t = t_S + r/v_{\text{red}}$  eines Abtastwertes berechnet sich aus der Zeit  $t_S$  auf der Skala, dem Offset  $r$  der Spur und der Reduktions-Geschwindigkeit  $v_{\text{red}}$ . Letztere wird im Untertitel der Grafik angegeben.

Positive Seismogramm-Ausschläge bedeuten eine Bewegung nach oben. Dies gilt für alle Datensätze der Landseismik (also alle außer LAPTEV-SEE). Die Geophone erzeugen bei Bewegung nach oben eine negative Spannung. Die Polarität wurde jedoch in allen Fällen an den BISON-Eingängen invertiert oder nachträglich korrigiert.

**$\omega, p$ -Spektren:** Die Beträge der komplexen Entwicklungskoeffizienten werden durch Graustufen wiedergegeben. In der Regel wird die Amplitude auf einer logarithmischen Skala abgebildet, die am Graukeil angegeben ist. Meistens wird für jede Frequenz ein eigener Skalierungsfaktor gewählt, da die Amplitude abhängig vom Quellspektrum stark Frequenz-abhängig ist.

Für  $\omega, p$ -Spektren, die als Dispersionsanalyse von Messdaten berechnet wurden, werden die theoretische Unschärfe und die Aliasing-Slowness angegeben (Abschnitt III.3.1, S. 75 und III.3.2, S. 79). Die Unschärfe aufgrund der endlich langen Geophon-Auslage kann durch die Breite der Schraffur am unteren Rand der Abbildung abgeschätzt werden. Die Aliasing-Slowness wird durch eine einzelne Hyperbel-Kurve angegeben. Wurden die Geophon-Abstände sehr klein gewählt, kann diese Hyperbel auch außerhalb des abgebildeten Bereichs liegen.

Bis auf die Abb. VI.31 (S. 181) für den Datensatz KÖRSCHTAL wurden alle  $\omega, p$ -Spektren mit einer modifizierten Fourier-Bessel-Transformation berechnet (Abschnitt III.2.3, S. 72). Der Integralkern in Gl. (III.14) wurde dazu durch  $\frac{1}{2}H^{(2)}$  ersetzt (Abschnitt III.3.4, S. 84). Und die Transformation wurde durch die Summenformel (III.15) genähert.

**Impulsantwort:** Die Impulsantworten der Mess-Apparatur, die sogenannten „Quell-Wavelets“ (Abschnitt V.1.2.1, S. 117) sind als Wellenform dargestellt. Ihre Amplitude wurde generell normiert. Die Ordinaten-Skala beinhaltet keine Information.

Da die synthetischen Spektren als Entwicklungskoeffizienten für die seismische Verschiebung berechnet wurden, die Messdaten aber die Verschiebungsgeschwindigkeit wiedergeben, enthält die Übertragungsfunktion eine zeitliche Ableitung.

**Partielle Ableitungen:** Dargestellt werden die partiellen Ableitungen von  $\omega, p$ -Spektren. Wie die Spektren selbst, werden die Beträge der komplexen Werte durch einen Graukeil abgebildet. Im Falle der partiellen Ableitungen sind die Werte jedoch nicht normiert.

## 2 Vollständige Inversion

### 2.1 Datensatz BIETIGHEIM

#### 2.1.1 Das Untersuchungsgebiet

**BIETIGHEIM** Nördlich der Enz liegt zwischen Bietigheim und Bissingen der Steinbruch des Schotterwerkes Fink. Das Untersuchungsgebiet befindet sich oberhalb des Steinbruchs (Flurname „Kreuzäcker“). Der geologische Untergrund besteht aus Oberem Muschelkalk, der im Steinbruch abgebaut wird. Dieser wird durch Enzschotter und Löss sowie Lösslehm überlagert. Im Messgebiet wurde folgende Schichtfolge erbohrt<sup>1</sup>:

-0,3m	Mutterboden
-3m	Löss/Lösslehm (Quartär)
-13m	Fließerden und Lösslehm (Quartär)
-15m	Enzkiese (Quartär)
-21m	Dolomitstein (Oberer Muschelkalk)
ab 21m	Kalkstein (Oberer Muschelkalk)

Diese Gliederung wird durch eine von Hecht bis etwa 9m Tiefe am Profil durchgeführte Ramm-Sondierung bestätigt.

Das Gebiet wurde als Testgelände ausgewählt, da aufgrund der geologischen Aufnahme eine gleichmäßige, lateral homogene Schichtung mit einem guten seismischen Kontrast zum Halbraum erwartet werden konnte. Das Gelände kommt damit der Idealisierung einer Schicht über einem Halbraum sehr nahe.

#### 2.1.2 Experiment und Interpretation

Es kamen zwei seismische Quellen zum Einsatz. Mit einem Vorschlaghammer (vertikal geführter Schlag auf eine am Boden liegende Aluminiumplatte) wurden drei Seismogramm-Sätze angeregt. Diese wurden, wie in Abschnitt V.1.1 (S. 115) beschrieben, zu einem Datensatz kombiniert (Abb. VI.1, S. 136). Als zweite Quelle wurde eine Explosionsquelle, ein „Seismic Impulse Source System“ (S.I.S.Sy.) eingesetzt. Die zur Verpuffung gebrachte Kartusche befindet sich beim S.I.S.Sy. am unteren Ende eines ca. 5cm starken Stahlzylinders, der durch eine Bohrung

<sup>1</sup>Anlässlich einer geplanten Erweiterung des Steinbruchs wurden mehrere Erkundungsbohrungen durchgeführt. Der Ansatzpunkt der angegebenen Bohrung B6 befindet sich auf 217,65m NN, einige Meter westlich des seismischen Profils. Die Profile wurden freundlicherweise von der Wilhelm Fink KG zur Verfügung gestellt.

ins Erdreich eingebracht wird. Der Verpuffungsraum wird durch einen Packer an der Wand des Zylinders abgeschlossen. Aufgrund ihrer Konstruktion hat die Quelle keine vollkommen isotrope Charakteristik (reine Explosion), sondern zusätzlich eine deutliche Einzelkraft-Komponente. Dies wird im Vergleich mit synthetischen Daten deutlich, die für eine reine Explosion berechnet wurden (Abb. VI.6, S. 141 und Abb. VI.10, S. 145). Von den S.I.S.Sy.-Seismogrammen wurde nur ein Einzelschuss für die Inversion benutzt.

Die Abbildung VI.5 zeigt die aus den Datensätzen berechneten  $\omega, p$ -Spektren. Bei der Verwendung von Zwei-Stations-Verfahren (Phasendifferenzen zwischen zwei Empfängern) wird vorausgesetzt, dass die Fundamentalmode das Wellenfeld dominiert. Hier ist dies *nicht* der Fall, ebenso wie im Datensatz GÜLTSTEIN (Abb. VI.39, S. 189). Und dies obwohl man gerade vom Vorschlaghammer erwarten sollte, dass er als an der freien Oberfläche angreifende Einzelkraftquelle, die Grundmode besonders stark anregt. Die erste höhere Mode weist eine größere Amplitude auf (Abb. VI.5, links). Das gleiche Verhältnis zeigt auch die synthetisch berechnete Greensche Funktion (Abb. VI.6, S. 141, links). Die Greensche Funktion für eine reine Explosionsquelle zeigt dagegen eine nur schwach angeregte erste höhere Mode (Abb. VI.6, rechts).

Die  $\omega, p$ -Spektren wurden wieder zu Wellenformen transformiert (Abschnitt III.3.4, S. 84). Abb. VI.7 (S. 142) und Abb. VI.8 (S. 143) zeigen das Ergebnis. Die  $\omega, p$ -Spektren rekonstruieren die Seismogramme erfolgreich und interpolieren sinnvoll zwischen den Geophonen. Es ist daher gerechtfertigt, die komplexen Spektren durch numerisch berechnete Greensche Funktionen anzupassen.

Als Daten für die Inversion wurde die Laufzeitkurve der Ersteinsätze (Abb. VI.2, S. 137 rechts), und das  $\omega, p$ -Spektrum des mit dem Hammer angeregten Wellenfeldes (Abb. VI.5, S. 140, links) benutzt. Ein Anfangsmodell für  $v_p$  wurde durch eine direkte Inversion der Laufzeitkurve bestimmt. Das Startmodell für die Scherwellen-Geschwindigkeit wurde mit  $v_s = v_p/1.7$  gewählt. Für die Parameter  $\rho$ ,  $Q_p$  und  $Q_s$  wurden Startwerte geschätzt.

Das Ergebnismodell der Inversion wird in Form der Polynomkoeffizienten in Tabelle VI.1 und graphisch in Abb. VI.2 (S. 137) angegeben. In der obersten Modellsektion (bis 2,7m Tiefe) weisen die Modellkurven eine starke Krümmung auf. Diese ist notwendig, um den geraden Verlauf der Dispersionskurven zwischen 20Hz und 80Hz hervorzubringen. Dies zeigt auch, dass der größte Teil des  $\omega, p$ -Spektrums hauptsächlich für diesen kleinen, oberflächennahen Modellbereich sensitiv ist. Für die Güte-Werte bestanden schwache Einschränkungen (insbesondere aufgrund der bei ca. 40Hz aussterbenden Grundmode), die zum angegebenen  $Q$ -Modell geführt haben. Die Startwerte für die Dichte  $\rho$  wurden beibehalten.

Abb. VI.4 (S. 139) zeigt, dass die Laufzeitkurve der Ersteinsätze alleine keine

Rückschlüsse auf die Tiefe des Refraktors und keine Rückschlüsse auf die Werte von  $v_p$  zwischen 5m Tiefe und dem Refraktor zulässt. Tauchwellen aus diesem Tiefenbereich treten nicht in den Ersteinsätzen auf. Man spricht von einem „überschossenen“ Bereich. Die Struktur in diesem Intervall wirkt sich nur durch die mittlere Kompressionswellen-Langsamkeit auf die Gesamtlaufzeit der an der Oberkante des Halbraums refraktierten Wellen aus. Diese Lücke wird durch die Information aus den Oberflächenwellen geschlossen. Das zeigt die Auflösungsanalyse für das Ergebnis der Inversion (Abb. VI.3, S. 138). Es kann eine Mindesttiefe für den Halbraum abgeschätzt werden und der Verlauf von  $v_p$  im überschossenen Tiefenbereich wird eingeschränkt.

Entgegen der häufig geäußerten Ansicht (Gabriels et al., 1987; Yuan und Nazarian, 1993; Matthews et al., 1996), die Oberflächenwellen würden keine Sensitivität für  $v_p$  aufweisen, ist die Fundamentalmode in diesem Beispiel für  $v_p$  genauso so sensitiv wie für  $v_s$ . Das zeigen die partiellen Ableitungen des  $\omega, p$ -Spektrums nach den Mittelwerten der Geschwindigkeiten in der obersten Modellsektion (Abb. VI.12, S. 147). Die Information über  $v_s$  wird hauptsächlich aus der ersten höheren Mode bezogen. Für  $v_s$  im Halbraum sind die Koeffizienten bei Frequenzen kleiner 10Hz sensitiv. Dieser Bereich des Spektrums ist jedoch kaum angesteuert, da die Eigenfrequenz der Geophone 10Hz beträgt und zudem das Registriergerät ein analoges Hochpassfilter bei 4Hz besitzt. Die Auflösungsanalyse zeigt deutlich, dass keine Sensitivität für  $v_s$  im Halbraum besteht. Der Wert für  $v_p$  im Halbraum wird aus der Laufzeitkurve bezogen.

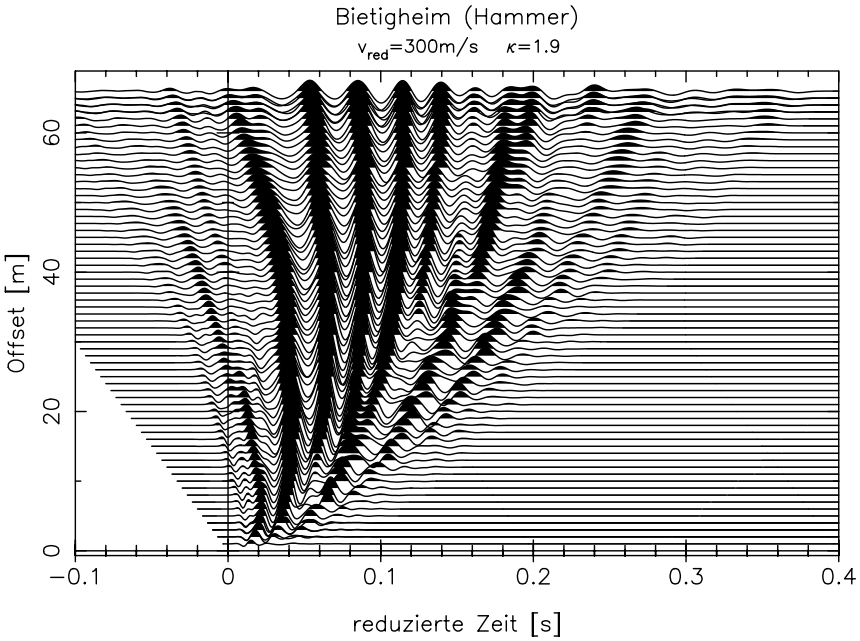
In Abb. VI.6 (S. 141) sind die synthetischen Spektren für das Ergebnismodell dargestellt. Die Greensche Funktion für die Explosion (Abb. VI.6, rechts) weist im Vergleich zum  $\omega, p$ -Spektrum der S.I.S.Sy.-Daten (Abb. VI.5, S. 140, rechts) eine zu schwache erste höhere Mode auf. Wie bereits oben erwähnt, liegt das an der Einzelkraft-Komponente der S.I.S.Sy.-Anregung. Entsprechend ist die erste höhere Mode auch in den synthetischen Seismogrammen für die Explosion zu schwach vertreten (Abb. VI.10, S. 145). Die Seismogramme für die Einzelkraft stimmen aber bereits ausgezeichnet mit den gemessenen Wellenformen überein (Abb. VI.9, S. 144). Damit kann das Ergebnismodell auch als Startmodell für eine Wellenforminversion dienen (Reimann, 1999). Zum Residuum zwischen Daten und Synthetics trägt einerseits das falsche Amplitudenverhältnis zwischen Fundamentalmode und höherer Mode bei, andererseits aber auch Phasenverschiebungen zwischen den Wellenformen. Während eine nicht optimal geschätzte Phasengeschwindigkeit nur wenig zum Residuum der Spektren beiträgt, akkumuliert sie sich im Wellenfeld über größere Distanzen zu einer merklichen Phasenverschiebung.

Die Abb. VI.11 (S. 146) zeigt die sogenannten „Quell-Wavelets“ der beiden Quellen, mit denen die jeweilige Impulsantwort des Mediums gefaltet wurde, um

zu den synthetischen Seismogrammen zu gelangen. Dazu wurde, wie in Abschnitt V.1.2.1 (S. 117) beschrieben, ein Least-Squares-Kriterium für jeden einzelnen Fourier-Koeffizienten benutzt. Diese Methode stellt nur die Forderung, dass das quadratische Residuum zwischen  $\omega, p$ -Spektrum der Daten und synthetischem Spektrum minimal werden muss. Es werden keine weiteren Forderungen gestellt, das Ergebnis muss also keine physikalisch sinnvolle Kraft-Zeit-Funktion der Quelle beschreiben. Insbesondere kann das so berechnete Wavelet sogar akausal, also für negative Zeiten von Null verschieden sein. Die in Abb. VI.11 dargestellten Wellenformen sind weitgehend impulshaft und kausal. Das ist ein weiteres Indiz dafür, dass die Daten erfolgreich interpretiert wurden.

Die Geophone geben ein Signal proportional zur Verschiebungsgeschwindigkeit ab, während die Greensche Funktion die Verschiebungsantwort auf eine Delta-Funktion ist. Die Wavelets enthalten daher noch eine Ableitung nach der Zeit.

Die erste höhere Mode der synthetischen Spektren in Abb. VI.6 folgt noch nicht optimal dem Verlauf der Moden in den Daten (Abb. VI.5). Eine bessere Anpassung ist jedoch aufgrund der strikten Modellparametrisierung nicht möglich (Abschnitt V.2.2, S. 123). Dies und das nicht optimal vorhergesagte Amplitudenverhältnis zwischen Fundamentalmode und höherer Mode führt dazu, dass das nach Gl. (V.1) (S. 117) bestimmte Quell-Wavelet eine zu kleine Amplitude aufweist. Das Least-Squares-Kriterium wird damit besser erfüllt (Abschnitt V.1.2.2, S. 117). Daher sind die synthetischen Daten für die Einzelkraft (Abb. VI.9) mit dem Faktor 2,5 und für die Explosion (Abb. VI.10) mit 3,7 skaliert.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.1, BIETIGHEIM, Seismogramm-Montage, Hammer:** Das dargestellte Wellenfeld wurde mit einem Vorschlaghammer angeregt. Der Datensatz besteht aus drei zusammengesetzten Einzelschüssen, wobei nur die Quelle versetzt wurde. Die dargestellten Seismogramme wurden Offset-abhängig gefenstert um laterale Streusignale zu eliminieren.

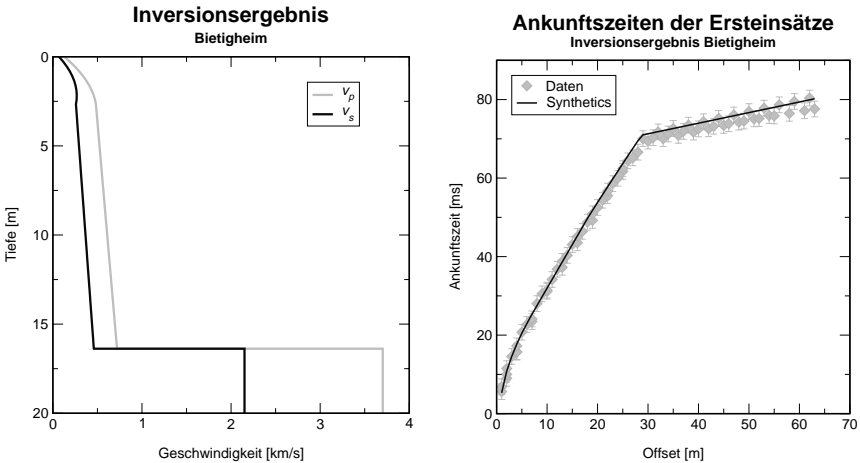
Der ausgeprägt dispergierte Wellenzug bis 0,14s muss der ersten höheren Mode zugeordnet werden. Die Fundamentalmode folgt zu späteren Zeiten und ist wesentlich schwächer angeregt. Dies ist im  $\omega, p$ -Spektrum der Seismogramme noch deutlicher zu sehen (Abb. VI.5, S. 140). Im Gegensatz dazu wird die Fundamentalmode durch eine Explosionsquelle (S.I.S.Sy.) im Verhältnis stärker angeregt (Abb. VI.8, S. 143).



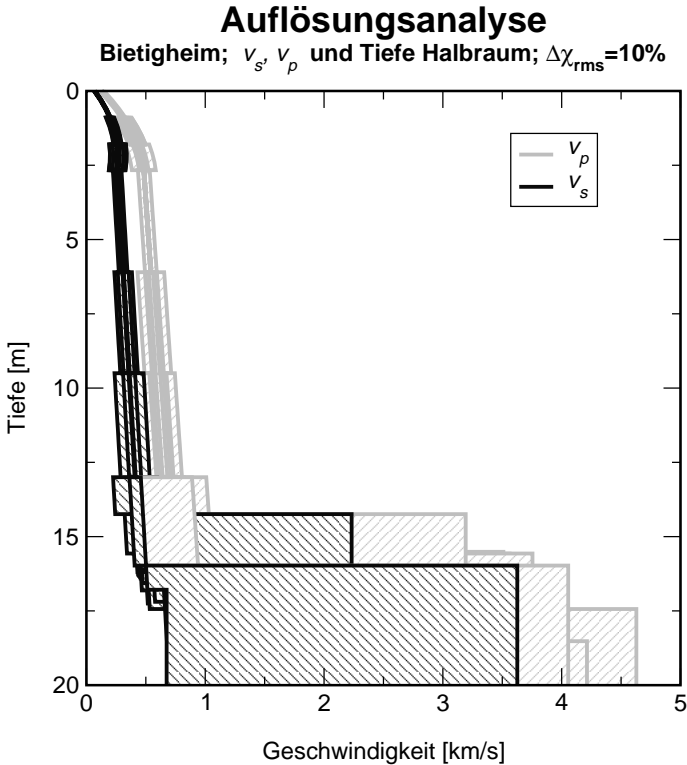
$i$	$z_i$ [m]	$v_p$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$v_s$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$Q_p$	$Q_s$
1	2,66	0,37404	0,23784	1,600	11,9	32,1
		0,13273	0,07123			
		-0,03823	-0,04164			
2	16,38	0,60151	0,35928	1,600	50,7	32,1
		0,01728	0,01465			
3	$\infty$	3,70244	2,15075	2,300	200,0	100,0

Die Werte in der Tabelle sind Polynom-Koeffizienten. Die verwendete Parametrisierung wird im Anhang in Abschnitt A.2.2 (S. 218) definiert.

**Tabelle VI.1, BIETIGHEIM, Inversionsergebnis:** Die erste Sektion (bis in 2,7m Tiefe) bestimmt den Verlauf der Moden im Frequenzband 20–80Hz. In diesem Fallbeispiel ist ein Polynom mindestens zweiter Ordnung notwendig, um den relativ geraden Verlauf der Moden in diesem Frequenzintervall zu modellieren (Abb. VI.5, S. 140).

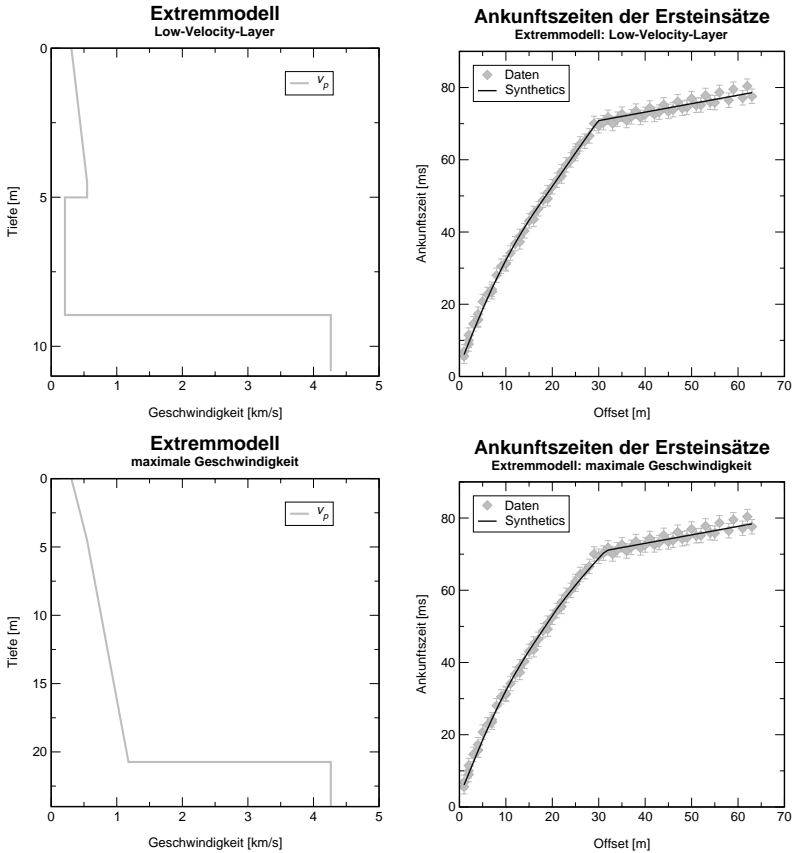


**Abbildung VI.2, BIETIGHEIM, Ergebnismodell und Laufzeitkurve:** Links ist das Ergebnismodell für die seismischen Geschwindigkeiten dargestellt. Anhand der rechten Abbildung können die abgelesenen Ankunftszeiten der refraktierten Kompressionswellen mit den für das Modell berechneten, theoretischen Werten verglichen werden. Die Fehlerbalken geben geschätzte Toleranzen für die Messwerte an. Eine Auflösungsanalyse für das Modell ist in Abb. VI.3 (S. 138) dargestellt.

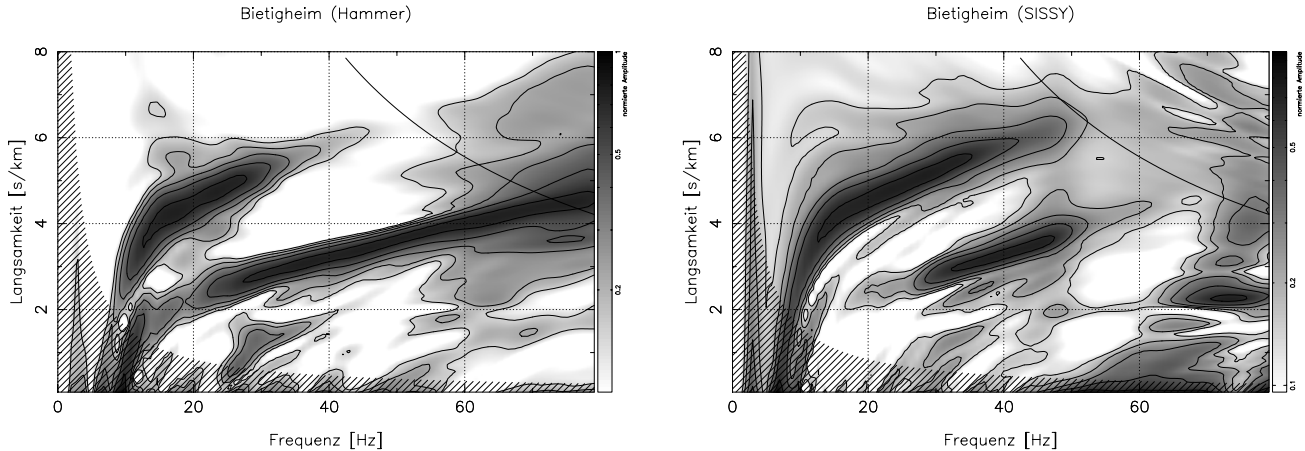


**Abbildung VI.3, BIETIGHEIM, Auflösungsanalyse:** Die schraffierten Bereiche geben die maximalen Variationen der Modellparameter an, die den rms-Misfit um nicht mehr als 10% vergrößern (Abschnitt IV.2.2). Die Koeffizienten nullter Ordnung der seismischen Geschwindigkeiten und die Tiefe des Halbraumes wurden jeweils einzeln getestet und alle anderen Parameter so nachgeführt, dass der Misfit möglichst klein blieb. Auf diese Weise wird Trade-off zwischen Modellparametern berücksichtigt. Als Grundlage diente ein aus dem Ergebnis (Tab. VI.1, S. 137) abgeleitetes Modell mit acht freien Sektionen.

Dass die Streuung unterhalb 2,6m zunächst wieder abnimmt, liegt an der darunter größeren Mächtigkeit der Sektionen. Die Kompressionswellen-Geschwindigkeit wird insbesondere unterhalb 5m aus dem  $\omega, p$ -Spektrum bestimmt (Abb. VI.12, S. 147). Die Laufzeitkurve schränkt  $v_p$  in diesem Tiefenbereich kaum ein (Abb. VI.4, S. 139). Über die Scherwellen-Geschwindigkeit im Halbraum lassen die Messdaten keine Aussagen zu.



**Abbildung VI.4, BIETIGHEIM, Überschossener Tiefenbereich:** Für die Kompressionswellen-Geschwindigkeit können extreme Modelle gefunden werden, welche die Laufzeitkurve der Ersteinsätze ebenso gut erklären, wie das Ergebnismodell aus Abb. VI.2 (S. 137). Aus dem Bereich zwischen 5m Tiefe und der Oberkante des Halbraums tragen keine Tauchwellen zu den Ersteinsätzen bei. Die Struktur aus diesem Bereich geht nur in die mittlere Laufzeit der am Halbraum refraktierten Wellen ein. Aus diesem Grund kann die Tiefe des Halbraums nicht aus den Laufzeiten bestimmt werden. So liegt der Halbraum in den gezeigten Modellen einmal in 9m und einmal in 20m Tiefe. Aus der Laufzeitkurve ergibt sich nur eine Einschränkung für die maximal mögliche Geschwindigkeitszunahme unterhalb von 5m. Wird diese überschritten, so treten zu frühe Einsätze im Offsetbereich um 30m auf.

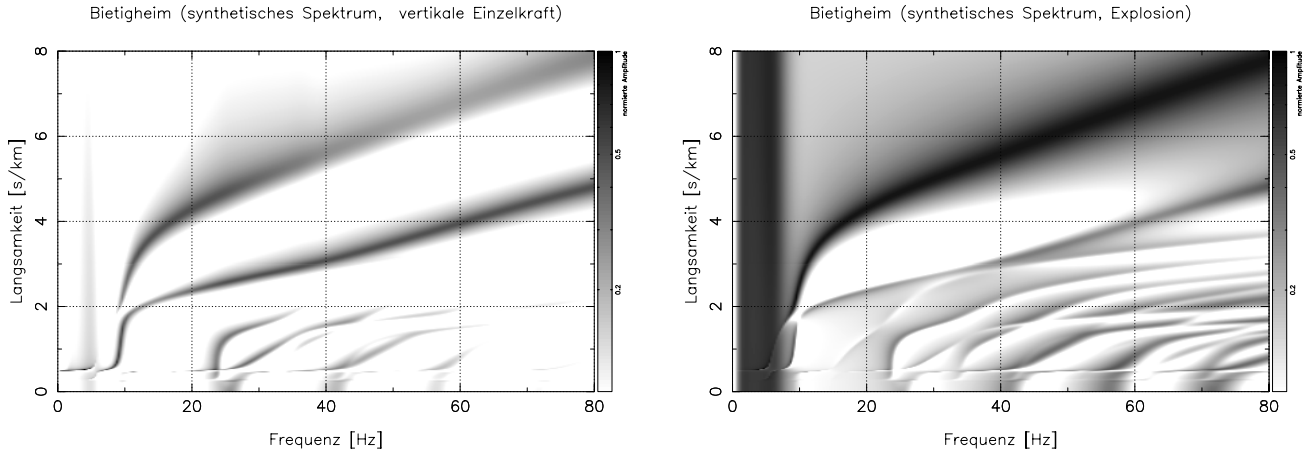


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.5, BIETIGHEIM,  $\omega, p$ -Spektren:** Auf der linken Seite ist das mit einer Fourier-Bessel-Transformation (Abschnitt III.2.3) berechnete  $\omega, p$ -Spektrum der in Abb. VI.1 (S. 136) dargestellten Wellenformen wiedergegeben. Das Wellenfeld wurde mit einem Vorschlaghammer angeregt. In der rechten Hälfte ist das mit der Explosionsquelle S.I.S.Sy. angeregte Wellenfeld abgebildet.

Deutlich zu erkennen sind in beiden Fällen die Fundamentalmode und eine erste höhere Mode. Im Falle der S.I.S.Sy.-Daten zeichnen sich bei 70Hz und  $2 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  Raumwellen im Spektrum ab. Auffällig ist, dass im Falle des Hammers die erste höhere Mode deutlich stärker angeregt wird als die Fundamentalmode.

Die Hyperbel rechts oben markiert die Aliasing-Slowness, die in beiden Fällen für den Geophon-Abstand der Einzelschüsse (3m) berechnet wurde.

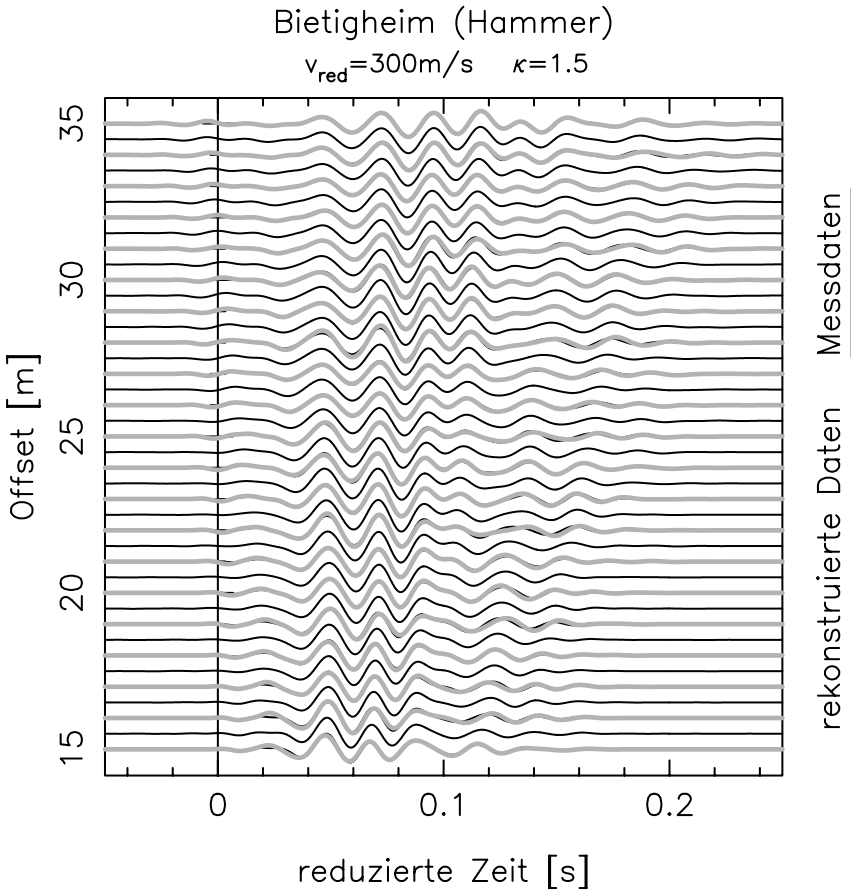


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.6, BIETIGHEIM, Spektren der Greenschen Funktion:** Dargestellt sind Spektren der Greenschen Funktion die für das Ergebnismodell (Tab. VI.1, S. 137) berechnet wurden. Links ist das Spektrum der Antwort des Mediums auf eine vertikale Einzelkraft an der Oberfläche. Wie auch in den Daten (Abb. VI.5, S. 140, links), ist die erste höhere Mode stärker angeregt als die Fundamentalmode.

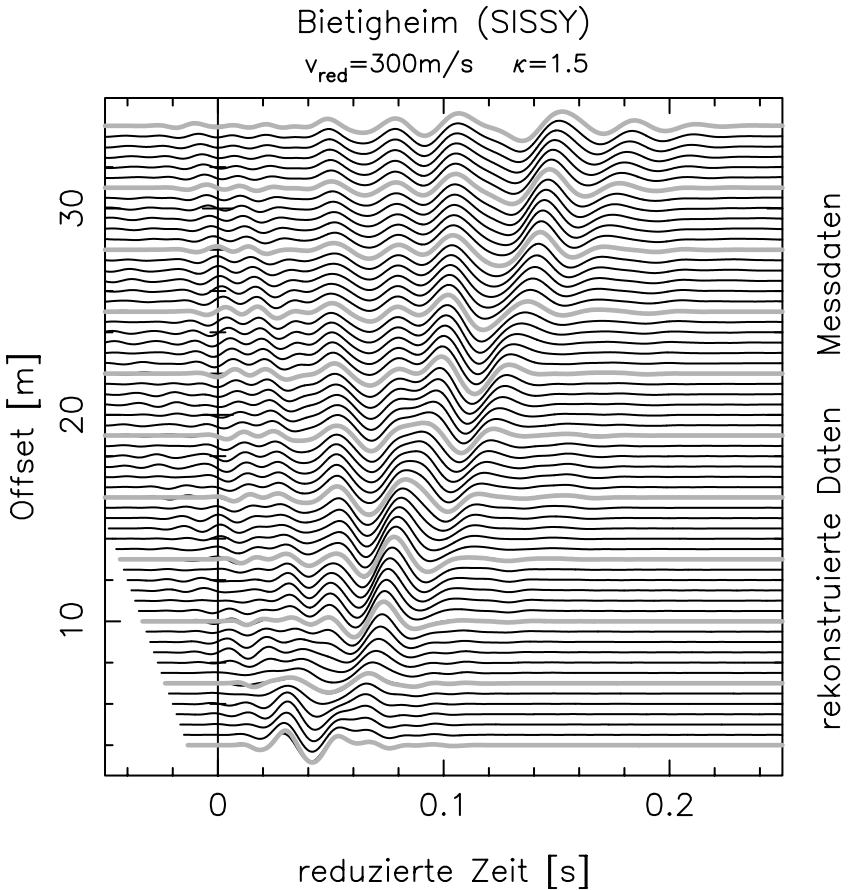
Das rechte Spektrum wurde für eine knapp unter der Oberfläche angreifende Explosionsquelle berechnet. Hier dominiert die Fundamentalmode. Das bei der Messung eingesetzte S.I.S.Sy. besitzt auch eine nennenswerte Einzelkraft-Komponente. Daher hat die höhere Mode in den Daten (Abb. VI.5, S. 140, rechts) eine größere Amplitude. Auch hier zeichnet sich für die Explosionsquelle eine Raumwelle bei ca.  $2 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  und  $> 80\text{Hz}$  ab.

Das Maximum bei 5 Hz in der rechten Abbildung ist ein Artefakt der Frequenz-abhängigen Normierung.



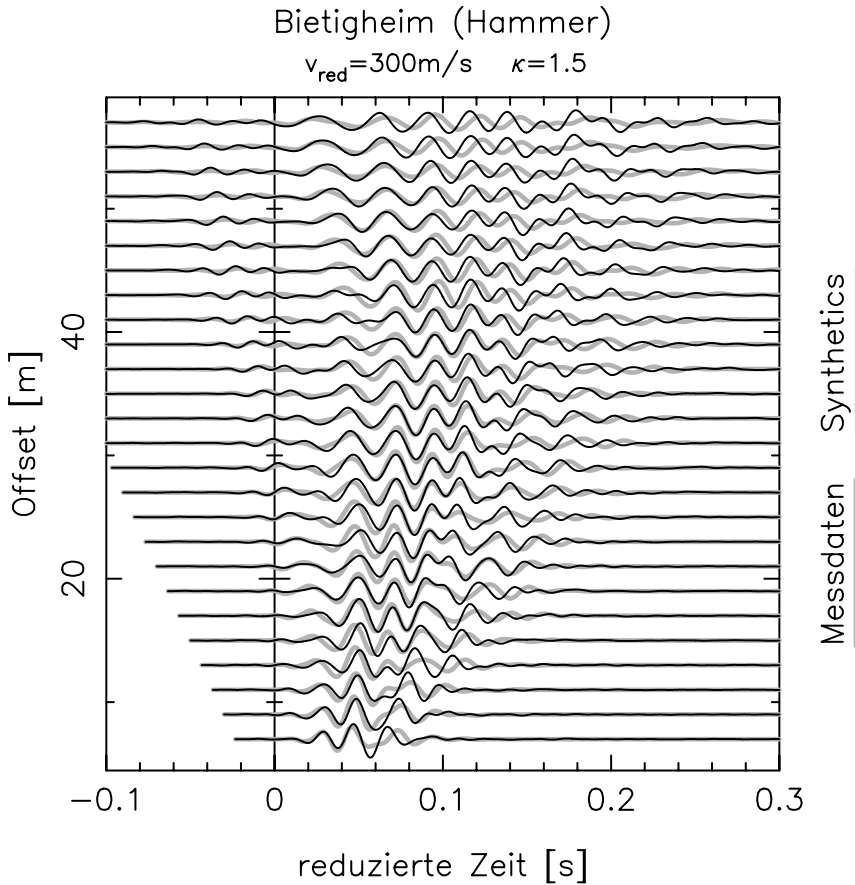
Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.7, BIETIGHEIM, Rekonstruierte Seismogramme, Hammer:** Aus dem  $\omega, p$ -Spektrum der Messdaten für Anregung mit dem Vorschlaghammer (Abb. VI.5, S. 140, links) berechnete Seismogramme. Das Transformationsintegral (III.2) wurde nach der Trapezregel numerisch genähert. Zum Vergleich sind auch die Originalseismogramme (hellgrau) dargestellt. Das Wellenfeld wird auch zwischen den Geophon-Positionen korrekt interpoliert. Die Zeitachse wurde Offset-abhängig reduziert ( $v_{\text{red}}=300\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) und die Amplituden wurden mit dem Faktor  $r^{1.5}$  Offset-abhängig skaliert.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

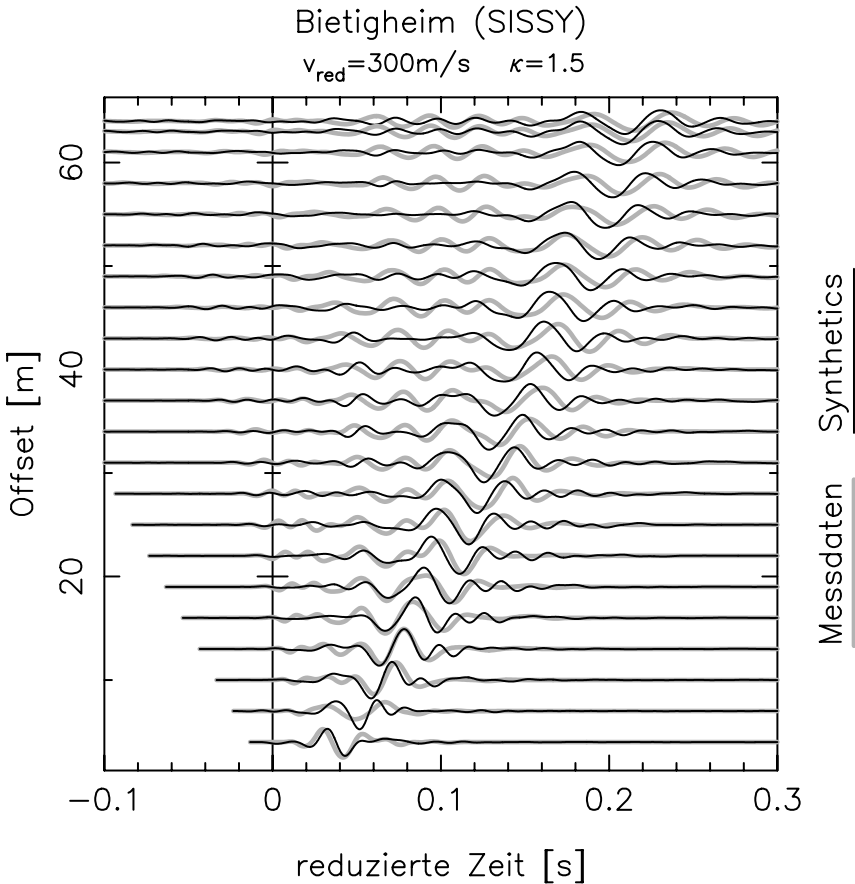
**Abbildung VI.8, BIETIGHEIM, Rekonstruierte Seismogramme, S.I.S.Sy.:** Aus dem  $\omega, p$ -Spektrum der Messdaten für Anregung mit dem S.I.S.Sy. (Abb. VI.5, S. 140, rechts) berechnete Seismogramme. Das Transformationsintegral (III.2) wurde nach der Trapezregel numerisch genähert. Zum Vergleich sind auch die Originalseismogramme (hellgrau) dargestellt. Die Oberflächenwellen werden auch zwischen den Geophon-Positionen korrekt interpoliert. Im Raumwellenbereich treten jedoch stehende Wellen auf, die sich als Artefakte zwischen den ursprünglichen Geophon-Positionen äußern. Hier wird die Bandbreite für eine korrekte Bestimmung des Spektrums durch die große Offset-Schrittweite begrenzt (Abschnitt III.3.4, S. 84).



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.9, BIETIGHEIM, Synthetische Seismogramme, Einzelkraft:** Für das Ergebnismodell (Tab. VI.1, S. 137) wurden mit der Reflektivitätsmethode synthetische Seismogramme an einigen Geophon-Offsets der Auslage berechnet. Dazu wurde das in Abb. VI.11 (S. 146) dargestellte „Quell-Wavelet“ benutzt (Abschnitt V.1.2.1, S. 117). Zum Vergleich sind den Wellenformen die gemessenen Seismogramme (hellgrau) hinterlegt.

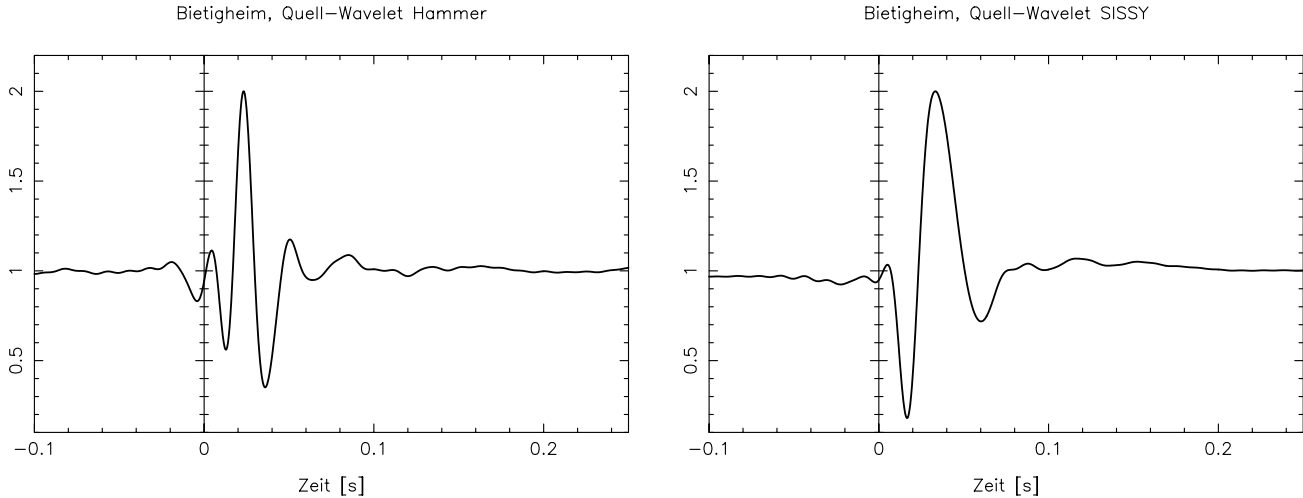




Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.10, BIETIGHEIM, Synthetische Seismogramme, Explosion:** Für das Ergebnismodell (Tab. VI.1, S. 137) wurden mit der Reflektivitätsmethode synthetische Seismogramme an einigen Geophon-Offsets der Auslage berechnet. Dazu wurde die in Abb. VI.11 (S. 146) dargestellte Impulsantwort benutzt (Abschnitt V.1.2.1, S. 117).

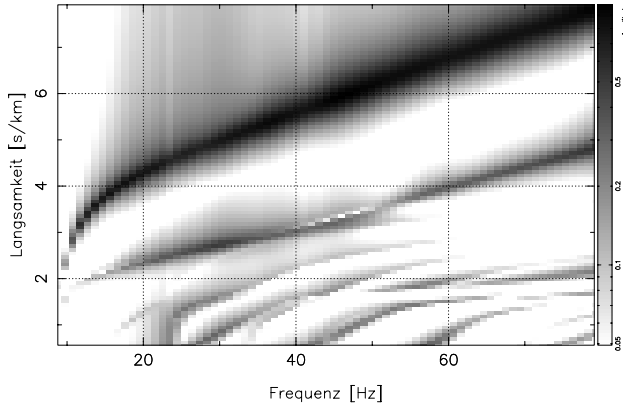
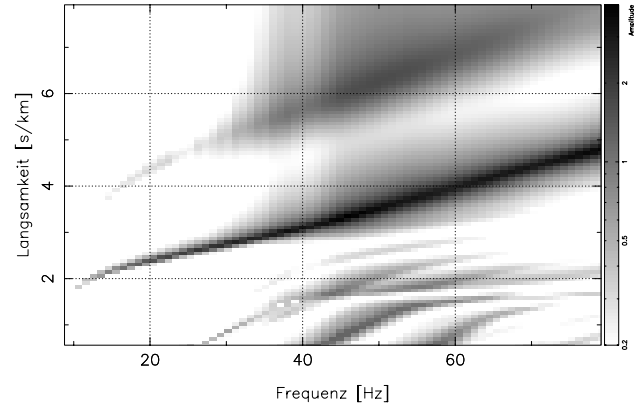
Wie schon im Spektrum (Abb. VI.6, S. 141) erkennbar, ist die erste höhere Mode zu schwach angeregt. Dies liegt an einer Einzelkraft-Komponente des S.I.S.Sy., die für die synthetischen Seismogramme nicht berücksichtigt wurde.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.11, BIETIGHEIM, Quell-Wavelets:** Gezeigt sind die normierten Impulsantworten der Mess-Instrumente für Anregung mit dem Hammer (links) und dem S.I.S.Sy. (rechts). Deren Spektrum wurde mit einem Least-Squares-Kriterium für die einzelnen Fourier-Koeffizienten bestimmt (Abschnitt V.1.2.1, S. 117). Es muss sich daher nicht zwingend um physikalisch sinnvolle Quellsignale handeln. Die berechneten Wavelets sind jedoch impulshaft und zeigen kaum akusale Vorläufer. Dies ist ein weiteres Indiz für eine erfolgreiche Inversion. Die Quell-Wavelets ermöglichen insbesondere die Berechnung synthetischer Seismogramme für das Inversionsergebnis (Abb. VI.9, S. 144 und Abb. VI.10, S. 145).

Da die Messdaten proportional zur Geschwindigkeit sind, aber die synthetische Greensche Funktion für die Verschiebung berechnet wurde, enthalten die Wavelets noch eine Ableitung.

Partielle Ableitung nach dem Mittelwert von  $v_p$  in 0–2,6m TiefePartielle Ableitung nach dem Mittelwert von  $v_s$  in 0–2,6m Tiefe

Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.12, BIETIGHEIM, Partielle Ableitungen der Greenschen Funktion:** Dargestellt sind partielle Ableitungen der Greenschen Funktion für Anregung mit einer vertikalen Einzelkraft. Links wurde nach dem Mittelwert der Kompressionswellen-Geschwindigkeit in der obersten Sektion des Ergebnismodells (Tab. VI.1, S. 137) abgeleitet, rechts entsprechend nach der Scherwellen-Geschwindigkeit. Die Spektren sind für  $v_p$  fast genauso sensitiv sind wie für  $v_s$ . Außerdem wird in diesem Fallbeispiel die meiste Information über  $v_s$  aus der ersten höheren Mode und nicht aus der Fundamentalmode bezogen.

## 2.2 Datensatz BERKHEIM

### 2.2.1 Das Untersuchungsgebiet

**BERKHEIM** In Esslingen-Berkheim befindet sich neben der Osterfeldhalle ein Hartplatz, der als Bolzplatz und Festplatz genutzt wird. Dort wurden zwei seismische Profile in Ost-West-Richtung ausgelegt. Die im Folgenden vorgestellten Daten wurden auf der südlichen Platzhälfte registriert. Der Schusspunkt lag dabei am westlichen Profilende.

In der geologischen Karte GK25 Blatt 7221 (Stuttgart-Südost) von 1960 wird im Bereich des heutigen Hartplatzes Lias  $\alpha 3$  ausgewiesen. Als schneller, seismischer Halbraum kommen daher nicht nur der Hauptsandstein der Angulaten-schichten ( $I\alpha s$ ), sondern auch Bänke von Arietenkalk ( $I\alpha 3$ ) in Frage. Im Sommer 2000 waren an der Ecke Dürrbeund-/Moltkestraße (ca. 600m nördlich des Untersuchungsgebietes) dunkelgraue Sandsteinbänke in einer Baugrube aufgeschlossen. Das 2,5m unter Gelände-Oberkante angetroffene Schichtpaket bestand aus 10-20cm mächtigen Bänken in Wechsellagerung mit schwarzen Schiefertönen. Die Unterkante des Pakets war nicht aufgeschlossen. Daher ist seine Mächtigkeit unbekannt. Die Sandsteine, die leicht kalkhaltig sind, können dem Hauptsandstein der Angulaten-schichten zugeordnet werden<sup>2</sup>.

Das Untersuchungsgebiet selbst wurde beim Bau der Osterfeldhalle und der angrenzenden Turnhalle sowie bei der Anlage des Platzes selbst vor mehr als 25 Jahren vermutlich mehrfach umgeprägt. Es musste sowohl Material abgetragen als auch zur Anlage des südlich angrenzenden Parkplatzes aufgeschüttet werden.

Nach mündlicher Mitteilung von Herrn Bessing vom Grünflächenamt der Stadt Esslingen, ist der Aufbau des Hartplatzes wie folgt gegliedert: Der Schwarzbelag an der Oberfläche ist mindestens 10cm mächtig. Im Süden wurde später etwas mehr Schwarzbelag aufgebracht, um das Gefälle des Geländes zu korrigieren. Darunter befindet sich ein ca. 40cm mächtiges Schuttgemisch. Die Auffüllung wird nach Norden zu eventuell mächtiger. Darunter trifft man auf lehmiges Material, das vermutlich auch aufgeschüttet wurde.

### 2.2.2 Experiment und Interpretation

Bei diesem Experiment kam nur der Vorschlaghammer zum Einsatz. Die Schläge wurden über eine auf dem Asphalt liegende Aluminiumplatte angekoppelt. Die Geophone konnten nicht wie üblich in den Boden gesteckt werden. Sie wurden daher mit flachen Füßen ausgerüstet und mit gewöhnlichem Gips an die Oberfläche

<sup>2</sup>Persönliche Kommunikation mit Joachim Eberle und Stefan Hecht.

des Schwarzbelags angekoppelt. Der Gips bindet innerhalb weniger Minuten ab. Die Messung war nur unwesentlich aufwendiger als auf Lockersedimenten.

Das untersuchte Gelände wurde als Testfall gewählt, da dort die Situation einer „Low-Velocity-Zone“ (LVZ) angetroffen wird. Dies ist ein klassisches Anwendungsgebiet für Oberflächenwellen (van Heijst et al., 1994). Der Schwarzbelag an der Oberfläche ist hart und deshalb ein seismisch schnelles Medium. Der darunter liegende Lehm ist seismisch langsamer. Für eine Auswertung der Laufzeitkurve der Ersteinsätze ergibt sich damit der extremste Fall überschossener Tiefenbereiche. Würde der Übergang zum langsamen Medium kontinuierlich stattfinden, so würde man in den Ersteinsätzen eine „Schattenzone“ beobachten. Im Fall des diskontinuierlichen Übergangs tritt bei kleinen Offsets eine schnelle Welle auf, die sich im Asphalt ausbreitet und rasch an Amplitude verliert, da sie Energie in den langsameren Bereich abstrahlt. In der Darstellung der Wellenformen (Abb. VI.13, S. 152) ist sie durch die großen Amplituden an den Seismogramm-Anfängen bis ca. 10m Offset erkennbar. Wenn diese Welle stark genug abgeklungen ist, tritt mit zunehmender Deutlichkeit ein späterer Einsatz in Erscheinung, der bei großen Offsets den Ersteinsatz bildet. Die Laufzeitkurve musste daher in zwei Abschnitte unterteilt werden (Abb. VI.15, S. 154, rechts). Die am Halbraum refraktierte Welle bildet ab 20m Offset die Ersteinsätze. Aus den Ankunftszeiten kann zwar  $v_p$  des Halbraums ermittelt werden, eine Bestimmung der Tiefe der Halbraum-Oberkante aus der Laufzeitkurve ist aufgrund der LVZ unmöglich. Letztere kann allerdings aus den Oberflächenwellen erfolgreich ermittelt werden, wie die Auflösungsanalyse in Abb. VI.16 (S. 155) zeigt.

Wegen der LVZ sind die Oberflächenwellen anomal dispergiert<sup>3</sup>. Die Phasengeschwindigkeit nimmt mit zunehmender Frequenz ab. Dies ist sowohl in den Seismogrammen (Abb. VI.13, S. 152) als auch im daraus berechneten  $\omega, p$ -Spektrum

---

<sup>3</sup>Nach Müller (1986) werden die Begriffe normal, anomal, regulär und invers wie folgt zur Charakterisierung der Dispersion benutzt:

- normale Dispersion:** mit zunehmender Frequenz *abnehmende Phasengeschwindigkeit*
- anomale Dispersion:** mit zunehmender Frequenz *zunehmende Phasengeschwindigkeit*
- reguläre Dispersion:** mit zunehmender Frequenz *abnehmende Gruppengeschwindigkeit*
- inverse Dispersion:** mit zunehmender Frequenz *zunehmende Gruppengeschwindigkeit*

Diese Begriffe sind für den Verlauf der Dispersionskurve einer einzelnen Normalmode definiert. In Abb. VI.19 (S. 157) sind die Dispersionskurven für die Normalmoden des Ergebnismodells dargestellt. Dort wird deutlich, dass diese keineswegs anomal dispergiert sind. Das  $\omega, p$ -Spektrum in Abb. VI.19 (S. 157) zeigt, dass der anomale Charakter der im Wellenfeld auftretenden Dispersion durch die Überlagerung mehrerer Moden zustande kommt, wobei jeder Modenast nur auf einem kleinen Frequenzintervall angeregt ist.

Ich benutze den Begriff „anomale Dispersion“ daher nicht streng nach der Definition für Normalmoden, sondern eher phänomenologisch für das gesamte beobachtete Wellenfeld. Insbesondere der Datensatz HILZINGEN zeigt klar den Charakter anomaler Dispersion. Eine Unterscheidung einzelner Normalmoden ist aber im  $\omega, p$ -Spektrum (Abb. VI.36, S. 186) nicht möglich. Somit lässt sich der Begriff vor der Inversion nicht entsprechend der formalen Definition anwenden.

(Abb. VI.14, S. 153) erkennbar. Auch der Datensatz HILZINGEN (Abschnitt VI.3.1, S. 172 und Abb. VI.36, S. 186) wurde in einer LVZ-Situation aufgezeichnet. Im Gegensatz zu diesem ist hier aber bereits im  $\omega, p$ -Spektrum zu erkennen, dass die Oberflächenwellen durch mehrere Moden gebildet werden. Abb. VI.17 (S. 156) zeigt Wellenformen, die aus dem  $\omega, p$ -Spektrum rekonstruiert wurden (Abschnitt III.3.4, S. 84).

Die anomale Dispersion lässt sich auf zweierlei Weise verstehen. Hätte der Asphalt an seiner Unterkante auch eine freie Oberfläche (dünne Platte), würden „Biegewellen“ als Eigenschwingungen beobachtet. Diese weisen eine anomale Dispersion auf (Angenheister, 1950; Förtsch, 1950). Die Asphaltplatte ist jedoch nicht frei ist, sondern liegt auf dem Lehm auf. Unter diesem folgt wieder schnelleres Material. Daher zerfällt die Biegewelle in mehrere Moden, deren Äste zu kleineren Slowness-Werten abknicken. Anders formuliert, dringen die Oberflächenwellen für große Frequenzen (kleine Wellenlänge) kaum in den Lehm ein. Ihre Geschwindigkeit wird durch den schnellen Asphalt bestimmt. Für größere Wellenlängen (kleinere Frequenzen) wird zunehmend der langsamere Lehm bestimmend. Erst wenn die Wellen bis in den schnellen Halbraum hinabreichen, knicken die Dispersionskurven zu kleinen Slowness-Werten ab.

Bemerkenswert ist, dass nur der Teil der Moden an der Oberfläche beobachtbar ist, auf den die Analogie zur Biegewelle zutrifft. Das zeigt der Vergleich des Spektrums der für das Inversionsergebnis berechneten Greenschen Funktion in Abb. VI.18 (S. 157) mit den Dispersionskurven der Eigenschwingungen in Abb. VI.19 (S. 157). Durch die Analogie zur Biegewelle lässt sich auch verstehen, warum über  $v_s$  im Asphalt relativ wenig aus den Daten erfahren werden kann (Abb. VI.16, S. 155). In die Dispersion der Biegewelle geht hauptsächlich die Steife der Asphaltplatte ein. Diese wird aber in gleicher Weise sowohl durch die Scherfestigkeit als auch die Dicke der Platte verändert. Dieser Trade-off kann während der Inversion, aber auch in der Auflösungsanalyse (Abb. VI.16, S. 155) beobachtet werden.

Das Inversionsergebnis (Tab. VI.2, S. 151) ist in Abb. VI.15 (S. 154) graphisch dargestellt. Das Modell gliedert sich in drei Einheiten. Zuerst liegt die harte Asphaltdecke. Darunter folgt ein ca. 5m mächtiges Lehmpaket. Die Basis wird von einem schnellen Halbraum (vermutlich Sandstein) gebildet. Eine Schotter-schicht unter dem Asphalt konnte seismisch nicht vom Lehm abgegrenzt werden. Für eine Auflösungsanalyse wurden die größten Variationen der seismischen Geschwindigkeiten sowie der Mächtigkeiten des Asphalts und des Lehmpakets gesucht, die zu einer Erhöhung des rms-Misfits um nicht mehr als 10% führen. Die Durchführung der Analyse, die Trade-off zwischen den Parametern berücksichtigt, wird in Abschnitt IV.2.2 (S. 106) beschrieben. Abb. VI.16 (S. 155) zeigt, dass sowohl die Tiefe des anstehenden Sandsteins wie auch die Scherwellen-

$i$	$z_i$ [m]	$v_p$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$v_s$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$Q_p$	$Q_s$
1	0,20	4,27889	1,28617	1,857	10,2	20,9
2	0,88	1,13043	0,23325	1,963	50,0	21,9
3	5,50	0,95902	0,18409	1,967	49,9	28,0
4	$\infty$	3,48084	1,91681	2,300	100,0	50,0

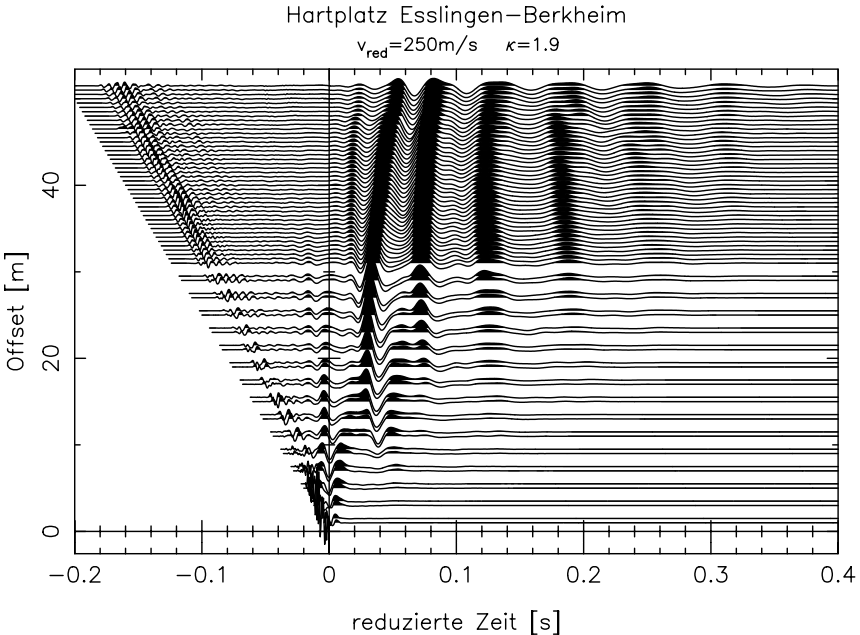
Die Werte in der Tabelle sind Polynom-Koeffizienten. Die verwendete Parametrisierung wird im Anhang in Abschnitt A.2.2 (S. 218) definiert.

**Tabelle VI.2, BERKHEIM, Inversionsergebnis:** In diesem Fall reicht ein Modell aus homogenen Schichten vollkommen aus, um die Messdaten zu erklären. Im Verlauf der Inversion wurden weitere Polynomordnungen als Inversionsparameter freigegeben, blieben aber praktisch ungenutzt. Die oberste Sektion beschreibt den Asphalt (Schwarzbelag) des Platzes. Darunter befindet sich eine Schicht die separat angelegt wurde, um das Schotter-Fundament des Platzes abzubilden. Diese konnte jedoch nicht vom Lehm abgegrenzt werden. Das Modell wird nach unten von einem schnellen Halbraum abgeschlossen, der vermutlich ein Sandsteinpaket abbildet.

Die  $Q$ -Werte, sowie die Dichte-Werte der oberen drei Schichten wurden in der Inversion freigegeben. Sie werden jedoch durch die Daten kaum eingeschränkt.

Geschwindigkeit des Lehms mit nur geringer Streuung bestimmt wurden. Über  $v_p$  im Lehm sind keine Aussagen möglich.

Für das Inversionsergebnis wurden mit der Reflektivitätsmethode synthetische Seismogramme berechnet. Diese zeichnen alle wesentlichen Merkmale der gemessenen Wellenformen nach (Abb. VI.20, S. 158). Der rms-Wert des Residuums zwischen Synthetics und Daten beträgt nur noch die Hälfte des rms-Wertes der gemessenen Seismogramme. Damit kann das Ergebnismodell gut als Startmodell für eine Wellenforminversion dienen.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

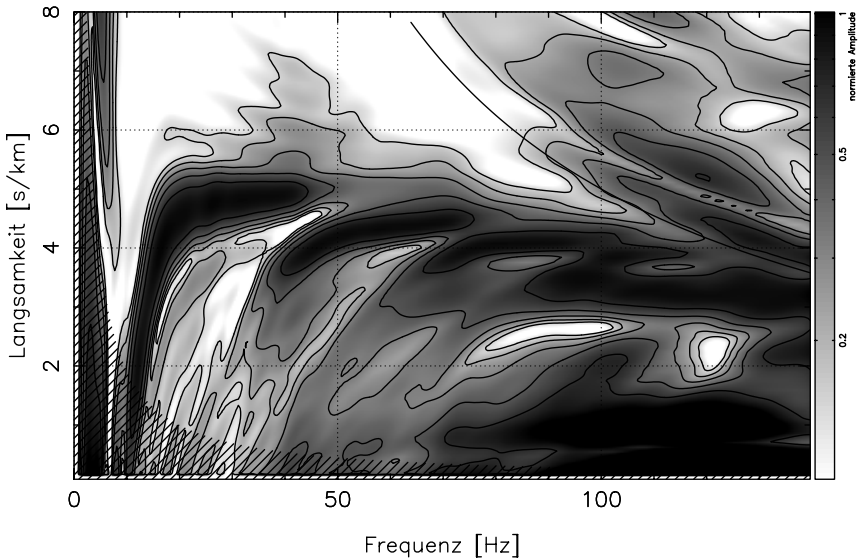
**Abbildung VI.13, BERKHEIM, Seismogramm-Montage:** Bereits in den Wellenformen sind Indizien für die „Low-Velocity-Zone“ unter dem Hartplatz erkennbar. Die Oberflächenwellen sind anomal dispergiert. Das heißt, die hohen Frequenzen treten in den Seismogrammen zeitlich früher auf als die tiefen. Die schnelle Kompressionswelle im Asphalt stirbt bei ca. 10m Offset aus. Sie ist in dieser Darstellung nur aufgrund ihrer großen Amplitude zu erkennen.

Bei großen Offsets ist ein Interferenzmuster zu erkennen, welches durch die Überlagerung der direkten und der am hinteren Rand der Asphaltdecke reflektierten Oberflächenwellen entsteht.

Die Darstellung ist auf eine mittlere Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{red}} = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  der Oberflächenwellen reduziert. Die Amplituden sind Offset-abhängig mit dem Faktor  $r^{1.9}$  skaliert.



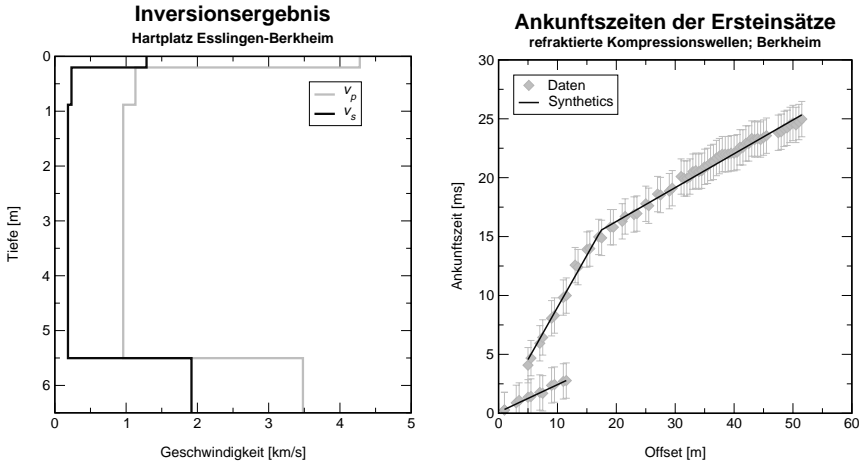
## Hartplatz Esslingen–Berkheim



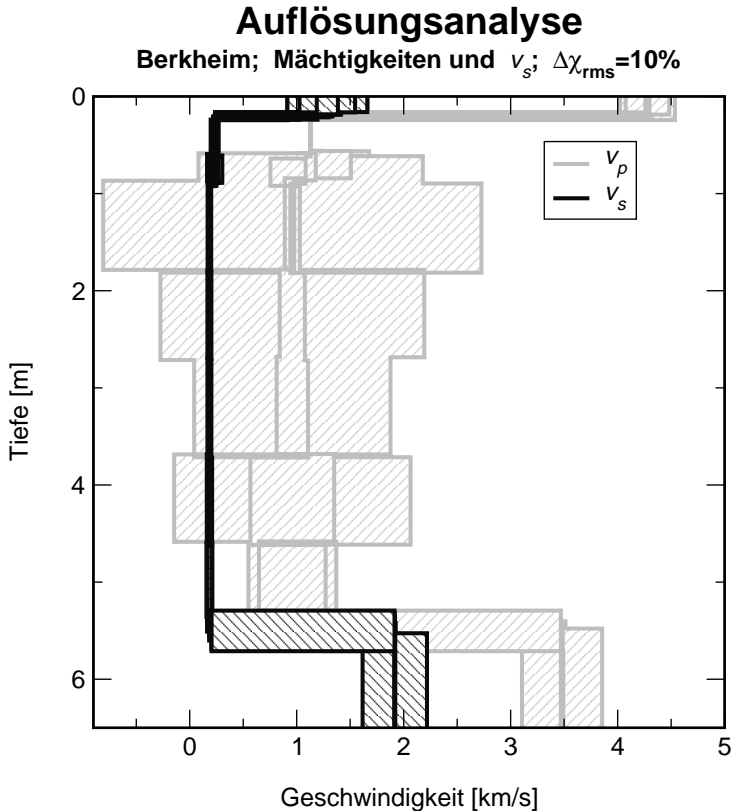
Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.14, BERKHEIM,  $\omega, p$ -Spektrum des Wellenfeldes:** Das  $\omega, p$ -Spektrum der gemessenen Seismogramme (Abb. VI.13, S. 152) zeigt ebenfalls die anomale Dispersion: Die mittlere Phasengeschwindigkeit nimmt mit der Frequenz zu. Anders ausgedrückt nimmt für kleine Wellenlängen der Einfluss des schnellen Asphalts zu. Zu größeren Wellenlängen, also kleineren Frequenzen, wächst der Einfluss des seismisch langsamen Lehms unter dem Asphalt. Bei ca. 15Hz wird der schnelle Halbraum für die Fundamentalmode bestimmend. Die Dispersionskurve knickt zu kleinen Langsamkeiten ab.

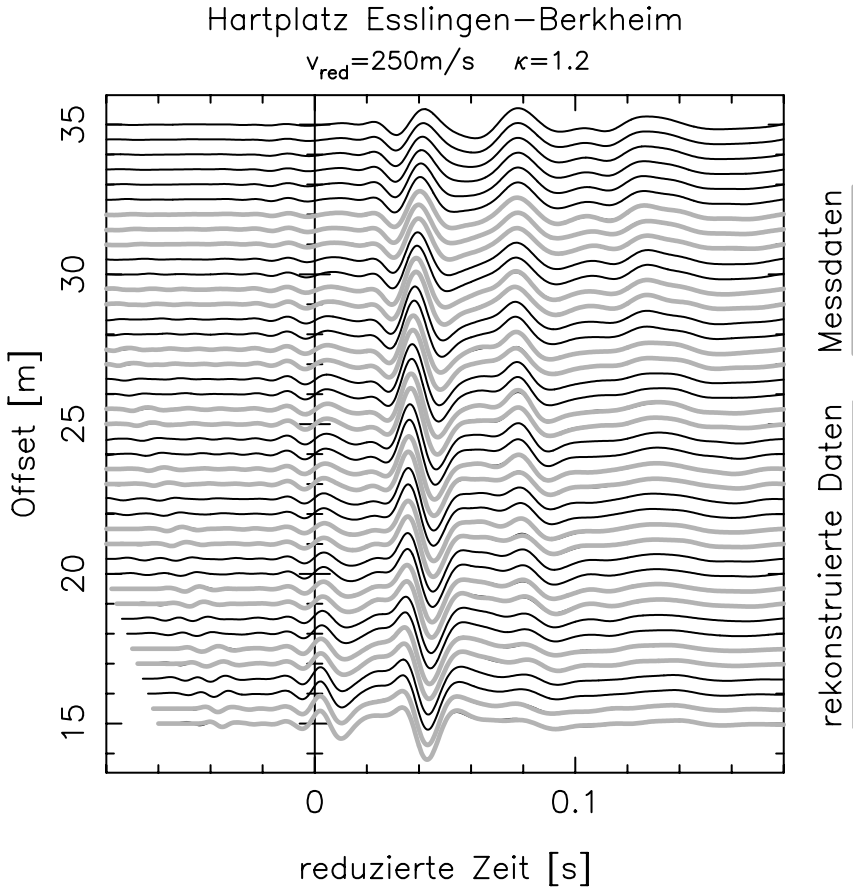
Das Wellenfeld wird durch mindestens vier bis fünf Moden gebildet. Siehe dazu auch die Dispersionskurven der theoretischen Normalmoden des Ergebnismodells in Abb. VI.19 (S. 157).



**Abbildung VI.15, BERKHEIM, Ergebnismodell und Laufzeitkurve:** Links ist das Ergebnismodell (Tab. VI.2, S. 151) der Inversion für die seismischen Geschwindigkeiten dargestellt. Das Modell gliedert sich in vier Bereiche, die wie folgt interpretiert werden: Die oberste Schicht wird durch den harten Asphalt gebildet. Darunter ist eine Schicht angelegt, die ein Schotter-Fundament darstellen kann. Bis in 5,5m Tiefe folgt ein Lehm. Darunter liegt ein schneller Halbraum, der vermutlich ein Sandsteinpaket abbildet. Die Schotter-Füllung konnte nicht vom Lehm abgegrenzt werden. Der konstante Verlauf für  $v_s$  im Lehm wird tatsächlich durch die Daten verlangt, wie auch die Auflösungsanalyse bestätigt (Abb. VI.16, S. 155). Anhand der rechten Abbildung können die abgelesenen Laufzeiten der Kompressionswellen mit den für das Modell berechneten, theoretischen Werten verglichen werden. Die Fehlerbalken geben geschätzte Toleranzen an. Da das Medium einen Niedrig-Geschwindigkeits-Kanal besitzt, weisen die Ersteinsätze eine Schattenzone auf. In Quellnähe werden die Ersteinsätze durch eine schnelle Kompressionswelle gebildet, die sich in der Asphaltsschicht ausbreitet. Diese verliert jedoch rasch an Amplitude, da sie Energie in den darunter liegenden, langsameren Bereich abstrahlt. So treten bei größeren Offsets die in tieferen Bereichen refraktierten Wellen als Ersteinsätze in Erscheinung. Aus diesem Grund wurde die Laufzeitkurve in zwei Abschnitte unterteilt.

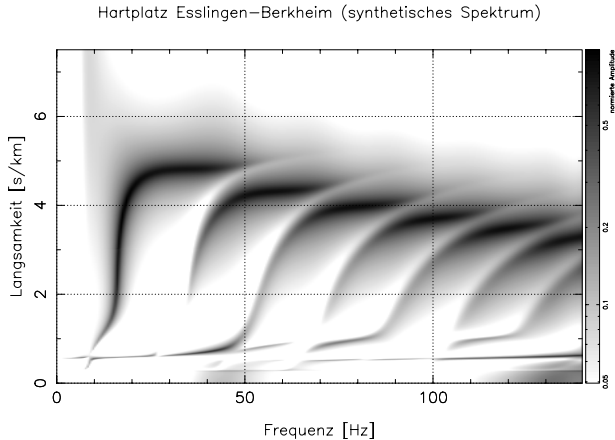


**Abbildung VI.16, BERKHEIM, Auflösungsanalyse:** Für die Auflösungsanalyse (Abschnitt IV.2.2) wurde das Ergebnismodell in insgesamt acht Schichten unterteilt. Die dargestellten Modellvariationen ergeben eine Zunahme des rms-Misfits um 10%. Die Parameter für die Mächtigkeiten des Asphalts und des Lehms sowie für die Scherwellen-Geschwindigkeit wurden jeweils einzeln getestet. Dabei wurden die anderen freien Parameter einschließlich  $v_p$  so nachgeführt, dass die resultierende Misfit-Zunahme möglichst klein blieb. Die  $v_p$ -Variationen ergeben sich allein aufgrund von Trade-off. Die Kompressionswellen-Geschwindigkeit wird durch die Daten nicht wirklich eingeschränkt. Lediglich der  $v_p$ -Kontrast an der Unterkante des Asphalts hat einen Einfluss auf die beobachteten Oberflächenwellen. Die Scherwellen-Geschwindigkeit ist jedoch durchgängig (auch im Niedrig-Geschwindigkeits-Kanal) gut bestimmt, ebenso die Tiefe des Halbraumes.



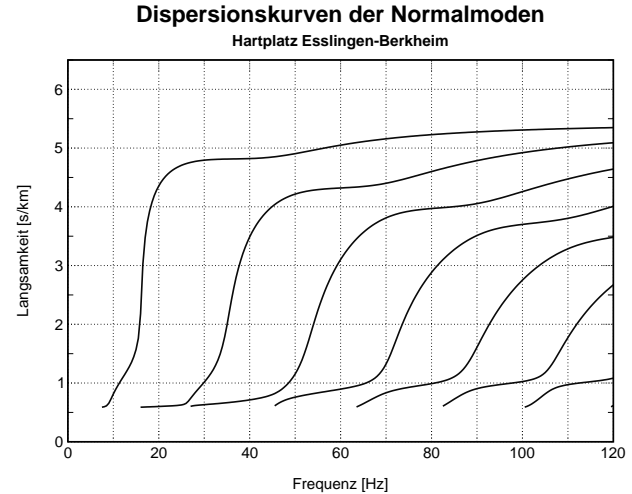
Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.17, BERKHEIM, Rekonstruierte Seismogramme:** Dargestellt sind die aus dem  $\omega, p$ -Spektrum des Wellenfeldes (Abb. VI.14, S. 153) rekonstruierten Wellenformen. Berechnet wurden diese über eine Trapezregel-Näherung für das Entwicklungintegral (III.2). Zum Vergleich sind die gemessenen Wellenformen in hellgrau dargestellt. Das Wellenfeld wird auch zwischen den Geophon-Positionen der Messung sinnvoll interpoliert.

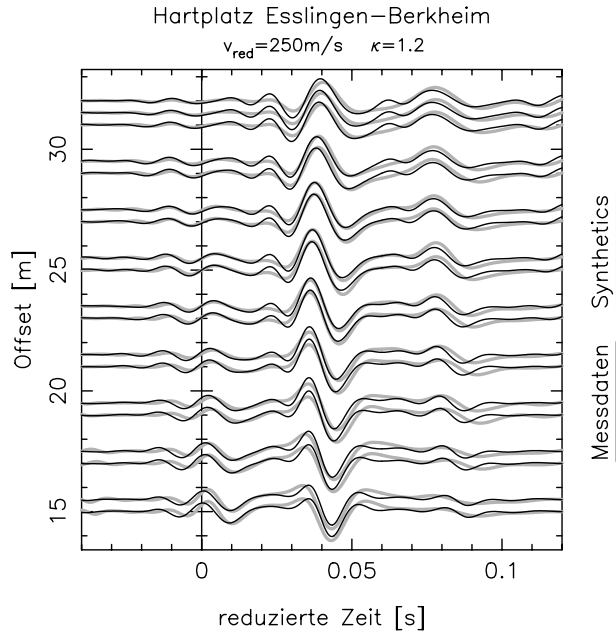


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

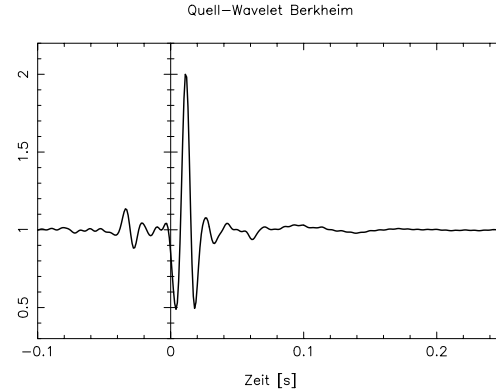
**Abbildung VI.18, BERKHEIM, Greensche Funktion für das Ergebnismodell:** Dargestellt sind die Amplituden der Greenschen Funktion für das Ergebnismodell (Abb. VI.15, S. 154), mit der das  $\omega, p$ -Spektrum der Daten (Abb. VI.14, S. 153) am besten erklärt wird. Auch hier wird der multimodale Charakter des Wellenfeldes deutlich.



**Abbildung VI.19, BERKHEIM, Dispersionskurven der Normalmoden des Ergebnismodell:** Dargestellt sind die Dispersionskurven der Eigenschwingungen des Ergebnismodells (Abb. VI.15, S. 154). Der Vergleich mit der Greenschen Funktion (Abb. VI.18, S. 157) zeigt, dass die an der Oberfläche beobachtbaren höheren Moden alle nur im Plateau-Bereich angeregt sind.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.



**Abbildung VI.20, BERKHEIM, Synthetische Seismogramme und Quell-Wavelet:**

An einigen Geophon-Positionen wurden mit der Reflektivitätsmethode Wellenformen für des Ergebnismodell (Tab. VI.2, S. 151) berechnet. Diese sind in der linken Abbildung zusammen mit den gemessenen Seismogrammen (hellgrau) dargestellt. Der rms-Wert des Residuums zwischen der gesamten Wellenform von Daten und Synthetics beträgt die Hälfte des rms-Wertes der Daten.

Oben ist die gemäß Abschnitt V.1.2.1 (S. 117) bestimmte, normierte Impulsantwort der Messgeräte (Quelle, Geophone, Rekorder) abgebildet. Zur Berechnung der links dargestellten Wellenformen wurden die Fourier-Koeffizienten dieses Wavelets mit der Greenschen Funktion des Mediums multipliziert.

## 2.3 Datensatz WOLFSCHLUGEN

### 2.3.1 Das Untersuchungsgebiet

**WOLFSCHLUGEN** Das Untersuchungsgebiet liegt im Randbereich des R<sup>35205</sup>; H<sup>53921</sup> Waldstücks „Horb“ zwischen Neuhausen und Wolfschlugen TK25 Blatt 7321 auf den Fildern. Das Gelände ist mit Filderlehm, einem Gemisch aus Löss und Lias-Verwitterungsmaterial bedeckt. (Filderstadt)  
Darunter liegen die Schichten des Lias  $\alpha$  mit dem Haupt-sandstein als seismisch schnellem Halbraum. Ungefähr 1km nordöstlich des Untersuchungsgebiets sind Sandsteinbänke aufgeschlossen.

Der Datensatz wurde von mir bereits früher (Forbriger, 1996a) behandelt. Er konnte damals aber nicht befriedigend invertiert werden. Das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Verfahren ermöglicht nun eine quantitative Interpretation.

### 2.3.2 Experiment und Interpretation

Die Geophon-Auslage wurde auf dem Waldboden entlang einer gut befestigten, geschotterten Forststraße geführt. Der Abstand zu dieser betrug zwischen ein und zwei Meter. Die Anregung durch Hammerschlag erfolgte ebenfalls auf dem Waldboden. Wellenfelder, die auf der Forststraße angeregt wurden, zeigen auf quellnahen Spuren eine schnelle, im Straßenkörper laufende Welle. Es muss damit gerechnet werden, dass sich das Straßen-Fundament auch auf das direkt daneben aufgezeichnete Wellenfeld ausgewirkt hat.

Die 22 Geophon-Positionen von denen Seismogramme zur Verfügung stehen, sind in Abb. VI.21 (S. 161) dargestellt. Die Intervalle nehmen mit dem Offset zu. Eine Ergänzung des Datensatzes um die Seismogramme die mit dem Fallgewicht angeregt wurden, ist nicht sinnvoll möglich, da beide Quellen sich in ihrem Amplituden- und Phasenspektrum deutlich unterscheiden. Es wurden jedoch die Laufzeiten aus beiden Datensätzen für die Inversion benutzt (Abb. VI.23, S. 163, rechts).

Für die anderen in diesem Kapitel vorgestellten Datensätze stehen meistens wesentlich mehr Geophon-Positionen für die Inversion zur Verfügung. Eine Auslage, deren Intervalle mit dem Offset wachsen, ist jedoch auch bei limitierter Anzahl von Geophonen geeignet, den Forderungen nach kleinen Offset-Intervallen einerseits und einer langen Gesamtauslage andererseits gleichzeitig gerecht zu werden (Abschnitt III.3.3, S. 81). Die für  $\Delta r = 5\text{m}$  berechnete Aliasing-Hyperbel schneidet in der Darstellung des  $\omega, p$ -Spektrums (Abb. VI.22, S. 162, links) die Fundamentalmode bereits bei 30Hz. Trotzdem tritt ausgeprägtes Aliasing erst bei

$i$	$z_i$ [m]	$v_p$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$v_s$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$Q_p$	$Q_s$
1	2,68	0,59578 0,18411	0,17012 0,00294	1,861	20,2	17,7
2	7,97	0,89447 0,01967	0,23608 0,02343	1,614	19,6	24,7
3	$\infty$	2,05225	1,22182	2,214	19,7	19,0

Die Werte in der Tabelle sind Polynom-Koeffizienten. Die verwendete Parametrisierung wird im Anhang in Abschnitt A.2.2 (S. 218) definiert.

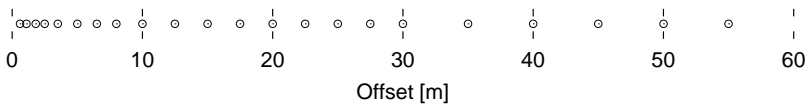
**Tabelle VI.3, WOLFSCHLUGEN, Inversionsergebnis:** Alle Parameter wurden für die Inversion freigegeben, um auch eine bessere Anpassung der Amplitudenverhältnisse zu realisieren (Abb. VI.22, S. 162). Jedoch weicht das Ergebnis nur für die seismischen Geschwindigkeiten und die Dichte in der obersten Sektion nennenswert vom Startmodell ab.

höheren Frequenzen auf. Gleichzeitig entspricht die erreichte Auflösung der theoretischen Unschärfe für eine 55m lange Auslage.

Abb. VI.23 (S. 163) und Tab. VI.3 (S. 160) geben das Inversionsergebnis wieder. Mit dem Modell können die Ankunftszeiten der Ersteinsätze (Abb. VI.23, S. 163, rechts) erklärt werden und das daraus berechnete Spektrum der Greenschen Funktion (Abb. VI.22, S. 162, rechts) passt das Spektrum der Seismogramme (links) an. Auch die Wellenformen lassen sich bereits gut nachbilden, wie in Abb. VI.26 (S. 166) gezeigt ist. Die Abbildung zeigt aber auch, dass bereits die gemessenen Seismogramme, insbesondere bei Offsets um 20m, Variationen aufweisen, die auf laterale Heterogenität hinweisen. Die Auslage befand sich unmittelbar am Rand des Fundaments der Forststraße, mit veränderlichem Abstand zu dieser. Auch die Forststraße selbst, die sich in den auf ihr angeregten Wellenfeldern als schneller Körper abbildet, muss sich auf das hier untersuchte Wellenfeld ausgewirkt haben.

Obwohl für die Auflösungsanalyse (Abb. VI.24, S. 164) nur eine Zunahme des rms-Misfits um 2% zugelassen wurde, übersteigen die Modellvariationen  $v_p$ ,  $v_s$  im Halbraum und die Tiefe des Halbraums den sinnvoll darstellbaren Bereich. Eine mögliche Erklärung dafür geben die in Abb. VI.25 (S. 165) wiedergegebenen partiellen Ableitungen der Greenschen Funktion. Nahezu die gleichen Bereiche des Spektrums sind für  $v_s$  über dem Halbraum und die Tiefe der Diskontinuität sensitiv. Eine kleine Veränderung von  $v_s$  kann durch eine große Veränderung der Tiefenlage teilweise ausgeglichen werden. Zwischen beiden Modellparametern besteht Trade-off (Abschnitt V.2.3, S. 124).

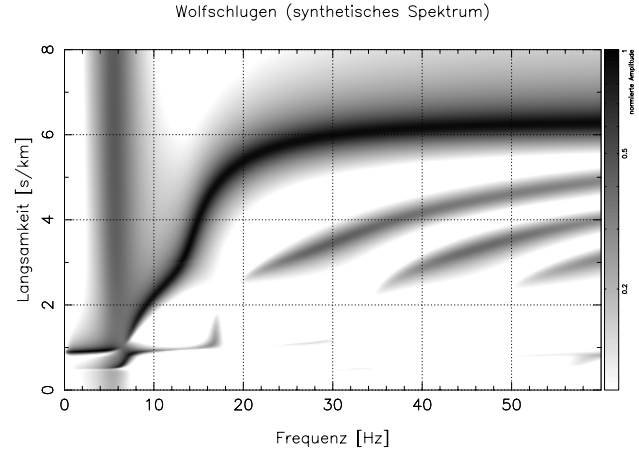
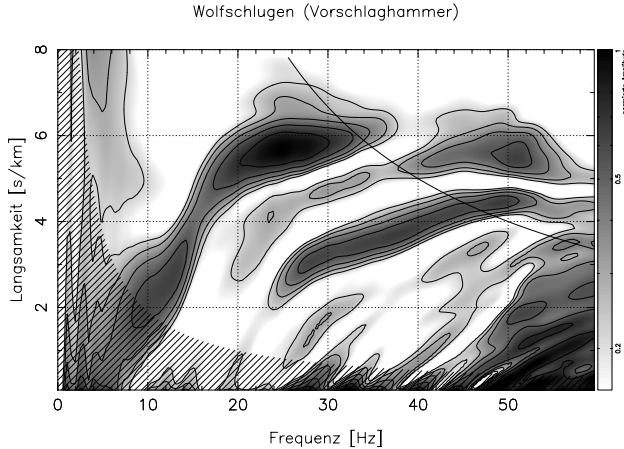




**Abbildung VI.21, WOLFSCHLUGEN, Auslage:** Für die Berechnung des  $\omega,p$ -Spektrums in Abb. VI.22 (S. 162) standen nur 22 Geophon-Positionen zur Verfügung. Diese sind in der Abbildung durch kleine Kreise markiert. Der Forderung nach gleichzeitig kleinen Offset-Intervallen und einer insgesamt langen Auslage wurde durch wachsende Intervalle Rechnung getragen. Auf diese Weise konnte trotz der geringen Anzahl Empfänger gleichzeitig eine brauchbare Auflösung erreicht und Aliasing weitgehend vermieden werden.

Diese Art der Auslage ist jedoch ungünstig, falls ein Gegenschuss durchgeführt werden soll. Denn die kleinen Geophonintervalle sollten immer auf der Seite der Quelle liegen, da Wellen kleiner Wellenlänge über dieselbe Distanz stärker gedämpft werden als solche großer Wellenlänge.

In Abschnitt III.3.3 (S. 81) werden weitere Beispiele unregelmäßiger Geophon-Auslagen gezeigt.

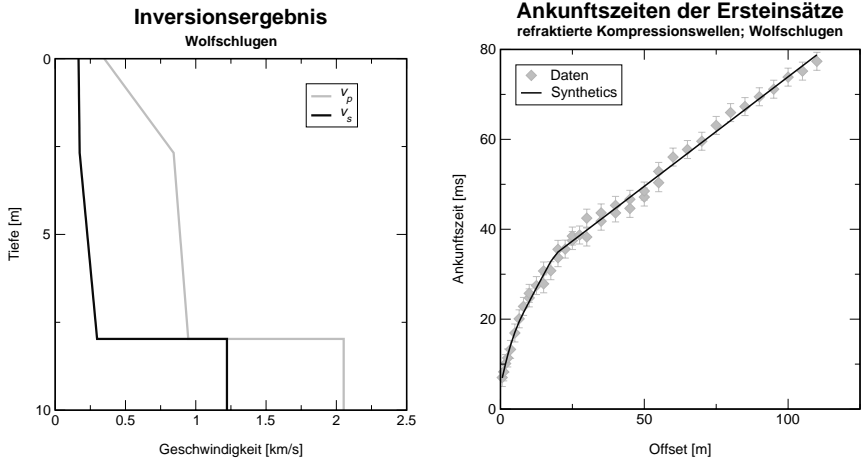


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

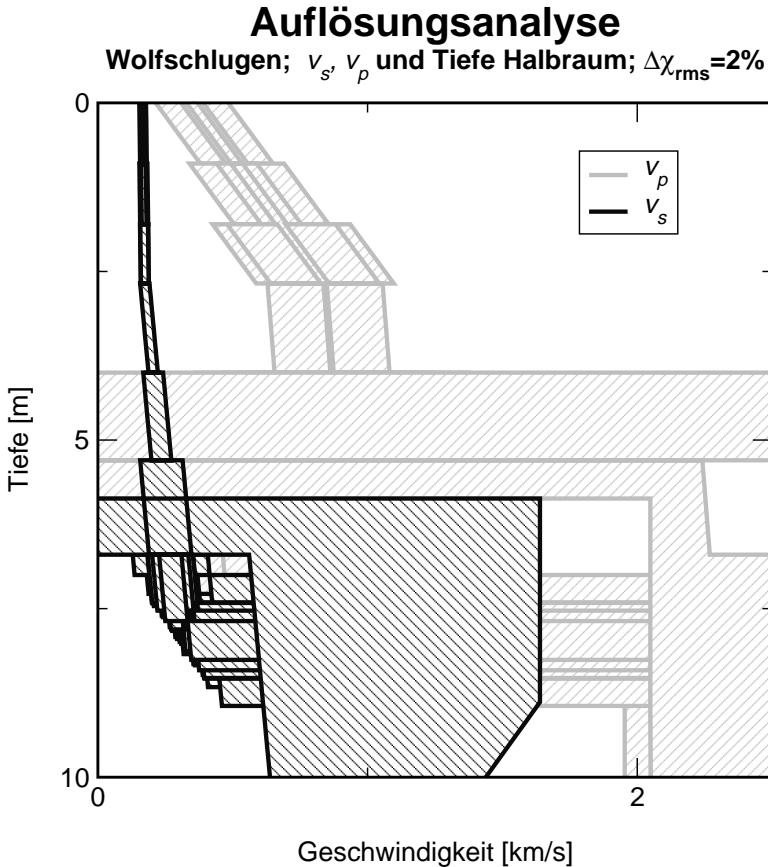
**Abbildung VI.22, WOLFSCHLÜGEN,  $\omega, p$ -Spektrum und Greensche Funktion:** Links: Das aus den gemessenen Seismogrammen berechnete  $\omega, p$ -Spektrum. Die Aliasing-Hyperbel ist für 5m Intervalle, den größten im Profil auftretenden Geophon-Abstand eingezeichnet. Rechts: Die synthetisch berechnete Greensche Funktion für das Ergebnismodell (Tab. VI.3, S. 160). Das dunkle senkrechte Band zwischen 5Hz und 7Hz ist ein Artefakt der Normierung.

Im  $\omega, p$ -Spektrum der Seismogramme lassen sich zwei Moden eindeutig trennen. Sowohl die Fundamentalmode (von  $[10\text{Hz}, 2\frac{\text{s}}{\text{km}}]$  bis  $[30\text{Hz}, 6\frac{\text{s}}{\text{km}}]$ ), als auch die höhere Mode (von  $[25\text{Hz}, 2\frac{\text{s}}{\text{km}}]$  bis  $[50\text{Hz}, 4.5\frac{\text{s}}{\text{km}}]$ ) werden auch in anderen Datensätzen aus dem Messgebiet angetroffen. Das dazwischen liegende Maximum der  $\omega, p$ -Koeffizienten muss möglicherweise als Artefakt bewertet werden.

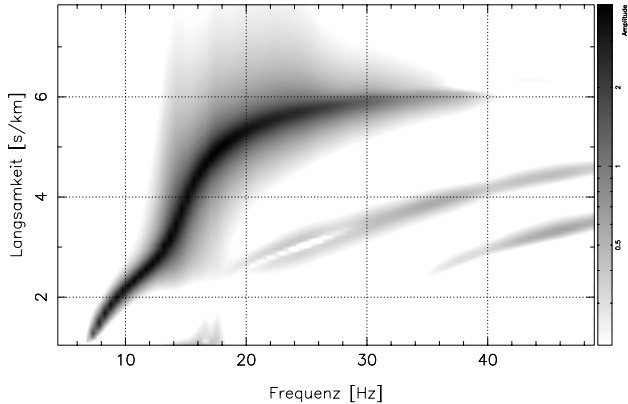
Bei kleinen Wellenlängen muss mit einem Einfluss der Forststraße gerechnet werden, die seitlich die Auslage begrenzt. Auffällig ist in diesem Zusammenhang die Abnahme der Amplitude der Fundamentalmode für Frequenzen größer 30Hz im Vergleich zum synthetischen Spektrum (rechts). Ob dies auf die starke seitliche Heterogenität zurückzuführen ist, kann mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht geklärt werden.



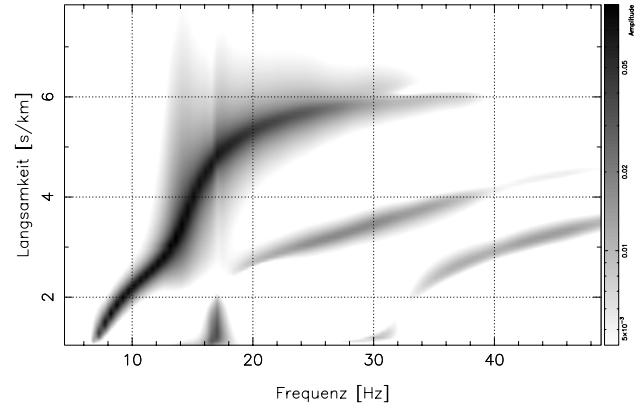
**Abbildung VI.23, WOLFSCHLUGEN, Ergebnismodell und Laufzeitkurve:** Links ist das Ergebnismodell (Tab. VI.3, S. 160) für die seismischen Geschwindigkeiten dargestellt. Anhand der rechten Abbildung können die an den gemessenen Seismogrammen abgelesenen Laufzeiten der Kompressionswellen mit den für das Modell berechneten, theoretischen Werten verglichen werden. Die Fehlerbalken geben geschätzte Toleranzen für die Messwerte an.



**Abbildung VI.24, WOLFSCHLUGEN, Auflösungsanalyse:** Das Ergebnismodell (Tab. VI.3, S. 160) wurde in insgesamt acht Sektionen unterteilt. Für die Mittelwerte der seismischen Geschwindigkeiten in diesen Sektionen und die Tiefe der Halbraum-Oberkante wurde eine Auflösungsanalyse durchgeführt. Jeder Parameter wurde einzeln getestet und dabei alle anderen Parameter so nachgeführt, dass der Misfit-Zuwachs möglichst klein blieb (Abschnitt IV.2.2, S. 106). Die Abbildung zeigt die Streubereiche aller so entstandenen Modelle, die zu einer Zunahme des rms-Misfits um 2% führen. Die ausufernde Modellstreuung unterhalb 4m liegt offenbar an starkem Trade-off zwischen den Modellparametern. Siehe dazu auch Abb. VI.25 (S. 165). Die Auswirkungen des Trade-off werden von der Analyse möglicherweise überschätzt, da es sich um eine lokale Extrapolation der linearisierten Vorwärtsrechnung handelt. Würden für die hier gezeigten extremen Modellveränderungen exakte Vorwärtsrechnungen durchgeführt, so ergäbe sich vermutlich eine größere Zunahme des rms-Misfits,

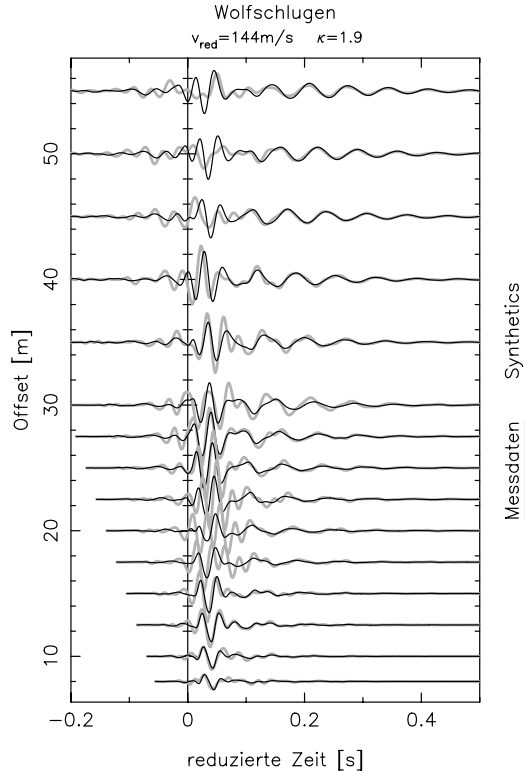
Partielle Ableitung nach dem Mittelwert von  $v_s$  in 2,7–8m Tiefe

Partielle Ableitung nach der Tiefe der Oberkante des Halbraums

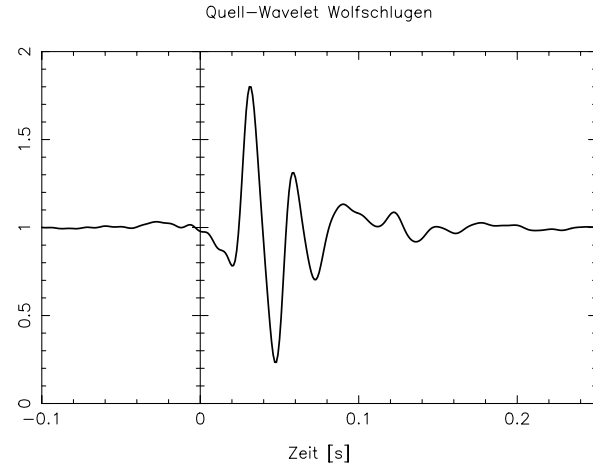


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.25, WOLFSCHLUGEN, Partielle Ableitungen:** In etwa dieselben Bereiche der Greenschen Funktion sind für  $v_s$  über dem Refraktor (links) und für die Tiefe des Refraktors (rechts) sensitiv. Dies führt zu Trade-off zwischen diesen beiden Parametern, so dass sie nicht einzeln bestimmt werden können. Die Auswirkung einer großen Änderung der Tiefe des Halbraums kann durch eine kleine Änderung der Scherwellen-Geschwindigkeit weitgehend kompensiert werden. Dies äußert sich auch in der Auflösungsanalyse in Abb. VI.24 (S. 164).



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.



**Abbildung VI.26, WOLFSCHLUGEN, Synthetische Seismogramme und Quell-Wavelet:** Links: Synthetische Wellenformen, die für das Ergebnismodell (Tab. VI.3, S. 160) bei ausgewählten Offsets der Messung berechnet wurden. Die Seismogramme sind mit den aufgezeichneten Wellenformen zum Vergleich hinterlegt. Im Bereich von 20m Offset sind die gemessenen Seismogramme durch lokale Heterogenität gestört.

Oben: Die im Sinne kleinster Quadrate ideale Impulsantwort des Gesamtsystems aller Messgeräte (Abschnitt V.1.2.1, S. 117). Zur Berechnung der links dargestellten Wellenformen wurden die Fourier-Koeffizienten dieses Wavelets mit der Greenschen Funktion des Mediums multipliziert.

### 3 Kleine Spektren-Galerie

Zusätzlich zu den drei vollständig invertierten Datensätzen (BIETIGHEIM, BERKHEIM und WOLFSCHLUGEN) wird hier von elf weiteren Untersuchungsgebieten die Dispersionsanalyse gezeigt. Dies soll auch dazu dienen, die Bandbreite der Situationen zu illustrieren, auf die man bei flachseismischen Messungen trifft. Denn in ihren obersten Metern weist die Erde Eigenschaften auf, die vor dem Hintergrund klassischer seismologischer Erfahrungen zumindest erstaunen mögen (Steeple et al., 1995).

Sieht man von Übergängen von festen zu flüssigen Medien ab, so weisen die prägnantesten Diskontinuitäten der globalen Erde einen Geschwindigkeits-Kontrast von 1,2 (Moho) und 1,6 (Kern-Mantel-Grenze) auf. Für den Datensatz BERKHEIM (Tab. VI.2, S. 151) wurde ein  $v_s$ -Kontrast zum Halbraum von über 10 bestimmt. Der  $v_p$ -Kontrast in BIETIGHEIM (Tab. VI.1, S. 137) entspricht einem Faktor 5.

Die Absolutwerte der Geschwindigkeiten variieren für  $v_p$  von unter  $150 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (BIETIGHEIM) bis über  $4000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (BERKHEIM) und für  $v_s$  von unter  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (BIETIGHEIM) bis knapp  $2000 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (BERKHEIM). Es werden Poisson-Verhältnisse zwischen 0,15 (BIETIGHEIM) und 0,48 (WOLFSCHLUGEN, Tab. VI.3, S. 160) angetroffen. Die Dämpfung ist in den Lockersedimenten durchweg groß. Für die Inversionen wurden teilweise  $Q$ -Werte benutzt, die kaum größer als 10 sind. Jeng et al. (1999) geben aufgrund von Messungen Werte kleiner 10 an. Das von ihnen untersuchte Gelände bestand aus einem ca. 200m mächtigen Schotterpaket, das von ca. 2-3m Sand und Schluff überlagert wurde.

Die kleinsten beobachteten Phasengeschwindigkeiten je Datensatz variieren zwischen  $70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (KÖRSCHTAL; Abb. VI.30, S. 180) und  $250 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (HENGERSBERG; Abb. VI.35, S. 185). Meistens liegen diese, für die ganz oberflächennahen Lockersedimente repräsentativen, Geschwindigkeiten bei Werten zwischen  $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  und  $170 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Für den Frequenzbereich bis 200Hz nennen Steeple et al. (1995) Werte bis hinab zu  $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Damit betragen die kleinsten Wellenlängen der Fundamentalmode im Fall HENGERSBERG 2,5m und 1m im Fall KÖRSCHTAL. Demgegenüber sind in der Grundmode von RIEDHEIM 1996 Wellenlängen bis 60m vertreten. Aber auch in GÜLTSTEIN (Abb. VI.38, S. 188 und Abb. VI.39, S. 189) betragen die größten Wellenlängen 50m, sowie in BIETIGHEIM (Abb. VI.5, S. 140), BERKHEIM (Abb. VI.14, S. 153) und RIEDENBERG (Abb. VI.28, S. 178) immerhin noch 25–50m. Die Geophon-Auslage muss also in der Lage sein, einen Wellenlängen-Bereich abzutasten, der fast zwei Größenordnung umfassen kann. Bei einer endlichen Zahl zur Verfügung stehender Aufnehmer führt das zu einem Konflikt. Das Ziel, durch kleine Offset-Intervalle Aliasing zu vermeiden, schränkt zwangsläufig die maximal

erreichbare Auflösung ein (Abschnitt III.3.3, S. 81 und Abschnitt V.1.1, S. 115).

Von den dargestellten Datensätzen ist nur für LERCHENBERG (Abb. VI.40, S. 190) eine 1D-Inversion aufgrund kleinräumiger lateraler Heterogenität nicht möglich. Zwei hier nicht dargestellte Datensätze, die auf verkarstem Weißjura der Schwäbischen Alb mit geringer Bodenbedeckung aufgezeichnet wurden, besitzen (wie erwartet) ebenfalls keine einheitliche Phasenbeziehung innerhalb einer Auslage von ca. 50m. Tritt laterale Heterogenität etwas großräumiger, weniger kontrastreich und in größerer Tiefe auf, so erscheint eine eindimensionale Inversion (Sondierung) zur Ermittlung eines mittleren Modells durchaus möglich. Ein Beispiel dafür ist der Datensatz GÜLTSTEIN (Abb. VI.38, S. 188).

In allen zehn interpretierbaren Datensätzen mit Ausnahme von BÄRWALDE (Abb. VI.41, S. 191) lassen sich zwei oder mehr Moden in den Spektren identifizieren und müssen bei der Inversion berücksichtigt werden. Ob und wie stark die Fundamentalmode angeregt ist, kann dabei von der eingesetzten Quelle abhängen, wie die Datensätze BIETIGHEIM (Abb. VI.5, S. 140) und RIEDENBERG (Abb. VI.28, S. 178) zeigen. Sowohl BIETIGHEIM wie auch GÜLTSTEIN (Abb. VI.39, S. 189) zeigen, dass ein Hammerschlag nicht unbedingt die Fundamentalmode am stärksten anregen muss. Ähnliche Verhältnisse zeigen auch KÖRSCHTAL (Abb. VI.30, S. 180, links), RIEDHEIM 1996 (Abb. VI.27, S. 177), RIEDHEIM 1997 (Abb. VI.33, S. 183) und WATTERDINGEN (Abb. VI.34, S. 184).

Wie der Datensatz BERKHEIM (Abschnitt VI.2.2, S. 148) bildet auch HILZINGEN (Abb. VI.36, S. 186) eine Niedrig-Geschwindigkeits-Zone ab. Anders als bei BERKHEIM, können hier die einzelnen Moden nicht sicher im  $\omega, p$ -Spektrum getrennt werden. Erst die Inversion schafft Klarheit darüber, dass die beobachteten Oberflächenwellen aus mehreren Moden aufgebaut sein müssen. Eine reine Anpassung der Dispersionskurven von Normalmoden ist also hier nicht anwendbar (Abschnitt VI.4.2, S. 202).

Der Datensatz LAPTEV-SEE ist ein Beispiel dafür, dass die Inversion von Wellenfeldspektren nicht nur für die Landseismik von Nutzen ist. In den Abb. VI.43 (S. 193) bis VI.45 sind Wellenfelder aus dem marinen Flachwasserbereich der Laptev-See dargestellt. Sowohl die im Wasser geführten Kompressions-Wellen (Abb. VI.44, S. 194), wie auch die im Flachwasser mit Hydrophonen beobachtbaren Scholte-Moden (Abb. VI.45, S. 195) enthalten Informationen über die Scherfestigkeit der Sedimente am Ozeanboden.



### 3.1 Beschreibung der Datensätze

**RIEDENBERG** Das Messgebiet liegt im Tal zwischen Stuttgart-Riedenberg und Birkach westlich des Ramsbachs. Geologisch befindet es sich etwa auf Höhe der Grenze zwischen dem Stubensandstein (km4) als Liegendem und Knollenmergel (km5), der die Talhänge bildet. Der Stubensandstein bildet vermutlich auf weiten Strecken das Bachbett des Ramsbach. Im Untersuchungsgebiet wird er von einer lehmigen Talfüllung aus Verwitterungsmassen des Knollenmergels überlagert.

In Abb. VI.28 (S. 178) ist das  $\omega, p$ -Spektrum je eines Datensatzes mit Hammer-Anregung (links) und mit S.I.S.Sy.-Anregung (rechts) dargestellt. Auffällig ist, dass Hammer und S.I.S.Sy. vollkommen unterschiedliche Moden anregen. Abb. VI.29 (S. 179) zeigt einen Ausschnitt der Seismogramme des Datensatzes. Darin ist erkennbar, dass die einheitliche Phasenbeziehung der Fundamentalmode im zusammengesetzten Datensatz offenbar durch lokale Heterogenität am Schusspunkt zerstört wird. Daher tritt das Aliasing der Fundamentalmode bereits ab 30Hz auf. Das entspricht der Abtastung mit dem ursprünglichen Geophon-Intervall von 5m.

**KÖRSCHTAL** Das Untersuchungsgebiet liegt im Körschtal zwischen Scharnhäuser und der Wörnizhäuser Mühle. Wie beim Datensatz RIEDENBERG liegt das Gelände knapp über der Grenze Stubensandstein (km5) zu Knollenmergel (km4). Der Stubensandstein bildet das Bett der Körsch und ist auf Höhe des seismischen Profils im Bachbett aufgeschlossen. Im Untersuchungsgebiet wird er von lehmiger Talfüllung, vermutlich Verwitterungsprodukten des Knollenmergels, überdeckt. Die Messung fand auf einer vernässten Wiese statt, die von einem Entwässerungsgraben berandet wird. In Löcher, die für den Einsatz der Explosionsquelle S.I.S.Sy. gebohrt wurden, trat rasch Sickerwasser ein und bildete einen Wasserspiegel in ca. 1m Tiefe. Der Datensatz wurde bereits von Reimann (1999) besprochen und invertiert.

Die Geophon-Positionen wurden zufällig gewählt. Auf dem vorab festgelegten Profil wurden die Aufnehmer beim Abschreiten so abgeworfen, dass sich eine gleichmäßige Geophondichte pro Auslageintervall ergab. Anschließend wurden die so gewählten Offsets eingemessen. Diese Vorgehensweise sollte ein scharfes Aliasing-Maximum verhindern (III.3.3, S. 81). Ein Teil der Auslage ist in Abb. III.4 (S. 80) dargestellt.

Die Abb. VI.30 (S. 180) zeigt die  $\omega, p$ -Spektren von Hin- und Rückschuss mit dem Hammer. Der Unterschied zwischen beiden Spektren weist auf leichte laterale Heterogenität hin. Auffällig ist, dass sich zwei Moden tangieren. Auf die

Problematik solcher Effekte wurde von mir bereits an anderer Stelle hingewiesen (Forbriger, 1996b). Im Abschnitt VI.4.2 (S. 202) wird dies an einem numerischen Beispiel erläutert.

Abb. VI.31 (S. 181) zeigt die Slant-Stack-Analyse der normierten Seismogramm-Spektren. Alle Fourier-Koeffizienten der Seismogramme wurden auf den Betrag von 1 normiert und dann mit einem Slant-Stack analysiert (Abschnitt III.2.2, S. 71). Es wurden also nur die Phasenspektren der Seismogramme benutzt. In diesem Fall werden die langwelligen Raumwellen wesentlich schärfer abgebildet.

Es wurden zwei „Noise“-Datensätze aufgezeichnet, deren Wellenfeld ausschließlich durch externe Quellen angeregt wurde (Abschnitt III.4.2, S. 90). Diese sind in Abb. VI.32 (S. 182) dargestellt.

**RIEDHEIM 1996**  
R<sup>34825</sup>; H<sup>52927</sup>  
TK25 Blatt 8218  
(Gottmadingen)

Das Untersuchungsgebiet befindet sich am Hang des Hohenstoffeln ca. 1,5km nordöstlich von Riedheim (Hegau, westlich von Singen) auf 530m NN. Die seismische Auslage verlief parallel zum Streichen des Hangs. Der geologische Untergrund wird durch Geschiebemergel der Würm-Grundmoräne gebildet. Diese überlagert die Mergel der Juranagelfluh. Die Auswertung der Laufzeitkurve der refraktierten Kompressionswellen ergibt einen Sprung für  $v_p$  von  $720 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  auf über  $2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  in knapp 4m Tiefe. Dies wurde durch eine Untersuchung der Bohrkern einer Rammsondierung bestätigt (Forbriger, 1996a). Da die Rammsondierung jedoch keine deutliche stoffliche Gliederung ergab, ist davon auszugehen, dass der Kontrast durch eine Veränderung der Wassersättigung hervorgerufen wurde. Am Versuchstag lief nach Regenfällen auf dem Gelände oberflächlich Wasser ab.

In Abb. VI.27 (S. 177) ist das  $\omega, p$ -Spektrum für eine einzelne Schuss-Position dargestellt. Das Wellenfeld wurde mit Hammerschlag angeregt. Die Grundmode enthält bei  $[8\text{Hz}, 2 \frac{\text{s}}{\text{km}}]$  Signale mit 60m Wellenlänge. Durch die 200m lange Gesamtauslage werden die Moden auch für Frequenzen kleiner 10Hz noch scharf abgebildet. Aufgrund des großen Geophon-Intervalls von 10m setzt das Aliasing aber bereits bei 20Hz ein.

**RIEDHEIM 1997**  
R<sup>34804</sup>; H<sup>52917</sup>  
TK25 Blatt 8218  
(Gottmadingen)

Das Untersuchungsgebiet befindet sich im Riedheimer Becken (Hegau, westlich von Singen) an der Nordseite des Klavbachs, ca. 700m westlich von Riedheim. Das Gelände ist in diesem Bereich durch junge Anschwemmungen (Auelehme) bedeckt. Zum Zeitpunkt der Messung war das Gelände sehr feucht. Auf älteren Karten sind Entwässerungsgräben einge-

zeichnet. Eine etwa 400m weiter östlich abgeteufte Bohrung ergibt folgende Gliederung<sup>4</sup>:

-2,0m	Lehm, sandig-kiesig
-22,0m	Silt, tonig, einzelne alpine Gerölle (Beckentone)
-51,0m	Silt, Geschiebemergel (Würm-Grundmoräne)
-127,0m	Mergel (Juranagelfluh)
-148,5m	Sand (Kirchberger Schichten)
-160,0m	Mergel (Untere Süßwasser-Molasse)

Das in Abb. VI.33 (S. 183) gezeigt  $\omega, p$ -Spektrum enthält wie der Datensatz RIEDHEIM 1996 auswertbare Signale für Frequenzen kleiner 10Hz. Die auffällige „Fächerung“ der höheren Mode kann nicht zwingend auf Fenstereffekte zurückgeführt werden. Das Wellenfeld wurde durch Hammerschlag angeregt.

**WATTERDINGEN** Das Untersuchungsgebiet befindet sich an der L224 zwischen Anselfingen und Watterdingen (Hegau, westlich von R<sup>34786</sup>; H<sup>53006</sup> TK25 Blatt 8118 (Engen) Engen) ungefähr 1km östlich von Watterdingen. Das seismische Profil lag in der Talsohle auf Auelehm und jungen Anschwemmungen, welche Jura Mergelschutt oder Mergel der Juranagelfluh überlagern. Eine Bohrung ca. 140m südwestlich der Auslage ergibt folgende Gliederung<sup>5</sup>:

-4m	lehmige Talfüllung
-36,6m	Mergel mit Geröllen (Juranagelfluh)

Aufgrund der kurzen Auslage von nur 24m Länge sind die Maxima der Dispersionsanalyse in Abb. VI.34 (S. 184) recht breit. Vermutlich keilt die Talfüllung im Untersuchungsgebiet aus. Laut geologischer Karte stehen am Hangfuß bereits Mergel der Juranagelfluh an. Der Unterschied zwischen dem Spektrum von Hin-schuss (Abb. VI.34 links) und Rückschuss (rechts) ist vermutlich darauf zurückzuführen.

Das Wellenfeld wurde durch Hammerschlag angeregt.

<sup>4</sup>Forschungsbohrung Hegau 4 bei Riedheim, R<sup>3480780</sup>; H<sup>5291710</sup>, Höhe 465m, Bohraufnahme von Schreiner (1983).

<sup>5</sup>Eisenerzbohrung bei Watterdingen, R<sup>3478520</sup>; H<sup>5300480</sup>, Höhe 640m, Profil nach Schreiner (1966).

**HENGENSBERG**  
R 45777; H 54044  
TK25 Blatt 7244  
(Osterhofen)

Die geologische Karte von Bayern im Maßstab 1:500000 von 1964 weist im Bereich südwestlich der Pfahl-Linie bis hin zur Donau Perlgneis und Blastomylonit aus. Vereinzelt werden Gneiskörper gefunden, die als lokale Erhebungen in der Landschaft zu erkennen sind. Im Bereich von Hengersberg ist das Gelände teilweise mit Decklehm oder Lösslehm bedeckt.

Auf dem Gelände der evangelischen Friedenskirche in Hengersberg wurde eine refraktionsseismische Erkundung durchgeführt. Mit ihrer Hilfe sollte die Oberkante des unverwitterten Gneises lokalisiert werden. Die Erkundungstiefe war durch die geländebedingt kurzen Auslagen begrenzt. Bis in 4,5m Tiefe konnten nur Kompressionswellen-Geschwindigkeiten bis maximal  $2,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  nachgewiesen werden.

In diesem Zusammenhang wurde auch ein Datensatz mit Oberflächenwellen registriert. Die betreffende Auslage befand sich ca. 15m nördlich des Kirchengebäudes und konnte aufgrund der Geländebeschaffenheit nur 24m lang gewählt werden. Der oberflächennahe Untergrund war grobkörnig, sandig.

In Abb. VI.35 (S. 185) ist das  $\omega, p$ -Spektrum des mit Hammerschlag angeregten Wellenfeldes dargestellt. Die Maxima, welche die Moden im Spektrum abbilden, sind aufgrund der kurzen Auslage recht breit. Es können zwei Moden deutlich unterscheiden werden.

**HILZINGEN**  
R 34833; H 52916  
TK25 Blatt 8218  
(Gottmadingen)

Am südwestlichen Ortsrand von Hilzingen (Hegau, westlich von Singen) befindet sich an der B314 ein geschotterter Platz. Dieser wird als Festplatz genutzt. Die geologische Karte weist in dieser Gegend junge Ablagerungen von Schwemmlern und Auelehm aus.

Eine Bohrung, die auf der gegenüberliegenden Seite der nach Süden führenden Landstraße abgeteuft wurde, ergibt folgende Gliederung<sup>6</sup>:

-2,5m	Lehm und Kies (Auffüllung)
-38,0m	Silt, tonig, einzelne Gerölle (Beckentone)
-40,0m	Tuff, reichlich Biotit (Deckentuffe)

Beim Bau des Platzes wurden 40cm des Geländes abgetragen. Anschließend wurde eine ca. 70cm mächtige Lage aus Kies und Recycling-Material (oben Bitumen-Recycling) aufgebracht<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Forschungsbohrung Hegau 6 bei Hilzingen, R 3483360; H 5291630, Höhe 655m, Bohraufnahme von Schreiner (1983).

<sup>7</sup>Mündliche Mitteilung von Herrn Zimmermann, Tiefbauamt der Gemeinde Hilzingen

Dieses Gebiet wurde als Beispielfall einer Niedrig-Geschwindigkeits-Zone ausgewählt. Der in Oberflächennähe maschinell verdichtete Schotter sollte seismisch schneller sein als darunter liegender Lehm.

In Abb. VI.36 (S. 186) sind die  $\omega, p$ -Spektren zweier mit dem Hammer angeregter Wellenfelder dargestellt. Deutlich zu erkennen ist die anomale Dispersion, die wie im Datensatz BERKHEIM (Abb. VI.14, S. 153) auf eine Niedrig-Geschwindigkeits-Zone hinweist. Das Medium ist allerdings nicht so homogen wie im Fall BERKHEIM. Außerdem traten nicht unerhebliche Störungen durch die nahe Bundesstraße auf. Daher sind die Moden im Spektrum nicht klar trennbar.

Das Inversionsergebnis (Abb. VI.37, S. 187) lässt aber nur ein Spektrum zu, das aus mehreren Normalmoden aufgebaut wird. Eine Inversion unter ausschließlicher Verwendung der Dispersionskurven von Normalmoden wäre nicht möglich gewesen (Abschnitt VI.4.2, S. 202).

**LERCHENBERG**  
R<sup>34852</sup>; H<sup>53918</sup>  
TK25 Blatt 7318  
(Wildberg)

Gemeinsam mit dem Messtrupp der GGA („Geowissenschaftliche Gemeinschaftsaufgaben“ in Hannover) wurden seismische Messungen nahe der Erdbebenstation Lerchenberg (LBG, 2km nordöstlich von Gültlingen) des Landeserdbebendienstes Baden-Württemberg durchgeführt.

Ziel der GGA-Messung war die Ermittlung des Tiefenverlaufs der Scherwellengeschwindigkeit in den Sedimenten unter der Station LBG. Dies sollte als Gelegenheit genutzt werden, die Auswertung aufgezeichneter Oberflächenwellen mit einem anderen, unabhängigen Verfahren zu vergleichen und die Scherwellen-Refraktionsseismik der GGA durch statische Korrekturen aus einem Modell für den Flachbereich zu ergänzen. Daher wurde die Lage des Profils in Verlängerung der GGA-Auslage gelegt. Das dafür gewählte Gelände hat sich jedoch nachträglich als zu heterogen erwiesen.

Der geologische Untergrund wird durch den Oberen Muschelkalk gebildet, der knapp unter der Geländeoberfläche ansteht. Die Aufnahme des beim Bau eines Tiefbrunnens erbohrten Materials charakterisiert den Muschelkalk bis 80m Tiefe als teilweise sehr hart. Im Bereich des seismischen Profils ist der Muschelkalk mit geringer, aber wechselnder Mächtigkeit durch Verwitterungsprodukte überdeckt. Das Profil tangiert außerdem die Vegetation eines Waldrandes.

Die wechselnde Mächtigkeit der Bodenbedeckung stellt durch den Kontrast zum anstehenden Muschelkalk eine starke laterale Heterogenität unmittelbar an der Oberfläche dar. Die einheitliche Phasenbeziehung der Seismogramme ist innerhalb des Profils stark gestört. Die Dispersionsanalyse in Abb. VI.40 (S. 190) zeigt daher nur Fragmente von Moden. Außerdem unterscheiden sich die Spektren von Hinschuss (links) und Rückschuss (rechts) erheblich. Eine Inversion dieses Datensatzes zu einem eindimensionalen Modell (reine Sondierung) ist nicht möglich.

**GÜLTSTEIN**

R<sup>34900</sup>; H<sup>53811</sup>  
TK25 Blatt 7419  
(Herrenberg)

Von Tuzlak (1999) wurde eine tektonische Störung zwischen Nebringen und Gúltstein mit geoelektrischer Tomographie kartiert. Zur Ergänzung der Untersuchung wurden außerdem seismische Messungen durchgeführt. Die bei dieser Gelegenheit aufgezeichneten seismische Oberflächenwellen dienen als Testfall für großräumige, laterale Heterogenität. Die Laufzeiten der refraktierten Kompressionswellen sind von Hecht ausgewertet worden (Tuzlak, 1999; Hecht, 2000).

Als Datensätze stehen Seismogramme von drei, sich jeweils um zwanzig Meter überlappenden Auslagen zur Verfügung. Jede der Auslagen ist ca. 70m lang. Die Gesamtauslage verlief von Ost nach West<sup>8</sup> am Rande eines Feldweges („Nebringer Steige“).

Die geologische Interpretation der geophysikalischen und geologischen Kartierung ergibt folgendes Bild des Untergrundes unter dem Profil: Die Basis bildet Lettenkeuper (ku) als Liegendes. Er wird von Hecht mit einer Kompressionswellen-Geschwindigkeit von  $2,5-3,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  ausgewiesen. In der westlichen Profilhälfte wird dieser direkt von Löss und Lösslehm ( $v_p \approx 300-360 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ) überlagert. Die Mächtigkeit des Löss nimmt von 2m im Westen auf 5m im Osten zu. In der Osthälfte des Profils liegt zwischen Löss und und Lettenkeuper eine Lage Gipskeuper (km1). Deren Mächtigkeit wird von Hecht unter dem östlichen Profilende mit 10m angegeben. Laut des Interpretationsergebnisses keilt sie etwa beim Profilmeter 105 aus. Ihre Kompressionswellen-Geschwindigkeit beträgt  $850-1050 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Die Veränderung der Struktur entlang der Auslage wird auch von den Oberflächenwellen abgebildet. Abb. VI.38 (S. 188) zeigt mehrere  $\omega, p$ -Spektren für drei Teilabschnitte der Auslage. Innerhalb der Teilauslagen ist die Heterogenität nicht zu stark. Eine 1D-Inversion für jedes Spektrum erscheint möglich. Auf diese Weise könnte ein Satz von mehreren 1D-Modellen erzeugt werden, die zu einem Startmodell für eine 2D-Inversion der Wellenformen zusammengefügt werden können.

Eine vierte Auslage wurde bei Profilmeter 45 entlang eines Querweges nach Norden gelegt. Ihre Länge betrug 50m. Die zugehörigen  $\omega, p$ -Spektren sind in Abb. VI.39 (S. 189) dargestellt. Wie im Datensatz BIETIGHEIM (Abb. VI.5, S. 140) ist die Fundamentalmode schwächer angeregt als die erste höhere Mode.

<sup>8</sup>Profilsprung (0m) bei R<sup>3490155</sup>; H<sup>538113</sup>, Profilende (170m) bei R<sup>348999</sup>; H<sup>538105</sup>

**BÄRWALDE** Das Untersuchungsgebiet befindet sich auf der sogenannten Landkreis „Außenkippe Bärwalde“ des ehemaligen Braunkohleland- Hoyerswerda, gebaus „Lohsa“ in der Oberlausitz, 20km östlich von Hoyerswerda. Im Zuge des Braunkohleabbaus wurden bis über Oberlausitz 30m mächtige Sandmassen als Abraum auf die alten Tagebauflächen gekippt. Dieser Sand ist locker gelagert und droht insbesondere durch eindringendes Wasser bei der geplanten Flutung des Tagebaugesbiets instabil zu werden. Durch sogenanntes Setzungsfließen können dann große Böschungsgebiete ins Rutschen kommen. Um dies zu verhindern, soll der Sand durch geotechnische Maßnahmen verdichtet und in ein stabileres Gefüge gebracht werden. Dies geschieht durch Rüttellanzten und Sprengungen. Bisher existiert jedoch kein ökonomisch vertretbares Verfahren, um den Erfolg dieser Maßnahmen quantitativ zu überprüfen. Daher experimentiert die Arbeitsgruppe von Christian Oelsner von der TU Bergakademie Freiberg in Zusammenarbeit mit der Firma BIUG GmbH seit längerer Zeit mit geophysikalischen Erkundungsverfahren auf Tagebau-Abraumhalden. In diesem Zusammenhang hatte ich die Gelegenheit, gemeinsam mit den Kollegen aus Freiberg Oberflächenwellen-Datensätze zu registrieren.

Zwei  $\omega, p$ -Spektren der Daten sind in Abb. VI.41 (S. 191) dargestellt. Da die Dispersion mit der benutzten Ausrüstung nur bis 10Hz beobachtet werden konnte, lassen sich leider keine Aussagen über den für die Geotechnik interessanten Tiefenbereich unterhalb 10m machen (Abb. VI.42, S. 192).

Das Wellenfeld wird offenbar hauptsächlich von einer Mode getragen. Das würde den Einsatz von Zwei-Stations-Methoden (Seidl und Müller, 1977) zulassen und die Aufzeichnung des Wellenfeldes bei Frequenzen kleiner als 5Hz erleichtern. Das Standard-Flächseismik-Equipment besteht typischerweise aus Geophonen mit Eigenfrequenzen  $>4$ Hz und Rekordern, die häufig fest integrierte Hochpass-Filter mit einer Eigenfrequenz von einigen Hertz enthalten. Für die Aufzeichnung von Signalen unterhalb 5Hz muss man daher zu Ausrüstungen greifen, die in der Regel nur wenige Kanäle für die Aufzeichnung von Wellenformen zur Verfügung stellen.

**LAPTEV-SEE** Von der Bundesanstalt für Geowissenschaften und Rohstoffe (BGR) wurden 1997 in der Laptev-See reflexionsseismische Messungen durchgeführt. Die beiden vorgestellten Datensätze wurden mir von Thomas Bohlen und Gerald Klein (beide Universität Kiel) dankenswerterweise zur Verfügung gestellt.

125°E; 75°N

Bei der Laptev-See handelt es sich um ein flaches Schelfmeergebiet vor der russischen Eismeer-Küste auf Höhe des Mündungs-Deltas der Lena. Die beiden Datensätze, die in den Abb. VI.43 (S. 193) bis VI.45 dargestellt sind, wurden in

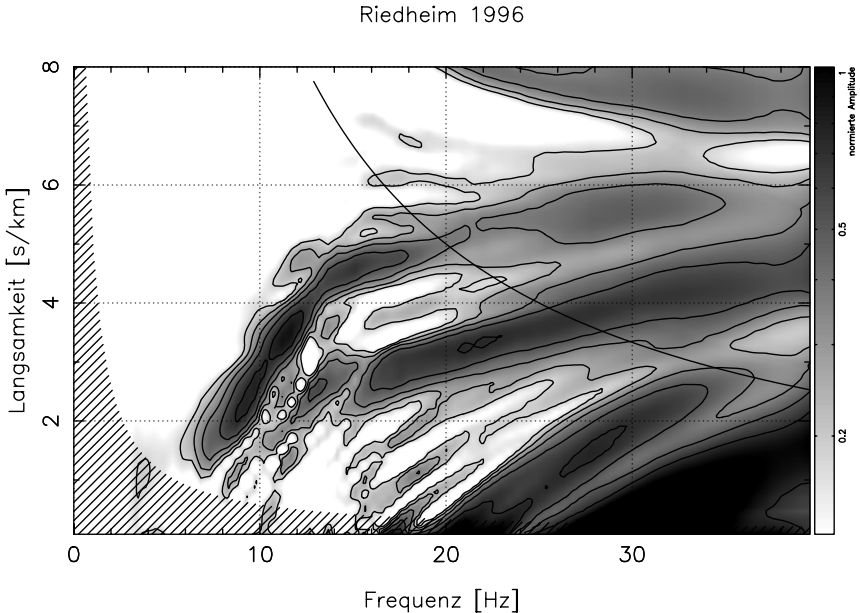
Gebieten mit 18m und 35m Wassertiefe aufgezeichnet. Beide Datensätze wurden mit Hydrophonen („streamer“) knapp unter der Wasseroberfläche registriert.

Die Laptev-See ist ein Gebiet marinen Permafrosts. Die Sedimente des Meeresbodens sind gefroren. In ihnen vermutet man umfangreiche Vorkommen von Methangas.

Das Wellenfeld wird durch im Flachwasser geführte Kompressionswellen dominiert (Abb. VI.43, S. 193). Durch konstruktive Interferenz der mehrfach reflektierten Wellen bildet sich ein dispergierter Wellenzug mit großer Amplitude aus. Da die intrinsische Dämpfung im Wasser sehr gering ist, entspricht die Amplitudenabnahme dem geometrischen Spreading. Daher sind die Maxima im  $\omega, p$ -Spektrum sehr scharf begrenzt (Abb. VI.44, S. 194). Für eine Inversion hat dies den Nachteil, dass das  $\omega, p$ -Spektrum um die Maxima herum sehr fein abgetastet werden muss, damit die Linearisierung der Vorwärtsrechnung gelingen kann. Es kann daher sinnvoll sein, zu Beginn der Inversion eine unrealistisch kleine Güte für das Wasser zu wählen, um die Maxima der Greenschen Funktion zu verbreitern (Abschnitt V.2.6, S. 126).

Bereits aus den im Wasser geführten Wellen kann Information über  $v_s$  am Meeresgrund gewonnen werden. Das Wellenfeld enthält aber auch Signale aus größerer Tiefe (Abb. VI.44, S. 194, rechts). Ist die Wassertiefe gering genug, so können auch Scholte-Moden bereits mit Hydrophonen im Wasser registriert werden (Abb. VI.45, S. 195). Diese werden an der Diskontinuität des Meeresbodens geführt und sind sehr sensitiv für  $v_s$ .



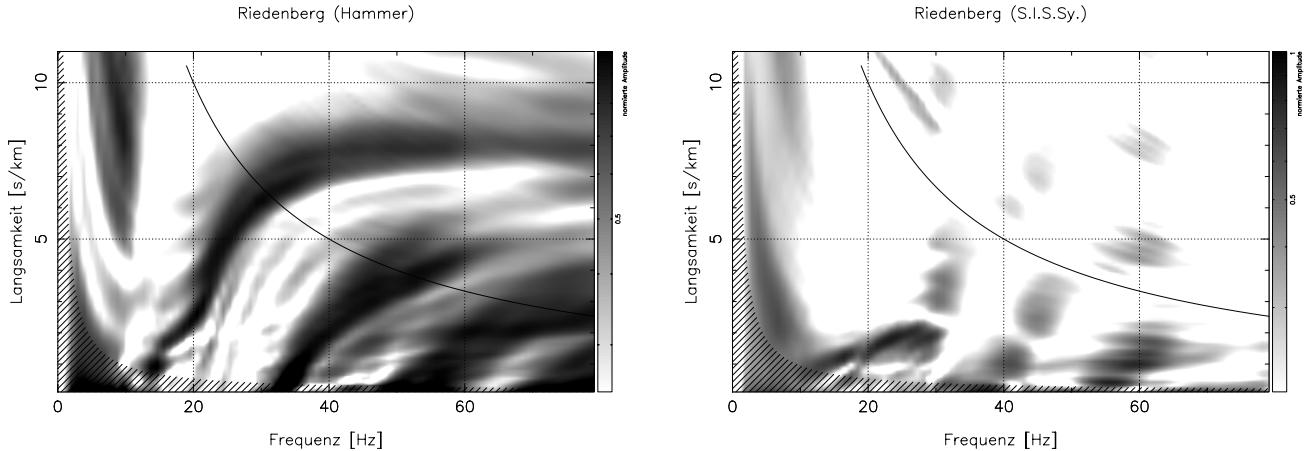


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 170 beschrieben.

**Abbildung VI.27, RIEDHEIM 1996,  $\omega, p$ -Spektrum:** Das  $\omega, p$ -Spektrum dieses Datensatzes wird hier als weiteres Beispiel gezeigt, bei dem mehr als eine Mode im erfassten Frequenzband angeregt ist. Auch hier ist die erste höhere Mode stärker vertreten als die Grundmode.

Die aufgezeichneten Wellenformen eignen sich leider nicht zur Kombination mehrerer Einzelschüsse. Deshalb wurde nur ein Einzeldatensatz mit einem Geophon-Intervall vom 10m analysiert. Somit dominiert das Aliasing bereits bei kleinen Frequenzen. Sowohl für Frequenzen größer 20Hz und Langsamkeiten kleiner  $3 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  als auch für Langsamkeiten größer  $7 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  tritt Aliasing auf. Durch die gewählte Skalierung sind die Maxima des Aliasing in der Abbildung abgeschnitten.

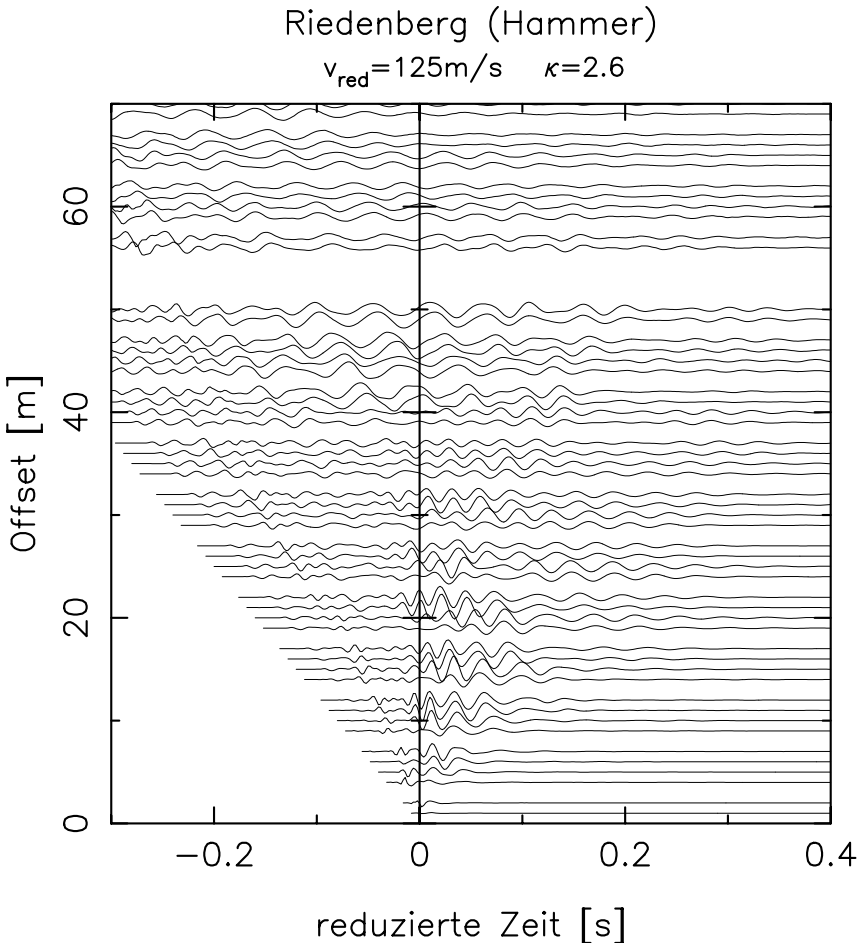
Die Grundmode enthält für  $[8\text{Hz}, 2 \frac{\text{s}}{\text{km}}]$  Signale mit 60m Wellenlänge. Aufgrund der großen Profillänge von 200m bietet die Dispersionsanalyse jedoch auch unterhalb 10Hz eine gute Auflösung.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 169 beschrieben.

**Abbildung VI.28, RIEDENBERG,  $\omega, p$ -Spektrn:** Das Spektrum des mit dem Vorschlaghammer angeregten Wellenfeldes (links) unterscheidet sich vollkommen von der Anregung mit der Explosionsquelle (S.I.S.Sy., rechts). Während der Hammer eine ausgeprägte Fundamentalmode anregt, ist in dem durch Explosion angeregten Wellenfeld nur ein kleiner Abschnitt einer höheren Mode vertreten.

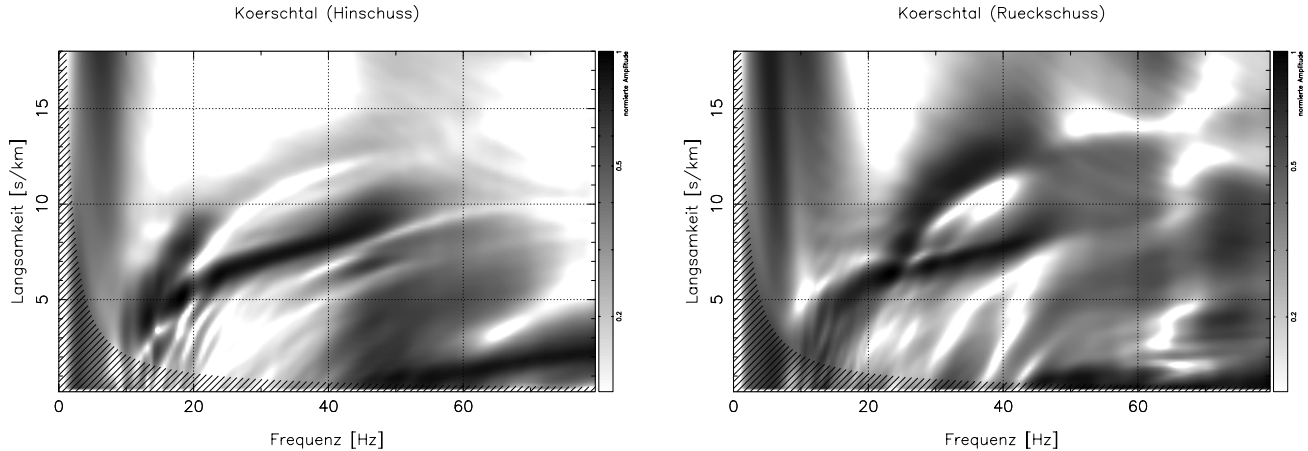
Der mit dem Hammer erzeugte Datensatz wurde zwar aus mehreren Einzelschüssen zusammengesetzt (Abschnitt V.1.1, S. 115). Trotzdem tritt das Aliasing entsprechend der ursprünglichen Geophondistanz von 5m auf. Der Grund dafür ist die durch lokale Heterogenität gestörte Phasenbeziehung für die Grundmode (Abb. VI.29).



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 169 beschrieben.

**Abbildung VI.29, RIEDENBERG, Wellenformen (Hammer):** Die Wellenformen stammen von Schüssen mit dem Vorschlaghammer an vier verschiedenen Positionen. In der Darstellung fehlt nach jeweils 5m ein Seismogramm. In den sich daraus ergebenden Gruppen von je vier Seismogrammen stammt jedes von einer anderen Schuss-Position.

Die langwelligen (schnellen) Wellenzüge zeigen eine einheitliche  $r$ -abhängige Phasenbeziehung. Dagegen haben die kurzen Wellenlängen für jeden Schuss eine eigene Signatur. Dies lässt eine oberflächennahe Heterogenität am Schusspunkt vermuten. Das Kombinieren mehrerer Einzelschüsse kann in diesem Fall nicht erfolgreich sein (Abb. VI.28, S. 178 und Abschnitt V.1.1, S. 115).

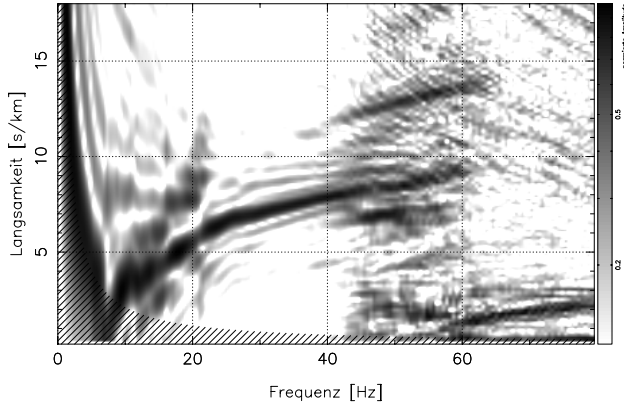


Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 169 beschrieben.

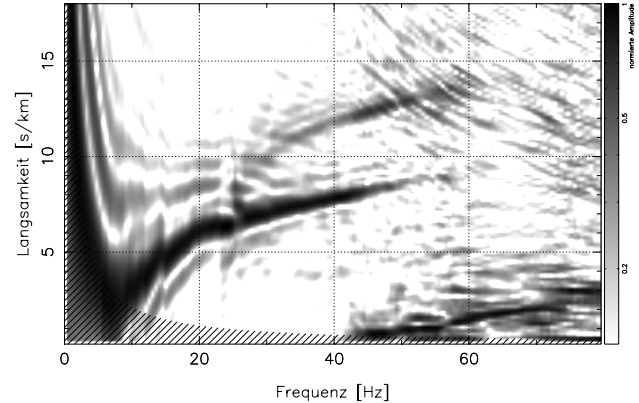
**Abbildung VI.30, KÖRSCHTAL,  $\omega_p$ -Spektrten:** Die  $\omega_p$ -Spektrten für den mit dem Hammer angeregten Hinschuss (links) und den Rückschuss auf demselben Profil (rechts) unterscheiden sich leicht. Das ist ein Indiz für laterale Heterogenität entlang des Profils. Sie ist aber offenbar nicht stark genug, um eine 1D-Auswertung zu verhindern. Auffällig sind die sehr kleinen Phasengeschwindigkeiten bis ca.  $70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Es sind zwei Moden im Wellenfeld angeregt. Besonders beim Rückschuss fällt auf, dass die beiden Moden bei ca.  $[20\text{Hz}, 6 \frac{\text{s}}{\text{km}}]$  sehr eng beieinander liegen.

Koerschtal (Hinschuss, Slant Stack)

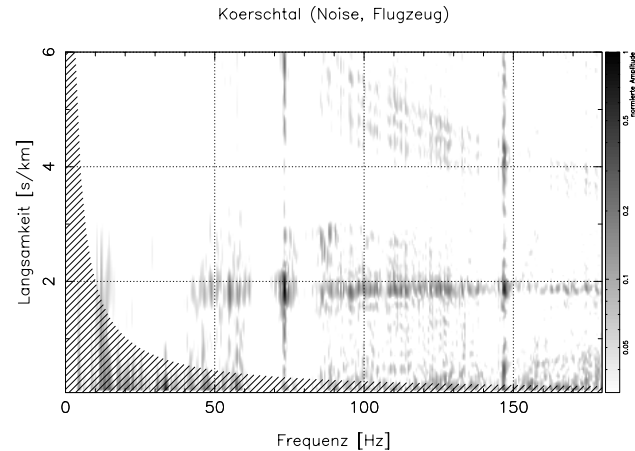
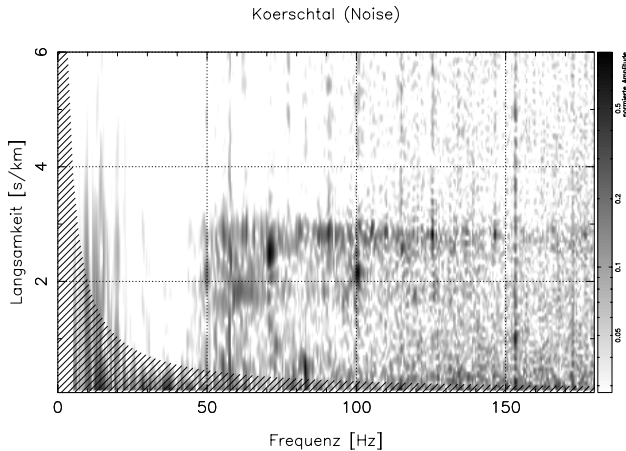


Koerschtal (Rueckschuss, Slant Stack)



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 169 beschrieben.

**Abbildung VI.31, KÖRSCHTAL,  $\omega, p$ -Spektren (Slant Stack):** Während die mit der Fourier-Bessel-Transformation berechneten Spektren (Abb. VI.30) ein eher diffuses Bild geben, können insbesondere Raumwellen mit Hilfe eines Slant-Stacks detaillierter sichtbar gemacht werden. Diese treten bei Frequenzen  $>40\text{Hz}$  auf. In diesem Fall wurden die Beträge aller Fourier-Entwicklungskoeffizienten der Zeitserien auf 1 gesetzt. Es wurde also ausschließlich die Phase der Signale im Sinne ebener Wellen ausgewertet.

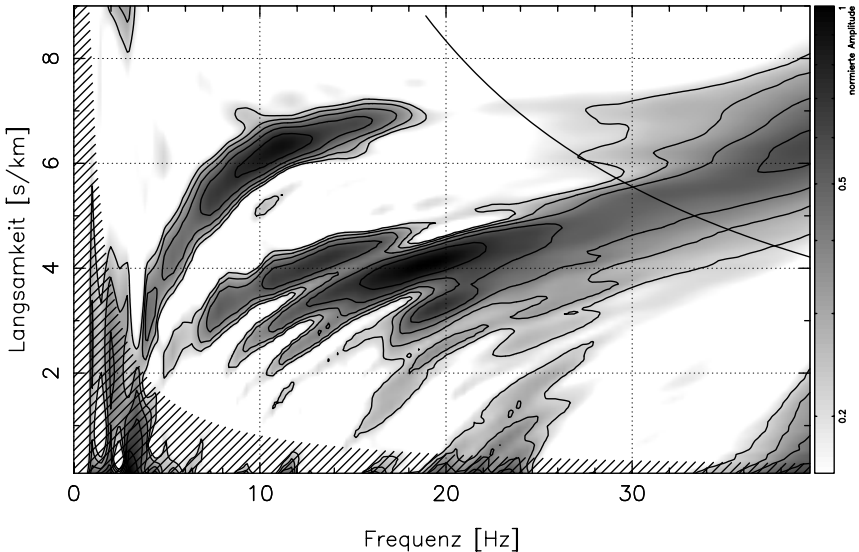


**Abbildung VI.32, KÖRSCHTAL,  $\omega, p$ -Spektrien (Noise):** Dargestellt sind die  $\omega, p$ -Spektrien zweier Einzeldatensätze, die nur mit externen (Stör-)Quellen registriert wurden (Abschnitt III.4.2, S. 90). Der Straßenverkehr spielt aufgrund der Lage des Messgebietes eine untergeordnete Rolle. Die Spektrien sind frequenzabhängig normiert.

Im linken Spektrum ist die Phasengeschwindigkeit des Luftschalls (ca.  $340 \frac{m}{s}$ ) stark vertreten. Etwas schwächer treten auch Wellen für  $500 \frac{m}{s}$  in Erscheinung. Dominierende monofrequente Signale sind kaum vorhanden.

Während der Aufzeichnung des rechts dargestellten Wellenfeldes wurde das Messgebiet von einem Verkehrsflugzeug überflogen. Die dominierende Phasengeschwindigkeit beträgt hier  $500 \frac{m}{s}$ . Dieser Wert wird auch im Raumwellen-Feld der mit dem Hammer angeregten Datensätze beobachtet. Ob sie im Falle des Noise-Spektrums mit den Eigenschaften des Mediums verknüpft ist oder sich aus der Projektion des einfallenden Luftschalls auf das Profil ergibt, kann nicht entschieden werden. Die monofrequenten Anteile bei 73,5Hz und 147Hz werden durch die Normierung stark unterbewertet. Ihre Amplituden sind bis zu hundertfach größer als die der anderen Signale. Der gleitende Mittelwert, über den die Skalierungsfaktoren bestimmt wurden, erzeugt einen „Hof“ links und rechts der Maxima.

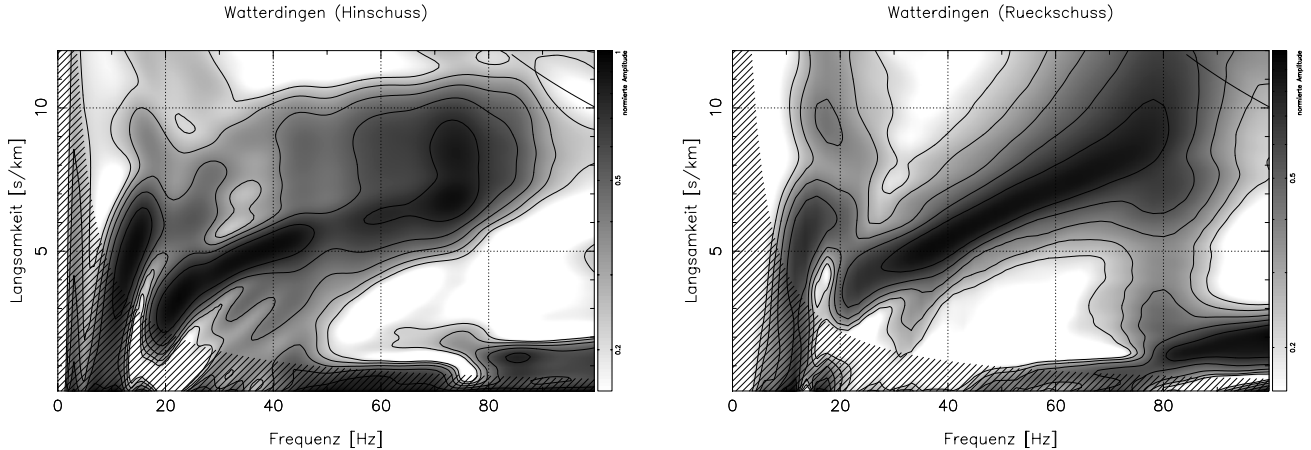
Riedheim 1997



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 170 beschrieben.

**Abbildung VI.33, RIEDHEIM 1997,  $\omega, p$ -Spektrum:** Auch in diesem Datensatz sind mindestens zwei Moden angeregt. Die „Fächerung“ zwischen  $[10\text{Hz}, 4\frac{\text{s}}{\text{km}}]$  und  $[20\text{Hz}, 4\frac{\text{s}}{\text{km}}]$  kann auf mehrere Moden im Wellenfeld oder auf laterale Heterogenität zurückzuführen sein. Sie lässt sich nicht allein als Artefakt der Spektralanalyse (Fenster effekt) erklären.

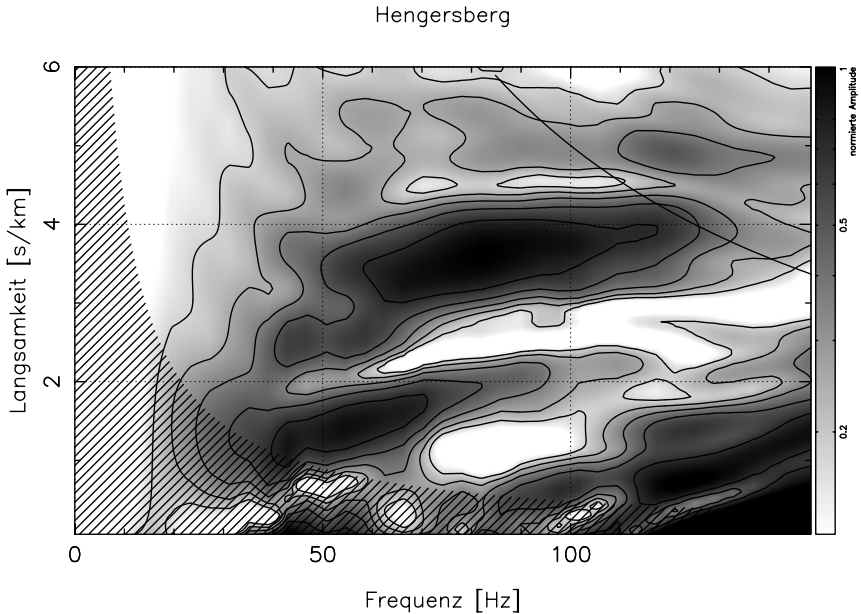
Aufgrund der relativ langen Auslage (140m) ist die Auflösung auch noch unterhalb 10Hz gut. Die Grenze für das Aliasing (Hyperbel) ist für das ursprüngliche Geophon-Intervall (6m) angegeben. Allerdings wurde der Datensatz aus drei Einzelschüssen zusammengesetzt (Abschnitt III.4.2, S. 90).



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 171 beschrieben.

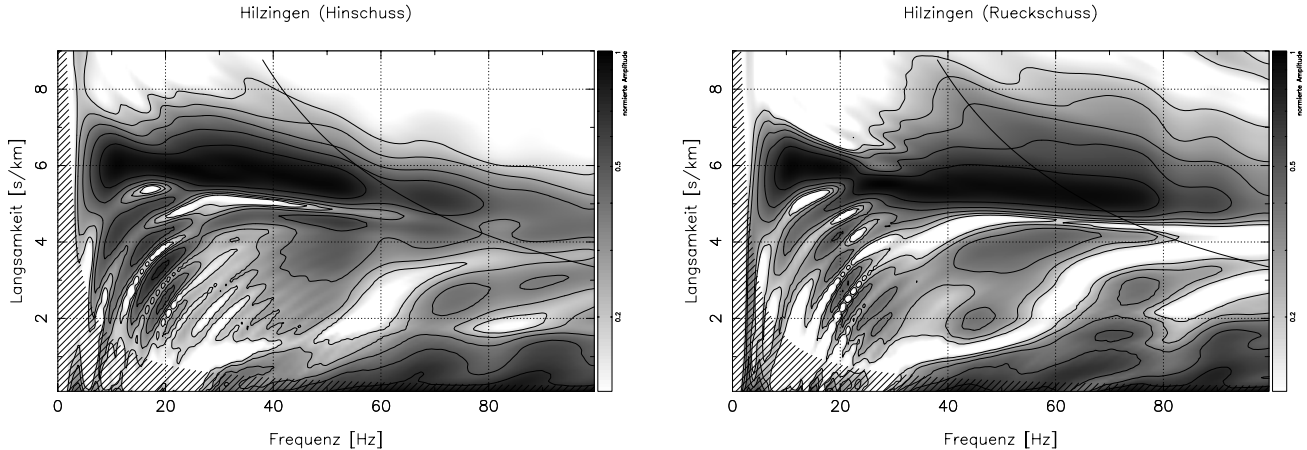
**Abbildung VI.34, WATTERDINGEN,  $\omega, p$ -Spektren:** Die Länge der Auslage betrug in diesem Fall nur 24m. Daher rührt die auffallend schlechte Auflösung. Hinschuss (links) und Ruckschuss (rechts) unterscheiden sich. Das weist auf laterale Heterogenität entlang des Profils hin. Aufgrund der Geländebeschaffenheit ist an diesem Standort zu erwarten, dass die Überdeckung der Juranagelfluh-Mergel auf recht kurzen Distanzen variiert und möglicherweise an einem der Profildenden auskeilt. Die Anregung erfolgte mit dem Hammer.





Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 172 beschrieben.

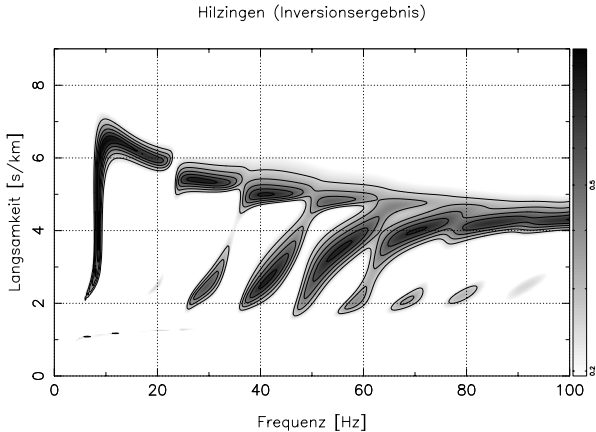
**Abbildung VI.35, HENGERSBERG,  $\omega, p$ -Spektrum:** Das  $\omega, p$ -Spektrum zeigt zwei ausgeprägte Moden. Geländebedingt konnte nur eine 24m lange Auslage benutzt werden. Daher rührt die relativ große Unschärfe der Dispersionsanalyse. Im Frequenzband, in dem die Moden nennenswert angeregt sind, bieten sie nur Aufschluss über die obersten ein bis zwei Meter des Mediums.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 172 beschrieben.

**Abbildung VI.36, HILZINGEN,  $\omega, p$ -Spektr**en: Dieser Datensatz ist ein Pendant zum Datensatz BERKHEIM (Abschnitt VI.2.2, S. 148). Auch hier wird eine Niedrig-Geschwindigkeits-Zone angetroffen. Der verdichtete Schotterbelag des untersuchten Geländes ist seismisch schneller als der darunter liegende Lehm. Das Medium ist jedoch heterogener, weshalb die Moden nicht so sauber getrennt werden können wie im Fall BERKHEIM. Die auftretende „Fächerung“ ist möglicherweise auf Fenstereffekte der Spektralanalyse zurückzuführen. Die Aliasing-Hyperbel wurde für das ursprüngliche Geophon-Intervall von 6m eingetragen. Der Datensatz ist jedoch aus mehreren Einzelschüssen zusammengesetzt (Abschnitt V.1.1, S. 115).

Die Inversion führt zu dem in Abb. VI.37 (S. 187) dargestellten Erdmodell. Modelle, die bereits bei 10Hz zu einer Langsamkeit der Grundmode von  $6 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  führen, sagen zwingend einen Übergang zu ersten höheren Mode bei 20Hz voraus. Dieser Übergang deutet sich auch in den  $\omega, p$ -Spektren des Datensatzes an. Dies ist für eine Niedrig-Geschwindigkeits-Zone typisch (Abschnitt VI.4.2, S. 202).



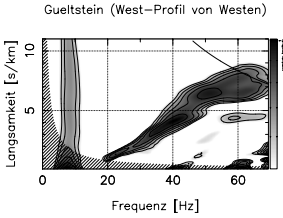
Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 172 beschrieben.

$i$	$z_i$ [m]	$v_p$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$v_s$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$Q_p$	$Q_s$
1	2,97	0,79420	0,24265	1,700	20,0	20,0
2	7,04	1,28426	0,10084	1,700	20,0	20,0
3	$\infty$	1,52399	1,14307	1,900	30,0	30,0

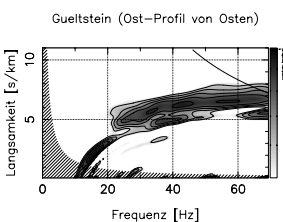
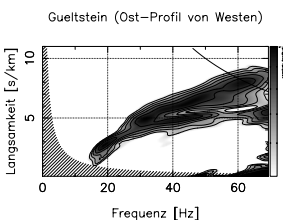
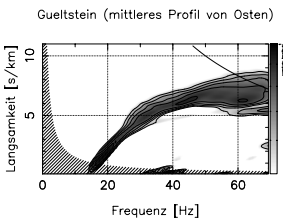
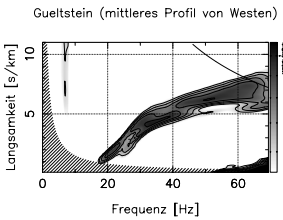
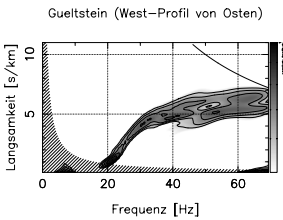
**Abbildung VI.37, HILZINGEN, Inversionsergebnis und Greensche Funktion:**

In der Tabelle wird ein Modell angegeben, mit dem das  $\omega, p$ -Spektrum (Abb. VI.36, S. 186) des Datensatzes HILZINGEN erklärt werden kann. Über den Betrag der Scherwellen-Geschwindigkeit im Halbraum lässt sich aus den Daten kaum etwas erfahren. Der Knick der anomal dispergierten Mode bei 10Hz zu kleineren Langsamkeiten in Abb. VI.36 bestimmt aber in etwa die Tiefe des Halbraums. Die Abbildung zeigt die Greensche Funktion des Mediums für Anregung mit einer vertikalen Einzelkraft.

Experimente mit den synthetischen Daten zeigen: Wird verlangt, dass sich der anomal dispergierte Bereich bis hinab zu 10Hz erstreckt, so muss die zweite Normalmode spätestens bei 20Hz in das Maximum des Spektrums münden. Erstreckt sich die anomale Dispersion zu kleineren Frequenzen als 10Hz, so folgen auch die höheren Moden bereits bei kleineren Frequenzen. Die Spektren der Messdaten in Abb. VI.36 lassen sich daher nur durch eine Kombination mehrerer Normalmoden sinnvoll erklären. Siehe dazu auch Abschnitt VI.4.2 (S. 202).



← Westen



### Abbildung VI.38, GÜLTSTEIN, $\omega, p$ -Spektr:

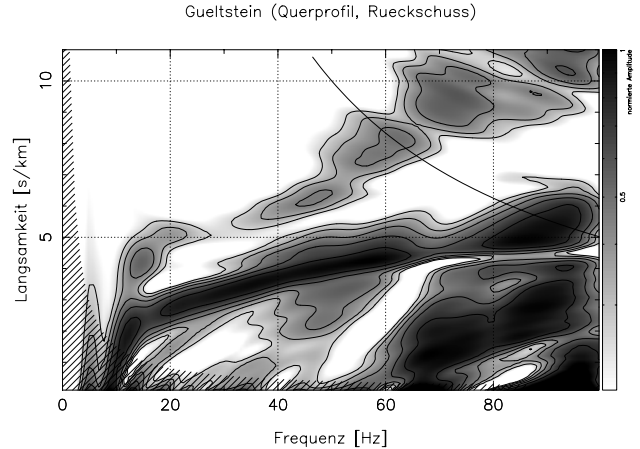
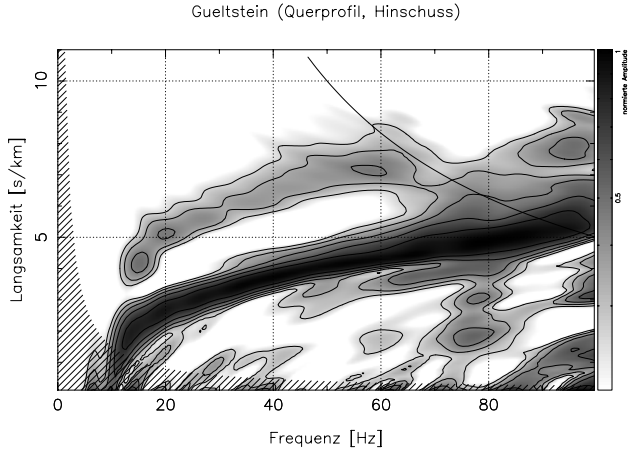
Dargestellt sind die Spektren von Datensätzen, die auf drei Teilabschnitten des Profils registriert wurden (siehe Text Seite 174). Die Reihenfolge der Abbildungen von oben nach unten ist: westlicher Profil-Abschnitt mit Schusspunkt im Westen, West-Profil mit Schusspunkt im Osten, mittleres Profil von Westen, mittleres Profil von Osten, Ost-Profil von Westen, Ost-Profil von Osten. Die vertikalen Streifen unterhalb 10Hz sind Artefakte der normierten Skalierung.

Nach Westen zu schneiden die Dispersionskurven die Ordinate  $5 \frac{s}{km}$  bei zunehmend höheren Frequenzen. Das deutet darauf hin, das seismisch schnelles Material im Westen in geringerer Tiefe angetroffen wird. Dies stimmt mit der Auswertung von Hecht überein (Tuzlak, 1999, siehe Text auf Seite 174 der vorliegenden Arbeit). Im westlichen Bereich des Gesamtprofils gibt Hecht in 2m Tiefe Lettenkeuper mit  $v_p > 2,5 \frac{km}{s}$  an. Am östlichen Profilende trifft man zunächst in 5m Tiefe auf Gipskeuper ( $v_p < 1050 \frac{m}{s}$ ) und erst in 15m Tiefe auf Lettenkeuper.

Trotz der erheblichen Heterogenität auf insgesamt 170m Auslage ist eine Dispersionsanalyse für die Teilabschnitte möglich. Für jedes der Spektren kann durch eine Inversion ein eindimensionales Modell bestimmt werden. Diese Einzelmodelle lassen sich zu einem Startmodell für eine anschließende 2D-Inversion der Wellenformen kombinieren.

Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 174 beschrieben.

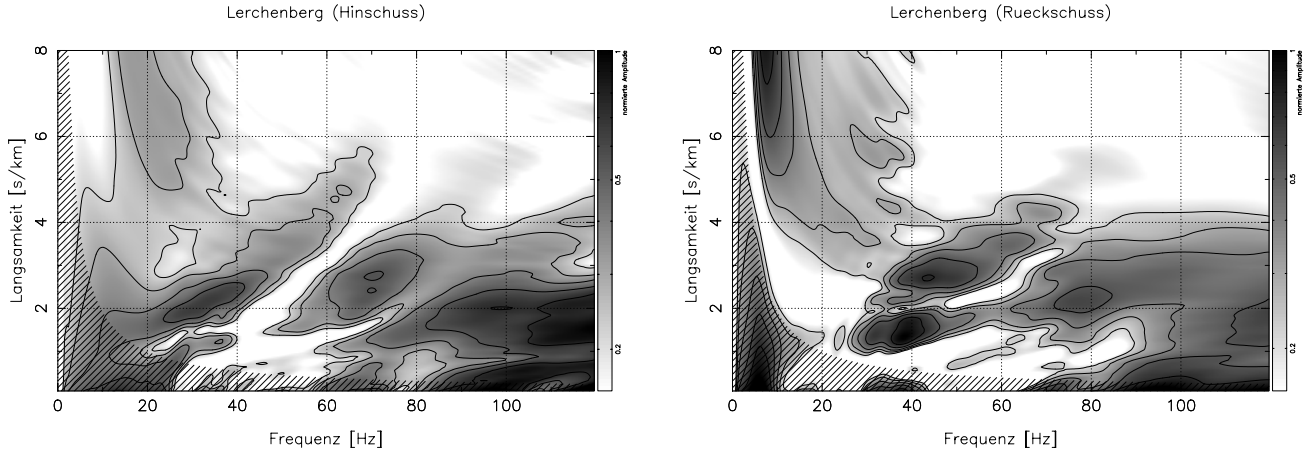
← Osten



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 174 beschrieben.

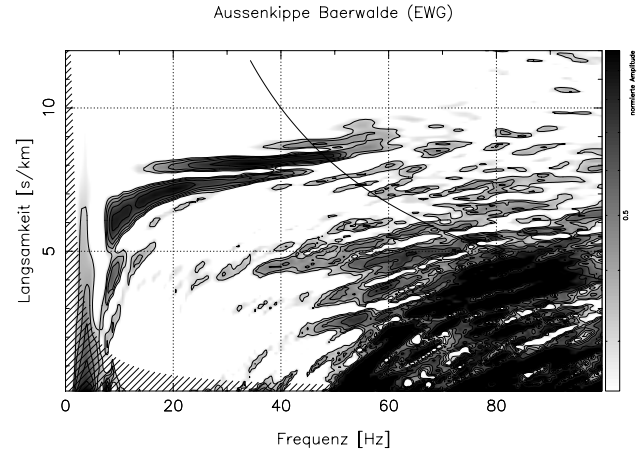
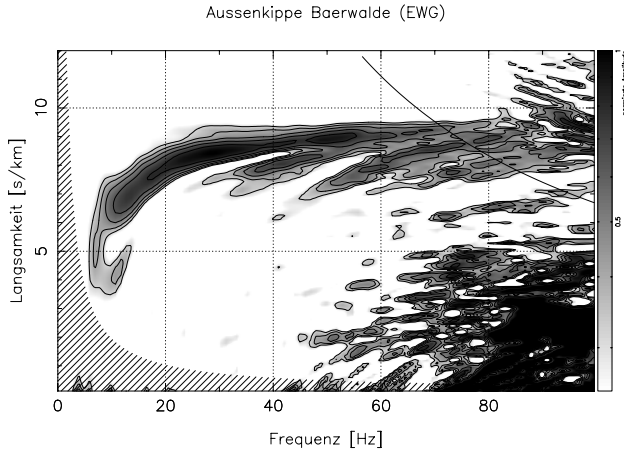
**Abbildung VI.39, GÜLTSTEIN,  $\omega, p$ -Spektren, Querprofil:** Ein zweites, kürzeres Profil wurde senkrecht zur langen Auslage (Abb. VI.38, S. 188) und somit parallel zum vermuteten Verlauf der Verwerfung angelegt (siehe Text Seite 174). Links dargestellt ist das Spektrum für den Hinschuss (Schusspunkt beim langen Profil, Süd-Ende des kurzen Querprofils), rechts der Rückschuss (Schusspunkt am nördlichen Ende des Querprofils).

Wie beim Datensatz Bietigheim (Abb. VI.5, S. 140) zeichnet sich in beiden Spektren eine schwächer angeregte Grundmode ab.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 173 beschrieben.

**Abbildung VI.40, LERCHENBERG,  $\omega, p$ -Spektren:** Dieser Datensatz stellt einen Grenzfall dar. Das Medium ist bereits dicht an der Oberfläche lateral stark heterogen. Die Dispersionsanalyse zeigt nur noch Fragmente von Moden. Die Wellenfelder von Hinschuss (links) und Rückschuss (rechts) auf demselben Profil unterscheiden sich erheblich. Eine reine Sondierung führt auf diesem Gelände zu keinem sinnvollen Ergebnis. Die in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Methode scheitert schon im ersten Schritt, da bereits für die Dispersionsanalyse ein lateral homogenes Medium vorausgesetzt werden muss. Methoden, die nur Phasendifferenzen zwischen zwei Stationen auswerten, würden zu Dispersionskurven führen, die keine verwertbare physikalische Information über das Medium enthalten.



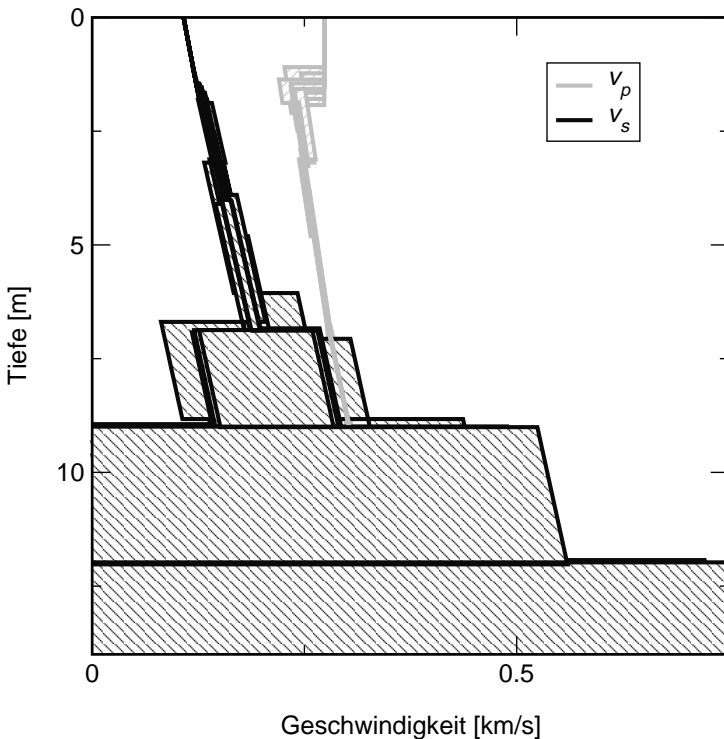
Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 175 beschrieben.

**Abbildung VI.41, BÄRWALDE,  $\omega, p$ -Spektren:** Die dargestellten Datensätze wurden auf zwei verschiedenen Flächen im Untersuchungsgebiet registriert. Das Wellenfeld wurde in beiden Fällen mit einem beschleunigten Fallgewicht (EWG) angeregt. Die Aliasing-Hyperbeln nach Gl. (III.20) sind für die Geophon-Distanzen der Einzelschüsse (1,5m links und 2,5m rechts) angegeben. Sowohl die „Fächerung“ im linken Beispiel, wie auch die Aufspaltung der Mode im rechten Beispiel lassen sich nicht in einfacher Weise als Fenstereffekte der Spektralanalyse erklären. Sie lassen sich aber auch nicht einfach durch eine Modellierung nachbilden. Möglicherweise sind sie auf Heterogenität zurückzuführen.

Der für die geotechnisch relevante Fragestellung interessante Bereich unterhalb von 10m (siehe Text auf Seite 175) wird von den beobachteten Wellen nicht erfasst. Da nennenswerte höhere Moden nicht zur Verfügung stehen, muss die Messung zu größeren Auslagen und kleineren Frequenzen erweitert werden. Sollte das Wellenfeld auch dann noch unimodal sein, könnte dabei eine einfache Phasendifferenz-Analyse mit nur zwei Empfängern zur Anwendung kommen. Dies wäre hilfreich, da Ausrüstungen zur Aufzeichnung seismischer Signale unter 5Hz in der Regel weniger Kanäle zur Verfügung stellen als typische Flachseismik-Apparaturen.

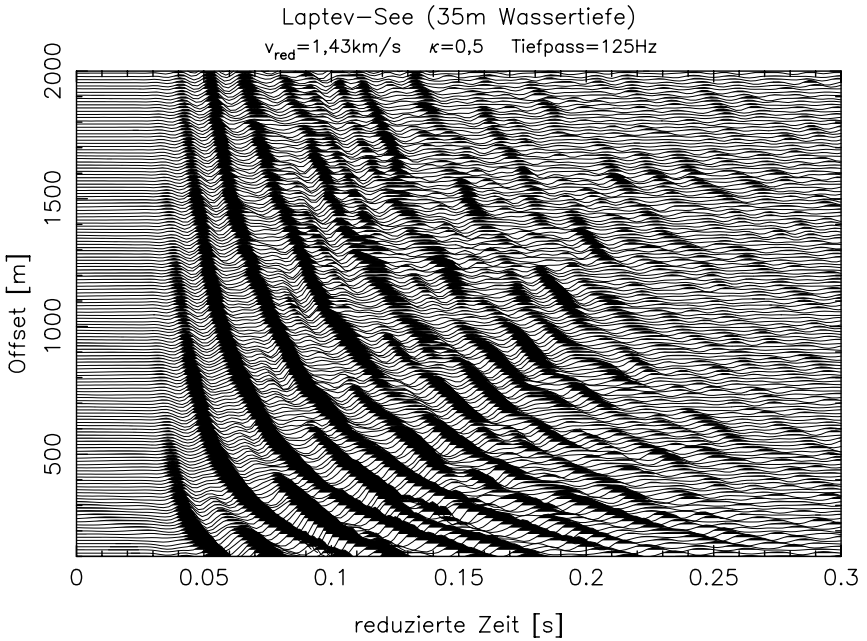
## Auflösungsanalyse Bärwalde

Profil rck1; Mittelwert  $v_s$ ;  $\Delta\chi_{\text{rms}}=5\%$



**Abbildung VI.42, BÄRWALDE, Auflösungsanalyse:** Dargestellt ist eine Auflösungsanalyse für das Ergebnismodell der Inversion des linken Spektrums in Abb. VI.41 (S. 191). Getestet wurden die Mittelwerte für  $v_s$  in den acht Tiefenabschnitten des Modells. Für jeden Parameter wurde die Variation gesucht, die zu einer Zunahme des rms-Misfits um 5% führt. Dabei wurden alle anderen Mittelwerte für  $v_s$  und  $v_p$  sowie die Mächtigkeiten der Sektionen so nachgeführt, dass die Misfit-Zunahme möglichst klein blieb (Abschnitt IV.2.2, S. 106). Die Analyse zeigt, dass aufgrund der Messdaten keine Aussage über  $v_s$  in Tiefen größer 8m gemacht werden kann. Um diese Tiefe zu erreichen, müsste die Dispersion der Oberflächenwellen bei weit kleineren Frequenzen als 10Hz ausgewertet werden. Die Niedrig-Geschwindigkeits-Zone für  $v_p$  bei 2m Tiefe wird gefordert, da die Laufzeitkurve der Kompressions-Wellen eine Schattenzone aufweist.

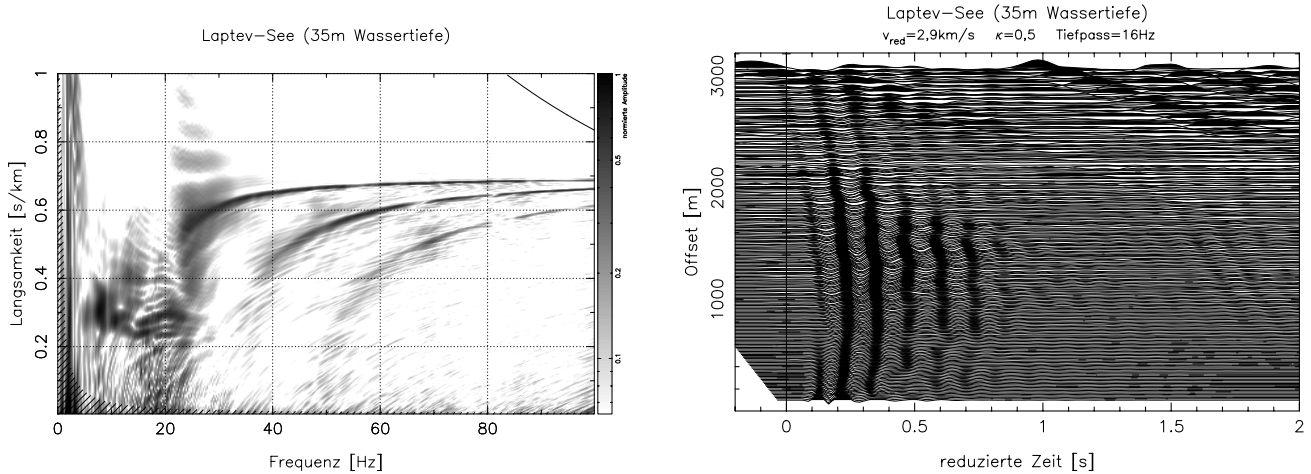




Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 175 beschrieben.

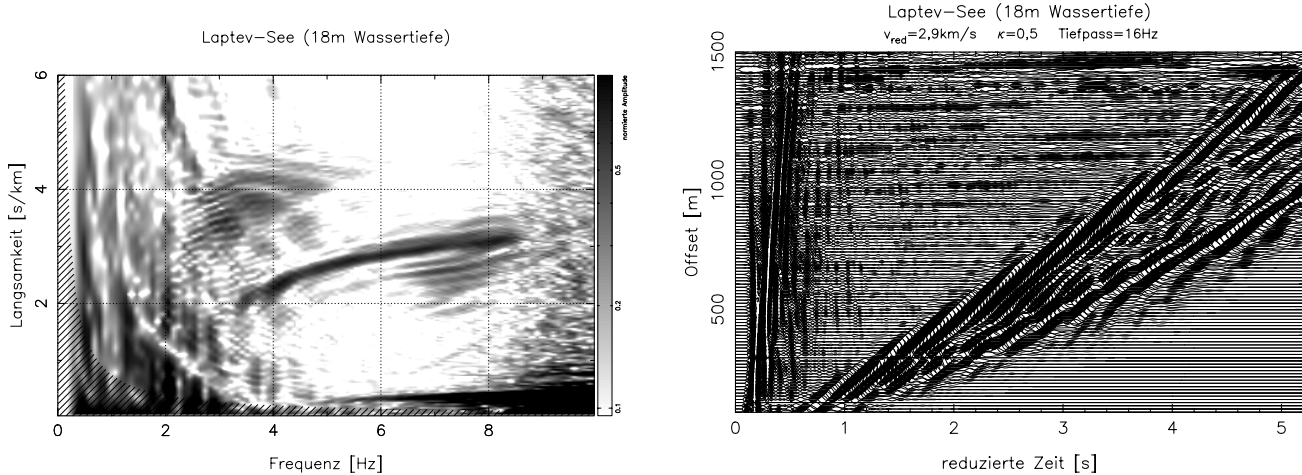
**Abbildung VI.43, LAPTEV-SEE, Geführte Wellen (35m Wassertiefe):** Die Wellenfelder aus dem marinen Flachwasser werden durch Kompressionswellen dominiert, die in der Wasserschicht geführt werden. Die abgebildeten Seismogramme zeigen die typische Signatur von Mehrfachreflexionen.

Die Ausbreitung dieser Wellen ist im Wasser nahezu verlustfrei. Die Amplitudenabnahme über die dargestellten 2km Auslage entspricht genau dem geometrischen Spreading. Die Seismogramme wurden abhängig vom Offset  $r$  mit einem Faktor  $\sqrt{r}$  skaliert. Die geringe Dämpfung äußert sich auch durch scharf begrenzte Resonanzmaxima im  $\omega, p$ -Spektrum (Abb. VI.44). Aufgrund der geringen Dämpfung können die Signale auch sehr hochfrequent sein. Für die Abbildung wurden die Wellenformen mit einem 125Hz Tiefpass gefiltert.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 175 beschrieben.

**Abbildung VI.44, LAPTEV-SEE,  $\omega, p$ -Spektrn (35m Wassertiefe):** Die drei Moden für Frequenzen oberhalb 20Hz im linken Bild entstehen durch konstruktive Interferenz von mehrfach an der Oberfläche und am Grund des Flachwassers reflektierten Kompressionswellen (Abb. VI.43). Sie enthalten nicht nur Informationen über die Kompressionswellen-Geschwindigkeit im Wasser und die Tiefe des Meeresbodens, sondern auch über die Scherwellen-Geschwindigkeit am Meeresboden. Das rechte Bild zeigt einen bei 16Hz Tiefpass gefilterten Ausschnitt der Wellenformen. Diese Wellen mit relativ großer Phasengeschwindigkeit zeigen ebenfalls die Signatur von Mehrfachreflexionen. Sie sind äquivalent zu dem Signal, das im  $\omega, p$ -Spektrum (links) bei ca.  $[20\text{Hz}, 0,3\frac{\text{s}}{\text{km}}]$  zu erkennen ist. Dieses enthält Informationen über tiefer unter dem Meeresboden gelegene Bereiche und wird auch im zweiten Datensatz (Abb. VI.45) angetroffen.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben. Der Datensatz wird auf Seite 175 beschrieben.

**Abbildung VI.45, LAPTEV-SEE, Scholte-Moden (18m Wassertiefe):** In einem flacheren Bereich der Laptev-See konnten Scholte-Moden mit Hydrophonen („streamer“) im Wasser beobachtet werden. Scholte-Moden sind Grenzschicht-Wellen, die an der Diskontinuität des Meeresbodens geführt werden. Sie sind daher sehr sensitiv für die Scherfestigkeit des Meeresgrundes. Im links dargestellten Spektrum sind zwei Moden zwischen  $2 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  und  $4 \frac{\text{s}}{\text{km}}$  zu erkennen, eine davon nur diffus. Im rechten Bild ist die Signatur des mit einem 16Hz Tiefpass gefilterten Wellenfeldes abgebildet. Deutlich zu erkennen ist der Keil der dispergierten Scholte-Moden. Bei kleinen Zeiten tritt ein Signal hoher Phasengeschwindigkeit auf, dass auch in Abb. VI.44 (S. 194) rechts zu sehen ist. Es tritt im  $\omega,p$ -Spektrum am rechten unteren Rand auf.

## 4 Folgen fehlerhafter Interpretation

An mehreren Stellen habe ich bereits darauf hingewiesen, dass Inversionsmethoden wie SASW<sup>9</sup> nicht für Wellenfelder geeignet sind, die aus mehreren Moden aufgebaut sind. Diese Verfahren bestimmen eine einzige Dispersionskurve aus Phasendifferenzen und versuchen diese durch die Fundamentalmode des gesuchten Erdmodells zu erklären. Die überwiegende Mehrzahl der dargestellten Datensätze weist mehrere Moden auf, deren Frequenzbereiche sich überlappen. Im Fall des Datensatzes BIETIGHEIM ist zu erwarten, dass eine Zwei-Stations-Methode zur Dispersionsanalyse hauptsächlich die erste höhere Mode erfassen würde, die dann durch die Fundamentalmode des Modells erklärt würde. Im Falle von BERKHEIM würden mehrere Moden zu einer Dispersionskurve zusammengefasst werden (Gucunski und Woods, 1991; Tokimatsu et al., 1992b). In den folgenden beiden Abschnitten werden die möglichen Folgen dieser Fehlinterpretationen beispielhaft untersucht.

Da mir für diese ergänzenden Versuche kein geeignetes Inversionsprogramm für Dispersionskurven zur Verfügung stand, wendete ich das in Abschnitt V.1.3 (S. 118) besprochene Verfahren an. Zunächst wurde aus dem  $\omega, p$ -Spektrum der Messdaten die jeweilige Dispersionskurve abgelesen. Für diese Kurve generierte ich dann ein künstliches Amplitudenspektrum, welches auf der Kurve ein Maximum besitzt. Dieses künstliche  $\omega, p$ -Spektrum diente als Datensatz für die zweite Stufe der Inversion. Dabei wurden nur die normierten Beträge des Spektrums und der synthetischen Greenschen Funktion verglichen.

### 4.1 Verwechslung von Fundamentalmode und höherer Mode am Beispiel BIETIGHEIM

Am Beispiel des Datensatzes BIETIGHEIM soll gezeigt werden, welche Auswirkungen eine Verwechslung von Moden auf das Ergebnismodell haben kann. In Abb. VI.46 (S. 198) ist nochmals das  $\omega, p$ -Spektrum des Datensatzes gezeigt. Der Verlauf der ersten höheren Mode ist durch eine Kurve markiert. Es wurde nun ein Modell gesucht, welches diese Kurve durch eine Fundamentalmode anpasst und gleichzeitig in der Lage ist, die Laufzeitkurve zu erklären. Dieses Modell ist in Abb. VI.47 (S. 200), die zugehörige Greensche Funktion in Abb. VI.46 rechts dargestellt.

Es lässt sich bereits vor der Inversion abschätzen, dass die gestellten Forderungen zu Widersprüchen führen können. Die Werte für  $v_p$  sind in den überschossenen Bereichen nicht bestimmt. Für sie existiert jedoch eine obere Schranke.

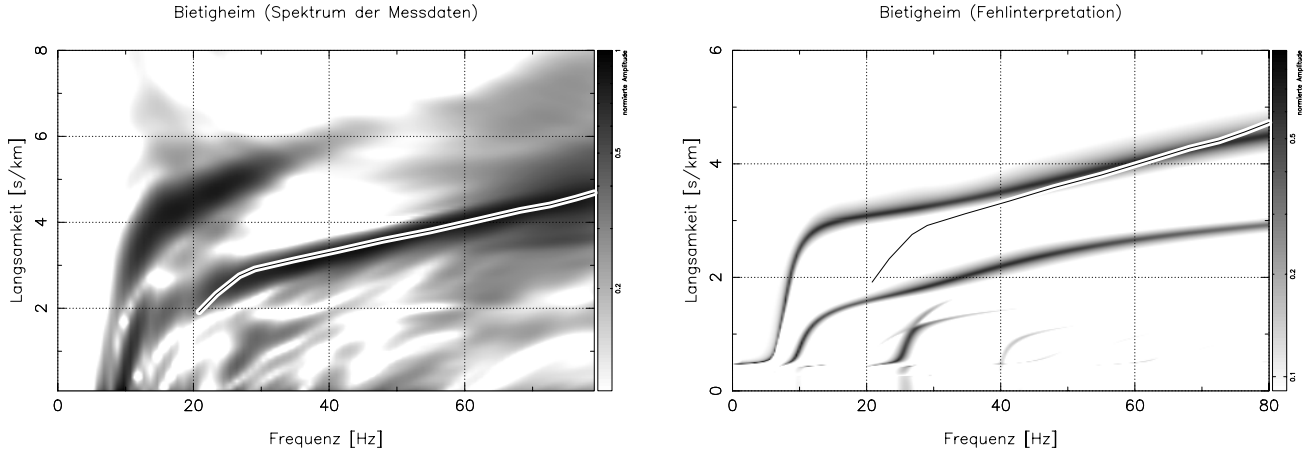
---

<sup>9</sup>Siehe auch die Zitate zu „Spectral Analysis of Surface Waves“ in Abschnitt I.2, S. 17.

Werden sie zu groß gewählt, tragen Tauchwellen aus dem überschossenen Bereich mit zu frühen Einsätzen zur Laufzeitkurve bei. Auf der anderen Seite ergibt sich aus der Fundamentalmode die untere Schranke für die Phasengeschwindigkeit der Rayleighwelle und damit auch für  $v_s$ . Wird nun die erste höhere Mode als Fundamentalmode interpretiert, so führt dies zu größeren Werten für  $v_s$ . Aufgrund dieser beiden Schranken wird das Verhältnis  $v_p/v_s$  bei einer falschen Deutung der Moden kleiner werden. In Abschnitt II.2.2.1 (S. 38) wurde jedoch  $v_p > 1,5v_s$  gefordert. Dies kann zu einem Konflikt führen, der es unmöglich macht, den Datensatz konsistent zu erklären. Dies äußert sich am deutlichsten im Poisson-Verhältnis (Abb. VI.48, S. 201). Von ca. 2,5m bis 10m Tiefe nimmt die Querkontraktionszahl negative Wert an, was bedeutet, dass ein in die Länge gezogener Stab aus diesem Material gleichzeitig breiter wird. Dies widerspricht zwar nicht fundamentalen physikalischen Forderungen, wurde aber bisher noch nie beobachtet.

Das Ergebnismodell zeigt dabei immer noch tendenziell zu kleine Phasengeschwindigkeiten (Abb. VI.46, S. 198) und im Mittel zu kleine Laufzeiten (Abb. VI.47, S. 200), obwohl der Bereich sinnvoll anwendbarer Parameterwerte ( $v_p > 1,5v_s$ ) bereits verlassen wurde. Bei einer sorgfältig durchgeführten Inversion sollte dieser Widerspruch bemerkt werden und damit Gelegenheit zur Korrektur der Moden-Deutung bestehen.

Wird jedoch auf eine gleichzeitige Inversion der Laufzeitkurve verzichtet und nur eine Mode invertiert, wie es bei SASW (Nazarian, 1984) üblich ist, wird die Fehldeutung unentdeckt bleiben.



Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

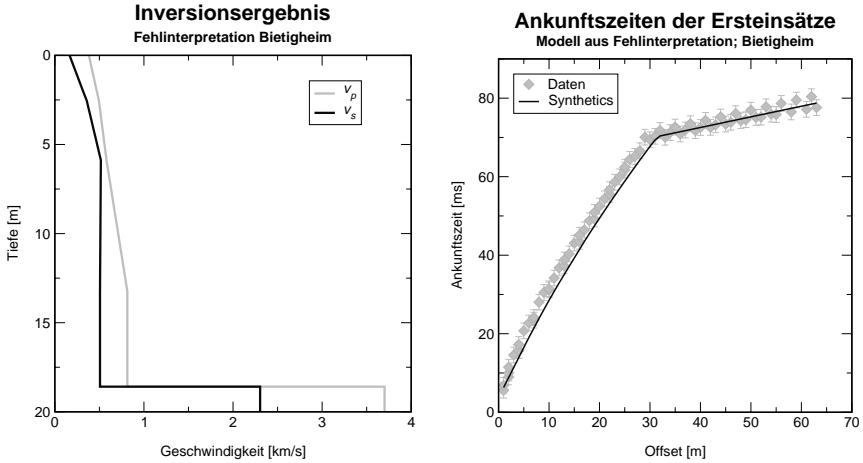
**Abbildung VI.46, Fehlinterpretation BIETIGHEIM,  $\omega, p$ -Spektren:** Für die erste höhere Mode des Datensatzes BIETIGHEIM wurde die Dispersionskurve abgelesen (links). Es wurde ein Modell gesucht, das eine Fundamentalmode entlang dieser Dispersionskurve erzeugt (Abb. VI.47 und Tab. VI.4). Rechts ist die Greensche Funktion für das Ergebnismodell dargestellt. Eine bessere Anpassung ist nicht möglich, wenn gleichzeitig die Laufzeitkurve (Abb. VI.47, rechts) angepasst werden soll. Die Mode bestimmt eine untere Schranke für  $v_s$ , die Laufzeitkurve eine obere Schranke für  $v_p$  (siehe Text auf Seite 196).

$i$	$z_i$ [m]	$v_p$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$v_s$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$Q_p$	$Q_s$
1	2,56	0,43878	0,26205	1,600	50,0	50,0
		0,04394	0,07556			
		0,00000	0,00021			
2	5,88	0,53755	0,43792	1,600	50,0	50,0
		0,02561	0,04746			
3	13,25	0,69698	0,51168	1,600	50,0	50,0
		0,03176	-0,00132			
4	18,59	0,81397	0,50678	1,600	50,0	50,0
5	$\infty$	3,70061	2,30421	2,300	200,0	100,0

Die Werte in der Tabelle sind Polynom-Koeffizienten. Die verwendete Parametrisierung wird im Anhang in Abschnitt A.2.2 (S. 218) definiert.

**Tabelle VI.4, Fehlinterpretation BIETIGHEIM, Erdmodell:** Dieses Modell erzeugt eine Fundamentalmode mit dem Verlauf der ersten höheren Mode im Datensatz BIETIGHEIM (Abb. VI.46). Es erklärt gleichzeitig die Laufzeitkurve der Ersteinsätze (Abb. VI.47, S. 200, rechts). Das Modell ist graphisch in Abb. VI.47 (links) dargestellt.

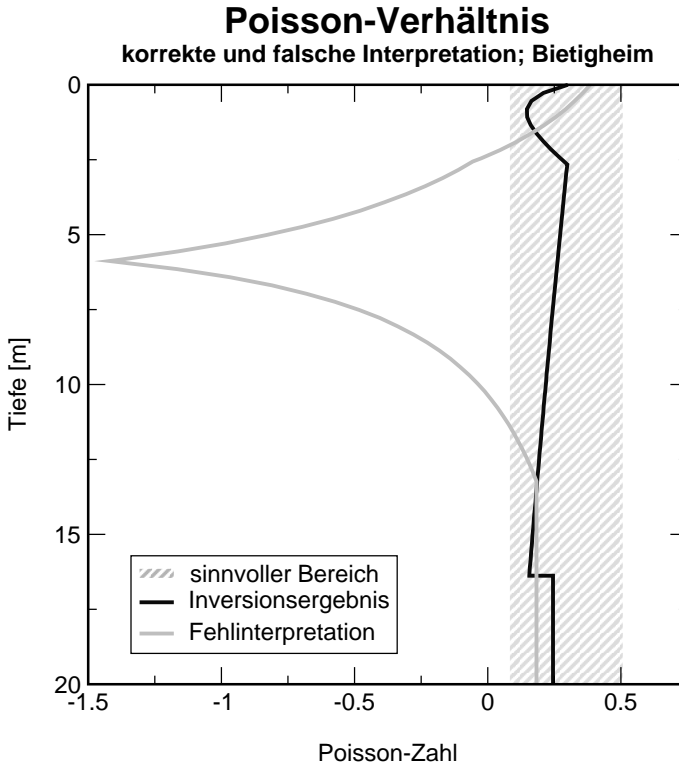
Invertiert wurde nach den seismischen Geschwindigkeiten. Die Dichte wurde aus dem Ergebnis der Inversion für BIETIGHEIM (Tab. VI.1, S. 137) übernommen. Die Güte-Werte sind ad hoc gewählt.



**Abbildung VI.47, Fehlinterpertation BIETIGHEIM, Erdmodell und Laufzeitkurve:** Links ist das Erdmodell dargestellt, welches die erste höhere Mode im Datensatz BIETIGHEIM durch eine Fundamentalmode erklärt (Abb. VI.46). Die Unterschiede zum korrekt bestimmten Modell in Abb. VI.2 (S. 137) erscheinen zunächst nicht gravierend. Die Geschwindigkeiten sind größer und damit liegt auch der Halbraum in etwas größerer Tiefe. Auffällig ist jedoch der geringe Abstand von  $v_p$  und  $v_s$  in ca. 6 m Tiefe. Dies führt zu einem dramatischen Unterschied für die Poisson-Zahl (Abb. VI.48).

Vom Modell wurde gefordert, dass es auch die Laufzeitkurve (rechts) der refraktierten Kompressionswellen erklärt. Die Missdeutung der Moden (Abb. VI.46) führt zu allgemein erhöhten Geschwindigkeiten, so dass die Laufzeiten am unteren Limit liegen.





**Abbildung VI.48, Fehlinterpretation BIETIGHEIM, Poisson-Verhältnis:** Die dargestellten Poisson-Verhältnisse wurden aus dem Endmodell der korrekten Inversion des  $\omega, p$ -Spektrums (Tab. VI.1, S. 137) und der Inversion der falsch interpretierten Mode (Tab. VI.4, S. 199) berechnet. Die Schraffur gibt den in Abschnitt II.2.2.1 (S. 38) genannten Bereich sinnvoller Werte an.

Aus einer Missdeutung der Moden ergeben sich widersprechende Forderungen an  $v_p$  und  $v_s$  (siehe Text auf Seite 196). Die direkte Folge sind auffallend kleine Poisson-Zahlen. Ein negatives Querkontraktions-Verhältnis bedeutet, dass ein in die Länge gezogener Stab gleichzeitig breiter wird. Das wurde noch nie beobachtet.

## 4.2 Erklärung mehrerer Moden durch eine Dispersionskurve am Beispiel BERKHEIM

Aufgrund der guten Datenqualität lassen sich im Datensatz BERKHEIM mehrere Moden im Spektrum trennen (Abb. VI.14, S. 153). Für den Datensatz HILZINGEN ist dies nicht möglich (Abb. VI.36, S. 186), sondern lässt sich erst aufgrund des Inversionsergebnisses erschließen (Abb. VI.37, S. 187). Ein Verfahren, welches aus Phasendifferenzen nur eine Dispersionskurve bestimmt und diese durch die Fundamentalmode eines Erdmodells anzupassen versucht, wird in beiden Datensätzen die sichtbaren Anteile aller Moden zu einer Dispersionskurve kombinieren. Eine entsprechende Kurve ist in Abb. VI.49 (S. 204) eingezeichnet. Dass in diesem Fall die Inversion scheitern muss, wurde schon in den Bemerkungen zum Datensatz HILZINGEN in Abb. VI.37 (S. 187) erläutert. Die Frequenz bei der die Fundamentalmode zu kleineren Phasenlangsamen abknickt (ca. 20Hz in BERKHEIM), ist unter anderem durch die Mächtigkeit des Niedrig-Geschwindigkeits-Kanals bedingt. Dadurch ergeben sich auch die entsprechenden Knickfrequenzen für die höheren Moden. Die Fundamentalmode eines Erdmodells wird also entweder bei höheren Frequenzen als 20Hz abknicken oder im Fall BERKHEIM bei 50Hz von der geforderten Dispersionskurve abweichen. Eine konsistente Inversion ist nicht möglich.

Ein Zwischenergebnis (Tab. VI.5, S. 205 und Abb. VI.50, S. 205) einer Inversion, mit der versucht wurde, alle Oberflächenwellen von BERKHEIM mit einer Mode zu erklären, sieht zunächst recht vielversprechend aus. Das in Abb. VI.49 (S. 204) dargestellte Spektrum erreicht zwar nicht ganz die Knickfrequenz von 20Hz, die erste höhere Mode scheint aber erst bei über 100Hz das Wellenfeld zu übernehmen. Tatsächlich tritt aber die erste höhere Mode bereits bei 70Hz auf. Erkennbar wird dies nur, wenn tatsächlich die Dispersionskurven der Normalmoden für das Modell berechnet werden (Abb. VI.51, S. 206). Im vergrößerten Ausschnitt in Abb. VI.51 werden auch die Anregungskoeffizienten für die Vertikalverschiebung angegeben. Diese bestätigen, dass die Fundamentalmode über 70Hz und die erste höhere Mode für kleinere Frequenzen mit Vertikal-Geophonen praktisch nicht beobachtbar sind. Der Übergang zwischen beiden Moden erfolgt nahezu nahtlos. Ohne Berücksichtigung der Anregungskoeffizienten ist eine Inversion in diesem Beispiel nicht möglich.

Zunächst sieht es in Abb. VI.51 (S. 206) so aus, als würden sich zwei Dispersionskurven bei  $[70\text{Hz}, 4.2 \frac{\text{s}}{\text{km}}]$  schneiden. Dies würde bedeuten, dass die beiden Normalmoden an diesem Punkt entartet wären (gleicher Eigenwert, verschiedene Eigenfunktionen). Erst die Vergrößerung zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Ob eine Entartung physikalisch überhaupt möglich ist, wurde bisher nicht systematisch

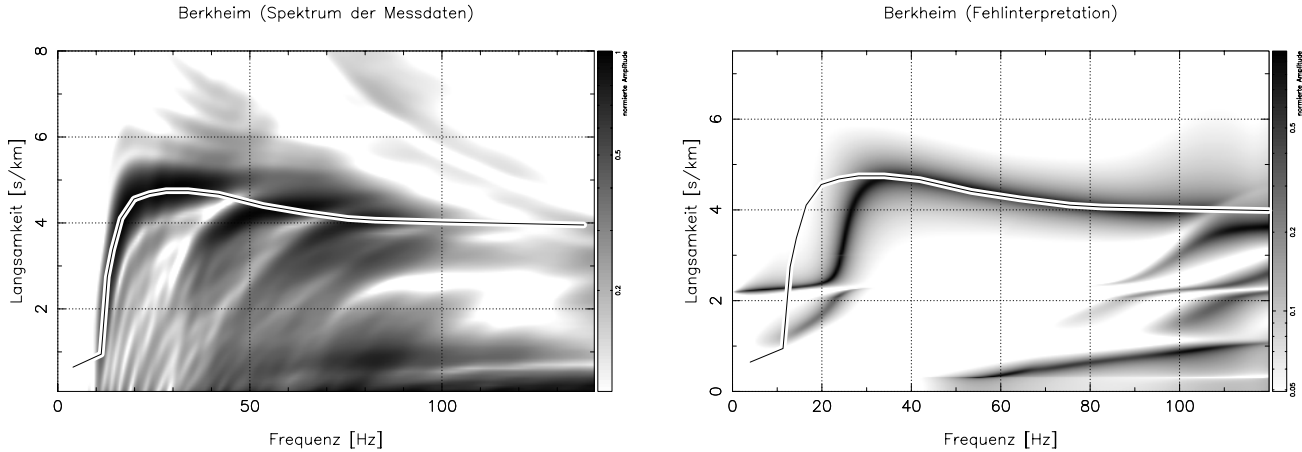
untersucht<sup>10</sup>. Lediglich für den „pathologischen“ Fall eines Grenzübergangs zum Wellenleiter bei konstantem Poisson-Verhältnis wurden von Sezawa und Kanai (1935b) entsprechende Dispersionskurven berechnet.

Sowohl der Kurvenverlauf, die Anregungskoeffizienten und die (hier nicht gezeigten) Eigenfunktionen belegen, dass die physikalischen Eigenschaften der Wellenausbreitung an der Engstelle von einer Normalmode zur anderen wechseln. Okal (1978) hat darauf hingewiesen, dass die formale Zählung der Normalmoden für das Verständnis der physikalischen Wellenausbreitung nicht hilfreich ist. An anderer Stelle habe ich (Forbriger, 1996b) gezeigt, dass solche Effekte auch in Medien ohne Niedrig-Geschwindigkeits-Zone auftreten können und eine Deutung des gemessenen Wellenfeldes im Sinne von Normalmoden zumindest erschweren. Auch die Spektren des Datensatzes KÖRSCHTAL in Abb. VI.30 (S. 180) zeigen eine Engstelle zwischen Moden.

Bei der Berechnung von Dispersionskurven für Normalmoden führen die beschriebenen Engstellen zu numerischen Problemen. In diesem Fall werden Nullstellen der charakteristischen Gleichung des homogenen Systems von Differentialgleichungen gesucht. Da die Gleichung nicht analytisch aufgelöst werden kann, muss die Nullstellensuche numerisch erfolgen. Bei gegebener Frequenz wird die Gleichung für mehrere Langsamkeiten in gegebenen Abständen berechnet. Findet innerhalb eines Slowness-Intervalls ein Vorzeichenwechsel statt, so muss darin eine Nullstelle liegen. An den Engstellen ist es sehr wahrscheinlich, dass zwei Nullstellen in einem Intervall liegen. Dann wird kein Vorzeichenwechsel beobachtet und beide Moden werden bei der Suche verfehlt. In ökonomischer Weise kann dem nur Rechnung getragen werden, indem auf anderem Weg bestimmt wird, wieviele Moden in einem gegebenen Intervall liegen (Woodhouse, 1988). Für die Erstellung von Abb. VI.51 stand ein Programm von Wolfgang Friederich zur Berechnung der Normalmoden in einer sphärischen Erde zur Verfügung. Die Dispersionskurven wurde damit für die in Tab. VI.5 angegebene Struktur an der Oberfläche einer ansonsten homogenen Kugel mit 6371km Radius berechnet.

---

<sup>10</sup>Persönliche Kommunikation mit Peter Malischewsky, Universität Jena



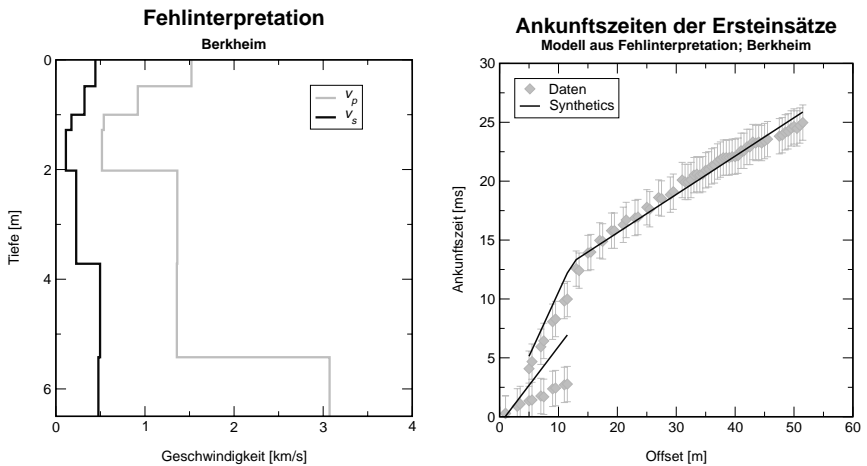
Erläuterungen zur Skalierung der Werte und allgemein zur Darstellung werden in Abschnitt VI.1 (S. 130) gegeben.

**Abbildung VI.49, Fehlinterpretation BERKHEIM,  $\omega, p$ -Spektren:** Aus dem Spektrum des Datensatzes BERKHEIM wurde eine Dispersionskurve abgelesen, die alle beobachteten Moden zusammenfasst (links). Diese Dispersionskurve durch eine einzige Fundamentalmode zu erklären ist nicht möglich (siehe Text auf Seite 202).

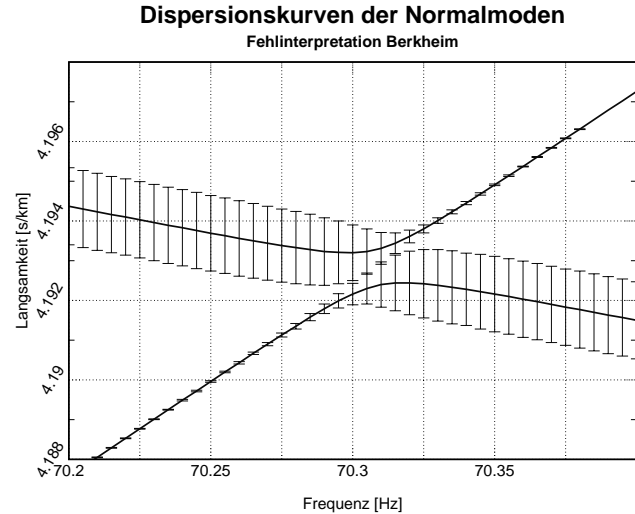
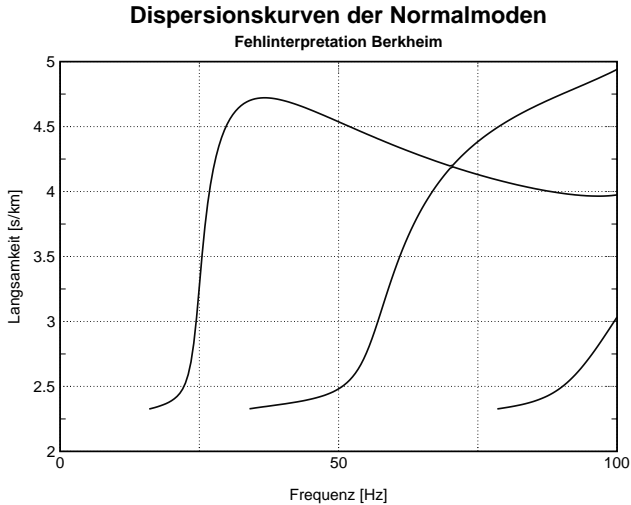
Das rechts dargestellte Spektrum scheint die gestellte Forderung weitgehend zu erfüllen. Erst eine Berechnung der Normalmoden zeigt, dass bereits bei 70Hz die erste höhere Mode das Wellenfeld übernimmt (Abb. VI.51, S. 206).

$i$	$z_i$ [m]	$v_p$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$v_s$ [ $\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ]	$\rho$ [ $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ]	$Q_p$	$Q_s$
1	0,48	1,52188	0,44339	1,600	10,0	30,0
2	1,00	0,91943	0,32105	1,600	10,0	30,0
3	1,28	0,53789	0,17472	1,600	40,0	40,0
4	2,02	0,51697	0,11248	1,600	40,0	40,0
5	3,72	1,36293	0,22826	1,600	40,0	40,0
6	5,42	1,35764	0,49585	1,900	100,0	100,0
7	$\infty$	3,07223	0,47740	1,900	100,0	100,0

**Tabelle VI.5, Fehlinterpretation BERKHEIM, Erdmodell:** Schichtparameter des in Abb. VI.50 (S. 205) dargestellten Modells. Invertiert wurde nach  $v_p$  und  $v_s$ . Sowohl für die Dichte als auch für die Güte wurden ad hoc Werte angenommen.



**Abbildung VI.50, Fehlinterpretation BERKHEIM, Erdmodell und Laufzeitkurven:** Für das links dargestellte Erdmodell aus Tab. VI.5 (S. 205) ergibt sich die Greensche Funktion in Abb. VI.49 (S. 204) rechts. Bei dem durchgeführten Versuch wurde auf eine Anpassung der Laufzeitkurve (rechts) zugunsten der Oberflächenwellen-Dispersion weniger Gewicht gelegt.



**Abbildung VI.51, Fehlinterpretation BERKHEIM, Dispersionskurven der Normalmoden:** Die für das Modell in Tab. VI.5 (S. 205) berechneten Dispersionskurven der Normalmoden scheinen sich in der linken Darstellung bei  $[70\text{Hz}, 4.2\frac{\text{s}}{\text{km}}]$  zu schneiden. Die Moden wären dann entartet. Dass dies nicht der Fall ist, zeigt die Vergrößerung rechts.

Die vertikalen Balken im rechten Bild geben die relativen Anregungskoeffizienten für die Vertikal-Komponente der Oberflächen-Verschiebung bei Anregung mit einer vertikalen Einzelkraft an der freien Oberfläche an. Diese bestätigen, dass jeweils ein Teil der Fundamentalmode und der ersten höheren Mode im Spektrum des Wellenfeldes (Abb. VI.49, S. 204, rechts) nicht erkennbar sein kann.

# Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit stelle ich ein neues Verfahren zur Inversion flachseismischer Wellenfelder vor. Die Inversion erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird ein Phasenslowness-Frequenz-Spektrum ( $\omega, p$ -Spektrum) der Seismogramme bestimmt. In einem zweiten Schritt werden dieses Spektrum und die Laufzeiten der Ersteinsätze gemeinsam zu einem rein Tiefen-abhängigen Modell der seismischen Geschwindigkeiten und der Diskontinuitäten des untersuchten Mediums invertiert. Die Inversion erlaubt außerdem eine Einschätzung der Dämpfung der seismischen Wellen.

Der Aufwand für die Messung kann auf einfache Hammerschlag-Seismik mit Vertikal-Geophonen und mehrkanaliger Registrierung beschränkt werden. Horizontal-Komponenten des Wellenfeldes und Wellenfelder, die mit anderen Quellen angeregt wurden, können den Datensatz allerdings sinnvoll ergänzen. Die Methode erfordert praktisch keine Vorab-Information über das Medium. Sie hat sich als tauglich im Umgang mit mehreren flachseismischen Feld-Datensätzen erwiesen, die in Lockersedimenten häufig extreme Eigenschaften aufweisen. Das Verfahren vermeidet einige Schwachstellen, die herkömmliche Methoden bei der Anwendung im Flachbereich mit sich bringen. Zu diesen gehört die Berechnung einer einzelnen Dispersionskurve aus Phasendifferenzen zwischen zwei Geophonen und die anschließende Inversion dieser Kurve im Sinne einer fundamentalen Normalmode. Da in flachseismischen Wellenfeldern meistens mehrere Moden der Oberflächenwellen interferieren und diese auch nicht eindeutig Normalmoden zugeordnet werden können, würde die herkömmliche Vorgehensweise scheitern.

Meines Wissens ist die von mir beschriebene Methode der erste erfolgreiche Schritt zur quantitativen Modellierung vollständiger Seismogramme, die unter flachseismischen Gegebenheiten aufgezeichnet wurden.

## Zusammenfassung

Die klassischen Verfahren, Refraktions- und Reflexions-Seismik, nutzen nur einen kleinen Teil des Wellenfeldes. Der Amplituden-starke Teil der dispergierten Oberflächenwellen tritt in diesen Methoden nur als Störsignal auf. Dabei bieten gerade diese einen einfachen Zugang zu Scherwellen-Eigenschaften des Mediums. Insbesondere für technische Anwendungen ist eine Information über die Scherfestigkeit häufig interessanter als die Kompressibilität, die stark von der Wassersättigung beeinflusst wird. Oberflächenwellen bieten aber auch die Möglichkeit, Medien mit ausgeprägten Niedrig-Geschwindigkeits-Kanälen zu untersuchen, an denen die Refraktionsseismik scheitert. Außerdem sind sie extrem sensitiv für flach liegende Strukturen. Die Oberflächenwellen weisen große Amplituden und damit ein exzellentes Signal-/Stör-Verhältnis auf. Und sie können mit einer einfachen Hammerschlag-Seismik und mit Vertikal-Geophonen, der Standard-Ausrüstung für flachseismische Untersuchungen, aufgezeichnet werden.

Aus diesen Gründen wurden in der Vergangenheit immer wieder Versuche unternommen, die in der Dispersion der Oberflächenwellen enthaltene Information für die seismische Erkundung zu nutzen. Die dabei insbesondere von Geotechnikern eingesetzten Verfahren sind größtenteils der Methodik der regionalen Seismologie entnommen. In der Regel wird dabei eine Dispersionskurve invertiert, indem sie durch die Dispersion der fundamentalen Normalmode des hypothetischen Mediums angepasst wird. Die Dispersionskurve wird zuvor aus Phasendifferenzen zwischen zwei Empfängern bestimmt. Für regionale Beobachtungen stehen pro „Profil“ häufig tatsächlich nicht mehr als zwei Empfänger zur Verfügung. In lang-periodischen, globalen Wellenzügen kann die Fundamentalmode allerdings im Zeitbereich vom Rest des Wellenfeldes separiert werden. Im Flachbereich ist das jedoch, wie meine Untersuchungen und auch Beobachtungen anderer Autoren zeigen, in der Regel nicht der Fall. In den Wellenfeldern interferieren mehrere Moden, die sich im Zeitbereich nicht trennen lassen. Andererseits können für flachseismische Messungen Empfänger an praktisch beliebigen Orten und nahezu beliebig dicht platziert werden.

## Eigenschaften flachseismischer Wellenfelder

In Kapitel VI stelle ich Wellenfelder von 14 Untersuchungsgebieten vor. Die Datensätze BERKHEIM und HILZINGEN stellen darin insofern Spezialfälle dar, da sie jeweils einen Niedrig-Geschwindigkeits-Kanal abbilden. Der Datensatz LAPTEV-SEE wurde im marinen Flachwasser aufgezeichnet, während alle anderen aus landseismischen Experimenten stammen. Der Datensatz LERCHENBERG ist der einzige, an dem das vorgestellte Verfahren wegen flacher, kleinräumiger Hete-



rogenität scheitert. Im Fall des Datensatzes GÜLTSTEIN ist eine eindimensionale Interpretation von Teilprofilen trotz großräumiger lateraler Heterogenität möglich.

Für flachseismische Medien typisch ist der Übergang von Lockersedimenten zu anstehendem Gestein. Daraus resultieren extreme Eigenschaften der Wellenfelder. Die Wellenlängen der beobachteten Fundamentalmoden reichen von 1 m bei großen Frequenzen bis zu 60 m bei kleinen Frequenzen. Der eine Extremwert erfordert kleine Geophonintervalle ( $< 0.5$  m), um Aliasing zu vermeiden. Das andere Extrem bedeutet, dass die Messung im Nahfeld der Quelle stattfindet. Die kleinsten Phasengeschwindigkeiten (KÖRSCHTAL) betragen  $70 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . In allen Fällen, außer BÄRWALDE und dem Hauptprofil von GÜLTSTEIN, treten deutlich mehrere Moden der Oberflächenwellen auf, die im Seismogramm nicht getrennt werden können. Auch nach der Dispersionsanalyse können die beobachteten Moden möglicherweise nicht eindeutig Normalmoden zugeordnet werden (z.B. HILZINGEN). Die Datensätze BIETIGHEIM, RIEDENBERG und GÜLTSTEIN sind Beispiele dafür, dass nicht unbedingt die Fundamentalmode das Wellenfeld dominieren muss, was eine Zuordnung der Dispersionskurven weiter erschweren würde, falls Normalmoden invertiert werden sollten.

## Inversionsmethode

Angesichts der Felddaten erscheint eine Inversion flachseismischer Wellenfelder mit herkömmlichen Methoden wenig aussichtsreich. Attraktiv erscheint hingegen die Inversion durch Anpassung mit synthetisch berechneten Wellenfeldern. Dies entbindet von der Notwendigkeit Normalmoden zuzuordnen, berücksichtigt die tatsächliche Anregung des Wellenfeldes und erlaubt auch die Inversion von Nicht-Normalmoden wie geführten Wellen oder „Leaky“-Moden.

Dazu schlage ich ein zweistufiges Verfahren vor. In der ersten Stufe, der Dispersionsanalyse, wird aus den Seismogrammen ein  $\omega, p$ -Spektrum berechnet, welches das gemessene Wellenfeld in einer Entwicklung nach Zylinderfunktionen reproduziert. Dies ist die Voraussetzung dafür, dass die Spektralkoeffizienten in der zweiten Stufe, einer stabilisierten Least-Squares Inversion, durch die Entwicklungskoeffizienten einer synthetisch berechneten Greenschen Funktion angepasst werden können. Die Dispersionsanalyse erfolgt als einfache lineare Inversion oder Transformation.

Dieser zweistufige Ansatz weist einige Vorteile gegenüber einer direkten Anpassung der Seismogramme auf. So kann zum Beispiel die Vorwärtsrechnung für das Spektrum in der Regel besser linearisiert werden als für die oszillierenden Seismogramme. Außerdem weist ein für oszillierende Funktionen definierter Misfit für jede Phasenverschiebung um  $2\pi$  ein weiteres Nebenminimum auf. Das erfordert ein besser ausgewähltes Startmodell für die Inversion. Gerade im

Flachbereich fehlen aber in der Regel jegliche Vorab-Informationen zur Erstellung eines zuverlässigen Startmodells. Ferner kann bei der Verwendung der Spektren die Rechenzeit leicht um den Faktor zehn bis zwanzig reduziert werden. Die Korrespondenz zwischen Paaren der diskreten Fourier-Transformation legt nahe, dass in  $M$  Seismogrammen nicht mehr Information als zur Bestimmung von  $M$   $\omega, p$ -Spektralkoeffizienten pro Frequenz enthalten sein kann. Zur Berechnung von synthetischen Wellenformen über die numerische Integration der Bessel-Entwicklungs-Integrale werden häufig zehnmal so viele Koeffizienten benötigt. Daher ist eine Inversion von  $\omega, p$ -Spektren auf modernen PCs problemlos möglich, während die Inversion von Seismogrammen nach wie vor einen erheblichen Aufwand erfordert. Schließlich ist noch darauf hinzuweisen, dass mehrere Moden, die in den Seismogrammen interferieren, im  $\omega, p$ -Spektrum deutlich getrennt werden können. Das erleichtert die manuelle Suche nach einem Startmodell erheblich.

### Erste Stufe: Dispersionsanalyse

Von den drei in Abschnitt III.2 vorgestellten Verfahren zur Berechnung des  $\omega, p$ -Spektrums bevorzuge ich die modifizierte Bessel-Transformation. Für die Fourier-Koeffizienten der Vertikalkomponente lautet diese

$$\tilde{G}_z(\omega, p) = \sum_{j=1}^M u_z(\omega, r_j) H_0^{(2)}(\omega p r_j) \omega^2 r_j \Delta r_j$$

mit  $r_{j+1} \geq r_j$  und

$$\Delta r_j = \frac{1}{4} \begin{cases} r_2 - r_1 & \text{für } j = 1, \\ r_M - r_{M-1} & \text{für } j = M \text{ und} \\ r_{j+1} - r_{j-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist  $\tilde{G}_z(\omega, p)$  das komplexwertige  $\omega, p$ -Spektrum,  $u_z(\omega, r_j)$  ist das Fourier-Spektrum des Seismogramms am Offset  $r_j$  und  $H_0^{(2)}$  ist die zweite Hankel-Funktion (Besselsche Funktion dritter Gattung).

Diese Transformation ist robust und effizient. Ich habe sie für fast alle gezeigten Daten-Beispiele verwendet. In der Entwicklung

$$u_z(\omega, r) = \int_0^{\infty} \tilde{G}_z(\omega, p) J_0(\omega p r) p dp$$

rekonstruiert das so berechnete  $\omega, p$ -Spektrum nicht nur die gemessenen Seismogramme an den  $r_j$  korrekt, sondern interpoliert auch dazwischen sinnvoll. Das

zeige ich an synthetischen Beispielen in Abschnitt III.3.4 und Mess-Datensätzen in Abschnitt VI.2. Damit wird die Voraussetzung dafür erfüllt, dass das  $\omega, p$ -Spektrum durch das Spektrum einer synthetisch berechneten Greenschen Funktion angepasst werden kann.

Wie bei jedem Abtastvorgang treten auch durch die Aufzeichnung des Wellenfeldes mit endlich vielen Geophonen Aliasing und eine von der Auslage abhängige Unschärfe auf. Aliasing ergibt sich für Langsamkeiten  $p = p_0 + n \frac{2\pi}{\omega \Delta r}$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Dabei ist  $p_0$  die tatsächliche Slowness der beobachteten Welle,  $\Delta r$  der Abstand zwischen benachbarten Geophonen und  $p$  die Slowness bei der ein Maximum im  $\omega, p$ -Spektrum auftritt. Für  $n = 0$  ist dieses das Hauptmaximum. Es hat aufgrund der Unschärferelation eine Frequenz-abhängige Breite  $\Delta p = \frac{2\pi}{\omega L}$ , wobei  $L$  die Länge der Auslage ist.

Daraus ergeben sich die Forderungen nach kleinen Intervallen und gleichzeitig großer Gesamtauslage. Trotz einer praktisch begrenzten Anzahl verfügbarer Geophone können sie gleichzeitig gut erfüllt werden. Dies geschieht durch eine geeignete Wahl ungleichmäßiger Geophonintervalle oder die Kombination mehrerer Einzelschüsse. Ich beschreibe das in den Abschnitten III.3.3 und V.1.1.

Die Störsignale im Messdatensatz werden vollständig auf das  $\omega, p$ -Spektrum abgebildet. Sie resultieren größtenteils aus seismischen Wellen, die an Heterogenitäten gestreut oder von Fremdquellen angeregt werden. Ihre Ausbreitung wird daher auch durch die Eigenschaften des Mediums bestimmt. Deshalb ist eine rein statistische Behandlung des Noise nicht möglich. In Abschnitt III.4.2 beschreibe ich Ursache und Auswirkung möglicher Störungen ausführlich.

## Zweite Stufe: Least-Squares Inversion

Mit der zweiten Stufe der Inversion werden das  $\omega, p$ -Spektrum und die Laufzeitkurve der Ersteinsätze gemeinsam zu einem Erdmodell invertiert. Dabei wird das  $\omega, p$ -Spektrum durch das synthetisch berechnete Spektrum der Greenschen Funktion für das Modell angepasst. Weitere Spektren oder Laufzeitkurven in die Inversion aufzunehmen, kann die Aussagekraft erhöhen. Die Ankunftszeiten der Ersteinsätze als separaten Datensatz zu behandeln, ist empfehlenswert. Die refraktierten Wellen haben sehr kleine Amplituden und werden im Spektrum leicht durch Störsignale verdeckt. Im Seismogramm können die Einsätze jedoch leicht abgelesen werden. Sie enthalten wertvolle, eindeutige Information über die Kompressionswellen-Geschwindigkeit.

Dieser zweite Schritt wird mit einer stabilisierten, iterativen Least-Squares-Inversion durchgeführt. In Abschnitt IV.1.4 beschreibe ich insbesondere für die Flachseismik nützliche Strafterme. Verschiedene lokale Auflösungsanalysen für das Ergebnis, die sich mit für die Inversion bereits berechneten Größen durchführen lassen, stelle ich in Abschnitt IV.2 vor.

## Zulässige Wertebereiche

Flachseismische Medien, insbesondere Lockersedimente, können stark dämpfend sein. Experimentelle Laborbefunde anderer Autoren weisen auch auf eine mögliche Frequenz-Abhängigkeit der intrinsischen Dämpfung im seismischen Frequenzbereich um 100Hz hin. Ein viskoelastisches Materialgesetz lässt sich zwar problemlos in die Reflektivitätsmethode integrieren, mit der ich die Greensche Funktion berechne. Da jedoch die Frequenz-Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit der Wellen benutzt wird, um die Tiefen-Abhängigkeit der Materialeigenschaften zu bestimmen, lässt sich ein viskoelastisches, voll Frequenz-abhängiges Materialgesetz mit den Messdaten nicht einschränken. Dennoch müssen die Inversionsergebnisse zumindest auf ihre physikalische Realisierbarkeit hin geprüft werden.

Aus physikalischen Überlegungen und Beobachtungen leite ich

$$1.5 < \frac{v_p}{v_s} < 10 \quad \text{und} \quad 0.1 < \nu < 0.49$$

als zulässige Wertebereiche für das  $\frac{v_p}{v_s}$ -Verhältnis und die Poisson-Zahl  $\nu$  ab. Die  $Q$ -Werte müssen über die etwas unhandliche Beziehung

$$\frac{|\tilde{v}_p|^2}{|\tilde{v}_s|^2} e^{2i\phi_{v_p}} - \frac{4}{3} e^{2i\phi_{v_s}} = \frac{|\tilde{\kappa}|}{|\tilde{\mu}|} e^{i\phi_{\kappa}}$$

für die komplexwertigen seismischen Geschwindigkeiten  $\tilde{v}_p = |\tilde{v}_p| e^{i\phi_{v_p}}$  und  $\tilde{v}_s = |\tilde{v}_s| e^{i\phi_{v_s}}$  sowie die komplexwertigen Moduln  $\tilde{\kappa} = |\tilde{\kappa}| e^{i\phi_{\kappa}}$  und  $\tilde{\mu} = |\tilde{\mu}| e^{i\phi_{\mu}}$  getestet werden. Dabei werden  $\phi_{v_p} = -\arctan(1/Q_p)$  und  $\phi_{v_s} = -\arctan(1/Q_s)$  aus dem Inversionsergebnis berechnet. Die oben stehende Gleichung muss für alle Frequenzen mit  $-\pi/2 \leq \phi_{\kappa} \leq 0$  erfüllbar sein, damit die Materialparameter zumindest physikalisch realisierbar sind<sup>1</sup>.

## Inversionsergebnisse

### Feld-Datensätze

Für die Datensätze BIETIGHEIM, BERKHEIM und WOLFSCHLUGEN beschreibe ich in Abschnitt VI.2 alle Schritte einer Inversion. Für HILZINGEN ist in Abb. VI.37 (S. 187) das Spektrum der Greenschen Funktion für das Inversionsergebnis dargestellt. Zum Datensatz BÄRWALDE zeige ich in Abb. VI.42 (S. 192) eine Auflösungsanalyse.

<sup>1</sup>Die Vorzeichen der Phasenwinkel hängen von der Definition der Fourier-Transformation ab. Die in dieser Arbeit benutzte Konvention definiere ich in A.2.1 (S. 218).

Die Spektren der Landseismik weisen in der Regel ab 10Hz ein Signal-/Stör-Verhältnis auf, das eine Inversion erlaubt, einige schon ab 5Hz. Die Spektren aller Datensätze können bis mindestens 40Hz ausgewertet werden, die meisten sogar bis 100Hz, wenige auch darüber hinaus. Die Datensätze erlauben eine brauchbare Auflösung der seismischen Geschwindigkeiten bis in Tiefen von 5–15m. Sowohl  $v_s$  wie auch  $v_p$  können unabhängig voneinander eingeschränkt werden. Insbesondere im Fall BIETIGHEIM schränkt das  $\omega, p$ -Spektrum  $v_p$  in einem von der Refraktionsseismik überschossenen Tiefenbereich ein. Die Datensätze BERKHEIM und HILZINGEN sind Beispiele für die erfolgreiche Bestimmung der Mächtigkeit von Niedrig-Geschwindigkeits-Kanälen.

Insbesondere die Inversion der zuletzt genannten Datensätze erfordert unbedingt die Berücksichtigung mehrerer Oberflächenwellen-Moden. Herkömmliche Verfahren, welche die Dispersionskurve einer Fundamentalmode invertieren, gehen davon aus, dass die Grundmode am stärksten im Datensatz vertreten ist. In den Datensätzen BIETIGHEIM, RIEDENBERG und GÜLTSTEIN ist die Fundamentalmode jedoch sogar schwächer angeregt als die erste höhere Mode. Die häufig der Auswertung zugrunde gelegte Annahme, dass die Oberflächenwellen kaum Sensitivität für  $v_p$  aufweisen, wird vom Datensatz BIETIGHEIM nicht erfüllt. Dort ist außerdem die erste höhere Mode sensitiver für  $v_s$  als die Fundamentalmode. Während herkömmliche Verfahren auf A-priori-Schätzwerte für  $v_p$  oder die Poisson-Zahl angewiesen sind, wird in den von mir gezeigten Beispielen  $v_p$  als unabhängige Größe durch die Inversion bestimmt. Damit sind auch Aussagen über die Poisson-Zahl möglich, einem wichtigen lithologischen Parameter.

Die Ergebnismodelle weisen Poisson-Verhältnisse zwischen 0.15 und 0.48 auf. Das ist nahezu der gesamte als realistisch definierte Wertebereich und typisch für flachseismische Medien. Der ermittelte Geschwindigkeits-Kontrast an Diskontinuitäten erreicht Werte bis zu einem Faktor 5 für  $v_p$  und 10 für  $v_s$ . Die kleinsten Güte-Werte erreichen den Wert 10.

Die Ergebnismodelle der Inversionen erlauben eine quantitative Modellierung der Wellenformen der gemessenen Seismogramme.

### **Notwendigkeit einer Wellenfeldinversion**

Die meisten der von mir untersuchten Datensätze erfüllen nicht die Voraussetzungen zur Inversion einer Dispersionskurve, die aus Phasendifferenzen ermittelt wurde. Während beispielsweise das Auftreten höherer Moden in vielen Spektren unmittelbar erkennbar ist, liefert die Dispersionsanalyse über die Bildung von Phasendifferenzen zwischen Geophon-Paaren kaum ein Indiz dafür. Im günstigsten Fall wird sich keine stetige Kurve ermitteln lassen und dadurch die Verletzung der Voraussetzung offenbar werden. Im ungünstigsten Fall erhält man eine „mittlere, scheinbare“ Dispersionskurve aus mehreren Moden. In Abschnitt VI.4 stelle

ich zwei numerische Experimente vor, welche die möglichen Folgen einer solchen Fehlinterpretation veranschaulichen und damit die Notwendigkeit zur Verwendung des hier vorgestellten Verfahrens demonstrieren.

Die Laufzeiten der Ersteinsätze bestimmen eine obere Schranke für  $v_p$ . Gleichzeitig bestimmt die Fundamentalmode eine untere Schranke für  $v_s$ . Aus einer Fehlinterpretation der Moden ergeben sich zu große Werte für  $v_s$  und damit unrealistisch kleine Werte für die Poisson-Zahl, wie ich in Abschnitt VI.4.1 zeige. Werden die Laufzeiten der Ersteinsätze nicht benutzt (wie bei herkömmlichen Verfahren üblich), wird also nur die Dispersionskurve invertiert, tritt kein Widerspruch auf. Man erhält dann ein falsches Ergebnismodell.

Der Datensatz HILZINGEN ist ein Beispiel für das Auftreten mehrerer Moden, die auch im Spektrum nicht getrennt werden können. Die aus dem  $\omega, p$ -Spektrum abgelesene Dispersionskurve ist in diesem Fall in sich nicht konsistent durch eine einzelne Mode erklärbar. Das Auftreten mehrerer Moden wird somit bei der Inversion zwar offenbar, eine Zuordnung der beobachteten Dispersion zu Normalmoden ist aber trotzdem nicht a priori möglich.

## Ausblick

### Wellenforminversion

Erdmodelle, die mit der von mir beschriebenen Methode bestimmt wurden, können als Startmodelle für eingehendere Untersuchungen flachseismischer Wellenformen dienen. Dazu gehören die quantitative Modellierung der vollen Wellenform von Raumwellen und deren Inversion. Wie ich im Zusammenhang mit dem Datensatz GÜLTSTEIN diskutiere, können mit dieser Methode erstellte eindimensionale Modelle auch als Startmodelle für die Bestimmung eines 2D-Modells durch die Inversion gestreuter Oberflächenwellen dienen.

Reimann (1999) hat bereits Wellenformen der Datensätze BIETIGHEIM und KÖRSCHTAL invertiert. Die Startmodelle dafür wurden mit dem von mir beschriebenen Verfahren zur Inversion der  $\omega, p$ -Spektren erstellt. Reimanns Ergebnisse zeigen, dass über die Wellenform zusätzlich eine gezielte Anpassung von Raumwellen möglich ist. Er zeigt aber auch, dass eine automatische Inversion robustere Verfahren als die Trapezregel zur Berechnung der Entwicklungsintegrale (II.22) zwingend erfordert. Die dafür aufzuwendende Rechenzeit lässt einen routinemäßigen Einsatz der Wellenform noch nicht praktikabel erscheinen. Abhilfe verspricht hier das von Teshler (1999) vorgeschlagene Verfahren zur semianalytischen Berechnung der partiellen Ableitungen (Abschnitt II.3.4, S. 47). Bei der Verwendung von Differenzenquotienten, wie in der vorliegenden Arbeit oder bei Reimann, dominiert die Berechnung der Ableitungen die Gesamt-Rechenzeit.

Reimann zeigt außerdem, dass eine Bestimmung der  $Q$ -Werte am besten durch eine Anpassung der Hüllkurve der Seismogramme glückt. Dagegen ist eine über die Wellenform definierte Misfit-Funktion hauptsächlich für die Signalphase sensitiv. Diese wird jedoch von  $Q$  nur in zweiter Ordnung beeinflusst.

Auch von Friederich<sup>2</sup> wurden Versuche zur Inversion flachseismischer Wellenformen durchgeführt. Er verwendet ebenfalls Startmodelle, die durch eine Inversion von  $\omega, p$ -Spektren ermittelt wurden, berechnet die Wellenformen aber durch Modensummutation. Dies ist numerisch deutlich effizienter, wenn man sich auf wenige Moden beschränken kann. Außerdem können partielle Ableitungen der Wellenzahl nach den Modellparametern analytisch berechnet werden. Aus diesem Grund kann er mehr freie Inversionsparameter zulassen. Die damit gewonnene Freiheit bei der Wahl der Modellkurven führt zu einer signifikanten Misfit-Reduktion bei nur kleinen Modelländerungen. Dies ist ein weiteres Indiz für die enorme Sensitivität der Oberflächenwellen für die oberflächennahen Materialeigenschaften. Diese Beobachtung bestätigt aber auch, dass generell eine Modellparametrisierung benutzt werden sollte, die mehr Kurvenklassen als nur Polynome zweiter Ordnung zulässt, falls der numerische Aufwand dies erlaubt (Abschnitt V.2.2, S. 123).

## Unmittelbare Anwendung

Die beschriebene Methode zur Inversion von  $\omega, p$ -Spektren kann aber überall dort auch unmittelbar eingesetzt werden, wo die Scherwellen-Eigenschaften eines flachseismischen Mediums ermittelt werden sollen. Die große Anzahl geotechnischer Publikationen zu SASW („spectral analysis of surface waves“) dokumentiert ein reges Interesse an solchen Methoden für technische Anwendungen. In diesem Zusammenhang würde es sich anbieten, weitere Daten in die gemeinsame Inversion aufzunehmen. Dazu können beispielsweise Love-Wellen, aber auch die Einhüllende von Wellenformen oder Laufzeiten von Weitwinkel-Reflexionen gehören. Wissenschaftliche Anwendungen können sich im Zusammenhang mit der Untersuchung von alpinem oder arktischem Permafrost ergeben. In Fällen oberflächlich gefrorener Sedimente werden auch Niedrig-Geschwindigkeits-Kanäle angetroffen, welche die Inversion des vollen Wellenfeldes und damit den Einsatz der hier vorgestellten Methode erfordern.

---

<sup>2</sup>Persönliche Mitteilung von Wolfgang Friederich





# Kapitel A

## Anhang

### 1 Schriftsatz für Formelzeichen

$\vec{a} \circ \vec{b}$	dyadisches Produkt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$
$\mathbf{A} \cdot \vec{b}$	einfach verjüngendes Produkt zweier Tensoren $\mathbf{A}$ und $\vec{b}$
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	zweifach verjüngendes Produkt zweier Tensoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$
$\mathbf{A}^T$	die zu $\mathbf{A}$ transponierte Matrix
$\mathbf{A}^{-1}$	die zu $\mathbf{A}$ inverse Matrix
$\mathbf{A}^{-T}$	die zu $\mathbf{A}^T$ inverse Matrix
$a^*$	der komplex konjugierte Wert der komplexen Zahl $a$
$\mathbf{A}^\dagger$	die zu $\mathbf{A}$ adjungierte (komplex konjugiert transponierte) Matrix
$\Re(a)$	Realteil der komplexen Zahl $a$
$\Im(a)$	Imaginärteil der komplexen Zahl $a$
$\text{diag } m_l$	eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $M_{ll} = m_l$ (alle anderen Elemente sind gleich 0)
$\text{Spur } \mathbf{A}$	Spur der Matrix $\mathbf{A}$
$\hat{e}$	Einheitsvektor mit $\ \hat{e}\  = 1$
$\vec{e}_k$	Eins-Vektor (das $k$ -te Element ist 1, alle anderen Elemente sind 0)
$\mathbb{1}$	Einheitsmatrix $\mathbb{1} = \text{diag } 1$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen

## 2 Definitionen

### 2.1 Fourier-Transformation

Die Fourier-Integraltransformation

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (\text{A.1a})$$

und die Rücktransformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (\text{A.1b})$$

werden so definiert, dass  $\tilde{f}(\omega) = e^{ikx} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-ikx} \delta(\omega + \omega_0)$  eine in positive  $x$ -Richtung laufende ebene Welle  $f(t) = \sin(kx - \omega t)$  beschreibt.

An dieser Stelle muss darauf hingewiesen werden, dass der in dieser Arbeit benutzte Reflectivity-Code (Ungerer, 1990), wie auch andere Programme zur Berechnung synthetischer Seismogramme, *nicht* dieser Konvention folgen. Dort wird insbesondere das Vorzeichen des Fourier-Exponenten entgegengesetzt definiert. Damit kehren sich die Vorzeichen der Imaginärteile der Fourier-Koeffizienten um. Für die synthetische Berechnung der Entwicklungskoeffizienten bedeutet das, dass bei der Auswertung von den typischen Wurzelausdrücken wie  $\sqrt{(1/v_p^2) - p^2}$  ein anderes Riemannsches Blatt gewählt werden muss, um auslaufende Wellen zu erhalten (siehe auch die Diskussion in Abschnitt II.3.5, S. 48).

### 2.2 Parametrisierung nach Polynomen

Die Modelle für die Inversions-Beispiele in Kapitel VI werden in Tabellen (beispielsweise Tab. VI.1, S. 137) in Form der Polynom-Koeffizienten angegeben. Diese Darstellungen sind wie folgt zu lesen:

- Die Modellfunktionen werden beginnend an der Erdoberfläche (Tiefe  $z=0\text{m}$ ) in mehrere Abschnitte („Sektionen“) unterteilt. Der Index der Sektion wird in der ersten Spalte der Tabelle ( $i$ ) angegeben.
- Der Tiefenbereich über den sich eine Sektion erstreckt, ergibt sich aus der Tiefe der Unterkante der darüber liegenden Sektion (bzw.  $0\text{m}$  für die Sektion 1) und der in der zweiten Spalte ( $z_i$ ) angegebenen Tiefe der Unterkante der Sektion.

- Innerhalb einer Sektion werden die Parameter  $v_p(z)$ ,  $v_s(z)$ ,  $\rho(z)$ ,  $Q_p(z)$  und  $Q_s(z)$  nach Polynomen bis zur zweiten Ordnung parametrisiert. Werden Polynome kleinerer Ordnung benutzt, so sind entsprechend weniger Koeffizienten angegeben. Die Koeffizienten stehen untereinander, der Koeffizient zur Ordnung 0 steht zuoberst. Aus den Polynom-Koeffizienten  $p_0$ ,  $p_1$  und  $p_2$  ergibt sich der Wert des Parameters  $p$  in der Tiefe  $z$  zu

$$p(z) = p_0 + p_1(z - z_m) + p_2(z - z_m)^2 \quad \text{mit} \quad z_m = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}. \quad (\text{A.2})$$

- Von der Unterkante der untersten Sektion werden die Parameterwerte konstant in den unteren Halbraum fortgesetzt.

Die Parameter  $p_0$ ,  $p_1$  und  $p_2$  erfüllen nicht alle in V.2.1 (S. 120) aufgestellten Forderungen. Die Modelländerung wurde im Inversionsalgorithmus daher so parametrisiert, dass bei Variation von  $p_2$  gleichzeitig  $p_0$  variiert wurde, so dass keine Änderung des Mittelwerts zustande kam.

### 3 Least-Squares für komplexe Größen

In der vorliegenden Arbeit werden Least-Squares-Probleme mit komplexen Größen behandelt. Die Grundzüge sollen hier kurz notiert werden.

Betrachtet wird die Fehlerquadrat-Summe

$$E^2 = |\vec{d} - \vec{s}|^2,$$

wobei  $\vec{d}$  den Vektor der Messdaten  $d_i$  und  $\vec{s} = M\vec{m}$  die aufgrund der Modellparameter  $m_j$  berechneten synthetischen Daten  $s_i$  bezeichnet. Die Matrix  $M$  löst das Vorwärtsproblem. In voller Allgemeinheit gilt dabei

$$d_k, M_{kl}, m_l \in \mathbb{C}.$$

Zur Erfüllung der Least-Squares-Bedingung ( $E^2 \stackrel{!}{=} \min$ ) müssen Realteil  $\vec{m}'$  und Imaginärteil  $\vec{m}''$  der Modellparameter als unabhängige Parameter der reellen Fehlerfunktion  $E^2$  aufgefasst werden. Es wird also

$$\frac{\partial E^2}{\partial m'_l} \stackrel{!}{=} 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial E^2}{\partial m''_l} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall l \quad (\text{A.3})$$

verlangt.

Mit  $\vec{e} = \vec{d} - \vec{s}$  können die Ableitungen bequem als Vektoren

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial E^2}{\partial m_l'} \right) &= -M^\dagger \vec{e} - M^T \vec{e}^* = -2\Re(M^\dagger \vec{d} - M^\dagger M \vec{m}) \quad \text{und} \\ \left( \frac{\partial E^2}{\partial m_l''} \right) &= iM^\dagger \vec{e} - iM^T \vec{e}^* = -2\Im(M^\dagger \vec{d} - M^\dagger M \vec{m}) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Somit erfüllt die Lösung des komplexwertigen linearen Gleichungssystems

$$M^\dagger M \vec{m} = M^\dagger \vec{d} \quad (\text{A.4})$$

die Least-Squares-Bedingung der Gleichungen (A.3).

## 4 Zylinderfunktionen

Sehr ergiebige Ausführungen zu den Zylinderfunktionen findet man in den Vorlesungen von Sommerfeld (1978b). Am Bedarf des Seismologen orientiert sich der ausführliche Anhang im Lehrbuch von Ben-Menahem und Singh (1981, Anhang D.1). Båth und Berkhout (1984, Kapitel 4.3 und 5) wie auch Courant und Hilbert (1968, Kapitel 7 §2) haben den Zylinderfunktionen ein eigenes Kapitel gewidmet. Viele wichtige Relationen und Integrale für Zylinderfunktionen findet man in den Tabellen von Gradstein und Ryshik (1981, 6.5-6.7, 8.4-8.5) sowie bei Abramowitz und Stegun (1972, Kapitel 9-11). Bracewell (1978, Kapitel 12) behandelt die Hankeltransformation unter Gesichtspunkten der Signalverarbeitung. Von den genannten Autoren wird immer wieder die Monographie von Watson (1944) zitiert.

Hier sollen nur wenige, in dieser Arbeit verwendete Relationen angegeben werden.

### 4.1 Beziehungen zwischen Zylinderfunktionen

Die Bessel-Funktion erster Gattung

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2} (H_\nu^{(1)}(z) + H_\nu^{(2)}(z)) \quad (\text{A.5a})$$

lässt sich durch die Hankel-Funktionen (Besselsche Funktionen dritter Gattung)

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) \quad \text{und} \quad (\text{A.5b})$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z) \quad \text{mit } z, \nu \in \mathbb{C} \quad (\text{A.5c})$$

darstellen (Abramowitz und Stegun, 1972, 9.1.3, 9.1.4). Diese wiederum lassen sich durch  $J_\nu$  und die Besselsche Funktion zweiter Gattung  $N_\nu$  (auch „Neumann-Funktion“) ausdrücken.

## 4.2 Symmetrien von Zylinderfunktionen

Abramowitz und Stegun (1972, 9.1.35-9.1.40) geben

$$J_\nu(z^*) = J_\nu(z)^* \quad \text{und} \quad (\text{A.6a})$$

$$N_\nu(z^*) = N_\nu(z)^* \quad (\text{A.6b})$$

für  $\nu \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ , sowie

$$J_\nu(z e^{im\pi}) = e^{im\nu\pi} J_\nu(z), \quad (\text{A.6c})$$

$$N_\nu(z e^{im\pi}) = e^{-im\nu\pi} N_\nu(z) + 2i \sin(m\nu\pi) \cot(\nu\pi) J_\nu(z), \quad (\text{A.6d})$$

$$H_\nu^{(1)}(z e^{\pi i}) = -e^{-\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(z) \quad \text{und} \quad (\text{A.6e})$$

$$H_\nu^{(2)}(z e^{-\pi i}) = -e^{\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(z) \quad (\text{A.6f})$$

für  $\nu, z \in \mathbb{C}$  und  $m \in \mathbb{Z}$  an.

## 4.3 Modifizierte Besselfunktionen

Für spezielle Argumente lassen sich die Modifizierten Besselfunktionen  $I$  und  $K$  durch  $J$  und  $H$  ausdrücken. Nach Abramowitz und Stegun (1972, 9.6.3 und 9.6.4) gilt

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2}i\nu\pi} J_\nu(z e^{\frac{1}{2}i\pi}) \quad \text{für } -\pi < \arg(z) \leq \frac{1}{2}\pi, \quad (\text{A.7a})$$

$$I_\nu(z) = e^{\frac{3}{2}i\nu\pi} J_\nu(z e^{-\frac{3}{2}i\pi}) \quad \text{für } \frac{1}{2}\pi < \arg(z) \leq \pi, \quad (\text{A.7b})$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}i\pi e^{\frac{1}{2}i\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z e^{\frac{1}{2}i\pi}) \quad \text{für } -\pi < \arg(z) \leq \frac{1}{2}\pi \quad \text{und} \quad (\text{A.7c})$$

$$K_\nu(z) = -\frac{1}{2}i\pi e^{-\frac{1}{2}i\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z e^{-\frac{1}{2}i\pi}) \quad \text{für } \frac{1}{2}\pi < \arg(z) \leq \pi \quad (\text{A.7d})$$

und jeweils  $z, \nu \in \mathbb{C}$ .

## 4.4 Fernfeld-Näherungen

Nach Bronstein und Semendjajew (1991, 3.3.1.3.4) ergeben sich die Fernfeld-Näherungen der Zylinderfunktionen aus

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \cos\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad \text{und} \quad (\text{A.8a})$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ \sin\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad (\text{A.8b})$$

und damit

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ e^{ix} e^{-i\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right] \quad \text{und} \quad (\text{A.8c})$$

$$H_n^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ e^{-ix} e^{i\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right]. \quad (\text{A.8d})$$

## 4.5 Bessel-Transformation und Orthogonalitätsrelation

Aus der Integraldarstellung der Besselfunktionen leitet Sommerfeld (1978b, §21.8) die Beziehung

$$f(r) = \int_0^\infty J_n(kr) \int_0^\infty f(r') J_n(kr') r' dr' dk \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.9})$$

her. Diese lässt sich, analog zur Fourier-Transformation, in symmetrischer Form als

$$\bar{f}(r) = \int_0^\infty \tilde{f}(k) J_n(kr) k dk \quad \text{und} \quad (\text{A.10a})$$

$$\tilde{f}(k) = \int_0^\infty f(r) J_n(kr) r dr \quad (\text{A.10b})$$

ausdrücken. Diese Beziehungen werden als „Bessel-Transformation“ bezeichnet. Damit lässt sich auch eine Darstellung der  $\delta$ -Funktion in Zylinderkoordinaten realisieren. Für diese gilt

$$\delta(r, r') = \begin{cases} \infty & \text{für } r = r' \text{ und} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.11a})$$

mit

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} \delta(r, r') r dr \stackrel{!}{=} 1. \quad (\text{A.11b})$$

Durch  $f(r) = \delta(r, r')$  ergibt sich aus Gl. (A.9)

$$\delta(r, r') = \int_0^\infty J_n(kr) J_n(kr') k dk. \quad (\text{A.11c})$$

Gl. (A.11c) beschreibt gleichzeitig die Orthogonalität der Besselfunktionen bezüglich ihres Arguments.

## 4.6 Spezielle Integrale von Zylinderfunktionen

Gradstein und Ryshik (1981) geben unter anderem folgende spezielle Integrale für Produkte von Zylinderfunktionen an:

Nr. 6.522/5.:

$$\int_0^{\infty} x J_0(ax) K_0(bx) J_0(cx) dx \quad (\text{A.12a})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2}}$$

für  $\Re(b) > |\Im(a)|, c > 0$

Nr. 6.535:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} [J_\nu(x)]^2 dx = I_\nu(a) K_\nu(a) \quad (\text{A.12b})$$

für  $\Re(a) > 0, \Re(\nu) > -1$

Nr. 6.541/1.:

$$\int_0^{\infty} x J_\nu(ax) J_\nu(bx) \frac{dx}{x^2 + c^2} \quad (\text{A.12c})$$

$$= \begin{cases} I_\nu(bc) K_\nu(ac) & \text{für } 0 < b < a, \Re(c) > 0, \Re(\nu) > -1 \\ I_\nu(ac) K_\nu(bc) & \text{für } 0 < a < b, \Re(c) > 0, \Re(\nu) > -1 \end{cases}$$

Nr. 6.633/2.:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2 x^2} J_p(\alpha x) J_p(\beta x) x dx = \frac{1}{2\rho^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\rho^2}\right) I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2\rho^2}\right)$$

für  $\Re(\rho) > -1, |\arg \rho| < \frac{\pi}{4}, \alpha > 0, \beta > 0$

Nr. 6.55412.:

$$\int_0^{\infty} x J_0(xy) \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{y} e^{-ay} \quad (\text{A.12d})$$

für  $y > 0, \Re(a) > 0$

Gl. (A.12c) kann mit Hilfe des Residuensatzes und der Beziehungen (A.5a), (A.6c), (A.6e), (A.6f) und (A.7) berechnet werden.

## 5 Hilfsmittel und Werkzeuge

### 5.1 Hardware

Die landseismischen Messungen wurden mit Geophonen der Firma SENSOR NEDERLAND BV vom Typ SM-4 mit einer Eigenperiode von 10Hz durchgeführt. Aufgezeichnet wurden die Wellenformen mit Apparaturen der Firma BISON. Es stand eine 12-Kanal-Apparatur (5012) und eine 24-Kanal-Apparatur (9024) zur Verfügung. Als Quellen kamen Vorschlaghammer, Fallgewicht, die Explosionsquelle S.I.S.Sy. (SEISMIC IMPULSE SOURCE SYSTEM) und ein beschleunigtes Fallgewicht (EWG) zum Einsatz. Die jeweilige Konfiguration habe ich bei der Beschreibung der Datensätze angegeben.

Alle numerischen Berechnungen habe ich auf Linux-PC Workstations durchgeführt.

### 5.2 Software

Die Programme zur Signalverarbeitung und Inversion habe ich größtenteils selbst entwickelt und programmiert. Der Code wurde hauptsächlich in Fortran<sup>77</sup> geschrieben. Einige Programme zur Datenkonversion habe ich in C kodiert.

Praktisch alle Arbeiten wurden unter dem Betriebssystem Linux<sup>1</sup> durchgeführt. Dabei kamen unter anderem das „Concurrent Versions System“ (CVS<sup>2</sup>) sowie zahlreiche Werkzeuge wie etwa make<sup>3</sup>, die unter der GNU-Lizenz der Free Software Foundation<sup>4</sup> veröffentlicht sind, zum Einsatz. Als C-Compiler benutzte ich den GNU C-Compiler GCC<sup>5</sup>. Fortran-Code wurde durch f2c<sup>6</sup> von S.I. Feldman und P.J. Weinberger (AT&T Bell Laboratories, 1990) in C konvertiert. Alle Texte habe ich mit dem Editor vim<sup>7</sup> von Bram Moolenaar geschrieben.

Für die Signalverarbeitung wurden Routinen aus dem Programm seife von Erhard Wielandt verwendet. Aufgaben der Linearen Algebra wurden mit Routinen aus LAPACK<sup>8</sup> gelöst. Zur Berechnung der modifizierten Besselfunktionen kam Code von Press et. al (1992) zum Einsatz. Für die Berechnung von Normalmoden stand mir das Programm flspher von Wolfgang Friederich zur Verfügung. Die

---

<sup>1</sup><http://www.linux.org/>

<sup>2</sup><http://www.cvshome.org/>

<sup>3</sup><http://www.gnu.org/manual/make/>

<sup>4</sup><http://org.gnu.de/>

<sup>5</sup><http://org.gnu.de/software/gcc/gcc.html>

<sup>6</sup><http://www.netlib.org/f2c/>

<sup>7</sup><http://www.vim.org/> und <http://www.vim.org/html/uganda.html>

<sup>8</sup><http://www.netlib.org/lapack/>



Wellenformen habe ich im SFF<sup>9</sup>-Format, einer Erweiterung des GSE<sup>10</sup>-Formats, gespeichert und verarbeitet.

Zur graphischen Darstellung der Ergebnisse benutzte ich PGPLOT<sup>11</sup> von Tim Pearson, gnuplot<sup>12</sup>, Grace<sup>13</sup>, Xfig<sup>14</sup> sowie TransFig<sup>15</sup>. Der Text wurde in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub><sup>16</sup> gesetzt. Dabei habe ich zahlreiche über CTAN<sup>17</sup> veröffentlichte Stil-Pakete sowie bibtex, xdvi und dvips verwendet.

---

<sup>9</sup><ftp://ftp.geophys.uni-stuttgart.de/pub/software/>

<sup>10</sup><http://seismo.ethz.ch/autodrm/autodrm.doc.html>

<sup>11</sup><http://www.astro.caltech.edu/~tjp/pgplot/>

<sup>12</sup><http://www.cs.dartmouth.edu/gnuplot.info.html>

<sup>13</sup><http://plasma-gate.weizmann.ac.il/Grace/>

<sup>14</sup><http://epbl.lbl.gov/xfig/>

<sup>15</sup><ftp://ftp.tex.ac.uk/pub/archive/graphics/>

<sup>16</sup><http://www.latex-project.org/>

<sup>17</sup><http://www.dante.de>



# Danksagung

Erhard Wielandt hat mir weit über die Bearbeitung des wissenschaftlichen Themas hinaus sein Vertrauen geschenkt. Die Freiheit, die er mir bei meinen Tätigkeiten gelassen hat, habe ich stets genossen. In den Jahren, die ich an seinem Institut verbrachte, ist er mir mehr geworden als ein prägender akademischer Lehrer, der mich durch aufmerksames Zuhören und präzise Rückfragen von mancher falschen Fährte abgebracht hat. Seine Fähigkeit physikalische Zusammenhänge mit schlichten Worten und Analogien anschaulich zu machen und Experimente mit einfachen Mitteln präzise durchzuführen, hat mich immer beeindruckt und wird mir ein Vorbild sein. Gerne denke ich auch an die gemeinsamen Ausfahrten und Exkursionen zurück.

Wolfgang Friederich hat meine Arbeit von Anfang an mit regem Interesse und wertvollen Anregungen verfolgt und schließlich den Mitbericht übernommen. Zuletzt trafen wir uns fachlich auch auf flachseismischem Gebiet und es ist mir eine besondere Freude, dass er numerisch nachgewiesen hat, dass auch eine Kugel an ihrer Oberfläche ziemlich flach sein kann. Seine fröhlich gepfiffenen Melodien werden mir fehlen.

Zahlreiche weitere Mitarbeiter und Studenten am Institut für Geophysik haben zu einer angenehmen und anregenden Arbeitsatmosphäre beigetragen. Besonders nennen möchte ich Gunther Reimann und Andre Teshler, die an den flachseismischen Arbeiten unmittelbar beteiligt waren, sowie Jörg Dalkolmo. Er hat mit mir manchen „Doktorandenfrust“ geteilt und war immer für eine Frotzelei und eine Tasse Kaffee zu haben.

Herr Claar hat in liebevoller Handarbeit an der Drehbank Geophon-Füße für den Einsatz auf Asphalt angefertigt.

Elmar Forbriger, Albert Dorneich, Andre Teshler, Stefan Hecht, Graham Stuart und meine Frau Ruth Dörschel haben diese Arbeit ganz oder Teile davon aufmerksam gelesen und mir geholfen, manchen orthographischen, stilistischen oder inhaltlichen Schnitzer zu korrigieren.

Eine ganze Reihe von Kollegen haben mir entweder handgreiflich bei seismi-

schen Messungen geholfen oder Daten für meine Untersuchungen zur Verfügung gestellt. Ihre Beiträge habe ich in der Einleitung zu Kapitel VI (S. 129) im Einzelnen gewürdigt. Besonders erwähnen möchte ich jedoch die Zusammenarbeit mit Stefan Hecht. Von den gemeinsamen Messfahrten mit ihm, insbesondere den Aufenthalten im Hegau, habe ich nicht nur seismische Daten sondern auch wertvolles Wissen über die Physische Geographie und viele schöne Erinnerungen mitgebracht.

Ruth, Ida und Johanna mussten besonders im letzten halben Jahr erleben, dass ich mich viel in mein Arbeitszimmer zurückzog und mich kaum an gemeinsamen Unternehmungen oder der täglichen Arbeit beteiligt habe. Sie haben nie Zweifel daran gelassen, dass sie mit hinter meiner Arbeit stehen und mich immer wieder zu deren Fortsetzung ermuntern. Ida sagte: „Gell Papa, wenn Du mit Deiner Arbeit fertig bist, hast Du auch mal ein Buch geschrieben. . .“

Allen hier Genannten, aber auch vielen ungenannt Gebliebenen, möchte ich für ihre Unterstützung herzlich danken!

# Literatur

- Abramowitz, M. und Stegun, I.A. (Herausgeber), 1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, New York, 9. Auflage.
- Aki, K. und Richards, P., 1980. Quantitative Seismology — Theory and Methods, Band 1 & 2. W.H. Freeman, San Francisco.
- Angenheister, G., 1950. Fortschreitende elastische Wellen in planparallelen Platten. Gerl. Beitr. z. Geophys., 61: 296–308.
- Asten, M.W. und Henstridge, J.D., 1984. Array estimator and the use of microseisms for reconnaissance of sedimentary basins. Geophysics, 49(11): 1828–1837.
- Båth, M. und Berkhout, A., 1984. Mathematical Aspects of Seismology, Band 17 von *Handbook of Geophysical Exploration*. Geophysical Press, London, Amsterdam, 2. Auflage.
- Backus, G., 1967. Converting vector and tensor equations to skalar equations in spherical coordinates. Geophys. J. R. astron. Soc., 13: 71–101.
- Becker, E. und Bürger, W., 1975. Kontinuumsmechanik. B.G. Teubner, Stuttgart.
- Ben-Menahem, A. und Singh, S.J., 1981. Seismic Waves and Sources. Springer, New York, Heidelberg, Berlin.
- Bohlen, T., 1998. Viskoelastische FD-Modellierung seismischer Wellen zur Interpretation gemessener Seismogramme. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität Kiel.
- Bohlen, T., Klein, G., Duvencek, E., Milkereit, B. und Franke, D., 1999. Analysis of dispersive seismic surface waves in submarine permafrost. In: *61th Conference and technical Exhibitions, Expanded Abstracts*. EAGE.
- Boltzmann, L., 1876. Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Ann. Phys. Chem. (Poggendorff), Ergänzungsband 7: 624–654.

- Bornmann, G., 1959. Grundlagen und Auswerteverfahren der dynamischen Baugrundseismik. Diplomarbeit, Bergakademie Freiberg (Sachsen).
- Bracewell, R.N., 1978. The Fourier transform and its applications. Electrical and Electronic Engineering Series. McGraw-Hill, New York, 2. Auflage.
- Bronstein, I. und Semendjajew, K., 1991. Taschenbuch der Mathematik. B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 25. Auflage.
- Buchen, P. und Ben-Hador, R., 1996. Free-mode surface-wave computations. *Geophys. J. Int.*, 124: 869–887.
- Burkhardt, H., Mörig, R. und Schütt, R., 1992. Laboratory investigations on rock samples to establish further fundamentals for the lithological interpretation of seismic measurements. In: *Absorption of seismic waves*, German Society for Petroleum and Coal Chemistry, Band 397, Seiten 243–279.
- Cate, J.A.T. und Shankland, T.J., 1996. Slow dynamics in the nonlinear elastic response of Berea sandstone. *Geophys. Res. Lett.*, 23(21): 3019–3022.
- Chin, R.C.Y., Hedstrom, G.W. und Thigpen, L., 1984. Matrix methods in synthetic seismograms. *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 77: 483–502.
- Courant, R. und Hilbert, D., 1968. Methoden der Mathematischen Physik I, Band 1. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 3. Auflage.
- Dahlen, F.A. und Tromp, J., 1998. Theoretical Global Seismology. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Dombrowski, B., 1996. 3D-modeling, analysis and tomography of surface wave data for engineering and environmental purposes. Dissertation, Institut für Geophysik, Ruhr-Universität Bochum.
- Dziewonski, A., Bloch, S. und Landisman, M., 1969. A technique for the analysis of transient seismic signals. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 59(1): 427–444.
- Dziewonski, A.M. und Hales, A.L., 1972. Numerical analysis of dispersed seismic waves. In: B.A. Bolt (Herausgeber), *Methods in Computational Physics, Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*, Academic Press, New York and London, Band 11, Seiten 39–85.
- Edelmann, H.A.K., 1998. Der Einfluß der Eigenschaften von Geophonen auf die Qualität und Aussagekraft von Reflexionssignalen flach liegender Horizonte. In: 5. DGG Seminar „Umweltgeophysik“. Deutsche Geophysikalische Gesellschaft, Neustadt/Weinstraße, Seiten 22–36.
- Feynman, R.P., 1969. The Feynman Lectures on Physics, Band 2. Addison-Wesley, 4. Auflage.
- Forbriger, T., 1996a. Interpretation von Oberflächenwellen in der Flachseismik. Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Universität Stuttgart.

- Forbriger, T., 1996b. Zum Problem der Modenidentifikation in der Flachseismik. In: *Kolloquium: Seismik im Flachbereich*. Bucha/Sachsen.
- Förtsch, O., 1950. Untersuchungen von Biegewellen in Platten. Messung ihrer Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. *Gerl. Beitr. z. Geophys.*, 61: 272–290.
- Förtsch, O., 1953. Deutung von Dispersions- und Absorptionsbeobachtungen an Oberflächenwellen. *Gerl. Beitr. z. Geophys.*, 63: 16–58.
- Frazer, L.N., 1988. Quadrature of wavenumber integrals. In: D.J. Doornbos (Herausgeber), *Seismological Algorithms*, Academic Press, London, San Diego, Kapitel III.3, Seiten 279–290.
- Frazer, L.N. und Gettrust, J.F., 1984. On a generalization of Filon's method and the computation of the oscillatory integrals of seismology. *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 76: 461–481.
- Frazer, L.N. und Sun, X., 1998. New objective functions for waveform inversion. *Geophysics*, 63(1): 213–222.
- Friederich, W., 1998. Wave-theoretical inversion of teleseismic surface waves in a regional network: phase-velocity maps and three-dimensional upper-mantle shear-wave-velocity model for southern Germany. *Geophys. J. Int.*, 132(1): 203–225.
- Friederich, W., 1999. Propagation of seismic shear and surface waves in a laterally heterogeneous mantle by multiple forward scattering. *Geophys. J. Int.*, 136: 180–204.
- Friederich, W. und Dalkolmo, J., 1995. Complete synthetic seismograms for a spherically symmetric earth by a numerical computation of the Green's function in the frequency domain. *Geophys. J. Int.*, 122: 537–550.
- Fuchs, K. und Müller, G., 1971. Computation of synthetic seismograms with the reflectivity method and comparison with observations. *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 23(4): 417–433.
- Gabriels, P., Snieder, R. und Nolet, G., 1987. In situ measurements of shear-wave velocity in sediments with higher-mode Rayleigh waves. *Geophysical Prospecting*, 35: 187–196.
- Ganji, V., Gucunski, N. und Maher, A., 1997. Detection of underground obstacles by SASW method — numerical aspects. *J. Geotech. Geoenv. Eng.*, 123(3): 212–219.
- Giese, P., 1957. Die Bestimmung der elastischen Eigenschaften und der Mächtigkeit von Lockerböden mit Hilfe von speziellen Rayleigh-Wellen. *Gerl. Beitr. z. Geophys.*, 66: 274–312.

- Gilbert, F., 1980. An introduction to low-frequency seismology. In: *Physics of the Earth's Interior*. North Holland, Amsterdam, Nummer LXXVIII in Proc. Int. School of Physics 'Enrico Fermi', Seiten 41–81.
- Gradstein, I.S. und Ryzhik, I.M., 1981. Tables of series, products, and integrals, Band 2. Harri Deutsch, Thun, Frankfurt/M.
- Gucunski, N. und Woods, R.D., 1991. Inversion of Rayleigh wave dispersion curve for SASW test. In: I. für Bodenmechanik und Felsmechanik (Herausgeber), *Soil Dynamics and Earthquake Engineering V*. Elsevier Applied Science, London, New York, Seiten 127–138.
- Haskell, N., 1953. The dispersion of surface waves on multilayered media. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 43: 17–34.
- Hecht, S., 2000. Fallbeispiele zur Anwendung refraktionsseismischer Methoden bei der Erkundung des oberflächennahen Untergrundes. *Z. Geomorph. N.F., Suppl.*, 123: 111–123.
- Henry, M., Orcutt, J.A. und Parker, R.L., 1980. A new method for slant stacking refraction data. *Geophys. Res. Lett.*, 7(12): 1073–1076.
- Hering, A., Misiek, R., Gyulai, A., Ormos, T., Dobroka, M. und Dresen, L., 1995. A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data. Part I: Basic ideas. *Geophysical Prospecting*, 43: 135–156.
- Hsieh, C.H., 1979. Ortung verdeckter Bergwerksschächte mit Hilfe von Rayleigh-Wellen. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum.
- Jackson, D.D., 1976. Most squares inversion. *J. Geophys. Res.*, 81(5): 1027–1030.
- Jeng, Y., Tsai, J.Y. und Chen, S.H., 1999. An improved method of determining near-surface  $Q$ . *Geophysics*, 64(5): 1608–1617.
- Jones, R., 1958. In-situ measurement of the dynamic properties of soil by vibration methods. *Geotechnique*, 8: 1–21.
- Jones, R., 1962. Surface wave technique for measuring the elastic properties and thickness of roads: theoretical development. *Brit. J. Appl. Phys.*, 13: 21–29.
- Kennett, B., 1983. Seismic wave propagation in stratified media. Cambridge University Press.
- Kennett, B. und Kerry, N., 1979. Seismic waves in a stratified half space. *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 57: 557–583.
- Keskar, N.R. und Chelikowsky, J.R., 1992. Negative Poisson ratios in crystalline  $\text{SiO}_2$  from first-principles calculations. *Nature*, 358: 222.



- Klein, G., Bohlen, T., Theilen, F. und Milkereit, B., 2000. OBH/OBS versus OBC registration for measuring dispersive marine Scholte waves. In: *62nd Conference and Technical Exhibition, Expanded Abstracts*. EAGE, Glasgow.
- Knust, H., 1995. Modellrechnungen und Betrachtungen zum Einfluß oberflächen-naher Schichten auf das abgestrahlte Wellenfeld in der Schußseismik. Dissertation, Institut für Geophysik der Universität Hamburg.
- Köhler, R., 1935. Dispersion und Resonanzerscheinungen im Baugrund. *Zeitschr. f. techn. Phys.*, 12: 597–600.
- Köhler, R. und Ramspeck, A., 1936. Die Anwendung dynamischer Baugrunduntersuchungen. Veröffentlichungen des Instituts der Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (Degebo) an der Technischen Hochschule Berlin.
- Korschunow, A., 1955. On surface-waves in loose materials of the soil. *Geophysical Prospecting*, 3: 359–380.
- Kovach, R.L., 1978. Seismic surface waves and crustal and upper mantle structure. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 16(1): 1–13.
- Lakes, R., 1987. Foam structures with a negative Poisson's ratio. *Science*, 235: 1038–1040.
- Lamb, H., 1904. On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 203: 1–42.
- Love, A.E.H., 1903. The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solid medium. *Proc. Lond. Math. Soc. (Ser 2)*, 1: 291–344.
- Love, A.E.H., 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover Publications, New York, 4. Auflage.
- Malischewsky, P., 1976. Surface waves in media having lateral inhomogeneities. *Pure Appl. Geophys.*, 114: 833–843.
- Matthews, M., Hope, V. und Clayton, C., 1996. The use of surface waves in the determination of ground stiffness profiles. *Proc. Instn Civ. Engrs Geotech. Engng*, 119: 84–95.
- Mavko, G., Mukerji, T. und Dvorkin, J., 1998. *The rock physics handbook: tools for seismic analysis in porous media*. Cambridge University Press, Cambridge.
- McMechan, G. und Yedlin, M., 1981. Analysis of dispersive waves by wave field transformation. *Geophysics*, 46: 869–874.
- Meier, T., Lebedev, S., Nolet, G. und Dahlen, F., 1997. Diffraction tomography using multimode surface waves. *J. Geophys. Res.*, 102(B4): 8255–8267.

- Miller, R.D., Xia, J., Park, C.B. und Ivanov, J.M., 1999. Multichannel analysis of surface waves to map bedrock. *The Leading Edge*, Seiten 1392–1396.
- Misiek, R., 1996. Surface waves: Application to lithostructural interpretation of near-surface layers in the meter and decameter range. Dissertation, Institut für Geophysik, Ruhr-Universität Bochum.
- Müller, G., 1983. Rheological properties and velocity dispersion of a medium with power-law dependence of  $Q$  on frequency. *J. Geophys.*, 54: 20–29.
- Müller, G., 1985. The reflectivity method: A tutorial. *J. Geophys.*, 58: 153–174.
- Müller, G., 1986. Theorie elastischer Wellen. Script zur Vorlesung, Frankfurt/Main.
- Müller, S., 1957. Die Ausbreitung elastischer Stoßimpulse in oberflächennahen Schichten des Erdbodens. Diplomarbeit, Geophysikalisches Institut der Universität Stuttgart.
- Nazarian, S., 1984. In situ determination of elastic moduli of soil deposits and pavement systems by spectral-analysis-of-surface-waves method. Ph.D. thesis, The University of Texas, Austin.
- Nolet, G., 1990. Partitioned waveform inversion and two-dimensional structure under the network of autonomously recording seismographs. *J. Geophys. Res.*, 95(B6): 8499–8512.
- Okal, E., 1978. A physical classification of the earth's spheroidal modes. *J. Phys. Earth*, 26: 75–103.
- Oliver, J., 1962. A summary of observed seismic surface wave dispersion. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 52: 81–86.
- Park, C.B., Miller, R.D. und Xia, J., 1999. Multichannel analysis of surface waves. *Geophysics*, 64(3): 800–808.
- Parker, R., 1994. *Geophysical Inverse Theory*. Princeton University Press.
- Plešinger, A. und Wielandt, E., 1974. Seismic noise at 2 Hz in Europe. *J. Geophys.*, 40: 131–136.
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W. und Flannery, B., 1992. *Numerical recipes*. Cambridge University Press, 2. Auflage.
- Rayleigh (Lord), D., 1885. On waves propagated along the plane surface of an elastic solid. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 17: 4–11.
- Reimann, G., 1999. Inversion flachseismischer Wellenfelder. Diplomarbeit, Universität Stuttgart.
- Roth, M., Holliger, K. und Green, A., 1998. Guided waves in near-surface seismic surveys. *Geophys. Res. Lett.*, 25(7): 1071–1074.

- Sain, K. und Reddy, P., 1997. Use of postcritical reflections in solving the hidden-layer problem of seismic refraction work. *Geophysics*, 62(4): 1285–1291.
- Savage, J.C. und Hasegawa, H.S., 1967. Evidence for a linear attenuation mechanism. *Geophysics*, 32(6): 1003–1014.
- Scales, J.A. und Snieder, R., 1997. To Bayes or not to Bayes? *Geophysics*, 62(4): 1045–1046.
- Scales, J.A. und Snieder, R., 1998. What is noise? *Geophysics*, 63(4): 1122–1124.
- Schalkwijk, K.M., 1996. Use of scattered surface waves to detect shallow buried objects. Final report, Institute of Earth Sciences, Utrecht University, Netherlands.
- Schneider, C., 1993. Erkundung des Untergrundes von Deponien und Altlasten mit Rayleigh-Oberflächenwellen. Dissertation, Institut für Geophysik, Ruhr-Universität Bochum. Exploration of waste deposits with Rayleigh surface waves.
- Schön, J.H., 1998. Physical properties of rocks: Fundamentals and principles of petrophysics, Band 18 von *Handbook of Geophysical Exploration*. Elsevier Science Ltd., Oxford, 2. Auflage.
- Schreiner, A., 1966. Geologische Karte von Baden-Württemberg 1:25000, Erläuterungen zu Blatt 8118 Engen. Geologisches Landesamt Baden-Württemberg, Stuttgart.
- Schreiner, A., 1983. Geologische Karte von Baden-Württemberg 1:25000, Erläuterungen zu Blatt 8218 Gottmadingen. Geologisches Landesamt Baden-Württemberg, Stuttgart.
- Seidl, D. und Müller, S., 1977. Seismische Oberflächenwellen. *J. Geophys.*, 42(4): 283–328.
- Sezawa, K., 1935. Rayleigh- and Love-waves transmitted through the Pacific Ocean and the continents. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 13: 245–250.
- Sezawa, K. und Kanai, K., 1935a. Decay constants of seismic vibrations of a surface layer. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 13: 251–265.
- Sezawa, K. und Kanai, K., 1935b. Discontinuity in the dispersion curves of Rayleigh waves. *Bull. Earthq. Res. Inst.*, 13: 237–244.
- Snieder, R., 1986. 3D-linearized scattering of surface waves and a formalism for surface wave holography. *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 84: 581–605.
- Snieder, R., 1988a. Large-scale waveform inversions of surface waves for lateral heterogeneity, 1. Theory and numerical examples. *J. Geophys. Res.*, 93: 12055–12065.

- Snieder, R., 1988b. Large-scale waveform inversions of surface waves for lateral heterogeneity. 2. Application to surface waves in Europe and the Mediterranean. *J. Geophys. Res.*, 93: 12067–12080.
- Sommerfeld, A., 1978a. *Mechanik der deformierbaren Medien*, Band 2 von *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Harri Deutsch, Thun, Frankfurt.
- Sommerfeld, A., 1978b. *Partielle Differentialgleichungen der Physik*, Band 6 von *Vorlesungen über Theoretische Physik*. Harri Deutsch, Thun, Frankfurt.
- Spencer Jr., J.W., 1981. Stress relaxations at low frequencies in fluid-saturated rocks: Attenuation and modulus dispersion. *J. Geophys. Res.*, 86: 1803–1812.
- Stange, S., 1992. *Die Ausbreitung von Oberflächenwellen in Erdmodellen mit ebenen und zylindrischen vertikalen Strukturgrenzen*. Dissertation, Institut für Geophysik der Universität Stuttgart.
- Steeles, D.W., Macy, B.K., Schmeissner, C.M. und Miller, R.D., 1995. Contrasting near-surface and classical seismology. *The Leading Edge*, 14: 271–272.
- Stokoe II, K.H. und Nazarian, S., 1983. Effectiveness of ground improvement from spectral analysis of surface waves. In: *Proceedings of the Eighth European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Helsinki.
- Takeuchi, H., Dorman, J. und Saito, M., 1964. Partial derivatives of surface wave phase velocity with respect to physical parameter change within the earth. *J. Geophys. Res.*, 69: 3429–3441.
- Takeuchi, H. und Saito, M., 1972. Seismic surface waves. In: B.A. Bolt (Herausgeber), *Methods in Computational Physics, Seismology: Surface Waves and Earth Oscillations*, Academic Press, New York and London, Band 11, Seiten 217–295.
- Teshler, A.J., 1999. *Beschleunigtes Inversionsverfahren in der Oberflächenwellenseismik*. Diplomarbeit, Universität Stuttgart.
- Thomson, W.T., 1950. Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *J. Appl. Phys.*, 21: 89–93.
- Tokimatsu, K., Shinzawa, K. und Kuwayama, S., 1992a. Use of short-period microtremors for  $v_s$  profiling. *J. Geotech. Engng.*, 118(10): 1544–1559.
- Tokimatsu, K., Tamura, S. und Kojima, H., 1992b. Effects of multiple modes on Rayleigh wave dispersion characteristics. *J. Geotech. Engng.*, 118(10): 1529–1543.
- Toksöz, M.N., 1964. Microseisms and an attempted application to exploration. *Geophysics*, 29: 154–177.

- Toksöz, M.N. und Johnston, D.H., 1981. Seismic Wave Attenuation, Band 2 von *Geophysics reprint series*. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa, Oklahoma.
- Tuzlak, H., 1999. Geoelektrische Tomographie einer tektonischen Störungszone bei Herrenberg-Haslach. Diplomarbeit, Universität Stuttgart.
- Ungerer, J., 1990. Berechnung von Nahfeldseismogrammen mit der Reflektivitätsmethode. Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Universität Stuttgart.
- van Heijst, H.J., Snieder, R. und Nowack, R., 1994. Resolving a low-velocity zone with surface-wave data. *Geophys. J. Int.*, 118: 333–343.
- von Hartmann, H., 1997. Die Anwendung von Love-Wellen für die Untersuchung lateral inhomogener Medien bei ingenieurgeophysikalischen Aufgabenstellungen. Dissertation, Technische Universität Clausthal.
- Wang, R., 1997. A new algorithm of wavenumber integration method for synthesizing high-frequency seismograms. In: *57. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft*. Deutsche Geophysikalische Gesellschaft, Potsdam, Germany.
- Wang, R., 1999. A simple orthonormalization method for stable and efficient computation of Green's functions. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 89(3): 733–741.
- Watson, G., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, London.
- Wiechert, E., 1926. Untersuchung der Erdrinde mit Hilfe von Sprengungen. *Geologische Rundschau*, 17(5): 339–346.
- Wielandt, E., 1991. Inversionsmethoden. Skript zur Vorlesung „Allgemeine Geophysik“.
- Woodhouse, J., 1974. Surface waves in a laterally varying layered structure. *Geophys. J. R. astron. Soc.*, 37: 461–490.
- Woodhouse, J., 1988. The calculation of eigenfrequencies and eigenfunctions of the free oscillations of the earth and the sun. In: D.J. Doornbos (Herausgeber), *Seismological Algorithms*, Academic Press, London, Kapitel IV.2, Seiten 321–370.
- Xia, J., Miller, R.D. und Park, C.B., 1999. Estimation of near-surface shear-wave velocity by inversion of Rayleigh waves. *Geophysics*, 64(3): 691–700.
- Yuan, D. und Nazarian, S., 1993. Automated surface wave method: Inversion technique. *J. Geotech. Engng.*, 119(7): 1112–1126.
- Zener, C., 1948. *Elasticity and Anelasticity of Metals*. University of Chicago, Chicago.